两类轴扭转问题在任意非正交曲线座标系方程的共同表达式及解法

李敏华　任孝安
（中国科学院力学研究所）

参考文献〔1〕用任意正交曲线座标对发动机涡轮轴先用沿座标曲线积分叠代[2]进行数值计算，得到了轴的应力分布。但这种叠代法[2]收敛性差。所用的分区几何方程形成正交曲线座标有时也较困难。文献〔3〕和文献〔1〕中第二种数值计算方法，改用节点应力函数叠代，提高了收敛性，从而放松了对应力函数初值的要求，也就放松了对座标曲线的选择要求。中国科学院工程热物理研究所成功地将非正交曲线座标用于叶轮机械内部流动问题的分析计算[4]，作者受到了启发，改用非正交曲线座标，推导得到了变截面圆轴扭转问题在任意非正交曲线座标系中的方程，给出了形成曲线座标的简易方法，发展成为变截面圆轴扭转问题的新解法[3]。文献〔5〕编排了通用程序，叙述了其中一些问题的处理方法，并对复杂外形的实际涡轮轴进行了计算，给出了全轴的应力分布图和等应力函数线图。

本文首先将上述方法[4]推广到任意形等截面柱体扭转问题，得到了以应力向量表达的平衡和协调方程，以及在任意非正交曲线座标系中的方程。解决了计算过程对本问题协调方程中柱体扭转角项 $2G\alpha$ 的处理问题。为了对方程和方法进行考核，对有解析解的空心椭圆形柱体计算了应力函数 ψ 值，和解析解进行了比较。本文进一步将变截面圆轴和任意形等截面柱体的方程写成了共同表达形式，并给出了这两类轴共同的通用计算机程序的实现途径。

符　号　表

$B^{k,i}_{k-1,i-1}$	表示 k，i 节点差分方程中 $\psi^{k-1,i-1}$ 项系数
e_i	基底向量，亦称为协变基底向量
e^i	正交于 e_i 的基底向量，亦称逆变基底向量
g_{ij}	任意曲线座标系中的度量张量
(q^1, q^2, q^3)	任意非正交曲线座标
u_i，u^i	分别为协变单位向量和逆变单位向量
(y_1, y_2, y_3)	任意正交曲线座标
β_{ij}	任意曲线座标 q^i 和 q^j 之间的夹角
τ_{zr}，$\tau_{r\theta}$，$\tau_{\theta z}$	圆柱座标系中的剪应力分量
τ_θ，τ_z	分别为垂直于 θ 方向平面和垂直于 z 轴平面上的剪应力向量
τ^i_θ，τ^i_z	分别表示 τ_θ 和 τ_z 在 q^i 方向的逆变分量

$\Phi_{(x,y)}$	翘曲函数
Ψ，ψ	分别为应力函数和无量纲应力函数
$\Psi^{k,i}_{(m)}$	表示叠代过程中第 k,i 节点第 m 次计算的应力函数
(ξ^1,ξ^2,ξ^3)	两类轴扭转问题方程共同表达式中的任意非正交曲线座标

一、变截面圆轴扭转问题在任意非正交曲线座标系中的主要方程[3]及涡轮轴小凹槽区应力分布

变截面圆轴在扭矩作用下以剪应力向量的散度和旋度表达的平衡和协调方程[1]分别为

$$\nabla\cdot(r\tau_\theta)=0 \qquad (1.1)$$

$$\nabla\times(\tau_\theta/r)=0 \qquad (1.2)$$

参考文献[3]取 q^3 和 q^1 为变截面圆轴纵剖面（即 Z-R 面）上的非正交曲线座标，q^2 为 0 方向的座标曲线，$\sqrt{g_{22}}=r$。q^2 座标曲线垂直于 Z-R 平面，即垂直于 q^3—q^1 面，因此当 $i\neq2$ 时，$g_{2i}=0$。

$$g=g_{22}\begin{vmatrix} g_{33} & g_{31} \\ g_{13} & g_{11}\end{vmatrix}=g_{22}g_{33}g_{11}\sin^2\beta_{31} \qquad (1.3)$$

平衡方程为

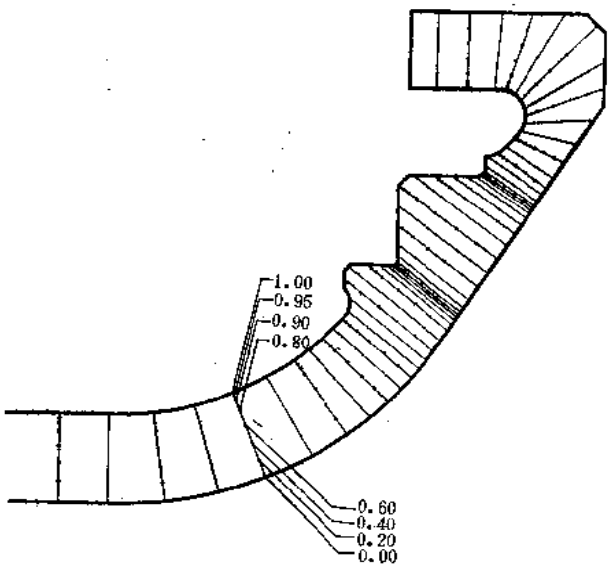


图 1 涡轮轴外形和网格节点示意图

$$\frac{\partial[r^2\sqrt{g_{11}}(\sin\beta_{31})\tau^3_\theta]}{\partial q^3}+\frac{\partial[r^2\sqrt{g_{33}}(\sin\beta_{31})\tau^1_\theta]}{\partial q^1}=0 \qquad (1.4)$$

应力函数 Ψ 和应力分量的关系式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial q^1}&=r^2\sqrt{g_{11}}(\sin\beta_{31})\tau^3_\theta\\ \frac{\partial\Psi}{\partial q^3}&=-r^2\sqrt{g_{33}}(\sin\beta_{31})\tau^1_\theta\end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

协调方程为

$$\frac{\partial}{\partial q^3}\left[\frac{\sqrt{g_{11}}\tau^1_\theta}{r}+\frac{\sqrt{g_{11}}(\cos\beta_{31})\tau^3_\theta}{r}\right]-\frac{\partial}{\partial q^1}\left[\frac{\sqrt{g_{33}}\tau^3_\theta}{r}+\frac{\sqrt{g_{33}}(\cos\beta_{31})\tau^1_\theta}{r}\right]=0 \qquad (1.6)$$

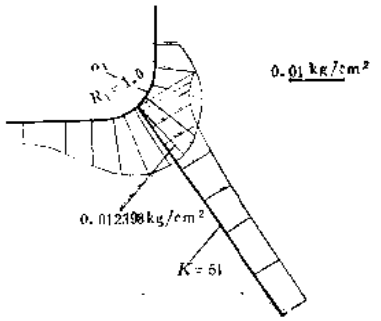
用应力函数表达的协调方程为

$$\frac{1}{g_{33}}\frac{\partial^2\Psi}{(\partial q^3)^2}-\frac{2\cos\beta_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial q^3\partial q^1}+\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial^2\Psi}{(\partial q^1)^2}+(G_3)_a\frac{\partial\Psi}{\sqrt{g_{33}}\partial q^3}+(G_1)_a\frac{\partial\Psi}{\sqrt{g_{11}}\partial q^1}=0 \qquad (1.7)$$

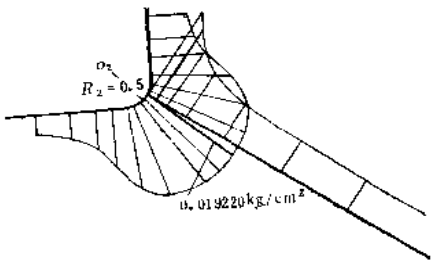
其中

$$
\left.\begin{aligned}
(G_3)_a=&-\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{33}}}\ \frac{1}{r^3}\right)\frac{\partial}{\sqrt{g_{33}}\,\partial q^3}\left(\sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}}r^3\right)-\frac{\mathrm{ctg}\beta_{31}}{\sqrt{g_{33}}}\ \frac{\partial\beta_{31}}{\partial q^3}\\
&+\frac{3\cos\beta_{31}}{r}\ \frac{\partial r}{\sqrt{g_{11}}\,\partial q^1}+\frac{1}{\sin\beta_{31}}\ \frac{\partial\beta_{31}}{\sqrt{g_{11}}\,\partial q^1}\\
(G_1)_a=&-\left(\sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}}\ \frac{1}{r^3}\right)\frac{\partial}{\sqrt{g_{11}}\,\partial q^1}\left(\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{33}}}r^3\right)-\frac{\mathrm{ctg}\beta_{31}}{\sqrt{g_{11}}}\ \frac{\partial\beta_{31}}{\partial q^1}\\
&+\frac{3\cos\beta_{31}}{r}\ \frac{\partial r}{\sqrt{g_{33}}\,\partial q^3}+\frac{1}{\sin\beta_{31}}\ \frac{\partial\beta_{31}}{\sqrt{g_{33}}\,\partial q^3}
\end{aligned}\right\}\qquad(1.7a)
$$

文献〔5〕计算了带两个小凹槽的航空涡轮轴（图1），给出了全轴的应力分布图和等应力函数线图以及有关数据表。本文在图2(a)和图2(b)中给出了该涡轮轴在两个小凹槽区的应力分布，说明用非正交曲线座标的新解法能解决复杂外形的工程实际问题。



(a) 第一圆角凹槽区的剪应力分布



(b) 第二圆角凹槽的剪应力分布

图2

二、任意形等截面柱体扭转问题用剪应力向量的散度和旋度表达的平衡和协调方程

本文将文献〔3〕的新解法推广到等截面柱体的扭转问题。圣维南对任意形等截面柱体(图3)在扭矩作用下的位移假定分为两个部分[6]，截面转动的位移为

$$
\left.\begin{aligned}
u&=-\alpha zy\\
v&=\alpha zx
\end{aligned}\right\}\qquad(2.1)
$$

截面翘曲的位移 w 和翘曲函数 $\Phi(x,\ y)$ 的关系为

$$w=\alpha\Phi(x,\ y)\qquad(2.2)$$

其中 α 为轴的单位长度的扭转角。平衡和协调方程分别为

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0\qquad(2.3)$$

和

$$\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial y}=2G\alpha\qquad(2.4)$$

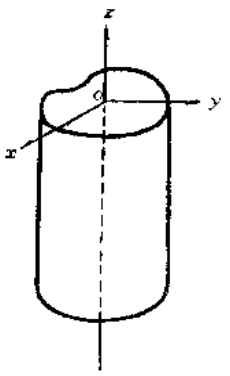


图3 任意形等截面柱体

如以 y_1，y_2 和 y_3 代表三个正交曲线座标，$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 和 $\boldsymbol{u}_3$ 分别为沿三个曲线座标的单位

向量。取 y_3 为任意形等截面柱体的轴向。方程（2.3）和（2.4）中的 τ_{xy} 和 τ_{yz} 是在垂直于 y_3 轴平面（即 y_1，y_2 面，亦即柱体的横截面）上的剪应力 τ_z 分别沿 x 和 y 方向的分量。因此 y_1，y_2 平面上的总剪应力可用向量 τ_z 表示。从向量的散度和旋度的一般方程[1]可以看出，平衡方程（2.3）为

$$\nabla\cdot\tau_z=0 \tag{2.5}$$

协调方程（2.4）为

$$(\nabla\times\tau_z)\cdot\boldsymbol{n}_3=2G\alpha \tag{2.6}$$

利用向量的散度和旋度对不同座标系是不变量的特点，从方程（2.5）和向量的散度的一般方程得到在任意正交曲线座标（以下简称正交曲线座标）系中任意形等截面柱体在扭矩作用下的平衡方程为

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(h_2\tau_{z1})+\frac{\partial}{\partial y_2}(h_1\tau_{z2})=0 \tag{2.7}$$

从方程（2.6）和向量的旋度的一般方程得到协调方程为

$$\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(h_2\tau_{z2})}{\partial y_1}-\frac{\partial(h_1\tau_{z1})}{\partial y_2}\right]=2G\alpha \tag{2.8}$$

用应力函数 Ψ 表达的协调方程为

$$\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\Psi}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\Psi}{\partial y_2}\right)\right]=-2G\alpha \tag{2.9}$$

三、任意形等截面柱体扭转问题在任意非正交曲线座标系中的平衡和协调方程

对于任意非正交曲线座标，散度和旋度的一般表达式为[7]

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^i}(f^i\sqrt{g}) \tag{3.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{P}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial p_3}{\partial q^2}-\frac{\partial p_2}{\partial q^3}\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\partial p_1}{\partial q^3}-\frac{\partial p_3}{\partial q^1}\right)\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{\partial p_2}{\partial q^1}-\frac{\partial p_1}{\partial q^2}\right)\boldsymbol{e}_3\right] \tag{3.2}$$

其中 $q^i(i=1,\ 2,\ 3)$ 为任意非正交曲线座标，g 为度量张量 g_{ij} 的行列式

$$g_{ij}=\sqrt{g_{ii}g_{jj}}\cos\beta_{ij}$$

$\boldsymbol{e}_i$ 为基底向量，亦可称为协变基底向量。$\boldsymbol{e}_i$ 的方向切于座标曲线 q^i，但 $\boldsymbol{e}_i$ 不是单位向量。f_i 和 p^i 分别为向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量。$f^i\boldsymbol{e}_i$ 和 $p^i\boldsymbol{e}_i$ 分别为向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 沿座标曲线 q^i 的分向量（图 4），即

$$\boldsymbol{F}=f^i\boldsymbol{e}_i$$

如用单位向量 $\boldsymbol{n}_i$，则

$$\boldsymbol{F}=F^i\boldsymbol{n}_i,\quad f^i=F^i/\sqrt{g_{ii}}$$

$\boldsymbol{e}^i$ 为另一组交于 $\boldsymbol{e}_i$ 的基底向量，亦可称为逆变基底向量。

$$\boldsymbol{e}^1=\frac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{V},\quad \boldsymbol{e}^2=\frac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{V},\quad \boldsymbol{e}^3=\frac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{V}$$

V 为数量三重积 $(\boldsymbol{e}_1\,\boldsymbol{e}_2\,\boldsymbol{e}_3)$。式（3.2）中的 p_i 为向量 $\boldsymbol{P}$ 的协变分量

$$\boldsymbol{P}=p_i\boldsymbol{e}^i=p^j\boldsymbol{e}_j$$

可得

$$p_i=g_{ij}p^j$$

对于任意形等截面柱体扭转问题，取 q^3 为柱体轴向座标，q^1 和 q^2 为垂直于 q^3 的截面上的任意非正交曲线座标（以下简称非正交曲线座标）。图 4 给出了二维向量 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量

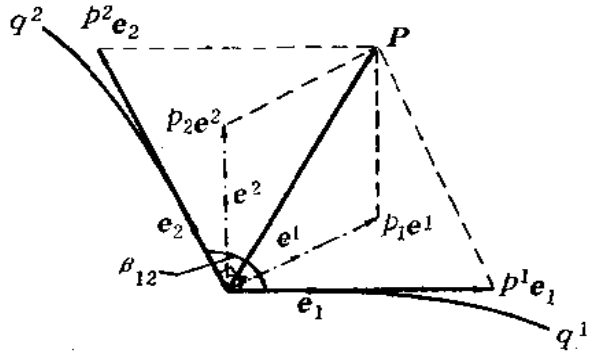


图 4 二维向量 $\boldsymbol{P}$ 的逆变分量和协变分量

和协变分量。从式（3.1）可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{1}{\sqrt{g}}\left[-\frac{\partial}{\partial q^1}(f^1\sqrt{g})+\frac{\partial}{\partial q^2}(f^2\sqrt{g})\right] \tag{3.3}$$

$\sqrt{g_{33}}=1$。dq^3 垂直于 q^1-q^2 面，当 $i\neq 3$ 时，$g_{i3}=0$。因此

$$g=g_{33}\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}=(g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21})=g_{11}g_{22}\sin^2\beta_{12} \tag{3.4}$$

$\boldsymbol{F}=\tau_z$，代入式（3.3）和（2.5）得到平衡方程

$$\frac{\partial[\sqrt{g_{22}}(\sin\beta_{12})\tau_z^1]}{\partial q^1}+\frac{\partial[\sqrt{g_{11}}(\sin\beta_{12})\tau_z^2]}{\partial q^2}=0 \tag{3.5}$$

应力函数 Ψ 和剪应力分量的关系为

$$\frac{\partial\Psi}{\partial q^2}=\sqrt{g_{22}}(\sin\beta_{12})\tau_z^1 \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial q^1}=-\sqrt{g_{11}}(\sin\beta_{12})\tau_z^2 \tag{3.6}$$

从方程（2.6）和（3.2）得

$$(\nabla\times\boldsymbol{P})\cdot\boldsymbol{u}_3=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial p_2}{\partial q^1}-\frac{\partial p_1}{\partial q^2}\right)\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{u}_3=2G\alpha \tag{3.7}$$

其中 $\boldsymbol{e}_3$ 为柱体的轴向，$\sqrt{g_{33}}=1$，所以 $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{u}_3$。$p_i$ 和 p^i 的关系式为

$$\left.\begin{aligned}p_1&=\sqrt{g_{11}}P^1+\sqrt{g_{11}}(\cos\beta_{12})P^2\\ p_2&=\sqrt{g_{22}}P^2+\sqrt{g_{22}}(\cos\beta_{12})P^1\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

$\boldsymbol{P}=\tau_z$，将方程（3.4）和（3.8）代入（3.7）得协调方程

$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}\sin\beta_{12}}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}(\sqrt{g_{22}}\,\tau_z^2)+\frac{\partial}{\partial q^1}(\sqrt{g_{22}}(\cos\beta_{12})\tau_z^1)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial q^2}(\sqrt{g_{11}}\,\tau_z^1)-\frac{\partial}{\partial q^2}(\sqrt{g_{11}}(\cos\beta_{12})\tau_z^2)\right]=2G\alpha \tag{3.7a}$$

以应力函数表达的协调方程为

$$\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial^2\Psi}{(\partial q^1)^2}-\frac{2\cos\beta_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial q^1\partial q^2}+\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial^2\Psi}{(\partial q^2)^2}+\frac{(G_1)_b}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\Psi}{\partial q^1}+\frac{(G_2)_b}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\Psi}{\partial q^2}=-2G\alpha\sin^2\beta_{12} \tag{3.9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}(G_1)_b&=-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\ln\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}}{\partial q^1}-\frac{\cot\beta_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial q^1}+\frac{1}{(\sin\beta_{12})\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial q^2}\\(G_2)_b&=-\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\ln\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}}{\partial g^2}-\frac{\cot\beta_{12}}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial q^2}+\frac{1}{(\sin\beta_{12})\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial q^1}\end{aligned}\right\} \tag{3.9a}$$

四、任意形等截面柱体扭转问题的数值计算

以连接内外壁的适当的直线组作为 q^2 座标曲线。假设应力函数 Ψ 的初值 Ψ_0 沿各 q^2 座标线为某一假定的分布。作为初值的等应力函数线即是 q^1 座标曲线。这样的计算网格很容易由计算机程序自动形成。

将数值微分三点不等距公式代入方程（3.9），得到 k，i 节点的差分方程为

$$\begin{aligned}&B^{k,i}_{k-1,i-1}\Psi^{k-1,i-1}+B^{k,i}_{k,i-1}\Psi^{k,i-1}+B^{k,i}_{k+1,i-1}\Psi^{k+1,i-1}+B^{k,i}_{k-1,i}\Psi^{k-1,i}+B^{k,i}_{k,i}\Psi^{k,i}\\&+B^{k,i}_{k+1,i}\Psi^{k+1,i}+B^{k,i}_{k-1,i+1}\Psi^{k-1,i+1}+B^{k,i}_{k,i+1}\Psi^{k,i+1}+B^{k,i}_{k+1,i+1}\Psi^{k+1,i+1}\\&=-2G\alpha\end{aligned} \tag{4.1}$$

用叠代法求解。

在叠代过程中第（$m-1$）次的扭转角 α 的值（即 $\alpha_{(m-1)}$）用复连通区域的单值条件 $\oint\frac{\tau\cdot ds}{A}=2G\alpha$（$A$ 是等Ψ曲线 s 所包围的面积）采用数值积分求得。由于 $\Psi_{(m-1)}$ 是近似解，因此沿各圈座标曲线 q^1 求得的 $\alpha_{(m-1)}$ 不会完全相同，计算时取多圈的 $\alpha_{(m-1)}$ 值的平均值。

计算时采用无量纲应力函数 ψ，内边界和外边界可分别各取一定的 ψ 值。计算结果得到无量纲 ψ 的分布，由 ψ 分布可得到无量纲化的扭转角 α 和扭矩 M_t'，根据实际扭矩 M_t 和 M_t' 的关系得到无量纲化系数。这样就可由计算所得的 ψ 分布得到在扭矩作用下的应力函数 Ψ 分布和剪应力分布。

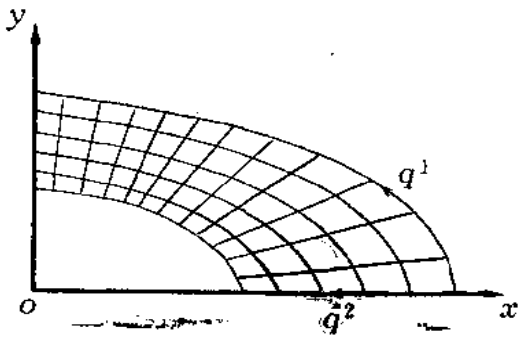


图 5 椭圆截面柱体计算网格示意图

根据本文所提出的方法，编排了计算机程序，对有解析解的空心椭圆形柱体作了实例计算比较。图 5 是其第一象限计算网格的示意图，柱体外壁椭圆长轴为 20，短轴为 10；柱体内壁椭圆孔的长轴为 10，短轴为 5，共取 840 个节点。在这个具体计算中取外边界 $\psi=0$，内边界 $\psi=1$。以长短轴上各节点计算结果和解析解比较，即 $k=1$ 和 $k=22$ 的 q^2 座标线上各站应力函数 ψ 数值为例，列表如下：

表 1　空心椭圆形柱体长短轴上各站计算结果与解析解的比较

i	解析解	$k=1$		$k=22$	
		计算结果	误差(%)	计算结果	误差(%)
1	0	0		0	
2	0.1925	0.1950	1.2	0.1922	−0.16
3	0.3472	0.3507	1.0	0.3469	−0.086
4	0.4800	0.4838	0.79	0.4796	−0.083
5	0.5833	0.5870	0.63	0.5829	−0.069
6	0.6800	0.6833	0.48	0.6796	−0.059
7	0.7700	0.7728	0.37	0.7696	−0.052
8	0.8533	0.8555	0.26	0.8530	−0.035
9	0.9300	0.9314	0.15	0.9298	−0.022
10	1	1		1	

从上表可以看出最大误差为 1.2%，说明本文提出的方法可以应用。

虽然对于任意形等截面柱体的扭转问题只计算了有解析解的空心椭圆形轴，但从计算外形极为复杂的有很小的凹槽的实际的变截面轴[5]的经验，可以判断本文推广到任意形等截面柱体扭转问题的解法，一定可用于计算工程上实际应用的轴。

五、两类轴的扭转问题在任意非正交曲线座标系中方程的共同形式

以上任意形等截面柱体方程中的 q^1 和 q^2 是垂直于 Z 轴截面上的曲线座标，变截面圆轴方程中的 q^3 和 q^1 是轴纵剖面的座标。由于这两类问题的方程有相似之处，都是应力函数的二阶偏微分方程，从数学上讲，用 q^3 和 q^1 或 q^1 和 q^2 没有什么差别。如果对于任意形等截面柱体用 ξ^1 和 ξ^2 代表垂直于轴向截面上的曲线座标，ξ^3 代表轴向座标；对于变截面圆轴，用 ξ^1 和 ξ^2 代表纵剖面的曲线座标，ξ^3 座标曲线的曲线座标。并取轴的内外壁（等应力函数线）和其他接近于等应力函数线的曲线组为 ξ^1 座标曲线组，ξ^2 座标曲线组可取便于计算程序自动形成座标网格的线组，两端分别相交于轴的内外壁。这样，这两类轴的扭转问题可以用共同形式的方程表达，从而可编写这两类轴扭转问题的通用程序。

用剪应力向量的散度和旋度表达的平衡和协调方程分别为

$$\nabla\cdot(r^a\tau)=0 \tag{5.1}$$

和

$$[\nabla\times(r^b\tau)]\cdot n_3=2G\alpha K \tag{5.2}$$

平衡方程为

$$\frac{\partial}{\partial\xi^1}[r^a\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{12}}(\sin\beta_{12})\tau^1]+\frac{\partial}{\partial\xi^2}[r^a\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{11}}(\sin\beta_{12})\tau^2]=0 \tag{5.3}$$

应力函数和应力分量的关系式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi^2}&=r^a\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{22}}(\sin\beta_{12})\tau^1\\ \frac{\partial\Psi}{\partial\xi^1}&=-r^a\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{11}}(\sin\beta_{12})\tau^2\end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

协调方程为

$$\frac{1}{\sqrt{g_{33}}\sqrt{g_{11}g_{22}}}\sin\beta_{12}\left[-\frac{\partial}{\partial\xi^1}(r^b\sqrt{g_{22}}\tau^2)+\frac{\partial}{\partial\xi^1}(r^b\sqrt{g_{22}}(\cos\beta_{12})\tau^1)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial\xi^2}(r^b\sqrt{g_{11}}\tau^1)-\frac{\partial}{\partial\xi^2}(r^b\sqrt{g_{11}}(\cos\beta_{12})\tau^2)\right]=2G\alpha K\tag{5.5}$$

以应力函数 Ψ 表达的协调方程为

$$\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial^2\Psi}{(\partial q^1)^2}-\frac{2\cos\beta_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\frac{\partial^2\Psi}{\partial q^1\partial q^2}+\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial^2\Psi}{(\partial q^2)^2}+\frac{G_1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\Psi}{\partial q^1}+\frac{G_2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\Psi}{\partial q^2}$$
$$=-2G\alpha(\sin^2\beta_{12})(Kr^{a-b}g_{33})\tag{5.6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}G_1=&\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\ln\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}-\frac{\mathrm{ctg}\beta_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\xi^1}+\frac{1}{\sin\beta_{12}\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\xi^2}\\&-\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\ln(r^{a-b}\sqrt{g_{33}})+\frac{\cos\beta_{12}}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\ln(r^{a-b}\sqrt{g_{33}})\\G_2=&\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\ln\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}-\frac{\mathrm{ctg}\beta_{12}}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\sin\beta_{12}\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\beta_{12}}{\partial\xi^1}\\&-\frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\ln(r^{a-b}\sqrt{g_{33}})+\frac{\cos\beta_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial\xi^1}\ln(r^{a-b}\sqrt{g_{33}})\end{aligned}\right\}\tag{5.6a}$$

本节各方程中对于变截面圆轴

$$a=1,\quad b=-1,\quad \sqrt{g_{33}}=r,\quad K=0,\quad \tau=\tau_\theta$$

对于任意形等截面柱体

$$a=b=0,\quad \sqrt{g_{33}}=1,\quad K=1,\quad \tau=\tau_z$$

如用正交曲线座标，可将 $\beta_{12}=\frac{\pi}{2}$ 代入本节方程，亦可直接从两类轴在正交曲线座标系的方程得到。

六、两类轴扭转问题通用程序的实现

前节给出了变截面圆轴和任意形等截面柱体求解方程的共同表达式，可以同样用不等距差分公式将此二阶偏微分方程写成各节点的差分方程组，然后用叠代法求解。求解时用无量纲应力函数 ψ（以下简称应力函数），即将 $\Psi=C\psi$ 代入有关方程。常数 C 的确定详见参考文献〔3〕和本文第三节。

当然这两类问题的求解在细节上还是有些差别，需在程序中作一些处理。

1．从以无量纲应力函数 ψ 表达的协调方程（即将 $\Psi=C\psi$ 代入（5.6）后的方程）求解 ψ 时，方程（5.6a）所给出的系数 G_1 和 G_2 的最后两项以及方程(5.4)中的系数 $r^a\sqrt{g_{33}}$ 有差别。因此仅这几个个别地方二类问题需走二个通道分别处理。应当指出的是它们的几何参

数 g_{11}，g_{22}，β_{12} 的计算都是相同的。

2．变截面圆轴 ψ 的求解方程是齐次的，而对任意形等截面柱体，其相应的方程是非齐次的，右端有常数项（$-2G\alpha$），因此后者在每次叠代时需利用 Ψ 的（$m-1$）次值计算（$-2G\alpha$）的（$m-1$）次值。对于变截面圆轴的求解，这一步可以绕过。

3．这两类问题的边界条件，在内外壁，即第 1 根和第 M 根 ξ^1 座标线（等应力函数线）上，ψ 值都分别取 0 和 1。但对 ξ^1 座标曲线的两端边界，变截面圆轴是作为已知边值给定的[3,5]，而对任意形等截面柱体，该方向是一封闭的域。在叠代过程中 ξ^2 座标曲线从第 1 根起转到第 n 根后又到第 1 根。我们可以增设两个虚边界，第 0 根和第（$n+1$）根 ξ^2 座标曲线，即把第 0 根 ξ^2 座标曲线作为起端的虚边界，把第（$n+1$）根 ξ^2 座标曲线作为末端的虚边界。每次叠代计算时，起端虚边界第 0 根 ξ^2 座标曲线上各站的 ψ 值为第 n 根 ξ^2 座标曲线上相应各站的 ψ 值，末端虚边界第 $n+1$ 根 ξ^2 座标曲线上各站的 ψ 值为第 1 根 ξ^2 座标曲线上相应各站的 ψ 值。这样使两类问题的叠代求解程序类同。

以上几点在程序处理上都是不难的，因此求解这两类轴扭转问题的通用计算机程序是容易实现的。

七、讨论和结论

1．对于任意形等截面柱体的扭转问题很早就已有人提出了流体的实验模拟，但实际上这种实验模拟是无法实现的。本文给出的解法可以解决实际问题。

2．本文将两类轴的方程写成共同表达式，从而可以编写两类轴的通用程序，而这两类轴又是扭转问题中的主要问题。

3．这种通用程序应用方便，所需计算机容量小，可以适用于解决复杂形状的曲线边界的有实用意义的轴的扭转问题，提高了通常习惯用的差分法的适应性和灵活性，发展了差分法。

4．由于用应力函数作为基本未知量，从计算所得的等应力函数线和等位移函数线图可以看出全轴应力分布的概况，便于改进设计。

5．计算得到的等应力函数线组，可由计算机作出和它们正交的曲线组，即等位移函数线组。由这两组曲线形成的正交曲线网格在应变集中区自然形成很密的网格，在凸角低应力区网格自然很稀，并且网格形态很好。为进一步在拉力和弯矩作用下的应力计算提供了很好的正交曲线网格。若用有限元法计算，则这种网格所形成的单元是很好的等参有限元。

参 考 文 献

〔1〕李敏华、韩子健、任孝安，发动机涡轮轴在扭矩作用下的应力分析，航空学报，1(1980)，12—25。

〔2〕Uchida, Shigo, Calculation of compressible cascade flow by the method of flux analysis, *J. A. S.*, **21**, 4 (1954).

〔3〕李敏华，变截面圆轴扭转问题用非正交曲线座标的新解法，固体力学学报，2(1980)，159—169。

〔4〕吴仲华 (Wu Chung-hua), Three-dimensional turbomachine flow equations expressed with respect to non-orthogonal curvilinear coordinates and methods of solution, Proceedings of 3rd International Symposium on Air Breathing Engines (1976), Munich.

〔5〕任孝安，变截面圆轴扭转问题的通用计算机程序及应用，已在1980年全国计算力学学术会议上宣读。

〔6〕Timoshenko, S. and Goodier, J. N., Theory of Elasticity, 2nd Edition, McGraw-Hill Book Co., Inc. (1951), 259.

〔7〕Margenau, H. and Murphy, G. M., The Mathematics of Physics and Chemistry, 12th printing, D. Van Nostrand Co. (1951).

有限元分析中的拟协调元法

唐立民　陈万吉　刘迎曦

（大连工学院工程力学研究所）

一、前　　言

自六十年代以来，人们发现有限元法只不过是把 Ritz 法应用于分段的试探函数而已[2],[3]。但随之而来的是在单元之间出现了函数的连续性被削弱的矛盾。这个被称为“协调”的问题，涉及到能否正确地建立板单元和壳单元（它们的微分方程具有高于二阶以上的导数）。它实质上也是在计算时如何正确构造需要的单元（刚度）矩阵。最初人们试图构造完全连续的板单元（所谓高精度元，单元函数是完全的五次多项式），但这种单元过于复杂而且它的连续性太强，超过了实际需要。于是人们又试图应用放松连续性条件的所谓“非协调元”，便产生了各种广义变分。卞学璜教授等对此做了概括性地叙述[4]，并提出了应力杂交元模型，但杂交元的推导仍不够理想，用于以变位法为主的通用程序仍感不便，且它的机理和精度也需要进一步探讨。

文献〔5〕中提出一个所谓“拟协调元”的概念和作法，将在文中给以较详细的分析。

二、拟协调条件

用二维的例子来说明，设在二维有限元区域内（图 1）对微分算子$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}$进行离散，利用 Green 公式，对整个区域有

$$\sum_{t}^{N}\iint_{R_t}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\delta W_t\,dxdy=\delta\sum_{t}\Big\{\int_a^b\Big(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\Big)^*\big[W^+-W^-\big]n_x\,dS-\int_a^b\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big)^*\Big[\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^+-\Big(\frac{\partial W}{\partial x}\Big)^-\Big]n_x\,dS\Big\}+\delta\sum_{(e)}\Big\{\iint_{(e)}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big)^2dxdy\Big\}+\text{边界项},\qquad(2\text{-}1)$$

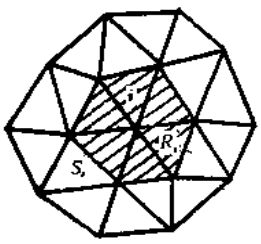


图 1

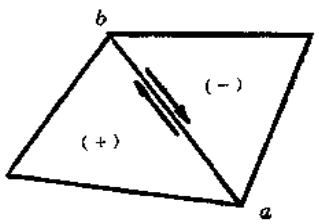


图 2

其中 i 表示节点，l 代表单元之间的边 $a-b$ 和 (e) 代表单元，式（2-1）的左边是对微分方程 $\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}=0$ 的虚功，而右边是对应的能量变分。$n_x=\cos(n,\ x)$；$\left(-\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right)^*$ 和 $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^*$ 是定义在单元之间 $a-b$ 边界上的 lagrange 乘子，如果在每一公共边界 $a-b$ 上有

$$W^+-W^-=0$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^--\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^-=0 \tag{2-2}$$

则单元间的函数完全连续或称完全协调，这时（2-1）式就变成

$$\sum_i\iint_{R_i}\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\delta W\,dx\,dy=\delta\sum_{(e)(e)}\iint\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2dx\,dy+\text{边界项} \tag{2-3}$$

即所谓的经典的最小势能变分。

如果条件（2-2）放松而满足积分，即

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b W^+dS&=\int_a^b W^-dS\\ \int_a^b\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^+dS&=\int_a^b\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^-dS\end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

这就是所谓“积分意义下的协调条件”或“拟协调条件”。不难看出当（2-4）得到满足时，按中值定理（2-1）仍可退化为（2-3）。即按虚功原理的计算仍等价于能量变分的计算。以后的计算和收敛条件以及误差的估计就和完全协调元一样。

如果在单元之内离散应变 $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ 时能够同时做到满足条件(2-4)，或者用单元周边围线积分，如 $\int_a^b W\,dx$ 和 $\int_a^b\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)dS$ 之类来完成应变项的离散时(这种单元就称为“拟协调元”。它们和经典的势能变分(2-3)一样使用，不会产生变分犯规[5]当然也就一定通过“小片试验”。

下面通过一些例子给出拟协调元的具体构造。

三、拟协调元的构造和边界积分方法

有限元法中的核心计算步骤是形成单元的刚度阵，以后则属于纯粹的代数运算。单元刚度阵的形式是

$$[K]^e=\iint_\Omega[B]^T[D][B]dx\,dy \tag{3-1}$$

其中 Ω 是单元的整个区域，在二维情况中它可以是任意三角形或多边形围成的区域（图 3）。$[D]$是物理常数矩阵，而$[B]$则是来自应变的离散表达式

$$\{\varepsilon\}=[B]\{q\} \tag{3-2}$$

式中$\{\varepsilon\}$是应变，例如二阶导数方程为

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial W}{\partial x}\\ \frac{\partial W}{\partial y}\end{Bmatrix} \tag{3-3}$$

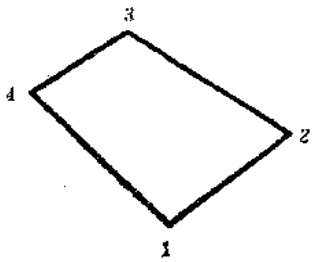


图 3

四阶方程（板）为

$$\{\varepsilon\}^T=\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2},\ 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right] \tag{3-4}$$

其中 $\{q\}$ 是单元边界上节点的广义位移，例如 W_1，W_2，…，$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_1$，$\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_1$，…之类。

现在的问题是如何得出 (3-2)，$\{q\}$ 中应该包含哪些参数？$[B]$ 应该是什么样子？以及它的离散结果误差和精度又应该是多少？传统的有限元法（除卞的方法外）都是用局部作用在单元上的位移函数（或形函数）来完成的。它的精度也就由这个函数作为插值函数的精度而定。所谓拟协调元则是从给定 $\{\varepsilon\}$ 的近似函数形成出发，通过积分来完成用 $\{q\}$ 表示的离散，同时仍需顾及拟协调条件 (2-4) 得到满足，它的积分可以相当于一个具体的单元位移函数，也可以不是，这样就导致用围线积分来构造 (3-2)。

例 1．设对二阶椭圆方程需要在三角单元（图 4）内离散 (3-3)，有

$$\{\varepsilon\}^T=[\partial W/\partial x,\ \partial W/\partial y]$$

取局部座标原点 C 位于三角形的形心。设 $\partial W/\partial x$ 可表为 n 次多项式

$$\frac{\partial W}{\partial x}=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 x^2+\cdots \tag{3-5}$$

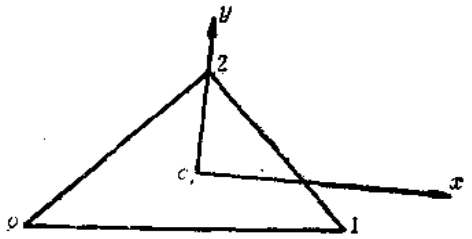


图 4

显然各系数 α_I 应为

$$\alpha_0=\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_C,\quad \alpha_1=\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_C,\quad \alpha_2=\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_C\cdots\cdots \tag{3-6}$$

现在的问题是如何进行諸系数 α_I 的离散，为此，和式 (2-1) 类似，在式 (3-5) 的两边分别乘以单元内的基函数 $\Psi=1$，x，y，x^2，…（n 个），然后在单元区域 Ω 上积分，这样就可以得到 n 个方程以确定 n 个系数，这个作法也相当于令

$$J=\iint_\Omega\left[\frac{\partial W}{\partial x}-(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\cdots)\right]^2 dxdy \tag{3-7}$$

取 J 的最小值，即

$$\partial J/\partial\alpha_I=0$$

就有

$$\iint_\Omega\left[\frac{\partial W}{\partial x}-(\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\cdots)\right]\Psi_I\,dxdy=0 \tag{3-8}$$

设取常应变项 α_0，以后諸项 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ 则有

$$\partial W/\partial x=\alpha_0$$

现在两边乘以 1 并做积分得

$$\iint_\Omega\frac{\partial W}{\partial x}\cdot 1\,dxdy=\alpha_0\iint_\Omega dxdy=\alpha_0 A$$

其中 A 是三角形单元的面积

$$A=\iint_\Omega dxdy$$

然后用 Green 公式进行分部积分

$$\alpha_0 A=\oint_{\partial\Omega}W n_x dS=\int_{0-1}W n_x dS+\int_{1-2}W n_x dS\cdots=(n_x)_m\int_{0-1}W dS+\cdots \quad (0、1、2\text{ 轮换})$$

这里 $\partial\Omega$ 代表 Ω 的边界围线，$(n_x)_{01}$ 代表线段 0—1 上的外法线方向余弦，现在要做近似积分，例如用梯形公式得

$$\int_{0-1} W\,dS=\frac{1}{2}h_{01}(W_0+W_1)+O(h^3) \tag{3-9}$$

式中 h_{01} 是 0—1 的边长，h 为三角的最大边长，$O(h^3)$ 是误差量级。由于 $(n_x)_{01}=\frac{y_{10}}{h_{01}}$，$(n_y)_{01}=\frac{x_{01}}{h_{01}}$，其中 x_{ij}，y_{ij} 分别代表 $x_{ij}=x_i-x_j$，$y_{ij}=y_i-y_j$，于是有

$$\alpha_0=\frac{1}{2A}(W_0y_{12}+W_1y_{20}+W_2y_{01})+O(h) \tag{3-10}$$

同理对 $\partial W/\partial y$ 得到 $\{\varepsilon\}=[B]\{q\}$ 的具体形式为

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial W}{\partial x}\\ \frac{\partial W}{\partial y}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}y_{12} & y_{20} & y_{01}\\ x_{21} & x_{02} & x_{10}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}W_0\\ W_1\\ W_2\end{Bmatrix}+O(h) \tag{3-11}$$

如果用 Taylor 公式

$$W_i=W_c+x_{ic}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_c+y_{ic}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_c+\frac{x_{ic}^2}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)_c$$

$$+x_{ic}y_{ic}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)_c+\frac{y_{ic}^2}{2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)_c+\cdots \tag{3-12}$$

来检查 (3-10) 或 (3-11)，令 $i=0$，1，2，不难看出在单元内一阶导数的离散的确是完成了具有 $O(h)$ 精度的截断误差。

$$\frac{1}{2A}(W_0y_{12}+W_1y_{20}+W_2y_{01})=\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_c+O(h)$$

$$\frac{1}{2A}(W_0x_{21}+W_1x_{02}+W_2x_{10})=\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)_c+O(h)$$

这样我们就完成了一个拟协调元的构造，因为相邻两个单元的共同边界上的线积分值 $\int W\,dS$ 是一样的，一来一往（图 2）互相抵消，所以都自然满足拟协调条件，它的位移值以三角形的三个角点上的值来表示，$\{q\}^T=[W_0, W_1, W_2]$（图 4）。

例 2 另外如果在 (3-9) 中的近似积分不用梯形公式，而用边中点的矩形公式（图 5）就有

$$\int_{0-1} W\,dS=W_3h_{01}+O(h^3)$$

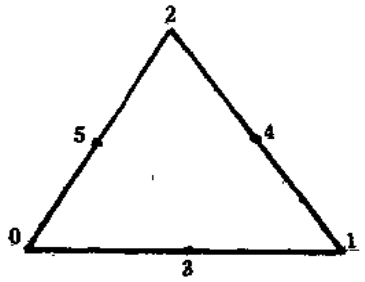


图 5

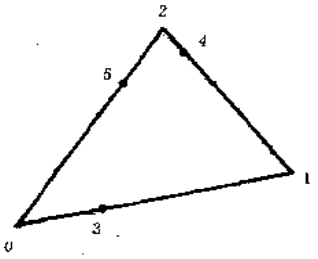


图 6

从而得到另一种拟协调元，它以三边中点的值来表示（图 5）

$$\{q\}^T=[W_3,\ W_4,\ W_5]$$

例 3． 如果在上例中节点值不取在中点而取在任意其它点（图 6），这时

$$\int_{0-1} W\,dS=W_3h_{01}+O(h^2)$$

$\{\varepsilon\}$ 的离散值将不收敛于精确值。这是因为线积分的精度不够，不足以表示出最低精度的要求——常应变项。这时我们称它为“犯规”。

因此例 1 和例 2 都通过常应变的“小片试验”，而例 3 则不通过。

从上面的例子可以看出，凡是用这种围线积分构造出来的单元都满足拟协调条件；单元的精度由线积分的近似误差来决定，如果要再提高精度就需要增加节点的个数。

例 1 给出的结果是和传统的线性单元函数一样，是一个完全协调元，它满足经典的变分条件，收敛是不成问题的，但例 2*、例 3 给出的两个单元之间只有一个节点相联系却是高度的不协调元。它们的收敛问题就比较难了。但在我们这里很容易看出例 2 和例 1 都是拟协调元且具有相同的精度。例 3 则是犯规的。

四、常离矩 6 参数单元

在单元内离散 $\{\varepsilon\}^T=\left[\dfrac{\partial^2W}{\partial x^2},\ \dfrac{\partial^2W}{\partial y^2},\ 2\dfrac{\partial^2W}{\partial x\partial y}\right]$，

设三角单元的应变 $\{\varepsilon\}$ 的各项都为常数

$$\frac{\partial^2W}{\partial x^2}=\alpha_0,\quad \frac{\partial^2W}{\partial y^2}=\beta_0,\quad 2\frac{\partial^2W}{\partial x\partial y}=\gamma_0 \tag{4-1}$$

应用

$$\frac{\partial}{\partial x}=n_x\frac{\partial}{\partial n}-n_y\frac{\partial}{\partial S},\qquad \frac{\partial}{\partial y}=n_y\frac{\partial}{\partial n}+n_x\frac{\partial}{\partial S} \tag{4-2}$$

（其中 n 是围线外法线方向，$n_x=\cos(n,\ x)$，$n_y=\cos(n,\ y)$就有，例如

$$A\alpha_0=\iint_\Omega\frac{\partial^2W}{\partial x^2}\cdot 1\,dx\,dy=\oint_{\partial\Omega}n_x^2\frac{\partial W}{\partial n}\,dS-\oint_{\partial\Omega}n_xn_y\,dW$$

这里 $\int_{0-1}dW=W_1-W_0$，而

$$\int_{0-1}\frac{\partial W}{\partial n}dS=\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{01}h_{01}+O(h^3) \tag{4-3}$$

采用矩形公式就够了（图 7），这样位移参数就只需要 6 个，于是得到 $\{\varepsilon\}=[B]\{q\}$ 的离散表达式。其结果与 Morley 用二次式[7]

$$W=a_0+a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2$$

得出的非协调元是一样的。这里的推导简单容易得多了。Morley 元对经典的势能变分是高度不协调的，只能用力法证明它的合理性。但这里它的导出是合乎拟协

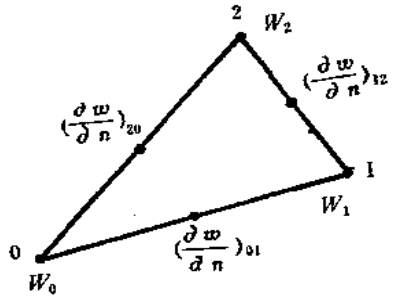


图 7

* 需要指出的是：应用例 2 的元，当几个单元只用边界中点联结时，常常可以形成可动机构，这时就产生不稳定了。

调条件的，当然通过“小片试验”且应变 $\{\varepsilon\}$ 的精度是具有 $O(h)$ 误差量级。

五、9 参数单元，单元阵的秩

设一个单元的广义位移 q_i 的数目为 N_q。由于 $\{\varepsilon\}^T=\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2},\ 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]$ 积分之后对应的 W 只能有三项任意常数项，$G=3$，它对应于刚体位移，所以应有

$$M\geqslant N_q-G \tag{5-1}$$

式中 M 是应变中独立的项数（自由度）。如果违反这一准则而有 $M<N_q-G$ 就意味着物体可以是机动的结构，同时表现在单元阵“秩”的不足。这一点可以用计算单元刚度阵的不为零的特征值的个数来验证。

在上一节 6 参数单元中 $N_q=6$，$M=3$ 刚好满足 (5-1) 秩的条件。

对于 9 个参数单元，（图 8）则必须增加 M 的数目，设采用完备的一次式应变如下（考虑到与座标转动无关的不变性）

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}&=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y\\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}&=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 y\\ 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}&=\gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 y\end{aligned}\right\} \tag{5-2}$$

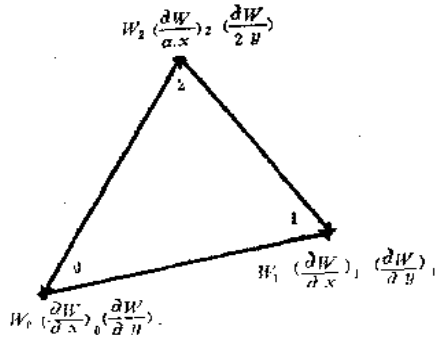


图 8

由于微分的协调关系

$$\left.\begin{aligned}2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)\\ 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5-3}$$

于是有 $2\alpha_2=\gamma_1$，$2\beta_1=\gamma_2$。

因此，在 (5-2) 中 9 个应变参数 α_0，$\alpha_1,\cdots\gamma_2$ 中只有 7 个是独立的，$M=7$ 大于 $N_q-G=6$，于是秩的条件满足了。按同样的办法积分可得到单元显式[10]，该单元通过常应变“片试”。从上面的分析我们看到 (5-2) 中除 α_0，β_0，γ_0 收敛于常应变项外，增添了 α_1，$\alpha_2,\cdots\gamma_2$ 诸线性项并不能提高精度，但它们却是不可少的。它们起了填充秩的作用。用 (5-2) 算出的单元中的弯矩虽然是线性的但却是靠不住的，只有单元形心一点的弯矩值（代表常弯矩）是比较精确的。

六、12 参数线性应变元

为获得更高一阶精度的元，必须使用大于 9 个参数的元，例如 $N_q=12$ 的元（图 9），为了保证“秩”的条件，应变可以用二次齐次多项式（考虑到与座标选择无关的不变性）

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 x^2+\alpha_4 xy+\alpha_5 y^2$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha^2 W}{\alpha y^2}&=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 x^2+\beta_4 xy+\beta_5 y^2\\ 2\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}&=\gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 y+\gamma_3 x^2+\gamma_4 xy+\gamma_5 y^2\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}1)$$

这时由于微分协调条件（5-3），在（6-1）中的18个参数只有 $M=12$ 满足秩的条件（5-1）。

在积分过程中，求 α_3，β_3，γ_4 时，要碰到 $\iint_\Omega \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}x^2dxdy$，$\iint_\Omega \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}y^2dxdy$，$\iint_\Omega \frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}xydxdy$ 这样的积分，通过应用 Green 公式，都导致下面的近似积分

$$\iint_\Omega W\,dxdy \qquad (6\text{-}2)$$

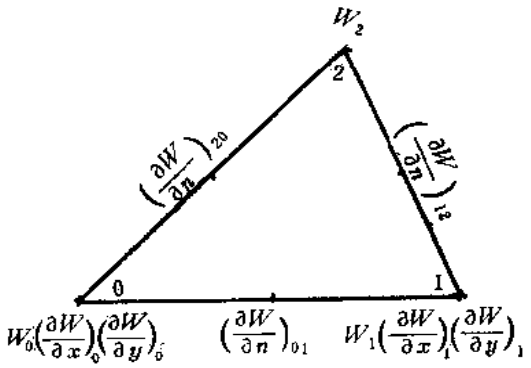


图9

这个积分值可设 W 为三次完全多项式求得。这里的 W 不必要与边界上的 W 有关联，这仅仅是为了保证不犯规，具有精度 $O(h^5)$。这样离散的结果，除了 α_0，α_1，α_2…可以保证获得线性应变以外，α_3，α_4，α_5 则是误差量级为 $O(h^{-1})$ 的发散数，但由于它们分别和 x^2，xy，y^2 相乘，所以不影响（6-1）收敛于线性应变。

这样得出的12参数元不但通过常应变“片试”，且通过线性应变“片试”是理所当然的。但是在求得位移之后，再由位移求单元内的应变和弯矩。在较粗网格时，应用(6-1)的元，由于 α_3 以后的諸项除了填充秩以外对精度没有什么好处，所以宁可舍去它们而用缺秩的元来求弯矩，免去二次项的干扰，结果改善了计算内力场的精度。

需要再指出的是，在上面推导中任何再降低近似积分精度，例如减少位移参数的数目或（6-2）的积分精度不够等都将导致发散，是犯规的。

七、小片试验和差分格式

上面给出的12参数单元不但可以通过线性应变的小片试验，它的三阶导数在单元和单元内也是有意义的。对于规则网格*（图10）。当把代数方程用Taylor级数在节点 o 展开时，可以得到和差分方程一样的四阶导数的微分方程和具有 $O(h^2)$ 量级的截断误差。

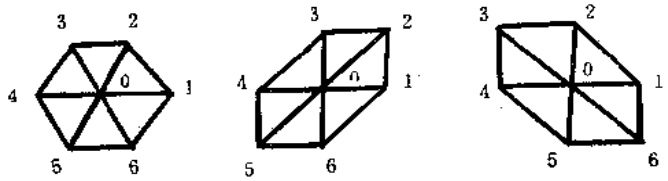


图 10

12参数单元给出的（板的）离散，实质上也是一种古典意义下（Hermite形式）的差分格式，对于网格是不规则的任意格式，它按一种广义的动态收敛于微分方程[6]，至于9参数和6参数单元，它们就不是古典意义下的差分方程，但仍能在降一级的精度下满足常应变的批试要求，所以有限元法给出的

* 所谓规则网格就是网格具有如下的形状，当节点任意移动一个步长时，周围格式形状不变。

方程也可以说是一种广义的差分方程，它可以在更弱的条件下求得数值解，较之古典的差分法，是一种很大的（却往往被忽视）优点。

顺便指出，Adini和Clough给出的矩形的非协调元（图11）实际上是一种拟协调元，用本文给出的方法很容易把它导出，且可看出由于它的规则形状使它具有线性应变的精度，且拚装起来可以是一个差分方程。

另一方面，很多“犯规”的单元规则格式是可以用的，但任意格式却全然不行。这是很容易上当的，所以不能用规则网格做了考题通过之后便宣称此种单元是可以用的了。

如同前几节那样，继续增加应变的项数，同时对应地增加广义位移的项数，精度将继续增高。这一点和经典的变位法是一致的。

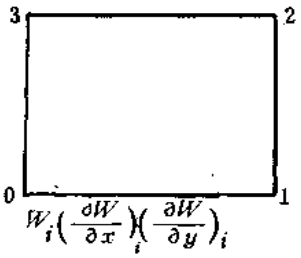


图 11

八、在单元内引入平衡方程

如果在第五节中的12参数元中引入齐次平衡方程（以板受弯曲为例）

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=0 \qquad (8\text{-}1)$$

则在（6-1）中有

$$2\alpha_8+2\beta_8+\gamma_4=0$$

利用这一关系可以使（6-12）的面积分$\iint_\Omega W\,dx\,dy$对应变能无贡献。因此这一项将不影响计算精度。我们知道拟协调元和协调元一样，在单元内采用的插值函数的完备多项式幂次越高，精度也就越高。在单元内采用了平衡方程，例如（8-1），就相当于给单元位移函数的4次项（应变的2次项）以一个约束，从而破坏了位移函数4次项的完备性。这样就使得（6-1）中的2次项的精度丧失，但由于12参数元本来也不要求应变的2次项具有精度，所以在12参数单元中引用（8-1）方程并没有损失精度，这样做相当于卞学璜的杂交应力元。如果我们想使精度再次增加（这时单元的位移参数和应变的自由度都相应地增加），再引用平衡方程（8-1）就有害了，因为第4次幂就破坏了多项式的完备性。

九、单元内的位移和载荷

拟协调元只给出单元边界上的位移而不给出单元内的位移。需要时可在单元内假设某个精度对应的插值函数。例如对应于常应变单元（6参数或9参数）可以设域内W为二次完备多项式（最好用面积座标），对应于线性应变12参数单元可以设W为三次完备多项式的插值函数。至于载荷项，由于它是位移W的4次导数，弯矩的2次导数，所以并不要求对载荷项有过细的近似描述。12参数单元的载荷项，只需假设它们在单元内是线性分析，甚至是均匀分布，或者只需把单元内按形心分割，1/3面积上的载荷都作用在角点上均可，不会损失精度。

十、结　　论

1．从上面可以看出，有限元法中的所谓协调或非协调问题，用拟协调元的概念和方法可以比较自然，比较简单，比较完善地给以解决。它不需要用 Lagrange 乘子等比较复杂的理论和方法，也没有离开被普遍接受的应用位移法和势能变分，同时给出误差和秩的估计。由此看出，单元和单元之间的完全协调的条件是过分的强了，只要求满足拟协调就够了，所以拟协调条件是有限元法的一个基本条件。

2．有限元经典的作法是先给出单元上的位移函数，然后对它求导数就得到唯一确定的应变。拟协调元的作法是相反的作法，先给出单元的应变函数，然后（用正交关系）积分。它必然包括经典的位移函数做为它的一种特殊积分形式。它可以解释为什么过去有些所谓的非协调元是收敛的（因为满足拟协调条件），同时它还包括了一大部分不能用位移函数直接构造的单元，当 $M>N_q-G$ 时就是如此。

3．由应变函数可以非常简单和明确地确定应变的自由度，刚性位移和秩。由线积分的近似作法也简单明确地给出了误差和精度，明确地分辨出应变中哪些项是保证精度的，哪些项是作填充秩用的。

有两种情况的单元是不允许的，一种是 $M<N_q-G$，将导致结构是机动的。另一种是位移参数太少而不能保证积分精度将导致发散。

关于拟协调元的广义变分原理及具体计算公式见文献〔8〕〔9〕。

本文曾承钱令希教授和卞学璜教授及张鸿庆、吕和祥同志提出宝贵意见，特此致谢。

参　考　文　献

〔1〕Oden, J. T. and Bathe, K. J., *Applied Mechanics Reviews*, **13**, 8 (1978), 1053--1058.

〔2〕Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method, McGraw-Hill (1977).

〔3〕冯康，应用数学与计算数学 2 (1965)，238—262.

〔4〕Pian, T. H. H. and Tong, P., Advances in Applied Mechanics, **12** (1972), 1—58.

〔5〕唐立民，大连工学院学报，2 (1979).

〔6〕Strang, G. and Fix, G. J., An Analysis of the Finite Element Method, Prantice-Hall (1973), 174—181.

〔7〕Morley, L. S. P., *J. Strain Analysis*, 6 (1971), 20--4.

〔8〕陈万吉，刘迎曦，大连工学院学报，3 (1980).

〔9〕陈万吉，刘迎曦，唐立民，大连工学院学报，2 (1980).

〔10〕唐立民，陈万吉，刘迎曦，大连工学院学报，2 (1980).

位移函数在用有限单元法求解弹性力学问题中的应用

王敏中　苏先樾　武际可
（北京大学力学系）

有限单元法作为处理固体力学的一种方法，近二十年来得到迅速发展，在大量的土木工程、机械、造船、航空等方面都得到很好的应用。按照这种方法，把结构划分成三角形、矩形、四面体等等各种小单元，利用各类插值函数，根据变分原理形成关于每个节点上的位移或内力的代数方程组，然后再去求解。通常所需计算量和存储量是相当大的，例如在三维问题中每个节点位移就需要由 (u, v, w) 来表征，形成的刚度矩阵是 $(3n)\times(3n)$ 阶的，存储量过大，往往构成求解问题中的主要困难。

本文把弹性力学问题的通解应用于有限单元法，目的在于减少内存量。

一、弹性力学问题的通解

设弹性体占有空间 $\boldsymbol{V}$，其边界为 S，$S=S_\sigma+S_u$，在 S_u 上给定位移边条件，S_σ 上给定外载。

以位移表示的弹性力学方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}+\frac{1}{\mu}\boldsymbol{X}=0 \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 为位移向量，$\boldsymbol{X}$ 为体力，ν 为材料的 Poisson 比，μ 为剪切模量。$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，Kelvin 给出了有体力时的特解

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{4\pi\mu}\frac{3-4\nu}{4(1-\nu)}\iiint_V\frac{\boldsymbol{X}}{\rho}dV+\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\iiint_V\frac{\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{X}}{\rho^3}\boldsymbol{\rho}dV \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{i}(x-\xi)+\boldsymbol{j}(y-\eta)+\boldsymbol{k}(z-\zeta)$。

以下仅考虑无体力的情形，因为在编制通用计算程序时，可通过特殊的程序段来计算一些常见体力的情形。无体力时，方程（1）为

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\nu}\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{u}=0 \tag{3}$$

M. J. Boussinesq-Б. Г. Галеркин 给出了式（3）的通解为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}&=\nabla^2\boldsymbol{\phi}-\frac{1}{2(1-\nu)}\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{\Phi}\\ \nabla^4\boldsymbol{\phi}&=0\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

为适合计算，改变式（3）的形式。令 $\nabla^2\phi=\Psi$，于是

$$\nabla^2 \mathrm{div}\phi=\mathrm{div}\Psi$$

因此

令

$$\mathrm{div}\Phi=-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathrm{div}\Psi}{\rho}dV+\psi_0,\quad \nabla^2\psi_0=0$$

$$\boldsymbol{F}=\Psi-\frac{1}{2(1-\nu)}\mathrm{grad}\psi_0$$

有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\mathrm{div}\Psi$$

将上面諸式代入式（4）得

$$\boldsymbol{u}=\Psi-\frac{1}{2(1-\nu)}\mathrm{grad}\left(-\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\mathrm{div}\Psi}{\rho}dV+\psi_0\right)$$

即

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}+\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\mathrm{grad}\iiint_V\frac{\mathrm{div}\boldsymbol{F}}{\rho}dV\\&\nabla^2\boldsymbol{F}=0\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

此乃 P. M. Naghdi-C. S. Hsu[1][2]的通解形式，可以证明式（5）的 $\boldsymbol{F}$ 是唯一的。

事实上，若有另一形式

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}'+\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\mathrm{grad}\iiint_V\frac{\mathrm{div}\boldsymbol{F}'}{\rho}dV\\&\nabla^2\boldsymbol{F}'=0\end{aligned}\right\}\qquad(5')$$

将式（5）、（5′）相减得

$$0=(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}')+\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\mathrm{grad}\iiint_V\frac{\mathrm{div}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}')}{\rho}dV\qquad(6)$$

对上式取 div，得

$$0=\mathrm{div}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}')+\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\nabla^2\iiint_V\frac{\mathrm{div}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}')}{\rho}dV$$

$$=\left[1-\frac{4\pi}{8\pi(1-\nu)}\right]\mathrm{div}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}')$$

$$=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\mathrm{div}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}')$$

由于 $\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\neq 0$，即有

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}')=0$$

将此式代入式（6）得

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}'$$

由此证明了 P. M. Naghdi-C. S. Hsu 通解中函数 $\boldsymbol{F}$ 是唯一的。

二、Laplace 方程的解

我们的计算方案是从式（5）出发，把通常直接表出应力和位移关系来形成刚度矩阵的求解方法改为由 F 的插值函数表出位移和应力，用求解 Laplace 方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{F}=0$$
$$\boldsymbol{F}|_s=\widetilde{\boldsymbol{F}}$$

来得到问题的解。

它的分量形式是

$$\nabla^2 F_i=0$$
$$F_i|_s=\widetilde{F}_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

在体内均满足 Laplace 方程，仅是边界条件不同。将弹性体 V 分成有限个单元 V_1，V_2，…，V_n，不妨设这些单元体为四面体，设内节点为 P_1，P_2，…，P_r，位移边界 S_u 上的节点为 P_{r+1}，P_{r+2}，…，P_{r+s}，应力边界上的节点为 P_{r+s+1}，P_{r+s+2}，…，P_{r+s+t}。记 $k=s+t$，$m=r+k$，在每个 V_i 上，F_1，F_2，F_3 将均用同样的插值函数，因而我们下面一般地考虑解如下问题

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 G&=0\\ G|_s&=\widetilde{G}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

下面以线性插值为例。在每个 V_i 上采用线性插值，设其节点为 P_i，P_j，P_q，P_h。

$$G=\frac{1}{6V}(N_i g_i-N_j g_j+N_q g_q-N_h g_h) \tag{8}$$

其中 $g_i=G(P_i)$，而

$$P_i=(x_i,\ y_i,\ z_i), \qquad P_i\in V_i$$
$$N_i=a_i+b_i x+c_i y+d_i z, \qquad (i,\ j,\ g,\ h)$$

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i & z_i\\ 1 & x_j & y_j & z_j\\ 1 & x_q & y_q & z_q\\ 1 & x_h & y_h & z_h\end{vmatrix},\qquad a_i=\begin{vmatrix}x_j & y_j & z_j\\ x_q & y_q & z_q\\ x_h & y_h & z_h\end{vmatrix}$$

$$b_i=-\begin{vmatrix}1 & y_j & z_j\\ 1 & y_q & z_q\\ 1 & y_h & z_h\end{vmatrix},\quad C_i=-\begin{vmatrix}x_j & 1 & z_j\\ x_q & 1 & z_q\\ x_h & 1 & z_h\end{vmatrix},\quad d_i=-\begin{vmatrix}x_j & y_j & 1\\ x_q & y_q & 1\\ x_h & y_h & 1\end{vmatrix}$$

利用变分原理

$$J=\frac{1}{2}\iiint_V\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2\right]dV=\min$$
$$G|_s=\widetilde{G}$$

按普通的有限元法可得

$$\boldsymbol{A}g-\boldsymbol{B}\widetilde{g}=0 \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $r\times r$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $r\times k$ 阶矩阵

$$g=(g_1,\ g_2,\cdots,\ g_r)^T$$

$$\widetilde{g}=(g_{r+1},\ g_{r+2},\cdots,\ g_{r+h})^T$$

三、位移和应力的构成

对通解式（5）中的调和函数 $(F_1,\ F_2,\ F_3)=\boldsymbol{F}$，在每个 $\boldsymbol{V}_t$ 上 F_1，F_2，F_3 均用式（8）的线性插值形式利用第二节的方法形成

$$Af^{(i)}-B\widetilde{f}^{(i)}=0,\qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{10}$$

其中

$$f^{(i)}=(f_1^{(i)},\ f_2^{(i)},\cdots,\ f_r^{(i)})^T$$

$$\widetilde{f}^{(i)}=(f_{r+1}^{(i)},\ f_{r+2}^{(i)},\cdots,\ f_{r+h}^{(i)})^T$$

在每个单元上令

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}\boldsymbol{F})_t=&\frac{1}{6v}(b_tf_t^{(1)}-b_jf_j^{(1)}+b_qf_q^{(1)}-b_hf_h^{(1)}+C_tf_t^{(2)}-C_jf_j^{(2)}\\&+C_qf_q^{(2)}-C_hf_h^{(2)}+d_tf_t^{(3)}-d_jf_j^{(3)}+d_qf_q^{(3)}-d_hf_h^{(3)})\end{aligned} \tag{11}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(x,\ y,\ z)&=\boldsymbol{F}(x,\ y,\ z)-\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\sum_{t=1}^{n}\left[(\mathrm{div}\boldsymbol{F})_t\iiint_{V_t}\frac{\rho}{\rho^3}dV\right]\\&=\boldsymbol{F}(x,\ y,\ z)-\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\sum_{t=1}^{n}[(\mathrm{div}\boldsymbol{F})_t\boldsymbol{G}_t(x,\ y,\ z)]\end{aligned} \tag{12}$$

记

$$\boldsymbol{G}_t(x,\ y,\ z)=\iiint_{V_t}\frac{\boldsymbol{i}(x-\xi)+\boldsymbol{j}(y-\eta)+\boldsymbol{k}(z-\zeta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$\boldsymbol{G}_t(x,\ y,\ z)$ 的计算见第五节。式（12）中的函数均为线性插值函数。由式（12）我们在 S_u 上形成

$$\boldsymbol{C}f=\overline{u} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为 $3s\times 3m$ 阶矩阵；而

$$f=(f^{(1)}f^{(2)}f^{(3)}\widetilde{f}^{(1)}\widetilde{f}^{(2)}\widetilde{f}^{(3)})^T$$

$$\overline{u}=(\overline{u}_{r+1}\overline{v}_{r+1}\overline{w}_{r+1},\cdots,\ \overline{u}_{r+s}\overline{v}_{r+s}\overline{w}_{r+s})^T$$

又 $\overline{u}_t=\overline{u}\ (P_t)\qquad (P_t\in S_u)$ 为给定的位移。

且根据式（12）按通常的方法构成应力的表达式。

在 S_σ 上形成

$$\boldsymbol{D}f=\overline{T} \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 为 $3t\times 3m$ 阶矩阵；而

$$\overline{T}=(\overline{X}_{r+s+1}\overline{Y}_{r+s+1}\overline{Z}_{r+s+1},\cdots,\ \overline{X}_{r+s+t}Y_{r+s+t}Z_{r+s+t})^T$$

$\overline{X}_t=\overline{X}(P_t)\qquad (P_t\in S_\sigma)$ 为给定的外载。

四、计 算 步 骤

综合式（10），（13），（14）形成方程组

$$\boldsymbol{E}f=\bar{f}$$

其中

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} A & & -B & & \\ & A & & -B & \\ & & A & & -B \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 \quad H_6 \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}=(\underbrace{0,0,,\cdots 0,}_{3r} \quad \underbrace{\bar{u},\ \bar{T}}_{3k})^T$$

$$\boldsymbol{H}=(H_1\ H_2\ H_3\ H_4\ H_5\ H_6)=\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

具体计算步骤如下：

1．按第二节的方法形成 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$。计算 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$。

2．按式（12）、（14）分别形成 $\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{D}$。并得到 $\boldsymbol{H}$ 和

$$\boldsymbol{H}_0=(\boldsymbol{H}_1A^{-1}B+H_4 \quad H_2A^{-1}B+H_5 \quad H_3A^{-1}B+H_6)$$

3．解方程组

$$\boldsymbol{H}_0\tilde{f}=\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{T} \end{pmatrix} \tag{15}$$

其中 $\tilde{f}=(\tilde{f}^{(1)}\tilde{f}^{(2)}\tilde{f}^{(3)})^T$。

4．计算 $f=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\tilde{f}$。

5．按式（12）计算位移。

6．按通常的方法计算应力。

综上各步可看出，由第一步，问题在区域内部只需求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即只相当于求解一个 Laplace 方程的计算量，便可以把问题化归于全部包含边界上未知量 $\tilde{f}$ 的方程组（15）。

五、G_l 的 计 算

在式（12）中，$\boldsymbol{G}_l$ 的计算尚待进一步讨论。为此我们在下面给出一个近似计算方案。我们首先计算各节点的 $\boldsymbol{G}_l(x_k,\ y_k,\ z_k)=\boldsymbol{G}_{lk}$，$P_k(x_k,\ y_k,\ z_k)$。

注意到式（12）中 $\boldsymbol{G}_l$ 前有系数 $\frac{1}{8\pi(1-\nu)}$，如果设 $\nu=0.3$，那么 $\alpha=\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\doteq 0.056$，因此对 $\boldsymbol{G}_{lk}$ 只要进行比较粗略的计算就可以了。

计算分两种情形：

1．如果 P_k 不是 V_l 的顶点，$\boldsymbol{G}_{lk}$ 可用高斯积分或者更粗略地认为

$$\boldsymbol{G}_{lk}=\frac{\boldsymbol{i}(x_k-x_c)+\boldsymbol{j}(y_k-y_c)+\boldsymbol{k}(z_k-z_c)}{[(x_k-x_c)^2+(y_k-y_c)^2+(z_k-z_c)^2]^{3/2}}\boldsymbol{V}_l$$

其中 $(x_c,\ y_c,\ z_c)$ 为单元 V_t 的重心。

2．如果 P_k 是 V_t 的某个顶点，例如 $P_k=P_t$，这时将单元等效为顶点在 P_t 的球锥 V_t' 上来计算。

轴线为 $P_t\bar{P}_t$，其中 $\bar{P}_t$ 为 $\Delta P_jP_qP_h$ 的重心，所张的立体角

$$\omega\doteq\frac{\Delta P_jP_qP_h\text{的面积}}{|P_t\bar{P}_t|^2}$$

记 $|P_t\bar{P}_t|=r_0$，$\omega=2\varphi_0$。

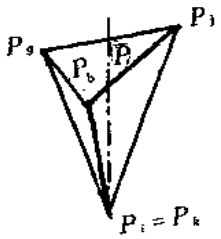


图 1

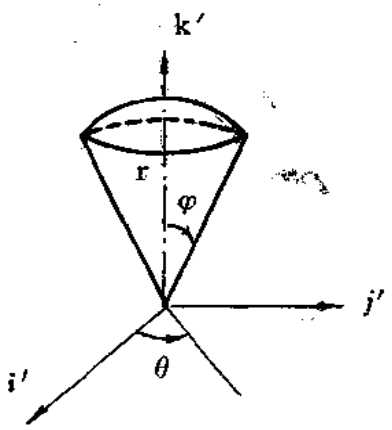


图 2

将坐标原点移至 P_k，且让 k' 轴与 $P_t\bar{P}'$ 重合，建立球坐标：

$$\xi'=\xi-x_k=r\sin\varphi\cos\theta$$
$$\eta'=\eta-y_k=r\sin\varphi\sin\theta$$
$$\zeta'=\zeta-z_k=r\cos\varphi$$
$$0\leqslant r\leqslant r_0,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_0,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

$$G_{tk}=-\iiint_{V_t'}\frac{i'r\sin\varphi\cos\theta+j'r\sin\varphi\cos\theta+k'r\cos\varphi}{r^3}r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$=-\int_0^{r_0}dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varphi_0}[(i'\cos\theta+j'\sin\theta)\sin^2\varphi+k'\sin\varphi\cos\varphi]\,d\varphi$$

$$=\frac{\cos2\varphi_0-1}{2}\pi r_0k'$$

其中

$$k'=\frac{\bar{x}_t-x_t}{r_0}i+\frac{\bar{y}_t-y_t}{r_0}j+\frac{\bar{z}_t-z_t}{r_0}k$$

最后，对情形 2 我们归结于如下近似公式

$$G_{tk}\doteq\frac{\pi}{2}(\cos2\varphi_0-1)[(\bar{x}_t-x_t)i+(\bar{y}_t-y_t)j+(\bar{z}_t-z_t)k]$$

六、算　　例

利用本方案我们对平面问题进行过计算。这里以端部受集中力的悬臂梁为例。单元剖分如图 3 所示，共计 40 个节点，54 个单元。

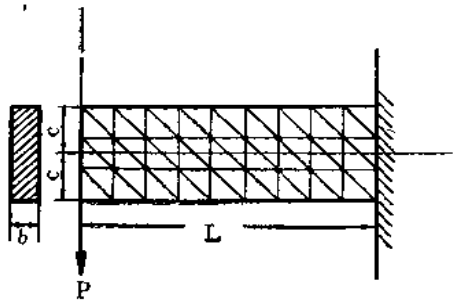


图 3

$c=1.5$cm

$b=1$cm

$L=9$cm

$\frac{P}{I}=1$ kg/cm^4 （I：截面惯矩）

弹性模量 $E=2\times10^6$ kg/cm^2

泊桑比 $\nu=0.3$

几个截面上挠度 v 与精确解对照

v \ x(cm)	0	1	2	3	4	5
数值解	−0.1215	−0.1015	−0.0820	−0.0635	−0.0465	−0.0315
	−0.1215	−0.1012	−0.0814	−0.0626	−0.0453	−0.0300
(×10^{-3}cm)	−0.1215	−0.1012	−0.0814	−0.0626	−0.0453	−0.0300
	−0.1215	−0.1015	−0.0820	−0.0635	−0.0465	−0.0315
精确解	−0.1215	−0.1015	−0.0820	−0.0635	−0.0465	−0.0315
	−0.1215	−0.1013	−0.0817	−0.0630	−0.0459	−0.0307
(×10^{-3}cm)	−0.1215	−0.1013	−0.0817	−0.0630	−0.0459	−0.0307
	−0.1215	−0.1015	−0.0820	−0.0635	−0.0465	−0.0315

u 也具有同样的近似程度。

几个截面上 σ_x 与精确解对照

σ_x \ x(cm)	1	2	3	4	5	6
数值解	0.1449	0.2948	0.4372	0.5830	0.7287	0.8745
	0.0348	0.0803	0.1258	0.1732	0.2235	0.2785
(×10kg/cm^2)	−0.0619	−0.1036	−0.1474	−0.1906	−0.2324	−0.2704
	−0.1450	−0.2909	−0.4368	−0.5825	−0.7279	−0.8734
精确解	0.1500	0.3000	0.4500	0.6000	0.7500	0.9000
	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000
(×10kg/cm^2)	−0.0500	−0.1000	−0.1500	−0.2000	−0.2500	−0.3000
	−0.1500	−0.3000	−0.4500	−0.6000	−0.7500	−0.9000

σ_y、τ_{xy} 也具有同样的近似程度。

七、结　束　语

通过上述介绍可以看出，把弹性力学通解应用于有限单元法，只需在区域内部求解一个Laplace方程的计算量和存储量便可以把问题化归于求解边界上的未知量$\tilde{f}$的方程组（15）。这样做在区域内部来说约相当于用通常有限元存储量的六分之一（考虑到矩阵的对称性），无疑运算速度也将相应地大大提高。内部区域单元剖分愈密效果愈显著。

其次，应用弹性力学通解于有限单元法，应当说本文所提供的途径并不是唯一的。我们知道，弹性力学中的通解形式是很多的，如M. J. Boussinesq-Б. Г. Галеркин通解，П. Ф. Папкович-H. Nember通解等。此外还有各种应力函数等。我们认为它们也都可以相应地应用于有限单元法中去。它们与本文引用的P. M. Naghdi-C. S. Hsu通解所不同的是通解中的函数包含着可以任意变化的因素，不唯一确定。所以在具体计算中应当对这一因素加以适当处理。顺便应提及，本文方法与近年来出现的边界元方法相比，也有它的优越之处。运用边界元计算时，对奇异积分的精度要求较高，而本文的方法，则要求较低。

本文所引进的对通解的单元插值，也仅仅是一个原理上的阐述，和用位移插值一样也可用其它各式各样的插值和剖分方案。

参　考　文　献

〔1〕Naghdi, P. M. and Hsu, C. S., *J. Math. Mech.*, 10 (1961), 233—245.

〔2〕符拉索夫, B. З.等编，1917—1947三十年来的苏联力学论文集，科学出版社(1959)，188—189.

建立精密单元刚度矩阵的一种方法的改进

丁皓江　徐博侯　　陈志平
（浙江大学）　（浙江计算技术研究所）

一、引　　言

用通常的方法来计算精密单元的刚度矩阵很费事，文献〔1〕指出有“一种比较简洁的方法，它把必要的积分作了简化。在这种方法中，应力及应变用其结点值来表示。由于应力及应变多项式的阶次比位移模型至少要低一次，所以通常只要较少的应力及应变结点值就足以确定元素的应力及应变。”当研究三角形单元，单元内应变变化是线性时，则只需角结点处的三个应变值，就足以确定单元的应变[7]。但是当单元的应变变化是二次、三次甚至更高次时，与结点处的应变数目不匹配的话，显然需要将上述方法加以改进。设法改成将应力及应变用较低次的完全多项式来表示。在推导的过程中，首先求取形函数，然后给出刚度矩阵。钱伟长教授等在文献〔3〕中曾作过这方面的工作。本文的目的是力图将这一方案系统化、格式化，从而使之能适用于更多的精密单元。

对于具有18个自由度的协调的板弯曲元的刚度矩阵的推导，在文献〔2—6〕中有各种叙述。我们在求取形函数时，避免采用文献〔3〕所使用的需要一定经验与技巧的试凑法，而基本上仿文献〔5〕的一些步骤进行。在求得形函数之后，利用结点的面积座标，改写形函数的形式，以较低阶的完全多项式来表示应变，用矩阵的形式完成分块的单元刚度的显式的计算。

二、形　函　数

假设T-18单元（图1）的三个角结点的每一个有六个自由度

$$\{\delta_i\}=[w_i,\ w_{xi},\ w_{yi},\ w_{xxi},\ w_{yyi},\ w_{xyi}]^T,\quad (i=1,\ 2,\ 3) \qquad (1)$$

式中 w_{xi} 表示 $\partial w/\partial x$ 在结点 i 的值，w_{xxi} 表示 $\partial^2 w/\partial x^2$ 在结点 i 的值等。

挠度 w 可通过面积座标 $(L_1,\ L_2,\ L_3)$ 表示成如下形式：

$$w=[L]\{\alpha\} \qquad (2)$$

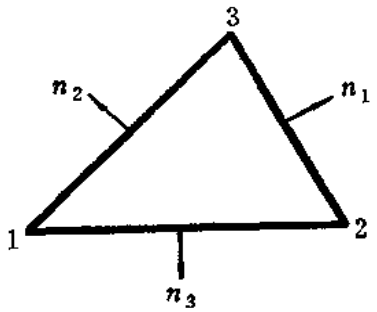


图1　三角形单元及外法线

式中

$$[L]=[L_1^5\ L_2^5\ L_3^5\ L_1^4L_2\ L_2^4L_3\ L_3^4L_1\ L_1^4L_3\ L_2^4L_1\ L_3^4L_2\ L_1^3L_2^2\ L_2^3L_3^2\ L_3^3L_1^2\ L_1^3L_3^2$$
$$L_2^3L_1^2\ L_3^3L_2^2\ L_1^3L_2L_3\ L_2^3L_3L_1\ L_3^3L_1L_2\ L_1^2L_2^2L_3\ L_2^2L_3^2L_1\ L_3^2L_1^2L_2] \quad (3)$$

$\{\alpha\}=[\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{21}]^T$ 是常数列阵。

求取形函数显式分两步进行：

1．对结点自由度为

$$\{\bar{\delta}_i\}=[w_i,\ w_{1i},\ w_{2i},\ w_{11i},\ w_{22i},\ w_{12i}]^T \quad (4)$$

时，求相应的形函数，式中 w_{1i} 表示 $\partial w/\partial L_1$ 在结点 i 的值，以及 w_{11i} 表示 $\partial^2 w/\partial L_1^2$ 在结点 i 的值等。经过并不复杂的运算可得

$$w=\sum_{i=1}^{3}[\bar{N}_i]\{\bar{\delta}_i\} \quad (5)$$

式中对应 $\{\bar{\delta}_i\}$ 的形函数矩阵

$$[\bar{N}_i]=[N_i,\ N_{1i},\ N_{2i},\ N_{11i},\ N_{22i},\ N_{12i}] \quad (6)$$

可以具体写出。

2．求相应于结点自由度 $\{\delta_i\}$ 的形函数。这只要利用面积座标与直角座标间的变换式，导出在这两个座标系中一阶偏导数间与二阶偏导数间的关系式，就很容易得到

$$w=\sum_{i=1}^{3}[N_i]\{\delta_i\} \quad (7)$$

式中形函数矩阵

$$[N_i]=[N_i,\ N_{xi},\ N_{yi},\ N_{xxi},\ N_{yyi},\ N_{xyi}] \quad (8)$$

具体写出是

$$\left.\begin{aligned}
N_1&=L_1^5+5L_1^4L_2+5L_1^4L_3+10L_1^3L_2^2+10L_1^3L_3^2+20L_1^3L_2L_3\\
&\quad-30A_{31}L_1^2L_2^2L_3-30A_{21}L_1^2L_3^2L_2\\
N_{x1}&=c_3L_1^4L_2-c_2L_1^4L_3+4c_3L_1^3L_2^2-4c_2L_1^3L_3^2+4(c_3-c_2)L_1^3L_2L_3\\
&\quad-3(5A_{31}c_3-c_1)L_1^2L_2^2L_3+3(5A_{21}c_2-c_1)L_1^2L_3^2L_2\\
N_{y1}&=\text{上式中 } c_i \text{ 用 } -b_i \text{ 代替，} A_{ij} \text{ 则不变动}\\
N_{xy1}&=-b_3c_3L_1^3L_2^2-b_2c_2L_1^3L_3^2+(b_2c_3+b_3c_2)L_1^3L_2L_3+(5A_{31}b_3c_3\\
&\quad-b_1c_3-b_3c_1)L_1^2L_2^2L_3+(5A_{21}b_2c_2-b_1c_2-b_2c_1)L_1^2L_3^2L_2\\
N_{xx1}&=\text{上式中 } b_i \text{ 用 } -\frac{1}{2}c_i \text{ 代替，} A_{ij} \text{ 则不动}\\
N_{yy1}&=N_{xy1} \text{ 右端 } c_i \text{ 用 } -\frac{1}{2}b_i \text{ 代替，} A_{ij} \text{ 则不动}\\
b_1&=y_2-y_3,\qquad c_1=x_3-x_2,\qquad (1,\ 2,\ 3)\\
A_{ij}&=B_{ij}/B_{ii},\qquad B_{ij}=b_ib_j+c_ic_j,\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3)
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

三、单元刚度矩阵

首先利用结点 1，2，3 的面积座标，将形函数表达式（9）写成一种标准形式，假设结点 i 的面积座标是 $(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$，$\xi_1=\eta_2=\zeta_3=1$，$\eta_1=\zeta_1=\xi_2=\zeta_2=\xi_3=\eta_3=0$，将式（9）改写成形式

$$[N_i]=[L][\beta^{(i)}] \tag{10}$$

式中

$$[\beta^{(i)}]=\begin{bmatrix}\beta_{1,1}^{(i)} & \beta_{1,2}^{(i)}\cdots\beta_{1,6}^{(i)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_{21,1}^{(i)} & \beta_{21,2}^{(i)}\cdots\beta_{21,6}^{(i)}\end{bmatrix} \tag{11}$$

其非零元素如表 1 所列。

曲率按下式计算

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}-w_{xx}\\ -w_{yy}\\ -2w_{xy}\end{Bmatrix}=-\frac{1}{4A^2}[T]\begin{Bmatrix}w_{11}\\ w_{22}\\ w_{12}\end{Bmatrix} \tag{12}$$

式中

$$[T]=\begin{bmatrix}b_1^2 & b_2^2 & 2b_1b_2\\ c_1^2 & c_2^2 & 2c_1c_2\\ 2b_1c_1 & 2b_2c_2 & 2(b_1c_2+b_2c_1)\end{bmatrix} \tag{13}$$

于是可得

$$\{x\}=\sum_{i=1}^{3}[B_i]\{\delta_i\}$$

式中

$$[B_i]=-\frac{1}{4A^2}[T]\begin{bmatrix}[L]_{11}\\ [L]_{22}\\ [L]_{12}\end{bmatrix}[\beta^{(i)}] \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{14}$$

而

$$[L]_{ij}=\frac{\partial^2}{\partial L_i\partial L_j}[L] \qquad (i,\ j=1,\ 2)$$

由于 $[L]_{ij}$ 的各元素是三次项，则可写成如下形式：

$$[L]_{11}=[\varphi][\alpha^{(1)}],\quad [L]_{22}=[\varphi][\alpha^{(2)}],\quad [L]_{12}=[\varphi][\alpha^{(3)}] \tag{15}$$

式中

$$[\varphi]=[L_1^3,\ L_2^3,\ L_3^3,\ L_1^2L_2,\ L_2^2L_3,\ L_3^2L_1,\ L_1^2L_3,\ L_2^2L_1,\ L_3^2L_2,\ L_1L_2L_3] \tag{16}$$

而 $[\alpha^{(i)}]=(\alpha_{jk}^{(i)})$ 是数字矩阵，各非零元素如表 2 所列。于是

$$[B_i]=-\frac{1}{4A^2}[T][\Phi][G^{(i)}] \tag{17}$$

式中

$$[\Phi]=\begin{bmatrix}\varphi & 0 & 0\\ 0 & \varphi & 0\\ 0 & 0 & \varphi\end{bmatrix},\qquad [G^{(i)}]=\begin{bmatrix}G_1^{(i)}\\ G_2^{(i)}\\ G_3^{(i)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^{(1)}\\ \alpha^{(2)}\\ \alpha^{(3)}\end{bmatrix}[\beta^{(i)}] \tag{18}$$

如通常一样将单元刚度矩阵写成如下分块形式

$$[k]^e=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{bmatrix} \tag{19}$$

其中的子矩阵按下式计算

$$[k_{ij}]=\iint [B_i]^T[D][B_j]dxdy \tag{20}$$

式中 $[D]=D[D_1]$，而

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},\quad [D_1]=\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix} \tag{21}$$

这里 h 是板厚，E 是弹性模量，μ 是泊桑比。由此可得

$$[k_{ij}]=\frac{D}{16A^4}[G^{(i)}]^T\iint[\Phi]^T[H][\Phi]dxdy[G^{(j)}] \tag{22}$$

式中对称阵 $[H]=(H_{ij})=[T]^T[D_1][T]$ 的各元素如下：

$$\left.\begin{aligned}
&H_{11}=(b_1^2+c_1^2)^2,\quad H_{13}=H_{31}=2(b_1^2+c_1^2)(b_1b_2+c_1c_2)\\
&H_{12}=H_{21}=(b_1b_2+c_1c_2)^2+\mu(b_1c_2-b_2c_1)^2\\
&H_{22}=(b_2^2+c_2^2)^2,\quad H_{23}=H_{32}=2(b_2^2+c_2^2)(b_1b_2+c_1c_2)\\
&H_{33}=2(b_1^2+c_1^2)(b_2^2+c_2^2)+2(b_1b_2+c_1c_2)^2-2\mu(b_1c_2-b_2c_1)^2
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

由于容易求得下列积分

$$\iint[\varphi]^T[\varphi]dxdy=\frac{A}{5040}[P] \tag{24}$$

式中

$$[P]=\begin{bmatrix}
180 & 9 & 9 & 30 & 3 & 12 & 30 & 12 & 3 & 6\\
 & 180 & 9 & 12 & 30 & 3 & 3 & 30 & 12 & 6\\
 & & 180 & 3 & 12 & 30 & 12 & 3 & 30 & 6\\
 & & & 12 & 3 & 3 & 6 & 9 & 2 & 3\\
 & & & & 12 & 3 & 2 & 6 & 9 & 3\\
 & & & & & 12 & 9 & 2 & 6 & 3\\
 & & & & & & 12 & 3 & 3 & 3\\
 & & & & & & & 12 & 3 & 3\\
 & & & & & & & & 12 & 3\\
 & & & & & & & & & 2
\end{bmatrix}$$

最终 $[k_{ij}]$ 可写成如下形式

$$[k_{ij}]=\frac{D}{80640A^3}\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}H_{mn}[G_m^{(i)}]^T[P][G_n^{(j)}] \tag{25}$$

式中 $[G_m^{(i)}]=[\alpha^{(m)}][\beta^{(i)}]$ 可以预先计算。

表 1　　矩阵 $[\beta^{(i)}]$ 的非零元素

第 1 列：$\beta_{11}^{(i)}=\xi_i$，$\beta_{21}^{(i)}=\eta_i$，$\beta_{31}^{(i)}=\zeta_i$，$\beta_{41}^{(i)}=\beta_{71}^{(i)}=5\xi_i$，$\beta_{51}^{(i)}=\beta_{81}^{(i)}=5\eta_i$，
$\beta_{61}^{(i)}=\beta_{91}^{(i)}=5\zeta_i$，$\beta_{101}^{(i)}=\beta_{131}^{(i)}=10\xi_i$，$\beta_{111}^{(i)}=\beta_{141}^{(i)}=10\eta_i$，$\beta_{121}^{(i)}=\beta_{151}^{(i)}=10\zeta_i$，$\beta_{161}^{(i)}=20\xi_i$，$\beta_{171}^{(i)}=20\eta_i$，
$\beta_{181}^{(i)}=20\zeta_i$，$\beta_{191}^{(i)}=-30(\xi_iA_{31}+\eta_iA_{32})$，$\beta_{201}^{(i)}=-30(\eta_iA_{12}+\zeta_iA_{13})$，$\beta_{211}^{(i)}=-30(\zeta_iA_{23}+\xi_iA_{21})$

第 2 列：$\beta_{42}^{(i)}=c_3\xi_i$，$\beta_{52}^{(i)}=c_1\eta_i$，$\beta_{62}^{(i)}=c_2\zeta_i$，$\beta_{72}^{(i)}=-c_2\xi_i$，$\beta_{82}^{(i)}=-c_3\eta_i$，$\beta_{92}^{(i)}=-c_1\zeta_i$，
$\beta_{102}^{(i)}=4c_3\xi_i$，$\beta_{112}^{(i)}=4c_1\eta_i$，$\beta_{122}^{(i)}=4c_2\zeta_i$，$\beta_{132}^{(i)}=-4c_2\xi_i$，$\beta_{142}^{(i)}=-4c_3\eta_i$，$\beta_{152}^{(i)}=-4c_1\zeta_i$，
$\beta_{162}^{(i)}=4(c_3-c_2)\xi_i$，$\beta_{172}^{(i)}=4(c_1-c_3)\eta_i$，$\beta_{182}^{(i)}=4(c_2-c_1)\zeta_i$，$\beta_{192}^{(i)}=-3((5A_{31}c_3-c_1)\xi_i$
$-(5A_{32}c_3-c_2)\eta_i)$，$\beta_{202}^{(i)}=-3((5A_{12}c_1-c_2)\eta_i-(5A_{13}c_1-c_3)\zeta_i)$，$\beta_{212}^{(i)}=-3((5A_{23}c_2-c_3)\zeta_i$
$-(5A_{21}c_2-c_1)\xi_i)$

第3列：$\beta^{(l)}_{k,3}=\beta^{(l)}_{k,2}$ 中 c_j 用 $-b_j$ 代替，A_{lm} 不动。

第6列：$\beta^{(l)}_{106}=-b_3c_3\xi_l$，$\beta^{(l)}_{116}=-b_1c_1\eta_l$，$\beta^{(l)}_{126}=-b_2c_2\xi_l$，$\beta^{(l)}_{136}=-b_2c_2\xi_l$，$\beta^{(l)}_{146}=-b_3c_3\eta_l$，
$\beta^{(l)}_{156}=-b_1c_1\xi_l$，$\beta^{(l)}_{166}=(b_2c_3+b_3c_2)\xi_l$，$\beta^{(l)}_{176}=(b_3c_1+b_1c_3)\eta_l$，$\beta^{(l)}_{186}=(b_1c_2+b_2c_1)\xi_l$，

$$\beta^{(l)}_{196}=(5A_{31}b_3c_3-b_1c_3-b_3c_1)\xi_l+(5A_{32}b_3c_3-b_2c_3-b_3c_2)\eta_l,$$

$$\beta^{(l)}_{206}=(5A_{12}b_1c_1-b_2c_1-b_1c_2)\eta_l+(5A_{13}b_1c_1-b_1c_3-b_3c_1)\xi_l,$$

$$\beta^{(l)}_{216}=(5A_{13}b_2c_2-b_3c_2-b_2c_3)\xi_l+(5A_{23}b_2c_2-b_1c_2-b_2c_1)\xi_l.$$

第4列：$\beta^{(l)}_{k,4}=\beta^{(l)}_{k,6}$ 中 b_j 用 $-c_j/2$ 代替，A_{lm} 不动。

第5列：$\beta^{(l)}_{k,5}=\beta^{(l)}_{k,6}$ 中 c_j 用 $-b_j/2$ 代替，A_{lm} 不动。

表2　　矩阵 $[\alpha^{(l)}]$ 的非零元素

$$\alpha^{(1)}_{1,1}=\alpha^{(1)}_{3,3}=\alpha^{(2)}_{2,2}=\alpha^{(3)}_{3,3}=20$$

$$\alpha^{(1)}_{4,4}=\alpha^{(1)}_{6,6}=\alpha^{(1)}_{7,7}=\alpha^{(1)}_{9,9}=\alpha^{(2)}_{5,5}=\alpha^{(2)}_{6,6}=\alpha^{(2)}_{8,8}=\alpha^{(2)}_{9,9}=\alpha^{(3)}_{9,9}=12$$

$$\alpha^{(1)}_{8,10}=\alpha^{(1)}_{7,12}=\alpha^{(1)}_{6,13}=\alpha^{(1)}_{5,15}=\alpha^{(1)}_{10,10}=\alpha^{(1)}_{10,18}=\alpha^{(2)}_{9,12}=\alpha^{(2)}_{7,12}=\alpha^{(2)}_{4,14}=\alpha^{(2)}_{10,17}=\alpha^{(2)}_{10,18}$$
$$=\alpha^{(2)}_{4,10}=\alpha^{(3)}_{7,12}=\alpha^{(3)}_{8,14}=\alpha^{(3)}_{5,15}=\alpha^{(3)}_{10,18}=6$$

$$\alpha^{(1)}_{2,11}=\alpha^{(1)}_{3,12}=\alpha^{(1)}_{1,13}=\alpha^{(1)}_{2,14}=\alpha^{(1)}_{5,19}=\alpha^{(1)}_{8,20}=\alpha^{(1)}_{4,21}=\alpha^{(1)}_{8,21}=\alpha^{(2)}_{2,10}=\alpha^{(2)}_{2,11}=\alpha^{(2)}_{1,13}=\alpha^{(2)}_{3,15}=\alpha^{(2)}_{7,19}=\alpha^{(2)}_{8,19}$$
$$=\alpha^{(2)}_{8,20}=\alpha^{(2)}_{4,21}=\alpha^{(3)}_{2,11}=\alpha^{(3)}_{1,13}=\alpha^{(3)}_{8,20}=\alpha^{(3)}_{9,20}=\alpha^{(3)}_{4,21}=\alpha^{(3)}_{6,21}=2$$

$$\alpha^{(3)}_{1,4}=\alpha^{(3)}_{2,8}=\alpha^{(3)}_{10,19}=4,\quad \alpha^{(3)}_{7,16}=\alpha^{(3)}_{9,17}=3,\quad \alpha^{(3)}_{3,15}=1,\quad \alpha^{(3)}_{1,16}=\alpha^{(3)}_{3,17}=-1$$

$$\alpha^{(1)}_{2,17}=\alpha^{(2)}_{1,16}=\alpha^{(3)}_{4,19}=\alpha^{(3)}_{8,19}=\alpha^{(3)}_{5,2}=\alpha^{(3)}_{7,21}=-2$$

$$\alpha^{(3)}_{4,16}=\alpha^{(3)}_{8,17}=\alpha^{(3)}_{6,18}=\alpha^{(3)}_{9,18}=-3$$

$$\alpha^{(1)}_{8,19}=\alpha^{(1)}_{5,20}=\alpha^{(2)}_{4,20}=\alpha^{(2)}_{7,21}=\alpha^{(3)}_{2,5}=\alpha^{(3)}_{3,5}=\alpha^{(3)}_{1,7}=\alpha^{(3)}_{3,9}=\alpha^{(3)}_{10,20}=\alpha^{(3)}_{10,21}=-4$$

$$\alpha^{(1)}_{4,16}=\alpha^{(1)}_{9,18}=\alpha^{(2)}_{5,17}=\alpha^{(2)}_{6,18}=\alpha^{(3)}_{5,11}=\alpha^{(3)}_{6,12}=\alpha^{(3)}_{7,13}=\alpha^{(3)}_{9,15}=-6$$

$$\alpha^{(1)}_{3,6}=\alpha^{(1)}_{1,7}=\alpha^{(1)}_{10,21}=\alpha^{(2)}_{2,5}=\alpha^{(2)}_{3,9}=\alpha^{(2)}_{10,20}=-8$$

$$\alpha^{(1)}_{8,12}=\alpha^{(1)}_{7,13}=\alpha^{(2)}_{5,11}=\alpha^{(2)}_{9,15}=-12$$

参　考　文　献

〔1〕Desai, C. S., Abel, J. F., 有限元素法引论（江伯南、尹泽勇译），科学出版社（1978），120.

〔2〕Holand, I., Bell, K., 有限单元法在应力分析中的应用（凌复华译），国防工业出版社（1978），179—183.

〔3〕钱伟长、谢志成、郑思梁、王瑞五，协调三角形弯曲有限元的形函数及其有关刚度矩阵，教育部高等学校1978年计算结构力学学术交流会论文集，第三集.

〔4〕Cowper, G. R., Kosko, E., Lindberg, M. M., Olson, M., *J. A. I. A. A.*, 7 (1969), 1957—1965.

〔5〕高征铨，崔俊芝，赵超燮，完全协调三角形元分析板弯曲问题，《有限元素法及其应用》（1975），276—263.

〔6〕Cook, R. D., Concepts and Applications of finite element analysis, John Wiley and Sons Inc., New York (1974), 342.

〔7〕Clough, R. W., Fellippa, C. A., *Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in struct. Mech. Ohio* (1968), 399—440.

关于有间隙弹性接触问题的解及其迭代格式

崔俊芝
（中国科学院计算中心）

一、引　　言

对于有间隙的弹性接触问题，作者在文献〔1〕中基于增量理论，给出了它们严格的数学表述形式。

我们假定接触体系由两个物体组成，$\Omega=\Omega_1+\Omega_2$，并假定接触体系已经处于一个平衡状态，初始应力为 σ^*，初始接触边界为 Γ^*，此刻在体系上施加了一组新的荷载

$$f=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},\quad \text{在}\ \Omega\ \text{上};\quad \overline{P}=\begin{bmatrix} \overline{P}_1 \\ \overline{P}_2 \end{bmatrix},\quad \text{在}\ \Gamma_\sigma\ \text{上};\quad \overline{u}=\begin{bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \end{bmatrix},\quad \text{在}\ \Gamma_u\ \text{上}。$$

求其位移、应力和接触边界的变化。对于有摩擦和无摩擦两种不同情况，作者分别给出了它们的变分不等式。

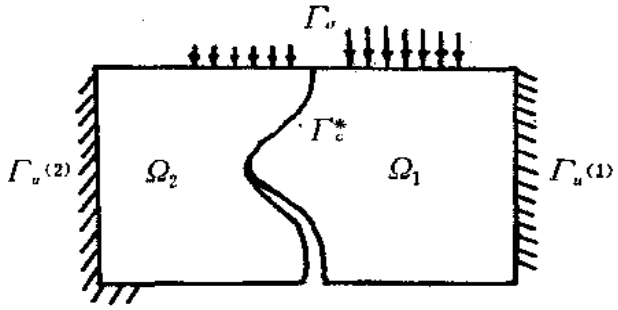


图 1　接触状态示意

1．当有摩擦存在时，其位移 u 是如下变分不等式的解：

$$P_1:\ \begin{cases} \forall v\in U_{ad} \\ a(u,\ v-u)+j(u,\ v)-j(u,\ u)\geqslant L(v-u) \end{cases} \tag{1-1}$$

其中

$$U_{ad}=\left\{v\ \middle|\ \begin{matrix} v=\{v_i\},\ v_i\in H^1(\Omega),\ v_i=\overline{u}_i,\ \text{在}\ \Gamma_u\text{上} \\ (v_l^{(2)}-v_l^{(1)})n_l+\delta^*\geqslant 0,\ \text{在}\ \Gamma_c\ \text{上} \end{matrix}\right\} \tag{1-2}$$

$$a(u,\ v)=\int_\Omega a_{ijkh}e_{kh}(u)e_{ij}(v)\,dx \tag{1-3}$$

$$L(v)=\int_{\Omega} f_i v_i\,dx+\int_{\Gamma_\sigma}\bar{P}_i v_i\,d\Gamma+\int_{\Gamma_c}[\sigma_\tau^* v_\tau+\sigma_n^* v_n]\,d\Gamma \tag{1-4}$$

$$j(u,\ v)=\int_{\Gamma_c} F(\sigma_n(u)+\sigma_n^*)^-|v_\tau|\,d\Gamma \tag{1-5}$$

δ^* 表示在可能接触面 Γ_c 上的初始间隙；F 表示摩擦系数，$F>0$；$(\ )^-$ 表示其负部；$v_\tau=v_\tau^{(2)}-v_\tau^{(1)}$，$v_n=v_n^{(2)}-v_n^{(1)}$；$v^{(i)}$ 表示在 Γ_c 上第 i 侧的值；n，τ 表示在 Γ_c 上相应于 Ω_1 的法线方向和切线方向。

2．当无摩擦存在时，$F=0$，故在 Γ_c 上

$$\sigma_\tau^*=\sigma_\tau=0,\qquad j(u,\ v)=0$$

$$L(v)=\int_{\Omega} f_i v_i\,dx+\int_{\Gamma_\sigma}\bar{p}_i v_i\,d\Gamma+\int_{\Gamma_c}\sigma_n^* v_n\,d\Gamma \tag{1-6}$$

此时，位移 u 是如下变分不等式的解

$$P_2:\begin{cases}\forall\, v\in U_{ad}\\ a(u,\ v-u)\geqslant L(v-u)\end{cases} \tag{1-7}$$

本文的重点是讨论上述问题 P_1 和 P_2 解的存在唯一性，并且对于问题 P_1 给出了一个叠代求解的格式。

二、问题 P_2 解的存在唯一性

在对 U_{ad} 的闭凸性，$a(u,\ v)$ 的对称，双线性和 V-椭圆性作了严格论述之后，问题 P_2 解的存在唯一性是一个自然的结果。

我们假定 Ω_1 和 Ω_2 均是具有规则边界的有界集，并且 $\mathrm{Meas}(\Gamma_u^{(i)})>0$。由弹性理论可知，$(a_{ijkh})$ 是对称正定矩阵，存在 $\alpha>0$，使得

$$a_{ijkh}\varepsilon_{kh}\varepsilon_{ij}\geqslant\alpha\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$$

故

$$a(u,\ v)=a(v,\ u)$$

$$a(v,\ v)\geqslant\alpha\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}(v)\varepsilon_{ij}(v)\,dx$$

令

$$V=\{v|\ v=\{v_i\},\ v_i\in H^1(\Omega)\}$$

并定义内积

$$(u,\ v)_V=(u_i,\ v_i)_{H^1(\Omega)}=\int_{\Omega}(u_i v_i+u_{i,j}v_{i,j})\,dx$$

则 V 是一个 Hilbert 空间。

命题 1 U_{ad} 是 V 上的一个闭凸集。

证明 显然，U_{ad} 是一个凸集。下面证明它是闭的。假定序列 $\{v_k\}\subset U_{ad}$，$\|v_k-v\|_V\to 0$。由迹的嵌入定理可知

$$\|v_k-v\|_{L^2(\Gamma_c)}\leqslant K_1\|v_k-v\|_V \tag{2-1}$$

且又由于

$$\| v_k - v \|_{L^1(\Gamma_c)} \leqslant K_2 \| v_k - v \|_{L^2(\Gamma)} \tag{2-2}$$

故 $\| v_k - v \|_{L^1(\Gamma_c)} \to 0$，从而在 Γ_c 上 v_k 几乎处处收敛于 v。因为

$$(\{v_k\}_i^{(2)} - \{v_k\}_i^{(1)}) n_i + \delta^* \geqslant 0$$

故在 Γ_c 上，几乎处处有

$$(v_i^{(2)} - v_i^{(1)}) n_i + \delta^* \geqslant 0$$

不失一般性，可以假定在 Γ_u 上，$\bar{u} = 0$。若令

$$V_0 = \{v | v = \{v_i\}, \quad v_i \in H_0^1(\Omega), \quad v_i = 0 \text{ 在 } \Gamma_u \text{ 上}\}$$

显然有 $V_0 \subset V$。利用 Korn's 不等式可以证明[3]，存在一个 $\alpha_0 > 0$，使得

$$a(v, v) \geqslant \alpha_0 \| v \|_{V_0}^2 \qquad \forall v \in V_0 \tag{2-3}$$

故 $a(u, v)$ 是 V-椭圆的。又因为 $L(v)$ 是线性的，故由文献〔4〕中关于第一类椭圆型变分不等式问题解的存在性定理，可知问题 P_2 的解 u 是存在唯一性的。

三、正则化 P_1 解的存在唯一性

令

$$\overline{V} = \{v | v \in V \text{ 且 } v_{i,kl} \in L^2(\Omega)\}$$

其中 $v_{i,kl}$ 表示 v_i 对 x_k 和 x_l 的二阶广义导数。在 $\overline{V}$ 上，再定义如下内积

$$(u, v)_{\overline{V}} = (u_i, v_i)_{H^2} = \int_\Omega (u_i v_i + u_{i,j} v_{i,j} + u_{i,kl} v_{i,kl}) \, dx$$

$\overline{V}$ 也是一个 Hilbert 空间。

不难看出，由式 (1-5) 表示的 $j(u, v)$，对于任意一个 $u \in U_{ad} \cap \overline{V}$，作为 v 的泛函在 V 上是真、凸且连续的。

直接证明变分不等式问题 P_1 解的存在唯一性是困难的。下面先证明正则化变分不等式问题 P_1' 解的存在唯一性。

$$P_1': \begin{cases} \text{寻求 } u \in U_{ad}', \text{ 使 } \forall v \in U_{ad}' \\ \varepsilon[u, v-u] + a(u, v-u) + j(u, v) - j(u, u) \geqslant L(v-u) \end{cases} \tag{3-1}$$

其中 $[u, v] = (u_{i,kk}, v_{i,kk})$，$\varepsilon$ 是一个正常数，$U_{ad}' = U_{ad} \cap \overline{V}$。

容易证明，U_{ad}' 是 $\overline{V}$ 上的一个闭凸集。

由于 $a(u, v)$ 是对称的，双线性的且 V-椭圆的，所以 $\varepsilon[u, v] + a(u, v)$ 也是对称的，双线性的且 $\overline{V}$-椭圆的。又由于 $j(u, v)$ 对 v 是真、凸且连续的，故运用文献〔5〕中关于第二类变分不等式问题解的存在唯一性定理，可知对于任意的 $u \in U_{ad}'$，下面的变分不等式问题 P_1'' 有唯一解 w

$$P_1'': \begin{cases} \forall v \in U_{ad}' \\ \varepsilon[w, v-w] + a(w, v-w) + j(u, v) - j(u, w) \geqslant L(v-w) \end{cases} \tag{3-2}$$

我们假定区域 Ω 足够规则，其边界足够光滑，并假定 f 和 $\overline{p}$ 很好，使得 $w \in U_{ad}'$。

下面证明，对于适当的 ε 和 F，由 P_1'' 所决定的映射 $p_1'': u \to w$ 是压缩的。假定 u_1，

$u_2 \in U^1_{ad}$，有 $p''_1(u_1)=w_1$。因为

$$\varepsilon[w_1,\ w_2-w_1]+a(w_1,\ w_2-w_1)+j(u_1,\ w_2)-j(u_1,\ w_1)\geqslant L(w_2-w_1)$$

$$\varepsilon[w_2,\ w_1-w_2]+a(w_2,\ w_1-w_2)+j(u_2,\ w_1)-j(u_2,\ w_2)\geqslant L(w_1-w_2)$$

两式相加，并整理

$$\varepsilon|w_2-w_1|^2_2+a(w_2-w_1,\ w_2-w_1)\leqslant I \tag{3-3}$$

其中

$$I=j(u_1,\ w_2)-j(u_1,\ w_1)+j(u_2,\ w_1)-j(u_2,\ w_2)$$

利用 $j(u,\ v)$ 的表示式 (1-5)，

$$\begin{aligned}
I&\leqslant\Big|\int_{\Gamma_c}F[(\sigma_n(u_1)+\sigma_n^*)^-(\sigma_n(u_2)+\sigma_n^*)^-]|w_2|\,d\Gamma\\
&\quad-\int_{\Gamma_c}F[(\sigma_n(u_1)+\sigma_n^*)^-(\sigma_n(u_2)+\sigma_n^*)^-]|w_1|\,d\Gamma\Big|\\
&\leqslant\int_{\Gamma_c}F|(\sigma_n(u_1)+\sigma_n^*)^-(\sigma_n(u_2)+\sigma_n^*)^-|\,|w_2-w_1|\,d\Gamma\\
&\leqslant\int_{\Gamma_c}F|(\sigma_n(u_1)+\sigma_n^*)-(\sigma_n(u_2)-\sigma_n^*)|\,|w_2-w_1|\,d\Gamma\\
&\leqslant\int_{\Gamma_c}F|\sigma_n(u_2)-\sigma_n(u_1)|\,|w_2-w_1|\,d\Gamma
\end{aligned}\tag{3-4}$$

由 Soblev 引理可知，u 和 w 在 $\overline{\Omega}$ 上是连续的，且

$$|w_2-w_1|_{\Gamma_c}\leqslant K_3\|w_2-w_1\|_V \tag{3-5}$$

$$\int_{\Gamma_c}F|\sigma_n(u_2)-\sigma_n(u_1)|\,d\Gamma\leqslant K_4(\mathrm{Mes}(\Gamma_c))^{\frac{1}{2}}\|u_2-u_1\|_{\overline{V}} \tag{3-6}$$

先假定 $\varepsilon<\alpha_0$，由式 (2-3) 可知式 (3-3) 可以写成

$$\begin{aligned}
\varepsilon\|w_2-w_1\|^2_{\overline{V}}+(\alpha_0-\varepsilon)\|w_2-w_1\|^2_V&\leqslant(\mathrm{Mes}(\Gamma_c))^{\frac{1}{2}}\\
&\cdot FK_3K_4\|u_2-u_1\|_{\overline{V}}\|w_2-w_1\|_V
\end{aligned}\tag{3-7}$$

进一步整理可得

$$\varepsilon\|w_2-w_1\|^2_{\overline{V}}\leqslant\frac{(FK_3K_4)^2}{4(\alpha_0-\varepsilon)}(\mathrm{Mes}(\Gamma_c))^{\frac{1}{2}}\|u_2-u_1\|^2_{\overline{V}} \tag{3-8}$$

从而可知，当

$$\frac{(FK_3K_4)^2}{4\varepsilon(\alpha_0-\varepsilon)}(\mathrm{Mes}(\Gamma_c))^{\frac{1}{2}}<1 \tag{3-9}$$

时，p''_1 为压缩映射。若 $\varepsilon\geqslant\alpha_0$，则当

$$\frac{FK_3K_4}{\alpha_0}<1 \tag{3-10}$$

时，p''_1 也是压缩的。因为 K_3，K_4 是常数，故对于任意的 $\varepsilon>0$，只要适当地控制可滑动的接触面 Γ_c 并使摩擦系数足够小，就能使映射 p''_1 具有不动点 $p''(u)=u$，从而变分不等式问题 P^1_1 有解 u。

命题 2　问题 P^1_1 的解是唯一的。

事实上，假若问题 P^1_1 有解 u_1，u_2，故

$$\varepsilon[u_1,\ v-u_1]+a(u_1,\ v-u_1)+j(u_1,\ v)-j(u_1,\ u_1)\geqslant L(v-u_1)\quad\forall v\in U^1_{ad}$$

$$\varepsilon[u_2,\ v-u_2]+a(u_2,\ v-u_2)+j(u_2,\ v)-j(u_2,\ u_2)\geqslant L(v-u_2)\quad\forall v\in U_{ad}$$

将 u_2 作为 v 代入前一式，将 u_1 作为 v 代入后一式，相加并整理可得

$$\varepsilon \| u_2-u_1 \|_V^2 \leqslant \frac{(FK_3K_4)^2}{4(\alpha_0-\varepsilon)} (\mathrm{Mes}(\Gamma_c))^{\frac{1}{2}} \| u_2-u_1 \|_V^2$$

从而

$$0 \leqslant \| u_2-u_1 \|_V^2 \left(1-\frac{(FK_3K_4)^2}{4\varepsilon(\alpha_0-\varepsilon)}\right)(\mathrm{Mes}(\Gamma_c))^{\frac{1}{2}} \leqslant 0$$

故由式（3-9）可知，只有 $u_1=u_2$。

四、迭 代 格 式

P_1' 中的正则项 $\varepsilon[u, v]$，纯系为了应合线积分项 $\int_{\Gamma_c} F|\sigma_n(u_1)-\sigma_n(u_2)||w_2-w_1|d\Gamma$，保持同等意义下的模量而引入的。在实际的弹性接触问题里，可以通过减小荷载增量，使发生摩擦滑动的边界 Γ_c 尽可能小，即减少 $\mathrm{Meas}(\Gamma_c)$，又由于摩擦系数一般都很小，并且可以通过假定区域 Ω 的边界足够光滑，又 f 和 P 也足以保证使解 u 及 w 一阶连续可微。因此，可以使得在问题 P_1 解的一个适当的领域 U_{ad}'' 内，具有

$$\int_{\Gamma_c} |\sigma_n(u_1)-\sigma_n(u_2)|d\Gamma \leqslant [a(u_1-u_2,\ u_1-u_2)]^{\frac{1}{2}}$$

从而，下列变分不等式问题

$$P_3 \ : \begin{cases} \text{对于任意一个 } u\in U_{ad}', \ \exists\, w, \text{ 使得 } \forall v\in U_{ad}' \\ a(w,\ v-w)+j(u,\ v)-j(u,\ w) \quad \geqslant L(v-w) \end{cases} \tag{4-1}$$

在 $U_{ad}''\subset U_{ad}'$ 内，构成了由 $u\to w$ 的压缩映射 $p_3: p_3(u)=w$。从而有：

命题 3：假定 u 是问题 P_1 的解，$u'\in S(u,\ r)\subset U_{ad}''$，$p_3(u')=w$，则 $w\in S(u,\ r)$。

由命题 3 作保证，我们可以设计如下叠代格式：

$$a(u^{n+1},\ v-u^{n+1})+j(u^n,v)-j(u^n,\ u^{n+1})$$
$$\geqslant L(v-u^{n+1}) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \quad \forall v\in U_{ad}' \tag{4-2}$$

u^0 可以通过如下方法求得：在 Γ_c^* 上，取 $v_t^{(1)}=v_t^{(2)}$，按所加荷载求一个近似解 u'，在新接触面上，适当修改位移 u' 使其不嵌入，以此作为 u^0。

参 考 文 献

〔1〕崔俊芝，关于有间隙的弹性接触问题，力学学报，3（1980）。

〔2〕冯康，石钟慈，弹性结构的数学理论，科学出版社。

〔3〕Duvant, G. and Lions, J. L., Les Inequationsin Mechanique et en Physique, Dunod, Paris (1972).

〔4〕Mosco, U., An Introduction to the Approximate Solution of Variational Inequalities, Instituto Mathematico G, Castelnuovo Vniversita' Degli Studi di Roma.

〔5〕Glowinski, R., Numerical Method for Nonlinear Variational Problem, Framce (1979).

大型广义特征值问题一个新解法

张　文　　侯志坤

（上海复旦大学）

一、前　　言

大型广义特征值问题，工程上早先多采用 Guyan[1] 降阶。因该法略去副自由度惯性力，带来一定误差，尤其对高频。为此，Kuhar[2,3] 等人作了改进，提出“动力变换”，这实为一个很好思路，但作者侧重展示一系列算例，而对参数选取、收敛性等未作详细理论探讨。此外，作者只限于讨论由模态综合法导出的一类特征值问题，其副自由度自然地选为远离关心频段的部件模态座标。对一般广义特征值问题（如有限元导出的）如何执行该法，作者未予考虑。本文对 Kuhar 的方法在理论上作了进一步探讨。

二、已有降阶法

1．Guyan 降阶　对结构作动力分析，其广义特征值问题为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}=\omega^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} \tag{2-1}$$

将 $\boldsymbol{X}$ 区分为 $\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$，得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12}\\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}=\omega^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12}\\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix} \tag{2-2}$$

Guyan 建议，略去对 $\boldsymbol{X}_2$ 的惯性力项，于是解得

$$\boldsymbol{X}_2=-\boldsymbol{K}_{22}^{-1}\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{X}_1 \tag{2-3}$$

因此

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{X}_1 \tag{2-4}$$

$\boldsymbol{T}$ 为变换阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{K}_{22}^{-1}\boldsymbol{K}_{21}\end{pmatrix} \tag{2-5}$$

式（2-4）代入式（2-1）并左乘 $\boldsymbol{T}^T$，得降阶特征值问题

$$(\boldsymbol{K}^*-\omega^2\boldsymbol{M}^*)\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{0} \tag{2-6}$$

$$\boldsymbol{K}^*=\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{T},\quad \boldsymbol{M}^*=\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} \tag{2-7}$$

Guyan 降阶为一种工程近似，一旦惯性效应明显，就有较大误差。

2．Kuhar 降阶（动力变换）　重新考虑式（2-2），若 ω_j^2、$\boldsymbol{X}_j^T=\lfloor\boldsymbol{X}_1^T\vdots\boldsymbol{X}_2^T\rfloor_j$ 为其第 j 个特征值和特征向量，则

$$\boldsymbol{X}_{2j}=-[\boldsymbol{K}_{22}-\omega_j^2\boldsymbol{M}_{22}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{21}-\omega_j^2\boldsymbol{M}_{21}]\boldsymbol{X}_{1j} \tag{2-8}$$

式（2-8）为特征值 ω_j^2 下主副自由度间真实转换关系。ω_j^2 未知时该转换关系未知。对低频，ω_j^2 较小可近似略去，式（2-8）退化为式（2-3），而对较高频则不能略去。Kuhar 建议，可取一个接近 ω_j^2 的已知值 P 代替它，式（2-8）化为

$$\boldsymbol{X}_2 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{X}_1 \tag{2-9}$$

$$\boldsymbol{R} = -[\boldsymbol{K}_{22} - P\boldsymbol{M}_{22}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{21} - P\boldsymbol{M}_{21}] \tag{2-10}$$

座标转换关系为

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{R} \end{pmatrix} \boldsymbol{X}_1 \tag{2-11}$$

代入式（2-1）左乘 $[\boldsymbol{I} \vdots \boldsymbol{R}^T]$ 得降阶特征值问题

$$(\boldsymbol{K}^* - \omega^2 \boldsymbol{M}^*)\boldsymbol{X}_1 = 0 \tag{2-12}$$

$$\boldsymbol{M}^* = [\boldsymbol{I} \vdots \boldsymbol{R}^T]\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{R} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{K}^* = [\boldsymbol{I} \vdots \boldsymbol{R}^T]\boldsymbol{K}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{R} \end{pmatrix} \tag{2-13}$$

Kuhar 称它为“动力变换”，而把 Guyan 的称为“静力变换”（$P=0$）。“动力变换”仍为一种工程近似。

三、动力变换降阶迭代法

本文将证明如下结论：将式（2-12）之解 ω_j^2 作为新的 p 值代入式（2-10）重复上述过程，如此叠代可逼近到原系统真实解。计算流程如下：

设 $p_j^{(k)}$ 为 ω_j^2 的第 k 次叠代近似值，作

$$\boldsymbol{R}_j^{(k)} = -[\boldsymbol{K}_{22} - p_j^{(k)}\boldsymbol{M}_{22}]^{-1}[\boldsymbol{K}_{21} - p_j^{(k)}\boldsymbol{M}_{21}] \tag{3-1}$$

$$\boldsymbol{K}_j^{(k)} = [\boldsymbol{I} \vdots \boldsymbol{R}_j^{(k)T}]\boldsymbol{K}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{R}_j^{(k)} \end{pmatrix} \tag{3-2}$$

$$\boldsymbol{M}_j^{(k)} = [\boldsymbol{I} \vdots \boldsymbol{R}_j^{(k)T}]\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{R}_j^{(k)} \end{pmatrix} \tag{3-3}$$

$$(\boldsymbol{K}_j^{(k)} - \lambda \boldsymbol{M}_j^{(k)})\boldsymbol{X}_1 = 0 \tag{3-4}$$

解出其第 j 个特征值 λ_j，并取 $p_j^{(k+1)} = \lambda_j$，就完成一次叠代，重复上述过程，直至

$$|p_j^{(n+1)} - p_j^{(n)}| < \varepsilon \text{ 或 } \left|\frac{p_j^{(n+1)} - p_j^{(n)}}{p_j^{(n+1)}}\right| < \varepsilon \tag{3-5}$$

ε 为预先指定的一个误差量。$p_j^{(n+1)}$ 对应的式（3-4）的特征向量为 $\overline{\boldsymbol{X}}_1^{(n_j+1)}$，并由式（3-1）求出（此时 $k=n+1$）

$$\overline{\boldsymbol{X}}_2^{(n_j+1)} = \boldsymbol{R}_j^{(n+1)}\overline{\boldsymbol{X}}_1^{(n_j+1)} \tag{3-6}$$

从而求得 $\boldsymbol{X}_j$ 的逼近解 $\overline{\boldsymbol{X}}_j$。

此即本文提出的动力变换降阶叠代法。实际执行时，可以从静力变换开始。

四、收敛性证明，主副自由度选取准则

先提出二个定理：

定理 1 若特征值问题 $(\boldsymbol{K}-\lambda\boldsymbol{M})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 之解为 λ_i，Φ_i，另一特征值问题 $(\lceil\boldsymbol{K}+\varepsilon\overline{\boldsymbol{M}}\rceil-\lambda\lceil\boldsymbol{M}+\varepsilon\overline{\boldsymbol{M}}\rceil)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 之解为 $\bar{\lambda}_i$、$\overline{\Phi}_i$，ε 为一小量。则

$$\bar{\lambda}_i=\lambda_i\left(1+\varepsilon\left(\frac{\overline{K}_{ii}}{K_{ii}}-\frac{\overline{m}_{ii}}{m_{ii}}\right)\right)+O(\varepsilon^2)$$

$$\overline{\Phi}_i=\Phi_i+\varepsilon\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\left(\lambda_j\frac{\overline{K}_{ij}}{K_{jj}}-\lambda_i\frac{\overline{m}_{ij}}{m_{jj}}\right)\Phi_j+\boldsymbol{0}(\varepsilon^2)$$

其中

$$K_{ii}=\Phi_i^T\boldsymbol{K}\Phi_i,\qquad m_{ii}=\Phi_i^T\boldsymbol{M}\Phi_i$$
$$\overline{K}_{ij}=\Phi_i^T\overline{\boldsymbol{K}}\Phi_j,\qquad \overline{m}_{ij}=\Phi_i^T\overline{\boldsymbol{M}}\Phi_j$$

简言之，刚度与质量阵一级摄动引起特征值特征向量一级摄动。证明见文献〔5〕。

定理 2 ε 为小量时，有矩阵展开式

$$\lceil\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{B}\rceil^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\varepsilon\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\cdots$$

证明见附录。

现证，若 $p_j^{(k)}=\omega_j^2+\varepsilon$，则 $p_j^{(k+1)}=\omega_j^2+O(\varepsilon^2)$，即经一次叠代，特征值精度提高一个量级，由此证得叠代收敛性。

设 ω_j^2、$\boldsymbol{X}_j^T=\lfloor\boldsymbol{X}_1^T\vdots\boldsymbol{X}_2^T\rfloor_j$ 为原特征值问题 (2-2) 的真解，则

$$(\boldsymbol{K}_j^*-\omega_j^2\boldsymbol{M}_j^*)\boldsymbol{X}_{1j}=\boldsymbol{0}\tag{4-1}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_j^*=\lceil\boldsymbol{I}\vdots\boldsymbol{R}_j^T\rceil\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \cdots\\ \boldsymbol{R}_j\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{M}_j^*=\lceil\boldsymbol{I}\vdots\boldsymbol{R}_j^T\rceil\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \cdots\\ \boldsymbol{R}_j\end{pmatrix}\tag{4-2}$$

$$\boldsymbol{R}_j=-\lceil\boldsymbol{K}_{22}-\omega_j^2\boldsymbol{M}_{22}\rceil^{-1}\lceil\boldsymbol{K}_{21}-\omega_j^2\boldsymbol{M}_{21}\rceil\tag{4-3}$$

设 $p_j^{(k)}=\omega_j^2+\varepsilon$，代入 (3-1)，由定理 2 得

$$\boldsymbol{R}_j^{(k)}=\boldsymbol{R}_j+\varepsilon\boldsymbol{\Delta}_j+\cdots\tag{4-4}$$

$$\boldsymbol{\Delta}_j=+\lceil\boldsymbol{K}_{22}-\omega_j^2\boldsymbol{M}_{22}\rceil^{-1}\lceil\boldsymbol{M}_{21}-\boldsymbol{M}_{22}\boldsymbol{R}_j\rceil\tag{4-5}$$

(4-4) 代入 (3-2)、(3-3)，略去 ε 高阶项，得

$$\boldsymbol{K}_j^{(k)}=\boldsymbol{K}_j^*+\varepsilon\overline{\boldsymbol{K}}_j,\qquad \boldsymbol{M}_j^{(k)}=\boldsymbol{M}_j^*+\varepsilon\overline{\boldsymbol{M}}_j\tag{4-6}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{K}}_j=\lceil\boldsymbol{0}\vdots\boldsymbol{\Delta}_j^T\rceil\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \cdots\\ \boldsymbol{R}_j\end{pmatrix}+\lceil\boldsymbol{I}\vdots\boldsymbol{R}_j^T\rceil\boldsymbol{K}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \cdots\\ \boldsymbol{\Delta}_j\end{pmatrix}\tag{4-7}$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}_j=\lceil\boldsymbol{0}\vdots\boldsymbol{\Delta}_j^T\rceil\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \cdots\\ \boldsymbol{R}_j\end{pmatrix}+\lceil\boldsymbol{I}\vdots\boldsymbol{R}_j^T\rceil\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \cdots\\ \boldsymbol{\Delta}_j\end{pmatrix}\tag{4-8}$$

(4-6) 代入 (3-4)

$$(\lceil\boldsymbol{K}_j^*+\varepsilon\overline{\boldsymbol{K}}_j\rceil-\lambda\lceil\boldsymbol{M}_j^*+\varepsilon\overline{\boldsymbol{M}}_j\rceil)\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{0}\tag{4-9}$$

对照 (4-9)和(4-1)，由定理 1，(4-9) 的第 j 个特征值为

$$p_j^{(k+1)}=\lambda_j=\omega_j^2\left(1+\varepsilon\left(\frac{\overline{K}_{jj}}{K_{jj}}-\frac{\overline{m}_{jj}}{m_{jj}}\right)\right)+O(\varepsilon^2) \tag{4-10}$$

但

$$\overline{K}_{jj}=X^T{}_{1j}\overline{K}_j X_{1j}=2X^T{}_{1j}[0\ \vdots\ \Delta_j^T]\begin{pmatrix}K_{11}&\vdots&K_{12}\\\cdots&\vdots&\cdots\\K_{21}&\vdots&K_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I\\\cdots\\R_j\end{pmatrix}X_{1j}$$

$$=2X^T{}_{1j}\Delta_j^T[K_{21}+K_{22}R_j]X_{1j}$$

$$\overline{m}_{jj}=2X^T{}_{1j}\Delta_j^T[M_{21}+M_{22}R_j]X_{1j}$$

于是

$$\frac{\overline{K}_{jj}}{K_{jj}}-\frac{\overline{m}_{jj}}{m_{jj}}=\frac{1}{K_{jj}}(\overline{K}_{jj}-\omega_j^2\overline{m}_{jj})$$

$$=\frac{2}{K_{jj}}X^T{}_{1j}\Delta_j^T([K_{21}-\omega_j^2M_{21}]+[K_{22}-\omega_j^2M_{22}]R_j)X_{1j}=0$$

故（4-10）化为

$$p_j^{(k+1)}=\omega_j^2+O(\varepsilon^2)$$

随特征值的逐次逼近，由定理 1，特征向量亦同量级逼近。且而证得，动力变换降阶叠代法，是通过降阶求解大型广义特征值问题的精确方法而不再是工程近似。且叠代以等比级数姿态快速收敛。

上述证明过程中唯一的限制要求是（4-3）中逆阵存在，即

$$|K_{22}-\omega_j^2M_{22}|\neq 0 \tag{4-11}$$

其力学涵义是 ω_j^2 不是纯副自由度系统特征值。只要主自由度不至于选得这样，使结构在某一振型时主自由度全为零值，即可保证叠代收敛。（4-11）即为本文导出的主副自由度选取准则。

五、算　　例

例 1　考虑图 1 简支梁横振动。梁分成二单元三节点。端节点各具一转动自由度 θ_1、θ_2。中央节点具位移和转角两自由度 y_2、θ_2，取 $\varphi_i=\theta_i l$，由梁单元刚度和一致质量阵[4]，该横振动特征值问题为

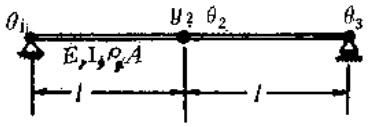


图 1

$$\left(\begin{pmatrix}12&0&-3&3\\0&4&1&1\\-3&1&2&0\\3&1&0&2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}312&0&13&-13\\0&8&-3&-3\\13&-3&4&0\\-13&-3&0&4\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}y_2\\\varphi_2\\\varphi_1\\\varphi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{5-1}$$

其中

$$\lambda=\frac{\rho Al^4}{840EI}\omega^2 \tag{5-2}$$

区分对称和反称振动，容易解出其基频和基振型真解：

$$\omega_1=2.477\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}}\ ;\quad 1:0:1.57:1.57 \tag{5-3}$$

二频和第二振型：

$$\omega_2=10.954\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}}\ ,\quad 0:1:-1:-1 \tag{5-4}$$

现对（5-1）降阶，取 $\boldsymbol{X}_1=[y_2,\ \varphi_2]^T$，$\boldsymbol{X}_2=[\varphi_1,\ \varphi_2]^T$。先作静力变换，由（2-6）得

$$\left(\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}408&0\\0&16\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{0}$$

解出 $\lambda_1=-\frac{1}{136}$，$\lambda_2=\frac{3}{16}$，或

$$\varpi_1^{(0)}=2.485\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}}\ ,\quad 1:0:1.50:1.50$$

$$\varpi_2^{(0)}=12.55\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}}\ ,\quad 0:1:-0.5:-0.5$$

对照精确解（5-3）、（5-4），基频误差千分之三，基振型误差 4.6%，二频误差 14.57%，第二振型误差 50%。可见 Guyan 降阶对二频严重失真。

现执行本法，此处仅写出二频的叠代过程，取静力变换结果作初值：$p_2^{(1)}=\frac{3}{16}$，由（3-4）得

$$\left(\begin{bmatrix}35.49&0\\0&21/4\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}689.58&0\\0&71/2\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{0}$$

解出其二频 $\lambda_2=\frac{21}{142}$。或 $\varpi_2^{(1)}=11.1456\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}}$。可见，一次叠代已使二频误差降为 1.8%。取 $p_2^{(1)}=\frac{21}{142}$ 作第二次叠代得

$$\left(\begin{bmatrix}189201&0\\0&41025\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}5914602&0\\0&287050\end{bmatrix}\right)\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{0}$$

解出 $\lambda_2=\frac{41025}{287050}$ 或 $\varpi_2^{(2)}=10.9568\sqrt{\frac{EI}{\rho Al^4}}$，误差仅万分之二，对应振型 $0:1:-1.00031:-1.00031$，误差仅万分之三。

例 2 为某压气机叶片作了静频分析，采用八节点厚壳超参单元，分叶片 21 单元、385 个自由度，见图 2。存放其刚度和质量阵下三角元需 14 万单元，为目前容量不许。现取节点中面法向位移为主自由度其余 308 个副自由度作动力变换降阶叠代。需注意，容量限制不可能全部形成刚度和质量阵后再降阶（能这样就无须降阶了）。采用对副自由度逐个边形成边降阶技巧。因为，若 x_s 为副自由度，则（2-13）$\boldsymbol{M}^*$ 和 $\boldsymbol{K}^*$ 的元素为

$$M_{ij}^*=M_{ij}-d_iM_{sj}-d_jM_{is}+d_id_jM_{ss}$$
$$K_{ij}^*=K_{ij}-d_iK_{sj}-d_jK_{is}+d_id_jK_{ss}\qquad(i\neq s,\ j\neq s)$$

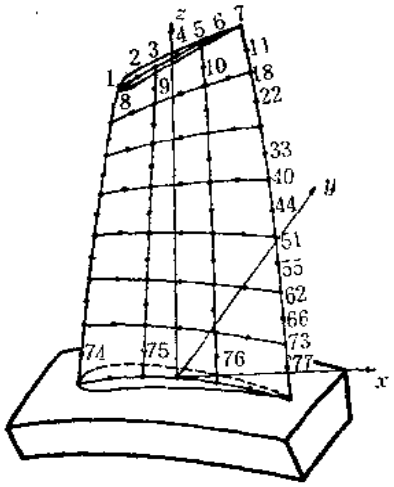


图 2

其中

$$d_i=\frac{K_{si}-pM_{si}}{K_{ss}-pM_{ss}}$$

可见，凡与 x_s 无刚度和惯性耦合的 x_i，有 $K^*_{ij}=K_{ij}$，$M^*_{ij}=M_{ij}$。因此可合理节点编号而分批降阶。计算结果见表，其中亦有实验值。

压气机叶片静频计算　　表1

	第一次叠代	第二次叠代	第三次叠代	实验值
基频 (Hz)	266.70	261.3		263
二频 (Hz)	1206.0	(缺)		1160
三频 (Hz)	1691.5	1649.5	1649.46	1590
四频 (Hz)	3156.0	3209.2		3201

因叠代增加的算时可从 n 阶特征值问题退缩为低阶的来弥补，加上收敛较快，算时增加不多而容量矛盾解决是根本的。

参　考　文　献

〔1〕Guyan, R. J., *AIAA. J.*, **3**, 2 (1965), 380.

〔2〕Kuhar, E. J., Stable, C. V., *AIAA. J.*, **12**, 5 (1974), 672—678.

〔3〕Kuhar, E. J., The Shock and Vibration Bulletin, part 2 (1974), Bulletin 44, 91—102.

〔4〕普齐米尼斯基著，王德荣等译校，矩阵结构分析理论，国防工业出版社 (1974), 101, 56, 202.

〔5〕Stetson, K. A., *AIAA. J.*, **13**, 4 (1975), 457—459.

附　录

证明：设特征值问题 $(A-\lambda B)X=0$ 之解为 λ_i，Φ，由正交性条件：

$$\Phi^TA\Phi=(\diagdown k_{ii}\diagdown),\quad \Phi^TB\Phi=(\diagdown m_{ii}\diagdown)$$

解出

$$A=\Phi^{-T}(\diagdown k_{ii}\diagdown)\Phi^{-1},\quad B=\Phi^{-T}(\diagdown m_{ii}\diagdown)\Phi^{-1} \tag{1}$$

于是

$$(A-\varepsilon B)^{-1}=(\Phi^{-T}(\diagdown k_{ii}-\varepsilon m_{ii}\diagdown)\Phi^{-1})^{-1}=\Phi\left(\diagdown \frac{1}{k_{ii}-\varepsilon m_{ii}}\diagdown\right)\Phi^T \tag{2}$$

取 $\varepsilon=0$ 得

$$A^{-1}=\Phi\left(\diagdown \frac{1}{k_{ii}}\diagdown\right)\Phi^T \tag{3}$$

当 ε 为小量时，有展开式：

$$\left(\diagdown \frac{1}{k_{ii}-\varepsilon m_{ii}}\diagdown\right)=\left(\diagdown \frac{1}{k_{ii}}\diagdown\right)+\varepsilon\left(\diagdown \frac{1}{k_{ii}}\diagdown\right)(\diagdown m_{ii}\diagdown)\left(\diagdown \frac{1}{k_{ii}}\diagdown\right)+\cdots$$

代入式（2）并利用式（3）得

$$(A-\varepsilon B)^{-1}=A^{-1}+\varepsilon A^{-1}BA^{-1}+\cdots$$

刚度改变对线性弹性系统频率和振型的影响

胡 守 信
（吉林大学）

一、新系统的频率方程和振型方程

设有 n 自由度的线性弹性系统（称为原系统），其广义座标向量为 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，其动能和势能所对应的二次型分别为 $A(x,\ x)$，$C(x,\ x)$。假设原系统的固有频率和振型都已求得，即有已知的特征向量矩阵

$$D_0=[d_0^1,\cdots,\ d_0^n] \tag{1}$$

将 A，C 化为标准型

$$D_0^TAD_0=E,\quad D_0^TCD_0=[\lambda_{0i}] \tag{2}$$

式中各量的下标“0”表示该量属于原系统，如 λ_{0i} 是原系统的特征值，d_0^i 是其特征向量。

现在假定在原系统的某些自由度间加上 r_1 个弹性连结和 r_2 个线性齐次约束（相当于刚性连结）。由于加上了弹性连结，新系统的势能二次型比起原系统增加了 r_1 个平方和

$$\sum_{i=1}^{r_1}k_i(x^Tb^i)^2=x^TB_1[k_i]B_1^Tx \tag{3}$$

式中 $k_i\neq0$ 为弹性连结的刚度系数。矩阵 $[k_i]$ 为以 k_i 为对角元素的对角阵。矩阵

$$B_1=[b^1,\ \cdots,\ b^{r_1}] \tag{4}$$

另 r_2 个约束条件可以表成

$$B_2^Tx=0 \tag{5}$$

这里，矩阵

$$B_2=[b^{r_1+1},\ \cdots,\ b^{r_1+r_2}] \tag{6}$$

新系统的特征值问题的解，可化为求二次型

$$x^T(C+B_1[k_i]B_1^T)x \tag{7}$$

在约束条件

$$\left.\begin{aligned}&A(x,\ x)=\text{常数}\\&B_2^Tx=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

下的极值问题。用求条件极值的拉氏乘子法，可得方程组

$$(\lambda A-C-B_1[k_i]B_1^T)x-B_2t^2=0 \tag{9}$$

这里 λ 与向量 t^2 都是拉氏乘子。

现在引入

$$t^1=[K_i]B_1^Tx\ \text{或}\ [K_i]^{-1}t^1=B_1^Tx \tag{10}$$

$$t=\begin{bmatrix}t^1\\t^2\end{bmatrix} \tag{11}$$

式（9）可以写成

$$(\lambda A-C)\boldsymbol{x}=[B_1,\ B_2]\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}^1\\ \boldsymbol{t}^2\end{bmatrix}=B\boldsymbol{t} \tag{12}$$

式中

$$B=[B_1,\ B_2]=[\boldsymbol{b}^1,\ \cdots,\ \boldsymbol{b}^{r_1+r_2}] \tag{13}$$

式（5）和式（10）可以合并写成

$$-B^T\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}[K_t]^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{t}=0 \tag{14}$$

为了简单，记

$$K_0^{-1}=\begin{bmatrix}[K_t]^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{15}$$

式（12），（15）结合就可以写成

$$\begin{pmatrix}\lambda A-C & -B\\ -B^T & K_0^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{t}\end{pmatrix}=0 \tag{16}$$

再引入新变量

$$y=D_0^T\boldsymbol{x},\qquad H=D_0^TB=[H_1,\ H_2]$$

将式（16）左乘以矩阵$\begin{pmatrix}D_0^T & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}$，注意到式（2）就得到

$$\begin{pmatrix}[\lambda-\lambda_{0t}] & -H\\ -H^T & K_0^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{t}\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{t}\end{pmatrix}=0 \tag{17}$$

新系统的特征方程便是

$$|T|=\begin{vmatrix}[\lambda-\lambda_{0t}] & -H\\ -H^T & K_0^{-1}\end{vmatrix}=0 \tag{18}$$

下面讨论方程（17）。一种方法是将式（17）左乘以矩阵

$$S_1=\begin{pmatrix}E & 0\\ H^T[\lambda-\lambda_{0t}]^{-1} & E\end{pmatrix}$$

得

$$\begin{pmatrix}[\lambda-\lambda_{0t}] & -H\\ 0 & K_0^{-1}-H^T[\lambda-\lambda_{0t}]^{-1}H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{t}\end{pmatrix}=0 \tag{19}$$

取此方程的系数行列式，由于$|S_1|=1$，得特征方程

$$|T|=|S_1T|=\prod_t(\lambda-\lambda_{0t})\ |K_0^{-1}-H^T[\lambda-\lambda_{0t}]^{-1}H|=0 \tag{18}'$$

我们可由式（18）求出新系统的特征值，记为$\lambda_j(k)$（$j=1,\cdots,\ n-r_2$）。如果某特征值$\lambda_j(k)$与所有的λ_{0t}都不相等，则由方程（19）的第二行，得到t所满足的方程

$$(K_0^{-1}-H^T[\lambda-\lambda_{0t}]^{-1}H)\boldsymbol{t}=0 \tag{20}$$

由此解出t后，再由式（19）的第一行可得

$$y=[\lambda-\lambda_{0t}]^{-1}H\boldsymbol{t} \tag{21}$$

或

$$\boldsymbol{x}=D_0[\lambda-\lambda_{0t}]^{-1}H\boldsymbol{t} \tag{21}'$$

另一个办法是引入新的广义座标向量q

$$\left.\begin{aligned} q=\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} (\bar{B}_2^T\bar{B}_2)^{-1}\bar{B}_2^T \\ B_2^T \end{pmatrix}x \\ x&=[\bar{B}_2,\ B_2(B_2^TB_2)^{-1}]q \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式中 $\bar{B}_2$ 称为 B_2 的余矩阵。一个矩阵 A 的余矩阵 $\bar{A}$，定义为满足条件，

$$A^T\bar{A}=0,\quad \text{秩}\ A+\text{秩}\ \bar{A}=n$$

的矩阵，就是说，A 和 $\bar{A}$ 的列向量所张开的两个子空间互为另一个的正交余子空间。下面我们假定所取的余矩阵均为高矩阵，即秩数等于列数的矩阵。记

$$D_0^{-1}\bar{B}_2=\bar{H}_2,\quad S_3=D_0^{-1}B_2(B_2^TB_2)^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1^{-1}x \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{H}_2 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ t \end{pmatrix} \tag{23}$$

令

$$S_2=\begin{pmatrix} \bar{H}_2 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

将变换式 (23) 代入方程 (17)，并左乘 S_2^T、得

$$S_2^TTS_2\begin{pmatrix} q \\ t \end{pmatrix}=0 \tag{24}$$

把 $S_2^TTS_2$ 具体计算一下，可将上式写成

$$S_2^TTS_2\begin{pmatrix} q \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{H}_2^T[\lambda-\lambda_{0t}]\bar{H}_2 & \bar{H}_2[\lambda-\lambda_{0t}]S_3 & -\bar{H}_2^TH_1 & 0 \\ S_3^T[\lambda-\lambda_{0t}]\bar{H}_2 & S_3^T[\lambda-\lambda_{0t}]S_3 & -S_3^TH_1 & E \\ -H_1^T\bar{H}_2 & -H_1^TS_3 & [K_t]^{-1} & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ t^1 \\ t^2 \end{pmatrix}=0 \tag{25}$$

特征方程由 $|S_2^TTS_2|=0$ 得到。由于

$$\begin{aligned} |S_2^TTS_2|&=\begin{vmatrix} \bar{H}_2^T[\lambda-\lambda_{0t}]\bar{H}_2 & -H_2^TH_1 \\ -H_1^T\bar{H}_2 & [k_t]^{-1} \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} \bar{H}_2^T[\lambda-\lambda_{0t}]\bar{H}_2 & -\bar{H}_2^TH_1 \\ -H_1^T\bar{H}_2 & [k_t]^{-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & 0 \\ [k_t]H_1^T\bar{H}_2 & E \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} \bar{H}_2^T([\lambda-\lambda_{0t}]-H_1[k_t]H_1^T)\bar{H}_2 & -\bar{H}_2^TH_1 \\ 0 & [k_t]^{-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{26}$$

故特征方程为

$$|\bar{H}_1^T(\lambda-\lambda_{0t}]-H_1[k_t]H_1^T)\bar{H}_2|=|\bar{B}_2^T(\lambda A-C-B_1[k_t]B_1^T)\bar{B}_2|=0 \tag{27}$$

这一方程是比较直观的，因为增加了 r_1 个弹性连结，势能二次型上增加了一项 $x^TB_1[k_t]B_1^Tx$，又由于 r_2 个刚性约束，$B_2^Tx=0$，故可以引入独立的广义座标 q^1，使 $x=\bar{B}_2q^1$。这样系统的二次型束便变成

$$\bar{B}_2^T(\lambda A-C-B_1[k_t]B_1^T)\bar{B}_2 \tag{27}$$

其特征方程正是式 (27)。也可以直接证明，方程 (27) 与 (18)′ 是等价的，两特征多项式只差一常数因子。

下面讨论方程 (25) 的解。注意到式 (25) 中间的分块矩阵形式，由第 4 行可得

$$q^2=0 \tag{28}$$

这就是约束条件 $B_2^T x=0$（参见式（22））。再由其1，3行可得

$$\begin{pmatrix} \overline{H}_2^T[\lambda-\lambda_{0i}]\overline{H}_2 & -\overline{H}_2^T H_1 \\ -H_1^T\overline{H}_2 & [k_i]^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^1 \\ t^1 \end{pmatrix}=0 \tag{29}$$

消去 t^1 就可得广义座标 q^1 所满足的方程

$$\overline{H}_2^T([\lambda-\lambda_i]-H_1[k_i]H_1^T)\overline{H}_2 q^1=\overline{B}_2^T(\lambda A-C-B_1[k_i]B_1^T)\overline{B}_2 q^1=0 \tag{30}$$

如果用前面一种办法，可以由式（21）求出 x 后，再变换式（22），求得

$$q^1=(\overline{B}_2^T\overline{B}_2)^{-1}\overline{B}_2^T x$$

在本段的最后，我们对上述求新系统的特征值与特征向量问题作一简要的小结：

1．新系统的特征（频率）方程已经建立。新的特征值 $\lambda_j(k)$，根据熟知的结论，应当满足

$$\lambda_{0j}\leqslant\lambda_j(k)\leqslant\lambda_{0,j+r_1+r_2}$$

即新系统的特征值所在的区间是知道的。我们可以用一些常用的方法，如 0.618 法，来计算它。

2．关于特征向量所满足的方程也已建立。用第一种方法时，需要求解 r_1+r_2 元齐次线性方程组（20）。比如说，一个系统有 40 个自由度，可分成各具有 20 个自由度的两个子系统Ⅰ、Ⅱ，两子系统的弹性连结有 5 个。按照第一种办法，要先解两个 20 个自由度的子系统问题，再求出新系统的特征值，求对应每一新特征值的特征向量时，要解一个五元齐次线性代数方程组。

与特征向量有关的方程（20），（30），都是齐次的，因此解 t，q^1 都可以差一常数倍。此常数可根据标准化条件来决定。

3．从物理的直观和数学上都容易说明，两子系统之间所加的连结，可以分步加上去。第一次加上这几个（或一个）连结，下一次加上那几个（或一个）连结。最后的结果和加的次序、每次所加连结的个数无关，而只取决于总共所加的连结个数和连结方式。如果每次只加一个连结，特征向量的计算那是太简单了。

二、原系统有重根和新系统有原根的情况

原根是原系统的特征值（根）λ_{0i} 的简称。所谓“新系统有原根”，是指新系统某特征值（根）$\lambda_j(k)$ 等于某一原根 λ_{0i} 的情形。此时，我们也说 $\lambda_j(k)$ 是一原根。

不失一般性，我们假定原系统有 m_1 重根 λ_{01}，仅讨论增加连结后，特征根 λ_{01} 的改变。设矩阵 H（和 B）的列数，即所加连结的总数为 $r=r_1+r_2$，把 H 的前 m_1 行和后 $n-m_1$ 行分别记为 H_{m_1} 和 H_{n-m_1}，即

$$H=\begin{bmatrix} H_{m_1} \\ H_{n-m_1} \end{bmatrix} \tag{31}$$

则式（17）可以写成

$$T\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_{01})E & 0 & -H_{m_1} \\ 0 & \lambda-\lambda_{02} & -H_{n-m_1} \\ & & \lambda-\lambda_{0r} \\ -H_{m_1} & -H_{n-m_1} & K_0^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ t \end{pmatrix}=0 \tag{32}$$

式中 $y=\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix}$，$y^1$ 和 y^2 分别表示 y 的前 m_1 个分量和后 $n-m_1$ 个分量构成的列向量。设 H_{m_1} 的秩数为 R

$$R\leqslant \min(m_1,\ r)$$

如果所加连结数 r 超过重根数 m_1，即 $r\leqslant m_1$，则 $R\leqslant r\leqslant m_1$。如果 $m_1\leqslant r$，则有 $R\leqslant m_1\leqslant r$ 不妨设 $R<m_1$，则必有正交矩阵 D_1 使得

$$H_{m_1}^T D_1=\left(\underbrace{\begin{matrix}0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{matrix}}_{m_1-R\text{列}}\ \underbrace{\begin{matrix}\times&\cdots&\times\\ \vdots&&\vdots\\ \times&\cdots&\times\end{matrix}}_{R\text{列}}\right)=(0,\ H_R^T) \tag{33}$$

由于 $H_{m_1}^T D_1$ 的秩数亦为 R，而且 $R\leqslant r$，故 H_R^T 是秩数为 R 的高矩阵。

引入新变量

$$z=D_1^{-1}y^1,\ \text{或}\quad y^1=D_1 z \tag{34}$$

将方程（32）左乘以矩阵 $\begin{pmatrix} D_1^T & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ 就把它化成

$$T'\begin{pmatrix} z \\ y^2 \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1^T & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}T\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y^2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{c|c|c|c} \lambda-\lambda_{01} & 0 & 0 & 0 \\ \ddots\ (m_1-R\text{重}) & & & \\ \lambda-\lambda_{01} & & & \\ \hline 0 & \lambda-\lambda_{01}\ (R\text{重}) & 0 & -H_R \\ & \ddots\ \lambda_{01} & & \\ \hline 0 & 0 & \lambda-\lambda_{02}\ \ddots\ \lambda-\lambda_{0n} & -H_{n-m_1} \\ \hline 0 & -H_R^T & -H_{n-m_1}^T & K_0^{-1} \end{array}\right)\begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ y^2 \\ t \end{pmatrix}=0 \tag{35}$$

式中 $z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$，由于

$$|T|=|T'|=(\lambda-\lambda_{01})^{m_1-R}\begin{vmatrix} \lambda-\lambda_{01} & & 0 & -H_R \\ & \ddots & & \\ & \lambda-\lambda_{01} & & \\ 0 & & \lambda-\lambda_{02} & -H_{n-m_1} \\ & & \ddots\ \lambda-\lambda_{0n} & \\ -H_R^T & & -H^T{}_{n-m_1} & K_0^{-1} \end{vmatrix} \tag{36}$$

故知新系统至少保留有 m_1-R 重根 λ_{01}。其对应的特征向量也易从方程（35）看出，可特别取为 $z'=(1,\ 0,\cdots 0)^T$，$(0,\ 1,\cdots,0)^T,\cdots(0,\ 0,\cdots,1)^T$，$z^2=0$，$y^2=0$，$t=0$。相当的 y'，x 可以由式（34）及 $x=D_0 y$ 给出。

对于原系统所有的根，我们都可以按上述办法加以检查和处理。这样剩下的问题就是来处理方程（35）中一个部分方程组

$$T^*\begin{pmatrix} z^2 \\ y^2 \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda-\lambda_{01} & & 0 & -H_R \\ & \ddots & & \\ & & \lambda-\lambda_{0l} & \\ 0 & & & -H_{n-m_1} \\ & & & \lambda-\lambda_{0n} \\ -H_R^T & & -H_{n-m_1}^T & K_0^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z^2 \\ y^2 \\ t \end{pmatrix}=0 \qquad (37)$$

式中对应于每一特征值（如 λ_{01}）的矩阵（如 H_R^T）都是高矩阵，即 H_R 的秩数为其行数（H_R^T 的列数）R，且 $R\leqslant r$。

再由 $|T^*|=0$ 求出新系统余下的特征值。如果它们都不是原根，则式（37）的特征向量可按前段所述式（17）—（21）的新系统没有原根的办法来处理。如果 $|T^*|=0$ 的根有原根，例如 λ_{01}，则可将 $\lambda=\lambda_{01}$ 代入方程（37），而求其特征向量 $(z^2,\ y^2,\ t)^T$。此时式（37）变成

$$\left.\begin{aligned} &H_R t=0 && (1)\\ &[\lambda_{01}-\lambda_{0l}]_{l\neq 1}y_2-H_{n-m_1}t=0 && (2)\\ &-H_R^T z^2-H^T{}_{n-m_1}y^2+K_0^{-1}t=0 && (3)\end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

如果 H_{m_1} 为一高矩阵，$R=r$，则 H_R 为一非异方阵，式（38）将导出 $t=0$，$y^2=0$，$z^2=0$。这表明 $\lambda=\lambda_{01}$ 不会是 $|T^*|=0$ 的根。如果 $R<r$，由式（38）的（1）可设

$$t=\overline{H}_R^T s \qquad (39)$$

这里 $\overline{H}_R^T$ 是一 r 行和 $r-R$ 列的高矩阵，s 为一列矩阵。再由式（38）的（2）得

$$y^2=[\lambda_{01}-\lambda_{0l}]_{l\neq 1}^{-1}H_{n-m_1}t \qquad (40)$$

将式（38）的（3）左乘以 $\overline{H}_R$，便可得

$$\overline{H}_R(-H^T{}_{n-m_1}[\lambda_{01}-\lambda_{0l}]_{l\neq 1}^{-1}H_{n-m_1}+K_0^{-1})\overline{H}_R^T s=T^{**}s=0 \qquad (41)$$

由上式求出 s 后，式（39）给出 t，式（40）给出 y^2，原则上说，由式（38）的（3）便可解出 z^2

$$z^2=(H_R H_R^T)^{-1}H_R(-H^T{}_{n-m_1}y^2+K_0^{-1}t) \qquad (42)$$

随着 $r-R$ 阶矩阵 T^{**} 的秩数不同 s 的解空间的维数也不同，这取决于 $\lambda=\lambda_{01}$ 是 $|T^*|=0$ 的几重根。

三、一个连接的情况

如果在原系统上只加一个刚度为 k 的连接，矩阵 B，H 就只有一列

$$B=(b_1,\cdots,\ b_n)^T,\quad H=(h_1,\cdots,\ h_n)^T$$

例如，若在自由度 x_1，x_2 之间加一刚度为 k 的弹簧，则

$$B(1,\ -1,\ 0,\cdots,\ 0)^T$$

由 $H=D_0^T B$，即知 H 为 D_0^T 的前两列向量之差。特征方程（18）′变成

$$|T|=\prod_l(\lambda-\lambda_{0l})\left[\frac{1}{k}-\sum_l h_l^2\frac{1}{\lambda-\lambda_{0l}}\right]=\frac{1}{k}\prod_l(\lambda-\lambda_{0l})-\sum_l h_l^2\prod_{j\neq l}(\lambda-\lambda_{0j})$$

仍以 λ_m 为例，此时 $Hm_1=(h_1,\cdots,h_{m_1})^T$ 只有秩数为 0 或 1 两种情况。当 $h_i=0$ $(i=1,\cdots,m_1)$ 时，其秩数为零，新系统将仍有 m_1 重根 λ_m；如果 h_i $(i=1,\cdots m_1)$ 不全为零，则 Hm_1 秩数为 1，新系统将有 m_1-1 重根 λ_m；另一根增至 λ_m 与 λ_m 之间，范围很窄易于“捕捉”。

对重根加以处理后，剩下的只是要处理象式(37)那样的方程。这个方程没有原根，其相应的特征向量可按无原根时建立的方程 (20)，(21) 解出。还应注意，此时 l 仅是一个标量，方程 (20) 已不必解，其值可由标准化条件得出。

可以期望，如果一种弹性系统或结构，通常是由标准的若干元件或子系统拼接而成的，而这些元件或子系统的动力特性（固有频率和振型）是已知的，可以查到，甚至已储存到大型计算机中。那末在研究一些子系统复合而成的系统的动力特性时，就可以利用子系统的已知讯息，利用本文的方法“拼接”出复合的新系统的动力特性。

参 考 文 献

〔1〕甘特马赫，Φ. P.，矩阵论，柯召译，高等教育出版社 (1955)。

〔2〕Breitbach, E., Proceedings of a Symposium on Structural Dynamics, Paper No. A. 6 (1970).

