第一章　一般量纲理论

§1. 引　　言

在研究力学现象时，要引进一系列概念，诸如能量、速度、应力等等，它们表征所研究的现象，而本身则可以用数给出和确定。

所有关于运动和关于平衡的问题，可以表达为对表征现象的量确定某些函数和数值的问题，并且，在求解这些问题时，自然定律和各种几何关系都表示为函数方程——通常是微分方程的形式。

在作纯理论研究的时候，这些方程用来确立运动的一般定性性质，和用来借助于各种数学运算实际计算出未知的函数关系。但是，力学研究并不总是可以通过数学推理和计算来实现。在许多情况下，求解力学问题遇到了难以克服的数学困难。往往，我们根本没有问题的数学提法，因为所研究的力学现象是如此复杂，以至对它还没有满意的模型，还没有运动方程组。在求解航空力学、流体力学领域中的许多非常重要的问题时，在研究各种结构的强度和变形等等问题中，我们也经常遇到这种情况。在这些情况下，实验研究的方法起着主要的作用，它使人们有可能弄清最简单的经验事实。一般地说，对自然现象的一切研究都是从弄清最简单的经验事实入手，根据这些事实就可以确立支配所研究现象的规律，并将它们写成数学关系式的形式。

为了正确地提出实验方案和处理实验数据，使其结果能够用来建立一般的规律性，并能够应用于没有直接做过实验的场合，就必须深入地理解所研究问题的本质，并作出一般的定性分析。此外，实验方案本身（实验结果表现为一系列数据，反映所研究的现象各方面的特性）也只有在事先的理论分析的基础上才能够提出，

1110569

在安排试验时，以及一般对于实践来说，正确地选取无量纲参量是非常重要的。无量纲参量的数目应尽可能地少，而被选定的参量又应以最合适的形式反映出基本效应。

量纲与相似理论提供了进行这种事先的定性理论分析和选取无量纲主定参量组[1]的可能性。该理论可以用来研究极其复杂的现象，并且大大简化实验数据的处理工作。不仅如此，今天要卓有成效地提出实验和处理实验结果，不考虑相似与量纲问题是不可思议的。有时，在某些复杂现象的开始研究阶段，量纲理论是唯一可行的理论方法。然而，也不应过高估价这种方法所能起的作用。用量纲理论所能得到的结果是有限的，并且在许多情况下是非实质性的。另一方面，那种认为量纲理论一般不可能给出重要结果的流传甚广的看法，也是完全错误的。将相似理论与从实验得出的或通过数学途径从运动方程得出的启示结合起来，有时可以导致相当重要的结果。通常，无论在理论上还是在实践上，量纲与相似理论都带来很多效益。用这一理论所获得的所有结果，总是用十分简单、初等的方法并且几乎是没有什么困难地得到的。尽管如此，但要将量纲与相似理论方法应用于新问题时，则要求研究人员有相当的经验和对所研究现象的本质有透彻的了解[2]。

有些现象依赖于大量参量，而其中有些参量在一定的情况下变得无关紧要，在研究这些现象时，用量纲理论可以得出特别有价值的结论。以后我们将举例说明这些情形。在模拟各种现象的时候，量纲与相似理论方法起着特别大的作用。

§2. 有量纲量与无量纲量

一个量，若其数值依赖于所采用的尺度，即依赖于量度单位

1) 主定参量 (определяющие параметры)，系指问题中起决定作用的参量；主定参量组，系指起决定作用的参量的全体，亦即被研究的问题所依赖的全部参量。——译、校者注

2) 关于问题的提法，详见：Седов, Л. И., Механика сплошной среды, Т. I и II, «Наука», Москва, 1976.

制，则此量称为有量纲量或名数；一个量，若其数值与所采用的量度单位制无关，则此量称为无量纲量或不名数。例如，长度、时间、力、能量、力矩等等是有量纲量；角、两个长度之比、长度的平方与面积之比、能量与力矩之比等等是无量纲量。

然而，把量区分为有量纲的和无量纲的，在某种程度上是有条件的。例如，我们刚才说角是无量纲量，但是，众所周知，角可以用弧度、度、直角的分数等各种单位来量度。因此，确定一个角的大小的数值依赖于量度单位的选取。所以，角也可以看作是有量纲量.我们把角定义为它所张圆弧的弧长与半径之比；这本身就唯一地确定了角的量度单位——弧度。现在如果在所有的量度单位制中都只用弧度来量度角，则角就可以看作是无量纲量。同样，如果在所有的量度单位制中对长度都采用唯一的固定的量度单位，那么，此后长度就可以认为是无量纲量。但是，对角固定量度单位是方便的，而对长度则不方便。这是因为，对于几何相似的图形，对应的角相等，而对应的长度却不等，所以，在不同的问题中宜于选取不同的距离作为基本长度。

加速度通常认为是有量纲量，其量纲为长度除以时间的平方.在许多问题中，重力加速度 g（等于真空中自由落体的加速度）可以认为是常量（9.81米/秒^2）。可以把这个常加速度 g 取作所有单位制中的加速度的固定量度单位。这时，任何一个加速度都以其量值与重力加速度的量值之比来量度。这个比值称为“过载”，其数值不随量度单位的变化而变化。因此“过载”是无量纲量。但与此同时也可以把“过载”看作是有量纲量，即看作是把等于重力加速度的加速度取作量度单位时的加速度.在这后一情况下，我们假定了也可以把不等于重力加速度的加速度取作“过载”（加速度）的量度单位。

另一方面，不名数（无量纲量）按其通行的意义可以用各种数来表示.事实上，两个长度之比不仅可以用通常的算术商数表示，而且也可以用百分比以及其它方式来表示。

因此，有量纲量与无量纲量的概念是相对的概念，我们可以采

用各种各样的量度单位. 于是，一个量，若在所有被采用的量度单位制中其量度单位都相同，我们就称之为无量纲量；一个量，若在实验或理论研究中实际上或潜在地(明显地或隐含地)允许有不同的量度单位，我们就称之为有量纲量. 由此定义可见，有些量，在一些情况下可以看作是有量纲量，而在另一些情况下则可以看作是无量纲量。以上我们列举了这样的例子，以后我们还会遇到许多这样的例子。

§3. 基本量度单位和导出量度单位

各种物理量都以一定的关系式互相联系着.所以，若将其中某些量取作基本量并给它们规定某些量度单位，则所有其余各量的量度单位将以确定的形式通过基本量的量度单位来表示。我们把基本量所采用的量度单位称为基本的或原始的量度单位，而所有其余的则称为导出的或派生的量度单位。

在实践中，对三个量建立量度单位就够了。究竟取哪三个，则要视各个问题的具体条件而定。在不同的问题中以取不同的量的量度单位作为基本单位为宜。譬如，在物理学研究中以取长度、时间和质量的单位作为基本单位为宜，而在工程技术中则以取长度、时间和力的单位为宜。但是也可以取速度、粘性和密度等量的单位作为基本量度单位。

现在普遍采用绝对量度单位制和工程量度单位制。在绝对单位制中采用厘米、克、秒作为基本量度单位(因而简称为 CGS 制)，而在工程单位制中则采用米、公斤、秒作为基本量度单位（因而简称为 MKS 制)。

长度单位——米(=100厘米)、质量单位——千克(=1000克)和时间单位——秒都是根据一定的协议用实验确定的。在1960年以前，取存放在法国度量衡局的铂铱合金制的长度原器的长度作为 1 米，取存放在该局中的铂铱合金制的质量原器的质量作为

1 千克，取平均太阳日的 1/(24×3600)作为 1 秒[1]。

从 1963 年 1 月 1 日起苏联国家标准（ГОСТ 9867—61）采用统一的国际单位制（SI）[2]. 在国际单位制中，取米、千克、秒作为基本的力学量度单位，取安培作为电流强度的单位，取开尔芬（Kelvin）温标的度作为温度的单位，取烛光作为发光强度的单位[3]。

基本量度单位一经确立，其它的力学量（例如力、能量、速度、加速度等等）的量度单位就由它们的定义自动得出。

通过基本量度单位表示的导出量度单位的表达式称为量纲. 量纲可用符号写成公式的形式，其中长度单位的符号记作字母 L，质量单位的符号记作 M，时间单位的符号记作 T（在工程单位制中力的单位的符号记作 K）. 只有在确定的量度单位制中方能谈论量纲。例如，面积的量纲是 L^2，速度的量纲是 L/T，在绝对单位制中力的量纲是 ML/T^2，而在工程单位制中则为 K.

以后我们将使用麦克斯韦（Maxwell）引进的符号，即用 $[a]$ 来记任一量 a 的量纲。例如，绝对单位制中力 F 的量纲就记作：

$$[F]=\frac{ML}{T^2}\text{ 或 }\frac{ML}{T^2}=K.$$

当从一种量度单位制转换到另一种时，量纲公式对于有量纲

---

1) 在第 XI 届度量衡大会（巴黎，1960 年）上修订了基本单位的基准的定义. 取等于与氪-86 原子在 $2p_{10}$ 和 5d，能级间跃迁相应的辐射在真空中的波长的 1650763.73 倍的长度作为 1 米. 取历书时 1900 年 1 月 0 日 12 时的回归年的 1/31556925.9747 作为 1 秒.

质量的单位仍为存放在法国度量衡局的铂铱合金制的原器的质量.

2) 想要更详细地了解新单位制 SI 的读者，例如可以参看下书：А. Чертов, «Международная система единиц измерения», «Высшая школа», М., 1967 г.

3) 在 1948 年第 IX 届国际度量衡会议上确定了电流强度、温度和发光强度的基本单位的基准. 在真空中间距为 1 米的两根具有可忽略的小圆形截面的无限长平行直导线中流着稳恒电流时，如果此电流在这两根导线间引起作用在每米导线长度上的力为 2×10^{-7} 牛顿（牛顿为 SI 单位制中的机械力的单位，1 公斤=9.8 牛顿），则即取此稳恒电流的强度为 1 安培.

把按热力学温标的温度量度单位取作开尔芬温度 1 度，在这个温标中水的三相点温度定为数值 273.16°K.

把发光强度的单位取作 1 烛光，它的值这样取，使得在铂凝固点温度时的完全辐射体（绝对黑体）的亮度等于 60 烛光/厘米^2.

量的数值换算是方便的．例如，在以厘米和秒来量度重力加速度时我们有 $g = 981$ 厘米/秒^2．如果必须把这些量度单位转换为公里和小时，则为了换算上述重力加速度的数值应利用下列关系：

$$1\text{ 厘米} = \frac{1}{10^5}\text{ 公里}, \quad 1\text{ 秒} = \frac{1}{3600}\text{ 小时},$$

所以

$$g = 981\ \frac{\text{厘米}}{\text{秒}^2} = 981\ \frac{\frac{1}{10^5}\text{ 公里}}{\left(\frac{1}{3600}\right)^2\text{ 小时}^2} = 98.1 \times 36^2\ \frac{\text{公里}}{\text{小时}^2}.$$

一般地说，如果在新的量度单位制中，长度、质量、时间的单位分别缩小到原来单位的 $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$，则具有量纲 $[a]=\mathrm{L}^l\mathrm{M}^m\mathrm{T}^n$ 的物理量 a 的数值，在新的单位制中将增大为原来值的 $\alpha^l\beta^m\gamma^n$ 倍．

基本量度单位的数目不一定要等于3．也可以取三个以上的基本单位．例如，可以通过实验建立长度、时间、质量和力这四个量的相互独立的量度单位．这时，牛顿方程取如下形式：

$$F = cma,$$

其中 F 是力，m 是质量，a 是加速度，c 是具有量纲

$$[c] = \frac{\mathrm{KT}^2}{\mathrm{ML}}$$

的常数．

在这样选取基本单位时，在力学量的量纲公式中一般情况下将有四个自变量．上面写出的方程中的系数 c 是物理常数，类似于重力加速度 g 或下列万有引力定律中的引力常数 γ：

$$F = \gamma\ \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

这里 m_1 和 m_2 是两个质点的质量，r 是它们之间的距离．系数 c 的数值同基本量度单位的选择有关．

如果认为常数 c 是等于 1 或不等于 1 的不名数（从而在所有的量度单位制中 c 都取同一数值），那么这样一来，力的量纲就通过质量、长度和时间决定，并且力的量度单位将由质量、长度和时

间的量度单位唯一地确定。

一般通过引进一些附加的物理常数，我们就可以用实验方法对 n 个量（$n > 3$）选取相互独立的量度单位，但这时我们应引进 $n-3$ 个附加的有量纲的物理常数。在这种情况下，导出量的（量纲）公式中一般将包含 n 个自变量。

在研究力学现象的时候，只要引进三个独立的基本量度单位就够了，即长度、质量（或力）和时间的量度单位。即或在研究热学甚至电学现象时这些量度单位也够用了。从物理学知道，热学与电学量都可以通过 L，M 和 T 来表示。例如，热量和温度具有机械能的量纲。但在实践中，在许多热力学与气体动力学问题中，通常把热量和温度的量度单位都选取得与机械能的量度单位无关，即以摄氏的度（°C）作为量度温度的单位，以卡作为量度热量的单位。这两个量度单位都用实验方法独立于力学量的量度单位进行建立。

在研究发生机械能转化为热能的现象时，必须补充引进两个有量纲的物理常数；其中一个是热功当量 $J = 427$ 公斤米/千卡，而另一个或者是比热 c（卡/米^3·度），或者是气体常数 R（米^2/秒^2·度），或者是玻耳兹曼（Boltzmann）常数 $k = 1.38 \times 10^{-16}$ 尔格/度。如果我们用力学单位来量度热量和温度，那么热功当量和玻耳兹曼常数将作为绝对的无量纲常数进入公式，它们将类似于转换单位时的换算系数（例如从米转换为英尺、从尔格转换为公斤米等等）。

不难看出，基本量度单位的数目也还可以取为少于三个。事实上，我们可以把所有的力同万有引力作比较，虽然这在万有引力不起作用的问题中既不方便又牵强。在绝对单位制中，力一般由等式

$$F = ma$$

来定义，而万有引力则由下列等式定义：

$$F' = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

其中 γ 为万有引力常数，具有量纲 $[\gamma] = \mathrm{M^{-1}L^3T^{-2}}$。正如在用力

学单位量度热量时可以用无量纲常数代替有量纲的热功当量常数那样，万有引力常数也可以认为是绝对的无量纲常数。这就决定了质量的量纲对L和T的依赖关系：$[m] = M = L^3T^{-2}$. 于是，在这种情况下，质量单位的改变就完全取决于长度和时间的量度单位的改变。因此，在把万有引力常数看作绝对的无量纲常数时，我们便总共只有两个独立的量度单位。

如果我们再把一个有量纲的物理常数（例如水的运动粘性系数 ν 或者真空中的光速 c）取为绝对的无量纲常数，那么独立的量度单位的数目就可以减少到一个。

最后，如果我们把相应的物理常数都取为绝对的无量纲常数，我们就可以把所有的物理量都看作是无量纲的。在这种情况下，就排除了采用不同的量度单位制的可能性，而得到唯一的一种量度单位制，它是以所选取的物理常数（例如万有引力常数、光速和水的粘性系数）为基础，这些常数的值取作绝对的普适常数。

在科学中可以看到引进这种单位制的趋势，因为这样能建立不会象米和千克的基准那样失效的量度单位；米和千克这些量就其实质来说是与自然界的基本现象没有联系的随意量[1]。

引进这样一个排除所有其余单位制的唯一的量度单位制，就等于完全排除了量纲概念。在这统一的普适量度单位制中，所有具有量特征的数值都由它们的物理量唯一确定。

在某些方面，这样一个普适的统一量度单位制（即利用同一的尺度、计时方法等等），作为量度方法标准化的一个环节，在实用上似有一定的方便之处。

可是，在许多现象中，完全涉及不到像万有引力常数、真空中的光速或者水的运动粘性系数这样一些专门常数。所以，同万有

1) 按照法国科学院从事建立米制的委员会最初的观念，1米定义为通过巴黎的子午圈长度的 $1/(4\times10^7)$，而1千克定义为在4℃和1大气压下1立方米蒸馏水的重量。由于子午圈长度的概念的含混以及由于它的测量误差，显然仍以本节第一个脚注中所指明的那样来定义长度的基准为宜。取铂铱合金制的原器的质量作为质量基准；该原器的质量，按照最初的观念，等于在4℃和1大气压下1立方分米蒸馏水的质量。

引力定律、光的传播和水中的粘性摩擦或者同任何别的物理过程相联系的统一的普适量度单位制，在许多情况下带有人为的性质且不切实用.相反，实践中，在不同的物理学分支中，根据描述被研究现象所用的物理概念的本质和相对重要性，宜于采用由不同的基本单位组成的量度单位制。

在力学中宜于取力、长度和时间作为基本量，并且，在工程力学中力和长度的单位宜于取不同于天体力学中的单位；在电工中，取电流强度、电阻、长度和时间(安培、欧姆、厘米和秒)作为基本量较为有利，等等。

此外，在具体研究一些专门类别的现象时，定量特性的数值常常宜于表示为它们同给定的量或该具体问题中最有代表性的量之比的形式，这些具有代表性的量在不同的场合可以是不同的。

§4. 关于量纲公式

导出量的量度单位对基本量的量度单位的依赖关系可以表示成公式的形式。这种公式就称为量纲公式，它可以看作是导出量的扼要定义及其物理本质的表征。

只有在使用一定的量度单位制时才能谈论量纲。在不同的量度单位制中，同一个量的量纲公式可以包含不同数目的自变量并具有不同的形式。在 CGS 制中，所有物理量的量纲公式都具有幂次单项式的形式：

$$L^{l}M^{m}T^{t}.$$

我们现在来证明，量纲公式的这种形式是由下述物理条件决定的：任何一个导出量的两个数值之比不应依赖于基本量度单位的尺度的选取。例如，不管我们是用平方米还是用平方厘米来量度面积，用平方米所量度的两个面积之比将与用平方厘米所量度的这两个面积之比完全相同。对于基本量来说，这个条件是量度单位定义的组成部分并自动满足。

设我们有任一有量纲的导出量 y；为简单起见，先假定量 y 是

几何量，从而它只依赖于长度，于是，

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是一些距离。以 y' 表示对应于自变量 $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ 的 y 值。y 的数值，同样，y' 的数值，同距离 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的量度单位有关。现在把这个单位或距离的尺度缩小为原来的 $1/\alpha$。于是根据上述条件我们应有：

$$\frac{y'}{y} = \frac{f(x_1', x_2', \cdots, x_n')}{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{f(x_1'\alpha, x_2'\alpha, \cdots, x_n'\alpha)}{f(x_1\alpha, x_2\alpha, \cdots, x_n\alpha)}, \quad (4.1)$$

也就是说，比值 y'/y 在任何长度比尺值 α 下都应相同。由等式 (4.1) 得：

$$\frac{f(x_1\alpha, x_2\alpha, \cdots, x_n\alpha)}{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{f(x_1'\alpha, x_2'\alpha, \cdots, x_n'\alpha)}{f(x_1', x_2', \cdots, x_n')}$$

或者

$$\frac{y(\alpha)}{y(1)} = \frac{y'(\alpha)}{y'(1)} = \varphi(\alpha). \quad (4.2)$$

因此，用不同长度尺度量度的导出几何量的数值之比只同长度尺度之比有关。

由式 (4.2) 容易求出函数 $\varphi(\alpha)$ 的形式。事实上，我们有：

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(1)} = \varphi(\alpha_1), \quad \frac{y(\alpha_2)}{y(1)} = \varphi(\alpha_2).$$

由此得：

$$\frac{\varphi(\alpha_1)}{\varphi(\alpha_2)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \quad (4.3)$$

这是因为在 $x_1' = x_1\alpha_2, x_2' = x_2\alpha_2, \cdots, x_n' = x_n\alpha_2$ 时我们有：

$$\frac{y(\alpha_1)}{y(\alpha_2)} = \frac{y_1'\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}{y_1'(1)} = \varphi\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right).$$

将式 (4.3) 对 α_1 微商并令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$，得：

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)}\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)_{\alpha=1} = \frac{m}{\alpha}.$$

积分之，得：

$$\varphi = C\alpha^m.$$

因为在 $\alpha = 1$ 时有 $\varphi = 1$，所以 $C = 1$；因此，

$$\varphi = \alpha^m. \tag{4.4}$$

对于依赖于几个基本量的任何有量纲量，如果我们只改变一种尺度的话，上述结论也是正确的。不难看出，如果三个基本量的比例尺 α，β，γ 都改变，则函数 Φ 将具有如下的形式：

$$\varphi = \alpha^m\beta^n\gamma^t.$$

这就证明了：物理量的量纲公式应具有幂次单项式的形式。

§5. 关于牛顿第二定律

在研究力学现象或一般说物理现象的时候，我们首先要引进一组概念——量，以描述所研究过程各个方面的特征（我们把这些量简称为特征量），其次要引进量度单位制，用以确定所引进的特征量的数值。在现象的特征量之间存在着一系列关系式。其中，有些关系式只为具体的系统和个别局部的过程所固有，而另一些关系式可能对某些类的系统和运动都成立。后一种关系式具有特殊的价值，寻求这些关系式乃是物理研究的最重要的课题。

量纲与相似理论方法可以作为确定特征量之间关系式的手段之一。我们的目的就是要在下面指明应用这些方法的方式和技巧。在直接阐述这些方式之前，我们先举例剖析某些力学关系式的本质以及获取这些关系式的一般的典型方法。为此，同时也为了某种独立的意义，我们来讨论力学的一个基本关系——熟知的牛顿第二定律。

特征量之间的有些关系式乃是这些量的定义的简单表达式。例如，速度 v 这个量等于所走过的路程与相应的时间间隔之比；质点的动能 E 这个量等于 $mv^2/2$，其中 m 是质点的质量，等等。

除了这些显而易见的关系式以外，通过实验或理论研究，根据所研究的现象或一类现象的本质和特点，可以求出现象的特征量的数值之间的函数关系。关于行星运动的开普勒（Kepler）定律和

万有引力定律就是这种关系的例子。我们来简单说明这两个定律之间的联系。

在对行星运动的多年广泛观测的基础上，在 1609 和 1619 年，开普勒归纳出了下列普遍定律：

(1) 行星沿椭圆轨道绕太阳运行，太阳位于椭圆的一个焦点上。

(2) 连接太阳与行星的矢径，在相等的时间间隔内扫过相等的面积。

(3) 行星绕太阳公转的周期的平方，与行星至太阳的相应的平均距离的立方成正比。

如果把太阳与行星之间的相互作用力这个量定义为质量乘加速度，则由开普勒定律通过数学运算可以推导出万有引力定律：

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{5.1}$$

其中 F 是引力，r 是质点间的距离，而 m_1 与 m_2 为两质点的质量。这个定律是牛顿于 1682 年创立的，此后，曾把用该定律得出的大量结论同自然界中和专门安排的实验中的观测结果相比较，验证了该定律的正确性。

另一个例子是表示弹簧的张力 F 与其伸长 x 之间的关系的虎克 (Hooke) 定律。

这个定律，是通过对悬挂在弹簧上的载荷的平衡与运动的观测，基于把力这个量定义为质量与加速度的乘积，并在许多情况下利用了力的合成法则而推导出来的。

这个定律的数学表达式如下：

$$F = kx, \tag{5.2}$$

其中 k 是比例系数(弹簧的刚性系数)。

利用这个定律，就可以在各种特定的情况下(几个弹簧上悬挂同一载荷，改变质量或弹簧的刚性，改变运动的初始条件，等等)从理论上确定运动规律，即所有的力学量对时间的依赖关系，求出振动周期，等等。

求解这些问题和其他类似的力学问题均以研究下列质点的运动方程为基础：

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}, \tag{5.3}$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 是加速度矢量，m 是质点的质量，$\boldsymbol{F}$ 是力矢量.在许多情况下力 $\boldsymbol{F}$ 是一些代表不同作用的力的矢量和：

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \cdots. \tag{5.4}$$

可以用由式(5.4)确定的一个力来代替同时作用的若干个力，乃是一个实验事实。

现在我们较为详细地讨论方程（5.3）中出现的量。加速度 $\boldsymbol{a}$ 是一个运动学量，它总可以不涉及方程（5.3）而由实验确定.质量 m 决定物体的惯性.对于质点来说，质量的概念可以以牛顿第三定律（任何作用都存在大小相等、方向相反的反作用）为基础来引进.事实上，可以赋予每一个质点一个常量值，即其质量，使得任何两个孤立的、相互作用的质点 M_1 与 M_2 或 M_1 与 M_3 在运动时满足下列关系：

$$m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 = 0, \quad m_1\boldsymbol{a}'_1 + m_3\boldsymbol{a}'_3 = 0. \tag{5.5}$$

从而，总可以不涉及方程（5.3），通过测量相互作用的物体运动时的加速度之比，用实验来确定质量之比。

在所有可能的运动中，由式（5.5）确定的质量的不变性，是一个反映了自然规律的实验事实，一般地说，该规律可以表述得更精确些。

如果运动已知，则式（5.3）就是确定合力的等式。在实践中，经常是用方程（5.3）来计算力的。在关于确定运动的问题中，只有在知道力对表征运动的诸量（时间、点的位置坐标、速度，等等）的依赖关系的情况下才能使用式（5.3）。该依赖关系，或者可以根据一些附加假设（它们一定要经过实验验证）从理论上得到，或者可以直接通过实验得到。

无论在理论推理的时候还是在实验中，力对于各物理量的依赖关系，都是用方程（5.3）来确定的。通过对最简单的运动的观察和研究，建立乘积 $m\boldsymbol{a}$ 对其它运动参量的依赖关系，然后把所得

到的这些关系推广到较复杂的一类运动；这种推广是否正确，又应该用实验检验，即把由运动方程得出的结论同实验结果加以比较。因此，由开普勒定律得出万有引力定律的一般途径，对于确定力对运动参量的依赖关系是有代表性的。

用类似的方式确定了电荷之间的相互作用力（库仑定律）、磁场强度（毕奥-萨伐尔定律）、毛细力（韦伯定律）、固体间的摩擦力（库仑摩擦定律）、弹性体内应力与应变之间的关系（虎克定律）、流体内的粘性摩擦力（牛顿定律），等等。

常常有这样的看法，认为可以撇开方程（5.3）而通过静力学途径来确定力。事实上，在许多重要的情形中，特别是当可以认为力只依赖于位置时，力对坐标的依赖关系可以通过把待求力同由研究 $a = 0$ 的运动特殊情况（静止）而已知的力相比较来确定[1]。

然而，在这方面必须指出下列两点：第一，在力的静力学定义下将未知力同已知力加以比较时，我们已经利用了 $a = 0$ 时的方程（5.3）；第二，认为对静止情况下的力求出的依赖关系在运动时也正确，这是一个需要用实验检验的附加假设，而检验时又要用到方程（5.3）。实验检验往往没有证实上述假设。例如对于摩擦力就发生这种情况；事实表明，静摩擦（此时速度 $v = 0$）与动摩擦（此时 $v \neq 0$）是会不相同的。弹簧对所悬载荷的作用力也是如此。确定张力与伸长的依赖关系的定律［式（5.2）］，在作静力学测量时对于任何质量的弹簧都是正确的，而在运动时就不正确了，并且弹簧的质量越大表现出的偏差也越大。如果弹簧的质量与载荷质量相比为小量，则可以认为式（5.2）在重物运动时也正确。

往往根本不能说，力是作为时间、位置、速度和加速度的函数而被确定。例如，我们来考察水作用在沿水面作复杂的迂廻运动的小船上的合力。水对小船的作用力依赖于水的运动状态，而该状态又取决于小船的整个运动规律。设在小船的两次不同的运动

1）实践中，在确定力的时候常常还利用下述性质：在整个系统作等速平移时力系不变，因为此时加速度不变。

中，在某同一时刻(时间可以从运动开始时刻算起，这时水和小船都静止不动)小船的位置、速度和加速度都相同。显然，不能说在该时刻水作用在小船上的力会是相同的；两个力可以大不相同.在第一次运动中，在该时刻以前小船可能强烈地使水翻滚，而在小船的第二次运动中，在所考虑的地方水的运动可能是较为平静的.在这个例子中显而易见，作用在小船上的力是以一种泛函关系依赖于运动规律，亦即依赖于运动的全过程，换句话说，仿佛出现某种"遗传"现象。

可见，诸如万有引力定律、虎克定律等等实验自然定律，是由研究了多种运动后得到的，而在这些运动中，力这个量都定义为质量与加速度的乘积。

因此，在涉及到确定运动的具体问题中，我们不能脱离方程 $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ 来讨论力，因为该方程适用于相应的实验而被加以利用了。

如果不取力而取别的概念(例如系统的动能)作为基本量，则对力学现象的研究仍可用类似方法进行。我们可以把等式

$$E = \Sigma \frac{mv^2}{2} \tag{5.6}$$

看作是力学系统的动能的定义。用实验方法对给定力学系统的某些类别的运动进行研究，我们可以揭示能量 E 对其它一些力学特征量的依赖关系。例如，对于保守系统的运动业已判明，动能可以表示为系统的点的坐标和附加常数 h (根据它的值从系统的所有可能的运动中划分出一已知的子类)的某一函数：

$$E = -V + h. \tag{5.7}$$

量 V 称为系统的势能。由等式(5.6)和表征保守系统的规律(5.7)可导出方程

$$\Sigma \frac{mv^2}{2} + V = h, \tag{5.8}$$

此式表示机械能守恒定律。

现在，在研究一系列力学现象时，我们还不能用式(5.3)或

(5.7) 来确定运动，因为科学还未完全解决关于力和动能对系统的力学状况的依赖关系这个最简单的问题。

在分析力学中，总是默认力的规律或者势能的表达式是已知的。分析力学的基本课题是同研究工作的数学工具问题密切相关的，即同运动方程的求积方法和建立各种可以代替原来的实验定律的等价的或者更广泛的原理相关的[1]。

对许多现象进行力学研究或一般说物理研究的最主要的问题，在于建立表达力对运动状态的基本特征量之依赖关系的规律，因而在于揭示起决定作用的特征量和为了实践的目的建立类似规律的可能性。

牛顿的一个基本功绩在于，他指明了质量与加速度的乘积是这样一个量，该量对于不同物体和在空间不同地点以不同速度进行的不同运动可以具有相同的值；并且它主要是一个在许多情况下可以作为时间、系统诸点的位置和速度的函数用实验来确定的量。

然而，正如我们看到的，把力作为运动的最简单的特征量的函数来确定，原则上并非总是可能的。在这些情况下就产生一个问题：取另外的运动特征量来代替质量与加速度的乘积并研究它们的联系，是否更合适？

我们再来简单地讨论一下惯性力的问题。取一组彼此作相对运动的不同的坐标系。在两个作不同运动的坐标系中，加速度具有不同的量值和方向。在这些彼此作相对运动的坐标系中，点的

1) 在十八世纪末，理论科学家的主要注意力及努力都放在研究和克服上述数学困难(天体力学问题、发展微分方程的一般理论、变分原理等等)上，原始运动方程被置于普遍形式下加以讨论；因此，曾流行过这样一种看法：把物理现象都归结为力学运动和把力学作为一门科学加以完善。基本的困难曾被视为在于对力学的微分方程求积。拉普拉斯(Laplace)的著名论点称：给出初始条件，就足以预言运动的整个未来和追溯其整个过去。然而必须指出，即使在经典力学范围内，也不能把建立运动微分方程这一理论问题认为是简单的和原则上已解决了的。建立运动方程的问题、作用力的问题(即确定运动微分方程的右边部分的问题)恰恰就是物理研究的基本问题，而且就连在可以应用经典力学的条件下，这个问题在很多情况下也尚未解决。在对最简单的应用存在近似解的那些情况下，近似解仍需不断改进。

加速度之间的关系，已在运动学中建立了。

我们可以在某一个确定的坐标系中（通常是在固定于地球或太阳系引力中心的坐标中）用实验来建立力对运动的基本特征量的依赖关系。

如果我们已知某一坐标系中的力的规律，那末，我们就容易求出在相对于原始坐标系的运动为已知的任何坐标系中的质量与加速度的乘积，即力。众所周知，在这种情况下，我们应当考虑所谓的惯性力。对固定在运动坐标系中的观察者来说，作用力是由在其中作实验的坐标系（即原始坐标系）中所确定的力和惯性力组成，后者对运动的观察者来说，按力学的观点同任何其他的力没有什么区别。

§6. 物理量之间的函数关系的结构

由理论或直接由实验建立的物理规律，都是些表征所研究现象的诸量之间的函数关系。这些有量纲的物理量的数值，依赖于量度单位制的选取，而单位制是与现象的本质无关的。所以，表示与量度单位制无关的物理事实的函数关系应具有某种特殊的结构。

设我们有一有量纲量 a，它是一些相互独立的有量纲量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的函数：

$$a = f(a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n), \qquad (6.1)$$

其中有些参量在所研究的过程中可以是变量，其它的是常量。

假定函数 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 表述某一与量度单位制的选择无关的物理规律，我们来揭示此函数的结构[1]。

---

1) 我们强调指出，根据假定，函数关系(6.1)仅仅表示一个确定量 a 的实质性的物理关系式，量 a 表示为相互独立的主定参量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的函数，因而它不是同量度单位制的选择无关的某一组有量纲量之间可能有的数学关系的一般形式。

例如，对于量 $a_1, a_2, \cdots a_n, g, P, m$（其中 g 是重力加速度，P 是重量，m 是某一物体的质量），除了式(6.1)外，下列关系式也成立：（见下页）

设在有量纲量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中，前 k 个量（$k \leqslant n$）量纲独立（基本量度单位的数目应当大于或等于 k）.

量纲独立指的是：诸量中任何一个量的量纲公式不能以幂次单项式的形式表示为其它各量的量纲公式的组合。例如，长度的量纲 L，速度的量纲 L/T 和能量的量纲 ML^2/T^2 是量纲独立的，而长度的量纲 L，速度的量纲 L/T 和加速度的量纲 L/T^2 则是相关的。在力学量中，通常具有独立量纲的量不超过三个。我们假定 k 等于量纲独立的参量的最大数目，于是量 $a, a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的量纲可以通过参数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的量纲表示出来。

取 k 个量纲独立的量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 作为基本量，并对它们的量纲引进记号

$$[a_1] = A_1, \quad [a_2] = A_2, \cdots, [a_k] = A_k.$$

则其余量的量纲将具有下列形式：

$$[a] = A_1^{m_1} A_2^{m_2} \cdots A_k^{m_k},$$

$$[a_{k+1}] = A_1^{p_1} A_2^{p_2} \cdots A_k^{p_k},$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$a = f(a_1, a_2, \cdots, a_n) + \Phi(a_1, a_2, \cdots, a_n) \ln \frac{P}{mg}, \tag{6.1'}$$

它对于任意的函数 $\Phi(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 均与量度单位制的选择无关. 然而等式(6.1')分解为两个根本不同的物理规律：关系式(6.1)和关系 $P = mg$，其中后者在本问题中可以看作是"寄生的". 还可能举出许多别的这种人为的关系的例子，它们都与量度量位制的选择无关，并为上述的问题提法所排除.

我们把所讨论的物理规律取为(6.1)的形式，并且在下面我们只假定存在这样的关系(在一般情况下它可以是多值的).

实际建立这一关系的理论方法或实验方法的问题，在随后的讨论中是无关紧要的. 正因为如此，以隐函数形式

$$\Phi(a, a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$$

或者以量 $a, b, c, \cdots$ 的若干个隐函数的形式

$$\Phi_1(a, b, c, \cdots, a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0,$$
$$\Phi_2(a, b, c, \cdots, a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0,$$
$$\Phi_3(a, b, c, \cdots, a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0,$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

来研究量纲量之间的关系，并不是以某种更为一般的形式研究问题. 在这种讨论中，"寄生"关系式的作用在增长，并且在这种情况下，与所研究问题的本质无关的、关于隐式方程组的可解性的复杂问题无助于比较简易地得出量纲理论的基本结果.

$$[a_n] = A_1^{q_1} A_2^{q_2} \cdots A_k^{q_k}.$$

现在把量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的量度单位分别改变为原来的 $1/\alpha_1$, $1/\alpha_2, \cdots, 1/\alpha_k$，则在新的单位制中这些量和量 a, $a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的数值将分别等于：

$$a_1' = \alpha_1 a_1, \qquad a' = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\cdots\alpha_k^{m_k} a,$$
$$a_2' = \alpha_2 a_2, \qquad a_{k+1}' = \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\cdots\alpha_k^{p_k} a_{k+1},$$
$$\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots$$
$$a_k' = \alpha_k a_k, \qquad a_n' = \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\cdots\alpha_k^{q_k} a_n.$$

在新的量度单位制中式 (6.1) 取如下形式：

$$a' = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\cdots\alpha_k^{m_k} a = \alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\cdots\alpha_k^{m_k} f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$
$$= f(\alpha_1 a_1, \cdots, \alpha_k a_k, \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\cdots\alpha_k^{p_k} a_{k+1}, \cdots, \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\cdots\alpha_k^{q_k} a_n) \quad (6.2)$$

这个等式表明，函数 f 对于比尺 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是齐次的。比尺 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 是任意的。我们利用这些比尺的选取来减少函数 f 的自变量的数目。令

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{a_2}, \cdots, \alpha_k = \frac{1}{a_k},$$

即我们这样来选取量度单位制，使得关系式 (6.2) 右边部分的前 k 个自变量的值等于 1[1]。换句话说，利用关系式 (6.1) 被假定与量度单位制无关这一情况，我们则这样建立量度单位制，使得函数 f 的 k 个自变量都取等于 1 的固定常数值。

在这个相对的量度单位制中，参数 a, $a_{k+1}, \cdots, a_n$ 的数值由下列公式确定：

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_k^{m_k}},$$
$$\Pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_k^{p_k}},$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

1) 为简单起见，我们假定参量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为有限值且不等于零。以后的结论可以推广到 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 变为零或无穷大的情形，只要函数 f 对自变量的这些值保持连续。

$$\Pi_{n-k}=\frac{a_n}{a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_k^{q_k}},$$

其中 $a, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是所研究的量在原先的量度单位制中的数值. 不难看出, $\Pi, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-k}$ 的值同原先的量度单位制的选取无关,因为它们相对于量度单位 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 来说具有零量纲。同样显而易见, $\Pi, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-k}$ 的值根本与表示量 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的 k 个量度单位所用的量度单位制的选取无关。因此,这些量可以看作是无量纲的。

利用相对量度单位制,关系式 (6.1) 可以表示为如下形式:

$$\Pi=f(1, 1, \cdots, \Pi_1, \cdots \Pi_{n-k}). \qquad (6.3)$$

可见, $n+1$ 个有量纲量 $a, a_1, \cdots, a_n$ 之间的、与量度单位制的选择无关的关系, 可化为由 $n+1$ 个有量纲量组合而成的 $n+1-k$ 个无量纲量 $\Pi, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-k}$ 之间的关系[1]。量纲理论的这一普遍结论就是著名的Π定理。

若已知所考虑的无量纲量是一系列有量纲量的函数, 则此函数只能依赖于由这些有量纲量组成的无量纲组合.

显然,改变函数 f 的形式,就可以在关系式 (6.3) 中将无量纲参量组 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{n-k}$ 用另一组无量纲参量——它们都是 $n-k$ 个参数 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_{n-k}$ 的函数——来代替。

不难看出,若 n 个参量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中量纲独立的参量的数目不超过 k, 则由这 n 个参量最多可组成 $n-k$ 个独立的、幂次形式的无量纲组合.这可直接从关系式 (6.3) 的推导得出,只要我们把由量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 所组成的任何一个无量纲组合取作量 a 即可。

有量纲量之间的各种物理关系都可以表述为无量纲量之间的关系。应用量纲理论的方法研究力学问题之所以富有成效, 其原

---

1) 如果函数 $f(a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}, \cdots, a_n)$ 在前 k 个自变量的值等于零或无穷大处发生间断,则所得到的结论必须修正. 在这些点上, 式(6.3)右端的实质性自变量的数目可以超过 $n-k$, 因为关系式 (6.3) 中前 k 个自变量只有在 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 不等于零或无穷大的那些点上才能换为 1.

因就在于此。

被研究的量的主定参量的数目越少，函数关系受到的限制就越大，研究工作就越容易进行。特别是，如果基本量度单位的数目等于具有独立量纲的主定参数的数目，则利用量纲理论该函数就被完全确定，精确到只差一个未定常数因子。事实上，若 $n = k$，即所有的量纲均独立，则由参量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 不能组成无量纲组合，故函数关系式（6.3）将呈如下形式：

$$a = c a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_n^{m_n},$$

其中 c 是无量纲常数，而指数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 容易由 a 的量纲公式定出。至于无量纲常数 c，则可以或者由实验确定，或者由解相应的数学问题从理论上确定。

显然，我们可以选取的基本量度单位越多，量纲理论所带来的好处就越大。

上面我们已经看到，基本量度单位的数目可以任意选取；然而，增加基本量度单位，就要引进附加的物理常数，这些常数也应列入主定参数。增加基本量度单位的数目，我们就增加了有量纲常数的数目；在一般情况下差数 $n + 1 - k$ 保持不变，亦即用以表达物理关系的无量纲参量的数目不变。

只有在下述情况下增加基本量度单位的数目才会带来好处，即由附加的物理考虑可以看出，引进新的基本量度单位时所出现的物理常数是非实质性的。例如，如果我们研究一种现象，其中有机械过程和热过程，那么，为了量度热量和机械能，我们可以引进两个不同的量度单位：卡和焦耳；但这时必须引进有量纲的常数 J 即热功当量加以考虑。现在假定我们研究运动着的不可压缩理想流体中的热传递现象。在这种情况下并不发生热能与机械能的相互转化，所以热过程和机械过程将不依赖于热功当量的值而进行。即使我们有可能改变热功当量的值，这也决不会影响特征量的值。因此，在这种情况下，常数 J 不会在物理关系式中出现，这样，增加基本量度单位的数目，就可以借助于量纲理论获得一些额外的重要认识。

六甲

以后我们将举例说明这些结论。

§7. 确定一类现象的参量

每当研究力学现象时，我们总是从概括图象，从选出决定我们所关心的量的基本因素，以及广义上说从借助于最简单的方式和已经研究清楚的现象来建立所研究过程的模型开始的。正确地概括图象往往是一件困难的事；这要求研究人员有丰富的经验、直观能力以及对所研究过程的机理的初步定性了解。有些任务的实质就在于检验那些或多或少可能是合理的假说的正确性。

挑选出决定性的因素以及深刻了解事物的相互联系和规律性的实质，这是自觉地利用和控制自然现象以成功地解决人类生活中提出的多种任务的基础。

物体的性质和起重要作用并支配现象的基本物理规律，是由一系列量来描述的，这些量可以是有量纲的或无量纲的，可以是变量或常量。

力学系统及其运动状态是由一系列有量纲的和无量纲的参量及函数确定的。

当研究许多不同的进行某些运动的力学系统时，我们总可以用相应的方式限制所允许的系统和运动的类别，使得具体的系统及其运动可由有限个有量纲的和无量纲的参量来确定。限制所允许的系统和运动的类别，这通过一些附加要求总是可以做到的，即要求固定无量纲参量和无量纲形式下问题的给定函数的类型。

量纲理论使我们可以得到由可能采用任意的或专门的量度单位制来描述物理规律所得出的结论。所以，在罗列决定一类运动的参量时，必须列出与现象的本质有关的全部有量纲的参量，而不管这些参量在实际上保持为常值（特别是，它们可以是物理常数）还是对于该类的不同运动可以变化。重要的是，虽然有可能对于所有被研究的运动有量纲的参量都是同一些，但它们在不同的量度单位制中可以取不同的数值。例如，在研究物体的重量起重要

作用的运动时，我们一定要把重力加速度 g 作为有量纲的物理常数加以考虑，虽然对所有的实际运动来说 g 的值都不变。在把重力加速度 g 作为主定参量引进之后，通过研究重力加速度 g 取不同数值的运动，我们就可以丝毫不增加麻烦地将一类运动人为地加以扩充.在许多情况下，这种方法可以使我们得到一些有实际价值的定性结论。

怎样寻求决定一类现象的参数组呢?

如果问题已被用数学形式表述出来，那么，总是容易列出决定现象的基本参量表。为此，需要指出所有这样的有量纲量和无量纲量，这些量对于由问题的方程确定所有未知量的数值是必要与充分的。在许多情况下，不用写出问题的方程就可以列出主定参量表。可以只确立为完全决定未知量（其数值有时只能用实验求出）所必须的那些因素。

在建立主定参量组的时候，象在建立问题的方程时那样，必须对现象作出简单的概括。

然而，为应用量纲理论所需要知道的东西，比起为了建立力学系统的运动方程所需要知道的要少。对于同一主定参量组，可以是不同的运动方程组.运动方程不仅表明未知量依赖于哪些参量，而且其中还隐含着所有的函数关系，正是确定这些函数关系构成了数学问题。

从这些分析显见，量纲理论就实质而言有其局限性。仅只靠量纲理论并不能确定无量纲量之间的函数关系。

如果我们用一些正的或负的无量纲的数，或用依赖于主定参量组的函数，乘问题的方程的各项使运动方程改变，这时量纲理论的结论是不会改变的。然而，方程的这种形式改变可以从实质上影响物理规律的性质[1].

任何一个包含着对支配现象的规律所作的数学描述的方程组，都可以写成无量纲量之间的关系式．在物理规律改变时，只要

1) 例如，如果在所研究系统的运动方程中改变某些力的符号，这就会从实质上影响到运动规律；而量纲理论的所有结论在这一改变下却保持不变.

它们仍是同样那些无量纲量之间的关系式的形式，则量纲理论的所有结论保持不变。主定参量组应具有完备性。

在主定参量(其中有些可能是有量纲的物理常数)中，一定要有这样的有量纲量，通过它们的量纲可以把全部因变参量的量纲表示出来[1]。作为说明这一要求的例子，我们来讨论一下能够决定气体静力学状态的参数。不能说，气体的状态仅由两个有量纲量决定：绝对温度 T ($[T]=\mathrm{C}^\circ$)和密度 ρ ($[\rho]=\mathrm{M/L^3}$)，因为压力 p 为有限值且不等于零，并且其量纲与温度和密度的量纲无关[2]。

现在假定气体的状态由温度、密度和一个物理常数的值决定，譬如这常数是以力学量度单位量度的比热系数 c'_v ($[c'_v]=L^2/T^2\cdot \mathrm{C}^\circ$)。若用 J 公斤米/卡来记热功当量，则我们有：

$$c'_v = Jc_v,$$

其中 c_v 是用热学量度单位量度的比热($[c_v]=$卡/质量$\cdot \mathrm{C}^\circ$)。压力的量纲可以通过 T^0，ρ 和 c'_v 的量纲表出，所以，从量纲理论的观点来看，上述假定是允许的。由于 T^0，ρ 和 c'_v 的量纲是独立的，所以由

$$p = f(T,\ \rho,\ c'_v)$$

这一假定，立即推得克拉珀龙 (Clapeyron) 方程成立：

$$\frac{p}{c'_v\rho T} = c \text{ 或者 } p = \rho RT,$$

其中 c 是无量纲常数，而用 R 表示有量纲的常数 $cc'_v = cJc_v$。

可见，克拉珀龙方程可以看作是下述唯一一个假设的结果：压力、密度、温度和比热之间是由一个具有物理意义的关系式联系着，与其他特征量的值无关。

下面，我们将用各种例子来说明量纲理论方法同其他想法相结合的方法，这些想法是由考虑到问题的对称性、问题的线性性质、主定参量的值小或值大时函数的数学性质等等而产生的。

---

1) 如果主定参量组不完备，并且实质上不能扩充，那末这就意味着，所要确定的量要么等于零，要么等于无穷大。在用 δ 函数来给出"点源型"初始条件时我们常常遇到这种情形。

2) 这就是说，作为主定参量，除了 T 和 ρ 之外，还应有另外的有量纲的量，使得它与 T 和 ρ 一起，能将作为因变参量的 p 的量纲表示出来。——校者注

第二章　相似性、模拟和应用量纲理论的各种例子

§1. 数学摆的运动

作为第一个实例，我们来考察关于数学摆的运动这一经典例子。

所谓数学摆（图1），是指一个悬挂在一根无重量和无伸长的线上的重质点，线的另一端固定不动。在摆的所有可能的运动中，我们只限于讨论平面运动。

引用的符号：l——摆长，φ——摆线与铅直线之间的夹角，t——时间，m——质点的质量，N——摆线的张力。若忽略阻力，摆的运动问题就归结为求解方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \qquad (1.1)$$

$$m\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 l = N - mg\cos\varphi, \qquad (1.2)$$

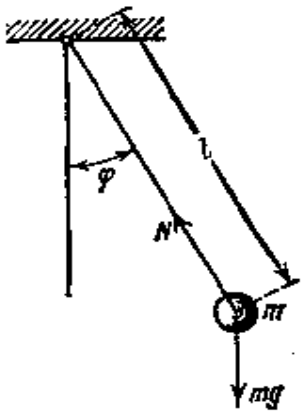


图1　数学摆

其初始条件是

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时} \quad \varphi = \varphi_0 \text{ 和 } \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

即取摆的偏角为 φ_0 且速度等于零的时刻作为初始时刻。

由方程(1.1)，(1.2)及初始条件显见，可以取下列参量作为主定参量组：

$$t,\ l,\ g,\ m,\ \varphi_0.$$

所有其余的量的数值完全由这些参量的值确定。因此，我们可以写出：

$$\varphi = \varphi(t, \varphi_0, l, g, m), \quad N = mgf(t, \varphi_0, l, g, m), \tag{1.3}$$

其中 φ 和 f 是无量纲函数。

函数 φ 和 f 的数值应与量度单位制无关。这两个函数的形式可以或者由解方程 (1.1) 和 (1.2) 来确定，或者用实验方法来确定。

由上一章所述的一般设想可知，函数 φ 和 f 的五个自变量 t, l, g, m 和 φ_0 只能化为两个由这些量组合而成的无量纲自变量，因为有三个独立的量度单位。

由量 t, l, g, m 和 φ_0 可以组成两个独立的无量纲组合：

$$\varphi_0 \text{ 和 } t\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{1.4}$$

所有由 t, l, g, m 和 φ_0 组成的或者一般地说由这些参量决定的任何量所组成的其它无量纲组合，都将是组合 (1.4) 的函数。因而可以写出：

$$\varphi = \varphi\left(\varphi_0, \ t\sqrt{\frac{g}{l}}\right), \tag{1.5'}$$

$$N = mgf\left(\varphi_0, \ t\sqrt{\frac{g}{l}}\right). \tag{1.5''}$$

用量纲方法得出的公式(1.5)表明，运动规律与质点的质量无关，而摆线的张力则与质点的质量成正比。这些结论也可直接从方程(1.1)和(1.2)得出。量 $t\sqrt{g/l}$ 可以看作是摆长和重力加速度都取为 1 的特殊量度单位制中的时间。

以 $\mathscr{T}$ 记任一特征时间间隔，譬如摆从最大偏离位置到铅直位置间的运动时间，或者在两个相同位相间的运动时间即振动周期，等等(可以把存在周期性运动看作是假设，或者看作是由补充数据得知的结果)。我们有：

$$\mathscr{T} = f_1(\varphi_0, l, g, m) = \sqrt{\frac{l}{g}}\, f_2(\varphi_0, l, g, m).$$

函数 f_2 是无量纲量，又因为由 l, g 和 m 不能组成无量纲组合，所以显然，函数 f_2 与 l, g 和 m 无关。于是，

$$\mathscr{T} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot f_2(\varphi_0). \tag{1.6}$$

公式(1.6)确立了时间 $\mathscr{T}$ 对摆长的依赖关系. 函数 $f_2(\varphi_0)$ 的形式是无法用量纲理论得到的，而必须或者根据方程 (1.1) 从理论上，或者从实验上来确定.

公式(1.6)可以直接从式(1.5′)得出. 事实上，对于振动周期，关系式(1.5′)给出：

$$\varphi_0 = \varphi\left(\varphi_0, \mathscr{T}\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

解此方程即得公式(1.6).

若 $\mathscr{T}$ 为振动周期，则由对称性考虑显见，周期 $\mathscr{T}$ 的值不依赖于 φ_0 的符号，即

$$f_2(\varphi_0) = f_2(-\varphi_0).$$

因此，函数 f_2 是自变量 φ_0 的偶函数. 假定在小 φ_0 值时 $f_2(\varphi_0)$ 是正则函数，可以写：

$$f_2(\varphi_0) = c_1 + c_2\varphi_0^2 + c_3\varphi_0^4 + \cdots. \tag{1.7}$$

对于小振动，φ_0^2 及更高次的项可以忽略不计，于是对于周期 $\mathscr{T}$ 我们得到公式

$$\mathscr{T} = c_1\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1.8}$$

方程(1.1)的解表明，$c_1 = 2\pi$. 所以，我们看到，对于摆的小振动，用量纲理论可以得到摆的振动周期的公式，精确到只差一个常数因子.

如果代替方程(1.1)，我们取方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}f(\varphi),$$

其中 $f(\varphi)$ 是 φ 的任意函数，则在此情况下公式(1.5)和(1.6)依然成立. 一般地说，公式(1.5)和(1.6)成立这一结论，是根据下述唯一条件得出的，即运动状态由参量

$$t, l, g, m, \varphi_0$$

确定. 为了确立这一组参量我们用到了运动方程，但是，也可以不

借助于运动方程就指出这组参量。事实上，对于摆的特征量，应当指出 l 和 m；再者，必须指出 g，因为现象的本质由重力决定；最后，必须指出 φ_0 和 t，因为具体的运动和运动状态取决于最大偏角 φ_0 和所讨论的时刻 t.

§2. 重液体通过水堰的出流

我们讨论重液体通过水堰的射流运动（图 2）；水堰是一个带有三角形孔口的铅直壁，孔口对于铅直线是对称的，且顶角 α 等于 90°。液体在水头 h 下流出；水头 h 等于由三角形顶点向上算起的上游远处的液面的高度。为简单起见，我们假定贮液器非常大，从而可以认为液体的运动是定常的。在液体作射流运动时，惯性和重量（它们分别由密度 ρ 和重力加速度 g 的值来表征）具有基本意义。

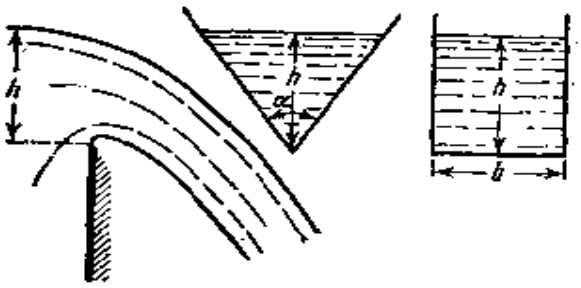


图 2　重液体通过水堰的溢流

流过上述水堰的液体的定常流动由下列参量完全确定：

$$\rho,\ g,\ h.$$

单位时间内通过堰孔流出的液体的重量 Q 只能是这些参量的函数，即

$$Q = f(\rho,\ g,\ h).$$

利用量纲理论不难求出此函数的形式。事实上，Q 的量纲等于公斤/秒。组合 $\rho g h^3 \cdot \sqrt{g/h}$ 也具有公斤/秒的量纲。所以比式

$$\frac{Q}{\rho g^{3/2} h^{5/2}}$$

是无量纲量。这个比是量 ρ, g, h 的函数；而由 ρ, g, h 不能组成无量纲组合，所以有

$$\frac{Q}{\rho g^{3/2} h^{5/2}} = C,$$

或者

$$Q = C\rho g^{3/4} h^{7/4}, \tag{2.1}$$

其中 C 是绝对常数，它的值用实验来决定最简单。所得到的公式完全确定了液体的流量对于水头 h 和密度 ρ 的依赖关系。

假设水堰带有各种不同的角度 α，就可以把上面所考虑的一类运动加以扩充。这时，主定参量组中要增加角 α，于是，公式(2.1)变成形式

$$Q = C(\alpha)\rho g^{3/2} h^{5/2}, \tag{2.2}$$

亦即系数 C 将依赖于角 α.

如果水堰具有宽度为 b 的矩形孔，则主定参数组将是：

$$\rho, g, h, b.$$

所有的无量纲量都由参数 h/b 确定。这时公式(2.1)变成如下形式：

$$Q = f\left(\frac{h}{b}\right)\rho g^{3/2} h^{5/2}. \tag{2.3}$$

函数 $f(h/b)$ 可以通过观测在 h 保持不变时流过不同宽度 b 的水堰的流动从实验上来确定。这样定出函数 $f(h/b)$之后，公式(2.3)就可以应用于 $b = \text{const.}$ 而水头 h 不同的情形，即应用于没有做过实验的情形。

这个例子表明，利用量纲方法得到的认识在安排实验时可以带来很大的好处——可以减少实验的数量，从而不仅节约了物资，而且节省了时间。一些量的变化在实验中可以用另一些量的变化来代替。根据用水做的实验，就可以给出石油、水银等等流动现象的详尽答案。

§3. 流体在管道中的运动

量纲与相似理论方法的重大价值，在水力学中研究管道内的液体运动时第一次特别明显地表现了出来。尽管量纲理论分析在实践上重要而且简单，但是，只是在十九世纪末有了雷诺(Reynolds)的工作[1]之后它才被应用于水力学问题，这一应用带来了巨大的效益，是在水力学史上向前发展的重大一步。

长期以来，在水力学中使用了不同作者提出的大量经验公式。这些公式中包含着一系列有量纲的常数，它们的值是由特定的实验条件和流体性质定出来的。

量纲理论的考虑连同对问题比较确切和普遍的提法，可以使不同温度下在不同直径的管道中具有不同运动速度时对不同流体的运动得到的许多经验规律相符合并统一起来。

现在，我们来概括和提出问题。我们用下述条件来确定一类运动。管道是一些具有相同截面形状的柱形管道（图 3）。因此，管道及其横截面，由给出截面积或给出某一特征长度 a 就完全确定。对于圆管，通常取半径或直径作为特征尺度。管道长度足够长，所以可以不考虑管端处运动的影响。把现象理想化，我们假定管道

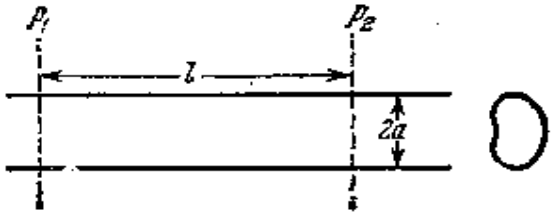


图 3　不可压缩流体在柱形管道中的运动

1) Reynolds O., An Experimental Investigation of the Circumstances which Determine whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. Phil. Trans. Roy. Soc. London 1883, V. 174, № 3, pp. 935—982 (并参阅: Reynolds O., Papers on Mech. and Phys. Subjects, V. 2, 1901, pp. 51—105; 文集 «Проблемы турбулентности» М-Л, ОНТИ, 1936).

为无限长。

对于所考虑的流体运动我们假定是定常的。

再则，我们假定在所研究的过程中压缩性不重要，所以我们将讨论不可压缩流体的运动。流体的惯性和粘性我们将予考虑，它们分别由密度 ρ 和粘性系数 μ 表征。因为粘性系数依赖于温度，所以考虑这一依赖性时我们也将考虑到温度的影响[1]。

为了确定流体的运动，再给定一个量就够了；这个量或者是沿管道的压力降，或者是单位时间内通过管道截面的流体流量，或者是流体在管道截面上的平均速度 $\bar{u}$，等等。

因此，管道、流体和流体的运动状态整个地由下列参量组确定：

$$\rho,\ \mu,\ a,\ \bar{u}.$$

运动的所有力学特征量都是这些参量的函数。

例如，我们来讨论沿管道的压力降。管道单位长度上的压力降为

$$\frac{p_1 - p_2}{l},$$

其中 p_1 和 p_2 是管道内相距 l 的两个截面上的压力。

组合

$$\frac{\dfrac{p_1 - p_2}{l}}{\dfrac{\rho\bar{u}^2}{2a}} = \phi$$

是无量纲量，称为管道阻力系数。

长度为 l 的管段的阻力是：

$$P = (p_1 - p_2)S = \phi \frac{l}{a} S \frac{\rho\bar{u}^2}{2}, \tag{3.1}$$

其中 S 为管道的截面积。

由四个主定参量 ρ, μ, a 和 $\bar{u}$ 只能组成一个独立的无量纲组合

1) 我们这里是指在下述假定下考虑温度，即可以认为温度在整个流体中为常数.

$$\frac{\bar{u}a\rho}{\mu} = \mathrm{R},$$

它称为雷诺数。所有依赖于上述四个参量的无量纲量都是雷诺数的函数。其中就有

$$\phi = \phi(\mathrm{R}). \qquad (3.2)$$

确定管道阻力或流体流量对压力降的依赖关系的问题，归结为求函数关系 $\phi(\mathrm{R})$. 此函数可以用实验方法求出——测量水在某一管道中运动时阻力对速度(或者对流动流体的流量)的依赖关系。所得到的结果可以在研究其它流体在另外直径的管道中的运动时加以利用。例如，根据水运动的实验数据，在许多情况下（当压缩性不重要时，即在速度远小于声速时）可以解决关于空气等在管道中运动的许多问题（图 4）。

实验表明，流体在管道中的运动有两种截然不同的形式：层流和湍流。流体在柱形管道中作层流运动时，流体质点沿平行于管道母线的直线运动；而在作湍流运动时，流体则在垂直于管道母线的方向有无规则的掺混。湍流流动只在取平均时可以看作是定常运动。

在许多情况下管道中流体的层流运动只具有弱稳定性；或者一般说是不稳定的，而将转化为湍流运动。

稳定性是流体运动的整体特性，所以对于光滑管道，稳定性应由雷诺数 R 确定。实验很好地证实了这一结论。对于小雷诺数，层流运动是稳定的，而对于大雷诺数则不稳定。运动的形式由雷诺数决定。层流运动的稳定性界限由雷诺数的某一数值表征，此值称为临界雷诺数。对于圆柱形管道临界雷诺数值具有量级 $\mathrm{R}_{*}=1000—1300$.

粘性大的流体以小速度在小直径管道中(例如在毛细管中)的运动表现为层流；而粘性小的流体以大速度在大直径管道中的运动表现为湍流。

实验数据表明，函数 $\phi(\mathrm{R})$ 有两支，一支对应于层流运动，另一支对应于湍流运动。在临界雷诺数值附近存在一个过渡区。

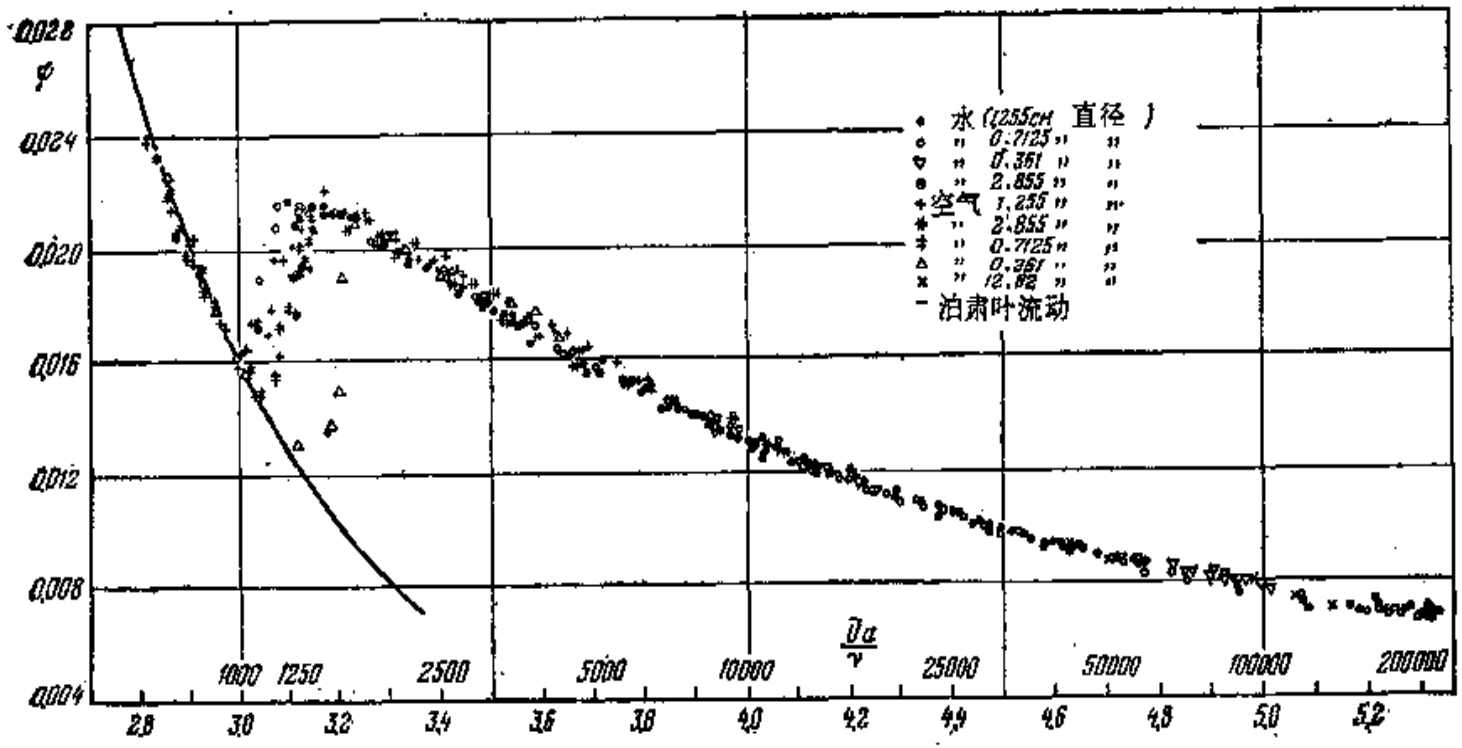


图 4　关于圆柱形管的阻力系数的实验数据 [斯坦顿 (Stanton) 与潘内耳 (Pannel) 的测量; a 为管道半径, $\nu = \mu/\rho$.]

流体在柱形管道中作层流运动时，所有的流体质点都沿着平行于管轴的直线作等速运动(即加速度等于零)。流体在管道中的这种运动称为哈根-泊肃叶（Hagen-Poiseuille）流动。只有当加速度不等于零时由参量 ρ 体现的流体的惯性才起作用[1]，所以在层流运动中阻力不应依赖于 ρ。因而在层流运动中等式(3.1)的右端不应依赖于 ρ，由此得出，在层流运动情况下密度 ρ 应从等式(3.1)中消失，所以，函数 $\phi(\mathrm{R})$ 应具有形式

$$\phi = \frac{C}{\mathrm{R}} = \frac{C\mu}{\rho a \bar{u}}, \tag{3.3}$$

其中 C 是由管道截面的几何形状决定的无量纲常数，a 是管的半径。对于圆管，C 容易由理论算出：$C = 16$.

从而，在层流运动的情况下得到管道阻力公式：

$$P = \frac{1}{2}\frac{S}{a^2} C\mu l\bar{u} = C_1 \mu l \bar{u}, \tag{3.4}$$

其中 C_1 是无量纲常数，它依赖于管道截面的形状。如果作为主定参量只取三个量 $a, \mu, \bar{u}$，再考虑到 P 正比于 l，则容易直接得出公式(3.4)。

如果给定导致流体运动的压力降，则作为主定参量宜于取

$$\rho, \mu, a \text{ 和 } i = \frac{p_1 - p_2}{l}.$$

这时，运动形式由无量纲参量

$$\frac{\rho i a^3}{\mu^2} = J$$

决定。由公式(3.1)不难看出，

$$J = \frac{1}{2}\mathrm{R}^2\phi(\mathrm{R}). \tag{3.5}$$

此式通过函数 $\phi(\mathrm{R})$ 给出了 J 对 R 的依赖关系。我们把单位时间内流过管道截面的流体体积(所谓管道的体积流量)记作

$$Q = \bar{u}S.$$

1) 众所周知，在运动方程中密度与加速度仅以乘积的形式出现.

无量纲组合

$$\frac{Q\rho}{\mu a} = \mathrm{R}\frac{S}{a^2}$$

是量 J 的函数，即

$$Q = \frac{\mu a}{\rho} f(J). \tag{3.6}$$

对于层流运动容易确定函数 $f(J)$ 的形式。根据公式(3.3)和(3.5)求得：

$$Q = \frac{2}{C}\frac{S}{a^2}\frac{ia^4}{\mu} = C_2\frac{ia^4}{\mu}, \tag{3.7}$$

其中无量纲常数 C_2 依赖于管道截面的形状。对于圆管

$$C_2 = \frac{\pi}{8}.$$

公式(3.7)即为泊肃叶定律，它是哈根于1839年和泊肃叶于1840年用实验建立的。此定律与实验符合甚好，这是流体中粘性摩擦定律的正确性以及原先对现象概括得合理的主要证据之一。

§4. 物体在流体中的运动

对飞机、潜艇等运动问题进行概括，就导致刚体在充满整个空间的无界流体中作等速平动的问题。

我们让物体表面的几何形状固定不变，这时，为了完全给定物体表面，给出某一个特征长度 d 就够了。我们来讨论物体平行于某一不动平面的一些平动。以 v 和 α 记运动速度和确定速度方向的角(图5)；对于不同的运动，量 v 与 α 可以是不相同的。再假定流体可以认为是不可压缩的。流体的粘性和惯性将予以考虑。为简单起见，假定没有质量力。物

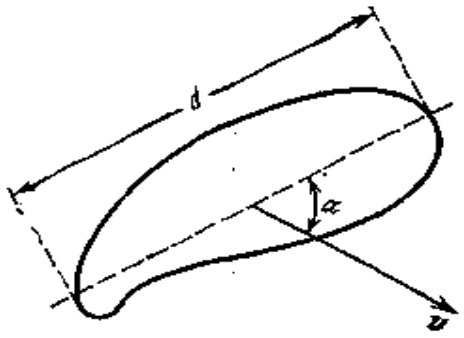


图5 刚体在流体中的运动

体表面上的压力分布以及流体作用于物体的合力，依赖于流体受扰运动的状态。

对于给定形状的物体，流体的定常运动状态由下列五个参量确定[1]：

$$d,\ v,\ \alpha,\ \rho,\ \mu.$$

与流体的运动状态有关的全部无量纲力学量，可以看作是两个无量纲参量的函数：冲角 α 和雷诺数

$$\frac{vd\rho}{\mu} = \mathrm{R}.$$

以 W 表示流体作用于物体的力（下面，我们不论是把 W 理解为总阻力，还是理解为它的一个分力，即与运动速度反向的迎面阻力或与速度垂直的举力，这对进一步的讨论都一样）。由量纲理论的一般定理可知，无量纲量 $W/\rho d^2v^2$ 是角 α 和雷诺数 R 的函数。所以

$$W = \rho d^2v^2 f(\alpha, \mathrm{R}). \qquad (4.1)$$

确定函数 $f(\alpha, \mathrm{R})$ 是理论与实验空气动力学和流体力学的重要课题。

显然，对于所取的参量组，粘性对运动的影响只是通过雷诺数的影响才体现出来。

由公式 $\mathrm{R} = vd\rho/\mu$ 的形式，可以作出关于在物体的速度或物体的尺度增大时流体粘性的作用的某些一般结论。譬如，在物体

---

1) 无穷远处的压力 p_0（它可以任意给出）由于下述理由而不列入这组参量中．因流体是不可压缩的，所以 p_0 的变化不会影响速度场．对于总压力 p，总可以代之于只讨论压力差 $p - p_0$．由此显见，量 p_0 是不重要的，所以它无需作为主定参量引入．然而，当液体的运动伴随有气蚀现象（它与液体在低压区发生汽化有关）时，则在主定参量中就必须包括量 $p_0 - p'$，这里 p' 是液体在当时温度下的蒸气压．对于可压缩流体，在主定参量中必须包括量 p_0 或一个可以代替 p_0 的别的参量．

对于伴随有气蚀的运动，还有一个无量纲参量

$$\eta = 2\frac{p_0 - p'}{\rho v^2}$$

是重要的．在实验中研究气蚀数 η 的影响时，可以或者借助于改变 p_0，或者改变 v，或者人为地改变 p' 来使数 η 改变．还可以采用不同的液体而改变密度 ρ．

的运动速度或物体的线尺度增大时雷诺数将增大。但为了保持粘性的作用不变，雷诺数应当保持为常数，因为雷诺数的任何改变都可归因于粘性系数的改变；如果乘积 $vd\rho$ 增大，则为使雷诺数不变，就必须增大粘性系数 μ. 因此，当物体取同一个运动速度时，由大物体的运动所引起的蜂蜜（其 μ/ρ 大）的运动，相似于由小物体的运动所引起的水（其 μ/ρ 小）的运动；或者，物体以大速度在蜂蜜中的运动，相似于该物体以小速度在水中的运动。运动的相似性表现为对于这些运动所有的无量纲量相同。

再则，由这些考虑还容易看出，物体在同一流体中运动时，粘性的作用随物体速度和物体尺度的增大而减小[1]。理论研究和实验数据表明，在大雷诺数时流体粘性的作用减小，并在某些情况下变得不重要。将粘性忽略不计，亦即假定 $\mu = 0$，我们就得到理想流体的概念。

在物体于理想流体中运动的问题中，主定参量的数目减少为四个：

$$d, \alpha, \rho, v.$$

在理想流体中所有的无量纲特征量都由冲角 α 确定，所以公式(4.1)换为下式：

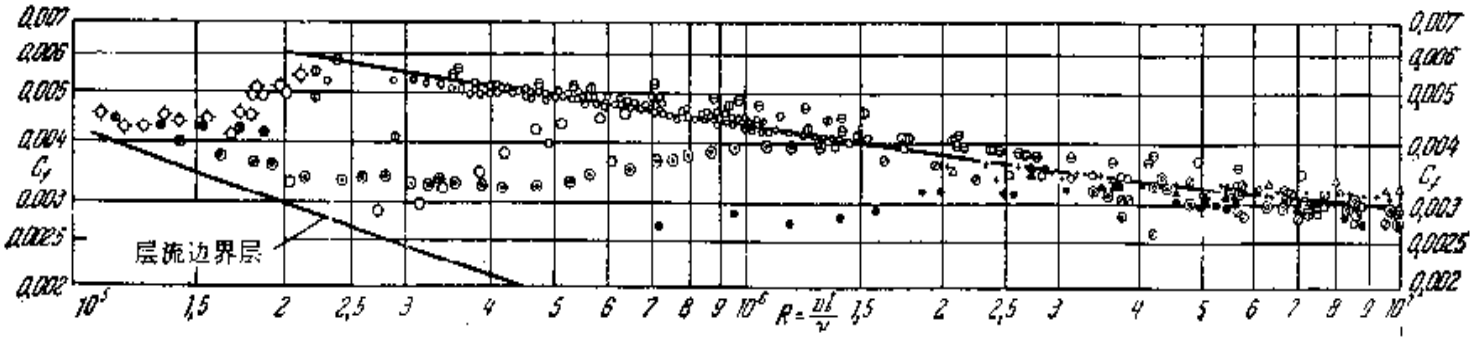
$$W = \rho d^2 v^2 f_1(\alpha). \qquad (4.2)$$

因此，当物体在不可压缩理想流体中运动时，流体作用在物体上的力与速度平方成正比。对于粘性流体，当雷诺数足够大时，这个规律近似成立。

对于不同形状的物体，公式(4.1)和(4.2)中的函数 $f(\alpha, \mathrm{R})$ 和 $f_1(\alpha)$，除依赖于冲角 α 外，主要依赖于确定物体几何形状的无量纲参量。在图 6 和图 7 中示出了关于阻力系数随雷诺数变化的实验结果.图 8 中示出了冲角对机翼的阻力和举力的影响的特性.

现在我们来考虑相应于小雷诺数值的、物体的极缓慢运动的情形。

1) 在此情况下，我们假定了在其余条件相同时粘性的作用随粘性系数的减小而减小.



△佛罗德．板 16′,25′,50′(~4.88,7.62,15.25*M*)
◎华盛顿．板 20′,30′(6.1,9.15M)
●格伯斯，尤比盖．板 0.6,1.6,3.6,4.6,6.52*M*
⊘格伯斯，维纳．板 1.25,2.50,5,7.5,10*M*
＋佛罗德国立实验所．板 3′,8′,16′(~0.15,2.44,4.88*M*)
◒华盛顿．板，光滑的 80′(~24.4*M*)
◐华盛顿．板，带有连接板 80′(~24.4*M*)
①康普天与克劳斯．板 0.5,0.75*M*
⊖维塞耳贝格．板，包复织物并涂漆尺寸 0.5, 1, 1.5, 2M(在空气中实验)
⊗沙姆．木板 2′(~0.61*M*)和纸板 16′(~4.88*M*)(在空气中实验)
▲吉本斯．玻璃板 9½′ (2.5*M*)(在空气中实验)
○商卡．Katamaran(木筏)，平的，光滑的，3′(~0.915*M*)
◇商卡．Katamaran(木筏)，平的，带有粗糙前缘，3′(~0.915*M*)
⊙商卡．Katamaran(木筏)，平的，光滑的，6′(~1.83*M*)
○商卡．Katamaran(木筏)，平的，在较快发生湍流的条件下，6′(~1.83*M*)
□康普夫．船体单元

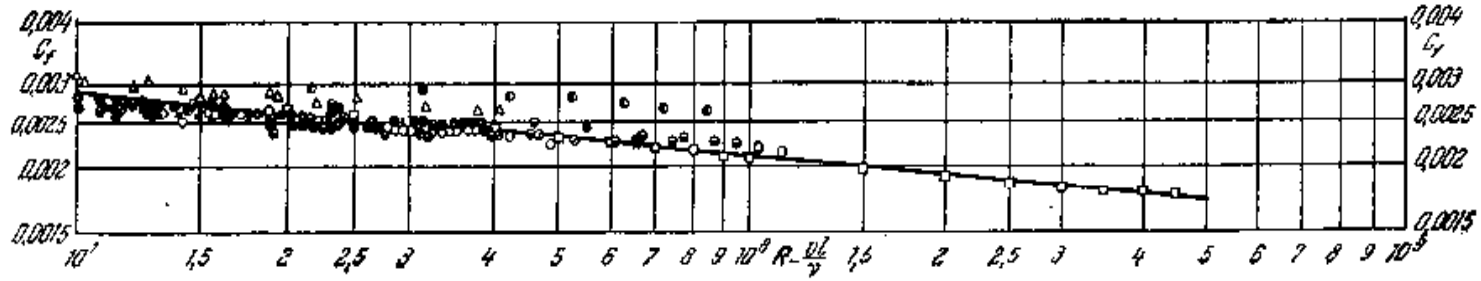


图 6　沿平行于自身平面拖曳的方形平板的阻力系数 $C_f=\left[W\Big/\left(lb\frac{\rho v^2}{2}\right)\right]$ (l 为平行于速度方向的长度，b 为平板宽度)

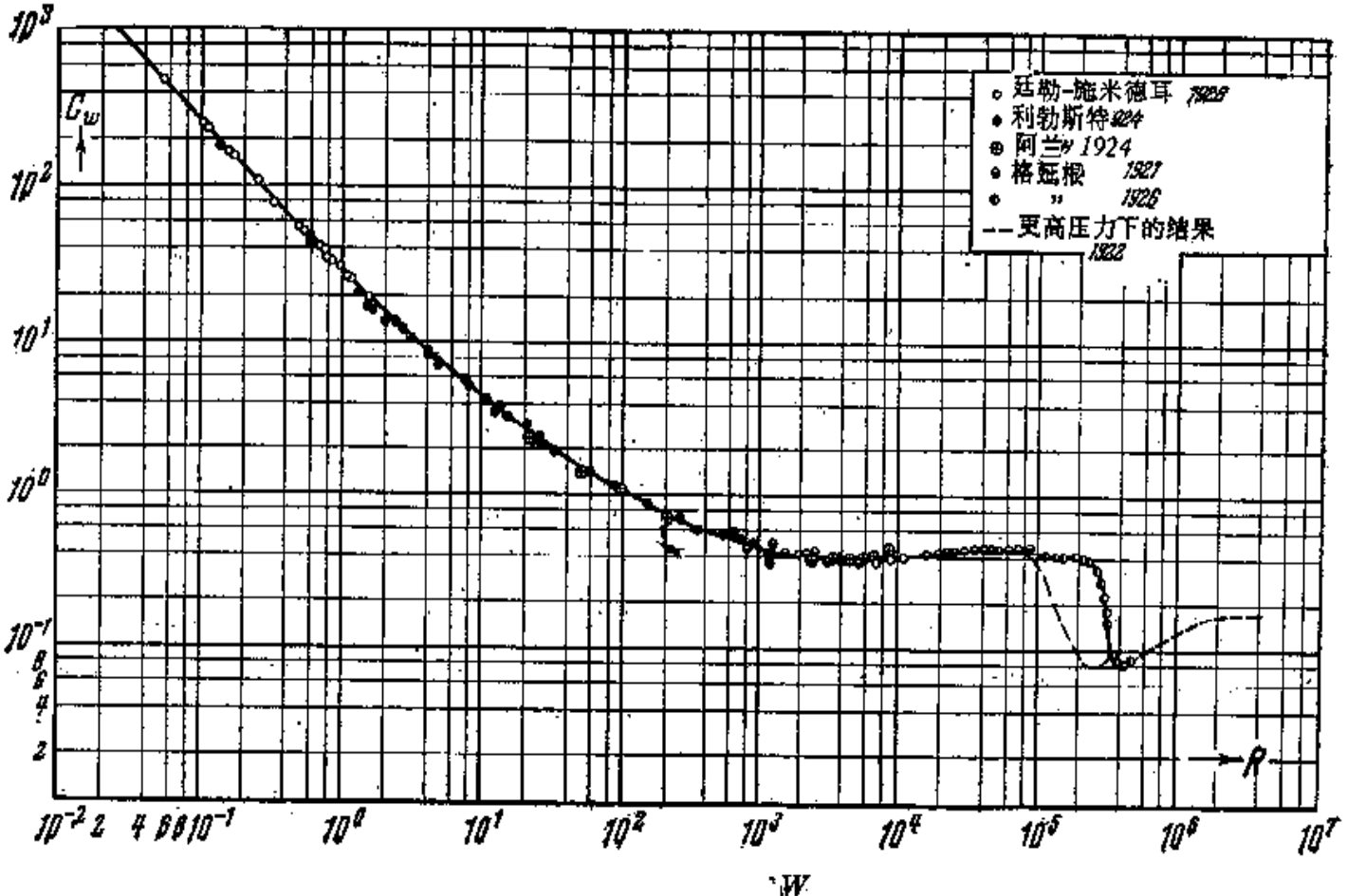


图7　球的阻力系数 $C_w = \dfrac{W}{\frac{\pi d^2}{4}\frac{\rho v^2}{2}}$ 随雷诺数 $R = \dfrac{vd}{\nu}$ 的变化　(d 为球的直径)

在雷诺数减小时粘性力的作用增大。如果同粘性力相比我们略去惯性力，则这就相当于假定参量 ρ 不重要。在此情况下，主定参量组是下列四个参量：

$$d, \alpha, v, \mu,$$

所以，所有的无量纲特征量也都只依赖于冲角 α。因此，

$$W = \mu d v f_2(\alpha). \quad (4.3)$$

由此显见，阻力和举力正比于速度、粘性系数、线尺度 d。这个定律可称之为斯托克斯定律，它对于小物体的缓慢运动（例如细小粒子在流体中的下沉）与实验符合甚好。

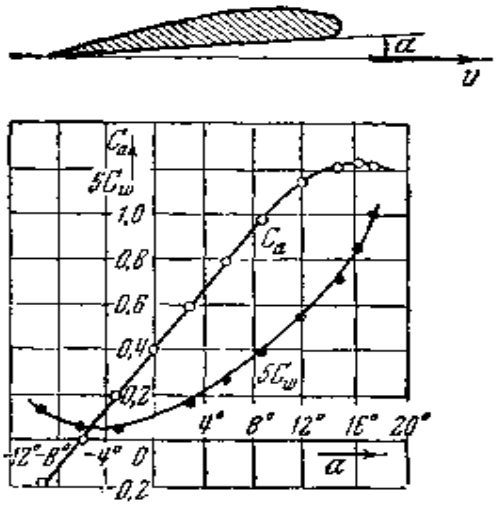


图 8　机翼的举力系数 $C_a = 2A/\rho S v^2$ 和阻力系数 $C_w = 2W/\rho S v^2$ 随冲角 α 变化的典型关系曲线
（S 为机翼平面的面积）

对于球，函数

$$f_2(\alpha) = \text{const} = c,$$

亦即不依赖于角 α。在上述假定（它归结为在纳维尔-斯托克斯方程中略去惯性项）下，斯托克斯曾对球的缓慢运动计算了系数 c 的理论值；得出此值等于 $c = 3\pi$（如果 d 为球的直径）。

因此，我们看到，量纲理论可以揭示在雷诺数值很大和很小时函数 $f(\alpha, \mathrm{R})$ 对雷诺数 R 的依赖关系的形式。在 $\mathrm{R} \to \infty$ 时我们得到理想流体，在此情况下函数 $f(\alpha, \mathrm{R})$ 趋于某一与雷诺数无关的函数 $f_1(\alpha)$。与小雷诺数值相对应的流动状况其特征是：流体的粘性具有基本作用，而惯性是次要的，亦即 μ 的值大，ρ 的值小。在 $\rho = 0$ 的极限情况下有公式 (4.3)；假定 $\rho \neq 0$，则由这公式得：

$$W = \rho d^2 v^2 \frac{f_2(\alpha)}{v d \rho / \mu}.$$

由此得出，对于小雷诺数值应有下列形式的公式：

$$f(\alpha, \mathrm{R}) = \frac{f_2(\alpha)}{\mathrm{R}}. \quad (4.4)$$

此关系式乃是斯托克斯定律的推论。图 9 中示出了对于球的实验数据与斯托克斯定律的比较。

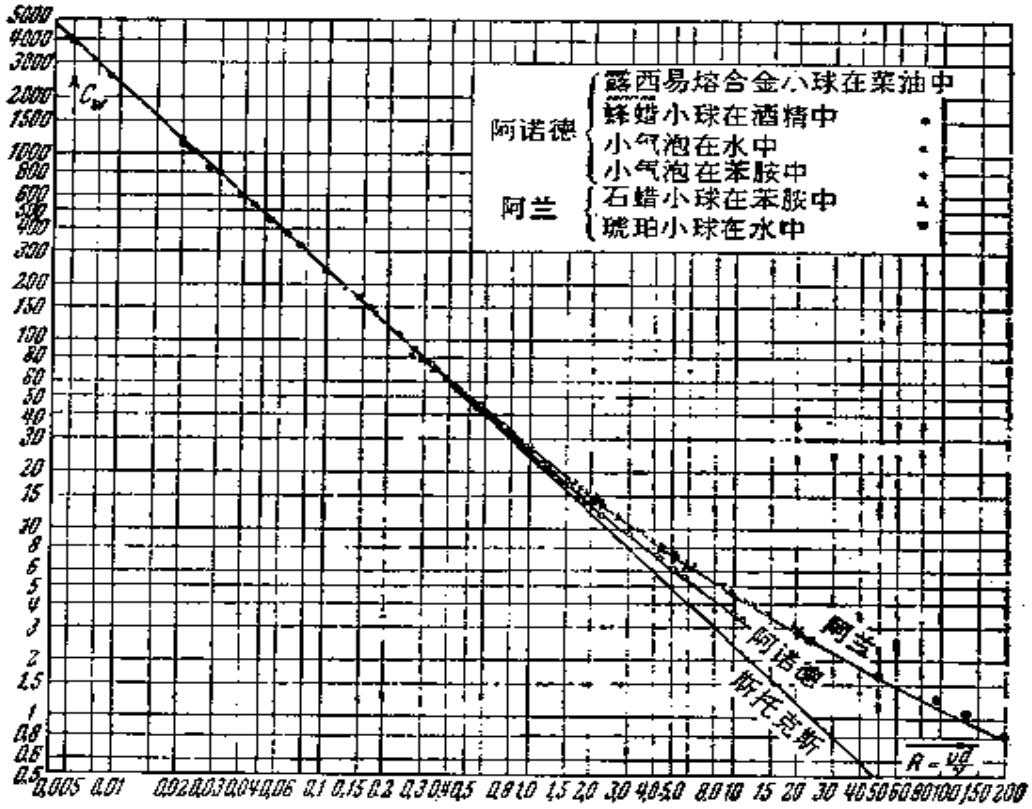


图 9　小雷诺数时球的阻力系数

利用量纲理论我们断定了：如果在纳维尔-斯托克斯方程中略去惯性项，则斯托克斯定律(4.3)对于任意形状的物体均成立。

函数 $f_2(\alpha)$ 可以由实验确定，或者通过求解简化的纳维尔-斯托克斯方程由理论确定。

§5. 物体在流体流动中的散热

1915 年瑞利(Rayleigh)曾把量纲理论应用于关于物体向绕它流动的流体传热的布辛涅斯克(Boussinesq)问题[1]。后来，瑞利的

1) Lord Rayleigh, The Principle of Similitude, Nature, V. 95 1915, pp. 66—68.(再参阅 Lord Rayleigh, Sci. Papers, V. 6, pp. 300—305)

推理成了许多作者[1]批评的对象，但是，这些批评中所提出的问题并未得到澄清。

现在我们来详细地考察在将量纲理论应用于这个问题时所发生的全部情况。

此问题可表述如下：存在一个从给定固定形状的物体向充满该物体以外的整个空间的流体传热的定常过程。物体固定不动，流体绕物体流动，并且在物体前方足够远处是以等速 v 作平行运动。

令 H 为单位时间内物体传出的热量。假定流体是理想的和不可压缩的，瑞利推理如下。热量 H 由下列参量值确定：物体的特征尺度 l，远离物体处流体的速度 v，温度梯度 θ（等于物体的温度与远离物体处流体的温度之差，并且假定物体的温度保持为常数），流体单位体积的比热 c 和流体的热传导系数 λ。因此，可以写出：

$$H = f(l, v, \theta, c, \lambda).$$

瑞利取长度、时间、温度、热量和质量（L，T，C^0，Q，M）的量度单位作为基本量度单位。所以各参量的量纲为：

$$[l] = \mathrm{L},\ [v] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}},$$

$$[\theta] = \mathrm{C}^0,\ [c] = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{L}^3\mathrm{C}^0},$$

$$[\lambda] = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{LC}^0\mathrm{T}};$$

我们看到，所有这些量纲都与质量无关。

由这五个有量纲的主定参量只能组成一个独立的无量纲组合

$$\frac{lvc}{\lambda}.$$

H 的量纲为：

$$\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{T}}.$$

1) Рябушинский, Nature, 1915, p. 105; Rayleigh, Nature, V. 95, 1915, p. 644; Bridgman P. W. Dimensional Analysis. New Haven, Yale University Press, 1932. (俄译本 Бриджмен, Анализ размерностей, ОНТИ, 1934.)

容易看出，组合 $H/\lambda l\theta$ 是无量纲量，所以

$$H = \lambda l\theta f\left(\frac{lvc}{\lambda}\right). \tag{5.1}$$

这个公式是瑞利得到的。由它得出，传热率与温度梯度 θ 成正比，并且对于不同的 v 与 c，只要乘积 vc 为常数，传热率就具有同一值。

略布欣斯基（Рябушинский）作了如下的评论。因为热量和温度具有能量的量纲（在气体分子运动论中温度定义为作无规则运动的分子的平均动能），所以，作为基本量度单位只能取长度、时间和质量的量度单位。于是主定参量的量纲为：

$$[l] = \mathrm{L}, \qquad [v] = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}}, \quad [\theta] = \frac{M\mathrm{L}^2}{\mathrm{T}^2},$$

$$[c] = \frac{1}{\mathrm{L}^3}, \qquad [\lambda] = \frac{1}{\mathrm{LT}}.$$

现在由主定参量可以组成两个独立的无量纲组合：

$$\frac{lvc}{\lambda} \text{ 和 } cl^3.$$

因此，在此情况下量纲理论导致公式

$$H = \lambda l\theta f\left(\frac{lvc}{\lambda},\ cl^3\right); \tag{5.2}$$

显然，它给出的结果要比公式（5.1）给出的少。

在对略布欣斯基的答复中瑞利写道[1]：

“略布欣斯基所提出的问题，与其说是属于我所涉及的相似性原理的应用这一方面的，不如说是属于逻辑方面的。问题很值得进一步探讨。我的结论是在通常的傅里叶（Fourier）热传导方程的基础上得出的，在方程中温度和热量被看作是 sui generis（不同质的）量。如果由分子论提供的关于热的本质的进一步认识，使我们处于比以前研究个别问题时还要坏的境地，那的确是一个佯谬。佯谬的解决看来应该是，在傅里叶方程中包含着被在略布欣斯基

1) Nature, 1915, p. 644.

的论证中忽视的关于热和温度本质的某些东西."

在谈到这一答复时，布列奇曼(Bridgman)[1] 正确地指出，瑞利的答复难以令人满意，况且他本人对这问题全然没有给出解释。

误解可解释如下：在瑞利推导公式(5.1)时所取的基本单位制中，对于能量有三个不同的量度单位：尔格 $= ML^2/T^2$，度C°和卡Q. 在气体分子运动论中热量和温度是作为机械能来定义。将热量和温度转换到力学量度单位，牵涉到两个常数值：热功当量 $J = 427$ 公斤米/千卡($[J] = ML^2/T^2Q$)和玻耳兹曼常数 $k = 1.38 \times 10^{-16}$ 尔格/度($[k] = ML^2/T^2C°$)。在机械能、热量和温度取为独立的量度单位时，这些常数必须看作是物理常数。

由流体的不可压缩和无粘性的条件得出，速度场由运动学条件确定，并且现象不伴随有热能与机械能之间的转化。力学过程独立于热过程而进行。由此可见，流体的密度值不影响所有的热学量，且由于没有热能转化为机械能，热功当量的值一般也不重要。再则，如果假定密度 ρ 和量 J 不影响所研究的传热过程，则由量纲理论得知，玻耳兹曼常数 k 的值也是不重要的，因为常数 k 的量纲公式中包含有质量单位的符号，而 H 和主定参量的量纲都是与质量单位无关的。量 ρ，J 和 k 在上述假定下均不重要这一性质，也容易从确定物体传给流体的热量这一问题的数学表述中看出。这些情况表明，在瑞利列出的主定参量中不出现 J，ρ 和 k 是正确的[2]。然而，如果保留密度 ρ 不重要这一假定[3]，而不假定 J 和 k 是不重要的(此假定是补充分析所得的结果)，那么，在瑞利的主定参量表中必须把量 k 和 J 加进去，这样，我们就得到了如下主定参量组：

$$l, v, \theta, c, \lambda, J, k.$$

由这七个量纲量只可以组成两个独立的无量纲组合：

---

1) Бриджмен, Анализ размерностей, стр. 17, ОНТИ, 1934.

2) 如果我们在可压缩粘性流体的情况下讨论这一问题，则量 ρ，J 和 k 成为重要的，这时必须将这些参量或者代替它们的参量列入主定参量表中.

3) 在略布欣斯基的推理中保留了此假定.

$$\frac{lvc}{\lambda} \text{ 和 } \frac{Jcl^3}{k}.$$

这时公式(5.1)由下式代替：

$$H = \lambda l\theta f\left(\frac{lvc}{\lambda}, \frac{Jcl^3}{k}\right). \tag{5.3}$$

如果注意到热功当量 J 是不重要的，从而参量

$$\frac{Jcl^3}{k}$$

不重要，所得到的公式(5.3)就化为公式(5.1)。

现在如果同略布欣斯基一样利用力学量来确定热量，则 k 和 J 就是无量纲普适常数，于是公式(5.3)就化为公式(5.2)。结论之所以比较弱，是因为在这种研究方法中没有考虑关于现象机理的补充分析。

§6. 现象的动力学相似与模拟

量纲与相似理论在模拟各种现象时具有重大意义。**模拟，这是把我们对所关心的实际现象需作的研究，换为通常是在专门实验条件下在尺寸缩小或放大的模型上对相似的现象作研究。**模拟的基本想法是，根据模型试验的结果就能给出关于效应特性和与实际条件下的现象有关的各种量的必要的答案。

在大多数情况下，模拟是以研究物理相似的现象为基础的。我们用研究比较便于实现的物理上相似的现象来代替研究我们所关心的实际现象。力学相似，或一般地说物理相似，可以看作是几何相似的推广。如果两个几何图形的所有对应长度之比相同，则这两个几何图形相似。如果知道了相似系数——比例尺，则对一个几何图形的尺寸简单地乘上比例尺的值，即可得到与之相似的另一个几何图形的尺寸。

定义力学相似性或物理相似性，有各种方法。下面我们给出这样一种形式的物理相似性的定义，这种形式对实践是必须的并

且对直接应用是方便的。

若根据一现象的给定的特征量，通过类似于由一种量度单位制转换为另一量度单位制时那样的简单换算，就可以得出另一现象的特征量，则两现象相似。

为了进行换算，必须知道“转换比例尺”。

两个不同的但相似的现象的数值特征量，可以看作是同一现象在两个不同的量度单位制中表示出来的数值特征量。对于任何一族相似现象，所有对应的无量纲特征量（有量纲量的无量纲组合）都具有同样的数值。不难看出，相反的结论也成立，即如果两个运动的所有对应的无量纲特征量都相同，则两个运动相似。

一族力学相似的运动确定一种运动方式。

两现象的相似性有时可以作较广义的理解，即认为上述定义只对某专门的一组特征量而言，这组特征量完全确定现象并可用来求出任何别的这样的特征量，这些量从一个现象转换为另一“相似”现象时不能用简单乘以相应的比例尺而得到。例如，任意两个椭圆，当使用沿椭圆主轴方向取的笛卡尔坐标时，可以认为在上述意义上是相似的。用上述换算可以通过某一个椭圆的点的坐标得出任何一个椭圆的点的笛卡尔坐标（仿射相似）。

为了在模拟时保持相似性，必须遵守某些条件。然而在实践中，保证整体上现象相似的那些条件往往得不到满足，这时会遇到在将模型上得到的结果搬到实物上时所产生的误差的大小的问题（比例尺效应）。

在建立了决定所选出的一类现象的参量组之后，就不难建立两现象相似的条件。

事实上，设现象由 n 个参量确定，其中一部分可以是无量纲的，而有些则是有量纲的物理常数。再假定可变参量和物理常数的量纲可由 k 个（$k \leqslant n$）具有独立量纲的量表出。在一般情况下容易看出，由 n 个量可以组成不超过 $n-k$ 个独立的无量纲组合。现象的所有无量纲特征量，可以看作是这 $n-k$ 个由主定参量组成的独立的无量纲组合的函数。因此，在由现象的特征量所组成

的全部无量纲量中，总可以选出一个基，即一组无量纲量，由它决定所有其余的量。

由相应的问题提法所决定的一类现象中，包含着彼此根本不相似的现象。利用下述条件可以从中划分出一小类相似的现象：

两现象相似的必要与充分条件是，构成基的那组无量纲组合的数值等于常数。

由给定的确定现象的诸量所组成的无量纲参量的基等于常数的条件，称为相似性判据。

如果相似性条件得到满足，那末，为了根据模型的有量纲的特征量的数据来具体计算实物的所有特征量，必须知道所有相应量的转换比例尺。

如果现象由 n 个参量确定，其中 k 个具有独立量纲，则对于 k 个量纲独立的量转换比例尺可以是任意的，它们应当给定或者由问题的条件确定，而在实验中则由试验确定。所有其余的有量纲量的转换比例尺，容易由各有量纲量的量纲公式得出，这些量纲公式是通过 k 个独立量的量纲表示，对这 k 个量，比例尺是由试验或由问题提法确定的。

在物体于不可压缩粘性流体中作定常的平面平行平动的问题中，所有的无量纲量由两个参量确定：冲角 α 和雷诺数 R. 物理相似的条件——相似判据——是下列关系式：

$$\alpha = \text{const} \text{ 和 } \mathrm{R} = \frac{vd\rho}{\mu} = \text{const}.$$

在模拟此现象时，模型试验结果只能用于 α 与 R 相同的实物上。第一个条件在实践中总是容易实现的。第二个条件（$\mathrm{R} = \text{const}$）较难满足，特别是当被绕流的物体尺寸较大（例如机翼）时更是如此。如果模型小于实物，则为了保持雷诺数值相等，就必须或者增大绕流速度（这在实际上通常是不现实的），或者大大改变流体的密度和粘性。

在实际中，这些情况在研究气动阻力时带来很大困难。必须保持雷诺数不变，这就导致建造可在其中对真实飞机吹风的巨大

风洞(图 10 和图 11)，和建造压缩（即密度较大）空气在其中作高速循环的闭口型风洞（图 12）。

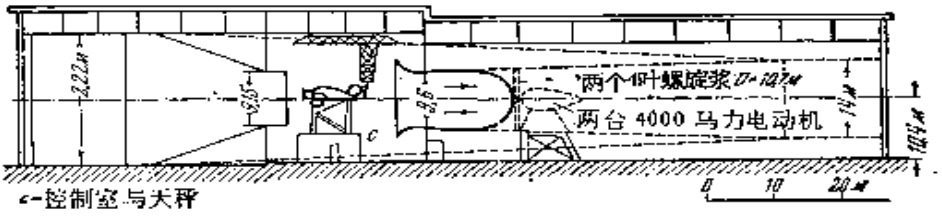


图 10　NACA 全尺寸风洞的纵剖面，风洞宽度 18.3 米，回流段未绘出

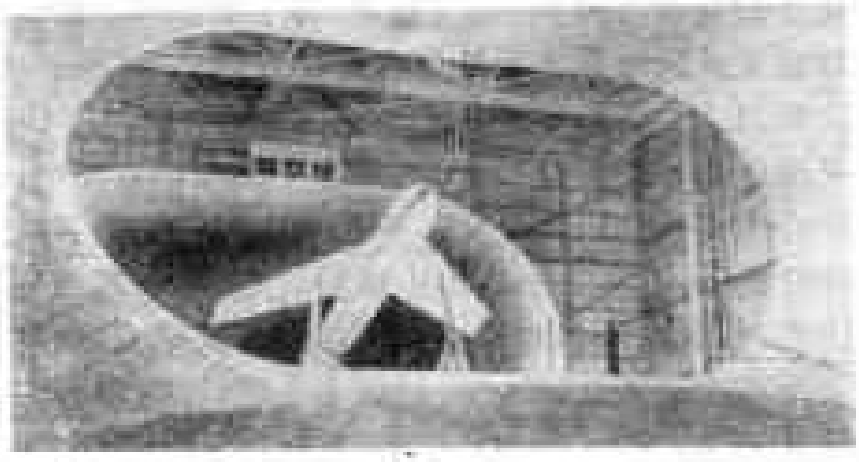


图 11　全尺寸风洞的照片

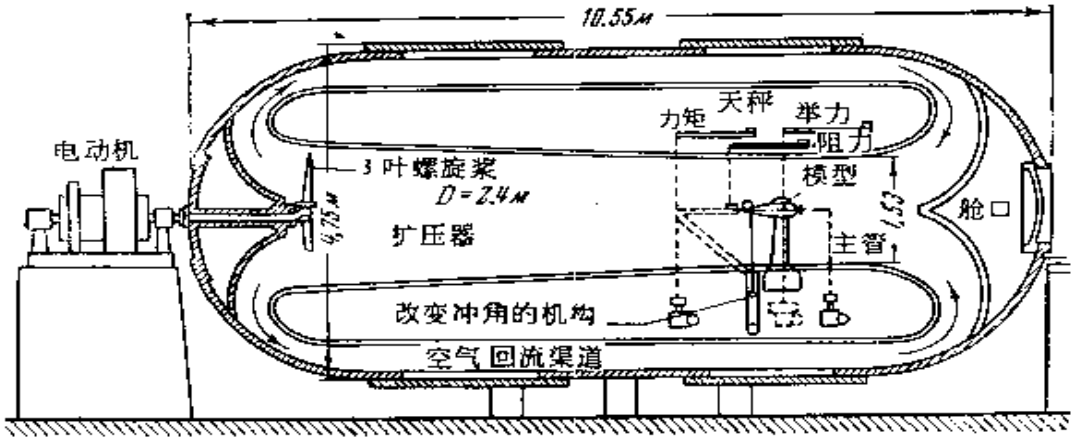


图 12　NACA 变密度风洞剖面图，风洞中的压力可达到 21 个大气压，而气流速度可达到 23 米/秒

专门的理论与实验研究表明，在流线型物体的许多情况下，雷

诺数只显著影响无量纲迎面阻力系数，而有时对无量纲举力系数和对在各种实际问题中起十分重要作用的其它一些量影响很小．因此，模型与实际现象的雷诺数值的差别在某些问题中并不重要．

我们指出了不考虑空气压缩性（在速度与声速相比甚小时压缩性不重要）时机翼运动的相似性条件。以后我们将讨论在考虑到空气压缩性时的相似性条件。

作为另一个例子我们来讨论弹性结构平衡的模拟问题。

设我们有一个由均质材料制成的建筑物，例如桥梁的桁架．各向同性材料的弹性性质由两个常数确定：杨氏（Young）模量 E（公斤/米^2）和无量纲的泊松（Poisson）比 σ．我们来讨论几何相似的结构并列出主定参量表。

为了确定模型的全部尺寸，给定它的某一个特征尺寸 B 就够了。如果在所考虑的平衡状态下结构的重量是重要因素，则比重 $\gamma = \rho g$ 公斤/米^{3}应作为主定参量列入。在建筑物各部分上，除重力外还作用着以某种确定的方式分布在结构单元上的外载荷．设这些载荷的大小由力 P（公斤）确定。于是，主定参量组为：

$$\sigma,\ E,\ B,\ \gamma = \rho g,\ P.$$

这时我们有 $n = 5$，$k = 2$，因此，力学相似的弹性平衡状态的基是下列三个无量纲参量：

$$\sigma,\ \frac{E}{\rho g B},\ \frac{P}{EB^2}.$$

相似性判据归结为：对于模型和实物这些参量皆为常数。当满足这些条件时所有的变形将是相似的．如果模型为实物的 $1/n$，则模型上的变形（相应的位移）将为实物变形的 $1/n$．

如果模型和实际结构由同一种材料制成，则模型和实物的 ρ，

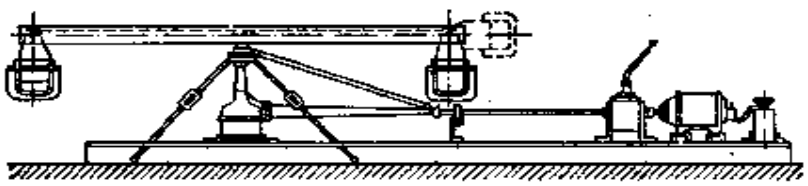


图 13　模型试验用的离心机示意图

σ 和 E 值相同，所以为了力学相似必须满足条件

$$gB = \text{const}.$$

在通常的条件下 $g = \text{const}$，因此，为了保证力学相似性应有 $B = \text{const}$，即模型应与实物相同。换句话说，在 g 为常数的情况下不可能进行模拟[1]。

如果将模型安置在所谓的离心机（图 13）上迫使它以常角速度旋转，就可以人为地改变 g。在模型尺寸足够小而旋转半径足够大时，模型各部分的离心惯性力可以认为是平行的。在绕铅直轴旋转的时候，我们得到，在模型处于相对平衡状态（相对于离心机）时将有不变的质量力作用于模型，此力类似于重力，只不过加速度为另外的值。调整旋转角速度就可以得到任何大的加速度值。

利用离心机以模拟各种过程的想法，是工程师布基 (Bucky)[2] 于 1931 年提出来的，1932 年达维琴科夫(Давиденков)[3]和波克罗夫斯基 (Покровский)[4] 也独立地提出了这一想法。在这之前，达维琴科夫[5]为了同一目的曾于 1929 年建议利用朝着硬弹簧降落的箱子，可是这方法不方便，于是被放弃了。

现在已有了造好的离心机，可用来在模型上研究在固体中发生的各种过程[6]。

我们来研究弹性结构在重量和给定的载荷分布作用下变形时产生的应力 τ 公斤/米^2。我们可以把 τ 理解为某一应力分量的最大值，或者一般地说理解为结构的确定部分上的某一应力分量。

组合 τ/E 是无量纲的，所以可以写

---

1) 在实践中当缩小模型尺寸时要求增大比重 ρg，这一要求有时可以通过在模型各部分上施加附加的载荷来实现。

2) Bucky, The American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, Technical Publication, № 425.

3) Давиденков Н. Н., Журнал технической физики, № 1, 1933.

4) Покровский Г. И., Журнал технической физики, № 4, 1933.

5) 参看 Покровский Г. И., Вестник Воен.-инж. академии РККА им. В. В. Куйбышева, № 30, 1940.

6) 在模拟既有其他的实质性参量也有参量 ρ, g, B, E 出现的过程时，条件 $E/\rho gB = \text{const}$. 仍应满足。所以在所有这样的情况下都可以借助于离心机进行模拟。

$$\frac{\tau}{E}=f\left(\sigma,\frac{E}{\rho gB},\frac{P}{EB^2}\right).$$

如果模型和实际建筑物由同一材料制成，则 $E=\text{const}$；所以对于力学相似的状态，对应点上的应力将相同。

如果我们假定受力状态是力学相似的，并且破坏是由最大应力值决定，则显然，对于相似的状态在模型上和在实物上都出现破坏。如果外载荷的值大而结构的自重(γ)小到可以忽略不计，则参量 $\gamma=\rho g$，从而参量 $E/\rho gB$，成为无关紧要的。这时前面的关系式变为

$$\frac{\tau}{E}=f\left(\sigma,\frac{P}{EB^2}\right),$$

而相似性条件则仅为两个条件：

$$\sigma=\text{const}\ 和\ \frac{P}{EB^2}=\text{const}.$$

由此可见，在保持材料性质不变的情况下进行模拟时，外载荷必须正比于线尺度的平方而改变。

以 l 记弹性系统某一单元在变形时的长度的改变。对于上述一类结构有如下形式的关系式：

$$\frac{l}{B}=\varphi\left(\sigma,\frac{\rho gB}{E},\frac{P}{EB^2}\right).$$

在许多情况下根据物理考虑立即看出，在结构元件的比重减小时，即参量 $\rho gB/E$ 减小时，量 l/B 也减小。

现在取两个尺寸不同但材料相同(E 和 σ 相同)的几何相似结构。令外载荷值正比于尺寸的平方而改变，即

$$\frac{P}{EB^2}=\text{const}.$$

显然，这时参量 $\rho gB/E$ 随结构尺寸的减小而减小，因此，力学相似性将被破坏。在小尺寸结构上相对变形也小，所以小尺寸结构有较大的强度。然而，这个结论只在材料的比重 $\gamma=\rho g$ 起重要作用的情况下才是正确的。若自重(γ)不重要，而 $P/EB^2=\text{const}$，则对于不同尺度的物体相对变形具有同样的值。

再看一种情形，这时 γ 不重要，且已知对于给定的结构，当外载荷 P 减小时比值 l/B 减小。如果外载荷与线尺寸的立方成正比，则显然，小尺寸结构的比值 l/B 将小于大尺寸结构的比值 l/B。因此，这时减小尺寸也使强度增大。

飞艇和气球的流体静力学模型[1]的例子，可作为模型尺寸被唯一确定的一个有趣的例子。

实践中，非常重要的是，要知道气球的气囊充气后其布外皮的形状和各微元的变形。气球的几何形状确定其流体静力学与空气动力学性质；而关于材料变形的资料则对于保证气囊的强度是必要的。

我们来列举确定气球静力学状态的参量。

在气球上下表面各点之间的高度差范围内，可以认为空气和（气球中的）气体具有不变的比重。作用在气球外皮上的空气压力与气球内气体压力之间的差（在所讨论的问题中重要的只是这两个压力之差）由 γ^* 的大小确定；γ^* 等于空气与气体的比重之差：$\gamma^* = \gamma_{空气} - \gamma_{气体}$。

研究材料中的应力与变形之间关系的实验表明，对于给定的材料，当应力相同时相对变形相同。在布外皮上应力定义为单位截面长度上的力[2]。

以 τ（公斤/米）记表征材料性质的某一应力，以 l 记特征的线尺度。再引进材料单位面积的重量 q（公斤/米^2）和给定的作用在外皮各微元上的外集中力 Q（公斤）（这些力的方向在不同的情况下必须是相应的）。

这样，对于由具有同样的应力-应变关系的材料制成的几何相似的外皮，得到如下主定参量组：

$$\gamma^*, \tau, l, q, Q.$$

1) 参看 Воробьев А. Г., Гидростатическое испытание моделей аэростатов. Сборник Ленинградского института инженеров путей сообщения, вып. 28, 1928; Катанский В. В., Проектирование баллоно-такелажных конструкций и т. д., ОНТИ, 1936.

2) 这里把布外皮看作是一层膜而不考虑其厚度. ——译者注

相似性条件为：

$$\frac{\gamma_1^* l_1^2}{\tau_1} = \frac{\gamma_2^* l_2^2}{\tau_2}, \tag{a}$$

$$\frac{\gamma_1^* l_1}{q_1} = \frac{\gamma_2^* l_2}{q_2}, \tag{b}$$

$$\frac{\gamma_1^* l_1^3}{Q_1} = \frac{\gamma_2^* l_2^3}{Q_2}. \tag{c}$$

通过适当地选取外力 Q（这可以借助于载荷和滑轮来实现）条件(c)容易满足。如果模型和实物（$l_2 \neq l_1$）由同一种材料制成，则 $q_1 = q_2$ 和 $\tau_1 = \tau_2$，结果条件(a)与(b)就互相矛盾。所以，我们来讨论外皮自重可忽略的情形，从而条件(b)消失。为了满足条件(a)必须令

$$\frac{l_1}{l_2} = \sqrt{\frac{\gamma_2^*}{\gamma_1^*}}.$$

由此可见，在减小尺度 $l_2 < l_1$ 时必须增大比举力 $\gamma_2^* > \gamma_1^*$。这个效应可以通过利用重流体和用“上抓钩”固定模型来实现。飞艇和气球的流体静力学模型就是以此为基础的。作为模型用的“气体”，可以取水、水银、甘油等等。这种模型的概貌示于图 14。

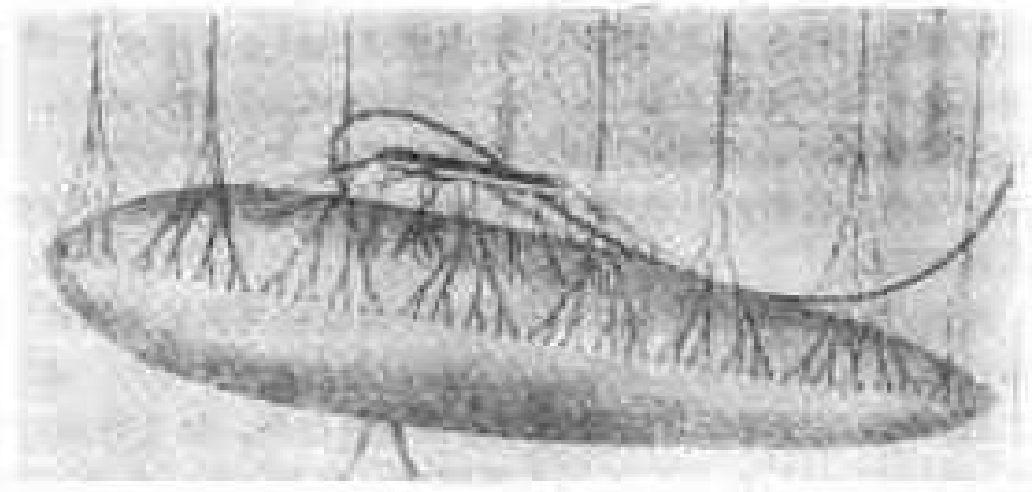


图 14　飞艇模型试验

如果对于实物已知飞行高度、温度、压力和所用的气体，则选定模型用的流体之后，我们得到完全确定的比重比，此比值就决定

了模型的尺度。

例如，在正常条件下有：

$$\text{对于氢，}\gamma_1^* = 1.1 \text{ 公斤/米}^3;$$

$$\text{对于水，}\gamma_2^* = 1000 \text{ 公斤/米}^3;$$

$$\text{对于水银，}\gamma_2^* = 13600 \text{ 公斤/米}^3。$$

于是，当采用水时，对模型的比例尺我们得到下列值：

$$\frac{l_1}{l_2} = n = \sqrt{\frac{1000}{1.1}} = 30.1;$$

在用水银时得：

$$n = \sqrt{\frac{13600}{1.1}} = 111.$$

采用水银进行模拟使得模型过小，一般说来是不方便的。

实物外皮的重量和模型外皮的重量作用在相反的方面，所以重量的影响将破坏相似性。外皮重量的影响，可借助于专门设备施加外力而得到体现，即在考虑方向向下的外皮自重的同时，施加一些铅直向上作用的且按相似性条件(b)的要求分布于外皮上的外力。

在某些情况下，当模型和实物的某些相似性判据 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ 具有不同值，但与此同时由补充考虑事先已经知道所求的无量纲量对这些无量纲主定参量 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ 的依赖关系的形式时，可以利用明知是不相似的现象的试验来进行模拟。在这种情况下，模拟时需要保持为常数的只是那些相似性参量，对这些参量的依赖关系是未知的。

有时，当未知量对参量 $\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ 的依赖关系的形式作为工作假设而提出时，是可以采用上述办法进行模拟的；在做了模型研究之后，所作的假设就可以得到证实或者被推翻。如上所指出的，当雷诺数对未知特征量的影响不重要时，在不同雷诺数值下进行的模拟，在许多情况下可以作为这种模拟的例子；而在雷诺数是重要的但对它的依赖关系事先已知的情况下，这种方法仍可应用。

利用模型来进行研究，往往是实验研究和解决重要实际问题

的唯一可行的方法。当研究那些历程达几十年、几百年甚至几千年的自然现象时，情况就是如此；而在模型试验的条件下相似的现象可以只持续几小时或者几天。在模拟由油井中开采出来的石油的渗流现象时，我们就遇到这种情形。也可以有相反的情形：为研究自然界中瞬息即逝的现象，我们可以代之而研究与它相似的、在模型上进行得缓慢得多的现象。

模拟是一种在原则上和认识上具有普遍意义的极为重要的科学方法，但它只应看作是完成主要任务的初步基础。而主要的任务在于实际确定自然规律，在于找出各类现象的普遍性质和特征，在于发展出研究和解决各种问题的实验与理论方法，最后在于得出解决具体的实际问题的系统资料、方法、法则和建议。

§7. 刚体在可压缩流体中的定常运动

现在讨论刚体以常速度在充满无限空间的流体中作定常平移运动的一般问题。流体的惯性、粘性、可压缩性和热传导性将加以考虑。为简单起见，不考虑流体的重量[1]和辐射热传递。

为了确定主定参量组，我们把问题从数学上表述出来。首先写出可压缩粘性流体——我们将认为它是完全气体——的运动方程。我们有：

(1) 纳维尔-斯托克斯方程

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p - \frac{2}{3} \operatorname{grad} \mu \operatorname{div} \mathbf{v} + 2 \operatorname{div} \mu \operatorname{def} \mathbf{v}, \quad (7.1)$$

其中 def v 为变形速度张量；

(2) 连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0; \quad (7.2)$$

(3) 气体的状态方程(克拉珀龙方程)

1) 在许多情况下，流体有重量这一属性是重要的，因为它可以引起由于流体的非均匀加热造成的强烈的对流运动.

$$p = \rho RT, \tag{7.3}$$

(4) 热流方程

$$Jc_v\rho\frac{dT}{dt} + p\,\mathrm{div}\ \mathfrak{v} = \mathrm{div}\,J\lambda\,\mathrm{grad}\,T - \frac{2}{3}\mu(\mathrm{div}\,\mathfrak{v})^2 + \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}. \tag{7.4}$$

此方程的左端给出由于温度改变和压力做功造成的内能变化，右端给出由于热传导和内摩擦力做功引起的热流所造成的能量变化。

再则，为了考虑粘性系数和热传导系数对温度的依赖关系，我们采用萨瑟兰（Sutherland）公式[1]：

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1 + \frac{C}{273.1}}{1 + \frac{C}{T}}\sqrt{\frac{T}{273.1}}, \tag{7.5}$$

其中 λ_0 和 μ_0 是温度为 $T = 273.1^\circ$（对应于摄氏温标零度）时的热传导系数和粘性系数，而 C 为萨瑟兰常数，它具有温度的量纲。对于不同的气体，常数 C 具有不同的值。对于空气 $C \approx 113$℃.

除了上述诸方程之外，我们还有在无穷远处的条件和边界条件：在物体前方和与物体速度相垂直的方向上的无穷远处，流体是静止的：$|\mathfrak{v}|_\infty = 0$，而密度和绝对温度具有给定值 ρ_0 和 T_0.

物体表面的形状是固定的，所以物体的所有尺寸由某一特征尺寸 l 的值确定。

绕流的运动学条件由给定的物体平移速度 v 的值和两个角 α 与 β 完全确定，此两角是速度矢与固定在物体上的坐标系的轴的

1) Jeans, The Dynamical Theory of Gases, Cambridge, 1925, p. 284.

交角。

最后，应给定物体表面上温度的边界条件[1]。我们假定物体表面的温度为常数并且等于 T_1。

方程(7.1)—(7.5)，无穷远处的条件和边界条件表明，主定参量组是：

$$l,\ \alpha,\ \beta,\ v,\ T_0,\ T_1,\ \rho_0,\ \mu_0,\ R,\ c_v,\ J,\ \lambda_0,\ C.$$

所列出的十三个量的量纲可由五个基本量度单位 L，T，M，Q 和 C° 表出。

如果注意到常数 J，c_v 和 λ 仅以乘积 Jc_v 和 $J\lambda$ 的形式在方程(7.4)中出现，则参量的数目可以减少一个。如果以两个参量 Jc_v 和 $J\lambda$ 来代替 J，c_v 和 λ 三个参量，则所有量的量纲可以仅由四个基本单位 L，T，M 和 C^0 表出，所以，这样减少参数没有作用。运动性状和相似运动族由八个独立的无量纲参数的值确定：

$$\frac{R}{Jc_v} = \gamma - 1,$$

$$\frac{\mu c_v}{\lambda_0} = P,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \frac{\rho_0 l v}{\mu_0} = \mathrm{R},$$

$$\frac{v}{\sqrt{\gamma R T_0}} = \mathrm{M},\quad \frac{T_1}{T_0},\quad \frac{C}{T_0}.$$

气体分子运动论中业已证明，常数 γ 和 P 只与气体分子的结构有关。对于完全气体已知有下列理论公式：

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma = 1 + \frac{2}{m};\quad \frac{\lambda}{\mu c_v} = \frac{9\gamma - 5}{4}\ [\text{A. 尤琴(Euchen)}],$$

其中 m 为气体分子自由度的数目。对于单原子气体 $m = 3$，对于双原子气体 $m = 5$. 对于许多气体（氮、氢等等）实验值接近于上述理论值，然而在大范围内改变温度与压力时，温度与压力的影响

1) 在许多工程技术问题中，特别是在空气动力学中，我们遇到流体绕流被强烈加热或冷却的物体的问题，例如发动机散热器的绕流，被冷却的飞行器机身的绕流，等等.

就显露出来了[1]。实践中，在通常的温度和压力下，对于空气可以取，

$$\gamma = 1.4, \quad \frac{\lambda}{\mu c_v} = P^{-1} = 1.9, \quad \frac{\mu c_p}{\lambda} = 0.737.$$

几何相似物体运动的力学相似性条件，是上面列举的八个参量等于常数。以W记迎面阻力，以A记举力。对于具有同样常数值γ与P的气体，可以写出：

$$\frac{2W}{\rho l^2 v^2} = c_x = f_1\left(\alpha, \beta, \mathrm{R}, \mathrm{M}, \frac{T_1}{T_0}, \frac{C}{T_0}\right),$$

$$\frac{2A}{\rho l^2 v^2} = c_y = f_2\left(\alpha, \beta, \mathrm{R}, \mathrm{M}, \frac{T_1}{T_0}, \frac{C}{T_0}\right).$$

在研究压力分布、温度场、速度场等等的时候，除上述八个无量纲参数外，还必须引进空间点的无量纲坐标x/l, y/l, z/l（为确定起见设坐标系取在物体上）。例如，对于压力与温度分布，我们有下列形式的函数关系：

$$\frac{2p}{\rho_0 v^2} = f_3\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \alpha, \beta, \mathrm{R}, \mathrm{M}, \frac{T_1}{T_0}, \frac{C}{T_0}\right),$$

$$\frac{T}{T_0} = f_4\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}, \alpha, \beta, \mathrm{R}, \mathrm{M}, \frac{T_1}{T_0}, \frac{C}{T_0}\right).$$

确定函数f_1, f_2, f_3和f_4的形式是实验与理论空气动力学的基本问题。

只有当热传导与粘性起显著作用，并且其现象以温度显著变化为特征时，参量C/T_0才显得重要。但是，即使在热传导性与粘性是重要的情况下，温度对粘性系数和热传导系数的影响，通常也可以用下列不包含有量纲常数C的公式

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\mu}{\mu_0} = \sqrt{\frac{T}{273.1}}$$

或者更一般的公式

1) 参看 Hilsenrath J. 和 Touloucian Y. S., Transaction of the ASME, V. 76 (1954), № 6. 在该文中列有研究这个问题的许多参考文献.

$$\frac{\lambda}{\lambda_0}=\frac{\mu}{\mu_0}=\left(\frac{T}{273.1}\right)^k$$

作为良好的近似，来代替公式(7.5)。这里 k 为某一无量纲常数. 这些分析表明，实际上参数 C/T_0 通常不起重要作用，因此在模拟时可不予考虑。

在物体的运动速度不大时(小 M)，常常温度 T_1 与 T_0 彼此差别也小，所以这时比值 T_1/T_0 总是大致相同并接近于 1。

在前面的推理中我们假定了物体的温度 T_1 具有给定值. 如果物体与流体间的传热可以忽略不计，则物体表面上的边界条件可以取如下的形式：

$$\frac{\partial T}{\partial n}=0;$$

这对应于物体表面可认为是不传热的情形。在这条件下参量 T_1/T_0 被消去了。如果完全略去热传导而考虑绝热过程，则这时也得到同样的边界条件。

有时，由于温度 T_1 成了待求的量，参量 T_1/T_0 被消去。例如，在某些情况下，与物体的热学性质无关而由于流体与物体间的传热，使物体的温度稳定下来并达到某一异于无穷远处流体温度的值。当用液体温度计测量以很高速度运动的气体的温度时，我们就遇到这种情况。温度计的读数一般依赖于 R 和 M 并依赖于温度计相对于气流的放置方式；物体(温度计)的温度将异于远离物体处未受扰动气流的温度。

如果在所研究的问题的提法中考虑到上述补充数据，则显然，对于气体的受扰动运动的相似性，雷诺数和马赫数为常数具有基本意义，并且只在压缩性起显著作用时马赫数 M 才是重要的。

所有上述结论容易推广到螺旋桨在流体中运动的情形。在关于螺旋桨的问题中，除了螺旋桨的平移运动外，还有绕螺旋桨轴的转动。所以，在螺旋桨以均匀的平移速度和角速度作定常运动时，还要补充一个参量——旋转的角速度，它可以由单位时间内螺旋桨的转数 n 给出。对于螺旋桨的情形，在物体平移运动的状态特

征量中，要增加一个无量纲参量 v/nl，它称为螺旋桨的相对进距。在研究螺旋桨的空气动力学或流体动力学性质时，这个参量是基本的参量。

如果流体可以认为是理想的和不可压缩的，则在螺旋桨沿自身的轴以固定的速度作平移运动时，进距是确定运动状况的唯一无量纲参量。

§ 8. 流体内的不定常运动

上节中对定常运动得出的量纲理论的结论，可以推广到不定常运动的情形。

在一般情况下，在研究不定常运动的时候，我们应当在主定参量中引进时间 t，它是一个变量。在研究力学相似的运动时，我们会遇到由于尺度的改变和由于运动过程中时间的变化而造成的参量 t 的数值的变化。为此，我们先对不定常运动的运动学相似性作一些一般的说明。

设我们有不定常的运动学相似的运动。在运动学相似的情况下，由运动学量组成的所有相应的无量纲组合对所有运动都相同。如果认为表征整个运动的某些无量纲运动学参量对不同的运动可以取不同的值，则可以把一类运动扩大而研究一族运动学不相似的运动。

在运动学相似的运动中，每一个具体的运动和运动状态由三个参量确定。其中两个参量在整体上划分系统的运动，一个参量固定运动的确定状态。

作为在整体上确定具体运动的参量，可以取表征几何尺寸的某一个长度和某一特征时间。这两个参量就确定了运动规律的运动学尺度。

例如，在沿圆的运动中自然取圆的半径作为特征尺寸，而对于振动则取某一点的振幅，如此等等。对于周期性过程自然取周期作为特征时间。对于某一特定状态可以取速度或平均速度等等来

代替特征时间。

给定的非定常运动的瞬时运动状态可由时间 t 的值确定[1]。

设 d，v 和 t 分别为特征尺寸、特征速度和所考虑的时刻。对于整体上相似的运动，相似的或者换句话说相对应的运动状态，由无量纲变参量 vt/d 的值确定；vt/d 可看作是无量纲时间。

两个系统的相似运动状态所满足的等式 $v_1t_1/d_1 = v_2t_2/d_2$，可以看作是从一个系统转换到另一个系统时的时间换算条件。

作为例子，我们来看点沿半径为 d 的圆弧的简谐振动系统。运动规律由公式 $s = a\cos kt$ 给出，其中 s 是弧长。对于运动学相似的运动应有：

$$\frac{a}{d} = \text{const}.$$

具体的运动由振幅 a 和频率 k 确定。运动状态由时刻 t 确定。

对于不同的运动，相似的状态表现为无量纲参量 kt 的值相同。

若对两个运动比值 a_1/d_1 与 a_2/d_2 具有不同值，则这样的运动是运动学不相似的。比值 a_1/a_2 为决定长度的比例尺。对于运动学相似的沿圆周的简谐振动应有 $a_1/a_2 = d_1/d_2$。对于直线无法指出特征尺寸，所以显然：任何两个沿直线的简谐振动都是运动学相似的。

我们再看直线运动 $s = vt + a\cos kt$，它是匀速直线运动与简谐振动的结合。在这种情况下，一类相似的运动表现为无量纲参量 $ak/v = \mathrm{S}$ 的数值等于常数；S 称为斯特劳海耳（Strouhaille）数。相似的运动状态可用参量 kt 的值或者参量 $vt/a = kt/\mathrm{S}$ 的值来表征。

假定当保持振动规律的基本形式时斯特劳海耳数对于不同的运动可以取不同的值，那么，就可以将一类运动扩大而研究不相似的运动。

1）时间原点以及线度坐标的原点这样选取，使得对于不同的运动，系统的位置和运动状态在 $t = 0$ 时是相似的.

