第一章　经典弹性理论

1.1　引　言

本书研究出现在弹性理论中的一类问题，即接触问题．在这一章将对弹性的无限小理论作介绍，这些内容对理解后面要讨论的问题是必需的．关于这一理论更全面的介绍，读者可参考经典著作．Love (1927) 给出了一个详尽而具有丰富历史文献的介绍，这一著作成为西方许多弹性著作的基础．Muskhelshvili (1953 a) 是许多俄罗斯著作的基础，特别是关于复变方法的应用．Lur'e (1964) 也作出了详细的阐述，其中包括直至1950年前后俄文著作的丰富的文献目录，该书是介绍三维问题有效解答的少数著作之一．在物理学手册 (Handbuch der Physik) 中，由Sneddon与Berry (1958) 写的以及由Gurtin (1972) 写的弹性理论分册是权威性的著作．Timoshenko与Goodier (1951) 的著作更适合于工程师，它是这一领域步入实用阶段的起点．而Sokolnikoff (1946) 则强调弹性方程的张量特性，其著作对一般变分定理的那些章节是特别有价值的．Green与Zerna (1954) 对三维问题也使用张量方法，但是平面问题则发展了复变函数方法．

关于接触问题的文献，若干作者已有所评述．Shtaerman (1949)，Galin (1961)，Ufliand (1965)，Rvachev (1967) 和Abramian (1971) 主要涉及苏联文献．Kalker (1975) 则强调非经典和滚动接触问题，本书中不讨论这一问题．Kalker (1977a) 论述了经典与非经典两类接触问题．Hetenyi (1946)，(1964)，Vlasov和Leont'ev (1966)，Popov (1972b)，Gorbunov-Posadov与Malikova (1973)，以及Iyev (1973) 研究过

弹性基础上的梁和板。有关Hertz接触问题的文献，在Morton与Close(1922)，Way(1940)，Timoshenko与Goodier (1951，p.372f)，Dinnik(1952)与Krolevets (1966)的书中可以查到。

本书不打算在文献中包罗以上著作的全部文献．我们基本上是把接触问题作为应用数学的一个课题来讨论．因此，那些主要用近似计算取得的结果，虽然在实践上是重要的，但如果它们并不能表明新的数学方法时，就应该略去．(不幸的是，不能肯定所引用的著作都阐明了新的数学原理．甚至是最近发现的许多文章，所用数学方法与从前解决问题的方法是一样的，只不过是比以前的稍详细一点．)另一方面，在纯数学问题上，例如接触问题解的存在性与唯一性问题，我们很少加以注意．一般来说，这类问题没有完全得以解决，但可参阅一些著作，如Turteltaub和Sternberg(1967)，Kalker (1968) 的著作。

1.2 应变分析

根据前节所说的限定的目标，我们将力求以尽可能简单的方式来介绍应变分析．

考虑三维空间中某一区域的连续体，并且假定，在某种意义上，此连续体是经过变形的，所以它的各点都经历了位移．设点P在空间固定坐标系（其坐标轴为ox，oy，oz）中的坐标为(x, y, z)，它的位移为$\vec{d}=(u, v, w)$，有时也记为$\vec{u}=(u, v, w)$．在变形之后，点P的位置为$P'\equiv(x+u, y+v, z+w)$，如图1.2.1所示．如果我们假定u，v，w是坐标x，y，z的可微函数，那么距离P为δs的相邻点$Q(x+l\delta s, y+m\delta s, z+n\delta s)$，其中$\delta s$的方向余弦为$(l, m, n)$，则有如下的位移：

$$u+\delta u=u(x+l\delta s, y+m\delta s, z+n\delta s)$$

$$=u(x, y, z)+\delta s\left\{l\frac{\partial u}{\partial x}+m\frac{\partial u}{\partial y}+n\frac{\partial u}{\partial z}+\cdots\right\} \quad (1.2.1)$$

$$v+\delta v=v(x+l\delta s,\ y+m\delta s,\ z+n\delta s)$$

$$=v(x,\ y,\ z)+\delta s\left\{l\frac{\partial v}{\partial x}+m\frac{\partial v}{\partial y}+n\frac{\partial v}{\partial z}+\cdots\right\} \tag{1.2.2}$$

$$w+\delta w=w(x+l\delta s,\ y+m\delta s,\ z+n\delta s)$$

$$=w(x,\ y,\ z)+\delta s\left\{l\frac{\partial w}{\partial x}+m\frac{\partial w}{\partial y}+n\frac{\partial w}{\partial z}+\cdots\right\} \tag{1.2.3}$$

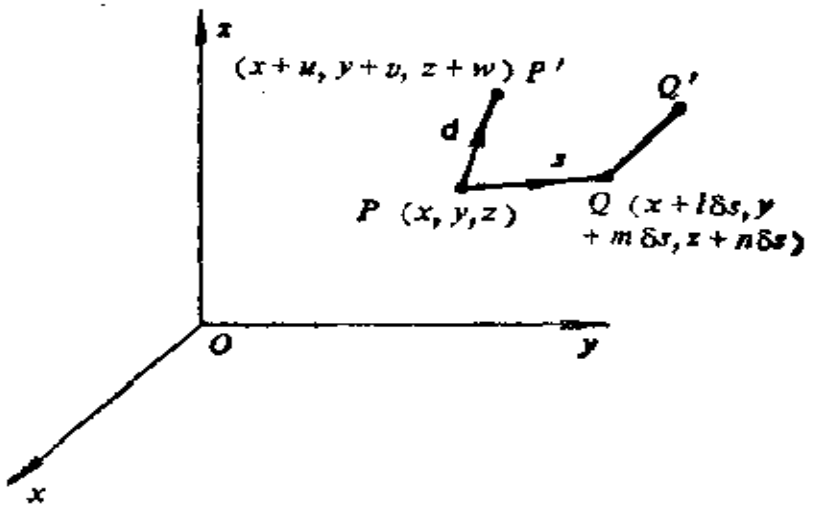


图1.2.1 点P，Q移到P′，Q′

其中所有的导数都是在点（x，y，z）上计算的。若δs充分小，则式（1.2.1）～（1.2.3）中所含δs的高阶项可以忽略。

我们现在仅限于分析无限小变形，即假定u,v,w的导数的乘积同线性项相比可以忽略。位移后点P'、Q'之间距离为$\delta s+\Delta s$，这里

$$(\delta s+\Delta s)^2=(\delta s)^2\left[\left\{l\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+m\frac{\partial u}{\partial y}+n\frac{\partial u}{\partial z}\right\}^2\right.$$

$$+\left\{l\frac{\partial v}{\partial x}+m\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+n\frac{\partial v}{\partial z}\right\}^2$$

$$\left.+\left\{l\frac{\partial w}{\partial x}+m\frac{\partial w}{\partial y}+n\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right\}^2\right]$$

在无限小应变的条件下，线段PQ的长度因变形而得到的此增长是

$$\frac{\Delta s}{\delta s}=l^2\frac{\partial u}{\partial x}+m^2\frac{\partial v}{\partial z}+n^2\frac{\partial w}{\partial z}+mn\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$+nl\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+lm\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

这个表达式的系数称为应变分量，并记为

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}\qquad (1.2.4)$$

$$e_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\qquad e_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\qquad (1.2.5)$$

于是

$$\frac{\Delta s}{\delta s}=l^2e_{xx}+m^2e_{yy}+n^2e_{zz}+2mne_{yz}+2nle_{zx}+2lme_{xy}\qquad (1.2.6)$$

注意，Love (1927)略去了剪应变e_{yz}，e_{zx}，e_{xy}中的1/2；许多作者略去了正应变e_{xx}，e_{yy}，e_{zz}中的第二个下标，Timoshenko与Goodier (1951)把它们记为ε_x，ε_y，ε_z。注意，剪应变是对称量，亦即，若引入e_{xy}，e_{zx}，e_{yz}，则有

$$e_{xy}=e_{yx},\qquad e_{zx}=e_{xz},\qquad e_{yz}=e_{zy}\qquad (1.2.7)$$

若物体的位移是由刚体位移（这时每一点的位移都相同）与无限小刚体转动（ω_1，ω_2，ω_3)合成的结果，那么方程（1.2.1）～（1.2.3）变成

$$u+\delta u=u-\omega_3 m\delta s+\omega_2 n\delta s$$

$$v+\delta v=v-\omega_1 n\delta s+\omega_3 l\delta s$$

$$w+\delta w=w-\omega_2 l\delta s+\omega_1 m\delta s$$

其中ω_1，ω_2，ω_3分别表示围绕ox，oy，oz三坐标轴的旋转角。由

于在这一变形下所有的应变分量等于零，例如

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\omega_z = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

这意味着，若引进三个转动分量，定义为

$$\omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.2.8}$$

那么方程（1.2.1）～（1.2.3）可写成

$$u + \delta u = u + \delta s\{le_{xx} + me_{xy} + ne_{xz} - m\omega_{xy} + n\omega_{zx}\}$$

$$v + \delta v = v + \delta s\{le_{yz} + me_{yy} + ne_{yz} - n\omega_{yz} + l\omega_{xy}\}$$

$$w + \delta w = w + \delta s\{le_{zx} + me_{zy} + ne_{zz} - l\omega_{zx} + m\omega_{yz}\}$$

对于这种应变，可给予物理解释。令$m = 0 = n$，我们看到e_{xx}代表连接P（x，y，z）到Q（$x + l\delta s$，y，z）的线段的长度比变化。其次，考虑图1.2.2中所示与P相邻的两点$Q(x + l\delta s_1$，y，$z)$与$R(x$，$y + m\delta s_2$，$z)$，开始PQ与PR为正交。由于变形，P变成P'（$x + u$，$y + v$，$z + w$），而Q，R分别变成Q'，R'，具有如下坐标

$$(x + u + l\delta s_1(1 + e_{xx}),\ y + v + \delta s_1(e_{yx} + \omega_{xy}),$$

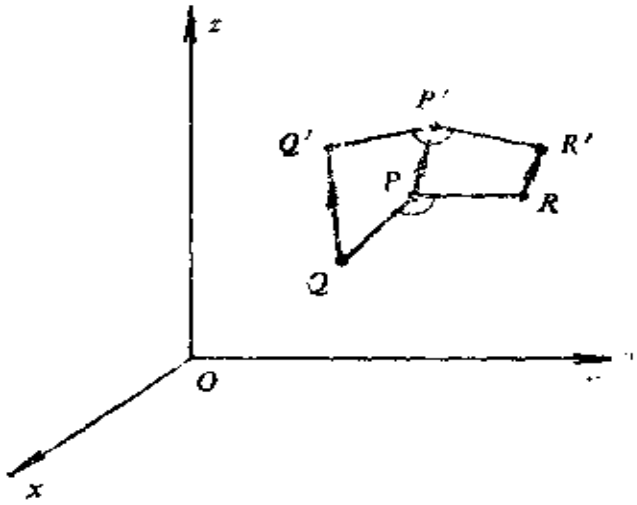


图1.2.2 直角QPR变成$Q'P'R'$

$$z + w + l\delta s_1(e_{xx} - \omega_{zx}))$$

$$(x + u + m\delta s_2(e_{xy} - \omega_{xy}), \quad y + v + m\delta s_2(1 + e_{yy}),$$

$$z + w + n\delta s_2(e_{xy} - \omega_{yz}))$$

$P'Q'$与$P'R'$的夹角$\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$的余弦，在一阶精度内为

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \alpha = 1(e_{xy} - \omega_{xy}) + 1\ (e_{yx} + \omega_{xy}) = 2e_{xy}$$

于是$2e_{xy}$表示初始成直角的两线段PQ，PR的夹角的减小量。

应变分量e_{xx}，e_{xy}，e_{xz}，e_{yx}，e_{yy}，e_{yz}，e_{zx}，e_{zy}，e_{zz}构成二阶张量的9个分量。(见Sokolnikoff，1946或Sneddon与Berry，1958)。这意味着，若ox'，oy'，oz'是第二个笛卡尔标架，它的轴相对于ox，oy，oz具有方向余弦(l_1, m_1, n_1)，(l_2, m_2, n_2)与(l_3, m_3, n_3)，那么利用类似于得出方程(1.2.6)的推理，我们发现在新标架中的正应变与剪应变为$e_{x'x'}$，$e_{y'y'}$，$e_{z'z'}$，$e_{y'z'}$，$e_{z'x'}$，$e_{x'y'}$，其中

$$e_{x'x'} = l_1^2 e_{xx} + m_1^2 e_{yy} + n_1^2 e_{zz} + 2m_1 n_1 e_{yz} + 2n_1 l_1 e_{zx} + 2l_1 m_1 e_{xy} \tag{1.2.9}$$

$$e_{y'x'} = l_2 l_3 e_{xx} + m_2 m_3 e_{yy} + n_2 n_3 e_{zz} + (m_2 n_3 + m_3 n_2) e_{yz} + (n_2 l_3 + n_3 l_2) e_{zx} + (l_2 m_3 + l_3 n_2)\ e_{xy}\text{等} \tag{1.2.10}$$

量

$$\varepsilon = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \operatorname{div} \vec{d} \tag{1.2.11}$$

称为体积应变，有时记为Δ，等于在点P的一个小体积尺寸的比例增长。在坐标变换中，体积应变是一个不变量。由方程(1.2.9)和$e_{y'y'}$、$e_{z'z'}$的相应方程可表示为

$$e_{x'x'} + e_{y'y'} + e_{z'z'} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \tag{1.2.12}$$

1.3 柱坐标与球极坐标中的应变

可以推导一般正交曲线坐标中的应变分量 (Love，1927)。

我们只推导常用坐标中的表达式。

设点P在圆柱坐标中的坐标为(r, θ, z)，如图1.3.1所示。那么

$$\overrightarrow{OP} = r\hat{r} + z\hat{k}$$

相邻点Q $(r+\delta r, \theta+\delta\theta, z+\delta z)$ 的位置矢量为

$$\overrightarrow{OQ} = (r+\delta r)\hat{r} + r\delta\theta\hat{\theta} + (z+\delta z)\hat{k}$$

于是，若长度PQ为δs，则$\overrightarrow{PQ}$相对于方向$\hat{r}$，$\hat{\theta}$，$\hat{k}$的方向余弦为

$$l = \frac{\delta r}{\delta s}, \quad m = \frac{r\delta\theta}{\delta s}, \quad n = \frac{\delta z}{\delta s} \tag{1.3.1}$$

点P，Q将位移至P'，Q'，其中

$$\overrightarrow{OP'} = r\hat{r} + z\hat{k} + u_r\hat{r} + u_\theta\hat{\theta} + u_z\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = (r+\delta r)\hat{r} + r\delta\theta\hat{\theta} + (z+\delta z)\hat{k} + (u_r+\delta u_r)\hat{r} + u_r\delta\theta\hat{\theta} + (u_\theta+\delta u_\theta)\hat{\theta} - u_\theta\delta\theta\hat{r} + (u_z+\delta u_z)\hat{k}$$

于是长度$P'Q'$是$\delta s+\Delta s$，其中

$$(\delta s+\Delta s)^2 = \left\{\delta r\left(1+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + r\delta\theta\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \delta z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right\}^2 + \left\{\delta r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + r\delta\theta\left(1+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}\right) + \delta z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right\}^2$$

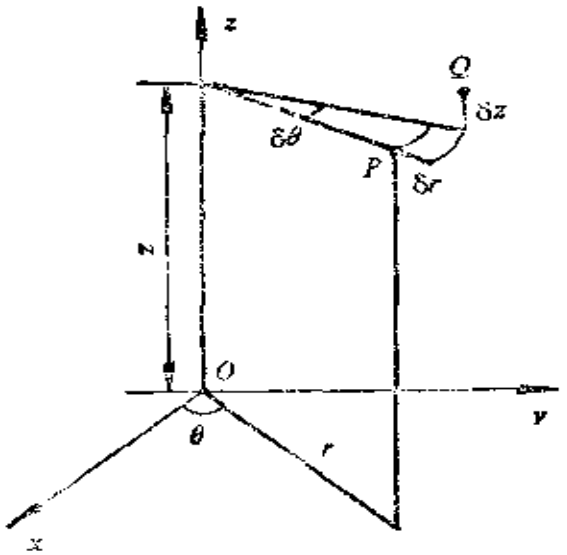


图1.3.1 在圆柱坐标中的相邻点P，Q

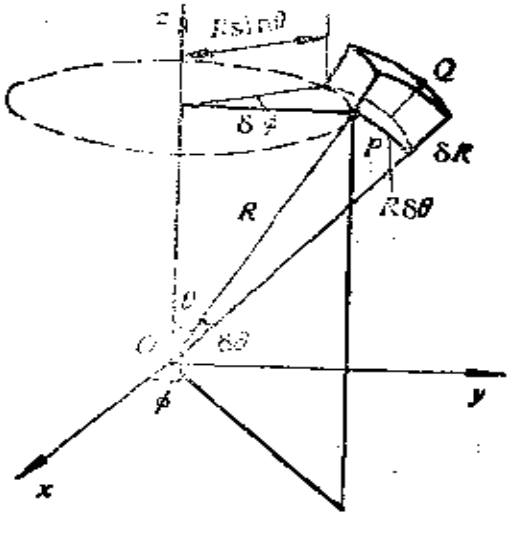


图1.3.2 在球坐标中的相邻点P，Q

$$+\left\{\delta r\frac{\partial u_r}{\partial r}+r\delta\theta\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}+\delta z\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right\}^2$$

利用方程（1.3.1）和略去导数的乘积，我们发现

$$\frac{\Delta s}{\delta s}=l^2e_{rr}+m^2e_{\theta\theta}+n^2e_{zz}+2mne_{\theta z}+2nle_{zr}+2lme_{r\theta} \tag{1.3.2}$$

其中

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\qquad e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\qquad e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{1.3.3}$$

$$e_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right),\qquad e_{zr}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right),$$

$$e_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}\right) \tag{1.3.4}$$

在不致于混淆的情况下，位移u_r，u_θ，u_z有时分别记为u，v，w。转动分量为

$$\omega_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}-\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) \tag{1.3.5}$$

$$\omega_{zr}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{1.3.6}$$

$$\omega_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}-\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}\right) \tag{1.3.7}$$

在图1.3.2所示球极坐标中，连接相邻点 $P(R,\ \theta,\ \phi)$ 与 $Q(R+\delta R,\ \theta+\delta\theta,\ \phi+\delta\phi)$ 的线段相对于点P的坐标方向$\hat{R}$，$\hat{\theta}$，$\hat{\phi}$的方向余弦为

$$l=\frac{\delta R}{\delta s},\qquad m=\frac{R\delta\theta}{\delta s},\qquad n=\frac{R\sin\theta\ \delta\phi}{\delta s} \tag{1.3.8}$$

并且$P'Q'$的比变形是

$$\frac{\Delta s}{\delta s}=l^2e_{RR}+m^2e_{\theta\theta}+n^2e_{\phi\phi}+2mne_{\theta\phi}+2nle_{\phi R}+2lme_{R\theta} \tag{1.3.9}$$

其中

$$e_{RR}=\frac{\partial u_R}{\partial R},\qquad e_{\theta\theta}=\frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_R}{R} \tag{1.3.10}$$

$$e_{\phi\phi}=\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{u_\theta}{R}\cot\theta+\frac{u_R}{R} \tag{1.3.11}$$

$$e_{\theta\phi}=\frac{1}{2R}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial\theta}-u_\phi\cot\theta\right)+\frac{1}{2R\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi} \tag{1.3.12}$$

$$e_{\phi r}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial u_R}{\partial\phi}+\frac{\partial u_\phi}{\partial R}-\frac{u_\phi}{R}\right\} \tag{1.3.13}$$

$$e_{R\theta}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_\theta}{\partial R}-\frac{u_\theta}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial\theta}\right\} \tag{1.3.14}$$

转动分量为

$$\omega_{\theta\phi}=\frac{1}{2R^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}(Ru_\phi\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\phi}(Ru_\theta)\right\} \tag{1.3.15}$$

$$\omega_{\phi R}=-\frac{1}{2R\sin\theta}\left\{\frac{\partial u_R}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial R}(Ru_\phi\sin\theta)\right\} \tag{1.3.16}$$

$$\omega_{R\theta}=\frac{1}{2R}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(Ru_\theta)-\frac{\partial u_R}{\partial\theta}\right\} \tag{1.3.17}$$

例1.3

1. 证明柱坐标与球坐标中的体积应变分别为

$$\varepsilon=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{R^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(R^2u_R\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(Ru_\theta\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\phi}(Ru_\phi)\right\}$$

1.4 应力分析

为了说明连续体中点P的应力状态，我们考虑过P的一个面

元Δs。设$\hat{n}$是面元Δs在点P的单位法线向量。Δs的第二面上的材料施加给第一面上材料的力，可以分解为在点P处的一个力$\vec{\Delta T}$和一个力矩$\vec{\Delta G}$，如图1.4.1所示。我们将假定

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\vec{\Delta T}}{\Delta S}\right)=\vec{T}_n,\qquad \lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\vec{\Delta G}}{\Delta S}\right)=0 \tag{1.4.1}$$

这一假设被认为具有实验的基础，其中$\vec{T}_n$是矢量，叫作点P表面处的面力或应力矢量。一般来说，$\vec{T}_n$并不与法线向量重合，而在每一坐标方向都有分量。记为

$$\vec{T}_n=\tau_{nx}\hat{i}+\tau_{ny}\hat{j}+\tau_{nz}\hat{k} \tag{1.4.2}$$

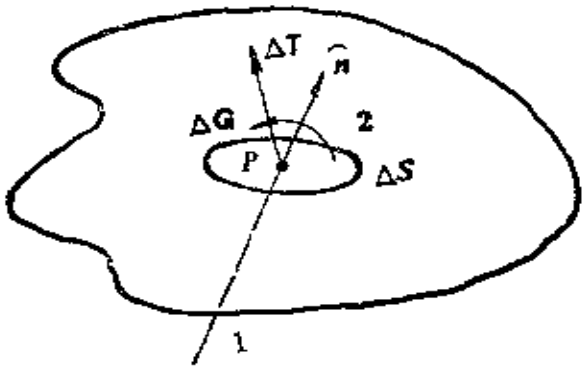


图1.4.1　法线向量$\vec{n}$从区域1指向区域2

作用在连续体的体积元ΔV上的力，可以分解为由作用力引起的表面力（如上述）和体力。体力最通常的一个例子为引力，它对体积元ΔV施以一个向下的力$\rho g\Delta V$，其中ρ为连续体的质量密度。我们将假定，作用在包围点P的小体积元上的体力等价于在P处的力$\vec{\Delta R}$和一个力矩$\vec{\Delta M}$，那么

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\vec{\Delta R}}{\Delta V}=\vec{F},\qquad \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\vec{\Delta M}}{\Delta V}=0 \tag{1.4.3}$$

矢量$\vec{F}$叫作单位体积上的体力。我们将假定力$\vec{F}$是坐标(x,y,z)的连续函数，写成

$$\vec{F}=F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k} \tag{1.4.4}$$

若介质的变形与时间有关，则惯性力$-\rho\frac{\partial^2\vec{d}}{\partial t^2}$可看作是单位体积的体力的一种。

考虑一个微小的直角平行六面体，它以P为中心，三条边分那为$2a$，$2b$，$2c$，这些边都平行于坐标轴．作用在这个体积元上的力对z方向的力矩，由体力的力矩ΔM_z和由图1.4.2所示的那些表面力的力矩所构成．体积元的平衡要求

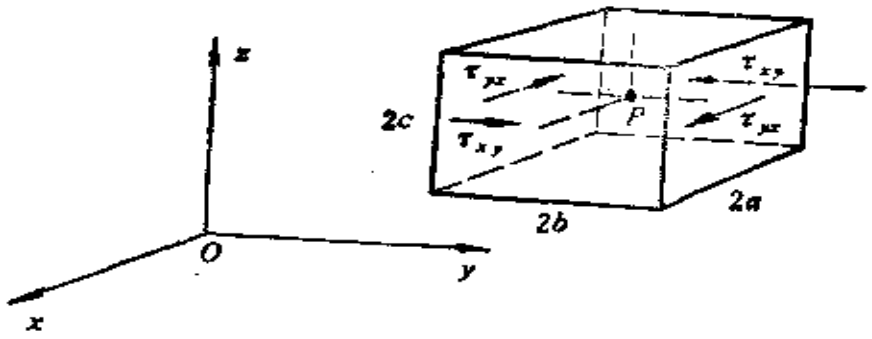


图1.4.2

$$\Delta M_z - b(4ac\tau_{yz}) - (-b)(-4ac\tau_{yx}) + (-a) \times (-4bc\tau_{xy}) + a(4bc\tau_{xy}) = 0$$

但体积元的体积为$\Delta V = 8abc$，所以

$$(\Delta M_z/\Delta V) - \tau_{yx} + \tau_{xy} = 0$$

由假定（1.4.3），当$\Delta V \to 0$时，第一项趋于零，于是有

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

其它剪应力的对称性可以类似地得到，这样

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{1.4.5}$$

现在考虑一个微小的直角四面体元$PABC$，其三个面平行于坐标面，第四个面具有法线$\hat{n}$如图1.4.3所示．考虑一个y方向的力作用在体元上．如果面积ABC是ΔS，高度PN是h，则面积PBC，PCA与PAB将等于$l\Delta S$，$m\Delta S$与$n\Delta S$，并且四面体的体积为$\Delta V = (1/3)h\Delta S$．体元在$y$方向的平衡要求

$$\Delta R_y + \Delta S(\tau_{ny} - l\tau_{xy} - m\tau_{yy} - n\tau_{zy}) = 0 \tag{1.4.6}$$

当h与ΔS很小时，表面应力可近似地用它们在点P的值代替．用ΔS除方程（1.4.6），并且考虑ΔV趋于零时的极限

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta R_y}{\Delta S} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta R_y}{\Delta V} \frac{\Delta V}{\Delta S} = 0$$

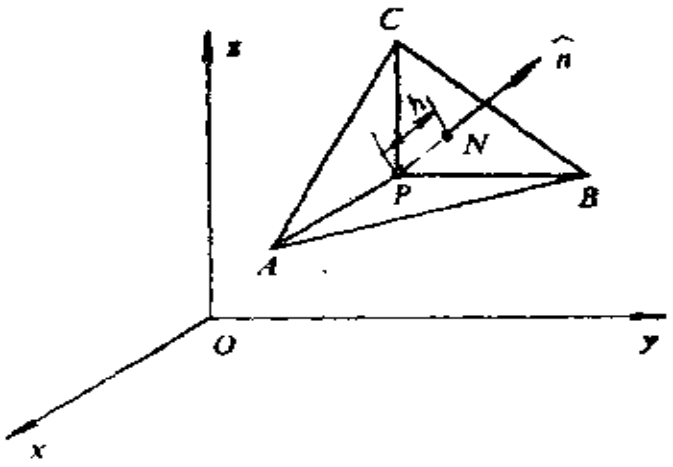


图1.4.3 单位矢量 $\hat{n}$ 是三角形ABC的法线

于是我们可以得到三个方程

$$\left.\begin{aligned}\tau_{nx} &= l\tau_{xx} + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}\\ \tau_{ny} &= l\tau_{xy} + m\tau_{yy} + n\tau_{zy}\\ \tau_{nz} &= l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\tau_{zz}\end{aligned}\right\} \qquad (1.4.7)$$

正应力τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz}有时分别记为σ_x, σ_y, σ_z (Timoshenko与Goodier, 1951) .Love(1927)与Muskhelishvili(1953a)使用X_n表示剪应力τ_{nx}等等. 可以用方程 (1.4.7)证明 9 个分量τ_{xx}, τ_{xy},τ_{xz},τ_{yx},τ_{yy},τ_{yz},τ_{zx},τ_{zy},τ_{zz}象9个应变分量一样，构成一个二阶张量. 的确,方程 (1.4.2) 表示$\vec{T}_n$在$\hat{n}$ 方向上的分量，记为τ_{nn}，即

$$\begin{aligned}\tau_{nn} &= \hat{n}\cdot\vec{T}_n = l\tau_{nx} + m\tau_{ny} + n\tau_{nz}\\ &= l^2\tau_{xx} + m^2\tau_{yy} + n^2\tau_{zz} + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy}\end{aligned} \qquad (1.4.8)$$

现在考虑在一连续体中由表面S所界限的任意体积V的位移（与时间有关的）控制方程. 此连续体在体力与表面力作用下处于动态平衡，即

$$\int_S \vec{T}_n\mathrm{d}S + \int_V \vec{F}\mathrm{d}V = \int_V \rho\frac{\partial^2\vec{d}}{\partial t^2}\mathrm{d}V \qquad (1.4.9)$$

考虑这个方程的x方向的分量，并且应用方程(1.4.2)，$\vec{T}_n$的x分量为

$$\tau_{nx} = l\tau_{xx} + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}$$

于是

$$\tau_{nx}\mathrm{d}S = (\tau_{xx}\hat{i} + \tau_{xy}\hat{j} + \tau_{xz}\hat{k})\cdot\mathrm{d}S\hat{n} = \vec{T}_x\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

这里我们已经使用了剪应力的对称性。现在应用Gauss散度定理

$$\int_S \tau_{nx}\mathrm{d}S = \int_S \vec{T}_x\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\ \vec{T}_x\mathrm{d}V$$

这样，将有

$$\int_V \left\{\mathrm{div}\ \vec{T}_x + F_x - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}\mathrm{d}V = 0 \qquad (1.4.10)$$

因为体积V是任意的，此积分必定在这个连续体中处处等于零。又因为

$$\mathrm{div}\ \vec{T}_x = \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}$$

所以我们得到

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + F_x = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.4.11)$$

同理有

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} + F_y = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (1.4.12)$$

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} + F_z = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.4.13)$$

这三个方程被称为应力平衡方程。

例1.4

1. Ox', Oy', Oz'是笛卡尔标架，它的轴相对于$O(x,y,z)$具有方向余弦(l_1,m_1,n_1), (l_2,m_2,n_2), (l_3,m_3,n_3)。证明

$$\tau_{y'z'} = l_2l_3\tau_{xx} + (l_2m_3 + l_3m_2)\tau_{xy} + (l_2n_3 + l_3n_2)\tau_{xz} + m_2m_3\tau_{yy} + (m_2n_3 + m_3n_2)\tau_{yz} + n_2n_3\tau_{zz}$$

并且求出$\tau_{x'x'}$相应的表达式。

2. 证明 $\tau_{x'x'} + \tau_{y'y'} + \tau_{z'z'} = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}$。这表明$H \equiv \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}$是一个应力不变量。

3. 张量记号给出了弹性理论的简洁的公式表达。感兴趣的读者可以查

阅Prager(1961)的著作。什么是方程(1.4.11)～(1.4.13)的张量形式？

1.5 柱坐标与球极坐标中的应力

为了定义在柱坐标中的应力分量，我们把作用在一个法线矢量为$\vec{r}$的截面上的应力矢量写成

$$\vec{T}_r = \tau_{rr}\,\hat{r} + \tau_{r\theta}\,\hat{\theta} + \tau_{rz}\,\hat{k} \tag{1.5.1}$$

剪应力的对称性（例如$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$等）可以象前面那样证明出来，应力平衡方程是

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} + F_r = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \tag{1.5.2}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + F_\theta = \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \tag{1.5.3}$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} + F_z = \rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{1.5.4}$$

其中单位体积的体力为

$$\vec{F} = F_r\,\hat{r} + F_\theta\,\hat{\theta} + F_z\,\hat{k} \tag{1.5.5}$$

在球极坐标中，有关的方程为

$$\frac{\partial \tau_{RR}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \tau_{R\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R}(2\tau_{RR} - \tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi} + \tau_{R\theta}\cot\theta) + F_R = \rho\frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2} \tag{1.5.6}$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta R}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{R}\left\{(\tau_{\theta\theta} - \tau_{\phi\phi})\cot\theta + 3\tau_{\theta R}\right\} + F_\theta = \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \tag{1.5.7}$$

$$\frac{\partial \tau_{\phi R}}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{\phi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi}$$

$$+\frac{1}{R}(3\tau_{\phi\theta}+2\tau_{\phi\phi}\cot\theta)+F_\phi=\rho\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial t^2} \qquad (1.5.8)$$

Love(1927)使用记号$\widehat{r\theta}$等表示$\tau_{r\theta}$等。

例1.5

1. 利用方程(1.4.7)，(1.4.8)，通过笛卡尔分量表达柱坐标应力分量。证明

$$\tau_{rr}=\cos^2\theta\tau_{xx}+\sin^2\theta\tau_{yy}+2\cos\theta\sin\theta\tau_{xy} \qquad (1.5.9)$$

$$\tau_{\theta\theta}=\sin^2\theta\tau_{xx}+\cos^2\theta\tau_{yy}-2\cos\theta\sin\theta\tau_{xy} \qquad (1.5.10)$$

$$\tau_{r\theta}=\cos\theta\sin\theta(\tau_{yy}-\tau_{xx})+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\tau_{xy} \qquad (1.5.11)$$

$$\tau_{rz}=\cos\theta\tau_{xz}+\sin\theta\tau_{yz},\tau_{\theta z}=-\sin\theta\tau_{xz}+\cos\theta\tau_{yz} \qquad (1.5.12)$$

1.6 应力与应变之间的关系

这一问题在引言中指出的所有弹性理论标准著作中都有很详尽的介绍，这里无须重复。其轮廓如下。

1678年Hooke提出应变正比于应力。这个陈述可以作为理想或线性弹性介质的定义，它隐含着这样一层意思，若应力消失，则应变也变为零。例如，作用在一个小柱元两端的应力τ_{zz}（图1.6.1）产生的应变写为

$$e_{zz}=\frac{\tau_{zz}}{E}$$

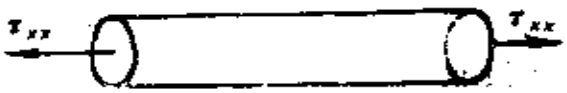


图1.6.1 应力τ_{zz}作用在一柱元的两端

E称为杨氏模量，它是连续体中材料的特性，杨氏模量具有应力的量纲。此外，我们也可发现正应力会产生侧向收缩

$$e_{yy}=-\nu\tau_{zz}/E, \qquad e_{xx}=-\nu\tau_{yy}/E$$

其中ν是一个无量纲的常数，称作泊松(Poisson)比。实验表明，法向应力共同作用产生的应变，可以用沿三个坐标方向的同一类型的三个方程相叠加而得到。因此，对于一个各向同性弹性体，即从连续体中一个给定点P出发的各个方向弹性性质相同的物体，就有

$$e_{xx} = [\tau_{xx} - \nu(\tau_{yy} + \tau_{zz})]/E \qquad (1.6.1)$$

$$e_{yy} = [\tau_{yy} - \nu(\tau_{zz} - \tau_{xx})]/E \qquad (1.6.2)$$

$$e_{zz} = [\tau_{zz} - \nu(\tau_{xx} - \tau_{yy})]/E \qquad (1.6.3)$$

对各向同性的连续体，剪应变正比于剪应力，即

$$e_{yz} = \frac{(1+\nu)}{E}\tau_{yz},\quad e_{zx} = \frac{(1+\nu)}{E}\tau_{zx},\quad e_{xy} = \frac{(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \qquad (1.6.4)$$

除特殊说明之外，本书中的弹性连续体都假定为各向同性的、线性弹性的和均匀的，最后这一性质即指弹性常数与点的坐标无关。

方程（1.6.1）～（1.6.3）可以反过来写作

$$\tau_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left\{\nu\varepsilon + (1-2\nu)\, e_{xx}\right\} \qquad (1.6.5)$$

其中ε是体积应变

$$\varepsilon = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \qquad (1.6.6)$$

方程1.6.5中的系数称为Lamé常数，记为λ，μ，即

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (1.6.7)$$

因而（1.6.5）可写成

$$\tau_{xx} = \lambda\varepsilon + 2\mu e_{xx} \qquad (1.6.8)$$

本书只取两个基本弹性常数：μ为剪切模量（有时记为G）；ν为泊松比。记号λ在这一章中作为Lamé系数，但在本书的其余章节中有些场合令λ代表其它参数。

因为

$$E = 2(1+\nu)\mu,\quad \lambda = 2\mu\nu/(1-2\nu) \qquad (1.6.9)$$

所以应变和应力关系方程的标准形式为

$$e_{xx} = \frac{\tau_{xx} - \nu(\tau_{yy} + \tau_{zz})}{2(1+\nu)\mu},\qquad e_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2\mu} \text{ 等} \qquad (1.6.10)$$

同时，应力和应变方程为

$$\tau_{xx} = 2\mu\,(e_{xx} + \nu e/(1-2\nu)),\quad \tau_{yz} = 2\mu e_{yz},\ \text{等} \qquad (1.6.11)$$

绝大多数专著中都有如下说明，即对一个各向同性介质，应力和应变方程必须具有上面所给出的形式，这种关系对于笛卡尔坐标轴的选择是不变的。于是，若ox'，oy'，oz'是另一个笛卡尔坐标架，则在这个标架中应变和应力关系必须具有如下形式

$$e_{x'x'}=[\tau_{x'x'}-\nu(\tau_{y'y'}+\tau_{z'z'})]/E \qquad (1.6.12)$$

$$e_{y'z'}=(1+\nu)\tau_{y'z'}/E \qquad \text{等}$$

对于一个各向同性体，应力和应变方程在其它正交坐标系中，将同上面给出的形式完全一样。于是对柱坐标系有

$$\tau_{rr}=2\mu\{\nu\varepsilon+(1-2\nu)e_{rr}\}/(1-2\nu)$$

$$\tau_{r\theta}=2\mu e_{r\theta}, \text{ 等} \qquad (1.6.13)$$

其中

$$\varepsilon=e_{rr}+e_{\theta\theta}+e_{zz} \qquad (1.6.14)$$

由弹性常数构成的其它三个缩写记号，在本书中有时也会出现，它们是

$$\vartheta=\frac{1-\nu}{\mu}=\frac{2(1-\nu^2)}{E}, \qquad \varphi=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$$

$$\kappa=3-4\nu \qquad (1.6.15)$$

1.7 应变能与Betti互易定理

应变能的概念是重要的，因为它对证明某些类型的边值问题解的唯一性很有用，而且在以变分原理为基础的数值方法中也很有用。

考虑一个弹性连续体占有区域V，其表面为S，如图1.7.1所示，并且假定开始时，即$t=0$时，它处于自然状态，亦即，它是静止的，其位移等于零，其温度是均匀的。现在假定在表面力



图1.7.1 弹性介质占据区域V，其表面为S

$\vec{T}_n$和体力$\vec{F}$作用下，弹性体有一无限小的位移．这些力所作功的变化率是

$$\frac{dE}{dt}=\int_v \vec{F}\cdot\dot{\vec{d}}\,dV+\int_s \vec{T}_n\cdot\dot{\vec{d}}\,dS \qquad (1.7.1)$$

其中$\dot{\vec{d}}=\frac{\partial\vec{d}}{\partial t}$．第二个积分可用高斯定理化成体积分

$$\vec{T}_n\cdot\dot{\vec{d}}=\tau_{nx}\dot{u}+\tau_{ny}\dot{v}+\tau_{nz}\dot{w}$$

$$\tau_{nx}\cdot\dot{u}=(l\tau_{xx}+m\tau_{yx}+n\tau_{zx})\dot{u}=\vec{T}_x\dot{u}\cdot\hat{n}$$

这样

$$\int_s \vec{T}_n\cdot\dot{\vec{d}}\,dS=\int_s(\vec{T}_x\dot{u}+\vec{T}_y\dot{v}+\vec{T}_z\dot{w})\cdot d\vec{S}$$

$$=\int_v \mathrm{div}\,(\vec{T}_x\dot{u}+\vec{T}_y\dot{v}+\vec{T}_z\dot{w})\,dV$$

并且

$$\mathrm{div}(\vec{T}_x\dot{u}+\vec{T}_y\dot{v}+\vec{T}_z\dot{w})=\dot{u}\,\mathrm{div}\,\vec{T}_x+\dot{v}\,\mathrm{div}\,\vec{T}_y+\dot{w}\,\mathrm{div}\,\vec{T}_z$$
$$+\vec{T}_x\cdot\nabla\dot{u}+\vec{T}_y\cdot\nabla\dot{v}+\vec{T}_z\cdot\nabla\dot{w} \qquad (1.7.2)$$

其中$\nabla=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$．

若将含有算子∇的三项中的第一项写成

$$\vec{T}_x\cdot\nabla\dot{u}=\tau_{xx}\frac{\partial\dot{u}}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial\dot{u}}{\partial y}+\tau_{xz}\frac{\partial\dot{u}}{\partial z}$$

并且使用在§1.2中推导应变和转动表达式的方法，则有

$$\vec{T}_x\cdot\nabla\dot{u}=\tau_{xx}\dot{e}_{xx}+\tau_{xy}(\dot{e}_{xy}-\dot{w}_{xy})+\tau_{xz}(\dot{e}_{xz}-\dot{w}_{xz})$$

由于转动分量是反对称的，而应变分量是对称的，加起来之后，得到

$$A\equiv\vec{T}_x\nabla\dot{u}+\vec{T}_y\nabla\dot{v}+\vec{T}_z\nabla\dot{w}$$

$$=\tau_{xx}\dot{e}_{xx}+\tau_{yy}\dot{e}_{yy}+\tau_{zz}\dot{e}_{zz}+2\tau_{yz}\dot{e}_{yz}+2\tau_{xz}\dot{e}_{xz}+2\tau_{xy}\dot{e}_{xy}$$

对于一个线性各向同性弹性体，应力由方程（1.6.1）～(1.6.4)给出，于是

$$A \equiv \lambda e\ (\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy} + \dot{e}_{zz}) + 2\mu(e_{xx}\dot{e}_{xx} + e_{yy}\dot{e}_{yy} + e_{zz}\dot{e}_{zz} + 2e_{yz}\dot{e}_{yz} + 2e_{zx}\dot{e}_{zx} + 2e_{xy}\dot{e}_{xy})$$

这是由下式定义的函数W的时间导数

$$2W = \lambda e^2 + 2\mu(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2 + 2e_{yz}^2 + 2e_{zx}^2 + 2e_{xy}^2) \tag{1.7.3}$$

W称为应变能密度函数. 不论应变为正为负，此函数必须总是正的，这意味着$\lambda > 0$，$\mu > 0$；这些不等式意味着泊松比ν满足$0 < \nu < 1/2$. 回到方程（1.7.1），并且使用方程（1.7.2)与(1.7.3)的结果，有

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left[(\dot{u}\,\mathrm{div}\,\vec{T}_x + F_x) + \dot{v}\,(\mathrm{div}\vec{T}_y + F_y) + \dot{w}(\mathrm{div}\vec{T}_z + F_z) + \frac{\partial W}{\partial t} \right] dV$$

但表面力与体力满足方程（1.4.11）～（1.4.13)，所以

$$\mathrm{div}\,\vec{T}_x + F_x = -\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = \rho\ddot{u}$$

这样

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left\{ \rho\,(\dot{u}\ddot{u} + \dot{v}\ddot{v} + \dot{w}\ddot{w}) + \frac{\partial W}{\partial t} \right\} dV$$

$$= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} \tag{1.7.4}$$

其中

$$T = \frac{1}{2}\int \rho(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\,dV \tag{1.7.5}$$

是物体的动能，而

$$U = \int_V W\,dV \tag{1.7.6}$$

是物体的应变能. 对方程（1.7.4）从$t = 0$到$t = t$积分，并且注意自然状态下的T与U都等于零，得到

$$E = T + U \tag{1.7.7}$$

这个方程说明，外力与体力所作的功等于物体的动能T与应变能U之和.

Betti互等定理（Betti，1872）涉及弹性体的两个状态，此弹性体具有体积V、为表面S所界.第一个状态对应于弹性位移u，v，w，在体力F_x，F_y，F_z和面力$\vec{T}_n$作用下.第二个状态对应于处在带星号的量u^*，v^*，w^*，F_x^*，F_y^*，F_z^*和$\vec{T}_n^*$作用下.这个定理是说，第一个状态的体力、惯性力和面力在第二个状态的位移上所作的功，等于第二个状态的上述力在第一个状态的位移上所作的功.用符号表示，为

$$\int_V\left(\vec{F}-\rho\frac{\partial^2\vec{d}}{\partial t^2}\right)\cdot\vec{d}^*\mathrm{d}V+\int_S\vec{T}_n\cdot\vec{d}^*\mathrm{d}S$$

$$=\int_V\left(\vec{F}^*-\rho\frac{\partial^2\vec{d}^*}{\partial t^2}\right)\cdot\vec{d}\,\mathrm{d}V+\int_S\vec{T}_n^*\cdot\vec{d}\,\mathrm{d}S \qquad (1.7.8)$$

运用推导方程（1.7.2）时的推理，可以表示为

$$\int_S\vec{T}_n\cdot\vec{d}^*\,\mathrm{d}S=\int_V\mathrm{div}(\vec{T}_xu^*+\vec{T}_yv^*+T_zw^*)\mathrm{d}V$$

这样，在方程（1.7.8）左边与u^*有关的项为

$$\int_V\left\{\left(-\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)u^*+\mathrm{div}(\vec{T}_nu^*)\right\}\mathrm{d}V$$

$$=\int_V\left\{\tau_{xx}\frac{\partial u^*}{\partial x}+\tau_{xy}\frac{\partial u^*}{\partial y}+\tau_{xz}\frac{\partial u^*}{\partial z}\right\}\mathrm{d}V$$

把u^*，v^*，w^*所对应的项合并，我们发现（1.7.8）式左边为

$$\int_V\left\{\tau_{xx}e_x^*+\tau_{yy}e_y^*+\tau_{zz}e_z^*+2\tau_{yz}e_{yz}^*+2\tau_{zx}e_{zx}^*\right.$$

$$\left.+2\tau_{xy}e_{xy}^*\right\}\mathrm{d}V$$

容易验证，花括号中的表达式，对于带星号与不带星号的量是对称的，因此等于方程（1.7.8）的右边.

例1.7

1. 验证得出（1.7.1）～（1.7.4）时的那些分析.

2. 一个各向同性弹性介质，应变能密度在坐标变换中是不变量。证明式(1.7.3)中括号里的量就是这样一个不变量。可以证明，这个量与e^2是应变仅有的两个独立二次不变量。

3. 通过验证"正文中简单陈述所作结论"的细节，去建立方程(1.7.8)。

1.8 各向异性介质

对于各向异性介质，使用张量分析是适宜的。我们重申（见§1.2与§1.4），应变分量e_{xx}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yx}, e_{yy}, e_{yz}, e_{zx}, e_{zy}, e_{zz}和对应的应力分量τ_{xx}, τ_{xy}, ···, τ_{zz}构成二阶张量。因此，用e_{ij}, τ_{ij}记这些分量是方便的，其中i, $j=1$, 2, 3。这些量最一般的线性关系为

$$\tau_{ij}=c_{ijkl}e_{kl} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{1.8.1}$$

这里使用了爱因斯坦求和约定，即重复下标（这里k, l两者有重复下标）意味着对所有这些值求和；这里是对1, 2, 3。于是方程（1.8.1）为

$$\tau_{ij}=c_{ij11}e_{11}+c_{ij12}e_{12}+\cdots+c_{ij33}e_{33}$$

的一个缩写。这81个c_{ijkl}定义为介质的弹性系数。我们将假定介质为均匀的，那么这些量将为常数。由于应力分量与应变分量是对称的，亦即

$$\tau_{ij}\equiv\tau_{ji}, \qquad e_{ij}\equiv e_{ji} \tag{1.8.2}$$

c_{ijkl}满足

$$c_{ijkl}=c_{jikl}, \qquad c_{ijkl}=c_{ijlk} \tag{1.8.3}$$

这样81个常数就减少为36个，并且建议用下列记号

$$\left.\begin{aligned}
&e_{11}=e_1, \quad e_{22}=e_2, \quad e_{33}=e_3\\
&e_{23}=e_{32}=\frac{1}{2}e_4, \quad e_{31}=e_{13}=\frac{1}{2}e_5, \quad e_{12}=e_{21}=\frac{1}{2}e_6\\
&\tau_{11}=\tau_1, \quad \tau_{22}=\tau_2, \quad \tau_{33}=\tau_3\\
&\tau_{23}=\tau_{32}=\tau_4, \quad \tau_{31}=\tau_{13}=\tau_5, \quad \tau_{12}=\tau_{21}=\tau_6
\end{aligned}\right\} \tag{1.8.4}$$

因子1/2的引入是因为$c_{ij12}e_{12}+c_{ij21}e_{21}$这些项可以缩写成$c_{ij12}e_6$等。现在我们引进一个二位下标常数组$c_{ij}$并且将应力-应变关系写为

$$\tau_i = c_{ij}e_j \qquad (i=1,\ 6) \tag{1.8.5}$$

重复下标表示对j从1到6求和。

可以证明（见Love，1927，§65），对于等温过程，36个常数c_{ij}是对称的，即$c_{ij}=c_{ji}$，因而仅有21个不相同的常数。在这种情形下，存在一个应变能密度函数W，并且

$$\tau_i = \frac{\partial W}{\partial e_i} \tag{1.8.6}$$

以及

$$W = \frac{1}{2}c_{ij}e_ie_j \tag{1.8.7}$$

可以证明方程（1.7.7）即

$$E = T + U \tag{1.8.8}$$

对各向异性弹性体也成立。这是例1.8.1中的题目。

一般关系式（1.8.5）可以简化成具有对称性质的介质的特殊情形。例如，介质的性质对称于平面$z=0$，变换

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z \tag{1.8.9}$$

应该使方程（1.8.5）不变。但这个变换使得除掉

$$e_4' = -e_4, \quad e_5' = -e_5, \quad \tau_4' = -\tau_4, \quad \tau_5' = -\tau_5$$

而外其余的应力与应变保持不变。对于原来的与新的坐标系中的方程$\tau = \tau_1'$，有

$$\tau_1 = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + c_{13}e_3 + c_{14}e_4 + c_{15}e_5 + c_{16}e_6$$

$$\tau_1' = c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + c_{13}e_3 - c_{14}e_4 - c_{15}e_5 + c_{16}e_6$$

若这两个应力相等，则有

$$c_{14} = 0 = c_{15}$$

类似地有

$$c_{24}=0=c_{25}=c_{34}=c_{35}=c_{45}=c_{56}$$

所以21个常数中仅有13个是不相同的。

一个正交各向同性介质是一个弹性性质关于三个互相垂直面对称的介质。例如木材就是这种介质的一个例子，它具有9个弹性常数。各种晶体对称性的分类——它们对于压电与磁致伸缩材料的分析，很有意义——可以在Love（1927，§107～§114）的书中查到。用各种例子对各向异性所作的讨论，出现在Hearmon（1961），Lekhnitskii（1963）与Milne-Thomson（1960）的著作中。

例1.8

1．证明方程（1.7.7）对于具有应变能密度公式（1.8.6），（1.8.7）的弹性体是成立的。

2．设(x',y',z')是(x,y,z)围绕z轴旋转了一个角度θ而得到的坐标轴；e_i,τ_i $(i=1,2,\cdots,6)$和e_i',τ_i' $(i=1,2,\cdots,6)$分别是不带撇与带撇的坐标中的应变与应力。用方程（1．2．8），（1．2．9），（1．4．8）等表示τ_i'为τ_j的函数，e_j'为e_j的函数，以此用方程式表明新坐标中的常数c_{ij}'与旧坐标中的那些常数具有关系：

$$\begin{aligned}
c_{11}' &= c_{11}\cos^4\theta + 2c_{12}\cos^2\theta\sin^2\theta + c_{22}\sin^4\theta + 4c_{16}\cos^3\theta\sin\theta \\
&\quad + 4c_{26}\cos\theta\sin^3\theta + 4c_{66}\cos^2\theta\sin^2\theta \\
c_{12}' &= c_{11}\cos^2\theta\sin^2\theta + c_{12}(\cos^4\theta+\sin^4\theta) - 2(c_{16}-c_{26})\cos\theta\sin\theta \\
&\quad \times(\cos^2\theta-\sin^2\theta) - 4c_{66}\cos^2\theta\sin^2\theta \\
c_{13}' &= c_{13}\cos^2\theta + c_{23}\sin^2\theta + 2c_{63}\cos\theta\sin\theta \\
c_{14}' &= \cos\theta(c_{14}\cos^2\theta + c_{24}\sin^2\theta + 2c_{64}\cos\theta\sin\theta) - \sin\theta(c_{15}\cos^2\theta + c_{25}\sin^2\theta \\
&\quad + 2c_{65}\cos\theta\sin\theta) \\
c_{15}' &= \cos\theta(c_{15}\cos^2\theta + c_{25}\sin^2\theta + 2c_{65}\cos\theta\sin\theta) + \sin\theta(c_{14}\cos^2\theta + c_{24}\sin^2\theta \\
&\quad + 2c_{64}\cos\theta\sin\theta) \\
c_{16}' &= -c_{11}\cos^3\theta\sin\theta + c_{22}\cos\theta\sin^3\theta + c_{12}\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\
&\quad + c_{16}\cos^2\theta(\cos^2\theta-3\sin^2\theta) + c_{26}\sin^2\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\
&\quad + 2c_{66}\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)，\text{等等。}
\end{aligned}$$

3．利用例1.8.2的结果来表明，若介质关于z轴对称，则弹性常数满足

$$c_{14}=0=c_{15}=c_{16}=c_{24}=c_{26}=c_{28}=c_{34}=c_{35}=c_{36},\quad c_{56}=0=c_{64}=c_{45},$$

$$c_{11}=c_{22},\qquad c_{13}=c_{23},\qquad c_{55}=c_{44},\qquad c_{66}=\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12}),$$

于是仅有5个独立的常数c_{11}，c_{12}，c_{13}，c_{33}，c_{44}。这样的介质称为横观各向同性。

4. 证明，若一物体具有关于每一个平面$x=0$，$y=0$对称，那么它有9个弹性常数，并且关于平面$z=0$对称。这种物体被称为正交各向同性。

5. 证明，若一介质具有三条互相成正交的对称轴，则此介质为各向同性。

1.9 弹性问题解的唯一性

线性弹性各向同性体的静态变形的基本控制方程是方程(1.2.4)，(1.2.5)，以联系应变与位移；而方程(1.4.11)～(1.4.13)表示面力与体力的平衡(现在令$\vec{d}=0$)；再加上方程(1.6.6)，(1.6.7)，用来联系应力与应变。当把它们集合起来时，这个完全的方程组是

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.9.1}$$

$$e_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\qquad e_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{1.9.2}$$

$$\tau_{xx}=\lambda\varepsilon+2\mu e_{xx},\quad \tau_{yy}=\lambda\varepsilon+2\mu e_{yy},\quad \tau_{zz}=\lambda\varepsilon+2\mu e_{zz} \tag{1.9.3}$$

$$\tau_{yz}=2\mu e_{yz},\qquad \tau_{zx}=2\mu e_{zx},\qquad \tau_{xy}=2\mu e_{xy} \tag{1.9.4}$$

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0 \tag{1.9.5}$$

$$\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+F_y=0 \tag{1.9.6}$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+F_x=0 \qquad (1.9.7)$$

为了证明在某些条件下这些方程只有唯一的解，我们需要Clapeyron定理，即：若一弹性体在体力$\vec{F}$与面力$\vec{T}_n$作用下处于平衡，那么变形的应变能等于外力（在平衡态）在处于平衡的终态位移上做功的一半。

这个定理可以表示成

$$\int_V \rho\ \vec{F}\cdot\vec{d}\,\mathrm{d}V+\int_S \vec{T}_n\cdot\vec{d}\,\mathrm{d}S=2\int_V W\mathrm{d}V \qquad (1.9.8)$$

并且可以用上节所作变换面积分的那种办法来证明，这样

$$\int_S \vec{T}_n\cdot\vec{d}\ \mathrm{d}S=\int_S(\tau_{nx}u+\tau_{ny}v+\tau_{nz}w)\mathrm{d}S$$

$$\int_S \tau_{nx}u\mathrm{d}S=\int_S(l\tau_{xx}+m\tau_{yx}+n\tau_{zx})\,u\mathrm{d}S=\int_S-\vec{T}_x u\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\int_V \mathrm{div}(\vec{T}_x u)\mathrm{d}V=\int_V(u\,\mathrm{div}\,\vec{T}_x+\vec{T}_x\cdot\nabla u)\mathrm{d}V$$

若使用平衡方程（1.8.5）～（1.8.7），我们发现方程(1.9.8)的左边可以写成

$$\int_V\left(\vec{T}_x\cdot\nabla u+\vec{T}_y\cdot\nabla v+\vec{T}_z\cdot\nabla w\right)\mathrm{d}V$$

于是，同前面那样，被积函数可以变换成$2W$.

遵循Muskhelishvili(1953a)，我们现在定义弹性体静态变形的三种基本的边值问题。考虑一个弹性体占有表面S所界限的区域V，并且假定体力$\vec{F}$是在V中处处给定的（x，y，z）的函数。

第Ⅰ基本问题，或应力边值问题。是求在表面S上给定的面力$\vec{T}_n$作用下，物体弹性平衡状态。

第Ⅱ基本问题，或者位移边值问题。是求在表面S上给定位

移d作用下，物体的弹性平衡状态。

基本混合问题，是求在表面S的一部分S_1上给定面力而且另一部分S_2上给定位移$\vec{d}$的作用下，物体的弹性平衡状态。

下面唯一性的证明，从根本上讲，来自1859年 Kirchhoff 的工作（见Love，1927）。假定某一问题，它可以是第Ⅰ、第Ⅱ或混合问题，具有两个解，分别用带一撇与带两撇的记号标志。一个解，由u'，v'，w'，e_{xx}'，…，τ_{xx}'…，τ_{xy}'给出，满足方程（1.9.1）～（1.9.7），另一个解u''，v''，w''，e_{xx}''，…，τ_{xx}''，…，τ_{xy}''满足同样的方程，而对应的体力同样为F_x，F_y，F_z。用不带撇的量记这两个解的差，由于方程是线性的，我们有$u=u'-u''$，…，$e_{xx}=e_{xx}'-e_{xx}''$，等等，所以u，v，w，e_{xx}，…，τ_{xx}，…，τ_{xy}将满足具有零体力的方程(1.9.1)～(1.9.7)，换句话说，不带撇的解将对应于零体力物体的弹性平衡状态。现在对不带撇的状态应用Clapeyron定理，因为$\vec{F}\equiv 0$，我们得到

$$\int_s \vec{T}_n\cdot\vec{d}\,\mathrm{d}S=2\int_V W\,\mathrm{d}V$$

考虑第Ⅰ基本问题，表面应力$\vec{T}_n$在整个S上处处是给定的，这样它们对带一撇与带两撇的解具有相同的值；因此对不带撇的解，在S上，$\vec{T}_n=0$，有

$$\int_V W\,\mathrm{d}V=0 \qquad (1.9.9)$$

但W是一个正的量，这样方程（1.9.9）意味着$W\equiv 0$对V处处成立。应变能密度W是应变的正定二次型，只有当每一个应变都等于零，W才等于零。因此对不带撇的解

$$e_{xx}=0=e_{yy}=e_{zz}=e_{yz}=e_{zx}=e_{xy} \qquad (1.9.10)$$

这意味着带一撇状态的应变与带两撇状态的应变是恒等的。因此，相关的应力也是恒等的，亦即，应变与应力被唯一地确定。方程（1.9.10）也意味着位移u'，v'，w'与u''，v''，w''仅仅差一个刚体平移与转动。

对于第Ⅱ基本问题，方程（1.9.8）左端的积分又等于零，这次是因为不带撇的状态的位移矢量在S上等于零。再者，W必须恒等于零，因而应变与应力被唯一地确定。此外，现在因为$\vec{d}$在S上确定了的，位移状态也将被唯一地确定，亦即这里不可能出现不确定的刚体位移。

在混合问题中，S上面的积分可以分成两部分：

$$\int_S \vec{T}_* \cdot \vec{d}\,\mathrm{d}S = \int_{S_1} \vec{T}_* \cdot \vec{d}\,\mathrm{d}S + \int_{S_2} \vec{T}_* \cdot \vec{d}\,\mathrm{d}S$$

在第一部分$\vec{T}_* = 0$，在第二部分$\vec{d} = 0$。再次证明应力、应变与位移将被唯一地确定。

这些唯一性定理在对时间有关的状态中的某些推广和普遍化，可以在Gurtin（1972，p.102f）的著作中查到。

1.10 位移方程的解

平衡方程（1.4.11）～（1.4.13），可以通过应力和应变关系方程（1.6.6）～（1.6.7）和应变表达式（1.2.4）～(1.2.5)，直接以位移表示出来。因而

$$\vec{T}_* = \tau_{x*}\,\hat{\mathrm{i}} + \tau_{y*}\,\hat{\mathrm{j}} + \tau_{z*}\,\hat{\mathrm{k}} = \lambda\varepsilon\,\hat{\mathrm{i}} + 2\mu(e_{x*}\,\hat{\mathrm{i}} + e_{xy}\,\hat{\mathrm{j}} + e_{xz}\,\hat{\mathrm{k}})$$

其中 $\varepsilon = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \mathrm{div}\,\vec{d}$，并且

$$e_{x*}\,\hat{\mathrm{i}} + e_{xy}\,\hat{\mathrm{j}} + e_{xz}\,\hat{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathrm{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathrm{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)u + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\,\hat{\mathrm{i}} + v\,\hat{\mathrm{j}} + w\,\hat{\mathrm{k}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\nabla u + \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{d}}{\partial x}$$

于是，第一个平衡方程可以写成

$$\text{div}\ \vec{T}_x + F_x = \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + F_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

或

$$(\lambda + \mu)\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + F_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

并且，因为方程（1.6.7）表明$(\lambda + \mu)/\mu = 1/(1 - 2\nu)$，我们得到的是下列方程的第一部分

$$\nabla^2 \vec{d} + \frac{\nabla \varepsilon}{(1 - 2\nu)} + \frac{\vec{F}}{\mu} = \frac{\rho}{\mu}\ \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} \qquad (1.10.1)$$

这是控制弹性位移的Navier方程。

这个方程的静力情形有许多种完全解，其中最重要的是Rapkovich（Папкович，1932a，1932b）和Neuber（1934）解；其思想来自Boussinesq（1885），而为Todhunter与Pearson（1895）所阐述。

在静态情形中，方程（1.10.1）可写成

$$2\mu \nabla^2\ \vec{d}\ = -2\vec{F} - \frac{2\mu \nabla \varepsilon}{1 - 2\nu} \qquad (1.10.2)$$

这展示出$\nabla^2 \vec{d}$作为两个场$\vec{F}$与$\nabla \varepsilon$的联合。因而自然地寻求相同形式的$\vec{d}$，亦即

$$2\mu \nabla^2\ \vec{d}\ = 4\ (1 - \nu)\ \vec{\psi}\ - \nabla \chi \qquad (1.10.3)$$

这里$\vec{\psi}$ (x, y, z)与χ (x, y, z)分别为矢量与标量场。代入（1.10.2），得出

$$4(1 - \nu)\ \nabla^2\ \vec{\psi}\ - \nabla^2 \nabla \chi = -2\vec{F} - 2\mu \nabla \varepsilon/(1 - 2\nu) \qquad (1.10.4)$$

选择$\vec{\psi}$，使得

$$2\ (1 - \nu)\ \nabla^2\ \vec{\psi}\ = -\vec{F} \qquad (1.10.5)$$

那么，χ必须满足

$$\nabla^2 \chi = 2\mu \varepsilon/\ (1 - 2\nu) \qquad (1.10.6)$$

方程（1.10.3）给出

$$2\mu \varepsilon = 2\mu \text{div}\ \vec{d} = 4\ (1 - \nu)\ \text{div}\ \vec{\psi}\ - \nabla^2 \chi \qquad (1.10.7)$$

根据恒等式$\nabla^2(\vec{r}\cdot\vec{\psi}) = \vec{r}\cdot\nabla^2\vec{\psi} + 2\mathrm{div}\,\vec{\psi}$，并考虑到式(1.10.5)，得到

$$2\mu\varepsilon = 2(1-\nu)[\nabla^2(\vec{r}\cdot\vec{\psi}) - \vec{r}\cdot\nabla^2\vec{\psi}] - \nabla^2\chi$$
$$= 2(1-\nu)\nabla^2(\vec{r}\cdot\vec{\psi}) + \vec{r}\cdot\vec{F} - \nabla^2\chi \qquad (1.10.8)$$

把它代入(1.10.6)后，给出

$$2(1-\nu)\nabla^2[\chi - (\vec{r}\cdot\vec{\psi})] = (\vec{r}\cdot\vec{F}) \qquad (1.10.9)$$

若$\phi(x, y, z)$满足

$$2(1-\nu)\nabla^2\phi = (\vec{r}\cdot\vec{F}) \qquad (1.10.10)$$

那么$\chi = (\vec{r}\cdot\vec{\psi}) + \phi$，并且

$$2\mu\vec{d} = 4(1-\nu)\vec{\psi} - \nabla\left\{(\vec{r}\cdot\vec{\psi}) + \phi\right\} \qquad (1.10.11)$$

这是Papkovich-Neuber解(Papkovich, 1932a, 1932b; Neuber, 1934)。对应于给定的$\vec{F}$，位势$\vec{\psi}$，ϕ是不唯一的。事实上，容易验证(例子1.10.4)，若一个场$\vec{d}$用$\vec{\psi}$，ϕ表示，那么$\vec{\psi}$，ϕ^*将给出同一式子，如果

$$\vec{\psi}^* = \vec{\psi} + \nabla\xi,\ \phi^* = \phi + 4(1-\nu)\xi - \vec{r}\cdot\nabla\xi,\ \nabla^2\xi = 0 \qquad (1.10.12)$$

这意味着，特别地，总可能(虽然并不总希望)选择$\vec{\psi}$的一个分量为零，这一结果是Eubanks和Sternberg (1956)得到的。关于Papkovich-Neuber解的完全性的一个证明，以及其他位移解的详细情况，请参考 Gurtin (1972, p.138ff)；关于其他位移解的进一步补充和参考资料，可读 Mindlin (1936) 的书，Lur'e (Лурье, 1964) 的书，特别是这后一本书的第一章的附录，还有 Stippes (1971)，Golecki (1976)，和 Benthem (1979) 的著作。

当无体力时，$\vec{F} = 0$，而$\vec{\psi}$，ϕ满足

$$\nabla^2\vec{\psi} = 0, \qquad \nabla^2\phi = 0 \qquad (1.10.13)$$

若$\vec{F}$是一个保守场，它可以写成

$$\vec{F} = -\nabla V \qquad (1.10.14)$$

其中V是一个位势．若能将V写成$2V=\operatorname{div}\vec{W}$，那么$2\vec{F}=-\nabla\operatorname{div}\vec{W}$．方程（1.10.2）的通解可以表示成两部分的和：$\vec{F}\equiv 0$时方程（1.10.2）的通解，它由（1.10.11）给出，其中$\vec{\psi}$，ϕ为调和函数；和方程（1.10.2）的一个解．为寻求这样一个解，当$\vec{F}$是保守力时，选择$\vec{d}$使得$\operatorname{curl}\vec{d}=0$；那么$\nabla^2\vec{d}\equiv\nabla\operatorname{div}\vec{d}-\operatorname{curl}\times\operatorname{curl}\vec{d}=\nabla\operatorname{div}\vec{d}$，并且方程（1.10.2）可写成

$$\nabla\operatorname{div}\left\{2\mu\vec{d}+\frac{2\mu\vec{d}}{1-2\nu}-\vec{W}\right\}=0 \tag{1.10.15}$$

它具有解

$$2\mu\vec{d}_0=\varphi\vec{W} \tag{1.10.16}$$

因此这将是（1.10.2）的一个解，并且有

$$\operatorname{curl}\vec{W}=0 \tag{1.10.17}$$

我们的结论是，一般解为

$$2\mu\vec{d}=2(1-\nu)\vec{\psi}-\nabla\left\{(\vec{r}\cdot\vec{\psi})+\phi\right\}+\varphi\vec{W} \tag{1.10.18}$$

其中

$$\nabla^2\vec{\psi}=0=\nabla^2\varphi,\qquad \operatorname{curl}\vec{W}=0,\qquad 2\vec{F}=-\nabla\operatorname{div}\vec{W} \tag{1.10.19}$$

例1.10

1．若$\vec{\omega}=(\omega_{yz},\omega_{zx},\omega_{xy})$〔见（1.2.8）〕试表明方程（1.10.1）可以写成

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\nabla\varepsilon-2\operatorname{curl}\vec{\omega}+\frac{\vec{F}}{\mu}=\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\vec{d}}{\partial t^2} \tag{1.10.20}$$

2．当位移和体力都与坐标θ无关时，写出（1.10.4）在柱坐标中的特殊式子．

3．试表明，若$\vec{\psi}$是一个任意的调和函数，那么

$$\vec{d}=\partial\vec{\psi}/\partial x-x/(3-4\nu)\nabla\operatorname{div}\vec{\psi}$$

是方程(1.10.1)在无体力时的一个静力学解．

4．试表明，若$\vec{\psi}$，ϕ，$\vec{\psi}^*$，ϕ^*由(1.10.12)相联系，则由(1.10.11)

给出的场$\vec{d}$与$\vec{d^*}$是恒等的。

1.11 平面应变与平面应力

求解三维弹性方程，是很困难的。在很多问题中，某些弹性量沿一个坐标方向的变化是可以忽略的，因而能够把问题近似为二维问题。这样的问题有三个重要的种类，称为平面应变、平面应力与广义平面应力。

平面应变是假定位移w等于零，并且位移u，v与z无关，所以有

$$e_{zz} = 0 = e_{yz} = e_{zx}$$

在平面应变中，垂直于z轴的物体的平截面，保持为平面，并且垂直于这条轴线。一个圆柱体的母线平行z轴，所受的$x-y$平面内的体力与表面力同z无关，这个圆柱体将处于平面应变状态。注意，虽然

$$\tau_{xz} = 0 = \tau_{yz}$$

法向应力τ_{zz}不等于零，而是

$$\tau_{zz} = \lambda(e_{xx} + e_{yy}) = \lambda(e_{xx} + e_{yy}) = \lambda e \qquad (1.11.1)$$

为了保持平面应变，上述圆柱体的端面必须受（1.11.1）表示的面力所约束。其余的应力为

$$\left.\begin{aligned}(1-2\nu)\tau_{xx} &= 2\mu[(1-\nu)e_{xx} + \nu e_{yy}]\\ (1-2\nu)\tau_{yy} &= 2\mu[(1-\nu)e_{yy} + \nu e_{xx}]\\ \tau_{xy} &= 2\mu e_{xy}\end{aligned}\right\} \qquad (1.11.2)$$

现在只有两个平衡方程，即

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1.11.3)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + F_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (1.11.4)$$

因为第三个平衡方程自动地得到了满足。

静力平面应变方程具有二维的 Papkovich-Neuber 解（1.10.18），即

$$2\mu u = 4(1-\nu)\psi_1 - \frac{\partial}{\partial x}\{x\psi_1 + y\psi_2 + \phi\} + \varphi W_1 \quad (1.11.5)$$

$$2\mu v = 4(1-\nu)\psi_2 - \frac{\partial}{\partial y}\{x\psi_1 + y\psi_2 + \phi\} + \varphi W_2 \quad (1.11.6)$$

其中ψ_1，ψ_2，ϕ都是平面调和函数，即

$$\nabla_1^2(\psi_1, \psi_2, \phi) = 0; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1.11.7)$$

可能选取ψ_1，ψ_2为零，但更好的是这样选取

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \quad (1.11.8)$$

由于挠曲性，$\vec{\psi}$和ϕ的这种选择总是可能的（见例1.10.4）。因为ψ_1与ψ_2是调和的，方程（1.11.8）隐含着

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right) = 0$$

于是

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \quad (1.11.9)$$

方程（1.11.8），(1.11.9)是 Cauchy-Riemann方程(3.1.5)，并且隐含着$\psi_1(x, y)$，$\psi_2(x, y)$是$z = x + iy$（$i = \sqrt{-1}$）的复函数的实部与虚部；这个函数通常记为$\phi(z)$或$\Omega(z)$，即

$$\psi_1(x, y) + i\psi_2(x, y) = \phi(z) \quad (1.11.10)$$

$\partial\phi/\partial x$与$-\partial\phi/\partial y$两项〔在式（1.11.5）中，不要与式(1.11.10)中的ϕ（z）相混淆〕也满足Cauchy-Riemann 方程，因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \tag{1.11.11}$$

所以，$\partial\phi/\partial x$与$-\partial\phi/\partial y$是另一个函数的实部与虚部，这个函数记为$\psi(z)$或$\omega(z)$，这样

$$\frac{\partial\phi(x,\ y)}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial\phi(x,\ y)}{\partial y}=\psi(z) \tag{1.11.12}$$

（在Papkovich-Neuber解与复变解中都用记号ϕ，不过这两种解很少同时在一起使用，因而不容易混淆）。

联立方程（1.11.5）和（1.11.6）成为一个复方程

$$2\mu D=2\mu\ (u+\mathrm{i}v)\ =(3-4\nu)(\psi_1+\mathrm{i}\psi_2)\ -x\frac{\partial\psi_1}{\partial x}$$
$$-y\frac{\partial\psi_2}{\partial y}-\mathrm{i}x\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-\mathrm{i}y\frac{\partial\psi_2}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial y}$$
$$+\varphi\ (W_1+\mathrm{i}W_2) \tag{1.11.13}$$

为了简化这个方程，我们考虑算子$\partial/\partial z$与$\partial/\partial\bar{z}$.让$f(x,y)$是x，y的一个函数，它也能写成$z=x+\mathrm{i}y$与$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$的函数，并且

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial z},$$
$$\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial\bar{z}} \tag{1.11.14}$$

但 $x=\ (z+\bar{z})/2,\quad y=\mathrm{i}(z-\bar{z})/2$，于是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{2}=\frac{\partial x}{\partial\bar{z}},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{\mathrm{i}}{2}=-\frac{\partial y}{\partial\bar{z}}\\&\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{1.11.15}$$

(1.11.10) 中的函数 $\phi(x)$ 只是 z 的函数，因而复共轭 $\overline{\phi(z)} = \overline{\phi}(\overline{z})$ 将仅仅是 $\overline{z}$ 的函数，并且

$$\frac{\partial \overline{\phi}(\overline{z})}{\partial \overline{z}} = \frac{\mathrm{d}\overline{\phi}(\overline{z})}{\mathrm{d}\overline{z}} = \overline{\phi}(\overline{z})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(\psi_1 - \mathrm{i}\psi_2)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \qquad (1.11.16)$$

(1.11.13) 中间项可以写成

$$x\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + y\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \mathrm{i}x\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \mathrm{i}y\frac{\partial \psi_2}{\partial y}$$

$$= (x + \mathrm{i}y)\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = z\overline{\phi'}(\overline{z}) \qquad (1.11.17)$$

方程 (1.11.12) 表明 (1.11.13) 中的最后两项可以写成 $-\overline{\psi(z)} = -\overline{\psi}(\overline{z})$，于是合在一起

$$2\mu D = \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'}(\overline{z}) - \overline{\psi}(\overline{z}) + \varphi W \qquad (1.11.18)$$

其中 $W(z, \overline{z}) = W_1(x, y) + \mathrm{i}W_2(x, y)$，这是 Kolosov-Muskhelishvili 解 (Muskhelishvili, 1953a)，在第四章中将用到.