方差泛函变分与高斯配点离散型最小二乘法

邱　吉　宝

一、方差泛函

在理论研究和工程分析中通常把问题归结为一定边界条件和初值条件求解偏微分方程的问题，方程可以是线性或非线性的。

为简便分析，考虑二维域 V 上的偏微分方程为

$$V: \qquad Fu^* - f_0 = 0 \tag{1-1}$$

根据具体情况，边界条件为

$$s_t: \qquad G_t u^* - f_t = 0 \qquad (t=1,\ 2\cdots\cdots B) \tag{1-2}$$

其中 u^* 为方程 (1-1)(1-2) 的精确解的场函数，F、$G_t(t=1,\ 2,\cdots\cdots B)$ 为偏微分算子，$f_t(t=0,\ 1,\cdots\cdots B)$ 为给定的函数。

所有试函数 u（它既不必要求满足方程，也不必要求满足边界条件）构成函数类 c，那么，对应于方程 (1-1)，边界条件 (1-2) 可以构成方差泛函为

$$\begin{aligned} J_R(u) &= \iint_V w_0 (Fu - f_0)^2 dV + \sum_{t=1}^{B} \int_{s_t} w_t (G_t u - f_t)^2 ds \\ &= \iint_V w_0 R_0^2 dV + \sum_{t=1}^{B} \int_{s_t} w_t R_t^2 ds \end{aligned} \tag{1-3}$$

其中 w_0 为区域内加权系数，它可以是座标的函数；w_t 为边界条件加权系数，它可以是 S 的函数；R_0 为方程 (1-1) 的残数

$$R_0 = Fu - f_0 \tag{1-4}$$

R_t 为边界条件 (1-2) 的残数

$$R_t = G_t u - f_t \qquad (t=1,\ 2,\cdots\cdots B) \tag{1-5}$$

方差泛函 $J_R(u)$ 有如下一些性质：

1．方差泛函有极小值，而且极小值为零。

2．使方差泛函取极小值的解等价于偏微分方程的解。

3．线性偏微分方程的方差泛函 $J_R(u)$ 是二次正定泛函，则 $J_R(u)$ 取极小值的充要条件为 $\delta J_R(u)=0$。

因此，线性偏微分方程的方差泛函与一般的能量泛函一样，都是二次正定泛函，而且都有极小值，仅当 u 取精确解 u^* 时泛函才取极小值。泛函一次变分等于零，是求泛函极小值的充要条件。两者不同之处在于能量泛函的极小值是预先不知道的，而其关于 u 的二次项构成一般

意义的某种能量，有明确的物理意义，因而在 n 维空间中取能量的平方根定义为“模量”。而方差泛函的极小值为零值，其关于 u 的二次项无明确的物理意义，因而可以直接取方差泛函的平方根定义为“模量”。

我们在构成方差泛函时，对偏微分方程没有任何限制。无论它是几阶，无论它的系数是正数、负数，还是座标的变系数，无论它关于 u 是线性还是非线性（对于非线性方程所得的方差泛函，不再是二次正定的了），都可以构成方差泛函。可以用变分问题数值解法进行求解。

里兹法是变分问题数值解法的主要方法。将里兹法用于求方差泛函极小值时，就是最小二乘法，对里兹法所做的收敛性证明，同样适用于最小二乘法。然而，最小二乘法的优点是在一定条件下可以求得一致收敛结果。而里兹法仅能得到平均收敛的结果。

当然可以与分片里兹法有限元一样建立分片最小二乘法有限元。这样，对分片里兹法有限元收敛性的证明也适用于分片最小二乘法有限元。

二、离散型最小二乘法

文献〔1〕曾指出整区间高阶内插具有最快的收敛速度。为此，本文不采用低价内插剖分离散的方法去建立分片的最小二乘法有限元，而是按一般的连续型最小二乘法进行求解。不过当我们采用数值积分公式之后，这种连续型最小二乘法却等同于离散型最小二乘法。对于许多问题，这是一种比之有限元更方便，更通用的离散化求解方法。

假设，我们选取试函数 u 为

$$u=[\varphi]\{c\} \tag{2-1}$$

代入式 (1-4)(1-5) 得

$$R_0=F[\varphi]\{c\}-f_0 \tag{2-2a}$$

$$R_t=G_t[\varphi]\{c\}-f_t \qquad (t=1,\ 2,\cdots\cdots B) \tag{2-2b}$$

代入式 (1-3) 得方差泛函为

$$J_R(u)=\{c\}^T[k]\{c\}-2\{c\}^T\{p\}+D \tag{2-3}$$

其中

$$[k]=\iint_V w_0F[\varphi]^TF[\varphi]dxdy+\sum_{t=1}^{B}\int_{s_t} w_tG_t[\varphi]_{s_t}^T G_t[\varphi]_{s_t}\,ds \tag{2-4}$$

$$\{p\}=\iint_V w_0f_0F[\varphi]^T dxdy+\sum_{t=1}^{B}\int_{s_t} w_tf_tG[\varphi]_{s_t}^T ds \tag{2-5}$$

$$[D]=\iint_V w_0f_0^2dxdy+\sum_{t=1}^{B}\int_{s_t} w_tf_t^2ds \tag{2-6}$$

由变分方程 $\delta J_R(u)=0$ 得

$$[k]\{c\}=\{p\} \tag{2-7}$$

最后最小二乘法归结为求解代数方程组 (2-7)。以上分析过程中最麻烦的一点是，对于具体问题，式 (2-4)、(2-5) 的积分区域不同，因而导出的刚度矩阵 $[k]$ 和等效力 $\{p\}$ 的表达式也不同。只能针对某个具体问题进行计算，没有通用性。

为了克服由于积分区域不同而带来的麻烦，可以采用数值积分公式代替精确积分计算。

以矩形域为例，二维积分也可以用双向复化矩形积分公式来计算，即

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}f(xy)dxdy\approx\frac{x_2-x_1}{M}\cdot\frac{y_2-y_1}{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}f(x_my_n) \tag{2-8}$$

其中

$$x_m=x_1+m\cdot\frac{x_2-x_1}{M} \tag{2-9}$$

$$y_n=y_1+n\cdot\frac{y_2-y_1}{N} \tag{2-10}$$

那末，当我们采用复化矩形积分公式代入式（2-4)、(2-5)、(2-6），以矩形区域为例，得

$$\begin{aligned}[k]\approx&\frac{x_2-x_1}{M}\cdot\frac{y_2-y_1}{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}w_0F[\varphi(x_my_n)]^TF[\varphi(x_my_n)]\\&+\sum_{t=1}^{B}\frac{s_{t_2}-s_{t_1}}{M}\sum_{m=1}^{M_t}w_tG_t[\varphi(s_m)]^TG_t[\varphi(s_m)]\end{aligned} \tag{2-11}$$

$$\begin{aligned}\{p\}\approx&\frac{x_2-x_1}{M}\cdot\frac{y_2-y_1}{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}w_0f_0(x_m,y_n)F[\varphi(x_my_n)]^T\\&+\sum_{t=1}^{B}\frac{s_{t_2}-s_{t_1}}{M_t}\sum_{m=1}^{M_t}w_tf_t(s_m)G_t[\varphi(s_m)]^T\end{aligned} \tag{2-12}$$

$$\begin{aligned}[D]\approx&\frac{x_2-x_1}{M}\cdot\frac{y_2-y_1}{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}w_0f_0^2(x_{my_n})\\&+\sum_{t=1}^{B}\frac{s_{t_2}-s_{t_1}}{M_t}\sum_{m=1}^{M_t}w_tf_t^2(s_m)\end{aligned} \tag{2-13}$$

其中 x_m，y_n 分别由式（2-9）和（2-10）计算

$$s_m=st_1+\frac{s_{t_2}-s_{t_1}}{M_t}\cdot m \tag{2-14}$$

这样，我们可以编成较为通用的计算程序。

为了导出连续型最小二乘法与离散型最小二乘法[2]的联系，现将式（2-11)，(2-12)，(2-13）代入式（2-3）整理之后得

$$J_R(u)\approx[R]^T[R] \tag{2-15}$$

其中

$$\begin{pmatrix}\sqrt{w}_0R_{011}(\{c\}x_1y_1)\\\sqrt{w}_0R_{012}(\{c\}x_1y_2)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\\sqrt{w}_0R_{0mn}(\{c\}x_my_n)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\\sqrt{w}_1R_{11}(\{c\}s_{11})\end{pmatrix}$$

$$[R]=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\overline{w}_1}R_{12}(\{c\}s_{12})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sqrt{\overline{w}_1}R_{1m}(\{c\}s_{1m})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sqrt{\overline{w}_t}R_{t_1}(\{c\}s_{t_1})\\ \sqrt{\overline{w}_t}R_{t_2}(\{c\}s_{t_2})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sqrt{\overline{w}_t}R_{tm}(\{c\}s_{tm})\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}=[a]\{c\}-\{b\} \tag{2-16}$$

$$\overline{w}_0=\frac{x_2-x_1}{M}\cdot\frac{y_2-y_1}{N}w_0$$

$$\overline{w}_t=\frac{s_{t_2}-s_{t_1}}{M_t}w_t \qquad (i=1,\ 2,\cdots\cdots B) \tag{2-17}$$

则由 $\delta J_R(u)=0$ 得

$$[k]\{c\}=\{p\} \tag{2-18}$$

其中

$$[k]=[a]^T[a] \tag{2-19}$$

$$\{p\}=[a]^T\{b\} \tag{2-20}$$

方程 (2-16)(2-18)，就是等距配点离散型最小二乘法的方程，式(2-19)(2-20)与 (2-11)(2-12) 形式上虽有差别，展开之后却完全相同，而且式 (2-11)(2-12) 更便于编通用程序。

上述推导表明，等距配点离散最小二乘法完全等同于采用复化矩形数值积分公式的连续型最小二乘法。因为数值积分公式的收敛性已有证明，那末对于连续型最小二乘法收敛性与收敛条件的结论，完全适用于离散型最小二乘法。

三、高斯配点离散型最小二乘法

上一节分析还说明离散型最小二乘法的配点不应当任意选取，而应该按一定的规律配置。对应于每一种数值积分公式，都可以导出一种相应的配点规律。每一种数值积分方法，都具有一定的计算精度。例如，复化矩形数值积分公式具有零次代数精确度。如果采用高斯数值积分公式，可以得到 $2n-1$ 次代数精确度，它是最高的代数精确度的数值积分公式。

按一般高斯积分公式将式 (2-4)，(2-5)，(2-6) 改写为

$$[k]\approx\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}b_xb_{ym}H_mH_nw_0F[\varphi(x_my_n)]^TF[\varphi(x_my_n)]+\sum_{t=1}^{B}\sum_{m=1}^{M_t}b_{ts}H_mw_tG_t[\varphi(s_{tm})]^TG_t[\varphi(s_{tm})] \tag{3-1}$$

$$\{p\}\approx\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}b_xb_{ym}H_mH_nw_0F[\varphi(x_my_n)]^Tf_0(x_my_n)+\sum_{t=1}^{B}\sum_{m=1}^{M_t}b_{ts}H_mw_tG_t[\varphi(s_{tm})]^Tf_t(s_{tm}) \tag{3-2}$$

$$[D]\approx\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}b_x b_{ym}H_m H_n w_0 f_0^2(x_m y_n)+\sum_{t=1}^{B}\sum_{m=1}^{M_t}b_{ts}H_m w_t f_t^2(s_{tm}) \tag{3-3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
b_x&=\frac{x_2-x_1}{2}\\
b_{ym}&=\frac{y_2(x_m)-y_1(x_m)}{2}\\
b_{ts}&=\frac{s_{t_2}-s_{t_1}}{2}\\
x_m&=\frac{x_2+x_1}{2}+\frac{x_2-x_1}{2}\xi_m\\
y_n&=\frac{y_2(x_m)+y_1(x_m)}{2}+\frac{y_2(x_m)-y_1(x_m)}{2}\xi_n\\
s_{tm}&=\frac{s_{t_2}+s_{t_1}}{2}+\frac{s_{t_2}-s_{t_1}}{2}\xi_m
\end{aligned}\right\} \tag{3-4}$$

ξ_m，ξ_n 为高斯积分点；H_m，H_n 分别为 ξ_m，ξ_n 对应的加权系数。

上列各式与式（2-11），（2-12），（2-13）相比除配点不同外，还相差一些加权系数。这样可以编成通用程序，计算复杂几何形状的求解区域问题。由于采用高斯积分公式比采用复化矩形数值积分公式精度提高了，为得到同样的计算精度，采用高斯积分后，计算的积分点可以减少，从而减少计算时间，提高计算效率。

为说明与高斯积分对应的配点规律，现将式（3-1），（3-2），（3-3）代入式（2-3），整理简化之后得到

$$J_R(u)\approx[R]^T[H][R] \tag{3-5}$$

其中 $[R]$ 由（2-16）表示，不过其中的 x_m、y_n、s_m 由式（3-4）计算。式（3-4）表示了高斯配点的规律。$[H]$ 为加权系数矩阵，它是对角矩阵

$$[H]=\begin{pmatrix}
b_x b_{y_1}H_1H_1 & & & & & & & & & \\
& b_x b_{y_2}H_1H_2 & & & & & & & & \\
& & \cdots\cdots & & & & & & & \\
& & & b_x b_{ym}H_mH_n & & & & & & \\
& & & & \cdots\cdots & & & & & \\
& & & & & b_{1s}H_1 & & & & \\
& & & & & & b_{1s}H_2 & & & \\
& & & & & & & \cdots\cdots & & \\
& & & & & & & & b_{1s}H_m & \\
& & & & & & & & \cdots\cdots & \\
& & & & & & & & & b_{ts}H_1 \\
& & & & & & & & & & b_{ts}H_2 \\
& & & & & & & & & & \cdots\cdots \\
& & & & & & & & & & & b_{ts}H_m \\
& & & & & & & & & & & \cdots\cdots
\end{pmatrix} \tag{3-6}$$

那末高斯配点最小二乘法的计算方程仍为式（2-7），只是 $[k]=[a]^T[H][a]$ (3-7)

$$\{p\}=[a]^T[H]\{b\} \tag{3-8}$$

式（3-7），（3-8）与等距配点计算公式（2-19），（2-20）只相差一个高斯加权系数矩阵。

四、高斯配点法

离散型最小二乘法把问题归结为解代数方程组（2-18）。设离散的配点数为 Q，则

$$Q=MN+\sum_{t=1}^{B}M_t \tag{4-1}$$

当离散的配点数 Q 与试函数参量 $\{c\}$ 的自由度数 Y 相同时，可以把式（2-18）改写为

$$[a]^T\{[a]\{c\}-\{b\}\}=0 \tag{4-2}$$

这里 $[a]$ 为方阵，当方阵的行列式

$$|a|\neq 0 \tag{4-3}$$

时，方程两边乘以 $\{[a]^T\}^{-1}$ 得

$$[R]=[a]\{c\}-\{b\}=0 \tag{4-4}$$

由此可以求得近似解 $\bar{u}_r^*$。

式（4-4）实际上就是一般的配点法计算公式。因此，一般的配点法是离散型最小二乘法的特殊情况。它也等于采用数值积分（其积分点数与试函数 $\{c\}$ 的自由度 r 相同）的连续型最小二乘法。由此说明这三种加权残数法形式上虽然不同，但它们的实质，都是方差泛函变分的数值解法，只不过它们所允许的计算精度有所不同而已。

上一节已经指出采用高斯配点的离散型最小二乘法，可以提高计算精度。同样的道理，说明采用高斯点作为配点的配点法，可以提高配点法的计算精度。

五、结束语

上述介绍的都是混合型最小二乘法。它所选取的试函数既不满足偏微分方程，也不满足边界条件。事实上对于许多偏微分方程，很容易找到满足方程的完备的无穷函数项级数解。例如幂级数，福里哀级数等等，以满足方程的无穷函数项级数的前几项为选取的试函数，只余下边界条件有残数 R_t 存在，这样就把混合型化为边界型，特别是边界型配点最小二乘法，既把参变量的自由度大大减少，又把二维配点化为一维配点，从而大大简化了整个计算工作。

通过以上分析，可以看到离散型最小二乘法可以对一类偏微分方程编成通用程序。确有方便、准确、通用性大、误差可以计算，可以用于解具有复杂形状区域的问题等优点。这种方法对于奇异性的问题处理比较方便，理论分析比较简单。本文介绍采用高斯配点的改进方法，使计算精度大大提高。

最小二乘法有三种形式：（1）连续型，即一般的最小二乘法；（2）剖分型，即分片最小二乘法的有限元，它的基础是剖分插值；（3）离散型，即配点最小二乘法，它的基础是数值积分。这三种型式还可以互相结合解决更为一般的问题。例如，解弹性力学平面问题时，采用高斯配点边界型最小二乘法，可以很方便地解决单个奇异点问题，对于多个奇异点

和间断性问题需要把区域分成几个元素，形成高斯配点边界型最小二乘法有限元，这是以离散为主的离散剖分型。又如采用简化积分的有限元在推导刚度矩阵时采用了数值积分，这是以剖分为主的剖分离散型。里兹法也有这三种形式，连续型的一般里兹法和剖分型的分片里兹法有限元已为人们所熟识，离散型里兹法必须采用广义变分原理和数值积分公式也可以导出对称刚度矩阵的高斯配点里兹法。

本文得到胡海昌研究员的指导与审阅，同时得到许玉赞教授的支持与帮助，在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

〔1〕邱吉宝，高精度有限元——双连续协调模型，7 (1978)。

〔2〕Ernest. D. Eason., *International Jou. for Numerical Methods in Engg.*, **10** (1976)。

循环矩阵及其在结构计算中的应用

梁国平　　邵秀民

（中国科学院数学研究所）

在文献〔1〕中提出了利用循环矩阵进行结构计算的方法。如果区域和剖分都是规则的，在周期边界条件的情况下，形成的代数方程系数矩阵为循环矩阵。对于第一类或第二类边界条件，系数矩阵为准循环矩阵。文献〔1〕中对这种类型的方程进行了讨论，利用快速富氏变换的工具，得到一个速度快而且存储量节省的计算方法。该方法对某些非规则区域和局部规则剖分的情况也可以应用。

本文利用λ乘子的方法，将实际计算中最常遇到的连续体的第一类或第二类边值问题，化为循环矩阵的问题。根据文献〔1〕中讨论的循环矩阵的性质和文献〔2〕中提出的将能量通过边界参量表示，然后对这些边界参量求极小，从而得到一种新的解法。这种解法不仅对区域由规则区域组合的情况（或再加上一些不规则区域）更为方便，而且当区域是单一的规则区域时，也可以进一步降低计算量。

一、基本方法

首先简单回顾一下循环矩阵的定义及其基本性质。

若矩阵 A 具有形状

$$A=\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2\cdots\cdots A_{n_1-1} \\ A_{n_1-1} & A_0 & A_1\cdots\cdots A_{n_1-2} \\ A_{n_1-2} & A_{n_1-1} & A_0\cdots\cdots A_{n_1-3} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_1 & A_2 & A_3\cdots\cdots A_0 \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

则称 A 为一重循环矩阵，简单表示作

$$A=\mathrm{Circul}(A_0,\ A_1,\ A_2,\cdots,\ A_{n_1-1})$$

若上述矩阵中每个 A_i 又具有式（1-1）的形状，即

$$A_i=\mathrm{Circul}(A_{i,0},\ A_{i,1},\ A_{i,2},\cdots,\ A_{i,n_2-1}) \tag{1-2}$$

则称 A 为二重循环矩阵。以此类推可定义更多重的循环矩阵。本文中仅限于讨论一、二重的情况。

两个循环矩阵若重数、每重的循环块个数（n_1 或 n_1 与 n_2）、每个循环块的阶数（A_i 或 A_{ij} 的阶数）相同，则称为相同形状的循环矩阵。

循环矩阵具有以下重要性质：

性质 1　若 A，B 为具有相同形状的两个循环矩阵，则 $A+B$，$A-B$，CA（C 为常数），AB，A^{-1}（若 $\det(A)\neq 0$）皆为具有与 A，B 相同形状的循环矩阵。

性质 2　若 A 为循环矩阵，则可通过富氏变换 Ω 将 A 化为对角块形，即

$$\Omega^* A\Omega=\lambda$$

在一重循环情况，设 ω_1 为 n_1 次单位根。$\omega_1=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n_1}}$，则

$$\Omega=(\Omega_{ij}),\qquad \Omega_{ij}=\frac{\omega_1^{ij}E_l}{\sqrt{n_1}}$$

（E_l 为 l 阶单位矩阵，l 为 A_l 的阶数）

$$\lambda=\operatorname{diag}(\lambda_l),\quad \lambda_l=\sum_{k=0}^{n_1-1}\omega_1^{ik}A_k\quad (i=0,\ 1,\cdots,\ n_1-1)$$

在二重循环情况，再设 ω_2 为 n_2 次单位根，$\omega_2=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n_2}}$，$i=i_1n_2+i_2$，$j=j_1n_2+j_2$，则有

$$\Omega_{ij}=\frac{\omega_1^{i_1j_1}\omega_2^{i_2j_2}E_l}{\sqrt{n_1n_2}}$$

（此时 l 为 A_{ij} 的阶数）

$$\lambda_l=\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\sum_{k_2=0}^{n_2-1}\omega_1^{i_1k_1}\omega_2^{i_2k_2}A_{k_1k_2}$$

$$(i=0,\ 1,\cdots,\ n_1n_2-1)$$

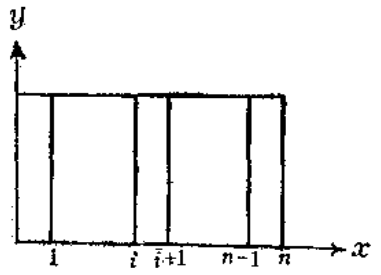


图 1

现在我们来讨论矩形区域 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$ 上的第一、第二类边值问题。若 x 方向等分为 n 份，y 方向等分为 m 份。系统的总能量一般具有形式

$$J=\frac{1}{2}u^TAu+F^Tu$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_3 & & & \\ A_3^T & A_1+A_2 & A_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_3^T & A_1+A_2 & A_3 \\ & & & A_3^T & A_2 \end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

此时 A 并不是循环矩阵，但略加变动就可化为循环矩阵的形式。为此，将 J 写成

$$J=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}(u_l^T,\ u_{l+1}^T)\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ A_3^T & A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_l\\ u_{l+1}\end{pmatrix}+\sum_{l=1}^{n}f_l^Tu_l \tag{1-3}$$

令

$$u_0=\bar{u}_0+u_0',\quad u_n=\bar{u}_0+u_n'$$

我们要求 $\bar{u}_0=0$（即 u_0'，u_n' 就是原来的 u_0，u_n），这样在 J 中应加上相应的 λ 乘子项 $\lambda^T\bar{u}_0$。为书写简单起见，以下我们将 $\bar{u}_0$ 就写成 u_0，这样，J 可改写为

$$J=\frac{1}{2}u^T\mathcal{A}u+u^T\mathcal{F}+\frac{1}{2}u_0'^TA_1u_0'+\frac{1}{2}u_n'^TA_2u_n'+f_0^Tu_0'+f_n^Tu_n' \tag{1-4}$$

其中 $\mathscr{A}$ 为一重循环矩阵

$$\mathscr{A}=\mathrm{Circul}(A_1+A_2,\ A_3,\ 0,\cdots,\ 0,\ A_3^T)$$

$\mathscr{F}$ 中包含已知的外力 F、未知的乘子 λ 及 u_0'，u_n'

$$\mathscr{F}=\begin{pmatrix} f_0+f_{\cdot}+A_1u_0'+A_2u_n'+\lambda^T \\ f_1+A_3^Tu_0' \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1}+A_3u_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{n-2} \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

对 u 求极小，得

$$\mathscr{A}u+\mathscr{F}=0,\quad u=-\mathscr{A}^{-1}\mathscr{F} \tag{1-5}$$

这里 $\mathscr{A}^{-1}$ 理解为形式的符号）。代入式（1-4），则有

$$J=\frac{1}{2}u^T\mathscr{F}+\frac{1}{2}u_0'^TA_1u_0'+\frac{1}{2}u_n'^TA_2u_n'+f_0^Tu_0'+f_n^Tu_n' \tag{1-6}$$

根据循环矩阵的性质 2

$$\Omega^*\mathscr{A}\Omega=\Lambda$$

$$\Omega=(\Omega_{ij}),\quad \Omega_{ij}=\omega_1^{ij}\ E_m/\sqrt{n}$$
$$\Lambda=\mathrm{diag}(\Lambda_i),\quad \Lambda_i=A_1+A_2+\omega_1^iA_3+\omega_1^{-i}A_3^T \tag{1-7}$$
$$(i,\ j=0,\ 1,\cdots,\ n-1)$$

则由式（1-5）

$$u=-\Omega\Lambda^{-1}\Omega^*\mathscr{F} \tag{1-8}$$

引进符号

$$D=(d_{ij})=\Omega\Lambda^{-1}\Omega^*,\quad d_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega_1^{(i-j)k}\Lambda_k^{-1} \tag{1-9}$$

式（1-6）又可写为

$$J=-\frac{1}{2}\mathscr{F}^TD\mathscr{F}+\frac{1}{2}u_0'^TA_1u_0'+\frac{1}{2}u_n'^TA_2u_n'+f_0^Tu_0'+f_n^Tu_n' \tag{1-10}$$

对乘子 λ 求极值（注意只有 F_0 中含 λ），得

$$-d_{00}F_0-\sum_{j=1}^{n-1}d_{0j}F_j=0,\qquad F_0=-d_{00}^{-1}\sum_{j=1}^{n-1}d_{0j}F_j \tag{1-11}$$

代入式（1-10），即得

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}F_i^T(d_{0i}^Td_{00}^{-1}d_{0j}-d_{ij})F_j+\frac{1}{2}u_0'^TA_1u_0'+\frac{1}{2}u_n'^TA_2u_n'+f_0^Tu_0'+f_n^Tu_n' \tag{1-12}$$

引入符号

$$s_{ij}=d_{0i}^Td_{00}^{-1}d_{0j}-d_{ij}$$

式（1-12）可写为

$$J=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}F_i^Ts_{ij}F_j+\frac{1}{2}u_0'^TA_1u_0'+\frac{1}{2}u_n'^TA_2u_n'+f_0^Tu_0'+f_n^Tu_n'$$

略加整理即得

$$J=\frac{1}{2}u_0^{\prime T}(A_3s_{11}A_3^T+A_1)u_0^{\prime}+\frac{1}{2}u_n^{\prime T}(A_3^Ts_{n-1,n-1}A_3+A_2)u_n^{\prime}$$
$$+u_0^{\prime T}A_3s_{1,n-1}A_3u_n^{\prime}+\left[\left(\sum_{j=1}^{n-1}f_j^Ts_{1j}\right)A_3^T+f_0\right]u_0^{\prime}$$
$$+\left[\left(\sum_{j=1}^{n-1}f_j^Ts_{n-1,j}\right)A_3+f_n\right]u_n^{\prime}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}f_i^Ts_{ij}f_j \tag{1-13}$$

这就是能量通过边界参量表示的式子。

现在我们来讨论 $\mathscr{A}$ 的奇性（即 Λ 的奇性）问题。一般地讲，$\det(\mathscr{A})$是可能为 0 的。因为$\mathscr{A}$相当于在$x=0$ 和 $x=a$ 边上给周期边界条件时的系数矩阵，如果不在边界 $y=0$ 和 $y=a$ 的某些点上给以强制性边界条件，以排除刚性位移，则会有 $\det(\mathscr{A})=0$，即 $\det(\Lambda)=0$。从物理方面考虑，可以得出结论：在给定某一 u_i 足以固定整个系统的条件下（平面或三维弹性问题以某一条边或面上的位移为 u_i，板弯曲问题以某一边的位移和转角为 u_i，而用样条有限元计算板弯曲问题时，则需将两条边上的 w 合起来作为 u_i），如果 $\det(\Lambda)=0$，只可能是 $\det(\Lambda_0)=0$，而其余 $\det(\Lambda_i)\neq 0$ $(i=1,\cdots,n-1)$。前者是因为

$$\Lambda_0=A_1+A_2+A_3+A_3^T$$

由式（1-3）可看出，这正好就是 $u_i=u_{i+1}$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 即板作刚性位移时，条带 (x_i,x_{i+1}) 的方程的系数矩阵。但如果改变某些点上的值，即任意固定某些点，Λ_0 就不再为 0，而$\mathscr{A}$（因而 Λ）也不为 0。可见，Λ_0 和 Λ 的块秩是相同的。由此可知，其余 $\det(\Lambda_i)$ $(i=1,\cdots,n-1)$ 必然不为 0。区别奇性项 Λ_0 和其余非奇性的 Λ_i，将式（1-9）写为

$$d_{ij}=\frac{1}{n}(\Lambda_0^{-1}+R_{ij}),\quad R_{ij}=\sum_{k=1}^{n-1}\omega_1^{(i-j)k}\Lambda_k^{-1} \tag{1-14}$$

这里 R_{ij} 不含有奇性。经适当运算得

$$s_{ij}=\frac{1}{n}\{R_{0i}^T+R_{0j}-R_{00}-R_{ij}+(R_{0i}-R_{00})^T(I+\Lambda_0R_{00})\Lambda_0(R_{0j}-R_{00})\} \tag{1-15}$$

这时 s_{ij} 已不再含有奇性（奇性项互相抵消了），能量的表达式（1-13）中也就不含有奇性，这与物理事实是一致的。

利用以上公式可以进行各种问题的计算：

1．如果边界 $x=0$ 和 $x=a$ 上是第一类边界条件，即 $u_0^{\prime}$ 和 $u_n^{\prime}$ 是已知的，则广义力 $\mathscr{F}$ 中 F_i $(i=1,\cdots,n-1)$ 都是已知的，F_0 亦可通过以下关系求出

$$F_0=-d_{00}^{-1}\sum_{j=1}^{n-1}d_{0j}F_j=-(I+\Lambda_0R_{00})^{-1}\sum_{j=1}^{n-1}(I+\Lambda_0R_{0j})F_j \tag{1-16}$$

其中

$$\sum_{j=1}^{n-1}R_{0j}F_j=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\omega_1^{-ji}\Lambda_i^{-1}F_j=\sum_{i=1}^{n-1}\Lambda_i^{-1}\sum_{j=1}^{n-1}\omega_1^{-ji}F_j \tag{1-17}$$

在方程（1-5）中令 $u=\Omega v$，则

$$\Omega^*\mathscr{A}\Omega v=-\Omega^*\mathscr{F}=\overline{\mathscr{F}}$$

即

$$\begin{pmatrix} \Lambda_0 & & & \\ & \Lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_0 \\ \bar{F}_1 \\ \vdots \\ \bar{F}_{n-1} \end{pmatrix}$$

由于 Λ_0 是奇异的，v_0 无法直接求出，但由此方程组直接可求得

$$v_i = \Lambda_i^{-1}\bar{F}_i \quad (i=1,\cdots,n-1) \tag{1-18}$$

再考虑 $u=\Omega v$ 的第一个方程，注意到 $u_0=0$，即可求得

$$v_0 = -\sum_{i=1}^{n-1} v_i$$

再由 $u=\Omega v$ 即可求得 u_0。

2．如果 $x=0$ 或（和）$x=a$ 上给的是自然边界条件（为确定起见，设 $x=0$ 上是自然边界条件，$x=a$ 上是强制性边界条件），只要将式（1-13）对 u_0^t 取极小，就可得到 u_0^t 满足的方程组，从而求得 u_0^t 的值，然后用上述的方法，即可求得内部的 u 值。

3．如果矩形区域通过 $x=0$ 或 $x=a$ 边与别的矩形区域联结，只要用式（1-13）将各个区域的能量都通过其边界参量表示，将各区域的能量相加得系统的总能量，然后对这些“边界”参量求极小，就可求得“边界”参量的值，从而求得“内部”参量的值。用这个方法可计算分块规则区域的情况和不规则区域的情况。对不规则区域，只要划出若干个矩形区域，而其余部分的参量都作为“边界”参量就可以了。

以上我们利用一重循环矩阵 $\mathcal{A}$ 将矩形区域上的能量通过 $x=0$ 和 $x=a$ 两个边上的参量表示。从式（1-4）出发，在 y 方向用同样的方法再作一次，还可将 $\mathcal{A}$ 变为二重循环矩阵，即可将矩形区域上的能量通过 $x=0$，$x=a$，$y=0$ 和 $y=b$ 四个边上的参量表示。方法与一重循环的情况相同。

在利用上述公式进行数值计算时，由于利用了循环矩阵的性质，将问题化为低阶矩阵的运算，而且可利用快速富氏变换，因此运算量比通常的方法大大降低了。假定将区域的 x 和 y 方向都分为 n 等分，则用一重循环计算，总共需要的乘除法次数的阶数为 $O(n^3)$。如果利用二重循环矩阵，运算量还可以进一步降低。因为此时 $\mathcal{A}$ 中 A_1+A_2，A_3 都是循环矩阵，根据循环矩阵的性质，Λ_i（$i=0,\cdots,n-1$）以及 Λ_i^{-1}，R_{ij}，d_{ij}，s_{ij} 等都是循环矩阵。利用文献〔1〕的方法计算公式中占用计算量最多的 Λ_i^{-1} 和 $(I+\Lambda_0 R_{00})^{-1}$，可以使总的乘除法次数下降为 $O(n^2\log_2 n)$。与文献〔1〕相比，计算量又有所降低。在第一、二类边界条件的情况，计算量一般为 $O(n^3)$。

二、数值计算的例子

作者用本文的方法计算了四边固定的矩形板弯曲问题。计算时用的是 ACM 非协调矩形元、节点参数为（w，θ_x，θ_y）（w 为板弯曲挠度，θ_x 和 θ_y 分别为 x 方向和 y 方向的转角，$\theta_x=\partial w/\partial y$，$\theta_y=-\partial w/\partial x$）。为了提高计算速度和减少存储，使用了下述方法：

1．计算 F_0 中的 $\sum_{j=1}^{n-1}\omega_1^{-ji}F_j$，$\bar{F}=-\Omega^*\mathcal{F}$，$u=\Omega v$ 用快速富氏变换。

2．容易证明，R_{0j}（$j=0,\cdots,n-1$）为实矩阵，因此按式（1-16）计算 F_0 时，

$\sum_{j=1}^{n-1}(I+\Lambda_0 R_{0j})F_j$ 和 $I+\Lambda_0 R_{00}$ 都是实的，只需解一实方程组。

3．Λ_j 为三对角阵，因此在计算式（1-17）中的 $\Lambda_i^{-1}\sum_{j=1}^{n-1}\omega_i^{ji}F_j$ 和 R_{00} 中的 Λ_i^{-1}、$v_i=\Lambda_i^{-1}F_i$ 时，用了奇偶法解方程组。这种方法的优点是节省存贮，而且某些需要多次使用的量可一次计算好放在内存中，每次计算只要作一次回代就可以了，从而可以提高计算速度。

4．在求复矩阵的逆和解复系数矩阵的方程组时，方法与实矩阵完全相同，只不过具体对每个矩阵元素进行运算时按复数计算。

计算是在国产 DJS-21 机上进行的，并与带型矩阵的高斯消去法进行了比较，比较结果如表 1 所示 （表中 CM-FFT 表示本文的方法，即循环矩阵-快速富氏变换法，BG 表示带型高斯消去法。

由此比较可得出结论：

1．本文的方法比通常的带型消去法速度快，存储节省，而且阶数愈高效果愈显著。

2．本文的方法计算精度与通常的消去法相近，即除了两种方法所固有的截断误差外，舍入误差的积累也是差不多的。

本文方法的主要缺点是程序复杂，因此，编制本方法的通用程序是十分必要的。

表 1

节点数	均布荷载计算结果 $w_{max}/\frac{qL^4}{D}$		集中荷载计算结果 $w_{max}/\frac{PL^2}{D}$		计算时间		存储	
	CM-FFT	BG	CM-FFT	BG	CM-FFT	BG	CM-FFT	BG
5×5	0.00140	0.00140	0.00613	0.00613	2′	2′5″	978	1650
9×9	0.00130	0.00130	0.00580	0.00580	11′20″	16′	2706	8262
17×17	0.00127		0.00567		74′30″	(170′)	8250	50286
级数解	0.00126		0.00560					

附注：用 BG 法（带型高斯消去法）计算 17×17 个节点的情况由于计算机内存放不下，未实际计算，计算时间是按9×9 的情况根据运算次数的阶推算的。

参 考 文 献

〔1〕武际可、邵秀民，循环矩阵及其在结构计算中的应用，计算数学，2（1979），144—153。

〔2〕梁国平，分层解法——有限元的一个新算法，应用数学学报，1（1979），37—43。

超声速、高超声速粘性气体分离流动的数值解法

张涵信　余泽楚
陆林生　马占奎
（中国气动研究发展中心）

一、引　　言

目前对于粘性气体分离流动的研究，在解析方面，由于引入了较多的假定，误差很大。在数值计算方面，可分为两类：一类是把边界层方程和外部无粘流分区处理，耦合求解。它给出的表面压力分布和实验结果大体一致，但由于忽略了物面法向压力梯度的影响，表面摩阻以及脱体、再附点的位置有较大的误差。另一类是直接求解 Navier-Stokes 方程（以下简称 N-S 方程），它可给出与实验较为吻合的流场分布和流动图象，但需过长的机时和过大的机器存贮量。目前许多作者在差分格式方面做了大量的工作，在两步显式格式基础上[1-10]发展了隐式[11,12]及隐、显相结合的格式[13-15]，使计算机时缩短，然而存贮量仍不能减少。此外，当分离流场包含激波时，如果处理不当，激波引起的非线性振荡，会使差分计算造成很大困难。

我们认为，为了克服与激波相关的困难，差分格式可这样选取：在激波附近，它具有一阶精度，此时格式的粘性项可避免非线性的振荡；但在离开激波粘性起作用的区域里，格式为高阶精度，此时格式粘性项和物理粘性项相比是高阶小量，以得到真实的物理解。本文的目的是寻求一个在流场中能自动满足这两个要求的差分算法，并试图寻求一个省机时省存贮量的计算途径，采用简化的 N-S 方程是条路子。

二、N-S 方程数值求解方法

1．基本方程、边界条件和起始条件

现在来研究二维压缩拐角的绕流。设 x'，y' 是图 1 所示座标系的两个座标，t' 表示时间，u'，v' 是气体运动速度在 x'，y' 上的分量，P'，ρ'，T'，μ' 分别是气体的压力，密度、温度和粘性系数，γ 是绝热指数，$e'=\frac{1}{\gamma-1}\frac{P'}{\rho'}+\frac{1}{2}(u'^2+v'^2)$，$L'$ 是图 1 所示的特征长度。引入如下无量纲量：

$$\left.\begin{aligned} &\rho=\rho'/\rho_\infty, && P=P'/\rho'_\infty u'^2_\infty \\ &u=u'/u'_\infty && v=v'/u'_\infty \\ &T=T'R/u'^2_\infty && \mu=\mu'/\mu'_\infty \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}1)$$

$$e=e'/u_\infty'^2 \qquad x=x'/L'$$
$$y=y'/L' \qquad t=t'u_\infty'/L'$$

式中 R 为气体常数，下标∞表示来流的状态。作如下座标变换：

$$\left.\begin{aligned}\xi&=\sec\alpha\cdot x\\ \eta&=y-x\,\mathrm{tg}\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}2)$$

这里 α 表示物面与 x 轴的夹角，由图 1 知，$x\leqslant 0$ 时 $\alpha=0$，$x>0$ 时 $\alpha=\omega=\mathrm{const}$。于是常比热完全气体非定常粘性运动的 N-S 方程是：

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\partial G}{\partial \eta}=0\qquad(2\text{-}3)$$

式中

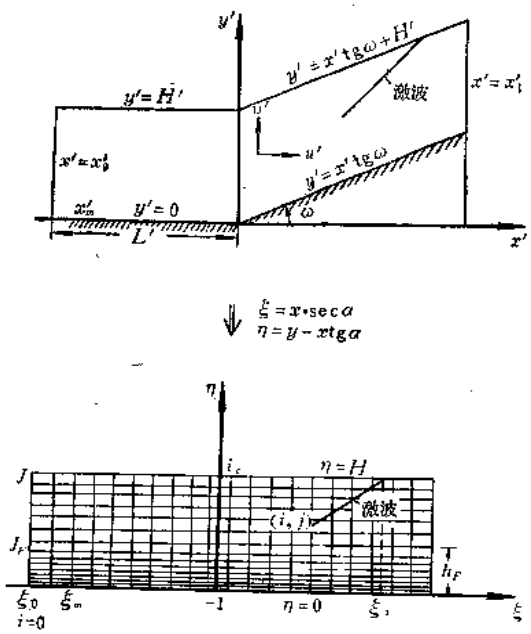


图 1 座标系及其解域

$$\left.\begin{aligned}U&=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e\end{pmatrix}\qquad F=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2-P_{xx}\\ \rho uv-P_{xy}\\ (\rho e-P_{xx})u-P_{xy}v-\theta_x\end{pmatrix}\cdot\sec\alpha\\ G&=\begin{pmatrix}\rho v-\mathrm{tg}\alpha\cdot\rho u\\ \rho uv-P_{xy}-\mathrm{tg}\alpha(\rho u^2-P_{xx})\\ \rho v^2-P_{yy}-\mathrm{tg}\alpha(\rho uv-P_{xy})\\ (\rho e-P_{yy})v-P_{xy}u-\theta_y-\mathrm{tg}\alpha[(\rho e-P_{xx})u-P_{xy}v-\theta_x]\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}4)$$

这里

$$\left.\begin{aligned}P_{xx}&=-P+\frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\left[2\left(\sec\alpha\frac{\partial u}{\partial\xi}-\mathrm{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)-\frac{2}{3}\left(\sec\alpha\frac{\partial u}{\partial\xi}-\mathrm{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)\right]\\ P_{xy}&=P_{yx}=\frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\left[\sec\alpha\cdot\frac{\partial v}{\partial\xi}-\mathrm{tg}\alpha\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]\\ P_{yy}&=-P+\frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\left[2\frac{\partial v}{\partial\eta}-\frac{2}{3}\left(\sec\alpha\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi}-\mathrm{tg}\alpha\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)\right]\\ \theta_x&=\frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\left[\sec\alpha\frac{\partial}{\partial\xi}\left(e-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}v^2\right)-\mathrm{tg}\alpha\frac{\partial}{\partial\eta}\left(e-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}v^2\right)\right]\\ \theta_y&=\frac{\mu}{\mathrm{Re}_\infty}\frac{\gamma}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(e-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}v^2\right)\\ P&=(\gamma-1)\rho e-\frac{\gamma-1}{2}\rho(u^2+v^2)\\ T&=P/\rho\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}5)$$

$$\mu=(\gamma M_\infty^2 T)^{3/2}\left(\frac{1+\frac{s_1}{T'_\infty}}{\gamma M_\infty^2 T+\frac{s_1}{T'_\infty}}\right)$$

在式（2-5）中，M_∞ 是来流 Mach 数，$Re_\infty=\rho'_\infty u'_\infty L'/\mu'_\infty$ 是来流 Reynolds 数，Pr 是 Prandtl 数（空气为 0.72）。在计算 μ 时，采用 Sutherland 公式，$s_1=114°K$。

我们取图 1 所示的区域作为求解域，物体表面置于该区的下边界，壁面上满足无滑流条件，物面以前的下边界上满足对称条件。上边界与物面平行，并令其到物面的距离较远，此时在上边界上就可以认为是无粘流的解，或者认为是单波运动[16]。左边界（$\xi=\xi_0$）为气流进入求解区的入口，我们把它置于物面前缘之前或之后的某一位置处，其中流动参数是已知的。右边界为气流出口，我们把它置于距拐角角点较远的位置处，此时气流沿物面方向的运动，变化已经很小了。假定起始流场是无粘性气体绕拐角定常运动的流场。关于边界条件和起始条件的细节见文献〔17〕。

2．网格的划分

为了在差分计算中能很好的反应出壁面附近粘性的影响，我们在 ξ 方向取等距网格，η 方向近壁区取密网格，远壁区取稀网格，其节点方程为[8]：

$$\xi_i=\left(i-i_c+\frac{1}{2}\right)\Delta\xi,\qquad 0\leqslant i\leqslant I \tag{2-6}$$

$$\eta_j=\begin{cases}\dfrac{h_F}{m}\dfrac{\exp(K_j)-1}{\exp(K)-1} & 0\leqslant j\leqslant J_F\\ h_F+\dfrac{j-J_F}{J-J_F}(h-h_F) & J_F<j\leqslant J\end{cases} \tag{2-7}$$

这里 i，j 是 ξ，η 方向的节点号，$i=0$ 和 $j=0$ 分别表示左边界和下边界；I，J 表示 ξ，η 方向的网格数，h_F 表示密、稀网格的分界线，J_F 是相应的 η 方向的节点号（图 1）拐角角点位于 i_c-1 和 i_c 之间，m 为事先给定的常数，它决定了 η 方向网格的最小间距。为了保证 $j=J_F$ 时，$\eta=h_F$，K 应由以下关系确定：

$$K=\frac{1}{J_F}\ln[1+m(e^K-1)] \tag{2-8}$$

由于拐角角点前平板的无量纲长度为 1，因此 $\Delta\xi=1/(i_c-i_m)$。这里平板前缘位于 i_{m-1} 和 i_m 之间。

3．差分格式

（1）模型方程　根据时间分裂理论[3]，方程（2-3）的求解问题等价于求解以下两个方程：

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial\xi}=0 \tag{2-9}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial\eta}=0 \tag{2-10}$$

这两个方程的模型方程是：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2-11}$$

为简单计，下面我们通过讨论该模型方程来给出求解 N-S 方程的差分格式。

为了使差分格式能体现引言中的要求，我们利用混合格式的思想[18]来研究问题。设 $\mathscr{L}_1$，$\mathscr{L}_2$ 分别是（2-11）的一阶和二阶精度的差分算子，显然

$$\mathscr{L}_1 u_j^n=\mathscr{L}_2 u_j^n+\frac{1}{2}k(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n), \tag{2-12}$$

式中 $k\geqslant 0$ 为待定常数。混合格式可写为：

$$\begin{aligned} u_j^{n+1}&=\mathscr{L}u_j^n=(1-0)\mathscr{L}_2 u_j^n+0\mathscr{L}_1 u_j^n \\ &=\mathscr{L}_2 u_j^n+\frac{k\theta}{2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n) \end{aligned} \tag{2-13}$$

这里 θ 叫做开关函数，可以看出 $\theta=1$，（2-13）为一阶精度，$\theta=0$（2-13）为二阶精度。因此如果我们能够给出一个开关函数，使得在激波附近其值自动地接近于 1，而在离开激波的区域，其值自动地接近为零，那末（2-13）就是引言中所要求的差分格式。

如果我们把 $\mathscr{L}_2$ 取为 MacCormack 两步格式，容易验证（2-13）具有如下性质：第一、若 $a\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$，且 $a\frac{\Delta t}{\Delta x}-a^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\leqslant k\theta\leqslant 1-a^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$，则格式（2-13）具有单调性。第二、沿节点号增加的方向跨过激波，在紧靠近后缘的位置处，若 $a\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$，且 $0\leqslant k\theta\leqslant a\frac{\Delta t}{\Delta x}-a^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$，则格式（2-13）具有单调性。第三，准确到二阶精度，格式（2-13）可表达为

$$u_j^{n+1}=\mathscr{L}_2\bar{u}_j^n \tag{2-14}$$

式中

$$\bar{u}_j^n=u_j^n+\frac{k\theta}{2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n) \tag{2-15}$$

我们叫它为滤波函数。

为了保证捕捉激波时格式单调，且在粘性重要的区域内人工粘性项最小，根据前两个性质和上面对开关函数的要求，我们给出了 k 和 θ 的表达式（详见文献〔19〕）：

$$k\theta=\frac{\theta}{\theta_{sh}}\left(a\frac{\Delta t}{\Delta x}-a^2\frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}\right) \tag{2-16}$$

$$\theta=\left|\frac{P_{j+1}^n-2P_j^n+P_{j-1}^n}{P_{j+1}^n+2P_j^n+P_{j-1}^n}\right|^m \tag{2-17}$$

式中 θ_{sh} 是激波前缘附近的 θ 值，m 为大于零的常数。

（2）N-S 方程　对于模型方程所给出的差分格式(2-13)或(2-14)我们很容易推广到 N-S 方程。设 L 是 N-S 方程（2-3）的差分算子，$L_\xi(\Delta t_\xi)$ 是（2-9）的差分算子，Δt_ξ 是其时间步长，$L_\eta(\Delta t_\eta)$ 是（2-10）的差分算子，Δt_η 是相应的时间步长，其推广的差分格式为：

当 $\Delta t=\Delta t_\xi<\Delta t_\eta$ 时，如果令 M 表示 $\frac{\Delta t_\eta}{\Delta t_\xi}$ 的整数部分，M 为偶数时

$$U_{ij}^{n+M}=L\tilde{U}_{ij}^n=\underbrace{L_\xi(\Delta t)\cdots L_\xi(\Delta t)}_{\frac{M}{2}\text{个}}L_\eta(M\Delta t)\underbrace{L_\xi(\Delta t)\cdots L_\xi(\Delta t)}_{\frac{M}{2}\text{个}}\tilde{U}_{ij}^n \tag{2-18}$$

当 M 为奇数时

$$U_{ij}^{n+2M}=L\tilde{U}_{ij}^n=\underbrace{L_\xi(\Delta t)\cdots L_\xi(\Delta t)}_{M\text{个}}L_\eta(M\Delta t)L_\eta(M\Delta t)\underbrace{L_\xi(\Delta t)\cdots L_\xi(\Delta t)}_{M\text{个}}\tilde{U}_{ij}^n \tag{2-19}$$

这里下标 i，j 表示结点 (ξ_i, η_j)，上标 n 表示 $t=t_n$ 时刻，上标 $n+M$ 表示 $t=t_n+M\Delta t$ 时刻，$\bar{\bar{U}}^n_{i,j}$ 为滤波函数，它与 $U^n_{i,j}$ 的关系为

$$\left.\begin{aligned}\bar{\bar{U}}^n_{i,j}&=\bar{\bar{U}}^n_{i,j}+\frac{1}{2}Q_\eta(\bar{\bar{U}}^n_{i,j+1}-2\bar{\bar{U}}^n_{i,j}+\bar{\bar{U}}^n_{i,j-1})\\ \bar{\bar{U}}^n_{i,j}&=U^n_{i,j}+\frac{1}{2}Q_\xi(U^n_{i+1,j}-2U^n_{i,j}+U^n_{i-1,j})\end{aligned}\right\}\tag{2-20}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}Q_\xi&=k_\xi\left|\frac{P^n_{i+1,j}-2P^n_{i,j}+P^n_{i-1,j}}{P^n_{i+1,j}+2P^n_{i,j}+P^n_{i-1,j}}\right|^m\\ Q_\eta&=k_\eta\left|\frac{P^n_{i,j+1}-2P^n_{i,j}+P^n_{i,j-1}}{P^n_{i,j+1}+2P^n_{i,j}+P^n_{i,j-1}}\right|^m\end{aligned}\right\}\tag{2-21}$$

k_ξ，k_η 可用 (2-16) 确定。

当 $\Delta t=\Delta t_\eta<\Delta t_\xi$ 时，如果 M 表示 $\dfrac{\Delta t_\xi}{\Delta t_\eta}$ 的整数部分，M 为偶数时

$$U^{n+M}_{i,j}=L\bar{U}^n_{i,j}=\underbrace{L_\eta(\Delta t)\cdots L_\eta(\Delta t)}_{\frac{M}{2}\text{个}}L_\xi(M\Delta t)\underbrace{L_\eta(\Delta t)\cdots L_\eta(\Delta t)}_{\frac{M}{2}\text{个}}\bar{U}^n_{i,j}\tag{2-22}$$

当 M 为奇数时

$$U^{n+M}_{i,j}=L\bar{U}^n_{i,j}=\underbrace{L_\eta(\Delta t)\cdots L_\eta(\Delta t)}_{M\text{个}}L_\xi(M\Delta t)L_\xi(M\Delta t)\underbrace{L_\eta(\Delta t)\cdots L_\eta(\Delta t)}_{M\text{个}}\bar{U}^n_{i,j}\tag{2-23}$$

在计算中，L_ξ，L_η 取MacCormack 二步格式[8]。

4．稳定条件

在进行 $L_\xi(\Delta t_\xi)$ 运算时，稳定条件是

$$\left.\begin{aligned}&0\leqslant Q_\xi\leqslant 1\\ &\Delta t_\xi=\min\frac{\Delta\xi}{(|u|+c)\sec\alpha+\frac{1}{\rho}\left[\frac{2\gamma\mu}{Pr\Delta\xi}\sec^2\alpha+\left(\frac{2}{3}\mu^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\sec\alpha}{\Delta\eta}\right]\frac{1}{Re_\infty}}\end{aligned}\right\}\tag{2-24}$$

式中 $c=\left(\gamma\dfrac{P}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\Delta\eta=\eta_{j+1}-\eta_j$。在进行 $L_\eta(\Delta t_\eta)$ 计算时，稳定条件是：

$$\left.\begin{aligned}&0\leqslant Q_\eta\leqslant 1\\ &\Delta t_\eta=\min\frac{\Delta\eta}{|v-u\mathrm{tg}\alpha|+c\sec\alpha+\left[\frac{2\gamma\mu}{\rho Pr\Delta\eta}\sec^2\alpha+\left(\frac{2}{3}\mu^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\sec\alpha}{\rho\Delta\xi}\right]\frac{1}{Re_\infty}}\end{aligned}\right\}\tag{2-25}$$

三、简化的 N-S 方程及其数值解法

1．简化的 N-S 方程

二维 N-S 方程的另一种无量纲形式是：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\rho v_1}{\partial y_1}=0\\ &\text{内区量级}\quad 1\qquad 1\\ &\text{外区量级}\quad 1\qquad 1\end{aligned}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-P+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\varepsilon^2-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)\varepsilon^2\right]\\
&\text{内区量级}\quad 1\quad 1\quad 1\quad \varepsilon^{2m}\quad \varepsilon^{2m}\quad \varepsilon^{2m}\\
&\text{外区量级}\quad 1\quad 1\quad 1\quad \varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)\varepsilon^2\right]\\
&\qquad\qquad\varepsilon^{2m}\quad 1\\
&\qquad\qquad\varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\\
&\rho\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+u_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)\varepsilon^2\right]\\
&\text{内区量级}\quad \varepsilon^{2m}\quad \varepsilon^{2m}\quad \varepsilon^{4m}\quad \varepsilon^{2m}\\
&\text{外区量级}\quad 1\quad 1\quad \varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial y_1}\left[-p+2\mu\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\varepsilon^2-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)\varepsilon^2\right]\\
&\qquad\qquad 1\quad \varepsilon^{2m}\quad \varepsilon^{2m}\quad \varepsilon^{2m}\\
&\qquad\qquad 1\quad \varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\\
&\rho\left(\frac{\partial e}{\partial t}+u_1\frac{\partial e}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial e}{\partial y_1}\right)=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-pu_1+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\varepsilon^2-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)u_1\varepsilon^2\right.\\
&\text{内区量级}\quad 1\quad 1\quad 1\quad \varepsilon^{2m}\quad \varepsilon^{2m}\quad \varepsilon^{2m}\\
&\text{外区量级}\quad 1\quad 1\quad 1\quad \varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\\
&\left.+\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)u_1\varepsilon^2\right]+\frac{\partial}{\partial y_1}\left[-Pv_1+2\mu\frac{\partial v_1}{\partial y_1}u_1\varepsilon^2-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)v_1\varepsilon^2\right.\\
&\qquad\varepsilon^{2m}\quad \varepsilon^{2m}\qquad 1\quad \varepsilon^{2m}\qquad \varepsilon^{2m}\quad \varepsilon^{2m}\\
&\qquad\varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\qquad 1\quad \varepsilon^{2m}\qquad \varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\\
&\left.+\mu\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)v_1\varepsilon^2\right]+\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial x_1}\varepsilon^2\right]+\frac{\partial}{\partial y_1}\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial y_1}\varepsilon^2\right]\\
&\qquad\varepsilon^{2m}\quad 1\qquad\qquad \varepsilon^{2m}\qquad\qquad 1\\
&\qquad\varepsilon^{2}\quad \varepsilon^{2}\qquad\qquad \varepsilon^{2}\qquad\qquad \varepsilon^{2}
\end{aligned}
\tag{3-1}
$$

式中 x_1，y_1 是边界层座标系，u_1，v_1 是其上的速度分量。$\varepsilon=\mathrm{Re}_\infty^{1/2}$。

实验和理论研究表明，粘性气体的层流分离运动大致可分成内、外两区。外区的流动接近为无粘性运动，如果以 ε 为小参数，u_1，v_1，$p\rho x_1 y_1$ 等分别都是 $O(1)$ 量级。在内区流体分离且与周围流场发生干扰作用。现在来估计内区物理量的量级。设 C_f 是局部表面摩阻系数，在物面附近，$\frac{\partial p}{\partial x_1}\sim\frac{\partial C_f}{\partial y_1}$，由于在层流情况下 $C_f\sim\varepsilon$，因此如果 $\left(\frac{y_1}{x_1}\right)\sim\varepsilon^m$，则 $(P-P_\infty)\sim\varepsilon^{1-m}$。又因为内区流体的惯性力和粘性力同量级，当 $\rho\sim1$ 时，则 $u_1\sim\varepsilon^{\frac{1-m}{2}}$，再由连续方程，$v_1\sim\varepsilon^{\frac{1+m}{2}}$。最后由 $C_f\sim\varepsilon^2\mu\frac{\partial u_1}{\partial y_1}$ 得，$y_1\sim\varepsilon^{\frac{3-m}{2}}$，进一步可得 $x_1\sim\varepsilon^{\frac{3(1-m)}{2}}$。对于无分离的边界层问题，由于 $(P-P_\infty)\sim C(1)$，故 $m=1$。在超声速分离流中，可以证明 $m=\frac{1}{2}$。

根据上面内、外层的量级关系来估计（3-1）各项的量级。为了方便我们把各项的量级分别写在（3-1）式各项的下面。可以看出内、外两区方程各项的量级不是完全相同的，有

的在内区为 $O(1)$，但在外区则为 ε^2；有的在内区为 ε^{2m}，但在外区为 $O(1)$。当保留方程的低阶项略去内外区量级都为 ε^{2m} 以上的高阶小量项时，我们即可得到一组简化的 N-S 方程。将边界层座标系转换成 x，y 座标系，再利用变换 (2-2)，此简化的 N-S 方程为

$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial t}+\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \xi}+\frac{\partial \widetilde{G}}{\partial \eta}=0 \tag{3-2}$$

式中

$$\widetilde{U}=(\rho,\ \rho u,\ \rho v,\ \rho e)^T$$

$$\widetilde{F}=\begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2+P\\ \rho uv\\ \rho uH\end{pmatrix}\sec\alpha,\qquad \widetilde{G}=\begin{pmatrix}\rho v-\rho u\operatorname{tg}\alpha\\ \rho uv-\dfrac{1}{Re_\infty}\sec^2\alpha\cdot\mu\dfrac{\partial u}{\partial\eta}-(\rho u^2+P)\operatorname{tg}\alpha\\ \rho v^2+P-\dfrac{1}{Re_\infty}\sec^3\alpha\sin\alpha\mu\dfrac{\partial u}{\partial\eta}-\rho uv\operatorname{tg}\alpha\\ \rho vH-\dfrac{1}{Re_\infty}\sec^2\alpha\mu\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left[H+\left(\dfrac{1}{Pr}-1\right)h\right]-\rho uH\operatorname{tg}\alpha\end{pmatrix}$$

这个方程在内、外区都是适用的。此外方程的边界条件和起始条件与完全的 N-S 方程相同。

2．求解方法

求解简化 N-S 方程用的网格系统，差分格式和解题方法与完全的 N-S 方程相同[21]。其计算中的稳定条件是：

对于 $L_\xi(\Delta t_\xi)$：

$$\left.\begin{aligned}&0\leqslant Q_\xi\leqslant 1\\ &\Delta t_\xi=\min\frac{\Delta\xi}{(|u|+c)\sec\alpha}\end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

对于 $L_\eta(\Delta t_\eta)$

$$\left.\begin{aligned}&0\leqslant Q_\eta\leqslant 1\\ &\Delta t_\eta=\min\frac{\eta_{j+1}-\eta_j}{|v-u\operatorname{tg}\alpha|+c\sec\alpha+\dfrac{2\gamma\mu}{Re_\infty Pr\rho}\sec^2\alpha\dfrac{1}{\eta_{j+1}-\eta_j}}\end{aligned}\right\} \tag{3-4}$$

四、结 果 与 分 析

为了验证混合格式的可用程度和简化 N-S 的方程的准确性，我们作了一些计算，结果如下：

1．超声速、高超声速平板绕流

计算分三种情况：（1）$M_\infty=3$，$Re_\infty=1.68\times10^4$，$T'_\infty=216.65°K$，绝热壁；（2）$M_\infty=3$，$Re_\infty=10^3$，$T'_\infty=216.65°K$，绝热壁；（3）$M_\infty=14.1$，$Re_\infty=1.05\times10^5$，$T'_\infty=72.222°K$，$T_w=297.22°K$，高冷壁。前一种情况使用 N-S 方程，后二种情况使用简化的 N-S 方程。

图 2 给出了第一种情况的壁面压力和摩阻分布，为了比较，图中也给出了 Carter[19] 的 N-S 方程数值解的结果。可以看出我们的结果和 Carter 的结果接近。图 3 是第二种情况的壁面压力分布，图中还画出了 Hodge[15] 和 Carter[9] 的 N-S 方程的数值解。在 $\xi\geqslant0.2$ 时，

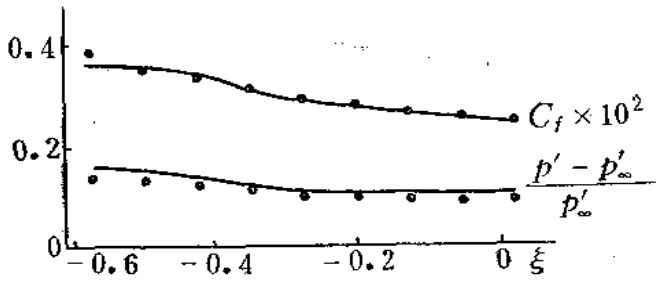


图 2 平板壁面压力和摩阻分布

$M_\infty=3$ $Re_\infty=1.68\times10^4$ $\omega=0$

$T_\infty=216.65°K$ $T_W=606.62°K$

——本文完全 N-S 解 O 文献〔9〕

三者十分一致，但在前缘，我们的结果和 Hodge 的结果一致，并且波动较小。图 4 是第三种情况的结果，图

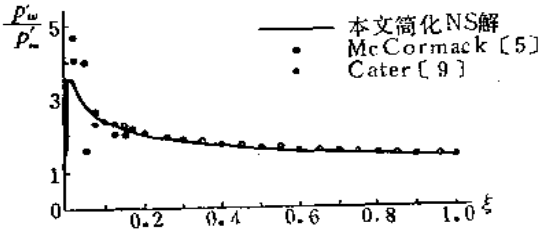


图 3 平板表面压力分布

$M_\infty=3$ $Re_\infty=10^3$ $\omega=0$ 绝热壁

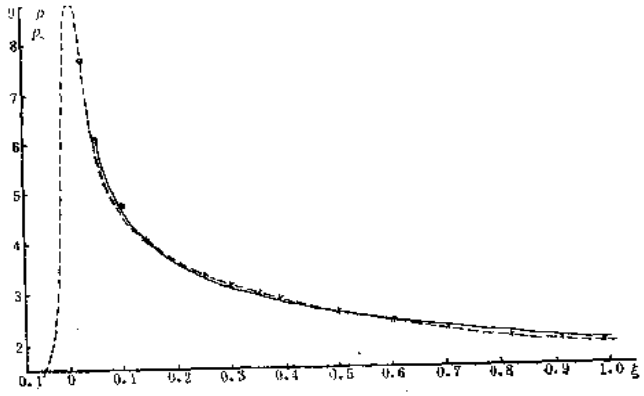


图 4 $M_\infty=14.1$ $Re_\infty=1.04\times10^5$ 时平板表面上的压力分布

$T'_\infty=72.222°K$ $T_W=297.22°K$

−×− 本文简化 N-S 方程解

—— MacCormack N-S 方程解〔3〕

O Bertram 强干扰理论〔22〕

中还给出了MacCormack[8]和强干扰理论的结果[22]。图 3，4 表明，简化 N-S 方程给出的结果和 N-S 方程的结果是完全一致的。图 5 给出了第二种情况中 $\xi=1.0$ 位置上的速度剖面和温度。图中给出了 Carter[9] 细、粗网格的计算结果。可以看出，我们的结果和 Carter 细网格的结果一致。这表明简化 N-S 方程给出的流场也是满意的。

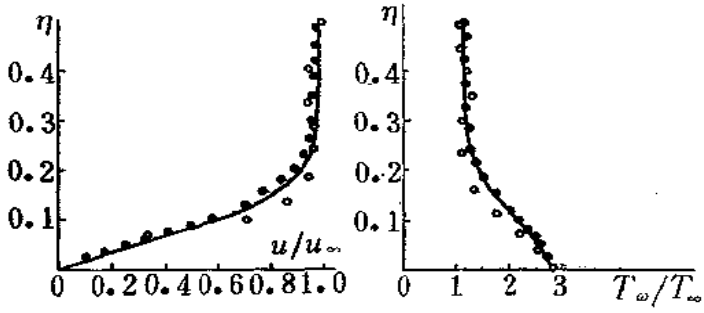


图 5 $\xi=1.0$ 处的速度和温度剖面

$M_\infty=3$ $Re_\infty=10^3$ $\omega=0$

—— 本文简化 NS 解，网格尺寸 0.017

O Carter〔9〕 网格尺寸 0.05

● Carter〔9〕 网格尺寸 0.015

2．超声速二维压缩拐角的分离流动

这里利用 N-S 方程对 $M_\infty=3$，$Re_\infty=1.68\times10^4$，$T_\infty=216.65°K$绝热壁，折角 $\omega=5°$，$10°$，$20°$ 三种情况作了计算，图 6，7，8 分别给出了三种情况的壁面压力和摩阻分布。图中也给出了 Carter[9]、MacCormack[8] N-S 方程数值解的结果，可以看出，本文结果与 MacCormack 的结果很为一致。对于$\omega=10°$，用简化的 N-S 方程也作了计算，其结果被画在图 7 中。不难看出，简化 N-S 方程的结果是适用的。图 9 给出了简化 N-S 方程、N-S 方程计算获

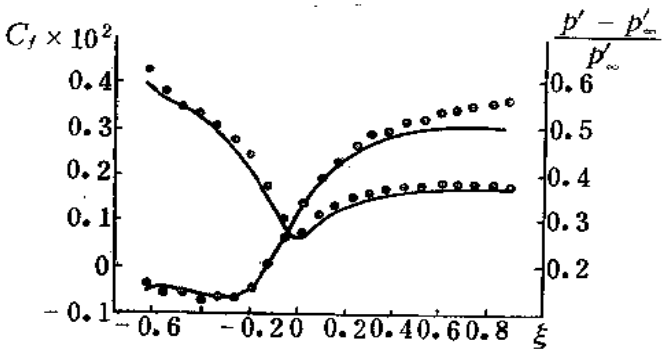
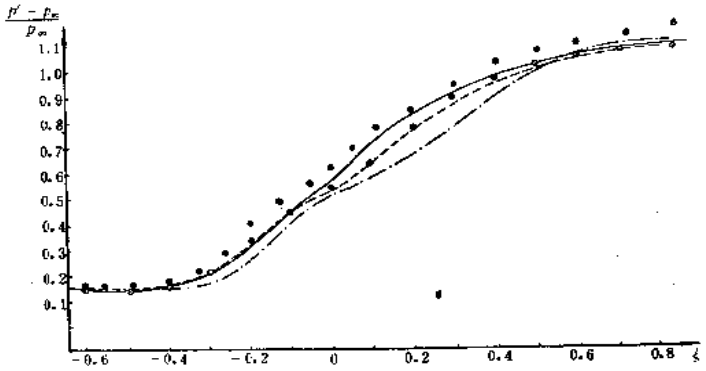
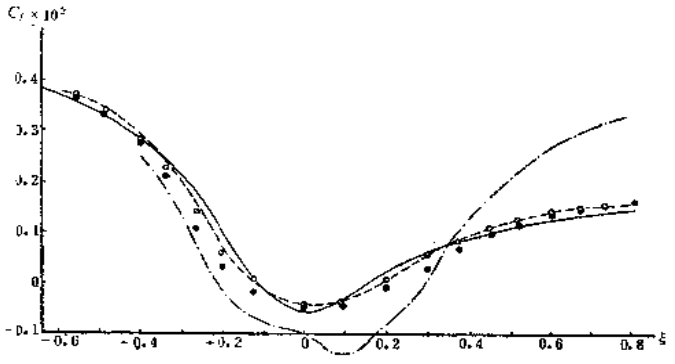


图 6 壁面压力、摩阻系数分布
$M_\infty=3$　$Re_\infty=1.68\times10^4$　$\omega=5°$
$T_\infty=216.65°K$　$T_W=606.62°K$
—— 本文 NS 方程数值解
◎ 文献〔9〕



a) 表面压力分布



b) 表面摩阻分布

图 7 求解简化 N-S 方程和完全 N-S 方程给出的表面压力分布和表面摩阻分布，
$M_\infty=3$　$T_\infty=216.65°K$　$\omega=10°$　$Re_{\infty L}=1.68\times10^4$　$T_W=606.62°K$
⊙ Maccomack N-S 解〔3〕　⊗ Carter N-S 解〔9〕
—— 本文简化 N-S 解　---- 本文完全 N-S解
—·— 边界层差分解〔23〕

得的压力、密度和速度剖面，其位置为 $\xi=-0.05357$ 和 0.3035。可见两者是一致的。由图可以看出，沿壁面法向压力变化是大的。图10给出了 N-S 方程计算得到的流动图案。

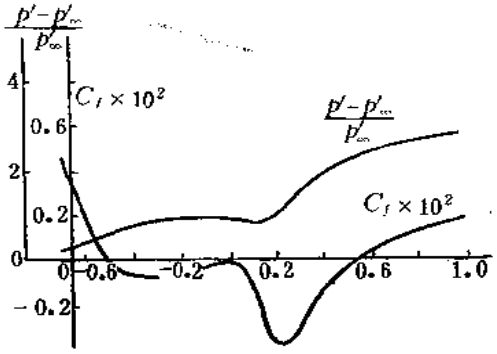


图 8 壁面压力和摩阻分布

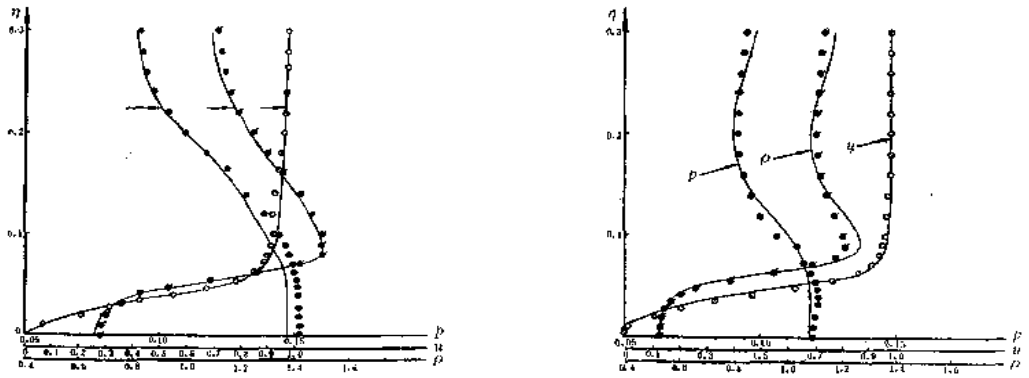
$M_\infty=3$ $Re_\infty=1.68\times10^4$ $\omega=20°$

$T_\infty=216.65°K$ $T_W=606.62°K$

—— 本文 N-S 方程数值解

3．高超声速二维压缩拐角的分离流动

这里我们计算了 $\omega=15°$、$18°$，$M_\infty=14.1$，$Re_\infty=1.04\times10^5$，$T_\infty=72.22°K$，$T_W=297.22°K$ 高冷壁两种情况。计算表明，$\omega=15°$ 时流动是附体的，$\omega=18°$ 流动出现分离。



a) b)

图 9 完全和简化 N-S 方程计算的压力密度和速度剖面比较

a) $\xi_f=-0.05357$ $M_\infty=3$ $Re_\infty=1.68\times10^4$
$T_\infty=216.65°K$ $T_W=606.62°K$ $\omega=10°$
●用简化N-S方程算得的 P
✓用简化N-S方程计算的 ρ
○用简化N-S方程计算的 u
—— 本文N-S方程结果

b) $\xi=0.3035$ $M_\infty=3$ $Re_\infty=1.68\times10^4$
$T_\infty=216.65°K$ $T_W=606.62°K$ $\omega=10°$
●用简化 NS 方程计算的 P
—— 完全 NS 方程计算结果
✓用简化N-S方程计算的 ρ
○用简化N-S方程计算的 u

图 11，12 分别画出了简化 N-S 方程、N-S 方程计算给出的壁面压力和热流系数的分布。可以看出，两种方程给出的压力分布与实验结果[20]和 MacCormack[3] N-S 方程的结果都十分吻合；对于热流分布我们的两种方程的结果是一致的，并且

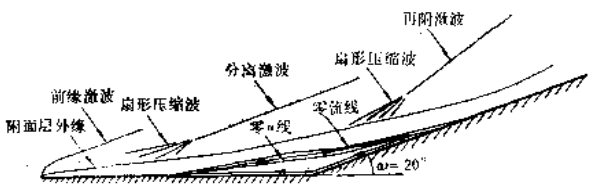


图 10 流场流动图案

比 MacCormack 的计算结果更接近于实验。

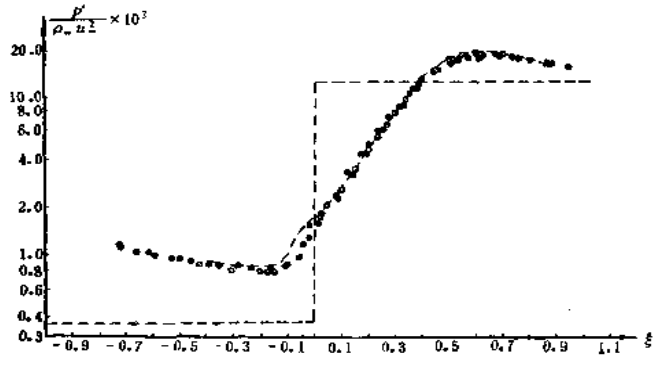


图 11 完全 N-S 方程和简化 N-S 方程解得的表面压力分布
M_∞ =14.1 $Re_{\infty L}$=1.04×10⁵ T_∞=72.222°K
T_W=297.22°K ω=18°
● 本文完全 N-S 方程数值解
⊗ 本文简化 N-S 方程数值解
⊙ Holden 实验 [20]
--- Maccormack N-S 数值解 [3]

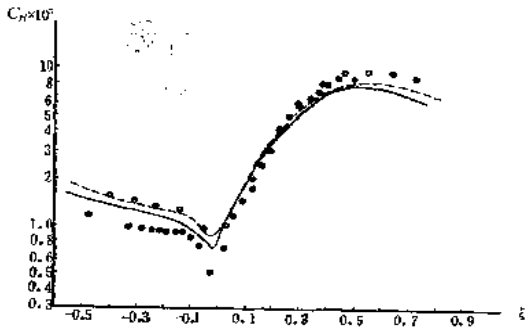


图 12 沿壁面的热交换系数分布比较
M_∞=14.1 Re_∞=1.04×10⁵
T_∞=72.222°K T_W=297.22°K
ω=18°
--- 本文简化 N-S 方程计算结果
—— 本文完全 N-S 方程计算结果
○ Maccormack N-S 解 [3]
● Holden 实验 [20]

五、讨　　论

1．通过前面的分析和计算，可以看出简化的 N-S 方程解分离流动问题是适用的。在我们的计算范围内，它可得到和 N-S 方程完全一致的结果。简化的 N-S 方程一方面考虑了粘性的主要影响，另一方面准确考虑了无粘性的作用，和边界层方程相比，它仅复杂些，但由于在整个流场皆适用，不需要复杂的匹配求解过程，计算结果比边界层方程的数值解[23]好得多。和 N-S 方程相比，它简单得多，可以节省机器存贮量和计算时间。

简化的 N-S 方程对解决三维分离流动可能是更为有用的，因为此时求解 N-S 方程需要更大的机器存贮量和更长的计算时间。目前一些研究表明，在三维情况下粘性的作用不如二维强烈，而非粘性的作用相对重要些，这些情况和简化 N-S 方程的特点正好吻合。

2．计算表明，我们采用的自动调节的混合格式是好用的，在激波附近，格式为一阶精度，在其他区域，格式为二阶精度。计算证明这种格式能很好的消去激波附近的非线性振荡，并且计算得到的激波厚度比较小。

3．本文的计算方法很容易推广到湍流情况。

参　考　文　献

[1] MacCormack, R. W., The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering, AIAA paper, 69-354 (1969).

[2] MacCormack, R. W., Numerical solution of the interaction of shock wave with a laminar boundary layer, Lecture notes in physics, 8(1971).

[3] Hung, C. M. and MacCormack, R. W., Numerical solution of supersonic and hypersonic laminar flow over a two dimensional compression

corner, AIAA paper, 75-2 (1975).

[4] MacCormack, R. W., and Baldwin, B. S., A numerical method for solving the Navier-Stokes equations with application to shock-boundary layer interactions, AIAA paper, 75-1 (1975).

[5] Hodge, B. K., Acomputer study of hypersonic laminar boundary layer/shock wave interaction using the time dependent compressible Navier-Stokes equations, AEDC TR 76-119(1976).

[6] Hodge, B. K., Prediction of hypersonic laminer boundary layer/shock wave interaction, *AIAA J.* **15**, 7 (1977).

[7] Shang, J. S. and Hankey, W. L., Nnmerical solution of the compressible Navier-Stokes equations for a three-dimensional corner, AIAA paper 77-169.

[8] Браиловская, И. Ю., Явные разностные методы для расчема отрывный течений вязково сжимаемого газа, В. сб. некоторые применения методе сеток в динамика Изд-во, Мту. вып. 4 (1971).

[9] Carter, J. E., Numerical solution of the Navier-Stokes equations for supersonic laminar flow over a two-dimensional compression corner.

[10] Hanin, M., Wolfshtein, M. and Laudau, U. E., Numerical solution of Navier Stokes equation for interaction of shock wave with laminar layer, ICAS proceedings (1974).

[11] Beam, R. M. and Warming, R. F., An implicit factores scheme for the compressible Navier-Stokes equation, AIAA paper 77-645.

[12] Li, C. P., Anumerical study of the axial corner flow, AIAA paper 78-1146.

[13] MacCormack, R. W., An efficient numerical method for solving the time-dependent compressible Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers, NASA, TMX 73129 (1976).

[14] Hung, C. M. and MacCormack, R. W., Numerical solution of supersonic laminar flow over a three dimensional corner, AIAA paper, 77-694(1977).

[15] Shang, J. S., An imlicit explicit method for solving the Navier-Stodes equations, *AIAA J.*, **16**, 5 (1978).

[16] Черный, Г. Г., Течения газа с большой сворхзвуковой скоростно, ФИЗМАТГИЗ, (1959).

[17] 张涵信，陆林生，马占奎，余泽楚，超声速二维层流分离流动的数值气体的分离流动。中国气动研究发展中心报告 (1979).

[18] Harten, A. and Zwas, G., Switched numerical shumen filters for shock calculation, *J. of Eng. Math.*, 6 (1972).

[19] 张涵信，陆林生，余泽楚，马占奎，关于混合差分格式中一些问题的讨论。中国气动

研究发展中心报告 (1979)。
〔20〕Holden, M. S. and Mosell, J. R., Theoratical and experimental studies of the shock wave-boundary layer interaction on compression surface in hypersonic flow, CALSPAN Report No. AF-2410-A-1(1969)。
〔21〕张涵信，余泽楚，陆林生，马占奎，用简化的 N-S 方程求解粘性气体的分离流动。中国气动研究发展中心报告 (1979)。
〔22〕Bertram, M. H. and Blackstosk, T. A., Some simple solutions to the ploblem of predicting boundary layer self-induced pressure, NASA TN D*-798, April (1961)。
〔23〕Hankey, W. L. and Holden, M. S., Two-dimensional shock wave boundary layer interactions in high speed flows, AGARD-AG-203 (1975)。

亚临界声速绕流问题的计算

陈耀松　马　瑜
（北京大学）

1．方法　航空工程的发展迫切要求气体动力学家解决飞行器在各种速度下的绕流问题。由于一般方程的复杂性质，在实际工作中只能由简而繁地针对具体问题逐步去解决。在这个过程中，亚声速位势流问题占着相当重要的地位。在近代计算机出现以前，最有效的是保角变换方法[1,2]和线性化理论[3,4]。前者局限于平面问题，后者虽无此限制，但也只限于低马赫数或薄物体绕流。

对二维位势流，其位势 φ 有方程式

$$(a^2-v_x^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-2v_xv_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+(a^2-v_y^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

其中 $v_x=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$，$v_y=\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ 为速度分量，a 为局部声速。根据伯努利积分，它与速度 $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ 有如下关系

$$\frac{v^2}{2}+\frac{a^2}{\gamma-1}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_*^2=\frac{v_m^2}{2} \qquad (2)$$

其中 γ 为气体比热比，一般双原子气体 γ 为 1.4，a_* 为临界声速，v_m 为极限速度。方程（1）是一个非线性方程。对它没有一般性的解，只有针对具体问题拟出具体的解法。对来流马赫数较高而物体外形较钝的情况，文献〔5，6〕提出以 M_∞^2 展开，逐次地求高阶项，使得到的解在较高的亚声速范围内依旧能用。它们的具体做法是将方程（1）写成

$$\Delta\varphi=\mu\left\{\left(v_x'^2+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}v_y'^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{4v_x'v_y'}{\gamma+1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right.$$

$$\left.+\left(v_y'^2+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}v_x'^2\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\} \qquad (3)$$

其中 $v_x'=v_x/V_\infty$，$v_y'=v_y/V_\infty$，$\mu=(V_\infty/a_*)^2=M_\infty^2\Big/\left(\dfrac{2}{\gamma+1}+\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}M_\infty^2\right)$，$V_\infty$，$M_\infty$ 分别为来流速度和来流马赫数。

将 φ 写成

$$\varphi=\varphi_0+\mu\cdot\varphi^{(1)}+\mu^2\cdot\varphi^{(2)}+\cdots+\mu^n\cdot\varphi^{(n)}+\cdots \qquad (4)$$

然后代入方程（7）。令 μ 幂次相同的项构成等式，便得到 φ_0，$\varphi^{(1)}$，$\varphi^{(2)}$，… 各阶项的方程。φ_0 为拉普拉斯方程，其余的是形式为

$$\Delta\varphi^{(n)}=H^{(n)} \qquad (n=1,\ 2,\cdots) \qquad (5)$$

的泊桑方程，其右方项 $H^{(n)}$ 是只包含 φ_0，$\varphi^{(1)}$，…，$\varphi^{(n-1)}$ 的函数，在求 $\varphi^{(n)}$ 时它们可以认为是已知的。φ_0 是不可压缩流体解，可以认为已经找到。在这个基础上，对平面问题的

$\varphi^{(1)}$ 有一般形式的解[7]。对更高阶项，分析解不易得到。

由于近代计算技术的发展，解泊桑方程已无困难。我们可将逐阶计算的问题改成循环叠代以适应程序计算的特点。为此，保留 φ_0 为 $\varphi_*^{(0)}$，令 $\varphi_*^{(n)}$ 为

$$\Delta\varphi_*^{(n)}=H(\varphi_*^{(n-1)}) \tag{6}$$

的解，其中 $H(\varphi)$ 为式（3）的右方项。根据具体边条件下求得式（6）的解 $\varphi_*^{(n)}$，它与 $\varphi^{(n)}$ 有如下关系

$$\varphi_*^{(n)}=F^{(n)}(\varphi_0,\ \mu\varphi^{(1)},\ \cdots,\ \mu^n\varphi^{(n)})+O(\mu^{n+1}) \tag{7}$$

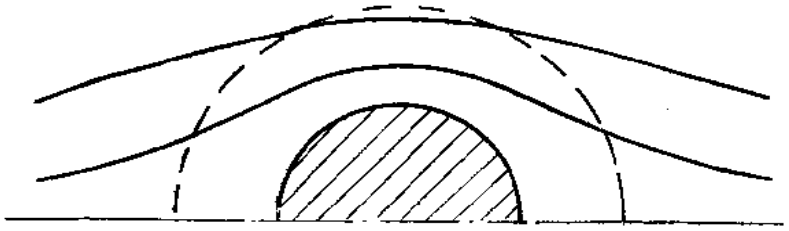


图 1

求解泊桑方程一般可用差分方法，但对外部绕流问题，只要马赫数在 1 以下，式（3）的右方项 $H(\varphi)$ 只在物体附近个别区域中有较显著的值（如图 1 的某个虚线圆内），而在远处都可以视为零。对这种情况直接使用差分法就不太经济。因为它每叠代一次，整个空间的量都同时改变，都得重新计算。现在我们提出在流场“可压缩区”C 内布置基本解[8]的方法来得到式（6）的解。数值计算时都先离散化，将“可压缩区”划分成小块，每块上布置一个源汇点，或均布源汇体，作为压缩性的修正量（当流体不可压缩时，它们等于零）。至于物体表面，或表面内亦布置有限个基本解，它们的强度则根据物面边条件来确定。整个叠代过程是：先令修正源汇块的强度等于零，求得物体上的零次基本解，然后根据这个基本解求修正源汇块的强度。在这个空间源汇下再解物体绕流，得一次叠代解。如此循环，得高次叠代解。由于各基本解对各控制点的影响系数是一次算定的，以后每次叠代都用此系数，因此叠代速度非常快。只要叠代本身收敛，很快便能达到极限值。由于人们大量有兴趣的是平行来流中的绕流问题，根据采用扰动速度势 φ' 再作线化的经验，最好将叠代方程写成

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}=H(\varphi)-M_\infty^2\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}=H_1(\varphi') \tag{8}$$

这样，在远离物体时，H_1 远比 H 下降的要快。因此，修正源汇的布置可以局限在物体附近更小的区域，也就是说，用更少的修正源汇块（但用的是可压缩源汇）便能得到同样精度的结果。这点对薄物体绕流问题来说特别重要。对于流线型的薄体，尽管线化理论可以用到相当高的 M_∞ 数，但在头部附近（如图 2 的 C 区），由于线性化的基本要求得不到满足，线性化解在此局部区域内不能适用。如果采用现在的方法，那么只要在这小小的 C 区内布置一些修正源汇块或点，便能得到全面适用的位势解。

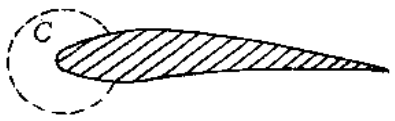


图 2

2．算例 这次试验以圆柱为对象。由于流动具有对称性质，只要研究一个象限即可。将这圆柱

的表面等分成 2^n（n 为正整数）段。然后在圆外先分出 2^n 个小方块，在它外面再分 2^{n-1} 个边长约大一倍的小方块。以此类推，离物面越远，块就越大，修正越粗。在每一块上均布一源汇，或在形心上布置一点源汇以代替压缩性效应，其强度则由连续性方程

$$\nabla\cdot v=-v\cdot\frac{\nabla\rho}{\rho}=v\cdot\frac{\nabla p}{\gamma p}=-\frac{\rho}{\gamma p}v\cdot\frac{\nabla p}{\rho}=\frac{1}{a^2}v\cdot(v\nabla v) \tag{9}$$

求得。利用伯努利积分（2）可知均布强度 q 应为

$$q=\nabla\cdot v=\frac{2}{\gamma-1}\cdot\frac{v^2}{v_m^2-v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial s} \tag{10}$$

其中 v 为 $\sqrt{v_x^2+v_y^2}$，s 为流线方向。如果采用点源汇，则其强度 Q 为

$$Q=qA \tag{11}$$

其中 A 为修正小块的面积。

现在整个流场就由一个平行来流和一组源汇所构成。在计算某块的 $\frac{\partial v}{\partial s}$ 时，可以分别计算各块对它的贡献，然后再累加，但这样做时要注意本块源汇自身对 $\frac{\partial v}{\partial s}$ 的贡献是 $\frac{1}{2}\nabla\cdot v$（推导时，假定了源汇块为正方形）。如果采用式（8）叠代，则本块强度 q' 对公式

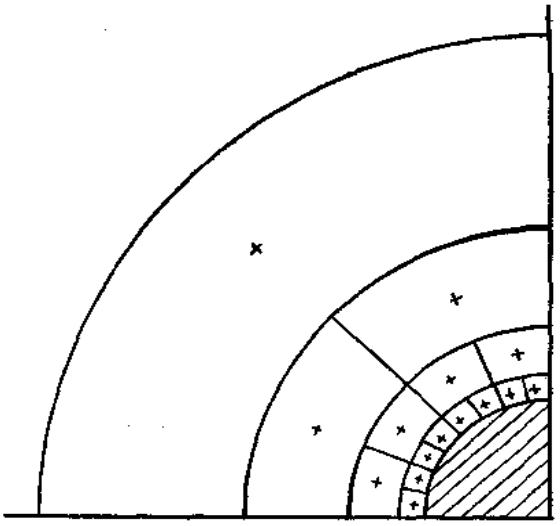


图 3

$$q'=\beta^2\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=\frac{2}{\gamma-1}\cdot\frac{v^2}{v_m^2-v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial s}-M_\infty^2\frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{12}$$

中右方的 $\frac{\partial v}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ 的贡献将分别是：

$$\left\{\left[\left(\frac{s_{0x}}{\beta}\right)^2-s_{0y}^2\right]\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\beta+s_{0y}^2\right\}\cdot q' \tag{13}$$

和

$$\left\{\frac{2}{\pi\beta^2}\mathrm{arctg}\beta\right\}\cdot q' \tag{14}$$

其中（s_{0x}，s_{0y}）代表流线方向的单位向量（见附录）。这组公式在由第 n 轮 $q'^{(n)}$ 叠代求第 $n+1$ 轮 $q'^{(n+1)}$ 时要用到。本例叠代用的是公式（5），修正用点源汇，方法相当粗糙，所得的典型速度分布和马赫数分布绘于图 4（来流马赫数为 0.42）。由它所得的最大局部马赫数为 0.9784，比逐次逼近的一次近似结果算得的 1 要小。由于本例对修正源汇的处理方法过于粗糙，这里还不能就此算得的结果作出比线性化理论的结果[7]要好的估计。

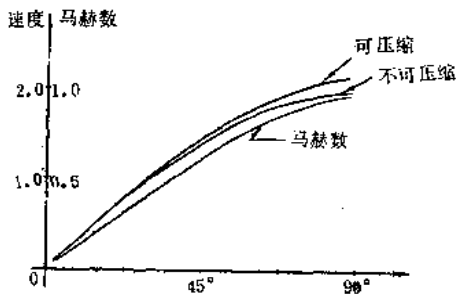


图 4

3，讨论 本方法只限用于亚临界声速的情况。对翼型前缘附近，即前驻点附近的压力

计算特别有效。由于在物体上保留了有限基本解的做法，它可以用在复杂的几何外形问题上，而且不受二维的限制。对微超临界声速虽然亦可以算，但所得结果，特别是局部超声速区内的结果未必可靠。它只能看作是亚声速区内的结果的一组“外插”。

由于本方法是表面基本解外加修正，它要求的未知数比差分法，或有限元法少“一维”。因此，所需内存少，计算快。在上述亚临界声速的算例中，只叠代 40 次就已达到稳定值（尚未利用超松弛因子），应该说收敛得相当快。

本方法在原则上虽无问题，但要它准确有效，在具体做法上，主要是在修正源汇的选取和划分上还必须依靠大量的试验来取得经验。

本文提出的方法与吴镇远[9]，A. Roberts[10]等最近所做的工作有某些相似之处。吴将此法用在粘性问题中，称之“积分表示法”。A. Roberts 则用在可压缩问题中，但对泊桑方程（8）的求解用的是差分法。后者有标准程序可用，但对分格限制较大，并且积分空间亦必须有限。为此，对这有限空间的边界值，需要另有方法处理，本文的办法则无此必要。

附　　录

上述公式是在物理平面上修正源汇按正方形划分的假令下导得的。

作变换 $x'=x/\beta$，$y'=y$，令 $r'^2=x'^2+y'^2$，则可压缩源汇基本解为 $\varphi=L\,r'$。假令在 $x'-y'$ 平面中的均布强度为 q'。则右图方块边缘二小边条均布源汇对原点速度所作的贡献是

$$\Delta v_x'=2\Delta x'\cdot\frac{q'}{2\pi}\cdot\int_{-1}^{+1}\frac{x'}{r'^2}\,dy'$$

$$=\frac{2}{\pi}\Delta x'\cdot q'\cdot\operatorname{arctg}\beta$$

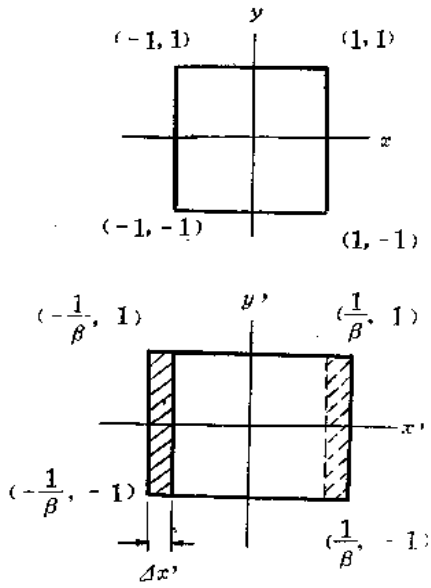


图　5

由此可以求得整个方块源汇对其中心的 $\frac{\partial v_x'}{\partial x'}$ 的贡献为

$$\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x'}\right)_t=\frac{2q'}{\pi}\operatorname{arctg}\beta$$

即对 $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ 的贡献为

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_t=\frac{2q'}{\pi\beta^2}\cdot\operatorname{arctg}\beta$$

同样可计算对 $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ 的贡献

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_t=q'\left(1-\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\beta\right)$$

而由于对称，有

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_t=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_t=0$$

因此，有

$$\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_t = s_{0x}^2 \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_t + s_{0x} \cdot s_{0y} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_t + s_{0y}^2 \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_t$$

$$= s_{0x}^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_t + s_{0y}^2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_t$$

$$= q' \cdot \left\{\left[\left(\frac{s_{0x}}{\beta}\right)^2 - s_{0y}^2\right] \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \mathrm{arctg}\beta + s_{0y}^2\right\}$$

在 $\beta=1$ 的情况，$q'=q=\nabla \cdot v$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_t = \frac{1}{2} \cdot \nabla \cdot v$$

参 考 文 献

〔1〕Milne-Thomson, L. M., Theoretical Aerodynamics, Mac-Millan (1948).

〔2〕Седов, Л., Плоские Задачи Гидромеханики, Г. Т. Т. И. (1950).

〔3〕Зауэр, Р., Введение в Газовую Динамику, Гостехиздат (1947).

〔4〕Donovan, A. F. and Lawrence, H. R., Aerodynamic Components of Aircraft at High Speeds, Princoton Uni. Press (1957).

〔5〕Lord Reyleigh, *Phil. mag.*, **32** (1916), 1—6.

〔6〕Janzen, O., *Phys. Zeitschr.*, **14** (1913), 639—643.

〔7〕别洛娃，A. B.，气体动力学讲义，科学出版社 (1956)，189—197.

〔8〕Courant, R. and Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics, Vol. I, John Wiley ϕ Sons (1962).

〔9〕Wu, J. C. and Rizk, Y. M., Proc. 6th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Mech., Springer Verlag (1978).

〔10〕Roberts, A., Comp. Meth. ϕ Prob. in Aeronautical Fluid Dynamics, edited by Hewitt, B. L. et al., Acadamic Press (1976).

用交替方向迭代法计算高超音速钝体的粘性激波层

董常铨

前　言

在研究飞行器表面摩擦力及热流效应时，必须考虑气体粘性的影响。为了既能反映激波层中粘性及热传导的影响，又便于数值计算，许多作者[1-6]对 Navier-Stokes 方程组进行了简化。从而得到了简化的 N-S 方程组。本报告所引用的是 Davis，R．T．[1] 提出的简化模型。对于一定的飞行高度，一定的 Reynolds数，激波作为一个间断面处理还是合理的，然而边界层和无粘流场的划分不再是截然的了，方程组表现为“混合型”的数学性质。Garvine，*R*．W．利用简单的模型方程说明，我们所用的粘性激波层方程不仅具有抛物-双曲型性质，而且还呈现椭圆型性质，即解依赖于激波层的厚度。于是采用交替方向即Spline叠代。而不仅仅用沿流向推进的算法，在物面曲率变化较大的区域尤其应注意。当然在物面曲率变化小的区域，激波松弛的次数可大大减小，以至于松弛一、二次即可得到较好的结果。总之激波松弛的次数受物面曲率变化及计算精度的控制。

基本方程组是由 Davis，R．T．提出的激波层方程组：

连续方程

$$\frac{\partial}{\partial s}[R^j\rho u]+\frac{\partial}{\partial n}[(1+K_r n)R^j\rho v]=0 \tag{1}$$

s-动量方程

$$\rho\left\{\frac{u}{1+K_r n}\frac{\partial u}{\partial s}+v\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{K_r uv}{1+K_r n}\right\}+\frac{1}{1+K_r n}\frac{\partial p}{\partial s}$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{(1+K_r n)^2R^j}\frac{\partial}{\partial n}[(1+K_r n)^2R^j\tau] \tag{2}$$

其中

$$\tau=\mu\left[\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{K_r u}{1+K_r n}\right]$$

n-动量方程

$$\rho\left\{\frac{u}{1+K_r n}\frac{\partial v}{\partial s}+v\frac{\partial v}{\partial n}-\frac{K_r u^2}{1+K_r n}\right\}+\frac{\partial p}{\partial n}=0 \tag{3}$$

能量方程

$$\rho\left\{\frac{u}{1+K_r n}\frac{\partial T}{\partial s}+v\frac{\partial T}{\partial n}\right\}-\frac{u}{1+K_r n}\frac{\partial p}{\partial s}-v\frac{\partial p}{\partial n}$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{\mu}\tau^2 + \frac{\varepsilon^2}{(1+K_r n)R^j}\frac{\partial}{\partial n}[(1+K_r n)R^j q] \tag{4}$$

其中 $$q = \frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial T}{\partial n}$$

(s, n) 分别是参考线座标系的切向分量与法向分量。u，v 是 (s, n) 上的速度分量，T 是温度，p 是压力，ρ 是密度，μ 是粘性系数，$\varepsilon^2 = \frac{1}{Re_\infty}$，$Re_\infty$ 是来流 Reynolds数，σ 是 Prandtl 数，$j=0$ 对应于二维情况，$j=1$ 对应于轴对称情况。以上所有的量都是无量纲量，量纲因子分别是 $p \sim \rho_\infty^* v_\infty^{*2}$，$\rho \sim \rho_\infty^*$，$u$、$v$、$a$（声速）$\sim v_\infty^*$，$T \sim v_\infty^{*2}/c_p^*$，$x$、$y$、$R \sim l^*$（特征长度 l^* 可取作球头半径），$\mu \sim \mu^*(v_\infty^{*2}/c_p^*)$

状态方程 $$p = \frac{\gamma-1}{\gamma}\rho T \tag{5}$$

粘性定律 $$\mu = \frac{c'+1}{T+c'}(T)^{3/2} \tag{6}$$

其中 $$c' = \frac{c^*}{(\gamma-1)M_\infty^2 T_\infty^*} \qquad c^* = 198.6^\circ\ R \quad (\text{对于空气})$$

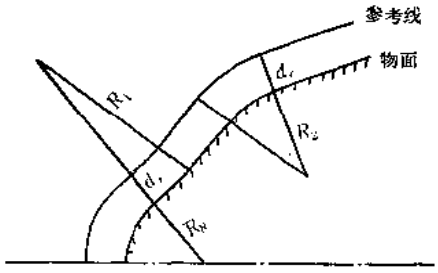


图 1 参考线座标系

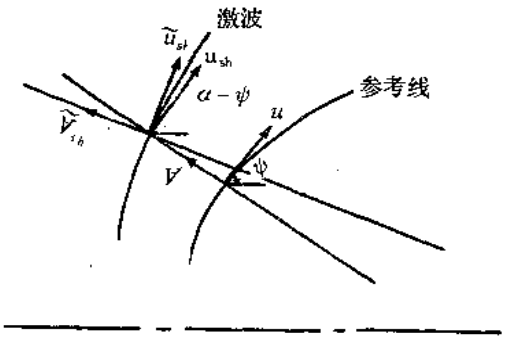


图 2 激波草图

在激波上的边界条件：

$$p_{sh} = \frac{2\sin^2\alpha}{(\gamma+1)} - \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+1)M_\infty^2} \tag{7}$$

$$\rho_{sh} = \frac{(\gamma+1)\sin^2\alpha}{(\gamma-1)\sin^2\alpha + \frac{2}{M_\infty^2}} \tag{8}$$

$$u_{sh} = \sin\alpha\sin(\alpha-\varphi)\left[\frac{1}{\rho_{sh}} - 1\right] + \cos\varphi \tag{9}$$

$$v_{sh} = \sin\alpha\cos(\alpha-\varphi)\left[1 - \frac{1}{\rho_{sh}}\right] - \sin\varphi \tag{10}$$

$$T_{sh} = \frac{\gamma p_{sh}}{(\gamma-1)\rho_{sh}} \tag{11}$$

$\tilde{u}_{sh} = \cos\alpha$（激波波后的切向速度）

$\bar{v}_{sh}=-\sin\alpha/\rho_{sh}$（激波波后的法向速度）

在物面上的边界条件：

参考线的走向大致与物面走向相同，即 $\varphi=\varphi_b$。当计算烧蚀外形时 $\varphi\neq\varphi_b$。φ 为参考线与 z 轴夹角，φ_b 为物面角。

$$u_b=0,\ v_b=0,\ T_b=T_w \text{ 或 } \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_b=0 \tag{12}$$

当计算 $\varphi\neq\varphi_b$ 情况时，给 u_b 以一定的“滑速度” ε_b

$$u_b=\varepsilon_b\cos(\varphi_b-\varphi),\ v_b=-\varepsilon_b\sin(\varphi_b-\varphi),\ T_b=T_w \text{ 或 } \frac{\partial T}{\partial n}=0 \tag{13}$$

为了增加物面附近流参的分辨度，引入下列变换：

令

$$\left.\begin{aligned}&\xi=s\\&\eta=\frac{n-n_B}{n_{sh}-n_B}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial\xi}-L\frac{\partial}{\partial\eta}\\&\frac{\partial}{\partial n}=\frac{1}{n_{sh}-n_B}\frac{\partial}{\partial\eta}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

又

$$\left.\begin{aligned}&x=\xi\\&y=\frac{\ln(1+b\eta)}{\ln(1+b)}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial x}\\&\frac{\partial}{\partial\eta}=N\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中

$$L=-\frac{\eta n'_{sh}+(1-\eta)n'_B}{n_{sh}-n_B} \tag{16}$$

$$N=\frac{b}{\ln(1+b)}e^{-y\ln(1+b)} \tag{17}$$

变换后 $y=0$ 表示物面，$y=1$ 表示激波。

Garvine, R. W.[8] 利用简单的模型方程描述激波层方程组的性质。他指出方程组不仅具有抛物双曲型性质，而且可能出现椭圆型性质，即解依赖于激波层的厚度。利用当地激波值引入新变量

$$\bar{u}=u/u_{sh},\ \bar{v}=v/v_{sh},\ \bar{p}=p/p_{sh},\ \bar{T}=T/T_{sh},\ \bar{\rho}=\rho/\rho_{sh},\ \bar{\mu}=\mu/\mu_{sh}$$

于是 s-动量方程与能量方程在变换平面 $(x,\ y)$ 可以化为抛物型方程的标准型

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial y^2}+a_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+a_2\bar{u}+a_3+a_4\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial y^2}+\tilde{a}_1\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}+\tilde{a}_2\bar{T}+\tilde{a}_3+\tilde{a}_4\frac{\partial\bar{T}}{\partial x}=0 \tag{19}$$

其中

$$a_1=\frac{1}{N}\left\{\frac{\rho_{sh}u_{sh}n_{sh}\bar{\rho}\bar{u}L}{\varepsilon^2\mu_{sh}\bar{\mu}}-\frac{\rho_{sh}v_{sh}n_{sh}}{\varepsilon^2\mu_{sh}}\frac{\bar{\rho}\bar{v}}{\bar{\mu}}+\frac{K_r n_{sh}}{(1+K_r n)}+\frac{n_{sh}\cos\varphi}{R}\right.$$
$$\left.+\frac{N}{\bar{\mu}}\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial y}\right\}-\ln(1+b)$$

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{N^2}\left\{\frac{\rho_{sh}n_{sh}^2}{\varepsilon^2\mu_{sh}(1+K_r n)}\cdot\frac{\partial u_{sh}}{\partial x}\cdot\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\bar{\mu}}+\frac{\rho_{sh}v_{sh}n_{sh}}{\varepsilon^2\mu_{sh}}\cdot\frac{\bar{\rho}\bar{v}}{\bar{\mu}}\cdot\frac{K_r n_{sh}}{(1+K_r n)}\right.\\
&\left.+\frac{K_r n_{sh}N}{(1+K_r n)\bar{\mu}}\cdot\frac{\partial\bar{\mu}}{\partial y}+\frac{K_r n_{sh}}{(1+K_r n)}\left[\frac{K_r n_{sh}}{(1+K_r n)}+\frac{n_{sh}\cos\varphi}{R}\right]\right\}\\
a_3 &= \frac{1}{N^2}\cdot\frac{p_{sh}n_{sh}}{\varepsilon^2\mu_{sh}}\cdot\frac{n_{sh}}{(1+K_r n)}\cdot\frac{\mathrm{i}}{u\mu_{sh}}\left[\frac{\bar{p}}{p_{sh}}\cdot\frac{\partial p_{sh}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-NL\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}\right]\\
a_4 &= -\frac{1}{N^2}\cdot\frac{p_{sh}u_{sh}n_{sh}}{\varepsilon^2\mu_{sh}}\cdot\frac{\bar{\rho}\bar{\mu}}{\bar{\mu}}\cdot\frac{n_{sh}}{(1+K_r n)}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_1 &= \frac{1}{N}\left\{\frac{K_r n_{sh}}{(1+K_r n)}+\frac{\cos\varphi}{R}+\frac{N}{\bar{\mu}}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}+\frac{\sigma\rho_{sh}u_{sh}n_{sh}}{\varepsilon^2\mu_{sh}}\cdot\frac{L\bar{\rho}\bar{u}}{\bar{\mu}}\right.\\
&\left.-\frac{\sigma\rho_{sh}v_{sh}n_{sh}}{\varepsilon^2\mu_{sh}}\cdot\frac{\bar{\rho}\bar{v}}{\bar{\mu}}\right\}-\ln(1+b)\\
\tilde{a}_2 &= -\frac{1}{N^2}\cdot\frac{\rho_{sh}n_{sh}u_{sh}}{\varepsilon^2\mu_{sh}T_{sh}}\cdot\frac{n_{sh}}{(1+K_r n)}\cdot\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\bar{\mu}}\cdot\frac{\partial T_{sh}}{\partial x}\\
\tilde{a}_3 &= \frac{\sigma}{N^2}\left\{\frac{u_{sh}n_{sh}p_{sh}}{\varepsilon^2\mu_{sh}T_{sh}}\cdot\frac{u_{sh}n_{sh}}{(1+K_r n)}\left[\frac{\bar{p}}{p_{sh}}\cdot\frac{\partial p_{sh}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-LN\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}\right]\right.\\
&\left.+\frac{\sigma u_{sh}^2}{T_{sh}}\left[N\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}-\frac{K_r n_{sh}\bar{u}}{(1+K_r n)}\right]^2\right\}\\
\tilde{a}_4 &= -\frac{\sigma}{N}\cdot\frac{\rho_{sh}u_{sh}n_{sh}^2}{\mu_{sh}\varepsilon^2(1+K_r n)}\cdot\frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\bar{\mu}}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

n 动量方程与连续方程构成一阶偏微分方程组

$$
\begin{pmatrix}\frac{\bar{u}}{N} & 0\\ 0 & \frac{\bar{u}}{N}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\\ \frac{\partial\ln\bar{\rho}}{\partial x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\\ \frac{\partial\ln\bar{\rho}}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{y}\\ \tilde{z}\end{pmatrix}
\tag{22}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{v_{sh}\bar{v}}{u_{sh}n_{sh}}(1+K_r n)-Lu\\
a_{12} &= \frac{\bar{T}p_{sh}}{\rho_{sh}u_{sh}v_{sh}n_{sh}}(1+K_r n)\\
a_{21} &= \frac{(1+K_r n)}{n_{sh}}\cdot\frac{v_{sh}}{u_{sh}}\\
a_{22} &= \frac{(1+K_r n)v_{sh}\bar{v}}{n_{sh}u_{sh}}-L\bar{u}\\
\hat{y} &= -\frac{(1+K_r n)p_{sh}}{\rho_{sh}u_{sh}v_{sh}n_{sh}}\cdot\frac{\partial\bar{T}}{\partial y}-\frac{\bar{v}\bar{u}}{Nv_{sh}}\cdot\frac{\partial v_{sh}}{\partial x}+\frac{K_r u_{sh}\bar{u}^2}{Nv_{sh}}\\
\tilde{z} &= -\frac{1}{N}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}-\frac{\bar{u}}{N}\cdot\frac{1}{R\rho_{sh}u_{sh}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}[R\rho_{sh}u_{sh}]+L\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\\
&+L\bar{u}\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\bar{v}_{sh}v}{n_{sh}u_{sh}R}\cdot\frac{\partial}{\partial y}[R(1+K_r n)]
\end{aligned}
\tag{23}
$$

s 动量方程化为

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_n\bar{u}_{m+1,n-1}+\beta_n\bar{u}_{m+1,n}+\gamma_n\bar{u}_{m+1,n+1}=D_n\\&\bar{u}_{m+1,1}=0,\quad \bar{u}_{m+1,J}=1\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n&=\left(\frac{1}{\Delta y^2}-\frac{a_1}{2\Delta y}\right)_{m+\frac{1}{2},n}\\\beta_n&=\left(a_2-\frac{2}{\Delta y^2}+\frac{2a_4}{\Delta x}\right)_{m+\frac{1}{2},n}\\\gamma_n&=\left(\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{a_1}{2\Delta y}\right)_{m+\frac{1}{2},n}\\D_n&=-2a_3-\left(\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{a_1}{2\Delta y}\right)_{m+\frac{1}{2},n}\bar{u}_{m,n+1}\\&\quad+\left(\frac{2}{\Delta y^2}-a_2+\frac{2a_4}{\Delta x}\right)_{m+\frac{1}{2},n}\bar{u}_{m,n}-\left(\frac{1}{\Delta y^2}-\frac{a_1}{2\Delta y}\right)_{m+\frac{1}{2},n}\bar{u}_{m,n-1}\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

能量方程化为

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\alpha}_n\bar{T}_{m+1,n-1}+\tilde{\beta}_n\bar{T}_{m+1,n}+\tilde{\gamma}_n\bar{T}_{m+1,n+1}=\tilde{\mathbf{D}}_n\\&\bar{T}_{m+1,1}=T_w/T_{sh},\quad \bar{T}_{m+1,J}=1\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\alpha}_n&=\left(\frac{1}{\Delta y^2}-\frac{\tilde{a}_1}{2\Delta y}\right)_{m+\frac{1}{2},n}\\\tilde{\beta}_n&=\left(\tilde{a}_2-\frac{2}{\Delta y^2}+\frac{2\tilde{a}_4}{\partial x}\right)_{m+\frac{1}{2},n}\\\tilde{\gamma}_n&=\left(\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{\tilde{a}_1}{2\Delta y}\right)_{m+\frac{1}{2},n}\\\tilde{\mathbf{D}}_n&=-2\tilde{a}_3-\left(\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{\tilde{a}_1}{2\Delta y}\right)T_{m,n+1}\\&\quad+\left(\frac{2}{\Delta y^2}-\tilde{a}_2+\frac{2\tilde{a}_4}{\Delta x}\right)T_{m,n}-\left(\frac{1}{\Delta y^2}-\frac{\tilde{a}_1}{2\Delta y}\right)T_{m,n-1}\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

连续方程与 n- 动量方程

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{pmatrix}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}\bar{v}\\\ln\bar{\rho}\end{bmatrix}_{m+1,n+1}+\begin{pmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}\\\beta_{21}&\beta_{22}\end{pmatrix}_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}\bar{v}\\\ln\rho\end{bmatrix}_{m+1,n}=\begin{bmatrix}y_n\\z_n\end{bmatrix}\tag{28}$$

记

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\alpha_{12}\\\alpha_{21}\alpha_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\bar{u}}{N}+\dfrac{\Delta x}{\Delta y}a_{11}&\dfrac{\Delta x}{\Delta y}a_{12}\\\dfrac{\Delta x}{\Delta y}a_{21}&\dfrac{\bar{u}}{N}+\dfrac{\partial x}{\Delta y}a_{22}\end{pmatrix}\tag{29}$$

$$B=\begin{pmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}\\\beta_{21}&\beta_{52}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\bar{u}}{N}-\dfrac{\Delta x}{\Delta y}a_{11}&-\dfrac{\Delta x}{\Delta y}a_{12}\\-\dfrac{\Delta x}{\Delta y}a_{21}&\dfrac{\bar{u}}{N}-\dfrac{\Delta x}{\Delta y}a_{22}\end{pmatrix}\tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} y_n &= 2\Delta x\,\hat{y} + \beta_{11}\bar{v}_{m,n+1} + \beta_{12}\ln\bar{\rho}_{m,n+1} + \alpha_{11}\bar{v}_{m,n} + \alpha_{12}\ln\bar{\rho}_{m,n} \\ z_i &= 2\Delta x\bar{z} + \beta_{21}\bar{v}_{m,n+1} + \beta_{22}\ln\bar{\rho}_{m,n+1} + \alpha_{21}\bar{v}_{m,n} + \alpha_{22}\ln\bar{\rho}_{m,n} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

所给出的方程组是

$$\left.\begin{aligned} &A_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}X_{m+1,n+1} + B_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}X_{m+1,n} = Y_n \\ &\mu_1 X_{m+1,1} = 0,\quad \mu_J X_{m+1,J} = 0 \\ &\mu_1 = (1,\ 0),\quad \mu_J = (0,\ 1) \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

计算激波波后流参除了用 Ranking-Hugoniot 关系式外还用到了下列的特征线方程及特征线上的关系式。

$$\lambda = \frac{dy}{dx} = \frac{N(1+K_r n)}{u^2-a^2}\left\{uv \pm \sqrt{(uv)^2-(v^2-a^2)(u^2-a^2)}\right\} - L \tag{33}$$

$$\frac{1}{a^2}\left\{vuN - (L+\lambda)\frac{u^2-a^2}{1+K_r n}\right\}\frac{dp}{dx} + N\rho v\frac{du}{dx} - N\rho u\frac{dv}{dx}$$

$$= -\{vN(1+K_r n) - u(L+\lambda)\}\frac{\rho}{R}(u\sin\varphi + v\cos\varphi) - NK_r\rho(u^2+v^2) \tag{34}$$

以上给出的是沿 x 方向推进所用到的公式。下面给出 Spline 算法修正激波波后流参。由方程 (18)，再利用 Ranking-Hugoniot 微分关系式得如下方程：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 n_{sh}}{ds^2} + \frac{(\bar{u}_{yy} + a_1\bar{u}_y + a_4\bar{u}_x + \gamma_3' + \gamma_2'\bar{u})}{\gamma_2\bar{u} + \gamma_3} - \alpha_I(n_{sh} - n) = 0 \\ &\left.\frac{dn_{sh}}{dx}\right|_{x=x_0} \text{已知} \qquad n_{sh}|_{x=x_{max}} = (n_{sh})_M \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

γ_2，γ_2'，γ_3，γ_3' 由 (20) 的 a_2 式，a_3 式给出：

$$a_2 = \gamma_2\frac{d^2 n_{sh}}{dx^2} + \gamma_2', \qquad a_3 = \gamma_3\frac{d^2 n_{sh}}{dx^2} + \gamma_3'$$

n 是 x 方向推进算法得到的激波脱体距离。将 (35) 式记为

$$M_i - \alpha_i\omega_i + f_i = 0 \tag{36}$$

其中

$$f_i = \left\{\frac{\bar{u}_{yy} + a_1\bar{u}_y + a_4\bar{u}_x + \gamma_3' + \gamma_2'\bar{u}}{(\gamma_2\bar{u} + \gamma_3)} + \alpha_I n\right\}_i$$

$\omega \equiv (n_{sh})_i$。利用已知的 Spline 逼近关系式导出

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\alpha}_i M_{i-1} + \hat{\beta}_i M_i + \hat{\gamma}_i M_{i+1} = \tilde{D}_i \\ &M_I = (n_{sh})_I \cdot \alpha_i + f_I \\ &E_0 M_0 + F_1 M_1 = (f_1 - f_0)/\alpha_i k_1 \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

下标 I 对应于 x_{max} 位置，$h_j = x_j - x_{j-1}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\alpha}_i &= \left(\frac{h_i}{6} - \frac{1}{\alpha_i h_i}\right) \\ \hat{\beta}_i &= \frac{h_i + h_{i+1}}{3} + \frac{1}{\alpha_i}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) \\ \hat{\gamma}_i &= \frac{h_{i+1}}{6} - \frac{1}{\alpha_i h_{i+1}} \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$\tilde{D}_i=\left[\frac{f_{i+1}}{h_{i+1}}-\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)f_i+\frac{f_{i-1}}{h_i}\right]\Big/\alpha_i$$

$$E_0=\left(\frac{h_1}{3}+\frac{1}{\alpha_i h_1}\right)\qquad F_0=\left(\frac{h_1}{6}-\frac{1}{\alpha_i h_1}\right)$$

整个求解过程如下，在驻点线用差分方程的追赶法提供初始剖面的流参。然后用交替方向 Spline 叠代向下游计算。首先预测激波形状，由 x_0 开始作 x 方向推进，先假定 $f_{m+1,n}=f_{m,n}$，利用式 (26)$\Rightarrow\bar{T}_{m+1,n}$ 进而计算出 $\mu_{m+1,n}$。利用 (24)$\Rightarrow\bar{u}_{m+1,n}$，利用式(28)，(32)$\Rightarrow\bar{v}_{m+1,n}$，$\bar{\rho}_{m+1,n}$，$\bar{p}_{m+1,n}$。再利用式(7)—(11)，(33)，(34)$\Rightarrow(\rho_{sh}, u_{sh}, v_{sh}, T_{sh}, p_{sh}, \mu_{sh})_{m+1}$。因为用的是隐式格式，每个剖面的流参值要叠代到满足一定精度，这种算法一直推进到 x_I。再利用 Spline 算法修正激波。重复上一过程，用物面曲率变化及给定的精度要求控制激波松弛的次数。应当指出：对于细长物体可采用分段算法(x_0, x_I)，(x_{I1}, x_{I2})，……，而每一段激波松弛的次数可不全相同，以减少总体工作量。

本报告与 Werle 等[2,3]不同之处在于：在 x 推进算法中引用了 Воронкин[4]直接推进算法的某些处理方法，再有用 Spline 逼近“整体”修正激波，效果较好。α_i 是个调整参量，取 $\alpha_i=0.1$—0.2。在计算中用无粘方程组的特征关系式 (34) 及 Ranking-Hugoniot 关系式联立定出激波波后流参。计算表明在一定的 Re 数范围内把激波处理为间断面是可取的。

计 算 结 果 讨 论

用差分追赶法解驻点线方程组给出初始剖面分布，再用交替方向 Spline 叠代计算粘性激波层。将头部结果与高精度差分格式得到的结果[8]比较符合较好，而前者用机时少一些。对不同的 Re_∞ 及 M_∞ 进行了计算。$M_\infty=6$，10，20。$Re=500$，5000，50000。加密参量 $b=1$，2，5，10。b 值不宜取值太大，否则靠近物面处 $\Delta s/\Delta h$ 太大，不易计算。

图 3 给出了 $M_\infty=20$，$Re_\infty=500$，5000，50000 半锥角 $\theta_s=10°$ 在 $x=2.0$ 处的速度分

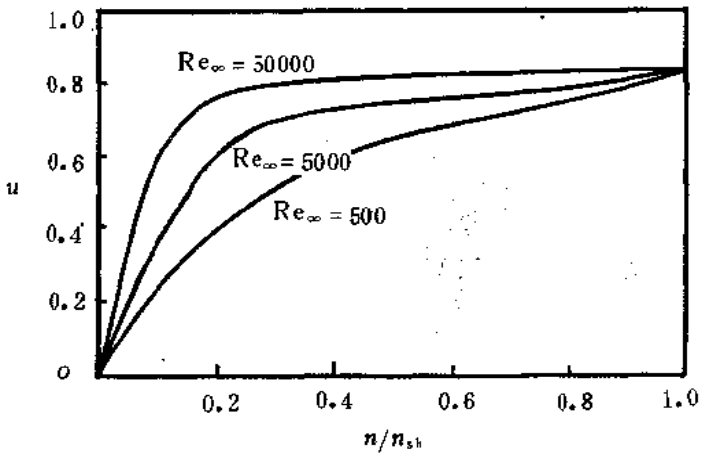


图 3 速度分量 u 随 $\frac{n}{n_{sh}}$ 的变化

$M_\infty=20$　$X=2.0$　$\theta_s=10°$　$T_w/T_0=1.0$

量 u 的分布。$T_w/T_0=1.0$，由速度分布看出边界层厚度随着 Re_∞ 的增加而减少，这与文献〔9〕相符。

图 4 给出了 $M_\infty=10$，$Re_\infty=3\times10^5$，$T_w/T_0=0.05$，$T_\infty=98°R$ 沿 10° 球锥的压力分布，并与 Davis，R．T．等人的结果[2]进行了比较。本方法在曲率间断点附近用小步长推进，且应用曲率间断点的连接条件：$\left.\frac{dn_{sh}}{ds}\right|_{x_t^-}=(1+n_s)\left.\frac{dn_{sh}}{ds}\right|_{x_t^+}$，$x_t$ 为曲率间断点。

图 5 画出了 $Re_\infty=1515$，$M_\infty=13.41$，$T_w/T_0=0.0741$，$T_\infty=200°R$，半锥角 $\theta_s=7.5°$ 的球锥的热传递分布，本报告的结果与 Davis，R．T．的结果相差较小。同样在曲率间断点附近用小步长 Δs 及曲率间断点的连接条件，而 Davis，R．T．的二种结果（处理间断点及未处理间断点的）在间断点附近相差较大。为了表征计算结果对 Regnolds 数的依赖程度，对 $M_\infty=9.82$，$Re_\infty=9905$ 及 $Re_\infty=990.5$ 二种情况进行了计算，这在图 6 及图 7 给出了 $M_\infty=20$，$Re_\infty=5000$，$\theta_s=10°$ 的球锥粘性激波层解与无粘结果。

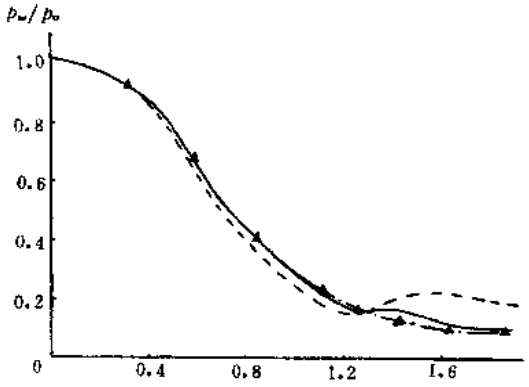


图 4 沿 10° 球锥的压力分布
$Re_\infty=3\times10^5$ $M_\infty=10.0$ $T_w/T_0=0.05$
$T_\infty=98°$
—▲—▲— 〔2〕考虑间断点处理的结果
…… 〔2〕未加间断点处理的结果
- - - - - - 本报告结果

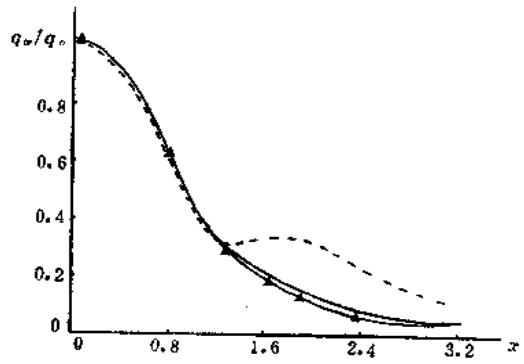


图 5 沿 7.5° 球锥的热传递分布
…… 〔2〕未加特殊处理
—▲—▲— 〔2〕加特殊处理
———— 本文结果

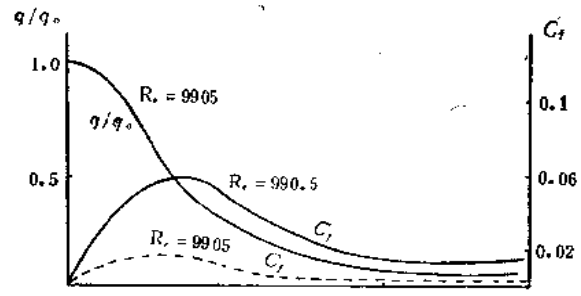


图 6 $\theta_s=10°$ 球锥的热流及摩擦阻力
$M_\infty=9.82$ $\theta_s=10°$ $T_w/T_0=0.05$ $T_\infty=98°$

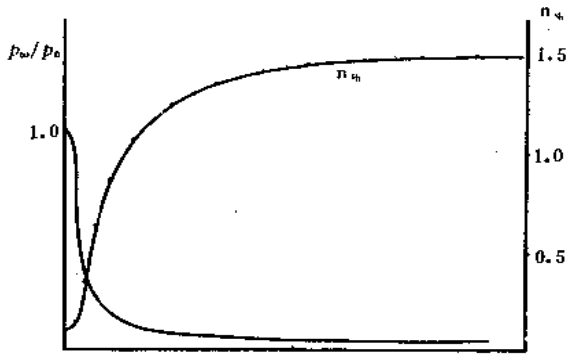


图 7 $\theta_s=10°$ 球锥粘性激波层与无粘解比较
$Re_\infty=5000$ $M_\infty=20$ $\theta_s=10°$ $T_w/T_0=0.05$
——本文结果 —•—•—无粘结果

参 考 文 献

〔1〕Davis, R. T., *AIAA J*, **8**, 5 (1970), 843.

〔2〕Srivastava, B. N. 等, *AIAA*, *p*. 77—693.

〔3〕Werle, M. J. 等, *E*—18943.

〔4〕Воронкин, В. Г. 等, ***Изв. АНСССР МЖГ***, 6 (1974), 99.

〔5〕Srivastava, B. N., *AD*779330.

〔6〕Головачев, Ю. П., Понов, Ф. Д., ***ЖВМИМф***, **12**, 4 (1972), 1292.

〔7〕Бабенко, К. И. 等, Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом (1964).

〔8〕马延文，董常铨，高精度差分格式数值计算钝头体超音速粘性流问题，北京空气动力研究所报告（1978）。

〔9〕焦履琼，高速空气动力学计算方法（论文集），中国科学院计算中心（1978）。

求解可压缩完全 Navier--Stokes方程的一种差分格式 SOMS

邬华谟　　杨明亮

（中国科学院计算中心）

用稳定化方法求解可压缩完全 Navier-Stokes 方程（CCNS 方程）是计算复杂流场的一种有效手段。然而众所周知计算大梯度的解（如粘性击波层，附面层等）是很困难的。采用二阶格式会在流场急剧变化的地方产生不合理的波动，往往歪曲流场甚至出现物理上不合理的膨胀击波[1]，有时还会中断计算过程。附加人工粘性项或者将计算结果进行平滑处理在求解粘性方程时又容易混淆真实粘性和耗散项的作用。一阶格式能正确捕获击波，击波剖面比较单调光滑，缺点是在解的光滑区域，其精度较低。

利用开关函数将二阶格式和一阶格式结合起来构造混合格式是很有意义的。文献[2-4]是这方面最早的工作，然而开关函数里的一些参数的选取具有经验的性质，缺乏理论上的保证。我们在 1964 年提出了一种开关函数，它是本文开关函数的基础，构造的混合格式是单调的。

为了对 CCNS 方程构造混合格式，我们改造了第二类迎风型格式[5,6]，构造了 MDC 格式（修正迎风格式），它比文献〔5,6〕更单调稳定，对压力项 p 不必附加任何人工粘性项。作为二阶格式我们采用了简单的绝对稳定的、对定常解具有二阶精度的半隐式中心差格式（FTCS）。我们用新的开关函数结合 MDC 与 FTCS 构成的格式 SOMS（二阶单调格式）能精确地控制格式的过渡，求解过程也比全显式[7]更加稳定，在精度方面大大地提高了结果[8]的质量。

我们应用格式 SOMS 计算了球锥、平板、前向台阶等物体的高超音速粘性绕流问题，计算表明，本格式能正确捕获击波于很窄的过渡区内，击波单调光滑，计算过程稳定性良好，解的光滑区域精度高，程序简单，对复杂流场适应性强。

1．差分格式的构造

对于模型方程 $\partial u/\partial t+a\partial u/\partial x=0$　　$(a=\text{const})$

一阶格式取为

$$u_m^{n+1}=u_m^n-\frac{\sigma}{2}(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)+\frac{|\sigma|}{2}(u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n) \tag{1}$$

二阶格式取为

$$u_m^{n+1}=u_m^n-\frac{\sigma}{2}(u_{m+1}^n-u_{m-1}^n)+\frac{\alpha\sigma^2}{2}(u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n) \tag{2}$$

$$\alpha=0,\ 1,\qquad \sigma=a\Delta t/\Delta x$$

我们构造的开关函数为 S_m^n：

$$S_m^n=S_m^n(u,\ l)=\left(\frac{|u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^n|+10^{-30}}{|u_{m+1}^n-u_m^n|+|u_m^n-u_{m-1}^n|+10^{-10}}\right)^l,\ (l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots) \tag{3}$$

我们的半隐式二阶单调格式 SOMS 为

$$u_m^{n+1}=u_m^n-\frac{\sigma}{2}(u_{m+1}^n-\bar{u}_{m-1}^n)+\frac{\alpha\sigma^2}{2}(u_{m+1}^n-2u_m^n+\bar{u}_{m-1}^n)$$

$$+\frac{|\sigma|-\alpha\sigma^2}{2}S_m^n(u_{m+1}^n-2u_m^n+\bar{u}_{m-1}^n) \tag{4}$$

守恒型二阶单调格式 $SOMS_c$ 为

$$u_m^{n+1}=u_m^n-\frac{\sigma}{2}(u_{m+1}^n-\bar{u}_{m-1}^n)+\frac{\alpha\sigma^2}{2}(u_{m+1}^n-2u_m^n+\bar{u}_{m-1}^n)$$

$$+\frac{|\sigma|-\alpha\sigma^2}{2}[S_{m+\frac{1}{2}}^n(u_{m+1}^n-u_m^n)-S_{m-\frac{1}{2}}^n(u_m^n-\bar{u}_{m-1}^n)] \tag{5}$$

$S_{m\pm1/2}^n=\max(S_m^n,\ S_{m\pm1}^n)$，$\bar{u}_{m-1}^n=u_{m-1}$ 或 u_{m-1}^{n+1}。

可以证明，格式 SOMS 及 $SOMS_C$ 是单调格式，即若 $u_m^n-u_{m-1}^n\geqslant0$ $(\leqslant0)$ $\forall m$，σ 满足条件：当 $\alpha=0$ 时，$|\sigma|\leqslant1/(1+l)$，$\alpha=1$ 时，$l\geqslant1$，$|\sigma|\leqslant1/l$，则有

$$u_m^{n+1}-u_{m-1}^{n+1}\geqslant0\ (\leqslant0)\quad\forall m$$

还可以证明在上述对 σ 的限制下，格式满足以下最大值原理

$$\min_m|u_m^n|\leqslant(\max_m|u_m^{n+1}|,\ \min_m|u_m^{n+1}|)\leqslant\max_m|u_m^n|$$

顺便指出，利用 Van Leer 的开关函数构成的混合格式[3]不满足最大值原理，不能消除微小的振荡现象。

2．一维流体力学方程的二阶单调格式

方程组可以写成

$$\frac{\partial A}{\partial t}+L\frac{\partial uB}{\partial x}+M\frac{\partial c}{\partial x}=b\frac{\partial}{\partial x}G\frac{\partial a}{\partial x}+f \tag{6}$$

一般的迎风格式可以表达如下：

$$A_m^{n+1}=A_m^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}L_m^n(u_{m+\frac{1}{2}}^nB_{m+\frac{1}{2}}^n-\bar{u}_{m-\frac{1}{2}}^n\bar{B}_{m-\frac{1}{2}}^n)-\frac{\Delta t}{2\Delta x}M_m^n(C_{m+1}^n-\bar{C}_{m-1}^n)$$

$$+\frac{\Delta t}{2\Delta x}[|L_m^nu_{m+\frac{1}{2}}^n|(B_{m+1}^n-B_m^n)-|L_m^n\bar{u}_{m-\frac{1}{2}}^n|(B_m^n-\bar{B}_{m-1}^n)]$$

$$+\frac{\Delta t}{\Delta x^2}b_m^n[G_{m+\frac{1}{2}}^n(a_{m+1}^n-a_m^n)-\bar{G}_{m-\frac{1}{2}}^n(a_m^n-\bar{a}_{m-1}^n)]+\Delta tf_m^n \tag{7}$$

其中

$$F_{m+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(F_m+F_{m+1}),\quad\bar{F}_{m-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(F_m+\bar{F}_{m-1}),$$

$$\bar{F}_{m-1}^n=F_{m-1}^n\quad\text{或}\quad F_{m-1}^{n+1},\qquad F=u,\ B,\ G,$$

$A=(\rho,\ \rho u,\ \rho E)'$，$a=(0,\ u,\ T)$，$L$，$M$ 为座标变化后的 Lame 系数。其他记号都是常用的。

如果取 $B=(\rho,\ \rho u,\ \rho E)'$，$C=(0,\ P,\ Pu)'$，格式（5）就是文献[5,6]的形式，计算表明，对 P 必须加上适当的人工粘性项才能使计算稳定。

我们构造的 MDC 格式中取 $B=(\rho,\ \rho u,\ P+\rho E)'$，$C=(0,\ P,\ 0)'$，这一处理完全可

以推广至 FLIC 以及 PIC 之类的多步算法。计算表明，格式非常单调稳定，不必对 P 附加人工粘性项。

在式（7）中弃去右端第四项，取 $F^n_{m-1}=F^{n+1}_{m-1}$ 就得到半隐式中心差格式 FTCS，在第四项上乘以开关函数 s 就得到与式（4）、（5）相应的二阶单调格式 SOMS，$SOMS_c$，其中对于粘性计算可取 $s=s(P,\ l)$，而对于无粘流动计算取 $s=s(\rho,\ l)$ 或 $s=s(T,\ l)$ 更好一些。

本文构造的显式 SOMS（$l=1$）曾用于文献〔7〕。但半隐式格式 SOMS 及 $SOMS_c$ 的计算稳定性和精确度都更好一些。

3．数值计算结果

我们用格式 SOMS 计算了球头、球锥、平板前缘干扰，前向台阶的二维层流粘性绕流，计算参数为 $M_\infty=3\sim20$，$Re_\infty=10^3\sim10^5$，$T=T_w$，$u=v=0$。

球头驻点线和球锥计算表明格式对光滑解的精度是二阶的，击波过渡区只有 2—4 点，击波位置和物面压力密度分布都与定常拟合击波的二阶格式计算结果〔9〕一致。

平板前缘干扰的计算结果比Carter的结果〔10〕合理。前台阶的计算结果清晰地反映出了回流区和物面的热流和摩阻分布，与实验〔11〕定性相符。

上述结果的详细图表可见文献〔12〕。

我们最近计算了一组平板前缘干扰的数据，参数为 $M_\infty=14.1$，$Re_\infty=1.04\times10^5$，我们大大改进了文献〔13〕的结果，压力摩阻系数，热流的分布都与实验相符。

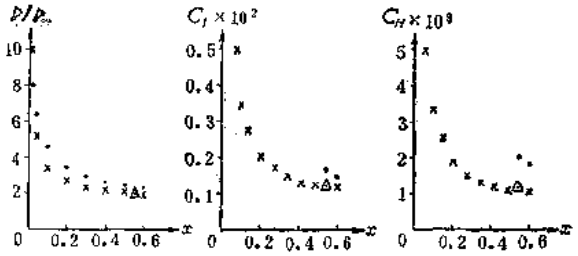


图 1

$M_\infty=14.1$　　$Re_\infty=1.04\times10^5$

$T_\infty=72.222°K$　$T_w=297.22°K$

•×SOMS　•Hung, MacCormak〔13〕

△Holden (13)

参　考　文　献

〔1〕Hyman, J. M., Harten, A., Lax, P. D., *CPAM*, 29 (1976).

〔2〕Федоренко, Р. Д., ЖВММФ, **2**, 6 (1962).

〔3〕van Leer, *J. Comp. Phys.*, **14** (1974).

〔4〕Harten, A., Zwas, G., *J. Comp. Phys.*, **9**, 3 (1972).

〔5〕Gentry 等, *J. Comp. Phys.*, **1** (1966), 87—118.

〔6〕Hirt, C., *J. Comp. Phys.*, **2** (1968).

〔7〕马延文，邬华谟，中国科学院计算研究所三室工作报告（1972）.

〔8〕邬华谟，杨明亮，KF-79-12-02，1979 年卫星轨道和飞行力学气动力学会议学术报告.

〔9〕刘学宗，王昌义，王汝权，中国科学院计算中心工作报告（1978）.

〔10〕Carter, J., Lecture Notes in Phys. 19, 69—78.

〔11〕俞鸿儒等，中国科学院力学研究所实验报告（1975）.

〔12〕邬华谟，杨明亮，SOMS——可压缩完全粘性方程的一种差分格式.

〔13〕Hung, C. M., MacCormack, R. W., AIAA paper, 75—2 (1975).