现在假定物体的运动规律已给定，我们来讨论物体在流体中的不定常运动。作为划出某一确定的运动规律的有量纲参量，可以取某一长度 d 和速度 v. 同定常运动的情形相比较，在具有给定的运动规律的非定常运动的情况下，主定参量组中只增加表征运动规律的长度 d 的值和时间 t 这个变参量。所以在确定运动整体和每个运动状态的无量纲参量组中，只增加两个参量 d/l 和 vt/l，并且，为使两个运动相似，必须保证条件 $d/l = \text{const}$；而参数 vt/l 等于常数只决定相似运动状态的相应的时间值(时间比尺)。

如果不定常运动是形状一定而频率 k 可以任意给定的某些振动，则在主定参量表中要补充一个参量 k，从而，作为确定运动状况的无量纲参量应添加斯特劳海耳数：

$$\frac{kl}{v} = \text{S}.$$

设物体在流体中的不定常运动是速度为 v 的平移运动加上振动，后者具有确定的振动形状但可有不同的频率 k. 如果根据所讨论问题的涵义事先给定了 k，l 和 v，为使不同的运动相似，必须保证斯特劳海耳数等于常数。如果频率 k 是待求的量，则作为由被给出的量组成的相似性条件的结果，得出斯特劳海耳数为常数.在许多场合，我们要研究在物体的运动事先不知道的情况下的物体在流体中的不定常运动。作为类似问题的例子，我们来研究弹性机翼在流体的平行流动中的振动问题(机翼颤振)。

设在流体流中置一弹性机翼。为简单起见，假定机翼具有纵向对称面，并在中央截面刚性固定。

由均质材料制成并具有完全确定结构的机翼，其弹性性质由两个物理常数确定。

我们不去分析建立飞机机翼结构的弹性性质特征量的实际方法。问题的详细提法使得可以用一些只从所讨论问题的观点来看才是重要的参量和函数来表征各种结构的弹性性质。在这个意义上，可以划分出在弹性性质上等价但几何性质不同和一般具有不同结构的各类机翼。

在问题的一般提法中，我们可以认为，在虎克定律适用的范围内，弹性性质等价的各组几何相似机翼中的每一个机翼的所有弹性特征量，由特征尺寸 l、杨氏模量 E 和剪切模量 G 的值确定。

质量分布可以强烈地影响振动。质量分布规律可以这样表示，使得每一微元的质量与总质量成比例，并且由某一质量 m 的值完全确定。

众所周知，刚体的动力学性质只依赖于质量分布的某些总合特征量。即：刚体的动力学性质由物体的总质量、重心的位置和物体重心的惯性张量完全确定。

在实际的、近似的问题提法下详细的研究表明，具有某些不同质量分布的弹性机翼，正如刚体的情形那样，可以是动力学等价的。

在实践中，建立了一组描述质量分布规律的诸性质（机翼各截面重心的位置、截面惯性矩等等）的无量纲参量，它们确定所发生的振动。对于弹性机翼，所有以下的结论都可以推广到不同的但动力学等价的质量分布的情形。

假定在所研究的现象中流体可以认为是理想的、均匀的和不可压缩的。这时流体的力学性质由密度 ρ 完全确定。流体的重量可不予考虑。再假定流体充满机翼外的整个空间。机翼的中央截面固定不动。在无穷远处，流体以不随时间变化的速度 v 平行运动，速度 v 平行于机翼的纵向对称面，并且相对于固定不动的机翼截面具有固定的方向。

归结起来我们得到，在所作假定的范围内，机翼-流体系统的不定常运动由参量

$$l, E, G, m, \rho, v$$

和给出初始扰动的量确定。此外，运动的每一个别状态由时刻 t 确定。

受扰不定常运动有一些性质，它们对于在任何足够小的初始扰动下所产生的所有可能的不定常运动都成立，显然这些性质不

依赖于表征初始扰动的参量。

因此，对于动力学相似的运动，这些性质由无量纲参量组

$$\frac{\rho v^2}{E}, \frac{G}{E}, \frac{m}{\rho l^3}, \frac{vt}{l}$$

确定；这时意味着质量分布和机翼结构在不同的场合是相同的。

后一情况可以在广义上来讨论，并且在保持与流体接触的机翼外表面的几何相似性的情况下，可以只要求机翼在弹性性质和动力学性质方面的等价性。

显然，在整体上表征运动的、与每个运动的个别状态无关的那些性质，不依赖于参量 vt/l.

实验表明，弹性机翼的定常绕流状态可以是稳定的或不稳定的。

在稳定运动的情况下，机翼在流体流动中受扰振动的振幅不断减小。在不稳定绕流时振幅增大，其结果可能造成机翼破坏。

对于足够小的扰动，绕流的稳定性和不稳定性可以看作是与运动的初始条件和运动的个别状态无关的性质。所以，运动的稳定性性质应由如下参量组确定：

$$\frac{\rho v^2}{E}, \frac{G}{E}, \frac{m}{\rho l^3}.$$

在问题的一般提法中，不能将一族所有的运动划分为扰动量的振幅增大的和振幅减小的运动；可能有这样的情形：在振动时，最大挠度或者等于常数，或者是变化的，但在实际上对于任何 t 它都保持足够小的值。

如果运动明显地表现为振幅增大的和振幅减小的，则这两种运动形式之间的界限由关系式

$$F\left(\frac{\rho v^2}{E}, \frac{G}{E}, \frac{m}{\rho l^3}\right) = 0$$

确定，此式可以写成

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\, f\left(\frac{G}{E}, \frac{m}{\rho l^3}\right).$$

这个公式确定了临界颤振速度。在来流速度改变而其余参量

的值不变时，临界速度值把稳定绕流状态和不稳定绕流状态区分开来。

机翼的刚度系数与量 E 和 G 成比例。E 和 G 改变 n 倍等价于刚度系数改变 n 倍。由所得到的 v_{cr} 的公式可见，在保持机翼的质量、形状和尺寸不变的情况下，机翼刚度改变 n 倍时临界速度改变 $\sqrt{n}$ 倍。

对应于临界状态的斯特劳海耳数 kl/v_{cr} 由无量纲参量 G/E 和 $m/\rho l^3$ 的值确定；所有与初始数据无关的并表征临界运动的无量纲量也由它们确定。

§9. 船舶的运动

在对许多关于水面上航行的力学问题进行各种计算时，特别是在用实验求解这些问题时，量纲与相似理论具有重大的实际意义[1]。

现在来讨论船舶沿液体表面的定常直线平动；液体充满整个下半空间，并且在很深处及船舶前方很远处液体是静止的。航行物体的运动引起自由面的扰动。液体的受扰运动具有重力波性质。

我们将考虑水的惯性 ρ，重力 g 和粘性 μ，它们起着重要作用。水的可压缩性实际上并不重要，所以在所讨论的现象中可以认为水是不可压缩的。对于一般船舶的运动毛细作用也是不重要的。

船体的尺寸和形状对最重要的力学特征量有重大的影响。先讨论具有确定的船体形状的船舶的运动。所有的几何尺寸由船舶长度 L 的值确定。几何相似的船体对应着不同的 L。对于普通重型船舶，可以认为，总重量完全确定船体相对于水的位置。显然，船体相对于水的位置影响阻力等等。所以，我们取船舶的重量或

1) 在下列书中叙述了相似理论在海洋专业的许多有趣的新问题上的应用. Эпштейн Л. А., Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов,«Судостроение», Ленинград, 1970 г.

者排水量 A 作为主定参量[1]。代替以吨计的排水量 A，我们也可以取以立方米计的容积排水量 D，因为 $A = \rho g D$，其中 ρ 为水的密度。对于淡水有

$$\rho g = 1 \text{ 吨}/\text{米}^3.$$

以 v 记船的速度。主定参量组为[2]：

$$L, D, \rho, g, \mu, v.$$

所有的几何量与力学量(例如浸水面积 S[3]，阻力 W，等等)都可以看作是这些参量的函数。动力学相似的运动和运动状态由三个无量纲参量确定：

$$\phi = \frac{L}{\sqrt[3]{D}} \text{[(船体)肥瘦系数[4]]},$$

$$\mathrm{F} = \frac{v}{\sqrt{gL}} \text{[佛罗德(Froude)数]},$$

$$\mathrm{R} = \frac{\rho v L}{\mu} \text{(雷诺数)}.$$

于是，对于阻力可以写：

$$W = f(\phi, \mathrm{F}, \mathrm{R})\rho S v^2. \tag{9.1}$$

相似性判据是关系式：

$$\frac{L_1}{\sqrt[3]{D_1}} = \frac{L_2}{\sqrt[3]{D_2}}, \quad \frac{v_1}{\sqrt{gL_1}} = \frac{v^2}{\sqrt{gL_2}}, \quad \frac{v_1 L_1 \rho_1}{\mu_1} = \frac{v_2 L_2 \rho_2}{\mu_2}.$$

不难看出，如果对于模型和实物用的是同一流体，则 $\mu_1/\rho_1 = \mu_2/\rho_2$，于是，就不可能对现象进行模拟。事实上，由佛罗德数为常数可知，当船舶的线尺寸减小时速度应当减小；而由雷诺数为常数得知，当船舶的线尺寸减小时速度应当增大。所以，当以改变尺度来模拟此现象时，不具备完全的相似性，结果模型阻力系数的值不

1) 如果不同的运动是在船体相对于水面的相似位置处发生，则此时重量与 L^3 成比例。在此情况下对 L 和 A 这两个参量只要取其中之一就够了。

2) 运动是在水与空气的交界面处进行，所以，似乎还应将空气的密度和粘性定为主定参量(在通常的运动速度下空气的压缩性不重要)。然而，这两个参量对现象的影响甚小，考虑它们并不改变随后的结论，因为这时增添两个无量纲量 ρ'/ρ 和 μ'/μ，可以认为它们对于每一类运动是常数。

3) 量 S 与静力学状态下的浸水面积值差别甚小，它仅由两个参量 L 和 D 确定。

4) 肥瘦系数可以看作是具有一吨排水量的几何相似船体的长度。

等于实际阻力系数的值。

用模型试验来确定船舶的阻力，是基于可将阻力分为两个分力的实际可能性：一个由粘性确定的阻力和另一个由重力确定的阻力。原来，公式(9.1)可以近似地用下式代替：

$$W = W_1 + W_2 = c_f(\mathrm{R})\frac{\rho S v^2}{2} + c_w(\phi, \mathrm{F})\rho g D. \qquad (9.2)$$

公式(9.2)的形式是以某些理论性的定性分析为依据的，对于这些分析在这里我们将不予涉及。

阻力

$$W_1 = c_f(\mathrm{R})\rho\frac{Sv^2}{2}$$

称为摩擦阻力。对于模型和实物，摩擦阻力可以借助于各种半经验公式由计算确定。摩阻系数的值由雷诺数R确定。此外，该系数还与粗糙度有关，并且在某种程度上与船体外形有关。摩阻系数随雷诺数的增大而减小。实践中，取系数 c_f 等于平板的摩阻系数。平板的摩阻系数的实验数据示于图6。

对于光滑平板，系数 c_f 的值按普朗特-施利希廷（Prandtl-Schlichting）公式确定：

$$c_f = \frac{0.455}{(\log \mathrm{R})^{2.58}}. \qquad (9.3)$$

粗糙平板的摩阻系数 c_f 的值要大得多。

阻力 W_2 称为剩余阻力。系数 $c_w = W_2/\rho g D$ 给出每吨排水量的剩余阻力。此系数可由实验确定，其做法是用遵循下列条件的几何相似的模型做实验：

$$\frac{L_1}{\sqrt[3]{D_1}} = \frac{L_2}{\sqrt[3]{D_2}},$$

$$\frac{v_1}{\sqrt{gL_1}} = \frac{v_2}{\sqrt{gL_2}}.$$

这些条件就是佛罗德相似律。

剩余阻力与船体形状有关。在研究船体形状的影响时，必须将一类运动扩大而研究一族船体的运动，这族船体是按某种与几

何参数有关的规律组成的，这些几何参数的改变就表征着船体的被研究的几何特点。

从表征船体形状的几何性质的各种各样的繁多的参量中挑选出那些对剩余阻力有决定性作用的参量，这对实践来说是十分重要的。实验表明，对于所有可能的几何不相似的普通类型船舶的船体外形，佛罗德数和肥瘦系数乃是确定系数 c_w 的基本参量。代替按长度定义的佛罗德数 $F = v/\sqrt{gL}$，可以取按容积排水量定义的佛罗德数

$$F_D = \frac{v}{\sqrt{g \cdot \sqrt[3]{D}}} = F\sqrt{\psi}.$$

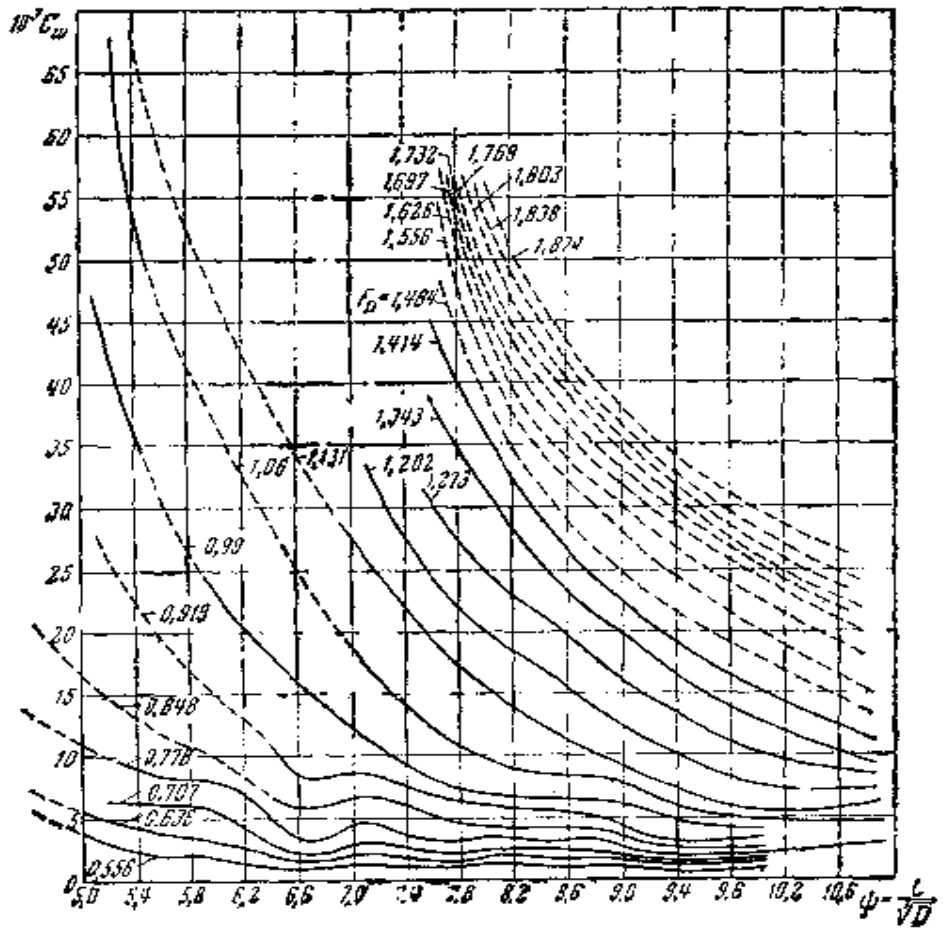


图 15　每吨排水量的剩余阻力随肥瘦系数 ψ 和按容积排水量定义的佛罗德数 F_D 的变化

图15中示出了杜瓦埃尔(Doyère)的曲线[1]，图中给出了对无突出部分(舵、螺旋桨轴悬臂，等等)的船体得出的系数 c_w 对 ϕ 和 F_D 的依赖关系的平均实验数据。利用杜瓦埃尔曲线和作为雷诺数的函数的摩阻系数值，容易算出随运动速度而变化的船体阻力。这种计算作为一级近似常常给出很好的结果。

在更为精确地确定剩余阻力时发现，下列参量最为重要[2]：

$$\chi = \frac{D}{L\kappa} \text{ 和 } \frac{B}{T},$$

其中 κ 为船中(横)剖面的面积，B 为船体宽度，而 T 为吃水深度。系数 χ 称为棱形的丰满度系数。

除了上述基本参量之外，还可以考虑那些确定表征船中剖面、船首、船尾等形状的各个量对阻力的影响的参量。

在研究船舶运动时，要考虑无螺旋桨船舶的拖曳阻力 W' 和有旋转螺旋桨[它产生推力（牵引力）使船舶运动]时的阻力 W''。在后一种情况下，当作匀速定常运动时，阻力 W'' 等于螺旋桨推力的水平分力。阻力 W' 是与推进器的性质无关的船体特征量。由于船体与螺旋桨之间的相互作用，通常有不等式 $W' < W''$。

如果船体、螺旋桨及其位置、运动速度、排水量和全部尺寸都给定，那末阻力就被确定，而且所需的螺旋桨转数 n 和所需的螺旋桨轴的输出功率 E 也被确定。可以取功率 E 或转数 n 来代替作为主定参量的速度，这时速度就成了需要确定的量。

乘积 $W''v$ 决定消耗于推动船舶前进的有效功率。这个功率总是小于螺旋桨轴的输出功率 E，因为在形成推力时功率 E 有一部分消耗在螺旋桨对水的附加的扰动上。

比值

$$\frac{W'v}{E} = \eta$$

1) Doyère, Théorie du navire, Paris, Bailliére, 1927.

2) Taylor, Speed and Power of Ships, Washington, 1933 一书中包含有对某些船体系列得出的 F, ϕ, χ 和 B/T 对剩余阻力影响的实验数据.

称为推进系数。量 η 表征船体性能、螺旋桨的性能和螺旋桨同船体相互作用下的运转效能。推进系数值大就表示船好。

对于给定外形、给定系数 ϕ、给定螺旋桨及其相对于船体的位置的船舶，在比 d/L（d 为螺旋桨的直径）为常数的情况下，可以认为推进系数是佛罗德数和雷诺数的函数，或者是螺旋桨进距 v/nd 和雷诺数的函数；在雷诺数的变化不大时雷诺数的影响很小。当改变船体形状和螺旋桨的几何数据时，η 的值将依赖于确定船体形状和螺旋桨的参量。在一些情况下，这些影响是通过船体阻力的变化体现出来的，该变化可以认为与螺旋桨的运转无关；而在另一些情况下，则通过与船体形状无关的螺旋桨的特征量体现出来。最后，也会遇到推进系数的值同船体与螺旋桨之间的相互作用有关的问题。

在当代的造船业中可以看到有建造大船的趋势。我们来作一些简单的分析以说明这种趋势是有道理的。可以把公式(9.2) 写成另一种形式：

$$W = [c_f(\mathrm{R}) + c'_w(\phi, \mathrm{F})]\rho\frac{Sv^2}{2}, \tag{9.4}$$

其中

$$c'_w = 2c_w\frac{D}{LS}\frac{1}{F^2}.$$

取两条几何相似的船，它们的排水量与线尺寸的立方成正比：

$$\frac{D_1}{L_1^3} = \frac{D_2}{L_2^3},$$

这相当于自然假定（船体）水下部分相似。显然，浸水面积 S 与线尺寸的平方成正比。

令 L_1 与 L_2 为相应的特征长度，并且 $L_2 > L_1$。在同一运动速度下有

$$\mathrm{R}_2 > \mathrm{R}_1 \text{ 和 } \mathrm{F}_2 < \mathrm{F}_1.$$

由实验可知：系数 c_f 随雷诺数的增大而减小[参看公式 (9.3)]，系数 c'_w 随佛罗德数的减小而减小[至少在代表实际情形的小佛罗德

数范围（$F < 0.5$）内是如此]。 c'_w 对佛罗德数的典型依赖关系示于图 16。

如果运动以同样的速度进行，则阻力之比 W_1/W_2 等于功率之比，或者在同样的效率下等于单位时间的燃料耗量之比。运载量与排水量成比例，即与线尺寸的立方成比例。一吨货物的运费由所消耗燃料的重量与运载量之比确定。在同样的运动速度下，1 吨-公里的运费 Q_2 与 Q_1 之比由下列公式给出：

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{W_2 L_1^3}{W_1 L_2^3}.$$

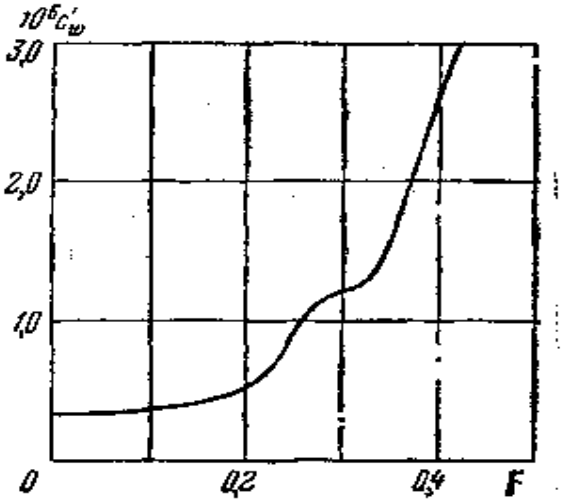


图 16　剩余阻力系数 c'_w 随佛罗德数 F 变化的典型曲线

最后这个比值可以看作是代表经营有利的最重要的要素之一。利用公式(9.4)可以写：

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{c_f(R_2) + c'_w(F_2)}{c_f(R_1) + c'_w(F_1)} \cdot \frac{L_1}{L_2} = \kappa \frac{L_1}{L_2}, \qquad (9.5)$$

其中 κ 为某一小于 1 的量，并且随比值 L_2/L_1 的增大而减小。

公式(9.5)表明，随船舶尺寸 L_2 的增大，量 Q_2 减小得比 $1/L_2$ 更快。在同样的运动速度下，功率之比要比线尺寸平方之比增长得慢。

用类似的推理可以证明，如果随着尺寸的增大让功率正比于线尺寸的立方而增大，则速度增大，而航行时间和每吨-公里的运费减少。

上面所作的分析不仅适用于沿水面运动的船舶，而且也适用于飞机，因为在飞行速度固定时空气的阻力正比于线尺寸的平方而增长，而飞机的重量和有效载荷近似正比于线尺寸的立方而增长。因此，相对的燃料储备量和飞机的航程随飞机尺寸而增长。这

说明供远程飞行用的飞机其尺寸和重量要增大。

同时，关于航空发动机、水力机械等的合理尺寸问题也具有很大的实际兴趣。

喷气发动机的重量与它所发出的推力之比（发动机"比重"）是航空发动机的最重要的特性。

为了得到规定的推力，用几个尺寸小的发动机比用一个尺寸大的发动机有利，这是因为发动机比重随其尺寸的增大而增大。发动机比重之所以增大，是因为推力正比于线尺寸的平方而增长，而发动机的重量近似正比于线尺寸的立方。

因此，如果注意到发动机比重、稀缺材料的消耗和生产工序，那末制造几个小发动机比制造一个大发动机有利。对于尺寸很小的发动机，上述分析无效，因为尺寸急剧减小时力学相似性丧失，这时推力和有效功率迅速减小。

除了相似理论的这些一般定性分析之外，选择发动机和水力机械的合适尺寸还要受某些限制，如自动作业辅助机械的性质和尺寸，在作最后决定时必须考虑的经济的、工艺的、建筑的以及一些其它的要求。

对于航空发动机、水轮机和许多别的机器，合理尺寸的问题应作全面的分析和研究。在这过程中相似性分析同样具有最重要的意义。

§10. 滑　　水

滑水乃是沿水面的滑行。在滑水时，支承力几乎完全由水的动力学反作用力所决定。在排水船舶运动时，如同在静止时那样，支承力是静水压随深度而增大所造成的阿基米德力。

滑水原理适用于高速船舶。现代的鱼雷快艇就是滑行艇。水上飞机在水上起飞时的滑跑和降落后的滑跑都伴随着滑水。

具有给定形状的船舶的滑水现象，可以在船舶相对于水面的不同方位上发生。船舶相对于水的方位具有重要意义。

确定具有给定几何形状的滑行艇或水上飞机运动所用的参量，其数目比上面讨论的排水船舶运动情况中的要多。在滑水的情况下，除了吃水量或浸水面积外，还必须给定纵倾角 θ（船舶上固定的某一方向同水平线之间的夹角）。可以给定作用于水的载荷 Δ、船舶重心的位置和外力（但不是流体动力和空气动力）对重心的力矩来代替吃水量和纵倾角 θ. 实践中，宜于取作用于水的载荷和纵倾角作为主定参量。

仍象在船舶运动的场合中那样来表述滑水问题的一般提法，我们就得出结论：具有给定几何形状的船舶的定常滑水现象，可由下列参量组确定：

$$B,\ \Delta,\ \theta,\ v,\ \rho,\ g,\ \mu.$$

一族动力学相似的运动以及由不同力学量组成的所有无量纲组合，均由下列无量纲参量的值确定：

$$\theta,\ \frac{\Delta}{\rho g B^3}=C_\Delta,\ \frac{vB\rho}{\mu}=\mathrm{R},\ \frac{v}{\sqrt{gB}}=\mathrm{F}. \tag{10.1}$$

同排水船舶的运动比较起来，必须补充引进一个纵倾角 θ，它在被比较的运动中可以具有不同的值。对于排水船舶，就所有那些具有实际意义的运动而言，纵倾角的差别可以认为是无关紧要的。

水的重量效应是通过含有重力加速度的参量体现出来的。在参量组(10.1)中有两个包含 g 的参量，即 C_Δ 和 F. 该参量组可以换为参量组

$$\theta,\ C_B=\frac{2\Delta}{\rho B^2 v^2}=\frac{2C_\Delta}{\mathrm{F}^2},\ \mathrm{R},\ \mathrm{F}, \tag{10.2}$$

其中重力加速度只在佛罗德数 $\mathrm{F}=v/\sqrt{gB}$ 中出现。

滑水现象带有明显的冲击特性。在滑行艇前面水实际上是静止的，然后在一个短暂的时间间隔中，水被驶近的艇底引起运动。这使我们有理由假设：惯性力是主要的力，同它相比水质点的重力很小并可以忽略不计。

假定水质点的重量不重要，相当于假定参量 g 不重要，从而，

在参量组 θ, C_B, R 和 F 中佛罗德数不重要。

对于滑水运动(佛罗德数的值大)，水的重量对运动的许多基本特征量的影响不重要，这一点已由理论确立[1]。许多实验资料[2]也很好地证实了这一假定的正确性。所以，在模拟纯滑水运动时可以不要求佛罗德相似律。

不难看出，在参量组 θ, C_Δ, R 和 F 中，当流体重量的影响不存在时，认为包含重力加速度 g 的佛罗德数和系数 C_Δ 同时都不重要是不对的。参量 C_Δ 与 F 组成不包含 g 的组合

$$\frac{2C_\Delta}{F^2} = C_B.$$

在水的重量和参数 g 完全不重要的许多问题中，参量 C_B 可以具有重要作用。

与佛罗德数和雷诺数无关的无量纲量只是通过组合

$$\frac{2\Delta}{\rho B^2 v^2} = C_B$$

才可以依赖于载荷 Δ 和速度 v. 因此，可以用研究载荷的影响来代替研究速度的影响，反之亦然。当所要求的速度达不到时这一情况具有重大意义。

利用这一点，对一些由直接的实验达不到的状态，可以用实验办法得到许多正确的结果。

只有在紧靠艇底处(边界层)水的粘性才显著，所以雷诺数对压力分布、对流体动力的力矩、对浸水面的形状等等没有实质性的影响。水的粘性对扰动的阻尼作用实际上只是在离艇很远处才表现出来。

---

1) Седов Л. И., Плоская задача о глиссировании на поверхности тяжелой жидкости, 收于文集«Труды конференции по теории волнового сопротивления»стр. 7—30, изд. ЦАГИ, М., 1937; Кочин Н. Е., Труды ЦАГИ, вып. 356, 1938; Чаплыгин Ю. С., Труды ЦАГИ, вып. 508, 1940, стр. 1—45.

2) Эпштейн Л. А., Труды ЧАГИ, вып. 508, 1940; Седов Л. И. и Владимиров А. Н., ДАН СССР, т. 33, вып. 2 и 3, 1941, стр. 193—196.

阻力显著地依赖于作用在艇底面上的摩擦力，所以粘性和雷诺数影响着无量纲阻力系数。

定常滑水的流体动力学特性，除了依赖于上述力学参量之外，还与艇底的几何形状大有关系。

支承力性质的不同使得滑行船舶的形状截然不同于排水船舶的形状。滑行船舶的艇身外形的特征是：船底为平底形，船首尖削，具有断阶（它是艇底后部上的横向梯阶）。必须是平底形状，以便在小浸水面上接受大的铅直力。在滑行时，尖船首和断阶使水的射流破碎，结果艇的侧面和艇底下部相当大一部分不浸在水中，从而减小了摩擦阻力。

船底的各种特点可以用一些无量纲参量来表征。通过对一系列剖面进行系统的试验，可以确定这些参量变化的影响。

在扁平楔形板的滑水问题中，我们遇到一种非常有趣的情况，其本质与力学相似性和量纲分析有密切关系。设有一在水面上滑行的平龙骨的棱柱形板.设通过板的龙骨的纵向对称面是铅直的，并且运动是平行于对称面进行。滑水板的后部——船尾板——为一平面，垂直于对称面。

讨论这样的情形：楔形滑水板的长度和楔侧面的宽度足够大，从而对于所有可比较的运动，浸水面的边界与板的结构宽度和长度没有任何联系.对于所有可比较的运动，板的几何宽度和长度可以认为等于无穷大. 板的几何形状完全由两侧面间的夹角 $\pi-2\beta$（β 为底倾角）以及龙骨直线同端面间的夹角确定.可以把这些角取作形状的几何参数.为简单起见，我们讨论这些角固定的一类运动。

不难看出，在这种情况下主定参量的数目减少了，因为表征板的线尺寸不出现。

宽度不全浸水的扁楔形板的定常滑水由下列参数量定：

$$\Delta, \theta, v, \rho, g, \mu.$$

滑水板沿船尾板的浸水宽度和沿龙骨的浸水长度完全由上述参量确定。

这类相似运动及运动状况由三个无量纲量描述：

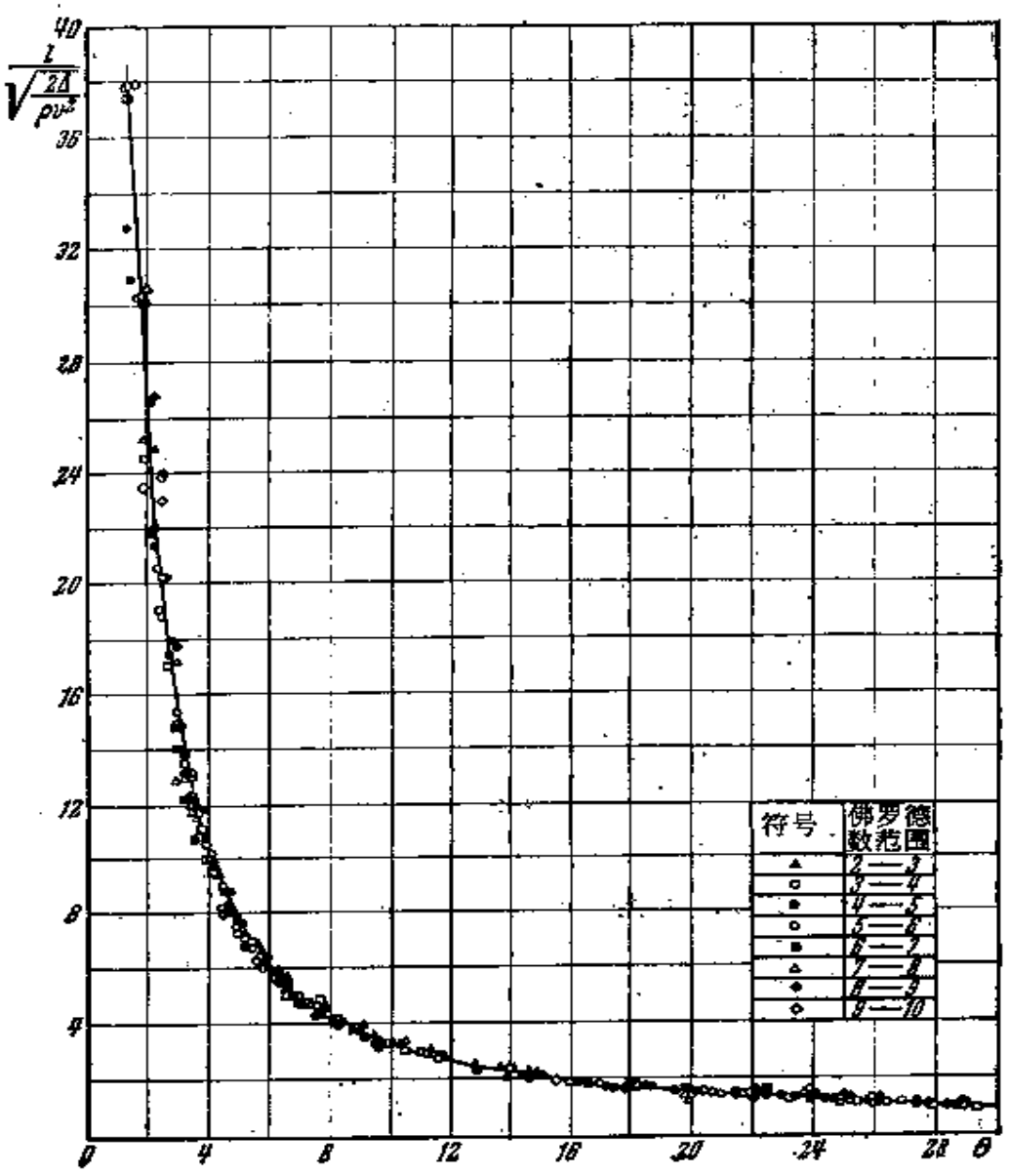


图 17　扁楔形板的滑水

$$\theta,\ \frac{v}{\sqrt{g\cdot\sqrt[3]{\frac{\Delta}{\rho g}}}}=F_1,\quad \frac{\rho v\cdot\sqrt[3]{\frac{\Delta}{\rho g}}}{\mu}=R_1. \tag{10.3}$$

数 F_1 和 R_1 可以看作是按载荷定义的佛罗德数和雷诺数。

对于滑水状况（大 F_1），雷诺数只对那些与边界层中流体运动

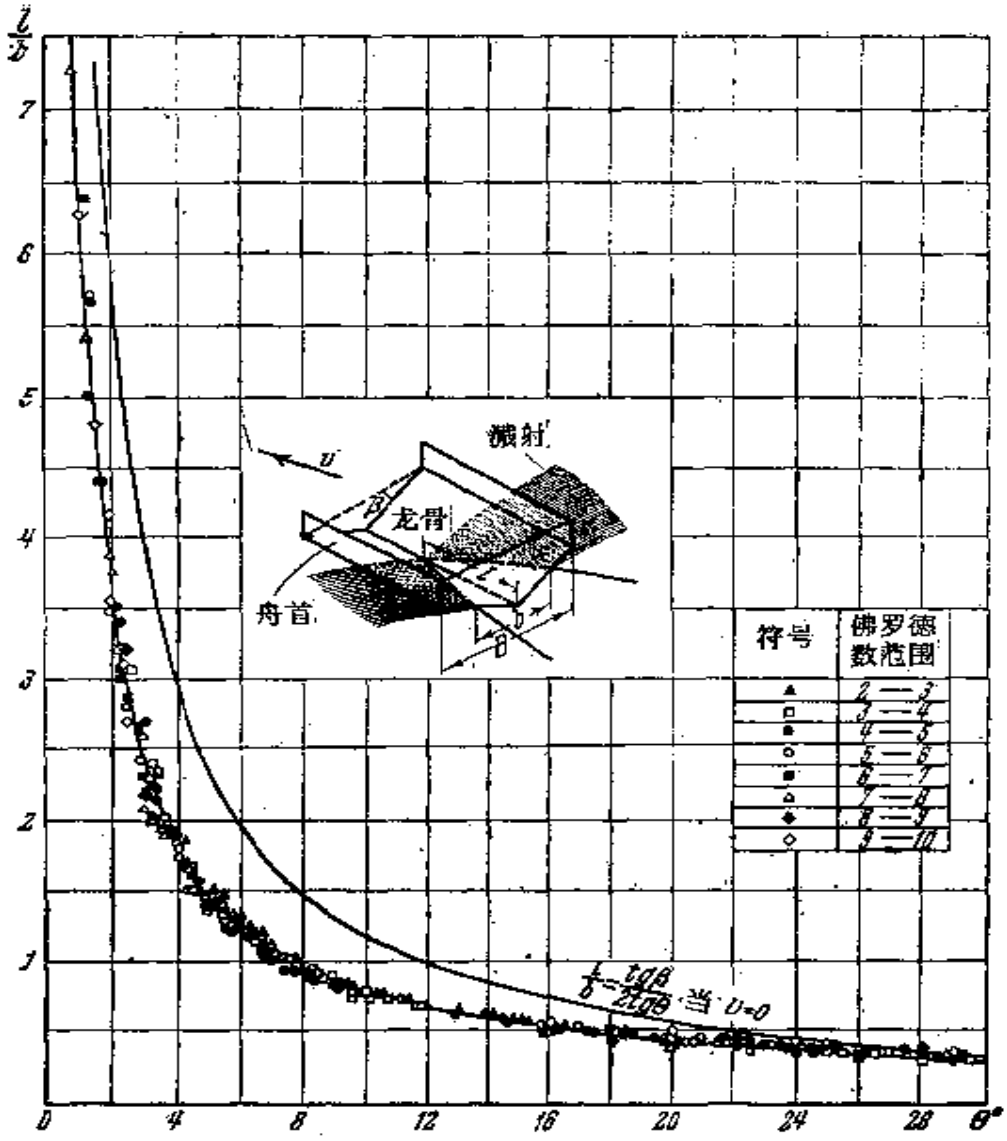


图 18　实验数据表明，在佛罗德数 $F_1>2$ 时水的重量的影响不重要

状况有关的量有影响．例如，可以认为沿龙骨的浸水长度 l 与粘性无关，即

$$l = f(\theta, \Delta, v, \rho, g). \tag{10.4}$$

此关系式可写成如下的无量纲形式：

$$l = \sqrt{\frac{\Delta}{\rho v^2}}\, f(\theta, F_1). \tag{10.5}$$

如果再假定重量对 l 的大小没有影响，即关系式（10.5）中重

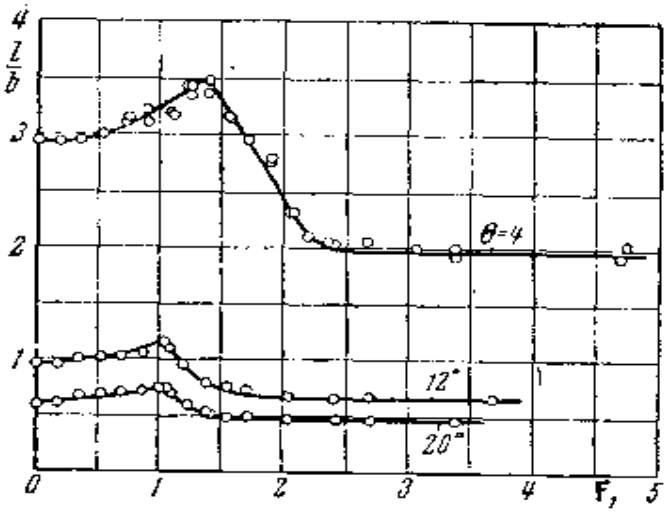


图 19　扁楔形板的滑水．只在佛罗德数 $F_1<2$ 时重量的影响才重要

力加速度 g 不重要，则得：

$$l=\sqrt{\frac{\Delta}{\rho v^2}}f(\theta). \tag{10.6}$$

在这些假定下容易看出，所有的线尺寸（例如船尾板上的浸水宽度等等）与$\sqrt{\Delta/\rho v^2}$成比例．在固定的纵倾角 θ 但在不同的作用于水的载荷 Δ 和不同的滑行速度 v 下，浸水面将是几何上相似的．

对于大佛罗德数值（$F_1>2$）的这些结论，实验很好地证实了其正确性[1]（图 17，18，19）．

在主定参量组中，我们把作用于水的载荷 Δ 和运动速度 v 取作自然参量，因为在实验中正是这两个量是事先给定的，而其余的量是要测定的．代替载荷 Δ，也可以取浸水长度 l 或船尾板上的浸水宽度 b 作为主定参量．例如，可以取下列有量纲主定参量组：

$$\theta,\ l,\ v,\ \rho,\ g,\ \mu;$$

而相应的无量纲参量组为：

$$\theta,\ \frac{v}{\sqrt{gl}},\ \frac{\rho v l}{\mu}.$$

1) Седов Л. И. и Владимиров А. Н., ДАН СССР, т. 33, № 2, 1941, стр. 116—119.

在这情况下，关系式(10.4)—(10.6) 可以看作是决定作用于水的载荷Δ的关系式。

§11. 击　　水

在许多实际问题中，例如当水上飞机在水上降落时，势必会遇到击水现象。在研究此现象时，弄清水的反作用力的性质和研究水面上的跳弹现象具有特殊意义。

许多人可能观察过扁平石块滑过水面的情形；如果给石块一个具有大的水平分量的速度，并使它旋转以保证石块平面相对水平面保持小的倾斜，则石块碰到水面时容易向上跳离水面，有时跳离几次。显然，在这种水面跳弹现象中水平速度起着基本作用.在没有水平速度时，平的重石块不会跳离水面。多次的跳弹证明在与水接触期间水平速度损失不大。炮弹的跳弹也是熟知的.例如，具有初速度 455 米/秒，直径 0.16 米的圆形炮弹可以在水上跳弹 22 次以上[1]。

现在，在炮兵中有时故意利用跳弹射击。

水上飞机在水上降落时可能发生水面跳弹现象。飞机的水面跳弹在航运业务中是有害的，并被看作是非常讨厌的现象。

我们利用量纲与相似理论来研究应用于水上飞机降落和平板(作为小船和水上飞机浮筒的简单模型)实验的击水问题。

我们固定运动物体的几何形状，而让尺度(它可以用某一线尺寸的值给出)变化。作为特征的线尺寸自然取小船的宽度。为简单起见，只限于考虑物体可以认为是刚体的情形。空气动力学图象上的差异会在整个现象的历程中强烈地反映出来。对问题的实验研究，可以从研究具有同样几何形状从而具有同样空气动力学性质的物体的运动开始。

假定物体具有几何对称和动力学对称的纵向平面，并假定物

1) Jonquières, E., Sur le ricochet des projectiles spheriques á la Surface de l'eau, C. r. Acad. Sci., V. 97, No. 23, 1883, pp. 1278—1281.

体的运动在纵向上平行于对称面进行。再假定物体的不定常运动具有两个自由度，即可以出现重心的铅直位移和绕重心的转动。重心的水平速度将认为是常数。实际上，由于有阻力水平速度要减小，然而，由于我们最关心的过程时间短促，这种减小可以忽略不计[1]。

在问题的一般提法中我们将考虑流体的惯性、粘性和重量。流体的可压缩性和毛细作用将忽略不计，水的波动对所研究的现象会有重要影响，不过我们假定在与物体接触之前水是静止的。

由所作的假定可知，物体-水系统的运动由下列参量（它们在一定范围内可以任意给定）组确定：

（1）确定尺寸的参量：小船的宽度 B（在模型的情况下——板的宽度）。

（2）运动学参量：所考虑的时刻 t（初始时刻 $t = 0$ 对应于物体与水面相接触的时刻），水平速度 U 和初始铅直速度 v_0，初始纵倾角（冲角）θ_0，初始角速度 Ω_0[2]。

（3）物体的动力学参量：在与物体相联结的某一坐标系中重心的坐标 ξ，η，相对通过重心的横轴的转动惯量 J，质量 m，给定的外力铅直分量 A（对于自由物体 $A = mg$）。在实验室实验中，借助于人为平衡可以使量 A 与 mg 无关[3]。

（4）物理常数：重力加速度 g，密度 ρ 和水的粘性系数 μ。

所有可以认为与所研究的问题有关的无量纲量，都是确定运动类型与状态的下列无量纲参量组的函数：

$$\tau = \frac{Ut}{B}, \frac{v_0}{U}, \theta_0, \frac{\Omega_0 B}{U}, \frac{\xi}{B}, \frac{\eta}{B}, \frac{J}{\rho B^5}, \frac{m}{\rho B^3},$$

1）为了将量纲理论应用于击水问题的一般表述，水平速度为常数的假定不是实质性的。在模拟这种现象的时候才有必要固定水平速度。在实验室条件下，水平速度等于常数可以用小拖车的运动来保证；模型的重心可以沿与小拖车相固结的铅直导轨滑动，而小拖车以给定的常速运动。传动装置的摩擦力可设法减小到忽略不计。

2）我们假定在着水时刻的初始运动状态实际上由参量 U，v_0，θ_0 和 Ω_0 完全确定。

3）我们假定补充给定的外力作用于重心。空气动力的合力和合力矩可以认为是由物体的形状和运动确定的量。

$$C_B = \frac{2A}{\rho B^2 U^2}, \quad \mathrm{F} = \frac{U}{\sqrt{gB}}, \quad \mathrm{R} = \frac{\rho U B}{\mu}.$$

雷诺数R的影响可以通过由水的粘性所决定的摩擦力体现出来，该力同举力相比一般是不大的，并且通常近似地指向水平方向；然而在某些情况下摩擦力可以显著地影响转矩的大小。但如果考虑到摩擦力对雷诺数的依赖性比较弱，那末看来略去雷诺数对铅直运动和角运动的特性的影响，特别是对水面跳弹现象的影响是完全合理的。

佛罗德数F对流体动力、浸水面形状等的影响，与水的重量对物体附近水的受扰运动的影响有联系。在大的水平速度下现象带有冲击特性，所以可以认为水的反作用力与佛罗德数无关。但仍应注意，佛罗德数的足够大的值（该数的影响由此值开始变得不重要），取决于所研究的力学量的特性，并且与其它主定参量的值有关。

如果 $A = mg$，则参数 $m/\rho B^3$，C_B 和F变成相关的。这时只要保留两个参数 $m/\rho B^3$ 和 C_B 就够了，因为通过系数 C_B 就同时考虑了模型和水的重量的影响。

以Y记流体动力合力的铅直分量。根据上述分析得知下式成立：

$$\frac{Y}{A} = f\left(\tau, \frac{v_0}{U}, \theta_0, \frac{Q_0 B}{U}, \frac{\xi}{B}, \frac{\eta}{B}, \frac{J}{\rho B^5}, \frac{m}{\rho B^3}, C_B\right). \quad (11.1)$$

对于具体模型的运动，参量 $\frac{\xi}{B}$，$\frac{\eta}{B}$，$\frac{J}{\rho B^5}$ 和 $\frac{m}{\rho B^3}$ 为常数。如果纵倾角固定，而只有铅直速度变化，便得到只有一个自由度的运动——铅直平动。这时 $Q_0 = 0$，而参数 ξ，η 和 J 不重要，公式(11.1)呈如下形式：

$$\frac{Y}{A} = f\left(\tau, \frac{v_0}{U}, \theta, \frac{m}{\rho B^3}, C_B\right). \quad (11.2)$$

在这个公式中，纵倾角作为不变的安装角保留了下来，它在不同的实验中可以是不同的。

如果我们在不同的实验中考虑比值 Y/A 的最大值(或者一般地考虑对于某些特征时刻的 Y/A 值)：

$$\frac{Y_{\max}}{A} = f^*\left(\frac{v_0}{U}, \theta, \frac{m}{\rho B^3}, C_B\right), \tag{11.3}$$

则参量 τ 便确定了。显然，在跳弹时，所有的量在与水接触期间的平均值、无量纲接触时间 $\tau_1 = Ut_1/B$、无量最大浸入深度 $h_{\max}/B$ 等等都与参量 τ 无关。

可以把整个这类运动分为两部分，分别对应于弹出水面和浸入水中(有跳弹和无跳弹)的情形。这两种型式之间的分界由关系式

$$\Phi\left(\frac{v_0}{U}, \theta_0, \frac{Q_0 B}{U}, \frac{\xi}{B}, \frac{\eta}{B}, \frac{J}{\rho B^5}, \frac{m}{\rho B^3}, C_B\right) = 0 \tag{11.4}$$

描述，而在一个自由度的平动的情况下由关系式

$$\Phi\left(\frac{v_0}{U}, \theta, \frac{m}{\rho B^3}, C_B\right) = 0 \tag{11.5}$$

描述。

现在关于平板着水的函数 Φ 的形式已有了实验数据[1]。

在讨论扁楔形板的定常滑水问题时，业已说明：在浸水面不依赖于板的尺寸，从而排除了参量 B 的情况下，可以减少主定参量的数目。

在具有固定角的楔（其形状在前节中已描述过）的击水问题中，代替公式(11.3)和(11.5)有公式

$$\frac{Y_{\max}}{A} = f^*\left(\frac{v_0}{U}, \theta, \frac{2A}{\rho^{1/3} m^{2/3} U^2}\right) \tag{11.6}$$

和

$$\Phi\left(\frac{v_0}{U}, \theta, \frac{2A}{\rho^{1/3} m^{2/3} U^2}\right) = 0. \tag{11.7}$$

参量 $\frac{v_0}{U}$ 和 $\frac{2A}{\rho^{1/3} m^{2/3} U^2}$ 可代之以等价的参量

1) Седов Л. И., Водяные рикошеты. ДАН СССР, т. 37, вып. 9, 1942, стр. 291—294.

$$\frac{v_0}{\sqrt{\frac{A}{m}\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}}}\text{ 和 }\frac{U}{\sqrt{\frac{A}{m}\cdot\sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}}},$$

它们具有对称形式，并且在 A 与 m 为常数时分别表征铅直速度和水平速度的影响。

以上我们拟定了主定参量组和一些重要关系式的形式。上述参量中有些在许多情况下是无关紧要的，这是通过超出量纲与相似理论范围的专门研究搞清楚的。

水面跳弹现象与滑水的纵向不稳定性有密切关系。在水上飞机和滑行艇的实际情形中和在模型试验中，都会遇到滑水的纵向不稳定性。现在已经确知，对于任何水上飞机和对于任何模型都存在不稳定的运动状态。在这种状态下发生强烈的纵向振动，这种振动极为讨厌和危险。正如在着水问题中那样，对滑水的不稳定性现象的研究，由于存在许多有待搞清其影响的参量而变得复杂起来。

不难看出，若设 $v_0 = \Omega_0 = 0$，确定滑水稳定性的无量纲参量组可从确定击水现象的参量组得到。跳弹界限的概念对应于划分稳定滑水与不稳定滑水的稳定性界限的类似概念。

如果没有水的重量的影响，则稳定性界限只是通过系数 $C_B = 2A/\rho B^2U^2$ 而依赖于载荷和滑行速度。对于许多实际上重要的运动状态这已很好地为实验数据所证实[1]。

如同在击水问题中那样，确定扁楔形板以非全宽度[2]滑水的稳定性的参量，其数目减少了[3]。

我们再来专门研究铅直落水问题。

---

1) Седов Л. И., Глиссирование по поверхности воды. Техника воздушного флота, № 4—5, 1940, стр. 5—33.

2) 即不全浸水，从而可作无限宽处理。——译者注

3) Седов Л. И. и Владимиров А. Н., Влияние механических параметров на явление глиссирования килеватой пластинки Известия АН, ОТН, № 1—2, 1943, стр. 44—66.

当物体作平动时，铅直下落[1]的击水现象由参量

$$t, v_0, m, B, A, g \text{ 和 } \rho$$

确定。作为确定运动方式和状态的无量纲参量可取下面四个量：

$$\frac{tv_0}{\sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}}, \frac{m}{\rho B^3}, \frac{v_0}{\sqrt{g \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}}}, \frac{v_0}{\sqrt{\frac{A}{m} \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}}}. \tag{11.8}$$

如果 $A = mg$，则只剩下三个参量。

显然，对某些特征时刻取的所研究的无量纲量（最大值或者对时间的平均值），在 $A = mg$ 时只由两个参量确定：

$$\frac{m}{\rho B^3}, \frac{v_0}{\sqrt{g \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}}}.$$

例如，对于最大冲击力和对于在某一特征的时间间隔内水作用于物体的冲量，有如下形式的公式：

$$P_{\max} = f_1\left(\frac{m}{\rho B^3}, \frac{v_0}{\sqrt{g \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}}}\right) \rho \left(\frac{m}{\rho}\right)^{2/3} v_0^2 \tag{11.9}$$

和

$$I = f_2\left(\frac{m}{\rho B^3}, \frac{v_0}{\sqrt{g \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}}}\right) m v_0. \tag{11.10}$$

如果触水速度 v_0 大，而物体浸水面的形状近乎水平平面，则入水现象带有显著的冲击特征。这时水的重量和物体的重量都不重要。所以，在量

$$\frac{v_0}{\sqrt{g \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}}}$$

足够大时，落水时应有如下形式的公式：

1）如果物体不对称，那末铅直平动可借助于专门的导轨来实现。

$$P_{\max} = f_1\left(\frac{m}{\rho B^3}\right)\rho^{1/3}m^{2/3}v_0^2, \tag{11.11}$$

$$I = f_2\left(\frac{m}{\rho B^3}\right)mv_0. \tag{11.12}$$

在 v_0 与 m 为常数的情况下，显然液体的反作用力随物体尺寸（参量 B）的增大而增大，所以当参量 $m/\rho B^3$ 趋近于零时，函数 $f_1(m/\rho B^3)$ 和 $f_2(m/\rho B^3)$ 应增大。公式(11.11)和(11.12)表明，最大的力与速度平方成正比，而冲量与落水速度的一次方成正比[1]。

在锥（其水平截面可以是任意的）落于水面的问题中参量 $m/\rho B^3$ 被排除了，因为这时没有可给定的特征线尺寸。

因此，在锥的落水问题中，对于公式(11.11)和(11.12)我们得到：

$$P_{\max} = c_1\rho^{1/3}m^{2/3}v_0^2, \tag{11.13}$$

$$I = c_2mv_0. \tag{11.14}$$

这两个公式确定了 $P_{\max}$ 和 I 对质量的依赖关系。常数 c_1 和 c_2 取决于锥的形状。值得注意的是，在公式(11.13)和(11.14)中质量影响的规律与锥的形状无关。锥的形状只影响常数 c_1 和 c_2 的值。

然而，关于对任何形状的物体最大力与 $m^{2/3}$ 成比例的一般结论，一般地说是不正确的。事实上，我们来看具有不大的底倾角的长而扁平的楔。设楔的对称面是铅直的，落水速度大。略去水和楔的重量，得到下列主定参量组：

$$t,\ v_0,\ \frac{m}{L} = m_1,\ L,\ \rho,$$

其中 L 为沿龙骨方向楔的长度，m_1 为楔每单位长度的质量。

如果 L 很大，那末我们可以考虑极限情形 $L = \infty$。在扁平的、无限长的楔的极限情形下，当浸水面没有达到楔的边界时，线尺寸

1) 实验数据很好地证实了这一结论；参看 Крепс Р. Л., Экспериментальное исследование удара о воду. Труды ЦАГИ, вып. 438, 1939г. 和 Крепс Р. Л., Удар о воду профилей днищ лодок гидросамолетов. Труды ЦАГИ, вып. 513, 1940г.

便被排除，由此，现象只由四个有量纲量确定：

$$t,\ v_0,\ m_1,\ \rho.$$

所有的无量纲特征量均由一个无量纲量

$$\frac{tv_0}{\sqrt{\frac{m}{\rho L}}}$$

确定。无量纲力学特征量的最大值和平均值将是无量纲常数。

于是，在这种情况下，对于最大冲击力有公式

$$\frac{P_{\max}}{L} = c_3\sqrt{\rho m_1}\, v_0^2,$$

或者

$$P_{\max} = c_3\sqrt{\rho m L}\, v_0^2.$$

因此，对于极长的物体，最大力与物体质量的平方根成正比。常数 c_3 与底倾度有关；可以把它看作是底倾角 β 的函数。

不难看出，c_3 随底倾角的减小而增大。对于小底倾角，可以假定 $c_3 = c_4/\beta$，其中 c_4 在小 β 角下可以认为与底倾角无关。在有限长楔的一般情况下，对于 c_3 可以给出公式

$$c_3 = \frac{f\left(\frac{m}{\rho L^3}, \beta\right)}{\beta}.$$

通过确定函数 $f(m/\rho L^3, \beta)$，则处理实验数据是很方便的；因为在小 β 角下和对于非常长的楔或者小的 m，这函数随它的自变量变化不大。

§12. 锥和楔以常速进入流体

我们来研究由锥形或楔形固体进入流体所引起的不可压缩流体的不定常运动问题。空间问题情形中锥的形状和平面问题情形中无限幅长的平面楔的形状之所以有意义，是因为它们的表面由一个关于几何相似性的要求就完全固定了。一族几何相似的锥归

结为唯一的一个锥。 锥面和平面楔的面由无量纲几何量完全确定。

假定流体充满以水平面为界的整个下半空间，并且流体的重量和粘性可以忽略不计。从而，我们将认为流体是不可压缩的、均匀的和理想的。

设 $t = 0$ 为初始时刻，此时物体与静止流体发生接触。 进入流体的物体以大小和方向都不变的速度 v 作平动。

假定在自由面上压力 p 具有常值 p_0. 由流体的不可压缩性可知，自由面上的压力值 p_0 不会影响流体的受扰运动。 我们可以讨论压力差 $p-p_0$ 以代替压力 p；在此情况下参数 p_0 是非实质性的. 所以流体的力学性质由唯一的参量——密度 ρ 确定。

综上所述可知，在每一点上流体运动的所有力学特征量由下列诸量确定[1]：

$$\rho,\ t,\ v,\ \alpha,\ \beta,\ x,\ y,\ z,$$

其中 α 与 β 是确定速度 v 的方向(相对于物体)的角，而 x, y, z 为所讨论的点的坐标，坐标系或者是原点位于锥顶与液面的接触点处的静止坐标系，或者是固定在物体上的、原点位于锥顶点的运动坐标系。

显然，与所研究的现象有关的所有无量纲量由参量

$$\alpha,\ \beta,\ \frac{x}{vt},\ \frac{y}{vt},\ \frac{z}{vt}$$

确定，并且参量 x/vt, y/vt, z/vt 只会影响与流体内所讨论点的位置有关的量。总体性无量纲参量(例如流体的总反作用力等等)或者与点在空间中的位置无关的参量，只依赖于角 α, β. 如果速度的方向固定(例如速度是铅直的)，那末我们可以把所有的无量纲总体性特征量看作是只与锥的形状有关的绝对常数。

以 $\varphi(x, y, z, t)$ 表示在锥的速度大小和方向都给定的情况下流体受扰运动的速度势。由于流体的运动是非定常的，所以确定

---

1) 为简单起见，我们认为流体上面的介质密度与流体密度之比固定不变.

流体受扰运动的问题就归结为确定作为四个自变量 x，y，z，t 的函数的速度势。

根据量纲理论容易将四个自变量化为三个。

事实上，量 φ/v^2t 是无量纲的，所以下列形式的公式成立：

$$\varphi = v^2tf\left(\frac{x}{vt}, \frac{y}{vt}, \frac{z}{vt}\right). \tag{12.1}$$

对于流体质点的速度 $\mathfrak{v}$ 有如下形式的公式：

$$\mathfrak{v} = vf_1\left(\frac{x}{vt}, \frac{y}{vt}, \frac{z}{vt}\right). \tag{12.2}$$

水的总反作用力 P 和浸水面积 S 的量值有如下公式：

$$\left.\begin{aligned} P &= c_1\rho v^4t^2, \\ S &= c_2v^2t^2, \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

并且系数 c_1，c_2 和力 P 的方向只依赖于锥的形状和锥运动速度的方向。公式(12.3)的第一个公式表明，水的反作用力与其密度、速度的四次方和时间的平方成正比。浸水面积与速度的平方和时间的平方成正比。显然，同一运动的两个不同的状态是动力学相似的。

在平面楔入水的二维问题的情况下(运动平面为 xy 平面)，对于速度势和速度分布有公式

$$\varphi = v^2tf\left(\frac{x}{vt}, \frac{y}{vt}\right),$$

$$\mathfrak{v} = vf_1\left(\frac{x}{vt}, \frac{y}{vt}\right).$$

对于作用在每单位长度楔上的力和沿楔侧面的浸水长度有公式

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= c_1'\rho v^3t, \\ l &= c_2'vt. \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

由公式(12.3)和(12.4)可见，在物体以常速度入水时，对于不同形状的物体，水的反作用力的大小对运动速度的依赖关系是不同的。

常数 c_1' 和 c_2' 依赖于楔的底倾角，依赖于楔对称面的倾角和楔相对于未受扰动自由面液面的速度。

对于铅直入水的平面问题，和对于相对液面稍许倾斜的板以大的水平分速度入水的问题，有近似的理论解[1]。

§ 13. 不可压缩流体表面上的小振幅波

在研究不可压缩重流体的表面波的柯西-泊松问题时，H. E. 柯钦[2]运用了量纲理论，并且给予这一经典问题的解以新的、精美的数学形式。

将量纲理论的推理加以发挥，可以以直观而简单的形式求出[3]波动问题的一整类新解。在所得到的该类解中，柯钦的解乃是一特殊情形。

这一方法和所求出的解可以扩充和推广到三维问题的情形。

占据整个下半空间的不可压缩重流体的表面上的无穷小振幅的位势波的平面问题，可表述如下。

取一笛卡尔坐标系；x 轴与未受扰动液面相合，y 轴铅直向上。速度势 $\varphi(x, y, t)$ 在 $y < 0$ 处为正则调和函数，即

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{当 } y < 0. \tag{13.1}$$

再者，我们将研究这样的运动：流体的运动将随着向流体的深入而衰减，即

$$|\operatorname{grad}\varphi| \to 0 \quad \text{当 } y \to -\infty. \tag{13.2}$$

在线性化形式下自由面上压力为常数的条件可以表示如下：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{当 } y = 0 \text{ 和 } t \geqslant 0, \tag{13.3}$$

---

1) 参看 Wagner H. Über Stoss-und Gleitvorgenge an der Oberfläche von Flüssigkeiten. ZAMM, 1932, № 4; Седов Л. И., Теория нестационарного глиссирования и движения крыла со сбегающими вихрями. Труды ЦАГИ, вып. 252, 1936.

2) Кочин Н. Е., К теории волн Коши-Пуассона. Труды МИАН СССР, т. IX, 1935.

3) Седов Л. И., К теории малых волн на поверхности несжимаемой жидкости, Вестник Московского университета, № 11, 1948. стр. 71—77.

其中 g 为重力加速度。为了确定速度势 $\varphi(x, y, t)$，除条件(13.1)，(13.2)和(13.3)以外，必须加上某些补充要求。

作为这些补充要求，例如可以取初始条件：当 $t = 0$ 时给定自由面的形状和脉冲压力分布。

在线性化理论中表述初始条件时可以从下式出发：

$$\zeta = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{y=0} \text{ 和 } \frac{p_t}{\rho} = -\varphi, \tag{13.4}$$

其中 $\zeta(x, t)$ 为自由面上的点在未受扰动液面以上的高度，p_t 为脉冲压力，而 ρ 为流体的密度。

初始条件可以表述为如下形式：当 $t = 0$ 有

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{y=0} = f(x), \quad \varphi|_{y=0} = F(x). \tag{13.5}$$

如果函数 f 和 F 同时不等于零或无穷大，并且如果 $f \neq kx$，则显然，这两个函数除了自变量 x 以外还应依赖于某些有量纲的常数。因为问题是以运动学量表述的，所以显然，进入函数 f 和 F 的具有独立量纲的有量纲常数可以不超过两个。

如果我们令

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} w(x + iy), \tag{13.6}$$

其中 $w(z, t)(z = x + iy)$ 为流体流动的特征函数(复位势)，则拉普拉斯方程得到满足。我们再假定在 $t > 0$、x 有限和 $y < 0$ 时，特征函数 $w(z)$ 是单值的、有限的和正则的。

由条件(13.2)可知，当 $y \to -\infty$ 时导数 $\partial w/\partial z$ 趋近于零。

边界条件(13.3)可以表为如下形式：

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + ig\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \quad \text{当 } y = 0. \tag{13.7}$$

这个条件可以使组合

$$G(z) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + ig\frac{\partial w}{\partial z}$$

延拓到上半平面，从而得出，函数 $G(z)$ 在复变量 $z = x + iy$ 的整个平面上是单值的。根据关于流体运动的一般特性所采取的假定可知，$G(z)$ 的奇点在实轴上。

我们来寻求这样的解，对于它们特征函数 $w(z)$ 线性地依赖于进入确定速度势的附加条件中的有量纲常数；这些条件的形式我们将不具体说明。

由问题的线性性质可知，研究下述情形就够了：我们只有一个有量纲常数 a，特征函数 $w(z)$ 线性地依赖于它（常数 a 可以是复数）。设常数 a 的量纲由公式

$$[a] = \mathrm{L}^p\mathrm{T}^q$$

表示。根据所作的假定我们得出，完备的主定参量组是：

$$z = x + iy,\ t,\ g,\ a.$$

现在设

$$w = az^\alpha g^\beta \chi(z, t, g);$$

指数 α 与 β 这样选取，使得 χ 为无量纲量。因为 $[a] = \mathrm{L}^p\mathrm{T}^q$，所以显然应有：

$$p + \alpha + \beta = 2, \quad q - 2\beta = -1,$$

由此

$$\beta = \frac{1+q}{2}, \quad \alpha = \frac{3-2p-q}{2}. \tag{13.8}$$

由量纲理论得知，函数 $\chi(z, t, g)$ 只依赖于组合

$$\lambda = \frac{gt^2}{z},$$

即

$$w = ag^\beta z^\alpha \chi(\lambda) \tag{13.9}$$

根据公式(13.9)得下列等式：

$$\frac{\partial w}{\partial t} = ag^\beta z^\alpha \chi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ag^\beta z^\alpha \left[\chi''(\lambda)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right)^2 + \chi'(\lambda)\frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}\right],$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = ag^\beta z^\alpha \left[\frac{\alpha}{z}\chi(\lambda) + \chi'(\lambda)\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right]$$

和

$$G(z) = ag^{\beta}z^{\alpha}\left[\chi''\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)^2 + \chi'\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} + ig\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) + \frac{ig\alpha}{z}\chi\right];$$

因为

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = 2\frac{\lambda}{t}, \quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2} = 2\frac{\lambda}{t^2}, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial z} = -\frac{\lambda}{z},$$

所以

$$G = 4ag^{\beta+\alpha}t^{2\alpha-2}\lambda^{2-\alpha}\left[\chi'' + \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{i}{4}\right)\chi' + \frac{i\alpha}{4\lambda}\chi\right]. \quad (13.10)$$

函数 $G(\lambda)$ 在整个平面中是复变量 λ 的单值函数。奇点只能位于实轴上。因为当 λ 为实数时函数 $G(\lambda)$ 是纯虚函数，所以显然，对于该函数的任何奇点，劳伦 (Laurent) 级数的系数是纯虚数。

记

$$a = a_0e^{i\delta} \text{ 和 } G = 4a_0g^{\beta+\alpha}t^{2\alpha-2}G_1(\lambda).$$

由(13.10)得：

$$e^{-i\delta}G_1(\lambda) = \lambda^{2-\alpha}\left[\chi'' + \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{i}{4}\right)\chi' + \frac{i\alpha}{4\lambda}\chi\right]. \quad (13.11)$$

如果取只在实轴上有奇点并且在实轴上函数值为纯虚数的任何一个单值函数作为函数 $G_1(\lambda)$，那末就可以满足流体内的和自由面上的条件。

为了确定相应的波动的特征函数，必须对函数 $\chi(\lambda)$ 的微分方程(13.11)求积分。在最一般的情况下，得到在流体自由面上具有奇异性的波动。

如果我们假定当 $t > 0$ 时在自由边界上流体的运动是正规的，则由组合

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + ig\frac{\partial w}{\partial z}$$

的有限性可知，函数 $G_1(\lambda)$ 化为虚常数，并且根据条件(13.2)以及当 $y \to -\infty$ 时压力不随时间变化的附加条件，应令此虚常数等于零。

因此，问题归结为积分常微分方程

$$\chi'' + \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{i}{4}\right)\chi' + \frac{i\alpha}{4\lambda}\chi = 0. \qquad (13.12)$$

在这个方程中 α 为任意常数。不难看出，当 α 为复数时方程(13.12)的解也给出某一波动。柯钦所考虑的基本解对应于特定值 $\alpha = -1/2$。

方程(13.12)在改用新变量

$$\mu = \frac{i}{4}\lambda$$

后变为如下形式：

$$\mu\frac{d^2\chi}{d\mu^2} + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\frac{d\chi}{d\mu} + \alpha\chi = 0. \qquad (13.13)$$

方程(13.13)的解由满足微分方程[1]

$$xy'' + (\gamma - x)y' - ky = 0$$

的合流超几何函数 $y = M(k, \gamma, x)$表示。方程(13.13)的通解具有如下形式：

$$\chi = C_1 M\left(-\alpha, \frac{1}{2}, \mu\right) + C_2\mu^{\frac{1}{2}} M\left(-\alpha + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \mu\right).$$

利用波动的特征函数的这个解，我们可以写：

$$w = A_1 w_1 + A_2 w_2, \qquad (13.14)$$

其中

$$w_1(z, t, \alpha) = z^\alpha M\left(-\alpha, \frac{1}{2}, \frac{igt^2}{4z}\right), \qquad (13.15)$$

$$w_2(z, t, \alpha) = z^\alpha\sqrt{\frac{igt^2}{4z}}\, M\left(-\alpha + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{igt^2}{4z}\right). \qquad (13.16)$$

任意常数 A_1 和 A_2 可以是复数。

只依赖于一个任意常数 α 的波动问题的特解(13.15)和(13.16)，在用 $t - t_0$ 代替 t，用 $z - z_0$ 代替 z 之后可以推广。常数 t_0 和 z_0 (z_0 为实数)决定初始时刻的改变和与流体运动平面中坐标原点相对应的奇点之位移。从所得到的解出发，可以通过求和(叠

1) 参看 Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, 1949.

加）而构成更一般的解；在求和时常数 A_1 和 A_2 可以认为是参数 α, t_0 和 z_0 的函数。

由公式（13.15）和（13.16）容易看出函数 w_1 和 w_2 的下述性质。

在 $t=0$ 时有：

$$w_1(z, 0, \alpha) = z^\alpha, \quad \left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \tag{13.17}$$

和

$$w_2(z, 0, \alpha) = 0, \quad \left(\frac{\partial w_2}{\partial t}\right)_{t=0} = \sqrt{\frac{ig}{4}} \cdot z^{\alpha-\frac{1}{2}}. \tag{13.18}$$

现在我们来看其特征函数是由下列公式确定的波动：

$$\Omega_1(z, t) = -\frac{e^{\pi i\alpha}}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0)w_1(z - x_0, t, \alpha)dx_0, \tag{13.19}$$

$$\Omega_2(z, t) = -\frac{2e^{\pi i}\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{ig}\cdot \pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x_0)w_2(z - x_0, t, \alpha)dx_0, \tag{13.20}$$

其中 $f(x_0)$ 和 $F(x_0)$ 是某些这样的函数，对于它们公式(13.19) 和 (13.20) 中的积分收敛。

在 $t=0$ 时有：

$$\Omega_1 = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)dx_0}{(x_0 - z)^{-\alpha}}, \quad \frac{\partial\Omega_1}{\partial t} = 0, \tag{13.21}$$

$$\Omega_2 = 0, \quad \frac{\partial\Omega_2}{\partial t} = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(x_0)dx_0}{(x_0 - z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}. \tag{13.22}$$

方程(13.21)中的第一式在 $\alpha = -1$ 和 $z = x$ 时给出：

$$\Omega_1(x) = \Phi_1 + i\Psi_1 = f(x) - \frac{1}{\pi i}\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)dx_0}{x_0 - x}$$

（其中 v. p. 表示取主值）。

因此，如果 $f(x)$ 为实数，则在 $\alpha = -1$ 时公式(13.19) 给出对于下列初始条件的波动问题的解：

当 $t=0$ 时

$$\Phi_1(x_0) = f(x), \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = 0.$$

对于函数 $\Psi_1(x, y)$ 得到下列初始条件：

当 $t = 0$ 时

$$\Psi_1(x, 0) = \frac{1}{\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_0)dx_0}{x_0 - x} \text{ 和 } \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0.$$

如果 $f(x)$ 为纯虚数，则初始条件具有类似的形式，只是函数 Φ_1 和 Ψ_1 的作用对换。

在 $\alpha = -1/2$ 的情况下，方程(13.22)中的第二式当 $t = 0$ 和 $z = x$ 时给出：

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} = \frac{\partial(\Phi_2 + i\Psi_2)}{\partial t} = F(x) - \frac{1}{\pi i} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x_0)dx_0}{x_0 - x}.$$

由此可见，如果 $F(x)$ 为实数，则得到下列初始条件：

当 $t = 0$ 和 $y = 0$ 时

$$\Phi_2 + i\Psi_2 = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = F(x),$$

这种情形柯钦曾研究过。现在我们来阐明当 $\alpha \neq -1, -1/2$ 时的一般情况下的初始条件的特性。

我们来看函数 $\Omega_1(z, t)$ 的初始条件。我们有：

$$\Omega_1(z, 0) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_0 - z)^{\alpha} f(x_0)dx_0.$$

如果 $\alpha > 0$ 且为整数，则显然 $\Omega_1(z, 0)$ 为 α 次多项式。一般地说，如果 $\alpha > 0$，则当 $z \to \infty$ 时函数 $\Omega_1(z, t)$ 将趋于无穷大，所以，当 $\alpha \geqslant 1$ 时，关于 $y \to -\infty$ 时速度趋于零的条件不满足。

如果 $\alpha = -(1 + s)$，其中 s 为正整数，则我们有：

$$\Omega_1(z, 0) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_0)dx_0}{(x_0 - z)^{1+s}}. \tag{13.23}$$

假定积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0)dx_0$ 有限[1]，并引进函数

1) 显然，在(13.24)中的积分发散的许多情况下 $\Omega_1(z)$ 的表达式可以有意义.

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)}{x_0 - z}\,dx_0. \tag{13.24}$$

在对函数 $f(x_0)$ 所作的假定下，容易看出下列关系式成立：

$$\frac{d^s\omega}{dz^s} = \omega^{(s)}(z) = \Gamma(s+1)Q_1(z, 0), \tag{13.25}$$

$$\omega(z) = \Gamma(s+1)\int_{-i\infty}^{z} dz_s \int_{-i\infty}^{z_s} dz_{s-1} \cdots \int_{-i\infty}^{z_2} Q_1(z_1)dz_1$$

$$= \int_{-i\infty}^{z} (z-u)^s Q_1'(u)du. \tag{13.26}$$

因此，为确定 $f(x)$ 我们有关系式

$$\int_{-i\infty}^{x} (x-u)^s Q_1'(u)du = f(x) - \frac{1}{\pi i}\,\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)dx_0}{x_0 - x}. \tag{13.27}$$

于是，由 $s > 0$ 为整数情况下的公式 (13.23) 和 (13.24) 我们导出了方程(13.27)。对于任何实数 $s > -1$，此关系式也仍然正确。

实际上，由 (13.23) 有：

$$Q_1'(u) = -\frac{s+1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)dx_0}{(x_0 - u)^{s+2}}.$$

乘以 $(z-u)^s$ 并积分，得：

$$\int_{-i\infty}^{z} Q_1'(u)(z-u)^s du = -\frac{s+1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0)dx_0 \int_{-i\infty}^{z}\frac{(z-u)^s du}{(x_0 - u)^{s+2}}.$$

对里面的一重积分作如下变量代换：

$$u = x_0 + (z - x_0)\frac{1}{\lambda};$$

由此

$$x_0 - u = \frac{x_0 - z}{\lambda}, \quad z - u = \frac{x_0 - z}{\lambda}(1-\lambda),$$

$$du = (x_0 - z)\frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

代入积分，得：

$$\frac{1}{x_0 - z}\int_0^1 (1-\lambda)^s d\lambda = \frac{1}{(s+1)(x_0 - z)}.$$

利用这一结果，求得：

$$\int_{-i\infty}^{z}(z-u)^{s}\Omega_1'(u)du=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)dx_0}{x_0-z}.$$

由此，当 $z\to x$ 时就得出公式(13.27)。

公式(13.25)可以推广到 s 是分数的情形，只要按公式

$$\omega^{s}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-s)}\int_{-i\infty}^{z}(z-u)^{-s}\omega'(u)du$$

来定义分数导数 $\omega^{s}(z)$。事实上，

$$\omega^{s}(z)=-\frac{1}{\pi i\Gamma(1-s)}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_0)dx_0\int_{-i\infty}^{z}\frac{(z-u)^{-s}du}{(x_0-u)^{2}}.$$

为了计算里面的一重积分，我们作变量代换：

$$u=x_0+(z-x_0)\frac{1}{\lambda},$$

代换后得：

$$\int_{-i\infty}^{z}\frac{(z-u)^{-s}}{(x_0-u)^{2}}du=\frac{1}{(x_0-z)^{s+1}}\int_{0}^{1}\lambda^{s}(1-\lambda)^{-s}d\lambda$$
$$=\frac{B(s+1,1-s)}{(x_0-z)^{s+1}};$$

因为

$$B(s+1,1-s)=\frac{\Gamma(s+1)\Gamma(1-s)}{\Gamma(2)}\text{ 和 }\Gamma(2)=1,$$

所以

$$\omega^{s}(z)=-\frac{\Gamma(s+1)}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x_0)dx_0}{(x_0-z)^{s+1}}=\Gamma(s+1)\Omega_1(z).$$

§14. 连续介质的空间自模拟运动

在§§12和13中的不可压缩流体运动的问题提法(曾导致了独立变量数目的减少)可以扩充和推广到更一般的情形。

如果在连续介质的运动中所有的无量纲特征量只依赖于组合

$$\frac{x}{bt^{\beta}},\quad\frac{y}{bt^{\beta}},\quad\frac{z}{bt^{\beta}},$$

其中 x,y,z 为笛卡尔坐标，t 为时间，而 b 为具有量纲 $LT^{-\beta}$ 的

常数，则我们称这样的运动为相似中心位于坐标原点的自模拟运动。

容易指出具有自模拟性的问题的一般特性。显然，为了具有自模拟性，满足下述要求就够了：由附加条件，其中包括边界条件或初始条件，所给定的有量纲主定参量组，包含不多于两个具有异于长度和时间的独立量纲的常数[1]。

换句话说，主定参量组列出如下：

$$a, b, x, y, z, t, \alpha_1, \alpha_2, \cdots,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 为有量纲常数的无量纲组合，其数目可以是任意的，而常数 a 和 b 有下列量纲公式：

$$[a] = \mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s, \quad [b] = \mathrm{LT}^{-\delta},$$

并且 $\delta \neq 0$，而 k 和 s 可以是任意的。不失一般性，常数 a 总可以用常数 $A = ab^{\omega/\delta}$ 来代替，A 具有量纲

$$[A] = \mathrm{ML}^{\omega-3},$$

其中 ω 可以是任意的。

一般地说，要使连续介质的运动有自模拟性，必须在问题提法中不包含特征长度和特征时间（楔、锥等等）。

我们列举几个自模拟运动的例子。

(1) 关于初始静止的、无穷大质量的不可压缩流体，被一个保持着自身形状的几何相似性的从一点开始膨胀的内空腔向四周推动的问题。

设流体内边界——空腔——的给定的径向速度由如下形式的公式确定：

$$v(t, \theta, \varphi) = bf(\theta, \varphi)t^{\delta-1},$$

其中 θ 和 φ 为极坐标，b 为常数：$[b] = \mathrm{LT}^{-\delta}$；在 $\delta > 0$ 时内表面连续而相似地从原点扩张。不可压缩流体的受扰运动是位势流动，并由下列参量组确定：

$$\rho, b, r, \theta, \varphi, t, f(\theta, \varphi);$$

---

1) 这里是指方程中不含有附加的有量纲常数的情况. ——译者注

其中 ρ 为密度；初始压力和无穷远处的压力 p_0 是无关紧要的，因为可以只考虑压力差 $p - p_0$.

显然，在此情况下对于速度势有下列形式的公式：

$$\varphi = rbt^{\delta-1}\Phi\left(\theta, \phi, \frac{r}{bt^{\delta}}\right).$$

可以换一种方式提出问题，即可以不给出内空腔的扩张速度的规律，而给出作用在空腔表面上的压力规律：

$$p - p_0 = \rho b^2 t^{2(\delta-1)} F(\theta, \phi).$$

在第四章的 §11 中我们将讨论一个这样的问题。

(2) 在讨论带有初始的为平面自由面的流体运动时，如果膨胀的自由面的对称中心位于该平面中，则上述关于流体运动的自模拟性的结论保持有效。于是，我们可以把锥和楔的入水问题推广到任意的、非刚性的、相似地改变形状的表面排挤以自由面为界的流体的情形。

例如，可以研究楔或锥以随时间按幂次律变化的速度入水时流体的自模拟运动。

如果考虑流体的重量，则在主定参量组中必须加进重力加速度。为了保持自模拟性必须使 $[g] = [b]$，即 $\delta = +2$.

因此，在楔或锥匀加速地进入有重量的不可压缩流体时，流体的受扰运动将是自模拟的。

带有自由面的流体运动的自模拟性在下述情况下也保持：在初始时刻自由面呈锥形或楔形，并且相似中心与锥或楔的顶点重合。

作为弹性介质的自模拟解的例子，我们举出关于在弹性半空间——以一平面为界，在平面上某一点作用一给定的集中力 P——中应力与应变分布的布辛涅斯克问题。

在静力学问题中，弹性介质由杨氏模量 E 和泊松比 σ 完全确定。外力由其量值 P 和确定其方向的一些不名数参量决定。

取极坐标 r, θ，原点取在下述平面内的力的作用点上，该平面垂直于边界并包含力矢量。主定参量组为

$$P, E, r, \theta, \psi, \sigma, \theta_0,$$

其中 θ_0 为力 P 的倾角。由于问题的线性性质，所有的应力与应变都线性地依赖于 P，所以对 P 的依赖关系是事先知道的；所有的量对 E 和 r 的依赖关系可以从量纲分析立即求出。结果只有两个自变量 θ 和 ψ. 在轴对称的情况下（力 P 垂直于边界平面），自变量 ψ 消失，所以，通过对一个常微分方程积分就容易得到问题的整个解。

在某些情况下（这些情况在每一具体的事例中是显而易见的），上述考虑可以推广到具有不同性质的可压缩介质的不定常运动问题。

第三章　在粘性流体流动理论和湍流理论方面的应用

§1. 粘性流体中涡旋的扩散

运用量纲理论在对某些物理问题进行数学求解时可以很有帮助。在本节和以下各节我们将列举量纲理论的这种应用的一些例子。

在流体运动为平面平行运动且流体充满整个平面的假设下，我们来讨论粘性不可压缩流体中涡旋扩散的问题[1]。我们考虑的运动是非定常的。设在初始时刻 $t=0$ 时，除在极点 O 外，流体到处为有位势流动，此极点是环量为 Γ 的无限长直线集中涡旋在运动平面上的迹点。

设运动具有轴对称性。以 Ω 标记流体质点的角速度。

众所周知，沿以 O 为中心的半径为 R 的圆的环量等于

$$\Gamma_R = 2\int_0^R\int_0^{2\pi}\Omega r\,dr\,d\theta = 4\pi\int_0^R r\Omega(r)\,dr. \tag{1.1}$$

对于任意的圆，包括对于无论多小的圆，在初始时刻我们有：

$$\Gamma_R = \Gamma. \tag{1.2}$$

在所讨论的情况下涡旋传播的方程有如下形式：

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right), \tag{1.3}$$

这里 ν 为运动粘性系数（$\nu = \mu/\rho$）. 问题归结为确定作为半径 r 和时间 t 的函数的量 Ω.

从问题的提法可知

1) 见 Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. II, М., Физматгиз, 1963. 在此书中有对这一问题的详细描述和利用量纲考虑对它的求解.

$$\Omega = f(\Gamma, \nu, r, t).$$

从方程（1.3）和初始条件的线性性质可知，Ω 正比于 Γ，即

$$\Omega = \Gamma f_1(\nu, r, t). \tag{1.4}$$

无量纲组合 $\Omega\nu t/\Gamma$ 应该表达为由有量纲参数 ν、r、t 组成的唯一的独立无量纲量 $r^2/\nu t = \xi$ 的函数。因此

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\nu t}\phi(\xi). \tag{1.5}$$

从公式（1.5）显然可见，具有两个独立变量 r 和 t 的函数 Ω 的偏微分方程（1.3），可以化为一个独立变量 ξ 的常微分方程。

将（1.5）中 Ω 的表达式代入方程（1.3），我们得到：

$$\phi(\xi) + \xi\phi'(\xi) + 4[\phi'(\xi) + \xi\phi''(\xi)] = 0.$$

将其积分，得到：

$$\xi\phi + 4\xi\phi' = C.$$

对于 $\phi(0)$ 和 $\phi'(0)$ 为有限值的解，常数 C 等于零。将下式积分

$$4\frac{d\phi}{d\xi} + \phi = 0,$$

我们得到：

$$\phi = Ae^{-\frac{\xi}{4}}.$$

对于涡旋 Ω 之值，这给出：

$$\Omega = \frac{\Gamma}{\nu t}Ae^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

常数 A 由初始条件确定。沿半径为 R 的圆的环量等于：

$$\Gamma_R = 4\pi\frac{A\Gamma}{\nu t}\int_0^R re^{-\frac{r^2}{4\nu t}}dr = 8\pi A\Gamma(1 - e^{-\frac{R^2}{4\nu t}}). \tag{1.6}$$

当 $t = 0$ 时，对于任意的 $R > 0$，我们有：

$$\Gamma_R = 8\pi A\Gamma.$$

初始条件 $\Gamma_R = \Gamma$ 给出：

$$A = \frac{1}{8\pi}.$$

问题的最终解为下式：

$$\Omega = \frac{\Gamma}{8\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \tag{1.7}$$

用 $v(r, t)$ 记流体质点的速度. 流体运动具有轴对称性，同时流体质点的速度方向垂直于从极点 O 引向所考察点的矢径.

考虑到速度矢量的方向，我们得到 Γ_R 与 v 的如下关系：

$$\Gamma_R = 2\pi r v.$$

利用公式(1.6)，我们得到速度沿半径 r 和随时间 t 的分布规律：

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}).$$

在 $t = 0$ 时得到对应于理想流体中点涡的速度分布规律. 在 $r > 0$ 和 $t = 0$ 时，流体运动为位势流且无涡旋；在 $r > 0$ 和 $t > 0$ 时，流体运动在每一点都是有旋的. 式(1.7)给出涡旋的传播(扩散)规律. 这一公式表明，涡旋值在每一点上随时间从零增长至最大值 $\Gamma/2\pi r^2 e$，然后复趋向于零.

由于方程 (1.3) 是线性的，则从所得的点涡传播的解出发，可以用叠加方法建立任意初始速度分布下的对称运动问题的解.

§2. 粘性不可压缩流体运动方程的精确解

我们来考察充满整个空间的粘性不可压缩流体的定常运动.

纳维尔-斯托克斯方程与连续性方程可以写为如下形式：

$$\left.\begin{aligned} v\Delta v &= -\operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} - U\right) + \nu\Delta v, \\ \operatorname{div} v &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

以下利用球坐标系. 自变量和主定量为：

$$r, \theta, \lambda, \nu,$$

其中 r 为所考察的点到极点的距离，θ 为方位角，λ 为经度，ν 为运动粘性系数. 待求量为速度的投影 v_r, v_θ, v_λ 和除以密度的动压力，它等于 $p/\rho - U$.

我们来研究方程(2.1)的由参数 r, θ, λ, ν 和另一仅有的量纲

常数 A 所完全确定的解。令 A 的量纲公式具有如下形式

$$[A] = \mathrm{L}^p\mathrm{T}^q,$$

这里 p 和 q 为常数。

在这一假设下，显然，由上面引入的量组成的所有无量纲组合将只是以下三个无量纲参量的函数：

$$\theta,\ \lambda,\ \pi = \frac{r^{p+2q}\nu^{-q}}{A}.$$

这时待求函数可以表示如下：

$$v_r = \frac{\nu}{r} f(\pi, \lambda, \theta),$$

$$v_\theta = \frac{\nu}{r} \varphi(\pi, \lambda, \theta),$$

$$v_\lambda = \frac{\nu}{r} \psi(\pi, \lambda, \theta),$$

$$U - \frac{p}{\rho} = \frac{\nu^2}{r^2} F(\pi, \lambda, \theta).$$

可以将方程(2.1)的最一般的解表达为这种形式来加以研究.

如果我们假设

$$p + 2q = 0,$$

则自变量的数目将减少.

这条件意味着，常数 A 的量纲是运动粘性系数 ν 的量纲的某次幂。

除这一假设外，我们还假设，所研究的运动具有轴对称性，因而变量 λ 不重要。

从所作的假设可推知，对于待求量，以下公式应成立：

$$v_r = \frac{\nu}{r} f(\theta), \qquad v_\theta = \frac{\nu}{r} \varphi(\theta),$$

$$v_\lambda = \frac{\nu}{r} \psi(\theta), \quad U - \frac{p}{\rho} = \frac{\nu^2}{r^2} F(\theta). \tag{2.2}$$

这些公式建立了速度场和压力场对于变量 r 的依赖关系。在此情况下从方程 (2.1) 对于四个函数 f、φ、ψ、F 得到非线性常微

分方程组：

$$\left.\begin{aligned} &f''+f'(\operatorname{ctg}\theta-\varphi)+f^2+\varphi^2+\psi^2-2F=0,\\ &\varphi\varphi'-\psi^2\operatorname{ctg}\theta-f'-F'=0,\\ &\psi''-\varphi\psi'-\varphi\psi\operatorname{ctg}\theta+\psi'\operatorname{ctg}\theta-\frac{\psi}{\sin^2\theta}=0,\\ &f+\psi'+\varphi\operatorname{ctg}\theta=0. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

消去函数 F 并经简单变换，得到：

$$\left.\begin{aligned} &f'''+2\psi(\psi'+\psi\operatorname{ctg}\theta)+(f'\operatorname{ctg}\theta)'-(\varphi f')'\\ &\quad+2ff'+2f'=0,\\ &\varphi(\psi'+\psi\operatorname{ctg}\theta)=(\psi'+\psi\operatorname{ctg}\theta)',\\ &f=-(\varphi'+\varphi\operatorname{ctg}\theta). \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

这方程组的通解依赖于六个任意常数。

在研究方程组 (2.4) 的解之前，我们指出所讨论的粘性流体运动的一些一般性质。

流线在子午面上的投影的微分方程可以写为

$$\frac{dr}{v_r}=r\frac{d\theta}{v_\theta}\text{ 或 }\frac{dr}{f(\theta)}=r\frac{d\theta}{\varphi(\theta)},$$

因而

$$\ln\frac{r}{a}=\int\frac{f(\theta)d\theta}{\varphi(\theta)},$$

这里 a 是积分常数。根据方程组 (2.4) 的最后一个方程得到

$$\frac{r}{a}=\frac{1}{\varphi\sin\theta}. \tag{2.5}$$

从量纲理论的一般考虑还可以从方程(2.5)直接推出，不同的流线彼此相似。

用 Q 记流体的体流量，用 J 记通过封闭表面 S 的动量的体通量，即

$$Q=\int_S v_n d\sigma,\qquad J=\int_S \mathbf{v}v_n d\sigma.$$

Q 与 J 的量纲由下式给出

$$[Q]=L^3T^{-1},\quad [J]=L^4T^{-2}.$$

在将表面 S 向极点收缩为一点时我们得到，量 Q 和 J 只可能依赖于系数 ν 和常数 A，后者的量纲可以通过 ν 的量纲表出。由于 Q 和 ν 的量纲是相互独立的，则很显然，流量 Q 或者等于零，或者等于无穷大。J 的量纲可以通过系数 ν 的量纲表出，因此量 J 可以为有限值。

在平面平行运动中情况就不同了。如果对于平面平行运动，整个平面上的速度场只依赖于点的坐标和一些其量纲依赖于 ν 的量纲的常数，则在极坐标中，有与式(2.2)类似的公式成立。（在这种情况下，r 是运动平面中的矢径.）

对于平面平行运动，流量和动量通量可以由下式确定：

$$Q = \int_L v_n dS, \qquad J = \int_L v v_n dS,$$

这里，L 是包围坐标原点的某一封闭曲线。Q 和 J 的量纲在这种情况下由下式给出：

$$[Q] = L^2T^{-1}, \quad [J] = L^3T^{-1}.$$

因此，所讨论的这类平面运动可以由有限的流量表征，而相应的冲量将等于零或无穷大。

这一情况使哈默耳（Hamel）和其他许多作者在关于流体在两平面间的夹角内的运动问题中，求得了纳维尔-斯托克斯方程的精确解，其做法是将方程化为常微分方程[1]。

现在我们来求解方程组(2.4)。(2.4)中的第一个方程可以表示为

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\phi'}{\sin\theta}\right)'\right] = \frac{(\phi^2\sin^2\theta)'}{\sin^2\theta}, \tag{2.6}$$

这里

$$\phi = \left(\varphi' - \frac{1}{2}\varphi^2\right)\sin^2\theta - \varphi\sin\theta\cos\theta. \tag{2.7}$$

从方程(2.6)可以导出如下积分：

1) 这些精确解在下书中做了详细叙述：Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. II, М., Физматгиз, 1963.

$$\phi^2\sin^2\theta - \sin\theta\left(\frac{\phi'}{\sin\theta}\right)' + 2\phi + 2\operatorname{ctg}\theta\cdot\phi' = D, \quad (2.8)$$

这里D是积分常数。

函数 $\phi(\theta)$决定了与子午面垂直的速度分量的分布。

不难看出，当 $\phi = 0$ 或者 $\phi\sin\theta = \text{const}$ 时，方程组(2.4)对于确定 f 和 φ 具有相同的关系。

条件 $\phi = c/\sin\theta$ 给出 $v_1 = cv/r\sin\theta$；v_1 的速度场对应于与对称轴重合的直线涡。因此，如果我们对于所讨论类型的任何速度场附加上一直线涡的速度场，运动方程将满足。

如果我们取

$$\psi\sin\theta = \text{const}, \quad (2.9)$$

则可将方程(2.6)积分三次，而后，问题的求解归结为积分黎卡提(Riccati)方程：

$$\left(\varphi' - \frac{1}{2}\varphi^2\right)\sin^2\theta - \varphi\sin\theta\cos\theta = M\cos 2\theta + N\cos\theta + R, \quad (2.10)$$

这里 M，N，R 是任意积分常数[1]。

如果设 $M = N = R = 0$，则方程(2.10)很容易积分并给出：

$$\varphi = \frac{2\sin\theta}{A + \cos\theta}, \text{ 从而 } f = -2 + \frac{2(A^2-1)}{(A+\cos\theta)^2}, \quad (2.11)$$

这里A是无量纲积分常数。朗道[2]研究了解(2.11)。

不难验证，对于这个解，当 $|A| > 1$ 时，流经包围坐标原点的表面的流体流量等于零，而当 $|A| < 1$ 时此流量为无穷大。

对于对称轴上的动量分量，其通过以坐标原点为中心的任意球面的通量，下式成立：

---

1) Н. А. Слёзкин 用另外的方法得到了方程(2.10)。见 Слёзкин Н. А., Об одном случае интегрируемости полных дифференциальных уравнений движения вязкой жидкости. Учёные записки МГУ, вып. 2, 1934, стр. 89—90.

2) Ландау Л. и Лифшич Е., Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953, стр. 108.

$$J = \rho v^2 \left[8(A^2-1)\ln\frac{A-1}{A+1} + 8A - \frac{32A}{3(A^2-1)} + \frac{8A(3A^2-1)}{A^2-1} \right]. \qquad (2.12)$$

因此，冲量 J 的值不依赖于球的半径，并给出坐标原点处奇点的力学特征。对于这种流动，流线方程有如下形式：

$$\frac{r}{a} = \frac{A+\cos\theta}{2\sin^2\theta}.$$

对于 $A > 1$ 流线形状示于图 20。

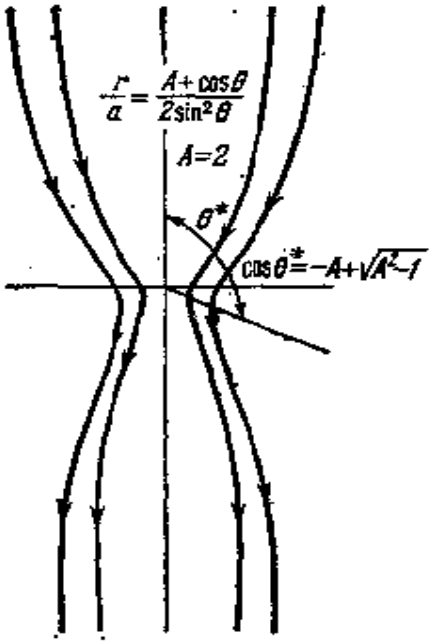


图 20　粘性流体中强度为零、冲量为有限的源的流线

当趋向于无限远时，流线将具有抛物线的性状。当沿流线运动时，矢径 r 在 θ 的某一值 $\theta = \theta^*$ 处达到最小值，θ^* 之值由下式决定：

$$\cos\theta^* = -A + \sqrt{A^2-1}.$$

相应的运动可以看作是充满整个空间的粘性流体由于坐标原点处的无穷细的射流（射流从无穷细的管子的一端带着有限冲量向 x 轴方向射出）引起的运动。

可以直接指出黎卡提方程 (2.10) 对应于常数 M，N，R 取某些特定值时的一系列解。譬如，当 $R = 1$，$N = 0$ 和 $M = \frac{1}{2}$ 时我们有解

$$\varphi = -\left(\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{cth}\frac{\theta+\theta_0}{2}\right),$$

这里 θ_0 为任意常数。而当

$$N = 0, \quad M = \frac{1}{4} - m^2 \text{ 和 } R = \frac{9}{4} - (m+1)^2$$

时，我们有解

$$\varphi = (2m-1)\operatorname{ctg}\theta - \frac{2\sin^{2m}\theta}{\int \sin^{2m}\theta d\theta}.$$

在一般情况下，黎卡提方程（2.10）可以借助于超几何函数求解[1]。

利用代换

$$\varphi = -2\frac{\gamma'(\theta)}{\gamma(\theta)}, \quad \mu = \cos^2\frac{\theta}{2},$$

可将方程（2.10）化为

$$\frac{d^2y}{d\mu^2} + \frac{\frac{M+R-N}{2} + (N-4M)\mu + 4\mu^2 M}{4\mu^2(\mu-1)^2}y = 0. \quad (2.13)$$

这方程借助超几何函数很容易积分，其通解可以写为[2]：

$$Y(\theta) = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\gamma}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{1+\alpha+\beta-\gamma}\left\{PF\left(\alpha,\beta,\gamma,\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right.$$
$$+ Q\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^{1-\gamma}$$
$$\left.\cdot F\left(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right\}, \quad (2.14)$$

这里常数 α，β，γ 与 M，N和 R 通过下列公式相联系：

$$M = \frac{1-(\alpha-\beta)^2}{4},$$
$$N = 1-(\alpha+\beta)^2 + 2\gamma(\alpha+\beta-1),$$
$$R = \frac{3[1-(\alpha+\beta)^2]}{4} - \alpha\beta - 2\gamma^2 + 2\gamma(\alpha+\beta+1).$$

可以取 α，β，γ 代替 M，N，R 作为任意常数。

---

1) 见 Яцеев В. И., Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости, ЖЭТФ, т. 20, вып, 11, 1950, стр. 1031.

2) 如果 γ 为整数，则解也可以写成稍微不同的形式。为此，可以利用谢多夫书中提出的形式下的超几何方程的解(Седов Л. И., Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М., «Наука», 1966).

所得到的 φ 的解依赖于四个任意常数：三个常数 α、β、γ 和比值 P/Q.

当 $M = N = R = 0$ 时方程 (2.13) 退化为方程 $y''(\mu) = 0$，这方程只有一个 $\mu = \infty$ 的正则奇点。上面已考察了相应的解。

如果 $N = -4M = -\frac{4}{3}R$，则在方程 (2.13) 中分母的因式 $(\mu - 1)^2$ 被消去，而只剩下两个正则奇点 $\mu = 0$ 和 $\mu = \infty$. 方程 (2.13) 这时变为欧拉方程

$$\mu^2 \frac{d^2y}{d\mu^2} + My = 0,$$

这方程很容易积分[1]。

§3. 粘性流体绕流平板时的边界层

我们来讨论不可压缩粘性流体对无穷薄平板的绕流。令在平板前方远处流体以常速 v_0 作平移运动。平板为无穷长且沿流动平行于速度 v_0 放置。这是平面问题；运动是定常的；流体充满平板外的整个平面。粘性流体运动的这一问题是最简单的，但尽管如此，由于数学上的巨大困难用纳维尔-斯托克斯方程求不出精确解.我们借助普朗特方程来分析这一问题，此方程是利用了一些近似从粘性流体的一般运动方程得到的[2]。

---

1) 与讨论过的粘性流体运动相类似，不可压缩导电流体的子午面运动也有一族自模拟运动，它为一个量纲常数 $[A] = L^pT^qM$ (当 $p + 2q + 3 = 0$ 时)所决定；见 Гродзовский Г.Л., Дюкалов А. Н., Токарев В.В. и Толстых А. И., Осесимметричное меридиональное течение проводящей жидкости. Выравнивание параметров закрученного потока вязкой жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 1960, стр. 41—46.

2) Prandtl L., Ueber Flüssigkeitsbewegung bei sehr Kleiner Reibung. Verhandl. III Intern. Math. Kongr. in Heidelberg (1904). Leipzig, 1905, S. 484—491 (Ges. Abhand)., Bd. 2, 1961, S. 575—584 (俄译：Движение жидкости с очень малым трением. 在下书中：Прандтль Л., Теория несущего крыла, ч. I, М., ЦАГИ, 1931, стр. 5—11)；还参看：Седов Л. И., Механика сплошной среды. Т.2, изд. 3-е. М., «Наука», 1976.

在我们讨论的情况下普朗特边界层方程具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}&=0, \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

这里 u 和 v 是流体质点速度在坐标轴上的投影，而 ν 是运动粘性系数。令 x 轴沿平板指向流动方向，y 轴垂直于平板。除了方程(3.1)外，为确定 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 还有边界条件：

$$\left.\begin{aligned} &\text{当 } x>0,\ y=0 \text{ 时},\ u=v=0;\\ &\text{当 } y=\pm\infty \text{ 时},\quad u=U_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

主定参量为：

$$U_0,\ \nu,\ x,\ y.$$

由于平板为一平面且为无限长，所以无法指出特征的线性尺度。从量纲理论的一般考虑可知，所有的无量纲量是如下两个无量纲组合的函数：

$$\frac{y}{x},\quad \frac{y}{\sqrt{\nu x/U_0}}.$$

因此，对于所讨论的问题以下两式是正确的：

$$u=U_0 f\left(\frac{y}{x},\ \frac{y}{\sqrt{\nu x/U_0}}\right), \tag{3.3}$$

$$v=\sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}\,\phi\left(\frac{y}{x},\ \frac{y}{\sqrt{\nu x/U_0}}\right). \tag{3.4}$$

现在我们来证明，由于方程(3.1)的特性，式(3.3)与(3.4)中的第一个参数 y/x 是不重要的。为此，我们做如下的变量变换：

$$x=l\xi,\quad y=\sqrt{\frac{\nu l}{U_0}}\,\eta,\quad u=U_0 u_1,\quad v=\sqrt{\frac{\nu U_0}{l}}\,v_1, \tag{3.5}$$

这里 l 是某一大于零的常数.如果我们令常数 l 具有长度的量纲，则量 $\xi,\ \eta,\ u_1,\ v_1$ 可以视为无量纲量。

在按式(3.5)作变量置换后，方程(3.1)有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} u_1\frac{\partial u_1}{\partial \xi}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial \eta}&=\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2},\\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi}+\frac{\partial v_1}{\partial \eta}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

在新变量中，边界条件（3.2）有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} &\text{当 } \xi>0,\ \eta=0 \text{ 时}, \quad u_1=v_1=0;\\ &\text{当 } \eta=\pm\infty \text{ 时}, \quad u_1=1. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

方程（3.6）和边界条件（3.7）可以看做是边界层问题在无量纲形式下的表述。这一问题的解不可能依赖于量 $U_0 l/\nu=\mathrm{R}$，这量根本不在方程（3.6）和边界条件(3.7）中出现[1]。另一方面，一般公式（3.3）和(3.4)表明：

$$u_1=\frac{u}{U_0}=f\left(\frac{\eta}{\xi\sqrt{\mathrm{R}}},\frac{\eta}{\sqrt{\xi}}\right), \tag{3.8}$$

$$v_1\sqrt{\xi}=\frac{v}{\sqrt{\nu U_0/x}}=\phi\left(\frac{\eta}{\xi\sqrt{\mathrm{R}}},\frac{\eta}{\sqrt{\xi}}\right). \tag{3.9}$$

由于解不应依赖于R，则由此推出，第一个自变量 y/x 不能在式（3.8），(3.9)的右端出现。

这样，我们证明了，所提出的问题的解应具有如下形式[2]：

$$u=U_0 f\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right), \tag{3.10}$$

$$v=\sqrt{\frac{\nu U_0}{x}}\,\phi\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}\right). \tag{3.11}$$

现在引入新的变量

---

1) 这一情况是普朗特方程(3.1)的性质。如果将变换(3.5)用于纳维尔-斯托克斯方程，则结果我们得到包含有参数R的无量纲方程，因此，以下的结论用于纳维尔-斯托克斯方程是不对的。

2) 在下书中用另外的方法给出了有关式(3.10)的正确性的证明：Лойянский Л. Г., Аэродинамика пограничного слоя, Л. М., Гостехиздат, 1941, стр. 76.

$$\lambda = \frac{\eta}{\sqrt{\xi}} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}},$$

并设 $f(\lambda) = \varphi'(\lambda)$. 将 u 和 v 代入连续性方程，我们将函数 $\phi(\lambda)$ 通过 φ 表达为

$$\phi'(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda\varphi''(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda\varphi' - \varphi)'.$$

利用这一等式，可以将式 (3.10) 与 (3.11) 写为如下形式：

$$u = U_0\varphi'(\lambda), \tag{3.10'}$$

$$v = \sqrt{\frac{\nu U_0}{x}} \cdot \frac{1}{2}[\lambda\varphi'(\lambda) - \varphi(\lambda)]. \tag{3.11'}$$

将所得的 u 和 v 的表达式代入方程 (3.1) 的第一式，我们得到函数 $\varphi(\lambda)$ 的三阶常微分方程：

$$2\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0. \tag{3.12}$$

从问题的边界条件 (3.2)，对于满足方程(3.12) 的待求函数 $\varphi(\lambda)$ 得到如下的边界条件：

$$\varphi'(0) = \varphi(0) = 0 \text{ 及 } \varphi'(\infty) = 1. \tag{3.13}$$

非线性微分方程 (3.12) 在边界条件 (3.13) 下的解可以近似地得到[1]. 在特普费尔 (Töpfer) 给出的近似解法中利用了方程 (3.12) 的解的一般性质，该性质叙述如下.

如果 $\varphi_0(\lambda)$ 是方程 (3.12) 的某一个解，则函数

$$\varphi(\lambda) = a\varphi_0(a\lambda),$$

(其中 a 是任意常数) 也是方程 (3.12) 的解. 通过直接验算容易看出这一性质是正确的.

取满足以下边界条件的方程 (3.12) 的解作为初始解 $\varphi_0(\lambda)$：

$$\varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0 \text{ 和 } \varphi_0''(0) = 1.$$

---

1) Blasius H., Grenzschichten in Flüssigkeiten mit Kleiner Reibung. Z Math. und Phys., Bd. 56, Ht. 1. 1908. S. 1—37; Töpfer K., Bemerkung zu dem Aufsatz von Blasius «Grenzchichten in Flüssigkeiten mit Kleiner Reibung». Z. Math. und. Phys., Bd. 60, 1912, S. 397—398.

函数 $\varphi_0(x)$ 可以用通常的近似方法建立。通过近似解可以算出极限

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\varphi_0'(\lambda)=K.$$

数值计算给出 $k=2.0854$. 由公式

$$\varphi(\lambda)=\alpha^{1/3}\varphi_0(\alpha^{1/3}\lambda)$$

给出的方程 (3.12) 的解满足边界条件：

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0 \text{ 和 } \varphi''(0)=\alpha$$

且

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\varphi'(\lambda)=k\cdot\alpha^{2/3}.$$

从而很明显，为了得到所求的解只需令：

$$\alpha=\frac{1}{k^{3/2}}=0.332.$$

确定了 $\alpha=\varphi''(0)$ 以后，利用公式(3.10')就容易得到平板所受的摩擦阻力.

在平板上，对于摩擦应力 τ 我们有：

$$\tau=\mu\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=0}=\mu U_0\frac{\varphi''(0)}{\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}}}=0.332\sqrt{\frac{\rho\mu U_0^3}{x}}. \qquad (3.14)$$

利用此结果，我们计算出宽为 b 长为 l 的一段平板的阻力为：

$$W=b\int_0^l\tau dx=0.664b\sqrt{\rho\mu lU_0^3}\ . \qquad (3.15)$$

摩擦应力 τ 和阻力 W 正比于绕流速度的 1.5 次方。

根据关系式 (3.15) 对摩擦系数 c_f 得到如下公式：

$$c_f=\frac{2W}{\rho blU_0^2}=\frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{R}}},$$

这里

$$\mathrm{R}=\frac{U_0 l}{\nu}.$$

在雷诺数值不大的层流绕流状态下，平面光滑平板的实验数

据[1] 与所求出的速度分布律和阻力律相符很好。这里所说的不大的雷诺数值是：

$$R = \frac{U_0 l}{\nu} < 3 \cdot 10^5.$$

在大雷诺数下，上面讨论的层流定常运动是不稳定的。这时发生湍流运动，它将显著改变阻力律和平板附近的速度分布律。

§4. 不可压缩流体的各向同性湍流运动

1. 湍流运动的求平均 自然界中观察到的许多流体运动，以及我们在技术中所遇到的大多数流体运动，其特点是存在着流体的无规则非定常运动，它叠加于流体的基本运动之上，后者可设想为某种统计平均运动。这类流体运动称为湍流运动。

在流体的湍流运动中，流动的每一点上的速度、压力和其它量在某些平均值附近发生着不规则的起伏变化。因此为了研究湍流流动可以合适地利用概率论的概念；这时，力学特征量的瞬时值被视为随机量，而平均值定义为数学期望[2]。但是，更经常将平均值定义为按时间求出的普通平均值。用来进行平均的时间间隔与单个脉动的时间相比应足够大，而如果平均运动是非定常的，则此时间间隔与平均量显著改变的时间相比应足够地小[3]。

压力、速度分量、同一点上或不同相邻点上的速度脉动分量的乘积（所谓速度关联矩）等等的平均值，在很大程度上依赖于湍流掺混的存在，后者有助于把平均值随空间点坐标的变化拉平和光滑化。

---

1) Hansen M., Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte. ZAMM, Bd. 8, Ht 3, 1928, S.185—199, Fage, ARC, R & M, № 1580, 1934.

2) 例如参看：Миллионщиков М. Д., Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости. ДАН СССР, т. 22, № 5, 1939.

3) 关于求平均见：Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, ч. II, Физматгиз, 1963.

经验表明，在大雷诺数下，即在大的速度和大尺度下，流体的定常层流运动变得不稳定，并转变为非定常的湍流运动，后者在许多情况下平均起来也可以是定常运动。

在现代流体力学和气体动力学中，关于流体在有限空间中运动的基本和迫切问题，其中包括物体在流体中运动时的阻力计算问题，是与对湍流运动的研究密切相关的。

有关粘性流体运动的所有理论研究，均以纳维尔-斯托克斯方程适用于真实非定常脉动运动这一前提为出发点。但是，由于湍流运动中流体质点轨迹的极度紊乱、曲折和复杂，以及看来是由于所有的基本函数关系的复杂性，要对这种运动求出纳维尔-斯托克斯方程的解，乃是极其繁重和复杂的问题，它可以与描述大量气体中的个别分子运动的问题相比。因此，如同在气体分子运动论中所做的那样，在流体力学中，流体湍流运动的基本问题也是作为寻求平均量之间的函数关系而提出来的。

平均量的运动方程可以通过对描述运动瞬时状态的量的运动方程求平均而得到。由于运动方程的非线性性质，在求平均后我们得到的未知量的数目大于方程的数目，因为非线性项(例如两个或更多个量的乘积)的平均值是新的未知量[1]。因此，在对不可压缩流体[2]的纳维尔-斯托克斯方程求平均时，对于速度分量，除了平均值[3] $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\bar{u}_3$ 外，还需引入乘积的平均值 $\overline{u_i u_k}$ ($i, k = 1, 2, 3$)。

因此，为了对平均湍流运动进行数学研究，仅有对研究真实运动已足够的流体力学方程，是不够的。所以，平均湍流运动的完整的理论研究只有在某些附加假设的基础上才有可能；这些附加假设的正确性归根结底只有通过实验才有可能确证[4]。

---

1) 关于这点，更详细的讨论参看：Keller L., Ueber die Aufstellung eines Systems von Charakteristiken der atmosphärishen Turbulenz. Ж. геофиз. и метеорол., т. 2, № 3—4, 1925, стр. 275—290.

2) 以下所有的讨论中我们都保留流体不可压缩性的假设.

3) 按照一般习惯，我们将用上方带有横线的字母标记量的平均值.

4) 我们假设，这里指的是关于有限个未知数的数学问题的表述.

湍流运动的许多研究工作的内容就在于研究各种或多或少可能的、简单而自然的假设的正确性，这些假设可以用实验来检验，并且使我们可以从理论上提出和解决有关流体湍流运动的基本问题。

现在关于任意平均湍流运动问题的一般数学提法还不存在，并且一般地说，关于流体和气体的平均湍流运动的数学流变学问题的表述是各种各样的，它们适应于各别的、相当局限的问题类别。

量纲理论方法和关于运动相似性的想法，多次被用来作为研究流体湍流运动的基本方法。

2. 均匀性与各向同性 我们来研究充满整个空间的粘性流体的湍流运动[1]。

每一时刻 t 的运动状态由初始扰动（$t = 0$ 时刻流体的扰动）和流体的惯性和粘性即量 ρ 和 μ 决定。

我们取一组运动学相似的初始扰动。在选定某个特征速度 u_0 和某个具有长度量纲的特征量 l_0 之后，每一个别的扰动状态可以通过给出长度和时间的尺度而确定。

因此，对于一组运动学相似的初始扰动，流体的湍流运动状态由下列参量确定：

$$\rho,\ \mu,\ l_0,\ u_0,\ t,\ x_1,\ x_2,\ x_3,$$

这里 x_1，x_2，x_3 是空间点的坐标[2]。

这样得到的湍流运动的集合包含有动力学不相似的运动。为使两个湍流运动相似，必要和充分条件是雷诺数对于两者具有相同的值：

$$\frac{u_{01}l_{01}\rho_1}{\mu_1} = \frac{u_{02}l_{02}\rho_2}{\mu_2}.$$

对应相似状态的时刻和点的坐标由下式确定：

1) 如果可以忽略边界的影响，以下的叙述也可用于有界空间中或有限流体容积内流体的流动.

2) 各坐标系相对于初始扰动分布作相似的放置.

$$\frac{u_{01}t_1}{l_{01}}=\frac{u_{02}t_2}{l_{02}},\quad \frac{x_{i1}}{l_{01}}=\frac{x_{i2}}{l_{02}}\quad (i=1,2,3).$$

u 和 l 之值由下列形式的函数决定

$$\left.\begin{aligned}\frac{u}{u_0}&=f\left(\frac{u_0t}{l_0},\frac{u_0l_0\rho}{\mu},\frac{x_1}{l_0},\frac{x_2}{l_0},\frac{x_3}{l_0}\right),\\ \frac{l}{l_0}&=\varphi\left(\frac{u_0t}{l_0},\frac{u_0l_0\rho}{\mu},\frac{x_1}{l_0},\frac{x_2}{l_0},\frac{x_3}{l_0}\right).\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

一般地说，对于与流体的一点有关的任何一个无量纲力学特征量，类似形式的公式都是正确的。除了指出的参量外，这些函数还依赖于决定初始扰动分布律的无量纲参量。

在研究湍流运动时，要考察依赖于两点或几点上的运动状态的特征量；这些特征量可能依赖于几个点的坐标。例如，m 个点 $M_1(x_1',x_2',x_3')$，$M_2(x_1'',x_2'',x_3'')$，$\cdots$，$M_m(x_1^m,x_2^m,x_3^m)$ 上速度分量乘积的平均值等于

$$\tau_{k_1k_2\cdots k_m}(M_r,M_s,\cdots,M_d)=\overline{u_{k_1}(M_r)u_{k_2}(M_s)\cdots u_{k_n}(M_d)}$$
$$(k_1,k_2,\cdots,k_n=1,2,3)\tag{4.2}$$

并组成一个张量，对于一组相似的初始扰动，其分量还依赖于 $3m$ 个坐标 $x_i^k(i=1,2,3;k=1,2,\cdots,m)$。下标 $r,s,\cdots,d$ 是号码 $1,2,\cdots,m(m\leqslant n)$ 的某一确定序列。在一般情况下，量 τ 显著地依赖于所有的坐标。

湍流流动称为均匀的，如果每点上的所有平均量都不依赖于点的位置，而那些依赖于几个点的量的平均值只依赖于这几个点之间的相对位置，即只依赖于坐标差 $x_i^p-x_i^q$。在均匀湍流速度场中，函数 (4.1) 不依赖于 x_1/l_0，x_2/l_0，x_3/l_0。在任意两点附近的流体运动的平均特征量相同。显然，在均匀湍流流动情况下，初始扰动应具有沿流体容积均匀分布的性质。

均匀湍流流动称为各向同性的，如果由等式 (4.2) 定义的速度分量关联张量对于任何 n 和 m 都不依赖于多面体 $M_1M_2\cdots M_m$ 在空间的方位，也不依赖于该多面体相对于坐标平面做的镜面映

象转换[1]。

关联张量的分量可能依赖于坐标轴相对于多面体 $M_1M_2\cdots M_m$ 的位置和依赖于轴的正向的选取。对于各向同性湍流流动，在相对于同一多面体的不同位置有相同方位的坐标系中，量 $\tau_{k_1k_2\cdots k_n}$ 具有相同的值。

根据定义，各向同性湍流运动平均来讲具有对称性。假设，在进行平均的足够长的时间间隔里，在空间每一点上速度的所有方向是等几率的；同时还假设，在每一瞬时流体运动是连续的且相邻诸点有近乎相同的速度。

均匀各向同性湍流运动可以看作湍流运动的最简单形式。受扰动的流体，听其自然将依惯性运动；在粘性内力作用下发生动能的耗散——运动的特点是要衰减，发生湍流扰动的退化。研究各向同性湍流时，基本任务就在于决定衰减规律[2]。

在一般情况下，湍流运动的特点是扰动的拉平——扰动的扩散。各向同性湍流运动在许多情况下可以看作某种极限的湍流运动，就象非定常流动经常可以近似地用定常极限运动代替一样。

如实验所表明，在快速运动的网栅后面发生的空气的湍流运动，在距网栅不太近也不太远的距离上在气流的边界影响较弱的区域中，实际上可以看作均匀各向同性湍流运动。吹过不动网栅的空气的湍流运动也是这种情况，只需对整个系统附加一等速的平动。在风洞中研究湍流时我们碰到的正是这样的问题。

3. 速度关联矩张量的对称性 各向同性的假设引出张量 $\tau_{k_1k_2\cdots k_n}$ 的分量间的许多关系式。例如，如果张量 $\tau_{k_1k_2\cdots k_n}$ 的分量是由同一点 $M_1 = M_2 = \cdots = M_m$ 的速度分量的平均值构成的，则很显然，当 n 为奇数时，我们有：

$$\tau_{k_1k_2\cdots k_n} = 0.$$

---

1) 如果这一条件只对 $2\leqslant n<N$, $2\leqslant m<M$ 成立，其中 N, M 为某些整数，则这种流动可以视为近似各向同性的.

2) 现在关于粘性流体各向同性湍流运动的存在问题和各种可能的形式的问题理论上尚未解决.

当 n 为偶数时，只有那些分量不等于零，在这些分量中速度的每个分量以偶次幂出现。例如，当 $n=1$ 时，我们有：

$$\overline{u}_1 = \overline{u}_2 = \overline{u}_3 = 0;$$

当 $n=2$ 时，我们有：

$$\overline{u_1u_2} = \overline{u_1u_3} = \overline{u_2u_3} = 0,$$

$$\overline{u_1^2} = \overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}; \tag{4.3}$$

当 $n=3$ 时，所有的分量等于零，等等。

如果点 M_1，M_2，$\cdots$，M_m 各不相同或者我们总共只有两个点，则在这种情况下将有某些对称条件，而且在只有两个点的情况下，关联张量只依赖于所讨论的两点间的相互距离 r。$\tau_{k_1k_2\cdots k_n}$ 的分量依赖于 r，并依赖于坐标轴相对于线段 M_1M_2 的方位。

容易看出，从运动的各向同性导出的如下关系式是正确的：

$$\overline{u_i(M_1)u_j(M_2)} = \overline{u_i(M_2)u_j(M_1)}$$
$$(i=1,2,3;\ j=1,2,3). \tag{4.4}$$

取点 M_1 在坐标原点，而取点 M_2 在 x_1 轴上，这时我们将有：

$$\tau_{11} = b_d^d \neq 0,\quad \tau_{22} = \tau_{33} = b_n^n \neq 0,\quad \tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0. \tag{4.5}$$

上标对应点 M_2，而下标对应点 M_1。显然，量 b_d^d 和 b_n^n 依赖于 x_1 和 t 且是 x_1 的偶函数。

如果点 M_2 相对于坐标轴的位置是任意的，则 τ_{ik} 的所有分量容易通过 b_d^d 和 b_n^n 表出。将 τ_{ik} 通过 b_d^d 和 b_n^n 表示的公式，是当从 x_1 轴通过点 M_2 的特定坐标系转换到任意给定的坐标系时张量分量的变换公式。这些公式有如下形式：

$$\tau_{ik} = (b_d^d - b_n^n)l_{i1}l_{k1} + b_n^n\delta_{ik}\left(\delta_{ik}\begin{matrix}=1, & i=k\\ =0, & i\neq k\end{matrix}\right), \tag{4.6}$$

这里 l_{ik} 是给定坐标系的轴相对于特殊坐标系的方向余弦。

当 $r=0$ 时有：

$$b_d^d = b_n^n = \frac{1}{3}\overline{v^2} = b. \tag{4.7}$$

现在我们来考察三阶关联张量的对称条件，从一坐标系变换

到另一坐标系时三阶张量分量的变换公式有如下形式：

$$\Pi'_{ijk} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Pi_{\alpha\beta\gamma} l_{\alpha i} l_{\beta j} l_{\gamma k}, \tag{4.8}$$

这里 l_{sm} 是新坐标系的方向余弦。取变换

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3,$$

即将 x_1 轴转向完全相反的方向。在此情况下，我们有：

$$l_{11} = -1, \quad l_{22} = l_{33} = 1, \quad l_{sm} = 0 \quad (s \neq m);$$

因此，如果在下标 i，j，k 中下标 1 出现奇数次，则从公式(4.8) 得出：

$$\Pi'_{ijk} = -\Pi_{ijk}.$$

设点 M_1 与坐标原点重合，而点 M_2 位于 x_1 轴上。从各向同性得出，对点 M_1 和 M_2 的速度分量而组成的三阶关联张量的分量，不依赖于 x_2 和 x_3 轴的方向。

由此得出，其中下标 2 或 3 出现奇数次的分量等于零，因为当改变 x_2 或 x_3 轴的方向时，它们不能改变符号。

这样，如果点 M_2 位于 x_1 轴上，则关联张量（由点 M_1 的速度的两个分量和点 M_2 的速度的一个分量所组成的）有如下五个不等于零的分量：

$$\tau_{111} = b^a_{dd}, \quad \tau_{122} = \tau_{133} = b^n_{dn}, \quad \tau_{221} = \tau_{331} = b^a_{nn}.$$

当使用任意坐标系时，可以利用式(4.8)将三阶关联[1] 的分量通过 b^a_{dd}，b^n_{dn} 和 b^a_{nn} 表出。在一般情况下，需取 M_1 和 M_2 间的距离代替变量 x_1，以后将用 r 标记这距离。随着点间距离的增加，它们的速度越来越变得统计上互不相关，因此上述速度关联张量的分量在 r 无限增长时应趋近于零。

当 $r = 0$ 时，点 M_1 和 M_2 相重合；这时我们有：

$$b^a_{dd} = b^n_{dn} = b^a_{nn} = 0.$$

---

1) 利用对称性的一般理论，容易写出各向同性湍流情况下以及其它对称条件下（例如，存在轴对称性等等）的四阶或高阶关联矩张量分量的相应公式。见谢多夫书中附录里所载的洛辛和谢多夫的论文 (Седов Л. И., Механика сплошной среды, том 1., М., «Наука», 1970, 1973, 1976.)

将点 M_1 和 M_2 互换位置相当于将坐标轴的方向改变为相反方向；从而我们得到

$$\tau_{ijk}(M_1, M_1, M_2) = -\tau_{ijk}(M_2, M_2, M_1). \tag{4.9}$$

这些关系式以另一种方式可以写为：

$$\left.\begin{aligned} b^a_{dd} &= -b^{dd}_a, \\ b^n_{dn} &= -b^{dn}_n, \\ b^d_{nn} &= -b^{nn}_d. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

因此，关联矩 b^a_{dd}，b^n_{dn} 和 b^d_{nn} 是变量 x_1 或变量 r 的奇函数。

如果脉动速度的分量是展开为泰勒级数的坐标的正则函数，则很显然，关联矩也可以展开为 r 的泰勒级数。对于二阶矩 b^d_d 和 b^n_n，泰勒级数将只包含 r 的偶次幂.而对于三阶矩 b^d_{dd}、b^n_{dn} 和 b^d_{nn}，则级数只包含 r 的奇次幂。

现在来证明，b^d_{dd} 的级数不包含 r 的一次项，事实上，我们有：

$$\begin{aligned} b^d_{dd} &= \overline{u_1^2(0,0,0)u_1(r,0,0)} \\ &= \overline{u_1^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=0}}\, r + \frac{1}{6}\,\overline{u_1^2\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2}\right)_{r=0}}\, r^3 + \cdots. \end{aligned}$$

第一项为零，因为

$$\overline{u_1^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}\right)_{r=0}} = \frac{1}{3}\left[\overline{\frac{\partial u_1^3}{\partial r}}\right]_{r=0},$$

而 $\overline{u_1^3(r)} = 0$ 是由于湍流运动为各向同性。因此，矩 b^d_{dd} 的幂级数展开式，可以从至少是 r^3 阶的项开始。

4. 不可压缩性条件和动力学关系式 从不可压缩性方程和纳维尔-斯托克斯方程，利用取平均运算可以建立速度关联张量各独立分量间的关系式[1]。从不可压缩性方程得到如下关系式：

1) Keller L., Friedmann A., Differentialgleichungen für die turbulente Bewegung einer Kompressibelen Flüssigkeit, In: Proc. 1st Intern. Congr. Appl. Mech. (1924), 1925, pp. 395—405 (俄译: Дифференциальные уравнения турбулентного движения сжимаемой жидкости, 在下书中: Фридман А. А., Избранные труды, М., «Наука», 1966, стр. 45—57); Kárman Th., Howarth L., On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence, Proc.Roy. Soc., London,A164, № 917, 1938, pp. 192—215(Kárman Th., Coll. Works, v. 3, London, Butterworths, 1956, pp.280—300).

$$b_n^n = b_d^d + \frac{r}{2}\frac{\partial b_d^d}{\partial r}, \tag{4.11}$$

$$b_n^{nd} = -b_d^{nn} - \frac{r}{2}\frac{\partial b_d^{nn}}{\partial r}, \tag{4.12}$$

$$b_d^{dd} = -2b_d^{nn}. \tag{4.13}$$

在实验中，关联矩 b_d^d 和 b_n^n 可以直接地并互相独立地测量. 利用西蒙斯（Simmons）在风洞中得到的实验结果，泰勒指明[1]，实验很好地证实了等式(4.11)(图21).