平面应力是假定在垂直于 z 的平面上无应力，即

$$\tau_{xz} = 0 = \tau_{yz} = \tau_{zz} \qquad (1.11.19)$$

在平面应力中，分量 u，v，w 一般并非同 z 无关，并且应变 e_{zz} 不等于零；事实上，

$$e_{zz} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(e_{xx} + e_{yy}) \qquad (1.11.20)$$

平面应力是薄板在自身平面内所受应力状态的一阶近似. 可以使用关系式 (1.11.19) 从应力-应变关系中消去 e_{zz}，于是

$$\tau_{xx} = \lambda(e_{zz} + e_{yy}) + \lambda e_{xx} + 2\mu e_{xx}$$

可以写成

$$\tau_{xx} = \left\{\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda + 3\mu}\right\}(e_{zz} + e_{yy}) + 2\mu e_{xx}$$

$$= \lambda^* (e_{xx} + e_{yy}) + 2\mu e_{xx} \qquad (1.11.21)$$

其中

$$\lambda^* = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \qquad (1.11.22)$$

在τ_{yy}的关系式中，类似地，有

$$\tau_{yy} = \lambda^*(e_{zz} + e_{yy}) + 2\mu e_{yy} \qquad (1.11.23)$$

与平面应变的那些关系式即(1.11.2)——其中$\varepsilon = e_{xx} + e_{yy}$——相比较，我们看出，它们具有恰好相同的形式，但是要用修正过的Lamé常数λ^*. 应力可以交换地写成如下形式

$$\tau_{xx} = \frac{2\mu}{1 - 2\nu^*}\left\{(1 - \nu^*)e_{xx} + \nu^* e_{yy}\right\} \qquad (1.11.24)$$

$$\tau_{yy} = \frac{2\mu}{1 - 2\nu^*}\left\{(1 - \nu^*)e_{yy} + \nu^* e_{xx}\right\}$$

其中 $\nu^* = \nu/(1 + \nu)$.

这意味着除去ν为ν^*所代替之外，应力同应变的关系，与平面应变是相同的. 但要注意，位移、应变与应力是z的函数●. 对平面应力，头两个平衡方程是(1.11.3)，(1.11.4)，而第三个是

$$F_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.11.25)$$

这意味着对静力问题，F_z必须为零.

平面应力的一个重要的广义化，是Filon(1903)所引进的.

●按照译者的理解，这句话是指，在平面应力情形，从本质上讲，位移、应变与应力是同z有关的.

——译者

在广义平面应力中，假定物体为平面$z=\pm h$的限界，并且

$$\tau_{xz}=0=\tau_{yz}=\tau_{zz},\quad 在z=\pm h \tag{1.11.26}$$

上而且这些应力的平均值也是零，这样

$$\tau_{xz}^{*}=0=\tau_{yz}^{*}=\tau_{zz}^{*} \tag{1.11.27}$$

其中

$$\tau_{zz}^{*}(x,y)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\tau_{zz}(x,\ y,\ z)\mathrm{d}z \tag{1.11.28}$$

现在我们将注意力集中在位移、应变与应力的平均值上。由于方程（1.11.26），平均位移、应变与应力之间的关系与平面应力情形的相应关系完全相同，此外，由于$\rho=\mathrm{const}$,所以平衡方程将取同样的形式

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left\{\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+F_x-\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}\right\}\mathrm{d}z=0$$

可以写成

$$\frac{\partial\tau_{xx}^{*}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}^{*}}{\partial y}+F_x^{*}=\rho\frac{\partial^2u^{*}}{\partial t^2} \tag{1.11.29}$$

因为

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\mathrm{d}z=\frac{1}{2h}[\tau_{xz}]_{-h}^{h}=0$$

最后一个平衡方程，在积分后变成

$$F_z^{*}=\rho\frac{\partial^2w^{*}}{\partial t^2} \tag{1.11.30}$$

所以对静力情形，F^{*}必须为零。

我们的结论是，在广义平面应力中，平均位移、应变及应力在x-y平面中的控制方程，与平面应变的实际位移、应变及应力是一致的；所不同的，仅仅是ν由$\nu^{*}=\nu/(1+\nu)$所代替。特别地，广义平面应力问题可以用 Papkovich-Neuber 解（1.11.5）～（1.11.6）来求解，或者用Kolosov-Muskhelishvili解（1.11.18）来求解，在每一种情形中，ν为ν^{*}所代替。在本书中，“平面”问题将通常描写“平面应变”问题。

条件 (1.11.26) 与 (1.11.27) 式可以放松. 假定

$$\tau_{zz}=0=\tau_{yz} \qquad \text{在} z=\pm h \qquad (1.11.31)$$

和

$$\tau_{xz}^{*}=0 \qquad (1.11.32)$$

便已足够. 在这一情形下，前面的分析，除去 (1.11.30) 外，所有的都成立. 第三个平衡方程被积分后变成

$$\frac{\partial \tau_{xz}^{*}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}^{*}}{\partial y}+\frac{1}{2h}[\tau_{zz}]_{-h}^{h}+F_{z}^{*}=\rho\frac{\partial^{2}w^{*}}{\partial t^{2}} \qquad (1.11.33)$$

这个方程被认为很不同于平均应力与平均应变间的应力-应变关系，也很不同于形如 (1.11.29) 式的另外两个经过积分的平衡方程. 后者仅仅包含u^{*}, v^{*}, e_{xx}^{*}, e_{yy}^{*}, e_{xy}^{*}, τ_{xx}^{*}, τ_{yy}^{*}, τ_{xy}^{*}, 而方程 (1.11.33) 仅仅包含τ_{xz}^{*}, τ_{yz}^{*}, $\tau_{zz}^{*}(\pm h)$, F_{z}^{*}和w^{*}. 广义平面应力的近期的讨论，可以在England(1971a, p. 28f)的著作中找到.

例1.11

1. 试表明对应于位移(1.11.5), (1.11.6)式的应力是

$$\tau_{xx}=2(1-2\nu)\frac{\partial\phi_{1}}{\partial x}+2\nu\left(\frac{\partial\phi_{1}}{\partial x}+\frac{\partial\phi_{2}}{\partial y}\right)-x\frac{\partial^{2}\phi_{1}}{\partial x^{2}}-y\frac{\partial^{2}\phi_{2}}{\partial x^{2}}-\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}}$$

$$\tau_{yy}=2(1-2\nu)\frac{\partial\phi_{2}}{\partial y}+2\nu\left(\frac{\partial\phi_{1}}{\partial x}+\frac{\partial\phi_{2}}{\partial y}\right)-x\frac{\partial^{2}\phi_{1}}{\partial y^{2}}-y\frac{\partial^{2}\phi_{2}}{\partial y^{2}}-\frac{\partial^{2}\phi}{\partial y^{2}}$$

$$\tau_{xy}=(1-2\nu)\left(\frac{\partial\phi_{1}}{\partial y}+\frac{\partial\phi_{2}}{\partial x}\right)-x\frac{\partial^{2}\phi_{1}}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial^{2}\phi_{2}}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x\partial y}$$

2. 试表明若e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}是平面应变场的应变，那么存在这样一个位移场u, v, 它给出$e_{xx}=\partial u/\partial x$, $e_{yy}=\partial v/\partial y$, $e_{xy}=1/2(\partial u/\partial y+\partial v/\partial x)$, 于是$e_{xx}$, e_{yy}, e_{xy}必须满足

$$\frac{\partial^{2}e_{xx}}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}e_{yy}}{\partial x^{2}}=2\frac{\partial^{2}e_{xy}}{\partial x\partial y}$$

这是协调方程的一个例子.对三维弹性场有六个协调方程（见Muskhelishvili,1935a,p49）.

3. 试表明若在意义(1.11.8),(1.11.9)的意义上ϕ_1和ϕ_2是共轭的，又不存在体力，则$\tau_{xx},\tau_{xy},\tau_{yy}$可以写成

$$\tau_{xx}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y},\quad \tau_{yy}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

其中$U=x\phi_1+y\phi_2+\phi$.函数U称为Airy应力函数。利用例1.11.2证明U是双调和的.即$\nabla_1^4 U=0$.Airy应力函数具有重要的历史意义(Love,1927,p83)，但有严重的分析上的不便：若知道了U，求位移必须积分，而Papkovich-Neuber解则明确地给出了位移.

4. 试表明用复记号(1.11.10)～(1.11.18)U可以写成$2U=\bar{z}\phi(z)+z\overline{\phi(z)}+\chi(z)+\overline{\chi(z)}$，其中$\phi(z)=\chi'(z)$.

5. 试表明方程(1.3.10),(1.3.14)给出的极坐标中的应变e_{rr}, $e_{\theta\theta}$, $e_{r\theta}$必须满足协调方程

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-r\frac{\partial}{\partial r}\right)e_{rr}=2\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(e_{r\theta}).$$

6. 试表明当由例题1.11.3用Airy应力函数U表示出应力时，则在平面应变或平面应力中，有

$$\tau_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2},\qquad \tau_{\theta\theta}=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2},$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)$$

并且推演$\tau_{rr}+\tau_{\theta\theta}=\nabla_1^2 U$及$\nabla_1^2(\tau_{rr}+\tau_{\theta\theta})=0$.

第二章 初 等 问 题

初等问题是指可用初等或直接方法求解的问题．初等或直接一词，被用于排除那些以牵强附会处理运动方程为基础的方法，特别地，排除以Cauchy积分与变换理论为根据的方法．对于平面问题，从点力作用在边界上的Flamant问题开始，三维问题从Boussinesq与Cerruti问题开始．

2.1 平面问题的基本解

在这一节里，我们将发展适宜于边界$y=0$上作用着正应力和剪应力的半平面$y>0$上的某些Papkovich-Neuber解，并且假定不存在体力．在解(1.11.5)和(1.11.6)中，令$\psi_1=0,\psi_2=\psi$，$\psi'=0$，那么

$$2\mu u=-\frac{\partial}{\partial x}(y\psi+\phi),\quad 2\mu v=\kappa\psi-y\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{2.1.1}$$

并且应力为

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xx}&=2\nu\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\\ \tau_{xy}&=(1-2\nu)\frac{\partial\psi}{\partial x}-y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{2.1.2}$$

$$\tau_{yy}=2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial\phi}{\partial y^2} \tag{2.1.3}$$

于是在边界$y=0$上的应力是

$$\tau_{xy}=(1-2\nu)\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y},\quad \tau_{yy}=2(1-\nu)\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \tag{2.1.4}$$

还有条件

$$\lim_{y\to\infty}\left(y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},\ y\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=0 \tag{2.1.5}$$

若选函数 ϕ 满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=(1-2\nu)\psi \tag{2.1.6}$$

那么$\tau_{xy}(x,0)$将恒等于零，并且

$$v(x,0)=\vartheta\psi(x,0),\quad \tau_{yy}(x,0)=\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,0) \tag{2.1.7}$$

而一般地

$$\tau_{xx}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},$$

$$\tau_{yy}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \tag{2.1.8}$$

函数

$$\psi=-\frac{F}{2\pi}\ln\left[\frac{(x^2+y^2)}{a^2}\right] \tag{2.1.9}$$

在除了原点之外的任何区域中都是调和的；a作为任意一个长度而引进，以使得ln的宗量成为无量纲的．对这个ψ，条件(2.1.5)式已被满足，并且自(2.1.8)给出的应力为

$$\tau_{xx}=-\frac{2Fx^2y}{\pi r^4},\quad \tau_{xy}=-\frac{2Fxy^2}{\pi r^4},\quad \tau_{yy}=-\frac{2Fy^3}{\pi r^4} \tag{2.1.10}$$

其中$r^2=x^2+y^2$.这个应力分布是由 Flamant 推导出来的．该应力在极坐标中为(例1.5.1)

$$\tau_{rr}=-\frac{2F\sin\theta}{\pi r},\qquad \tau_{r\theta}=0=\tau_{\theta\theta} \tag{2.1.11}$$

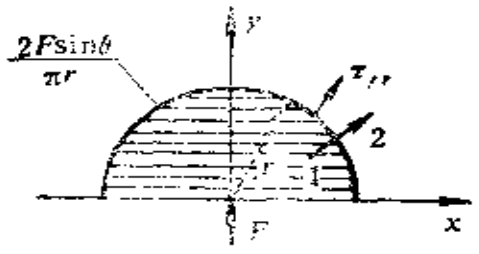


图2.1.1　在靠近原点的半圆区域的边界上作用的应力

如图2.1.1所示．应力作用的正负方向在§1.4的开始处就介绍过了．在靠近原点的半圆形区域的边界上，应力 (2.1.11) 产生的合力，有x与y方向的

分量，由下式给出

$$\int_0^{\pi}\tau_{r\theta}r\cos\theta\,d\theta=0,\quad \int_0^{\pi}\tau_{r\theta}r\sin\theta d\theta=-F \tag{2.1.12}$$

因此，为了使这个区域平衡，必须在原点有一铅垂力F，如图所示．方程(2.1.10)给出了铅垂力引起的应力场．

为了得到位移u，v，必须求出势函数ϕ．我们有

$$\int\ln\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)dy=y\ln\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)-\int\frac{2y^2}{x^2+y^2}dy$$

$$=y\ln\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)-2y+2x^2\int\frac{dy}{x^2+y^2} \tag{2.1.13}$$

但是，$\frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]=\frac{x}{x^2+y^2}$，于是

$$\int\ln\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)dy=y\ln\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)-2y+2x\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+C \tag{2.1.14}$$

然而函数 $\operatorname{arctg}(y/x)$ 在上半平面不连续．若$\operatorname{arctg}(t)$，如通常那样，被定义为角度α，$-\pi/2<\alpha<\pi/2$的区间，使得$\operatorname{tg}\alpha=t$，那么 $\operatorname{arctg}(y/x)$的边界值，当点$(x,\ y)$趋于$x$和$y$轴时，如图2.1.2(a)所示；当$(x,\ y)$穿过$y$轴时，存在一个跳跃值$\pi$．因此，我们定义一个新的函数$\operatorname{areTg}(y/x)$，在$y>0$的上半平面连续，即

$$\operatorname{arcTg}(y/x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x), & x\geqslant 0\\ \pi+\operatorname{arctg}(y/x), & x<0\end{cases} \tag{2.1.15}$$

那么，我们可以写

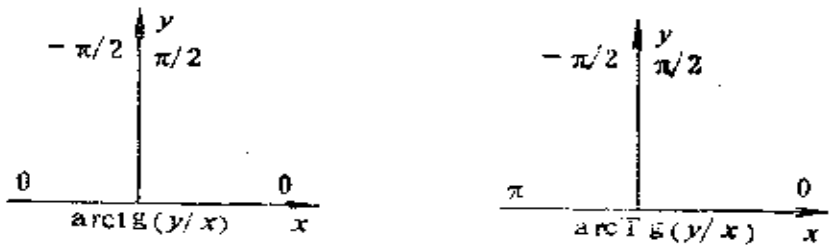


图2.1.2 $\operatorname{arctg}(y/x)$与$\operatorname{areTg}(y/x)$的边界值

$$\phi = -\frac{F(1-2\nu)}{2\pi}\left\{ y\ln\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right) - 2y + 2x\,\mathrm{arcTg}\left(\frac{y}{x}\right)\right\} \tag{2.1.16}$$

并且位移u和v具有形式

$$u(x,y) = G_{12}(x,y)F, \qquad v(x,y) = G_{22}(x,y)F \tag{2.1.17}$$

其中

$$2\pi\mu G_{12}(x,y) = xyr^{-2} + (1-2\nu)\,\mathrm{arcTg}(y/x) \tag{2.1.18}$$

$$2\pi\mu G_{22}(x,y) = -x^2r^{-2} - 2(1-\nu)\ln(r/a) \tag{2.1.19}$$

这些表达式在原点无意义．当(x,y)沿着线路$y = x\mathrm{tg}\alpha$趋于无穷时，$G_{12}(x,y)$的表达式趋于极限值

$$\lim G_{12}(x,y) = (2\pi\mu)^{-1}[\sin\alpha\cos\alpha + (1-2\nu)\alpha] \tag{2.1.20}$$

$G_{22}(x,y)$的表达式在无穷远处趋于无穷大．这个位移的性质是平面弹性理论的内在的不完全性之一．

方程(2.1.17)～(2.1.19)可用于求x轴上分布的法向载荷引起的位移，亦即，该位移对应于边界条件

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yy} = -p(x), \quad 在y = 0上 \tag{2.1.21}$$

它们是

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{12}(x-x',\ y)\,p(x')\,\mathrm{d}x' \tag{2.1.22}$$

$$v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{22}(x-x',\ y)\,p(x')\,\mathrm{d}x' \tag{2.1.23}$$

这些位移，以及例题2.1.1所给的那些位移，可以用任意的刚体平移与转动来补充．Kalker(1971，1972)发展了“弹性线接触”理论，其中载荷沿弹性半空间的一个细长区域是相同的；上面给出的二维结果，是一个极限情形．

例2.1

1．若在解(2.1.1)中选取的ϕ和ψ，使得$2(1-\nu)\psi = \partial\phi/\partial y$，请证明应力$\tau_{xx}$，$\tau_{xy}$，$\tau_{yy}$将是

$$\tau_{xx}=2\frac{\partial\psi}{\partial y}-y\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}-y\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},\quad \tau_{yy}=-y\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

由此表明，若$\psi=-(S/\pi)\operatorname{arctg}(y/x)$，那么

$$\tau_{xx}=-\frac{2Sx^2}{\pi r^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{2Sx^2y}{\pi r^4},\quad \tau_{yy}=-\frac{2Sxy^2}{\pi r^4}$$

这些是由于在原点作用的集中剪力S引起的在上半平面的应力。

2．试表明由于在x方向分布的剪力，亦即与边界条件$\tau_{xy}=-s(x)$，$\tau_{yy}=0$，$y=0$相协调的位移是

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}G_{11}(x-x',y)s(x')dx'$$

$$v(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}G_{12}(x-x',y)s(x')dx'$$

其中

$$G_{11}(x,y)=(2\pi\mu)^{-1}[x^2r^{-2}-2(1-\nu)\ln(r/a)]$$

$$G_{21}(x,y)=(2\pi\mu)^{-1}[xyr^{-2}-(1-2\nu)\operatorname{arcTg}(y/x)]$$

3．试表明

$$\lim_{y\to+0}\int_a^b\frac{ys(x')dx'}{(x-x')^2+y^2}=\pi s(x)$$

并且，由此表明由区间$[a,b]$上分布的法向应力与剪应力引起的位移的导数，在$y=0$上的值，为

$$2\mu\frac{\partial u}{\partial x}=-(1-2\nu)p(x)-\frac{2(1-\nu)}{\pi}\int_a^b\frac{s(x')dx'}{x'-x}$$

$$2\mu\frac{\partial v}{\partial x}=(1-2\nu)s(x)-\frac{2(1-\nu)}{\pi}\int_a^b\frac{p(x')dx'}{x'-x}$$

4．在直线$y=0$上，$\operatorname{arcTg}(y/x)=\pi/2-\pi/2\operatorname{sign}(x)$。试表明除去少一个常数而外，边界上的位移为

$$u(x)=-\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\vartheta}{\pi}\ln\left|\frac{x-x'}{a}\right|s(x)+\frac{1-2\nu}{4\mu}\operatorname{sign}(x-x')p(x')\right\}dx'$$

$$v(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1-2\nu}{4\pi}\operatorname{sign}(x-x')s(x')-\frac{\vartheta}{\pi}\ln\left|\frac{x-x'}{a}\right|p(x')\right\}dx'$$

5．试表明在例2.1.4中的两个方程可以联合起来给出

$$u(x)+iv(x)=\vartheta\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{x-x'}{a}\right|-\frac{i\varphi}{2}\operatorname{sign}(x-x')\right\}$$

$$\times [s(x') + ip(x')]dx'$$

6. 试表明由$(-a,a)$上的均匀载荷p引起的边界上的法向位移满足

$$v(x) - v(0) = -\frac{2Pa}{\pi}\left\{\left(1-\frac{x}{a}\right)\ln\left|1-\frac{x}{a}\right| + \left(1+\frac{x}{a}\right)\ln\left|1+\frac{x}{a}\right|\right\}$$

2.2 简单的平面压头问题

由边界上分布的法向与切向应力引起的上半平面的弹性位移，在§2.1中已经求出来了，即方程(2.1.22)，(2.1.23)与例题2.1.2. 首先将求位移的一般表达式；随后，将用它解决若干个接触问题。

因为有两个位移u和v与两个应力$s(x')$和$p(x')$，所以，方便的作法是联合那以$s(x')$和$p(x')$给出的u和v的四个方程，通过$q(x') = s(x') + ip(x')$来表示$D = u + iv$这种复$i = \sqrt{-1}$方程。

$$D(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\{[G_{11}(x-x',y) + iG_{21}(x-x',y)]s(x') + [G_{12}(x-x',y) + iG_{22}(x-x',y)]p(x')\}dx' \tag{2.2.1}$$

现在若让$r^2 = (x-x')^2 + y^2$，那么

$$\left.\begin{aligned} 2\ln\frac{r}{a} &= \ln\left(\frac{z-x'}{a}\right) + \ln\left(\frac{\bar{z}-x'}{a}\right) \\ 2i\arctan\frac{y}{x-x'} &= \ln\left(\frac{z-x'}{a}\right) - \ln\left(\frac{\bar{z}-x'}{a}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.2.2}$$

$$2(x-x')[(x-x') + iy]r^{-2} = 2 + (z-\bar{z})(\bar{z}-x')^{-1} \tag{2.2.3}$$

于是

$$4\pi\mu D(x,y) = -\kappa\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{z-x'}{a}\right)q(x')dx'$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{\overline{z}-x'}{a}\right)q(x')\,dx'+(z-\overline{z})\int_{-\infty}^{\infty}(\overline{z}-x')^{-1}\,\overline{q}(x')\,dx'$$

$$+\left[2\int_{-\infty}^{\infty}\overline{q}(x')\,dx'\right] \qquad (2.2.4)$$

在这一点上，我们应该检验位移具有(1.11.18)式给出的形式. 比较(2.2.4)式与(1.11.18)式我们看到

$$\phi(z)=-(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{z-x'}{a}\right)q(x')\,dx' \qquad (2.2.5)$$

$$\psi(z)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(\frac{z-x'}{a}\right)\overline{q}(x')\,dx'$$

$$+(2\pi)^{-1}z\int_{-\infty}^{\infty}(z-x')^{-1}q(x')\,dx' \qquad (2.2.6)$$

(2.2.4)的最后一项，可以略去，因为它是一个常数，代表刚体平移.

针对某些函数$q(x')$，方程(2.2.5)和(2.2.6)的积分的显示计算，是困难的，但对某些特殊的函数$q'(x)$，能够简单地计算出来. 我们现在将说明某些结果，它们将在§2.3中得到证明. 让$q(x')$在区间$(-a,\ a)$以外等于零，而在此区间内$q(x')=a_0(a-x'^2)^{-1/2}$，这里a_0是一个常数，可以是复常数，对应于法向与切向应力两者的一个分布；那么$\phi(z)$可以写成

$$\phi(z)=-\frac{1}{2}a_0A_0(z) \qquad (2.2.7)$$

其中

$$A_0(z)\equiv\pi^{-1}\int_{-a}^{a}(a^2-x'^2)^{-1/2}\ln\left(\frac{z-x'}{a}\right)dx' \qquad (2.2.8)$$

可以证明具有数值

$$A_0(z)=-\ln\{2[z-(z^2-a^2)^{1/2}]/a\} \qquad (2.2.9)$$

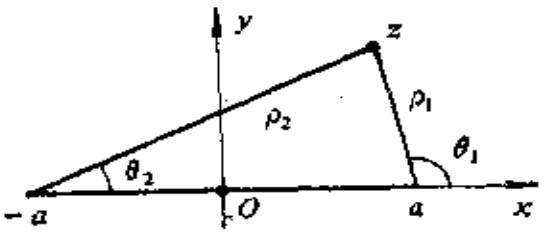
出现在(2.2.6)中的$A_0(z)$的导数，是

$$A_0'(z) \equiv \pi^{-1}\int_{-a}^{a}(a^2-x'^2)^{-1/2}(z-x')^{-1}\mathrm{d}x'$$

$$= (z^2-a^2)^{-1/2} \qquad (2.2.10)$$

在进行下一步研究之前，我们必须考虑函数$A_0(z)$和$(z^2-a^2)^{-1/2}$是如何定义的。考虑函数$(z^2-a^2)^{1/2}$。复变函数的教科书中证明，仅仅在点$-a$与a之间作一割缝之后，这个函数能够被确切地定义出来。这样，点$z=x+\mathrm{i}\varepsilon$和$z=x-\mathrm{i}\varepsilon$被认为两个不同的点，其中$\varepsilon$为趋于零的小量，同时$-a\leqslant x\leqslant a$；这种点被分别记为$z=x^+$与$x^-$。这一作法的理由如下：让$\rho_1$、$\theta_1$与$\rho_2$、$\theta_2$是$z$分别针对$a$与$-a$的极坐标，如图2.2.1所示。那么

$$z^2-a^2=(z-a)(z+a)=\rho_1\exp(\mathrm{i}\theta_1)\rho_2\exp(\mathrm{i}\theta_2) \qquad (2.2.11)$$



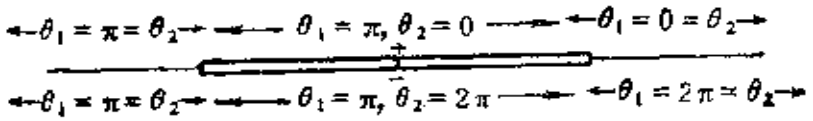


图2.2.1　角度θ_1和θ_2的边界值

和

$$(z^2-a^2)^{1/2}=(\rho_1\rho_2)^{1/2}\exp\left[\frac{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}{2}\right] \qquad (2.2.12)$$

在$x\geqslant a$处，考虑$z\to x^+$时该函数的极限值。在这里，$\theta_1\to 0$，$\theta_2\to 0$，并且

$$(z^2-a^2)^{1/2}\to(\rho_1\rho_2)^{1/2}=(x^2-a^2)^{1/2}$$

对于$x \geqslant a$，当$z \to x^-$时，则$\theta_1 \to 2\pi$，$\theta_2 \to 2\pi$并且$(z^2-a^2)^{1/2}$再次趋于同样的值。这样$(z^2-a^2)^{1/2}$在z穿过x轴时，是连续的。在$-a$与a之间这一部分x轴上，这个结果是不同的。当$z \to x^+$时，$\theta_1 \to \pi$，$\theta_2 \to 0$，而且$(z^2-a^2)^{1/2} \to (\rho_1\rho_2)^{1/2}\exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i(a^2-x^2)^{1/2}$。另一方面，当$z \to x^-$轴时，$\theta_1 \to \pi$，$\theta_2 \to 2\pi$，而且$(z^2-a^2)^{1/2} \to (\rho_1\rho_2)^{1/2}\exp\left(3i\frac{\pi}{2}\right) = -i(a^2-x^2)^{1/2}$。这些边界值，如图2.2.2所示，属于$(z^2-a^2)^{1/2}$的一个分枝。使用这种特殊办法选取这个函数的一个分枝，将贯穿在本书的全部之中。

现在回到$A_0(z)$。在x轴上，当$x \geqslant a$时，$A_0(x)$是实函数，并且

$$A_0(z) = -\ln\left\{\frac{2[x-(x^2-a^2)^{1/2}]}{a}\right\}, \quad x \geqslant a \tag{2.2.13}$$

在$[-a, a]$的上半平面一边：

$$A_0(x,0^+) \equiv A_0^+(x) = \ln\left\{\frac{2[x-i(a^2-x^2)^{1/2}]}{a}\right\} \tag{2.2.14}$$

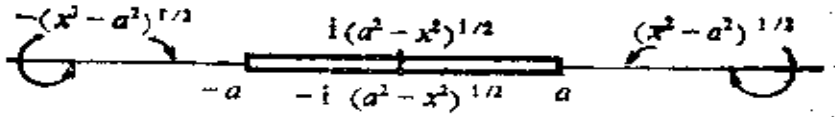


图2.2.2 函数$(z^2-a^2)^{1/2}$的边界值

为了找到这个复对数的值，令$x = a\cos\theta$，$(a^2-x^2)^{1/2} = a\sin\theta$，那么$x - i(a^2-x^2)^{1/2} = a[\cos\theta - i\sin\theta] = a\exp(-i\theta)$以及

$$A_0^+(x) = -\ln[2\exp(-i\theta)] = -\ln 2 + i\theta, \quad |x| < a \tag{2.2.15}$$

在x轴的其余的部分上，在$x \leqslant -a$处，有

$$A_0(x) = -\ln\left\{\frac{2[x+(x^2-a^2)]^{1/2}}{a}\right\}, \quad x \leqslant -a \tag{2.2.16}$$

上半平面中的位移，现在由(2.2.4)给出。在x轴上，$z-\overline{z}=2iy=0$，位移将由(2.2.4)的头两项给出，如果最后的一项，即刚体位移，予以忽略的话。a_0的数值同作用在$(-a, a)$上的合力有关。这样

$$X+iY=\int_{-a}^{a}(s+ip)\,dx'=\int_{-a}^{a}q(x')\,dx'=\pi a_0 \qquad (2.2.17)$$

若作用着法向力P_0，那么$a_0=iP_0/\pi$，并且针对$-a\leqslant x\leqslant a$的位移，由下式给出

$$-4\pi\mu D(x,0^+)=iP_0\{\kappa(-\ln 2+i\theta)+(-\ln 2-i\theta)\} \qquad (2.2.18)$$

所以

$$D(x,0^+)=u(x,0^+)+iv(x,0^+)$$
$$=\frac{P_0}{\pi}\left\{\left(\frac{1-2\nu}{2\mu}\right)\theta+i\left(\frac{1-\nu}{\mu}\right)\ln 2\right\} \qquad (2.2.19)$$

对于这个方程，应该仔细地加以研究。它表明，首先，在$(-a, a)$区间，作用着压力，法向位移v是一个常数。这意味着，该位移对应于一个平底刚性压头作用于上半平面造成的凹陷，如图2.2.3所示。这个方程似乎表明，压痕$v(x,0^+)$正比于作用力，但并非如此，因为可以对(2.2.19)中的D补充一个任意的刚体位移和一任意的刚体转动。事实上，该压痕得不出来，对刚性或弹性压头凹陷半平面的每一个问题，这点是真实的。在物理上，人们将指望，侧面位移u，是反对称于y轴的，这意味着$u(-x, 0)$

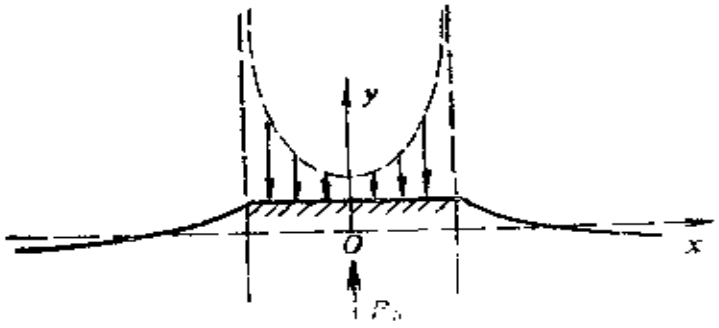


图2.2.3 平底刚性压头作用于上半平面所产生的凹陷

$= -u(x,0)$，这可在(2.2.19)上叠加一个侧向平移（如下）来实现

$$D(x,0^+) = \pi^{-1}\vartheta P_0\left\{-\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\ln 2\right\},\quad \varphi=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \tag{2.2.20}$$

项$\pi/2-\theta$在x上是反对称的。对$|x|\geqslant a$的边界位移，由例2.2.2中给出。

对于大的$|z|$，(2.2.4)的主项是头两项，因而

$$-4\mu D(x,y) = \kappa a_0 A_0(z) + a_0\overline{A_0(z)} + O(1) \tag{2.2.21}$$

但是

$$A_0(z) = \ln(z/a) + O(|z|^{-2}) \quad \text{对大 } |z| \tag{2.2.22}$$

于是

$$-4\mu D(x,y) = \kappa a_0 \ln(z) + a_0\overline{\ln(z)} + O(1) \tag{2.2.23}$$

并且我们注意到，对于大的$|z|=r$，$D(x,y)$无转动分量，这表明

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1}D(x,y) = 0 \tag{2.2.24}$$

事实上，在满足这个条件的那类位移中，除去一个刚体位移之外，对于平底压头，这个位移是唯一的解。

第二个例子为

$$q(x') = \frac{2iP_0(a^2-x'^2)^{1/2}}{(\pi a^2)} \tag{2.2.25}$$

它对应于法向应力在$[-a,a]$上的一种分布，其合力为P_0，而在接触区间的端点它等于零。

(2.2.4)中的积分，利用恒等式

$$(a^2-x'^2)^{1/2} = \frac{a^2-x'^2}{(a^2-x'^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{(a^2-2x'^2)}{2(a^2-x'^2)^{1/2}} + \frac{a^2}{2(a^2-x'^2)^{1/2}} \tag{2.2.26}$$

计算。在第二项中的积分，可以用$A_0(z)$表示[见(2.2.8)]，而包

含在第一项中的积分，使用下面的结果

$$A_2(z)=\pi^{-1}\int_{-a}^{a}(a^2-x'^2)^{-1/2}\frac{2x'^2-a^2}{a^2}\ln\left(z-\frac{x'}{a}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\frac{z-(z^2-a^2)^{1/2}}{a}\right\}^2 \qquad (2.2.27)$$

求出。而位移，现在更为复杂一些，但它在接触区域$(-a,a)$中的值，可以再次容易地从（2.2.4）的头两项得到。于是，在那个区域里

$$4\pi\mu D(x,0^+)=2\mathrm{i}\kappa P_0\left\{\frac{1}{2}A_2^+(x)-\frac{1}{2}A_0^+(x)\right\}$$

$$+2\mathrm{i}P_0\left\{\frac{1}{2}\overline{A_2^+(x)}-\frac{1}{2}\overline{A_0^+(x)}\right\} \qquad (2.2.28)$$

现在

$$A_2^+(x)=-\frac{1}{2}\left\{\frac{x-\mathrm{i}(a^2-x^2)^{1/2}}{a}\right\}^2$$

$$=-\frac{2x^2-a^2}{2a^2}+\frac{2\mathrm{i}x(a^2-x^2)^{1/2}}{2a^2} \qquad (2.2.29)$$

因之，除去$A_2^+(x)$引起的一个常数项外，法向位移由下式给出

$$4\pi\mu v(x,0^+)=-\frac{(\kappa+1)P_0(2x^2-a^2)}{(2a^2)},\quad |x|\leqslant a \qquad (2.2.30)$$

这个位移——只有其第一项是重要的——对应于一个圆（其实为抛物线）底压头，其半径为R，如图2.2.4所示，于是

$$v(x,0^+)=-\frac{\vartheta P_0x^2}{\pi a^2}=-\frac{x^2}{2R} \qquad (2.2.31)$$

并且合力P_0与接触长度$2a$和压头的曲率半径R相联系，由方程

$$P_0=\frac{\pi a^2}{2\vartheta R} \qquad (2.2.32)$$

给出。这个方程也可以看作是，对给定的P_0得到的a的一个值。当P_0增加时，a也增加，并且a具有这样的性质，使得法向应力

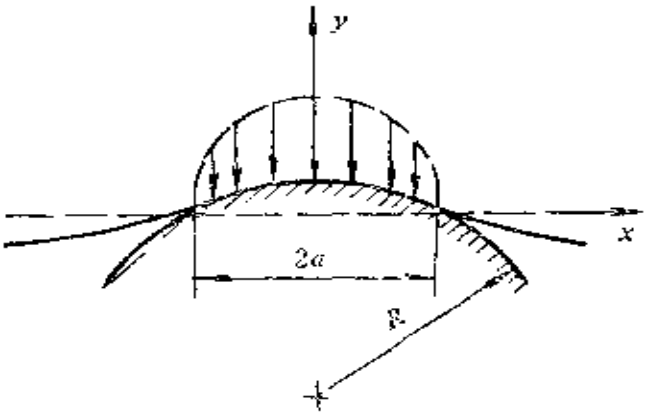


图2.2.4 抛物线形底面的刚性压头对上半平面的压陷

（其合力为P_0）在接触区间的端点正好等于零。这样的接触叫做不完全（或无束缚）的接触；对接触压力用平方根$(a^2-x^2)^{1/2}$的形式来表征。相反的是图2.2.3的平底压头的完全压陷，这个问题的接触压力具有平方根$(a^2-x^2)^{-1/2}$的奇异性。注意在所研究的两个问题中，正好在压头下面有半空间边界点的侧向位移。仅仅当某些粘着的剪应力作用在边界上时这一种位移能够被抑制住。（见§4.6）

前面的解的一个重要应用，是对两个圆形外廓的物体的二维接触，这两个圆的半径为R_1和R_2，而且数值很大，以致能够作为半平面来处理；这称为二维的Hertz接触问题，如图2.2.5所示。让物体1、2分别占据上半平面与下半平面。若变形前物体对于坐标轴ox、oy_1，ox，oy_2的外形分别是

$$y_1=\frac{x^2}{2R_1},\qquad y_2=\frac{x^2}{2R_2} \tag{2.2.33}$$

那么，两个物体表面上的一对相对点之间的距离为y_1+y_2。当两

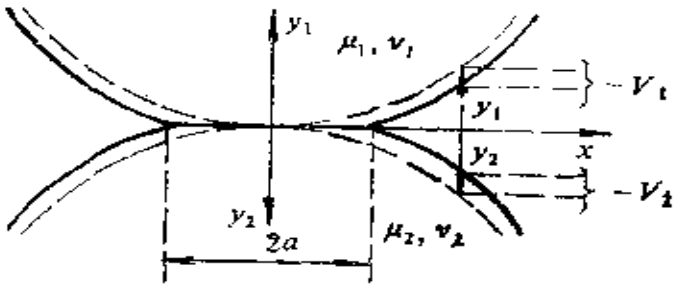


图2.2.5 虚线表示两个轻微弯曲的弹性体，初始时正好接触，然后相压，进入$-a\leqslant x\leqslant a$上面的接触

个物体相压时，这个距离变成$y_1+y_2+v_1+v_2$，并且在接触区里这必须是一个常数，于是

$$v_1+v_2=C-\frac{x^2}{2R_1}-\frac{x^2}{2R_2},\quad -a\leqslant x\leqslant a \tag{2.2.34}$$

平衡状态要求

$$p_1(t)=p_2(t),\quad -a\leqslant t\leqslant a \tag{2.2.35}$$

于是

$$p_1(t)=p_2(t)=\frac{2P_0}{\pi a^2}(a^2-t^2)^{1/2} \tag{2.2.36}$$

并给出

$$v_1=C_1-\frac{\vartheta_1 P_0 x^2}{\pi a^2},\quad v_2=C_2-\frac{\vartheta_2 P_0 x^2}{\pi a^2} \tag{2.2.37}$$

因之

$$(\vartheta_1+\vartheta_2)\ \frac{P_0}{\pi a^2}=\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R_2} \tag{2.2.38}$$

它可以看作接触长度$2a$为ϑ_1、ϑ_2、R_1、R_2及P_0的函数的一个方程式。注意这不可能得到两个物体的“接近量”，还有，在半平面问题中所指望的，在无限远处位移为无穷大。这个解在本世纪早期为苏联学者所得到。Poritsky (1950) 得到显式表达式，并且用表给出了物体内部点的位移与应力，在他的分析中有一个非本质的因子2，若记他取的F为$P_0/2$，则这个因子便消掉了。

例2.2

1. 试表明，若$A_0(z)$是在带割缝$(-a,a)$的平面中定义的，则它在上半平面的边界值如下

$A_0(t)=-\ln 2+\phi$，对于$t=a\cosh\phi$，即对于$t>a$

$A_0^+(t)=-\ln 2+i0$，对于$t=a\cos\theta$，即对于$-a<t<a$

$A_0(t)=-\ln 2+\phi+i\pi$，对于$t=-a\cosh\phi$，即对于$t<-a$

2. 试表明，对应于(2.2.18)，在接触区外的法向位移$v(x,0)$为

$$v(x,0)-v(0,0)=\pi^{-1}\vartheta P_0\operatorname{arccosh}\left(\frac{x}{a}\right),\quad x>a.$$

2.3 Chebyshev多项式

在最近这些年代里，用多项式近似表示函数的课题，由于使用Chebyshev(Чебышев)多项式而发生了革命性变化。下面定义的这些多项式，导致了一种很精确、很简要的办法，足以近似表示一大类函数。例如，可参阅Fox与Parker的著作(1968)。这些方法被引进平面弹性理论，又增加了一种优点，许多积分，例如(2.2.4)，当$q(x')$用这些多项式近似表示出来时，可以用显式计算出来。它们将用于求解§2.4中某些平面弹性问题。

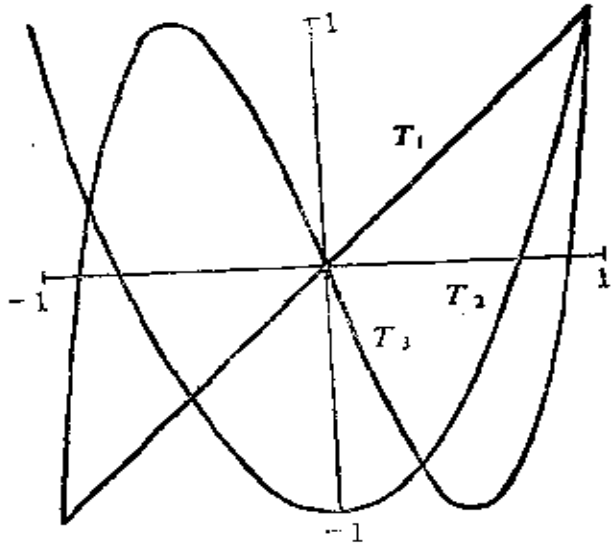


图2.3.1 Chebyshev多项式T_1, T_2, T_3

第一类与第二类Chebyshev多项式$T_n(x)$和$U_n(x)$分别在$[-1, 1]$内对x定义为

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad x = \cos\theta \tag{2.3.1}$$

其前面几个是

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1 \tag{2.3.2}$$

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_2(x) = 4x^2 - 1 \tag{2.3.3}$$

函数T_1, T_2, T_3如图2.3.1所示。他们满足递推关系

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \tag{2.3.4}$$

$$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0 \tag{2.3.5}$$

并且它们之间由方程式

$$T_n(x) - T_{n+2}(x) = 2(1-x^2)U_n(x),\quad T_n'(x) = nU_{n-1}(x) \tag{2.3.6}$$

相联系. 递推关系式 (2.3.4) 和头两个多项式的值，提供了计算更高阶多项式的方便算法.

Chebyshev多项式是正交多项式. 事实上，余弦函数在[0，π]区间的熟知的正交性，导致了$T_n(x)$的正交性条件. 于是关系式

$$\int_0^{\pi}\cos m\theta\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0, & n\neq m \\ \dfrac{\pi}{2}, & n=m\neq 0 \\ \pi, & n=m=0 \end{cases} \tag{2.3.7}$$

立即导致

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1/2}T_m(t)T_n(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & n\neq m \\ \pi/2, & n=m\neq 0 \\ \pi, & n=m=0 \end{cases} \tag{2.3.8}$$

这个连续正交性条件是重要的，但没有比多项式所满足的离散正交性在计算工作中那么重要. 建立这个离散正交性，从恒等式 (例子2.3.3)

$$1+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos Nt$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos Nt+\frac{1}{2}\sin Nt\cot\frac{t}{2} \tag{2.3.9}$$

开始，它可以写成

$$\sum_{k=0}^{N}{}''\cos kt = \frac{1}{2}\sin Nt\cot\frac{t}{2} \tag{2.3.10}$$

这里″表示和第一项与最后一项取其一半大小. 现在联合(2.3.10)与恒等式

$$2\cos mt\cos nt = \cos(m+n)t + \cos(m-n)t$$

并且注意到，当t是一个整数乘π/N时，（2.3.10）的右端等于零。于是，若m和$n(m \neq n)$是正整数，并且$\theta_k = k\pi/N$，那么

$$\sum_{k=0}^{N}{}'' \cos m\theta_k \cos n\theta_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}{}'' \{\cos(m+n)\theta_k + \cos(m-n)\theta_k\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}{}'' \left\{\cos k\left[\frac{(m+n)\pi}{N}\right] + \cos k\left[\frac{(m-n)\pi}{N}\right]\right\} = 0$$

这个最后的结果是，若$m \leqslant N$，$n \leqslant N$，那么

$$\sum_{k=0}^{N}{}'' \cos m\theta_k \cos n\theta_k = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ N/2, & m = n \neq 0, N \\ N, & m = n = 0, N \end{cases} \qquad (2.3.11)$$

利用下面的写法，可以得到Chebyshev多项式的相应的结果：

$$\cos m\theta_k = T_m(x_k), \quad x_k = \cos(k\pi/N) \qquad (2.3.12)$$

$$\sum_{k=0}^{N}{}'' T_m(x_k)T_n(x_k) = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ N/2, & m = n \neq 0, N \\ N, & m = n = 0, N \end{cases} \qquad (2.3.13)$$

这个结果可用于确定一个N级多项式$f_N(x)$，它在$(N+1)$个点x_k的每一个点上，等于给定的函数$f(x)$。令多项式是

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N}{}'' a_n T_n(x) \qquad (2.3.14)$$

那么

$$f(x_k) = \sum_{n=0}^{N}{}'' a_n T_n(x_k) \qquad k = 0, 1, \cdots, N$$

因而

$$\sum_{k=0}^{N}{}'' f(x_k)T_m(x_k) = \sum_{k=0}^{N}{}'' T_m(x_k) \sum_{n=0}^{N}{}'' a_n T_n(x_k) = \frac{N}{2}a_m \qquad (2.3.15)$$

并且可以注意到这个方程在所有 $m=0,1,\cdots,N$ 上成立. 方程 (2.3.15) 表明，系数 a_m 以显式表示成为Chebyshev 点 x_k 上的 $f(x)$ 值的式子.

为了Chebyshev多项式在平面问题中的应用，引进下列积分是方便的

$$R_n(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau^2)^{1/2}U_{n-1}(\tau)\,d\tau}{\tau-z},\quad n=1,2\cdots \tag{2.3.16}$$

$$G_{n-1}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau^2)^{-1/2}T_n(\tau)\,d\tau}{\tau-z},\quad n=0,1,2\cdots \tag{2.3.17}$$

其中 $z=x+iy(i=\sqrt{-1})$. 函数 $R_n(z)$, $G_{n-1}(z)$ 是复变量 z 的函数. 这种函数的详细研究则推迟到第三章中，但是，考虑到复变函数的边界值，不难得到若干重要结果.

函数 $(z^2-1)^{1/2}$ 的定义，在 §2.2 讨论过了. 容易证明（参考这一节末尾的注释和例题）这些函数也必须定义在带割缝 $[-1,1]$ 的平面上，并且

$$R_n(z)=[z-(z^2-1^{1/2})]^n,\qquad n=1,2,\cdots \tag{2.3.18}$$

$$G_{n-1}(z)=-(z^2-1)^{-1/2}R_n(z),\quad n=1,2,\cdots \tag{2.3.19}$$

定义 $R_0(z)\equiv 1$，是方便的；那么方程 (2.3.18) 和 (2.3.19) 对于 $n=0$ 也组立. 这些函数在 x 轴上 $|x|=1$ 的外侧的数值是

$$R_n(x)=[x-\mathrm{sign}(x)(x^2-1)^{1/2}]^n,\quad n=0,1,2\cdots \tag{2.3.20}$$

$$G_{n-1}(x)=-\mathrm{sign}(x)(x^2-1)^{-1/2}R_n(x),\quad n=0,1,2\cdots \tag{2.3.21}$$

而对于 $|x|<1$，在轴的正边与负边的数值为

$$R_n^{+}(x)=T_n(x)\mp i(1-x^2)^{1/2}U_{n-1}(x) \tag{2.3.22}$$

$$G_{n-1}^{\pm}(x)=U_{n-1}(x)\pm i(1-x^2)^{-1/2}T_n(x) \tag{2.3.23}$$

其中 $U_{n-1}(x)$，对于 $n=0$，必须等于零.

方程 (2.3.22) 和 (2.3.23) 给出了积分 $R_n(z)$ 和 $G_{n-1}(z)$

在$|x|<1$的边界值；也可能考虑积分（2.3.16）和（2.3.17）在$z=x$和$|x|<1$的数值，亦即$R_n(x)$和$G_{n-1}(x)$在x等于-1与1之间的值。在这个情形中，被积函数在$\tau=x$点是奇异的，而注意力必须用在明确地定义它的积分上面。这种积分通常的定义是Cauchy主值，即

$$(P)\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau-x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau+\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{f(\tau)}{\tau-x}d\tau\right\} \tag{2.3.24}$$

可以证明，在$|x|\leqslant 1$范围内，由积分（2.3.16）、（2.3.17）定义的$R_n(x)$和$G_{n-1}(x)$的主值，是

$$R_n(x)=-\frac{(P)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau^2)^{1/2}U_{n-1}(\tau)\,d\tau}{\tau-x}=T_n(x),$$

$$n=1,\ 2\cdots \tag{2.3.25}$$

$$G_{n-1}(x)=\frac{(P)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau^2)^{-1/2}T_n(\tau)\,d\tau}{\tau-x}=U_{n-1}(x),$$

$$n=0,1\cdots \tag{2.3.26}$$

这里和前面一样，$U_{-1}(x)\equiv 0$，并且（2.3.25）对$n=0$不成立。这些结果可以通过下述叙述而得以解释，即多项式$T_n(x)$和$U_{n-1}(x)$分别为复变函数$R_n(z)$和$G_{n-1}(z)$对$|x|\leqslant 1$的主值。这个结果将在§2.4中用到。

阐明这一节所得结果的历史，是困难的，方程（2.3.26）被写成的形式

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta\,d\theta}{\cos\theta-\cos\phi}=\frac{\sin n\phi}{\sin\phi},\quad n=0,\ 1\cdots \tag{2.3.27}$$

是Glauert积分(Glauert,1948, p.92)。表达式(2.3.18)出现在Klubin(1952)的文章中，也可以参阅Pykhteev的著作(1959)，而（2.3.25)式和(2.3.26）式出现在Abramowitz与Stegun的1964年版的著作中，虽然在第二版（1970）之前，（2.3.25）式已经被正确地给出来了。（2.3.26）的积分形式，将在例题

2.3.8中给出，它为Popov((1961a)，(1963a)，(1969))所广泛使用。

这一节中论及的结果，形成了例题的内容，作为计算积分$G_{n-1}(z)$的出发点。让$\tau=\cos\theta$，那么

$$G_{n-1}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta}{\cos\theta-z} \tag{2.3.28}$$

构造一个和式

$$G_{n-1}(z)+G_{n-1}(z)-2zG_n(z)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(n+2)\theta+\cos n\theta-2z\cos(n+1)\theta}{\cos\theta-z}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2\cos(n+1)\theta[\cos\theta-z]}{\cos\theta-z}\mathrm{d}\theta=0$$

$n=0,1,2\cdots$

于是$G_n(z)$满足Chebyshev递推关系（见(2.3.4)与(2.3.5)）

$$G_{n+1}(z)+G_{n-1}(z)-2zG_n(z)=0,\quad n=0,1,2\cdots \tag{2.3.29}$$

最前面的积分是

$$G_{-1}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta-z},\quad G_0(z)=1+2G_{-1}(z) \tag{2.3.30}$$

积分$G_{-1}(z)$是基本的一个，所有的$G_n(z)$都同它相关；它可以用围线积分算出来，但它必须被定义在沿$(-1,1)$割开的平面上。可以把它写成

$$G_{-1}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\exp(\mathrm{i}\theta)\mathrm{d}\theta}{\exp(2\mathrm{i}\theta)+1-2\exp(\mathrm{i}\theta)z}$$

$$=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^2+1-2\xi z} \tag{2.3.31}$$

其中Γ是ξ平面上的单位圆。被积函数有两个极点ξ_1和ξ_2

$$\xi_1=z-(z^2-1)^{1/2},\quad \xi_2=z+(z^2-1)^{1/2}$$

若$(z^2-1)^{1/2}$分枝被选为满足

$$(z^2-1)^{1/2}=z+O(z^{-2}),\ \text{当}\ |z|\ \text{很大时}$$

（图2.2.1表示的那一个分枝），那么ξ_1位于Γ的内侧，ξ_2位于Γ的外侧，并且

$$G_{-1}(z) = -\frac{1}{\pi i(\xi_1-\xi_2)}\int_\Gamma\left\{\frac{1}{\xi-\xi_1}-\frac{1}{\xi-\xi_2}\right\}d\xi$$

$$= -\frac{2}{\xi_1-\xi_2} = -(z^2-1)^{-1/2} \qquad (2.3.32)$$

由$G_{-1}(z)$的这个值，由（2.3.30）给定的$G_0(z)$的值和递推关系（2.3.29），我们推导出（2.3.19）。方程（2.3.18）可以类似地建立起来。

例2.3

1. 若$f(t) = \sum_{n=0}^{N}{}' a_n T_n(t)$，$|t|\leqslant 1$，并且记号$'$表示第一项取一半的值，则用（2.3.8）证明

$$a_n = \pi^{-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1/2}f(t)T_n(t)dt$$

2. 推导正交性条件

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{1/2}U_n(t)U_m(t)dt = \delta_{n,m}$$

其中$\delta_{n,m}$是Kronecker δ函数

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0, n\neq m \\ 1, n = m \end{cases}$$

3. 从几何级数

$$1+\exp(it)+\exp(2it)+\cdots+\exp(Nit)$$
$$= (\exp[(N+1)it]-1)/(\exp(it)-1)$$

出发，证明恒等式（2.3.9）。

4. $(z^2-1)^{1/2}$的另一个分枝可以求出来，使图2.2.1中的θ_1与θ_2在$-\pi\leqslant\theta_i\leqslant\pi$范围内即可。求这个分枝的边界值。

5. 证明，对于$n=2,3,\cdots$由（2.3.16）定义的$R_n(z)$满足

$$R_{n+1}(z)+R_{n-1}(z)-2zR_n(z) = 0 \qquad (A)$$

在（2.3.16）中记$z=\cos\theta$，证明

$$2R_n(z) = G_n(z)-G_{n-2}(z), n=1,2,\cdots$$

由此再利用(2.3.19)证明(2.3.18)。若$R_0(z)=1$，证明递推关系

(A)对$n=1$也成立。

6．推导公式（2.3.20）—（2.3.23）与（2.3.25）。

7．证明 $R_n(x)=T_n(x)-(x^2-1)^{1/2}U_{n-1}(x)$ 和 $G_{n-1}(x)=U_{n-1}(x)-(x^2-1)^{-1/2}T_n(x)$

8．就x积分（2.3.26），以证明

$$-\pi^{-1}\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{-1/2}\ln|t-\tau|\,T_n(\tau)\,d\tau=\begin{cases}n^{-1}T_n(t) & \text{若}n\neq 0\\ \ln 2 & \text{若}n=0\end{cases}$$

这个结果提供了个例子，它被Popov（1969）命名为多项式核，见§6.11

9．证明，下式定义的$A_n(x)$

$$A_n(x)=\pi^{-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1/2}T_n(t)\ln(x-t)\,dt$$

满足$A_n'(x)=-G_{n-1}(x)=-R_n'(x)/n$，$n\neq 0$，由此推演出$A_n(x)=-R_n(x)/n$，$n\neq 0$．证明$A_0'(x)=-G_{-1}(x)=(x^2-1)^{-1/2}$，再由此推演出

$$A_0(x)=-\ln[2\{x-(x^2-1)^{1/2}\}]$$

2.4 一般外形的无摩擦压头的压痕

无摩擦压头引起的压痕有两类不同的问题。第一类压痕叫做完全侵入，压头与半平面上一个给定接触区域完全接触，半平面边界上的法向位移与冲模的外形相匹配。这类问题的特点是，在接触端点，接触压力具有平方根奇异性。第二类问题叫做不完全压痕。接触区的宽窄，也就是半平面的法向位移与压头外形相匹配的区域的宽窄，在最初是未知的。不完全压痕的特征是，在接触区的端点，接触压力等于零。

首先，我们得到某些一般的结果，能够被应用到不同的情形中去。假设接触发生在x轴的区段$-b\leqslant x\leqslant a$上．引进坐标(ξ,η)，使得

$$x=l\xi+c,\quad y=l\eta,\quad l=(a+b)/2,\quad c=(a-b)/2 \qquad (2.4.1)$$

那么，接触区为 $-1\leqslant\xi\leqslant1$. 假设在坐标 (ξ,η) 中，压头的外形可以近似地表示成为

$$\eta=y/l=\sum_{n=0}^{N}b_nT_n(t),\quad |t|\leqslant1 \tag{2.4.2}$$

若初始时 y 给定为 x 的函数，那么无量纲参数 b_n 将是 a 和 b 的、亦即 l 和 c 的实函数. 半平面的边界条件为

$$v(x,0^+)/l=-d+\sum_{n=0}^{N}b_nT_n(\xi),\quad |\xi|\leqslant1 \tag{2.4.3}$$

$$\tau_{xy}(t,0)=0,\quad |t|>1;\quad \tau_{xy}(t,0)=0,\ \text{针对所有}t \tag{2.4.4}$$

现在假定 $[-1,1]$ 上的法向载荷具有形式

$$q(t)=\mathrm{i}p(t)=\mathrm{i}(1-t^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{N}a_nT_n(t) \tag{2.4.5}$$

其中 $x=lt+c$. 位移将由方程(2.2.4) 给出；在方程中的常数 σ 将取为 l. 在 (2.2.4) 中，对应于 $\mathrm{i}(1-t^2)^{-1/2}a_nT_n(t)$ 项的第一个积分，将是

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{a}\ln\left(\frac{z-x'}{l}\right)q(x')\,\mathrm{d}x'&=\mathrm{i}la_n\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1/2}T_n(t)\ln(\xi-t)\,\mathrm{d}t\\&=\mathrm{i}la_n\pi A_n(\xi),\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

而全部位移可写成

$$\begin{aligned}4\mu\mathrm{i}D(x,y)/l=&\sum_{n=0}^{N}a_n\{kA_n(\xi)+\overline{A_n(\xi)}\\&-(\xi-\bar{\xi})G_{n-1}(\xi)\}+c^*\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

其中 $\xi=\xi+\mathrm{i}\eta$. 为使法向位移与 (2.4.5) 所给的相匹配，我们需要 $A_n(z)$ 的边界值. 方程 (2.3.22) 和例子2.3.9表明

$$A_n^+(\xi)=-[T_n(\xi)-\mathrm{i}(1-\xi^2)^{1/2}U_{n-1}(\xi)]/n,\quad n=1,2,\cdots \tag{2.4.8}$$

而例子2.2.1表明，对于 $\xi=\cos\theta$，有 $A_0^+(\xi)=-\ln2+\mathrm{i}\theta$. 这样，在 $|\xi|\leqslant1$ 上的法向位移被给定为

$$v(x,0^+)/l = C + \vartheta \sum_{n=1}^{N} n^{-1} a_n T_n(\xi) \tag{2.4.9}$$

并且边界条件（2.4.3）将被满足，如果

$$b_n = \vartheta_n^{-1} a_n, \quad n = 1,2, \cdots, N \tag{2.4.10}$$

系数a_0与压头的形状无关，但是总的外加载荷为

$$P_0 = -\int_{-b}^{a} \tau_{yy} \mathrm{d}x = \pi l a_0 \tag{2.4.11}$$

冲模上作用的力矩为

$$M = -\int_{-b}^{a} x\tau_{yy} \mathrm{d}x = l\int_{-1}^{1} (lt+c)(1-t^2)^{-1/2}(a_0 + a_1 T_1(t))\mathrm{d}t$$

$$= \pi l(2ca_0 + la_1)/2 \tag{2.4.12}$$

因此我们得到结论，当压头在$[-b,a]$上完全接触时，那么，方程（2.4.3）成立，a_n和b_n由（2.4.10）相联系起来，a_0由（2.4.11）与合力P_0相联系；接触应力在端点$|\xi| = 1$有平方根的奇异性.

现在考虑对称冲头的不完全压痕问题. 假定接触发生在$[-a,a]$上，其中a在开头是未知的，而冲头受一已知力P_0作用而压入半平面. 宁可把已知角色与未知角色交换一下，假定a是已知的，而来寻求$[-a,a]$上形成不完全压痕所需要的力P_0的大小.

因此假定冲头的外形可以近似表示成

$$y/a = \sum_{n=0}^{N} b_n T_n(t) \tag{2.4.13}$$

这里，若压头为对称的，则奇数下标的b_n将要都等于零，同时再取b_0等于零. 接触压力由（2.4.5）式给出，因而有显式

$$p(t) = -\tau_{yy} = (1-t^2)^{-1/2}\left[P_0/(\pi a) + \vartheta^{-1}\sum_{n=1}^{N} n b_n T_n(t)\right] \tag{2.4.14}$$

因此接触压力在端点$t = \pm 1$为零的条件为

$$\vartheta P_0 = -\pi a \sum_{n=1}^{N} n b_n, \quad n\text{为偶数} \tag{2.4.15}$$

这是联系P_0与接触长度$2a$之间的关系式.