机翼三维边界层计算方法

包涵令
（中国气动研究发展中心）

一、前　言

三维湍流边界层计算到目前为止国外已发展了多种方法。积分方法同旋涡粘度方法、雷诺应力方法相比具有对计算机要求低，经济性好的优点，在许多情况下，计算精度不次于微分方法，但是初值计算较为困难，缺乏一种可用的关于层流边界层的积分方法与之匹配。本文概略叙述我们求解机翼三维层流和湍流边界层的积分方法。用作者提出的方法解层流部份，初值很容易获得，前区的计算精度几乎接近微分方法的精度。湍流部份采用著名的渗混方法，但是解的方法不同于国外同类方法。方程直接在边界层外流的流线座标系中建立，省去了在非正交曲线座标系中计算同机翼几何外形有关的曲率项的麻烦，并大大简化了积分厚度的计算，从而可以节省计算时间。此外，本方法还不受边界层外流必须是位流的限制。

二、层流边界层

在边界层外流流线座标系中可压三维边界层动量积分方程形式为：

$$\partial\theta_{11}/\partial s+\partial\theta_{12}/\partial n+L_1(2\theta_{11}+\delta_1)+(K_1+L_2)(2\theta_{12}+\delta_2)+K_2(\theta_{11}-\theta_{22})-M_e^2(\theta_{11}L_1+L_2^*\theta_{12})=C_{f1}/2 \tag{1}$$

$$\partial\theta_{21}/\partial s+\partial\theta_{22}/\partial n+2K_2\theta_{21}+K_1(\theta_{22}-\theta_{11}-\delta_1)+2L_1\theta_{21}+2L_2\theta_{22}-M_e^2(\theta_{21}L_1+\theta_{22}L_2^*)=\mathrm{tg}\beta\cdot C_{f1}/2 \tag{2}$$

当边界层外流无旋时，方程（1）、（2）退化为文献〔1〕等所给出的形式。作者推荐动能积分方程和壁面四阶导数关系式作为四个辅助方程：

$$\partial\theta_{111}/\partial s+\partial\theta_{112}/\partial n+K_2(\theta_{111}-2\theta_{122}-\theta_{22})+K_1(3\theta_{112}+\theta_{21})+L_1(3\theta_{111}+\theta_{11}+\delta_1-2\delta_1^*)+L_2(3\theta_{112}+\theta_{21})-M_e^2(L_1\theta_{111}+L_2^*\theta_{112})=2\theta_{z1}/\gamma-C_{f1}/2 \tag{3}$$

$$\partial\theta_{112}/\partial s+\partial\theta_{122}/\partial n+K_2(2\theta_{112}+\theta_{222})+K_1(2\theta_{122}-\theta_{22}-\theta_{111}+\delta_1^*)+L_1(3\theta_{112}+\theta_{12}-\delta_2+\delta_2^*)+L_2(3\theta_{122}+\theta_{22})-M_e^2(L_1\theta_{112}+L_2^*\theta_{122})=2\theta_{z2}/\gamma-C_{f1}\cdot\mathrm{tg}\beta/2 \tag{4}$$

$$\nu(\partial^4u/\partial\zeta^4)_{\zeta=0}=\psi_1\partial\psi_1/\partial s+2\psi_2\partial\psi_1/\partial n-\psi_1\partial\psi_2/\partial n+K_1\psi_1\psi_2-K_2(\psi_1^2+2\psi_2^2)+\psi_1^2[L_1\gamma_1M_e^2+(\partial T_w/\partial s)/T_w]+\psi_1\psi_2[(\partial T_w/\partial n)/T_w-K_1\gamma_1M_e^2] \tag{5}$$

$$\nu(\partial^4v/\partial\zeta^4)_{\zeta=0}=\psi_2\partial\psi_2/\partial n+2\psi_1\partial\psi_2/\partial s-\psi_2\partial\psi_1/\partial s+K_2\psi_1\psi_2-K_1(\psi_2^2+2\psi_1^2)+\psi_1\psi_2[L_1\gamma_1M_e^2+(\partial T_w/\partial s)/T_w]+\psi_2^2[(\partial T_w/\partial n)/T_w-K_1\gamma_1M_e^2] \tag{6}$$

式中 s 代表边界层外流线座标，n 在机翼表面上垂直 s 方向，若 u_e 代表边界层外缘合速度，ε 代表边界层外流流线角，则 $L_1=(\partial u_e/\partial s)/u_e$，$L_2=(\partial u_e^*/\partial n)/u_e$，$K_1=-\partial\varepsilon/\partial s$，

$K_2=\partial\varepsilon/\partial n$, $L_2^*=-1.4K_1-0.4L_2$。M_e 是边界层外缘马赫数，T_w 是壁温，β 是壁流线角，u，v 是边界层内沿 s 和 n 方向分速度，ψ_1，ψ_2 是 u,v 对垂直壁座标 ζ 在壁面上的导数，C_{f1} 是沿外流线方向的壁面摩擦系数，$\Upsilon=\rho_e\delta_t^2u_e/\mu_w$，$\rho_e$ 是边界层外流密度，μ_w 是壁上的气体粘性系数，δ_t 为当地边界层特征长度。諸积分厚度定义如下：

$$\delta_1=\int_0^{\bar\delta}(1-\bar\rho\bar u)\,d\zeta,\qquad \theta_{11}=\int_0^{\bar\delta}(1-\bar u)\,\bar\rho\bar u\,d\zeta,\qquad \delta_2=-\int_0^{\bar\delta}\bar\rho\bar v\,d\zeta$$

$$\theta_{12}=\int_0^{\bar\delta}(1-\bar u)\,\bar\rho\bar v\,d\zeta,\quad \theta_{21}=-\int_0^{\bar\delta}\bar\rho\bar u\bar v\,d\zeta,\qquad \theta_{22}=-\int_0^{\bar\delta}\bar\rho\bar v^2\,d\zeta$$

$$\theta_{111}=\int_0^{\bar\delta}\bar\rho\bar u^2(1-\bar u)\,d\zeta,\quad \theta_{112}=\int_0^{\bar\delta}\bar\rho\bar u\bar v(1-\bar u)\,d\zeta,\qquad \delta_1^*=\int_0^{\bar\delta}(1-\bar u)\,d\zeta$$

$$\theta_{122}=\int_0^{\bar\delta}\bar\rho\bar v^2(1-\bar u)\,d\zeta,\quad \theta_{222}=\int_0^{\bar\delta}\bar\rho\bar v^3\,d\zeta,\qquad \delta_2^*=-\int_0^{\bar\delta}\bar v\,d\zeta$$

$$\theta_{z1}=\int_0^{\bar\delta}(\mu/\mu_w)\,(\partial\bar u/\partial\bar\zeta)^2\,d\zeta,\qquad \theta_{z2}=\int_0^{\bar\delta}(\mu/\mu_w)\,(\partial\bar u/\partial\bar\zeta)\,(\partial\bar v/\partial\bar\zeta)\,d\zeta$$

式中 $\bar u=u/u_e$，$\bar v=v/u_e$，$\bar\zeta=\zeta/\delta_t$。为了求解方程（1）至（6）假设两个三参数速度剖面：

$$\bar u=f(\bar\zeta)-\Upsilon\cdot L_1g_1(\bar\zeta)-F\cdot(\bar\zeta+\bar\zeta^3)e^{-\bar\zeta^2}-E\cdot\bar\zeta^4\cdot e^{-\bar\zeta^2}\qquad(7)$$

$$\bar v=\Upsilon\cdot L_1g_1(\bar\zeta)-N\cdot g_2(\bar\zeta)-G\cdot(\bar\zeta+\bar\zeta^3)e^{-\bar\zeta^2}-H\cdot\bar\zeta^4e^{-\bar\zeta^2}\qquad(8)$$

其中

$$g_1(\bar\zeta)=(1-f(\bar\zeta)-e^{-\bar\zeta^2})/2$$

$$g_2(\bar\zeta)=[1+\bar\zeta^2)e^{-\bar\zeta^2}-1+f(\bar\zeta)]/2,\qquad f(\bar\zeta)=-2\left(\bar\zeta e^{-\bar\zeta^2}-3\int_0^{\bar\zeta}e^{-t^2}dt\right)/3\pi^{\frac12}$$

这些剖面完全满足所有边界层外边界条件以及壁面上无喷射情况下直至三阶导数的全部内边界条件。将式（7）和（8）代入方程（1）至（6），我们得到对于变量 Υ，F，E，N，G，H 的六个一阶联立非线性偏微分方程组。气体压缩性处理可以采用推广的 Luxton 与 Young 速度-温度剖面。为了处理任意平面形状机翼，通过座标变换把 s，n 座标变为等百分比弦线座标，接着用两点二阶精度差分格式代替方程中的导数项。最终得到的差分方程相对未知量是非线性超越方程组，它的根就是对应的微分方程的近似解。

初值计算对层流边界层来说十分重要。初值线可以分为附着流线型、平板流型和驻点流型三类。在附着流线上横向流动参数为零，方程（2）、（4）、（6）奇异，需要在垂直初值线方向求一次导数，消去奇性。在平板流型初值线上方程（1）、（3）、（5）退化为

$$\bar\theta_{11}/2-(\partial\Upsilon/\partial s)-\bar\psi_1=0\qquad(9)$$

$$(\bar\psi_1^2/2)\cdot(\partial\Upsilon/\partial s)+24E=0\qquad(10)$$

$$\bar\theta_{111}(\partial\Upsilon/\partial s)/2+\bar\psi_1-2\bar\theta_{z1}=0\qquad(11)$$

假设在驻点附近边界层外流满足关系式：$u_1=Ax$，$v_1=By$（其中 u_1，v_1 是沿 x 和 y 方向的边界层外流速度分量，$B=0$ 为二维驻点）则驻点方程的一般形式是

$$\lambda(2\bar\theta_{11}+\bar\delta_1)-\lambda\bar\theta_{11}Q=0\qquad(12)$$

$$6(\lambda-4E)-\lambda\bar\psi_1^2(1+Q)=0\qquad(13)$$

$$\lambda[(3-\lambda)\bar\theta_{111}+\bar\theta_{11}-\bar\delta_1]-2\bar\theta_{z1}+\bar\psi_1=0\qquad(14)$$

式（9）至（14）中：带“－”的量是以δ_t为参考长度，u_e为参考速度的无因次量。$Q=1-(A+B)/(A\cos^2\varepsilon+B\sin^2\varepsilon)-\frac{1}{2}[(A-B)\sin 2\varepsilon/(A\cos^2\varepsilon+B\sin^2\varepsilon)]^2$，$\varepsilon=\mathrm{tg}^{-1}(By/Ax)$，$\lambda=\gamma L_t$。用方程（12）至（14）求解三维机翼顶点上的边界层参数十分方便，并且克服了在该点上参数多值性引起的麻烦。

下面给出七个算例的计算结果。为了说明本方法的精度，这些算例有相似解，或者幂级数解，差分解可供比较，它们在表内用圆括号表示。

表 1　例 1、2、3 计算结果与精确值比较

算　例	外　流　速　度	$C_{f1}(u_e\cdot \mathrm{Re}\cdot x)^{1/n}/2$
二　维 平　板	$u_e=1$	0.4690 (0.4696)
二　维 驻　点	$u_e=A\cdot x$ （A 为常数）	1.2325 (1.2326)
三　维 驻　点	$u_1=A\cdot x$ $v_1=A\cdot y/4$	1.2520 (1.2476)

表 2　外流无旋无限后掠翼计算结果 $u_1=x-0.01x^3$，$v_1=1$

x	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0
$\frac{\partial u}{\partial\zeta}\Big/\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}$	0.5789 (0.5795)	0.6466 (0.6469)	0.7614 (0.7614)	0.8943 (0.8936)	1.0698 (1.0668)
$\frac{\partial v}{\partial\zeta}\Big/\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}$	−0.0657 (−0.0657)	−0.1864 (−0.1866)	−0.2803 (−0.2810)	−0.3421 (−0.3430)	−0.3795 (−0.3785)
$\theta_{11}\mathrm{Re}^{\frac{1}{2}}$	0.4013 (0.4040)	0.4000 (0.4025)	0.3972 (0.3995)	0.3948 (0.3962)	0.3961 (0.3943)

表 1 和表 2 给出的结果同精确解相比，误差均远小于 1%。例 5 是经典的带分离霍华斯流动，计算结果示于图 1。在图中本方法与差分法结果几乎完全一致。例 6 是外流场有旋的无限后掠翼流动。图 2 上给出的物理量分别与动量厚度 θ_{11}、流向壁剪应力 τ_{w1} 和流法向壁剪应力 τ_{w2} 成比例，图中比较了本文方法结果同精确解以及其他作者用积分方法获得的解[11]。

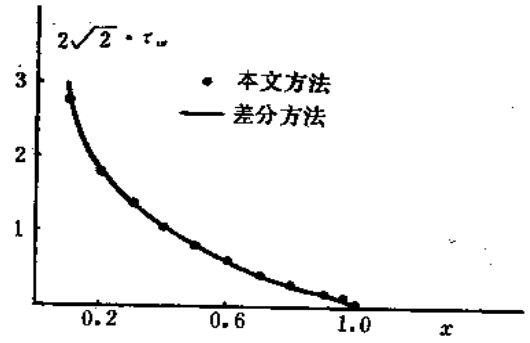


图 1　霍华斯流动 $u_e=1-x/8$

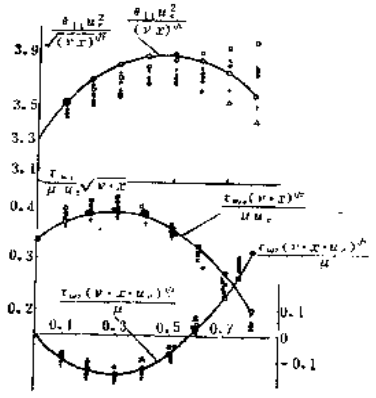


图 2 外流有旋无限后掠翼计算结果
$u_1=1$　　$v_1=2+x-x^2$
— 精确解　• Timman 方法　○ Cooke 方法
□ 双 Pohlhausen 级数法　× Young 方法
△ Luxton-Young 方法　+ Smith-Young 方法
⊙本文方法

我们的方法同精确解很一致，而其他作者的结果则较差。

最后一个算例是计算附着圆柱体的平板流动。表 3、4 给出 12 点上的计算结果并与文献〔2〕上的差分法结果作了比较。$\partial v/\partial\zeta$ 的最大差别约 2%，$\partial u/\partial\zeta$ 的差别略大一些，在中心剖面（$y=0$）处计算预示的分离位置大致一样。

表 3　附着圆柱的平板边界层结果

结果 / y \ x	$(\partial u/\partial\zeta)/\mathrm{Re}^{1/2}$			
	0	4.88	14.64	17.08
0	0.4690 (0.4696)	0.4591 (0.4598)	0.4100 (0.4106)	0.3834 (0.3839)
6.10	0.4690 (0.4696)	0.4742 (0.4611)	0.4236 (0.4221)	0.3889 (0.4032)
8.54	0.4690 (0.4696)	0.4515 (0.4621)	0.4261 (0.4314)	0.4254 (0.4182)

表 4　附着圆柱的平板边界层结果（续）

结果 / y \ x	$(\partial v/\partial\zeta)/\mathrm{Re}^{1/2}$			
	0	3.66	10.37	17.69
3.55	0.4690 (0.4696)	0.8583 (0.8567)	1.6520 (1.6690)	2.7560 (2.8090)
6.10	0.4690 (0.4696)	0.8506 (0.8488)	1.617 (1.637)	2.710 (2.713)
7.32	0.4690 (0.4696)	0.8352 (0.8443)	1.606 (1.618)	2.645 (2.661)

三、湍流边界层

基本方程是方程（1）、（2）以及渗混方程

$$\partial\Delta/\partial s-\partial\delta_2/\partial n+\Delta[L_1+K_2]-\delta_2[K_1+L_2]-M_e^2[L_1\Delta-\delta_2L_2^*]=C_E \qquad (15)$$

其中 C_E 是渗混系数，$\Delta=\delta-\delta_1$（δ 为边界层厚度）同层流方法不同，所有积分厚度定义将是 0—δ 的积分域。方程（1）、（2）以及（15）的形式均比其他作者给出的更为一般，即适用于边界层外流场有旋度情况（例如来流是非均匀的情况）。方程求解所用变量为 θ_{11}，Δ，$\mathrm{tg}\beta$。为了封闭方程纵向流速度剖面作了幂次假设，横向流速度剖面采用 Manger 剖面或 Johnston 剖面，并用 Spence 的速度-温度关系式来处理气体压缩性影响，渗混系数在这里采用了 Smith[3] 或者 Head[4] 给出的公式，流向摩擦系数 C_{f1} 分别采用修正的 Ludwieg-Tillmann公式或者 Spalding-Chi 公式。方程求解方法大体上与层流情况相同，即首先将方程转换到等百分比弦线座标系，接着用两点差分格式将导数展开从而得到一组非线性超越方程，它的根就是对应的微分方程的近似解。特别要指出的是由方程（1），（2），（15）所构成的双曲型方程组具有三簇特征线，第一簇接近边界层外流线方向；第二簇接近壁面流线的方向；第三簇介于前两簇方向之间。如果翼展方向导数采用显式差分格式，则差

分方向的选取要依据当地的特征线方向。解的推进方向是：固定弦向位置，在展向方向扫描，这种方式比固定展向位置在弦向方向扫描要好，因为当横向流出现反号时可以不必在展向方向叠代。

三维机翼的附着流线有可能是湍流边界层。将方程（2）在垂直附着流线的方向上取一次导数，而方程（1）和（15）考虑横向参数为零条件即可得到一组附着流线方程，这组方程可以相对变量 θ_u，Δ，$\partial \mathrm{tg}\beta/\partial n$ 解出。

三维湍流边界层位移厚度的计算，对于渗混方法，本文推荐较为简捷的计算公式：

$$\partial\Delta_1/\partial s+\Delta_1[L_1(1-M_e^2)+K_2]-C_E=0 \qquad (16)$$

位移厚度

$$\delta^*=\Delta+\delta_1-\Delta_1$$

用本文方法曾计算了 RAE 2814 翼型、NACA0012 翼型、C-141 飞机翼型、无限后掠机翼、小展弦比三角机翼、附着圆柱体的平板和 Johnston 射流壁的湍流边界层。下面只简单介绍三维算例的部份结果。

1．无限后掠翼。$Re=1.15\times10^6$，$M_\infty=0$（M_∞ 是来流马赫数），$u_1=\cos35°\cdot(1-0.25x)$，$v_1=\sin35°$。计算结果示于图 3。图中同时给出文献〔6〕同类方法以及文献〔7〕上用很复杂的雷诺应力方程方法得到的计算结果，可以看出至少对于这个算例一致性是比较好的。另外，文献〔6〕是直接在流线座标里求解方程的，因而也比本文计算方法麻烦。

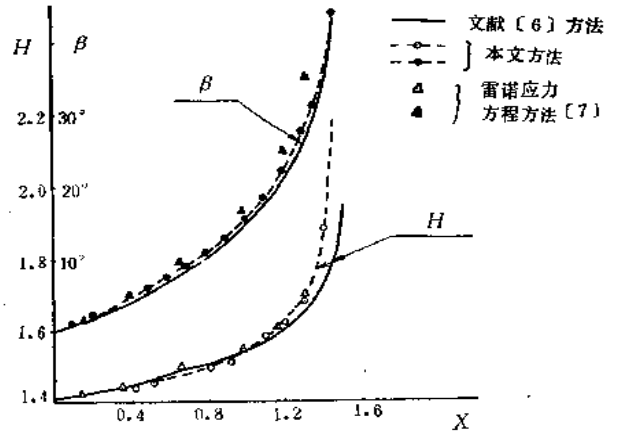


图 3　外流解析的 35° 无限后掠翼湍流边界层结果

2．后掠 55° 机翼。$Re=27\times10^6$，$M_\infty=0.55$。在机翼半翼中部区可按无限后掠翼条件计算，压力分布及计算结果均在图 4 中示出。计算同实验的一致程度基本满意，因为远比

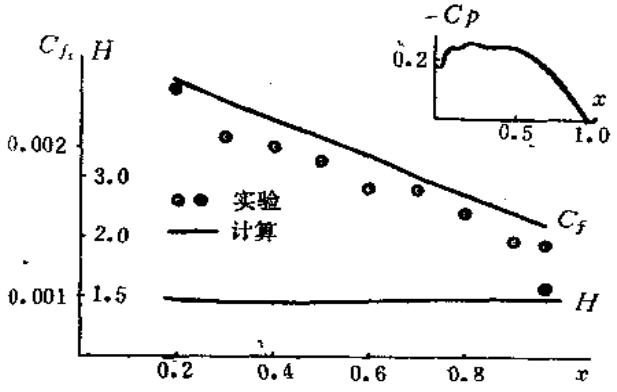


图 4　55° 后掠机翼湍流边界层计算结果与实验值比较

本方法复杂得多的文献〔8〕上的方法比本方法的精度增加不多（见文献〔9〕结论）。

3．小展弦比三角机翼。边界层测量数据和边界层外流数据在文献〔10〕中给出。计算对应的来流速度是 60 米/秒。边界层外流场很接近锥形流流场，所以计算作了锥形流假设。

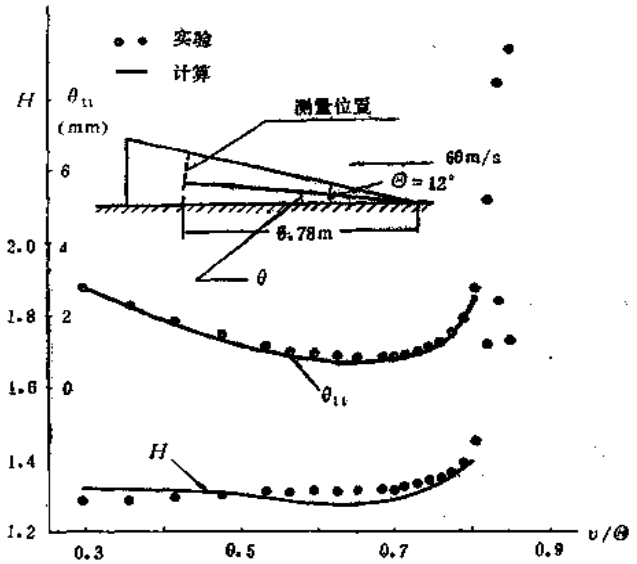


图 5　三角机翼湍流边界层计算结果与实验比较

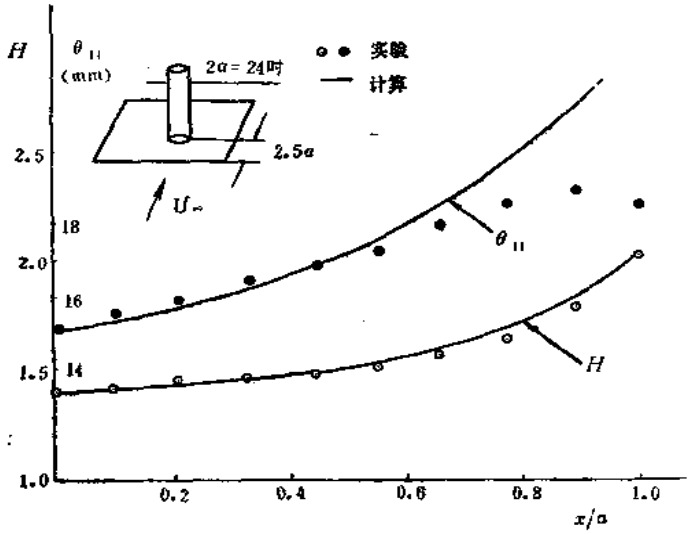


图 6　在附着圆柱体的平板上湍流边界层的计算结果与实验值比较

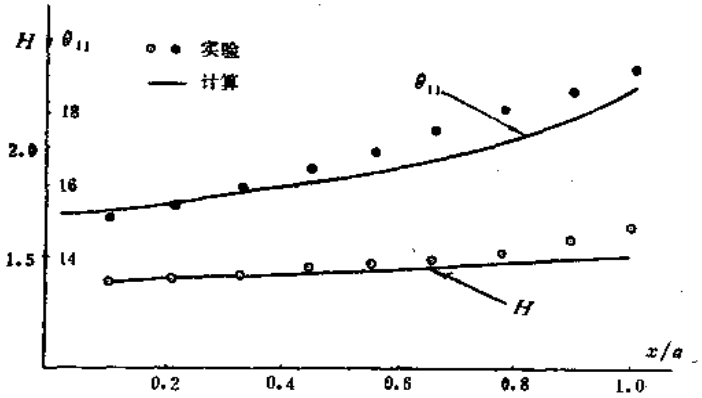


图 7　在附着圆柱体的平板上湍流边界层的计算结果与实验值比较（续）

计算结果同实验比较示于图5，两者吻合是很满意的。

4．在附着圆柱体平板上的湍流边界层计算。几何尺寸示于图6。计算结果同East和Hoxey的实验值[11]作了比较。图6和图7示出$y=4$英寸和8英寸处的两组结果。在第二个剖面上流动没有分离，计算结果与实验一致性基本是满意的。在第一个剖面上由于有流动分离，计算的动量厚度增长在接近分离点时比实验值快得多。从理论角度来看动量厚度的快速增长恰是预示气流分离即将发生的讯号。

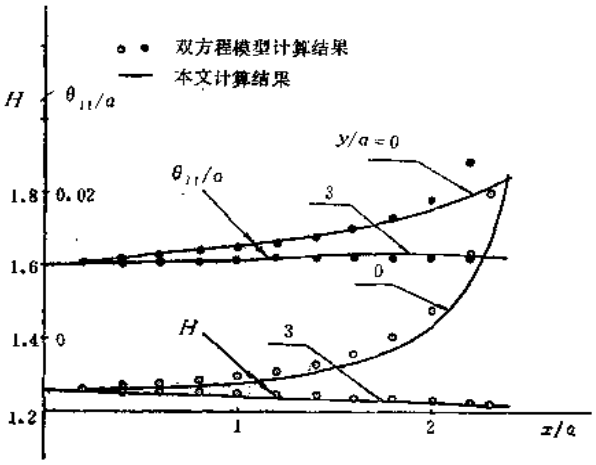


图8 附着圆柱体平板上的湍流边界层，本文计算结果同双方程模型计算结果比较

5．类似于算例4，但几何位置和边界层的初值与上例不同。从平板前缘至圆柱中心距离，现在是4倍圆柱体半径。在文献〔12〕上用Rastogi，Rodi和Spalding的旋涡粘度双方程模型方法曾给出此例的解。本文为了比较取了同一初始值。比较情况示于图8。可以看出，这两种算法上差别悬殊的方法，在结果上却相当一致。

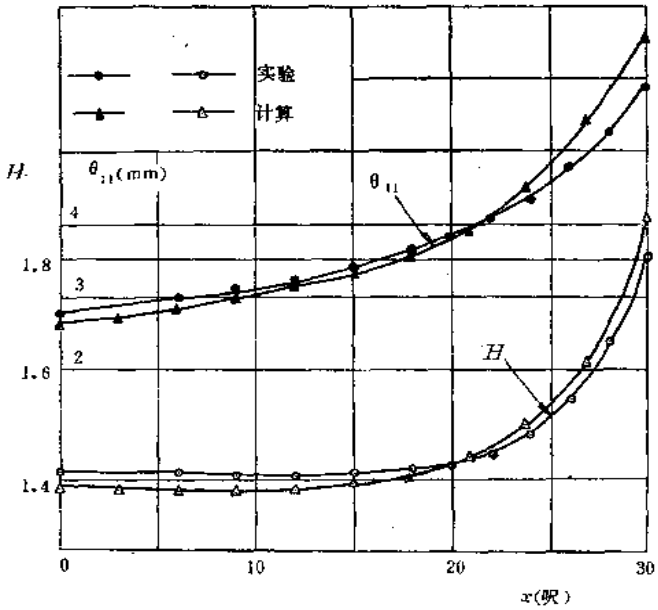


图9 Johnston 射流壁中心剖面上的湍流边界层

6．Johnston射流壁的紊流边界层。射流装置的示意图、几何尺寸以及沿射流中心线的无粘流速度分布和速度导数分布在文献〔13〕中给出。计算得到的射流中心处的动量厚度θ_{11}与形状参数H在图9中作了比较。比较结果再次说明本方法是基本满意的。

四、结　束　语

本文给出的层流和湍流边界层积分计算方法通过许多算例试算表明它有可用的工程精度。由于在计算方法上作了改进，层流边界层积分方法比国外公布过的积分法精度明显提高，并且解决了初值计算的困难。湍流边界层积分方法比国外同类方法计算节省时间，而且不需要专门程序去计算同非正交曲线座标系有关的测地曲率项，也不需要将非正交曲线座标系中的积分厚度转换到流线座标系，没有边界层外流必须是位势流的限制。

参 考 文 献

〔1〕Smith, P. D. and Young, A. D., ARC CP 1064(1968).

〔2〕Tuncer Cebeci, *AIAA J.*, **13**, 8(1975), 1056.

〔3〕Smith, P. D., ARC R&*M* 3739 (1972).

〔4〕Head, M. R., ARC R&M 3152(1960).

〔5〕包涵令、周文芳，中国气动研究与发展中心 (CARDC) 第六研究所技术报告 (1979).

〔6〕Cumpsty, N. A. and Head, M. R., *Aero. Quart.*, **18**, 1(1967), 55.

〔7〕van den Berg, B. and Elsenaar, A., NLR TR 79092 U(1972).

〔8〕Bradshaw, P., *JFM*, **46**, 3(1971), 417.

〔9〕Smith, P. D., ARC CP 1268 (1973).

〔10〕East, L. F., ARC R&M 3768(1973).

〔11〕East, L. F. and Hoxey, R. P., ARC R&M 3653 (1969).

〔12〕Rastogi, A. K. and Rodi, W., *AIAA. J.*, **16**, 2 (1978), 151.

〔13〕Wheeler, A. J. and Johnston, J. P., NASA, CR—138962(1972).

双向一维流计算

陈大年　　王德生

一、引　　言

管道在管内不定常高压气流作用下的变形是比较常见的二维不定常问题，需要采用二维程序进行计算。我们受文献〔1〕的启发，对此类问题的简化计算进行了探讨，采用双向一维的计算方法。这种算法的基本思想是把轴向气体流动与径向管壁运动耦合起来。我们曾用特定的简单耦合方式，计算了金属圆管在管内炸药爆轰作用下的变形和断裂。本文将介绍一般的双向一维耦合算法，在详细叙述计算方法后，仍以金属圆管在管内炸药爆轰作用下的变形和断裂问题作为实例，说明方法的适用性。

二、计　算　方　法

基本方程有两套：一是轴向一维变截面流体力学方程组，二是径向一维柱对称弹塑性流方程组。在两套基本方程组中，我们都引进了 Von Neumann 人为粘性项[2]。在进行两套差分方程组的耦合计算时，需要注意到 Eulerian 座标与 Lagrangean 座标的变换。

1．轴向一维变截面流动的计算

管道中准一维气流的基本方程组为

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\bar{u} \tag{2-1}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho^0}\cdot\frac{f}{f^0}\cdot\frac{\partial(p+q)}{\partial a} \tag{2-2}$$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}=-(p+q)\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \tag{2-3}$$

$$\bar{V}=\frac{1}{\rho^0}\cdot\frac{f}{f^0}\cdot\frac{\partial x}{\partial a} \tag{2-4}$$

$$p=p(\bar{e},\ \bar{V}) \tag{2-5}$$

$$q=\begin{cases}\dfrac{\bar{u}^2(\Delta a)^2}{\bar{V}}\left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial a}\right)^2, & \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial t}<0\\ 0, & \dfrac{\partial \bar{V}}{\partial t}\geqslant 0\end{cases} \tag{2-6}$$

其中

a 为 Lagrangean 座标；　　x 为 Eulerian 座标；

t 为时间；　　$\bar{u}$ 为速度；

p 为压力；　　$\bar{V}$ 为比容；

ρ^0 为初始密度；　　$\bar{e}$ 为单位质量的内能；

$\bar{a}$ 为常数；　　q 为 Von Neumann 人为粘性项；

f^0 为初始时刻质点所在位置的管截面；　　f 为 t 时刻质点所在位置的管截面。

如果状态方程（2-5）采用如下形式：

$$p=(\Upsilon-1)\frac{\bar{e}}{\bar{V}} \tag{2-7}$$

其中 Υ 为常数。方程组（2-1)—(2-6）可写成下列差分方程组，方程中諸量的上、下标具有通常的含义。

$$\bar{u}_j^{n+1/2}=\bar{u}_j^{n-1/2}-\frac{\Delta t}{\rho^0}\frac{f_j^n}{f_j^0}\frac{p_{j+1/2}^n-p_{j-1/2}^n+q_{j+1/2}^{n-1/2}-q_{j-1/2}^{n-1/2}}{\Delta a} \tag{2-8}$$

$$x_j^{n+1}=x_j^n+\Delta t\cdot\bar{u}_j^{n+1/2} \tag{2-9}$$

$$\bar{V}_{j+1/2}^{n+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^0}\left(\frac{f_{j+1}^{n+1}}{f_{j+1}^0}+\frac{f_j^{n+1}}{f_j^0}\right)\frac{x_{j+1}^{n+1}-x_j^{n+1}}{\Delta a} \tag{2-10}$$

$$\bar{e}_{j+1/2}^{n+1}=\frac{\bar{e}_{j+1/2}^n-\left(\frac{1}{2}p_{j+1/2}^n+q_{j+1/2}^{n+1/2}\right)\left(\bar{V}_{j+1/2}^{n+1}-\bar{V}_{j+1/2}^n\right)}{1+\frac{\Upsilon-1}{2}\left(\bar{V}_{j+1/2}^{n+1}-\bar{V}_{j+1/2}^n\right)\Big/\bar{V}_{j+1/2}^{n+1}} \tag{2-11}$$

$$p_{j+1/2}^{n+1}=(\Upsilon-1)\frac{\bar{e}_{j+1/2}^{n+1}}{\bar{V}_{j+1/2}^{n+1}} \tag{2-12}$$

$$q_{j+1/2}^{n+1/2}=\begin{cases}\dfrac{2\bar{a}^2}{(\bar{V}_{j+1/2}^{n+1}+\bar{V}_{j+1/2}^n)}(\bar{u}_{j+1}^{n+1/2}-u_j^{n+1/2})^2, & \text{当 } \bar{V}_{j+1/2}^{n+1}<\bar{V}_{j+1/2}^n\text{时}\\ 0, & \text{当 } \bar{V}_{j+1/2}^{n+1}\geqslant\bar{V}_{j+1/2}^n\text{时}\end{cases} \tag{2-13}$$

稳定性条件：

$$\sqrt{\Upsilon p_{j+1/2}^n\bar{V}_{j+1/2}^n}\ \frac{\Delta t}{(x_{j+1}^n-x_j^n)}\leqslant\frac{\sqrt{\Upsilon}}{2\bar{a}} \tag{2-14}$$

差分方程组（2-8)—(2-14）加上一定的初始条件和边界条件就构成了整个轴向流动的计算。

2．径向一维柱对称弹塑性流的计算

管壁径向柱对称弹塑性流动的基本方程组为

$$\frac{\rho^0\dot{U}}{V}=\frac{\partial\Sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\Sigma_{rr}-\Sigma_{\theta\theta}}{r} \tag{2-15}$$

$$\frac{\dot{V}}{V}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rU)}{\partial r} \tag{2-16}$$

$$\dot{e}-V[s_1\dot{\epsilon}_1+s_2\dot{\epsilon}_2]+(p+q)\dot{V}=0 \tag{2-17}$$

$$p=p(V,\ e) \tag{2-18}$$

$$q=\begin{cases}\left(\dfrac{\partial U}{\partial r}\right)^2\dfrac{\overset{\bullet}{a}^2(\Delta r)^2}{V}, & \dfrac{\partial V}{\partial t}<0\\ 0, & \dfrac{\partial V}{\partial t}\geqslant 0\end{cases}\tag{2-19}$$

其中“·”表示沿质点轨迹的时间微商；

r 为 Eulerian 座标；　　U 为速度；

ρ 为密度；　　V 为相对体积 ρ^0/ρ；

$\overset{\bullet}{a}$ 为常数；　　e 为单位初始体积的内能；

Σ_{rr}，$\Sigma_{\theta\theta}$ 表示总应力；　　s_1，s_2 为应力偏量。

Σ_{rr}、$\Sigma_{\theta\theta}$ 可以表示为

$$\Sigma_{rr}=-(p+q)+s_1\tag{2-20}$$

$$\Sigma_{\theta\theta}=-(p+q)+s_2\tag{2-21}$$

在弹性区域 s_1、s_2 可以表示为

$$\dot{s}_1=2\mu\left(\dot{\epsilon}_1-\frac{1}{3}\dot{V}/V\right)\tag{2-22}$$

$$\dot{s}_2=2\mu\left(\dot{\epsilon}_2-\frac{1}{3}\dot{V}/V\right)\tag{2-23}$$

其中 μ 为 Lame 常数，ϵ_1、ϵ_2 为应变

$$\dot{\epsilon}_1=\partial U/\partial r\tag{2-24}$$

$$\dot{\epsilon}_2=U/r\tag{2-25}$$

我们采用 Von Mises 屈服条件，当 $(s_1^2+s_2^2+s_3^3)>\frac{2}{3}(\overset{\circ}{Y})^2$ 时

$$s_1=s_1-\frac{\sqrt{2/3}\,\overset{\circ}{Y}}{\sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2}}\tag{2-26}$$

$$s_2=s_2\frac{\sqrt{2/3}\,\overset{\circ}{Y}}{\sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2}}\tag{2-27}$$

其中 $\overset{\circ}{Y}$ 为材料的屈服强度，s_3 为轴向应力偏量

$$s_3=-s_1-s_2$$

关于 (2-18) 的状态方程，我们采用 Grüneisen 方程：

$$p-p_H=(e/\rho^0-e_H)(\rho^0\overline{\gamma}/V)\tag{2-28}$$

其中 $\overline{\gamma}$ 为 Grüneisen 参数，足标“H”对应于冲击绝热状态。单位质量的内能 e_H 与 p_H 之间，满足 Hugoniot 关系

$$e_H=\frac{1}{2}p_H(1/\rho^0-V/\rho^0)\tag{2-29}$$

假设管壁材料的冲击绝热线具有通常的性质

$$U_s=C_0+S_0U_p\tag{2-30}$$

其中 U_s、U_p 分别为冲击波速度及波后粒子速度，C_0、S_0 为常数，则

$$p_H=\frac{C_0^2(1/\rho^0-V/\rho^0)}{[1/\rho^0-S_0(1/\rho^0-V/\rho^0)]^2}\tag{2-31}$$

如果材料处于负压状态，我们采用如下状态方程：

$$p=\frac{\rho^0\overline{T}}{V}\left[e/\rho^0-\frac{C_v}{3\alpha}(V-1)\right] \tag{2-32}$$

其中 C_v、α 分别为定容比热和线膨胀系数。

为了允许管壁层裂的多次产生以及层裂碎片的合拢，对于上述微分方程组，我们采用与文献〔4〕略有不同的差分计算，空间网格点及其速度赋予左右值，分别以上标“l”、“r”表示之。

$$U_j^{(l)n+1/2}=U_j^{(l)n-1/2}-\frac{\Delta t^n}{\varphi_j^{(l)n}}(\Sigma_{rr})_{j-1/2}^n+\Delta t^n\cdot\beta_j^{(l)n} \tag{2-33}$$

$$U_j^{(r)n+1/2}=U_j^{(r)n-1/2}+\frac{\Delta t^n}{\varphi_j^{(r)n}}(\Sigma_{rr})_{j+1/2}^n+\Delta t^n\cdot\beta_j^{(r)n} \tag{2-34}$$

其中

$$\varphi_j^{(l)n}=\frac{1}{2}\rho_{j+1/2}^0\left(\frac{r_j^{(l)n}-r_{j-1}^{(r)n}}{V_{j-1/2}^n}\right)$$

$$\varphi_j^{(r)n}=\frac{1}{2}\cdot\rho_{j+1/2}^0\left(\frac{r_{j+1}^{(l)n}-r_j^{(r)n}}{V_{j+1/2}^n}\right)$$

$$\beta_j^{(l)n}=\frac{(\Sigma_{rr})_{j-1/2}^n-(\Sigma_{\theta\theta})_{j-1/2}^n}{\frac{1}{2}(r_j^{(l)n}+r_{j-1}^{(r)n})}\cdot\left(\frac{V^n}{\rho^0}\right)_{j-1/2}$$

$$\beta_j^{(r)n}=\frac{(\Sigma_{rr})_{j+1/2}^n-(\Sigma_{\theta\theta})_{j+1/2}^n}{\frac{1}{2}(r_{j+1}^{(l)n}+r_j^{(r)n})}\cdot\left(\frac{V^n}{\rho^0}\right)_{j+\frac{1}{2}}$$

$$(\Sigma_{rr})_{j+\frac{1}{2}}^n=\left\{-(p^n+q^{n-\frac{1}{2}})+S_1^n\right\}_{j+\frac{1}{2}}$$

$$(\Sigma_{\theta\theta})_{j+\frac{1}{2}}^n=\left\{-(p^n+q^{n-\frac{1}{2}})+S_2^n\right\}_{j+\frac{1}{2}}$$

$$r_j^{(r)n+1}=r_j^{(r)n}+U_j^{(r)n+\frac{1}{2}}\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \tag{2-35}$$

$$r_j^{(l)n+1}=r_j^{(l)n}+U_j^{(l)n+\frac{1}{2}}\Delta t^{n+\frac{1}{2}} \tag{2-36}$$

如果

$$(\Sigma_{rr})_{j+\frac{1}{2}}^n+(\Sigma_{rr}^n)_{j-\frac{1}{2}}<2\overset{*}{Y}$$

其中 $\overset{*}{Y}$ 为材料的动力断裂强度，则

$$U_j^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(U_j^{(r)n+\frac{1}{2}}+U_j^{(l)n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$r_j^{n+1}=\frac{1}{2}(r_j^{(r)n+1}+r_j^{(l)n+1})$$

$$V_{j+1/2}^{n+1}=V_{j+\frac{1}{2}}^n+\Delta t^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho^0}{m}\right)_{j+\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}U_{j+1}^{n+1/2}(r_{j+1}^{n+1}+r_{j+1}^n)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}U_j^{n+\frac{1}{2}}(r_j^{n+1}+r_j^n)\right] \tag{2-37}$$

其中

$$m_{j+\frac{1}{2}}=\rho^0_{j+\frac{1}{2}}\left(\frac{(r^0_{j+1})^2-(r^0_j)^2}{2}\right)$$

$$(\dot{\in}_1)^{n+1}_{j+1/2}=\frac{U^{n+1}_{j+1}-U^{n+1/2}_j}{\frac{1}{2}(r^{n+1}_{j+1}+r^n_{j+1})-\frac{1}{2}(r^{n+1}_j+r^n_j)} \tag{2-38}$$

$$(\dot{\in}_2)^{n+1}_{j+1/2}=\frac{U^{n+1/2}_{j+1}+U^{n+1/2}_j}{\frac{1}{2}(r^{n+1}_{j+1}+r^n_{j+1})+\frac{1}{2}(r^{n+1}_j+r^n_j)} \tag{2-39}$$

$$q^{n+1/2}_{j+1/2}=\begin{cases}-\dfrac{2\overset{*}{a}{}^2\rho^0}{(V^{n+1}_{j+1/2}+V^n_{j+1/2})}(U^{n+1/2}_{j+1}-U^{n+1/2}_j)^2 & V^{n+1}_{j+1/2}<V^n_{j+1/2}\\ 0 & V^{n+1}_{j+1/2}\geqslant V^n_{j+1/2}\end{cases} \tag{2-40}$$

如果

$$(\Sigma_{rr})^n_{j+\frac{1}{2}}+(\Sigma_{rr})^n_{j-\frac{1}{2}}\geqslant 2\overset{*}{Y}$$

则方程 (2-37)—(2-40) 中 $j+1$ 点、j 点上的整点量分别用带上标 (l)、(r) 的量代替。

$$(s_1)^{n+1}_{j+1/2}=(s_1)^n_{j+\frac{1}{2}}+2\mu\left[(\dot{\in}_1)^{n+1/2}_{j+1/2}\Delta t^{n+1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{V^{n+1/2}}\right)_{j+\frac{1}{2}}\right] \tag{2-41}$$

$$(s_2)^{n+1}_{j+1/2}=(s_2)^n_{j+\frac{1}{2}}+2\mu\left[(\dot{\in}_2)^{n+1/2}_{j+1/2}\Delta t^{n+1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{V^{n+1/2}}\right)_{j+\frac{1}{2}}\right] \tag{2-42}$$

$$(s_3)^{n+1}_{j+1/2}=-[(s_1)^{n+1}_{j+1/2}+(s_2)^{n+1}_{j+1/2}] \tag{2-43}$$

其中

$$V^{n+1/2}_{j+1/2}=\frac{V^{n+1}_{j+1/2}+V^n_{j+1/2}}{2}$$

如果

$$(s_1^2+s_2^2+s_3^2)^{n+1}_{j+1/2}-\frac{2}{3}(\overset{\circ}{Y})^2=K^{n+1}_{j+1/2}>0$$

则

$$(s_1)^{n+1}_{j+1/2}=\left\{(s_1)^n_{j+\frac{1}{2}}+2\mu\left[(\dot{\in}_1)^{n+1/2}_{j+1/2}\Delta t^{n+1/2}-\frac{1}{3}\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{V^{n+1/2}}\right)_{j+\frac{1}{2}}\right]\right\}\cdot\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\overset{\circ}{Y}}{\sqrt{K^{n+1}_{j+1/2}+\frac{2}{3}(\overset{\circ}{Y})^2}} \tag{2-44}$$

$$(s_2)^{n+1}_{j+1/2}=\left\{(s_2)^n_{j+1/2}+2\mu\left[(\dot{\in}_2)^{n+1/2}_{j+1/2}\Delta t^{n+\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\left(\frac{V^{n+1}-V^n}{V^{n+1/2}}\right)_{j+\frac{1}{2}}\right]\right\}\cdot\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\overset{\circ}{Y}}{\sqrt{K^{n+1}_{j+1/2}+\frac{2}{3}(\overset{\circ}{Y})^2}} \tag{2-45}$$

令

$$V_{j+1/2}^{n+1/2}(s_1)_{j+1/2}^{n+1/2}(\overset{\circ}{\in}_1)_{j+1/2}^{n+1/2}\Delta t^{n+\frac{1}{2}}=X_1$$

$$V_{j+1/2}^{n+1/2}(s_2)_{j+1/2}^{n+1/2}(\overset{\circ}{\in}_2)_{j+1/2}^{n+1/2}\Delta t^{n+\frac{1}{2}}=Y_1$$

$$\frac{1}{2}(V_{j+\frac{1}{2}}^{n}-V_{j+1/2}^{n+1})=A_5$$

$$e_{j+\frac{1}{2}}^{n}+\left(\frac{1}{2}p_{j+\frac{1}{2}}^{n}+q_{j+1/2}^{n+1/2}\right)\left(V_{j+\frac{1}{2}}^{n}-V_{j+1/2}^{n+1}\right)=B_5$$

则

$$e_{j+1/2}^{n+1}=\frac{A_5p_H(V_{j+1/2}^{n+1}/\rho^0)-\overline{\tau}_0A_5e_H\rho^0+B_5+X_1+Y_1}{1-\overline{\tau}_0A_5} \tag{2-46}$$

$$p_{j+1/2}^{n+1}=p_H(V_{j+1/2}^{n+1}/\rho^0)+\overline{\tau}_0\rho^0(e_{j+1/2}^{n+1}/\rho^0-e_H) \tag{2-47}$$

其中

$$p_H(V_{j+1/2}^{n+1}/\rho^0)=\frac{C_0^2(1/\rho^0-V_{j+1/2}^{n+1}/\rho^0)}{[1/\rho^0-S_0(V_0-V_{j+1/2}^{n+1}/\rho^0)]^2}$$

$$E_H=\frac{1}{2}p_H(1/\rho^0-V_{j+1/2}^{n+1}/\rho^0)$$

如果

$$p_{j+1/2}^{n+1}<0$$

则

$$e_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}=\frac{B_5+X_1+Y_1-\rho^0\overline{\tau}_0\cdot\frac{C_v}{3\alpha}\cdot A_5\cdot(V_{j+1/2}^{n+1}-1)}{1-A_5\overline{\tau}_0} \tag{2-48}$$

$$p_{j+1/2}^{n+1}=\rho^0\overline{\tau}_0\left[e_{j+1/2}^{n+1}/\rho^0-\frac{C_v}{3\alpha}(V_{j+1/2}^{n+1}-1)\right] \tag{2-49}$$

稳定性条件

$$\Delta t^{n+\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left.\frac{\Delta r^{n+1}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}\right|_{min} \tag{2-50}$$

其中 a_1 为声速

$$\Delta r^{n+1}=r_{j+1}^{n+1}-r_j^{n+1}$$

$$b_1=\begin{cases}8a^{*2}\Delta r^{n+\frac{1}{2}}(\dot{V}/V)_{j+1/2}^{n+1/2}, & \dot{V}<0\\ 0, & \dot{V}\geqslant 0\end{cases}$$

如果

$$(\Delta t)^{n+\frac{3}{2}}>(1.1)\,\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$$

则使用

$$\Delta t^{n+\frac{3}{2}}=(1.1)\,\Delta t^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\Delta t^{n+1}=\frac{1}{2}(\Delta t^{n+\frac{3}{2}}+\Delta t^{n+\frac{1}{2}})$$

差分方程组 (2-33)—(2-50) 的内边界条件取自差分方程组 (2-8)—(2-14) 的当时当地计算值，这样就构成了双向一维流的耦合计算。

三、计 算 实 例

我们采取上述双向一维耦合算法，计算了金属圆管在管内炸药爆轰作用下的变形和断裂问题，计算结果与实验结果基本一致。

图 1 为此类装置起爆后某时刻的轴向剖面示意图，座标轴 ox 为回旋轴，座标轴 or 位于炸药的初始端面。雷管从 o 点起爆，图中 CD，EF 分别为炸药起爆后某时刻产物端面的位置，EF 的初始位置在 GH。

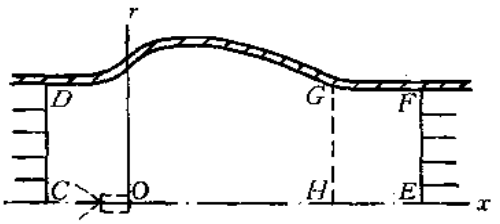


图 1

为了计算管内炸药的起爆，需要对前述的轴向一维变截面流场计算作些特殊处理。我们采用文献〔 4 〕的方法，把炸药和爆轰产物的状态方程写成如下形式：

$$p=(\Upsilon-1)\frac{\bar{e}}{\bar{V}}\delta(\bar{V}) \tag{3-1}$$

其中 $\delta(\bar{V})$ 是这样的函数：对于炸药，$\delta(\bar{V})=0$。对于爆轰产物，$\delta(\bar{V})=1$。对于过渡区

$$\delta(\bar{V})=\left(\frac{\bar{V}_0-\bar{V}}{\bar{V}_0-\bar{V}_J}\right)^m \tag{3-2}$$

其中 m 取 2，$\bar{V}_J=\frac{\Upsilon}{\Upsilon+1}\bar{V}_0$。用 (3-1) 式代替 (2-7) 后，(2-11) 及 (2-12) 应作相应改变。

对于图 1 所示的算例，还应考虑到爆轰波和爆轰产物对于管壁微元的冲击角度，作用于管壁微元的压力应乘以如下因子[5]：

$$\eta=\frac{27}{64}+\frac{37}{64}\cos^2\beta \tag{3-3}$$

其中 β 为爆轰产物粒子的冲击方向与管壁法向的夹角。

下面举一实例。金属圆管由钢制成，内半径为 16.3mm，壁厚 1.2mm，密度为 7.8g/cm³，计算中所用其他参数如下：

$C_0=3.8\text{mm}/\mu\text{s}$，　$s_0=1.58$，　$\mu=800kb$，

$\bar{\nu}=1.69$，　$\overset{\circ}{Y}=3kb$，　$\overset{*}{Y}=25kb$，

$C_v=0.438\times10^7$ 尔格/克/度，　$\alpha=0.117\times10^{-4}$/度，

管内炸药柱由 $T/\Gamma(40/60)$ 制成，半径为 16.2mm，长 30mm，密度为 1.68g/cm³，C-J 爆速为 7.75mm/μs，我们取 Υ 为 3。

为了比较理论与实验结果，我们对钢管的三个代表性截面，作了外径随时间变化的曲线，如图 2、图 3、图 4 所示。它们的管截面轴向座标分别等于 6mm、16mm、26mm。图中曲线为理论计算结果，“×”点表示分幅相机结果，“o”点表示脉冲 X 射线照相结果。

从图 2、图 3、图 4 可见，计算的金属管运动情况与实验结果基本一致。在我们的计算中，有关管壁断裂的计算处理得比较简单，对于外层管壁的拉伸断裂采用最大拉伸判据，对于管壁的贯穿断裂采用 G. I. Taylor 条件[6] 计算结果是 7μs 左右在管截面轴向座标等于

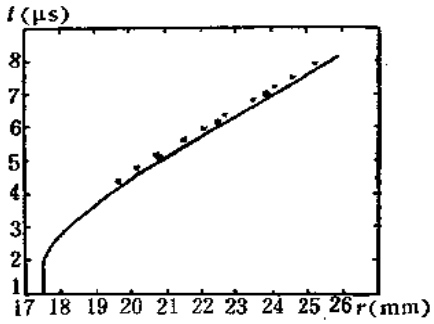


图2

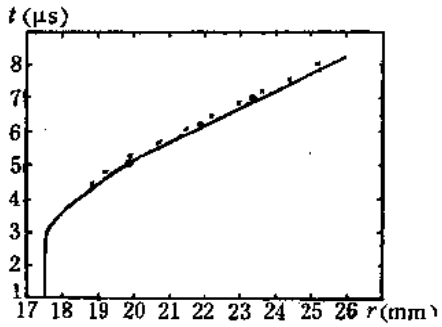


图3

6mm、4mm、8mm 处先后出现贯穿断裂。实验结果是，在该处附近，6μs 时不能见到管壁裂纹，7μs 时已能见到明显裂纹。

我们要说明的是，利用脉冲 X 射线照相技术和分幅相机所取得的实验结果，在目前条件下，都有较大的测量误差。管壁外径变形量的测定可能有 0.2mm 偏差，贯穿断裂的时间确定可能有 0.5μs 的偏差。由于实验结果存在一定的不确定性，理论计算的误差尚不能确切估计。

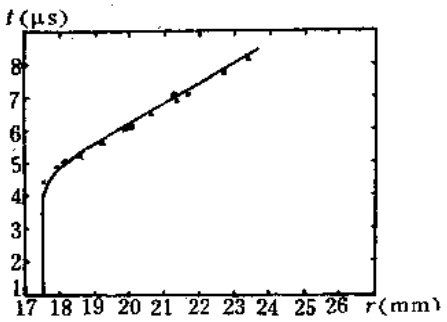


图4

参 考 文 献

〔1〕Watson,J.D., NASA,CR-1533(1970).

〔2〕J. Von Neumann and Richtmyer, R.D., *j.Appl. phys.*, **21**(1950),232.

〔3〕Wilkins,M.L., Methods in Computational Physics,**3**(1964),211.

〔4〕Wilkins,M.L., Les Ondes de Detonation, pp.165—175,Proc. Colloq., held at Gif-Sur-Yvette, France, Aug.28---Sept.,2(1961).

〔5〕Баум, Ф. А., Станюкович,К. П, ,шехтер, Б.N.,Физика Взрыва(1959), 547.

〔6〕Taylor,G.I., Sci.pap. of Sir G. I. Taylor, **111** (1963),559.

大型冷却池水力热力的数值模拟

吴江航　秦素娣　　刘兰芬　李瑞生
（北京大学）　　（水利水电科学研究院）

一、前　言

随着火电，核电建设的迅速发展，电厂冷却水问题日益突出。利用冷却池作为冷源的热电厂，预测冷却池的流动特性和温度分布，从而估算水面的散热能力是确定厂址和电厂规模的一个关键问题。同时如何把冷却池的工程布置设计得经济合理并使工程取得预期效果，也需要对不同工程布置条件下的冷却池的水力热力特性和取水温度有所了解。另一方面，对电厂排放的热水在受纳水域中所产生的热污染和在大气中所产生的水汽污染进行预报和控制，在现今也是一个比较重要的问题。

随着计算技术的发展，对冷却水运动的研究除了物理模型实验和原体观测外，数值模拟计算已逐步成为提供所需数据的一个重要手段。

在电子计算机上进行数值模拟，可以不受物理模型中那种模型相似准则的限制，而具有比较大的灵活性和适应性，特别是有了统一的通用程序后，可以用短的时间来完成各种方案的计算。但冷却水运动的数值模拟在目前还存在两大困难：

1．冷却水流动一般为有浮力的湍流运动，由于人们对于湍流运动本身尚未充分了解，有关温差水体湍流运动的粘性应力、热交换、物质输运尚无可靠的数学公式来描述。在有上游来水的冷却水运动中，物质界面上的掺混现象和混合过程也没有弄得十分清楚。

2．一个实际的冷却池边界形状一般都很不规则，为了提高冷却池的冷却效率，往往还需要采用一些工程设施，如导流堤、潜水堰、挡热墙等；为了了解冷却池的热惯性，还须考虑周日的气候影响。这样，对冷却池水力热力性能的分析要求模拟的是一种三维不定常流动，因而对计算机的容量和速度都要求比较高，以致有时无法实现。

如图1所示，在冷却池中，存在排水口出水混合和水面冷却两种性质很不相同的流动区域。前者，一般称为近区；后者称为远区。在近区冷热水强烈掺混，出现显著水温跌差。它实质上是一种有浮力的表层射流。在远区流动平缓，存在广阔的水面散热，在很多情况下存在温度分层、死水回流和风力的作用。

现在国外建立的数学模型有两种：一种是深水分层流的数学模型，另一种是浅水完全混合的数学模型。他们的作法都是根据冷却池（或自然水域）的不同类型，不同流动区域的主要特点进行简化，采用一定的假设和经验数据进行模拟计算。有关国外的许多工作在文献〔2〕中有较详细的评述和介绍。国内工作在文献〔3〕中均有反映。文献〔4〕为了在工程设计中预测冷却池的整体性能，采用了位势流等水深的近似简化，根据位势流的流场计算出的温度分布与 Horseshoe 湖的实测资料符合良好。1977 年我们曾用同样的方法计算了有

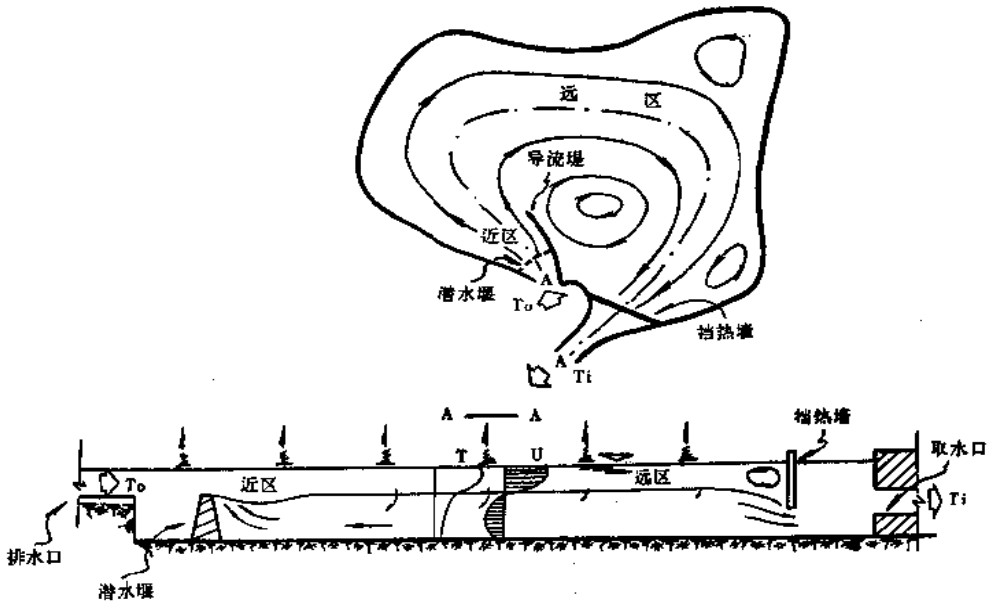


图 1　冷却池示意图

死水回流的冷却池流动，其计算结果与模型实验有较大的差别，表明了在模拟冷却水运动时，必须考虑可能存在的死水回流。

二、数学模型

大型冷却池和湖泊中的流动，大多以水平运动为主，垂向速度很小，这样我们可以将这些流动进行分层计算，其中压力可以用静压

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g \tag{1}$$

来近似。若这些层的上下界面分别用 $z=h_s(x,y,t)$ 和 $z=h_l(x,y,t)$ 来表示，则在这样两个任意界面之间的流动可以用垂向积分后的雷诺方程来描述，利用 Leibnitz 公式可以将这些方程变换为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int_{h_l}^{h_s}\rho dz+\frac{\partial}{\partial x}\int_{h_l}^{h_s}\rho v_x dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{h_l}^{h_s}\rho v_y dz\\&=[\rho(D-v_n)]_{z=h_s}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial h_s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_s}{\partial y}\right)^2}\\&-[\rho(D-v_n)]_{z=h_l}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial h_s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_s}{\partial y}\right)^2}\end{aligned}\tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{h_l}^{h_s}\rho v_x dz+\frac{\partial}{\partial x}\int_{h_l}^{h_s}\rho v_x v_x dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{h_l}^{h_s}\rho v_y v_x dz$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\partial}{\partial x}\int_{h_t}^{h_s} p\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{h_t}^{h_s}\tau_{xx}\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{h_t}^{h_s}\tau_{xy}\,dz \\
&\quad + p\Big|_{z=h_s}\cdot\frac{\partial h_s}{\partial x} - p\Big|_{z=h_t}\frac{\partial h_t}{\partial x} \\
&\quad + [\tau_{xn} - \rho v_x(D - v_n)]_{z=h_s}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial h_s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_s}{\partial y}\right)^2} \\
&\quad - [\tau_{xn} - \rho v_x(D - v_n)]_{z=h_t}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\partial h_t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_t}{\partial y}\right)^2} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_{h_t}^{h_s}\rho v_y\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{h_t}^{h_s}\rho v_x v_y\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{h_t}^{h_s}\rho v_y v_y\,dz \\
&= -\frac{\partial}{\partial y}\int_{h_t}^{h_s} p\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{h_t}^{h_s}\tau_{yx}\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{h_t}^{h_s}\tau_{yy}\,dz \\
&\quad + p\Big|_{z=h_s}\cdot\frac{\partial h_s}{\partial y} - p\Big|_{z=h_t}\cdot\frac{\partial h_t}{\partial y} \\
&\quad + [\tau_{yn} - \rho v_y(D - v_n)]_{z=h_s}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial h_s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_t}{\partial y}\right)^2} \\
&\quad - [\tau_{yn} - \rho v_y(D - v_n)]_{z=h_t}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial h_t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_t}{\partial y}\right)^2} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\int_{h_t}^{h_s}\rho c_p T\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{h_t}^{h_s}\rho v_x c_p T\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{h_t}^{h_s}\rho v_y c_p T\,dz \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\int_{h_t}^{h_s}\tilde{q}_{tx}\,dz - \frac{\partial}{\partial y}\int_{h_t}^{h_s}\tilde{q}_{ty}\,dz \\
&\quad + [\rho c_p T(D - v_n) - \tilde{q}_{tn}]_{z=h_s}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial h_s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_s}{\partial y}\right)^2} \\
&\quad - [\rho c_p T(D - v_n) - \tilde{q}_{tn}]_{z=h_t}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\partial h_t}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_t}{\partial y}\right)^2} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

其中

$$
D = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}
$$

为界面 $z=h(x,\ y;\ t)$ 的法向移动速度

$$
v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}
$$

为界面 $z=h(x,\ y;\ t)$ 上的流体运动的法向速度分量，所有界面的法向量

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}\left(-\frac{\partial h}{\partial x}\boldsymbol{e}_x-\frac{\partial h}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z\right)$$

以向上为正

$$\tau_{xn}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}\left(-\tau_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}-\tau_{xy}\frac{\partial h}{\partial y}+\tau_{xz}\right)$$

$$\tau_{yn}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}}\left(-\tau_{yx}\frac{\partial h}{\partial x}-\tau_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}+\tau_{yz}\right)$$

$\tilde{q}_{tx}$，$\tilde{q}_{ty}$，$\tilde{q}_{tn}$ 表示热流量的相应分量。

方程（2）—（5）较前人结果其物理意义更加具体明确。要使这些方程能够求解，还必须解决四个问题：

1．将整个流场合理地进行分层。

2．选择对于我们的问题比较合适的湍流模型，给出粘性应力和热流量的数学表达式。

3．对于方程式中的积分量进行数学处理。

4．确定界面应力和传热以及界面上的质量，动量和热量的法向输运。

文献〔2〕引入下列諸量

$$q_x=\int_{h_l}^{h_s}\rho v_x dz,\qquad q_y=\int_{h_l}^{h_s}\rho v_y dz$$

$$\int_{h_l}^{h_s}\rho v_x v_x dz=\frac{q_x q_x}{\rho H}+\int_{h_l}^{h_s}(\rho v_x)'v_x' dz$$

$$\int_{h_l}^{h_s}\rho v_y v_x dz=\frac{q_y q_x}{\rho H}+\int_{h_l}^{h_s}(\rho v_y)'v_x' dz$$

$$\int_{h_l}^{h_s}\rho v_y v_y dz=\frac{q_y q_y}{\rho H}+\int_{h_l}^{h_s}(\rho v_y)'v_y' dz$$

文献〔2〕为了封闭方程组，还进一步假设

$$\int_{h_l}^{h_s}[\tau_{xx}-(\rho v_x)'v_y']dz=2\varepsilon\frac{\partial q_x}{\partial x}$$

$$\int_{h_l}^{h_s}[\tau_{xy}-(\rho v_x)'v_y']dz=\int_{h_l}^{h_s}[\tau_{yx}-(\rho v_y)'v_x']dz=\varepsilon\left(\frac{\partial q_x}{\partial y}+\frac{\partial q_y}{\partial x}\right)$$

$$\int_{h_l}^{h_s}[\tau_{yy}-(\rho v_y)'v_y']dz=2\varepsilon\frac{\partial q_y}{\partial y}$$

其中 v_x'，v_y' 为对于层内平均流场的偏离速度。

除此之外，我们还引入

$$\int_{h_l}^{h_s}\rho c_p T\,dz=\rho H c_p\overline{T},$$

$$\int_{h_l}^{h_s}\rho v_x c_p T\,dz=q_x c_p\overline{T}+\int_{h_l}^{h_s}(\rho v_x)' c_p T'\,dz$$

$$\int_{h_l}^{h_s}\rho v_y c_p T\,dz=q_y c_p\overline{T}+\int_{h_l}^{h_s}(\rho v_y)' c_p T'\,dz$$

并假设

$$\int_{h_l}^{h_s}[q_{tx}+(\rho v_x)' c_p T']\,dz=-KH\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}=-\frac{\rho H}{\mathrm{Pr}}\varepsilon\frac{\partial\overline{T}}{\partial x}$$

$$\int_{h_l}^{h_s}[q_{ty}+(\rho v_y)' c_p T']\,dz=-KH\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}=-\frac{\rho H}{\mathrm{Pr}}\varepsilon\frac{\partial\overline{T}}{\partial y}$$

对于完全混合冷却池，只须计算自由水面和池底之间的平均速度场和温度场，因而有

$$p=p_a+(h_s-z) \tag{6}$$

$$(D-v_n)\Big|_{z=h_s}=(D-v_n)\Big|_{z=h_l}=0 \tag{7}$$

$$\tau_{xn}\Big|_{z=h_s}=\gamma^2\rho_a W^2\cos\theta \tag{8}$$

$$\tau_{yn}\Big|_{z=h_s}=\gamma^2\rho_a W^2\sin\theta \tag{9}$$

$$\tau_{xn}\Big|_{z=h_l}=\left(\frac{g}{c^2}\right)\frac{1}{\rho}\frac{q_x(q_x^2+q_y^2)^{\frac{1}{2}}}{H^2} \tag{10}$$

$$\tau_{yn}\Big|_{z=h_l}=\left(\frac{g}{c^2}\right)\frac{1}{\rho}\frac{q_y(q_x^2+q_y^2)^{\frac{1}{2}}}{H^2} \tag{11}$$

$$\overline{q}_{tn}\Big|_{z=h_s}=K_s(\overline{T}-\overline{T}_n) \tag{12}$$

$$\overline{q}_{tn}\Big|_{z=h_l}=0 \qquad \text{(池底绝热)} \tag{13}$$

其中 p_a 为水面上的大气压力；　ρ_a 为水面上的大气密度；

W 为水面上的风速；　θ 为水面上的风向角；

g 为重力加速度；　c 为 Chezy 系数；

K_s 为水面综合散热系数；　T_n 为自然水温。

对于浅水冷却池可以假设

$$\left(\frac{\partial h_s}{\partial x}\right)^2\ll 1,\quad \left(\frac{\partial h_s}{\partial y}\right)^2\ll 1,\quad \left(\frac{\partial h_l}{\partial x}\right)^2\ll 1,\quad \left(\frac{\partial h_l}{\partial y}\right)^2\ll 1,$$

其数学方程表示在图 2 中。

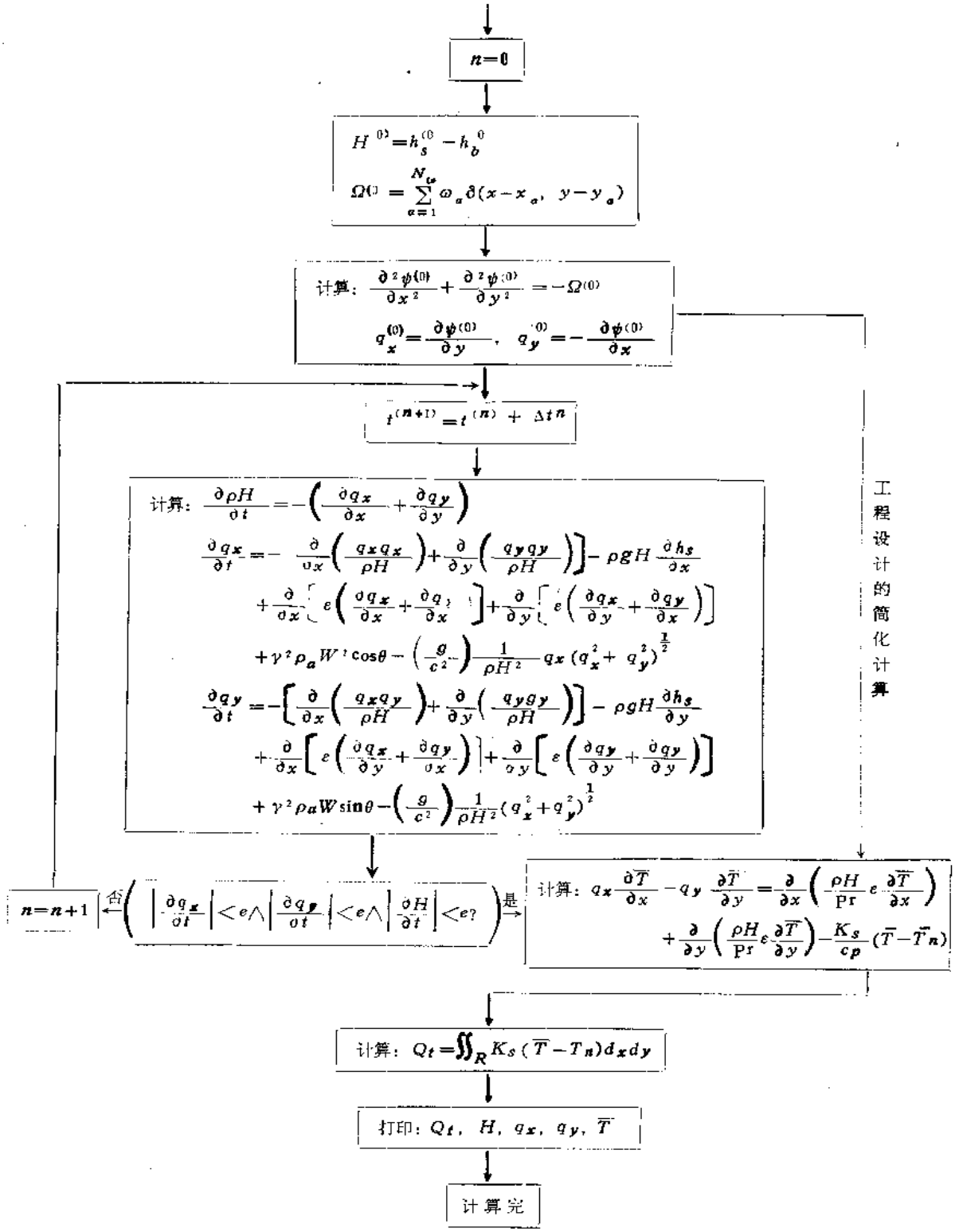


图 2　大型冷却池水力热力数值模拟的数学方程及计算框图

三、计 算 方 法

图 2 中的数学方程，均可归结为下列的输运扩散方程的形式

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\nabla\cdot(Q\boldsymbol{v})=\nabla\cdot(K\nabla Q)+s \tag{14}$$

对其中的时间导数项进行离散化，则有

$$\frac{Q^{n+1}-Q^n}{\Delta t^n}=-\nabla\cdot(Q^*\boldsymbol{v}^n)+\nabla\cdot(K\nabla Q^n)+s^n \tag{15}$$

如将 Q^* 取为 Q^{n+1}，则为隐式格式，使计算复杂化。如将 Q^* 取为 Q^n，则往往破坏计算的稳定性。在文献〔1〕中对于对流项中的 Q^* 取为

$$Q^*(\boldsymbol{r},\ t)=Q(\boldsymbol{r}-\alpha\boldsymbol{v}\Delta t^n,\ t^n)=Q^n-\alpha\boldsymbol{v}\Delta t^n\cdot\nabla Q^n+O((\Delta t^n)^2),\quad (0<\alpha\leqslant 1) \tag{16}$$

用以体现对流项中的迎风效应。

采用离散算子方法再对方程（15）进行空间离散。离散网格采用了四边形八结点和九结点的等参数单元网格。在每个结点上 Q^n 和 Q^{n-1} 的离散值取

$$[Q^n]_i=\int_{R_i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)Q^n dR\Big/\int_{R_i}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)dR \tag{17}$$

其它的微分项的离散值取

$$[DQ^n]_i=\int_{R_i}N_i DQ^n dR\Big/\int_{R_i}N_i dR \tag{18}$$

其中 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)$ 为 Dirac Delta 函数，$N_i(\xi,\ \eta)$ 为 Lagrange 的形状函数。这实际上相当于利用了集中质量矩阵的等参数有限元方法。这种方法对于时间是单步的，对于时间和空间的计算均是显式的。在程序中我们安排了变时间步长和定时间步长两种算法。用变步长算法选到最合适的时间步长后，再用定步长进行计算，这样既减省了计算时间，又保证了计算的稳定性。

四、计 算 初 始 流 场

用人工不定常方法求解定常流动，一般的都是从静止流场开始计算，但是这样达到定常的渐近解的时间需要很长。我们现在按另外一种方法来计算初始流场。对于定常流动，引入流函数

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-q_y\qquad\frac{\partial\psi}{\partial y}=q_x \tag{19}$$

因而有

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\Omega \tag{20}$$

其中 $\Omega=\dfrac{\partial q_y}{\partial x}-\dfrac{\partial q_x}{\partial y}$ 相当于涡量。

当冷却池中存在死水回流时，我们可以用有限个点涡

$$\Omega=\sum_{a=1}^{N_\omega}\omega_a\delta(x-x_a,\ y-y_a) \tag{21}$$

来近似，其中点涡强度 ω_a 可由死水回流范围的大小和形状算出。具体办法是将流函数 ψ 展成（$N_\omega+1$）个流函数 ψ_i（$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N_\omega$）的线性组合：

$$\psi=\psi_0+\sum_{i=1}^{N_\omega}a_i\psi_i \tag{22}$$

其中 ψ_i 各自由下列方程和边界条件解出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y^2}=0\\&\psi_0|_\Gamma=\widetilde{\psi}\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2}=-1\\&\psi_i|_\Gamma=0\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N_\omega)\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

解出 ψ_i 后，根据死水回流范围的大小和形状，选定 N_ω 个控制点 (x_c, y_c)，$(c=1,2,\ \cdots,\ N_\omega)$。在每个死水回流区的控制点上使流函数取给定的值 C_K

$$\psi=\psi_0+\sum_{i=1}^{N_\omega}a_i\psi_i=C_K\qquad(K=1,\ 2,\ \cdots,\ N_d) \tag{25}$$

其中 N_d 为死水回流区的数目。解出代数方程组（25）即可求得 a_i 和流函数

$$\psi=\psi_0+\sum_{i=1}^{N_\omega}a_i\psi_i$$

采用由这样确定的初始流场，按照图 2 所示的计算框图，可以比较快的达到稳定流场。对于工程设计，可以利用这样确定的初始流场直接计算水面温度分布。

五、计 算 实 例

我们对于大型浅水冷却池按照上述的数学模型和方法编制了通用的数值模拟计算程序，在北京大学 6912 电子计算机上对山东滕县昭阳湖的 40 平方公里的水面的冷却能力进行了数值模拟计算，并对不同的工程布置方案进行了对比，采用了 88 个单元 319 个结点所组成的八结点等参数单元的计算网格，如图 3 所示。其中部分结果在图 4、图 5、图 6、图 7 中表示出来。

数值实验结果表明，对于工程设计采用前述的初始流场直接计算温度分布是足够精确的，这样就大大节省了工程设计的计算时间。

本工作一直得到北京大学孙天风教授和水利电力科学研究院陈惠泉同志的热情关怀、支持和帮助，谨致谢意。

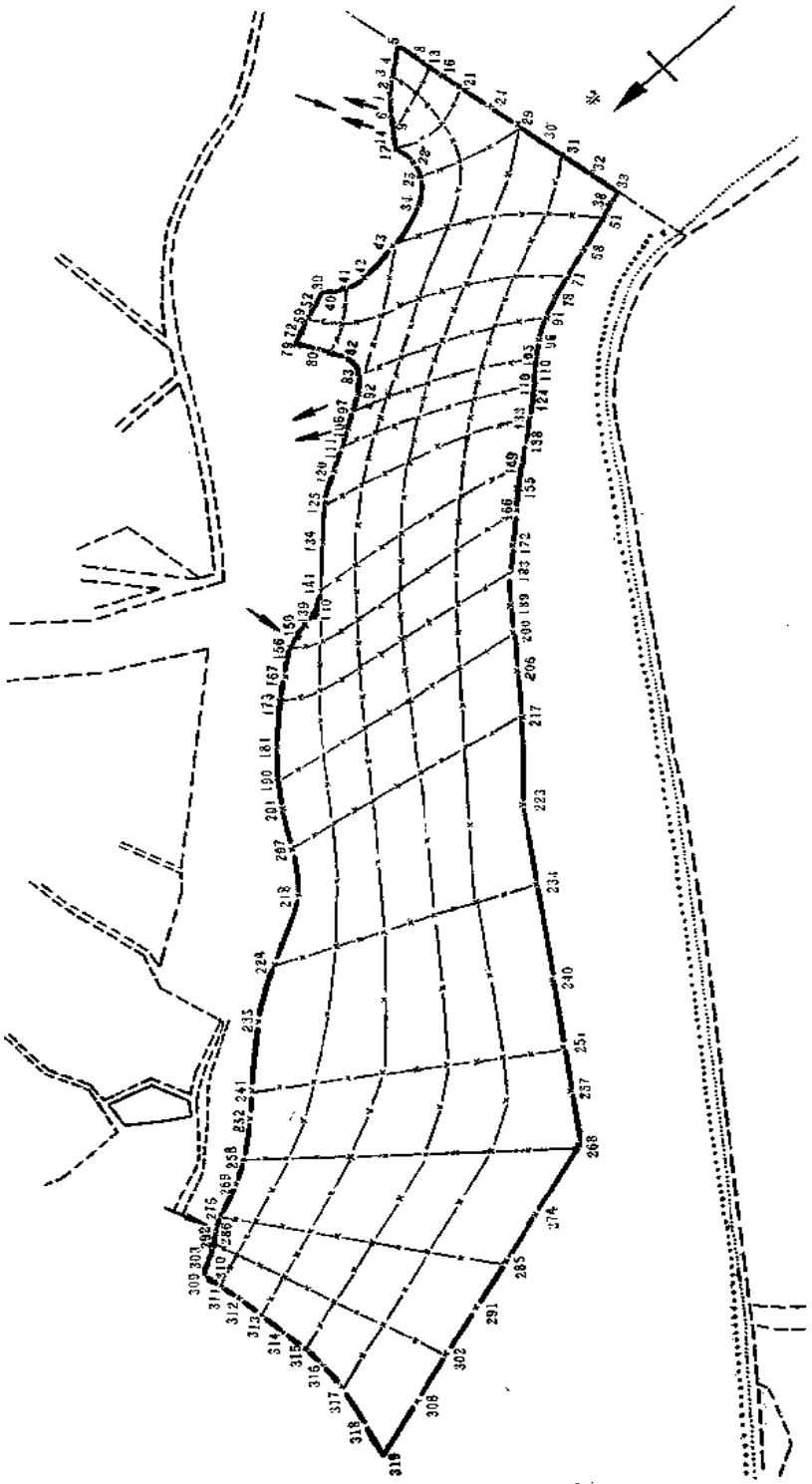


图 3　昭阳湖冷却池计算网格图

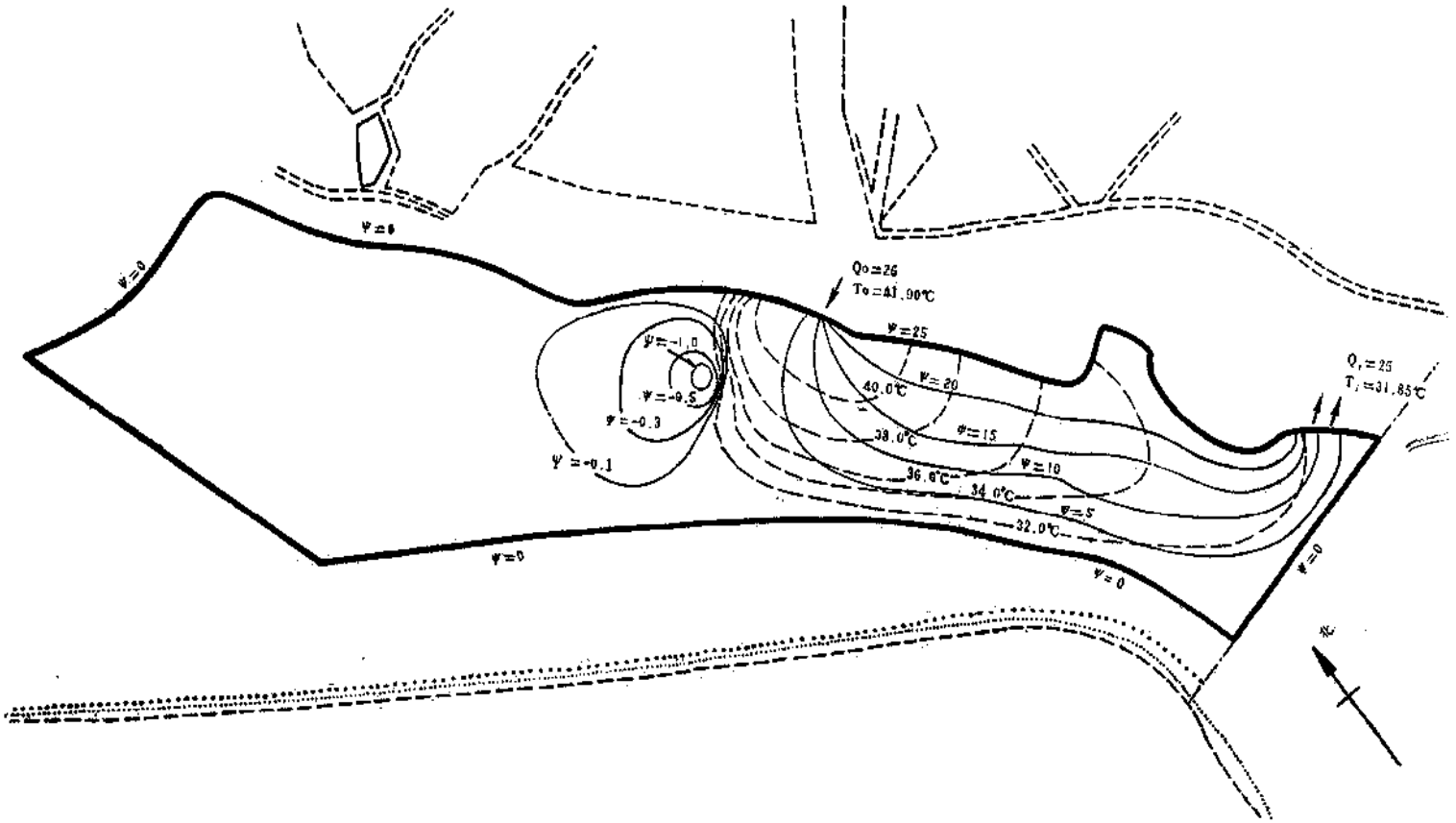


图 4　昭阳湖冷却池流态与温度分布

排水流量 $Qp=25$ 米³/秒　综合散热系数 $K_s=0.26$ 吨卡/米²·日·度　水面散热量 $Q_t=246$ 吨卡/秒　自然水温 $T_n=30.1$ 度

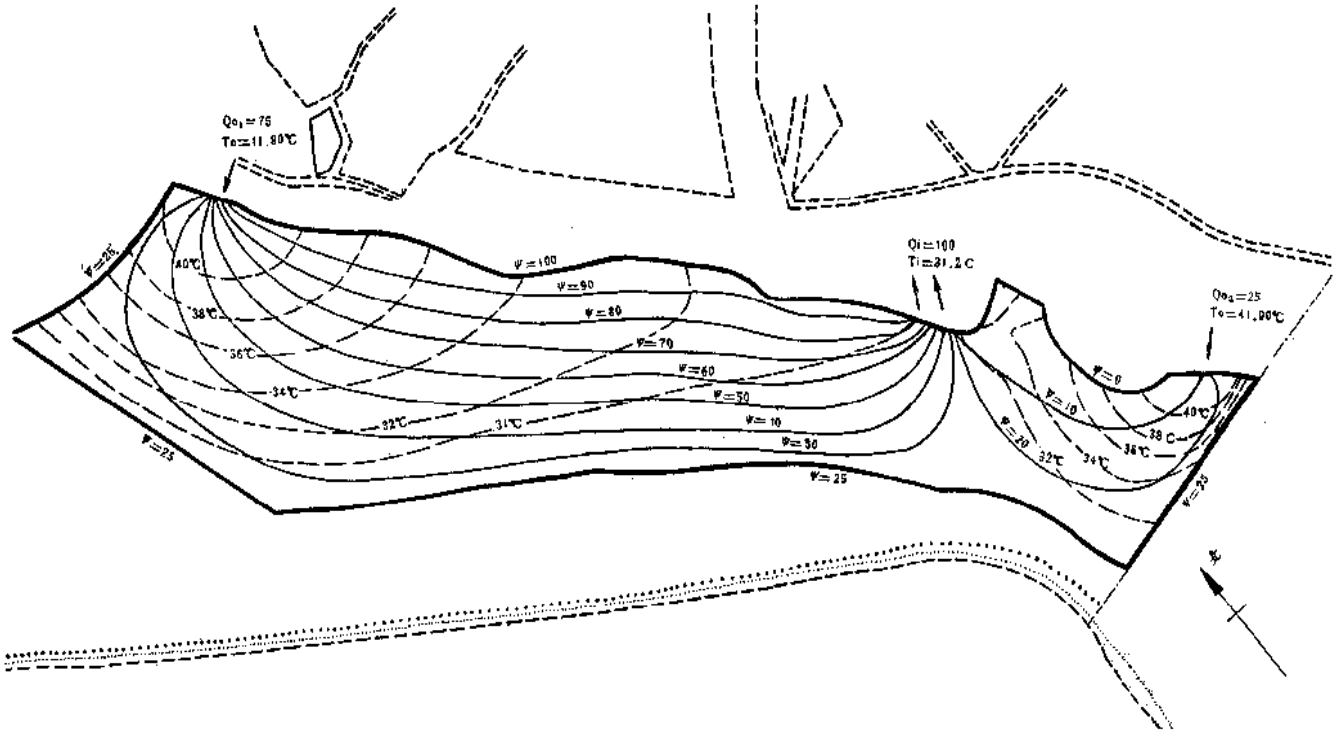


图 5　昭阳湖冷却池流态与温度分布

排水流量 Qp=米³/秒　综合散热系数 K_s=0.70 吨卡/米²·日·度　水面散热量 Q_t=996 吨卡/秒　自然水温 Tn=30.1 度

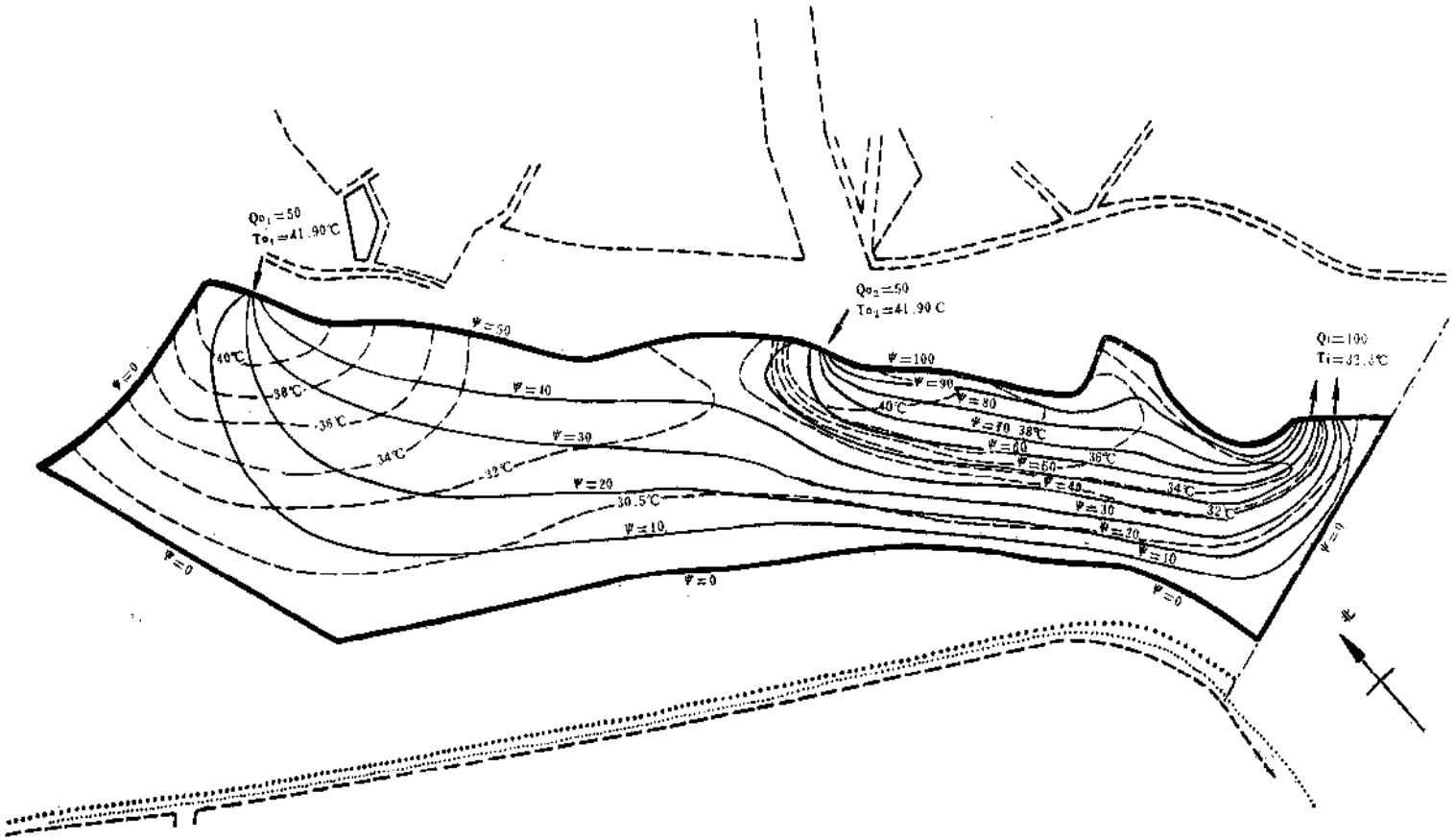


图 6　昭阳湖冷却池流态与温度分布

排水流量 $Q_p=100$ 米^3/秒　综合散热系数 $K_s=0.70$ 吨卡/米·日·度　水面散热量 $Q_t=1093$ 吨卡/秒　自然水温 $Tn=30.1$ 度

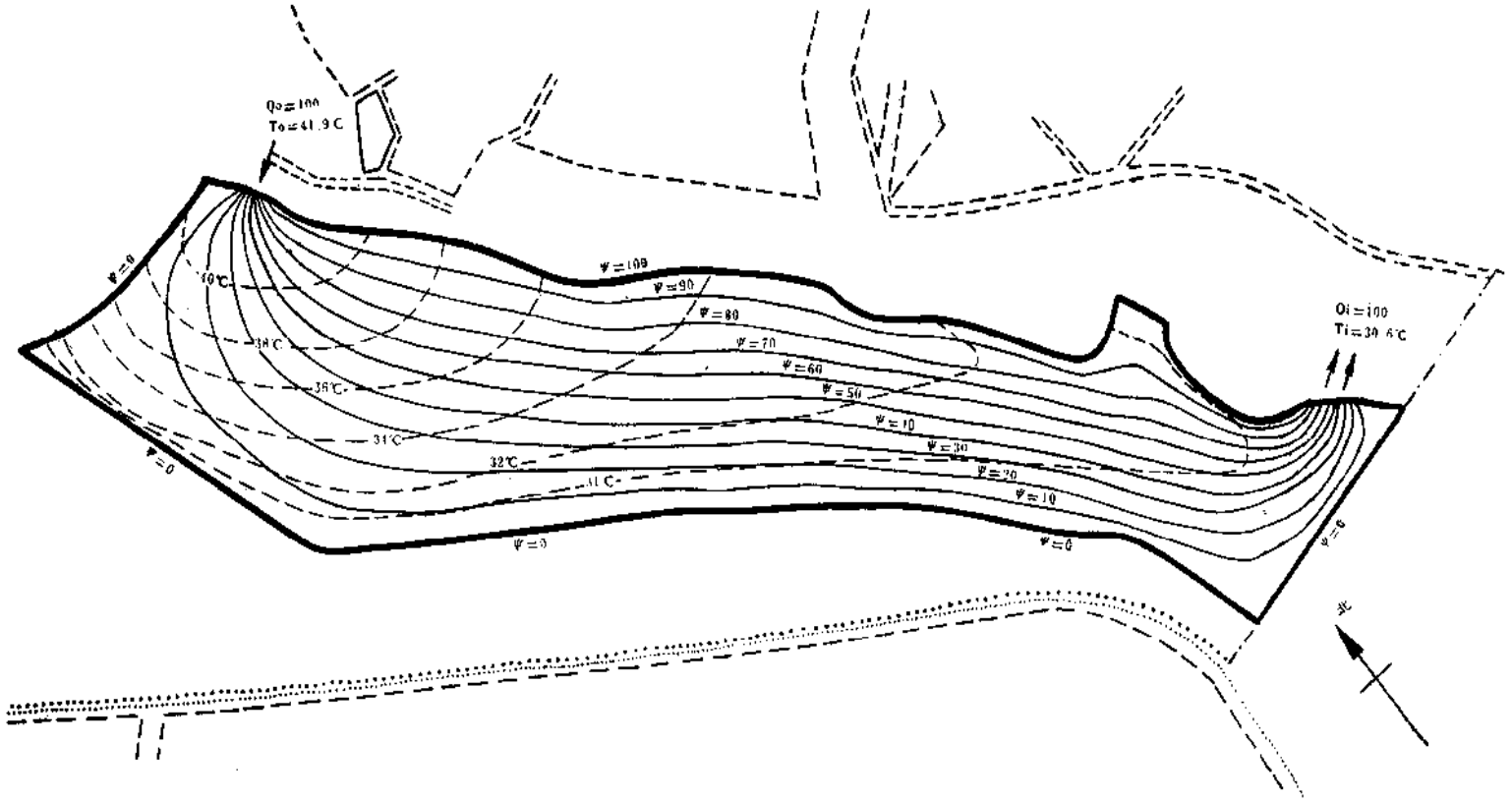


图 7　昭阳湖冷却池流态与温度分布

排水流量 Qp=100 米³/秒　综合散热系数 K_s=0.70 吨卡/米²·日·度　水面散热量 Q_t=1125 吨卡/秒　自然水温 Tn=30.1 度

参 考 文 献

〔1〕吴江航，计算流体力学中的迎风离散算子方法，水利水电科学研究院、北京大学科研协作报告（1980）。

〔2〕Watanale, M., Harleman, D. R. F., Connor, J. J., Finite element model for transint two-layer cooling pond behavior, Technical Report No. 202, R. M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics Department of Civil Engineering, M. I. T. (1975).

〔3〕陈惠泉、吴江航，我国电厂冷却水研究的回顾和展望，水利水电科学研究院、北京大学科研协作报告（1979）。

〔4〕Loziuk, L., Aderson, J. C., Balytschko, T., Transient hydrothermal analysis of small lakes, *Proc. A. S. C. E., J. of the Hyd. Div.*, **99**, P02 (1973).

关于非线性结构振动方程的求解——改进的θ法

孙 焕 纯
（大连工学院工程力学研究所）

一、前　　言

关于非线性结构振动方程的求解方法，通常采用直接的逐步积分方法，至今已有多种方法，例如较早的线性加速度法，龙格库塔法，后来的 Newmark 方法，Wilson-θ 法，Hilber 等人的 α 法和 β-θ 配置格式法等。这些方法的精度除龙格库塔法外都是时间步长的二阶精度，除线性加速度和龙格库塔法外都是无条件稳定的，都有不同程度的人工阻尼、振幅衰减、周期延长，其中以 Hilber 的 α 法的人工阻尼性质较好；除 Hilber 的 α 法外都有超越现象。

本文提出的二级近似加速度法是假定加速度在时间步长内是时间的二次函数，即

$$W_1=W_0+A\cdot\Delta\tau+B\cdot\Delta\tau^2/2 \qquad (1)$$

式中 W_1 是从本时刻 t_0 起到 $t_0+\Delta\tau$ 时刻的加速度，W_0 是本时刻的加速度（在 n 自由度问题中，W_1 和 W_0 都是 n 维向量），A，B 分别表示加速度的一次和二次变化率，都是待求的（在单自由度问题中是两个常数，在 n 自由度问题中是两个 n 维向量）。

二、二级近似加速度法

分析一个 n 自由度的动力反应问题，归结为解下列微分方程组

$$MW+CV+KU=P \qquad (2)$$

式中 M，C，K 分别表示 n 阶的质量、阻尼和刚度矩阵，P 是 n 维干扰力向量，U，V，W 分别表示 n 维位移、速度、加速度向量。在线性问题中，P，U，V，W 皆为时间的函数；M，C，K 阵中的元素皆为常数，但在非线性问题中，C，K 阵的元素常是位移向量或者同时是速度向量的函数。

我们先考虑线性系统，假定满足式（2）的加速度如式（1）所示。积分式（1）得

$$V_1-V_0+W_0\cdot\Delta\tau+A\cdot\Delta\tau^2/2+B\cdot\Delta\tau^3/6 \qquad (3)$$

式中 V_0 为本时刻 t_0 时的速度向量，V_1 为从本时刻 t_0 起至 $t_0+\Delta\tau$ 时刻的速度向量。再积分式（3）得

$$U_1=U_0+V_0\cdot\Delta\tau+W_0\cdot\Delta\tau^2/2+A\cdot\Delta\tau^3/6+B\cdot\Delta\tau^4/24 \qquad (4)$$

式中 U_0，U_1 分别表示本时刻 t^0 和 $t_0+\Delta\tau$ 时刻的位移向量。由于求解线性系统的动力反应

问题可用振型叠加法解决，所以研究其逐步积分方法的许多特性，可通过单自由度问题的研究来进行。因此下面就以单自由度问题来探讨式（2）。将式（2）改写为

$$W+2\zeta\omega V+\omega^2U=\Upsilon \tag{5}$$

式中 $\omega=\sqrt{\frac{K}{M}}$，$\zeta=\frac{C}{2\sqrt{KM}}$，$\Upsilon=P/M$

设本时刻为 t_0，时间步长为 Δt。相应于单自由度的式（1），（3）和（4）在 $t_1=t_0+\Delta t$ 和 $t_2=t_0+\theta\cdot\Delta t$ 的两个时刻上，即 $\Delta\tau=\Delta t$，$\Delta\tau=\theta\Delta t$ 时，满足（5）式，从此得到两个方程式以求得式（1）中的 A，B 两个常数。这里的 θ 是大于 1 的常数。通过下面的关于稳定性条件的论证和计算将会明确 θ 的取值范围。将 $\Delta\tau=\Delta t$，$\Delta\tau=\theta\Delta t$ 分别代入式（1），（3）和（4）后再代入式（5）得到

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta t(1+\zeta\Omega+\Omega^2/6)A+\Delta t^2(1/2+\zeta\Omega/3+\Omega^2/24)B\\
&\quad=-\{\Upsilon_{t_0}+(1+2\zeta\Omega+\Omega^2/2)W_0+\Omega(2\zeta+\Omega)V_0/\Delta t+\Omega^2U_0/\Delta t^2\}\\
&\theta\Delta t(1+\zeta\theta\Omega+\theta\Omega^2/6)A+\theta^2\Delta t^2(1/2+\zeta\theta\Omega/3+\theta^2\Omega^2/24)B\\
&\quad=-\{-(2-\theta)\Upsilon_{t_0}-(\theta-1)\Upsilon_{t_0}+2\Delta t+(1+2\zeta\theta\Omega+\theta^2\Omega^2/2)W_0\\
&\qquad+\theta\Omega(2\zeta+\theta\Omega)V_0/\theta\Delta t+\theta^2\Omega^2U_0/\theta^2\Delta t^2\}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中 $\Omega=\omega\Delta t$。

解式（6）即可求解 A，B 如下

$$\begin{aligned}
A=-\frac{1}{\Delta}\{&\Omega^2\{(\theta^2-1)/2+\zeta\Omega(\theta^3-1)/3+\Omega^2(\theta^4-1)/24\}U_0+\Delta t\{\zeta\Omega(\theta^2-1)\\
&+2\zeta^2\Omega^2(\theta^3-1)/3+\zeta\Omega^3(\theta^4-1)/12+\zeta\Omega^3\theta(\theta^2-1)/3+\Omega^2\theta(\theta-1)/2\\
&+\Omega^4\theta(\theta^3-1)/24\}V_0+\Delta t^2\{1/2\cdot(\theta-1)+\Omega^2(\theta^4-1)/24\\
&+\zeta\Omega(\theta^3+3\theta^2-3\theta-1)/3+2\zeta^2\Omega^2\theta(\theta^2-1)/3+\zeta\Omega^3\theta(\theta^3+2\theta^2-\\
&-2\theta-1)/12+\Omega^4\theta^2(\theta^2-1)/48\}W_0\}-\frac{1}{\Delta}\{-\Upsilon_{t_0}\cdot\Delta t^2\{(\theta^2+\theta-2)/2\\
&+\zeta\Omega(\theta^3+\theta-2)/3+\Omega^2(\theta^4+\theta-2)/24\}+(\theta-1)\Upsilon_{t_0+\Delta t}\cdot\Delta t^2(1/2\\
&+\zeta\Omega/3+\Omega^2/24)\}
\end{aligned} \tag{7-1}$$

$$\begin{aligned}
B=-\frac{1}{\Delta}\{&\Omega^2\{\theta-1+\zeta\Omega(\theta^2-1)+\Omega^2(\theta^3-1)/6\}U_0/\Delta t+\{2\zeta\Omega(\theta-1)+2\zeta^2\Omega^2(\theta^2-1)\\
&+\zeta\Omega^3(\theta^3-1)/3+\zeta\Omega^3\theta(\theta-1)+\Omega^4\theta(\theta^2-1)/6\}V_0+\Delta t\{\theta-1\\
&+\zeta\Omega(\theta^2-1)+2\zeta^2\Omega^2\theta(\theta-1)+\zeta\Omega^3\theta(\theta^2-1)/3+\Omega^2(\theta^3-3\theta^2+3\theta-1)/6\\
&+\Omega^4\theta^2(\theta-1)/12\}W_0-\frac{1}{\Delta}\{\Upsilon_{t_0}\{\theta\Delta t(1+\zeta\theta\Omega+\Omega^2\theta^2/6)\\
&-(2-\theta)\Delta t(1+\zeta\Omega+\Omega^2/6)\}-\Upsilon_{t_0+\Delta t}\cdot(\theta-1)\Delta t(1+\zeta\Omega+\Omega^2/6)\}
\end{aligned} \tag{7-2}$$

将式（7）代入式（1），（3），（4）中得

$$\begin{Bmatrix}U_1\\V_1\\W_1\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{1,1}, & C_{1,2}\cdot\Delta t, & C_{1,3}\cdot\Delta t^2\\ C_{2,1}/\Delta t, & C_{2,2}, & C_{2,3}\cdot\Delta t\\ C_{3,1}/\Delta t^2, & C_{3,2}/\Delta t, & C_{3,3}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}U_0\\V_0\\W_0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{Bmatrix} \tag{8}$$

式中 $C_{ij}(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$ 都是 θ，ζ，Ω，Δt 的函数，详见文献〔5〕。

式（7）中的 $\Lambda=\Delta t^3\{\theta(\theta-1)/2+\zeta\Omega\theta(\theta^2-1)/3+\Omega^2\theta(\theta^3-2\theta^2+8\zeta^2\theta^2$
$+2\theta-8\zeta^2\theta-1)+\zeta\Omega^3\theta^2(\theta^2-1)/24+\Omega^4\theta^3(\theta-1)/144\}$，

上述諸式中的 $\overline{\Delta}=\Delta/\Delta t^3$。式（8）中的 e_1，e_2，e_3 的表达式，对于我们的论证无关，所以不必写出了。

如令 $D_1=[U_1, V_1, W_1]^T$, $D_0=[U_0, V_0, W_0]^T$, $E=[e_1, e_2, e_3]^T$, 则（8）式可表示为

$$D_1=C\cdot D_0+E \tag{8-1}$$

式（8—1）中之 C 阵即为将 D_0 转换为 D_1 的转换阵，C 阵的特性决定该方法的许多重要性质：例如稳定性，人工阻尼性质，超越性质等。下面将这些性质和精度问题逐个加以探讨。

1．稳定性分析

如文献〔1〕，〔2〕，〔3〕所述，一个逐步积分方法的稳定性条件与 C 阵的稳定性条件是一致的。而 C 阵的稳定性条件就是其谱半径 $\rho\leqslant 1$。为此必须求 C 阵的绝对值为最大的特征根。即求下述方程式

$$\lambda^3+A_1\lambda^2+A_2\lambda+A_3=0 \tag{9}$$

的 $|\lambda|_{max}$。

这里的

$$A_1=-C_{1,1}-C_{2,2}-C_{3,3}$$

$$A_2=C_{2,2}\cdot C_{3,3}-C_{3,2}\cdot C_{2,3}+C_{1,1}C_{3,3}-C_{3,1}\cdot C_{1,3}+C_{1,1}\cdot C_{2,2}-C_{2,1}\cdot C_{1,2}$$

$$A_3=-C_{1,1}\cdot C_{2,2}\cdot C_{3,3}-C_{1,2}\cdot C_{2,3}\cdot C_{3,1}-C_{2,1}\cdot C_{3,2}\cdot C_{1,3}+C_{1,3}\cdot C_{2,2}\cdot C_{3,1}$$
$$+C_{1,2}\cdot C_{2,1}\cdot C_{3,3}+C_{3,2}\cdot C_{2,3}\cdot C_{1,1}=0$$

从 C 阵的各元素的表达式中可以看出，A_1，A_2 只与 θ，ζ 和 Ω 有关，由于这些公式过于复杂，不便于用解析式表示其谱半径。所以我们通过电子计算机进行数值计算。然后画出图表来考察其特性。

我们取：$\zeta=0$—0.1 共八个值，$\theta=1.001$—1.6 共十八个值，$\Delta t/T=0.01$—1000 共五十九个值，进行了大量的计算。依据 ζ、θ、$\Delta t/T$ 的不同变化，将计算结果有选择地画出几条谱半径 ρ 与 $\Delta t/T$ 的关系曲线，如图 1 所示。

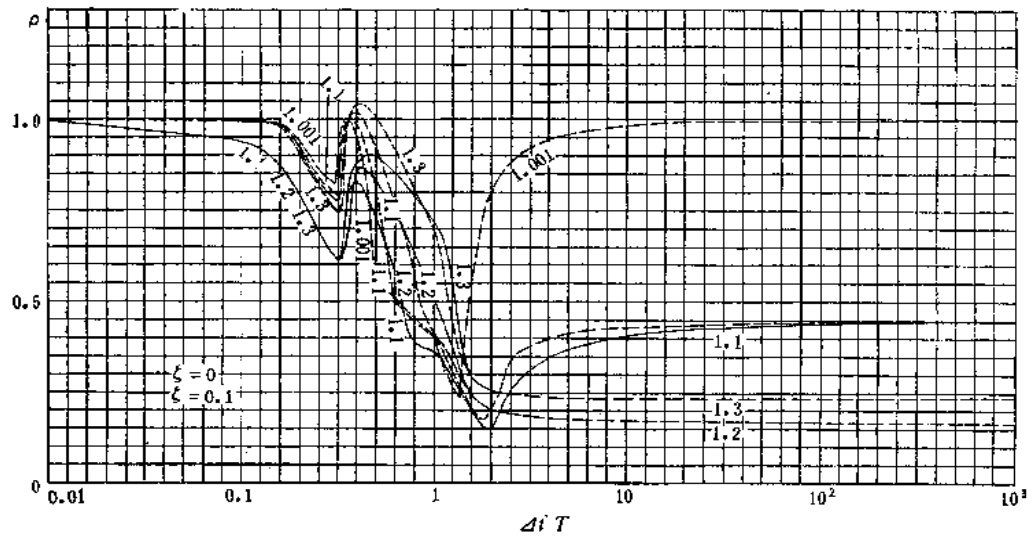


图 1 譜半径 ρ 与 $\Delta t/T$ 的关系曲线图

从计算结果得知：当 $\zeta=0$（无物理阻尼）时，不存在某一 θ 值在 $\Delta t/T$ 的（0，∞）区域内使本法是无条件稳定的。但在不同的 $\Delta t/T$ 的区间以外却可以找到使该法为稳定的不同的 θ 值，列于表 1。

表 1

$\Delta t/T$ 的区间	0.551—0.553	0.551—0.554	0.551—0.555	0.552—0.555	0.562—0.583	0.55—0.633	0.55—0.706
在上述区间外稳定的 θ 值	1.001—1.005	1.005—1.009	1.009—1.01	1.01—1.05	1.05—1.10	1.10—1.20	1.20—1.30

但是我们知道在实际结构物的强迫振动中总是存在着物理阻尼的。当存在即使很小的物理阻尼，即当 $\zeta \neq 0$ 时，总是可以找到使本法为无条件稳定的 θ 值：当 $0.02 > \zeta \geqslant 0.005$ 时，取 $\theta = 1.1$；当 $0.03 > \zeta \geqslant 0.02$ 时，取 $\theta = 1.2$；；当 $\zeta \geqslant 0.03$ 时，取 $\theta = 1.3$ 最好。θ 取值的优劣标准是使计算结果对高振型的人工阻尼大，而对低振型则相反。如果希望多保留些高振型的影响，则尽量取较小的 θ 值。

2．精度分析

因为方程（2）的解为式（1），（3），（4）的形式，只要将式（7）的 A，B，Δ 值代入式（1），（3），（4），经过分析得知，方程（2）在每一个步长 Δt 时间以内的截断误差 σ 由加速度的截断误差 $O(\Delta\tau^3)$ 所决定

$$\sigma_{max} = O(\Delta t^3) = M \cdot \Delta t^3 \tag{10}$$

式中 M 为某一有界值。

位移精度为 $O(\Delta t^5)$，速度精度 $O(\Delta t^4)$。

3．人工阻尼、振幅衰减率和周期延长率

由于 $A_3 = 0$，所以式（8）的位移解为

$$U_{t_n} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n \tag{11}$$

这和 Hilber，Wilson 等人的方法不同。在他们的方法中，相应于式（9）的 A_3 一般皆不为零。因而相应的位移解为

$$U_{t_n} = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3\lambda_3^n \tag{11-1}$$

但我们知道动力方程（2）是位移对时间的二阶微分方程，所以式（11）形式的解和原微分方程的解是符合的。而 Hilber 和 Wilson 等人的方法中有三个常数的解是有多余成分的。

通过计算表明：在 $\rho - \Delta t/T$ 曲线的递减段式（9）有复根，式（11）取下列形式

$$U_{t_n} = \exp(-\bar{\xi}\bar{\omega}t_n)(C_1\cos\bar{\omega}t_n + C_2\sin\bar{\omega}t_n) \tag{11-2}$$

式中的符号由式（11）的两个复根 $\lambda_{1,2} = \bar{A} \pm \bar{B}i$ 所决定

$$\left.\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \mathrm{tg}^{-1}(|\bar{B}/\bar{A}|)^* \\ \bar{\omega} &= \bar{\Omega}/\Delta t \\ \bar{\xi} &= -\ln(\bar{A}^2 + \bar{B}^2)/(2\bar{\Omega}) \end{aligned}\right\} \tag{11-3}$$

$\bar{\xi}$ 是人工阻尼比，$\bar{\omega}$ 是算法圆频率。这些量将用来度量或计算由于计算方法所产生的数值逸散和离差，其中主要的是人工阻尼，而振幅衰减率 AD 和周期延长率 TD 则与人工阻尼有关。它们分别由下式计算

$$\left.\begin{aligned} AD &= 1 - \exp(-2\pi\bar{\xi}) \\ TD &= \Omega/\bar{\Omega} - 1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

式中 $\Omega = \omega \cdot \Delta t$，$\omega$ 为结构的固有圆频率。AD 表示从本时刻 t_n 到 $t_n + \bar{T}$ 时刻时，振幅的衰

* 参看文献〔2〕，文中误为 $\bar{\Omega} = \mathrm{tg}^{-1}(\bar{B}/\bar{A})$。

减率〔即，当 t_n 时刻的振幅为 1 时，经过一个计算周期（$\bar{T}=2\pi/\bar{\omega}$）后振幅减少的量〕；$TD$ 表示在自由振动时计算周期比结构自振周期 T 延长的比率，即 $TD=(\bar{T}-T)/T=\Omega/\bar{\Omega}-1$。*

取前述的 ξ，θ，$\Delta t/T$ 的一系列数值的计算结果，我们有选择地在图 2，3，4 中分别画出 $\bar{\xi}$，AD，TD 各自与 $\Delta t/T$ 的关系曲线。由图 2 可见本法的人工阻尼比对低振型影响极小，而对高振型的阻尼效应却很大。这是一种理想的性质，比 Hilber 和 Wilson 等人的方法都好。由图 3 可见在 $\Delta t/T<0.1$ 时，$AD\leqslant 0.0164(\xi=0)$。由图 4 可见，周期延长率当 $\Delta t/T<0.2$ 时总是小于 0.006。这些计算数值皆说明本法的许多优越性质：有阻尼时的无条件稳定性质（无阻尼时 $\Delta t/T<0.5$ 时的条件稳定性质），数值逸散的良好性质。又由图 2，3，4 可见，当 $\xi=0.1$ 时，$\bar{\xi}$，AD，TD 的变化情况：$\bar{\xi}$，AD 值都有很大增加，只是 TD 增加不大。这说明物理阻尼对振幅的衰减影响颇大，但对周期延长影响却不大。

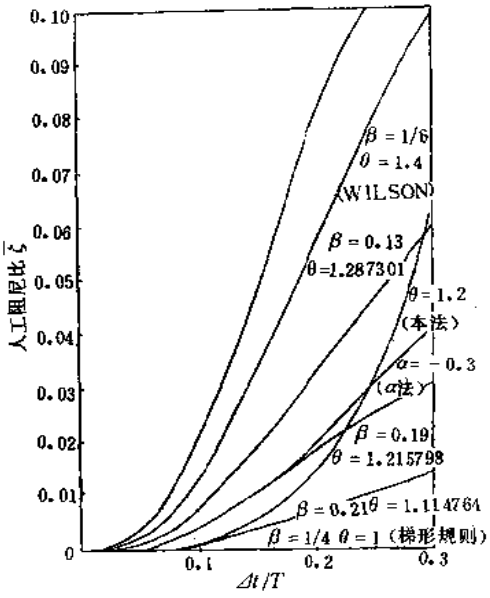


图 2

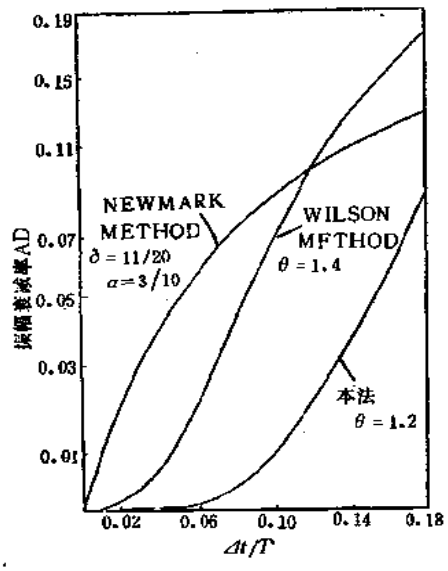


图 3

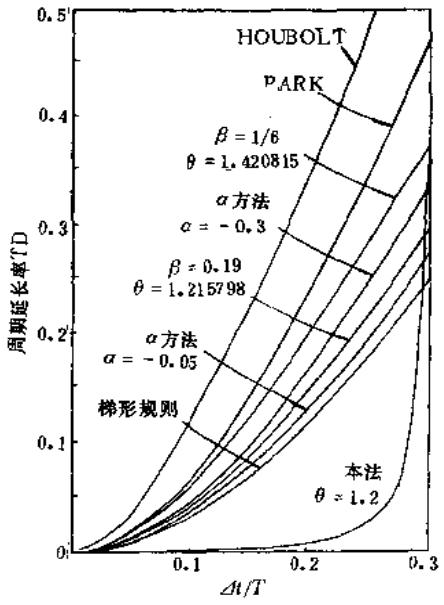


图 4

4．超越现象

当 Ω 较大时，在计算的初始阶段，有时由于不同方法的固有性质产生的缺陷，会发生位移、速度或加速度的某一项或几项远远超过其真实值的现象，这就是所谓的超越现象。这个现象说明一种算法虽然稳定，但是如果 $\Omega(\Omega=2\pi\cdot\Delta t/T$，这里的 T 在多自由度问题中

* 和文献〔2〕不同，这里采用作者提出的简单表达式。

可以是最小的一个周期）过大时得到的解常常不是其真解，即，式（10）的截断误差项中的 M 变成一个很大的值。当然随着计算步数的增长，超越现象就会消失，这是由于转换阵 C 的谱半径作用的结果，谱半径越小超越现象消失得越快，如果开始时存在着超越现象的话。

为了弄清本法是否会发生超越现象，我们首先分析式（1），（3），（4）在 $\Omega\to\infty$ 时的量级，设 Δt 是不趋于零的较小的常量。则

$$\left.\begin{aligned} U_1 &\sim O(1)U_0+O(\Delta t)V_0+O(\Delta t^2)W_0\\ V_1 &\sim O(1/\Delta t)U_0+O(1)V_0+O(\Delta t)W_0\\ W_1 &\sim O(1/\Delta t^2)U_0+O(1/\Delta t)V_0+O(1)W_0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

由式（13）可见，只要 W_0 没有超越现象，U_1，V_1，W_1 皆不会发生超越现象。因为 U_1，V_1，W_1 在 $\Omega\to\infty$ 的量级表达式（13）中没有 $O(\Omega^m)(m>0)$ 的量级。而本法的 W_0 是由方程（2）在初始时刻时求出的，更与 Δt 无关，所以 W_0 是不会产生超越现象的，从而位移、速度、加速度都没有超越现象。例题中的数值计算也说明了这点。

三、在非线性问题中的应用

在多自由度非线性动力反应问题中，如果恢复力特征曲线都是分段线性的，那么在整个反应过程中，我们可以认为也是分段线性问题。由于非线性恢复力特征曲线的斜率总不会大于初始斜率，即各阶段的刚度不会超过初始刚度，从而各阶段的相应频率不会增加，即 $\Delta t/T$ 不会增大，那么在上述的线性动力反应中讨论的结果都可用于分段线性动力反应问题中。只是各阶段的初始条件有所不同而已。

但这里存在的问题是当处于恢复力特征曲线转折的时刻，常常会发生较小的时间步长过渡到下一阶段，这时需分析式（1），（3），（4）在 $\Delta t\to 0$，$\Omega\to 0$ 时和 $\Delta t\to 0$，$\Omega\to\infty$ 时的两类性态。首先分析当 $\Delta t\to 0$，$\Omega\to 0$ 时，U_1，V_1，W_1 的量级为：

$$\left.\begin{aligned} U_1 &\sim O(\Omega^2)U_0+O(\xi\Omega\cdot\Delta t)V_0+O(\Delta t^2)W_0, && (\xi\neq 0)\\ U_1 &\sim O(\Omega^2)U_0+O(\Omega^2\cdot\Delta t)V_0+O(\Delta t^2)W_0, && (\xi=0)\\ V_1 &\sim O(\Omega)\omega U_0+O(\xi\Omega)V_0+O(\Delta t)W_0, && (\xi\neq 0)\\ V_1 &\sim O(\Omega)\omega U_0+O(\Omega^2)V_0+O(\Delta t)W_0, && (\xi=0)\\ W_1 &\sim O(1)\omega^2U_0+O(1)\xi\omega V_0+O(1)W_0, && (\xi\neq 0)\\ W_1 &\sim O(1)\omega^2U_0+O(\Omega)\omega V_0+O(1)W_0, && (\xi=0) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

由上式可见，这时 U_1，V_1，W_1 是不会在转折时产生很大跳跃的。

再来分析当 $\Delta t\to 0$，$\Omega\to\infty$ 时的性态，这只要分析式（13）即可。由式（13）可见，这时 V_1，W_1 可能产生极大的跳跃。为了防止这种不利现象的发生，可用一规定的较小的时间间隔，在此间隔以外提前或推后进行过渡，这可由计算机自动控制。至于具有连续的斜率变化的恢复力特征曲线的一般非线性问题，皆可化为适当的分段线性问题来处理。

四、算例比较

我们通过已有精确解的例题，进行了一些计算，并同 Wilson 和 Hilber 等人的 β-θ 配置格式法和 α 法进行了比较，说明了本法不仅在精度上，而且在人工阻尼性质和超越现象

表 2

方法 / 内容 / 时间	二级近似加速度法 $\theta=1.3$ $\Delta t=7.5$sec			WILSON-θ 法 $\beta=0.16$, $\theta=1.42$, $\Delta s=7.5$sec			HILBER α 法 $\alpha=-0.3$, $\beta=0.4225$, $\gamma=0.8$, $\Delta t=7.5$sec		
	u_m	$V_{m/sec}$	W_{m/sec^2}	u_m	$V_{m/sec}$	W_{m/sec^2}	u_m	$V_{m/sec}$	W_{m/sec^2}
7.5	0.00273281	0.146216	−0.048144	3781.07378	−487.5705	−396.6855	−0.010343	−0.071705	0.297166
	0.00254584	0.0019074	0.0031161	3152.62896	−405.6150	−330.3852	−0.010270	−0.0051175	−0.000853
37.5	0.00009446	−0.00027927	0.00002761	783.19586	153.92974	−188.9932	0.0027573	−0.031709	−0.019938
	0.00001181	0.00014830	−0.0001224	637.99932	128.40057	−154.6836	0.0031607	−0.0031986	−0.0024247
75	0.00000000	−0.00000035	0.00000011	−58.8350	−15.4066	15.6927	−0.0017849	−0.0015982	0.0001894
	0.00000001	0.00000014	0.00000016	−44.2520	−12.1789	11.9971	−0.0015657	−0.0041655	−0.0017993
112.5	0.00000000	−0.00000000	−0.00000000	3.63579	1.02710	−0.99897	−0.00014965	0.0008661	0.000559
	0.00000000	0.00000000	0.00000000	2.39584	0.73087	−0.67719	−0.0002772	0.0007382	0.000562
150				−0.20955	−0.06094	0.05826	0.0001088	0.0001960	0.0000619
				0.11474	−0.03708	0.03322	0.0001010	0.0002595	0.0001022
187.5				0.01174	0.00346	−0.003280	0.0000123	−0.0000547	−0.0000376
				0.00506	0.00170	−0.001489	0.0000196	−0.0000433	−0.0000345
225				−0.00065	−0.0000192	0.000182	−0.00000695	−0.00001417	−0.0000049
				−0.00021	−0.000072	0.0000618	−0.00000628	−0.00001795	−0.0000074
300				−0.0000198	−0.0000006	0.0000006	0.00000044	0.00000100	0.0000003
				−0.0000025	−0.0000001	0.00000008	0.00000039	0.00000124	0.0000005

初始条件 $u_{O_1}=0.01m$, $u_{O_2}=0.01m$, $V_{O_1}=0$ m/sec, $V_{O_2}=0$ m/sec.

上都比其他三法好。

例题，对图 5 所示的二自由度的地震反应问题进行了分析。原始数据：

$m_1=60t\cdot\sec^2/m$，$m_2=50t\cdot\sec^2/m$，$K_1=1000t/m$，$K_2=833.3t/m$，$\zeta=0$，

地面水平运动加速度　　$W_g=\sin 2\pi t$，

由精确解算得：$T_1=2.3943$ 秒，$T_2=0.9893$ 秒。取时间步长 $\Delta t=0.02$，0.04，0.06 秒，计算结果表明，本法比 Wilson 法和 Hilber 的 α 法和 β-θ 配置格式法都精确。步长提高到 0.06 秒时和 Wilson 法在步长 $=0.02$ 秒时具有同样的精度，比 Hilber 的两种方法更好。计算结果告诉我们：Wilson-θ 法在步长 $\Delta t=0.06$ 秒时，只有一位有效数字了，有时连一位有效数字也没有了。Hilber 的两种方法也一样。计算结果详见文献〔5〕。

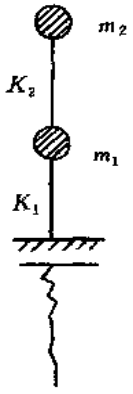


图 5

本法在多自由度弹塑性地震反应分析中的应用，请参阅“弯剪型串联多自由度弹塑性地震反应分析”一文（孙焕纯，大连工学院工程力学研究所科研资料，1979）。

最后应当指出：谱半径 $\rho\leqslant 1$ 是逐步积分方法稳定的充要条件；但当 $\zeta\neq 0$ 在表 1 下面文中给出的无条件稳定的 θ 值是在 Ω 的全域 $(0,\infty)$ 内稳定的充分条件；当 $\zeta=0$ 时表 1 中给出的 θ 值是在 Ω 的相应区域内稳定的充分条件，但不是在 Ω 的某一子域内稳定的必要条件。因此在本法中当 θ 超过表 1 及其下面文中给出 θ 数值，也不一定就不稳定。这取决于 Ω 和 ζ 的值，由图 1 便一目了然。

对例题又进行了三种方法的超越验算。计算结果列于表 2 中。步长 $\Delta t=7.5$ 秒，$\Omega_1=2\pi\cdot\frac{\Delta t}{T}=18$，$\Omega_2=2\pi\cdot\Delta t/T=47.7$。由表 2 明显地看出 Wilson-θ 法对位移、速度、加速度皆有超越现象，且以位移最大，其次是速度和加速度；Hilber 的 α 法正如他所指出的有较好的数值逸散和超越性质；二级近似加速度法具有更好的数值逸散和超越性质，如果希望减少些数值逸散量，那么可取较小一些的 θ 值。超越性质在多自由度问题中，当 Δt 足够小时，实质上是最高振型（$\Delta t/T_{min}$ 相当大）在初始阶段的影响；在单自由度问题中就是 $\Delta t/T$ 过大时在初始阶段所产生的影响。显然，这种影响对不同的方法是有相当大的差异的。

参　考　文　献

〔1〕Bathe, K. J. and Wilson, E. L., *Earthq. Eng. and Struct. Dynam.*, 1 (1973), 283—291.

〔2〕Hilber, H. M., Hughes, T. J. R. and Taylor, R. L., *Earthq. Eng. and Struct. Dynam.*, 5 (1977), 3.

〔3〕Hilber, H. M., Hughes, T. J. R., *Earthq. Eng. and Struct. Dynam.*, 6 (1978), 1.

〔4〕Newmark, N. M., Proc. ASCE, 85, EM3 (1959), 69—94.

〔5〕孙焕纯，关于非线性结构振动方程的求解——二级近似加速度逐步积分法，大连工学院学报. 3 (1980).

用半解析半离散法分析板壳*

何广乾　　张维岳

（中国建筑科学研究院）

一、方法的概述

工程中薄板、薄壳结构应用极广。以往对简单体型及简单边界条件的板壳结构，尚较容易用解析法进行计算。结构复杂时，则往往不易得出解析解。于是各种离散型数值分析法得到了实际应用。目前应用最广的是有限元法。这个方法的优点是：可以用来计算各种简单的、复杂的以及非线性的微分方程所描述的物理现象又不涉及微分方程的解析解，且所得矩阵是带状稀疏对称矩阵。然而它也有一定的缺点：矩阵的形成比较复杂，对于某些复杂结构，例如壳体结构，矩阵的阶数较高，计算时间较长，精确度不易掌握。我们在解决结构的力学问题时，需要防止只重视数值计算而忽视理论分析的倾向。根据能反映结构的力学特征的微分方程而得出的半解析半离散的分析方法，是一种颇有发展前途的方法。本文叙述的方法，首先对扁壳的有矩理论微分方程导出解析解，以在壳体域内满足微分方程（其中当曲率为零时即得薄板弯曲问题的解）；然后在边界处选择适当数量的离散点用配点法满足各种给定边界条件，其边界可以是规则的，也可以是不甚规则的。这种半解析半离散的分析方法，矩阵形成比较容易，矩阵阶数较低，计算时间较短，计算结果能满足板壳设计计算精度要求，有时还能帮助我们更好地理解其解析解的性质和掌握内力与位移的分布规律，对某些特定问题是一种能与有限元法相竞争的有效方法。

本文按弹性有矩理论分析各种常曲率扁壳，并按下述位移法基本微分方程[1]导出解析解：

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-k_1\frac{\partial w}{\partial x}-t\frac{\partial w}{\partial y}+X=0\\
&\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-k_2\frac{\partial w}{\partial y}-t\frac{\partial w}{\partial x}+Y=0\\
&k_1\frac{\partial u}{\partial x}+k_2\frac{\partial v}{\partial y}+t\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-(k_1^2+k_2^2+2t^2)w-\frac{\delta^2}{12}\Delta^2 w+\frac{Z}{E\delta}=0
\end{aligned}\right\}\quad(1\text{-}1)$$

其中 u，v，w 为沿座标轴 x，y，z 方向的位移（见图 1）；X，Y，Z 为三个方向的面荷载；k_1，k_2，t 为曲率，在上式中均为常数，$k_1=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$k_2=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$t=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；$\delta$ 为薄壳厚度，E 为弹性模量，对于钢筋混凝土壳体忽略泊松比，则弯曲刚度为 $D=\frac{E\delta^2}{12}$，$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，$\Delta^2=\Delta\Delta$。当 $k_1\neq k_2$，$t=0$ 时，为不等曲率双曲扁壳；当 $k_2=\mathrm{const}$

* 参加本文计算工作的还有宦荣芬、周润珍等。

$k_1=t=0$ 时为筒壳，当 $k_1=k_2=k=\text{const}$，$t=0$ 时为球面扁壳（或称等曲率双曲扁壳）；当 $t=\text{const}$，$k_1=k_2=0$ 时为扭壳；当 $k_1=k_2=t=0$ 时为薄板。

下面将分别对上述板壳求解。其特解一般比较容易得出，本文将只讨论在竖向荷载 Z 作用下的情况。齐次解中含有一系列待定系数（即列向量 $\boldsymbol{U}$），可通过在边界各离散点处满足边界条件确定之[2]。当在配点处所列边界条件的总数 n 与待定系数的总数 l 相同时，则可得下列矩阵方程：

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V} \tag{1-2}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为所获得的 $l\times l$ 阶矩阵；$\boldsymbol{V}$ 为 l 阶列向量。由方程（1-2）即可求得 $\boldsymbol{U}$，进而求得一系列的内力和位移。有时为了在不增加待定系数数量 l 的情况下提高本方法的精确度，可适当加密配点，并采用最小二乘法[3]求解，此时 $\boldsymbol{K}$ 变为 $n\times l$ 阶矩阵，$n>l$，$\boldsymbol{U}$ 仍为 l 阶列向量，但 $\boldsymbol{V}$ 变为 n 阶列向量。按照最小二乘法，方程（1-2）应变为：

$$\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{V} \tag{1-3}$$

式中 $\boldsymbol{K}^T$ 为 $\boldsymbol{K}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{K}$ 为 $l\times l$ 阶矩阵，$\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{V}$ 为 l 阶列向量。从而可解得 $\boldsymbol{U}$ 并求得一系列内力和位移。

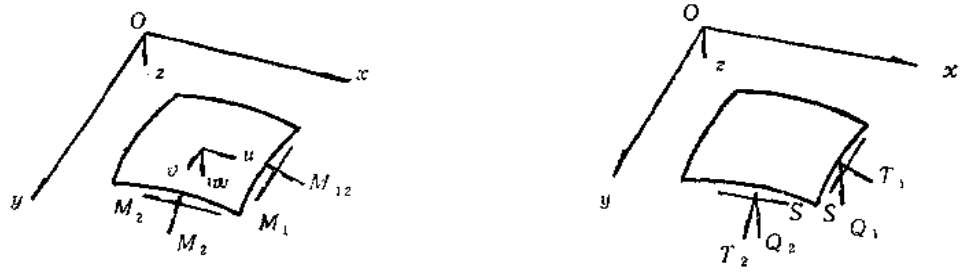


图1 壳体位移及内力正向

二、不等曲率双曲扁壳的分析

在方程（1-1）中令 $t=0$，并引入壳体函数 $\varphi(x,\ y)$，使

$$\left.\begin{aligned} u&=k_1\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+(2k_1-k_2)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2}\\ v&=k_2\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}+(2k_2-k_1)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y}\\ w&=\Lambda^2\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2-1}$$

将其代回方程（1-1），得：

$$\Delta^4\varphi+K^2\Delta_k^2\varphi=-\frac{Z}{D} \tag{2-2}$$

其中 $\Delta_k=k_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}$，$K^2=\frac{12}{\delta^2}$。先求出在均布荷载 $Z=q$ 作用下的特解 φ_0

$$\varphi_0=-\frac{q}{48DK^2}\left(\frac{x^4}{k_2^2}+\frac{y^4}{k_1^2}\right) \tag{2-3}$$

然后求方程（2-2）的齐次解，由方程（2-2）得

$$(\Delta^2+iK\Delta_k)(\Delta^2-iK\Delta_k)\varphi=0 \tag{2-4a}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$，对此可分别求解下列方程：

$$(\Delta^2+iK\Delta_k)\varphi=0 \quad (\Delta^2-iK\Delta_k)\varphi=0 \tag{2-4b}$$

引用

$$\xi=x+iy \qquad \eta=x-iy \tag{2-5}$$

代入方程（2-4b）得：

$$16\frac{\partial^4\varphi}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\pm iK\left[(k_2-k_1)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)+2(k_1+k_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\right]=0 \tag{2-6a,b}$$

设 φ 的解的形式为

$$\exp[\pm(1-i)(p_m\xi+\alpha_m\eta)] \tag{2-7a,b}$$

其中 $p_m=\frac{m\pi}{l}$，m 为正整数，l 为某一长度参数，例如壳体的一个边长。α_m 为待求的根，可通过将（2-7）代入（2-6a）后求得

$$-64p_m^2\alpha_m^2+iK[-2i(k_2-k_1)(p_m^2+\alpha_m^2)-4i(k_1+k_2)p_m\alpha_m]=0$$

$$\alpha_{m1,2}=\frac{p_mK(k_1+k_2)\pm2p_m\sqrt{K^2k_1k_2+8K(k_2-k_1)p_m^2}}{32p_m^2-K(k_2-k_1)} \tag{2-8a,b}$$

将（2-7）代入（2-6b）后求得

$$\alpha_{m3,4}=\frac{-p_mK(k_1+k_2)\pm2p_m\sqrt{K^2k_1k_2-8K(k_2-k_1)p_m^2}}{32p_m^2+K(k_2-k_1)} \tag{2-9a,b}$$

再设

$$\xi=y+ix \qquad \eta=y-ix \tag{2-10}$$

则方程（2-4b）变为

$$16\frac{\partial^4\varphi}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\pm iK\left[(k_1-k_2)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)+2(k_2+k_1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\eta}\right]=0 \tag{2-11a,b}$$

设 φ 的解的形式为

$$\exp[\pm(1-i)(p_m\xi+\beta_m\eta)]$$

将其分别代入方程（2-11a，b）解得：

$$\beta_{m1,2}=\frac{p_mK(k_1+k_2)\pm2p_m\sqrt{K^2k_1k_2+8K(k_1-k_2)p_m^2}}{32p_m^2-K(k_1-k_2)}$$

$$\beta_{m3,4}=\frac{-p_mK(k_1+k_2)\pm2p_m\sqrt{K^2k_1k_2-8K(k_1-k_2)p_m^2}}{32p_m^2+K(k_1-k_2)}$$

于是 φ 的齐次解为

$$\varphi=\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{4}\varphi_{mj} \tag{2-12}$$

其中

$$\begin{aligned}\varphi_{mj}=&A_{mj}\exp\{(1-i)[(p_m+\alpha_{mj})x+i(p_m-\alpha_{mj})y]\}\\&+B_{mj}\exp\{-(1-i)[(p_m+\alpha_{mj})x+i(p_m-\alpha_{mj})y]\}\\&+C_{mj}\exp\{(1-i)[(p_m+\beta_{mj})x+i(p_m-\beta_{mj})x]\}\\&+D_{mj}\exp\{-(1-i)[(p_m+\beta_{mj})x+i(p_m-\beta_{mj})x]\}\end{aligned} \tag{2-13}$$

其中 $A_{mj}\cdots D_{mj}$ 为复数型式的待定系数。实际上，当 m 取到 M 时，共有 $32M$ 个实数形式的

待定系数。

有了解（2-3）和（2-12），即可根据所选边界点的座标按所给定的边界条件建立矩阵方程（1-2）或（1-3）。此时，除位移（2-1）外，还需要下列内力表达式

$$\left.\begin{aligned} T_1&=-E\delta\Delta_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} & T_2&=-E\delta\Delta_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\\ S&=E\delta\Delta_k\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} & M_{12}&=-D\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Delta^2\varphi\\ M_1&=-D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta^2\varphi & M_2&=-D\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta^2\varphi\\ Q_1&=-D\frac{\partial}{\partial x}\Delta^2\varphi & Q_2&=-D\frac{\partial}{\partial y}\Delta^2\varphi \end{aligned}\right\} \tag{2-14}$$

式（2-13）对 x 和 y 的各次微商极易求得，这是这种函数的优点之一。用电子计算机计算时，FORTRAN Ⅳ语言程序已配有复数运算的程序，可以直接按式（2-13）很方便地编写程序。对于未配复数运算语言程序的计算机，则可将其化为三角函数和指数函数。

三、筒壳、球面扁壳及平板的分析

在上一节所获得的齐次解（2-13）中令 $k_1=0$，$k_2=\text{const}$，即得扁筒壳的解。此时特解（2-3）可改为：

$$\varphi_0=\frac{qx^4}{48DK^2k_2^2} \tag{3-1}$$

若令 $k_1=k_2=k=\text{const}$，即得球面扁壳的解。相应的特解可改为：

$$\varphi_0=\frac{q(x^4+y^4)}{48DK^2k^2} \tag{3-2}$$

此时齐次解（2-13）中 α_{mj} 和 β_{mj} 各为

$$\alpha_{m1}=\beta_{m1}=\frac{Kk}{8p_m} \qquad \alpha_{m4}=\beta_{m4}=-\frac{Kk}{8p_m}$$

$$\alpha_{m2}=\alpha_{m3}=0\ (\text{重根}) \qquad \beta_{m2}=\beta_{m3}=0\ (\text{重根})$$

因此在齐次解（2-13）中的表达式，当 $j=1$，2，4 时继续有效，只是当 $j=3$ 时需考虑重根，得

$$\begin{aligned} &A_{m3}(x+y)\cdot\exp[(1-i)p_m(x+iy)]\\ &\quad+B_{m3}(x+y)\cdot\exp[-(1-i)p_m(x+iy)]\\ &\quad+C_{m3}(x+y)\cdot\exp[(1-i)p_m(y+ix)]\\ &\quad+D_{m3}(x+y)\cdot\exp[-(1-i)p_m(y+ix)] \end{aligned} \tag{3-3}$$

对于平板弯曲问题，可用类似的方法求解板的基本微分方程：

$$\Delta^2w=\frac{q}{D} \tag{3-4}$$

由于有重根，其齐次解可按下列板函数的形式写出：

$$w=\mathrm{Re}\sum_m\{A_m\exp[p_m(x+iy)]+B_m\exp[-p_m(x+iy)]$$

$$+C_m x\cdot\exp[p_m(x+iy)]+D_m x\cdot\exp[-p_m(x+iy)]$$
$$+E_m\exp[p_m(y+ix)]+F_m\exp[-p_m(y+ix)]$$
$$+G_m y\cdot\exp[p_m(y+ix)]+H_m y\cdot\exp[-p_m(y+ix)]\} \tag{3-5}$$

其中 $A_m\cdots H_m$ 为复数形式的待定系数。至于在均布载荷 q 作用下的特解 w_0，可取

$$w_0=\frac{q}{D}\cdot\frac{x^2y^2}{8} \tag{3-6}$$

或其它形式。板内各项力矩及横向剪力可由 w 的各相应微商求得。式（3-5）的函数，实际上还可用于平面问题，本文暂不详述。

四、扭 壳 分 析

在方程（1-1）中令 $k_1=k_2=0$，$t=\text{const}$，既为扭壳（图 2）方程，引用扭壳函数 $\varphi(x,y)$，使

$$u=2t\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3},\quad v=2t\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3},\quad w=\Delta^2\varphi \tag{4-1}$$

代入方程（1-1）得：

$$\Delta^4\varphi+\frac{48t^2}{\delta^2}\cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{Z}{D} \tag{4-2}$$

其在均布载荷 q 作用下的特解可采用

$$\varphi_0=\frac{q\delta^2}{Dt^2}\cdot\frac{x^2y^2}{192} \tag{4-3}$$

方程（4-2）的齐次解可由下列方程求得：

$$\left(\Delta^2\pm 2iKt\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)\varphi=0 \tag{4-4a,b}$$

引用关系式（2-5）得

$$16\frac{\partial^4\varphi}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\mp 2Kt\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\right)=0 \tag{4-5}$$

设 φ 的齐次解的形式为

$$\exp[\pm(p_m\xi+\alpha_m\eta)] \tag{4-6}$$

p_m 的意义与式（2-7）中相同。α_m 可通过将（4-6）代入（4-5）求得

$$16p_m^2\alpha_m^2\mp 2Kt(p_m^2-\alpha_m^2)=0$$

$$\alpha_{m1,2}=\pm\sqrt{\frac{Ktp_m^2}{8p_m^2+Kt}} \tag{4-7a,b}$$

$$\alpha_{m3,4}=\pm\sqrt{\frac{-Ktp_m^2}{8p_m^2-Kt}} \tag{4-8a,b}$$

再利用关系式（2-10）后，得 φ 的齐次解为：

$$\varphi=\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{4}\varphi_{mj} \tag{4-9}$$

其中

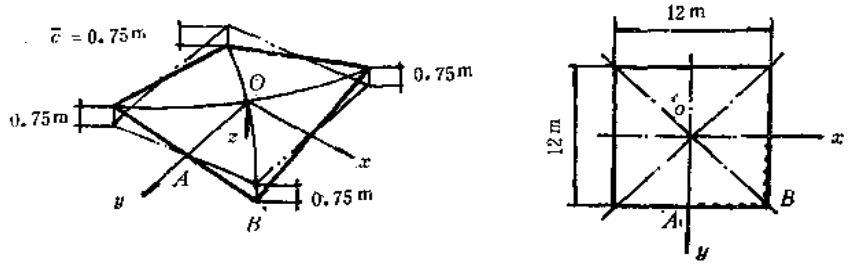
$$\varphi_{mj}=A_{mj}\exp[(p_m+\alpha_{mj})x+i(p_m-\alpha_{mj})y]$$

$$+B_{mj}\exp\{-[(p_m+\alpha_{mj})x+i(p_m-\alpha_{mj})y]\}$$
$$+C_{mj}\exp[(p_m+\alpha_{mj})y+i(p_m-\alpha_{mj})x]+$$
$$\cdot D_{mj}\exp\{-[(p_m+\alpha_{mj})y+i(p_m-\alpha_{mj})x]\}$$

式中 $A_{mj}\cdots D_{mj}$ 为复数形式的待定系数，α_{mj} 由式（4-7）（4-8）确定。各项内力表达式为

$$T_1=2E\delta t\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y^3},\quad T_2=2E\delta t\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^3\partial y},\quad S=-2E\delta t\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\qquad(4\ 10)$$

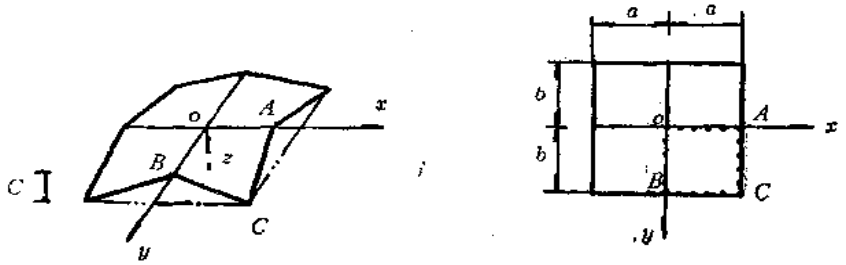
M_1，M_2，M_{12}，Q_1，Q_2的表达式与式（2-14）中的相同。



（a）透视图　　（b）平面图

图 2　扭壳（例 4）

对于四块组合型扭壳（图 3），仍可按单块扭壳进行分析。分析时除在壳体边界（如图 3 中 BC 边和 AC 边）处布配点以满足边界条件外，还需要在壳体脊线（如 OA 和 OB）处配点，以满足脊线两侧各单块扭壳的接触条件，包括内力和位移的衔接条件；如果结构及载荷均对脊线对称，则可只列出一个单块扭壳在脊线各配点处的对称条件，从而解得壳体内力和位移。



（a）透视图　　（b）平面图

图 3　四块组合型扭壳

四块组合型扭壳，也可当作一个整体进行分析，在壳体脊线处利用阶梯函数 $H(x-0)$ 和 $H(y-0)$ 描述壳体曲面方程 z，用脉冲函数 $\delta(x-0)$ 和 $\delta(y-0)$ 描述壳体各项曲率 k_1，k_2 和 t_1

$$\left.\begin{aligned}
z&=\frac{c_{xy}}{ab}[1-2H(x-0)-2H(y-0)+4H(x-0)\cdot H(y-0)]\\
k_1&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{c_y}{ab}\cdot 2\delta(x-0)[2H(y-0)-1]\\
k_2&=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{c_x}{ab}\cdot 2\delta(y-0)[2H(x-0)-1]
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}11)$$

$$t=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{c}{ab}[1-2H(x-0)-2H(y-0)+4H(x-0)\cdot H(y-0)]$$

而以位移法表示的变曲率壳体的基本微分方程为[1]：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-w\frac{\partial k_1}{\partial x}-k_1\frac{\partial w}{\partial x}-t\frac{\partial w}{\partial y}-w\frac{\partial t}{\partial y}=0 \qquad (4\text{-}12a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-w\frac{\partial k_2}{\partial y}-k_2\frac{\partial w}{\partial y}-t\frac{\partial w}{\partial x}-w\frac{\partial t}{\partial x}=0 \qquad (4\text{-}12b)$$

$$k_1\frac{\partial u}{\partial x}+t\frac{\partial u}{\partial y}+k_2\frac{\partial v}{\partial y}+t\frac{\partial v}{\partial x}-(k_1^2+k_1^1+2t^2)w-\frac{\delta^2}{12}\Delta^2 w+\frac{Z}{E\delta}=0 \qquad (4\text{-}12c)$$

在结构与载荷对 x，y 轴均为对称的情况下仍采用关系式（4-1），并将其代入（4-12c），得 $L_w(\varphi)=0$，沿整个壳面取积分

$$\iint_A L_w(\varphi)\,dx\,dy=0$$

利用阶梯函数和脉冲函数的性质，由上式积分后可得

$$\Delta^4\varphi+\frac{48t^2}{\delta^2}\cdot\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{Z}{D} \qquad (4\text{-}13a)$$

$$\left(2\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}-y\Delta^2\varphi\right)\Big|_{x=0}=0 \qquad (4\text{-}13b)$$

$$\left(2\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}-x\Delta^2\varphi\right)\Big|_{y=0}=0 \qquad (4\text{-}13c)$$

同样，将式（4-1）代入（4-12a，b），得 $L_u(\varphi)=0$ 和 $L_v(\varphi)=0$，分别沿整个壳面取积分

$$\iint_A L_u(\varphi)\,dx\,dy=0 \qquad \iint_A L_v(\varphi)\,dx\,dy=0$$

在壳体域内平衡方程均能得到满足，只是在脊线处增加了下列条件

$$\left.\begin{array}{lll} x=0 \text{ 时} & 2\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x\partial y^3}+\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^3\partial y}=0 & \dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=0 \\ y=0 \text{ 时} & 2\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^3\partial y}+\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x\partial y^3}=0 & \dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=0 \\ x=0,\ y=0 \text{ 点} & \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=0 & \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial y^3}=0 \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}14)$$

此外还有（4-13b，c）两式，在此不再重复写出。解题时，先按式(4-13a)(实际上与（4-2）式相同）求出解，在边界 $x=\pm a$，$y=\pm b$ 处配点满足给定的边界条件，同时在 $x=0$ 和 $y=0$ 脊线处尚需适当配点满足（4-13b，c）和（4-14）的条件。

五、算　　例

例 1　用式（3-5）、（3-6）及边界配点法分析边长为 a 的正方形四边简支板在均布荷载 q 作用下的位移及弯矩，泊松比 μ 取 1/6。

边界条件：

$$x=\pm a \text{ 时} \quad w=0 \quad \frac{M_1}{D}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

$$y=\pm a \text{ 时} \quad w=0 \quad \frac{M_2}{D}=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

引用下列关系（例 2、3 亦同）：

$$w=\frac{qa^4}{D}\overline{w} \quad M_1=qa^2\overline{M}_1 \quad M_2=qa^2\overline{M}_2$$

计算结果如图 4 所示。在小型电子计算机上运算时间仅

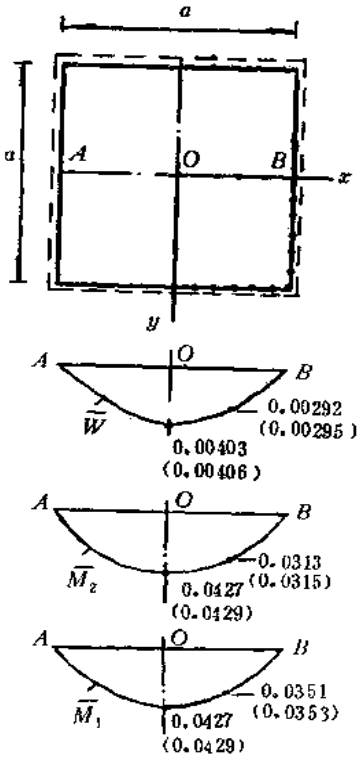


图 4 四边简支板计算结果

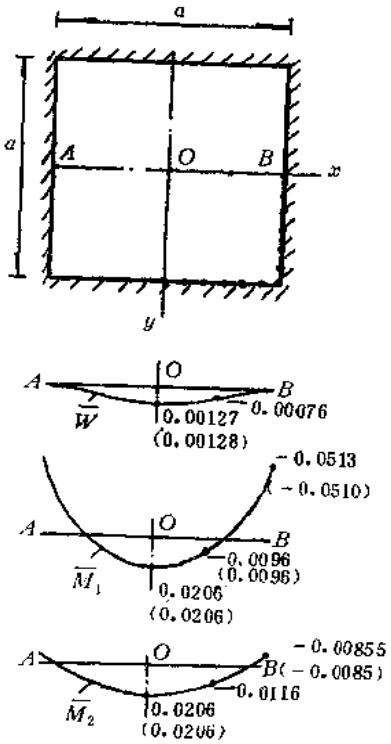


图 5 四边固定板计算结果

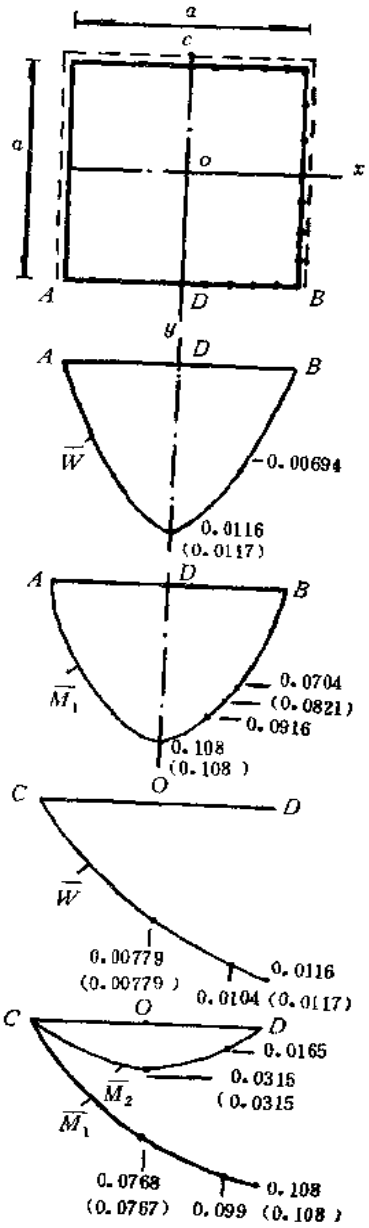


图 6 三边简支、一边自由板计算结果

1 分钟。图中括号内的数值为按差分法算得的结果。经比较可见，相对误差很小。

例 2 分析正方形四边固定板，其它条件同例 1。

边界条件

$$x=\pm\frac{a}{2}\text{时}, \quad w=\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$y=\pm\frac{a}{2}\text{时}, \quad w=\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

计算结果如图 5 所示。在小型计算机上运算时间 1 分钟。本文方法计算结果与括号内按差分法算得的结果相比，相对误差极小。

例 3 分析图 6 所示三边简支，一边自由板，其它条件同例 1。

边界条件：

$$x=\pm\frac{a}{2}\text{时}\quad w=\frac{M_1}{D}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

$$y=\frac{a}{2}\text{时}\quad \frac{M_2}{D}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{Q_2}{D}=\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}=0$$

$$y=-\frac{a}{2}\text{时}\quad w=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

计算结果示于图 6，与括号中按差分法算得的结果相比，相对误差极小。

例 4 一钢筋混凝土扭壳如图 2 所示。壳体在 xy 平面上的投影为正方形，边长 $a=12\text{m}$，壳体厚度 $\delta=0.06\text{m}$，$\bar{c}=0.75\text{m}$，壳面方程 z 及扭曲率 t 为

$$z=\frac{4\bar{c}}{a^2}xy\qquad t=\frac{4\bar{c}}{a^2}=\frac{1}{48}m^{-1}$$

$E=2.7\times10^6 t/m^2$。壳体所受均布竖向荷载 $q=0.3t/m^2$。壳体边界条件为四边简支

$$x=\pm\frac{a}{2}\text{时}\qquad v=w=T_1=M_1=0$$

$$y=\pm\frac{a}{2}\text{时}\qquad u=w=T_2=M_2=0$$

主要计算结果示于图 7。本例在小型电子计算机上运算时间仅 4 分钟。实践说明，当边界点数再增多时，对计算结果的影响已很小，表明其解已收敛到满意的程度，图中曲线Ⅰ型表示对 x 轴和 y 轴均对称；Ⅱ型——对 y 轴对称，对 x 轴反对称；Ⅲ型——对 x 轴对称，对 y 轴反对称；Ⅳ型——对 x 轴和 y 轴均反对称。

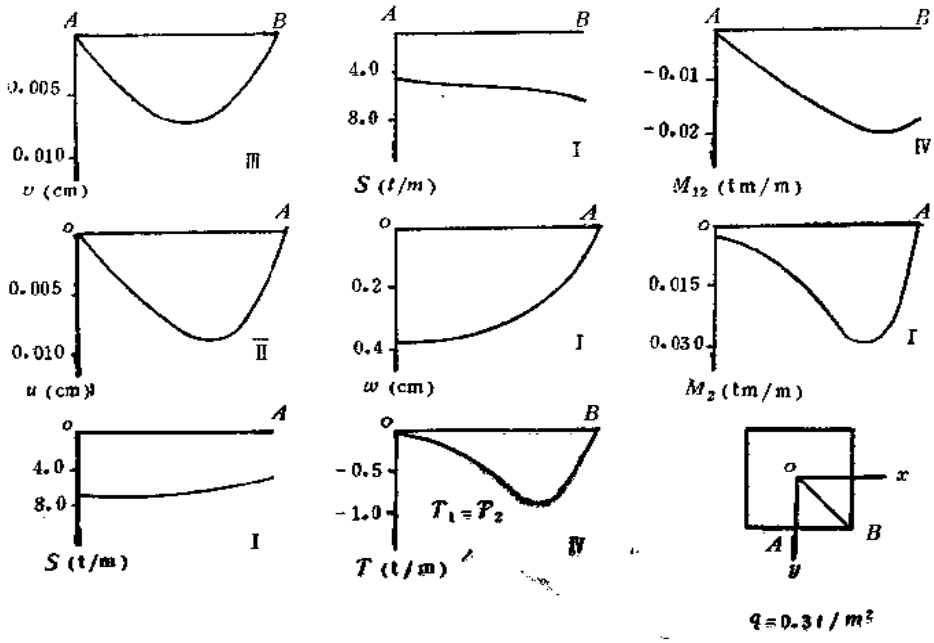


图 7 四边简支扭壳主要计算结果

例5 分析四边固定扭壳，壳体尺寸及各项参数均与例4相同，只是边界条件改为：

$$x=\pm\frac{a}{2}\text{时}, \qquad u=v=w=\frac{\partial w}{\partial x}=0$$

$$y=\pm\frac{a}{2}\text{时}, \qquad u=v=w=\frac{\partial w}{\partial y}=0$$

主要计算结果示于图8，图中Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ意义与图7同。

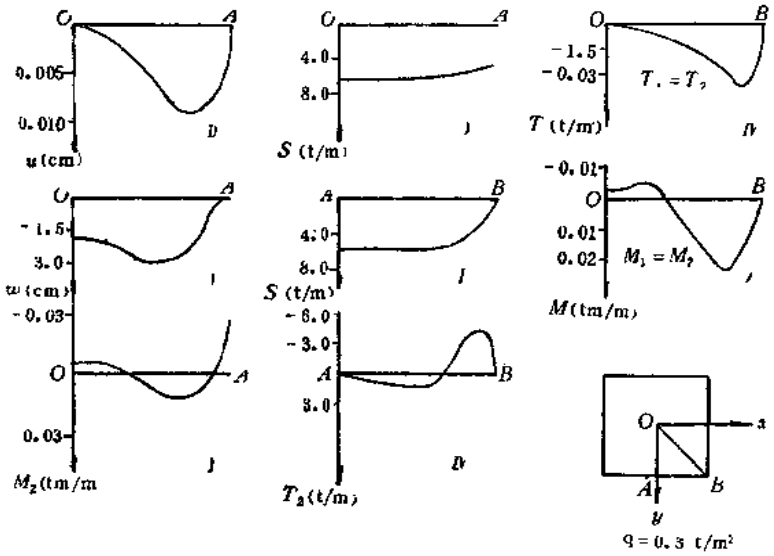


图8 四边固定扭壳主要计算结果

参 考 文 献

〔1〕何广乾、张维斌、魏琏，扁壳温度应力的计算（一）、（二），土木工程学报，**8**，1-2 (1962)。

〔2〕Trefftz, E., Gegenstuck zum ritz' schen verfohren, Proceedings of the Second International Congress on Applied Mechanics, Zurich (1926).