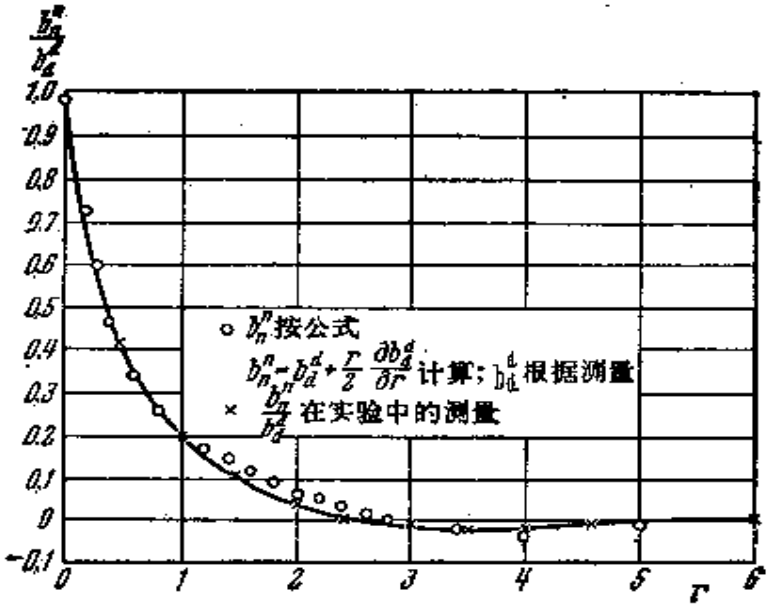


图21 实验数据很好地证实了关联 b_d^d 与 b_n^n 的理论公式

关系式(4.12)和(4.13)表明，当 r 为小量时，b_d^{nn} 和 b_n^{nd} 按 r 展开的幂级数应至少从阶为 r^3 的项开始，因为 b_d^{dd} 的级数具有这个性质. 等式(4.11)、(4.12)和(4.13)表明，确定二阶和三阶的速度分量关联张量，归结为确定 $b_d^d(r, t)$ 和 $b_d^{nn}(r, t)$ 两个函数. 从纳维尔-斯托克斯方程，对这两个量仅得到一个方程：

$$\nu\left(\frac{\partial^2 b_d^d}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial b_d^d}{\partial r}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial b_d^d}{\partial t} = \frac{\partial b_d^{nn}}{\partial r} + \frac{4}{r}b_d^{nn}, \tag{4.14}$$

1) Taylor G. I., Journal of the Aeronautical Sciences, No. 8, V. 4, June, 1937.

这里 $\nu = \mu/\rho$. 卡门和霍华斯以稍许不同的形式对函数

$$f = \frac{b_d^d}{b} \text{ 和 } h = \frac{b_d^{nn}}{b^{3/2}}$$

得到了这一方程。洛强斯基(Лойцянский)[1]是以写成 (4.14) 的形式研究了这个方程。

将方程 (4.14) 乘以 r^4,得到:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial b_d^d r^4}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\nu r^4 \frac{\partial b_d^d}{\partial r} - r^4 b_d^{nn}\right]. \qquad (4.14')$$

假设当 $r \to +\infty$ 时函数 $\partial b_d^d/\partial r$ 和 b_d^{nn} 趋向于零的阶高于 $1/r^4$,并假设方括号中的表达式在 $r = 0$ 时等于零,我们得到:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty b_d^d r^4 dr = 0$$

或

$$\Lambda = \int_0^\infty b_d^d r^4 dr = \text{const}. \qquad (4.15)$$

存在如上定义的不变量 Λ,是洛强斯基指出的[1]。但是,要注意,Λ 具有有限值和不变性,是由于对 b_d^{nn} 和导数 $\partial b_d^d/\partial r$ 趋向于零的阶做了假设的结果。

为了确定 b_d^d 和 b_d^{nn},只有一个方程 (4.14) 是不够的。进一步写出四阶和高阶关联矩,也给不出封闭的方程组。三阶矩的方程包含四阶矩,其后的方程包含有五阶矩,如此等等。除了这些方程的不封闭性外,我们还遇到给出初始条件的问题;因此,为了从理论上研究各向同性湍流还需要力学性质的附加假设[2]。

在讨论小雷诺数和大雷诺数情况时,卡门和霍华斯提出了类似的假设。

5. 各向同性湍流退化的最后阶段 流体的湍流运动是衰减的,因此,当 t 趋向无穷大时量 $b = \overline{u_i^2}$ 趋近于零。

---

1) Лойцянский Л. Г., Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. Труды ЦАГИ, вып. 440, 1939.

2) 对这些问题的解释,以及第 5, 7, 8 小节中包含的内容,曾发表于 1944 年本书第一版. 简略的叙述可参看 Седов Л. И., ДАН СССР, т. 42, № 3, 1944.

当脉动速度的值很小时，三阶关联矩的分量与二阶关联矩的分量相比是小量。这使我们可以忽略方程（4.14）中的三阶关联矩。在方程(4.14)中用零代替右端项，得到：

$$\nu\left(\frac{\partial^2 b_d^d}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial b_d^d}{\partial r}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial b_d^d}{\partial t}=0. \qquad (4.16)$$

为了求方程(4.16)的确定解，必须知道函数 $b_d^d(r,0)$，它给出两点纵向速度关联矩的初始分布。我们打算得到时间 t 值大时的方程(4.16)的解。当 t 很大时，函数 $b_d^d(r,0)$ 的奇异性的细节应是次要的，因此，当研究 $t\to+\infty$ 时函数 $b_d^d(r,t)$ 的渐近性状时，初始条件可以以某种简化形式加以考虑。

函数 $b_d^d(r,0)$，除距离 r 外，还依赖于某些量纲常数，这些量纲常数是一定存在的，因为 b_d^d 和 r 的量纲是不同的。

现在假设，关联矩的初始分布只是通过一个量纲为 L^pT^q 的常数因子 A 对 $t\to+\infty$ 时的 b_d^d 的渐近性状发生影响。这一常数在某种意义上可以认为代表了关联矩 b_d^d 初始分布的总的性质。譬如，常数 A 之值可以由如下形式的公式决定：

$$A=\left[\int_0^\infty b_d^d(r,t)\frac{r^{p+2q+1}}{\nu^{2+q}}\Phi\left(\frac{r^2}{\nu t}\right)dr\right]_{t=0},$$

这里 $\Phi\left(\frac{r^2}{\nu t}\right)$ 是某一函数。

设

$$b_d^d=A\nu^{1-\frac{p}{2}}\frac{f(r,t,\nu)}{t^{1+q+\frac{p}{2}}}.$$

按假设，无量纲量 $f(r,t,\nu)$ 仅依赖于三个有量纲参量 r，t 和 ν，因此函数 $f(r,t,\nu)$ 只依赖于组合 $\xi=r^2/\nu t$。从而，如下形式的公式成立：

$$b_d^d=\frac{A\nu^{1-\frac{p}{2}}}{t^{1+q+\frac{p}{2}}}f\left(\frac{r^2}{\nu t}\right). \qquad (4.17)$$

以后我们将讨论这样的运动，对它们 $f(\infty)=0$，而 $f(0)=1$；第一个条件对应于 $r\to+\infty$ 时两点上速度的统计不相关性，第二

个条件很容易通过选取常数A的数值而得到满足。

由公式(4.17)，在$r=0$时我们有：

$$b=\frac{1}{3}\overline{v^2}=\frac{Av^{1-\frac{p}{2}}}{t^{1+q+\frac{p}{2}}}. \tag{4.18}$$

由于湍流运动的衰减，应有

$$1+q+\frac{p}{2}>0,$$

因此，由于$f(0)=1$，公式(4.17)所决定的扰动的分布在$t=0$时是非正则的。

显然，函数

$$f\left(\frac{r^2}{vt}\right)=\frac{\overline{u_1(0,0,0,t)u_1(r,0,0,t)}}{\overline{u_1^2}}$$

是两点上的速度在该两点的联线上投影间的关联系数。在所讨论的情况下，当$t=0$时，如果$r\neq 0$，则关联系数等于零；如果$r=0$，则等于1。

利用公式(4.17)，从方程(4.16)得到

$$f''+\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{2\xi}\right)f'+\frac{5\alpha}{4\xi}f=0, \tag{4.19}$$

这里

$$\alpha=\frac{1+q+\frac{p}{2}}{10}.$$

这一方程是卡门和霍华斯直接从假设关联系数只依赖于组合r^2/vt而得到的。数α是卡门引进的任意常数。

方程(4.19)的解只依赖于常数α.

当$\alpha=\text{const}$时，p和q数值上的不同，只对指出常数A的量纲才重要。公式(4.17)表明，只有常数$Av^{1-\frac{p}{2}}$是重要的，其量纲为

$$L^2T^{q+\frac{p}{2}-1}=L^2T^{10\alpha-2}.$$

对于所有的 $\xi \neq 0, \infty$，方程 (4.19) 的通解是正则的。$\xi = 0$ 时，满足条件 $f(0) = 1$ 的正则解由下式给出：

$$f(\xi) = M\left(10\alpha, \frac{5}{2}, -\frac{\xi}{8}\right)$$

$$= 1 - \alpha\xi + \frac{\alpha(10\alpha+1)}{4 \cdot 7 \cdot 2!}\xi^2 - \frac{\alpha(10\alpha+1)(10\alpha+2)}{4^2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3!}$$

$$\cdot \xi^3 + \cdots, \tag{4.20}$$

这里 $M(\alpha, \gamma, x)$ 是合流超几何函数[1]. 对于这个解，当 ξ 之值十分大($\xi \to +\infty$)时，如下渐近展开是正确的：

$$f(\xi) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)8^{10\alpha}}{\Gamma\left(\frac{5}{2} - 10\alpha\right)} \frac{1}{\xi^{10\alpha}} \left[1 + 8\frac{10\alpha\left(10\alpha - \frac{3}{2}\right)}{\xi}\right.$$

$$\left. + 8^2 \frac{10\alpha(10\alpha+1)\left(10\alpha - \frac{3}{2}\right)\left(10\alpha - \frac{1}{2}\right)}{2!\xi^2} + \cdots\right], \tag{4.21}$$

式中 Γ 是欧拉伽马函数的标记。

从公式 (4.17) 和 (4.21) 容易把 $r \to +\infty$ 或 $t \to 0$ 时矩 b_d^q 的性状弄清楚。对于所有的 $\alpha > 0$ 如下极限关系式是正确的：

$$\lim_{\frac{r^2}{vt} \to \infty} b_d^q r^{20\alpha} = A\nu^{2+q} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)8^{10\alpha}}{\Gamma\left(\frac{5}{2} - 10\alpha\right)}. \tag{4.22}$$

如果

$$10\alpha - \frac{5}{2} = k,$$

即

$$\alpha = \frac{1}{4} + k \cdot 0.1,$$

1) 见 Янке Е. и Эмде ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, М. Л., Гостехиздат, 1949.

式中 k 是正整数，则方程(4.19)所研究的解具有简单的最终形式：

$$f = M\left(k+\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{\xi}{8}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\frac{5}{2}\right)}\left[\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\lambda^{k+\frac{3}{2}}e^{-\frac{\xi\lambda}{8}}\right)\right]_{\lambda=1}$$

$$= \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} - \frac{k}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\frac{\xi}{8} + \frac{k(k-1)}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)2!}\cdot\frac{\xi^2}{8^2}\right.$$

$$\left. - \cdots\cdots + (-1)^k\frac{\xi^k}{\Gamma\left(k+\frac{5}{2}\right)8^k}\right]e^{-\frac{\xi}{8}}.$$

在此情况下，矩 b_a^a 的分布对于 $t=0$ 具有源的性质。当 $r\neq 0$ 及 $t=0$ 时，我们有 $b_a^a=0$；当 $r=0$ 及 $t\to 0$ 时，我们有 $b_a^a\to\infty$.

方程（4.16）可以解释为五维空间中当相对坐标原点有对称性时的热传导方程。对应于 $\alpha=\frac{1}{4}$（此时 $k=0$）的解，可以看作是五维空间中热源的类比[1]。在此情况下，解具有如下形式：

$$b_a^a = Av^{1-\frac{p}{2}}\frac{e^{-\frac{r^2}{8vt}}}{\sqrt{t^5}}. \tag{4.23}$$

常数 $Av^{1-\frac{p}{2}}$ 在 $\alpha=\frac{1}{4}$ 时的量纲为 $L^2T^{0.5}$.

容易验证，对于

$$\alpha = \frac{1}{4} + 0.1k,$$

其中 $k>0$ 为整数，上面讨论的解可以从对应于简单源的解(4.23)通过对时间微商而得到：

1) 参看 Лойцянский Л.Г., Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. Труды ЦАГИ, вып. 440, 1939; Миллионщиков М. Д., Вырождение однородной изотропной турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости. ДАН СССР, т.22, № 5, 1939.

$$b_d^a = \frac{A\nu^{1-\frac{p}{2}}}{(-1)^k \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdots \left[\frac{5}{2} + (k-1)\right]}$$

$$\cdot \frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{e^{-\frac{r^2}{8\nu t}}}{t^{5/2}}\right). \qquad (4.24)$$

从而很清楚，这些解对应于时间偶极子，其阶由数 k 决定。在这些情况下，关联系数 $f(r/\sqrt{\nu t})$ 变化的特性在图 22 中给出。

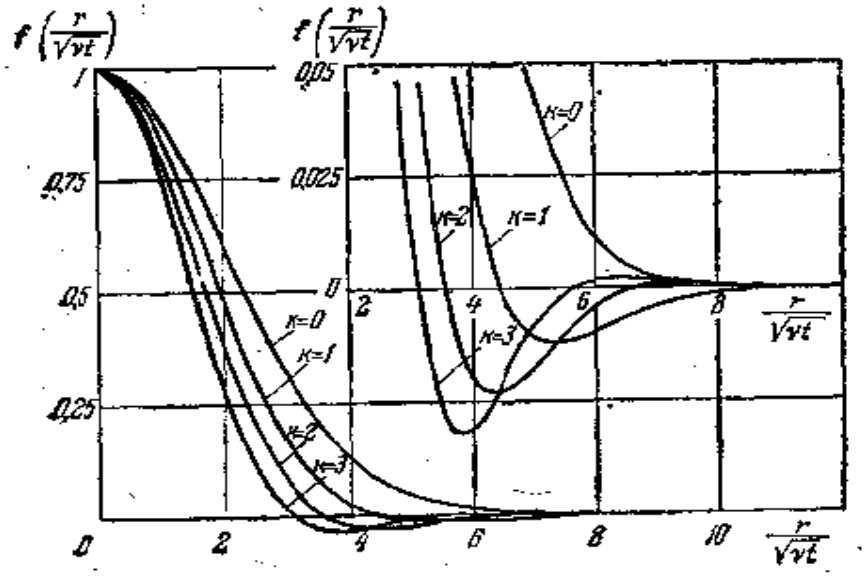


图 22　源类型的运动在不同 k 值下的关联系数

不难看出，当 $\alpha = \frac{1}{4}$ 时，参数 A 有不为零的有限值。

根据公式 (4.17) 可以写出

$$A = \int_0^\infty b_d^a r^4 dr = \frac{A\nu^{1-\frac{p}{2}}}{2} \frac{(\nu t)^{5/2}}{t^{10\alpha}} \int_0^\infty f(\xi)\xi^{3/2} d\xi. \qquad (4.25)$$

这一等式表明，$A \neq 0, \infty$ 且不随时间变化，这与不等式 $\alpha \neq \frac{1}{4}$ 是互相矛盾的。从展开式 (4.21) 很清楚，当 $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ 时有 $A = \infty$。　当 $\alpha > \frac{1}{4}$ 时有 $A = 0$；在后一情况下，当 ξ 从零变化到无穷大时 $f(\xi)$ 一定改变符号。

由公式（4.17）和（4.20）所决定的解，给出任意 α 和 $t_0 > 0$ 时的 $b_d^a(r, t_0)$ 的连续分布规律。显然，在这些特定情况下从而在一般情况下，衰减规律显著地依赖于初始扰动的性质。**因此，要借助所讨论过的解来得到衰减的渐近规律，必须还要利用或者力学性质的附加假设或者实验数据。**

6. 风洞中的湍流运动问题 正如我们已指出，研究各向同性湍流是与研究风洞中导流网栅引起的湍流密切相关的。

我们来讨论网栅后面的不可压缩流体的湍流运动的发展问题；网栅以常速 u 沿 x 轴作平移运动。为简单计，我们假设，流体是无限的，而网栅是在垂直于 x 轴的平面中互相衔接起来的双向周期的全等网眼系组成的。我们取有固定几何形状的网栅的一族运动。

流体在垂直于 x 轴的平面中的运动由如下参量组决定：

$$\rho, \mu, u, M, x = u(t - t_0),$$

这里 M 是网栅的特征尺寸，x 是所研究平面的坐标；常数 t_0 由 x 的坐标原点决定。

运动的无量纲特征量依赖于两个[1]参量：

$$\frac{x}{M} \text{ 和 } \frac{\rho u M}{\mu}.$$

我们假设，对于足够大的 x/M 值可以认为，湍流运动是各向同性的，而且在垂直于 x 轴的不同平面上，各向同性湍流的发展只有相位的差异。此时流体的湍流运动的特征量由参量 ρ, μ, u, M, t 决定。

关联系数 $f = \frac{b_n^a}{b}$ 和 $h = \frac{b_d^{nn}}{b^{3/2}}$ 依赖于无量纲参量

$$\frac{\rho u M}{\mu}, \frac{ut}{M}, \frac{r^2}{\nu t}.$$

公式（4.17）是作为如下假设的推论而得到的：对于参量 ut/M 的

1) 在网栅后的流体湍流运动的试验中，流动不是无界的，因此风洞管道或射流的形状会以各种形式，譬如说，通过管道或射流的横向尺寸 L 和相应地通过数 $\rho uL/\mu$，来影响流体的某些运动特征量。

足够大的值，该参量变得不重要。

从公式（4.18）推出

$$\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{b_0}}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{5\alpha};$$

设 $t = t_0 + x/u$，我们得到：

$$\frac{u}{\sqrt{b}} = \frac{u}{\sqrt{b_0}}\left(1 + \frac{x}{ut_0}\right)^{5\alpha}. \tag{4.26}$$

公式（4.26）给出湍流脉动沿风洞轴线的衰减规律。

在从风洞中得到的一系列实验数据的基础上，泰勒[1]建议了如下的经验公式：

$$\frac{u}{\sqrt{b}} = A + B\frac{x}{M}, \tag{4.27}$$

其中 A 和 B 为常数。

为使公式（4.26）和（4.27）相一致，必须设 $\alpha = 1/5$。当 $\alpha = 1/5$ 时，我们有

$$[A^{\frac{p}{2}-1}] = L^2.$$

7. 大脉动湍流运动 如果参量 $\frac{ut}{M}$ 不重要，则当

$$\chi = \frac{r}{\sqrt{vt}} = \frac{r}{l} = \text{const}$$

时，关联系数保持常值。时间的影响归结为 r 尺度的改变。

在我们讨论过的解中，尺度的改变由下面的关系式决定：

$$l = \sqrt{vt} = \sqrt{\frac{v(x + x_0)}{u}}. \tag{4.28}$$

由式（4.28）可见，当 $x = \text{const}$ 时，即在相对网栅固定的点上，尺度 l 不随时间变化。同时，公式（4.28）表明，此尺度依赖于速度 u。

1) Taylor G. I., Statistical Theory of Turbulence. III—V. Proc. Roy. Soc. London, A151, № 873, 1935, pp. 421—478; A 156, № 888, 1936, pp. 307—317（还可参看：Taylor G.I., The Scientific Papers, v. 2, Cambridge, Cambrige Univ. Press, 1960, pp. 288—335, 356—364）.

在我们援引过的论文中，泰勒给出一些实验数据，它们没有证实这后一结论。这种情况使得有必要完善和修改理论使之适用于大脉动的情况。在大脉动下，互相掺混的流体质量间的动量交换具有基本的意义。在这些过程中流体的惯性起主要的作用。

在很小脉动运动（动能耗散的主要过程正是在这种运动中发生的）的发展中粘性起很大的作用。为了研究大的脉动，我们像卡门和霍华斯那样假设对于足够大的 r 值以下公式成立：

$$\frac{b_d^4}{b} = f\left(\frac{r}{l}\right), \tag{4.29}$$

$$\frac{b_d^{3n}}{b^{3/2}} = h\left(\frac{r}{l}\right), \tag{4.30}$$

其中 l 是某个线性量，它可能依赖于时间和依赖于决定各向同性湍流运动的常值参量[1]。公式（4.29）和（4.30）表明，时间对关联系数的影响归结为距离尺度 l 的改变。粘性隐含地通过量 b 和 l 影响能量耗散现象。

我们将不赋予量 l 以具体的几何或力学意义。l 的定义可以

---

1) 以下的早在1944年本书第一版中发表的结论（还可参看 Седов Л. И., ДАН СССР, т. 42, №3, 1944）。从本质上依赖于上面提出的关于不可压流体的湍流运动的均匀和各向同性的假设（仅对于两点的二阶和三阶矩，见第119页脚注1）和由此推出的方程（4.14），并且还仅依赖于（4.29）和（4.30）两式所包含的假设。三十年来，（4.29）和（4.30）假设与实验相符与否的问题一直未得到解决。对是否可以用这些假设来描述实验结果，不只一次地提出了怀疑。最近，A. И. 科尔涅耶夫在细心而耐心地整理了已公布的实验数据后证明了，当相应地选择问题的数学求解过程中产生的常数时，假设（4.29）和（4.30）不但定性地而且也定量地与实验中的测量相符。见 Корнеев А. И., Прикл. матем. и мех., т. 37, вып. 5, 1973, стр. 864—881 和科尔涅耶夫于1974年在莫斯科大学答辩的学位论文。

在上面援引的论文中，在更一般的假设下，即在如下形式的假设下

$$b_d^4 = b_1(t) - b_2(t)\beta_2\left(\frac{r}{l}\right), \quad b_3^{3n} = b^{3/2}\beta_3\left(\frac{r}{l}\right),$$

（此假设只在某一区间 $0 \leqslant \chi_1 \leqslant r/l \leqslant \chi_2 \leqslant \infty$ 成立，其中 χ_1, χ_2 为某些极限值）科尔涅耶夫还研究了均匀各向同性湍流衰减的类似渐近规律。如果 $b_2/b_1 = \text{const}$ 和 $b_3/b_1 = \text{const}$，这些更一般的假设在该区间中与（4.29）和（4.30）相符。

A. И. 科尔涅耶夫强调指出，如果把假设（4.29）和（4.30）加以限制，认为用它们只在区间 $0 \leqslant \chi_1 \leqslant \chi \leqslant \chi_2 \leqslant \infty$ 上满足，以下的理论在很多方面仍保持其意义。

看作是附加的假设。譬如，**如果假设不变量** $\Lambda \neq 0, \infty$，即相应的积分存在并且第 124 页上提出的条件得到满足，**则这给出 l 和 b 之间的关系**。事实上

$$\Lambda = b\int_0^\infty f\left(\frac{r}{l}\right) r^4 dr = bl^5\int_0^\infty f(\chi)\chi^5 dx.$$

从而得到

$$l = a\left(\frac{\Lambda}{b}\right)^{1/5}, \tag{4.31}$$

其中 a 为常数。 如果再假设 $l = \sqrt{\nu t}$，这对应于上面讨论过的小脉动解，则我们立即得到对应于 $\alpha = \frac{1}{4}$ 的衰减规律：

$$b = \frac{a^5\Lambda}{(\nu t)^{5/2}}.$$

根据公式 (4.29) 和 (4.30)，方程(4.14)给出：

$$h'(\chi) + \frac{4h(\chi)}{\chi} - \frac{1}{2}\chi f'(\chi)\frac{1}{b^{1/2}}\frac{dl}{dt} + \frac{1}{2}f(\chi)\frac{1}{b^{3/2}}\frac{db}{dt}$$
$$= \frac{\nu}{b^{1/2}l}\left(f''(\chi) + \frac{4f'(\chi)}{\chi}\right). \tag{4.32}$$

这一关系式可以利用不同的假设使之满足。像卡门和霍华斯那样，我们讨论对应大雷诺数 $\sqrt{b}\, l/\nu$ 的运动，因之忽略方程 (4.32) 的右端。这时我们得到：

$$h' + \frac{4h'}{\chi} = \frac{1}{2}\chi f' k_c + \frac{1}{2}fc, \tag{4.33}$$

这里

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{dl}{dt} = k_c, \tag{4.34}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^3}}\frac{dl}{dt} = -c. \tag{4.35}$$

无量纲量 k_c 和 c 不依赖于 χ。从方程 (4.33) 并从函数 $f(\chi)$ 的一般性质可知，量 k_c 和 c 为常数。

积分方程 (4.34) 与 (4.35)，得到：

$$\frac{l}{l_0}=\left(\frac{b_0}{b}\right)^k. \tag{4.36}$$

当 $k \geqslant -\frac{1}{2}$ 时，我们有[1]

$$\frac{b}{b_0}=\left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{-\frac{2}{2k+1}} \text{ 和 } \frac{l}{l_0}=\left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{\frac{2k}{2k+1}}, \tag{4.37}$$

这里 t_0 标记 l_0 和 b_0 之值所对应的时刻。

如果对已得到的公式（4.37）再加上存在不变量 $A \neq 0$ 的假设，则从公式(4.31)推出，$k=1/5$. 将 $k=1/5$ 代入公式(4.37)，我们就得到科尔莫戈洛夫(Колмогоров)的结果[2]

$$\frac{b}{b_0}=\left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{-10/7}, \quad \frac{l}{l_0}=\left(\frac{t_0+t}{2t_0}\right)^{2/7}, \tag{4.37'}$$

这是他借助于一系列假设得到的，其中包括由等式(4.29)和(4.31)表达的假设[3]。

在上面的推导中指数 k 是任意的。如果假设，对于风洞的情况尺度 l 具有正比于网栅网眼尺寸 M 的常值，即 $l=\text{const}\cdot M$，则这给出 $k=0$，且

$$\frac{u}{\sqrt{b}}=\frac{u}{2\sqrt{b_0}}\left(1+\frac{t}{t_0}\right)=A+B\frac{x}{M}.$$

得到与泰勒公式（4.27）相符的公式。

8. 计及三阶矩的湍流退化规律 由公式(4.37)给出的湍流发展规律，是利用卡门和霍华斯关于方程（4.32）的右端可以用零代替的附加假设得到的。如果令方程（4.32）的右端为零，则对于函数 $f(\chi)$ 给出如下方程：

---

1) 条件 $k \geqslant -\frac{1}{2}$ 应该满足，以使湍流运动速度的平均值不致对于某一有限时刻变为零.

2) Колмогоров А.Н., К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости. ДАН СССР, т.31,№ 6, 1941.

3) 在第 8 小节中将证明，如果 $k\neq 0$，假设(4.29)，(4.30)和(4.31)是互相矛盾的，而如果 $k=0$，则得到不同于 (4.37') 的规律.

$$f'' + \frac{4f}{\chi} = 0$$

这个方程除了解 $f(\chi) = 1$ 外没有满足条件 $f(0) = 1$ 的解，但该解不满足物理条件 $f(\infty) = 0$.

因此，卡门和霍华斯的解是近似的，并且它没有给出确定函数 $f(\chi)$ 和 $h(\chi)$ 的关系式. 所以不能认为这个解是令人满意的.

下面，我们在只保留卡门和霍华斯的基本假设的条件下来求方程 (4.14) 的所有物理上容许的精确解，这些假设归结为如下两个公式：

$$\frac{b_a^4}{b} = f\left(\frac{r}{l}\right) \tag{4.29}$$

和

$$\frac{b_a^{\prime 2}}{b^{3/2}} = h\left(\frac{r}{l}\right) \tag{4.30}$$

其中 l 和 b 为时间的某些函数.

由于这些假设，方程 (4.14) 化为关系式 (4.32). 我们现在较详细地研究一下这一方程的精确解[1]. 保持 χ 为常数，将方程 (4.32) 对时间微商，我们得到：

$$\frac{1}{2}\chi f'(\chi)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{b^{1/2}}\frac{dl}{dt}\right) - \frac{1}{2}f(\chi)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{b^{3/2}}\frac{db}{dt}\right) + \left(f''(\chi) + \frac{4f'(\chi)}{\chi}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\nu}{\sqrt{b\,l}}\right) = 0. \tag{4.38}$$

对于关系式 (4.38) 我们分析以下几种可能的情况：

1°. 函数 $\chi f'(\chi)$, $f(\chi)$ 和 $f''(\chi) + \frac{4f'(\chi)}{\chi}$ 线性无关.

2°. 只存在一个常系数的独立线性关系式：

1) 在(4.14)这一方程中，以及相应地在作为推论得到的方程(4.32)中，有几个待求函数. 初看起来，不能仅从一个方程确定几个函数. 但是详细地深入了解这一方程的数学结构，使我们有可能分析所有可能的情况，并精确到一个本质的常数 α(见下面)求得所讨论问题的所有容许的解. 在建立流体湍流运动理论和分析湍流运动实验时，许多作者没有注意到这一情况和对问题的相应的数学分析.

$$c_1\chi f' + c_2 f + c_3\left(f'' + \frac{4f'}{\chi}\right) = 0, \qquad (4.39)$$

其中不是所有的 c_1, c_2, c_3 均为零。

3°. 函数

$$\chi f', \ f, \ f'' + \frac{4f}{\chi}$$

之间存在两个常系数的线性无关的关系式。由于 $f \not\equiv 0$，则这两个关系式总是可以写为如下形式：

$$f'\chi = c_1' f \text{ 和 } f'' + \frac{4f'}{\chi} = c_2' f.$$

不难看出，这时应有：

$$c_1' = c_2' = 0 \text{ 及 } f = \text{const}.$$

这一解没有物理意义，因此第三种情况不予考虑。

在第一种情况下，关系式(4.38)的所有系数均等于零，因此

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{dl}{dt} = kc, \quad \frac{l}{\sqrt{b^3}}\frac{db}{dt} = -c, \quad \frac{v}{\sqrt{b}\,l} = \frac{1}{mc}, \qquad (4.40)$$

这里 k, c 和 m 为某些常数。方程组(4.40)给出：

$$l = c\sqrt{mv(t + t_0)}, \quad b = \frac{mv}{t + t_0}, \quad k = \frac{1}{2}. \qquad (4.41)$$

因此，得到了 l 和 b 随时间变化的完全确定的规律．这一规律[1] 与 $k = \frac{1}{2}$ 时的规律 (4.37) 相符合．在这种情况下，对于两个函数 $f(\chi)$、$h(\chi)$ 只得到一个方程。

现在研究第二种情况。容易看出，在关系式 (4.39) 中系数 c_3 应不等于零，因为否则的话对于函数 $f(\chi)$ 就会得到方程

$$c_1 f + c_2\chi f' = 0,$$

这方程在 $c_1 \neq 0$ 时没有满足条件 $f(0) = 1$的解，而在 $c_1 = 0$ 时得到 $f' = 0$ 或 $f = \text{const} \neq 0$，这解由于条件 $f(\infty) = 0$ 而被排除。

因为 $c_3 \neq 0$，所以可以将关系式 (4.39) 写为

1) 显然：在这种情况下量 A 不可能是有限的和不等于零的不变量，因为否则的话等式(4.31)就会与等式(4.41)相矛盾.

$$f'' + \frac{4}{\chi} f' + \frac{a_1}{2} \chi f + \frac{a_2}{2} f = 0, \qquad (4.42)$$

这里 a_1 和 a_2 是常系数.

从方程 (4.38) 和(4.42) 得到:

$$\frac{1}{2} \chi f' \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{dl}{dt} - a_1 \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{b}\, l} \right]$$

$$- \frac{1}{2} f \left[\frac{d}{dt} \frac{l}{\sqrt{b^3}} \frac{db}{dt} + a_2 \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{b}\, l} \right] = 0.$$

因为函数 $\chi f'$ 和 f 是线性无关的,则显然,方括号中的式子等于零,从而推出:

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \frac{dl}{dt} = a_1 \frac{v}{\sqrt{b}\, l} + p,$$

$$\frac{l}{\sqrt{b^3}} \frac{db}{dt} = -a_2 \frac{v}{\sqrt{b}\, l} + q, \qquad (4.43)$$

这里 p 和 q 是积分常数.

将关系式 (4.43) 代入 (4.32) 并注意到方程(4.12),我们得到确定 $h(\chi)$ 的方程:

$$h' + \frac{4h}{\chi} - \frac{1}{2} \chi f' p + \frac{1}{2} f q = 0. \qquad (4.44)$$

前面我们确定了,函数 $b_2^m / b^{3/2} = h$ 按 $r/l = \chi$ 的幂次展开式应从 χ^3 阶项开始,因此从方程(4.44) 得知 $q = 0$.

这样,在所讨论的第二种情况下,我们得到了确定 h 和 f 以及量 l 和 b 的完备的方程组 (4.42)、(4.43) 和 (4.44),在这里 h 和 f 是变量 χ 的函数,l 和 b 是时间 t 的函数.

这些方程中包含三个无量纲常数 a_1, a_2 和 p. 不难看出,这三个常数中有一个是不重要的. 事实上,变换 $\chi = \lambda \chi'$ (这里 λ 为某一常数)导致将尚未确定的尺度 l 乘以常数 $1/\lambda (l = l'/\lambda)$. 在方程(4.42), (4.43) 和 (4.44) 中进行此变换,我们将得到同样的方程,只是系数值已变换为 a_1', a_2' 和 p',它们由下式决定

$$a_1' = a_1 \lambda^2, \quad a_2' = a_2 \lambda^2, \quad p' = p\lambda.$$

对 $a_1 \neq 0$ 或对 $a_2 \neq 0$ 固定一确定值，相当于对 l 选择一确定的尺度。

根据 (4.43) 的第二个方程，从湍流脉动衰减条件（当 $t \to \infty$ 时 $b \to 0$）得出，$a_2 > 0$.

其次，作为物理条件我们还假设，当 $t \to \infty$ 或 $b \to 0$ 时，$l \to +\infty$.

方程 (4.43) 可以积分，积分后对 $1/l$ 得到关系式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{l} = \frac{2v}{\nu(a_2 - 2a_1)}\sqrt{b} + cb^{\frac{a_2}{a_1}} \\ &\text{当 } a_2 - 2a_1 \neq 0 \text{ 时} \end{aligned}\right\} \tag{4.45}$$

和

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{l} = \frac{p}{\nu}\sqrt{b}(\ln b - c_1) \\ &\text{当 } a_2 - 2a_1 = 0 \text{ 时，} \end{aligned}\right\} \tag{4.46}$$

其中 c 和 c_1 是积分常数。

从公式(4.45)，不等式 $a_2 > 0$ 和从条件 $b \to 0$ 时 $l \to \infty$ 可知若 $c \neq 0$ 则 $a_1 > 0$.

我们再讨论一下 $c = 0$ 和 $a_1 = 0$ 的情形。当 $a_1 = 0$ 时方程 (4.42) 有满足条件 $f(0) = 1$ 的唯一解。

这解很容易被确定并有如下形式：

$$f(\chi) = 3\left[\frac{\sin\sqrt{\frac{a_2}{2}}\chi}{\left(\sqrt{\frac{a_2}{2}}\chi\right)^3} - \frac{\cos\sqrt{\frac{a_2}{2}}\chi}{\frac{a_2}{2}\chi^2}\right].$$

所得的函数在 $\chi = r/l$ 增大时是振动的，取无穷多次的零值并按 $1/\chi^2$ 缓慢减小。根据这种情况，以后我们排除 $a_1 = 0$ 的情形。

利用可以自由选择参数 λ 这一点，我们令 $a_1 = 1/2$；这时方程(4.42) 可以写为

$$f'' + \left(\frac{4}{\chi} + \frac{\chi}{4}\right)f' + \frac{a_2}{2}f = 0. \tag{4.47}$$

在采用标记 $a_2 = 10\alpha > 0$ 和将变量换为

$$\frac{r^2}{t^2} = \chi^2 = \xi$$

之后，方程（4.47）转换为我们以前在研究十分小的脉动的衰减时讨论过的方程（4.19）。 因此，对于 $f(\xi)$ 我们得到如小脉动情形中一样的解：

$$f(\xi) = M\left(10\alpha, \frac{5}{2}, -\frac{\xi}{8}\right), \tag{4.48}$$

但这时 $l \neq \sqrt{vt}$，$h \neq 0$. **因此，计及三阶矩将只是通过改变线尺度 l 对时间的依赖关系而影响关联系数 $f = b_d^d/b$.**

根据方程(4.44)（$q = 0$)很容易将函数 $h(\chi)$ 通过函数 f 来表达。 将方程(4.44)积分并注意到 $\chi = 0$ 时 $h = 0$ 的条件，我们得到：

$$h = \frac{p}{2}\frac{1}{\chi^4}\int_0^\chi \chi^5 f'(\chi)d\chi. \tag{4.49}$$

如果 $\alpha = 1/4$ 且 $h \neq 0$，则很明显，当 $\chi \to \infty$ 时函数 $h(\chi)$ 按 $1/\chi^4$ 趋向于零。 因此，三阶矩 b_{dd}^{**} 在 $r \to +\infty$ 时的阶为 $1/r^4$，因而 Λ 的不变性的必要条件（见 124 页）不满足。

这样，当 $\alpha < \frac{1}{4}$ 时我们有 $\Lambda = \infty$，当 $\alpha > \frac{1}{4}$ 时我们有 $\Lambda = 0$，而当 $\alpha = \frac{1}{4}$ 及 $p \neq 0$（三阶矩不为零）时量 Λ 为有限且不为零，但不是不变量。事实上，从方程（4.14′）和（4.46），当 $\alpha = 1/4$ 时，我们得到：

$$\frac{d\Lambda}{dt} = -p\int_0^\infty \chi^5 f'(\chi)d\chi l^4 b^{3/2} \neq 0.$$

如果 $p = 0$，则积分 Λ 有限且为不变量，但这时三阶矩等于零。

因此，如果三阶矩不等于零且满足由等式(4.29)和(4.30)表达的假设，则或者是积分 Λ 为零或无穷大，从而不能按等式(4.31)决定尺度，或者是当 $\alpha = 1/4$ 时量 Λ 随时间变化，从而不能看作特征

常数.

将方程(4.47)乘以 $\chi^4 d\chi$ 并进行积分，得到：

$$\int_0^\chi \chi^5 f' d\chi = -4\chi^4 f' - 20\alpha \int_0^\chi \chi^4 f d\chi$$

$$= -4\chi^4 f' - 4\alpha\chi^5 f + 4\alpha \int_0^\chi \chi^5 f' d\chi.$$

当 $\alpha \neq \frac{1}{4}$ 时，利用这关系式得到

$$h = \frac{2p}{4\alpha - 1}[f'(\chi) + \alpha\chi f(\chi)]. \tag{4.50}$$

为了确定 l 和 b 随时间的函数关系，我们有方程(4.43)，这两个方程当 $a_1 = \frac{1}{2}$，$a_2 = 10\alpha$ 及 $q = 0$ 时具有如下形式：

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \frac{dl}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\nu}{\sqrt{bl}} + p,$$

$$\frac{l}{\sqrt{b^3}} \frac{db}{dt} = -10\alpha \frac{\nu}{\sqrt{bl}}. \tag{4.51}$$

不难看出，在 $p = 0$ 的特殊情况下，方程组(4.51)和(4.47)有解：

$$l = \sqrt{\nu t}, \quad b = \frac{A'}{(\nu t)^{10\alpha}},$$

$$f = M\left(10\alpha, \frac{5}{2}, -\frac{\xi}{8}\right) \text{及 } h \equiv 0,$$

此解对应于卡门和霍华斯的小脉动解。

现在我们引进在有关各向同性湍流的许多工作中出现的泰勒线性微观尺度 $\lambda(t)$：

$$\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{\partial^2 f(r, t)}{\partial r^2}\bigg|_{r=0}.$$

借助于 $f(\xi)(\xi = r^2/l^2)$ 的包含有已知合流函数的公式(4.48)，容易推导出如下的 l 和 λ 之间的关系：

$$l = \lambda\sqrt{\alpha}. \tag{4.52}$$

现在我们来讨论 $p \neq 0$ 时的情形，并改写公式(4.45)和(4.46)。这时利用尺度 λ 代替 l 并利用如下标记：

$$\left.\begin{aligned}\lambda^* &= \frac{\nu}{|p|\sqrt{b^*}} > 0,\\ w &= \frac{b}{b^*}, \qquad \mu = \frac{1-10\alpha}{20\alpha},\end{aligned}\right\} \tag{4.53}$$

且量 $b^* > 0$ 在 $\alpha \neq 0.1$ 时借助式 (4.45) 由如下等式决定

$$\left|\frac{c(a_2 - 2a_1)}{2p}\right| = \left|\frac{c(10\alpha - 1)}{2p}\right| = b^{*-\mu};$$

当 $\alpha = 0.1$ 时常数 b^* 与公式 (4.46) 中的常数 c_1 有如下关系

$$c_1 = \ln b^*.$$

这里提出具有长度量纲的比例常数λ^*和具有速度量纲的比例常数 b^* 来代替 $\alpha \neq 0.1$ 时的 p 和 c 或 $\alpha = 0.1$ 时的 p 和 c_1.

由 (4.45) 可以写出以下的关系式:

当 $\alpha \neq 0.1$, $p(10\alpha - 1) > 0$, $c > 0$, $0 < w < \infty$ 时(这一族解我们用 α_+ 标记)

$$\frac{\lambda^*}{\lambda} = \frac{2\sqrt{\alpha_+ w}}{|10\alpha_+ - 1|}[1 + w^\mu]; \tag{4.54}$$

当 $\alpha \neq 0, 1, c(10\alpha - 1) > 0, p < 0, 0 < w < 1$ 时(这一族解我们用 α_-标记)

$$\frac{\lambda^*}{\lambda} = \frac{2\sqrt{\alpha_- w}}{(1 - 10\alpha_-)}[1 - w^\mu]; \tag{4.55}$$

而由 (4.46) 我们得到当 $\alpha = 0.1$, $p < 0$, $0 < w < 1$ 时

$$\frac{\lambda^*}{\lambda} = -\sqrt{\frac{w}{10}}\ln w. \tag{4.56}$$

这里写出了考虑到 $\lambda^* > 0$, $\lambda > 0$ 和 $w \to 0$ 时 $\lambda \to \infty$ 条件下的 λ 和 w 的关系。这样就建立了(4.54)中的不等式 $p(10\alpha - 1) > 0$ 和(4.56) 及 (4.55)中的不等式 $p < 0$, 并固定了上面指出的 $w = b/b^*$ 的可能变化范围。

利用 (4.51) 中的第二个方程,可以得到用以下公式表示的时间 t 和 w 的关系:

在 (4.54) 情况下

$$\tau = \frac{\nu(t + t^*)}{\lambda^{*2}} = \frac{(10\alpha_+ - 1)^2}{40\alpha_+}\int_w^\infty w^{-2}(1 + w^\mu)^{-2}dw, \tag{4.57}$$

在 (4.55) 情况下

$$\tau = \frac{\nu(t+t^*)}{\lambda^{*2}} = \frac{(10\alpha_- - 1)^2}{40\alpha_-}\int_w^{w_0} w^{-2}(1-w^\mu)^{-2}dw \quad (4.58)$$

以及当 $\alpha = 0.1$ 时

$$\tau = \frac{\nu(t+t^*)}{\lambda^{*2}} = \int_w^{w_0} w^{-2}\ln^{-2}w dw. \quad (4.59)$$

这里，τ 是无量纲时间，而量 t^* 是具有时间量纲的积分常数。在公式 (4.58) 和 (4.59) 中 t^* 之值取决于 w_0 的选取。为了确定起见假设 w_0 由以下条件决定

$$\left.\frac{d\lambda}{dw}\right|_{\tau=1} = \left.\frac{d\lambda}{d\tau}\right|_{\tau=1} = 0,$$

即 w_0 和 $\tilde{w}$ 由下列方程决定：

$$\int_{\tilde{w}}^{w_0} w^{-2}(1\pm w^\mu)^{-2}dw = \frac{40\alpha}{(10\alpha-1)^2}$$

及

$$\left|\frac{d\lambda}{dw}\right|_{\tilde{w}} = \left|\frac{d\lambda}{dt}\right|_{\tilde{w}} = 0$$

或者

$$\int_{\tilde{w}}^{w_0} w^{-2}\ln^{-2}w dw = 1 \text{ 及 } \left|\frac{d\lambda}{dw}\right|_{\tilde{w}} = \left|\frac{d\lambda}{dt}\right|_{\tilde{w}} = 0.$$

于是，写出的这几组精确解依赖于四个常数参量 $\alpha(\alpha_+$ 或 α_-，或 $\alpha = 0.1)$，b^*，λ^* 和 t^*，后三个参量起比例常数的作用。

无量纲函数族

$$f\left(\frac{r}{\lambda}\right),\quad \frac{1}{p}h\left(\frac{r}{\lambda}\right),\quad \frac{b}{b^*}(\tau) \text{ 和 } \frac{\lambda}{\lambda^*}(\tau)$$

只依赖于一个无量纲参量 $\alpha(\alpha_+$，或 α_-，或 $\alpha = 0.1)$，根据 (4.53) $p = \pm\nu/\lambda^*\sqrt{b^*}$。从而，参量 α 乃是所求得的解的唯一的实质性参数。当 $\alpha_+ = \alpha_-$ 时函数 $f(r/\lambda)$ 和 $\frac{1}{p}h\left(\frac{r}{\lambda}\right)$ 对于两族是相同的，只是对函数

$$\frac{b}{b^*}(\tau,\alpha) \text{ 和 } \frac{\lambda}{\lambda^*}(\tau,\alpha)$$

才出现差别。

我们再来讨论 $\tau = \nu(t + t^*)/\lambda^2 \to \infty$ 时 b/b^*和 λ/λ^* 的渐近公式。这些公式对两族函数有同样形式：

当 $\alpha > 0.1$ 时

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda^*} &\simeq \frac{1}{\lambda^*}\sqrt{\frac{\nu}{\alpha}(t + t^*)}, \\ \frac{b}{b^*} &\simeq \left[\frac{(10\alpha - 1)^2\lambda^{*2}}{4\nu(t + t^*)}\right]^{10\alpha}; \end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

当 $\alpha < 0.1$ 时

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda^*} &\simeq \frac{1}{\lambda^*}\sqrt{10(t + t^*)\nu}, \\ \frac{b}{b^*} &\simeq \frac{(10\alpha - 1)^2\lambda^{*2}}{40\alpha\nu(t + t^*)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.61}$$

在图 23—26 中给出了按所得到的精确公式和渐近公式对 $\alpha =$ 0.05，0.08，0.1，0.15，0.2 算得的结果。当 α 为有理数时，公式(4.55)和(4.54)中的积分可以通过初等函数计算出来。在图 25 和 26 上用虚线以对数尺度示出对应于渐近规律的相应直线，这些直线根据公式（4.57）和（4.58）导致幂函数规律。从这些图可以看出，当大 t 值 $t \to \infty$时，(在以等式（4.29）和(4.30）为基础的最少的假设下）所推导出的各向同性湍流退化的准确规律趋近于幂函数规律。在本理论中，这一情况是推论而不是原始假设。

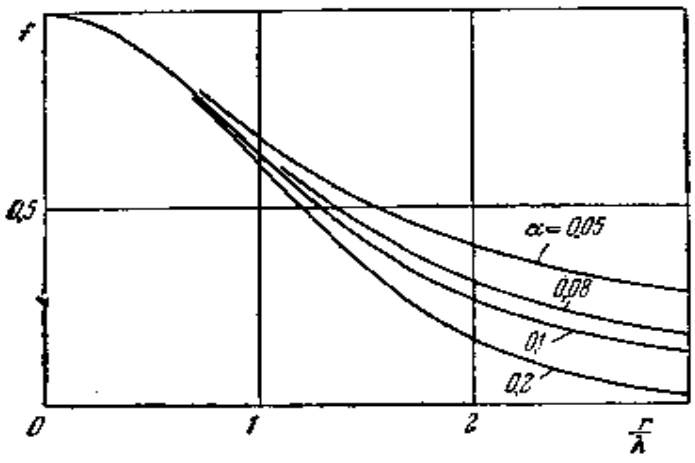


图 23　对应于公式(4.20)的，不同 α 值的函数 $f(r/\lambda)$ 的曲线

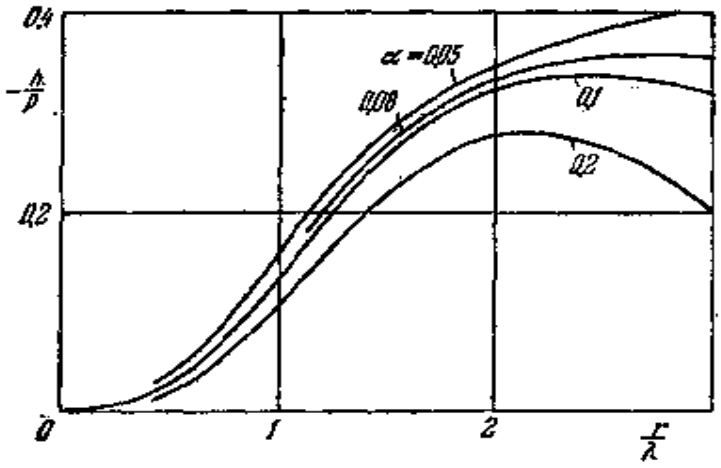


图 24　对应于公式(4.50)的，不同 α 值的函数 $-\frac{1}{p}h(r/\lambda)$ 的曲线

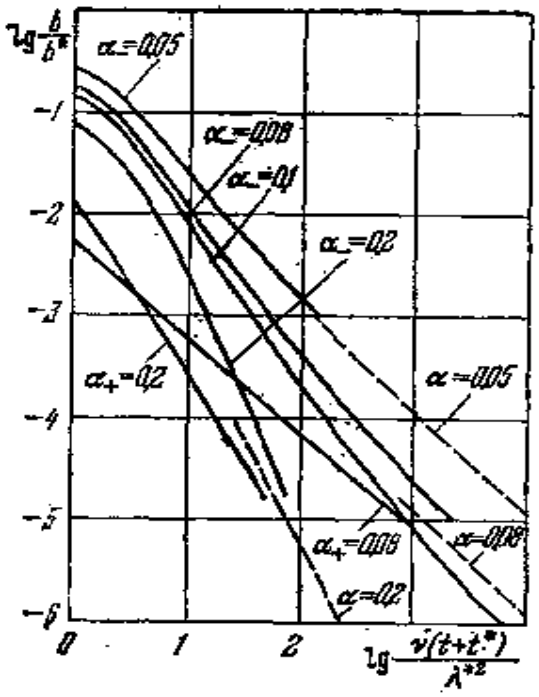


图 25　在不同 α 值下，b/b^* 对 s 的理论依赖关系的曲线

根据公式（4.17）和（4.18），当 $\alpha > 0.1$ 时，考虑三阶矩时所求得的渐近规律（4.60）与忽略三阶矩的情况下得到的相同。但是，如果 $\alpha < 0.1$（这在下面按照实验数据决定 α 时可以发现），则 b/b^* 的相应的渐近规律（4.61）与对应于三阶矩等于零（$p = 0$）

的规律 (4.18) 不同。

在上面援引的论文中 A.H. 卡尔涅耶夫证明了，在将(4.29)和(4.30) 类型的假设运用于均匀的非各向同性的湍流以后，上面得到的 $l(t)$ 和 $b(t)$ 的变化规律在这种情形下仍保持不变。

由 f 和 h 的公式 (4.21)和(4.49)，当 $\chi = r/l \to \infty$ 时，容易得到如下的渐近公式：

$$f = A\left(\frac{l}{r}\right)^{20\alpha} \quad 和 \quad h = \frac{2\alpha p}{4\alpha - 1} A\left(\frac{l}{r}\right)^{20\alpha - 1},$$

其中

$$A = \frac{2^{30\alpha}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2} - 10\alpha\right)},$$

而 $\Gamma(z)$ 是欧拉伽玛函数。只有当 $\alpha > 0.05$ 时我们有，$r/l \to \infty$ 时 $h \to 0$.

由 f 和 h 的渐近公式推出，当对这两个函数按 r 从零到无穷大积分时，相应的积分在 $\alpha \leqslant 0.1$ 时发散. 上面确定的渐近公式表明，对于二阶矩、三阶矩，可能还有更高阶的矩，它们的按傅里叶公式的积分变换无意义[1]。相应的傅里叶三维积分当 $\alpha \leqslant 0.05$ 时发散。

作为精确解的结果而得到的 $r \to \infty$ 时各种矩缓慢下降的规律，按物理的观点是完全容许的。

当比较理论与实验时，作为各向同性湍流的例子一般讨论尺寸为 M 的方形网格组成的静止的双向周期网栅后面的水或空气的运动。受扰流动以垂直于网栅平均平面的平均平动速度 $\overline{U}$ 流过网栅。这一湍流流动，严格地讲，在速度 $\overline{U}$ 的方向上是不均匀的，而一般地讲，在与 $\overline{U}$ 垂直的方向上也是不均匀的，这是由于湍流横截面边界上的条件在管道壁上或者在将湍流与外部介质分开的

1) 这一点，像以前对洛强斯基不变式的性状曾指出过的一样，对于以利用傅里叶变换为基础的、被在许多工作中发展的湍流理论来说是重要的.

边界层中的影响造成的。流向网栅的流动的初始性质同样可能是网栅后的湍流的不均匀性和非各向同性的来源。

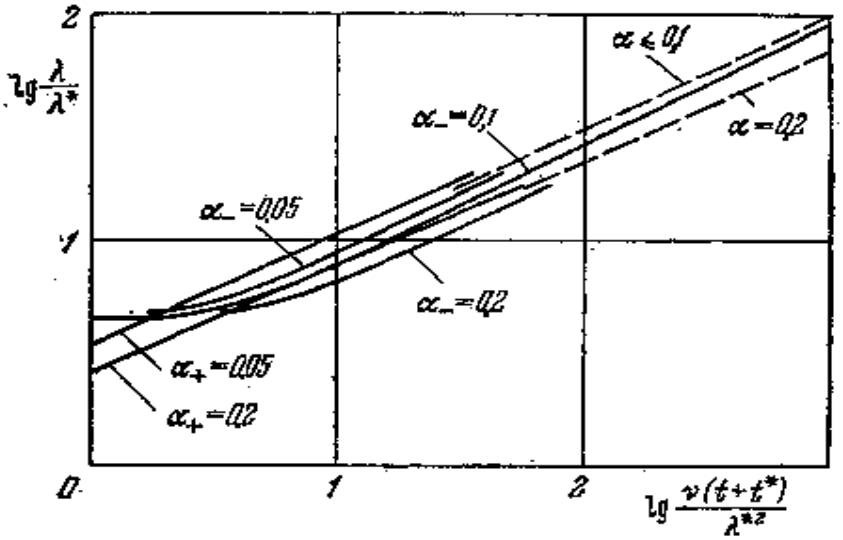


图 26　在不同 α 值下，λ/λ^* 对 t 的理论依赖关系的曲线

这样，网栅后面流体湍流运动的实验中的真实条件，与无界的液体或气体的均匀和各向同性湍流运动理论中所作的理想的问题提法相比，有明显的偏离。自然，这些偏离在网栅本身附近表现得特别显著。实验数据表明，在雷诺数 $R_M = UM/\nu \approx 10^3$ 时，在距网栅 $x > 20M$ 处，流动可以近似地看成是各向同性的；而对于关联系数，由于在沿 x 的衰减中相位上的差别，只在不很大的 x/l 处可以近似看成是各向同性的，这可能对于三阶和更高阶的矩是特别重要的。譬如，在实验中[1]确定了，在被研究过的网栅后面的退化湍流的一些情形中，没有一种形成各向同性的确定趋势。例如，在这些实验中曾确定，速度的纵向脉动平方的平均值与横向脉动平均值之比不等于 1 而为 1.3 ± 0.2。

对上面关于湍流的内在性质所说的情况还要补充一点：下面

1) Compte-Bellot G., Corrsin S., The Use of a Contraction to Improve the Isotropy of Grid-Generated Turbulence. J. Fluid Mech., v. 25, № 4, 1966, pp. 657—682. Batchelor G. K., Stewart R. W., Anysotropy of the Spectrum of Turbulence at small Wave-Number, Quart. J. Mech. Appl. Math., v. 3. № 1. 1950.

讨论的实验中的测量还有本身的误差，其中包括，测量传感器带给被研究流动的误差．显然，上面列举的理论与实验的可能不一致的原因，在比较两者的结果时必须加以考虑．

初看起来，似乎可以满足于理论与实验的定性的一致性．但是下面将表明，以上建立的理论给出对实验结果的十分好的定量描述．这是由于，原始假设和所得的理论规律性不仅对举出的特例——均匀各向同性湍流适用，而且在其它更一般的情况下也适用[1]．

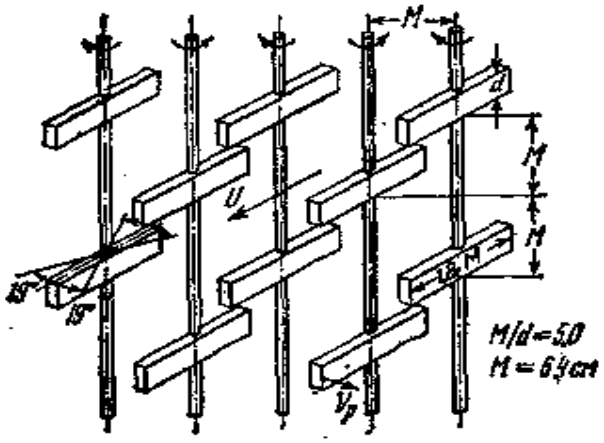


图 27　凌和万的实验 (1972) 中产生湍流所用的带有振动板条的网栅示意图

关于理论与实验详细比较的细节可以参看上面援引的科尔涅耶夫的论文，在其中讨论了 1974 年以前发表过的所有实验数据．这里我们只举出理论与某些实验的比较，并给出相应的有代表性的曲线．

我们来讨论凌 (Ling)，黄 (Huang) 和万 (Wan) 的一系列关于静止的和振动的网栅后面水的湍流运动退化的实验[2]．静止的网栅有长度为 M 的正方形网格，网栅是由直径为 d 的圆形条杆组成的，并且在一种情形下 $M/d = 2.8$，而 $M = 3.56$ 厘米（网栅 A），

1) 见 A.И. Корнеев 的学位论文和上面援引过的论文．

2) Ling S.C., Huang T.T., Decay of Weak Turbulence, Phys. Fluids, v. 13, № 12, 1970, pp. 2912—2924; Ling S.C., Wan C.A., Decay of Isotropic Turbulence Generated by a Mechanically Agitated Grid, Phys. Fluids, v. 15, № 8, 1972, pp. 1363—1369.

在另一种情形下 $M/d = 2.8$，而 $M = 1.78$ 厘米（网栅 B），在第三种情形下 $M/d = 5$（网栅 C）。振动网栅是一系列围绕自己的轴振动的圆形条杆，在其上刚性地固定着板条（见图 27）。与条杆一起振动的板条端部的最大速度 V_p，在一种情形下为网栅后的水的平均平动速度的三倍，在另一种情形下为 17 倍。在这些实验中达到了对脉动速度分量平方的平均值沿各方向的很好的均匀化，差别不超过 5%。

下页表中列出比例常数 t^*，b^* 和 λ^* 的实验数据和计算结果。用 ε_b 和 ε_λ 标记 $b(t)$ 和 $\lambda(t)$ 的实验数据相对理论值的均方偏差。在所有情况下，图 28，29，30 中由实线表示的理论曲线对应于同一个普适值 $\alpha_- = 0.08$。这些图表明，理论与实验相符十分好。显然，$b_0^2/b = f(r/\lambda)$ 规律十分明确地被证实是自模拟的性质，且定量地与 $\alpha_- = 0.08$ 时的理论公式(4.48)相符。

在描述巴切勒（Batchelor）和通森德（Townsend）的实验[1]中吹过网栅的空气湍流运动的时候，也很好地证实了 $f(r/\lambda)$ 的规律性，但是对于在从 650 到 5620 范围内变化的雷诺数 R_M，参数 α 从 $\alpha=$

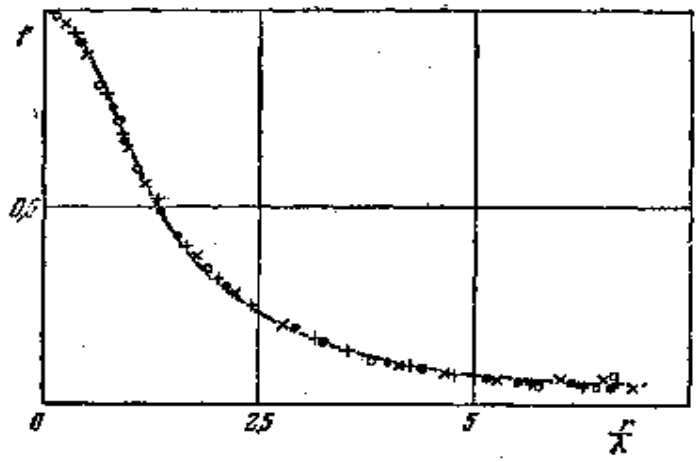


图 28　$\alpha_- = 0.08$ 时 f 依赖于 r/λ 的计算曲线(实线)与凌、黄、万实验数据的比较(实验点的符号在表中给出)

1) Batchelor G. K., Townsend A.A., Decay of Isotropic Turbulence in the Initial Period, Proc. Roy. Soc. London, A 193, № 1035, 1948, pp. 539—558; Decay of Turbulence in the Final Period; 同上刊物，A 194, No. 1039, 1948, pp. 527—543.

0.2 下降到 $\alpha = 0.05$，而相应的解从 α_+ 族过渡到 α_- 族。

量的名称	网栅的类型					
	静止的				振动的	
	A	B	C	$A+B$[1]	$\frac{V_p}{U}=3$	$\frac{V_p}{U}=17$
R_M	940	470	840	—	2000	2000
M/d	2.8	2.8	5	—	5	5
U，厘米/秒	2.9	2.9	2.9	2.9	3.14	3.14
M，厘米	3.56	1.78	3.18	—	6.4	6.4
t^*，秒	−22.2	−17.9	−11.8	−19.7	−5.9	1.25
U^2/b^*	15.9	20	84.7	29.4	33.3	0.445
λ^{*2}/ν，秒	14.3	10.9	6.97	17.1	8.12	1.57
ε_b，%	4.5	8	1	3.6	1	2
ε_λ，%	—	9	6	—	2.5	3.8
图 28—30 中实验点的符号	▽	+	×	△	●	○

1) A 网栅在 B 网栅前方 30 厘米；时间从网栅 A 起算。

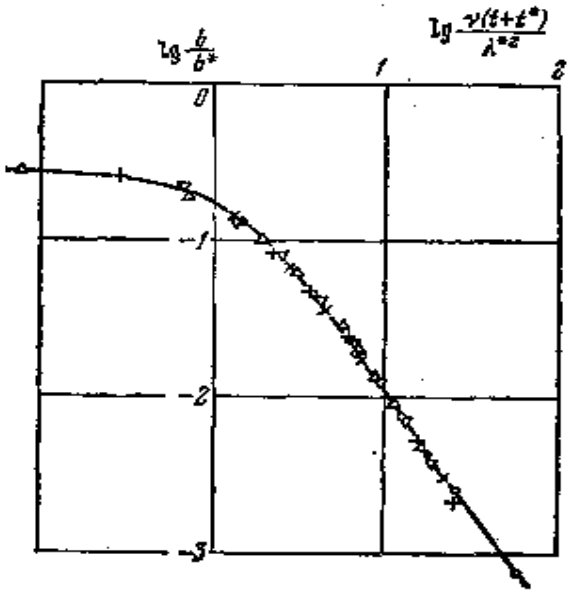


图 29　$\alpha_- = 0.08$ 时 b/b^* 依赖于时间的计算曲线(实线) 与凌、黄、万实验数据的比较（实验点的符号在表中列出）

在图 29 和 30 中给出 $\frac{b}{b^*}(\tau)$ 和 $\frac{\lambda}{\lambda^*}(\tau)$ 关系的理论曲线和根据凌、黄、万的实验得到的实验点。这些图也表明理论与实验符合

得很好。在大的 t 值下，这些规律性过渡为幂函数性质的（在对数尺度中，过渡为线性的）。如果利用另外的合适的 t_0 值来代替上面引入的比例常数 t^*，则图 29 和 30 中相应的曲线可能更快地趋向相应的渐近直线。

至于对应三阶矩的关联系数 h 和常数 p 的理论函数与实验的比较，则在把上面求得的规律 $f(r/\lambda)$，$\frac{\lambda}{\lambda^*}(\tau)$ 和 $\frac{b}{b^*}(\tau)$ 与实验协调一致之后，对于均匀各向同性湍流，这种对应不可能引起重大的怀疑；只要相信卡门-霍华斯方程可以作为描述均匀各向同性湍流的理论基础，那么从卡门-霍华斯方程和上面指出的 $f(\lambda/\lambda)$，$\frac{\lambda}{\lambda^*}(T)$ 和 $\frac{b}{b^*}(\tau)$ 的规律就容易推出，公式(4.30) 和(4.53)是作为推论得到的。关于三阶矩的测量，在文献中发表的实验数据很少。许多作者没有测量三阶矩。另外一些作者，其中包括凌和黄，由于测量的不准确性和不可靠性而没有公布自己的测量数据。这还与以下的情况有关：三阶和更高阶的矩，与二阶矩比较，更敏感地依赖于实验中出现的对湍流的均匀性和各向同性的破坏。只有斯图瓦尔特(Stewart)和通森德[1]于 1951 年公布了他们对于量 $h(r,t)$ 的间接测量结果（从那以后没有公布过其它的对 h 的系统的测量）。

斯图瓦尔特和通森德的结果很好地定性地（而在小 r 下还定量地）证实了 $\frac{1}{p}h\left(\frac{r}{\lambda}\right)$ 类型的理论普适的自模拟规律性。这时有意义的是，λ 的对应量由实验数据确定，而根据(4.53)常数

$$p=\pm\frac{\nu}{\lambda^*\sqrt{b^*}}$$

也由 $l(w)$ 和 $b(t)$ 的规律计算出来。在大的 r/λ 值情况下，这些作者的实验结果给出对自模拟性的某些（一般来说是不大的）偏离。上面已列举了这些偏离的可能的原因。

关于比三阶高的矩的研究还没有什么系统的实验数据。高阶

1) Stewart R.W., Townsend A. A., Similarity and Selfpreservation in Isotropic Turbulence, Phil. Trans. Roy. Soc., A243, № 867, 1951.

矩的理论研究可以在如下假设下实现，即假设只对二阶和三阶矩存在各向同性(见第119页注1)，以及在较狭窄的问题提法下假设在较高阶的矩上存在各向同性。 关于自模拟性的假设 (4.29) 和 (4.30)，可以只对二阶和三阶矩提出并讨论上面得到的方程。

当产生与决定高于三阶的矩有关的附加问题时，为了避免大的任意性一定要提出附加的假设。这是由于，在固定了二阶和三阶矩以后，可以根据附加条件从相应的偏微分方程顺序计算高阶矩。从所得到的二阶和三阶矩的解出发，为描述液体和气体的湍流运动可以建立基于不同假设—条件的理论，这些理论只因高阶矩的性状而互不相同。 譬如，对于高阶矩可以应用类似于假设 (4.29) 和(4.30)的自模拟假设[1]，但是这样的假设不是非采取不可的。

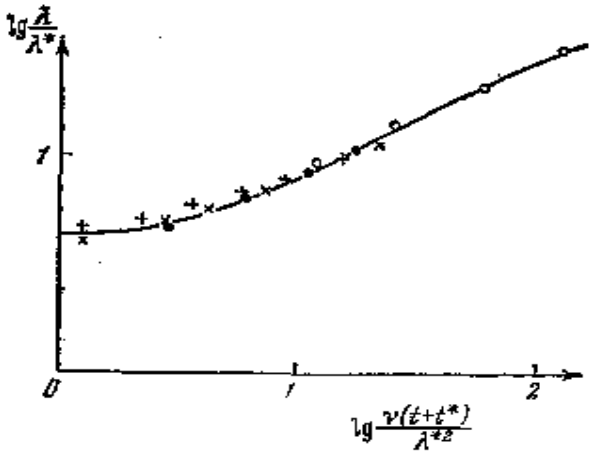


图 30　$\alpha_- = 0.08$ 时，λ/λ^*依赖于时间的计算曲线（实线）与凌、黄、万的实验数据的比较(实验点符号在表中给出)

§5. 定常湍流运动

在许多情况下，其中包括流体在管道中运动的情况，我们碰到

1) 关于这点见 Корнеев А. И., Гипотезы Кармана и степенные законы изменения энергии и линейного масштаба турбулентности, ПММ, т. 39, вып. 3, 1975.

这样的湍流运动，对于它们平均运动是定常的，这样的流动称为定常湍流流动。

我们来考察在不动的、光滑的、无限长圆柱管道中不可压缩流体的定常湍流运动问题。

假设流体的平均运动具有轴对称性，且平均速度的方向沿管道的轴线。从不可压缩性方程可知，平均速度之值不依赖于沿轴线的坐标 x；而沿管的截面平均速度是变化的且依赖于所讨论的点到管中心的距离 r.

不难看出，平均运动的特征量由如下参量组确定：

$$\rho,\ \mu,\ a,\ \tau_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}a,\ r = a - y, \tag{5.1}$$

这里 a 为管的半径，$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ 为沿管道的压力梯度的平均值，而 τ_0 为管壁上的摩擦应力。所有的无量纲量是两个参量的函数：

$$\mathrm{R} = \frac{v_* a\rho}{\mu},\quad \frac{r}{a} = 1 - \frac{y}{a}, \tag{5.2}$$

这里 $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ 是所谓管壁摩擦切应力速度。表征运动整体性质的无量纲量不依赖于变量 r，从而仅由一个雷诺数确定。

用 u 标记平均运动的速度，用 $u_{\max}$ 标记管道中心的速度。从量纲理论可知：

$$\frac{u_{\max}}{v_*} = f(\mathrm{R}) \tag{5.3}$$

及

$$\frac{u_{\max} - u}{v_*} = F\left(\mathrm{R},\ \frac{a-y}{a}\right). \tag{5.4}$$

量 $u_{\max} - u$（称为速度亏损）表征相对于管中心运动的速度沿管道截面的分布。

以下我们将讨论表现明显的湍流运动，这种运动对应大雷诺数值。

管中的速度分布与湍流掺混现象密切相关，由于湍流掺混将发生相邻流体层之间的动量交换。为动量输运所制约的速度拉平

由流体的惯性决定。

从物质的分子运动论的观点来看，粘性是由于存在杂乱无章的分子运动而引起的，这种分子运动促使把可观察到的运动速度拉平，并且导致把可观察到的运动的动能转化为热运动能量。

能量守恒定律表达为可观察到的运动的机械能与分子运动能量之和为常值。这两种能量都可以看作是不同形式的机械能的组成部分。如果忽略分子内力，则粘性由分子运动的状态的平均运动学性质和流体分子的惯性所决定。

无规则的湍流掺混与平均运动的关系，类似于分子运动与真实湍流运动的关系。湍流脉动类似于分子杂乱无章运动的脉动。不同之处在于表征脉动运动的平均量的量级不同。在湍流掺混中，我们碰到的不是热过程中单个分子的运动，而是"微团"的脉动运动；"微团"是比分子的尺寸和质量大得多的流体体积。除此以外，湍流运动中脉动的平均速度值与热运动的平均速度值相比要小得多。

在湍流运动中可以讨论平均运动的能量向湍流微团运动能量的转化。在这种意义上，可以谈论平均运动的能量耗散，并且耗散不直接与机械能向热能的转化有关，从而，这一过程可以与流体的粘性无关。对于理想流体也可以讨论可观察的平均运动和脉动运动之间的动能重新分布。众所周知，对于理想不可压缩流体不可能有机械能向热能的转变。因此，能量从平均运动向微团的湍流脉动运动的转化在许多情况下只由惯性就基本上可以决定。

当流体在管道中运动时，要发生机械能的损失，因此，应该存在一些区域，在那里粘性的影响是重要的。由于流体粘附于管壁上，壁面上流体的瞬时速度和平均速度等于零。因此，在紧靠管壁的地方不可能有流体的强烈掺混。这使我们可以得出结论，紧靠管壁处速度的急剧改变应由流体的粘性决定，并且在光滑壁附近应存在一个层流运动层。实验数据很好地证实了这一结论。

设在管道轴线附近的湍流的基本核心里速度的拉平由流体的微团掺混决定，在掺混中粘性只具有次要的意义。用 δ 标记壁面

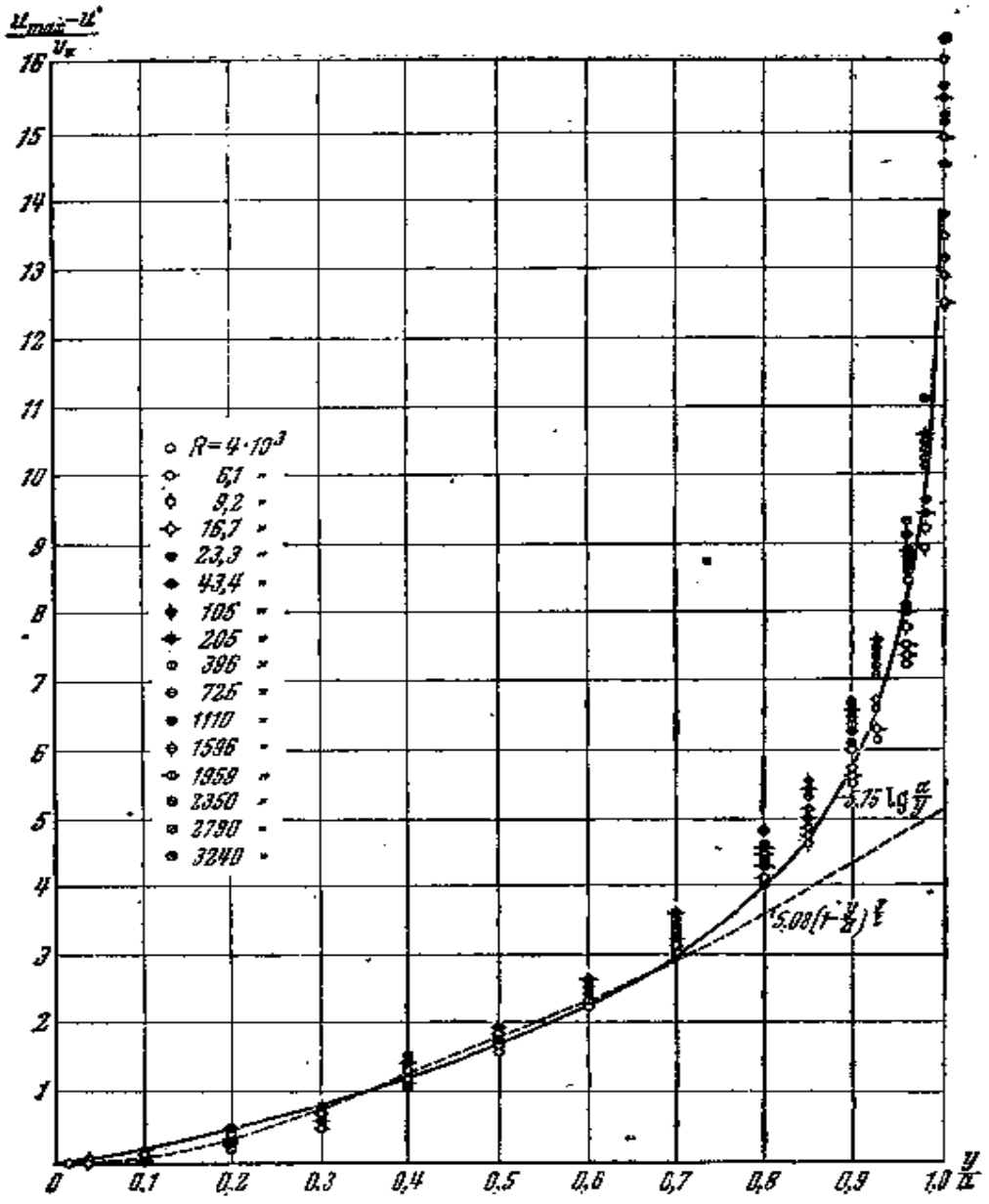


图 31　管轴附近普适速度分布律的实验验证

附近的、在其中粘性不能忽略的流体层的厚度．近似地可以令量 δ 等于管壁附近层流层的厚度。根据假设，当 $y > \delta$ 时粘性不重要，从而在公式（5.4）中当 $y > \delta$ 时雷诺数不重要，即

$$\frac{u_{\max} - u}{v_*} = F\left(\frac{a - y}{a}\right). \tag{5.5}$$

等式（5.5）表明管道中有普适的速度分布规律存在。

在各种可能的雷诺数下进行的测量湍流运动情况下管内速度分布的实验，很好地证实了有这样的不依赖于雷诺数的普适速度分布规律存在（图 31）。 还在 1858 年达西 (Darcy)[1] 就建议了如下经验公式：

$$\frac{u_{max}-u}{v_*}=5.08\left(1-\frac{y}{a}\right)^{3/2}. \tag{5.6}$$

将量 $(u_{max}-u)/v_*$ 的实验结果用图形表达为 y/a 的函数，这在斯坦顿(Stanton)[2]，弗里奇 (Fritsch)[3] 和尼库腊泽 (Nikyradse)[4] 的文章中也给出过。这些作者指出存在上述普适分布律，它在光滑管道和粗糙管道的中心部分都成立而与粗糙度无关，尽管阻力以及比值 u_{max}/v_* 等等都在本质上依赖于雷诺数和粗糙度。

对规律 (5.5) 成立的上述解释，是对管道中心的相对运动忽略了粘性后从量纲分析得到的。这一解释在普朗特和卡门的著作中给出。

现在我们研究关于决定湍流运动情况下沿管道横截面的速度分布律的函数形式的问题。考虑到大雷诺数值(对于给定的 v_* 和 μ/ρ 这相当于半径 a 值大)，我们来讨论 $a\to+\infty$ 的极限情况。在此情况下得到以平面 $y=0$ 为界的半空间 $y>0$ 中的湍流运动问题。

主定参量组将是：

$$\rho,\ \mu,\ \tau_0,\ y.$$

对于平均速度分布得到公式

$$\frac{u}{v_*}=\varphi(\eta),\ \text{这里}\ \eta=\frac{v_*\rho y}{\mu}. \tag{5.7}$$

在层流运动的情况下函数 $\varphi(\eta)$ 的形式容易从理论上确定。事实上，在层流运动情况下，圆柱管道中所有流体质点作匀速直线运

1) Darcy H., Mémoires de div. savants étrangers, t. 15, 1858.

2) Stanton Th.,Proc. Roy. Soc. (A), v. 85, 1911.

3) Fritsch W., Der Einfluss der Wandraubigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen. ZAMM, Bd. 8, 1928, S. 199—216 (还参阅: Abhandlungen Aerodyn. Institut Aachen, Bd. 8, 1928, S. 45—62).

4) Nikuradse J., Proc. of the third Intern. Congress, 1930.

动，因此惯性应该是不重要的，从而速度分布不应依赖于 ρ. 由于主定参量是 τ_0, μ 和 y，则从量纲理论得到：

$$u = k\tau_0 \frac{y}{\mu} = k\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\rho y}{\mu},$$

其中 k 是无量纲常数。利用关系式

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0},$$

得到 $k = 1$. 因此，对于层流运动下式成立：

$$\varphi(\eta) = \eta. \tag{5.8}$$

如果我们假设，在湍流运动的一般情况下在管壁附近有层流层，则式 (5.8) 决定紧靠管壁处函数 $\varphi(\eta)$ 的形式。

对于湍流运动可以通过实验途径决定函数 $\varphi(\eta)$. 但是在有限半径的管道中做实验时，除了参数 η 外，还增加了一个雷诺数 $\mathrm{R} = v_* \rho a/\mu$.

在研究湍流运动的速度分布时，如下形式的幂次经验公式曾起了很大作用：

$$\frac{u}{v_*} = A\eta^n, \tag{5.9}$$

这里 A 和 n 为常数。这些常数可以或者通过直接测量速度分布来决定，或者借助于用实验测出管道阻力规律来间接地决定。为了解释清楚后一种方法，我们把管道阻力通过沿管道半径的速度分布规律来表达。

圆管的阻力系数由下式决定：

$$\psi = \frac{(p_1 - p_2)a}{l \cdot \rho \dfrac{\bar{u}^2}{2}} = \frac{4\tau_0}{\rho\bar{u}^2} = 4\left(\frac{v_*}{\bar{u}}\right)^2, \tag{5.10}$$

这里

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi a^2};$$

$\bar{u}$ 为按管道截面平均的速度，而 Q 是流体的体积流量。在一般情

况下对于沿管道半径的速度分布有如下的公式：

$$\frac{u}{v_*} = \varphi\left(\mathrm{R_1} = \frac{\rho a\bar{u}}{\mu}, \frac{\rho v_* y}{\mu}\right).$$

沿管道截面取平均，我们得到：

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a \varphi \cdot 2\pi(a-y)dy$$

$$= 2\int_0^1 \varphi\left(\mathrm{R_1}, \frac{v_*}{\bar{u}}\mathrm{R_1}\lambda\right)(1-\lambda)d\lambda. \qquad (5.11)$$

将这方程相对 $v_*/\bar{u}$ 解出，我们得到 ψ 作为 $\mathrm{R_1}$ 的函数。

不难看出，对于由公式 (5.9) 决定的幂次速度分布律(其中 A 和 n 不依赖于雷诺数 $\mathrm{R_1}$)，对系数 ψ 得到公式

$$\psi = \frac{a}{R_1^m}, \qquad (5.12)$$

这里 a 和 m 是常数。事实上，将

$$\varphi = A\left(\frac{\rho v_* y}{\mu}\right)^n = A\mathrm{R_1}^n\left(\frac{v_*}{\bar{u}}\right)^n \lambda^n$$

代入关系式 (5.11)，我们得到：

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = \frac{2A}{(n+1)(n+2)}\mathrm{R_1}^n\left(\frac{v_*}{\bar{u}}\right)^n;$$

从而决定出 $v_*/\bar{u}$，然后利用等式 (5.10) 我们得到：

$$\psi = 4\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2A}\right]^{\frac{2}{n+2}}\frac{1}{\mathrm{R_1}^{\frac{2n}{n+1}}}. \qquad (5.13)$$

把式(5.12) 和式 (5.13)加以比较，我们得到常数 m 和 n 之间以及常数 a，A 和 n 之间的简单关系式。

光滑圆柱管道的阻力的布拉修斯 (Blasius)经验公式有如下形式：

$$\psi = \frac{0.132}{\mathrm{R_1}^{1/4}}. \qquad (5.14)$$

如果速度分布取幂次律，则布拉修斯公式(5.14)导致“七分之一律”：

$$\frac{u}{v_*} = 8.7\left(\frac{v_*\rho y}{\mu}\right)^{1/7}. \qquad (5.15)$$

对于从 10^4 到 10^5 的区间里的雷诺数 $2R_1$，公式 (5.14) 和 (5.15) 与实验相符很好；对于较小的雷诺数，幂次为 $n = 1/6$ 的 (5.9) 形式的公式与实验相符较好. 对于 $2R_1 > 10^5$ 要将幂次降低.

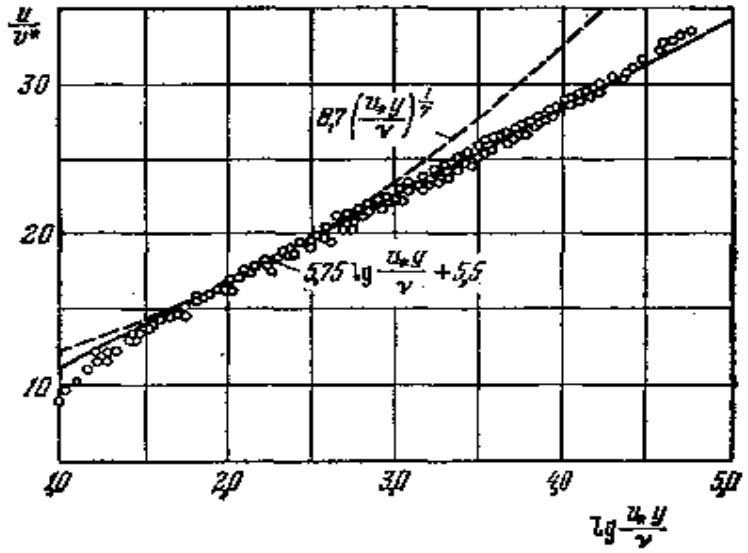


图 32　湍流边界层中的速度分析

实验结果 (图 32) 表明，如下形式的经验公式与实验相符最好：

$$\frac{u}{v_*} = \varphi(\eta) = 5.75 \lg \eta + 5.5. \tag{5.16}$$

式(5.9) 与(5.16) 在紧靠管壁处 ($\eta = 0$) 不再成立。 管壁附近有层流层，对于它 $\varphi(\eta) = \eta$. 如果我们假设层流层与湍流流动衔接，并要求在层流层边界上流体质点的速度连续地转变为由公式(5.15)和(5.16) 决定的湍流速度分布，则这使我们可以或者从方程

$$\eta = 5.75 \lg \eta + 5.5,$$

或者从方程

$$\eta = 8.7\eta^{1/7}$$

决定层流层的厚度. 在两种情况下这两方程的解都给出 η 之值接近于 $\eta \approx 12$. 设 $\eta = 12$，我们得到层流层厚度的公式

$$\frac{\delta}{a} = 12 \frac{\mu}{\rho v_* a} = \frac{24}{R_1\sqrt{\psi}}. \tag{5.17}$$

设 $R_1 = 40000$ 并利用布拉修斯公式，我们得到：

$$\frac{\delta}{a} = \frac{68}{R_1^{7/8}} = 0.0065.$$

由此可以得到结论，层流层的厚度与管道半径 a 相比为小量。

现在我们来看一下普朗特和卡门关于决定函数 $\varphi(\eta)$ 的形式的理论推理。用 u' 和 v' 标记湍流脉动速度在 x 轴和 y 轴上的投影。单位时间单位面积流体沿 y 轴的动量传递的平均值可以写为 $\tau = \rho\overline{u'v'}$. 对半径为 r 的与管道同轴的圆柱内（图 33）所包含的

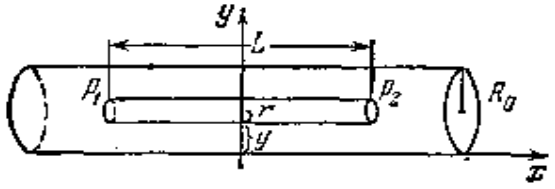


图 33　计算圆柱管道中湍流运动的示意图

流体应用动量变化的定理，经取平均后得到：

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = \tau \cdot 2\pi r L + \mu \frac{d\bar{u}}{dy} 2\pi r L.$$

从而利用关系式 $(p_1 - p_2)a = 2\tau_0 L$ 得到：

$$\tau + \mu \frac{d\bar{u}}{dy} = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{a}\right). \tag{5.18}$$

在层流运动时 $\tau = 0$，我们有泊肃叶流动。在这情况下，从方程 (5.18) 得到抛物线速度分布律。在湍流运动情况下，在紧靠壁面处 ($y = 0$) 有层流层，在其中 $\tau = 0, y/a \approx 0$，因此方程(5.18) 归结为关系式

$$\mu \frac{d\bar{u}}{dy} = \tau_0,$$

从而

$$\bar{u} = \frac{\tau_0 y}{\mu} \text{ 或 } \frac{u}{v_*} = \frac{\rho v_* y}{\mu},$$

这与公式 (5.8) 相符。

根据气体分子运动论的观点，粘性摩擦切应力 $\mu\frac{d\bar{u}}{dy}$ 可以看作是由于单个分子杂乱无章的热运动引起的单位时间单位面积动量传递的平均值。在这种意义上方程(5.18)左端的两项都有相同的本质。

在湍流明显表现出来的区域内 $\tau \neq 0$ 且比 $\tau\frac{d\bar{u}}{dy}$ 大得多，因此与 τ 相比可以忽略 $\mu d\bar{u}/dy$。

决定 τ 对于平均运动的特征量的依赖关系可以归结为决定量 l，l 具有长度的量纲并与 τ 由如下关系式相联系：

$$\tau = \rho l^2 \left|\frac{d\bar{u}}{dy}\right| \frac{d\bar{u}}{dy}. \tag{5.19}$$

在更详细地研讨湍流掺混的机理时，一些直观的想法允许我们把长度 l 看作是一个类似于气体热运动中平均自由程的量[1]. 因此 l 称为混合长。

从 τ 转变为 l 的基本意义在于量 l 更具有直观性。在粘性影响不存在时，量 τ 依赖于速度的平方。因此 l 不依赖于速度，这使我们可以在建立与特征长度的联系时利用一些直观的想法。较详细的分析可以证明，当向管壁接近时 l 减少，并可将壁面附近的量 l 与粗糙度特性联系起来。

当 $a = \infty$ 时可以假设，混合长由参量 ρ，μ，v_* 和 y 决定；因此这时如下形式的公式成立：

$$l = y \cdot \Phi\left(\frac{\rho v_* y}{\mu}\right).$$

我们假设，当对于坐标 y 选取某个特定坐标原点时粘性不重要. 从这一假定得出：

$$l = ky,$$

这里 k 是某一无量纲常数。在方程(5.18)中忽略 $\mu d\bar{u}/dy$ 和 $y/a \approx 0$ 两项，我们得到：

1) 关于这一点详细请看普朗特的文章"粘性流体力学"，载于下书中：Дюрэнд, В. Ф. Аэродинамика, т. III, Оборонтиз, 1939.

$$\tau = \tau_0 = \rho k^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2.$$

将此方程积分，得到：

$$u = \frac{v_*}{k} [\ln y - \ln y_0]. \tag{5.20}$$

在相似轴上当 $y = 0$ 时有 $u = -\infty$. 积分常数 y_0 给出 $u = 0$ 的点到相似轴的距离。在紧靠壁面处有湍流与之衔接的层流层存在；如果我们将湍流延续到满足 $u = 0$ 条件的壁面，则得到：y_0 等于相似轴到壁面的距离。由于 y_0 应由 ρ，μ_0 和 v_* 决定，这就给出：

$$y_0 = \beta \frac{\mu}{\rho v_*},$$

其中 β 是无量纲常数。

在表现明显的湍流运动中 y_0 为小量。将求得的 y_0 值代入公式 (5.20)，得到：

$$u = \frac{v_*}{k} (\ln \eta - \ln \beta). \tag{5.21}$$

在湍流运动区域，可以把公式(5.21)看成是经验公式 (5.16) 的理论证明。常数 k 和 β 要从实验中取得。随着雷诺数的增大，推导公式 (5.21) 时所作的假设变得更准确。这使我们可以得出结论：随着雷诺数的增加，公式 (5.16) 应与真实情况相符很好。

如果假设，对于圆管中的湍流运动，一直到管轴上，对数速度分布律(5.21)都是正确的，则得到公式

$$\frac{u_{max} - u}{v_*} = F\left(\frac{y}{a}\right) = 5.75 \lg \frac{a}{y},$$

此式对于光滑管道和粗糙管道都与实验数据相符很好；对粗糙管之所以相符，是由于粗糙度的影响可以归结为量 y_0 的改变，而这量在推导此公式时被消去了[1].

我们再讨论一些可以应用于所讨论的湍流运动问题的量纲和相似理论的想法。

---

1) 关于粗糙度的影响见上一脚注中援引的普朗特的文章.

用 v_x 和 v_y 标记瞬时运动速度的投影，用 u' 和 v' 标记脉动速度的投影。在我们研究的直线平均运动中有：

$$v_x = u + u', \quad v_y = v'.$$

我们来考察由投影 $u + u' - u_M, v'$（u_M 为某点 M 上的平均速度）决定的相对运动的速度场。

卡门的基本假说在于假设相对运动的湍流速度场在流动的不同点是运动学相似的。利用取平均运算我们得到，平均相对速度场 $[u(y) - u_M, 0]$ 在流动的不同点也是运动学相似的。

从一点转换到另一点时，所有运动学量的数值换算，可以借助于两个独立的运动学量的转换比例尺进行。比例尺之值可以通过研究平均速度分布律得到。

某一给定点附近的平均相对速度分布律，可以用平均速度 u 对坐标 y 的逐阶导数

$$u', u'', u''', u^{\mathrm{IV}}, \cdots \tag{5.22}$$

来表征。任意两个导数都有互相独立的量纲，而由任意三个导数都可以组成无量纲组合。由前三个导数可以组成无量纲组合

$$\frac{u''^2}{u'u'''} = k.$$

由于所有导数都是同一个变量的函数，则很明显，由序列(5.22) 构成的任意两个无量纲组合之间都有不包含量纲常数的函数关系。譬如，

$$\frac{u'''^2}{u''u^{\mathrm{IV}}} = \Phi\left(\frac{u''^2}{u'u'''}\right).$$

因此，相对运动对于所有 y 值相似的必要和充分条件是

$$\frac{u''^2}{u'u'''} = k = \text{const}. \tag{5.23}$$

条件 (5.23) 是 $u(y)$ 的微分方程。积分此方程，当 $k \neq 1$ 和 $k \neq 2$ 时得到：

$$u = A(y + B)^{\frac{2-k}{1-k}} + C, \tag{5.24}$$

这里 A, B, C 是有量纲积分常数。当 $k = 1$ 时解的形式为：

$$u = Me^{y/d} + N, \tag{5.25}$$

而当 $k = 2$ 时，则有：

$$u = P\ln(y + Q) + S, \tag{5.26}$$

这里 M, d, N, P, Q, S 是积分常数。

因此，很明显，关于准确相似的假设导致完全确定的特殊形式的平均速度分布律。

公式（5.26）相应于对数速度分布律。

从相似性条件对混合长 l 和湍流动量传递 τ 推得如下公式

$$l = k_1 \frac{u'}{u''}, \tag{5.27}$$

$$\tau = \rho l^2 u'^2 = \rho k_1^2 \frac{u'^4}{u''^2}, \tag{5.28}$$

这里 k_1 是无量纲常数。

对于速度分布律（5.24）和(5.26)，在相应的选取 y 的原点时公式(5.27)导致关系式 $l = k_1 y$，这个式子我们前面是作为粘性不重要这一假设的推论得到的。

速度分布律（5.26）相应于 $\tau = \tau_0 = \text{const}$. 对于速度分布律(5.25)和（5.24），得到 τ 为变量。

条件（5.23）大大地限制了可能的平均速度分布律.可以减弱最初的准确相似条件，而假设在任意点附近只在准确到二阶小量的范围内有相对速度场的相似性。在这种假设下，在序列（5.22）中仅有 u' 和 u'' 仍是特征量，因此方程（5.23）不复存在，而式(5.27)和(5.28)仍保留。

利用公式（5.28）和等式（5.18）可以得到平均速度分布律的理论公式[1]。

在利库季斯（Likoudis）的文章[2]中，通过对混合长 l 取较复杂

1) 见下列文集中卡门的文章：«Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.

2) Ликудис П. С., Экспериментальные исследования процессов переноса в турбулентном потоке проводящей среды в присутствии магнитного поля, ИЛ, М., 1965. (Международный симпозиум по свойствам и применению низкотемпературной плазмы.) 又可见文集 «Низкотемпературная плазма». М., «Мир»,1967, стр. 513—527.

的函数关系发展了这一理论，这一复杂化使得可以计及磁场对圆柱管道中导电流体湍流运动的影响.磁场的存在将抑制湍流脉动。瓦谢茨卡娅(Васецкая)和伊奥谢列维奇(Иоселевич)的文章[1]中给出了考虑添加少量聚合物、管壁粗糙度以及雷诺数对管道中湍流运动速度分布和阻力的共同强烈影响的 l 的公式。

作者们证明了，添加聚合物的影响导致了速度剖面急剧改变的近壁层的变厚；这造成了壁面速度梯度的减小和摩擦阻力的相应减小。当湍流在足够大的雷诺数下流经粗糙壁时，近壁层不复存在，因此添加聚合物对平均速度剖面的影响和对摩阻的影响将消失[2]。

---

1) Васецкая Н. Г.,Иоселевич В. А., О построении полуэмпирической теории турбулетности слабых растворов полимеров. Изв. АН СССР. МЖГ. № 2. 1970. стр. 136—146.

2) 近来,考虑添加少量聚合物、壁面粗糙度、雷诺数和其它因素的影响的理论，在下列工作中得到了发展: Иоселевич В. А., Пилипенко В. Н., О турбулентном течении жидкости с полимерными добавками в пограничном слое с продольным градиентом давления. ДАН СССР, т. 213, № 4, 1973; *Иоселевич В. А., Пилипенко В.Н., Логарифмический профиль скорости* при течении слабого полимерного раствора у шероховатой поверхности. ДАН СССР, т. 213, № 6, 1973; Полипенко В. Н., Течение слабых полимерных растворов в пограничном слое вращающегося диска. Научные труды института механики МГУ, №. 31, 1974; Васецкая Н. Г., Иоселевич В. А., Полимерные довавки в пограничном слое плоской пластины. Научные Труды Института механики МГУ, № 32, 1974; Иоселевич В.А., Полипечко В. Н., О сопротивлении плоской пластины в потоке полимерного раствора переменной концентрации. Изв. АН СССР, МЖГ, № 1, 1974; Sedov L., Vasetskaya N., Ioselevich V., Calculation of Turbulent Boundary Layers with Polymer Additives. International Conference on Drag Reduction(September 4—6, 1974). Cambridge, England.

第四章　气体的一维不定常运动

§1. 具有球面、柱面和平面波的气体自模拟运动

1. 自模拟性的概念　流体或气体的运动，若其全部特征量仅依赖于唯一一个几何坐标和时间，则定义该运动是一维的。可以证明，只当具有球面、柱面和平面波时才可能有一维运动[1]。量纲理论的方法，可以求出可压缩流体一维不定常运动的某些问题的精确解[2]。这些问题在许多情况下具有重要的理论和实践意义。即使在问题的提法不具有独立意义的情况下，所求得的精确解也可用来作为例子，以检验气体动力学问题的各种近似求解方法的正

1) 参阅 Lipschitz R., Beitrag zu der Theorie der Bewegung einer Elastischen Flüssigkeit. J. für die reine und angew. Math., t. 100, 1887, s. 89—120.

并参阅 Любимов Г. А., О возможных видах одномерных неустановившихся движений вязкого газа. В сборнике статей № 19 «Теоретическая гидромеханика» (под редакцией Л. И. Седова), вып. 7. М., Оборонгиз, 1956.

2) 在下列文献中指出了这类解：Седов Л. И., О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, т. 9, вып. 4, 1954, стр. 293—311 (并参阅 О неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ДАН СССР, т. 47, № 2, 1954, стр. 94—96). 不利用量纲理论或群论的推理并与下面所研究问题的提法没有关系的类似的解，在下列文章中作了讨论：Bechert K. Ueber die Differentialgleichungen der Wellenausbreitung in Gasen. Ann. Phys., Bd. 39, Ht 5, 1941, S. 357—372(Bechert 只讨论了多方运动)；Станюкович К. П., Автомодельные решения уравнений гидродинамики, обладающих центральной симметрией. ДАН СССР, т. 48, № 5, 1945, стр. 331—333.

下列文章中给出了我们所发展的方法在多孔介质中流体渗流理论上的应用，以及对这些方法的推广以寻找极限趋于自模拟的运动（见 § 4）：Баренблатт Г. И., Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. ПММ, т. 16, вып. 6, 1952; О предельных автомодельных движениях в теории нестационарной фильтрации газа в пористой среде и теории пограничного слоя. ПММ, т. 18, вып. 4, 1954, стр. 409—414.

确性。

为了说明可用量纲理论的方法求解的那些问题的特点，我们来讨论一维运动的待求函数和主定参量。当使用欧拉观点时，基本的待求函数是速度 v，密度 ρ 和压力 p，而主定参量是线坐标 r，时间 t 和在方程中以及问题的边界条件和初始条件中出现的诸常数。因为量 ρ 和 p 的量纲含有质量，所以在主定参量中必须至少有一个常数 a，其量纲也含有质量。不失一般性，可设其量纲是 $[a] = \mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s$. 这时，待求的速度、密度和压力诸函数总是可以写为公式

$$v = \frac{r}{t} V, \quad \rho = \frac{a}{r^{k+3}t^s} \mathscr{R}, \quad p = \frac{a}{r^{k+1}t^{s+2}} P. \qquad (1.1)$$

其中 V，$\mathscr{R}$ 和 P 是无量纲量，因而，它们只与包含 r，t 和问题的其它参量的无量纲组合有关。

在一般情况下，它们是两个无量纲变量的函数。但是，如果在主定参量中，除 a 之外仅只还有一个其量纲与 a 无关的常数 b[1]，则由 r，t，a 和 b 就只能组成一个无量纲组合形式的自变量。

因为常数 a 的量纲含有质量，所以不失一般性，总可以这样引进常数 b，使得它的量纲不包含质量，亦即 $[b] = \mathrm{L}^m\mathrm{T}^n$. 在此情况下，唯一的无量纲自变量组合将是 $r^m t^n/b$，它在 $m \neq 0$ 时可换为自变量

$$\lambda = \frac{r}{\frac{1}{b^m}t^\delta}, \text{ 其中 } \delta = -\frac{n}{m}. \qquad (1.2)$$

如果 $m = 0$，则 V，$\mathscr{R}$ 和 P 只能依赖于时间 t，在此情况下，速度 v 正比于 r，对应于这种特殊情况的运动在后面 §15 中将详细研究。

除可变参量 λ 以外，解还可能依赖于一系列不变的无量纲参量。

1) 一般地说，主定常数可以有好多个，但它们的量纲应依赖于 a 和 b. 以后重要的是，在主定常数中只有两个常数 a 和 b 具有带固定指数 k、s、m、n 的独立量纲，这些指数可以是整数或者分数或者超越数. 至于在具体问题中如何确定这些指数，这与问题的提法和待求的解的性质有关，这已完全超出了量纲理论的范围.

所以，当问题的主定参量中除 r 和 t 之外总共只有两个量纲独立的常量时，可压缩流体的一维不定常运动中的速度、密度和压力所应满足的偏微分方程，可以换为量 V、$\mathscr{R}$ 和 P 的常微分方程。

这些常微分方程的解，有时可以以封闭的形式严格求出，在其它情况下，用数值积分近似地求出。

这种形式的运动称为自模拟的。我们现在讲一讲容易用上述方法求解的某些问题的提法。

为确定起见，我们设气体是完全的、非粘性的和无热传导的，并且伴随运动不发生任何物理和化学变化（在各种问题中在什么样的程度上这些假设就可能不成立，这将在后面讨论）。在这种情况下，运动、连续性和能量方程可取为下列形式：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=0,\\&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v}{\partial r}+(\nu-1)\frac{\rho v}{r}=0,\\&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)+v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right)=0.\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

式中 γ 是绝热指数，对平面波 $\nu=1$，柱面波 $\nu=2$ 和球面波 $\nu=3$。

方程中没有任何有量纲常数，所以，运动是否为自模拟的，就在于在问题的附加条件中不含有多于两个具有独立量纲的参量。现在来看自模拟问题的例子。

2. 关于由给定的速度 $v_0(r)$，密度 $\rho_0(r)$ 和压力 $p_0(r)$ 等初始分布所决定的气体运动的问题（柯西问题） 不难指出初始时刻（$t=0$）的 $v_0(r)$，$\rho_0(r)$ 和 $p_0(r)$ 的这样一种形式的分布规律，它将使得在以后时刻 $t>0$ 时发生的运动是自模拟的。

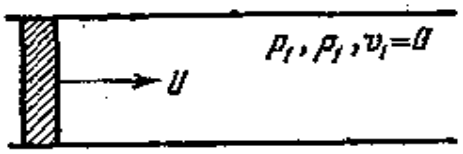


图 34　活塞以常速 U 开始运动，活塞前面的气体起初静止不动并有相同的密度 ρ_1 和压力 p_1

事实上，因为整个运动仅由两个具有独立量纲的有量纲常数 a 和 b 决定，所以初始分布应由 a、b、r 三个量决定。

下面，我们认为 b 和 r 量纲无关[1]，从而 $n \neq 0$. 当 $m \neq 0$ 时，不失一般性，令 $[b] = LT^{-\delta}$.

由量纲考虑得出，初始分布应为如下形式的公式：

$$v_0 = \alpha_1 b^{\frac{1}{\delta}} r^{1-\frac{1}{\delta}}, \quad \rho_0 = \alpha_2 a b^{\frac{s}{\delta}} r^{-(k+3+\frac{s}{\delta})},$$

$$p_0 = \alpha_3 a b^{\frac{s+2}{\delta}} r^{-(k+1+\frac{s+2}{\delta})}, \tag{1.4}$$

其中 α_1、α_2、α_3 是给定的无量纲常数，在平面波情况下，这些常数的值在 $r > 0$ 时和 $r < 0$ 时可以是不同的。

当在 r 的无穷区间上求解所讨论的初值问题时，并且当 $r=0$ 或 $r = \infty$ 时运动的特征量可能有无穷大值时，解的存在性和唯一性的问题是重要的。

为了求解有任意的 k、s 和 δ 的初值问题，必须研究最一般类型的自模拟运动。

3. 活塞问题 在一个一端以活塞封闭的长柱形管中充满了气体，在初始时刻气体静止不动（$v_1 = 0$），而活塞以常速 U 开始运动（图 34）。

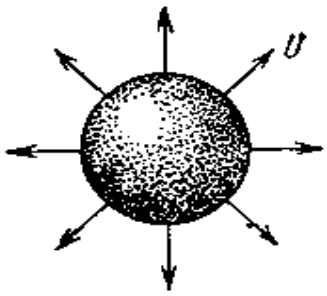


图 35 气体中的球或圆柱以常速 U 膨胀，在初始时刻气体是静止的，而球或柱的半径等于零. 气体的初始密度 ρ_1 和初始压力 p_1 为常数

1) 若 b 和 r 量纲相关，则 $n = \delta = 0$，于是存在无量纲组合 br^{-m}. 在此情况下由量纲考虑得出，初始速度只能等于零或无穷大，如果 $s \neq 0$ 或 $s \neq -2$，初始密度和压力也将如此.

若 $n = 0$ 和 $s = 0$，则初始密度可能是 r 的任意函数，但压力和速度或者为零或者为无穷大. 若 $n = 0$ 和 $s = -2$，则初始压力可能是任意的，而速度和密度或者为零或者为无穷大.

这个问题中的主定参量，除 r 和 t 外是气体的初始密度 ρ_1、初始压力 p_1 和活塞的运动速度 U. 因为 ρ_1, p_1 和 U 的量纲之间有关系式

$$[U^2] = \frac{[p_1]}{[\rho_1]},$$

所以，确实一共只有两个具有独立量纲的常数。

对具有柱对称和球对称性的运动可以提出类似的问题：充满空间的气体，在初始时刻相应地由圆柱或球面推着开始运动，柱或球的半径由零开始正比于时间而增大（图 35）。

如果活塞运动的速度不是常数，而譬如是正比于时间的某次方

$$U = ct^n,$$

则出现第三个其量纲与 ρ_1 和 p_1 的量纲无关的（当 $n \neq 0$）重要常数 c：

$$[c] = \mathrm{LT}^{-n-1}.$$

所以，相应的受扰气体运动将不是自模拟的。

具有这种活塞速度变化规律（$n \neq 0$）的运动，在 $p_1 = 0$ 的极限情况下将是自模拟的，因为这时问题的条件中只有两个量纲独立的常数 ρ_1 和 c.

4. 气体聚焦于一点和由一点飞散的问题 充满空间的均匀气体，在初始时刻其全部质点在 $p_1 = \mathrm{const}$ 和 $\rho_1 = \mathrm{const}$ 的条件下具有同一个朝向中心（聚焦）或离开中心（飞散）的速度。

在柱对称情况下，全部质点具有同一个朝向对称轴或离开对称轴的速度。

显然，平面波的类似问题，在加上一个与气体的初始速度大小相等方向相反的平动速度后，就化为常速活塞运动的问题。

在球或柱对称情况下，所讨论的问题与球面和柱面活塞的问题是不同的问题。

与在前一个问题中一样，在初始条件和边界条件里出现的有量纲常数中，只有两个具有独立的量纲（ρ_1, ρ_1）.

初始值为常数的气体聚焦和飞散的问题，乃是更一般的、作为基本问题讨论过的第一柯西初值问题的特殊情况。在其它情况下，当主定常数的量纲与速度、压力和密度的量纲不同和无关时，如果初始值不等于零，则它们沿半径的分布就应该是变化的。

5. 火焰或爆轰阵面的传播 充满空间的、具有同一个密度 ρ_1 和压力 p_1 的均匀可燃混合气体，在 $t=0$ 时沿平面（平面情况）、沿直线（柱对称）或在一点（球对称）点燃，沿混合气体将传播一个平面的、柱面的或球面的火焰锋面或爆轰波。

众所周知，燃烧区的厚度在通常条件下非常小（量级为一毫米的几分之一）。

如果我们不关心在燃烧区本身内所发生的过程，则可认为它的厚度等于零，亦即气体是在某一几何面上瞬时燃尽。在这情况下主定参量将是：混合气体的初始密度 ρ_1，初始压力 p_1，单位质量气体燃烧时释放出的热量 Q，以及在火焰锋面传播情况下锋面相对于质点运动的速度 u，对于给定的混合气体 u 是一已知的物理-化学常数。

Q 的量纲在力学单位中可通过 p_1 和 ρ_1 的量纲表示：

$$[Q]=\frac{[p_1]}{[\rho_1]}.$$

所以，在四个主定参量中仍只有两个具有独立的量纲。

如果初始密度不为常数而是按如下规律变化

$$\rho_1=\frac{A}{r^\omega},$$

则主定参量将是 A，p_1，Q，于是气体的受扰运动将不是自模拟的。

根据对方程和边界条件的讨论可知，初始压力 p_1 只在冲击波条件中出现，如果与爆轰波阵面后的高压相比在此条件中略去初始压力 p_1，则在主定参量中将不再出现量 p_1。在这样的近似提法中，问题将变成自模拟的，它具有两个量纲独立的主定常数：

$$[A]=\mathrm{ML}^{\omega-3}\text{ 和 }[Q]=\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-2}.$$

6. 可燃混合气体中任意间断分解的问题 在 $t=0$ 时刻平面 $r=0$（$\nu=1$ 的情形）的左边是具有常速度 v_1、常密度 ρ_1 和常压力 p_1 的气体，而右边是具有常速度 v_2、常密度 ρ_2 和常压力 p_2 的可燃混合气体。一般说来，因为通过这样的间断面质量、动量和能量守恒条件是不满足的，所以，在下一时刻它不可能单独地存在，而应产生带有一个或几个间断面的气体运动，在每一个间断面上守恒条件将得到满足（这时沿可燃混合气体可能传播火焰锋面或爆轰波）。在问题的参量中（v_1, ρ_1, p_1, v_2, ρ_2, p_2, Q——单位质量气体燃烧时释放的热量和 u——火焰锋面的速度）总共只有两个参量具有独立的量纲。所以，所发生的运动将是自模拟的。

如果带平面波的柯西问题的初始值(1.4)式中的常数在 $r>0$ 时是 k, s, δ, α_1^+, α_2^+ 和 α_3^+，而在 $r<0$ 时是 k, s, δ, α_1^-、α_2^- 和 α_3^-，则对这些常数的任意值求解柯西问题时，就必须求解在 $r=0$ 处对应奇异性的间断分解的更一般的自模拟问题。

在解存在并唯一的情况下，相应间断的分解乃是仅由奇异性的类型决定的局部现象。

7. 强爆炸问题 在 $t=0$ 时刻在静止气体中于对称中心（于一点）发生爆炸，亦即一瞬间释放出有限的能量 E_0。在这一提法中我们忽略不计释能物质的质量和体积。这样提出的强爆炸问题，反映了原子弹爆炸时现象的特点，下面在§11 中我们将给出这方面的试验结果。

在问题的条件中出现三个具有独立量纲的常数：气体的初始密度 ρ_1，初始压力 p_1 和爆炸能量 E_0。

爆炸后气体绝热受扰运动的主定参量组是

$$\rho_1,\ p_1,\ E_0,\ r,\ t,\ \gamma.$$

所以，根据量纲理论的考虑得出，全部无量纲因变量只能依赖于三个无量纲参量：

$$\gamma,\ \frac{\rho_1^{1/5}r}{E_0^{1/5}t^{2/5}}=\lambda,\quad \frac{p_1^{5/6}t}{E_0^{1/3}\rho_1^{1/2}}=\tau, \tag{1.5}$$

其中 λ 和 τ 是变量。试验和理论表明，爆炸时在气体受扰运动区

域的边界上，运动的特征量出现急剧的跃变，形成所谓的冲击波。在所讨论的问题提法中，这将是一个半径随时间增长的球面。初始压力 p_1 从而参量 τ 的影响，只通过冲击波上的动力学条件才得到体现。

然而，如果爆炸是强爆炸（E_0 很大），则爆炸所形成的冲击波的波后压力，将比气体中的初始压力大许多倍；于是，在冲击波后距爆炸中心不远距离上的气体运动，实际上将不依赖于初始压力 p_1。所以，只有两个有量纲常数是重要的：ρ_1 和 E_0。

在数学上，忽略初始压力的可能性表现为在冲击波条件中令未受扰动压力 p_1 等于零；于是参量 p_1 从而自变量 τ 不复存在。因此容易看出，气体的受扰运动可以看作是自模拟的。

当冲击波进一步减弱时，忽略初始压力——"反压" p_1——就不合理了，所以，点爆炸时气体受扰运动的问题，在离爆炸中心较远的距离上就不再是自模拟的。

我们看到，在数值求解考虑反压 p_1 的点爆炸问题时，只要对一种具体情况进行计算就够了，它可以求得全部待求量对于无量纲量 λ，τ 的依赖关系；此后，对于同一个 γ 值来说，可以容易地确定在任何 E_0 值、任何初始密度 ρ_1 和任何初始压力 p_1 情况下的爆炸扰动场的特征量。

在柱对称情况下，爆炸是发生在一条直线上[1]，而在平面情况下是发生在一平面上[2]。这时，量 E_0 相应地代表单位长度或单位面积上释放的能量。

显然，爆炸问题可以推广到初始密度按规律 $\rho_1 = A/r^\omega$ 变化的情形。为此，作为主定参量必须取其量纲公式为 $[A] = \mathrm{ML}^{\omega-3}$ 的常数 A 以代替常参量 ρ_1。

在此情况下，可取如下变量代替变量 (1.5)：

---

1) 沿直线的强爆炸，在某些情况下可看作是气体中的高强度放电。

2) 在柱面和平面情况下，E_0 的量纲要改变且参量 λ 和 τ 也要相应地改变，参阅 §§ 11, 12, 13, 14。

$$\gamma, \left(\frac{A}{E_0}\right)^{\frac{2}{5-\omega}} \frac{r}{t^{\frac{2}{5-\omega}}} = \lambda, \quad \frac{\rho_1^{\frac{5-\omega}{6}} t}{A^{\frac{1}{2}} E_0^{\frac{2-\omega}{6}}} = \tau.$$

当由于释放的能量 E_0 大、初始压力 p_1 小或时间间隔 t 小致使参量 τ 的值小时，第二个参量的影响可以忽略不计，这样，我们就得到强爆炸在变密度介质中传播的自模拟问题。

上述强爆炸问题的解，将在 §§ 11，12，14 中阐述。

8. 理想介质的性质和自模拟性 上面证明了，如果在确定理想的(无粘性的)完全气体的一维不定常绝热[1]运动时，边界条件和初始条件只包含两个量纲独立的常数，则存在自模拟性。

不难看出，在主定常数具有依赖于密度 ρ_1 和压力 p_1 的量纲的情况下，关于运动自模拟性的结论对任何其他的理想介质(没有切向应力，热力学状态由两个参量譬如 p 和 ρ 决定)也成立。

事实上，根据量纲理论的一般讨论得出，对于在冲击波条件中出现的单位质量的内能，如下形式的公式成立：

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho} F\left(\frac{p}{p^*}, \frac{\rho}{\rho^*}, \alpha_1, \alpha_2, \cdots\right),$$

而对于熵有公式

$$S = AG\left(\frac{p}{p^*}, \frac{\rho}{\rho^*}, \beta_1, \beta_2, \cdots\right),$$

其中 p^*，ρ^* 是具有压力和密度量纲的常数。量纲常数 A 不重要，因为在绝热性条件中它可以消去：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \beta_1, \beta_2, \cdots$ 是无量纲常数.显见，在一般情况下，对于状态方程如下形式的公式成立：

$$c_v T = \frac{p}{\rho} H\left(\frac{p}{p^*}, \frac{\rho}{\rho^*}, \alpha_1, \beta_1, \cdots\right).$$

由此很清楚，如果两个有量纲的主定常数具有依赖于 p^* 和 ρ^* 的量纲，则在主定参量表中增加常数 p^* 和 ρ^* 不会破坏自模拟性。

当函数 F，G，H 之中的某些函数(按所提问题的观点是重要的)不依赖于 p/p^* 和 ρ/ρ^* 两个参量，而只依赖一个 $p^{k_1}\rho^{k_2}/C$ 类型

1) 绝热性条件可换为另外的条件，例如，没有温度梯度：$\partial T/\partial r = 0$(无限导热性).

的无量纲参量时，在某些情况下可以谈论介质内在性质的自模拟性。在此情况下，介质的性质可以只通过量纲常数 C 而不通过常数 p^* 和 ρ^* 得到体现。一般地说，量纲常数 C 必须作为主定常数引进。对这样一些介质和相应的问题，自模拟运动是可能的，其中主定常数之一的量纲被固定并等于 C 的量纲。

在理想完全气体情况下，函数 F，H 化为无量纲常数，而函数 G 中的可加常数对许多问题提法是不重要的。由于这一情况，对理想完全气体有可能建立具有两个任意的、量纲独立的主定常数的自模拟运动。

§2. 自模拟运动的常微分方程和间断上的条件

1. 常微分方程 为了求解所列举的问题，我们来推导 V，$\mathscr{R}$ 和 P 所应满足的方程。

将 v，ρ 和 p 用(1.1)式中通过 V，$\mathscr{R}$，P 表出的表达式代入方程(1.3)并考虑到(1.2)式我们得到：

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda\left[(\delta-V)V'-\frac{P'}{\mathscr{R}}\right]=V^2-V-(k+1)\frac{P}{\mathscr{R}},\\
&\lambda\left[-V'+(\delta-V)\frac{\mathscr{R}'}{\mathscr{R}}\right]=-s-(k-\nu+3)V,\\
&\lambda(\delta-V)\left[\frac{P'}{P}-\gamma\frac{\mathscr{R}'}{\mathscr{R}}\right]=-s(1-\gamma)-2-[k(1-\gamma)+1-3\gamma]V.
\end{aligned}\right\}$$

引进新变量[1] $z=\gamma P/\mathscr{R}$ 代替 P，我们将这些方程变换为如下形式：

$$\frac{dz}{dV}=\frac{z\{[2(V-1)+\nu(\gamma-1)V](V-\delta)^2-(\gamma-1)V(V-1)(V-\delta)\}}{(V-\delta)[V(V-1)(V-\delta)+(\kappa-\nu V)z]}-\frac{[2(V-1)+\kappa(\gamma-1)]z^2}{(V-\delta)[V(V-1)(V-\delta)+(\kappa-\nu V)z]},\quad(2.1)$$

1) 温度 T 和变量 z 由如下公式相联系 $RT=\frac{r^2}{\gamma t^2}z$，其中 R 是气体常数。

$$\frac{d\ln\lambda}{dV}=\frac{z-(V-\delta)^2}{V(V-1)(V-\delta)+(\kappa-\nu V)z},\qquad(2.2)$$

$$(V-\delta)\frac{d\ln\mathscr{R}}{d\ln\lambda}=[s+(k-\nu+3)V]$$

$$-\frac{V(V-1)(V-\delta)+(\kappa-\nu V)z}{z-(V-\delta)^2},\qquad(2.3)$$

其中

$$\kappa=\frac{s+2+\delta(k+1)}{\gamma}.$$

对于给定类型的自模拟运动，常数 a 的量纲可以通过按公式 $a_1=ab^\chi$ 引入新的常数 a_1 来加以改变，其中指数 χ 是任意的。形式改变后的 k_1 和 s_1 的值由以下公式决定：

$$k_1=k+\chi,\quad s_1=s-\delta\chi.$$

还可以通过引进新常数 $b_1=b^m$ 来改变参数 λ。函数 $P(\lambda)$ 和 $\mathscr{R}(\lambda)$ 以及参数 λ 依赖于常数 a 和 b 的量纲的选取。显而易见，变量 z，V 以及函数 $z(V)$ 不依赖于指数 k，s，m 的选取，而完全由自模拟运动的类型决定，该运动主要只取决于 κ 和 δ 两个参数。在 κ 的表达式中将量 k 和 s 用 k_1 和 s_1 置换后，我们得到 $\kappa=\kappa_1$。

函数 $z(V)$ 的上述特点，表明了方程(2.1)在 z、V 平面上的积分曲线场与自模拟运动的类型的关系，该关系与主定常数 a 和 b 的引入方式无关。

容易看出，基本问题在于积分方程(2.1)。若方程(2.1)被积出，则 V 和 $\mathscr{R}$ 对于 λ 的依赖关系就由方程(2.2)和(2.3)通过求积分确定。

对任意的非自模拟运动都可以讨论无量纲变量 z，V 的平面。在每一时刻，气体的一维不定常运动的流场，在 z，V 平面上由某一曲线与之对应。当存在强间断(冲击波)时在该曲线上将有间断点。对非自模拟运动，不同时刻的气体运动由 z，V 平面上的不同曲线与之对应。

在 z，V 平面上对应强间断的点将随时间运动。不同的空间上

的固定点或者不同的固定质点，在 x，V 平面上由不同的曲线相对应。如果运动是自模拟的，则气体运动的场，在不同时刻无论对不同的点或者质点，在 x，V 平面上都由同一条曲线与之对应，该曲线就是方程(2.1)的积分曲线。由自模拟问题的提法得出，冲击波的坐标 r 和冲击波上的变量 $\lambda = r/bt^{\delta}$ 是时间 t 和有量纲主定常数 a 和 b 的函数[1]。

由 a，b，t 三个量不能组成无量纲组合，故对间断面有

$$\lambda = \lambda_0 = \text{const}, \quad r = \lambda_0 b t^{\delta}.$$

所以，对自模拟运动冲击波是由变量 λ，$\mathscr{R}$，x，P，V 的固定值相对应。在 x，V 平面上冲击波对应于固定点。

对冲击波的速度 c 总是可以写出如下形式的公式：

$$c = \frac{dr}{dt} = \delta \frac{r}{t}. \tag{2.4}$$

显然，对自模拟运动 δ 是常数。当 $r > 0$、$t > 0$ 时空间中相的传播速度在 $\delta > 0$ 时是背向中心，而 $\delta < 0$ 时是指向中心。所以，当 $\delta > 0$ 时冲击波是发散的，而 $\delta < 0$ 时是会聚的；并且，当 $\delta < 0$ 时相的运动速度逐渐减慢。若 $r > 0$、时间 t 增长，但是 $t < 0$，则冲击波的运动具有相反的性质。在抛物线 $x = (\delta - V)$ 上相速度相对质点等于声速，在该抛物线以上这速度是亚声速，在抛物线以下是超声速。在非自模拟运动的一般情况下，无量纲量 δ 是时间的某一函数。

2. 强间断上的条件 在上面指出的大多数问题中，流动中都产生强间断(冲击波、爆轰波、火焰锋面)，所以我们在一般形式下来讨论强间断面两边 V，x 和 $\mathscr{R}$ 值之间的关系式。

通过强间断面时应满足质量、动量和能量流守恒的条件。将

1) 在特殊情况下可能有这样的情形：气体运动是自模拟的，但边界(譬如冲击波)的运动由一些附加常数决定，所以冲击波的坐标 r 不仅依赖 a，b 和 t，而且依赖其他有量纲常数。在这些情况下公式 $\lambda = \text{const}$ 在冲击波上不成立。按照已作的定义，这些被在整体上研究的运动，我们将称为非自模拟的，虽然其自模拟性只在边界上被破坏。

间断面一边的量记以下标1，另一边的记以下标2，我们可写出：

$$\left.\begin{aligned}\rho_1(v_1-c)&=\rho_2(v_2-c),\\ \rho_1(v_1-c)^2+p_1&=\rho_2(v_2-c)^2+p_2,\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

$$\frac{1}{2}(v_1-c)^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{1}{2}(v_2-c)^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}. \tag{2.6}$$

这些方程是对完全气体写的，在其中认为气体单位质量的热焓 i 由以下公式决定：

$$i=c_pT+\text{const}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\text{const}.$$

在关系式(2.5)和(2.6)中将 v，ρ，p 诸量按式（1.1）用表示为 V，$\mathscr{R}$，P 的表达式代换，速度 c 用式(2.4)的 $\delta r/t$ 代换，并引进变量 $z=\gamma P/\mathscr{R}$.

强间断上的关系式变为：

$$\mathscr{R}_1(V_1-\delta)=\mathscr{R}_2(V_2-\delta),$$

$$V_1-\delta+\frac{z_1}{\gamma(V_1-\delta)}=V_2-\delta+\frac{z_2}{\gamma(V_2-\delta)},$$

$$(V_1-\delta)^2+\frac{2z_1}{\gamma-1}=(V_2-\delta)^2+\frac{2z_2}{\gamma-1}.$$

根据这些等式量 V_2 和 z_2 按如下公式通过 V_1 和 z_1 表出：

$$\left.\begin{aligned}V_2-\delta&=(V_1-\delta)\left[1+\frac{2}{\gamma+1}\frac{z_1-(V_1-\delta)^2}{(V_1-\delta)^2}\right],\\ z_2&=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2\frac{1}{(V_1-\delta)^2}\left[(V_1-\delta)^2+\frac{2z_1}{\gamma-1}\right]\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}(V_1-\delta)^2-z_1\right].\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

在平面 (V,z) 上给出点 (V_1,z_1)，我们由关系式(2.7)就求得通过间断之后它转化成的点 (V_2,z_2). 我们假设气体质点通过强间断后由状态1转变为状态2. 由方程(2.5)，(2.6)的对称性显见，在公式（2.7）中下标1和2是可以互换的.

抛物线

$$z=(V-\delta)^2 \tag{2.8}$$

上的点转化为自己本身.弱间断亦即微商的间断面对应此抛物线。事实上,用有量纲量写出的方程 (2.8)，给出

$$\frac{\gamma p}{\rho}=(v-c)^2,$$

也就是间断相对质点而言的速度之平方等于声速的平方。位于抛物线 (2.8) 以下的点,转化为该线以上的点,反之亦然。

因为按其物理意义 z 永远是正的,所以,仅只那些上半平面的点仍转化为上半平面的点的情况才有物理意义。

V 轴上的点,它对应于 $z=0$ 的极限情况,转化为如下抛物线上的点:

$$z=\frac{2\gamma}{\gamma-1}(V-\delta)^2.$$

所以,变换式(2.7)将把 V 轴与抛物线

$$z=(V-\delta)^2$$

之间的区域变换为抛物线

$$z=\frac{2\gamma}{\gamma-1}(V-\delta)^2$$

与抛物线

$$z=(V-\delta)^2$$

之间的区域,反之亦然。

再则,因为

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\mathscr{R}_2}{\mathscr{R}_1}=\frac{V_1-\delta}{V_2-\delta}>0, \tag{2.9}$$

则显见,强间断两边的点在 z,V 平面上都位于直线 $V=\delta$ 的同一侧。对任何的 $z_1\geqslant 0$,关系式(2.9)也可由(2.7)得出。

对于抛物线 (2.8) 以上的点,有

$$z>(V-\delta)^2 \text{ 或 } a^2=\frac{\gamma p}{\rho}>(v-c)^2,$$

而对位于抛物线 (2.8) 下面的点,有

$$z<(V-\delta)^2 \text{ 或 } a^2=\frac{\gamma p}{\rho}<(v-c)^2.$$

换言之，我们有：当 $z > (V-\delta)^2$ 时气体质点的速度相对间断是亚声速；而当 $z < (V-\delta)^2$ 时是超声速。所以[1]，抛物线

$$z = (V-\delta)^2$$

与直线 $z = 0$ 之间的区域对应于强间断能够在其中传播的状态；而抛物线

$$z = \frac{2\gamma}{\gamma+1}(V-\delta)^2$$

与

$$z = (V-\delta)^2$$

之间的区域对应于强间断后面的状态。

位于抛物线

$$z = \frac{2\gamma}{\gamma-1}(V-\delta)^2$$

以上的点，按(2.7)转化为下半平面的点，所以，它们既不能对应间断前面的也不能对应间断后面的气体状态。

在图 36 上，画铅直虚线的区域是其点可以描写间断前面的气体状态的区域，而画水平虚线的是跃变之后映象点转入的区域。

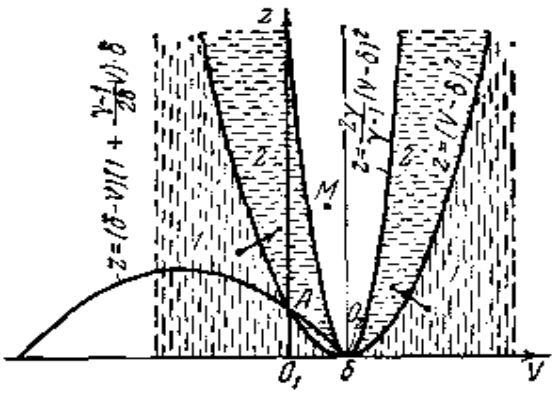


图 36　在平面 $z = \gamma p v^2/\rho r^2$，$V = vt/r$ 上，点由画铅直虚线的区域向画水平虚线的区域的转化可以对应跃变。可能的转化用箭头示出

1) 对一般情况下的间断上条件的分析，譬如在下列书中有所叙述：Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л., Гостехиздат, 1950; М., «Наука», 1966.