作为例子，取在§2.2中讨论过的曲率半径为R的抛物线形底面的冲头. 那么，其外形为

$$-\frac{y}{a} = \frac{x^2}{2aR} = \frac{at^2}{2R} = \frac{a(2t^2-1)}{4R} + \frac{a}{4R}$$

$$= \frac{a}{4R}[T_0(t) + T_2(t)] \tag{2.4.16}$$

因此，$b_2 = -a/(4R)$，压力是

$$P(t) = -\tau_{yy} = 2P_0(1-t^2)^{1/2}/(\pi a) \tag{2.4.17}$$

并且要求的力是

$$P_0 = \pi a^2/(2\vartheta R) \tag{2.4.18}$$

为了进一步说明问题，考虑一个平底压头，如图2.4.1所示，同时受压和扭. 若接触发生在$[-b,a]$上面，那么，其外形为

$$y/l = -d + \alpha x \tag{2.4.19}$$

所以$b_1 = a$. 应力分布将由(2.4.5)给出；即

$$\vartheta\tau_{yy} = -(1-t^2)^{-1/2}[\vartheta\pi^{-1}P_0/l + aT_1(t)] \tag{2.4.20}$$

并且围绕原点$x=0=y$的力矩M将是

$$M = cP_0 + \pi l^2 a/(2\vartheta) \tag{2.4.21}$$

这个方程能够反过来用M与P表示a；那么τ_{yy}可以写成

$$\tau_{yy} = -(\pi l)^{-1}(1-t^2)^{-1/2}[P + 2(M-cP)t/l] \tag{2.4.22}$$

若$M=0$，接触将发生在$[-a,a]$上面，所以$b=a$，$c=0$. 现在考虑M稳定增长的效应. 首先接触将仍发生在$[-a,a]$上面；这样，b将仍等于a，$c=0$；在压头的端点，τ_{yy}仍将具有平方根的奇异性. 然而，当M达到值$lP/2 = aP/2$(记住$a=b=l$)，τ_{yy}的分子在$t=-1$点等于零，所以在那里τ_{yy}等于零. 对于M的这个值，压头在$t=-1(x=-a)$点开始失去与半平面的接触. 当M进一步增加时，b将减小，接触区将减小，接触范围将由下式给出

$$P = 2(M - cP)/l, \text{ 亦即} b = 3a - 4M/P \qquad (2.4.23)$$

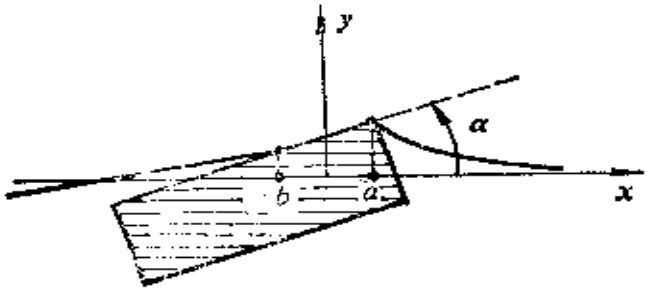


图2.4.1 平压头非对称地压入半平面

当M/P达到数值a时，那么$b = -a$，压头翻倒。显然，把这些结果应用到真实的物理压头时，必须充分谨慎从事。这个结果是根据无限小变形弹性理论和作用在$y = 0$上的边界条件而给出的，而不是根据压头与半平面之间的交界面上的条件求解的。

例2.4

1，利用$A_2(s)$与$A_0(s)$的边界值，推导$t>1$范围内、接触压力分布(2.4.17)所对应的边界法向位移的公式

$$v = C + \frac{\vartheta P_0}{\pi}\left\{ \ln w + \frac{1}{2w^2}\right\}, \quad w = [t + (t^2-1)^{1/2}]$$

2.5 Boussinesq与Cerruti问题的解

Boussinesq与Cerruti和其他的19世纪的研究者，研究了求解半空间 $z \geqslant 0$内弹性位移场的两个基本问题，在$z = 0$平面上给定

a) τ_{xz}, τ_{yz}, τ_{zz}

或

b) u, v, w

的条件下。这些问题的解是Boussinesq和Cerruti在1882年独立地得到的。这一课题的历史性的说明，可以在Todhunter与Pearson (1893, p.1489以及下列等等) 和Love(1927, p.16和Chapter X)等著作中找到。

问题a)在三维情形的Boussinesq解可以考虑成无体力时求

解(1.10.11)式的特殊情形. 首先，这样选取ϕ和$\vec{\psi}$，使得$\psi_1=0=\psi_2$，$\psi_3=\psi$；那么，

$$2\mu u=-\frac{z\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad 2\mu v=-\frac{z\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{2.5.1}$$

$$2\mu w=4(1-\nu)\psi-\left(\frac{z\partial\psi}{\partial z}+\psi+\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{2.5.2}$$

设平面$z=0$上由闭曲线所界限的S部分上作用着法向压力$p(x,y)$，于是

$$\tau_{zz}(x,y,0)=-p(x,y)，对于S中的点(x,y) \tag{2.5.3}$$

又假定边界上无其他面力作用，因而

$$\tau_{xz}(x,y,0)=0=\tau_{yz}(x,y,0) \tag{2.5.4}$$

此外，

$$\tau_{zz}(x,y,0)=0，当点(x,y)在S之外时 \tag{2.5.5}$$

对应于位移(1.10.11)的应力是

$$\tau_{xz}=\frac{(1-2\nu)\partial\psi}{\partial x}-\frac{z\partial^2\psi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} \tag{2.5.6}$$

$$\tau_{yz}=\frac{(1-2\nu)\partial\psi}{\partial y}-\frac{z\partial^2\psi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} \tag{2.5.7}$$

$$\tau_{zz}=\frac{2(1-\nu)\partial\psi}{\partial z}-\frac{z\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{2.5.8}$$

像在§2.1所讨论的平面问题那样，进行现在的分析. 若

$$\lim_{z\to 0}\left\{\frac{z\partial^2\psi}{\partial x\partial z},\ \frac{z\partial^2\psi}{\partial y\partial z},\ \frac{z\partial^2\psi}{\partial z^2}\right\}=0 \tag{2.5.9}$$

又假设

$$(1-2\nu)\psi=\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{2.5.10}$$

则$z=0$平面上的应力τ_{xz}、τ_{yz}将等于零，而正应力为

$$\tau_{zz}=\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{z\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{2.5.11}$$

这个问题因此演变成确定函数ψ的问题，其导数在$z=0$上具有给定的值．这个问题的Boussinesq解，用积分形式表达成

$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\iint_S\frac{f(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{R} \tag{2.5.12}$$

其中$R=\{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\}^{1/2}$是介质中的点$(x,y,z)$到表面上的点$(x',y',0)$之间的距离．有必要表明，积分(2.5.12)产生一个满足条件（2.5.3）式～（2.5.5）式的调和函数．从形式上

$$\left.\begin{aligned}
\frac{2\pi\partial\psi}{\partial z}&=-z\iint_S\frac{f(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{R^3}\\
\frac{2\pi\partial^2\psi}{\partial x^2}&=-1\iint_S\frac{f(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{R^3}\\
&\quad+3\iint_S\frac{(x-x')f(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{R^5}\\
\frac{2\pi\partial^2\psi}{\partial x\partial z}&=3z\iint_S\frac{(x-x')f(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{R^5}
\end{aligned}\right\} \tag{2.5.13}$$

（2.5.13）的三个方程加到一起，表明ψ是调和的．当$(x,y,0)$在S外，那么R恒不为零，$\partial\psi/\partial z$，$z\partial^2\psi/\partial x\partial z$，$z\partial^2\psi/\partial y\partial z$，$z\partial^2\psi/\partial z^2$中的积分全有很好的定义，并且全部这四个量，在$z=0$，为零，正如方程（2.5.8）与（2.5.9）所要求的那样．为了验证S内的条件，我们以启发性的方式进行讨论，而把艰难的论证留给读者去做．让$P^*(x,y,z)$为$z>0$范围内的点，x和y与点$P(x,y,0)$的坐标相同．我们考虑P^*点的应力，并且寻求当z趋于零时这些应力的极限值．〔注意，人们应该取P^*为(x^*,y^*,z)并且寻求$(x^*,y^*,z)\to(x,y,0)$的极限；这留给读者去做．〕让S_ε是一个半径为ε，中心为P、全部位于S内的一个圆，如图2.5.1所示．

因为P位于$S-S_\varepsilon$之外，根据上面用过的论证，$S-S_\varepsilon$上的积分对P点的应力τ_{xz}，τ_{yz}，τ_{zz}的贡献，将等于零。因此，考虑S_ε上的积分的贡献，便足够了。引进对于以P为原点的极坐标r,θ,z，来自S_ε的对$\partial\psi/\partial z$的贡献为

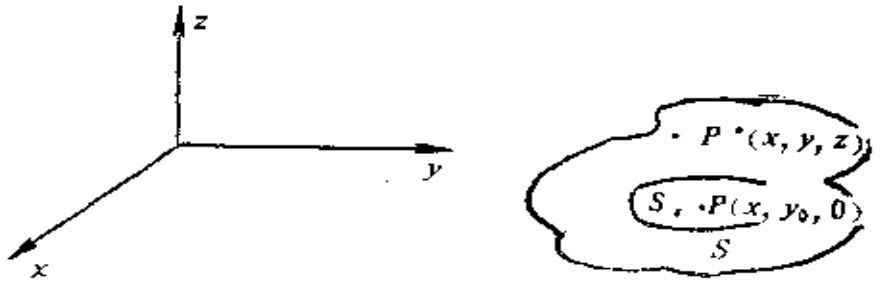


图2.5.1　S_ε，圆心为P，半径ε，位于平面$z=0$上的S内部

$$\frac{2\pi\partial\psi}{\partial z}=-zf(x,y)\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varepsilon}\frac{rdr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=-2\pi f(x,y)z\{z^{-1}-(\varepsilon^2+z^2)^{-1/2}\}\qquad(2.5.14)$$

于是，当$\varepsilon>0$时

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)=-f(x,y)\qquad(2.5.15)$$

这意味着，若$\lim_{z\to 0}(z\partial^2\psi/\partial z^2)=0$时，对于$(x,y)$在$S$内，则在取

$$f(x,y)=p(x,y)\qquad(2.5.16)$$

时，条件（2.5.3）可以得到满足。这样

$$\psi(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\iint_S\frac{p(x',y')dx'dy'}{R}\qquad(2.5.17)$$

并且把（2.5.17）就z积分，得到

$$\phi(x,y,z)=\frac{(1-2\nu)}{2\pi}\iint_S\ln(z+R)\,p(x',y')dx'dy'$$

$$(2.5.18)$$

Love（1927）叙述了ψ和ϕ的某些进一步的极限性质，位移和应

力，在应用上，是重要的。

由下式给出的势(Tod hunter and Pearson, 1893, p.244)

$$2(1-\nu)\psi_1 = -\frac{\partial \chi}{\partial y}, 2(1-\nu)\psi_2 = \frac{\partial \chi}{\partial y}, 2(1-\nu)\psi_3 = \frac{\partial \theta}{\partial z}$$
$$\phi = \theta - x\psi_1, -y\psi_2 \tag{2.5.19}$$

$$\theta = -\frac{(1-\nu)}{\pi}\iint \frac{(x-x')f_1(x',y') + (y-y')f_2(x',y')}{z+R} \times \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$
$$\chi = -\frac{1}{2\pi}\iint \frac{(x-x')f_2(x',y') - (y-y')f_1(x'y')}{z+R}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{2.5.20}$$

对应于区域S上的剪切载荷

$$\tau_{xz}(x,y,0) = -f_1(x,y), \quad \tau_{yz}(x,y,0) = -f_2(x,y) \tag{2.5.21}$$

在结束这一节时，我们给出位移的显式，这些位移是由平面$z=0$的一部分区域上的分布作用力所引起的。首先得到原点上作用的点载荷引起的位移，是方便的。让这个力具有分量(X,Y,Z)，所以

$$\tau_{xz}(x,y,0) = -X\delta(x)\delta(y), \quad \tau_{yz}(x,y,0) = -Y\delta(x)\delta(y) \tag{2.5.22}$$

$$\tau_{zz}(x,y,0) = -Z\delta(x)\delta(y) \tag{2.5.23}$$

其中$\delta(x)$是Dirac δ函数，具有性质

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{2.5.24}$$

那么若$T = (xX + yY)/R$，这里$R = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$，则位移由下式给出：

$$4\pi\mu u = \frac{2(1-\nu)X}{z+R} + \frac{2\nu Tx}{(z+R)^2} - \frac{(1-2\nu)Zx}{R(z+R)}$$

$$+\frac{z}{R}\left\{\frac{X}{z+R}+\frac{Tx(z+2R)}{R(z+R)^2}+\frac{Zx}{R^2}\right\} \tag{2.5.25}$$

$$4\pi\mu v=\frac{2(1-\nu)Y}{z+R}+\frac{2\nu Ty}{(z+R)^2}-\frac{(1-\nu)Zy}{R(z+R)}$$

$$+\frac{z}{R}\left\{\frac{Y}{z+R}+\frac{Ty(z+2R)}{R(z+R)^2}+\frac{zy}{R^2}\right\} \tag{2.5.26}$$

$$4\pi\mu w=\frac{2(1-\nu)Z}{R}+\frac{(1-2\nu)T}{z+R}+\frac{z}{R}\left\{\frac{Zz}{R^2}+\frac{T}{R}\right\} \tag{2.5.27}$$

这些结果一个重要的应用，是由$z=0$上的分布面力引起的表面$z=0$上的位移。于是，由法向载荷$\tau_{zz}(x,y,0)=-p(x,y)$引起的位移，为

$$2\pi u(x,y,0)=-\varphi\vartheta\iint_s\frac{(x-x')\,p(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{\{(x-x')^2+(y-y')^2\}} \tag{2.5.28}$$

$$2\pi v(x,y,0)=-\varphi\vartheta\iint_s\frac{(y-y')\,p(x',y')\,dx'dy'}{\{(x-x')^2+(y-y')^2\}} \tag{2.5.29}$$

$$2\pi w(x,y,0)=\vartheta\iint_s\frac{p(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{\{(x-x')^2+(y-y')^2\}} \tag{2.5.30}$$

其中ϑ，φ由（1.6.15）给出.

例2.5

1. 证明极限（2.5.9）都是零，甚至当P在S内时.

2. 建立结果（2.5.25）～（2.5.27）.

3. 先证明，若$z\geqslant 0$时，$\phi(x,y,z)$是调和的，而且在无限远处有界，$z=0$时等于零，因而它恒等于零.由此建立（2.5.17）.

4. 证明，这一节开始时提到的问题(b)的解，可以由一般解

$$\vec{d}=\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial z}-\frac{z}{3-4\nu}\nabla\mathrm{div}\vec{\phi}$$

得到，这个解也曾在例1.10.3中得到过.如同在处理问题(a)中那样，推导，若在$z=0$，$\vec{d}=\vec{d}_0(x,y)$，以及在无穷远处$|\vec{d}|=0\left(\frac{1}{R}\right)$，那么，

$$\vec{\phi}(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\iint_{s}\frac{\vec{d}_n(x',y')\,dx'\,dy'}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\}^{1/2}}$$

其中积分遍及整个$z=0$平面.

5. 若$H_{ij}(x-x',y-y')$标志在(x',y')处的点载荷引起的j(1,2,3)方向的位移$u_i(x,y)$ $(u_1=u, u_2=v, u_3=w)$，用Betti定理，证明

$$H_{ij}(x-x',y-y') = H_{ji}(x-x',y'-y)$$

数量H_{ij}称为影响系数，可以从(2.5.25)～(2.5.27)推导出来.

2.6 圆形区域上的轴对称载荷

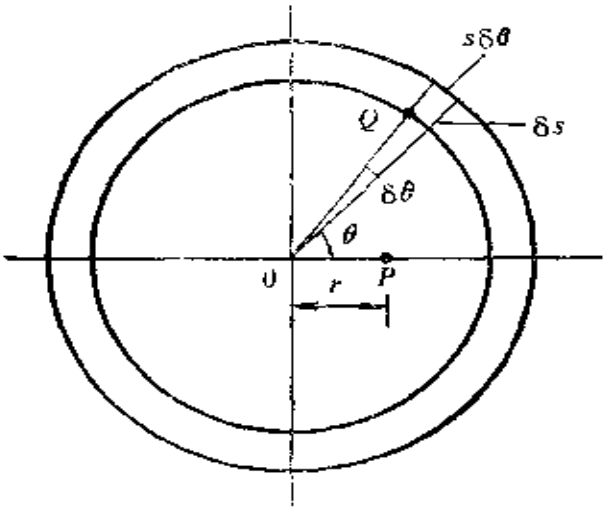


图2.6.1 距离PQ为$(r^2+s^2-2rs\cos\theta)^{1/2}$

在§ 2.5中，我们推导了作用在原点的表面点力引起的弹性半空间的位移表达式. 由轴对称分布载荷引起的位移，将是轴对称的. 于是由半径为a的圆上的轴对称分布载荷引起的位移u_r，u_z可以分别由x轴上$(r,0)$点的位移u和w确定，如图 2.6.1所示. 这样，由法向载荷$p(s)$引起的法向位移，可以由 (2.5.30) 得到

$$u_z(r) = w(r) = \left(\frac{\vartheta}{2\pi}\right)\int_0^a sp(s)\,ds\int_0^{2\pi}(r^2+s^2-2rs\cos\theta)^{-1/2}d\theta \tag{2.6.1}$$

这是一个椭圆积分，我们写[s为表面圆域中一点的r的数值，即$r=s$，s是动点，s点上的压力$p(s)$在点r(P点)上产生位移$w(r)$]❶

❶ 原书对于符号a和s没有给出交待，这里用括号中的话对原文作了补充，a是圆的半径。

——校者与译者

$$r^2+s^2-2rs\cos\theta=r^2+s^2-2rs[2\cos^2(\theta/2)-1]$$
$$=(r+s)^2-4rs\cos^2(\theta/2)$$

于是

$$\int_0^{2\pi}(r^2+s^2-2rs\cos\theta)^{-1/2}\,d\theta$$

$$=\frac{4}{(r+s)}\int_0^{\pi/2}\left[1-\frac{4rs\cos^2\phi}{(r+s)^2}\right]^{-1/2}d\phi$$

和

$$w(r)=\frac{\vartheta}{2\pi}\int_0^a\frac{4s}{(r+s)}K\left(\frac{2(rs)^{1/2}}{r+s}\right)p(s)\,ds \qquad (2.6.2)$$

其中$K(\cdot)$表示第一类完全椭圆积分。

此外，若在$z=0$还加上一个分布的剪应力τ_{rz}，即

$$\tau_{rz}=-t(r),\quad \tau_{zz}(r,0)=-p(s),\quad r<a \qquad (2.6.3)$$

那么

$$u_r(r)\equiv u(r)=\int_0^a sk_{11}(r,s)t(s)\,ds+\int_0^a sk_{13}(r,s)\,p(s)\,ds \qquad (2.6.4)$$

$$u_z(r)\equiv w(r)=\int_0^a sk_{31}(r,s)t(s)\,dt+\int_0^a sk_{33}(r,s)\,p(s)\,ds \qquad (2.6.5)$$

其中，对于$r<s$，k_{ij}的值为

$$k_{11}(r,s)=\frac{2\vartheta}{\pi r}\{K(r/s)-E(r/s)\} \qquad (2.6.6)$$

$$k_{13}(r,s)=0,\quad k_{31}(r,s)=-\vartheta\varphi/s \qquad (2.6.7)$$

$$k_{33}(r,s)=\frac{2\vartheta}{\pi s}K(r/s) \qquad (2.6.8)$$

而对于$r>s$，这些函数可以用关系式

$$k_{ij}(r,s)=k_{ji}(s,r) \qquad (2.6.9)$$

得到。$E(\cdot)$表示第二完全椭圆积分。由(2.6.2)与(2.6.8)所给定的k_{33}表达式的等价性，是例题2.6.5的主题。这些结果的

另一种推导，可以在Noble与Spence（1971）和Spence（1975a）的著作中查到.

方程（2.6.4），（2.6.5）的两个重要结果是：

a) $s\leqslant a$上面的轴对称剪应力分布，不产生$r=a$外部的表面法向位移.

b) $s\leqslant a$上的轴对称法向位移，产生$r=a$外部的径向位移，后一种位移正比于$1/r$（见例题2.6.7）.

Klubin（1952）与Popov（1962）已经表明，若法向应力分布用修正的Legendre多项式表达，那么，在（2.6.1）中的积分可以用封闭的形式计算出来. 这是在§6.11中证明了一个普遍结果的一个特殊情形. Legendre多项式$P_n(x)$被定义为

$$P_0(x)=1, \qquad P_1(x)=x \tag{2.6.10}$$

和递推关系

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x) \tag{2.6.11}$$

而Popov的结果简单地说明，若压力分布

$$p(r)=(1-r^2/a^2)^{-1/2}P_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}] \tag{2.6.12}$$

作用在$r\leqslant a$上面，怎么，$r\leqslant a$内的$w(r)$，有表达式

$$w(r)=\frac{\pi}{2}\vartheta a[P_{2n}(0)]^2P_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}] \tag{2.6.13}$$

其中

$$P_{2n}(0)=(-1)^n(2n)!/[2^{2n}(n!)^2] \tag{2.6.14}$$

这可用来给出圆$r\leqslant a$上面法向载荷的分布，它将产生$r\leqslant a$上面的特定的位移

$$w(r)=\frac{\pi}{2}\vartheta a\sum_{n=0}^{N}a_n[P_{2n}(0)]^2P_{2n}\left[\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}\right] \tag{2.6.15}$$

而压力是

$$p(r)=\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}\sum_{n=0}^{N}a_nP_{2n}\left[\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}\right] \tag{2.6.16}$$

总载荷为

$$P = 2\pi\int_0^a s\,p(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi a^2 a_0 \quad ❶ \qquad (2.6.17)$$

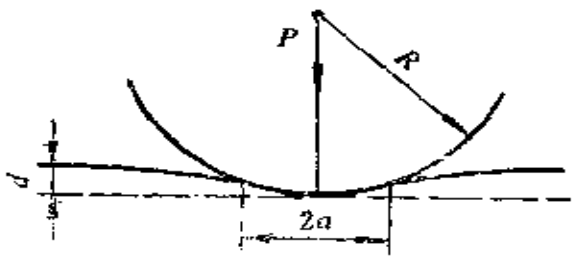


图2.6.2 刚球形压头压入半空间

其中在例子 2.6.6 中的正交性条件已被应用.

作为一个例子，考虑一个刚性球形帽，受法向力 P 作用，压在半空间上. 若圆球的半径为 R，并且与半空间上一个半径为 a 的圆相接触（在开始时，a 为未知），如图 2.6.2 所示，那么

$$w(r) = \delta - r^2/2R, \qquad r \leqslant a \qquad (2.6.18)$$

记

$$w(r) = \frac{\pi}{2}\vartheta a\{a_0[P_0(0)]^2 + a_1[P_2(0)]^2 P_2[(1-r^2/a^2)^{1/2}]\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\vartheta a\left\{a_0 + \frac{a_1}{4}[3(1-r^2/a^2) - 1]/2\right\}$$

我们求出

$$\frac{3\pi\vartheta a_1}{16} = \frac{a}{2R}, \quad \frac{\pi\vartheta a_0}{2} = \frac{\delta}{a} - \frac{a}{3R}$$

接触半径由条件 $P(0) = 0$，亦即

$$\sum_{n=0}^{N} a_n P_{2n}(0) = 0 \qquad (2.6.19)$$

确定. 在这个例子中，$2a_0 - a_1 = 0$ 或者 $\delta = a^2/R$，由此给出，$\pi a\vartheta a_0/2 = 2a/(3R)$，并且有

$$P = 8a^3/(3\vartheta R) \qquad (2.6.20)$$

它在Hertz接触中为已知结果. 压力分布为

---

❶ 这个 a_0 具体表示什么量，原书作者没有交待。看来，它是式(2.6.16)中包含的系数 a_n，详见下面式(2.6.19)前一个式子。

——校者与译者

$$p(r)=\frac{3P(a^2-r^2)^{1/2}}{(2\pi a^3)} \tag{2.6.21}$$

England与Shail（1977）表明，在表面$z=0$上，$r=a$的外部的位移，可以用第二类Legendre关联函数Q_n表示，（2.6.15）和（2.6.16）式对应的位移是（见§6.5）

$$w(r)=\vartheta Q_1\sum_{n=0}^{N}a_n[P_{2n}(0)]^{-1}Q_{2n}[\mathrm{i}(r^2/a^2-1)^{1/2}],\quad r>a \tag{2.6.22}$$

其中$\mathrm{i}Q_{2n}$可以由下列式子计算出来

$$\mathrm{i}Q_{2n}(\mathrm{i}\xi)=(-1)^n\xi\int_0^1\frac{x^{2n}(1-x^2)^n}{(\xi^2+x^2)^{n+1}}\mathrm{d}x \tag{2.6.23}$$

特别地，我们注意到

$$\mathrm{i}Q_0[\mathrm{i}(r^2/a^2-1)^{1/2}]=\arcsin(a/r) \tag{2.6.24}$$

所以（2.6.15）和（2.6.16）的第一项给出熟知的平底圆柱冲头的位移

$$w(r)=\begin{cases}1, & r\leqslant a\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin(a/r), & r>a\end{cases} \tag{2.6.25}$$

例2.6

1. 证明式（2.6.4）与（2.6.8）证明，作用在半径为a的圆域上的常压力$p=\dfrac{P}{(\pi a^2)}$引起的位移由下式给出(Terazawa,1961)

$$\frac{\pi^2 a w(r)}{2\vartheta P}=\begin{cases}E(r/a), & r<a\\ (r/a)[E(a/r)-(1-a^2/r^2)K(a/r)], & r>a\end{cases}$$

注意，位移在$r=a$上连续，而导数$\partial w/\partial r$在那里为无限。

2. 确定$q=w/a(\vartheta P)$，它对应于总载荷P的位移。对平底冲头，证明$q=1/4$，并且对于例题2.6.1中的分布载荷。

$q(0)=1/\pi, q(a)=2/\pi^2, q_{平均}=2/(3\pi)$

3. 利用Betti互换关系（§1.7）证明互换关系（2.6.9）。

4. 利用恒等式

$$\frac{-s(r-s\cos\theta)}{r^2+s^2-2rs\cos\theta}=-\frac{s}{2r}+\frac{s\exp(i\theta)}{2r}\left\{\frac{1}{\exp(i\theta)-r/s}-\frac{1}{\exp(i\theta)-s/r}\right\}$$

推导（2.6.7）中给出的A_{13}和A_{31}的表达式。

5. 证明，由（2.6.2）与（2.6.8）所给的A_{33}的表达式，是等价的。

6. 从正交性条件

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=2\delta_{nm}/(2n+1)$$

出发，对Legendre多项式，推导

$$a^{-2}\int_{-1}^{1}r(1-r^2/a^2)^{-1/2}P_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}]P_{2m}[(1-r^2/a^2)^{1/2}]dr$$

$$=\delta_{nm}/(4n+1)$$

并且由此推导出（2.6.17）

7. 证明，均匀分布在半径为a的圆域上的一个力P引起的径向位移为

$u_r=-\frac{r\vartheta\varphi P r}{2\pi a^3}$，$r<a$；$u_r=\frac{-\vartheta\varphi P}{2\pi r}$，$r>a$。

2.7 作用在椭圆区域上的载荷

§2.5的结果允许人们以积分形式表示半空间边界的一部分区域上的分布法向作用力与剪切作用力引起的位移场。在这一节中，我们将叙述与作用在椭圆区域上的特殊分布力有关的重要结果。这些结果的推导，将推迟到§12.2，那时，Fourier变换方法将使我们能够推导更为一般的结果。

方程（2.5.30）表明，由$z=0$平面内的一个区域S上的分布压力$p(x',y')$引起的法向位移$w(x,y,0)=w(x,y)$是

$$w(x,y)=\frac{\vartheta}{2\pi}\int_S\frac{p(x',y')dS'}{R}\qquad(2.7.1)$$

其中$R^2=(x-x')^2+(y-y')^2$，并且

$$\vartheta = \frac{(1-\nu)}{\mu} \tag{2.7.2}$$

其主要结果如下. 让S是椭圆$L \equiv \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{1/2} = 0$的内部，并且记$L' \equiv \left(1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}\right)^{1/2}$，在$S$的一个内点上，由分布在$S$上的总载荷为$P_0$的压力

$$p(x', y') = \frac{P_0}{2\pi a b L'} \tag{2.7.3}$$

引起的位移为常数，即

$$w(x, y) = \frac{\vartheta P_0 K(e)}{2\pi a} \tag{2.7.4}$$

其中$e = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$，$K(e)$是第一类完全椭圆积分. 这个结果表明，分布载荷（2.7.3）式对应着椭圆形横截面的平底冲头，无摩擦地作用在半空间上.

方程（2.6.18）的普遍化如下：若

$$p(x', y') = p_0 L' \tag{2.7.5}$$

那么在S内

$$w(x, y) = \frac{1}{2}\vartheta b p_0 \left\{K(e) - D(e)\frac{x^2}{a^2} - B(e)\frac{y^2}{b^2}\right\} \tag{2.7.6}$$

其中

$$D(e) = \frac{K(e) - E(e)}{e^2}, \quad B(e) = \frac{E(e) - (1-e^2)K(e)}{e^2} \tag{2.7.7}$$

$E(e)$是第二类完全椭圆积分. $D(e)$，$B(e)$在$e \to 0$时的极限值为$D(0) = B(0) = \pi/4$.

一个进一步的结果是，位移对应于从平面上翘起的冲头，即

$$w(x, y) = \delta + \alpha x + \beta y, \quad \text{在} S \text{内} \tag{2.7.8}$$

与应力分布

$$p(x',y')=\frac{1}{\vartheta bL'}\left\{\frac{\delta}{K(e)}+\frac{\alpha x'}{D(e)}+\frac{\beta y'}{B(e)}\right\} \qquad (2.7.9)$$

对于圆形冲头，它变成

$$p(x',y')=\frac{2(a^2-r^2)^{-1/2}}{\pi\theta}\left\{\delta+2\alpha x'+2\beta y'\right\}^{\textcircled{1}} \qquad (2.7.10)$$

注意，若冲头以其整个底面与半空间接触，亦即若$p(x',y')$在S上处处为正，那么是同α和β相比，δ必须是充分大的数值，才可保证这一点（例2.7.1）.

例2.7

1. 证明，若一个圆形冲头在（2.7.10）式载荷作用下与半空间在半径为a的整个圆域上相接触，那么，$\delta>a(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$.

2.8 Betti 互易定理的用途

对无体力的静力学问题，Betti定理（1.7.8）式叙述为

$$\int_S \vec{T}_*\cdot\vec{d}^*\,ds=\int_S \vec{T}_*^*\cdot\vec{d}\,dS \qquad (2.8.1)$$

我们重提联系一个物体的两个弹性状态的这个定理：位移$\vec{d}$和表面力$\vec{T}_*$对应于第一个状态，$\vec{d}^*$和$\vec{T}^*$对应于第二个状态. 这个定理可用于弹性半空间. 若两个场满足条件：在r趋于无穷时，$|\vec{d}|=0(1/r)$，$|\vec{T}_*|=0(1/r^2)$，则在这种情形下，S可以解释成为边界平面$z=0$.也可以证明，即使在方程（2.7.3）所显示的受载区域的边缘应力具有平方根奇异性时，这个定理仍然成立.

按照Mossakovskii（1953），Galin（1961，p.183及其以后）和Shield（1967）的著作，我们证明Betti定理可以给出有关这样的弹性场的重要信息，此弹性场为椭圆形横截面的刚性冲

① δ表示怎么，原作者没有交待. 即俄文文献中的“接近量”.

——校者

模所产生，但是这种冲模的底面外形是任意的，无摩擦地压入弹性半空间。这些结果也为 Galin (1948) 与 Mossakovskii (1951) 用椭球坐标所得到；见Galin (1961, p183以及其后)。

假定冲模的底面外形由$z=f(x,y)$给出，那么，当它被法向力P压入弹性半空间时，表面上的平衡场将满足

$$w(x,y)=\delta+f(x,y)\text{在}S\text{内部；}\ \tau_{zz}=0\text{，在}S\text{外部} \tag{2.8.2}$$

$$\tau_{xz}=0=\tau_{yz},\ \text{对于}z=0 \tag{2.8.3}$$

其中，S是接触面积，并且δ是压入的深度。对于用星号标志的场，我们取无量纲形式，它针对一个椭圆形横截面的平底冲模，对此，有

$$w^*(x,y)=1\text{，在}S\text{内部；}\ \tau^*_{zz}=0\text{，在}S\text{外部} \tag{2.8.4}$$

$$\tau^*_{zz}(x',y')=-1/[\vartheta bK(e)L']\text{，在}S\text{内部} \tag{2.8.5}$$

$$\tau^*_{xz}=0=\tau^*_{yz},\ \text{对于}z=0 \tag{2.8.6}$$

运用互易定理，我们发现，冲模（曲面外廓）上面作用的总载荷是

$$P=-\int_S\tau_{zz}\cdot 1\cdot dS=-\int_S\tau^*_{zz}w\,dS$$

$$=\frac{1}{\vartheta bK(e)}\int_S\left\{\frac{\delta+f(x,y)}{L}\right\}dS$$

或者

$$P=\frac{2\pi a\delta}{\vartheta K(e)}+\frac{1}{\vartheta bK(e)}\int_S\frac{f(x,y)\,dS}{L} \tag{2.8.7}$$

当δ（或P）已知时，这个方程确定P（或δ）。

若冲模翘起，那么，接触椭圆上的位移将具有形式

$$w(x,y)=\delta+\alpha x+\beta y+f(x,y) \tag{2.8.8}$$

其中α、β是冲模相对于x轴与y轴的倾斜角。α、β与作用力矩之间的关系，可以用翘起的平底冲模对应的场去求解。这样，我们引进

$$w^0(x,y)=x\text{，在}S\text{内部；}\ \tau^0_{xz}=0\text{，在}S\text{外部} \tag{2.8.9}$$

$$\tau^{0}_{zz}(x',y') = \frac{-x'}{\vartheta b D(e) L'}, \quad \text{在}S\text{内部} \tag{2.8.10}$$

$$\tau^{0}_{xz} = 0 = \tau^{0}_{yz}, \quad \text{对于}z=0\text{上} \tag{2.8.11}$$

并且找到

$$M_1 = -\int_S \tau_{zz} x \mathrm{d}S = -\int_S \tau^{0}_{zz}(\delta + \alpha x + \beta y + f(x,y))\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{\vartheta b D(\mathrm{e})}\int_S \frac{x}{\tau}(\delta + \alpha x + \beta y + f(x,y))\mathrm{d}S \tag{2.8.12}$$

由于椭圆的对称性，积分中有两个等于零，剩下的部分为

$$M_1 = \frac{1}{\vartheta b D(\mathrm{e})}\int_S \frac{(\alpha x^2 + x f(x,y))}{\tau}\mathrm{d}S$$

或者

$$M_1 = \frac{2\pi a^2}{3\vartheta D(\mathrm{e})}\alpha + \frac{1}{\vartheta b D(\mathrm{e})}\int_S \frac{x f(x,y)\mathrm{d}S}{\tau} \tag{2.8.13}$$

类似地，若

$$M_1 = -\int_S \tau_{zz} y \mathrm{d}S \tag{2.8.14}$$

那么

$$M_1 = \frac{2\pi b^2}{3\vartheta B(e)}\beta + \frac{1}{\vartheta b B(e)}\int_S \frac{y f(x,y)}{\tau}\mathrm{d}S \tag{2.8.15}$$ ❶

应用这些方程可以根据α、β（或M_1，M_2）确定M_1, M_2（或α，β）。

方程（2.8.7）的一个例子是，半径为R的球面光滑刚性冲模。那么，类似地

$$f(x,y) = f(r) = -r^2/(2R) \tag{2.8.16}$$

方程（2.8.7）给出

❶ 这里的b以及式(2.8.13)中a分别为椭圆的两个半轴，函数$D(e)$与$B(e)$见式(2.7.7)中的定义。

——校者与译者

$$P = 4\vartheta^{-1}[a\delta - a^3/(3R)] \tag{2.8.17}$$

方程（2.8.7）可用于确定轴对称冲模同被接触体之间的接触面积的半径，这些冲模如同圆球外廓，或抛物面外廓，它们没有突然变化的边缘．接触面半径a由条件

$$\tau_{zz}(a,0) = -p(a) = 0 \tag{2.8.18}$$

确定．对于一个半径为t的轴对称冲模，总载荷$P(t)$是

$$P(t) = 2\pi\int_0^t r\,p(r)\,dr \tag{2.8.19}$$

所以，$P'(t) = 2\pi t\,p(t)$和$p(a) = 0$暗示

$$P'(a) = 0 \tag{2.8.20}$$

对于圆球形冲模，方程（2.8.17）给出

$$P'(a) = 4\vartheta^{-1}(\delta - a^2/R)$$

它给出$a = (8R)^{1/2}$，与（2.6.19）一致，并且

$$P = 8a^3/(3\vartheta R) \tag{2.8.21}$$

压陷的深度，在一般的轴对称情形中，可从式（2.8.7）推导出来并且为

$$P(t) = \frac{4}{\vartheta}\left\{t\delta + \int_0^t \frac{r f(r)\,dr}{(t^2-r^2)^{1/2}}\right\} \tag{2.8.22}$$

因为$f(0) = 0$，上式的第二项可以用分部积分法化成

$$P(t) = \frac{4}{\vartheta}\left[t\delta + \int_0^t (t^2-r^2)^{1/2} f'(r)\,dr\right] \tag{2.8.23}$$

于是

$$P'(t) = \frac{4}{\vartheta}\left[\delta + t\int_0^t (t^2-r^2)^{-1/2} f'(r)\,dr\right]$$

以及

$$\delta = -a\int_0^a (a^2-r^2)^{-1/2} f'(r)\,dr \tag{2.8.24}$$

最后，我们用互易定理估计具有任意横截面和平底面的压头的法向力产生的位移（Galin,1961,p.192）．假定压头占据平面$z = 0$的区域E．用椭圆代表E，记椭圆的内部为S，让S的不属于E

的部分为F.那么，由压头引起的$z=0$上的位移，将满足

$w(x,y)=\delta$，在E内，$w(x,y)=v(x,y)<\delta$，在F内，

$\tau_{zz}=0$，在E外。

应用互易定理于这个场和（2.8.4）场。那么，

$$P=-\int_E \tau_{zz}\cdot 1\mathrm{d}S=-\int_S \tau_{zz}\cdot 1\cdot \mathrm{d}S=-\int_S \tau_{zz}^{*}w\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\vartheta bk(e)}\int_S \frac{w\mathrm{d}S}{L}<\frac{\delta}{\vartheta bk(e)}\int_S \frac{\mathrm{d}S}{L}=\frac{2\pi a\delta}{\vartheta k(e)}$$

于是，

$$\frac{P}{\delta}<\frac{2\pi a}{\vartheta k(e)} \tag{2.8.25}$$

其中a和e属于描述压头横截面的椭圆。

利用 Pólya与Szegö（1945）的论证，可以证明，具有平底面与任意横截面的压头，对于一个给定的力，具有比同一面积的圆形横截面的压头要小一些的位移。这样，应用方程（2.7.31），我们可以对一个面积为A的压块推导得

$$\frac{P}{\delta}>\frac{4}{\vartheta}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{1/2} \tag{2.8.26}$$

方程（2.8.25）与(2.8.29)提供了P/δ的上界与下界。

2.9 Hertz接触理论

Hertz(1882a,1882b)是第一个建立并解决了两个弹性物体接触问题的人。这个理论与被Boussinesq加以推广(见Todhunter与Pearson(1893,p257以及以后)并且为若干作者，特别是俄罗斯作者，加以深化，得到重要的应用。在Lur'e(1964,Ch.V)的书中给出了广泛的参考文献目录。

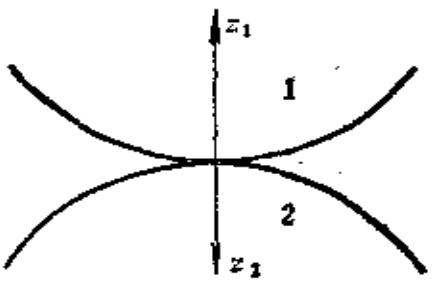


图2.9.1 Hertz接触所用的坐标轴

我们假定，在应力为零的状态中，两物体在0点接触，在0点附近，物体在几何方面是光滑的，如图2.9.1所示.然后，在0点取xy平面为共同的切平面，我们可以把这两个物体在0点附近的形状表示为

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= A_1x^2 + B_1y^2 + 2H_1xy \\ z_2 &= A_2x^2 + B_2y^2 + 2H_2xy \end{aligned}\right\} \qquad (2.9.1)$$

其中z_1和z_2指向物体内部.在不受应力作用的状态下，两个点之间的距离沿切平面xy的公共法线量度出来，为

$$z_1 + z_2 = (A_1 + A_2)x^2 + 2(H_1 + H_2)xy + (B_1 + B_2)y^2$$

不管x和y如何选取，这个数必须为正值，我们可以选择得使$H_1 + H_2 = 0$.这样，在无应力状态下

$$z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2$$

其中$A = A_1 + A_2, B = B_1 + B_2$. 当这两个物体被压在一起时，两者都将产生位移. 取物体1相对于坐标(x,y,z_1)的位移为(u_1, v_1, w_1)，而物体相对于(x,y,z_2)的，则为(u_2, v_2, w_2). 因此，在接触面积内，有

$$z_1 + w_1 = -(z_2 + w_2) + \delta$$

其中δ是两个物体的接近量. 于是，在接触面积S内

$$w_1 + w_2 = \delta - z_1 - z_2 = \delta - Ax^2 - By^2 \qquad (2.9.2)$$

在接触面积S之外

$$w_1 + w_2 > \delta - Ax^2 - By^2 \qquad (2.9.3)$$

这样，两个表面便互相分离开了.

现在假定这两个物体为两个弹性半空间所代替，他们在公共切平面内的面积S上无摩擦地接触着. Torvik (1967) 注意到，假定圆球体为半空间带来的误差，比假定应变为无穷小带来的误差小. 在§2.7中已表明，形式(2.9.2)的位移，可以在半空间表面上的椭圆面积S内形成，该半空间在S上受一分布压力$p(x', y') = p_0(1 - x'^2/a^2 - y'^2/b^2)^{1/2}$作用.因此我们假定$S$是椭圆$x^2/a^2 +$

$y^2/b^2=1$，并且压力具有这种形式。注意Lur'e错误地、最使人误解地叙述[方程(5.11.25)]道，位移w_1+w_2在接触区的边界上为常数。这只有在区域为圆形时才对。在S上位移w_1和w_2为

$$2\pi w_1=\vartheta_1\int_s\frac{p\mathrm{d}S'}{R},\qquad 2\pi w_2=\vartheta_2\int_s\frac{p\mathrm{d}S'}{R} \tag{2.9.4}$$

其中$\vartheta i=(1-\nu_i)/\mu_i$，而$\nu_i$和$\mu_i$是物体$i$的弹性常数，$R^2=(x-x')^2+(y-y')^2$。把方程（2.9.2）同（2.9.4）联立，我们得到

$$w_1+w_2=\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{2\pi}\int_s\frac{p\mathrm{d}S'}{R}=\delta-Ax^2-By^2,\text{在}S\text{内} \tag{2.9.5}$$

利用方程（2.7.6）中所给的积分的值，我们得到

$$\frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)p_0b\left\{K(e)-D(e)\frac{x^2}{a^2}-B(e)\frac{y^2}{b_2}\right\}$$

$$\equiv\delta-Ax^2-By^2,\qquad x,y\text{在}S\text{内} \tag{2.9.6}$$

比较x^2和y^2的系数，我们得到

$$\frac{(1-e^2)D(e)}{B(e)}=\frac{A}{B} \tag{2.9.7}$$

由此可以计算出e。当e为已知，a与δ可以用下列参数

$$a_*=[3D(e)]^{1/3},\quad \alpha_*=\left[\frac{9}{8D(e)}\right]^{1/3}K(e) \tag{2.9.8}$$

和总接触力

$$P=\frac{2\pi abP_b}{3} \tag{2.9.9}$$

表示成

$$a=[(\vartheta_1+\vartheta_2)P/(4\pi A)]^{1/3}a_* \tag{2.9.10}$$

$$\delta=[(\vartheta_1+\vartheta_2)P(2A)^{1/3}/(2\pi)]^{2/3}\alpha_* \tag{2.9.11}$$

表2.9.1列出了对A/B从0.1到1之间变化的e，a_*，α_*值。

为了验证分离条件（2.9.2）式得到满足，我们需要能够计算出S外的点(x,y)的积分（2.9.4），这推迟到§12.3中去做。

Hertz的分析是基于z_1+z_2具有形式Ax^2+By^2这一假定。对

许多重要情形，这一假定是不成立的。其中之一，在这问题中，表面仅仅在一个平面里有曲率，如例题2.9.2所考虑的。这里，物体间的接近量 δ 的表达式便被破坏了。两个平行圆柱体相互挤压的平面应变问题，将在§8.4中研究，在分析上，它比 Hertz 问题更困难。Shtaerman(Steuermann)（1939），（1940），（1941），（1943）的工作中研究过若干其它特殊情形，亦即当 z_1+z_2 具有形式 Ax^4+By^4 的情形。Cooper(1969)给出了Hertz接触系数的设计数据。

表 2.9.1

$\frac{A}{B}$	e	α_a	α_δ
0.1	0.9749	1.8017	2.4752
0.2	0.9382	1.6726	2.2362
0.3	0.8928	1.5911	2.1218
0.4	0.8390	1.5309	2.0392
0.5	0.7761	1.4831	1.9744
0.6	0.7025	1.4434	1.9211
0.7	0.6150	1.4096	1.8758
0.8	0.5072	1.3801	1.8365
0.9	0.3620	1.3540	1.8018

例2.9

1．试表明，若 R_i 和 R_i' 是物体 i ($i=1,2$) 在0点的主曲率半径，ψ 是曲率为 $1/R_1$ 与 $1/R_2$ 的法平面之间的夹角，那么式（2.9.1）中的常数 A 和 B 由下面的式子表示：$A+B=\frac{1}{2}(S_1+S_2)$，$B-A=\frac{1}{2}(D_1^2+D_2^2+2D_1D_2\cos 2\psi)^{1/2}$ 其中 $S_i=1/R_i+1/R_i'$，$D_i=1/R_i-1/R_i'$。

2．考虑Hertz解的一种极限情况：每个物体只沿一个方向有曲面，这样，$1/R_1'\to 0$，$1/R_2'\to 0$。证明 $A=0$，$a/b\to\infty$，并且若 P_0 是平面 $x=0$ 上的载荷又 $P_0=\pi bp_0/2$，那么，b 等于(2.2.38)所给的值。参考Timoshenko与Goodier (1951, p.381)。注意，当 $a/b\to\infty$ 时，δ 无界。

这个极限情形是在苏联学术界长期争论的问题。在1909年Dinnik（1952

版文集)用这个极限考虑两个平行圆柱沿它们公共母线的接触.他正确地得到了接触宽度(2b)和最大接触应力.得到的压入量δ为无界.Belyaev (1957版文集) 怀疑他的程序，但Krolevets(1966)证明它是正确的。两个圆柱的"接近量"必须用§8.4中讨论的程序去计算(见(8.4.35)～(8.4.37)).进一步的文献，可以在Kil'chevskii(Кильчевский)与Kostyuk (1966)的论文中查到，载有这篇文章的这一期该杂志，大量地涉及Dinnik的工作。

3．当半径为R的一个弹性圆柱压在一个刚性平板上，证明接触宽度$2a$与最大压力p_0为

$$\frac{2a}{R}=2\left(\frac{2\vartheta P_0}{\pi R}\right)^{1/2},\qquad \vartheta P_0=\left(\frac{2\vartheta P_0}{\pi R}\right)^{1/2}$$

4．证明，半径为R_1和R_2的两个圆球，接触圆半径a与接近量δ为

$$a=\left[\frac{3}{8}\,\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2)P}{(1/R_1+1/R_2)}\right]^{1/3}\qquad \delta=\frac{3}{8}\,\frac{P(\vartheta_1+\vartheta_2)}{a}$$

2.10 简单基础上的梁

弹性基础上的梁的经典理论，例如Hetenyi的专著 (1946)的最后一章所描述的，建立在下面两条基本假定上：

i)基础承受的反压力，在每一点上正比于梁的该点的挠度v，即$p(x)=kv(x)$。

这样一个基础，是Winkler(1867)和Zimmermann(1888)引进的，它等价于紧密排列的一组独立的各个弹簧；一个流体基础；一个所谓的"Gibson"土壤。后者是一个不可压缩介质($\nu=1/2$)，具有随深度变化的剪切模量，即$\mu=mz$.这个，以及其它非均匀介质，将在§6.10中讨论。

ii)梁处处与基础保持接触。

在这一节里，我们仅仅给出足够说明经典理论的一个轮廓，所以，我们可以放松这些假定，以便描述近期的某些尝试。关于特殊载荷分布下的梁的行为的研究结果，读者可以参考Hetenyi

(1946) 的著作. Korenev(1960b)对1917—1957期间的苏联文献，做了评论. 为了解土木工程基础模态分析的文献，读者可以查考下列作者的作品：Hetenyi (1964)，Gibson (1974)，Ponlos与Davis (1974)，Selvadurai (1979).

考虑一根均匀直梁，挠曲刚度为EI，静止地位于Winkler基础上，如图2.10.1 所示. 在分布载荷$q(x)$和原点处的集中力P作用下，控制梁的小挠度的微分方程为

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = -P(x) + q(x) + P\delta(x) \qquad (2.10.1)$$

其中$\delta(x)$是Dirac的δ函数. 记

$$\gamma = [k/(4EI)]^{1/4} \qquad (2.10.2)$$

和引进无量纲量

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \gamma x, \quad \mu = \gamma v, \quad \sigma(\xi) = q(x)/(4\gamma^3 EI) \\ &F = P/(4\gamma^3 EI) \end{aligned}\right\} \qquad (2.10.3)$$

方程 (2.10.1) 变成

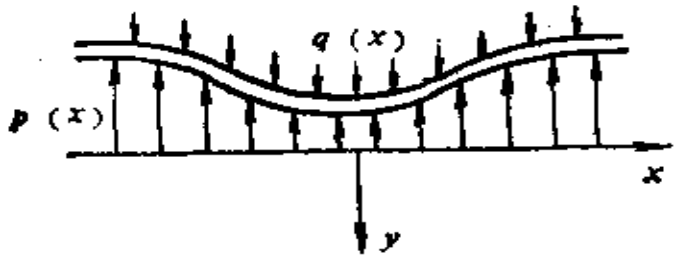


图2.10.1 放置在简单基础上的梁

$$\frac{1}{4}u^{(4)}(\xi) = -u(\xi) + \sigma(\xi) + F\delta(\xi) \qquad (2.10.4)$$

其中$u^{(n)}(\xi)$记$d^n u/d\xi^n$. 在$\sigma(\xi) = 0 = F$时，齐次方程的通解为

$$u(\xi) = \exp(-\xi)[A\cos\xi + B\sin\xi] + \exp(\xi)[C\cos\xi + D\sin\xi] \qquad (2.10.5)$$

其中A、B、C、D是任意常数. 对于一无限长的梁，在原点受集中力作用，其挠度$u(\xi)$将是ξ的偶函数，并且对于$\xi > 0$，将给

出

$$u(\xi)=\exp(-\xi)(A\cos\xi+B\sin\xi),\ \xi\geqslant 0 \qquad (2.10.6)$$

其中A、B由条件

$$u^{(1)}(0^+)=0,\quad u^{(3)}(0^+)=2F \qquad (2.10.7)$$

确定，因此

$$u(\xi)=(F/2)\exp(-\xi)(\cos\xi+\sin\xi),\quad \xi>0 \qquad (2.10.8)$$

对于集中力F和均匀分布载荷σ(它与梁的自重一致)联合作用下的梁，挠度为

$$u(\xi)=\sigma+(F/2)\exp(-\xi)(\cos\xi+\sin\xi),\quad \xi\geqslant 0 \qquad (2.10.9)$$

为这样一根梁，用表列出的结果，请参考Hertenyi的著作(1946)。

若σ和F为任意选择的，将假定这个位移取正值与负值两者，亦即基础承受的反力在某些地方为压缩，在另一些地方为拉伸。某些基础仅仅能抗压，这样，若$u(\xi)$在某些点变为负的，该梁将简单地与基础失去接触，并且在那个点上无基础压力，这样的基础被下列作者讨论过：Schindler (1956)，Tsai与Westmann (1967)，Weitsman (1972)。若$|F|$与σ（设其为正）相比，$|F|$很小，$u(\xi)$将处处为正；若$|F|$增加，当$u(\xi)$的最小值为零时，梁首先失去与基础的接触。若这个最小值发生在$\hat{\xi}$点，那么

$$\exp(-\hat{\xi})\ (\cos\hat{\xi}+\sin\hat{\xi})=-2\sigma/F \qquad (2.10.10)$$

$$\sin\hat{\xi}=0 \qquad (2.10.11)$$

方程(2.10.11)导致$\hat{\xi}=n\pi$，而（2.10.10）则给出$F=2\sigma(-1)^{n-1}\exp(n\pi)$。如果$n=0$，则在原点失去接触，$F=-2\sigma$，并且载荷方向朝上，用一个负号表示。若$n=1$，则$\hat{\xi}=\pi$，$F=2\sigma\exp(\pi)$。我们推断梁与基础维持在每点都接触的条件是，$-2\sigma\leqslant F\leqslant 2\sigma\exp(\pi)$，或者，用有量纲量表示

$$-2\leqslant Py/q\leqslant 2\exp(\pi) \qquad (2.10.12)$$

当集中载荷值超出这个范围时，梁与基础便将失去接触，由于重量向下的效应，接触又会从原点恢复。Schindler(1956)与Weitsman (1972) 曾分析过这样一些情形，把梁分成接触区与分

离区，并且得到了确定分离点的超越方程（例子2.10.2）. Tsai与Westmann（1967）建立了接触压力的积分方程，他们用数值方法求解出来. 他们得出结论，若 $P_{crit}=2q\exp(\pi)/\gamma$ 与 $0\leqslant P/P_{crit}\leqslant 4$，则原点邻域的挠曲形式与经典结果（2.10.9）差别不大. 注意，对于一个给定比率 $P\gamma/q$，梁与基础之间的接触，在§4.10的意义上，是退让的，因而：1）接触区与载荷水平无关，2）从零载荷到非零载荷的过渡是间断的，3）接触区与比率 $P\gamma/q$ 有关，因而不可能应用叠加原理. 全部这些结果，可以容易地、直接地从公式（2.10.9）的分析中推导出来.

Keer（1964），（1965），（1976）曾评论过引进对于基础的连续性的几种尝试，而不用弹性半空间模型，在任何情形下，弹性半空间模型不能恰当地描绘许多真实的基础. Filonenko-Borodich（1945）假定一张薄膜，或一个为张力 T_1 拉紧的二维弦，与弹簧的端部相连接，使得

$$p(x)=kv-T\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} \qquad (2.10.13)$$

Hetenyi（1946），（1950）假定一个梁埋藏在两个Winkler材料垫层之间. Pasternak（1954）假定，一些弹簧的端部与不可压缩的铅垂元件组成的梁连接，这些元件只能受横向剪切，产生变形. Weitsman（1970）已经考虑过 Reissner（1958）基础的一种平面描述，其中，只存在应力 τ_{xx} 与 τ_{xy}. Weitsman还给出了点载荷与分布载荷联合作用下，连续与间断接触的各种情形的详细解答. Sneddon，Gladwell与Coen（1975）对梁与基础接触发展了一种一般的分析，给出了若干特例，其中基础的压力可以表示成下列形式

$$p(x)=L\{v(t);\ x\} \qquad (2.10.14)$$

其中 L 是一个线性算子.

根据他们自己的以及其他人以前的工作，Vlasov与Leont'ev（Леонтьев）（1966）发展了一种综合的方法，采用这种方法，

能够形成大量的基础模型，并且能够推导出一组常微分方程的解。对于平面问题来说，他们的方法的要求如下：

1）具有有限深度H的基础，假定为由一个垫层或多个垫层所组成，其中，要使用平面应变或平面应力的应力、应变关系。

2）每一垫层的位移$u(x,y)$和$v(x,y)$，被假定具有形式

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{i=1}^{m} U_i(x)\phi_i(y) \\ v(x,y) &= \sum_{k=1}^{n} V_k(x)\psi_k(y) \end{aligned}\right\} \qquad (2.10.15)$$

其中函数$\phi_i(y)$，$\psi_k(y)$为已知的。

3）未知函数$U_i(x)$和$V_k(x)$的控制方程，应用应力的虚功原理得到，这些应力是由位移u和v与应力－应变关系得到的，而这些关系中包含有虚位移$\phi_i(y)$，$\psi_k(y)$。这一过程导致$U_i(x)$和$V_k(x)$的$(m+n)$个二阶常微分方程。

或许最简单的情形是，基础由一个垫层组成，有

$$u(x,y)=0,\quad v(x,y)=v_1(x)\psi_1(y) \qquad (2.10.16)$$

这种垫层位于一种刚性基础上，所以$\psi_1(H)=0$，没有分布载荷$F_x(x,y)$，但存在一个外加载荷$\tau_{xy}(x,0)=-p(x)$。因而，只有一个方程，即

$$\mu r_{11}V_1^{(2)}(x)-2\mu(1-\nu)/(1-2\nu)s_{11}V_1(x)+p(x)\psi_1(0)=0 \qquad (2.10.17)$$

其中$V^{(n)}$为$\mathrm{d}^n V/\mathrm{d}x^n$，并且

$$r_{11}=\int_0^H \psi_1^2(y)\,\mathrm{d}y,\quad s_{11}=\int_0^H [\psi_1^{(1)}(y)]^2\,\mathrm{d}y \qquad (2.10.18)$$

这个基础叫做二参数模型〔见Ting(1973a)，Robinson(1975)，Selvadurai(1979)〕。注意，基础为方程(2.10.17)所控制，不象Winkler基础，这种基础能够分散表面载荷，亦即基础在载荷作用区的外部具有挠度。Filonenko-Borodich(1945)建议的模型，可视为(2.10.17)的特殊情形。Vlasov与Leont'ev建议的

模型族，具有巨大的多面性：可以选取不同的函数$\phi_1(y)$和$\psi_1(y)$而得到不同的基础。前面提到的 Parsternak(1954)，Hetenyi(1946)与Weitsman(1970)建议的模型，可以认为是这个普遍理论的特殊情形。对于浅基础，他们建议$\psi_1(y)=(H-y)/H$；对于深基础，$\psi_1^*(y)=\sinh\gamma(H-y)/\sinh\gamma H$。这里$\gamma$是一个系数，与基础的弹性系数有关，并且确定位移对基础深度的增长率。对应于$\psi_1(y)$的模型，具有不随深度变化的法向应力τ_{yy}而由$\psi_1^*(y)$推导出来的应力，含有$\cosh\gamma(H-y)$；后一种模型可以用于$H\to\infty$的极限情形，以给出一个弹性半空间的简单近似的模型（例子2.10.3）。

二个参数模型的梁的挠度的控制方程，可以由方程(2.10.1)与(2.10.17)的联立而得到。若$\psi_1(y)$是规范化无量纲的，有$\psi_1(0)=1$，那么$v_1(x)$将是半空间的表面挠度，并且将等于接触区中梁的挠度。因此挠度控制方程是

$$EIv^{(4)}(x)-\mu r_{11}v^{(2)}(x)-2\mu\frac{(1-\gamma)}{(1-2\gamma)}s_{11}v(x)$$
$$=q(x)+P\delta(x) \qquad (2.10.19)$$

它不同于Winkler基础的梁的方程，因为它具有二阶导数。Vlasov与Leont'ev应用记号

$$\frac{\mu r_{11}}{EI}=2r^2,\qquad \frac{2\mu(1-\nu)}{EI(1-2\nu)}=s^4 \qquad (2.10.20)$$

使得(2.10.19)变成

$$v^{(4)}(x)-2r^2v^{(2)}(x)+s^4v(x)=\frac{[q(x)+P\delta(x)]}{EI} \qquad (2.10.21)$$

这个方程的齐次部分的基本解，可以采取不同的形式，根据s是大于、等于、或小于r而定。在第一种情形中，也是最重要的情形中，解为

$$v(x)=\exp(-\alpha x)(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$$
$$+\exp(\alpha x)(C\cos\beta x+D\sin\beta x) \qquad (2.10.22)$$

其中

$$\alpha=\left\{\frac{(s^2+r^2)}{2}\right\}^{\frac{1}{2}},\qquad \beta=\left\{\frac{(s^2-r^2)}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.10.23}$$

现在问题的分析的进行，与对Winkler基础问题的分析十分相象．关于无限长与有限长梁在不同基础上的完全接触的详细情况，由Vlasov与Leont'ev(1966)，结合图形，表示结果变化，而给出来了；部分接触状态的分析，可以沿用本节前面介绍过的路线，见Ting(1973b)。

例2.10

1．证明，有一根梁，长为$2l$，放在刚度为k的Winkler基础上面，在$\xi=0$处受一个集中力P（加载为对称的)的作用，它在中央的无量纲位移为

$$w(0)=P\left\{\frac{4+2\cos 2\lambda+2\cosh 2\lambda-\sin 2\lambda}{2(\sin 2\lambda+\sinh 2\lambda)}\right\}$$

同时假设这根梁的两端是自由的 $(w^{(2)}(\pm\lambda)=0=w^{(3)}(\pm\lambda),\lambda=\gamma l)$。

2．考虑一个由Winkler基础支撑的梁，在原点受（向上）载荷$P\left(<-\frac{2q}{\beta}\right)$的作用。假定在单一分离区域$|\xi|<\overline{\xi}$。写出两个区域$|\xi|<\overline{\xi}$与$|\xi|>\overline{\xi}$中$w$的控制方程（因为挠度对称于$\xi$，可以仅研究$\xi>0$的情形）和在$\xi=\overline{\xi}$处的边界条件。确定$P$的下限，以保证对$|\xi|>\overline{\xi}$的区域不进一步分离。

3．证明，由$\psi_1^*(y)=\frac{\sinh\gamma(H-y)}{\sinh\gamma H}$定义的Vlasov—Leont'ev模型，具有的常数r_{11}和s_{11}，等于

$$r_{11}=\frac{\sinh\gamma H\cosh\gamma H-\gamma H}{2\gamma\sinh^2\gamma H},\quad s_{11}=\frac{\gamma\sinh\gamma H\cosh\gamma H+\gamma H}{2\sinh^2\gamma H}$$，并且计算当$H\to\infty$时，它们的极限。

4．分析式（2.10.9）～（2.10.12）对于一般问题（2.10.17）式描述的部分接触问题。

第三章　复　变　函　数

3.1　引　　言

这一章的目的是推导某些在平面接触问题中有用的结果。最重要的是与Cauchy积分理论相联系的内容。强调的是结果，而不是它们的推导或精确的及其最普遍成立的条件，关于这些细节，读者可以参考Muskhelishvili(1953a，1953b)的著作，从中可以查到较早的参考文献，对此，本章可以希望作为一个引论。

首先我们说明复平面上有关曲线与区域的基本定义。一条弧线是一条连续而不相交的，亦即简单的曲线，除去在有限个点之外，它具有连续变化的切线。一条围线是一条封闭的弧线。

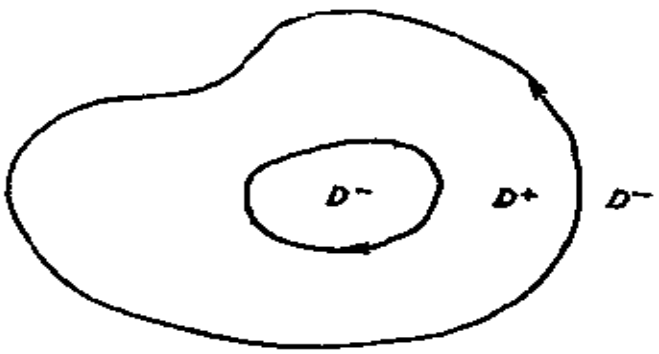


图　3.1.1　沿边界的走行方向规定D^+位于左侧

一个区域是平面上一个开的连通集。若一个区域D^+具有一条或多条围线组成的边界，说某一围线为正，意思是指D^+位于其左侧，如图3.1.1所示。D^+外部的和边界围线外部的开集，我们用记号D^-表示，所以，如边界围线所描述的，D^+位于左侧，D^-位于右侧。记号S^+与S^-分别用于代表上半平面$y>0$与下半平面$y<0$，而S将用于表示任意区域或点集。

令S是复平面上的一个点集。若S中的任一点$z=x+iy$ $(i=\sqrt{-1})$对应于复数$f(z)=p(x,y)+iq(x,y)$，那么$f(z)$叫作

S上复变数z的复函数. 这样，$z^2, z\bar{z}, x+zy$也都被认为是z的复函数，但复变函数理论涉及更严格限制的一类函数，正如现在所描绘的.

考虑到关系式：

$$\left.\begin{aligned} &z=x+\mathrm{i}y,\quad \bar{z}=x-\mathrm{i}y \\ &x=(z+\bar{z})/2,\quad y=(z-\bar{z})/(2\mathrm{i}) \end{aligned}\right\} \tag{3.1.1}$$

我们定义偏导数算子如下

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3.1.2}$$

而且

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(p+\mathrm{i}q) \\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(p+\mathrm{i}q) \\ &=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\right) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

若在某点$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$，我们看到，Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y},\quad \frac{\partial q}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.1.5}$$

得到满足. 可以证明，如果p和q的一阶偏导数满足Cauchy-Riemann方程，并且在$z=z_0$连续，则这是在$z=z_0$存在复导数

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=f'(z)=\lim_{\delta z\to 0}\frac{f(z+\delta z)-f(z)}{\delta z} \tag{3.1.6}$$

的充分和必要条件. 注意，这个极限将存在，且不论$z_0+\delta z$以怎样的方式趋于z_0，极限具有相同的值.

函数$f(z)$被叫作在有限区域S中是全纯的（有时也叫正则的

或解析的），若它在S中单值且在S中每一点存在导数．$f(z)$具有复导数的条件那么强，以致可以证明，若$f(z)$在S中是全纯函数，那么，它在S中每一点将具有任意阶复导数$f^{(n)}(z)$，从而每一个这样的偏导数在S中都是全纯的．(注意，它同实函数相反，对于实变函数$f(x)$，$f''(x)$的存在不能由$f'(x)$的存在得到)．进而，它可以在S中的任一点z_0附近展开成级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \qquad (3.1.7)$$

若区域S是无限的，那么$f(z)$则作在无穷远处是全纯的，$f(1/z)$在原点是全纯的．这意味着对大的$|z|$，$f(z)$可以展开成

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{-n} \qquad (3.1.8)$$

若$f(z)$在整个复平面除去无穷远点外是全纯的，当它具有一个有限阶的极点时，那么它必须是z的一个多项式．此外，若它在无穷远点是全纯的，则它必须是一个常数．与这个概念相联系的是实变数x、y的解析函数的思想．若在S中的每一个点(x_0,y_0)的附近，$f(x,y)$可以展开成双重级数

$$f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}(x-x_0)^m(y-y_0)^n \qquad (3.1.9)$$

则称xy平面上的函数$f(x,y)$在区域S上是解析的．可以证明，若$f(z)$在S中是全纯的，那么，$f(x,y)\equiv f(z)$在S中是解析的．

若$f(z)$是全纯的，则由(3.1.5)得知$p(x,y)$与$q(x,y)$都是调和的，即

$$\nabla_1^2p(x,y)\equiv\frac{\partial^2p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2p}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

$$=0=\nabla_1^2q(x,y) \qquad (3.1.10)$$

反之，若$p(x,y)$在S中是调和的，又$q(x,y)$通过方程(3.1.5)与$p(x,y)$相联系着，则$f(z)=p(x,y)+iq(x,y)$是z的全纯函数．

3.2 Cauchy积分

设L是一个简单的封闭围线，它把平面分成两部分，一个有限的部分D^+位于左侧，一个无限的部分D^-位于右侧，如图3.2.1所示.

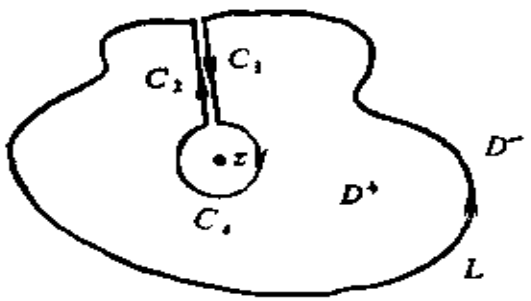


图3.2.1 分平面为两部分的简单封闭围线L

Cauchy 积分定理是说：若L是整个位于区域 S 中的简单封闭围线，函数$f(z)$在这个区域S中是全纯的，那么

$$\int_L f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad (3.2.1)$$

这里，我们用t来表示围线L上的普通点. 应用这个定理于函数$f(z) = 1/(z - z_0)$，这个函数除去z_0点外是任一区域中的全纯函数.