〔3〕Eason, E. D., *International Journal for Numerical Metnods in Engineering*, **10**, 5 (1976), 1021—1046.

最小二乘配点法解薄板弯曲问题

徐次达　郑瑞芬　施德芳

一、引　　言

按照 1977 年 E. D. Eason[1,2] 的观点认为当前某些数值计算方法如有限元法及差分法等具有一定的局限性，如有限元法于泛函不存在时即无法使用，具体问题具体程序，程序设计及使用上工作量大，误差难估等，需要有一种可供挑选的计算方法出现。1977 年 R. H. Gallagher[3] 认为就要产生用统一的计算观点概括各种不同计算方法，可把各种方法置于一个单一的伞下的方法并且指出前所未有的新的道路，例如“最小二乘法”。又根据近年来我国几次全国性有限元法学术交流会，一致强调要在发展有限元法的同时发展其他数值计算方法。

作者与教研室几个同志，为了发展加权残数法特别是离散型最小二乘法用以解板壳力学问题，于 1978 年曾尝试用这种方法分析了无自由边的薄板弯曲问题，取得了较为满意的成果，并且通过计算实践也基本上验证了国外资料所提的各种优点。1979 年我们研究了具有自由边的矩形薄板弯曲问题。所用的分析方法仍是离散型最小二乘法，但使得未知数数目与方程式数目相等。所用的试函数一律是一个事先既不满足薄板弯曲定解微分方程式亦不满足边界条件的以双重幂级数表示的挠度函数。这是加权残数法中的混合法。

二、方　法　概　述

离散型最小二乘法的基本概念是去找寻拟解问题的定解微分方程式的近似解，须使得以试函数代入定解微分方程式的残数以及代入边界条件的残数平方之和为最小。

设有一物体所占的域为 V，边界面为 S，描述这物体某一问题时可有下列的微分方程式

$$Fu-f=0 \quad (\text{域 } V \text{ 中}) \tag{2-1}$$

$$Gu-g=0 \quad (\text{边界面 } S \text{ 上}) \tag{2-2}$$

式中 u 为待求的函数，F 及 G 为算子，f 及 g 为不含 u 之项。式 (2-1) 与 (2-2) 可以是线性或非线性的微分方程式（或组）。

在加权残数法中，我们须假设一个试函数 $\tilde{u}$ 作为问题的近似解，即：

$$\tilde{u}(c,\ x)\cong u(x) \tag{2-3}$$

式中 x 是所有的独立变量，c 是待定的参数矢量。我们将式 (2-3) 代入式 (2-1) 及(2-2) 一般地不会得到满足而留下残数。残数方程式是：

$$R_I(c,\ x)=F\tilde{u}-f \quad (V \text{ 域中}) \tag{2-4}$$

$$R_B(c,\ x)=G\tilde{u}-g \quad (S \text{ 面上}) \tag{2-5}$$

式中 R_I 表示物体内部残数，R_B 是边界残数。

我们于物体内部 V 选择 k 个座标点 x_1，$x_2\cdots x_k$ 代入内部残数方程（2-4），而于边界面 S 上选择 $m-k$ 个座标点 x_{k+1}，x_{k+2}，$\cdots x_m$ 代入边界残数方程（2-5），并且于边界残数方程乘上相对权函数 W，得到下列加权残数方程组：

$$\begin{Bmatrix} R_I(c,\ x_1) \\ \vdots \\ R_I(c,\ x_k) \\ WR_B(c,\ x_{k+1}) \\ \vdots \\ WR_B(c,\ x_m) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\bar{u}(c,\ x_1)-f(x_1) \\ \vdots \\ F\bar{u}(c,\ x_k)-f(x_k) \\ W[G\bar{u}(c,\ x_{k+1})-g(x_{k+1})] \\ \vdots \\ W[G\bar{u}(c,\ x_m)-g(x_m)] \end{Bmatrix} \tag{2-6}$$

式中 W 是相对权函数，即边界权函数与内部权函数之比。如果认为边界条件比较重要可以增大 W 以事保证。式（2-6）以矩阵形式表示为：

$$R=AC-B \tag{2-7}$$

式中 R 为残数列矩阵，C 为待求参数 C_i 的列矩阵，B 为不含参数 C 的列矩阵。注意，如果参数 C_i 的数目为 n，则须使 $m\geqslant n$。

为了使残数平方之和为最小，我们以 I_c 表示残数平方之和，即有：

$$I_c=R^TR \tag{2-8}$$

列出：

$$\frac{\partial I_c}{\partial C_i}=0\quad(i=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2-9}$$

于是可以导出下式：

$$A^TAC=A^TB \tag{2-10}$$

按照上式编制计算机程序，列出代数方程组，可以求得参数 C_i，也就可以得到定解微分方程式满足所给边界条件的近似解。从引入试函数的定解微分方程式及边界条件的误差大小亦即 R_I，R_B 数值的多少，容易看出应用这种计算方法所求得解的精确度。误差可知是加权残数法的一个突出的优点，其他数值方法没有这个优点[11]。

用于薄板弯曲问题，我们将薄板弯曲控制微分方程式及所有边界条件以下列无量纲量：

$$\tilde{w}=w/a,\quad \tilde{x}=x/a,\quad \tilde{y}=y/a,\quad \tilde{q}=q/q_0 \tag{2-11}$$

代入化为无量纲的形式：

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\nabla}^4\tilde{w}-\tilde{q}\,q_0a^3/D=0 \\ &\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{x}}=\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{y}}=\frac{\partial w}{\partial y} \\ &\tilde{M}_x=\frac{M_xa}{D}=-\left[\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^2}+\mu\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{y}^2}\right] \\ &\tilde{Q}_x=Q_x\frac{a^2}{D}=-\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\tilde{\nabla}^2\tilde{w} \\ &\tilde{R}_x=Q_y\frac{a^2}{D}=-\left[\frac{\partial^3\tilde{w}}{\partial\tilde{x}^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3\tilde{w}}{\partial\tilde{x}\partial\tilde{y}^2}\right] \\ &\tilde{M}_y,\ \tilde{Q}_y,\ \tilde{R}_y \end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

式中 w 为板的挠度，M_x，Q_x，R_x 为板的 $x=$常数截面的弯矩，剪力及合成横剪力，q 为横

向载荷集度，q_0 为特定值，有～号的量为无量纲量，我们采用薄板挠度试函数为一双重幂级数：

$$\tilde{w}=\sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{r}C_{mn}\tilde{x}^m\tilde{y}^n \tag{2-13}$$

式中 C_{mn} 为待定系数，$\tilde{x}$ 及 $\tilde{y}$ 为无量纲座标，m，n 为正整数，将式（2-13）代入（2-12）即得到残数方程组式（2-7）。利用（2-10）式即可求出 C_{mn} 及挠度函数 $\tilde{w}$。

三、四边简支及四边固定薄板的计算

四边简支的及四边固定的方板受到均布载荷作用的情况，我们利用最小二乘配点法计算过二种方案：一种是全板配点计算，另一种是利用对称条件四分之一块板配点计算。后一种计算方案中须注意对称条件的利用，在试函数中只能选择偶数幂数之项参与计算。

1．全板计算的座标配点图见图 1

若板的尺寸为 $a\times a\times t$，其中 a 为边长，t 为板的厚度；又若板的弹性系数为 E，泊松比为 $\mu=0.3$。均布载荷集度为 q。在具体计算时，我们并不需要知道 q，E，a，t 各值，例如板的挠度 w 及弯矩 M_x 可表示为：

$$w=\alpha qa^4/D,\quad M_x=\beta qa^2 \tag{3-1}$$

其中系数 α 及 β 才是我们所需计算的。

（1）四边简支的方板　我们在点 1—20（图 1）列出边界条件为 $w=0$ 及 $M_x=0$（或 $M_y=0$）的残数方程。在点 21—54 列出板内部挠度微分方程的残数方程式。我们用了 78 个待求参数 C_{mn}，线性代数方程式也是 78 个。权函数 W 取为 1。于是计算得到板中心点的挠度及弯矩为：

$$\left.\begin{aligned}w_{max}&=0.004065qa^4/D\\(M_x)_{max}&=(M_y)_{max}=0.04784qa^2\end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

与 S. Timoshenko[4] 经典解析法所得的相应的值 $w_{max}=0.00406qa^4/D$ 及 $(M_x)_{max}=0.0479qa^2$ 相比较误差分别为 0.123% 及 0.125%。残数方程误差普遍低于 2.3×10^{-6}。

（2）四边固定的方板　我们在点 1—20 列出边界条件为 $w=0$ 及 $\partial w/\partial x=0$（或 $\partial w/\partial y=0$）的残数方程，在点 21—54 则列出挠度微分残数方程式。共有 54 个座标点，78 个 C_{mn} 及 78 个线性代数方程。得到中心点的挠度与弯矩为：

$$\left.\begin{aligned}w_{max}&=0.00126qa^4/D\\(M_x)_{max}&=(M_y)_{max}=0.02304qa^2\end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

与 S. Timoshenko[4] 对固定边方板计算所得的中心点挠度 $w_{max}=0.00126qa^4/D$ 及弯矩 $(M_x)_{max}=0.0231qa^2$ 相比较，误差分别为 0%

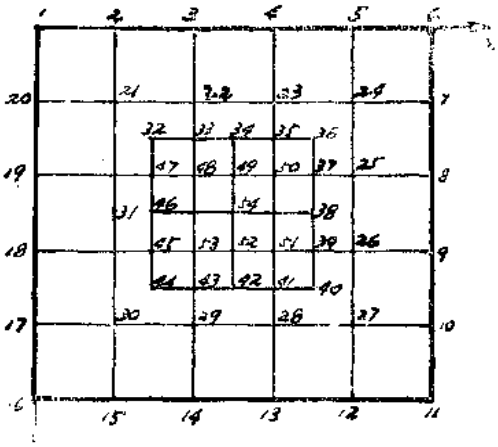


图 1　四边简支（或固定）板配点图

及0.26%。残数方程的误差普遍低于 2.6×10^{-4}。

2．利用对称性只计算四分之一块板，座标配点见图 2

（1）四边固定板我们在点1—7列出边界条件 $w=0$ 及 $\partial w/\partial x=0$ 的残数方程，在点 8—14 列出 $w=0$ 及 $\partial w/\partial y=0$ 边界条件残数方程。在点15—31列出薄板挠度微分方程的残数方程。考虑到薄板变形的对称性，我们于挠度试函数中只选取对称之项，如只选择偶数幂数之项，又如 $\tilde{x}$ 及 $\tilde{y}$ 的参数只用一个等。我们一共用了 28 个待求参数 C_m。残数方程为45个。相对权函数 W 取为 1。于是计算得到板中点的挠度 w_{max}，中心点正弯矩 $(M_x)_{28}$ 以及边中点负弯矩 $(M_x)_1$，如下所列：

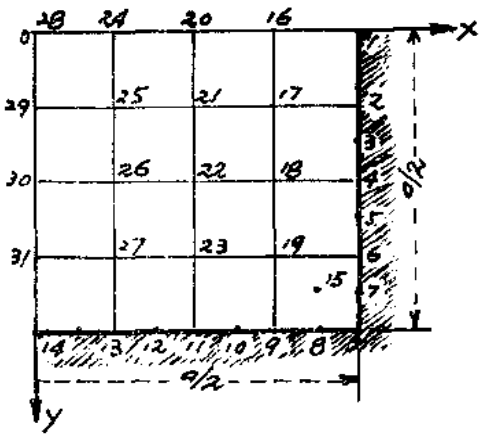


图 2 四分之一块板配点图

$$\left.\begin{aligned} &w_{max}=w_{28}=0.001263qa^4/D\\ &(M_x)_8=(M_y)_{28}=+0.02291qa^2\\ &(M_x)_1=(M_y)_{15}=-0.05145qa^2 \end{aligned}\right\}\quad(3\text{-}4)$$

与 S. Timoshenko[4] 中同样问题的数据：

$$\left.\begin{aligned} &w_{max}=0.00126qa^4/D\\ &(M_x)_{\substack{x=0\\y=0}}=(M_y)_{\substack{x=0\\y=0}}=0.0231qa^2\\ &(M_x)_{\substack{x=a/2\\y=0}}=(M_y)_{\substack{x=0\\y=a/2}}=-0.0513qa^2 \end{aligned}\right\}\quad(3\text{-}5)$$

比较，三者误差分别为 0.237%，0.292% 及 0.84%。检查残数方程误差，如点 1，2，3 的挠度残数分别为 -0.498×10^{-6}，$+0.282\times10^{-6}$，0.526×10^{-6}。

我们若将相对权函数 W 增大为 $W=10$，则几乎得到同样的计算结果。又若将 W 增大为 $W=1000$，则得到下列结果：

$$w_{max}=0.001265qa^4/D,\quad (M_x)_{28}=0.02292qa^2,\quad (M_x)_1=-0.0516qa^2$$

可见在此问题中相对权函数 W 所起作用不大，取 W 为 1 是适合的。

如果我们将参数 C_m 数目增加到 36 个，边界的点增加到 20 个，内部的点增加到 25 个，亦即残数方程式为 65 个，则得到如下的计算结果：

$$\left.\begin{aligned} &w_{max}=0.001282qa^4/D,\quad (M_x)_{\substack{x=0\\y=0}}=+0.02302qa^2\\ &(M_x)_{\substack{x=a/2\\y=0}}=-0.056qa^2 \end{aligned}\right\}\quad(3\text{-}6)$$

检查边界挠度残数，点 1，2，3 三点的挠度误差只有 0.267×10^{-8}，0.652×10^{-8}，0.1755×10^{-7}，边点挠度最大误差亦只有 0.115×10^{-6}，普遍较前面计算中的误差小数十倍。于是产生了一个如何对待薄板经典解析解的问题。这些结果是在电子计算机尚未问世之前得到的。

（2）四边简支方板　配点位置不变，仍见图 2。边界条件改变为简支之后，用 28 个参数 C_m，残数方程 45 个，得到板中点的挠度 w_{max} 及板中点的弯矩 $(M_x)_{max}$ 如下：

$$\left.\begin{aligned} &w_{max}=0.04063qa^4/D\\ &(M_x)_{max}=(M_y)_{max}=0.04791qa^2 \end{aligned}\right\}\quad(3\text{-}7)$$

与 S. Timoshenko[4] 中四边简支板相应数值 $w_{max}=0.0406qa^4/D$ 及 $(M_x)_{max}=0.0479qa^2$ 比较，误差仅为 0.0739% 及 0.0208%。

四、对于有自由边的矩形板计算

我们用最小二乘配点法分析：（1）三边简支，一边自由的正方形薄板；（2）三边固定，一边自由的正方形板；（3）二对边简支另二对边自由的正方形板，荷载是均布的。计算表明：计算三边简支一边自由方板及二对边简支另二对边为自由的方板效果良好，数值稳定，与S. Timoshenko经典解析解[4]及其他资料[5]比较，除开自由边中点值外，位移与内力值误差不超过4%。计算三边固定一边自由的方板数值亦稳定，与文献〔4〕及〔5〕中的经典解比较，误差略大，但发觉文献〔4〕及〔5〕中同一问题数值矛盾亦达19%之多，一时难下定论。残数方程的残数亦即误差，前二种情况中在$10^{-5}\sim10^{-7}$之间，后一种情况在$10^{-4}\sim10^{-6}$之间。

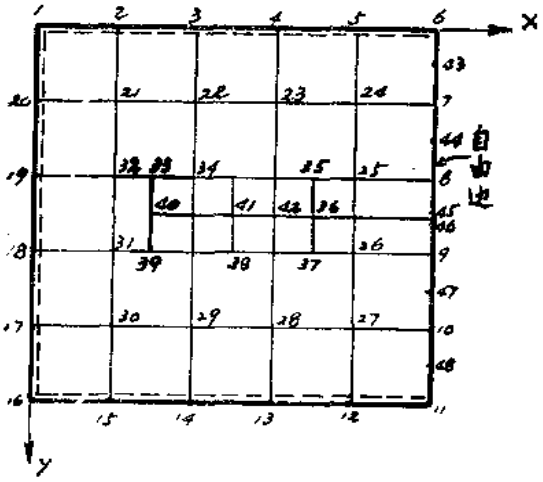
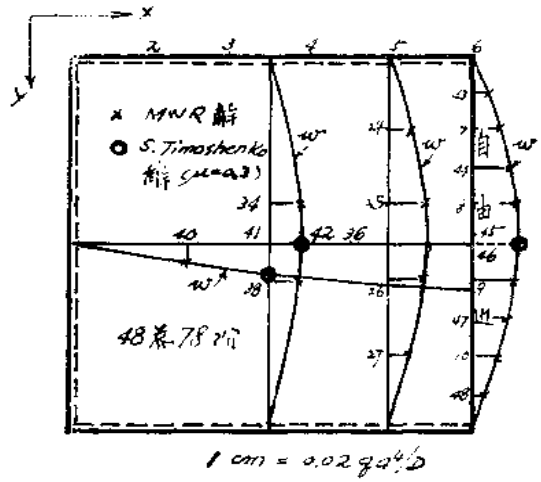


图3 三边简支一边自由方板座标点图

1．三边简支一边自由方板

关于方板上座标点的布置见图3。我们于1—6、11—20的16个简支边界点上列出$w=0$及$M_x=0$或$M_y=0$的边界残数方程。又于自由边6—11、43—48的12个点上列出$M_x=0$及$R_x=0$的边界残数方程。又于21--42共22个点上列出板内部挠度偏微分方程组，于是共有78个残数方程式。用最小二乘配点法所得薄板挠度及内力见图4、图5及表1。可以看出，计算所得薄板挠度与弯矩等比较满意。与S. Timoshenko经典解的数值比较[4]，误差较少，但自由边的挠度值及弯矩误差比较大些。


图4 三边简支一边自由方板的挠度图

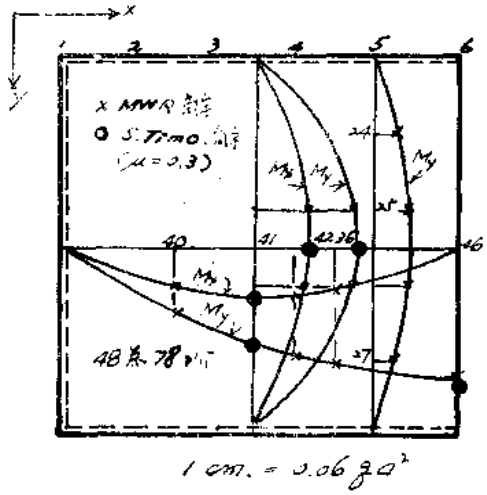

图5 三边简支一边自由方板弯矩图

表 1　最小二乘配点法分析三边简支一边自由方板部分结果

点	挠　度 $w\times qa^4/D$	铁　氏* $w\times qa^4/D$	弯　矩 $M_x\times qa^2$	铁　氏 $M_x\times qa^2$	弯　矩 $M_y\times qa^2$	铁　氏 $M_y\times qa^2$	注
41	0.00764[1]	0.00776	0.0393[3]	0.0390	0.0773[4]	0.0799	（中点）
46	0.01202[2]	0.1286	0		0.1040[5]	0.112	（自由边中点）

误差：（1）1.55%；（2）6.53%（边中点）；（3）0.76%；（4）3.25%；（5）6.70%（边中点）。
* S. Timoshenko 解〔4〕

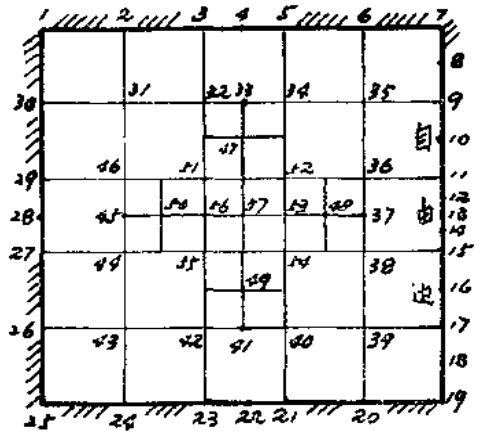


图 6　三边固定一边自由方板座标图

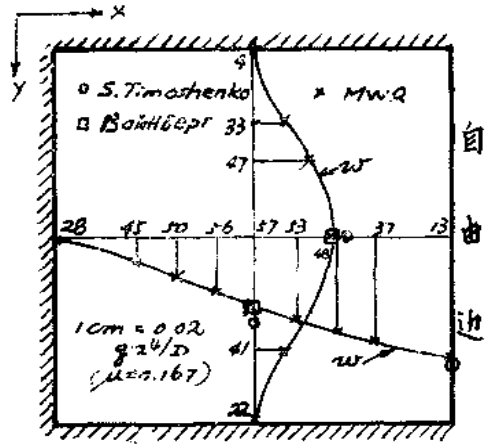


图 7　三边固定一边自由方板挠度图

2．三边固定一边自由方板

我们用 57 个座标点，线性方程共 91 阶（图 6）。用最小二乘配点法计算所得挠度及弯矩见图 7，图 8 及表 2。所得曲线尚称良好。利用经典解来检验我们的计算结果，发现在这种板弯曲问题中，S. Timoshenko 的解与Д. В. Вайнберг 的解不一致，如中心点挠度铁氏为$0.00230qa^4/D$但 Вайнберг 为 $0.00193qa^4/D$，相差竟达 19.2% 之多。于是即难下肯定结论。

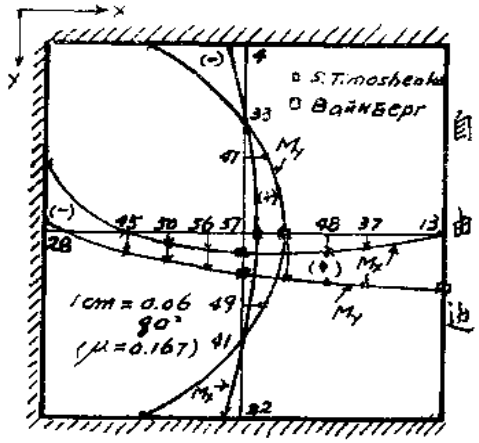


图 8　三边固定一边自由方板弯矩图

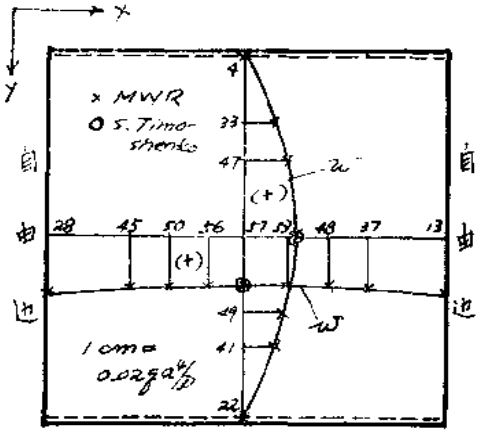


图 9　二对边简支余二对边自由方板挠度

3．二对边简支另二对边自由方板

这种薄板用最小二乘配点法进行分析效果非常好，与经典解[4]比较，误差不超过1.5%。有关座标点布置图同图6。计算成果见图9、图10及表3。

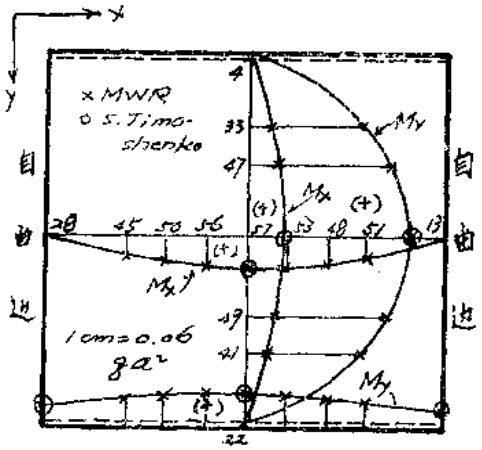


图 10　二对边简支余二对边自由方板弯矩

表2　最小二乘配点法分析三边固定一边自由方板部分结果

点	挠度 $w\times qa^4/D$	经典解* $w\times qa^4/D$	弯矩 $M_x\times qa^2$	经典解 $M_x\times qa^2$	弯矩 $M_y\times qa^2$	经典解 $M_y\times qa^2$	注
57	0.00193(1)	0.00230(4) 0.00193(5)	0.01265(2)	0.00138(4) 0.0130(*)	0.03098(3)	0.0317(4) 0.0289(*)	中点
13	0.00301(4)	0.00333(4) 0.00276(5)	0		0.0449(5)	0.0445(4) 0.0435(5)	(自由边中点)

* 经典解〔4〕及〔5〕解不相同。误差（下面）第一数指对〔4〕，第二数指对〔5〕：（1）16.1%；0%；（2）8.3%；2.7%；（3）2.27%；（4）9.06%；（5）0.89%；3.3%。

表3　最小二乘配点法分析二对边简支另二边自由方板结果

点	挠度 $w\times qa^4/D$	*经典解 $w\times qa^4/D$	弯矩 $M_x\times qa^2$	经典解 $M_x\times qa^2$	弯矩 $M_y\times qa^2$	经典解 $M_y\times qa^2$	注
57	0.01319(1)	0.01309	0.0271(2)	0.0271	0.1234(3)	0.1225	(中点)
13	0.01532(4)	0.01509	0	0	0.1335(5)	0.1318	(自由边中点)

*〔4〕；误差：（1）0.76%；（2）0%；（3）0.73%；（4）1.50%；（5）1.27%.

总之，用最小二乘配点法计算各种边界条件的薄板弯曲问题，具有便捷，工作量少，计算时间少，计算机程序简单，通用性大，输入工作量很少以及误差可知等优点。

本方法所用计算机程序，系由同济大学结构理论研究所电子计算机室杨振山同志设计编写，谨在此致以衷心感谢。

参 考 文 献

〔1〕Ernest, Eason D., A review of least-squares methods for solving partial differential equations, *International Jou. for Numerical Methods in Engineering*, 10 (1976).

〔2〕Eason, E. D. and Mote Jr. C. D., Solution of non-linear bounbary value problems by discrete least rquares, *International Jou. for Numerical Methods in Engineering*, 11(1977), issue 4.

〔3〕Gallagher, R. H., Computerized structural analysis and design the next twenty years, Computer Structures (Aug. 1977).

〔4〕Timoshenko, S. and Woinnovsky-Krieger, S., Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill(1959), 211—216.

〔5〕Войнберг, Д. В., Вайнберг, Е. Д., Пластины, Диски, Балки-Стенки, Государственное изд. (1959).

圆柱面螺旋线杆件空间刚度、内力及变形的计算

吴 健 生

（天津大学）

建筑中的钢筋混凝土螺旋楼梯是一螺杆。其支承可以是固定、铰接、半铰接（指在楼板平面内不能转动的铰接）或弹性约束的。它可与空间框架协同工作。为此，需求螺杆的空间刚度、内力及变形。

一、座 标 转 换

设一螺杆，形状示如图 1(*a*)。X、Y 及 Z 为总体座标轴。任一点 p 的参数方程为：

$$X=a\cdot\cos\varphi \quad Y=b\cdot\varphi \quad Z=-a\cdot\sin\varphi \tag{1}$$

式中：a 为圆柱半径；φ 角由 X 轴起算，逆时针为正；b 为螺距之 $1/2\pi$ 倍。这方程的极座标表达式为：

$$\boldsymbol{r}(\varphi)=a\cdot\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}+b\cdot\varphi\cdot\boldsymbol{j}-a\cdot\sin\varphi\cdot\boldsymbol{k} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 及 $\boldsymbol{k}$ 分别为沿 X、Y 及 Z 轴方向的单位向量。p 点处的局部座标为 x、y 及 z（见图 1(*b*)），其切线方向为[1]：

$$\dot{\boldsymbol{r}}(\varphi)=-a\cdot\sin\varphi\cdot\boldsymbol{i}+b\cdot\boldsymbol{j}-a\cdot\cos\varphi\cdot\boldsymbol{k} \tag{3}$$

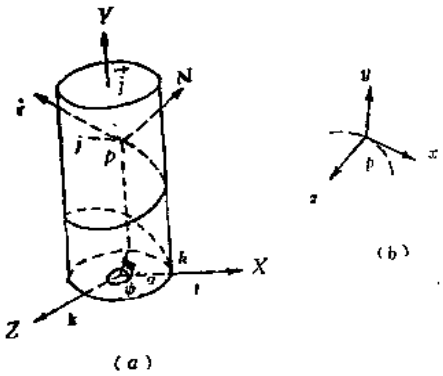


图 1

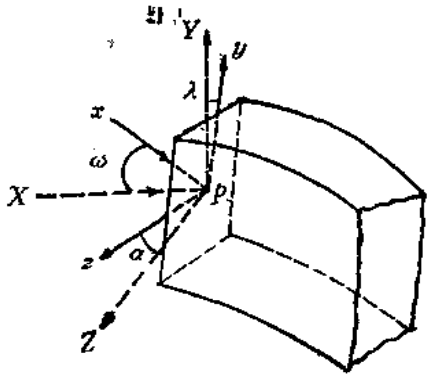


图 2

p 处的法线方向为：

$$\boldsymbol{N}=\cos\varphi\cdot\boldsymbol{i}-\sin\varphi\cdot\boldsymbol{k} \tag{4}$$

此二方向分别与 p 处局部座标轴 x 及 z 方向相背。p 处局部座标轴 y 的方向按右手系规则为：

$$\boldsymbol{y}=b\cdot\sin\varphi\cdot\boldsymbol{i}+a\cdot\boldsymbol{j}+b\cdot\cos\varphi\cdot\boldsymbol{k} \tag{5}$$

局部座标轴与总体座标轴间的夹角（见图 2）为：

$$\cos\omega=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin\varphi,\quad \cos\lambda=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}},\quad \cos\alpha=\sin\varphi \tag{6}$$

设 p 处有按总体座标表达的力 $\{N_{xs},\ N_{ys},\ N_{zs},\ M_{xs},\ M_{ys},\ M_{zs}\}_p$，若按局部座标为 $\{N_x,\ N_y,\ N_z,\ M_x,\ M_y,\ M_z\}_p$，则它们之间的关系为：

$$\{N_{xs},N_{ys},N_{zs},M_{xs},M_{ys},M_{zs}\}_p=\begin{bmatrix}R_\lambda\cdot R_a & 0\\ 0 & R_\lambda\cdot R_a\end{bmatrix}_p^T\cdot\{N_x,N_y,N_Z,\ M_x,M_y,M_z\}_p \tag{7}$$

其中

$$[R_\lambda\cdot R_a]=\begin{bmatrix}p_a\cdot\sin\varphi & -p_b & p_a\cdot\cos\varphi\\ p_b\cdot\sin\varphi & p_a & p_b\cdot\cos\varphi\\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$p_a=\cos\lambda=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad p_b=\sin\lambda=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{9}$$

二、二截面处诸力之间的平衡关系式（按总体座标）

设沿螺杆有二点 p 及 j，其总体座标值分别为 X_p、Y_p 及 Z_p 和 X_j、Y_j 及 Z_j（见图 3）。这二处作用諸力之间的平衡关系式见式（10）。其中：

$$\Delta X=X_j-X_p\quad \Delta Y=Y_j-Y_p\quad \Delta Z=Z_j-Z_p$$

$$\begin{Bmatrix}N_{xs}\\ N_{ys}\\ N_{zs}\\ M_{xs}\\ M_{ys}\\ M_{zs}\end{Bmatrix}_p=\begin{bmatrix}-1 & & & & & \\ & -1 & & & 0 & \\ & & -1 & & & \\ & \Delta Z & -\Delta Y & -1 & & \\ -\Delta Z & & \Delta X & & -1 & \\ \Delta Y & -\Delta X & & & & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}N_{xs}\\ N_{ys}\\ N_{zs}\\ M_{xs}\\ M_{ys}\\ M_{zs}\end{Bmatrix}_j \tag{10}$$

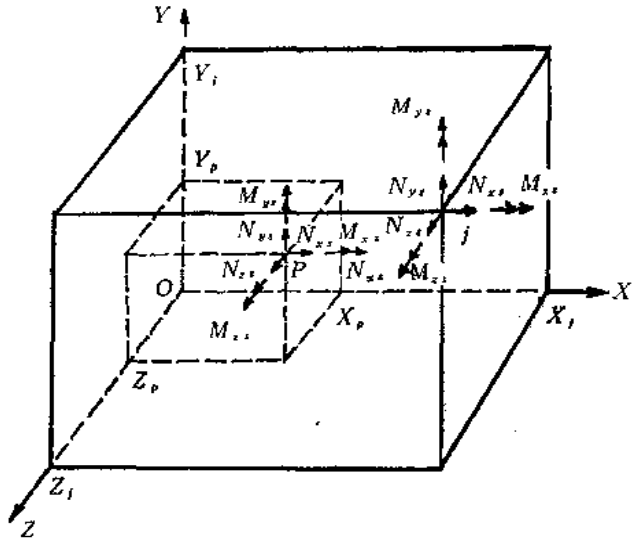


图 3

若按局部座标系来改写式（10），则有：

$$\{N_x, N_y, N_z, M_x, M_y, M_z\}_p = [PH66]_{6\times6} \cdot \{N_1, N_2, N_3, M_4, M_5, M_6\}_j \quad (11)$$

式中：$\{N_1, N_2, N_3, M_4, M_5, M_6\}_j$ 表示螺杆之上端（j 端）諸力（按局部座标）。$[PH66]$ 中各元素值如下：

$$PH66(1,1) = -p_a^2 \cdot \cos\Phi - p_b^2 \quad PH66(2,1) = p_a \cdot p_b(1-\cos\Phi) = PH66(1,2)$$

$$PH66(3,1) = p_a \cdot \sin\Phi = -PH66(1,3)$$

$$PH66(4,1) = -2p_a \cdot p_b \cdot a(1-\cos\Phi) + p_a^2 \cdot b \cdot \Phi \cdot \sin\Phi$$

$$PH66(5,1) = (p_a^2 - p_b^2) \cdot a(1-\cos\Phi) + p_a \cdot p_b \cdot b \cdot \Phi \cdot \sin\Phi = PH66(4,2)$$

$$PH66(6,1) = p_a \cdot b \cdot \Phi \cdot \cos\Phi - p_b \cdot a \cdot \sin\Phi = -PH66(4,3)$$

$$PH66(2,2) = -p_a^2 - p_b^2 \cdot \cos\Phi \quad PH66(3,2) = p_b \cdot \sin\Phi = -PH66(2,3)$$

$$PH66(5,2) = 2p_a \cdot p_b \cdot a(1-\cos\Phi) + p_b^2 \cdot b \cdot \Phi \cdot \sin\Phi$$

$$PH66(6,2) = p_b \cdot b \cdot \Phi \cdot \cos\Phi + p_a \cdot a \cdot \sin\Phi = -PH66(5,3)$$

$$PH66(3,3) = -\cos\Phi \quad PH66(6,3) = b \cdot \Phi \cdot \sin\Phi$$

对于下标为（4,4）、（4,5）、（4,6）、（5,4）、（5,5）、（5,6）、（6,4）、（6,5）及（6,6）諸元素值则分别与下标为（1,1）、（1,2）、（1,3）、（2,1）、（2,2）、（2,3）、（3,1）、（3,2）及（3,3）諸元素值相等。凡是未提到的元素，其值均为零。Φ 是新引进的变量，$\Phi = \varphi_j - \varphi$，$d\Phi = -d\varphi$，$\varphi_j$ 为 j 端之 φ 角。式（11）给出了任意截面 p 处（其角座标为 φ）諸力与 j 端（其角座标为 φ_j）諸力之间按局部座标的平衡关系式。

三、螺杆的空间刚度矩阵

采用 Castigliano 定理推导螺杆的空间刚度矩阵。杆件变形能（略去剪切变形的影响）为：

$$U = \int_s (N_x^2/2EA + M_x^2/2GJ + M_y^2/2EI_y + M_z^2/2EI_z)ds \quad (12)$$

由式（11）及（12）知，U 是 j 端力 N_1，N_2，N_3，M_4，M_5 及 M_6 的函数。根据 Castigliano 定理知 j 端沿 N_1 作用方向的位移 δ_1 为：

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \partial_1 = \int_s \left(\frac{N_x}{EA} \cdot \frac{\partial N_x}{\partial N_1} + \frac{M_x}{GJ} \cdot \frac{\partial M_x}{\partial N_1} + \frac{M_y}{EI_y} \cdot \frac{\partial M_y}{\partial N_1} + \frac{M_z}{EI_z} \cdot \frac{\partial M_z}{\partial N_1} \right) ds \quad (13)$$

仿此，若轮番地对 N_2、N_3、M_4、M_5 及 M_6 求 U 之偏导数，则得到 j 端位移 δ_2、δ_3、θ_4、θ_5 及 θ_6，

$$\frac{\partial U}{\partial N_2} = \delta_2, \quad \frac{\partial U}{\partial N_3} = \delta_2, \quad \frac{\partial U}{\partial M_4} = \theta_4, \quad \frac{\partial U}{\partial M_5} = \theta_5, \quad \frac{\partial U}{\partial M_6} = \theta_6 \quad (14) \sim (18)$$

其正方向均与相应力的正方向相同，并按局部座标来考虑。由于忽略了剪切变形的影响，所以在式（13）至（18）中，仅出现 N_x、M_x、M_y 及 M_z，而不出现 N_y 及 N_z；因此，在式（11）的方阵 $[PH66]_{6\times6}$ 中仅涉及第 1、4、5 及 6 四行，即仅采用 $\left[PH66\begin{pmatrix}1\\4\\5\\6\end{pmatrix}, 1\sim6 \right]_{4\times6}$，以下用 $[PH46]$ 表示之。如将 $\{N_1, N_2, N_3, M_4, M_5, M_6\}_j$ 定义为 $[F_{1\sim6}]_j$，将 $\{\delta_1, \delta_2,$

δ_3, θ_4, θ_5, $\theta_6\}_j$ 定义为 $[\delta_{1\sim6}]_j$，则式（13）至（18）可写成：

$$[\delta_{j\sim j}]_j=[\beta_1]_{6\times6}\cdot[F_{1\sim6}]_j \tag{19}$$

式中：

$$[\beta_1]=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\varphi_j}[PH46]_{\phi}^{T}\cdot[EGA]\cdot[PH46]_{\phi}\cdot d\Phi \tag{20}$$

其中：

$$[EGA]=\begin{bmatrix}\frac{1}{EA} & & & & & 0\\ & \frac{1}{GJ} & & & & \\ & & \frac{1}{EI_y} & & & \\ & & & \frac{1}{EI_z} & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & & \end{bmatrix} \tag{21}$$

此 $[\beta_1]$ 称为柔度矩阵。式（19）可改写成：

$$[F_{1\sim6}]_j=[K_1]_{6\times6}\cdot[\delta_{1\sim6}]_j \tag{22}$$

其中：$[K_1]=[\beta_1]^{-1}$，$[K_1]$ 是螺杆刚度矩阵中的一个子矩阵。由式（11）知，当 p 是位于螺杆下端 k 处时，式（11）中 $\varphi=0$，即 $\Phi=\varphi_j$。定义：$[F_{7\sim12}]_k=\{N_7, N_8, N_9, M_{10}, M_{11}, M_{12}\}=\{N_x, N_y, N_z, M_x, M_y, M_z\}_k$，则由式（11）知：

$$[F_{7\sim12}]_k=[PH66]_{\phi=\varphi j}\cdot[F_{1\sim6}]_j \tag{23}$$

它表示当 j 端有 $[\delta_{1\sim6}]_j$ 变形时，k 端固端反力 $[F_{7\sim12}]_k$ 与 j 端作用力 $[F_{1\sim6}]_j$ 的关系式。由式（22）及（23）知：

$$[F_{7\sim12}]_k=[K_2]_{6\times6}\cdot[\delta_{1\sim6}]_j \tag{24}$$

其中：

$$[K_2]_{6\times6}=[PH66]_{\phi=\varphi j}\cdot[K_1]_{6\times6} \tag{25}$$

将式（22）及（24）写在一起，有：

$$[F_{1\sim12}]_{12\times1}=\begin{bmatrix}K_1\\ K_2\end{bmatrix}_{12\times6}\cdot[\delta_{1\sim6}]_{j,6\times1} \tag{26}$$

其中，$[F_{1\sim12}]$ 是 $[F_{1\sim6}]_j$ 及 $[F_{7\sim12}]_k$ 写在一起的列阵。式（26）表示 k 端固定时，j、k 二端端力 $F_{1\sim12}]$ 与 j 端位移 $[\delta_{1\sim6}]_j$ 的关系式。

同理，当 j 端固定，k 端具有位移 $[\delta_{7\sim12}]_k$ 时，其与式（26）相应的表达式为：

$$[F_{1\sim12}]_{12\times1}=\begin{bmatrix}K_4\\ K_3\end{bmatrix}_{12\times6}\cdot[\delta_{7\sim12}]_{k,6\times1} \tag{27}$$

式中：

$$[K_3]_{6\times6}=[\beta_3]_{6\times6}^{-1}$$

及：

$$[\beta_3]=([PH66]_{\phi=\varphi j}^{-1})^T\cdot[\beta_1]\cdot[PH66]_{\phi=\varphi j}^{-1} \tag{28}$$

$$[K_4]_{6\times6}=[PH66]_{\phi=\varphi j}^{-1}\cdot[K_3] \tag{29}$$

如果 $[\delta_{1\sim6}]_j$ 及 $[\delta_{7\sim12}]_k$ 同时发生，则 j、k 二端力与二端位移的关系式由（26）与（27）合并为：

$$[F_{1\sim12}]_{12\times1}=\begin{bmatrix}K_1 & K_4\\ K_2 & K_3\end{bmatrix}_{12\times12}\cdot\begin{bmatrix}\delta_{1\sim6}\\ \delta_{7\sim12}\end{bmatrix}_{12\times1} \tag{30}$$

或简写为：

$$[F_{1\sim12}]=[K]_{12\times12}\cdot[\delta_{1\sim12}]_{12\times1} \tag{31}$$

其中$[K]_{12\times12}$即为螺杆空间刚度矩阵（局部座标）。

若一螺杆在总体座标系 $X\ Y\ Z$ 以外还有一结构座标系①、②（见图 4），则在任一截面 p 处的局部座标、总体座标与结构座标之间的关系如图 5 所示。针对结构座标系，j、k 二端力与端位移的关系为：

$$[F^{②}_{1\sim1}]_{1\times1}=[K_s]_{1\times12}\cdot[\delta^{②}_{1\sim1}]_{1\times1} \tag{32}$$

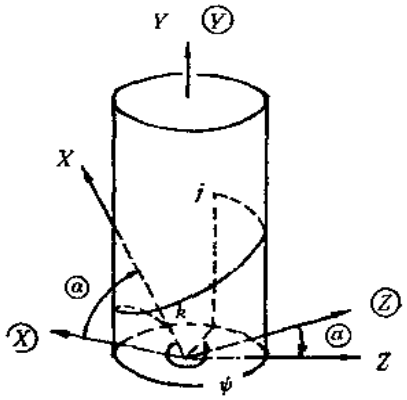


图 4

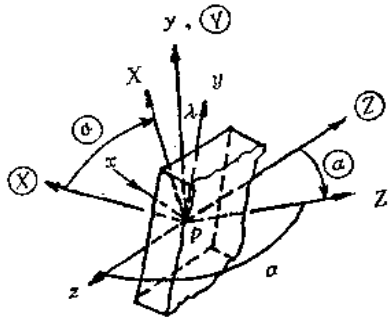


图 5

式（32）与（31）是同一内容，区别仅为座标系不同。$[K_s]$为按结构座标的刚度矩阵。其组成为：

$$[K_s]=\begin{bmatrix}K_{1,s} & K_{4,s}\\ K_{-,s} & K_{3,s}\end{bmatrix}_{12\times12} \tag{33}$$

其中，各组成部分与局部座标者之关系为：

$$[K_{1,s}]_{6\times6}=[R_{jj}]^T\cdot[K_1]\cdot[R_{jj}] \tag{34}$$

$$[K_{2,s}]_{6\times6}=[R_{kk}]^T\cdot[K_2]\cdot[R_{jj}] \tag{35}$$

$$[K_{3,s}]_{6\times6}=[R_{kk}]^T\cdot[K_3]\cdot[R_{kk}] \tag{36}$$

$$[K_{4,s}]_{6\times6}=[R_{jj}]^T\cdot[K_4]\cdot[R_{kk}] \tag{37}$$

及：
$$[R_{jj}]=\begin{bmatrix}R_j & 0\\ 0 & R_j\end{bmatrix}\quad 和\quad [R_{kk}]=\begin{bmatrix}R_k & 0\\ 0 & R_k\end{bmatrix}$$

与：
$$[R_j]_{3\times3}=[R_\lambda\cdot R_\alpha\cdot R^{\mathrm{I}}]_j;\quad [R_k]_{3\times3}=[R_\lambda\cdot R_\alpha\cdot R^{\mathrm{I}}]_k$$

而：$[R_\lambda\cdot R_\alpha]$已如式（8）所示，且$[R^{\mathrm{I}}]$为：

$$[R^{\mathrm{I}}]=\begin{bmatrix}\cos④ & 0 & \sin④\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin④ & 0 & \cos④\end{bmatrix} \tag{38}$$

无论是$[K]$或是$[K_s]$均是对称的矩阵。

四、外荷作用下、二端固定时的固端反力及截面内力

设在螺杆的中间一段（由 $\varphi=\varphi_2$ 至 $\varphi=\varphi_1$）上有均布铅垂方向荷载 q 及均布扭矩荷载

t（见图 6），它们都是沿水平面上的投影曲线来量度，它们的正方向分别与投影曲线的局部座标 y、x 轴的正方向一致。当任一截面 p（其水平角座标为 φ_p）系位于螺杆 jk 的不同区间上时，它的内力有着不同的表达式。在 q 及 t 作用下，固端反力（局部座标）仍用

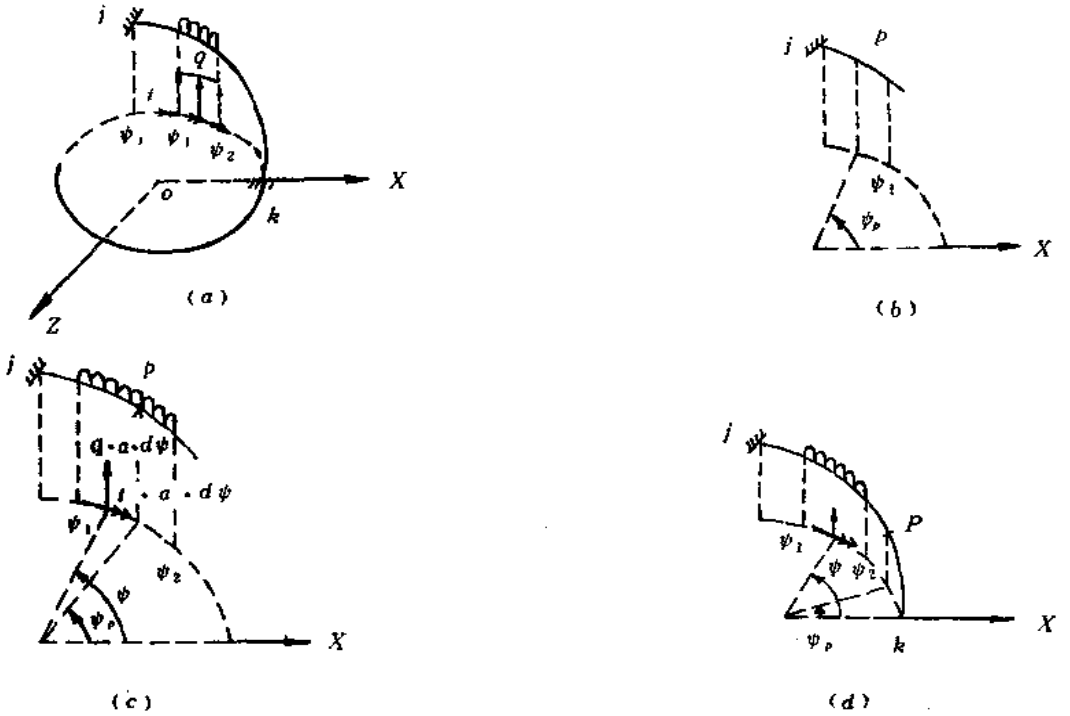


图 6

$[F_{1\sim6}]_j$ 及 $[F_{-1}]_k$ 来表示。对于截面 p 的位置可按三段区间来划分。这三段是 φ_j 至 φ_1 段，φ_1 至 φ_2 段及 φ_2 至 k（即 $\varphi=0$）段。今约定，无论 p 截面是在哪段，均取上部隔离体。图 6(b)、(c) 及 (d) 分别表示这三段。在这三段上的 p 截面处的内力 $\{N_x, N_y, N_z, M_x, M_y, M_z\}_{\varphi_p}$（局部座标）的表达式，见表 1。表中 $[F]^j_{\varphi_p}$ 表示由于固端力 $[F_{1\sim6}]_j$ 在 p 处所起的内力向量。$[F2]^{qt}_{\varphi_p}$ 表示由于 p 截面以上外荷在 p 处（位于第二区间）所引起的内力。$[F3]^{qt}_{\varphi_p}$ 表示由于 p 截面以上外荷在 p 处（位于第三区间）所引起的内力。都是按局部座标。这些表达式是：

表 1

当 p 在	在 p 截面处的内力 $\{N_x, N_y, N_z, M_x, M_y, M_z\}_{\varphi_p}$（局部座标）
$\varphi_j\sim\varphi_1$ 区间	$=[F]^j_{\varphi_p}$
$\varphi_1\sim\varphi_2$ 区间	$=[F]^j_{\varphi_p}+[F2]^{qt}_{\varphi_p}$
$\varphi_2\sim k$ 区间	$=[F]^j_{\varphi_p}+[F3]^{qt}_{\varphi_p}$

$$[F]^j_{\varphi_p}=[PH66]_{\Phi=\varphi_j-\varphi_p}\cdot[F_{1\sim6}]_j \tag{39}$$

$$[F2]^{qt}_{\varphi_p}=\{p_b\cdot Q_1,\ -p_a\cdot Q_1,\ 0,\ p_a\cdot Q_2,\ p_b\cdot Q_2,$$
$$[1-\cos(\varphi_1-\varphi_p)]\cdot(q\cdot a^2+t\cdot a)\}_{6\times1} \tag{40}$$

$$[F3]^{qt}_{\varphi_p}=\{p_b\cdot Q_3,\ -p_a\cdot Q_3,\ 0,p_aQ_4,p_b\cdot Q_4,$$
$$[-\cos(\varphi_1-\varphi_p)+\cos(\varphi_2-\varphi_p)]\cdot(q\cdot a^2+t\cdot a)\}_{6\times1} \tag{41}$$

其中：
$$Q_1=(\varphi_1-\varphi_p)\cdot q\cdot a \qquad Q_3=(\varphi_1-\varphi_2)\cdot q\cdot a$$
$$Q_2=[(\varphi_1-\varphi_p)-\sin(\varphi_1-\varphi_p)]\cdot q\cdot a^2-\sin(\varphi_1-\varphi_p)\cdot t\cdot a$$
$$Q_4=[(\varphi_1-\varphi_2)-\sin(\varphi_1-\varphi_p)+\sin(\varphi_2-\varphi_p)]\cdot q\cdot a^2$$
$$+[-\sin(\varphi_1-\varphi_p)+\sin(\varphi_2-\varphi_p)]\cdot t\cdot a$$

按照 Castigliano 定理，知道在 j 端有 δ_1、δ_2、δ_3、θ_4、θ_5 及 θ_6，其表达式与式(13)至（18）在形式上相同。现以式（13）的形式来说明。式（13）中，N_x、M_x、M_y及 M_z 在 $\varphi_j\sim\varphi_1$ 区间内是由 $[F]^j_{\varphi_p}$中抽出相应的行即可；在 $\varphi_1\sim\varphi_2$ 或 $\varphi_2\sim k$ 区间内则分别由$[F]^j_{\varphi_p}$和 $[F2]^{qt}_{\varphi_p}$或由 $[F]^j_{\varphi_p}$ 和 $[F3]^{qt}_{\varphi_p}$二部分中抽出相应行相加 即可。例如，在 $\varphi_1\sim\varphi_2$ 区间内，N_x 可由 $[F]^j_{\varphi_p}$之第一行与 $[F2]^{qt}_{\varphi_p}$之第一行相加；M_x 可由 $[F]^j_{\varphi_p}$之第四行与$[F2]^{qt}_{\varphi_p}$ 之四行相加。其它则依此类推。因为 $[F2]^{qt}_{\varphi_p}$ 或 $[F3]^{qt}_{\varphi_p}$与 N_1、N_2、N_3、M_4、M_5 及 M_6 均无关，所以式（13）中之偏导数$\frac{\partial N_x}{\partial N_1}$、$\frac{\partial M_x}{\partial N_1}$、$\frac{\partial M_y}{\partial N_1}$及$\frac{\partial M_z}{\partial N_1}$，以及式（14）至（18）中有关的偏导数均仅与$[F]^j_{\varphi_p}$有关。此外，$j$ 端的 6 个变位均为零。所以，参考式（19），有：

$$\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6\}_j=[0]_{6\times1}=[\beta_1]\cdot[F_{1\sim5}]_j+[s_2]_{6\times1}+[s_3]_{6\times1} \tag{42}$$

式中：
$$[s_2]=\int_{\Phi=\varphi_j-\varphi_1}^{\Phi=\varphi_j-\varphi_2}[PH46]^T_\varphi\cdot[EGA]\cdot[F2]^{qt}_{\varphi_1\sim\varphi_2}\begin{pmatrix}1\\4\\5\\6\end{pmatrix}\cdot d\Phi\cdot\sqrt{a^2+b^2} \tag{43}$$

$$[s_3]=\int_{\Phi=\varphi_j-\varphi_2}^{\Phi=\varphi_j}[PH46]^T_\varphi\cdot[EGA]\cdot[F3]^{qt}_{\varphi_2\sim k}\begin{pmatrix}1\\4\\5\\6\end{pmatrix}\cdot d\Phi\cdot\sqrt{a^2+b^2} \tag{44}$$

其中：对于 $[F2]^{qt}_{\varphi_1\sim\varphi_2}$及 $[F3]^{qt}_{\varphi_2\sim k}$仅取第 1、4、5 及 6 四行。

由式（42）可知 j 端固端反力为：

$$[F_{1\sim6}]_j=[K_1]\cdot(-[s_2]-[s_3]) \tag{45}$$

由表 1 知 $\varphi_2\sim k$ 区间内 k 截面（$\varphi_p=0$）处的内力（即 k 端之固端反力）为：

$$[F_{7\sim12}]_k=[F]^j_{\varphi_p=0}+[F3]^{qt}_{\varphi_p=0}=[PH66]_{\Phi=\varphi_j}\cdot[F_{1\sim6}]_j+[F3]^{qt}_{\varphi_p=0} \tag{46}$$

知道 $[F_{1\sim6}]_j$ 以后，由表 1 即可求得螺杆 jk 上任一处的内力 $\{N_x,N_y,N_z,M_x,M_y,M_z\}_{\varphi_p}$。

五、位　　移

在求得 j、k 二端作用力 $[F_{1\sim6}]_j$ 和 $[F_{7\sim12}]_k$，二端位移 $[\delta_{1\sim6}]_j$ 和 $[\delta_{7\sim12}]_k$ 以及 p 处内力以后，可视隔离体（例如，pk）为一独立的新螺杆，p 被视为此新螺杆的上端，借用以前推导得的公式即可求得 p 处的位移 $[\delta]_{\varphi_p,6\times1}$。

六、对于集中荷载的处理

当螺杆上受有铅垂向集中荷载 P 及绕水平轴的集中扭矩荷载 T，求解时，可视 P 及 T 为均布于一小段上均布外荷的合力。此小段之长度由给定 φ_1 及 φ_2 来定，$(\varphi_1-\varphi_2)$可取一适当小值，例如 0.001。此时，由集中外荷折合的均布外荷，分别为 q 及 t。随后的计算即与以前诸节的一样。

七、曲　　梁

若使 $b=0$，则变为曲梁问题。

八、例　　题

设有一螺旋楼梯，其平面投影、截面尺寸、荷载等如图 7 所示。其中 $a=4$m，$b=1.67$ m/rad，A_x（截面积）$=0.6$m^2，$J_{\text{扭}}$（绕 X 轴的转动惯矩）$=0.01585$m^4，$I_y=0.2$m^4，$I_y=0.0045$m^4，$q=-2.91$T/m，$t=-0.243$T-m/m，@$=0°$。利用所编程序求得楼梯的空间刚度矩阵、内力及变形等。现仅摘录上、下端均为半铰支承的支承反力（按结构以及按局部座标）及沿全杆十等分处各截面内力（按局部座标），列于图 8。还摘录了支承位移以及跨中附近三个截面的，沿Ⓨ方向的位移值（均按结构座标），列于图 9。半铰支承以⊗来表示。

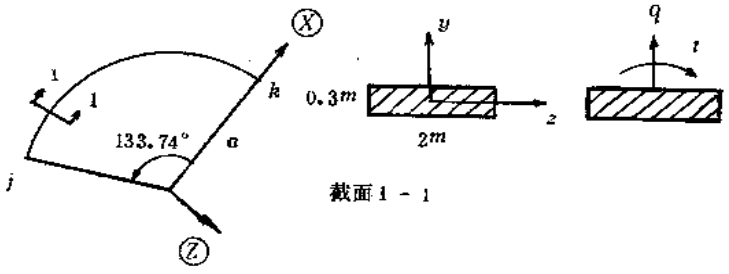


图 7

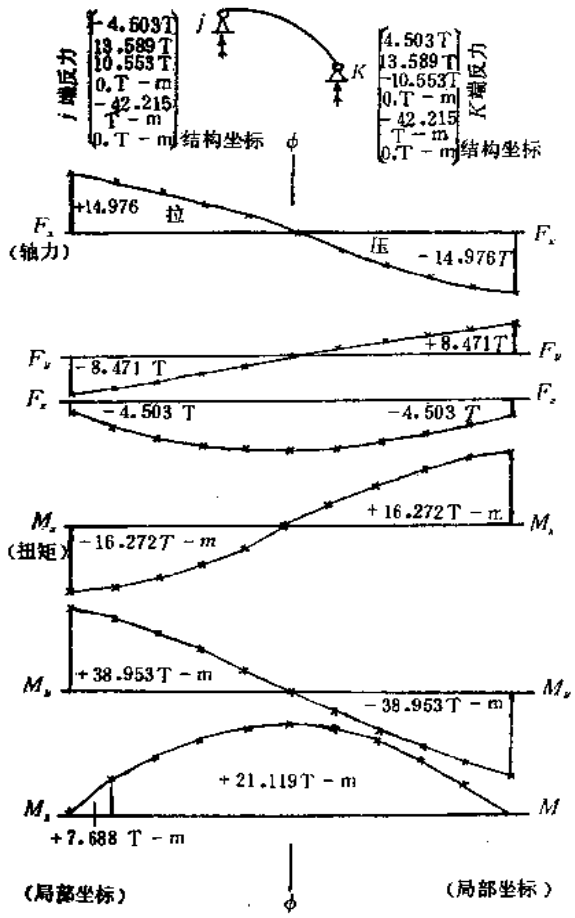


图8　支承反力（结构座标及局部座标）及截面内力（局部座标）

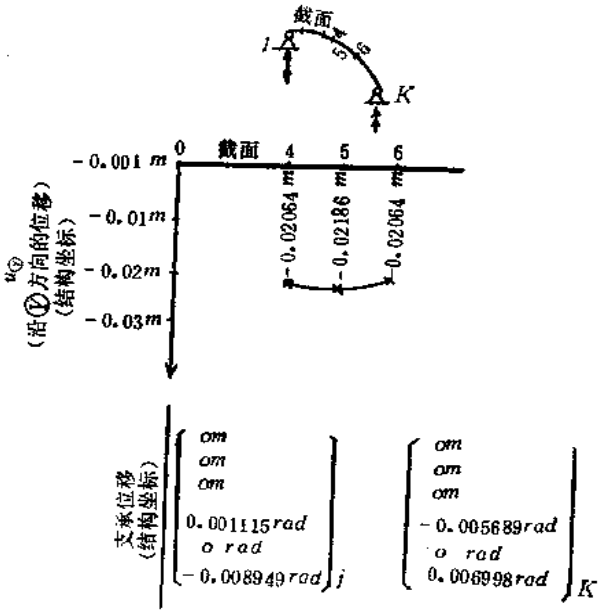


图9　支承位移及跨中附近处的位移

九、结　束　语

关于螺旋楼梯的计算，针对较简单的情形，目前虽有些手算方法及图表[2-6]，但如欲使计算精确及迅速，并能解决复杂的空间运算（例如空间框架的分析），则有必要分析其空间刚度、内力及变形，并编制相应程序。本文所编程序可做为空间分析问题中的一个子程序。

参　考　文　献

〔1〕Норден, А. П., (陈庆益译)，微分几何学，高等教育出版社（1958），19.

〔2〕Cohen, J. S., *Concerte and Consrtuctional Engineering*, **50**, 5(1955); **54**, 6, 7, 8, 9(1959).

〔3〕Santathadaporn, Sakda, and Cusens, A. R., *Concrete and Constructional Engineering*, **61**, 2(1966), 47.

〔4〕Morgan, V. A., *Concrete and Constructional Engineering*, **55**, 3(1960), 127.

〔5〕Scordelis, A. C., *J. of American Concrete Concrete Institute*, **31**, 10(1960), 1013.

〔6〕Mattock, A. H., *Concrete and Constructional Engineering*, **52**, 3(1957), 99.

加筋板大变形及过屈曲的有限元分析

常福忠　　刘玉兰
（三机部六〇五所）

一、前　　言

在横向载荷作用下的加筋薄板，当变形较大时，必须考虑其中面的应变，结构形状改变对变形的影响。这属于大变形问题。受板面内单向压缩的加筋板，一般讨论其稳定性问题。随着载荷的增加，对于飞机结构，常见的是最初为薄板失稳，但结构可继续承载，直到筋条屈曲，引起结构的总体破坏。这属于过屈曲问题。

大变形和过屈曲是几何非线性问题，解法很多。从描述平衡状态的角度，可分为总体座标系统和局部座标系统，后者称为运动座标法[6,8]。从解法角度[2,3]，可分为叠代法、增量法、势能最小化法。

对于无加筋板，多见采用增量法[7]。因为这时可将薄膜、弯曲特性分别处理。

为了处理工程中常见的筋条在板面一侧的加筋板，本文采用直接叠代法[2]。由于梁元偏心带来弯曲与薄膜特性的线性耦合，将其耦合矩阵与相应的位移矢量的乘积看成相应弯曲、薄膜等效载。同样，将弯曲对薄膜非线性耦合处理成一个等效载，忽略筋条的扭转与挠曲。从而将弯曲与薄膜方程分开，轮流、反复叠代求解，大大节省了内存和机时。

本文采用了 Bogner[10] 的保续矩形板弯元及普通梁元。不少文献指出[7]，这种板元对于稳定性与大变形分析，精度较高。板弯元的增量刚阵的形成，参考了 Yang[7,4] 的办法，将每个元素中的中面力在该元素上取平均值，从而简化了计算。

二、大变形偏心梁元

图 1 表示梁元，1′—2′ 为梁中性层，但加筋板结构上采用 1、2 节点，它们之间有一个偏心距 e。

1．无偏心梁元

选用一般梁元[1]，其广义位移矢量如图 1 所示，记为

$$\delta_0'=\{v_1,\ w_1,\ w_{y1},\ v_2,\ w_2,\ w_{y2}\}' \qquad (2\text{-}1)$$

式中 $w_{y1}=(\partial w/\partial y)_1$，其他写法类似。

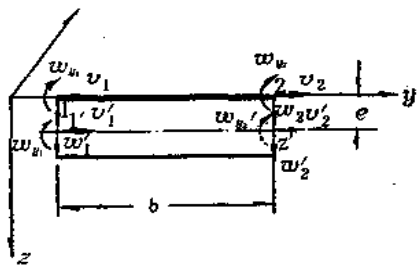


图 1

可将 δ_0' 分成薄膜与弯曲两部分

$$\delta_{0m}'=\{v_1,\ v_2\}' \qquad (2\text{-}2)$$

$$\delta'_{0b}=\{w_1,\quad w_{y1},\quad w_2,\quad w_{y2}\} \tag{2-3}$$

梁的大变形位移--应变关系式

$$\in_0=v_y-2w_{yy}+w_y^2/2 \tag{2-4}$$

记薄膜线性应变$\in_{oml}=v_y$，薄膜非线性应变$\in_{oml}=w_y^2/2$，弯曲应变$\in_{ob}=-2w_{yy}$。它们相应的应力分别为σ_0、σ_{oml}、σ_{omn}、σ_{ob}，并有$\sigma_0=E\in_0$等类似公式。其中E为弹性模量。于是梁元应变能为

$$U_0=\iiint\frac{1}{2}\sigma_y\in_0 dv \tag{2-5}$$

注意到奇函数的积分为零，同时将应变能分成三部分，它们分别为位移的二次、三次、四次函数，则

$$\left.\begin{aligned}U_{02}&=\frac{AE}{2}\int_0^b v_y^2dy+\frac{EI}{2}\int_0^b w_{yy}^2dy\\U_{03}&=A\int_0^b\sigma_{oml}\in_{omn}dy\\U_{04}&=\frac{A}{2}\int_0^b\sigma_{omn}\in_{omn}dy\end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

式中A为梁元剖面积，I为yoz平面惯性矩。

记$\boldsymbol{k}'_0$为梁元线弹刚阵，则有

$$U_{02}=\frac{1}{2}\delta_0'^T\ \boldsymbol{k}'_0\ \delta'_0 \tag{2-7}$$

为了简化计算，将应变的非线性部分$\in_{omn}$在一个单元内取平均值

$$\bar{\in}_{on}=\frac{1}{b}\int_0^b\frac{1}{2}w_y^2dy \tag{2-8}$$

由位移的离散化可知

$$w_y=\boldsymbol{B}_{0b}\delta'_{0b} \tag{2-9}$$

于是有

$$\bar{\in}_{0n}=\delta'^T_{0b}\boldsymbol{Y}_0\delta'_{0b} \tag{2-10}$$

式中

$$\boldsymbol{Y}_0=\frac{1}{2b}\int_0^b\boldsymbol{B}^T_{0b}\boldsymbol{B}_{0b}dy \tag{2-11}$$

记与非线性有关的梁轴力平均值为$\bar{F}_{0b}=AE\bar{\in}_{0n}$，将(2-10)代入(2-6)中，则有

$$U_{04}=\frac{1}{4}\delta'^T_{0b}\boldsymbol{n}_{02}\delta'_{0b} \tag{2-12}$$

式中

$$\boldsymbol{n}_{02}=2\bar{F}_{0n}b\boldsymbol{Y}_0 \tag{2-13}$$

同理，将薄膜应变的线性部分在一个梁元内取平均值

$$\bar{\in}_{0l}=\frac{1}{b}\int_0^b v_ydy \tag{2-14}$$

由位移的离散化知

$$v_y=\boldsymbol{B}_{0m}\delta'_{0m} \tag{2-15}$$

代入（2-14）于是

$$\bar{\in}_{ol}=\left[-\frac{1}{b}\quad\frac{1}{b}\right]\delta'_{0m} \tag{2-16}$$

记与线性有关的梁轴力平均值为 $\bar{F}_{ol}=AE\,\bar{\in}_{ol}$，将（2-16）代入（2-6）中，则有

$$U_{02}=\frac{1}{2}\delta'^{T}_{0b}n_{01}\delta'_{0b} \tag{2-17}$$

式中

$$n_{01}=2\bar{F}_{01}bY_0 \tag{2-18}$$

另外，为了建立薄膜的平衡方程，要将 U_{03} 写成包括 δ'_{0m} 的式子。现将 U_{03} 看成由于弯曲引起的非线性中面力 F_{0n} 所产生的薄膜等效载 $\bar{p}_{0m}$ 在薄膜位移 δ'_{0m} 上所作的功，即写成

$$U_{03}=\bar{p}^{T}_{0m}\delta'_{0m} \tag{2-19}$$

将（2.10）代入（2-6），则

$$\bar{p}_{0m}=\bar{F}_{0n}\int_0^b B^{T}_{0m}dy=\bar{F}_{0n}\{-1\quad 1\} \tag{2-20}$$

2．偏心梁元

从图 1 可见，节点 i 与 i' 之间位移关系式为 $w_i=w_{i'}$，$w_{yi}=w_{yi'}$，$v_i=v_{i'}+ew_{yi'}$ 设偏心梁广义位移为

$$\delta_0=\{v_1\quad w_1\quad w_{y1}\quad v_2\quad w_2\quad w_{y2}\} \tag{2-21}$$

记 T 为变换矩阵，则

$$\delta'_0=T\delta_0 \tag{2-22}$$

于是，偏心梁线弹刚阵为

$$k_0=T^{T}k'_0T \tag{2-23}$$

同样，将（2-21）分成弯曲与薄膜两部分，记为 δ_{0b} 和 δ_{0m}，相应地可将 k_0 分割成四块，称为弯曲、薄膜、耦合刚阵，记为 k_{0b}、k_{0m}、k_{0mb} 及 k_{0bm}，并且有 $k_{0mb}=k^{T}_{0bm}$，则

$$U_{02}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}\delta_{0b}\\ \delta_{0m}\end{Bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}k_{0b} & k_{0bm}\\ k_{0mb} & k_{0m}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_{0b}\\ \delta_{0m}\end{Bmatrix} \tag{2-24}$$

另外由于 $\delta_{0b}=\delta'_{0b}$，则

$$U_{04}=\frac{1}{4}\delta^{T}_{0b}n_{02}\delta_{0b} \tag{2-25}$$

将（2-16）中的 δ'_{0m} 代换成 δ_{0m}，则

$$\bar{\in}_{0l}=\left[-\frac{1}{b}\quad\frac{1}{b}\right]\begin{bmatrix}v_1-ew_{y1}\\ v_2-ew_{y2}\end{bmatrix} \tag{2-26}$$

$$U_{05}=\frac{1}{2}\delta^{T}_{0b}n_{01}\delta_{0b} \tag{2-27}$$

同理，（2-19）式可改写成

$$U_{03}=\bar{p}^{T}_{0m}\begin{bmatrix}v_1-ew_{y1}\\ v_1-ew_{y2}\end{bmatrix} \tag{2-28}$$

三、大变形矩形弯曲板元

矩形板元 1234 及座标系如图 2 所示。

节点广义位移矢量由弯曲与薄膜两部分组成

$$\delta=\{\delta_m\ \delta_b\} \tag{3-1}$$

它们分别为

$$\delta_m=\{u_1\ v_1\ u_2\ v_2\ u_3\ v_3\ u_4\ v_4\} \tag{3-2}$$

$$\delta_b=\{w_1\ w_{x1}\ w_{y1}\ w_{xy1}\ w_2\ w_{x2}\ w_{y2}\ w_{xy2}\ w_3\ w_{x3}\ w_{y3}\ w_{xy3}\ w_4\ w_{x4}\ w_{y4}\ w_{xy4}\} \tag{3-3}$$

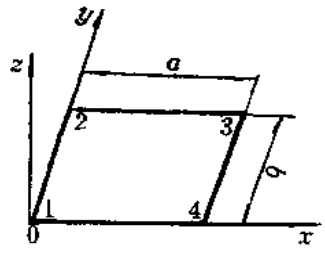


图 2

薄膜位移函数，按满足线性变化的边界位移假设，取为双线性多项式[11]。其弯曲位移函数，取双三次多项式[10]。

类似梁元的推导，将板元的应变能 U 分为弯曲变形能 U_b 和薄膜变形能 U_m，进而将后者分成位移的二次、三次、四次式，则

$$U_b=\frac{1}{2}\delta_b^T k_b \delta_b \tag{3-4}$$

$$U_{m2}=\frac{1}{2}\delta_m^T k_m \delta_m \tag{3-5}$$

式中 k_b 与 k_m 分别为板元弯曲、薄膜刚阵。

记薄膜应变线性部分在元素中平均值为 $\overline{\epsilon}_{ml}$，$\overline{F}_L$ 为单位长度上线性薄膜力，则

$$\overline{\epsilon}_{xml}=\frac{1}{2a}(-u_1-u_2+u_3+u_4)$$

$$\overline{\epsilon}_{yml}=\frac{1}{2b}(-v_1+v_2+v_3-v_4) \tag{3-6}$$

$$\overline{\epsilon}_{xyml}=\frac{1}{2b}(-u_1+u_2+u_3-u_4)+\frac{1}{2a}(-v_1-v_2+v_3+v_4)$$

令

$$\mathbf{R1}=\overline{F}_{xL}\boldsymbol{C1}+\overline{F}_{yL}\boldsymbol{C2}+\overline{F}_{xyL}\boldsymbol{C3} \tag{3-7}$$

则

$$U_{m3}=\frac{1}{2}\delta_b^T \mathbf{R1}\delta_b \tag{3-8}$$

另外，记 $\epsilon_{ml}=B_m\delta_m$，则

$$U_{m3}=\overline{p}_m^T\delta_m \tag{3-9}$$

式中

$$\overline{p}_m=\left[\iint B_m^T dA\right]\overline{F}_{mn} \tag{3-10}$$

记 $w_x=N_{bx}\delta_b$，$w_y=N_{by}\delta_b$，$\overline{\epsilon}_{mn}$ 为应变能非线性部分在元素中的平均值，$\overline{F}_n$ 为单位长度上非线性薄膜力，则

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon}_{xmn}&=\delta_b^T X\delta_b\\ \overline{\epsilon}_{ymn}&=\delta_b^T Y\delta_b\\ \overline{\tau}_{xymn}&=\delta_b^T Z\delta_b\end{aligned} \tag{3-11}$$

式中

$$X=\frac{1}{2ab}\iint N_{bx}^T N_{bx}dA$$

$$Y=\frac{1}{2ab}\iint N_{by}^T N_{by}dA \tag{3-12}$$

$$Z=\frac{1}{ab}\iint \boldsymbol{N}_{bx}^{T}\boldsymbol{N}_{by}dA$$

记 $\boldsymbol{C1}=2ab\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{C2}=2ab\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{C3}=ab(\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}^{T})$，且

$$\boldsymbol{n2}=F_{xn}\boldsymbol{C1}+F_{yn}\boldsymbol{C2}+F_{xyn}\boldsymbol{C3} \tag{3-13}$$

则

$$U_{m4}=\frac{1}{4}\delta_{b}^{T}\boldsymbol{n2}\delta_{b} \tag{3-14}$$

四、组　　装

令结构的节点位移矢量为 $\boldsymbol{d}$，分成薄膜与弯曲两部分 $\boldsymbol{d}_m$，$\boldsymbol{d}_b$，以 Σ 表示对全部元件求和，则结构的总应变能 U 为

$$U=\Sigma(U+U_0) \tag{4-1}$$

上述求和，实际上是将元件的有关矩阵，矢量叠加成结构的薄膜刚阵 $\boldsymbol{k}_m$、弯曲刚阵 $\boldsymbol{k}_b$、耦合刚阵 $\boldsymbol{k}_{mb}$、一阶非线性刚阵 $\boldsymbol{N1}$、二阶非线性刚阵 $\boldsymbol{N2}$，薄膜非线性等效载 $\overline{\boldsymbol{P}}_m$。

同样，结构的应变能分成位移的二次、三次、四次函数，即

$$U=U_2+U_3+U_4 \tag{4-2}$$

则

$$U_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_m\\ \boldsymbol{d}_b\end{bmatrix}^{T}\begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_m & \boldsymbol{k}_{mb}\\ \boldsymbol{k}_{mb}^{T} & \boldsymbol{k}_b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_m\\ \boldsymbol{d}_b\end{bmatrix} \tag{4-3}$$

$$U_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}_b^{T}\boldsymbol{N1}\boldsymbol{d}_b=\overline{\boldsymbol{p}}_m^{T}\boldsymbol{d}_m \tag{4-4}$$

$$U_4=\frac{1}{4}\boldsymbol{d}_b^{T}\boldsymbol{N2}\boldsymbol{d}_b \tag{4-5}$$

注意 $\boldsymbol{N1}$ 是 $\boldsymbol{d}_m$ 的一次函数，$\boldsymbol{N2}$ 是 $\boldsymbol{d}_b$ 的二次函数，$\overline{\boldsymbol{P}}_m$ 是 $\boldsymbol{d}_b$ 的三次函数。

五、非线性平衡方程

结构的总势能

$$\Pi=U-\boldsymbol{P}^{T}\boldsymbol{d} \tag{5-1}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 为结构广义力矢量，可分解为

$$\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{P}_b\ \boldsymbol{P}_m\} \tag{5-2}$$

由势能最小原理求得非线性平衡方程为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{k}_b+\boldsymbol{N1}+\boldsymbol{N2} & \boldsymbol{k}_{mb}^{T}\\ \boldsymbol{k}_{mb} & \boldsymbol{k}_m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{d}_b\\ \boldsymbol{d}_m\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_b\\ -\overline{\boldsymbol{P}}_m+\boldsymbol{P}_m\end{bmatrix} \tag{5-3}$$

六、载 荷 的 移 置

板元上均布横向压力 p 所对应的节点等效载荷为[10]

$$\boldsymbol{p}_b=(\overline{p}\ \frac{a}{6}\overline{p}\ \ \frac{b}{6}\overline{p}\ \ -\frac{ab}{36}\overline{p}\ \ \overline{p}\ \ \frac{a}{6}\overline{p}\ \ -\frac{b}{6}\overline{p}\ \ -\frac{ab}{36}\overline{p}$$

$$\overline{p} \quad -\frac{a}{6}\overline{p} \quad -\frac{b}{6}\overline{p} \quad \frac{ab}{36}\overline{p} \quad \overline{p} \quad -\frac{a}{6}\overline{p} \quad \frac{b}{6}\overline{p} \quad -\frac{ab}{36}\overline{p}\} \tag{6-1}$$

式中 $\overline{p}=abp/4$。

七、迭 代 公 式

1．大变形分析

板面内载荷 $P_m=0$，故叠代公式写成

$$[k_b+N1^{n-1}+N2^{(n-1)}]d_b^{(n)}=p_b-k_{bm}d_m^{(n-1)} \tag{7-1}$$

$$k_m d_m^{(n)}=-k_{bm}^T d_b^{n)}-P_m^{(n)} \tag{7-2}$$

由于 k_{bm} 的规律性，我们直接生成 $k_{bm}d_m$ 和 $k_{bm}^T d_b$，以节省内存。

将（7-1），（7-2）轮流求解，直到两次位移差值小于预先给定的控制精度要求。为了防止发散，将载荷分成若干级，将前一级的位移解作为下一级的位移初值进行叠代。为了加快收敛速度，将叠代过程中两次位移值取平均值作为下一次叠代的初值，取得了很好的效果。

2．过屈曲分析

叠代公式为

$$[k_b+N2^{n-1}]d_b^{(n)}=p_b-N1^{n}d_b^{(n-1}} \tag{7-3}$$

$$k_m d_m^{n}=p_m+p^{n-1)} \tag{7-4}$$

但过屈曲时，已知板两端压缩量，而外载荷待求，故要特殊处理，将薄膜位移分成两部分，记 d_{m1} 为已知压缩量的那些位移，即 $d_{m1}=\Delta$，d_{m2} 为其他位移。由于 $p_{m2}=0$，由薄膜方程的分割可知

$$d_{m2}=-k_{m1}^{-1}k_{m12}^T\cdot\Delta-k_{m1}^{-1}\bar{p}_{m2} \tag{7-5}$$

进而求得压缩边上载荷矢量

$$p_{m1}=k_{m11}\Delta+k_{m12}d_{m2}\bar{p}_{m1} \tag{7-6}$$

式中 p_b 为摄动力，控制初屈曲波形。

八、计算结果及分析

1．均布载荷下四边简支方板大变形分析

取边长 $l=12.4$cm，板厚 $h=0.18$cm，$\in=7.2\times10^6$kg/cm^2，$\nu=0.316228$，设 w_0 为板中心挠度，p 为均布压力。记 $\xi=w_0/h$，$p^*=pl^4/(Eh^4)$。

表1，图3，4给出本文计算的挠度与 Wang[11] 的差分解，Levy 的级数解、Way 的能量法解、加州理工学院的实验结果[11]、沃尔密尔[9]的一级近似的对比。可以看出，我们的结果靠近更精确的解[9]。

表1，图5，6，7给出了本文计算的应力与文献[9]的对比，我们的结果也靠近更精确解。表中应力下标“o”表示板中心，“2”表示板角点，且 $\sigma^*=\frac{\sigma}{E}\left(\frac{l}{h}\right)^2$

表 1

载荷级数	p^*	本文计算结果				文献〔9〕一级近似		
		ξ	w_{0m}^*	σ_{0b}^*	τ_{zb}^*	ξ	σ_{0m}^*	σ_{0b}^*
1	12.5	0.43	0.61	2.78	−1.92	0.42	0.53	3.01
2	18.8	0.56	1.08	3.54	−2.21	0.55	0.92	3.97
3	31.2	0.74	1.92	4.46	−3.72	0.74	1.67	5.36
4	62.5	1.03	3.68	5.76	−5.68	1.05	3.34	7.56
5	125.1	1.37	6.50	7.02	−8.50	1.41	6.07	10.20
6	187.7	1.58	8.85	7.90	−10.69	1.66	8.38	11.90
7	250.2	1.75	10.92	8.55	−12.56	1.85	10.45	13.39
8	312.8	1.89	12.81	9.09	−14.23	2.02	12.36	14.56

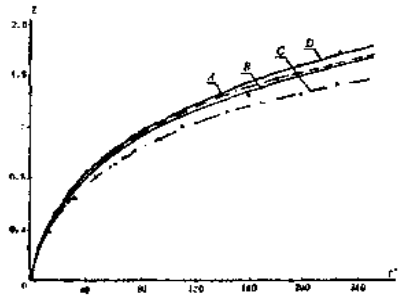


图 3

A—Levy 计算结果　*B*—本文计算结果
C—Wang 计算结果　*D*—沃耳密尔计算结果
"0" 加州理工学院实验结果

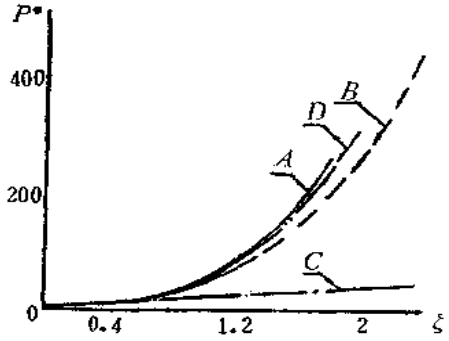


图 4

A—更精确解　*B*—第一级近似
C—线性理论解　*D*—本文计算结果

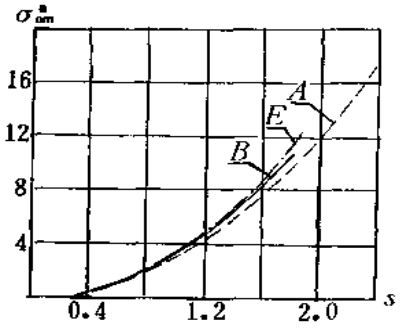


图 5

A—第一级近似　*B*—更精确解
E—本文计算结果

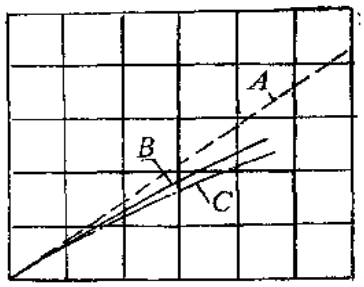


图 6

A—第一级近似　*B*—更精确解
C—本文计算结果

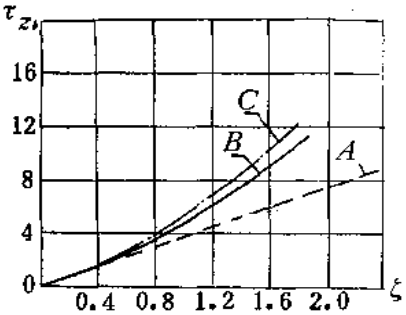


图 7

A—第一级近似　*B*—更精确解
C—本文计算结果

同时，当取 $p=10\text{kg/cm}^2$ 时，不同粗细网格划分，其中 4×4 与 10×10 的网格之间 w_0 仅差 0.8%，说明本文采用的简化方法是可行的。

2．加筋板的大变形分析

模型 $M1$-1 如图 8 所示，AB、CD 分别为筋条，$I=5.189\text{cm}^4$，$A=2.754\text{cm}^2$，$e=1.479\text{cm}$，板长 50cm，宽 12cm，厚 0.15cm，梁板材料同前。$p=7\text{kg/cm}^2$，网格划分如图，两短边简支。

我们与之对比的《苏联飞机设计师手册》上采用的办法是，由角的平分线，将板分成四块，近似认为每块板上的压力由相应的边承担。

（1）梁的大变形影响　模型 $M1$-1a 中，梁按小变形理论，$M1$-1b 中，梁按大变形理论，但仅计入三次应变能，$M1$-1c 中，梁完全按大变形理论。

图 9 表示 $M1$-1c 与常规计算外切力的分布。

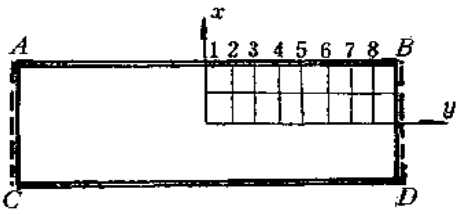


图 8

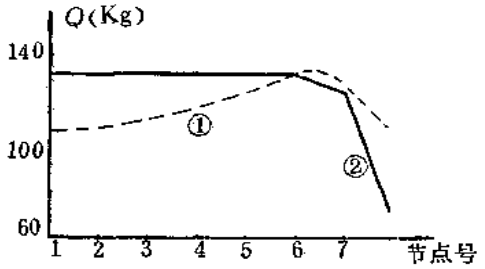


图 9

① 有限元法结果　② 常规计算结果

梁中点的最大应力（kg/cm^2）$M1$-1a 为 4962.9，$M1$-1b 为 3060.8，$M1$-1c 为 3030.3。

可见，由于梁的变形相对梁高度而言是个小量，故可不计梁变形对平衡方程的影响（应变能中位移的四次项）。但梁中面力大，必须计入对弯曲的影响（应变能中三次项）。

（2）梁不同弯曲刚度时的弹性减载　图 10 给出不同 I 值与梁中点外切 Q 力之关系，虚线是外推的。可见 $I\to\infty$ 时，梁 Q 将达到常规计算结果。

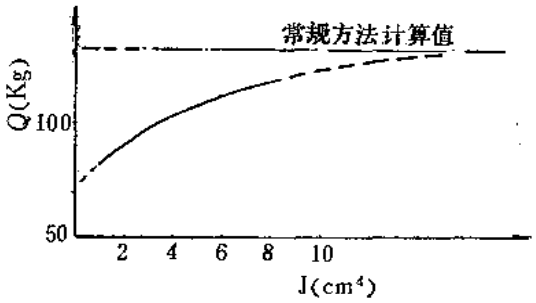


图 10

（3）连续加筋板大变形分析　对比三种情况：$M1$-1，单跨，前已说明。$M3$，双跨，多出的一跨不受外力。$M4$，三跨，多出的两跨不受力。

在受载一跨梁中点处最大应力：$M1$-1 中为 3030.3；$M3$ 中为 1957.9；$M4$ 中为 1891.7。可见两跨比单跨应力下降 35.4%，三跨比单跨下降 37.6%。按材料力学，仅计算一根梁，则两跨比单跨下降 25%。三跨比单跨下降 26.7%。可见加筋板的多跨弹性影响更为明显。

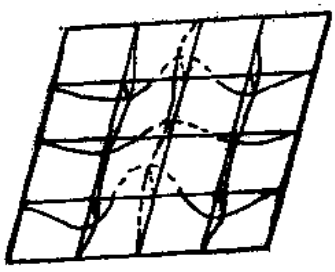


图 11

3．周边铰支方板过屈曲

常规计算按一级近似[9]，取正弦屈曲波形，有限元计算中，从第三级位移起，正弦波变成两个方向三个半波，如图 11 所示。

计算结果表明，在中等载荷 5000～25000kg 时，两种

方法结果较为接近，在高载荷下，有限元法结果显出更明显的非线性。

九、结　　论

1．我们用算法语言编制直接叠代法程序，由于有数据自动生成部分，手工量小，效率较高。以方板 8×8 网格为例，计算 6 站到 7 个大气压，用 20 分钟，包括打印时间。光板的大变形与过屈曲结果与经典解相当一致。

2．对于加筋板大变形分析，计算占用一台鼓，结果合理，比“苏联飞机设计师手册”上推荐的水机船底计算方法有较大改进。

3．对于加筋板的过屈曲，仅算出结果，缺乏试验检验，有待于进一步分析。

4．从方法的角度，我们采用过直接叠代法、增量法、自修正增量法、势能最小化法解大变形问题，从工程精度要求，计算时间，对算机容量要求（在中小型计算机上解决水机船底应力分析问题），处理筋条带偏心的困难这几个方面来看，直接叠代法似乎更为优越。

本文基本公式部分承中国科技大学黄茂光教授审阅，特表谢意。全部计算在宏光厂 TQ-16 机上完成。参加本项工作的还有吴有金、孙玉祥、黄宏文、董波。

参　考　文　献

〔1〕普齐米尼斯基，J. S.，矩阵结构分析理论，王德荣等译校，国防工业出版社（1974）。

〔2〕Mallelt, R. H.,*Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **94**, *ST*9(1968), 2081.

〔3〕Murray, D. W.,*J. Struc. Div. ASCE*. ST12 (1973),2423.

〔4〕Yang, H. T. Y.,*J*, S*truc. Div. ASCE*, **96**, ST10(1970), 2083.

〔5〕华东水利学院，弹性力学问题的有限单元法，水利电力出版社（1974）。

〔6〕Murray, D. W., *J. Eng. Mcuh. Div ASCE*, **95**, EM1 (1969), 143.

〔7〕yang, H. T. *Y.,I. J. N.* M *in Eng.*, **4**(1972),415.

〔8〕Murray, D. W., *AIAAJ*, **7**,10(1969).

〔9〕A. C. 沃耳密尔，柔韧板与柔韧壳，科学出版社（1963）。

〔10〕Bogner, F. K.,Proceedures of conference on matrix methods *in* structural mechanics, Wrigh Paherson AF Base, Ohio, Oct. (1965), 397.

〔11〕Wang Chi-teh, NACA, IN , 1425(1948).

岩体弹塑性问题的有限单元法

王德厚　黄自成
（长沙水利水电科学院）

水利水电建设中遇到的岩石力学问题是多种多样的，如大坝基岩抗滑稳定问题、边坡稳定问题、地下洞室的围岩稳定分析等。随着计算技术的不断发展，有限单元法已经成为研究这一类问题的有力工具。然而，由于岩体结构和变形特性的复杂性，用弹性的有限元法已不能很好地解决此类问题。因此，R. E. Goodman 等人提出无拉应力分析及层状材料的压剪破坏分析方法[1,2]，但因未考虑弹性极限后的变形规律，因而出现一些不合理的结果[3]。根据岩体的变形规律，使用弹塑性分析的有限单元法，可以模拟不同形式的岩体结构及其力学边界条件，比较正确地反映岩体复杂的变形特性，快速提供应力、位移及破坏等方面的资料，从而对岩体的破坏形式作出明确的判断。

应用有限元法进行弹塑性分析，基础是单元的非线性力学特性。本文根据岩基试验资料，从岩体的结构特点出发，分析了岩体在不同受力状态下的变形特性和强度特性。针对岩体结构面和结构体的不同特点提出简单实用的计算模型，使用弹塑性增量理论，建立了应力-应变关系，并推导出相应的弹塑性矩阵。其中锥帽强化模型是根据米勒（T. W. Miller）的试验资料设计的[4]。由于屈服面主要的两部分皆为圆锥面，容易拟合，弹塑性矩阵也具有相近的形式，便于编制计算程序。

一、计算模型的建立

从工程角度和岩石的整体结构来看，可以把岩体分为两部分，一部分是对岩体稳定具有较大影响的软弱夹层、断层、破碎带等一类介质，统称为软弱结构面，另一部分是除此以外的岩块，称为结构体。由于两者的变形机理和破坏形式各不相同，因此，分别建立计算模型。

1．结构面的计算模型　结构面的特点是强度比一般岩块低，受压时发生明显的压缩变形。沿结构面法向受拉时，夹层易被张裂破坏，沿切向受剪时极易出现较大的剪切变形。从岩基试验提出的软弱夹层剪应力-剪位移曲线来看[5]（图1），夹层材料受压剪时具有典型的塑性变形特征。本文采用莫尔-库仑包络作为剪切强度准则，并把它作为屈服条件使用。由于目前试验水平所限，有些岩基资料难于取得，屈服函数简化为以下三部分（图2）组成

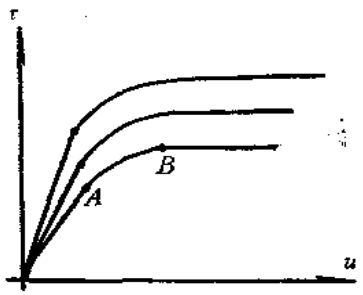


图 1

$$F_1 = f\sigma_n + \tau_n - c = 0, \quad (\sigma_n < 0,\ \tau_n > 0)$$

$$F_2=f\sigma_n-\tau_n-c=0, \qquad (\sigma^n<0,\ \tau_n<0)$$

$$F_3=\sigma_n=0$$

式中 c 为粘结力；f 为摩擦系数；σ_n、τ_n 为层面法向和切向应力（正应力以拉为正）。

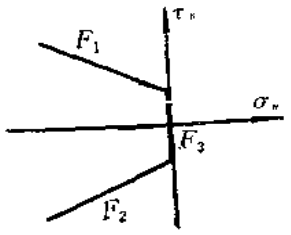




图 2

2．结构体的计算模型 结构体因其构造特征不同也呈现不同的力学性质。一般认为岩块的强度仍受莫尔-库仑包络面控制，以往的研究也只限于把莫尔-库仑面作为唯一的屈服面来讨论。试验证明，这一结论只有在低、中压力下才是正确的。与金属不同，岩体在高侧限压力下可以发生屈服，并发生塑性体积收缩。而在莫尔-库仑准则基础上使用塑性增量理论算出的岩体体积变形，只能是膨胀，不会是收缩。因此岩体屈服条件除了受莫尔-库仑准则控制外，还应加一个“帽盖”。试验完全证实了“帽盖”的存在及其强化特征。

莫尔-库仑面主应力空间是一个有棱脊的锥面，不便使用。Drucker 采用上述锥面的内切圆锥面作为屈服面[6]，它的三维形式是

$$F_1=A_0J_1+\sqrt{J_2'}-B_0=0 \qquad (1)$$

式中的 A_0、B_0 是屈服参数；J_1 是第一应力不变量；J_2' 是应力偏量的第二不变量。在主应力空间，F_1 是以空间对角线为轴的旋转圆锥面。岩体应力达到 F_1 后，即发生不稳定破坏。因此不考虑强化。设 φ 为岩体的内摩擦角，在刚塑性假设下可得

$$A_0=\frac{\mathrm{tg}\varphi}{(9+12\mathrm{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}, \qquad B_0=\frac{3c}{(9+12\mathrm{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2)$$

岩体在高侧压力下发生稳定性破坏，呈帽状强化。根据米勒的研究，岩体的初始屈服面与强化屈服面可以表现成图 3 所示的简化图象[4]。它以库仑面为界沿空间对角线移动。

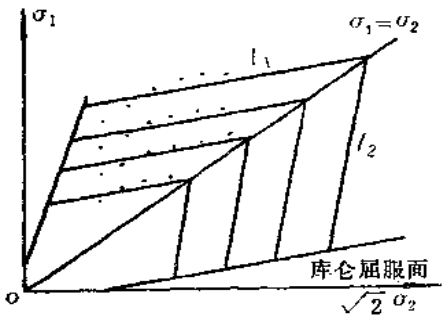


图 3

在主应力空间中，库仑屈服面用 Drucko 圆锥面模拟，同样可用另一组圆锥面来表现强化帽。其区别是库仑圆锥面是属于上支锥面类型，而强化帽属于下支锥面的类型。根据这一特点可以得到强化圆锥面的三维形式是

$$F_2=A_1J_1-\sqrt{J_2'}+B_1=0 \qquad (3)$$

强化帽这一表达式是本文给出的。为了统一屈服判别条件，上式也可写成

$$F_2=-A_1J_1+\sqrt{J_2'}-B_1=0 \qquad (4)$$

由图 3 知强化帽在空间应力平面的方程可写为

$$\left.\begin{aligned} l_1:&\quad \sigma_2-\sigma_1=\alpha\sigma_2-\beta \quad (\sigma_1>\sigma_2)\\ l_2:&\quad \sigma_2-\sigma_1=\alpha\sigma_1-\beta \quad (\sigma_2>\sigma_1)\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

式中 α，β 为强化参数，并假定为塑性体积应变的线性函数：

$$\alpha=\alpha_0+\alpha_1\in_p, \qquad \beta=\beta_0+\beta_1\in_p \qquad (6)$$

其中 α_0，β_0，α_1，β_1 为材料常数，由试验给出[4]。由此可确定

$$A_1=\frac{\alpha}{3(3-\alpha)},\qquad B_1=\frac{\beta}{3-\alpha},\qquad (0<\alpha<3) \tag{7}$$

实际上只要改变 A_1，B_1 中的参数，可以得到不同顶角，不同位置的圆锥面来近似拟合各种不同形状的凸强化帽。

以上所述是岩石受压时的屈服强化特性，当岩石处于受拉状态时，Drucker-Prager 圆锥面的拉应力部分不能很好地表现其强度特点。为了把岩石的拉应力强度也归纳到锥面模型中去，并考虑到工程上常用单轴抗拉强度作为拉应力控制条件，在主应力空间的三个主轴上，分别找出单轴抗拉强度的位置(A，B，C)，过此三点作一平面 S，则锥面 F_1 被 S 截去了锥顶，成为一个有底的锥面（图 4）。如果在三个主轴上取相同的抗拉强度值 $[\sigma_0]$，则截面 S 垂直于空间对角线。设交点为 P，平面 S 的方程为

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=[\sigma_0]/\sqrt{3} \tag{8}$$

此时这个有底锥面既可以反映岩石受压剪时的强度特性，也近似的反映了岩石受拉时的强度特性。

综合上述，对结构体本文采用的屈服函数是一组圆锥面，它由三部分组成：

1．在低、中等压力下是Drucker-Prager 圆锥面或称莫尔-库仑圆锥面：

$$F_1(J_1,\ J_2')=A_0J_1+\sqrt{J_2'}-B_0=0$$

2．在高侧压下是强化圆锥帽：

$$F_2(J_1,\ J_2',\ \in_p)=-A_1J_1+\sqrt{J_2'}-B_1=0;$$

3．受拉时取 $F_3(J_1)=J_1-[\sigma_0]/\sqrt{3}=0$ 为抗拉强度面。

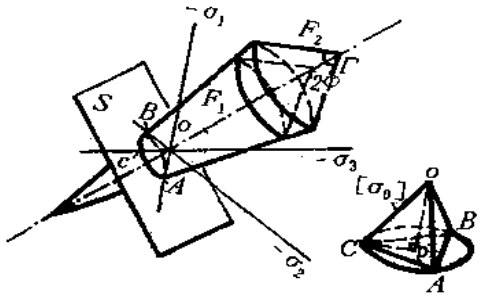


图 4

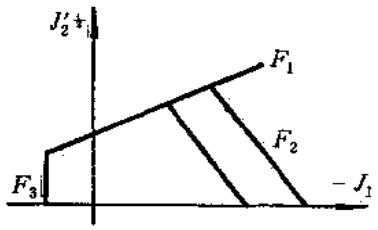


图 5

在 $-J_1\sim\sqrt{J_2'}$ 平面上，屈服函数的图象如图 5 所示。

二、应力应变关系和弹塑性矩阵

五十年代初，D. Drucker 研究土力学的塑性问题，证明在应变强化时，如果取屈服函数作为塑性位势函数，使用正交原则建立增量型的应力应变关系（即联系的或关联的流动法则），其静力学问题及某些动力学问题的解是唯一的[6,7]。有限单元法用于解弹塑性问题之后，O. C. Zinkiewiz 等人导出了联系流动法则应力应变关系中弹塑性矩阵的一般表达式[2,5]。最近文献〔3〕又提出了岩土一类材料在考虑应变强化、软化、弹塑性耦合、非关

联时的本构关系式。本文根据上节建立的计算模型，使用联系流动法则，给出平面应变问题的各弹塑性矩阵。

设全应变增量 $\{d\varepsilon\}$ 可以分为两部分

$$\{d\varepsilon\}=\{d\varepsilon_e\}+\{d\varepsilon_p\} \tag{9}$$

式中 $\{d\varepsilon_p\}$ 为应变增量中塑性部分；$\{d\varepsilon_e\}$ 为弹性部分：

$$\{d\varepsilon_e\}=[D]^{-1}\{d\sigma\} \tag{10}$$

$\{d\sigma\}$ 为应力增量，$[D]^{-1}$ 为弹性矩阵的逆阵

$$[D]=m\begin{bmatrix}1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0\\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix},\qquad m=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-\mu)} \tag{11}$$

若屈服函数为 $F(\{\sigma\},\ \varepsilon_p)=0$，由联系流动法则得

$$\{d\varepsilon_p\}=d\lambda\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}} \tag{12}$$

$d\lambda$ 为待定常数。设增量型的应力应变关系用下式表示

$$\{d\sigma\}=[D_{ep}]\{d\varepsilon\} \tag{13}$$

$[D_{ep}]$ 为弹塑性矩阵　　$[D_{ep}]=[D]-[D_p]$ (14)

$$[D_p]=[D]\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T[D]/(A+B) \tag{15}$$

为塑性矩阵。式中

$$A=-\frac{\partial F}{\partial\varepsilon_p}\cdot d\varepsilon_p\cdot\frac{1}{d\lambda},\qquad B=\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}[D]\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T \tag{16}$$

如果屈服面由分片光滑的若干正则屈服面交成，则交线处的弹塑性矩阵由各交面决定[3]。

1．结构面材料　若加载点落在 F_1 或 F_2 上，则

$$[D_p]=\frac{m^2f^2}{(A+B)(1-\mu)^2}\begin{bmatrix}\mu^2 & \text{对} & \\ (1-\mu)\mu & (1-\mu)^2 & \text{称}\\ \mu Q & (1-\mu)Q & \frac{(1-2\mu)^2}{4f^2}\end{bmatrix} \tag{17}$$

式中，$B=m\left(f^2+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\right)$，$Q=\pm\frac{1-2\mu}{2f}$，（$\tau_n>0$ 取正号，$\tau_n<0$ 取负号），不考虑强化时 $A=0$。

若加载点落在 F_3 上，此时 $F_1<0$，$F_2<0$，夹层被拉开。

$$[D_p]=\frac{\mu m}{1-\mu}\begin{bmatrix}\frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0\\ 1 & \frac{1-\mu}{\mu} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{18}$$

若加载点落在屈服面的奇点上，即 $F_1=F_3=0$ 或 $F_2=F_3=0$，材料仍处于塑性状态，需作特殊处理

$$[D_p]=m\begin{bmatrix}\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0\\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix} \tag{19}$$

利用式（14）可求得 $[D_{ep}]$。

2．结构体材料 若加载点落在 Drucker 圆锥面上，不考虑强化 $A=0$，$B=9A_0^2K+C$，其中 $K=\dfrac{E}{3(1-\mu)}$。

$$[D_{ep}]=\begin{bmatrix}D_{11} & & \text{对} & \\ D_{21} & D_{22} & & \text{称}\\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & \end{bmatrix} \tag{20}$$

式中

$D_{11}=2G(1-h_2-2h_1\sigma_x-h_3\sigma_x^2)$，　$D_{22}=2G(1-h_2-2h_1\sigma_y-h_3\sigma_y^2)$

$D_{33}=2G(0.5-h_3\tau_{xy}^2)$，　$D_{21}=-2G(h_2+h_1(\sigma_x+\sigma_y)+h_3\sigma_x\sigma_y)$

$D_{31}=-2G(h_1+h_3\sigma_x)\tau_{xy}$，　$D_{32}=-2G(h_1+h_3\sigma_y)\tau_{xy}$

$G=E/2(1+\mu)$

$$h_1=\frac{\dfrac{3KA_0}{2G}-\dfrac{J_1}{6J_2'^{1/2}}}{J_2'^{1/2}\left(1+9A_0^2\dfrac{K}{G}\right)} \tag{21-1}$$

$$h_2=\frac{\dfrac{9KA_0^2}{2G}-\dfrac{KA_0}{G}\cdot J_1\cdot J_2'^{-1/2}+\dfrac{J_1^2}{18J_2'}}{\left(1+9A_0^2\dfrac{K}{G}\right)}-\frac{\mu}{1-2\mu} \tag{21-2}$$

$$h_3=\frac{1}{2J_2'\left(1+9A_0^2\dfrac{K}{G}\right)} \tag{21-3}$$

当加载点落在强化圆锥面 F_2 上时，弹塑性矩阵与上述结果具有相似的形式，不同的是考虑了强化参数的影响，给出 h_1，h_2，h_3 的另一种形式

$$h_1=-\frac{\dfrac{3KA_1}{2G}+\dfrac{J_1}{6J_2'^{1/2}}}{J_2'^{1/2}\left(1+9A_1^2\cdot\dfrac{K}{G}+\dfrac{A}{G}\right)} \tag{22-1}$$

$$h_2=\frac{\dfrac{9KA_1^2}{2G}+\dfrac{KA_1}{G}\cdot J_1J_2'^{1/2}+\dfrac{J_1^2}{18J_2'}}{1+9A_1^2\cdot\dfrac{K}{G}+\dfrac{A}{G}}-\frac{\mu}{1-2\mu} \tag{22-2}$$

$$h_3=\frac{1}{2J_2'\left(1+9A_1^2\cdot\frac{K}{G}+\frac{A}{G}\right)} \tag{22-3}$$

其中 $$A_1=\frac{\alpha}{\sqrt{3}\,(3-\alpha)},\qquad A=-\frac{3\alpha[\alpha_1(\beta+J_1)+\beta(3-\alpha)]}{(3-\alpha)^3}$$

加载点落在二锥面交线上时

$$h_1=\frac{1}{C_0J_2'^{1/2}}\left[3KAA_0-\frac{AGJ_1+9GK(A_0+A_1)^2}{3J_2'^{1/2}}\right] \tag{23-1}$$

$$h_2=\frac{1}{C_0}\left[9K\left(\frac{K}{2}+2G\right)(A_0+A_1)^2+\frac{1}{2G}\left(3K\alpha-\frac{GJ_1}{3J_2'^{\frac{1}{2}}}\right)^2A\right]-\frac{\mu}{1-2\mu} \tag{23-2}$$

$$h_3=\frac{G}{C_0J_2'}[A+9K(A_0+A_1)^2] \tag{23-3}$$

式中 $$C_0=(9KA_0^2+G)(9KA_1^2+A+G)-(9KA_0A_1-G)^2$$

若加载点落在抗拉强度面 F_3 上时，

$$[D_{ep}]=\frac{m}{2(1-\mu)^2}\begin{pmatrix}2(1-\mu)^2-1 & 2\mu(1-\mu)-1 & 0\\ 2\mu(1-\mu)-1 & 2(1-\mu)^2-1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{24}$$

若加载点落在抗拉面与 Drucker圆锥面交线上时，也可求得弹塑性矩阵 $[D_{ep}]$。

$$[D^p]=\frac{m}{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}\begin{pmatrix}(\sigma_x-\sigma_y)^2+\frac{2\tau_{xy}^2}{1-\mu} & & \\ \frac{(\sigma_x-\sigma_y)^2}{1-\mu}-2\tau_{xy}^2 & (\sigma_x-\sigma_y)^2+\frac{2\tau_{xy}^2}{1-\mu} & \\ \frac{1-2\mu}{1-\mu}(\sigma_x-\sigma_y)\tau_{xy} & -\frac{1-2\mu}{1-\mu}(\sigma_x-\sigma_y)\tau_{xy} & \frac{2(1-2\mu)}{1-\mu}\tau_{xy}^2\end{pmatrix} \tag{25}$$

三、计算方法及算例

根据弹塑性的特点，本文采用增量型的常刚度“初应力法”；单元弹塑性状态的判别在应变空间中进行；解方程组采用改进的平方根法。并在 DJS-6 机上编制了平面问题的非线性程序。

增量分析方法是把总荷载 $\{R\}$ 分为 M 段施加，设第 i 级荷载为

$$\{R_i\}=\{R_0\}+\sum_{k=1}^{i}\{\Delta R_k\} \tag{26}$$

式中 $\{R_0\}$ 为初始平衡状态的荷载。若结构在 i 级荷载作用下的节点位移已经确定记为 $\{\delta_i\}$，单元应力为 $\{\sigma_i\}$，应变为 $\{\varepsilon_i\}$，塑性体积应变为 $\in_i^p$。设在此基础上再加一个增量荷载 $\{\Delta R_{i+1}\}$，使某一单元进入塑性状态，则有式（13）增量型的应力应变关系。根据小变形假设并使用变分原理，可得单元的有限元平衡方程

$$[K_{ep}]_e\{\Delta\delta\}_e=\{\Delta r\}_e \tag{27}$$

式中 $[K_{ep}]_e$ 为弹塑性状态下的单元刚度矩阵。对于常应变的三角形单元有

$$[K_{ep}]_e=[K]_e-[K_p]_e \tag{28}$$

式中 $[K]_e=[B]^T[D][B]St$；$[K_p]=[B]^T[D_p][B]St$；$[B]$ 为应变矩阵；S 为单元面积；t 为厚度。

叠加单元刚度矩阵，可得总刚度矩阵 $[K_{ep}]$。于是有

$$[K_{ep}]\{\Delta\delta\}=\{\Delta R\}$$

或

$$([K]-[K_p])\{\Delta\delta\}=\{\Delta R\} \tag{29}$$

在弹塑性状态下，$\{\Delta\delta\}=\{\Delta\delta_e\}+\{\Delta\delta_p\}$ 代入式（29），由于 $[K]\{\Delta\delta_e\}=\{\Delta R\}$，整理后得

$$[K]\{\Delta\delta_p\}=[K_p](\{\Delta\delta_e\}+\{\Delta\delta_p\}) \tag{30}$$

用叠代法求得满足式（30）的 $\{\Delta\delta_p\}$，即可求得弹塑性位移增量 $\{\Delta\delta\}$。使用的叠代公式为

$$\left.\begin{aligned}&[K]\{\Delta\delta\}_{j+1}^{(p)}=\{\Delta Q\}_{j+1}\\&\{\Delta Q\}_{j+1}=[K_p](\{\Delta\delta\}_j^{(e)}+\{\Delta\delta\}_j^{(p)})=[K]\{\Delta\delta\}_j^{(p)}\\&\{\Delta\delta\}_{i,j+1}=\{\Delta\delta\}_i^{(e)}+\sum_{k=1}^{j+1}\{\Delta\delta\}_k^{(p)}\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

这里 i 表示第 i 级荷载或施加了第 i 次荷载增量，j 表示第 j 次调整。对每级荷载增量进行上述叠代过程，分别求得在弹塑性状态下的各级位移增量 $\{\Delta\delta\}$，应变增量 $\{\Delta\varepsilon\}_i$，应力增量 $\{\Delta\sigma\}_i$，叠加得到 i 级有效荷载作用下的位移、应变和应力，即

$$\{\delta\}_i=\{\delta_0\}+\sum_{k=1}^{i}\{\Delta\delta\}_k \tag{32}$$

$$\{\varepsilon\}_i=\{\varepsilon_0\}+\sum_{k=1}^{i}\{\Delta\varepsilon\}_k \tag{33}$$

$$\{\sigma\}_i=\{\sigma_0\}+\sum_{k=1}^{i}\{\Delta\sigma\}_k \tag{34}$$

再由屈服条件可确定单元的弹塑性状态。

1．深部平洞围岩应力计算 在初始地应力场 $\sigma_x^0=-0.4$ 千磅/吋^2，$\sigma_y^0=-1.0$ 千磅/吋^2，$\tau_{xy}^0=0$ 作用下的深部地下开挖平洞，引起洞周围岩应力重新分布，使用莫尔-库仑屈服函数进行分析。计算网格如图 6 所示，力学参数 $E=500$ 千磅/吋^2，$\mu=0.2$，$c=0.28$ 千磅/吋^2，$\varphi=30°$。洞周分七级卸载，塑性区及水平断面的应力由图 7 示出，弹性解也示于图中，与 Reyes、Baker 的计算结果一致。

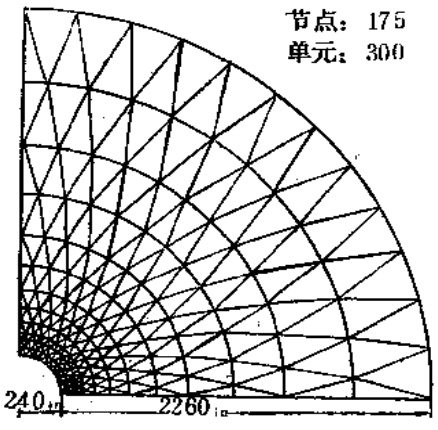


图 6 深部平洞围岩应力计算网格

2．三向受压岩石试件的弹塑性状态 此例可以说明程序计算应变强化问题的功能。$\sigma_2=\sigma_3$，

按平面应变问题计算，据对称性计算网格如图 8 所示。$E=40,000\text{kg/cm}^2$，$\mu=0.35$，$\alpha_0=0.93$，$\alpha_1=0$，$\beta_0=326.25\text{kg/cm}^2$，$\beta_1=9480\text{kg/cm}^2$。按比例逐级加载，先使试件处于低侧限压力之下，当 $P_x=-4\text{kg/cm}^2$，$P_y=-40\text{kg/cm}^2$ 时，试件发生 Drucker 型屈服，此时总体积应变为收缩，但塑性体积应变为膨胀。改变加载方式，按 $P_x:P_y=3:4$ 逐级加载，当 $P_x=-300\text{kg/cm}^2$，$P_y=-400\text{kg/cm}^2$ 时，试件发生“帽盖”型屈服，塑性体积应变为收缩。在此情况下作加卸载循环，先卸 $\Delta P_x=75\text{kg/cm}^2$，$\Delta P_y=100\text{kg/cm}^2$，试件恢复弹性，加同样级别的荷载，试件仍处于弹性状态而没有进入塑性状态。只有再加一级荷载增量使 $P_x=-315\text{kg/cm}^2$，$P_y=-420\text{kg/cm}^2$ 时试件才进入塑性状态，表明试件强度已提高。再作一次加卸载循环，屈服强度进一步提高，说明试件处于应变强化状态。计算结果如下表：

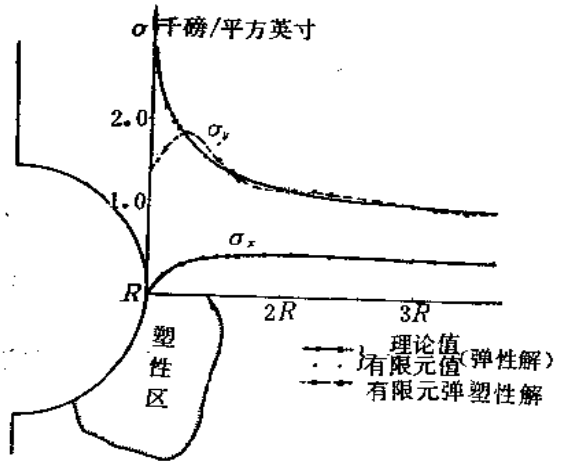


图 7

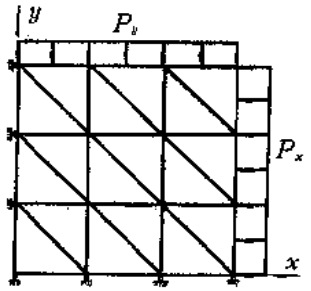


图 8

荷载级别	P_x	−300	−225	−300	−315	−215	−315	−330
	P_y	−400	−300	−400	−420	−320	−420	−440
加卸载状态		加	卸	加	加	卸	加	加
弹塑性状态		塑	弹	弹	塑	弹	弹	塑
塑性体积应变		−0.0031	／	／	−0.0034	／	／	−0.0041
$B_1(\text{kg/cm}^2)$		172	／	／	174	／	／	176

3．混凝土浇筑块在有软弱结构面基础上的抗滑稳定计算 计算网格如图 9 所示，软弱

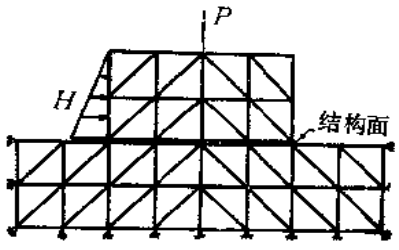


图 9

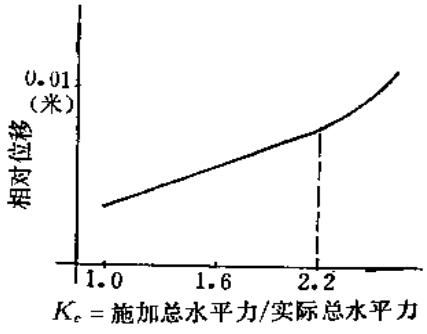


图 10

结构面按弹塑性材料处理，力学参数$E=100kg/cm^2$，$\mu=0.3$，$f=0.2$，$c=0$，先加自重及集中荷载P，再按分布水压力逐级施加水平荷载。随着水平荷载不断增大，软弱面破坏区逐渐扩大，直至全部剪破，浇筑块发生整体滑动。软弱面上下盘的错动量如图10所示，由图中曲线斜率实变点可确定块滑动的超载系数为2.2，并可得到屈服后的应力状态，与常规分析一致。

参 考 文 献

〔1〕Goodman, R. E. 等, *J. of. SM. dir · Proc · ASCE*(1968), SM3.

〔2〕Zinkiewiz, O. C., The Finite Element Method In Engineering Science (1971), 369—375.

〔3〕殷有泉，曲圣年，岩石和混凝土一类材料的结构的有限元分析中的本构关系，教育部高等学校计算结构力学学术交流会全集（1978）.

〔4〕Miller, T. W., Cheatham, J. B., *IJRMMS*, **9**, 1-6(1972), 453—473.

〔5〕长江水利水电科学院岩基室，长江葛洲坝水利枢纽二、三江基岩软弱夹层岩石力学补充试验报告(1975).

〔6〕Drucker,D. C., Trans · ASCE, 122(1957), 338—346.

〔7〕Drucker, D. C. 等, *Q. APPL. Math.*, **1X**(1951), 381—389.

〔8〕Argyris, J. H., 弹塑性分析方法，固体力学中的有限元素法译文集（下集）(1969).

〔9〕Reyes, S. F., Deere, D. V., Proc. of the 1se Congress of the ISRM, Ⅰ (1966), 477—483.