由点 (V_1, z_1) 向点 (V_2, Z_2) 的可能转化的方向用箭头示出.

还要指出，如果冲击波沿静止气体传播，亦即如果点 (V_1, z_1) 是在 z 轴 $(V = 0)$ 上，则点 (V_2, z_2) 应在抛物线

$$z_2 = -\delta(V_2 - \delta)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2\delta} V_2\right) \qquad (2.10)$$

上. 此抛物线画于图 36 的左下部.

在直线 $V = \delta$ 左边 $\lambda = \text{const}$ 相的速度(其中包括冲击波速度) $c = \delta r/t$ 大于同一空间点上的气体质点速度 $v = Vr/t$，而在该直线左边 c 小于 v. 在空间中这两种速度的方向在第一种和第二种情况下都是相同的. 相对质点而言的相对相速度在第一种情况下与质点速度方向相同，在第二种情况下与质点速度方向相反.

显然，本小节中的所有结论与运动的自模拟性无关.

3. 爆轰波阵面上和火焰锋面上的条件 我们先讨论有能量补充的强间断的一般性质. 设当气体质点经过强间断面由状态 1 转变为状态 2 时，发生能量补充，给单位质量补充的能量等于 Q. 这种补充可以靠化学反应(火焰锋面、爆轰波阵面)，靠热传导、辐射或其他某些过程实现.

当在间断面上存在能量补充时，力学条件(2.5)在形式上保持不变，而由于向状态 2 补充了能量 Q，能量条件(2.6)将要改变(在热焓公式中常数增大). 改变后的能量方程具有如下形式：

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}(v_1 - c)^2 + Q = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}(v_2 - c)^2. \qquad (2.11)$$

在此方程中考虑了波前和波后的泊松系数 $\gamma = c_p/c_v$ 的值可能不同，波前的是 γ_1，波后的是 γ_2.

方程 (2.5) 和 (2.11) 可变换为

$$v_2 - c = \frac{\rho_1}{\rho_2}(v_1 - c), \qquad (2.12)$$

$$p_2 = p_1 + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\rho_1(v_1 - c)^2, \qquad (2.13)$$

$$\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 - \frac{2\gamma_1}{\gamma_2+1}\left(1+\frac{p_1}{\rho_1(v_1-c)^2}\right)\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}\left[\frac{2\gamma_1}{\gamma_1-1}\frac{p_1}{\rho_1(v_1-c)^2}+1+\frac{2Q}{(v_1-c)^2}\right] = 0. \tag{2.14}$$

以下差的绝对值

$$|c-v_1| = a$$

是冲击波相对于波阵面前质点的速度，在火焰锋面情况下速度 a 是给定的物理-化学常数。

可以直接看出下列等式：

$$\frac{a_1}{(v_1-c)^2} = \frac{\gamma_1 p_1}{\rho_1(v_1-c)^2} = \frac{z_1}{(V_1-\delta)^2}$$

和

$$\frac{a_2^2}{(v_2-c)^2} = \frac{\gamma_2 p_2}{\rho_2(v_2-c)^2} = \frac{z_2}{(V_2-\delta)^2}.$$

在这些公式中 z_1 和 z_2 相应地由 γ_1 和 γ_2 决定，a_1 和 a_2 是相应的声速。

在 z，V 平面上方程

$$\frac{z}{(V-\delta)^2} = \text{const}$$

对应抛物线。下列值

$$\frac{\gamma p}{\rho(v-c)^2} = \alpha, \quad \frac{\gamma p}{\rho(v-c)^2} = \beta$$

之间的区间在 z，V 平面上由两抛物线

$$z = \alpha(V-\delta)^2 \quad 和 \quad z = \beta(V-\delta)^2$$

之间的区域与之对应。

方程 (2.14) 是决定比值 ρ_1/ρ_2 的二次方程，ρ_1/ρ_2 在这里是作为 $\gamma_1, \gamma_2, p_1/\rho_1 u^2$ 和 Q/u^2 四个参量的函数。

火焰锋面是稀疏间断，对它有不等式

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} > 1, \quad \frac{\gamma_2 p_2}{\rho_2(v_2-c)^2} = \frac{z_2}{(V_2-\delta)^2} > 1,$$

$$\frac{\gamma_1 p_1}{\rho_1(v_1-c)^2}=\frac{z_1}{(V_1-\delta)^2}>1, \tag{2.15}$$

亦即燃烧产物的密度小于可燃混合气体的密度，而间断面相对于火焰锋面前质点和锋面后质点的速度 (v_1-c) 和 (v_2-c) 是亚声速的。

爆轰波阵面是压缩间断，对于它方程(2.14)有两个根 ρ_1/ρ_{21} 和 $\rho_1/\rho_{22}\geqslant\rho_1/\rho_{21}$. 对这些根下列不等式满足：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\rho_1}{\rho_{21}}<1,\ \frac{\gamma_2 p_2}{\rho_2(v_2-c)^2}=\frac{z_2}{(V_2-\delta)^2}\geqslant 1,\\&\frac{\gamma_1 p_1}{\rho_1(v_1-c)^2}=\frac{z_1}{(V_1-\delta)^2}<1,\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

也就是说，间断面速度相对波前质点是超声速，而相对波后质点是亚声速或等于声速；

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\rho_1}{\rho_{22}}<1,\ \frac{\gamma_2 p_2}{\rho_2(v_2-c)^2}=\frac{z_2}{(V_2-\delta)^2}\leqslant 1,\\&\frac{\gamma_1 p_1}{\rho_1(v_1-c)^2}=\frac{z_1}{(V_1-\delta)^2}<1,\end{aligned}\right\} \tag{2.16'}$$

也就是说，间断面速度相对波前质点和波后质点都是超声速。如果满足等式

$$\gamma_2^2\left(1+\frac{p_1}{\rho_1 u^2}\right)^2=(\gamma_2-1)\left[\frac{2\gamma_1}{\gamma_1-1}\frac{p_1}{\rho_1 u^2}+1+\frac{2Q}{u^2}\right], \tag{2.17}$$

则方程 (2.14) 的根 ρ_1/ρ_{21} 和 ρ_1/ρ_{22} 相重合，即 $\rho_1/\rho_{21}=\rho_1/\rho_{22}$.

因为由(2.12)和(2.13)我们有公式

$$\frac{\gamma_2 p_2}{\rho_2(v_2-c)^2}=\gamma_2\left(1+\frac{p_1}{\rho_1 u^2}\right)\frac{\rho_2}{\rho_1}-\gamma_2, \tag{2.18}$$

所以根据方程(2.14)显见，等式(2.17)等价于等式

$$\frac{\gamma_2 p_2}{\rho_2(v_2-c)^2}=\frac{z_2}{(V_2-\delta)^2}=1. \tag{2.19}$$

所以，当间断面速度相对波后质点严格等于声速时，方程(2.14)的两个根相重合。

与压缩间断的条件(2.19)等价的条件(2.17)称为恰普曼-儒

盖条件。 在许多情况下，对于有爆轰波存在的气体的实际运动，这个条件均成立。 当给定波前气体状态的特征量 ρ_1, p_1 以及给定 γ_1, γ_2 和 Q 时，借助附加的方程(2.17)，可以不依赖具体问题的特点而计算波面速度

$$u = v_1 - c,$$

并由(2.12)，(2.13)和(2.14)算出爆轰波阵面后的量 ρ_2, p_2, $v_2 - c$。

还在上世纪末，在伯塞洛特 (Berthelot)、维伊尔 (Vieille)、马拉德 (Mallard)、李-查特利尔 (Le Chatelier) 和其他人的论文中[1]就提出了，燃烧波是稀疏间断，而爆轰波是可燃介质中的压缩间断，它后面跟随着一个很薄的区域，在其中迅速进行着放热化学反应.与爆轰的定常传播现象有关的基本力学效应的确立，在米哈尔松(1889 年)、恰普曼(1899 年)、儒盖(1905 年)、格留萨纳(1907 年)和其他人的论文中已经可以找到。

在定常运动情况下，在化学反应区的各不同点上量 Q 是不同的，并且，反应的中间产物的每一状态对应一个 Q' 值，并以同一个速度 u 相对间断面前的介质质点而运动.显然，对于所有的中间值 Q'，相应的 v_2', ρ_2' 和 p_2' 的值也由关系式(2.12)，(2.13)和(2.14)相联系。在常数值 ρ_1, p_1 情况下，在变量 p_2'/p_1, ρ_1/ρ_2' 的平面上，按式(2.13)得到一条直线，它称为米哈尔松直线[2]。

于是得到，沿着对应给定的初始状态 p_1, ρ_1 和 u 的米哈尔松直线，在由 $Q' = 0$ 到 $Q' = Q$ 的区间上，运动介质的所有特征量可以容易地通过 Q', p_1, ρ_1 和常量 u 计算出来：v_2', ρ_2', p_2' 根据 (2.12)，(2.13)和(2.14)，T_2' 和 S_2' 根据状态方程。

若要确定这些量对化学反应区厚度的坐标的依赖关系，为此求出这些量中的一个量对该坐标的依赖关系就够了。为了确定这个依赖关系，必须利用化学反应动力学方程。相应的化学反应动

1) Berthelot M., Vieille P., C. r. Acad. Sci., Paris, 94, 101—8 seance du 16 Janvier, 1882. Mallard E., Le Chatelier H., Ann. Mines, 8, ser. 4, 274, 1883.

2) Михальсон В. А., Уч. зап. Имп. моск. ун-та, отд. физ.-мат., вып. 10, 1893.

力学方程，在很多情况下尚了解得不够详尽，所以到现在爆轰波结构仍然不清楚。由于化学反应层很薄，在求解气体动力学问题时常常可以只限于计算爆轰的跃变，在跃变中可认为爆轰波无限薄并满足在给定的 Q 时的间断上的条件 (2.12)，(2.13) 和 (2.14)。

从米哈尔松的工作开始的研究表明，在气体中有不等式

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} < \frac{\rho_1}{\rho_{21}} \leqslant \frac{\rho_1}{\rho_{22}},$$

其中 ρ_2 是化学反应开始之前 $Q' = 0$ 时冲击波阵面后的密度值，ρ_1/ρ_{21} 和 ρ_1/ρ_{22} 是方程 (2.14) 在所给定的 Q 时的根。

在米哈尔松直线上，在区间 ρ_1/ρ_2，ρ_1/ρ_{21} 上，随密度 ρ_2' 的变化热焓 $Q'(\rho_1/\rho_2')$ 由 0 单调地增大到 Q。当 ρ_1/ρ_2' 进一步沿米哈尔松直线由 ρ_1/ρ_{21} 连续地变化到 ρ_1/ρ_{22} 时，根据(2.12)，(2.13)和(2.14)出现 Q' 值的非单调变化：开始时不断放热，使得 Q' 大于 Q，随后出现吸热，使 Q' 减小到 ρ_1/ρ_{22} 点上的 Q 值。

由此得知，如果在爆轰波区域中在化学反应时现象是连续地进行，而量 $Q'(\rho_1/\rho_2')$ 只能单调增长，则在爆轰波阵面后不可能实现与根 ρ_1/ρ_{22} 相对应的状态[1]。在爆轰波阵面后的 ρ_1/ρ_{21} 点上，爆轰沿质点的传播速度是亚声速或者严格等于儒盖点上的声速。

显然，如果爆轰速度 u 严格是亚声速的，则在这种情况下将发生爆轰波与爆轰产物气体流动的相互作用，也就是与受爆轰波阵面后的边界条件所控制调整的气体流动的相互作用。正是在 A. A. 格里布 (Гриб)1939—1940 年的学位论文中首先阐述的这一情况，解释了在各个具体问题中爆轰波沿质点传播时爆轰速度 u 的可能值的大小的问题。

在后面的气流推动小的情况下，由于与爆轰产物的气流进行着相互作用的爆轰波减弱，爆轰阵面沿它前面的质点传播的速度 u 只能是与儒盖点相适应的最小速度。在儒盖点上爆轰阵面的速

1) 显然，函数 $Q'(\rho_1/\rho_2')$ 单调的条件是排除根 ρ_1/ρ_{22} 的充分条件。另一方面，为了在爆轰阵面后实现根 ρ_1/ρ_{21}，关于化学反应区中函数 $Q'(\rho_1/\rho_2')$ 的单调性的要求不是必要的。

度相对它后面的质点等于爆轰波面后的当地声速。在由相应的边界条件造成爆轰阵面后推动大的情况下[1]，可能出现以大于儒盖速度的爆轰速度 u 传播的流动。在这种流动中，爆轰阵面的速度相对波后质点是亚声速，

$$(v_2 - c)^2 < a_2^2$$

与(2.16)中不等式的符号一致。

4. 关于冲击波后面温度与速度之间的关系 不失一般性，可设 $v_1 = 0$，亦即总是可以相对于波前的气体来研究运动。

由力学关系式(2.5)得到等式

$$\chi = \frac{v_2^2}{RT_2} = \frac{v_2^2\rho_2}{p_2} = \frac{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2}{\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\left(1 + \frac{p_1}{\rho_1 c^2}\right) - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right]}. \qquad (2.20)$$

对于压缩间断比值 ρ_1/ρ_2 小于1。当

$$\frac{p_1}{\rho_1 c^2} > 0 \text{ 和 } \frac{\rho_1}{\rho_2} < 1$$

时，无量纲函数 $\chi(\rho_1/\rho_2, p_1/\rho_1 c^2)$ 对所列的两个自变量来说是正的和单调的。由此得出，在最一般的情况下，与能量方程无关，对于压缩间断，量 χ 有对应 $p_1/\rho_1 c^2 = 0$ 和 $(\rho_1/\rho_2)_{\min}$ 的极大值：

$$\chi_{\max} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\max} - 1. \qquad (2.21)$$

显然，对普通冲击波或者对有附加吸能的波，得到最大压缩 ρ_2/ρ_1，对于释能的波，例如对火焰和爆轰波，得到的 $(\rho_2/\rho_1)_{\max}$ 和 $\chi_{\max}$ 都较小。由间断上的条件得出，对于普通冲击波比值 ρ_2/ρ_1 的最大值等于 $(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$，从而

$$\chi_{\max} = \frac{2}{\gamma - 1}. \qquad (2.22)$$

对于满足恰普曼-儒盖条件的强的爆轰波 $(p_1/\rho_1 c^2 = 0)$ 由方

---

1) 相应的例子给于§8中。

程 (2.14) 求得

$$\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)_{\max} = \frac{\gamma_2+1}{\gamma_2},$$

并与此对应

$$\chi_{\max} = \frac{1}{\gamma_2}.$$

求得 χ 的上限，就可以根据波后气体的质点速度来估计波后的温度。

气体的质点速度在许多情况下是已知的，当物体在静止气体中运动时，气体的相对速度等于物体的速度。在天体物理学中，星云中或恒星光球中的气体质点速度可借助研究光谱来决定。

例如，若在氢中波后的速度等于 1000 公里/秒，则波后的温度应大于摄氏五千万度。

5. 自模拟运动的有热能补充的间断面上的条件 在这种情况下，常数 Q 是主定常数；因为 $[Q] = L^2T^{-2}$，故可设 $m = 2$，$n = -2$，亦即 $\delta = 1$，于是

$$\lambda = \frac{\beta r}{\sqrt{Q}\, t},$$

其中 β 是某一常数，其值可以调整。第二个量纲常数我们记作 A；显然，总可以认为，它的量纲公式有形式

$$[A] = ML^{\omega-3}.$$

由自模拟性得出，对于 $t = 0$ 时的密度和压力应有如下形式的公式成立：

$$\rho_1 = k_1 \frac{A}{r^\omega}, \quad p_1 = k_2 \frac{AQ}{r^\omega}, \tag{2.23}$$

其中 k_1 和 k_2 是常数。若我们假定初始状态对应没有质量力的平衡状态，则得出，当 $\omega \neq 0$ 时 $k_2 = 0$，因而，在处于平衡状态的未扰动介质中

$$p_1 = 0. \tag{2.24}$$

若 $\omega = 0$，则 $p_1 = \text{const}$ 并且在平衡状态时可以不等于零。

对于有热能补充时的自模拟运动，间断上的条件有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{R}_1(V_1-1)=\mathscr{R}_2(V_2-1),\\&V_1-1+\frac{z_1}{\gamma_1(V_1-1)}=V_2-1+\frac{z_2}{\gamma_2(V_2-1)},\\&\frac{1}{2}(V_1-1)^2+\frac{z_1}{\gamma_1-1}+\frac{Q}{c^2}=\frac{1}{2}(V_2-1)^2\\&\qquad+\frac{z_2}{\gamma_2-1},\end{aligned}\right\}\tag{2.25}$$

并且在间断上 $\lambda=\lambda^*=\text{const}$.

对间断的运动规律我们有

$$r_2=\frac{\lambda^*}{\beta}\sqrt{Q}\,t,\quad c=\frac{dr_2}{dt}=\frac{\lambda^*}{\beta}\sqrt{Q}=\frac{r_2}{t},$$

$$\frac{\beta^2}{\lambda^{*2}}=\frac{Q}{c^2}.$$

如果间断有好几个，则在其中的一个上面总可以认为 $\lambda^*=1$，这就决定出常数 β.

恰普曼-儒盖条件 (2.19) 给出

$$z_2=(V_2-\delta)^2.\tag{2.26}$$

所以，当满足恰普曼-儒盖条件时，爆轰波阵面在 z，V 平面上应该对应抛物线 (2.26) 上的某一点.

若间断沿静止气体传播，则 $V_1=0$，由 (2.25) 得到

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{R}_2=\mathscr{R}_1\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_2+1}\left(1+\frac{z_1}{\gamma_1}\right)(1-\Lambda)\right]^{-1},\\&V_2=1-\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_2+1}\left(1+\frac{z_1}{\gamma_1}\right)(1-\Lambda)\right],\\&z_2=\frac{\gamma_2^2}{(\gamma_2+1)^2}\left(1+\frac{z_1}{\gamma_1}\right)^2(1-\Lambda)(1+\gamma_2\Lambda),\end{aligned}\right\}\tag{2.27}$$

并且

$$\left.\Lambda^2=1-\frac{(\gamma_2^2-1)\left[\dfrac{2}{\gamma_1-1}z_1+1+\dfrac{2Q}{c^2}\right]}{\gamma_2^2\left(1+\dfrac{z_1}{\gamma_1}\right)^2}.\right\}$$

恰普曼-儒盖条件等价于等式 $\Lambda=0$. 如果恰普曼-儒盖条件不满

足，且 $V_1 = z_1 = 0$，则

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{R}_2 &= \mathscr{R}_1 \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2(1 - \Lambda)}, \\ V_2 &= \frac{1 + \gamma_2 \Lambda}{\gamma_2 + 1}, \\ z_2 &= \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_2 + 1)^2}(1 - \Lambda)(1 + \gamma_2 \Lambda). \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

波后值 V_2, z_2 位于如下抛物线上：

$$z_2 = \gamma_2 V_2(1 - V_2). \tag{2.29}$$

恰普曼-儒盖点对应抛物线（2.26）和（2.29）的交点，在该点 $\Lambda = 0$.

抛物线（2.29）通过坐标原点，在该点 $\Lambda = -1/\gamma_2$. 当由坐标原点沿抛物线（2.29）向上运动时，Λ 增加并在抛物线（2.26）上变为零；当继续运动时，Λ 增加并趋于对应普通强冲击波（$Q = 0$）的 $\Lambda = 1/\gamma_2$.

§3. 自模拟运动的代数积分

对于自模拟运动，借助于量纲分析可以不依赖于具体的边界条件和初始条件而建立常微分方程组的代数积分。换句话说，在一般情况下总可以降低常微分方程组的阶。

下面我们将证明，在主定常数 a 和 b 取某些量纲的具体例子中，这种积分的数目可以增加。后面的结论对于比由方程组（1.3）所描述的气体运动更一般的情况也有效。

为具体起见，我们讨论球面情况下考虑牛顿引力的完全气体的一维不定常绝热运动，它们由下列方程组描述：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{(\nu - 1)\rho v}{r} = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial r} = \sigma_\nu \rho r^{\nu - 1}, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{f\mathscr{M}}{r^{\nu-1}}=0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+v\frac{\partial S}{\partial r}=0, \tag{3.4}$$

其中 $\sigma_\nu=2(\nu-1)\pi+\frac{1}{2}(\nu-2)(\nu-3)$，在球面情况下 $\nu=3$，f 是引力常数，$[f]=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{3}\mathrm{T}^{-2}$. 我们同时也讨论 $f=0$ 时的柱面波[1] $\nu=2$ 的或平面波 $\nu=1$ 的情况. $\mathscr{M}$ 是固定的坐标面与所讨论的坐标面之间的质量，$[\mathscr{M}]=\mathrm{ML}^{\nu-3}$. S 是熵或熵的某一函数.

我们来讨论由两个有量纲常数 a，b[2] 决定的自模拟运动：

$$[a]=\mathrm{ML}^{k}\mathrm{T}^{s} \text{ 和 } [b]=\mathrm{L}^{m}\mathrm{T}^{n}.$$

当 $m\neq 0$ 时，不失一般性可设 $m=1$、$n=-\delta$，$k=-3$. 这只要令

$$a_1=ab^{-(k+3)/m} \text{ 和 } b_1=b^{1/m}$$

就够了. 在考虑牛顿引力的情况下，当 $k=-3$ 时必须设 $[a]=[1/f]$，所以 $s=2$，从而，指数 δ 将是唯一重要的参数. 当 $f=0$ 时指数 s 也可以是任意的.

在自模拟运动的一般情况下，当 $m\neq 0$ 时可写出

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\frac{r}{b_1t^{\delta}},\quad v=\frac{r}{t}V(\lambda),\quad \rho=\frac{a}{r^{k+3}t^{s}}\mathscr{R}(\lambda),\\&p=\frac{ar^{2}}{r^{k+3}t^{s+2}}P(\lambda),\quad \mathscr{M}=\frac{ar^{\nu}}{r^{k+3}t^{s}}M(\lambda).\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

将式(3.5)代入方程(3.1)—(3.4)就导出关于

$$V(\lambda),\ \mathscr{R}(\lambda),\ P(\lambda) \text{ 和 } M(\lambda)$$

的四个常微分方程的方程组.

对于该方程组我们无须将其写出，现在来求其代数积分，即

$$V,\ \mathscr{R},\ P,\ M \text{ 与 } \lambda$$

---

1) 当 $\nu=2$ 时在随后的结论中可考虑引力.

2) 通过 p 和 ρ 表示的熵 S 的表达式，不应包含与 a 和 b 有关的重要有量纲常数. 显然，相乘的和可加的常数不重要.

之间的解折关系式.

1. 质量积分 由方程 (3.2) 得出

$$\mathscr{M}'' - \mathscr{M}' = \int_{\mathscr{M}'}^{\mathscr{M}''} d\mathscr{M} = \sigma_\nu \int_{r'}^{r''} \rho r^{\nu-1} dr.$$

我们讨论运动表面 $r'(t)$ 和 $r''(t)$，在上面参数 λ 取常数值 λ' 和 λ''. 不难验证如下恒等式，它对任何函数 $F(r, t)$ 都成立：

$$\frac{d}{dt}\int_{r'}^{r''} F\sigma_\nu \rho r^{\nu-1} dr$$

$$= \frac{\tilde{d}}{dt}\int_{r'}^{r''} F\sigma_\nu \rho r^{\nu-1} dr + \left[F\sigma_\nu \rho r^{\nu-1}\left(\frac{dr}{dt} - v\right)\right]_{r'}^{r''}, \quad (3.6)$$

式中符号 $\tilde{d}/dt$ 代表对由同一些气体质点组成的被积分的运动体积所取的时间微商.

因为

$$\mathscr{M}'' - \mathscr{M}' = \frac{ab_1^{\nu-k-3}}{t^{s+\delta(k+3-\nu)}}[\lambda''^{\nu-k-3}M(\lambda'') - \lambda'^{\nu-k-3}M(\lambda')],$$

所以

$$\frac{d(\mathscr{M}'' - \mathscr{M}')}{dt}\bigg|_{\substack{\lambda''=\text{const}\\ \lambda'=\text{const}}} = -\frac{s + \delta(k + 3 - \nu)}{t}(\mathscr{M}'' - \mathscr{M}').$$

根据质量守恒定律我们有

$$\frac{\tilde{d}(\mathscr{M}'' - \mathscr{M}')}{dt} = 0.$$

因此等式(3.6)在 $F = 1$ 时给出

$$-\frac{s + \delta(k + 3 - \nu)}{t}(\mathscr{M}'' - \mathscr{M}')$$

$$= \sigma_\nu \left[\rho r^{\nu-1}\left(\frac{dr}{dt} - v\right)\right]_{r'}^{r''}.$$

由此，再利用公式(3.5)和等式 $dr'/dt = \delta r'/t, dr''/dt = \delta r''/t$，我们求得积分

$$\lambda^{\nu-k-3}\{[s + \delta(k + 3 - \nu)]M - \sigma_\nu \mathscr{R}(V - \delta)\}$$

$$= C = \text{const}, \quad (3.7)$$

它是质量守恒定律的推论，因而永远成立. 当没有牛顿引力时，与

运动方程无关可以把积分(3.7)看作是以最终形式通过 λ, V 和 $\mathscr{R}$ 表达的 $M(\lambda)$ 的公式。当考虑引力时，函数 $M(\lambda)$ 进入由动量方程得到的常微分方程中；利用积分 (3.7) 可以将函数 $M(\lambda)$ 从这个方程中消去。 如果当 $\lambda = 0$ 时对所研究的解 $\mathscr{M} = 0$ 或 $\mathscr{M} =$ const，也就是在对称中心没有具有有限或无限消耗量的质量源，则当设 $\lambda' = 0$ 和 $r' = 0$ 时由积分(3.7)的结论得知，式(3.7) 右端的常数 C 等于零。

如果在对称中心附近在 $t > 0$ 时形成空腔——真空，并且在这个空腔的边界上有 $\lambda' = \text{const}$ 和 $\mathscr{M}' = 0$，则空腔上的质点速度等于空腔的膨胀速度 $v = \frac{dr'}{dt}$. 在此情况下同样得到 $C = 0$.

以上列举的情况对应这样的解，在这些解中质量守恒定律不仅在气流的每一个 $r \neq 0$ 的正常点上满足，而且在 $t \geqslant 0$ 时在对称中心的气流的奇点上也满足。

如果在 $r = 0$ 时质量守恒定律不满足，则在对称中心可能存在质量源，在这种情况下常数 C 可以不等于零。

当在对称中心没有质量源时，变量 $\mathscr{M}$ 可以看作拉格朗日坐标；在相反情况下，当 $V \neq \delta$ 时作为拉格朗日坐标可以取具有质量量纲的变量 $\tilde{\mathscr{M}} = \rho r^{\nu}(V - \delta)$. 直接利用连续性方程容易验证等式

$$\frac{d\tilde{\mathscr{M}}}{dt} = 0$$

的正确性。

当 $C = 0$ 时变量 $\mathscr{M}$ 与 $\tilde{\mathscr{M}}$ 只相差一个数值乘积因子。

$V = \delta$ 的情况对应速度 $v = \delta r/t$ 沿半径 r 作线性分布的特解。在这种情况下在质点上 $\lambda = \text{const}$，所以无量纲变量 λ 是拉格朗日坐标。

2. 绝热性积分 对气体的可逆绝热运动还存在一个积分[1]——

1) Лидов М. Л., Конечный интеграл уравнений одномерных автомодельных адиабатических движений газа. ДАН СССР, т. 103, № 1, 1955, стр. 35—36.

质点上熵不变定律的推论。

设 $\Phi(p,\rho)=f(S)$ 是熵的某一函数。熵 S 对 p 和 ρ 的依赖关系可以是任意的。质点上熵不变的条件 (3.4) 等价于如下形式的关系式：

$$\Phi(p,\rho)=F(\tilde{\mathscr{M}},a,b,\alpha_1,\alpha_2,\cdots),$$

其中 α_1,α_2 是无量纲常数，$\tilde{\mathscr{M}}$ 是拉格朗日坐标。

我们来指出 Φ 的量纲公式。设

$$[\Phi]=\mathrm{M}^{\omega}\mathrm{L}^{\mu}\mathrm{T}^{\chi}.$$

如果在任何 κ 时都没有等式 $[ab_1^{\kappa}]=[\tilde{\mathscr{M}}]$[1]，则由 $a,b_1,\tilde{\mathscr{M}}$ 三个有量纲参量不能组成无量纲组合，所以下列方程成立：

$$\Phi(p,\rho)=\tilde{\mathscr{M}}^{\omega}\left(\frac{ab_1^{s/\delta}}{\tilde{\mathscr{M}}}\right)^{\frac{[\mu-\omega(\nu-3)]\delta}{s+\delta(k+3-\nu)}}\left(\frac{ab_1^{\nu-k-3}}{\tilde{\mathscr{M}}}\right)^{\frac{\chi}{s+\delta(k+3-\nu)}}\cdot f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\tag{3.8}$$

在(3.8)中将 $p,\rho,\tilde{\mathscr{M}}$ 按公式 (3.5) 代换后，我们就得到 V，$\mathscr{R}$，P 与 λ 之间的最终关系式，它是连续性方程和绝热方程的积分。

假若在某一 κ 值时存在无量纲组合 $ab_1^{\kappa}/\tilde{\mathscr{M}}$，则量 f 可以依赖于 $ab_1^{\kappa}/\tilde{\mathscr{M}}$，并且该依赖关系事先可以是未知的，所以，在这种情况下绝热性微分方程一般说来不能化为最终关系式——积分。

如果是完全气体，则可令 $\Phi=p/\rho^{\gamma}$，在这种情况下我们有

$$\omega=1-\gamma,\quad \mu=3\gamma-1,\quad \chi=-2.$$

绝热积分有如下形式

$$\frac{P}{\mathscr{R}^{\gamma}}=[\mathscr{R}\lambda^{\nu}(V-\delta)]^{\frac{2-(\gamma-1)s+\delta[k+1-\gamma(k+3)]}{s+\delta(k+3-\nu)}}\cdot\lambda^{-\frac{[2+\nu(\gamma-1)]s+2(k+3-\nu)}{s+\delta(k+3-\nu)}}f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\tag{3.9}$$

---

1) 因为

$$\tilde{\mathscr{M}}=\frac{ab_1^{\nu-k-3}}{\mu+\delta(k+3-\nu)}\lambda^{\nu-k-3}M(\lambda),$$

所以如果 $s+\delta(k+3-\nu)=0$ 和 $\kappa=\nu-k-3$，则 $[ab_1^{\kappa}]=[\tilde{\mathscr{M}}]$ 是可能的。在此情况下积分 (3.7) 给出 $\lambda^{\nu-k-3}\mathscr{R}(V-\delta)=C$。若 $C=0$，则 $V=\delta$，于是 $v=\delta r/t$。这种特解我们将在§15 中研究。

有了质量积分和绝热积分，常微分方程组的阶被由四降到二.

3. 能量积分 下面我们将证明，如果由主定常数 a 和 b_1 能够组成具有量纲 $ML^{\nu-1}T^{-2}$ 的常数，则存在能量积分[1]。这个量纲在球面情况下等于能量的量纲，在柱面或平面情况下分别等于单位长度或单位面积上的能量的量纲。

我们首 讨论没有引力的情况，但在 $\nu = 1, 2, 3$ 的一般情况下进行讨论。

对运动坐标面 $r'(t)$ 与 $r''(t)$ 之间的总能量我们有公式

$$\mathscr{E} = \int_{r'}^{r''} \left(\frac{v^2}{2} + \varepsilon\right) \sigma_\nu \rho r^{\nu-1} dr,$$

其中 ε 是单位质量的内能。在给定时刻在表面 $r' = \text{const}$ 和 $r'' = \text{const}$ 之间所包含的质点的能量变化，等于压力在这些表面上做的功，所以

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\sigma_\nu (p'' v'' r''^{\nu-1} - p' v' r'^{\nu-1}).$$

再则，对于任何自模似运动（$m \neq 0$）由量纲分析得出，对具有量纲 $ML^{\nu-1}T^2$ 的量 $\mathscr{E}$ 如下形式的公式成立：

$$\mathscr{E} = a b_1^{\nu-1-k} t^{\delta(\nu-1-k)-2-s} f(\lambda'', \lambda', \alpha_1, \alpha_2, \cdots),$$

式中 $f(\lambda'', \lambda', \alpha_1, \cdots)$ 是无量纲函数。现在我们假设 $r'(t)$ 和 $r''(t)$ 由条件 $\lambda' = \text{const}$ 和 $\lambda'' = \text{const}$ 决定，这样，在一般情况下我们将有

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = [\delta(\nu - 1 - k) - 2 - s] \frac{\mathscr{E}}{t}.$$

现在，利用这些公式以及公式 (3.5) 和关系式 (3.6)，在用 $v^2/2 + p/(\gamma - 1)\rho$ （为确定起见我们设 $\varepsilon = p/(\gamma - 1)\rho$）代换 $F(r, t)$ 之后，容易导出对气体的任何自模拟运动均成立的关系式：

$$[s + 2 - \delta(\nu - 1 - k)] f(\lambda'', \lambda', \alpha_1, \alpha_2, \cdots)$$

---

1) Седов Л. И., Распространение сильных взрывных волн. ПММ, т. 10, вып. 2, 1946, стр. 241--250.

$$= \sigma_\nu \left\{ \lambda^{\nu-1-k} \left[PV + (V-\delta)\left(\frac{\mathscr{R}V^2}{2} + \frac{P}{\gamma-1} \right) \right] \right\}''_{\lambda}.$$

所得到的关系式包含着未知函数 $f(\lambda'', \lambda', \alpha_1, \alpha_2, \cdots)$，如果

$$s - \delta(\nu - 1 - k) = -2, \tag{3.10}$$

则它被消去。

所以，当存在条件 (3.10) 时，我们得到又一个重要积分：

$$\lambda^{\nu-1-k} \left[PV + (V-\delta)\left(\frac{\mathscr{R}V^2}{2} + \frac{P}{\gamma-1} \right) \right] = \text{const}, \tag{3.11}$$

它是能量守恒定律的推论。考虑到在前面的推导中曾取 $m = 1$，容易看出，条件 (3.10) 等价于等式

$$[\mathscr{E}] = [a b_1^{\nu-1-k}].$$

所以，能量积分的存在等价于这样的条件：常数 $a b_1^{\nu-1-k}$ 具有能量 $\mathscr{E}$ 的量纲；相应的自模拟运动可由常数 $\mathscr{E}$ 和常数 b_1 决定，$[b_1] = \mathrm{LT}^{-\delta}$，并且指数 δ 可以是任意的。

显然，在这里等式

$$\varepsilon = \frac{p}{(\gamma-1)\rho}$$

不重要，因为如果存在所述的自模拟性，则对另外的依赖关系 $\varepsilon(p, \rho)$ 也可写出类似 (3.11) 的积分。

我们再来讨论考虑牛顿引力的具有球对称性的气体运动。

当存在球对称性时，在半径为 r'' 和 r' 的两个球面之间的体积 O 中的气体质点的总能量，有如下公式：

$$\mathscr{E} = \int_{r'}^{r''} \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon - \frac{\rho f(\mathscr{M} - \mathscr{M}')}{r} \right] 4\pi r^2 dr. \tag{3.12}$$

在被积分的表达式中，第一项决定动能，第二项是热能内能，第三项是由引力相互作用的内力所确定的内能部分。半径为 r' 的球内的气体质量记作 $\mathscr{M}'$。我们解释一下第三项的公式，它是气体质量的引力相互作用的内能。在推导该公式时，对相互间距离为无穷远的物质质点令相互作用能等于零。显而易见，对于质量为 m_1 和 m_2 的两个质点，相互作用的势能等于

$$-\frac{fm_1m_2}{r_{12}}.$$

众所周知，总质量为 $\mathscr{M}_1$ 且其密度仅依赖于半径的物质球壳层（图37），它对质量为 m_2 的外部点 A 的作用，有如一个这样的质点对 A 的作用一样，这个质点质量为 $\mathscr{M}_1$ 且集中在球壳层的中心。

球壳层对内点 B 的引力合力严格等于零。所以，质量为 $\mathscr{M}_1$ 的球壳层与质量为 m_2 的位于距球壳层中心 r 处的质点之间的相互作用势能是

$$-\frac{f\mathscr{M}_1m_2}{r}.$$

球壳层与 B 点的相互作用势能为零。

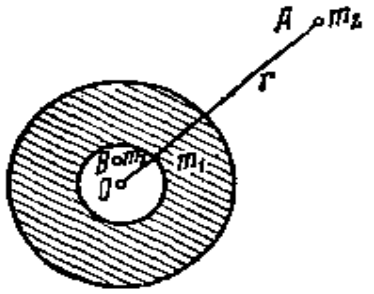


图37　球壳层对外部点 A 的吸引如同放置在中心 O 的一个质点对它的吸引。壳层对内部点 B 的引力合力为零。

半径为 r 和 r' 的球之间的壳层的质量等于 $\mathscr{M}-\mathscr{M}_1$，所以，$r'$ 和 r'' 的球之间的体积 O 内的质量的相互作用势能是

$$-\int_{r'}^{r''}\frac{f(\mathscr{M}-\mathscr{M}')}{r}d\mathscr{M}=-\int_{r'}^{r''}\frac{f(\mathscr{M}-\mathscr{M}')\rho 4\pi r^2}{r}dr.$$

按照能量守恒定律对体积 O 内的质量有

$$\frac{\tilde{d}\mathscr{E}}{dt}=\frac{dA^{(c)}_{表面}}{dt}+\frac{dA^{(c)}_{质量}}{dt}+\frac{dQ^{(c)}}{dt},$$

其中 $dA^{(c)}_{表面}/dt$ 是外表面力单位时间内做的功，它等于

$$\frac{dA^{(c)}_{表面}}{dt}=-p''v''4\pi r''^2+p'v'4\pi r'^2;$$

$dA^{(c)}_{质量}/dt$ 是外质量引力单位时间内做的功，此力等价于位于对称中心的、质量为 $\mathscr{M}'$ 的质点的吸引力，该力在单位时间内对 $d\mathscr{M}$ 元做的功等于

$$-\frac{f\mathscr{M}'d\mathscr{M}}{r^2}\frac{dr}{dt}=f\mathscr{M}'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathscr{M}}{r}\right).$$

由此得到

$$\frac{dA^{(c)}_{质量}}{dt}=f\mathscr{M}'\frac{\tilde{d}}{dt}\int_{r'}^{r''}\frac{4\pi r^2\rho dr}{r};$$

$dQ^{(e)}/dt$ 是单位时间内的外热流，因为按照假设过程是绝热的，故它等于零.

由此得出，对于在给定时间处于所讨论的体积 O 内的气体质点，能量守恒定律化为方程

$$\frac{\tilde{d}}{dt}\int_{r'}^{r''}\left[\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon-\frac{\rho f\mathscr{M}}{r}\right]4\pi r^2dr$$
$$=4\pi(r''^2p'v'-r'^2p''v''). \tag{3.13}$$

在没有外力做功的情况下引力对气体球作缓慢的绝热压缩（$v=0$）时（这适用于恒星），方程(3.13)给出：

$$\int_0^R\varepsilon d\mathscr{M}=\int_0^R\frac{f\mathscr{M}}{r}d\mathscr{M}+\text{const}.$$

因为当压缩时上式右端增大，则显见，气体的温度应升高。当压缩时由于引力能而可能使辐射热能受到消耗。

如果气体的运动是具有主定常数

$$[a]=\left[\frac{1}{f}\right]=\mathrm{ML^{-3}T^2}\quad(k=-3,\ s=2)\text{ 和 }[b_1]=\mathrm{LT^{-\delta}}$$

的自模拟运动，则有公式

$$\mathscr{E}^*=\int_{r'}^{r''}\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon-\frac{f\mathscr{M}}{r}\right)d\mathscr{M}$$
$$=f^{-1}b_1^5t^{5\delta-4}f(\lambda',\ \lambda''). \tag{3.14}$$

现在利用关系式(3.6)，在式中令

$$F=\frac{v^2}{2}+\varepsilon-\frac{f\mathscr{M}}{r}.$$

考虑到(3.13)和(3.14)我们求得：

$$\frac{5\delta-4}{t}\mathscr{E}^*=\left\{4\pi r^2\left[pv+\left(\frac{v^2}{2}+\varepsilon-\frac{f\mathscr{M}}{r}\right)\rho\left(v-\frac{dr}{dt}\right)\right]\right\}_{r'}^{r''};$$

由此，根据公式(3.5)当 $\varepsilon=p/(\gamma-1)\rho$ 时我们得到：

$$(5\delta-4)f(\lambda',\ \lambda'')$$
$$=\left\{4\pi\lambda^5\left[PV+\left(\frac{V^2}{2}+\frac{P}{(\gamma-1)\mathscr{R}}-M\right)\mathscr{R}(V-\delta)\right]\right\}_{r'}^{r''}.$$

如果 $\delta=4/5$，则在这个公式中将不出现未知函数 $f(\lambda',\lambda'')$。所以，当 $\delta=4/5$ 时又得到一个积分：

$$\lambda^5\left[PV+\left(\frac{\mathscr{R}V^2}{2}+\frac{P}{\gamma-1}-\mathscr{R}M\right)\left(V-\frac{4}{5}\right)\right]$$

$$=\text{const}. \tag{3.15}$$

若 $\delta=4/5$，则

$$\left[\frac{1}{f}b_1^{-5}\right]=\mathrm{ML^2T^{-2}}=[\mathscr{E}^*].$$

所以，在此情况下作为独立的有量纲常数，可以取引力常数 f 和某一能量 $\mathscr{E}^*$.

4. 动量积分 我们再讨论平面波的一维不定常运动的情况，这时由主定常数 a 和 b 可以组成常数 $c=ab^\kappa$，它在某一 κ 值时具有按单位面积计算的动量的量纲 $[c]=\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$. 在这种情况下可令 $k=-1$、$s=-1$，并用类似的讨论建立积分：

$$P-(V-\delta)\mathscr{R}V=\text{const}. \tag{3.16}$$

在(3.7)，(3.9)，(3.11) 和 (3.15) 诸积分的任何一个中，可以通过选取量纲的指数 k 的适当值而把自变量 λ 消去，该指数可以通过将常数 a 换为常数 $a_1=ab^\kappa$ 的办法加以改变，这里 κ 可以取任何的值。

前面求积分的方法被用于对下述的解建立积分：对接近自模拟运动的线性化解[1]，对把非自模拟解展开为自模拟函数的级数时的任何近似解[2]。

上面我们建立了气体自模拟运动的常微分方程的最终积分。在推导中曾利用了量纲分析和由运动方程组得出的力学的普遍定理。根据一般的考虑知道，也可以通过形式上的演算由常微分方程组求得积分。

所求得的积分是由常微分方程组推导出来的，这方程组对另外的一些问题提法也可以保持为同样的形式，这些问题包括 $\gamma\neq$

1) Лидов М. Л., К теории линеаризованных решений около одномерных автомодельных движений газа. ДАН СССР, т. 102, № 6, 1955.

2) Коробейников В. П., Об интегралах уравнений неустановившихся адиабатических движений газа. ДАН СССР, т. 104, № 4, 1955, стр. 509—512.

c_p/c_v 时的从而质点中的熵是变化的和有外部热流时的完全气体的多方运动。

§4. 极限趋于自模拟的运动

从已研究过的一族依赖几个参量的自模拟解出发，借助于某些极限过渡，可以对同样的偏微分方程建立另外几族精确解。我们举一个例子来说明。

取(3.5)形式的解并把它写为下列形式：

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{r}{t+t_0}\delta\tilde{V}(\lambda), \qquad \rho = \frac{a\delta\tilde{\mathscr{R}}(\lambda)}{r^{k+3}(t+t_0)^s},\\ p &= \frac{a\delta^{s+2}}{r^{k+1}(t+t_0)^{s+2}}\tilde{P}(\lambda), \quad \mathscr{M} = \frac{a\delta^s\tilde{M}(\lambda)}{r^{k+3-\nu}(t+t_0)^s}\\ &\text{和 } \lambda = \frac{r}{b(t+t_0)^\delta}. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

显然，若在解(3.5)中将时间 t 用 $t+t_0$ 代换，则我们重新得到一个包含又一个常数 t_0 的解。此外，我们引进了新符号：

$$\left.\begin{aligned} V &= \delta\tilde{V}, \quad \mathscr{R} = \delta^s\tilde{\mathscr{R}}, \quad P = \delta^{s+2}\tilde{P},\\ M &= \delta^s\tilde{M}, \quad z = \delta^2\tilde{z}. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

在 $k=-3$、$s=2$ 和任何值的 δ，t_0 和 b 的情况下，方程(3.1)，(3.2)，(3.3)和(3.4)有(4.1)形式的解。对 $f=0$ 时的方程(1.3)来说，常数 k 和 s 可以是任意的。现在设

$$t_0 = \delta\tau \text{ 和 } b = r_0(\delta\tau)^{-\delta}.$$

显然，$[\tau]=[t]$ 和 $[r_0]=[r]$，并且 τ，r_0 和 δ 是任意常数。

在公式(4.1)中，在固定的 τ，r_0 和有限的 $\tilde{V}$，$\tilde{\mathscr{R}}$，$\tilde{P}$，$\tilde{M}$ 的条件下取 $\delta\to\infty$ 时的极限，公式(4.1)给出：

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{r}{\tau}\tilde{V}(\lambda), \quad \rho = \frac{a}{r^{k+3}\tau^s}\tilde{\mathscr{R}}(\lambda), \quad p = \frac{a}{r^{k+1}\tau^{s+2}}\tilde{P}(\lambda),\\ \mathscr{M} &= \frac{a}{r^{k+3-\nu}\tau^s}\tilde{M}(\lambda) \text{ 和 } \lambda = \frac{r}{r_0}e^{-\frac{t}{\tau}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

由此得出，气体的一维不定常运动的方程应该具有(4.3)形式

的解，它可以看作自模拟运动的极限解。由方程（2.1），（2.2）和（2.3）容易得到 $\tilde{z}$，$\tilde{\mathscr{R}}$，$\tilde{P}$ 和 λ 的方程，在有限的 k 和 s 时我们求得：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{V}} &= \frac{\tilde{z}\{[2+\nu(\gamma-1)]\tilde{V}(\tilde{V}-1)^2-(\gamma-1)\tilde{V}^2(\tilde{V}-1)\}}{(\tilde{V}-1)\left[\tilde{V}^2(\tilde{V}-1)+\left(\frac{k+1}{\gamma}-\nu\tilde{V}\right)\tilde{z}\right]} \\
&\quad - \frac{\left[2\tilde{V}+\frac{k+1}{\gamma}(\gamma-1)\right]\tilde{z}^2}{(\tilde{V}-1)\left[\tilde{V}^2(\tilde{V}-1)+\left(\frac{k+1}{\gamma}-\nu\tilde{V}\right)\tilde{z}\right]}, \\
\frac{d\ln\lambda}{d\tilde{V}} &= \frac{\tilde{z}-(\tilde{V}-1)^2}{\tilde{V}^2(\tilde{V}-1)+\left(\frac{k+1}{\gamma}-\nu\tilde{V}\right)\tilde{z}}, \\
(\tilde{V}-1)\frac{d\ln\tilde{\mathscr{R}}}{d\ln\lambda} &= -\frac{\tilde{V}^2(\tilde{V}-1)+\left(\frac{k+1}{\gamma}-\nu\tilde{V}\right)\tilde{z}}{\tilde{z}-(\tilde{V}-1)^2} \\
&\quad +(k+3-\nu)\tilde{V}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

对这些极限运动，质量积分和绝热积分具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda^{\nu-3-k}\{\tilde{M}(k+3-\nu)-\sigma_\nu\tilde{\mathscr{R}}(\tilde{V}-1)\}=\text{const}, \\
&\frac{\tilde{z}}{\tilde{\mathscr{R}}^{\gamma-1}}=\tilde{M}^{-\frac{(k+3)(\gamma-1)+2}{k+3-\nu}}\cdot\text{const}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

当 $k=\nu-1$ 和 $s=-2$ 时表示为如下关系式的能量积分成立：

$$\tilde{P}\tilde{V}+(\tilde{V}-1)\left(\frac{\tilde{\mathscr{R}}\tilde{V}^2}{2}+\frac{\tilde{P}}{\gamma-1}\right)=\text{const}. \tag{4.6}$$

不难证明，在式(4.3)中将常数 a/τ^s 换为 a_1 以及在方程(4.4)和积分(4.5)中将 k 换为 $k+s_0$ 之后，$s=s_0\delta+s_1$（亦即 $\delta\to\infty$ 时 $s\to+\infty$）的情况就化为所研究的情况。

对于具有平面波的气体运动，类似的讨论适用于坐标 r，这时 r 可以用 $x+x_0$ 来代换。

公式（3.5）可以写为形式：

$$
\left.\begin{aligned}
v &= \frac{(x+x_0)\delta}{t}\hat{V}(\hat{\lambda}),\\
\rho &= \frac{a\hat{\mathscr{R}}(\hat{\lambda})}{[(x+x_0)\delta]^{k+3}t^s},\\
p &= \frac{a\hat{P}(\hat{\lambda})}{[(x+x_0)\delta]^{k+1}t^{s+2}},\\
\mathscr{M} &= \frac{a\hat{M}(\hat{\lambda})}{[(x+x_0)\delta]^{k+2}t^s},\\
\hat{\lambda} &= \lambda^{1/\delta} = \left(\frac{x+x_0}{b}\right)^{1/\delta}\frac{1}{t}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}
$$

这里利用了符号：

$$
V = \delta\hat{V},\quad \mathscr{R} = \frac{1}{\delta^{k+3}}\hat{\mathscr{R}},\quad P = \frac{1}{\delta^{k+1}}\hat{P},\quad M = \frac{1}{\delta^{k+2}}\hat{M}
$$

$$
(z = \hat{z}\delta^2). \tag{4.8}
$$

令

$$
x_0 = \frac{r_0}{\delta},\quad (b)^{1/\delta} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{r_0}{\delta}\right)^{1/\delta}.
$$

显然下列量纲公式成立：

$$
[x] = [r_0] \text{ 和 } [t] = [\tau],
$$

τ 和 r_0 可以是任意的。固定 k, s, r_0, τ 并使 δ 趋于零，这时得到：

$$
\left.\begin{aligned}
v &= \frac{r_0}{t}\hat{V}(\hat{\lambda}), & \rho &= \frac{a}{r_0^{k+3}t^s}\hat{\mathscr{R}}(\hat{\lambda}),\\
p &= \frac{a}{r_0^{k+1}t^{s+2}}\hat{P}(\hat{\lambda}), & \hat{\lambda} &= \frac{\tau}{t}e^{x/r_0}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}
$$

由方程(2.1)，(2.2) 和(2.3)容易得到 $\hat{z}$，$\hat{P}$，$\hat{\mathscr{R}}$ 和 $\hat{\lambda}$ 的方程；在方程(2.1)，(2.2) 和 (2.3)中代入公式 (4.8) 并在 $\delta = 0$ 时取极限，得到：

$$
\frac{d\hat{z}}{d\hat{V}} = \frac{\hat{z}\left[2(\hat{V}-1)^2 - (\gamma-1)\hat{V}(\hat{V}-1) + \left(s - \frac{s+2}{\gamma}\right)\hat{z}\right]}{(\hat{V}-1)\left[\hat{V}(\hat{V}-1) - \frac{s+2}{\gamma}\hat{z}\right]},
$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\ln\hat{\lambda}}{d\hat{V}}&=\frac{\hat{z}-(\hat{V}-1)^2}{\frac{s+2}{\gamma}\hat{z}-\hat{V}(\hat{V}-1)},\\(\hat{V}-1)\frac{d\ln\hat{\mathscr{R}}}{d\ln\hat{\lambda}}&=s-\frac{\frac{s+2}{\gamma}\hat{z}-\hat{V}(\hat{V}-1)}{\hat{z}-(\hat{V}-1)^2}.\end{aligned}\right\}\tag{4.10}$$

在此情况下质量积分和绝热积分可写为如下形式：

$$\left.\begin{aligned}&s\hat{M}-\hat{\mathscr{R}}(\hat{V}-1)=\text{const},\\&\frac{\hat{z}}{\hat{\mathscr{R}}^{\gamma-1}}=\hat{M}^{(1-\gamma)+2/s}\text{const}.\end{aligned}\right\}\tag{4.11}$$

当 $k=0$ 和 $s=-2$ 时有能量积分[1]

$$\hat{P}\hat{V}+(\hat{V}-1)\left(\frac{\hat{\mathscr{R}}\hat{V}^2}{2}+\frac{\hat{P}}{\gamma-1}\right)=\text{const}.\tag{4.12}$$

当在公式 (4.3) 和 (4.9) 中再取一个极限 $\mu\to+\infty$ 时，在用 $t+\mu t_1$ 和 $\tau=\mu t_1$ 代换 t 之后我们得到气体定常运动的一般公式. 在公式 (4.9) 中将 x 换为 $x+\mu l$ 和将 r_0 换为 μl 之后，$\mu\to+\infty$ 时的极限就化为具有变化压力(随时间)的平移运动.

К. П. 斯坦纽柯维奇[2]曾用形式代入的方法研究了式 (4.3) 和 (4.9) 类型的解.

§5. z, V 平面上积分曲线场的研究

为了分析各种边值和初值问题的解的存在性、唯一性和建立解的方法，必须研究 z, V 平面上的积分曲线场. 我们来讨论没有引力时的常微分方程 (2.1)，它除了参数 $\nu=1,2,3$ 之外还包含两个重要参数 $\varkappa$ 和 δ.

---

1) 当存在积分(4.5)和(4.6)以及积分(4.11)和(4.12)时，运动方程可以被积出. 这积分是由 Н. Н. 柯钦娜完成的 (见 Кочина Н. Н., Некоторые точные решения уравнений одномерного неустановившегося движения совершенного газа. ПММ, т. 21, вып. 4, 1957, стр. 449—458).

2) Станюкович К. П., Неустановившиеся движения сплошной среды. М. Гостехиздат, 1955; М., «Наука», 1971.

对于前面在§1中所列出的问题和进一步的应用，特别重要的是主定参量具有下述量纲的两类解。

1．常数之一的 u 具有速度的量纲，第二个常数 A 的任意量纲可以认为等于 $ML^{\omega-3}$（$k=\omega-3$，$s=0$）.

2．常数之一的 E 具有能量的量纲 $ML^{\nu-2}T^{-2}$，第二个常数 A 的量纲可以是任意的并也可以认为等于 $ML^{\omega-3}$.

在情况1中包括相速度是常数的问题：在初始压力和密度为常数（$\omega=0$）的介质中以常速度运动的活塞问题；在常密度或 $\rho_1=A/r^\omega$ 的变密度的介质中的爆轰和燃烧问题；在分界面左边和右边都具有不变的气体特征量的爆燃混合物中任意间断分解的问题等等。

在情况2中包括初始常密度（此时 $\omega=0$）或者初始变密度 $\rho_1=A/r^\omega$（此时 $\omega\neq 0$）情况下的强爆炸（$p_1=0$）问题。

在情况1中有

$$\delta=1,\quad \varkappa=\frac{\omega}{\gamma},\quad \lambda=\beta\frac{r}{ut},\tag{5.1}$$

而在情况2中我们得到：

$$\left.\begin{aligned} &b=\left(\frac{E}{A}\right)^{1/(2+\nu-\omega)},\quad [b]=LT^{-2/(2+\nu-\omega)},\\ &\delta=\frac{2}{2+\nu-\omega},\quad \varkappa=\frac{\nu\delta}{\gamma},\quad \lambda=\beta\frac{r}{bt^\delta},\end{aligned}\right\}\tag{5.2}$$

其中 β 是无量纲常数，它可以在每一个具体的解中进行选取。在两种情况下在 z，V 平面上都得到一族只依赖于一个重要参数 ω 的解。

现在我们较仔细地讨论微分方程(2.1)和(2.2)。

在情况1中我们有：

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dV}=z\Big\{&2(V-1)^3+(\nu-1)(\gamma-1)V(V-1)^2\\&-\left[2(V-1)+\omega\frac{\gamma-1}{\gamma}\right]z\Big\}\Big/\\&(V-1)\left[V(V-1)^2+\left(\frac{\omega}{\gamma}-\nu V\right)z\right],\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$\frac{d\ln\lambda}{dV}=\frac{z-(V-1)^2}{V(V-1)^2+\left(\frac{\omega}{\gamma}-\nu V\right)z} \tag{5.4}$$

方程 (2.3) 可用绝热积分代替。根据取 $\delta=1$, $s=0$, $k=\omega-3$ 时的公式(3.9)以及公式(3.7)我们得到

$$\frac{z}{\mathscr{R}^{\gamma-1}}=C_1\left[\mathscr{R}(V-1)+\frac{C_2}{\lambda^{\nu-\omega}}\right]^{\omega(\gamma-1)/(\nu-\omega)}\frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.5}$$

在对方程(5.3)积分并通过求积由(5.4)算出 $\lambda(V)$ 之后，关系式 (5.5) 就确定函数 $\mathscr{R}(V)$; C_1 和 C_2 是任意常数。如果当 $\lambda=r/r_2=0$ 时质量 $\mathscr{M}$ 等于零并且没有质量源，则

$$C_2=0.$$

在 $\nu=3$ 时的球面情况下常微分方程 (5.3) 在 $z\geqslant 0$ 半平面上有下列奇点（参看图 38—41）。

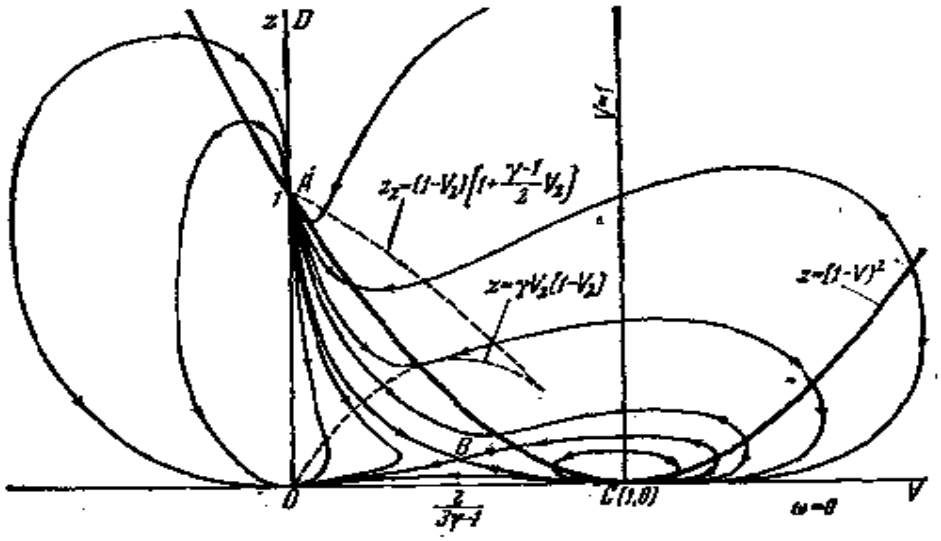


图 38　$\nu=3$, $\delta=1$, $\omega=0$ 时的积分曲线场。在直线 OA 上对应静止状态的点，可以在抛物线 $z_2=(1-V_2)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}V_2\right)$ 的点上穿过冲击波。箭头指明 $\lambda=\beta r/ut$ 增加的方向。这些积分曲线在 $V>0$, $\lambda>0$ 和 $t<0$ (可以认为扰动到达对称中心的时刻对应 $t=0$)时，描述在聚心 ($v<0$) 流情况下具有不变的弱扰动前缘阵面速度的流动

奇点 $O(z=0, V=0)$——结点。积分曲线进入点 O 时与 V 轴相切；但是存在一条唯一的积分曲线，是以斜率 γ/ω 趋近于点 O.

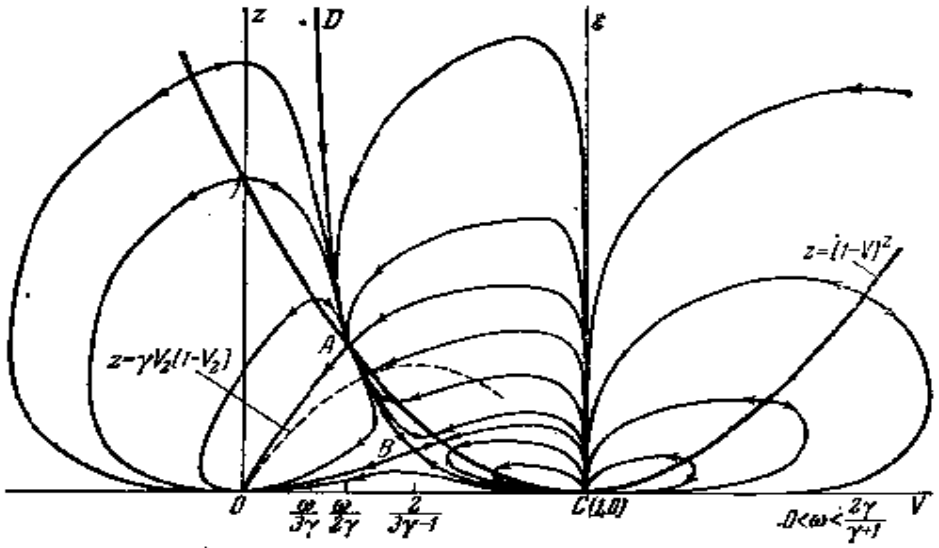


图 39　$\nu = 3$, $\delta = 1$ 和 $0 < \omega < 2\gamma/(\gamma + 1)$ 时的积分曲线场(奇点 A 位于抛物线 $z = \gamma V_2(1 - V_2)$ 以上)。特点是，奇点 A 沿抛物线 $z = (1 - V)^2$ 移动，点 D 也移动，奇点 C 的性质改变

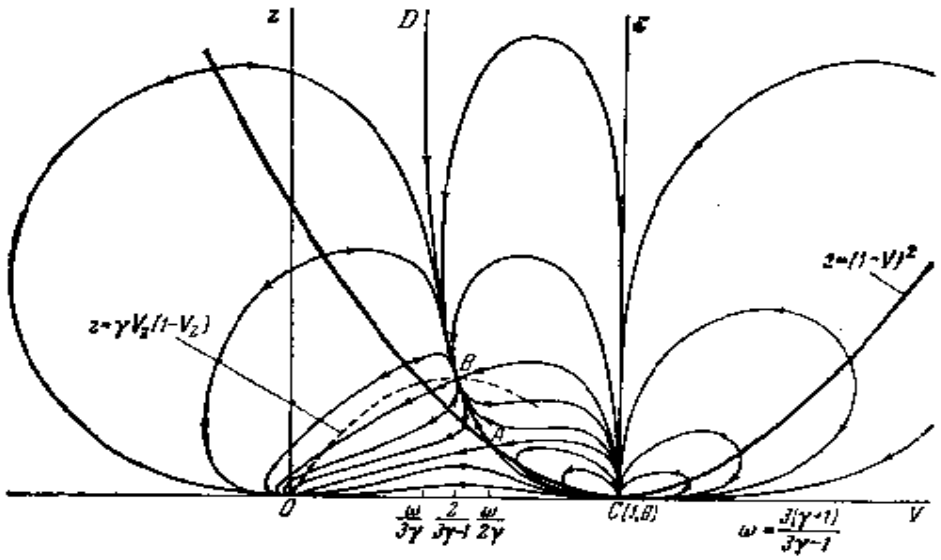


图 40　$\delta = 1$ 和 $\omega = 3(\gamma + 1)/(3\gamma - 1)$ 时的积分曲线场。奇点 B 位于抛物线 $z = \gamma V_2(1 - V_2)$ 上

在点 O 附近对积分曲线如下渐近公式成立：

$$z = CV^2, \quad \lambda = \frac{C_1}{V} \text{ 和 } z = \frac{\gamma}{\omega} V, \quad \lambda = \frac{C_1}{\sqrt{V}}. \qquad (5.6)$$

当在 z, V 平面上趋近点 O 时，相应在气体中则趋于无穷远。

奇点 $C(z=0, V=1)$——复合结点。积分曲线趋近点 C 时与 V 轴相切；而且当 $\omega>0$ 时，在垂直于该轴的方向上存在积分曲线。

与 V 轴相切的积分曲线其渐近公式当 $\gamma<2$ 时具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda-\lambda^*=\frac{\gamma+1}{3(\gamma-1)}\lambda^*(1-V),\\
&z=\frac{2(2-\gamma)}{6-\dfrac{\gamma+1}{\gamma}\omega}(1-V)^2,\\
&\mathscr{R}=C(1-V)^{(6-\omega-\gamma\omega)/3(\gamma-1)},\\
&P=\frac{2(2-\gamma)}{6\gamma-(\gamma+1)\omega}(1-V)^{[6\gamma-\omega(\gamma+1)]/3(\gamma-1)},
\end{aligned}\right\}\qquad(5.7)$$

其中 C 和 λ^* 是某些常数；对于 $\omega<6\gamma/(\gamma+1)$ 的情况当 $\lambda\to\lambda^*$ 时量 $P\to 0$.

对垂直于 V 轴的积分曲线，如下渐近公式成立：

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda-\lambda^*=\frac{\gamma}{\nu\gamma-\omega}(1-V)\quad \text{当 } \omega<\frac{6\gamma}{(\gamma+1)},\\
&z=A(1-V)^{(\gamma-1)\omega/(3\gamma-\omega)},\\
&\mathscr{R}=B(1-V)^{-(\gamma-1)\omega/(3\gamma-\omega)},\\
&P=\frac{AB}{\gamma},
\end{aligned}\right\}\qquad(5.8)$$

其中 λ^*, A, B 是某些常数，当趋近点 C 时，在气体中则趋近于距中心有限距离处的某界面（活塞或真空的边界），在该界面上相速度等于气体的质点速度。

奇点

$$B\left(z=\frac{18\gamma(\gamma-1)^2}{(3\gamma-1)^2[\omega+3\gamma(2-\omega)]},\quad V=\frac{2}{3\gamma-1}\right)$$

在 $\omega>4\gamma/(3\gamma-1)$ 时是结点；而当 $\omega<4\gamma/(3\gamma-1)$ 时是鞍点；当 $\omega=6\gamma/(3\gamma-1)$ 时点 B 与无穷远处的奇点 D 相重合。当 ω 大时，点 B 转到下半平面中。如果点 B 不在抛物线 $z=(1-V)^2$

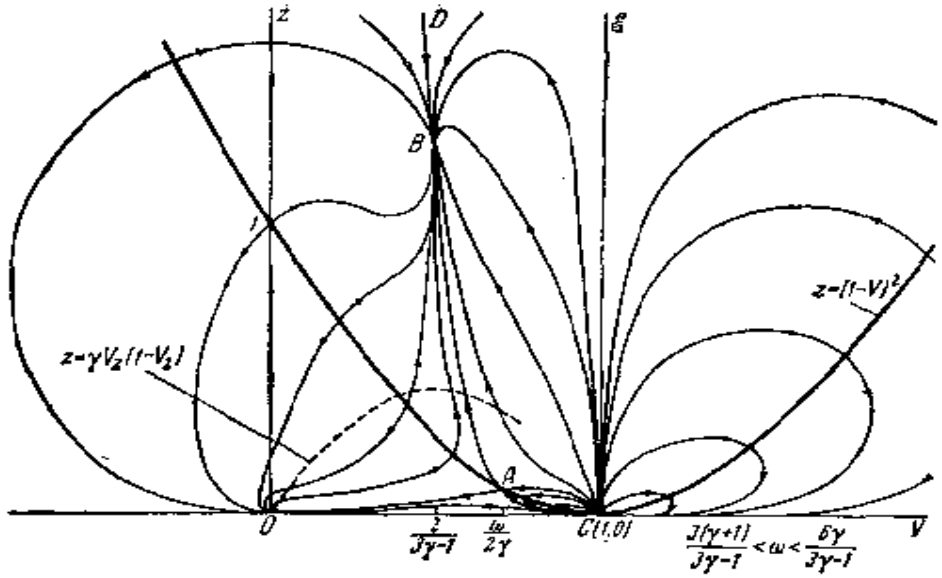


图 41　$\nu=3, \delta=1$ 和 $3(\gamma+1)/(3\gamma-1)<\omega<6\gamma/(3\gamma-1)$ 时的积分曲线场．趋于奇点 C 的运动对应于由抛物线 $z=\gamma V_2(1-V_2)$ 的点向对称中心的运动

上，则在进入该点的积分曲线上变量 λ 趋于零或趋于无穷大，亦即趋于对称中心或趋于无穷远点．如果点 B 在抛物线 $z=(1-V)^2$ 上，这只当 $\omega=3\gamma/(3\gamma-1)$ 时才有可能，则当趋近于点 B 时 λ 的值可以保持为有限值，在此情况下，点 B 可以对应气体中的运动点．若

$$\omega=\frac{3(\gamma+1)}{3\gamma-1},$$

则点 B 在抛物线 $z_2=\gamma V_2(1-V_2)$ 上，当 ω 小时它在该抛物线之下，而当 ω 大时则在该抛物线以上．在求解关于在变密度 $\rho_1=A/r^\omega$ 的介质中爆轰传播的问题时，上述情况具有重要意义．

奇点 $D(z=\infty, V=\omega/3\gamma)$ 在 $\omega<6\gamma/(3\gamma-1)$ 时是鞍点，而在 $6\gamma/(3\gamma-1)<\omega<3\gamma$ 时是结点．在第一种情况下，有一条积分曲线渐近地平行于 z 轴伸向无穷远，沿着该曲线当趋向无穷远时 $\lambda\to 0$，因而我们趋近于对称中心．在第二种情况下，当沿积分曲线趋近结点 D 时，我们在气体中趋于无穷远，因为 $\lambda\to+\infty$．在点 D 附近当 $\omega<6\gamma/(3\gamma-1)$ 时如下渐近公式成

立：

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda = C\left(V-\frac{\omega}{3\gamma}\right)^{(3\gamma-\omega)/(6\gamma-\omega-3\gamma\omega)},\\
&z=\frac{\omega(3\gamma-\omega)^3}{27\gamma^3(15\gamma-3\gamma\omega-2\omega)}\frac{1}{V-\frac{\omega}{3\gamma}},\\
&\mathscr{R}=B\left(V-\frac{\omega}{3\gamma}\right)^{\omega(3-\omega)/(6\gamma+\omega-3\gamma\omega)}=B_1\lambda^{\omega(3-\omega)/(3\gamma-\omega)},\\
&P=B_1C^{(6\gamma+\omega-3\gamma\omega)/(3\gamma-\omega)}\\
&\quad\cdot\frac{\omega(3\gamma-\omega)^3}{27\gamma^4(15\gamma-3\gamma\omega-2\omega)}\lambda^{(3\gamma\omega+2\omega-\omega^2-6\gamma)/(3\gamma-\omega)},
\end{aligned}\right\}\quad(5.9)$$

其中 B_1 和 C 是任意常数，B 经由 B_1 和 C 表出。

根据式(5.9)和基本公式(1.3)，容易得出速度、压力和密度在对称中心附近的渐近公式。

奇点

$$A\left[z=\left(1-\frac{\omega}{2\gamma}\right)^2, V=\omega/2\gamma\right]$$

在 $\omega<0$ 时是焦点，在 $0\leqslant\omega<4\gamma/(3\gamma-1)$ 时是结点，在 $4\gamma/(3\gamma-1)<\omega<2\gamma$ 时是鞍点，在 $2\gamma<\omega<4\gamma(\gamma+1)/(6\gamma-2-\gamma^2)$ 时是结点，在 $\omega<4\gamma(\gamma+1)/(6\gamma-2-\gamma^2)$ 时是中心。

当 $\omega=0$ 时，积分曲线在进入结点时与 z 轴相切。

当 $0<\omega<4\gamma(\gamma+1)/(6\gamma-2-\gamma^2)$ 时，积分曲线趋近点 A 有两个方向，这两个方向的斜率由下列公式给出：

$$k_{1,2}=\gamma\left(\frac{\omega}{2\gamma}-1\right)\left[1\pm\sqrt{\frac{\omega(\gamma^2-6\gamma+2)+4\gamma(\gamma+1)}{\omega\gamma^2}}\right].$$

点 A 总是位于抛物线 $z=(1-V)^2$ 上，所以在点 A 上 λ 可以有有限值。在点 A 相速度与质点速度不相等，通过该点对应于通过特征线，所以该点可以对应于弱间断。

奇点 $\mathscr{E}(z=\infty, V=1)$ 在 $\omega<0$ 时是结点，而在 $0<\omega<3\gamma$ 时是鞍点。奇点 $G(z=\infty, V=\infty)$ 在任何 ω 时都是鞍点。

每一个奇点对应于气体动力学方程的简单的精确解（对这个

解 $z = \text{const}$ 和 $V = \text{const}$)，变量 λ 保持是自由的。函数 $\mathscr{R}(V)$ 由式(5.5)确定，并且当 $C_2 = 0$ 时得出：$\mathscr{R}$ 是 λ 的幂函数，从而，P 也是幂函数。所以，这是一个特解，对于这个解 v, ρ, p 是 r 和 t 的幂次单项式。特别是，如果 $z = 0$ 和 $V = 0$，则我们得到零压下的静止状态——某些自模拟运动中的原始状态。

在图 38—41 中给出了在

$$\omega = 0, \quad 0 < \omega < \frac{2\gamma}{\gamma + 1}, \quad \omega = \frac{3(\gamma + 1)}{3\gamma - 1}$$

和

$$\frac{3(\gamma + 1)}{3\gamma - 1} < \omega < \frac{6\gamma}{3\gamma - 1}$$

几种情况下 $\gamma = 5/3$ 时的积分曲线场的定性图象。

变量 λ 增长的方向用箭头指出。在抛物线 $z = (1 - V)^2$ 上参量 λ 达到极大值或极小值，所以沿着积分曲线要连续通过该抛物线是不可能的，因为这将导致气体运动在空间中的双叶性——解的不唯一性。但是，如果积分曲线是通过抛物线 $z=(1-V)^2$ 上的奇点 A，则沿积分曲线通过此抛物线是可能的。在抛物线上的点 A 处，对于 λ 发生极大值换为极小值的更换，并且在点 A 当沿着相交的积分曲线运动时，参量 λ 有有限值并单调变化。下面我们将看到，这一情况将把相交的积分曲线作为相应的爆轰问题的解挑选出来。

当 $\omega = 0$ 时在自模拟解中可以有 $p_1 \neq 0$：整条直线 $V = 0$ 对应于静止状态。

如果气体无界，则在所研究的解中沿积分曲线参量 λ 应由 0 变到∞. 在大多数情况下，相应的运动只可能是带有强间断的。

起点 $\lambda = 0$ 和终点 $\lambda = \infty$ 只能对应上面所指出的奇点，活塞和真空的边界只能对应直线 $V = 1$ 上的点(相速度与质点速度重合)，其中包括奇点 C 和 $\mathscr{E}$.

在点 C 和 $\mathscr{E}$ 上或者压力或者密度等于零或无穷大。压力等于零的情况对应真空，有限压力以及在 C 点上无穷大密度和 $\mathscr{E}$ 点

上零密度的情况对应球面活塞的膨胀.

现在再对情况 2 讨论微分方程(2.1)的积分曲线场. 我们有:

$$\frac{dz}{dV} = \frac{z[2(V-1)+\nu(\gamma-1)V](V-\delta)}{\left[V(V-1)(V-\delta)+\nu\left(\frac{\delta}{\gamma}-V\right)z\right]}$$

$$-z\left\{(\gamma-1)V(V-1)(V-\delta)\right.$$

$$\left.+\left[2(V-1)+\frac{\nu\delta}{\gamma}(\gamma-1)\right]z\right\}\Big/$$

$$\left\{(V-\delta)\left[V(V-1)(V-\delta)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\nu\left(\frac{\delta}{\gamma}-V\right)z\right]\right\}, \tag{5.10}$$

$$\frac{d\ln\lambda}{dV} = \frac{z-(V-\delta)^2}{V(V-1)(V-\delta)+\nu\left(\frac{\delta}{\gamma}-V\right)z}, \tag{5.11}$$

其中 $\delta = 2/(2+\nu-\omega)$. 第三个确定 $\mathscr{R}$ 的方程可以换为绝热积分. 由取 $\delta = 2/(2-\nu-\omega)$, $s=0$, $k=\omega-3$ 时的公式(3.9)和当 $\omega<\nu$ 时的公式(3.7),我们得到

$$z = \mathscr{R}^{(2\nu-\gamma\nu-\omega)/(\omega-\nu)}\left(V-\frac{2}{2+\nu-\omega}\right)^{(\nu-\gamma\omega)/(\omega-\nu)}\lambda^{-(2+\nu-\omega)}C, \tag{5.12}$$

其中 C 是积分常数,条件 $\omega<\nu$ 可以换为不等式 $\omega\neq\nu$ 和 $\omega\neq\nu+2$. 当 $\omega\geqslant\nu$ 时,决定质量的积分

$$\mathscr{M} = \sigma_\nu\int_0^r \frac{A}{r^\omega}r^{\nu-1}dr$$

发散. 根据 203 页上的说明,(3.7) 右端的常数认为等于零.

由关系式 (5.12) 通过 z, V 和 λ 确定 $\mathscr{R}$.

具有量纲 $ML^{\nu-1}T^{-2}$ 的常数 E 是主定常数,所以在情况 2 中有能量积分. 根据 (3.11) 得到

$$\lambda^{\nu+2}\left[zV+\left(V-\frac{2}{2+\nu-\omega}\right)\left(\frac{\gamma V^2}{2}+\frac{z}{\gamma-1}\right)\right]\mathscr{R}$$
$$=C_1. \tag{5.13}$$

积分(5.13)可以代替方程(5.10)。由(5.13)可以决定 z 并且在代入方程(5.11)后我们得到只包含 λ 和 V 的常微分方程。若 $C_1=0$，则(5.13)给出方程(5.10)的积分，而方程(5.11)可以通过求积积出。若 $C\neq 0$，则为了确定 $z(V)$ 可以积分方程(5.10)，在此之后函数 λ 就可以利用(5.13)算出，而无需对方程(5.11)积分。

当 $\nu=3$，$\omega=0$ 和 $\gamma<2$ 时，方程(5.10)在 z，V 平面上的积分曲线场的定性图象示于图 42。λ 增加的方向由箭头指出。奇点的性质在图上可见。

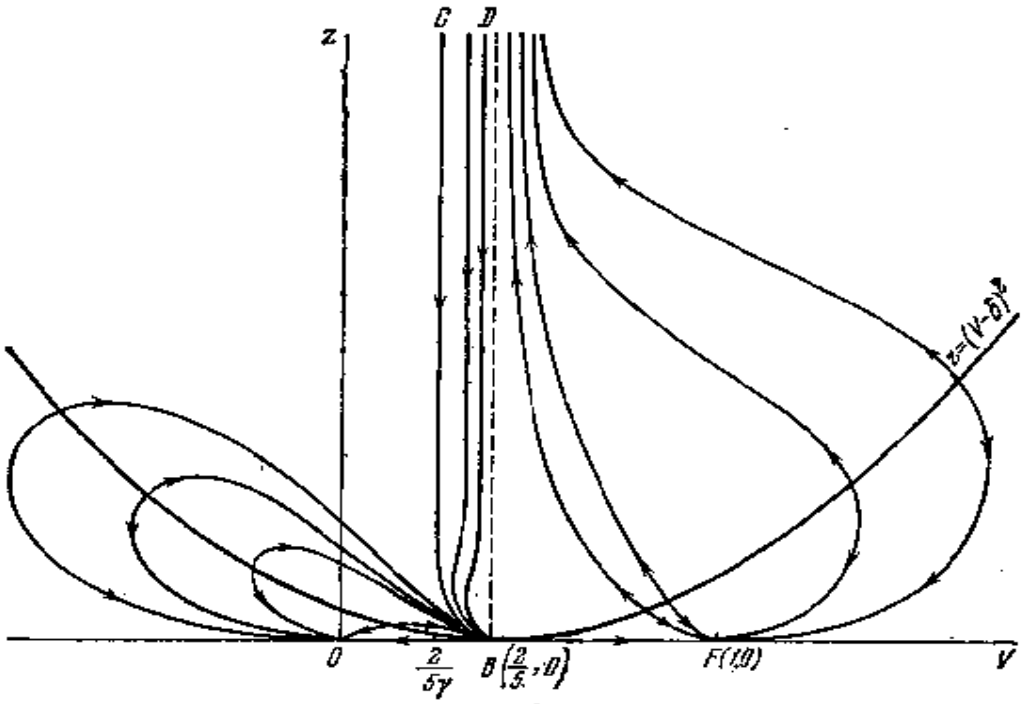


图 42　$\nu=3$, $\omega=0$, $\delta=2/5$, $\gamma<2$ 时的积分曲线场

奇点 $C(z=\infty,\ V=2/(2+\nu-\omega)\gamma)$ 是鞍点。沿着终止于一点的唯一的积分曲线，在趋向点 C 时变量 λ 趋于零。应该指出的是，由取 $C_1=0$ 时的方程(5.13)我们就得到这一曲线的方程。

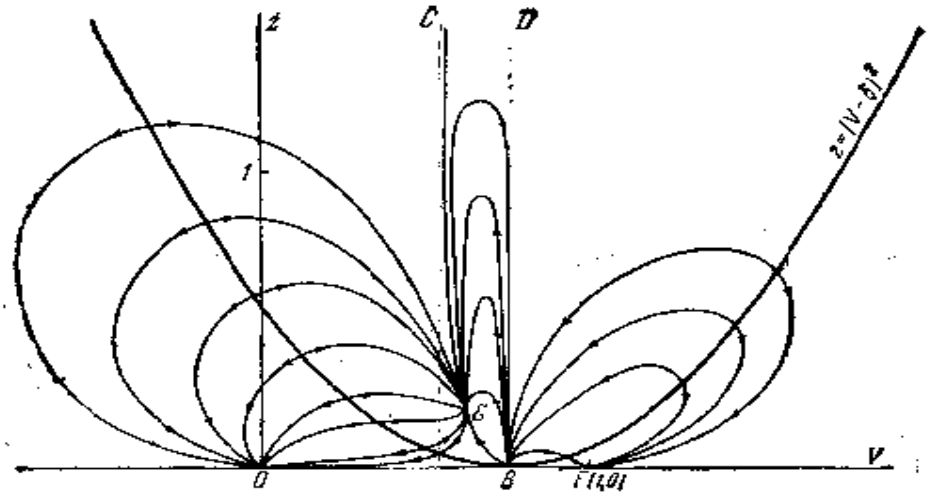


图 43　$\nu = 3{,}6 - 3\gamma < \omega < (2\gamma + 1)/\gamma$, $\delta = 2/(5 - \omega)$ 时的积分曲线场. 在上半平面上出现结点 $\mathscr{E}$. 曲线场对应 $\omega > 3/\gamma$ 的情形

当讨论 z, V 平面上积分曲线场对 ω 和 γ 的依赖关系时，必须考虑到方程 (5.10) 还有一个奇点

$$\mathscr{E}\left(V^* = \frac{2}{2 + \nu(\gamma - 1)},\right.$$

$$\left. z^* = -\frac{2(\gamma - 1)\gamma[(2 - \gamma)\nu - \omega]}{[2 + \nu(\gamma - 1)]^2[(2 - \omega)\gamma + \nu - 2]}\right), \quad (5.14)$$

它可以经过点 B 由下半平面 $z < 0$ 过渡到上半平面 $z > 0$. 容易验证，奇点 $\mathscr{E}$ 位于通过奇点 C 的积分曲线上，亦即 z^* 和 V^* 满足 $C_1 = 0$ 时的方程 (5.13).

坐标 z^* 为正值的条件有如下形式：

$$\nu(2 - \gamma) \leqslant \omega \leqslant \frac{2\gamma + \nu - 2}{\gamma}. \quad (5.15)$$

当满足下界的等式时点 $\mathscr{E}$ 与点 B 重合，当满足上界等式时点 $\mathscr{E}$ 与点 C 重合.

在图 43 中绘出了 $\mathscr{E}$ 位于上半平面情况下的积分曲线场.

只有点 C 和奇点 $z = 0, V = \pm\infty$ 可以对应对称中心 $\lambda = 0$.

奇点 O, F 和 $\mathscr{E}$ 可以对应无穷远点 $\lambda = \infty$.

参量 λ 在奇点 B 和 D 上可以具有有限值，这两个点可以对应

膨胀的球面活塞界面或者真空的边界。

§6. 活塞问题

假设气体被一以常速 U 膨胀的球面活塞推动，我们来考虑气体在某时刻 t 的运动图象。初始压力 p_1 和初始密度 ρ_1 为常数且不等于零[1]。

因为对于附着在活塞上的流体质点 $v = U$ 和 $r = Ut$，所以在活塞上

$$V = \frac{v}{r/t} = 1.$$

从而，在 z，V 平面上（参看图 44）对应活塞的象点应在直线 $V = 1$ 上。沿积分曲线在变量 λ 增长方向上的运动，对应沿半径由活塞到无穷远处的运动。积分曲线与抛物线 $z = (V-1)^2$ 相交，经过该抛物线不可能连续过渡，所以只有通过跃变运动才能延续到对应无穷远点的点 O.

---

1) 被一以常速膨胀的球推动的气体问题的，附有数值计算结果的解，于 1945 年第一次发表在上面引过的 Л. И. 谢多夫的文章中（见 Седов Л. И., О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, т. 9, вып. 4, 1945, стр. 293—341）。

被一以速度 $U = ct^n$ 膨胀的球推动的气体运动问题的解，以及对不同的 n 所作的比较分析（并在 $n=-1/2$ 情况中考虑了粘性和热传导），在 Н.Л. Кравченинникова 于 1954 年春在莫斯科大学答辩的论文中（见 Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1955）给出。

在指数 n 和 γ 更大范围情况下对由球面、柱面和平面活塞推动的气体运动问题的讨论，并有对微分方程的定性分析，可见文章：Григорян С. С., Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения). ПММ, т. 22, вып. 2, 1958, стр. 179—187; Кочина Н. Н., Мельникова Н. С., О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, без учета противодавления. ПММ, т. 22, вып. 4, 1958, стр. 444—451; О взрыве в воде с учетом сжимаемости. Труды МИАН СССР, т. 87, 1966, стр. 35—65.

在 $n=-1/4$ 时，柱面推动的气体运动问题的数值解，在下列文章中给出：Гродзовский Г. Л., Некоторые особенности обтекания тел при больших скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1957, стр.86—92.

另一方面，在扰动尚未到达的区域中气体是静止的，亦即 z 轴上的点对应冲击波的外部。

如上面所指出的，z 轴的点通过跃变过渡为如下抛物线的点：

$$z = (1 - V)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} V\right). \qquad (6.1)$$

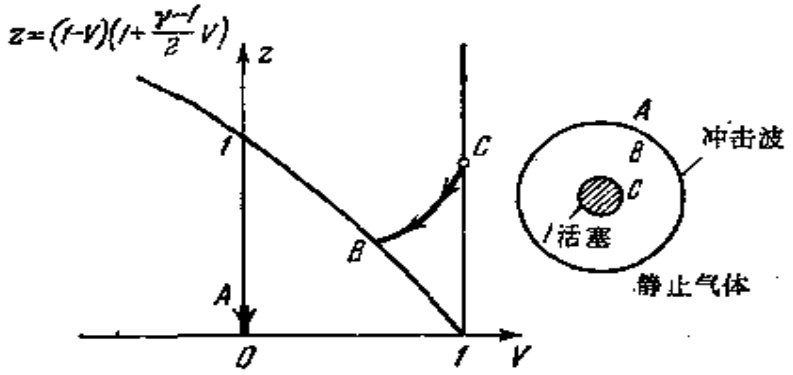


图 44　球面活塞问题的解在 z，V 平面上的积分曲线．由点 A 过渡到点 B 是由穿过冲击波的跃变来实现．点 C 对应活塞，曲线 BC 对应活塞与冲击波之间的绝热压缩

所以，当在物理空间中由活塞面运动到无穷远处时，象点沿积分曲线由直线 $V = 1$ 的某一点运动到与抛物线 (6.1) 的交点，然后通过跃变过渡到直线 $V = 0$ 上(图 44)。

在物理空间中这对应于如下运动图象：沿静止气体传播冲击波，在冲击波与活塞之间出现对气体的绝热压缩。

柱面活塞情况定性上与球面活塞没有区别。平面活塞在柱形管道中的运动情况与球面活塞情况的区别是明显的：在平面活塞情况冲击波与活塞之间出现速度、密度和压力为常数的气体运动区域。

在图 45 和 46 中给出了附着在活塞上的气体质点的压力和密度与静止气体中的压力和密度之比随活塞速度与初始声速之比变化的曲线。

在图 47 中给出了冲击波速度与声速之比随活塞速度与声速之比的变化。

由图看到，在活塞速度相同时，平面情况中对气体的压缩超过

球面情况的；平面情况中的冲击波也比球面情况的强（特别当活塞速度不大时）。

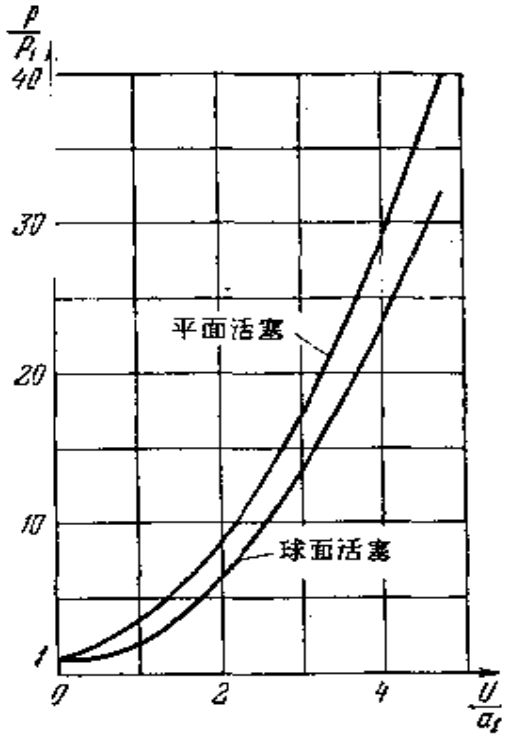


图 45　活塞上的压力 p 随活塞速度 U 的变化。p_1 和 a_1 是未扰动气体中的压力和声速

与球面和柱面情况不同，在平面情况下除了活塞对气体的压缩问题外，还可能有活塞背离气体抽动的问题。借助平移运动和 $\nu = 1$ 时的方程组 (1.3) 的特解，容易建立此问题的解，取变量 z，V 和 λ 时它有形式：

$$z = (1 - V)^2,$$

$$V - \frac{2}{\gamma - 1}(1 - V) = C\lambda^{-1}, \qquad (6.2)$$

其中 C 是积分常数。

换为有量纲变量后，我们得到在气体中的非线性稀疏行波（黎曼解的最简单情况）：

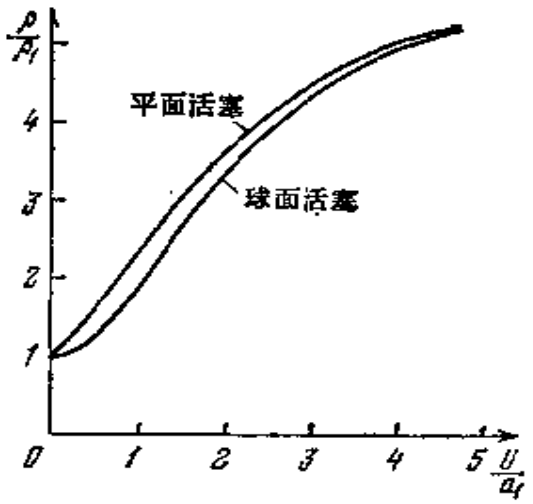


图 46　附着于活塞上的质点的密度 ρ 随活塞速度 U 的变化。ρ_1 和 a_1 是未扰动气体中的密度和声速

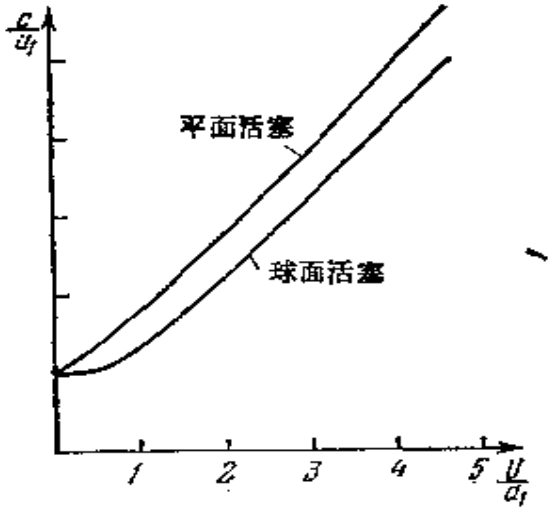


图 47　在活塞前面所产生的冲击波的速度 c 随活塞速度 U 的变化。a_1 是未扰动气体中的声速

$$\left.\begin{aligned} x &= (v \pm a)t, \\ v &= \pm \frac{2}{\gamma + 1} a + \text{const}, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

其中 a 是声速[1]。

§7. 气体聚焦于一点和自一点飞散的问题

我们在下述情况下来讨论聚焦和飞散的问题：所有质点的初始速度、密度和压力都是均匀的，亦即 $\omega = 0, \delta = 1$. 在 x, V 平面上相应的积分曲线场给于图 38 中。

点 O 对应无穷远点。根据 (5.6)，点 O 附近的渐近公式具有形式：

$$x = CV^2, \qquad \lambda = \frac{C_1}{V}.$$

由无穷远处的条件或初始条件得到：

$$x = \frac{\gamma p_1}{\rho_1} \Big/ \frac{r^2}{t^2} = C \frac{t^2}{r^2} v_1^2, \quad \text{由此得 } C = \frac{\gamma p_1}{\rho_1 v_1^2}. \tag{7.1}$$

当 $v_1 < 0$ 时，必须取抛物线 $x = CV^2$ 的 $V < 0$ 的左边一支，当 $v_1 > 0$ 时取 $V > 0$ 的右边一支。

令 $\lambda = r/a_1 t$, $a_1 = \gamma p_1/\rho_1$, 这样，根据公式 (5.2) 就固定了常数 β.

利用这一点，由 λ 的渐近公式得到

$$\frac{r}{a_1 t} = \frac{C_1 r}{v_1 t}, \quad C_1 = \frac{v_1}{a_1}. \tag{7.2}$$

若初始速度朝向中心(聚焦)，也就是 $v_1 < 0$，则在固定时刻由无穷远处到中心的运动，对应于沿通向点 O 的 V 值为负的积分曲线运动。

因为 $t \neq 0$ 时气体在中心点的速度等于零，所以，或者沿通过

1) 被以常速膨胀的活塞向外推动的水的运动问题，在下述文章中讨论过：Кочина Н. Н., Мельникова Н. С., О расширении поршня в воде. ПММ, т. 23, вып. 1, 1959, стр. 93—100.

奇点 B 的积分曲线运动时，或者沿通过奇点 $D(z=\infty, V=0)$ 的积分直线 $V=0$ 运动时，都可以到达中心点。但是，由象点所在的区域 $V<0$ 要过渡到通向点 B 的积分曲线上，一般是不可能的，而只有通过跃变才能过渡到 z 轴上。

所以，直到与（2.10）的抛物线

$$z=(1-V)\left(1+\frac{\gamma-1}{2}V\right)$$

（在间断时 z 轴的点过渡到它上面）相交之前，象点沿积分曲线运动，在与抛物线相交之后，象点跃变到 z 轴的某点上。积分曲线的图形示于图 48a.

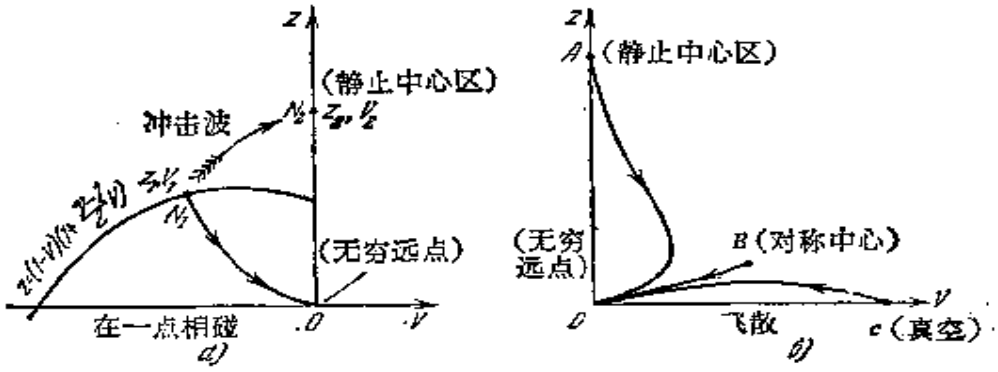


图 48　对应两种情况的 z，V 平面上的积分曲线：
а）在一点相碰，б）自一点飞散

这时在物理空间中对应的是：气体在由无穷远处向中心运动时，先受绝热压缩，然后通过冲击波跃变为静止状态（图 49a）.

在飞散情况下（$v_1>0$——气体质点速度背向中心）当初始速度不大时，象点沿着由条件（7.1）决定的积分曲线从点 O 运动到点 A，然后沿积分直线 $V=0$ 运动（图 48б）. 在物理空间中与此对应的是：当在某固定时刻由无穷远处向中心运动时，气体的密度和压力下降到某一确定值，此后，气体经过弱间断转变为静止状态（图 49б）. 奇点 A 对应于静止气体球状中心区的边界（图 48б）.

在某一初始速度 $v=v_1^*$ 时，在平面（z，V）上积分曲线 OB 与解相对应。点 B 对应对称中心。在此情况下在物理空间中速度仅在对称中心等于零。如果 $v_1>v_1^*$，则沿积分曲线只能到达奇点

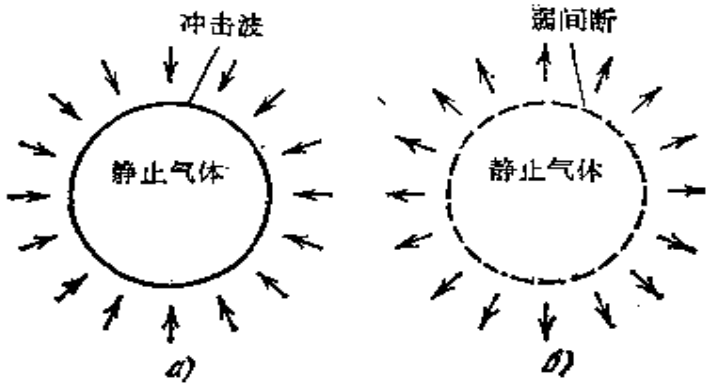


图 49　运动图象：а) 在一点碰撞，б) 自一点飞散。
在静止的中心区前面出现绝热压缩或膨胀

C，在该点参量 λ 具有某一有限的不等于零的常数值 λ^*，而密度和压力等于零。所以，在气体中形成以 λ^* 值确定的常速度膨胀的真空。对于在时间间隔 $0 < t < +\infty$ 和 $-\infty < t < 0$ 内自对称中心飞散的和气泡在对称中心聚拢的气体运动来说，易于研究的 x, V 平面上不同 δ, κ（或 ω）和 γ 时的积分曲线场以及反映奇点附近解的性状的相应的渐近公式，能够对它们的所有不同的和许许多多的自模拟运动确立其存在性、定性性质和定量计算。这些解可以是连续的或者包含间断（弱的或强的）。

§8. 球面爆轰

现在讨论由于在 $t = 0$ 时刻在对称中心发生爆轰而引起的气体的受扰运动。当 $t > 0$ 时，沿气体的初始未扰动状态传播一球面爆轰波。按假设只在间断面上发生热量增加，在间断面即爆轰波后面气体的运动是绝热的[1]。

1) 不带活塞的球面爆轰最先由 О. Е. 弗拉索夫进行了研究，他确立了自模拟性，推导出了相应的常微分方程，并开始研究该问题的解。参阅书：Власов О. Е., Взрывные волны, гл. 3, М., Изд. ВИА РККА. 1937. Зельдович Я. Б., О распределение давления и скорости в продуктах детонационного взрыва, в частности, при сферическом распространении детонационной волны. ЖЭТФ, т. 12, вып. 9, 1942, стр. 389—406.

我们先研究在初始静止状态中密度 ρ_1 和压力 p_1 为常数且不等于零的情形。完全气体的受扰运动由下列参量确定：

$$r, t, \gamma, \gamma_1, p_1, \rho_1, Q,$$

其中 Q——在波面上气体单位质量所释放的热量；γ_1, γ——相应的泊松系数的值，γ_1 是波前的，γ 是波后的。运动是自模拟的且属于在 §5 中所定义的第一类。对于微分方程 (5.3)($\omega = 0$)，z, V 平面上的积分曲线示于图 38，$\lambda = \beta r/\sqrt{Q}\, t$。

在爆轰波尚未到达的那部分空间中气体是静止的，所以，爆轰波的外侧在 z, V 平面上由位于 z 轴上的点 H_1 对应(图 50)，该点对应于 $\lambda_2 = \beta c/\sqrt{Q}$，$\beta$ 由条件 $\lambda_2 = 1$ 决定。由雨贡尼奥条件 (2.27) 得出，在 z, V 平面上抛物线

$$z_2 = (1 - V_2)^2 \frac{1 + \gamma A}{1 - A} \tag{8.1}$$

对应爆轰波的内侧；当 $A = 0$ 时，恰普曼-儒盖条件满足，并且抛物线 (8.1) 与抛物线

$$z = (1 - V)^2 \tag{8.2}$$

相重合。

若 $A > 0$，则抛物线 (8.1) 位于抛物线 (8.2) 以上(见图 38 和图 50 上的图线)。因为在抛物线 (8.2) 上变量 λ 有极值，所以当 $A > 0$ 时，不能把解由抛物线 (8.1) 的点连续地延到对称中心；还容易看出，也不可能带有附加的压缩间断的解。

但是解可以延到直线 $V = 1$ 上，这直线上的点可看作是对应球面活塞的。所以，可以得到在发生爆轰的气体质量中活塞膨胀问题的解。

相应的积分曲线和参量 A 的选取，由活塞上的压力或速度 (λ^*) 的值确定，因为对每一个 A，给定参量 $p_1/Q\rho_1$ 就决定了抛物线(8.1) 上的点 H_2' (图 50)。

若 $A<0$，则抛物线(8.1)位于抛物线(8.2)之下。在这种情况下问题的解不是唯一的。

存在整整一族由结点 A 出发的曲线，它们都可以给出满足所

有边界条件的解。强间断面后边的点 H_2' 的位置和参量 $\Lambda < 0$，由给出爆轰波面的速度确定。在中心得到一个静止气体的区域，其边界对应点 A 并且是弱间断。直线 AD 对应该区域内的点，点 D 对应该区域的中心 $\lambda = 0$（图 51）。如果点 H_2 在抛物线（8.2）上，则恰普曼-儒盖条件满足且爆轰速度为极小值。

若 $\Lambda \leqslant 0$，则在爆轰波阵面后边直到静止区域之前跟随着一个稀疏波。

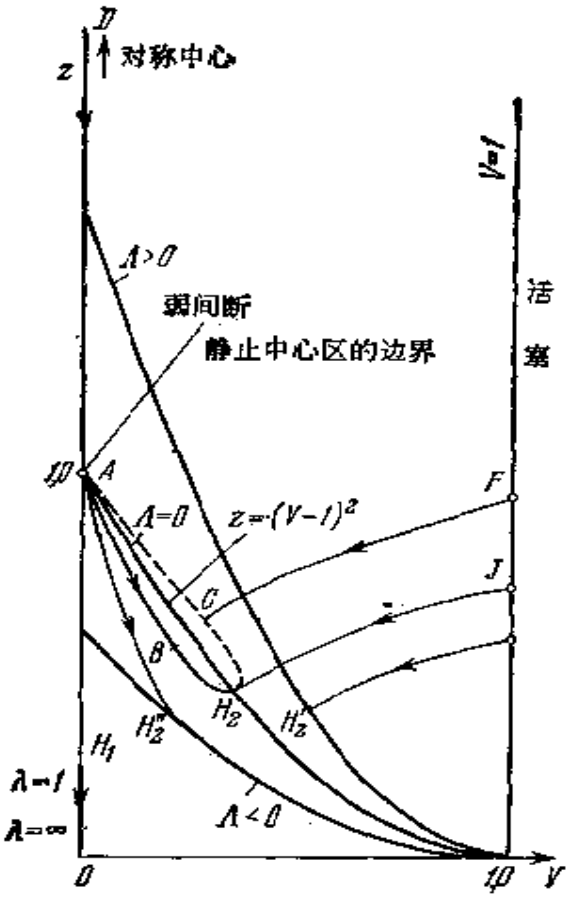


图 50　在 z，V 平面上对应球面爆轰的积分曲线。$\rho_1 = \text{const} \neq 0$，$\rho_1 = \text{const}$ $(\omega = 0)$ 的情况

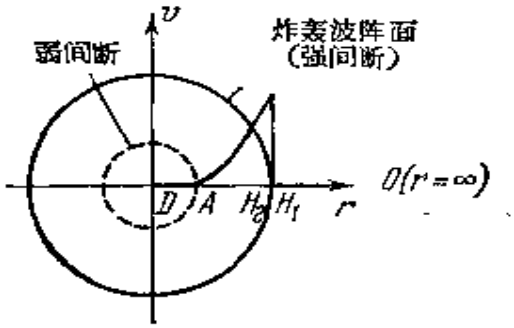


图 51　球面爆轰时的流动图。定性图象与平面波情况的相同（A. A. Гриб, 1939 年）

$\Lambda < 0$ 的情况对应第二个根 ρ_1/ρ_2（参看 (2.16)），由于化学反应区中函数 $Q'(\rho_1/\rho_2')$ 的单调性这一附加性质，$\Lambda < 0$ 的情况可以被排除。当化学反应区中不存在这种单调性时，可以讨论这种解，并且对所求解的选取就归结为借助化学反应动力学的数据和函数 $Q'(\rho_1/\rho_2')$ 不单调性的相应数据确定 $\Lambda < 0$. 另一方面，如上面指出的，当 $\Lambda > 0$ 时，函数 $Q'(\rho_1/\rho_2')$ 的变化不一定要是单调的。

需要指出，在恰普曼-儒盖状态（$A = 0$）的情况下存在两个连续解。除了带有稀疏波的解之外还存在带有压缩波的解，该解一直延续到以相应的常速 U_J 运动的活塞面上。

若活塞以小于 U_J 的速度运动，则在此情况下可以建立如下的解。在以儒盖速度传播的爆轰波上衔接一个对应线段 H_2B（图50）的稀疏波，由点 B 运动到点 C 时发生跃变，此后解延续到活塞面上的点 F。在活塞上常速度 U_F 小于 U_J。点 B 的位置由速度 U_F 的值调整。

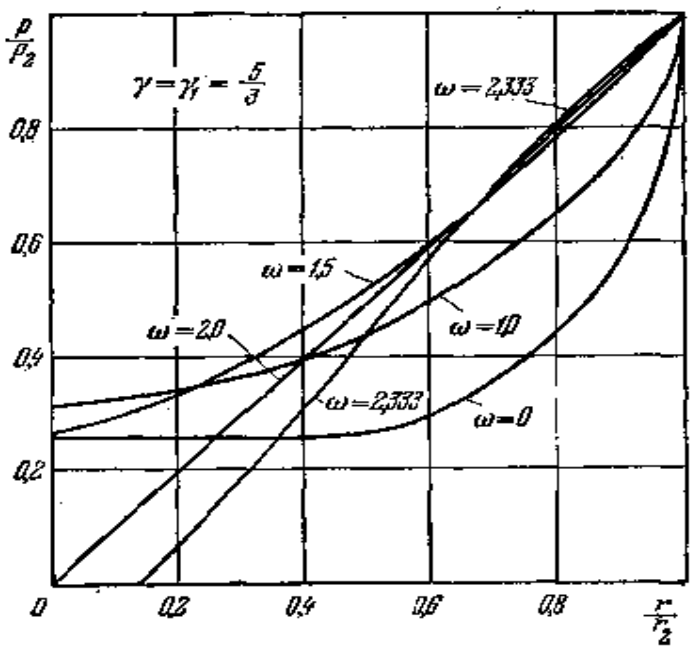


图 52　爆轰波阵面后的压力分布。初始压力 $p_1 = 0$，初始密度 $\rho_1 = A/r^\omega$。当 $\omega > 3(\gamma + 1)/(3\gamma - 1)$ 时在中心附近形成真空，在真空中压力等于零

所以，对于任何活塞速度 U_F，可以建立唯一的自模拟解[1]。

在图 52，53 和 54 中给出了关于所举例子的压力、速度和温度分布的计算结果，这里 $\gamma = \gamma_1 = 5/3$ 和 $p_1 = 0$，并且满足恰普曼-儒盖条件（对应 $\omega = 0$ 的曲线）。

用类似的方法可以得到柱面和平面波情况下爆轰问题的解。

1) 在爆燃混合气体绕锥体流动时出现类似的情况，参阅 Квашнина С.С., Черный Г. Г., Установившееся обтекание конуса потоком детонирующего газа· ПММ, т. 23, вып. 1, 1959, стр. 182—186.

我们再讨论初始变密度介质中的爆轰问题[1]。如果

$$0 < \omega \leqslant \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \quad \left(\rho_1 = k_1 \frac{A}{r^\omega}\right),$$

则积分曲线场如图 39 所示。

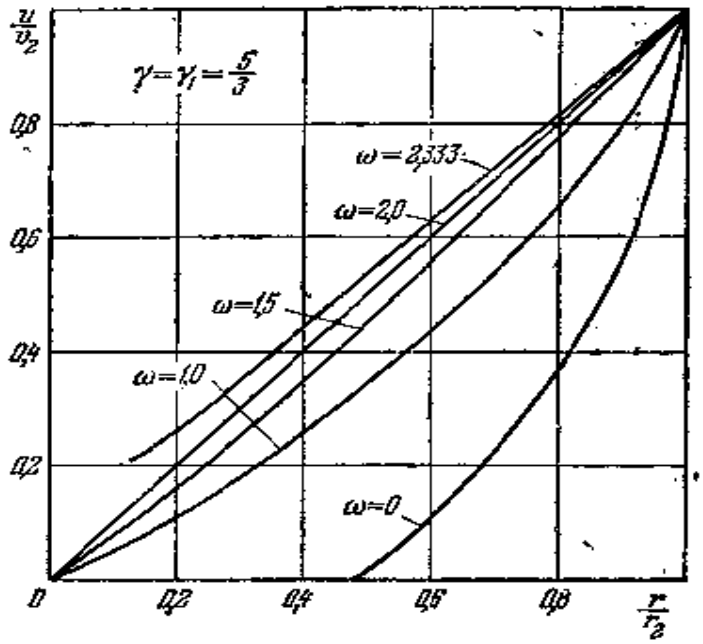


图 53　爆轰波阵面后的速度分布 ($p_1 = 0, \rho_1 = A/r^\omega$)

在图 55 中画出了在 z, V 平面上给出爆轰传播问题的解的积分曲线图。

为了在爆轰波阵面后使解向内延续，必须利用发自点 D 并进入奇点 A 的积分曲线，在点 D 处 $\lambda = 0$，点 A 位于抛物线

$$z = (1 - V)^2$$

上，在点 A 处可以是弱间断，变量 λ 具有有限值并当沿任何积分曲线向下运动时逐步增大。仅只那些与方程 (2.29) 给出的抛物线相交的积分曲线才可能对应解，抛物线的方程具有形式

---

1) Седов Л. И., О движении газа при звездных вспышках. ДАН СССР, т. 111, № 4, 1956, стр. 780—782; Яворская И.М., Решение некоторых задач о детонации в среде с переменной плотностью. ДАН СССР, т. 111, № 4, 1956, стр. 783—786.

$$z_2 = \gamma V_2(1 - V_2). \qquad (8.3)$$

与在 $\omega = 0$ 的情况中一样，解是不唯一的，并且在爆轰波阵面上 $A \leqslant 0$. 满足恰普曼-儒盖条件 $A = 0$ 的解对应抛物线 (8.2) 与 (8.3) 的交点。

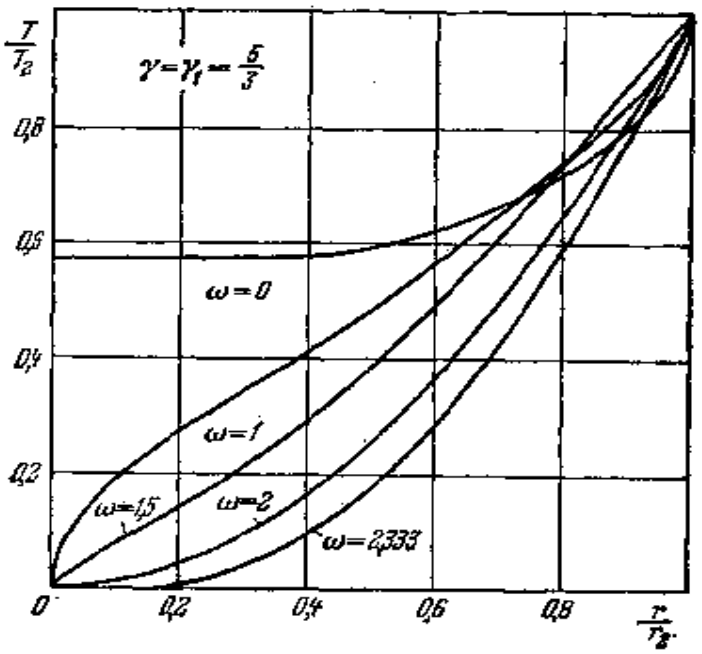


图 54 爆轰波阵面后的温度分布 ($p_1 = 0$, $\rho_1 = A/r^\omega$)

带有由中心膨胀的附加球面活塞的爆轰波传播的解，由图 55 上用虚线画出的 $H_2''C$ 类型的积分曲线提供。

当满足恰普曼-儒盖条件时，$\gamma = 5/3$ 和 $\omega = 1.5$ 情况下的气体运动诸特征量的分布的相应曲线给于图 52，53 和 54。

若 $\omega \to 2\gamma/(\gamma + 1)$，则奇点 A 沿抛物线(8.2) 移动并趋向与抛物线 (8.3) 相交的点。当 $\omega = 2\gamma/(\gamma + 1)$ 时，点 H_2 与点 A 重合，得到唯一的解，并且满足恰普曼-儒盖条件。若

$$2\gamma/(\gamma + 1) < \omega < 3(\gamma + 1)/(3\gamma - 1),$$

则在此情况下没有满足恰普曼-儒盖条件的解。

解是唯一的，由发自奇点 D 且在点 H_2 (对它 $A > 0$)与抛物线 (8.3) 相交的积分曲线提供(图 56)。

若 $\omega \to 3(\gamma + 1)/(3\gamma - 1)$，则奇点 B (见图 39) 向上升，穿

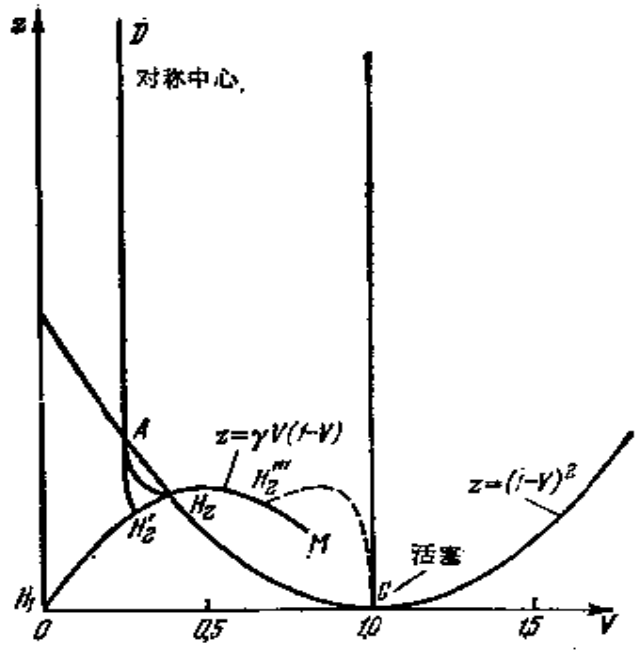


图 55　当 $0<\omega<2\gamma/(\gamma+1)$ 时积分曲线 H_2AD 或 $H_2'AD$ 对应爆轰问题的解，对于点 H_2 恰普曼-儒盖条件满足

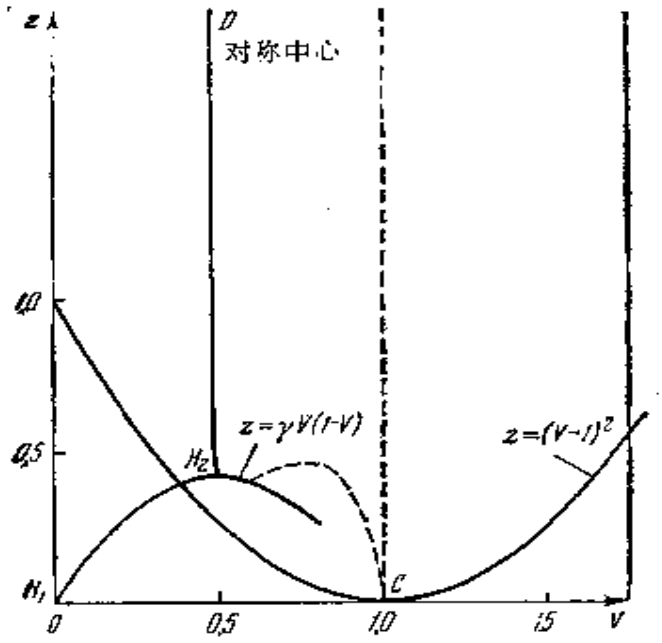


图 56　当 $2\gamma/(\gamma+1)<\omega<3(\gamma+1)/(3\gamma-1)$ 时，积分曲线 DH_2 对应爆轰问题的解，恰普曼-儒盖条件不满足

过点 A 并与它互换类型。当 $\omega = 3(\gamma+1)/(3\gamma-1)$ 时，点 B 位于抛物线(8.3)上(见图 40)。在此情况下为了求得解，必须完成由点 O 到点 B 的跃变。波阵面后气体的所有运动在 z，V 平面上都对应一点 B。在该情况下波阵面后 $z = z_2 = \text{const}$，$V = V_2 = \text{const}$ 对应解，它由简单的公式给出：

$$\frac{v}{v_2} = \frac{r}{r_2}, \quad \frac{\rho}{\rho_2} = \frac{r_2}{r}, \quad \frac{p}{p_2} = \frac{r}{r_2}. \tag{8.4}$$

波阵面的速度正比于坐标 r 而变化。

若 $3(\gamma+1)/(3\gamma-1) < \omega$，则由图 41 容易看出，在 z，V 平面上通过点 A 随后进入点 C 的积分曲线与解相对应。其内部压力为零的不断膨胀的球对应奇点 C。A 的值从而爆轰速度由积分曲线与抛物曲线(8.3)的交点决定(见图 57)。

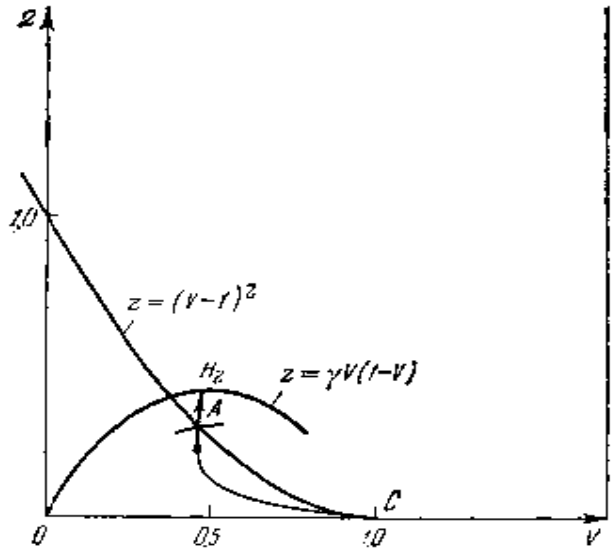


图 57　当 $\omega > 3(\gamma+1)/(3\gamma-1)$ 时积分曲线 H_2AC 对应爆轰问题的解。膨胀着的真空对应点 C，恰普曼-儒盖条件不满足

$\gamma = 5/3$ 和 $\omega = 7/3 = 2.33\cdots$ 时的相应的气体特征量的分布给于图 52，53 和 54。

在自模拟运动所讨论过的提法中显而易见，关于爆轰速度增大和关于在对称中心形成真空的所有结论，均与放热 Q 无关，而只与由指数 ω 的值所决定的初始密度的下降规律有关。

当气体在收缩管道中爆轰时，也可以得到比恰普曼-儒盖规则下的速度要大的爆轰速度。如果截面积按幂次规律变化，则在水力学近似下得出，气体运动是自模拟的并由方程（5.3），（5.4）和（5.5）确定，但是是在 $\nu < 1$ 情况下。量 ν 由流管的收缩规律决定。

§9. 火焰的传播[1)]

我们现在讨论由非常薄的运动层中发生的燃烧所引起的可燃混合气体的运动。分析表明，在其中发生化学反应的燃烧层，其厚度在许多情况下可以忽略不计，于是我们研究的是这样的气体运动问题，在其中当通过某一截面时化学反应和热量释放是瞬时完成的，并且当经过这个被称之为火焰锋面的截面时，气体的状态和运动特征量发生跃变。与爆轰阵面不同，火焰锋面是稀疏间断，火焰锋面沿可燃混合气体质点的传播速度 u 是已知的物理化学常数。火焰的传播速度与声速相比是小的，从而与爆轰速度相比也是小的。

与在爆轰阵面上一样，在火焰锋面上满足条件(2.12)，(2.13)和(2.14)，火焰锋面与爆轰阵面的区别仅在于，火焰锋面沿质点传播的速度不大且事先为已知。在燃烧情况下，由燃烧面引起的气体中的扰动是向前传播的并跟在火焰锋面之后。在解方程(2.14)时必须取最小的根 $\rho_1/\rho_2 > 1$。在研究有限薄层中的反应时，由初始状态在不断释放热量时(没有吸热区)所得到的状态就对应这个根。

在柱形管的封闭一端点燃的平面火焰锋面沿密度为 ρ_1 和压力为 p_1 的静止气体传播的问题，其解非常简单并组成如下。由封闭端沿静止气体传播一冲击波，在冲击波后面气体作平移运动，其速度朝向冲击波。沿运动的气体传播一平面火焰锋面，在锋面后气

1) $\rho_1=\text{const}$ 和 $p_1=\text{const}$ 时的球面火焰的传播问题曾由 Г. М. Бам-Зеликович 研究过.

体变为静止的，这是由封闭端上的条件决定的。为了完全求解问题，写出和联立求解六个方程就够了：火焰锋面上的三个和冲击波上的三个。由六个方程决定六个未知量：火焰锋面后的和冲击波后的密度和压力、冲击波后的气体速度和冲击波的传播速度。

我们来讨论球面火焰锋面的问题。假设在 $t = 0$ 时刻在一点产生燃烧锋面，然后，以球面波的形式沿具有常密度 ρ_1 和常压 p_1 的静止气体传播。显然，气体的受扰运动是自模拟的，并且由与爆轰现象中同样的常数所决定。与在球面爆轰情况中一样，对球面火焰 z，V 平面上的积分曲线给于图 38。

在某一 $t > 0$ 时刻，离点火中心足够远的气体质点仍然是静止的。静止区对应积分直线 $V = 0$。由静止即 $V = 0$ 转变为左半平面 $z > 0, V < 0$ 中的另一积分曲线上的运动，想借助稀疏间断——火焰锋面或者通过有弱间断的奇点 A 是不可能的，因为下一步运动不会延续到对称中心。在这些情况下连续运动或者存在强间断的运动通到与抛物线

$$z = (1 - V)^2$$

相交的积分曲线上。

所以，由静止 $V = 0$ 过渡到另一积分曲线上的运动，只能由经过起点在 $z_1 < 1$ 的简单的冲击波的过渡来实现。按(2.10)冲击波把 $V = 0$ 轴转变为如下抛物线的点：

$$z_2 = (1 - V_2)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} V_2\right). \qquad (9.1)$$

解可以延拓到对称中心（该处 $\lambda = 0$）的条件，导致必须这样来决定火焰锋面，要使得火焰锋面后的点或者位于通向奇点 $D(z = \infty,\ V = 0)$ 的积分曲线 $V = 0$ 上，或者位于积分曲线 L 上，该曲线进入奇点 B[1]：

$$B\left(z = \frac{3(\gamma - 1)^2}{(3\gamma - 1)^2},\quad V = \frac{2}{3\gamma - 1}\right)$$（见图 58）。

---

1) 如果初始密度是变化的 $\rho_1 = A/r^\omega$，则点 B 的坐标依赖 ω（参阅 § 5）。

由条件 (2·25) 得知，只有由曲线

$$z_3 = \left[(1 - V_3)V_3\left(1 + \frac{\gamma' - 1}{2} V_3\right) + (\gamma' - 1)\frac{Q}{u^2}(1 - V_3)^3\right] \Big/ \left[\frac{\gamma'}{\gamma} - \frac{\gamma' - 1}{\gamma - 1}(1 - V_3)\right]. \qquad (9.2)$$

的点才可能经过火焰锋面过渡到轴 $V = 0$ 上。

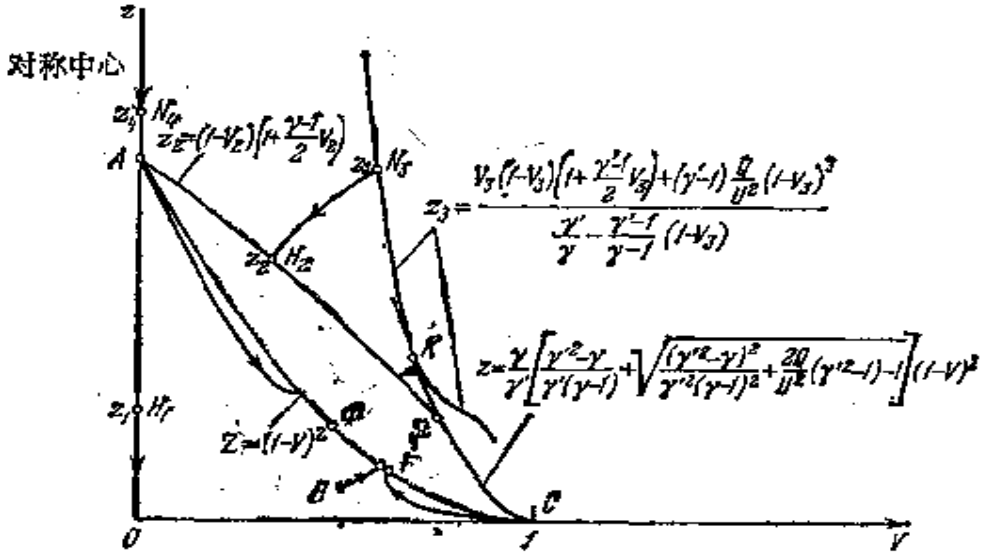


图 58　z, V 平面上对应球面燃烧的积分曲线。点 H_1 和 H_2 对应火焰锋面前的冲击波，点 N_3 和 N_4 对应火焰锋面

方程(9·2)是由 (2·25) 将下标 1，2 换为 4，3，由条件 $V_4 = 0$ 和改变量

$$\frac{Q}{c^2} = \frac{Q(1 - V_3)^2}{u^2}$$

的符号之后得到的，因为是在由状态 3 向状态 4 过渡时发生燃烧；u 是火焰沿质点的传播速度：

$$u = c - v = \frac{r}{t}(1 - V_3) = c(1 - V_3).$$

在方程 (9·2) 中 γ 是运动的可燃混合气体的泊松系数，γ' 是静止的燃烧产物的。

在图 58 中给出了建立解的图式。

在跃变之后像点落在抛物线 (9.1) 的某一点 z_2, V_2 上，沿通过此点的积分曲线向变量 λ 减小的方向的运动，亦即在抛物线(9.1)以上区域中的运动，对应进一步向中心的运动。上述的积分曲线与曲线(9.2)的交点对应火焰锋面的前缘，在其后边是一个与轴 $V=0$ 的点相对应的静止中心区。

如上所述来建立解总是可能的，因为由抛物线 (9.1) 发出的、$V \leqslant 2/(\gamma+1)$ 时的任何积分曲线都与曲线 (9.2) 相交，而从曲线 (9.2) 上的任何点都可能经过火焰锋面过渡到 $V=0$ 轴的点上。

但是，在这样建立解的过程中我们假设 $z_4 \geqslant 1$. 曲线(9.2)的点（对它们 $z_4<1$)不能对应火焰锋面的前缘，因为这导致火焰锋面的速度相对锋面后的质点是超声速。在这情况下，可以借助从冲击波后气体运动的积分曲线与抛物线[1]

$$z=\frac{\gamma}{\gamma'}\left[\frac{\gamma'^2-\gamma}{\gamma'(\gamma-1)}+\sqrt{\frac{(\gamma'^2-\gamma)^2}{\gamma'^2(\gamma-1)^2}+\frac{2Q}{u^2}(\gamma'^2-1)-1}\right]\cdot(1-V)^2 \tag{9.3}$$

(图 58 的曲线 KQC）的交点跃变到抛物线 $z=(1-V)^2$ 来建立火焰锋面.这样的跃变沿锋面后质点传播的速度严格等于声速，并且在锋面后边形成附加的稀疏波。此稀疏波对应的积分曲线，是由抛物线 $z=(1-V)^2$ 上的点出发的，或者到达对应静止中心区边界的奇点 A；或者由点 F 到点 B，这时不形成静止中心区且运动可延续到对称中心；或者到奇点 $C(z=0,\ V=1)$，在后一情况下在中心附近形成真空。

对于在位于点 Q 以上的抛物线 (9.1) 上的所有的点 z_2, V_2 都存在问题的解，在点 Q 抛物线(9.1)与抛物线(9.3)相交。在抛物线 $z=(1-V)^2$ 上点 Φ 对应点 Q. 如果点 Φ 位于点 F 之上，则总是在对称中心附近形成一个静止中心区。如果 p_1 和 ρ_1 是常数，则

---

1) 对火焰锋面的跃变抛物线(9.3)过渡到抛物线 $z=(1-V)^2$.