若z_0位于L外，亦即在D^-中，那么Cauchy定理给出

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\mathrm{d}t}{t - z_0} = 0,\quad z_0 \text{在} D^- \text{中} \qquad (3.2.2)$$

若z_0在L内，我们构造围线$L + C_1 + C_\varepsilon + C_2$，使得$z_0$还是位于被这个围线所界限的区域的外部，因而

$$\left\{\int_L + \int_{C_1} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{C_2}\right\}\frac{\mathrm{d}t}{t - z_0} = 0$$

但是沿C_1和C_2的积分相等而符号相反，而沿C_ε的积分，可以写出$t = z_0 + \varepsilon\exp(\mathrm{i}\theta)$，$\mathrm{d}t = \mathrm{i}\varepsilon\exp(\mathrm{i}\theta)$，代入后进行计算，于是

$$-\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{t - z_0} = \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}\varepsilon\exp(\mathrm{i}\theta)\,\mathrm{d}\theta}{\varepsilon\exp(\mathrm{i}\theta)} = 2\pi\mathrm{i}$$

因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-z_0} = 1, \quad z_0在D^+中 \tag{3.2.3}$$

现在写出

$$\int_L \frac{f(t)}{t-z_0}dt = \int_L \frac{f(t)-f(z_0)}{t-z_0}dt + f(z_0)\int_L \frac{dt}{t-z_0} \tag{3.2.4}$$

若L是一条封闭围线，位于这样一个区域中，$f(z)$在此区域中是全纯的，那么$(f(z)-f(z_0))/(z-z_0)$也将是全纯的，所以(3.2.4)中的第一个积分等于零，我们得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{t-z} = \begin{cases} f(z) & z在D^+中 \\ 0 & z在D^-中 \end{cases} \tag{3.2.5}$$

现在仍设L为一条简单的封闭围线，$f(t)$是给定在 L 上并且在L上连续的函数．等式

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt \tag{3.2.6}$$

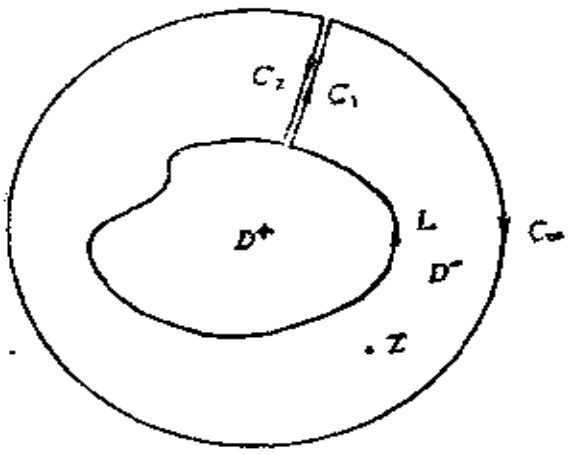


图3.2.2 位于围线L外的点z

定义了一个函数，容易证明这个函数除了在L上之外处处是全纯的．这样一个函数叫作Cauchy积分．若$f(t)$作为在D^+中全纯函数 $f(z)$ 的边界值，那么

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & 如果z在D^+中 \\ 0 & 如果z在D^-中 \end{cases} \tag{3.2.7}$$

但是，$F(z)$可以由 (3.2.6) 定义，仅仅要求 $f(t)$在L上是连续的．若$f(t)$是在L外部的（无限）区域D^-中全纯函数的边界值，那么沿着图3.2.2所示围线积分，并且注意到对于大的t，$f(t)/(t-z) = a/t + O(t^{-1})$，其中$a = f(\infty)$，于是我们求得

$$F(z)=\begin{cases}a, & \text{若}z\text{在}D^{+}\text{中}\\ a-f(z), & \text{若}z\text{在}D^{-}\text{中}\end{cases}\qquad(3.2.8)$$

后面要用到这个结果的扩充形式。假定$f(z)$在D^{-}中除去无穷远点之外是全纯的，在这个区域中，它具有形式

$$\begin{aligned}f(z)&=a_0+a_1z+\cdots+a_pz^{p}+O(z^{-1})\\&=f_0(z)+O(z^{-1})\end{aligned}\qquad(3.2.9)$$

那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)}{t-z}dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt=\begin{cases}-f(z), & z\text{在}D^{-}\text{中}\\ 0, & z\text{在}D^{+}\text{中}\end{cases}$$

出现负号，是因为D^{-}为围线的外部，位于围线的右侧。但是

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty}\frac{f(t)}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\infty}\frac{f_0(t)}{t-z}dt=-f_0(z)$$

而不论z在D^{+}或D^{-}中。因此

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)}{t-z}dt=\begin{cases}f_0(z), & z\text{在}D^{+}\text{中}\\ f_0(z)-f(z), & z\text{在}D^{-}\text{中}\end{cases}\qquad(3.2.10)$$

此外，现在我们假设，在L上连续的$f(t)$满足所谓Hölder条件。若存在参数A和λ，其中$0<\lambda<1$，使得对L上的每两个点t_1和t_2，函数$f(t)$具有

$$|f(t_2)-f(t_1)|<A|t_2-t_1|^{\lambda}$$

则称$f(t)$为满足Hölder条件的函数。

函数$f(t)$叫作在L上的点t_0的邻域满足Hölder条件，若对所有充分接近t_0的t_1和t_2点，我们有

$$|f(t_2)-f(t_1)|<A|t_2-t_1|^{\lambda}$$

在此条件下，可以说明，并且我们将粗略叙述下面的证明，Cauchy积分$F(z)$可以被赋予——当z在L上时——的一个意义，而且，当z从

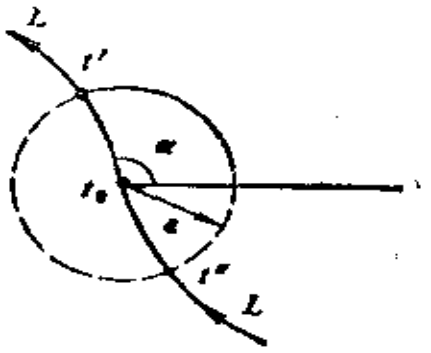


图 3.2.3 点t'和t''到t_0的距离相等

D^+中趋于L和当z从D^-中趋于L时，$F(z)$ 趋于确定的极限。

令t_1是L上的一个点，在其邻域，$f(t)$ 满足Hölder条件，并且让t'和t''是在L上在t_0各一侧的两个点，这样

$$|t_0 - t'| = |t_0 - t''| = \varepsilon$$

如图3.2.3所示。积分(3.2.6)在t_0点的Cauchy主值被定义为

$$(P)\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{f(t)}{t-t_0}dt$$

其中l是弧线$t't''$。这个积分可以写成

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{f(t)}{t-t_0}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt + \frac{f(t_0)}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{dt}{t-t_0}$$

既然$|[f(t)-f(t_0)]/(t-t_0)| < A|t-t_0|^{\lambda-1}$，则这第一个积分，在普通意义上是存在的，亦即，若仅仅t'和t''趋近于t_0，不必要求$|t'-t_0|$和$|t''-t_0|$相等。第二个积分是

$$\int_{L-l}\frac{dt}{t-t_0} = [\ln(t-t_0)]_{t'}^{t''}$$

其中取了$\ln z$的一枝，这一枝在$L-l$上是连续的。现在

$$t' = t_0 + \varepsilon\exp i(\alpha+\pi),\quad t'' = t_0 + \varepsilon\exp(i\alpha)$$

所以

$$\ln(t'-t_0) - \ln(t''-t_0) = i\pi$$

并且

$$\frac{1}{2\pi i}(P)\int_L\frac{f(t)}{t-t_0}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt + \frac{1}{2}f(t_0) \tag{3.2.11}$$

此式加给积分式(3.2.6)的一种意义（即一个值——柯者），当z在L上时，于是

$$F(t_0) = \frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt \tag{3.2.12}$$

现在回到方程(3.2.6)，我们写出

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-z}dt+\frac{f(t_0)}{2\pi i}\int\frac{dt}{t-z}$$

这里，t_0是L上的一个点．那么可以证明，当点z 从L的任何一侧趋近t_0点时，第一个积分趋于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt$$

（见Muskhelishvili 19536，p.39）。利用(3.2.3)的论证，当z在D^+中，第二个积分等于$f(t_0)$，当z在D^-中，它等于零．这样，当z从D^+中趋于t_0和从 D^-中趋于t_0时，$F(z)$的极限值分别记为$F^+(t_0)$和$F^-(t_0)$

$$F^+(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt+f(t_0) \qquad (3.2.13)$$

$$F^-(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt \qquad (3.2.14)$$

现在使用Cauchy主值方程(3.2.11)表示这些积分，我们求出

$$F^+(t_0)=\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}(P)\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt \qquad (3.2.15)$$

$$F^-(t_0)=-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}(P)\int_L \frac{f(t_0)}{t-t}dt \qquad (3.2.16)$$

今后将省略记号(P)，必须理解任何一个奇异积分的意义是Cauchy主值．常常方便地把方程(3.2.15)和(3.2.16)改写成下列形式

$$F^+(t_0)-F^-(t_0)=f(t_0) \qquad (3.2.17)$$

$$F^+(t_0)+F^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt \qquad (3.2.18)$$

这些方程叫做Plemelj公式，定义在一条封闭弧线的围线上．然而，若$f(t)$在一条开口弧线上被定义并连续，而且$f(t)$在弧线的端点上等于零，则我们可以使这条围线封闭起来，并且定义$f(t)$在

闭合段上等于零. 那么，当z分别从围线左侧或右侧趋近于t_0时，公式(3.2.15)和(3.2.16) 给出其极限值. 若$f(t)$ 在端点不等于零，那么，定义$f(t)$在闭合段上等于零，函数将不连续，并且在端点上将不满足Hölder条件. 公式(3.2.15)和(3.2.16) 在端点将不成立，而在其他点则成立.

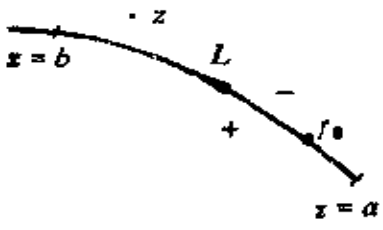


图3.2.4 连接点$z=a, z=b$的弧L

Muskhelishvili(1953b) 证明了有关一条敞开弧线L端点附近的Cauchy积分的下列结果，端点记为$z=a$与$z=b$，如图3.2.4所示，令$f(t)$是定义在L上的函数，满足下列两个条件：

(a) $f(t)$在L上的任意封闭区间内满足Hölder条件，但不包括端点a和b.

(b) 端点a和b附近，函数$f(t)$具有形式

$$f(t)=f^*(t)(t-c)^{-\gamma},\quad \gamma=\alpha+i\beta,\quad 0\leqslant\alpha<1 \qquad (3.2.19)$$

其中c是两个端点的一个，a,b,α和β是实常数，$f^*(t)$在c点附近和c点上满足Hölder条件. 在(3.2.19)中，$(t-c)^{-\gamma}$是在L上连续变化的任意分枝.

令z是c点附近的点，但不在L上，并且假定$F(z)$由(3.2.6)给定，那么

(1)若$\gamma=0$

$$F(z)=\pm\frac{f(c)}{2\pi i}\ln(z-c)+F_0(z) \qquad (3.2.20)$$

这里，当$c=a$，取上面的符号，当$c=b$取下面的符号；并且$\ln(z-c)$是一个分枝，在沿L割开的平面中的c点附近具有单值，并且$F_0(t)$是一有界函数，当z沿任意路径趋近于c时，它趋近于有限的极限.

(2) 若$\gamma=\alpha+i\beta\neq 0$

$$F(z)=\pm\frac{\exp(\pm\gamma\pi i)}{2i\sin\gamma\pi}f^*(c)(z-c)^{-\gamma}+F_0(z) \qquad (3.2.21)$$

这里符号的取法与（1）相同；$(z-c)^{-\gamma}$是一个沿L割开的平面中c点附近的单值分支，并且在L的左(+)边取值$(t-c)^{-\gamma}$.函数$F_0(z)$有界，并且若$\alpha=0$，当$z\to c$时，它趋近于有限的极限，而若$\alpha>0$，它满足

$$|F_0(z)|<C|z-c|^{-\alpha_0}, \qquad (3.2.22)$$

其中C,α_0是实常数，$\alpha_0<\alpha$.

对于点$z=t_0$在L上，下列结果成立

(3)若$\gamma=0$

$$F(t_0)=\mp\frac{f(c)}{2\pi i}\ln(t_0-c)+F^*(t_0) \qquad (3.2.23)$$

其中符号的选取与（1）相同，$F^*(t_0)$在c点附近满足Hölder条件.

(4)若$\gamma=\alpha+i\beta\neq 0$

$$F(t_0)=\pm\frac{\cot\gamma\pi}{2i}f^*(c)(t_0-c)^{-\gamma}+F^*(t_0) \qquad (3.2.24)$$

若$\alpha=0$，$F^*(t_0)$在c点附近或在c点上满足Hölder条件；若$\alpha>0$，

$$F^*(t_0)=F^{**}(t_0)\,|t_0-c|^{-\alpha_0}, \qquad (3.2.25)$$

这里$F^{**}(t_0)$在c点附近或c点上满足Höider条件，并且$\alpha_0<\alpha$;符号的选择与(1)相同.

我们粗略给出结果（2）与（4）的证明. 积分$F(z)$可以写成

$$F(z)=f^*(c)\Omega(z)+F_1(z) \qquad (3.2.26)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\Omega(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{(t-c)^{-\gamma}}{t-z}dt\\ F_1(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f^*(t)-f^*(c)}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}dt\end{aligned}\right\} \qquad (3.2.27)$$

可以容易证明这第二个积分满足对$F_1(z)$所述的条件(3.2.22)式：我们检验在a点附近的第一个积分。让$(z-a)^{-\gamma}$表示沿L割开的平面中的全纯的分枝，并且在L的"+"侧取其值为$(t_0-a)^{-\gamma}$；那么，在"−"侧的边界值为$[(t_0-a)\exp(2\pi i)]^{-\gamma}$，以及

$$[(t_0-a)^{-\gamma}]^+ + [(t_0-a)^{-\gamma}]^- = (t_0-a)^{-\gamma}[1-\exp(-2i\gamma\pi)] \qquad (3.2.28)$$

Plemelj公式给出：

$$\Omega^+(t_0)-\Omega^-(t_0)=(t_0-a)^{-\gamma} \qquad (3.2.29)$$

写出

$$[1-\exp(-2i\gamma\pi)]^{-1}=\exp(i\gamma\pi)/[2i\sin\gamma\pi]$$

和

$$\omega(z)=\frac{\exp(i\gamma\pi)}{2i\ \sin\ \gamma\pi}(z-a)^{-\gamma} \qquad (3.2.30)$$

我们知道方程(3.2.28)给出

$$\omega^+(t_0)-\omega^-(t_0)=(t_0-a)^{-\gamma} \qquad (3.2.31)$$

所以$[\Omega(t_0)-\omega(t_0)]^+=[\Omega(t_0)-\omega(t_0)]^-$。这意味着$\Omega(z)-\omega(z)$在$a$点的邻域是全纯的。这样

$$\Omega(z)=\frac{\exp(i\gamma\pi)}{2i\ \sin\ \gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}+\Omega_0(z) \qquad (3.2.32)$$

其中$\Omega_0(z)$可在a点的邻域展开成幂级数；等式(3.2.26)和(3.2.32)现在给出$c=a$点的式子(3.2.21)。

为了证明(4)，我们注意到

$$F(t_0)=\frac{1}{2}[F^+(t_0)+F^-(t_0)]$$

所以$\Omega(z)$的主要部分为

$$\frac{f^*(c)}{2}[\Omega^+(t_0)+\Omega^-(t_0)]=\frac{f^*(a)\exp(i\gamma\pi)}{4i\sin\gamma\pi}\times[(t_0-a)^{-\gamma}+\{(t_0-a)\exp(2i\pi)\}^{-\gamma}]+f^*(c)\Omega_0(t_0)$$

$$= \frac{\cot\gamma\pi}{2i} f^*(a)(t_0-a)^{-\gamma} + f^*(c)\Omega_0(t_0) \qquad (3.2.33)$$

它立即导致(3.2.24).

3.3 沿实轴的 Cauchy积分

在下面，当L不是封闭的、有限的围线，而是整个实轴，则我们需要知道Cauchy积分的极限值. 假定$f(t)$是定义在实轴上的，沿这个轴的任意的有限部分，它是有限的和可积分的，并且满足在无穷远处的条件：

$$f(t) = f(\infty) + 0(|t|^{-\lambda}), \lambda > 0 \qquad (3.3.1)$$

我们定义$f(t)$沿实轴的Cauchy积分

$$F(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{-N}^{N} \frac{f(t)}{t-z}dt \qquad (3.3.2)$$

这个沿实轴、具有等距离的（对于原点）端点的积分，称为这个无穷积分的Cauchy主值. 现在有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-N}^{N}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-N}^{N}\frac{f(t)-f(\infty)}{t-z}dt + \frac{f(\infty)}{2\pi i}\int_{-N}^{N}\frac{dt}{t-z}$$

在条件(3.3.1)下面，这第一个积分，在普通的意义上，存在着极限，它不必要求两个点对原点具有等距离. 这第二个积分是

$$\int_{-N}^{N}\frac{dt}{t-z} = \Big[\ln(t-z)\Big]_{-N}^{N}$$

这里还必须取ln的一个分枝. 若z点是在S^+中的，那么图3.3.1表明

$$N - z = r_1\exp(i\alpha_1), \quad -N - z = r_2\exp(i\alpha_2)$$

于是

$$[\ln(t-z)]_{-N}^{N} = \ln(r_1/r_2) + \mathrm{i}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

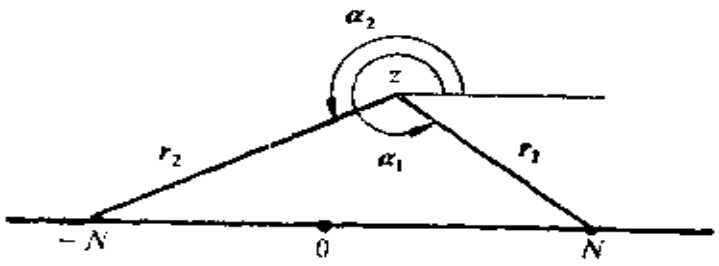


图3.1.1　点z与点$\pm N$的连接线

现在

$$\lim_{N\to\infty}(r_1/r_2) = 1, \quad \lim_{N\to\infty}(\alpha_1 - \alpha_2) = \pi$$

若z在S^-中，那么可以使用类似的推理，结果是

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t = \pm\frac{1}{2}f(\infty) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)-f(\infty)}{t-z}\mathrm{d}t \tag{3.3.3}$$

其中±号的取法取决于z在$S^{\pm}$中的归属．可以使用这个式子给出一种数值(Cauchy主值)加在左边积分上．

当z位于实轴上时，可以把积分解释为上面讨论过的两种意义上的Cauchy主值．这就是

$$F(t_0) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_{-N}^{t_0-\varepsilon}\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t + \int_{t_0+\varepsilon}^{N}\frac{f(t)}{t-t_0}\mathrm{d}t\right\} \tag{3.3.4}$$

利用前面应用过的推理，我们可以证明，若$f(t)$在t_0的邻域满足Hölder条件，并且满足条件(3.3.1)式，那么极限存在．事实上，因为

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\mathrm{d}t}{t-t_0} = 0$$

则可以计算出积分 (3.3.2)

$$F(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}dt$$

或者

$$F(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{t_0-\varepsilon}\frac{f(t)-f(\infty)}{t-t_0}dt+\int_{t_0+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(t)-f(\infty)}{t-t_0}dt\right\}$$

最后我们计算，当z趋于L时，$F(z)$的极限值，得到

$$F^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-t_0}dt \qquad (3.3.5)$$

其中积分必须再次解释为两种意义上的Cauchy主值。方程(3.3.5)联立起来，给出Plemelj公式

$$F^{+}(t_0)-F^{-}(t_0)=f(t_0) \qquad (3.3.6)$$

$$F^{+}(t_0)+F^{-}(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-t_0}dt \qquad (3.3.7)$$

当z从上半平面或下半平面趋近于一个有限点t_0时，等式(3.3.5)给出$F(z)$的极限值。为了研究当z趋近于无穷远点时的边界值，需要引进对$f(t)$的进一步的限制。考虑一个坐标变换$z=-1/\zeta$。z平面上的无穷远点变成了$\zeta=0$，反过来，$z=0$变成$\zeta=\infty$。z平面上的上半部分与下半部分变成ζ平面的对应部分。图3.3.2表示这个变换的更加详细的情况。现在取

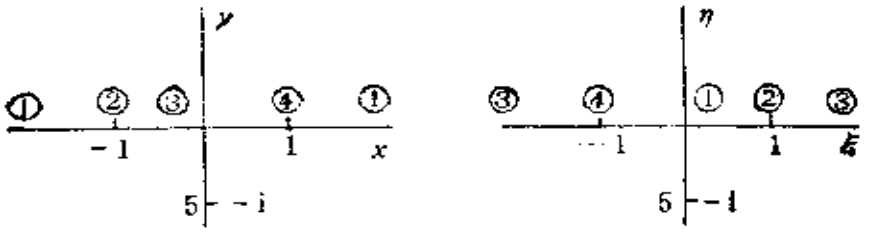


图3.3.2 变换$z=-1/\zeta$

$$F(z)=F(-1/\zeta)=F^{*}(\zeta)$$

$$f(t)=f(-1/\sigma)=f^{*}(\sigma)$$

并且引进更进一步的条件，即$f^*(\sigma)$在$\sigma=0$的邻域满足Hölder条件．这意味着，对所有充分小的σ_1和σ_2，

$$|f^*(\sigma_2)-f^*(\sigma_1)|<A|\sigma_2-\sigma_1|^\lambda$$

这导致对于足够大的$|t_1|$和$|t_2|$有如下条件

$$|f(t_2)-f(t_1)|<A|1/t_2-1/t_1|^\lambda \qquad (3.3.8)$$

这个条件称为在无穷远点的邻域上的Hölder条件，它包含着(3.3.1)，但是它比(3.3.1)更强．现在有

$$F^*(\zeta)=\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^*(\sigma)}{\sigma(\sigma-\zeta)}d\sigma$$

或者

$$F^*(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^*(\sigma)}{\sigma-\zeta}d\sigma-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^*(\sigma)}{\sigma}d\sigma$$

若$f(t)$对有限的t满足Hölder条件和在无穷远处满足条件(3.3.8)，则这些积分在Cauchy主值的意义上存在．$F(z)$在无穷远点的状态，变成$F^*(\zeta)$在$\zeta=0$的状态，而这点能够从方程(3.3.5)推演出来．事实上，若z沿$S^\pm$中一条路径趋于无穷远点，那么

$$F^\pm(\infty)=F^{*\pm}(0)=\frac{1}{2}f^*(0)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^*(\sigma)}{\sigma}d\sigma$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^*(\sigma)}{\sigma}d\sigma$$

或者

$$F^\pm(\infty)=\pm\frac{1}{2}f(\infty) \qquad (3.3.9)$$

在这些条件下，$F(z)$将在每一个半平面中是全纯的，包括在无穷远点．

3.4 线性关系问题

在下一章中，将可以看到，半平面的接触问题可以化成下列

方程组：

$$\kappa\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=F(t) \qquad \text{在}L'\text{上} \qquad (3.4.1)$$

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=0 \qquad \text{在}L''\text{上} \qquad (3.4.2)$$

其中，L'是接触区，由实轴上的若干弧线组成，L''是实轴上其余部分，这一部分未受载荷，κ是一复常数，并且假定$F(t)$满足Hölder条件．在L'的端点t_0附近，要求$\Phi(t)$满足条件

$$|\Phi(t)|=0(|t-t_0|^{-\lambda}),\quad 0\leqslant\lambda<1 \qquad (3.4.3)$$

或等价地

$$\lim_{t\to t_0}(t-t_0)\Phi(t)=0 \qquad (3.4.4)$$

解$\Phi(z)$也必须在无穷远点是全纯的．

为了解方程（3.4.1）和（3.4.2），我们首先寻求沿L'割开的平面中全纯的并且满足齐次方程

$$\kappa X^+(t)+X^-(t)=0,\ \text{在}L'\text{上} \qquad (3.4.5)$$

$$X^+(t)-X^-(t)=0,\ \text{在}L''\text{上} \qquad (3.4.6)$$

的函数$X(z)$．首先考虑L'为图3.4.1所示的单个弧线$-a<t<a$的情形；令α是一个任意复数，并且考虑函数的分枝

$$X_0(Z)=(z-a)^{-1/2+i\alpha}(z+a)^{-1/2-i\alpha} \qquad (3.4.7)$$

它在带割缝L'的平面中是全纯的，并且在无穷远点满足

$$X_0(z)=Z^{-1}+O(z^{-2}) \qquad (3.4.8)$$



图3.4.1　定义$X_0(z)$〔即$(z^2-a^2)^{1/2}$〕的边界值的记号

若$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$，为了使$X_0(z)$满足（3.4.3），需要

$$-1/2<\alpha_2<1/2 \qquad (3.4.9)$$

更严密地考虑$X_0(z)$．组成$X_0(z)$的两个因子的分枝

$$(z-a)^{-1/2+i\alpha}=[\rho_1\exp(i\theta_1)]^{-1/2+i\alpha}$$

$$(z+a)^{-1/2-i\alpha}=[\rho_2\exp(i\theta_2)]^{-1/2-i\alpha}$$

$X_0(z)$在$A\Omega$的上边的边界值为

$$X_0^+(t)=(t-a)^{-1/2+i\alpha}(t+a)^{-1/2-i\alpha} \qquad (3.4.10)$$

这里，它被准确地定义为

$$(t^2-a^2)^{-1/2}[(t+a)/(t-a)]^{\alpha_2}[(t-a)/(t+a)]^{i\alpha_1}$$

并且这最后一个因子是

$$\left.\begin{aligned}&[(t-a)/(t+a)]^{i\alpha_1}=\cos\theta+i\sin\theta\\&\theta=\alpha_1\ln[(t-a)/(t+a)]\end{aligned}\right\} \qquad (3.4.11)$$

在$A\Omega$的下边

$$X_0^-(t)=[(t-a)\exp(2i\pi)]^{-1/2+i\alpha}[(t+a)\exp(2i\pi)]^{-1/2-i\alpha}$$

$$=X_0^+(t) \qquad \text{在}L''\text{上} \qquad (3.4.12)$$

在$A'A$上的边值是

$$X_0^+(t)=[(a-t)\exp(i\pi)]^{-1/2+i\alpha}(a+t)^{-1/2-i\alpha} \qquad (3.4.13)$$

$$X_0^-(t)=[(a-t)\exp(i\pi)]^{-1/2+i\alpha}[(a+t)\exp(2i\pi)]^{-1/2-i\alpha} \qquad (3.4.14)$$

因而有

$$X_0^-(t)=-\exp(2\pi\alpha)X_0^+(t)，\text{在}L'\text{上} \qquad (3.4.15)$$

这样，$X_0(z)$将满足方程(3.4.5))若

$$\exp(2\pi\alpha)=\kappa \qquad (3.4.16)$$

并且结合（3.4.9）式，便唯一地确定了α.

若$X(z)$是方程（3.4.5）和（3.4.6）的别的一个任意解，那么，函数$Q(z)=X(z)/X_0(z)$，显然在穿过L''时它是连续的，在L'上满足条件

$$Q^-(t)=X^-(t)/X_0^-(t)=-\kappa X^+(t)/[-\kappa X_0^+(t)]=Q^+(t)$$

这样，$Q(z)$在全平面上除去无穷远点之外是全纯的，因此它必须是一个多项式．于是

$$X(z)=Q(z)X_0(z) \qquad (3.4.17)$$

若$X(z)$在无穷远点是全纯的，那么，$Q(z)$必须是线性函数．这

样方程 (3.4.5) 和(3.4.6) 的通解——它在带割缝的平面上及无穷远点是全纯的——是

$$X(z) = (Az + B)X_0(z) \qquad (3.4.18)$$

若$X(z)$在无穷远点等于零，则A必须等于零.

现在回到方程 (3.4.1) 与 (3.4.2)，并且用$X_0^+(t) = -\kappa^{-1}X_0^-(t)$去除它. 那么，在$L'$上

$$\kappa\Phi^+(t)/X_0^+(t) - \kappa\Phi^-(t)/X_0^-(t) = F(t)/X_0^+(t) \qquad (3.4.19)$$

这样，写出$\Omega(z) = \Phi(z)/X_0(z)$，我们推演出

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = F(t)/(\kappa X_0^+(t)) \qquad 在L'上 \qquad (3.4.20)$$

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = 0 \qquad 在L''上 \qquad (3.4.21)$$

既然这是关于$\Omega^+(t)$和$\Omega^-(t)$的一对非齐次线性方程，它的通解可以表示成一个特解与齐次方程 (3.4.5) 和 (3.4.6) 的通解的和. 这样，在带割缝L'的平面上是全纯的，在无穷远点上也是全纯的一个通解，是

$$\Phi(z) \equiv X_0(z)\Omega(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i\kappa}\int_{L'}\frac{F(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)(t-z)} + (Az + B)X_0(z) \qquad (3.4.22)$$

有时要求寻找一个解$\Phi(z)$，它在L'的一个或多个端点上等于零. 这样，若要求$\Phi(z)$在$z = a$处等于零，我们引进

$$X_1(z) = (z - a)X_0(z) \qquad (3.4.23)$$

并且以$X_0^+(t)$除(3.4.1) 和 (3.4.2) 的两边，记 $\Omega(z) = \Phi(z)/X_1(z)$，得到

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = F(a)/(\kappa X_0^+(t)), \quad 在L'上 \qquad (3.4.24)$$

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = 0 \qquad 在L''上 \qquad (3.4.25)$$

和

$$\Phi(z) \equiv X_1(z)\Omega(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i\kappa}\int_{L'}\frac{F(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)\ (t-z)} + CX_1(z) \qquad (3.4.26)$$

注意到，因为对于大的z有$X_1(z)=O(1)$，在这个补充解中出现的仅仅是一个常数项C。若要求Φ在两个端点等于零，那么我们取

$$X_2(z)=(z-a)(z+a)X_0(z) \tag{3.4.27}$$

我们得到

$$\Phi(z)=\frac{X_2(z)}{2\pi i\kappa}\int_{L'}\frac{F(t)\,dt}{X_2^+(t)(t-z)} \tag{3.4.28}$$

但是现在这个解在无穷远处不是全纯的。使用展开式$(t-z)^{-1}$，$=-z^{-1}(1-t/z)^{-1}=-z^{-1}-tz^{-2}\cdots$，我们求出，对于大的$|z|$，有

$$\Phi(z)=\frac{X_2(z)z^{-1}}{2\pi i\kappa}\int_{L'}\frac{F(t)\,dt}{X_2^+(t)}+O(1)$$

所以若只要

$$\int_{L'}\frac{F(t)\,dt}{X_2^+(t)}=0 \tag{3.4.29}$$

则$\Phi(z)$在无穷远点将是全纯的。

Muskhelishvili讨论过一般的情形，其中L'是实轴上的n条弧线(a_k, b_k)的集合，$k=1, 2, \cdots, n$，得到的一个解在某些端点上是等于零的。一条弧线或多条弧线有关的解——并不必要求这些弧线位于实轴上——一般地可以由上面的特殊结果直接地推广而得到。

若$F(t)$是一个多项式，那么在(3.4.22)、(3.4.26)与(3.4.28)式中的积分，可以围绕图3.4.2所示的围线A，进行积分，显式地计算出来。若α_2满足方程(3.4.9)，围绕这些弧线每一个端点作小圆，沿着这些小圆的积分，可以忽略，并且

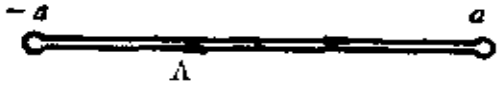


图3.4.2 计算沿$-a$，a的积分时使用的回路A

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{A}\frac{F(\xi)d\xi}{X(\xi)(\xi-z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{F(t)dt}{X^{+}(t)(t-z)}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{F(t)dt}{X^{-}(t)(t-z)} \qquad (3.4.30)$$

并且因为$X^{-}(t)=-\kappa X^{+}(t)$，所以我们有

$$\frac{1}{2\pi i\kappa}\int_{L'}\frac{F(t)dt}{X^{+}(t)(t-z)}=\frac{I(z)}{\kappa+1} \qquad (3.4.31)$$

但是，$F(\zeta)/X(\zeta)$除可能在无穷远点外，在A的外部是全纯的，假定在无穷远点

$$F(z)/X(z)=S(z)+O(z^{-1}) \qquad (3.4.32)$$

其中$S(z)$是一个多项式（与F共轭的多项式），那么由方程（3.2.10），注意到A的行走方向是顺时针的，我们推演出

$$I(z)=F(z)/X(z)-S(z) \qquad (3.4.33)$$

因此

$$\Phi(z)=[F(z)-S(z)X(z)]/(\kappa+1)+CX(z) \qquad (3.4.34)$$

在这一章中推导出的结果，将在第四章中用于平面问题的复变函数解，并且在第四章中，对于接触问题中出现的各种积分方程提供解答。

例3.4

1．利用方程（2.3.18）和例2.3.7给出的恒等式$T_n(z)-(z^2-1)^{1/2}U_{n-1}(z)=[z+(z^2-1)^{1/2}]^{-n}$，推导$S(z)=U_{n-1}(z)$，若$X(z)=(z^2-1)^{1/2}$、$F(z)=T_n(z)$。再推导

$$\frac{X(z)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)dt}{X^{+}(t)(t-z)}=T_n(z)-X(z)U_{n-1}(z)$$

$$=[z+(z^2-1)^{1/2}]^{-n}$$

这就包括了§2.3中的结果。

2．推导$X_0(z)=(z^2-1)^{-1/2}$所时应的结果，即

$$\frac{X_0(z)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{U_{n-1}(t)dt}{X_0^{+}(t)(t-z)}=U_{n-1}(z)-X_0(z)T_n(z)$$

$$=-(z^2-1)^{-1/2}[z+(z^2-1)^{1/2}]^{-n}$$

3.5 带Cauchy核的积分方程

Cauchy积分最重要的应用之一，是求解奇异积分方程

$$\varphi\phi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(t)}{t-x}dt=g(x),\quad |x|<1 \tag{3.5.1}$$

这里假定函数$g(x)$满足Hölder条件，$\phi(t)$ 在端点 $\pm$ 1 满足某些条件。从这一章前一节的分析，我们作下面的推导。使

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(t)}{t-z}dt \tag{3.5.2}$$

如果$\phi(t)$在$(-1,1)$上满足Hölder条件，即如果存在参数A和λ，其中$0<\lambda<1$，使得对$(-1,1)$中的每两个点有

$$|\phi(t_2)-\phi(t_1)|<A|t_2-t_1|^{\lambda}$$

那么函数$\Phi(z)$在割去$(-1,1)$的平面中是全纯的，并且穿过这根线将满足

$$\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x)=\Phi(x) \tag{3.5.3}$$

$$\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(t)}{t-x}dt \tag{3.5.4}$$

函数$\phi(t)$将满足(3.5.1)，若

$$\varphi(\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x))+(\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x))=g(x),\quad |x|<1 \tag{3.5.5}$$

$$\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x)=0,\quad |x|>1 \tag{3.5.6}$$

方程 (3.5.5) 可以重新写成

$$\kappa\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)=F(x),\quad |x|<1 \tag{3.5.7}$$

其中

$$\kappa=(1+\varphi)/(1-\varphi),\quad F(x)=g(x)/(1-\varphi) \tag{3.5.8}$$

现在的方程 (3.5.7) 和 (3.5.6) 是方程 (3.4.1) 和(3.4.2)的一个例子。按照§3.4，(3.5.6)和(3.5.7)的通解为

$$\Phi(z)=\frac{X_0(z)}{2\pi i\kappa}\int_{-1}^{1}\frac{F(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)(t-z)}+(Az+B)X_0(z) \tag{3.5.9}$$

其中$X_0(z)=(z-1)^{-1/2+i\alpha}(z+1)^{-1/2-i\alpha}$，$\exp(2\pi\alpha)=\kappa$，并且$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$，$-1/2<\alpha_2<1/2$.方程(3.5.9)给出$\phi(x)$在$|x|<1$中的下列形式

$$\phi(x)=-\sinh\pi\alpha\cosh\pi\alpha g(x)+\frac{\cosh^2\pi\alpha}{\pi i}X_0^+(x)\int_{-1}^{1}\frac{g(x)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)(t-x)}+2\exp(\pi\alpha)\cosh\pi\alpha(Ax+B)X_0^+(x) \tag{3.5.10}$$

注意，若φ在$-1<\varphi<1$范围内，那么κ是正实数——在应用中常常是这种情形——那么，$\alpha_2=0$，若$\varphi=0$，那么$\kappa=1$，并且$\alpha=0$.

若

$$\int_{-1}^{1}\frac{F(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)}=0 \tag{3.5.11}$$

那么(3.5.6)，(3.5.7)的唯一解——它是有界的，在端点±1处，实际上等于零——是

$$\Phi(z)=\frac{X_2(z)}{2\pi i\kappa}\int_{-1}^{1}\frac{F(t)\mathrm{d}t}{X_2^+(t)(t-z)} \tag{3.5.12}$$

其中$X_2(z))=(z-1)^{1/2+i\alpha}(z+1)^{1/2-i\alpha}$，它给出

$$\phi(x)=-\sinh\pi\alpha\cosh\pi\alpha g(x)+\frac{\cosh^2\pi\alpha}{\pi i}X_2^+(x)\int_{-1}^{1}\frac{g(t)\mathrm{d}t}{X_2^+(t)(t-x)} \tag{3.5.13}$$

在应用中，重要的是在$F(x)$为多项式时能够计算出这个积分.这里我们使用§3.4的结果，在那里说道，若$F(t)$是一个多项式，并且$S_0(t)$是具有下列性质的多项式

$$\frac{F(z)}{X_0(z)}\approx S_0(z)=O(z^{-1})，对于大的z \tag{3.5.14}$$

那么(3.5.9)中的$\Phi(z)$可以写成

$$\Phi(z)=(\kappa+1)^{-1}\{F(z)-X_0(z)S_0(z)\}+(Az+B)X_0(z) \tag{3.5.15}$$

类似地，若

$$\frac{F(z)}{X_2(z)}-S_2(z)=O(|z|^{-1}),\ \text{对于大的}\ |z| \tag{3.5.16}$$

那么(3.5.12)中的$\Phi(z)$可以写成

$$\Phi(z)=(\kappa+1)^{-1}\{F(z)-X_2(z)S_2(z)\} \tag{3.5.17}$$

这些结果意味着，在特别情况下，一般解(3.5.10)可以写成

$$\phi(t)=-X_0^+(t)S_0(t)+(\kappa+1)X_0^+(t)(At+B) \tag{3.5.18}$$

而解(3.5.13)是

$$\phi(t)=-X_2^+(t)S_2(t) \tag{3.5.19}$$

这些表达式表明，$\phi(t)$在端点±1的性态与基本解$X^+(t)$对应的性态相同.

Jacobi多项式$P_n^{(\gamma,\delta)}(z)$给一对多项式$F(z)$和$S(z)$提供了表达式(Abramowitz and stegun 1972, Ch.22) 它们具有性质

$$\begin{aligned}V_n(z)&\equiv(z-1)^{\gamma}(z+1)^{\delta}P_n^{(\gamma,\delta)}(z)-2^{\gamma+\delta}P_n^{(-\gamma,-\delta)}(z)\\&=-2\pi^{-1}\sin(\gamma\pi)(z-1)^{\gamma}(z+1)^{\delta}Q_n^{(\gamma,\delta)}(z)\end{aligned} \tag{3.5.20}$$

其中$Q_n^{(\gamma,\delta)}$是第二类Jacobi函数. 这个性质可以由Erdelyi (1955, Voi.3, 170—190) 所给的结果推导出来. 若$\gamma+\delta$是一个整数，并且$m\equiv\gamma+\delta+n+1>0$，上面的性质在带割缝$|z|\leqslant1$的平面上成立. $V_n(z)$具有积分表达式

$$V_n(z)=-\frac{2^{-n}}{\pi}\sin\gamma\pi\int_{-1}^{1}(z-t)^{-n-1}(1-t)^{n+\delta}\times(1+t)^{n+\delta}dt \tag{3.5.21}$$

此式表明，对于大的$|z|$，$V_n(z)=O(z^{-n-1})$. $V_n(z)$具有超几何展开式

$$V_n(z) = -\frac{2^m}{\pi}\frac{\sin\gamma\pi}{(z-1)^{n+1}}B(m-\gamma, m-\delta)$$

$$\times {}_2F_1(n+1,\ m-\delta;\ 2m-\gamma-\delta;\ \frac{2}{1-z}) \qquad (3.5.22)$$

它对于$|1-z|>2$成立. 这个展开可以用超几何函数的已知变换 (Abramowitz and Stegun 1972, Ch.15) 进行解析延拓; B是Beta函数. 在 (3.5.20) 中, 使$\gamma = (1/2) - i\alpha$, $\delta = (1/2) + i\alpha$, 注意到 $(z-1)^{\gamma}(z+1)^{\delta} = 1/X_0(z)$, 所以

$$V_n(z) = \frac{P_n^{(\gamma,\delta)}(z)}{X_0(z)} - 2P_{n-1}^{(\gamma,-\delta)}(z) = O(z^{-n-1}) \qquad (3.5.23)$$

这就是说, 我们可以取

$$f(z) = P_n^{(\gamma,\delta)}(z),\quad S_0(z) = 2P_{n-1}^{(\gamma,-\delta)}(z) \qquad (3.5.24)$$

解式 (3.5.18) 的特殊部分为

$$\phi(t) = -X_0^+(t)S_0(t) \qquad (3.5.25)$$

(3.5.2) 给出的积分$\Phi(z)$的值为

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= (\kappa+1)^{-1}X_0(z)V_n(z)\\ &= (\kappa+1)^{-1}[P_n^{(\gamma,\delta)}(z) - 2X_0(z)P_{n-1}^{(\gamma,-\delta)}(z)]\\ &= \pi^{-1}\exp(-\pi\alpha)Q_n^{(\gamma,\delta)}(z)\end{aligned} \qquad (3.5.26)$$

特别地, $\Phi(x)$ 的值——解释为在 $-1\leqslant x\leqslant 1$上的 Cauchy 主值——是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(t)}{t-x}dt &= \frac{1}{2}(\Phi^+(x)+\Phi^-(x))\\ &= \frac{1}{\kappa+1}\left\{P_n^{(\gamma,\delta)}(x) - (1-\kappa)X_0^+(x)P_{n-1}^{(\gamma,-\delta)}\right\}\end{aligned} \qquad (3.5.27)$$

为了考虑$n=1$的情形, 可以补充一个 "附加"解$\phi(t) = -2X_0^+(t)$, $f(t)=0$, 如果$P_{-1}^{(\gamma,\delta)}(z)=0$的话.

对应于$X_2(z)$的结果, 取$\gamma = (-1/2) - i\alpha$, $\delta = (-1/2) + i\alpha$, 可以求得解式, 如例3.5.3.

$\alpha=0$的特殊情形，导致解为Chebyshev多项式的已知结果，因为

$$\left.\begin{aligned} P_n^{(1/2,1/2)}(z) &= 2C_nU_n(z) \\ P_n^{(-1/2,1/2)}(z) &= C_{n-1}T_n(z) \end{aligned}\right\} \quad (3.5.28)$$

其中$C_n=\Gamma(n+3/2)\pi^{-1/2}/(n+1)!$。这样对于$\gamma=\delta=-1/2$，$V_n(z)$变成

$$\begin{aligned} V_n(z) &= C_{n-1}(z^2-1)^{-1/2}[T_n(z)-(z^2-1)^{1/2}U_{n-1}(z)] \\ &= C_{n-1}(z^2-1)^{-1/2}[z+(z^2-1)^{1/2}]^{-n} \end{aligned} \quad (3.5.29)$$

例3.5

1. 用类似于上面对方程（3.5.1）所做那样，又假定$0<\alpha<1/2$，分析实变数的积分方程

$$\phi(x)+\frac{\cot\pi\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(y)}{y-x}\mathrm{d}y=\phi(x), \qquad -1<x<1$$

再证明，在±1具有可积的奇异性和在无穷远点具有有限值的通解是

$$\phi(x)=\sin^2\pi\alpha\phi(x)-\frac{\sin\pi\alpha\cos\pi\alpha}{\pi}X_0^+(x)\int_{-1}^{1}\frac{\phi(y)\mathrm{d}y}{X_0^+(y)(y-x)}$$

$$+(Ax+B)X_0^+(x)$$

其中$X_0^+(x)=(1-x)^{-1/2+\alpha}(1+x)^{-1/2-\alpha}$

2. 利用积分表达式

$$Q_n^{(\gamma,\delta)}(z)=\frac{(z-1)^{-\gamma}(z+1)^{-\delta}}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t)^{\gamma}(1+t)^{\delta}}{t-z}$$

$$\times P_n^{(\gamma,\delta)}(t)\mathrm{d}t$$

证明

$$Q_n^{(1/2,1/2)}(z)=-\pi C_nG_n(z)$$

$$Q_n^{(-1/2,-1/2)}(z)=(\pi/2)C_{n-1}R_n(z)$$

其中$G_n(z)$，$R_n(z)$是§2.3中定义的函数。

3. 取$\gamma=(-1/2)-i\alpha$，$\delta=(-1/2)+i\alpha$，证明方程(3.5.1)对于$F(t)=P_n^{(\gamma,\delta)}(t)$的解是

$$\phi(t)=-1/2X_0^+(t)P_{n-1}^{(\gamma,\delta)}(t)$$

其中$n=0$的情形已为(3.5.11)所排除。证明

$$\Phi(z)=\frac{\exp(-\pi\alpha)}{\pi}Q_n^{(\gamma,\delta)}(z)$$

并且

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(t)}{t-x}dt=\frac{\exp(-\pi\alpha)}{\pi}Q_n^{(\gamma,\delta)}(x),\qquad |x|>1$$

4. 分析方程

$$\phi(x)+\frac{\varphi}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(t)}{t-x}dt=g(x),\qquad |x|<1$$

其中 $-1<\varphi<1$。证明 $\Phi(z)$ 满足

$$\kappa\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x)=F(x),\text{对于 }|x|<1$$

其中有关记号与(3.5.8)相同。现在基本解 $X_0(z)$ 是 $X_0(z)=(z-1)^{\gamma}\times(z+1)^{-\delta}$，并且

$$\phi(x)=\cosh^2\pi\alpha g(x)-\frac{\sinh 2\pi\alpha}{2\pi i}X_0^{+}(x)\int_{-1}^{1}\frac{g(t)dt}{X_0^{+}(t)(t-x)}+AX_0^{+}(x)$$

下一步证明，若 $F(z)$ 和 $S(z)$ 是满足

$$\frac{F(z)}{X_0(z)}-S(z)=O(z^{-1})$$

的多项式，那么

$$\phi(z)=(z-1)^{-1}\{F(z)-X_0(z)S(z)-AX_0(z)\}$$

$$\phi(x)=X_0^{+}(x)S(x)+AX_0^{+}(x),\ |x|<1$$

第四章　平面接触问题

4.1　引　　言

我们第一眼看到，假定两个接触体为完全弹性、均匀与各向同性，又处于平面状态，即平面应变、平面应力或广义平面应力状态，似乎这已是充分理想化了，可以得到众多问题的有效解答。不幸的很，并非如此，虽然这可以就这样两个接触物体作出某些一般的陈述（§4.10），但通常还要作进一步的简化。有两个最共同的进一步的假定，一是在接触区一个物体的曲率是那么小，以致可以用弹性半空间去模拟，二是，另一物体比第一物体刚硬得多，以致可以被认为是刚体，或压头。这一章的大多数分析是基于这些假定的。在§4.10中将表明，某些考虑为两个弹性体接触的问题，由和刚性体与弹性半平面接触问题相同的方程所控制。另外的假定是关于接触体之间存在或不存在摩擦。这里有两个极端的假定，即物体间无摩擦和完全粘结；还有一些不极端的假定，其中某种摩擦是允许的。无摩擦接触问题在§2.4中讨论过，并在§4.5中再讨论；具有粘滞的接触问题将分别在§4.6，§4.7中研究。

弹性半平面接触问题，亦即一个物体为压头，而另一个物体为弹性半平面，属于经典弹性理论处理的问题。这个理论在19世纪得到大规模的发展，这在 Love（1927）的著作中，附有历史文献，作了全面叙述。这一著作的第一版出于1893年。这本著作包含着有关接触问题（二维与三维）的求解所必要的数学工具，但只包含为Hertz所发展的理论有关的特殊接触问题，部分地已在本书§2.9描述过了。在Chaplygin(Чаплыгин)文集（1950）中包含一个1900年未发表的手稿，它论及半平面同平底压头的接

触压力. Sadowsky(1928)研究了一些无摩擦接触问题，包括具有平底的压头，以及无限个这种压头周期性地分布着，与弹性半半平面相接触.

关于半平面接触问题的现代研究，是在苏联从1935年开始的，并在1935～1950期间，是以N.I.Muskhelishvili及其在梯比利斯的同事们为中心的. 这个工作——是平面弹性理论的以复变函数方法作普遍研究的一部分——不仅基于早期弹性力学家们的劳动，也基于复变分析研究者们的劳动，包括Cauchy，Riemann，Hillbert，Kolosov，Carleman，Morera，Plemelj，Privalov和Tricomi的工作.有关接触问题早期工作的文献（1935—1950）可以在Muskhelishvili(1953a)专著中查到，并且在Muskhelishvili(1953b)这又一著作中的第十三章里作了总括叙述. 另外两本重要的苏联著作是Shtaerman(1949)与Galin(1961)的《弹性理论中的接触问题》；后者有英文译本. 苏联工作的文献只列出本书参考文献目录前所举的那些俄文杂志中出现的；对于Muskhelishvili的工作，将参考他的专著，而不是其原始论文.

4.2 弹性的复变理论的基本方程

弹性理论的一般复变公式表示，已经是许多书籍的主题；除去引用的Muskhelishvili的专著之外，读者可以查阅Green与Zerna(1954)，Sokolnikolf(1956)，Milne-Thomson(1960)和England(1971a)等人的著作. Teodorescu(1960)已经作出关于弹性的平面理论100年的回顾.

平面弹性理论静力学的方程是：

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.2.1}$$

$$\tau_{xx}=\frac{2\mu}{1-2\nu}\left[(1-\nu)e_{xx}+\nu e_{yy}\right],\quad \tau_{xy}=2\mu e_{xy} \tag{4.2.2}$$

$$\tau_{yy}=\frac{2\mu}{1-2\nu}[(1-\nu)e_{yy}+\nu e_{xx}] \tag{4.2.3}$$

$$\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+F_x=0=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+F_y \tag{4.2.4}$$

其中，对于广义平面应力，ν必须由 $\nu^*=\nu/(1+\nu)$ 代替，并且所有位移、应变、应力与体力必须解释为平均值，如§1.11中所描述.

这些方程的解，由方程（1.11.18）以复形式得到，它是

$$2\mu D=\kappa\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)}+\varphi W \tag{4.2.5}$$

对应于这些复位移，我们定义复应变与复应力分量. 利用方程（1.11.15），并注意到

$$\frac{\partial D}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial D}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial D}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{4.2.6}$$

$$\frac{\partial\overline{D}}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\overline{D}}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial\overline{D}}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{4.2.7}$$

它们联立而给出

$$\varepsilon=e_{xx}+e_{yy}=\frac{\partial D}{\partial z}+\frac{\partial\overline{D}}{\partial\overline{z}} \tag{4.2.8}$$

$$e_{yy}-e_{xx}+2\mathrm{i}e_{xy}=-2\frac{\partial\overline{D}}{\partial z} \tag{4.2.9}$$

这建议我们应该引进应力的联合形式

$$\Theta=\tau_{xx}+\tau_{yy},\quad \Xi=\tau_{yy}-\tau_{xx}+2\mathrm{i}\tau_{xy} \tag{4.2.10}$$

利用应变，这些式子将给出

$$(1-2\nu)\Theta=2\mu\varepsilon,\quad \Xi=2\mu(e_{yy}-e_{xx}+2\mathrm{i}e_{xy}) \tag{4.2.11}$$

所以

$$\Theta=2[\phi'(z)+\overline{\phi'(z)}]+2(1-\varphi)\partial W/\partial z \tag{4.2.12}$$

$$\Xi=2[\overline{z}\phi''(z)+\psi'(z)]-2\varphi\partial\overline{W}/\partial z \tag{4.2.13}$$

引进下述的函数Φ、Ψ是方便的

$$\Phi(z)=\phi'(z),\quad \Psi(z)=\psi'(z) \tag{4.2.14}$$

那么

$$\Theta=2[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}]+2(1-\varphi)\partial W/\partial z \tag{4.2.15}$$

$$\Xi=2[\bar{z}\phi'(z)+\Psi(z)]-2\varphi\partial\overline{W}/\partial z \tag{4.2.16}$$

函数$\Phi(z)$，$\Psi(z)$以及$\phi(z)$，$\psi(z)$称为复势.

为了方便起见，引进函数$F(z,\bar{z})$，即

$$F(z,\bar{z})=2[\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)}]-2\varphi W(z,\bar{z}) \tag{4.2.17}$$

那么Θ，Ξ可以写成

$$\Theta=\frac{\partial F}{\partial z}+2\frac{\partial W}{\partial z},\quad \Xi=\frac{\partial F}{\partial z} \tag{4.2.18}$$

在工程问题中，体力的效应，相对地被认为不重要. 因此我们将假定，除非有相反的声明，体力不存在. 在这种情形，F与例1.11.3中的Airy应力函数U直接相联系，为

$$F=4\frac{\partial U}{\partial\bar{z}} \tag{4.2.19}$$

考虑作用在如图4.2.1所示一条曲线AB上的应力. 因为$\hat{n}=(\sin\alpha)\hat{i}-(\cos\alpha)\hat{j}$，方程(1.4.7)表明

$$\left.\begin{aligned}\tau_{nx}&=(\sin\alpha)\tau_{xx}-(\cos\alpha)\tau_{xy}\\ \tau_{ny}&=(\sin\alpha)\tau_{xy}-(\cos\alpha)\tau_{yy}\end{aligned}\right\} \tag{4.2.20}$$

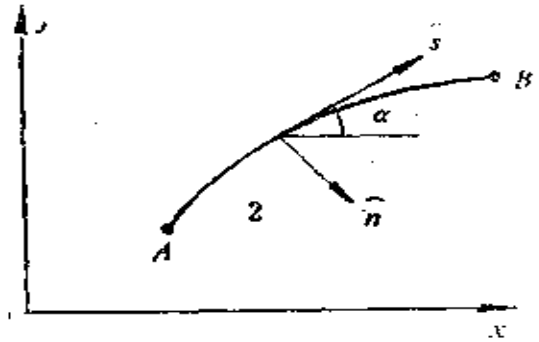


图 4.2.1　由1边指向2边的法线 $\hat{n}$

其中，当与例1.11.3相联合时，给出

$$\left.\begin{aligned} T_{nx} &= (\sin\alpha)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\cos\alpha)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \\ \tau_{ny} &= -(\sin\alpha)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - (\cos\alpha)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.2.21}$$

这样

$$\begin{aligned} \tau_{nx} + \mathrm{i}\tau_{ny} &= -\mathrm{i}\left[\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right]\frac{\partial U}{\partial s} = -2\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial U}{\partial z} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial F}{\partial s} \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

所以

$$\mathrm{d}F = 2\mathrm{d}[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}] = 2\mathrm{i}(\tau_{nx} + \mathrm{i}\tau_{ny})\mathrm{d}s, \tag{4.2.23}$$

并且这导出F的单值性的重要判据。沿一特殊路径Γ_{AB}从A到B时F的变化是

$$[F]_A^B = 2\mathrm{i}\int_{\Gamma_{AB}} (\tau_{nx} + \mathrm{i}\tau_{ny})\mathrm{d}s, \tag{4.2.24}$$

所以，若点A和点B之间，$[F]_A^B$与路径Γ_{AB}无关，则F将是单值的。这等价于条件

$$\int_\Gamma (\tau_{nx} + \mathrm{i}\tau_{ny})\mathrm{d}s = 0 \tag{4.2.25}$$

对物体中所有闭路都成立。若物体是单连通的，并且对于平衡状态，则这个判据将被满足；如果物体不是单连通的，方程(4.2.5)提供一个额外条件，它对包围边界内部的任一Γ必须成立。当(4.2.5)得到满足时，人们可以推断出，由给定的表面力（并且不考虑体力）引起的平面弹性体中的应力，与弹性常数无关。由Michell(1899)发现的这个结果来源于这样的事实，即(4.2.18)中的Θ与三是单值函数F的导数。

方程(4.2.17),(4.2.24)表明，跨越Γ_{AB}的作用力的合力——并且按照图1.4.1 的约定，这是2边上的材料承受的1边上的材料的力——是

$$X_n + iY_n = -i[F]_B^A/2 = -i[\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(Z)}]_A^B \tag{4.2.26}$$

跨越AB的作用力对于点0的力矩是

$$M = \int_A^B (x\tau_{ny} - y\tau_{nx})\mathrm{d}s$$

$$= -\int_A^B \left\{ x\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + y\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}s$$

用分部积分，得到

$$M = -\left[x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B + \int_A^B\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s$$

$$= \left[U - x\frac{\partial U}{\partial x} - y\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B$$

注意到

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = \mathrm{Re}\left\{(x - iy)\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{2\overline{z}\frac{\partial U}{\partial z}\right\}$$

我们求得

$$M = \mathrm{Re}[\chi(z) - z\psi(z) - z\overline{z}\phi'(z)]_A^B \tag{4.2.27}$$

例4.2

1. 试表明方程 (4.2.4) 可以联合成一个复方程

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\overline{z}} + \frac{\partial\overline{\Xi}}{\partial z} - 2\frac{\partial V}{\partial\overline{z}} = 0$$

2. 试表明当$W\equiv 0$时，应力的组合式Θ，Ξ可以写成

$$\Theta = \nabla_1^2 U = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\overline{z}}, \qquad \Xi = 4\frac{\partial^2 U}{\partial\overline{z}^2}$$

3. 试表明

$$\tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} = \Theta, \quad \tau_{\theta\theta} - \tau_{rr} + 2i\tau_{r\theta} = \exp(2i\theta)\,\Xi$$

4．用图4.2.1的记号，试表明

$$2(\tau_{nx}+i\tau_{ny})=-i[\exp(i\alpha)\Theta+\exp(-i\alpha)\overline{\Gamma}]$$

5．考虑包围原点的一个小圆域内的平衡，试表明与作用在原点的力$X+iY$相联系的复势$\phi(z)$，$\psi(z)$为

$$\phi(z)=-\frac{(X+iY)}{2\pi(1+\kappa)z},\quad \psi(z)=\frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)z}$$

6．试表明

$$2(\tau_{\theta\theta}-i\tau_{r\theta})\exp(i\theta)=-2i(\tau_{\theta x}+i\tau_{\theta y})=\partial F/\partial r$$

并且由此而有

$$\int_0^r(\tau_{\theta\theta}-i\tau_{r\theta})\exp(i\theta)dr=[\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)}]_0^r$$

7．试表明若无体力，那么Θ是调的，亦即

$$\nabla_1^2\Theta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Theta=4\frac{\partial^2\Theta}{\partial z\partial\bar{z}}=0$$

4.3 复势满足的条件

对复势$\phi(z)$，$\psi(z)$，$\Phi(z)$，$\Psi(z)$所满足的条件的权威性研究，可以在Muskhelishvili(1953a)著作中查到．他研究了占有z平面上一个普遍的多连通区域的弹性体，并且讨论了解的存在性与唯一性问题，和复势所取的形式，特别地是在无穷远处的形式．在这一节我们只以最直觉的验证，总结一下这些结果的某些特殊情形，假定它们只有足够的普遍性，足以包括后面几节中将要研究的几类问题．我们将作如下假定：

1）为弹性体所占的区域D^+，是上半平面S^+，$y\geqslant 0$（在这一章中）．在第八章将假定这区域为单位圆的内部，或者是可以被保角映射成这些单位圆之一的那个区域．

2）应力是x，y的单值连续函数，具有连续到二阶导数（或许除去某些边界点之外，如下面所讨论的），并且在无穷远点有界．

3）位移是单值连续函数（也或许除去某些点之外，如2）所说），具有一阶导数，这些导数由方程（4.2.1）～(4.2.4)与应力相联系.

4）作用在物体上的力，由边界的有限部分上的表面力，体力和无穷远处的应力组成.

首先考虑，若应力与体力为已知，复势对什么范围得以确定. 方程(4.2.15) 表明，若Re[$\Phi(z)$]为已知，那么，$\Phi(z)$除去一个虚常数外，是确定的. 这样

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+Ci,\phi(z)=\phi_0(z)+Ciz+E \qquad (4.3.1)$$

其中$\Phi_0(z),\phi_0(z)$是确定的，C，E为任意常数，C是实数. 现在方程（4.2.16）表明，如果像我们设想的那样，Ξ与W为已知，那么$\Psi(z)$被确定为

$$\Psi(z)=\Psi_0(z),\quad \psi(z)=\psi_0(z)+E' \qquad (4.3.2)$$

其中，E'是一个复常数. 方程(4.2.5)表明，任意项C,E,E'导致一复位移

$$2\mu D=(\kappa+1)Ciz+(\kappa E-\overline{E}') \qquad (4.3.3)$$

这第一项表示一刚体转动，第二项为刚体平动. 若除了应力之外，位移也已知（或已知的不是应力而是位移），则$\Phi(z)$，$\Psi(z)$将完全确定，亦即$C=0$，并且$\phi(z)$，$\psi(z)$确定到相差任意常数E，E'的情形，它们满足

$$\kappa E-\overline{E}'=0 \qquad (4.3.4)$$

我们现在将不难表明，复势$\Phi(z)$，$\Psi(z)$在物体所占的区域内，是z的全纯函数. 在无体力情形下，应力联合式Θ是调和的(例4.2.7)，亦即

$$\nabla^2\Theta=0 \qquad (4.3.5)$$

但由方程（4.2.15）

$$\Theta=4\mathrm{Re}[\Phi(z)] \qquad (4.3.6)$$

所以，利用§3.1中介绍的分析，我们可以表明$\Phi(z)$除了可能在无穷远点之外，而在D^+中全纯.假定2）——应力在无穷远点有

界——暗示$\Phi(z)$在无穷远点全纯，所以

$$\Phi(z) = \Gamma + \gamma z^{-1} + O(z^{-2}), \quad \text{对于大的 } |z|, \tag{4.3.7}$$

其中$O(z^{-2})$表示这样的一个量$\varepsilon(z)$，即对某个常数A，当$|z| \to \infty$时，有 $|\varepsilon(z)| < A|z|^{-2}$。现在利用例1.11.3，例 4.2.2与方程(4.2.14)，我们求出

$$\begin{aligned}\nabla_1^2[\chi(z) + \overline{\chi(z)}] &= \nabla_1^2[2U - \bar{z}\phi(z) - z\overline{\phi(z)}] \\ &= 2\Theta - 4\Phi(z) - 4\overline{\Phi(z)} = 0\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

所以$\chi(z)$除去可能在无穷远点之外，是全纯的。现在三如同应力一样，在无穷远点有界，所以，方程 (4.2.16) 暗示，$\Psi(z)$——$\chi(z)$的二阶导数——必须满足

$$\Psi(z) = \Gamma' + \gamma' z^{-1} + O(z^{-2}) \quad \text{对于大的 } |z| \tag{4.3.9}$$

方程 (4.3.7) ，(4.3.9) 现在导出结果

$$\phi(z) = \Gamma z + \gamma \ln z + \phi^*(z) \tag{4.3.10}$$

$$\psi(z) = \Gamma' z + \lambda' \ln z + \psi^*(z) \tag{4.3.11}$$

其中，$\phi^*(z)$和$\psi^*(z)$，在D^+包括无穷远点在内，为全纯。复常数Γ，Γ'与无穷远点的应力和转动有关(例4.3.1)，而γ，γ'与作用在边界的有限部分上的合力有关，如现在将要表明那样。

作为一个例子，考虑物体占有上半空间的情形。取定义在S^+中的$\ln z$的分支，其中

$$z = |z|\exp(i\theta), \quad \ln z = \ln|z| + i\theta \tag{4.3.12}$$

方程(4.2.26)表明，作用在上半平面AB段上的力为

$$X + iY = -i[\gamma \ln z + \bar{\gamma}(z/\bar{z}) + \bar{\gamma}' \ln \bar{z} + o(1) + \text{const}]_A^B$$

其中，$A = (-a, 0)$，$B = (b, 0)$，a和b较大，如图4.3.1所示。现在，在A点，$\ln z = \ln a + i\pi$，$\ln \bar{z} = \ln a - i\pi$，在$B$点，$\ln z = \ln b = \ln \bar{z}$，所以

$$X + iY = -i[(\gamma + \gamma')\ln(b/a) - i\pi(\gamma - \gamma') + o(1)] \tag{4.3.13}$$

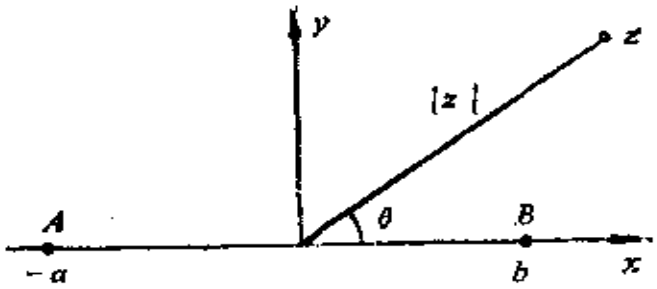


图4.3.1 离原点较远的点A,B

对于所有的a,b,这必须为有限值，所以

$$\gamma+\gamma'=0 \tag{4.3.14}$$

而作用在x轴上的力为

$$X+\mathrm{i}Y=-\pi(\gamma-\gamma')=-2\pi\gamma \tag{4.3.15}$$

回到方程(4.3.7),(4.3.9),我们看到对于大的$|z|$，复势Φ,Ψ满足

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\Gamma-\frac{(X+\mathrm{i}Y)}{2\pi z}+O(z^{-2})\\ \Psi(z)&=\Gamma'+\frac{(X-\mathrm{i}Y)}{2\pi z}+O(z^{-2})\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

虽然应力在无穷远点处为有界，但位移却非如此。事实上，方程(4.2.5),对于大的$|z|$，表明

$$\begin{aligned}4\pi\mu D=2\pi[&(\kappa\Gamma-\overline{\Gamma})z-\overline{\Gamma'}\,\overline{z}]-\kappa(X+\mathrm{i}Y)\ln z-(X\\&+\mathrm{i}Y)\ln\overline{z}+(X-\mathrm{i}Y)(z/\overline{z})+O(1)\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

这表明，若Γ，Γ'为零，亦即在无穷远处无应力、亦无转动，则位移在无穷远处将具有对数奇异性，除非 $X=0=Y$。 这是平面弹性问题这不幸的失真。无界位移的后果之一是，如果一个压头压入半空间，则不可能发现真实的嵌入，或压头的“法向靠近”，也不可能发现半平面的真实 位移，仅仅得到两个点的相对位移。注意方程 (4.2.9) 的任意常数 C；这样一个任意常数是不出现在§2.6的轴对称问题中的。 已经作出了多种努力去消除平面问题

中的这个任意性，这些内容将在第八章中讨论.

例 4.3

1. 试表明，对应于$\Phi(z)=\Gamma=\Gamma_1+i\Gamma_2$，$\Psi(z)=\Gamma'=\Gamma_1'+i\Gamma_2'$的应力，是$\tau_{xx}=2\Gamma_1-\Gamma_1'$，$\tau_{yy}=2\Gamma_1+\Gamma_1'$，$\tau_{xy}=\Gamma_2'$，并且方程(1.2.8)中的转动量$\omega_z$为$2\mu\omega_z=(\kappa+1)\Gamma_2$.

4.4 半平面的应力边值问题

与Muskhelishvili(1953a)——他解决了具有很大普遍性的问题——不同，我们将研究很简单的问题. 首先让我们扼要地叙述一下已经得到的某些结果. 我们假定，弹性体占据上半平面S^+，并且在§4.3的开头所说的条件1)～4)得到满足. 应力联合式Θ，Ξ，和位移D为下式给出

$$\Theta=2[\Phi(z)+\overline{\Phi}(\overline{z})] \tag{4.4.1}$$

$$\Xi=2[\overline{z}\Phi'(z)+\Psi(z)] \tag{4.4.2}$$

$$2\mu D=\kappa\phi(z)-z\overline{\phi'}(\overline{z})-\overline{\psi}(\overline{z}) \tag{4.4.3}$$

其中

$$\phi'(z)=\Phi(z),\ \psi'(z)=\Psi(z) \tag{4.4.4}$$

并且$\Phi(z)$，$\Psi'(z)$在S^+中，包括无穷远点在内为全纯，在无穷远点，它们满足方程(4.3.7)，(4.3.9). 函数$\phi(z)$，$\psi(z)$在S^+除去无穷远之外全纯，在无穷远点，方程(4.3.10)，(4.3.11)成立.