〔10〕长江水利水电科学研究院材料结构室，岩体弹塑性问题平面非线性有限元计算程序。

结构分析中的荷载线性规划模型

林少培
（大连工学院工程力学研究所）

作为结构的设计荷载或构件的设计内力，必须保证结构在各种可能情况下安全与可靠地工作。但如何确定最不利的荷载或对局部构件设计最不利的内力呢？目前，工程设计对一般结构分析采用荷载组合的方法，但由于这种荷载工况组合模型是在很大程度变化的荷载情况中人为地选定几种组合的情况，故它有很大的经验性。随着结构大型化及所受荷载的复杂化，经验判断将不可能计及所有的可能情况，为此，工程上就力图用完全系数来弥补这个缺陷，从而造成不必要的浪费。与此同时，一旦经验性的安全因素不足以弥补由特殊危险组合状态引起的损失时，则荷载组合模型将导致不安全方面。产生这情况的原因是由于荷载组合模型缺乏一个切实的理论基础。由于近代计算机的出现，计算力学对物理过程模型化的科学性与准确性将提出更高要求，因此有必要研究新的荷载数学模型，以便与计算机结构分析的精度相协调。

用数学规划论模型处理荷载问题是在上述背景下提出的，为了使它能处理按多级子结构组装的大型结构分析，本文将由子结构模式及荷载模式等一般形式来讨论。

1．结构组成的子结构法与子结构模式[2,4]

一个结构可以用子结构的组合来描述，结构可分解为各级子结构和基本单元的组合。在空间结构的模型化中，要充分利用结构的重复部分，将其构成模式，称子结构模式，然后多次调用组装成原结构，以便节省计算机内存及运算时间，用子结构方法组装成原结构的过程是按照一定的树形结构、拓扑关系和一定的周游规则来进行的。每个子结构上因均带有自己本身的荷载，故荷载也必须定义在子结构模式上，称为荷载模式。随子结构模式的调用及逐级组合，荷载也逐级传递并生成，最后形成一个完整的结构和完整的荷载情况。

子结构荷载模式的调用是通过荷载调用表实现的[2]。

2．荷载模式空间与内力模式空间

文献〔1〕中曾提出荷载模型化的概念，指出由于荷载因素是极为复杂的，计算机的出现有可能较细致地考虑荷载因素的諸方面，提出用数学规划法确定结构最不利荷载组合的模型，通过计算机对荷载模型的分析与运算，提供一个更为合理的结构构件设计荷载。为了说明方法，先引入一些数学模型的空间概念。

1）荷载模式空间（或荷载空间）

在结构线性分析（适用荷载效应的线性叠加定理）范围内，结构在复杂荷载因素作用下的内力反应可视为各种相互独立的受荷形式的线性组合，此时各荷载形式之间的内力保持不能互相表示、各自独立的性质，称为荷载模式。结构的每一种荷载工况必定可以在荷载模式的集合中选择相应的荷载模式线性组合而成。因此，把荷载模式作为基底就可以形成结构受荷载的数学空间，称为荷载模式空间 L_M，它反映了结构特定荷载状态的空间。每个荷载模

式即为 L_M 空间的基底向量 $\boldsymbol{M}_i$（$i=1, 2, \cdots, LDMDL$），其中 $LDMDL$ 为荷载模式的总数，即荷载空间 $\{L_M\}$ 是 $LDMDL$ 维的数学线性空间。

结构的某一特定荷载工况 L_c 实际上可视为荷载空间 L_M 中的一个向量，它是由 n 个荷载模式基底向量线性组合而得：

$$L_c=\lambda_1\boldsymbol{M}_1+\lambda_2\boldsymbol{M}_2+\cdots\cdots+\lambda_n\boldsymbol{M}_n=\sum_i^n\lambda_i\boldsymbol{M}_i \qquad (1)$$

式中 λ_1，λ_2，……，λ_n 是荷载工况向量 L_c 相应于 n 个荷载模式的调用系数，由于 $0<n\leqslant LDMDL$，故荷载工况 L_c 所占有的空间 L_c 总是属于荷载空间的子空间，有 $L_c\in L_M$。

2）内力模式空间（或内力空间）

由于线性结构的内力响应满足叠加原理，并有荷载和内力之间的线性比例关系，内力模式空间（或内力空间）F_M 就自然地成为荷载空间 L_M 的某种仿射空间。同理，内力空间 F_M 也是以相互独立无关的内力模式 $\boldsymbol{N}_i$（$i=1, 2, 3, \cdots\cdots LDMDL$）为基底向量而构成的数学空间，它反映了结构在特定荷载状态下的内力空间，其中 $LDMDL$ 个座标基底向量即为相应 $LDMDL$ 个荷载模式下结构的某一内力的仿射向量，故 F_M 也是一个 $LDMDL$ 维的线性空间。结构在某一特定工况下的某一内力值 $\boldsymbol{F}_c$ 可视为内力空间 F_M 中的一个向量，它由 n 个内力模式向量 $\boldsymbol{N}_i$ 的线性组合而得：

$$\boldsymbol{F}_c=\lambda_1\boldsymbol{N}_1+\lambda_2\boldsymbol{N}_2+\cdots\cdots+\lambda_n\boldsymbol{N}_n=\sum_i^n\lambda_i\boldsymbol{N}_i \qquad (2)$$

式中的 λ_1，λ_2，……，λ_n 即为（1）式的荷载模式调用系数，这是因为内力空间 F_M 是荷载空间 L_M 的仿射空间的缘故。由于 $0<n\leqslant LDMDL$，故任意工况下的内力空间 F_c 总是属于结构内力空间 $\{F_M\}$ 的子空间，有 $F_c\in F_M$。

若结构共求 $NFORCE$ 个内力，有 $NLDCS$ 种工况需考虑，则在内力空间里形成的内力向量共有 $NFORCE*NLDCS$ 个。

3．荷载线性规划模型

荷载线性规划模型的分析中，保留了荷载模式的概念，但抛弃目前沿用的工况组合的概念，因为工况组合是引入了人为的调用系数（如表 1 所示），正如所述，这些系数的确定完全是依经验的、随遇的，因而显得不合理。此外，由于怕遗漏危险工况或危险截面，因此 $NFORCE$ 数和 $NLDCS$ 数均取很大，信息存区（为贮存内力向量及各种中间信息）也是很可观的。

表 1　结构荷载工况组合调用系数表

	荷载模式 1（自重）	荷载模式 2（活荷）	荷载模式 3（地震力）	荷载模式 4（风力）	……
荷载工况1	1.0	1.1	0	0.6	……
荷载工况2	1.0	1.0	1.0	1.0	……
荷载工况3	1.0	0	1.1	0.5	……
……	……	……			

荷载线性规划模型把原问题归结为一个数学上的线性规划问题，视结构的某一内力为目标函数，它是内力空间 F_M 的一个向量，也是各内力模式向量的线性组合。由于已经在结构分析中得到结构在各种荷载模式下的某一内力响应向量 $\boldsymbol{N}_i$，因此就可以把调用系数 λ_i 作

为设计变量，寻求内力的最大值。此问题的数学命题提法是：

满足 $\lambda_i \geqslant 0$ （$i=1, 2, \cdots\cdots, LDMDL$）　　（$\lambda_i<0$ 的情况见式（6））

及荷载约束条件

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+\cdots\cdots+a_{1n}\lambda_n \leqslant b_1 \\ &a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+\cdots\cdots+a_{2n}\lambda_n \leqslant b_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_{m1}\lambda_1+a_{m2}\lambda_2+\cdots\cdots+a_{mn}\lambda_n \leqslant b_m \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

或写为

$$[A]\{\lambda\} \leqslant \{B\} \qquad (4)$$

确定荷载规划设计变量$\{\lambda\}$使目标函数某内力值

$$Z=\lambda_1 N_1+\lambda_2 N_2+\cdots\lambda_n N_n=\{\lambda\}^T\{N\}\rightarrow \max \qquad (5)$$

式（3）至（5）也可缩写为在可行解的集合 M 中找寻 $Z(\lambda)$ 的极值，$M=\{\lambda \mid \lambda \in E, A\lambda<B, \lambda \geqslant 0\}$，其中 E 是 $LDMDL$ 维空间。

对于每一种内力进行一次规划，求得一个荷载规划调用系数向量$\{\lambda\}$，代入式（5）即得最大的相应内力。

荷载规划模型处理结构内力已不是按已给定的工况及给定的组合情况，逐次进行分析组合，然后在其中选大者，而是首先对结构所受的荷载模式进行 $LDMDL$ 次分析，分别得到内力的反应量$\{N_i\}$，纵然，在实际问题中，我们应有 $NFORCE$ 个内力反应，但在计算机中存放的只是我们实际工程中感兴趣的 $CFORCE$ 个“关心内力”，一般 $NFORCE \gg CFORCE$，为达到工程设计分析的目的，实际上只要对 $CFORCE$ 个“关心内力”进行 $CFORCE$ 次线性规划。

对复杂环境下的空间复杂结构，工况数很难准确估计，一般比模式数大得多，即，$LDCS>LDMDL$，而 $CFORCE$“关心内力”数又是有限的，只要给出荷载的约束条件（4），进行 $CFORCE$ 次标准化的线性规划，就可以得到 $CFORCE$ 个“关心内力”的合理的最大内力，所需的计算工作量是可以接受、容易实现的。

4．关于约束条件（3）及（4）

荷载规划模型同以往按工况组合方法的本质区别在于：工况组合方法把所受各种荷载模式的连续变化的组合情况，用某几种给定的组合向量所代替，这些向量的确定是凭经验和缺乏合理依据的，更缺少数学上严格论证。结构荷载规划模型在限定了荷载的约束条件即荷载模式调用系数（设计变量）的可行域以后，可以使内力在内力空间自由地选择，其合理性有严格的数学证明为依据[6]。

这里必须提到一个普遍情况，即在工程实践中，调用系数 λ_i 可能出现负数值（如风力，浪力及机械制动力等均可出现正负两个方向），这时设计变量非负性质式（3）不能成立，故必须加以改造：

如有

$$-\{C_n\} \leqslant \{\lambda\} \leqslant \{C_p\} \qquad (6)$$

$\{C_p\}$：由正数形成的列阵；

$\{C_n\}$：由负数形成的列阵。

由线性规划的非负性原则，必须使设计变量 λ 加上一个实数 K 成为 λ_A，以保证使

$$\{\lambda_A\}=\{\lambda\}+\{K\} \geqslant 0 \quad (K=C_n) \qquad (3')$$

则由式（6）有

$$[I]\{\lambda\}\leqslant\{C_p\}$$
$$-[I]\{\lambda\}\leqslant\{C_n\}$$

或
$$\begin{bmatrix} I\lambda_A \\ -I\lambda_A \end{bmatrix}\leqslant\begin{bmatrix} C_p+K \\ C_n-K \end{bmatrix} \tag{6'}$$

式中$[I]$为单位矩阵。同时目标函数（5）也要换元

$$Z=\{\lambda\}^T\{N\}=\begin{Bmatrix}\lambda_{A1}-K_1\\ \lambda_{A2}-K_2\\ \vdots\\ \lambda A_n-K_n\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}N_1\\ N_2\\ \vdots\\ N\end{Bmatrix}$$
$$=(\lambda_{A1}-K_1)N_1+(\lambda_{A2}-K_2)N_2+\cdots$$
$$=(\lambda_{A1}N_1+\lambda_{A2}N_2+\cdots)-(K_1N_1+K_2N_2+\cdots)$$
$$=\{\lambda_A\}^T\{N\}-\{K\}^T\{N\}=\{\lambda_A\}^T\{N\}+\{C\}\rightarrow\max \tag{5'}$$

式中$\{C\}=-\{K\}^T\{N\}$为常数阵。此时式（4）也改为

$$[A]\{\lambda_A\}\leqslant\{B_A\} \tag{4'}$$

式中$\{B_A\}=\{B\}-[A]\{K\}$。

这样经变换设计变量，可由式（3′），（4′）及（5′）得线性规划的标准式求解$\{\lambda_A\}$，然后由（3′）回代求$\{\lambda\}$。

5．多级子结构组装的情况

荷载规划模型在多级子结构组装的情况也同样适用。由于各级子结构刚度阵组装主要通过调用下级子结构模式的凝聚出口刚度阵和本身所带的超级单元的出口刚度阵来实现的。凝聚的出口刚度阵R'_{00}和荷载出口阵P'_0如下图所示

$$\begin{cases}R'_{00}=R_{00}-R_{i0}\cdot R_{ii}^{-1}\cdot R_{i0}^T\\ P'_0=P_0-R_{i0}\cdot R_{ii}^{-1}\cdot P_i\end{cases} \tag{7}$$

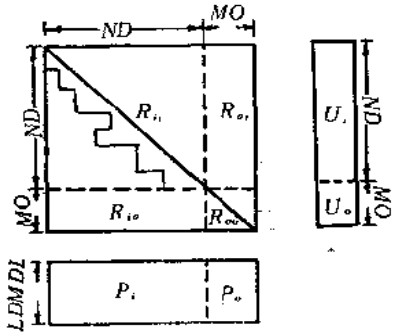


图1

图1及式（7）中

ND：该子结构内部点独立变位数；

MO：出口点独立变位数；

R_{ii}：内部点刚度阵子块；

R_{00}：外部出口点刚度阵子块；

R_{0i}，R_{i0}：交叉阵；

P_0：$LDMDL$个荷载模式对应的出口荷载阵；

P_i：$LDMDL$个荷载模式对应的内部荷载阵。

当对最高一级子结构模式(即结构本身)求解时，刚度阵所对应的均为内部点刚度元素，对$ICASE$个荷载工况求解，可得相应下一级子结构的出口点位移及结构本身所带基本单元的节点位移，由此可得基本单元相应各个荷载模式的$CFORCE$个关心内力量，并进行$CFORCE$次线性规划运算如（3′），（4′），（5′）式所述。

当求解某一级子结构时，刚度阵的元素就分为内部点和出口点两部分，这时出口点位移u_0由上级子结构传来为已知，则由图1有

$$[R_{ii}]\{u_i\}+[R_{0i}]\{u_0\}=\{P_i\}$$
$$[R_{i0}]\{u_i\}+[R_{00}]\{u_0\}=\{P_0\} \tag{8}$$

或
$$[R_{ii}]\{u_i\}=\{P_i\}^* \qquad [R_{i0}]\{u_i\}=\{P_0\}^* \tag{8'}$$
式中
$$\{P_i\}^*=\{P_i\}-[R_{0i}]\{u_0\} \qquad \{P_0\}^*=\{P_0\}-[R_{00}]\{u_0\}$$

(8′) 的第二式已在上级子结构求解中用过，因此只需用第一式求出 $\{u_i\}$，并求得该级子结构中所带的基本单元 $CFORCE$ 个“关心内力”在各种荷载模式下的响应值，并存放起来。

$$[N]=\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_i \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & \cdots & N_{1j} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & \cdots & N_{2j} \\ \vdots & & & & \\ N_{i1} & N_{i2} & N_{i3} & \cdots & N_{ij} \end{Bmatrix} \begin{matrix} i=1,\ 2,\cdots CFORCE \\ j=1,\ 2,\cdots LDMDL \end{matrix} \tag{9}$$

式（9）表示在计算机里贮存的 $CFORCE*LDMDL$ 个响应值 N_{ij}，它代表 $CFORCE$ 个以 $LDMDL$ 个基底向量形成的内力空间向量。据此，对子结构作 $CFORCE$ 次线性规划，得 $CFORCE$ 个调用系数向量$\{\lambda\}$，分别代表 $CFORCE$ 个“关心内力”的最不利组合。

应当指出，“关心内力”的不利组合必须逐个按结构构成树的规则，依后序周游规划由“树根”向“树枝”逐级进行，正如求内力过程一样。荷载规划的运算也必须对每一个子结构的“关心内力”分别进行，而不是对子结构模式进行。因此对属于每一种子结构模式的几个子结构也需各个进行。

如此按结构构成树后序周游，逐级求解位移及内力，同时对各级子结构所带基本单元的“关心内力”作荷载规划模型的运算，直到基本单元一级为止。

在对多级子结构模式组成的结构进行荷载规划时，必须区别本级子结构模式 ISB 本身节点所具有的荷载模式

$$\boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{M}_2,\ \boldsymbol{M}_3,\cdots\cdots,\ \boldsymbol{M}_{LDMDL(ISB)}$$

和本级子结构模式所调用的下级子结构模式（超级单元）所带来的荷载工况模式

$$\boldsymbol{P}_1,\ \boldsymbol{P}_2,\ \boldsymbol{P}_3,\cdots\cdots,\ \boldsymbol{P}_{ICASE(ISU)} \qquad (ISU \text{ 随超级单元而异，即 } ISU(j))$$

因此对于某个子结构模式 ISB 而言，计算荷载可表示为：

$$\boldsymbol{P}(ISB)=\sum_{i}^{LDMDL(ISB} \lambda_i\cdot\boldsymbol{M}_i+\sum_{j=1}^{ISON\ ISB)}\ \sum_{k=1}^{ICASE(ISU)} \lambda_{j,k}\boldsymbol{P}_k(ISU(j)) \tag{10}$$

式中：$LDMDL(ISB)$ 为子结构模式本身节点所带荷载的荷载模式数；

$ISON(ISB)$ 为子结构模式所带的被调用的超级单元数；

$ICASE(ISU)$ 为第 ISU 个超级单元的荷载工况数；

λ_i，$\lambda_{j,k}$ 为计算荷载的调用系数，由荷载规划针对该级子结构模式基本单元的“关心内力”来确定。

本文承钟万勰同志审阅初稿，并提出宝贵意见，作者特致谢意。

参 考 文 献

〔1〕钟万勰、林少培，关于计算机结构分析的模型化问题，1978 年教育部计算结构力学学术交流会论文集（第三卷）。

〔2〕林少培，大连工学院学报，3(1979)，61—73。

〔3〕钟万勰、林少培，组合结构分析程序 $JIGFEX$ 的功能与应用，大连工学院工程

力学研究所科研报告 (78)-116(1978)。
〔 4 〕钟万勰，大连工学院学报，3(1977)，19—42；4(1977)， 14—35。
〔 5 〕程耿东等，大连工学院学报，4(1977)， 36—52。
〔 6 〕钟万勰等，结构分析和结构化程序设计——介绍 JIGFEX 系统，见本文集 183 页。
〔 7 〕Dantzig, George, B.,Linear Programming and Extensions, Princetouniversity Press (1963)。

结构分析和结构化程序设计——介绍 JIGFEX 系统

钟万勰　　李锡夔等*

（大连工学院工程力学研究所）

一

JIGFEX 中结构化程序设计思想和相应研制的“结构化 FORTRAN”语言主要体现在：

（一）在程序中不用 GO-TO 语句。

（二）程序的全部进程由顺序语句和下述三类控制语句组成：

1．过程调用语句。过程的任何合法调用均须通过由过程形参规定的统一入口和出口。

2．“IF”-“THEN”-“ELSEIF”-“THEN”-“ELSE”-“ENDIF”类型语句。其中“ELSEIF”-“THEN”可包含多层。它的特殊形式是“IF”-“THEN”-“ELSE”-“ENDIF”和“IF”-“THEN”-“ENDIF”语句。它们可在程序的任何深度中嵌套使用。

3．环路语句。可分为两种：

循环语句。即：

“FOR”-“STEP”-“UNTIL”-“DO”-“TEST”-EXIT”-“ENDFOR”类型语句。其中“TEST”-“EXIT”可包含多层。它的特殊形式是“FOR”-“STEP”-“UNTIL”-“DO”-“ENDFOR”语句。

条件转出回路语句。即：

“LOOP”-“TEST”-“EXIT”-“ENDLOOP”类型語句。其中“TEST”-“EXIT”可包含多层。“WHILE”-“DO”-“ENDWHILE”語句和“DO”-“UNTIL”-“ENDDO”語句等可看作它的特殊情况。

（三）整个系统的设计贯穿自上而下的程序设计思想。首先用元語言进行系统的整体设计，然后进行模块设计；在模块设计阶段，则首先设计模块接口并由高级模块到低级模块逐级进行，即采用逐步精化的程序设计方法。

（四）采用模块化结构。模块采用过程的形式。所有模块之间的接口完全通过模块的形参来定义。特别地，主控程序直接调用的各模块之间完全通过库（外部设备）进行信息传送，采用了最弱的接口形式。因而 JIGFEX 的模块，特别是主控程序直接调用的模块可方便地作为其它系统的一个主程序，而用于分析某一特殊问题的程序也可作为一个子程序而方便地接入 JIGFEX 中。

---

*参加这一工作的有裘春航、丁殿明、蒲允琳、吴金仙、张近京、郭秀玲、朱明华同志。

二

一个合理的数据结构在有限元程序系统中起着关键作用。因为系统各部分之间连接由各数据群所决定，同时各种算法对数据结构提出一定要求，一定的数据结构也将反过来影响算法的具体实现和程序结构。整个程序系统在一定的数据结构上运行，并不断导致数据结构中数据的修正。从某种意义上讲，程序系统是一个数据加工器。因此，JIGFEX 的数据结构首先是与力学问题的结构相适应和一致，由结构分析和结构优化理论及具体的力学计算要求出发，提出和设计数据结构。

另一方面，IJGFEX 的运行是依赖于外存的。在 JIGFEX 中，体现数据结构的存储结构是各个文件及文件所属记录，并研制了一个由主文件-子文件-记录三级所组成的内存管理系统 JINEGS，以实现对内存的有效利用和科学管理。存储结构的最小单位是记录。有限元计算中各记录一般是不等长的，一个记录中各数据群之间也可能是不等长的。因此在所有记录中的数据分为二大类，一类是指针值，另一类则是有限元计算过程本身所用到的有物理意义的数值。因而 JIGFEX 的数据结构是十分紧凑的。

记录分为若干类，对同一类的各记录建立一个共同的导向器，导向器及其所管理的所有记录构成一个子文件。在 JIGFEX 中建立了一系列子文件对各类记录分别进行管理；为便于建立和管理这一系列子文件，要求各子文件的导向器有一个统一标准。所有子文件由系统的一个主文件来管理，各子文件则均可看作是主文件的一个“记录”。一个记录作为一个整体受子文件的导向器管理。然而，在比较复杂的记录中，若存放着不等长的各数据群，则为了正确有效地访问它们，在记录内部还须建立一个索引区对记录内部各部分数据进行管理。

主文件的导向器常驻内存，然而主文件的各“记录”，即各子文件仅当其所属记录与当前运算有关时才调入内存；同时，一个子文件调入内存也仅意味子文件的导向器调入内存，而其所属记录，只有与当前计算过程有关者，才通过子文件导向器调入内存，以利最高限度地节省内存。因此，JIGFEX 数据结构设计的一个原则是数据结构的完整性，同一计算过程所需要的数据群尽可能集中存放在少数子文件的少数记录之中，以减少内存要求和使内外存信息交换次数尽可能少，保证较高的运算效率。

三

一个复杂的实际结构物，根据其各部构造及受力状况，往往必须抽象为多种有限单元组装成的力学模型，方有可能进行较为精确的分析。因此，JIGFEX 具有这样的能力，它能分析由各种各样的有限元以任何形式组装在一起的力学模型。

在多类单元随机组装的结构（子结构）中，结构总变位向量中各节点的独立变位数目可各不相同；为在程序中自动形成结构总变位向量并使相应结构总刚度阵正定，必须根据节点构造和汇交于节点的各单元性质，区分各节点在结构全局座标系下六个位移分量中的独立位移部分和几何可动位移部分。但是，并不是节点非几何可动位移皆作为独立位移而进入结构总变位向量的，其中节点指定位移（包括指定零位移和指定非零位移）应该且完全可能排除在结构总变位向量之外，因此它们与节点独立位移应有所区别。其次，作为更重要的另一方

面，复杂结构可能由弹性体（弹塑性体）和一部分广义刚性元件所组成。所谓广义刚性元件是指这样的元件，这些元件在某些自由度方向的刚性与其它自由度方向或其它元件的刚性相比，是如此之大，以至广义刚性元件上各有限元节点在某些自由度方向的位移间是相关的，可按刚性运动法则进行推算。例如图 1 所示，若节点 A 与 A' 间用一“刚臂”元件相连，则节点 A 是一个其全部位移服从节点 A' 的从位移。即：

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix}_{A\,(从)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & dZ & -dY \\ 0 & 1 & 0 & -dZ & 0 & dX \\ 0 & 0 & 1 & dY & -dX & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix}_{A'\,(主)} \quad (1)$$

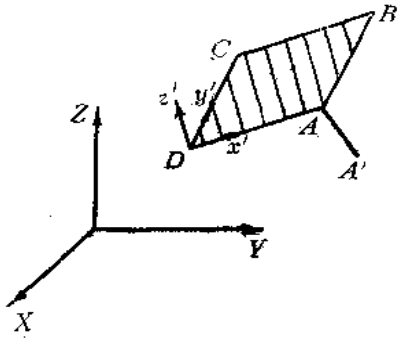


图 1

式中 $dX = X_{从} - X_{主}$，余类推。高层建筑中的楼板，船舶艏板均属广义刚性元件。每个楼板内各有限元节点的楼板平面内位移刚性相关，皆可由楼板平面内一个节点，即主节点在楼板平面内的三个位移量表示。因此，在 JIGFEX 中将指定非零位移，特别是将从位移与独立位移相区分而排除出结构总变位向量，将在保证分析精度的前提下有可能大大减少结构变位法方程的未知数总数，且避免了方程的病态。

所以，JIGFEX 中各子结构模式的每个节点以结构全局座标系为基底，座标系的位移空间是节点几何可动位移子空间、独立位移子空间、从位移子空间和指定位移子空间的集合。用一个节点位移规格数来描述各位移子空间的组成，它是一个十进制正整数。它的最后六位数字，由高至低，分别为标志节点在结构全局座标系下位移 U、V、W、θ_X、θ_Y、θ_Z 的位移特征数；特征数的定义如下：0——几何可动位移；1——独立位移；2——从位移；3——指定零位移；4——指定非零位移。

我们称确定结构各节点在子结构模式空间中位置的座标系为子结构模式的统一座标系。而结构全局座标系指结构总变位向量中各分量所参考的座标系，这些分量一般参考统一座标系，但由于节点斜支承边界条件处理的需要以及与统一座标系非正交的刚性膜等广义刚性元件的存在，这些分量中的某些往往必须要参考这些分量所属节点的一个座标系表示。例如图 1 所示 ABCD 刚性膜，为表示节点 B、C、D 在刚性膜平面内的位移是服从 A 节点位移的从位移，节点 B、C、D 的位移空间基底应参考图示 $X'Y'Z'$ 座标系表示，这样的座标系称为节点相对座标系（相对于子结构模式统一座标系），而称子结构模式各节点相对座标系的集合为子结构模式的全局座标系。从 JIGFEX 的功能而言，各节点的位移空间均可参照其自身的一个相对座标系表示，且相对子结构模式统一座标系的取向可各不相同。取向相同的相对座标系即为同一类，而一个完整的节点复合位移规格数的组成是：

节点相对座标系类号 $*10^6$ + 位移规格数。

四

工程中，一个复杂整体结构往往包含许多重复部分。它们的受力状况虽不相同；但结构

构造却一样，因而其有限元力学模型完全相同。若把整个结构处理为单级的多类单元有限元力学模型，则这些重复结构部分中，相应单元的单元刚度阵计算完全重复，并且结构总刚度方程的未知数数目N将大得惊人，而方程的求解时间更以 N^3 的量级增加。因而，JIGFEX 具备分析多层子结构分层组合而成的结构的能力，可以在保证分析精度的前提下，成倍地提高分析的效率和速度。

在 JIGFEX 中，子结构模式指这样一个结构模式：其结构几何形状与拓扑以及出口点是完全确定的；而在调用时其结构刚性可按任意正比例变化。一个子结构模式被其它子结构模式调用时，在后者中所处的地位，从力学机理上看，十分类似于结构中一个具有内部自由度的基本单元。故可把它称为其它子结构模式中的超级单元。并且在其装配到其它子结构模式上之前，必须把超级单元的单元刚度阵（即相应子结构模式的总刚度阵）进行凝聚。如果凝聚前超级单元的单元刚度方程用分块形式表示为：

$$\begin{bmatrix} K_{00} & K_{0i} \\ K_{i0} & K_{ii} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_0 \\ D_i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_0 \\ F_i \end{bmatrix} \tag{2}$$

由于子结构模式的出口点是确定的，因而其分块形式也是确定的；式中 K_{00}、K_{ii}、K_{i0}（K_{0i}）分别称为超级单元（或相应子结构模式）的出口刚度阵、内部刚度阵和交互刚度阵。F_0、F_i 分别为超级单元的出口外力阵和内部外力阵。凝聚内部自由度后，超级单元刚度方程为：

$$K'_{00}D_0=F'_0 \tag{3}$$

式中

$$K'_{00}=K_{00}-K_{0i}K_{ii}^{-1}K_{i0} \tag{4}$$

$$F'_0=F_0-K_{0i}K_{ii}^{-1}F_i \tag{5}$$

K'_{00}、F'_0 为超级单元凝聚了内部自由度后的出口刚度阵和出口外力阵。

JIGFEX 的多级子结构模式装配功能中，其装配层数是没有限制的。不调用其它子结构模式作为其超级单元的子结构模式称为基本子结构模式，它是最低级子结构模式。高级子结构模式可调用低级子结构模式为它的一个超级单元，因此必须由低到高地定义和形成各级子结构模式。最高级子结构模式的实现即为结构整体自身，整个结构的分析就等价于一系列子结构模式的分析。

一个子结构模式可视作由称为“零号超级单元”的自身所带结构部分（节点和单元）和各超级单元组装而成，故相应子结构模式 CB 个工况的荷载空间可表示为各超级单元所属子结构模式荷载子空间的线性组合。如果子结构模式的荷载空间用 P_M 表示，是一 $D*CB$ 阵，D 为其结构自由度总数；则第 I 个超级单元所属子结构模式的荷载子空间在此 D 维空间扩大地表示为 P_s^I，它是一个 $D*CS$ 阵，CS 是作为 I 号超级单元的低级子结构模式的工况数；零号超级单元的荷载模式空间以 Q_M 表示，是一个 $D*L$ 阵，L 为荷载模式数，则：

$$P_M=\sum_{I=1}^{SN} P_s^I\lambda^I+Q_M\beta_M \tag{6}$$

式中 λ^I 是作为子结构模式 M 的 I 号超级单元的子结构模式 S 的荷载空间到子结构模式 M 的荷载空间的线性变换阵。对于比子结构模式 M 级别为低的子结构模式 S 的荷载空间 P_s 也可递归地应用式（6）进行表示，因而对于每个子结构模式所需准备的荷载原始数据是 Q_M、

β_M、$\lambda^i(i=1-SN)$。而每一子结构模式的荷载空间则由程序自动生成。需注意的是，Q_M作为原始数据并不是$D*L$个元素，因为子结构模式自身所带部分的节点自由度往往远较D为少，特别对于没有零号超级单元的子结构模式，则更不必准备Q_M与β_M阵数据，所以原始数据准备是简洁的。

整体结构所属子结构模式SM_N调用子结构模式SM_M作为其超级单元，称为SM_N的一级超级单元；而如SM_M又调用子结构模式SM_L为其超级单元，则称为是SM_N的二级超级单元，……，则SM_N的一个Ⅰ级超级单元所属子结构模式SM_F的荷载空间到SM_N子结构模式荷载空间的线性变换为：

$$P^N_{SM}=\lambda_{N-M}\lambda_{M-L}\cdots\cdots\lambda_{*-F}P^F_{SM}=\Pi\lambda_J P^F_{SM}=AP^F_{SM}\quad(A=\Pi\lambda_J) \tag{7}$$

P^N_{SM}为整体结构SM_N的一个子结构模式号为SM_F的Ⅰ级超级单元的荷载空间在整体结构荷载空间的映象。称A为两个荷载空间之间线性变换的放大器。

五

位移法多级子结构模式静力分析中要对各级内部刚度阵F_{ii}求逆。K_{ii}是一高度稀疏阵，在JIGFEX中对它采用了全稀疏存储结构，以提高求解速度和降低存储要求。与一维变带宽存储结构相比，它不仅把带宽外零元素，同时也在很大程度上把带宽内零元素排除出K_{ii}的存储结构，为零元素所保留的仅是消元过程中带宽内增生的非零元素所必需的存储单元。分析表明，这个增生过程与消元次序即节点编排次序有关。K_{ii}中元素以节点子矩阵形式存储于K_{ii}中，当一个节点与其它尚待消去的节点相比，其消去后增生的非零子矩阵个数及包含的元素数为最少时，即消去此节点，也即将此节点编排在前，这就是JIGFEX对各级子结构模式内部点所执行的“少赔少度”意义上的节点优序编排。

然后对K_{ii}（以后用K表示）进行分块三角化与回代求解。K的分块形式为：

$$K^1=\begin{pmatrix} k^1_{11} & \cdots\cdots & k^1_{1n} \\ k^1_{21} & k^1_{22}\cdots\cdots & k^1_{2n} \\ \vdots & \vdots\quad k^1_{ij} & \vdots \\ k^1_{n1} & k^1_{n2}\cdots\cdots & k^1_{nn} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{8}$$

式中K^1表示$M*M$阶K阵的初态，k^1_{ij}是其中一个m_i*m_j阶子矩阵，m_i、m_j为节点i、j的独立未知数数目，$M=\sum_i m_i$。而

$$A_{21}=\begin{pmatrix} k^1_{21} \\ \vdots \\ k^1_{n1} \end{pmatrix},\qquad A_{22}=\begin{pmatrix} k^1_{22} & \cdots\cdots k^1_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ k^1_{n2} & \cdots\cdots k^1_{nn} \end{pmatrix},\qquad A_{11}=k^1_{11} \tag{9}$$

经过一次分块三角化后

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{m1} & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I_{M-m1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{21}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{m1} & A_{11}^{-1}A_{21}^T \\ 0 & I_{M-m1} \end{bmatrix}=LDL^T \tag{10}$$

然后只需对$(M-m_1)$阶方阵$B=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{21}^T$进行分块三角化，以此类推。

K被存放在内部刚度阵文件中。由于对称性，仅存储其包含主对角子矩阵在内的准下半三角阵。即在分块三角化前，仅存储A_{11}、A_{21}和A_{22}的准下半三角阵部分，分块三角化后，$A_{21}A_{11}^{-1}$可存放在A_{21}的原存区中，B是对称阵，因此仍可存放在原存放A_{22}的准下半三角阵

的存区，原 A_{11} 存区可不变，但它在以后分块三角化中已不再介入，且计算 $A_{21}A_{11}^{-1}$ 和 $A_{21}A_{11}^{-1}A_{21}^{T}$ 的需要以及方程回代求解时，需计算准主对角线阵 D 的逆，因此原先的 A_{11} 中将存放 A_{11}^{-1}。经过一次分块三角化后，K 的第一列子矩阵完成了三角化，K^1 演变成 K^2，其中：

$$\left.\begin{aligned} k_{11}^{2} &= (k_{11}^{1})^{-1} \\ k_{i1}^{2} &= k_{i1}^{1}(k_{11}^{1})^{-1} \qquad (1<i\leqslant N) \\ k_{ij}^{2} &= k_{ij}^{1}-k_{i1}^{1}[k_{j1}^{1}(k_{11}^{1})^{-1}]^{T} \qquad (2\leqslant j\leqslant i\leqslant N) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

经过 s 次分块三角化，前 s 列子矩阵已完成分块三角化，K 已演变成第 $(S+1)$ 个状态 K^{S+1}，其中 s 列后各列子矩阵为：

$$\left.\begin{aligned} k_{SS}^{S+1} &= (k_{SS}^{S})^{-1} \\ k_{iS}^{S+1} &= k_{iS}^{S}(k_{SS}^{S})^{-1} \qquad (N\geqslant i>j=S) \\ k_{ij}^{S+1} &= k_{ij}^{S}-k_{iJ}^{S}[k_{JS}^{S}(k_{SS}^{S})^{-1}]^{T} \qquad (N\geqslant i\geqslant j>S) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

经过 (N－1) 次分块三角化，K 最终完成了三角化。当执行第 S 次分块三角化，即完成第 S 列子矩阵分块三角化时，第 S 列子矩阵（即内部刚度阵的 S 号记录）必在内存，S 号记录为主记录，1－$(S-1)$ 号记录已完成三角化而不用进入内存，而 $(S+1)-N$ 号记录则可轮流进入内存，因此，如果内存紧张，则只须保证二个记录的存区。完成分块三角化的 K^N 中各主对角子矩阵构成 D^{-1}，而其余各非主对角子矩阵则构成 L。

六

结构自由振动计算归结为求解一个 N 阶广义特征值方程

$$KX=\omega^2 MX \tag{13}$$

式中 M 为总质量阵。由于在 JIGFEX 中引入了节点主从关系，可以计及集中质量对节点的偏离；允许节点转动惯量所参考的座标轴与节点自由度所参考座标轴不正交。因而 M 可能为非对角线阵，且为一极稀疏的阵，在 JIGFEX 中对此情况给予 M 以全稀疏存储。

对于几何可动结构（机构），刚度阵 K 是奇异的；当结构的某些构件十分柔软或结构相对支承十分刚硬时，K 将呈病态。在此情况下，JIGFEX 采取“刚度阵移轴”方式，将式 (13)，改写为：

$$(K+\alpha M)X=(\omega_2+\alpha)MX$$

即

$$\bar{K}X=\bar{\omega}^2 MX \tag{14}$$

求解。

若需求解式 (13) 的全部特征对，可应用 JIGFEX 中配备的 QL 法求解器或广义雅可比方法求解器。QL 法求解器包含有：将 M 阵作平方根法分解以将广义特征值方程 (13) 标准化；应用 Householder 方法将标准特征值方程的矩阵三对角化；再用带移轴 (SHIFT) 的 QL 法将三对角矩阵对角化；最后利用全部变换矩阵求出全部特征向量等步骤。当式(13)的阶数 N 很高，而只需求解 q 阶 $(q\ll N)$ 特征对时，子空间叠代法已被证明是非常强有力的方法。该法计算式可表达如下：

$$K\bar{X}_K=Y_{K-1} \tag{15-a}$$

$$K^*=\bar{X}_K^T Y_{K-1} \tag{15-b}$$

$$M^* = \bar{X}_K^T M \bar{X}_K \tag{15-c}$$

$$K^* A_K = M^* A_K \Omega_K^2 \tag{15-d}$$

$$\bar{Y}_K = \bar{X}_K A_K \tag{15-e}$$

$$Y_K = M \bar{Y}_K \tag{15-f}$$

上式中（a）式是逆叠代式，当 $K=1$（第一次叠代）时，右端Y_0是初始叠代向量。式(b)、(c)、(d) 实际是以 $\bar{X}_K$ 作为试探振型的李兹方法。式（d）是一阶数远较 N 为小的广义特征值方程，可用前述二个求解器求解。式（e)、(f）还原出下一次叠代向量。JIGFEX 既可按指定的 q 值，又可按指定的频率值控制叠代次数。

对于大型结构，一般 N 很大(例如达到 10^3)，如果干扰力频率也很高，则参振的振型阶数 q 可高达 10^2 量级，这时式 (b)、(c) 中的 K^*与M^* 都需 10^4量级的存储，内存很可能承担不了而要进行频繁的内外存交换，是十分费时间的。因而，JIGFEX 提供了迁移式子空间叠代求解器，每次只有 $R(R<q)$列向量参加叠代，当低阶振型达到足够的精度后即脱离叠代，R 值按剩余内存量由程序本身动态地决定。在算式上，只须将上述（f）式改为如下二式：

$$\bar{Y}_K = \bar{Y}_K - S\bar{Y}_{K0} \tag{15-f′}$$

$$Y_K = M\bar{Y}_K \tag{15-g′}$$

式（f′）表示每次参加叠代的向量都必须清除已脱离叠代的低阶振型 $\bar{Y}_{K0}$ 的成份。S 是由 M^- 正交化产生的滤频矩阵。

七

一个以 NSB 个子结构模式描述的结构，其静力分析基本过程如下：

“FOR” ISB=1 “STEP” 1 “UNTIL” NSB “DO”

{输入子结构模式 ISB 的结构构成数据和载荷数据，用前处理机加工后送入子结构模式的结构构成文件和荷载文件}

{形成子结构模式的单元特征文件和位移一应力转换阵文件}

{形成子结构模式的稀疏形式总刚度阵文件的数据结构}

“ENDFOR”

“FOR” ISB=1 “STEP” 1 “UNTIL” NSB “DO”

{形成子结构模式的单元刚度阵管理文件及相应的单刚文件和单刚组装信息文件}

{形成子结构模式的内部刚度阵、出口刚度阵、交互刚度阵文件及指定位移荷载向量}

{形成子结构模式相应各工况的荷载文件}

{累加子结构模式的各超级单元出口点荷载向量入子结构模式的荷载文件}

{子结构模式内部刚度阵分块三角化}

“IF” (ISB · LT · NSB) “THEN”

{计算子结构模式的凝聚出口刚度阵及凝聚出口外力阵}

“ENDIF”

“ENDFOR”

{周游结构树，形成整体结构所有下属的全位移文件并输出}

{建立内力（应力）文件}
{输出整体结构所有下属中各单元的应力}
结构动力分析中自由振动计算过程如下：
{输入结构构成数据和动力计算基本数据，建立结构构成文件}
{建立结构单元特征文件}
{形成结构稀疏形式总刚度阵文件的数据结构}
{形成总质量阵文件}
{形成单元刚度阵管理文件及相应的单刚文件和单刚组装信息文件}
{形成结构总刚度阵}
{形成移轴刚度阵文件}
{形成子空间叠代法指示数组文件}
{移轴刚度阵分块三角化}
{解广义特征值方程，按指定要求计算各特征对并输出}

参 考 文 献

〔1〕钟万勰，一个多用途的结构分析程序 JIGFEX（一）、（二），大连工学院学报，3—4（1977）。

〔2〕钟万勰，关于组合结构分析程序 JIGFEX 的设计问题，1978 年教育部高等学校计算结构力学学术交流会论文集，第一集。

〔3〕林少培，关于组合结构分析程序 JIGFEX 的应用问题，1978 年教育部高等学校计算结构力学学术交流会论文集，第一集。

〔4〕钟万勰、裘春航、吴金仙，结构化 FORTRAN 语言及其实现，本文集。

〔5〕钟万勰、李锡夔，程序设计中的内存管理系统 JINEGS，大连工学院学报，1（1980）。

〔6〕钟万勰、裘春航，关于未知数族的优序形成与稀疏矩阵的分块三角化，1978年教育部高等学校计算结构力学学术交流会议论文集，第三集。

〔7〕钟万勰、林家浩、程耿东、田玉山，振动力学特征值问题的研究及其在框架式基础动力计算中的应用，1978年教育部高等学校计算结构力学学术交流会议论文集。

〔8〕Cook, R·D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis.

〔9〕Peter Freeman, Software Reliability and Design: A Survey, Tutorial on Software Design Techniques (1977).

〔10〕Kamel, H. A. and McCabe, M. W., The Gifts System, Structural Mechanics Computer Programs (1974).

〔11〕Knuth, D., The Art of Computer Programming 1, ch. 2 (1973).

〔12〕Myers, G. J., Soft Ware Reliability (1976).

有限元软件系统的发展与 HAJIF--I

冯 锺 越

HAJIF（航空结构分析系统汉语拼音 HAngkong JIegou Fenxi xitong 的缩写）是中国航空研究院组织有关研究所联合研制的一个有限元软件系统[1,2,3]。它的第Ⅰ型，用于弹性结构的静力分析，已于 1979 年 10 月批准装机使用。

一、有限元软件系统研制和应用的情况

从六十年代中期以来，随着有限元方法的推广和计算技术的突飞猛进，用于结构分析的有限元软件系统在国外有了迅速的发展。比较著名的如美国 NASA 的 NASTRAN 和西德斯图加特大学的 ASKA 都是在这一时期开始研制的。到了七十年代后期，各种有限元软件系统更如雨后春笋般出现，它们的功能更为完善，效率也有很大提高。

每一个大型分析系统都有自己的发展和完善的过程；它所具有的功能，往往不是在第一次发行时就完全实现的。例如 1973 年发行的 NASTRAN 15.5 级有 12 种静力和动力分析功能，做为固定格式供用户选用；到 1976 年发行 NASTRAN16 级时，又增加了亚音速颤振分析和充分受力（满应力）的优化设计能力[4]。ASKA 在 1970 年发行时只能进行线性静力分析，1971 年发行的第Ⅱ型增加了线性动力分析功能，到 1973 年发行的第Ⅲ型又增加了非线性分析功能，以后还不断有新的发展。

随着对复杂结构进行分析的需要不断增长，促使成立了许多专门机构研制通用性强，适合于各个行业用的软件系统。与此同时，各个厂家也投入了很大力量发展满足自己需要的各种计算机程序。例如美国的 Douglas 飞机公司，用于结构分析的程序软件大小有二百余种，小的程序不过五十条指令，解决一个结构剖面的特性计算；大的程序有二十万条指令，可以进行整架飞机的静、动力分析。

我国航空工业的设计部门是从五十年代末期开始应用电子数字计算机进行结构分析的探索工作的。最初提出这个问题的原因，是由于使用传统的工程梁理论已经无法解决小展弦比机翼的应力分析和颤振计算问题。起先设计部门采用 Levy 的矩阵位移法[5]，算出的机翼变形是合理的。但是得不出机翼蒙皮的应力分布。因此，在六十年代中期改用 Turner 和 Przemieniecki 提出的直接刚度法[6]和子结构分析技术[7]进行翼面结构的应力分析，并且得到了比较满意的结果。在那以后的十余年中，航空工业的设计部门在计算机化的结构分析方面做了很多的工作，发展了许多用于结构静、动力分析和优化的计算机程序。这些程序在新飞机的设计工作中发挥了重要的作用，完成了不少在五十年代认为几乎是不可能做到的事。

二、发展的现状

有限元软件系统的发展从一开始就是同计算机硬件的发展相辅相成的。计算机的巨大潜力需要有完善的软件才能发挥出来；软件系统的种种功能也需要在硬件上体现。

目前主要的有限元软件系统一般都装在具有直接存取的存储装置的第三代大型计算机

上。近年来，小型计算机发展很快。有些小型计算机，如 PRIME400 或更高系列的功能，已经超过了七年以前大型计算机所具有的；而且由于小型计算机价格便宜，易于使用和维护，可以为许多用户自己所有；因而软件的研制者都很注意把有限元软件系统装到小型计算机上的问题。

有限元软件系统经过十余年的发展，已经比较成熟了。目前正在使用的一些大型软件系统，大致都有以下的共同特点：

（1）通用性强。这些系统一般都具有静、动力分析，有些还有优化设计的多种功能，能够适应各种不同的结构形式和环境条件。对于解题的规模，除了受计算机容量和计算费用的影响外，几乎没有什么限制。

（2）可靠性高。在七十年代中期，一个大型有限元软件系统的年错误率在 10^{-3} 到 10^{-4} 之间。即一个有十万条语句的系统，每年需要改正的错误语句在 10 到 100 条之间。

（3）灵活性好。用户除了可以使用系统提供的固定格式进行常规的分析工作外，还可以按照自己的需要组织特殊的计算流程。例如 NASTRAN 就具有由用户直接抽取矩阵编制程序的能力，称为 DMAP (Direct Matrix Abstraction Programming)。对于系统本身来说，灵活性体现为模块式的程序结构，使程序组织更为灵活，并且易于修改和补充。

三、未来的趋势

虽然有限元软件系统已经比较成熟，但是随着对分析复杂结构在各种条件下的响应的需要不断增加，以及计算技术的不断发展，有限元软件系统的进一步完善是必然的。在未来的若干年内，可以预见的几个主要发展趋势是：

（1）提高数据准备和结果解释的计算机化程度。用有限元法解一个复杂的结构，原始数据的准备工作量是非常大的。以一架飞机的整机应力分析为例，约有以百万计的数据，如节点座标、元素信息、几何尺寸、材料特性以及外载荷等要输入给计算机；计算机算出的结果，即各种载荷情况下的节点位移、元素应力也是以百万计的。这些工作如由人工来做，必然曠日持久，并且难以保证质量。目前虽然广泛采用了人机对话形式在图象显示终端上进行网格划分与数据生成和结果解释，但是据 Swanson 的估计[8]，在整个分析费用中，用于这两部分的费用仍然占 70% 和 20%。因此，进一步发挥计算机在这方面的作用以降低整个分析费用还是大有可为的。

（2）进一步提高可靠性。可以预期在八十年代上半期把一个系统的年错误率降到 10^{-5} 以下[9]。

（3）发展用人工智能帮助结构分析的能力。所谓人工智能，其实就是把做出一系列决定所需要的知识预先存放在计算机的数据库里；机器犹如用户的顾问，用户提出问题，机器做出回答。所以这种办法也叫做启发式编程[10]。有了人工智能，对用户熟练程度的要求就可以大为降低；而系统的灵活性也可以大为提高。

（4）与提高系统通用性的同时，发展具有更高效率的专用程序。一个大型系统的功能越来越复杂，如果用这样一个系统去解决某一个需要多次重复计算的特定的问题，效率自然是不高的。在这种情况下，往往需要研制一些专用的，高效率的程序。所以，对于需要多次叠代计算的优化设计和非线性分析，最好是自成系统而不宜放在一个通用的软件中。Schrem 在文章[11]中也特别强调了这一点。

以上几点都是针对软件本身的发展说的。随着硬件的进一步发展，微处理机的功能有了

很大提高，价格也不断下降，因而出现了把软件固化的可能。目前正在发展一种称为有限元机器（Finite element machine）的专用计算机。在这种机器里，用许多微处理机分别代表结构模型中的一个元素或一个节点[9,12]，把这些微处理机排成一定的阵列，就可以把有限元模型映射到计算机硬件里。用这种有限元机器进行需要多次叠代的计算是特别有利的。

今后计算机的运算速度会由于采用更为复杂的处理机结构而大为提高。例如流水线处理机（Pipeline processor）和陈列处理机（Array Processor）的指令处理速度将比传统的单一处理机（Uniprocessor）快几倍到几十倍[13]。发展一种新的数据管理结构和算法以充分利用这些类型的处理机的速度潜力，将是十分必要和可能的。

四、关于HAJIF和HAJIF-I

HAJIF系统是从1977年正式开始研制的。在这以前，进行了调查研究，对于国内外有限元软件系统的应用情况和发展趋势，特别是国内各用户的需要和现行的各种程序的不足之处做了较多的探讨。根据调查研究的结果，决定在研制HAJIF时，着重于努力提高系统的通用性、灵活性、自动化程度和解题的效率；希望在这些方面与已有的程序相比，能够有所前进。考虑到当时实际具有的技术条件，确定首先研制用于线性静力分析的部分，做为系统的Ⅰ型，然后再逐步扩充动力分析和非线性计算的能力，做为系统的Ⅱ型和Ⅲ型。

所有HAJIF的三个型别都是以校核计算为目的的。因此，只有在结构设计的后期，结构尺寸已经初步确定后才能使用。在结构设计初期使用的优化系统，将是另外的独立的软件。

HAJIF-I采用传统的有限元位移法和多级子结构分析技术。在使用FelixC512计算机进行计算时，解题的规模限制为每一子结构的自由度数小于3000，子结构个数不大于99，子结构级数小于10。根据航空结构的特点，元素库中有18种位移协调型元素，包括空间杆、直梁、曲梁、剪切鈑、薄膜鈑、弯曲鈑和刚性元等；材料库中有七种不同规格的铝和钢材料。由于这个系统主要用来解薄壁结构，因此每个节点的自由度数规定不超过6。

HAJIF-I具有如下的力学功能：

（1）可以使用节点座标系消除刚度矩阵的病态。例如当存在与主结构斜交的平面受力构件时，由于沿垂直于平面受力构件的方向上的刚度为零，装配成的刚度矩阵是病态的。这时在有关节点引入节点座标系，可以避免病态的出现。因此，刚度矩阵的装配并不一定是在统一的座标系下进行的。

（2）可以使用单点约束在指定节点的指定方向上引入强迫位移（允许是零位移）；也可使用多点约束消去刚硬元素引起的非独立自由度，以保证装配成的刚度矩阵是非奇异的。

（3）可以用两种方法处理对称结构以减少计算工作量。一种是载荷分解法，把外载荷分解成对称和反对称两部分，分别计算对称的一半结构在两部分载荷作用下的变形，再叠加起来，得到真正的解。另一种是子结构嵌入法，使用这种方法时不必把外载荷分为两部分，而是通过载荷、结构和结构在外载荷作用下的变形对于对称面的反射得到真正的解。

（4）可以在零级，即最低一级子结构的边界上加上外伸结构，用这种方法处理飞机翼面或机身这一类链式结构，得到的刚度矩阵是带式的，易于求解；并且可以显著减少子结构的级数，使计算的流程更为简洁。

（5）可以用计算位移的程序计算飞机翼面上给定点的位移影响系数；还可以通过五点插值的办法，由位移影响系数算出转角影响系数，供气动弹性计算用。

为了减少提供原始数据的人工工作量，用户可以使用专门的数据生成语句。只要提供少量信息和控制点座标等原型数据，计算机就可以根据语句的要求，自动生成计算所需的模型网格、节点座标、元素位置等全部原始数据。用户还可以使用载荷计算程序，按照强度规范的规定或者风洞试验的结果，算出飞机的气动力载荷；然后再根据气动力载荷和全机的重量分布，算出惯性载荷。

为了比较不同的解法和数据组织形式对整个系统效率的影响，备有自动分块加有效列和超元矩阵两种解法以及相应的两套数据组织形式供用户选用。在程序组织上，两种解法是一样的，都采用了两级管理和模块化的形式。两种解法的总框图分别见图 1 和图 2 。监控程序根据用户书写的计算说明书调用有关的功能模块，组成所需的计算流程，并完成规定的全部运算。

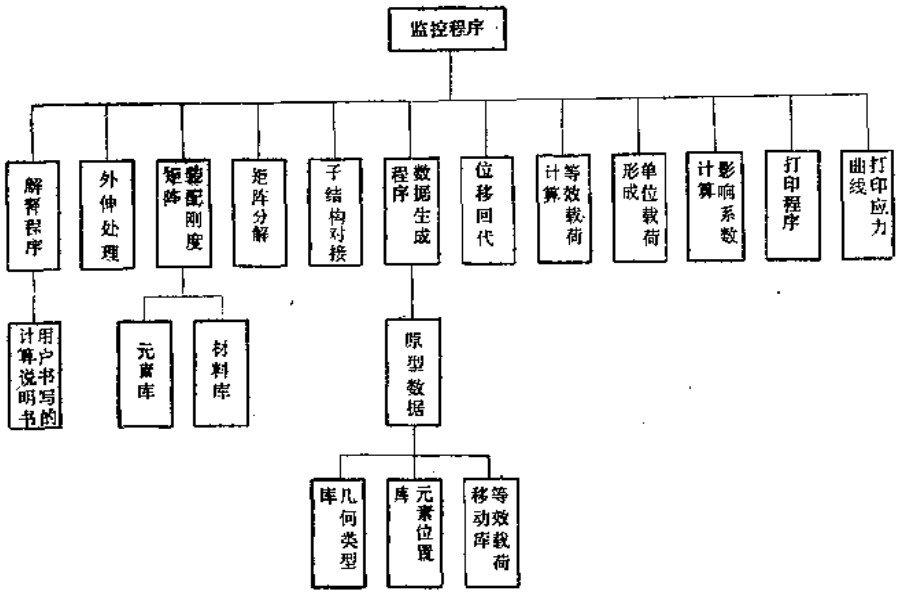


图 1　自动分块加有效列解法总框图

为了使系统与用户的接口简单明了，易于记忆和掌握，专门设计了面向用户的结构分析语句。语句的文字符号采用汉语拼音缩写，系统的解释程序可以把这些语句翻译成机器能够识别的内部代码。

HAJIF-I 在分调和联调过程中计算了大量例题，证明系统的工作是准确和可靠的。在正式批准装机运行以前，用它进行了一种飞机的全机应力分析。由于全机应力分析的规模很大，结构传力复杂，过去用人工方法或小的专用程序是不能实现的。这架

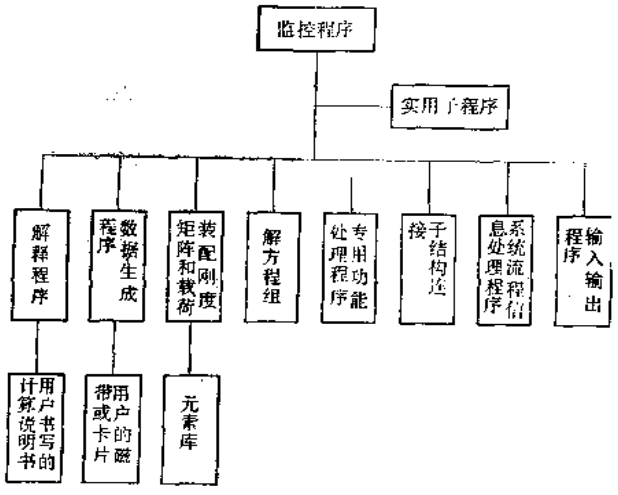


图 2　超元矩阵解法总框图

飞机全机共有 30,000 个自由度，分为 20 个子结构，在 Felix C512 机器上（双精度浮点运算的平均速度小于每秒 20 万次）约用十个小时完成了不包括原始数据生成和载荷计算在内的全部应力分析计算任务。算得的机翼变形、应力与破坏部位同全机静力试验实测的数据吻合良好。例如翼尖变形实测值为 45.85cm，计算值为 44.89cm；试验时机翼在 0 号翼肋到 1 号翼肋之间破坏，计算结果也是在这一部位应力水平最高，计算的剩余强度与试验得到的实际剩余强度基本一致，误差约 6%。

五、几点建议

有限元软件系统的作用日益受到国内各方面的重视，从事这方面工作的人也越来越多。如果能够把这些力量很好地组织起来，必可收到事半功倍之效。在当前我国的具体条件下，可能有以下几点是值得注意的：

（1）协调从事研制有限元软件系统的力量，发挥各自的特点，避免重复性的无效劳动；

（2）注意已研制成功的有限元软件系统的推广应用和维护改进工作；

（3）加强有限元软件系统的标准化工作，诸如模块的接口，汉语的输入和输出等；

（4）处理好引进和自行研制的关系；

（5）促进计算机硬件的发展并且充分发挥现有计算机的作用。

参 考 文 献

〔1〕航空结构分析系统研制组，用于静力分析的航空结构分析系统Ⅰ型，航空学报，1，1 (1980)。

〔2〕航空结构分析系统研制组，航空结构分析系统Ⅰ型 (HAJIF-I) 说明书。

〔3〕航空结构分析系统研制组，航空结构分析系统Ⅰ型 (HAJIF-I) 使用手册。

〔4〕Weidman, D. J., NASA,TM X3278, pp. 1—10.

〔5〕Levy,S., Structural analysis and influence coefficients for delta wings, JAS (1953. 7).

〔6〕Turner, M.J. et al., Stiffness and deflection analysis of complex structures, JAS, 9(1956).

〔7〕Przemieniecki,J. S., Matrix structural anialysis of substructures, *AIAA Journal*, 1, 1(1963).

〔8〕Swanson, J. A., *Computers & Structures*, **10**, pp. 33—37.

〔9〕Schrem, E.,Finite element software in the next decade *ISD Report*, 181(1975).

〔10〕Melosh,R.J. and Marcal,P.V., Structural Analysis Consultation Using Artificial Intelligence, 北航讲义(1979).

〔11〕Schrem, E., Structural aspects of software systems for nonlinear finite element analysis, *ISD Report*, 223(1977).

〔12〕Jordan, H. F., Sawyer, P.L.,*Computers & Structures*, **10**, pp. 21—29.

〔13〕Torn, Computers in 80s,Proc. IFIP Congress(1974).

SDL 应用程序系统(第一部分:平面杆系)*

王绍华　张汉义
(中国建筑科学研究院建筑结构研究所)

应用程序系统是电子计算机在土建工程中使用的一门新技术。它技术先进，功能较大，能较好地处理比较复杂的工程设计问题。

近十多年来，国外对应用程序系统的研制十分重视，并已研制出一些水平较高的综合程序系统，如著名的美国土木工程综合程序系统（ICES)；英国的通用工程程序系统（GENESYS)。

我国建筑工程界近年来才开始这方面的工作，按国家建委下达的任务，1978 年有关大学、科研、设计等单位，按不同机型分三个组，协同进行结构设计语言 SDL 和应用程序系统的研制。

441B-Ⅱ型机研制小组先行实现了 SDL 系统的平面杆系部分，通过了大量的实例计算，并于 1979 年冬进行了全面技术鉴定。

本文就 SDL 系统的结构和功能，结构设计语言，语言编译程序，结构应用模块库，拼装程序和运行系统等五个问题进行介绍，并附有一个源程序编写实例。

一、SDL 系统的结构和功能

SDL 为一土建结构设计程序系统，是土建结构人员有效的计算机辅助设计工具。它采用结构设计语言作为人机联系的手段，由语言编译程序、结构应用模块库以及拼装程序、运行系统等部分组成，系统的结构见图 1。

SDL 系统的运行概况为：用户以结构设计语言将所设计的结构问题编成源程序，穿成纸带，即可送入计算机进行编译计算。译算过程中，先由编译程序 STDL 进行词法和语法检查，如发现错误，则印出错误信息，由用户下机修改或电传命令修改，如无错误，则将源程序全部信息形成内部信息文件，再由编译程序 DAFI 将这些内部信息文件，整理转换成应用目标模块所需要的变量值和数组值，并进行一致性检查，然后由拼装程序根据编译程序所给的信息，调用模块库的半目标模块，拼装成完整的可运行的目标模块，并且相互覆盖运行，最后得到所需要的结果。

SDL 系统平面杆系部分，专用于处理各种平面杆系结构的设计计算。其使用范围和功能如下：

1．可以计算任何形式的平面杆系结构或能简化为平面杆系的结构，如排架、框架、门

* 参加本系统研制工作的还有一机部第一设计院胡祖成、铁道部第三设计院欧阳炎、天津大学赵国瑞、天津市建筑设计院范贻昭、中国建筑科学研究院建筑结构研究所黄如福、林垚哲、魏文郎、陈德萱、亢文慎、胡梅等同志。

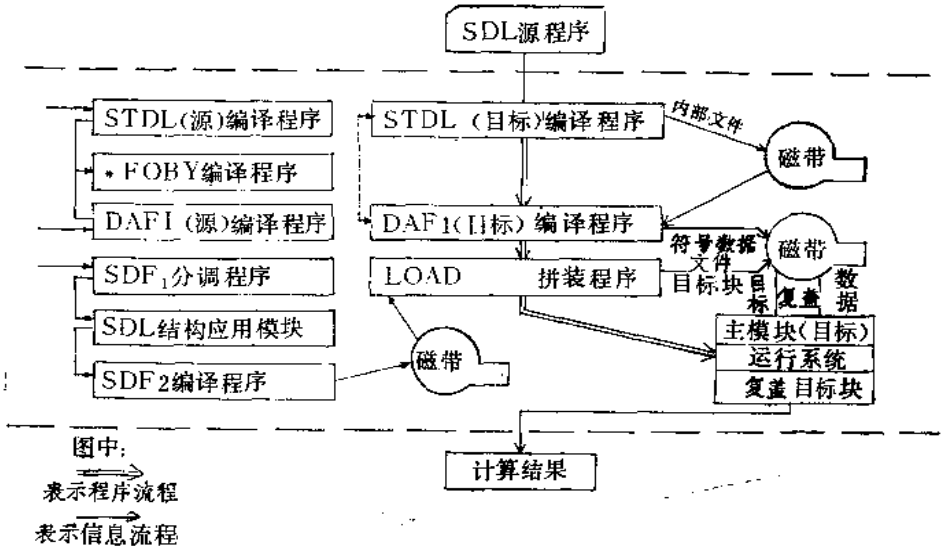


图1 SDL 程序运行系统

式刚架、拱、桁架、连续梁、空腹梁和框桁混合结构的位移、内力和反力。进行基础设计和钢筋混凝土框架、排架、连续梁的配筋设计。可以自动计算节点质量，计算结构自振周期及多振型、地震力和地震作用下各种杆件内力。

2．支座杆件可以是固结、弹性支承或其他非弹性支承，方向可以自定，也可以考虑支座沉陷的影响。

3．杆件有八种等截面，即矩形、I 形、T 形、L 形、矩形截面平腹杆双肢、管形、矩形截面斜腹杆双肢和任意截面，还有一种宽度不变高度沿杆轴线性变化的变截面。杆件联结可以是铰结、刚结或刚铰混合联结。杆件可考虑轴向变形、弯曲变形或剪切变形，还可考虑剪力墙和阶梯柱的偏心影响。对于规则矩形框架能自动进行节点和杆件的编号。

4．荷载可考虑静荷载、风荷载、活荷载、地震荷载、单层或双层吊车荷载、温度荷载以及 42 种荷载组合，荷载组合系数可按规范或自行指定。杆件自重可以自动形成并归入静荷载之中。

5．结构总节点数一般不超过 35 个，总杆件数一般不超过 50 个。在吊车或活荷载较少的情况下，总节点数和杆件数稍可扩大。

二、结构设计語言 SDL

结构设计语言 SDL (STRUCTURE DESIGN LANGUAGE) 是专为土建工程技术人员使用计算机而编制的一种面向问题语言，它具有灵活、直观、可读性好、通用性强以及便于人机对话等特点，是实现人机联系的良好手段。

SDL 文本先由 24 个单位协同提出初稿，后由中国建筑科学研究院和陕西第一设计院定稿，文本参照了国外先进经验，结合了我国现行土建规范有关规定，也考虑了目前国产机状况，故比较完整也比较适用。除一般常用语句外，按规范要求，文本增加了吊车荷载和地震荷载语句、组合语句、指定组合语句和活荷载互斥语句，还增加了节点重量、附加重量和地震参数语句。由于所用机器条件的限制，文本暂不放入修改语句、增删语句、图形输出语句和量

纲语句。

平面杆系结构设计语言，只采用了SDL文本的一部分内容。它分以下六组，包括41个语句：

1．结构总体描述，包括结构类型、网格划分、节点约束、杆件放松等语句；

2．结构杆件描述，包括节点座标、杆件联结、梁和柱的描述、杆件常数和杆件偏心等语句；

3．结构荷载描述，包括单独节点力，杆件力以及由此组合而成的静荷载、风荷载、活荷载、温度荷载、吊车荷载、地震荷载和它们组合情况的语句；

4．结构基础分析，包括杯形基础设计参数等语句；

5．结构配筋设计，包括配筋设计参数和梁配筋截面个数等语句；

6．中间结果输出，包括描述打印出各类荷载作用下的位移和内力等语句。

语句书写采用英语专业术语和简易的数字符号，如BEAM（梁）、COLUMN(柱)。可用一个语句描述相同要求的节点和杆件，如ALL BUT5—7表示除了5至7外的全部节点或杆件。

大多数语句均可独立存在，只有节点力荷载、杆件力荷载、已知支座位移、节点重量、附加节点重量、地震参数等八个语句才必须附在其相应的语句之中。

一般情况下，必须有结构类型、节点约束、节点座标、杆件联结、梁柱截面形状和尺寸、杆件常数和静荷载等语句，这样才能构成一个完整的计算过程。其他语句视实际情况而定，如有铰结杆，则增加杆件放松语句，有地震荷载则增加地震荷载语句，如要内定荷载组合则增加内定荷载组合语句，若使用者自己进行组合，则增写指定荷载组合语句等等。

书写语句的次序，除个别语句要按规定外，均可以随意。

使用人员利用上述各种语句，按照预定的语法规则描述所设计的工程结构问题，编写源程序，即可上机计算。

表1是源程序所需的各种语句，其中带〔〕的语句可以视实际情况省略。

表1　源　程　序　语　句　表

SDL 开始	SDL (SDL PROGRAM)
结构开始	STRUCTURE
结构类型	PLANE TRUSS〔PLANE FRAM、CONTINUE BEAM、BENT)
〔网格划分〕	GRID DEFINITION
节点约束	RESTRAINT
〔杆件放松〕	MEMBER RELEASE
〔节点放松〕	NODE RELEASE
节点座标	NODE COORDINATES
杆件联结	MEMBER NODE
梁 描 述	BEAM
柱 描 述	COLUMN
杆件常数	CONSTANT
〔杆件偏心〕	MEMBER ECCENTRICITY
静 荷 载	LOADING DEAD
〔风荷载〕	LOADING WIND

续 表

〔活荷载〕活载1	LOADING LIVE 1
〔活荷载〕活载2	LOADING LIVE 2
〔活荷载〕⋮	⋮
〔活荷载〕活载互斥	INCONSISTENT LOAD
〔温度荷载〕	LOADING TEMPERATURE
〔吊车荷载〕	LOADING CRANE
〔地震荷载〕	LOADING EARTHQUAKE
〔荷载组合〕	COMBINATION
〔配筋设计〕	REINFORCEMENT DESIGN
〔配筋梁截面数〕	REINFORCEMENT SECTION NUMBER OF SECTION
〔基础分析〕	FOOTING ANALYSIS
结构结束	END STRUCTURE
〔中间结果输出〕	OUTPUT
SDL 结束	END SDL／(END SDL PROGRAM／)

三、SDL 语言编译程序

SDL 语言编译程序分为 STDL 和 DAFI 两个程序，还附属有一些辅助性程序，主要用于将结构设计语言编写的源程序翻译成机器的内部信息。

1．STDI 程序 STDL 程序对 SDL 源程序进行词法分析、语法分析和语义加工而形成数据文件，并为一致性检查和装配模块提供信息。

STDL 程序采用紧凑的状态矩阵方法来进行词法、语法检查和语义加工，为简化语法逻辑，保证语法检查严格，把词法分析从语法分析中抽出，单独形成一扫描程序。扫描程序能自动识别出源程序的符号，并把它交给语法分析和语义加工程序。

经语法检查或电传修改，STDL 将源程序所给数据加工成内部信息文件，信息文件是边作语法分析边加工完成，一次扫描。信息文件使用拉链技术，构成多级数据结构。这样可以简化存取手续，满足源程序语句的随意出现，并随意存放用户提出各种数据的要求。内部信息文件的数据结构有两层，一是 LVTOC 数组指针，二是 DATA 数据和拉链指针区。数据结构形式如图 2。

2．DAFI 程序 DAFI 程序依据 STDL 提供的内部信息文件，按照 LVTOC 数组指

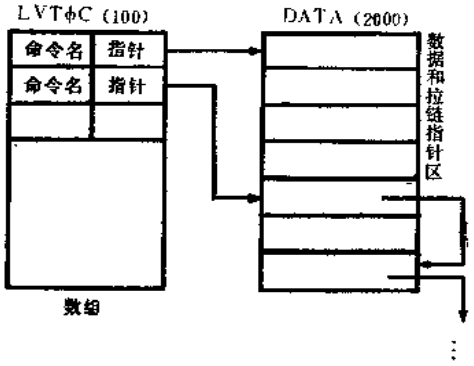


图 2 数据结构

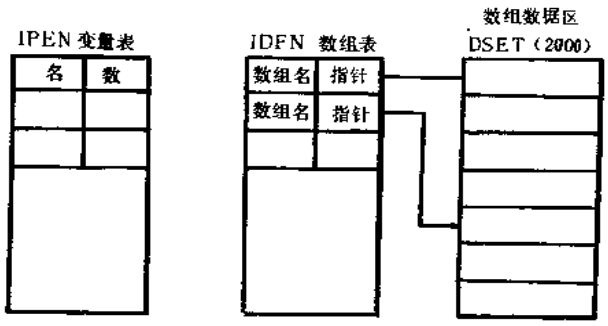


图 3 符号数据文件

针，把编译记录在DATA数组内的数据，加工整理转换形成目标模块运行所需的符号数据文件，并存入外存中。这个文件包括三张表：IPEN变量表，IDFN数组表和DSET（2000）数组数据区，见图3。

为完成DATA数组结构转换到DSET数组结构，DAFI程序备有各自独立的10个子程序以及3个共用程序。10个子程序分别负责处理座标命令、荷载命令、活荷载互斥、荷载组合、杆件性质、杆件放松、节点放松、约束点信息、基础分析、地震力计算和网格划分等。共用程序分别负责处理杆件（节点）的编号和个数，打出错误信息和处理杆件截面常数特征。

3．打印源程序 LPSD **和电传修改程序** SDXG　LPSD和SDXG是为语言编译程序服务的子程序，前者把记在磁带零号上的源程序从宽行打印机输出，后者则根据用户电传命令对SDL源程序进行修改。

4．扩充 FORTRANⅡ **语言及其编译程序** *FOBY　语言编译程序STDL和DAFI以及服务性程序LPSD和SDXG，均用扩充FORTRANⅡ语言的编译程序*FOBY进行编译。

采用高级语言扩充FORTRANⅡ编制SDL编译程序，优点很多，一是能适应结构设计语言在研制和提高的过程中不断修改和增删功能的要求，二是所编制的程序可读性好，便于不同机器移植，此外编译程序人员可以集中力量于编译技术而不必费力于内存分配、指令地址代真等烦杂工作。

根据SDL编译程序特殊操作的需要，扩充FORTRANⅡ增加了字符操作、字位操作、输入输出操作、逻辑操作、运行控制操作等一些标准外部函数。

四、结构应用模块库

结构应用模块是用FORTRAN语言编写的结构应用程序段或若干个程序段，这些程序段都有独立的计算功能。

SDL结构应用模块库包括一个主模块（零级模块）和十五个子模块（一级模块）。各模块的名称和功能如表2。

SDL结构应用模块由扩充的FORTRANⅡ语言编写，并由*SDF2程序将该语言编写的模块源程序编译成目标模块，存放在磁带目录块库中。

扩充FORTRANⅡ，引入了动态数组，以解决目标模块运行时确定数组界的范围和分配内存地址的问题；同时对动态数组分配内存作了特殊约定，以满足结构应用模块覆盖运行时互相交换数据的要求。此外为了使目标模块与SDL编译程序所产生的符号数据文件接口，取出磁带上的初始数据并放入对应的变量和数组之中，把FORTRANⅡ语言中由光电读入的READ语句，定义成符号数据文件中选取数据的语句。

表2　结构应用模块表

序号	名称	功用
1	SDL	主控模块
2	MERE	对输入信息进行加工和检查

续　表

序号	名　称	功　　用
3	FMAT	形成总刚矩阵
4	DEAL	形成静载的质量
5	SMAV	形成活载的质量
6	DF1	计算自振周期、振型、地震力及位移
7	QDL	求地震力
8	LIVL	形成活载
9	DF2	解活载下的位移
10	QHH	求活载内力及预组合
11	WINT	形成吊车荷载、风载、温度荷载
12	DF3	解吊车荷载、静载、风载、温度荷载下的位移
13	QJN	求吊车荷载、静载、风载、温度荷载下的内力
14	COMB	内力组合
15	RFMT	梁配筋和包络
16	ZPOT	柱配筋和基础设计

SDL 目标模块运行时，零级主模块是常驻内存，而一级模块则由主模块分别从模块库中调出，互相覆盖运行。

五、拼装程序、运行系统和分调技术

拼装程序 LOAD 的任务，是根据 STDL 和 DAF1 程序对 SDL 源程序编译加工所得的信息，把存放在磁带库上的半目标模块装配成可覆盖运行的目标块记在另一盘磁带上，然后又调入主模块，装配代真后，整个系统就转入主目标模块，进行结构设计。

LOAD 粗框图如图 4。

运行系统 IOCS 的功用是根据 READ语句的要求，将符号数据文件中的数据送给对应的变量和数组，在一个结构目标块运行后，根据主目标块的调用语句，调入对应的目标模块，并转入运行，计算和打印出 SDL 问题的全部结果。

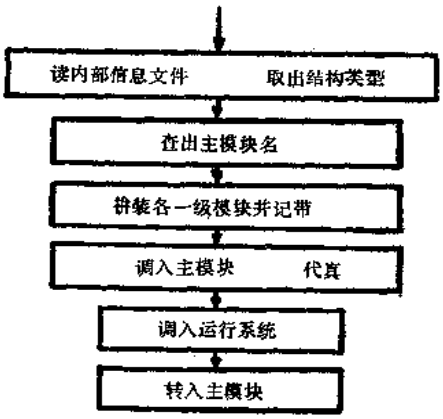


图 4　拼装程序粗框图

运行系统有下述三个子程序：

一是动态数组分配和释放子程序。其任务是对各种数组进行填界，计算数组体积，分配数组始地，为留出空间或扩大某数组体积而把若干数组搬出。

二是数据输入子程序。其功用是在目标模块运行时，将有关变量和数组送入其所分配的内存地址。当输入的是变量时，则根据变量名查变量表，并将查得的变量值送入该变量分配的单元中去；当输入的是数组时，则根据数组名查数组表，查得后按照对应的数值指示地址码，将磁带中的数据读出来，送入数组分配的一批单元之中。

三是模块覆盖运行子程序。其功能是根据主目标块的调用语句，调入指定序号的一级模块，然后将实元地址送入哑元地址，检查程序长度是否侵入上一级模块所要保留的动态区域，如未侵入，则将新调一级目标模块的动态数组和主模块的动态数组拉链上，并将动态数组体积置零，最后转入新调的一级目标模块中去。

模块分调编译程序 SDF1：

结构应用模块的编制，通过 SDF1 程序实行分调，其目的在于加快本系统的研制进度，使编译程序和应用模块的编制和调试能同时进行。

SDF1 程序首先通过个别语句的增删，将每个结构应用模块改写成一个单独的 FORTRAN 程序，然后在每个程序运行结束前，放入一个调用一个程序的覆盖函数语句，使得一个程序运行结束后，自动调入另一个程序，以此来模拟 SDL 系统结构应用模块的覆盖运行状况。SDF1 程序是脱离 SDL 系统的，原始数据由光电机上输入，语句仍是原 FORTRAN 语言的含义，由于 SDF1 增加了程序覆盖、动态数组等功能，可以作为扩充的 FORTRAN Ⅱ 语言编译程序单独使用，故对于小机器上实现 SDL 程序系统存在的矛盾，能得到一定程度的解决。

六、源程序编写实例

图 5 为一复式钢筋混凝土框架结构计算简图，设计烈度为 7 度，要求进行内力组合、配筋和基础设计。

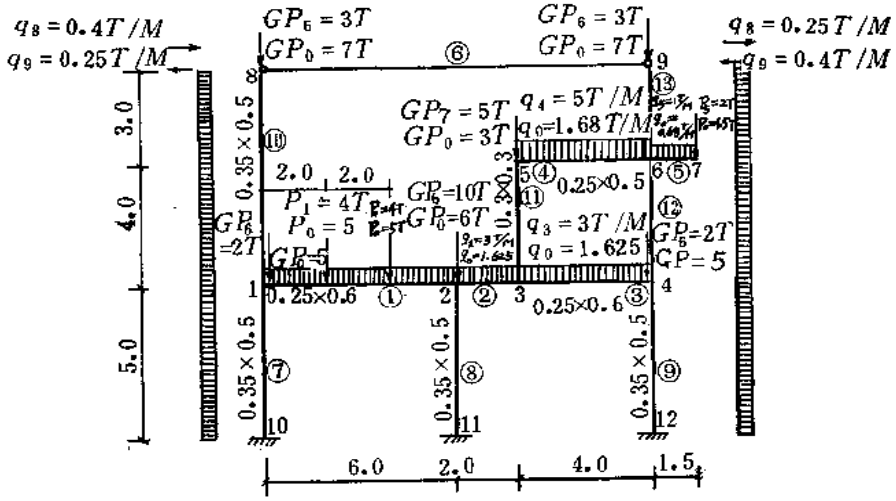


图 5 复式框架结构及荷载简图

用 SDL 书写的源程序如下：

```
SDL PROGRAM;
STRUCTURE;
PLANE FRAM;
NODE COORDINATES;
(1) 0, 5; (2) 6, 5; (3) 8, 5; (4) 12, 5; (5) 8, 9; (6) 12, 9; (7) 13.5, 9; (8) 0.12;
(9) 12, 12; (10) 0, 0; (11) 6, 0; (12) 12, 0;
```

```
MEMBER NODE;
(1) 1, 2; (2) 2, 3; (3) 3, 4; (4) 5, 6; (5) 6, 7; (6) 8, 9; (7) 10, 1; (8) 11, 2;
(9) 12, 4; (10) 1, 8; (11) 3, 5; (12) 4, 6; (13) 6, 9;
BEAM: (1—3) RECT, B=0.25, H=0.6;
(4—5) RECT, B=0.25, H=0.5;
(6) ANY SECTION, A=1000, IZ=1000;
COLUMN: (7, 9, 10, 12, 13) RECT, B=0.35, H=0.5;
(8) RECT, B=0.35; H=0.35; (11) RECT, B=0.3, H=0.3;
CONSTANT: (1—13) E=2600000, DENSITY=2.5;
RESTRAINT: (10—12) FIXED;
NODE RELEASE: (8, 9);
LOADING DEAD;
NODE FORCE: (1, 4) -5, GY; (2) -6, GY;
(5) -3, GY; (8, 9) -7, GY;
CONCENTRATED FORCE:
(1) -5, Y, 2; -5, Y, 4; (5) -1.5,Y,1.5;
UNIFORM:
(1—3) -1.625, Y; (4) -1.68, Y; (5) -0.68, Y;
LOADING LIVE↑1↑;
NODE FORCE:
(1—4) -2, GY; (2) -10, GY; (8, 9) -3, GY;
LOADING LIVE↑2↑;
NODE FORCE: (5) -5, GY;
LOADING LIVS↑3↑;
CONCENTRATED FORCE:
(1) -4, Y, 2; -4, Y, 4; (5) -2, Y, 1.5
UNIFORM:
(1—3) -3, Y; (4) -5, Y; (5) -1, Y;
LOADING WIND ↑1↑;
UNIFORM: (7, 10) -0.4, Y; (9, 12, 13) -0.25, Y
LOADING WIND ↑2↑;
UNIFORM: (7, 10) 0.25, Y; (9, 12, 13) 0.4, Y
LOADING EARTHQUAKE;
EARTHQUAKE PARAMETER:
DU=7, C=0.35, KF=2;
COMBINED;
REINFORCEMENT DESIGN:
(1—13) RH=200, RG=1;
FOOTING ANALYSIS:
(10) R=20, MB=0.3, MD=1.5, D=2.0, WEI=1.8, WE=1.8, HO=0.3, HD=1.0,
TO=0.25, EC=1, WW=15, EW=0.35;
(11) R=20, MB=0.3, MD=1.5, WEI=1.8, D=2.0, WE=1.8, HO=0.3,
HD=1.0, TO=0.25;
(12) R=20, EW=0.35, WW=15, EC=1, TO=0.25, HD=1.0, HO=0.3, WE=18,
WEI=1.8, D=2.0, MD=1.5, MB=0.3;
END STRUCTURE;
OUTPUT: (ALL) DEAD, LIVE, WIND, EART, DISP;
```

(ALL) DEAD, LIVE, WIND, EART, FORCE;
END SDL PROGRAM; ///

七、结　　语

SDL 程序系统平面杆件部分，功能比较齐全，适于各种平面杆系结构的静力分析和动力分析，同时使用简便而较完整的结构设计语言，易为广大建筑设计人员掌握使用。SDL 系统扩充了 FORTRAN Ⅱ 的功能，实现了以高级语言来书写编译程序和应用程序的工作，同时采用了模块结构、数据拉链、文件接口、模块覆盖、错误自诊等先进技术，从而具有较高的可靠性和良好的扩充性。

土建综合程序系统的研制和使用，是计算机在土建工程中应用的主要方向，SDL 系统平面杆系部分及其在 441B-Ⅱ型机上的实现，仅是这一方面的第一步，而且由于机型限制等原因，仍有不足之处，如计算的节点总数和杆件总数嫌少了些，不能批量处理等，有待今后改善和提高。

参　考　文　献

〔1〕Fenves, Steven J.,Logcher, Robert D., Manch, S.P., STRESS: A Reference Manual, A Problem-Oriented Language for Structural Engineering (1965).

〔2〕Logcher, Robert D., Connor, Jerome J., Jr. Nelson, Mark F., ICES STRUDL-Ⅱ, The Structural Design Language Engineering User's Manual, 1,2,3(1972).

〔3〕国家建委建筑科学研究院结构研究所、情报研究所，国外电子计算机在建筑工程中的应用，建筑技术通讯(1978)。

〔4〕北京石油化工总厂设计院、北京工业大学、重庆建筑工程学院合编，平面杆系结构（兼空间协同）的矩阵分析和通用计算程序，3—4 (1977)。

〔5〕沈康辰，有限单元程序体系 *YJCT* 阶段工作报告，工程计算，重庆建筑工程学院编(1976)。

多单元、多约束、多工况的结构优化设计——DDDU 程序系统

钱令希　钟万勰　隋允康　张近东

（大连工学院工程力学研究所）

一、前　　言

在文献〔1〕中，我们提出了一个效率比较高的结构优化方法，用来处理桁架在多工况和多约束下最轻结构重量的杆件截面优化，用 ALGOL 语言编写了程序 DDU-2。本文在这个基础上作了进一步的发展，主要表现在：（1）结构可以由三种单元组成，即轴力杆、三角形等应变平面单元和对称剪切平面单元，这样就可以把处理对象扩大到类如机翼那样的组合结构；（2）在优化过程中，用二次规划从众多约束里自动挑选有效约束。这样就便于同时处理多种约束，简化了计算程序，并解决了优化过程中一直存在的问题，有效/无效约束和主动/被动设计变量的区分。另外的变化和改进还有：（1）取杆件截面积和板厚比例乘子的倒数为设计变量；（2）由灵敏度分析近似表示结构反应以减少结构重分析次数；（3）采用相当虚荷载的概念把应力约束和变量上下限约束跟位移约束一样通过 Mohr 积分统一考虑；（4）用结构化 FORTRAN 语言[2]编写了模块式的 DDDU 程序，再通过自制的 S·F 翻译器译成 FORTRAN-Ⅳ语言。

二、所用非线性规划方法的基本思想

记：$A_k(K=1,2,\cdots\cdots M)$ 为当前方案的主设计变量（杆单元的截面积的比例乘子或平面单元的厚度的比例乘子）

$\alpha_k=-\dfrac{1}{A_k}$-为倒主设计变量

L_k 为 $A_k=1$ 时，A_k 控制的所有的单元重量之和

于是作为优化目标函数的结构重量为

$$W=\sum_k L_k A_k=\sum_k \frac{L_k}{\alpha_k} \tag{2-1}$$

记 N 个约束为

$$G_r=D_r-D_r^*\leqslant 0 \qquad (r=1,2,\cdots\cdots,\ N) \tag{2-2}$$

这里，D_r^* 为第 r 号约束的容许值，D_r 为相应的现行值，以轴力杆为例，它可以表示为下列

形式：

$$D_r=\sum_k \alpha_k \tau_{rk} \tag{2-3}$$

其中

$$\tau_{rk}=\sum_{i\in k}\frac{S_i S_i^V l_i}{(EF^0)_i}$$

这里 S_i 是实际载荷产生的内力，S_i^V 是相应于该变位的虚载荷所产生的内力。平面应力单元的 D_r 表达式稍微复杂一些，参阅后面的补充说明。因为我们所考虑的三种单元刚度都与设计变量 A_k 成正比，当取倒设计变量 $\alpha_k=\frac{1}{A_k}$ 之后，就可以把约束表示为倒设计变量的线性函数。对于应力约束，也可以由式（2-3）表达，只是产生 S_i^V 的虚载荷要作相应的变换。所以变位约束和应力约束都可表达为：

$$G_r=\sum_k \alpha_k \tau_{rk}-D_r^*\leqslant 0 \quad (r=1,2,\cdots\cdots,N) \tag{2-4}$$

尺寸约束：$A_k\geqslant \underline{A}_k$（$\underline{A}_k$ 为下限），也可以用上式来表达。为此，令

$$\alpha_k=\frac{1}{A_k},\quad D_r^*=\frac{1}{\underline{A}_k} \tag{2-5}$$

由此可推得

$$\tau_{rk}=\begin{cases}1 & \text{当 } k=r \text{ 号尺寸约束的设计变量号}\\ 0 & \text{当 } k\neq r \text{ 号尺寸约束的设计变量号}\end{cases}$$

我们的问题：求最优方案 $\alpha_k(k=1,2,\cdots\cdots M)$，在约束 $G_r\leqslant 0$ 的（2-4）式下，使目标 W（式 2-1）最小。

从某一个现行方案 α_k^0 出发，我们应该寻找最有利的修改 $\delta\alpha_k$。为此，在 α_k^0 的邻域中，将 W 和 G_r 作 Taylor 展开，得

$$W=W^0+\sum_k\left(-\frac{L_k}{(\alpha_k^0)^2}\delta\alpha_k+\frac{L_k}{(\alpha_k^0)^3}(\delta\alpha)^2\right) \tag{2-6}$$

$$G_r=G_r^0+\sum_k \tau_{rk}^0\delta\alpha_k\leqslant 0 \tag{2-7}$$

这里 $G_r^0=D_r^0-D_r^*$ 为现行方案的约束亏量或负的约束裕量。式中凡是带上标“0”的都表示是现行方案的量。

要注意的是在 W 展开式中保留了二阶变分项，而在 G_r 展开式中只有一阶变分项。这个一阶变分项仅取 α_k 的偏导，实际上 G_r 中的 τ_{rk} 是内力 S_i 和 S_i^V 的函数，而 S_i 和 S_i^V 与 α_k 是隐式相关的，所以一阶变分项本来还应该包括对内力的偏导，但是内力的一阶偏导数组成的向量是一个自平衡力系，由虚功原理，该力系的虚功为零，跟 τ_{rk} 的偏导数有关的项之和恰好就是自平衡力系的虚功。此外 G_r 的展开式（2-7）本来也应该有高阶变分项的，只是我们假设在 α_k 变分时，内力没有重分布，即 τ_{rk}^0 不变，在这个意义上说 G_r 是 α_k 的线性函数。实际上，这个假设对静定结构是正确的，对超静定结构只是近似的，所以必须用叠代的方法来修正。

现在，问题转换成求方案修改值 $\delta\alpha_k(k=1,2,\cdots\cdots M)$，在约束 G_r（2-7 式）下，使 W（2.6 式）最小。

引用拉格朗日乘子 μ_r 建立泛函：

$$\Phi = W + \sum_r \mu_r G_r$$

$$= \left[W^0 + \sum_k \left(\frac{-L_k \delta\alpha_k}{(\alpha_k^0)^2} + \frac{L_k (\delta\alpha_k)^2}{(\alpha_k^0)^3} \right) \right] + \sum_r \mu_r \left(\sum_k \tau_{rk}^0 \delta\alpha_k + G_r^0 \right) \tag{2-8}$$

根据非线性规划理论的 Kuhn-Tucker 条件，最优解必须使

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial(\delta\alpha_k)} = 0 & (2\text{-}9) \\ G_r \leqslant 0 & (2\text{-}10) \\ \mu_r G_r = 0 & (2\text{-}11) \\ \mu_r \geqslant 0 & (2\text{-}12) \end{cases}$$

由式 (2-9)，可得到修改值为：

$$\delta\alpha_k = \frac{(\alpha_k^0)}{2} \left[1 - \frac{(\alpha_k^0)}{L_k} \sum_r \mu_r \tau_{rk}^0 \right] \tag{2-13}$$

其中 μ_r 还应由条件 (2-10)，(2-11) 和 (2-12) 来决定，这几个条件也可以表成

$$\mu_r \geqslant 0 \begin{cases} \text{当 } G_r = 0 \quad \mu_r > 0 \quad \text{有效约束} \\ \text{当 } G_r < 0 \quad \mu_r = 0 \quad \text{无效约束} \end{cases} \tag{2-14}$$

以往的困难是没有直接的方法区分哪些是有效，哪些是无效约束。只有先作个假设，例如假设所有的约束 $r = 1, 2, \cdots\cdots, N$ 都是有效的，代入 $G_r = 0$，得一组方程 (N 个)，解出 N 个 μ_r，如果所有 μ_r 非负，则解是正确的。如果某些 μ_r 是负值，则令这些 μ_r 为零，并使相应的约束退出，重新求解 μ。如此重复凑合，直至收敛。为避免发散，负值的 μ 还不宜一次全体退出，必须有选择地逐个退出，所以确定 μ 的工作往往非常繁重，特别是在要考虑的约束数比较多的时候。

实际上，μ 的确定可归结为一个标准的二次规划问题，理由如下。

将式 (2-13) 代入式 (2-7) 中得

$$\{G\} = -[T]\{\mu\} + \{b\} \tag{2-15}$$

其中 $\{G\}$ 和 $\{\mu\}$ 分别为 G_r 和 μ_r 的 N 维向量，$[T]$ 为 $N \times N$ 阶方阵，其分量为

$$T_{r\rho} = \sum_{k=1}^{M} -\frac{(\alpha_k^0)^3}{2L_k} \tau_{rk}^0 \tau_{\rho k}^0 \tag{2-16}$$

$\{b\}$ 为 N 维向量，其分量为

$$b_r = \sum_{k=1}^{M} \frac{\alpha_k^0}{2} \tau_{rk}^0 + G_r^0 \tag{2-17}$$

我们知道，在 $[T]$ 为对称正定矩阵的条件下，满足条件

$$-\sum_{\rho=1}^{N} T_{r\rho}\mu_\rho + b_r < 0 \text{ 时 } \mu_r = 0 \tag{2-18}$$

$$-\sum_{\rho=1}^{N} T_{r\rho}\mu_\rho + b_r = 0 \text{ 时 } \mu_r > 0 \tag{2-19}$$

的一组解 $\{\mu\}$ 为下列二次规划的最优解[4]：

$$\left.\begin{aligned} &min\left(\frac{1}{2}\{\mu\}^T[T]\{\mu\}-\{b\}^T\{\mu\}\right)\\ &\{\mu\}\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}20)$$

前述表达 Kuhn-Tucker 条件的式 (2-14) 恰好满足式 (2-18) 与式 (2-19)，而 $[T]$ 的正定性下面就给出。因此，式 (2-9)～(2-12) 给出的求解 $\{\mu\}$ 的工作就转化为求解式 (2-17) 的二次规划问题。这已有简单而成熟的算法可供使用[4]。

接着就证明对称方阵 $[T]$ 的正定性。为此，对于一个任意向量 $\{y\}\neq 0$，我们有

$$\begin{aligned}\{y\}^T[T]\{y\}&=\sum_{\rho=1}^{N}\sum_{r=1}^{N}y_\rho\left\{\sum_{k=1}^{M}\frac{\alpha_k^3}{2L_k}\tau_{rk}\tau_{\rho k}\right\}y_r\\&=\sum_{k=1}^{M}\frac{\alpha_k^3}{2L_R}\left(\sum_{\rho=1}^{N}y_\rho\tau_{\rho k}\right)\cdot\left(\sum_{r=1}^{N}y_r\tau_{rk}\right)\\&=\sum_{k=1}^{M}\frac{\alpha_k^3}{2L_k}\left(\sum_{r=1}^{N}y_r\tau_{rk}\right)^2>0\end{aligned}$$

上式成立要求 $N\times M$ 矩阵 $[\tau_{rk}]$ 的 N 个行向量是线性无关的，其必要条件是 $N\leqslant M$，避免线性相关量进入的任务应在粗选有效约束时完成的。所谓粗选，是根据历次设计的结果，以及经验对现行方案的约束亏量作判断。我们知道 $D_r^0=D_r^*$ 表示现行方案恰好处在 r 约束面上，如果取 $D_r^0\geqslant(1-\beta)D_r^*$ 作为下步可能有效的约束，则当 $G_r^0\geqslant-\beta D_r^*$ 时，便初步认为第 r 个约束是可能有效的。其中 β 是一个人为决定的判断因子，例如一般可以取 $\beta=0.25$。

由二次规划决定 μ_r 值就可以代入式(2-12)得到 $\delta\alpha_k$，这一轮的新方案将是 $\alpha_k^0+\delta\alpha_k(k=1,2,\cdots\cdots M)$。

以上就是所用非线性规划方法的基本思想。其它还有若干考虑，继承和发展了前文献〔1〕。例如采用了一些近似假设和措施，我们认为 $\delta\alpha_k$ 只是给出这一轮改进方案的有利方向，沿这个方向我们在正设计变量空间中作一维的带射线步的搜索，以寻找这一轮的最优点 $\alpha_k^0+t\delta\alpha_k$，作为下一个非线性规划步的出发点。采用相当虚荷载把应力约束、变量上下限约束跟位移约束统一起来，避免了满应力方法与目标函数没有直接关系的弱点。另外还采用灵敏度分析的方法，给出设计变量改变时的结构反应，从而近似而准确地代替了结构重分析。

还应该一提的是在这个 DDDU 程序系统中，在作结构分析时，如果结构某些部分刚度相对于其它部分特别大时，可以运用节点主从关系的概念，以改善总刚度阵可能出现的病态，并减少结构模型的自由度。

三、DDDU 程序系统

图 1 是优化过程中一个循环的示意图。

循环开始：

点 1 ——初始方案 $\boldsymbol{A}_0$，作结构分析；

点 2 ——射线步点：$\boldsymbol{A}=\gamma\boldsymbol{A}^0$；

点 3 ——非线性规划步：$\boldsymbol{A}+\delta\boldsymbol{A}$；

点4，5——带射线步的一维搜索，得新方案 $\boldsymbol{A}'=(\boldsymbol{A}+t\cdot\delta\boldsymbol{A})\gamma'$；

DDDU 程序是模块装配式的程序系统，下面是用所谓“元语言”写出的优化过程：

IPASS=0；（IPASS 是结构重分析次数）

“LOOP”

IPASS=IPASS+1

{调 GLOASM，根据现行方案点 1（图 1）的设计变量 A_0 组装总刚度阵}

{调 LDLT1，作总刚度阵三角化}

{调 ANAL1，对实际荷载和虚荷载进行结构分析，算出位移和内力}

{调 SCALGT，根据分析结果和约束容许值（包括变位，应力和尺寸限制，计算射线步系数 Y，将设计点引到可行域边界上的点 2，得可行方案 A}

{调 SELCON，粗选有效约束}

{调 ANAL2，确定跟有效应力约束相对应的虚荷载，并利用已三角化的总刚度阵回代求解位移和内力}

{调 TAORK，计算 τ_{rk}，也就是当设计变量（k）取单位值时，该设计变量所控制的单元对有效约束（r）的贡献}

{调 TMATRX，由〔τ_{rk}〕形成二次规划的矩阵〔T〕和右端项{b}}

{调 MUGRT0，求解二次规划，得拉格朗日乘子向量{μ}}

{调 DELTAA，根据{μ}计算方案 A 的修改值 δA，得优化方向上的设计点 3}

{调 ANAL3，对 δA 作实荷载和虚荷载的灵敏度分析}

{调 ONESCH，作一维带射线步的搜索}

{调 AREUPD，得新的设计点 5：$(A+t\delta A)\cdot Y'$}

{调 CONVER，得收敛判断值 EP}

“TEST”（EP·LT·TOLERA*）“EXIT”

{必要的进一步近似}

“ENDLOOP”

{打印优化结果}

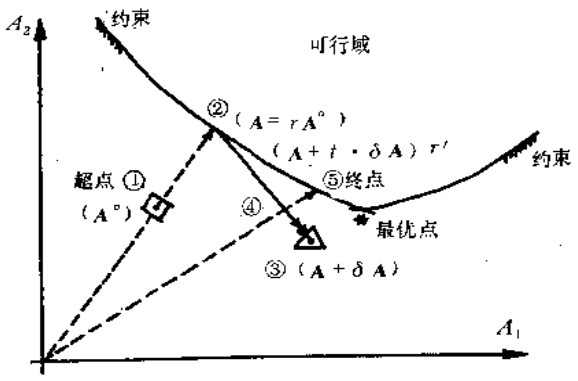


图 1. 优化过程中的一个循环示意图

而

$$EP=\left\{\sum_{k=1}^{M}\left|\left(\frac{A_k^{(\rho)}-A_k^{(\rho-1)}}{A_k^{(\rho)}}\right)^2\frac{L_k}{\sum_{k=1}^{M}L_k}\right|\right\}^{\frac{1}{2}}$$

必要的进一步近似在目前的程序中尚未采用，今后拟补充进去加快收敛速度。

现在补充说明几点：

1．结构单元——图 2 表示程序中的三种单元：轴力杆（BAR），三角形等应变平面单元（CST）和对称剪切平面单元（SSP）。后两种单元的材料物理性质满足正交各向异性的

* TOLERA 代表收敛精度 ε

虎克定律：因此可适用于多种复合材料。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & D_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3-1}$$

2．设计变量对单元的控制：为适应实际需要，或减少设计变量数目，采用主设计变量对单元从设计变量控制。

BAR：$F_i = A_{k(i)} F_i^{(0)}$ $(i=1,2,\cdots,M_B)$

CST 和 SSP：$t_j = A_{k(j)} t_j^{(0)}$

$(j=1,2,\cdots,M_C$ 或 $j=1,2,\cdots,M_S)$

其中 $A_{k(i)}$ 或 $A_{k(j)}$ 是 i 或 j 号单元所属的设计变量，M_B、M_C 及 M_S 分别代表各种单元的个数。

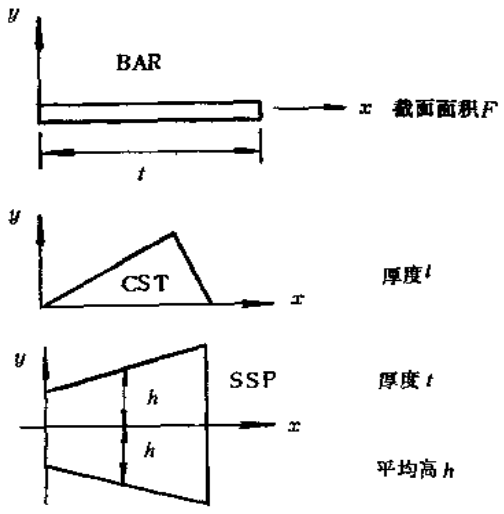


图 2

F_i 或 t_j 为 i 号单元的截面积或 j 号单元厚度。它们是有量纲的从设计变量，而 A_k 是无量纲的主设计变量。F_i^0 或 t_j^0 为 $A_k=1$ 时的截面积或厚度。

在非线性规划中，以 $A_{k(i)}$ 的倒数 $\alpha_{k(i)}=\frac{1}{A_{k(i)}}$ 为设计变量。设计变量对单元的控制可横跨单元的种类，例如，一个主设计变量不仅可控制轴力杆单元，而且还可以同时控制 CST 单元和 SSP 单元，这就提供了较大的使用灵活性，而文献〔3〕中的设计变量连接是一个主设计变量只能控制同一种类单元的方案。

3．广义位移的计算——根据虚功原理，广义位移的计算公式为

$$D_r = \sum_i D_{ri} = \sum_i \alpha_{k(i)} \tau_{r,k(i)}$$

这里，对轴力杆 $\tau_{r,k(i)} = \left(\frac{N_x N_x^V l}{EF^0}\right)_{r,i}$

CST 单元 $$\tau_{r,k(i)} = [\lambda_1 N_x N_x^V + \lambda_2 (N_x N_y^V + N_y N_x^V) + \lambda_3 N_y N_y^V + \lambda_4 N_{xy} N_{xy}^V]_{r,i}$$

SSP 单元 $$\tau_{r,k(i)} = [\lambda_1 N_x N_x^V + \lambda_4 N_{xy} N_{xy}^V]_{r,i}$$

其中，r 为约束号，i 为单元号，$\alpha_{k(i)}$ 为控制 i 单元的倒设计变量。N_x，N_y，N_{xy} 为单元的内力，上标 V 表示由虚荷载引起的内力。对于 SSP 单元，取高斯积分点处的内力。

$$\lambda_1 = \frac{AD_3}{D_1 D_3 - D_2^2}, \quad \lambda_2 = \frac{-AD_2}{D_1 D_3 - D_2^2}, \quad \lambda_3 = \frac{AD_1}{D_1 D_3 - D_2^2}, \quad \lambda_4 = \frac{A}{D_4}$$

而 A 是单元的平面面积，D_1, D_2, D_3, D_4 为虎克定律的矩阵系数（见式 3-1）。

4．应力约束转化为位移约束。

由于应力与相对应位移之间的线性关系，应力约束可以被认为是一种广义的位移约束。只要采用量纲处理过的适当的虚荷载，应力值的计算仍可用前述广义位移的计算公式。现在略去推导，给出为计算应力值的相当虚荷载公式如下：

轴力杆　　$\{P^V\}=\frac{[S]^T}{F^0}$

CST 单元　　$\{P^V\}=\frac{[S]^T}{t^0(\sqrt{N_x^2+N_y^2-N_xN_y+3N_{xy}^2})_0}\begin{Bmatrix}\left(N_x-\frac{N_y}{2}\right)\\ \left(N_y-\frac{N_x}{2}\right)\\ 3N_{xy}\end{Bmatrix}$

SSP 单元　　$\{P^V\}=\frac{[S]^T}{t^0(\sqrt{3N_x^2+3N_{xy}^2})_0}\begin{Bmatrix}3N_x\\ 3N_{xy}\end{Bmatrix}$

其中 F^0 和 t^0 的意义见前面。

$\{N_x,N_y,N_{xy}\}_0^T$ 是现行方案的单元内力向量。

$[S]$ 为单元节点位移 $\{D_e\}$ 与单元内力 $\{N\}$ 的转换阵，即 $\{N\}=\frac{1}{\alpha}[S]\{D_e\}$，事实上，$[S]$ 是当倒设计变量 $\alpha=1$ 时的单元固有性质。

平面应力状态的约束涉及强度理论，在 CST 和 SSP 单元中，采用 Mises 条件

$$\sigma_e=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2}\leqslant\sigma^*$$

σ^* 是容许应力值。

5．灵敏度分析。

在循环中由非线性规划步得到图 1 中的点 3 之后，本来可以期望这个新设计点就是最优点 3，但是由于做过一些近似，所以仍需继续循环。在进入循环之前，还可以把 $\{\delta A\}$ 看作是一个有利方向，而在此方向上作一维搜索以寻找本循环更好的点 5。一维搜索本应在各点上作结构重分析，但因代价太大，所以我们采用所谓灵敏度分析的方法：

由于设计变量变分 $\delta\{A\}$，在新设计点结构方程为

$$([K]+\delta[K])(\{u\}+\delta\{u\})=\{P\}$$

展开此式，注意到 $[K]\{u\}=\{P\}$ 并略去 $\delta\{K\}\delta\{u\}$ 得

$$[K]\delta\{u\}=-(\delta[K])\{u\}$$

它的右端即是求 $\{u\}$ 的拟荷载。因总刚度阵已三角化，所以经简单回代就可以解出 $\delta\{u\}$。为进一步减少工作量，显然没有必要依 δA 计算整个总刚度阵变分 $\delta[K]$，程序中采用方法是用下式计算：

$$-\delta[K]\{u\}=-\sum_i([S_A]^T\{N\})_i\frac{\delta A_{k(i)}}{A_{k(i)}}$$

其中 $A_{k(i)}$ 为控制 i 单元的正设计变量值，$\{N\}$、$[S_A]$ 分别为 i 单元的内力向量和应变阵，而应变阵 $[S_A]=[D]^{-1}[S]F$，其中 $[D]^{-1}$、$[S]$ 分别为虎克定律方阵之逆和内力阵，平面应力单元的 F 为平面初始面积，对于轴力杆单元 $F=1$。

上述公式是用虚功原理推导的，此处从略。

灵敏度分析算出 $\delta\{u\}$，便可求出相对应的单元内力增量 $\delta\{N\}$。

当我们在下述直线上进行一维搜索时：

$$\boldsymbol{A}_t=\boldsymbol{A}+t\delta\boldsymbol{A}$$

在程序中，我们取 $t\in[0.9,2]$。

可以导出，对应于 A_t 的单元内力和 r 号有效约束的位移分别为：

$$\{N\}=\{N_0\}+(\{N_0\}\frac{\delta A_{k(t)}}{A_{k(t)}}+\delta\{N\})t$$

$$D_r=\sum_t \tau_{r,k(t)}/A_{k(t)}-t\sum_t \tau_{r,k(t)}\delta A_{k(t)}/A^2_{k(t)}$$

利用这两个公式，可避免在搜索时进行重分析。因为它们与参数 t 成正比，所以对于变分量进行一次计算保存起来就可以多次使用了。

四、应 用 举 例

DDDU 程序系统在西门子计算机上调通之后，算了五个例题，其中第一题为三杆问题，叠代两次就收敛到理论解，其中另两个题的收敛速度和精度均超过 ACCESS1 的计算结果，最后两个题接近于 ACCESS1 的结果。

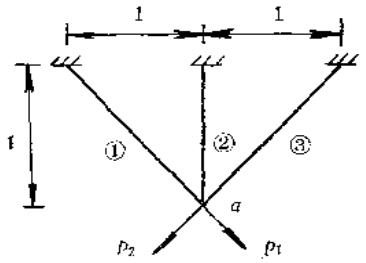


图 3

例 1　三杆平面桁架

工　　况：1）$P_1=20$，2）$P_2=20$；

许用应力：拉——20，压——15；

容许变位：节点 a 的竖向最大位移 $\Delta a=10/E$；

材料容重：$\rho=1$

用 DDDU 二次叠代记录如表 1 所示。

表 1

	A_1	A_2	A_3
初始方案	2.00	2.00	
一次叠代	0.6665	0.9442	2.8292
二次叠代	0.6667	0.9428	2.8284
理 论 解	0.6667	0.9430	2.8284

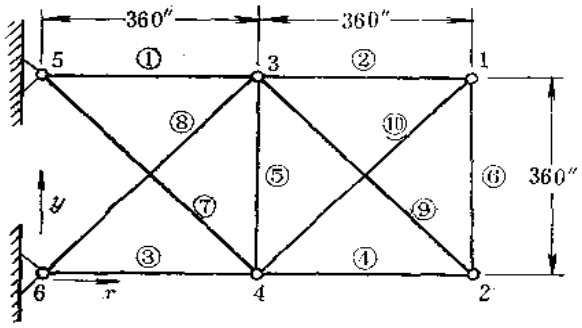


图 4

例 2　十杆问题三（图 4）

工　　况：一个，在 2、4 节点上各作用一个负 y 方向 10^5 磅外荷。

许用应力：$[\sigma^+]=25000$ 磅/英寸^2，$[\sigma_-]=25000$ 磅/英寸^2；

弹性模量：$E=10^7$ 磅/英寸^2；

材料容重：$\rho=0.1$ 磅/英寸^3；

容许变位：节点 1、2、3、4 皆有 ±2 英寸的位移约束。

表 2 给出了 DDDU 与国外其他方法的最后设计结果。

表 2

杆号	最后截面面积（英寸）^{2}				
	ACCESS1 双精度	Schmit 等人(5)	Venkayya(6)	Gellatly(7)	DDDU
1	30.67	33.432	30.416	31.35	30.902
2	0.100	0.100	0.128	0.100	0.100
3	23.76	24.260	23.408	20.03	23.545
4	14.59	14.26	14.904	15.60	14.960
5	0.100	0.100	0.101	0.140	0.100
6	0.100	0.100	0.101	0.240	0.297
7	8.578	8.338	8.696	8.35	7.611
8	21.07	20.740	21.084	22.21	21.275
9	20.96	19.69	21.077	22.06	21.156
10	0.100	0.100	0.186	0.100	0.100
最后重量	5076.85	5089.0	5084.9	5112	5069.40
分析次数	13	24	26	19	11

叠代过程在表 3 中给出。

表 3

分析次数	ACCESS1 双精度	Schmit 等人(5)	Venkayya(6)	Gellatly(7)	DDDU
1	7852.9	12846.7	8266.1	8266	6575.0
2	6650.8	8733.4	6281.7	6366	5750.8
3	6161.4	9144.6	6065.7	6080	5693.9
4	5892.6	8332.5	5984.5	5779	5469.1
5	5656.3	7243.0	5963.1	5625	5323.9
6	5426.8	6749.6	5920.1	5547	5218.1
7	5790.8	6507.9	5881.6	5470	5101.8
8	5153.8	6384.3	5848.1	5392	5079.8
9	5110.3	6339.8	5819.7	5323	5077.6
10	5087.2	6314.9	5795.9	5266	5069.4
11	5081.1	5998.7	5776.4	5225	
12	5076.9	5760.1	5760.7	5200	
13		5734.6	5748.2	5195	
14		5705.6	5738.3	5206	
15		5468.8	5730.7	5191	
16		5315.8	5724.7	5169	
17		5306.2	5720.2	5147	
18		5215.8	5716.7	5112	
19		5162.9	5713.7		
20		5135.8	5712.2		
21		5107.0	5502.9		
22		5094.1	5343.8		
23		5089.0	5221.5		
24			5127.0		
25			5084.9		

重量单位：磅

图 5 给出了上表所示的叠代过程。从图中可以比较出各种方法的收敛过程的特点，不难看出，DDDU 同 ACCESS1 类似，重量下降得较快，而且很平稳地收敛了。

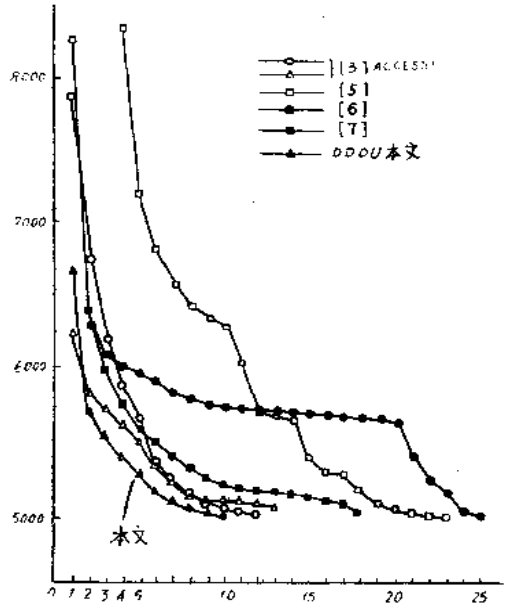


图 5

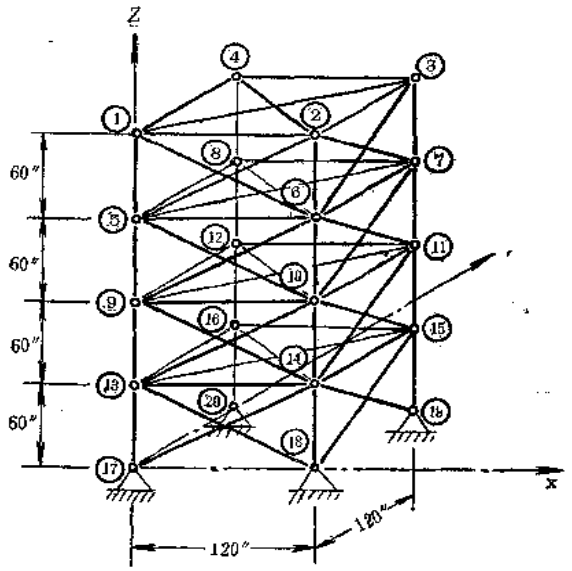


图 6

注：为了清晰，后面的交叉腹杆没有画

例 3　七十二杆空间桁架（图 6）

工　　况：工况一为 1 号节点 $P_x=5000$ 磅，$P_y=5000$ 磅，$P_z=-5000$ 磅；

工况二为 1 号，2 号，3 号，4 号分别作用 $P_z=-5000$ 磅；

许用应力： $[\sigma_+]=25000$ 磅/英寸^2，$[\sigma_-]=25000$ 磅/英寸^2；

弹性模量： $E=10^7$ 磅/英寸^2；

材料容量： $\rho=0.1$ 磅/英寸^3；

容许变位： 1 号至 16 号节点 x、y、z 三个方向皆有 ±0.25 英寸的位移约束。

本例七十二个轴力杆单元，通过设计变量连接，这些单元被十六个独立设计变量控制。

表 4 给出了 DDDU 与国外其他方法的最后设计结果。

表 4

设计变量号	最后设计的横截面面积（英寸^2）						
	ACCESS1 NEWSUMT	ACCESS1 CONMIN	M[H(5)	Venkayya(6)	Gellatly 等人(7)	Berke 等人(8)	DDDU
1	0.1665	0.1558	0.1585	0.161	0.1492	0.1571	0.1564
2	0.5458	0.5484	0.5936	0.557	0.7733	0.5385	0.5457
3	0.4105	0.4105	0.3414	0.377	0.4534	0.4156	0.4106
4	0.5699	0.5614	0.6076	0.506	0.3417	0.5510	0.5692
5	0.5233	0.5228	0.2643	0.611	0.5521	0.5082	0.5237
6	0.5173	0.5161	0.5480	0.532	0.6084	0.5196	0.5171
7	0.1000	0.1000	0.1000	0.100	0.1000	0.1000	0.1000

续表 4

设计变量号	最后设计的横截面面积（英寸²）						
	ACCESS1 NEWSUMT	ACCESS1 CONMIN	MIH(5)	Venkayya(6)	Gellatly 等人(7)	Berke 等人(8)	DDDU
8	0.1000	0.1133	0.1509	0.100	0.1000	0.1000	0.1001
9	1.267	1.268	1.1067	1.246	1.0235	1.2793	1.2683
10	0.5118	0.5111	0.5792	0.524	0.5421	0.5149	0.5116
11	0.1000	0.1000	0.1000	0.100	0.1000	0.1000	0.1000
12	0.1000	0.1000	0.1000	0.100	0.1000	0.1000	0.1000
13	1.885	1.885	2.0784	1.818	1.4636	1.8931	1.8862
14	0.5125	0.5118	0.5034	0.524	0.5207	0.5171	0.5123
15	0.1000	0.1000	0.1000	0.100	0.1000	0.1000	0.1000
16	0.1000	0.1000	0.1000	0.100	0.1000	0.1000	0.1000
重量	379.640	379.792	388.63	381.2	395.97	379.67	379.62
分析次数	9	8	22	12	9	5	8

优化叠代过程的重量见表 5。

表 5

叠代次数	ACCESS1 NEWSUMT	ACCESS1 CONMIN	Schmit 等人(5)	Venkayya(6)	Gellatly 等人(7)	Berke 等人(8)	DDDU
1	731.15	415.15	809.12	656.8	656.77	656.77	449.67
2	477.95	383.79	838.09	478.6	416.07	387.01	403.38
3	397.43	380.63	796.16	455.0	406.21	379.67	387.38
4	383.27	380.42	763.81	446.9	399.06	379.87	379.95
5	380.47	379.91	736.69	445.5	396.82		379.67
6	379.86	379.79	716.63	445.4	396.02		379.63
7	379.68	379.79	708.77	401.7	395.97		379.62
8	379.64		645.07	391.5			
9			616.97	383.6			
10			525.29	381.6			
11			491.96	381.2			
12			468.69				
13			450.22				
14			433.77				
15			423.94				
16			413.65				
17			404.08				
18			397.43				
19			393.88				
20			388.14				
21			388.63				

例4　十八单元机翼（图7）

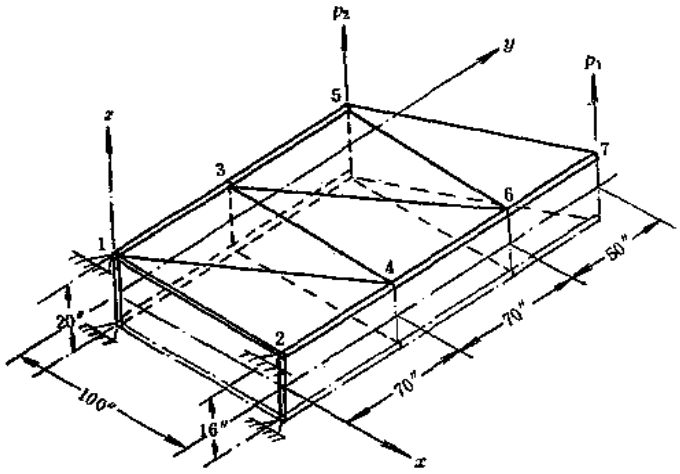


图7

工　　况：工况一为7号节点作用 $P_z=5000$ 磅，工况二为5号节点作用 $P_z=10000$ 磅；

许用应力：对于轴力杆单元 $[\sigma_+]=10000$ 磅/英寸^2，$[\sigma_-]=10000$ 磅/英寸^2；

对于CST单元和SSP单元：

$[\sigma]=10000$ 磅/英寸^2

弹性模量：对于各种单元 $E=10^7$ 磅/英寸^3；

泊 松 比：对于平面应力单元泊松比 $\nu=0.3$；

材料容重：$\rho=0.1$ 磅/英寸^3；

容许变位：节点3号至7号 x，y，z 三个方向分别为 ± 2 英寸位移约束；

本例共十八个单元，其中轴力杆单元五个，独立设计变量也是五个，其中CSP单元五个，被三个独立设计变量控制；其中SSP单元八个，独立设计变量也是八个，总共是十六个独立设计变量。另外，本例对CST划元的模式采用了两种中的模式一。

表6给出了CST单元采用模式一划元的最后设计结果。

表6

类　型	单元号	ACCESS1	DDDU
轴力杆	1	4.045 (英寸)^2	3.2349 (英寸)^2
	2	0.1001 (英寸)^2	0.1006 (英寸)^2
	3	0.1001 (英寸)^2	0.1006 (英寸)^2
	4	0.1330 (英寸)^2	0.2198 (英寸)^2
	5	0.1002 (英寸)^2	0.1006 (英寸)^2
CST	1,2	0.08286 (英寸)	0.08922 (英寸)
	3,4	0.05363 (英寸)	0.05118 (英寸)
	5	0.03786 (英寸)	0.03728 (英寸)

续表 6

类　型	单元号	ACCESS1	DDDU
SSP	1	0.3636（英寸）	0.4106（英寸）
	2	0.2236（英寸）	0.2282（英寸）
	3	0.1310（英寸）	0.1237（英寸）
	4	0.1156（英寸）	0.1297（英寸）
	5	0.09166（英寸）	0.09412（英寸）
	6	0.02000（英寸）	0.02012（英寸）
	7	0.02000（英寸）	0.02012（英寸）
	8	0.03096（英寸）	0.03018（英寸）
最后重量		402.97 磅	407.571 磅
分析次数		9	10

叠代过程可参阅表 7。

表 7

叠代次数	ACCESS1	DDDU
1	586.066	597.738
2	466.410	542.923
3	422.779	473.745
4	408.848	437.569
5	404.744	440.138
6	403.516	416.804
7	403.118	413.896
8	402.966	410.655
9		407.571
10		

重量单位：磅

例 5　三角机翼（图 8）

工　　况：一个，从节点 10 到 44 号皆作用 $P_z=8057$ 磅；

许用应力：$[\sigma]=125000$ 磅/英寸^2；

弹性模量：$E=16.4\times10^6$ 磅/英寸^2；

泊 松 比：$\nu=0.3$；

材料容重：$\rho=0.16$ 磅/英寸^3；

容许变位（见下表）：

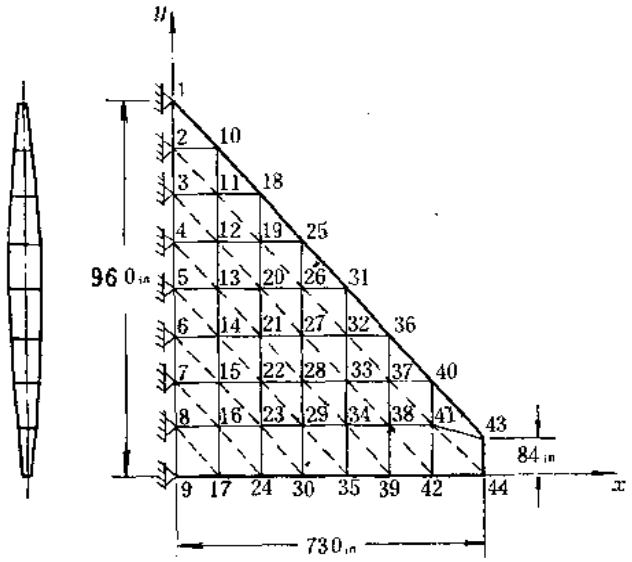


图 8

节 点 号	位移约束（英寸）
10～17	±14.0
18～24	±28.0
25～29	±42.0
30	±30.0
31～35	±56.0
36～39	±70.0
40～42	±84.0
43、44	±100.8

位移约束系沿节点 z 方向。

本例共 133 个单元，其中CST单元 63 个，SSP单元70 个，由于设计变量连结的模式不同和初始设计变量不同，三角机翼问题又可分成 A、B、C、D、E 五个问题，我们算了问题 A。

问题 A 是 28 个独立设计变量，其中 16 个控制 CST 单元，12 个控制 SSP 单元。

表 8 给出了 ACCESS1 和 DDDU 的最后设计。

表 8

单元类型	设计变量号	ACCESS1	DDEU
CST	1	0.0200	0.02001
	2	0.0200	0.02001
	3	0.1498	0.1522
	4	0.1450	0.1425
	5	0.0200	0.02001
	6	0.1164	0.1183
	7	0.1289	0.1270
	8	0.0200	0.02001
	9	0.09088	0.09236
	10	0.1223	0.1211
	11	0.06518	0.06618
	12	0.1172	0.1168
	13	0.03628	0.03669
	14	0.1074	0.1075
	15	0.08406	0.08418
	16	0.050336	0.05032

厚度单位：英寸

续表 8

单元类型	设计变量号	ACCESS1	DDDU
SSP	1	0.0200	0.02001
	2	0.0200	0.02001
	3	0.02172	0.02215
	4	0.02001	0.02001
	5	0.02001	0.02001
	6	0.02001	0.02001
	7	0.0200	0.02001
	8	0.05958	0.05960
	9	0.07531	0.07556
	10	0.07347	0.07240
	11	0.05702	0.05721
	12	0.0200	0.02001
重量（磅）		10742.24	10781.92
分析次数		9	9

优化叠代过程由表 9 给出。

表 9

叠代次数	ACCESS1	DDDU
1	14871.40	11875.34
2	12061.76	11199.21
3	11169.82	10865.03
4	10848.26	10814.00
5	10774.66	10799.37
6	10754.16	10792.18
7	10747.34	10785.96
8	10742.24	10781.92

重量单位：磅

参 考 文 献

〔1〕钱令希、钟万勰，结构优化设计的一个方法，大连工学院学报，1979 年第 1 期。

〔2〕钟万勰、裘春航、吴金仙，结构化 Fortran 语言的一个新文本及其实现。

〔3〕Schmit,L.A.;Miura,A., *NASA*, CR—2552(1976).

〔4〕Dantzig,B.,Linear Programming and Extensions (1962).

〔5〕Schmit,L.A.and Farshi,B., *AIAA J.*, 12,5(1974), 692-699.

[6] Venkayya, V. B., *J. of Computers and Structures*, 1, 1—2 (1971), 265~309.
[7] Gellatly, R. A. and Berke, L., *AFFDL-TR-70-165 (1971)*.
[8] Berke, L. and Khot, N. S., AGARD Lecture Series No. 70 on Structural Optimization, AGARD-LS-70 (1974), 1—29.

具有频率约束的结构最轻重量设计

王 生 洪
(上海科技大学)

本文给出了具有最低固有频率约束的结构最轻重量设计的优化方法。优化的目标是重量最轻。选择的优化参数，除了元件尺寸（截面积、板厚等）外，还包括结构的座标，也即结构的几何形状。计算实例表明，座标的优化效果相当显著。优化中的约束包括频率约束、参数联接、尺寸约束以及应力约束。考虑到可能有两个相同的最低频率，对频率的约束是二个最低的频率都必须大于规定值。

优化参数之间的联接适应结构对称性的考虑，同时可减少实际结构中元件的种类。尺寸约束是给各优化参数以一取值范围（最大、最小值）。应力约束的严格处理目前还没有较合适的方法。这里我们应用应力比法，对每一元件按最大载荷得出最小许用尺寸，然后在每一步重设计中就把此尺寸作为一尺寸约束。计算表明这种方法切合实用。

在重设计中，采用了两种走步：频率修改步以及重量减轻步。频率修改步的目的是使设计点到达频率的约束边界上；重量减轻步的目的是沿着频率约束面使重量减轻。实际优化过程中，常是两种步子交替运用。采用频率修改步，显著改善了优化过程的稳定性。

一、优 化 方 法

1．优化问题及最优准则

我们的问题可以化为下列具有不等式约束的非线性规划问题：

$$\left.\begin{aligned} &W(A_i)\longrightarrow \min \\ &g_j\leqslant 0,\quad (j=1-(2+2n)) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 W 为结构重量，A_i 为优化参数，g_j 包括下列约束：

$$-P_1+P_0\leqslant 0 \tag{2}$$

$$-P_2+P_0\leqslant 0 \tag{3}$$

$$A_i-A_{i\,max}\leqslant 0,\quad (i=1-n) \tag{4}$$

$$-A_i+A_{i\,min}\leqslant 0,\quad (i=1-n) \tag{5}$$

式中 P_0 为允许的最低特征值，P_1、P_2 为最低两阶的特征值。$A_{i\,max}$、$A_{i\,min}$ 为优化参数的最大及最小允许值。由 Kuhn-Tucker 条件，最优点的必要条件为：

$$\frac{\partial W}{\partial A_i}+\sum_{r\in R}\lambda_r\frac{\partial g_r}{\partial A_i}=0\qquad (i=1-n) \tag{6}$$

$$\lambda_r\leqslant 0,\qquad (\lambda\in R) \tag{7}$$

R 为有效约束的集合。把式（2）—（5）代入即有：

$$\rho_i-\sum_{r\in R}\lambda_r\frac{\partial P_r}{\partial A_i}\begin{cases}=0, & \text{若 } A_{i\min}<A_i<A_{i\max}\\ \geqslant 0, & \text{若 } A_i=A_{i\max}\\ \leqslant 0, & \text{若 } A_i=A_{i\min}\end{cases} \tag{8}$$

式中
$$\rho_i=\frac{\partial W}{\partial A_i},\quad \lambda_r\leqslant 0,\quad (r\in R) \tag{9}$$

2．迭代设计公式

现在的问题是要寻找 A_i，使之满足式（8）和（9）。把设计参数 $A_i(i=1—n)$ 分为主动参数与被动参数。由基本的频率约束确定取值的优化参数 A_i 称为主动参数，记为$i\in R_a$；由尺寸约束确定取值的优化参数 A_i，称为被动参数，记为 $i\in R_p$。显然，对于主动参数有 $A_{i\min}<A_i<A_{i\max}$，因此按式（8）、（9）主动参数取最优值的必要条件为：

$$\rho_i-\sum_{r\in R}\lambda_r\frac{\partial P_r}{\partial A_i}=0 \tag{10}$$

$$\lambda_r\leqslant 0\quad (\forall\in R) \tag{11}$$

式（10）是隐含 A_i 的方程。为了求解方程（10），用 $(1-\alpha)A_i$ 乘等式（10）的左右两边得：

$$(1-\alpha)A_i\left(\rho_i-\sum_{r\in R}\lambda_r\frac{\partial P_r}{\partial A_i}\right)=0 \tag{12}$$

由此有
$$A_i=C_iA_i \tag{13}$$

其中
$$C_i=\alpha+\frac{1-\alpha}{\rho_i}\sum_{r\in R}\lambda_r\frac{\partial P_r}{\partial A_i} \tag{14}$$

α 称为松弛因子，$|\alpha|<1$。对于式（13）的代数方程，可用叠代法逐次逼近求解，叠代公式为
$$A_i^{(k+1)}=C_iA^{(k)} \tag{15}$$

由叠代法的收敛准则可知，只要 α 足够接近 1，方程式(15)总可用逐次逼近方法得到收敛的解。对于实际问题，计算经验表明 $\alpha=0.5\sim0.9$。当优化参数为节点座标时，由于非线性程度较高，一般可取 $0.8\sim0.9$。

若按式（15）求得的 $A_i^{(k+1)}$ 破坏了尺寸约束，可取该元件值为相应的尺寸约束值。于是对所有的优化参数（包括主动的与被动的），可建立叠代公式如下：

$$A_i^{(k+1)}=\begin{cases}C_iA_i^{(k)}, & \text{若 } A_{i\min}<C_iA_i^{(k)}<A_{i\max}\\ A_{i\min}, & \text{若 } C_iA_i^{(k)}<A_{i\min}\\ A_{i\max}, & \text{若 } A_{i\max}<C_iA_i^{(k)}\end{cases} \tag{16}$$

按式（14）求 C_i 时，还必须确定有效约束集合 R，并确定相应的 $\lambda_r(r\in R)$。考虑到对有效约束 r，$P_r=P_0$，因此 λ_r 应这样选取，使得下一步的设计点落在相应的约束面上。为此，在主动元件与被动元件已经区分好的前提下，先假定两个频率约束均为有效约束。这时由于参数变化引起的频率变化为：

$$\Delta P_r^{(k)}=\sum_{i\in R_{p_1}}\frac{\partial P_r}{\partial A_i}\left[(A_{i\min}-A_i^{(k)})\right]+\sum_{i\in R_{p_2}}\frac{\partial P_r}{\partial A_i}\left[A_{i\max}-A_i^{(k)}\right]$$
$$+\sum_{i\in R_a}\frac{\partial P_r}{\partial A_i}(A_i^{(k+1)}-A_i^{(k)})\qquad (r=1,\ 2) \tag{17}$$

其中 R_{p_1} 和 R_{p_2} 分别为落在最小面积和最大面积尺寸约束的被动元件集合，R_a 为主动元件集合。显然对有效约束应有

$$\Delta P_r = P_0 - P_r \tag{18}$$

把式（18）以及式（16）代入式（17），有

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 &= b_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 &= b_2 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} b_r &= (1-\alpha)\sum_{i\in R_a}\frac{\partial P_r}{\partial A_i}A_i^{(k)} + P_0 - P_r^{(k)} - \sum_{i\in R_{p_1}}\frac{\partial P_r}{\partial A_i}(A_{i\,min} - A_i^{(k)}) \\ &\quad - \sum\frac{\partial P_r}{\partial A_i}(A_{i\,max} - A_i^{(k)}) \qquad (r=1,\ 2) \\ a_{rs} &= (\alpha-1)\sum_{i\in R_a}\frac{\dfrac{\partial P_r}{\partial A_i}\cdot\dfrac{\partial P_s}{\partial A_i}A_i^{(k)}}{\rho_i} \qquad \begin{pmatrix} r=1,\ 2 \\ s=1,\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

由此解得

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ \lambda_2 &= \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

若按式（21）求得的 $\lambda_r > 0$，则相应的约束应归为松约束，同时令 $\lambda_r = 0$，并由式（20）求出其它 λ。比如，若 $\lambda_1 > 0$，则取 $\lambda_1 = 0$，并由式（19）得：

$$\lambda_2 = b_1 / a_{11} \tag{22}$$

若 $\lambda_2 > 0$，则取 $\lambda_2 = 0$，并求得

$$\lambda_1 = b_2 / a_{22} \tag{23}$$

以上计算都是在主、被动元件分类已经确定的情况下进行的，而主、被动元件的分类又是预先并不知道的，因此拉格朗日乘数 λ 的计算必须与元件的主、被动分类的计算相结合。具体步骤如下：

（1）分析现设计 $A^{(k)}$；

（2）先假定所有的元件均为主动元件；

（3）按式（21）或（22）、（23）计算 λ_r；

（4）按式（16）计算 $A_i^{(k+1)}$；

（5）由所得结果对主、被动元件重新分类。然后按步骤（3）、（4）、（5）反复叠代计算，直到主被动元件的分类不再发生交换。一般此反复次数不超过 3—4 次。

3．应力约束的考虑

应用满应力设计的概念，假设第 k 次设计第 i 类杆件在各种工况下的最大内力为 N_i，那么若内力不随杆件面积变化而改变，则满足强度约束的最小许用面积为

$$A_{i\,min}^{*} = |N_i / [\sigma]|$$

式中 $[\sigma]$ 为许用应力，对于受拉与受压可采用不同的数值；也可按局部失稳要求以及杆件

截面的几何形状，给出相应的数值。

求得 A_{imin}^{*} 后再与侧面约束 $A_i<A_{imin}$ 相比较，取 A_{imin}^{*} 与 A_{imin} 二者较大者作为优化中的实际尺寸约束。

4．频率导数 $\partial P_r/\partial A_i$ 的计算

令结构振动的第 r 阶特征值为 P_r，振型为 $\{\delta_r\}$，则频率的导数为[3]：

$$\frac{\partial P_r}{\partial A_i}=\frac{\{\delta_r\}^T\frac{\partial[K]}{\partial A_i}\{\delta_r\}-P_r\{\delta_r\}^T\frac{\partial[M]}{\partial A_i}\{\delta_r\}}{\{\delta_r\}^T[M]\{\delta_r\}} \tag{24}$$

若振型 $\{\delta_r\}$ 已对质量矩阵 $[M]$ 法式化，即

$$\{\delta_r\}^T[M]\{\delta_r\}=[I]$$

$[I]$ 为单位矩阵，则有

$$\frac{\partial P_r}{\partial A_i}=\{\delta_r\}^T\frac{\partial[K]}{\partial A_i}\{\delta_r\}-P_r\{\delta_r\}^T\frac{\partial[M]}{\partial A_i}\{\delta_r\} \tag{25}$$

下面以桁架结构为例说明式（25）右端项的计算：

第（1）项 $\{\delta_r\}^T\frac{\partial[K]}{\partial A_i}\{\delta_r\}$ 的计算。

对桁架结构，若优化参数为杆件截面积，则刚度矩阵为

$$[K]=\Sigma[K]_i=\Sigma[k]_iA_i$$

其中 $[k]_i$ 与 A_i 无关。

$$\frac{\partial[K]}{\partial A_i}=[k]_i=\frac{[K]_i}{A_i}$$

因此

$$\{\delta_r\}^T\frac{\partial[K]}{\partial A_i}\{\delta_r\}=\frac{\{\delta_r\}^T\cdot[K]_i\cdot\{\delta_r\}^T}{A_i}=\frac{U_i^{(r)}}{A_i} \tag{26}$$

其中 $U_i^{(r)}=\{\delta_r\}^T[K]_i\{\delta_r\}^T$，它是对应于振型 $\{\delta_r\}$ 元件 A_i 的位能，考虑到面积之间的联接约束，$U_i^{(r)}$ 的计算必须遍及所有同类元件。

若优化参数为节点座标，比如令节点 m 的 z 座标 z_m 为优化参数，即 $A_i=z_m$，则

$$\frac{\partial[K]}{\partial A_i}=\frac{\partial\Sigma[K_i]}{\partial A_i}=\sum_i\frac{\partial[K_i]}{\partial A_i}$$

上述求和项涉及所有与节点 m 有关的杆类。比如，若杆件 i 的节点一端为 m，另一端为 n，该杆件的刚度矩阵

$$[K_i]=\begin{bmatrix}C_{mm} & C_{mn}\\ C_{nm} & C_{nn}\end{bmatrix}$$

其中

$$C_{mm}=\frac{EF_i}{L_i}\begin{pmatrix}\lambda^2 & \lambda\mu & \lambda\nu\\ \mu & \mu^2 & \mu\nu\\ \nu\lambda & \nu\mu & \nu^2\end{pmatrix}$$

$$C_{nn}=C_{mm}=-C_{mn}=-C_{nm}$$

式中 λ、μ、ν 为 mn 的方向余弦，L_i 为杆长，F_i 为截面积。

由此有

$$\frac{\partial[K_i]}{\partial A_i}=\frac{\partial[K_i]}{\partial z_m}=\begin{bmatrix}C'_{mm} & C'_{mn}\\ C'_{nm} & C'_{nn}\end{bmatrix} \tag{27}$$

其中
$$C^l_{mm}=C^l_{nn}=-C^l_{mn}=-C^l_{nm}=\frac{EF_l}{L_l^2}\begin{pmatrix} C_{11} & \text{对称} & \\ C_{21} & C_{22} & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix} \tag{28}$$

其中
$$C_{11}=3\lambda^2\nu,\quad C_{21}=3\lambda\mu\nu,\quad C_{22}=3\mu^2\nu,$$
$$C_{31}=3\lambda\nu^2-\lambda,\quad C_{32}=3\mu\nu^2-\mu,\quad C_{33}=3\nu^3-2\nu$$

若优化参数为座标 x 或座标 y，相应的系数 C_{11}—C_{33} 见表 1。

第（2）项 $P_r\{\delta_r\}^T\frac{\partial[M]}{\partial A_l}\{\delta_r\}$的计算。

以桁架为例，
$$[M]=\Sigma[M]_i=\Sigma([M_l]^0+[m_l]F_l)$$

其中$[M]_l^{(0)}$为荷载质量，$[m_l]F_l$为结构质量；$[m_l]$与杆件面积 F_l 无关。若优化参数为杆件截面积 A_l，则
$$\partial[M]/\partial A_l=[m_l]$$

这时
$$P_r\{\delta_r\}^T\frac{\partial[M]}{\partial A_l}\{\delta_r\}=P_r\{\delta_r\}^T[m_l]\{\delta_r\}=\frac{P_r\{\delta_r\}^T[m_l]F_l\{\delta_r\}}{F_l}=\frac{T_l}{F_l} \tag{29}$$

式中 T_l 为第 i 类杆件的结构质量所对应的动能。

若优化参数为节点座标，比如令节点 m 的 z 座标为优化参数，

表 1

	优化 x 座标	优化 y 座标	优化 z 座标
C_{11}	$3\lambda^3-2\lambda$	$3\mu^3-2\mu$	$3\lambda^2\nu$
$C_{12}=C_{21}$	$3\mu\lambda^2-\mu$	$3\lambda\mu^2-\lambda$	$3\lambda\mu\nu$
$C_{13}=C_{31}$	$3\lambda^2\nu-\nu$	$3\lambda\mu\nu$	$3\lambda\nu^2-\lambda$
C_{22}	$3\lambda\mu^2$	$3\mu^3-2\mu$	$3\mu^2\nu$
$C_{23}=C_{32}$	$3\lambda\mu\nu$	$3\nu\mu^2-\nu$	$3\mu\nu^2-\mu$
C_{33}	$3\lambda\nu^2$	$3\mu\nu^2$	$3\nu^3-2\nu$

即 $A_l=z_m$，则
$$\frac{\partial[M]}{\partial A_l}=\frac{\partial[M]}{\partial z_m}=\frac{\partial\Sigma[m_l]}{\partial z_m}\cdot F_l=F_l\cdot\sum_l\frac{\partial[m_l]}{\partial z_m}$$

其中求和项遍及所有与节点 m 有关的节点。若采用堆聚质量法，则$[m_l]=\frac{1}{2}\gamma F_l L_l[D]$。其中 γ 为密度，$[D]$为对角阵，与该杆件二端点的自由度相对应的对角元为 1，其余为零，

于是
$$\frac{\partial[m_l]}{\partial A_l}=\frac{1}{2}\gamma F_l\frac{\partial L_l}{\partial z_m}[D]=-\frac{1}{2}\gamma F_l\nu[D] \tag{30}$$

同样，若优化参数为 x 座标，则
$$\frac{\partial[m_l]}{\partial A_l}=-\frac{1}{2}\lambda F_l\lambda[D] \tag{31}$$

若优化参数为 y 座标，则
$$\frac{\partial[m_l]}{\partial A_l}=-\frac{1}{2}\mu F_l\mu[D] \tag{32}$$

5．重量减轻步与频率修改步

按式（16）进行叠代的走步称为重量减轻步。由于频率对优化参数的非线性程度是相当高（尤其当以座标为优化参数时），单用重量减轻步收敛性能差。为此在优化中还采用另一种走步——频率修改步，其作用是当设计点落在离频率约束面一定距离外时，把设计点先拉到约束曲面上，即当 $P_1<P_0-\varepsilon$ 或 $P_1>P_0+\varepsilon$ 时，通过频率修改步，使设计点落在频率约束面邻近：$P_0-\varepsilon<P_1<P_0+\varepsilon$；一旦落在约束面附近，就走重量减轻步，使结构重量减轻。

频率修改步的走法采有两种方案：

（1）沿频率对参数的梯度方向走步。各优化参数的变化量正比于频率对该参数的导数，即

$$\Delta A_i=\beta\frac{\partial P_1}{\partial A_i},\quad (i=1\text{—}n) \tag{33}$$

β 为常数，其大小应使 $P_1^{(k+1)}=P_0$，按一阶近似有

$$P_1^{(k+1)}-P_1^{(k)}=\sum_{i\in R_{p_1}}\frac{\partial P_1}{\partial A_i}(A_{i\,min}-A_i^{(k)})+\sum_{i\in R_{p_2}}\frac{\partial P_1}{\partial A_i}\cdot(A_{i\,max}-A_i^{(k)})$$

$$+\sum_{i\in R_a}\beta\left(\frac{\partial P_1}{\partial A_i}\right)^2$$

因为 $P_1^{(k+1)}=P_0$，所以有

$$\beta=\frac{P_0-P_1^{(k)}-\sum_{i\in R_{p_1}}\frac{\partial P_1}{\partial A_i}(A_{i\,min}-A_i^{(k)})+\sum_{i\in R_{p_2}}\frac{\partial P_1}{\partial A_i}(A_{i\,max}-A_i^{(k)})}{\sum_{i\in R_a}\left(\frac{\partial P_1}{\partial A_i}\right)^2} \tag{34}$$

式（34）中，主、被动元件的确定得通过反复计算，直到不发生交换为止。

（2）沿频率对重量的梯度方向走步。这种走步与前者差别在于参数的变化正比于频率对重量的梯度，即

$$\Delta A_i=\beta\frac{\partial P_1}{\partial W_i}=\beta\frac{\partial P_1}{\partial A_i}\cdot\frac{\partial A_i}{\partial W_i} \tag{35}$$

由于 $\partial W_i/\partial A_i=\rho_i$，因此有

$$\Delta A_i=\frac{\beta}{\rho_i}\frac{\partial P_1}{\partial A_i} \tag{36}$$

β 的大小应使走步后落到频率约束面上，据此有

$$\beta=\frac{P_0-P_1^{(k)}-\sum_{i\in R_{p_1}}\frac{\partial P_1}{\partial A_i}(A_{i\,min}-A_i^{(k)})-\sum_{i\in R_{p_2}}\frac{\partial P_1}{\partial A_i}(A_{i\,max}-A_i^{(k)})}{\sum_{i\in R_a}\frac{1}{\rho_i}\left(\frac{\partial P_1}{\partial A_i}\right)^2} \tag{37}$$

实际计算表明两种走步均有良好的效果。前者趋向于用尽量小的参数变化达到约束边界，而后者趋向于用尽量小的重量变化达到约束边界。

二、程 序 说 明

用上面所述的方法，编制了 ZDY-799 程序，在 719 机上计算。优化的收敛准则是要同时满足下列二个条件：

1．最低频率按给定的精度落在约束边界面上，即

$$\left|\frac{P_1-P_0}{P_0}\right|<\varepsilon_p,\ \varepsilon_p \text{ 可取 } 0.01 \text{ 左右}$$

2．相邻两次落在频率约束边界上的结构重量小于某一给定值，即

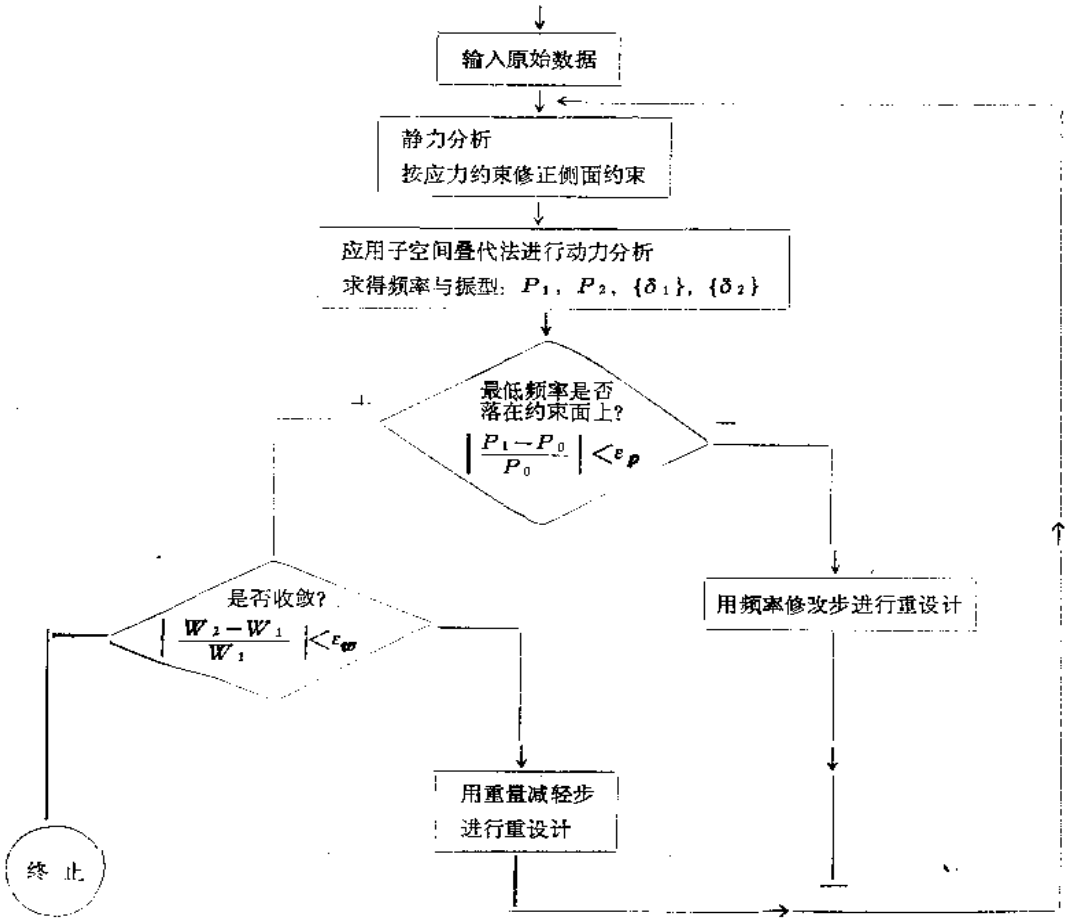
$$\left|\frac{W_2-W_1}{W_1}\right|<\varepsilon_w,$$

这里 W_1，W_2 为相邻两次落在约束面上的设计的结构重量。ε_w 也可取 0.01。

结构的振动分析采用子空间叠代法。由于我们要求的只是最低几阶的振动频率以及振型，用这种方法特别适合。同时整个优化过程中，只有第一次分析时专门形成一初始向量矩阵，以后每次分析时就以上一次的特征向量矩阵作为本次的值，这样显然可加快叠代收敛速度。

由于采用了频率修改步和重量减轻步两种重设计方法才能应用上述第二个判别准则。

目前的程序只限于铰接杆单元，但是可进一步推广到其它单元。



程序框图

三、数 值 算 例

已用 ZDY-799 程序计算了十多个问题，均有收敛的结果。现举二例作为说明。

1．五杆桁架

五根杆件分成两类，如图 1 所示。节点 1,2 上各有集中质量 150kg，并承受外载2000kg。约束频率为 80Hz，许用压应力为 800kg/cm²，许用拉应力为 1000kg/cm²。初始面积均为 4cm²，结构自重 18.18kg，最低频率为 87Hz，经 4 次叠代，达最优解，二组面积分别为 2.87cm² 和 3.60cm²。结构自重 14.65kg，最低二阶频率分别为 80.2Hz 和 172.8Hz。应力约束均为松约束。叠代过程如图 2，其中虚线所示为频率修改步，实线所示为重量减轻步。选用不同的初始点，均收敛到近乎相同的最优点，如表 2 所示。

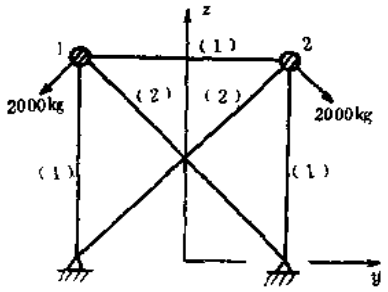


图 1

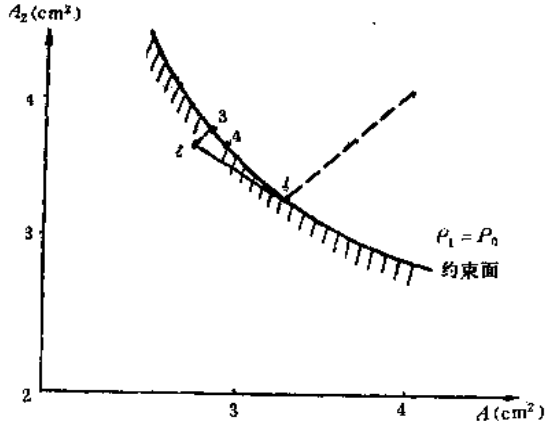


图 2

表 2

序号	初始方案		优化方案		初始方案结构自重(kg)	优化方案结构自重(kg)	重设计次数	松弛因子 α
	A_1(cm²)	A_2(cm²)	A_1(cm²)	A_2(cm²)				
1	4	4	2.87	3.60	18.18	14.65	4	0.5
2	7	7	2.80	3.69	31.82	14.68	4	0.5
3	3	7	2.84	3.63	22.46	14.67	4	0.5
4	2	8	2.82	3.64	22.32	14.64	6	0.5

若把节点 1 和 2 的 y 座标也引入作为优化参数，经优化后节点 1，2 互相靠拢，如图 5 所示（1，2 节点未完全合拢是因为规定了节点 y 座标的移动界限）。优化后面积为 2.09cm² 及 2.15cm²，结构重量仅 7.58kg。可见座标作优化参数效果是显著的。

2．桁 架 桥

图 4(a) 为桁架桥，20 个节点，由于对称 37 根杆件分为 18 类杆件。每个节点上都加有集中质量 50kg。载荷如图所示。要求频率大于 14.6Hz，许用拉应力为 1000kg/cm²，许用压应力为 800kg/cm²。

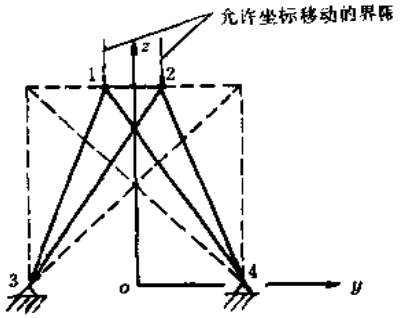


图 3

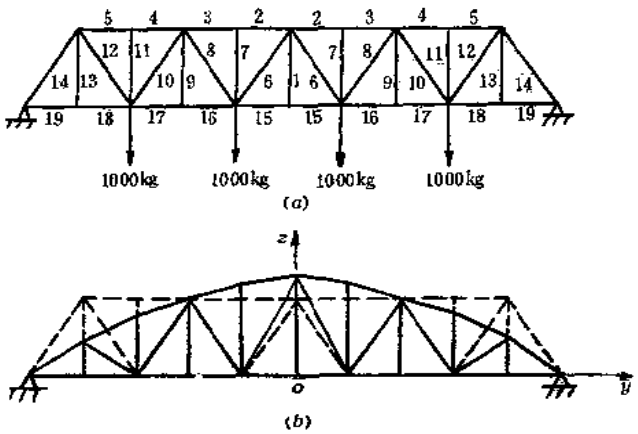


图 4

以各类杆的截面积作为优化参数。经过 9 次叠代，结构最低频率由初始的 12.5Hz 上升到所要求的 14.6Hz，而结构重量由 96.27kg 下降到 70.40kg。优化后所有杆件均满足应力约束条件。优化中松弛因子 $\alpha=0.6$。表 3 第 3 行中列出优化后的面积。图 7 是叠代过程，其中 a 是频率与叠代次数的关系，b 是结构重量与叠代次数的关系。由图可见，一般走 1—2次频率修改步就能达到频率约束边界；叠代的最后几步，相当稳定地在约束边界面上沿着重量减轻的方向走步。

若除了杆截面积外，把上弦节点的 z 座标也作为优化参数，所得的结果更好，重量仅 48.8kg。图 4(b) 为优化后的桁架桥的形状。表 3 中第 4 行和第 5 行分别列出优化后面积以及每类杆件的最大应力，其中杆 4、5、14 的应力约束为有效约束。由于应力比方法的近似性，因此它们的应力并未达到最大许用应力 1000kg/cm²，但是很接近最大应力。

表 3

1	杆件类号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	初始面积(cm²)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
3	优化后面积(cm²)(无座标优化)	1.00	12.05	12.39	8.05	8.24	1.00	1.00	2.51	1.00	4.19
4	优化后面积(cm²)(有座标优化)	1.17	7.32	7.25	6.61	6.90	2.02	1.97	1.27	1.27	1.46
5	杆件应力(kg/cm²)	42.6	913.8	934.2	995.9	993.2	−309.4	−380.4	−234.9	39.3	3.90

1	杆件类号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0
2	初始面积(cm²)	6	6	6	6	6	6	6	6	6	
3	优化后面积(cm²)(无座标优化)	1.00	5.50	1.00	6.12	2.69	1.00	1.00	6.42	6.57	
4	优化后面积(cm²)(有座标优化)	1.66	1.40	1.31	6.30	1.33	1.29	1.31	1.42	1.44	
5	杆件应力(kg/cm²)	−640.7	−673.9	38.2	980.4	−136.7	−280.9	−276.5	349.3	344.8	

3．某 20 米天线

图 6 是某 20 米天线，天线的 1/4 结构中节点数为 58，杆件数 180，分为 25 类杆件，如图中数字所示。考虑强度条件的危险载荷是 30° 仰角下的自重加上 50米/秒 的风载。初始方

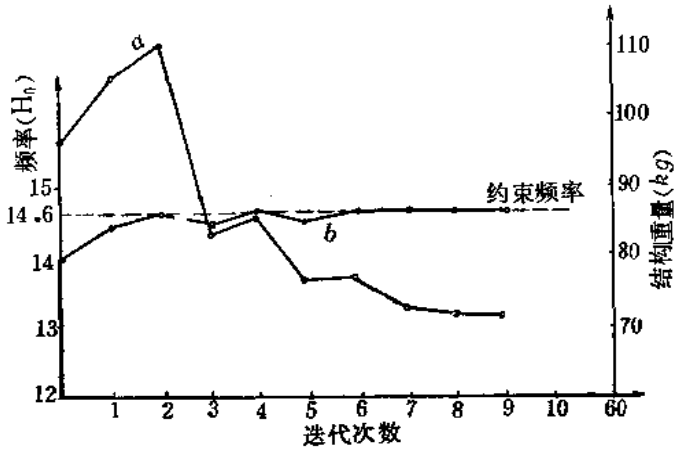
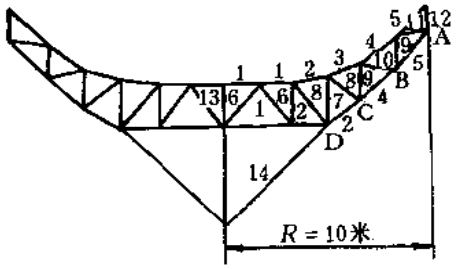
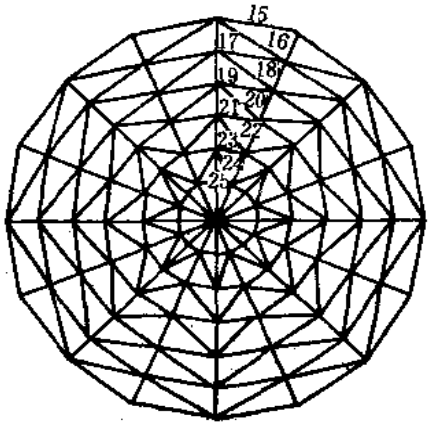


图 5



案结构的结构自重 (1/4 结构) 为 5646kg，最低频率为 8.9^H，经过 10 次叠代后重量下降到2798kg，而最低频率上升到所要求的 13.2^H。图 7 为叠代情况。许用拉压应力仍为 1000kg/cm² 和800kg/cm²。优化中取 $\alpha=0.6$。


图 6

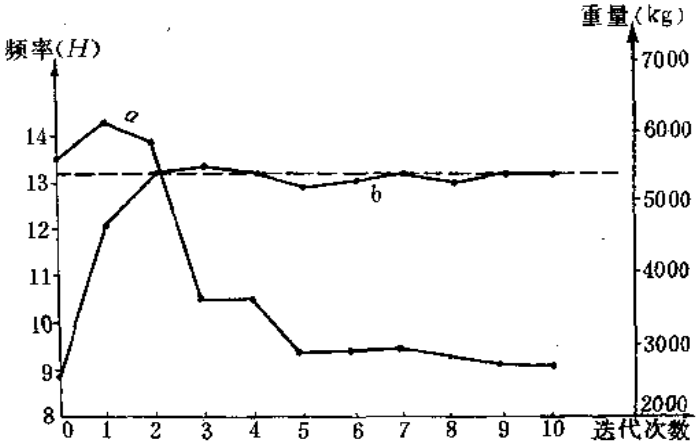


图 7

若把辐射梁的下弦节点 A，B，C，D 的 z 座标也作为优化参数，则共有优化变量29个。经过 21 次叠代后结构自重可下降到 2075kg。优化中取 $\alpha=0.9$。

参 考 文 献

〔1〕Rubin, C. P., *AIAA Journal*, **8**, 5 (1970), 923-927.

〔2〕Kiusalaas, *J.*, *Int. J. Solid Structurds*, **9** (1973), 863—878.

〔3〕Fox, R. L., Optimization Methods for Engineering Design, Addison-Wesley Pulishing Company (1971), 242—247.