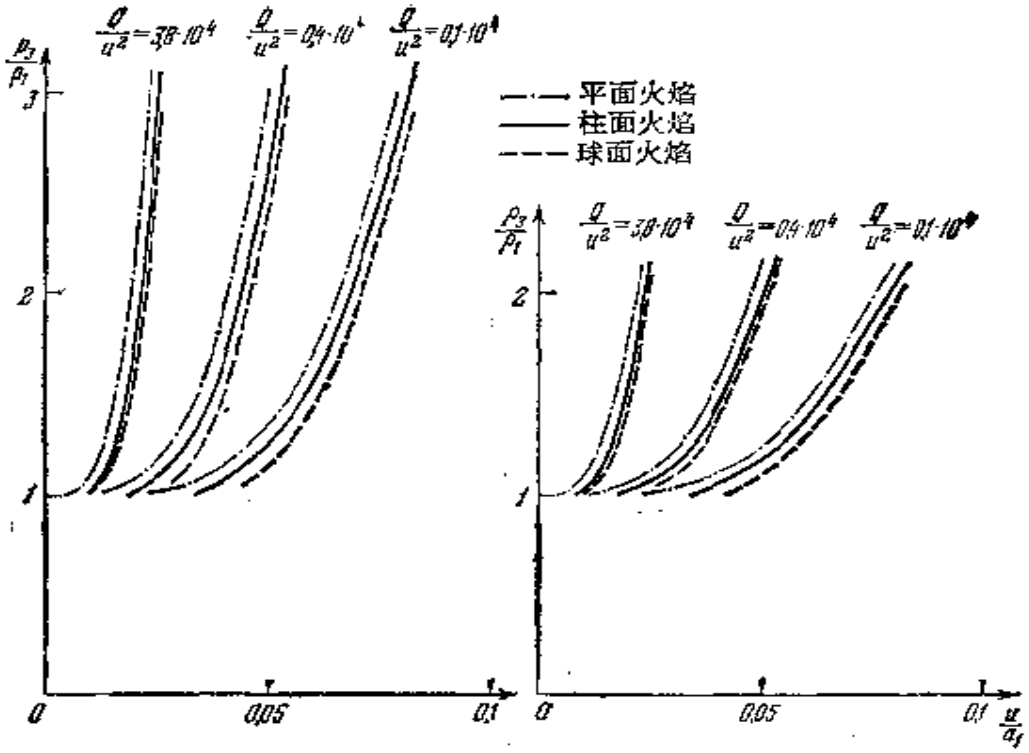


图 59　不同的放热量 Q/u^2 情况下的火焰锋面前的密度和压力
（Q——单位质量释放的能量，　u——火焰锋面相对质点的速度，
p_1——压力，　ρ_1——密度，　a_1——可燃混合气体中的声速）

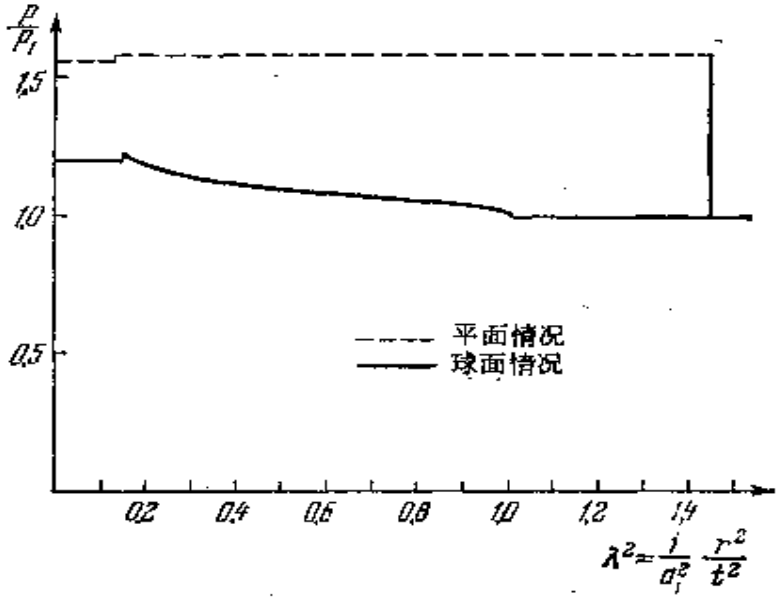


图 60　由平面壁（平面火焰锋面）和由一点（球面火焰锋面）传播燃烧时的压力分布：$Q/u^2=60$，$u/a_1=0.016$

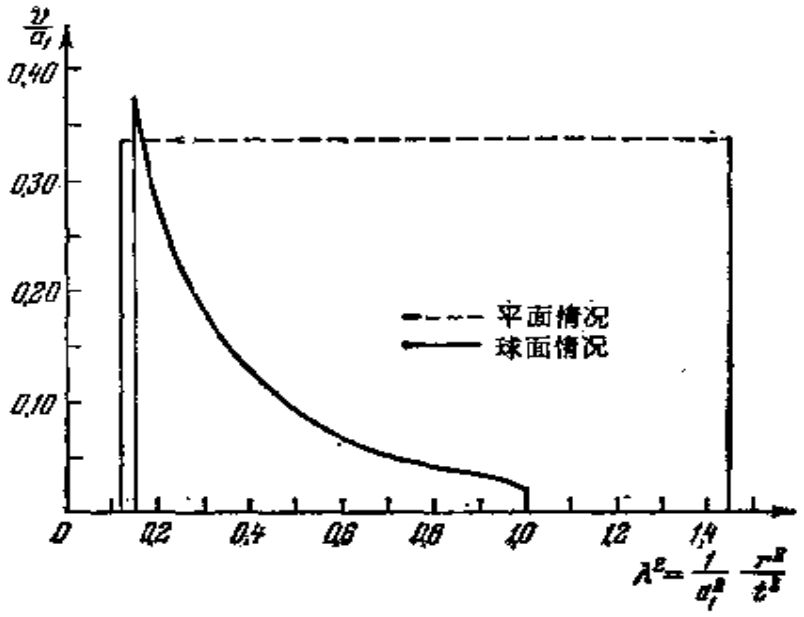


图 61　由平面壁和由一点传播燃烧时的速度分布：
$Q/u^2 = 60$，$u/a_1 = 0.016$.

在对称中心附近出现气体的静止中心区。如果 $\rho_1 = A/r^\omega$，则在某些 ω 值下可能在对称中心附近形成真空。

利用类似的方法可以建立具有柱面波的火焰传播问题的解。数值计算结果和各种情况的比较给于图 59，60 和 61。

§ 10. 可燃混合气体中任意间断的分解

在这里将不对任意间断分解问题（在 § 1 中描述过）作详细分析，而只指出所产生运动的一般性质[1]。

首先我们假设，在间断面两边存在两种惰性气体，并且左边（下标 2）气体的压力大于右边（下标 1）的（相反的情况完全与此类似）。那么，如果 x 轴是由 2 指向 1，并且如果气体的初始速度之

1) H. E. 柯钦首先对惰性气体研究了这一问题。参阅 Кочин H.E., Sur la théorie des ondes de choc dans un fluide, R. C. Circ. mat., Palermo. 1926, V. 50, pp. 305—344; 再参阅. Кочин Н. Е. Собрание сочинений, т. 2, изд. АН СССР, М.-Л., 1949; Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

差 $v_1 - v_2$ 是负的且绝对值很大（譬如，若气体的初始速度都朝向间断面，它们之差的绝对值很大但是负的，就是这种情况），则在两边将传播冲击波。在气体的交界面上还可能有一个驻定间断，在它上面压力和垂直速度连续而密度可以有间断。在图 62а 中示出了这种情况的压力曲线。

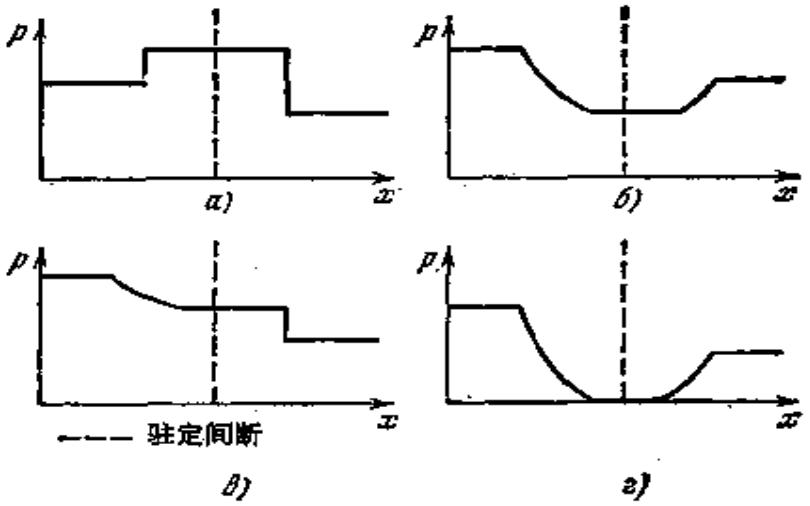


图 62　惰性气体中任意间断分解的各种情况

当初始速度之差增加时，第二种气体中的冲击波换成稀疏波（图 62в），而随后在第一种气体中也传播一稀疏波代替冲击波（图 62б）。当初始速度之差变为非常大的正值时，则在向两边传播的稀疏波之间形成真空（图 62г）。

当间断面的右边是可燃混合气体时，将出现较复杂的情况，在任意间断分解时沿可燃混合气体可能传播火焰锋面。在这种情况下就一般性质而言，所产生的运动将类似于上面讨论过的运动[1]。

当初始速度之差小时，沿惰性气体传播冲击波，沿可燃混合气体也传播冲击波并在波后是火焰锋面。在惰性气体与燃烧产物之间可以是驻定间断。

1) 在下列文献中对这问题作过定量的详细研究：Бам-Зеликович Г. М., Распад произвольного разрыва в горючей смеси. В сборнике статей № 4 «Теоретическая гидромеханика» под ред. Л. И. Седова. М., Оборонгиз, 1949, стр. 112—141.

图 63 а 中示出了这种情况的压力曲线（粗垂直线段代表火焰锋面，虚线代表驻定间断）。当初始速度差增大时，惰性气体中原先的冲击波变为稀疏波（图 63 в），而随后在火焰锋面前面传播一稀疏波代替冲击波（图 63 б）。这时燃烧产物相对火焰锋面的速度一直在增长，直至达到声速为止。

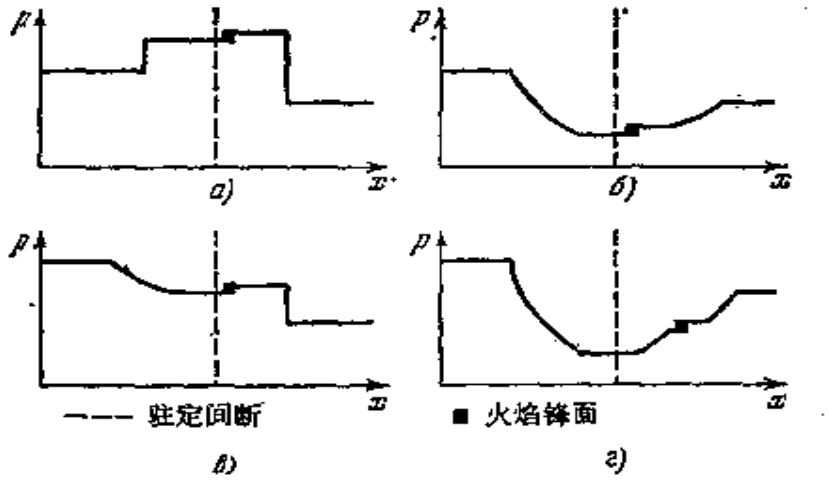


图 63　在可燃混合气体中任意间断分解的各种情况

当进一步增大初始速度差时，火焰锋面前的流动不变，而紧跟在锋面之后又出现一个稀疏波（图 63 г）。在惰性气体与燃烧产物之间可能出现真空。

如果惰性气体中的压力比可燃混合气体中的小，则还可能有这样的情况：这时沿火焰锋面前的可燃混合气体传播稀疏波，而沿惰性气体传播冲击波。

同理，若沿可燃混合气体传播爆轰波，则当初始速度差由 $-\infty$ 增大到 $+\infty$ 时，得到的情况是：起初，沿惰性气体传播冲击波，而沿可燃气体传播一个爆轰波，其速度要多大有多大；随后，惰性气体中的冲击波变为稀疏波，而爆轰波的速度减小到某一确定值。这时爆轰产物相对波阵面的速度在增加，直至达到声速为止。再下一步，爆轰波的速度不发生变化，而在它后面出现稀疏波。

我们列举一些任意间断形成和分解的例子。

（1）设沿气体传播一冲击波，而在它后面传来第二个冲击波。

在第二个冲击波赶上第一个的时候，形成一个间断面，在它上面质量、动量和能量守恒条件都不满足，也就是说形成任意间断。

计算表明，在这种情况下在间断分解之后在两边都传播冲击波。

(2) 冲击波传向密度不同的两种介质的分界面。在冲击波由一种介质进入另一种介质时形成任意间断。当该间断分解时可能出现两种类型的运动。

当冲击波由低密度介质进入高密度介质（譬如由空气进入水中）时，两边传播冲击波；如果冲击波是由高密度介质进入低密度介质（譬如由水进入空气），则向前（在空气中）传播冲击波，而向后（在水中）传播稀疏波。

(3) 强度不大的冲击波追赶火焰锋面。（当在封闭容器内脉冲燃烧时就碰到这种情况）。当冲击波赶上火焰之后，在火焰锋面两边传播冲击波。如果强度不大的冲击波与火焰锋面相碰撞，则在任意间断分解之后，在火焰锋面前面沿可燃气体传播稀疏波，而沿燃烧产物传播冲击波。

在研究激波管中气体的初始阶段的运动时，给定的间断的分解问题是重要的。激波管中的运动图象示于图 64。压力高和压力低的两种气体用膜片隔开，在膜片突然破裂之后形成任意间断，结果在低压气体中产生冲击波。在膜片破裂的时刻，如果向膜片传来冲击波或爆轰波，则高压气体或者处于静止状态或者运动。低压气体中冲击波的强度依赖于初始的运动和压力降，依赖于温度上的差别和依赖于起初由膜片隔开的气体的性质。

在其他条件相同时，如果用降低了初始声速的气体作为低压气体，则冲击波的强度增大。对于多方气体，可以采用多方指数 γ 值低的气体来使初始声速降低。例如，在温度 273° K 时，对于氦 $\gamma = 1.67$ 和声速 $a_1 = 975$ 米/秒，对于空气 $\gamma = 1.4$ 和 $a_1 = 333$ 米/秒，对于氟氯烷 $\gamma = 1.15$ 和 $a_1 = 121.5$ 米/秒。

在其他条件相同时，低压气体中冲击波的强度随气体温度的减小而增加。

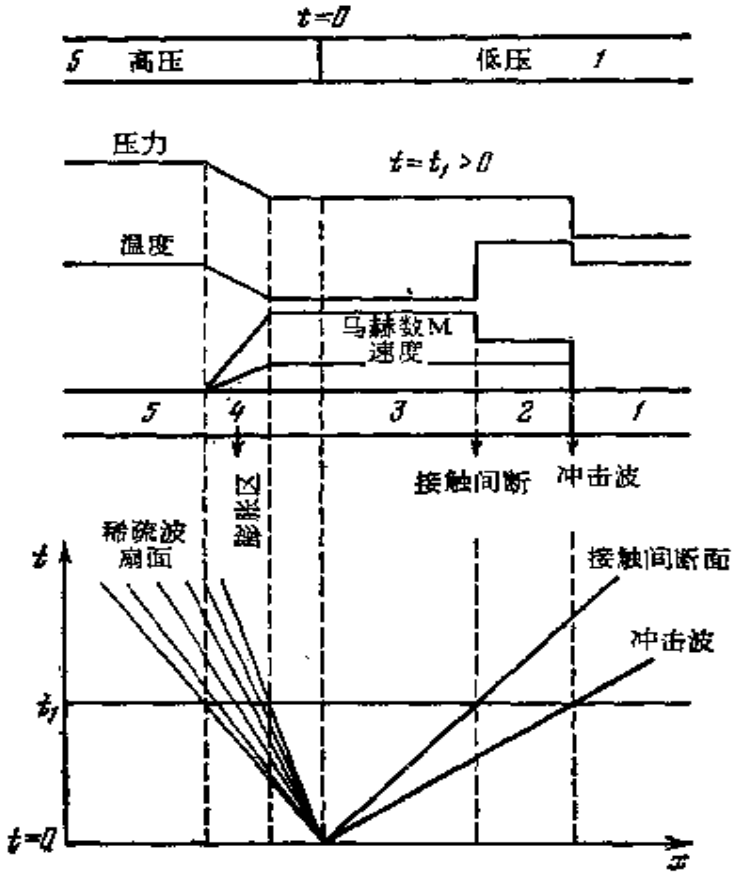


图 64　激波管中的运动图象

低压气体中冲击波的强度，可以比高压气体中朝着膜片运动的冲击波的强度强得多。

在激波管中可以得到非常强的冲击波、很高的波后温度和很大的气体运动速度。在冲击波阵面后得到温度很高的质点，该温度经过短暂的时间 τ 就迅速下降。

激波管被广泛地应用于以极高速度对物体绕流时的空气动力学研究，和用于各类物理-化学研究，其中包括用来得到高温下的化学反应。

在一个极短暂的时间间隔中获得高温的可能性，使得可以研究化学反应动力学和获得链式反应的中间产物。

§11. 强爆炸问题[1)]

1. 气体中的强爆炸 由下面讨论得知，在强爆炸时，空气受扰动的区域与未扰动状态是由冲击波分开的。

正如已指出过的那样，在强爆炸时冲击波波前的压力与波后压力相比可以忽略不计。首先我们来估计一下，这一假定有多高的精确度和对什么样的冲击波成立。

为此，当考虑到 $v_1 = 0$ 时我们把冲击波上的条件 (2.5) 和 (2.6) 写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1} c\left[1 - \frac{a_1^2}{c^2}\right] = \frac{2c}{\gamma+1} f_1, \\ \rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1\left[1 + \frac{2}{\gamma-1}\frac{a_1^2}{c^2}\right] = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1 f_2, \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 c^2\left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{a_1^2}{c^2}\right] = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 c^2 f_3, \end{aligned}\right\} \quad (11.1)$$

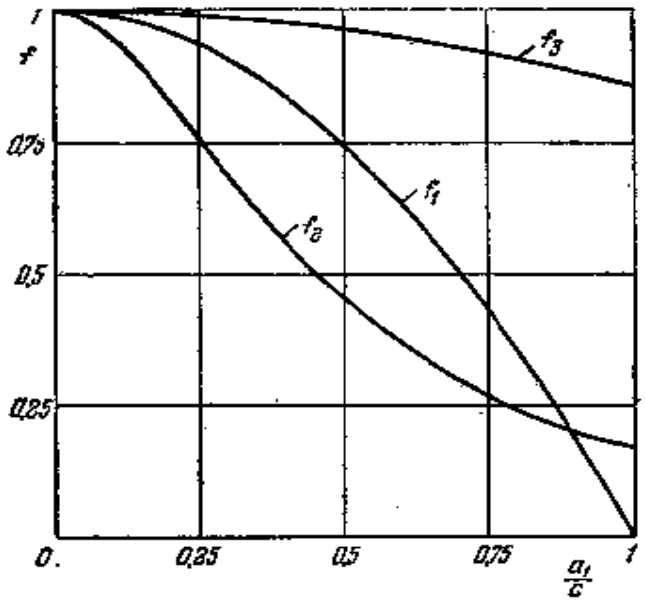


图 65 f_1, f_2 和 f_3 的值对于比值 a_1/c 的依赖关系，其中 a_1——未扰动介质中的声速，c——冲击波速度

1) 下面我们叙述强爆炸问题的提法、精确理论解和数值解，既讲球面波情况也讲柱面波和平面波情况，这些结果最先由我们发表在下列杂志中：ДАН СССР, т. 42, № 1, 1946 和 ПММ, т. 10, вып. 2, 1946.

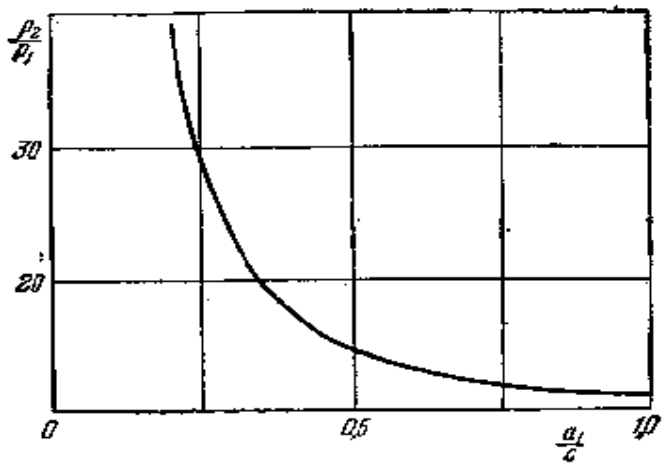


图 66　冲击波内的压力降对比值 a_1/c 的依赖关系

其中 c 是冲击波的传播速度。

冲击波愈强，比值 a_1/c 愈小。

在图 65 中示出了 f_1，f_2 和 f_3 对 a_1/c 的依赖关系。在图 66 中示出了 $\gamma = 1.4$ 时的 p_2/p_1 对比值 a_1/c 的依赖关系。容易看出，当 $a_1/c < 0.1$ 时 f_1，f_2 和 f_3 的值与 1 的差别就已经小于 0.05。

若在关系式（11.1）中令

$$\frac{a_1}{c} = 0 \text{ 和 } f_1 = f_2 = f_3 = 1$$

（或者令 $p_1 = 0$ 都一样），则当 $a_1/c < 0.1$ 时在 v_2，ρ_2 和 p_2 的值上带来的误差小于 5%。

这时，冲击波上的条件具有形式

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1}c, \\ \rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1, \\ p_2 &= \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 c^2. \end{aligned}\right\} \qquad (11.2)$$

冲击波的传播速度 c 是待求的量。

如果我们利用（1.3）形式的运动方程和上述关于强爆炸问题

的提法，则基本量纲常数可以取如下的量：

$$\rho_1 \text{ 和 } E/\rho_1,$$

这里 E 是下面我们要确定的某一常数，它的量纲同于爆炸时释放的能量 E_0 的量纲；E 的量纲等于：

在球面情况下 $[E] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$，

在柱面情况下 $[E] = \mathrm{MLT^{-2}}$，

在平面情况下 $[E] = \mathrm{MT^{-2}}$.

可以把所有这三种情况统一为一个公式

$$[E] = \mathrm{ML^{\nu-1}T^{-2}}.$$

显然，常数 E 只正比于 E_0：

$$E_0 = \alpha E,$$

其中 α 是常数。

在这种情况下唯一的无量纲可变参量 λ 等于：

$$\lambda = \frac{r}{\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/(2+\nu)} t^{2/(2+\nu)}}.$$

冲击波的运动规律，不用求解气体的运动方程就容易被建立.

运动方程可以是不同的，但是这些方程不应包含其量纲与 ρ_1 和 E 无关的新的实质性物理常数。特别是，在方程（1.3）中没有必要假设指数 $\gamma = c_p/c_v$ 有常数值.

对于冲击波，坐标 r_2 是时间 t 的函数，而因为由有量纲量 t，ρ_1 和 E 不能组成无量纲组合，所以

$$r_2 = \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/(2+\nu)} t^{2/(2+\nu)} \lambda^*, \qquad (11.3)$$

其中 $\lambda^* = \text{const}$；可以令 λ^* 等于任何非零的数，并可以用装药能量 E_0 来计算 E 的值。下面为简单和确定起见令 $\lambda^* = 1$. 这样，根据运动方程的解就决定公式

$$E_0 = \alpha E$$

中的常数 α.

于是，对运动规律和对冲击波速度我们得到：在球对称情况下

$$r_2 = \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{2/5},$$

$$c = \frac{2}{5}\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{E}{\rho_1}}\frac{1}{\sqrt{r_2^3}}; \qquad (11.4)$$

在柱对称情况下

$$r_2 = \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/4}\sqrt{t},$$

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/4}\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E}{\rho_1}}\frac{1}{r_2}; \qquad (11.5)$$

在平面波情况下

$$r_2 = \left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/3} t^{2/3},$$

$$c = \frac{2}{3}\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/3} t^{-1/3} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{E}{\rho_1}}\frac{1}{\sqrt{r_2}}. \qquad (11.6)$$

这些公式表明，冲击波的衰减规律与装药形式有关。

上面所得到的球对称情况下的公式，已由公开发表的 1945 年新墨西哥州原子弹爆炸的试验结果（照片）得到了很好的证实。

在图 67，68 和 69 中给出了于 1950 年在泰勒[1] 的著作中发表的原子弹爆炸的照片。

在空气受扰动区域内，在距原子弹爆炸中心相当远的距离上，空气温度非常高，所以这个区域在照片上是亮点。在亮点的上部，边界呈球形，轮廓分明并与冲击波相重合。随着时间的增长冲击波在减弱，波阵面后的温度下降，但是，由于密度的间断，在某些条件下冲击波阵面依然清晰可见。根据泰勒著作中的照片得出了膨胀的球面冲击波的半径 r_2 与相应的时刻 t（由发生爆炸时算起）之间的关系式，半径的范围由 11 米到 185 米，相应的时间间隔由

1) Taylor G.I., The Formation of a Blast wave by a Very Intense Explosion. II. The Atomic Explosion of 1945. Proc. Roy. Soc. London, A201, № 1065, 1950, p. 175.

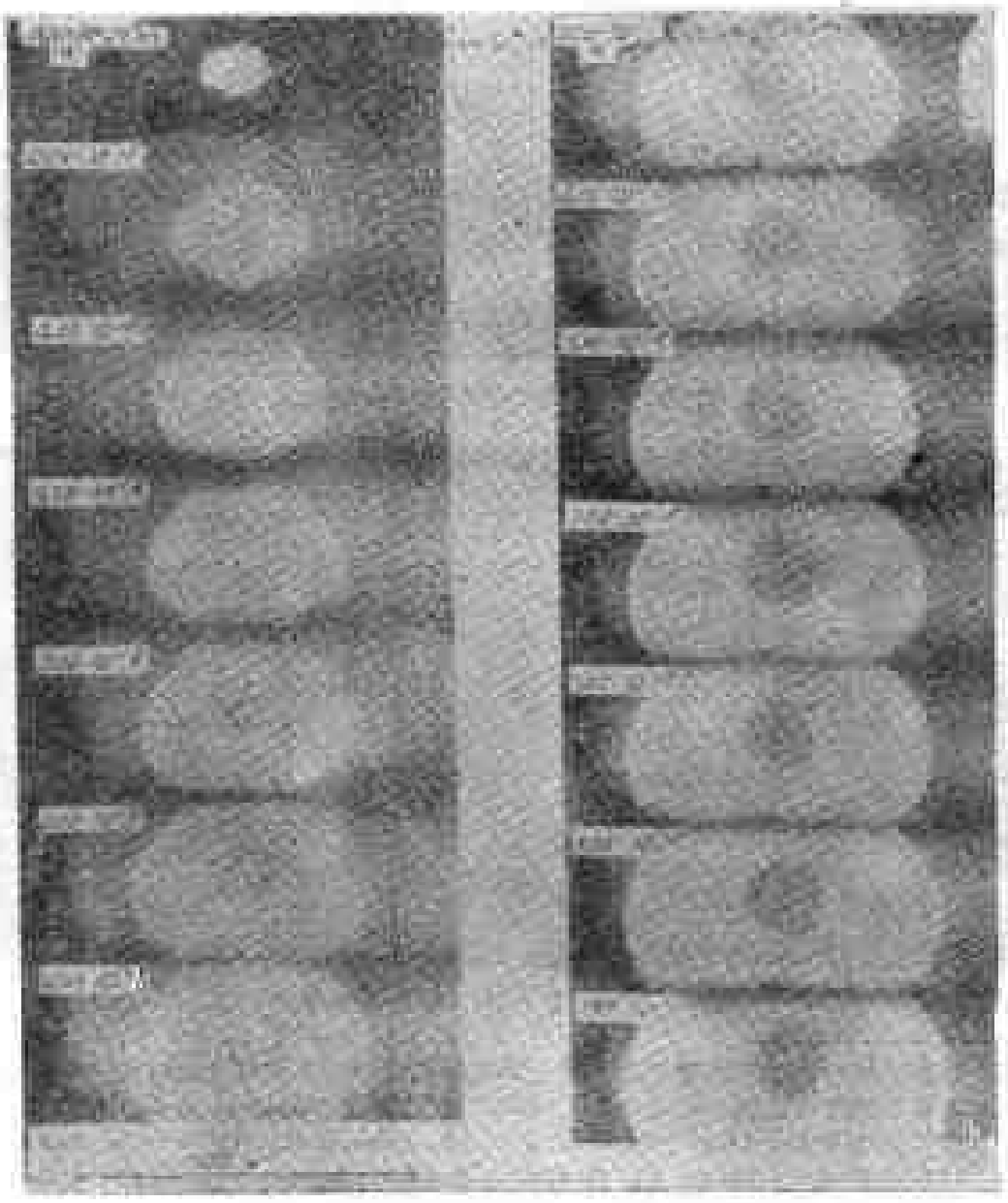


图 67　在新墨西哥州进行引爆千吨塔架的一组火球照片（$t=0.1\times10^{-3}$ 秒到 $t=1.93\times10^{-1}$ 秒）

0.1×10^{-8} 秒到 6.2×10^{-3} 秒[1]。

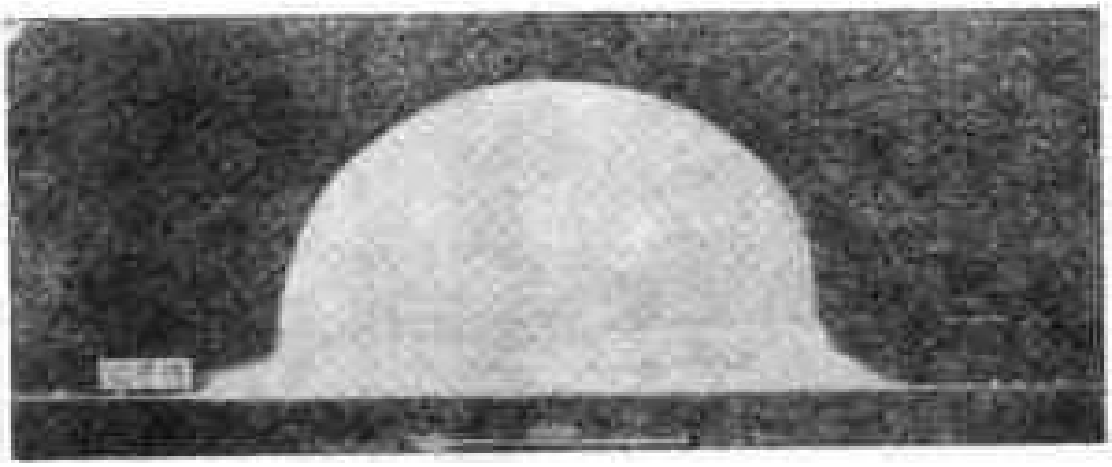


图 68　$t=15\times10^{-3}$ 秒时的火球

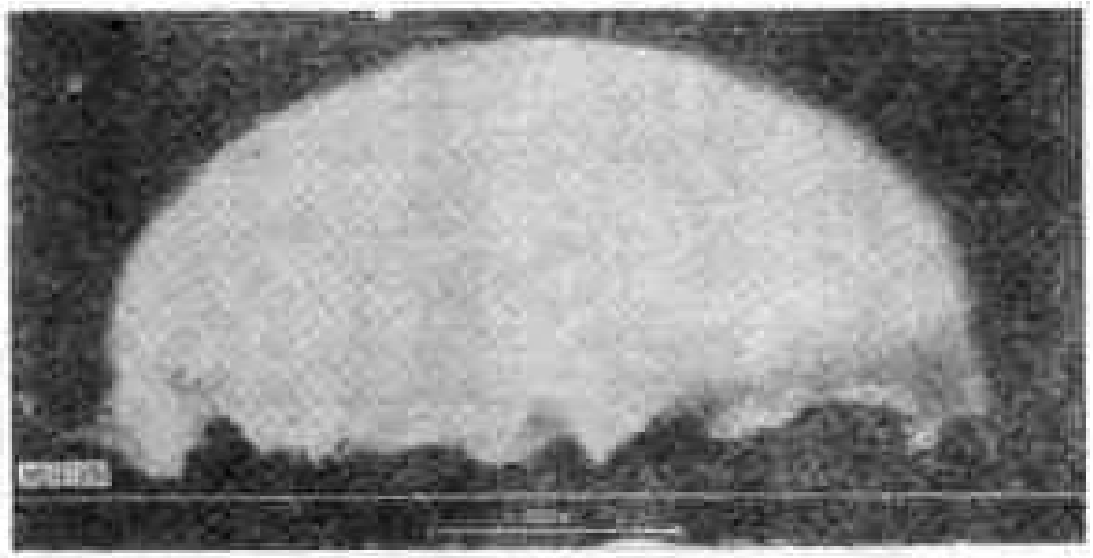


图 69　$t=127\times10^{-3}$ 秒时的火球

1) 在原子弹爆炸时的火球初期阶段上对辐射的考虑以及火球发展的理论，可在布洛德的著作中找到（参阅 Brode H.L., Review of Nuclear Weapons Effects. 收于文集 Annual Rev. Nucl. Sci., v. 18, Palo Alto, Calif., 1968, pp. 153—202. 有俄译本：Броуд Г., Действие ядерного взрава. 收于俄译本 «Действие ядерного взрыва». М., «Мир», 1971, стр. 9—88）。

在确定的能量 E_0 时，爆炸现象初期阶段上的辐射能输运的作用，随炸弹的特征的线尺度 d 的减小而增强。随着这温度的升高，辐射从爆炸产物中带走的能量份额增大。

如果不考虑周围介质从爆炸产物中的辐射能吸收，则按辐射的宏观规律，在有限的 E_0 下 $d\to0$ 和 $T_0\to\infty$，取极限时，爆炸时释放的全部能量都应被辐射带走。

在图 70 中试验结果用小圆圈表示。直线对应于公式

$$\frac{5}{2}\lg r_2 - \lg t = 11.915.$$

(式中 r_2 取为厘米，t 取为秒。) 它与理论公式 (11.4) 取对数后的公式相符合，只需在其中补充假定

$$\frac{1}{2}\lg\frac{E}{\rho_1} = 11.915,$$

由此当 $\rho_1 = 0.00125$ 克/厘米^3 时

$$E = 6.76 \times 10^{25}\rho_1 = 8.45 \times 10^{20} \text{ 尔格。} \qquad (11.7)$$

试验结果很好地证实了早先利用量纲理论的一般分析所建立的冲击波的传播规律(11.4)，并使得可按等式 (11.7) 决定常数 E

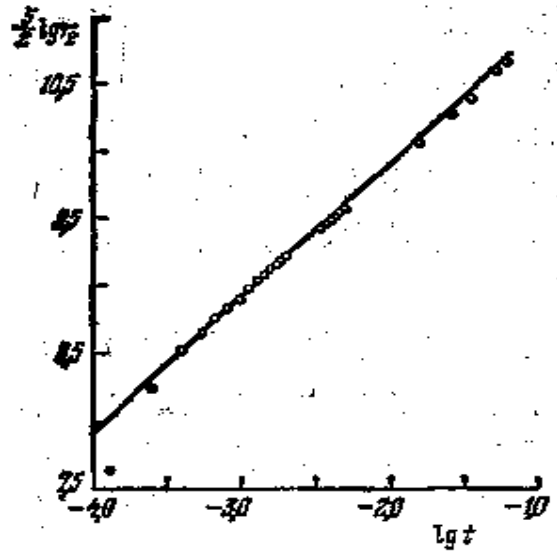


图 70　用小圆圈表示的试验结果落在一条以 45° 角与坐标轴相交的直线上，这是理论公式 $r_2 = (E/\rho_1)^{1/5}t^{2/5}$ 的很好的证明

的值。

冲击波速度的公式还可以写成

$$c = \frac{2}{\nu+2}\frac{r}{t}.$$

将 c 的这个表达式代入冲击波上的条件(11.2) 并在其中按公式(1.1)换成无量纲变量 $V, \mathscr{R}, P$ 和 $z = \gamma P/\mathscr{R}$，我们就求出冲击

波后面 V_2, $\mathscr{R}_2$ 和 z_2 的值：

$$V_2 = \frac{4}{(\gamma+1)(\nu+2)},$$

$$\mathscr{R}_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1},$$

$$z_2 = \frac{8\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2(\nu+2)^2}. \tag{11.8}$$

为了得到强爆炸时的空气受扰运动的解，可以通过分析§5中给出的 z, V 平面上的积分曲线场和利用§3中所建立的积分。

$\nu = 1$、2 时的积分曲线场类似于 $\nu = 3$ 时球面情况下的积分曲线场，后者画于图 42。

当沿积分曲线连续运动时，只在趋近于奇点 O 和 F 时参量 λ 才可能趋于无穷大。所以，在连续运动时，在 z, V 平面上只有点 O 和点 F 可以对应气体中的无穷远点。当 $t \neq 0$ 时，$\lambda = 0$ 一值对应对称中心。只有当沿积分曲线 $z = 0$ 在 $V = \pm\infty$ 时，和当沿通向点 C 的一条唯一的积分曲线趋近点 C 时，参量 λ 才趋近于零。点 C 是该积分曲线的一个端点，另一个端点是点 B。参量 $\lambda \neq 0$ 的有限值对应奇点 B 和 D。

不难看出，以奇点 C（它对应对称中心）为端点的唯一的积分曲线，可以给出强爆炸问题的解[1]。但是这个解不可能连续延伸到 $r = \infty$，所以，在强爆炸时，气体的连续运动是不可能的。为了使这个解能够延伸下去并通过强冲击波与静止状态相衔接，必要而充分的是，按式（11.8）坐标为

$$V_2 = \frac{4}{(\gamma+1)(\nu+2)}, \quad z_2 = \frac{8\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2(\nu+2)^2}$$

的点 M 要位于那条在无穷远处通到奇点 C 的积分曲线上。

关于上述强爆炸问题的解存在这一重要理论问题，涉及到要证明 M 和 C 两个点同属于 $\omega = 0, \delta = 2/(\nu+2)$ 时的一阶常微分

1) 此问题的详细分析在 1945 年所写的论文中给出，参阅 Седов Л. И., Распространение сильных взрывных волн. ПММ, т. 10, вып. 2, 1946, стр. 241—250.

方程 (5.10) 的积分曲线。显然，这个问题不可能利用近似数值求解来解决。

但是看来，可以以有限的封闭的形式得到解。

事实上，由冲击波条件 (11.8) 得知，能量积分 (3.11) 右端的常数等于零。由此得出，在 z，V 平面上对应所求的解的积分曲线是简单的方程

$$z = \frac{(\gamma-1)V^2\left(V-\frac{2}{\nu+2}\right)}{2\left[\frac{2}{(\nu+2)\gamma}-V\right]}. \tag{11.9}$$

将(11.9)的 z 代入方程(5.11)，根据边界条件：

$$\text{当 } V = V_2 = \frac{4}{(\gamma+1)(\nu+2)} \text{ 时，} \lambda = 1,$$

通过简单求积就求得 $\lambda(V)$.

由绝热积分和求出的函数 $z(V)$ 和 $\lambda(V)$ 容易确定函数 $\mathscr{R}(V)$. 绝热积分中的常数由冲击波上的条件(11.8)确定。

积分曲线(11.9)就是方程(5.10)的那条通向奇点 $C(z=\infty, V=2/\gamma(\nu+2))$ 的唯一的积分曲线。沿该曲线变量 λ 由 1 (在冲击波上) 下降到零(在奇点 C 上)，在点 C 上 V 具有有限值 $2/\gamma(\nu+2)$. 由此得出，在对称中心气体的速度等于零 $\left(\nu-\frac{\gamma}{2}V\right)$，这是解延伸到对称中心的自然的力学条件。

于是，证明了，强爆炸的自模拟问题的解存在并且唯一。

此证明主要与如下事实密切相关，即冲击波阵面后 (11.8) 的值 z_2 和 V_2 正好属于通过奇点 C 的那条唯一的积分曲线，因此解可以延伸到对称中心。在所有邻近的积分曲线上，气体的运动不能延伸到对称中心。

下面给出在 $p_1 = 0$ 时对任何初始密度 ρ_1 和爆炸能 E_0 都成立的普遍公式、表格和曲线。

我们使用由定义(1.1)和由冲击波上的条件 (11.2) 得出的如下的记号和关系式：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{r}{r_2}=\lambda,\\
&\frac{v}{v_2}=f=\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{4}\lambda V,\\
&\frac{\rho}{\rho_2}=g=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\mathscr{R},\\
&\frac{p}{p_2}=h=\frac{(\nu+2)^2(\gamma+1)}{8\gamma}\lambda^2\mathscr{R}z,
\end{aligned}\right\}\tag{11.10}$$

同时

$$\left.\begin{aligned}
v_2&=\frac{4}{(\nu+2)(\gamma+1)}\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/(2+\nu)}\frac{1}{t^{\nu/(\nu+2)}}\\
&=\frac{4}{(\nu+2)(\gamma+1)}\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{1/2}\frac{1}{r_2^{\nu/2}},\\
\rho_2&=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1,\\
p_2&=\frac{8\rho_1}{(\nu+2)^2(\gamma+1)}\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{2/(2+\nu)}\frac{1}{t^{2\nu/(\nu+2)}}\\
&=\frac{8E}{(\nu+2)^2(\gamma+1)}\frac{1}{r_2^{\nu}},\\
T_2&=\frac{p_2}{R\rho_2}.
\end{aligned}\right\}\tag{11.11}$$

以 r_0 记气体质点的初始坐标——拉格朗日坐标。显然，对每一个质点，坐标 r_0 等于冲击波经过它时的冲击波半径 r_2。

根据冲击波上的条件和波阵面后的绝热方程得到：

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_2}{\rho_2^\gamma}(r_0)=\frac{8(\gamma-1)^\gamma}{(\nu+2)^2(\gamma+1)^{(\gamma+1)}}\frac{E}{\rho_1^\gamma}\frac{1}{r_0^\nu}.\tag{11.12}$$

由此得到公式

$$\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^\nu=\frac{8\gamma(\gamma-1)^\gamma}{(\nu+2)^2(\gamma+1)^{(\gamma+1)}}\frac{\mathscr{R}^{\gamma-1}}{\lambda^2 g},\tag{11.13}$$

它可用来计算拉格朗日坐标。根据式(11.11)下列等式也成立：

$$\frac{v_2}{v_{20}}=\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{-\nu/2},\quad \frac{p_2}{p_{20}}=\left(\frac{r_2}{r_0}\right)^{-\nu},$$

其中 v_{20} 和 p_{20} 是冲击波经过坐标为 r_0 的点时波阵面后的速度和压力。

利用最终形式的公式强爆炸问题的解可写成参变量为 V 的参数形式[1]。V 的变化范围和对称中心附近的运动特性，依赖于点 M 和奇点 $\mathscr{E}$ 的相对位置，点 M 对应着冲击波阵面后的气体运动的，点 $\mathscr{E}$ 则如 §5 中所阐明的属于积分 (11.9) 并且在大 γ 时上升到 $z > 0$ 的区域中(参看图 43)。

根据式(11.8)和(5.14)，点 M 的 V_2 和点 $\mathscr{E}$ 的 V^* 相等的条件

$$\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)} = \frac{4}{(\gamma+1)(\nu+2)}$$

在 $\nu = 3$ 时对 $\gamma = 7$ 成立，$\nu = 2$ 时对 $\gamma = \infty$ 成立，当 $\nu = 1$ 时只对 $\gamma = -1$ 成立。

所以，当 $\nu = 1, 2$ 和 $\gamma > 1$ 时，变量 V 的变化范围由以下不等式决定：

$$\frac{2}{(\nu+2)\gamma} \leqslant V \leqslant \frac{4}{(\nu+2)(\gamma+1)} \qquad (11.14a)$$

在不等式(11.14 a)中，值

$$V = \frac{4}{(\nu+2)(\gamma+1)}$$

对应冲击波，而 $V = 2/(\nu+2)\gamma$ 对应爆炸中心。

如果 $\nu = 3$ 和 $\gamma < 7$，则(11.14a)也成立；当 $\nu = 3$ 和 $\gamma > 7$ 时，V 的变化范围决定于不等式

$$\frac{4}{5(\gamma+1)} \leqslant V \leqslant \frac{2}{5}. \qquad (11.14b)$$

在不等式(11.14 b)中值 $V = 2/5$ 对应膨胀真空的边界，而 $V = 4/5(\gamma+1)$ 对应冲击波。所以在有限大的 γ 时，只在球面

1) 类似于强爆炸问题，当向对称中心运动的冲击波引起强的圆周爆炸时，在静止气体的对称中心讨论了气体的自模似运动(见 Гродзовский Г. Л., Автомодельное движение газа при сильном периферийном взрыве. ДАН СССР, т. 111, № 5, 1956, стр. 969—971; Кочина Н. Н., Мельникова Н. С., Неустановившиеся движения при периферийном взрыве. Труды МИАН СССР, т. 87, 1966, стр. 106—115).

情况出现真空。

在作过所说的演算之后，得到完整的解为下列公式：

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{r_2} &= \left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{4}V\right]^{-2/(2+\nu)} \\
&\quad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{(\nu+2)\gamma}{2}V-1\right)\right]^{-\alpha_2} \\
&\quad\times\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{(\nu+2)(\gamma+1)-2[2+\nu(\gamma-1)]}\right. \\
&\quad\left.\times\left(1-\frac{2+\nu(\gamma-1)}{2}V\right)\right]^{-\alpha_5}, \\
\frac{r_0}{r_2} &= \left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{4}V\right]^{-2/(2+\nu)} \\
&\quad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{(\nu+2)\gamma}{2}V-1\right)\right]^{-\alpha_6} \\
&\quad\times\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{(\nu+2)(\gamma+1)-2[2+\nu(\gamma-1)]}\right. \\
&\quad\left.\times\left(1-\frac{2+\nu(\gamma-1)}{2}V\right)\right]^{-\alpha_7} \\
&\quad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)\right]^{-\left(\alpha_6+\alpha_7-\frac{2}{2+\nu}\right)}, \\
\frac{v}{v_2} &= f = \frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{4}V\frac{r}{r_2}, \\
\frac{\rho}{\rho_2} &= g = \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{(\nu+2)\gamma}{2}V-1\right)\right]^{\alpha_3} \\
&\quad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)\right]^{\alpha_4} \\
&\quad\times\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{(2+\nu)(\gamma+1)-2[2+\nu(\gamma-1)]}\right. \\
&\quad\left.\times\left(1-\frac{2+\nu(\gamma-1)}{2}V\right)\right]^{\alpha_5} \\
\frac{p}{p_2} &= h = \left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{4}V\right]^{2\nu/(2+\nu)}
\end{aligned}
\qquad (11.15)
$$

$$\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)\right]^{\alpha_3+1}$$
$$\times\left[\frac{(\nu+2)(\gamma+1)}{(\nu+2)(\gamma+1)-2[2+\nu(\gamma-1)]}\right.$$
$$\left.\times\left(1-\frac{2+\nu(\gamma-1)}{2}V\right)\right]^{\alpha_4-2\alpha_3},$$
$$\frac{T}{T_2}=\frac{p}{p_2}\frac{\rho_2}{\rho},$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_1=\frac{(\nu+2)\gamma}{2+\nu(\gamma-1)}\left[\frac{2\nu(2-\gamma)}{\gamma(\nu+2)^2}-\alpha_2\right],\\
&\alpha_2=\frac{1-\gamma}{2(\gamma-1)+\nu},\\
&\alpha_3=\frac{\nu}{2(\gamma-1)+\nu},\quad \alpha_4=\frac{\alpha_1(\nu+2)}{2-\gamma},\\
&\alpha_5=\frac{2}{\gamma-2},\quad \alpha_6=\frac{\gamma}{2(\gamma-1)+\nu},\\
&\alpha_7=\frac{[2+\nu(\gamma-1)]\alpha_1}{\nu(2-\gamma)}.
\end{aligned}\right\}\quad(11.16)$$

由公式(11.15)对于 $\gamma<7$ 容易导出当

$$V\to\frac{2}{(2+\nu)\gamma}\text{ 和 }r\to 0$$

时爆炸中心附近的 v,ρ,p 和温度 T 的渐近公式。这些公式有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
&v=\frac{2}{(2+\nu)\gamma}\frac{r}{t},\\
&\rho=k_1\rho_1\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{-\nu/(\nu+2)(\gamma-1)}t^{-2\nu/(\nu+2)(\gamma-1)}r^{-\nu/(\gamma-1)},\\
&p=k_2\rho_1\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{2/(\nu+2)}t^{-2\nu/(\nu+2)},\\
&T=k_3\frac{1}{c_v}\left(\frac{E}{\rho_1}\right)^{[2(\gamma-1)+\nu]/(\gamma-1)(\nu+2)}t^{2\nu/(2-\gamma)/(\nu+2)(\gamma-1)}r^{-\nu/(\gamma-1)},
\end{aligned}\right\}\quad(11.17)$$

其中，对于球对称情况

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{(\gamma+1)^{3\gamma(\gamma+1)/(\gamma-1)(3\gamma-1)}}{2^{6/5(\gamma-1)}\gamma^{(7\gamma-1)/(\gamma-1)(3\gamma-1)}(\gamma-1)} \\ &\quad \cdot\left(\frac{2\gamma+1}{7-\gamma}\right)^{(13\gamma^2-7\gamma+12)/5(\gamma-1)(2-\gamma)(3\gamma-1)}, \\ k_2 &= \frac{0.32}{2^{6/5}}\frac{(\gamma+1)^{(\gamma+1)/(3\gamma-1)}}{\gamma^{4\gamma/(3\gamma-1)}} \\ &\quad \cdot\left(\frac{2\gamma+1}{7-\gamma}\right)^{(13\gamma^2-7\gamma+12)/5(2-\gamma)(3\gamma-1)}, \\ k_3 &= \frac{k_2}{k_1(\gamma-1)}; \end{aligned}\right\} \quad (11.18)$$

对于柱对称情况

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{(\gamma+1)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}{\gamma-1}\frac{\gamma^{(3\gamma-4)/(\gamma-1)(2-\gamma)}}{2^{2/(\gamma-1)(2-\gamma)}}, \\ k_2 &= \frac{\gamma^{2(\gamma-1)/(2-\gamma)}}{2^{(4-\gamma)/(2-\gamma)}}, \quad k_3 = \frac{k_2}{k_1(\gamma-1)}; \end{aligned}\right\} \quad (11.19)$$

对于平面波

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{(2\gamma-1)^{(5\gamma-4)/3(\gamma-1)(2-\gamma)}(\gamma+1)^{(4+\gamma-3\gamma^2)/3(\gamma-1)(2-\gamma)}}{2^{2/3(\gamma-1)}\gamma^{1/(\gamma-1)}(\gamma-1)}, \\ k_2 &= \frac{2^{7/3}}{9}\frac{(2\gamma-1)^{(5\gamma-4)/3(2-\gamma)}}{(\gamma+1)^{2(\gamma+1)/3(2-\gamma)}}, \quad k_3 = \frac{k_2}{k_1(\gamma-1)}. \end{aligned}\right\} \quad (11.20)$$

k_1, k_2 和 k_3 对 γ 的依赖关系示于图 71。

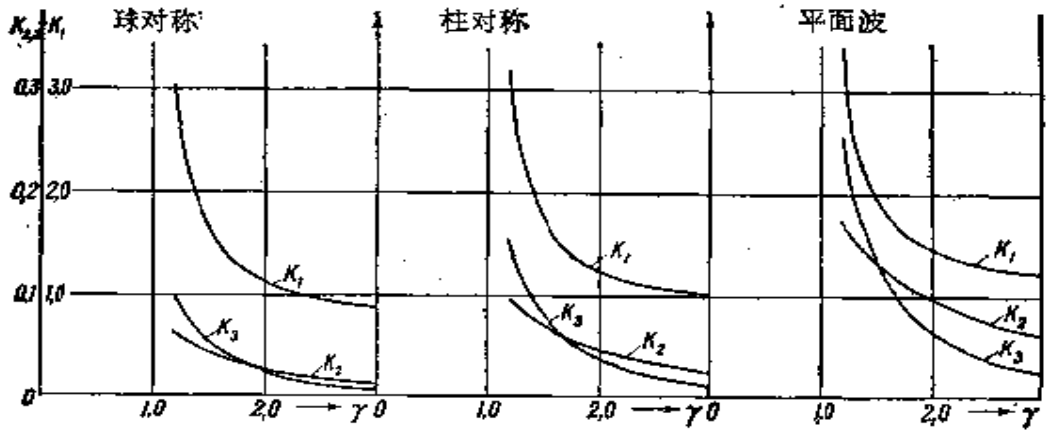


图 71　公式 (11.17) 中的 $k_1(\gamma)$, $k_2(\gamma)$, $k_3(\gamma)$, 该公式给出爆炸中心附近的密度、压力和温度的渐近值

在对称中心附近速度接近于零，压力异于零并沿坐标 r 渐近为常数，密度相当快地趋于零，而温度趋于无穷大。容易看出，能量也趋于无穷大。在爆炸中心附近出现很大的温度梯度，因此热传导的性质变得非常重要。如果考虑热传导，则爆炸中心的温度为有限值。

气体的质量由爆炸中心向外飞散（当 $r = 0$ 时有 $\rho = 0$），中心处的压力为有限值，但当时间增长时趋于零。

由此很清楚，当在原先具有有限压力的气体中进行强爆炸时，应出现气体朝向爆炸中心的反向运动。在水下爆炸时我们很好地观察到这种效应，在那里出现气泡的反复脉动。

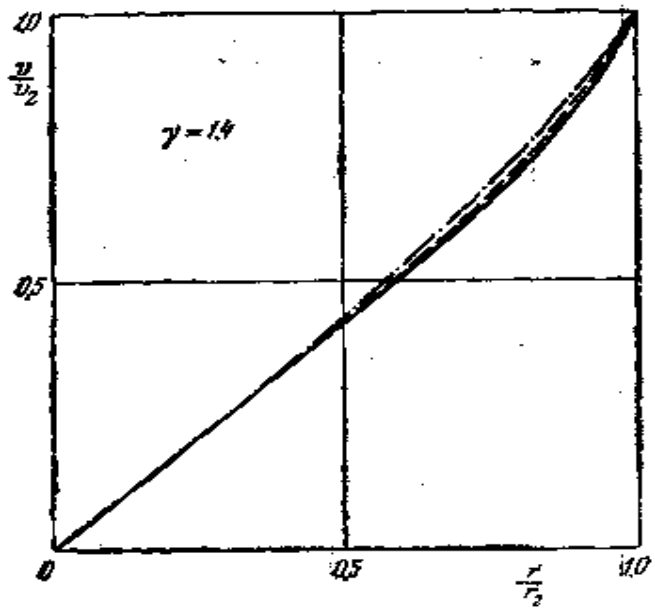


图 72　冲击波后的速度分布
（——— 球面情况；　— — —　柱面情况；　- - - - -　平面情况。）

由于气体从中心飞散和压力下降的结果产生阿基米德举力，它引起受扰动区域在周围大气中上升。按新墨西哥州原子弹爆炸照片上的结果，光球的垂直上升速度约为 35 米/秒。

在图 72—79 中给出了 $\nu = 1, 2, 3$ 情况下 $\gamma = 1.4$ 时的波阵面后的速度、密度、压力、温度的分布的曲线、运动规律的曲线和气体质点状态变化的曲线。

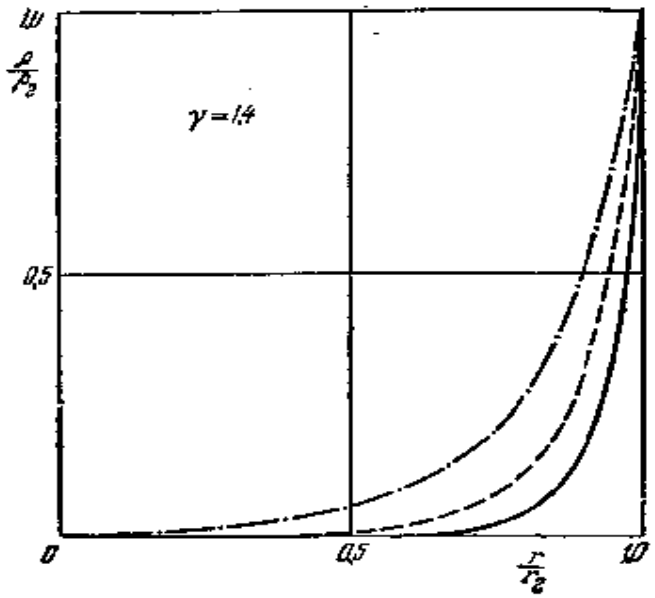


图 73　冲击波后的密度分布

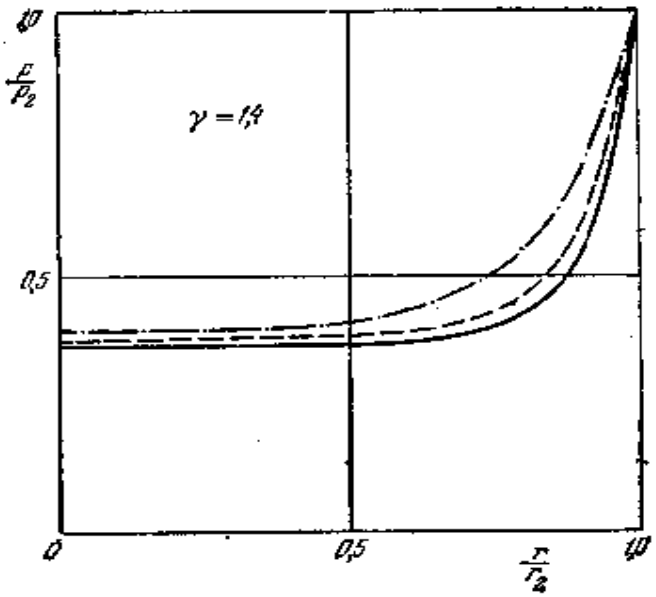


图 74　冲击波后的压力分布

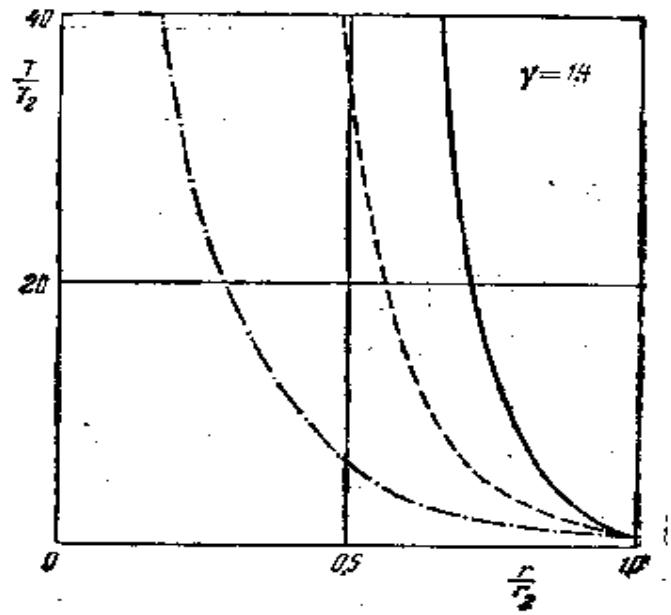


图 75　冲击波后的温度分布

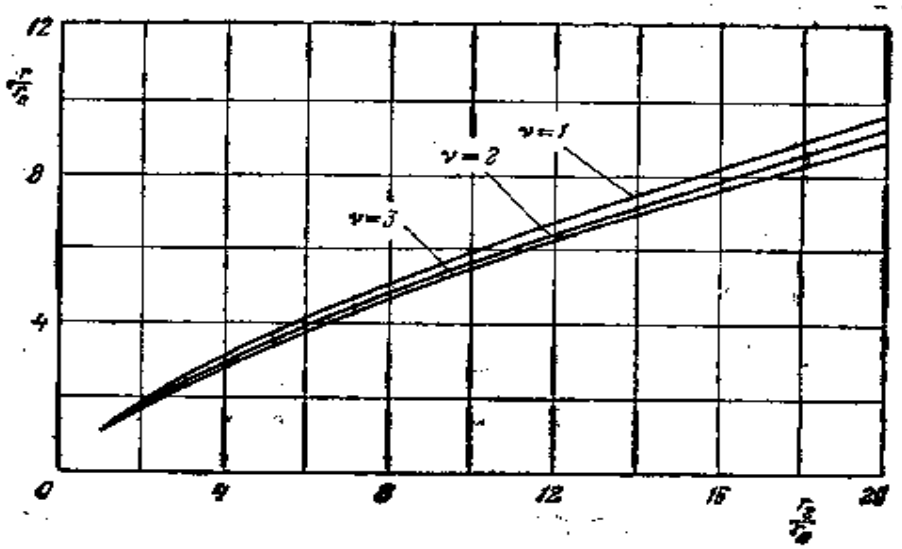


图 76　气体质点的运动规律 ($\gamma = 1.4$)

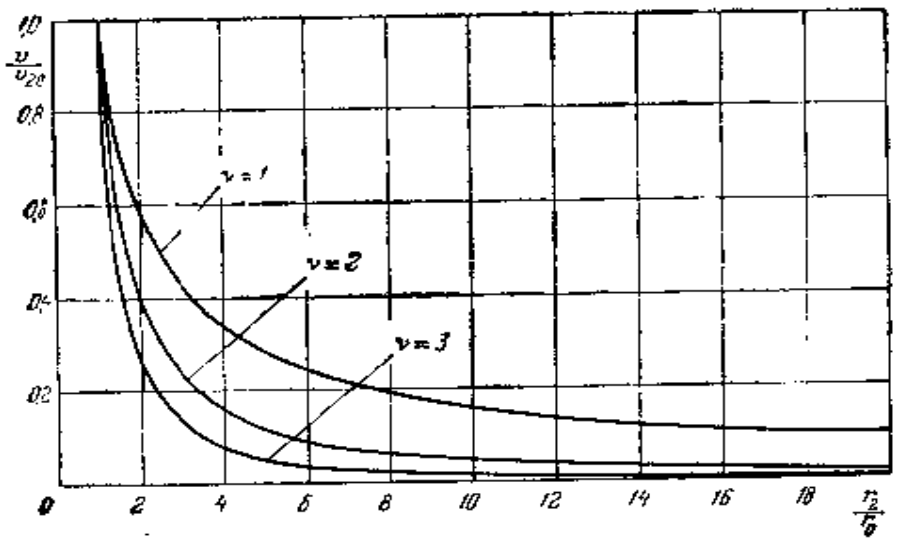


图 77　质点速度随冲击波位置的变化($\gamma = 1.4$)

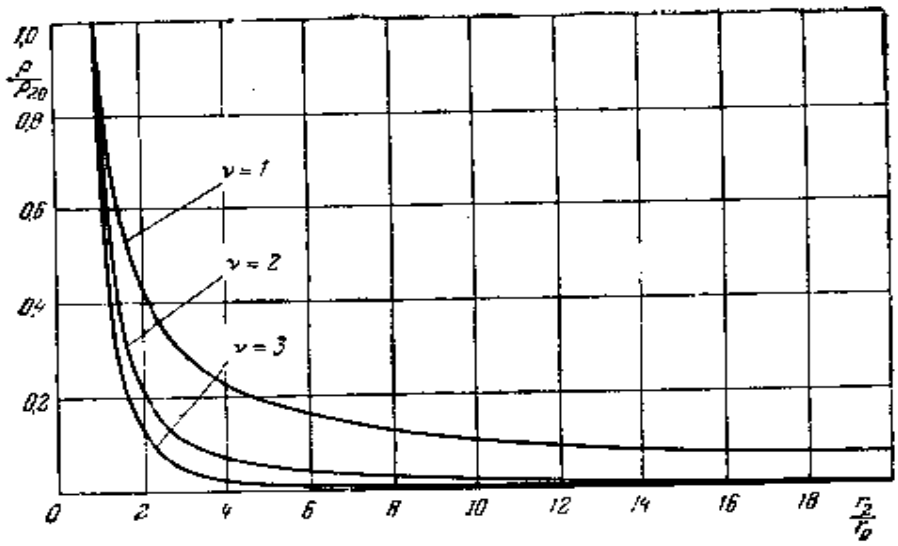


图 78　质点密度随冲击波位置的变化($\gamma = 1.4$)

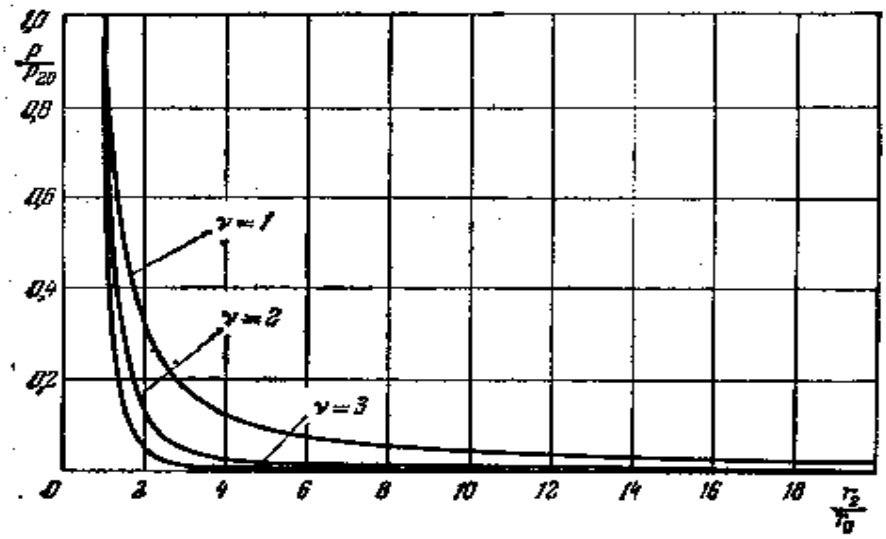


图 79　质点压力随冲击波位置的变化 ($\gamma = 1.4$)

在表中列出了对各种应用都有用的一些量的某些数值。

$\nu = 1$, $\gamma = 1.4$.

$\lambda = \frac{r}{r_2}$	$\frac{r_0}{r_2}$	$\frac{v}{v_2} = f$	$\frac{\rho}{\rho_2} = g$	$\frac{p}{p_2} = h$	$f'(\lambda)$	$g'(\lambda)$	$h'(\lambda)$
1	1	1	1	1	1.5	7.5	4.5
0.9797	0.8873	0.9699	0.8625	0.9162	1.4688	6.1575	3.8131
0.9420	0.7151	0.9156	0.6659	0.7915	1.4067	4.3615	3.8352
0.9013	0.5722	0.8599	0.5160	0.6923	1.3367	3.1109	2.0959
0.8565	0.4501	0.8017	0.3982	0.6120	1.2597	2.2183	1.5250
0.8050	0.3427	0.7390	0.3019	0.5457	1.1758	1.5638	1.0723
0.7419	0.2448	0.6678	0.2200	0.4904	1.0862	1.0738	0.7067
0.7029	0.1980	0.6263	0.1823	0.4661	1.0396	0.8726	0.5483
0.6553	0.1514	0.5780	0.1453	0.4437	0.9921	0.6919	0.4022
0.5925	0.1040	0.5172	0.1074	0.4229	0.9438	0.5232	0.2648
0.5396	0.0741	0.4682	0.0826	0.4116	0.9144	0.4213	0.1838
0.4912	0.0529	0.4244	0.0641	0.4038	0.8947	0.3473	0.1289
0.4589	0.0415	0.3957	0.0536	0.4001	0.8849	0.3020	0.1003
0.4161	0.0293	0.3580	0.0415	0.3964	0.8750	0.2551	0.0453
0.3480	0.0156	0.2988	0.0263	0.3929	0.8651	0.1905	0.0237
0.2810	0.0074	0.2410	0.0153	0.3911	0.8602	0.1370	0.0111
0.2320	0.0038	0.1989	0.0095	0.3905	0.8584	0.1025	0.0089
0.1680	0.0012	0.1441	0.0042	0.3901	0.8574	0.0630	0.0029
0.1040	0.0002	0.0891	0.0013	0.3900	0.8572	0.0307	0.0005
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3900	0.8571	0.0000	0.0000

$\nu = 2, \quad \varkappa = 1.4$

$\lambda = \frac{r}{r_2}$	$\frac{r_0}{r_2}$	$\frac{v}{v_2} = f$	$\frac{\rho}{\rho_2} = g$	$\frac{p}{p_2} = h$	$f'(\lambda)$	$g'(\lambda)$	$h'(\lambda)$
1	1	1	1	1	1.8333	14.1667	7.8333
0.9998	0.9954	0.9996	0.9973	0.9985	1.8325	14.1149	7.8102
0.9802	0.8911	0.9645	0.7653	0.8659	1.7516	9.8877	5.8478
0.9644	0.8164	0.9374	0.6285	0.7832	1.6848	7.5936	4.6993
0.9476	0.7460	0.9097	0.5164	0.7124	1.6132	5.8431	3.7665
0.9295	0.6789	0.8812	0.4234	0.6514	1.5371	4.4922	3.0009
0.9096	0.6140	0.8514	0.3451	0.5983	1.4569	3.4390	2.3668
0.8725	0.5115	0.7998	0.2427	0.5266	1.3206	2.1977	1.5608
0.8442	0.4461	0.7638	0.1892	0.4884	1.2313	1.6219	1.1574
0.8094	0.3695	0.7226	0.1414	0.4545	1.1394	1.1561	0.8136
0.7629	0.3009	0.6720	0.0975	0.4242	1.0455	0.7709	0.5170
0.7242	0.2480	0.6327	0.0718	0.4074	0.9885	0.5660	0.3567
0.6894	0.2071	0.5989	0.0545	0.3969	0.9503	0.4344	0.2551
0.6390	0.1577	0.5521	0.0362	0.3867	0.9120	0.2998	0.1556
0.5745	0.1081	0.4943	0.0208	0.3794	0.8833	0.1863	0.0798
0.5180	0.0748	0.4448	0.0123	0.3760	0.8698	0.1202	0.0423
0.4748	0.0552	0.4073	0.0079	0.3746	0.8640	0.0839	0.0249
0.4222	0.0370	0.3621	0.0044	0.3737	0.8602	0.0522	0.0123
0.3654	0.0220	0.3133	0.0021	0.3733	0.8583	0.0292	0.0052
0.3000	0.0111	0.2571	0.0008	0.3730	0.8574	0.0132	0.0016
0.2500	0.0058	0.2143	0.0003	0.3729	0.8572	0.0064	0.0005
0.2000	0.0027	0.1714	0.0001	0.3729	0.8572	0.0026	0.0001
0.1500	0.0010	0.1286	0.0000	0.3729	0.8571	0.0008	0.0000
0.1000	0.0002	0.0857	0.0000	0.3729	0.8571	0.0002	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3729	0.8571	0.0000	0.0000

$\nu = 3, \quad \varkappa = 1.4$

$\lambda = \frac{r}{r_2}$	$\frac{r_0}{r_2}$	$\frac{v}{v_2} = f$	$\frac{\rho}{\rho_2} = g$	$\frac{p}{p_2} = h$	$f'(\lambda)$	$g'(\lambda)$	$h'(\lambda)$
1	1	1	1	1	2.1666	20.8333	11.1666
0.9913	0.9498	0.9814	0.8379	0.9109	2.0981	16.4159	9.2305
0.9773	0.8785	0.9529	0.6457	0.7993	1.9864	11.5610	6.9475
0.9622	0.8103	0.9237	0.4978	0.7078	1.8659	8.1607	5.2109
0.9342	0.7038	0.8744	0.3241	0.5923	1.6548	4.6349	3.2119
0.9080	0.6220	0.8335	0.2279	0.5241	1.4837	2.9536	2.1425
0.8747	0.5320	0.7872	0.1509	0.4674	1.3036	1.7841	1.3269
0.8359	0.4463	0.7397	0.0967	0.4272	1.1495	1.0716	0.7900
0.7950	0.3704	0.6952	0.0621	0.4021	1.0395	0.6690	0.4720
0.7493	0.2983	0.6496	0.0379	0.3856	0.9610	0.4090	0.2669
0.6788	0.2097	0.5844	0.0174	0.3732	0.8991	0.1981	0.1095
0.5794	0.1201	0.4971	0.0052	0.3672	0.8662	0.0679	0.0278
0.4560	0.0519	0.3909	0.0009	0.3656	0.8581	0.0142	0.0036
0.3600	0.0227	0.3086	0.0002	0.3655	0.8572	0.0030	0.0005
0.2960	0.0114	0.2538	0.0000	0.3655	0.8572	0.0008	0.0001
0.2000	0.0051	0.1714	0.0000	0.3655	0.8571	0.0001	0.0000
0.1040	0.0000	0.0892	0.0000	0.3655	0.8571	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.3655	0.8571	0.0000	0.0000

泊松指数 γ 对于球对称情况下冲击波阵面后的运动特征量的分布的影响，给于图 80，81 和 82。

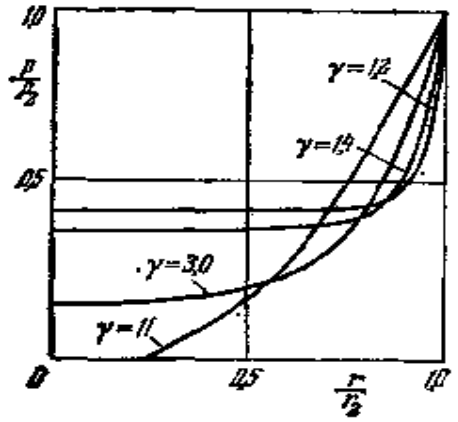


图 80　指数 γ 对球对称冲击波阵面后压力分布的影响

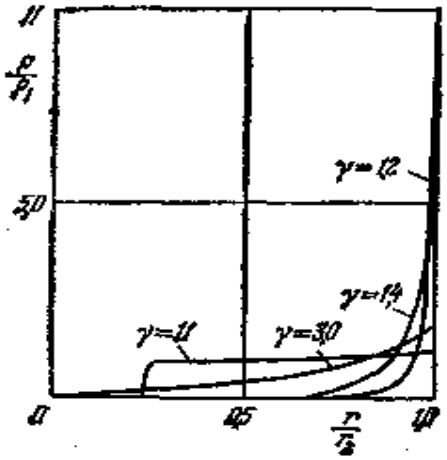


图 81　指数 γ 对球对称冲击波波后密度分布的影响

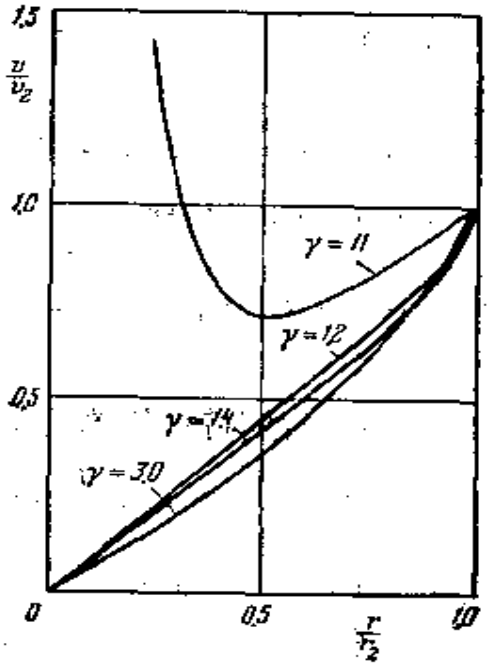


图 82　指数 γ 对球对称冲击波波后速度分布的影响。

在公式(11.16)中当 $\gamma = 2$ 时系数 $\alpha_3 \to \infty$，所以为了在 $\gamma = 2$ 时计算公式 (11.15) 中的气体的运动特征量，必须取 $\gamma \to 2$ 时的极限。

取极限时我们得到

$$\frac{r}{r_2}=\left[\frac{3}{4}(\nu+2)V\right]^{\frac{2}{(\nu+2)}}\left[3\left(1-\frac{(\nu+2)}{2}V\right)\right]^{-\frac{2}{\nu+2}}$$

$$\cdot\,[3((\nu+2)V-1)]^{\frac{1}{\nu+2}},$$

$$\frac{\rho}{\rho_2}=\{3[(\nu+2)V-1]\}^{\frac{\nu}{\nu+2}}\left[3\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)\right]^{\frac{\nu-2}{\nu+2}}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{4\nu}{\nu+2}\frac{\left[1-\frac{3}{4}(\nu+2)V\right]}{\left(1-\frac{\nu+2}{2}V\right)}\right\},$$

$$\frac{p}{p_2}=\left[\frac{3}{4}(\nu+2)V\right]^{\frac{2\nu}{\nu+2}}\left[3\left(1-\frac{(\nu+2)}{2}V\right)\right]^{\frac{2(\nu-2)}{\nu+2}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{4\nu}{\nu+2}\frac{1-\frac{3}{4}(\nu+2)V}{1-\frac{\nu+2}{2}V}\right].$$

在对称中心（$V=1/(\nu+2)$）当 $\gamma=2$ 时

$$h(0)=3^{4(\nu-1)/(\nu+2)}4^{(2-3\nu)/(\nu+2)}\exp\left[-\frac{2\nu}{\nu+2}\right].$$

正如从这个公式所看到的，在任何 ν 和 $\gamma=2$ 时中心的压力是有限的且不等于零。

我们要指出，当 $\gamma=7$ 时解特别简单且有如下形式：

$$\frac{v}{v_2}=\frac{r}{r_2}=\lambda,\quad \frac{\rho}{\rho_2}=\lambda \text{ 和 } \frac{p}{p_2}=\lambda^3. \tag{11.21}$$

在此情况下得到，在对称中心 $v=\rho=p=0$.

若 $\gamma>7$，则在中心得到半径为 r^* 的真空球，在球内压力等于零。半径 r^* 随时间而增长，使得只依赖于 γ 的比值 r^*/r_2 保持为常数。

当研究在类似水的可压缩介质中的强爆炸时，可以采用大的指数 γ 值。

上面所给的点爆炸问题，对无量纲参数 γ 的任何常数值都能求解。若 $\gamma = \gamma^* = c_p/c_v$，则对每一个质点来说过程都是绝热的。如果常数 γ 是任意的且不等于 $\gamma^* = c_p/c_v$，则过程是多方的，在此情况下，强间断面类似于爆轰波阵面或带有吸热的相转变的阵面。

事实上，条件 (2.6) 又可写为形式：

$$\frac{\gamma^* p_1}{(\gamma^*-1)\rho_1} + \frac{1}{2}(v_1 - c)^2 + Q = \frac{\gamma^* p_2}{(\gamma^*-1)\rho_2} + \frac{1}{2}(v_2 - c)^2, \tag{11.22}$$

其中

$$Q = \frac{\gamma - \gamma^*}{(\gamma-1)(\gamma^*-1)}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right);$$

因为 $p_2/\rho_2 = RT_2 > RT_1 = p_1/\rho_1$，则显然，条件 (11.22) 类似于 $\gamma > \gamma^* = c_p/c_v > 1$ 时的爆轰波阵面上的条件，此时 $Q > 0$. 如果 $\gamma > 1$ 和 $\gamma < \gamma^*$，则在波阵面上将发生吸热 ($Q < 0$).

另一方面，对于可逆过程在间断面后的流动内，对每一个质点有等式

$$dQ = TdS = Tc_v d\ln\frac{p}{\rho^{\gamma^*}} = Tc_v d\ln\frac{p}{\rho^{\gamma}}\rho^{\gamma-\gamma^*},$$

由此，因为对质点 $p/\rho^\gamma = \text{const}$ 和 $p = R\rho T$，就得到

$$dQ = Tc_v(\gamma - \gamma^*)\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\gamma - \gamma^*}{\gamma - 1}c_v dT. \tag{11.23}$$

在所研究的解中对固定的质点我们有 $d\rho < 0$ 和 $dT < 0$，所以在质点上当 $\gamma < \gamma^*$ 时我们有 $dQ > 0$ 放热过程，当 $\gamma > \gamma^*$ 时有 $dQ < 0$ 吸热过程。

在上面得出的有量纲的运动特征量的公式中包含常数 E，它应通过装药能量 E_0 表出（在所述的问题提法中 E_0 等于受扰动气体的总能）。无量纲的运动特征量由不依赖于爆炸能量 E_0 或与其成正比的量 E 的普适曲线给出。

对总能量有公式：

$$E_0 = \int_0^{r_2} \frac{\rho v^2}{2} 4\pi r^2 dr + \int_0^{r_2} \frac{p}{\gamma - 1} 4\pi r^2 dr \quad \text{（球面情况），}$$

$$E_0 = \int_0^{r_2} \frac{\rho v^2}{2} 2\pi r dr + \int_0^{r_2} \frac{p}{\gamma - 1} 2\pi r dr \quad \text{（柱面情况），}$$

$$\frac{1}{2} E_0 = \int_0^{r_2} \frac{\rho v^2}{2} dr + \int_0^{r_2} \frac{p}{\gamma - 1} dr \quad \text{（平面情况）。}$$

第一项是气体的动能，而第二项是气体的热能。引进无量纲量时我们求得：

$$E_0 = \alpha(\gamma) E, \tag{11.24}$$

其中

$$\alpha = 2\pi \int_0^1 \mathscr{R} V^2 \lambda^4 d\lambda + \frac{4\pi}{\gamma - 1} \int_0^1 P\lambda^4 d\lambda \quad \text{对球面情况，}$$

$$\alpha = \pi \int_0^1 \mathscr{R} V^2 \lambda^3 d\lambda + \frac{2\pi}{\gamma - 1} \int_0^1 P\lambda^3 d\lambda \quad \text{对柱面情况，}$$

$$\alpha = 1 \int_0^1 \mathscr{R} V^2 \lambda^2 d\lambda + \frac{2}{\gamma - 1} \int_0^1 P\lambda^2 d\lambda \quad \text{对平面波。}$$

在图 83 中给出对球对称、柱对称和平面对称算出的依赖关系 $\alpha(\gamma)$.

其中，在球对称情况下当 $\gamma = 1.4$ 时有

$$E_0 = (0.186 + 0.665)E = 0.851E \text{ 或 } E = 1.175E_0.$$

如果利用按在新墨西哥州进行的原子弹爆炸的试验结果得出的公式(11.7)的 E 值并取 $\gamma = 1.4$，则我们得到爆炸能量[1]为 $E_0 = 7.19 \times 10^{20}$ 尔格，这相当于爆炸时释放 16800 吨 TNT 的能量。

可以讨论混有非常小的固体或液体粒子的气体(尘埃空气)的运动[2]。气体中悬浮粒子的密度常常相当大；在实际情况中，在大工业城市的 1 cm³ 空气中平均包含 20000 粒尘埃，在 1 cm³ 的云或雾中有 100—600 滴水珠，有时达到 1400 滴。所以可以认为，气体中粒子的存在使介质的惯性增加，介质保持为均匀的，具有密度

1) 当估计原子弹爆炸释放的总能量时，必须记住，相当大一部份能量消耗于辐射.

2) Сидоркина С. И., О некоторых движениях аэрозоля. ДАН СССР, т. 112, № 3, 1957, стр. 398—399.

$$\rho' = \rho(1 + k),$$

其中 ρ 是气体的密度，k 是正的常数。

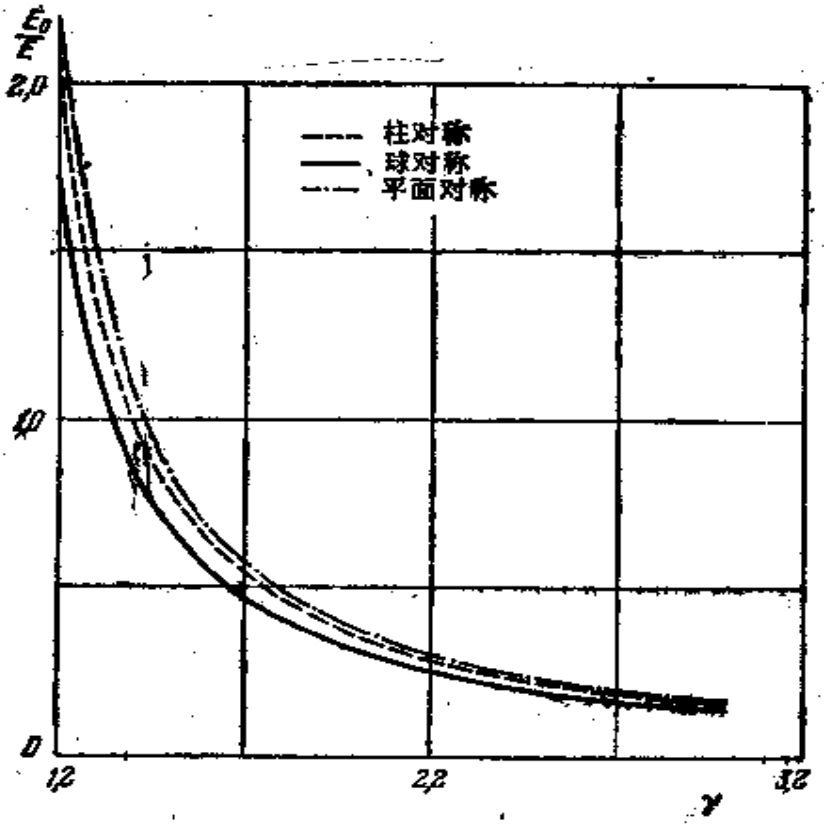


图 83　比值 $E_0/E = \alpha$ 随 γ 的变化

我们来看绝热运动的流体力学方程组。在运动方程中将包含密度 $\rho' = \rho(1 + k)$，在连续性方程中则是 ρ，但是，因为该方程相对密度是齐次的，乘以常数 $(1 + k)$ 后，我们就把它化为密度为 ρ' 的连续介质的连续性方程。绝热性条件须要特别注意，在所讨论的介质中它有形式

$$\rho c_v dT + ck\rho dT + \rho' p d(1/\rho') = 0,$$

其中 c 是粒子的热容量，假设它是常数，c_v 以及 c_p 是气体的比热。积分之后得到

$$p = A\rho'^{(c_p+kc)/(c_v+kc)}$$

其中 A 是与介质粒子有关的常数。将 $(c_p + kc)/(c_v + kc)$ 记作 γ'，这样，绝热性方程以及整个流体力学方程组就具有通常的形

式，在其中引进了 ρ' 和 γ'，ρ' 是所讨论介质的密度，γ' 是介质的比热比：

$$\gamma' = \frac{c'_p}{c'_v}, \text{ 其中 } c'_p = \frac{\rho c_p + k\rho c}{\rho(1+k)}, \quad c'_v = \frac{\rho c_v + k\rho c}{\rho(1+k)}.$$

现在讨论冲击波上的条件。同前面一样，通过冲击波时的质量和动量守恒条件的形式不变，第三个条件——能量流守恒条件——也保持原来的形式.这是因为，在条件中引进了介质密度 ρ' 和这样的比内能，它在所述情况中的写法与理想气体情况的写法一样，只是比热比为 γ'. 事实上

$$d\varepsilon\rho(1+k) = c_v\rho dT + ck\rho dT,$$

其中

$$\varepsilon = \frac{c_v + kc}{1+k}T = c'_v T = \frac{1}{\gamma' - 1}\frac{p}{\rho'},$$

$$1 < \gamma' < \gamma$$

并且当 kc/c_v 增加时，亦即包含的粒子数目和其热容量增加时，γ' 接近于1。由公式(11.22)和(11.23)得知，在波阵面上混杂粒子的存在导至吸收热量($dQ < 0$)，而在气体流中被加热的粒子交出热量($dQ > 0$).

可以作出这样的结论：在气体动力学的所有问题中，一种在其中含有大量粒子的介质，可作为一种具有比热比 γ' 的气体来处理，其 γ' 值比纯气体的要小。

现在来讨论在尘埃介质中的强爆炸问题和确定爆炸波的强度。公式 (11.11) 给出冲击波上的压力

$$p'_2 = \frac{8E}{(\nu+2)^2(\gamma'+1)}\frac{1}{r_2^\nu},$$

其中 $E = E_0/\alpha(\gamma')$.

对释放同样能量 E_0 的两次爆炸，在距爆心同样的距离 r_2 处，比值 p'_2/p_2 仅依赖于 γ：

$$\frac{p'_2}{p_2} = \frac{\alpha(\gamma)(\gamma+1)}{\alpha(\gamma')(\gamma'+1)} = \frac{f(\gamma)}{f(\gamma')}.$$

在图 84 中给出了依赖关系 $f(\gamma) = \alpha(\gamma)(\gamma+1)$，其中 $\alpha(\gamma)$是图 83 中所示的函数。函数 $f(\gamma)$随 γ 的减小而增长，这就导致在尘埃

空气中的冲击波上的压力比纯气体中冲击波上的压力要低。γ 由 1.4 减小到 1.2，致使冲击波上的压力降低一倍。但是，为此大气尘埃的密度必须相当高（1米³大气中 888 克尘埃）。为了将 p_2 下降 10%，只要尘埃密度为 0.12 千克/米³就够了。工业城市中空气的污染程度相当于使 p_2 下降 2%。

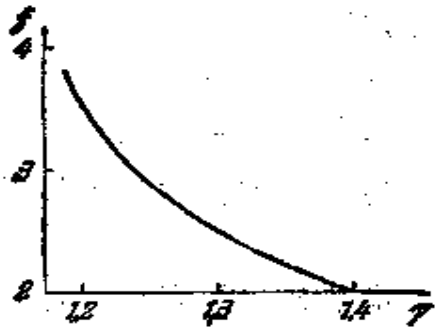


图 84　表明尘埃大气对压力的影响的函数 $f(\gamma)$ 的曲线

2. 关于热传导的考虑　上面我们指出过，粘性和热传导可能对爆炸中心附近的气体运动有某些影响。如果不忽略粘性和热传导，则在气体的运动方程中将包含粘性系数 μ 和热传导系数 κ。

必须指出，热传导系数是作为与温度 T 相乘的因子进入方程的。

在利用状态方程（为简单起见假设是克拉珀龙方程 $T=p/R\rho$）将 T 消去之后，则作为系数进入方程的，实际上不是 κ 本身而是比值 κ/R（R 是气体常数）。众所周知，系数 μ 和 κ 依赖于温度，通常认为它们与温度 T 的某次方成正比（常常是正比于 $\sqrt{T}$）或为常数。假设

$$\mu = \mu_1 T^\alpha \text{ 和 } \kappa = \kappa_1 T^\alpha,$$

其中 μ_1 和 κ_1 是常数。

在方程中消去 T 之后出现新的有量纲常数

$$\frac{\mu_1}{R^\alpha} \text{ 和 } \frac{\kappa_1}{R^{\alpha+1}}.$$

它们的量纲等于

$$\left[\frac{\mu_1}{R^\alpha}\right] = \left[\frac{\kappa_1}{R^{\alpha+1}}\right] = \mathrm{ML}^{-1-2\alpha}\mathrm{T}^{-1+2\alpha}.$$

为了使运动是自模拟的，只要它们的量纲是由 ρ_1 和 E 的量纲表出就够了。容易看出，为此在球面情况[1]应令 $\alpha = 1/6$，柱面情况令 $\alpha = 0$ 和平面情况令 $\alpha = -1/2$.

于是，如果取

$$\mu = \mu_1 T^{1/6}, \quad \kappa = \kappa_1 T^{1/6} \quad \text{对球面波，} \qquad (11.25)$$

$$\mu = \text{const}, \quad \kappa = \text{const} \quad \text{对柱面波，} \qquad (11.26)$$

$$\mu = \mu_1/\sqrt{T}, \ \kappa = \kappa_1/\sqrt{T} \quad \text{对平面波，} \qquad (11.27)$$

则强爆炸问题可以通过对考虑粘性和热传导的常微分方程求积分而求解。

现在已发表了考虑热传导的强点爆炸问题的近似解[2]。

不难看出，对于完全气体和许多其他介质，强爆炸问题的自模拟性在这样的情况下也将保持，在受扰动区域中由于强烈的热交换（由于很强的热传导或由于辐射和其它过程），温度可以认为是均匀的但一般说是随时间变化的。换言之，这时绝热性方程可以换为方程

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

在许多论文中发表了相应的点爆炸和活塞问题的解[3]。

---

1) 在下列论文中得到了这个结果：Бам-Зелякович Г. М., Распространение сильных взрывных волн. 收于文集 «Теоретическая гидромеханика» № 4 под ред. Л.И. Седова. М. Оборонгаз, 1949. 当 $\alpha = 1/6$ 时有 $[\mu_1/R^\alpha] = [(E\rho_1^4)^{1/7}]$.

2) Коробейников В. П., О распространении сильной сферической взрывной волны в теплопроводном газе. ДАН СССР, т. 113, № 5, 1957, стр 1006—1009.

3) Коробейников В. П. Задача о сильном точечном взрыве в газе при нулевом градиенте температуры. ДАН СССР, т. 109, № 2, 1956, стр. 271—273; Рыжов О. С., Таганов Г. И., Второй предельный случай задачи о сильном взрыве. ПММ, т. 20, вып. 4, 1956, стр. 545—548; Мельникова Н. С., О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, при нулевом градиенте температуры. Яссы, Бюлл. Политехн. ин-та, т.10, № 3—4, 1964.

3. 理想介质中点爆炸的自模拟性 关于当把状态方程取为较一般的形式和把气体内能表为 p 和 ρ 的函数依赖关系时，在理想流体理论的范围内求解强爆炸问题的可能性，还需作一个说明[1]. 内能函数 $\varepsilon(p,\rho)$ 直接出现在冲击波条件和热流方程中。在一般情况下它总可以写为如下形式：

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho_1}\varphi\left(\frac{p}{p^*}, \frac{\rho}{\rho_1}\right) + \text{const},$$

其中 φ 是其参变量的无量纲函数，而 p^* 是具有压力量纲的某一常数。

因为 p^* 的量纲不能由 ρ_1 和 E 的量纲表出，所以对于运动的自模拟性，只要 ε 不包含 p^* 就够了，也就是有

$$\varepsilon = \frac{p}{\rho_1}\varphi\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right), \tag{11.28}$$

其中 φ 是其参变量的任意函数。

在绝热性方程中不可能出现新的有量纲物理常数，所以该方程具有形式

$$d\varepsilon + pd\frac{1}{\rho} = 0.$$

条件(11.28)对状态方程加上了某种限制。实际上，因为

$$\frac{d\varepsilon + pd\frac{1}{\rho}}{T} = dS$$

是全微分，所以 T 和 ε 应满足偏微分方程

$$T + \frac{\partial T}{\partial p}\left(\rho^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - p\right) - \rho^2\frac{\partial T}{\partial \rho}\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} = 0.$$

将 $\varepsilon = p\varphi(\rho)$ 代入(为简单起见令 $\rho_1 = 1$)，我们得到

$$T + \frac{\partial T}{\partial p}p[\varphi'(\rho)\rho^2 - 1] - \rho^2\varphi(\rho)\frac{\partial T}{\partial \rho} = 0.$$

可以写出等价的常微分方程组

$$\frac{dT}{T} = -\frac{dp}{p[\varphi'(\rho)\rho^2 - 1]} = \frac{d\rho}{\varphi(\rho)\rho^2}$$

1) 参阅上面引过的 Г. М. Бам-Зеликович 的论文.

它有两个首次积分

$$Te^{-\int\frac{d\rho}{\rho^2\varphi(\rho)}}=C_1 \text{ 和 } p\varphi(\rho)e^{-\int\frac{d\rho}{\rho^2\varphi(\rho)}}=C_2,$$

从而

$$p\varphi(\rho)e^{-\int\frac{d\rho}{\rho^2\varphi(\rho)}}=\Phi(Te^{-\int\frac{d\rho}{\rho^2\varphi(\rho)}}), \qquad (11.29)$$

其中 φ 和 Φ 是其参变量的任意函数. 显然，所有那样的状态方程都满足关系式 (11.29)，在这些方程中温度正比于压力而对密度的依赖是任意的. 然而，尽管存在两个任意函数，但是许多感兴趣的状态方程(例如范德瓦尔方程)都不能用式 (11.29) 写出.

如果函数 Φ 化为常数，则压力从而内能只依赖于密度，一个等于 Φ 的相应的有量纲常数出现在内能函数的表达式中. 在这种情况下方程组变为单参数的，所以前面的问题提法就成为是不可能的.

在一般情况下，(11.29) 中的函数 Φ 可能依赖一系列这样的有量纲常数，这些常数不会破坏 §1 中用 v, p, ρ 表述的问题的自模拟性. 但是这些常数的存在可能在介质的受扰流动中导致温度 T 对于 r 和 t 的非自模拟的依赖关系.

还要指出，由公式 (11.28) 得出:

$$p\varphi(\rho)e^{-\int\frac{d\rho}{\rho^2\varphi(\rho)}}=\psi(S), \qquad Te^{-\int\frac{d\rho}{\rho^2\varphi(\rho)}}=\psi'(S),$$

其中 $\psi(S)$ 是熵的函数，它与 (11.29) 中函数 Φ 的形式有关且满足方程

$$\psi(S)=\Phi(\psi'(S)).$$

4. 不可压缩理想流体中的点爆炸 可以在不可压缩介质的假设下讨论点爆炸问题[1]. 绝热性方程可以换为方程

$$\rho=\rho_1=\text{const}, \qquad (11.30)$$

1) 可压缩理想介质中的点爆炸问题在下列文章中讨论过: Кочина Н. Н., Мельникова Н. С., О сильном точечном взрыве в сжимаемой среде. ПММ, т. 22, вып. 1, 1958 стр. 3—5; Карликов В. П., Коробейников В. П., Рязанов Е. В., Приближенный метод решения задачи о взрыве в некоторых идеальных сжимаемых средах. ПМТФ, № 2, 1963, стр. 132—134.

在这种情况下扰动以无穷大速度传播，所以不带冲击波的解是不可能的。当对气体的绝热运动在 $\gamma \to +\infty$ 下取极限时，就可求得点爆炸时的不可压缩流体的运动情况。如同在一般情况下那样，若 $p_1 = 0$，则流体运动是自模拟的，并且容易验证，对于速度场如下公式成立：

$$v = \frac{2}{5}\left(\frac{E_0}{2\pi\rho_1}\right)^{3/5}\frac{t^{1/5}}{r^2}, \tag{11.31}$$

这是因为运动应该对应仅依赖于 E_0，ρ，t 的变强度源。常数因子由给定流体的动能决定，后者等于 $4E_0/25$. 由拉格朗日积分得出

$$\frac{1}{\rho_1}p = \frac{2}{25}\left(\frac{E_0}{2\pi\rho_1}\right)^{2/5}t^{-6/5}\frac{r^*}{r}\left[1-\left(\frac{r^*}{r}\right)^3\right]. \tag{11.32}$$

在中心形成一个半径为 r^* 的不断增长的真空球，对它有公式

$$r^* = \left(\frac{E_0}{2\pi\rho_1}\right)^{1/5}t^{2/5}. \tag{11.33}$$

在半径 r^* 的球内，压力等于零。

图 85 中的曲线1给出流体中的压力分布，当以变量

$$\frac{pt^{6/5}}{\rho_1\left(\frac{E_0}{2\pi\rho_1}\right)^{2/5}}, \quad \frac{r}{r^*}$$

来表示时它是普适曲线。

最大压力反比于 $t^{6/5}$ 而下降，并且与时间无关压力的最大值是在 $r^*/r_{p\max} = 4^{-1/3}$ 处出现。由此

$$r_{p\max} = \sqrt[3]{4}\,r^* = 4^{1/3}\left(\frac{E_0}{2\pi\rho_1}\right)^{1/5}t^{2/5}. \tag{11.34}$$

在求得的运动中重要的只是比值 E_0/ρ_1.

如果 $p_1 \neq 0$，则点爆炸时的不可压缩流体的运动，与气体的情况一样，是非自模拟的。但是在此情况下容易以简单的解析形式得到整个解。

对速度势和速度可以写出公式

$$\varphi = -\frac{r^{*2}\dfrac{dr^*}{dt}}{r}, \quad v = \frac{r^{*2}}{r^2}\frac{dr^*}{dt}, \tag{11.35}$$

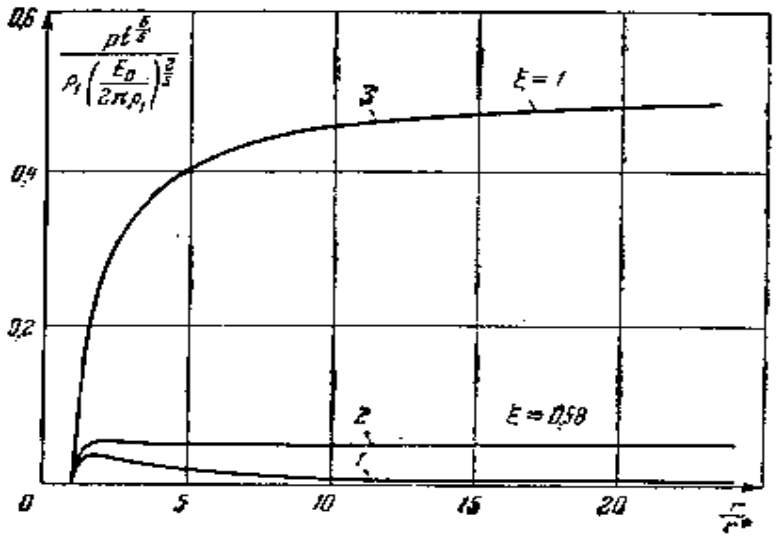


图 85　点爆炸时不可压缩流体中的压力分布

(1——自模拟解，　2——考虑反压时小 $\xi = r^*/r_{max}$ 时的解，
3——内空腔具有最大半径时的压力.)

它们对球形内腔的任何膨胀规律 $r^*(t)$ 都成立。

如果内部压力 $p^* = 0$ 而外部无穷远处压力 $p_1 = \text{const}$，则由拉格朗日积分得到：

$$-\frac{p_1}{\rho} = r^* \frac{d^2 r^*}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dr^*}{dt}\right)^2. \tag{11.36}$$

由此

$$\left(\frac{dr^*}{dt}\right)^2 = -\frac{2}{3}\frac{p_1}{\rho_1} + C r^{*-3} \tag{11.37}$$

根据公式 (11.33) 由自模拟问题的解求得：

$$C = \frac{4}{25}\left(\frac{E_0}{2\pi\rho_1}\right).$$

若引进记号

$$\left.\begin{aligned} \tau &= t\frac{(25\pi)^{1/3}\sqrt{2}\,p_1^{5/6}}{3^{5/6}\rho_1^{1/2}E_0^{1/3}}, \\ \xi &= \frac{r^*}{r^*_{max}}, \quad r^*_{max} = \sqrt[3]{\frac{3}{25\pi}\frac{E_0}{p_1}}, \end{aligned}\right\} \tag{11.38}$$

则内空腔的膨胀规律为普适公式

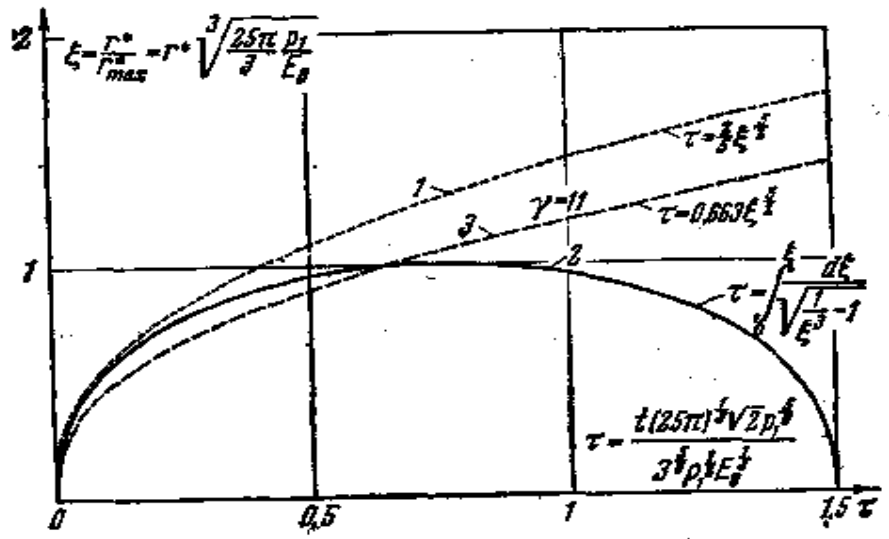


图 86　内空腔的膨胀规律

（1——自模拟解，　2——考虑反压时的不可压缩流体的运动，
3——$\gamma = 11$ 时的可压缩介质.）

$$\tau = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1}{\xi^3} - 1}}. \tag{11.39}$$

显然，r_{max} 等于内空腔的最大半径。

由式（11.39）给出的膨胀规律示于图 86. 在所取的自变量中自模拟运动的膨胀规律为公式

$$\tau = \frac{2}{5}\xi^{5/2}, \tag{11.40}$$

它对应的曲线在图 86 上由虚线表示. 在图 86 上还给出了 $\gamma = 11$ 时气体的自模拟解。

§12. 考虑反压的点爆炸

现在研究在 §1 中叙述过的，在具有初始常密度 ρ_1 和不为零的初始常压 p_1 的完全气体中的点爆炸问题。当对冲击波条件中的压力 p_1 加以考虑时，自模拟性不复存在。

如在 §1 中已指出的，非自模拟问题的解只依赖于两个独立

的无量纲自变量和一个无量纲常数 γ.

同先前一样，以 r_2 表示变化的冲击波半径和以 $c = dr_2/dt$ 表示冲击波速度。

当用欧拉观点描述运动时，我们取如下无量纲自变量

$$\lambda = \frac{r}{r_2} \text{ 和 } q = \frac{a_1^2}{c^2}, \tag{12.1}$$

其中 $a_1^2 = \gamma p_1/\rho_1$，$a_1$ 是气体未受扰动状态下的声速。q 和 λ 的变化范围由下列不等式决定：

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$
$$0 \leqslant q \leqslant 1.$$

自变量 q 也可以用下列无量纲自变量中的一个来代替：

$$\tau = \frac{t}{t^0}, \text{ 其中 } t^0 = E_0^{1/\nu}\sqrt{\rho_1}\, p_1^{-(\nu+2)/2\nu}, \tag{12.2}$$

τ 是无量纲时间，或者

$$l = \frac{r_2}{r^0}, \text{ 其中 } r^0 = \left(\frac{E_0}{\rho_1}\right)^{1/\nu}, \tag{12.3}$$

l 是冲击波的无量纲坐标，t^0 是动力学特征时间，r^0 是动力学特征长度。

在图 87 中给出了在球面情况下用来决定 r^0 和 t^0 随爆炸能量和随标准大气层的高度变化的曲线，图中 r^0 的单位为米，t^0 的单位为秒。每一个高度决定一个相应的压力 p_1 和密度 ρ_1. 譬如，我们取 258 页上算出的能量 E_0 作为基本能量，并且为了说明图的意思我们以高度 $H = 5$ 公里为例列出下列数值：

$\frac{1}{10000} E_0 = 7.19 \times 10^{16}$ 尔格，$r^0 \simeq 51$ 米，$t^0 = 0.002$ 秒，

$E_0 = 7.19 \times 10^{20}$ 尔格，$r^0 \simeq 1100$ 米，$t^0 = 4.1$ 秒，

$1000E_0 = 7.19 \times 10^{23}$ 尔格，$r^0 \simeq 11000$ 米，$t^0 = 41$ 秒。

对于强爆炸在 $p_1 = 0$ 时有 $q = 0$，$\tau = 0$，$l = 0$.

对于考虑 $p_1 \neq 0$ 的点爆炸，当 $t \to 0$ 时有 $\tau \to 0$，$l \to 0$，$q \to 0$.

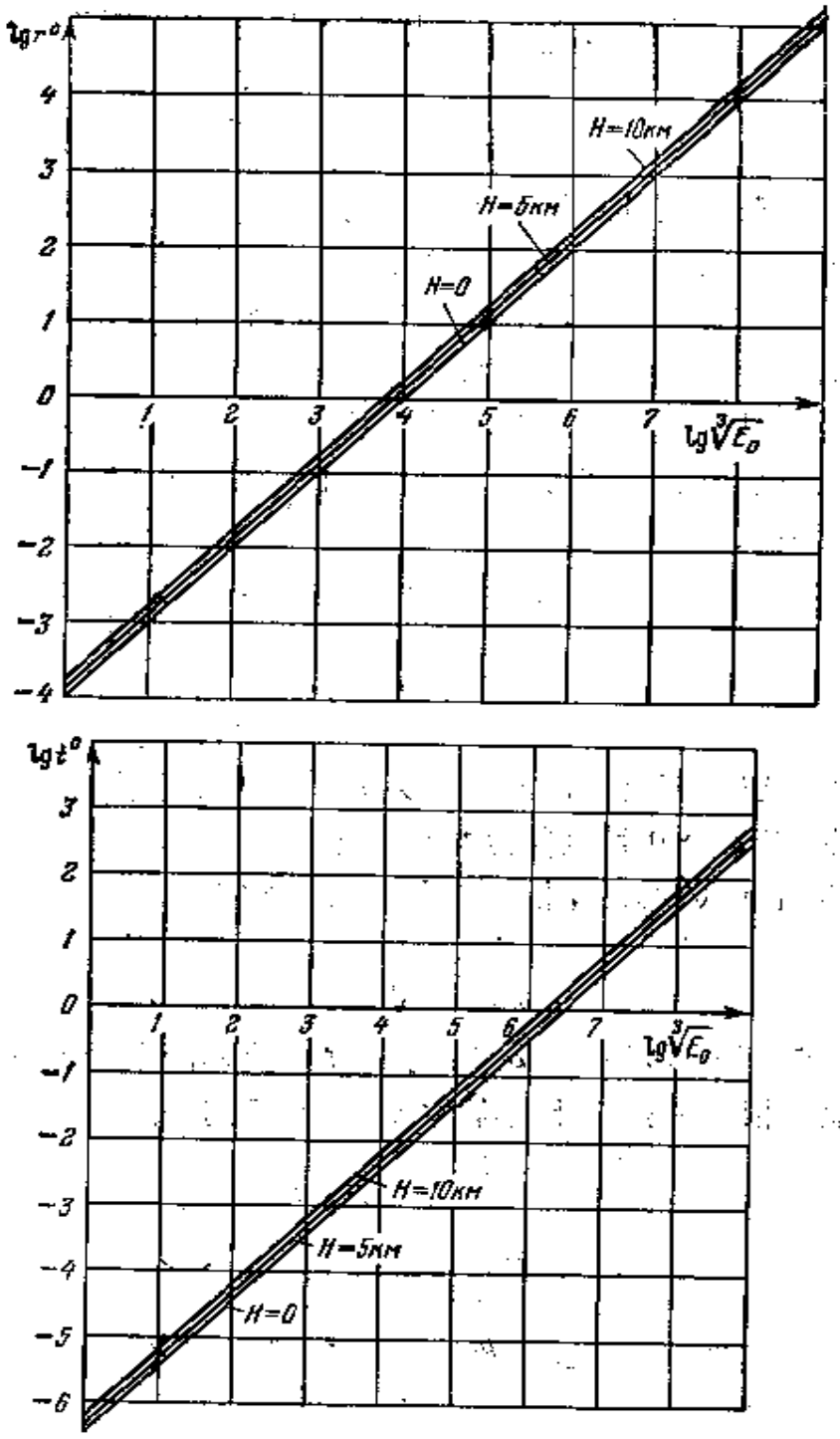


图 87　尺度常数：$r^0 = \sqrt[3]{E_0/p_1}$——动力学线尺度，单位米；$t^0 = E_0^{1/3}\rho_1^{1/3}p^{-5/6}$——动力学时间，单位秒；$H$——标准大气层高度；$E_0$——爆炸能量，单位尔格

下面我们可以认为，如果当 $q \to 0$ 或当 $\tau \to 0$ 或当 $l \to 0$ 时，形式为

$$f = (\lambda, q, \gamma)$$

的气体运动的无量纲特征量保持为有限值，则它们趋于自模拟运动的相应函数；根据 §11 中给出的解这些函数是已知的。

对于在有限的 p_1，ρ_1 和 E_0 下不依赖于量 p_1 的自模拟解，是可以讨论有限的量 q，τ，l 的。

因为对于自模拟运动，冲击波速度对于时间 t 或对于坐标 r_2 的依赖关系为已知[公式 (11.4)，(11.5)和(11.6)]；于是这就给出下列关系式：

$$\left.\begin{aligned} q &= \gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right)^2 \alpha^{2/(2+\nu)} \tau^{2\nu/(2+\nu)}, \\ q &= \gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right)^2 \alpha l^{\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

对非自模拟运动，函数关系 $q(\tau)$ 和 $q(l)$ 由冲击波的运动规律决定，当 $q \to 0$ 时这些函数相应地趋于式(12.4)。不难看出，在常声速 $a_1 = \sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ 情况下如下公式成立：

$$\frac{dl}{dq} = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \frac{d\tau}{dq}. \tag{12.5}$$

同前面一样，以 v_2，ρ_2 和 p_2 记爆炸波阵面上的速度、密度和压力的值。根据冲击波上的条件 (11.1) 下列公式成立：

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \frac{2a_1}{\gamma+1} \frac{1-q}{\sqrt{q}}, \\ \rho_2 &= \frac{\rho_1(\gamma+1)}{\gamma-1+2q}, \\ p_2 &= \frac{p_1}{\gamma+1} \frac{2\gamma-(\gamma-1)q}{q}, \end{aligned}\right\} \tag{12.6}$$

它们以显式确定冲击波阵面上的所有气体特征量对于 q 的依赖关系。v_2，ρ_2，p_2 对 τ 或 l 的依赖关系事先是未知的，确定这些依赖关系等价于建立函数 $q(\tau)$ 或函数 $q(l)$.

如果取量

$$\left.\begin{aligned} f(\lambda, q) &= \frac{v}{v_2}, \\ g(\lambda, q) &= \frac{\rho}{\rho_2}, \\ h(\lambda, q) &= \frac{p}{p_2} \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

作为未知函数，则冲击波上的严格条件就表示为简单的形式：

$$\text{当 } \lambda = 1 \text{ 时 } f(1, q) = g(1, q) = h(1, q) = 1. \tag{12.8a}$$

在对称中心速度为零的条件给出等式

$$f(0, q) = 0. \tag{12.8b}$$

点爆炸问题的初始条件可以写为形式：

$$\left.\begin{aligned} f(\lambda, 0) &= f_0(\lambda), \\ g(\lambda, 0) &= g_0(\lambda), \\ h(\lambda, 0) &= h_0(\lambda), \end{aligned}\right\} \tag{12.9}$$

其中 $f_0(\lambda)$，$g_0(\lambda)$ 和 $h_0(\lambda)$ 是在 §11 中求解自模拟运动问题时已求出并研究过的自模拟运动的相应函数。

取这些自变量时气体的一维不定常绝热运动的方程组 (1.3) 变换为

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda\right](1-q)\frac{\partial f}{\partial \lambda} \\ &\quad + \frac{[\gamma+1+(\gamma-1)(1-q)]\cdot[\gamma+1-2(1-q)]}{2\gamma(\gamma+1)} \frac{1}{g}\frac{\partial h}{\partial \lambda} \\ &\quad + \left[(1-q)\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{2-(1-q)}{2q} f\right] r_2 \frac{dq}{dr_2} = 0, \\ &\frac{2(1-q)}{\gamma+1}\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \left[\frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda\right]\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \lambda} \\ &\quad + \frac{2(1-q)}{\gamma+1}\frac{(v-1)}{\lambda} f \\ &\quad + \left[\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{2}{\gamma+1-2(1-q)}\right] r_2 \frac{dq}{dr_2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{12.10}$$

$$\left[\frac{2(1-q)}{\gamma+1}f-\lambda\right]\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial\lambda}-\left[\frac{2(1-q)}{\gamma+1}f-\lambda\right]\frac{\gamma}{g}\frac{\partial g}{\partial\lambda}$$
$$+\left[\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial q}-\frac{\gamma}{g}\frac{\partial g}{\partial q}\right.$$
$$\left.-\frac{2\gamma(\gamma-1)(1-q)^2}{[\gamma+1-2(1-q)][\gamma+1+(\gamma-1)(1-q)]q}\right]r_2\frac{dq}{dr_2}=0.$$

若令

$$\left.\begin{aligned}f(\lambda,q)&=f_0(\lambda)+qf_1(\lambda)+\cdots,\\ g(\lambda,q)&=g_0(\lambda)+qg_1(\lambda)+\cdots,\\ h(\lambda,q)&=h_0(\lambda)+qh_1(\lambda)+\cdots,\\ l^\nu&=\left(\frac{2}{2+\nu}\right)^2\frac{q}{\gamma^a(\gamma)}e^{Aq+\cdots},\end{aligned}\right\}\quad(12.11)$$

则方程(12.10)以及条件(12.8)和(12.9)就可以得到满足。

利用方程(12.10)和边界条件(12.8a)及(12.8b)可以确定函数 $f_1(\lambda),g_1(\lambda),h_1(\lambda)$ 和常数 A[1]。

边界条件给出

$$f_1(0)=0,\quad f_1(1)=0,\quad g_1(1)=0,\quad h_1(1)=0.\quad(12.12)$$

方程(12.4)导致下列包含未知常数 A 的线性常微分方程组：

$$\left[\frac{2}{\gamma+1}f_0-\lambda\right]g_0\frac{df_1}{d\lambda}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{dh_1}{d\lambda}$$
$$+\left[\frac{2}{\gamma+1}f_0'+\frac{\nu}{2}\right]g_0f_1+\left[\frac{2}{\gamma+1}f_0f_0'-\lambda f_0'\right.$$
$$\left.-\frac{\nu}{2}f_0\right]g_1+\left[\frac{\gamma^2+4\gamma-1}{2\gamma(\gamma+1)}h_0'-\nu f_0g_0\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\gamma+1}f_0f_0'g_0+\frac{\nu}{2}f_0g_0A\right]=0,$$

1) 此问题的解给于 Н.С. Мельникова (Бурнова) 1953 年在莫斯科大学答辩的论文中 (Реферативный журнал «Механика», № 3, 2535, 1954).

稍晚一些，A. Sakurai 曾与此无关地用别的方法研究了类似的线性化的点爆炸问题(参阅 Sakurai A., On the Propagation and Structure of the Blast Wave, I,II. J. Phys. Soc. Japan, v. 8, № 5, 1953, pp. 662—669).

Н. С. Мельникова 作过的详细研究和得到的数值结果，曾在本书 1954 年的第三版上登载过.

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{2g_0}{\gamma+1}\frac{df_1}{d\lambda}+\left[\frac{2}{\gamma+1}f_0-\lambda\right]\frac{dg_1}{d\lambda}\\
&\quad+\frac{2}{\gamma+1}\left[\frac{\nu-1}{\lambda}g_0+g_0'\right]f_1\\
&\quad+\left[\frac{2}{\gamma+1}\frac{\nu-1}{\lambda}f_0+\frac{2}{\gamma+1}f_0'+\nu\right]g_1-\lambda g_0'\\
&\quad-\frac{2}{\gamma-1}\nu g_0=0,\\
&\left[\frac{2f_0}{\gamma+1}-\lambda\right]g_0\frac{dh_1}{d\lambda}-\left[\frac{2f_0}{\gamma+1}-\lambda\right]\gamma h_0\frac{dg_1}{d\lambda}\\
&\quad+\frac{2}{\gamma+1}[g_0h_0'-\gamma h_0g_0']f_1+\left[\frac{2f_0}{\gamma+1}-\lambda\right]h_0'g_1\\
&\quad-\nu(\gamma+1)h_0g_1-\gamma\left[\frac{2f_0}{\gamma+1}-\lambda\right]g_0'h_1\\
&\quad-\frac{2}{\gamma+1}(g_0h_0'-\gamma h_0g_0')f_0\\
&\quad+\nu h_0g_0\left[A+\frac{4\gamma^2-(\gamma-1)^2}{2\gamma(\gamma-1)}\right]=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.13)
$$

这些方程的系数都是 λ 的未知函数，λ 是由对应自模拟解的函数 f_0, g_0, h_0 表出的。常数 A 只在自由项中以线性形式出现，所以方程组 (12.10) 待求的解可以写为如下形式：

$$
\left.\begin{aligned}
f_1&=f_{11}+Af_{12},\\
g_1&=g_{11}+Ag_{12},\\
h_1&=h_{11}+Ah_{12}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.14)
$$

函数 $f_{11}(\lambda)$, $g_{11}(\lambda)$, $h_{11}(\lambda)$ 将作为方程组 (12.13) 在 $A=0$ 和初始值为

$$f_{11}(1)=0,\quad g_{11}(1)=0,\quad h_{11}(1)=0$$

时的柯西问题的解来确定；函数 $f_{12}(\lambda)$, $g_{12}(\lambda)$ 和 $h_{12}(\lambda)$ 将作为自由项发生了相应变化的类似的方程组在初始值为

$$f_{12}(1)=0,\quad g_{12}(1)=0,\quad h_{12}(1)=0$$

时的柯西问题的解来确定。如果常数 A 由条件

$$\lim_{\lambda \to 0}(f_{11} + Af_{12}) = 0 \qquad (12.15)$$

决定，则中心处的条件 (12.12) 将得到满足。上述柯西问题可以用数值方法求解。

线性常微分方程组(12.13)在按公式(11.10)和(11.15)将自变量 λ 换为 V 之后，就变换为以 V 的简单有理函数为系数的线性微分方程组。

在对应对称中心的诸点上，当 $V = 2/(2 + \nu)\gamma$ 时某些系数有极点。变换后的方程组所要求的解，可以以级数的形式建立，该级数在要求建立欲求之解的区间

$$\frac{2}{(2+\nu)\gamma} < V < \frac{4}{(\gamma+1)(2+\nu)}$$

(对 $\nu = 3$ 在 $\gamma < 7$ 时)上对所有的 V 值均收敛。

对 $\nu = 1, 2, 3$ 这全部三种情况，数值计算结果都给出 A 的值接近于 2[1]。

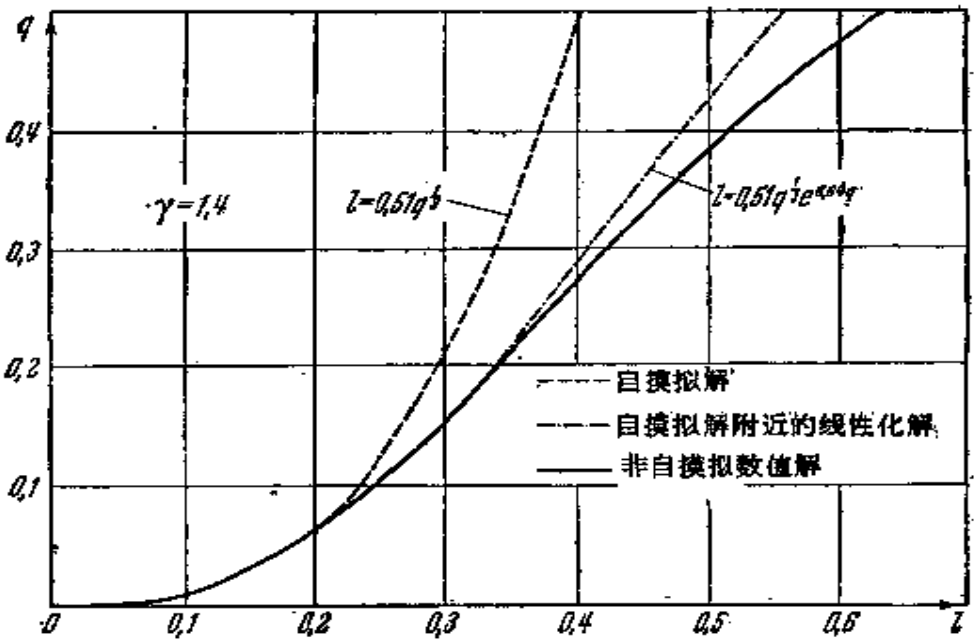


图 88　函数 $q(l)$ 的各种解析解与数值解的比较 ($q = a_1^2/c^2, l = r_2/r^0$)

1) 在下列论文中给出了 $\nu = 1$ 和 $\nu = 2$ 情况的数值计算结果：Брушлинский Д. Н., Соломахова Т.С., Исследование задачи о сильном взрыве с учетом противодавления. Сборник статей № 19 вып. 7, «Теоретическая гидромеханика» под ред. Л.И. Седова. М., Оборонгиз, 1956.

条件(12.8)和在线性化情况下条件（12.15）可以换为这样的要求：受扰运动的能量为有限的。能量有限和线性化方程的条件(12.15)是等价的。在由抛弃未写出的高阶项时的公式(12.11)确定了常数 A 之后，我们就得到小 q 值时的 l 与 q 之间的较精确的关系式；根据（12.5）小 q 值时的 q 与 τ 之间的关系式具有如下形式：

$$\tau = \left(\frac{2}{2+\nu}\right)^{2/\nu} \frac{q^{(2+\nu)/2\nu}}{\nu(\gamma\alpha)^{1/\nu}\gamma^{1/2}} \left[\frac{2}{2+\nu} + A\frac{2(\nu+1)}{2+3\nu}q\right]. \quad (12.16)$$

相应的曲线给于图 88 和 89。虚线对应自模拟规律（12.4），点虚线对应考虑了线性项的进一步精确的规律，实线是利用电子计算机作数值计算得到的[1]。

$\nu = 3$ 时函数 $f_1(\lambda)$，$g_1(\lambda)$ 和 $h_1(\lambda)$ 的数值计算结果给于图 90。借助这些曲线根据小 q 值时的公式（12.11）可以估计气体的运动特征量随时间的变化[2]。

从 1955 年开始发表了一系列论文[3]，文中给出了考虑反压的点爆炸(球面情况：$\nu = 3$，$\gamma = 1.4$）的非自模拟问题解的数值计算结果。

所有援引的论文中的结果都用前面给的无量纲自变量进行了

---

1) Goldstine H. H., Neumann J., Blast Wave Calculation. Comm. Pure and Appl. Math., v.8, No. 2, 1955, pp. 327—354. 在 $100 \geqslant p_2/p_1 \geqslant 1.017$ 范围内进行了计算. Brode H. L., Numerical Solutions of Spherical Blast Waves. J. Appl. Phys., v. 26, № 6, 1955, pp. 766—775. 在 $1600 \geqslant p_2/p_1 \geqslant 1.06$ 范围内进行了计算. Охоцимский Д.Е., Кондрашева И.Л., Власова З. П., Казакова Р.К. Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. Труды МИАН СССР, т. 50, 1957. 计算范围 $1740 \geqslant p_2/p_1 \geqslant 1.008$. Охоцимский Д. Е., Власова З. П. О поведении ударных волн на большом расстоянии от места взрыва. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 2, № 1, 1962, стр. 107—124.

2) 在下列论文中讨论了被膨胀的活塞推动的气体的不定常运动的线性化问题：Кочина Н. Н., Мельникова Н. С., О движении поршня в идеальном газе. ПММ, т. 24, вып. 2, 1960, стр. 213—218; О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршня, с учетом противодавления. ДАН СССР, т. 12, № 2, 1958, стр. 192—195.