方程(4.4.1)，(4.4.2)可以联立而给出

$$\tau_{yy}-i\tau_{xy}=\frac{1}{2}\{\Theta+\overline{\Xi}\}$$

$$=\Phi(z)-\overline{\Phi}(\overline{z})+z\overline{\Phi}'(\overline{z})+\overline{\Psi}(\overline{z}) \tag{4.4.5}$$

而方程(4.2.5)可以对x微分，得到

$$2\mu D'=2\mu(u'+iv')=\kappa\Phi(z)-\overline{\Phi}(\overline{z})-z\overline{\Phi}'(\overline{z})-\overline{\Psi}(\overline{z}) \tag{4.4.6}$$

其中

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x},\quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.4.7}$$

虽然我们的主要兴趣在于混合边值问题，但我们首先考虑§1.9中定义的比较简单的应力边值问题．假定弹性体受沿实轴L给定的应力分布所作用，这些应力在L上包括无穷远点在内，满足H条件，再假定它们在无穷远处等于零．让

$$\tau_{yy}(x,0) = -p(x),\ \tau_{xy}(x,0) = -s(x) \tag{4.4.8}$$

那么在实轴上

$$\Phi(x) + \overline{\Phi(x)} + x\,\overline{\Phi'(x)} + \overline{\Psi(x)} = -[p(x) - is(x)] \tag{4.4.9}$$

其中这些值是当点z从S^+趋于x轴的边界值．函数仅在S^+中被定义，但$\Phi(z)$现在将在S^-中被定义．函数$\Phi(z)$将对$\mathrm{Im}(z)>0$被定义和全纯，所以$\overline{\Phi}(z)$当$\mathrm{Im}(z)<0$时，亦即当点z位于S^-中时被定义并全纯．（这里$\overline{\Phi}(z)$具有如下的意义．分$\Phi(z)$为实部与虚部，亦即$\Phi(z) = \Phi(x,y) = U(x,y) + iV(x,y)$；那么$\overline{\Phi}(z) \equiv \{\Phi(\overline{z})\} = U(x,y) - iV(x,y)$）．所以函数$-\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi}'(z) - \overline{\Psi}'(z)$也在$S^-$中被定义并且全纯．这是作为函数$\overline{\Phi}(z)$在$S^-$中的定义，亦即

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi}'(z) - \overline{\Psi}'(z),\ z\text{在}S^-\text{中}. \tag{4.4.10}$$

这个方程可以反过来，对S^+中的z，用$\Phi(z)$与$\overline{\Phi}(z)$给出$\Psi(z)$；事实上

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \overline{\Phi}(z) - z\Phi'(Z),\text{对于}z\text{在}S^+\text{中} \tag{4.4.11}$$

这样，对S^+中的z，方程(4.4.5)，(4.4.6)变成

$$\tau_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\overline{z}) + (z - \overline{z})\Phi'(\overline{z}) \tag{4.4.12}$$

$$2\mu D' = \kappa\Phi(z) + \Phi(\overline{z}) - (z - \overline{z})\overline{\Phi}'(z) \tag{4.4.13}$$

考虑到$\Phi(z)$在x轴上可能具有的奇异性的阶，将引进两个条件．

它们是

$$\lim_{y\to 0} y\Phi'(x+iy)=0 \tag{4.4.14}$$

除去可能在x轴上的有限个点x_0——例如载荷作用部分的端点——之外．然而在这些点附近

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\Phi(x)=0 \tag{4.4.15}$$

这具有清除点载荷的效应．在条件(4.4.14)下，方程(4.4.12)，(4.4.13)导出重要的关系式

$$-p(x)+is(x)=\Phi^+(x)-\Phi^-(x),\quad x在L上 \tag{4.4.16}$$

$$2\mu(u'(x)+iv'(x))=\kappa\Phi^+(x)+\Phi^-(x),\quad x在L上 \tag{4.4.17}$$

注意，若z在S^+中，那么$\overline{z}$在S^-中，所以当$z\to x+i0$时$\Phi(\overline{z})$的极限值是$\Phi^-(x)$．方程(4.4.16)表明，若x轴的部分是未受载荷的，那么$\Phi^+(x)$等于$\Phi^-(x)$；这个状态可以解释为$\Phi(z)$——它用(4.4.10)定义在S^-中——是通过定义在S^+中的$\Phi(z)$的未受载荷作用的边界部分的解析延拓．

立即得到第一基本问题的解如下．因为方程(4.4.16)具有与(3.3.6)相同的形式，又由于假定$-p(x)+is(x)$满足§3.3中对$f(x)$所提的条件，方程(4.4.16)的解是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-p(t)+is(t)}{t-z}dt \tag{4.4.18}$$

已经介绍过的最简单的例子，是在x轴的$[-a,a]$部分上作用着常压力的情形．那么

$$\Phi(z)=-\frac{p}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{dt}{t-z}=-\frac{p}{2\pi i}\ln\left(\frac{z-a}{z+a}\right) \tag{4.4.19}$$

并且$\overline{\Phi}(z)=-\Phi(z)$，所以由方程(4.4.11)得出

$$\Psi(z)=-z\Phi'(z)=paz/[\pi i(z^2-a^2)] \tag{4.4.20}$$

我们注意到，由(4.4.19)所给的复势$\Phi(z)$，除去在载荷作用部分的端点之外，是满足条件(4.4.14)的．这正是所指望的，因为在

一有限线段的端点，方程(3.3.6)不成立，在这种位置上，$f(t)$不等于零，或者为另一种情形，在该点上，$f(t)$不连续。记$z-a=\rho_1\exp(i\theta_1)$，$z+a=\rho_2\exp(i\theta_2)$，如图4.4.1所示，可以计算出应力来；于是

$$2\pi i\Phi(z)=-p\ln(\rho_1/\rho_2)-ip(\theta_1-\theta_2) \tag{4.4.21}$$

$$\pi p^{-1}\tau_{xx}=-(\theta_1-\theta_2)-2ay\cos(\theta_1+\theta_2)/(\rho_1\rho_2) \tag{4.4.22}$$

$$\pi p^{-1}\tau_{yy}=-(\theta_1-\theta_2)+2ay\cos(\theta_1+\theta_2)/(\rho_1\rho_2) \tag{4.4.23}$$

$$\pi p^{-1}\tau_{xy}=-2ay\sin(\theta_1+\theta_2)/(\rho_1\rho_2) \tag{4.4.24}$$

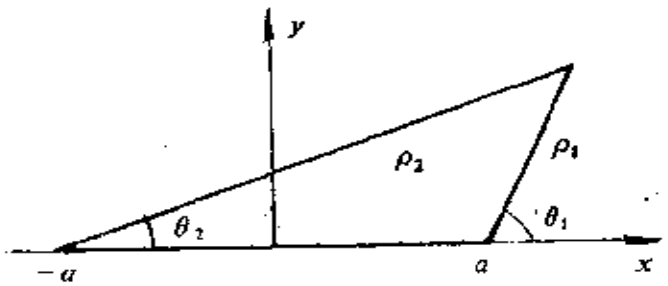


图4.4.1 作用在$(-a,a)$段的接触恒压力p

这样，因为$y=\rho_1\sin\theta_1=\rho_2\sin\theta_2$，应力直到边界上都是连续的，但除去点$x=\pm a$之外；在端点的极限值，取决于趋近于这些点的方向。位移直到边界上，包括端点$\pm a$在内，都是连续的，但除去无穷远点之外，在这种点附近，它们遵循如同$\ln|z|$的规律，如同在§4.3中所述。

例 4.4

1. 对图4.4.1所示的问题，用$\rho_1,\rho_2,\theta_1,\theta_2$表示(4.4.6)所给的位移导数$D'$。

4.5 半平面无摩擦接触问题

最简单的半平面接触问题，与单个刚性压头无摩擦地压在半平面上产生的变形相联系。平底压头的解为Sadowsky(1928)所给出。这里给出的分析，基于 Muskhelishvili 1935年的工作，如Muskhelishvili(1953b)所介绍；其逆问题曾在§2.2中讨论过。特殊形状的亦即圆边平底压头的各种解，出现在 Shtaerman

(1949)的书中。

考虑具有外形$y=f(x)$的刚性压头，它垂直地无摩擦地压在半平面的边界上而与之相接触。无限小弹性理论的假定，暗示着边界条件必须作用在未变形的表面即x轴上。对一给定的压头仅仅当它的曲率半径与接触区的宽窄相比为很大时，刚才所说的一点才是真实的。此后假定这一点对所有被研究的压头问题都是真实的。接触之后，接触区的铅直位移是

$$v^-(x)=f(x)+e \qquad 在L'上 \tag{4.5.1}$$

其中e是一个常数。无摩擦接触条件意味着

$$\tau_{xy}=0 \qquad 在L'上 \tag{4.5.2}$$

而在x轴的其余的部分上

$$\tau_{yy}-i\tau_{xy}=0 \qquad 在L''上 \tag{4.5.3}$$

再次用方程(4.4.10)定义在S^-中的$\Phi(z)$；那么

$$\tau_{yy}-i\tau_{xy}=-p(x)+is(x)=\Phi^+(x)-\Phi^-(x) \tag{4.5.4}$$

所以

$$-2i\tau_{xy}=\Phi^+(x)-\Phi^-(x)-\overline{\Phi^+(x)}+\overline{\Phi}(x)=0 \qquad 在L上 \tag{4.5.5}$$

但$\overline{\Phi^+(x)}=\overline{\Phi}^-(x)$，$\overline{\Phi}(x)=\overline{\Phi}^+(x)$，所以

$$-2\tau_{xy}=\Phi^+(x)+\overline{\Phi}^+(x)-\{\Phi^-(x)+\overline{\Phi}^-(x)\}=0,在L上 \tag{4.5.6}$$

这意味着函数$\Phi(z)+\overline{\Phi}(z)$在全平面上全纯；因为它在无穷远点等于零，它必须处处等于零。因此

$$\Phi(z)=-\Phi(z) \tag{4.5.7}$$

以及

$$2\mu D'(z)=\kappa\Phi(z)+\Phi(\overline{z})-(z-\overline{z})\overline{\Phi}'(\overline{z}) \tag{4.5.8}$$

这给出

$$4\mu iv'(x)=\kappa\Phi^+(x)+\Phi^-(x)-\kappa\overline{\Phi^+(x)}-\overline{\Phi^-(x)}$$

$$= \kappa\Phi^+(x) + \Phi^-(x) + \kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x)$$

所以方程(4.5.1),(4.5.4)可以写成

$$\Phi^+(x) + \Phi^-(x) = \vartheta^{-1}\mathrm{i}f'(x) \qquad \text{在}L'\text{上} \qquad (4.5.9)$$

$$\Phi^+(x) - \Phi^-(x) \equiv -p(x) = 0 \qquad \text{在}L''\text{上} \qquad (4.5.10)$$

其中 $\vartheta = (1-\nu)/\mu$. 方程(4.5.9)在$\kappa = 1$时具有与方程 (3.4.1) 相同的形式，所以$\alpha = 0$，解是

$$\vartheta\,\Phi(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi}\int_{L'}\frac{f'(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)(t-z)} + GX_0(z) \qquad (4.5.11)$$

若L'是$[-a,a]$，那么$X_0(z) = (z^2-a^2)^{-1/2}$. 公式 (4.5.11) 中的$\Phi(z)$仍必须满足方程(4.5.7)；但(3.4.12)表明，在L'上，$X_0^+(t) = -\mathrm{i}(a^2-t^2)^{-1/2} = -\overline{X_0^+}(t)$，而$\overline{X_0}(z) = X_0(z)$. 这样，因为$f'(t)$是实函数，所以方程(4.5.11)中的第一项满足(4.5.7)；其第二项只有当C是虚数时，亦即$C = \mathrm{i}B$时，才满足它. 常数B可以与作用在压头上的总力$\mathrm{i}P_0$相联系，因为由(4.5.11)给定的$\Phi(z)$满足$\vartheta\Phi(z) = \mathrm{i}Bz^{-1} + O(z^{-2})$，所以方程 (4.3.15) 给出$B = -\vartheta P_0/(2\pi)$.

对于一个具有直平底的压头，$f'(t) = 0$和

$$2\pi\Phi(z) = -\mathrm{i}P_0(z^2-a^2)^{-1/2} \qquad (4.5.12)$$

以及在压头下的应力为

$$\mathrm{p}(x) = \pi^{-1}P_0(a^2-x^2)^{-1/2} \qquad (4.5.13)$$

对于一个具有直倾斜底的压头如图2.4.1所示，$f'(x) = \alpha$，所以

$$\vartheta\Phi(z) = -\frac{X_0(z)}{2\pi}\alpha\int_{L'}\frac{\mathrm{d}t}{X_0^+(t)(t-z)} - \frac{\mathrm{i}\vartheta}{2\pi}P_0X_0(z) \qquad (4.5.14)$$

这第一个积分，可以用§3.4的方法计算出来. 其结果是

$$2\vartheta\Phi(z) = \alpha\mathrm{i}(1 - zX_0(z)) - \mathrm{i}\vartheta P_0X_0(z)/\pi \qquad (4.5.15)$$

在压头下的压力是

$$p(x) = \Phi^-(x) - \Phi^+(x) = (\vartheta p_0 + \pi\alpha x)(a^2-x^2)^{-1/2}/(\pi\vartheta) \qquad (4.5.16)$$

对于一个一般外形的压头，在压头下两个可能的边界条件：完全接触——在这种情形中接触区是给定了的，并且在接触区的端点$p(x)$具有（平方根）奇异性——和不完全接触，在后一情形中，接触区的宽窄，要由接触区端点处接触应力为零的条件去确定，如同在例4.5.2，4.5.3中所讨论的。

例4.5

1. 若$L'=[-a,a]$并且$f(x)=a\sum_{n=0}^{\infty}b_nT_n(x/a)$，试表明$f'(x)=\sum_{n=0}^{N}nb_nU_{n-1}(x/a)$。现在利用例3.4.2的结果推导，若压头是完全接触的，那么

$$2\vartheta\Phi(z)=i\sum_{n=1}^{N}nb_n\{U_{n-1}(z/a)-a(z^2-a^2)^{-1/2}T_n(z/a)\}$$
$$-i\vartheta P_0(z^2-a^2)^{-1/2}/\pi$$

现在利用方程(4.5.4)推导

$$\vartheta p(x)=a(a^2-x^2)^{-1/2}\sum_{n=1}^{N}nb_nT_n(x/a)+\vartheta P_0(a^2-x^2)^{-1/2}/\pi$$

2. 利用例(4.5.1)的结果去确定抛物形压头下的复势$\Phi(z)$和压力分布。注意接触半径必须由条件$p(\pm a)=0$确定。

3. 若对例4.5.1的压头，接触区端点的压力无奇异性，那么$p(\pm a)=0$这意味着

$$\pi a\sum_{n=1}^{N}nb_n+\vartheta P_0=0,\qquad \text{当}n\text{为偶数}$$

$$\sum_{n=1}^{N}nb_n=0,\qquad \text{当}n\text{为奇数}$$

对于一个关于$x=0$对称的压头，奇b_n将等于零，上述第二个条件将自动满足。第一个条件给出接触力P_0与接触长度a之间的关系。对于一个非对称压头，必须在x方向作原点的这样一个移动，使得当压头外形用新坐标表示时，接触区是$-a<x<a$，并且上述两个条件必须被满足。试表明方程(4.5.11)可以重新考虑成如下形式

$$\psi\Phi(z)=\frac{X_2(z)}{2\pi}\int_{L'}\frac{f'(t)\,dt}{X_2^+(t)(t-z)}+iX_0(z)(A+Bz)$$

其中实常数A,B必须被确定，所以$\Phi(z)$在无穷远点为全纯。

5．试表明当$\Phi(z)$满足(4.5.7)时，(1.2.8)的转动ω_{xy}是$2\vartheta\mathrm{Im}\{\Phi(z)\}$。

4.6 半平面粘结接触问题

完全粘结与完全无摩擦假定，是关于两个物体之间接触区条件的极端考虑．这一节涉及单个刚性压头与半平面间的粘结接触．

假定$L'=[-a,a]$和遵循§4.4的程序，那么对S^+中的z，将有

$$\Psi(z)=-\Phi(z)-\overline{\Phi}(z)-z\Phi'(z) \tag{4.6.1}$$

$$2\mu D'(z)=\kappa\Phi(z)+\Phi(\overline{z})-(z-\overline{z})\overline{\Phi}'(\overline{z}) \tag{4.6.2}$$

$$\tau_{yy}-i\tau_{xy}=\Phi(z)-\Phi(\overline{z})+(z-\overline{z})\overline{\Phi}'(\overline{z}) \tag{4.6.3}$$

在边界的“+”号侧的位移和应力为

$$2\mu D'(x)=\kappa\Phi^+(x)+\Phi^-(x) \tag{4.6.4}$$

$$-p(x)+is(x)=\Phi^+(x)-\Phi^-(x) \tag{4.6.5}$$

对于粘结接触，假定当半平面的边界$y=0$上的一个点进入与压头上的一个点接触时，这两者一直保持接触．这意味着，特别地，若压头沿法线方向压入半平面，那么半平面的一个点进入与压头接触之后，这将只导致法向地位移，亦即$u'(t)=0$，$v'(t)=f'(t)$，其中$y=f(t)+c$是压头的外形．注意，无论如何，这个条件仅仅对于（未知的）接触区将是成立的．

在压头具有平底的最简单的情形，整个压头底面$-a<x<a$将是接触的，其边界条件为

$$2\mu[u'(x)+iv'(x)]\equiv\kappa\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=0 \quad \text{在}L'\text{上} \tag{4.6.6}$$

$$-p(x)+is(x)\equiv\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=0 \quad \text{在}L'\text{上} \tag{4.6.7}$$

这是半平面基本混合问题的一个例子．当L'是一单个线段时，

解答为Abramov(1937)用Mellin 变换得到. Muskhelishvili (1953a) 在1941年求出对L'为任意个线段问题的解；一个类似的解为Glagolev(1942,1943)独立地求得. §3.4 的分析表明，在端点满足 (4.4.14) 式和在无穷远点为零时有解为

$$\Phi(z) = CX_0(z) = iP_0X_0(z)/(2\pi) \qquad (4.6.8)$$

其中$X_0(z)$与α (它是实数)由(3.4.7),(3.4.16)给出，并且P_0是压头的 (铅直) 作用力.

由 (4.6.5) 给出的应力为

$$-p(x) + is(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x)$$
$$= -iP_0[X_0^+(x) - X_0^-(x)]/(2\pi) \qquad (4.6.9)$$

利用方程 (3.4.13), (3.4.14) 我们可以写

$$-p(x) + is(x) = -\frac{iP_0}{2\pi}(\kappa+1)\exp\left[-\frac{i\pi}{2} - \pi\alpha\right]$$
$$\times (a^2 - x^2)^{-1/2}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{-i\alpha} \qquad (4.6.10)$$

以及

$$\left.\begin{matrix} p(x) \\ s(x) \end{matrix}\right\} = \frac{P_0}{2\pi}\frac{\kappa+1}{\kappa^{1/2}}(a^2 - x^2)^{-1/2}\begin{cases}\cos\gamma \\ \sin\gamma\end{cases} \qquad (4.6.11)$$

其中$\gamma = \alpha\ln[(a+x)/(a-x)]$. 注意，$p(x)$与$s(x)$当$x \to \pm a$时，将趋于无限大并且改变符号，所以若压头与半空间保持接触，在物理上它与半空间结合在一起. 这种结合能考虑成这两种物体之间具有无限大的摩擦系数. 然而由 Muskhelishvili (1953a, p.467)所表明，使负$p(x)$发生的$|x|$最小可能值，当$\nu = 0, \kappa = 3$时为$|x| = 0.9997a$，$p(x)$ 改变符号的同时，$s(x)$符号也改变*.

边界上未受应力部分的位移由下给出

$$2\mu D'(x) = \kappa\Phi'(x) + \Phi^-(x) = (\kappa+1)\Phi^+(x)$$

---

* 原文此处欠妥，译者在译文上作了一点改动.——译者注

$$= \frac{-(\kappa+1)iP_0X_0^+(x)}{2\pi}, \text{ 在}L''\text{上} \qquad (4.6.12)$$

于是，当$t>a$，方程(3.4.10) 表明

$$D'(x) = \frac{-(\kappa+1)iP_0(x^2-a^2)^{-1/2}[(x-a)/(x+a)]^{1/2}}{4\pi\mu} \qquad (4.6.13)$$

对于更一般形状的压头的解，用§10.4中关于对称压头问题相类似的处理而可以得到，这是Spence (1968a) 作出的. 我们考虑抛物线状压头$y=-x^2/(2R)$这种特殊情形，而把一般情形的推导留给读者去做，考虑这样一个压模压进弹性半平面，并且设想，在某个阶段，接触长度为$2a$. 在下面的意义上，接触状态为类似的，即$y=0$上的

$$\frac{u}{a},\ \frac{v}{a},\ \frac{\tau_{xy}}{2\mu},\ \frac{\tau_{yy}}{2\mu}$$

可以表示成x/a的函数，仅仅再乘一个标量因子，例如$\delta(a)$，对所有以上四个量均如此，以此方式，边界条件得以满足. 接触区上的适当的边界条件，由考虑$y=0$上的位移作为x与接触长度a的函数而建立. 因为任何侧向位移必须发生在接触之前，当x位于接触区内，则位移$u(a,x)$必须是常数（亦即与a无关）. 于是

$$\frac{\partial u(a,x)}{\partial a}=0, v(a,x)=v_0(a)-\frac{x^2}{2R},\ |x|<a \qquad (4.6.14)$$

$$\tau_{xx}=0=\tau_{xy},\ \ |x|>a \qquad (4.6.15)$$

为使$v(a,x)$具有所说的类似的形式，必须有$\delta(a)=a$，并且若$u(a,x)$与a无关，u/a必须正比于$(x/a)^2$，又因为u必须是x的奇函数，所以

$$\frac{u}{a}=aB\left(\frac{x}{a}\right)^2\operatorname{sign}(x),\ \frac{v}{a}=a\left\{A-\frac{1}{2R}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}$$

或者

$$\frac{u}{a}=aBt\,|t|,\ \frac{v}{a}=a\left\{A-\frac{t^2}{2R}\right\}$$

其中$t=x/a$，并且A,B与a无关，具有量纲（长度）$^{-1}$. 因为R是出现在问题中的另一个仅有长度，A,B必须正比于R^{-1}，于是

$$\frac{u}{a}=\frac{Ba}{R}t\,|t|,\quad \frac{v}{a}=\frac{a}{R}\left(A-\frac{t^2}{2}\right) \tag{4.6.16}$$

这里的A,B现在已经是无量纲化常数了. 由于问题是自相似的，复位势$\Phi(z)$具有形式$\Phi(z)=a\Omega(z/a)=a\Omega(\zeta)$，所以关于$\Omega^{\pm}(t)$的边界条件是

$$\kappa\Omega^{+}(t)-\Omega^{-}(t)=\frac{2\mu}{a}\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\frac{2\mu}{R}\{2B\,|t|-\mathrm{i}t\},\ |t|<1 \tag{4.6.17}$$

$$\Omega^{+}(t)+\Omega^{-}(t)=\frac{1}{a}\{-p(t)+\mathrm{i}s(t)\},\ |x|>1 \tag{4.6.18}$$

因为应力在$|t|=1$必须有界，我们必须使(4.6.17)，(4.6.18)的解在端点处为零. 这样的解是

$$\Omega(\zeta)=\frac{2\mu}{R}\frac{X_2(\zeta)}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-1}^{1}\frac{(2B\,|t|-\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t}{X^{+}(t)(t-\zeta)} \tag{4.6.19}$$

仅要求B满足

$$\int_{-1}^{1}\frac{(2B\,|t|-\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t}{X_2^{+}(t)}=0 \tag{4.6.20}$$

其中

$$X_2(\zeta)=(\zeta-1)^{1/2+1\alpha}\,(\zeta+1)^{1/2-1\alpha} \tag{4.6.21}$$

利用（3.4.13），我们可以把（4.6.20）写成

$$\int_0^1\frac{t\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{1/2}}\left[(2B-1)\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{1\alpha}+(2B+1)\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{1\alpha}\right]=0$$

再用代换

$$\frac{1+t}{1-t}=\exp(u),\quad t=\tanh u \tag{4.6.22}$$

则上式变成

$$\int_0^{\infty}\tanh u\ \mathrm{sech}u\ (B\ \cos\alpha u+\sin\alpha u)\,\mathrm{d}u=0 \tag{4.6.23}$$

由分部积分得到

$$[\operatorname{sech}u(B\cos\alpha u+\sin\alpha u)]_0^\infty+\alpha\int_0^\infty \operatorname{sech}u(B\sin\alpha u-\cos\alpha u)\,du=0$$

但是 Gradshteyn与Ryzhik(1965,p.503)给出

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}u\ \cos\alpha u\,du=\frac{\pi}{2}\operatorname{sech}\frac{\pi\alpha}{2}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{sech}u\sin\alpha u\,du=-\frac{\pi}{2}\tanh\frac{\pi a}{2}+4\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\{\alpha^2+(1+4k)^2\}^{-1},$$

于是

$$B\left[4\alpha^2\sum_{k=0}^{\infty}\{\alpha^2+(1+4k)^2\}^{-1}-1-\frac{\pi}{2}\alpha\tanh\frac{\pi\alpha}{2}\right]=\frac{\pi\alpha}{2}\operatorname{sech}\frac{\pi\alpha}{2}\qquad(4.6.24)$$

这个方程的数值解给出下列数值

ν	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
B	−0.242	−0.199	−0.148	−0.084	0

注意，Muskhelishvili(1953a，§114)在完全粘接压头下取位移边界条件简单地为

$$u'=0,\quad v'(x)=f(x)\qquad(4.6.25)$$

于是控制方程为

$$\kappa\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=2\mu i f'(x),\quad x\text{在}L'\text{上}\qquad(4.6.26)$$

$$\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=0,\quad x\text{在}L''\text{上}\qquad(4.6.27)$$

这些方程导致在接触区端部应力分布是奇异的，如练习4.6.1所表示。类似的假定为Okubo(1940)在一篇很有趣的文章中作出，他使用了曲线坐标，并且获得在〔−1，1〕上对应于$u=0$，$v=\Sigma a_n T_{2n}(x)$的解。

例 4.6

1. 假定对抛物线形压头的完全粘接接触，边界条件为

$$u(x)=0,\quad v(x)=x^2/(2R),\qquad |x|<a$$

$$\tau_{xy}=0=\tau_{yy}, \qquad |x|>a$$

针对这种情形求解(4.6.6)与(4.6.7)并且求出接触应力分布.

2. 找出对应于(4.6.19)式给定的$Q(\xi)$的接触应力，其中D满足(4.6.24)式.

4.7 具有有限摩擦的接触问题

§4.5和§4.6的分析，代表两种极端情形：即光滑和完全粘结. 经过许多努力，导出了更加切合实际的相应于有限摩擦系数的分析. 这些尝试将在§6.5中介绍，事实上最好用积分方程而不是用Cauchy积分表示.

本节将介绍一种相当简单的分析，在这种情形下，假定接触区完全处于有限摩擦状态. 这就是说，如果k为摩擦系数，则

$$s(x)=kp(x), \qquad \text{在}L'\text{上} \tag{4.7.1}$$

$$v'(x)=f(x), \qquad \text{在}L'\text{上} \tag{4.7.2}$$

$$p(x)=0=s(x), \qquad \text{在}L''\text{上} \tag{4.7.3}$$

式(4.7.1)暗示，除了压在半平面内，压头沿x轴正方向推进. 对于这种直线平底特殊情形，Glagolev (1942) 使用Carleman积分方程(1922)分析解决了这个问题，Muskhelishvili于1942年使用Cauchy积分也解决了这个问题（见其著作(1953a和b)）；Galin于1953年也解决了这个问题（见其著作(1961)）；对于各种各样的问题，后面将用表格形式进行详细分析. 对于单个压头，这里介绍Muskhelishvili的分析.

式(4.7.1)可以化成以$\Phi(x)$表示的条件，即：

$$\{\Phi^+(x)-\Phi^-(x)\}+\{\overline{\Phi}^+(x)-\overline{\Phi}^-(x)\}+ki\{\Phi^+(x)-\Phi^-(x)\}-ki\{\overline{\Phi}^+(x)-\overline{\Phi}^-(x)\}=0$$

或者

$$(1+ki))\Phi^+(x)+(1-ki)\overline{\Phi}^+(x)=(1+ki)\Phi^-(x)+(1-ki)\overline{\Phi}^-(x) \tag{4.7.4}$$

这就说明函数

$$\Omega(z)=(1+ki)\Phi(z)+(1-ki)\overline{\Phi}(z) \qquad (4.7.5)$$

在整个L'上连续。因为在L''上也连续，它在整个平面内是全纯函数。它在无穷远等于零，因而恒等于零。这样

$$4\mu i f'(x)=\kappa\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)-\kappa\overline{\Phi^{+}(x)}-\overline{\Phi^{-}(x)}$$

$$=\kappa\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)+(1+ki)(\kappa\Phi^{-}(x)+\Phi^{+}(x))/(1-ki)$$

或

$$4\mu i f'(x)/\delta=\gamma\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x) \qquad (4.7.6)$$

其中

$$\gamma=\frac{\kappa+1-(\kappa-1)ki}{\kappa+1+(\kappa-1)ki},\quad \delta=\frac{\kappa+1+(\kappa-1)ki}{1-ki} \qquad (4.7.7)$$

引进如下的β将是方便的

$$\operatorname{tg}\pi\beta=k(\kappa-1)/(\kappa+1),\ 0<\beta<1/2 \qquad (4.7.8)$$

于是

$$\gamma=\exp(-2\pi i\beta),\delta=\frac{(\kappa+1)\exp(\pi i\beta)}{(1-ki)\cos\pi\beta} \qquad (4.7.9)$$

当L'是$(-a,a)$时，假定

$$\exp(2\pi\alpha)=\gamma=\exp(-2\pi i\beta)$$

即$\alpha=-i\beta+in$，这里n是整数，则式(3.4.7)中的函数$X_0(z)$满足式(4.7.6)对应的奇次方程。于是

$$X_0(z)=(z-a)^{-1/2+\beta-n}(z+a)^{-1/2-\beta+n} \qquad (4.7.10)$$

如果$X_0(z)$在端点上具有可积奇点，则n必须为零。因此

$$\Phi(z)=X_0(z)+\frac{4\mu i}{2\pi\gamma\delta}\int_{L'}\frac{f'(t)dt}{X_0^{+}(t)(t-z)}+CX_0(z) \qquad (4.7.11)$$

如果P_0是作用的总法向力，则式(4.3.9)、(4.3.10)和(4.3.15)表明有

$$C = -\frac{X + iP}{2\pi} = \frac{-kP_0 - iP_0}{2\pi} = \frac{-i(1-ik)P_0}{2\pi} \quad (4.7.12)$$

对于具有直线平底面的压头，$f'(t) = 0$，并且

$$2\pi\Phi(z) = -i(1-ik)P_0X_0(z) \quad (4.7.13)$$

对于具有一般外轮廓线的压头的接触问题，可以用§3.5中所述方法求解；另一种解式可以说是更加复杂的，是 Popov 的解（1966），他考虑了热应力效应。也可以见文献Popov(1963b)，A.B.Solov'ev (1969) 和V.M.Aleksandrov (1970)。

例4.7

1. 试表明相应于式(4.7.13)的法向压力$p(t)$为

$$p(t) = P_0\cos\pi\beta(a-t)^{-1/2+\beta}(a+t)^{1/2-\beta}$$

2. 对于抛物线形$f(t) = -t^2/R$的压头，证明复势

$$\Phi(z) = -\frac{4\pi i X_2(z)}{2\pi\gamma\delta}\int_L \frac{tdt}{X_2^+(t)(t-z)}$$

其中$X_2(z) = (z^2-a^2)X_0(z)$。因此试证明

$$\Phi(z) = \frac{-4\mu i(z - X_2(z))}{\delta(\gamma+1)}$$

接触区的长度$2a$与所作用的力P_0由下式相联系

$$P_0 = \frac{2\pi a^2(1-4\beta^2)\mu}{(\kappa+1)R}$$

3. 用式(3.4.22)求解例4.7.2，并且要求$p(t)$在接触区的端点上为零。

4. 用§3.5中的结果求解$y=0$上例4.7.2压头的外部的位移。

4.8 两个或多个压头的问题

本章所述理论已由Begiashvili(1942)和Muskhelishvili(1953a,b)加以普遍化，它可以用于多个压头的接触问题。本节就所涉及的接触问题对这种分析方法进行部分介绍。对许多问题所作的另一种分析，见Shtaerman (1949)。

令$L' = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$是实轴上所有有限线段$(a_k, b_k)$的集合，如图1.8.1所示。假定弹性体占据区域$S^+$，它的边界，即实



图4.8.1 位于x轴上的弧线a_k, b_k

轴，用$L = L' + L''$表示. 这里有两类问题，它与压头的长度L_k有关. 第一类问题，Muskhelishvili称之为A类问题，压头之间完全刚性连接，而在第二类（B类）问题中，它们彼此独立. 在每一种情形下，边界部分L''上无应力，而L'上可以是光滑或粘结接触，后者是指在(4.6.25)给定的意义上成立. 在A类问题中，对位移有一组外部条件，即压头彼此之间为刚性连接；在这种情形下，只有施加在整个压头组上的力，而不是施加在每个压头上的单个力. 整个力是预先给定的. 在B类问题中，施加在每个压头上的力是已知的.

这些问题分析的思路完全与论述过的只有单个压头的问题的分析相同，这里不再赘述. 在条件（4.4.14），（4.4.15）下，Muskhelishvili证明了这些问题解的唯一性问题.

和§4.5一样，对于光滑接触压头，问题可以简化成

$$iv'(t) \equiv \vartheta\{\Phi^+(t) + \Phi^-(t)\} = if'(t), \quad \text{在}L'\text{上} \qquad (4.8.1)$$

$$-p(t) \equiv \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0, \quad \text{在}L''\text{上} \qquad (4.8.2)$$

对于粘结接触问题，同§4.6一样（见例4.6.1）为

$$2\mu iv'(t) \equiv \kappa\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 2\mu if'(t), \quad \text{在}L'\text{上} \qquad (4.8.3)$$

$$-p(t) + is(t) \equiv \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0, \quad \text{在}L''\text{上} \qquad (4.8.4)$$

在这两种情形下，除了任意常数之外，对于(a_k, b_k)中的t，$f(t)$代表第k个压头的外轮廓线. 首先考虑压头是无摩擦的，问题（4.8.1），（4.8.2）的一般解可以得出，这同§4.5中的一样，即

$$\vartheta\Phi(t) \equiv \frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{if'(t)\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} + Q_n(z)X_0(z)$$

$$\equiv \Psi_0(z) + Q_{n-1}(z)X_0(z) \qquad (4.8.5)$$

其中

$$X_0(z) = \prod_{k=1}^{n}[(z-a_k)(z-b_k)]^{-1/2} \qquad (4.8.6)$$

是相应于方程（4.8.1），（4.8.2）的齐次方程的基本解，而

$$Q_{n-1}(z) = C_0 z^{n-1} + C_1 z^{n-2} + \cdots + C_{n-1} \qquad (4.8.7)$$

是小于或等于 $n-1$ 阶任意多项式（注意，对于 $|z|$ 很大时，$X_0(z) = 0(|z|^{-n})$，它的系数必须由该问题的附加条件去确定。对于A类问题，这里有一个相互之间刚性连接问题。因为已经满足了条件（4.8.1），则

$$v(t) = f(t) + d_k, \quad 在L_k上 \qquad (4.8.8)$$

现在我们需要加上条件

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_n \qquad (4.8.9)$$

这相当于（$n-1$）个条件：

$$f(a_{k+1}) - f(b_k) = \int_{b_k}^{a_{k+1}} v(t)\,dt, \quad k = 1,2\cdots,n-1 \qquad (4.8.10)$$

方程(4.8.1)，(4.8.5)表明$v'(t)$ 的值在(b_k, a_{k+1})（即未受载荷作用的边界部分L''）上为

$$iv'(t) = \Psi_0(t) + Q_{n-1}(t)X_0(t) \qquad (4.8.11)$$

将它代入式(4.8.10)中，对于$C_0, C_1, \cdots, C_{n-1}$，就可以得到$n-1$个方程。将$C_0$与作用在压头组上的总力$P_0$相联系，就可以得到第$n$个方程，即

$$C_0 = \frac{-i\vartheta P_0}{2\pi} \qquad (4.8.12)$$

对于B类问题，这些条件将与作用在单个压头上的力相关。此时有

$$-p(t)=\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=\frac{X_0^{+}(t)}{\pi i}\int_{L'}\frac{if'(\tau)d\tau}{X_0^{+}(\tau)(\tau-t)}+2Q_{n-1}(t)X_0^{+}(t) \tag{4.8.13}$$

以及

$$\int_{a_k}^{b_k}p(t)dt=P_k,\quad k=1,2,\cdots,n \tag{4.8.14}$$

对于$C_0,C_1,\cdots,C_{n-1}$可以得到n个方程.

对于问题 (4.8.3),(4.8.4) 可以用类似方式处理. 相应于(4.8.3),(4.8.4) 的奇次方程的基本解$X_0(z)$为

$$X_0(z)=\prod_{k=1}^{n}(t-a_k)^{-1/2-i\alpha}(t-b_k)^{-1/2-i\alpha} \tag{4.8.15}$$

其中α由公式(3.4.16)确定. 方程(4.8.3),(4.8.4)的通解为

$$\Phi(z)=2\mu\frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_{L'}\frac{if'(t)dt}{X_0^{+}(t)(t-\tau)}+Q_{n-1}(z)X_0(z) \tag{4.8.16}$$

式中$Q_{n-1}(z)$的系数可以如前面那样求得.

在二相同节段、光滑接触的特殊情形下，公式 (3.5.22)，(3.5.23) 的分析方法（或与例3.4.1与3.4.2相当），可加以推广以求得相应于多个压头的一组解. 于是,如果$L_1=(-a,-b)$,$L_2=(a,b)$, 则可以用

$$X_0(z)=\frac{a^2-b^2}{2(z^2-a^2)^{1/2}(z^2-b^2)^{1/2}} \tag{4.8.17}$$

从恒等式

$$\begin{aligned}[(\xi+1)^{1/2}-(\xi-1)^{1/2}]&=2[\xi-(\xi^2-1)^{1/2}]\\&=2[\xi+(\xi^2-1)^{1/2}]^{-1}\end{aligned} \tag{4.8.18}$$

出发得到

$$\begin{aligned}&[(\xi+1)^{-i/2}-(\xi-1)^{1/2}]^{2n}\\&=2^n[\xi+(\xi^2-1)^{1/2}]^{-n}\\&=2^n[T_n(\xi)-(\xi^2-1)^{1/2}U_{n-1}(\xi)]\end{aligned} \tag{4.8.19}$$

现在记

$$\zeta = (2z^2 - a^2 - b^2)/(a^2 - b^2) \tag{4.8.20}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} &\zeta + 1 = \frac{2(z^2 - b^2)}{a^2 - b_2},\ \zeta - 1 = \frac{2(z^2 - a^2)}{a^2 - b^2} \\ &X_0(z) = (\zeta^2 - 1)^{-1/2} \end{aligned}\right\} \tag{4.8.21}$$

$$\begin{aligned} &[(\zeta+1)^{1/2} - (\zeta-1)^{1/2}]^{2n} = 2^{2n}[(\zeta+1)^{1/2} + (\zeta-1)^{1/2}]^{2n} \\ &= [2(a^2-b^2)]^n[(z^2-a^2)^{1/2} + (z^2-b^2)^{1/2}]^{-2n} \end{aligned} \tag{4.8.22}$$

这就意味着方程(4.8.19)可以改写成

$$\frac{U_{n-1}(\zeta)}{X_0(z)} - T_n(\zeta) = -\frac{(a^2-b^2)^n}{[(z^2-a^2)^{1/2} + (z^2-b^2)^{1/2}]^{2n}} \tag{4.8.23}$$

它表明$U_n(\zeta)$与$T_n(\zeta)$在公式(3.5.14)的意义上形成了一对函数$F(z)$与$S(z)$.的确，因为$|z|$很大时，公式(4.8.23)的右端为$O(|z|^{-2n})$，所以对于$m \leqslant 2n-1$，$z^m U_{n-1}(\zeta)$与$z^m T_n(\zeta)$也是成对的函数，由此可以得出结论：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{t^m U_{n-1}(\tau)\,dt}{X_0^+(t)(t-z)} = -\frac{(a^2-b^2)^n z^m}{2\{(z^2-a^2)^{1/2} + (z^2-b^2)^{1/2}\}^{2n}} \tag{4.8.24}$$

其中$n = 1, 2, \cdots$；$0 \leqslant m \leqslant 2n-1$，

$$\tau = (2t^2 - a^2 - b^2)/(a^2 - b^2) \tag{4.8.25}$$

可以用类似的方式证明，如果

$$X_2(z) = \frac{2(z^2-a^2)^{1/2}(z^2-b^2)^{1/2}}{a^2-b^2} \tag{4.8.26}$$

则

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{t^m T_n(\tau)\,dt}{X_2(t)(t-z)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(a^2-b^2)^n z^m}{X_2(z)\{(z^2-a^2)^{1/2} + (z^2-b^2)^{1/2}\}^{2m}} \end{aligned} \tag{4.8.27}$$

针对着$n=0,1,\cdots$,以及$m\leqslant n\leqslant 2n+1$.

现在我们将这个结果用于二相同的抛物线形且相距为$2c$的压头问题，如图4.8.2所示．多项式

$$y=x^4/(8Rc^2)-x^2/(4R)+\delta \tag{4.8.28}$$

在边界值为

$$y'(\pm c)=0,\quad y''(\pm c)=1/R \tag{4.8.29}$$

的意义上，正适合抛物线，所以

$$f'(t)=t^3/(2Rc^2)-t/(2R) \tag{4.8.30}$$

或者用τ表示

$$f'(t)=\frac{t}{2Rc^2}\left[\frac{(a^2-b^2)}{2}T_1(\tau)+\frac{a^2+b^2}{2}-c^2\right] \tag{4.8.31}$$

因为在接触压力中，在端点$\pm a,\pm b$处没有奇异性，我们必须采用包含$X_2(z)$的解．于是

$$\vartheta\Phi(z)=\frac{X_2(z)}{2\pi i}\int_L\frac{if'(t)\,dt}{X_2^+(t)(t-z)} \tag{4.8.32}$$

现在方程(4.8.27)，(4.8.31)给出

$$\begin{aligned}\vartheta\Phi(z)&=X_2(z)\frac{iz}{8Rc^2}\left[\frac{(a^2-b^2)^2}{X_2(z)\{(z^2-a^2)^{1/2}+(z^2-b^2)^{1/2}\}^2}\right.\\&\left.+\frac{(a^2+b^2-2c^2)}{X_2(z)}\right]\\&=\frac{iz}{8Rc^2}\left[\frac{(a^2-b^2)}{\{(z^2-a^2)^{1/2}+(z^2-b^2)^{1/2}\}^2}+(a^2+b^2-2c^2)\right]\end{aligned} \tag{4.8.33}$$

当$|z|$的值很大时，$\Phi(z)$必为$O(|z|^{-1})$，括号中的第一项为$O(|z|^{-2})$．因而如果要且只要

$$2c^2=a^2+b^2 \tag{4.8.34}$$

则这个条件就得以满足．作用在压头上的总力与介于此二压头之

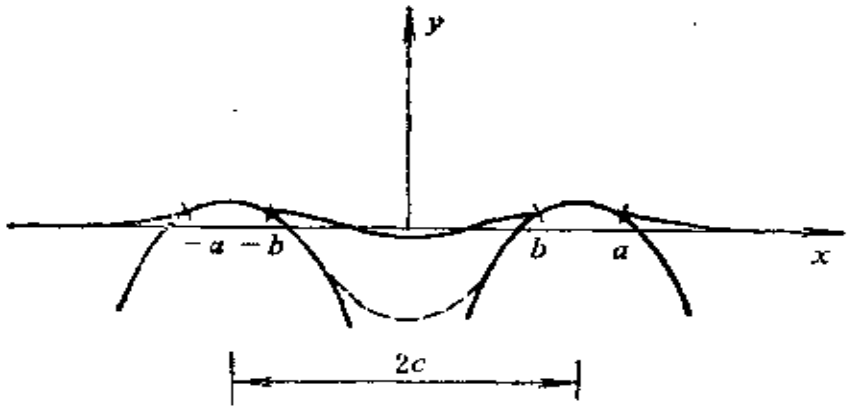


图4.8.2　二相同抛物线形压头压入上半平面

间的接触面挠曲的形状，是例4.8.2与4.8.3的研究对象．有兴趣的读者可以探索两种分析方法之间的联系——一种是刚才所说的，另一种是Sadowsky(1956)，Tonoian(1964)，Srivastava与Lowengrub(1970)以及Kucherov(1974)所给的分析方法．

例4.8

1．试表明公式(4.8.26)的边值为

$$X_2^{+}(t)=A(t)\psi(t),\ X_2^{-}(t)=A(t)\overline{\psi(t)}$$

其中

$$A(t)=\frac{2|a^2-t^2|^{1/2}|b^2-t^2|^{1/2}}{a^2-b^2}$$

而$\psi(t)$由下表给出

	$t<-a$	$-a<t<-b$	$-b<t<b$	$b<t<a$	$a<t$
$\psi(t)$	1	$-i$	-1	i	1

2．试表明在图4.8.2所示压头下面，接触压力为

$$p(t)=\frac{t(a^2-t^2)^{1/2}(t^2-b^2)^{1/2}}{2\vartheta Rc^2}$$

再表明单个压头上的总力为

$$P_0=\frac{\pi(a^2-b^2)}{32\vartheta Rc^2}$$

这个式子和公式(4.8.33)能给出用P_0与c表示的a,b．再证明当c增加时将再产生例4.5.2的结果．

3．试表明图4.8.2所示的压头之间的挠度为

$$v'(t)=\frac{t\{2t^2-(a^2+b^2)+2(a^2-t^2)^{1/2}(b^2-t^2)^{1/2}\}}{4Rc^2}$$

4. 试表明Plemelj公式与(4.8.22)一起能得出下面的结果

$$-\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{\mathrm{sign}(t)t^mU_{n-1}(x)\,dt}{\{(a^2-t^2)(t^2-b^2)\}^{-1/2}(t-x)}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)}{2}x^m\begin{cases}[X(x)]^{-2n}, & |x|\geqslant a\\ T_n(\xi), & b<|x|<a\\ (-1)^n[X(x)]^{-2n}, & |x|\leqslant b\end{cases}$$

其中$n=1,2,\cdots,0\leqslant m\leqslant 2n-1$，$\xi=(2x^2-a^2-b^2)/(a^2-b^2)$，

$X(x)=\{|a^2-b^2|^{1/2}+|b^2-x^2|^{1/2}\}/(a^2-b^2)^{1/2}$，其余符号见本节。注意该积分是$x$的连续函数。

5. 如果$n=0,1,\cdots$，且$0\leqslant m\leqslant 2n+1$，试表明类似地有

$$\frac{1}{\pi}\int_{L'}\frac{\mathrm{sign}(t)t^mT_n(\tau)\,dt}{\{(a^2-t^2)(t^2-b^2)\}^{1/2}(t-x)}$$

$$=\begin{cases}\theta_{m,n}(x) & |x|>a\\ -2x^mU_{n-1}(\xi)/(a^2-b^2) & b<|x|<a\\ (-1)^{m+1}\theta_{m,n}(x) & |x|<b\end{cases}$$

式中$\theta_{mn}(x)=\{(x^2-a^2)(x^2-b^2)\}^{-1/2}x^m[X(x)]^{-2n}$，且$U_{-1}$取为零。

6. 试表明下面定义的多项式数列$\{A_n\}$，$\{B_n\}$在L'上正交，分别具有权函数$|t|\{(a^2-t^2)(t^2-b^2)\}^{-1/2}$和$|t|\{(a^2-t^2)(t^2-b^2)\}^{1/2}$，

$$A_{2n}(t)=T_n(t),A_{2n+1}(t)=\mathrm{sign}(t)T_n(t)$$

$$B_{2n}(t)=U_n(t),B_{2n+1}(t)=\mathrm{sign}(t)U_n(t)$$

其中$n=0,1,2,\cdots$，再证明

$$\frac{2}{\pi}\int_{L'}|t|\{(a^2-b^2)(t^2-b^2)\}^{-1/2}A_m(t)A_n(t)\,dt=\begin{cases}0, n\neq m\\ 1, n=m\neq 0\\ 2, n=m=0\end{cases}$$

以及

$$\frac{2}{\pi}\int_{L'}|t|\{(a^2-t^2)(t^2-b^2)\}^{1/2}B_m(t)B_n(t)\,dt=\frac{\pi\delta_{n,m}(a^2-b^2)}{4}$$

4.9 无限个接触区的问题

假定接触区L'是由无限多个长为$2a$的子区所组成，并且子区到相邻子区，其中心距为$d(>2a)$，如图4.9.1所示．在这些区域内，完全相同的光滑压头压入$y>0$的半平面内．正如§4.8一样，这个问题可以化为

$$i\nu(t)\equiv\vartheta\{\Phi^+(t)+\Phi^-(t)\}=if'(t)，在L'上 \quad (4.9.1)$$

$$-p(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=0，\qquad 在L''上 \quad (4.9.2)$$

这里所有位移和应力都是周期性的，其周期为d．首先需要求出基本解$X_0(t)$．然后使用(4.8.6)式，在重新排列各个项之后，可以得到

$$X_0(z)=\left\{2\pi^2\frac{(z^2-a^2)}{d^2}\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left[1-\frac{(z-a)}{nd}\right]\left[1-\frac{(z-a)}{nd}\right]\right\}^{-1/2} \quad (4.9.3)$$

$\sin x$的无穷乘积展开式为

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-(x/n\pi)^2\right] \quad (4.9.4)$$

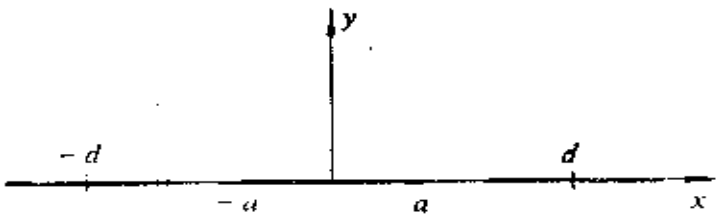


图4.9.1 完全相同的接触区域的无穷列

因此

$$X_0(z)=\left\{2\sin\left[\frac{\pi(z-a)}{d}\right]\sin\left[\frac{\pi(z+a)}{d}\right]\right\}^{-1/2}$$

$$=\left\{\cos\left(\frac{2\pi a}{d}\right)-\cos\left(\frac{2\pi z}{d}\right)\right\}^{-1/2} \quad (4.9.5)$$

容易证明$X_0(t)$的边界值为

$$X_0^+(t)=M(t)\phi(t),\quad X_0^-(t)=M(t)\bar{\phi}(t) \tag{4.9.6}$$

其中

$$M(t)=\left|\cos\left(\frac{2\pi a}{d}\right)-\cos\left(\frac{2\pi t}{d}\right)\right|^{-1/2} \tag{4.9.7}$$

$\phi(t)$如图4.9.2所示. 注意, $X_0(t)$不是以d为周期变化的, 如(4.9.5)式所表示的; 而$X_0(z)$满足相同的泛函方程

$$F(z+d)=-F(z) \tag{4.9.8}$$

它控制着$\sin(\pi z/d)$和$\cos(\pi z/d)$. 现在将式(4.9.1),(4.9.2)除以$X_0^+(t)$我们得到

$$\frac{iv'(t)}{X_0^+(t)}=\vartheta\left\{\frac{\Phi^+(t)}{X_0^+(t)}-\frac{\Phi^-(t)}{X_0^-(t)}\right\}=\frac{if'(t)}{X_0^+(t)},\ \text{在}L'\text{上} \tag{4.9.9}$$

$$-\frac{p(t)}{X_0^+(t)}=\frac{\Phi^+(t)}{X_0^+(t)}-\frac{\Phi^-(t)}{X_0^-(t)}=0,\ \text{在}L''\text{上} \tag{4.9.10}$$

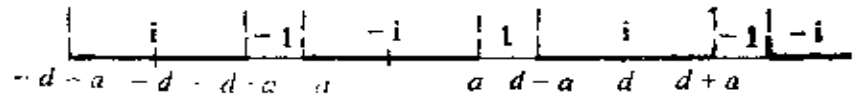


图4.9.2 x轴上的$\phi(t)$值

由此我们可以推导出

$$\vartheta\frac{\Phi(z)}{X_0(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_{L'}\frac{f'(t)\,dt}{X_0^+(t)(t-z)}+\Psi(z) \tag{4.9.11}$$

其中$\Psi(z)$待定. 图4.9.2表明$X_0^+(t)$是L'上只有虚部的函数,所以式(4.9.11)的第一部分给出满足式(4.5.7)的一个函数$\Phi(z)$. 其余部分, $\Psi(z)$, 在平面的有限部分能够没有奇异性, 必须使$X_0(z)\Psi(z)$具有周期为d的周期性, 并且必须满足(4.5.7); 可以推演出$\Psi(z)$必须具有如下形式:

$$\Psi(z)=i[A\cos(\pi z/d)+B\sin(\pi z/d)] \tag{4.9.12}$$

其中A,B是实常数. 现在对每一个区间$[-a+nd,a+nd]$,$f'(t)$都取恒同的值,而在第n个区间上$X_0^+(t)$的值,是中心区间($n=0$)

上的$X_0^+(t)$的值$(-1)^n$倍．于是合并同类项，得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f'(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)(t-z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{f'(t)}{X_0^+(t)} \times\left\{\frac{1}{t-z}+2(t-z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(t-z)^2-n^2d^2}\right\}\mathrm{d}t \tag{4.9.13}$$

再因为

$$\operatorname{cosec}\pi x = \frac{1}{\pi x}+\frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2} \tag{4.9.14}$$

所以等式(4.9.11)～(4.9.14)给出

$$\vartheta\phi(z) = \frac{X_0(z)}{2d}\int_{-a}^{a}\frac{f'(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)\sin[\pi(t-z)/d]} + iX_0(z)\{A\cos(\pi z/d)+B\sin(\pi z/d)\} \tag{4.9.15}$$

接触压力$p(t)$为

$$-\vartheta p(x) = 2iX_0^+(x)\{A\cos(\pi x/d)+B\sin(\pi x/d)\} + \frac{X_0^+(x)}{d}\int_{-a}^{a}\frac{f'(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)\sin[\pi(t-x)/d]} \tag{4.9.16}$$

为了便于应用到特殊例子中，方便的办法是象例 4.5.4 那样做，并且重新改写(4.9.15)成为

$$\vartheta\phi(z) = \frac{X_2(z)}{2d}\int_{-a}^{a}\frac{f'(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)\sin[\pi(t-z)/d]} + iX_0(z)\{A'\cos(\pi z/d)+B'\sin(\pi z/d)\} \tag{4.9.17}$$

其中

$$X_2(z) = \left\{\cos\left(\frac{2\pi a}{d}\right)-\cos\left(\frac{2\pi z}{d}\right)\right\}^{1/2} \tag{4.9.18}$$

$$X_2^+(t) = i\left\{\cos\left(\frac{2\pi t}{d}\right)-\cos\left(\frac{2\pi a}{d}\right)\right\}^{1/2} \qquad |t|<a \tag{4.9.19}$$

为了计算公式(4.9.17)中的积分，必须再用 § 2.3 中的结果，即

$$G_{n-1}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(\tau)\mathrm{d}\tau}{(1-\tau^2)^{1/2}(\tau-\xi)},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{4.9.20}$$

根据Morar′（Мораръ)和Popov(1971)的办法，写出

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\pi z}{d}=\xi,\ \frac{\pi t}{d}=\eta,\ \frac{\pi a}{d}=\alpha,\tau=\mathrm{tg}\eta\cot\alpha\\&\xi=\mathrm{tg}\xi\cot\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(4.9.21)$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&X_2^+(t)=\mathrm{i}\{\cos2\eta-\cos2\alpha\}^{1/2}\\&X_2(z)=\{\cos2\xi-\cos2\alpha\}^{1/2}\\&G_{n-1}(\xi)=\frac{2^{1/2}\mathrm{i}\cos\xi\sin\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T_n(\mathrm{tg}\eta\cot\alpha)\mathrm{d}\eta}{X_2(t)\sin(\eta-\xi)}\end{aligned}\right\}\qquad(4.9.22)$$

但是

$$\begin{aligned}G_{n-1}(\xi)&=-(\xi^2-1)^{-1/2}[\xi-(\xi^2-1)^{1/2}]^n\\&=-2^{-n}(\xi^2-1)^{-1/2}[(\xi+1)^{1/2}-(\xi-1)^{1/2}]^{2n}\\&=-\frac{2^{1/2}\cos\xi\sin\alpha}{X_2(z)}[g(\xi)]^n\end{aligned}\qquad(4.9.23)$$

其中

$$g(\xi)=\frac{[\sin(\xi+\alpha)]^{1/2}-[\sin(\xi-\alpha)]^{1/2}}{[\sin(\xi+\alpha)]^{1/2}+[\sin(\xi-\alpha)]^{1/2}}\qquad(4.9.24)$$

这就意味着，如果

$$f'(t)=\sum_{n=0}^{N}a_nT_n(\mathrm{tg}\eta\cot\alpha)\qquad(4.9.25)$$

则

$$\vartheta\phi(z)=(1/2)\mathrm{i}\sum_{n=0}^{N}a_n[g(\xi)]^n+\mathrm{i}X_0(z)\{A'\cos\xi+B'\sin\xi\}\qquad(4.9.26)$$

首先考虑压头是具有平底的情形，因此，$f'(t)=0$。接触应力为$p(t)$，这里

$$-\vartheta p(t)=2\{A'\cos\eta+B'\sin\eta\}\{\cos2\eta-\cos2x\}^{-1/2}\qquad(4.9.27)$$

且压头上作用的力为P_0，这里

$$\vartheta P_0 = -2^{1/2} A' d \tag{4.9.28}$$

由例4.5.5得到平面的转角为

$$\omega = 2\vartheta I\mathrm{m}\{\phi(z)\} \tag{4.9.29}$$

对于很大的y值，有

$$\vartheta\phi(z) = 2^{-1/2} A' + iB' \tag{4.9.30}$$

如果y很大，转角又为零，则$B' = 0$。一个接触区上的总压力为

$$P_0 = \int_{-a}^{a} p(t)\mathrm{d}t = -\frac{2A'd}{\vartheta}\int_{-a}^{a}\frac{\cos\eta\,\mathrm{d}\eta}{\{\cos 2\eta - \cos 2\alpha\}^{1/2}} \tag{4.9.31}$$

积分可以用代换(4.9.21)计算出来

$$A' = -(2^{1/2}d)^{-1}P_0\vartheta \tag{4.9.32}$$

$$\Phi(z) = -i(2^{1/2}d)^{-1}P_0 X_0(z)\cos\xi \tag{4.9.33}$$

$$p(t) = \frac{P_0\cos\eta}{\mathrm{d}\{\sin^2\alpha - \sin^2\eta\}^{1/2}} \tag{4.9.34}$$

这个压力与Sadowsky(1928)的结果一致。平衡条件表明，平面必须受无穷远处的应力的约束；事实上，应力为静水压力，而且

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} = 2^{3/2}A'/\vartheta = -4P_0/d \tag{4.9.35}$$

如果是具有斜底面的，则$f'(t) = \varepsilon$，因而(4.9.26)表明

$$\vartheta\phi(z) = i\varepsilon/2 + iX_0(z)\{A'\cos\xi + B'\sin\xi\} \tag{4.9.36}$$

常数A'仍由式(4.9.32)给出，而用y很大时$\omega = 0$的条件得到

$$B' = -\varepsilon/2 \tag{4.9.37}$$

这与England和 Green(1963) 使用稍微不同的复变函数方法得到的结果是符合的。 进一步的分析和详细的参考文献， 请阅读Dunders, Tsai和Keer(1973),Krenk(1976) 以及 Kuznetzov(1976)的文章。

例4.9

1. 用代换$\tau = \mathrm{tg}(\pi t/d)\cos(\pi a/d)$计算积分(4.9.31)。

4.10 两个弹性体之间的接触问题

到目前为止，本章分析了一个刚性压头（或多个压头）和占据上半平面的弹性体之间的接触问题.Muskhelishvili(1953a)，(1953b)研究了控制二物体之间光滑接触的方程，在接触区附近两物体是那样的平坦，以致可以认为：i) 接触的边界条件就作用在x轴上，ii)物体本身可以近似为上、下半平面($y>0, y<0$)，iii)接触前后物体的边界离开x轴的距离为无穷小.(这些假定与Hertz 假定(见§2.9)相似，对于每个具有半平 空间的两个接触体，他求出了力和挠度的关系)．进而Muskhelishvili表明控制接触的方程大致与刚性压头和弹性半平面之间的接触的控制方程相同，唯一的差别就在于出现了二种弹性体的材 料常 数．这种 分析方法也可以在Shtaerman (1949) 的书中找到．Galin (1961) 使用了不必要的复杂的分析方法得出了类似的结果，它对于具有有限摩擦的二弹性体之间的接触成立．这个领域的另一个分支的研究，始于Michell(1899)的论文，已在§4.2中讨论过．Michell表明，假若满足公式 (4.2.25)、且无体力，则由一指定的表面附着摩擦力在平面弹性体内所产生的应力与弹性常数无关．Dunders和Stippes (1970)，以Dunders (1967)，(1969)早期的论文为基础证明了Michell的结果适合各向同性的具有相同材料常数的二平面弹性体的接触，如果接触是“缩减”的话，这术语以及有关的术语“扩展”将在下面定义．Dunders (1975)将这种分析方法推广到不同材料各向同性的平面弹性体之间接触问题．

颠倒一下年代顺序是方便的，首先考虑 Dunders 和Stippers获得的更一般的结果，然后再回到Muskhelishvili 与Galin的结果．令C代表两个弹 性体 (二维或三维) 变形后的接触范围，令C°代表未受载荷状态的初始接触区．C与C°，每一个

都可以由一个或多个面积、曲线和点组成，如果物体简支，C^0可以为零，只有当载荷达到一定程度时才开始接触。接触的分类，是根据物体变形时是否有新表面点进入接触作为准则而进行的。如果C包含在C^0中，即$C\subseteq C^0$，则称为缩减接触，否则称为扩展接触，如图4.10.1所示。注意，Dunders与Stippes使用术语静止状态（stationary）表示$C=C^0$的情形，后来Dunders用这个术语表示加载时C与加载程度无关（如果是加载的话）的情形；这里使用后一意义。

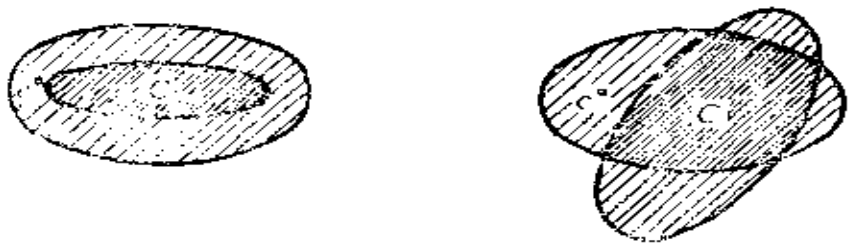


图4.10.1 缩减接触与扩展接触

第一组结果同等地适用于三维问题和平面问题，它们可以用三维形式来表示。在线性弹性范围内研究接触问题，因而应力、转角和位移都很小，则边界条件可以加在变形前的几何形状上。接触C可以扩展到最初几乎是平行的切平面上，其间距为g_0，而g_0与总体尺寸相比为很小。令$\hat{n}$代表将物体1与2分开的切平面的法线。接触区C、C^0可以由一个或多个区域组成；考虑一个这样的区域，选择一个局部坐标系，使其z轴方向与$\hat{n}$一致。在$C\cap C^0$附近的区域中，表面方程在未变形状态分别用 $z_1=f_1(x,y)$，$z_2=f_2(x,y)$表示，这样它们之间的距离为$g^0=f_2(x,y)-f_1(x,y)$如图4.10.2所示。当物体变形时，点$P_i\equiv(x,y,f_i(x,y))$，变成$(x,y,f_i(x,y)+w_i)$，则P_1与P_2之间的距离为

$$g=f_2(x,y)+w_2-f_1(x,y)-w_1=g^0+w_2-w_1 \qquad (4.10.1)$$

因为物体之间不能相互穿透，这个距离必须为零，由此$g\geqslant 0$；由条件$g=0$得出接触区范围，即

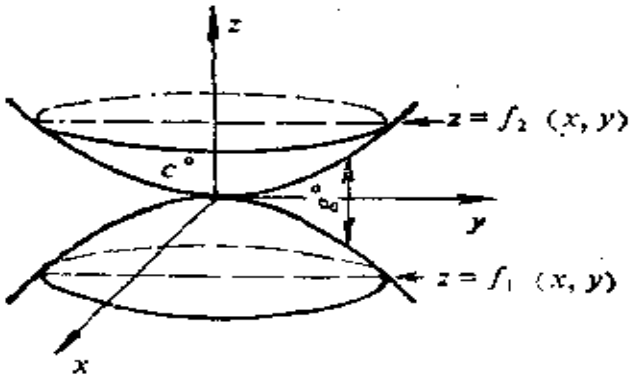


图4.10.2　变形前两物体之间的距离为g°

$$w_1 - w_2 = g^\circ, \text{ 在}C\text{上}$$

可以把这种边界条件写成用于多个部分组成的接触区的形式，用$\vec{d} \cdot \hat{n}$代替w；于是

$$(\vec{d} \cdot \hat{n})_1 - (\vec{d} \cdot \hat{n})_2 = g^\circ, \text{ 在}C\text{上}$$

现在应该注意，C 是由两部分组成的：C在 C° 中的部分，即$C \cap C^\circ$，在这个部分里，g°为零，因为按定义，g°是初始距离；其余的部分为$C - C \cap C^\circ$.于是

$$(\vec{d} \cdot \hat{n})_1 - (\vec{d} \cdot \hat{n})_2 = \begin{cases} 0, & \text{在}C \cap C^\circ\text{上} \\ g^\circ, & \text{在}C - C \cap C^\circ\text{上} \end{cases} \qquad (4.10.2)$$

正是这个条件导致了缩减与扩展接触之间的基本分界．对于缩减接触，$C = C \cap C^\circ$，因而$C - C \cap C^\circ$为空集，方程(4.10.2)是齐次的，即

$$(\vec{d} \cdot \hat{n})_1 - (\vec{d} \cdot \hat{n})_2 = 0, \text{在}C\text{上} \qquad (4.10.3)$$

一般来说，扩展接触是非齐次的．

方程(4.10.3)具有深远的含义．控制二物体变形的方程有三个：一个是二物体内的平衡方程，包括体积力在内，如果有体积力的话；再一个是C外面的表面部分的边界条件（可以给定位移或面力）；第三个是C上的边界条件，其中包含公式(4.10.3)，且包括接触性质，即是否光滑、或粘结，还是处于某些中间状态的摩擦．假定这些方程代表具有唯一解的良态（well-posted）

问题。

困难在于接触缩减时，除了与体积力和所作用的面力/或位移（这些统称为载荷）外，所有这些方程和边界条件均为齐次的。如果全部载荷都按相同的比例变化，这便是加载水平变化这一术语。对于缩减接触，可以立即得出结论：

1）位移、应变和应力与加载水平成比例。

2）接触区C与加载水平无关，即仍然是静止状态。

3）除去$C=C^0$的特殊情形之外，C^0到C的变化不连续。

值得注意的，虽然所产生的弹性场与所作用的载荷成正比，但一般来说叠加原理不再适用。于是，对于两个载荷系统，只有接触区域C对每一个加载系统都相同，才会有由两个加载系统之和所产生的弹性场，等于由各个加载系统所产生的两个弹性场之和。

第二个结论将与平面应变或平面应力状态的各向同性物体之间的接触有关。因此，很方便地使用§4.2中的复变函数公式。在无体力时，方程(4.2.5)，(4.2.12)，(4.2.13)给出

$$2\mu D=2\mu(u+iv)=\kappa\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)} \tag{4.10.4}$$

$$\Theta=\tau_{xx}+\tau_{yy}=2[\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}] \tag{4.10.5}$$

$$\Xi=\tau_{yy}-\tau_{xx}+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\Phi''(z)+\Psi'(z)] \tag{4.10.6}$$

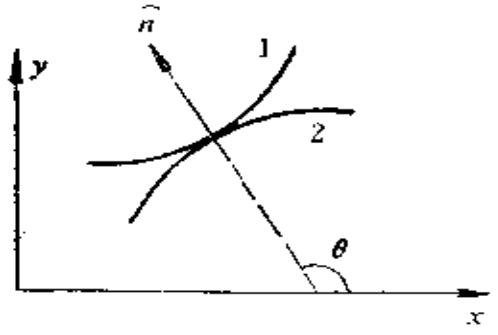


图4.10.3 θ是法线与x轴所成的夹角

注意，等式(4.10.5)，(4.10.6)给出了用复势表示的应力，并不含有弹性常数。因此应力与弹性常数的关系和复势与弹性常数的关系相同。假如满足了方程(4.2.25)则弹性常数只能通过边界条件而进入复势函数。如果物体由给定的面力而不是由给定的位移加载，则弹性常数只有通过C上的边界条件而引入。因此，我们对于C是缩减接触区域的情形进行详细考察。

令θ是$\hat{n}$与x轴之间的夹角，如图 4.10.3所示. 接触可以是光滑的、粘结的或某种中间状态的.这两个边界条件是(4.10.3)，平衡方程为

$$(\tau_{nx}+i\tau_{ny})_1=(\tau_{nx}+i\tau_{ny})_2 \tag{4.10.7}$$

那么，如果物体j的剪切模量和参数κ分别为μ_j与$\kappa_j(j=1,2)$，则二物体的法向位移为

$$\begin{aligned}4\mu_j u_{n,j}=&(\kappa_j\phi_j-z\overline{\phi_j'}-\overline{\psi_j})\exp(-i\theta)\\&+(\kappa_j\overline{\phi_j}-z\overline{\phi_j'}-\psi_j)\exp(i\theta)\end{aligned} \tag{4.10.8}$$

其中重复下标表示求和. 公式(4.10.3)变成

$$\begin{aligned}&\Gamma[(\kappa_1\phi_1-z\overline{\phi_1'}-\overline{\psi_1})\exp(-i\theta_1)+(\kappa_1\overline{\phi_1}-\overline{z}\phi_1'-\psi_1)\\&\times\exp(i\theta)]=(\kappa_2\phi_2-\overline{z\phi_1'}-\overline{\psi_2})\exp(-i\theta)+(\kappa_2\overline{\phi_2}-\overline{z\phi_1'}\\&-\psi_2)\times\exp(i\theta)\end{aligned} \tag{4.10.9}$$

其中$\Gamma=\mu_2/\mu_1$.公式(4.2.23),(4.10.7)变成

$$d(\phi_1+z\overline{\phi_1'}+\overline{\psi_1})=d(\phi_2+z\overline{\phi_2'}+\overline{\psi_2}) \tag{4.10.10}$$

如果公式(4.2.25)对两个物体占有区域的所有封闭边界都满足，则F_1、F_2为单值的且在C上相等，因此

$$A\equiv\phi_1+z\overline{\phi_1'}+\overline{\psi_1}=\phi_2+z\overline{\phi_2'}+\overline{\psi_2},\quad 在C上 \tag{4.10.11}$$

方程(4.10.9)包含Γ，κ_1,κ_2，但用公式 (4.10.11) 时，不包括弹性常数，我们可以用正好包括两个常数的一个新方程代替方程(4.10.9). 将公式(4.10.9)+1/2[$(\Gamma+1)$[$A\exp(-i\theta)+\overline{A}\times\exp(i\theta)$]，并且用$\Gamma(\kappa_1+1)+\kappa_2+1$除这个和，则得到

$$\begin{aligned}&(2+\alpha+\beta)[\exp(-i\theta)\phi_1+\exp(i\theta)\overline{\phi_1}]-(\alpha-\beta)\times\\&[\exp(-i\theta)(z\overline{\phi_1'}+\overline{\psi_1})+\exp(i\theta)(\overline{z}\phi_1'+\psi_1)]-(2-\alpha-\beta)\\&\times[\exp(-i\theta)\phi_2+\exp(i\theta)\overline{\phi_2}]-(\alpha-\beta)[\exp(-i\theta)(z\overline{\phi_2'}+\psi_2)]\\&+\exp(i\theta)(\overline{z}\phi_2'+\psi_2)]=0\end{aligned} \tag{4.10.12}$$

其中

$$\alpha=\frac{\Gamma(\kappa_1+1)-(\kappa_2+1)}{\Gamma(\kappa_1+1)+(\kappa_2+1)},\quad \beta=\frac{\Gamma(\kappa_1-1)-(\kappa_1-1)}{\Gamma(\kappa_1+1)+(\kappa_2+1)} \tag{4.10.13}$$

Dunders(1969)，(1970)注意到α,β是两种弹性材料单轴匹配和体积匹配的不适性的度量，即$-1\leqslant\alpha\leqslant1$，$-1\leqslant\beta\leqslant1$，对于同种材料，$\alpha=0=\beta$.最后的陈述包含有两种材料相同时，边界条件与弹性常数无关.