〔4〕王生洪、李志良等，固体力学学报，1，2(1980)。

机身结构优化设计

丁惠梁　陈文浦　孙宪学　武　访

一、前　　言

近二十年，结构综合在理论、方法上进展很大。但要用于实际设计而成为实际的生产力，还需解决很多具体问题。本文结合机身结构的优化设计，介绍用满应力设计方法设计元件剖面尺寸时，结构模型中元素及变量的选取，和许用应力、元件屈曲约束、用“欠松弛”改善收敛性等具体处理；并介绍了计算机程序的编制和机身段的实例计算。机身优化中在确定了材料分布后还需对部件（加筋壳、加强框等）剖面尺寸作详细优化设计。这些处理可参见文献〔15，16〕。在机身设计中，除了一般的应力约束（按材料强度）和最小尺寸约束外，现已包括了结构元件的屈曲约束，还可进一步扩充考虑“张力场”影响和位移约束等。通过实例运算表明，方法有良好的收敛性，适用于大型薄壁结构的实际优化设计应用。

二、方　　法

当结构外形及构件布置已按其他设计考虑确定后，机身结构设计优化的任务是，选择构件剖面尺寸，在满足设计约束条件下使结构能安全承载（惯性载、气动载、其他部件传来的集中载）并使结构重量最轻；也就是以元件剖面尺寸为变量，以应力（材料强度、元件屈曲即满足静强度条件）及元件最小尺寸为约束，使目标函数（结构重）取最小值。

机身是隔框、梁、长桁、蒙皮等组成的薄壁结构，受力复杂。用有限元法分析机身受力状态，把结构理想化为在节点处彼此连接的一组元素的集合。程序备有八种元素：等剖面等轴力杆（长桁及梁、框凸缘）、梯形承剪板（薄蒙皮及腹板）、三角形膜应力板、等剖面平面梁元（普通框）、一端铰支的梁元（普通框断开处）、“过渡”梁元（板框——普通框过渡）以及对称的半腹板元、梯形膜应力元。

为解决复杂机身结构理想化后可能出现的“病态”问题，每种元还对应一种“虚”元，

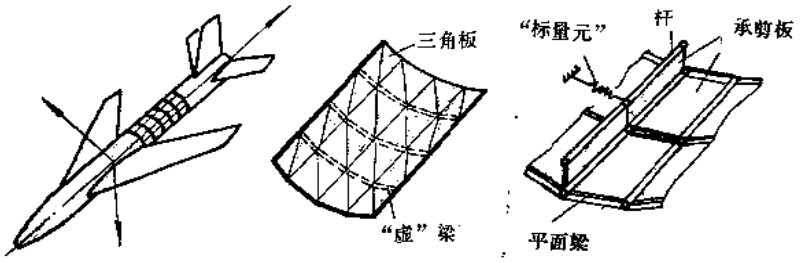


图1　结构理想化

在设计过程中不改变“虚”元的剖面，也不计其重量，图 1 给出了将“虚”梁用于机身柱壳的情况。此外，结构模型中还采用了“标量元”，相当沿某给定自由度在节点与“地”之间加一弱弹簧（见图 1，弹簧刚度按实际结构刚度估定），计算中相当对总刚度矩阵 K 的相应对角元叠加一个适当的值。用标量元可及时、有效解决临时发现的“病态”问题。

设计过程中，杆元以剖面积、板元以板厚为设计可调尺寸（变量）。梁元有剖面积和惯性矩两个可变量，为便于设计处理，按使用条件规定设计中仅薄壁剖面的壁厚变化，剖面惯性矩是面积的线性函数，设计中以剖面积为变量，简化了问题。按上述处理，所有元的变量 A_t 及刚度矩阵 K_t 间有下述关系：

$$K_t = A_t K_t^{(0)}$$

同时，元的应力为

$$\sigma_t = S_t U$$

其中，元的单位刚度矩阵 $K_t^{(0)}$ 和应力矩阵 S_t 在设计中不变，首次生成后可记文件供以后调用，以节省运算时间。结构的节点位移 U 则从平衡方程

$$KU = P$$

解出。为减少方程的阶数，利用结构对称性（对称点上代入相应位移边界条件），分别按一半结构得出对称和反对称载下的解，然后叠加得真实设计载时的位移与应力。载荷 P 中包括气动载、集中载、惯性力。元素表面分布的均匀载可由程序自动分配到相应节点上。

近来，利用近似概念的数学规划方法和基于 Kuhn-Tucker 条件的各类最优准则法已能有效处理大型结构在刚度约束下的优化设计问题[6,4]，但是，由于需计算约束梯度，对于应力约束极多、受力复杂的机身优化设计问题，这些方法的实际应用仍有困难。相反，对这些以应力约束为主的问题，满应力设计方法却证明是简单有效的。在机身的优化设计中，采用了“改进的”满应力设计方法（参见图 2），其每步再设计包括：

1．应力比再设计：$A_t^{k+1} = \xi_t^p A_t^k$，其中，应力比 $\xi_t = \max_p \left\{ \xi_{t\,\text{材料强度}}^p,\ \xi_{t\,\text{屈曲}}^p,\ \frac{A_{t\,min}}{A_t} \right\}$。

2．性状调整（“射线步”）：$\{A_t\}'_{k+1} = \xi_{max}\{A\}_{k+1}$，其中，$\xi_{max} = \max_t\{\xi_t\}$

通过“射线步”使设计点 $(k+1)'$ 到达临界约束附近（尽管惯性力和屈曲应力是变量的函数，调整后 $(k+1)'$ 点不正好在边界上，但当 ξ_{max} 很接近 1，仍在其邻域内）。当按 k' 点的重量变化判断收敛，可使设计收敛于某个较好的点 B，而不是收敛于重量较大的满应力设计点 F。

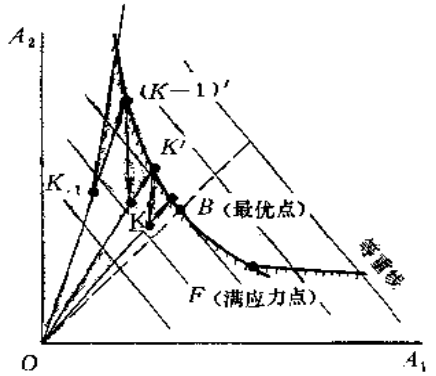


图 2 改进的满应力设计

一般的满应力设计方法探讨中，总认为外载不变，元件的许用应力也是常数。但在实际应用中，由于内力重分布影响；结构外载随设计而变以及许用应力或应力是设计变量的函数等原因，都造成满应力设计过程的波动，影响收敛。实践表明，对于良态结构，内力重分布的影响一般不大，并可用“超松弛”（取 $\beta > 1$）的办法来改善；惯性载虽然很大，但变动的部份较小，即随设计变量变化的惯性载不会造成大的困难。但当考虑元件屈曲时，许用应力是元件剖面尺寸和形状的函数，再按应力比公式叠代，取

$$A_i^{k+1}=\frac{\sigma_i^k}{\bar{\sigma}(A_i^k)}\cdot A_i^k$$

由于许用应力与设计变量在再设计过程中不同步，就常常造成设计过程波动，甚至不收敛。这实质是叠代格式的选取问题，为解方程

$$F(A_i)=0$$

选取的叠代格式：

$$A_i^{k+1}=f(A_i^k)$$

应保证所处理的情况下叠代收敛。因为元件屈曲应力通常取下述形式：

$$\bar{\sigma}(A_i^k)=\alpha(A_i^k)^m \qquad (\alpha=常数)$$

我们在有关资料中曾导出下述格式：

$$A_i^{k+1}=\left(\frac{\sigma_i^k}{\bar{\sigma}(A_i^k)}\right)^{1/(m+1)}A_i^k$$

有效地解决了叠代的收敛问题。图 3 给出一个例子，可见当系数 r 接近于 $r=1/(m+1)$ 时收敛迅速改善。因一般 $m>1$，我们把这种方式叫做“欠松弛”叠代。对某些没有显式 $\sigma(A_i)\sim A_i$ 依变关系的情况，只要许用应力随 A_i 呈单调变化（实际情况均如此，例如一般加筋板设计中最优参数匹配时的 $\sigma_{cr}-\frac{N}{L}$ 曲线），按其依变规律适当选取 r 值都可收到良好效果。

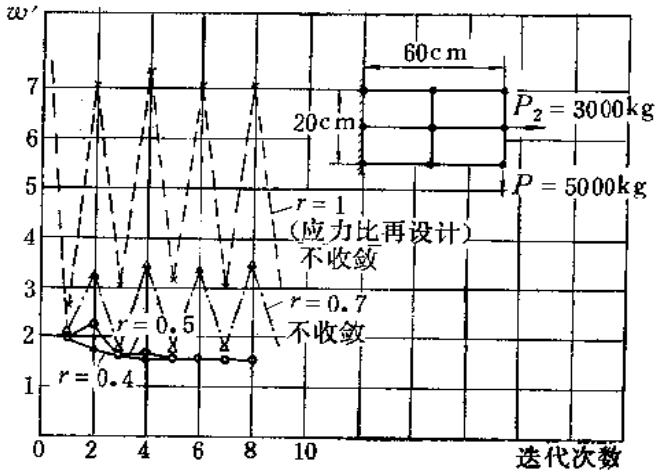


图 3 “欠松弛”系数的影响

$E=7\times10^5\,kg/cm^2$　　$\tau_{cr}=\frac{K\pi^2E}{b^2}t^2$

$W'=\xi_{max}W$　　$r_{opt}=1/3$

在机身优化设计中，综合考虑内力重分布和屈曲应力的影响，我们统一取“欠松弛”系数 $r=0.4$ 效果已很好，此时相应的应力比公式为：

杆　　元	应　力　比　　$\xi_i=(-\sigma_i/\sigma_{cr})^{0.4}$　　$\sigma_i<0$
承剪板元	$\xi_i=(\lvert\tau_i\rvert/\tau_{cr})^{0.4}$
梯形膜元	$\xi_i=\left(\left(\frac{\lvert\tau\rvert}{\tau_{cr}}\right)^2-\frac{\sigma_x}{\sigma_{cr}}\right)^{0.4}$；　$\tau_{cr}=\frac{k_1E}{b_i^2}A_i^2$；　$\sigma_{cr}=\frac{k_2E}{b_i^2}A_i^2$
圆柱浅壳（△元表示）	$\xi_i=\left(\left(\frac{\lvert\tau\rvert}{\tau_{cr}}\right)^2-\frac{\sigma_x}{\sigma_{cr}}\right)^{0.4}$；　$\tau_{cr}=\frac{k_1E}{b_i^2}A_i^2$；　$\sigma_{cr}=-\frac{k_4E}{R}A_i$

实际上，对后二种情况和其它情况还可给出更准确的“应力比”计算公式。由于理想化结构对各类元素的选取以及在结构中所占的比例不同，所以最有效的 r 值因题而异，就现有算例表明，对于类似结构选用现有元素，其 r 值在 0.4 左右摆动。上述的公式和国外文献〔7〕的方法相似，在 1979 年看到该文献前，我们已多次使用。

设计过程中应允许某些按其它因素决定的构件不再修改。在这项设计中，通过把指定的尺寸同时规定为最小尺寸限值（并将其许用应力取很大值），方便地满足了这一要求。

薄壁结构设计中，往往采取把薄板承受正应力的能力“折算”到相邻杆元上去的办法。实践表明，每次叠代均按不同受载情况折算，设计时间增加很多倍，既不经济也无必要。对此我们采用了“统一折算”的办法，在初次设计叠代时把板的承载能力按板厚平方的15倍（$15\delta^2$）折算到相邻杆上，按同一模型处理各种受载情况，最后对收敛的解再作处理。最后的处理包括：

1．性状调整　按最大应力比把设计调到可行区的边界上；

2．“杆元修正”　从杆中按 $15\delta^2$ 扣除各相邻板的“折算量”（修正后不得小于最小尺寸）；

3．“成组处理”　使规定相同的元件取该组的最大尺寸；

4．杆、板元按规格尺寸取相邻离散值；

5．校核分析　按不同受载情况分别折算薄板承正应力的能力，进行静力分析检查约束条件。同时按板的剪流修正杆端轴力。

这些处理可校核设计结果的可信性，减少用户事后处理大量数据的困难。

三、程　序　简　介

程序采用模块结构，共33个程序段（一个主程序，一个数据块子程序，一个函数段，30个子例程子程序），便于发展增改，并可用控制参数有选择地实现规定的各种力学功能。采用名字表语句输入原始数据，简便了输入数据准备（对机身例，输入卡片减少2/3）。用三个无格式直接存取文件，存放中间结果及某些原始数据。按照 Cholesky 分解法解平衡方程（双精度运算），按一维变带宽方案存贮刚度系数矩阵 K。

程序的主要指标是：

总节点数	450
刚度矩阵总阶数	1500
刚度矩阵元素数	150,000
设计外载组数	10
有限元元素总数	1500
材料类型	3

为节省内存，按各节点有效的自由度叠加刚度矩阵。因采用平面梁元，节点自由度最多为4（u，v，w，θ_x），最少为2（v，w）；按不同自由度叠加，对机身约可使 K 阶数减少20%。为便于按不同节点自由度处理问题，用以下查找节点自由度的方法：节点 i 的第 l_i 个自由度（$1\leqslant l_i\leqslant 4$）在总刚度 K 中的行（列）号 k_i 为

$$k_i=\begin{cases}0, & \text{当 } I_e(E_i-1,\ l_i)=0\\ F_i+I_e(E_i-1,\ l_i), & \text{当 } I_e(E_i-1,\ l_i)\neq 0\end{cases}$$

其中，F_i 为各节点在 K 中的起始自由度号，

$$F_i=\begin{cases}0 & i=1\\ F_{i-1}+E_{i-1} & i=2,\ 3,\cdots\end{cases}$$

E_i 是 i 节点的自由度数（可为 2，3，4），I_c 为自由度增量矩阵

$$I_{c_{3\times 4}}=\begin{bmatrix}0&1&2&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{bmatrix}$$

这样处理，为刚度叠加、应力计算、惯性力计算时查找自由度提供了简便的方法，而无需另编索引数组。

整个程序的粗框图见图 4 。

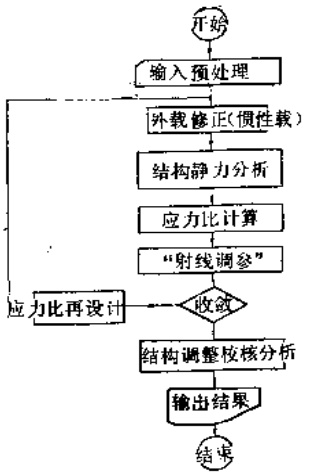


图 4 程序粗框图

四、数例及机身段设计

用一些数例检验了方法和程序，并在机身实例设计中作了全面考核，现将主要结果简介如下：

1．输电塔设计

用图 5 所示 25 杆输电塔设计考核了整个优化流程。其叠代收敛过程见图 5 。设计经 5 次叠代达到收敛，重量为 87.05 磅，结果与文献〔 3 〕相同。

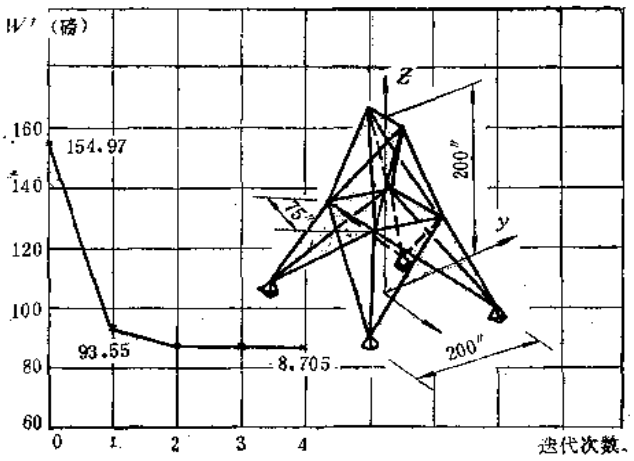


图 5 25 杆输电塔

2．后掠机翼

用这个问题通过两个程序对比，证实了结构分析的可信性。结构模型共 44 节点，150 个元素（包括等剖面等轴力杆、薄膜三角板、承剪半腹板），有两种载荷情况。结构的位移及应力见图 6 。两种程序分析的结果完全一致。

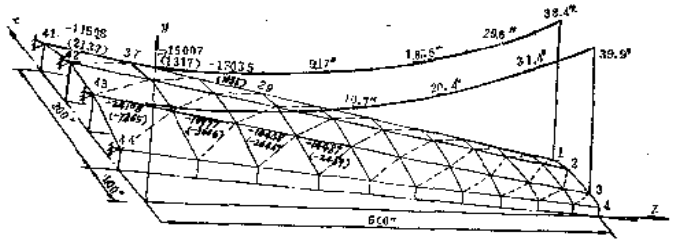


图 6 后掠机翼

3．机身段结构优化设计

以机身段初步设计为实例，进行了机身结构的优化设计。按一般做法，把机身结构分成

若干段设计，各段间互有重叠。所设计的机身段包括 19 个框段，有五个加强框，段内包括若干燃油舱和减速舱以及一些开口口盖。利用结构对称性，只设计一半结构。结构的理想化模型见图 7，共 436 个节点，1442 位移自由度，1381 个元素，其中有等轴力杆、承剪板、三角形膜应力板和各种平面梁元，分别表示加强框、普通框、梁、长桁、加筋壳、蒙皮等构件。此外，还用“虚元”和沿某座标走向的“标量元”，来处理结构模型的“病态”问题（见图 1）。共六种设计载荷（分别由四种对称载和一组反对称载组合而成）。每个构件分别按材料强度（用 Misses 准则）和屈曲强度确定允许应力。这样，设计中的应力约束总数约 18000。设计中限定表示同一柱壳的三角板元取相同值；油箱内壁的圆柱壳因按其它方法优化，设计中不作修改。

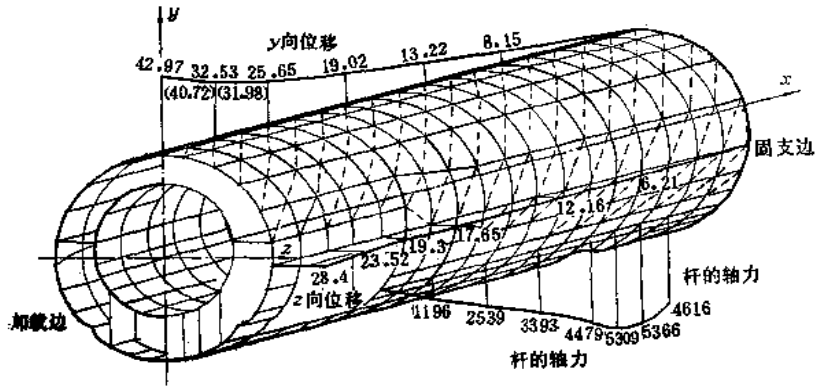


图 7 机身结构模型及应力位移

如前所述，用改进的满应力设计方法修改设计，当按屈曲强度设计时，应力比公式中取欠松弛系数 $r=0.4$。整个设计过程经五次再设计基本收敛，九次完全收敛（相对重量变化等于 0.002，83% 的元应力比在 0.986～1.015 间，最大应力比 $\xi_{max}=1.038$），比初始设计减重 11%。全部计算时间（CPU）在 Siemens 7738 机上为 5 时 22 分。设计叠代收敛过程见图 8，典型元件尺寸变化情况见图 9。由图可见，经头三次叠代重量显著下降，第四次

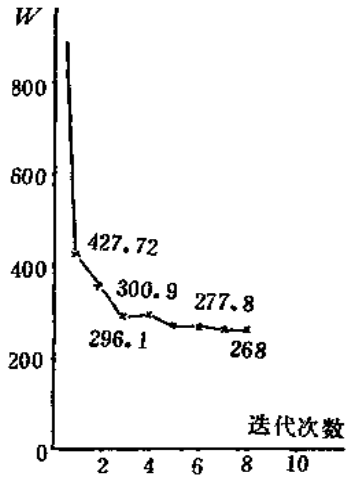


图 8 重量变化情况

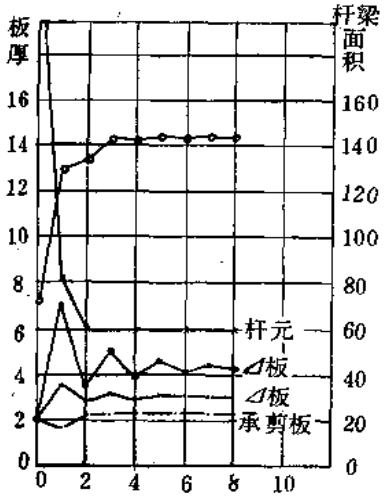


图 9 变量变化情况

重量略有波动；绝大多数元件在设计过程中是单调变化的。第四次叠代重量的波动主要是加

筋壳中的三角元在按屈曲强度设计时仍有些波动造成的（图9的83号元）。由收敛过程可看出，应力比方法有良好的收敛性，同时，欠松弛的方法是有效的，系数值的选取是合理的，对类似83号元取更小的r值（例如$r=0.35$）效果还会更好。此外，在设计过程中若采取某种形式的外插技术也将有效地改善收敛速度。

图7给出了在两个严重情况下机身初始设计和最终设计的位移分布和应力分布，由平衡检查和分布规律看，这些结果是合理的。

对最终收敛结果进行“扣除”和“离散化”取值等处理，分别按不同受载情况进行了折算和校核分析。分析结果表明，结构应力、位移还略小于最终收敛的设计，经过调整设计满足全部约束，统一折算所用的计算时间几乎只是分别进行折算时的很少一部分（约六分之一）。

五、结　　语

通过实例计算，证明对于大型复杂结构的设计，满应力方法是有效的，收敛所需次数与问题规模关系极小，是其突出优点。计算也表明，实际应用时的各种处理如“欠松弛”、“虚元”、“标量元”等均是可行有效的。计算机程序可靠、效率较高、适于某些大型薄壁结构在应力约束下的优化设计。

这项工作是我们与有关所协作完成的。

参　考　文　献

〔1〕南化电子计算站，西门子系列4004操作系统BS1000 FORTRAN参考手册。

〔2〕杭汽电子计算站，SIEMENS BS1000 BS2000 FORTRAN基础部分（1979）。

〔3〕Dwyer, W. J., et al., AD 726 112 (1971).

〔4〕Lucien A. Schmit, Jr. and Hirokalu Miura, NASA, CR-2552 (1976).

〔5〕Gallagher, R. H. et al., Optilmum Structural Design Theory and Applications (1973).

〔6〕Kiusalaas, J., NAA, TND-7115 (1972).

〔7〕Kiusalaas, J., et al., NASA, CR-2794 (1977).

双 曲 拱 坝 的 优 化

朱伯芳　宋敬廷
（水利水电科学研究院）

一、坝体形状的数学描述

在总结分析已有工程经验后，为了尽可能符合当前工程实践，便于推广应用，并便于利用圆拱特点简化应力分析，我们决定坝的水平截面采用圆拱，铅直截面采用抛物线，河谷形状是任意的，按下列方式描述坝体形状。

1．河谷形状　如图 1 所示，河谷形状是任意的，坝高 H 和 7 层河谷宽度 b_i（$i=1\sim7$）可取任意值，作为原始数据输入计算机。

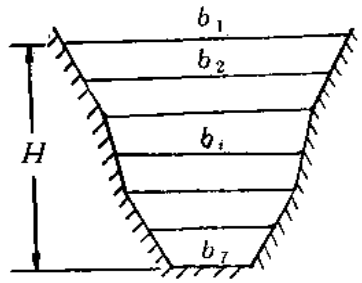


图 1　河谷形状

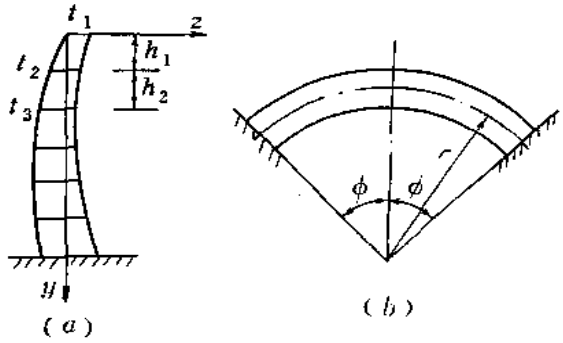


图 2　中央垂直剖面
（a）表示拱冠铅直剖面　（b）表示拱坝水平剖面

2．坝体上游面曲线　在分析已有工程经验后，我们认为双曲拱坝拱冠铅直剖面的上游面曲线可表示如下（图 2）：

$$z=-x_1y+x_2y^2 \tag{1}$$

式中 z 是顺水流方向的水平座标，y 是铅直座标，x_1 和 x_2 是两个系数，其值在优化过程中选定。

3．坝体厚度　在水平方向采用等厚度圆拱，在铅直方向坝体厚度表示为：

$$t=x_3+x_4y+x_5y^2 \tag{2}$$

其中 t 是坝体厚度，x_3、x_4、x_5 是待选定的三个系数。

4．半径与中心角　水平拱圈中和轴的半径 r 用座标表示为

$$r=x_6-x_7y+x_8y^2 \tag{3}$$

半径 r 和拱圈的半中心角 ϕ 之间存在着关系 $\sin\phi=b/(2r)$，其中 b 为河谷宽度。

由此可见，在对称河谷中拱坝形状取决于 8 个参数 x_1、x_2、$\cdots x_8$。改变这些参数，坝的形状、造价、应力等随之改变。这些参数称为设计变量。任何一个设计方案都是 8 维欧氏空间中的一个点：

$$\{x\}=[x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_8]^T$$

二、目标函数与约束条件

一般说来，水坝的造价主要取决于混凝土体积，所以我们用混凝土体积作为目标函数，即要求

$$V(x)=\sum h_i(A_i+A_{i+1}+\sqrt{A_iA_{i+1}})/3\to\min \tag{4}$$

式中 $V(x)$ 为坝的体积，A_i 为第 i 层拱的面积，h_i 为第 i 层拱与第 $i+1$ 层拱之间的高度。

为了确保工程安全和施工方便，对坝体形状和应力等施加如下约束条件：

1．几何约束 根据过坝交通等方面的要求，规定坝顶厚度不得小于 $\bar{t}_1$，即

$$x_3-\bar{t}_1\geqslant 0 \tag{5}$$

为了便于施工，对坝体上、下游表面的倒悬坡度加以限制如下：

$$m_1-\bar{m}_1\leqslant 0 \tag{6}$$

$$m_2-\bar{m}_2\leqslant 0 \tag{7}$$

式中 m_1 是坝体下游表面的最大倒悬坡度，发生在坝顶拱冠处，m_2 是坝体上游表面的最大倒悬坡度，发生在坝体下部的拱座处，$\bar{m}_1$ 和 $\bar{m}_2$ 是上、下游表面允许倒悬坡度。

如果基础条件比较好，对拱中心角不必限制。当基础条件比较差时，为了改善坝肩稳定性，应对最大中心角加以限制

$$\phi_i-\bar{\phi}_i\leqslant 0 \tag{8}$$

其中 $\bar{\phi}_i$ 是第 i 层的允许最大中心角。

2．应力约束 设计荷载包括水压力、淤砂压力、坝体自重及温度变化等。为了确保拱坝在运用期和施工期的安全，对坝体应力所加的限制为

$$\max\{\sigma_a\}\leqslant\sigma_a^+ \tag{9}$$

$$\min\{\sigma_a\}\geqslant-\sigma_a^- \tag{10}$$

$$\max\{\sigma_b\}\leqslant\sigma_b^+ \tag{11}$$

$$\min\{\sigma_b\}\geqslant-\sigma_b^- \tag{12}$$

式中 σ_a 为拱应力，σ_b 为梁应力；σ_a^+ 和 σ_b^+ 分别为拱和梁的允许拉应力，σ_a 和 σ_b^- 分别为拱与梁的允许压应力。采用弹性力学符号，以拉应力为正，压应力为负。应力分析采用考虑扭转作用的拱冠梁法，见〔3〕。计算坝体应力时，应考虑不同的荷载组合，取最不利情况下的应力与允许应力比较。

为了施工过程中坝体的安全，要求在自重单独作用下，梁下游面任一点都不出现拉应力，即

$$\max\{\sigma_d\}\leqslant 0 \tag{13}$$

式中 σ_d 为梁下游面的自重应力。考虑到梁向下游变位时，拱将发挥作用，因此对于自重单独作用下在梁上游面的应力，只要求坝体底部的第 6、7 两层不出现拉应力，即

$$\max\{\sigma_{a6},\ \sigma_{a7}\}\leqslant 0 \tag{14}$$

式中 σ_{a5}、σ_{a7} 分别为第 6 、 7 层梁上游面自重应力。

三、问题的提法与求解方法

经过上述处理后，拱坝的优化就是在满足约束条件式（5）—(14）的前提下，寻找使坝体体积取最小值的设计变量 $\{x\}$，即

极小化目标函数 $$V(x)\to\min \tag{15}$$

满足于约束条件 $$g_i(x)\geqslant 0,\ i=1—m \tag{16}$$

式中 m 是约束条件个数。这是一个数学规划问题。由于目标函数和大部分约束条件都是设计变量的非线性函数，因此它是一个非线性规划问题。我们用逐次线性规划法求解[1]。

把目标函数和约束条件都在 x^{k} 点邻域展成泰勒级数，并略去二阶以上的高次项，得到极小化

$$V(x)=V(x^{(k)})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V(x^{(k)})}{\partial x_j}(x_j-x_j^{(k)}) \tag{17}$$

满足于约束条件

$$\left.\begin{aligned} g_i(x)=g_i(x^{(k)})+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(x^{(k)})}{\partial x_j}(x_j-x_j^{(k)})\geqslant 0 \\ (i=1,\ 2,\cdots m)\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

以上两式都只包含 x_j 的一次项，因此可用单纯形法求解。但由于舍去高阶项所带来的误差，这样求得的最优解往往会落到非容许区域中去。为了使求得的解答落在容许区域内，补充下列约束条件

$$b_j^{(k)}-|x_j-x_j^{(k)}|\geqslant 0 \tag{19}$$

式中 b_j^{k} 是第 k 步的允许步长。由式（17)—(19)，用单纯形法求得最优解 $x^{(k+1)}$，然后在 $x^{(k+1)}$ 点邻域把目标函数和约束条件线性化，并减小允许步长 b_j，再次用单纯形法求解。如此一步一步计算下去，最终可求得原来的非线性规划问题的解。一般约需计算十步。

四、初始方案

由上节所述可知，在拱坝优化中，先从初始点 x^{0} 开始，逐步逼近最优点。如果初始点靠近最优点，计算量就比较小。初始点如离最优点比较远，计算量就比较大。初始点也代表一个设计方案。为了尽可能减少计算量，加快计算速度，我们应总结已有的拱坝建设经验，选择一个较好的初始方案。下面说明我们是如何确定初始方案的。

1．坝顶厚度 据已有经验，坝顶厚度可取为 $t_1=0.01(H+2b_1)$，其中 H 为坝高，b_1 为坝顶河谷宽度。根据交通及防护等方面的需要，又要求坝顶厚度不小于 $\bar{t}_1$。因此坝顶厚度可取为

$$x_5^{(0)}=t_1^{(0)}=\begin{cases} 0.01(H+2b_1), & \text{当 } 0.01(H+2b_1)>\bar{t}_1 \text{ 时} \\ \bar{t}_1, & \text{当 } 0.01(H+2b_1)\leqslant\bar{t}_1 \text{ 时}\end{cases} \tag{20}$$

2．坝底厚度 坝底厚度与坝高、河谷宽度及允许应力等因素有关，在分析已有拱坝断面后，我们建议按下式计算坝底厚度：

$$t_7^{(0)}=\frac{k(b_1+b_6)H}{\sigma_a^-} \tag{21}$$

式中 H 为坝高，b_1 和 b_6 分别是第 1 和第 6 层河谷宽度，σ_a^- 为拱的允许压应力，k 是经验系数，可取 $k=0.35$（在上式中，长度以米计，应力以吨/米^2 计）。其他高度的初始厚度按线性插值。由于局部河槽的影响，坝底河谷宽度 b_7 往往在很大范围内变化，其数值不稳定，所以我们在上式中用 b_6 来反映下部河谷宽度的影响。

3．上游面曲线 为了确定坝体上游面曲线，给出如下两个条件（图 3）：

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } y=\beta_1 H \text{ 时，} \quad dz/dy=0\\&\text{当 } y=H \quad \text{时，} \quad z=-\beta_2 t_7\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

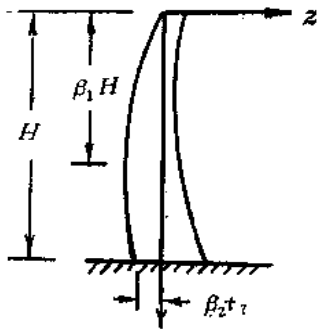


图 3

由上述条件得到

$$\left.\begin{aligned}x_1^{(0)}&=2\beta_1 x_2 H\\x_2^{(0)}&=\frac{\beta_2 t_7}{(2\beta_1-1)H^2}\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

式中 β_1 和 β_2 是两个经验系数，可取 $\beta_1=0.60$，$\beta_2=0.30$—0.60。

4．中心角 在初始方案中可取拱中心角为 $2\phi_1=125°$，$2\phi_6=110°$，$2\phi_7=90°$，由此可计算相应的半径，从而可算出 $x_6^{(0)}$、$x_7^{(0)}$ 及 $x_8^{(0)}$。当基础不良，允许最大中心角小于上述数值时，在初始方案中可取中心角为 $\phi_1=0.95\bar{\phi}_1$，式中 $\bar{\phi}_1$ 为允许最大中心角。

所用优化方法要求初始点是内点，即满足全部约束条件。如不满足约束条件，应修改初始值。例如，若应力太大，可以增加坝体厚度，若倒悬条件不满足，可以令 $m_1=\alpha_1\bar{m}_1$，$m_2=\alpha_2\bar{m}_2$，式中 $\alpha_1\leqslant 1$，$\alpha_2\leqslant 1$，由这两个条件重新确定坝体上游面曲线。在我们的程序中取 $\alpha_1=0.90$，$\alpha_2=0.50$。

五、非对称河谷中的拱坝

如果河谷是不对称的，对坝体形状的数学描述要复杂一些。取座标系如图 4(a)，坝的

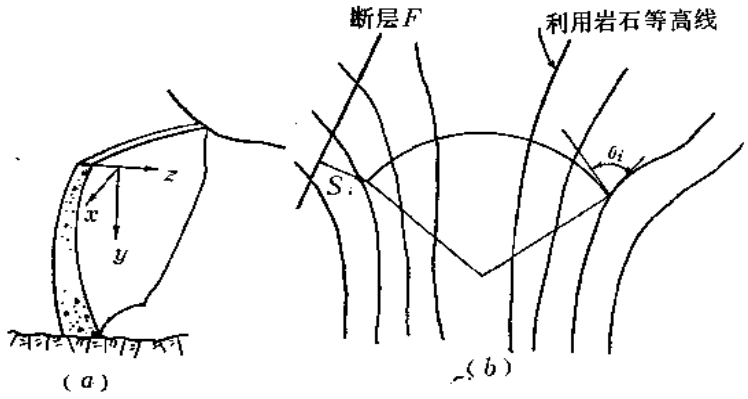


图 4 非对称河谷中的拱坝
(a) 表示座标系 (b) 表示平面拱圈

圆心轨迹线可表示如下：

$$\left.\begin{aligned} x&=a_1+a_2y+a_3y^2\\ z&=a_4-a_5y+a_6y^2 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

拱的半径可表示为

$$r=a_7-a_8y+a_9y^2 \tag{25}$$

坝体厚度可表示为

$$t=a_{10}+a_{11}y+a_{12}y^2 \tag{26}$$

共有 12 个参数a_1—a_{12}。除前述几何和应力约束条件外，为了坝肩稳定，还应施加如下几何约束条件（图 4（b））：

$$\theta_t-\bar{\theta}_t\geqslant 0 \tag{27}$$

式中 θ_t 是拱中心线与利用岩石等高线的夹角，$\bar{\theta}_t$ 是允许值。不同高程的利用岩石等高线是不规则的，可用条件函数表示。

设坝址区有一断层 F，第 i 层拱座至 F 的距离 s_t 应不小于给定的允许值 $\bar{s}_t$，即

$$s_t-\bar{s}_t\geqslant 0 \tag{28}$$

六、算　　例

坝高 120 米，河谷对称，七层河谷宽度分别为 285.0，280.0，269.1，233.1，191.1，144.4，94.4 米。坝体弹性模量 $E_c=2\times10^6$ 吨/米^2，容重 $\gamma_c=2.40$ 吨/米^3，线胀系数 $\alpha=1\times10^{-6}$1/℃。基础弹性模量 $E_f=2\times10^6$ 吨/米^2，基础变形系数 $K_2=2.717$，$K_3=2.917$，$K_4=5.386$，$K_5=7.106$，$K_6=0.600$。给定坝顶最小厚度 $\bar{t}_1=5.00$ 米，最大倒悬 $\bar{m}_1=\bar{m}_2=0.30$，允许拉应力 $\sigma_a^{\max}=\sigma_b^+=150$ 吨/米^2，允许压应力 $\sigma_a^-=700$ 吨/米^2，$\sigma_b^-=500$ 吨/米^2。允许最大半中心角 $\bar{\varphi}_1=65°$，$\bar{\varphi}_6=60°$，$\bar{\varphi}_7=50°$。荷载包括水压力、自重及温度。河谷形状见图 5。计算机给出的初始方案见图 6 及表 1，混凝土体积为 62.6 万立方米。经过优化，给出的最优方案见图 7 及表 2，混凝土体积为 51.9 万立方米，较初始方案减少了 20.6%。全部计算时间为 10 分钟。

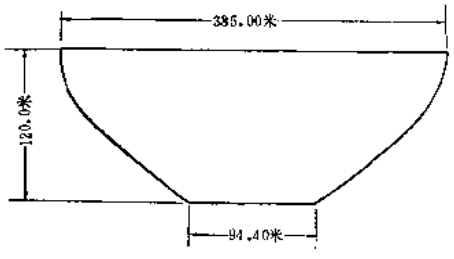


图 5　河谷形状

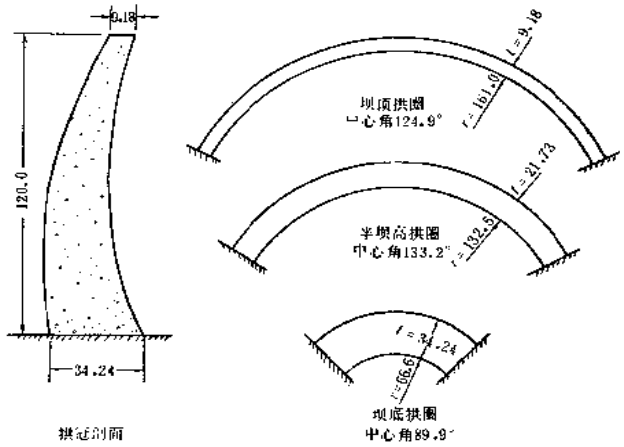


图 6　拱坝初始方案（混凝土 62.6 万立米）

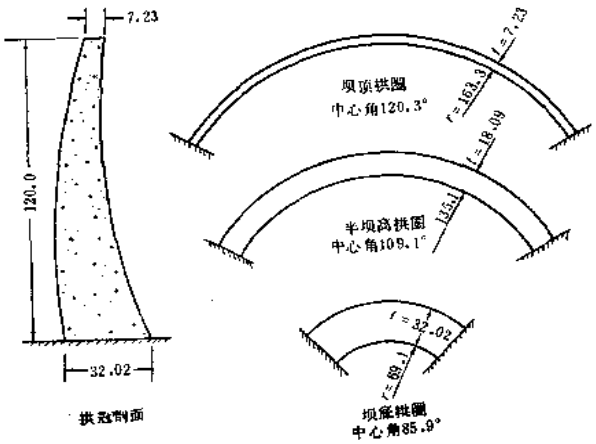


图 7　拱坝最优方案（混凝土 51.9 万立米）

拱　坝　初　始　方　案*　　表 1

i	半中心角（度）	坝体上游表面座标 z（米）（水平向下游为正）	坝体厚度（米）	拱冠环向应力		拱座环向应力		拱冠梁垂直应力		拱冠梁自重应力	
				上游	下游	上游	下游	上游	下游	上游	下游
1	62.4	0	9.18	−269.90	−165.18	−126.69	−311.14	0	0	0	0
2	62.1	−9.14	13.36	−284.09	−143.63	−96.22	−336.76	−71.70	−8.87	19.50	−102.64
3	61.8	−15.85	17.55	−299.97	−99.43	−38.86	−370.77	−73.39	−74.79	43.06	−195.81
4	61.5	−20.14	21.73	−321.68	−30.54	42.66	−415.38	−17.03	−198.06	24.08	−241.49
5	61.2	−22.00	25.92	−249.50	−47.67	−10.74	−305.15	37.05	−323.31	−43.41	−236.19
6	60.9	−21.43	30.10	−194.01	−15.38	−0.53	−233.90	51.37	−419.22	−160.83	−179.54
7	44.9	−18.43	34.24	−100.48	−12.98	−18.85	−109.89	10.22	−460.03	−332.22	−53.46

* 混凝土 62.6 万立方米（应力以拉为正，单位：吨/平方米）

拱　坝　最　优　方　案*　　表 2

i	半中心角（度）	坝体上游表面座标 z（米）	坝体厚度（米）	拱冠环向应力		拱座环向应力		拱冠梁垂直应力		拱冠梁自重应力	
				上游	下游	上游	下游	上游	下游	上游	下游
1	60.4	0	7.23	−332.47	−223.30	−181.24	−376.77	0	0	0	0
2	60.2	−4.89	10.48	−349.73	−201.58	−148.10	−407.55	−145.37	16.16	−5.00	−77.22
3	59.8	−8.44	14.09	−363.94	−150.42	−80.12	−442.55	−181.25	38.94	−14.40	−133.02
4	59.5	−10.67	18.09	−379.30	−66.10	22.04	−485.73	−96.77	−105.79	−56.37	−148.03
5	59.2	−11.55	22.36	−291.94	−63.61	−14.87	−359.91	4.66	−270.54	−128.46	−128.17
6	58.9	−11.11	27.01	−214.62	−21.88	−0.41	−260.27	68.17	−407.59	−226.03	−80.16
7	42.9	−9.32	32.02	−101.47	−8.47	−12.59	−112.21	82.82	−499.99	−345.58	0.00

* 混凝土 51.9 万立方米（应力以拉为正，单位：吨/平方米）

七、结　束　语

从实际工作中，我们体会到拱坝的优化设计具有下列优点：

1．加快拱坝设计速度。拱坝是比较复杂的结构，人工设计往往需要成年累月的时间，采用优化设计方法，上机一次即可求得给定条件下的最优方案。如我们进行的例子，只要计算十分钟即可求出拱坝最优设计剖面。

2．提高设计质量。人工设计只能从几个比较方案中求得一个相对好的方案，真正的最优方案可能遗漏掉了。优化设计可求出给定条件下的最优方案，可比人工设计节省投资 5—25%。

3．节省人力。拱坝的设计比较困难，往往需要投入较多的具有较高水平的设计人员才能完成任务。采用优化设计方法，利用通用程序，设计人员只要填写初始数据，上机一次即可得到给定条件下的最优设计剖面，可以节省人力。在中小型水利水电工程中，因设计人员很少，优化设计的效果尤为显著。

参　考　文　献

〔1〕Himmelblau, D.M., Applied Nonlinear Programming (1972)。

〔2〕朱伯芳，有限单元法原理与应用，水利电力出版社(1979)。

〔3〕朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝的一维有限单元法，水利水运科学研究，2(1979)。

拟乘子法及其在结构优化设计中的应用

李 康 元
（上海科技大学）

一、前 言

Kuhn-Tucker（以下记为 K-T）条件是非线性规划法中判断一个点是否是最优点的有力判据。它是一个微分关系。本文先将这一微分关系转化为二组函数中任一个函数的极值条件，说明这些函数在一定条件下的极小值点即为原目标函数的极小值点，从而通过求这几个函数中任一个函数的极小值并用叠代的方法确定 K-T 系数或与这组系数相差一个常数倍的系数——优化因子，从而求出目标函数的最优点，文内还对双目标函数的优化问题提出了处理的方法。

二、拟 乘 子 问 题

优化问题的一般形式为：

目标函数 $$W=F(\bar{x})\longrightarrow \min \tag{2-1a}$$

约 束 $$g_j(\bar{x})\leqslant 1\quad (j=1,2\cdots,\ E) \tag{2-1b}$$

式中 $\bar{x}=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$。对于形如 $x\geqslant x_0$ 的约束，可以包括在式（2-1b）中，x_0 为常数。

在目标函数取极小值时，往往只有一部分约束取等号，即所谓有效约束。而另一部分约束仅被满足，但取不等号，称它们为松约束。

设约束中有 M 个有效约束，将它们排在前面，则 K-T 条件为

$$\sum_{j=1}^{E}\xi_j\frac{\partial g_j}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial x_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2-2a}$$

$$g_j(\bar{x})=1,\ \xi_j\geqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\cdots,\ M) \tag{2-2b}$$

$$g_k(x)<1,\ \xi_k=0 \qquad (k=M+1,\ M+2,\cdots,\ E) \tag{2-2c}$$

式中 $\xi_j(j=1,\ 2,\cdots,\ E)$ 为 K-T 系数。

考察下面一组函数（称为 $L(\bar{x})$ 组）。

$L(\bar{x})$ 组

1．$$L_1(\bar{x})=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{E}\xi_j g_j^2(\bar{x})+F(\bar{x}) \tag{2-3}$$

$$2.\ L_2(\lambda)=\sum_{j=1}^{E}\xi_j g_j(\bar{x})+F(\bar{x}) \tag{2-4}$$

显然函数 $L_2(\bar{x})$ 的极值条件与式（2-2a）相同。

函数 $L_1(\bar{x})$ 的极值条件为：

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{E}\xi_j g_j\frac{\partial g_j}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial x_i}=0\ (i=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2-5}$$

将此式与式（2-2b 及 c）联立，则就是 K-T 条件。所以式（2-2a）可以用函数 $L(\bar{x})$ 组中任一个函数的极值条件代替。

令 $\xi_j=\eta_j/\lambda\ (j=1,\ 2,\cdots,\ E)$，$\lambda$ 为常数，则式（2-2a）可写作：

$$\sum_{j=1}^{E}\eta_j\frac{\partial g_j}{\partial x_i}+\lambda\frac{\partial F}{\partial x_i}=0\ (i=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2-6}$$

把 λ 看做拉格朗日乘子，考虑下列一组函数：

$\varphi(\bar{x})$ 组

$$\left.\begin{aligned}&1.\ \varphi_1(\bar{x})=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{E}\eta_j g_j^2(x)\\&W=F(\bar{x})\end{aligned}\right\} \tag{2-7}$$

$$\left.\begin{aligned}&2.\ \varphi_2(\bar{x})=\sum_{j=1}^{E}\eta_j g_j(\bar{x})\\&W=F(\bar{x})\end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

式中 $\eta_j\geqslant 0\ (j=1,\ 2,\cdots,\ E)$，称它们为优化因子。当这二个函数的极值条件与式（2-2b 及 c）相结合的时候，它们又与式（2-6）是等价的。

K-T 条件是目标函数极小值的必要条件，但若用上面四个函数中任一个函数的极值条件代替式（2-2a），则可以证明，这些函数的极小值点若满足式（2-2b 及 c），则它必是目标函数的极小值点（证明从略）。因此可以通过求这些函数的极小值来求原目标函数的极小值。

这二组函数中的第一个函数与第二个函数的差别是：与第二个函数的极小值点相对应的目标函数的极小值点必定是第一个函数的极小值点，但反过来就不一定成立。现以函数 $\varphi(\bar{x})$ 说明之。设点 $\bar{x}_0$ 是目标函数的极小值点，点 $\bar{x}_1$ 是点 $\bar{x}_0$ 邻域内等值面 $W=F(\bar{x}_0)$ 上的一个点。令

$$\Delta g_j=g_j(\bar{x}_1)-g_j(\bar{x}_0)\ (j=1,\ 2,\cdots,\ M)$$

注意到松约束对应的优化因子为零及 $\varphi_2(\bar{x}_0)$ 是极小值有

$$\varphi_2(\bar{x}_1)-\varphi_2(\bar{x}_0)=\sum_{j=1}^{M}\eta_j\Delta g_j>0$$

因为对有效约束 $g_j(\bar{x}_0)=1$，所以

$$\varphi_1(\bar{x}_1)-\varphi_1(\bar{x}_0)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\eta_j(1+\Delta g_j)^2-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\eta_j=\sum_{j=1}^{M}\eta_j\Delta g_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\eta_j(\Delta g_j)^2>0$$

即点 $\bar{x}_0$ 是函数 $\varphi_1(\bar{x})$ 的极小值点。所以，函数 $\varphi_2(\bar{x})$ 与函数 $\varphi_1(\bar{x})$ 相比，若用它的极小值性质来求目标函数的最优值，其非线性程度降低了，但有可能失掉局部最优解。

这二组函数中，因为 $\xi_j \geqslant 0$，$\eta_j \geqslant 0 (j=1, 2, \cdots, E)$，所以可以把它们看做一组权系数。但它们与拉格朗日乘子十分相似，所以称为拟乘子。

三、拟乘子的求法

下面以函数 $L_2(\bar{x})$ 为例说明通过求此函数的极小值用叠代的方法求出拟乘子，从而求得目标函数的极小值。

函数 $L_2(\bar{x})$ 的极值条件为

$$G_i(\bar{\xi}, \bar{x}(\bar{\xi})) = \frac{\partial L_2}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{E} \xi_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad (3\text{-}1)$$

式中 $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_E)$。$\bar{x}(\bar{\xi})$ 表示函数 $L_2(\bar{x})$ 的极值条件点随 $\bar{\xi}$ 而变化，所以 $\bar{\xi}$ 成了参变量。因此目标函数与约束函数都是 $\bar{\xi}$ 的复合函数。正是这一点使我们能用叠代的方法求出拟乘子。因为若函数 $L_2(\bar{x})$ 有极小值，则必有 $\frac{dg_j}{d\xi_j} < 0 (j=1, 2, \cdots, E)$。证明如下：

设矩阵〔H〕为函数 $L_2(\bar{x})$ 的 Hessian 矩阵，它的元素为 $a_{ij} = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}$，因为假定 $L_2(\bar{x})$ 有极小值，所以它是对称正定矩阵。

设矩阵〔A〕为矩阵〔H〕的伴随矩阵，它的元素记为 A_{KP}，显然它也是对称正定矩阵。

因为约束函数是 $\bar{\xi}$ 的复合函数，所以有

$$\frac{dg_j}{d\xi_j} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial \xi_j} \qquad (j=1, 2, \cdots, E) \qquad (3\text{-}2)$$

因为矩阵〔H〕对称正定，所以式（3-1）的雅可比行列式大于零，即

$$J = \frac{D(G_1, G_2, \cdots, G_n)}{D(x_1, x_2, \cdots, x_n)} > 0$$

于是有

$$\frac{\partial x_p}{\partial \xi_j} = -\frac{1}{J} \frac{D(G_1, G_2, \cdots, G_n)}{D(x_1, \cdots, x_{p-1}, \xi_j, x_{p+1}, \cdots, x_n)} = -\frac{1}{J} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_k} A_{kp} \quad (p=1, 2, \cdots, n) \qquad (3\text{-}3)$$

将式（3-3）代入式（3-2），由于矩阵〔A〕正定及 $J>0$ 有

$$\frac{dg_j}{d\xi_j} = -\frac{1}{J} \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{kp} \frac{\partial g_j}{\partial x_p} \frac{\partial g_j}{\partial x_k} < 0, \quad (j=1, 2, \cdots, E) \qquad (3\text{-}4)$$

有了这一关系，利用式（2-2b 及 c）的条件就可以用叠代的方法在逐步将有效约束和松约束分开的过程中找到一组拟乘子了。具体步骤是：

1）任取一组 K-T 系数 $\xi_j^{(0)}$（$j=1, 2, \cdots, E$）。

2）用任一方法求出 $\min L_2(\lambda)$ 的点 $\lambda^{(0)}$，并求出 $W_0=F(\bar{x}^{(0)})$ 及 $\alpha_j^{(0)}=g_j(\bar{x}^{(0)})$（$j=1, 2, \cdots, E$）。

3）用下式“调整”K-T 系数：

$$\xi_j^{(0)}=\begin{cases}\xi_j^{(0)}(\alpha_j^{(0)})^{h_j}, & \text{当} \quad \alpha_j^{(0)}>0.1 \\ 0.1\xi_j^{(0)}, & \text{当} \quad \alpha_j^{(0)}\leqslant 0.1\end{cases} \quad (j=1, 2, \cdots, E) \tag{3-5}$$

式中 $h_j>0$（$j=1, 2, \cdots, E$），称为步长指数。当 $\alpha_j^{(0)}\leqslant 0.1$ 时取 $0.1\xi_j^{(0)}$ 是为了不使 $K-T$ 系数变为负值或变化太快。

4）以 $\xi_j^{(1)}(j=1, 2, \cdots, E)$ 的值求出新的 $\min L_2(\bar{x})$ 的点 $\bar{x}^{(1)}$，并求出 $W_1=F(\bar{x}^{(1)})$ 及 $\alpha_j^{(1)}=g_j(\bar{x}^{(1)})$（$j=1, 2, \cdots, E$）。若 $|W_1-W_0|\leqslant\varepsilon_1$ 及 $|\alpha_j^{(1)}-\alpha_j^{(0)}|\leqslant\varepsilon_2(j=1, 2, \cdots, E)$ 则叠代结束，否则置 $\alpha_j^{(0)}:=\alpha_j^{(1)}(j=1, 2, \cdots, E)$ 及 $W_0:=W_1$，并转第三步。

第三步中的步长指数是控制拟乘子变化速度的。由于 $h_j>0(j=1, 2, \cdots, E)$，所以若某个约束函数值小于 1，下次叠代时它所对应的拟乘子将下降而约束函数值将上升（因为 $\frac{dg_j}{d\xi_j}<0$）。如果随着拟乘子的减小约束成了等式，则就是有效约束。反之即使拟乘子下降到零，约束函数值仍小于 1，则就是松约束。在这一过程中要求的拟乘子将找到。显然，选择合理的步长指数是重要的。如果选得太小，会使 $\bar{\xi}$ 变化太慢而叠代次数增加。选得太大会使约束函数值变化过多而使叠代不稳定甚至发散。因此在叠代过程中应根据各约束函数值趋近等式的速度及时改变步长指数使叠代迅速而稳定的收敛。下面的指数 V_j 在一定程度上反应了约束函数随拟乘子的变化率：

$$V_j=\frac{\alpha_j^{(1)}-\alpha_j^{(0)}}{1-\alpha_j^{(0)}} \quad (j=1, 2, \cdots, E) \tag{3-6}$$

若某个 V_j 很大，相应的 h_j 要减小些，反之要增加些。初始步长指数以小些为宜。建议取 $\frac{1}{3}\sim\frac{1}{4}$。

若叠代在可行区内外来回跳跃，说明步长指数太大。这一现象可以从（$1-\alpha_j^{(0)}$）和（$1-\alpha_j^{(1)}$）是否异号来判断而不从式（3-6）判断。

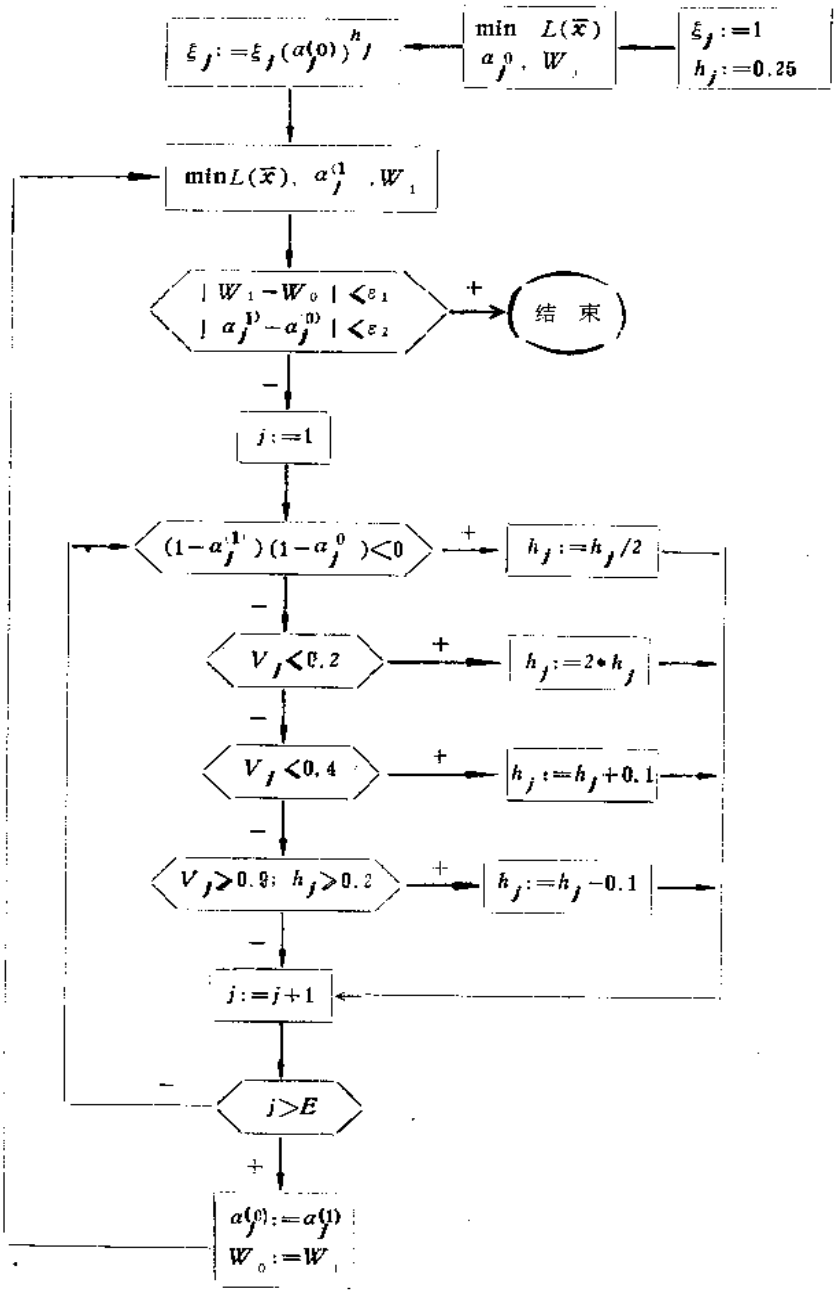
稳定收敛时，V_j 是小于 1 的。因此所谓 V_j 的大小指它是否超过 1。

整个叠代过程可用下页的框图表示。

其中步长指数选择部分仅作参考，没有经实践证明这种择选能保证叠代迅速而稳定的收敛。

对于形如 $x\geqslant x_0$ 的约束，可不必列入函数 $\varphi(\bar{x})$ 或 $L(\bar{x})$ 中，而当求得的极小值点对应的该变量值比 x_0 小时，取 x_0 为该变量的值就可以了。

用函数 $\varphi(\bar{x})$ 求解的叠代过程在第五节中讨论。



四、双目标函数问题

函数 $L(\bar{x})$ 可以处理双目标函数的问题。

把式（2-1a）表示成下面的形式

$$\frac{F(\bar{x})}{W_0}\longrightarrow \min \tag{4-1}$$

式中 W_0 为常数，将它选得足够大，使满足 $\frac{F(\bar{x})}{W_0}\leqslant 1$ 的点与可行区有公共点并将式（4-1）记为

$$g_0(\bar{x})=\frac{F(\bar{x})}{W_0}\leqslant 1 \tag{4-2}$$

令 $\xi_0=1$，则式（2-4）变为

$$L_2(\bar{x})=\sum_{j=0}^{E}\xi_j g_j(\bar{x}) \tag{4-3}$$

从此式可知，目标函数与约束的差别仅是在叠代过程中取定 K-T 系数不变(不管取何值，只要固定不变即可）。在叠代过程中，我们感兴趣的仅是企图使约束函数值正好取 1。在此过程中，目标函数自然达到它的最优值。所以若叠代一开始取定二个 K-T 系数不变就成了双目标函数问题，它们的值在叠代中将同时减小。然而还存在着这二个系数的相对大小问题。不同的相对值将得到不同的结果。在叠代过程中可这样处理：设 $g_0(\bar{x})$，$g_1(\bar{x})$ 为二个目标函数。首先根据实际问题规定它们的值应满足的关系。取 $\xi_0=1$，把 $g_1(\bar{x})$ 作为约束进行叠代。当叠代到 $g_1(\bar{x})<1$ 时，若当时的 $g_0(\bar{x})$ 和 $g_1(\bar{x})$ 的关系与所要求的已比较接近，则取定当时的 ξ_1 不变继续叠代。叠代过程中它们的关系若发生偏离，只要对 ξ_1 作些修正就行。修正方法是，若 $g_1(\bar{x})$ 大了，ξ_1 增加些，反之就减小些。具体做法见例 2。

对多目标函数问题，原则上可同样处理。

五、在桁架优化设计中的应用

1．问题的简化

以应力和位移为约束的桁架的优化设计问题为：

$$W=\sum_{p=1}^{S}A_p l_p \longrightarrow \min \tag{5-1}$$

约束：

$$g_{jk}(\bar{A})=\begin{cases}\dfrac{\sigma_{jp}}{[\sigma_{jp}]}=\dfrac{N_{jp}}{A_p}\cdot\dfrac{1}{[\sigma_{jp}]}\leqslant 1 \quad (K=p,\ t)\ (j=1,\ 2,\cdots,\ R)\\ \dfrac{\delta_{jt}}{\Delta_{jt}}=\sum_{p=1}^{S}\dfrac{N_{jp}\bar{N}_{tp}l_p}{EA_p\Delta_{jt}}\leqslant 1 \quad (p=1,2,\cdots,S)\quad (t=1,2,\cdots,Q)\\ A_1,\ A_2,\cdots,\ A_S\geqslant 0\end{cases} \tag{5-2}$$

式中符号的意义如下：

W	桁架总重量	A	杆件截面积
N	杆件的内力	$\bar{N}$	单位载荷下杆件的内力
σ	杆件的应力	$[\sigma]$	材料许用应力
δ	节点位移	Δ	节点容许位移
E	弹性模量	Q	位移约束数
R	载荷组数	S	杆件总数

l 包含比重的杆的长度

应用函数 $\varphi_2(\bar{x})$ 求解有：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_2(\bar{A})&=\sum_{j=1}^{R}\left[\sum_{p=1}^{S}\eta_{jp}\frac{\sigma_{jp}}{[\sigma_{jp}]}+\sum_{t=1}^{Q}\eta_{jt}\frac{\delta_{jt}}{\Delta_{jt}}\right]\\W&=\sum_{p=1}^{S}A_pl_p\end{aligned}\right\}\tag{5-3}$$

令

$$\bar{\Phi}(\bar{A},\ \lambda)=\varphi_2(\bar{A})+\lambda\left(\sum_{p=1}^{S}A_pl_p-W\right)\tag{5-4}$$

则式（5-3）的极值条件为

$$\frac{1}{l_i}\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial A_t}=\sum_{j=1}^{R}\left[\sum_{p=1}^{S}\frac{\eta_{jp}}{[\sigma_{jp}]}\frac{\partial\sigma_{jp}}{\partial A_t}+\sum_{t=1}^{Q}\frac{\eta_{jt}}{\Delta_{jt}}\frac{\partial\delta_{jt}}{\partial A_t}\right]\frac{1}{l_i}+\lambda=0\tag{5-5a}$$

$$(i=1,\ 2,\cdots,\ s)$$

$$\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\lambda}=\sum_{p=1}^{S}A_pl_p-W=0\tag{5-5b}$$

利用关系式[1]：

$$\frac{\partial\delta_{jt}}{\partial A_t}=-\frac{N_{jt}\bar{N}_{tt}l_t}{EA_t^2}\tag{5-6}$$

那末式（5-5a）方括号内第二项变为

$$-\sum_{j=1}^{R}\sum_{t=1}^{Q}\eta_{jt}N_{jt}\bar{N}_{tt}/E\Delta_{jt}A_t^2=-L_{\delta_t}/A_t^2\tag{5-7}$$

式中

$$L_{\delta_t}=\sum_{j=1}^{R}\sum_{t=1}^{Q}\eta_{jt}N_{jt}\bar{N}_{tt}/E\Delta_{jt}\tag{5-8}$$

方括号内第一项：

$$\frac{\partial\sigma_{jp}}{\partial A_t}=-C_t^p\frac{N_{jt}}{A_t^2}+\frac{1}{A_p}\frac{\partial N_{jp}}{\partial A_t}\tag{5-9}$$

式中

$$C_t^p=\begin{cases}1 & i=p\\0 & i\neq p\end{cases}\tag{5-10}$$

用节点位移表示杆的内力：

$$N_{jp}=\frac{EA_p}{l_p}\sum_{f=1}^{3}\cos\alpha_{pf}(\delta_{jprf}-\delta_{jpsf})\tag{5-11}$$

式中 δ_{jprf} 和 δ_{jpsf} 分别表示第 j 组载荷作用下引起第 p 杆 r 端和 s 端三个座标方向的位移 $f=1,2,3$，分别代表直角座标 x，y，z。$\cos\alpha_{pf}$ 表示第 p 杆的三个方向余弦，于是得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{jp}}{\partial A_t}&=C_t^p\frac{E}{l_p}\sum_{f=1}^{3}\cos\alpha_{pf}(\delta_{jprf}-\delta_{jpsf})+\frac{EA_p}{l_p}\sum_{f=1}^{3}\cos\alpha_{pf}\left(\frac{\partial\delta_{jprf}}{\partial A_t}-\frac{\partial\delta_{jpsf}}{\partial A_t}\right)\\&=C_t^p\frac{N_{jt}}{A_t}+\frac{EA_p}{l_p}\sum_{f=1}^{3}\cos\alpha_{pf}\left(\frac{\partial\delta_{jprf}}{\partial A_t}-\frac{\partial\delta_{jpsf}}{\partial A_t}\right)\end{aligned}\tag{5-12}$$

将式（5-12）代入式（5-9）后消去 $C_i^2 N_{jt}/A_i^2$ 项并利用式（5-6），那末式（5-5a）方括号内第一项为：

$$-\sum_{j=1}^{R}\sum_{p=1}^{S}\eta_{jp}N_{jt}\sum_{f=1}^{3}\cos\alpha_{pf}(\overline{N}_{prf}-\overline{N}_{psf})/l_p[\sigma_{jp}]A_i^2=-L_{\sigma_t}/A_i^2 \qquad (5\text{-}13)$$

式中

$$L_{\sigma_t}=\sum_{j=1}^{R}\sum_{p=1}^{S}\eta_{jp}N_{jt}\sum_{f=1}^{3}\cos\alpha_{pf}(\overline{N}_{prf}-\overline{N}_{psf})/l_p[\sigma_{jp}] \qquad (5\text{-}14)$$

其中 $\overline{N}_{prf}$ 和 $\overline{N}_{psf}$ 分别表示第 p 杆 r 端和 s 端 f 方向的单位力在第 i 杆内引起的内力。

于是式（5-5a）成为：

$$(L_{\sigma_t}+L_{\delta_t})/A_i^2=\lambda=\text{常数} \qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ s) \qquad (5\text{-}15)$$

以 A_1 作为参变量消去 λ 后得到求解公式：

$$\begin{cases}\dfrac{A_t}{A_1}=\left(\dfrac{L_{\sigma_t}+L_{\delta_t}}{L_{\sigma_1}+L_{\delta_1}}\right)^{\frac{1}{2}} & (i=2,\ 3,\cdots,\ s)\\ A_1=W\Big/\left(\sum_{i=1}^{S}A_i l_i/A_1\right)\end{cases} \qquad (5\text{-}16)$$

2．迭 代 方 法

式（5-16）也只能通过叠代方法求解。对所有约束显然也有 $(dg_{jk}/d\eta_{jk})<0$。观察式（5-3），优化因子实际上是一组权系数，因此我们只关心它们之间的相对值。所以可首先取定某一个优化因子的值，再改变其他优化因子达到改变约束函数值的目的。以后将最大的优化因子选为 1，其相应的约束称为主约束，具体叠代过程如下：

1．初定主约束：任选一组变量如 $\overline{A}^{(0)}=1$ 进行结构分析，求出杆件内力和节点位移后令

$$K_0=\max_{j,k}g_{jk}(\overline{A}^{(0)}) \qquad (5\text{-}17)$$

并将对应的约束暂定为主约束，求出 $W_0=\sum_{p=1}^{s}A_p^{(0)}l_p$。

2．利用变量间的相对值不变时，杆件应力和节点位移反比于重量的特性，令

$$W_0:=K_0W_0;\qquad \overline{A}^{(0)}:=K_0\overline{A}^{(0)} \qquad (5\text{-}18)$$

则主约束取等式，其余约束满足约束条件。

在约束函数值与目标函数不成反比例时，可根据 K_0 的大小，适当改变变量（如同时增加或减少某一常数倍）的值，使下次叠代时，估计主约束满足约束条件。

3．任选一组优化因子如 $\eta_{jk}=1$（$K=p$，t；$j=1,\ 2,\cdots,\ R$）。

4．以式（5-16）求出新的面积 $\overline{A}^{(1)}$。

5．以 $\overline{A}^{(1)}$ 进行结构分析，求出应力和位移，若 $|g_{jk}(\overline{A}^{(1)})-g_{jk}(\overline{A}^{(0)})|\leqslant\varepsilon$ 则叠代结束，否则设主约束的值为 K_1 后令

$$\alpha_{jk}^{(1)}=\begin{cases}g_{jk}(\overline{A}^{(1)}) & \text{当 } g_{jk}(\overline{A}^{(1)})/K_1>0.1\ (j=1,\ 2,\cdots,\ R)\\ 0.1 & \text{当 } g_{jk}(\overline{A}^{(1)})/K_1\leqslant 0.1\quad (k=p,\ t)\end{cases} \qquad (5\text{-}19)$$

用式（3-5）调整优化因子（只需将式中的 ξ_j 改为 η_{jk} 即可）。（第一次调整时 $h_{jk}=1(k=p,$

t；$j=1, 2, \cdots, R$)。令 $\bar{A}^{(0)}:=K_1*\bar{A}^{(1)}$，$W_0:=K_1*W_0$ 转第 4 步。但第一次确定的主约束可能不是真正的主约束，因此当后面的叠代中某个优化因子大于 1 时，应把相应的约束定为主约束。而所有优化因子都要除以那个大于 1 的优化因子来作为它们的值。叠代框图可参照函数 $L_2(\bar{x})$ 的，但其中 h_j 变动部分中数字 0.1 可改为 1，而 $V_j\geqslant 0.9$，$h_j\geqslant 0.2$ 可改为 $V_j\geqslant 0.7$，$h_j\geqslant 1.5$，不过这也仅作为一种参考值。

6）为改善收敛性，将式（5-16）改写为

$$\frac{A_i}{A_1}=\left(\frac{A_1}{A_i}\right)^{\frac{r}{2-r}}\left(\frac{L_{\sigma_i}+L_{\delta_i}}{L_{\sigma_1}+L_{\delta_1}}\right)^{\frac{\lambda}{2-r}} \quad (i=2, 3, \cdots, s) \qquad (5\text{-}20)$$

式中 r 为常数，其值可通过经验确定。

六、例

1．三杆桁架（图 1）

二组载荷

$$p_1=\sqrt{2},\ p_2=\sqrt{2}$$

许用应力

$$[\sigma_{拉}]=\sqrt{2},\ [\sigma_{压}]=-1$$

a 点垂直位移

$$E\Delta=1/\sqrt{2}$$

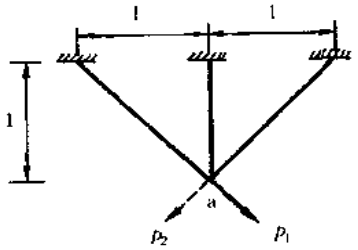


图 1

由对称性：$A_1=A_2$，$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_1$，$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\sigma_2$，$\sigma_3=\sigma_{31}=\sigma_3$，$\eta_{11}=\eta_{22}=\eta_1$，$\eta_{12}=\eta_{21}=\eta_2$，$\eta_{13}=\eta_{31}=\eta_3$，$\delta_1=\delta_2=\delta$，$\eta_{1\delta}=\eta_{2\delta}=\eta_\delta$。

计算结果列于表 1，r 取 0.5。

前几次叠代，位移约束为主约束。第三次叠代时，应力约束 σ_2 的值已大于 1，但 η_2 还小于 1。到第四次叠代时 η_2 大于 1，所以将它选为主约束。

V_3 的值一直很小，所以 h_3 增加很快。V_1 的值开始稍大，后来变小，所以 h_1 开始增加慢，后二次增加快，有效约束的 V 值一直变化较大，所以相应的 h 变化较小。

2．双目标函数问题

目标函数

$$\begin{cases} g_0(x_1, x_2)=2-\dfrac{3x_1+2x_2}{16}\leqslant 1 \\ g_1(x_1, x_2)=0.1(2x_1+x_2)\leqslant 1 \end{cases} \longrightarrow \min$$

约束

$$\begin{cases} g_3(x_1, x_2)=0.125(x_1+x_2)\leqslant 1 \\ g_4(x_1, x_2)=0.5x_1\leqslant 1 \\ x_1, x_2\geqslant 0 \end{cases}$$

要求目标函数满足 $1-g_0(x_1, x_2)=\alpha[1-g_1(x_1, x_2)]$。取 $\alpha=2$。

这个问题必须用函数 $L_1(\bar{x})$ 求解。第四次叠代时 g_0 和 g_1 已基本满足要求。所以第五次叠代时 $\xi=0.2855$ 不变。为保持 g_0 和 g_1 的关系与所要求的一致，例中采用下面的方法修正 ξ_1：

a）求出 ξ_1 停止改变前的差商 $\beta=\frac{\Delta g_1}{\Delta \xi_1}=\frac{g_1^{(4)}-g_1^{(3)}}{\xi_1^{(4)}-\xi_1^{(3)}}$。上表为叠代次数。显然它不是真正的差商。

b）以下式修正 ξ_1：

$$\Delta\xi_1=-\frac{(1-g_0)-\alpha(1-g_1)}{\alpha\cdot\beta}$$

这一公式的意义是：若下次叠代时 g_0 不变，β 是真正的差商且 g_1 仅随 ξ_1 成线性变化，那末下次叠代结果 g_0 和 g_1 的关系与要求的正好相符。

显然，这里提出的几个前提都是有问题的。但只要 $\beta<0$，公式就能起到修正的作用。若求出的 $\beta>0$，就不能用，这时可取 ξ_1 停止改变前几次差商的平均值并可在公式右边乘以一个常系数 f，用它来改善收敛速度。结果见表 2。

七、讨　　论

用拟乘子法求解带有不等式约束的优化问题的一个明显好处是对于可以用解析法求函数 $\varphi(\bar{x})$ 和 $L(\bar{x})$ 的极小值的问题，总的叠代次数是不多的，而且叠代次数取决于约束的数目而与变量的多少关系不大。在解析法不能求解时，可以用无约束优化方法通过求 $\min L(\cdot)$ 来求解。这时，每求一次 $\min L(\bar{x})$，相当于求一次罚函数的极小。下面将这几种方法作一初步的比较。

1．用函数 $\varphi(\bar{x})$ 求解时，规定了最大的优化因子为 1。因此所有优化因子的取值范围已被确定，所以初值容易选取。计算表明有效约束的步长指数约在 1 与 3 之间，另外，改变优化因子的值仅改变约束函数值的大小，目标函数的值不变。叠代将沿主约束边界逐渐趋向最优解。所以收敛比较稳定。

2．用函数 $L(\bar{x})$ 求解时，目标函数的值随 K-T 系数而变。所以容易出现所谓的跳跃现象。

3．用函数 $\varphi(\bar{x})$ 只能求解最优点在边界上的问题，而函数 $L(\bar{x})$ 则可以求解最优点在可行区内部的问题，这时所有的 K-T 系数为零。

4．与罚函数法相比，函数 $L_2(\bar{x})$ 的优点是非线性程度没有增加。因此有利于用无约束优化方法进行搜索。由于是叠代过程，所以每次求 $\min L_2(\bar{x})$ 时，不必精确地求出它的极小值点。因此若能提出一个恰到好处的修正 K-T 系数的办法，可以指望总的搜索次数能明显减小。

综上所述，当可以用解析法求解时，则使用函数 $\varphi(\bar{x})$ 为宜。否则使用函数 $L(\bar{x})$ 求解。一般情况下使用函数 $\varphi_2(\bar{x})$ 和 $L_2(\bar{x})$。

表 1

叠代次数	A_1	A_3	W	a_1	a_2	a_3	a_8	h_1	h_2	h_3	h_8	η_1	η_2	η_3	η_8
初 始	1	1	3.8284	0.4142	0.7071	0.4142	0.8284								
方 案	0.8284	0.8284	3.1716	0.5000	0.8535	0.5000	1					1	1	1	1
1	0.7873	0.8575	3.0843	0.5446	0.8851	0.5000	1	1	1	1		0.5446	0.8851	0.5000	1
2	0.7067	0.9145	2.9133	0.6471	0.9576	0.5000	1	2	1	2		0.2280	0.8475	0.1250	1
3	0.6545	1.0347	2.8960	0.7904	1.0589	0.5000	1	3	1	4		0.1126	0.8978	0.0078	1
4	0.6417	1.1470	2.9621	0.7937	1.1319	0.5000	1	4	2	8		0.0625	1	0	0.8696
5	0.6432	1.1336	2.9527	0.7846	1	0.4452	0.8904	8			2	0.0090	1		0.6894
6	0.6481	1.0888	2.9219	0.7678	1	0.4571	0.9141	16			2	0.0001	1		0.5761
7	0.6556	1.0258	2.8803	0.7428	1	0.4747	0.9495				2	0	1		0.5194
8	0.6618	0.9785	2.8502	0.7229	1	0.4889	0.9777				1		1		0.5078
9	0.6545	0.9534	2.8379	0.7141	1	0.4951	0.9902				1		1		0.5028
10	0.6657	0.9494	2.8324	0.7101	1	0.4979	0.9958				1		1		0.6007
11	0.6663	0.9454	2.8300	0.7083	1	0.4992	0.9984				1		1		0.4999
12	0.6668	0.9436	2.8289	0.7075	1	0.4997	0.9995								
精确解	0.6667	0.9428	2.8284												

表 2

叠代次数	X_1	X_2	a_0	a_1	a_2	a_3	ξ_1	ξ_2	ξ_3	h_1	h_2	h_3
1	0.1	23	1.6938	0.25	0.30	0.25	1	1	1			
2	0.621	3.749	1.4135	0.5007	0.5477	0.1573	0.5	0.5477	0.1581	1/2	1/2	1/2
3	1.429	4.391	1.1831	0.7250	0.7276	0.3573	0.3538	0.4052	0.0627	1/2	1/2	1/2
4	2.765	4.080	0.9715	0.9611	0.8557	0.6913	0.2855	0.3278	0.0220	2/3	2/3	1
5	2.711	4.618	0.9144	1.0041	0.9161	0.6779	0.2855	0.2954	0.0152	（按 $\Delta\xi_1$ 公式修正 ξ_1）	2/3	1
6	2.464	5.180	0.8905	1.0108	0.9555	0.6161	0.2985	0.2707	0.0070		1	2
7	2.086	5.680	0.8989	0.9852	0.9707	0.5214	0.3159	0.2586	0.0010		1	4
8	1.614	6.353	0.9033	0.9580	0.9958	0.4034	0.3262	0.2511	—		1	6
9	1.527	6.473	0.9046	0.9527	1	0.3817	0.3280	0.2500	—		1	—
10	1.523	6.477	0.9048	0.9523	1	0.3808	0.3281	0.2500	—		1	—
精确解	1.624	6.476	0.9048	0.9524								

参 考 文 献

〔1〕加拉格尔，R.H.，齐恩基威克茨，O.C.，最佳结构设计，理论和应用，国防工业出版社（1978）。

〔2〕Fox, R. L., Optimization Methods for Engineering Design, Addison-Wesley Publishiny, Company (1971).

〔3〕Mand, K. I., Optimum Design of Structures, London Newes-Butterworths (1974).

一个新的满应力设计方法

唐 燮 黎
(兰州大学)

一、引 言

满应力设计是历史上最早形成的结构最佳设计概念之一，它要求结构的每一元件在至少一种规定的工况下达到它的允许应力限。满应力设计适用于仅有应力约束的结构设计问题，还可用于规定有元件尺寸限制的结构设计中，但对受到最大或最小尺寸限制的那些元件很可能就不是满应力的。

最常用又简单的满应力设计法是应力比法。对一个有 n 个元件组成的结构，若每个元件只有一个设计变量，应力比叠代公式为

$$X_i^{k+1}=X_i^k\frac{\sigma_i^k}{\bar{\sigma}_i} \qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{1}$$

其中 X_i^k 和 σ_i^k 分别是第 i 个元件在第 k 次叠代后得到的设计变量和应力值，$\bar{\sigma}_i$ 为第 i 个元件的允许应力。对于轴力元件可取横截面积为设计变量，对于弯曲元件常取截面模量为设计变量。经验表明，对正常型结构，用应力比法设计收敛很快，但对于交感型结构，用应力比法设计收敛很慢。

为加速叠代收敛进程，一个十分简便的方法是在应力比法中引入超松弛因子 β，即令

$$X_i^{k+1}=X_i^k\left(\frac{\sigma_i^k}{\bar{\sigma}_i}\right)^{\beta} \qquad (i=1,\ 2,\cdots n) \tag{2}$$

通过在叠代过程中调节超松弛因子 β 的取值来达到加速收敛的目的。不幸的是超松弛因子 β 初值的选取以及随叠代进程的变化方式是因问题而异无统一规则可以遵循。

Gallagher[1]，Reinschmidt等[2]一些作者在为减少收敛所需的重分析次数进行的努力中考虑到交感型结构的特点，在关于设计变量的叠代公式中计及了应力随设计变量的改变而引起的变化，提出了比较精细的满应力设计法。虽然在所例举的简单结构设计中收到了预期的效果，但对于比较复杂的结构，应力关于设计变量偏导数的计算以及矩阵求逆等运算将大大增加计算工作量，因而很少为工程实践所采用。

本文提出了一个新的满应力设计方法——加速应力比法。它考虑到了元件中的力随设计变量的改变而引起的变化，并提出了一个简单的近似计算方法，收到了加速叠代收敛，减少重分析次数的效果。

二、方 法

1．Gallagher 方法的缺陷 Gallagher[1] 的灵敏度矩阵法 (Sensitivity-matrix

method）的叠代公式为

$$\bar{\sigma}_i-\sigma_i^k=-\left(\frac{\sigma}{X}\right)_i^k(X_i^{k+1}-X_i^k)+\frac{1}{X_i^k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k(X_j^{k+1}-X_j^k)\quad(i=1,\ 2,\cdots n)\qquad(3)$$

式中 X_i^k，σ_i^k，F_i^k 分别为第 i 个元件在第 k 次叠代后的设计变量、应力、内力值。$\bar{\sigma}_i$ 为第 i 个元件的允许应力。将它用于静定结构时，有

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k=0\quad(i,\ j=1,\ 2,\cdots n;\ k=0,\ 1,\cdots)$$

于是式（3）简化为

$$\bar{\sigma}_i-\sigma_i^k=-\left(\frac{\sigma}{X}\right)_i^k(X_i^{k+1}-X_i^k)\qquad(i=1,\ 2,\cdots n)\qquad(4)$$

显然，用此法对静定结构进行设计时，并不能一次叠代就收敛到满应力设计。但是如所周知，用应力比法对静定结构进行设计时仅一次叠代就收敛于满应力设计。灵敏度矩阵法的这一缺陷导源于它采用元件应力而非内力展开为设计变量的泰勒级数的。

2．方法的导出 应力比叠代公式（1）也可写为

$$X_i^{k+1}=\frac{F_i^k}{\bar{\sigma}_i}\qquad(i=1,\ 2,\cdots n)\qquad(5)$$

对轴力元件若取 X_i 为横截面积，则 F_i 为轴力；对弯曲元件若取 X_i 为截面模量，则 F_i 为截面弯矩。

设（X_1，X_2，$\cdots X$）为满应力设计点，相应于第 i 个设计变量的元件内力为 F_i，则

$$X_i=\frac{F_i}{\bar{\sigma}_i}\qquad(i=1,\ 2,\cdots n)\qquad(6)$$

将 F_i 在第 k 次叠代解（X_1^k，X_2^k，$\cdots X_n^k$）处展成泰勒级数，得

$$F_i(X_1,\ X_2,\cdots X)=F_i(X_1^k,X_2^k,\cdots X_n^k)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k(X_j-X_j^k)+\text{高次项}$$

$$(i=1,\ 2,\cdots n)\qquad(7)$$

若只取首项作为 $F_i(X_1,\ X_2,\cdots X)$ 的近似表达式，则得

$$F_i(X_1,\ X_2,\cdots X)\approx F_i(X_1^k,\ X_2^k,\cdots X_n^k)=F_i^k\qquad(i=1,\ 2,\cdots n)\qquad(8)$$

将式（8）代入式（6）后与式（5）比较可知应力比法的叠代公式（5）是通过将 F_i 在第 k 个近似设计点（X_1^k，X_2^k，$\cdots X_n^k$）处展成泰勒级数只取首项而得到的近似叠代公式。

考虑到交感型结构的特性，为加速叠代收敛，我们取式（7）的前两项作为 F_i 的近似表达式，于是得到叠代公式

$$X_i^{k+1}=\frac{1}{\bar{\sigma}_i}\left[F_i^k+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k(X_j^{k+1}-X_j^k)\right]\quad(i=1,\ 2,\cdots n)\qquad(9)$$

将式（9）应用于静定结构时简化为应力比公式（5），因而一次叠代就收敛于满应力设计点，避免了 Gallagher 方法的缺陷。

3．偏导数的近似计算 在 F_i 关于设计变量的泰勒展开近似表达式中增加一阶偏导数项，显然精确了对于内力的估算，可以预期会产生加快收敛进程的作用。但是正与一些作者遇到的情况相似，这里需要计算偏导数$\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k$（$i,\ j=1,\ 2,\cdots n$），每进行一次重分析就

需要重新计算这 n^2 个偏导数。在求出它们后还需要求解一个 n 阶线代数方程组才能得到下一个近似解 X_i^{k+1}。对于一个多设计变量的复杂结构，偏导数只能用数值方法计算，可以看出每次叠代所需的计算量却大大增加了。为此，我们不去具体计算各别的偏导数$\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k$，而对一阶偏导数项

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k(X_j^{k+1}-X_j^k) \tag{10}$$

作一整体估计，用以对叠代的结果给出它的一个简单的近似计算式，希望用这一近似式来代替式（10），既能起到对内力作进一步估算的作用而又不增加多少计算量。

设 X_i^{k-1}，X_i^k，X_i^{k+1} 是用式（9）进行叠代得到的 n 维设计空间中的三个近似设计点。首先我们来考虑第 $k+1$ 个近似设计点 X_i^{k+1} 正好落在连接 X_i^{k-1} 和 X_i^k 两点的 n 维直线之上的这一特殊情形。此时

$$X_j^{k+1}-X_j^k=\alpha^k(X_j^k-X_j^{k-1}) \qquad (j=1,\ 2,\cdots n) \tag{11}$$

式中 α^k 是座标差之间的比例系数。

将第 $k-1$ 个近似设计点 X_i^{k-1} 处的内力 F_i^{k-1} 在 X_i^k 处展成泰勒级数并取到一阶偏导数项，得到

$$F_i^{k-1}-F_i^k=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k(X_j^{k-1}-X_j^k) \qquad (i=1,\ 2,\cdots n) \tag{12}$$

现在容易通过式（11）和式（12）来计算式（10），有

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k(X_j^{k+1}-X_j^k)=\alpha^k\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k(X_j^k-X_j^{k-1})=\alpha^k(F_i^k-F_i^{k-1}) \tag{13}$$

在一般情形中满足式（9）的 X_i^{k+1} 不会正好位于连接 n 维空间中的两点 X_i^{k-1} 和 X_i^k 的直线之上，但我们可以合理地希望连接 X_i^{k-1} 和 X_i^k 的直线方向是一个有利的叠代方向，也就是说若 θ 为连接 X_i^{k-1} 和 X_i^k 的直线方向与连接 X_i^k 和 X_i^{k+1} 的直线方向之间的夹角，则我们期望 $|\cos\theta|$ 接近于 1。这一设想得到数值例证的支持（见数值例子）。因此，在一般情形下 $\alpha^k(F_i^k-F_i^{k-1})$ 将是 $\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j}\right)^k(X_j^{k+1}-X_j^k)$ 的一个好的近似计算式。将式（13）代入式（9），得到

$$X_i^{k+1}=\frac{1}{\sigma_i}[F_i^k+\alpha^k(F_i^k-F_i^{k-1})] \qquad (i=1,\ 2,\cdots n) \tag{14}$$

我们用式（14）代替式（9）得到一个新的满应力设计叠代公式，容易看出若令 $\alpha^k=0$，即得应力比叠代公式（5）。公式（14）考虑了静不定结构中内力随设计变量的改变而变化的这一事实，本质上仍是一种应力比概念。作为应力比法的一种改进方法，它起到了加速收敛的作用，故可称为加速应力比法。

4．α^k 的确定 要用式（14）进行设计还必须有确定 α^k 的公式。我们注意到公式（14）实际上近似于一种牛顿法，因此可以令 $\alpha^0=\alpha'=0$ 即先做两次应力比法，再用加速应力比法进行叠代。当 $k\geqslant 2$ 时，α^k 的确定可以用各种不同的方法，这里依据明显的几何含义提出如下两种确定法：

α^k 的第一种确定法是要求 α^k 满足

$$(\alpha^k)^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i^{k+1}-X_i^k)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i^k-X_i^{k-1})^2}\qquad(k\geqslant 2)\tag{15}$$

α^k 的第二种确定法是令

$$\alpha^k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i^{k+1}-X_i^k}{X_i^k-X_i^{k-1}}\qquad(k\geqslant 2)\tag{16}$$

若假设在叠代过程中下式

$$|\alpha^k(F_i^k-F_i^{k-1})|\leqslant|F_i^k|\qquad(k\geqslant 2,\ i=1,\ 2,\cdots n)\tag{17}$$

成立，又若各元件的拉压允许应力相同，则式（14）可写为

$$X_i^{k+1}=\frac{1}{\bar{\sigma}_i}|F_i^k+\alpha^k(F_i^k-F_i^{k-1})|=\frac{1}{\bar{\sigma}_i}[|F_i^k|+\alpha^k(|F_i^k|-F_i^{k-1}\mathrm{sgn}F_i^k)]\tag{18}$$

其中 $\bar{\sigma}_i$ 是第 i 个元件拉压允许应力的绝对值。$\mathrm{sgn}F_i^k$ 定义为

$$\mathrm{sgn}F_i^k=\begin{cases}1, & F_i^k>0\\ 0, & F_i^k=0\\ -1, & F_i^k<0\end{cases}$$

将式（18）代入式（15）容易得到确定 $\alpha^k(k\geqslant 2)$ 的一个二次代数方程

$$A(\alpha^k)^2+B(\alpha^k)+C=0\tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned}A&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|F_i^k|-|F_i^{k-1}|\mathrm{sgn}F_i^k}{\sigma_i}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}(X_i^k-X_i^{k-1})^2\\ B&=2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\bar{\sigma}_i}(|F_i^k|-F_i^{k-1}\mathrm{sgn}F_i^k)\left(\frac{|F_i^k|}{\sigma_i}-X_i^k\right)\\ C&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|F_i^k|}{\bar{\sigma}_i}-X_i^k\right)^2\end{aligned}\tag{20}$$

在式（19）的两个解中应选取满足

$$\alpha^k\sum_{i=1}^{n}(X_i^{k+1}-X_i^k)(X_i^k-X_i^{k-1})>0\tag{21}$$

的那一个解。如果两个解都满足式（21）则应选取

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i^{k+1}-X_i^k)(X_i^k-X_i^{k-1})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i^{k+1}-X_i^k)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i^k-X_i^{k-1})^2}}\right|\tag{22}$$

较大的一个。式（21）和（22）的几何意义是明显的。

将式（18）代入式（16）可以得到

$$\alpha^k=a/b\qquad(k\geqslant 2)\tag{23}$$

其中

$$a=\sum_{i=1}^{n}\frac{|F_i^k|-\bar{\sigma}_i X_i^k}{\bar{\sigma}_i(X_i^k-X_i^{k-1})}$$
$$b=n-\sum_{i=1}^{n}\frac{|F_i^k|-F_i^{k-1}\mathrm{sgn}F_i^k}{\bar{\sigma}_i(X_i^k-X_i^{k-1})} \qquad (24)$$

我们指出，当用式（19）或式（23）求出的 α^k 不满足关系式（17）时则令 $\alpha^k=0$

三、数值计算例子

1．三杆平面桁架 图 1 为三杆平面桁架，杆长均为 $l=100$ 英寸，弹性模量 $E=10^7$ 磅/英寸^2，允许拉压应力相同为 $\sigma=10^4$ 磅/英寸^2，比重 $\gamma=0.1$ 磅/英寸^3，载荷 p_1，p_2 分别单独作用于结构 $p_1=p_2=10^4$ 磅。

这是一个两个工况的满应力设计例子。初始点取为 $A_1=A_2=A_3=1$ 英寸^2，最早由 Schmidt[3] 研究过。

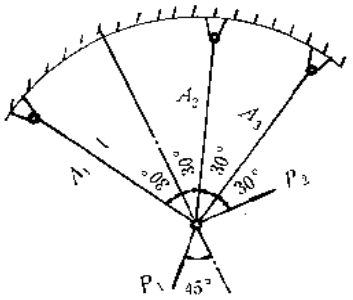


图 1 三杆平面桁架

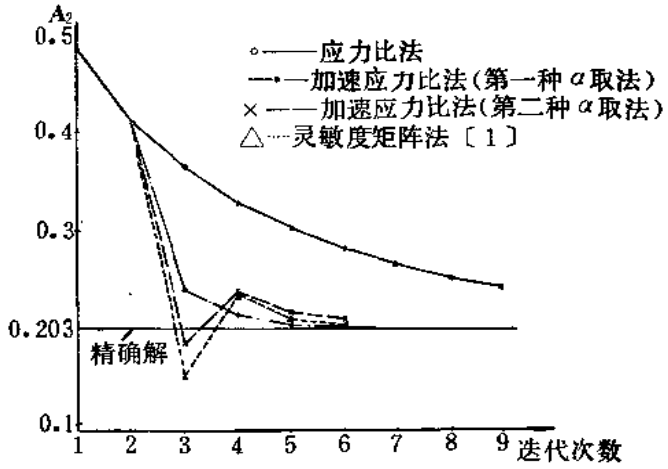


图 2 各种满应力设计法的数值比较

Gallagher[1] 用灵敏度矩阵法也进行过计算。图 2 比较了用应力比法，灵敏度矩阵法及本方法进行设计所得第 2 杆面积 A_2 的叠代收敛情况。可以看出使用本方法与使用灵敏度矩阵法得到几乎相同的收敛速度，然而本方法的计算量却要小得多。

表 1 给出了用应力比法，本方法及 Schmidt 方法进行设计所得之结果的比较。显见用本方法的第一种和第二种 α^k 取法分别在 9 次叠代和 10 次叠代后就收敛到精确解，而用应力比法叠代 30 次后尚未完全收敛到精确解。表中最后一行为用本方法进行叠代时 $|\cos\theta|$ 的平均值。

表 1　　用应力比法，加速应力比法和 Schmidt 方法设计三杆桁架比较

杆面积 \ 方法	应力比	加速应力比 第一种 α^k	加速应力比 第二种 α^k	文献（3）	精确解
A_1	0.537344	0.537149	0.537150	0.538	0.537149
A_2	0.203827	0.202984	0.202992	0.206	0.202984
A_3	0.801343	0.801682	0.801679	0.799	0.801682
重量 W	15.4251	15.4181	15.4182	15.43	15.4181
分析次数	30	9	10		
Aver $\lvert\cos\theta\rvert$		0.965259	0.992959		

2．吊悬臂梁 图3为有吊索的悬臂梁。梁长 $l=10$ 英尺，横截面为边长 x_2 英寸的正方形，吊索截面积为 x_1 英寸^2，梁的弯曲和轴向允许应力相同为 $b=2\times10^4$ 磅/英寸^2，吊索的允许拉应力 $\sigma=12\times10^4$ 磅/英寸^2，梁和吊索的弹性模量 $E=3\times10^7$ 磅/英寸^2，工况1是作用于悬臂端的载荷 $p_1=10^4$ 磅。工况2是作用于梁上的均匀载荷 $p_2=10^4$ 磅/英尺。

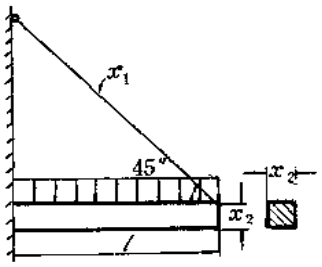


图3 吊悬臂梁

Reinschmidt等[12]曾对该例用不同方法进行过仔细研究。取初始点 $x_1=0.025$ 英寸^2，$x_2=7.0$ 英寸时称为情形 A，取初始点 $x_1=0.05$ 英寸^2，$x_2=7.0$ 英寸时称为情形 B。Reinschmidt等认为用应力比法进行设计时，对情形 A 仅需二次叠代就收敛于满应力设计，对情形 B 收敛是非常缓慢的。事实上，他们关于情形 A 的结论是有问题的，二次叠代后确实已接近于满应力设计点，但若继续叠代即会发现又渐渐离开了它。表2比较了用应力比法，加速应力比法设计情形 A 时逐次叠代的解。对情形 B，我们指出用本方法设计也仅需七次叠代就收敛于同一满应力设计点。并且注意到在情形 A 和 B 时都有 $|\cos\theta|>0.999$。

表2　　用应力比法和加速应力比法设计吊悬臂梁（情形 A）

	叠代次数	应力比法	加速应力比法 第一种 α^k	加速应力比法 第二种 α^k
x_1（英寸） x_2（英寸）	1	0.0206177 6.67666	0.0206177 6.67666	0.0206177 6.67666
x_1 x_2	2	0.0205573 6.67782	0.0205573 6.67782	0.0205573 6.67782
x_1 x_2	3	0.0204958 6.67921	0.0208585 6.67098	0.0211134 6.66522
x_1 x_2	4	0.0204310 6.68068	0.0216955 6.65197	0.0216839 6.65223
x_1 x_2	5	0.0203628 6.68222	0.216474 6.65305	0.216545 6.65289
x_1 x_2 吊索中最大应力（千磅/英寸^2） 梁中最大应力（千磅/英寸^2）	6	0.0202910 6.68384 119.5535 20.0153	0.0216562 6.65285 119.9996 20.0000	0.0216572 6.65283 120.0000 20.0000
x_1 x_2 吊索中最大应力（千磅/英寸^2） 梁中最大应力（千磅/英寸^2）	7	0.0202155 6.68555 119.5287 20.0161	0.0216571 6.65283 120.0000 20.0000	0.0216573 6.65283 120.0000 20.0000

3．十杆平面悬臂桁架 图4为十杆平面桁架。$l=360$ 吋，弹性模量 $E=10^7$ 磅/英寸^2，比重 $\gamma=0.1$ 磅/英寸，单工况载荷 $p=10^5$ 磅，各杆的最小允许尺寸为0.1英寸^2，拉压允许应力相同，问题 A 是各杆的允许应力均为25000磅/英寸^2，问题 B 是除第9杆的允许应力为30000磅/英寸^2 外其它各杆的允许应力为25000磅/英寸^2。

这是一个具有最小尺寸限制的设计问题。Schmit和Farshi[14]，Berke和Khot[15]及

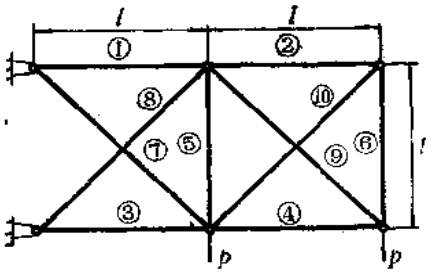


图 4 十杆平面悬臂桁架

Schmit 和 Miura[6] 都曾就这一问题进行过计算。文献〔5〕和〔6〕都指出，问题 A 和 B 的满应力设计解就是最小重量解。

表 3 列举了用各种方法对十杆桁架进行设计得到的最小重量和分析次数。显然，加速应力比法的收敛速度大大超过了应力比法，也比其它作者提出的方法收敛要快得多。

表 3　用各种方法设计十杆平面桁架得到的最小重量和分析次数

问题 \ 方法		应力比	MIH 文献〔4〕	FSD 文献〔5〕	ACCESS1 NEWSUMT 文献〔6〕	加速应力比 第一种 α^k	加速应力比 第二种 α^k
A	重量（磅）	1593.18	1593.18	1593.18	1593.23	1593.18	1593.18
	分析次数	18	21	16	16	11	10
B	重量（磅）	1545.13	1545.21	1545.13	1545.17	1545.13	1545.13
	分析次数	30	19	23	16	12	11

参　考　文　献

〔1〕Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C., Optimum structural design theory and applications (1973)。

〔2〕Reinschmidt, K. F., Cornell, C.A. and Brotchie, J.F., *J.Struct. Div*, ASCE, **92**, ST6(1966), 281—318.

〔3〕Schmidt, L.C. *Australian Journal of Applied Science*, **9**, 4(1958),337-348。

〔4〕Schmit, L.A. and Farshi, B., *AIAAJ.*, **12**, 5(1974), 692—699.

〔5〕Berke, L. and Khot, N.S., AGARD-LS-70 (1974), 1—29.

〔6〕Schmit, L.A. and Miura, H., NASA, CR-2552 (1976).

不同步态下人体股骨的有限元分析

王 以 进
（上海科技大学）

人体股骨的物理性能参数

人体骨骼不仅是运动器官的力学支柱，而且也是一切器官和组织的力学支柱，其中人体股骨起着十分重要的作用。股骨是全身最粗最长的长骨，上方有股骨头，它和髋臼形成髋关节。股骨头的外下方有细长的股骨颈，颈体交界内外侧有大小转子，下方有内外侧髁，它和胫骨上端构成膝关节，其结构如图1所示。

股骨与其他的骨骼一样，由骨质构成，骨质的表层特别致密而坚硬称为骨密质，内部由呈蜂窝状相互交错的骨小梁构成，称为骨松质。股骨的骨密质在骨干部分很厚并向两端延伸变薄，骨松质主要充填在两端。骨的一层层组织构造是由骨细胞、胶原纤维和基质组成，基质含有钙盐和磷酸盐成分。因而，严格说来它是正交各向异性体。

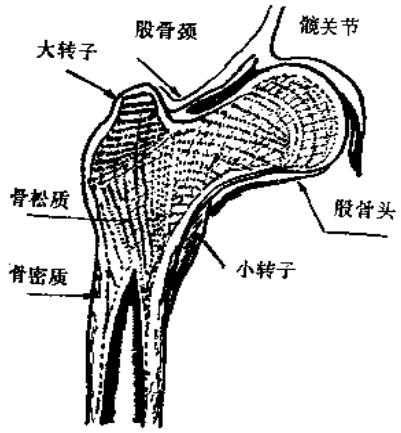


图1 股骨头部结构



图2 股骨试验

弹性模数的不均匀性是人体股骨的特性之一。它随着人类的年龄、种族、地区、干燥度而异。近年来世界各国进行过许多研究[1-3]，得到了各种不同的数据。综合这些结果，对干燥骨的骨密质部分E为$0.623\sim1.372\times10^3$ kg/mm^2，$\nu=0.29$，G为$0.246\sim0.669\times10^3$kg/mm^2，而骨松质部分E为$0.03\sim0.034\times10^3$ kg/mm^2，$\nu=0.29$。G为$0.01\sim0.014$ kg/mm^2。对本国人来说，这些数据不能沿用，根据我们的试验(图2)，骨密质部分取$E=1.605\times10^3$ kg/mm^2，$\nu=0.29$，而骨松质部分取$E=0.305\times10^2$kg/mm^2，$\nu=0.29$为宜。

股骨的力学计算模型与载荷

人体股骨最易发生骨折的地方是股骨颈，此处应力状态变化剧烈。因而，医疗上需要弄清它的断裂机制，以便合理的提出治疗方案（諸如安装人工髋关节）。此处力学模型简化如图 3 。

对股骨的应力分析，必须给出正确的载荷。股骨的受力状态涉及到人体的运动和姿态，情况异常复杂。J.Morrison 和 R.McLeish[7-8] 曾研究过类似的问题。人体的运动状态一般分为屈、伸、外展、内收、旋后与旋前。参与这种运动状态的肌肉与筋膜是股骨的主要载荷。它们是髂腰肌、股四头肌、臀大肌等 16 种肌腱。我们根据人体运动力学分析，重心的计算和试验统计得到股骨上肌肉群的合力来进行计算。

1．静止站立姿态

单足站立静止状态时，参与股骨应力分布的肌肉，主要有臀大肌、臀中肌以及胫骨对股骨的肌肉，于是根据计算得到髋关节力 P，肌群合力 F 和胫力 R，如图 4 、 5 所示。图上以女性 30 岁（体重 49kg）为例，得到的单腿载荷 $P=127.12$kg，$F=73.94$kg和 $R=11.98$kg，其中 $\varphi=30°$，$\theta=24.5°$。

在模拟试验时的试验负载取 $P=100\sim400$kg，$\Phi=15°$ 时的静止站立姿态。

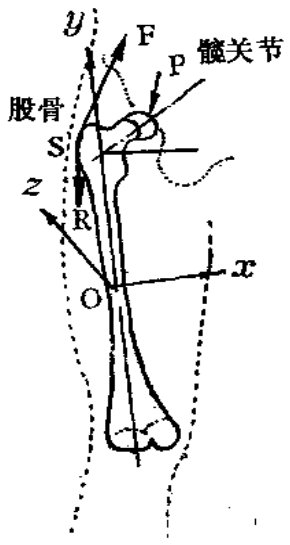


图 3 力学模型

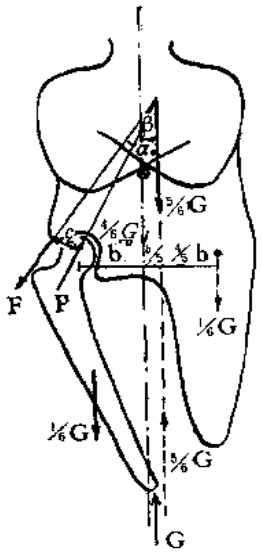


图 4 力的平衡计算

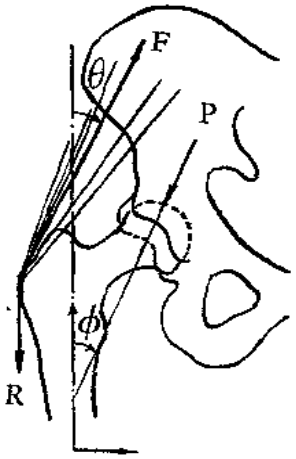


图 5 受力分析与计算

2．运动状态

人体的运动状态最基本的一种是步行状态，它是自然周期性的不同步相的位移运动。一般步态由后蹲、后步、前步、前蹲和足平五个基本阶段组成的。一条腿的运动时相如图 6 和图 7 ，此时一般以每分钟频率 190～200 步计算。步行时身体总重心的轨迹反映了人体与支点相互作用的动力学状态。在步行时，全身质量的位置在单腿支撑的垂直瞬间最高。于是根据步相分析计算得到的股骨受力状态如表 1 。

表 1

步　态		1	2	3	4	5
臀大肌	总　力	22.3	0	0	0	0
	F_{1x}	−1.07	0	0	0	0
	F_{1y}	22	0	0	0	0
	F_{1z}	3.78	0	0	0	0
髂腰肌	总　力	0	17.4	22.3	23.2	16.8
	F_{2x}	0	11.1	14.4	14.4	9.8
	F_{2y}	0	13	16.7	17.9	13.5
	F_{2z}	0	2.61	3.28	2.18	2.04
长屈肌	总　力	0	22.1	10.6	0	1.59
	F_{3x}	0	0	0	0	0
	F_{3y}	0	−20.4	−10.6	0	−1.59
	F_{3z}	0	0	0	0	0
外展肌	总　力	11.8	33	38.73	33	0
	F_{4x}	8.08	23.6	28.1	21.6	0
	F_{4y}	6.88	19.3	23.7	24.3	0
	F_{4z}	5.12	12.4	11.8	−5.72	0
外伸展肌	总　力	0	0	0	0	3.18
	F_{5x}	0	0	0	0	2.18
	F_{5y}	0	0	0	0	1.68
	F_{5z}	0	0	0	0	−1.69
髋关节力	总　力	49.5	105.8	102.5	102.6	38.2
	P_x	−36	−46.5	−47.3	−41	−11.7
	P_y	−33.3	−93.4	−10.5	−95.5	−36.4
	P_z	5.13	−13.8	−10.9	27.6	1.17
胫　力	总　力	3.53	2.43	2.86	2.43	0
	R_x	0	0	0	0	0
	R_y	−3.53	−2.43	−2.86	−2.433	0
	R_z	0	0	0	0	0

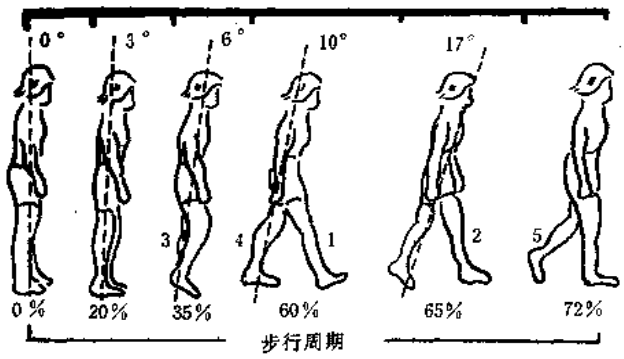


图 6 步相图

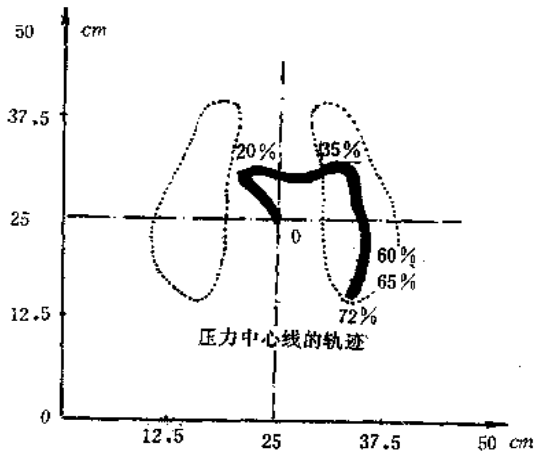


图 7 步态时压力中心线的变化

有 限 元 分 析

人体股骨的有限元分析模型见图 8 和图 9；采用二维、三维应力分析方法。

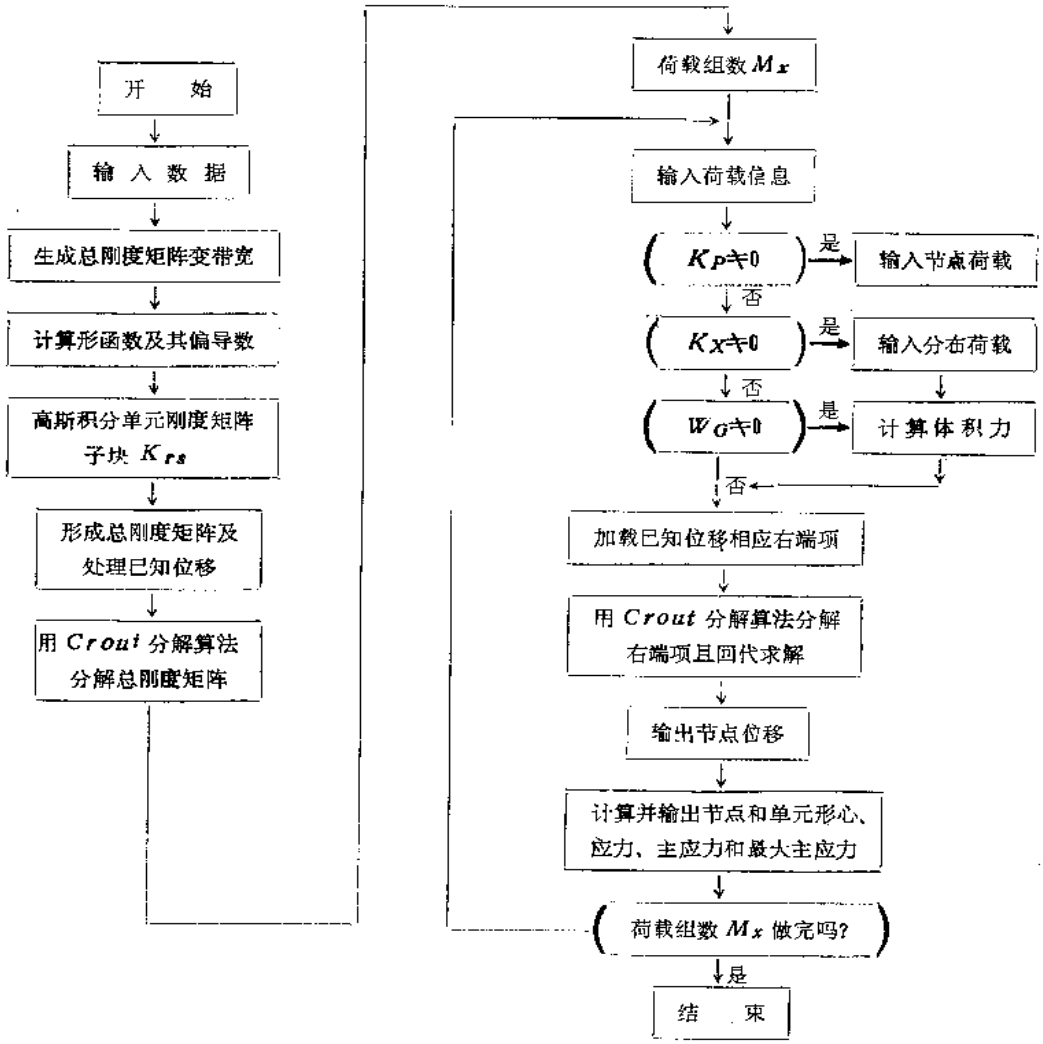
1．网格划分

网格划分的原则是依据临床统计，在股骨颈处应力梯度最大，故网格密度大。人体股骨总共分为 58 个单元，211 个节点，股骨颈处的单元约占总数的一半，其下端为固定。

2．单元形式

本文二维应力分析采用八节点曲四边形等参单元，如图 10，三维应力分析采用 20 节点曲四边形等参元。它们具有很高的分析精度，可以分析计算任意组荷载（节点荷载、分布荷载和体积力）。整个结构的单元分割可按材料的弹性模数、泊松比和不同厚度、密度等参数的不同数组。这里采用的应力场的主要计算公式根据弹性力学中的有限单元法，据此可以编写应力场计算程序。

3．计算程序框图



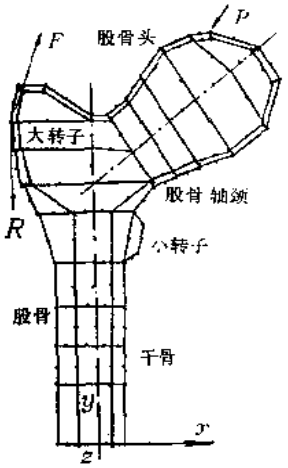


图 8 二维有限元网格

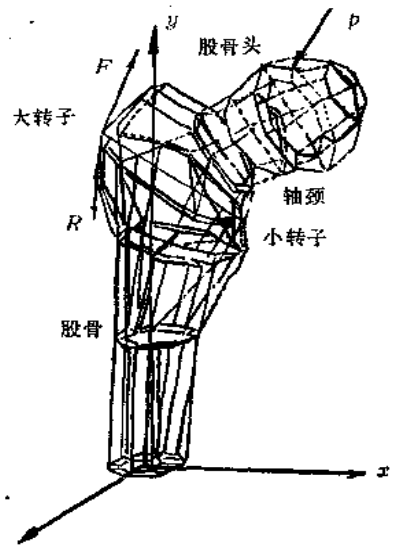


图 9 三维有限元网格

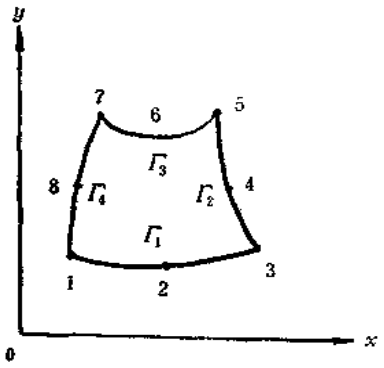


图 10 八节点曲四边形单元

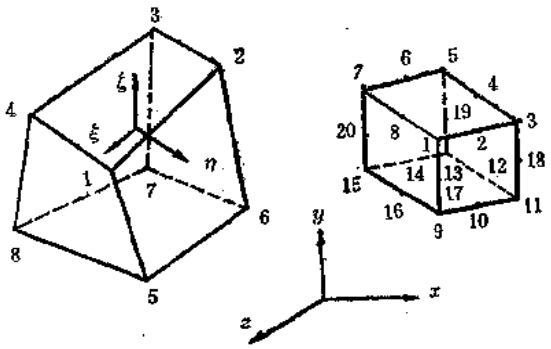


图 11 六面体单元

股骨计算的临床意义

从股骨的受力状态十分明显地看到，骨折容易发生在轴颈处。根据临床统计股骨的断裂情况，考察 134 例骨折的情况，股骨颈头下部、中部、颈底处有 85 例，占 63.5%，其余在大小转子薄弱环节处占 36.5%，这两处应力为最高，强度最差。从力学观点分析，由于负重作用，使类似悬臂梁的根部达到强度极限而断裂，虽然断裂的分布由于情况不同，受到各种不同因素的影响而有所差异，但是它符合于力学上的规律性。

根据临床观察大部分的股骨颈到大小转子线处的骨折病例，骨折移位的最终位置趋向往往是由大转子到小转子的倾斜线，下骨密质向上“嵌入”近碎片，而近碎片内旋，部分骨折面贴在近碎片股骨颈的内侧，这同力学分析中主应力迹线分布相似。

力学上的计算与临床观察，对医疗上有积极意义。股骨颈或大小转子间骨折常常采用螺钉内固定时，一般用强力螺帽固定。当以股骨突或股骨距作为支点时，螺钉的稳定性大为增加，力矩减小，从而降低了螺钉承载能力而不易松动或折断，明显地提高了疗效。

股骨的应力分析结果与结论

矫形学科、人工髋关节、移植等均需要股骨颈的全面力学分析。根据上面有限元计算得到的结果，股骨髋关节在静负载状态、步行状态单腿支撑和不同步态下的三种应力场和位移场的分析如图 12 至图 14 所示。

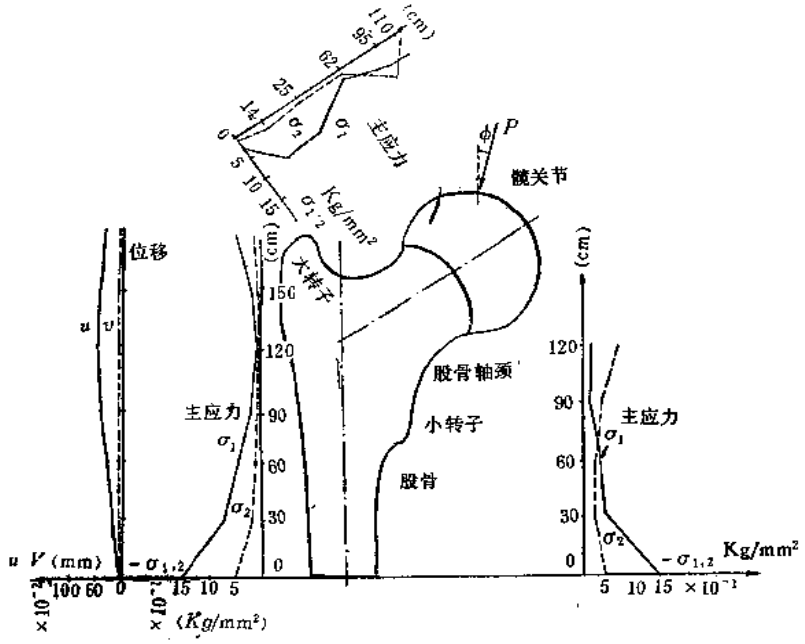


图 12　静载下应力、位移场分布

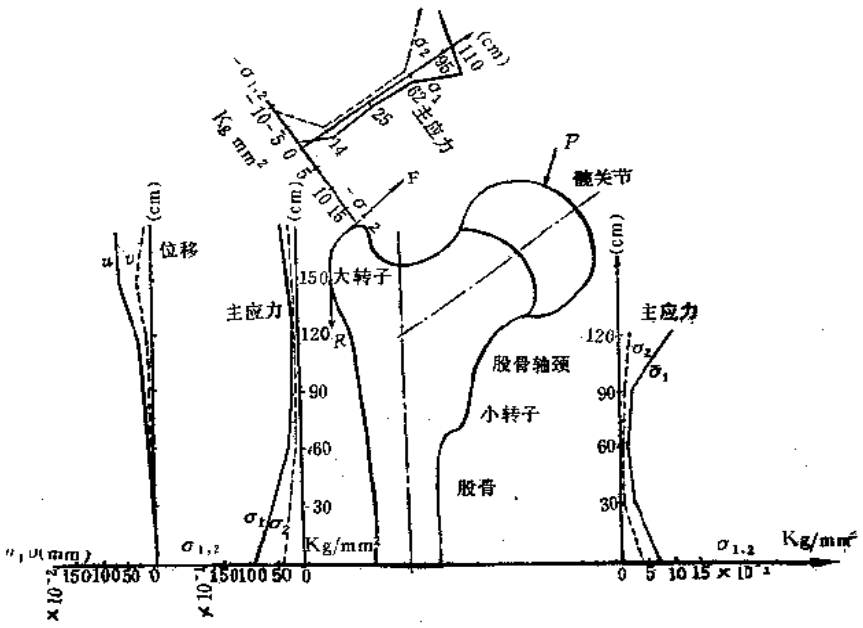


图 13　缓慢步行状态

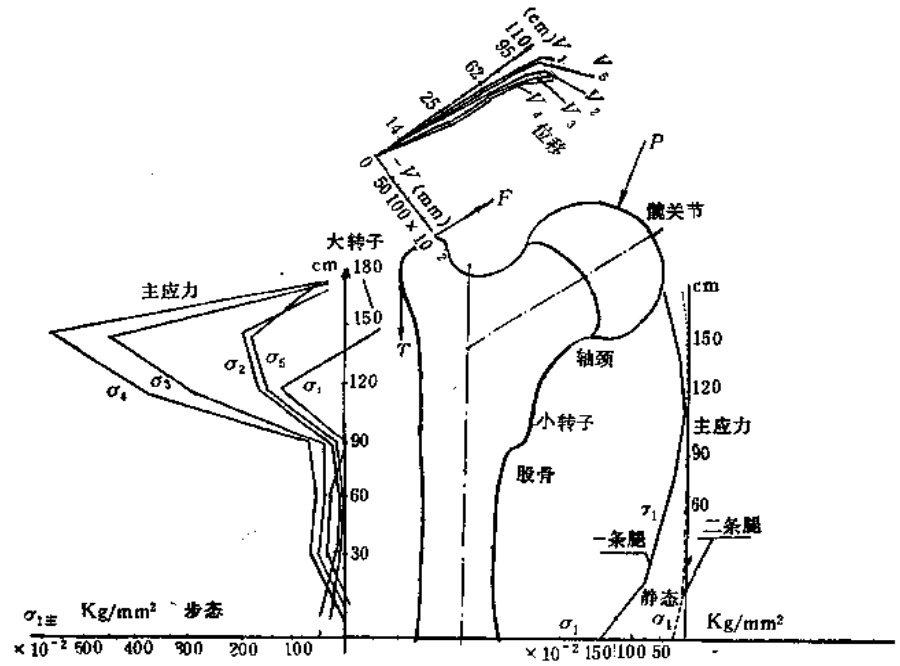


图 14　不同步态下的结果

综上所述，人体股骨在静止状态以及不同步态下有这样一些结论：

1．人体股骨应力和位移状态在静态时最小，动态步行时较大，其在不同步相时，后蹲为最大。达到临界状态时，股骨颈的最大拉伸主应力为 3.35kg/mm²，最大压缩主应力为 12.44kg/mm²，法向压应力为 16.36kg/mm²。这就证明了轴颈是处于最大的应力状态，是人体的薄弱环节，这与临床骨折统计相一致的。这些结果对人造材料的选用有一定的参考价值。例如，选取多孔型生物陶瓷髋关节的材料抗拉强度为 22～30kg/mm²，抗压强度 250～300kg/mm²，抗弯强度为 25kg/mm² 以上为好。

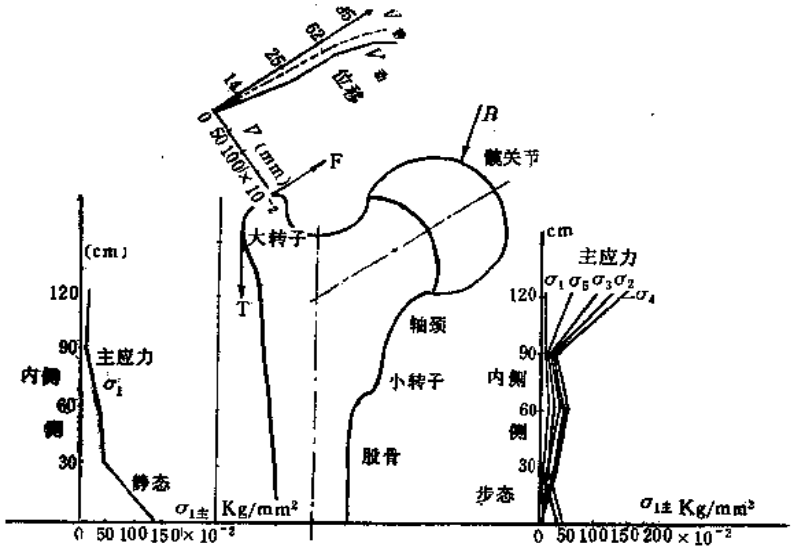


图 15　静态与步行应力场比较

2．可以看到人体站立时的应力状态和运动状态两者有较大的区别，如图 15 和图 16 所示，后者较大。主要是由于运动时引起的惯性力所致，两者应力相差 4 倍多。而且，一条腿支撑比两条腿支撑应力大六倍左右。

3．计算表明人体股骨的负载主要是由骨密质承担，骨松质中的应力较小，它只占骨密质的 4～10%。但是，骨小梁的分布同力学规律相一致，受力越大，骨小梁分布越密，如图 17。

4．由股骨的应力分布曲线的形状和数值来看，股骨载荷先通过髋关节而后到达股骨本体上，直至膝关节。而股骨的内

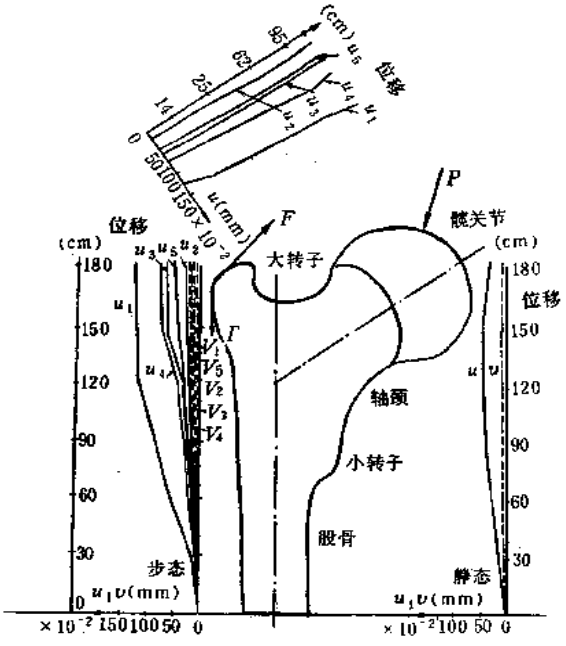


图 16　静态与步行位移场比较

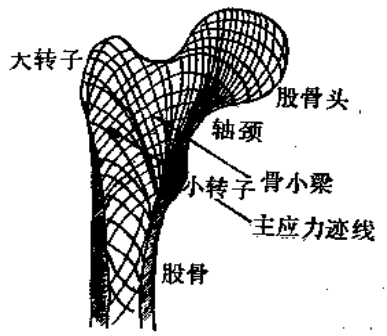


图 17　骨小梁排列与主应力迹线

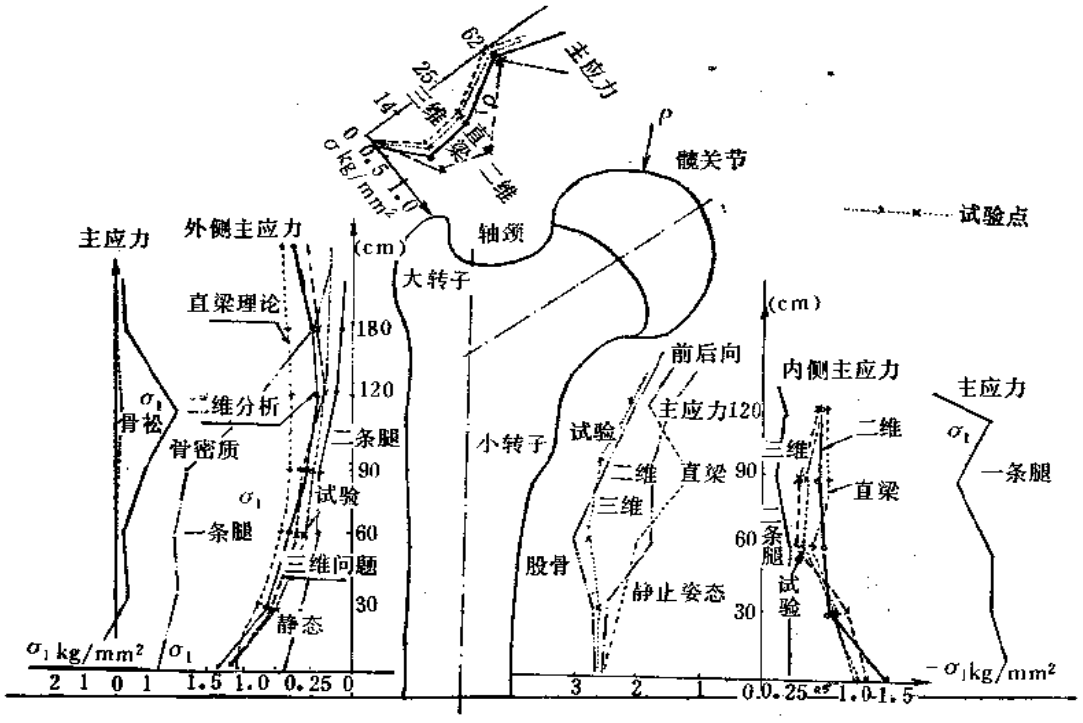


图 18　结果比较

侧承载力比外侧来得强，这与骨小梁排列相吻合。这些应力分布状态符合于人体对股骨的功能要求。

5．计算方法不同，其结果存在着差异。直梁理论精度较低，三维比二维结果好，而这些结果与试验相比较十分接近。

从计算、试验直至临床分析，曾得到上海二医各院的大力支持与密切协作，过邦辅、程心恒教授给予了指导，仅表示衷心的感谢。

参 考 文 献

〔1〕Evans, F. G., Biomechanical Studies of the Musculoskeletal System (1961).

〔2〕Cromer, A. H., Physics for The Life Sciences (1977).

〔3〕Currey, J. D., *Clin. Orthop. Rel. Res.*, 73 (1970), 210—231.

〔4〕Yamada, H., Strength of Biological Materials., Williams & wilkins, Baltimore (1970).

〔5〕Swanson, S. A., Advances in Biomedical Engineering, Academic Press, New York (1971).

〔6〕Малмейстер, А.К., Проблемы Прочности, 3 (1971), 40—44.

〔7〕Morrison, J. B., Ph. D. Thesis, Univ. of Strathelyde (1967).

〔8〕McLeish, R. D., *J. Biomech.*, 3 (1970), 191—209.

〔9〕王以进，电子技术，2 (1978), 1—46.

〔10〕王以进，上海科技大学学报，2 (1978), 83—100.

〔11〕王以进，上海科技大学学报，1 (1979), 65—79.

〔12〕王以进编，Sc. Pap. on Frac. Mech., V. Ⅰ, V. Ⅱ，上海光华出版社 (1979、1980).

关于任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法
——(Ⅰ)解析方法

欧阳鹗
(复旦大学数学系)

一、前　言

在实际的断裂分析中，经常遇到边界缺陷（缺口或裂纹）的重要情况，此时缺陷一般成群地出现在边界上，且呈任意分布，并在物体使用过程中发展为失稳扩展的裂纹，导致物体破坏。为了正确估计这类具有边界缺陷的物体的断裂特性，就要求给出边界缺口或裂纹群问题的数学解答。

在文献〔1〕中，M. Isida 曾作出平面内部具有任意分布的缺口或裂纹群问题的解，可惜他不能处理远为复杂的边界缺陷问题，该文中缺陷被理想化为椭圆形状的空洞或裂纹。

本文在拓广 Muskhlishvili 方法的基础上，应用复变函数论方法，作出求解任意边界缺口或裂纹群问题的解法。

值得指出，本文的解析方法具有很大的广泛性。它可用于求出缺陷表面具有某些光滑载荷分布的问题的解。

二、问题的陈述与简化

假设所考虑的弹性体为带有一些半椭圆缺口或裂纹 C_j^- 的下半平面区域 D_z^-，其在实轴上的边界为 γ。设在 $|x|=+\infty$ 处物体受均匀拉应力 $\sigma_{x\infty}$。在物体边界 $\gamma+\sum_{j=1}^{N} C_j^-$ 上不受力的作用。

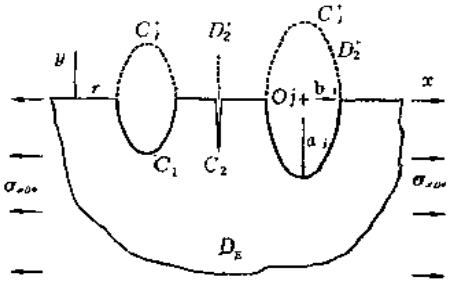


图1 边界缺口或裂纹解

根据文献〔2〕，区域 D_z^- 中重调和方程的解可用两个解析函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 来表示，且应力分量 σ_x，σ_y，τ_{xy} 和位移 u，v 可用 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 表示如下：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x+\sigma_y=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}]=4\mathrm{Re}[\varphi'(z)]\\&\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]\\&2\mu(u+iv)=k\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\end{aligned}\right\}(1)$$

$$\mu=E/2(1+\nu)$$

$$k=\begin{cases}3-4\nu, & \text{(平面应变)}\\ (3-\nu)/(1+\nu), & \text{(平面应力)}\end{cases}$$

其中 E 为弹性模数，ν 为泊松比。

设已知边界力 $f(s)=f_1(s)+if_2(s)$（s 为弧长），则 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 满足的边界条件为

$$f(s)=(\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)})\Big|_{z(0)}^{z(s)} \qquad (2)$$

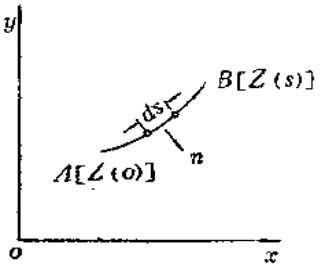


图 2

若计算 $s=0$ 到 s 的边界段上的合力矩 $M_0(s)$，则有

$$M_0(s)=\mathrm{Re}[\chi(z)-z\psi(z)-z\bar{z}\varphi'(z)]\Big|_{z(0)}^{z(s)} \qquad (3)$$

其中

$$\chi'(z)=\psi(z) \qquad (4)$$

为了进一步简化问题，我们需要下面的延拓定理：

定理 设 D_z^- 为下半平面的一个区域，D_z^- 的某段边界 γ 在实轴上，设函数 $g(z)$、$h(z)$ 解析于 D_z^-，且在 γ 上满足条件 $g(z)=\overline{h(z)}$，则在 D_z^- 关于实轴的镜象区 D_z^+ 上定义

$$g(z)=\overline{h(\bar{z})}, \quad z\in D_z^+ \qquad (5)$$

时，$g(z)$ 在 $D_z^-+\gamma+D_z^-$ 上是解析的。

将该结果应用于我们的问题时，从实轴上边界段 γ 为自由的条件 $f(s)=0$ 出发，定义

$$\varphi(z)=z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}, \quad z\in D_z^+ \qquad (6)$$

其中 $\overline{f}(z)=\overline{f(\bar{z})}$。由上述定理可知，$\varphi(z)$ 在 $D_z^-+\gamma+D_z^+$ 内是解析的。一旦在 $D_z^-+\gamma+D_z^+$ 内求得了 $\varphi(z)$，则另一应力函数 $\psi(z)$ 由下式可得

$$\psi(z)=-\bar{\varphi}(z)-z\varphi'(z), \quad z\in D_z^- \qquad (7)$$

问题也就获得了解决。在这里，为了满足定理中的条件，我们要对 $\varphi(z)$ 作某种要求，例如

$$|\varphi'(z)|<A|z-x|^{-\alpha}, \qquad 0\leqslant\alpha<1 \qquad (8)$$

对多数实际问题，这种要求总是能够满足的。

这样，问题便简化为求一个在区域 $D=D_z^-+\gamma+D_z^+$ 内解析函数 $\varphi(z)$，它在边界 $C_j^-(j=1,2,\cdots\cdots,N)$ 上，满足力的边界条件

$$N-iT=\frac{1}{2}\{(\sigma_y+\sigma_x-e^{2i\alpha}[(\sigma_y-\sigma_x)+2i\tau_{xy}]\}, \quad z\in C_j^- \qquad (9)$$

其中 N，T 为边界上的法向力和切向力。α 的意义见图 3。

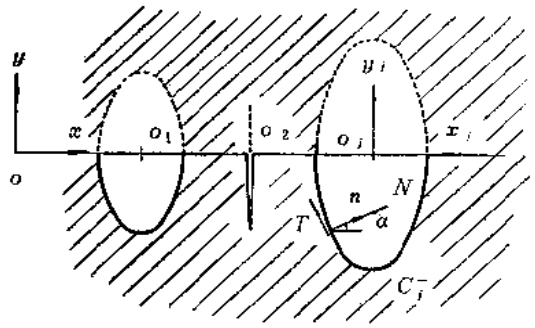


图 3

对于自由边界 $N-iT=0$，以式（1）代入式（9）得边界条件

$$\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}-e^{2i\alpha}[(\bar{z}-z)\varphi''(z)-\varphi'(z)-\overline{\varphi}'(z)]=0, \quad z\in C_j^- \qquad (10)$$

此外，$\varphi(z)$ 还应满足无穷远处的边界条件

$$\sigma_x|_{x=\pm\infty}=\sigma_{x\infty} \qquad (11)$$

三、问题的解

1．解的基本形式

除整体座标系 $z=x+iy$ 之外，我们还引进以 O_j 为原点，平行于 x，y 轴的局部座标系 $z_j=x_j+iy_j$，将缺陷从左到右进行编号，若以 γ_{ij} 表示线段 $\overline{O_iO_j}$ 之长，γ_j 为 $\overline{OO_j}$ 之长，容易看出

$$\left.\begin{aligned} z_k&=z_j-r_{jk}, \quad j<k \\ z_k&=z_j+r_{jk}, \quad j>k \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$z=z_j+r_j \tag{13}$$

在此，为方便计，已将座标 $z=x+iy$ 的原点取在諸 O_j（$j=1$，2，……，N）的左边。又为了讨论的普遍性，我们认为以上的 z，z_j 等座标均已被某一特征长度 d 除过，因而是无量纲的，同样对于 $\varphi(z)$ 也假设已进行了无量纲化，即设 $\varphi(z)$ 已被特征量 $\sigma_{x\infty}L$ 除过。

我们假设 $\varphi(z)$ 具有局部 Laurent 负幂展开级数之和的形式

$$\varphi(z)=\varphi_0(z)+\sum_{K=1}^{N}\varphi_k(z_k) \tag{14}$$

其中

$$\varphi_k(z_k)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n,k}z_k^{-(n+1)} \tag{15}$$

而函数 $\varphi_0(z)$ 由无穷远处的边界条件（11）决定。

事实上，从式（1）可得

$$\sigma_y+i\tau_{xy}=\overline{\varphi'(z)}-\overline{\varphi}'(z)+(\bar{z}-z)\varphi''(z) \tag{16}$$

由于 $|z|\to+\infty$ 时，$\sigma_y+i\tau_{xy}\to 0$，$\varphi''(z)\to\varphi_0''(z)$，可得

$$\varphi_0''(z)=0$$

即

$$\varphi_0(z)=Az+B \tag{17}$$

为简单计，设 $\varphi(0)=\mathrm{Im}\varphi'(0)=0$，以式（17）代入

$$\sigma_{x\infty}=(\sigma_x-i\tau_{xy})_{|z|\to\infty}=[2\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}+\overline{\varphi}'(z)+2iy\varphi''(z)]_{|z|\to+\infty} \tag{18}$$

即得

$$A=\mathrm{Re}A=\sigma_{x\infty}/4 \tag{19}$$

故得到

$$\varphi_0(z)=\frac{\sigma_{x\infty}}{4}z, \quad \psi_0(z)=-\frac{\sigma_{x\infty}}{2}z \tag{20}$$

在式（20）中以 1 代 $\sigma_{x\infty}$，即得无量纲化的式子。

2．在物理及参数平面上的展开

决定了 $\varphi_0(z)$ 之后，剩下的问题就是根据缺陷表面为自由的条件决定展开式的诸系数 F_{nk}（$n=0$，1，$2\cdots\cdots$；$k=1$，2，……，N）。

为此，我们在各缺陷 $C_j^-+C_j^+$（$j=1$，2，……，N）的周围进行局部的 Laurent 展开，得

到 $\varphi(z)$ 的下述表示式

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\bar{}}(F_{n,j}z_j^{-(n+1)}+M_{n,j}z_j^{n+1}) \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned}
&F_{n,j}=F_{n,j}^{(1)}+iF_{n,j}^{(2)}\\
&M_{n,j}=M_{n,j}^{(1)}+iM_{n,j}^{(2)}\\
&M_{n,j}^{(1)}=(M_{0,0}^{(1)})\Delta_n^0+\sum_{p=0}^{\bar{}}\sum_{k\neq j}^{N}(e_{n,j}^{p,k}F_{p,k}^{(1)}-f_{n,j}^{p,k}F_{p,k}^{(2)})\\
&M_{n,j}^{(2)}=\sum_{p=0}^{\bar{}}\sum_{k\neq j}^{N}(f_{n,j}^{p,k}F_{p,k}^{(1)}+e_{n,j}^{p,k}F_{p,k}^{(2)})\\
&M_{0,0}^{(1)}=\frac{1}{4}\\
&\Delta_n^0=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}\\
&\begin{Bmatrix}e_{n,j}^{p,k}\\ f_{n,j}^{p,k}\end{Bmatrix}=\frac{(-1)^{p+1}}{(r_{jk})^{n+p+2}}\binom{n+p+1}{p}\binom{\cos}{\sin}\{(n+1)\beta_{jk}+(p+1)\beta_{jk}\}
\end{aligned} \tag{22}$$

其中 β_{jk} 为 $\overrightarrow{O_jO_k}$ 与 ox 轴的夹角，当 $j<k$ 时，$\beta_{jk}=0$；当 $j>k$ 时，$\beta_{jk}=\pi$。

为了表示 C_j^- 上 $\varphi(z)$ 所满足的边界条件（10），我们通过共形映照将 $C_j^-+C_j^+$ 的外部映照到单位圆 $|\zeta|=1$ 的外部，映照函数为

$$\left.\begin{aligned}
&z_j=\omega(\zeta)=\frac{l_j}{2}\left(R_j\zeta-\frac{1}{R_j\zeta}\right)\\
&l_j=\sqrt{a_j^2-b_j^2}/d,\quad \varepsilon_j=b_j/a_j\\
&R_j=\left(\frac{1+\varepsilon_j}{1-\varepsilon_j}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

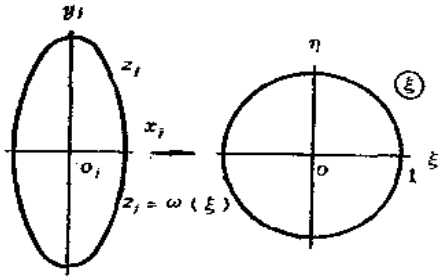


图 4

对于裂纹，$\varepsilon_j=0$，$R_j=1$。

设 $\varphi'(z)$ 在参数平面 $|\zeta|=1$ 附近的展开为

$$\Phi(\zeta)=\varphi'(z)=\sum_{m=0}^{\bar{}}(\alpha_{m,j}\zeta^m+\beta_{m,j}\zeta^{-m}) \tag{24}$$

利用关系

$$\left.\begin{aligned}
&R_ji\zeta=\frac{iz_j}{l_j}\left\{1+\left[1-\left(\frac{l_j}{iz_j}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\\
&(R_ji\zeta)^{-1}=\frac{iz_j}{l_j}\left\{1-\left[1-\left(\frac{l_j}{iz_j}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

$$(iz_j)^{2p}=\left(\frac{l_j}{2}\right)^{2p}\left[\binom{2p}{p}+\sum_{m=1}^{p}\binom{2p}{p-m}\{(R_ji\zeta)^{2m}+(R_ji\zeta)^{-2m}\}\right] \tag{26}$$

$$(iz_j)^{2p+1}=\left(\frac{l_j}{2}\right)^{2p+1}\sum_{m=0}^{p}\binom{2p+1}{p-m}\{(R_j i\zeta)^{2m+1}+(R_j i\zeta)^{-(2m+1)}\}$$

我们可得

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{2m+1,j}&=(-1)^{m-p}R_j^{2m+1}\sum_{p=m}^{\infty}(2p+2)\left(\frac{l_j}{2}\right)^{2p+1}\binom{2p+1}{p-m}M_{2p+1,j}\\ \alpha_{2m+2,j}&=(-1)^{m-p+1}R_j^{2m+2}\sum_{p=m+1}^{\infty}(2p+1)\left(\frac{l_j}{2}\right)^{2p}\binom{p}{p-m-1}M_{2p,j}\end{aligned}\right\}\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)\tag{27}$$

且

$$\begin{aligned}\varphi'(z)=\Phi(\zeta)=&\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)M_{n,j}z_j^n+\sum_{m=0}^{\infty}\beta_{m,j}\zeta^{-m}\\&-\sum_{p=0}^{\infty}\left[(2p+1)\left(\frac{l_j}{2i}\right)^{2p}M_{2p,j}\sum_{m=0}^{p-1}\binom{2p}{p-m-1}(R_j i\zeta)^{-(2m+2)}\right.\\&\left.+(2p+2)\left(\frac{l_j}{2i}\right)^{2p+1}M_{2p+1,j}\sum_{m=0}^{p}\binom{2p+1}{p-m}(R_j i\zeta)^{-(2m+1)}\right]\end{aligned}\tag{28}$$

但是我们有下列关系[8]：

$$\left.\begin{aligned}(R_j i\zeta)^{-2m}&=\sum_{n=m}^{\infty}A_{n-m,m}\left(\frac{l_j}{iz_j}\right)^{2n}\\(R_j i\zeta)^{-(2m+1)}&=\sum_{n=m}^{\infty}A_{n-m,m+1}\left(\frac{l_j}{iz_j}\right)^{2n+1}\\A_{n-m,m}&=\frac{m}{2^{2n}n}\binom{n}{n-m}\\A_{n-m,m+1}&=\frac{2m+1}{2^{2n+1}(2n+1)}\binom{2n+1}{n-m}\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

以式（29）代入式（28），比较 z_j 的负幂项系数得

$$\left.\begin{aligned}F_{2n,j}=&(2n+1)^{-1}\left\{\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)2^{-2p}\left(\frac{l_j}{2}\right)^{-2p+2n+2}M_{2p,j}\sum_{m=0}^{p-1,n}\binom{2p}{p-m-1}A_{n-m-1,2m+2}\right.\\&\left.+\sum_{m=0}^{n+1}R_j^{2m}(-1)^{m+n+1}l_j^{2n+2}A_{n-m+1,m}\beta_{2m,j}\right\}\\F_{2n+1,j}=&(2n+2)^{-1}\left\{\sum_{p=0}^{\infty}(2p+2)2^{-2p+1}\left(\frac{l_j}{i}\right)^{2p+2n+2}M_{2p+1,j}\right.\\&\left.\times\sum_{m=0}^{p,n+1}\binom{2p+1}{p-m}A_{n-m+1,m+1}+\sum_{m=0}^{n+1}R_j^{2m+1}(-1)^{m+n-1}l_j^{2n+3}A_{n-m+1,m+1}\beta_{2m+1,j}\right\}\end{aligned}\right\}\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)\tag{30}$$

这样一来，通过在物理平面和参数平面上的局部展开，我们引进了 $4N$ 组复参数列 $F_{n,j}$，$M_{n,j}$，$\alpha_{n,j}$，$\beta_{j,n}(n=0,1,2,\cdots\cdots;\ j=1,\ 2,\cdots\cdots,N)$，并有关系式（22），(27)和(30）将它们互相联系。为了确定这些参数，我们还要补充缺陷表面为自由的条件。

3．缺陷表面自由的条件

在物理平面上，这一条件已写为式（10），即

$$\varphi'(z_j)+\overline{\varphi'(z_j)}-e^{2i\alpha}[(\bar{z}_j-z_j)\varphi''(z_j)-\varphi'(z_j)-\bar{\psi}'(z_j)]=0,\quad z_j\in C_j \tag{31}$$

将此条件转到参数平面的缺陷边界 $\zeta=\sigma=e^{i\theta}(\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi)$ 之上，注意到关系

$$e^{2i\alpha}=\frac{\sigma\omega'(\sigma)}{\overline{\sigma\omega'(\sigma)}}=\frac{R_j\sigma^2+R_j^{-1}}{R_j+R_j^{-1}\sigma^2} \tag{32}$$

又 $\varphi'(z_j)=\Phi(\sigma)$，$\varphi''(z_j)=\Phi'(\sigma)/\omega'(\sigma)$，式（31）变为

$$\begin{aligned}W_1^j(\sigma)\equiv&(R_j+R_j^{-1}\sigma^2)(\Phi(\sigma)+\overline{\Phi(\sigma)})-\{(R_j+R_j^{-1})(\sigma-\sigma^2)\Phi'(\sigma)\\&+(R_j\sigma^2+R_j^{-1})(\Phi(\sigma)+\overline{\Phi(\bar{\sigma})})\}=0,\quad(\sigma=e^{i\theta},\ \pi\leqslant\theta\leqslant2\pi)\end{aligned} \tag{33}$$

我们有

$$\Phi(\sigma)=\varphi'(z_j)=\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha_{m,j}\sigma^m+\beta_{m,j}\sigma^{-m}) \tag{34}$$

作函数

$$W(\sigma)=\begin{cases}\Phi(\sigma)-\sum\limits_{m=0}^{\infty}(\alpha_{m,j}\sigma^m+\beta_{m,j}\sigma^{-m}), & 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ \Phi(\sigma)-\sum\limits_{m=0}^{\infty}(\alpha_{m,j}\sigma^m+\beta_{m,j}\sigma^{-m})+tW_1(\sigma), & \pi\leqslant\theta\leqslant2\pi\end{cases} \tag{35}$$

（t：任意常数）

可以看出，$W(\sigma)=0$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。根据 Fourier 展开的有关定理[4]，这意味着

$$\int_0^{2\pi}\sigma^{-k}\Phi(\sigma)\,d\theta=\begin{cases}2\pi\alpha_{k,j},\ k=1,\ 2,\cdots\cdots\\ 2\pi\beta_{k,j},\ k=-1,-2,\cdots\cdots\\ 2\pi(\alpha_{0,j}+\beta_{0,j}),\ k=0\end{cases} \tag{36}$$

$$G_k=\int_{\pi}^{2\pi}\sigma^{-k}W_1(\sigma)\,d\theta=0,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots \tag{37}$$

式（36）仅说明 α，β 为 $\Phi(\sigma)$ 之 Fourier 系数。式（37）即为所需的缺陷表面为自由的条件。以 $\Phi(\sigma)$ 的展开式（24）代入式（37），经过整理得

$$\left.\begin{aligned}G_{2p-1}=&\sum_{m=0}^{\infty}(W_{2m,j}^{p}\alpha_{2m,j}+X_{2m,j}^{p}\bar{\alpha}_{2m,j}+Y_{2m,j}^{p}\beta_{2m,j}+Z_{2m,j}^{p}\bar{\beta}_{2m,j})\\ W_{2m,j}^{p}=&2i\left[\frac{(2m-1)R_j+(2m+1)R_j^{-1}}{2m-2p+1}+\frac{(1-2m)R_j-(1+2m)R_j^{-3}}{2m-2p+3}\right.\\ X_{2m,j}^{p}=&2i\left[\frac{R_j}{2m+2p-1}+\frac{R_j^{-1}}{2m-2p+1}+\frac{R_j^{-3}}{2m+2p-3}+\frac{R_j}{2m-2p+3}\right]\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

$$Y^{p}_{2m,j}=2i\left[\frac{(2m+1)R_j+(2m-1)R_j^{-1}}{2m+2p-1}-\frac{(2m+1)R_j-(1-2m)R_j^{-1}}{2m+2p-3}\right]$$

$$Z^{p}_{2m,j}=-2i\left[\frac{R_j}{2m-2p+1}+\frac{R_j^{-1}}{2m+2p-1}+\frac{R_j^{-1}}{2m-2p+3}+\frac{R_j}{2m+2p-3}\right]$$

$$G_{2p}=\sum_{m=1}^{\infty}(W^{p}_{2m-1,j}\alpha_{2m-1,j}+X^{p}_{2m-1,j}\bar{\alpha}_{2m-1,j}+Y^{p}_{2m-1,j}\beta_{2m-1,j}+Z^{p}_{2m-1,j}\bar{\beta}_{2m-1,j})+R_{2p}$$

$$W^{p}_{2m-1,j}=-2i\left[\frac{R_j}{2m-2p-1}+\frac{R_j^{-1}}{2m-2p+1}-\frac{(2m-1)(R_j+R_j^{-1})}{2m-2p-1}\right.$$
$$\left.+\frac{(2m-1)(R_j+R_j^{-1})}{2m-2p+1}-\frac{R_j}{2m-2p+1}-\frac{R_j^{-1}}{2m-2p-1}\right]$$

$$X^{p}_{2m-1,j}=2i\left[\frac{R_j}{2m+2p-1}+\frac{R_j^{-1}}{2m+2p-3}+\frac{R_j}{2m-2p+1}+\frac{R_j^{-1}}{2m-2p-1}\right]$$

$$Y^{p}_{2m-1,j}=2i\left[\frac{R_j}{2m+2p-1}+\frac{R_j}{2m+2p-3}+\frac{(2m-1)(R_j+R_j^{-1})}{2m+2p-1}\right.$$
$$\left.-\frac{(2m-1)(R_j+R_j^{-1})}{2m+2p-3}-\frac{R_j}{2m+2p-3}-\frac{R_j^{-1}}{2m+2p-1}\right] \qquad (39)$$

$$Z^{p}_{2m-1,j}=-2i\left[\frac{R_j}{2m-2p-1}+\frac{R_j^{-1}}{2m-2p+1}+\frac{R_j}{2m+2p-3}+\frac{R_j^{-1}}{2m+2p-1}\right]$$

$$R_{2p}=\begin{cases}\gamma_{2p}, & p>1,\\ \gamma_{2p}+\bar{\alpha}_{0,j}R_j^{-1}\pi, & p=1\\ \bar{\alpha}_{2|p|,j}\pi R_j-\bar{\alpha}_{2|p|+2,j}\pi R_j+\beta_{2|p|,j}(\pi R_j-\pi R_j^{-1}+2|p|\pi(R_j+R_j^{-1}))\\ \quad+\beta_{2|p|+2,j}(\pi(R_j^{-1}+R_j)-\pi(2|p|+2)(R_j+R_j^{-1}))-\bar{\beta}_{2|p|+2,j}\pi R_j\\ \quad-\bar{\beta}_{2|p|,j}\pi R_j^{-1}, & p<0\end{cases}$$

$$\gamma_{2p}=\alpha_{2p-2,j}(\pi(R_j^{-1}-R_j)+(2p-2)\pi(R_j+R_j^{-1}))+\alpha_{2p,j}\pi(R_j+R_j^{-1})$$
$$-2p\pi(R_j+R_j^{-1})+\bar{\alpha}_{2p-2,j}\pi R_j-\bar{\alpha}_{2p,j}\pi R_j^{-1}+\bar{\beta}_{2p,j}\pi R_j$$
$$+\bar{\beta}_{2p-2,j}\pi R_j^{-1}$$

由

$$G_k=0,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots \qquad (40)$$

我们得到关于 α，β 间的又一组线性关系。

现在，问题已化为根据条件 (22)，(27)，(30) 和 (39) 求解各系数 $F_{n,j}, M_{n,j}$，$\alpha_{n,j}$，$\beta_{n,j}$。这是一个线性方程组。在具体计算时，可取展开式的有限项，然后在计算机上应用标准的求解线代数方程组的程序作出数值解答。

参 考 文 献

〔1〕Sida, M. I., Bulletin, *JSME*, **13**, 59 (1970).

〔2〕Muskhelishvili, N. I., Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity (1953).

〔3〕Hayashi, T., Trans., *JSME*, **25**, 159 (1959).

〔4〕Zygmund, A., Trigonometrical Series (1952).