3) 见本页注 1。

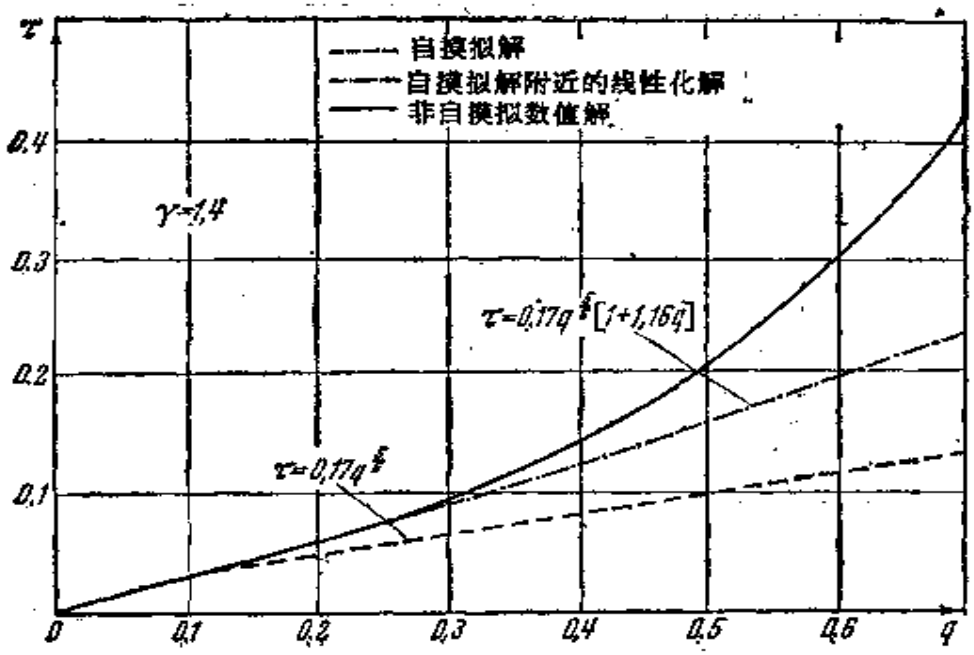


图 89　函数 $\tau(q)$ 的各种解析解与数值解的比较（$\tau = t/t^0$）

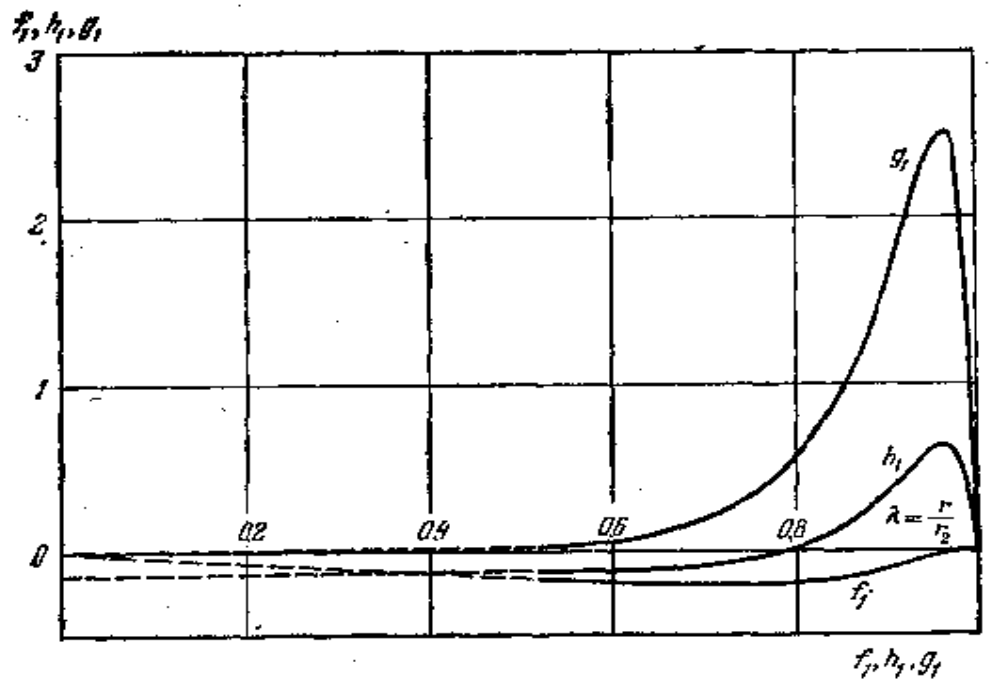


图 90　确定点爆炸初始阶段的反压影响的微商

$\left(\frac{\partial \rho/\rho_2}{\partial q}\right)_{q=0} = g_1(\lambda)$，$\left(\frac{\partial p/p_2}{\partial q}\right)_{q=0} = h_1(\lambda)$ 和 $\left(\frac{\partial v/v_2}{\partial q}\right)_{q=0} = f_1(\lambda)$ 的曲线

$l=\frac{r_2}{r^0}$	$\tau=\frac{t}{t^0}$	$\frac{p_2}{p_1}$	l 的标号
自 模 拟 曲 线		∞	l_0
0.1867	0.01403	21.1	l_1
0.2669	0.03230	10.31	l_2
0.3342	0.05431	4.967	l_3
0.4890	0.1231	3.056	l_4
0.6003	0.1842	2.321	l_5
0.6812	0.2333	2.010	l_6
0.7566	0.2807	1.835	l_7
0.9566	0.3667	1.615	l_8
0.9801	0.4323	1.521	l_9
1.2524	0.6296	1.338	l_{10}
1.3210	0.6811	1.315	l_{11}
1.5171	0.8299	1.255	l_{12}
1.8751	1.1080	1.185	l_{13}
2.3222	1.4636	1.136	l_{14}
2.8641	1.8973	1.102	l_{15}
3.6983	2.7763	1.066	l_{16}
7.0791	5.3764	1.032	l_{17}
9.6424	7.5180	1.022	l_{18}

处理并作了比较[1]。

在图 91—93 中给出了爆炸波阵面后的速度、密度和压力的分布，图中标明了最敏感的自变量 $l=r_2/r^0$，它代表用动力学长度 $r^0=(E_0/p_1)^{1/3}$ 量度的爆炸波到爆炸中心的距离。

在列出的表中给出了各 l_k 的数值并指出了对应的 $\tau=t/t^0$ 的值和冲击波阵面上的压力降 p_2/p_1。

1) 下面引的数值计算结果是 Н. С. Мельника, В. П. Коробейников 和 Е. В. Рязанов 整理加工的。

对大范围内的 τ 值计算得的 $\nu=1, 2, 3$ 时点爆炸非自模拟问题的计算结果，给出在 1964 年的论文中。(见 Коробейников В.П., Чушкин П.И., Метод расчета точечного взрыва в газах. ДАН СССР, т. 154, № 3, 1964, стр. 549—552; Мельникова Н. С., Саламахин Т. М., О расчете точечного взрыва в различных газах. Ж. прикл. механ. и техн. физ., № 4, 1964, стр. 155—160.)

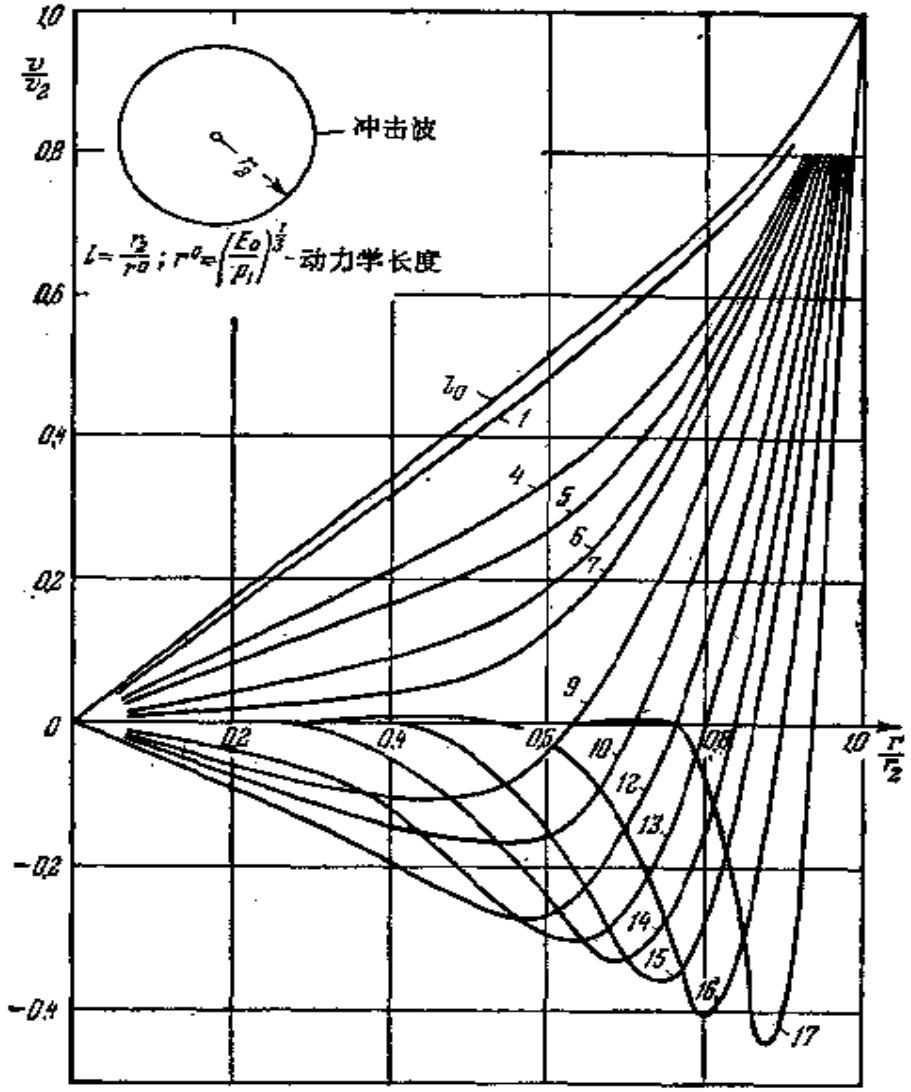


图 91　点爆炸时的速度分布

所给出的全部曲线对任何 p_1, ρ_1 和 E_0, 但 $\gamma = 1.4$ 时的点爆炸都是正确的。

$q(l)$ 和 $q(\tau)$ 的关系给于图 88 和 89，由图上容易看出近似解的精确度和冲击波衰减时的误差情况。根据图 88 和 89 的曲线和公式 (12.6) 容易确立作为 l 或 τ 的函数的冲击波阵面上的量 p_2/p_1, ρ_2/ρ_1 和 v_2/a_1。相应的曲线给于图 94—96(图 94 和 96 用的是

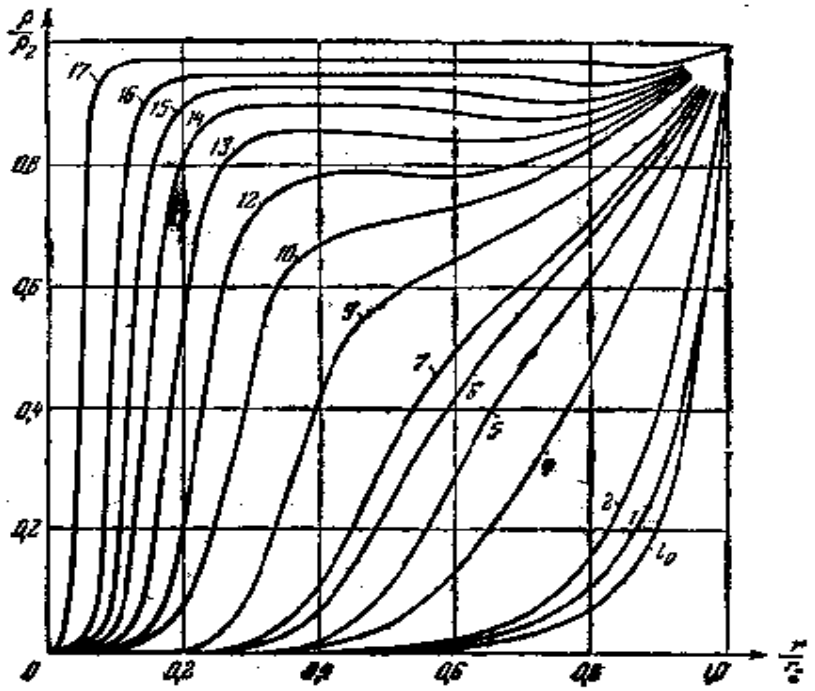


图 92　点爆炸时的密度分布

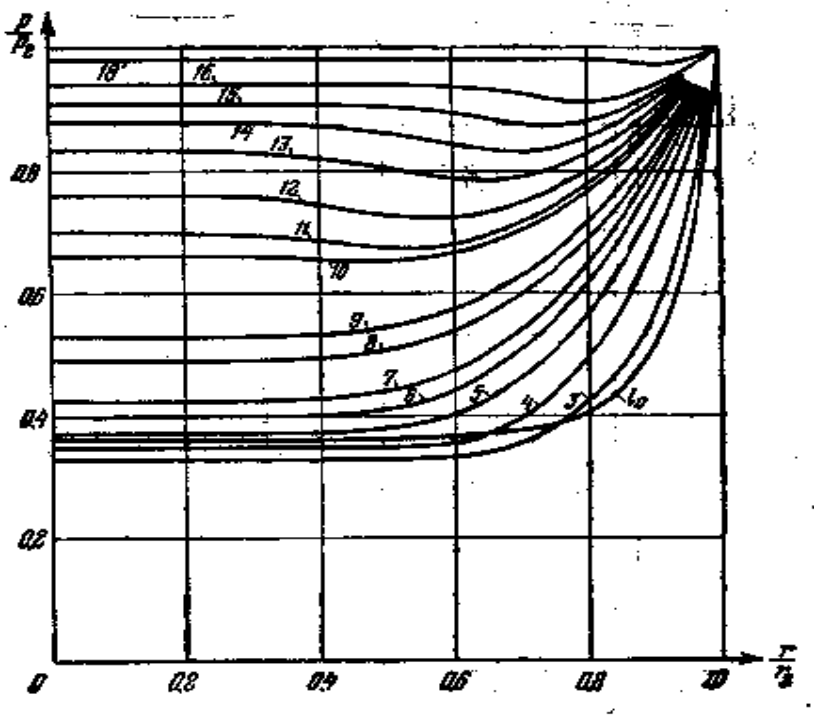


图 93　点爆炸时的压力分布

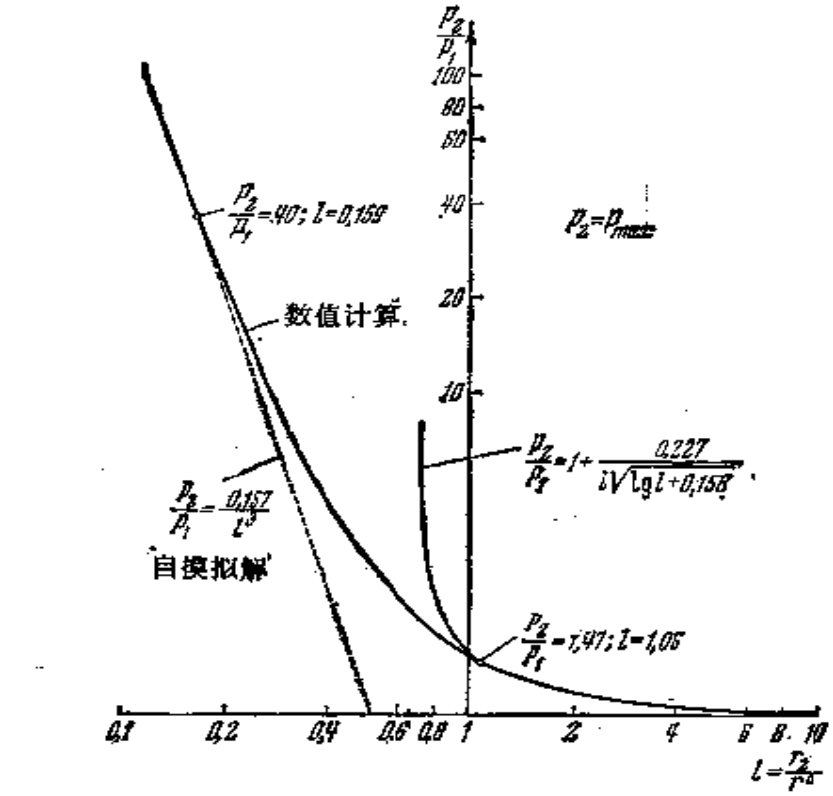


图 94　冲击波阵面上的压力降随冲击波半径的变化

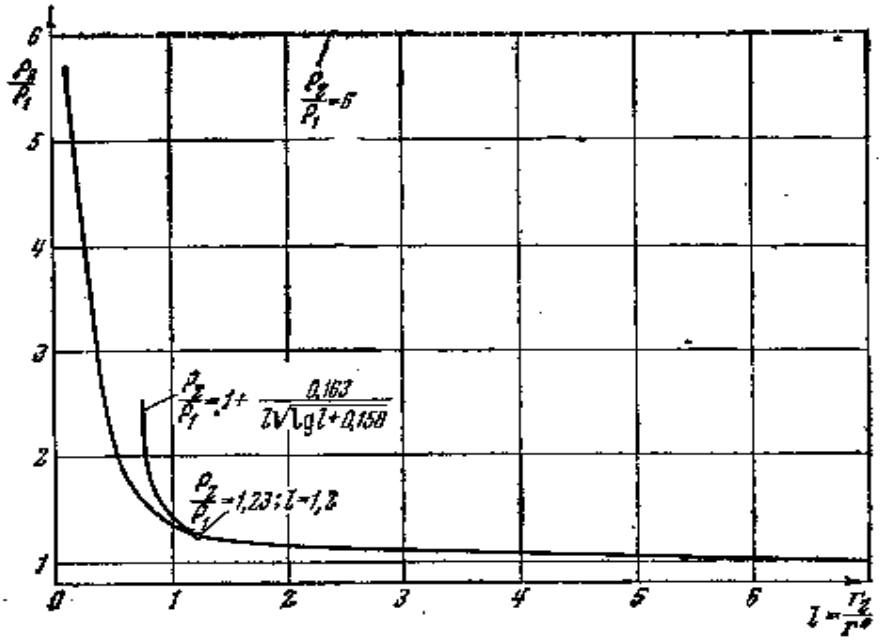


图 95　波阵面后的密度随冲击波半径的变化

对数坐标)。在这些图上还给出了对应自模拟运动和 Л. Д. 朗道[1]的渐近公式的曲线。

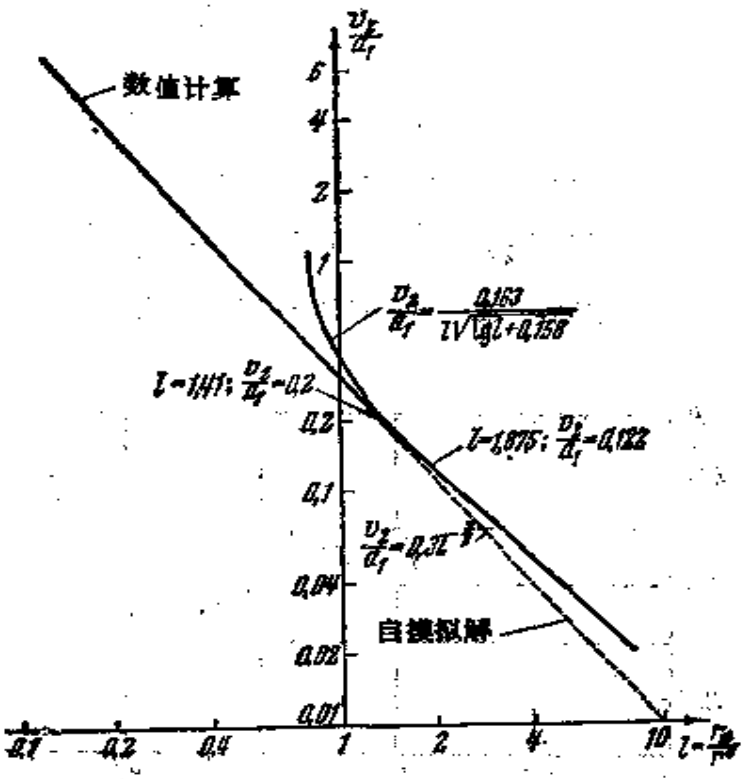


图 96　波阵面后的速度随冲击波半径的变化

在图 97 和 98 上给出了取自上面引的诺曼(Neumann)和哥德斯廷(Goldstine)的论文中的曲线。它们分别示出在固定的空间点上的压力 p/p_1 随时间的变化和在固定时刻压力 p/p_1 随坐标 r/r^0 的变化。

上面给出的是对球面情况在 $\gamma = 1.4$ 时计算出的曲线。对于别的 γ 值时的冲击波的运动规律和波后气体的特征量，其中还包括有柱面波和平面波情况下的，已有理论上论证过的近似公式[2]。

1) 参阅 Ландау Л. Д., Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, т. 9 вып. 4, 1945.

2) Коробейников В.П., Приближенные формулы для расчета характеристик фронта ударной волны при взрыве в газе. ДАН СССР, т. 111, No. 3, 1956, стр. 557—559.

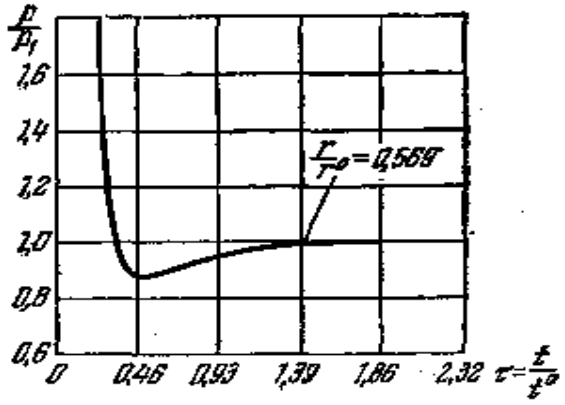


图 97　在固定空间点上压力的变化

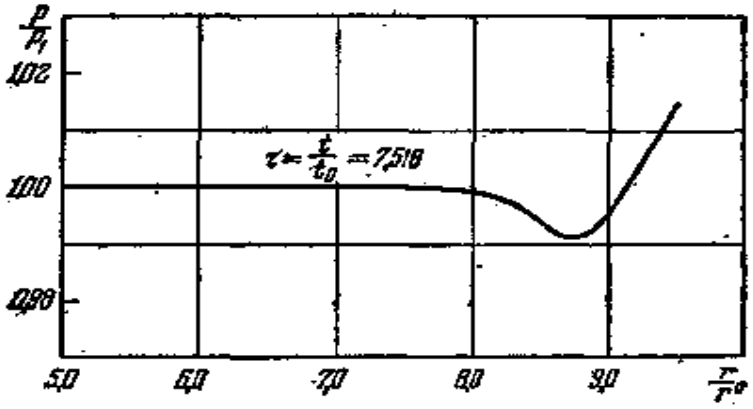


图 98　在固定时刻的压力变化

§13. 关于爆炸时的最大压力和冲量的模拟和公式

用以确定最大压力、冲量等等对于距爆炸点的距离、爆炸能量和其它因素的依赖关系的各个公式的结构，本可以作为在第二章§6 中所讨论的那些例子之一在本书一开始就给出来。

但是，把对此问题的叙述，以及对模拟现象用的准则和爆炸的作用的说明，放在发展了点爆炸理论之后再来进行则更方便，这简化了问题并可以利用上述的相应问题的提法。

为了估计爆炸对某个与气体的受扰动流场发生相互作用的物体的作用，可以考察最大压力 p_{max} 或者作用在所研究的物体表面

的单位面积上的冲量 I.

当在物体表面上只存在压力应力时，冲量 I 可按下式确定：

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (p - p_1)dt,$$

其中 p_1 是初始的未受扰动的压力，t_0 和 t_1 是特征时刻(例如，t_0 是相互作用开始的时间，$t_1 = \infty$ 或者 t_1 对应压力差 $p - p_1$ 变号的时刻等等)。有时，需要取在特征时间间隔内作用于物体上的总冲量的向量 J.

在爆炸时物体周围介质中的扰动与物体本身发生相互作用。p_{max} 在物体各点上的大小、冲量 I，冲量的合向量 J 和相互作用的其它特征量，不仅依赖于装药的性质、装药相对物体的位置和周围大气的性质，并且还显著地依赖于物体本身的性质、物体形状、紧固条件、质量和其它动力学特性，依赖于物体的形变性质、内结合力、该物体相对其它物体的置放条件等等。

在选定主定参量组和确定相似性条件时，必须选出有量纲的和无量纲的参量，选出确定物体尺寸和形状的物体本身的特征量、质量及其在物体体积内的分布、表征内结合力的参量、物体的重量等等。

在一般情况下，基本的困难在于只选取重要因素，这些因素在具体情况下根据被求解的问题的性质可以是不同的。

在极限情况下，譬如当物体是绝对刚体和被牢牢固定时(这可以是在极限下具有无穷大质量的物体)或者当物体非常小和它在爆炸场中所引起的扰动可以忽略不计时，不出现描述物体用的附加物理常数。事实上，任意几何形状的且形状固定不变的不动的绝对刚体，只由一个有量纲参量——特征的线尺度 D 就可以给定，其它的参量可以认为是无量纲的，并且对于一系列几何相似的情况它们保持为常数值。在实践中，装药的作用常常只用它的重量来表征(重量与爆炸能量成正比)，而不考虑装药的形状、化学和物理性质等等。如果我们假设，爆炸的作用只由装药能量 E_0 确定，则可以利用瞬时点爆炸的想法，这种爆炸由它释放出的能量 E_0 完全

确定。众所周知，在许多情况下这种假设是不正确的[1]，特别是在聚能装药作用的问题中如此。

如果爆炸是强点爆炸并且是发生在充满绝对刚体之外的整个空间的完全气体中，则按照在§1中所给出的问题提法，显然，在整体上确定现象所用的参量组是

$$\gamma,\ E_0,\ \rho_1,\ \xi = \frac{D}{R},\ R,\ \varphi,\ \psi, \tag{13.1}$$

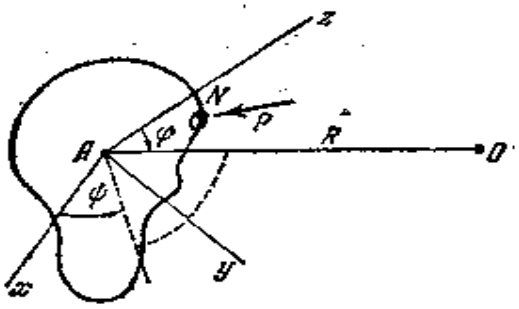


图99　O点是爆炸中心

其中 R，φ，ψ 是在与物体相联的某坐标系中爆心的极坐标（图99）。

我们来考察物体上的某一点 N，并以 p_{max} 和 I 表示在该点上的最大压力和冲量。

容易验证，由量纲理论得到公式：

$$p_{max} = \frac{E_0}{R^3} f_1(\xi, \varphi, \psi, N, \gamma), \tag{13.2}$$

$$I = \sqrt{\frac{\rho_1 E_0}{R}}\, f_2(\xi, \varphi, \psi, N, \gamma). \tag{13.3}$$

点 N 的坐标可以看作无名数。当点 N 固定时，不失一般性，我们可以将坐标原点 A 取在点 N 上。

对于按物体表面上所有的点求和的总冲量，有如下形式的公式：

$$J = \sqrt{\frac{\rho_1 E_0}{R}}\, D^2 f_3(\xi, \varphi, \psi, \gamma). \tag{13.4}$$

为了从理论上计算这些函数，必须求解复杂的三维问题，这在实践上并非总是可能的。

对于强爆炸（$p_1 = 0$），不用解这复杂的问题，而由公式

1) 在相应的情况下下面的结论可能要求作重要的修正.

(13.2),(13.3) 和 (13.4) 就知道在几何相似的情况下的 p_{max}, I 和 J 对于 E_0, ρ_1 和 R 的依赖关系。

动力学相似的条件在该情况下归结为参量 $\xi = D/R$, φ, ψ 为常数，并对 ρ_1, R 和 E_0 不加任何限制。

当 $\xi = D/R \to 0$ 即物体收缩为一点时，量 p_{max}, I 保持为有限值，所以当 $\xi \to 0$ 时函数 f_1, f_2 和 f_3 在极限时保持为有限值。

对小尺寸的物体可以令 ξ 等于零。在该情况下公式 (13.2), (13.3) 和(13.4)给出所讨论的量对于物体距爆心的距离 R 的依赖关系。

如果考虑初始压力 ($p_1 \neq 0$)，则在公式 (13.2), (13.3) 和 (13.4)的右端要补加无量纲自变量

$$\chi = \frac{R}{\sqrt[3]{E_0/p_1}} = \frac{R}{r^0}.$$

这个参量在大 E_0 和小 R 时接近于零，在任何 E_0 和大 R 时此参量很大，所以上述的相似性条件和所讨论的量对于能量 E_0 的依赖关系在大 R 时可能要加以改变。当存在反压 p_1 时相似性条件具有如下形式：

$$\frac{R}{\sqrt[3]{E_0/p_1}} = \text{const}, \quad \frac{D}{R} = \text{const}, \tag{13.5}$$

$$\varphi = \text{const} \text{ 和 } \psi = \text{const}.$$

在安排实验时这些条件将得到满足，如果几何相似性和等式

$$E_0 = \text{const}\, p_1 R^3$$

存在的话。当减小尺度时这些要求容易满足。如果根据一些附加数据(譬如实验数据)确立了 p_{max}, I 或 J 之中的某些量对于爆炸能 E_0 的依赖关系，这就可以相应地确定函数 f_1, f_2, f_3 对于参数 χ 的依赖关系，从而当 $\xi = 0$ 时对于距离 R 的依赖关系将成为已知。

相似性条件 (13.5) 可以推广到更一般的情形，这时所取的物体可以看作是具有常密度 ρ^* 的连续介质，或者是无重量的不可压缩流体，或者是由杨氏模量 $\mathscr{E}$ 和泊松系数 σ 表征的无重量的弹性

物体。为此，在条件（13.5）中必须加进条件

$$\frac{\rho^*}{\rho_1} = \text{const} \text{ 和 } \frac{\mathscr{E}}{p_1} = \text{const}, \quad \sigma = \text{const}. \tag{13.6}$$

对于具有绝对刚性边界的流体——弹性物体系统，相似性条件(13.5) 和 (13.6) 也将保持其形式不变。在更一般的情况下，除几何相似性即条件 (13.5) 以外，对每一个具有相应的常数比值的物体还应满足 (13.6) 类型的条件。

显然，密度 ρ^* 在空间上可以是变化的，但是在这种情况下密度分布应该是相似的[1]。

所以上述的结论都是在不计重力时得出的。如果考虑各种物体和气体的自重，则在主定参量组中要加进常数重力加速度 g。在此情况下相似性条件要增加一个关于如下无量纲参量为常数的补充要求：

$$\frac{p_1}{\rho_1 g D} = \text{const}. \tag{13.7}$$

当大大减小线尺度 D 时，条件 (13.7) 可以在减小 p_1，增大 ρ_1 或增大 g 时得到满足。若弹性性质重要且杨氏模量不能显著改变，则条件 $p_1/\mathscr{E} = \text{const}$ 归结为要求量 p_1 保持不变。空气的密度可以在大范围内变化，但弹性物体的密度只能在小范围内改变，所以，条件

$$\frac{\rho^*}{\rho_1} = \text{const}$$

一般说来就规定了密度 ρ_1。

因此，为了满足条件 (13.7)，必须改变 g。这可以借助离心机或借助作加速运动的平车（第二章 § 6）来实现。但是，这两种办法使实验的安排大为复杂：涉及到使用线尺度比值很大的小模型和带来运动空气绕流对模型的附加影响、短促过程对运动平车的影响等等。当大大缩小尺度时还可能产生一系列别的因素（模型加工的方式、保证物质结构完全相似的不现实性、粘性力和毛细力以

1) Сидоркина С. И., О некоторых движениях аэрозоля. ДАН СССР, т. 112, № 3, 1957, стр. 398—399.

及许多其它因素)的影响，这些因素对实物显然是不重要的。

对于不可压缩流体($\mathscr{E} = \infty$) 条件 $p_1/\mathscr{E}$ 消失，所以减小特征压力 p_1 (在真空中做试验)可使条件 (13.7) 满足。可以列举一些自重起重要作用的例子：引起大建筑物震动的爆炸作用、建筑物倾倒时的稳定性、在土壤中爆炸时形成弹坑的现象、当在水面以上爆炸时的水浪飞溅和水面波动现象等等。

在研究各种金属结构表面和内部的局部性质的破坏情况的许多问题中，惯性和强度可能是重要的，这时重量一般说是不重要的。

现在我们较详细地讨论关于在土壤中爆炸时弹坑大小的问题。在许多情况下，特别是在沙质土壤中爆炸时，由土壤的物理性质(摩擦力或切应力)和空气压力所决定的内应力是小的。具有流体力学静压性质的、由重量决定的内压力可能很大，它们的影响我们将加以考虑。

我们来讨论在图 100 中所示的实验。

假设对于一定类型的炸药，在爆炸时泥土的上抛现象与水的飞溅现象一样，主要只与土壤的密度和重量有关。按照在实践中广泛采用的假设，我们设弹坑的尺寸主要只依赖于装药能量 E[1] (装药重量)和埋深 h. 此外，土壤表面上的压力 p_1 忽略不计。于是，得到主定参量组 ρ_1, g, h, E. 为了相似必须保持如下参量为常数

$$\frac{E}{\rho_1 g h^4} = \text{const} = c. \tag{13.8}$$

当埋深 h 大时，亦即 c 小时，不形成弹坑(地下爆炸)。由式(13.8)很清楚看出，如果

$$E = c\rho_1 g h^4, \tag{13.9}$$

则弹坑将是相似的。

相似弹坑的装药能量从而装药重量应与尺寸的四次方成比

1) 更确切地说，量 E 等于由装药传递给土壤的机械能，一部分装药能量可能消耗于辐射、土壤的熔化和蒸发等等。

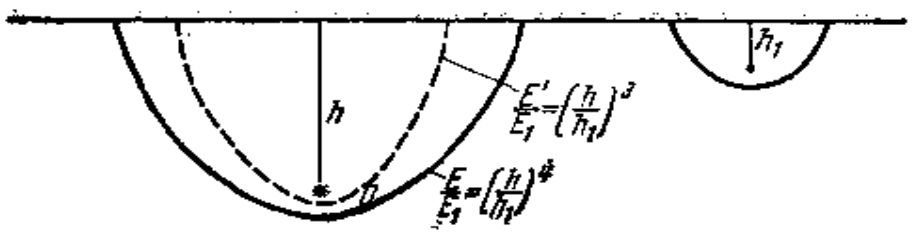


图 100　在土壤内的点爆炸　点O——爆心，h——爆炸深度.
在相似情况下有 $(E/E_1)=(h/h_1)^4$

例。因为被抛出的体积正比于尺寸的立方，则显然，当相似性满足时装药能量与被抛出的土壤的体积 Q 之间关系应有形式

$$E = c_1(c)Q^{4/3}\rho_1 g. \qquad (13.10)$$

如果爆炸发生在表面 $h=0$ 上，则相似性条件 (13.8) 不复存在。在此情况中，在上述假设下公式(13.10) 仍保持有效，并且，常数 $c_1 = c_1(\infty)$ 是与土壤密度和爆炸能量无关的一定数值的常数。

如果把装药能量按相应的转换关系换为装药重量，把体积 Q 换为土壤重量，则公式(13.10) 可以改写成对实践更方便的形式。

假若是按规律 $E'/E=(h/h')^3$ 进行爆炸，则相似性被破坏，弹坑将不相似，此时的弹坑坡度在图 100 上用虚线表示。

在以上的讨论中我们忽略了土壤表面上外部空气压力 p_1 的效应，此效应以及同样物质下弹性内力的效应通过参量 $\mu = p_1/\rho_1 g h$ 和 $p_1/\mathscr{E}$ 起作用。

在相同的 p_1, ρ_1 和 g 时，量 μ 随 h 的增大而减小，当 ρ, g, h 不变时减小 μ 对应于减小压力 p_1.

可以假设，当 $\rho_1, g, h, \mathscr{E}$ 为常数时随着外部压力 p_1 的减小弹坑尺寸将增大。

所以，当保持其余无量纲主定参量为常数时，由于增大 h 而造成的参量 $\mu = p_1/\rho_1 g h$ 的减小，将破坏相似性，被抛出的土壤的数量与按相似规律算出的相比将增加。

由此很清楚，当转换到实物上时，为了获得按体积相似的弹坑，则要求装药能量的增加应该比按规律 (13.10) 增加的少。

所以，如果爆炸能量是正比于线尺寸的四次方而增加，则外部压力和弹性结合力的作用将随线尺寸的增加而下降。

如果能量是正比于尺度的四次方而增长，则实物上的相对位移和形变将比模型上的大。

另一方面，如果重量不重要，则相似性由条件 (13.5) 和(13.6) 保证，由这些条件得出，能量与尺度的立方成正比。重力的附加影响将破坏相似性，使得在由模型转换为实物时相对形变和位移减小。

所以，当 p_1，ρ_1 和 g 不变时，如果 $E\sim h^4$，则实物上的实际相对形变比小模型上的大；如果 $E\sim h^3$，则实物上的实际相对形变比小模型上的小。

在为研究爆炸作用而安排实验和处理实验结果时，注意到这些分析是有益的。

由上所述还得知，当利用爆炸来抛掷土方时，从能量的观点来看，使用非常大的、集中的装药是不合算的；分散装药和其它合适的爆炸方式可以产生很好的效果。

以上我们讨论了在气体的不定常运动与固体相互作用时 p_{max}，I 和 J 的一般公式的形式。当不存在物体时可以在气体中固定某一假想的不与气体运动相互作用的表面 Σ，并可以研究类似的量 p^0_{max}，I^0 和 J^0，它们就是爆炸场的特征量。显然，它们不等于上面所讨论过的相应的量 p_{max}，I 和 J，这些量是由气体运动与固体的相互作用决定的。

在这种情况下对表面 Σ 的每一微元可以写出公式

$$p^0_{max}=\frac{E_0}{r^3}f_1\left(\frac{r}{r^0},\ \gamma\right)$$

和

$$I^0=\sqrt{\frac{\rho_1 E_0}{r}}f_2\left(\frac{r}{r^0},\ \gamma\right), \tag{13.11}$$

其中 r 是所讨论的微元到爆心的距离，函数 f_1 和 f_2 只依赖于参量 $r/r^0\left(r^0=\sqrt[3]{E_0/\rho_1}\right)$ 和 γ。因为在理想气体中压力与相应面积的方向无关，所以 p^0_{max} 等于冲击波经过所讨论点时波后的压力值。对

强爆炸 $r/r^0 \approx 0$，从而 f_1 和 f_2 变为常数。利用在 §11 中求得的解容易把它们算出来[1]。

当 $\gamma = 1.4$ 时这些常数有如下的值[2]：

$$f_1 = 0.157, \quad f_2 = 0.486. \tag{13.12}$$

在图 94 中给出了 $\gamma = 1.4$ 时函数 $f_1(r/r^0, \gamma)(r^0/r)^3 = p_{max}/p_1$ 的曲线。

借助于在 §12 中对有反压的点爆炸所讨述的解，可以对每一个坐标为 r 的点计算压力随时间的变化。该压力开始总是大于初始未受扰动的值 p_1，随后，从某一时刻 $\bar{t}$ 开始，压力将小于 p_1 达到最小值，然后再单调地增长到值 p_1（图 97）。

对每一个点我们按下列公式确定正冲量

$$I^+ = -\int_{t_0}^{\bar{t}} (p - p_1)dt = \sqrt{\frac{\rho_1 E_0}{r}} f_2^+\left(\frac{r}{r^0}\right) \tag{13.13}$$

和负冲量

$$I^- = -\int_{\bar{t}}^{\infty} (p - p_1)dt = \sqrt{\frac{\rho_1 E_0}{r}} f_2^-\left(\frac{r}{r^0}\right).$$

在数值解的基础上确定了函数 $f_2^+\left(\frac{r}{r^0}\right)$ 和 $f_2^-\left(\frac{r}{r^0}\right)$，相应的曲线给于图 101。由这些曲线得知，当 $r/r^0 > 0.3$ 时，负冲量按绝对值大于正冲量。

对于沿直线的爆炸（柱面波情况），E_0 的量纲变了，所以公式 (13.11) 变为公式

$$p_{max}^0 = \frac{E_0}{r^2} f_1\left(\frac{r}{r^0}\right) \text{ 和}$$

$$I^0 = \sqrt{\rho_1 E_0}\, f_2\left(\frac{r}{r^0}\right), \quad r^0 = \sqrt{\frac{E_0}{p_1}}, \tag{13.14}$$

1) 关于在任意的双参数的理想介质中爆炸问题的解对于决定运动的诸参量的依赖关系和用其他参量的值计算解的可能性的研究，可见论文：Конина Н. Н., Мельникова Н. С., О свойствах решения задачи о точечном взрыве в сжимаемых средах. ДАН СССР, т. 138, № 2 1961, стр. 326—329.

2) 冲量 I^0 由公式 $I^0 = \int_{t_0}^{\infty} (p - p_1)dt$ 确定，t_0 是冲击波经过所讨论点的时刻。

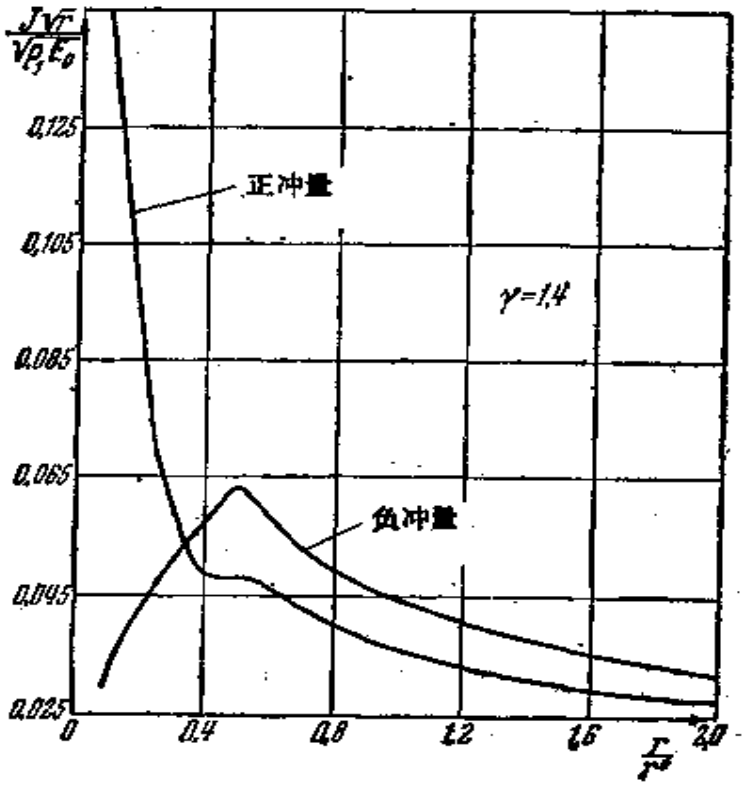


图 101　点爆炸的总的正冲量和负冲量的分布与到爆心距离的关系

对于沿平面的爆炸变为公式

$$p^0_{\max}=\frac{E_0}{r}f_1\left(\frac{r}{r^0}\right)\text{和}$$

$$I^0=\sqrt{\rho_1 E_0 r}\,f_2\left(\frac{r}{r^0}\right),\quad r^0=\frac{E_0}{\rho_1},\qquad(13.15)$$

其中 r 相应是到爆炸直线或爆炸平面的距离。

如果对强爆炸是按公式

$$I^0=\int_{t_0}^{\infty}p\,dt=\int_{r_2=r_0}^{\infty}p\,\frac{dr_2}{c}$$

确定冲量 I^0，则在平面和柱面情况得到 $I^0=\infty$。在这些情况下，如果使用定义

$$I^0=\int_r^{kr}p\,\frac{dr_2}{c},$$

那么，对 I^0 得到有限值。式中 k 是某一大于 1 的数。

§14. 变密度介质中的强爆炸问题

强爆炸问题的提法、求解方法和结果，容易推广到初始密度 ρ_1 按如下规律依赖于质点的初始坐标 r_0 的情况：

$$\rho_1 = \frac{A}{r_0^{\omega}}, \tag{14.1}$$

其中 ω 是不名数，它可以是正的或负的，A 是正的常数，它的量纲是

$$[A] = \mathrm{ML}^{\omega-3}.$$

如果对强爆炸忽略初始压力 p_1，并讨论完全气体的绝热运动，则主定参量组为

$$\omega, \gamma, A, E_0, r, t. \tag{14.2}$$

由此得出，相应的气体受扰运动是自模拟的。下面我们只讨论球对称情形，于是特征能量的量纲是

$$[E_0] = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}.$$

所有的无量纲量可以看作下列参量的函数：

$$\omega, \gamma, \lambda = \left(\frac{A\alpha}{E_0}\right)^{1/(5-\omega)} \frac{r}{t^{2/(5-\omega)}} \tag{14.3}$$

其中 α 是可以选择的常数 $[\delta = 2/(5-\omega)]$.

由问题的提法得知，在相位相同的状态上 ($\lambda = \mathrm{const}$) 其中包括在冲击波上有关系式

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = \lambda_2 = \mathrm{const}, \\ &r_2 = \lambda_2 \left(\frac{E_0}{A\alpha}\right)^{1/(5-\omega)} t^{2/(5-\omega)}, \\ &c = \frac{dr_2}{dt} = \frac{2}{5-\omega}\frac{r_2}{t} \\ &\quad = \frac{2\lambda_2^{(5-\omega)/2}}{5-\omega}\sqrt{\frac{E_0}{A\alpha}}\, r_2^{(\omega-3)/2}. \end{aligned}\right\} \tag{14.4}$$

在冲击波上 $\lambda_2 = 1$，我们根据这个条件决定常数 α，显然，当这样确定 α 时 λ 有公式：

$$\lambda = \frac{r}{r_2}.$$

若 $\omega < 3$，冲击波将作减速运动，若 $\omega > 3$，则将作加速运动。$\omega < 3$ 的情形对应于在任何包含对称中心的有限球内质量是有限的；当 $\omega \geqslant 3$ 时，该质量将为无穷大。

由公式 (14.4) 得知，在 $t = 0$ 时于对称中心附近形成的冲击波，只在 $\omega < 5$ 的情况下才在 $t > 0$ 时以有限速度向四周传播。下面我们假设 $\omega < 5$.

在 §5 中曾证明了，在此情况下问题归结为对常微分方程 (5.10) 求积分。

由研究图 42 和 43 上的不同 ω 的积分曲线得知，与在 $\rho_1 = \text{const}$ 的情况下一样，受扰区被一球面冲击波与未扰动区分开，该冲击波以公式 (14.4) 所决定的变速度 c 沿静止质点传播。

由强冲击波上的条件 (11.2) 以及公式 (14.4)，(1.1) 得到，在冲击波后量 V，$\mathscr{R}$ 和 $z = \gamma P/\mathscr{R}$ 有下列常数值：

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \frac{4}{(5-\omega)(\gamma+1)} = \frac{2\delta}{\gamma+1}, \\ \mathscr{R}_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \\ z_2 &= \frac{8\gamma(\gamma-1)}{(5-\omega)^2(\gamma+1)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

正如在 §3 中所证明的，在这种情况下存在能量积分 (3.11)。

将波面上的值 (14.5) 代入能量积分 (3.11) 的左端之后得到，右端的常数等于零。由此得出，z，V 平面上通过点 V_2，z_2 的积分曲线的方程具有如下形式：

$$z = \left[(\gamma-1)V^2\left(5 - \frac{2}{5-\omega}\right)\right] \Big/ \left\{2\left[\frac{2}{\gamma(5-\omega)} - V\right]\right\}$$
$$= \frac{(\gamma-1)V^2(V-\delta)}{2\left(\frac{\delta}{\gamma} - V\right)}. \tag{14.6}$$

根据物理上的分析知道 $z \geqslant 0$，所以容许的 V 值分布在区间

$$\frac{\delta}{\gamma}=\frac{2}{\gamma(5-\omega)}\leqslant V\leqslant\frac{2}{5-\omega}=\delta \qquad (14.7)$$

上，因为 $\gamma>1$，显然有不等式

$$\frac{1}{\gamma}<\frac{2}{\gamma+1}<1,$$

所以，按式（14.5） V_2 的值落在区间（14.7）上。积分曲线（14.6）的两个端点

$$\left(z=0,\ V=\frac{2}{5-\omega}\right)\text{和}\left(z=\infty,\ V=\frac{1}{\gamma}\frac{2}{5-\omega}\right)$$

是微分方程（5.10）的奇点。

还有，不难证明，当 $\gamma=1.4$ 或 $\gamma=5/3$ 和 ω 的值接近零时，属于积分曲线（14.6）的、坐标为

$$\frac{2}{3\gamma-1}=V^*,\quad \frac{2(\gamma-1)\left(\frac{2}{3\gamma-1}-\delta\right)}{(3\gamma-1)^2\left(\frac{\delta}{\gamma}-\frac{2}{3\gamma-1}\right)}=z^*$$

的奇点[1]$\mathscr{E}$位于区间（14.7）之外。当 $\omega=6-3\gamma$ 时此奇点与区间(14.7)的右端点重合，并当进一步增大 ω 时它沿积分曲线(14.6)向上升。当 ω 的值为下列式子决定的值时：

$$\frac{4}{(5-\omega)(\gamma+1)}=\frac{2}{3\gamma-1}\ \text{或}\ \omega=\frac{7-\gamma}{\gamma+1} \qquad (14.8)$$

(当 $\gamma=1.4$ 时 $\omega=7$，当 $\gamma=5/3$ 时 $\omega=2$)，该奇点与冲击波阵面后的 V_2，z_2 值重合。

容易看出，在任何 ω 时奇点 V^*，z^* 都对应常微分方程组(2.1)—(2.3)的下列简单的精确解：

$$V=V^*=\text{const},\ z=z^*=\text{const},\ \mathscr{R}=B\lambda^{(\omega-3)V^*/(V^*-\delta)}$$

$$P=B\frac{z^*}{\gamma}\lambda^{(\omega-3)V^*/(V^*-\delta)}; \qquad (14.9)$$

此解在取有量纲自变量时对应偏微分方程的精确解：

1）参阅§5和图43。

$$\left.\begin{aligned} v &= V^* \frac{r}{t}, \\ \rho &= \frac{AB}{r^\omega} \lambda^{[(\omega-3)V^*]/(V^*-\delta)}, \\ p &= \frac{ABz^*}{\gamma r^{\omega-2} t^2} \lambda^{[(\omega-3)V^*]/(V^*-\delta)}. \end{aligned}\right\} \tag{14.10}$$

其中 B 是任意常数。公式 (14.10) 给出当

$$\omega = \frac{7-\gamma}{\gamma+1}$$

时的强爆炸问题的解[1]。

在此情况下，由冲击波上的条件确定出常数 B 之后，就得到

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{3\gamma-1} \frac{r}{t}, \\ \rho &= \frac{A(\gamma+1)}{r^\omega(\gamma-1)} \lambda^{3/(\gamma+1)}, \\ p &= \frac{A}{r^{\omega-2} t^2} \frac{2(\gamma+1)}{(3\gamma-1)^2} \lambda^{3/(\gamma+1)}, \end{aligned}$$

或者将速度、密度和压力除以冲击波后的相应的量，就得到

$$\frac{v}{v_2} = \lambda, \quad \frac{\rho}{\rho_2} = \lambda, \quad \frac{p}{p_2} = \lambda^3. \tag{14.11}$$

由这些公式知道，在此情况下运动能延续到对称中心，并且在对称中心密度和压力等于零。

不难看出，当点 V^*, z^* 沿积分曲线 (14.6) 通过点 V_2, z_2 时，随 ω 的改变微商 $d\ln\lambda/dV$ 在点 V_2, z_2 处改变符号。由此得知，当由冲击波向对称中心运动时——当 λ 减小时，若 $V_2 < V^*$，则必须沿积分曲线 (14.6) 向上移动；若 $V_2 > V^*$，则向下移动（见图 43）。在第一种情况下，当趋近奇点 $V = 2/\gamma(5-\omega)$, $z=\infty$ 时参数 λ 趋近于零，则运动被一直确定到对称中心；在第二种情况下，必须沿着积分曲线朝下移向奇点 $V = 2/(5-\omega)$, $z = 0$，在该点参数 λ 取有限值[2]。

1) ω 与 γ 之间相应的关系式，对 $\nu = 2$ 时的柱面波为 $\omega = 4/(\gamma+1)$，而对 $\nu=1$ 时的平面波，若 $\gamma \neq -1$ 则为 $\omega = 1$.

2) 由给出解的公式(14.14),(14.15) 可直接看出这一点.

容易确定与熵有关的组合 p/ρ^γ 对于初始半径 r_0 的依赖关系。根据冲击波上的条件 (11.2) 和公式 (14.4) 得到：

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{2(1-\gamma)^\gamma}{(\gamma+1)^{\gamma+1}} \rho_1^{1-\gamma},$$

$$c^2 = \frac{8(\gamma-1)^\gamma A^{-\gamma} E_0}{(\gamma+1)^{\gamma+1}(5-\omega)^2\alpha} r_0^{\gamma\omega-3}. \qquad (14.12)$$

我们将利用关系式 (14.12) 来确定 r_0/r_2 为参量 V 的函数。

有趣地指出，若 $\omega < 3/\gamma$，则随着冲击波沿质点的传播波阵面后的熵逐步减小；若 $\omega = 3/\gamma$，则熵保持为常数；若 $\omega > 3/\gamma$，则熵增加。

在区间

$$\frac{3}{\gamma} < \omega < 3$$

内，冲击波减速，而这时波阵面后的熵增加。这是因为：虽然冲击波减弱和波阵面后的压力下降，但密度下降得如此之多，以致使得熵增加。在这种效应下，若

$$\frac{3}{\gamma} < \omega \leqslant \frac{7-\gamma}{\gamma+1},$$

则气体的受扰运动遍及冲击波球面以内的整个空间——一直到对称中心；如果

$$\frac{7-\gamma}{\gamma+1} < \omega < 3,$$

则在爆心附近形成真空。

再来讨论冲击波阵面后温度 T_2 的性状。考虑到冲击波面上的条件 (11.2)，得到

$$RT_2 = \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} c^2, \qquad (14.13)$$

其中 R 是气体常数。温度 T_2 与 c^2 成正比，因而对所讨论的气体运动冲击波阵面后的温度只当 c^2 增长时亦即 $\omega > 3$ 时才可能增长。

利用方程 (5.10) 的积分 (14.6)，由方程 (5.11) 和 (5.12) 通

过简单求积就可以确定 $\lambda(V)$ 和 $\mathscr{R}(V)$，这就使我们得以用封闭的、简单的形式求得所研究问题的完全解。

这个解由以下公式给出：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{r}{r_2}=\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{4}V\right]^{-\frac{2}{5-\omega}}\\
&\quad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma(5-\omega)}{2}V-1\right)\right]^{-\alpha_2}\\
&\quad\times\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{7-\gamma-(\gamma+1)\omega}\left(1-\frac{3\gamma-1}{2}V\right)\right]^{-\alpha_1},\\
&\frac{r_0}{r_2}=\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{4}V\right]^{-\frac{2}{5-\omega}}\\
&\quad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma(5-\omega)}{2}V-1\right)\right]^{\alpha_4}\\
&\quad\times\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{7-\gamma-(\gamma+1)\omega}\left(1-\frac{3\gamma-1}{2}V\right)\right]^{\alpha_1}\\
&\quad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{5-\omega}{2}V\right)\right]^{-\left(\alpha_4+\alpha_1-\frac{2}{5-\omega}\right)},\\
&\frac{v}{v_2}=f=\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{4}V\frac{r}{r_2},\\
&\frac{\rho}{\rho_2}=g=\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{4}V\right]^{\frac{2\omega}{5-\omega}}\\
&\quad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{5-\omega}{2}V\right)\right]^{\alpha_3}\\
&\quad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma(5-\omega)}{2}V-1\right)\right]^{\alpha_3+\omega\alpha_2}\\
&\quad\times\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{7-\gamma-(\gamma+1)\omega}\left(1-\frac{3\gamma-1}{2}V\right)\right]^{\alpha_4+\omega\alpha_1},\\
&\frac{p}{p_2}=h=\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{4}V\right]^{\frac{0}{5-\omega}}\\
&\quad\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{5-\omega}{2}V\right)\right]^{\alpha_3+1}\\
&\quad\times\left[\frac{(5-\omega)(\gamma+1)}{7-\gamma-(\gamma+1)\omega}\right.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.14)
$$

$$\times\left(1-\frac{3\gamma-1}{2}V\right)\Big]^{\alpha_4+\alpha_1(\omega-2)},$$

$$\frac{T}{T_2}=\frac{p}{p_2}\frac{\rho_2}{\rho},$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1&=\frac{(5-\omega)\gamma}{3\gamma-1}\left[\frac{2(6-3\gamma-\omega)}{\gamma(5-\omega)^2}-\alpha_2\right],\\
\alpha_2&=\frac{1-\gamma}{(2\gamma+1-\gamma\omega)},\\
\alpha_3&=\frac{-\omega+3}{(2\gamma+1-\gamma\omega)},\\
\alpha_4&=\frac{(5-\omega)(3-\omega)\alpha_1}{(6-3\gamma-\omega)},\\
\alpha_5&=\frac{\omega(1+\gamma)-6}{(6-3\gamma-\omega)},\\
\alpha_6&=\frac{\gamma}{(2\gamma+1-\gamma\omega)},\\
\alpha_7&=\frac{(3\gamma-1)\alpha_1}{(6-3\gamma-\omega)}.
\end{aligned}\right\}\quad(14.15)$$

公式（14.14）给出欧拉观点和拉格朗日观点的完全解。这些公式表明，对不同的爆炸能量 E_0 的值，运动的无量纲特征量的分布都是相同的。对于参量 γ 和 $\omega_i(i=1,2,3)$的某些值

$$\omega_1=\frac{7-\gamma}{\gamma+1},\quad \omega_2=\frac{2(\gamma-1)+3}{\gamma},\quad \omega_3=3(2-\gamma),$$

在这些值下或者公式（14.14）右边部分的系数或者指数 $\alpha_j(j=1,2,\cdots,7)$变为无穷大，可以将描述强爆炸问题解的公式(14.14)，(14.15) 写为另外的形式，以便于计算我们感兴趣的所有运动特征量。

对 $\omega=\omega_1$ 的第一种特殊情况，问题的解以前已研究过，由公式（14.11）给出。现在来研究在 $\omega=\omega_2$（这时指数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_6$ 变为无穷大）和 $\omega=\omega_3$（这时指数 $\alpha_4,\alpha_5,\alpha_7$ 变为无穷大）两种情况

下解的形式.在这两种情况下可以这样得到解的形式,即或者对解(14.14)在 $\omega \to \omega_i$ $(i = 2, 3)$ 下取极限,或者将 $\omega = \omega_i$, $\delta = \delta_i$ $(\delta_i = 2/(5 - \omega_i)$ 代入微分方程组(5.10)和边界条件(14.5)直接由方程求得。

若做完计算[1],则在 $\omega = \omega_2$ 时求得

$$\frac{r}{r_2} = \left[\frac{(\gamma+1)(5-\omega_2)}{4} V\right]^{-\frac{2\gamma}{3\gamma-1}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\delta_2} V - 1\right)\right]^{\frac{\gamma-1}{3\gamma-1}} \times \exp\left[-\frac{\gamma+1}{3\gamma-1} \frac{\frac{2\delta_2}{\gamma+1} - V}{V - \frac{\delta_2}{\gamma}}\right],$$

$$\frac{\rho}{\rho_2} = \left(\frac{(\gamma+1)(5-\omega_2)}{4} V\right)^{\frac{2(1+\gamma)}{3\gamma-1}} \times \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1 + \frac{V}{\delta_2}\right)\right]^{\frac{1-2\gamma}{3\gamma-1}} \times \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\delta_2} V - 1\right)\right]^{\frac{1-2\gamma}{3\gamma-1}} \exp\frac{2(\gamma+1)}{1-3\gamma} \frac{\frac{2\delta_2}{\gamma+1} - V}{V - \frac{\delta_2}{\gamma}},$$

$$\frac{p}{p_2} = \left(\frac{(\gamma+1)(5-\omega_2)}{4} V\right)^{\frac{6\gamma}{3\gamma-1}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{V}{\delta_2} - 1\right)\right]^{\frac{\gamma}{3\gamma-1}} \times \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma V}{\delta_2} - 1\right)\right]^{-\frac{3\gamma}{3\gamma-1}}.$$

r_0/r_2 对 V 的依赖关系容易由关系式(14.12)求出,而 v/v_2 的公式由(14.14)求出。在第三种情况下,即当 $\omega = \omega_3$ 时,函数 r/r_2, ρ/ρ_2, p/p_2 的解可以写为这样的形式:

1) 在下列书和论文中给出了描述 $\omega = \omega_i$ 时解的公式的详细推导: Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В., Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961; Коробейников В. П., Рязанов Е. В., Представление решения задачи о точечном взрыве в газе в особых случаях. ПММ, т. 23, вып. 2, 1959, стр. 384—387.

$$\frac{r}{r_2}=\left[\frac{(\gamma+1)(5-\omega_3)}{4}V\right]^{-\delta_3}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{V}{\delta_3}\right)\right]^{-\frac{\gamma}{3\gamma-1}}$$
$$\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\delta_3}V-1\right)\right]^{\frac{\delta_3}{2}},$$
$$\frac{\rho}{\rho_2}=\left[\frac{(\gamma+1)(5-\omega_3)}{4}V\right]^{\frac{6(2-\gamma)}{3\gamma-1}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{V}{\delta_3}\right)\right]^{\frac{3\gamma-5}{3\gamma-1}}$$
$$\times\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\delta_3}V-1\right)\right]^{\frac{3(\gamma-1)}{3\gamma-1}}$$
$$\exp\left[-\frac{3\gamma(\gamma+1)}{3\gamma-1}\frac{\frac{2\delta_3}{\gamma+1}-V}{\delta_3-V}\right],$$
$$\frac{p}{p_2}=\left[\frac{(\gamma+1)(5-\omega_3)}{4}V\right]^{\frac{6}{3\gamma-1}}\left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1-\frac{1}{\delta_3}V\right)\right]^{\frac{2(2\gamma-3)}{3\gamma-1}}$$
$$\times\exp\left[-\frac{3\gamma(\gamma+1)}{3\gamma-1}\frac{\frac{2\delta_3}{\gamma+1}-V}{\delta_3-V}\right].$$

在图 102，103 和 104 上给出了当 $\gamma=1.4$ 时 $\omega=2,1,0,-1,-2,7/3$ 诸情况下的曲线 $v/v_2=f(\lambda,\omega)$，$\rho/\rho_2=g(\lambda,\omega)$，

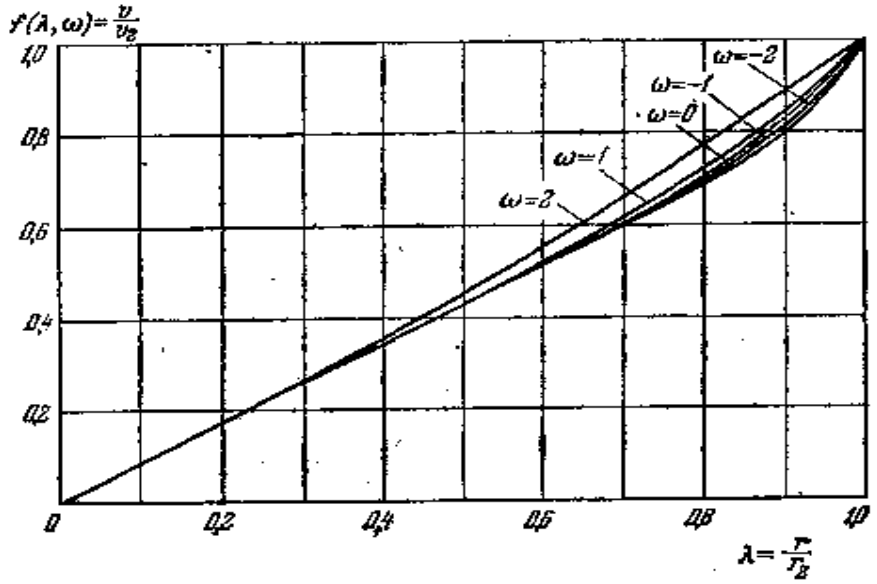


图 102　在初始密度按规律 $\rho_1=A/r_0^\omega$ 分布的气体中点爆炸时的速度场。$\gamma=1.4$。在 $\omega\leqslant 7/3$ 的情况下运动延续到对称中心

$p/p_2 = h(\lambda, \omega)$. 在所有这些情况下气体的运动都一直延续到对称中心。

在图 105，106，107 上给出了 $\gamma = 7/5$ 时 $\omega = 7/3$，2.5，3，3.5 情况下的以及 $\gamma = 5/3$ 时 $\omega = 2$，2.5，3，3.5 情况下的曲线。对每一个 γ 在后三种情况下都在爆心附近形成真空［不包含质量（其运动正被研究）的区域］。

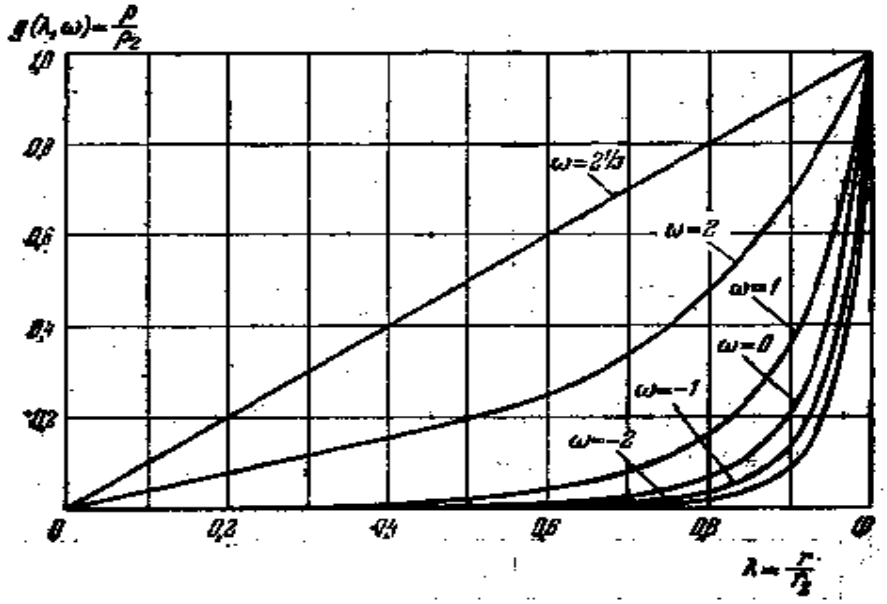


图 103　在初始密度按规律 $\rho_1 = A/r_0^\omega$ 分布的气体中点爆炸时的密度场，$\gamma = 1.4$，在 $\omega \leqslant 7/3$ 的情况下运动延续到对称中心

当 $\omega < (7-\gamma)/(\gamma+1)$ 时在爆心附近下列渐近公式成立：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{v}{v_2} = \frac{\gamma+1}{2\gamma}\frac{r}{r_2},\\
&\frac{p}{p_2} = \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{\frac{6}{5-\omega}}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{\alpha_5+1}\left(\frac{\omega-\frac{2\gamma+1}{\gamma}}{\omega-\frac{7-\gamma}{\gamma+1}}\right)^{\alpha_4+\alpha_2(\omega-2)},\\
&\frac{\rho}{\rho_2} = \left(\frac{r}{r_2}\right)^{-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}-\omega}\left(\frac{\gamma+1}{\gamma}\right)^{\alpha_5}\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)^{-\frac{2}{5-\omega}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}\\
&\qquad\cdot\left[\left(\omega-\frac{2\gamma+1}{2}\right)\Big/\left(\omega-\frac{7-\gamma}{\gamma+1}\right)\right]^{\alpha_4-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\alpha_3}.
\end{aligned}\right\}\quad(14.16)$$

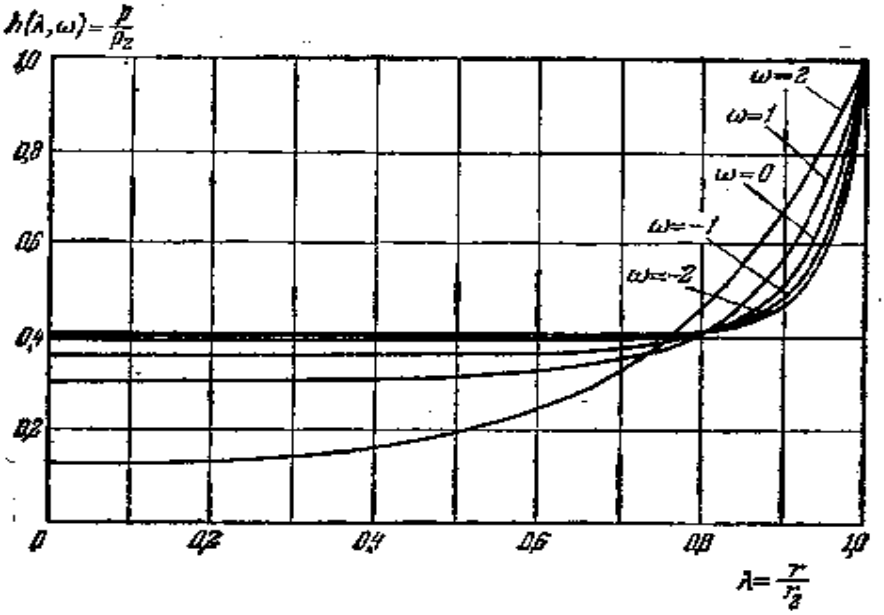


图 104　在初始密度按规律 $\rho_1 = A/r_0^{\omega}$ 分布的气体中点爆炸时的压力场，$\gamma = 1.4$。在 $\omega \leqslant 7/3$ 的情况下运动延续到对称中心

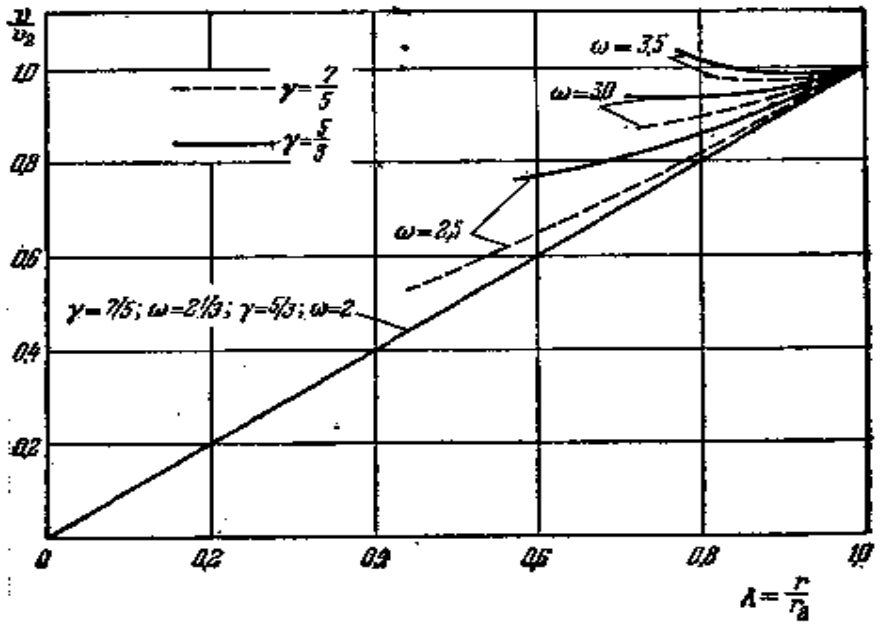


图 105　在初始密度按规律 $\rho_1 = A/r_0^{\omega}$ 分布的气体中点爆炸时的速度场。$\gamma = 7/5$ 时 $\omega \geqslant 7/3$；$\gamma = 5/3$ 时 $\omega \geqslant 2$

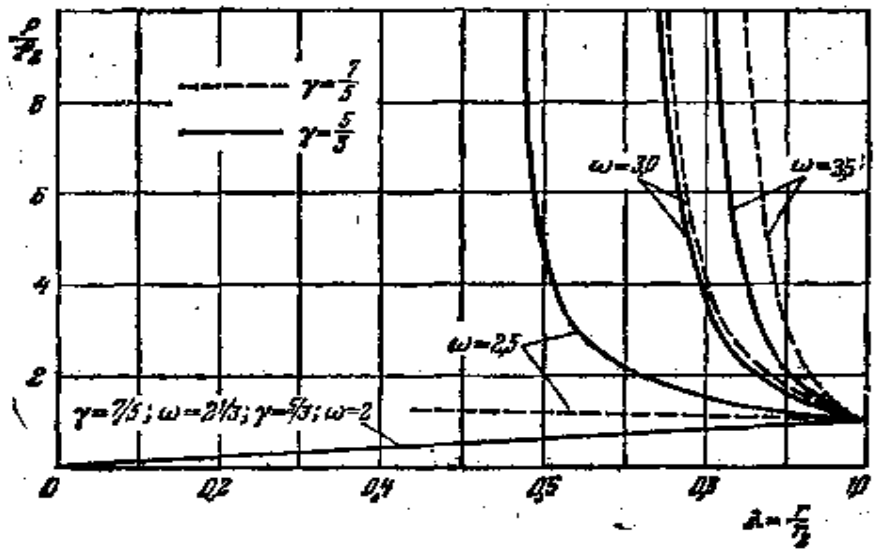


图 106　在初始密度按规律 $\rho_1 = A/r_0^\omega$ 分布的气体中点爆炸时的密度场

$\gamma = 1.4$ 时 $\omega \geqslant 7/3$; $\gamma = 5/3$ 时 $\omega \geqslant 2$

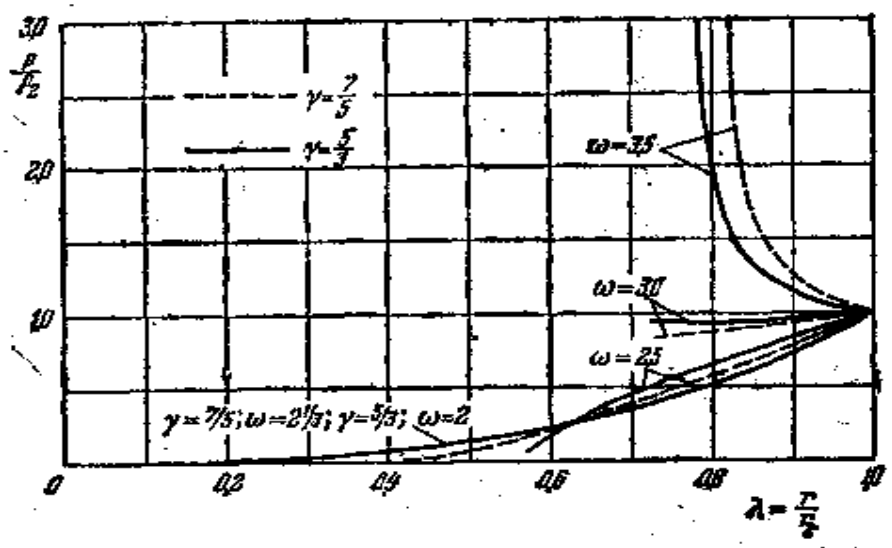


图 107　在初始密度按规律 $\rho_1 = A/r_0^\omega$ 分布的气体中点爆炸时的压力场

$\gamma = 1.4$ 时 $\omega \geqslant 7/3$; $\gamma = 5/3$ 时 $\omega \geqslant 2$

由公式 (14.16) 得知，若 $\omega < 3/\gamma$，则当 $r \to 0$ 时密度迅速趋于零，压力却不为零；但是当 $\omega \to (7-\gamma)/(\gamma+1)$ 时中心处的压力趋于零．当 $\omega = (7-\gamma)/(\gamma+1)$ 时渐近公式与精确公式相重合并由等式 (14.11) 给出．

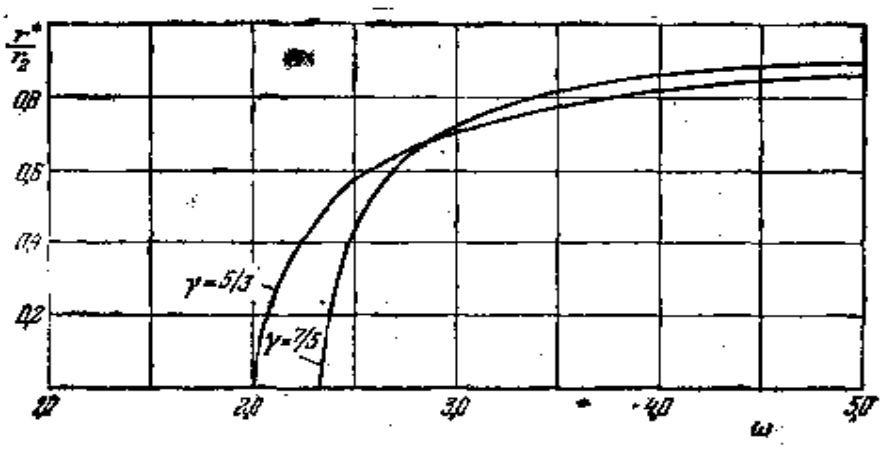


图 108　r^*——内边界球的半径，r——冲击波球的半径。
当 $\gamma = 1.4$ 和 $\gamma = 5/3$ 时比值 r^*/r_2 随规律 $\rho_1 = A/r_0^{\omega}$ 中的指数 ω 的变化

若 $\omega > (7-\gamma)/(\gamma+1)$，则形成由爆心向外膨胀的真空，在其边界上 $V = 2/(5-\omega)$，并且下列渐近公式成立：

$$\left.\begin{aligned} \frac{v}{v_2} &= \frac{\gamma+1}{2}\frac{r^*}{r_2}, \\ \frac{\rho}{\rho_2} &= A\left(\frac{r}{r_2}-\frac{r^*}{r_2}\right)^{\alpha_3}, \\ \frac{p}{p_2} &= B\left(\frac{r}{r_2}-\frac{r^*}{r_2}\right)^{\alpha_3+1}, \end{aligned}\right\} \tag{14.17}$$

其中

$$\frac{r^*}{r_2} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{2}{5-\omega}}(\gamma+1)^{-\alpha_2}\left(\frac{3\gamma+\omega-6}{\omega-\dfrac{7-\gamma}{\gamma+1}}\right)^{-\alpha_1},$$

$$A = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{2\omega}{5-\omega}}(\gamma+1)^{\alpha_3+\omega\alpha_2}\left(\frac{3\gamma+\omega-6}{\omega-\dfrac{7-\gamma}{\gamma+1}}\right)^{\alpha_4+\omega\alpha_1}$$

$$\times\left[\frac{\gamma(1-\gamma)}{(\gamma+1)(3\gamma+\omega-6)}\right]^{-\alpha_5}\left(\frac{r^*}{r_2}\right)^{-\alpha_5},$$

$$B = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{6}{5-\omega}}\left(\frac{3\gamma+\omega-6}{\omega-\dfrac{7-\gamma}{\gamma+1}}\right)^{\alpha_6+\alpha_3(\omega-2)}$$

$$\times\left[\frac{\gamma(1-\gamma)}{(\gamma+1)(3\gamma+\omega-6)}\right]^{-(\alpha_5+1)}\left(\frac{r^*}{r_2}\right)^{-(\alpha_4+1)},$$

并且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 按公式 (14.15) 确定，这里 r^* 是 $V = 2/(5-\omega)$ 时的半径，在半径为 r^* 的相应的球内为真空。比值 r^*/r_2 随 ω 的变化给于图 108。

当 $\omega < 3$ 时，$r = r^*$ 处的压力等于零；当 $\omega < 6/(1+\gamma)$ 时密度等于零；$\omega > 6/(\gamma+1)$ 时密度等于无穷大。当 $\omega > 3$ 时，内边界上的压力等于无穷大。

根据已建立的渐近公式知道，受扰运动的能量在 $\omega < 3$ 时是有限的。还容易看出，当 $\omega > 3$ 时受扰运动的能量为无穷大，因为在 $r = r^*$ 处压力始终为无穷大，所以在该边界上对气体做的功等于无穷大[1]。

§15. 速度与至对称中心的距离成正比时的气体不定常运动[2]

我们来研究在下述的球面、柱面和平面对称情况下 ($\nu = 1, 2, 3$) 的完全气体的不定常绝热运动，在这些情况中速度分布表示为公式[3]

$$v = r\Phi(t), \tag{15.1}$$

其中 r 是到对称中心的距离。

在自模拟运动中，如果主定常数的独立量纲具有形式：

$$[a] = \mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s \text{ 和 } [b] = \mathrm{T}(m = 0),$$

---

1) 在以下论文中得到了在初始密度按某种特殊规律分布时爆炸问题的精确解：Коробейников В. П., Точное решение нелинейной задачи о взрыве в газе при переменной начальной плотности. ДАН СССР, т. 117, № 6, 1957, стр. 947—949.

2) 这个解的公式第一次发表于我们的下述论文中：«Об интегрировании уравнений одномерного движения газа». ДАН СССР, т. 90, № 5, 1953, стр. 735. 这些运动的分类和详细研究发表于本书的第三版中 (1954).

3) 由运动方程，根据假设 $v = f_1(r)f_2(t)$，如果 $f_2 \neq \mathrm{const}$，就可以导出公式(15.1).

从而，自变量为 $\lambda = t/b$，则速度分布的公式 (15.1) 成立. 在任意的 a 和 b 的一般情况下，在相应的自模拟运动中存在形式为 (15.1) 的特定的解。譬如，对应 $V = V^* = \text{const}$ 的解具有 (15.1) 的形式：

$$v = \frac{r}{t} V^* \tag{15.2}$$

所以，与 z, V 平面上具有常数值 z^* 和 V^* 的奇点相对应的特殊解，属于所讨论的类型。

我们要提醒，下面一些解都具有 (15.1) 形式的速度分布：在变密度 $\rho_1 = A/r^\omega$ 的介质中当

$$\omega = \frac{3(\gamma + 1)}{3\gamma - 1}$$

时爆轰波传播问题的解[公式 (8.4)]；当 $\rho_1 = \text{const}$ 和 $\gamma = 7$ 时强点爆炸问题的解[公式 (11.21)]；在 $\omega = (7 - \gamma)/(\gamma + 1)$ 时的变密度的介质中强点爆炸问题的解[公式 (14.11)]。

我们要指出，在所有上述问题中，(15.1) 形式的解乃是把延续到对称中心的解与在对称中心附近形成膨胀真空的解分离开的极限解。

如果不考虑牛顿引力，则根据公式 (15.1)，对完全气体的绝热运动由方程 (1.3) 容易求出待求类型的解的公式是

$$\left.\begin{aligned} dt &= \pm \frac{d\mu}{\mu^2[A + B\mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2}}, \\ v &= \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} r = \mp \mu[A + B\mu^{\nu(\gamma-1)}]^{1/2} r, \\ \rho &= \frac{\mu^{\nu-1}}{r} \varphi'(\mu r), \\ p &= \mu^{\gamma\nu}\left\{C + \frac{(\gamma-1)\nu}{2} B\varphi(\mu r)\right\}, \end{aligned}\right\} \tag{15.3}$$

其中 A, B 和 C 是任意常数，$\varphi(\mu r)$ 是其自变量的任意函数. 不失一般性，函数 $\mu(t)$ 总可以认为是正的。

所以，公式 (15.3) 确定方程 (1.3) 的精确解，该解依赖于任

意函数 $\varphi(\mu r)$ 和三个任意常数 A, B, C.

因为密度 ρ 是正的，所以函数 $\varphi'(\mu r)$ 应满足条件

$$\varphi'(\mu r) > 0.$$

由公式 (15.3) 得出，

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \Phi(r\mu) = \frac{\left[C + \dfrac{\gamma-1}{2} vB\varphi(\mu r)\right](\mu r)^\gamma}{\varphi'^\gamma(\mu r)}. \qquad (15.4)$$

因为在质点上熵为常数，所以，所求得的解其特点是

$$r = \frac{F(\xi)}{\mu(t)},$$

其中 ξ 是拉格朗日坐标. 函数 $\mu(t)$ 由方程 (15.3) 中的第一式决定。这个依赖于常数值 A 和 B 的函数完全确定了气体所有质点的运动规律。

以 ξ 记气体质点在某时刻 t_0 的坐标 r，t_0 对应于值 $\mu(t_0)=\mu_0$. 显然下列等式成立：

$$F(\xi) = \mu_0\xi,$$

从而，气体各质点的运动规律可以写为如下形式：

$$r = \frac{\mu_0}{\mu(t)}\xi, \quad v = \frac{dr}{dt} = -\frac{\mu_0\mu'(t)}{\mu^2(t)}\xi. \qquad (15.5)$$

公式 (15.5) 也可直接由 (15.3) 的第二式得出。

由式 (15.4) 得知，任意函数 $\varphi(\mu r)$ 直接与沿气体质点上的分布规律有关。

由 (15.3) 的后两个公式得知，对于任何时刻压力和密度之间有下列关系式：

$$\frac{\partial p}{\partial r} = B\frac{\gamma-1}{2} v\mu^{\nu(\gamma-1)+2} r\rho. \qquad (15.6)$$

质点上的和给定空间点上的压力梯度，通过 μ 依赖于时间. 当 $B>0$ 时压力随 r 一起增长，当 $B<0$ 时压力随着由中心向外边界球面的移近而下降。

对依赖关系 $r(t)$ 可能有三种有代表性的情况：

I. $A>0$, $B>0$ } 压力随到对称中心
II. $A<0$, $B>0$ } 距离的增大而增大。

III. $A>0$, $B<0$——压力随到对称中心的距离的增大而下降。

在情况 I 中可以将式（15.3）的第一式和式（15.5）写为下列形式：

$$\begin{cases}\tau=\sqrt{A}\,\mu_0 t=\mp\int_0^y\sqrt{\dfrac{y^{\nu(\gamma-1)}}{1+y^{\nu(\gamma-1)}}}\,dy,\\ y=\dfrac{\mu_0}{\mu}=\dfrac{r}{\xi},\quad \text{其中}\ \mu_0=\left(\dfrac{A}{B}\right)^{\frac{1}{\nu(\gamma-1)}}.\end{cases}\tag{15.7}$$

由这些公式得知，在图109上示出的不同 ν 的普适曲线 $y(\tau)$，使得我们容易得到 $A>0$ 和 $B>0$ 时的每个质点的运动规律。

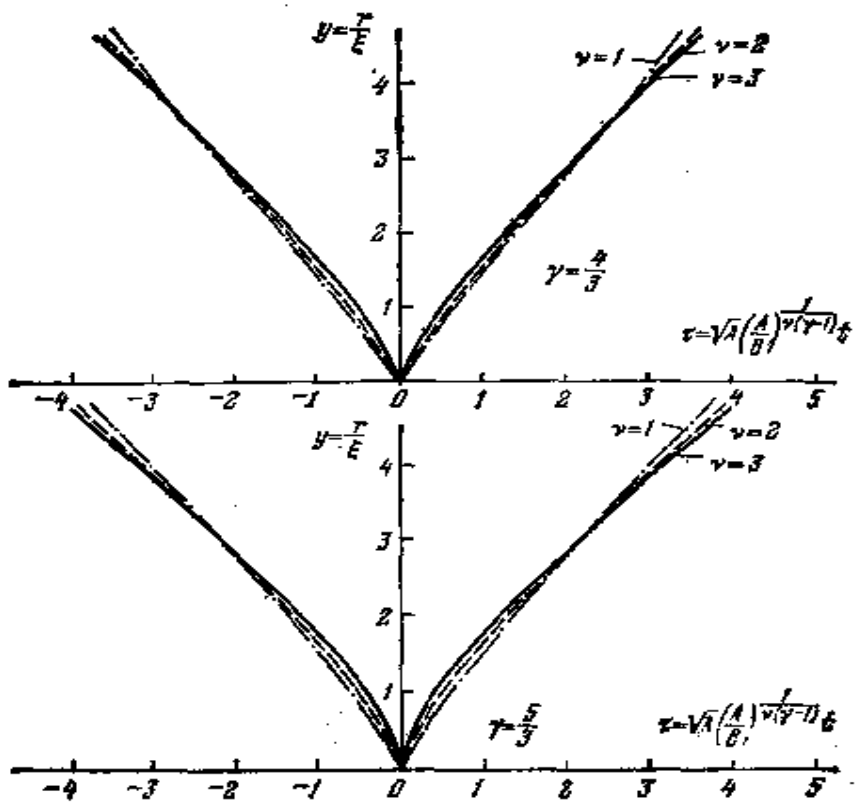


图 109　在 $A>0$ 和 $B>0$ 的情况 I 中气体质点的运动规律
当 $t<0$ 时，在中心聚焦；当 $t>0$ 时，向无穷远飞散

当 $\tau = t = 0$ 时气体的全部质点聚集于对称中心，当 t 增长时发生飞散，飞散是以无穷大速度开始。当 $y = 1$ 时，对不同的质点，坐标 r 等于 ξ. 相应的时刻由下式求出：

$$\tau = \int_0^1 \sqrt{\frac{y^{\nu(\gamma-1)}}{1 + y^{\nu(\gamma-1)}}}\, dy.$$

当 $\tau \to \infty$ 时有 $y \to \infty$ 和 $\mu \to 0$，这时每个质点的速度在取极限时趋于有限值。

因为 $\lim_{\tau\to\infty} dy/d\tau = 1$，故 $dr/dt = \xi\sqrt{A}\,\mu_0$.

对每个质点 $r\mu = \text{const}$，所以根据式 (15.3) 容易看出，当 $t = 0$ 和 $\mu = \infty$ 时密度和压力等于无穷大，而当 $t \to \infty$ 时，这时 $\mu \to 0$，它们趋于零。

在情况II中可以把式 (15.3) 中的第一式和式 (15.5) 写为类似的形式：

$$\left.\begin{aligned} &\tau = \sqrt{|A|}\,\mu t = \mp \int_0^y \sqrt{\frac{y^{\nu(\gamma-1)}}{1 - y^{\nu(\gamma-1)}}}\, dy, \\ &y = \frac{\mu_0}{\mu} = \frac{r}{\xi}, \text{ 其中 } \mu_0 = \left(\frac{|A|}{B}\right)^{\frac{1}{\nu(\gamma-1)}}. \end{aligned}\right\} \tag{15.8}$$

对不同 ν 的相应的普适曲线示于图 110. 在 $t = 0$ 时刻附近，情况 I 和 II 完全类似。

但是随后在飞散过程中，与情况 I 不同，坐标 r 具有最大值，等于 $\xi(y = 1)$. 所有的质点在时刻 τ^* 时同时达到这一状态，τ^* 由下式确定：

$$\tau^* = \sqrt{|A|}\,\mu_0 t^* = \int_0^1 \sqrt{\frac{y^{\nu(\gamma-1)}}{1 - y^{\nu(\gamma-1)}}}\, dy.$$

在 τ^* 时刻全部质点停止运动，而在下一时刻在压力梯度的作用下产生向中心的反向运动，结果，全部质点在 $2\tau^*$ 时刻同时到达对称中心。

当时间进一步增长时，可以设想是重复这一过程. 我们得到气体周期脉动的例子。

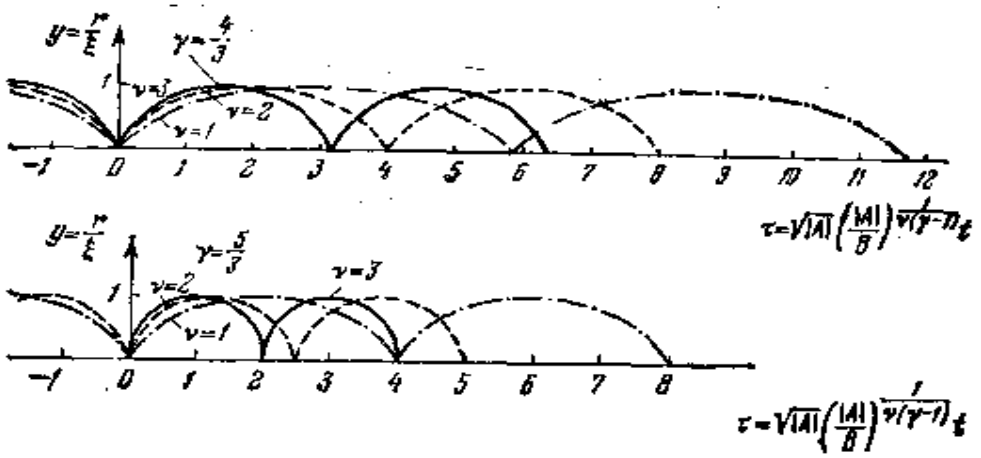


图 110　在 $A<0$ 和 $B>0$ 的情况 II 中气体质点的运动规律
从 $t=0$ 时刻开始自中心飞散，然后在有限距离上停止，此后在中心聚焦

最后，在情况 III 中可以把式 (15.3) 中的第一式和式 (15.5) 写为形式：

$$\left.\begin{aligned}&\tau=\sqrt{A}\left(\frac{A}{|B|}\right)^{\frac{1}{\nu(\gamma-1)}}t=\mp\int_1^y\sqrt{\frac{y^{\nu(\gamma-1)}}{y^{\nu(\gamma-1)}-1}}\,dy,\\&y=\frac{\mu_0}{\mu}=\frac{r}{\xi},\ \text{其中}\ \mu_0=\left(\frac{A}{|B|}\right)^{1/\nu(\gamma-1)}.\end{aligned}\right\}\quad(15.9)$$

对不同 ν 的相应的普适曲线 $y(\tau)$ 示于图 111。

当 $\tau=t=0$ 时有 $y=1$ 和 $d\mu/dt=0$。拉格朗日坐标 ξ 代表坐标 r 在该时刻的值，并且在 $t=0$ 时刻全部质点静止不动。当 $t<0$ 时质点是向对称中心运动的，在 $t=0$ 时刻运动停止，而随后开始飞散。在情况 I 和 II 中在 $t=0$ 时刻聚集于对称中心的气体发生飞散。

在所讨论的情况 III 中，在空间上分布着静止气体的质量，它们在 $t=0$ 时刻开始飞散，因为按照式 (15.6) 当 r 增大时压力下降。

如果当 $\nu=3$ 时在某一个球上（当 $\nu=2$ 时在柱上和当 $\nu=1$ 时在平面上）括号 $\left\{C+\frac{(\gamma-1)\nu}{2}B\varphi(r\mu)\right\}$ 中的式子变为零，则在这个由同样的气体质点组成的运动的球上，压力始终等于零。这一球面必须看作是该球内的气体的飞散质量与真空分开的外边

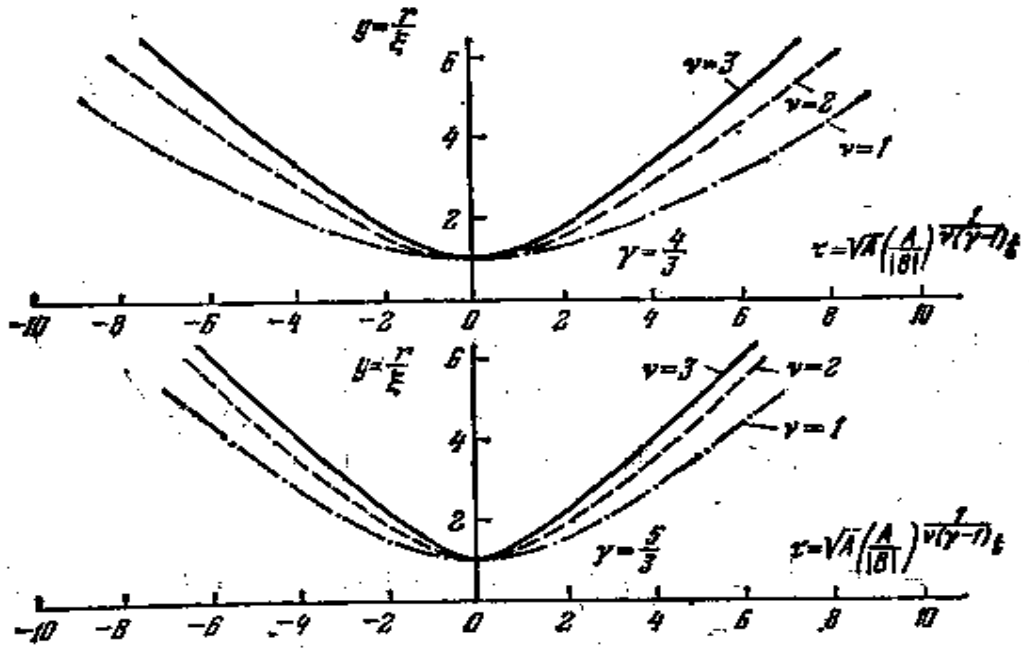


图 111　在 $A>0$ 和 $B<0$ 的情况 III 中气体质点的运动规律
当 $t<0$ 时由无穷远向中心运动并且在 $t=0$ 时全部质点在距中心有限的距离上停止运动；当 $t>0$ 时向无穷远处飞散

界。

所以，在密度和压力的初始分布由关系式（15.6）相联系的情况下所求出的解能以简单的解析形式求出气体向真空飞散的问题的精确解.

作为例子我们将函数 $\varphi(r\mu)$ 取为下列特殊形式：

$$\varphi(r\mu)=\frac{\rho_0}{\mu_0^{\nu}}\frac{(r\mu)^2}{2}.$$

这时，对密度和压力的分布有公式

$$\rho=\rho_0\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{\nu}=\frac{\rho_0}{y^{\nu}},$$

$$p=\left[C-A\rho_0\mu_0^{-\nu\gamma}\frac{(\gamma-1)\nu}{4}(r\mu)^2\right]\mu^{\gamma\nu}.$$

结果，密度与几何坐标无关并且随时间的增长而下降。压力按抛物线规律分布。与真空交界的膨胀球的半径由下式确定：

$$r^* = \sqrt{\frac{4C}{A\rho_0\nu(\gamma-1)\mu_0^{\nu\gamma}}}\,\frac{1}{\mu}.$$

我们再来考察 $A=0$ 或 $B=0$ 两种情况.若 $A=0$ 和 $B>0$，则

$$\mu = \left[\pm\sqrt{B}\,t\left(1+\frac{\nu(\gamma-1)}{2}\right)\right]^{-1/\left(1+\frac{\nu(\gamma-1)}{2}\right)}$$

$$= \mu_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{2}{2+\nu(\gamma-1)}}. \tag{15.10}$$

因而，$r\mu=\xi\mu_0$，$r=\xi(t/t_0)^{2/[2+\nu(\gamma-1)]}$，其中 μ_0 和 t_0 是常数。气体的运动是自模拟的并且是对应情况 I 的运动。当 $t_0>0$ 时是飞散情况，当 $t_0<0$ 时则是向对称中心的运动。

若 $B=0$ 和 $A>0$，则

$$\mu = \mp\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{1}{t} = \mu_0\frac{t_0}{t},\quad r\mu=\xi\mu_0,\quad r=\xi\frac{t}{t_0}. \tag{15.11}$$

相应的运动也是自模拟的并属于类型 III，但是在此情况下当 $t=0$ 时气体的全部质点集中于对称中心。气体的每个质点以等于 ξ/t_0 的常速度运动。

根据公式 (15.3) 在此情况下我们有：

$$p = c_{-1}\left(\frac{\mu_0 t_0}{t}\right)^{\gamma\nu},\quad \rho = \left(\frac{\mu_0 t_0}{t}\right)^{\nu}\Phi(\mu_0\xi). \tag{15.12}$$

压力在整个空间上为常数并随时间而下降，每个质点上的密度反比于 t^ν 而下降。

在计及气体质点间的牛顿引力的完全气体运动的问题中，可以建立[1]类似于解 (15.3) 的精确解。若令 $\gamma=4/3$，则在 $\nu=3$ 时对方程组 (3.1)，(3.2)，(3.3) 和 (3.4) 我们有表为下列公式的解：

$$\left.\begin{aligned} dt &= \pm\frac{d\mu}{\mu^2(A+B\mu)^{1/2}},\\ v &= -\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}r,\quad r=\frac{\xi}{\mu(t)}, \end{aligned}\right\} \tag{15.13}$$

1) Лидов М. Л., Точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с учетом сил ньютонианского тяготения. ДАН СССР, т. 97, № 3, 1954, стр. 409—410.

$$\rho = \mu^3(t)\xi\Psi(\xi),$$
$$p = \mu^4(t)\Phi(\xi).$$

公式 (15.13) 和 $\gamma=4/3$ 及 $\nu=3$ 时的公式 (15.3) 完全类似，仅只由于函数 $\Psi(\xi)$ 和 $\Phi(\xi)$ 之间的关系式而出现差别，该关系式在存在引力时有形式：

$$\frac{d\Phi}{d\xi}\xi + 4\pi f\Psi(\xi)\int_0^\xi \eta^3\Psi(\eta)d\eta = \frac{B}{2}\xi^3\Psi(\xi), \qquad (15.14)$$

其中 A 和 B 是任意常数，而 $\Psi(\xi)$ 是任意函数。

显然，解 (15.13) 是上面所讨论的解 (15.3) 的直接推广。上面给出的解的分类在此情况下保持有效。引力的存在不改变气体运动的一般定性类型。

如果 γ 是任意的，则对于考虑引力的运动方程 (3.1)，(3.2)，(3.3) 和 (3.4)，在 $\nu=3$ 时容易指出一种自模拟运动，在其中速度是半径的线性函数[1]。只依赖于如下两个独立的有量纲常数的自模拟运动就是这种运动：一个常数具有在运动方程中出现的引力常数的量纲 $[f]=M^{-1}L^3T^{-2}$，另一个具有 t_0 的量纲，t_0 是某一特征时间。由一般分析得知，这个解应具有形式：

$$v = \frac{r}{t}V\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad \rho = \frac{1}{ft^2}\mathscr{R}\left(\frac{t}{t_0}\right),$$
$$p = \frac{r^2}{ft^4}P\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad \mathscr{M} = \frac{r^3}{ft^2}M\left(\frac{t}{t_0}\right). \qquad (15.15)$$

将公式 (15.15) 代入运动方程之后求得

$$\left.\begin{aligned} v &= -\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{d\tau}\frac{r}{t_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \\ \rho &= \frac{1}{ft_0^2}\mu^3(\tau), \quad \mathscr{M} = \frac{4\pi r^3}{3ft_0^2}\mu^3(\tau), \\ p &= \kappa\frac{r^2}{ft_0^4}\mu^{3\gamma+2}(\tau), \end{aligned}\right\} \qquad (15.16)$$

1) Станюкович К. П., Автомодельные движения газа в поле тяжести. ДАН СССР, т. 64, № 4, 1949, стр. 467—470; 再参阅 Rosseland S., The Pulsation Theory of Variable stars. Oxford, 1949.

其中 κ 是任意常数，而函数 $\mu(\tau)$ 通过求积确定：

$$\tau = \int \frac{d\mu}{\mu^2 \sqrt{\chi + \frac{8\pi}{3}\mu + \frac{4\kappa}{3(\gamma-1)}\mu^{3(\gamma-1)}}}, \qquad (15.17)$$

其中 χ 是任意常数。(15.16) 一族解显著地依赖两个无量纲常数 χ 和 κ.

容易看出，如果在公式 (15.16) 中将压力的公式换为新公式

$$p = \kappa \frac{r^2}{t^2 t_0^3} \mu^{3\gamma+2} + \beta \frac{r_0^2}{t^2 t_0^3} \mu^{3\gamma}, \qquad (15.18)$$

则一族解 (15.16) 可以扩大，公式中的 βr_0^2 是新的任意常数，具有长度平方的量纲。事实上，压力在冲量方程和绝热方程中出现.公式 (15.18) 中的附加项只依赖于时间，所以在冲量方程中被消去；在绝热方程中当引进附加项时，组合 p/ρ^γ 只在可加常数上发生变化，因此绝热方程也满足。

在所得到的一族解中各质点的运动规律由以下公式表示：

$$r = \frac{\mu(\tau_0)}{\mu(\tau)}\xi, \qquad (15.19)$$

其中 ξ 是拉格朗日坐标，当 $\tau = \tau_0$ 时 $\xi = r$. 对于不同的质点，坐标 r 对时间的依赖关系由同一个函数 $\mu(\tau)$ 表示。对不同的 χ 和 κ 值，函数 $\mu(\tau)$ 可以有不同的性质，其中包括，$\mu(\tau)$ 可以是在两个正值 μ_1 和 μ_2 之间振动的正周期函数，这里 μ_1 和 μ_2 是使积分 (15.17) 中根号内的式子

$$f_1(\mu, \kappa, \chi, \gamma) = \chi + \frac{8\pi}{3}\mu + \frac{4\kappa}{3(\gamma-1)}\mu^{3(\gamma-1)}$$

变为零的值。

现在来讨论函数 $f_1(\mu, \kappa, \chi, \gamma)$ 的性质。在 $\gamma > 4/3$ 的情况下，若 $\kappa > 0$，则随 μ 的增大 $f_1(\mu, \kappa, 0, \gamma)$ 由零单调地增长到无穷大，所以当 $\chi < 0$ 时只有一个正根。若 $\kappa < 0$ 和 $\chi = 0$，则有两个正根：

$$\mu_1^* = 0$$

和 $$\mu_2^* = \left[-\frac{2\varkappa(\gamma-1)}{\kappa}\right]^{1/(3\gamma-4)}.$$

在 μ_1^*, μ_2^* 的区间内，当 $\kappa<0$ 时函数 f_1 有极大值，它等于

$$\chi+\frac{8\varkappa}{9}\frac{3\gamma-4}{\gamma-1}\left(-\frac{2\varkappa}{3\kappa}\right)^{1/(3\gamma-4)}.$$

因而，如果

$$\gamma>\frac{4}{3},\quad \kappa<0$$

和 $$0>\chi>-\frac{8\varkappa}{9}\left(\frac{3\gamma-4}{\gamma-1}\right)\left(-\frac{2\varkappa}{3\kappa}\right)^{1/(3\gamma-4)},$$

则函数 $f(\chi,\kappa,\mu)$ 在 μ_1^*, μ_2^* 区间内有两个正根 μ_1 和 μ_2，对应的运动是周期性脉动。

在当 $\gamma\neq 4/3$ 时 $\chi=\kappa=0$ 或者当 $\gamma=4/3$ 时 $\chi=0$ 和 $\kappa\neq -2\varkappa(\gamma-1)$ 的情况下，公式 (15.17) 给出

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\varkappa+\dfrac{\kappa}{\gamma-1}}}\frac{1}{\mu^{3/2}}. \tag{15.20}$$

可加常数和根号前的符号不重要，因为它们决定起时间的始点和变化方向。若 $\gamma=4/3$, $\kappa=-2\varkappa(\gamma-1)$ 和 $\chi>0$，则式(15.20)将由

$$\tau=\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\frac{1}{\mu} \tag{15.21}$$

代替。对于 $\gamma=4/3$，所有相应的公式乃是公式(15.13)和(15.14)所确定的更一般的解的特殊情况。

当存在关系式 (15.20) 和(15.21) 时，公式 (15.16) 确定了气体的全部特征量按指数规律单调地变化。

所讨论的解其特点是沿着半径密度为常数。

根据式 (15.19)，当 $\kappa=-\beta/\mu_0^2$ ($\beta>0$) 时可把公式 (15.18) 在拉格朗日坐标中写为如下形式：

$$p=\frac{\beta}{f\mu_0^4}(r_0^2-\xi^2)\mu^3\tau(\tau). \tag{15.22}$$

如果我们讨论一个气体球，其半径在 $\tau = \tau_0$ 时等于 r_0，则由公式 (15.22) 得知，在运动过程中在这个球的表面上压力总是等于零，并且当向球的中心移动时压力按抛物线规律增长。

所以，利用所求得的解可以建立在引力作用下均匀气体球的非线性的脉动的周期性运动[1]。这运动是连续的，没有冲击波。$\mu(\tau)$的极大和极小值由积分 (15.17) 内根式的根确定。振动周期 τ^* 的相应值由下式确定：

$$\tau^* = 2\int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{d\mu}{\mu^2\sqrt{\chi + \frac{4\kappa}{3(\gamma-1)}\mu^{3(\gamma-1)} + \frac{8\pi}{3}\mu}} = \Phi(\chi, \beta, \gamma).$$

我们以 $\mathfrak{M}$ 记气体球的全部质量并以 ρ_0 记 τ_0 时刻和 $\mu_0 = \mu(\tau_0)$ 的气体密度。因为 $\rho_0 = \mu_0^3/ft_0^2$ 和 $\mathfrak{M} = 4\pi r_0^3\mu_0^3/3ft_0^2$，则有量纲的振动周期 t^* 的公式可以写为

$$t^* = \frac{\mu_0^{3/2}}{\sqrt{f\rho_0}}\Phi = \frac{\mu_0^{3/2}}{\sqrt{f\frac{3\mathfrak{M}}{4\pi r_0^3}}}\Phi(\chi, \beta, \gamma). \qquad (15.23)$$

参数 χ, β, γ 决定振动的振幅和形状。这时得到以显式表示的振动周期对引力常数 f，质量 $\mathfrak{M}$ 和半径 r_0 的依赖关系。如果 $r_0 = r_{\min}$，则 $\mu_0 = \mu_1$ 是 χ, β 和 γ 的已知函数。

气体球振动的这个解，曾被不同的作者用于分析造父变星的脉动(见第六章)。

在可以运用公式 (15.20) 的情况下我们有

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2}{3}\frac{r}{t}, \quad \rho = \frac{\mathscr{R}_0}{ft^2}, \quad \mu = \frac{4\pi r^3}{3}\frac{\mathscr{R}_0}{ft^2}, \\ p &= \frac{1}{ft_0^4}\left[\kappa r^2\left(\frac{\mathscr{R}_0}{\tau^2}\right)^{2/3} + \beta r_0^2\right]\left(\frac{\mathscr{R}_0}{\tau^2}\right)^{\gamma}. \end{aligned}\right\} \qquad (15.24)$$

这里为了书写简便引进了记号

---

1) Н. Р. Сибгатуллин 研究了这个解的稳定性 (见 Сибгатуллин Н. Р., Об устойчивости однородных нелинейных пульсаций гравитирующих газовых шаров. Изв. АН СССР, МЖГ, № 4, 1976).

$$\mathscr{R}_0 = \frac{1}{3\left(2\varkappa + \dfrac{\kappa}{\gamma - 1}\right)}.$$

在第六章中我们将用解 (15.24) 来建立带有冲击波的爆炸类型的重力气体质量的不定常运动。当 $\kappa = 0$ 时压力只与时间有关。

对气体——具有更一般的物理性质的可压缩介质——和在某些情况下对磁性气体动力学方程可以找到我们讨论过的这类具有运动规律 $r = \xi/\mu(t)$ 的解。

§16. 关于气体一维运动的一般理论[1)]

当不存在自模拟性时，求解非线性方程组 (1.3) 的边值问题会遇到相当大的困难。

为了得到所要求的结果，通常必须采用依靠现代计算机的数值方法。为了得出这些计算方法并为了建立求解问题的解析的近似方法，有一些对某几类气体运动成立的各种一般关系式看来是有用的。

1. 对称中心附近气体的一维不定常运动方程的解的性状 我们利用由方程 (1.3) 经过简单变换得到的方程来讨论完全气体的一维不定常运动：

$$\frac{\partial \rho r^{\nu-1}}{\partial t} + \frac{\partial \rho v r^{\nu-1}}{\partial r} = 0, \tag{16.1}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{\rho v^2}{r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{16.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v\frac{\partial p}{\partial r} + \gamma p\left[\frac{\partial v}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{v}{r}\right] = 0. \tag{16.3}$$

---

1) Седов Л. И., К общей теории одномерных движений газа. ДАН СССР, т. 85, № 4, 1952, стр. 723—726; О неустановившихся одномерных движениях газа вблизи центра симметрии. ДАН СССР, т. 87, № 1, 1952, стр. 4.

由方程 (16.1) 和 (16.2) 可以将 $v(r, t)$ 和 $p(r, t)$ 通过密度 $\rho(r, t)$ 来表示。

事实上，在 $r = 0$ 时 $v = 0$ 的条件下，由式(16.1)我们立即有

$$v = -\frac{1}{r^{\nu-1}\rho}\int_0^r r^{\nu-1}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dr. \tag{16.4}$$

考虑到式 (16.4)，由式 (16.2) 得到

$$p(r, t) = p(0, t) - \rho v^2 - (\nu - 1)\int_0^r \frac{\rho v^2}{r}\,dr + \int_0^r \frac{1}{\xi^{\nu-1}}\int_0^\xi \eta^{\nu-1}\frac{\partial^2\rho(\eta, t)}{\partial t^2}\,d\eta d\xi. \tag{16.5}$$

现在讨论一类运动，对于它们在对称中心附近密度可以展开为以下形式的幂级数：

$$\rho(r, t) = r^s[\omega_0(t) + \omega_1(t)r^m + \cdots + \omega_n(t)r^{nm} + \cdots], \tag{16.6}$$

其中 $\omega_0 \neq 0$，s 和 m 是常数，满足不等式

$$s + \nu + nm \neq 0,\ s + 2 + nm \neq 0 (n = 0, 1, 2, 3, \cdots). \tag{16.7}$$

将级数 (16.6) 代入式 (16.4)，积分之后给出

$$v = -r\left(\frac{\omega_0'}{s+\nu} + \frac{\omega_1'}{s+\nu+m}r^m + \cdots + \frac{\omega_n'}{s+\nu+nm}r^{nm} + \cdots\right)\Big/ (\omega_0 + \omega_1 r^m + \cdots + \omega_n r^{nm} + \cdots). \tag{16.8}$$

由于条件 (16.7)，在积分时不出现对数项。

显然，速度 $v(r, t)$ 在 $r = 0$ 附近可以表示为幂级数：

$$v = r[\varphi_0(t) + \varphi_1(t)r^m + \cdots + \varphi_n(t)r^{nm} + \cdots]. \tag{16.9}$$

比较式 (16.8) 和 (16.9)，就得到系数 φ_i 的下列方程组：

$$\sum_{i=0}^{n}\varphi_i\omega_{n-i} + \frac{\omega_n'}{s+\nu+nm} = 0. \tag{16.10}$$

显然，由方程组(16.10) 可以借助如下行列式将函数 $\varphi_n(t)$ 通过函数 $\omega_0(t)$，$\omega_1(t)$，$\cdots$，$\omega_n(t)$ 和它们的一阶导数表出：

$$\varphi_n=\frac{1}{\omega_0^{n+1}}\cdot\begin{vmatrix} -\dfrac{\omega_n'}{s+\nu+nm}, & \omega_1 & \omega_2\cdots\omega_{n-1} & \omega_n \\ -\dfrac{\omega_{n-1}'}{s+\nu+(n-1)m}, & \omega_0 & \omega_1\cdots\omega_{n-2} & \omega_{n-1} \\ & 0 & \omega_0\cdots\omega_{n-3} & \omega_{n-2} \\ & \cdot & 0\cdots\ \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot\quad\ \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot\quad\ \omega_0 & \omega_1 \\ -\dfrac{\omega_0'}{s+\nu}, & 0 & 0\cdots\ 0 & \omega_0 \end{vmatrix}. \tag{16.11}$$

将式(16.6)和(16.9)代入式(16.5)，积分之后[由于条件(16.7)，不会出现对数项]我们得出，压力 $p(r,t)$ 可表示为幂级数：

$$p(r,t)=\phi_{-1}(t)+r^{s+2}[\phi_0(t)+\phi_1(t)r^m+\cdots+\phi_n(t)r^{nm}+\cdots], \tag{16.12}$$

并且对函数 $\phi_i(t)$ 有下列公式：

$$\left.\begin{aligned} &\phi_{-1}=p(0,t), \\ &\phi_0=\frac{\omega_0''}{(s+\nu)(s+2)}-\frac{(\nu+s+1)}{s+2}\varphi_0^2\omega_0, \\ &\phi_1=\frac{\omega_1''}{(s+\nu+m)(s+2+m)} \\ &\quad-\frac{\nu+s+1+m}{s+2+m}(2\varphi_0\varphi_1\omega_0+\varphi_0^2\omega_1), \\ &\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ &\phi_n=\frac{\omega_n''}{(s+\nu+nm)(s+2+nm)} \\ &\quad-\frac{\nu+s+1+nm}{s+2+nm} \\ &\quad\cdot\sum_{j=0}^{n}\omega_j\sum_{i=0}^{n-j}\varphi_i\varphi_{n-j-i}, \\ &\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \end{aligned}\right\} \tag{16.13}$$

在 ϕ_n 的一般公式中，求和的次序可按照以下等式置换：

$$\sum_{i=0}^{n}\omega_i\sum_{i=0}^{n-i}\varphi_i\varphi_{n-i-i}=\sum_{k=0}^{n}\varphi_{n-k}\sum_{i=0}^{i=k}\omega_i\varphi_{k-i}.$$

考虑到这一点和等式(16.10)，我们得到以简化形式表示的 ϕ_n 的一般公式：

$$\phi_n=\frac{\omega_n''}{(s+\nu+nm)(s+2+nm)}+\frac{\nu+s+1+nm}{s+2+nm}\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi_{n-k}\omega_k'}{s+\nu+km}. \tag{16.14}$$

于是，如果 φ_n 由公式(16.11)确定而ϕ_n由公式(16.14)确定，则级数(16.6)，(16.9) 和 (16.12) 满足方程 (16.1)和(16.2)。

现在将这些级数代入方程 (16.3)，就得到：

$$\left\{\phi_{-1}'+\gamma\phi_{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\nu+nm)r^{nm}\right\}+r^{s+2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\phi_n'+\sum_{i=0}^{n}\varphi_i\phi_{n-i}(\gamma\nu+s+2+im(\gamma-1)+nm\right]r^{nm}\right\}=0. \tag{16.15}$$

此关系式和公式 (16.11) 及 (16.14) 一起，可以作为基础，用来推导函数 $p(0,t)$，$\omega_0(t)$，$\omega_1(t)$，$\omega_2(t)\cdots$的方程。为了建立这些方程，必须利用 s 和m 之间的关系式。

如果两个大括号内的表达式都等于零，则在任意 s 时方程(16.15)都满足。第一个括号为零等价于如下方程组

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{-1}'+\nu\gamma\phi_{-1}\varphi_0=0,\\&(m+\nu)\phi_{-1}\varphi_1=0,\\&(2m+\nu)\phi_{-1}\varphi_2=0,\\&\cdots\quad\cdots\\&(nm+\nu)\phi_{-1}\varphi_n=0.\\&\cdots\quad\cdots\end{aligned}\right\} \tag{16.16}$$

由此，若 $\phi_{-1}=p(0,t)\neq 0$，则考虑到式 (16.11) 在 $km+\nu\neq 0(k=1,2,\cdots)$时方程组 (16.16) 给出

$$\varphi_0 = -\frac{\omega_0'}{(s+\nu)\omega_0},$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_n = \cdots = 0. \tag{16.17}$$

因此，在此情况下速度沿 r 按线性规律分布：

$$v = \varphi_0 r.$$

根据式 (16.17) 和 (16.10) 得出

$$\frac{\omega_n'}{s+\nu+nm} = \omega_n \frac{\omega_0'}{(s+\nu)\omega_0},$$

所以

$$\omega_0 = c_0\omega(t), \quad \omega_n = c_n\omega^{\frac{nm}{r+\nu}+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{16.18}$$

从而，根据式 (16.6) 有

$$\begin{aligned}\rho &= r^s\omega[c_0 + c_1(r\omega^{\frac{1}{r+\nu}})^m + c_2(r\omega^{\frac{1}{r+\nu}})^{2m} + \cdots] \\ &= r^s\omega P'[(r\omega^{\frac{1}{r+\nu}})^{s+2}],\end{aligned} \tag{16.19}$$

其中

$$P(x) = c_0 x + (s+2)\left[c_1 \frac{x^{\frac{m+s+2}{s+2}}}{m+s+2} + c_2 \frac{x^{\frac{2m+s+2}{s+2}}}{2m+s+2} + \cdots\right]. \tag{16.20}$$

由于系数 $c_0, c_1, \cdots, c_n, \cdots$ 和常数 m 是任意的，则 $P(x)$ 是其自变量的某一任意函数。再则，由式 (16.16) 的第一式考虑到等式 $\omega_0 = c_0\omega$，得到

$$\psi_{-1} = p(0, t) = c_{-1}\omega^{\tau\nu/(s+\nu)}. \tag{16.21}$$

由式 (16.14) 对 ψ_n 得到

$$\begin{aligned}\psi_n = &\frac{\omega_n''}{(s+\nu+nm)(s+2+nm)} \\ &- \frac{\nu+s+1+nm}{s+2+nm} \frac{\omega'}{(s+\nu)\omega} \frac{\omega_n'}{s+\nu+nm};\end{aligned}$$

由此，根据式 (16.18) 求得

$$\psi_n = \frac{c_n\omega^{nm/(s+\nu)}}{(s+\nu)(s+2+nm)}\left[\omega'' - \frac{\nu+s+1}{s+\nu}\frac{\omega'^2}{\omega}\right]$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{16.22}$$

所以，令方程（16.15）中的第一个大括号为零，就导致一个这样的解，它按式（16.17），（16.18），（16.21）和（16.22）将所有的函数 $\omega_n(t)$，$\varphi_n(t)$ 和 $\psi_n(t)$ 通过一个函数 $\omega(t)$ 表示出来，而函数 $\omega(t)$ 可以是任意的。

现在我们证明，当适当选取函数 $\omega(t)$ 时，所得到的解将使式（16.15）中的第二个括号变为零。

事实上，由于式（16.17）相应的无穷方程组具有形式

$$\psi_n' - \frac{\omega'}{(s+\nu)\omega}\psi_n(\gamma\nu + s + 2 + nm) = 0$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

由式（16.22）得知，所有这些方程皆满足，如果函数 $\omega(t)$ 是以下常微分方程的解的话：

$$\omega'' - \left(\frac{\nu + s + 1}{\nu + s}\right)\frac{\omega'^2}{\omega} = \frac{(\gamma - 1)\nu(s+\nu)}{2} B\omega^{(s+2+\nu\gamma)/(s+\nu)}, \tag{16.23}$$

其中 B 是任意常数。

方程（16.23）的通解可以表为

$$t = \pm\frac{1}{s+\nu}\int \frac{d\omega}{\omega^{1+\frac{1}{\nu+s}}\sqrt{A + B\omega^{\frac{(\gamma-1)\nu}{s+\nu}}}}$$

$$= \pm\int \frac{d\mu}{\mu^2\sqrt{A + B\mu^{\nu(\gamma-1)}}}, \tag{16.24}$$

其中 A 是任意常数，$\mu = \omega^{1/(\nu+s)}$ 在 $c_0 > 0$ 时可认为是一个大于零的量，因为按物理意义 $\omega_0 > 0$。公式（16.24）中的积分下限如何选取无关紧要，因为这只影响计算时间的起点。

根据公式（16.21），（16.22）和（16.23），展开式（16.12）可写为以下形式：

$$p = \omega^{\frac{\gamma\nu}{s+2}}\left\{c_{-1} + \frac{(\gamma-1)\nu}{2} B\left[\frac{c_0(r\omega^{\frac{1}{s+\nu}})^{s+2}}{s+2} + \frac{c_1(r^{s+2}\omega^{\frac{s+2}{s+\nu}})^{\frac{s+2+m}{s+2}}}{s+2+m} + \frac{c_2(r^{s+2}\omega^{\frac{s+2}{s+\nu}})^{\frac{s+2+2m}{s+2}}}{s+2+2m} + \cdots\right]\right\}. \tag{16.25}$$

再根据式(16.20)它就可写为

$$p = \omega^{\frac{\gamma v}{s+v}}\left\{c_{-1} + \frac{(\gamma-1)v}{2(s+2)} BP\left[(r\omega^{\frac{1}{s+v}})^{s+2}\right]\right\}. \quad (16.25')$$

用 μ 代换 ω 后，所求得的解可写为下列形式：

$$\left.\begin{aligned} &dt = \pm \frac{d\mu}{\mu^2[A + B\mu^{v(\gamma-1)}]^{1/2}}, \\ &\frac{dr}{dt} = v = -\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}r = \mp \mu\sqrt{A + B\mu^{v(\gamma-1)}}r, \\ &\rho = \mu^v(r\mu)^s P'[(r\mu)^{s+2}], \\ &p = \mu^{\gamma v}\left\{c_{-1} + \frac{(\gamma-1)v}{2(s+2)} BP[(r\mu)^{s+2}]\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (16.26)$$

只要令

$$\varphi(r\mu) = \frac{1}{s+2}P[(r\mu)^{s+2}],$$

解(16.26)就与在§15中由公式(15.3)确定的解[1]相一致。

现在再回到方程(16.15)。以上所讨论的解在任何 m 和 s 时都存在。如果条件(16.7)满足，则显然，当 $s+2<0$ 时解(16.26)是方程(16.15)的通解。在 $s+2>0$ 但 $s+2 \neq km$(k 是某个正整数)的情况下，这个结论也依然有效。

在条件(16.7)不满足的情况下，其中包括 $s=-2$ 的情况，在公式(16.9)和(16.12)中可能出现包含 $\ln r$ 的项。

若 $s+2=km$，这里 $k \geqslant 1$ 为整数，则在第一个和第二个大括号中从阶为 r^{km} 的项开始将出现相应的同阶项。方程(16.16)在 $n=-1,0,\cdots,(k-1)$ 时保持有效，所以在此情况下当 $n<k$ 时(16.17)，(16.18)，(16.21)和(16.22)成立。

当 $n \geqslant k$ 时得到方程

$$\left.\begin{aligned} &\psi_0' + (km + \gamma v)\varphi_0\psi_0 + (km + v)\gamma\psi_{-1}\varphi_k = 0, \\ &\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots\qquad\qquad\cdots \\ &\psi_{n-k}' + \sum_{i=0}^{n-k}\varphi_i\psi_{n-k-i}(nm - im + i\gamma m + \gamma v) \\ &\qquad + (nm + v)\gamma\psi_{-1}\varphi_n = 0. \end{aligned}\right\} \quad (16.27)$$

1) 该解首先是利用上述推导得到的。

这些方程与关系式(16.11)和(16.14)一起，可看作是依次决定 $\omega_k, \omega_{k+1}, \cdots \omega_n, \cdots$ 的微分方程，如果函数 $\omega_0(t)$ 给定的话。

所以，所有的系数 $\omega_n(t)$，$\varphi_n(t)$ 和 $\psi_n(t)$ 可以通过一个函数 $\omega_0(t)$，常数 γ, k, m 和积分常数表出。上述常数和函数 $\omega_0(t)$ 可以任意给定。

若 $\psi_{-1} = p(0,t) = 0$，则在方程(16.15)中第一个大括号变为零。第二个大括号变为零等价于方程组

$$\psi_n' + \sum_{i=0}^{n} \varphi_i \psi_{n-i}[s + 2 + \gamma v + nm + im(\gamma - 1)] = 0, \quad (16.28)$$

由它并考虑到式(16.11)和(16.14)依次进行积分就可求得函数 $\omega_0(t), \omega_1(t), \cdots, \omega_n(t), \cdots$，这个解仅只由于积分常数和指数 m 的值才是任意的。密度 ρ 的级数(16.6)，速度 v 的(16.9)和压力 p 的(16.12)可以写为形式

$$\left.\begin{aligned} g &= \frac{\rho}{\rho_2} = \lambda^s(\alpha_0 + \alpha_1\lambda^m + \alpha_2\lambda^{2m} + \cdots), \\ f &= \frac{v}{v_2} = \lambda(\beta_0 + \beta_1\lambda^m + \beta_2\lambda^{2m} + \cdots), \\ h &= \frac{p}{p_2} = \gamma_{-1} + \lambda^{s+2}(\gamma_0 + \gamma_1\lambda^m + \gamma_2\lambda^{2m} + \cdots), \end{aligned}\right\} \quad (16.29)$$

其中 $\lambda = r/r_2$ 而 r_2, ρ_2, v_2, p_2 是某些特征量，一般依赖于时间，其量纲相应为长度，密度，速度和压力。无量纲量 α_i, β_i 和 γ_i 可以看作是代替 ω_i, φ_i 和 ψ_i 的某一无量纲参量 τ 的无量纲函数，τ 可以引进来代替时间 t.

按前所述，当 $s + 2 = km(k > 0)$ 时级数(16.29)的所有系数可以通过函数 $r_2(\tau), \rho_2(\tau), p_2(\tau), v_2(\tau), \alpha_0(\tau)$ 表出。特别是，如果在气体的不定常运动中有冲击波，则可以取冲击波上的相应的运动特征量作为 r_2, ρ_2, v_2, p_2.