为限制C上的摩擦，最后边界条件为$\tau_{ss}=k\tau_{ns}$，这个方程没有包括弹性常数；光滑接触情形相应于$k=0$.根据方程(4.6.25)的意义，表面粘结缩减接触，有条件

$$\vec{d}_1=\vec{d}_2 \tag{4.10.14}$$

所以方程(4.10.4)给出：

$$\Gamma(\kappa_1\phi_1-z\overline{\phi_1'}-\overline{\psi_1})=\kappa_2\phi_2-z\overline{\phi_2'}-\overline{\psi_2} \tag{4.10.15}$$

像以前的处理一样，将ΓA加到(4.10.15)上，并除以$\Gamma(\kappa_1+1)+(\kappa_2+1)$，我们得到

$$(1+\alpha)\phi_1=(1-\beta)\phi_2+(\alpha-\beta)(z\overline{\phi_1'}+\overline{\psi_2}) \tag{4.10.16}$$

因此，接触方程(4.10.11)，(4.10.16)只包括α,β.

可以得出结论，即在二个或多个物体光滑或粘结接触的结合接触中，如果

a) 正好二组弹性常数介入，

b) 由特定的面力对物体加载，

c) 方程(4.2.25)对物体所占区域的联合是有效的，

d) 接触是缩减的，

则接触的范围和应力只与α,β有关.

应该注意，不要力图讨论包含二种任意形状物体接触问题的详细解(Blackketter和Christensen(1969))；相反，应把注意力集中到某些解的特性上，特别是对于弹性常数的依赖关系上.

用特殊化形式就可进一步减少对弹性常数的依赖性.于是，考虑沿直线边界条件的缩减光滑接触.将x轴沿这个边界放置，我们有

$$v_1=v_2 \tag{4.10.17}$$

对于一般问题，这个条件可以用下式代替，即

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}=\frac{\partial v_2}{\partial x} \tag{4.10.18}$$

方程（4.10.4）表明

$$4i\mu\frac{\partial v}{\partial x}=(\kappa+1)(\phi'-\overline{\phi}')+x(\phi''-\overline{\phi}'')+\psi'-\overline{\psi}' \tag{4.10.19}$$

但是方程(4.10.6)表明

$$2i\tau_{,y}=x(\phi''-\overline{\phi}'')+\psi'-\overline{\psi}' \tag{4.10.20}$$

所以

$$\frac{\kappa_1+1}{\mu_1}(\phi_1'-\overline{\phi}_1')=\frac{\kappa_2+1}{\mu_2}(\phi_2'-\overline{\phi}_2') \tag{4.10.21}$$

方程(4.10.13)表明，这相当于

$$(1+\alpha)(\phi_1'-\overline{\phi}_1')=(1-\alpha)(\phi_2'-\overline{\phi}_2') \tag{4.10.22}$$

因此，在这种情况下，应力和接触范围只与α有关；注意，如果材料相同（$\alpha=0$），或其中一种材料为刚性（$\alpha=\pm1$），则与弹性常数无关.方程(4.10.22)取决于方程(4.10.18)(与(4.10.17)等效）。如果一个物体的刚体运动没有受到约束，且接触是在单一区间上，那么，这一定是真实的；然而如果在多个区间接触的话，二个位移一般都不能用相应的偏导数匹配，所以方程（4.10.18），一般来说，是不成立的。

Muskhelishvili和Galin研究了二物体之间的接触，物体1、2分别占有上、下半平面，他们假定接触发生在集合L'上。如果每个物体按§4.4那样分析，则物体j将具有复势$\Phi_j\Psi_j(j=1,2)$。S^+内的$\Psi_1(z)$和S^-内的$\Psi_2(z)$值，可用相应于(4.4.11)的方程来得出，即

$$\Psi_1(z)=-\Phi_1(z)-\overline{\Phi}_1(z)-z\,\Phi_1'(z),\quad z在S^+内 \tag{4.10.23}$$

$$\Psi_2(z)=-\Phi_2(z)-\overline{\Phi}_2(z)-z\Phi_2'(z),\quad z在S^-内 \tag{4.10.24}$$

因此，在x轴上，有

$$\tau_{yy}^{(1)} - i\tau_{xy}^{(1)} = -p_1(x) + is_1(x) = \Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x) \tag{4.10.25}$$

$$\tau_{yy}^{(2)} - i\tau_{xy} = -p_1(x) + is_2(x) = \Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x) \tag{4.10.26}$$

$$2\mu_1(u_1' + iv_1') = \kappa_1\Phi_1^-(x) + \Phi_1^+(x) \tag{4.10.27}$$

$$2\mu_2(u_2' + iv_2') = \kappa_2\Phi_2^+(x) + \Phi_2^-(x) \tag{4.10.28}$$

Muskhelishvili和Galin没有区分扩展和缩减接触，但是他们研究了区域L'上的一般接触问题，包括缩减或扩展.

我们假定接触为，a)光滑的，b)按(4.6.26)的意义完全粘结，c)有限摩擦. 不失一般性，我们定义这种情形，即x轴上的其余部分L''是自由的；则$\Phi_1(z)$、$\Phi_2(z)$在沿L'割开的平面内是全纯的. 不论用哪一种接触条件，L'上的平衡给出 $p_1(x) = p_2(x) = p(x)$，$s_1(x) = s_2(x) = s(x)$，因此

$$\Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x) = \Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x) \tag{4.10.29}$$

式中隐含$\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$在跨过L'时连续. 但是，因为 $\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$在跨过L''时连续，它在全平面上全纯；由于在无穷远处等于零，所以它恒等于零，于是

$$\phi_2(z) = -\phi_1(z), \quad \text{对于所有的} z \tag{4.10.30}$$

如果 $y = f_1(x)$，$y = f_2(x)$ 是接触前上、下半平面的边界方程（$f_1(x)$，$f_2(x)$的值很小），则用导致公式(4.10.2)的论据就可以导出

$$v_1'(x) - v_2'(x) = f_1'(x) - f_2'(x) = -f'(x), x\text{在}L'\text{上} \tag{4.10.31}$$

那么方程(4.10.27)、(4.10.28)、(4.10.30)给出

$$\left(\frac{1}{4\mu_1} + \frac{\kappa_2}{4\mu_2}\right)(\phi_2^+(x) - \overline{\phi_2^{+\prime}(x)}) + \left(\frac{\kappa_1}{4\mu_1} + \frac{1}{4\mu_2}\right)$$

$$\times(\phi_2^-(x) - \overline{\phi_2^-(x)}) = if'(x), \quad x\text{在}L'\text{上} \tag{4.10.32}$$

现在考虑L'上的第二个条件，它依赖于接触条件：

a)光滑接触. 这里，$s(x)=0$，在L'上，且§4.5 中的论述表明，$\overline{\phi_1}(z)=-\phi_1(z)$，$\overline{\phi_2}(z)=-\phi_2(z)$，以致$\overline{\phi_2^+(x)}=\overline{\phi}_2^-(x)=-\phi_2^-(x)$，$\overline{\phi_2^-(x)}=\overline{\phi}_2^+(x)=-\phi_2^+(x)$，并且方程（4.10.26）、（4.10.32）简化为

$$\phi_2^+(x)+\phi_2^-(x)=\vartheta^{-1}if'(x),\quad x在L'上 \tag{4.10.33}$$

$$-p(x)\equiv\phi_2^+(x)-\phi_2^-(x)=0,\quad x在L'上 \tag{4.10.34}$$

其中

$$\vartheta=\frac{\kappa_1+1}{4\mu_1}+\frac{\kappa_2+1}{4\mu_2}=\vartheta_1+\vartheta_2 \tag{4.10.35}$$

方程(4.10.33)、(4.10.34)完全与(4.5.9)、(4.5.10)相同，后者属于刚性压头和弹性半空间之间的接触. 就所关心的对于弹性常数的依赖性的讨论来说，方程(4.10.33)、(4.10.34) 表明，如果两个物体可以用半空间去近似，并且接触是缩减接触问题，则在L'上，$f_1'(x)=f_2'(x)$，即在L'上，$f'(x)=0$，则接触范围和应力同弹性常数无关；在这个问题中，可用其他条件来确定这一点，例如，产生接触的总作用力和接触区段的端点上接触应力的条件.

b) 完全粘结. 这里，在L_1'上，$u_1'=u_2'$，以致方程(4.10.32)可以用下式代替

$$\frac{\kappa_2\phi_2^+-\phi_2^-}{2\mu_2}-\frac{\kappa_1\phi_1^-+\phi_1^+}{2\mu_1}=if'(x),\ x在L'上 \tag{4.10.36}$$

它与(4.10.30)联立，可给出

$$(1-\beta)\phi_2^+(x)+(1+\beta)\phi_2^-(x)=\vartheta^{-1}if'(x),\quad x在L'上 \tag{4.10.37}$$

$$-p(x)+is(x)\equiv\phi_2^+(x)-\phi_2^-(x)=0,\ x在L''上 \tag{4.10.38}$$

与(4.6.26)，(4.6.27)完全相同. 注意，假定接触体用半平面去近似，它将导致缩减接触问题同α和β的依赖关系（一般粘结问题）变成只同β有关系.

c) 有限摩擦. 对于L'上的x，$s(x)=kp(x)$，以致从§4.7 中的论据得出，对于所有的z，有

$(1+ik)\phi_1(z)+(1-ik)\overline{\phi_2}(z)=0$，对所有$z$　　(4.10.39)

把它同(4.10.32)联立起来，就可以得到(4.7.6)。

例4.10

1. 试验明，如果接触中的二物体厚为h_1、h_2，那么式(4.10.7)可以用下式替代

$$h_1(\tau_{xz}+i\tau_{yz})=h_2(\tau_{xz}+i\tau_{yz})$$

然后在每个地方，用$\Gamma h_2/h_1$代替Γ，以得到相应的不协调参数α、β。

第五章 积分变换

5.1 引　　言

使用积分变换求解数学物理的偏微分方程，是由D'Alembert, Daniel Bernoulli和Euler在18世纪中叶引进的分离变量法所奠基的。为了说明这个方法，我们将考虑它在求解半平面上的Dirichlet 问题中的使用，可以用以下形式叙述它：在半平面 $-\infty<x<\infty$，$y>0$ 中找一个函数 $\phi(x,y)$，使它满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \tag{5.1.1}$$

并且满足边界条件

$$\phi(x,0)=f(x) \tag{5.1.2}$$

其中 $f(x)$ 是对 x 的所有实值为已知的函数，它满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty$$

而且，ϕ 满足极限条件 $\phi(x,y)\to 0$，当 $(x^2+y^2)\to\infty$ 时。

使用分离变量法，容易表明，函数

$$M(x,y;\xi)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-\mathrm{i}\xi x-|\xi|y) \tag{5.1.3}$$

对 ξ 的所有实值都满足 (5.1.1)。因为 Laplace 方程 (5.1.1) 是线性的，由线性叠加原理，函数

$$\phi(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)M(x,y;\xi)\mathrm{d}\xi \tag{5.1.4}$$

对于定义在整个实轴上的任意实函数 Φ，可能也是(5.1.1) 的一个解，至少是，如果 Φ 使得上面右端的积分，对于 x 的所有实值和 y 的所有正实值一致收敛。若积分方程

$$f(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)\exp(-i\xi x)\,d\xi \qquad (5.1.5)$$

在（$-\infty<x<\infty$）上对未知函数Φ能够解出，则由方程(5.1.4)定义的函数$\phi(x,y)$将满足边界条件（5.1.2）；同时，若方程（5.1.5）右端的积分在$|x|\to\infty$时趋于零，则无穷远处的条件也将得到满足。

以一个明显的方式，能够把这一方法普遍化。假设我们必须在区域D上确定形如

$$L\phi(x,y)=0 \qquad (5.1.6)$$

的齐次偏微分方程的解，其中L是变量x的与y的线性微分算子。可能找到（5.1.6）的一个解$M(x,y;\xi)$，它包含一个任意常数ξ，ξ的值为实数或复数，这些值形成一个集合Ω。因为算子L是线性的，函数

$$\phi(x,y)=\int_{\Omega}M(x,y;\xi)F(\xi)\,d\xi \qquad (5.1.7)$$

针对较宽的某一类函数F可能也是一个解。

此外，若

$$u(x,0)=f(x)$$

那么我们必须这样选择$F(\xi)$，使得

$$f(x)=\int_{\Omega}K(x,\xi)F(\xi)\,d\xi,\quad x\in D \qquad (5.1.8)$$

其中$K(x,\xi)=M(x,0,\xi)$，并且D_1是区域D与直线$y=0$的交集。

当一个函数f用形如（5.1.8）的积分关系的函数作定义时，我们说，f是函数F的对应于核$K(x,\xi)$的积分变换，并且用符号

$$f(x)=T[F(\xi);x] \qquad (5.1.9)$$

表示。对于核的特殊选择，我们不用一般记号T而用反映核的性质的某些记号。如，核

$$K(x,\xi)=\exp(-x\xi),\quad \mathrm{Re}(x)>0$$

定义F的Laplace变换

$$\int_0^\infty F(x,\xi)\exp(-x\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

我们将这个变换记为$L[F(\xi);x]$。

我们现在将列出Fourier变换的主要性质，这个变换将用于平面问题的公式推导和求解。这里仅仅给出一个最简单的轮廓；对于其细节，读者可以参考 Sneddon (1951)或 (1972)的著作。

5.2 单个自变量函数的Fourier变换

若$f(t)$使积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(\mathrm{i}\xi t)\mathrm{d}t$$

对ξ的所有实值都存在，我们用等式

$$F(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(\mathrm{i}\xi t)\mathrm{d}t \qquad (5.2.1)$$

定义f的Fourier变换。我们也以形式

$$F(\xi)=F[f(t);\xi]$$

表示这一等式，并且F为Fourier变换算子。我们用下列式子定义F的共轭函数F^*

$$F^*[G(\xi);x]=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi)\exp(-\mathrm{i}\xi x)\mathrm{d}\xi \qquad (5.2.2)$$

可以观察得到

$$F^*[G(\xi);x]=F[G(\xi);-x] \qquad (5.2.3)$$

对于一类广泛的函数，它包括在物理应用中出现的大多数函数，有

$$\lim_{|\xi|\to\infty} F[f(t);\xi]=0 \qquad (5.2.4)$$

这个结论就是著名的Riemann-Lebesque引理。

类似地，把Fourier变换反演定理叙述为，若

$$F(\xi) = F[f(t);\xi] \tag{5.2.5}$$

那么

$$f(t) = F^*[F(\xi);t] \tag{5.2.6}$$

用算子F、F^*和恒等算子I，我们可把这个结果写成

$$F^*F = I \tag{5.2.7}$$

或者以另一形式

$$F^{-1} = F^* \tag{5.2.8}$$

写出来。

Fourier变换用于定义域为整个实轴的函数. 为了处理定义域为正实轴的函数，我们引入下述的Fourier余弦变换

$$F_c(\xi) \equiv F_c[f(t);\xi] = (2/\pi)^{1/2}\int_0^\infty f(t)\cos(\xi t)\mathrm{d}\xi \tag{5.2.9}$$

和Fourier正弦变换

$$F_s(\xi) \equiv F_s[f(t);\xi] = (2/\pi)^{1/2}\int_0^\infty f(t)\sin(\xi t)\,\mathrm{d}t \tag{5.2.10}$$

Fourier余弦反演公式为

$$F_c[F_c(\xi);t] = f(t) \tag{5.2.11}$$

亦即

$$F_c^{-1} = F_c \tag{5.2.12}$$

而Fourier正弦反演公式为

$$F_s[F_s(\xi);t] = f(t) \tag{5.2.13}$$

亦即

$$F_s^{-1} = F_s \tag{5.2.14}$$

不熟悉Fourier变换的读者，在进行下一步工作之前，最好研究一下下面的例题。

为了使$f(t)$的Fourier变换存在，尤其重要的是使这个变换的反演定理成立，$f(t)$所要满足的条件，将在下列著作中查到，

如Fitchmarsh(1937)，Sneddon(1951)或Sneddon (1972)。事实上，存在着许多种变换形式的充分性条件。Sneddon (1951) 表明，如果$f(x)$在$-\infty<x<\infty$内满足Dirichlet条件，亦即$f(x)$在任何一个有限的区间上只有有限个极大与极小，没有无限大的间断点，并且如果$f(x)$在$-\infty<x<\infty$内是绝对可积分的，即积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

存在，那么

$$F^*[F\{f(t);x\};\xi]=\frac{1}{2}[f(\xi+0)+f(\xi-0)] \qquad (5.2.15)$$

其中$f(\xi+0)$和$f(\xi-0)$分别表示当x从左面与右面趋于ξ时$f(x)$的极限。在$f(x)$的连续点上，公式(5.2.15) 的右端等于$f(\xi)$。Sneddon(1972)用分段连续可微分条件代替Dirichlet条件，并且该著作的§7.11讨论了更为一般的条件。

例5.2

1.证明，$f(t/a)$的Fourier变换是$aF(a\xi)$，并且对于Fc与Fs相应的结果也成立。

2.证明，$f(t)=(2/\pi)^{1/2}t^{-1}\sin(at)$，那么

$$F_c(\xi)=\begin{cases}1, & 0<\xi<a\\ 0, & \xi>a\end{cases},F_s(\xi)=\pi^{-1}\ln[(\xi+a)/(\xi-a)]$$

提示：用Fourier余弦变换的逆变换建立第一式。

3. 证明，若$f(t)$是偶函数，则有$F(\xi)=F_c(\xi)$；若$f(t)$是奇函数，则$F(\xi)=iF(\xi)$。

4. 证明，$F^*[\exp(-|\xi|y);x]=(2/\pi)^{1/2}y(x^2+y^2)^{-1}$。

5. 证明，$F[f(x-a);\xi]=\exp(i\pi\xi)F[f(x);\xi]$。

5.3 Fourier变换之间的关系

在Fourier变换的计算中，常常用到卷积定理

$$F^*[F(\xi)G(\xi);t] = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s \qquad (5.3.1)$$

其中$F = Ff$以及$G = Fg$，上述方程右端的积分，称为函数f与g的卷积，并写成$(f * g)(t)$。不难看到$f * g = g * f$，并且卷积定理可以写成

$$F^*[F(\xi)G(\xi);t] = (f * g)(t) \qquad (5.3.2)$$

的形式，或者另一形式

$$F[(f * g);\xi] = F(\xi)G(\xi) \qquad (5.3.3)$$

如引言中所指出的，Fourier变换是用于求微分方程解的，在这种情形下，它们的使用与某些简单的关系相关，这种关系是指函数的变换与它的导数的变换之间的联系。这样，若$f(t)$是可微的，用分部积分法可以表明

$$F[f'(t);\xi] = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\exp(\mathrm{i}\xi t)\,\mathrm{d}t$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\Big[f(t)\exp(\mathrm{i}\xi t)\Big]_{-\infty}^{\infty} - (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(\mathrm{i}\xi t)\,\mathrm{d}t \qquad (5.3.4)$$

假如这些积分是存在的。这表明，若在$t \to +\infty$时，$f(t) \to 0$，物理问题中出现的大多数函数就是这样的，则

$$F[f'(t);\xi) = -\mathrm{i}\xi F[f(t);\xi] \qquad (5.3.5)$$

这是一个基本的关系式，变换F_c和F_s所对应的结果，是例5.3.1的题目。

当f是一个多变量的函数时，上面使用的记号必须修正。例如，假设我们考虑的函数f是两个实变量x与y的函数。那么分别用下面的式子定义$F[f(x,y);x\to\xi]$与$F[f(x,y);y\to\eta]$

$$F[f(x,y);x\to\xi] = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp(\mathrm{i}\xi x)\,\mathrm{d}x \qquad (5.3.6)$$

$$F[f(x,y);y\to\eta] = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp(\mathrm{i}\eta y)\,\mathrm{d}y \qquad (5.3.7)$$

公式（5.3.5）相应地改为

$$F[D_x f(x,y);x\to\xi] = -i\xi F[f(x,y);x\to\xi] \tag{5.3.8}$$

其中$D_x = \partial/\partial x$.我们也有关系式

$$F[D_y f(x,y);x\to\xi] = D_y F[f(x,y);x\to\xi] \tag{5.3.9}$$

其中$D_y = \partial/\partial y$，并且假定全部积分存在.

以一个精确的类似方式，我们定义 $F_c[f(x,y);\ x\to\xi]$与$F_s[f(x,y);x\to\xi]$. （5.3.8）的类似公式为

$$F_s[D_x f(x,y);x\to\xi] = \xi F_c[f(x,y);x\to\xi] - (2/\pi)^{1/2} f(0,y) \tag{5.3.10}$$

$$F_c[D_x f(x,y);x\to\xi] = -\xi F_s[f(x,y);x\to\xi] \tag{5.3.11}$$

这些关系式在由已知的变换推导未知的变换时，常常要用到. 包含二阶导数的结果能够直接推导出来，它们是

$$F_c[D_x^2 f(x,y);x\to\xi] = -\xi^2 F_c[f(x,y);x\to\xi] - (2/\pi)^{1/2} f_x(0,y) \tag{5.3.12}$$

$$F_s[D_x^2 f(x,y);x\to\xi] = -\xi^2 F_s[f(x,y);x\to\xi] + (2/\pi)^{1/2}\xi f(0,y) \tag{5.3.13}$$

其中，这些方程的第一个方程中$f_x(0,y)$表示$[\partial f/\partial x]_{x=0}$. 由这些结果，我们可以推导$\nabla_1^2 f(x,y)$的变换，这里$\nabla_1^2$是二维 Laplace 算子$\nabla_1^2 = D_x^2 + D_y^2$，这样，对于正变换$F$，有

$$F[\nabla_1^2 f(x,y);x\to\xi] = (D_y^2 - \xi^2)F(\xi,y) \tag{5.3.14}$$

类似地，对于双调和算子$\nabla_1^4 = \nabla_1^2\nabla_1^2$，我们有

$$F[\nabla_1^4 f(x,y);x\to\xi] = (D_y^2 - \xi^2)^2 F(\xi,y) \tag{5.3.15}$$

其它结果可以在例题中找到。

例5.3

1. 用分部积分证明$f'(t)$的变换为

$$F_c[f'(t);\xi] = \xi F_s[f(t);\xi] - (2/\pi)^{1/2} f(0)$$

$$F_s[f'(t);\xi] = -\xi F_c[f(t);\xi]$$

2. 利用 (5.3.9) 对应的F_c的结果和例5.2.2，证明，若 $f(x) = (1-\cos ax)/x^2$，则

$$F_c(\xi) = \begin{cases} (\pi/2)^{1/2}\xi, & 0<\xi<a \\ (\pi/2)^{1/2}a, & \xi \geqslant a \end{cases}$$

3. 证明

$$D_x F_s[\xi^{-1}A(\xi);x] = F_c[A(\xi);x]$$

4. 证明

$$F_c[\nabla_1^2 f(x,y);x\to\xi] = (D_y^2 - \xi^2)F_c(\xi,y) - (2/\pi)^{1/2} f_x(0,y)$$

$$F_s[\nabla_1^2 f(x,y);x\to\xi] = (D_y^2 - \xi^2)F_s(\xi,y) - (2/\pi)^{1/2}\xi f(0,y)$$

$$F_c[\nabla_1^4 f(x,y);x\to\xi] = (D_y^2 - \xi^2)^2 F_c(\xi,y) + (\xi^2 - 2D_y^2) f_1(y) - f_3(y)$$

$$F_s[\nabla_1^4 f(x,y);x\to\xi] = (D_y^2 - \xi^2)^2 F_s(\xi,y) - \xi(\xi^2 + 2D_y^2) f_0(y) + \xi f_2(y)$$

其中

$$f_r(y) = (2/\pi)^{1/2}\left[\frac{\partial^r f}{\partial x^r}\right]_{x=0}$$

5. 利用(5.3.8)与例5.2.4推导

$$F^*[|\xi| y \exp(-|\xi| y);\xi\to x] = 2(2/\pi)^{1/2} x y^2 (x^2+y^2)^{-2}$$

5.4 半平面的Boussinesq解

我们现在将表明如何用积分变换方法去推导半平面的Boussinesq（或Flamant)解. 在 §5.1中我们看到函数 $F^*[\psi(\xi)\exp(-|\xi| y);\xi\to x]$ 在半平面 $y\geqslant 0$ 中是调和的. 因此若在Papkovich-Neuber解 (1.10.11) 中取 $\overrightarrow{\psi}$ 为

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1 = 0,\ \psi_2(x,y) = F^*[|\xi|\xi^{-2}A(\xi)\exp(-|\xi| y);\xi\to x] \\ &\psi_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.1)$$

和

$$\phi(x,y) = F^*[\xi^{-2}c(\xi)\exp(-|\xi|y);\xi\to x] \qquad (5.4.2)$$

我们得到位移与应力

$$u(x,y) = F^*[U(\xi,y);\xi\to x], v(x,y) = F^*[V(\xi,y);\xi\to x] \qquad (5.4.3)$$

$$\tau_{xx}(x,y) = F^*[T_{11}(\xi,y);\xi\to x]$$

$$\tau_{xy}(x,y) = F^*[T_{12}(\xi,y);\xi\to x] \qquad (5.4.4)$$

$$\tau_{yy}(x,y) = F^*[T_{22}(\xi,y);\xi\to x] \qquad (5.4.5)$$

其中

$$\begin{pmatrix} 2\mu U \\ 2\mu V \\ -T_{11} \\ -T_{12} \\ -T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{|\xi|yA + C\}i\xi^{-1} \\ \{(3-4\nu)A + |\xi|yA + C\}|\xi|^{-1} \\ 2\nu A - |\xi|yA - C \\ \{(1-2\nu)A + |\xi|yA + C\}i\ \mathrm{sign}(\xi) \\ 2(1-\nu)A + |\xi|yA + C \end{pmatrix} \exp(-|\xi|y) \qquad (5.4.6)$$

假定$A(\xi)$和$C(\xi)$的确定需满足边界条件

$$\tau_{xy}(x,0) = 0,\ \tau_{yy}(x,0) = -p(x),\ -\infty < x < \infty \qquad (5.4.7)$$

方程（5.4.6）表明，$A(\xi)$和$C(\xi)$必须满足

$$(1-2\nu)A(\xi) + C(\xi) = 0 \qquad (5.4.8)$$

那么

$$\tau_{yy}(x,0) = -F^*[A(\xi);x] \qquad (5.4.9)$$

所以

$$A(\xi) = F[p(x);\xi] = P(\xi)$$

并且矩阵(5.4.6)被写成

$$\begin{pmatrix} 2\mu U \\ 2\mu V \\ -T_{11} \\ -T_{12} \\ -T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{|\xi|y - (1-2\nu)\}i\xi^{-1} \\ \{|\xi|y + 2(1-\nu)\}|\xi|^{-1} \\ -|\xi|y + 1 \\ \{|\xi|y\}i\ \mathrm{sign}(\xi) \\ |\xi|y + 1 \end{pmatrix} P(\xi)\exp(-|\xi|y) \qquad (5.4.10)$$

位移与应力的表达式可以通过卷积定理直接用 $p(x)$ 表示出来。这样，因为(例5.3.5)

$$F^*[i\xi y\exp(-|\xi|y;\xi\to x]=2(2/\pi)^{1/2}xy^2(x^2+y^2)^{-2}$$

$$F^*[(1-|\xi|y)\exp(-|\xi|y;\xi\to x]=2(2\pi)^{1/2}x^2y(x^2+y^2)^{-2}$$

$$F^*[(1+|\xi|y)\exp(-|\xi|y);\xi\to x]=2(2/\pi)^{1/2}y^3(x^2+y^2)^{-2}$$

我们可以写出

$$\tau_{xx}(x,y)=-\int_{-\infty}^{\infty}T_{xx}(x-x',y)\,p(x')\,dx'$$

$$\tau_{xy}(x,y)=-\int_{-\infty}^{\infty}T_{xy}(x-x',y)\,p(x')\,dx' \qquad (5.4.11)$$

$$\tau_{yy}(x,y)=-\int_{-\infty}^{\infty}T_{yy}(x-x',y)\,p(x')\,dx' \qquad (5.4.12)$$

其中核函数决定于下面的公式

$$T_{xx}(x,y)=2\pi^{-1}xy^2(x^2+y^2)^{-2} \qquad (5.4.13)$$

$$T_{xy}(x,y)=2\pi^{-1}x^2y(x^2+y^2)^{-2}$$

$$T_{yy}(x,y)=2\pi^{-1}y^3(x^2+y^2)^{-2} \qquad (5.4.14)$$

这些结果同§2.1中得到的是一致的，它们是由 Sneddon(1951) 得到的。

位移的积分可以用类似的方法表示成 $p(x)$ 的函数，只是稍微复杂一点。我们首先进行形式上的分析，然后加以补充说明。对于位移 $u(x,y)$，我们可以利用结果

$$F^*[-i\xi^{-1}(1-2\nu-|\xi|y)\exp(-|\xi|y);\xi\to x]$$
$$=(2/\pi)^{1/2}[xy(x^2+y^2)^{-1}+(1-2\nu)T_{0n}^{-1}(y/x)]$$

(其中 $T_{0n}^{-1}(y/x)$ 由(2.1.15)定义)给出

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}G_{12}(x-x',y)\,p(x')\,dx' \qquad (5.4.15)$$

这里，$G_{12}(x,y)$ 由(2.1.8)给出。对于位移 $v(x,y)$，我们首先对

x微分(5.4.3)，以消除$|\xi|^{-1}$的奇异性，并得到

$$2\mu\partial v/\partial x = -iF^*[\mathrm{sign}(\xi)(2-2\nu + |\xi|y)P(\xi)\exp(-|\xi|y);\xi\to x] \quad (5.4.16)$$

然后利用

$$iF^*[\mathrm{sign}(\xi)(2-2\nu+|\xi|y)\exp(-|\xi|y);\xi\to x]$$
$$= 2(2/\pi)^{1/2}[xy^2(x^2+y^2)^{-2} + (1-\nu)x(x^2+y^2)^{-1}]$$

可以得到

$$\partial v(x,y)/\partial x = \int_{-\infty}^{\infty} G_{22,x}(x-x',y)p(x')\mathrm{d}x' \quad (5.4.17)$$

其中

$$G_{22,x}(x,y) = -(\pi\mu)^{-1}[xy^2(x^2+y^2)^{-2} + (1-\nu)x(x^2+y^2)^{-1}] \quad (5.4.18)$$

现在可以形式上对方程(5.4.18)进行积分而得到

$$v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{22}(x-x',y)p(x')\mathrm{d}x' \quad (5.4.19)$$

其中$G_{22}(x,y)$由方程(2.1.9)给出。

为了说明这个形式上的分析，我们注意到，若

$$P(0) \equiv (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} p(t)\mathrm{d}t$$

不等于零，亦即作用在边界上的总的力不等于零，那么表达式$u(x,y)$的被积函数具有ξ^{-1}的奇异性，所以可以用 Cauchy 主值解释这个积分。仅当$u(x,y)$在无限远点不趋近于零时，这一点对方程(5.4.15)的有效性有影响，而 Riemann-Lebesque 引理说，绝大多数可以表示成Fourier变换的函数在无限远点一定趋近于零，并且方程(5.4.3)正是这样表示$u(x,y)$的。$v(x,y)$的情况是类似的，但更加尖锐。若$P(0)\neq 0$,(5.4.10)中的被积函数具有ξ^{-1}的奇异性，甚至作为Cauchy主值也是不可积分的。事实上，它本身表明$v(x,y)$在无穷远点趋近于无穷大，如在 §2.1中所讨论过的。若$P(0)=0$,则在每一个积分中没有困难。这一方面的有趣的讨论可在Golecki(1975)的论文中查到。

例5.4

证明，对应于边界应力

$$\tau_{xy}(x,0) = -s(x), \tau_{yy}(x,0) = 0$$

的变换，以矢量的形式表示为

$$\begin{pmatrix} 2\mu U \\ 2\mu V \\ -T_{11} \\ -T_{12} \\ -T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{-|\xi|y + 2(1-\upsilon)\}|\xi|^{-1} \\ \{|\xi|y + (1-2\upsilon)\} i\xi^{-1} \\ (-|\xi|y + 2)\, i\, \mathrm{sign}(\xi) \\ -|\xi|y + 1 \\ |\xi| y i \mathrm{sign}(\xi) \end{pmatrix} \exp(-|\xi|y) S(\xi)$$

其中$S(\xi) = F[s(x);\xi]$。运用这一结果推导在例2.1 ?中给出的那些方程。

2. 证明，若 $p(x)$ 是偶（奇）函数并且 $P(\xi) = F_c(F_s)p$，那么在方程(5.4.3)～(5.4.5)中，U和T_{12}前面的算子 F^*必须用$F_s(-F_c)$ 代替，并且在V、T_{11}、T_{22} 前面的算子用 $F_c(F_s)$ 代替。U、V、T_{11}、T_{12}、T_{22} 与$P(\xi)$通过方程(5.4.10)联系起来，但排除$|\xi|$用ξ代替的情况，而i、sign(ξ) 则被略去。

类似地证明，若$s(x)$是偶(奇) 函数以及若$S(\xi) = F_c(F_s)$，那么在方程(5.4.3) ～(5.4.5) 中，U、T_{12} 前面的算子 F^*须用 $F_s(-F_c)$ 代替，V、T_{11}、T_{22}前面的算子须用$F_c(-F_c)$ 代替。还有，U、V、T_{11}、T_{12}、T_{22} 通过例5.4.1中的方程与 $S(\xi)$ 联系起来，但排除$|\xi|$用ξ代替的情况，i而和sign则被略去。

3. 证明，对于平面应变的应力和应变的关系 (4.2.2) 和(4.2.3) 的形式上的变换是

$$(1-2\nu)T_{11} = 2\mu\left\{-i(1-\nu)\,\xi U + \nu\frac{\partial V}{\partial y}\right\}$$

$$(1-2\nu)T_{22} = 2\mu\left\{-i\nu\xi U + (1-\nu)\,\frac{\partial V}{\partial y}\right\}$$

$$T_{12} = \mu\left\{\frac{\partial U}{\partial y} - i\xi V\right\}$$

4. 若用相应的大写字母表示Fourier 变换，证明，Papkovich-Neuber方程(1.11.5) 和(1.11.6) 在平面应变情形的形式的变换$(x\to\xi)$为

$$2\mu U = 4(1-\nu)\Psi_1 + i\xi\left(-i\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} + y\Psi_2 + \Phi\right)$$

$$2\mu V = 4(1-\nu)\Psi_2 - \frac{\partial}{\partial y}\left(-i\frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} + y\Psi_2 + \Phi\right)$$

$$2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \xi^2\right)\Psi_1 = -F_1$$

$$2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \xi^2\right)\Phi = -i\frac{\partial F_1}{\partial \xi} + yF_2$$

其中F_1和F_2分别为F_x和F_y的变换。

5．证明，若$F_y \equiv 0$且F_x与y无关，例5.4.4的特解Ψ_1和Φ为

$$2(1-\nu)\Psi_1 = \xi^{-2}F_1, 2(1-\nu)\Phi = i\xi^{-2}\frac{\partial F_1}{\partial \xi}$$

相应的位移与应力变换为

$$V \equiv 0 \equiv T_{12}$$

$$2\mu(1-\nu)U = (1-2\nu)\xi^{-2}F_1, T_{11} = -i\xi^{-1}F_1$$

$$(1-\nu)T_{22} = -i\nu\xi^{-1}F_1$$

5.5 Hilbert变换

在某些接触问题的分析中（如(5.4.9)），我们将遇到这种情形，其中

$$F^*[F(\xi);x] = 0, \qquad |x| > a \tag{5.5.1}$$

若我们让

$$F^*[F(\xi);x] = f(x), \qquad |x| \leqslant a \tag{5.5.2}$$

那么，用Fourier反演定理，我们看到

$$F(\xi) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-a}^{a} f(x)\exp(i\xi x)\,dx \tag{5.5.3}$$

让我们现在计算变换

$$g(x,y)=F^*[-\mathrm{i}\ \mathrm{sign}(\xi)F(\xi)\exp(-|\xi|y);x] \tag{5.5.4}$$

其中$y>0$；选择这一变换的理由，在下面将要变得更为清楚。交换积分次序，我们有

$$g(x,y)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}-\mathrm{i}\ \mathrm{sign}(\xi)\exp[-|\xi|y+\mathrm{i}\xi(t-x)]\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}t$$

第一个内积分是

$$\int_0^{\infty}\left\{-\mathrm{i}\exp\xi[-y+\mathrm{i}(t-x)]+\mathrm{i}\exp[-y-\mathrm{i}(t-x)]\right\}\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{2(t-x)}{(t-x)^2+y^2}$$

所以

$$g(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t-x)f(t)\mathrm{d}t}{(t-x)^2+y^2} \tag{5.5.5}$$

这是出现在§2.1与§5.4中那种积分的类型。暂时，我们更感兴趣的是这个积分在$y\to 0^+$的极限情形；这将被定义为$f(x)$的Hilbert变换。我们有

$$F^*[-\mathrm{i}\ \mathrm{sign}(\xi)F(\xi);x]=h[f(t);x]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-x} \tag{5.5.6}$$

注意，Fourier变换被定义为$\lim_{y\to 0+}g(x,y)$而Hilbert变换必须解释为x在$[-a,a]$内的Cauchy积分主值

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-a}^{x-\varepsilon}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-x}+\int_{x+\varepsilon}^{a}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-x}\right\} \tag{5.5.7}$$

上面叙述的分析，可以经过修改，用于仅仅定义在正实轴上的函数。这样，若

$$F_s[F(\xi);x]=f(x)H(a-x),\quad \text{对于}x\geqslant 0 \tag{5.5.8}$$

其中$H(x)$是Heaviside函数，即

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{5.5.9}$$

那么

$$F(\xi)=(2/\pi)^{1/2}\int_0^\infty f(x)\sin(\xi x)\,dx \tag{5.5.10}$$

并且此式可以按(5.5.3)的形式写成

$$F(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}-if(x)\exp(i\xi x)\,dx \tag{5.5.11}$$

其中$f(x)$是按$f(-x)=-f(x)$的叙述对于负x定义的。若方程(5.5.9)用于对负ξ定义$F(\xi)$，那么$F(-\xi)=-F(\xi)$，而方程(5.5.6)用于$-if(x)$时，它给出

$$F^*\{-i\ \mathrm{sign}(\xi)F(\xi);x\}=-iF_c[F(\xi);x]$$

$$=h[-if(t);x]$$

或者

$$F_c\{F(\xi);x\}=h[f(t);x]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-x} \tag{5.5.12}$$

如果把F_c换成F_s，其结果是例5.5的题目。

Hilbert变换的反演，仅仅用实分析便可以得到，但是更早些的则是用§3.5中根据Plemelj公式(3.3.6)和(3.3.7)得到的。这样§3.5的分析表明，若

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}\,dt=g(x),\qquad |x|<a \tag{5.5.13}$$

那么在$\pm a$处具有可积的奇点的一类函数$f(x)$，有一般解

$$f(t)=-\frac{(a^2-t^2)^{-1/2}}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-x^2)^{1/2}g(x)\,dx}{x-t}$$

$$+C(a^2-t^2)^{-1/2} \tag{5.5.14}$$

其中C是任意常数，若$f(t)$在$\pm a$处是有限的，那么事实上它将在那里等于零，并且

$$f(t)=-\frac{(a^2-t^2)^{1/2}}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-x^2)^{-1/2}g(x)\mathrm{d}x}{x-t} \qquad (5.5.15)$$

其前提是$g(x)$满足

$$\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)^{-1/2}g(x)\mathrm{d}x=0 \qquad (5.5.16)$$

例5.5

1. 证明：若对于$x\geqslant 0$有$F_c[G(\xi);x]=g(x)H(a-x)$，那么$F_s[G(\xi);x]=-h[g(t);x]$，其中$g(-t)=g(t)$，有于$-a\leqslant t\leqslant a$。

2. 证明

$$F^{-1}[-i\,\mathrm{sign}(\xi)F(\xi);x]=\begin{cases}-F_c[F(\xi);x], & \text{若}F(\xi)\text{为偶函数}\\ -iF_c[F(\xi);x], & \text{若}F(\xi)\text{为奇函数}\end{cases}$$

3. 推广例5.5.1的结果，证明，若对$x\geqslant 0$有$F_c[P(\xi);x]=p(x)H(1-x)$，对$-1\leqslant x\leqslant 0$有$p(x)=p(-x)$，那么

$$F_s[P(\xi)G(\xi);x]=-\pi^{-1}\int_{-1}^{1}p(t)g(t-x)\mathrm{d}t$$

其中$g(x)=(\pi/2)^{1/2}F_s[G(\xi);x]$。

类似地，若对$x\geqslant 0$有$F_s[P(\xi);x]=p(x)H(1-x)$，对$-1\leqslant x\leqslant 0$有$p(x)=-p(-x)$，那么

$$F_c[P(\xi)G(\xi);x]=\pi^{-1}\int_{-1}^{1}p(t)g(t-x)\mathrm{d}t$$

这些结果可以考虑为卷积定理(5.3.1)的特殊情形。

5.6 Hankel变换

Hankel变换在平面问题与轴对称问题中都有重要的应用。ν阶Hankel变换用$J_\nu(\xi x)$（它是第一类ν阶Bessel函数）通过等

式

$$H_\nu[f(x);\xi]=\int_0^\infty xf(x)J_\nu(\xi x)\mathrm{d}x \qquad (5.6.1)$$

定义．可以对很一般的、复值ξ与ν定义Hankel变换；这个一般的理论超出了本书的范围，有兴趣的读者可以参考标准的教材，例如下列作者的，Erdelyi(1954)，Sneddon(1951)或Watson(1958)．为了本书的目的，考虑ν为正整数，几乎总是0，1或2，或$\nu=\pm n+\frac{1}{2}$，这里n为正整数，就足够了．有关Hankel变换的分析，都牵涉到计算各种Bessel函数的积分．实际上有这种积分的不同类型的表；某些已列在上面援引的教材中；另外一些可以在Luke(1962)的书中查到．下面是Bessel函数的某些最重要的性质．

Bessel函数$y=J_\nu(\xi x)$是方程

$$x^2y''+xy'+(\xi^2x^2-\nu^2)y=0 \qquad (5.6.2)$$

的解．当$\nu\geqslant 0$时，$J_\nu(\xi x)$在$x\to 0$时是有界的，并且具有级数表示

$$j_\nu(\xi x)=(\xi x/2)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}(-\xi^2x^2/4)^k[k!\Gamma(\nu+k+1)]^{-1} \qquad (5.6.3)$$

其中Γ是Gamma函数，对所有的整数与半整数，Γ函数可由最初的几个值

$$\Gamma(1)=1,\qquad \Gamma(1/2)=\pi^{1/2} \qquad (5.6.4)$$

和递推关系

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\quad \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\pi\operatorname{cosec}(\pi x) \qquad (5.6.5)$$

而确定．特别地

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (5.6.6)$$

Bessel函数满足递推关系

$$J_{\nu-1}(\xi x)+J_{\nu+1}(\xi x)=2\nu(\xi x)^{-1}J_\nu(\xi x) \qquad (5.6.7)$$

$$J_\nu'(\xi x) = \xi J_{\nu-1}(\xi x) - \nu x^{-1} J_\nu(\xi x) \tag{5.6.8}$$

$$= -\xi J_{\nu+1}(\xi x) + \nu x^{-1} J_\nu(\xi x) \tag{5.6.9}$$

这里一撇"′"表示对x的导数。它们也满足更一般的关系式

$$[(\xi x)^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}x]^k\{x^\nu J_\nu(\xi x)\} = x^{\nu-k} J_{\nu-k}(\xi x) \tag{5.6.10}$$

$$[(\xi x)^{-1}\mathrm{d}/\mathrm{d}x]^k\{x^{-\nu} J_\nu(\xi x)\} = (-1)^k x^{-\nu-k} J_{\nu+k}(\xi x) \tag{5.6.11}$$

对于$k = 0, 1, 2, \cdots$，其中最重要的是

$$J_0'(\xi x) = -\xi J_1(\xi x), \quad [x J_1(\xi x)]' = \xi x J_0(\xi x) \tag{5.6.12}$$

当ν是奇整数的一半时，J_ν可以用三角函数表示。定义第一类球Bessel函数是有用的，它们是

$$j_n(x) = [\pi/(2x)]^{1/2} J_{n+1/2}(x) \tag{5.6.13}$$

那么

$$j_{-1}(x) = x^{-1}\cos x, \quad j_0(x) = x^{-1}\sin x \tag{5.6.14}$$

并且其它的$j_n(x)$可以由递推关系

$$j_{n-1}(x) + j_{n+1}(x) = (2n+1)x^{-1} j_n(x); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{5.6.15}$$

计算出来。

$J_\nu(\xi x)$所满足的方程(5.6.2)与圆柱坐标系中的算子∇^2

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.6.16}$$

有密切的关系。于是我们注意到方程(5.6.2)可以写成

$$(D_r^2 + r^{-1}D_r - \nu^2 r^{-2} + \xi^2) J_\nu(\xi r) = 0 \tag{5.6.17}$$

所以，若记$B_\nu = D_r^2 + r^{-1}D_r - \nu^2 r^{-2}$，那么

$$H_\nu[B_\nu f(r); \xi] = -\xi^2 H_\nu[f(r); \xi] \tag{5.6.18}$$

若函数$f(r)$现在用$f(r,z)\exp(i\nu\theta)$代替，那么

$$\nabla^2 f(r,z)\exp(i\nu\theta) = \exp(i\nu\theta)(B_\nu + D_z^2) f(r,z) \tag{5.6.19}$$

所以

$$H_\nu[\nabla^2 f(r,z)\exp(i\nu\theta);r\to\xi]=\exp(i\nu\theta)(D_z^2-\xi^2)\overline{f}_\nu(\xi,z) \tag{5.6.20}$$

其中$D_z=\partial/\partial z$以及

$$\overline{f}_\nu(\xi,z)=H_\nu[f(r,z);r\to\xi] \tag{5.6.21}$$

并且假定所有的运算是成立的．这里有一个重要的结果，若函数$f(r,z)\exp(i\nu\theta)$的ν阶Hankel变换$f_\nu(\xi,z)$满足

$$(D_z^2-\xi^2)\,\overline{f}_\nu(\xi,z)=0 \tag{5.6.22}$$

则这个函数是调和的．方程（5.6.22）的通解是

$$\overline{f}_\nu(\xi,z)=A(\xi)\exp(-\xi z)+C(\xi)\exp(\xi z) \tag{5.6.23}$$

这是枕垫物的以及半空间的Hankel变换解的基础．

Hankel变换的应用以Hankel反演定理为基础，它表述为，若

$$H_\nu[f(x);\xi]=\overline{f}_\nu(\xi) \tag{5.6.24}$$

那么

$$f(x)=H_\nu[\overline{f}_\nu(\xi);x] \tag{5.6.25}$$

亦即

$$H^{-1}_\nu=H_\nu \tag{5.6.26}$$

我们需要用函数的Hankel变换去表达函数导数的Hankel变换．这可以由方程（5.6.10）和（5.6.11）得到．我们将用D_x记$\mathrm{d}/\mathrm{d}x$，那么在方程(5.6.10)中取$k=1$，我们得到

$$D_x[x^\nu J_\nu(\xi x)]=\xi x^\nu J_{\nu-1}(\xi x) \tag{5.6.27}$$

所以

$$H_\nu[x^{\nu-1}D_x\{x^{1-\nu}f(x)\};\xi]$$

$$=\int_0^\infty D_x\{x^{1-\nu}f(x)\}x^\nu J_\nu(\xi x)\mathrm{d}x$$

$$=\Big[xf(x)J_\nu(\xi x)\Big]_0^\infty-\int_0^\infty x^{1-\nu}f(x)\xi x^\nu J_{\nu-1}(\xi x)\mathrm{d}x$$

如果函数能使已积分的项为零，即$[xf(x)J_\nu(\xi x)]_0^\infty=0$，则我们推导出

$$H_\nu[x^{\nu-1}D_x\{x^{1-\nu}f(x)\};\xi]=-\xi H_{\nu-1}[f(x);\xi] \tag{5.6.28}$$

利用(5.6.11)，并且令$k=1$，我们有

$$H_\nu[x^{-\nu-1}D_x\{x^{1+\nu}f(x)\};\xi]=\xi H_{\nu+1}[f(x);\xi] \tag{5.6.29}$$

其前提仍旧是，已积分的项等于零。

很多重要的Hankel变换可以利用积分表示

$$J_\nu(\xi x)=\frac{2(\xi x/2)^\nu}{\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^1(1-t^2)^{\nu-1/2}\cos(\xi xt)\,dt \tag{5.6.30}$$

而推导出来，此式对$\nu>-1/2$成立（实际上是$\mathrm{Re}(\nu)>-1/2$）。这可以用Fourier余弦变换的形式改写$J_\nu(\xi x)$，即

$$2^{-1/2}\Gamma(\nu+1/2)(\xi x/2)^{-\nu}J_\nu(\xi x)=F_c[q_\nu(t);t\to(\xi x)] \tag{5.6.31}$$

其中

$$q_\nu(t)=\begin{cases}(1-t^2)^{\nu-1/2}, & 0\leqslant t<1\\ 0, & t>1\end{cases} \tag{5.6.32}$$

现在，利用Fourier的F_c反演定理，我们得到

$$2^{-1/2}\Gamma(\nu+1/2)F_c[(\xi x/2)^{-\nu}J_\nu(\xi x);x\to t]=\xi^{-1}q_\nu(t/\xi) \tag{5.6.33}$$

这个方程为许多新的关系式的建立开辟了道路，对其左端可以用一个ν阶Hankel变换H_ν表示，这又轮到由H_ν的反演定理进行反运算。还可以对这个方程进行微分与积分，以得到其它关系式。现在将推导其中更重要的一些，而另外的一些会在例题和后面的应用中出现。

在(5.6.33)中，令$\nu=0$，我们得到

$$(2/\pi)^{-1/2}F_c[J_0(\xi x);x\to\xi]=\xi^{-1}q_0(t/\xi) \tag{5.6.34}$$

它可以改写成

$$\int_t^\infty J_0(\xi x)\cos(xt)\,dt = \begin{cases} (\xi^2 - t^2)^{-1/2}, & 0 \leqslant t < \xi \\ 0, & t > \xi \end{cases} \tag{5.6.35}$$

或者换言之

$$H_0[x^{-1}\cos(xt); x \to \xi] = \xi^{-1} q_0(t/\xi) \tag{5.6.36}$$

现在对t积分此式，利用$\int_0^\tau \cos(xt)\,dt = x^{-1}\sin x\tau$，得到

$$H_0[x^{-2}\sin(xt); x \to \xi] = \begin{cases} \arcsin(t/\xi), & 0 \leqslant t < \xi \\ \pi/2, & t \geqslant \xi \end{cases} \tag{5.6.37}$$

另外的变换，可以利用（5.6.29）令 $\nu = 0$，$f(x) = x^{-1}\sin(xt)$ 而求出，它给出

$$H_1[x^{-1}\sin(xt); x \to \xi] = \xi^{-1} H_0[x^{-1}(t\cos(xt)); x \to \xi]$$
$$= t\xi^{-2} q_0(t/\xi) \tag{5.6.38}$$

并且可以由这个方程得到三个其他的等价关系．$x^{-1}\sin(xt)$的变换H_0是经常要用到的，它是(例5.6.1)

$$H_0[x^{-1}\sin(xt); x \to \xi] = t^{-1} q_0(\xi/t) \tag{5.6.39}$$

这可以改写成Fourier正弦变换，即

$$(2/\pi)^{-1/2} F_s[J_0(x\xi); x \to t] = t^{-1} q_0(\xi/t) \tag{5.6.40}$$

例5.6

1．利用积分表达式

$$J_0(x) = (2/\pi)\int_1^\infty (t^2 - 1)^{-1/2}\sin(xt)\,dt$$

求出方程(5.6.39)．

2．对方程(5.6.37)、(5.6.38)和(5.6.39)作反运算，分别得到

$$\int_0^t \xi (t^2 - \xi^2)^{-1/2} J_0(\xi x)\,d\xi = x^{-1}\sin(xt)$$

$$\int_t^\infty (\xi^2 - t^2)^{-1/2} J_1(\xi x)\,d\xi = (xt)^{-1}\sin(xt)$$

$$\int_t^\infty \xi (\xi^2 - t^2)^{-1/2} J_0(\xi x)\,d\xi = x^{-1}\cos(xt)$$

3．证明$Hv[\nabla^4 f(r,z)\exp(iv\theta);r\to\xi]=(D_z^2-\xi^2)^2\exp(iv\theta)\overline{f}_v(\xi,z)$，再推导 $f(r,z)\exp(iv\theta)$ 为双调和的，即$\nabla^4 f(r,z)\exp(iv\theta)=0$，若$\overline{f}_v(\xi,z)=[A(\xi)+zB(\xi)]\exp(-\xi z)+[C(\xi)+zD(\xi)]\exp(\xi z)$。

5.7 Fourier, Hankel与Abel变换之间的关系

我们从推广Fourier变换到n维的定义开始．若f是n个实变量x_1，x_2，…，x_n的一个实函数，我们定义n维Fourier变换。

$$F_n(\xi)=F_{(n)}[f(x);\xi]=(2\pi)^{-n/2}\int_{E_n}f(x)\exp[i(\xi\cdot x)]dx \tag{5.7.1}$$

这里，x与ξ分别表示具有分量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$的$n$维矢量，$(\xi\cdot x)=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n$表示矢量$\xi$与$x$在$n$维欧几里德空间$E_n$上的内积。

相应的反演定理是

$$f(x)=F_{(n)}^{*}[F_{(n)}(\xi);x] \tag{5.7.2}$$

其中算子$F_{(n)}^{*}$由方程

$$F_{(n)}^{*}[g(x);\xi]=(2\pi)^{-n/2}\int_{E_n}g(x)\exp[-i(\xi\cdot x)]dx$$

定义，所以

$$F_{(n)}^{*}[g(x);\xi]=F_{(n)}[g(x);-\xi] \tag{5.7.3}$$

如果以等式

$$(f*g)(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{E_n}f(x-y)g(y)dy \tag{5.7.4}$$

定义两个函数的卷积，我们找到卷积定理为

$$F_{(n)}[(f*g)(x);x\to\xi]=F_{(n)}(\xi)G_{(n)}(\xi) \tag{5.7.5}$$

经常使用到的一个结果是它的逆形式

$$F_{(n)}^{*}[F_{(n)}(\xi)G_{(n)}(\xi);\xi\to x]=(f*g)(x) \tag{5.7.6}$$

当我们必须确定径向距离 $r=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$ 上的函数f和Fourier变换$F_{(n)}(\xi)$时，Hankel 变换与Fourier 变换之间的第一个关系式便出现了. 考虑$n=2$的情形，那么

$$F_{(2)}[f(r);\xi]=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(r)\exp[i(\xi_1x_1+\xi_2x_2)]dx_1dx_2$$

变换到极坐标

$$x_1=r\cos\theta,\quad x_2=r\sin\theta,\quad \xi_1=\xi\cos\phi,\quad \xi_2=\xi\sin\phi \qquad (5.7.7)$$

得出

$$F_{(2)}[f(r);\xi]=(2\pi)^{-1}\int_0^{\infty}rdr\ f(r)\int_0^{2\pi}\exp[i\xi r\cos(\theta-\phi)]d\theta \qquad (5.7.8)$$

以及

$$\int_0^{2\pi}\exp[i\xi r\cos(\theta-\phi)]d\theta=4\int_0^{\pi/2}\cos(\xi r\cos\theta)d\theta$$
$$=2\pi J_0(\xi r) \qquad (5.7.9)$$

其中我们已经用了关于J_0的积分表达式（5.6.30），并在积分中令$t=\cos\theta$，将(5.7.9)代入(5.7.8)，得到

$$F_{(2)}[f(r);\xi]=H_0[f(r);\xi] \qquad (5.7.10)$$

更一般的结果是

$$F_{(n)}[f(r);\xi]=\xi^{-\nu}H_\nu[r^\nu f(r);\xi] \qquad (5.7.11)$$

这里 $\xi=(\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2)^{1/2},\quad \nu=(n-2)/2 \qquad (5.7.12)$

现在取$\xi=(\xi_1,\ \xi_2)$并且就ξ_1求(5.7.10)的微分，得到

$$F_{(2)}[ix_1f(r);(\xi_1,\xi_2)]=\xi_1\xi^{-1}\partial[H_0(f(r);\xi]/\partial\xi \qquad (5.7.13)$$

利用关系式

$$\partial J_0(\xi r)/\partial\xi=-rJ_1(\xi r) \qquad (5.7.14)$$

我们得到

$$F_{(2)}[x_1f(r);(\xi_1,\xi_2)]=i\xi_1\xi^{-1}H_1[rf(r);\xi] \qquad (5.7.15)$$

一般的方程(5.7.11)和特殊的方程(5.7.10)和(5.7.15)提供了一条方便的途径，可以化Hankel变换为包含指数的积分，这些积分常常能以封闭的形式计算出来，计算时使用一个变换，变换到极坐标系中，接着使用围绕一个单位圆的围线积分(见例5.7.1).

Fourier与Hankel变换的第二个关系，由方程 (5.6.13) 和 (5.6.14)推导出来，这两个方程表示了$\sin x$和$\cos x$同$J_{1/2}(x)$和$J_{-1/2}(x)$的简单联系 (见例5.7.3).

它们的第三组关系也是最重要的一组，由§5.6 中的三角函数的Hankel变换推导出来.因为这些函数包含$q_0(t/\xi)$或$q_0(\xi/t)$，所以，最后的结果可以方便地用 Abel 变换来表示. 我们定义 Abel算子

$$A_1[f(t);x]=(2/\pi)^{1/2}\int_0^x(x^2-t^2)^{-1/2}f(t)\,dt,\quad x>0 \tag{5.7.16}$$

$$A_2[f(t);x]=(2/\pi)^{1/2}\int_x^\infty(t^2-x^2)^{-1/2}f(t)\,dt,\quad x>0 \tag{5.7.17}$$

现在来研究$\xi^{-1}F_c(\xi)$的Hankel变换，其中$F_c(\xi)$是$f(t)$的Fourier余弦变换. 使用(5.6.35)，我们有

$$H_0[\xi^{-1}F_c(\xi);x]=\int_0^\infty F_c(\xi)J_0(\xi x)\,d\xi$$

$$=(2/\pi)^{1/2}\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^\infty J_0(\xi x)\cos(\xi t)\,d\xi$$

$$=(2/\pi)^{1/2}\int_0^x(x^2-t^2)^{-1/2}f(t)\,dt$$

亦即

$$H_0[\xi^{-1}F_c(\xi);x]=A_1[f(t);x] \tag{5.7.18}$$

运用方程(5.6.39)，我们可以证明

$$H_0[\xi^{-1}F_c(\xi);x]=A_2[f(t);x] \tag{5.7.19}$$

以该变换的相反的顺序，若$\overline{f_0}(\xi)=H_0[f(t);\xi]$，那么

$$F_c[\overline{f_0}(\xi);x]=(2/\pi)^{1/2}\int_0^\infty\overline{f_0}(\xi)\cos(\xi x)\,d\xi$$

$$=(2/\pi)^{1/2}\int_0^\infty tf(t)\,dt\int_0^\infty J_0(\xi t)\cos(x\xi)\,d\xi$$

$$= (2/\pi)^{1/2} \int_0^\infty tf(t)(t^2 - x^2)^{-1/2} \mathrm{d}t$$

这样

$$F_c[\overline{f}_0(\xi); x] = A_2[tf(t); x] \tag{5.7.20}$$

$$F_s[\overline{f}_0(\xi); x] = A_1[tf(t); x] \tag{5.7.21}$$

方程(5.7.18)～(5.7.21)都具有一般的形式$ab = c$，其中a，b，c是Hankel，Fourier或Abel的全部算子．从这个关系，可以得到等价关系$a = cb^{-1}$，$b = a^{-1}c$，$a^{-1} = bc^{-1}$，$b^{-1} = c^{-1}a$，$c^{-1} = b^{-1}a^{-1}$．当它们以H_ν，F_c或F_s，A_1或A_2写出时，认识两个明显不同关系的等价，是困难的，并且在任何情况下，它们有那么多种关系，因此，我们把比较重要的一些关系，以标准的形式，列在表5.7.1和5.7.2中．

表 5.7.1 Hankel变换转换成Fourier变换

1. $A^{-\frac{1}{2}}\{H_0[\xi^{-1}A(\xi);t];x\} = F_c\{A(\xi);x\}$
2. $x^{-1}A^{-\frac{1}{2}}\{tH_1[\xi^{-1}A(\xi);t];x\} = Fs\{A(\xi);x\}$
3. $xA_1\{t^{-2}D_t t^2 H_2[\xi^{-1}A(\xi);t];x\} = -F_c\{A(\xi);x\} + B(0)$
   $[B(0) = F_c\{A(\xi);0\}]$
4. $A_1\{tH_0[A(\xi);t];x\} = F_s\{A(\xi);x\}$
5. $xA_1\{H_1[A(\xi);t];x\} = -F_c\{A(\xi);x\} - B(0)$
6. $\int_0^x uA_1\{t^{-2}D_t t^2 H_2[A(\xi);t];u\}\,\mathrm{d}u = -F_s\{A(\xi);x\} - C(0)x$
   $[C(0) = F_c\{\xi A(\xi);0\}]$
7. $A^{-\frac{1}{2}}\{H_0[\xi^{-1}A(\xi);t];x\} = F_s\{A(\xi);x\}$
8. $D_x xA_2\{H_1[\xi^{-1}A(\xi);t];x\} = F_c\{A(\xi);x\}$
9. $xA_2\{t^{-2}D_t t^2 H_1[\xi^{-1}A(\xi);t];x\} = F_s\{A(\xi);x\}$
10. $A_2\{tH_0[A(\xi);t];x\} = F_c\{A(\xi);x\}$
11. $xA_2\{H_1[A(\xi);t];x\} = F_s\{A(\xi);x\}$
12. $\int_x^\infty uA_2\{t^{-2}D_t t^2 H_1[A(\xi);t];u\}\,\mathrm{d}u = F_c\{A(\xi);x\}$

表 5.7.2 Fourier变换转换成Hankel变换

1. $A_1\{F_c[A(\xi);t];x\}=H_0\{\xi^{-1}A(\xi);x\}$
2. $A_1\{tF_0[A(\xi);t];x\}=xH_1\{\xi^{-1}A(\xi);x\}$
3. $A_1^{-1}\{F_0[A(\xi);t];x\}=xH_0\{A(\xi);x\}$
4. $A_1^{-1}\{t^{-1}F_0[A(\xi);t];x\}=-H_1\{A(\xi);x\}$
5. $A_2\{F_c[A(\xi);t];x\}=H_0\{\xi^{-1}A(\xi);x\}$
6. $D_xA_2\left\{\int_0^\infty F_c[A(\xi);t]\,\mathrm{d}t;x\right\}=H_1\{\xi^{-1}A(\xi);x\}$
7. $A_2^{-1}\{F_c[A(\xi);t];x\}=xH_0\{A(\xi);x\}$
8. $A_2^{-1}\{t^{-1}F_0[A(\xi);t];x\}=H_1\{A(\xi);x\}$

反Abel算子A_1^{-1}和A_2^{-1}，可以由下列方式得到。考虑方程

$$g(t)=D_tA_1[xf(x);t] \tag{5.7.22}$$

可以把这个变换写成

$$A_1[xf(x);t]=(2/\pi)^{1/2}\int_0^t x(t^2-x^2)^{-1/2}f(x)\mathrm{d}x$$

分部积分后，得出

$$A_1[xf(x);t]=(2/\pi)^{1/2}\left\{\left[-(t^2-x^2)^{1/2}f(x)\right]_0^t+\int_0^t(t^2-x^2)^{1/2}f'(x)\mathrm{d}x\right\}$$

$$=(2/\pi)^{1/2}\left\{tf(0)-\int_0^t(t^2-x^2)^{1/2}f'(x)\mathrm{d}x\right\}$$

于是对t微分，得出

$$g(t)=(2/\pi)^{1/2}f(0)+tA_1[f'(x);t]$$

现在找到$g(t)$的Abel变换A_1，我们有

$$A_1[g(t);\xi]=(2/\pi)\left\{-f(0)\int_0^\xi(\xi^2-t^2)^{-1/2}\mathrm{d}t\right.$$

$$+\int_0^\xi t(\xi^2-t^2)^{-1/2}\mathrm{d}t\int_0^t f'(x)(t^2-x^2)^{-1/2}\mathrm{d}x\Big\} \qquad (5.7.23)$$

这个双重积分的区域，如图5.7.1所示；交换积分次序，我们有

$$\int_0^\xi f'(x)\mathrm{d}x\int_x^\xi t(\xi^2-t^2)^{-1/2}(t^2-x^2)^{-1/2}\mathrm{d}t$$

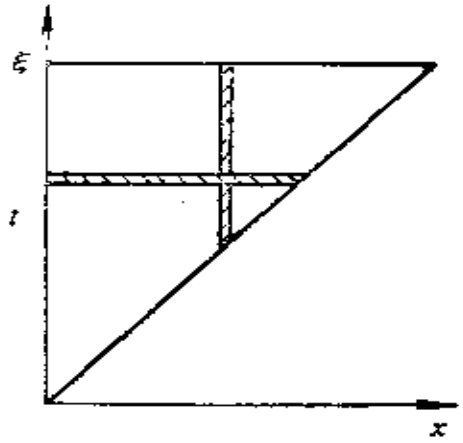


图5.7.1 公式(5.7.1)包含的积分的区域

$$=(\pi/2)\int_0^\xi f'(x)\mathrm{d}x \qquad (5.7.24)$$

其中第一重积分如例5.7.4所计算.