均布载荷作用下圆底扁薄球壳的非线性稳定性

叶开沅　顾淑贤
（兰州大学）

圆底扁薄球壳的稳定性计算在精密仪表的弹性元件以及建筑工程的屋顶等设计中都具有实际意义。它是很早以来就被研究的问题。

由于扁球壳稳定性问题的基本方程是非线性方程，求解这些方程在数学上存在很大困难，所以，多年来人们采用近似解法。本文用修正叠代法得到了均布压力作用下，周边固定的圆底扁薄球壳临界荷载的二次近似解析公式，并且克服了计算上的困难，使叠代过程在计算机上进行，进而得到了临界荷载的三次以及三次以上近似公式和程序，并将计算结果绘成了图表，且与其他作者的结果进行了比较。

一、基本方程与边界条件

在均布压力 q 作用下，圆底扁薄球壳的大挠度方程为[2]：

$$D\cdot\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dW}{dr}\right)=N_r\left(\frac{r}{R}+\frac{dW}{dr}\right)+\frac{qr}{2} \tag{1-1}$$

$$\frac{r}{Eh}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2\cdot N_r)=-\frac{dW}{dr}\left(\frac{r}{R}+\frac{1}{2}\frac{dW}{dr}\right) \tag{1-2}$$

N_r，$\frac{dW}{dr}$ 求得之后，利用以下的公式可得到其余的内力及位移分量：

$$M_r=-D\left(\frac{d^2W}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\cdot\frac{dW}{dr}\right)$$

$$Q_r=-D\cdot\left[\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dW}{dr}\right)\right]$$

$$u=\frac{r}{Eh}\left[(1-\nu)\cdot N_r+r\cdot\frac{dN_r}{dr}\right]$$

对应于边缘固定夹紧的情况，相应的边界条件为：

在 $r=b$ 时 $W=0$，$\frac{dW}{dr}=0$，$(1-\nu)\cdot N_r+r\cdot\frac{dN_r}{dr}=0$，

在 $r=0$ 时 $\frac{dW}{dr}=0$，N_r 为有限值。 (1-a)

式中，R 为球壳中面的半径；h 为壳体的厚度；

N_r 为径向薄膜内力；b 为扁球壳圆底的半径；

M_r 为径向弯矩；ν 为材料的泊桑系数；

Q_r 为径向剪力；　　$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$；

W 为中曲面的挠度；　　E 为弹性模量；

u 为径向位移。

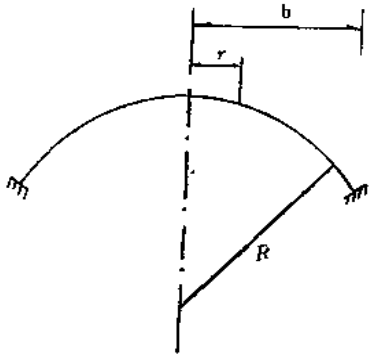
引入无量纲量：

$$\rho=\frac{r}{b},\quad y=\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{W}{h}+\frac{1}{2}k\rho^2$$

$$k=\sqrt{12(1-\nu^2)}\cdot\frac{b^2}{Rh}$$

$$\varphi=-\frac{dy}{d\rho},\quad s=\frac{12\cdot(1-\nu^2)\cdot b^2}{Eh^3}\rho\cdot N_r$$

$$q^*=\frac{12\cdot(1-\nu^2)\cdot\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\cdot E}\cdot\frac{b^4}{h^4}q$$



图a

将基本方程（1-1），（1-2）和边界条件（1-a）化为相应的无量纲方程：

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\cdot\varphi\right)=s\cdot\varphi-q^*\cdot\rho^2 \tag{2-1}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho s\right)=\frac{1}{2}(k^2\cdot\rho^2-\varphi^2) \tag{2-2}$$

和相应的边界条件：

在$\rho=1$时　$y=\frac{1}{2}k\rho^2$，　$\varphi=-k\rho$，　$\rho\frac{ds}{d\rho}-\nu s=0$，

在$\rho=0$时　$s=0$，　$\varphi=0$，　　(2-a)

到此，问题归结为求解非线性边值问题（2-1），（2-2），（2-a），

二、用修正叠代法求解

选取壳体中心处的无量纲挠度 $y_m=\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{W}{h}\Big|_{r=0}$ 作为叠代参数，用修正叠代法将上述非线性边值问题化为一系列的线性边值问题求解。

首先，略去方程（2-1）中的非线性项，得到确定一次近似的线性方程：

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho\varphi_1)\right)=-q^*\rho^2 \tag{3-1-1}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}(\rho s_1)\right)=\frac{1}{2}(k^2\rho^2-\varphi_1^2) \tag{3-2-1}$$

相应的边界条件为：

在$\rho=1$时　$y_1=\frac{1}{2}k\rho^2$，　$\varphi_1=-k\rho$

在$\rho=0$时　$\varphi_1=0$　　(3-1-a)

在 $\rho=1$ 时 $\rho\frac{ds_1}{d\rho}-\nu s_1=0$

在 $\rho=0$ 时 $s_1=0$ (3-1-b)

解线性边值问题 (3-1-1)，(3-1-a) 得到

$$\varphi_1=-\frac{q^*}{8}\rho^3+\frac{q^*}{8}\rho-k\cdot\rho \tag{3-1}$$

利用条件：当 $\rho=0$ 时，$y=y_m$；$\rho=1$ 时，$y=\frac{1}{2}k\rho^2$ 得

$$y_m=\int_0^1(\varphi+k\rho)d\rho$$

在一次近似中有

$$y_m=\int_0^1(\varphi_1+k\rho)d\rho=\int_0^1\left(-\frac{q^*}{8}\rho^3+\frac{q^*}{8}\rho\right)d\rho=\frac{q^*}{32} \tag{3-2}$$

$$q^*=32y_m \tag{3-3}$$

将式 (3-3) 代入式 (3-1)，得到 φ 的一次近似

$$\varphi_1=-4y_m\cdot\rho^3+(4y_m-k)\rho \tag{3-4}$$

再将式 (3-4) 代入方程 (3-2-1) 解边值问题 (3-2-1)，(3-1-b) 得到 s 的一次近似

$$s_1=-8\cdot y_m^2\cdot\frac{\rho^7}{6\cdot8}+(16y_m^2-4y_m\cdot k)\frac{\rho^5}{4\cdot6}-(8y_m^2-4\cdot y_m\cdot k)\frac{\rho^3}{4\cdot2}+\frac{B_1\cdot\rho}{2}$$

式中，$\frac{B_1}{2}=\frac{1}{1-\nu}\left(8\cdot y_m^2\cdot\frac{5-3\nu}{6\cdot8}-4y_m\cdot k\cdot\frac{4-2\nu}{4\cdot6}\right)$

将一次近似 φ_1，s_1 代入方程 (2-1) 便得到关于 φ 的二次近似的线性微分方程

$$D\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho\varphi_2=s_1\cdot\varphi_1-q^*\rho^2 \tag{3-2-2}$$

相应的边界条件为

在 $\rho=1$ 时 $y_2=\frac{1}{2}k\rho^2$，$\varphi_2=-k\rho$

在 $\rho=0$ 时 $\varphi_2=0$ (3-2-a)

解线性边值问题 (3-2-2)，(3-2-a) 得到 φ 的二次近似

$$\begin{aligned}\varphi_2=&y_m^3\frac{32}{6\cdot8\cdot10\cdot12}(\rho^{11}-\rho)-40y_m^2(4y_m-k)\frac{1}{6\cdot8\cdot8\cdot10}(\rho^9-\rho)\\&+4y_m(40y_m^2-20y_m\cdot k+k^2)\cdot\frac{1}{4\cdot6^2\cdot8}(\rho^7-\rho)\\&-(32y_m^3-24y_m^2\cdot k+4y_m\cdot k^2)\frac{1}{2\cdot4^2\cdot6}(\rho^5-\rho)\\&+\frac{B_1}{2}(4y_m-k)\cdot\frac{1}{2\cdot4}(\rho^3-\rho)-\frac{B_1}{2}\cdot4\cdot y_m\cdot\frac{1}{4\cdot6}(\rho^5-\rho)\\&-\frac{q^*}{8}(\rho^3-\rho)-k\cdot\rho\end{aligned} \tag{3-5}$$

并且，利用 $y_m=\int_0^1(\varphi+k\cdot\rho)d\rho$ 在二次近似中有

$$y_m=\int_0^1(\varphi_2+k\cdot\rho)d\rho \tag{3-6}$$

将式（3-5）代入（3-6）并进行整理后，得到折算荷载与中心折算挠度 y_m 的关系式（二次近似）为

$$\frac{q^*}{32}=Ay_m-By_m^2+Cy_m^3 \tag{3-7}$$

或者

$$q^*=32(A\cdot y_m-By_m^2+Cy_m^3) \tag{3-8}$$

式中，$$A=1+\left[\frac{4-2\nu}{2\cdot4^2\cdot6\cdot(1-\nu)}-\frac{13}{6^2\cdot8^2}\right]\cdot k^2=1+A_0\cdot k^2$$

$$B=\left[-\frac{19}{4\cdot6\cdot40}-\frac{5-3\nu}{2\cdot4^2\cdot6}-\frac{4-2\nu}{2\cdot4\cdot6\cdot(1-\nu)}-\frac{4-2\nu}{3\cdot6^2\cdot(1-\nu)}\right]\cdot k=B_0\cdot k$$

$$C=-\frac{77}{3\cdot12^2\cdot10}+\frac{5-3\nu}{2\cdot4\cdot6\cdot(1-\nu)}-\frac{5-3\nu}{3\cdot6^2\cdot(1-\nu)} \tag{3-c}$$

以 $\nu=0.3$ 为例，有

$$q^*=32[(1+0.0196k^2)\cdot y_m-0.0699k\cdot y_m^2+0.0499y_m^3]$$

按照公式（3-7）图 1 给出了不同 k 值时的特征曲线。

令 $k=0$，则顺便得到周边固定，受均布荷载作用的圆薄板大挠度理论的刚度计算公式

$$q^*=32(y_m+Cy_m^3)$$

整理后，其结果与文献〔2〕中所介绍的钱伟长教授用摄动法所得到的结果完全相同。

由式(3-8)按照 q^* 取极值的条件可求得不同 k 值时的上、下临界荷载值：由 $dq^*/dy_m=0$ 得到

$$A-2B\cdot y_m-3C\cdot y_m^2=0 \tag{3-9}$$

即 $1+A_0k^2-2B_0\cdot k\cdot y_m+3C\cdot y_m^2=0$ 其相应的解为

$$\left.\begin{matrix}y^*_{m(1)}\\y^*_{m(2)}\end{matrix}\right\}=\frac{B_0\cdot k\pm\sqrt{(B_0^2-3C\cdot A_0)\cdot k^2-3C}}{3C} \tag{3-10}$$

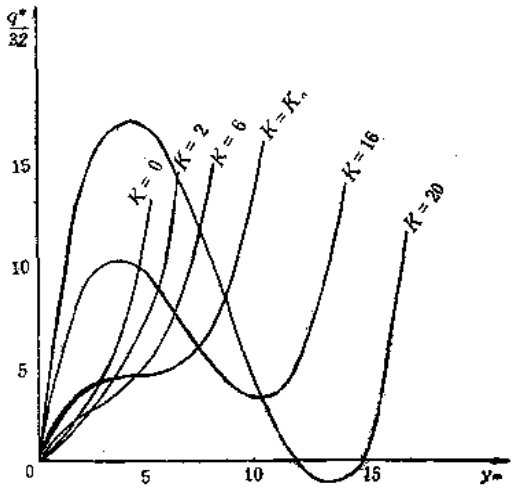


图 1 各种 k 值下的特征曲线（$\nu=0.3$）（二次近似）

将式（3-10）代入荷载公式（3-8）得到临界荷载公式

$$q_0^*=32(Ay_m^*-By_m^{*2}+Cy_m^{*3}) \tag{3-11}$$

式中，当取 $y_m^*=y^*_{m(2)}$ 时得到上临界荷载，取 $y_m^*=y^*_{m(1)}$ 时得到下临界荷载。

图 2 中，以 $\nu=0.3$ 为例给出了不同 k 值时的临界荷载值。

当 $k=\sqrt{\dfrac{3C}{B_0^2-3A_0\cdot C}}=k_0$ 时，

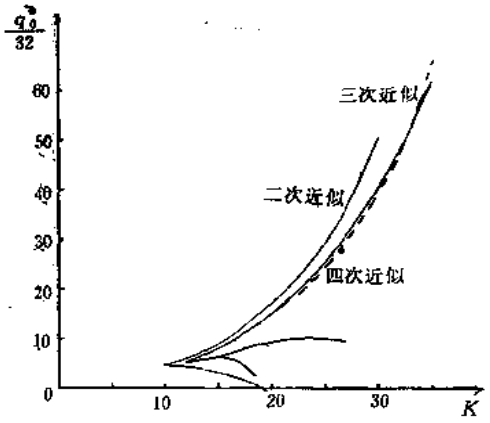


图 2 稳定性曲线（$\nu=0.3$）

方程（3-9）有等根：$y^*_{m(-)}=y^*_{m(+)}$，于是，当 $k<k_0$ 时壳体不发生失稳现象，当 $k\geqslant k_0$ 时壳体就会发生失稳现象。几何参数 k_0 是区分壳体失稳与否的分界点。

几何参数 k_0 以及临界荷载 q_0^* 在弹性元件以及屋顶等设计中都具有实际意义。因此，比较准确而方便的计算它们是非常需要的。以上所给出的计算公式虽然清晰明了，但其精确程度确无法估计，而按上述步骤继续叠代下去工作量是相当大的，甚至三次近似工作量已经很大，四次以上近似就更难于实现。为了克服这些困难，本文重新推算了二次以上各次近似的通用公式，使叠代过程在计算机上进行。从而，较方便的实现了三次以上近似。

设 φ 的 n 次近似 φ_n 已经求出，则 s 的 n 次近似以及 φ 的 $n+1$ 次近似 s_n，φ_{n+1} 可由以下方程及边界条件确定

$$\rho\frac{d}{d\rho}\ \frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}(\rho s_n)=\frac{1}{2}(k^2\cdot\rho^2-\varphi_n^2) \tag{4-1}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\ \frac{1}{\rho}\ \frac{d}{d\rho}(\rho\varphi_{n+1})=s_n\cdot\varphi_n-q^*\cdot\rho^2 \tag{4-2}$$

在 $\rho=1$ 时　$\rho\dfrac{ds_n}{d\rho}-\nu s_n=0$，　$\varphi_{r=1}=-k\cdot\rho$　$y_{n+1}=\dfrac{1}{2}k\cdot\rho^2$

在 $\rho=0$ 时　$s_n=0$　$\varphi_{n+1}=0$ (4-a)

根据方程以及边界条件的特性，φ_n 一定为如下的形式

$$\varphi_n=\sum_{t=1}^{L}a_t\rho^{nt} \tag{4-3}$$

则

$$\varphi_n^2=\sum_{j=1}^{L}\sum_{t=1}^{L}a_j\cdot a_t\cdot\rho^{nt+nj} \tag{4-b}$$

将式（4-b）代入方程（4-1）并利用边界条件（4-a）求解可得

$$s_n=\frac{1}{2}k^2\cdot\frac{\rho^3}{2\cdot4}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L}\sum_{t=1}^{L}a_t\cdot a_j\ \frac{\rho^{n_t+n_j+1}}{(n_t+n_j)(n_t+n_j+2)}+\frac{E_1}{2}\rho$$

式中

$$\frac{E_1}{2}=-\frac{1}{1-\nu}\left[\frac{1}{2}k^2\cdot\frac{3-\nu}{2\cdot4}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L}\sum_{t=1}^{L}a_t\cdot a_j\cdot\frac{n_t+n_j+1-\nu}{(n_t+n_j)(n_t+n_j+2)}\right] \tag{4-4}$$

将式（4-3），（4-4）代入方程（4-2）并利用边界条件（4-a）求解得

$$\varphi_{n+1}=\frac{1}{2}k^2\cdot\frac{1}{2\cdot4}\sum_{p=1}^{L}a_p\cdot\frac{\rho^{n_p+4}}{(n_p+3)(n_p+5)}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{L}\frac{a_p\cdot a_j\cdot a_i\cdot\rho^{n_i+n_j+n_p+2}}{(n_i+n_j)(n_i+n_j+2)(n_i+n_j+n_p+1)(n_i+n_j+n_p+3)}$$
$$+\frac{E_1}{2}\sum_{p=1}^{L}a_p\cdot\frac{\rho^{n_p+2}}{(n_p+1)(n_p+3)}-q^*\frac{\rho^3}{2\cdot4}+\frac{C_1}{2}\rho \tag{4-5}$$

式中

$$\frac{C_1}{2}=\frac{C_1'}{2}+\frac{q^*}{8}-k$$
$$\frac{C_1'}{2}=-\frac{1}{2}k^2\cdot\frac{1}{2\cdot4}\sum_{p=1}^{L}a_p\cdot\frac{1}{(n_p+3)(n_p+5)}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{L}\frac{a_p\cdot a_j\cdot a_i}{(n_i+n_j)(n_i+n_j+2)(n_i+n_j+n_p+1)(n_i+n_j+n_p+3)}$$
$$-\frac{E_1}{2}\sum_{p=1}^{L}\frac{a_p}{(n_p+1)(n_p+3)} \tag{4-6}$$

根据公式 $y_m=\int_0^1(\varphi+k\cdot\rho)d\rho$，对 $n+1$ 次近似有

$$y_m=\int_0^1(\varphi_{n+1}+k\cdot\rho)d\rho=\sum_{p=1}^{L}\frac{k^2}{2\cdot2\cdot4}\cdot\frac{a_p}{(n_p+3)\cdot(n_p+5)^2}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{L}\frac{a_p\cdot a_j\cdot a_i}{(n_i+n_j)(n_i+n_j+2)(n_i+n_j+n_p+1)(n_i+n_j+n_p+3)^2}$$
$$+\frac{E_1}{2}\sum_{p=1}^{L}\frac{a_p}{(n_p+1)(n_p+3)^2}-\frac{q^*}{32}+\frac{1}{2}\cdot\frac{C_1'}{2}+\frac{q^*}{16} \tag{4-7}$$

整理后得

$$\frac{q^*}{32}=y_m-\sum_{p=1}^{L}\frac{k^2}{2\cdot2\cdot4}\cdot\frac{a_p}{(n_p+3)(n_p+5)^2}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{L}\frac{a_p\cdot a_j\cdot a_i}{(n_i+n_j)(n_i+n_j+2)(n_i+n_j+n_p+1)(n_i+n_j+n_p+3)^2}$$
$$-\frac{E_1}{2}\sum_{p=1}^{L}\frac{a_p}{(n_p+1)(n_p+3)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{C_1'}{2} \tag{4-8}$$

式（4-8）给出了 q^* 与 y_m 之间的关系。同时，若将式（4-8）代入（4-5）便得到 φ 的 $n+1$ 次近似，重复上述公式又可做下一次叠代。

假设 q^* 在 $y_m=y_m^*$ 时达到极值 q_0^*，则有

$$[q^*(y_m^*+\delta)-q_0^*]\cdot[q_0^*-q^*(y_m^*-\delta)]<0 \tag{4-9}$$

式中：δ 的大小根据精确度要求而定。由（4-9）可求得上、下临界荷载 q_0^* 。

综上所述，由式（3-4）给出 φ 的一次近似 φ_1 后，利用式（4-4），（4-5），（4-6），（4-8），（4-9）逐次叠代就可以得到我们所需要的 $n+1$ 次近似。

以 $\nu=0.3$ 为例，本文计算了对于各种 k 值临界荷载的二次、三次、四次近似，以及几何参数 k_0 的二次、三次、四次近似值。计算结果表明：

1．二次近似与三次近似的差别还是比较大的。例如对于 k_0，二次近似值为 9.88，而三次近似值为 11，相对误差大约为 10%，对于上临界荷载，当 $k=22$ 时，相对误差就已经超过了 14%，下临界荷载的误差更大。

2．k_0 以及 k 值不太大时的上临界荷载三次近似与四次近似相接近，例如当 $k\leqslant 32$ 时，上临界荷载的相对误差在 2‰—4% 以内，但是下临界荷载在 $k>15$ 后，相差仍然很大。

3．当 $k\geqslant 38$ 时，上临界荷载的三次近似与四次近似的差别仍然比较大。因此，我们认为当 k 值较大时，仍然用上述方法求解很难得到比较精确的结果。对于这一类问题准备用奇异摄动理论的方法求解。

4．在 $k\leqslant 32$ 的范围内，随着 k 值的增加上临界荷载逐渐增加。

其次，本文中还将所得的结果与按线性理论所得的结果进行了比较。

按着线性理论得到 q 的临界值为

$$q_B=\frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\cdot\left(\frac{h}{R}\right)^2,\quad \text{由 } q^*=\frac{12(1-\nu^2)\sqrt{12(1-\nu^2)}\cdot b^4}{2E\cdot h^4}\cdot q$$

可得到本文中相应的临界荷载 $q_0=\frac{2E\cdot h^4}{\sqrt{12(1-\nu^2)}\,12(1-\nu^2)b^4}\,q_0^*$，因此

$$\frac{q_0}{q_B}=\frac{q_0^*}{2k^2} \tag{4-10}$$

以 $\nu=0.3$ 为例，对不同 k 值按式（4-10）计算的结果描绘在图 3（a）上。并且，与其

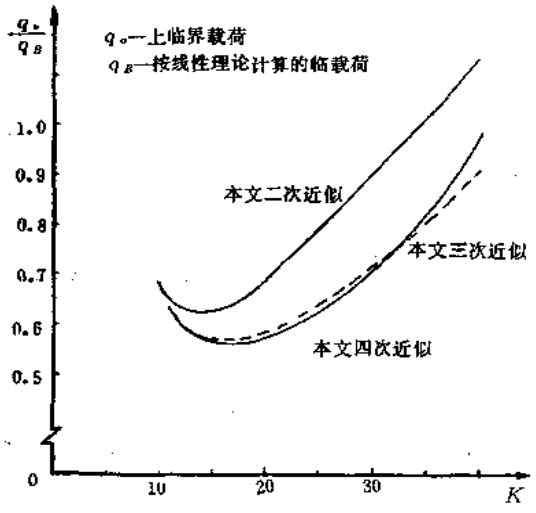


图 3（a） $\frac{q_0}{q_B}$ 与 k 值的关系曲线（$\nu=0.3$）

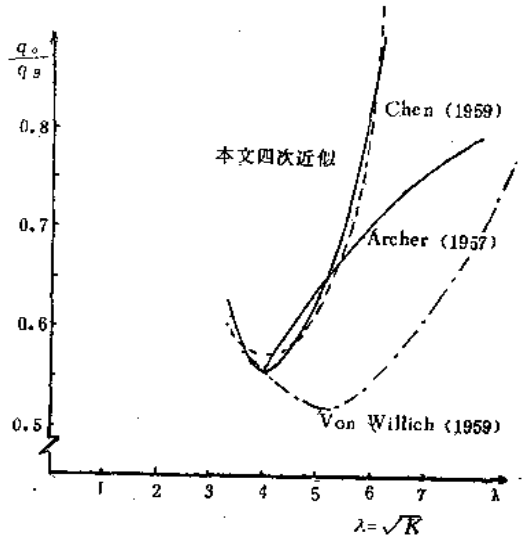


图 3（b） $\frac{q_0}{q_B}$ 与 λ 值的关系曲线

他作者的结果进行了比较（图 3(b)）。从图上可以看出，在 $k\leqslant 32$ 时，q_0/q_B 随着 k 值的增加而增加，但小于 0.75。

用以上方法计算在均布压力作用下（包括 $q=0$ 的情况）扁球壳的某些稳定性问题也是方便的，而且精确度也较高。例如，用同样的方法我们很方便的计算了边缘力矩作用下周边简支的圆底扁薄球壳的临界荷载的二次、三次近似，其结果描绘在图 4 上。

以上叠代方法，从原则上来讲可以得到任意次近似。但是，受计算机存储量的限制，迭代次数太多是不行的，但一般来说，至少可以做到五次近似（程序略）。

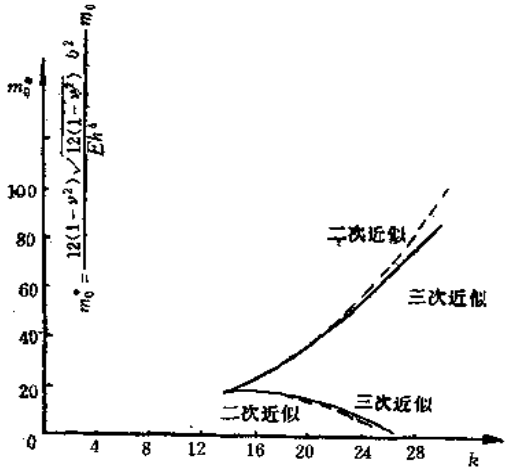


图 4 边缘力矩作用下周边简支圆底扁球壳的稳定性曲线（$\nu=0.3$）

参 考 文 献

〔1〕叶开沅，刘人怀等，兰州大学学报，2 (1965)，11—23。

〔2〕A. C. 沃耳密尔著，卢文达等译，柔韧板与柔韧壳，科学出版社 (1959)，48—51，337—349。

〔3〕钱伟长，林鸿荪，胡海昌，叶开沅，弹性圆薄板的大挠度问题，中国科学院出版(1954)。

〔4〕Thin—Shell Structures, Theory, Experiment and Design, Edited by Y. C. Fung, E. E. Sechler, 254。

材料非线性有限元法中的一种新解法及其在平面断裂问题中的应用

龚 尧 南

（北京航空学院）

本文的目的在于提出一种基于修正欧拉法的非线性方程的新解法。计算结果证明，这种解法在计算时间上是经济的，并能取得较好的精度。由于非线性断裂力学也是当前断裂力学的重点课题之一，故本文将所得方法应用于裂纹平板的弹塑性应力和应变场的分析，计算了线弹性裂纹平板的应力强度因子及非线性能量释放率。结果是令人满意的。

一、非线性方程组的解法

本文利用修正欧拉法的概念，提出非线性方程组的一种新解法。图 1 表示非线性问题中的一个典型的增量步 i。在这增量步中，载荷增量为 $\Delta\{Q\}_i$。先施加一个载荷增量 $\beta\Delta\{Q\}_i$，其中 β 为乘子，可取 $\beta=0.6\sim0.8$。增量步从 A 点出发，根据 A 点的正切模量求得 $\beta\Delta\{Q\}_i$ 引起的应变和应力，得 C 点。在真实应力应变曲线上与 C 点对应的应力点应该是 D 点，求 D 点的正切模量。将 D 点的正切模量 H_i' 作为整个增量步 i 的平均模量，求得 $\Delta\{Q\}_i$ 引起的应变与应力即 F 点，并从 F 点找得真实曲线上相应的 G 点。如果 β 的值取得合适，G 点即可足够精确地收敛于正确解。如果要求有更高的精度，则可以用残差力进行自修正。

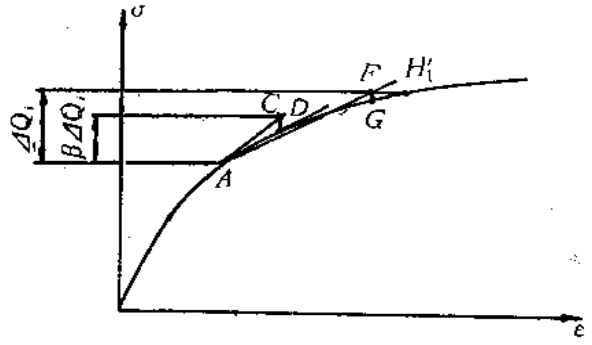


图 1

具体步骤如下：

1．施加载荷增量 $\beta\Delta\{Q\}_i$，并计算位移增量 $\Delta\{\bar{q}\}$ 及位移 $\{q\}_{i-1}+\Delta\{\bar{q}\}$ 及相应的应力值（相当于图 1 中的 C 点）。

2．将应力从 C 点转换到 D 点，并计算 D 点的弹塑性刚度

$$[D^P]=[D^e]-\frac{1}{s_E}\begin{bmatrix} s_1^2 & s_2s_1 & s_6s_1 \\ s_1s_2 & s_2^2 & s_6s_2 \\ s_1s_6 & s_2s_6 & s_6^2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

其中

$$[D^e]=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{vmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{vmatrix} \tag{2}$$

$$S_E=\frac{4}{9}\bar{\sigma}^2H'+s_1\sigma_x'+s_2\sigma_y'+2s_6\tau_{xy}$$

$$s_1=\frac{E}{1-\nu^2}(\sigma_x'+\nu\sigma_y')$$

$$s_2=\frac{E}{1-\nu^2}(\nu\sigma_x'+\sigma_y')$$

$$s_6=\frac{E}{1+\nu}\tau_{xy}$$

$$\sigma_x'=(2\sigma_x-\sigma_y)/3$$

$$\sigma_y'=(2\sigma_y-\sigma_x)/3$$

σ，σ_y 及 τ_{xy} 都是 D 点的应力值。

3．将 $[D^P]$ 作为这一增量步的平均弹塑性矩阵，计算平均刚度及载荷增量 $\Delta\{Q\}_t$ 所引起的位移增量 $\Delta\{q\}_t$，并由 $\Delta\{q\}_t$ 计算这一增量步的全应变增量 $\Delta\{\varepsilon\}$ 及应力增量

$$\Delta\{\sigma\}_t=[D^P]\Delta\{\varepsilon\}_t$$

4．计算

$$\{Q\}_{t+1}=\{Q\}_t+\Delta\{Q\}_t,\qquad \{\sigma\}_{t+1}=\{\sigma\}_t+\Delta\{\sigma\}_t$$

以及全结构的结点力

$$\{P\}_{t+1}=\sum_e\int_V[B]^T\{\sigma\}_{t+1}dV$$

式中 $[B]$ 是元素形函数的微分，V 是元素的体积。

如果精度不能满足要求，则可将残差力 $(\{Q\}_{t+1}-\{P\}_{t+1})$ 并入下一增量步的荷载项进行修正。

当采用这种改进的新算法之后，用来计算裂纹平板的应力场时，即使 $\Delta Q/Q_L=0.25\sim0.4$（其中 Q_L 为使应力场中的最大等效应力刚好达到初始屈服而需要施加的外载荷值，在初值法中，为了使计算结果不致偏离正确解太远，$\Delta Q/Q_L$ 不应大于 0.05～0.1），仍然获得了很好的结果。

二、应　　用

将本文的方法应用于裂纹平板（图 2）。平板长 $2L=48$ 厘米，宽 $2B=40$ 厘米，中央裂纹的宽度为 $2a=20$ 厘米，受到均布载荷 $\sigma_0=3500$ 公斤/厘米^{2}的作用。平板材料的杨氏模量 $E=802300.0$ 公斤/厘米^2，用 Ramberg-Osgood 公式

$$\eta=\frac{1.1\sigma_t}{mE}\left[\left(\frac{\sigma}{1.1\sigma_t}\right)^m-\left(\frac{1}{1.1}\right)^m\right]$$

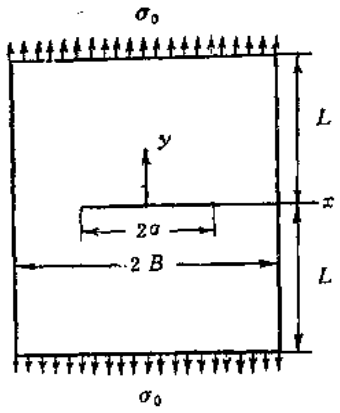


图 2

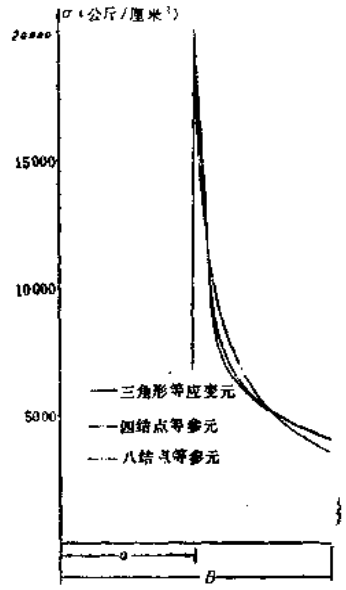


图 3

来描述应力—塑性应变曲线，并取式中的 $m=10$，$\sigma_t=2428.0$ 公斤/厘米²。

由于结构和载荷的对称性，仅取它的四分之一进行分析。

首先将板离散化。它的有限元模型取成三种不同的型式：

1．三角形等应变元，327 个结点，570 个元素；

2．四结点等参元，143 个结点，120 个元素，每个元素采用 2×2 个高斯积分点；

3．八结点等参元，199 个结点，56 个元素，每个元素采用 3×3 个高斯积分点。下面，我们将分别称之为网格 1，网格 2 及网格 3。

1．Ⅰ型应力强度因子 $\overline{K}_I$ 的计算

首先在 $\sigma_0=3500$ 公斤/厘米² 的作用下，按线弹性计算了应力场的分布（图 3）及板的能量 U。然后令裂纹长度增加 $2\Delta a$，Δa 约为裂纹尖端附近元素尺度的 10^{-3} 左右，重新计算应力场及 U。于是，按公式

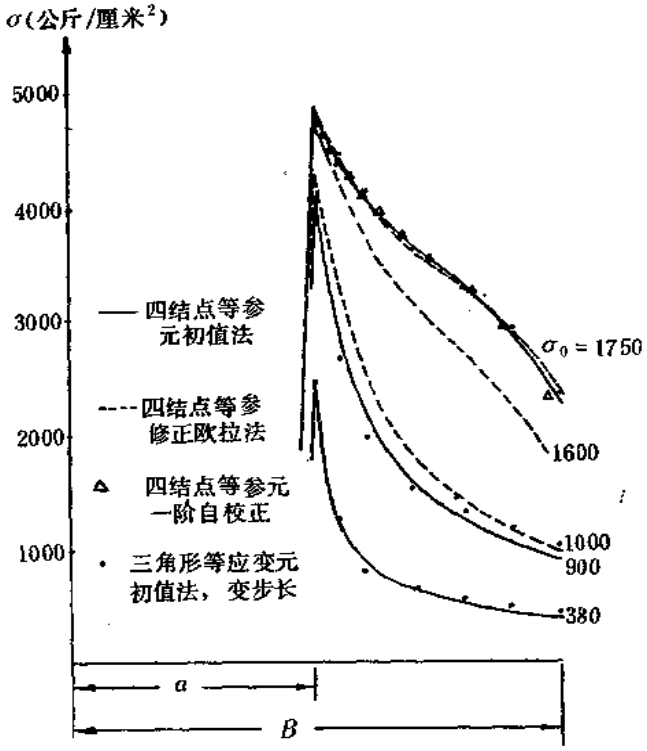


图 4

$$K_I=\sqrt{\frac{E}{2t}\frac{dU}{da}} \qquad \bar{K}_I=\frac{K_I}{\sigma_0\sqrt{\pi a}}$$

计算应力强度因子的值。当板的长度比 $L/B=1.2$，裂纹宽度与板宽之比 $a/B=0.5$时，$\bar{K}_I$ 的解析值为 1.25[11]。三种不同网格型式的 $\bar{K}_I$ 的计算值与解析值的比较如表 1 所示。

表 1

网格型式	1	2	3	解析解
计算时间（秒）	480.13	137.67	668.01	
$\bar{K}_I$	1.16	1.18	1.26	1.25
误差 %	−7.2	−5.6	0.8	

从计算结果来看，用 56 个八结点等参元精度最高，但计算时间也最长。用 120 个四结点等参元得到的结果相对地说最合算，$\bar{K}_I$ 的相对误差比用三角形等应变元时要低，仅 5.6%，但计算时间却要少得多，故建议采用网格 2。

2．弹塑性分析

在作了线弹性的应力场分析之后，将外载荷下降至 $\sigma_{0l}=380$ 公斤/厘米^2，使裂纹尖端处的最大等效应力刚好达到初始屈服，然后进行弹塑性的应力场分析。采用的有限元模型为网格 1 和网格 2，增量载荷的大小为 $\Delta\sigma_0=0.36053\sigma_{0l}$，用初值法、一阶自校正法和本文提出的解法进行计算，结果良好，如图 4 所示。图 4 表示的是 $y=0.25$ 厘米处应力 σ_y 的分布。对应的外载荷为 $\sigma_0=1750$ 公斤/厘米^{2}时，同样的有限元模型（网格 2），三种方法所得到的结果十分相近。但在计算时间上，初值法和一阶自校正法却相差甚大；初值法需要 2844 秒，而一阶自校正法却仅需 1092 秒。用本文的方法加上残差载荷修正，计算时间为 1154.37 秒。可见，本文方法无论在计算时间还是计算精度上，都与一阶自校正法相当，而仅为初值法的 40.6%。

3．非线性能量释放率

能量释放率是断裂力学中判别裂纹扩展的一个很重要的判据，而非线性对能量释放率有很大影响。我们在用增量法计算裂纹平板的弹塑性应力场的同时，计算了在各级载荷下平板单位厚度的总位能 V^*，并由此计算了固定载荷下的非线性能量释放率 $\bar{G}$[12]：

$$\bar{G}=\frac{\partial V^*}{\partial(2a)}$$

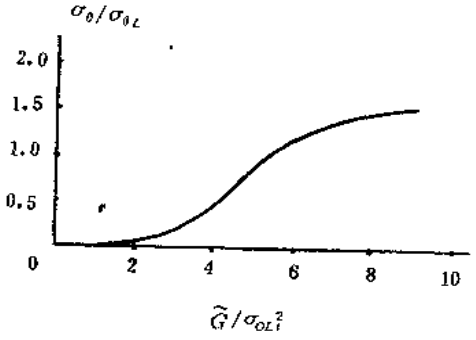


图 5

计算所得的非线性能量释放率 $\bar{G}$ 与载荷 σ_0 的关系曲线如图 5 所示。

三、结 束 语

评价数值解法的优劣有两个主要的准则，即计算的精度与速度；其次还有程序设计的难易。从前面的讨论和数值例题的结果比较可知，本文方法无论从时间或精度来看，都是符合

要求的。另外，由于本文的目的主要在于讨论材料非线性有限元法中的新解法，所以在应用于裂纹平板的弹塑性应力场分析时，未计及几何非线性效应。

本文在写作过程中，得到王德荣教授的热情指导，同时也得到北京航空学院计算中心的大力协助，在此一并致谢。

参 考 文 献

〔1〕董平，瑞赛托斯，J.N.，有限元素法（中译本），北京航空学院出版（1979）

〔2〕Yoshiaki Yamada, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design(1971), 283—316.

〔3〕张之勇等，对非线性结构分析程序 NonSAP 作非弹性分析的评价，张相麟译，北京工业学院印刷，原载 ASME 77-PVP-10.

〔4〕Stricklin, J.A., Von Riesmann, W.A., Tillerson, J.R. and Haisler, W.E., Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design (1972), 301—324.

〔5〕Argyris, J.H. and Sharpf, D.W., 固体力学中的有限元素法（下集），中译本，国防工业出版社（1977）.166—210.

〔6〕欧阳鬯，非线性断裂力学的增量研究，复旦大学（1977）.

〔7〕吴永礼，弹塑性有限元的一些解法比较，中国科学院力学研究所（1978）.

〔8〕Tillerson, J.R., Stricklin, J.A.and Haisler, W.E., *AMD*, **6** (1973). 67—101.

〔9〕Yamada, Y., Kawai, T., Yoshimura, N. and Sakurai, T., Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. (1969), 1271—1299.

〔10〕Yamada, Y., Yoshimura, N. and Sakurai, T., Int. Jnl. of Mech. Sci., **10**(1968), 343—354.

〔11〕Rooke, D.P. and Cartwright, D.J., Compendium of Stress Intensity Factors, Her Majesty's Stationary Office, London, p.11.

〔12〕Lee, J.D. and Liebowitz, H., Eng. Fracture Mechanics, **9**, 4 (1977).

〔13〕Parks, D.M., Int.J. of Fracture, 10 (1974), 487—502.

耦合热弹性接触问题的有限元分析

陈 万 吉

（大连工学院）

一、前 言

相互接触的弹性体的热负荷分析是工程中经常遇到的课题之一。发动机的受热部件，原子反应堆，高速飞行器，高温密封等组合部件，由于高性能化的要求，设计时要准确的计算其热负荷则必须考虑接触条件，对于接触体的热负荷分析属于复杂的非线性分析。受热的接触体之间的接触状态随温度分布和变形状态而改变。即在某种假定的接触状态下，按接触传热的非线性边界条件求得的温度场会直接影响弹性接触状态，按弹性接触理论进行非线性分析求得的接触状态又会改变原来求温度场时假定的接触状态。为了求得同时满足接触传热条件和弹性接触条件的解，需要不断地调整接触状态，进行叠代分析，对此如果计算方法不适当，计算量会相当浩大。

对于非线性边界条件的热传导分析，已有的解法计算量很大[8]。对于仅考虑弹性接触问题的非线性分析，用一般有限元方法[6,7,10]，由于要多次重新形成和求解总刚度矩阵，因此在通常情况下比同等线性问题计算量要大数十倍。

近几年来已提出一些有效的解法，如文献〔2〕，〔3〕，〔4〕，较以往的一般的有限元分析方法都有了很大改进，使计算量大为减少。文献〔2〕和〔3〕所提供的方法属于直接刚度凝缩法，即以接触内力为未知数，建立新的刚度矩阵，通常这个新的刚度阵是不对称的，经过特殊的消元方法，以接触内力为出口求得关于未知力的凝缩矩阵，在按接触状态求解时，只须不断修改并求解凝缩矩阵，从而使计算量大大减少，文献〔2〕称之为准线性化。上述解法在求凝缩阵时，在消元过程中，由于修改后的总刚度阵是不对称的及接触边界的影响，波前数较大，因此存贮需要量也较大，另外编制程序也麻烦。文献〔4〕的子结构法效果更为次之。

作者在文献〔1〕中提出用有限元混合法求解此类问题。它也是以接触内力为未知数，通过求未知力的影响系数直接建立关于未知接触力的柔度阵。这是一种柔度法。该方法与上述方法相比较既简单又省存贮，计算量也少，而且还容易以此处理其他问题，如接触传热，弹塑性分析等。

本文可以看成是文献〔1〕的有限元混合法的进一步应用。

二、接触传热条件

相互接触的受热物体（图1），由于接触表面有夹层的存在，产生了复杂的接触传热过

程。当接触间隙很小时，每对接触点可以出现三种接触状态，即连续传热状态，夹层传热状态和夹层绝热（或辐射传热）状态，并且必居其一。

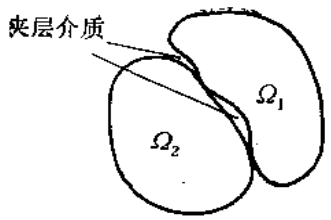


图 1

受热物体在接触部分出现夹层通常可以充进液体，气体或出现真空。在充进液体或气体情况下应属夹层传热状态。通过夹层的热量可以按传导，对流和辐射三种方式传递，按通常的处理[8]，计算单位时间内通过夹层的热流量。

$$Q=\frac{\lambda_c}{\delta}F\Delta T$$

其中，λ_c 为夹层介质相当导热系数；δ 为夹层间隙；F 为夹层相对传热面积，在有限元法中可按接触点的附连面积计算；ΔT 为夹层两侧温差。

对于出现真空的夹层，可考虑辐射传热条件。在计算接触传热时，由于辐射形成的热阻相对夹层传热和连续传热大得多，因此可认为它属于绝热状态，即热阻无穷大或通过夹层的热流量 Q 为零。

对于连续状态则应是热阻为零，即温差为零。

因此三种接触传热的定解条件为：

1．对于连续传热状态：$\Delta T=0$；

2．对于夹层传热状态：$\Delta T=\frac{\delta}{\lambda_c F}Q$，其中 $\frac{\delta}{\lambda_c F}$ 称为热阻；

3．对于夹层绝热状态：$Q=0$；

这是因为绝热夹层处的热阻比其他连续传热和夹层传热的热阻大得多，因此可以认为 $Q=0$。

如果必须计算辐射传热问题，应按辐射传热条件计算。这时

$$Q=CF\left[\left(\frac{t_1}{100}\right)^4-\left(\frac{t_2}{100}\right)^4\right]=CF\times 10^{-8}\cdot\Delta T(t_1+t_2)(t_1^2+t_2^2)$$

即 $\Delta T=Q\cdot\frac{1}{\alpha_c}$

$$\alpha_c=CF(t_1+t_2)(t_1^2+t_2^2)\cdot 10^{-8}$$

其中，α_c 为辐射放热系数是夹层两侧温度的函数，C 为辐射系数，F 为传热面积，t_1，t_2 为夹层两侧温度，Q 为单位时间内通过夹层的热流量。

对于相互接触的传热体在一定的接触状态下，可以唯一的确定体内温度场，但是温度场又要做为温度荷载影响弹性场，使接触点的接触状态发生改变。这种变化转而又影响温度场的变化，因此在接触点上温度场和弹性场的非线性边界条件发生耦联。

三、弹性接触条件

这部分内容可详见文献〔1〕。这里仅限于弹性小变形的接触问题。相互接触的弹性体分别记为 Ω_1 和 Ω_2，对应的接触边界为 Γ_1 和 Γ_2，相应的外法线和切线分别为 n_1，t_1 和 n_2，t_2，而 R_{n1}，R_{t1} 和 R_{n2}，R_{t2} 分别表示一对接触点 j_1 和 j_2 的法向和切向接触内力，u_1，v_1 和 u_2，v_2 分别表示一对接触点 j_1 和 j_2 的法向和切向位移（图 2），ε_0 为接触面之间的初

始间隔。

每对接触点可能有三种接触状态，即连续状态，滑动状态和自由状态，并且必居其一。令 $\bar{u}_2=-u_2$，$\bar{v}_2=-v_2$。

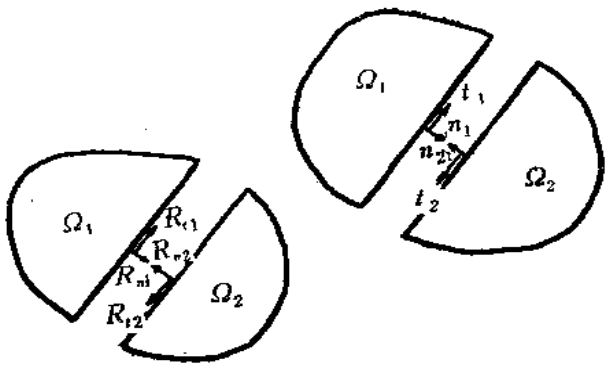


图 2

1．对于连续状态则有定解条件：

$$R_{n1}+R_{n2}=0,\quad R_{t1}+R_{t2}=0,$$

$$u_1=\bar{u}_2+\varepsilon_0,\quad v_1=\bar{v}_2$$

而且要满足不等式条件（或称判定条件）：$R_{n1}\leqslant 0$；$|R_{t1}|\leqslant f|R_{n1}|$；其中 f 为接触面之间的摩擦系数。

2．对于滑动状态则有定解条件：

$$R_{n1}+R_{n2}=0,\quad R_{t1}+R_{t2}=0,\quad u_1=\bar{u}_2+\varepsilon_0$$

$R_{t1}=\mp f\cdot R_{n1}$（取负号为顺接触面的切向方向滑动；取正号为逆接触面切线方向滑动）。而且要满足不等式条件：$R_{n1}\leqslant 0$；$v_1\leqslant\bar{v}_2$ 为顺切向滑动，$v_1>\bar{v}_2$ 为逆切向滑动。

3．对于自由状态则有定解条件：

$$R_{n1}=R_{n2}=R_{t1}=R_{t2}=0$$

而且要满足不等式条件：$u_1\leqslant\bar{u}_2+\varepsilon_0$。

在一定的外载荷（包括温度载荷）作用下，每一对接触点都必处于三种接触状态之一，且满足定解条件和不等式条件。这个求解过程是个叠代过程。由于弹性接触问题通常具有不可逆性，即最后的接触状态与加载路径有关，因此通常应按增量法求解。对于无摩擦接触可不必按增量法求解。

四、耦合热弹性接触问题的有限元混合法

1．基本方程

对于接触传热问题可以将接触边界引入未知的热流量 $\bar{Q}$，按第二类边界条件处理，根据变分原理可将稳定热传导问题化为求泛函 $U(T)$ 的极值问题。泛函

$$U(T)=\int_V\frac{\lambda}{2}(T,\ i)^2dV+\int_{\Gamma_1}\bar{Q}Tds+\int_{\Gamma_2}\frac{\alpha}{2}(T^2-2TT_0)ds \qquad (1)$$

其中，V 为体积，Γ_1 为第二类边界条件 $-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\Gamma_1}=\bar{Q}$ 的边界，Γ_2 为第三类边界条件 $-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\Gamma_2}=\alpha(T-T_0)$ 的边界，λ 为物体导热系数，T_0 为周围介质温度，α 为 Γ_2 边界的放热系数。

按通常的有限元法，对求解域进行几何剖分并构造单元的温度插值函数

$$T=\sum_t N_tT_t$$

其中 N_t 为形函数，T_t 为结点温度，代入式（1）得

$$U(T_t)=\frac{1}{2}\{T\}^T[K_1]\{T\}-\{T\}^T\{q\}-\{T\}^T\{\bar{Q}\}$$

由 $\frac{\partial U}{\partial T_i}=0$ 得离散方程

$$[K_1]\{T\}=\{q\}+\{\bar{Q}\} \tag{2}$$

其中，$[K_1]$ 为弹性体温度刚度矩阵，$\{T\}$ 为结点温度向量，$\{q\}$ 为广义结点热流量向量，$\{\bar{Q}\}$ 为接触点未知热流量向量。

对于方程（2），如果能通过某种办法求出 $\{\bar{Q}\}$，并且使其满足接触传热状态，则可将 $\{\bar{Q}\}$ 代入方程（2）求得温度分布。

对于弹性接触问题可以将接触边界引入未知外力 R 作为力的边界条件处理。根据变分原理，如通常所用的最小势能原理，将弹性体平衡问题化为求最小势能问题

$$\pi(u)=\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}D_{ijkl}\varepsilon_{kl}-F_iu_i\right)dV-\int_{S_\sigma}\bar{T}_iu_ids-\int_{S_c}\bar{R}u_ids\longrightarrow \text{最小} \tag{3}$$

其中，V 为体积，ε_{ij} 为应变张量，D_{ijkl} 为弹性系数张量，F_i 为体积力，u_i 为位移，$\bar{T}_i$ 为给定的边界力，S_σ 为给定力边界条件的边界，$\bar{R}$ 为接触边界的接触内力，S_c 为接触边界。

按通常的有限元法，对求解域进行剖分插值

$$u=\sum_j N_ju_j$$

其中 N_j 为形函数，u_j 为结点位移，代入式（3）得

$$\Pi(u_j)=\frac{1}{2}\{u\}^T[K_2]\{u\}-\{u\}^T\{p\}-\{u\}^T\{\bar{R}\}$$

由 $\frac{\partial\Pi}{\partial u_j}=0$ 得离散方程

$$[K_2]\{u\}=\{p\}+\{\bar{R}\} \tag{4}$$

其中 $[K_2]$，为弹性体刚度矩阵，$\{u\}$ 为结点位移向量，$\{p\}$ 为广义结点力向量，$\{\bar{R}\}$ 为接触点未知接触力向量。

同样对于方程（4），如果能通过某种办法求出 $\{\bar{R}\}$，并且使其满足接触状态的定解条件和不等式条件，则由方程（4）即可求得弹性体的位移场。上述分析也适用于增量分析的任一增量时段。

2．关于接触点的相对量方程

方程（2）和（4）可以写成统一的形式

$$[K]\{X\}=\{p\}+\{\bar{Y}\} \tag{5}$$

其中，$[K]$ 表示 $[K_1]$ 或 $[K_2]$，$\{X\}$ 表示 $\{T\}$ 或 $\{u\}$，$\{\bar{Y}\}$ 表示 $\{\bar{Q}\}$ 或 $\{\bar{R}\}$。

由方程（5）解得

$$\{X\}=[K]^{-1}\{p\}+[K]^{-1}\{\bar{Y}\} \tag{6}$$

由式（6）求出成对接触点的关于 $\{X\}$ 的差，即求得关于接触点的相对量方程

$$\{\Delta X\}=\{\Delta p\}+[FA]\{Y\} \tag{7}$$

其中，$[FA]$ 称为关于 $\{Y\}$ 的柔度阵，它是对称的，可由方程（5）令 $\{p\}=0$ 在每对接触点分别作用一对单位接触热流量或接触内力求得。$\{\Delta p\}$ 是由已知的广义结点热流量或广义结点力在各接触点产生的相对量。方程式（7）按接触传热和弹性接触的定解条件可进一步表示成不同形式。

对于接触传热状态为

$$\{\Delta T\}=[FA]\{Q\}+\{\Delta p_T\} \tag{8}$$

由于温度刚度矩阵不会出现奇性，因此〔FA〕可以直接求得。

对于弹性接触状态，方程（7）尚需加入初始的相对间距 ε_0（ε_0 为正值是表示间隙，负值表示过盈），为了代入接触状态的定解条件，还要把方程（7）按接触边界的外法线方向进行转轴，在文献〔1〕中有详细的推导，最后得

$$\{\Delta u\}=[FB]\{R\}+\{\Delta p\}+\{\varepsilon_0\} \tag{9}$$

相应的可以建立该方程的增量形式

$$\{\Delta u_i\}=[FB]\{r_i\}+\{\Delta dp_i\}+\{\varepsilon_{i-1}\} \tag{10}$$

其中，$\{\Delta u_i\}$ 为第 i 级总载荷对应的接触点的相对间距。$\{r_i\}$ 为由第 i 级载荷增量产生的接触内力改变量，$\{\Delta dp_i\}$ 为由第 i 级载荷增量产生的接触点的相对间距改变量，$\{\varepsilon_{i-1}\}$ 为第 $i-1$ 级载荷时，接触点的相对间距。

对于图 3 所示结构，接触面将弹性体分成两个独立部分，其中 Ω_1 体允许产生刚体位移，这时刚度矩阵〔K〕会出现奇性，不能直接求柔度矩阵。为了消除〔K〕的奇性，在 Ω_1 体引入相应的支点，选择的支点应刚好消除〔K〕的奇性，相应于支点又引入新的关于 Ω_1 体的刚体位移向量 $\{u_e\}$，这时方程的个数将少于未知数个数，因此，再补充整体平衡条件并且恰好与支点个数相同，于是方程（9）由下式代替

$$\left.\begin{aligned}&\{\Delta u\}=[FB]\{R\}+\{\Delta p\}+\{\varepsilon_0\}-[FC]\{u_e\}\\&[M]\{R\}=\{p_e\}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中，$\{u_e\}$ 为 Ω_1 体引入的支点对应的刚体位移，〔FC〕$\{u_e\}$ 为是由 $\{u_e\}$ 对 Ω_1 体各结点引起的位移。〔FC〕可以由刚体位移公式 $\vec{v}_i=\vec{v}_0+\omega\times\vec{r}$ 求得，〔M〕$\{R\}=\{p_e\}$ 为正体平衡条件，$\{p_e\}$ 为 Ω_1 体已知外力的合力向量。

相应的可以建立方程（11）的增量形式：

$$\left.\begin{aligned}&\{\Delta u_i\}=[FB]\{r_i\}+\{\Delta dp_i\}+\{\varepsilon_{i-1}\}\\&\qquad\qquad-[FC]\{\Delta u_{ei}\}\\&[M]\{r_i\}=\{p_{ei}\}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

其中 $\{\Delta u_{ei}\}$ 为第 i 级载荷增量在 Ω_1 体支点上引起的刚体位移向量，$\{p_{ei}\}$ 为 Ω_1 体第 i 级载荷增量的合力向量。

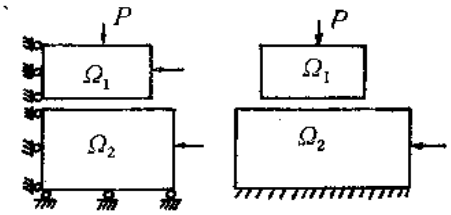


图 3

3．接触点的定解方程

为了求解方程（8）和（9）或（10），（11），（12），应按不同的接触状态代入相应的定解条件，这只需按接触的定解条件对〔FA〕或〔FB〕做相应的修改。

（1）关于接触传热的定解条件：

a）对于连续传热状态：代入 $\Delta T=0$，则方程（8）为

$$[FA]\{Q\}=-\{\Delta p_T\}$$

b）对于夹层传热状态：代入 $\Delta T=\dfrac{\delta}{\lambda_c F}Q$ 则方程（8）为

$$[FA]\{Q\}=-\{\Delta p_T\}+\frac{\delta}{\lambda_c F}\{Q\}$$

即 $$[FA']\{Q\}=-\{\Delta p_T\}$$

其中，$[FA']$ 为 $[FA]$ 的修改矩阵。如计算辐射传热状态，只需将 $\frac{\delta}{\lambda_c F}$ 换成 $\frac{1}{\alpha_c}$。

c）对于夹层绝热状态：代入 $Q=0$ 则对 $[FA]$ 修改即可。

（2）关于弹性接触问题的定解条件：

a）对于连续状态：代入 $\Delta u_j=0$，$\Delta v_j=0$，则方程（9）为 $[FB]\{R\}=-\{\Delta p\}-\{\varepsilon_0\}$ 其中，Δu_j，Δv_j 为第 j 对接触点的法向和切向相对位移分量。

b）对滑动状态：代入 $\Delta u_j=0$，$R_t=\mp f\cdot R_n$，则方程（9）为 $[FB']\{R\}=-\{\Delta p'\}-\{\varepsilon_0'\}$，其中 $[FB']$，$\{\Delta p'\}$，$\{\varepsilon_0'\}$ 为代入 $R_t=\mp f\cdot R_n$ 条件对方程修改后的矩阵。

c）对于自由状态：代入 $R_n=R_t=0$，则方程（9）为 $[FB']\{R\}=-\{\Delta p'\}-\{\varepsilon_0'\}$，其中 $[FB']$，$\{\Delta p'\}$，$\{\varepsilon_0'\}$ 为代入 $R_n=R_t=0$ 的修改矩阵。

如果以（10）或（11）或（12）为定解条件，对式（9）也做如上的修改。

通过上述对假定接触状态的定解，可以求得对应这种接触状态的解。当然这个解应满足相应的判定条件，否则应按判定条件修改接触状态和定解条件重新求解。

现在我们已将问题归结到对两个凝缩阵 $[FA]$ 和 $[FB]$ 的修正和求解上，因此尽管叠代的次数很多，求解的花费也不增加多少。

4．凝缩阵的求法

为了更有效的提高有限元混合法的效率，相应的改进了求解影响系数阵的解法。在求影响系数阵时，总刚度阵 $[K]$ 三角化后，只需对接触点逐对按单位未知向量回代求解，对于某对接触点的单位未知向量除在接触点位置外都是零元素，如果把回代过程的零运算和与接触点无关的场运算消除，则可以大大减少计算量，尤其是在接触点号排得较大时效果更佳。如图 4 所示，“起点号”表示作用单位未知向量的小的接触点号，“最小点号”表示已回代过的接触点中最小的点号，求得“起点”和“最小点”后，回代就被限制在这个区间之内，因此计算量大大减少。

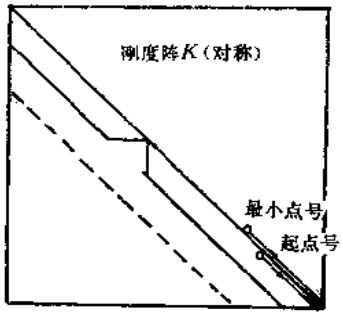


图 4

附带说明一下，对于两个接触体，由于被接触边界分成两个部分，因此可以使总刚度阵的平均带宽大为降低，如图 4 所示，虚线表示无接触边界所需的存贮，实线表示有接触边界所需的存贮，显然这对刚度阵的分解和回带都会带来很大好处。这样用混合法计算矩阵 $[FA]$ 和 $[FB]$ 的花费已由总刚度阵的减少而节省下来，因此按有限元混合法计算接触问题可与计算无接触连续体的花费相当。

五、数 值 计 算

1．钢轴，铝套的接触传热分析

我们取一个钢轴铝套模型进行耦合热弹性接触分析，模型尺寸及边界条件如图 5 所示，钢轴的弹性模数 $E_1=2.1_{10}6\text{kg/cm}^2$，泊松比 $\mu_1=0.3$，热传导系数 $\lambda_1=0.375$ 卡/厘米·秒·度，热膨胀系数 $\beta_1=13_{10}-6$(1/度)；铝套的弹性模数 $E_2=0.72_{10}6\text{kg/cm}^2$，热传导系数

$\lambda_2=0.089$ 卡/厘米·秒·度，热膨胀系数 $\beta_2=21_{t_1}-6$ (1/度)。当其受热膨胀后，由于铝套温度高且热膨胀系数大，因此必然出现间隙，我们分别假定间隙中充进不同介质，如导热系数 $\alpha_c=0.0003$ 卡/厘米·秒·度（相当于油介质）及 $\alpha_c=0$ 的介质（即绝热情况）。按耦合热弹性接触分析，计算的温度分布如图 6 所示，并且与假定的连续状态做了比较，显然温

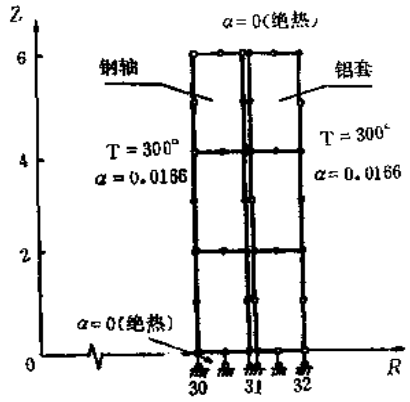


图5 钢轴铝套

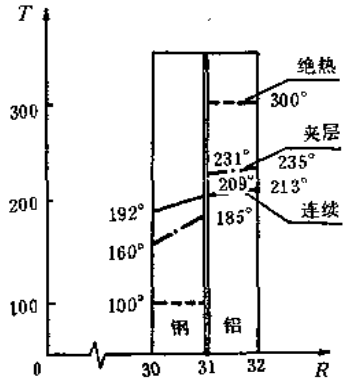


图6 温度分布

度分布的差异是很大的。钢轴与铝套之间的间隙 δ 为：当假定是连续状态时 $\delta=0$；夹层传热时 $\delta=0.08$cm；绝热时 $\delta=0.155$cm（计算的值与理论值一致）。

2．组合式活塞的综合分析

与大连内燃机车研究所协作，对组合式活塞先后按三角形常应变单元（共分 428 个单元，327 个结点，18 对接触点）和八结点四边形等分元（共分 53 个单元，243 个节点，15 对接触点）进行了综合分析，分别考虑气体压力，惯性力，温度应力及其各种组合，并进一步对过盈配合进行分析，结果是可靠的，现取其中几个典型情况说明一下。

a）气压作用：取顶部压力 120kg/cm² 并将计算结果（图 7）与实测结果做比较，结果

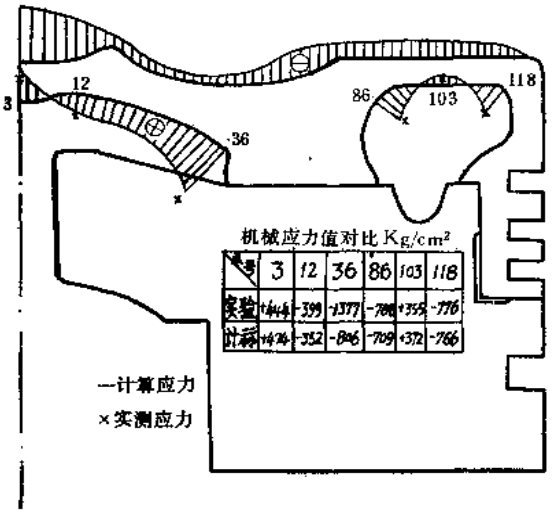


图7 组合活塞机械应力

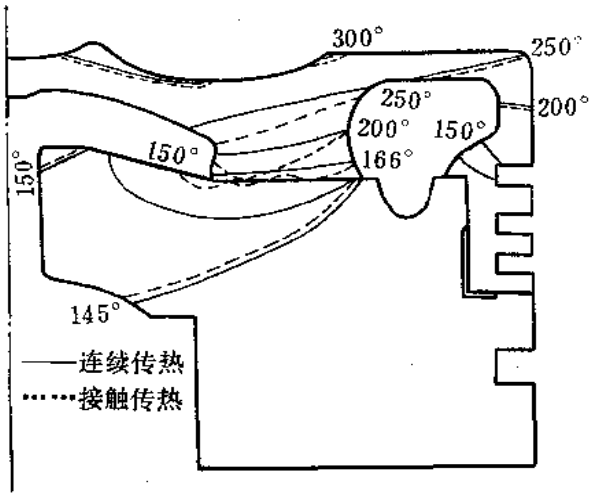


图8 连续传热和接触传热的温度分布

相当吻合。

b) 过盈分析：对靠过盈预紧的组合式活塞进行分析，比较不同过盈量对裙部应力的影响。

c) 接触传热：对组合式活塞仅在热负荷作用下分别按接触传热条件计算温度场和按假定连续状态计算温度场并做比较（图 8），温度分布的改变直接影响应力分布和变形，因此接触传热条件是不能忽视的。

对大连内燃机车研究所董必琅、臧权同志给予的协作和支持谨致谢意。

参 考 文 献

〔1〕陈万吉，大连工学院学报，2 (1979)，14—21。

〔2〕Francavilla, A. and Zienkiewicz, O. C., *Int. J. num. Meth. Enging*, **9** (1975)，913—924。

〔3〕冈本纪明，日本机械学会论文集，**473**，43，昭和 52 年 10 月。

〔4〕Fredriksson, B., *Comput. and struct.*, **6**, 4/5 (1976)，281—290。

〔5〕Tsuta, T. and Yamaji, S., Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis Proceedings of the 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, 178—194。

〔6〕吕和祥等，大连工学院学报，3(1973)，59—86。

〔7〕中国科学院计算所三室，水利水电工程应用电子计算机资料选编，水利电力出版社 (1977)，82—103。

〔8〕Chu, S. C., U. S. Army Weapons Command Technical Report, RE. TR71-37 (AD726370) (1971)。

〔9〕Mnxeeb, M. A. 著，王补宣译，传热学基础，高等教育出版社 (1954)，北京。

〔10〕尹泽勇，刘修禾，航空学报，3(1979)。

弹塑性接触问题的有限元分析

刘元杰　徐福娣
（郑州机械研究所）

前　言

机械产品中的接触体的应力和变形分析是一个重要的课题。随着电子计算机以及有限元法的迅速发展，国外从七十年代初开始用有限元法进行接触应力分析。近几年来，还进行了接触冲击计算，裂纹面接触的断裂力学计算，弹塑性压痕问题计算等。国内在弹性接触分析方面也作了不少工作，但在弹塑性接触问题的有限元分析方面，国内尚未发表这方面的文章。

本文用载荷增量理论和有限元法对小位移、小应变的弹塑性接触问题进行了计算分析。在接触计算中，采用凝缩叠代法，计算速度大大提高。在接触条件分析中，建立了“过渡边界”条件，使得在几个自由点对同时进入接触状态时，也不引起过大的误差。在塑性计算中，采用了一阶自校正法，并考虑了合理控制载荷级大小，以尽量减小塑性与接触的耦合效应。

依此，我们编制了EPC程序，可对小位移、小应变下的二维弹塑性接触问题进行计算。程序对有理论解的各类弹性接触问题及接触面不变的弹塑性接触例题的计算结果表明精度是好的。

本文假定，在弹性状态下，应力、应变满足胡克定律。在塑性状态下，服从Mises初始屈服条件和Prandtl-Reuss流动法则，不考虑鲍氏效应。接触面上的摩擦力服从库仑摩擦定律。塑性判别条件采用等效应变关系式 $\varepsilon_i \geqslant \varepsilon_s$。

一、接　触　分　析

1．座　标　系

假定接触系统由接触体 A、B 组成（图1），以 i_2、j_2 点对为例，局部座标系为 nj_2s，n 是 B 的外法向。此座标系与 i_2 点共用。

在整体座标系下的刚度阵和右端项形成后，对所有的可能接触点对，将参考于整体座标系的量转换到局部座标系，而其他点仍采用整体座标系，即整体座标系与局部座标系混合使用。

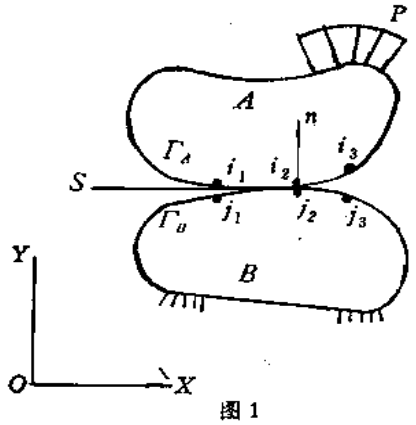


图1

2．接触问题的有限元计算模型

本文采用八节点等参元。为了扩大解题的规模，采用分块解法。将接触物体沿着接触面上的节

点 i_1、i_2…分为 A、B 两块（图 1）。节点编号次序如下：先编 A 的内点，然后依次编 A 的可能接触点 i_1、i_2…，接触点对的相互作用力（或相对位移量）P_1、P_2…，B 的接触点 j_1、j_2…，最后编 B 的内点。由于节点编号的以上规定，在程序中，对物体 B 的节点号进行转换，变换后的点号 $L'=KE-L+1$，其中 KE 为节点总数，L 为原节点号，即把节点号从大到小重新排列。经过转换，B 的编号顺序与 A 完全相同，因此在一系列过程调用时，都可以一致，比较方便。

3．接触边界条件

下面给出二维问题的接触点成对情况下的接触条件：

设在这一级载荷增量作用下，接触体 A、B 的相互作用力增量、位移增量分别为 ΔR_{ak}、ΔR_{bk}、Δu_{ak}、Δu_{bk}，相对位移量为 Δl_k。

（1）自由边界

$$\Delta R_{ak}=\Delta R_{bk}=0$$

$$-\Delta u_{ak}+\Delta u_{bk}+\Delta l_k=0 \qquad (k=n,\ s)$$

（2）连续边界

$$\left.\begin{aligned}&\Delta R_{ak}=-\Delta R_{bk}=\Delta R_k\\&-\Delta u_{ak}+\Delta u_{bk}=\delta_k\end{aligned}\right\} \qquad (k=n,\ s)$$

δ_k 取负值为初始过盈量。它仅在初始状态时才取值，在以后的计算中取 $\delta_k=0$。

（3）滑动边界

$$\Delta R_{an}=-R_{bn}=\Delta R_n \qquad \Delta R_{as}=-\Delta R_{bs}=-\Delta R_s$$

$$-\Delta u_{an}+\Delta u_{bn}=\delta_n \qquad -\Delta u_{as}+\Delta u_{bs}+\Delta l_s=0$$

这里 $\Delta R_s=\pm f\cdot\Delta R_n$（$f$ 为摩擦系数），其正负号的选取与上一步（t 级载荷时）计算的摩擦力方向一致。以数学式表示如下：

$$\Delta R_s=F_2\cdot f\cdot\Delta R_n$$

$$F_2=\begin{cases}\operatorname{sign}(\Delta l_s^{(t)}) & t\text{ 级载荷时为滑动}\\ -\operatorname{sign}(\Delta R_s^{(t)}) & t\text{ 级载荷时为连续}\end{cases}$$

（4）过渡边界

$$\left.\begin{aligned}&\Delta R_{ak}=-\Delta R_{bk}=\Delta R_k\\&-\Delta u_{ak}+\Delta u_{bk}=\delta_k\end{aligned}\right\} \qquad (k=n,\ s)$$

我们把在一级载荷增量作用下，从自由状态变为接触状态的边界段叫做过渡边界。

因接触面的初始间隙量是影响接触面压力分布的关键因素，而过渡边界反映了接触面间隙量的变化及接触边界扩展的规律，因此提高了接触计算的精度和速度。

4．接触判断条件

加载前	加载后	判别式
自由	自由	$\delta n+\Delta l_n>0$
	过度	$\delta n+\Delta l_n<0$
连续	自由	$R_n<-\varepsilon$
	连续	$R_n>-\varepsilon$；$\lvert R_s\rvert<f\cdot R_n$
	滑动	$R_n>-\varepsilon$；$\lvert R_s\rvert>f\cdot R_n$ 并且 $\lvert R_s\rvert>f\cdot\varepsilon$
滑动	自由	$R_n<-\varepsilon$，
	连续	$R_n>-\varepsilon$；$\Delta R_s\cdot\Delta l_s<0$
	滑动	$R_n>-\varepsilon$；$\Delta R_s\cdot\Delta l_s>0$

表中 ε 是考虑舍入误差而引进的一个小数。而 ΔR_s 与前面描述的规定相同。

5．凝缩迭代计算方法

按有限元的计算格式形成接触体 A 的刚度阵和右端项后，消去 A 的内点得

$$\overline{\mathbf{K}}_{aa}\cdot\Delta u_{ac}=\Delta\overline{\mathbf{P}}_a+\Delta R_c \tag{1}$$

其中 $\overline{\mathbf{K}}_{aa}$、$\Delta\overline{\mathbf{P}}_a$ 为 A 的消元后的组合单元刚度矩阵及右端项。Δu_{ac}、ΔR_c 为接触点的位移及相互作用力。

同理对接触体 B 有

$$\overline{\mathbf{K}}_{bb}\cdot\Delta u_{bc}=\Delta\overline{\mathbf{P}}_b-\Delta R_c \tag{2}$$

把 ΔR_c 作为独立的未知量移到方程组左边，通过接触边界条件把式（1）、（2）组装起来得

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{aa} & \begin{matrix} C_n^1 & 0 \\ C_{ns} & C_s^1 \end{matrix} & 0 \\ \begin{matrix} C_n^5 & 0 \\ 0 & C_s^5 \end{matrix} & \begin{matrix} C_n^3 & 0 \\ 0 & C_s^3 \end{matrix} & \begin{matrix} C_n^4 & 0 \\ 0 & C_s^4 \end{matrix} \\ 0 & \begin{matrix} C_n^2 & 0 \\ -C_{ns} & C_s^2 \end{matrix} & \overline{\mathbf{K}}_{bb} \end{bmatrix}_{6L_1\times 6L_1} \begin{bmatrix} \Delta u_{acn} \\ \Delta u_{acs} \\ \Delta R_n \\ \Delta R_s \\ \Delta u_{bcn} \\ \Delta u_{bcs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\overline{\mathbf{P}}_{an} \\ \Delta\overline{\mathbf{P}}_{as} \\ \delta_n \\ \delta_s \\ \Delta\overline{\mathbf{P}}_{bn} \\ \Delta\overline{\mathbf{P}}_{bs} \end{bmatrix}_{6L_{11}\times 1} \tag{3}$$

这里 L_{11} 为接触点对数(式（3）是以 $L_{11}=1$ 来说明问题)。C_n^i、$C_s^i(i=1\text{—}5)$、C_{ns} 为接触元素，它代表了不同的接触边界条件。接触元素的值见下表：

接 触 元 素 表

接触状态	$C_n^i(i=1\sim5)$					$C_s^i(i=1\sim5)$					C_{ns}	δ	
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5		δ_s	δ_n
自　由	0	0	1	1	−1	0	0	1	1	−1	0	0	0
连　续	−1	1	0	1	−1	−1	1	0	1	−1	0	δ_s	δ_n
滑　动	0	0	1	1	−1	−1	1	0	1	−1	$\pm f$	0	δ_n

式（3）即为凝缩后的解接触问题的方程组。求解方程组（3），除了得到接触点的位移外，按求解时给定的接触状态，还可解得相对位移 Δl_k 或相互作用力 ΔR_k。根据解得的未知量，对接触边界进行判断、修正，然后更换方程组（3）的接触元素，重复以上过程，直至所有的可能接触点对都与求解时给定的接触状态相符为止。这就是解接触问题的叠代过程。

可以看出，用凝缩叠代计算方法，因解接触问题而增加的工作量，就是多次求解方程组（3）。当接触点对数不太多时，方程组（3）的阶数较低，增加的工作量不多，所以凝缩叠代的计算方法大大提高了解接触问题的计算速度。

二、塑 性 分 析

关于塑性理论分析的文章很多，这里仅对一阶自校正法进行分析。

在依据增量理论的弹塑性有限元分析中，总应力是由应力增量累加而成的，该应力一般不满足平衡方程，因而存在一个力的不平衡量。由此引起的误差随着增量过程不断累积，致使数值解偏离精确解。为了消除这种偏离的趋势，Hofmeister 等建议一种平衡校正法，将总应力引进求解过程，由此求出不平衡力修正项，对按外载荷形成的右端项进行修正。

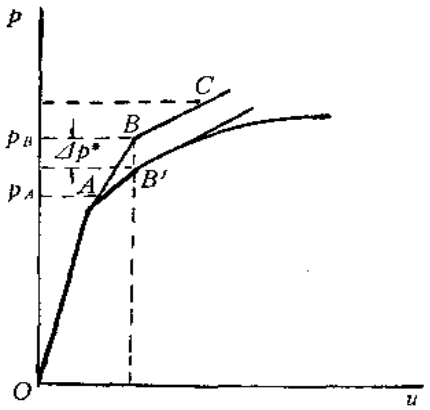


图 2

一阶自校正法的数学表达式可由虚功原理导出。

设 t 级载荷时（相当于图 2 中 B 点）的应力、体积力、表面力分别为 σ_{ij}^b、$\overline{F}_i^b$、$\overline{T}_i^b$，Δu_i、$\Delta\varepsilon_{ij}$、$\Delta\sigma_{ij}$、$\Delta\overline{F}_i$、$\Delta\overline{T}_i$ 分别为由 t 到 $t+1$ 级载荷时的位移、应变、应力、体力、面力的增量。

由虚功原理可得：

$$\int_v [(\sigma_{ij}^b+\Delta\sigma_{ij})\delta\Delta\varepsilon_{ij}-(\overline{F}_i^b+\Delta\overline{F}_i)\delta\Delta u_i]dv$$

$$-\int_s(\overline{T}_i^b+\Delta\overline{T}_i)\delta\Delta u_i ds=0 \qquad (4)$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i}) \qquad (5)$$

将式（5）代入式（4）并积分，经整理得

$$-\int_v(\Delta\sigma_{ij,j}+\Delta\overline{F}_i)\delta\Delta u_i dv+\int_s(\Delta\sigma_{ij}-\Delta\overline{T}_i)\delta\Delta u_i ds$$

$$+\int_v\frac{1}{2}\sigma_{ij}^b(\delta\Delta u_{i,j}+\delta\Delta u_{j,i})dv-\int_v\overline{F}_i^b\delta\Delta u_i dv-\int_s\overline{T}_i^b\delta\Delta u_i ds=0 \qquad (6)$$

式（6）中，第一项是平衡方程，第二项是力边界条件，后三项是不平衡力。

考虑不平衡力的有限元基本方程是

$$[K^b]\{\Delta u\}=\{\Delta P\}+\{\Delta P^*\}$$

这里$\{\Delta P\}$为从 t 到 $t+1$ 级载荷的外载荷增量。$\{\Delta P^*\}$为不平衡力修正项。

$$\{\Delta P^*\}=\{P^b\}-\sum_1^n\int_e[B]^{eT}\{\sigma_{ij}^b\}dv$$

其中$\{P^b\}$为 t 级载荷。$\sum_1^n$为对所有元素求和。

采用一阶自校正法，在每级增量载荷下要重新形成刚度阵，同时对右端项进行不平衡量校正，因此即使不进行叠代也可得到精度较好的结果。在较大范围屈服的情况下，要获得相同精度的结果，一阶自校正法的计算速度较初应力法、变刚度法为快。

三、载荷增量的确定

在有限元的载荷增量理论中，载荷增量级的大小直接关系到计算的精度和速度。本文由

于引进了过渡边界条件，采用了一阶自校正法及弹塑性过渡区的加权弹塑性刚度阵，因此在弹性接触计算或单纯的弹塑性应力分析时，对载荷增量级的限制不很严格。

对于弹塑性接触计算，我们以塑性叠代计算作为外层循环，在塑性应力变形分析的基础上进行接触叠代计算（内层循环）。在叠代过程中，假定接触状态发生了变化，而应力场仍不变。但实际上接触状态的变化会引起应力场的变化。因此为了减少塑性与接触的非线性耦合效应，使塑性应力状态不致于因接触边界的变化而发生过大的变化，要求载荷增量 ΔP_s 满足

$$\Delta P_s \leqslant \Delta P_c$$

ΔP_c 为仅使一个接触点对状态发生变化的载荷增量。可按各接触点对的接触状态，根据上一步求解的未知量，用线性的方法确定。

以在 t 到 $t+1$ 级载荷时，由自由变为接触的点对为例，说明 ΔP_c 的确定如下：

$$\frac{\Delta P^{(t)}}{\Delta P^{(t+1)}} = \frac{\Delta l_n^{(t)}}{\Delta l_n^{(t+1)}} = \frac{\Delta l_n^{(t)}}{-\delta_n^{(t)}} \qquad (7)$$

其中 $\delta_n^{(t)}$ 表示 t 级载荷时的间隙量，Δl_n 表示法向相对位移量，角标 (t)、$(t+1)$ 表示载荷级。由式（7）就可确定 $\Delta P^{(t+1)}$，考察所有的接触点对后，取最小值即为 ΔP_c。

四、计算精度分析

1．弹性接触计算

以两个长圆柱体接触为例，其上部受集中力作用。按平面应变计算。计算时划分为58个元素，217个节点，可能接触点7对。

图4、图5表明了有限元计算结果与理论解的比较。计算误差为5%。

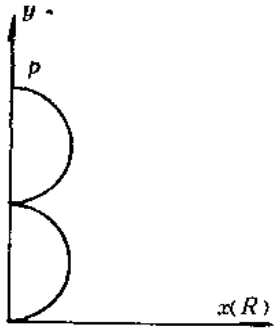


图3

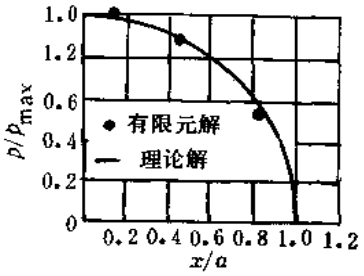


图4 接触面压力分布

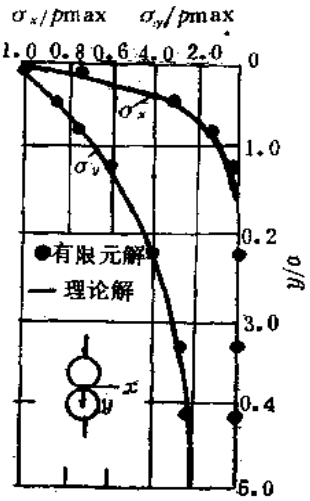


图5 沿 y 轴的应力分布

2．过渡边界的引入对计算精度、速度的影响

以球与球弹性接触计算为例，采用上述同样的计算网格，按轴对称问题计算。

本例由于载荷增量较大，在一级载荷增量下，几对自由点同时进入接触状态。由图6可见，引进过渡边界条件后，可得到较好的精度，不进行过渡边界处理则不然。因此通常在不进行过渡边界处理时，为保证一定的精度，需限制载荷增量以使接触点逐点扩展，因此影响到计算速度。

3．弹塑性接触例题分析

我们对无限长厚壁套筒在内压力作用下的实例进行了分析计算。

计算模型如图 7，C-C 断面为接触面。材料为理想塑性。　　$E=10^7$PSI　$\upsilon=0.3$　$\sigma_s=2.0\times10^4$PSI

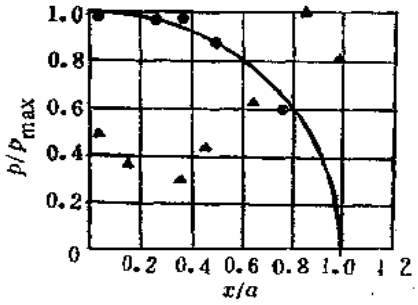


图 6

— 理论解
• 有限元解（引进过渡边界）
▲ 有限元解（未引进过渡边界）

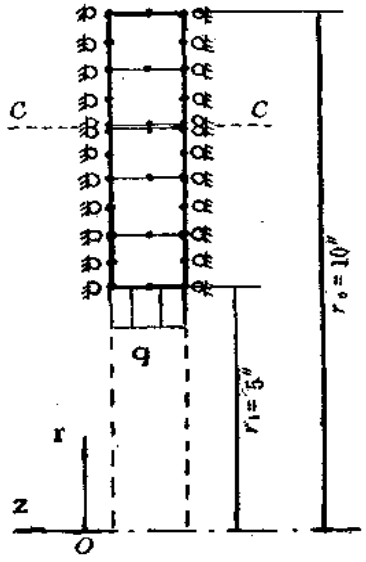


图 7

计算结果：开始进入屈服（$r_s=5.0''$）的内压约为 8640PSI，屈服半径 $r_s=5.11''$ 英寸，内压为 9000PSI，崩溃压力约为 16000—17000PSI。

图 8 至图 10 是位移和应力计算结果。由图 8 可见，在相同的载荷增量下，一阶自校正法（不叠代）比变刚度法（不叠代）精度要好得多。

本计算中，接触面处于连续状态，其计算结果与连续体是一致的。

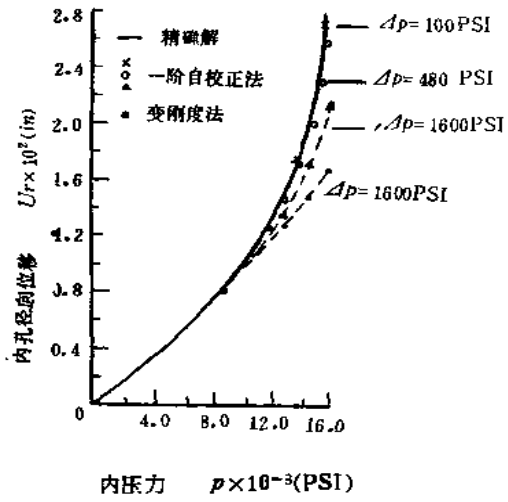


图 8

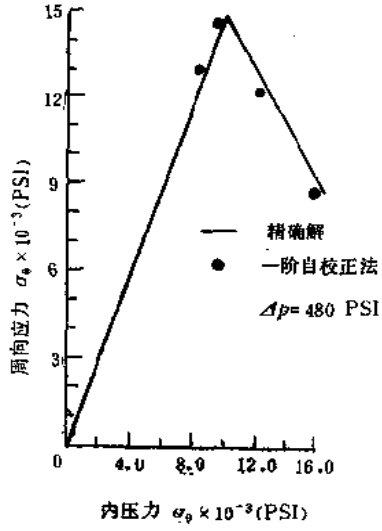


图 9

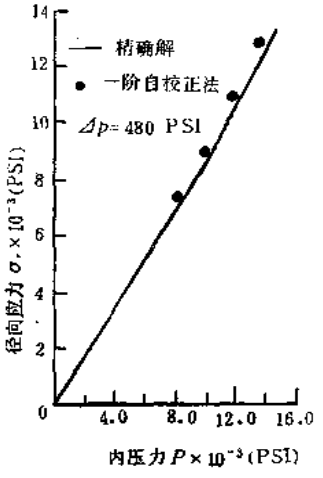


图 10

参 考 文 献

〔1〕Tsuchiura-shi, *Int. J. num. Meth. Engng.*, **14**, 3(1979), 337—357.

〔2〕Haisler, W. E. and Stricklin, J. A., Computational methods for solving nonlinear structural mechanics problems.

〔3〕复旦大学数学系，有限元素法续讲.

〔4〕郭仲衡，二维弹性接触问题有限元分析的混合标架——广义子结构法（1978）.

〔5〕陈万吉，用有限元混合法分析弹性接触问题.

〔6〕Subhash. C. Anand and Hwei-Hwung Shaw, Nonlinear analysis of a nolling contact problem by finite elements.

〔7〕Kalker, J. J., Aspects of contact mechanics.

〔8〕Chan, S. K. and Tuba, I. S., A finite element method for contact problem of solid bodies——part I. Theory and validation.

〔9〕Chan, S. K. and Tuba, I. S., A finite element method for contact problems of solid bodies——part Ⅱ. application to turbine blade fastenings.

〔10〕Spilker, R.L. and Pian, T. H. H., Hybrid-stress models for elastic-plastic analysis by the initial-stress Approach, *Int. J. num. Meth. Engng.*, **14**, 3 (1979), 359—378.

〔11〕郑州机械研究所强度室结构组，组合转子弹性接触问题的有限元分析（1978）.

〔12〕郑州机械研究所强度室结构组，轴对称弹塑性有限元应力分析.

〔13〕吴永礼，弹塑性有限元的一些解法比较（1978）.

地面强爆炸近区地运动规律研究

李 荫 藩
（中国科学院计算中心）

张德良 刘育魁 杨秀敏 赵成福 李和娣
（中国科学院力学研究所）

一、前 言

本文研究的地面强爆炸是指弹体中心放在岩体表面上进行的一种爆炸方式。在爆炸荷载作用下岩体被汽化、液化、冲击压缩、变形和抛掷，在岩体表面形成一个巨大的弹坑。而且，在岩体中形成一个很强的地激波。这个地激波对岩体和地下工程结构产生严重的破坏作用。因此，研究地面强爆炸地运动规律，无论在理论上还是在实践上，都具有重要意义。

本文采用流体模型，用数值方法对地面强爆炸近区地运动规律进行了系统研究。

二、物理模型和假设

地面强爆炸是一个极为复杂的物理力学过程。为了便于解决这一问题，作如下简化。

1．流体模型假设[1] 弹体在瞬时起爆后，弹体附近的岩石被加载到超高温、超高压的汽化和液化状态。即使在稍远一些的地区，由于地激波的波后压力远远大于岩石剪切强度，岩石的强度效应仍可以忽略不计，可以把岩体介质看作是流体。

2．弹体简化 我们假设弹体和周围介质都是同样的岩体，它具有和真实弹体相同的能量，而且岩石弹体的重心正处在地表面上。

3．初始能量分配 关于初始能量分配我们作如下简化：

（1）弹体全部能量的一半进入下半空间岩体中[1]，其中80%是机械能，并且在机械能中内能和动能各占一半。

（2）爆炸产物以爆心为中心，呈辐射状向外运动。

4．空气激波处理 弹体瞬时起爆后，一半能量进入空气中形成火球和空气激波，另一半进入岩体中形成很强的地激波。但是，在弹坑形成初期，飞向空气中的岩石，又把绝大部分的能量带回空气中。因此，在计算空气激波强度时，认为弹体全部能量进入空气。

5．计算中不考虑粘性、热传导和重力作用。

三、基 本 方 程

欧拉座标下，二维轴对称流体动力学方程组是

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\rho\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\boldsymbol{u}+\mathrm{grad}p=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\rho+\rho\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0 \tag{2}$$

$$\rho\frac{\partial e}{\partial t}+\rho\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}e+p\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0 \tag{3}$$

$$E=e+\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(v,\ u);\qquad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(r,\ z) \tag{5}$$

其中 t 是时间（毫秒），r 和 z 是欧拉座标下矢径 $\boldsymbol{r}$ 的径向分量和轴向分量（米），ρ 是密度（吨/米^3），v 和 u 是速度矢量 $\boldsymbol{u}$ 的径向和轴向速度分量（米/毫秒），p 是压力（万巴），e 是单位质量内能，E 是单位质量总能（米^2/毫秒^2）。采用花岗岩状态方程

$$P=P_H+\frac{\Gamma}{V}(e-e_H) \tag{6}$$

其中

$$P_H=\begin{cases}\rho_0 a\left[\dfrac{a(\rho-\rho_0)}{\rho-b(\rho-\rho_0)}\right]+\rho_0 b\left[\dfrac{a(\rho-\rho_0)}{\rho-b(\rho-\rho_0)}\right]^2 & \rho>4.348\\ A(\rho-\rho_0)+B(\rho-\rho_0)^2 & 2.7\leqslant\rho\leqslant 4.348\\ 0 & \rho<2.7\end{cases} \tag{7}$$

$$e_H=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a(\rho-\rho_0)}{\rho-b(\rho-\rho_0)}\right]^2 & \rho>4.348\\ \dfrac{1}{2}[A(\rho-\rho_0)+B(\rho-\rho_0)^2]\left[\dfrac{1}{\rho_0}-\dfrac{1}{\rho}\right] & 2.7\leqslant\rho\leqslant 4.348\\ 0 & \rho<2.7\end{cases} \tag{8}$$

式中 $\frac{\Gamma}{V}=2.7$；$\rho_0=2.7$；$a=2.825$；$b=1.364$；$A=16.29$；$B=2.96$。

四、初始条件和边界条件

初始时刻，设地表面以下半个岩石弹体为圆柱体。它是由图 1 所示六个方格（A，B，C，D，E，F）绕 Z 轴旋转一周而形成的，方格每边边长 0.125 米。对于一千吨 TNT 当量的地面强爆炸，其六个初始网格的初始参数见表 1。

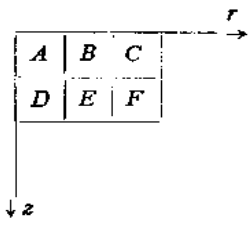


图 1 初始网格示意图

表 1 一千吨当量初始网格的初始参数表

网格编号	初始密度 ρ_0	初始比内能	初始水平速度 v_0	初始轴向速度 u_0
A	2.7	2.8033×10^3	52.946	52.946
B	2.7	2.8033×10^3	71.035	23.678
C	2.7	2.8033×10^3	73.423	14.685
D	2.7	2.8033×10^3	23.678	71.035
E	2.7	2.8033×10^3	52.946	52.946
F	2.7	2.8033×10^3	66.183	39.710

在六个初始网格以外的区域，$p_0=2.7$，$e_0=p_0=u_0=v_0=0$。

在地表面（$Z=0$）应满足如下空气激波载荷的边界条件[1]：

$$\Delta P=\begin{cases}\dfrac{6.2}{1+1.828\times10^{3}t^{1.15}}\left[1+1.6\left(\dfrac{t_s}{t}\right)^{6}\right]\text{万巴} & t\geqslant t_s\\ 0 & t<t_s\end{cases}\qquad(9)$$

$$\Delta t_s=\begin{cases}5.56\times10^{-6}+5.8\times10^{-10}R^{3.0} & 0\leqslant R\leqslant4.44\\ \dfrac{5.8\times10^{-10}R}{1+1.1384\times10^{-6}R^{2.5}} & 4.44\leqslant R\leqslant15.9\\ 5.06\times10^{-4}R^{2.5} & R>15.9\end{cases}\qquad(10)$$

其中 t_s 为空气激波到达半径 R（米）时的到达时间(毫秒)。在对称轴上，应满足$v=0$。

五、计 算 方 法

计算网格如图 2 所示，我们在计算中基本上采用了 FLIC 方法，但结合本问题对该方法作了一些改进[3]，差分公式，伪粘性项使用方式，都与文献〔2〕有所不同。我们从整数步差分方程出发，用 Fourier 方法讨论了 FLIC 方法的线性稳定性，得到了符合实际情况的稳定性条件。

在地面附近格子内密度可能是很小的，可能引起流动过分加速，于是可能使网格内出现负质量，为了避免这点我们使这种格子具有最高压力值的邻格的速度和比内能值。

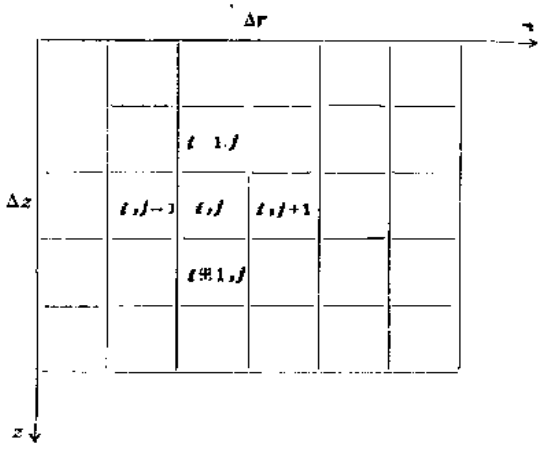


图 2 计算网格

六、计算结果分析和讨论

我们对一千吨 TNT 当量的弹体在花岗岩表面的爆炸进行了数值计算，根据数值结果概括起来可得如下结论。

1．地面强爆炸的地激波传播特点 从图 4 可见，任何时刻地激波在对称轴附近都是接近于球形的，但略为扁平，而且波阵面也不是一个等压面。从图 5 也可以看到峰值压力等值线在对称轴附近是相当平缓的，在偏离对称轴 45° 线方向（以下简称对角线）附近距爆心的距离最远。

地面强爆炸时岩体中峰值压力沿对称轴方向衰减是很快的。从图 6 中可以得到衰减指数大致有如下关系：

峰值压力（千巴）	10^4	10^3	10^2	10
深　　度（米）	0.6	1.7	4.6	15
衰减指数	2.6	2.3	2.2	2

由此可见，地面强爆炸和波阵面为球形等压面的、在大于 10 万巴范围衰减指数约为 2

的地下强爆炸相比有着完全不同的特点。

此外，从图 7 中还可发现，在激波后面比内能有第二个峰值现象。这个第二峰值正好发生在速度分界线附近。这一现象的出现和早期地激波引起的高温所带来的高比内能有关。

2．成坑机制分析 分析计算结果，可见形成弹坑主要有以下二个因素。首先是地表面的存在对岩体中高压的卸载作用。在爆炸初始阶段弹体对岩体的直接冲击作用集中了爆炸总能的 40%，且作用在一个极小范围内，而空气中的火球和空气激波传播范围却大得多。因此，造成地下的能量密度和压力远大于地面上的能量密度和压力的现象。例如，空气激波最大峰值压力只有 160 千巴。而地激波峰值压力可达 10^4 千巴以上。因此，岩体中地运动主要是由直接冲击作用产生的。这样岩体质点在地激波作用下产生很大的向下运动速度，但在这个反向压力梯度作用下很快减速，最后获得向上飞散速度，迅速飞出地面。

其次当地激波沿地面向前传播时，它不断地将地面附近的岩体直接挤压，推出地面。从速度图上看，爆心附近的岩体飞散速度大于波阵面附近岩体飞散速度，但后者相应的密度要比前者大，以致抛出地面的岩体质量流（ρu）的最大值位置并不在爆心附近，而是在地激波波阵面所在位置上（见图 8）。随着地激波向外扩展，最大质量流位置也在向外扩展，但最大质量流的绝对值在不断减少。这也正说明了地激波在地面附近的挤压作用。

随着岩体不断抛出地面，岩体中保留的总能量也急剧减少。从图 9 可见，在 0.1 毫秒时，岩体中能量只剩下全部能量的 15%。此时弹体的大部分能量都已重新返回到空气中去了。这说明我们对空气激波的处理是合理的。

如何确定弹坑深度这是极为重要的一个问题。严格说来，由流体模型计算的结果确定弹坑深度是有困难的，也是不可靠的。原因是计算中没考虑岩体强度、重力和岩体反压等因素。这样，岩体在地激波作用下产生的地运动就没有停止下来的因素。但计算中还是可以发现在对称轴上速度分界线传播速度是逐渐减慢的（见图10），到足够长时间后，速度分界线的变化位置就很小了，因此如以速度分界线位置来粗估弹坑深度还是有一定参考价值的。例如，一千吨 TNT 当量弹体在花岗岩表面爆炸，用上述方法估计弹坑深度约为五米，而根据经验规律得到的大约是五米多一些，因此两者十分接近。因没考虑强度影响，当然据此确定弹坑深度只能用作参考。

3．可压缩性影响 为比较不同岩体表面爆炸所产生的地运动规律，我们还计算了石灰岩、凝灰岩情况。从图 11 可见不同岩石的相应曲线有明显的上下层次关系，可压缩性小的岩体相应的曲线要高一些，而可压缩性大的岩体的相应曲线则要低一些。但不同岩石的相应曲线的衰减指数却变化不大。

4．弹体形状影响 为考虑弹体形状对地运动影响，我们计算了不同的初始弹体网格安放形式，如图 3 所示。

计算结果表明，初始网格安放形式仅影响到弹体长度 3—5 倍距离。在这个距离之外，峰值压力衰减曲线完全重合，流场分布图象也十分一致。由此可见，地面强爆炸近区地运动规律对弹体形状是很不敏感的。

5．初始能量分配的影响 为深入研究地面强爆炸初始能量分配对地运动的影响，对不同的初始动能和内能分配比例进行了计算，计算结果见图 12 和图 13。

从这些图可见，除地激波走时曲线外，动能和内能分配比例不同，则峰值压力衰减曲

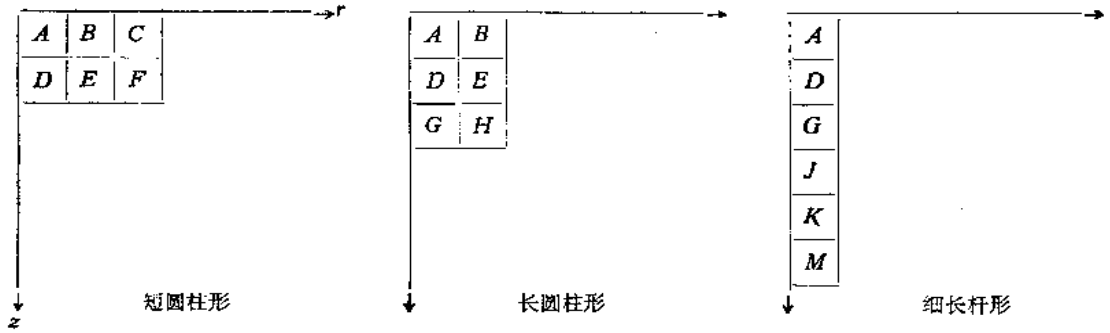


图 3 弹体形状示意图

线。岩体中保留的相对能量衰减曲线以及从岩体中抛出质量曲线都有明显的差别。特别在 10^2 千巴以上地区。动能所占比例越大，曲线位置就越高。动能所占比例越小，曲线位置就越低。全动能曲线最高，全内能曲线最低，两者的峰值压力可相差一倍，例如，在一米远处全动能时峰值压力约为 4×10^3 千巴，而全内能时则约为 2×10^3 千巴。

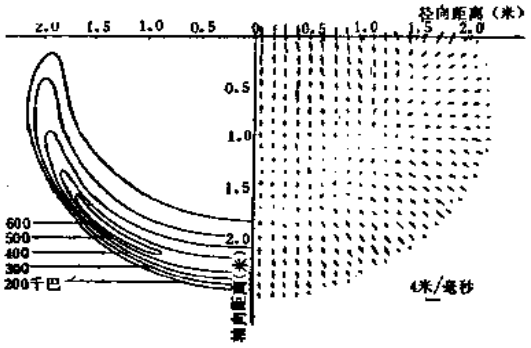


图 4-1 $t=0.178$ 毫秒时刻的压力场和速度场

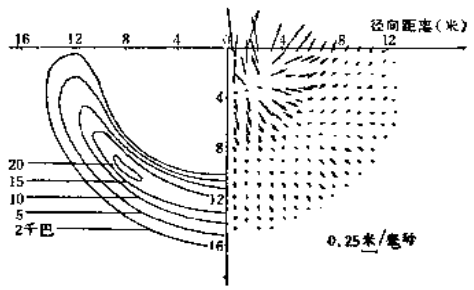


图 4-2 $t=2.80$ 毫秒时刻的压力场和速度场

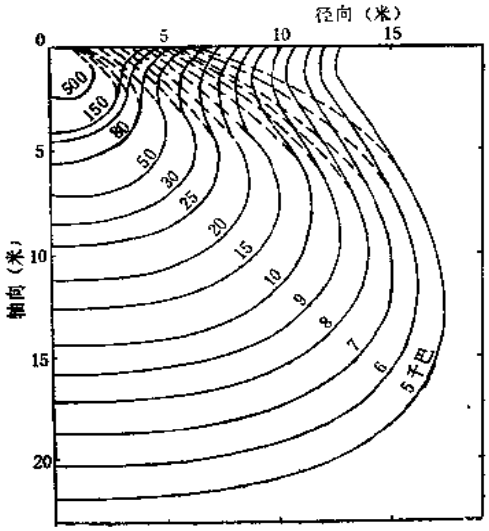


图 5 岩体中峰值压力等值线

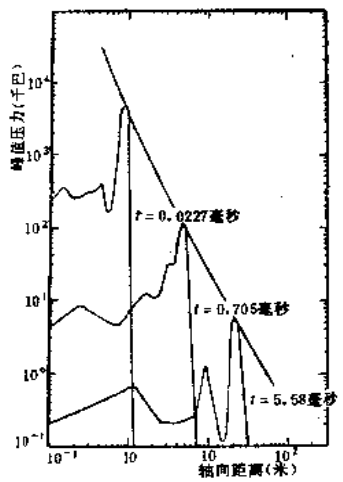


图 6 沿轴向峰值压力衰减曲线及定时压力波形

由此可以得出，地面强爆炸近区地运动不仅和输入到岩体中去的初始总能有关，而且和输入能量的动能和内能分配比例有关。在相同数值动能和内能所产生的地运动中，动能起着更为重要的作用。然而地激波走时曲线则变化不大（见图 12）。

图 14 还给出了对不同能量分配比例，在早期形成激波过程中峰值压力衰减和抛出质量变化规律。可以看出，最初全动能时的峰值压力低于全内能时的峰值压力。但后期全动能时的峰值压力却反而高于全内能时的。其次，由于一开始全动能时只有向下冲击的速度，没有压力存在，所以初始时刻从岩体中抛出的质量要比全内能时所抛出的质量少。但随全动能情况峰值压力逐渐提高，到后期全动能抛出质量要比全内能情况抛出质量更多些。这种变化规律反映了动能和内能对岩体地运动作用的不同特点，也说明了动能比内能的作用更为显著。

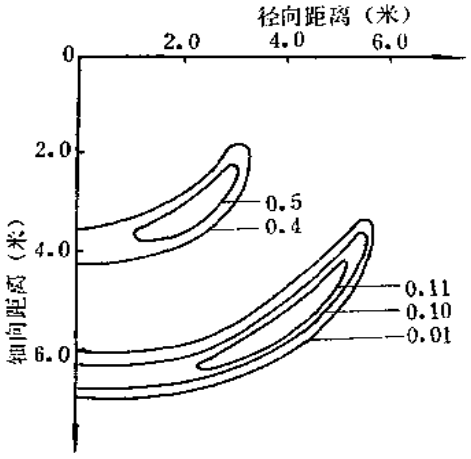
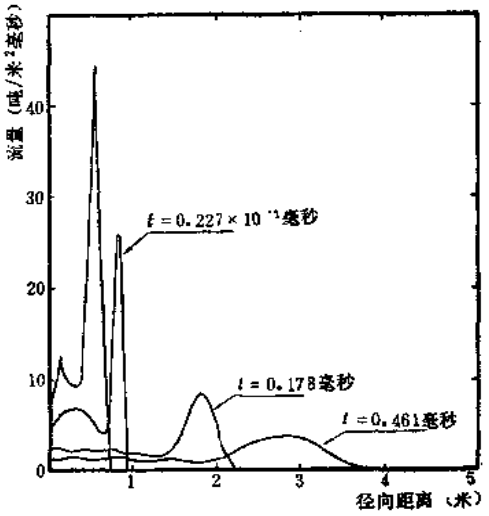


图 7 $t=1.23$ 毫秒时刻的比内能等值线



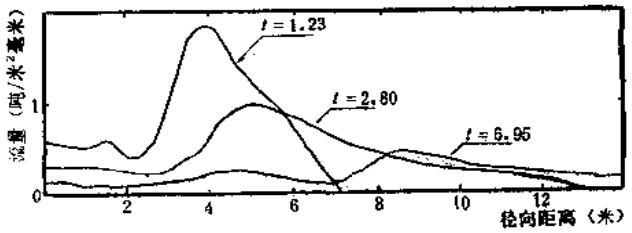


图 8 不同时刻岩体表面飞出质量流（ρu）和距离的关系

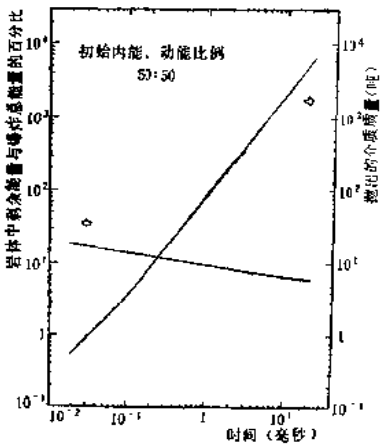


图 9 岩体中的抛出质量和相对能量曲线

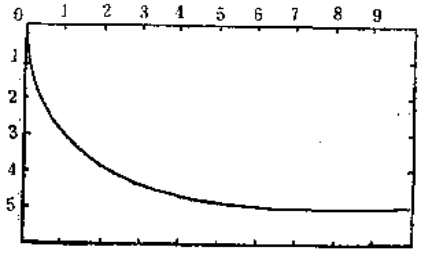


图 10 轴向质点速度分界线和时间的关系

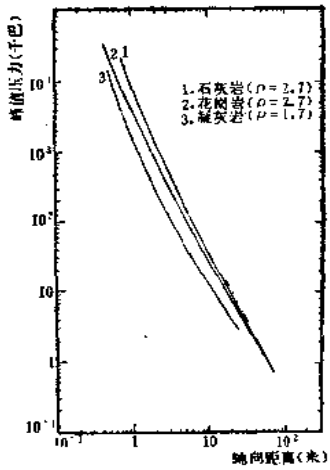


图 11 不同岩体中的峰值压力衰减曲线

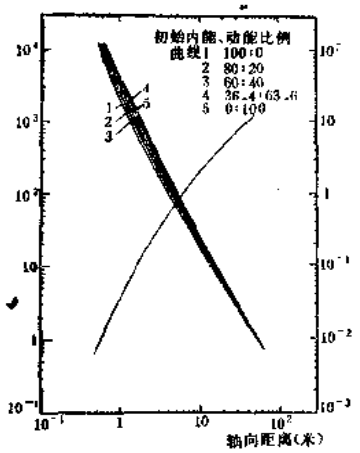


图 12 不同初始能量分配比例轴向峰值压力衰减曲线及地冲击波沿轴向走时曲线

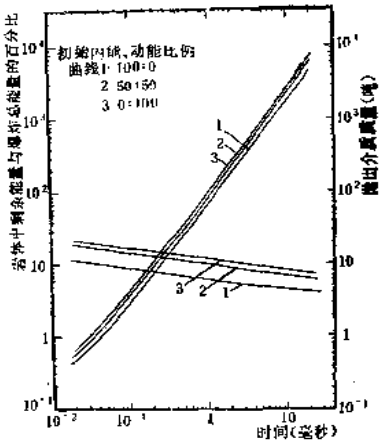
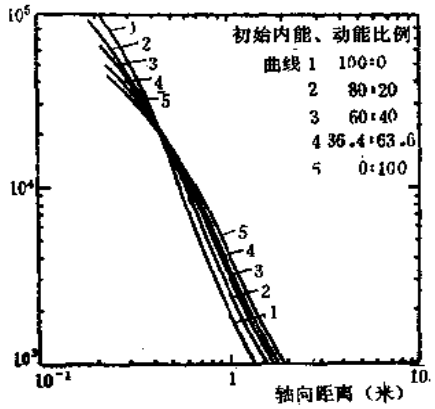


图 13 不同初始能量分配比例的抛出质量和相对能量曲线



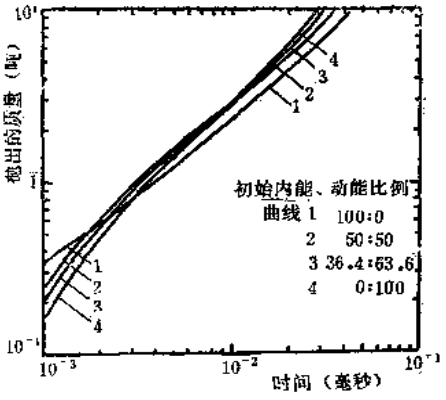


图 14 早期地冲击波形成过程中相应地峰值压力和抛出质量变化的曲线

本工作在力学方面得到郑哲敏先生的指导，数值方法方面得到冯康先生的指导，谨此致谢。

参 考 文 献

〔1〕Brode, H. L., Review of Nucler Weapons Effects. *Ann. Rew. Nucl. Sci.*, 18 (1968), 153.

〔2〕Gentry, R. A., et al., *Journal of computational physics*, 1, 1(1966), 87—118.

〔3〕李荫藩，张德良，刘育魁等，地面强爆炸近区地运动研究总结报告。

用有限元法研究弹塑性波传播问题

苏士功　　倪蔺芬
(中国科学院工程力学研究所)

用有限单元法分析弹塑性波的传播是近几年来有限元发展的一个重要方面。Oden[1]，Biffle[2]等人进行了这方面的研究。本文利用有限元法研究弹塑性波的传播特性，给出了一维波和二维波的计算实例，较详细地分析了塑性波的特点及它与弹性波的差别。

一、材料的力学性质

材料的变形 ε 包括弹性变形 ε^e 和塑性变形 ε^p。弹性变形遵从虎克定律（增量关系）

$$d\varepsilon^e = C^e d\sigma \tag{1-1}$$

塑性变形按照增量理论，利用屈服条件、流动准则和硬化准则，可以得到弹塑性应力—应变的增量关系[3]

$$d\sigma = C^{ep} d\varepsilon \tag{1-2}$$

其中

$$C^{ep} = C^e - \frac{C^e \frac{\partial F}{\partial \sigma}\left(C^e \frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T C^e \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)^T \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p}} \tag{1-3}$$

$F(\sigma, \kappa, \varepsilon^p)=0$ 是屈服函数（塑性势函数），κ 为硬化参数是 ε^p 的函数。

若材料遵从 Von-Mises 屈服条件和等向硬化准则，C^{ep} 可以用下式表示[4]

$$C^{ep}_{ijkl} = (C^e_{ijkl} - 9G^2 h S_{ijkl})/\bar{\sigma}^2$$

其中 G 为剪切模量，E 为杨氏模量

$$h = 2(1+\nu)(1-\zeta)/E[3-\zeta(1-2\nu)] \qquad \zeta = E_t/E$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \qquad \sigma_{kk} = (\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})/3 \qquad \bar{\sigma}^2 = 1.5 \times \Sigma S_{ij} S_{ij}$$

当材料发生卸载时，其变形增量和应力增量的关系与（1-2）式相同。

在动力荷载作用下，结构内一点的变形状态，随时间而变化。它可以用应力增量的变化所引起的屈服面的变化来确定。当 $F<0$ 时，为弹性变形。当 $F=0$ 时，若 $\frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma > 0$，为塑性加载；$\frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma = 0$，为自然加载；$\frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma < 0$ 为卸载。$F>0$ 是不可能产生的变形状态。物体内某一点卸载后，进入二次塑性的判别与初始塑性相同，只需把 κ_0 用卸载前 κ 的最大值来代替即可。各点变形状态的分布，构成了结构内的弹性区、塑性区和卸载区。两个区域交界面的随时间变化，就构成了塑性波和卸载波。

二、修正的切线刚度方程

弹塑性分析中，切线刚度法[5]已被广泛地应用。特别在动力分析中，它比初应力法和初应变法更为有效。考虑剩余节点力影响而修正的切线刚度方程，可以直接从哈米尔顿作用量 L 的增量变分得到

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_v (w-T)\,dv-\int_s g\,ds\right]dt \tag{2-1}$$

其中

$$T=\rho u^T u \qquad g=P^T u \qquad w=\int \sigma^T d\varepsilon$$

ρ 为介质密度；u，$\dot{u}$ 分别为位移和速度向量；σ，ε 为应力、应变向量；P 为边界外力向量。

t 时刻的位移为 u_t，$t+\Delta t$ 时刻的位移为 $u(t+\Delta t)=u_t+\Delta u$。由 $t+\Delta t$ 时刻的哈米尔顿作用量 $L(u_t+\Delta u)$ 对 Δu 变分为零得

$$\int_v \left[\rho(\ddot{u}_t+\Delta\ddot{u})^T\delta\Delta u\,dv+(\sigma+\Delta\sigma)^T\delta\Delta\varepsilon\right]dv=\int_s (P+\Delta P)\delta\Delta u\,dS \tag{2-2}$$

把位移函数代入上式后得到

$$M\Delta\ddot{u}+\kappa_t\Delta u=\Delta R_t+(R_t-M\ddot{u}_t-F_t^e) \tag{2-3}$$

其中

$$M=\int N^T\rho N\,dv, \qquad \kappa_t=\int B^T C_t B\,dv, \qquad R_t=\int N^T P\,dS$$

(2-3) 式右端，圆括号内的量称为超平衡荷载。它反映了由于局部线性化而引起的对于平衡状态的偏离。把它引入右端，相当于进行一次修正。

三、有限元离散化

本文离散化中采用平面二次等参数单元[8]。单元内几何场和位移场具有相同的插值函数

$$\begin{aligned} x&=\sum_{i=1}^{8} N_i x_i & y&=\sum_{i=1}^{8} N_i y_i \\ u&=\sum_{i=1}^{8} N_i u_i & v&=\sum_{i=1}^{8} N_i v_i \end{aligned} \tag{3-1}$$

其中 x_i，y_i 为节点座标；u_i，v_i 为节点位移。

单元内任一点的应变增量表示为

$$\Delta\varepsilon=B\Delta u \tag{3-2}$$

计算应力增量时，可把 $\Delta\varepsilon$ 划分为 m 等分，对每个 $\Delta\varepsilon/m$ 求其对应的应力增量

$$\Delta\sigma_n=C_n^{ep}\Delta\varepsilon/m \tag{3-3}$$

单元切线刚度矩阵是随时间变化的，为了反映出单元内材料进入塑性的硬化程度不同，切线刚度矩阵的积分采用九点高斯求积法。方程中的协调质量矩阵常用集中质量矩阵代替。质量集中的方法，采用〔6〕或〔7〕所提出的方法均可。两者的计算结果相当接近。

应当注意到，有限元离散化带来的误差，对于弹性波而言，会产生滤波、寄生振荡和波阵面的虚假畸变等现象。由于离散化的截断误差和网格的不均匀，产生塑性加载波和卸载波的歪曲，以及寄生振荡引起的局部卸载等等。从而会改变塑性区、卸载区的范围，引起刚度再分配，使之偏离实际结构，甚至造成解方程的病态性。这是必须加以注意和尽量消除的。

四、关于吸收塑性波的人工粘性边界

对无穷区域中一个小范围内弹性波的行为的研究，Lysmer 提出了人工粘性边界[8]。我们这一方法推广到塑性波中去，按照一维波的理论，波阵面上的应力增量和速度增量的关系为

$$d\sigma = \pm \rho c d\dot{v}$$

其中 c 为塑性波波速。当把一个有限区域从无穷大的范围中隔离出来进行分析时，在人为边界上附加以 ρc 为阻抗的粘性阻尼（对增量变化而言）。只要入射到这个界面上的波是以某种单波为主要成份时，上述关系能给出很好的近似。

五、数值积分

本文采用 Wilson-θ 法[5]对切线刚度方程进行逐步积分，并利用修正的牛顿叠代法进行叠代计算。

Bathe 等证明了 Wilson-θ 法当 $\theta \geqslant 1.37$ 时，对于线性方程是无条件稳定的。Park[1]指出了这一方程用到非线性方程中是条件稳定的。我们在计算中发现，在弹塑性波传播问题中，卸载波对积分步长的影响是很重要的。塑性加载波的稳定步长，不能保证出现卸载波时积分仍能稳定。所以，当结构中出现卸载波时，应由卸载波的稳定步长来决定积分时间步长。当 $e/c_p \geqslant 2\Delta t$ 时，计算才是稳定的。

六、计算实例

一维压缩波：无侧向位移的平面应变一维杆，上端作用着随时间变化的均布荷载（$L=15$ 米，$c_p=5000$ 米/秒，$\nu=0.25$，$\rho=0.1$）。此模型划分为 15 个单元，28 个节点，时间步长取为 $\Delta t=0.00002$ 秒。当 $T=0.003$ 秒时停机，计算结果表明：

1．由于线性硬化材料中，弹性波速和塑性波速为两个不同的数值，空间一点弹性波的应力值达到 σ_s 之后，塑性波到达之前，应力将保持不变。这就使 σ-t 曲线中有一恒值区。恒值区的大小，由两种波到达此点的时差决定。图 1 中各曲线，在应力达到屈服值附近，都有明显的平缓现象，与这个恒值区相对应。这种现象的计算精度，与单元尺寸大小和应力空间分布梯度有密切关系。

2．图 1 中应力峰值的变化，反映出卸载波的传播情况。塑性变形吸收能量，卸载后出现残余变形和残余速度。加载端应力恢复到零时，其残余速度为 2.46×10^{-3} 米/秒，与理论值相比，误差小于 5%。

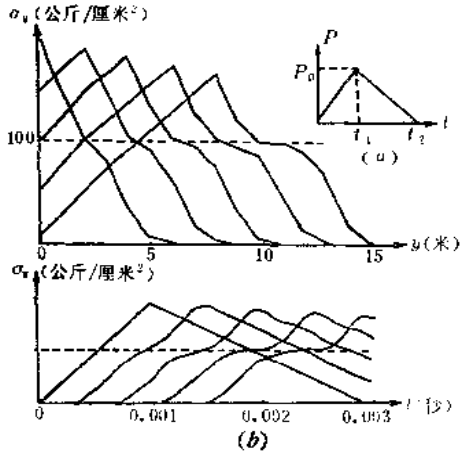


图 1

(a) 不同时刻的应力分布

(b) 不同点的应力—时程曲线

3．表 1 给出了弹性区 $\sigma=50$ 公斤/厘米²，塑性区 $\sigma=130$ 公斤/厘米²，峰值，卸载区 $\sigma=130$ 公斤/厘米²，四种应力值情况下的波速的计算值，

表 1

	理论值（米/秒）	计算值（米/秒）
弹性波	5000	4950
塑性波	3700	3780
卸载波	4160	4170
卸载区弹性波	5000	4900

与文献〔9〕给出的公式计算结果的比较。可以看出二者最大误差为 2%。

4．图 2 表示了一端为粘性边界时，波的传播情况。三个不同位置的波形相似，并与图 1 中未出现反射情况下的波形一致。波全部穿过阻尼边界后，模型中留下的最大应力是入射波峰值的 1.5%。这说明人工边界对塑性波的透射能力是令人满意的。

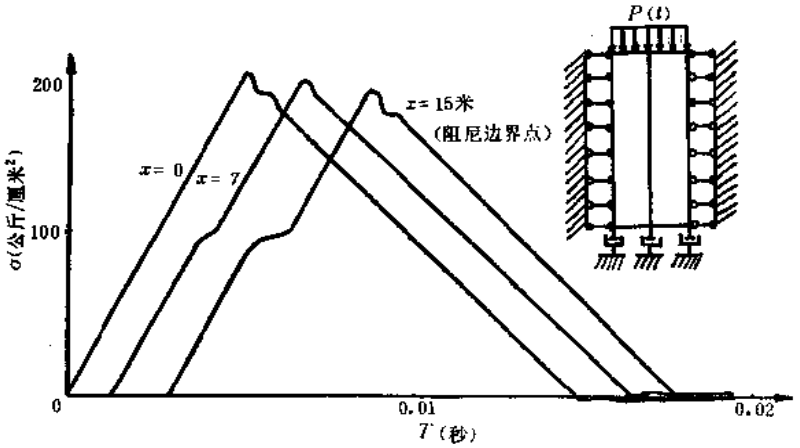


图 2 带有阻尼边界杆不同点的应力—时程曲线

二维弹性波：模型是矩形断面的坝体（$c_p=950$ 米/秒，$\nu=0.25$，$\xi=0.5$，$L=6$ 米，$H=5$ 米）。划分为 30 个单元，共 113 个节点，$\Delta t=0.00005$ 秒，$T=0.01$ 秒停机。计算结果表明：

1．在外荷载作用下，坝体内初始形成的压缩波由于边界的影响和塑性功的耗散，在传播过程中发生畸变、衰减和反射。从图 3 可以看出弹塑性波与完全弹性波比较，峰值到达晚，畸变和衰减都更显著。由于 DB 自由面的反射引起拉伸波向相反方向传播，坝体中两种卸载波的作用（加载端荷载衰减和自由面的反射引起的）结果，使 $t=0.008$ 秒后，坝体内出现拉伸应力。

2．图 4 表明自由边界对水平方向传播的压缩波起到侧向拉伸作用，使得水平方向的速度增大，应力减小。对于反射的拉伸波，则速

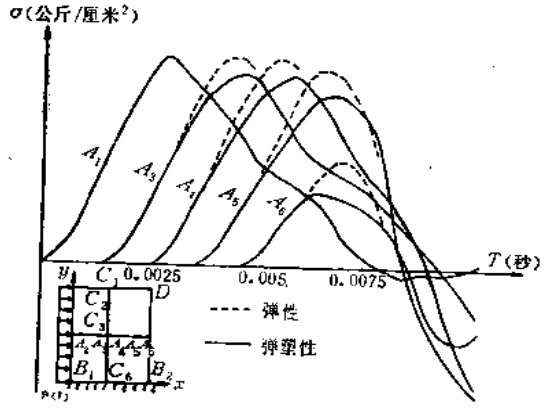


图 3 $A-A$ 断面各点 σ_x-t 曲线

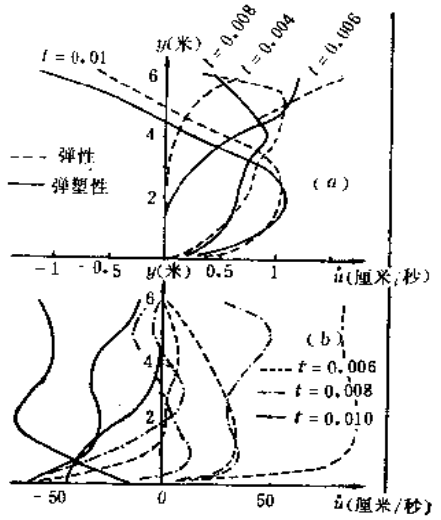


图 4 $C-C$ 断面不同时刻的速度（a）和应力分布（b）

度向负值增大，应力的绝对值减小，而且弹塑性比完全弹性更为明显。坝体的刚性基础对波的影响，初始是产生剪切效应，随后垂直方向的拉伸和压缩应力增长（向弯曲变形过渡）。对于固定边界，弹性比弹塑性引起的剪切和垂直方向拉压效应更显著。若用 B_2 点的垂直方向的最大拉伸应力与外荷载峰值相比为应力集中系数 k，塑性情况下 $k^p=1.8$，比弹性情况小 30%。

3．坝体内各点最大有效应力及其出现时刻表明，对于刚性基础，坝基断面是破坏的危险断面。

七、结束语

本文形成了一组计算平面弹塑性静动力问题 BCY—655 机的计算程序。此程序包含有自动形成单元信息的子程序，大大节省了人工的准备工作。本文提出了弹塑性波的粘性边界的处理方法和关于卸载波积分步长的稳定性问题。计算表明，用有限元法研究具有弱间断的弹塑性的传播问题是有效的。

参 考 文 献

〔1〕Oden, J. T., The Finite Element Methods of Elasto-plastic Behaviours for Non-Linear Dynamic Analysis, McGraw-Hill Book Co. (1975).

〔2〕Biffle, J. H.,Becker, E. B., *Comput. Methods in Appl. Mech.& Eng.*, **6**, 1 (1975), 101.

〔3〕Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill Book Co. (1973).

〔4〕Nagarajan, S., Popov, E. P., *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, **9**, 3 (1975), 535.

〔5〕Wilson, E. L., Farhoemand, I., Bathe, K. J., *Int. J. of Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*, **1**, 3 (1973), 241.

〔6〕Ninton, E., Roch, T., Zienkiewicz, O. C., *Int. J. of Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*, **4**, 3 (1976), 245.

〔7〕Shantasan, D., Owen, D. K. J., Zienkiewicz, O. C., *Int. J. of Earthqu. Eng. and Struct. Dyn.*, **4**, 6 (1976), 561.

〔8〕Lysmer, J., Kuhlemeyer, R. L., *J. Engin. Mech. Div. Proc. of ASCE*, **95**, 4 (1969), 859.

〔9〕Рахматулин, Х. А., Демьянов, Ю. А., Прочность при интенсивных кратковременых напрузках, Тосударственное Издательство Физико-Математической Литературы (1961).

用模态综合法计算旋转壳的固有振动和地震反应

王大钧　任钧国　陈　平
（北　京　大　学）

諸如在火箭的动力分析，水塔的抗震分析中，会遇到贮液的旋转壳，其母线具有许多分叉。

对于具有单支母线的旋转壳，文献[1]中用高精度单元作了静、动态的应力分析，计算了固有振动及地震反应。该文中位移插值在环向用三角级数展开；沿母线方向，环向位移 v 用一阶厄米特插值，轴向、径向位移 u，w 用二阶厄米特插值，保证了单元间应力连续。由于壳体的形状和位移的约束条件是轴对称的，壳体的反应中各环向谐波之间，对称和反对称变形之间都是不耦合的，只要分别进行计算，其刚度矩阵和质量矩阵是拟对角矩阵，可以给出简捷的算法。

计算水平向和竖直向地震反应，只分别涉及环向的一阶和零阶谐波的对称振动。

对具有许多分叉的母线的旋转壳的振动问题，如果当作单个壳体部件处理，会遇到自由度过多的困难，而且破坏了刚度矩阵、质量矩阵的拟对角性质。本文用模态综合法把分叉的壳分成若干个单支母线的壳体部件，分别计算出各部件的固有振型后进行综合，这样一方面减少了自由度，同时保持了每个部件的刚度矩阵和不贮液部件的质量矩阵的拟对角性质。

将液体视作不可压理想流体，且忽略自由表面的重力波效应，这样液体只有动能。液体和壳体的耦合作用归结为一个附加质量矩阵加在壳体的质量矩阵上，而不改变系统的刚度性质[2]。

一、解壳体部件振动的有限元法计算公式

本文沿用文献[1]的方法和计算公式。每个壳体部件的母线要求是单支的。因此壳体部件的刚度矩阵和质量矩阵是拟对角矩阵。

如图 1 取标架

$$\{\mathrm{I}\}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{n}\end{Bmatrix},\quad \{\mathrm{II}\}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{r}^\circ\end{Bmatrix}$$

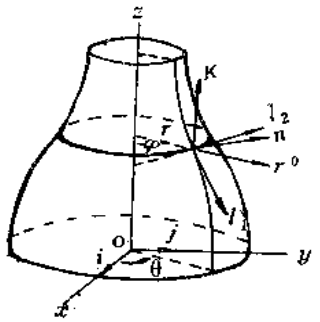


图 1

壳体中面位移在{ I }和{ II }中分解为

$$\{V^*\}=\begin{Bmatrix}u^*\\ v^*\\ w^*\end{Bmatrix}\text{和}\ \{V\}=\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix}$$

取 m 个垂直 z 轴的平行圆当作节圆，将壳划分为 $m-1$ 个单元，单元的弧长参数 x 在单元两端为 ± 1。单元内的$\{V\}$是 x 和 θ 的二元函数。x 方向用厄米特插值，θ 方向用三角级数展开。为了保证内力的连续性，要求对 u 和 w 的厄米特插值取到二阶导数，而 v 只取到一阶导数。

在位移展开式中，对三角级数的同一阶项可以分裂为两类，即对称变形项和反对称变形项，求解时可以分别进行。故在下面的讨论中只给出对称变形项的表达式。

$$\{V\}=\sum_{k=0}^{m}[C_k][X][A]\{\alpha_k\} \tag{1}$$

其中 $$[C_k]=\lceil\cos k\theta,\ \sin k\theta,\ \cos k\theta\rfloor$$

$$[X]=\lceil[X]_2,\ [X]_1,\ [X]_2\rfloor$$

$$=\lceil[1,x,x^2,x^3,x^4,x^5],\ [1,x,x^2,x^3],\ [1,x,x^2,x^3,x^4,x^5]\rfloor$$

$$[A]=[G][C]$$

$[G]$、$[C]$都为 16×16 阶常数矩阵。表达式可参见文献〔 1 〕。

$\{\alpha_k\}$为单元广义座标的列向量

$$\{\alpha_k\}=\{a_k^{u(-1)},\ b_k^{v(-1)},\ a_k^{w(-1)},\ a_k^{u'(-1)},\ b_k^{v'(-1)},\ a_k^{w'(-1)},\ a_k^{u''(-1)},\ a_k^{w''(-1)},\ a_k^{u(1)},\ b_k^{v(1)},$$
$$a_k^{w(1)},\ a_k^{u'(1)},\ b_k^{v'(1)},\ a_k^{w'(1)},\ a_k^{u''(1)},\ a_k^{w''(1)} \tag{2}$$

式中 $a_k^{u(-1)}$ 为 u 在 $x=-1$ 处值展成三角级数的 $\cos k\theta$ 项的系数，$b_k^{v'(1)}$ 是 v' 在 $x=1$ 处值展成三角级数的 $\sin k\theta$ 项的系数。余类推。

k 阶谐波对称变形项的单元刚度矩阵

$$[KE_k]=l[A]^T\left[\int_{-1}^{1}[B_k]^T[D^*][B_k]r\,dx\right][A] \tag{3}$$

是 16×16 阶矩阵。元素值与 k 有关。

单元质量矩阵是

$$[ME]=l[A]^T\left[\int_{-1}^{1}[X]^T[X]\rho hr\,dx\right][A] \tag{4}$$

它与 k 及对称反对称变形无关。式中$[A]$、$[B_k]$、$[D^*]$、$[X]$表达式见文献〔 1 〕。

将单元刚度、质量矩阵及单元之节点力综合成总刚度、总质量矩阵及整体广义力后，对于轴对称的几何边条件，壳体部件的运动方程，各谐波之间是不耦合的。第 k 谐波的运动方程是

$$[M]\{\ddot{\beta}_k\}+[K_k]\{\beta_k\}=\{Q_k\} \tag{5}$$

计算固有振动

$$\{\beta(t)\}=\{\bar{\beta}\}\cos\omega t$$

时，解广义特征值问题

$$[K_k]\{\bar{\beta}\}=\omega^2[M_k]\{\bar{\beta}\} \tag{6}$$

采用子空间叠代——QR 法。

计算壳体的水平地震的反应。只需求解一阶谐波的对称变形运动

$$[M]\{\ddot{\beta}_1\}+[K_1]\{\beta_1\}=-[M]\{\bar{\beta}_1^s\}\ddot{I} \tag{7}$$

将$\{\beta_1\}$按固有振型展开

$$\{\beta_1\}=\sum_j\{\bar{\beta}_{1j}\}q_j(t)$$

得正规座标q_j满足的方程

$$\ddot{q}_j(t)+\omega_{1j}^2q_j(t)=-\eta_{1j}\ddot{I}_0(t) \tag{8}$$

其中ω_{1j}是一阶谐波的固有圆频率，η_{1j}称为振型参与系数。

计算壳体对竖直方向地震反应作类似处理。

二、壳体部件的综合

求得各壳体部件的模态矩阵后，通过部件连接处的位移连续和对接力平衡，得到整体壳的综合模态矩阵。

旋转壳的各壳体部件连接成整体时，都是同一环向谐波的对称（或反对称）变形。以后取消上一节中的下标k。

1．各壳体部件的模态矩阵

设有n个壳体部件。由文献〔1〕中方法加上频率移位方法可以求出第i个部件的保留模态矩阵和频率矩阵。

$$\left.\begin{aligned}&[\bar{B}]_i=[\{\bar{\beta}_1\}\cdots\{\bar{\beta}_{n_{O_i}}\}]=[[B]_{ri},\ [B]_{ii}]\\&[\Omega^2]_i=\lceil\omega_1^2,\cdots,\omega_{n_{O_i}}^2\rfloor,\quad i=1,\cdots,n\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中$[B]_{ii}$为保留弹性模态矩阵。$[B]_{ri}$为刚性模态矩阵，它对应的频率是零。$[\Omega^2]_{ii}$是$[\Omega^2]_i$中弹性振动的频率矩阵。模态是正交规一化的。

在环向谐波$k=0$时，刚性模态对应的是沿z轴的平动和绕z轴的转动

$$\{V\}_1=I_z\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix},\quad \{V\}_2=\psi_z\begin{Bmatrix}0\\r\\0\end{Bmatrix} \tag{10}$$

$k=1$时，刚性模态对应沿$\theta=0$的r轴的平动和在此rz平面中的转动

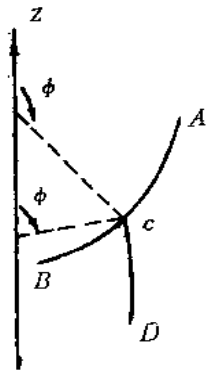


图2

$$\{V\}_3=I_x\begin{Bmatrix}0\\-\sin\theta\\\cos\theta\end{Bmatrix},\quad \{V\}_4=\psi_y\begin{Bmatrix}r\cos\theta\\z\sin\theta\\-z\cos\theta\end{Bmatrix} \tag{11}$$

$k=-1$时，对应沿$\theta=\frac{\pi}{2}$的r轴的平动和在此rz平面中的转动。是反对称变形。

各壳体在连接的节圆上，在标架{Ⅱ}中，位移u、v、w和转角ϑ相等。如图2，第i部件母线ACB和第j部件母线CD在节圆处和z轴夹角分别为φ_i，φ_j。位移分别为u_i，v_i，w_i，ϑ_i和u_j，v_j，w_j，ϑ_j，则

$$\left.\begin{aligned} &a^{u}{}_{i}=a^{u}{}_{j},\ b^{v}{}_{i}=b^{v}{}_{j},\ a^{w}{}_{i}=a^{w}{}_{j} \\ &a^{u}{}_{i}\cos\varphi_{i}-a^{w}{}_{i}\sin\varphi_{i}=a^{u}{}_{j}\cos\varphi_{j}-a^{w}{}_{j}\sin\varphi_{j} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

同时在连接的节圆上各部件的对接力向量在标架{Ⅱ}中之和应为零。记部件 i 在 C 的对接力

$$\{r_c\}_i=\begin{Bmatrix} T \\ S \\ Q \\ M \end{Bmatrix}$$

有

$$\{r_c\}_i+\{r_c\}_j=0 \tag{13}$$

对接部件多于两个时，作类似处理。

由于对接力每部件在一个交接点上是四个，所以 i 部件的对接模态矩阵

$$[G]_i=[F]_i-[B]_{ii}[\Omega^2]_{ii}^{*}[B]_{ic}^{T} \tag{14}$$

是 $(8\times m_i)\times(4\times\sigma_i)$ 矩阵，m_i 是部件 i 的节圆总数。σ_i 是部件上的交接点的个数。其中 $[B]_{ic}^{T}$ 是在 $[B]_{ii}^{T}$ 中取对应对接力位置的那 $4\times\sigma_i$ 列子矩阵。

$[F]_i$ 是 $(8\times m_i)\times(4\times\sigma_i)$ 矩阵。它的 $4\times\sigma_i$ 列分别对应四个对接力的一个取单位值，其它取 0 值时的壳体部件的静变形。

对两端无约束的壳体部件，环向谐波 $k=0$，1，-1 时，刚度矩阵是奇异的。此时需要计入刚体位移对应的惯性体力，在它和对接力同时作用下，并约束一个顶端节圆的 $u=v=0$，计算出静位移后再叠加刚体位移使部件的质量中心和惯量主轴方向不变。这时的静位移就是 $[F]_i$。

2．连　　接

第 i 壳体部件的广义位移用模态矩阵表示

$$\{\beta\}_i=[\overline{BG}]_i\begin{Bmatrix}\{\xi\}_i \\ \{r_c\}_i\end{Bmatrix}=[\Phi_i]_i\{q\}_i \tag{15}$$

整体壳的广义位移可表为

$$\{\hat{\beta}\}=\begin{Bmatrix}\{\beta\}_1 \\ \vdots \\ \{\beta\}_n\end{Bmatrix}=\left[[\Phi]_1\cdots[\Phi]_n\right]\begin{Bmatrix}\{q\}_1 \\ \vdots \\ \{q\}_n\end{Bmatrix}=[\Phi]\{Q\}$$

作一变换 $[\overline{L}]$，将各部件的 $\{\xi\}$ 和 $\{r_c\}$ 集中，使

$$\{\beta\}=[\Phi][\overline{L}]\begin{Bmatrix}\{\xi\}_1 \\ \vdots \\ \{\xi\}_n \\ \{r_c\}_1 \\ \vdots \\ \{r_c\}\end{Bmatrix}=[\Phi][\overline{L}]\begin{Bmatrix}\{\xi\} \\ \{\hat{r}_c\}\end{Bmatrix} \tag{16}$$

此时各部件的 $\{\xi\}_i$ 和 $\{r_c\}_i$ 是彼此独立的。利用壳体部件连接时的位移连续条件（例如式（12））和对接力平衡条件（如式（13））可以将 $\{\hat{r}_c\}$ 用 $\{\xi\}$ 表达。

$$\{\hat{r}_c\}=[\psi]\{\xi\} \tag{17}$$

从而消去广义座标 $\{\hat{r}_c\}$。将式（17）代入式（16），记单位矩阵为 $[E]$，得

$$\{\beta\}=[\Phi][\bar{L}]\begin{bmatrix}[E]\\[\Psi]\end{bmatrix}\{\xi\}=[\Phi][\bar{L}][\bar{\Psi}]\{\xi\}=[\Psi^*]\{\xi\} \tag{18}$$

此时整体广义位移$\{\beta\}$，在所有连接点位移是连续的，对接力是平衡的。总体壳的特征值问题为

$$[\bar{K}]\{\beta\}=\omega^2[\bar{M}]\{\beta\} \tag{19}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}[\bar{K}]&=[[K]_1,\cdots[K]_n]\\ [\bar{M}]&=[[M]_1,\cdots[M]_n]\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

从式（18），将$[\Psi^*]$作为李兹基函数，对方程（19）用李兹法降低自由度。得

$$[\Psi^*]^T[\bar{K}][\Psi^*]\{\xi\}=\omega^2[\Psi^*]^T[\bar{M}][\Psi^*]\{\xi\} \tag{21}$$

记为

$$[\bar{K}]\{\xi\}=\omega^2[\bar{M}]\{\xi\} \tag{22}$$

由式（18）、式（21）和式（9）

$$[\bar{K}]=[\bar{\Psi}]^T[\bar{L}]^T[\Phi]^T[\bar{K}][\Phi][\bar{L}][\bar{\Psi}]$$

而

$$[\Phi]^T[\bar{K}][\Phi]=\begin{pmatrix}[\Omega]_1 & [C]_1 & & \\ [C]_1^T & [Y]_1 & & \\ & & [\Omega]_2 & [C]_2 \\ & & [C]_2^T & [Y]_2 \\ & & & \ddots\end{pmatrix}$$

其中$[C]_t=[\bar{B}]_t^T[K]_t[G]_t$，$[Y]_t=[G]_t^T[K]_t[G]_t$。

$$[\bar{L}]^T[\Phi]^T[\bar{K}][\Phi][\bar{L}]=\begin{pmatrix}[\Omega_1] & & & [C]_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & [\Omega]_n^T & & & [C]_n \\ [C]_1^T & & & [Y]_1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & [C]_n^T & & & [Y]_n\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}[\Omega][C]\\ [C]^T[Y]\end{bmatrix} \tag{23}$$

于是

$$\begin{aligned}[\bar{K}]&=[\bar{\Psi}]^T\begin{bmatrix}[\Omega][C]\\ [C]^T[Y]\end{bmatrix}[\bar{\Psi}]^T=[[E],[\Psi]^T]\begin{bmatrix}[\Omega][C]\\ [C]^T[Y]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[E]\\[\Psi]\end{bmatrix}\\ &=[\Omega]+([C][\Psi]+[\Psi]^T[C]^T+[\Psi]^T[Y][\bar{\Psi}]\end{aligned} \tag{24}$$

类似地

$$[\bar{M}]=[E]+([D][\Psi]+[\Psi]^T[D]^T)+[\Psi]^T[Z][\Psi] \tag{25}$$

其中$[D]$、$[Z]$的形成，只要在式（24）中将$[K]_t$换成$[M]_t$即可。$[\bar{K}]$和$[\bar{M}]$为$\sum_{t=1}^{n}n_{0t}$阶方阵。

值得注意的是，在每个部件的$[\bar{B}]_t$、$[G]_t$、$[\Omega]_t$计算出来后，就可形成$[C]_t$、$[Y]_t$、$[C]_t$和$[Z]_t$，不必再保留该部件的刚度质量矩阵$[K]_t$和$[M]_t$了。

由式（22）解出的特征值直接得整体壳的频率，特征向量$\{\xi\}$代入式（18）得整体壳的广义座标的特征向量，经插值得振型。

整体壳的地震反应归结为计算对应整体壳的公式（8），而η_{1j}可以在各部件的$[\bar{B}]_t$计算出来后，由它和$[M]_t$分块形成，不必一直保留$[M]_t$。

整体壳的地震反应归结为计算对应整体壳的水平地震反应公式（8）以及竖直地震反应

的相应公式。水平方向的地震参与系数

$$\eta_{1,j}=\frac{\{\bar{\beta}_{1,j}\}^T[M]\{\bar{\beta}_1^s\}}{\{\bar{\beta}_{1,j}\}^T[M]\{\bar{\beta}_{1,j}\}}=\frac{\sum_i\{\bar{\beta}_{1,j}\}_i^T[M]_i\{\bar{\beta}_1^s\}_i}{\{\bar{\xi}_j\}^T[\psi^*]^T[M][\psi^*]\{\bar{\xi}_j\}}$$

$$=\frac{\sum_i\{\bar{\beta}_{1,j}\}_i^T[M]_i\{\bar{\beta}_1^s\}_i^T}{\{\bar{\xi}_j\}^T[M]\{\bar{\xi}_j\}}$$

其中 i 是壳体部件号，$\{\bar{\beta}_1^s\}$ 为地面作水平单位位移时整体壳的广义牵连位移，$\{\bar{\beta}_1^s\}_i$ 是部件 i 的相应位移。$\{\bar{\beta}_{1,j}\}$ 是整体壳的第一环向谐波的第 j 个固有振型的广义位移，$\{\bar{\xi}_j\}$ 是式（22）的第 j 个特征向量。

由于 $[M]_i\{\bar{\beta}_1^s\}_i$ 可以在各部件的 $[M]_i$ 形成后立即作出并保留起来，因此在形成 $\eta_{1,j}$ 的过程中，也不必保留各部件的 $[M]_i$。

三、液体和壳的耦合

1．设液体为不可压理想流体，运动时附加动压力 p 满足方程

$$\Delta p\equiv \mathrm{divgrad}p\equiv \mathrm{div}(\Delta p)=0 \tag{26}$$

忽略自由表面 $\bar{F}$ 的重力波效应，此时 $\bar{F}$ 上

$$p=0 \tag{27}$$

和壳体接触面 F 上

$$\partial p/\partial n=\bar{\rho}\ddot{W}^*=-\bar{\rho}[T_0]\{\ddot{V}\} \tag{28}$$

其中 $\bar{\rho}$ 为流体密度，$\ddot{W}^*$ 是壳体法向加速度，而 $[T_0]=[\cos\varphi,\ 0,\ \sin\varphi]$。

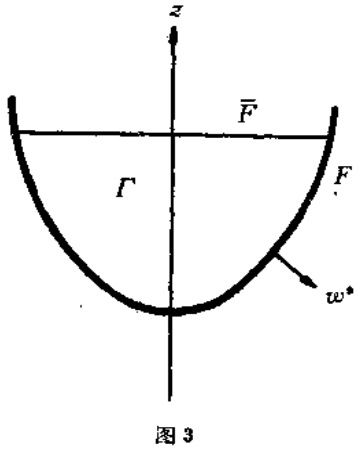


图 3

式（26）、（27）、（28）对应变分问题：

$$\delta\frac{1}{2}\int_\Omega(\Delta p)^2dV=-\bar{\rho}\int_F\delta p[T_0]\{\ddot{V}\} \tag{29}$$

这表明 Ω 内动水压力决定于壳壁的加速度。

2．统一地用有限元方法确定动水压力场 p，将流体分为一些轴对称单元。连同边界在 r、z 平面中有 $\bar{m}$ 个节点。压力值组成向量 $\{p\}$。在 r、z 平面的单元中，取形状函数 $N(r,z)$。

由于 Γ 形状的轴对称性，可将 p 展成三角级数

$$p=\sum_k[\bar{N}(r,\ z)](\{p_k\}\cos k\theta+\{p_k^l\}\sin k\theta) \tag{30}$$

$\cos k\theta$ 项相应于对 $\theta=0$ 轴为对称分布，$\sin k\theta$ 项为反对称分布。

壳体位移由式（1）可表为

$$\{V\}=\sum_k[N_u\cos k\theta,\ N_v\sin k\theta,\ N_w\cos k\theta]\{\beta_k\}$$

$$+\sum_k [N_u \sin k\theta,\ N_v \cos k\theta \quad N_w \sin k\theta]\{\beta_k^l\} \tag{31}$$

前一项为对称变形，后者为反对称变形。

将式（30）和式（31）代入变分式（29），由三角函数的正交性，表明壳体变形和液体压力分布之间对应不同谐波项以及相同谐波的对称项和反对称项是不耦合的。在同一谐波的相同对称性项之间具有关系

$$\iint_{\bar{r}}\left(\frac{\partial[\bar{N}]^T}{\partial r}\cdot\frac{\partial[\bar{N}]}{\partial r}+\frac{[\bar{N}]^T[\bar{N}]}{r^2}k^2+\frac{\partial[\bar{N}]^T}{\partial z}\frac{\partial[\bar{N}]}{\partial z}\right)r\,dr\,dz\{p_k\}$$

$$=-\rho\int_{\bar{l}}[\bar{N}]^T[T_0][N]r\,ds\{\ddot{\bar{\beta}}_k^n\} \tag{32}$$

其中$\bar{r}$为液体在（r，z）平面所占面积，$\bar{l}$为$\bar{r}$和壳体接触部分母线的弧长。

将式（32）记为

$$[H_k]\{p_k\}=-\bar{\rho}[L]^T\{\ddot{\bar{\beta}}_k\} \tag{33}$$

$[H_k]$是$\bar{m}\times\bar{m}$阶矩阵，$[L]$是$8m\times\bar{m}$阶矩阵与k无关，于是

$$\{p_k\}=-\bar{\rho}[H_k]^{-1}[L]^T\{\ddot{\bar{\beta}}_k\} \tag{34}$$

也就是说，液体的动水压力场与壳体接触面加速度成正比。

3．在贮液情况下，壳体运动方程（5）成为

$$[M]\{\ddot{\beta}_k\}+[K_k]\{\beta_k\}=\{Q_k\}+\{\bar{Q}_k\} \tag{35}$$

其中$\{Q_k\}$为外力产生的广义力，$\{\bar{Q}_k\}$为液体在壳体表面的压力产生的广义力。

$$\{\bar{Q}_k\}=\int_{\bar{l}}[N]^T[T_0]^T p r\,ds=-[\bar{M}_k]\{\ddot{\bar{\beta}}_k\} \tag{36}$$

代入式（35）得壳体运动方程

$$([M]+[\bar{M}_k]\{\ddot{\bar{\beta}}_k\}+[K_k]\{\beta_k\}=\{Q_k\} \tag{37}$$

由式（37）可见，液体对壳体的作用，相当于在壳体上附加一质量矩阵$[\bar{M}]$，而并不影响系统的位能。

如在液体内采用三角形轴对称单元，$[N]$用线性插值函数，可以得到$[H_k]$和$[L]$的计算公式。

三角形轴对称单元的形函数取

$$\left.\begin{aligned}N_i^e&=(a_i+b_i r+c_i z)/2A\\N_j^e&=(a_j+b_j r+c_j z)/2A\\N_m^e&=(a_m+b_m r+c_m z)/2A\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

其中

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&r_i&z_i\\1&r_j&z_j\\1&r_m&z_m\end{vmatrix}$$

$$a_i=r_j z_m-r_m z_j$$

$$b_i=z_j-z_m$$

$$c_i=-r_j+r_m$$

由此计算出单元的$[H_k^e]$和$[L^e]$，分别综合为整体$[H]$及$[L]$。$[L]$是$8m\times\overline{m}$矩阵。由于$[L^e]$的积分是沿壳体母线进行的，所以凡和母线不相连的单元，$[L^e]=0$。于是$[L]$的后$\overline{m}-m$列都是零。

四、算　　例

用本文的方案编制了用模态综合法计算具有分叉母线的旋转壳的振动和地震反应的程序——〈BSM〉。这里给出几例以验证方案和程序的正确和有效。

例1．如图4之柱壳，上端自由，下端固定。高$L=45.30$厘米，半径$R=10.16$厘米，等厚度$h=0.1016$厘米，弹性模量$E=2.111\times10^6$公斤/厘米^2，泊桑比$\nu=0.3$，材料密度$\rho=8.028\times10^{-6}$公斤·秒^2/厘米^4。

计算了三个方案：（1）将壳体作为单个部件，取七个节圆，用〈BSM〉程序[1]计算。（2）在$z=15.24$处分割为两个壳体部件，各部件仍取原来的四个节圆，保留模态皆为四个，上端部件为自由体，$s=0$和1时，包括两个刚体模态。（3）在$z=12$、$z=6$处分割为上、中、下三个壳体部件，节圆皆取五个，保留模态分别为六、六、四个。频率的计算结果列于表1。多数频率前三位一致，最大的相对误差小于1%，振型差和最大振幅值比在多数点小于1%。只在$k=1$、$j=3$时，方案2、3和方案1的振型差过大，因为此时整体壳的频率较高，需要增加部件的保留模态数。在部件的节圆数和保留模态数如此少的情况下，就能达到这样的精度，说明此方法是有效的。

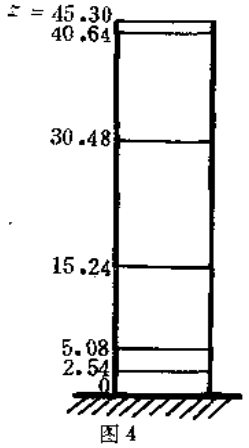


图4

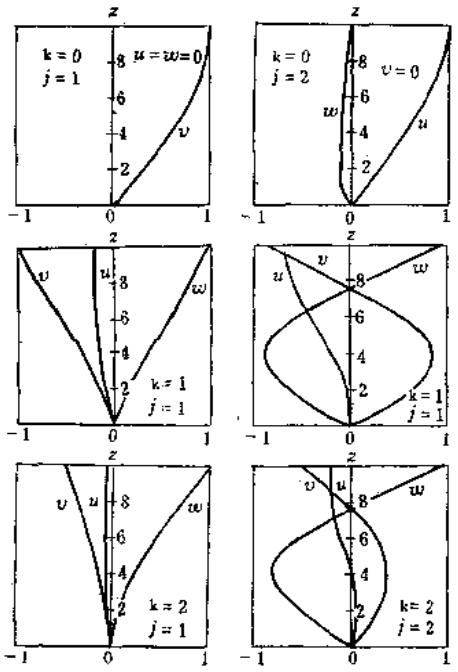


图5　圆柱壳的振型

表1　圆柱壳的固有频率（单位：赫芝）

k	0			1			2		
j	1	2	3	1	2	3	1	2	3
一个部件	1755	2817	5265	767.0	2600	4888	298.9	1385	2966
两个部件	1755	2818	5265	767.0	2601	4893	302.1	1383	2985
三个部件	1755	2818	5285	767.0	2601	4891	302.1	1383	2965

例2。淋水面积为2000米^{2}的双曲冷却塔，高66米，变厚度，下端人字柱支承简化为连续的弹性支承。所有物理和几何参数见文献〔1〕第79页例2。计算了两个方案：（1）作为单个部件，七个节圆，计算结果引自文献〔1〕。（2）在$z=-36$处分割为两个部件，每个部件仍用原来的四个节圆。将频率f及地震参与系数η的计算结果列于表2，地震反应用$k=0$和1的$j=1、2、3$的反应组合，其位移w和内力T_1、T_2在节圆处的值列于表3。

表2　双曲壳的频率（单位：赫芝）和振型参与系数

k		0			1		
j		1	2	3	1	2	3
f	一个部件	10.26	12.50	17.81	5.337	9.199	14.94
	两个部件	10.38	12.69	17.90	5.407	9.266	15.17
η	一个部件	0	1.503	0	1.706	−0.883	0.201
	两个部件	0	1.488	0	1.711	−0.861	0.195

表3　双曲壳的地震反应

	w（毫米）		T_1（吨/米）		T_2（吨/米）	
z	一个部件	两个部件	一个部件	两个部件	一个部件	两个部件
15.00	1.53	1.50	0.002	0.003	0.954	0.948
5.00	1.26	1.23	0.561	0.549	0.550	0.558
−16.00	0.66	0.64	2.810	2.786	0.442	0.434
−36.00	0.33	0.33	3.599	3.686	0.754	0.716
−46.00	0.26	0.26	3.598	3.564	1.432	1.434
−51.03	0.22	0.22	3.582	3.534	1.434	1.508

例3。如图6的组合壳体。上端自由的半球壳的半径$R=10.16$厘米，厚$h_1=0.1016$厘米，$E_1=0.211\times10^7$公斤/厘米^2，$\nu_1=0.3$，$\rho_1=0.225\times10^{-3}$公斤·秒^2/厘米^4。下端固定的圆柱壳的半径$r=4$厘米，高$H=17.8$厘米，$E_2=0.3\times10^8$公斤/厘米^2，$\nu_2=0.3$，$\rho_2=0.736\times10^{-3}$公斤·秒^2/厘米^4。两壳相连于$B$，半球之顶点为$C$。按两种方案计算：（1）分割为半球壳和柱壳两个部件。节圆分别为八和七个。保留模态分别为六和四个。（2）分为三个部件，母线分别为AB、BC、BD。节圆分别为六、三、七个。保留模态分别为六、六、四个。频率结果列于表4。

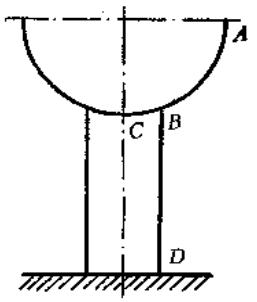


图6

表4　组合壳的频率（单位：赫芝）

k	0			1			2		
j	1	2	3	1	2	3	1	2	3
两个部件	403.1	467.3	1409	153.1	457.9	1306	50.09	978.9	1409
三个部件	400.1	464.0	1405	151.6	456.4	1305	49.52	974.8	1415

参　考　文　献

〔1〕北京大学固体力学教研室，旋转壳的应力分析，水利水电出版社（1979）。

〔2〕Zienkiewiez, O. C., The Finite Element Method in Enginering Science (1971), chapter 16.