如果运动是自模拟的，并且全部的运动特征量，其中包括 r_2, ρ_2, v_2, p_2，都是作为时间 t 和某些常数的函数而被确定，而在这些常数中只有两个具有独立的量纲

$$[a] = \mathrm{ML}^{\chi}\mathrm{T}^{\zeta} \text{ 和 } [b] = \mathrm{LT}^{\eta}$$

(其中 χ, ζ 和 η 是某些实常数)，则下列形式的公式应该成立：

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \delta_1 \frac{b}{t^{\eta}}, \qquad \rho_2 = \delta_2 a b^{-\chi-3} t^{\eta(\chi+3)-\zeta}, \\ v_2 &= \delta_3 \frac{b}{t^{\eta+1}}, \qquad p_2 = \delta_4 a b^{-\chi-1} t^{\eta(\chi+1)-\zeta-2}. \end{aligned}\right\} \tag{16.30}$$

(其中 δ_1, δ_2, δ_3 和 δ_4 是无量纲常数)。在此情况下全部系数 α_i, β_i 和 γ_i 与时间无关，从而是不变的不名数。

对于给定的 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 和 δ_4，方程 (16.15) 化为代数方程，用它们能够求 s, m 并将所有的系数 α_i, β_i, γ_i 通过 α_0 和 γ_{-1} 表出 (这时 $\gamma_{-1} \neq 0$)。事实上，不失一般性，如果用相应的方式将常数 α_i, β_i 和 γ_i 的定义加以改变[1]，就可令不名数 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 和 δ_4 等于 1。利用这一点我们求得，自模拟运动的方程 (16.10) 和公式 (16.14) 具有如下形式：

$$\beta_n = -\frac{f_n}{s+\nu+nm}\frac{\alpha_n}{a_0} - \frac{1}{a_0}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_{n-i}\beta_i \tag{16.31}$$

和

$$\gamma_n = \frac{f_n(f_n-1)\alpha_n}{(s+\nu+nm)(s+2+nm)} + \frac{(\nu+s+1+nm)}{s+2+nm} \cdot \sum_{k=0}^{n}\frac{f_k\beta_{n-k}\alpha_k}{s+\nu+km}, \tag{16.32}$$

其中

$$f_n = \eta(3+s+nm+\chi) - \zeta \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{16.33}$$

在此情况下基本方程 (16.15) 变为

$$\gamma_{-1}\left\{\eta(\chi+1) - \zeta - 2 + \nu\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(\nu+nm)\lambda^{nm}\right\} + \lambda^{s+2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[(f_n-2)\gamma_n\right.\right.$$

1) 在保持自由选取常数 a 和 b 的情况下，这等价于改变有量纲参量 r_2, ρ_2, v_2 和 p_2 的意义。

$$+\sum_{i=0}^{n}\beta_i\gamma_{n-i}(\gamma\nu+s+2+im(\gamma-1)+nm)\Big]\lambda^{nm}\Big\}$$

$$=0. \tag{16.34}$$

设 $\gamma_{-1}\neq 0$ 和 $s+2=km(k\geqslant 1)$. 方程 (16.34) 等价于方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\eta(\chi+1)-\zeta-2+\gamma\nu\beta_0=0,\\
&\beta_1=0,\\
&\beta_2=0,\\
&\cdots\cdots\\
&\beta_{k-1}=0,\\
&\gamma\gamma_{-1}\beta_k(km+\nu)+(f_0-2)\gamma_0+\beta_0\gamma_0(km+\gamma\nu)=0,\\
&\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\
&\gamma\gamma_{-1}(nm+\nu)+(f_{n-k}-2)\gamma_{n-k}\\
&\quad+\sum_{i=0}^{n-k}\beta_i\gamma_{n-k-i}(nm-im+i\gamma m+\gamma\nu)=0.\\
&\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{16.35}$$

由方程 (16.31) 和方程 (16.35) 的第一式得到

$$\beta_0=-\frac{f_0}{s+\nu}=-\frac{\eta(3+s+\chi)-\zeta}{s+\nu}, \tag{16.36}$$

$$\beta_0=\frac{2+\zeta-\eta(\chi+1)}{\gamma\nu}. \tag{16.37}$$

因为按 (16.35) $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_{k-1}=0$，所以对于 $n=0,1,2,\cdots,k-1$，方程 (16.31) 给出

$$\beta_0=-\left[\frac{\eta(3+s+nm+\chi)-\zeta}{s+\nu+nm}\right]. \tag{16.38}$$

由此得出，当 $k>1$ 时应满足等式

$$\zeta=(3-\nu+\chi)\eta, \tag{16.39}$$

这是加在常数 a 和 b 的量纲公式中的指数上的附加条件. 在此情况下指数 s 应是任意的.

如果条件 (16.39) 不满足，则应该有 $k=1$，于是

$$m=s+2$$

$$-\frac{\eta[\nu(\gamma-1)+2](\chi+1)+(\nu-2)(\zeta+2)-\gamma\nu\zeta}{\eta(\chi+1-\gamma\nu)-\zeta-2}. \tag{16.40}$$

显然，当 $k=1$ 时常数 α_0 和 γ_{-1} 保持为任意的，展式(16.29)中的其余的常系数，利用式(16.31)，(16.32) 和 (16.35)容易依次确定。

若条件(16.39)满足，则 $m=(s+2)/k$，并且 $k, s, \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}$ 和 γ_{-1} 保持为任意的，$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_{k-1}=0$；其余的系数由式(16.31)，(16.32)和(16.35)确定。

若 $\gamma_{-1}\neq 0$ 和 $s+2\neq km$，这里 k 是整数，则由方程(16.34)求得

$$\beta_0=-\frac{f_0}{s+\nu}=\frac{\zeta-\eta(3+s+\chi)}{s+\nu},$$

$$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=\cdots=0,$$

此外还得到

$$\gamma_n\left\{\frac{\zeta-\eta(3-\nu+\chi)}{s+\nu}nm\right.$$

$$\left.-\frac{[-\zeta+\eta(3+s+\chi)][2+\nu(\gamma-1)]+2(s+\nu)}{s+\nu}\right\}$$

$$=0 \qquad (n=0,1,2,\cdots). \tag{16.41}$$

在此情况下公式 (16.32) 具有如下形式：

$$\gamma_n=\frac{\alpha_n f_n}{(s+2+nm)(s+\nu+nm)}\cdot\left[f_n-1-\frac{(\nu+s+1+nm)f_0}{s+\nu}\right].$$

如果指数 ζ, η 满足关系式

$$\eta=-\frac{1}{1+\frac{\nu(\gamma-1)}{2}} \text{ 和 } \zeta=\eta(3-\nu+\chi), \tag{16.42}$$

则在一般情况下对任意的 s，m 和 $\alpha_n(n=0,1,2,\cdots)$ 方程(16.41)都可能满足[1]。常数 γ_{-1} 也可以是任意的。相应的解乃是

1) 显然，在某些特殊情况下，当关系式(16.42)不满足时，方程组(16.41)也能满足.

精确解（16.26）中的自模拟运动的特殊情况。

若 $\gamma_{-1}=0$ 和压力 $p\neq 0$，则指数 s 由如下公式确定：

$$s=\frac{-2\nu-[\eta(3+\chi)-\zeta][2+\nu(\gamma-1)]}{\eta[2+(\gamma-1)\nu]+2}.$$

系数 α_0，α_1 和指数 m 仍是不确定的，所有其余的系数由公式（16.31），（16.32）和方程（16.34）确定。

2. 关于在气体一维不定常运动的特征动点上 v, ρ, p, T, S 对坐标的导数 我们来看在静止空间中以速度 c 运动的某一动点 M. 在该点上，利用方程（1.3）容易将 v，ρ，p，温度 T 和熵 S 对坐标的一阶导数通过它们本身的值及其对时间的导数的值表示出来。

对于任意函数 $F(r,t)$ 有公式

$$\frac{dF}{dt}=\frac{d}{dt}F(r_M(t),t)=\frac{\partial F}{\partial t}+c\frac{\partial F}{\partial r},$$

其中

$$c=\frac{dr_M}{dt}.$$

根据这个关系式方程（1.3）可写为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v}{\partial r}\rho+\frac{\partial \rho}{\partial r}(v-c)=-\frac{(\nu-1)\rho v}{r}-\frac{d\rho}{dt},\\&\frac{\partial v}{\partial r}(v-c)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=-\frac{dv}{dt},\\&\frac{\partial S}{\partial r}(v-c)=-\frac{dS}{dt}.\end{aligned}\right\}\tag{16.43}$$

除这些关系式外，由形式为 $p=p(\rho,S)$ 和 $T=T(\rho,S)$ 的状态方程有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial r}=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S\frac{\partial \rho}{\partial r}+\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho\frac{\partial S}{\partial r},\\&\frac{\partial T}{\partial r}=\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_S\frac{\partial \rho}{\partial r}+\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho\frac{\partial S}{\partial r}.\end{aligned}\right\}\tag{16.44}$$

将线性方程组（16.43）和（16.44）相对于对 r 的偏导数求解

后，我们就导出对任何气体的绝热运动在动点M上成立的公式：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{(\nu-1)\rho v\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}{r\Delta} - \frac{1}{\Delta}\left[(c-v)\rho\frac{dv}{dt}+\frac{dp}{dt}\right],\\
\frac{\partial \rho}{\partial r} &= -\frac{(\nu-1)\rho^2 v(c-v)}{r\Delta}\\
&\quad -\frac{1}{\Delta}\left[(c-v)\rho\frac{d\rho}{dt}+\rho^2\frac{dv}{dt}\right.\\
&\quad \left.+\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho\frac{\rho}{c-v}\frac{dS}{dt}\right],\\
\frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{(\nu-1)\rho^2 v(c-v)\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}{r\Delta}\\
&\quad -\frac{1}{\Delta}\left[(c-v)\rho\frac{d\rho}{dt}+\rho^2\frac{dv}{dt}\right.\\
&\quad \left.-(c-v)\rho\left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p\frac{dS}{dt}\right]\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s,\\
\frac{\partial T}{\partial r} &= -\frac{(\nu-1)\rho^2 v(c-v)\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_s}{r\Delta}\\
&\quad -\frac{1}{\Delta}\left[\rho^2\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_s\frac{dv}{dt}+(c-v)\rho\frac{dT}{dt}\right.\\
&\quad \left.-\frac{\rho}{c-v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho\frac{dS}{dt}\right],\\
\frac{\partial S}{\partial r} &= \frac{1}{(c-v)}\frac{dS}{dt},\text{其中}\Delta=\rho\left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s-(c-v)^2\right].
\end{aligned}\right\} \tag{16.45}$$

在推导公式(16.45)时用到下列熟知的雅可比行列式的恒等式：

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho &= \frac{D(\rho,p)}{D(\rho,S)} = \frac{D(\rho,p)}{D(p,S)}\frac{D(p,S)}{D(\rho,S)}\\
&= -\left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s
\end{aligned}$$

和

$$\frac{D(T,\rho)}{D(\rho,S)}=\frac{D(T,\rho)}{D(T,\rho)}\frac{D(T,\rho)}{D(\rho,S)}=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\rho.$$

如果点M沿质点运动的相对速度

$$u=c-v$$

等于声速$\pm\sqrt{(\partial p/\partial\rho)_S}$，则$\Delta=0$，因而，要确定欲求的导数，只在相应分子等于零时才有可能。在方程组(16.43)和(16.44)的特征线上满足等式$\Delta=0$.

公式(16.45)可以应用于点M与强间断面相重合的情况。根据雨贡尼奥条件，冲击波后所有的量可以通过冲击波波前的状态参量和速度$c(r_2)=dr_2/dt$表出，速度$c(r_2)$是由冲击波的运动规律确定的(r_2是冲击波的坐标)。

我们来具体讨论冲击波由中心沿密度为ρ_1和压力为p_1的静止的完全气体传播($c>0$)的情况。同前面一样，记

$$\frac{a_1^2}{c^2}=\frac{\gamma p_1}{\rho_1 c^2}=q,\quad \frac{v}{v_2}=f,\quad \frac{\rho}{\rho_2}=g,\quad \frac{p}{p_2}=h.$$

利用冲击波上的条件(12.6)，可把公式(16.45)变换为形式：

$$\left.\begin{aligned}
r_2\frac{\partial f}{\partial r}&=-\frac{(\nu-1)\left[1+\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}(1-q)\right]}{1-q}\\
&\quad+\frac{3+q}{2q(1-q)^2}r_2\frac{dq}{dr_2},\\
r_2\frac{\partial g}{\partial r}&=-\frac{2(\nu-1)}{\gamma+1}\\
&\quad-\frac{1}{\gamma+1-2(1-q)}\\
&\quad\cdot\left[\frac{2\left[1+\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}(1-q)\right]}{1-\dfrac{2}{\gamma+1}(1-q)}-\frac{3(1+q)}{q}\right]\\
&\quad\times\frac{r_2}{1-q}\frac{dq}{dr_2},
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} r_2\frac{\partial h}{\partial r} &= -\frac{2\gamma(\nu-1)}{\gamma+1} \\ &\quad +\frac{\gamma}{q}\left[\frac{q+1}{\gamma+1-2(1-q)}\right. \\ &\quad \left.+\frac{2}{\gamma+1+(\gamma-1)(1-q)}\right]\frac{r_2}{1-q}\frac{dq}{dr_2}, \\ r_2\frac{\partial S}{\partial r} &= -\frac{2c_p(1-q)^2(\gamma^2-1)}{[\gamma+1-2(1-q)]^2[\gamma+1 \\ &\quad +(\gamma-1)(1-q)]\cdot q}r_2\frac{dq}{dr_2}. \end{aligned}\right\} \tag{16.46}$$

同样做法可以得到与公式（16.45）和（16.46）相类似的二阶导数的公式。

由式（16.46）得出，如果冲击波以常速度 c 在具有常温 T_1 的未受扰动介质中传播，则 $q=\text{const}$，从而

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial\lambda}=-(\nu-1)\frac{\left[1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(1-q)\right]}{1-q}\leqslant 0, \\ &\frac{\partial g}{\partial\lambda}=-\frac{2(\nu-1)}{\gamma+1}\leqslant 0,\quad \frac{\partial h}{\partial\lambda}=-\frac{2\gamma(\nu-1)}{\gamma+1}\leqslant 0, \\ &\frac{\partial S}{\partial\lambda}=0,\quad \lambda=\frac{r}{r_2}. \end{aligned}\right\} \tag{16.47}$$

这些导数只对平面波 $\nu=1$ 才等于零。当平面冲击波以常速度运动时，冲击波后受扰气体运动特征量的导数等于零。

在球面和柱面波情况下当 $q=\text{const}$ 时只有 $\partial S/\partial r=0$，导数 $\partial v/\partial r$，$\partial\rho/\partial r$，$\partial p/\partial r$ 不等于零，但当 r_2 增大时它们按 A/r_2 趋于零［A 是相应的常数，见（16.47）］。

如果冲击波速度 c 下降，则量 $q=a_1^2/c^2$ 增长，所以 $dq/dr_2>0$。在此情况下，图 1.12 上的相应曲线的切线方向按反时针方向转动，图上画出的方向是速度 c 为常数情况下的。

显然，对于给定的 q，当导数 $\partial f/\partial\lambda$，$\partial g/\partial\lambda$，$\partial h/\partial\lambda$ 的值增大时，冲击波的衰减程度增大。当冲击波离开对称中心远去时，在中心附近在有限时间间隔内形成具有有限能量的扰动，冲击波发生

衰减，并且冲击波传播速度 c 趋于声速，从而 $q \to 1$.

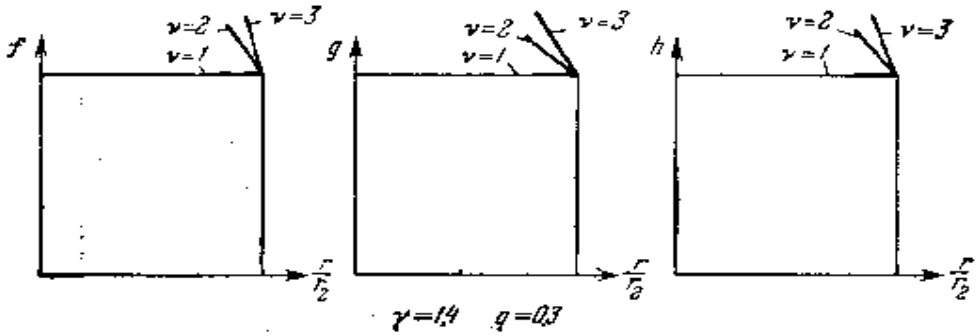


图 112 在平面、柱面和球面情况下冲击波速度为常数时波阵面后气体的速度分布的一小段曲线

如果当 $q \to 1$ 时公式 (16.46) 左端的极限性状已知，则利用该式可以确定冲击波衰减的渐近规律。

利用 f, g, h 的或者通过 f, g, h 表示的某些其它函数的内插公式，可以建立某些情况下冲击波以内 ($0 \leqslant r \leqslant r_2$) 的气体不定常运动问题的近似解[1]。

用来确定对称中心附近和冲击波附近的解的性状的未知函数 $\omega_0(t)$ 和 $q(t)$，可以当作参数表达式引入内插公式。

为了确定这些函数，可以利用各类积分关系式，类似于在黎兹 (Ritz) 和伽辽金 (Галеркин) 方法中和在边界层近似理论中所做的那样。

如果冲击波的运动规律为已知，则利用冲击波上的条件 [公式 (16.46)] 和它们在比对半径 r 的一阶导数更高阶的导数上的推广，就可以计算冲击波阵面后的气体运动。(强间断——冲击波——的运动可以由实验确定或根据附加假设确定)

§ 17. 冲击波衰减的渐近规律

当在一个沿静止气体传播的冲击波波后存在受扰气体运动

1) 参阅 Седов Л. И., К общей теории одномерных движений газа. ДАН СССР, т. 85, № 4, 1952, стр. 723—726.

时，在一般情况下，冲击波速度随冲击波坐标 r_2 变化的渐近规律，从而冲击波强度的变化，可以是极其多种多样的，并且从根本上依赖于那些决定冲击波以内的气体运动的条件.

早在 1913 年克律萨德[1] (Crussard) 就在如下假设下研究并建立了平面冲击波退化的规律，他假设冲击波阵面后的受扰气体运动是黎曼行波，该波包含气体速度为零的点。

黎曼还证明了[2](对于当气体充满整个空间时具有平面波的气体一维运动)，如果初始扰动是连续的，并且是分布在 x 轴的有限区间上，那么，当连续运动经过某一有限时间后，初始扰动将转化为向不同方向传播的两个行波。如果在沿 x 轴正方向上传播的行波内，在某一时刻气体运动是连续的并存在一些区间，在这些区间上压力随 x 坐标的增长而下降，那么，在行波内由于一部分波赶上另一部分而产生冲击波——压缩间断。

朗道[3]于 1945 年最先在如下假设下阐述了球面和柱面冲击波的衰减，他假设冲击波阵面后气体的受扰运动在减弱，并假设该运动趋于行波，在行波中在固定时刻扰动分布在有限长度的区间上，并且，该行波与声波的差别仅在于其声速的准确值与声波不同。

后来，就这一问题出现了许多论文，它们在与朗道论文中同样的或类似的假设下研究了球面和柱面波的衰减。在朗道的论文中还证明了，相应的方法、分析和结果可直接转用于在平面和轴对称情况中超声速平行气流绕流物体时形成的弯曲冲击波的衰减情况。

下面，以冲击波阵面后的导数的公式 (16.46) 为基础给出冲

---

1) 参阅 Crussard L., Sur la déformation des ondes dans les gaz et sur les interférences finies. C. r. Acad. Sci., t. 156. №6, 1913, pp. 447—450; Sur la propagation et l'altération des ondes de choc. 同杂志 № 8, 1913, pp. 611—613. 在 Я. Б. Зельдович «Введение в теорию ударных волн и газодинамику» (1948)一书中给出了有关平面冲击波衰减的文献索引.

2) 参阅 Риман Б., О распространении плоских волн конечной амплитуды. Сочинения. ОГИЗ, М.-Л., 1948, стр. 376—395.

3) Ландау Л. Д., Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ,т. 9, вып. 4, 1945, стр. 286—292.

击波衰减的理论。

对于方程组（1.3），在这样的特征线上，沿那些特征线扰动向坐标 r 增长的一方传播，如下微分关系式成立：

$$dr-(a+v)dt=0. \tag{17.1}$$

在 r,t 平面上这些特征线的方程可写为形式 $\xi(r,t)=\text{const}$，并且函数 $\xi(r,t)$ 根据以下等式决定：

$$\mu d\xi=dr-(a+v)dt.$$

由此

$$dt=\frac{dr-\mu d\xi}{a+v}, \tag{17.2}$$

其中 μ 是某一积分因子。

引进自变量 r,ξ 代替自变量 r,t，偏导数的变换公式为

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial t}=-\frac{\partial f(\xi,r)}{\partial \xi}\frac{(a+v)}{\mu},$$

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}=\frac{\partial f(\xi,r)}{\partial r}+\frac{\partial f(\xi,r)}{\partial \xi}\frac{1}{\mu}.$$

利用这些关系式，运动方程（1.3）可写为下列形式：

$$\left.\begin{aligned}
&a\frac{\partial v}{\partial \xi}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi}=\mu\left(v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\right),\\
&a\frac{\partial \rho}{\partial \xi}-\rho\frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{\mu}{r^{\nu-1}}\frac{\partial r^{\nu-1}\rho v}{\partial r},\\
&a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{p}{\rho\gamma}\right)=\mu v\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho\gamma}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{17.3}$$

式（17.2）的可积性条件还给出一个方程：

$$\frac{\partial(a+v)}{\partial \xi}=(a+v)\frac{\partial \mu}{\partial r}-\mu\frac{\partial(a+v)}{\partial r}. \tag{17.4}$$

容易看出，在 $\nu=1$ 的平面波情况下，方程组(17.3)和方程(17.4)容许 v,ρ,p 只依赖于 ξ 的解。这个解乃是黎曼行波，它可以表示为下列形式：

$$
\left.\begin{aligned}
&p=\frac{p_1}{\rho_1^\gamma}\rho^\gamma,\quad a^2=\frac{\gamma p_1}{\rho_1^\gamma}\rho^{\gamma-1},\quad v=\frac{2}{\gamma-1}(a-a_1),\\
&\mu=\frac{d\ln(a+v)}{d\xi}r+\left[\frac{F(v)}{a+v}\right]'_\xi(a+v)\\
&\quad=\frac{d\ln(a+v)}{d\xi}r+\left[\frac{\Omega(\xi)}{a+v}\right]'_\xi(a+v),\\
&r-(a+v)t=F(v)=\Omega(\xi)\text{ 或}\\
&v=\mathscr{G}[r-(a+v)t]=\Phi(\xi),
\end{aligned}\right\}\tag{17.5}
$$

其中 $F(v)=\Omega(\xi)$，从而

$$\mathscr{G}[r-(a+v)t]=\Phi(\xi)$$

是其自变量的任意函数（p_1 和 ρ_1 是常数）。

譬如，在这种情况下不失一般性可以令

$$\Omega(\xi)=\xi=r-(a+v)t,\tag{17.6}$$

并保持 $F(v)$ 和相应的反函数 $\Phi(\xi)$ 是任意的。根据式 (17.5) 及 (17.6) 对于导数 $(\partial v/\partial r)_{t=\text{const}}$ 有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial r}&=\Phi'(\xi)\left[1-\frac{\partial(a+v)}{\partial r}\bigg|_{t=\text{const}}t\right]\\
&=\Phi'(\xi)\left[1-\frac{\gamma+1}{2}\frac{\partial v}{\partial r}t\right].
\end{aligned}
$$

由此

$$r\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\Phi'(\xi)r}{1+[(\gamma+1)/2]t\Phi'(\xi)}.\tag{17.7}$$

如果当 $r_2\to\infty$ 时冲击波退化为声波而波阵面后的气体运动退化为黎曼流，则 $q\to 1$ 和 $a_1t/r_2\to 1$.

以 ξ_0 表示 $r_2\to\infty$ 时冲击波上的 ξ 的极限值。因为按假设冲击波退化为声波，则显然，当 $\xi\to\xi_0$ 时应该有 $v\to 0$，因而

$$\Phi(\xi_0)=0.$$

下面假设

$$
\left.\begin{aligned}
&\lim r_2\Phi'(\xi)\to\infty,\\
&r_2\to\infty.
\end{aligned}\right\}\tag{17.8}
$$

我们来求在此假设下的冲击波衰减的渐近规律。如果 $\Phi'(\xi)\neq 0$，则极限关系式 (17.8) 是不容许的。

如果

$$v = \Phi(\xi) = c(\xi - \xi_0)^n + \cdots,$$

其中 c 和 $n > 1$ 是常数，则 $\Phi'(\xi) = c(v/c)^{(n-1)/n} + \cdots$，所以假设（17.8）等价于条件

$$r_2 v^{(n-1)/n} \to \infty.$$

若冲击波阵面后的速度 v 下降得比

$$\frac{k}{r^{1+1/(n-1)}}$$

慢，则上述条件就得到满足。

下面我们证明，所作的假设（17.8）将导致速度下降得比 $k/r^{1+1/(n-1)}$ 慢的速度衰减规律，所以在此情况下假设（17.8）同样是非实质性的。

根据公式（16.46）和（17.7），当 $v = 1$ 时得到渐近方程

$$\frac{2a_1}{\gamma + 1} = \frac{4a_1}{\gamma + 1}\frac{r_2}{1 - q}\frac{dq}{dr_2}.$$

由此，积分后得到

$$1 - q = \sqrt{\frac{r_0}{r_2}} \text{ 或者 } a_1^2\left(\frac{dt}{dr_2}\right)^2 = 1 - \sqrt{\frac{r_0}{r_2}}, \qquad (17.9)$$

其中 r_0 是某一常数。

根据（17.9）及冲击波上的条件（12.6），我们得到冲击波运动规律的[1]和波后气体运动特征量的渐近公式：

$$\left.\begin{aligned} a_1(t - t_0) &= r_2\left(1 - \sqrt{\frac{r_0}{r_2}} - \frac{1}{8}\frac{r_0 \ln r_2/r_0}{r_2} + \cdots\right), \\ v_2 &= \frac{2a_1}{\gamma + 1}\sqrt{\frac{r_0}{r_2}} + \cdots, \\ \rho_2 &= \rho_1 + \frac{2\rho_1}{\gamma + 1}\sqrt{\frac{r_0}{r_2}} + \cdots, \\ p_2 &= p_1 + \frac{2\rho_1}{\gamma + 1}\sqrt{\frac{r_0}{r_2}} + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (17.10)$$

1) 在这里和以后都以 $-a_1 t_0$ 记任意积分常数。

公式（17.10）与解（17.5）相一致，给出了平面波的欲求的渐近规律。由（17.10）容易看出，在任何 n 时条件（17.8）皆满足。

在球面或柱面波情况下，方程组（17.3）在 $\mu = 1$ 时在具有压力 p_1 和密度 ρ_1 的未受扰动静止状态附近进行线性化之后，具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} &a_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial r}, \\ &a_1 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \rho_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\rho_1}{r^{\nu-1}}\frac{\partial r^{\nu-1} v}{\partial r}, \\ &\frac{p}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma} \text{ 或 } \frac{p - p_1}{p_1} = \gamma \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1}. \end{aligned}\right\} \tag{17.11}$$

与 $\nu = 1$ 时的平面波情况不同，方程（17.11）没有只依赖一个自变量 ξ 的解。

我们来讨论在下述情况中方程（17.11）对行波给出的解，此时未受扰运动的速度 v 可表示为级数

$$v = a_1 \left[\frac{\Phi_1(\xi)}{r^m} + \frac{\Phi_2(\xi)}{r^{2m}} + \cdots\right], \tag{17.12}$$

其中 $\Phi_1(\xi)$ 是任意函数，$m > 0$ 是待定常数。

令

$$\rho = \rho_1 \left[1 + \frac{\phi_1(\xi)}{r^m} + \frac{\phi_2(\xi)}{r^{2m}} + \cdots\right]. \tag{17.13}$$

由方程（17.11）的最后一式给出：

$$p = p_1 \left[1 + \frac{\gamma\phi_1(\xi)}{r^m} + \frac{\gamma\phi_2(\xi)}{r^{2m}} + \cdots\right]. \tag{17.14}$$

把这些级数代入方程（17.11）的前两式就得出关系式

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Phi_1' - \phi_1'}{r^m} + \frac{\Phi_2' - \phi_2'}{r^{2m}} + \cdots + \frac{m\phi_1}{r^{m+1}} + \frac{2m\phi_2}{r^{2m+1}} + \cdots = 0, \\ &\frac{\Phi_1' - \phi_1'}{r^m} + \frac{\Phi_2' - \phi_2'}{r^{2m}} + \cdots - \\ &\quad - \frac{(m + 1 - \nu)\Phi_1}{r^{m+1}} - \frac{(2m + 1 - \nu)\Phi_2}{r^{2m+1}} - \cdots = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17.15}$$

由此得出

$$\Phi_1 = \phi_1 + C, \tag{17.16}$$

其中 C 是积分常数。

因为函数 Φ_1 是任意的，所以必须要求在方程 (17.15) 中阶为 $m+1, m+2, \cdots$ 的项与阶为 $2m, 3m, \cdots$ 的项中的一项是可约的，因此应该有

$$m + 1 = km,$$

其中 k 是某一整数。

在式 (17.15) 中当 r^{km} 项的系数等于零时给出

$$\Phi'_k - \phi'_k + m\phi_1 = 0, \quad \Phi'_k - \phi'_k - (m + 1 - \nu)\Phi_1 = 0.$$

由此并由式 (17.16) 得出

$$2m + 1 - \nu = 0 \text{ 和 } C = 0.$$

因此，在 $\nu = 2$ 时的柱面波情况下，这时 $m = 0.5$ 和 $k = 3$，我们有公式

$$\phi_n = \frac{2-n}{n}\Phi_n, \quad \Phi'_{n+2} = \frac{n^2-4}{4(n+1)}\Phi_n, \quad \Phi'_2 = 0, \tag{17.17}$$

并且函数 $\Phi_1(\xi)$ 仍为任意的，下标为奇数值的函数

$$\Phi_{2n+1}(\xi) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

通过 n 重不定积分

$$\int^{\xi}\int^{\xi_1}\int^{\xi_2}\cdots\int^{\xi_{n-1}} \Phi_1 d\xi_{n-1}\cdots d\xi_1 d\xi$$

由函数 $\Phi_1(\xi)$ 表出，函数 $\Phi_{2n}(\xi)$ 是 ξ 的 $n-2$ 次多项式，每个相继的多项式是按递推公式 (17.17) 积分前一个多项式得到的。

在 $\nu = 3$ 的球面波情况下有公式

$$\left.\begin{aligned} &m = 1, \quad k = 2, \\ &\phi_n = \frac{2-n}{n}\Phi_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \\ &\Phi'_n = \frac{n(n-3)}{2(n-1)}\Phi_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \cdots). \end{aligned}\right\} \tag{17.18}$$

函数 $\Phi_1(\xi)$ 保持为任意的；由公式 (17.18) 得出

$$\Phi_2(\xi) = -\int \Phi_1(\xi)d\xi,$$

并且在 $n>2$ 时相继的函数 $\Phi_n(\xi)$ 是 ξ 的 $n-3$ 次多项式，每个相继的多项式是通过按递推公式 (17.18) 求积分由前一个多项式得出。

所以，对于线性化方程确定了一类表示为级数 (17.12)，(17.13) 和 (17.14) 的解，它们包含任意函数 $\Phi_1(\xi)$ 和一些在决定 $1/r$ 的高阶项的系数时出现的任意常数。

由公式 (17.12)，(17.13) 和 (17.14) 得出，对量 $a+v$ 有下列展开式：

$$a+v=\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}+v=a_1\left[1+\frac{\gamma+1}{2}\frac{\Phi_1(\xi)}{r^{(\nu-1)/2}}+\cdots\right]. \quad (17.19)$$

如果取 $\mu=1$ 和 $\xi=r-a_1t$，这相当于在方程 (17.4) 和 (17.2) 中用 a_1 代替量 $a+v$，则在声学近似中可以独立于方程 (17.4) 来考察方程 (17.11)。根据式 (17.19)，由方程 (17.4) 和 (17.2) 可以求得 $t(\xi, r)$ 和 $\mu(\xi, r)$ 的更准确的表达式，它们对应式(17.12)，(17.13) 和 (17.14) 中函数 v，ρ，p 的展开式中的第一项。

当求解非线性方程 (17.3) 时，展开式 (17.12)，(17.13) 和 (17.14) 要发生变化，然而第一项保持原有的形式，但必须使 t，r 和 ξ 同函数 $\mu(\xi, r)$ 之间的关系式更准确。这些关系式在 $\nu=2$ 的柱面波情况下具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\mu&=1+\sqrt{r}\left[(\gamma+1)\Phi_1(\xi)+O\left(\frac{\ln r/r^*}{\sqrt{r}}\right)\right],\\ a_1t+\text{const}&=r-\sqrt{r}\left[(\gamma+1)\Phi_1(\xi)\right.\\ &\left.-\frac{(\gamma+1)^2}{4}\Phi_1^2(\xi)\frac{\ln r/r^*}{\sqrt{r}}+\cdots\right].\end{aligned}\right\} \quad (17.20)$$

这里和以后用 $O(f(r))$ 表示当 r 增加时趋向于零的项，趋于零的阶等于 $f(r)$；以 r^* 表示某一常数。

由式 (17.2) 和 (17.20) 得出，对所有的 $\Phi_1'(\xi)\neq 0$ 有

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial r}\right|_{t=\text{const}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{(\gamma+1)\Phi_1'(\xi)\sqrt{r}} \cdot \left[1 + O\left(\frac{\ln r/r^*}{\sqrt{r}}\right)\right]. \tag{17.21}$$

在 $\nu = 3$ 的球面波情况下类似的公式具有形式：

$$\left.\begin{aligned} \mu &= 1 + \frac{\gamma+1}{2}\Phi_1'(\xi)\ln r/r^* + O\left(\frac{\ln r/r^*}{r}\right), \\ a_1 t + \text{const} &= r - \frac{\gamma+1}{2}\Phi_1(\xi)\ln r/r^* + O\left(\frac{\ln r/r^*}{r}\right), \end{aligned}\right\} \tag{17.22}$$

以及当 $\Phi'(\xi) \neq 0$ 时

$$\left.\frac{\partial\xi}{\partial r}\right|_{t=\text{const}} = \frac{1}{\mu} = \frac{2}{(\gamma+1)\Phi_1'(\xi)\ln r/r^*}\left[1 + O\left(\frac{1}{\ln r/r^*}\right)\right]. \tag{17.23}$$

由公式 (17.12) 得出[1]：

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{t=\text{const}} &= a_1 \frac{\Phi_1'(\xi)}{\sqrt{r}}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_{t=\text{const}} \cdot \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)\right] \quad \text{当 } \nu = 2, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{t=\text{const}} &= a_1 \frac{\Phi_1'(\xi)}{r}\left(\frac{\partial\xi}{\partial r}\right)_{t=\text{const}} \cdot \left[1 + O\left(\frac{\ln r/r^*}{r}\right)\right] \quad \text{当 } \nu = 3. \end{aligned}\right\} \tag{17.24}$$

对柱面波情况 ($\nu = 2$) 中的渐近规律，由式 (16.46)，(17.21) 和 (17.24) 得到渐近方程

$$\frac{a_1}{\gamma+1} = -\frac{2a_1}{\gamma+1} + \frac{4a_1}{\gamma+1}\frac{r_2}{1-q}\frac{dq}{dr_2}.$$

由此，积分之后有

$$1 - q = \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{3/4} + \cdots$$

1) 在公式(17.24) 中示出了消失掉的项的阶，这里考虑了在级数 (17.12) 中保留第一项后面的附加项，该级数在求解非线性方程(17.3)时决定发散的波。

或
$$a_1^2\left(\frac{dt}{dr_2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{3/4} + \cdots, \tag{17.25}$$

其中 r_0 是某一常数。

由式（17.25）和冲击波上的条件（12.6），对柱面波求得冲击波运动的渐近规律和波后气体运动的特征量的渐近值：

$$\left.\begin{aligned} a_1(t - t_0) &= r_2 - 2r_0^{3/4}r_2^{1/4} + \cdots, \\ v_2 &= \frac{2a_1}{\gamma + 1}\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{3/4} + \cdots, \\ \rho_2 &= \rho_1 + \frac{2\rho_1}{\gamma + 1}\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{3/4} + \cdots, \\ p_2 &= p_1 + \frac{2\gamma p_1}{\gamma + 1}\left(\frac{r_0}{r_2}\right)^{3/4} + \cdots. \end{aligned}\right\} \tag{17.26}$$

公式（17.26）与表示冲击波阵面后气体运动的公式（17.12），（17.13）和（17.14）相一致。

在球面波情况（$\nu = 3$）下，由式(16.46)，(17.23) 和 (17.24) 得到渐近方程

$$\frac{2a_1}{\gamma + 1}\frac{1}{\ln r_2/r^*} = -\frac{4a_1}{\gamma + 1} + \frac{4a_1}{\gamma + 1}\frac{r_2}{1 - q}\frac{dq}{dr_2}.$$

由此，积分之后求得：

$$\left.\begin{aligned} 1 - q &= \frac{k}{r_2\sqrt{\ln r_2/r^*}} + \cdots, \\ a_1^2\left(\frac{dt}{dr_2}\right)^2 &= 1 - \frac{k}{r_2\sqrt{\ln r_2/r^*}} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{17.27}$$

其中 k 是具有长度量纲的某一常数。利用公式（17.27）和冲击波上的条件（12.6），球对称情况下相应的渐近规律具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} a_1(t - t_0) &= r_2 - k\sqrt{\ln r_2/r^*} + \cdots, \\ v_2 &= \frac{2a_1}{\gamma + 1}\frac{k}{r_2\sqrt{\ln r_2/r^*}} + \cdots, \\ \rho_2 &= \rho_1 + \frac{2\rho_1}{\gamma + 1}\frac{k}{r_2\sqrt{\ln r_2/r^*}} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{17.28}$$

$$p_2 = p_1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} p_1 \frac{k}{r_2\sqrt{\ln r_2/r^*}} + \cdots. \quad \Big|$$

公式 (17.28) 与确定冲击波后气体运动的公式 (17.12), (17.13) 和 (17.14) 相一致。

在所讨论的两种情况 ($\nu = 2$ 和 $\nu = 3$) 下，速度 v_2 下降得比按声波规律的要快，所以当 $r_2 \to \infty$ 时有 $\xi \to \xi_0$，并且应该有 $\Phi_1(\xi_0) = 0$. 由方程 (17.20) 和 (17.22) 得知，在 r, t 平面上相应的极限特征线趋于直线。冲击波和非极限的特征线在 $r \to +\infty$ 时离开任何固定的直线为无穷远的距离[1]。

当冲击波阵面后的气体运动是由某些与上述不相同的或者比上述更精确的已知的规律确定时，上述的方法可以用来求渐近规律或提高以上求出的规律的精确度。

---

1) 考虑更高阶小量项的渐近公式，$\nu=2$ 时的，给出于论文：Шефтер Г. М., Асимптотическое решение уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа с цилиндрической симметрией. ДАН СССР, т. 116, № 4, 1957, стр. 572—575; 而 $\nu = 3$ 时的，给出于论文：Якимов Ю. Л., Об асимптотических решениях уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа и об асимптотических законах затухания ударных волн. ПММ, т. 19, вып. 6, 1955, стр. 681—692.

第五章　气体机械理论导引[1)]

§1. 关于管道中非均匀气流的平均化[2)]

(1) 由于不可能精确地计算各种形状的 ВРД[3)] 管道中的空间气流，所以有必要用水力学近似法计算这些气流，即利用对适当选取的管道截面平均化后的气体参量来计算它们。此外，甚至在计及气流的空间性质而对 ВРД 的各部件（扩散器、压气机、燃烧室、涡轮、尾喷管）进行估算的情况下，在分析发动机工作时它们之间的关系也是用水力学近似法——按气体参量的平均值——建立的。

现在，在进一步改进发动机部件（例如压气机或涡轮）时，比流率、增压比等的效率的每一个百分数都是有意义的。以不同的方式进行平均化时，同一运动状况的特征量的值也可以相差百分之几。所以，选择正确划一的方法来对用实验获得的或由理论确定的气体的状态与运动参量进行平均这个问题就变得重要了。

实践中经常要遇到对气流进行平均化，然而平均化的规则数

---

1) 本章中所论述的结果曾发表在下列论文中：Седов Л. И., О полетном коэффициенте полезного действия идеального винта и идеального воздушно-реактивного двигателя. Сборник статей № 13, «Теоретическая гидромеханика», вып. 5. М., Мин-во авиац. промышл., 1954; Седов Л. И., Условия подобия и отвлеченные параметры, определяющие характеристики компрессоров (同上).

2) 下列论文中曾研究了平均化的问题：Седов Л. И., Черный Г. Г., Об осреднении неравномерных потоков газа в каналах. Сборник статей № 12, «Теоретическая гидромеханика», вып. 4. М., Мин-во авиац. промышл., 1954.

3) 这里及以后采用通用的缩写符号：ВРД——воздушно-реактивный двигатель, 空气喷气发动机；ПВРД——прямоточный ВРД 冲压式空气喷气发动机；ТРД——турбореактивный двигатель, 涡轮喷气发动机；ТВД——турбовинтовой двигатель, 涡轮螺旋桨发动机；ГТД——газотурбинный двигатель, 燃气涡轮发动机。

目繁多、形式各异，而且理论上未加论证。

下面叙述的关于正确应用水力学近似法计算气流的想法，和有依据地对气流进行平均化的考虑，具有普遍性，并且，不仅在研究气体机械时是正确的，而且在研究任何别的液体与气体流动问题时也是正确的。

例如，Г. А. 柳比莫夫对许多磁流体动力学问题用类似的观点研究了平均化的问题和水力学近似的适用性问题[1]。

(2) 所谓正确的进行平均化，就是要在保持所有重要的气流性质(在估价原先在气流中进行过的过程时的重要性质，或者在所研究的技术问题中对进一步利用气流具有意义的性质) 的情况下以最少数目的参量来描述非均匀气流。在进行平均化的时候，某一截面处的每一非均匀气流将用相应的、以最少数目的参量表征的典型气流(在一般情况下仍是非均匀的)来代替，同时对所研究的问题仍保持非均匀气流的全部重要性质。建立这种对应关系所依据的规则就是进行平均化的方法。

自然，在进行任何平均化的时候，即在减少描述气流的参量数目的时候，不可能保持在本质上是非均匀的气流的所有性质；其中一部分性质在平均化时将丧失，所以，在有些情况下平均化根本是不可能的，而在另一些情况下描述平均流所用的参量的数目可能是不同的。

(3) 存在着一系列描述给定管道截面处整个气流特性的并具有可加性 (即整个气流的特征量可由气流各单元的该特征量求和而得出)的物理量。这些量中最重要者如下：

质量流(质量流量)

$$Q = \int_{\Sigma} \rho v_n d\Sigma = \int_{Q} dQ,$$

其中 Σ 为管道截面，$d\Sigma$ 为该面的面元；ρ 为密度；v_n 为气流垂直

1) Любимов Г. А., Об осреднении магнитогидродинамических потоков и применимости гидравлического приближения для расчета магнитогидродинамических течений в каналах. Изв. АН СССР. МЖГ, № 3, 1966, стр. 3—11.

于面 Σ 的速度分量。

冲量流(矢量)

$$J=\int_{\Sigma}(pn+\rho v_n v)d\Sigma,$$

其中 n 为 Σ 的单位法矢量；v 为气体的速度矢量；p 为压力。

动量矩流(矢量)

$$M=\int_{\Sigma}[r,\rho v_n v]d\Sigma=\int_{Q}[r,v]dQ,$$

其中 r 为面 Σ 上的点相对矩心的矢径。

总焓流

$$I_0=\int_{\Sigma}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)\rho v_n d\Sigma=\int_{Q}i_0 dQ,$$

其中 ε 为单位质量气体的内能。

熵流

$$S=\int_{\Sigma}s\rho v_n d\Sigma=\int_{Q}s dQ,$$

其中 s 为单位质量气体的熵，等等。

上面写出的诸特征量的意义在于：正是它们在计算发动机和在分析整个发动机的工作状况时是重要的，因为它们表征通过发动机的气体流量、供给气体的能量、发动机通道中的损失、施加于发动机的外力和力矩等等。此外，指出下面这一点是重要的：气体在管道中作各种各样定常运动时上述许多特征量保持不变。为了解释这些性质，我们从气体在管道中运动时的积分关系式着手。

(4) 考察(图 113)气体在其中流动的管道(流管)。以 l 记沿管道的中线从线上某点起算的距离。我们划出一个由管道表面和管道的两个相邻截面围成的体积元；这两个截面垂直于管道中线，并且它们之间沿法线的距离为常值。将面 Σ 与流管表面的交线记作 C (C 可以由若干闭周线组成)。

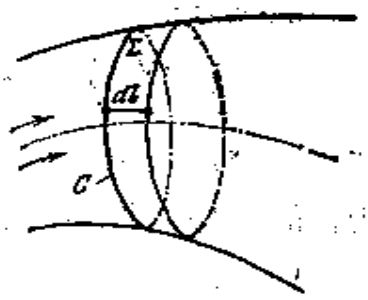


图 113 管道(流管)中的流动示意图

对于气体在管道（流管）中的空间不定常运动，可以写出下列精确的积分关系式。

流量方程（连续性方程）

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\Sigma + \frac{\partial Q}{\partial l} = 0,$$

其中 t 为时间。

在管道中线方向上的分量的冲量方程（我们在管道的中线为直线的情况下引进冲量方程和动量矩方程）：

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \rho v_l}{\partial t}\, d\Sigma + \frac{\partial J_l}{\partial l} = P + f_l^{(e)}\Sigma.$$

这里 P 为由流管表面上的压力构成的单位长度上的合力，它沿流管中线方向作用于气体上。在气流具有轴对称性的情况下，如果 C 为中心在对称轴上的圆周，则 $P = p 2\pi r_C \operatorname{tg}\theta$，其中 p 为作用在曲线 C 上的压力，而 θ 为流管的子午截面在曲线 C 的截点处的切线与对称轴方向之间的夹角；$f_l^{(e)}\Sigma dl$ 为作用在体积 Σdl 上的外力（表面压力除外）合力沿 l 方向的分力（脚标 l 系指沿中线切线方向的投影）。

对于管道中线方向的动量矩方程

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \rho [r, v]_l}{\partial t}\, d\Sigma + \frac{\partial M_l}{\partial l} = M_p + m_l^{(e)}\Sigma.$$

这里 M_p 为压力相对管道中线的合力矩；在管道中线与对称轴重合的轴对称运动的情况下，$M_p = 0$；$m_l^{(e)}\Sigma dl$ 为作用在体积 Σdl 上的所有其余的外力相对该轴的合力矩。

能量方程

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) d\Sigma + \frac{\partial I_0}{\partial l} = a^{(e)}\Sigma + q^{(e)}\Sigma,$$

其中 $a^{(e)}\Sigma dl$ 为作用在体积 Σdl 上的外力（压力除外）单位时间内所做的总功；$q^{(e)}\Sigma dl$ 为单位时间内外界传给体积 Σdl 的热量。

(5) 由连续性方程可知，对于气体的任何定常运动有

$$\frac{\partial Q}{\partial l} = 0,$$

即量 Q 沿流管保持不变。

对于理想气体的定常运动，在没有外部质量力的情况下，冲量方程和动量矩方程呈如下形式：

$$\frac{\partial J_l}{\partial l} = P \text{ 和 } \frac{\partial M_l}{\partial l} = M_p.$$

因此，量 J_l 和 M_l 在一般情况下沿流管不守恒。以下我们主要考察轴对称气流。对于这种气流

$$\frac{\partial M_l}{\partial l} = 0 \text{ 和 } M_l = \text{const.}$$

即便对于这种气流量 J_l 也不守恒；根据其值之差来计算作用于管壁的气流反作用力。

对于无外力并且没有外部热量流入情况下的定常运动，由能量方程可知：

$$\frac{\partial I_0}{\partial l} = 0,$$

即在沿流管运动时气流的总焓保持不变。

对于在曲线管道中的定常运动，只有在由于从外部流入热量和由于有由粘性作用、热传导作用、存在冲击波等等而引起的损失时熵流 S 才会改变。

对于在任何曲线管道中的可逆绝热过程，在气体沿流管运动时熵流 S 保持不变：

$$\frac{\partial S}{\partial l} = 0, \quad S = \text{const.}$$

(6) 在平均化时所引进的假定的典型气流，在沿管道运动时应保持同实际气流相一致（指那些对工程技术应用来说为重要的参量相一致）。

在大多数情况下，平均流的参量应正确地描述通过管道的气体流量、总焓流(为了计算能量供给) 和熵流 (为了计算损失)。所以在这种情况下必须使原来气流中的和平均气流中的整体特征量 Q，I_0 和 S 保持相等。在有些情况下，按平均化后的参量正确地计算冲量流和动量矩流(为了计算力和力矩)，正确地估计静压和温

度(为了研究强度和耐热性)以及估计速度的大小与方向（为了确定管道单元的剖面并估算随后的损失)等等，也是有意义的。

按以上所述，进行平均化时所引进的典型气流可用不同的参量来描述。参量的数目应足以保证那些对所研究问题而言的基本量在给定的非均匀流中和在相应的典型流中相等。

(7) 在最简单的情况下，对非均匀流的平均化可以通过建立与给定的运动状态相对应的静止状态(滞止状态)来进行。描述处于静止状态的具有固定的物理和化学性质的均质气体只需用两个参量(例如气体单位质量的熵和焓)，所以，只要借助于两个整体特征量即可使平均值的等效（在给定气流中与在相应的气体静止状态中）得到满足。如果不考虑在从运动到静止的过程中的损失和能量交换，那末显然，非均匀流应该用与运动气体具有相同的熵 s 和焓 i_0 值[1]

$$s = \frac{S}{Q} \text{ 和 } i_0 = \frac{I_0}{Q}$$

的静止气体来代替。众所周知，根据参数 s 与 i_0 及状态方程就可以确定静止气体的其它的物理特征量。 在状态方程为 $p = R\rho T$ (R 为气体常数，T 为绝对温度) 的情况下，确定静止状态(滞止状态)下温度、密度和压力的公式具有如下形式：

$$T_0 = \frac{i_0}{c_p},$$

$$\rho_0 = \frac{1}{R}\left(\frac{i_0}{c_p}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} e^{-\frac{s}{R}},$$

$$p_0 = R\rho_0 \frac{i_0}{c_p}.$$

只用两个参量 s 和 i_0(或者 p_0 与 T_0)来描述非均匀气流，则根据平均参量有可能正确确定的，只是传给单位质量气体的能量和管道两个截面之间的损失量。

---

1) 在本节第 10 小节中导出了根据某一截面处的气流参量的分布计算 Q, I_0, S 以及 J_i 诸量的公式.

利用相应的无能量供给的可逆滞止气体的参量来描述运动状态，这是尽人皆知的并在实践中被广泛采用；这种做法的方便与富有成效已得到证明并且有热力学根据。

(8) 另一个广泛采用的平均化方法是以具有同样截面积 Σ 的平动平均流来代替给定的非均匀流。平动平均流由三个物理参量——例如，在气流中和在无能量供给的可逆滞止的状态中具有相同值的、单位质量气体的熵和焓，以及速度或流量——来描述。所以，可以要求在给定气流和在平均气流中三个流动特征量相等。这三个特征量应根据所研究的问题而适当地选取。

正如已经说过的，在研究 BPД 的内管道中的流动时，在许多情况下最关心的是了解发动机通道各段上的流量、能量供给和损失。

若我们对上述通过转换到静止状态的平均化方法加以发展和推广，则当转换到平动气流时，应令所研究气流和平均流中的下列三个量相等：熵流 S，总焓流 I_0 和流量 Q.

利用 $Q, s = S/Q$ 和 $i_0 = I_0/Q$（或者借助于由它们计算出来的 Q，T_0 和 p_0 的值）三个参量来描述非均匀气流，就可以根据平均化后的参量正确地确定传给单位质量气体的能量的大小、管道两个截面间的不可逆损失的大小和流过管道的气体流量。

知道了相应的静止状态的参量 p_0，ρ_0，T_0，就可以定出平均流中的速度、静压、密度和温度的值。参量 λ 可根据公式

$$\lambda\left(\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=q(\lambda)=\frac{Q}{\rho_{\text{кр}}v_{\text{кр}}}$$

确定，速度 v 由等式

$$v=\lambda v_{\text{кр}}$$

确定，其中

$$v_{\text{кр}}=\sqrt{2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}i_0},$$

$$\rho_{\text{кр}}=\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\rho_0,\quad \rho_0=\frac{1}{R}\left(\frac{i_0}{c_p}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}e^{-\frac{s}{R}}.$$

此外我们有：

$$p = p_0\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$\rho = \rho_0\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\lambda^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}};$$

$$T = T_0\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\lambda^2\right).$$

于是，具有速度 v 和截面积 Σ 的平均平动气流（由原来的非均匀气流在无外部能量流入而可逆地转变而成）的所有参量，可以看作是气体通过面积 Σ 的喷嘴以流量 Q 从大容器中出流时得到的量。可以指出这样的过程，在该过程中原来的非均匀气流在无外部能量流入的情况下可逆地直接转变为面积为 Σ 并具有同一流量 Q 的平动气流。

我们指出，在真实压力沿截面几乎相同的某些情况下，这压力仍有可能明显地不同于在确定了 p_0，T_0 的平均值之后按上述公式算出的压力。其他参量——速度、温度等等——也可以有这种情况。

在利用任何一种平均化方法时都可能遇到这种情况。

在许多场合，实用上在平均化时采用特征量 Q，I_0 和 J_l 相等的条件，并加上进一步利用平均化后的参量以计算损失。这样的平均化相当于从给定的非均匀流转换到圆柱形混合室（引射器）中的均匀流，因此在平均流中将带来熵的增加。这样计算出来的损失同在气流中实际发生的损失可以差别很大。

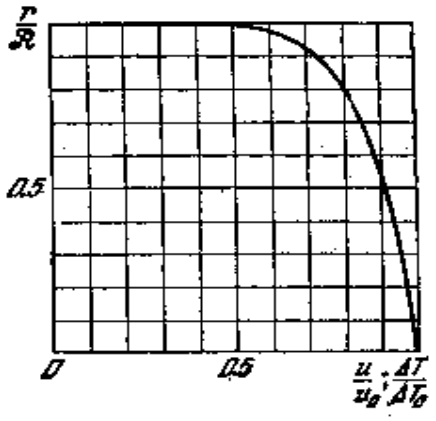


图 114　按规律

$$\frac{u}{u_0} = \frac{T - T_{cr}}{T_0 - T_{cr}} = \frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

变化的速度和温度差剖面

我们举圆柱形管中气流总压的平均值的计算结果作为例子；该气流的速度和温度差在流管截

面上的分布遵循规律（图 114）

$$\frac{u}{u_0}=\frac{T-T_{ст}}{T_0-T_{ст}}=\left(1-\frac{r}{\mathscr{R}}\right)^{\frac{1}{7}},$$

并且静压沿截面等于常数：$p=\text{const}=p_{ст}$（脚标“0”系指管轴处的量，脚标“ст”系指管壁处的量，$\mathscr{R}$ 为管的半径）。

图 115(а, б) 示出了在 $k=(T_0-T_{ст})/T_{ст}$ 的两个值的情况下总压 $p_0/p_{ст}$ 对马赫数 M_0（M_0 为渠道轴线处的马赫数）的依赖关系；实线对应于保持 Q，I_0 和 S 不变进行平均化时得出的总压值，虚线对应于保持 Q，I_0 和 J_1 不变进行平均化时得出的总压值。

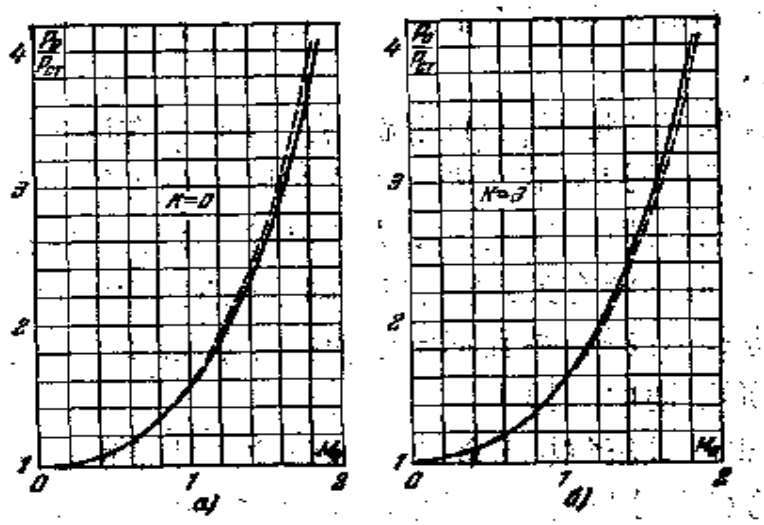


图 115　在保持流量、总焓流和熵流不变进行平均化时（实线）与在保持流量、总焓流和冲量流不变进行平均化时（虚线）得出的总压的平均值

保持冲量流不变进行平均化，实质上是一种尝试，想用标准方法不仅描述直到给定截面所发生的损失，而且描述已形成的气流的不均匀性在随后运动过程中拉平时会发生的损失。这种做法在许多情况下实际上会是合适的（例如，在对出口处气流的不均匀特性相同的那些装置作相互比较时）。然而应当十分谨慎地对待这样得到的结果和由这些结果所得出的结论。

正如上面所指明的，在这种平均化方法下计算出来的损失，可能同给定截面处的损失差别很大。它们同随后实际发生的损失也可能差别很大。

熵的增加(实际上并未发生)是同气流能量的"贬值"和使气流丧失某些对于以后的运动可能也是重要的性质相联系的.事实上,例如我们考察具有非均匀的轴向速度分布的压气机第一级进口处的气流。在平均化时,不能认为在这种气流中已经发生了由于掺混而引起的损失,或者这些损失以后一定会发生,因为气流是进入用适当方式定出翼型剖面的叶轮。

在混合时,随同熵的增长临界截面的面积也增长。所以平均化后的气流可能丧失通过给定截面的性质。确切地说,可能出现下述情况:不存在同给定的非均匀流具有同一截面积和同一流量 Q,总焓流 I_0 和冲量流 J_1 的平动气流。存在平动气流的条件将在下面研究。

因此,保持冲量不变对气流进行平均化,在许多情况下根本是不可能的。而保持熵不变进行平均化则总是可能的。

如果在混合时必须考虑损失,则应注意到:气流掺混时的这些损失也与管道形状有关,所以在不同的曲线管道、带有支柱的管道中,损失将是不同的,并且不等于保持冲量而掺混时的损失,即不等于在柱形管道中的损失。

在对离心式压气机叶轮出口处气流的冲量进行平均化的情况下,冲量的径向分量的值同截面的所取部分的尺寸有关;这就把不确定性带进了这样平均化的结果中。

如果气体在管道中运动时熵发生强烈的变化(结果熵流 S,从而在量 Q,I_0 和 S 相等的条件下平均化后的气流的参量,都随截面的选择而急剧地改变),那末,我们在掺混造成的基本损失已经发生的截面处保持熵不变而进行平均化,就可以计及这种变化的效应。所以,在所讨论情况下的可能的和不可避免的损失是可以得到考虑的,不是用平均化的办法,而是通过在测量气流参量的那些截面处正确地选取控制截面。在保持熵不变进行平均化时,可以正确地估计直到所考虑的截面之前气流中所发生的损失。

(9) 在许多情况下,在与截面 Σ 相切的平面中的气体速度分量具有极重要的意义。例如,在压气机或涡轮(离心式或轴向式)

的工作叶轮的进口处及其出口处的环形截面中，气流的迴转——圆周速度——具有重大意义。气体的动量矩流 M_t 就依赖于圆周速度，而在从一个截面过渡到另一个截面时动量矩流之差，等于通道壁面与工作叶轮作用在所取截面间的气体上的外力的合力矩。

在定压气机或涡轮元件的剖面时，速度非均匀分布的许多细节是很重要的，所以在定剖面的问题中，一般地说我们不能将运动特征量的实际分布用经过显著拉平的平均值来代替。

然而，在许多问题中，重要的只是平均量。例如，在计算气体所吸收的或传给气体的功率时，在确定作用于结构的不动部分上的外力矩时，以及某些情况下在研究导流叶轮中或涡轮后的喷管中机械能的耗散时，平均量是重要的。

为了获得考虑了气流的迴转并可正确地估计外力合力矩情况下的诸平均量，可以通过引进下述典型气流而进行平均化：即沿整个环形截面具有常值圆周速度的气流（对于离心式或轴向式压气机），或者具有沿径向按自由涡规律

$$v_u r = \frac{\Gamma}{2\pi} = \text{const}$$

分布的圆周速度的气流（对于轴向式机械），其中 Γ 为涡旋的环量。

由等式

$$v_z = c_a = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad v_r = c_r = 0 \quad (\Gamma = \text{const})$$

确定的速度场，在存在径向平衡的情况下，对应于在两个同心圆柱间的环形空间中的理想气体定常运动的气体动力学方程的精确解。

同时，可以认为下列三个量中的两个量在气流中为常数：单位质量气体的熵 s，总焓 i_0 和轴向速度 c_a。

在此情况下，对于温度、密度和压力沿径向的分布下列公式成立：

$$\frac{i}{c_p} = T = T_0 - \frac{c_a^2}{2c_p} - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 c_p r^2}$$

$$= T_0\left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\lambda_a^2+\lambda_u^2)\right],$$

$$\rho = \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{R} e^{-\frac{s}{R}} = \rho_0\left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\lambda_a^2+\lambda_u^2)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$\rho_0 = \frac{1}{R}\left(\frac{i_0}{c_p}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} e^{-\frac{s}{R}},$$

$$p = R\rho T = p_0\left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}(\lambda_a^2+\lambda_u^2)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$p_0 = R\rho_0 \frac{i_0}{c_p}.$$

我们要强调指出，在这运动中压力、温度和密度沿径向是变化的。

对于动量矩流有公式

$$M_l = \int_Q r v_\tau dQ.$$

非均匀的迴转气流可用如上确定的迴转气流代替，对此迴转气流下列诸量

$$Q,\ i_0 = \frac{I_0}{Q},\ s = \frac{S}{Q} \text{ 和 } M_l$$

具有与给定的非均匀气流相同的值。

(10) 现在我们引进计算气流整体特征量的一般公式。为了计算气流的整体特征量，必须要知道五个独立的气体状态和运动参量——例如，压力 p，密度 ρ 和速度矢 v 的三个分量——沿管道截面的分布。在实践中，T_0，p_0，p 和确定速度方向的两个角是可以直接测量的比较方便的参量。滞止温度 T_0 可用热电偶来测量，总压 p_0，静压 p 和速度方向用专门的探针和测管来测定。

气体通过管道的流量常常借助于流量计直接测量或者按下列公式确定：

$$Q = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\gamma}{\gamma-1}\sqrt{2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

$$\cdot \int_{\Sigma} \frac{p_0}{\sqrt{c_p T_0}} q\left(\frac{p}{p_0}\right) \cos(v, n) d\Sigma,$$

其中

$$q\left(\frac{p}{p_0}\right) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$\cos(v, n)$ 为速度方向与截面 Σ 的法线间夹角的余弦。

总焓流由下列公式确定：

$$I_0 = i_{0\text{平均}} Q = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\gamma}{\gamma-1} \sqrt{2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \cdot \int_{\Sigma} p_0 \sqrt{c_p T_0} q\left(\frac{p}{p_0}\right) \cos(v, n) d\Sigma.$$

冲量流在管道中线上的投影由下列关系式表示：

$$J_l = \int_{\Sigma} p \cos(n, l) d\Sigma + \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot \int_{\Sigma} p_0 q\left(\frac{p}{p_0}\right) \lambda\left(\frac{p}{p_0}\right) \cos(n, l) \cos(v, n) d\Sigma,$$

其中

$$\lambda\left(\frac{p}{p_0}\right) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]},$$

$\cos(n, l)$ 为截面的法线方向与管道中线方向间夹角的余弦。

我们用公式

$$s = R \ln \frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p} = R \ln \frac{T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_0}$$

来确定熵。

于是熵流由下列积分表示：

$$S = s_{\text{平均}} Q = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{\gamma}{\gamma-1} \sqrt{2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

$$\cdot \int_{\Sigma} \frac{p_0}{\sqrt{c_p T_0}} q\left(\frac{p}{p_0}\right) R \ln \frac{T_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p_0} \cos(v, n) d\Sigma.$$

(11) 现在容易指出根据实际气流的整体特征量的计算值来计算平均平动气流参量的公式。

a) 在保持 Q, I_0, S 相等的情况下：

$$T_{0\text{平均}} = \frac{i_{0\text{平均}}}{c_p},$$

$$p_{0\text{平均}} = e^{-\frac{S_{\text{平均}}}{R}} \left(\frac{i_{0\text{平均}}}{c_p}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$q(\lambda_{\text{平均}}) = \frac{Q}{\rho_{\text{кр}} v_{\text{кр}} \Sigma}.$$

若滞止温度在气流中保持为常数，则在此情况下得：

$$\ln p_{0\text{平均}} = \frac{1}{Q} \int_Q \ln p_0 dQ,$$

即为了计算损失应将总压的对数（而不是总压本身——在实践中有时那样采用）对质量（对流量）进行平均化。

б) 在保持 Q, I_0, J_l 相等的情况下：

$$T_{0\text{平均}} = \frac{i_{0\text{平均}}}{c_p},$$

$$\lambda_{\text{平均}} + \frac{1}{\lambda_{\text{平均}}} = \frac{J_l}{Q} \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma+1) R T_{0\text{平均}}}} = J_l \sqrt{\frac{2\gamma^2}{(\gamma^2-1) I_0 Q}},$$

$$p_{0\text{平均}} = \frac{J_l}{(1+\lambda_{\text{平均}}^2)\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma-2}\lambda_{\text{平均}}^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \Sigma}.$$

正如已经指明的，在给定的气流截面的情况下并不总是可以找到与给定的非均匀流具有同样的 Q, I_0 和 J_l 值的平动均匀流。可以证明，存在一大类非均匀流，对于它们，根据实验数据算出的量

$$J_l \sqrt{\frac{2\gamma^2}{(\gamma^2-1) I_0 Q}} = \lambda_{\text{平均}} + \frac{1}{\lambda_{\text{平均}}}$$

小于 2，由此不可能得到相应的平动气流的 $\lambda_{\text{平均}}$ 和其它参量的实际

值(这些流动对应于圆柱形喷射器中不可能混合的流动形态)。

不等式

$$J_1\sqrt{\frac{2\gamma^2}{(\gamma^2-1)I_0Q}}<2$$

是不可能保持 J_1, Q, I_0 不变而进行平均化的标志。保持 S, Q, I_0 不变而进行平均化总是可能的。

(12) 最后我们再次强调指出,在进行平均化时,气流的部分性质不可避免地要丧失。所以在许多流动中,当气流参量分布的细节显得重要时,进行显著拉平的平均化根本是不可能的。

因为任何一种平均化都同丧失一系列气流性质相联系,所以,无法指出一种平均化的方法,使得不论在哪种场合应用它时都不会遇到异议。然而,把对确定的一大类非均匀流进行平均化的方法加以统一是必要的。实际中所运用的算术平均、对面积进行平均、按质量对总压进行平均的诸方法,以及在采用平均值来计算能量供给、损失及其它量时所进行平均化的其它方法,乃是缺乏根据的。有时可能出于实用上方便的考虑而采用这些方法,但只限于在这样的情况下,即用这种办法得出的数值结果不偏离由 Q, I_0 和 S 相等的条件(在利用平均值来计算给定截面处的实际损失时)得出的平均值。

这样,在实践中常常在确定无能量交换下发生的气流中(例如在 BP几 的进气道中)的损失时运用下述方法:借助于专门的测量确定气体通过管道的流量 Q. 利用气流充分变均匀之处的管道壁上的通气孔算出沿截面周长的平均静压 p.

滞止温度 T_0 在气流中取常值,并在气流从其中流出的容器内测量。然后由对均匀平动气流成立的关系式

$$Q=\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}\frac{\lambda}{1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2}\frac{p\Sigma}{\sqrt{RT_0}}$$

确定量 λ, 而由公式

$$p_0 = \frac{p}{\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

计算 p_0 值，即求出损失的大小。这种做法相当于采用这样的平动均匀流作为典型流而进行平均化，该流与实际流具有同样大小的流量、总焓流和沿截面周线的平均静压。按照这样平均化而得出的参量值来计算损失是缺乏根据的。然而由实例的计算看到，用这种方法算出的总压值，与气流的非均匀性不太大和速度不大时的精确值相比，偏离并不显著。

例如，图 116 示出了按精确方法算出的和按所讨论的简化方法算出的总压 p_0 的平均值对管道轴上的折合速度 λ_0 的依赖关系；这里给出的是 $p = \text{const}$，$T_0 = \text{const}$ 和速度按规律 $u = u_0(1 - r/\mathscr{R})^{1/7}$ 变化情况下的依赖关系。当 $\lambda_0 < 1$ 时，计算损失时的误差不超过 2%。

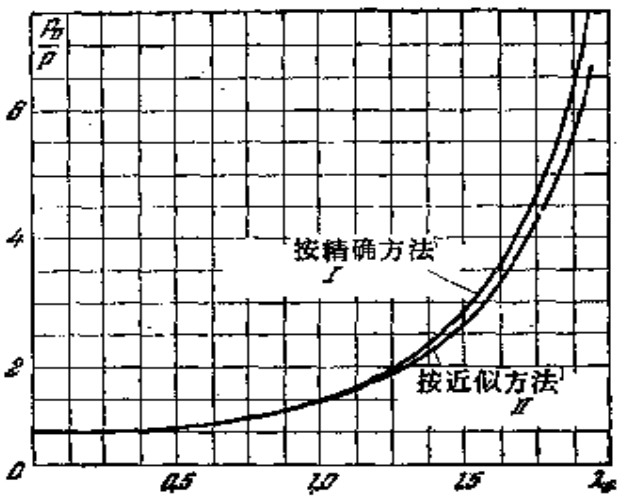


图 116　总压的平均值：曲线 I——保持流量、总焓流和熵流不变进行平均化；曲线 II——保持流量、总焓流和沿截面周线的平均静压不变而进行平均化

因此，当气流中的非均匀性不大时，在确定损失时可以较谨慎地用上述简单的近似平均化的方法来代替精确方法（保持 S, I_0, Q 不变而进行平均化）。

§2. 相似性条件和确定压气机特性的无量纲参量[1)]

有关相似性和有关表征喷气发动机的压气机用的独立参量组问题，是初等的和非常简单的。这里指的是在考虑到飞行高度、飞行速度和不论是真实压气机用的还是其模型用的工作气体的性质等情况下以必需的和便于应用的形式表征压气机用的参量组。然而，日常的实践表明，把这个问题系统化和解释清楚是必要的。

燃气涡轮发动机与压气机的试验台的特性和实验研究的方法，是由保持相似性条件的要求决定的。

为了建立气体在压气机进口前与在压气机中互相联系着的运动的力学相似的必要和充分条件，我们先来弄清楚确定这一现象的参量组。换句话说，我们来确立一个参量组，它在实验条件中可以任意给定；在给定之后，过程的所有其余的特征量就由这些参量的值完全确定。

(1) 我们首先指出描述空气(工作气体)的力学性质和热性质的、影响它在压气机中的运动的诸参量。假定工作气体是完全气体，即压力p，密度ρ和绝对温度T以克拉珀龙方程相联系：

$$p = \frac{R}{m}\rho T, \tag{2.1}$$

其中R为对于所有的气体都相同的通用气体常数，而m(分子量)是描述气体的物理化学性质的量。

我们还假定气体的内能ε可表为如下形式[2)]：

$$\varepsilon = c_v T + \text{const}, \tag{2.2}$$

其中c_v为气体的定容比热。

假定在运动的每一具体场合，量c_v在整个气流中都可认为是相同的。

---

1) 下述书中论述了流体动力机械和气体机械的基本部件的理论：Седов Л. И. Механика сплошной среды, т.2. М., «Наука», 1976.

2) 公式(2.2)中的附加常数是无关紧要的。

包含两个实质性物理常数 c_v 和 R/m 的状态方程（2.1）和公式（2.2），完全确定了气体在可逆过程情况下的内在的热性质和力学性质。

可以引进参量 c_p 和 c_v（这里 c_p 为定压比热）或者 R/m 和 $\gamma = c_p/c_v$ 来代替 c_v 和 R/m 这两个参量。

众所周知，对于完全气体，这些量由下列公式相联系：

$$c_p - c_v = \frac{R}{m}, \tag{2.3}$$

由此

$$c_p = \frac{R}{m}\frac{\gamma}{\gamma-1} \text{ 和 } c_v = \frac{R}{m}\frac{1}{\gamma-1},$$

所以在平衡过程的情况下参数 γ 和 R/m 完全描述了气体的性质。

气体的粘性和热传导性质由粘性系数 μ 和热传导系数 κ 确定。

以后假定 μ 和 κ 在气流中为常数，但对于不同的气流可以取不同的值。

在概括地表述问题时，基于一般的物理考虑，可以认为诸如气流中蒸汽的冷凝和结冰、热容惯性、离解、化学相互作用等现象以及气体重量的影响，在压气机的正常工作过程中应予排除，所以参量组 R/m，γ，μ 和 κ 完全描述了所考虑的气流中空气（工作气体）的力学性质和热性质。

（2）气体在远处相对于压气机的平移运动及其热力学状态，由滞止压力 p^*，滞止绝对温度 T^* 和流速 v_∞ 完全确定。平动气流的所有特征量（密度、静压等等）可借助于气体动力学的熟知的简单公式通过 p^*，T^*，v_∞ 来表示。在对压气机做任何试验时，这些量都要测量并由试验条件所规定。在每次计算中，这些量均给定或者由补充条件确定。

（3）我们来考察描述压气机及其工作状况的参量[1]。在所给

1）往后，为简单起见，我们只考虑单级压气机。

出的问题提法中我们假定压气机的弹性性质[1] 对它的特性没有影响。

在高速飞行下和在压气机不同的工作状况下，压气机进口处的速度分布显著地取决于进口结构的形状和压气机在飞机上的安装位置。为了得出相似性条件，我们固定压气机所有元件的几何形状及压气机的安装位置。假定由特征尺寸D之值确定的所有的线尺寸可以随D一起改变(在模拟时改变比例尺)。

对于轴向式压气机取进口的直径作为特征尺寸，而对于离心式机器可以取确定横断面的最大限度的线尺寸。

图 117 给出了压气机构造示意图。这个一般的示意图既适用于轴向式压气机，也适用于离心式压气机。

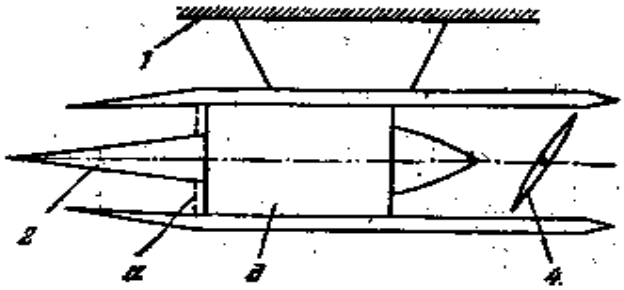


图 117　压气机构造示意图：a——压气机前的截面，
1——吊架、机翼、机身，　2——进口和进气道，
3——旋转叶轮和导流装置，　4——节气阀

工作状况可以由工作叶轮的转数n和节气阀门的状态给定，该阀门概括地表示构造（在其中利用压缩气体）的性质。在许多情况下，给出通过压气机的气体的重量流量G或气体的体积流量V^*，比用节气阀门的状态或管路网阻力更便于确定工作状况。

在试验中，气体的重量(质量)流量可以容易地测定；此量是总体特征量，可是在压气机的所有应用中，对使用者来说，它都是描述气流状况和压气机的机械效能的基本量。

---

1) 实践中这个假定总是被采纳的。在许多场合，压气机的叶片在不同的工作状况下会以不同的方式发生变形，这就会影响压气机的特性，叶片的材料也会因叶片变形而影响压气机的特性。

如果气体的体积按对应滞止参量的状态来确定，则气体的体积流量 V^* 容易通过重量流量来表示。相应的公式具有如下的形式：

$$G = g\rho^* V^* = g\frac{m}{R}\frac{p^*}{T^*}V^* \tag{2.4}$$

（g 为重力加速度）。

在地面试验的情况下流量 V^* 等于压气机每秒钟从大气中吸入的空气的体积。

有时按叶轮前进口处——截面 a 处——的参量讨论体积的值。与此有关可以看到，在叶轮前轴向速度的分布可能相当不均匀，因此，在气流进入时可能产生损失，所以为了得到上述体积流量必须对气流特征量的分布进行非常详细的测量，而这样做并非总是可能的也并非总是必要的；此外，从压气机的整体特性的观点来看，进口处的体积流量对于使用者来说不是直接必要的参数。

然而，对于压气机方面的专家，当他从事解决确定旋转叶轮和导流装置的剖面的问题时，进气时的轴向速度 c_a 的值具有重要意义。所以，进口处的体积流量和相应的轴向速度 c_a 的平均值，可以看作主要只是在建造压气机时而不是在运行时所必要的某种内部使用特性。

最重要的是紧靠叶轮前的 c_a 值。在存在导流装置的情况下，旋转叶轮前的量 c_a 主要由这种装置的性质决定。

如果气流进入压气机时的损失为已知，并且气流的滞止温度可以认为是常数，则相应的平均轴向速度 c_a 的值容易通过滞止参量和总质量流量来表示。为了计算 c_a 我们有下列气体动力学关系式：

$$\rho_a c_a S = \frac{G}{g} = \rho^* V^*;$$

由此

$$c_a\left(1 - \frac{c_a^2}{2c_p T^*}\right)^{\frac{1}{\tau-1}} = \frac{V^*}{\sigma S}, \tag{2.5}$$

其中 S 为压气机进口处通道截面的面积，而

$$\sigma = \frac{p_a^*}{p^*} = \frac{\rho_a^*}{\rho^*}.$$

在压气机没有专门冷却和在保证相应的隔热的情况下，可以略去气体与压气机结构元件间的热交换；这就排除了再引进确定压气机工作状况的补充参量的必要性。

于是，综上所述，完备的主定参量组可以写成如下的形式：

$$\frac{R}{m} = c_p \frac{\gamma - 1}{\gamma}; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v};$$

$$\mu, \kappa, p^*, T^*, v_\infty, D, n, V^*. \tag{2.6}$$

参量组(2.6)完全确定了压气机工作状况的全部特征量，诸如效率(可以用不同方式引进)[1]、压缩比 π，进口处的轴向速度 c_a，压力头 H 等等。

同时，在任何一个甚至是最简单的实验中，(2.6) 中的量都一定得测定或为已知，并且，在大多数实验中这些量都要用最好的方法和以最高的精度来测定。在具体应用中 (2.6) 的所有参量的值是给定的。

根据一般相似理论[2]可以作出结论：气流相似的必要与充分条件是下列六个无量纲参量为常值：

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad \mathrm{P} = \frac{c_p \mu}{\kappa}, \tag{2.7}$$

$$\mathrm{R} = \frac{\rho^* V^*}{\mu D} = \frac{m p^* V^*}{\mu R D T^*} = \frac{G}{g \mu D}, \tag{2.8}$$

$$\lambda_\infty = \frac{v_\infty}{v_{\text{кр}}} = \frac{v_\infty}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{R}{m}T^*}} = M_\infty \sqrt{\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M_\infty^2}}, \tag{2.9}$$

---

1) 根据定义，可以用不同方式引进效率。在实践中，效率应当从获得使用者所需结果的观点来说明压气机的性质。所以绝热效率使用得最广且直接为发动机的计算所必须；绝热效率由公式 $\eta_{\text{绝热}} = L_{\text{绝热}}/L$ 确定，其中 L 为实际消耗于压气机轴的功，而 $L_{\text{绝热}}$ 为在绝热可逆过程中从进入压气机前的气体的状态和运动转变到通过压气机后有了增压比的气体状态时所必须消耗的功（按滞止流参量定义的效率）。

2) 参看第一章 §6。

$$q=\frac{G}{G_{\text{кр}}}=\frac{4g\rho^{*}V^{*}}{g\rho_{\text{кр}}v_{\text{кр}}\pi D^{2}}$$

$$=\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{4V^{*}}{\pi D^{2}\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{R}{m}T^{*}}},\qquad(2.10)$$

$$\tilde{n}=\frac{u}{v_{\text{кр}}}=\frac{\pi nD}{60\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{R}{m}T^{*}}},\qquad(2.11)$$

其中 u 为叶轮的圆周速度。

在不同情况下进行试验时物理参量 γ 和 P 在同一种气体（例如空气）中具有同样的值，所以实际上这两个量等于常数的条件通常自动得到满足。

对于给定的压气机，雷诺数基本上只依赖于重量流量。因为在速度为常值而高度增加时重量流量减小，所以雷诺数也随高度而减小。因为重量流量近似地与线尺寸的平方成正比，所以在比例尺减小时雷诺数也下降。

在大雷诺数值下雷诺数的影响微弱，所以在雷诺数不相等时相似性也可近似地实现。

然而实际上必须注意雷诺数之值。如果它的值异于实际情形中的值，则需要根据已有的实验数据进行检验：是否可以忽略雷诺数的影响。

粘性对压气机的无量纲特征量的影响只是通过雷诺数值（在数 P 为常数的情况下）才体现出来。例如，损失在相当大程度上是粘性造成的。然而在许多情况下，可以利用理想气体理论来确定损失，就如同在计算冲击波时或者在引射器中气体混合时所做的那样。由于这个缘故雷诺数值的变化可能是无关紧要的。

在给定的体积流量下，数 M_{∞} 或系数 λ_{∞} 对压气机特性的影响的机理，归结为气体的压缩性对前面的导流装置的进口处或者——在没有导流装置的情况下——压气机旋转叶轮进口处（截面 a，图 117）气流特征量的分布规律的影响。

对于不可压缩理想流体，压气机进口处工作介质（气体）的参量总是由 p^*，T^* 和 V^* 的值完全确定，而与速度 v_∞ 的值无关；而对于气体，则是在计及进口处的损失用水力学方法研究时方是如此。所以，对于不可压缩流体或者在水力学处理的情况下对于气体的运动，参量 v_∞，从而参量 M_∞，是无关紧要的。

这就是压气机的下述模拟方法得到广泛流行的原因：在应用这种方法时，飞行速度只是通过滞止压力 p^* 和滞止温度 T^* 的相应的改变来模拟。对于小的飞行速度，这种方法是完全正确的，此外它也是十分方便的。

然而，对于长的进口或形状不对称的进口，或者对于布满各种障碍物的进口，或者对于通道截面急剧变化的短的进口，以及在压气机进口处有非均匀速度分布的大飞行速度条件下的所有情况中，这样的模拟方法便不正确了。这点对于超声速和跨声速情形特别重要，此时，在压气机进口附近产生冲击波系，导致损失和进入压气机的气流的大的非均匀性。这些损失和非均匀性通常难以事先估计，并且难以在不吹风模拟时人为地实现。所以对于大的飞行速度，必须进行有吹风的压气机试验，这时要借助于专门的喷管产生出给定 M_∞ 数值的气流吹入压气机。吹入的气流应正确地模拟进气构件的绕流，这在形成内流时是有意义的。

几何相似条件还使得必须模拟飞行的冲角，这可以通过相应地调节喷管相对于压气机进口的方向来实现。

参量 q 和 $\tilde{n}$ 是主要的；在实际工作中，这两个参量，或者代替它们的参量

$$V^*\sqrt{\frac{T_0^*}{T^*}} \text{ 和 } n\sqrt{\frac{T_0^*}{T^*}},$$

或者简单说 V^* 和 n（等等），在制作确定压气机特性的图表时被取作基本的独立变量。

从空气动力学的观点看来，无量纲参量 q 和 $\tilde{n}$ 比较合适，并且比上述类似的其它变量优越，这是基于下面的一些考虑。

量 $q<1$ 等于气体通过压气机的实际流量同最大可能流量之

比。q 值是重要的，因为对于 ГТД 来说非常重要的是保证在最小的外形尺寸下获得最大的空气流量。所以，所达到的 q 的最大值，可以看作是不同压气机进行比较的重要特征量。

此外，参量 q 的值可以表征进入压气机时轴向气流中压缩性的影响。

参量 $\tilde{n}$——折合转数或者叶轮的圆周速度系数——代表圆周速度对声速的接近程度。

使用参量 q 和 $\tilde{n}$ 就可以将地面试验的结果直接转用于高空的和高速的飞行条件，还可以不作任何换算地利用以不同的气体作为工作介质的压气机的试验结果（在满足相似性条件的情况下）。在利用参量

$$V^*\sqrt{\frac{T_0^*}{T^*}},\quad n\sqrt{\frac{T_0^*}{T^*}}$$

或者就用 V^* 和 n 时，在前一种情况下仅仅计及了滞止温度的改变；之所以利用这些参量是由于直观和某些具体计算简单[1]。

无疑，在图线上对不同尺寸的和在不同条件下试验的压气机的特性作比较时，利用无量纲参量 q 和 $\tilde{n}$ 较为有利。

实践中利用这样一些独立参量组常常是有利的，在这些参量组中有些参量对感兴趣的工作状况的影响将是很微弱的。由此，独立的实质性参量的数目在许多场合将减少，这就能够作出实践上的——定性的和定量的——重要结论，并可减少实验的次数。

对于压气机，在参量组 M_∞，R，q 和 $\tilde{n}$ 中，M_∞ 和 R 就是这样一些在许多场合下影响微弱的参量；因此，可以得出结论说，选取参量 M_∞ 和 R 是正确的和有利的。对于小的飞行速度，这两个参量确实很有利，因为它们不大重要。

对于小的相对流量，即小的 q，从上述观点看来，不用参量 q 和 $\tilde{n}$ 而选用参量 c_a/u 和 $\tilde{n}$ 是有利的，因为在这个参量组中参量 $\tilde{n}$ 的影响变为次要的。诸如 $H/(u^2/g)$ 和 $\eta_{绝热}$ 这样的基本无量纲特征

1）直观性——这是由习惯和已形成的通例所决定的。

量，基本上只依赖于 c_a/u 而与 $\tilde{n}$ 关系很小。然而，这一情况不能成为从变量 q 和 $\tilde{n}$ 转换为 c_a/u 和 $\tilde{n}$ 的充分根据，因为对于最重要的高速工作状况，在每一参量组中这两个参量都是重要的，而在应用中参量 q 和 $\tilde{n}$ 是计算所直接需要的。

在前面讨论公式 (2.5) 时所指出的假定下，参量 c_a/u，$\tilde{n}$ 和参量 q，$\tilde{n}$ 之间的关系可以表示成如下形式：

$$\frac{c_a}{u}\left(1-\frac{c_a^2}{u^2}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\tilde{n}^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}=\frac{\pi D^2}{4\sigma S}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{q}{\tilde{n}}. \quad (2.12)$$

在利用无量纲参量组(2.7)—(2.11)的情况下，压气机的特性与各种试验条件无关。在此情况下，无需一一注明是高空特性还是地面特性，是高空流量还是地面流量，等等。

利用参量 (2.7)—(2.11) 就能以最好的方式来研究为获取研制新型压气机过程中所必须的特征量的最有利实验条件的问题。为此，首先要从便于进行实验出发来确定模型的尺寸——模型小了会使测定气流场发生困难，并且雷诺数值也小；而模型大了则又要求专门的大功率试验台，这同样会给进行实验带来困难。

可以通过降低滞止压力 p^* 和圆周速度 u 来人为地降低所需的功率。滞止压力影响雷诺数值。利用分子量大的气体或者通过降低滞止温度，圆周速度就可以降低（图 118）[1]。

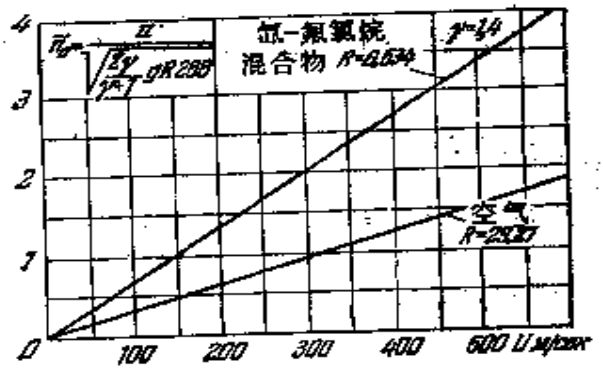


图 118　气体的分子量对折合转数值的影响

1) 在图 118 中气体常数的数值是对于 1 千克气体给出的。

圆周速度的大小受到强度条件的严格限制，强度条件同离心力对压气机旋轮叶片的作用有关。

随着高度的上升温度下降，由此在给定的圆周速度下折合转数增加。借助于图 119 (a 和 б) 所示的公式和曲线，容易确立折合转数随高度和速度变化的可能范围。对于固定的圆周速度，n_0 值为常数，并且可以把它看作是 $v_\infty = 0$ 和正常温度 15°C 时的 n 值；在利用分子量大的气体时 $\tilde{n}_0$ 值可以显著增大。

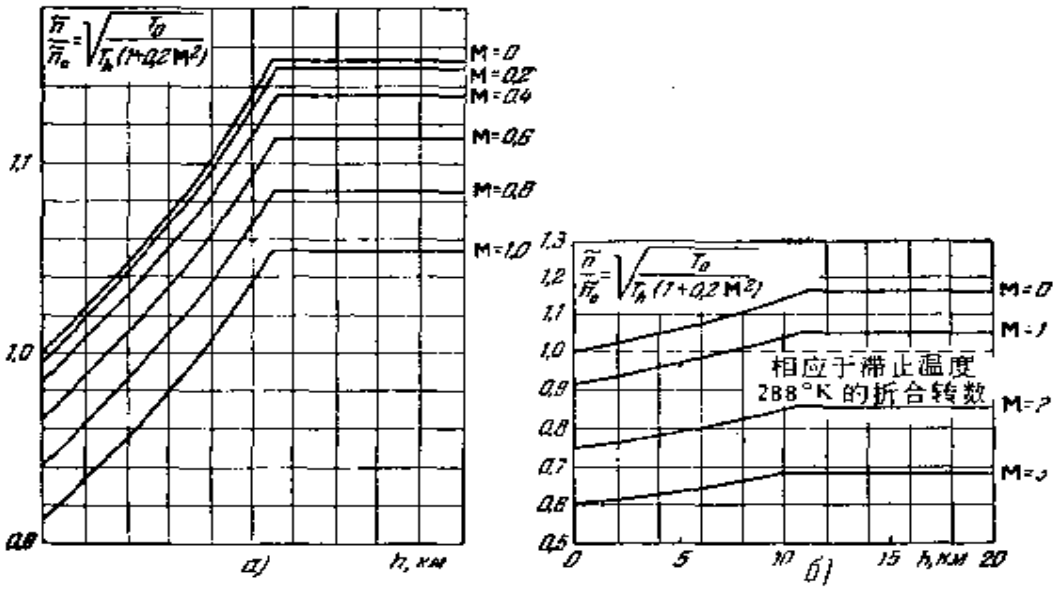


图 119　常转数的 ГТД 的折合转数随飞行高度和速度的变化。
在图 а)，б) 中高度的比例尺相同，$T_0 = 288°K$

以 q_0 记对应于正常温度和压力下在原地（$v_\infty = 0$）的地面试验的 q 值。

在相似的工作状况下

$$q = \frac{G_h}{G_{кр}} = q_0 = \frac{G_{地}}{G_{кр地}};$$

由此(对于相似的工作状况)

$$\delta = \frac{G_h}{G_{地}} = \frac{G_{кр}}{G_{кр地}} = \frac{\rho_{кр h} v_{кр h}}{\rho_{кр} v_{кр地}}$$

$$= \frac{\rho_h^*}{\rho_{地}} \sqrt{\frac{T^*}{288}};$$

因为

$$\rho_{地}=\frac{1}{8}\ \frac{公斤\cdot 秒^2}{米^4},\quad \rho_h^*=\rho_h\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

和

$$T^*=T_h\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right),$$

所以

$$\delta=\frac{G_h}{G_{地}}=8\rho_h\sqrt{\frac{T_h}{288}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$=\frac{p_h}{p_{大气}}\sqrt{\frac{288}{T_h}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}.$$

在图 120 和图 121 中用曲线画出了 δ 对高度 H 和 M_∞ 数的依赖关系。

设 R 与 R_0 为同一个压气机的两个工作状况的雷诺数值。

在此情况下显然

$$\frac{R}{R_0}=\frac{G}{G_0}\frac{\mu_0}{\mu}.$$

如果参量 R_0，G_0 和 μ_0 对应于正常条件下的地面试验，而 R，G 和 μ 对应于相等的 q 值下的高空高速试验，则

$$\frac{R}{R_0}=\delta\left(\frac{T_h}{288}\right)^{-n},$$

其中 n 为空气的粘性对温度的依赖关系式中的幂指数。

显然，借助于图 120 和图 121 中给出的曲线，对于量 q 保持常值的压气机工作状况，容易阐明雷诺数对飞行条件的依赖关系。

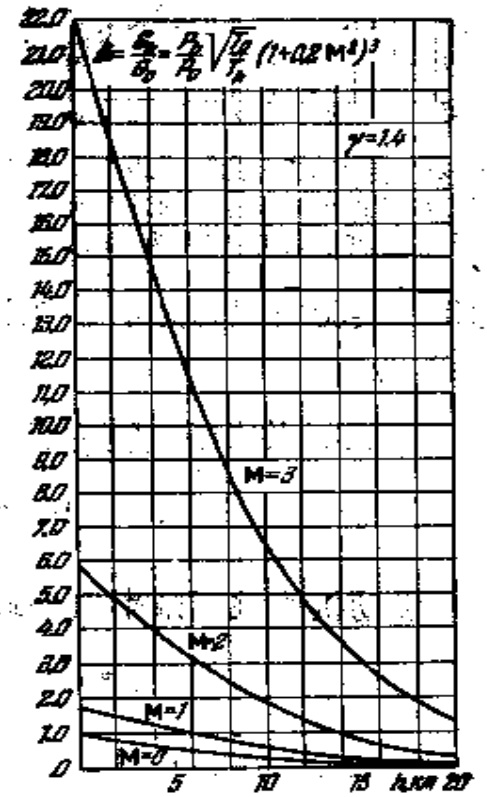


图 120　对于 ГТД 的相似的工作状况，在 $M>1$ 的情形下空气通过发动机的重量流量随飞行高度和速度的变化

根据 ГТД 的使用条件和强度条件，就可以确定参量 (2.7)—(2.11) 在实际情形下的变化范围。模型试验和地面试验应这样安排，使得在所要求的区域中参量 (2.7)—(2.11) 的影响，可以在所有的重要元件都是几何相似的装置上用实验求出。

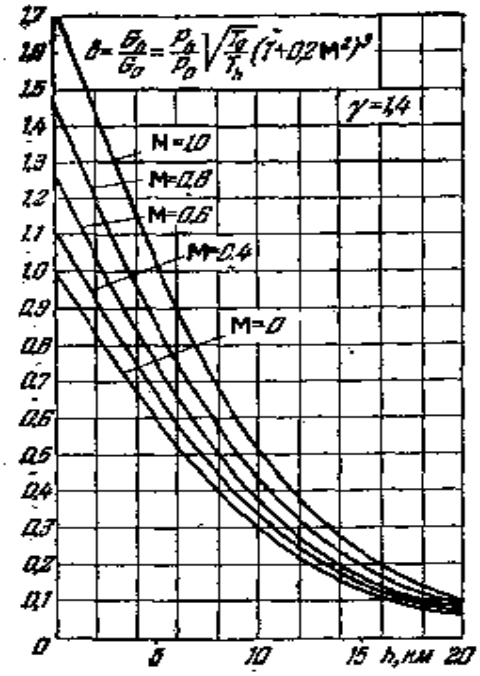


图 121　对于 ГТД 的相似的工作状况，在 $M<1$ 的情形下空气通过发动机的重量流量随飞行高度和速度的变化

在改用分子量大的气体的情况下，模型试验时所需的功率和圆周速度可以大大降低。例如，利用分子量六倍于空气的氟氯烷可以在这方面给出非常重要的结果。

现代的数据使人确信，在实际计算中需要计及参数 $\gamma=c_p/c_v$ 的值的变化。

在用氟氯烷与别的气体的混合物时，可以得到大的分子量而又保持 $\gamma=1.4$——空气所具有的值。实验空气动力学中应用重气体的问题需要进一步说明。

§3. 关于理想螺旋桨和理想空气喷气发动机的飞行效率[1)]

发动机的飞行效率由公式[2)]

$$\eta=\frac{Pv}{W}=\frac{\text{有效功}}{\text{所消耗的功}} \tag{3.1}$$

1) 这里所叙述的材料系引自作者在莫斯科大学 1951/1952 学年讲授专门化课程《气体的一维运动》的讲义.

2) 所考虑的是总效率，对于热力发动机它等于热效率与表示有效功同从发动机得到的机械功之比的效率的乘积.

定义，其中 P 为发动机的推力，v 为飞行速度，W 为传输给气流的能量功率。

我们将引进理想效率，其目的是为了获得一种判据，使得可以估价输入的能量被最有利地利用的可能限度和在实际上被实现的机器结构中接近此限度的程度。

从热力学可知，理想效率小于1。在理想可逆过程的情况下可以达到理想效率。由于现象的不可避免的不可逆性，实际效率总小于理想效率。然而在许多场合，在正确设计的机器中可以非常接近理想条件。实际效率与理想效率的差别乃是机器的技术完善性的最重要的特征。

理想发动机的利用的最有利条件，可以作为在设计发动机时选择基本参数和发动机工作流程的正确布置方式的指导。理想效率值也可用来估价各种未来发展的可能性。

我们把空气喷气发动机定义为一种产生推力的气体机械，该推力是由于发动机元件与获得了能量[1]（由燃烧燃料而产生的热能、由螺旋桨或压气机做功产生的机械能等等）的运动空气相互作用的结果而产生的。

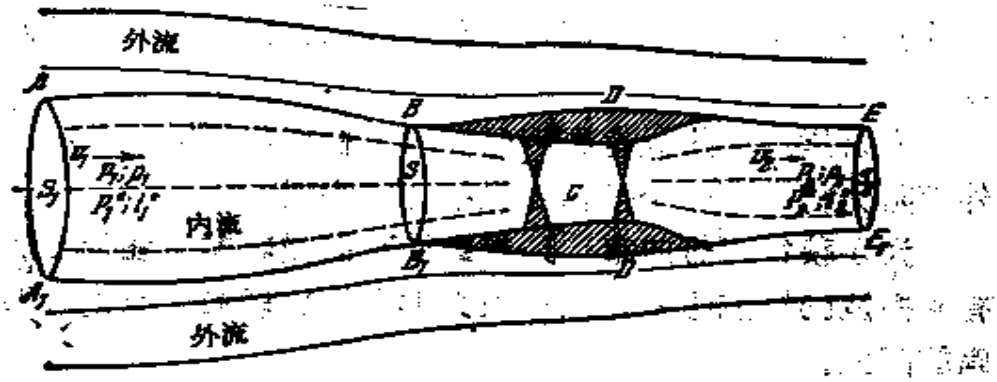


图 122　对于理想空气喷气发动机 (BPД) 的相对气流示意图

于是，可以同时研究理想螺旋桨，理想 ТРД，ТВД，ПВРД 和其它改型的 ВРД 的理论。

1) 往后，为简单起见，将略去进入空气流的燃料所添加的质量。

图 122 中给出了理想发动机情况下空气的定常相对运动示意图。虚线表示同发动机元件进行能量相互作用的气体质点的流线。实线表示不参与能量相互作用的质点的流线。我们把第一种流线之全体称作内流，而把第二种流线之全体称作外流。划斜线部分表示发动机的结构元件（内体、扩压器、喷管、机翼、机身等等）。

由空气动力学可知，对于大的飞行速度，外流与内流的空气对飞行器的作用力互相密切相关，并且在物理上是不可分的。此外，由一般流体力学教程可知，在理想条件下，气体在无外部能量供给的情况下对物体作可逆定常连续绕流时，推力和阻力等于零[1]。所以，在存在能量相互作用的情况下，必须把理想发动机的推力理解为气流对发动机所有元件的外表面和内表面的总作用力。

在理想情况下，我们应当假定在所有元件中气体的运动都是可逆的，其中包括不出现冲击波。在理想气体来流为亚声速的情况下，无疑存在专门形状的发动机机体，对于这些形状可以建立对发动机机体和射流作连续绕流的外部流动。

在超声速飞行的情况下，被外部气流所绕流的射流的和发动机机体的表面部分，在理想情况下可以认为是母线平行于来流速度的柱面。这时外部气流是平动气流，并且显然，外部阻力等于零。

容易指出一些具有有限尺寸的非柱形物体的形状，对于它们外部阻力将小于一个任何事先给定的小量。

为了获得理想效率，理想螺旋桨的或者其它任何发动机的带有冲击波的绕流图式，从一般力学和热力学的观点来看乃是不正确的图式.

具有这类流动的问题的提法可以有某种理论与实际意义，然而，对带有冲击波的绕流所计算的效率，不能看作是判定最为有利的可能性的标准。这种效率的实际意义需要专门论证。设计得合

1) 这就是著名的达朗贝尔-欧拉佯谬(参看第 373 页上的推导).

理的机器的效率值实际上可能大于对带有冲击波的绕流图式所算出的值。

为了应用一般的力学方程和热力学第一定律，我们以控制面 $AA_1BB_1CEE_1$（图 122）划出通过发动机并构成内流的空气“射流”。用字母 C 代表全部内表面，用字母 D 代表发动机的全部外表面。

不难证明，作为外部气流对射流表面 $AA_1BB_1DEE_1$ 的作用力而定义的力

$$F = \int (p - p_\infty) d\sigma \tag{3.2}$$

等于零（其中 $d\sigma$ 为表面元在垂直于来流的平面上的投影，而 p_∞ 为无穷远处的压力）。

事实上，我们先来考察对在平行于来流速度的柱形管中的表面 $AA_1BB_1DEE_1$ 的绕流。将动量定理和质量守恒定律应用于此气流，我们可以写出：

$$F = (p_2 - p_1)(\Sigma - S_2) + \rho_1 v_1 (\Sigma - S_1)(v_2 - v_1), \tag{3.3}$$

$$\rho_1 v_1 (\Sigma - S_1) = \rho_2 v_2 (\Sigma - S_2), \tag{3.4}$$

其中 Σ 为管道的截面积，脚标 1 和 2 分别表示物体前方和后方无穷远处的气流截面上的量。

由式（3.4）有：

$$\Sigma - S_2 = \frac{\rho_1 v_1 (S_2 - S_1)}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1},$$

$$\Sigma - S_1 = \frac{\rho_2 v_2 (S_2 - S_1)}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1};$$

利用这两式，由式（3.3）得：

$$F = \frac{p_2 - p_1 + \rho_2 v_2 (v_2 - v_1)}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1} \rho_1 v_1 (S_2 - S_1)$$

$$= \rho_1 v_1 (S_2 - S_1) \int_{v_1}^{v_2} \frac{\rho_2 v_2 - \rho v}{\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1} dv,$$

上式中用到了

$$\rho v dv = -dp.$$

若面积 S_1, S_2 有限，而面积 Σ 趋近于无穷大，则 $p_2 \to p_1 = p_\infty$ 和 $v_2 \to v_1$；所以 $F \to 0$.

我们发现，这个结论在内流不可逆而只有外流可逆的情况下也正确。

以 Q 记内流中的气体的质量流量：

$$Q = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \tag{3.5}$$

作用在发动机外表面和内表面上的总力 P 和所消耗的功率 W，可按下列公式由发动机前、后射流中无穷远处的气流参量来表示[1]：

$$P = Q(v_2 - v_1), \tag{3.6}$$

$$W = Q(i_2^* - i_1^*), \tag{3.7}$$

其中 i^* 为按滞止气流参量确定的焓。

公式 (3.5)，(3.6) 和 (3.7) 对于可逆绝热的外流和任何不可逆的内流都正确。

量 v_1, p_1^*, T_1^*, ρ_1, i_1 由飞行条件给定。流量系数

$$\varphi = \frac{S_1}{S}$$

(其中 S 为发动机进口的面积，而 S_1 为发动机前方无穷远处空气射流的面积)，以及发动机后方气体的状态参量和运动参量，都由发动机的构造和工作状况确定；此外，必须考虑到发动机前方和后方无穷远处静压是相同的。

由方程 (3.5)，在最一般的情况下，对于内流射流的面积比可以写出：

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho_2 v_2} = \frac{q(M_1)}{q(M_2)} \frac{p_1^* \sqrt{T_2^*}}{p_2^* \sqrt{T_1^*}}, \tag{3.8}$$

其中 $q(M)$ 对于气流的相对密度是一已知函数。

由状态方程有：

$$\pi = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \kappa,$$

其中

1) 这里我们假定了发动机前、后射流中无穷远处的气流特征量都是均匀分布的.

$$\varkappa = e^{\frac{s_2 - s_1}{c_p - c_v}};$$

s_1 和 s_2 为截面 S_1 和 S_2 处单位质量(如同 c_p 和 c_v 一样)的熵。

通常，量 $\varkappa < 1$，这是因为由于损失[1]或加热熵要增加。

由静压相等可知：

$$\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2};$$

由此

$$M_2 = \sqrt{\left(\frac{2}{\gamma - 1} + M_1^2\right) \pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{2}{\gamma - 1}}, \qquad (3.9)$$

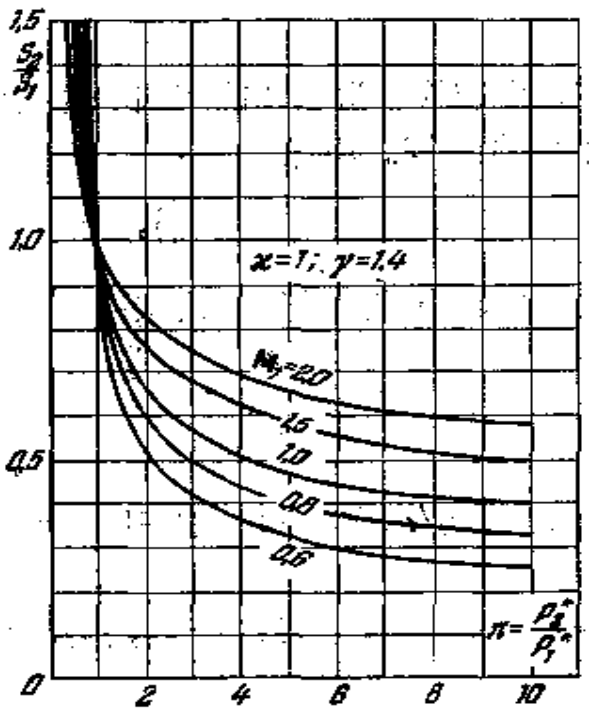


图 123　发动机后方远处射流的面积 S_2 与发动机前方远处射流的面积 S_1 之比对增压比和飞行 M_1 数的依赖关系

1) 对于螺旋桨、压气机或涡轮机，量 $\varkappa$ 等于相对于旋转部分定常的气流中的滞止压力之比 $p_{2\text{相对}}^*/p_{1\text{相对}}^*$。

$$M_2 > M_1 \text{ 当 } \varkappa > 1.$$

利用这些关系式，得：

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{q(M_1)}{q(M_2)\pi^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\varkappa^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}}. \tag{3.10}$$

图 123 中示出了 $\varkappa = 1$ 的情况下比值 S_2/S_1 随 M_1 和 π 的变化。显然，损失和加热导致比值 S_2/S_1 增大，然而这种增大是无足轻重的，因为 $\varkappa$ 的指数甚小$\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \ll 1\right)$.

进一步建立相应的关系有赖于对向内流供能的机理的了解。

理想的冲压式发动机的理论，无论对于亚声速飞行还是对于超声速飞行早先已作过研究[1]。

作为例子我们来考虑理想风扇或螺旋桨的理论，或者一般地说任何借助于可逆绝热地传递机械能而实现向气体供能的装置的理论。

在此情况下，由熵等于常数和静压相等的条件可知，截面 S_1 和 S_2 处的密度和温度相等。所以

$$W = Q\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right),$$

于是得到推广到任何超声速的熟知的公式：

$$\eta = \frac{2}{1 + \frac{v_2}{v_1}}. \tag{3.11}$$

对于空气，速度比 v_2/v_1 容易通过增压比 $\pi = p_2^*/p_1^*$ 和飞行的 M_1 数来表示。

我们有 $p_1 = p_2$，$\rho_1 = \rho_2$，从而 $c_1 = c_2$，这里 c 为声速；所以由公式 (3.9) 得：

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\left(\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)\frac{2}{(\gamma-1)M_1^2} + \pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}},$$

1) Абрамович Г. Н., Прикладная газовая динамика. М., Гостехиздат. 1953.

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{q(M_1)}{q(M_2)\pi^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}\kappa^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}},$$

从而

$$\eta=\frac{2}{1+\sqrt{(\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1)\frac{2}{(\gamma-1)M_1^2}+\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}}. \tag{3.12}$$

此依赖关系用曲线示于图 124。

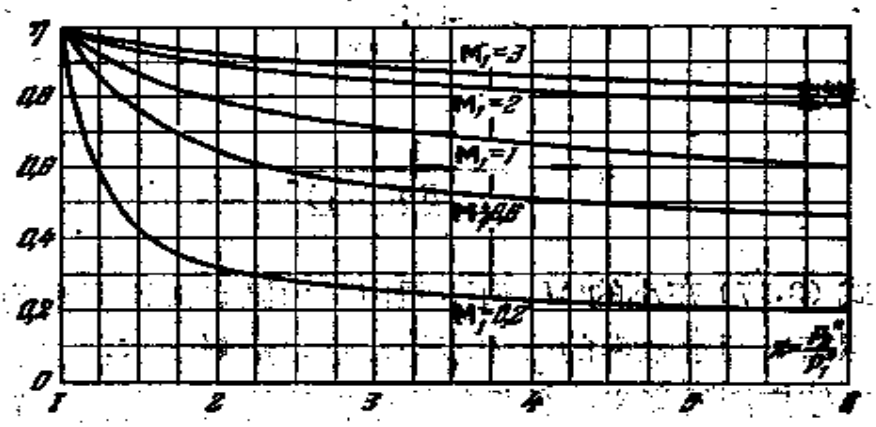


图 124　飞行效率随增压比和飞行 M_1 数的变化

对于阐明发动机进口面积 S 一量的作用，飞行效率 η 对负荷系数的依赖关系有很大的意义，负荷系数是

$$B=\frac{2P}{\rho_1 v_1^2 S}=\frac{2P}{\rho_1 v_1^2 S_1}\varphi=2\varphi\left(\frac{v_2}{v_1}-1\right). \tag{3.13}$$

由此求得：

$$\eta=\frac{1}{1+\frac{B}{4\varphi}}. \tag{3.14}$$

由公式(3.14)显而易见，效率 η 随流量系数 φ 的增大而增大。换句话说，在给定的进口外形尺寸下，最有利的情形对应于可以从发动机中通过的空气的数量最大。

由此推出确定最有利的系数 φ 值的规则。根据超声速流的性质，在 $M\geqslant 1$ 时应置 $\varphi=1$。

对于亚声速，如果气体在进入发动机时(在截面 S 处)的速度等于声速，则此时 φ 达到最大值。在当代的航空压气机中可以明

显地看出力图实现该条件的趋势。

在此情况下得：

$$\varphi = \frac{S_1}{S} = \frac{\rho_{вр} v_{вр}}{\rho_1 v_1} = \frac{1}{q(M_1)}. \tag{3.15}$$

于是，求得：

对于超声速

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{B}{4}}; \tag{3.16}$$

对于亚声速

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{Bq(M_1)}{4}}. \tag{3.17}$$

公式（3.17）在小的 M_1 值下同由升力圆盘理论得出的、人所共知的螺旋桨理想效率的公式不符。这可解释如下：这里的问题提法具有较广泛的涵义并包括螺旋桨在喷管［喷嘴、柯特（Корт）喷管、涵道中的螺旋桨等等］中工作的情况，这时相当一部分推力可以在这类喷管中形成。关系式（3.16）和（3.17）用曲线示于图125。

根据上述理想螺旋桨理论还可以作出结论：在设计具有最小重量的发动机时，发动机的进气构件和通道应保证气流在进入压气机时其速度接近于声速。

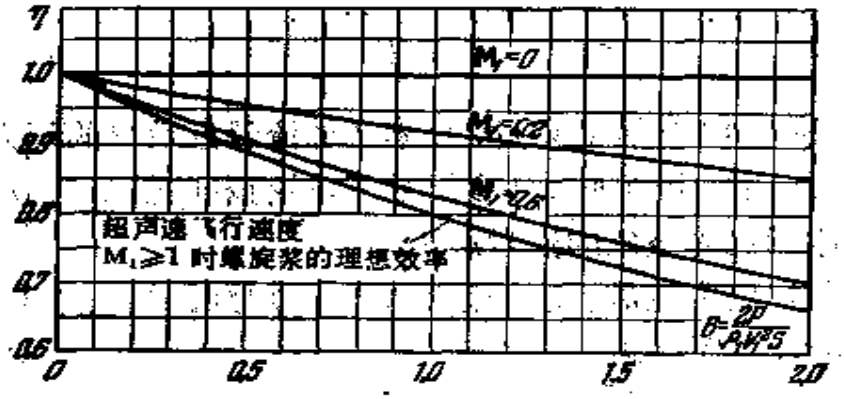


图 125　亚声速和超声速飞行的理想力学推进器（螺旋桨）的飞行效率随负荷系数的变化

第六章　在天体物理学上的应用

§1. 一些观测数据

在现代天体物理学中，不可能在离散质点系动力学或液态物质流体静力学范围内分析和理解恒星内部运动、恒星演化和各种星云的演化，而在不久前这些理论还曾是经典天文学中各种模型和概念的基本来源。现在，把天体看作气态物质来研究，应是解决天体演化学主要问题的线索，也只有通过这一途径才能对许多观测到的现象找到解释。现在已很明显，有必要把提出和解决一系列气体运动的动力学问题作为研究天体现象的概念基础，这些问题可以看成是概括了恒星和星云的运动及演化的本质特征的理论模型。为了建立和研究这样的模型，必须利用现代理论气体动力学(空气动力学)的方法、工具和概念，并针对天体物理学提出和解决相应的力学问题。

鉴于这种大家都清楚认识到的需要，1949 年在巴黎召开了国际会议，会上天体物理学家与以前主要从事航空与爆炸波传播理论研究的著名的气动力学专家进行了会晤。

这次会后发表了附有讨论的报告文集[1]，其中指出，在研究最重要的天体现象时，必须提出气体物质以很大相对速度并带有冲击波在引力场中运动的问题，考虑电磁场的气体的湍流运动问题等等。

初步的分析表明，为了解释天体现象，仅只利用已知的研究过的气体运动现象是不够的，有必要建立新的模型，提出和解决新的气体动力学问题。

---

1) Problems of Cosmical Aerodynamics, Dayton Ohio, 1951. 此文集已译成俄文: «Проблемы космической аэродинамики» М. ИЛ., 1953.

第四章中论述了量纲理论方法在气体一维球对称运动理论上的应用，在此方法的基础上我们研究了某些气体运动，这些气体运动看来可以反映天体物理学观测中发现的一些本质特点。

下面我们讨论这种方法在恒星亮度和内部构造理论、造父变星亮度改变理论以及新星和超新星爆发理论上的应用。现在我们先来叙述从天体物理学知道的有关这些现象的一些基本数据。

恒星的主要特征量是其亮度与明度，它们直接与眼睛在观测时的感觉有关。亮度可以用名为光度计的专门仪器来测量。很早以来，恒星的亮度就被用来作为"星等"概念的基础。

最初，恒星的分类只是简单地根据目测这样来进行的：一等星比二等星亮几倍，二等星就比三等星也同样亮这么多倍，如此等等。这样，可以根据视亮度把所有的星排列起来。早在古代用肉眼直接观测时，星就被划分为六等。最明亮的星划归第一类，称为一等星，然后是二等星，如此等等。显然，有许多星介乎两个星等之间，因之给它们定为非整数的星等。从给出的定义很明显，随星等的增大，视亮度减小。现在，在对用强大的现代望远镜得到的星的映象进行长曝光拍照时，已经可以研究 22 等甚至 23 等的弱星。

上述的星等划分依赖于定义亮度的方法。当用目测或用预先照像来定视星等时可能导致不同的结论，因为人眼对红光和黄光较为敏感，而照像底片却对蓝光和紫光具有更高的灵敏度。因此，又可区分为目测视星等、照像视星等、光电视星等，等等。

利用对所有波长同样敏感的仪器，并对地球大气吸收和仪器光学吸收进行修正而定出的星等称为热星等。热星等表征到达地球大气上层的恒星的总辐射。以后我们将使用热星等的概念。

显然，星等 m 由单位时间内从该恒星照射到地球上的辐射能量 E_m 决定。这一能量正比于恒星单位时间内所辐射的总能量，即恒星的光度 $\mathfrak{L}^*$，且反比于地球到恒星的距离 l 的平方。

根据按韦伯-菲克纳（Weber-Fechner）定律所定义的人眼的性质，看来，当视觉强度所定义的星等 m 按等差级数改变时，视觉源

的相应强度 E_m 要按等比级数改变。

由此建立了如下关系式：

$$m = -2.5 \lg E_m + \text{const}, \tag{1.1}$$

可以将其改写为

$$\frac{E_{m_2}}{E_{m_1}} = 10^{\frac{m_1 - m_2}{2.5}} \simeq (2.512)^{m_1 - m_2}. \tag{1.2}$$

太阳的视星等 $m_2 = -26.7$。天狼星——最明亮的可见星——的视星等 $m_1 = -1.6$。从而 $m_1 - m_2 = 25.1$，而 $E_{太阳}/E_{天狼星} \approx 10^{10}$。换句话说，太阳的视亮度为天狼星的一百亿倍。

星体的视星等显著地依赖于星体到地球的距离，因此，为了得到星的对照特性引入绝对视星等 M 的概念，它等于当把所研究的星移到距离地球10个秒差距[1]的位置上时再按上法定出的视星等。

基于公式

$$m = -2.5 \lg \frac{\mathfrak{L}^*}{l^2} + \text{const} \text{ 以及 } M = -2.5 \lg \frac{\mathfrak{L}^*}{10^2} + \text{const}$$

我们得到

$$M = m + 5 - 5 \lg l; \tag{1.3}$$

式（1.3）中，星到地球的距离 l 以秒差距为单位。

太阳的绝对星等等于 4.8；这意味着，在 10 个秒差距的距离上太阳对我们来说将是一个五等的弱星，用肉眼刚刚能看得到。天狼星的绝对星等为 1.3。由此可见

$$\frac{\mathfrak{L}^*_{天狼星}}{\mathfrak{L}^*_{太阳}} = 10^{\frac{4.8 - 1.3}{2.5}} \simeq 25.$$

因此，天狼星的光度为太阳光度的 25 倍。恒星的视亮度 m 之值可以直接测量；如果从某些补充数据我们可以求得绝对星等 M，则利用公式（1.3）很容易计算出到恒星的距离 l。

除光度 $\mathfrak{L}^*$ 外，恒星最重要的特征量是其质量 $\mathfrak{M}$ 和半径 $\mathfrak{R}$。通过各种观测和相应的分析，天文学家现在掌握了大量恒星的 $\mathfrak{L}^*$、$\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{R}$ 的数据。对这些数据的研究表明，对于各类恒星有如下的

1）一个秒差距等于 3.26 光年或 3.08×10^{13} 公里，它相应于视差为 1″ 的星到地球的距离。

依赖关系[1]：

$$\mathfrak{L}^* = f_1(\mathfrak{M}) \text{ 和 } \mathfrak{R} = f_2(\mathfrak{M}). \qquad (1.4)$$

在图 126 和 127 中给出了帕列纳戈和马谢维奇著作中表示这种依赖关系的图. 在§3 中我们将给出有关式(1.4)的一些理论分析。

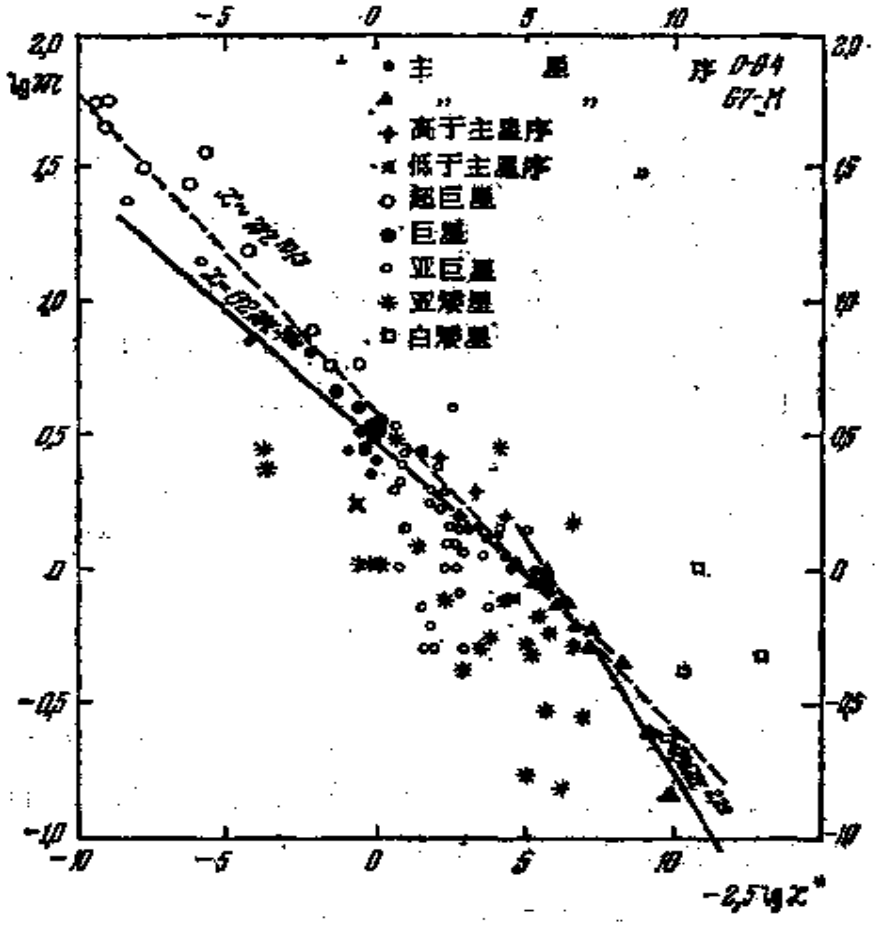


图 126 质量-光度图

现在我们来考察一下所谓变星的某些数据。1784 年，天文学家古德里克（Goodrike）首次公布了观测结果[2]，他发现位于仙王座头部附近的标记为 δ 的星周期性地改变其亮度。现在已经知道许

1) 见 Паренаго П. П. и Масевич А. Г., Исследование зависимости масса-радиус-светимость, Труды государственного астрономического ин-та им. штернберга, т. XX, Изд. МГУ, 1951.

2) Goodrike J., A Series of Observations on, and a Discovery of the Period of Variation of the star δ Cephei. Phil. Trans. Roy. Soc., London, V. 76, 1786, pp. 48—61.

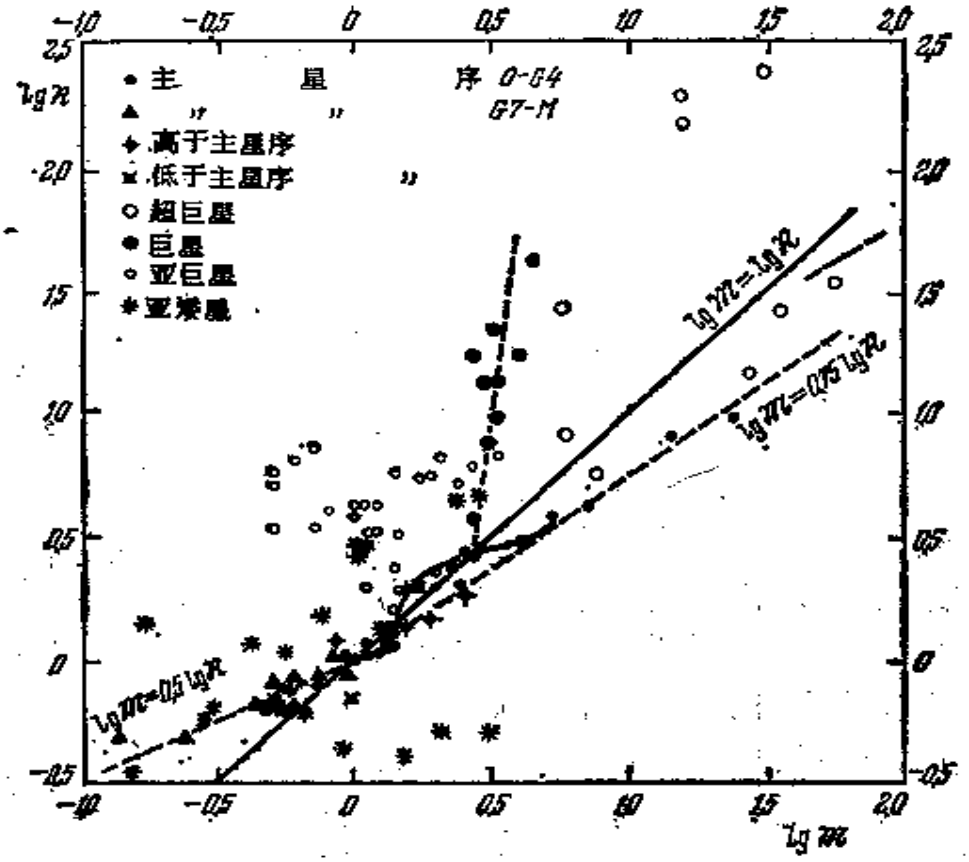


图 127 质量—半径图

多称之为造父变星的类似的变星。它们在我们银河系的不同区域以及在其它星系中都有所发现。

造父变星的周期与绝对视星等之间的经验规律，使得天文学家可以借助公式 (1.3) 求出至其它星系的距离[1]，得到供研究恒星演化和解决许多其它问题的非常有价值的材料。

图 128 中给出了仙王座 δ 星亮度 m 随时间进行的光度测量的结果。对于其它造父变星，相应的曲线一般有同样的性质。现代的观测发现，仙王座 δ 星的周期等于 5 昼夜8小时 53 分 27.46 秒，而且这个数值几乎为常值。天文学家的研究表明，虽然有周期的波动，但是很小；例如对于仙王座 δ 星，20 年中周期减少 1 秒左

1) 现在，这是决定量级为一亿光年这样大距离的基本方法。

右。典型的造父变星的周期在半天到 80 昼夜的范围之内。



图 128 仙王座 δ 星亮度的仿视曲线

以多普勒效应为基础的光谱测量表明，伴随造父变星亮度的变化，还有气体的辐射粒子的视向速度的同一周期的变化，这证明，在造父变星的光球中存在着气体的径向运动。视向速度振动的振幅量级为每秒几十公里，对于仙王座 δ 星，这振幅等于 39 公里/秒。亮度曲线与视向速度曲线彼此十分相似。

因此，观测数据无疑地表明，在造父变星的光球中存在着显著的气体运动。除此以外，观测还确定了，随同亮度的振动还有光谱和有效温度的变化。光球的半径和温度的变化造成亮度的变化。造父变星的光度（星体辐射的总光能）在振动期间变化几倍，对于仙王座 δ 这变化之比为 2。

表中给出了典型造父变星的一些数据。

此表中，$\mathfrak{M}$ 是星的质量，$\mathfrak{M}_\odot$ 是太阳的质量，$\mathfrak{R}$ 是星的半径（太阳半径 $\mathfrak{R}_\odot = 6.96 \times 10^5$ 公里），$\delta\mathfrak{R}$ 是星球半径的最大值和最小值之差的一半，M 是平均绝对视星等。在“亮度曲线非对称性”一栏中给出亮度由最大值下降至最小值的时间间隔与其上升时间间隔的比值。

“光谱类型”一栏说明星球的温度特性。造父变星，如同所有的变星一样，是光度很大的星球，并且一般是超巨星。按其质量和尺寸造父变星比我们的太阳大得多。

在此表中，半径之值是在如下假设下计算出来的：光球（与星球一同膨胀和收缩）总是由同样那些气体粒子构成。可以看到，半

表．典型造父变星的数据[1]

星[2]	光谱类别[3]	周期（昼夜）	M（星等）	M的变幅（星等）	$\delta\mathfrak{R}$（10^6公里）	$\mathfrak{R}$（10^6公里）	$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_\odot}$	亮度曲线非对称性
l Car	F8–K0	35.52	−5.52	1.2	8.59	145	50	1.7
Y Oph	F8–G7	17.12	−4.00	0.61	1.79	59	23	1.4
X Cyg	F8–K0	16.39	−3.92	0.69	6.12	41	19	1.7
ζ Gem	cG1v	10.15	−3.16	0.42	1.82	43	15	1.0
S Sge	F8–G7	8.38	−2.87	0.50	1.47	33	13	2.0
W Sgr	F2–G5	7.59	−2.72	0.85	1.93	24	11	2.5
η Aql	F2–G9	7.18	−2.62	0.51	1.77	25	11	2.0
X Sgr	F5–G9	7.01	−2.60	0.67	1.33	28	11	2.0
Y Sgr	F5–G8	5.77	−2.30	0.74	1.35	27	10	1.4
δ Cep	F4–G6	5.37	−2.19	0.61	1.27	23	9	2.5
T Vul	F3–G5	4.44	−1.95	0.71	0.97	17	8	1.7
α UMi	cFv	3.97	−1.81	0.08	0.17	20	8	1.7
SU Cyg	F0–G1	3.85	−1.78	0.74	0.71	12	7	2.5
RT Aur	F1–G5	3.73	−1.74	0.80	0.86	14	7	3.3
SZ Tau	F4–G2	3.15	−1.58	—	0.46	14	7	1.0
SU Cas	F2–F9	1.95	−1.15	0.33	0.30	9.2	5	1.0
RR Lyr	B9–F2	0.567	−0.35	0.85	0.17	4.3	4	2.0

1) 所有数据及本表均引自下书：Росселанд С. Теория пульсаций переменных звёзд, ИЛ. М., 1952; 原文：Rosseland, The Pulsation Theory of Variabel Stars, Oxford, 1949.