结合这一结果与公式(5.7.23)，我们有

$$A_1[g(t);\xi]=-f(0)+\int_0^\xi f'(x)\mathrm{d}x=f(\xi) \qquad (5.7.25)$$

这表明$g(t)$是$f(\xi)$的反演，并且我们可以用方程

$$A_1^{-1}[f(\xi);t]=D_t A_1[xf(x);t] \qquad (5.7.26)$$

定义算子A_1^{-1}. 然而我们必须注意到方程

$$A_1^{-1}[\xi^{-1}f(\xi);t]=g(t) \qquad (5.7.27)$$

具有一般解

$$f(\xi)=\xi A_1[g(t);\xi]+f(0) \qquad (5.7.28)$$

因为$A_1^{-1}[\xi^{-1}c;t]=0$，其中c是一个常数. 这解释了表5.7.1中所含$B(0)$的项的存在. 我们可以以一个类似的方式证明

$$A_2^{-1}[f(\xi);t]=-D_t A_2[xf(x);t] \qquad (5.7.29)$$

但是要注意，只有解$f(\xi)\equiv 0$时，才有方程$A_2^{-1}[\xi^{-1}f(\xi);t]\equiv 0$.

现在可以使用这些反算子把Hankel变换转换为Fourier变换. 于是，应用A_1^{-1}到方程(5.7.18)，交换$f(\xi)$与$F_0(\xi)$，我们求出

$$D_t A_1[xH_0\{\xi^{-1}f(\xi);x\};t]=F_0(t) \qquad (5.7.30)$$

而应用(5.7.19)与(5.7.29)，得出

$$D_t A_2[xH_0\{\xi^{-1}f(\xi);x\};t] = -F_c(t) \qquad (5.7.31)$$

假定要求找一个函数 $f(\xi)$，使

$$F_c(x) \equiv F_c[f(\xi);x] = 0, \quad \text{对于} x > a \qquad (3.7.32)$$

$f(\xi)$的一个表示方式，是由变换F_c进行推导，即

$$f(\xi) = F_c[F_c(x);\xi] = (2/\pi)^{1/2}\int_0^a F_c(x)\cos(\xi x)\,dx \qquad (5.7.33)$$

但另一种方式，是使用一个适宜的通道，在这种情形下，表5.7.2中的(7)就是，用它更为方便。通道(7)包含 A_2^{-1}，它是一个外算子，在范围(x,∞)上起作用。这意味着，若$x>a$，则 $F_c(x)$等于零，因而通道(7)左端恒等于零，便得出

$$A_2^{-1}[F_c(t);x] \equiv xH_0[f(\xi);x] \equiv x\overline{f_0}(x) = 0, \quad \text{对于} x > a$$

它允许我们把$f(\xi)$写成

$$f(\xi) = H_0[\overline{f_0}(x);\xi] = \int_0^a x\overline{f_0}(x)J_0(\xi x)\,dx \qquad (5.7.34)$$

以及$F_c(t)$具有形式

$$F_c(t) = A_2[x\overline{f_0}(x);t] = (2/\pi)^{1/2}\int_t^a x(t^2-x^2)^{-1/2}\overline{f_0}(x)\,dx,$$

$$\text{若} 0 \leqslant t < a \qquad (5.7.35)$$

表5.7.1与5.7.2中的其它通道，可以类似地得到应用。

例5.7

1．利用(5.7.10)证明，若$k>0$，那么$H_0[r^{-1}e^{-kr};\xi] = (k^2+\xi^2)^{-1/2}$.利用极坐标和围线积分计算Fourier积分。

2．利用例5.7.1的结果证明

$$H_1[r^{-1}e^{-kr};\xi] = \xi^{-1}[1 - k(k^2+\xi^2)^{-1/2}]$$

3．利用方程(5.6.13)和(5.6.14)证明

$$F_c[f(x);\xi] = \xi^{1/2}H_{-1/2}[x^{-1/2}f(x);\xi]$$

$$F_s[f(x);\xi] = \xi^{1/2}H_{1/2}[x^{-1/2}f(x);\xi]$$

4．利用代换$t^2 = x^2\cos^2\theta + \xi^2\sin^2\theta$计算方程(5.7.24)中的第一内积分。

5．证明$F_s[\overline{f_1}(\xi);x] = xA_2[f(t);x]$。

6. 证明$x^{-1}A^{-1}[tH_1\{\xi^{-1}f(\xi);t\};x]=F_s(x)$.

7. 利用方程(5.7.37)证明，若$\overline{f_0}(\tau)=H_0[f(t);\tau]$以及$f(t)=0$，对于$t>1$，那么，若$\xi<1$，则

$$F_s[t^{-1}\overline{f_0}(t);\xi]=(2/\pi)^{1/2}\left\{\pi/2\int_0^{\xi}tf(t)\,dt+\int_{\xi}^{1}t\arcsin(\xi/t)f(t)\,dt\right\}$$

而对于$\xi\geq 1$，则

$$F_s[t^{-1}\overline{f_0}(t);\xi]=(2/\pi)^{-1/2}\int_0^1 tf(t)\,dt$$

此外，证明$F_s[\overline{f_0}(\tau);\xi]=A_1[tf(t);\xi]$.

8. 对(5.6.30)取微分，证明

$$tJ_1(\tau t)=(2/\pi)^{1/2}A_1[\xi\sin(\tau\xi);\xi\to\tau]$$

并且由此证明$(2/\pi)^{1/2}A_1^{-1}[\sin(\tau\xi);\xi\to\tau]=\tau tJ_0(\tau t)$

9. 证明$F_{2s}[\xi(\xi^2+\eta^2)^{-1};(\xi,\eta)\to(x,y)]=i\pi(x^2+y^2)^{-1}$.

10. 多项式的Abel变换可以计算如下.Legendre加法定理(见Gradshteyn与Ryzhik(1965，8.814)的著作给出

$$P_n(\sin\phi\cos\theta)=P_n(0)P_n(\cos\phi)=2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-k)}{(n+k)!}P_n^k(0)P_n^k(\cos\phi)\times\cos k\theta$$

让

$$I(\rho)=\int_0^{\rho}(\rho^2-\tau^2)^{-1/2}P_{2m}(\tau)\,d\tau=\int_0^{\pi/2}P_{2m}(\rho\cos\theta)\,d\theta$$

那么，若$\rho=\sin\phi$，$n=2m$，我们得到

$$I(\rho)=\frac{\pi}{2}P_{2m}(0)P_{2m}[(1-\rho^2)^{1/2}]$$

这样

$$A_1[P_{2m}(\tau);\rho]=(\pi/2)^{1/2}P_{2m}(0)P_{2m}[(1-\rho^2)^{1/2}]$$

并且由反运算，我们有

$$D_\tau A_1[\rho P_{2m}[(1-\rho^2)^{1/2}];\tau]=(2/\pi)^{1/2}P_{2m}(\tau)/P_{2m}(0)$$

这些公式可以用于构造奇数与偶数的多项式的变换，这些变换也是多项式.

11. 若$f(x_1,x_2)$与$g(x_1,x_2)$仅仅是$(x_1^2+x_2^2)=r$的函数，证明$f*g=2\pi\times H_0[F(\rho)G(\rho);\tau]$，其中$F(\rho)=H_0[f(r);\rho]$，$G(\rho)=H_0[g(r);\rho]$.

12. 推广方程 (5.7.10) 以证明，若 $\lambda=(a^2\xi_1^2+b^2\xi_2^2)^{1/2}$，那么，$F_{(2)}[f(\rho);\xi]=H_0[f(\rho);\lambda]$. Sneddon (1979a), (1979b) 已经用这个结果和相应的反演去寻找压入半空间的一个平底椭圆压块的另外一种形式的解（见§12.2）.

5.8 二维Fourier变换的应用

在§1.11中曾经表明，弹性方程允许用Papkovich-Neuber势给出平面应变问题求广义平面应力问题的一个解，即

$$2\mu u=4(1-\nu)\psi_1-\frac{\partial}{\partial x}(x\psi_1+y\psi_2+\phi) \tag{5.8.1}$$

$$2\mu v=4(1-\nu)\psi_2-\frac{\partial}{\partial y}(x\psi_1+y\psi_2+\phi) \tag{5.8.2}$$

其中ψ_1，ψ_2与ϕ满足

$$2(1-\nu)\nabla^2\psi_1=-F_x,\quad 2(1-\nu)\nabla^2\psi_2=-F_y \tag{5.8.3}$$

$$2(1-\nu)\nabla^2\phi=xF_x+yF_y \tag{5.8.4}$$

这里$\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$，而在广义平面应力情形，位移与体力（亦即作用在板的平面内的载荷）是对板厚平均的，ν必须以$\nu^*=\nu/(1+\nu)$代替.

假定

$$\psi\rho_2(x,y)=F_{(2)}^{*}[\psi\rho_2(\xi,\eta);(\xi;\eta)\to(x,y)] \tag{5.8.5}$$

$$\phi(x,y)=F_{(2)}^{*}[\phi(\xi,\eta);(\xi,\eta)\to(x,y)] \tag{5.8.6}$$

变换$F_{(2)}$的公式(5.3.8)在形式上的等价表达式为

$$F_{(2)}[D_xf(x,y);(x,y)\to(\xi,y)]=-i\xi F_{(2)}[f(x,y);(x,\ y)\to(\xi,\eta)] \tag{5.8.7}$$

它可以写成交换形式

$$D_\xi F(\xi,\eta)=iF_{(2)}[xF_{(2)}^{*}[F(s,t);(x,y)];(\xi,\eta)] \tag{5.8.8}$$

对方程(5.8.3)和(5.8.4)，应用变换$F_{(2)}$以及利用公式(5.8.7)和(5.8.8)，导出结果

$$2(1-\nu)(\xi^2+\eta^2)\psi_1=\overline{F}_1,$$

$$2(1-\nu)(\xi^2+\eta^2)\phi=\mathrm{i}D_\xi\overline{F}_1+\mathrm{i}D_\eta\overline{F}_2 \qquad (5.8.9)$$

其中$\overline{F}_1$和$\overline{F}_2$分别是F_x和F_y的变换。对(5.8.1)和(5.8.2)作变换$F_{(x)}$，我们求得

$$2\mu U=4(1-\nu)\psi_1+\xi[D_\xi\psi_1+D_\eta\psi_2+\mathrm{i}\phi] \qquad (5.8.10)$$

$$2\mu V=4(1-\nu)\psi_2+\eta[D_\xi\psi_1+D_\eta\psi_2+\mathrm{i}\phi] \qquad (5.8.11)$$

方程(5.8.9)还表明

$$D_\xi\psi_1+D_\eta\psi_2+\mathrm{i}\phi=\frac{1}{2(1-\nu)}[\overline{F}_1D_\xi(\xi^2+\eta^2)^{-1}$$

$$+\overline{F}_2D_\eta(\xi^2+\eta^2)^{-1}] \qquad (5.8.12)$$

所以

$$2\mu U=\overline{F}_1\left\{2(\xi^2+\eta^2)^{-1}+\frac{\xi}{2(1-\nu)}D_\xi(\xi^2+\eta^2)^{-1}\right\}$$

$$+\frac{\overline{F}_2\xi}{2(1-\nu)}D_\eta(\xi^2+\eta^2)^{-1} \qquad (5.8.13)$$

$$2\mu V=\frac{\overline{F}_1\eta}{2(1-\nu)}D_\xi(\xi^2+\eta^2)^{-1}+\overline{F}_2\left\{2(\xi^2+\eta^2)^{-1}\right.$$

$$\left.+\frac{\eta}{2(1-\nu)}D_\eta(\xi^2+\eta^2)^{-1}\right\} \qquad (5.8.14)$$

为了推导出u和v，我们应用卷积定理（5.7.6）。为了找到(5.8.13)和(5.8.14)右端带括号的项的变换，我们利用结果(例5.7.9)

$$F_{(x)}^{*}[\mathrm{i}\xi(\xi^2+\eta^2)^{-1};(\xi,\eta)\to(x,y)]=x(x^2+y^2)^{-1} \qquad (5.8.15)$$

再与(5.8.8)联合，这就形式地给出

$$F_{(x)}^{*}[(\xi^2+\eta^2)^{-1};(\xi,\eta)\to(x,y)]=-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) \qquad (5.8.16)$$

类似地

$$F_{(2)}^{*}[\xi D_\xi(\xi^2+\eta^2)^{-1}] = iD_x F^*[D_\xi(\xi^2+\eta^2)^{-1}]$$

$$= -D_x[xF_{(2)}^{*}(\xi^2+\eta^2)^{-1}] = \frac{1}{2}D_x[x\ln(x^2+y^2)]$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + x^2(x^2+y^2)^{-1} \qquad (5.8.17)$$

所以最后的结果是

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{K_{11}(x-t,y-t')F_x(t,t') + K_{12}(x-t,y-t')F_y(t,t')\}dtdt' \qquad (5.8.18)$$

$$v(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{K_{21}(x-t,y-t')F_x(t,t') + K_{22}(x-t,y-t')F_y(t,t')\}dtdt' \qquad (5.8.19)$$

其中

$$K_{12}(x,y) = K_{21}(x,y), \qquad r^2 = x^2+y^2$$

以及

$$-8\pi\mu(1-\nu)K_{11}(x,y) = (3-4\nu)\ln r + y^2r^{-1} \qquad (5.8.20)$$

$$-8\pi\mu(1-\nu)K_{12}(x,y) = -xyr^{-2} \qquad (5.8.21)$$

$$-8\pi\mu(1-\nu)K_{22}(x,y) = (3-4\nu)\ln r + x^2r^{-2} \qquad (5.8.22)$$

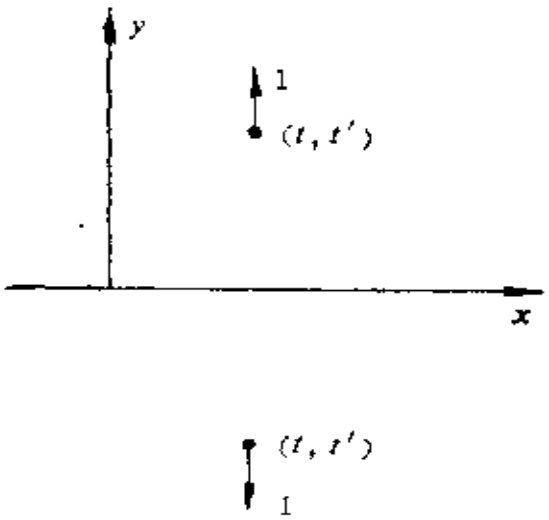


图5.8.1 不受应力的x轴的映相分布

这一问题所对应的应力分布，出现在Love(1927)的著作中，那里是用 Airy 应力函数得出的；位移则由积分得到。

方程(5.8.20)和(5.8.21)可用于由内力产生的上半平面中的位移，该半平面的边界是自由的，或者受到刚性支撑。在头一种情形，首先考虑在(t,t')处沿y方向受到一个单位集中力的作用。对应于(t,t')处及象点$(t,-t')$处的集中力，分别

为±1，如图5.8.1所示，在全xy平面上的解为

$$u(x,y)=K_{12}(x-t,y-t')-K_{12}(x-t,y+t') \quad (5.8.23)$$

$$v(x,y)=K_{22}(x-t,y-t')-K_{22}(x-t,y+t') \quad (5.8.24)$$

对称性的考虑，表明，这些位移满足条件

$$\frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}\equiv 0,\quad \text{在}y=0\text{上}$$

所以$\tau_{xy}(x,0)\equiv 0$；对应于这些位移的法向应力为

$$2\pi(1-\nu)\tau_{yy}(x,0)=t'[(1-2\nu)r^{-2}+2t'^2r^{-4}] \quad (5.8.25)$$

其中$r^2=(x-t)^2+t'^2$。为了保持$y=0$处自由棱边的条件，在上半平面的边界$y=0$处必须作用一个等值而反号的法向应力，即

$$\tau_{yy}(x,0)=-p(x)$$

其中

$$2\pi(1-\nu)p(x)=-t'[(1-2\nu)r^{-2}+2t'^2r^{-4}] \quad (5.8.26)$$

由这个法向应力产生的上半平面中的位移，可以由§5.4的公式去计算。因为$p(x)$是$(x-t)$的偶函数，例5.2.3与例5.2.5给出

$$4(1-\nu)P(\xi)=(2/\pi)^{1/2}\{2(1-\nu)+t'|\xi|\exp(it\xi-t'|\xi|)\} \quad (5.8.27)$$

方程(5.4.10)给出了对应于这一压力的位移；作反变换之后，我们求得总的位移，亦即由两个集中载荷和压力(5.8.26)所产生的那些位移，为

$$u(x,y)=K^*_{12}(x-t,y,t'),\quad v(x,y)=K^*_{22}(x-t,y,t') \quad (5.8.28)$$

其中

$$r_1^2=(x-t)^2+(y-t')^2,\quad r_2^2=(x-t)^2+(y+t')^2$$

$$8\pi\mu(1-\nu)K^*_{12}(x,y,t')=x(y-t')r_1^{-2}-x(y+t')r_2^{-2}$$
$$+4xyt'(y+t')r_2^{-4}-4(1-\nu)(1-2\nu)\operatorname{arctg}[x/(t'+y)]$$
$$+2[2(1-\nu)y-(1-2\nu)t']xr_2^{-2} \quad (5.8.29)$$

$$8\pi\mu(1-\nu)K^*_{22}(x,y,t')=-(3-4\nu)\ln(r_1/r_2)$$
$$-8(1-\nu)^2\ln r_2-x^2r_1^{-2}+x^2r_2^{-2}+4(1-\nu)(t'+y)^2r_2^{-2}$$

$$+2t'y[2(t'+y)^2r_2^{-4}-r_2^{-2}] \qquad (5.8.30)$$

注意，K_{12}^*的导数包含一个发散的积分，如§5.4末尾所讨论过的。因此K_{12}^*必须是由v的导数从形式上积分得到的。

可以类似地证明（例5.8.1），由作用在上半平面的上点(t,t')的单位水平力引起位移$u(x,y)$，是$K_{11}^*(x-t,y,t')$，其中

$$8\pi\mu(1-\nu)K_{11}^*(xy,t') = -(3-4\nu)\ln(r_1r_2) - y^2r_1^{-2}$$
$$-y^2r_2^{-2}+4\{(1-2\nu)^2\ln r_2-(1-2\nu)(t'+y)r_2^{-2}$$
$$+t'y[2(t'+y)^2r_2^{-4}-r_2^{-2}]\} \qquad (5.8.31)$$

Betti互易定理导出相应的位移$v(x,y)$，是$K_{21}^*(x-t,y,t')$，其中

$$K_{21}^*(x-t,y,t') = K_{12}^*(t-x,t',y) \qquad (5.8.32)$$

这个问题最先为Riedel(1927)所研究，但他的解不正确。Melan(1932a)从无限板中点力的已知Airy应力函数出发。当点力垂直作用于边界时，他附加一些解，它们对应于相等（不是等值而反号）的作用在(t,t')与$(t,-t')$处的两个力的解；这提供了使得$\tau_{yy}(x,0)=0$和$\tau_{xy}(x,0)\neq 0$的一个解。然后他运用有名的对应于$y=0$处给定着剪应力的Airy应力函数，得到了半平面中的完整的应力分布。当力是平行于边界时，他采用了类似的技巧。Sneddon(1944)，(1951)利用图5.8.1所示的映相系统和Airy应力函数的Fourier变换，以消除法向应力。对应力和应变的关系式进行积分，他得到了位移。Frasier与Rongved(1957)得到了不同弹性性质的两个半平面中的应力分布，此二半平面在$y=0$直线上连接起来，此时，一个集中的平面载荷作用在一个半平面内。

例5.8

1.证明，由作用在点(t,t')和点$(t,-t')$的两个相等的水平单位力引起的法向应力$\tau_{yy}(x,0)=-p(x)$，为$2\pi(1-\nu)p(x)=\{(1-2\nu)r^{-2}-2t'^2r^{-4}\}\times(x-t)$，并且在$y=0$处，剪应力为零。相等而反号的压力$\tau_{yy}(x,0)=-p(x)$作用于上半平面时，利用例5.2.3与例5.2.5，找出它的变换，由此找出

(t,t') 处的单位水平载荷在$y\geqslant 0$上引起的位移$u(x,y)$和$v(x,y)$，假定边界$y=0$不受力。

2．假定力$F_x(x,y)$在y轴上是一线载荷，这样，$F_x(x,y)=s(x)\delta(y)$。证明，$\overline{F_1}(\xi,y)=(2\pi)^{-1/2}S(\xi)$，其中$S(\xi)=F[s(x);\xi]$。把$F^*_{(\eta)}[U(\xi,\eta),(x,y)]$对$\eta$进行积分，以证明

$$8\mu(1-\nu)u(x,y)=F^*[|\xi|^{-1}(3-4\nu-|\xi|y)S(\xi)\exp(-|\xi|y);x]$$

再证明

$$8\mu(1-\nu)v(x,y)=|y|F^*[i\,\mathrm{sign}(\xi)S(\xi)\exp(-|\xi y|);x]$$

并且比较这些结果与例5.4.1的结果。

第六章　接触问题的积分方程

6.1　引　　言

这一章提供平面接触问题理论的一个发展，它根据前一章的积分变换而不是根据第三章的复变函数理论。在适当的情形下将表明，积分变换与复变函数方法两者导致一致的方程。包含有限摩擦——既不是无摩擦也不是完全粘着接触——的问题和条带问题而不是半平面问题，是很难用复变函数方法求解的。可以用积分方程推导这些问题的公式，这里介绍了这些方程的某些理论，也讨论了求解它们的数值方法。

在这里注解专门术语是适宜的。若在接触区不存在表面切向应力，则称这两个物体处于无摩擦的接触。在两个物体处于无摩擦接触时，可能发生两种情形。在第一种情形中，用一平底刚性压头压入弹性半空间作为例子，这整个底面将与半空间接触，在接触区的边界点上，接触压力具有（平方根）奇异性。这样一种接触，叫做完全接触；其他作者，包括我本人，有时称为“有界的”接触。在第二种情形中，用一个凸出的底曲面的压头压入半空间，接触区的大小取决于把这两个物体挤压在一块儿的力。在这种情形中，在接触区边界点上的接触压力将等于零。这种接触称为不完全接触。其他人，包括我自己(Gladwell, 1976)，有时称它为“无界的”接触。当两个物体无摩擦地接触时，一般来说，在接触区中，两个物体之间存在切向滑移。当这种滑移被完全限制住时，这种接触叫做粘着，对于这一情形，“有界”一词有时也用到。

对于“条带”与“枕垫”这两个词，也必须区分。前者用于

平面弹性问题，后者用于三维问题。

6.2 半平面的积分方程

第五章的结果得出了对于半平面的平面应变问题的一些变换公式和解。

一个刚性压头压入弹性半平面$[-a,a]$上，得到的基本的平面应变无摩擦接触问题，可以用边界条件

$$v(x,0)=f(x)+d,\quad |x|<a \tag{6.2.1}$$

$$\tau_{xy}(x,0)=0,\text{对所有}x;\quad \tau_{yy}(x,0),\quad |x|>a \tag{6.2.2}$$

加以描述，其中$f(x)$是压头的外形，d是一个任意常数。§4.10的分析表明，两个弹性体的接触问题，可以近似作为半平面的接触问题，也导致(6.2.1)和(6.2.2)的同类方程。如果半平面中的位移场，可以在无穷远处无旋转的一类位移中去寻找，亦即有

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1}|u(x,y)+iv(x,y)|=0 \tag{6.2.3}$$

而且应力在$(\pm a,0)$区间具有可积的奇异性，那么，能够证明，不考虑一个任意转动，则解是唯一的。为了排除d引起的复杂性，我们可以用一种替换形式表示边界条件，即

$$v_x(x,0)=f'(x),\quad |x|<a \tag{6.2.4}$$

表达式(5.4.3)和(5.4.5)给出

$$v(x,0)\equiv\vartheta F^*[|\xi|^{-1}P(\xi);\ x]=f(x)+d,\ |x|<a \tag{6.2.5}$$

$$\tau_{yy}(x,0)\equiv -F^*[P(\xi);\ x]=-p(x)H(a-|x|) \tag{6.2.6}$$

所以边界条件(6.2.1)和(6.2.2)导致一对对偶积分方程

$$\vartheta F^*[-i\,\mathrm{sign}(\xi)P(\xi);\ x]=f'(x),\ |x|<a \tag{6.2.7}$$

$$F^*[P(\xi);\ x]=0,\ |x|>a \tag{6.2.8}$$

§5.5的分析表明，这些方程可以写成Cauchy积分方程的形成

$$\vartheta h[f(t);x]\equiv\frac{\vartheta}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(t)\mathrm{d}t}{t-x}=f'(x),\ |x|<a \tag{6.2.9}$$

方程（5.5.14）给出这个方程的反演，亦即

$$\vartheta p(x) = \frac{(a^2-x^2)^{-1/2}}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-t^2)^{1/2}f'(t)\mathrm{d}t}{t-x} + C(a^2-x^2)^{-1/2} \tag{6.2.10}$$

当接触是完全的，那么$p(x)$在$x=\pm a$处具有平方根奇异性．当接触是不完全的，则在$x=\pm a$处$p(x)$为零，那么

$$\vartheta p(x) = \frac{(a^2-x^2)^{1/2}}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-t^2)^{-1/2}f'(t)\mathrm{d}t}{t-x} \tag{6.2.11}$$

其前提是$f'(t)$满足条件

$$\int_{-a}^{a}(a^2-t^2)^{-1/2}f'(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{6.2.12}$$

在§2.3中介绍的Chebyshev多项式对应于方程（6.2.9）的两个特解

$$\vartheta p(x) = a_n a(a^2-x^2)^{-1/2}T_n(x/a), f'(x) = a_n U_{n-1}(x/a) \tag{6.2.13}$$

$$\vartheta p(x) = -a_n a^{-1}(a^2-x^2)^{1/2}U_{n-1}(x/a), f'(x) = a_n T_n(x/a) \tag{6.2.14}$$

（6.2.10）中的项$C(a^2-x^2)^{-1/2}$，对应于(6.2.13)在$n=0$时的情形，因为$U_{-1}\equiv 0$．不完全接触问题的条件（6.2.12），对应于（6.2.14）中的条件$a_0=0$．在§2.3中表明对应于这些解的位移的导数$v_x(x,0)$，对于$|x|>a$，可以用函数R_n与G_{n-1}表示；x轴外的位移与应力由§2.4得到．

方程（6.2.1）和（6.2.2）的另外一个解，可以由方程（2.1.19）或（5.4.19）中的影响函数G_{22}得到．这样，边界条件将得到满足，若

$$\int_{-a}^{a}G_{22}(x-x',0)\,p(x')\mathrm{d}x' = f(x)+d,\ |x|<a \tag{6.2.15}$$

并且例(2.1.4)表明，这个方程可以写成

$$-\frac{\vartheta}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln|x-x'|\,p(x')\,dx'=f(x)+d \qquad (6.2.16)$$

这个方程是例2.3.8的题目，它具有解

$$\vartheta p(x)=a_n a(a^2-x^2)^{-1/2}T_n(x/a),$$

$$f(x)=\begin{cases}a_n a n^{-1}T_n(x/a), & n\neq 0\\ a_0 a\ln 2, & n=0\end{cases} \qquad (6.2.17)$$

具有这个类型的多项式解的积分方程，由Popov(1969)命名为“具有π核的积分方程”，并且在§6.11中将进一步讨论它.

方程(6.2.1)和(6.2.2)的第三种建立方法，是使用Hankel变换，为此，把$f(x)$分成偶函数或奇函数分别考虑，是方便的（任意一个$f(x)$可以写成一个偶函数与一个奇函数的和）. 在前一种情形中，方程(6.2.5)和(6.2.6)可以写成

$$v(x,0)=\vartheta F_c[\xi^{-1}P(\xi);x]=f(x)+d,\ 0<x<a \qquad (6.2.18)$$

$$\tau_{xy}(x,0)=-F_c[P(\xi);x]=-p(x)H(a-x) \qquad (6.2.19)$$

以无量纲变量的形式，这些方程变成

$$F_c[\xi^{-1}A(\xi);x]=f(x)+c, \quad 0<x<1 \qquad (6.2.20)$$

$$F_c[A(\xi);x]=0, \quad x>1 \qquad (6.2.21)$$

这些方程是方程

$$H_c[\xi\alpha A(\xi);x]=f(x), \quad 0<x<1 \qquad (6.2.22)$$

$$H_c[A(\xi);x]=g(x), \quad x>1 \qquad (6.2.23)$$

的特殊情形（见例5.7.3），这些方程得到了广泛的研究（见§10.2）. 方程（6.2.20）和（6.2.21）可以这样求解，首先把方程（6.2.20）改写成

$$F_c[\xi^{-1}A(\xi);x-0]=f(x)-f(0),\ 0<x<1 \qquad (6.2.24)$$

把它的左端记为

$$(2/\pi)^{1/2}\int_0^\infty \xi^{-1}(\cos\xi x-1)A(\xi)\,d\xi$$

这一表示的优点是，消除了任意常数，也消除了被积函数在$\xi=0$

潜在的奇异性. 为了解方程 (6.2.21) 和(6.2.24)，我们首先注意到$f(x)=0$时齐次方程具有通解 $A(\xi)=CJ_0(\xi)$，其中C是一任意常数 (例6.2.1). 分别以表5.7.2的通道(4)和(6)为算子，作用在方程(6.2.24)和(6.2.21)上而求得特解. 这给出

$$H_1[\xi^{-1}A(\xi);x]=-A_1^{-1}[t^{-1}f(t);x],\quad 0<x<1 \tag{6.2.25}$$

$$H_1[\xi^{-1}A(\xi);x]=0,\quad x>1 \tag{6.2.26}$$

注意，算子(4)是作用在范围$(0,x)$上的内算子，而(6)是作用在(x,∞)上的外算子.对于方程(6.2.25)和(6.2.26)能够用H_1的反演求解，并且当与通解相联合时，便给出

$$A(\xi)=C_1J_0(\xi)-\xi H_1\{A_1^{-1}[t^{-1}f(t);x]H(1-x);\xi\} \tag{6.2.27}$$

它可以重新安排一下，写成

$$A(\xi)=(2/\pi)^{1/2}\Big[CJ_0(\xi)-\xi J_1(\xi)\int_0^1(1-t^2)^{-1/2}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$+\xi^2\int_0^1(1-t^2)^{-1/2}\mathrm{d}t\int_0^1 xf(xt)J_0(\xi x)\,\mathrm{d}x\Big] \tag{6.2.28}$$

恢复到有量纲变量时，解为

$$P(\xi)=(2/\pi)^{1/2}\Big\{CJ_0(a\xi)-a\xi J_1(a\xi)\int_0^a(a^2-t^2)^{-1/2}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$+\xi^2\int_0^1(1-t^2)^{-1/2}\mathrm{d}t\int_0^a xf(xt)J_0(\xi x)\,\mathrm{d}x\Big\} \tag{6.2.29}$$

作为第一个例子，考虑一个平底刚性压头的法向压挤. 这里$f(t)=0$,所以$\vartheta P(\xi)=(2/\pi)^{1/2}CJ_0(a\xi)$.接触压力为

$$\vartheta p(x)=\vartheta F_c[P(\xi);x]=(2/\pi)c(a^2-x^2)^{-1/2},\quad 0<x<a \tag{6.2.30}$$

所以总的接触力是 $P_0=\vartheta^{-1}C$.接触区外的位移$v(x,0)-v(0,0)$为

$$v(x,0)-v(0,0)=(2/\pi)\vartheta P_0\int_0^\infty\xi^{-1}[\cos(\xi x)-1]J_0(c\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$= (2/\pi)\vartheta P_0\{1-\cosh^{-1}(x/a)\}, \qquad x>a \qquad (6.2.31)$$

这与例2.2.2相一致.

现在研究图6.2.1表示的刚性楔子的压挤. 这里 $f(x)=-\varepsilon x/a$, 所以经过某些处理之后我们求得

$$\vartheta P(\xi) = (2/\pi)^{1/2}\left[CJ_0(a\xi) - \varepsilon J_0(a\xi) + (\varepsilon/a)\int_0^a J_0(\xi x)\,dx\right] \qquad (6.2.32)$$

于是

$$\vartheta p(x) = (2/\pi)\{(C-\varepsilon)(a^2-x^2)^{-1/2} + (\varepsilon/a)\operatorname{arcosh}(a/x)\}, \qquad 0<x<a \qquad (6.2.33)$$

若接触是不完全的, 在$x=\pm a$处没有奇异性, 那么$C=\varepsilon$;注意, $p(x)$在$x=0$处仍有对数奇异性, 接触区外的法向位移求得为

$$v'(x,0) = -\{2\varepsilon/(\pi a)\}\arcsin(a/x) \qquad (6.2.34)$$

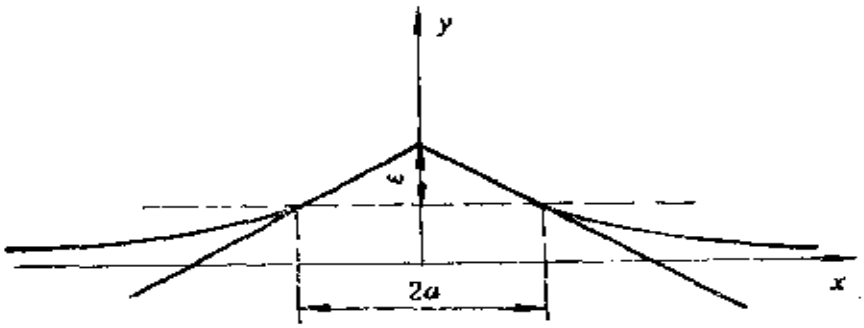


图6.2.1 刚性楔子对半平面的压挤

为了得到在§4.6中研究的粘着接触问题的一个替换的求解方式, 我们考虑这样一种情形, 其中在$|x|<a$范围内的两个表面位移是给定了的,而在$|x|>a$范围的两个应力等于零, 亦即

$$u(x,0) = f_1(x) + d_1, \quad v(x,0) = f_2(x) + d_2, \qquad |x|<a \qquad (6.2.35)$$

$$\tau_{xy}(x,0) = 0 = \tau_{yy}(x,0), \qquad |x|>a \qquad (6.2.36)$$

§5.4的分析表明, 这些条件导致两对对偶积分方程

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \vartheta F^*\{|\xi|^{-1}\{S(\xi)-\mathrm{i}\varphi\,\mathrm{sign}(\xi)P(\xi);x\}\\ &= f_1(x)+d_1, \qquad |x|<a\\ v(x,0) &= \vartheta F^*\{|\xi|^{-1}\{P(\xi)+\mathrm{i}\varphi\,\mathrm{sign}(\xi)S(\xi);x\}\\ &= f_2(x)+d_2, \qquad |x|<a \end{aligned}\right\} \tag{6.2.37}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy}(x,0) &= -F^*\{S(\xi);x\} = -s(x)H(a-|x|)\\ \tau_{yy}(x,0) &= -F^*\{P(\xi);x\} = -p(x)H(a-|x|) \end{aligned}\right\} \tag{6.2.38}$$

这些位移与应力可以写成一个复数对

$$D(x,0)\equiv \mathrm{i}\vartheta F^*\{|\xi|^{-1}\{1-\varphi\,\mathrm{sign}(\xi)\}Q(\xi);x\}$$
$$= f(x)+d, \qquad |x|<a \tag{6.2.39}$$

$$\tau_{yy}(x,0)-\mathrm{i}\tau_{xy}(x,0)\equiv F^*\{Q(\xi);x\}$$
$$= q(x)H(a-|x|) \tag{6.2.40}$$

其中$q(x)=-p(x)+\mathrm{i}s(x)$，$Q(\xi)=-P(\xi)+\mathrm{i}S(\xi)$，$f(x)=f_1(x)+\mathrm{i}f_2(x)$ $(\mathrm{i}=\sqrt{-1})$，等等。对于这些方程最好的求解办法，是把位移条件以导数的形式写出来。那么

$$D'(x,0)=\vartheta F^*\{(-\mathrm{sign}(\xi)+\varphi)Q(\xi);x\}=f'(x),$$
$$|x|<a \tag{6.2.41}$$

$$F^*\{Q(\xi);x\}=q(x)H(a-|x|) \tag{6.2.42}$$

并且§5.3的分析表明，方程(6.2.41)可以写成

$$\vartheta\left\{\varphi q(x)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{q(t)\mathrm{d}t}{t-x}\right\}=f'(x) \tag{6.2.43}$$

这个方程与(3.5.1)是同类型的，它可以用Plemelj公式求解，如同在§4.6中求解粘着接触问题一样。事实上，记

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{q(t)\mathrm{d}t}{t-z} \tag{6.2.44}$$

我们立即发现方程(6.2.43)等价于

$$\kappa\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=2\mu f'(x) \tag{6.2.45}$$

而

$$\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=q(x) \tag{6.2.46}$$

这些方程曾在前面由式(4.6.4)和(4.6.5)得到过。应该强调一下，除去对于平底压头之外——对于这种压头，$f'(x)$是已知的，

等于零——必须在问题求解之前首先把$f'(x)$求出来，在§4.6中，对于一种特殊情形，就得到了关于$f'(x)$的相似性推理。

例6.2

1.证明，$F_c[\xi^{-1}J_0(\xi);x]=0,0<x<1$，以及$F_c[J_0(\xi);x]=0,x>1$。

2. 由（6.2.32）中的$P(\xi)$的表达式推导接触面积外的位移导数（6.2.34）。

6.3 平面条带的积分方程

§5.4的分析的根据是Papkovich-Neuber解，以及在上半平面$y\geqslant 0$调和的某些简单变换的使用。对于平面条带$0\leqslant y\leqslant h$，基本调和函数是

$$\exp\xi(y-ix),\quad \exp\xi(-y-ix)$$

函数$\phi(x,y)$在$0\leqslant y\leqslant h$中是调和的，满足条件

$$\phi(x,0)=f(x),\qquad \phi(x,h)=0,\ -\infty<x<\infty \tag{6.3.1}$$

可以把$\phi(x,y)$假设成下面的形式

$$\phi(x,y)=F^*[A(\xi)\exp(-\xi y)+B(\xi)\exp(\xi y);\xi\to x] \tag{6.3.2}$$

条件（6.3.1）隐含着

$$A(\xi)\exp(-\xi h)+B(\xi)\exp(\xi h)=0$$

$$F^*[A(\xi)+B(\xi);x]=f(x)$$

这导致

$$B(\xi)=-A(\xi)\exp(-2\xi h)$$

$$A(\xi)=F(\xi)\exp(3h)/[2\sinh(\xi h)]$$

以及

$$\phi(x,y)=F^*[F(\xi)\sinh\xi(h-y)/\sinh(\xi h);\xi\to x] \tag{6.3.3}$$

这里，和通常一样，$F(\xi)=F[f(x);\xi]$。

现在把这一方法应用于这样一个问题，即一个或多个摩擦压

头压挤条带的一个平面，而条带的另外一个平面则受到一个无摩擦的刚性地基的支承。边界条件为

$$\tau_{xy}(x,0)=0=\tau_{xy}(x,h),v(x,h)=0,\ -\infty<x<\infty \tag{6.3.4}$$

$$v(x,0)=f(x),x在L'中;\tau_{yy}(x,0)=0,x在L''中 \tag{6.3.5}$$

这里L'表示接触区，L''为x轴上的其余部分。此外，让

$$\tau_{yy}(x,0)=-p(x),\ x在L'中 \tag{6.3.6}$$

作为Papkovich-Neuber势函数，取$\psi_1=0=\psi_3$,以及

$$\psi_2(x,y)=F^*[\xi^{-1}\{A(\xi)\exp(-\xi y)+B(\xi)\exp(\xi y)\};\ \xi\to x] \tag{6.3.7}$$

$$\phi(x,y)=F^*[\xi^{-2}\{C(\xi)\exp(-\xi y)+D(\xi)\exp(\xi y)\};\ \xi\to x] \tag{6.3.8}$$

这些公式导致位移与应力

$$u(x,y)=F^*[U(\xi,y);\xi\to x],$$

$$v(x,y)=F^*[V(\xi,y);\xi\to x] \tag{6.3.9}$$

$$\tau_{xx}(x,y)=F^*[T_{11}(\xi,y);\xi\to x], \tag{6.3.10}$$

$$\tau_{xy}(x,y)=F^*[T_{12}(\xi,y);\xi\to x]$$

$$\tau_{yy}(x,y)=F^*[T_{22}(\xi,y);\xi\to x] \tag{6.3.11}$$

其中U，V，…，T_{22}的矩阵形式是

$$\begin{pmatrix}2\mu U\\2\mu V\\-T_{11}\\-T_{12}\\-T_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\xi^{-1}(\xi yA+C)\\\xi^{-1}\{(3-4\nu)A+\xi yA+C\}\\2\nu A-\xi yA-C\\i\{(1-2\nu)A+\xi yA+C\}\\2(1-\nu)A+\xi yA+C\end{pmatrix}\exp(-\xi y)+\begin{pmatrix}i\xi(\xi yB+D)\\\xi^{-1}\{(3-4\nu)B-\xi yB-D\}\\-2\nu B-\xi yB-D\\i\{(1-2\nu)B-\xi yB-D\}\\-2(1-\nu)B+\xi yB+D\end{pmatrix}\exp(\xi y) \tag{6.3.12}$$

在满足条件（6.3.4）之后，我们得到

$$\tau_{yy}(x,0)=F^*[\exp\omega(2\omega+\sinh 2\omega)B(\xi)/\sinh\omega;\xi\to x] \tag{6.3.13}$$

$$2\mu v(x,0)=-4(1-\nu)F^*[\xi^{-1}\exp\omega\sinh\omega B(\xi);\xi\to x] \tag{6.3.14}$$

其中$\omega=h\xi$.现在必须选取$B(\xi)$使条件（6.3.5）得到满足．这样

$$\tau_{yy}(x,0)\equiv -F^*[P(\xi);x]=0,x在L''中 \tag{6.3.15}$$

$$v(x,0)\equiv\vartheta F^*[\xi^{-1}\{2\sinh^2\omega/(2\omega+\sinh 2\omega)\}P(\xi);x]$$
$$=f(x),x在L'中 \tag{6.3.16}$$

对应于某些在$y=h$处的其他边界条件组，亦即，对应于条带固定在刚性基础上的方程组，与方程（6.3.15）和（6.3.16）的不同处仅仅在方程（6.3.16）的核函数改变了（例6.3.2）．在推导近似解之前，把这些方程化成一个一般的形式是方便的．（应用Muskhelishvili型的复势分析平面条带，由Belen'kii（Беленький）(1952)推导的；它还没有被普遍接受．）

让a作为一个标准长度，P_0是一个力，引进无量纲量

$$\xi=x/a,\xi=a\xi \tag{6.3.17}$$

$$\Phi(s)=P_0^{-1}P(\xi),\phi(\xi)=aP_0^{-1}p(x),\chi(\xi)=(\vartheta P_0)^{-1}f(x) \tag{6.3.18}$$

其中$p(x)=F^*[P(\xi);x]$.那么这些方程可以写成这样的形式

$$aP_0^{-1}\tau_{yy}(x,0)\equiv -F^*[\Phi(s);\xi]=0,\xi在\underline{L}''中 \tag{6.3.19}$$

$$(\vartheta P_0)^{-1}v(x,0)\equiv F^*[s^{-1}\mathrm{sign}(s)\{1+N(s)\}\Phi(s);\xi]=\chi(\xi)$$
$$\xi在\underline{L}'中 \tag{6.3.20}$$

其中$\underline{L}'$和$\underline{L}''$对应于L'和L''的无量纲量，并且对于方程(6.3.16)，有条件

$$\mathrm{sign}(s)\{1+N(s)\}=2\sinh^2\omega/(2\omega+\sinh 2\omega) \tag{6.3.21}$$

通常$N(s)$是一个偶函数，当$s\to\infty,N(s)\to 0$.

当只有一个压头时，则下面两个条件是等价的

$$v(x,0)=f(x),x在L'中;v(x,0)=f'(x),x在L'中 \tag{6.3.22}$$

(其前提是，$f(x)$是可微分的)，方程 (6.3.20) 为下式代替

$$(2\pi\beta P_0)^{-1}av_x(x,0)\equiv -iF^*[\mathrm{sign}(s)\{1+N(s)\}\Phi(s);\xi]$$
$$=\chi'(\xi),\xi在\underline{L''}中 \tag{6.3.23}$$

现在我们以三种形式把方程对式(6.3.19) 和 (6.3.20)，或 (6.3.19) 和 (6.3.23) 式化成一个单一的积分方程，假若接触区$\underline{L'}$是$[-1,1]$的话. 首先，写

$$F^*[\Phi(s);\xi]=\phi(\xi)H[1-|\xi|] \tag{6.3.24}$$

那么方程 (5.5.6) 表明，(6.3.23)的第一个积分可以写成 Hilbert 变换，第二部分可以用卷积定理 (5.3.1) 重写.这样

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi(\tau)\left\{\frac{1}{\tau-\xi}+k(\xi,\tau)\right\}d\tau=\chi'(\xi),\ |\xi|<1 \tag{6.3.25}$$

其中

$$k(\xi,\tau)=\int_0^\infty N(s)\mathrm{sign}(\tau-\xi)ds \tag{6.3.26}$$

因为$k(\xi,\tau)$处处都是有限的，这个方程的解的性质由奇异项所控制，因此$\phi(\tau)$将在一般情形下在±1处具有平方根的奇异性. 把包含$k(\xi,\tau)$的项移到右端，利用Hilbert反演，方程 (6.3.25) 可以化成非奇异的. 记$\phi(\tau)=(1-\tau^2)^{-1/2}\theta(\tau)$，我们得到

$$\theta(\tau)+\int_{-1}^{1}M(\tau,\xi)\theta(\xi)d\xi=w(\tau) \tag{6.3.27}$$

其中

$$M(\tau,\xi)=\frac{(1-\xi^2)^{-1/2}}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{(1-s^2)^{1/2}k(s,\xi)}{s-\tau}ds \tag{6.3.28}$$

$$w(\tau)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)^{1/2}\chi'(\xi)}{\xi-\tau}d\xi \tag{6.3.29}$$

象 (6.3.27)式的称为第二类Fredholm 积分方程的这种方程的解，在§6.4中有简短的讨论.

上面概要叙述的方法的缺点是，在处理位移导数时，不能直接导出压头压入长条的实际大小．这个压入量能够由方程（6.3.20）直接解出来，现在将介绍这一解法．首先注意到（6.3.20）的核是$\omega = h\xi = \gamma s$的函数，其中$\gamma = h/a$．于是，按照 V.M.Aleksandrov(1962)的办法，我们注意到，方程（6.3.20）可以写成

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} K\left(\frac{\xi-\tau}{\gamma}\right)\phi(\tau)\mathrm{d}\tau = \chi(\xi) \qquad (6.3.30)$$

$$K(k) = \int_0^\infty \frac{2\sinh^2\omega\cos k\omega\,\mathrm{d}\omega}{\omega(2\omega+\sinh 2\omega)} \qquad (6.3.31)$$

对于大的γ，亦即条带的高度大于接触区的长度的情形，为了求解方程(6.3.30)，我们注意到，$K(k)$对于小的k具有对数奇异性．为了孤立这个奇异性，我们写

$$C(k) = \int_0^\infty \omega^{-1}[1-\exp(-q\omega)]\cos k\omega\,\mathrm{d}\omega$$
$$= -\ln|k| + \ln(q^2+k^2)^{1/2}, q>0 \qquad (6.3.32)$$

$K(k)$对于小的k的行为，由通过形式$2\sinh^2\omega/(2\omega+\sinh 2\omega) = 1-4\omega\exp(-2\omega)$，为大的$\omega$所控制．这样

$$K(k) = -\ln|k| + \ln(q^2+k^2)^{1/2}$$
$$+\int_0^\infty \omega^{-1}\left\{\frac{2\sinh^2\omega}{2\omega+\sinh 2\omega} - 1 + \exp(-q\omega)\right\}\cos k\omega\,\mathrm{d}\omega \qquad (6.3.33)$$

因为被积函数呈指数地减小，所以Fourier余弦变换($q=2$)容易计算出来，方程（6.3.33）可以写成

$$K(k) = -\ln|k| + F(k) \qquad (6.3.34)$$

因而方程（6.3.30）为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{-\ln\left|\frac{\xi-\tau}{\gamma}\right| + F\left(\frac{\xi-\tau}{\gamma}\right)\right\}\phi(\tau)\mathrm{d}\tau = \chi(\xi), |\xi| \leqslant 1 \qquad (6.3.35)$$

V·M·Aleksandrov(1962)遵循Steuermann(1949)的方式，已经表明这个奇异积分方程的主部，即令$F\equiv 0$时的情形，可以作反

演（例6.3.3），至于方程(6.3.35)如何化成非奇异积分方程，其进一步的研究，可参考§6.5.

解方程（6.3.19）和（6.3.23）的第三种方法是，利用表5.7.2中的算子．区分接触为对称与反对称是方便的，前者$\phi(\xi)$和$\chi(\xi)$为ξ的偶函数，后者$\phi(\xi)$和$\chi(\xi)$为ξ的奇函数．对于前者，方程（6.3.19）和（6.3.25）可以写成

$$a(\vartheta P_0)^{-1}v_x(x,0) = -F_e[\{1+N(s)\}\Phi(s);\xi] = \chi'(\xi),$$
$$0\leqslant\xi\leqslant 1 \tag{6.3.36}$$

$$aP_0^{-1}\tau_{yy}(x,0) = -F_e[\Phi(s);\xi] = -\phi(\xi)H(1-\xi),\xi\geqslant 0 \tag{6.3.37}$$

以表5.7.2中的通道（7）对（6.3.37）作运算，得到

$$\tau H_0[\Phi(s);\tau] = \psi(\tau) \tag{6.3.38}$$

其中

$$\psi(\tau) = A_2^{-1}\{\phi(\xi);\tau\} \tag{6.3.39}$$

若$x>1$，$\psi(\tau)$等于零．方程（6.3.38）可以反演成

$$\Phi(s) = \int_0^1 \psi(\tau)J_0(\tau s)\mathrm{d}\tau \tag{6.3.40}$$

而（6.3.39）给出

$$\Phi(\xi) = A_2[\psi(\tau);\xi] = (2/\pi)^{1/2}\int_\xi^1 (\tau^2-\xi^2)^{-1/2}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.3.41}$$

这里$0\leqslant\xi<1$．现在以表5.7.2中的通道（3）作用于（6.3.36），得到

$$\psi(t) + tH_0\{N(s)\Phi(s);\tau\} = -A_1^{-1}\{\chi'(\xi);t\} \tag{6.3.42}$$

但是

$$tH_0\{N(s)\Phi(s);t\} = \int_0^\infty tsN(s)J_0(ts)\left\{\int_0^1 \psi(\tau)J_0(\tau s)\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}s$$
$$= \int_0^1 H(t,\tau)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.3.43}$$

其中

$$H(t,\tau)=\int_0^\infty tsN(s)J_0(ts)J_0(\tau s)\mathrm{d}s \qquad (6.3.44)$$

这样

$$\psi(t)+\int_1^1 H(t,\tau)\psi(\tau)\mathrm{d}\tau=\theta(t),\ 0\leqslant t<1 \qquad (6.3.45)$$

其中

$$\theta(t)=-A_1^{-1}\{\chi'(\xi);t\} \qquad (6.3.46)$$

这个方程是等价于(6.3.37)的另外一个Fredholm第二类积分方程，在ϕ和χ的偶函数的条件下。

对于刚性地基上的各向异性条带，见Lekhnitskii(1963a)，Milovic和Touzot(1970)的工作，其中引用了另外一些文献。

例6.3

1. 推导方程 (6.3.12) ～ (6.3.14)。

2. 证明，条带与平面$y=h$刚性地相接触，其边界条件为

$$u(x,h)=0=v(x,h) \qquad -\infty<x<\infty$$

$$\tau_{xy}(x,0)=0,\tau_{yy}(x,0)=-p(x)$$

则

$$v(x,0)=\vartheta F^*\left[\xi^{-1}\left\{\frac{2\kappa\sinh 2\omega-4\omega}{1+\kappa^2+4\omega^2+2\kappa\cosh 2\omega}\right\}P(\xi);x\right]$$

$$p(x)=F^*[P(\xi);x]$$

其中

$$\kappa=3-4\nu$$

3. 证明，方程

$$-\pi^{-1}\int_{-1}^{1}\ln|\xi-t|\,\phi(t)\mathrm{d}t=\chi(\xi),\ |\xi|=1$$

的解为

$$\phi(\xi)=\pi^{-1}(1-\xi^2)^{-1/2}\left[C-\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{1/2}\chi'(t)(t-\xi)^{-1}\mathrm{d}t\right]$$

其中该方程在±1处具有可积奇点，并且这个解中的C为

$$C=\int_{-1}^{1}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi=(\ln 2)^{-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1/2}\chi(t)\mathrm{d}t$$

证明这个解与例2.3.8的结果一致。

4. 证明，若条带是对称（反对称）于y轴的，即

$$v(x,y) = +(-)v(-x,y)$$

$$u(x,y) = -(+)u(-x,y)$$

那么（6.3.7）和（6.3.8）式中的A、B、C、D必须满足

$$A(\xi) = -(+)B(-\xi), C(\xi) = +(-)D(-\xi)$$

U和T_{12}前面的变换F^*可以用$F_0(F_0)$代替，而V、T_{11}和T_{22}前面的变换必须用$F_0(-F_0)$代替，其中方程（6.3.12）不变化，但是i被略去了。

5. 证明，若$\phi_0(\tau)$和$\phi_1(\tau)$是“分别对应于$x_0(\xi)=1$和$x_1(\xi)=\xi$”的方程(6.3.30)的解，那么无量纲的总作用力$P=\int_{-1}^{1}\phi(\tau)d\tau$和力矩$M=\int_{-1}^{1}\tau\phi(\tau)d\tau$（对应于函数$x(\xi)$）可以分别写成（V.M.Aleksandrov (1962)）

$$P=\int_{-1}^{1}\phi_0(\xi)x(\xi)d\xi, \quad M=\int_{-1}^{1}\phi(\xi)x(\xi)d\xi$$

6.4 某些积分方程的解

前节的方程(6.3.25)、(6.3.27)和(6.3.30)都是Fredholm积分方程的例子，它们的一般形式如下。方程

$$\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x), \qquad a<x<b \tag{6.4.1}$$

是未知函数$\phi(y)$的第一类Fredholm积分方程，而

$$\phi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\phi(y)dy = f(x), \quad a<x<b \tag{6.4.2}$$

是第二类Fredholm积分方程；后者在$f(x)\equiv 0$时称为齐次的，否则为非齐次的。积分方程，按照核$K(x,y)$的性质有进一步的分类。若$K(x,y)$在$a\leqslant x\leqslant b$和$a\leqslant y\leqslant b$上是连续的，或者，虽然$K(x,y)$不是连续的，但至少二重积分

$$\int_a^b\int_a^b |K^2(x,y)|\,dxdy$$

具有有限值，则积分方程称为非奇异的。如果核具有形式

$$K(x,y)=\frac{H(x,y)}{(x-y)^{\alpha}} \tag{6.4.3}$$

其中$H(x,y)$是有界的，α是常数，满足$0<\alpha<1$，则称这种方程具有弱奇异性．如果

$$K(x,y)=\frac{A(x,y)}{x-y} \tag{6.4.4}$$

其中$A(x,y)$是x与y的可微函数，那么在（6.4.1）与（6.4.2）中积分是在Cauchy主值意义下的（参考（5.5.7））积分，这时积分方程是奇异积分方程．方程（3.5.1）和（6.3.25）就是这一类型的方程．核具有$\ln|x-y|$奇异性的方程的行为，很像奇异积分方程．

Fredholm积分方程的一般理论，特别是Fredholm的两可表达式——对所有$f(x)$，非齐次方程（6.4.2）有解，或者对$f(x)=0$的齐次方程有一个非平凡解——可以在许多教材中找到，例如Mikhlin(1957)，Smirnov(1964)，Smithies(1958)或Cochran(1972)；对于齐次方程，对应于非平凡解的λ，称为方程的特征值或本征值．这里我们把解的存在性与唯一性的问题暂时放到一边，而集中注意方程的近似解．关于积分方程数值解的文献的探索，最近已由Atkinson(1976)，Baker(1977)以及Delves与Walsh(1974)完成．

当核$K(x,y)$是非奇异的，不论是方程（6.4.1）还是（6.4.2）都可以求解，即适当近似地表示积分，使

$$\int_a^b K(x,y)\phi(y)\,dy=\sum_{n=1}^{N}w_nK(x,y_n)\phi(y_n) \tag{6.4.5}$$

其中w_j是权，y_j是数值积分的纵坐标．现在令方程两边在N个点中的点x_m上相等，作为方程（6.4.1）的近似形式，我们得到

$$\sum_{n=1}^{N}w_nK(x_m,y_n)\phi(y_n)=f(x_m),\quad m=1,2\cdots,N \tag{6.4.6}$$

方程（6.4.2）的近似形式为

$$\phi(y_m) - \lambda \sum_{n=1}^{N} w_n K(y_m, y_n)\phi(y_n) = f(y_m), \quad m = 1, 2\cdots, N \tag{6.4.7}$$

注意，在（6.4.7）中，令方程两边相等的点x_m取为计算积分的点y_n. 方程（6.4.6）和（6.4.7）是未知函数$\phi(y_n)$直接的联立方程组.

利用$[a,b]$上的（类似Legendre的）正交多项式

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)\,dx = \delta_{mn}, \quad m,n = 0,\cdots,N \tag{6.4.8}$$

发展了一种类似的分析. 若$K(x,y)$在$a \leqslant x \leqslant b$和$a \leqslant y \leqslant b$上是连续的，寻找$K(x,y)$的多项式近似表达

$$K(x,y) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n}^{N} c_{mn}P_m(x)P_n(y) \tag{6.4.9}$$

的运算是直接的，这是所谓分离核的一个特例. 因此，倘若我们假定$\phi(x)$与$f(x)$具有多项式近似表达

$$\phi(x) = \sum_{m=0}^{N} a_m P_m(x), f(x) = \sum_{m=0}^{N} b_m P_m(x) \tag{6.4.10}$$

并且利用正交关系（6.4.8）去计算积分，我们找到（6.4.1）和（6.4.2）的近似表示为

$$\sum_{n=0}^{N} c_{mn} = b_n, \qquad m = 0,1,\cdots,N \tag{6.4.11}$$

和

$$a_n - \lambda \sum_{n=0}^{N} c_{mn}a_n = b_n, m = 0,1,\cdots,N \tag{6.4.12}$$

利用Chebychev多项式和它们所满足的离散正交性条件，D.A.Elliott(1967)讨论过这个程序的一种方案.

近似解中出现的问题之一，是这样一个关系式，它联系$N+1$个方程（6.4.12）与（6.4.9）及（6.4.10）取无穷多项时得到的无穷多方程组的解. 这些方程组为

$$a_m - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} a_n = b_m, \quad m = 0, 1, \cdots, \tag{6.4.13}$$

这个方程组称为完全正则的，若存在一个数θ，$0<\theta<1$，以致

$$s_m = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda c_{mn}| \leqslant 1 - \theta < 1, \quad m = 0, 1, 2, \cdots \tag{6.4.14}$$

在这种情形下，倘若$|b_m|$是有界的，当$N \to \infty$时由头$N+1$个方程组得来的解$\{a_0, a_1 \cdots, a_n\}$的极限，将是方程组(6.4.13)的解。在这个以及其它限制性更少的条件下方程组（6.4.13）的解的存在性与收敛性的全面讨论，在Kantorovich与Krylov（1958）的著作中可以找到。

求解方程（6.4.2)的一个完全不同的方法——在老的文献，例如Kantorovich与Krylov(1958)中作了彻底的讨论——是逐代解法

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(x) \tag{6.4.15}$$

其中

$$\phi_0(x) = f(x), \phi_n(x) = \int_a^b K(x, y) \phi_{n-1}(y) \mathrm{d}y, \quad n = 1, 2 \cdots \tag{6.4.16}$$

这个程序仍然有用，假如λ是“小的”，并且积分能够容易地算出来。

奇异积分方程理论的详细研究可以在Muskhelishvili（1953b）著作中找到。在那里，不必限制积分在x轴上的单个区间$[a, b]$上，而可以是在一条或多条弧线或围线上。我们专门讨论§6.3中出现的那种类型的方程，即

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \phi(\tau) \left\{ \frac{1}{\tau - \xi} + K(\xi, \tau) \right\} \mathrm{d}\tau = \chi'(\xi), \quad |\xi| < 1 \tag{6.4.17}$$

（十分清楚，总可以用一个简单的线性变换把$a<x<b$区间转换

成 $-1<\xi<1$ 区间）可以证明，若 $K(\xi,\tau)$ 在 $-1\leqslant\xi\leqslant1$ 和 $-1<\tau\leqslant1$ 内是连续的，那么项 $(\tau-\xi)^{-1}$ 控制着方程(6.4.17)，在这种意义（(6.4.17) 的一般解与 $K(\xi,\tau)\equiv0$ 的解相像）上，在 $\xi=\pm1$ 处，具有平方根的奇异性。这样我们假定用一个多项式近似地表示 $\chi(\xi)$

$$\chi(\xi)=\sum_{m=0}^{N}a_mT_m(\xi) \tag{6.4.18}$$

使得

$$\chi'(\xi)=\sum_{m=1}^{N}ma_mU_{m-1}(\xi) \tag{6.4.19}$$

并且我们寻找方程（6.4.17）的下面形式的解

$$\phi(\tau)=(1-\tau^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{N}b_nT_n(\tau) \tag{6.4.20}$$

(6.4.17) 中，第一个积分能由 (2.3.26) 精确地给出，而第二个积分可以用Gauss-Chebyshev公式(Abramowitz与Stegun (1972, p.889))近似地计算出来

$$\pi^{-1}\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{-1/2}f(\tau)\mathrm{d}\tau=(N+1)^{-1}\sum_{j=1}^{N+1}f(\tau_j) \tag{6.4.21}$$

其中 τ_n 是 $T_{N+1}(\tau_j)=0$ 解出的零点值，即

$$\tau_j=\cos[(2j-1)\pi/(2N+2)] \tag{6.4.22}$$

倘若 $f(\tau)$ 是一个 $2N+1$ 阶或更低阶的多项式，则这个公式是精确的。利用这些结果，我们现在可以以下列形式近似地表示方程 (6.4.17)

$$\sum_{n=1}^{N}b_nU_{n-1}(\xi)+\sum_{n=0}^{N}b_nc_n(\xi)=\sum_{n=1}^{N}na_nU_{n-1}(\xi),\ |\xi|\leqslant1 \tag{6.4.23}$$

其中

$$c_n(\xi) = (N+1)^{-1} \sum_{j=1}^{N+1} T_n(\tau_j) K(\tau_j, \xi) \qquad (6.4.24)$$

方程（6.4.23）可以近似地解出来，方法是对它两端乘以$\pi^{-1}(1-\xi^2)^{1/2}U_{m-1}(\xi)$，在$[-1, 1]$上积分，利用例2.3.2关于$U_n$的正交性关系式和精确到$2N-1$阶多项式的Gauss-Chebyshev公式（Abramowitz与Stegun(1972, p.889)）即

$$\pi^{-1}\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)^{1/2}f(\xi)\,d\xi = (N+1)^{-1}\sum_{k=1}^{N} w_k f(\xi_k) \qquad (6.4.25)$$

其中ξ_k是$U_N(\xi_k)=0$解出的零点值，即

$$\xi_k = \cos[k\pi/(N+1)], \qquad w_k = 1-\xi_k^2 \qquad (6.4.26)$$

这样

$$b_m + \sum_{n=0}^{N} c_{mn} b_n = m a_m, \quad m = 1, 2, \cdots, N \qquad (6.4.27)$$

其中

$$c_{mn} = 2(N+1)^{-1}\sum_{k=1}^{N} w_k U_{m-1}(\xi_k) c_n(\xi_k) \qquad (6.4.28)$$

典型地，还要有一个方程。在6.4.17所属的物理问题中，$\phi(x)$与压力$p(x)$之间的关系为（6.3.18），整个接触压力的合力是

$$P_0 = \int_{-a}^{a} p(x)\,dx = P_0\int_{-1}^{1}\phi(\xi)\,d\xi = P_0\pi b_0 \qquad (6.4.29)$$

所以

$$\pi b_0 = 1 \qquad (6.4.30)$$

方程（6.4.27）和（6.4.30）提供了$(N+1)$个方程，可以确定$b_0, b_1, \cdots, b_N$。

Erdogan(1969)，Erdogan与Gupta（1972）和Erdogan，Gupta与Cook(1973)用恒等式（例6.4.2）

$$\frac{1}{(N+1)}\sum_{j=1}^{N+1}\frac{T_n(\tau_j)}{\tau_j-\xi_k} = \begin{cases} 0, & n=1 \\ U_{n-1}(\xi_j), & 0<n\leqslant N \end{cases} \qquad (6.4.31)$$

对N个点ξ_k的每个值重写方程（6.4.23）。于是

$$\sum_{n=1}^{N} b_n U_{n-1}(\xi_k) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} b_n \sum_{j=1}^{N+1} \frac{T_n(\tau_j)}{\tau_j - \xi_k} = \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \frac{g(\tau_j)}{\tau_j - \xi_k} \tag{6.4.32}$$

其中

$$g(\tau) = \sum_{n=0}^{N} b_n T_n(\tau)$$

类似地

$$\sum_{n=1}^{N} b_n c_n(\xi_k) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} b_n \sum_{j=1}^{N+1} T_n(\tau_j) K(\tau_j, \xi_k)$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} g(\tau_j) K(\tau_j, \xi_k) \tag{6.4.33}$$

所以对点$\xi = \xi_k$，方程（6.4.25）是

$$\frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} g(\tau_j) \left\{ \frac{1}{\tau_j - \xi_k} + K(\tau_j, \xi_k) \right\} = \chi'(\xi_k), k = 1, \cdots, N \tag{6.4.34}$$

方程（6.4.30）可以写成

$$\frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} g(\tau_j) = 1 \tag{6.4.35}$$

方程（6.4.34）和（6.4.35）一般不如方程（6.4.27）和（6.4.30）那样好控制．因为，若压力分布是“光滑的”，系数a_m将随m增大而迅速变小．还要注意，若$c_{mn} = 0$，这发生在条带变成半平面的情形，则方程（6.4.27）的解清楚地表明$b_m = m a_m$，与（2.4.10）一致，这个简单的解并不是直接明显地从方程（6.4.34）得到的．Erdogan与Gupta对于在端点 ± 1 或其中之一$\phi(\tau)$为零的情形进行了类似的分析．但是这种分析是不必要的，因为$\phi(\tau)$仍然可以找到其形式（6.4.20）并且附加条件

$$\phi(1) = 0, \text{亦即} \sum_{n=0}^{N} b_n = 0; \phi(-1) = 0, \text{亦即} \sum_{n=0}^{N} b_n (-1)^n = 0 \tag{6.4.36}$$

可以和方程（6.4.27）简单地联立起来。这样得到的方程，仅仅在某些条件下有一个解，这些条件在物理上导出总作用力与接触长度之间的某种关系。在例题中将进一步讨论这一点。有关奇异积分方程数值解的其他著作可以从下面各位作者的著作中找到：Kalandia (1959)，Karpenko (1966)，Margetson与Morland (1970b)，Morland(1970)，Krenk(1975a)，(1975b)，(1978)和Theocaris与Ioakimidis(1977b)。

例6.4

1.推导递推关系

$$U_{n-1}(x) = U_N(x)T_n(x) - T_{N+1}(x)U_{n-1}(x)$$

2.利用例6.4.1与公式（2.3.6）证明

$$U_{N-1}(x)/T_{N+1}(x) = \sum_{j=1}^{N+1} a_j/(\tau_j - x)$$

其中τ_j是$T_{N+1}(x)$的根（6.4.22）。再证明

$$a_j = -U_{N-n}(\tau_j)/T'_{N+1}(\tau_j) = -U_{N-1}(\tau_j)/[(N+1)U_N(\tau_j)]$$
$$= -T_n(\tau_j)/(N+1)$$

现在使用

$$\frac{U_{N-n}(x)}{T_{N+1}(x)} = -U_{n-1} + \frac{T_n(x)U_N(x)}{T_{N+1}(x)} = -\frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\frac{T_n(\tau_j)}{\tau_j - x}$$

推导（6.4.31）。

3.利用方程（3.2.24）证明方程（6.4.17）的解在$\tau \pm 1$具有平方根奇异性。

6.5 放置在刚性基础上的条带的压痕

在§6.3节中给出了无摩擦刚性压头挤压条带一侧表面的接触问题的控制方程，其中条带的另一表面或者(a)与无摩擦刚性基础接触，或者(b)固定在刚性基础上。在这一节中，我们研究控制这一问题的积分方程的一般形式，且针对两种特殊情况，(1)

冲头与直线基础完全接触，(2)冲头与圆形（实际是抛物线状的）轮廓不完全接触，详细地检查了这些方程的解.