〔3〕王文亮，杜作润，陈康元，模态综合技术短评和一种新的改进，航空学报，3（1979）。

烧蚀端头帽的外形和温度场计算

黄 振 中
(中国空气动力研究发展中心)

对再入端头进行热结构设计，必须对端头体的受热烧蚀状态及体内的温度和热应力状态等有比较清楚的了解。这几方面的计算相互交织。本文为获得再入端头体的温度场，尽量把传热计算与烧蚀及形状变化的计算耦合起来。这样做，无论对传热还是对烧蚀和形状变化计算都能使之更接近于真实情况。

一、热 传 导

1．转换座标及偏微分方程

对于三个主轴方向互相垂直的单一材料，在座标轴与三个主轴方向一致的直角座标系内，热传导方程为

$$\frac{\partial(\rho cT)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{1}$$

对烧蚀移动边界，采用运动座标系通过座标变换变为定边界问题，会给问题的处理带来方便[1]。在球座标的基础上再作如下变换

$$\xi=\frac{r-r_t(\theta,\ \varphi)}{\Delta(\theta,\ \varphi,\ t)} \tag{2}$$

这样，内表面 $r=r_t(\theta,\ \varphi)$ 对应 $\xi=0$，外表面移动边界在变化厚度 $\Delta(\theta,\ \varphi,\ t)$ 的调节下始终对应 $\xi=1$。问题的求解区域转换为 $[0\leqslant\xi\leqslant1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\theta_{max},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_{max};\ \Delta(\theta,\ \varphi,\ t)]$。方程（1）变换为

$$\frac{\partial(\rho cT)}{\partial t}-\frac{\xi}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial t}\frac{\partial(\rho cT)}{\partial\xi}=-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{r^2}{h_t}q_t\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{h_\theta r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r\Delta\sin\theta q_\theta)+\frac{1}{h_\varphi r\Delta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\Delta q_\varphi)\right] \tag{3}$$

其中

$$-[q_t]^T=[g_{jt}]\left[-\frac{1}{h_t}T_t\right]^T,\qquad(i=\xi,\ \theta,\ \varphi;\ j=\xi,\ \theta,\ \varphi) \tag{4}$$

$$[g_{ji}]=[k_l a_{lj}]^T[a_{lt}],\qquad(l=x,\ y,\ z;\ i=\xi,\ \theta,\ \varphi;\ j=\xi,\ \theta,\ \varphi) \tag{5}$$

$$[a_{lt}]=\begin{bmatrix}\xi_x & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \xi_y & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \xi_z & -\sin\theta & 0\end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\xi_x=\frac{h_\xi}{\Delta}[(\sin\theta-c_\theta\cos\theta)\cos\varphi+c_\varphi\sin\varphi]$$

$$\xi_y=\frac{h_\xi}{\Delta}[(\sin\theta-c_\theta\cos\theta)\sin\varphi-c_\varphi\cos\varphi] \qquad (7)$$

$$\xi_z=\frac{h_\xi}{\Delta}(\cos\theta+c_\theta\sin\theta)$$

$$h_\xi=\frac{\Delta}{(1+c_\theta^2+c_\varphi^2)^{1/2}},\qquad h_\theta=r,\qquad h_\varphi=r\sin\theta \qquad (8)$$

$$c_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\theta},\qquad c_\varphi=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial r}{\partial\varphi} \qquad (9)$$

方程（3）在 $r=0$ 处求解会遇到麻烦。为避开它，实心体的 r_i 也须取某一不为零的值，只要 r_i 取得足够小，对解的精度不会有多大损害。

以矩阵方程（6）构成的行列式显然一般不会等于零。因此，虽然 ξ 的单位向量与 θ 和 φ 的单位向量一般不正交，但仍线性独立。这就决定了方程（4）和（5）等都是唯一确定的。

方程（3）左侧第二项反映边界的移动对传热的影响。其中 $\partial\Delta/\partial t$ 即是烧蚀引起的外形变化率，它由下式给出。

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}=-\frac{\Delta}{h_\xi}\frac{\dot m_{-w}}{\rho} \qquad (10)$$

其中 $\dot m_{-w}$ 为壁面材料的总烧蚀率。

2．边界条件

方程（3）的初始条件很容易给出。内壁和侧面的边界条件一般较为简单。在烧蚀表面，若令

$$Q(T_w)=q_{0,n}+\rho\left(\int_{T_0}^{T_w}c\,dT\right)(1+c_\theta^2+c_\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\Delta}{\partial t} \qquad (11)$$

其中，$q_{0,n}$ 表示包括气动加热、质量引射、化学反应热效应、空气辐射和表面辐射等因素的进入表面的烧蚀壁热流，方程右边第二项表示包括被烧蚀、剥蚀、浸蚀掉的物质带走的热量。这些都是表面温度 T_w 的非线性程度很高的函数。因此，移动着的烧蚀表面，其边界条件可写为

$$q_\xi|_{\xi=1}=-Q(T_w) \qquad (12)$$

在整个烧蚀边界上对这一方程联立求解十分困难，必须简化。通常是线化自变量[12]，即在 T_w 附近取某个定值 T_f，则得一级近似

$$Q(T_w)\doteq Q(T_f)+Q'(T_f)(T_w-T_f) \qquad (13)$$

定值 T_f 越接近 T_w，逼近越好。这不难做到。

3．零攻角旋成体无条件稳定的三层显式差分格式

对于与 z 轴垂直的平面内呈各向同性的零攻角旋成体，上述諸方程中凡涉及 φ 的微分项都自动消失。对于方程（3），在内点，温度对时间的微分取 DuFort-Frankel 差分形

式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{j,l}^{n}=\frac{1}{2(\Delta t)}(T_{j,l}^{n+1}-T_{j,l}^{n-1})+O(\Delta t^{2}) \tag{14}$$

其中上角标 $n\geqslant 0$，表示时间座标节点，j 和 l 分别表示 ξ 和 θ 座标节点。

温度对空间座标的一、二阶微分，及热流对空间座标的微分，都取具有二阶精度的中心差分形式。例如

$$\left(\frac{\partial^{2}T}{\partial\xi^{2}}\right)_{j,l}=\frac{1}{(\Delta\xi)^{2}}(T_{j+1,l}-2T_{j,l}+T_{j-1,l})+O(\Delta\xi^{2})$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{r^{2}}{h_{\xi}}q_{\xi}\right)\right]_{j,l}=\frac{1}{(\Delta\xi)}\left[\left(\frac{r^{2}}{h_{\xi}}q_{\xi}\right)_{j+\frac{1}{2},l}-\left(\frac{r^{2}}{h_{\xi}}q_{\xi}\right)_{j-\frac{1}{2},l}\right]+O(\Delta\xi^{2})$$

然后在方程中取

$$T_{j,l}^{n}=\frac{1}{2}(T_{j,l}^{n+1}+T_{j,l}^{n-1})+O(\Delta t^{2}) \tag{15}$$

略去小量，就得无条件稳定的三层显式差分方程[3]。其逼近误差为

$$R=O(\Delta t^{2})+O(\Delta\xi^{2})+O(\Delta\theta^{2})+O\left(\frac{\Delta t^{2}}{\Delta\xi^{2}}+\frac{\Delta t^{2}}{\Delta\theta^{2}}\right) \tag{16}$$

可见它不允许 Δt 取得太大，虽然稳定性是无条件的。

在边界条件方程中也用中心差分或具有二阶精度的前差或后差取代相应的微分。在二条边界汇合处，选取差分形式以使二条边界上各自互相联立的边界点差分方程在此不串联在一起为原则。

4．与精确解的比较

用上述差分方程计算具有精确解析解[4]的处于均匀加热环境下的非烧蚀的温度场，如图 1 所示，精度良好，并且时间步长 Δt 从 0.01 到 0.2 秒对结果的精度无显著影响。

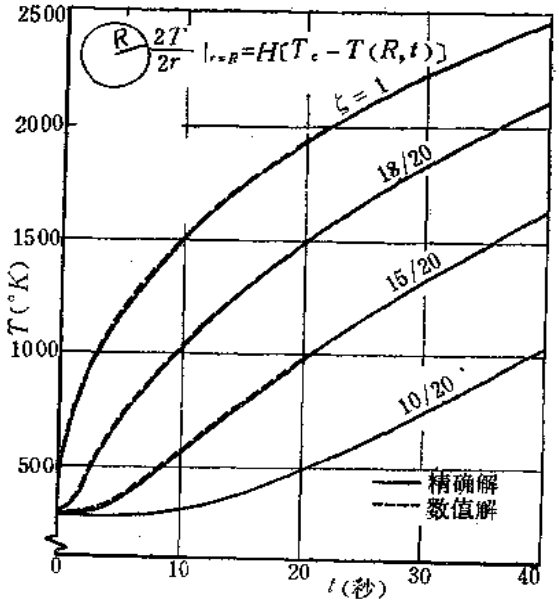


图 1 数值解与精确解的比较
$\xi=r/R$　　$R=0.15$米　$RH=1.8$
$k/\rho c=0.55$米²/秒　　$T_e=4500$°K

二、烧蚀外形

对烧蚀外形方程（10），首先进行拟线性化处理[5]，再附加人工粘性项，然后选用叠代形式的可显式计算的隐式差分格式。计算表明，除严重的粒子云浸蚀的情况需叠代三次外，一般叠代一、二次就够了。

三、烧　　蚀

1．壁面化学反应

文献〔6〕对碳的十五种化合物 C（气）、C_2、C_3、C_4、C_5、CO、CO_2、C_2O、C_3O_2、CN、CN_2(C-N-N)、CN_2(N-C-N)、C_2N、C_3N_2、C_4N_2 以及 N_2、N、O_2 及 O 给出了热力学数据。对应的反应用通式表示

$$\xi_t C+t_t A_2\rightarrow R_t(C_{\xi_t}A_{2t_t}) \tag{17}$$

其中 A 表示 N 或 O，R_t 当系数 t_t 为零时表示碳的升华气体，当系数 ξ_t 为零时表示 N 或 O，当系数 ξ_t 和 t_t 都不为零时表示碳和氮、氧的各种化合物。这些反应，这里不加选择地全部采纳，并假定反应都发生在壁面。

2．烧蚀率及壁面浓度

假设附面层内能量方程和扩散方程相似。因此，无因次烧蚀率 B 可定义为

$$B=\frac{\dot{m}_w}{\psi q_{w光}/h_e} \tag{18}$$

其中 ψ 为质量引射对热流的堵塞因子，$q_{w光}$ 为光面冷壁热流，h_e 为附面层外缘焓。定义元素质量分数 $\tilde{K}_t$ 可使分析简化

$$\tilde{K}_A=\sum_t\frac{2t_tM_A}{M_t}K_t,\qquad A=O,\ N \tag{19}$$

$$\tilde{K}_c=\sum_t\frac{\xi_tM_c}{M_t}K_t \tag{20}$$

从扩散方程可得到

$$\frac{\tilde{K}_{Ae}}{\tilde{K}_{Aw}}=1+B,\qquad A=O,\ N \tag{21}$$

$$\tilde{K}_{cw}=\frac{B}{1+B} \tag{22}$$

其中下标 e 和 w 分别表示附面层外缘和壁面。

氧在和碳的反应中残剩在壁面的量极微，不妨假设壁面氧的浓度为零。这样从方程（17）所列反应可建立十六个平衡常数关系，即

$$K_{p_t}=\frac{K_{tw}}{M_t}\left(\frac{M_{A_2}}{K_{A_2w}}\right)^{t_t}(P\bar{M})^{1-t_t} \tag{23}$$

其中 P 和 $\bar{M}$ 分别表示压力和平均分子量。现在，只要表面温度一经确定，上列方程即组成封闭方程组。由此，可一举解出壁面各浓度及无因次烧蚀率，而 T_w 则在壁面热流和物体传热的耦合求解中解出。

从扩散方程可得壁面的各组元质量流率 $\dot{m}_{tw}$

$$\frac{\dot{m}_{tw}}{\dot{m}_w}=\frac{K_{tw}(1+B)-K_{te}}{B} \tag{24}$$

其中

$$\dot{m}_{-\infty}=\sum_i \dot{m}_{iw}, \qquad i=\text{碳化合物} \tag{25}$$

因此，若令

$$\dot{m}_c^{(i)}=\frac{\mathscr{R}_i M_c}{M_i}\dot{m}_{iw} \tag{26}$$

则 $\dot{m}_c^{(i)}$ 表示在 i 个反应中碳的烧蚀率。于是在 i 个反应中烧蚀掉的碳占总烧蚀率的分数 $f_c^{(i)}$ 就为

$$f_c^{(i)}=\frac{\dot{m}_c^{(i)}}{\dot{m}_{-\infty}} \tag{27}$$

3．烧蚀壁热流

在热传导方程的边界条件方程（11）中，表示进入烧蚀壁的热流为

$$q_{0,n}=\psi q_0+q_{ra}-\varepsilon\sigma T_w^4 \tag{28}$$

等式右端第二、三项分别为空气对壁面和壁面向外的辐射，第一项为

$$\psi q_0=\rho_e u_e S_t(h_e-h_w)-\dot{m}_{-\infty}(h_w-h_b) \tag{29}$$

其中 ρ、u、S_t 分别为密度、速度、Stanton 数，

$$h_e=\sum_i K_{ie}h_{ie} \tag{30}$$

$$h_w=\sum_i K_{iw}h_{iw} \tag{31}$$

h_b 为壁面固体焓。利用方程（24）—（27），不难从方程（29）导出：

$$q_0=q_w\left[\left(1-\frac{\sum_i K_{ie}h_{iw}}{h_e}\right)+\frac{B}{h_e}\left(\sum_i f_c^{(i)}\Delta Q_i+\sum_A f_A\Delta Q_A\right)\right] \tag{32}$$

其中

$$\Delta Q_i=(\mathscr{R}_i M_c^n h_b+2l_i M_A h_{A_2w}-M_i h_{iw})/\mathscr{R}_i M_c,$$

$$i=i\text{ 个生成碳化合物的反应} \tag{33}$$

$$f_A=\frac{\dot{m}_{Aw}}{\dot{m}_{-\infty}} \tag{34}$$

$$\Delta Q_A=h_{A_2w}-h_{Aw}, \qquad A=\mathrm{O},\ \mathrm{N} \tag{35}$$

方程（32）中的 $\sum_i K_{ie}h_{iw}$ 这一项若按无烧蚀空气壁焓计算，会在热效应上产生一定误差。现令符号上方一横表示无烧蚀情况的参数，则该项与此时的空气壁焓

$$\bar{h}_w=\sum_i \bar{K}_{iw}h_{iw} \tag{36}$$

会有差别。下面从该项中剔出 $\bar{h}_w$，

$$\sum_i K_{ie}h_{iw}=\sum_i \bar{K}_{iw}h_{iw}-\sum_i(\bar{K}_{iw}-K_{ie})h_{iw} \tag{37}$$

其中等式右边第二项完全可按无烧蚀情况处理

$$\sum_i(K_{ie}-\bar{K}_{iw})h_{iw}=\frac{1}{\rho_e u_e \bar{S}_t}\sum_{A=O,N}\bar{\dot{m}}_{Aw}\Delta Q_A \tag{38}$$

这样，方程（32）就可写成

$$q_0 = q_{w光}\left[\left(1-\frac{\bar{h}_w}{h_e}\right)+\frac{B}{h_e}\sum_t f_c^{(t)}\Delta Q_t+\frac{B}{h_e}\sum_{A=O,N}\left(f_A-\frac{\bar{f}_A}{\psi}\right)\Delta Q_A\right] \qquad (39)$$

其中 $\bar{f}_A=\frac{\dot{m}_{Aw}}{\dot{m}_{-w}}$（$A=$O，N）。从方程（39）可见，在烧蚀量不很大，氮、氧原子在壁面复合的影响不很重要时，右边括号内的第三项一般是个小量，可近似略去。这在物理上意味着附面层外缘的氧、氮原子在有无烧蚀的情况下，到达壁面的数量及复合成分子的程度大致相同。显然，这样处理可避免附面层外缘气体成分的繁复计算。当然，这在大烧蚀率时会有偏差，但偏差是有限的，并且可由该项来估计。

四、计算结果和讨论

例算对象的端头帽选取各向同性和各向异性石墨二种材料。分别按表面热化学烧蚀、机械剥蚀及粒子云浸蚀等各种情况的边界条件沿弹道进行了耦合计算。图 2 绘出了各向异性石墨端头驻点的表面各气体成分的浓度及各反应中碳的烧蚀分数沿弹道的计算结果。为进行比较、除十

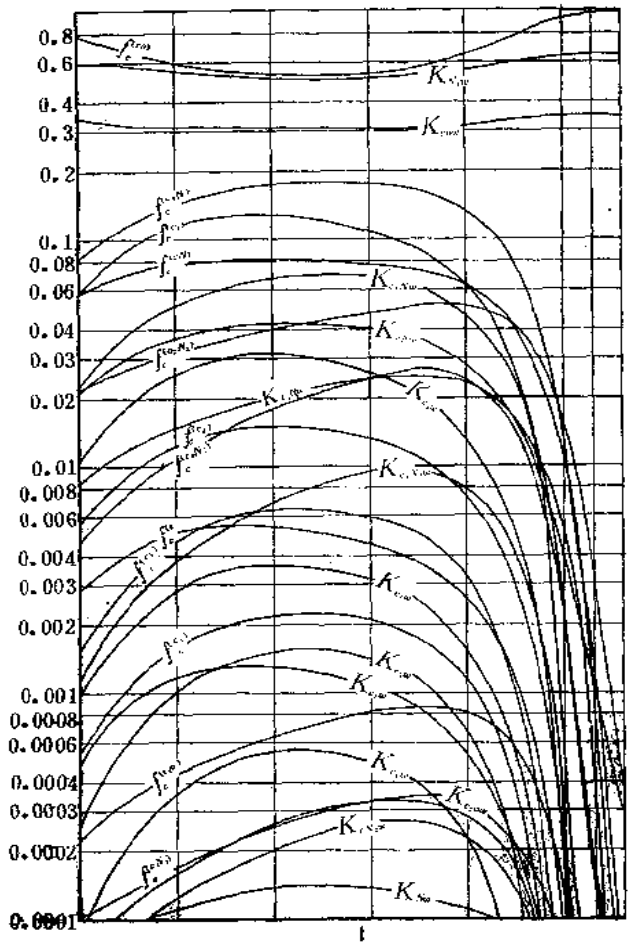


图 2 弹道上驻点壁面浓度及碳的各烧蚀率分数

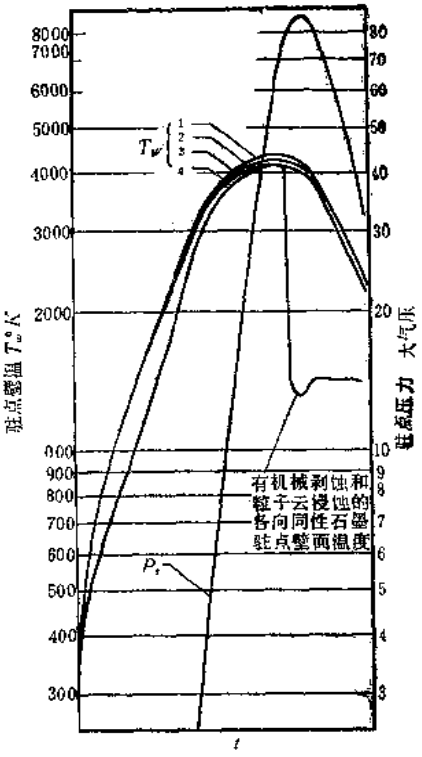


图 3 弹道上的驻点壁温和驻点压力

标号	壁面气体	材　　料
①	十七组元	各向异性石墨
②	七组元	各向异性石墨
③	六组元	各向异性石墨
④	十七组元	各向同性石墨

七组元情况外，还分别计算了各向异性石墨端头壁面只取 C、C_3、CN、CO、CO_2、N_2 及 N 等七组元和只取 C、C_3、CO、CO_2、N_2 及 N 等六组元的烧蚀情况。图 3 绘出了各种情况的驻点壁温沿弹道的变化。这些结果说明，要简化碳表面的热化学烧蚀计算，除假设壁面无氧外，至少要考虑 N_2、CO、C_2N、C_3 和 CN 五种成分。热化学烧蚀外形绘于图 4。十七组元模型下的各向异性石墨比各向同性石墨烧得略多一些，其次是七组元和六组元的。图 4 上还绘出了包括机械剥蚀的烧蚀外形，表面后退速度增加了，表面温度也有所降低。

在温度场计算中把 ξ 和 θ 都分二十等分的网格。图 5 是各向异性石墨端头在十七组元模型的热化学烧蚀情况下表面温度在弹道上最高值时的内部不同节点的温度沿 θ 的分布。沿 ξ 方向的温度分布，以壁面六组元烧蚀模型的驻点轴线为例绘于图 6，图中还绘出了烧蚀表面的移动历史及表面温度的变化历史。在表面温度达峰值时，高温区仅限于表面一薄层内的情况描绘得比图 5 更清楚。因此，该处的温度梯度使内部产生的热应力也将接近弹道上的最大值。这是端头容易碎裂的时刻。然而，各向异性石墨内部深处的温度比各向同性石墨的要低得多，起到了良好的隔热作用，但表面附近的温度梯度比各向同性石墨的要大得多。图 6 也绘出了有机械剥蚀时的情况，表明表面温度略低，但有时表面附近的温度梯度却要陡些。

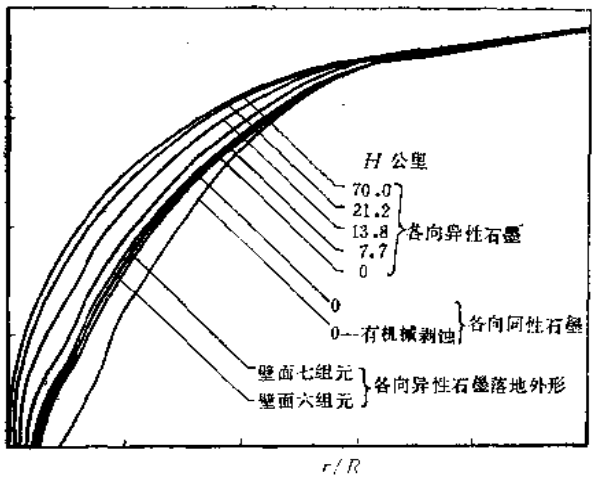


图 4 例算端头十七组元热化学烧蚀外形

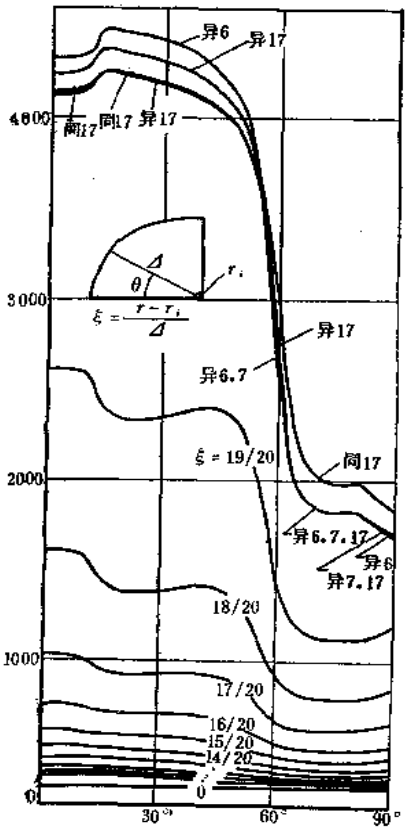


图 5 不同情况下端头壁温及壁面十七组元时的各向异性石墨的温度状态（$H=16.2$ 公里）

标号	异 6 异 7 异17 同17	→	各向	异 异 异 同	性石墨，壁面($\xi=1$)	6 7 17 17	组元气体

图 7 是在 12 公里以下遇到中等粒子云环境时，各向同性石墨端头考虑了机械剥蚀因素，按文献〔7〕的简单公式计算的烧蚀浸蚀外形变化历史。可见，因为表面后退很快，表面附近一薄层高温区迅速被揭掉，使其表面温度比热化学烧蚀情况的表面温度低得

多。图 3 給出了驻点壁温的这种情况。并且内部温度分布也较平缓。但是在遇到粒子云环境之前就已经出现了产生严重热应力载荷的温度分布状态。因此，粒子云浸蚀的出现虽减缓了内部热应力，但已为时过晚。

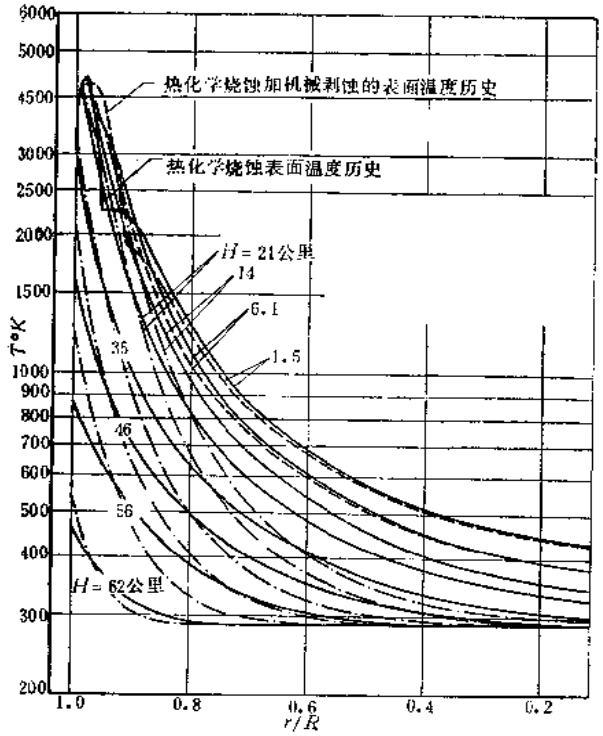


图 6 端头帽驻点轴线上的温度分布
—热化学烧蚀情况
- - - -加机械剥蚀的情况
—·—各向异性石墨的热化学烧蚀情况

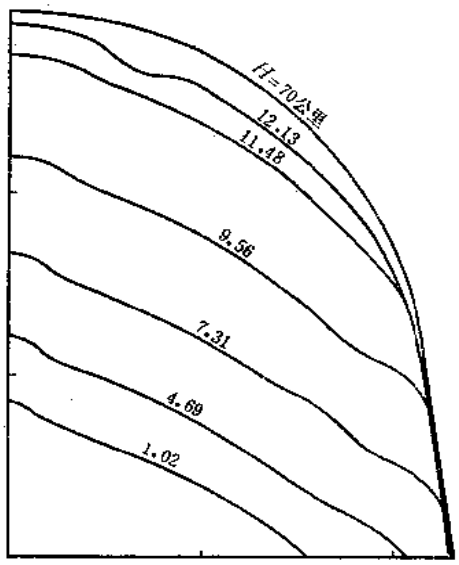


图 7 石墨端头在粒子云环境中的烧蚀外形历史

五、结　　语

用无条件稳定的三层显式差分格式求解端头温度场，计算简捷，与特定条件下的精确解符合很好。表面生成 CO、C_3、C_2N 及 CN 的反应对碳的烧蚀率或热效应的贡献较其他反应相对大得多。选取带有显式成分的隐式格式，保证了形状变化计算过程的稳定性，费时也不多。

参　考　文　献

〔1〕Chin, J. H., *AIAA* Paper No. 74-516.
〔2〕Chin, J. H., *AIAA* Paper No. 71-413.
〔3〕萨乌列耶夫，抛物型方程的网格积分法，科学出版社 (1963).
〔4〕雷柯夫，热传导理论，高等教育出版社 (1958).
〔5〕Crowell, P. G., *SAMSO-TR*-76-8.
〔6〕JANNAF Thermochemical Tables (1971), *NSRDS-NBS*37.
〔7〕Swain, C. E., *AIAA* Paper No. 75-734.

拟协调元的广义变分原理

陈万吉　刘迎曦
（大连工学院工程力学研究所）

本文以薄板弯曲为例，在一定的条件下，从修正的 Hellinger-Reissner 变分原理出发，推出了拟协调元的公式。从而为拟协调元提供了一种变分解释，也为建立不平衡型杂交元提供了一个新的工具。

在广义变分原理的泛函中，在单元内代入应力应变关系 $\underset{\sim}{M}=-\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}\,\underset{\sim}{\varepsilon}$。其中 $\underset{\sim}{M}$ 为内力向量，$\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}$ 为弹性系数阵。假定单元内应变 $\underset{\sim}{\varepsilon}=\underset{\sim}{\underset{\sim}{N}}\,\underset{\sim}{\alpha}$，所谓的一定条件就是应变插值函数应为：

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{N}}=\begin{Bmatrix} N_1,\ N_2,\cdots\cdots N_r,\ 0,\ 0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ 0,\ 0,\cdots\cdots\cdots 0,N_1,N_2\cdots\cdots N_r,\ 0,\ 0\cdots\cdots 0 \\ 0,\ 0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0,M_1,M_2\cdots\cdots M_P \end{Bmatrix}$$

其中，N_i，M_i 为插值函数基，$\underset{\sim}{\alpha}$ 为广义参数。

这个条件通常可认为等价于单元具有同等能力和不变性。

记泛函 $\pi_{mR}=\pi_{mR_1}+\pi_{mR_2}$，其中 π_{mR_2} 与载荷项有关，刚度阵由 π_{mR_1} 求得；记内力 $M_t=\underset{\sim}{\underset{\sim}{L_1^T}}\,\underset{\sim}{M}$，$M_{ns}=\underset{\sim}{\underset{\sim}{L_2^T}}\,\underset{\sim}{M}$，则

$$\pi_{mR_1}=\sum_e\Big\{\iint_{A_e}\frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon}^T\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}\,\underset{\sim}{\varepsilon}dxdy-\iint_{A_e}\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}\,\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}_{\alpha\alpha}\underset{\sim}{\underset{\sim}{N}}\,\underset{\sim}{\alpha}W\,dxdy$$
$$-\oint_{S_e}\underset{\sim}{\underset{\sim}{L_1^T}}\,\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}\,\underset{\sim}{\underset{\sim}{N}}\,\underset{\sim}{\alpha}\left(-\frac{\partial W}{\partial n}\right)ds-\oint_{S_e}\underset{\sim}{\underset{\sim}{L_2^T}}\,\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}\,\underset{\sim}{\underset{\sim}{N}}\,\underset{\sim}{\alpha}\left(-\frac{\partial W}{\partial s}\right)ds$$
$$+\oint_{S_e}\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}\,\underset{\sim}{\underset{\sim}{L^T}}\,\underset{\sim}{\underset{\sim}{N}}_{\alpha}\,\underset{\sim}{\alpha}W\,ds$$

其中 $\underset{\sim}{\underset{\sim}{L^T}}\,\underset{\sim}{\underset{\sim}{N}}_{\alpha}=\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}_{\alpha}\underset{\sim}{\underset{\sim}{N}}$；$\underset{\sim}{\underset{\sim}{N}}_{\alpha\alpha}=\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}_{\alpha\alpha}\underset{\sim}{\underset{\sim}{N}}$；而

$$\underset{\sim}{\underset{\sim}{D}}_{\alpha}=\begin{Bmatrix} l\frac{\partial}{\partial x}, & 0, & 0 \\ 0, & m\frac{\partial}{\partial y}, & 0 \\ 0, & 0, & m\frac{\partial}{\partial x}+l\frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}_{\alpha\alpha}=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{\partial^2}{\partial y^2}, & 0 \\ 0, & 0, & 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}$$

显然$\frac{\partial W}{\partial n}$，$\frac{\partial W}{\partial s}$，$W$为拉格朗日乘子，可按节点参数$\underset{\sim}{q}$分别在单元边界和域内插值。

可以证明下面三个式子成立：

$$\iint_{A_e} \underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{N}dxdy=\underset{\sim}{\bar{D}}\,\underset{\sim}{\bar{A}}$$

$$\underset{\sim}{L}_1^T\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{\alpha}=\underset{\sim}{\alpha}^T\underset{\sim}{\bar{D}}\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{L}_1$$

$$\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{L}^T\underset{\sim}{N}_a\,\underset{\sim}{\alpha}=\underset{\sim}{\alpha}^T\underset{\sim}{\bar{D}}\underset{\sim}{N}_a^T\underset{\sim}{L}$$

于是得单元刚度阵：

$$\underset{\sim}{K}_e=\underset{\sim}{C}^T\underset{\sim}{\bar{A}}^{-1}\underset{\sim}{\bar{D}}\,\underset{\sim}{C}$$

其中
$$\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{q}=\oint_{S_e}\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{L}_1\frac{\partial W}{\partial n}ds+\oint_{S_e}\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{L}_2\frac{\partial W}{\partial s}ds-\oint_{S_e}\underset{\sim}{N}_a^T\underset{\sim}{L}Wds$$

$$+\iint_{A_e}\underset{\sim}{N}_{aa}^T W dxdy$$

按拟协调元推导，假定单元应变 $\underset{\sim}{\varepsilon}=\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{\alpha}$，则

$$\iint_{A_e}\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{N}dxdy\,\underset{\sim}{\alpha}=\iint\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{\varepsilon}dxdy$$

由边界积分法求得 $\iint\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{\varepsilon}dxdy=\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{q}$，从而有

$$\underset{\sim}{\alpha}=\underset{\sim}{\bar{A}}^{-1}\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{q}$$

单元刚度阵为

$$\underset{\sim}{K}_e=\underset{\sim}{C}^T\underset{\sim}{\bar{A}}^{-1}\underset{\sim}{\bar{D}}\,\underset{\sim}{C}$$

这个结果与按 Hellinger-Reissner 变分原理的结果相同。可见按拟协调元方法推导简洁，并给出显式。通常的杂交元模型的单元刚度矩阵却显得复杂，而得不到显式。

弹性薄板弯曲分析的一种改进的三角形单元

罗　恩　　魏文郎
（中山大学）　（中国建筑科学研究院）

一般常用的9自由度三角形单元，要保证单元间法向斜率$\frac{\partial w}{\partial n}$的连续性是很困难的。为了克服这一困难，本文利用拉格朗日乘子法，建立了考虑单元间法向斜率$\frac{\partial w}{\partial n}$不连续性影响的正交各向异性薄板的广义变分原理。由此出发，导出了一种改进协调性的9自由度三角形单元。单元的位移模式与一般非协调单元完全相同，但假定在单元边界S_m上给定的法向斜率$\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}$为线性变化。这种改进单元的刚度矩阵表达式为$[K^e]=[K_n^e]+[K_m^e]$，其中$[K_n^e]$是一般非协调单元的刚度矩阵；$[K_m^e]$是对一般非协调单元的修改矩阵，它可由广义变分原理中沿单元周边的线积分项导出。由于引进改善协调性的单元线积分项，相当于增加单元的约束，所以这种改进单元要比一般非协调单元刚一些。对于弹性地基板，文中还给出文克尔地基矩阵的计算公式。利用这种单元，我们于1975年在441B-Ⅱ机上编制了薄板有限元分析的通用程序——EPB1。

这种改进单元与国内外同类型单元的计算结果相比，其精度及收敛性都更好。而且，在某些情况下，其位移精度与24个自由度的高精度矩形单元相当。由于这种单元直接采用一般非协调单元的位移函数，而不需用复杂的高次位移函数，故在计算单元刚度矩阵时，其工作量及计算时间均可大大减少。这种改进单元可推广到壳体静力分析、板壳稳定及动力问题中去。

有限条元法的基本方程与级数的收敛性能和加速方法

赵　祖　武
（天津大学）

本文提出了有限条元法的微分方程、边界条件和交接条件。矩形薄板的结线位移的微分方程为

$$\sum_p [a_{rp1}\, w_p + a_{rp2}\, \theta_p + a_{rp3}\, w_p'' + a_{rp4}\theta_p'' + a_{rp5}\, w_p'''' + a_{rp6}\theta_p''''] = \int qN_r dx$$

$$\sum_p (b_{rp1}w_p + b_{rp2}\theta_p + b_{rp3}w''_p + b_{rp4}\theta''_p + b_{rp5}w''''_p + b_{rp6}\theta''''_p) = \int q\bar{N}_r dx$$

柱体的结线位移的微分方程为

$$\sum_p (a_{rp1}u_p + a_{rp2}v_p + a_{rp3}w'_p + a_{rp4}u''_p) = \int q_x N_r d\Omega$$

$$\sum_p (b_{rp1}u_p + b_{rp2}v_p + b_{rp3}w'_p + b_{rp4}v''_p) = \int q_y N_r d\Omega$$

$$\sum_p (c_{rp1}u'_p + c_{rp2}v'_p + c_{rp3}w_p + c_{rp4}w''_p) = \int q_z N_r d\Omega$$

文中对方程系数的对称性作了论证，并阐述了有限条元法中的反力互等定理。有了基本方程，就可以越出通常仅限于使用变分法中的李兹法，而将其它諸如加权残量法等用于有限条元法中。

根据微分方程、边界条件和交换条件，提出了直接判断有限条元法中富氏级数的收敛特征的方法，其中包括三角级数和以梁的振形函数构成的级数。

本文揭示了由集中荷载产生的结线位移函数或其导数的内部跃度可以预先被确定数值，并据此提出了加速级数收敛的简便方法。特别是在文中揭示了内部跃度值与其纵向座标无关，因此对于沿轴线方向移动的集中荷载问题，这种加速方法更可以使计算量大为减少。

本文的论述原则对其它情况也适用并可得出类似的结果。

大型结构频率方程的分块直接解法

叶 碧 泉

（武汉大学数学系）

用有限元法计算结构动响应问题的关键是要求解一个相应的广义特征值问题

$$K\delta = \omega^2 M\delta \qquad (1)$$

求解式（1）的方法很多，然而当结构复杂、庞大，K 为数千阶时，这些方法都有些不适应。本文基于 $(E-A)^{-1}$ 的级数展开式，用逐步分块的办法来求解方程（1）。首先将式（1）分块写成：

$$\left(\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} = 0 \qquad (2)$$

将式（2）展开，然后消去 δ_2；在消去 δ_2 时，利用 $(E-A)^{-1}$ 的级数展开式，最后化成如下低阶广义特征值问题：

$$(\bar{K} - \omega^2\bar{M})\delta_1 = 0 \qquad (3)$$

其中

$$\bar{K} = K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21},\quad \bar{M} = M_{11} + K_{12}K_{22}^{-1}M_{22}K_{22}^{-1}K_{21} \qquad (4)$$

由式（3）求解 $\omega_1^{(i)}$，$\delta_1^{(i)}$ 之后，可用下式求 $\delta_2^{(i)}$：

$$\delta_2^{(i)}=-K_{22}^{-1}K_{21}\delta_1^{(i)}+\omega_1^{(i)^2}K_{22}^{-1}M_{22}K_{22}^{-1}K_{21}\delta_1^{(i)} \qquad (5)$$

$$(i=1,2,\cdots\cdots,N1;\ N1\text{ 为 }K_{11}\text{ 的阶数})$$

因为 $\bar{K}$，$\bar{M}$ 和 $\delta_2^{(i)}$ 含有满阵 K_{22}^{-1}（即使 K_{22} 是带状），所以按通常的方法是很难求出它们的。本文利用我们的（*D.S.P*）算法程序和某些运算技巧，较方便地解决了这些量的计算问题。

用同样的方法可导出关于 δ_2 的特征方程；若 K_{22} 仍是高阶时，可将其再分块；经过若干次分块，就把高阶特征值问题化成了若干个低阶特征值问题。整个分块求解过程格式统一、简单，适于一类大型结构的振频分析。

用杂交应力元及等参元计算应力强度因子

何积范　常亮明
（清华大学工程力学系）

高占民　李洲圣　孙笃信
（三机部六〇三所）

本文计算平面裂纹的应力强度因子 K_1 及 K_2 值，在各裂纹尖端安置一组扇形奇异性杂交应力元，周围则遍布八点等参元，前者能较好地描述裂纹尖端附近的应力变化，后者可适应曲线边界且计算简便。对于这样混合使用两种单元的原理，文中作了说明。K_1 及 K_2 值可以直接从最终的线性方程组中解得。对Ⅰ型裂纹，还采用不同路径 J 积分的平均值换算出 K_1 值。

在 TQ-16 机上计算了四个例子：（1）含有中央裂纹（$2C/2W=0.4$）的方板；（2）具有两侧等长裂纹（$2C/2W=0.5$）的矩形板；（3）具有单侧长裂纹（$C/W=0.8$）的矩形板；（4）具有单侧斜裂纹（$C/W=0.4$，$\varphi=\pi/4$）的矩形板。各板都受单向均匀拉伸。各例的结果均同解析解及国外其他多种奇异元的解作了比较。本文各例采用的自由度数均比较少，例（1）的结果比 S.N.Atluri 等人的为好，用前述两种方法算得的 K_1 值的误差仅 0.1～0.6%；例（2）的结果比 D.M.Tracey 文及 R.S.Barsoum 文为好，K_1 值的误差为 0.9～1.6%；例（3）曾在 S.E.Benzley 文中计算过，由于长裂纹尖端附近应力变化剧烈，该文所得 K_1 值的误差达 9.6%，而本文 K_1 值误差仅 0.9～2.4%；本文例（4）的 K_1、K_2 值，同 S.N.Atluri 等人的文及 S.L.Pu 等人的文相比，彼此结果十分相近；因解析解以曲线表示，各文取值不同，不好精细比较。

解异形板弯曲问题的一种半解析法——有限板块法及有限单元法的联合使用

严 宗 达
（天津大学）

对周界形状不规则的异形板的弯曲问题，一般难以求得解析解。使用有限单元法或有限差分法可以解决此类问题，但为了必要的精度往往需要网格分得较细，因而未知数数目很多，联立方程组阶数很高，增大了所需的机器贮存并延长了计算时间。为了减少未知数数目，节约计算时间，本文建议一种解决此类问题的半解析法，即联合应用有限板块法及有限单元法。此法是根据板的形状将其分割成若干块矩形的规则区域及局部的非规则区域。将规则区域当作矩形的板块，非规则区域再分割成若干三角形单元。为了兼顾挠度及弯矩的精度，用结点的挠度及两结点间边长中点处的法向弯矩作为基本未知量（混合法），分别形成板块及单元的刚（柔）度矩阵，然后建立总刚（柔）度矩阵，从而解出各结点的挠度及边长中点的法向弯矩值，再用解析法求出板块内部点的挠度及弯矩。文中用此法解算了周边简支梯形板的实例，所得结果与用其他方法所得结果很好的符合。

结 构 有 限 元 的 修 正 解

吴 良 芝
（北京大学）

有限元位移法通常假定梁单元轴向按线性插值，横向按三次函数插值。这时得到的有限元解，分段仅能是相应微分方程的一个齐次解，因而解是近似的。本文提出分段叠加各单元在实际分布载荷作用下两端固定时得到的一个特解，作为有限元的修正解。在任意载荷下，对于梁杆系结构，证明了这样的修正解不仅在节点处而且在各单元的内部均是弹性精确的，从而比较彻底地解决了梁杆系结构的线性静力分析问题（文中导出的单元内任一截面处应力合力的算式便于编制计算程序）。

对于板系结构，由于板的挠曲面远比梁的情况复杂，即便单元的法向载荷等于零，目前有限元给出的假定位移场，也仅是单元实际挠曲面的一个近似。因而通过对这位移函数作二次偏微商去计算应力势必精度很低。分片叠加单元諸节点固定时得到的一个特解，再由此去计算应力可望精度有较大的改善。但单元諸节点固定时板弯曲的特解不能唯一确定。本文转而利用矩阵力法在导出单元柔度矩阵时得到的几个关系式，给出了用节点力表示的矩形单

元的应力合力，与张福范教授新近用级数解得到的悬臂矩形板弯曲的结果比较，一致性较好。

旋转刚度的计算

丁皓江
（浙江大学）

Zienkiewicz 曾提议推导结点自由度只包含位移和旋转的平面应力元，作者推导了一个三角形单元及一个四边形单元，它们分别与著名的协调的并已广泛使用的板弯曲单元 HCT 及 Q-19 相匹配。

激光等离子体动力学数值计算

毕祝　苏林祥　李献文　董玉斌

本文研究了激光等离子体动力学、电离率和 X 光辐射等物理现象及其特征。文中假定，激光加热形成的等离子体是单一流体；电子和离子各自形成麦克斯韦尔分布；等离子体对本身的辐射光性薄。物理模型包含激光经典吸收、电子热传导、电子和离子间的热交换、非平衡电离、韧致辐射、复合辐射、线辐射等效应的流体动力学过程。

含有碰撞电离、复合辐射和三体复合的非平衡电离的常微分方程组是 Stiff 方程组，对此提出了保证 A—稳定性的求解方法。本文计算了铁、铜、铝、硅、钛等不同元素的靶材以及不同激光预脉冲、激光主脉冲对 X 光转换效率的影响。计算结果与国内外的实验结果进行了比较，基本吻合。通过数值实验得到激光等离子体 X 光的转换效率高达 13%，激光等离子体产生的 X 光是软 X 射线。本计算方法适用于较低的和中等原子序数单种元素的靶材和激光功率密度 $\simeq 10^{14}$ 瓦/厘米^2 的模拟计算。

超音速、高超音速压缩折角分离流数值解

傅德薰　陈英文
（北京气动研究所）

本文采用 Navier—Stokes 方程的数值解研究超音速和高超音速压缩折角层流分离流动的基本特性。为此我们提出了二阶精度的单步差分格式。利用此格式，用人工非定常方法数

值求解了完全的 Navier-Stokes 方程。为了克服二阶精度差分格式过激波的跳动问题和加密物面附近的计算点，文中还分别采用了带有调整系数的滤波方法和对数座标变换。

我们提出并采用的单步差分格式，与一般的差分格式比较，计算简单，占据内存少，且放宽了稳定条件对时间步长的限制。在国内现有的 320 机上只用 5.5—6.5 小时就稳定下来，得到压缩折角分离流的计算结果；而同一问题 Carter 在 CDC6600 上要用五个半小时，而 MacCormack 在 CDC7600 上要用 32 分钟。从时间比较说明，单步差分格式显出了它的优越性。

我们利用本文提出的方法，给出了 $M_\infty=3$，$R_{e\infty,L}=1.68\times10^4$，折角 $\theta_f=10°$ 绝热壁情况和 $M_\infty=14.1$，$R_{e\infty,L}=1.04\times10^5$，折角 $\theta_f=18°$，$T_w/T_{a\infty}=0.118$ 高冷壁情况的层流压缩折角分离的计算结果。其结果与国外文献中的计算结果和实验值进行比较，基本符合。

近海浅水环流问题的数值模拟

吕玉麟　赖国璋

（大连工学院工程力学研究所）

本文考虑粘性、底部摩擦，表面风载荷、Coriolis 效应和重力作用，运用沿水深积分平均的单层模型，并将流速 u_i 分解成 $\bar{u}_i$（沿水深方向的平均值）与 u_i'（偏差值）

$$u_i=\bar{u}_i(x_1,\ x_2,\ t)+u_i'(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$$

建立起环流问题的控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial q_i}{\partial x_i}=0$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1q_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_1q_2)-fq_2+\frac{\partial}{\partial x_1}(F_P-F_{11})$$
$$-\frac{\partial F_{21}}{\partial x_2}-\frac{\tau_1^s-\tau_1^b}{\rho}-\frac{p^s}{\rho}\frac{\partial H}{\partial x_1}-gH\frac{\partial h}{\partial x_1}=0$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}(\bar{u}_2q_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\bar{u}_2q_2)+fq_1-\frac{\partial F_{12}}{\partial x_1}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_2}(F_P-F_{22})-\frac{\tau_2^s-\tau_2^b}{\rho}-\frac{p^s}{\rho}\frac{\partial H}{\partial x_2}-gH\frac{\partial h}{\partial x_2}=0$$

式中　$q_i=\int_{-h}^{\eta}u_i\,dx_3$，　$H=\eta$（波高）$+h$（静水深）

F_{ij} 是粘性力、雷诺应力、垂直方向脉动应力 $\rho u_i'u_j'$ 的综合贡献，类比于层流，设

$$F_{ij}=\varepsilon\left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j}+\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\right)$$

其中涡流粘性系数 ε 值，通过计算过程调整。底部摩擦力 $\tau_i^b=C_f\rho(q_1^2+q_2^2)^{1/2}q_i/H^2$

摩擦系数 C_F 也可以调整使计算结果逼近实测值。

用 Galerkin 加权余量法将控制方程和相应边界条件写成变分表达式

$$\iint_A \left\{\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\right\}\Delta H\,dA=0$$

$$\iint_A \left\{\left(\frac{\partial q_1}{\partial t}-B_1\right)\Delta q_1-(F_p-F_{11})\frac{\partial \Delta q_1}{\partial x_1}+F_{21}\frac{\partial \Delta q_1}{\partial x_2}\right\}dA$$

$$-\int_{S_0} F^*_{n1}\Delta q_1\,ds=0$$

$$\iint_A \left\{\left(\frac{\partial q_2}{\partial t}-B_2\right)\Delta q_2+F_{12}\frac{\partial \Delta q_2}{\partial x_1}-(F_p-F_{22})\frac{\partial \Delta q_2}{\partial x_2}\right\}dA$$

$$-\int_{S_0} F^*_{n2}\Delta q_2\,ds=0$$

这里 Δq_i, H, $q_i\in W_2^{(1)}$, $\Delta H\in L_2$，统一采用三节点三角形单元，可建立如下的有限元分析的方程

$$\boldsymbol{M}_1\dot{\boldsymbol{H}}=-\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{V}_2\boldsymbol{Q}_2$$

$$\boldsymbol{M}_2\dot{\boldsymbol{Q}}=(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{D})\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}_2(\boldsymbol{T}^s-\boldsymbol{T}^b)-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{M}_3)\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{FC}+\int_{S_0}F^*_{nn}\Delta q\,ds$$

这个方程是非线性的，采用下列格式的分裂时间法

$$\boldsymbol{M}_1\dot{\boldsymbol{H}}^{(n-1/2)}=\boldsymbol{B}_1(t_{n-1/2},\ Q^{(n)}) \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{M}_2\dot{\boldsymbol{Q}}^{(n)}=\boldsymbol{B}_2(t_n,\ H^{n+1/2},\ Q^n) \qquad (2)$$

可以逐步算各瞬时的 H, Q 而避免解非线性项的多次叠代，时间步长 Δt 依照 Frederick-Courant-Levy 稳定性准则选取。

方程（1）、（2）可用 $\boldsymbol{LDL}^T$ 法将左端质量矩阵 $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ 一次分解成 $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{D}$ 贮存起来以备每步的回代求解。右端 $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{M}_3$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}$ 都须另行存贮以备每步调用，为此，本文编制大阶数稀疏矩阵的紧凑存贮格式，即将全部非零元素按变带宽一维数组存贮。摒弃所有“零”元素，可节省 2/3 的计算容量。

方程（1）、（2）每一步计算的 H, Q 值，经过线性内插的“人工光滑”化

$$Q_i=0.5Q_i+\sum_{k=1}^{n}Q_K/n$$

$$H_i=0.5H_i+\sum_{k=1}^{n}H_K/n$$

其中 n 为与节点 i 连接的单元个数，再回代到（1），（2）右端进行下一步计算。这样可以明显消除短波长噪音的干扰，比其它作者的方法简便。

实例计算表明，摩擦系数 C_F 对解值影响明显，涡流粘性项对解值影响很小，如忽略它，可缩短计算时间。本文建立的方法对使用小型机器计算长周期非线性的问题富有成效。

水中任意布置各种柱径的多圆柱结构的抗震分析与动力分析

曲 乃 泗

本文首先提出一个考虑空间影响的结构无水情形下自振频率和振型的计算方法，然后利用这些无水的振型去组合水中结构的实际振型，最后利用结构自由振动的方程，可以一次求出所需要的水中结构的动力特性及其对应的动水压力。进而将动水压力折算为附连水质量，再将其附在对应的固体结构上，于是该水中结构就可以化为普通无水情形结构的动力分析问题了。对于地震反应问题则更为容易，因为自振特性已经知道，故可按熟知的反应谱理论，根据规范进行抗震分析。

本文从实际工程出发，首先给出了一个较好的无水振型的计算方法，然后将水中实际振型按无水振型进行展开，这样就可以一次计算出所需要数目的有水振型、频率和动水压力，这毫无疑问能大量节省计算时间以及给结构的动力分析带来方便。特别是本文能较精确地计算出结构的无水振型，进一步简化计算水中结构的动力分析问题。

组合体超音速流场数值计算

郭 智 权

组合体超音速无粘流场数值计算归结为求解三维一阶拟线性双曲型方程组的初边值问题，其适定性条件是初值剖面为空向曲面。在本文计算中，球头部流场初值由二维“稳定法”给出；在流场内部跨越内弱间断面（下称内间断“捕捉法”）采用 MacCormack 二步显式差分格式；主激波和物面作为求解区域的边界有各自边界条件，且补充互为独立的流动方程（物面上用三个流特征、一个拟波特征方程），以构成封闭系统；对物面上的奇异点，按其特性进行奇异处理。文中还论述了 MacCormack 二步格式的“异步”程序设计，对于低存贮量的计算机，可成倍地提高计算速度。

组合体超音速流场内有多种弱间断及其相互作用。“捕捉法”能否反映这些属性？精度如何？作者就此研究了次激波的“装配法”，其结果与国内其他分间断的方法计算结果及国外实验值比较，结果是令人满意的。

本文适用于钝锥、钝多锥、幂次体、钝锥一柱一裙等对称物形的超音速绕流计算，其方法也可用于身部非对称物形的计算。大量计算表明，本文方法简便、省机时、结果可靠、适用性强。

冲击波绕二维山体的数值计算

李文绚　陈志林
（北京大学）

本文采用 Русанов 人工粘性差分格式，详细给出了守恒形式的运动方程组和内点以及边界点的差分格式，并进行了差分格式稳定性讨论；同时以图表形式给出了计算结果和实验结果的比较。

本文采用等腰梯形的二维山体剖面，使计算归结为平面二维流体动力问题。计算分定常和非定常两种情况。定常击波绕流计算时，左端输入恒定的阶梯击波，其初值为压力 $p=11.009$，水平速度 $u=2.730$，密度 $\rho=3.920$，竖直速度 $v=0$；重点模索前坡增压系数和山体附近参数场的分布。对迎坡倾角 $\alpha=20$，30，45，57，75（度）諸情形作了计算。给出了山体附近等压线分布及迎坡中央点超压随时间变化曲线和增压系数。

非定常击波绕流计算时，左端输入的压力，密度，速度波形直接引用一维球面波数值计算远区结果。着重研究不同山体对冲击波波形的影响。计算结果表明，不同山体对冲击波峰值超压，正压作用时间，正相冲量的影响是明显的。在工程设计时必须考虑。

计算值和实验值基本符合，多数偏差在 10～20% 之间。

复杂壳体应力分析

邹振祝　王本利　王宏钰　赵九江　　尤靖康
（哈尔滨工业大学）　　（福州大学）

1．本文使用 8 节点四边形和 6 节点三角形（皆可加筋或不加筋）超参数厚壳单元去分析复杂形状壳体里的应力。计算结果表明对中等厚度，局部曲率厚度比变化较大的壳体（$t/\rho=0.05\sim0.2$）能够获得令人满意的精度。

在壳体变形时，假设沿壳体中面法线方向的应力、应变为 0，因此在局部座标系 x'，y'，z' 中计算应力、应变是方便的，在这里 z' 是沿中面法线方向。这种方法似乎更适用于厚度变化不大急剧的壳体。

2．为了分析复杂壳体，使用了子结构法。对于任何一个子结构，其内部及交界面节点的排号都是任意的。如用脚标 "i" 和 "b" 分别表示属于内部和交界面节点的量，不失一般性，任何子结构的刚阵可表示为：

$$\begin{bmatrix} K_{ii}^{(11)} & K_{ib}^{(11)} & K_{ii}^{(12)} & K_{ib}^{(12)} \\ K_{bi}^{(11)} & K_{bb}^{(88)} & K_{bi}^{(12)} & K_{bb}^{(12)} \\ K_{ii}^{(\cdot\cdot)} & K_{ib}^{(\cdot\cdot)} & K_{ii}^{(22)} & K_{ib}^{(24)} \\ K_{bi}^{(21)} & K_{bb}^{(21)} & K_{bi}^{(27)} & K_{bb}^{(\cdot\cdot)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{i(1} \\ U_{b(1)} \\ U_{i(2)} \\ U_{b(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{i(1} \\ P_{b(1)} \\ P_{i(2)} \\ P_{b(2)} \end{Bmatrix} \tag{1}$$

经过方程的等效变换可得到如下形式的方程

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & K_{ib}^{\prime(12)} & o & K_{ib}^{\prime(12)} \\ o & K_{bb}^{\prime(11)} & o & K_{bb}^{\prime(12)} \\ o & K_{ib}^{\prime(28)} & \mathrm{I} & K_{ib}^{\prime(22)} \\ o & K_{bb}^{\prime(21)} & o & K_{bb}^{\prime(22)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{i(1)} \\ U_{b(\ )} \\ U_{i(2)} \\ U_{b(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{i(1)}^{\prime} \\ P_{b(1)}^{\prime} \\ P_{i(2)}^{\prime} \\ P_{b(2)}^{\prime} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

从式（2）得到

$$\begin{aligned} \{U_i\} &= \{P_i^{\prime}\} - [K_{ib}^{\prime}]\{U_b\} \\ [K_{bb}^{\prime}]\{U_b\} &= \{P_b^{\prime}\} \end{aligned} \tag{3}$$

很明显 $\{P_i^{\prime}\}$ 是在 $\{U_b\}=0$ 时，由载荷引起的内部节点位移；$\{K_{ib}^{\prime}\}$ 是由单位交界面节点位移引起的内节点位移；$[K_{bb}^{\prime}]$ 是该子结构对总刚阵的贡献；$\{P_b^{\prime}\}$ 是该子结构对总载荷列阵的贡献。

由于子结构内部排号的任意性，故可得到最小半带宽，进而减少内存及计算量。

3．如果结构的某些节点受到约束，其约束方程为 $[G]\{U\}=0$ （4）

由于交界面节点定义的任意性，可将全部被约束的节点定义为交界面节点。采用拉格朗日乘子法，总刚阵有形式

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & G^T \\ G & o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_b \\ o \end{Bmatrix} \tag{5}$$

通过方程等效变换，（4）式变为

$$\begin{bmatrix} I & G^{T\prime} \\ G & o \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_b \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_b^{\prime} \\ o \end{Bmatrix} \tag{6}$$

展开式（6），并变换得

$$\left.\begin{aligned} \{U_b\} &= \{P_b^{\prime}\} - [G^{T\prime}]\{\lambda\} \\ [G][G^{T\prime}]\{\lambda\} &= [G]\{P_b^{\prime}\} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

这种约束方程的解法与子结构解法完全一致，程序上带来很大方便。

4．本程序计算了各种各样的例题，结果与理论解和实验值非常符合。实验应用计算了一个形状极端复杂的引黄泵的泵盖，结果也是相当合理的。

结构化 FORTRAN 语言及其实现

钟万勰　裘春航　吴金仙

（大连工学院工程力学研究所）

为了推进我国的结构化程序设计与研制大型力学软件的需要，我们设计了一种结构化

FORTRAN 程序设计语言（简称 S.F. 语言）。这种语言已于 1978 年底在 TQ-16 机上初步实现。接着我们又于南化计算站西门子机上实现了从 S.F. 语言到 FORTRAN Ⅳ 的翻译，南京计算站在此基础上作了改善并投入了运行。在一年多使用实践的基础上，又对原文本的功能进行了扩充，形成了一个较完善的结构化 FORTRAN 语言的文本并已在杭州汽轮机厂西门子 7.000 系列 7738 计算机上运行。

S.F. 语言是 FORTRAN Ⅳ 的扩充，也就是在 FORTRAN Ⅳ 的基础上增加了六种控制语句以及与文字标号相匹配的无条件转向语句与计算转向语句：

（1）"IF"—"THEN"～"ELSEIF"—"THEN"…"ELSE"～"ENDIF"

（2）"CASE"—"WHEN"—"SELECT"～"WHEN"…"OR"～"ENDCASE"

（3）"LOOP"～"TEST"—"EXIT"～"ENDLOOP"

（4）"DO"～"UNTIL"--"ENDDO"

（5）"WHILE"—"DO"～"ENDWHILE"

（6）"FOR"—"DO"～"TEST"—"EXIT"…"ENDFOR"

（7）文字标号：及相应的 GOTO：文字标号

当前，结构化程序设计的概念已得到了广泛的采纳，而本文提供的 S.F. 语言是进行结构化程序设计的有力工具。S.F. 语言既保持了 FORTRAN 语言的模块式特点同时又克服了这种早期语言在逻辑功能上不适应作结构化程序设计的缺点。用 S.F. 语言书写的程序具有易读、易维护与出错率显著降低等优点。注意到每一种新加的控制语句都有自己的开始递志与结束标志，因此使得递归使用这些语句而出现的嵌套结构，层次分明、井然有条。这样，用 S.F. 语言与元语言相结合的办法，特别适用于逐步精化地设计与编程。而逐步精化或自顶向下的设计、编程与调试正是结构化程序或设计的主要风格。

本文对结构化 FORTRAN 程序设计语言及其前处理器（翻译器）的构造作了详细地论述并结合实例介绍了结构化程序设计的概念和方法。

环向加筋圆柱壳在横向冲击波作用下的动力响应

叶裕恭

（中国科学院力学所）

本文在 Geers 工作的基础上，针对无限长、环筋等距分布的圆柱壳受到一平面冲击波作用的情况，在考虑到壳体中面具有伸长和无伸长两种效应下，利用"参考结构法"导出加筋壳的动力响应方程。所谓"参考结构法"即以一均匀的单层壳作为"参考"壳。这个壳的自然频率和振型是确定的，而环筋作为"外载"来考虑它的效应，因此作用于"参考"壳上的全部"载荷"是由真实外载以及筋条的惯性力和弹性力所对应的"外载"这样两部分所组成。最后即可导出最终结果。

对本文导出的结果进行不同程度的简化，可以得到前人的一些结果。数值计算表明，壳中面有伸长的所有模式的响应，虽然最后是要衰减的，但是在冲击波刚刚接触到壳体的一瞬间，特别是周波数 n 为 1 或 2 的情况，是不可忽略的，否则将会带来很大的误差。另外壳体中的弯曲应力大小主要取决于前面几阶低周波的响应，因此在计算中，级数项取得很多也是没有必要的。

高层建筑杆——薄壁柱结构空间内力分析的矩阵方法

程万年　姚卓智
（中国建筑科学研究院结构研究所）

现有的对高层建筑结构进行三维分析的方法是把高层建筑化为平面抗侧力结构，利用楼板无穷刚性的稳定进行空间内力分析。这一方法不能反映高层建筑框筒，筒中筒等结构的受力特性，特别是这些剪力滞后特性。

本文把由窗间墙、门洞所划分的剪力墙作为薄壁杆件处理，根据 B.З. 伏拉索夫的弹性薄壁杆件理论，建立薄壁杆件的刚度矩阵；对于上下截面间断的薄壁杆件提出了间断处的联结条件。这样一幢高层建筑结构即可化为由薄壁杆件组成的空间结构。一般把楼板视作在自身平面内无穷刚性的横隔，按照矩阵位移法进行内力分析。

根据提出的公式在 441B-Ⅱ 机和 TQ-16 机上编制了相应的计算程序，可适用于在同一层柱、薄壁柱总数和层节点数不同，上、下层截面间断等大部分（包括框支剪力墙组成的）高层建筑结构的内力分析。例题的计算结果表明，考虑了结构平面布置的对称性后，这一方法可以基本满足国内目前高层建筑结构设计计算的需要。

高层建筑结构分层剪弯型振动体系在地震力作用下的弹塑性动力分析

赵西安　钱庚青
（中国建筑科学研究院结构研究所）

高层建筑结构可以简化为多质点分层模型，直接输入地震加速度记录进行弹塑性动力反应分析。

分层模型的振动方程为：

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C]\{\dot{X}\}+[K]\{X\}=-[M]\{\ddot{Z}\} \quad (1)$$

式中 $\{X\}$、$\{\dot{X}\}$、$\{\ddot{X}\}$ 分别为质点的位移、速度、加速度向量和地面运动加速度向量；$[M]$、$[C]$、$[K]$ 分别为质量、阻尼和侧向刚度矩阵。按已知的地震记录 $\ddot{Z}(t)$，对时间 t 求解这个二阶微分方程组，便可得到高层建筑结构在地震过程中的各种反应。

为了使分层模型弹塑性动力分析适用于目前广泛应用的高层建筑剪力墙和框架—剪力墙结构，本文采用了剪弯型层模型，首先由矩阵位移法直接建立体系的总刚度矩阵 $[K_f]$，然后消去与转角有关的元素，从而得到侧向刚度矩阵 $[K]$：

$$[K]=[K_{xx}]-[K_{x\theta}][K_{\theta\theta}]^{-1}[K_{\theta x}] \quad (2)$$

由式（2）求得的刚度矩阵 $[K]$ 是满矩阵，反映了所有各层水平位移的相互影响。

本文还得到了按静力计算或模型试验求得的水平位移 $\{x\}$ 直接计算楼层刚度 $\{GA\}$ 和 $\{EJ\}$ 的方法。

对式（1）的积分采用增量方程以考虑弹塑性工作阶段材料非线性的影响。积分方法采用 β 法（可考虑参数 β、γ 为任意值）或 θ 法（可考虑参数 θ 为任意值），给出了相应的积分公式。

本研究还进行了八层剪力墙结构住宅模型在地震模拟振动台上的直接动力试验，实测的反应值与本方法计算的反应值相当接近，从而表明了剪弯型振动模型的动力分析是可靠的。

按有侧移薄板弯曲理论分析折叠板

云 天 铨

（华中工学院）

折叠板和板的弯曲问题的区别在于前者有侧移。本文提出按有侧移薄板弯曲理论来分析折叠板。所谓有侧移薄板弯曲理论是考虑薄板弯曲和侧移相互影响的理论。在此，这种相互影响仅是将板边位移 $\{\Delta\}$ 与作用力 $\{X\}$ 之间的关系取其线性首项，即

$$\{\Delta\}=[\delta]\{X\} \quad (1)$$

式中 $[\delta]$ 为 3×3 板边柔性系数矩阵。

按有侧移薄板弯曲理论分析折叠板，就是把折叠板分成具有等效边的单块板来分析，递推计算等效边的柔性系数矩阵；计算外载荷引起的以及邻板传来的板边的位移和内力素；叠加即得问题的解并由平衡条件求得板中面层的纵向应力。

这些计算都是根据板边的变形条件，式（1）、板的弯曲以及板平面内弯曲的公式来求解的。

本文方法同以梁的分析为基础的实用分析的諸法比较，能较全面、精确地了解折叠板的工作状况。例如可计算板的两个方向弯矩、扭矩、板角反力、边梁（板）的影响等。对宽板块情形更方便。算例给出最大纵向应力相差约6%，有些边的弯矩相差较大。

关于40个自由度、结点壳体单元的一些计算试验

周洪祥　赵丽仙　　丁皓江
（浙江计算技术研究所）　（浙江大学）

关于40个自由度八结点壳体单元，国内提出了一个与国外略有不同的计算方案，我们在TQ-16机上用两种方案计算了同一例，发现国内方案的计算时间比国外的有一定减少，而挠度的计算精确度则几乎是完全相同的。应用国内方案还进行了圆柱壳受集中力的计算以及球壳、马鞍形壳的计算，结果是令人满意的。壳体的应力计算，在位移法中通常不直接在结点计算，而由高斯点的计算值外推，我们利用一个线性外推公式，可得到与国外同样的精度。

固体火箭发动机壳体法兰连接分析

陈汝训

固体火箭发动机壳体是具有旋转对称封头的圆筒压力容器。为了装填固体推进剂的需要，壳体后封头上需要开一个比较大的孔，用法兰与后盖连接。发动机工作时，壳体承受内压力，在与法兰连接的壳体上将产生较高的弯曲应力。为了减轻结构重量又要提高壳体的承载能力，必须对法兰连接问题进行较精密的分析。

本文用有限元法（力法）对壳体的法兰连接进行了分析。壳体部分采用截头锥壳元素，将元素的力学特性分解为边缘效应解和无矩解两部分。分析中考虑了上、下法兰间的相互作用。将法兰作为矩形截面圆环处理，上、下法兰之间用螺栓连接，将螺栓处理为受弯的元件。上、下法兰的变形通过螺栓来协调。

分析结果表明，法兰厚度对壳体的应力分布有很大影响。法兰的厚度（尤其是上法兰的厚度）不是越大越好，根据使用的要求，较小的法兰厚度往往能收到良好的效果。另外，壳体与法兰的连接位置（偏心距）对壳体应力和法兰变形也有决定性的作用。当法兰尺寸取定后，选取适当的偏心距，能大大减小甚至完全消除壳体的弯曲应力。这对法兰设计具有重要的指导意义。

文中附有算例，并与试验结果进行了比较，二者符合良好。

有限元通用程序系统中的两个问题

张　迪
（浙江大学）

本文讨论了如何根据单元类型、单元节点参数的参考座标系及单元节点编码，按总体节点参数与总体节点独立平衡方程相一致的原理，由程序自动产生总体节点参数表和相应的参考座标系的方位信息表，以程序框图的方式，给出了自动标定的梗概。指出了自动标定与现行其他人工标定方法的优缺点。自动标定方法确定的总体自由度数是最小的，使求解方法的选取有更大的灵活性。自动标定方法的优点，对组合结构的计算尤其明显。

本文还给出了各种单元类型的单元矩阵统一的程序编制方法。根据单元类型（单元的维数、节点数和节点参数类型），自动产生单元插值函数，进行微分和积分计算，形成单元矩阵（刚度矩阵、几何矩阵、非线性刚度矩阵等）。该方法不必对各种单元类型作具体冗长的公式推导，使得几何非线性刚度矩阵的建立，变得十分方便。文中还提出了节省计算量的措施。该方法使单元矩阵库的扩充十分容易，而所需的工作量又很小。因此，整个单元矩阵库的总目标程序长度大大压缩，可节省大量的人力、物力和时间。

组合结构有限元分析的罚单元法和主从变量法

曲　圣　年
（北京大学）

在用有限元法分析组合结构时，不同单元类型之间的拼接往往遇到困难。为此，可以对有限元模型的变量附加一些约束，即变量之间的相关条件。本文提供了处理这种约束的两种方法：罚单元法和主从变量法。

罚单元是作者提出的一类新型单元。它对能量泛函的贡献是惩罚项。惩罚项可以取一个正的因子乘上约束条件偏离的平方，从而得到罚单元的刚度矩阵和等效节点力的简单公式。对刚性约束（即必须满足的约束）情况，可在总刚度矩阵容许的条件数下取较大的惩罚因子值。对结构弱连接的弹性约束情况，本文对如何选取惩罚因子进行了初步的分析讨论。在有多种单元的程序中加进处理罚单元的程序十分容易。SAP5程序中的伪单元和读入刚度单元就直接可以当做罚单元来使用，根本不用修改程序。因为罚单元能处理任意的约束，所以使解题的功能大大增加，例如可用来处理结构的周期性条件，三维结构和薄板的端面连接等问题。

主从变量法是一种消去相关自由度的变量替换法。它能处理任意的刚性约束。用这种方

法不增加总刚度矩阵的病态，但要增加编程序的工作量。本文提供了一个对称矩阵主从变量替换的节省存储的算法。

矩形板格分析及其程序使用说明

杨 学 龄　　胡 云 程
（上海同济大学数力系）　　（上海市政工程设计院）

本文介绍了由矩形板组成的板格系统的分析，提供了计算框图，还给出了它的电算程序的使用说明。它适用于多跨多层的矩形水池，箱形基础、桥面板等等结构的内力计算。

板格系的分析不同于一般的有限元分析，它取一块矩形板作为一个计算单元（即巨块型板单元），无须再分网格了。板的单元刚度阵是根据板的经典理论推导出来的。

板格系是采用变位法来求解的，它的基本未知数是：以每条板边的转角作为未知数，转角是以富里叶级数展开的，在工程问题中，一般取富氏级数展开的前三项就够了。

关于作用在板格系上的外荷载，本文只介绍线性分布荷载的作用。

本方法节省了机器内存，可以在国产机（TQ-16机）上算大题目，单从经济价值及计算速度而论，就有很大的优点。

弹性反应谱计算方法比较及程序

陶贵源　杜瑞明
（中国科学院工程力学研究所）

在地震、冲击和振动分析中，经常要计算反应谱和富氏谱。本文对弹性反应谱计算中几种常用算法，从计算精度和效率、积分时间步长的选择、稳定性几个方面进行了讨论比较，从而推荐了一种比较快速、精确的所谓“精确法”。指出了用直接时间积分法求解时，积分时间步长 Δt 的选择应满足的条件，即 $\Delta t \leqslant \frac{1}{N}\{T,\ mt\}_{\min}$，$T$ 是自振周期，mt 是输入地震的卓越周期，N 是依赖于计算精度和不同的计算方法的常数，就“精确解”方法而言，N 一般可取为 10～20，而当 $T \leqslant mt$ 时，结论与有关文献是一致的。本文建议用零阻尼残余速度谱来计算富氏谱，这在需要同时计算零阻尼反应谱和富氏谱以及仅对某些感兴趣的频率范围进行频谱分析时，可以大量节省计算时间。上述这些办法，已经体现在我们提供的 FORTRAN Ⅳ 程序中。此外，本文还简要地讨论了谱分析中应用快速富氏变换方法的若干问题。

最小二乘边界配点法解平面问题

徐文焕　陈　虬
（西南交通大学）

弹性力学平面问题在工程实践中应用甚广，计算工作量也很大，简化它的计算有着重要的实际意义。本文直接用加权余量法求解平面问题，与目前广泛应用的有限单元法或最近所发展的加权余量有限单元法迥然不同。

在平面问题中，其控制方程为双调和方程：

$$\nabla^2\nabla^2\varphi=0$$

式中 φ 为艾雷应力函数。用 φ 表示的边界条件如下：

$$p_x=l\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-m\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

$$p_y=m\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-l\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

为建立平面问题的一般解，本文导出了以应力函数 φ 表示的位移边界条件方程式如下：

$$u=-\frac{1}{2G}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{1}{E}\int\nabla^2\varphi dx$$

$$v=-\frac{1}{2G}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{1}{E}\int\nabla^2\varphi dy$$

取双调和方程的解析解作为试函数，控制方程自然满足，故可用加权余量法中的边界法。方法简单明了，收敛性较好，计算的准备工作远较有限单元法为少，方程组的阶数不高，适于应用中小型电子计算机；方法的另一优点是可同时给出计算结果及其误差大小。

文中附有简单算例，通过与解析解的比较，说明了方法的正确性。

多孔锥壳有限元分析

陈裕泽　汤绍源

本文讨论的锥壳是重物间连接的承力构件，其大端带有法兰，小端有过渡加强环，靠近小端附近沿周向有三个椭圆形的孔，壳体的厚度按线性变化。把问题简化成大端固支，小端受均布剪力和三角形分布轴力（等效端弯矩）载荷的悬臂多孔短锥壳求解。

利用结构和载荷的面对称性，将求解规模缩小一半，采用三角形平板壳元和梁元的组合

结构程序进行有限元分析。把锥壳曲面分为234个壳元，过渡加强环划为18个梁元，结点总数149个，结点自由度数为6，利用分块直接解求得结果。为了防止三角形平板壳元由于尺寸量纲引起的数值起伏溢出，选择尺寸因子为10^{-8}。

文中着重分析了这类结构的位移、应力的分布规律；并将有限元计算结果与光弹性实验值进行了比较，图表均指出两种结果比较吻合。实践表明，这类带环的壳体结构采用三角形平板壳元和梁元的组合结构有限元分析是可行的，能够满足工程实际的需求。

用有限元半解析法计算复杂转子的临界转速问题

安为民　邹经湘
（哈尔滨工业大学）

本文根据转子结构轴对称的特点，依据有限元半解析法的思想，用三角形截面环形单元（三维协调单元）和线性位移模式，按照弹性理论基本方程，推导了单元刚度和质量矩阵。由于单元刚度和质量矩阵是块对角的，因此可以将三维问题蜕化为二维问题来处理，从而大大节省了存储量和计算时间。作者编制了计算复杂结构转子静力问题和动力问题的程序。用子空间叠代法解特征对。此程序可以计算复杂结构转子的轴向、扭转及弯曲振动以及弯扭联合振动。本文列举了一系列圆轴的弯曲振动与扭转振动问题的计算结果，与精确解比较，误差极小。作者还用此程序计算了设计中的六十万千瓦汽轮机的高、中、低压缸的整锻转子和低压缸焊接转子的折算刚度。本方法还适合于计算三维动应力问题。

用交感模型平板弯曲单元进行薄壳和平板空间结构分析

魏兆正　张积珠　严国梅

本文选择线性项应力函数的交感应力模型膜应力矩形单元与平板弯曲矩形单元，将它们叠加形成交感模型薄壳单元 Hms 1，并将之应用于具有正交边界的柱面薄壳和平板空间组合结构的分析。该单元膜应力部分假定的应力函数取为

$$\sigma_p=\{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau\}=P_p\{\beta_1\cdots\cdots\beta_6\}=P_p\beta_p.$$

其中β_p为待定系数向量，P_p矩阵为

$$P_p=\begin{pmatrix}1 & y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & x & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

将 P_p 连同单元边界力向量 S_p、单元边界假定连续位移场向量 u_p 代入修正的余能泛函

$$\pi_c=U-\int_{\text{单元边界}} u_t S_t dA$$

其中 U 为用应力分量 σ_{ij} 表示的应变能。S_t 为单元边界表面力分量。u_t 为单元边界位移分量。应用极小值原理可得到膜应力单元刚度阵 K_p。

弯曲部分的应力函数取为

$$\sigma_B=\{M_x,\ M_y,\ M_{xy}\}=P_B\{\beta_1\cdots\cdots\beta_9\}=P_B\beta_B$$

其中 P_B 为

$$P_B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & x\end{pmatrix}$$

单元边界位移场假定为座标的三次式。用同前的方法可得弯曲部分单元刚度阵 K_B。薄壳单元 Hms1 单元刚度阵的分块矩阵形式为

$$[k_{rs}]=\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
\multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$[K^P_{rs}]$}} & & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & \multirow{3}{*}{} & \multicolumn{3}{c|}{\multirow{3}{*}{$[K^B_{rs}]$}} & 0\\
0 & 0 & & \multicolumn{3}{c|}{} & 0\\
0 & 0 & & \multicolumn{3}{c|}{} & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{0}
\end{array}\right)\qquad (r、s=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

其中 $[K^P_{rs}]$ 为 2×2 的膜应力单元刚度矩阵的分块矩阵，$[K^B_{rs}]$ 为 3×3 的平板弯曲单元刚度矩阵的分块矩阵。薄壳单元 Hms1 的节点广义位移向量为 $q=\{q_1,q_2,q_3,q_4\}$，其中 $q_t=\{u_t,v_t,-\theta_{xt},-\theta_{yt},\omega_t,\theta_{zt}\}$。对于中面内有初始应变的情形，文中推导了其相当节点力为

$$F=\int_{\text{单元体积}} \boldsymbol{T}_p^T\boldsymbol{H}_p^{-1}\boldsymbol{P}_p^T\boldsymbol{N}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dV$$

其中

$$T_p=\int_{\text{单元边界}} \boldsymbol{R}_p^T\boldsymbol{L}_p dA,\qquad \boldsymbol{H}_p=\int_{\text{单元体积}} P_p^T N P_p dV$$

E 为平面应力弹性矩阵，$N=E^{-1}$，ε_0 为初始应变向量。开孔对刚度的影响文中也讨论了相应的计算方法。

文中通过对盒式空心梁在不同网格下计算表明，本文提供的方法具有划分单元少、计算精度好、收敛速度快的优点。

结构动力模型支承刚度参数识别的优化处理方法

黄文虎　李效韩
（哈尔滨工业大学）

结构的支承条件对结构的振动特性有较大的影响。但支承刚度值一般难以直接计算，也较难直接实测确定。

1975年J.G.Maloney和M.T.Shelton提出用优化方法，利用动试验数据来确定战术导弹諸接头的柔度。这一思想可用来确定结构的支承刚度。但该文中利用差商来代替二阶导数，以及任意估计一维寻查步长的方法，都使得所用叠代方法具有很大的局限性和任意性。

本文为了确定结构的支承刚度，仍以各阶计算频率、振型与实测频率、振型之差的平方乘以一定的权值求和，取为评价函数。然后分别采用最速下降法和变尺度法（BFGS公式）来确定寻查方向，用进退法确定寻查区间，然后求一维最优点。反复叠代，以逼近最优点。

本文以悬臂方板作为算例。由计算结果可以看出：

（1）方法是可行的。无论选取何种初始点，都能很好地逼近最优点，取得满意的结果。

（2）评价函数值在极小点附近区间内有拐点。因此在一维寻查中，先用进退法确定寻查区间是必要的。

（3）由于此评价函数反映了各阶频率和振型的计算值和实测值之间误差的综合指标，因此可用它的数值大小作为收敛准则。

桥式起重机主梁优化的一个计算方法——复形法

宋甲宗　施光燕
（大连工学院）

本文将约束非线性规划的复形法应用于桥式起重机主梁的优化计算上，并提出了一些改进解的办法，编制了适用于正轨及偏轨箱型主梁优化的计算程序。

本文讨论的是在给定起重机结构类型，给定系列化中所允许采用的高度、宽度尺寸的前提下，选择合理的截面。所以以梁高 H，梁宽 B，上盖板厚度 δ_1，下盖板厚度 δ_3，主腹板厚度 δ_2，副腹板厚度 δ_4 等六个参数作自变量，以主梁自重作目标函数，约束条件归纳为：跨中上盖板应力、跨中下盖板应力、主腹板受集中轮压时的应力、端部腹板切应力、大车制动

时在跨中引起的应力、垂直静刚度、垂直动刚度、由惯性力而产生的水平静挠度、水平振动周期及板的稳定等。

我们采用约束极值的复形法求解。停机标准采用二种，一是复形顶点间的距离缩小到一定程度，二是相应的函数值之差小到一定程度。采用三种办法改进复形法所得之终点，一是利用初始复形的随机性采用多阶段的运算，二是松弛有效约束，同时在目标函数中加入适当的惩罚项，三是在终点处再探测可行方向。对于最后结果的规格化是采用最后结果的凑整和在反映过程中每步都予以凑整二种方法处理。

我们在 TQ-16 机上计算了十六组数据，结果较好。

有频率禁区的结构优化设计

林 家 浩

（大连工学院工程力学研究所）

使结构的自振频率避开某一频率区段，且使结构重量为最轻的结构动力优化研究工作，有十分明显的工程意义。本文提出一种双因子松弛叠代算法，在按 Kuhu-Tucker 条件及频率梯度公式组织叠代时，收到了迅速、稳定的收敛效果。而且，目标函数、各单元的刚度矩阵与质量矩阵跟设计变量的关系可以是非线性的，例如可以用梁截面的高度，板壳单元厚度，圆轴直径等作为设计变量。对于不同形状、参数、边界条件、初始设计的十几个结构共数百道考题表明，本法的收敛性是良好的，一般约经 5 次叠代便达到最优解附近。本文的方法还可推广应用于结构的外形动力优化。

双层柱壳组合结构的优化分析

宋 天 霞

（华中工学院）

本文对有关文献所提出的“双层柱壳组合结构”进行了优化分析。在优化过程中，考虑了以下几点：（1）把约束优化问题转化为无约束优化问题；（2）将内点法与外点法结合起来使用，即对等式约束和不被初始方案 $x^{(0)}$ 满足的不等式约束，用罚函数，对被 $x^{(0)}$ 满足的不等式约束，用碰壁函数；（3）在求无约束最小值中，除采用 DFP 公式外，还在求一维最小值中提出了一个新的、收敛较快的插值方法；（4）对同一结构，除分别考虑应力约束（包括几何约束）、稳定约束外，还同时考虑应力约束和稳定约束，并将三者的优化结果进行比较分析；（5）文中编制的优化程序 MINZE-1，可适用于一般有、无解析解的结构。

依据DFP公式确定$H_{(k)}$之后，立即形成梁索方向dir。在dir上，采用以下公式进行反复二次内插求一维最小值。若已知a，c两点处的函数值Φ_a，Φ_c，且$\Phi_a<\Phi_c$，则a，c中的一个插值点d为：

$$d=\frac{-\frac{1}{2}\times pej\times c^2}{\Phi_c-\Phi_a-c\times pej} \tag{1}$$

式中

$$pej=\nabla\Phi(a)\cdot\bar{s}_t。 \tag{2}$$

$\bar{s}_t$为dir方向上的单位矢量。若已知a，b，c三点处的函函值Φ_a、Φ_b、Φ_c，且$\Phi_c>\Phi_a>\Phi_b$，则三点间的一个插值点d为：

$$d=\frac{\frac{1}{2}[(a+b)\times p_c+(b+c)p_a]}{p_a+p_c} \tag{3}$$

式中$p_a=(b-c)(\Phi_a-\Phi_b)$，$p_c=(a-b)(\Phi_c-\Phi_D)$。

文中造了一个新的罚函数，即混合罚函数：$\Phi(x,r)=F(x)+rA(x)+r^{-1}(\bar{A}(x)+B(x))$。式中$r$为正参数值，$A(x)=-\Sigma\ln a_t(x)$为对数障碍项，$\bar{A}(x)=\Sigma\{min[0,a_t(x)]\}^2$为二次减小项，$B(x)=\Sigma b^2(x)$为等式约束项，$F(x)$为原问题的目标函数。这些函数，均可有关由文献所给出的解析式确定。

如何选取参数系列值$\{r_k\}$，会直接影响到SUMT法的效率。依据我们的摸索，提出以下选取规律：

$$r_0=\lambda|\dot{v}|，\quad 且\ \frac{1}{100}\leqslant\bar{\lambda}\leqslant\frac{5}{100}$$

和

$$r_{(k+1)}=\frac{r_{(k)}}{10^{\bar{\lambda}}}，\quad 且\ \frac{1}{5}\leqslant\bar{\lambda}\leqslant\frac{1}{3}$$

式中$\dot{v}$为问题的估计最小值。经过实例计算，证明所引进的混合罚函、插值方法、选取规律等，不仅正确，而且比一般已有的方法收敛快，数值稳定。

建议一个计及大变形的极限分析定理

薛　大　为

（北京工业学院）

在极限分析中，虽然早就认识到应当计及几何方面的变化所产生的影响，但由于问题的非线性，迄今没有一个合用的解析分析方法。本文根据变分法，将此问题的解所需要满足的全部方程和边界条件用一个泛函的驻值问题来等价，这就为这一困难的问题的解决提供了另一途径。本文证明：

定理　刚塑性体抵达极限状态时，载荷乘子ν为下式的驻值：

$$v = St_a \frac{1}{\int_{S_\sigma} T_i v_i dS} \left\{ \int_V \left[\frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i} + v_{k,j} v_{k,j}) \sigma_{ij} - X_i v_i \right] dV \right.$$

$$\left. - \int_{V_p} \frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{2\sigma_T^2}(f - \sigma_T^2) dV - \int_{S_v} (\delta_{ik} + v_{i,k}) \sigma_{kj} n_j (v_j - \overline{v}_i) dS \right\}$$

其中，应力张量 σ_{ij} 应变速度张量 ε_{ij} 和位移速度矢量 v_i 互相无关，同时独立变分；$f(\sigma_{ij})$ 为屈服函数且设为 σ_{ij} 的二次齐次式，其最大值处于塑性区内；X_i 为体积力；T_i 为基准外载；v 为载荷乘子（即 vT_i 为物体所承受的表面外载）；n_i 为边界面的外法向单位矢量；δ_{ij} 为 Kronecker 记号；σ_T 为屈服应力；V_p 和 V 分别代表塑性部分的体积和全体积；S_σ 和 S_v 分别表示外载已指定的边界和位移速度已指定（为 $\overline{v}_i$）的边界；St_a 表示求驻值。

大型雷达结构自振频率分析

徐植信　朱美珍　翁大根　　于春生

（同济大学）　　（上海计算技术研究所）

本文在现有文献的基础上，进一步做了以下工作：

1．论证了多自由度体系在各阶自由转子或锁定转子自振频率处结构响应有谐振峰或反谐振峰。

2．说明了对齿轮系统轴扭转振动时，将啮合的齿轮轴折算到同一根轴上采用刚度和惯矩都乘以速比平方的这种常用方法，只适用于轴的转角为绝对位移时的情况。

3．对传动减速器内各级齿轮传动链，考虑每个齿轮三个自由度，且在轮齿弹性啮合情况下建立了全耦合的刚度矩阵。

4．对大型天线座支承在沿周边等距离设置的油压支承上的转盘弹性封闭圆环组合结构进行了分析，简化为周边支承在文克尔地基上的弹性圆环铰接加强板，获得了便于应用的级数解。

最后，本文将两个雷达分析的结果和实测值进行了对比，探讨了其中一个雷达结构的薄弱环节，减速器内各部分变形值的比例关系以及提出了提高自振频率的建议。

结构动力阻尼特性及速度元法

杨真荣　阎榕玲

（中国科学院计算中心）

为了节省动态问题的计算量和存贮量，本文分析了结构系统的阻尼特性，给出最大模的估计定理，即

定理　若 K 和 k 表示有限元总体和单元刚度矩阵，M 和 m 表示按集中质量方式形成的总体和单元质量矩阵，m_e 为 m 的对角元素，C_1 和 C_2 为系统阻尼系数，S 为 k 阵的阶数，k_{ii} 为 k 的对角元素，P_{max} 表示整个有限元格网中，节点周围单元的最大数目，则阻尼矩阵 C 的最大模

$$\|C\|_\infty \leqslant P_{max}(C_1 \max_e m_e + C_2 \max_e (S_e \max_i k_{ii})$$

推论 1　对于均质非组合结构有限元问题

$$\|C\|_\infty \leqslant P_{max}(C_1 \max_e m_e + C_2 S_e \max_e (\max_i k_{ii})$$

推论 2　对于均质二维弹性三角形有限元且节点周围不超过八个三角形单元情形

$$\|C\|_\infty \leqslant \frac{8}{3} C_1 t_m \rho_m |\Delta y_m \cdot \Delta x_m| + 64 C_2 H(\Delta y_m^2 + \Delta x_m^2)$$

式中 t_m、ρ_m、Δy_m、Δx_m 为单元最大厚度、密度、y 向网格间距和 x 向间距；

$$H = \begin{cases} Et_m/4(1-\mu^2)A & \text{平面应力问题} \\ E(1-\mu)t_m/(4(1+\mu)(1-2\mu)A & \text{平面应变问题} \end{cases}$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix},$$

E ——弹模，　μ——泊桑比

其次，基于系统阻尼特性，讨论了速度元法的应用特点。

文中，以坝体动应力为例，针对阻尼的作用进行了数值分析。同时，还针对桥梁的不同振型及阻尼比，给出了 c_1 和 c_2 的计算结果。

用有限元-线性规划法解弹性接触问题

纪　名　刚
（西北工业大学）

本文结合有限元素法和线性规划的单纯形算法，提出一个通用的求解弹性接触问题的计算方法和计算机程序。假定载荷沿接触表面的法向作用以及变形是在弹性范围内。对初始接触区的大小以及物体形状则没有任何限制。在经过有限元分割后，首先求出各接触物体的柔度矩阵；它由接触节点的变形系数所组成。然后把接触节点的载荷分布和刚体接近作为未知量，根据变形协调、力平衡和接触条件把问题化为一个线性规划问题并用改进的单纯形算法求解。最后，根据已解出的接触区载荷分布，用局部加密有限元网格的方法求出接触区附近的详细应力分布。

实践表明，这种算法收敛速度很快，而且由于它不需要同时储存所有接触物体的单元信息，因此它需要较少的计算机存储容量。作为考核，用本计算方法计算了一对圆柱体的接触，将结果与赫茨的解析解作了对比，准确度是满意的。文章最后以齿轮啮合为例，计算并分析了在不同啮合位置以及有无摩擦作用时的接触区应力状况。本文介绍的计算方法可用来分析和计算一般机械设计中遇到的接触问题，也可以用来计算大型的如弹性梁的接触问题。

自由界面模态综合方法的改进

朱 礼 文
（北京机械装备总体设计部）

在飞行器结构的动特性和动响应分析中已广泛地应用了模态综合方法。其中自由界面模态综合方法，在分析上精度较高，同时部件模态也易于用试验验证。但是，自由界面模态综合方法存在的较大缺点是寻求部件的剩余模态时，须对部件的刚度阵 K 进行求逆。一旦 K 阵奇异（相应于结构未予约束住的情况），各种现有的自由界面模态综合方法全都采用了 MacNeal 的方案来求部件的剩余模态。该方案十分繁琐，不但编制程序复杂，还使精度下降。为此本文用了移位方式取代了 MacNeal 的方案，大大简化了部件剩余模态的寻求。在此基础上，本文推导了多个部件的复杂联结情况的综合公式。这些情况包括有：链式的、叉形的、环式的及其各种组合形式等。应用文中提出的方案，建立起来的一个通用程序，对五个算例进行了计算，结果十分令人满意。

在 C_n 群上对称的壳体结构的振动分析

孙 树 勋
（山东工学院）

本文利用群的表示理论，将未知节点位移转换为沿 C_n 群各不可约表示的基矢的广义位移，从而使结构的刚度矩阵和质量矩阵约化为准对角形式

$$[\bar{K}]=\begin{pmatrix} n[K_g] & & 0 \\ & \frac{n}{2}[K_g] & \\ 0 & & n[K_g] \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$[\bar{M}]=\begin{pmatrix} n[M_g] & & 0 \\ & \frac{n}{2}[M_g] & \\ 0 & & n[M_g] \end{pmatrix} \tag{2}$$

$[K_g]$，$[M_g]$ 分别为基本部分上与普通节点位移对应的刚度矩阵和质量矩阵。

考虑各部分间的耦联条件及边界条件，最后得到求解方程：

$$\left.\begin{aligned} &([K_g^*]-\omega^2[M_g^*])\{\bar{\delta}^*_{c_0}\}=0 \\ &\{\bar{\delta}^*_{c_0}\}_Q=\{\bar{\delta}^*_{c_0}\}_P \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\begin{bmatrix}[K_g^*] & 0\\ 0 & [K_g^*]\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}[M_g^*] & 0\\ 0 & [M_g^*]\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\{\bar\delta^*_{c_j}\}\\ \{\bar\delta^*_{s_j}\}\end{Bmatrix}=0\\ &\begin{Bmatrix}\{\bar\delta^*_{c_j}\}\\ \{\bar\delta^*_{s_j}\}\end{Bmatrix}_Q=\begin{bmatrix}[I]\cos j\theta, & [I]\sin j\theta\\ -[I]\sin j\theta, & [I]\cos j\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{\bar\delta^*_{c_j}\}\\ \{\bar\delta^*_{s_j}\}\end{Bmatrix}_P\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

$$\begin{pmatrix}\text{当 } n \text{ 为偶数}, j=1,\ 2,\cdots\left(\frac{n}{2}-1\right)\\ \text{当 } n \text{ 为奇数}, j=1,\ 2,\cdots\frac{n-1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}&([K_g^*]-\omega^2[M_g^*])\{\bar\delta^*_{c_{n/2}}\}=0\\ &\{\bar\delta^*_{c_{n/2}}\}_Q=\{\bar\delta^*_{c_{n/2}}\}_P\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

(n 为偶数)

其中 $[I]$ 为单位矩阵，$\theta=2\pi/n$。下标 P，Q 表示位于基本部分与邻接部分联接面上且又是 C_n 群上对称的节点的位移。

由此，一个高阶特征值问题被降低为最多只有原来的 $2/n$ 的一组低阶特征值问题，而且其刚度矩阵与质量矩阵只需对基本部分（整个结构的 $1/n$）计算即可。这样计算大大简化。

关于高阶稀疏局部非线性方程组的拟牛顿方法

崔 俊 芝
(中国科学院计算中心)

本文首先定义了高阶非线性方程组 $F(x)=0$ 的稀疏模式阵 $\Lambda^{(1)}=\{\lambda_{ij}^{(1)}\}$，$\Lambda^{(2)}=\{\lambda_{ij}^{(2)}\}$，

$$\lambda_{ij}^{(1)}=\begin{cases}1 & \text{当 } x_j \text{ 在 } f_i(x) \text{ 中出现时}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$$\lambda_{ij}^{(2)}=\begin{cases}1 & \text{当 } x_j \text{ 在 } f_i(x) \text{ 中以非线性出现时}\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$E^{(1)}=\{(i,\ j)\mid\lambda_{ij}^{(1)}=1\}$，$E^{(2)}=\{(i,\ j)\mid\lambda_{ij}^{(2)}=1\}$ 分别描述了 $F(x)=0$ 的稀疏性和非线性性。针对 $\Sigma\lambda_{ij}^{(2)}\ll\Sigma\lambda_{ij}^{(1)}\ll n^2$ 的情形，作者提出了两个有效的拟牛顿方法：

1．已知拟牛顿格式为

$$x^{(l+1)}=x^{(l)}+\alpha p,\qquad k^{(l)}p=-F(x^{(l)}),$$
$$k^{(l+1)}=k^{(l)}+M^{(l)},\qquad y=F(x^{(l+1)})-F(x^{(l)}),$$
$$M^{(l)}\alpha p=r,\qquad r=y+\alpha F(x^{(l)})$$

令 $A_{ij}=(\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots)^T$，$M^{(l)}=\sum_{(i,j)\in E^{(2)}}A_{ij}A_{ij}^T$，使

$$\begin{cases} a_i^2\alpha p_i + a_i a_j \alpha p_j = \xi_{ij} r_i \\ a_j a_i \alpha p_i + a_j^2 \alpha p_j = \xi_{ij} r_j \end{cases}$$

并假定$\xi_{ij}=\xi_{ji}$。通过在约束条件 $\sum_i \xi_{ij}=1$ 下，求极小问题，$\min \frac{1}{2}\|M^{(i)}\|_F^2$，来确定$M^{(i)}$。文章给出了 ξ_{ij} 和 $A_{ij}A_{ij}^T$ 的计算公式。

2．直接使用 Toint 算法，可以给出在非线性稀疏模式 $E^{(2)}$ 上的修正矩阵 $M^{(i)}$，文章中的定理 1 保证了直接使用 Toint 修正算法的合理性。

最后，文章叙述了使用上述两种算法分析实际问题的计算技巧，分别讨论了每步直接法和叠代法两种情形。

有限元混合法分析四坡顶扭壳屋盖

徐次达　郑瑞芬
（同济大学）

本文将有限元混合法推广应用于分析一个“四坡顶组合扭壳”屋盖。这种屋盖系由四块双曲抛物面的等扭壳刚接合而成，周边铰支，单块扭壳的斜度率为 1/25(M^{-1})。载荷系自重。在用有限元混合法分析时，我们把这组合扭壳分成四个单块扭壳对称地划分网格，共分 200 个单元，节点包括边点在内共 441 个。

本文的计算结果与建筑科学研究院的“四块组合型双曲抛物面扁扭壳的内力分析”一文在挠度及剪应力方面作了比较。两者的挠度曲线形状相似，数值接近。从扭壳的剪应力来看，除开边点外两者大体上尚接近；扭壳角点处，建研院资料的数值比较高，甚至达到 −800.5 kg/cm²，较有限元混合法同样点处高 3 倍，对此难以解释，需待进一步澄清。

总之，用有限元混合法计算负高斯曲率的壳体及组合壳体是可以信赖的，效果也是良好的。

岩体工程有限单元分析中的一维节理单元

殷有泉　张　宏
（北京大学）

在岩体工程的有限单元分析中，为描述节理、断层和破碎带的不连续性质，Goodman 等人提出一种特殊的单元，称之为节理单元。在使用这种节理单元时发现了一些问题。一个问题是解答的不确定性。当节理面内的应力值超出强度条件时，能够用缩小剪应力分量，或增大正应力分量，或其它的不同方式，改变它的应力分量使其满足强度条件。这样，可相应地得到不同的解答。另一个问题是可能出现嵌入现象，即节理面一侧的节点可能嵌入到另一

侧介质中去。

本文把一维节理单元看做窄矩形单元在厚度接近于零时的极限，导出了一维节理单元的形函数和正确的增量形式本构关系。这种本构关系反映了节理弹性刚度的变化以及节理面的渐进破坏的弹塑性性质。使用这种节理单元，在增量意义下解答是唯一的，从而把节理岩石的有限单元分析建立在一个正确的力学基础之上，同时从根本上克服了嵌入现象。另外，我们从理论上和用简单算例论证了，仅当节理面的应力值远小于节理的弹性刚度与厚度之积时以往的节理单元模型才是合用的。而我们建立的模型能够不受限制的使用。

再入飞行器壳体结构在强脉冲射线辐照下的动力响应

李 清 源

核武器在外层空间爆炸时，约有 3/4 的能量是以软 X 射线形式释放出来的。软 X 射线的巨大能量在极短时间内沉积在飞行器壳体外表薄层中，足以使材料熔化和汽化。瞬时熔化和汽化的高温高压物质将以极高速度向外喷射，并在壳体中形成所谓“热激波”，它以每秒数公里的速度在壳中传播，在壳体各层材料界面和壳体内自由表面产生的反射拉伸波，会使壳体产生所谓“层裂”破坏。

本文将飞行器看作由复合材料-合金-多孔材料组成的一维平板，并从三大守恒定律和气态-液态-弹塑性物态方程出发，引入平方粘性项和线性粘性项，运用差分法求解，研讨了再入飞行器材料对软 X 射线的吸收过程、热激波形成机理、波在组合板中的传播及其相互作用，直至层裂破坏。除满足声速稳定条件和粘性稳定条件外，还用总能量守恒检验程序控制计算精度，从辐照结束时刻起到首次断裂时刻止，总能量相对误差小于 4%。对不同材料分别采用最大拉应力断裂准则和损伤累积断裂准则。计算结果和地下核试验数据的比较表明，热激波峰值及其到达时刻颇为一致。计算还表明，多孔材料可使热激波峰值衰减约 20 倍，是理想的激波衰减材料。

计算表面裂纹体 St.-Venant 扭转问题用的高阶奇应变单元

蔡承文　刘明杰　黄纯明
（浙江大学力学系）

本文提出的奇应变单元为圆形，圆心放在裂纹尖端，翘曲位移模式取为

$$W=\varphi\left(-x_0\rho\sin\theta-\frac{\rho^2}{2}\sin 2\theta\right)+\sum_{n=1}^{N}a_{2n-1}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\theta\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{N}a_n\left(\frac{\rho}{R}\right)^n\cos(n\theta)+W_0$$

广义位移矢为

$$\{\delta\}=\{\varphi,a_1,a_2,\cdots a_{2N-1},a_{2N},W_0\}$$

其中 φ 为单位长度扭角，W_0 为圆心翘曲位移，$a_1\cdots,a_N$ 为具有长度量纲的广义位移，ρ、θ 为极座标，R 为单元半径，x_0 为圆心的总体座标。

位移模式中的 $a_1\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta}{2}$ 项具有裂纹尖端所需要的应变奇异性，应力强度因子 $K_{\text{Ⅲ}}$ 由 a_1 确定：

$$K_{\text{Ⅲ}}=G\sqrt{\frac{\pi}{2R}}a_1$$

单元的自由度数目可以任意选取，但计算单元刚度矩阵特征值的结果表明，当 $N>4$ 时单元的柔度已无显著改进。故建议采用 $N=4$，这时单元自由度为 10。

计算了具有半径裂纹的圆柱杆的扭转以检查单元的准确度。奇应变单元以外的区域采用普通的三角形单元，$N=4$。其部分结果如下：

单元半径/裂纹长度	0.1	0.2	0.3	0.4
未知量总数	345	240	177	135
$K_{\text{Ⅲ}}$ 的误差（%）	−0.90	−2.32	−5.32	−8.35

可见随着单元半径的减小，计算值很快地趋近准确值。取单元半径为裂纹长度的 1/10～2/10，已有工程上可接受的准确度。

如去掉自由度 φ，这元素也可用来计算面外剪切时的 $K_{\text{Ⅲ}}$。

土中一维塑性波的传播

黄崇明　游新义

本文研究土中装药爆炸一维塑性波的传播。装药爆轰气体按等熵膨胀，周围的土壤看作“塑性气体”或称“塑性介质”，并考虑了库伦-莫尔强度条件，建立了土中一维爆炸波的动量、质量守恒的拉格朗日方程

$$\rho_0 r^{n-1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=(r+u)^{n-1}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+(\sigma_r-\sigma_\theta)\frac{\partial}{\partial r}r+u)^{n-1}$$

$$\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial r}(r+u)^n=\rho_0/\rho\cdot r^{n-1}$$

经变换后得到关于装药空腔半径 $R(t)$、$\dot{R}(t)$ 和 $\ddot{R}(t)$ 各阶导数的变系数常微分方程

$$P_0\left(\frac{r_0}{R}\right)^{n\gamma}\cdot R^{\nu}=(R^{n-1}\ddot{R}+(n-1)R^{n-2}\dot{R}^2)\rho_0\int_{r_0}^{r^*}\frac{r^{n-1}dr}{(n\varphi(r)+R^n)^{(2(n-1)-\nu)/n}}$$

$$-\rho_0(n-1)(R^{n-1}\dot{R})^2\int_{r_0}^{r^*}\frac{r^{n-1}dr}{(n\varphi(r)+R^n)^{(3n-2-\nu)/n}}$$

$$+\frac{\tau_0(n-1)}{(1+\mu)\nu}(r^{*\nu}-R^{\nu})+\frac{\rho_0 R^{2(n-1)}\dot{R}^2}{r^{*2(n-1)-\nu}(1-b)}+P_a r^{*\nu}$$

利用龙格-库塔法，计算了该介质（包括理想砂、理想粘土和塑性介质）中平面、柱面和球面塑性波传播与衰减规律。

结果表明在爆炸近区接近理想塑性介质（$\tau_0=\mu=0$）的表达式。

$$P^*=A\left(\frac{r^0}{R}\right)^{m_1}+B\left(\frac{r_0}{R}\right)^{m_2}-C \quad 或 \quad \frac{P^*}{P_0}=\left(\frac{R}{r^0}\right)^{-\alpha}$$

该平面、柱面和球面波的衰减指数 α 分别为 1.13、2.54 和 4.10。

在爆炸远区的波阵面上波参数可给出曲线形式。

附 录　　会议报告总目录

大 会 报 告 题 目

有限元法的最新发展……钱伟长
计算空气动力学的作用与前景……庄逢甘
离散力学统一方法……H. Kardestuncer
我国建筑结构计算力学工作的某些动向……何广乾
计算机化的结构优化设计……钱令希
计算流体力学的兴起和展望……卞荫贵
复合材料力学分析的有限元法和计算机化简介……周 履
断裂力学的展望……王仁东
谈谈爆炸力学中的几个问题……郑哲敏
美国复合材料中的计算力学发展趋向……蒋詠秋

小 会 报 告 题 目

以弹性力学平面应力问题为例，谈对应用有限元素法的几点建议……胡海昌
位移函数在用有限单元法求解弹性力学问题中的应用……
……北京大学力学系　王敏中　苏先樾　武际可
方差泛函变分与高斯配点离散型最小二乘法……邱吉宝
边界元素及其应用……邱吉宝
用最小二乘法配置有限元……谷芳毓
有限点法……广西大学　秦 荣
结构有限元的修正解……北京大学力学系　吴良芝
两类轴扭转问题在任意非正交曲线座标系方程的共同表达式及解法……
……中国科学院力学研究所　李敏华　任孝安
有限元分析中的拟协调元……大连工学院　唐立民　陈万吉　刘迎曦
拟协调元与广义变分原理……大连工学院　陈万吉　刘迎曦
拟协调元列式……大连工学院　陈万吉　刘迎曦　唐立民
解异形板弯曲问题的一种半解析法……天津大学　严宗达
蒙特卡洛法在简支边异形板弯曲问题中的应用……天津大学　严宗达　王进忠
具有任意端部边界条件的有限条法及应力的有效计算……大连工学院　吕和祥
加权残量法在有限条元法中的应用……天津大学　赵祖武
有限条元法的基本方程与级数的收敛性能和加速方法……天津大学　赵祖武
弹性薄板弯曲分析的一种改进的三角形单元……中 山 大 学　罗 恩
中国建筑科学研究院　魏文郎
超参数三角形厚壳单元……哈尔滨工业大学材料力学教研室　赵九江
单三角级数有限单元半分析法……湖南大学　谭邦本

建立精密单元刚度矩阵的一种方法的改进……浙　江　大　学　丁皓江　徐博侯
浙江省计算技术研究所　陈志平
旋转刚度的计算……浙江大学　丁皓江
关于有间隙弹性接触问题的解及其叠代格式……中国科学院计算中心　崔俊芝
图论在有限元节点标号优化问题上的应用……中国科学院工程力学研究所　刘贞荣
关于插值矩阵的乘法定理及其应用……电力部电力建设总局　范元勋
北京工业学院　戴泽墩
有限元模态综合法及程序结构……哈尔滨工业大学　邹经湘　安为民
板（单侧）梁组合构件的有限元方法及其收敛性……
……江苏师范学院　沈树民　吴茂庆　秦　淦　朱健生　严大康
非定常、非线性偏微分方程中的离散型二乘法与在力学中的应用……姚伟达
广义特征值问题的雅可比解法……重庆大学　张汝清　詹先文　张国玉
大型广义特征值问题的一个新解法……复旦大学数学系　张　文　侯志坤
柔性转子系统的不平衡响应……复旦大学数学系　张　文
刚度改变对线性弹性系统频率和振型的影响……吉林大学　胡守信
大型结构频率方程的分块直接解法……武汉大学数学系　叶碧泉
结构动力学方程逐步积分的一个无条件稳定方法……
……浙江大学力学系　蔡承文　黄纯明　刘明杰
有限元动力分析中求特征值问题几个方法的比较……哈尔滨工业大学　黄文虎　李效韩
用有限条块法求弹性薄板的特征值……南京工学院　余颖禾　王玉民
多单元广义对称结构分析……大连工学院　裘春航
KRON 撕裂法在有限元素法中的应用……三机部六二三所　刘国光
几乎不可压材料的有限元方法……吉林大学　郤继福
一个不受带宽限制的分块直接解算法……国家地震局地震地质大队　王继存
多重子结构分析的超元矩阵方法……岳中弟
非对称矩阵广义特征值问题的同步叠代法……中山大学　蔡承武　陈树辉
线性弹性问题的正定性条件……北京大学力学系　武际可　王颖坚
变分问题的适定性……北京大学力学系　王颖坚
凸泛函取极小的有限分析……湖南省计算中心　谢千权
某类连续介质力学的数学结构及广义变分原理……长江航运科学研究所　金伏生
用杂交应力元及等参元计算应力强度因子……清华大学工程力学系　何积范　常亮明
三机部六〇三所　高占民　李洲圣　孙篤信
考虑一般载荷及裂纹表面相互作用时计算 K_I 的虚裂纹扩展法及其与 J 积分的关系
……尹泽勇
计算应力强度因子的奇异等参单元……中国科学院力学研究所　徐纪林
用奇性杂交三角元计算平面应力强度因子……大连工学院　魏兆正　顾　朴　郑兆和
平流方程非线性计算稳定性分析……中国科学院大气物理研究所　季仲贞
关于非线性计算稳定性的若干问题……中国科学院大气物理研究所　曾庆存　季仲贞

平方守恒型差分格式的构造……中国科学院大气物理研究所　季仲贞
一种节省计算量的方法——分解解法……中国科学院大气物理研究所　袁重光
用调和函数延拓方法计算某类多连通（口字形和田字形）截面杆的抗扭刚度……
……西北工业大学　陈宜周
厚壁和边长不等情况的 L、C、+ 和 T 形截面杆抗扭刚度的计算……西北工业大学　陈宜周
一个有限元软件系统的现在和未来——关于 HAJIF ……冯钟越
结构分析和结构化程序系统介绍 JIGFEX 系统……大连工学院　钟万勰　李锡夔
SDL 应用程序系统……
中国建筑科学院结构所　王绍华　张汉义　黄如福　林春哲　魏文郎　陈德宴　亢文慎　胡　梅
一机部第一设计院　胡祖成
铁道部第三设计院　欧阳炎
天　津　大　学　赵国瑞
天津建筑设计院　范贻昭
结构设计语言 SDL 及其文本……西北建筑设计院　徐乾易　戴金漪
岩体弹塑性问题的有限单元法及计算程序……长江水利水电科学研究院　王德厚
平面问题组合单元非线性有限元程序……武汉水利电力学院　譚道宏
SAP-5 程序评述……
北京大学　曲圣年　吴良芝
郑州机械研究所　赵兴华　王玉昌
SAP-5 程序简介和应用体会……陈其炯　李忠鑫　马德成
《SFE 折板壳结构应力分析》程序设计中的若干问题……北京农业机械化学院　李明瑞
最小二乘配点法分析有自由边薄板强度……同济大学应用力学教研室　徐次达　郑瑞芬
有限元混合法分析四坡顶扭壳屋盖……同济大学应用力学教研室　徐次达　郑瑞芬
三维有限单元法对柱支承开洞厚板的应力分析……
……华南工学院　罗崧发　陈继承　马泽生　譚远流　叶永青
用半解析半离散法分析板壳……中国建筑科学研究院　何广乾　张维嶽
最小二乘边界配点法解平面问题……西南交通大学　徐文焕　陈　虬
加权残数法的一种混合法……天津大学　杨海元　赵志岗
加肋管板的变形和应力分析……同济大学　陈学潮　刘永仁　金瑞椿
矩形板格分析……上海市政设计院　杨学龄　胡云程
结构化 FORTRAN 语言及其实现……大连工学院　钟万勰　裘春航　吴金仙
组合结构有限元分析的罚单元法和主从变量法……北京大学力学系　曲圣年
三维弹性力学有限元法及其应用……
……长江水利水电科学研究院　于丙子　雷晋干　赵俊峰　冯振兴　叶伟泉　张　民　方镇国　刘允芳
用有限元子结构法计算箱形结构刚度……陈仁鎧
无支撑装配式薄壳的有限元法分析……渡口市建筑勘察设计院　尹思明
环形构架塔基础内力分析与配筋计算程序……石油部第二炼油设计研究院　王金屏　黄诚始
极座标有限条法解扁球壳问题……清华大学结构力学教研组　龙驭球　支秉琛
加筋板大变形及过屈曲的有限元分析……常福忠　刘玉兰

有限元法通用程序系统中的两个问题……浙江大学　张　迪
变截面圆轴扭转问题的通用计算机程序及计算实例……中国科学院力学研究所　任孝安
分步计算与结构分割……重庆建筑工程学院　杜万成
关于有限单元法中数值积分公式的两点记注……华东水利学院　卓家寿
圆柱面螺旋线杆件（螺旋楼梯）空间刚度、内力及变形的计算……天津大学　吴健生
结构分析中的荷载线性规划模型……大连工学院　林少培
正交异性圆环壳的应力应变分析……清华大学工程力学系　夏之熙　任文敏
高层建筑杆系——薄壁柱结构内力分析的矩阵位移法……
……中国建筑科学研究院结构研究所　程万年　姚卓智　张维嶽
复杂形状壳体应力分析……哈尔滨工业大学　邹振祝　王本利　王宏鈺　赵九江　尤靖康
多孔锥壳有限元分析……二机部九院　陈裕泽　汤绍源
关于非线性结构振动方程的求解——二级近似加速度逐步积分法……大连工学院　孙焕纯
高层建筑结构分层模型弹塑性动力分析……
……中国建筑科学研究院建筑结构研究所　赵西安　钱庾青
弹性反应谱计算方法比较及程序……中国科学院工程力学研究所　陶贵源　杜瑞明
六面体 20 节点等参元分析中的刚度矩阵自动生成……马崇兴　张善郭　黄绍和　朱祖念
用有限元方法求解任意轴系的自由振动……上海化工学院　唐伟枫　马惠心　钱祥麐
脱鈎法——复杂结构分析的简便方法……李志欣
正交正放类网架结构的拟板（夹层板）分析法……中国建筑科学研究院结构所　董石麟
河北农业大学水利系　夏亨熹
边界积分法在三维弹性力学中的应用……大连工学院　劳洁声　刘秀兰
一类平板组合结构的杂交有限元解法……中国科学院力学研究所　张双寅
用交感模型的矩形板元进行薄壳和空间平板结构的分析……大连工学院　魏兆征
空间板系结构有限元分析中的一般壳元和膜元……上海机床研究所　杨礼求　陈正定
上海市业余工业大学　熊焕国
多支臂耦合应力计算——直升机桨壳整体应力有限元分析……
……武汉大学　叶碧泉　沈成武　冯振兴
亚临界音速绕流问题的计算……北京大学力学系　陈耀松　马　瑜
组合体超音速流场数值计算……郭智权
对超音速、高超音速钝体无粘绕流流场几种计算方法的比较及与试验结果的比较……
……安复兴　孙毅俊
$M_\infty \leqslant 1$ 和 $\geqslant 1$的跨音速任意形状细长机身升力问题的有限差分计算……
……西北工业大学　郑郁文　陆可风　罗时钧　凌鹤鹗
亚、跨音速导弹气动力的有限差分计算……第三研究院　王伟复　徐寿江　黄芝仙　潘乃强
超声速粘性气体分离流动的数值解法……　张涵信　余泽楚　陆林生　马占奎
求解可压缩完全 Navier-Stokes 方程的一种差分格式……
……中国科学院计算中心　邹华谟　杨明亮
不可压粘性流体绕任意翼型的叠代解……北京航空学院第一研究室　朱自强　陈晏清
超音速高超音速压缩折角分离流数值解……傅德薰

三维高超音速钝锥粘性绕流的计算……中国科学院计算中心　焦履琼　王汝权
考虑变熵影响情况下层流附面层方程的数值解……刘占清　潘梅林
三维层流附面层计算……林济才
机翼三维附面层计算方法……包涵令
用交替方向叠代法计算高超音速钝体的粘性激波层……董常铨
用时间相关法求定常解的定常速度——线性方程部分……中国科学院计算中心　黄兰洁
变截面管道出射冲击波的传播……徐华生
考虑变熵影响的球锥体有攻角热流计算……杨茂昭
河口建坝对毗邻海湾潮波影响的计算（特征理论法）……
……水利水电科学研究院　清华大学　林秉南
浙江省河口海岸研究所　赵雪华　施麟宝
大型冷却池水力热力的数值模拟……北京大学　吴江航　秦素婷
水利水电科学研究院　刘兰芬　李瑞生
钱塘江江水含盐度预报的研究……浙江省河口海岸研究所　韩曾萃　程杭平
有限元方法在海流与湖泊流动中的应用……国家海洋局第二海洋研究所　苏纪兰　袁耀初
近海浅水环流有限元数值计算……大连工学院　吕玉麟　赖国璋
钱塘江河口潮流输沙数学模型……水利水电科学研究院　林秉南
浙江省河口海岸研究所　黄菊卿　李新春
关于气体中平面爆炸波反射的两个问题……
……北京大学数学系　黄　敦　柳玉芝　黄录平　雷功炎
冲击波绕二维山体的数值计算……陈志林　李文绚
带通道柱形药室爆炸流场的数值计算……陈文俊　王家俊　刘宪德
亚、超音速位流中复杂组合体的压力分布及气动力数值计算……李俊甫　蒋正录　王一平
激波自管口出射后三维绕射的工程简化数值计算及其结果分析……
……北京大学　李文绚　魏中磊
亚音速全机压力分布及气动力计算……王灿晨　徐德友　顾隆林
用有限基本解计算喷气襟翼气动特性……上海交通大学　严　震　周文伯
用特征线性计算一维不定常流中的多波系统……张洪逵
边界元法及其在渗流场应用中的若干问题……水利水电科学研究院　张有天　张武功
回转体超空泡绕流Ⅰ小攻角部分……吴品奇　孙伯起
水中任意布置各种柱径的多柱结构的抗震分析或动力分析……大连工学院　曲乃泗
亚音速转子中尾涡的影响……中国科学院工程热物理研究所　张保栋
透平机械内部三元流动任意流面流函数的微分方程和它的有限元解……
……西安交通大学　李开泰　黄艾香
轴对称双锥混合式进气道超音段无粘流场与性能计算……陆传华
轴对称进气道超音速无粘流场的差分计算……周伟民　许绥文
有限长圆柱轴承自由边界问题的计算……复旦大学流体力学教研室　裘祖幹　张慧生
刻槽球型轴承气膜运动方程的一种计算方法……中国科学院数学所　管楚全
堆等离子体平衡位形研究中所提出的一类边值问题……罗正明

自由边界直圆柱等离子体扭曲模不稳定性增长率的有限差分计算方法……
……中国科学院力学研究所　薛明伦
中国科学院物理研究所　汪诗金
激光等离子体动力学数值计算……毕　祝
托卡马克等离子体磁流体平衡位形随时间的演变……石秉仁
用对无粘性流动解加随机偏移的方法解（一个或多个）的绕流问题……
……安徽师范大学数学系　翟大熙
翼型跨音速绕流的数值计算……汪鸣治
侧滑机翼的亚音速气动力计算……北京大学力学系　是勋刚
带操纵而偏转的亚音速机翼的气动载荷分布的计算……北京大学力学系　是勋刚
利用近似不可压缩粘性流体研究地震应力场的某些特点……
……国家地震局地质研究所　潘善德　宋惠珍　孙君秀
一个新的满应力设计方法……兰州大学　唐燮黎
拟乘子法及其在结构优化设计中的应用……上海科技大学　李康元
多单元、多工况、多约束的结构优化设计——DDDU 程序系统……
……大连工学院　钱令希　钟万勰　隋允康　张近东
加权的满应力结构设计方法……大连工学院　隋允康
结构优化设计的两个可行方向法……福州大学数学系　康金章
天线结构的自动叠代设计……上海科技大学　王生洪　蒋琪隆
舰船舯剖面的优化设计……华中工学院　曾广武　张维衡　刘士光
内燃机气门弹簧的优化设计……北京工业学院　吴兆汉　陈深龙
静水外压下环肋圆柱壳和斜圆锥壳的最轻重量设计……大连工学院　邓可顺
桥式起重机主梁优化的一个计算方法——复形法……大连工学院　宋甲宗　施光燕
双曲拱坝的优化……水利水电科学研究院　朱伯芳
贵州省水利厅　黎展眉
机身结构优化设计……丁惠梁　陈文浦　孙宪学
双层柱壳组合结构的优化分析……华中工学院　宋天霞
拱圈的优化设计……浙江大学土木系　杨德铨
浙江省计算所　程春泉
考虑地形条件的拱坝优化设计……浙江大学土木系　汪树玉　孙扬镰　李鸿远
一种有约束优化转无约束优化的新方法……西北工业大学　冯元生
纤维增强层合板的最优化设计……西安交通大学工程力学系　蒋咏秋
有频率禁区的结构优化设计……大连工学院　林家浩
我国航空计算力学若干新进展……刘夏石
用优化方法进行结构动力模型支承刚度的参数识别……哈尔滨工业大学　黄文虎　李效韩
具有频率结束的结构最轻重量设计……上海科技大学　王生洪
用模态综合法计算旋转壳的振动……北京大学力学系　王大钧　任钧国　陈　平
自由界面模态综合方法的改进……朱礼文
在 C_n 群上对称的壳体结构的振动分析……山东工学院　孙树勋

结构动力阻尼特性及速度元法……中国科学院计算中心　杨真荣　阎榕玲
汽车结构动力分析的模态综合技术……清华大学工程力学系　郑兆昌　吴建基
用有限元法计算船体振动模态的模型的研究……上海交通大学　金咸定　汪庠宝
用边界积分方程——边界元法解弹性力学问题……清华大学工程力学系　姚振汉
不同步态下人体股骨的有限元分析……上海科技大学　王以进
非线性力学离散化方程的拟牛顿解法……中国科学院计算中心　崔俊芝
转子—轴承—基座系统对转子质量不平衡的响应……
……清华大学工程力学系　丁奎元
上海汽轮机研究所　龚汉声　张汉英
固体火箭发动机壳体法兰连接分析……陈汝训
叶轮的轴对称有限单元体分析……浙江大学　徐　兴　王景美
烧蚀端头帽的温度分布和外形变化的偶合计算……黄振中
大型雷达结构自振频率分析……同济大学　徐植信　朱美珍　翁大根
再入飞行器壳体结构在强脉冲射线幅照下的动态响应……李清源
歼击机翼主梁连接件疲劳寿命估算……南京航空学院　钱智声　魏志毅
计及元件塑性铆接加筋板剩余强度解析计算……陆富梅　李光权
带螺旋槽气体动压轴承频率特性的有限元算法……天津大学　周　恒
耦合热弹性接触问题的有限元分析……大连工学院　陈万吉
弹塑性接触问题的有限元法分析……郑州机械研究所　刘元杰　徐福娣
用有限元——线性规划法解弹性接触问题……西北工业大学　纪名刚
有限元混合法分析泥浆泵橡胶活塞的接触压力……大庆石油学院　范家齐　张学鸿
弹性接触问题的有限元法及其应用……成都水电学院　李润国
……中国科学院计算中心　崔俊芝　李光宗
用降阶和分段分片（D.S.P.）作轴承接触问题的有限元分析……
……沈成武　叶碧泉　冯振兴　刘玉琦
关于热冲击弹性问题的变分原理及有限元方程……昆明工学院　王洪纲
耦合热弹性平面问题的有限元法基本方程……昆明工学院　王洪纲
有限元法求解不稳定温度场及温度应力……电力工业部成都勘测设计院科学研究所　刘润广
三向碳——碳材料端头的热结构分析……徐孝诚
钢丝缠绕式高温等静压容器开螺旋冷却槽内筒体的应力分析……
……中国科学院上海硅酸盐研究所　顾宗义　孟　钵
上海大隆机器厂　李基深　金瑞椿
上海教育学院　孙毅和
轴对称瞬态温度场热应力的有限元分析……清华大学工程力学系　邵　敏　薛明德　王勗成
绝束管最佳条件与计算方案……北京大学力学系　武际可
结构的非线性振动和非线性随机振动……杭州市设计院　金问鲁
多绳提升机主导轮的有限元分析……上海交通大学　汪庠宝　王明道
随机载荷下结构的强度与刚度条件……　符明南　郑永华　占　胜　何治成
瞬态热弹塑性场的有限元分析——热场引致的残余应力计算……
……西安交通大学　楼志文　童云生　闵　行

材料非线性有限元法中的新解法及其在平面断裂问题中的应用……北京航空学院　龚尧南
建议一个关于大变形的极限分析定理…　……北京工学院　薛大为
地下圆拱弹塑性动力计算…　……钱尔旋
弹塑性大应变问题八节点等参数有限元程序……西安交通大学　秭　醒　殷家驹　汤　泉
平板裂缝的弹塑性大应变有限元分析……西安交通大学　秭　醒
涡轮盘热塑性问题的增量——初应力有限元解法……复　旦　大　学　欧阳鹗　冯景艳
上海交通大学分校　孙金文
均匀荷载作用下圆底扁薄球壳的非线性稳定性问题……兰州大学　叶开沅　顾淑贤
简支圆柱块壳在法向压力作用下的缺陷敏感度……华中工学院　黄玉盈　金梦石　雷国璞
壳体有限元法几何非线性分析……浙　江　大　学　张　迪
中国科学院计算中心　蔡中熊
随机插值及厚、薄板离散分析的统一性原理……中国科技大学近代力学系　吴长春
大变形柔索结构的有限单元理论及索道桥计算……　……昆明工学院　刘北辰　张　瑜
平面梁系几何非线性有限元分析……王柏松
壳体中的热应力……　……华南工学院　蔡益铣
关于任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法（Ⅰ）解析方法……复旦大学数学系　欧阳鹗
计算表面裂纹体 St.-Venant 扭转问题用的高阶奇应变单元……
……浙江大学工程力学教研组　蔡承文　刘明杰　黄纯明
地下结构动力计算中的一种途径……　……顾祥珍　赵玉祥
浅埋土中结构不利埋置深度的确定……王双进
用有限元法作某水电站地下洞室围岩的稳定分析……
……长江水利水电科学研究院　姚慈亮　张　民　卓晓燕　李云林
弯剪型串联多自由度体系弹塑性地震反应分析……大连工学院　孙焕纯
地面强爆炸近区地运动规律研究……{中国科学院计算中心　李荫藩；中国科学院力学研究所　张德良　刘育魁　杨秀敏　赵成福　李和娣}
竖井堵塞的一、二维耦合计算……张永家　韩学安　张纯孟
任意空间杆系结构的抗震分析与动力分析……大连工学院　曲乃泗
厚壁金属圆筒在爆炸荷载作用下的封闭……　叶冠吾　王强岱
岩体工程有限单元分析中的一维节理单元……北京大学　殷有泉　张　宏
用有限元法研究弹塑性波传播问题……中国科学院工程力学研究所　苏士功　倪菊芬
土中一维塑性波的传播　……黄崇明　游新义
一维粘-塑性波的数值方法及其在材料动力学性能研究中的应用……
……中国科学院数学研究所　王厘尔
中国科学院力学研究所　段祝平　孙琦清
结构动力分析的两步数值积分法在弹塑性地震反应分析中的应用……太原工学院　丁树人
邢台地震发震构造的空间应力分析　……国家地震局地质研究所　王启明　宗惠珍　高维安
增硬介质中内成激波的计算与分析……黄日德

资 料 交 流 题 目

应力集中和接头型式的研究（有限元法在农机中的应用）……中国农机学院　邓达华　于桂芬
粘性阻尼多自由度线性弹性动力体系的求解问题……段汝泽
单向连续有限元法求解重力坝动水压力……电力工业部成都勘测设计院科学研究所　刘润广
非线性介质地下结构有限元动力分析……卢锡贤　文树春
弹性半空间内的突加竖向集中力所产生的表面位移……湖南大学　王可成　王贻荪
计算轴系临界转速的自动觅根传递矩阵方法 ……天津大学基础科学系　储景云
加强型薄壁杆件约束扭转数值分析及计算程序……太原重型机器设计研究所　蔡麟笙
多功能轴对称结构有限元程序对空腔壳基础弹性阶段内力计算……二十二冶建筑研究所　何崇璋
带刚性域并考虑剪切变形的杆件单元刚度矩阵和固端力……武汉水利电力学院　徐通元　谌振雄　金雅鹤
矩阵病态判别的若干问题及其在结构分析中的应用……中国科学院工程力学研究所　杜瑞明　陶贵源　周　折　李云林
变刚度矩形薄板的弯曲与稳定计算……上海市业余工业大学　黄道岸
有限元结构分析的边界条件处理……湖南省计算中心　李朝庆
公路桥梁主梁剪力荷载横向分布计算……同济大学桥梁教研室　范立础
管口外地面冲击波参数量纲分析及经验公式的拟合……张六一
有限元法应用于三维弹性体中的几个问题探讨……马鞍山钢铁学院力学教研室　戴维城
履带板的三维有限元应力分析……姚玉珉　马德成
等参数有限元法的应用——五万吨水压机模拟试验动梁的计算……上海市机电设计研究院　朱成龙
固体火箭发动机壳体的应力计算……王　铮
基础板的一种有限条元迦辽金解法……合肥工业大学　沈鹏程
分批波阵法求解空间网架……西北建筑设计院　李辉光
拱桥荷载横向分布的实例分析……同济大学　万国宏　项海帆　徐宝庆　陈文村
多层框——剪结构空间分配及内力组合……西北建筑设计院　李辉光
剪力墙与高层刚架联合体系的分析——用无剪力分配法分析高层建筑……湖南大学　王　磊　李家宝
三维有限元问题边界处理和大型对称稀疏矩阵方程组解法……黄绍和　马崇兴　张善郭　朱祖念
空腹桁架式系列桥架有限元静力分析……太原重型机器设计研究所　蔡麟笙
组合结构有限元通用程序——ZJG-1……煤碳科学研究院
北京起重机研究所
结点应力修正计算中边值问题的简便处理……陕西机械学院　袁发荣
波前解法及程序……黄冠雄

关于用退化三角形四分之一中点元确定二维裂纹体应力强度因子……
……哈尔滨工业大学　赵祖耀　刘定如　王志群
平板拉伸试件的颈缩的有限元分析……西安交通大学　嵇　醒　汤　泉
塑性曲线与断裂判据……西安交通大学　嵇　醒
用于岩体工程的平面力学非线性有限元程序（212 程序）……
……长江水利水电科学研究院　姚慈亮　陈连礼　钱继良
群论在结构计算中的应用……电力工业部成都勘测设计院科学研究所　梁春华
弹性薄板的能量原理与变分方程……南京工学院　余颖禾
某类工程问题的矩阵分析方法……长江航运科学研究所　金伏生
TQ-16 机结构程序语言 SDL ……西北建筑设计院　徐乾易　戴金漪
重庆建筑工程学院　陈详明　张立英　徐绍琼
西北电力设计院　杨　艳
西南建筑设计院　陈克华
广东省建筑设计院　冯文杰
东北建筑设计院　王兴详
北京市建筑设计院　徐秋菊
空间刚架固有频率和振型的有限元计算及程序……成都市 521 信箱　王雄祥　郑细英
高层建筑与互联剪力墙……湖南大学　王　磊　李家宝
多种地基假定下弹性基础板的样条有限元计算……中　山　大　学　陈树坚
广东省建筑设计院　彭育池
利用有限单元法计算构造应力的一种边界约束问题……
……国家地震局地质研究所　宋惠珍　潘善德　孙君秀
回转壳体结构的抗震分析与动力分析……大连工学院　曲乃泗
平板弹塑性分析的杂交应力三角形有限单元……天津大学　杨海元　张敬宇
用有限元法解加筋板壳的几何非线性问题……南京航空学院　刘正兴　冯太华　李定夏
砌体墙钢筋砼圆拱结构——圆拱弹性动力分析部分……于海富　李福厚　杨序立
“有限点法”及其在地下结构动力计算中的应用……赵玉祥　顾祥珍
在平面压缩波作用下，考虑结构介质相互作用的土中拱形结构的动力分析……宦祥林
大型汽轮发电机定子的电磁振动及望亭电厂电机机座剧烈振动的消振措施研究……
……上海电机厂电机研究所
西安交通大学工程力学系
带有非壳单元的回转壳计算……大连工学院　曲乃泗
汽车车架动力分析的有限单元法……清华大学工程力学系　郑兆昌　吴建基
长春汽车研究所　李承德
在有限单元法中应用平衡原理求解不稳定温度场……华东水利学院　王润富　陈和群
中南矿冶学院　李克敌
计算线弹性应力强度因子的扇形等参奇异元……昆明工学院　陆鸿森
网架结构分析的拟夹层板法……中山大学　罗　恩

柴油发动机排气压力波计算……西安交通大学　李开泰　蒋德明
408 厂　钱树基　赵学亭
有限元素法解加筋板轴压局部稳定性问题的研究……刘东常
撕裂模研究中带有两个奇点的二阶常微分方程边值问题的数值解法……宫　野　马腾才
环向加肋椭圆柱壳的结构最轻设计……华中工学院　刘烈全
用有限元法计算液体附加质量……大连工学院　赖国璋
重力异常的计算……吴鹤鸣
轴对称回转板壳的弹塑性分析……洪志泉　王祖光　王其兴
氧气炼钢转炉中托圈的最优化设计……浙江计算技术研究所　邵建华
浙　江　大　学　郭乙木　何福保
弹性力学中的分区广义变分原理……清华大学结构力学教研组　龙驭球
分区混合有限元法计算应力强度因子……
……清华大学结构力学教研组　龙驭球　支秉琛　匡文起
壳体的近似计算……武汉水利电力学院　成鸿学
求解徐变应力问题的初应力法……华东水利学院　王润富　陈和群
中南矿冶学院　李克敌
固体的离散型变分原理——有限元离散分析的变分原理……北京工业大学　牛庠均
应变软化材料变形计算中的若干问题……南京水利科学研究所　沈珠江
非线性非凸规划的一种解法（伸缩复合形一调优方向法）……蔡顺富
受热航空薄壁结构的弹塑性分析……李　野　宋祖训
可变容限方法……陈文浦
平面不稳定温度场的有限单元法……华东水利学院　王润富　陈和群
关于增量理论中弹塑性本构关系普遍式的探讨……华东水利学院　卓家寿　施泽华
长江规划办公室　文　洪
关于 40 个自由度八结点壳体单元一些计算试验……
……浙江省计算技术研究所　周洪祥　赵丽仙
……浙 江 大 学 力 学 系　丁皓江
带有夹层岩基的三维弹塑性分析……华东水利学院　卓家寿　姜弘道
可压缩流动流函数微分方程的可解性和有限元解的误差估计……
……西安交通大学　李开泰　黄艾香
润滑理论中的广义雷诺方程和不等变分问题……西安交通大学　李开泰　黄艾香
对复形法的一点改进……浙江大学土木系　汪树玉　李鸿远
关于实现 MP 二阶算法的建议……大连工学院　冯思明　夏尊铨　隋允康
柱对称抛射体超音速绕流干涉仪分析的数值解法……
……吉林大学原子与分子物理研究所　丁培柱　潘守甫
球壳接管补强的优化设计……陈汝训
两点边值问题的广义差分法……吉林大学数学系　李荣华
应用 GLIMM 方法计算若干一维不定常流动问题……徐华生
结构动力分析中改进的子结构分析法……南京航空学院　朱德懋

用配点法求结构瞬态响应……南京航空学院　孙良新
三维弹性体的动力分析……赵玉祥　顾祥珍
直接法在结构最优设计中的应用——36M 预应力钢筋混凝土拱型空腹屋架最优设计（计算）探讨……上海机电设计研究院　朱成龙
考虑荷载介质和结构相互作用时地下圆形结构动力分析……赵玉祥　顾祥珍　邵开金
土粒沿犁面运动的一个动力学模型……云　南　大　学　王重光
中国科学院应用数学研究所　吴声昌　常谦顺
迁移矩阵法在旋转壳结构应力分析中的应用……华中工学院　舒恒煜
有限元位移法的分步计算……重庆建筑工程学院　杜万成
齿轮断裂的应力场分析和计算……上海科技大学　王以进
同　济　大　学　张志浩
水工地下结构平面非线性问题有限单元法分析……西北农学院水利系　张海东
等值理论及其应用……武汉水利电力学院　金雅鹤　徐通元　谌振雄
结构分析的柔度阵法……大连工学院　时　占
有限元分析中系数矩阵带宽的优化……国家地震局地震地质大队　王继存
三维弹性问题等参有限元分析……张善郭　黄绍和　马崇兴　朱祖念
多孔连拱的实用抗震计算方法……同济大学　项海帆　胡世德
文克尔地基上矩形基础板的计算……水利水运科学研究院材料结构室　沈任工
WNS4-8 型锅炉角焊缝有限元分析……重庆锅炉厂　李长春
重　庆　大　学　江秉琛　高芝辉　刘相臣　陈泽光　伊卓云
对八节点的组合单元的一个注……浙江大学固体力学教研组　丁皓江
交叉梁系的定比解法……长江航运科学研究所　金伏生
胶州湾潮汐潮流的数值计算……中国科学院海洋研究所　曹德明
修正单纯形法的改进及程序……大连工学院　张文燊　冯恩民
高阶奇异解在三维绕流问题中的应用……北京大学力学系　马　瑜
单元网格自动剖分的渗流场计算程序……电力工业部成都勘测设计院科研所　邵乃辰
压缩机回转面叶栅跨音速绕流计算……浙江大学力学系　范西俊　崔良成　任　闯
平面板层流附面层与激波干扰流场计算——时间相关法解可压缩流 Navier-Stokes 方程……王承尧　吴其芬
溃坝洪水演进的二维显式差分法（摘要）……山西省水利勘测设计院　谢任之　马新贤
线性问题的离散型最小二乘法……昆明工学院　李国彦
旋转体大迎角下对称分离时的非线性气动载荷计算……朱培烨
剪力墙与框架建筑结构的弹塑性过程分析程序 FW-EPA-1 使用说明……大连工学院　孙焕纯
用集块参数模型计算撞岩石时弹丸的响应……陈炯楠　谈正明　俞淑云　张锡华
壳体组合结构有限元法……成都五二一信箱　陈裕泽　顾鼎铭　汤绍源　叶清环

边界有限元法及其应用……商业部设计院　陈辉福
涡旋波重力波方程的浮动算法（CFL 条件的推广、线性情况）……
……中国科学院大气物理所　王宗皓
超音绕流计算——进展与问题……中国科学院计算中心　朱幼兰
三维等参数六面体有限元静力 分析程序(3DFEMP)简介及使用说明（TQ-6 机 BCR）语言
……电力部电力建设总局计算室　范元勋　刘满敬
国家地震局地震队　王继存
水利科学研究院　张世雄
中国科学院工程力学研究所　金为民　任继全　梁乃刚
陈其业
空间（平面）框架及板壳组合结构有限元程序……武汉水利电力学院　谭道宏
高应变率下金属动力学性能的实验与理论研究——一维粘塑性波的数值方法……
……中国科学院力学研究所　段祝平　孙琦清
中国科学院数学研究所　王厘尔
线性代数方程组的初参数法……广西大学　秦　荣
美国 SAP-5 线性系统结构 分析绘图程序的移植和应用……杭州汽轮机厂
带环梁弹性地基上旋转壳体的有限元解法……西安冶金建筑学院　万　虹
三维有限元分析曲面网格自动生成……马崇兴　张善郭　黄绍和　朱祖念