2) 本栏后三个字母为星座名，中译名顺序为船底、蛇夫、天鹅、双子、天箭、人马、天鹰、人马、人马、仙王、狐狸、小熊、天鹅、御夫、金牛、仙后、天琴。——译者注

3) 这里给出的是哈佛光谱型分类法，按从热到冷的次序将星分为 W, O, B, A, F, G, K, M, S 以及 R 和 N 各型，每型又按谱线强度细分，如 B 型分为 $B0$ 到 $B9$ 等。——译者注

径的改变 $\delta\mathfrak{R}$ 具有百万公里的量级．如果膨胀光球的边界与冲击波波阵面相重合，则光球半径的变化将更大，因为冲击波的速度比

波后被测气体粒子速度要大。显然，由于造父变星光球面积的变化，星球的光度变化可能是相当大的。当在冲击波波阵面——光球边界——前面有一层较冷的气体时，这一效应就更加明显，这层冷气体在光球最小半径的时刻将吸收特别多的辐射能量。

骤然将自己的亮度增加 10—12 个星等而有时甚至增加 15 个星等的星体称为新星；这意味着，这些星体的视亮度会增加为原来的 10,000—1,000,000 倍。 新星爆发的典型特点是其极大的突然性；亮度增大的时间约为一或二昼夜，而引起爆发的能量释放看来一共仅只进行几个小时。

亮度在达到最大值后缓慢地下降到初始值。

在图 129 中给出了 1918 年爆发的天鹰座新星的亮度变化。

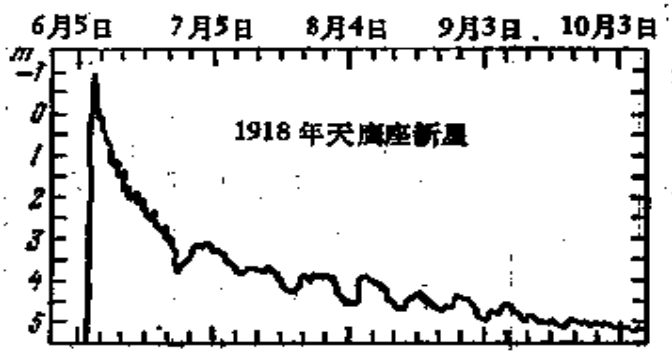


图 129 天鹰座新星的亮度变化曲线

亮度的变化伴随着光谱的急剧变化。所有的谱线向紫端移动是典型的现象，这是辐射气体的很大的径向速度所引起的。此速度的量级为从几百到 3000—4000 公里/秒。爆发后经过一段时间在新星的光谱中出现明亮的禁线，这对于十分稀薄气体的辐射和对气体星云的光谱是有代表性的。 爆发前和爆发后好几年新星的光谱属于最热一类的 O 族星[1]。 对于天鹰座新星，利用詹斯特拉（Zanstra）方法根据 He-II 线得知，爆发之后三个月星的温度等于 65000°（太阳的温度为 6000°）。

新星的直径在其最大值的时刻与地球轨道直径大小相当。根

1) 见上表中的译者注 3)。

据各种计算，天文学家估计新星爆发时释放的能量约为10^{45}—10^{46}尔格。这一能量等于太阳在10,000—100,000年中辐射的能量。在我们的银河系中，每年约有30个新星爆发。

介于新星和造父变星之间还有一种中间类型的变星——“再发变星”；这种星爆发多次，有时经过几年爆发一次。这种变星的例子有鲸鱼座的蒽蒙增二星（奇异星），其爆发间隔时间为320—370天；爆发时亮度变化1500倍。

还可以举出双子座U星类型的所谓矮新星，它每经一两星期就重复一次其弱爆发——星“喷嚏”。图130给出了这种星的亮度曲线。



图130　双子座U星类型新星的亮度变化曲线

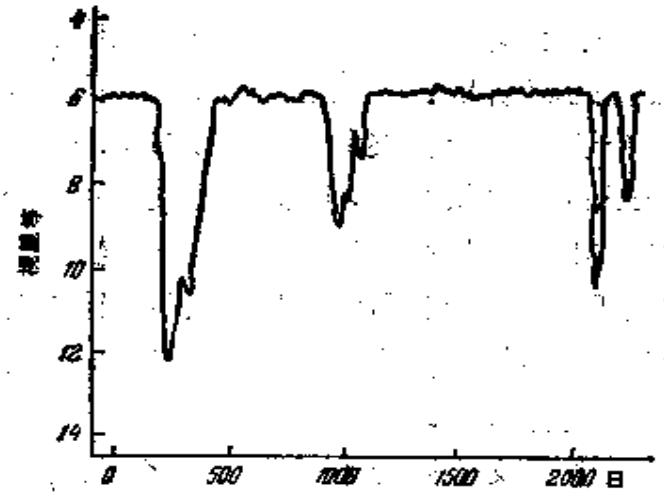


图131　北冕座R星的亮度变化曲线

最后，我们再举出北冕座的R星，其亮度变化曲线示于图131，亮度的突然降低是由于星球抛出的碳物质吸收光造成的。

新星的爆发是惊人的巨大的宇宙爆炸，但是所谓超新星的爆发则是更为巨大的令人难以想象的灾难性的宇宙奇观。当超新星爆发时，其光度增长数十亿倍，可与银河系所有星的总光度相比。

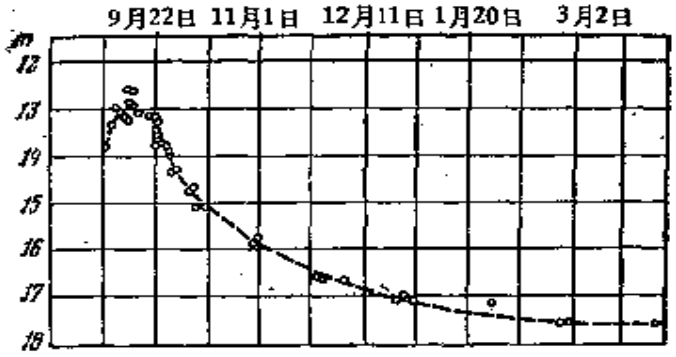


图 132　螺旋星云 NGC1003 超新星的亮度曲线

观察到的最亮的超新星是在 NGC 5253 爆发的（达到绝对星等—18.4）。这一超新星在亮度最大时比我们的太阳亮 150 亿倍。

在图 132 中给出了超新星的典型的亮度变化曲线。超新星亮度下降曲线是单调的；而对于新星在亮度下降时可以观察到起伏。超新星的爆发是罕见的现象。在我们的银河系最近 1000 年来看来只观察到三个超新星：第一个是根据中国历史记载[1]于 1054 年在金牛座爆发的超新星。现在在这个地方可以看到称为蟹状星云的星云。至今这个星云仍继续以很大的速度膨胀。在蟹状星云的中心有一个弱的但很热的星，其温度超过 100,000°。1572 年在仙后座爆发的星被认为是第二颗超新星，这是第谷（Tycho Brahe）观察到的，它在天空中照耀了近一年之久（甚至白天在灿烂的阳光下也可以看到它）。第三个是于 1604 年在蛇夫座爆发的，在该处现在还观测到星气状星云。

在其它星系中天文学家已观测到 100 个以上超新星。由于距离遥远，用现代仪器观察其它星系的超新星也只是在其亮度达最大值时才有可能。

1）宋史："至和元年五月乙丑客星出天关东南，可数寸，岁余稍没。"——译者注

根据天文学家的估计，超新星的直径在其最大值时可达普通新星相应直径的250倍，为我们太阳系直径（即冥王星轨道直径）的5—6倍。在超新星爆发时，在很短的、大约只有几天的时间里，释放出约10^{48}尔格的能量；太阳在一千万年内才释放出这么多的能量。根据光谱数据发现，在超新星爆发时，辐射光球中气体粒子以大约6000公里/秒的巨大速度运动。

上面所描述的对超新星、新星的爆发和造父变星光度变化的观测表明，这些现象的本质最直接地与构成相应变星的大量气体物质的运动有关。

下面我们讨论气体非定常运动的一些问题的提法和它们在某些情况下的解，这种运动可以看作是造父变星的振动和新星及超新星爆发的近似模型。

§2. 关于模拟星体的气体物质的平衡方程和运动方程

为了对构成星体的气体物质的平衡和运动进行定量描述，必须建立平衡方程和运动方程。下面我们给出按牛顿定律互相吸引的气体物质的平衡和运动方程。对于运动物质，我们只讨论具有球对称性的径向运动的情形。

对于具有球对称性的运动，表达质量守恒定律的连续性方程有如下形式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v}{\partial r}+\frac{2\rho v}{r}=0, \tag{2.1}$$

式中ρ是密度，v是气体粒子的径向速度，r是距对称中心的距离，t为时间。当平衡即静止时，这个方程为恒等式。

当气体物质运动的线尺度和速度尺度很大时忽略气体的粘性是完全合理的，因此我们在气体为无粘性即理想的假设下写出考虑万有引力的动量方程：

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{fM}{r^2}=0, \tag{2.2}$$

这里 $f = 6.670 \times 10^{-8}$ 厘米^3/克·秒^2——引力常数，p 是总压力，它等于分子压力与光压之和，$\mathscr{M}(r, t)$ 是半径为 r 的球内的气体质量。众所周知，当存在球对称性时，所有质量对距对称中心为 r 的点质量的作用等于位于对称中心的质量为 $\mathscr{M}(r, t)$ 的质点的吸引力。为了确定 $\mathscr{M}(r, t)$，我们有方程

$$\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \text{ 或 } \mathscr{M} = 4\pi \int_0^r r^2 \rho dr. \tag{2.3}$$

星球内部物质的温度很高，为几百万度的量级，而靠近星球的外表面是几千度的量级；在这样的温度下，星球的物质可以看作是完全气体，甚至当压力和密度很高时也是如此。因此，再假设有局部热力学平衡，状态方程就取如下形式：

$$p = p_{分子} + p_{光} = \frac{R\rho T}{\mu} + \frac{a}{3} T^4 \tag{2.4}$$

这里 T 为绝对温度，$R = 8.3144 \times 10^7$ 尔格/度·克分子——绝对气体常数，μ 是分子量(一克分子气体的质量 $[\mu]$ = 克/克分子)，由气体的化学成分决定[1]，而 $a = 7.569 \times 10^{-15}$ 尔格/厘米^3·度^4 为辐射密度常数(斯忒藩常数)。

光压只在十分高的温度下或者只在极小的密度下才有分子压力的量级。因此，在研究星体构造和星球内部的气体运动时，与分子压力相比通常可以忽略光压，这等价于用克拉珀龙方程

$$p = \frac{R\rho T}{\mu} \tag{2.4'}$$

代替方程 (2.4)。

对于能量守恒方程，我们将利用这一方程和动能定理的推论即热流方程来代替，它在一般情况下可以写为：

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dA^{(i)}}{dt} = \frac{dQ^{(e)}}{dt}, \tag{2.5}$$

这里 E 是质点的内能(不包括内引力势能)，$\frac{dA^{(i)}}{dt}$ 是内部应力单位

1) 由于星球内部的高温，轻元素完全电离。当完全电离时，所有元素的 μ 近似为 2，只有氢的 $\mu = 0.5$，而氦的 $\mu = 1.33$。

时间内做的功(不包括内引力的功[1]), $\frac{dQ^{(e)}}{dt}$ 是单位时间内外部流入的热量。由于上面所做的假设，热流方程可以写为：

$$c_v \frac{d}{dt} T + p \frac{d}{dt} \frac{1}{\rho} = \varepsilon, \qquad (2.5')$$

这里 c_v 是单位质量气体的定容比热，依赖于物质的化学成分；ε 是单位质量气体单位时间内释放出的总能量。量 ε 可能因辐射、吸收，因核反应或化学反应，因热传导性而异于零。如果星球气体处于平衡态，则能量的总平衡归结为方程

$$\varepsilon = 0.$$

由于星球向周围空间辐射能量，所以在平衡时星球内部应有能源。研究不同能源分布规律下的星球平衡表明，星球内部压力和密度的分布，其中包括压力、密度在星球中心之值，对能源分布规律的依赖是微弱的。计算表明，如果假设能源是均匀地分布于星球的所有物质，或者假设这同样大小的能量是在一点上即在星球的中心释放，则得到的状态特征量是相近的。除此以外，由物理化学过程所引起的能量释放量非常敏感地依赖于温度。在星球中心温度最高，因此，在许多情况下可以认为，能量的基本部分是在星球中心附近释放的。如计算所表明，这一结论在实际中应得到很好的证实[2]。

因此，下面我们有时将利用这样的模式，其中假设能量只在星球中心释放。

现在，如下的观点得到公认并有科学根据：星球用于辐射的持续的能量消耗，或者来源于星球收缩时释放的引力能(见第四章方程 (3.31))，或者来源于星球内部的核反应。

核反应的可能类型敏感地依赖于温度和所存在的"燃料"。

---

1) 内引力的功和内引力能的增加在方程(2.5)的左端互相抵销。

2) 见 Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б. и Соболев В.В., Теоретическая астрофизика, М., Гостехиздат, 1952; 并见 Chandrasekhar S., An Introduction of the Study of Stellar Structure. Chicago, Univ. Chicago Press, 1939. (俄译本: Чандрасекар С., Введение в учение о строении звезд, ИЛ. М., 1950).

根据物理推理和有关星球化学成分的数据确定了：核反应的主要类型是氢核变化为氦核。计算表明，对太阳这类星球，可以用燃烧氢的核反应来解释星球存在期间能量补充和消耗的平衡。在这一反应下，星球质量的改变很小，虽然太阳每秒钟辐射的能量按公式 $E = mc^2$（c 为光速）等于四百万吨，并且这一过程至少已经持续了五、六十亿年了，但质量一共只改变了原来质量的0.007。

能量可通过辐射由中心传递到星球的外围；在这过程中，由于吸收和自然辐射，按频谱的能量分布可能改变，但是在平衡时，辐射的、吸收的和通过热传导[1]传递的能量，其总和等于零。下面，作为近似条件我们将假设，在非定常过程中也仍然有这种情况，换句话说，我们将讨论气体的绝热运动[2]（$\varepsilon = 0$）。

不难证明，造父变星在其亮度变化的周期内辐射的总能量与整个星球储存的引力能和内部热能相比是很小的。这也就可以解释，为什么星球的能源分布规律对普通星和造父变星内部的密度和压力分布只有微弱的影响。因此我们可以认为，在星球的整体上的非定常运动中，在一个振能周期时间内在星球中心释放出的并辐射到外部空间去的能量，不起重要作用。在讨论非定常运动的时候，我们最后还假设，整个星球物质的分子量 μ 和定容比热 c_v 为常数。

由上面所作的假设推知，为了描述星球气体模型的非定常运动，我们可以利用下面的方程组：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{f\mathcal{M}}{r^2} = 0, \\ &\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial r} - 4\pi r^2 \rho = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{I})$$

1) 通过热传导传递的能量比通过辐射传递的能量要小得多。

2) 另一方面，对某些存在大量能量释放和有很高温度的激烈过程可以取这样的问题提法。在其中有很强的辐射热交换和其它的热交换，从而在速度扰动场中可以认为温度是相同，但可随时间而变化（见 261—262 页上关于爆炸的问题提法）

$$\left.\frac{\partial \frac{p}{\rho^\gamma}}{\partial t} + v\frac{\partial \frac{p}{\rho^\gamma}}{\partial r} = 0,\right|$$

这里 $\gamma = c_p/c_v$ 是泊松常数. 方程组 (I) 中最后一个方程直接由 $\varepsilon = 0$ 时的方程(2.4′)和 (2.5′) 推出. 方程组由四个方程组成，有四个未知函数 $\rho, v, p, \mathscr{M}$.

如果 $\gamma \neq c_p/c_v$ 而 $\gamma = \text{const}$，则方程组 (I) 决定多方过程的气体运动.

在平衡情况下方程组 (I) 简化为一个方程：

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} + \frac{4\pi f}{r^2}\int_0^r r^2\rho dr = 0,$$

其中含有两个未知函数 ρ 与 p. 为了求温度分布，必须借助于有关星球内部能源分布的数据和辐射能输运理论的方程.

当具有球对称性且现象为热力学可逆时，描述平衡时星球内状态特征量分布的方程组可以取为如下形式[1]：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} + \frac{f\mathscr{M}}{r^2} = 0, \quad \mathscr{M} = 4\pi\int_0^r r^2\rho dr, \\ &p = \frac{R_\rho T}{\mu} + \frac{a}{3}T^4, \quad \frac{d}{dr}\frac{R^4T^4}{3} = -\frac{\kappa_1\mathfrak{L}_\rho}{4\pi r^2}, \\ &\kappa_1 = \frac{\kappa R^4}{ac}, \quad \frac{d\mathfrak{L}}{dr} = 4\pi r^2\rho\varepsilon^*, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

这里 κ 是吸收系数，c 是光速，ε^* 是星球物质单位时间单位质量释放的能源的强度，$\mathfrak{L}(r)$ 是通过半径为 r 的球的能量通量.

为了得到平衡方程 (II) 的解，可以将质量 $\mathscr{M}$ 取为自变量并利用以下边界条件：

在星球中心，当 $\mathscr{M} = 0$ 时，

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0. \qquad (2.6)$$

在星球表面，当 $\mathscr{M} = \mathfrak{M}$ 时，

$$\rho = 0 \text{ 及 } T = 0. \qquad (2.6')$$

1) 见 Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В.В., Теоретическая астрофизика, Гостехиздат, 1952, стр. 5.

如果能源在星球内部连续分布，则应令量 $\mathfrak{L}_0$ 为零。当在星球中心有集中能源时，我们有 $\mathfrak{L}_0 \neq 0$.

由于星球内部温度比表面温度高得多，所以许多天文学家通常认为，在星球表面可以取 $T = 0$. 当 μ, κ 和 ε^* 给定时，方程组 (II) 的解依赖于三个任意常数，它们由星球中心的一个边界条件 (2.6) 和星球表面上的两个条件 (2.6′) 确定。

如果分子量 μ，吸收系数 κ_1 和能源强度 ε^* 作为 ρ 和 T 的函数给定：

$$\mu = \mu(\rho, T), \kappa_1 = \kappa_1(\rho, T) \text{ 及 } \varepsilon^* = \varepsilon^*(\rho, T), \quad (2.7)$$

则方程组 (II) 及边界条件 (2.6) 和 (2.6′) 就完全确定解，此解具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \rho(\mathscr{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}_0, a_1, a_2, \cdots), \\ T &= T(\mathscr{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}_0, a_1, a_2, \cdots), \\ \mathfrak{L} &= \mathfrak{L}(\mathscr{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}_0, a_1, a_2, \cdots), \\ r &= r(\mathscr{M}, \mathfrak{M}, \mathfrak{L}_0, a_1, a_2, \cdots), \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

这里 $a_1, a_2, \cdots$ 是方程组 (II) 和函数关系式 (2.7) 中包含的物理常数。

如果 $\mathfrak{L}_0 = 0$，则从式 (2.8) 对于光度和半径得到如下形式的公式：

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}^* &= \mathfrak{L}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, a_1, a_2, \cdots), \\ \mathfrak{R} &= r(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}, a_1, a_2, \cdots). \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

于是，解出所提的问题，就可以确定星球的光度与其质量间的关系、星球的半径与其质量间的关系，从而有可能从理论上理解本章 § 1 中所描述的经验结果。

关系式 (2.9) 以参数形式依赖于常数 $a_1, a_2, \cdots$，这些常数的值对于不同的星可能是不同的。对于那些具有相同的上述常数的各组星球，关系式 (2.9) 确定了星球光度对质量的同一依赖关系。

如果 $\mathfrak{L}_0 \neq 0$ 并且不依赖于 $\mathfrak{M}$ 而给定，则函数 (2.9) 将如同依赖于一个附加参数而依赖于 $\mathfrak{L}_0$. 如果全部能源都集中于中心，即采用点能源模型，则代替式 (2.9) 我们将得到如下形式的公式：

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L}^* &= \mathfrak{L}_0, \\ \mathfrak{N} &= f(\mathfrak{M}, \mathfrak{L}_0, a_1, a_2, \cdots). \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

于是，对于点能源模型，由求解方程组（II）不能建立 $\mathfrak{L}^*(\mathfrak{M})$ 和 $\mathfrak{N}(\mathfrak{M})$ 形式的两个关系式．但如果再另外给定关系 $\mathfrak{L}_0(\rho_0, T_0)$，其中 ρ_0 和 T_0 是星球中心的密度和温度，则这种关系式也可以建立起来。

§3. 光度-质量和半径-质量规律性的理论公式[1)]

对于上节所述的问题提法，有很大意义的是实际建立式(2.9)这样的规律性．斯特勒姆格伦（Strömgren）[2)] 在以下假设下讨论过这一问题：

1°．在状态方程中略去对应光压的项 $aT^4/3$。

2°．在星球内部，分子量 μ 到处为常值。

3°．对于吸收系数和能源以下两式成立：

$$\kappa_1 = B\rho(RT)^{-3-s}$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon_0\rho^\alpha(RT)^\beta$$

这里 B，s，ε_0，α，β 为常数。

---

1) 以下得到的关于考虑引力的具有球对称性的气体运动情况下平衡和非定常现象的理论结论，许多是15—20年前在 Л. И. 谢多夫和 И. М. 雅沃尔斯卡娅的著作中得到的．近些年来，相应于各种具体的事件和对象，这些结果已得到应用，并且现在越来越渗透到认识和理解观测到的天体物理现象的实践中．

在下列书中有这些理论的进一步直接应用和发展：Дибай Э. А., Каплан С. А., Размерности и подобие астрофизических величин. М., «Наука», 1976 (还可参阅如：Solinger A., Rappoport S., Buff J., Isothermal Blast Wave Model of Supernova Remnants. Astrophys. J., v. 201, №. 2, pt. 1, 1975, pp. 381—386; Castor J., McCray R., Weawer R., Interstellar Bubbles. Astrophys. J., v. 200, № 2, pt. 2, 1975, pp. L107—L110).

2) Strömgren B., Handb. d. Astrophys., v. 7, p. 159, 1936; Erg. Exact. Naturwiss., T. 16, p. 465, 1937.

星球气体模型理论方面许多结果的叙述可以在下书中找到：Chandrasekhar S., An Introduction of the Study of the Stellar Structure. Chicago, Univ. Chicago Press, 1939 (俄译本：Чандрасекар. Введение в учение о строении звёзд, ИЛ, М., 1950)

基于这些假定，斯特勒姆格伦建立了公式

$$\varepsilon^* = \mathfrak{D}\frac{1}{B}\frac{\mathfrak{M}^{5+s}}{\mathfrak{R}^s}\mu^{7+s}, \tag{3.1}$$

这里 $\mathfrak{D}$ 只依赖于 f, s, α, β。

但是，业已发现[1]，利用量纲理论的想法当保留 1° 并在比 2° 和 3° 更一般的假设下，即假设

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \mu_0\rho^{1-\xi}(RT)^{1-\eta}, \\ \varepsilon_1 &= B\rho^{\omega}(RT)^{v}, \\ \varepsilon^* &= \varepsilon_0\rho^{\alpha}(RT)^{\beta}, \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

其中 $\xi, \eta, \omega, v, \alpha, \beta$ 是常数，可以给出 (2.9) 形式的两个简单关系式来代替关系式 (3.1)。

引入新变量：

$$p_1 = \frac{p}{f}, \quad \tau = \frac{RT}{(f\mu_0)^{1/\eta}}, \quad x = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}}$$

和标记

$$\frac{a(f\mu_0)^{4/\eta}}{3fR^4} = \Omega$$

及

$$B\varepsilon_0(f\mu_0)^{\frac{v+\beta-4}{\eta}} = \omega.$$

不难检验，方程组(II)和 $\mathfrak{L}_0 = 0$ 时的边界条件 (2.6) 等价于方程组

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp_1}{dx} = -\frac{x\mathfrak{M}^2}{4\pi r^4}, \\ &r^3 = \frac{3}{4\pi}\mathfrak{M}\int_0^x \frac{dx}{\rho}, \\ &p_1 = \rho^{\xi}\tau^{\eta} + \Omega\tau^4, \\ &r^3\frac{d\tau}{dx} = -\frac{3\omega\mathfrak{M}^2}{16\pi^2 r^4}\rho^{\omega}\tau^{v}\int_0^x \rho^{\alpha}\tau^{\beta}dx \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

1) 见 Садов Л. И., О теоретических формулах для звёздных закономерностей «светимости-масса» и «радиус-масса». ДАН СССР, Т. 94, № 4, 1954, стр. 643—646.

和计算光度的公式

$$\mathfrak{L} = \varepsilon_0 \mathfrak{M} (\mu_0 f)^{\beta/\eta} \int_0^x \rho^\alpha \tau^\beta dx. \tag{3.4}$$

这样，问题归结为在以下边界条件[1]〔见条件(2.6′)〕下求解方程组(3.3)：

在星球表面当 $x = 1$ 时有：

$$\rho = 0 \text{ 及 } \tau = 0. \tag{3.5}$$

由此可见，如果所提数学问题的解存在并有物理意义，则所求函数

$$\tau,\ \rho,\ r,\ p_1 \left([p_1] = \frac{M^2}{L^4} \text{ 而 } [\tau] = M^{\frac{2-\xi}{\eta}} L^{\frac{3\xi-4}{\eta}} \right)$$

由量

$$x,\ \mathfrak{M},\ \omega,\ \Omega$$

决定，同时以下量纲公式成立：

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{M}] &= M, \\ [\omega] &= M^{k_1} L^{k_2}, \\ [\Omega] &= M^{2-4\frac{2-\xi}{\eta}} L^{-4-4\left(\frac{3\xi-4}{\eta}\right)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= -2 - \omega - \alpha + \frac{(4-\nu-\beta)(2-\xi)}{\eta}, \\ k_2 &= 4 + 3\omega + 3\alpha + \frac{(4-\nu-\beta)(3\xi-4)}{\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

以后我们设 $k_2 \neq 0$。如果假设 $\Omega = 0$（假设 1°），或者如果 $\xi = \eta = 1$（假设 2°），则当 $k_2 = 0$ 时，主定量中没有依赖于长度的量，然而所求量 τ，ρ，r，p_1 是与长度有关的。在这种情况下，上面的问题提法要加以修正。

由主定参量只能组成两个独立的无量纲组合：

---

1) 边界条件 (3.5) 形式可以改变，如果在改变后的条件中不出现新的有量纲的物理常数，则所有以下结论仍然有效。

$$x = \frac{\mathscr{M}}{\mathfrak{M}} \text{ 及 } \delta = \frac{\Omega}{\mathfrak{M}^{k_3}} \omega^{\frac{4\eta+4(3\xi-4)}{(4+3\omega+3\alpha)\eta+(4-\nu-\beta)(3\xi-4)}},$$

其中

$$k_3 = \frac{1}{\eta}\left\{2\eta + 4(\xi-2) - \frac{[4\eta+4(3\xi-4)][(2+\omega+\alpha)\eta - (4-\nu-\beta)(2-\xi)]}{(4+3\omega+3\alpha)\eta+(4-\nu-\beta)(3\xi-4)}\right\}.$$

显然，当 $\mu = \text{const}$，即 $\xi = \eta = 1$ 时，我们有

$$k_3 = -2 \text{ 及 } \delta = \Omega\mathfrak{M}^2.$$

如果 $\xi = 1$ 和 $\eta = 1$ 两等式不同时满足，则当指数 ξ，η，α，β，ω，ν 等于某些值时可以使下式满足：

$$k_3 = 0.$$

当 $k_3 = 0$ 时我们得出，无量纲参数 δ 不依赖于质量 $\mathfrak{M}$.

从量纲理论的一般考虑推知，待求的解具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} r &= \left(\frac{\omega}{\mathfrak{M}^{k_1}}\right)^{1/k_2} r_1(x,\delta), \\ \rho &= \mathfrak{M}\left(\frac{\omega}{\mathfrak{M}^{k_1}}\right)^{-3/k_2} \rho_1(x,\delta), \\ \tau &= \mathfrak{M}^{\frac{2-\xi}{\eta}}\left(\frac{\omega}{\mathfrak{M}^{k_1}}\right)^{\frac{3\xi-4}{k_2\eta}} \tau_1(x,\delta), \\ p_1 &= \mathfrak{M}^2\left(\frac{\omega}{\mathfrak{M}^{k_1}}\right)^{-4/k_2}(\rho_1^{\xi}\tau_1^7 + \delta\tau_1^4). \end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

将公式 (3.8) 代入方程组 (3.3) 和边界条件 (3.5) 导致方程

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(\rho_1^{\xi}\tau_1^7 + \delta\tau_1^4) = -\frac{x}{4\pi r_1^4}, \\ &r_1^3 = \frac{3}{4\pi}\int_0^x \frac{dx}{\rho_1}, \\ &\tau_1^3\frac{d\tau_1}{dx} = -\frac{3}{16\pi^2 r_1^4}\rho_1^{\omega}\tau_1^{\nu}\int_0^x \rho_1^{\alpha}\tau_1^{\beta}dx \end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

和边界条件

当 $x = 1$ 时

$$\rho_1 = 0 \text{ 和 } \tau_1 = 0. \tag{3.10}$$

方程 (3.9) 和条件(3.10)不包含有量纲的常数 $\mathfrak{M}$ 和 ω，并决定无量纲函数 $\tau_1(x, \delta)$，$\rho_1(x, \delta)$ 和 $r_1(x, \delta)$. 如果采用假设 1°，则参数 δ 不出现。在这种情况下，函数 $r_1(x)$，$\rho_1(x)$ 和 $\tau_1(x)$ 是普适的数值函数，只依赖于指数 ξ，η，ω，ν，α，β 之值。

根据公式(3.8)和(3.4)并考虑到 $\omega = B\varepsilon_0(f\mu_0)^{\frac{\nu+\beta-4}{\eta}}$ 和公式(3.7)，我们得到半径 $\mathfrak{R}$ 和光度 $\mathfrak{L}^*$ 的公式

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{R} &= [(B\varepsilon_0)^{\eta}(f\mu_0)^{\nu+\beta-4} \\
&\quad \times \mathfrak{M}^{(2+\omega+\alpha)\eta-(4-\nu-\beta)(2-\xi)}]^{\frac{1}{(4+3\omega+3\alpha)\eta+(4-\nu-\beta)(3\xi-4)}} \\
&\quad \cdot r_1(1, \delta), \\
\mathfrak{L}^* &= \varepsilon_0(B\varepsilon_0)^{\frac{(3\xi-4)\beta-3\alpha\eta}{(4+3\omega+3\alpha)\eta+(4-\nu-\beta)(3\xi-4)}} \\
&\quad \times (f\mu_0)^{\frac{\beta}{\eta}+\frac{\nu+\beta-4}{\eta}\left[\frac{(3\xi-4)\eta-3\alpha\eta}{(4+3\omega+3\alpha)\eta+(4-\nu-\beta)(3\xi-4)}\right]} \\
&\quad \times \mathfrak{M}^{1+\alpha+\frac{2-\xi}{\eta}\beta+\frac{[(2+\omega+\alpha)\eta-(4-\nu-\beta)(2-\xi)][(3\xi-4)\beta-3\alpha\eta]}{[(4+3\omega+3\alpha)\eta+(4-\nu-\beta)(3\xi-4)]\eta}} \\
&\quad \cdot \int_0^1 \rho_1^{\alpha}\tau_1^{\beta}dx.
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

如果在状态方程中忽略光压（假设 1°），则应令 $\delta = 0$，在此之后，公式 (3.11) 就完全决定 $\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{L}^*$ 对于 ε_0，$f\mu_0$，B 及对于星球质量 $\mathfrak{M}$ 的依赖关系。

如果 $\delta \neq 0$，但 $k_3 = 0$，则 δ 不依赖于星球质量，因此在此情况下公式 (3.11) 也将完全决定 $\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{L}^*$ 对于星球质量 $\mathfrak{M}$ 的依赖关系。

如果从公式 (3.11) 中消去 ε_0，则得到关系式

$$B\mathfrak{L}^* = \mathfrak{D}(f\mu_0)^{\frac{4-\nu}{\eta}}\mathfrak{R}^{4+3\omega+(4-\nu)\frac{3\xi-4}{\eta}}\mathfrak{M}^{-1-\omega+(4-\nu)\frac{2-\xi}{\eta}}, \tag{3.12}$$

其中 $\mathfrak{D}$ 是无量纲常数，当 $\delta = 0$ 时它只能依赖于 ξ，η，α，β，ω，ν.

注意这点很有趣：在公式(3.12)中只有常数 $\mathfrak{D}$ 可能依赖于能量释放规律。

公式 (3.1) 可以作为公式 (3.12) 的特殊情形得到。不难直接

看出，公式（3.12）对于点能源位于星球中心的星球模型（这时点能源的功率 $\mathcal{E}^*$ 任意给出）也是正确的。

公式(3.12)和(3.11)可以用来处理观测结果。当把这两个公式和经验数据相比较时，可以得到判断规律（3.2）以及问题提法是否正确的一些依据。

§4. 星球平衡方程组的一些简单解

在新星爆发理论中，当研究星球气体物质的非定常运动时，在初始条件中必须利用有关平衡时星球内部气体状态特征量分布的数据。为了这一目的而利用具有边界条件(2.6)和(2.7)的方程组(II)的解（由于这些解很复杂）是不方便的，且使我们没有可能得到非定常运动的有效的解。

除此以外，为了更深入地弄清各种物理因素的作用，讨论不遵循星球表面边界条件的方程组(II)的解是有益的。

我们讨论平衡方程(II)（其中我们忽略光压）的精确解，这里我们将借助一些附加的假说来代替星球表面的边界条件。从量纲的考虑出发，我们讨论最简单的假说，即状态特征量的分布除了依赖于与引力常数 f 有关的引力外，还显著地依赖于某一物理规律，此规律的影响只通过一个特征物理常数实现，这一常数我们记作 a。

更确切些说，我们讨论这样的气体的平衡，其密度和压力的分布只依赖于如下三个有量纲参数：

$$[r]=\mathrm{L},\quad [f]=\frac{\mathrm{L}^3}{\mathrm{MT}^2},\quad [a]=\mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s. \tag{4.1}$$

参数 a 的量纲（常数 k 和 s 的值）由上述假说固定，这一假说我们暂时不加以具体化。我们讨论附加物理常数 a 的量纲含有质量的符号 M 这种情况。显然，不失普遍性，可以认为在常数 a 的量纲公式中质量符号是以一次幂出现的[1]。

1) 如果附加的给定常数 a^* 是运动学量，则可以取等于 a^*/f 的常数作为 a。

容易验证，从假说（4.1）可以推出以下公式：

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \alpha_1 \frac{a^{\frac{2}{2-s}} f^{\frac{s}{2-s}}}{r^{\frac{2k+6}{2-s}}}, \quad \mathscr{M} = \alpha_4 a^{\frac{2}{2-s}} f^{\frac{s}{2-s}} r^{\frac{2k+3s}{2-s}}, \\ p &= \alpha_2 \frac{a^{\frac{4}{2-s}} f^{\frac{2+s}{2-s}}}{r^{\frac{s+2s+4k}{2-s}}}, \quad RT = \alpha_3 \frac{a^{\frac{2}{2-s}} f^{\frac{2}{2-s}}}{r^{2\frac{k+s+1}{2-s}}}, \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

这里 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为无量纲常数且 $s \neq 2$. 如果 $s = 2$ 而 $k \neq -3$，则不能建立对 r 的依赖关系，因为在此情况下有无量纲组合 af/r^{k+3}；如果 $s = 2$ 而 $k = -3$，则 f 与 a 的量纲互不独立，因此这时方程组（4.1）就不完全，从而不能确定 p 和 ρ.

按其物理意义，质量 $\mathscr{M}(r)$ 是随 r 的增长不减小的正的单调函数；因此应该有：

$$-\frac{2k+3s}{2-s} \geqslant 0. \tag{4.3}$$

公式（4.2）表明，对称中心是奇点，这里密度、压力和温度一般讲是无限大的。一方面，这种情况在一定意义上可以反映实际情况，因为在星球中心，密度、压力和温度有最大值并且达到十分大的数值。另一方面，从物理考虑可知，压力、密度和温度在星球中心本是有限的。由此可以推出，在紧靠星球中心处，当得出无穷大的状态特征量之值时，上面所作的只有两个物理常数 f 和 a 的假说是不能接受的。这还说明了，在星球中心附近，除了 r 和 ρ，还有附加的物理因素将变得重要。然而，如果假定，只在紧靠星球中心处这样的修正才是必要的，则公式（4.2）可以用来模拟星球中心邻域外的实际平衡[1]。

如果 $\omega = \dfrac{2k+6}{2-s} < 3$，则当 $r \to 0$ 时我们有 $\mathscr{M} \to 0$.

---

1) 顺便指出，在星球中心附近引力常数看来显然是不重要的，因为这里牛顿引力的合力近于零．但是这里我们不打算深入讨论星球中心附近的现象．在 §6 中在 411—412 页中证明了，对于解(4.2)，当 $\omega < 2.5$ 时总能 $H(r)$ 有限，且当 $r \to 0$ 时，$H(r) \to 0$.

公式（4.2）还表明，压力和密度只有在无穷远处才为零，且当 $-\frac{2k+3s}{2-s}>0$ 时，质量随 r 一起趋向无穷大。这一情况表明，所讨论的假说在远离星球中心处也要加以校正。

如果 $\frac{2k+3s}{s-2}=0$，则 $k=-\frac{3}{2}s$；这时组合 $a^{\frac{2}{2-s}}\cdot f^{\frac{s}{2-s}}=\mathscr{M}_0$ 具有质量的量纲。可以取这个常数代替 a，因此公式(4.2)取如下形式[1]：

$$\rho=\alpha_1\frac{\mathscr{M}_0}{r^3},\qquad \mathscr{M}=\mathscr{M}_0,$$

$$p=\alpha_2\frac{\mathscr{M}_0^2 f}{r^4},\quad RT=\alpha_3\frac{\mathscr{M}_0}{r}f. \tag{4.4}$$

显然，这时如果 $\rho\not\equiv 0$，方程

$$\mathscr{M}=4\pi\int_0^r r^2\rho dr$$

不满足，因此这一情况不会导致方程组(II)的精确解。不难看出，在 μ 为常数时，我们可以使方程组（II）的前三个方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}+\frac{f\mathscr{M}}{r^2}=0,$$

$$\mathscr{M}=4\pi\int_0^r r^2\rho dr,$$

$$p=\frac{\rho RT}{\mu} \tag{4.5}$$

得到满足，如果我们按下列公式通过 α_1 来决定 α_2，α_3，α_4 的话：

$$\alpha_4=-4\pi\frac{2-s}{2k+3s}\alpha_1, \tag{4.6}$$

$$\alpha_2=-2\pi\frac{(2-s)^2\alpha_1^2}{(2k+3s)(4+s+2k)}, \tag{4.7}$$

$$\alpha_3=\frac{\mu\alpha_2}{\alpha_1}=-2\pi\mu\frac{(2-s)^2\alpha_1}{(2k+3s)(4+s+k)}. \tag{4.8}$$

不难看出，压力公式中的指数 $2\frac{4+s+2k}{2-s}$ 并不等于零，否

1) 我们令 $\mathscr{M}=\mathscr{M}_0$，从而 $\alpha_4=1$。

则压力沿半径就会是常数，这就排除了满足平衡方程的可能性。

现在我们来讨论建立满足方程组(II)最后两个方程的所求类型的解的问题，这两个方程是辐射理论方程：

$$\frac{d}{dr}R^4T^4 = -\frac{3\kappa_1\mathfrak{L}\rho}{4\pi r^2} \text{ 和 } \frac{d\mathfrak{L}}{dr} = 4\pi r^2\rho\varepsilon^*. \tag{4.9}$$

如果能源集中于星球中心，即当 $r > 0$ 时，$\varepsilon^* = 0$，且如果对于吸收系数下式成立：

$$\kappa_1 = B\rho^w(RT)^v, \tag{4.10}$$

这里 v，w 和 B 是常数，则方程 (4.9) 可以用 (4.2) 形式的解来满足。容易检验，常数 B 的量纲由公式 $[B] = M^{-(1+w)}L^{10+3w-2v}T^{2v-5}$ 给出。

从方程 (4.9) 我们得到：

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 = \text{const} \text{ 和 } \kappa_1 = -\frac{4\pi}{3\mathfrak{L}_0}\frac{r^2}{\rho}\frac{d}{dr}(RT)^4. \tag{4.11}$$

利用公式 (4.2) 来比较 (4.10) 和 (4.11)。这给出，如果以下公式成立：

$$k(2w + 2v - 6) + s(2v - 9) + 6w + 2v = 0 \tag{4.12}$$

及

$$\frac{32\pi}{3}\frac{\alpha_3^{4-v}}{\alpha_1^{1+w}}\frac{s + k + 1}{2 - s} = \frac{B\mathfrak{L}_0}{a^{\frac{6-2w-2v}{2-s}} f^{\frac{8-s-3w-2v}{1-s}}} \tag{4.13}$$

则辐射方程得到满足。

方程(4.12)给出 k，s，w 和 v 之间的联系。根据(4.6)，(4.7)，(4.8)，(4.12)和(4.13)可将系数 α_1，α_2，α_3 和 α_4 通过 B，$\mathfrak{L}_0$，μ，a，f，w 和 v 来表达。将这些表达式代入 (4.2) 就得到气体平衡方程组 (II) 的精确解，其公式是：

$$\left.\begin{aligned}\rho &= \left\{\frac{(3 - w - v)}{16\pi(2w + 3)}\left[\frac{(3w + v)(v - w - 6)}{(3 - w - v)^2 2\pi\mu f}\right]^{4-v}\right. \\ &\quad \left.\cdot\frac{3B\mathfrak{L}_0}{r^{9-2v}}\right\}^{\frac{1}{3-w-v}}, \\ \mathfrak{M} &= 4\pi\frac{w + v - 3}{3w + v}\left\{\frac{3 - w - v}{16\pi(2w + 3)}\right.\end{aligned}\right|$$

$$\times\left[\frac{(3w+v)(v-w-6)}{(3-w-v)^2 2\pi\mu f}\right]^{4-v}\left\{\frac{3B\mathfrak{L}_0}{r^{3w+v}}\right\}^{\frac{1}{3-w-v}},$$

$$p=\left\{\frac{(3-w-v)\mu^{v-4}}{16\pi(2w+3)}\left[\frac{(3w+v)(v-w-6)}{(3-w-v)^2 2\pi f}\right]^{\frac{5+w-v}{2}}\right.\tag{4.14}$$

$$\left.\left\{\frac{3B\mathfrak{L}_0}{r^{6+w-v}}\right\}^{\frac{2}{3-w-v}},\right.$$

$$RT=\left\{\frac{(3-w-v)}{16\pi(2w+3)}\left[\frac{(3w+v)(v-w-6)}{(3-w-v)^2 2\pi\mu f}\right]^{w+1}\right.$$

$$\left.\left\{\frac{3B\mathfrak{L}_0}{r^{3+2w}}\right\}^{\frac{1}{3-w-v}}.\right.$$

在这样建立的关于按照牛顿定律吸引的气体物质的平衡问题的精确解中，p，ρ 和 RT 沿半径变化的规律完全由 w 及 v 和由乘积 $B\mathfrak{L}_0$ 所确定，这里 w 和 v 是吸收系数公式中的指数，B 是吸收系数规律中出现的常数，$\mathfrak{L}_0$ 是位于对称中心的辐射源的功率。

在所得到的解 (4.14) 中不出现常数 a；这是因为常数 α_1 和 a 只在组合

$$\alpha_1 a^{\frac{2}{2-s}}$$

中出现，而由于所讨论问题中平衡方程的特定形式此组合被通过乘积 $B\mathfrak{L}_0$ 表出。对 $B\mathfrak{L}_0$ 的幂次依赖关系是以指数 w 和 v 的显式给出的。

解 (4.14) 使我们可以估计吸收系数 κ 的规律对具有辐射源的气体的平衡的影响。

如果给定常数 a 的量纲（指数 k 和 s），则公式(4.2)就决定了状态特征量沿半径变化的所有规律，这时公式 (4.10) 中的指数 w 和 v 可以变化以满足条件 (4.12)。如果指数 w 和 v 给定，则沿半径的变化规律也被确定，而可以改变常数 k 和 s 使同一个条件 (4.12) 得到满足。

根据解 (4.14)，相应的星球气体模型占有整个无限空间且有无穷大的质量。显然，在任一有限半径的球 S 内质量是有限的，在

这球的表面上压力 p_s 可能很小. 当 S 表面上的压力 p_s 固定时，球 S 外无穷大质量的存在对球 S 内的质量平衡不产生任何影响. 这样，球 S 内有限质量的平衡与球 S 外的平衡特征量的分布没有本质的联系. 为了得到具有有限质量的近似解，可以利用某一球 S 内的 (4.14) 类型的解，而在此球外，解可以带有连续的压力变化[1]和某种别的规律的密度变化进行延拓，该规律保证质量的有限性和给定值.

譬如，如果常数 a 具有能量的量纲，即 $[a] = ML^2T^{-2}$（由此 $k = 2$, $s = -2$），则条件 (4.12) 给出：

$$v = -3 - 5w. \tag{4.15}$$

这时公式 (4.14) 具有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{2^{2.5}}\left[\left(\frac{3}{2\pi\mu f}\right)^{7+5w}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{4\pi}\right]^{\frac{1}{6+4w}}\frac{1}{r^{2.5}},\\
\mathscr{M} &= 2\pi\left[\left(\frac{3}{2\pi\mu f}\right)^{7+5w}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{2^{5+2w}\pi}\right]^{\frac{1}{6+4w}}r^{0.5},\\
p &= \frac{1}{8}\left[\left(\frac{3}{2\pi\mu f}\right)^{4+3w}\frac{3B\mathfrak{L}_0^2}{\mu^{3+2w}4\pi}\right]^{\frac{1}{3+2w}}\frac{1}{r^3},\\
RT &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{3}{2\pi\mu f}\right)^{1+w}\frac{3B\mathfrak{L}_0}{4\pi}\right]^{\frac{1}{6+4w}}\frac{1}{r^{0.5}}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

为了完全确定解必须选定指数 w 之值或符合 (4.15) 的指数 v 之值.

利用公式 (4.14) 容易写出与天体物理学中所采用的各种特定的吸收系数公式相对应的解.

例如，若对吸收系数取克腊默 (Kramers) 公式

$$\kappa_1 = B\rho T^{-7/2} \quad (w = 1,\ v = -3.5), \tag{4.17}$$

则解 (4.14) 有如下形式：

$$\rho = 0.00457\frac{(B\mathfrak{L}_0)^{2/11}}{(\mu f)^{15/11}}\frac{1}{r^{32/11}},$$

1) 当近似地建立有限质量气体的平衡时，可以允许密度分布有间断.

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{M} &= 0.6319\frac{(B\mathfrak{L}_0)^{2/11}}{(\mu f)^{15/11}}r^{1/11},\\ p &= 0.000756\frac{(B\mathfrak{L}_0)^{4/11}}{\mu(\mu f)^{19/11}}\frac{1}{r^{42/11}},\\ RT &= 0.1654\frac{(B\mathfrak{L}_0)^{2/11}}{(\mu f)^{4/11}}\frac{1}{r^{10/11}}.\end{aligned}\right\}\qquad(4.18)$$

我们还讨论一下$[a]=[\mathfrak{L}]=ML^2T^{-3}(k=2,s=-3)$的情形，这可以对应这样的假设：状态沿半径的分布由总光度决定。这一情况是特殊的，有必要单独讨论它，因为从公式(4.2)，(4.6)，(4.7)和(4.8)我们得到：

$$\left.\begin{aligned}\rho &= \alpha_1\frac{a^{2/5}f^{-3/5}}{r^2},\quad \mathscr{M}=4\pi\alpha_1 a^{2/5}f^{-3/5}r,\\ p &= 2\pi\alpha_1^2\frac{a^{4/5}f^{-1/5}}{r^2},\quad RT=2\pi\alpha_1\mu(af)^{2/5}=\text{const}.\end{aligned}\right\}\qquad(4.19)$$

由此得出，温度沿半径为常数。在此情况下，方程

$$\frac{d(RT)^4}{dr}=-\frac{3\kappa_1\mathfrak{L}\rho}{4\pi r^2}$$

(如果$\mathfrak{L}\neq 0$)只有在$\kappa_1=0$的假设下才能满足。在这以后，辐射理论第二方程

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dr}=4\pi r^2\rho\varepsilon^*$$

当ε^*是r，ρ，T的已知函数时总可以满足并用来决定$\mathfrak{L}$[1]。

譬如，如果$\varepsilon^*=0$，则$\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_0=\text{const}$。在公式(4.19)中仅有一个等于$\alpha_1 a^{2/5}$的重要任意参数。

§5. 关于造父变星的亮度变化周期和平均质量密度之间的依赖关系

有关造父变星亮度变化周期和气体辐射粒子的速度的观测数

1) 显然，这些想法也适用于较一般的情形：$s+k+1=0$。这情况根据式(4.2)导致常温。

据令人信服地表明，观测到的光度变化是由组成星球的气体物质的大振幅大速度的径向脉动引起的。

利用§2中叙述的想法，我们可以认为，这种脉动是由§2中方程组(I)描述的绝热运动。

所讨论的运动可能是本质上非线性的过程。在气体中可能有向星球中心传播的和从中心向外围传播的冲击波。有可能在某些时间间隔内，发光的光球的边界在膨胀时与冲击波相重合。由于冲击波的速度大于波后的气体粒子的速度，故当以冲击波为界的光球膨胀时，它的最大直径将比对观测得的视向速度进行积分而计算出的横向线尺寸大得多。

当冲击波向星球中心传播时，在中心反射的瞬间，有可能发生在第四章§7中讨论过的气流在一点聚焦的运动。造父变星亮度的变化可以用光球直径和温度在脉动时发生的巨大改变，以及造父变星周围的气体大气的吸收值的改变来解释。当光球的直径不同时，光线在周围大气中的光程将改变。

为了描述造父变星模型——气体球的脉动，除了方程组(I)和冲击波上的条件外(该条件与无引力时的条件有同样的形式，见第四章§2)，我们还有如下边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\text{在星球中心 } r=0 \text{ 处，} \mathscr{M}=0 \text{ 及 } v=0,\\&\text{在星球表面 } r=\mathfrak{R}+\Delta\mathfrak{R} \text{ 处，}\\&\qquad \mathscr{M}=\mathfrak{M},\ p=0 \text{ 及 } \rho=0.\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

我们还采用以下假设：定常脉动状态仅由运动方程、冲击波上的条件、边界条件和其它不包括新的有量纲常数的条件完全确定。在这些假设下，不难写出主定参量组。此参量组列出如下：

$$r,\ t,\ \gamma,\ f,\ \mathfrak{R},\ \mathfrak{M}.\tag{5.2}$$

在此情况下我们把星球的平均半径$\mathfrak{R}$和质量$\mathfrak{M}$看作独立参数；正如在§2中曾经指出，平衡时半径$\mathfrak{R}$是质量$\mathfrak{M}$的函数，但是

在脉动时，$\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{M}$ 之间的这种关系也可能不存在[1]，这可能就是不存在平衡的原因——造父变星脉动的原因。

按上述问题提法寻求 v，ρ 和 p 的非线性的数学问题是很困难的。在这一问题的研究中，只有一些个别的结果，它们都是利用附加的重要假定且在大多数情况下基于将运动方程线性化而得出的[2]。

但是，也可以不进行具体求解，而借助于量纲理论的想法在问题的最一般的提法下得到造父变星的脉动周期与其质量和半径之间关系的基本结果。事实上，我们用 τ 来标记造父变星的脉动周期；由于它是整体的运动特征量，所以根据已建立的主定参量表(5.2)，我们推导出

$$\tau = f(\gamma, f, \mathfrak{R}, \mathfrak{M}). \qquad (5.3)$$

由于 f，$\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{M}$ 的量纲是独立的，所以由此得出：

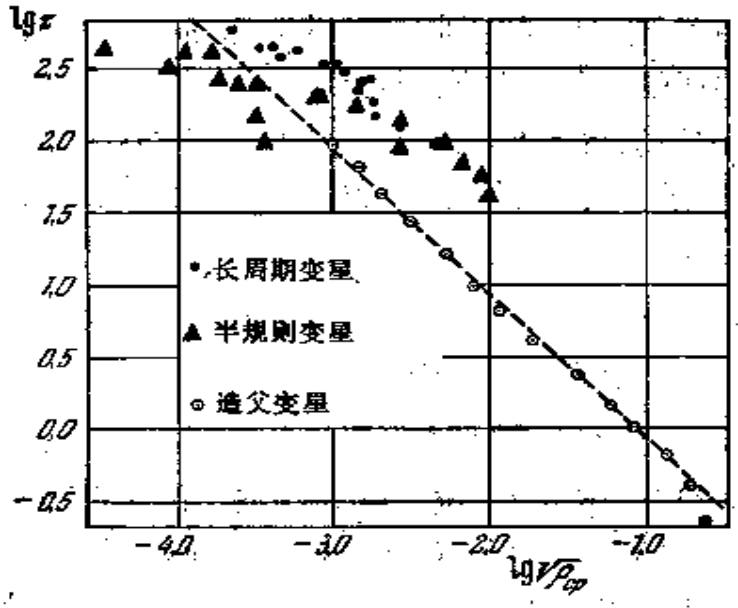


图 133　不同变星的周期-密度关系的经验数据

1) 当存在以幂函数形式表示的这种关系时，除了质量 $\mathfrak{M}$，在这一关系中还要出现一个有量纲常数．在主定参数组中可以直接取 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{R}$ 来代替质量 $\mathfrak{M}$ 和这一常数（它对于不同系的造父变星可能是不同的）．

2) 在下书中有对这些结果的叙述：Росселанд. Теория пульсаций переменных звёзд. ИЛ. М.. 1952.（原版：Rosseland S. The Pulsation Theory of Variable Stars. Oxford, 1949.）

$$\frac{1}{\tau} = f_1(\gamma)\sqrt{3f\mathfrak{M}/4\pi\mathfrak{R}^3} = f_1(\gamma)\sqrt{f\rho_{平均}} \qquad (5.4)$$

这就是允许我们不进行详细的数学求解，而在相当一般的假设下证明了最先靠观测建立的关系式（5.4）的简单想法。

在图 13 3中用对数尺度 $\lg T$ 和 $\lg\sqrt{\rho_{平均}}$绘出了观测数据的处理结果；单个点是作为一组星的平均值画出，虚线是根据理论公式（5.4）绘出的。观测造父变星所得到的点在图中的位置，表明与理论虚直线的斜率符合得非常好。

看来，关系式（5.4）反映了组成变星的气体物质的脉动中的基本规律性。

处理半规则和长周期变星的观测数据表明，相应的点子在类似图形上落在一些与造父变星的相应直线平行的直线上。

§6. 关于新星和超新星爆发理论

1. 运动方程和边界条件 根据§1 中给出的观测数据可知，新星和超新星的爆发是伴随有辐射能量急剧增加的大量气体物质的非定常运动。

为了从理论上理解这样巨大的宇宙灾变，我们将研究计及引力的气体非定常运动方程的精确解的例子，它们可以看成是反映星球爆发实际现象的某些本质特征的概括模型。

为了弄清星球爆发现象，可以讨论并提出以下三种类型的解：

1°. 在波阵面上有核能释放的爆轰波从星球内部深处向星球表面的传播。在第四章§8 中研究了这种类型的运动。曾确立了[1]：爆轰速度增加的效应依赖于密度下降的规律，以及密度足够快地

1) Седов Л. И., О движении газа при звездных вспышках. ДАН СССР, т. 111, № 4,1956, стр. 780—782. Яворская И. М., Решение некоторых задач о детонации в среде с переменной плотностью. ДАН СССР, т.111, № 4, 1956, стр. 783—786.

下降时爆轰气体产物将完全飞散，同时在中心附近形成真空[1]。

2°. 星球内部突然释放能量所引起的爆炸类型的受扰运动. 释放的能量将随同激波一起向外围传递。

3°. 没有任何能量释放的[2]、而是由于组成星球的气体物质的平衡的动力学不稳定性使之发展起来的爆炸类型的运动。

在本节中给出计及引力的相应于 2° 和 3° 类型的解。下面我们将证明，对于这样的运动，在一些情况下，开始处于静止的气体物质完全飞散时的受扰运动也是可能的[3]。

我们来讨论 §2 中描述的具有球对称性的气体非定常运动的方程组 (I) 的解，该方程组有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho v}{\partial r}+\frac{2\rho v}{r}=0,\\
&\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial r}=4\pi r^2\rho,\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{f\mathscr{M}}{r^2}=0,\\
&\frac{\partial \dfrac{p}{\rho^\gamma}}{\partial t}+v\frac{\partial \dfrac{p}{\rho^\gamma}}{\partial r}=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

设由于在绝热运动条件下在对称中心释放能量的结果，使得在 $t=0$ 时刻在静止的气体物质中发生非定常运动，并且在多方运动条件下，在扰动区域还有附加的能量释放。

由平衡条件决定的气体特征量的初始分布，我们取为 (4.2)，

1) 相应的自模拟解是没有计及引力的情况下建立的，引力的存在和非自模拟性可能要带来某些定量的修正。

对于有能量释放的稀疏间断（火焰锋面类型的间断）在初始变密度的静止气体中传播的球对称问题，可以建立类似的解。

2) Седов Л. И., О динамическом взрыве равновесия. ДАН СССР, т. 112, № 2, 1957, стр. 211—212.

3) 为了将得到的结论用于处理观测结果还要研究星体光球中的非定常效应，并弄清楚星球爆发时电磁场的作用和意义。例如见 Chevalier R. A., The Evolution of Supernova Remnants. I. Spherically Symmetric Models. Astrophys. J., v. 188, № 3, pt. 1, 1974, pp. 501—516.

(4.6)，(4.7) 和 (4.8)，在作变换

$$\frac{2k+6}{2-s}=\omega \text{ 和 } \alpha_1 a^{\frac{2}{2-s}} f^{\frac{s}{2-s}}=A>0$$

后，可以将它们写为如下较简单的形式：

$$\left.\begin{aligned} v &= 0;\\ \rho &= \frac{A}{r^{\omega}};\\ \mathscr{M} &= \frac{4\pi A}{3-\omega} r^{3-\omega};\\ p &= \frac{2\pi A^2 f}{(\omega-1)(3-\omega)} \frac{1}{r^{2\omega-2}};\\ RT &= \frac{2\pi A f}{(\omega-1)(3-\omega)} \frac{1}{r^{\omega-2}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

公式(4.2) 中的主定常数 a （量纲为 $[a]=\mathrm{ML}^k\mathrm{T}^s$），在公式 (6.2) 中换为常数 A（量纲为 $[A]=\mathrm{ML}^{\omega-3}$）。平衡方程的这族解(6.2)除了依赖于引力常数 f 外，还依赖于一个有量纲的常数 A 和一个由常数 A 的量纲所决定的重要参数 ω。

根据对称中心附近质量为有限值的条件推出，$\omega<3$. 为使压力和温度为正值，应有 $\omega>1$. 为使温度在趋向中心时增加，应有 $\omega>2$，而当 $\omega=2$ 时气体温度不依赖于 r，这时我们有等温气体物质的情况。如果常数 a 具有能量的量纲，即 $k=2$，$s=-2$，则 $\omega=2.5$。

根据第四章的公式 (3.12)，半径为 r' 和 r'' 的两个球之间的气体的总能量由下式决定：

$$\mathscr{E}=\int_{r'}^{r''}\left[\frac{\rho v^2}{2}+\frac{p}{\gamma^*-1}-\frac{\rho f(\mathscr{M}-\mathscr{M}')}{r}\right]4\pi r^2 dr,$$

这里 $\gamma^*=c_p/c_v$。利用此式和 (6.2) 式不难计算出半径为 r 的球中所包含的初始总能量 H. 对于 $1<\omega<2.5$ 我们有：

$$H=\frac{8\pi^2}{\gamma^*-1}\frac{1-2(\omega-1)(\gamma^*-1)}{(\omega-1)(3-\omega)(5-2\omega)} fA^2 r^{5-2\omega}. \tag{6.3}$$

如果 $\omega>2.5$，则对于任意的 γ^* 和 r，得到初始能量等于 $\pm\infty$。

如果

$$1 < \omega < \frac{2\gamma^* - 1}{2(\gamma^* - 1)}$$

且

$$\omega < 2.5,$$

则初始能量有限且为正值：$H > 0$.

当

$$\frac{2\gamma^* - 1}{2(\gamma^* - 1)} < \omega < \frac{5}{2}$$

时，初始能量有限而为负值：$H < 0$[1]（图 134）.

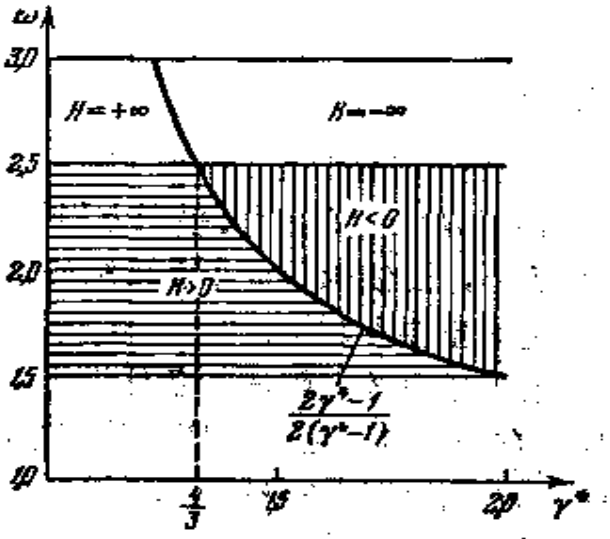


图 134　初始能量 H 的符号随 ω 和 γ^* 的变化．在阴影区中 H 为有限；当 $\omega > 2.5$ 时，H 为无穷大

当 $\omega = 2.5$ 时，对积分计算后得出：

$$\mathscr{E}_{\mu}^{r''} - 32\pi^2 f A^2 \left\{ \frac{4 - 3\gamma^*}{3(\gamma^* - 1)} \ln \frac{r''}{r'} + 2 - 2\sqrt{\frac{r'}{r''}} \right\}, \qquad (6.4)$$

由此很清楚，当 $\omega = 2.5$ 及 $\gamma^* = 4/3$ 时下式成立：

$$H = 64\pi^2 f A^2. \qquad (6.5)$$

在此情况下初始能量为正的有限值，且不依赖于半径 r．如果 $\omega =$

1) 如果 $H > 0$，则内部热能大于引力能的绝对值，当 $H < 0$ 时它小于引力能的绝对值.

2.5 及 $\gamma^* > 4/3$，则 $H = -\infty$.

如果附加条件中的所有量纲常数的量纲都依赖于引力常数 f 的量纲和常数 A 的量纲，则初始条件为（6.2）的气体的非定常运动将是自模拟的.

如果自模拟扰动运动是由在 $t = 0$ 时刻发生的能量释放引起的，则能量释放规律只由三个具有独立量纲的有量纲量 t，A 和 f 所决定；因此

$$E = \alpha f^{\frac{5}{\omega}-1} A^{\frac{5}{\omega}} t^{\frac{2(5-2\omega)}{\omega}}, \tag{6.6}$$

这里 α 是不依赖于时间的无量纲系数. 在特殊情况下量 α 可能等于无穷大. 如果 $\omega = 2.5$，则公式（6.6）变为

$$E = \alpha f A^2. \tag{6.7}$$

α 为有限值的情形相应于在星球中心瞬时释放有限的能量，如果瞬时释放的能量无穷大，则系数 α 等于无穷大.

当 $\omega < 2.5$ 和 $\alpha > 0$ 时，根据式（6.6）应该发生连续的能量释放，因而量 E 随着时间而增大.

待求的气体扰动运动的场由以下有量纲参量组决定：

$$A, f, r, t; \tag{6.8}$$

此外，运动还可能依赖于给定的无量纲常参量，如运动方程中的 γ 和公式（6.6）中的 α.

根据（6.8）可知，气体运动是自模拟的，并且气体运动规律可以利用如下形式的公式写出：

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = \frac{r}{(\beta A f)^{\frac{1}{\omega}} t^{\frac{2}{\omega}}}; \quad v = \frac{r}{t} V(\lambda); \\ &\rho = \frac{1}{ft^2} \mathscr{R}(\lambda); \quad \mathscr{M} = \frac{r^3}{ft^2} M(\lambda); \\ &p = \frac{r^2}{ft^4} P(\lambda) \text{ 和 } \quad z(\lambda) = \frac{\gamma P}{\mathscr{R}}, \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

这里 V，$\mathscr{R}$，M，z 是 λ 的无量纲函数，此外，它们还以参数形式依赖于附加的给定的无量纲常数；β 是一个可以支配的常数.

运动方程（6.1）在将式（6.9）代入并用 $z(\lambda)$ 置换 $P(\lambda)$ 后可以

化为常微分方程组：

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda\left\{\left(\frac{2}{\omega}-V\right)V'-\frac{\varkappa}{\gamma}\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa}+\frac{\mathscr{R}'}{\mathscr{R}}\right)\right\}\\
&\qquad=M+V^2-V+\frac{2\varkappa}{\gamma},\\
&\lambda\left[V'-\left(\frac{2}{\omega}-V\right)\frac{\mathscr{R}'}{\mathscr{R}}\right]=2-3V,\\
&\lambda\left(V-\frac{2}{\omega}\right)\left[\frac{\varkappa'}{\varkappa}-(\gamma-1)\frac{\mathscr{R}'}{\mathscr{R}}\right]=-2(V+\gamma-2),\\
&\lambda M'=-3M+4\pi\mathscr{R}.
\end{aligned}\right\}\tag{6.10}$$

待求函数 $V(\lambda)$，$\mathscr{R}(\lambda)$ 和 $\varkappa(\lambda)$ 类似于第四章方程 (2.1)，(2.2) 和(2.3)所决定的相应函数，并且 $\delta=2/\omega$，但是在方程 (6.10) 中计及了牛顿引力并增加了一个函数 $M(\lambda)$.

2. 各种精确解 根据第四章 §3 中讲过的一般理论，方程组 (6.10) 的阶可以利用第四章中对于任何运动均成立的积分 (3.7) 和 (3.9) 降低两级. 在本情况下必须令 $\nu=3$，$\delta=2/\omega$ 及 $k=-3$，$s=2$，因为

$$\left[\frac{1}{f}\right]=\mathrm{ML}^{-3}\mathrm{T}^2.$$

这两个积分由以下关系式给出：

$$\lambda^3\left[\left(1-\frac{3}{\omega}\right)M-2\pi\mathscr{R}\left(V-\frac{2}{\omega}\right)\right]=C_1,\tag{6.11}$$

$$\varkappa=\mathscr{R}^{\gamma-1}M^{(\gamma+2/\omega-2)/(3/\omega-1)}\lambda^{(3\gamma-4)(3/\omega-1)}C_2.\tag{6.12}$$

此外，当 $\omega=2.5$ 时，还存在一个积分 (3.15)(第四章，能量积分)：

$$\lambda^5\left[\frac{V\varkappa\mathscr{R}}{\gamma}+\left(V-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{\mathscr{R}V^2}{2}+\frac{\varkappa\mathscr{R}}{\gamma(\gamma-1)}-\mathscr{R}M\right)\right]=C_3.\tag{6.13}$$

如第四章 §3 中所指出，这些积分对于多方过程也成立，在这过程中质点上的熵是变化的并有外部热量流入.

当在星球中心突然发生能量释放时，产生冲击波，它由星球中心向外围传播.

在沿静止气体传播的冲击波面上，应满足以下的相容条件：

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1}c\left(1-\frac{a_1^2}{c^2}\right),\\ \rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1\left(1+\frac{2}{\gamma-1}\frac{a_1^2}{c^2}\right)^{-1},\\ \mathscr{M}_2 &= \mathscr{M}_1,\\ p_2 &= \frac{2\gamma}{\gamma+1}p_1\frac{c^2}{a_1^2}\left(1-\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{a_1^2}{c^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

这里 c 是间断的传播速度而 $a_1^2=\gamma p_1/\rho_1=RT_1$ 是未扰动状态的声速的平方。冲击波半径 r_2 只由三个具有独立量纲的有量纲量 f，A，t 决定；因此

$$r_2=C(\beta Af)^{\frac{1}{\omega}}t^{\frac{2}{\omega}} \text{ 或 } \lambda_2=C=\text{const}. \tag{6.15}$$

冲击波上 λ 的常数值（等于 C）可以取为等于 1，并从这个条件决定常因子 β. 这时我们有：

$$\lambda_2=1 \text{ 和 } \lambda=\frac{r}{r_2}. \tag{6.16}$$

从公式 (6.15) 还可推出

$$c=\frac{dr_2}{dt}=\frac{2}{\omega}\frac{r_2}{t}=\frac{2}{\omega}(\beta Af)^{\frac{1}{\omega}}t^{\frac{2}{\omega}-1}$$

$$=\frac{2}{\omega}(\beta Af)^{\frac{1}{2}}r_2^{\frac{2-\omega}{2}}. \tag{6.17}$$

当 $\omega>2$ 时，冲击波随时间的增加而减慢，当 $\omega<2$ 时发生冲击波加速[1]。其中，当 $\omega=2.5$ 时，我们得到：

1) 冲击波沿变密度介质传播的减慢或加速效应不仅由密度下降规律决定，压力下降规律和波内的外部扰动效应可能大大影响波的运动规律.

在第四章 § 14 中证明了，对于由常数 $[A]=\mathrm{ML}^{\omega-3}$ 和 $[E]=\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$ 决定的自模拟运动，其中包括对在初始变密度的介质中的强点爆炸，公式 $c=\text{const}/r_2^{(3-\omega)/2}$ 成立，因此，对于所有的 $\omega<3$ 均得到减速.

在现在讨论的在初始变密度 $\rho_1=A/r^\omega$ 的问题里由常数 $[A]=\mathrm{ML}^{\omega-3}$ 和 $[f]=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$ 决定的自模拟运动中，当 $\omega<2$ 时冲击波加速，当 $\omega>2$ 时减速.

$$r_2 = (\beta A f)^{2/5} t^{4/5}; \quad c = \frac{4}{5}(\beta A f)^{1/4} \frac{1}{r_2^{1/4}}. \tag{6.18}$$

在冲击波条件中出现无量纲量

$$q = \frac{a_1^2}{c^2} = \frac{\gamma p_1}{\rho_1 c^2}$$

从量纲的一般考虑可知，只依赖于三个有量纲量 f，A，r_2 的无量纲量 q 应为常数。从公式 (6.2) 和 (6.17) 推出：

$$q = \frac{\pi\gamma\omega^2}{2(\omega-1)(3-\omega)\beta}. \tag{6.19}$$

在 ω 固定时，q 之值由常数 β 决定，反之亦然。

冲击波条件 (6.14) 在利用式 (6.9) 变换为无量纲形式后给出：

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \frac{4}{\gamma+1}\frac{1-q}{\omega}, \\ x_2 &= \frac{4}{\omega^2}\frac{[2\gamma-(\gamma-1)q][\gamma-1+2q]}{(\gamma+1)^2}, \\ \mathscr{R}_2 &= \frac{2(\gamma+1)(3-\omega)(\omega-1)}{\pi\gamma\omega^2}\frac{q}{\gamma-1+2q}, \\ M_2 &= \frac{8(\omega-1)}{\gamma\omega^2}q, \end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

同时

$$\lambda_2 = 1.$$

当给定 q 时，条件(6.20)是方程组(6.10)的柯西值，从而完全决定了冲击波内气体的整个运动。根据 (6.19) 决定 β，它使变量 λ 的公式具体化。同样很明显，给定 q 就决定了常数 α，从而能量释放规律 (6.6) 就被最后完全确定。因此，选定 q 之值等价于确定在对称中心的能量释放规律。

利用边界条件(6.20)很容易决定积分(6.11)，(6.12)和(6.13)中的常数。经简单计算，我们得到：

$$C_1 = 0;$$

$$C_2 = \frac{\pi^{\gamma-1}2^{\frac{\omega(3-2\gamma)-3(\gamma-1)}{3-\omega}}}{\omega^2(\gamma+1)^{\gamma+1}(3-\omega)^{\gamma-1}}\left[\frac{\gamma\omega^2}{q(\omega-1)}\right]^{\frac{3\gamma-1-\omega}{3-\omega}}$$

$$\times [(2\gamma-(\gamma-1)q][\gamma-1+2q]^{\gamma} \qquad (6.21)$$

和当 $\omega=2.5$ 时

$$C_3=\frac{384(3\gamma-4)}{3125\pi\gamma^2(\gamma-1)}q^2. \qquad (6.22)$$

如果 $\gamma=4/3$，则 $C_3=0$，且变量 λ 从能量积分和绝热积分中消去，这使问题大大简化。如果 $\omega=2.5$ 而 $\gamma=4/3$，则上述柯西问题可通过一个能以最终形式计算出的积分解出。

下面我们给出 $\gamma=4/3$，$\omega=2.5$ 以及 $\gamma=5/3$，$\omega=2.5$ 时的数值计算结果[1]。

分析 $\gamma=4/3$ 及 $\omega=2.5$ 时的解表明，气体的扰动运动是对称中心处于 $t=0$ 时释放有限能量的点爆炸引起的。随着 q 的减小即随着冲击波强度的增加释放的能量增加。当 $0<q<1/36$ 时，在对称中心处形成半径为 r^* 的球形真空，而且 $r^*=\lambda^* r_2$，这里，常数 λ^* 只依赖于 q 并等于参数 λ 在内边界上的值，在内边界上压力和密度等于零。如果 $q>1/36$，则爆炸后气体的扰动运动占据球形冲击波以内的整个空间。当 $q>1/36$ 时，中心处密度和压力为无穷大。当 $q=0$ 时，气体运动特征量的分布与第四章 §15 中研究过的 $p_1=0$ 时变密度的无重量物质中的点爆炸的气体运动特征量分布相一致。

注意，由可以延拓到对称中心的运动类型转变到在中心形成膨胀的真空球的运动类型，可以是由于不同因素而发生的。在第四章 §15 中曾指出，这一效应是由于密度下降规律变陡，即指数 $\omega(\rho_1=A/r^{\omega})$ 增大而引起的，或者对于固定的 ω 是由于系数 γ 的增大而引起的。

在我们讨论的情况下，这一效应当常数 $\omega=2.5$ 和 $\gamma=4/3$ 时是由于参数 q（它决定对称中心处释放能量的大小）的改变引起

1) 所讨论的 $\gamma=5/3$ 及 $\omega=2.5$ 时的问题，以稍有不同的办法通过对方程组(6.10)进行数值积分，曾在以下工作中研究过：Carrus P., Fox Ph., Gaas F., Kopal Z., The Propagation of Shock Waves in a Stellar Model with Continuous Density Distribution. Astrophysical J.,v. 113, 1951, pp. 496—518.

的。当 $\omega = 2.5$ 及 $\gamma = 4/3$ 时，对不同 q 值的运动特征量的分布绘于图 135—142。

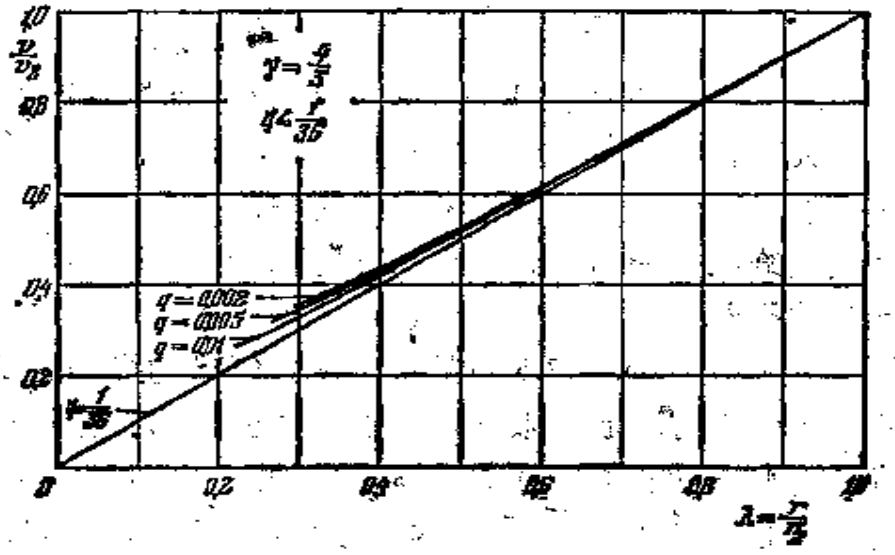


图 135　气体的扰动运动场中的速度分布。在中心附近形成其半径 $r^* = \lambda^*(q)r_2$ 不断增长的真空球

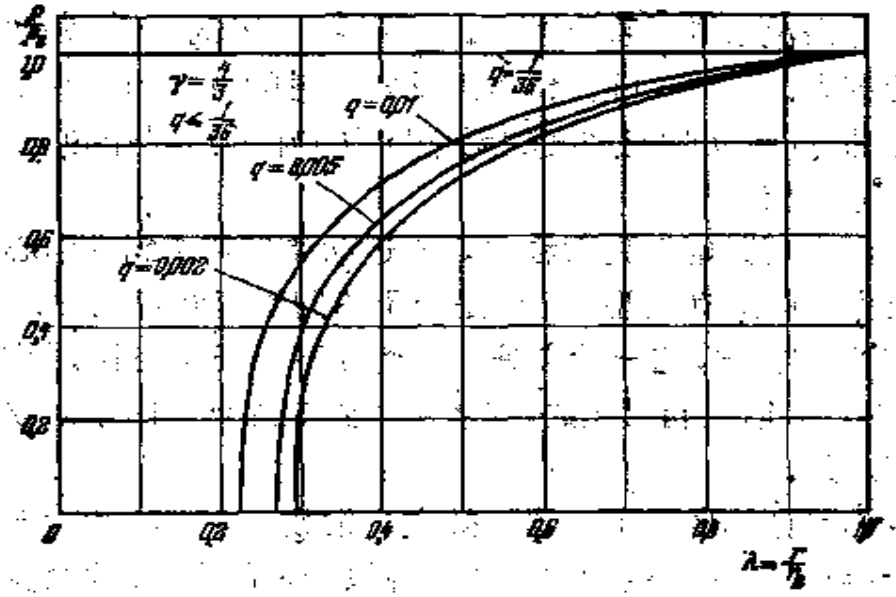


图 136　气体的扰动运动场中的密度分布，在内边界上密度等于零

容易检验，当 $\gamma = 4/3$ 时，常微分方程组 (6.10) 有解：

$$V = \frac{2}{3}, \qquad \mathscr{R} = \mathscr{R}_0 = \text{const},$$

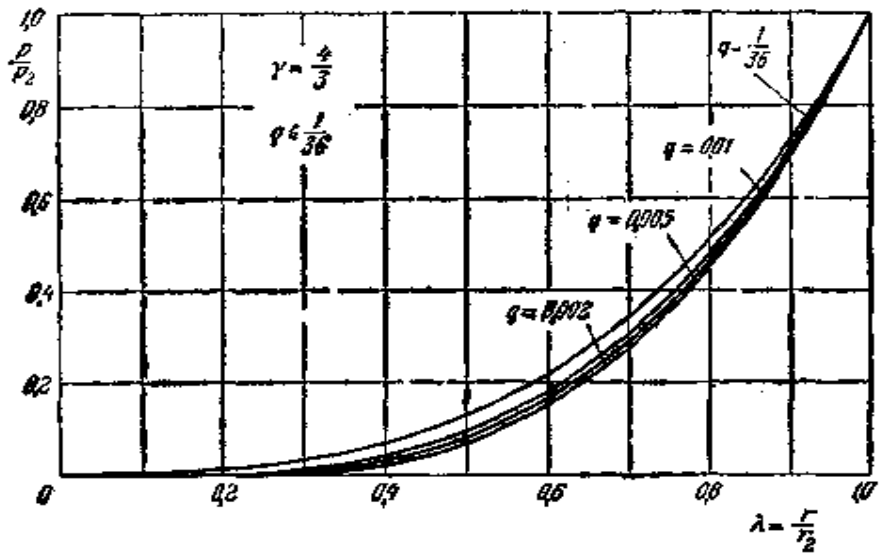


图 137　气体的扰动运动场中的压力分布，在内边界上压力等于零

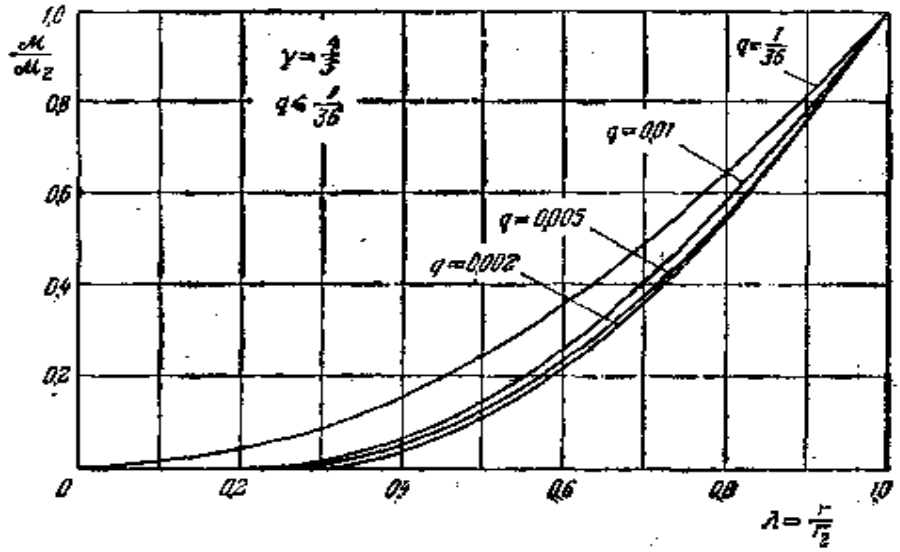


图 138　气体质量随距对称中心距离的变化。当 $r=r^*$ 时有 $M=0$

$$M=\frac{4\pi}{3}\mathscr{R}_0, \qquad z=\frac{4}{27}-\frac{8\pi}{9}\mathscr{R}_0, \tag{6.23}$$

这里 $\mathscr{R}_0$ 为任意正常数。

根据公式 (6.9)，偏微分方程 (6.1) 的相应的精确解为：

$$v=\frac{2}{3}\frac{r}{t}; \quad \rho=\frac{\mathscr{R}_0}{ft^2}; \quad \mathscr{M}=\frac{r^3}{ft^2}\frac{4\pi}{3}\mathscr{R}_0;$$

$$p = \frac{r^2}{ft^4}\left[\frac{\mathscr{R}_0}{9} - \frac{2\pi}{3}\mathscr{R}_0^2\right]. \qquad (6.24)$$

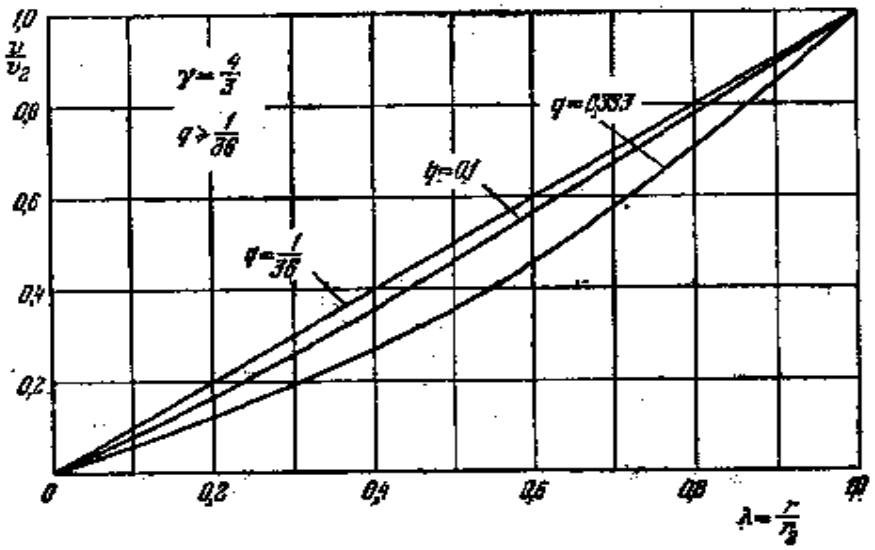


图 139　气体的扰动运动场中的速度分布，运动延拓到对称中心

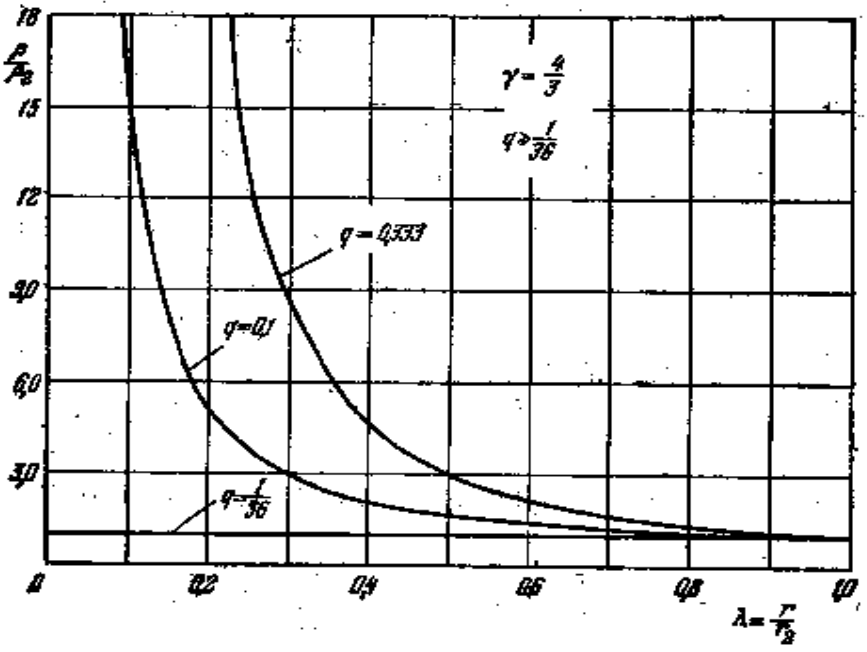


图 140　气体的扰动运动场中的密度分布。
当 $q > 1/36$ 时在对称中心密度为无穷大

在相应的运动中，密度只依赖于时间而不依赖于半径。解 (6.24) 是第四章中的解(15.24) 在 $\gamma = 4/3$ 和 $\beta = 0$ 时的特殊情况；κ 和

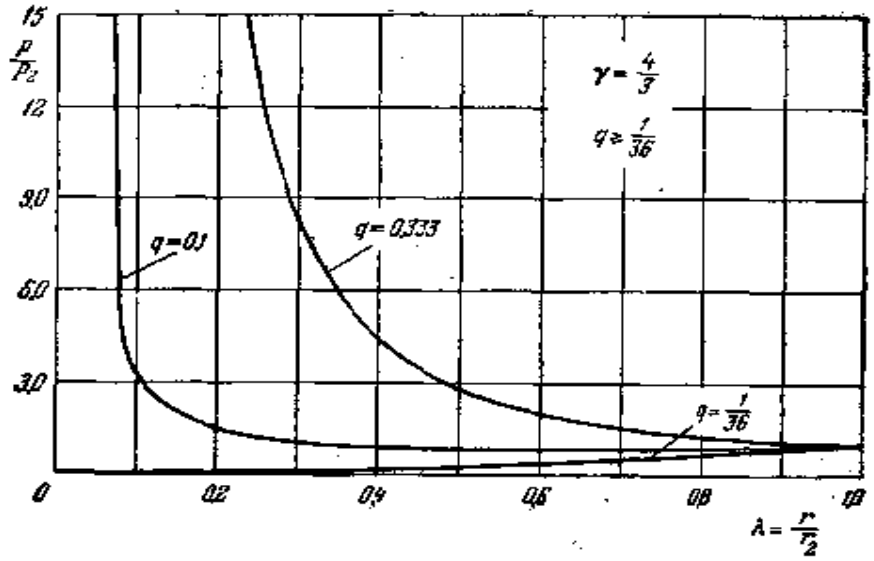


图 141　气体的扰动运动场中的压力分布，
当 $q > 1/36$ 时在对称中心压力为无穷大

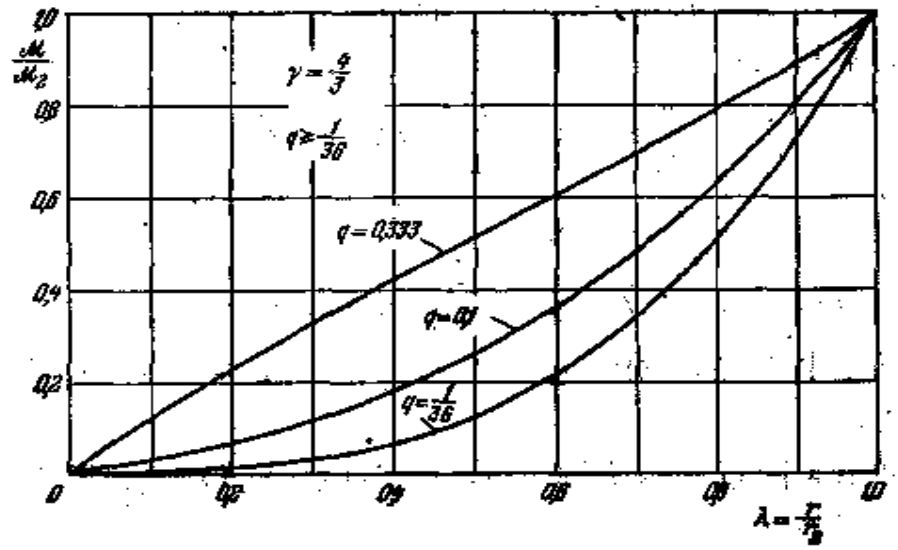


图 142　质量随距对称中心距离的变化

$\mathscr{R}_0$的关系如下

$$\kappa = \frac{1}{9\mathscr{R}_0} - \frac{2\pi}{3}.$$

当 $\gamma = 4/3$ 和 $\omega = 2.5$ 时，公式 (6.20) 给出：

$$\left.\begin{aligned} V_2 &= \frac{24}{35}(1-q);\\ \mathscr{R}_2 &= \frac{21}{50\varkappa}(q)\Big/\left(\frac{1}{3}+2q\right);\\ M_2 &= \frac{36}{25}q;\\ r_2 &= \frac{16(8-q)(1+6q)}{25\cdot 49} \end{aligned}\right\} \tag{6.25}$$

从冲击波条件 (6.25) 推出，当 $q = 1/36$ 时有 $V_2 = 2/3$. 如果现在令 $q = 1/36$ 并令任意常数 $\mathscr{R}_0$ 等于 $\mathscr{R}_2$，后者根据 (6.25) 等于 $\frac{3}{\varkappa\cdot 100}$，则得到

$$z = \frac{4}{27} - \frac{8\varkappa}{9}\mathscr{R}_0 = z_2, \qquad \frac{4\varkappa\mathscr{R}_0}{3} = M_2.$$

因此，当 $\gamma = 4/3$，$\omega = 2.5$ 和 $q = 1/36$ 时，公式 (6.24) 以简单形式给出所讨论的爆发问题的精确解. 这时解 (6.24) 可以写为以下简单形式：

$$\frac{v}{v_2} = \lambda; \quad \frac{\rho}{\rho_2} = 1; \quad \frac{p}{p_2} = \lambda^2;$$

$$\frac{\mathscr{M}}{\mathscr{M}_2} = \lambda^3; \qquad \lambda = \frac{r}{r_2}. \tag{6.26}$$

得到的解分为 $q < 1/36$ 时形成真空的运动的解和 $q > 1/36$ 时延拓到对称中心的运动的解. 在图 135—142 中也绘出了解 (6.26) 的曲线.

利用第四章的精确解 (15.24) 可以以简单形式得到爆炸类型的其它精确解.

实际上，从第四章的解(15.24) 和冲击波上对于 u_2，ρ_2 和 $\mathscr{M}_2$ 的边界条件(6.14)我们得到，这些条件根据公式(6.2)将会得到满足，如果常数值 q，$\mathscr{R}_0$，γ_1 和 ω 有关系[1]

1) 推导(6.27)和(6.28)时在冲击波条件(6.14)中常数 γ 由 γ_1 代替.
方程 (6.1) 中的量 γ 在某些情况下可以看成是多方指数，而在冲击波条件中设 $\gamma_1 = c_2/c_0 \neq \gamma$.

$$q = \frac{\gamma_1 \omega^{\frac{1}{2}} \pi \mathscr{R}_0}{6(\omega - 1)}, \quad q = 1 - \frac{(\gamma_1 + 1)\omega}{6}, \tag{6.27}$$

且冲击波运动规律由下式决定的话

$$r_0^\omega = \frac{3fA}{(3-\omega)\mathscr{R}_0} t^2. \tag{6.28}$$

根据第四章的(15.24)，以及(6.2)，(6.14) 和 (6.28)，对于 p_2 的冲击波条件给出等式

$$\kappa \left(\frac{3fAt_0^2}{3-\omega}\right)^{\gamma-\frac{1}{3}} \frac{1}{r_2^{\omega(\frac{2}{3}+\gamma)}} + \beta r_0^2 \left(\frac{3fAt_0^2}{3-\omega}\right)^{\gamma-2} \frac{1}{r_2^{\omega\gamma+2}}$$
$$= \frac{2\pi}{9} \frac{(3-\omega)[6+(\gamma_1-1)\omega]}{(\omega-1)[6-(\gamma_1+1)\omega]} \frac{1}{r_2^{2\omega}};$$
$$\left(\mathscr{R}_0 = \frac{1}{3\left(2\pi + \frac{\kappa}{\gamma-1}\right)}\right). \tag{6.29}$$

如果 $\omega < 3$，则关系式 (6.29) 可能在两种情况下被满足：

1°.

$$\left.\begin{aligned} &\beta = 0; \qquad \gamma = \frac{4}{3}; \\ &\omega = \frac{12(2+\gamma_1)}{4+9\gamma_1}; \\ &q = \frac{2\gamma_1(2-\gamma_1)}{4+9\gamma_1}; \\ &\kappa = \frac{2\pi}{9} \frac{(3-\omega)[6+(\gamma_1-1)\omega]}{(\omega-1)[6-(\gamma_1+1)\omega]} \end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

得到依赖于 γ_1 的一族解；如果 $\gamma_1 = \gamma = 4/3$，则相应于(6.30) 的解与解 (6.26) 相符：

2°.

$$\left.\begin{aligned} &\kappa = 0; \quad \gamma = 2\left(1 - \frac{1}{\omega}\right); \\ &\gamma_1 = \frac{6(\omega-1)(6-\omega)}{\omega(7\omega-6)}; \end{aligned}\right\}$$

$$q=\frac{\omega(6-\omega)}{6(7\omega-6)};$$
$$\beta r_0^2=\left(\frac{3fAt_0^2}{3-\omega}\right)^{\frac{2}{\omega}}\frac{2\pi}{9}\frac{(3-\omega)[6+(\gamma_1-1)\omega]}{(\omega-1)[6-(\gamma_1+1)\omega]}.\tag{6.31}$$

如果 $\gamma_1=\gamma$，则

$$\gamma=\frac{7}{6};\quad \omega=2.4;\quad q=\frac{2}{15};$$
$$\beta r_0^2=(5fAt_0^2)^{\frac{2}{5}}\frac{16\pi}{21}.\tag{6.32}$$

在情况 2° 中得到了对于不同 ω 的一族特解，但是对于每个 ω 得到的 γ 和 γ_1 的值不同，只是当 $\omega=2.4$ 时有 $\gamma=\gamma_1=7/6$.

在情况 1° 中，对于所有的 γ_1，冲击波内气体运动特征量的分布都由式 (6.26) 给出。在情况 2° 中得到公式：

$$\frac{v}{v_2}=\lambda;\quad \frac{\rho}{\rho_2}=1;\quad \frac{p}{p_2}=1;$$
$$\frac{\mathscr{M}}{\mathscr{M}_2}=\lambda^3;\qquad \lambda=\frac{r}{r_2}.\tag{6.33}$$

因此，在情况 2° 中不仅冲击波后的密度而且压力也是常数。

在两种情况下气体的运动都可一直延拓到对称中心，而且在第一种情况下在中心 $p=0$，在第二种情况下 $p=p_2(t)$. 如果 $\gamma=\gamma_1=7/6$ 为绝热指数，则解 (6.33) 对应于无能量释放的不稳定平衡的破坏——动力学爆炸[1]。在爆炸波内的受扰运动中的气体能量等于平衡时的初始能量。

利用式(15.24)，(6.28)，(6.31)和(6.32)将解(6.33)写为有量纲形式：

$$\mathscr{M}=\frac{2}{9}\frac{r^3}{ft^2},\quad \rho=\frac{1}{6\pi ft^2},\quad v=\frac{2}{3}\frac{r}{t},$$
$$p=\frac{K}{f}\frac{1}{t^{7/3}},\quad K=\frac{1}{189\pi}(30\pi fA)^{\frac{5}{6}},$$

1) Седов Л. И., О динамическом взрыве равновесия. ДАН СССР, т. 112, № 2, 1957, стр. 211—212.

而冲击波半径 r_2 由下式给出：

$$r_2(t) = (30\pi f A t)^{\frac{3}{12}}.$$

现在我们来讨论一下 $\gamma = 5/3$（这对应单原子气体或完全电离的气体）的数值解的结果。

对于 $\gamma = 5/3$ 和不同的 q 值的计算结果绘于图 143—146 中。

分布曲线的 $\lambda = r/r_2$ 值的左端点相应于 $\mathscr{M} = 0$，因此这些点可以看成是初始瞬时在对称中心产生的内边界。气体的受扰运动可以看成为一个特殊球形活塞即一个球排挤气体的结果，这个球的半径 r^* 按下式从零增长

$$r^* = \lambda^* r_2, \text{ 这里 } \lambda^*(\gamma, q, \omega) = \text{const}. \qquad (6.34)$$

当 $\omega = 2.5$ 时，对于 $\lambda = 4/3$ 和 $5/3$ 的函数 $\lambda^*(\gamma, q)$ 在图 147 中给出。

当 $q \to 0$ 时，所讨论的解趋近于第四章 § 14 中得到的无牛顿引力时的解。

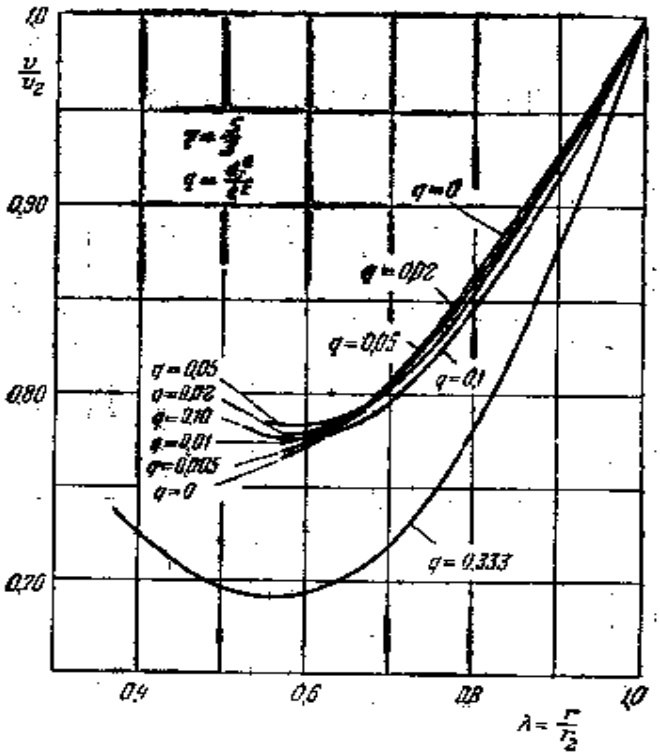


图 143　$\gamma = 5/3$ 时的速度分布

当 $q = 0$ 时，我们有 $\lambda^* \neq 0$ 且 λ^* 只依赖于 γ；对于 $\gamma = 5/3$ 和 4/3 当 $\omega = 2.5$ 时的相应的极限值 $r^*/r_2 = \lambda^*(0, \gamma)$ 也在图 147 中给出。

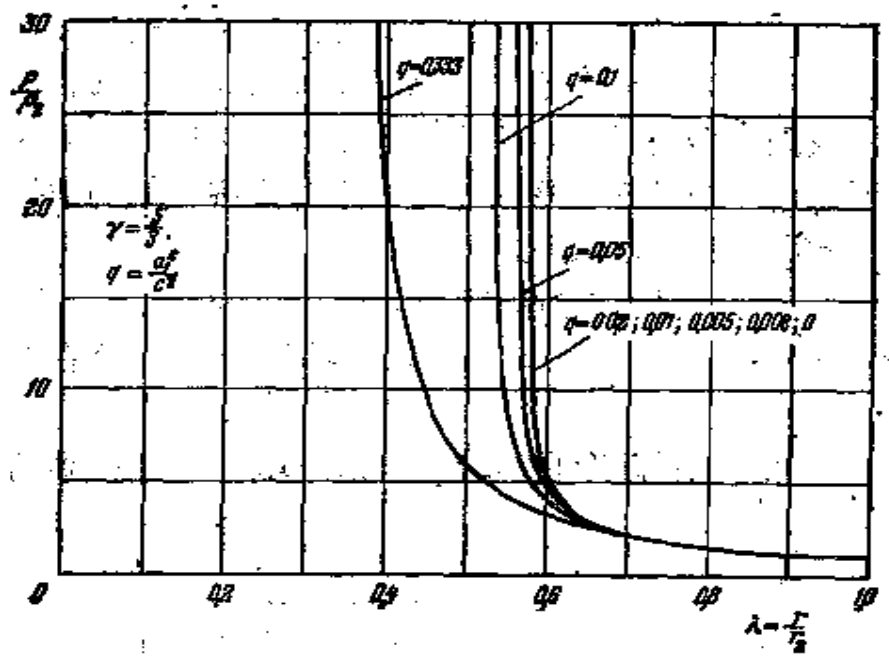


图 144　$\gamma = 5/3$ 时的密度分布

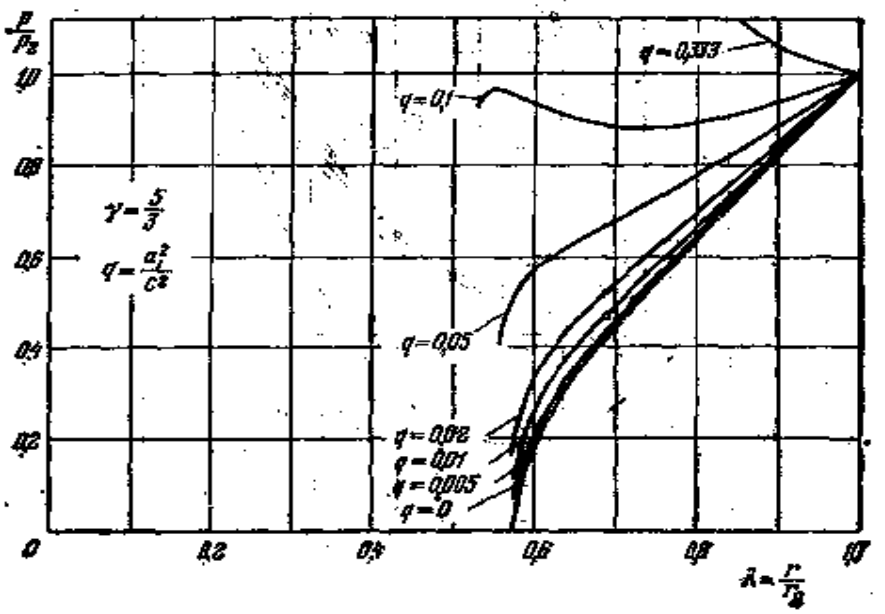


图 145　$\gamma = 5/3$ 时的压力分布

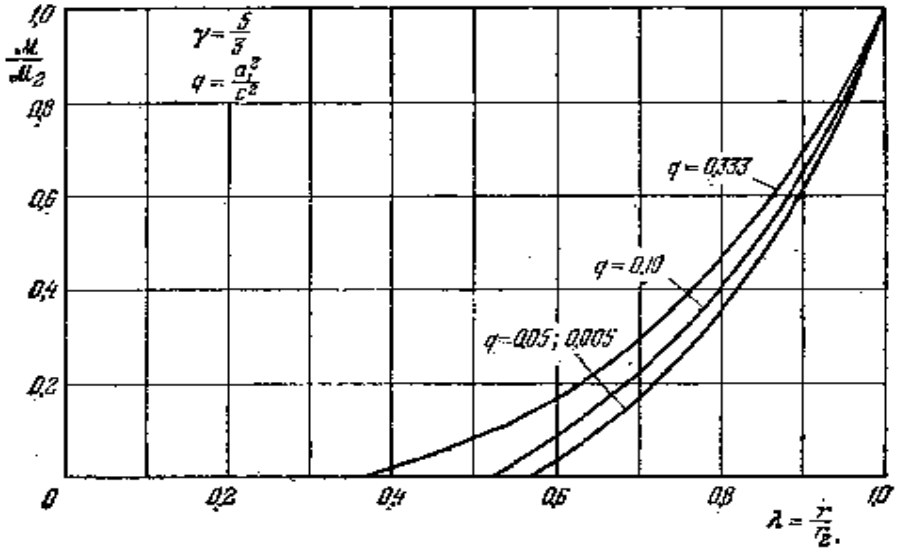


图 146　气体质量随距对称中心的距离的变化

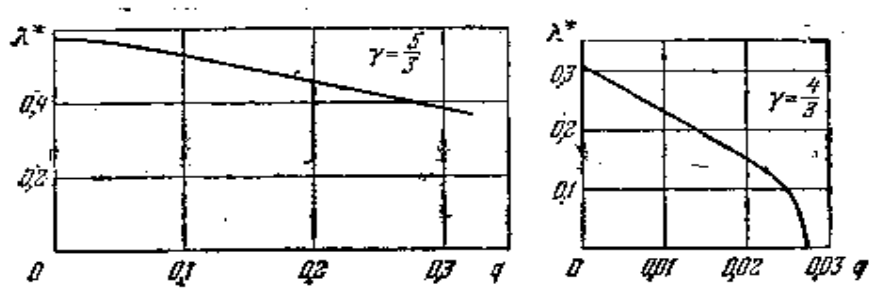


图 147　$\gamma = 5/3$ 和 $\gamma = 4/3$ 时内边界半径对 $q = a_1^2/c^2$ 的依赖关系

现在我们来求内边界附近解的渐近性状．在这边界上 $\mathscr{M} = 0$，而由于 $r = r^*$ 是有限值，故从式 (6.9) 推出，当 $r \to r^*$ 时有 $M \to 0$．因此，运动方程 (6.10) 在 $r \approx r^*$ 附近趋向于第四章的方程 (5.10) 和 (5.11)．物理上这是由于牛顿引力在内边界附近很小且极限为零。

为了得到渐近公式，研究第四章中的常微分方程 (5.10) 和 (5.11) 在奇点 $V = \delta = 2/(5 - \omega)$，$z = 0$ 附近的解就足够了．在我们所讨论的情况下 $\omega = 2.5$，因此 $\delta = 4/5$．当 $q = 0$ 时，在内边界附近 ($r \to r^*$) 的渐近公式在第四章 § 14 中给出[公式 (14.17)]。

只存在唯一的一条通过奇点 $V = 4/5$，$z = 0$ 的积分曲线，其

渐近规律为

$$z = \frac{2}{5}\gamma\left(\frac{4}{5} - V\right). \tag{6.35}$$

这一曲线对应于 $\omega = 2.5$ 和 $q = 0$ 时的点爆炸的解。但是这一曲线对应于 $C_3 = 0$。而在所讨论的情况下 $q \neq 0$，$C_3 \neq 0$，所以必须利用其它的解。平面 z，V 上通过奇点 $V = 4/5$ 和 $z = 0$ 的其它积分曲线的渐近方程在这点附近有如下形式：

$$z = A\left(\frac{4}{5} - V\right)^{\frac{5\gamma-6}{6(\gamma-1)}}, \tag{6.36}$$

这里 A 是任意常数。显然，$\frac{5\gamma-6}{6(\gamma-1)} < 1$。容易直接验证公式 (6.36) 的正确性。

利用式 (6.36) 从积分 (6.11)，(6.13) 得到：

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{R} &= B\left(\frac{4}{5} - V\right)^{-\frac{5\gamma-6}{6(\gamma-1)}}, \\ M &= 10\pi B\left(\frac{4}{5} - V\right)^{\frac{7}{6(\gamma-1)}}, \\ P &= \frac{\varepsilon R}{\gamma} = AB\frac{1}{\gamma}, \\ B &= \frac{5\gamma C_3}{4A}\lambda^{*-5}. \end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

利用积分 (6.12) 和公式 (6.21) 和 (6.22) 可将常数 A，C_2 和 C_3 通过 γ，q 和 λ^* 表出。当 $\gamma = 4/3$ 时式 (6.37) 不成立，因为在此情况下 $C_3 = 0$。此外，利用 (6.10) 的第二个方程和式 (6.37) 容易得到渐近公式

$$\frac{r - r^*}{r^*} = \frac{\lambda - \lambda^*}{\lambda^*} = \frac{5\gamma}{12(\gamma-1)}\left(\frac{4}{5} - V\right). \tag{6.38}$$

根据 (6.9)，(6.20)，(6.37) 和 (6.38)，有量纲量在 $\gamma \neq 4/3$ 和 $r \to r^*$ 时的相应的渐近公式有如下形式：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{v}{v_2}=\frac{\gamma+1}{2(1-q)}\frac{r^*}{r_2},\\
&\frac{\rho}{\rho_2}=\frac{25\pi\gamma(\gamma-1+2q)B}{6(\gamma+1)q\left[\dfrac{12(\gamma+1)}{5\gamma}\dfrac{r-r^*}{r^*}\right]^{\frac{5\gamma-6}{6(\gamma-1)}}},\\
&\frac{p}{p_2}=\frac{625\pi\gamma(\gamma+1)AB}{96q[2\gamma-(\gamma-1)q]}\left(\frac{r^*}{r_2}\right)^3,\\
&\frac{\mathscr{M}}{\mathscr{M}_2}=\frac{\pi\gamma B}{0.192q}\left(\frac{r^*}{r_2}\right)^3\left[\frac{12(\gamma-1)}{5\gamma}\frac{r-r^*}{r^*}\right]^{\frac{\gamma}{6(\gamma-1)}}.
\end{aligned}\right\}\quad(6.39)$$

$q=0$ 时的解的渐近性状在第四章 §14 中研究过；当时证明了，在所讨论的情况下当 $\omega=2.5<3$ 时内边界的压力等于零，而对于密度如下渐近式成立：

$$\frac{\rho}{\rho_2}=A\left(\frac{r-r^*}{r_2}\right)^{\frac{2.5\gamma-3.5}{3\gamma-3.5}}.$$

从这公式可以看出，当 $r\to r^*$ 而 $\gamma=4/3$ 时，比值 ρ/ρ_2 趋近于零．当 $\gamma=1.4$ 时，比值 ρ/ρ_2 有限，而当 $\gamma=5/3$ 时，比值 ρ/ρ_2 按 $A\left(\frac{r_2}{r-r^*}\right)^{4/9}$ 趋向无穷大．

从式(6.39)可以看出，当 $\omega=2.5$，$q>0$ 及 $\gamma\neq 4/3$ 时，内边界上质量等于零，而压力为有限且异于零．后一结果是由于压力在内边界上作的功(球形活塞作的功)不为零．

根据得到的解推知，冲击波内气体受扰运动的总能量为有限值．因为当 $\gamma>4/3$ 及 $\omega=2.5$ 时初始能量等于负无穷大，故按照我们采用的理想化的问题提法得到，运动是由初始时刻在对称中心释放无穷大的能量引起的．这一能量用来抵消初始的无穷大负能量和造成气体的受扰运动．由量纲的考虑显然有，扰动运动的能量为常值．冲击波带动的气体质量所具有的附加负能量，为内边界球上压力功供给的能流所抵销．

如果 $\gamma=4/3$，则初始能量和受扰运动的能量为有限值且不依赖于冲击波的半径；这时内边界上压力等于零．能量只是在中

心在初始时刻一瞬间释放出来.

如果 $\omega < 2.5$，则根据式 (6.3)，半径为 r_2 的任何球内的初始能量为有限值. 对问题的研究和计算表明，当 $\gamma = 5/3$，$\omega = 1.4$ 或 $\omega = 2$ 时，得到对应于由压力不等于零的球形活塞引起的运动，而且活塞的功 W 可以与气体的初始能量 H 相比拟(当 $\omega = 1.4$ 时 $H > 0$，当 $\omega = 2$ 时 $H < 0$).

比值 $W/|H|$ 随 q 的减小而增大，即随着冲击波强度的增大而增大.

比值 r^*/r_2，这里 r^* 为活塞的半径，也随 q 的减小而增大. 值得注意的是，活塞上的压力比冲击波上的压力 p_2 大，而且比值 p^*/p_2 随 q 的减小而增大.

在所研究过的自模拟运动的范围内，可以建立小 γ 值（如 $\gamma = 7/6$ 或 $4/3$）的星球爆发模型. 小的 γ 值有时可以看作是分布于气体内的源连续释放热量时的多方指数.

上面我们讨论了自模拟运动. 在线性化提法中可以讨论接近自模拟的各种非自模拟运动[1]. 这时，对于决定解与自模拟解的不同之点的待求特征量，也可以指出与上面给出的质量、绝热和能量积分相类似的最终关系式.

3. 温度梯度为零的情况下平衡的动力学爆炸 现在我们讨论这样情况下的完全气体平衡的动力学爆炸问题，这时假定在冲击波阵面后有剧烈的热交换，从而在气体的受扰运动区域，温度梯度可以设为等于零[2]. 受扰区域中运动方程有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + f\frac{\mathscr{M}}{r^2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

1) Лидов М. Л., К теории неустановившихся движений газа с учетом сил тяготения. ПММ, т. 19, вып. 5, 1955, стр. 541—550.

2) Рязанов Е. В., Примеры точных решений задач о распространении взрывных волн в гравитирующем газе при нулевом градиенте температуры. ДАН СССР, т. 126, №5, 1959, стр. 955—957.

$$\frac{\partial \mathscr{M}}{\partial r} - 4\pi r^2 \rho = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

设在初始时刻有一静止气体球，其密度分布为

$$\rho_1(r) = Ar^{-\omega} \quad (A > 0,\ 1 < \omega < 3). \tag{6.41}$$

从方程 (6.40) 得到运动特征量的平衡分布：

$$v_1 = 0,$$

$$\mathscr{M}_1 = \frac{4\pi A}{3-\omega} r^{3-\omega}, \quad p_1 = \frac{2\pi A^2 f}{(3-\omega)(\omega-1)} r^{2-2\omega}. \tag{6.42}$$

在沿静止气体传播的冲击波上，应满足以下条件：

$$\begin{cases} \mathscr{M}_2 = \mathscr{M}_1, \quad \rho_2(c - v_2) = \rho_1 c, \\ p_2 + \rho_2(c - v_2)^2 = p_1 + \rho_1 c^2. \end{cases} \tag{6.43}$$

容易看出，方程组(6.40) 有下列以激波为界的(在激波上满足条件 (6.43) 和 (6.42)) 精确解：

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{2}{3}\frac{r}{t}, \\ \rho &= \frac{1}{6\pi f}\frac{1}{t^2}, \\ \mathscr{M} &= \frac{2}{9f}\frac{r^3}{t^2}, \\ p &= \frac{(13\omega - 12)(3-\omega)^{1-\frac{2}{\omega}}(18\pi A f)^{\frac{2}{\omega}}}{162\pi f\omega(\omega-1)} t^{4\left(\frac{1}{\omega}-1\right)}, \\ r_2 &= \left(\frac{18\pi A f}{3-\omega}\right)^{\frac{1}{\omega}} t^{\frac{2}{\omega}}, \end{aligned}\right\} \tag{6.44}$$

并且半径为 r_2 的球内所包含的气体的初始能量等于冲击波阵面后运动气体的总能量，因此，如果在 $\omega < 5/2$，$\omega \neq 2$ 的情况下 γ 与 ω 之间有关系式

$$\gamma = \frac{2(8\omega - 15)}{3\omega}, \tag{6.45}$$

而在 $\omega > \frac{5}{2}$ 时有

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= \frac{5\sqrt{3}-4}{3} \simeq 1.55,\\ \omega &= \frac{6}{13}(\sqrt{3}+4) \simeq 2.65,\end{aligned}\right\} \tag{6.46}$$

则没有任何引起所述运动的机械能或热能的附加能源。

从式 (6.45) 可以看出，当 $\omega < 5/2$ 时，我们感兴趣的 γ 和 ω 值处于如下区间：$1 < \gamma < \frac{4}{3}$，$30/13 < \omega < 5/2$。

这样，在初始密度分布为 (6.41) 的完全气体中不释放能量的爆炸类型的运动，只在由式 (6.45) 和 (6.46) 决定的 ω 和 γ 值的情况下才有可能。

当 $\omega = 2.4$ 时，从式 (6.45) 我们得到 $\gamma = 7/6$。在此情况下 (在本节的 1 中描述过的)，由于平衡的动力学爆炸的结果产生完全气体的绝热运动。这时，绝热条件与 (6.40) 的第四个方程相符。

如果 $\omega = 2.5$，$\gamma = 4/3$，且运动方程具有 (6.40) 的形式，则当在星球中心释放能量 $E_0 = \frac{352}{15}\varkappa^2 A^2 f$ 时也发生由公式 (6.44) 给出的非定常运动，它通过冲击波与静止区域相衔接，静止区中气体特征量的分布具有形式 (6.42)。

我们再讨论一下在某种理想双参数可压缩介质中无能量释放的平衡的动力学爆炸问题[1]，此介质的内能有如下形式：

$$\begin{aligned}\varepsilon(p,\rho) = \frac{p}{\rho}\Bigg\{&\frac{1}{\gamma-1} + B_1\mathscr{R}^{n_1} + B_2\mathscr{R}^{n_2} + C_1 P^m\\ &+ C_2 P^{-1} + \int_{q_0}^{q_k} D(q)\mathscr{R}^q P^{\nu(q)}\,dq\\ &+ \int_{h_0}^{h_k}\Bigg[B(h)\mathscr{R}^h + C(h)P^{-\frac{\omega}{2(1-\omega)}h}\\ &+ \sum_{i=1}^{l} D_i(h)\mathscr{R}^{q_i}P^{-\frac{\omega}{2(1-\omega)}(h-q_i)}\Bigg]\,dh\Bigg\}\end{aligned}$$

1) Кочина Н.Н., О динамическом взрыве ровновесия в некоторых идеальных средах при нулевом градиенте температуре. ДАН СССР, т. 148, №1, 1963, стр. 57—60.

$$\left(\mathscr{R}=\frac{\rho}{\rho_0},\quad P=\frac{p}{p_0}\right). \tag{6.47}$$

这时假设，在受扰运动区域中运动方程有 (6.40) 的形式，而初始密度分布由关系式 (6.41) 给出，其中 $1<\omega<2.5$. 这问题满足条件 (6.42) 与 (6.43) 的解由式 (6.44) 给出。

令半径为 r_2 的球内气体的初始能量与冲击波阵面后的运动气体的总能量相等，我们得到用来求常数 γ 的方程 (6.45)，用来定常数 n_1, n_2, m 及给定 q 时求函数 $s(q)$ 的超越方程

$$\left.\begin{aligned}
&5-(2+n)\omega=\frac{3\omega}{13\omega-12}\left(\frac{3-\omega}{3}\right)^n,\\
&5-2\omega+2(1-\omega)m=\left(\frac{\omega}{13\omega-12}\right)^{m+1},\\
&5-2\omega-\omega q+2(1-\omega)s(q)\\
&\qquad=3^{1-q}(3-\omega)^q\left(\frac{\omega}{13\omega-12}\right)^{s(q)+1}
\end{aligned}\right\} \tag{6.48}$$

和加在函数 $B(h)$, $C(h)$, $D_i(h)(i=1,2,\cdots,l)$ 上的条件

$$\alpha(\omega,h)B(h)+\beta(\omega,h)C(h)+\sum_{i=1}^{l}\delta_i(\omega,h)D_i(h)=0, \tag{6.49}$$

这里引入了如下标记：

$$\left.\begin{aligned}
\alpha(\omega,h)&=\frac{8\pi^2A^2f}{(3-\omega)(\omega-1)}\left(\frac{A}{\rho_0}\right)^h\\
&\quad\times\left\{\frac{13\omega-12}{3\omega}\left(\frac{3}{3-\omega}\right)^h-\frac{1}{5-\omega(2+h)}\right\},\\
\beta(\omega,h)&=\frac{8\pi^2A^2f}{(3-\omega)(\omega-1)}\left[\frac{2\pi A^2f}{(3-\omega)(\omega-1)p_0}\right]^{-\frac{\omega}{2(1-\omega)}h}\\
&\quad\times\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{13\omega-12}{\omega}\right)^{-\frac{\omega}{2(1-\omega)}h+1}-\frac{1}{5-\omega(2+h)}\right\},\\
\delta_i(\omega,h)&=\frac{8\pi^2A^2f}{(3-\omega)(\omega-1)}\left(\frac{A}{\rho_0}\right)^{q_i}
\end{aligned}\right\} \tag{6.50}$$

$$\times\left[\frac{2\pi A^2 f}{(3-\omega)(\omega-1)p_0}\right]^{\frac{\omega}{2(\omega-1)}(h-q_i)}$$

$$\times\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{3}{3-\omega}\right)^{q_i}\left(\frac{13\omega-12}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{2(\omega-1)}(h-q_i)+1}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{5-\omega(2+h)}\right\}.$$

式(6.47)中的量 q_0, q_k, h_k 应满足某些不等式。常数 B_1, B_2, C_1, C_2 以及函数 $D(h)$, $B(h)$, $C(h)$, $D_i(h)(i=1,2,\cdots,l-1)$ 是任意的。为使流动在物理上是现实的，应对这些常数和函数加以某些附加的限制。温度 T 由积分一阶线性偏微分方程

$$T+\frac{\partial T}{\partial p}\left(p^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}-p\right)-\rho^2\frac{\partial T}{\partial \rho}\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}=0$$

得到，这里 $\varepsilon(p,\rho)$ 由表达式 (6.47) 定义。

当条件(6.45)，(6.48)—(6.50)满足时，内能之形式为 (6.47) 的静止介质中的动力学爆炸在无能量释放情况下发生。

内 容 索 引

一至二画

一维气体运动 §4.16
力 §1.5
　摩擦～ §1.5
　惯性～ §1.5
　磁场强度～ §1.5
　电荷相互作用～ §1.5
力学相似条件 §2.6; §2.7

三　画

工程单位制 §1.3
万有引力定律 §1.5
万有引力常数 §1.3

四　画

火焰的传播 §4.1; §4.2; §4.9
开普勒定律 §1.5
无量纲量 §1.2
无量纲变量 §4.2
天体物理学 §6.1
韦伯定律 §1.5
不可压缩流体表面上的波 §2.13
尺度效应 §2.6
引力能 §6.6
水堰 §2.2
牛顿第二定律 §1.5
气球的模拟 §2.6
气体机械 §5.1
气体常数 §1.3
从水面的弹跳 §2.11
风洞 §2.6; §3.4
　～中的湍流度 §3.4

五　画

主定参量组 §1.7
　～的完备性 §1.7
平板绕流时的边界层 §3.3
击水 §2.11
布拉修斯公式 §3.5
布希涅斯克问题 §2.5; §2.14
卡门相似性假设 §3.4
卡门-霍华斯方程 §3.4
发动机的尺寸和比重 §2.9
发动机效率 §5.3

六　画

冲击波 §4.2; §4.11
　～上的条件 §4.2
　～后的温度和速度 §4.2
　～的渐近衰减定律 §4.17
　～速度 §4.11
冲量流 §5.1
关联系数 §3.4
动力学相似 §2.6
动力学特征长度 §4.12
动力学特征时间 §4.12
动力学爆炸 §6.6
动能 §1.5
动量方程 §5.1
动量积分 §4.3
动量矩流 §5.1
有效功率 §2.9
压气机 §5.1; §5.2
　～的模拟 §5.2
考虑反压的爆炸 §4.12
机翼颤振 §2.8
扩压器 §5.1
达西公式 §3.5
达朗贝尔-欧拉佯谬 §5.3
过载 §1.2
导出测量单位 §1.3
毕奥-萨伐尔定律 §1.5

多普勒效应 §5.1
自由度数 §2.7
自模拟运动 §2.14;§4.1;§4.11;§4.15
自模拟性 §2.14;§4.1;§4.4
空间问题的～ §2.14;§4.1;§4.4
理想介质的点爆炸的～ §4.11
约束力矩 §3.4

七 画

库仑定律 §1.5
克拉珀龙方程 §1.7;§2.7
杨氏模量 §2.6
运动学相似 §2.8;§3.4
连续性方程 §2.7
层流运动 §2.3
层流状态 §2.3
尾喷管 §5.1
佛罗德数 §2.9
佛罗德相似律 §2.9
含尘大气中的爆炸 §4.11
纳维尔-斯托克斯方程 §2.7
纵倾角 §2.10

八 画

泊松系数 §2.6
泊肃叶定律 §2.3
变星 §6.1
空气喷气发动机 §5.1;§5.3
理想～ §5.3
冲压式～ §5.1;§5.3
雨贡尼奥条件 §4.16
势能 §1.5
国际单位制 §1.3
虎克定律 §1.5
物体在流体中的运动 §2.4
～的模拟 §2.7;§2.8
物体的绕流 §2.4;§3.3
物理单位制 §1.3
物理相似 §2.6
质量 §1.5
～积分 §4.3
～流 §5.1
参量的取平均 §5.1

九 画

活塞 §4.1;§4.5;§4.6
总热焓流 §5.1
恒星半径 §6.3
恒星质量 §6.3
恒星亮度 §6.1
恒星温度 §6.2
玻耳兹曼常数 §1.3
相似运动 §2.6
点爆炸 §4.1;§4.11
星等 §6.1
哈根-泊肃叶流动 §2.3;
临界颤振速度 §2.8
重力加速度 §1.3
重流体的运动 §2.2
秒差距 §6.1
结构的强度和尺寸 §2.6
绝热积分 §4.3
绝热指数对爆炸的影响 §4.11

十 画

流体中物体的传热 §2.5
流管 §5.1
涡轮机 §5.1
涡轮喷气发动机 §5.1;§5.3
涡轮螺旋桨发动机 §5.1;§5.3
离心机 §2.6
离心式机械 §2.6
离心式模拟 §2.6
原子弹 §4.11
～的能量 §4.11
热功当量 §1.3;§2.5
热传导率 §4.11
热传导方程 §3.4
热流方程 §2.7;§6.2
铅直落水 §2.11
造父变星 §4.15;§6.1
～的脉动周期 §6.1;§6.5
航空发动机 §2.9
能量方程 §4.3;§5.1
能量积分 §4.3

能量守恒定律 §1.5; §4.3

十一 画

混合距离 §3.5
粘性系数 §2.3
粘性流体中涡旋的扩散 §3.1
理想介质中的爆炸 §4.11
理想风扇 §5.3
理想螺旋桨 §5.3
基本测量单位 §1.3; §1.6
船舶的运动 §2.9
弹性机翼绕流的稳定性 §2.8

十二 画

强爆炸 §4.1; §4.5; §4.11
　变密度介质中的～ §4.14
　考虑传热的～ §4.11
湍流 §2.3; §3.4
　～的退化 §3.4;
　～运动 §2.3; 3.4
　～运动的取平均 §3.4
　～状态 §3.4; §3.5
　各向同性～ §3.4
　均匀～ §3.4
　在风洞中的～ §3.4
　非定常～ §3.5
滞止状态 §5.1
滞止参量 §5.2
普朗特-施利希廷公式 §2.9
斯托克斯定律 §2.4
斯特罗哈尔数 §2.8
超新星 §6.1; §6.6
确定一类现象的参量 §1.7
剩余阻力 §2.9
稀疏波 §4.10
量纲 §1.3
　～公式 §1.4
　～相关的量 §1.6
　～独立的量 §1.6
　～量 §1.2

十三 画

数学摆 §2.1
滑行 §2.10
　～的稳定性 §2.11
新星 §6.1; §6.6
雷诺数 §2.3; §2.6; §2.9
　临界～ §2.3

十四 画

模拟 §1.3; §2.6
静止气体的能量 §6.6
管道中流体的运动 §2.3
管道阻力系数 §2.3

十五 画

熵流 §5.1
摩擦阻力 §2.9; §2.10
摩擦系数 §2.9

十六 画

激波管 §4.10
　～中气体的运动 §4.10
燃气涡轮发动机 §5.1; §5.2
燃烧 §4.1; §4.9
　～室 §5.1

十九 画

爆炸中心的真空度 §4.11
爆炸的模拟 §4.13
爆炸时的冲量 §4.13
爆炸时的状态方程 §4.11
爆炸时的最大压力 §4.13
爆轰 §4.1; §4.2; §4.8
　～中心的真空度 §4.8
　球面～ §4.8
Π 定理 §1.6