这些分析具有悠久的历史，参见Marguerre (1931).正如§6.2一样，Hannah(1951)对于问题a2和b2建立了公式并给出了近似解，这些解今天看来，意义不大. V.M.Aleksandrov(1962)运用公式 (6.3.30)，即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi(\tau)K\left(\frac{\xi-\tau}{\gamma}\right)\mathrm{d}\tau=\chi(\xi),\quad |\xi|\leqslant 1 \tag{6.5.1}$$

其中$\gamma=h/a$，假设$K(k)$可以写成

$$K(k)=-\ln|k|+F(k) \tag{6.5.2}$$

这里$F(k)$是k的偶函数，且将方程 (6.5.1) 写成如下形式

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\left|\frac{\xi-\tau}{\gamma}\right|\phi(\tau)\mathrm{d}\tau=\chi(\xi)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}F\left(\frac{\xi-\tau}{\gamma}\right)\phi(\tau)\mathrm{d}\tau \equiv\psi(\xi) \tag{6.5.3}$$

如果假设函数$\psi(\xi)$是已知的，则这个方程的解为 (例6.3.3)

$$\phi(\xi)=\frac{1}{\pi(1-\xi^2)^{1/2}}\left[\mathrm{P}-\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau^2)^{1/2}\psi'(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-\xi}\right] \tag{6.5.4}$$

其中

$$P=\int_{-1}^{1}\phi(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\ln(2\gamma)}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\tau)\mathrm{d}\tau}{(1-\tau^2)^{1/2}} \tag{6.5.5}$$

对于大的γ值，函数F，可用$F(0)$近似表达，得到第一次近似式为

$$\phi(\xi)=\frac{1}{\pi(1-\xi^2)^{1/2}}\left[P^*-\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau^2)^{1/2}\chi'(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-\xi}\right] \tag{6.5.6}$$

$$P^*=\frac{1}{\ln(2\gamma)+F(0)}\int_{-1}^{1}\frac{\chi(\tau)\mathrm{d}\tau}{(1-\tau^2)^{1/2}} \tag{6.5.7}$$

Aleksandrov叙述了这些结果适用的F和χ的条件，且对于大的γ，由假设$F(k)$可以写成

$$F(k)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nk^{2n},\quad |k|<\rho \tag{6.5.8}$$

从而得到了更高阶的近似解. 也是当γ很大时，问题b2的一个类

似的更简捷的解，是由Meijers(1968)给出的．在他的综合性文章中，对于不同的Poisson比值给出了压力、位移、透入深度和接触长度的结果．

V. M. Aleksandrov (1964a) 展开ϕ，F，χ为无限的Chebyshev级数，考虑了(6.5.1)的解；V.M.Aleksandrov (1968)、V.M.Aleksandrov和Kucherov(1970)修改了这些分析，并且对于大的γ值，证明了所得到的无限方程组具有拟正则性．由于所证明了的这个正则性，故χ、ϕ的形式可以分别取为(6.4.18)和(6.4.20)式，利用例2.3.8计算包含$\ln|(\xi-\tau)/\gamma|$的积分，且用Gauss-Chebyshev积分计算包含F的积分；这基本上是V.M.Aleksandrov(1962)和Meijers(1968)所用的方法的改进．那么对于半径为R的圆柱(情形2)，透入条带的深度v_0，(6.2.5)式的$f(x)$为$f(x)=v_0-x^2/(2R)$，那么

$$\chi(\xi)=(\vartheta P_0)^{-1}[v_0-a^2\xi^2/(2R)]=-(\pi\lambda)^{-1}(\xi^2-2\mathrm{d})$$
$$=-(2\pi\lambda)^{-1}[T_2(\xi)+(1-4\mathrm{d})T_0(\xi)] \qquad (6.5.9)$$

其中λ和d是Meijers使用的参数，即

$$\lambda=\frac{2\vartheta RP_0}{\pi a^2}=\frac{4(1-\nu^2)PR_0}{\pi Ea^2},\quad \mathrm{d}=\frac{Rv_0}{a^2} \qquad (6.5.10)$$

方程(6.5.3)可写成

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{-\ln\left|\frac{\xi-\tau}{\gamma}\right|+F\left(\frac{\xi-\tau}{\gamma}\right)+\frac{1}{2\lambda}\right.$$
$$\left.\times\left[T_2(\xi)+(1-4\mathrm{d})T_0(\xi)\right]\right\}\phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau=0 \qquad (6.5.11)$$

其中，为了得到最后一项，应用了平衡条件$\int_{-1}^{1}\phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau=1$．把$\phi(\tau)$展开成下面的形式

$$\phi(\tau)=(1-\tau^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{2N}b_nT_n(\tau) \qquad (6.5.12)$$

其中只有偶函数b_n是非零的，我们求得

$$\sum_{n=0}^{2N^*} n^{-1}b_n T_n(\xi) + \sum_{n=0}^{2N} b_n d_n(\xi) + (2\pi\lambda)^{-1}\Big[T_2(\xi)$$

$$+ (1-4d)T_0(\xi)\Big]b_0 = 0 \qquad (6.5.13)$$

其中*表示第一项是$b_0\ln(2\gamma)$，且

$$d_n(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{-1/2}T_n(\tau)F\left(\frac{\xi-\tau}{\gamma}\right)d\tau \qquad (6.5.14)$$

把方程（6.5.13）乘以$(1-\xi^2)^{-1/2}T_m(\xi)$，其中$m=0,2,\cdots 2N$，我们得到

$$b_0\ln(2\gamma) + \sum_{n=0}^{2N} c_{0,n}b_n + (2\lambda)^{-1}(1-4d)b_0 = 0 \qquad (6.5.15)$$

$$b_2/4 + \sum_{n=0}^{2N} c_{2,n}b_n + (2\lambda)^{-1}b_0 = 0 \qquad (6.5.16)$$

$$b_m/(2m) + \sum_{n=0}^{2N} c_{m,n}b_n = 0, \quad m = 4,6,\cdots,2N \qquad (6.5.17)$$

平衡条件为$\pi b_0 = 1$，而对于在$\xi = \pm 1$的不完全接触，则为

$$b_0 + b_2 + \cdots + b_{2N} = 0 \qquad (6.5.18)$$

方程组(6.5.16)—(6.5.18)形成了关于λ的只有一个特征值的非常简单的特征值问题。一旦已知λ和已知特征向量b_0、b_2、…、b_{2N}等，这些向量已经规一化，使得$\pi b_0 = 1$，则由(6.5.15)可计算出透入度d。如果完成了这些计算，则可以发现，当$\gamma > 1$时，需要一个比较小的N(<6)，以便给出一个可接受的近似解；对于这些γ值，问题b2的结果同Meijers(1968)得到的结果相当接近。

如果上述计算是对于γ为递减数列做的，如由1到0.05，则可以发现，对于给定的值N，对于每个相继的γ系数，b_0、b_2、…b_{2N}数量的递减在减慢，而且趋于符号交错。这两种事实说明，用级数(6.5.12)来模拟压力分布特点是不可能的。结果，当γ取值很小时，这种过程全部中断，γ实际上的临界值依赖于N的值，矩

阵c_{ij}中计算这值的项的精确度和求解(6.5.16)～(6.5.18)的方法的稳定性；在Gladwell(1976)报告的计算中，临界值的区域为0.05—0.1.

很多研究者都试图寻找适用于小γ的求解程序，V.M.Aleksandrov的办法(1963a)的出发点，是核$K(h)$可以重新写成

$$K(h)=\int_0^\infty \omega^{-1}L(\omega)\cos h\omega \mathrm{d}\omega \tag{6.5.19}$$

其中，在情形(a)，方程(6.3.31)表明

$$L(\omega)=\frac{2\sinh^2\omega}{2\omega+\sinh 2\omega} \tag{6.5.20}$$

对于问题(a)及(b)，$L(\omega)$均有性质

$$L(\omega)\to A\omega，当\omega\to 0；L(\omega)\to 1，当\omega\to\infty \tag{6.5.21}$$

其中，对于(a)，有$A=1/2$；对于(b)，有$A=(1-2\nu)/[2(1-\nu^2)]$.当γ较小时，除了$|\xi-\tau|$非常小之外，量$h=(\xi-\tau)/\gamma$较大.当h较大（较小）时$K(h)$的特性由ω较小（较大）时的$L(\omega)$的特点决定.函数

$$L_0(\omega)=\frac{\omega}{(\omega^2+A^{-2})^{1/2}} \tag{6.5.22}$$

对于较大或较小的ω都与$L(\omega)$类似，那么，直观地，有

$$K(h)\sim\int_0^\infty \frac{L_0(\omega)\cos h\omega \mathrm{d}\omega}{\omega}=K_0(h/A) \tag{6.5.23}$$

其中K_0是修正Bessel函数.对于大的h值，有$K_0(h/a)\to 0$，而对小的h值，$K_0(h/A)$是奇异的.当γ较小时，核$K[(\xi-\tau)/\gamma]$仅仅对$\tau=\xi$的邻域有影响；在这个邻域中，$K(h)$是奇异的，但是由于

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(h)\mathrm{d}h-\int_{-\infty}^{\infty}K_0(h/A)\mathrm{d}h=\pi A \tag{6.5.24}$$

$K(h)$近似地等于$\pi A\delta(h)$，其中$\delta(h)$是Dirac δ函数.因为$h\neq 0$时$\delta(h)=0$，方程(6.5.1)的近似式为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi A\delta\left(\frac{\xi-\tau}{\gamma}\right)\phi(\tau)\mathrm{d}\tau=\chi(\xi) \tag{6.5.25}$$

它有解

$$\phi(\xi) = \chi(\xi)/(A\gamma) \tag{6.5.26}$$

同V.M.Aleksandrov(1962)的较早的叙述一样. 对于问题2，其中$\chi(\xi)$由(6.5.9)给出，得到

$$\phi(\xi) = (\pi A\gamma\lambda)^{-1}(2d - \xi^2) \tag{6.5.27}$$

由在$\xi = \pm 1$处的不完全接触条件，可以得到$d = 1/2$而平衡条件$\int_{-1}^{1}\phi(\xi)\,d\xi = 1$给出$\lambda = 4/(3A\pi\gamma)$. 这些渐近值同Meijers(1968)得到的值一致.

弹性静力学问题有静电学类比. 考虑一个导电条带放到平行且靠近地平面的位置. 如果条带和地平面的距离比条带的长度小得多，那么静电场可用平行板电容器近似地表示.

对于小的γ值，V.M.Aleksandrov(1963a)得到的较好的渐近解如下：对于问题1，其中$\chi(\xi) = \chi_0 = d/(\vartheta p_0)$，求得解的形式为

$$\phi(\xi) = \frac{\chi_0}{A\gamma}\{1 + \theta_+(\xi) + \theta_-(\xi)\} \tag{6.5.28}$$

这里根据Krein (1955) 的思路，他注意到$\theta_+(\xi)$具有形式为$(1-\xi)^{-1/2}$的奇异性，且当$\xi < 1$时，很快趋近于零，而$\theta_-(\xi)$具有$(1+\xi)^{-1/2}$奇异性，且在$\xi > -1$时，很快趋近于零. 作变量代换$x = (1+\xi)/\gamma$，$t = (1+\tau)/\gamma$可以得到$\theta_-(\xi)$的近似形式，对此，方程(6.5.1)变成

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2/\gamma}\phi(\gamma t - 1)K(x-t)\,dt = \frac{\chi_0}{\gamma} \tag{6.5.29}$$

且对于小的γ值，其上限可以取为无穷大，给出

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\phi(\gamma t - 1)K(x-t)\,dt = \frac{\chi_0}{\gamma} \tag{6.5.30}$$

但这是半无限冲头的控制压痕的积分方程. 当γ较小时，冲头右端对靠近左端的应力状态的影响，可以略去(反之亦然)，那么，当γ较小时，(6.5.30)的解为

$$\phi(\xi)=\frac{\chi_0}{A\gamma}\{1+\theta_-(\xi)\} \tag{6.5.31}$$

Aleksandrov用(6.5.23)的近似式$K_0(k/A)$代替K，并且利用了Wiener-Hopf方法求解(6.5.30)。V.M.Aleksandrov与Vorovich(1965)用变量对称代换

$$\xi=(1-2\gamma\chi)^{1/2},\tau=(1-2\gamma t)^{1/2} \tag{6.5.32}$$

对此，当γ较小时，方程(6.5.1)变成

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\phi^*(t)K(x-t)\mathrm{d}t=\frac{\chi^*(x)}{\gamma} \tag{6.5.33}$$

用$K_0(k/A)$代替$K(k)$，得到了同样的Wiener-Hopf解，它是对称变量$x=(1-\xi^2)/(2\gamma)$的函数。

S.F.Smith(1964)在一个长而且困难的分析中，得到了运用于小γ值、平底冲头的恰当的解，V.M.Aleksandrov和Babeshko(1965)寻找可求解方程(6.5.30)的具有(6.5.22)形式的$L(\omega)$的改进的近似式。V.M.Aleksandrov与Vorovich(1964)给出了不太烦琐的分析；还可以参阅下列作者的著作：Privarnikov (1963)，Koiter (1965)，Babeshko (1966)，V. M. Aleksandrov和 Belokon (1967)，Wu和Chiu (1967)，Babeshko(1969)，Alblas和Kuipers(1969)，(1970a)，(1970b)，V. M. Aleksandrov 和 Smetanin(1971)，Pao，Wu和Chiu (1971)以及Pctelezkho(1971)。或许有关各种近似方法的最全面的讨论能在V. M. Aleksandrov(1968)的著作中查到。

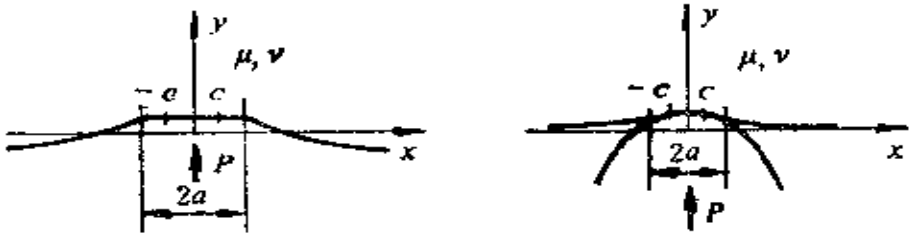
6.6 具有有限摩擦的接触

对刚性冲头压挤半平面效应的妥善考虑，应当注意到一个事实，即接触既不是如§4.5中假设的无摩擦的，也不是如§4.6中假设的完全粘着的，甚至也不是如§4.7中所说处于极限摩擦的均匀状态，而是存在某些完全粘着的区域，而在另外的区域上是

滑动的.

Galin(1945),(1961)对于刚性冲头与平坦面之间具有局部滑动的接触问题建立了适当表述形式. 他没有获得完全解，而且利用了很复杂的方法求得了今天看来已不重要的近似解. 直到1973年Spence(1973)才提供了一个确定的解. 他考虑的不仅是平底冲头，而考虑的是如图6.6.1(*b*)所示自相似的具有外形$y=y_0-A|x|^{\alpha}$的冲头. 下面要给出他的分析的轮廓，这种分析是困难的；更详尽的内容，读者可以参考其原始文章.

图6.6.1(*a*,*b*)表示刚性压头，其中之一带有自相似的外形，压入上半平面的弹性体表面. 假设，当载荷P缓慢增加时，在中心区域$|x|<c$上，摩擦足以防止滑动发生，而在其它的区域$c<|x|<a$上，摩擦力是有限的，则在逐步增加的载荷作用下，发生滑动. 假设载荷作用得充分缓慢，使每个阶段满足静平衡，且它是单调地作用着的，使滑动总是在同一方向进行. 起初并不清楚这种简单形式的解存在，因为可能存在不只一个粘着区域和散布的滑动区域（而这种情况在不受载荷时也可能发生），但是正如Spence所表明的，这里所提出的问题，具有满足所有物理条件的唯一解.



(*a*) (*b*)

图6.6.1 压入弹性半平面的：(*a*) 平压头，(*b*) 幂函数压头

利用§6.2的符号，可以写出接触的边界条件为

$$\tau_{xy}(x,0)=-s(x)H(a-|x|),\tau_{yy}(x,0)=-p(x)H(a-|x|) \tag{6.6.1}$$

其中H是Heaviside函数，$s(x)$是x的奇函数，而$p(x)$是偶函数.

可引入下列函数表示应力边界条件

$$r(x)=p(x)-\frac{s(x)}{k}\operatorname{sign}(x) \qquad (6.6.2)$$

其中k是摩擦系数。注意到在滑动区域有朝外作用的剪应力，我们有

$$r(x)=0, \qquad c<|x|<a \qquad (6.6.3)$$

由于在内部区域上没有达到极限摩擦，所以

$$r(x)\geqslant 0, \qquad |x|<c \qquad (6.6.4)$$

在接触区域上导出的法向位移是确定的，那么多项式表示的压头的法向位移导数为

$$\vartheta^{-1}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-B|x|^{n-1}\operatorname{sign}(x) \qquad (6.6.5)$$

其中$B=n\vartheta^{-1}A$，且对平底冲头的特殊情形，有$B=0$。控制横向位移的条件，没有这么直接。对于平底冲头，$|x|<c$上的条件为$u=0$，而对于幂函数冲头，这一点不成立，因为冲头逐渐进入接触时，在给定的点x将发生滑动，直到这一点进入不滑动区域时为止。可是，利用对全面粘着接触（见§4.6）问题结论的修正并且以c代替a，我们可以导出

$$\vartheta^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}0, & \text{（平底冲头）}\\ c|x|^{n-1}, & \text{（幂函数形冲头）}\end{cases} \qquad |x|<c \qquad (6.6.6)$$

在其余的区域$c<|x|<a$上，$u'(x)$可以不给定。值B与C最终可以由应力在接触区边缘为零这个条件确定出来；对于平底冲头，根据对比，应力在边缘为有限值。

最终方程是联系位移与应力的方程；方程(6.2.43)给出

$$\vartheta^{-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{s(y)\,\mathrm{d}y}{y-x}-\varphi p(x) \qquad (6.6.7)$$

$$\vartheta^{-1}\frac{dv}{dx}=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(y)dy}{y-x}+\varphi s(x) \qquad (6.6.8)$$

Spence表明，使用关联平底冲头所相应的函数$p_0(x)$和$s_0(x)$（例6.6.1）的简单的求积运算，可以得到应力分布$p(x)$和$s(x)$，并且相同的限定粘着区域的未知数c，对于两种情形均适用。这表明只考虑平冲底即足够，对此，方程(6.6.7)与(6.6.8)给出

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(y)dy}{y-x}+\varphi s(x)=0,\quad |x|<a \qquad (6.6.9)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{s(y)dy}{y-x}-\varphi p(x)=0,\quad |x|<c \qquad (6.6.10)$$

它们的解必须和方程(6.6.3)与(6.6.4)相一致.

首先利用$p(x)$为偶函数、$s(x)$为奇函数的事实将方程(6.6.9)与(6.6.10)重写成针对x的方程。那么，使用(6.6.2)，我们求得

$$p(x)+2\left(\frac{\cot\pi\alpha}{\pi}\right)x\int_{0}^{a}\frac{p(y)dy}{y^2-x^2}=r(x),\quad 0<x<a \qquad (6.6.11)$$

$$-\varphi^2 p(x)+2\left(\frac{\operatorname{tg}\pi\alpha}{\pi}\right)\int_{0}^{c}\left(\frac{p(y)-r(y)}{y^2-x^2}\right)ydy=0,\quad 0<x<c \qquad (6.6.12)$$

其中$\operatorname{tg}\pi\alpha=k\varphi$。方程(6.6.11)可以看做是$p(y)$用$r(x)$表示的方程；引用代换

$$\frac{y^2}{a^2}=\frac{1}{2}(1+\eta),\quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{2}(+\xi),\quad p(y)=y\phi(\eta),\quad r(x)=x\psi(\xi) \qquad (6.6.13)$$

可以把(6.6.11)变成§3.5中讨论过的标准形式

$$\phi(\xi)+\frac{\cot\pi\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(\eta)d\eta}{\eta-\xi}=\psi(\xi),\ -1<\xi<1 \qquad (6.6.14)$$

这是(3.5.1)类型的方程，方程中的φ由下式给出

$$\varphi=-i\operatorname{tg}\pi\alpha \qquad (6.6.15)$$

利用那个分析，我们求出$K=\exp(-2\pi i\alpha)$和

$$X_0(\xi)=(\xi-1)^{-1/2+\alpha}(\xi+1)^{-1/2-\alpha} \tag{6.6.16}$$

以及(6.6.14)的一般解为

$$\phi(\xi)=\sin^2\pi\alpha\,\psi(\xi)-\frac{\sin\pi\alpha\cos\pi\alpha}{\pi}X_0^+(\xi)\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\eta)\mathrm{d}\eta}{X_0^+(\eta)(\eta-\xi)}$$

$$+(A\xi+B)X_0^+(\xi) \tag{6.6.17}$$

此式在$\xi=-1$处，亦即在$x=0$处是奇异的，除非$A=0$以及

$$B=\frac{\sin\pi\alpha\cos\pi\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\eta)\mathrm{d}\eta}{X_0^+(\eta)(\eta+1)} \tag{6.6.18}$$

那么

$$\phi(\xi)=\sin^2\pi\alpha\,\psi(\xi)-\frac{\sin\pi\alpha\cos\pi\alpha}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(\eta)\psi(\eta)\mathrm{d}\eta}{\omega(\xi)(\eta-\xi)} \tag{6.6.19}$$

其中

$$\omega(\xi)=\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{1/2-\alpha} \tag{6.6.20}$$

当变换成原来的变量时，方程(6.6.19)变成

$$p(x)=\sin^2\pi\alpha\,r(x)-x\frac{\sin2\pi\alpha}{\pi}\int_0^c\frac{\omega(y)r(y)\mathrm{d}y}{\omega(x)(y^2-x^2)},$$

$$0<x<a \tag{6.6.21}$$

现在这里$\omega(x)=[(a^2-x^2)/x^2]^{1/2-\alpha}$.注意，考虑了(6.6.3)式时，积分区间(0,a)变成(0,c)。

方程(6.6.21)用$r(x)$表示了$p(x)$，而且可以把这个表达式代入$p(x)$的方程(6.6.12)内出现的积分中。Spence表明，可以简化这个积分，以便给出在区间$0<x<c$上成立的积分方程

$$(1-\varphi^2)p(x)-\frac{2}{\pi a}g(\alpha)\sin\pi\alpha\int_0^c G(x^2,u^2)\omega(u)r(u)\mathrm{d}u$$

$$=0 \tag{6.6.22}$$

其中

$$G(x^2,\ u^2)=\{x^2A(x^2)-u^2A(u)\}/(x^2-u^2)$$

并且

$$A(x^2) = {}_2F_1(1,1/2;1+\alpha;x^2/a^2)$$

$$g(\alpha) = \Gamma(1/2+\alpha)/[\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1/2)]$$

方程(6.6.22)可以用新的变量ξ，$\phi(\xi)$和$\psi(\xi)$写出来，此时

$$\left.\begin{aligned} &x^2 = c^2\xi,\ (1-x^2/a^2)^{1/2-\alpha} r(x) = \phi(\xi), \\ &(1-x^2/a^2)^{1/2-\alpha} p(x) = \psi(\xi), \end{aligned}\right\} \qquad (6.6.23)$$

那么

$$\psi(\xi) = \frac{g(\alpha)\sin\pi\alpha}{\pi(1-\varphi^2)}\left(\frac{c}{a}\right)^{2\alpha}\int_0^1 \eta^{\alpha-1}H(\xi,\eta)\phi(\eta)\,\mathrm{d}\eta \qquad (6.6.24)$$

其中

$$H(\xi,\eta) = (1-c^2\xi/a^2)^{1/2-\alpha}G(c^2\xi,\ c^2\eta)$$

联系ϕ和ψ的第二个方程，可以对$r(x)$求解方程(6.6.21)而得到，即，用$p(y)$表示$\phi(\xi)$，即$\psi(\eta)$。在(0,1)上，反演为

$$\phi(\xi) = \psi(\xi) + \frac{\cot\pi\alpha}{\pi}\int_0^1\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2}\left(\frac{1-\xi}{1-\eta}\right)^{1/2-\alpha}\frac{\psi(\eta)}{\eta-\xi}\,\mathrm{d}\eta \qquad (6.6.25)$$

现在，方程(6.6.24)和(6.6.25)导出如下形式的积分方程

$$\lambda\phi(\xi) = \int_0^1 \eta^{\alpha-1}K(\xi,\eta)\phi(\eta)\,\mathrm{d}\eta \qquad (6.6.26)$$

以$\phi(\eta)$，即粘着区域的压力为未知函数。关于积分方程的核K的详细检验表明，对方程(6.6.26)，存在λ的唯一值，使得方程有解$\phi(\xi)$，它在(0,1)上处处为正，正如它同$r(x)$的关系所表明，它必定为正。方程(6.6.26)的详细的解，特征值λ的确定——这导出了(c/a)，k和φ之间的关系——是用数值方法作出来的。取自Spence(1973)的图6.6.2表明三个典型摩擦系数值的接触压力分布。Popov(1963b)，(1966)，A.S.Solov'ev(Соловьев)(1969)和V. M. Aleksandrov(1970)也研究过有限摩擦的平面问题。

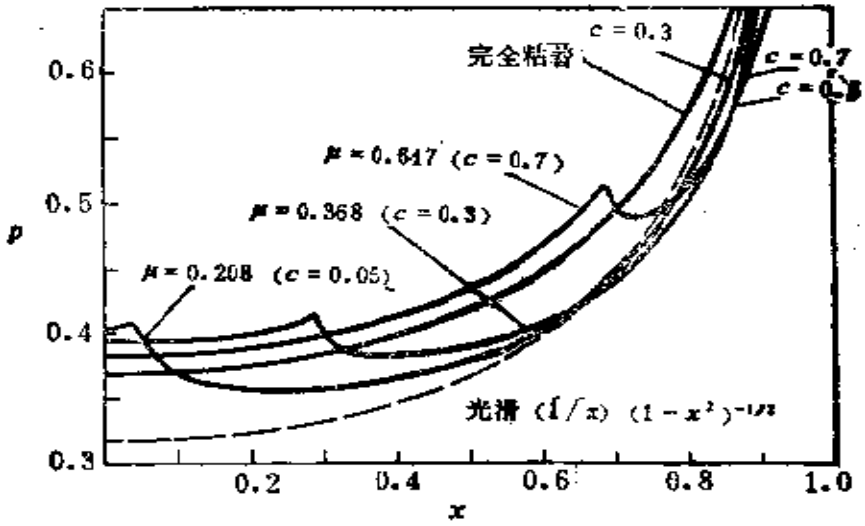


图6.6.2 平底二维冲头下面的法向压力，$\nu = 0$

例6.6

1. 试表明，如果外形$y^1 = y_0 - A|x|^n$的冲头具有应力分布$p(x)$和$s(x)$，平底冲头具有应力分布$p_0(x)$和$s_0(x)$，两种应力分布的关系表现为方程

$$p(x) = nx^{n-1}\int_x^1 \frac{p_0(t)\,dt}{t^n},\quad s(x) = nx^{n-1}\int_x^1 \frac{s_0(t)\,dt}{t^n}$$

6.7 弹性半平面上的梁

本世纪初就已经开始研究弹性半平面上无限长梁的连续接触问题. Prager(1927)的早期文章讨论了不同基础上的平板和梁，作出了一个平面上的分析，并且给出了较早时期的参考文献，其中大部分是用德文发表的. Biot(1937)得到了下面的方程 (6.7.8)和(6.7.9)，给出列表和图形表示的结果，他还研究过三维半空间上的梁. Reissner(1937)给一般基础上的梁作了清晰的一般性的表达，同时也推导了弹性半平面这种特别情形的解. 关于弹性半空间和Winkler基础上的梁或轴对称平板的广泛的处理，可以参阅Marguerre(1937)的著作. 其他文献，可以在Hetenyi (1946) 及Vlasov和Leont'ev(Леонтьев)(1966)等人的著作

中找到。

考虑放置在弹性基础上的无限长梁，控制方程为

$$E_1 I v^{(4)} = q(x) - p(x) \tag{6.7.1}$$

其中，$p(x)$为基础压力，而$q(x)$为外加载荷，如图6.7.1所示，且(4)表示对x的4次导数。对于很多种基础，包括Winkler的和弹性半平面的，基础压力与位移$v(x)$由下面的算子方程联系起来

$$p(x) = L\{v(t); t \to x\} \tag{6.7.2}$$

那么$p(x)$的Fourier变换为

$$F\{p(x); x \to \xi\} = f(\xi)\bar{v}(\xi) \tag{6.7.3}$$

其中$f(\xi)$与算子L有关。方程(6.7.1)的Fourier变换为

$$E_1 I \xi^4 \bar{v}(\xi) = \bar{q}(\xi) - f(\xi)\bar{v}(\xi) \tag{6.7.4}$$

其中$\bar{q}(\xi) = F\{q(x); x \to \xi\}$。这样

$$\bar{v}(\xi) = \bar{q}(\xi)/[E_1 I \xi^4 + f(\xi)] \tag{6.7.5}$$

这给出了形式解

$$v(x) = F^*\{\bar{q}(\xi)/[E_1 I \xi^4 + f(\xi)]; \xi \to x\} \tag{6.7.6}$$

对于弹性半平面，方程(5.4.10)表明，$f(\xi) = \vartheta|\xi|^{-1}$，因之

$$v(x) = \frac{1}{E_1 I} F^*\left\{\frac{\bar{q}(\xi)}{\xi^4 + \alpha^3|\xi|};\ \xi \to x\right\} \tag{6.7.7}$$

其中$\alpha^3 = \vartheta/(E_1 I)$。对于在原点有集中载荷$P$的情形，此时$\bar{q}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} P$，则我们有

$$v(x) - v(0) = \frac{P}{\pi E_1 I}\int_0^\infty \frac{\cos\xi x - 1}{\xi(\xi^3 + \alpha^3)} d\xi \tag{6.7.8}$$

弯矩为$-E_1 I v''(x)$，并且

$$M(x) = \frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{\xi \cos\xi x d\xi}{\xi^3 + \alpha^3} \tag{6.7.9}$$

关于方程(6.7.5)的进一步的应用和结果，以及图形表示的结果，可以参阅Sneddon，Gladwell和Coen(1975)的著作，它实质上

是早些时候的很多研究结果的综合。其它更详细的结果和文献，可以参考Vesic(1961)和Hetenyi(1964)的论著。

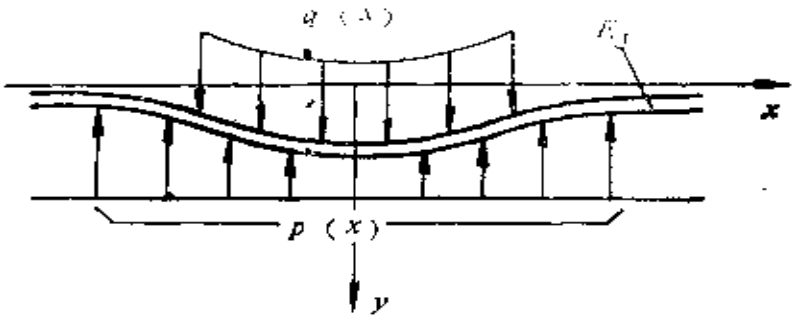


图6.7.1 无限长梁同基础的连续接触

有限长梁受不同方式的载荷，与弹性半平面连续接触，由Klubin(1952)给出了精美的分析。他的做法如下。考虑一根均匀的梁，自由端为$x=\pm L$，放置在弹性半平面上，处于平面应变状态。梁的挠度$v(x)$的控制方程为

$$E_1 I v^{(4)} = q(x) - p(x) \tag{6.7.10}$$

并且端部条件为

$$v^{(2)} = 0 = v^{(3)}, \quad 在 x = \pm L \tag{6.7.11}$$

而半平面内的压力和挠度之间的关系为

$$v(x) = \vartheta_2 \left[-\pi^{-1} \int_{-L}^{L} p(t) \ln |x-t| \, dt + c \right] \tag{6.7.12}$$

在$(-L, L)$上，梁的位移和半平面的位移必须相等，假设接触压力具有形式

$$p(x) = (L^2 - x^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x/L) \tag{6.7.13}$$

利用例题2.3.8和公式(6.7.12)，得到$(-L, L)$上，半平面的位移为

$$v(x) = \vartheta_2 \left[c + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} A_n T_n(x/L) \right] \tag{6.7.14}$$

现在用(6.7.13)给出$p(x)$。对(6.7.10)求积分，这给出梁的挠

度，其形式为

$$v(y)=f(x)+\sum_{n=1}^{m}A_n[g_n(x)\arcsin(x/L)+h_n(x)(L^2-x^2)^{1/2}]$$

(6.7.15)

其中，$f(x)$与载荷$q(x)$❶有关，在$q(x)$为常数时，$f(x)$为四阶多项式，$g_n(x)$与$h_n(x)$都是多项式。Klubin用x/L的幂函数展开$\arcsin(x/L)$和$(L^2-x^2)^{1/2}$，并且令(6.7.14)与(6.7.15)相等。这一步骤含有无穷级数，对于计算机解来说，是其主要缺点。对于不完全接触，通过下面所给的分析的适当修正可以得到一个有效的解。

Weitsman(1972)对于无限长、无自重梁在半平面上不完全接触的问题建立了正确的公式表述，但他假设在接触区两端$\pm a$上压力的导数$p'(x)$而得出的解是错误的；实际上，应该是$p(x)$为零，正如同通常的不完全接触问题一样，放置在半平面上的有自重的有限长梁的问题，导致具有$\ln|x-t|$奇异性的积分方程，Gladwell给出了解，下面将要叙述。

如图6.7.2所示，梁长$2L$，抗弯刚度D_1，受到自重W_0和区间$[-b,b]$上均匀附加载荷P_0的作用，接触发生在区间$[-a,a]$上。由于接触压力在端点$x=\pm a$满足条件$p(x)=0$，则平衡条件可以写成

$$P_0+W_0=\int_{-a}^{a}p(x)\mathrm{d}x=-\int_{-a}^{a}xp'(x)\mathrm{d}x \qquad (6.7.16)$$

由Euler的梁理论，可以导出梁的位移形式如下：

$$12D_1v'(x)=-\int_{-a}^{a}\{B(x,t)-Pf_3(x,t)t-Wf_3(x,L)t\}\times p'(t)\mathrm{d}t \qquad (6.7.17)$$

其中

❶原文这里$q(x)$为$g(x)$，显然不对，因而作了订正。

译者注

$$B(x,t)=\begin{cases}t^3+3x^2t, & |t|<|x|\\ (x^3+3t^2x)\operatorname{sign}(x), & |t|\geqslant|x|\end{cases} \tag{6.7.18}$$

$$j=\begin{cases}3, & |x|<b,\ f_3(x,b)=(x^3+3b^2x)/b\\ 4, & |x|\geqslant b,\ f_4(x,b)=(b^3+3x^2)\operatorname{sign}(x)\end{cases} \tag{6.7.19}$$

$$P=P_0/(P_0+W_0),\ W=W_0/(P_0+W_0) \tag{6.7.20}$$

注意，在使用(6.7.16)与(6.7.17)中，连系P和W的项，已包括在积分中了。半平面的$v'(x)$的相应的表达式可以由(6.7.12)推导出来

$$v'(x)=\pi^{-1}\vartheta_2\int_{-a}^{a}\ln|x-t|\,p'(t)\,dt \tag{6.7.21}$$

其中ϑ_2为基础的模量。现在引入无量纲变量

$$(\xi,\tau,l,\beta)=(x,t,L,b)/a \tag{6.7.22}$$

$$\lambda=\pi a^3/[12\vartheta_2 D_1],\ f(\tau)=-a^2p'(t)/(P_0+W_0) \tag{6.7.23}$$

那么$f(\tau)$满足方程

$$\int_{-1}^{1}\{\ln|\xi-\tau|+\lambda K(\xi,\tau)\}f(\tau)\,d\tau=0 \tag{6.7.24}$$

并且有归一化条件

$$\int_{-1}^{1}\tau f(\tau)\,d\tau=1 \tag{6.7.25}$$

其中

$$K(\xi,\tau)=B(\xi,\tau)-Pf_3(\xi,\beta)\xi-Wf_3(\xi,l)\xi \tag{6.7.26}$$

方程(6.7.24)具有形式(6.3.35)，并且可以使用§6.4中描述的近似方法去求解它。函数$f(\tau)$正比于压力导数，在$\tau=\pm1$处有平方根的奇异性，甚至当a是不完全接触长度时，也有这样的结果，此时a与材料的弹性常数和梁的长度有对应关系。方程(6.4.27)与(6.4.28)的近似形式为

$$b_0\ln 2-\lambda\sum_{n=0}^{N}d_{0,n}b_n=0 \tag{6.7.27}$$

$$(2m)^{-1}b_m-\lambda\sum_{n=0}^{N}d_{m,n}b_n=0,\quad m=1,2\cdots,N \tag{6.7.28}$$

其中

$$d_{m,n}=(N+1)^{-1}\sum_{k=1}^{N+1}T_m(\tau_k)d_n(\tau_k) \tag{6.7.29}$$

$$d_n(\xi)=(N+1)^{-1}\sum_{j=1}^{N+1}K(\xi,\tau_j)T_n(\tau_j) \tag{6.7.30}$$

并且τ_j由(6.4.22)给出，数列b_n是下面展开式的系数

$$f(\tau)=(1-\tau^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{N}b_nT_n(t); \tag{6.7.31}$$

方程(6.7.25)表明，$b_1=2/\pi$，由于$p'(x)$是x的奇函数，所有偶数n的b_n都等于零. 方程(6.7.27)和(6.7.28)提出了关于λ的特征值的问题. 如果L与b已经给定，求解过程如下：(1)选择a,W；(2) 找到方程(6.7.27)和(6.7.28)的特征值；(3) 检查特征值解——特征值λ必须为正，接触压力是连续的，梁一定不可以弯曲回去以接触半空间. 如果这个过程是针对点载荷的，$b=0$，可以发现，对于给定的W和$L/a=l$，或者正好有两个正特征值，或者对于给定的l，W不太大时，则接触不再是完全的 (即$p(x)$本身在$x=\pm L$处有平方根的奇异性) 而没有正的特征值. 当W小于这个临界值时，则发现，相应于两个特征值之一的接触应力如果假设代表接触不是连续的压缩，而相应于另一个特征值的接触应力则总是压应力.

接触长度仅仅依赖于载荷的形式——即对于给定的L和b用比值$W=W_0/(P_0+W_0)$表示——而与载荷的大小无关. 这与§4.10中的一般结果是一致的. 图6.7.3表示，对于不同的无量

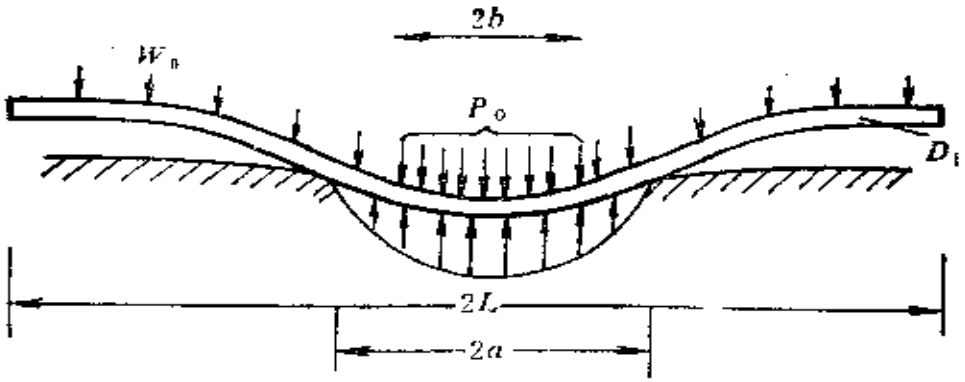


图6.7.2 放置在弹性半平面上的有限梁

纲的重量W值，无量纲的接触长度a/L随弹性常数比$K=\pi L^3/[12\vartheta_2 D_1]$的变化。曲线$W=0$是在$a/L=(0.345K)^{-1/3}$时给出的，因而在集中载荷作用下，无自重梁的接触长度由下式给出

$$a^3=12\vartheta_2 D_1/(0.345\pi)=11.07\vartheta_2 D_1 \qquad (6.7.32)$$

Weistman(1972)，利用接触区两端的$p(x)$的不正确的表达式，得到该值为2.41（即：正确的结果是11.07，Weitsman的错误结果为2.41——校者注）。

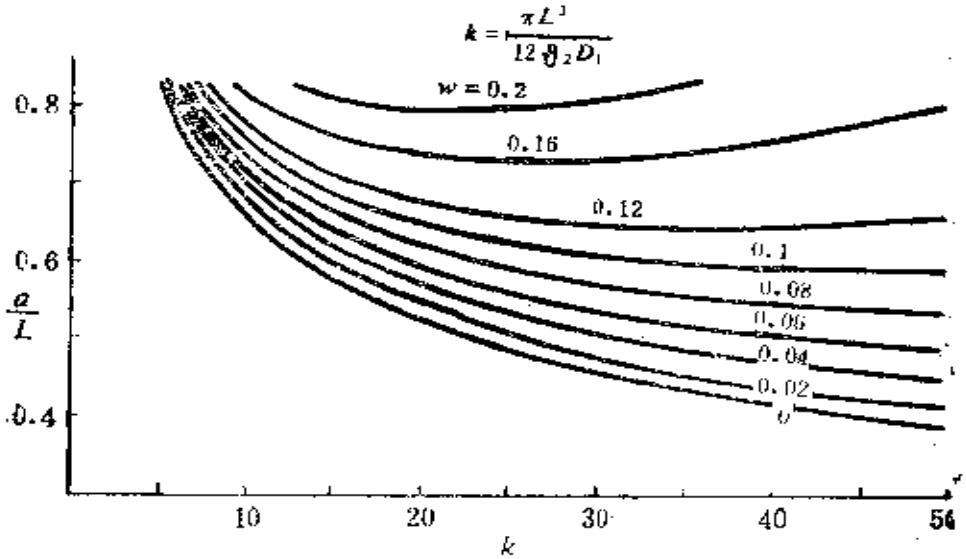


图 6.7.3 接触长度随弹性常数比值的变化

6.8 条带和半平面之间的退让接触

在§6.7处理这个问题时，是用弯曲的梁来模拟条带而作出分析的．Keer,Dundurs和Tsai(1972)考虑图6.8.1所示的条带，作为§6.3中的分析所控制的弹性条带．这个问题的边界条件是直接了当的，即

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,-h)=0,\quad \tau_{yy}^{(1)}(x,-h)=-q(x)H(b-|x|) \tag{6.8.1}$$

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=0=\tau_{xy}^{(2)}(x,0) \tag{6.8.2}$$

$$\tau_{yy}^{(1)}(x,0)=\tau_{yy}^{(2)}(x,0)=-p(x)H(a-|x|) \tag{6.8.3}$$

$$v^{(1)\prime}(x,0)=v^{(2)\prime}(x,0),\quad 0\leqslant|x|\leqslant a \tag{6.8.4}$$

而且还有两个其它条件，即力$p(x)$和$q(x)$是处于平衡状态的，接触应力是压力，那么

$$\int_{-a}^{a}p(x)\mathrm{d}x=Q_0=\int_{-b}^{b}q(x)\mathrm{d}x \tag{6.8.5}$$

$$p(x)\geqslant 0,\qquad b\leqslant|x|\leqslant a \tag{6.8.6}$$

控制半平面和条带的方程，分别在例5.4.2和例6.3.4中给出了．那么，半平面的(6.8.2)和(6.8.3)给出

$$(1-2\nu_2)A_2+C_2=0 \tag{6.8.7}$$

$$2\mu_2[2(1-\nu_2)A_2+C_2]=p(\xi) \tag{6.8.8}$$

而条带的方程(6.3.12)和例6.3.4给出

$$[(1-2\nu_1)A_1-uA_1+C_1]\exp u+[(1-2\nu_1)B_1+uB_1-D_1]\exp(-u)=0 \tag{6.8.9}$$

$$(1-2\nu_1)A_1+C_1+(1-2\nu_1)B_1-D_1=0 \tag{6.8.10}$$

$$2\mu_1[\{2(1-\nu_1)A_1-uA_1+C_1\}\exp u+\{-2(1-\nu_1)B_1-uB_1+D_1\}\exp(-u)]=Q(\xi) \tag{6.8.11}$$

$$2\mu_1[2(1-\nu_1)A_1+C_1-2(1-\nu_1)B_1+D_1]=P(\xi) \tag{6.8.12}$$

其中，$P(\xi)$和$Q(\xi)$分别是p和q的F_c变换(Fourier余弦变换)，并且$u=\xi h$。直线$y=0$上的位移导数为

$$v_1'(x,0)=-F_c[V_1(\xi);x],\quad v_2'(x,0)=-F_c[V_2(\xi);x] \tag{6.8.13}$$

其中

$$V_1=(3-4\nu_1)A_1+C_1+(3-4\nu_1)B_1-D_1 \tag{8.8.14}$$

$$V_2=(3-4\nu_2)A_2+C_2 \tag{6.8.15}$$

求解这些方程（例6.8.1），我们得到

$$V_1=\vartheta_2\left\{-P(\xi)\left[\frac{u+\sinh u\cosh u}{\sinh^2u-a^2}\right]+Q(\xi)\left[\frac{\sinh u+u\cosh u}{\sinh^2u-u^2}\right]\right\} \tag{6.8.16}$$

$$V_2=\vartheta_2P(\xi) \tag{6.8.17}$$

其中$\vartheta_i=(1-\nu_i)/\mu_i$。方程(6.8.3)和(6.8.4)给出一对积分方程

$$p(x)\equiv F_c[p(\xi),\ x]=0,\quad x>a \tag{6.8.18}$$

$$F_c[(\vartheta_1+\vartheta_2)P(\xi)+\vartheta_1\{e(u)P(\xi)-f(u)Q(\xi)\};x]=0,\quad 0\leqslant x<a \tag{6.8.19}$$

其中

$$e(u)=\frac{u+u^2+\sinh u\exp(-u)}{\sinh^2u-u^2},\quad f(u)=\frac{\sinh u+u\cosh u}{\sinh^2u-u^2} \tag{6.8.20}$$

并且方程的核经过重新整理，使第二部分对于大的u收敛；对于小的u，尽管$e(u)$和$f(u)$都有形式$6u^{-3}+O(u^{-1})$，但在下限它也是收敛的，因为对小的ξ有

$$P(\xi)=(2/\pi)^{1/2}\int_0^a p(x)\cos\xi x\,dx=(2/\pi)^{1/2}\int_0^a p(x)\times\left\{1-\frac{\xi^2x^2}{2}\cdots\right\}dx=(2/\pi)^{1/2}\{Q_0/2+O(\xi^2)\} \tag{6.8.21}$$

并且因为平衡条件

$$Q(\xi) = (2/\pi)^{1/2}\{Q_0/2 + O(\xi^2)\} \qquad (6.8.22)$$

现在分别用表5.7.2的算子(7)与算子(8)作用于方程(6.8.18)和(6.8.19)，我们得到

$$A_2^{-1}[p(x);t] = tH_0[P(\xi);t] = 0,\ t > a \qquad (6.8.23)$$

它给出

$$P(\xi) = H_0[t^{-1}\phi(t);\xi] = \int_0^a \phi(t) J_0(\xi t)\,\mathrm{d}t \qquad (6.8.24)$$

和

$$p(x) = F_c[P(\xi);x] = (2/\pi)^{1/2}\int_x^a (t^2 - x^2)^{-1/2}\phi(t)\,\mathrm{d}t \qquad (6.8.25)$$

使得

$$Q_0 = 2\int_0^a p(x)\,\mathrm{d}x = 2(2/\pi)^{1/2}\frac{\pi}{2}\int_0^a \phi(t)\,\mathrm{d}t \qquad (6.8.26)$$

而由方程(6.8.19)，我们有

$$(\vartheta_1 + \vartheta_2) H_0[P(\xi);s] + \vartheta_1 H_0[e(u)P(\xi) - f(x)Q(\xi);s] = 0 \qquad (6.8.27)$$

但是$H_0[P(\xi);s] = s^{-1}\phi(s)$，且有

$$H_0[e(u)P(\xi) - f(u)Q(\xi);s] = \int_0^\infty \xi[e(u)P(\xi) - f(u)Q(\xi)]$$

$$\times J_0(\xi s)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^\infty \xi[e(u)\int_0^a \phi(t)J_0(\xi t)\,\mathrm{d}t - f(u)Q(\xi)\{Q_0^{-1}(2\pi)^{1/2}\}$$

$$\times \int_0^a \phi(t)\,\mathrm{d}t]J_0(\xi s)\,\mathrm{d}\xi = -s^{-1}\int_0^a K(s,t)\phi(t)\,\mathrm{d}t \qquad (6.8.28)$$

这里

$$K(s,t) = s\int_0^a [f(u)\hat{Q}(\xi) - e(u)J_0(\xi t)]\xi J_0(\xi s)\,\mathrm{d}\xi \qquad (6.8.29)$$

而考虑到(6.8.28)的第二行里，括号中的项，乘以$Q(\xi)$，则等于

1：$\hat{Q}(\xi)=Q_0^{-1}(2\pi)^{1/2}Q(\xi)$。现在方程(6.8.27)成为

$$\int_0^a K(s,t)\phi(t)\,dt=\frac{2}{1+\alpha}\phi(s) \qquad (6.8.30)$$

这里的

$$\alpha=(\vartheta_1-\vartheta_2)/(\vartheta_1+\vartheta_2) \qquad (6.8.31)$$

是Dundurs(1969)的不匹配参数之一。方程(6.8.30)是$\phi(t)$的齐次方程，Keer等人曾以稍微不同的形式推导出这个方程。他们注意到，虽然给定了ϑ_1和ϑ_2的值和载荷分布$q(x)$，就可以求出接触长度a，但是取$q(x)$和a为已知值，再求接触长度为a的材料组合，则事情更容易些。在这个方法里，$2/(1+\alpha)$是方程(6.8.30)的特征值。把积分的直接近似表示作为$\phi(t)$的值的加权和，从而对方程(6.8.30)求数值解；在这种数值解中，他们发现，仅有一个特征值满足下面两个基本条件：(1) $-1\leqslant\alpha\leqslant1$；(2)由$\phi(t)$推导出来的接触压力，处处都是压缩。注意，如果在$0<t<a$范围内，$\phi(t)$是有限的，则方程(6.8.25)表明，当$x\to a^-$时，$\phi(x)\to0$。图6.8.2表示集中力作为载荷时，$a/h$与$\alpha$的函数关系。同一张图也表示了在方程$a^3=11.07\vartheta_2D_1$中，用柱板弯曲值$D_1=h^3/6\vartheta_1$代替$D_1$，即

$$(a/h)^3=1.65\vartheta_2/\vartheta_1=1.65(1-\alpha)/(1+\alpha) \qquad (6.8.32)$$

时所得到的曲线。

应该注意，因为载荷$q(x)$只从$\hat{Q}(\xi)$的形式进入方程(6.8.

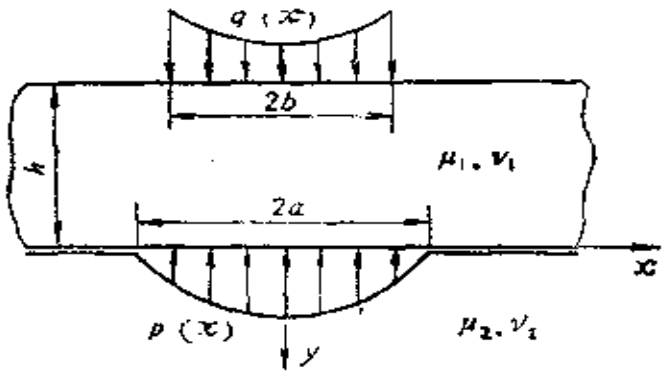


图 6.8.1 条带和半平面之间的退让接触

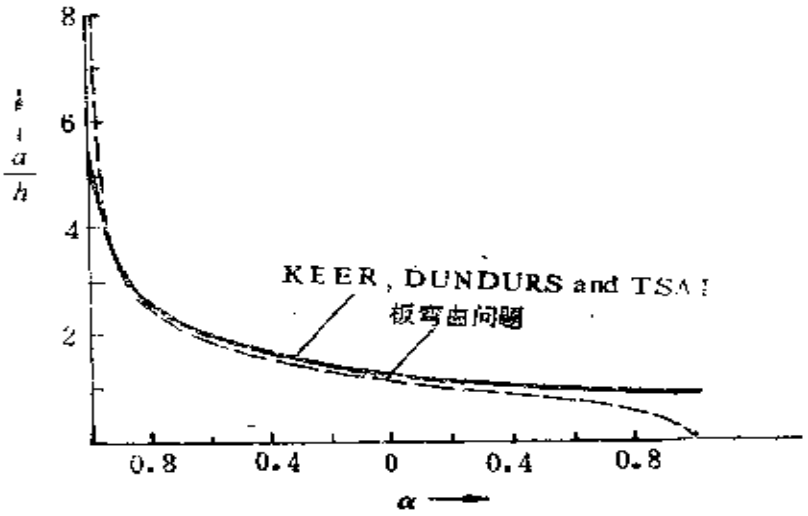


图6.8.2 无量纲的接触长度a/h随不匹配参数α的变化

29)中，所以接触范围不依赖于载荷Q_0的水平，它与(§4.10)退让接触问题的一般结果相符合，而且正如所指望的，弹性常数μ_1，ν_1，μ_2和ν_2仅通过参数α进入方程，那么，由平面弹性静力学应力场的一般性质可知，两物体内部的应力也仅依赖于这一个参数。当两种材料相同时，那么$\alpha=0$，则接触长度和应力与μ和ν无关。

Tsai, Dundurs和Keer(1972)将以上分析推广到图6.8.3所示的条带有轻微的曲线形底面的情形。这个问题在两个方面很有趣。第一，接触区域随着载荷水平而向前移动，而与条带为平底的情形不同；后者的接触是退让的，独立于载荷水平的。第二，如例6.8.2中所给出的，控制接触的积分方程，是方程(6.8.30)的非齐次对应者。当抛物线形驼背

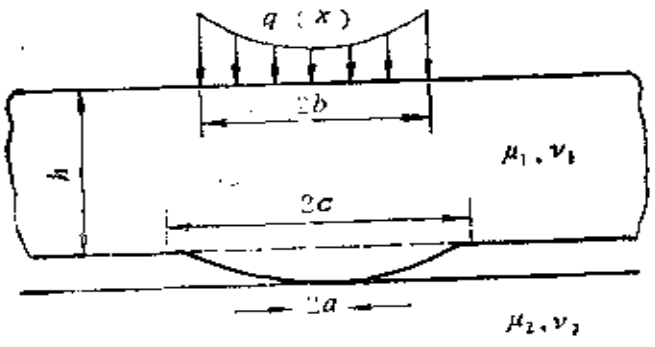


图6.8.3 具有曲线底面的条带的扩展接触

足够长（即$b/a>1$）以保证接触仅发生在中心区$|x|<a$上时，他们使用数值方法求解这一方程。更详细的情形，请读者参考他们的原文。

Keer和Chantaramungkorn(1972)考虑过均匀受载的枕垫如图6.8.4所示，长为$2b$的中心部分没有载荷。他们证明，当c/h增加时，枕垫在原点与半空间脱离，但a/h总小于c/h。他们详细地分析了这个问题，并且对不同的α值给出了数值结果。

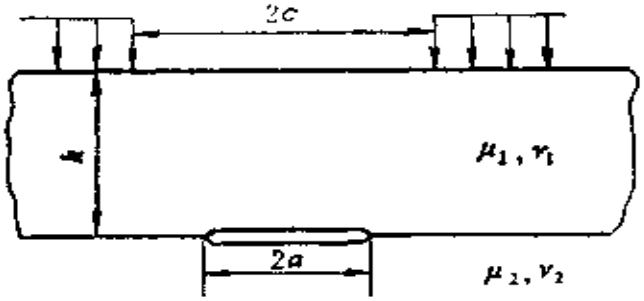


图6.8.4 在$|x|\leqslant c$以外，条带均匀受载

Tsai，Dundurs和Keer(1974)考虑过图6.8.1的普遍问题，其中$q(x)$并不限制为对称的，并且对于一些载荷给出了显式的数值结果。也可以参考Dundurs，Tsai和Keer(1975)的著作。

例6.8

1．试表明方程(6.8.9)～(6.8.12)的解由下式给出

$$4\mu_1 A_1(\sinh^2 u-u^2)=Q(u\exp(-u)+\sinh u)-P\exp(-u)(u\exp u+\sinh u),$$

$$c_1=-\frac{(3-4\nu_1)A_1}{2}+\frac{A_1}{2}\left\{\frac{u\exp u+\sinh u}{u\exp(-u)+\sinh u}\right\}+\frac{uP\exp(-u)}{4\mu_1(u\exp(-u)+\sinh u)},$$

$$B_1=A_1\left\{\frac{u\exp u+\sinh u}{u\exp(-u)+\sinh u}\right\}-\frac{P}{2\mu_1}\left\{\frac{\sinh u}{u\exp(-u)+\sinh u}\right\},$$

$$D_1=4(1-\nu_1)(1-2\nu_1)A_1+(3-4\nu_1)c_1-(1-2\nu_1)P/(2\mu_1)$$

2．假设图6.8.3的曲线凸起很浅，使得两物体间的缝隙$g(x)$满足$g(b)\ll b$并且$g(b)\ll h$，试表明，除(6.8.4)变为

$$v'^{(1)}(x,0)=v'^{(2)}(x,0)=g'(x)$$

之外，其余的控制方程是(6.8.1)～(6.8.6)。由此表明

$$\frac{2}{1+\alpha}\psi(s)-\int_0^a K(s,t)\psi(t)\,dt=-\frac{1}{\vartheta_1}A_1^{-1}[g'(x);-s]$$

3. Ratwani与Erdogan(1973)考虑过条带和半平面同时受到对称的刚性冲头压力作用的情形，如图6.8.5所示。试表明，在这种情形下，控制方程为(6.8.7)～(6.8.15)，并且还有

$$v'(x_1-h)=-F_c[V(\xi);x]=g(x),\quad 0\leqslant x<b$$

其中$V(\xi)=2(1-\nu_1)[A_1\exp u+B_1\exp(-u)]$。试用例6.8.1表明

$$V(\xi)=\vartheta_1\{[1+e(u)]Q(\xi)-f(u)P(\xi)\},$$

于是控制方程为(6.8.18)和(6.8.19)并且有

$$F_c[Q(\xi);x]=0,\qquad x>b,$$

$$\vartheta_1F_s[f(u)P(\xi)-(1+e(u))Q(\xi);x]=g'(x),\quad 0\leqslant x<b$$

现在利用例5.5.3，把这些方程化成

$$\int_{-b}^{b}\frac{q(t)\,dt}{t-x}+\int_{-b}^{b}E(t-x)q(t)\,dt-\int_{-a}^{a}F(t-x)p(t)\,dt=\pi\vartheta_1^{-1}g'(x)$$

$$\frac{\vartheta_2+\vartheta_1}{\vartheta_1}\int_{-a}^{a}\frac{p(t)\,dt}{t-x}-\int_{-b}^{b}F(t-x)q(t)\,dt-\int_{-a}^{a}E(t-x)p(t)\,dt=0$$

其中

$$E(x)=(\pi/2)^{1/2}F_c[e(u);\xi\to x]$$

$$F(x)=(\pi/2)^{1/2}F_c[f(u);\xi\to x]$$

Ratwani和Erdogan(1973)曾仔细地验证过这些方程。

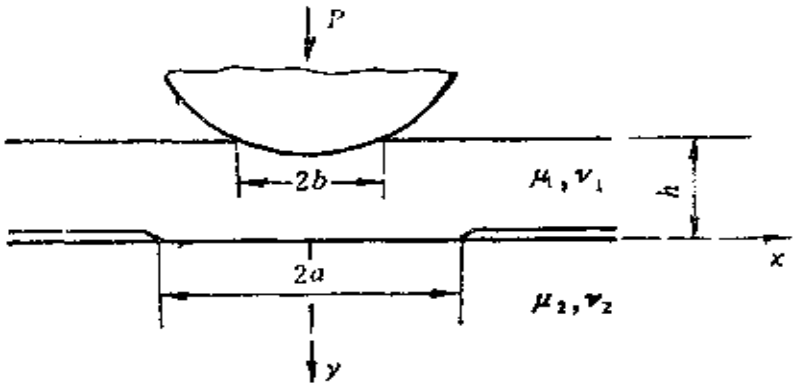


图6.8.5　条带和半平面同时受到对称性的刚性冲头的挤压作用

6.9 与平面条带和基础有关的进一步的问题

这一节讨论与平面条带有关的某些特殊问题。它们可以被看作是第五章中Abel, Fourier, Hankel和Hilbert变换理论结果怎样应用于推导出可用计算机计算的接触问题的控制积分方程的实例。

Keer和Silva(1972)利用 Fourier 和 Abel变换，分析了放置在刚性基础上的条带的退让接触问题。如图6.9.1所示，条带最初受到均匀压力$\tau_{yy}(x,h)=-p$的作用，那么拴在$x=0$端的不可延展的膜片举起了条带，使它在$y=0$，$0\leqslant x\leqslant l$处与基础失去接触；在$x=l$处，接触应力$\tau_{yy}(x,0)$为零，它正好适合不完全接触的情形。

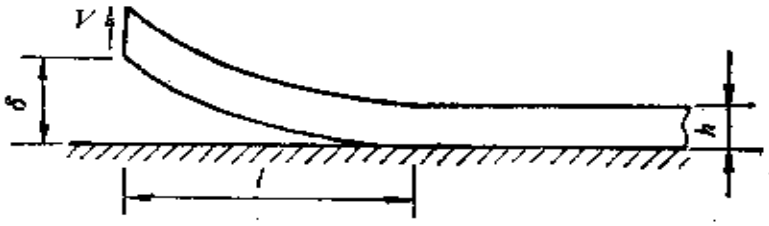


图6.9.1 从刚性基础上翘起来的条带

Keer和Silva寻求全条带的位移，让它们是两种位移的叠加，第一种由下面的式子给出

$$2\mu u(x,y)=vpx,\quad 2\mu v(x,y)=-(1-v)py+2\mu\delta \tag{6.9.1}$$

它们对应于条带均匀受压且刚体位移垂直于平面。第二种具有(6.3.12)中所用的Papkovich-Neuber 表达形式。为了适当地建立这一问题，需要定出表面$x=0$上的某些条件。他们假定位移v如上面所给，而法向应力为零。那么

$$2\mu v(0,y)=-(1-v)py+2\mu\delta,\quad \tau_{xx}(0,y)=0,\quad 0\leqslant y\leqslant h \tag{6.9.2}$$

其余的边界条件为

$$\tau_{xy}(x,h)=0=\tau_{xy}(x,0),\quad \tau_{yy}(x,h)=-p,\quad 0\leqslant x<\infty \tag{6.9.3}$$

$$\tau_{yy}(x,0)=0,\quad 0<x<l;v(x,0)=0,\quad l<x<\infty \tag{6.9.4}$$

条件(6.9.2)要求Papkovich-Nuber解与(6.9.1)式相加之和在例6.3.4的意义下是反对称的，于是

$$B(-\xi)=A(\xi),\quad D(-\xi)=-C(\xi),\quad -\infty<\xi<\infty \tag{6.9.5}$$

并且使用例6.3.4的记号及方程(6.3.9)～(6.3.11)得到

$$u(x,y)=F_c[U(\xi,y);\xi\to x]+\nu px/(2\mu) \tag{6.9.6}$$

$$v(x,y)=-F_c[V(\xi,y);\xi\to x]-(1-\nu)py/(2\mu) \tag{6.9.7}$$

$$\tau_{xy}(x,y)=F_c[T_{12}(\xi,y);\xi\to x] \tag{6.9.8}$$

$$\tau_{yy}(x,y)=-F_c[T_{22}(\xi,y);\xi\to x]-p \tag{6.9.9}$$

其中U,V,T_{12},T_{22}与A,B,C,D有关，若在(6.3.12)中删去i，则得到它们的相关方程。

现在应用$y=h$上的边界条件及条件$\tau_{yy}(x,0)=0$，得到的方程可以化为无量纲形式

$$\delta^{-1}v(x,0)=1-(2\lambda)^{-1}F_c[\tau^{-1}F(\tau);t] \tag{6.9.10}$$

$$p^{-1}\tau_{yy}(x,0)=-1+F_c[(1-G(\omega))F(\tau);t] \tag{6.9.11}$$

其中，$x=lt$，$l\xi=\tau$，$\omega=\xi h$，

$$\frac{2(\sinh 2\omega+2\omega)}{-1+2\omega+\exp(2\omega)}A(\xi)=lpF(\tau),\quad \frac{\delta}{2pl\vartheta}=a \tag{6.9.12}$$

$$G(\omega)=1-\frac{(2\sinh^2\omega-2\omega^2)}{\sinh 2\omega+2\omega}=\frac{\omega+\omega^2+\sinh\omega\exp(-\omega)}{\omega+\sinh\omega\cosh\omega} \tag{6.9.13}$$

现在必须选择$F(\tau)$，使得$\xi>1$时，有$v(x,0)=0$。例5.7.7表明，如果

$$F(\tau)=(2/\pi)^{1/2}H_0[s^{-1}f(s);\tau] \qquad (6.9.14)$$

其中，对于$s>1$，有$f(s)=0$，那么

$$F_s[\tau^{-1}F(\tau);t]\approx\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s，\ 当t>1 \qquad (6.9.15)$$

这意味着$F(\tau)$的表达式(6.9.14)将使$x>l$时$v(x,0)=0$，即$t>1$，若

$$\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s=2\lambda \qquad (6.9.16)$$

将$F(\tau)$表达式(6.9.14)代入方程(6.9.11)，并且使用例5.7.7，计算第一个积分。在$0\leqslant x<l$内，方程$\tau_{xx}(x,0)=0$成为

$$(2/\pi)^{1/2}A_1[f(s);t]-(2/\pi)\int_0^1 K_1(t,s)f(s)\mathrm{d}s=1 \qquad (6.9.17)$$

$$K_1(t,s)=\int_0^\infty G(\omega)\sin\tau t J_0(\tau s)\mathrm{d}\tau \qquad (6.9.18)$$

利用Abel反演(5.7.26)及例5.7.8对方程(6.9.17)求反演，结果为

$$f(t)-t\int_0^1 K(s,t)f(s)\mathrm{d}s=1 \qquad (6.9.19)$$

其中

$$K(s,t)=\int_0^\infty \tau G(\omega)J_0(\tau s)J_0(\tau t)\mathrm{d}\tau \qquad (6.9.20)$$

可用$\gamma=h/l$表示成

$$K(s,t)=\gamma^{-2}\int_0^\infty uG(u)J_0(us/\gamma)J_0(ut/\gamma)\mathrm{d}u \qquad (6.9.21)$$

紧接在方程(6.9.14)～(6.9.21)的上述步骤之后，或许可以将一对对偶积分方程化成Fredholm积分方程。在文献中可以查到很多这样的例子。在(6.3.24)～(6.3.29)以及(6.8.18)～(6.8.30)中出现了许多变化。

方程(6.9.19)是标准的非奇异的第二类Fredholm积分方程，可以使用数值方法求解（参考§6.4）。一旦找到了$f(t)$，

则可以从方程（6.9.16）求出 λ 值．自由段$0\leqslant\xi\leqslant 1$上的位移$\delta^{-1}v(x,0)$，可以由例5.7.7表示成$f(t)$的函数，它是

$$\delta^{-1}v(x,0)=1-(2\lambda)^{-1}\left\{\pi/2\int_0^{\xi}f(t)\mathrm{d}t+\int_{\xi}^{1}\arcsin(\xi/t)f(t)\mathrm{d}t\right\} \tag{6.9.22}$$

而$\xi>1$部分的接触应力由下式给出

$$p^{-1}\tau_{yy}(x,0)=-1+(2/\pi)\int_0^1(\xi^2-t^2)^{-1/2}f(t)\mathrm{d}t+(2/\pi)$$

$$\times\int_0^1 K(\xi,s)f(s)\mathrm{d}s \tag{6.9.23}$$

由表达式(6.9.22)和(6.9.23)很容易证明下列条件是很好得到满足的

$$v(x,0)=0=v'(x,0)=\tau_{yy}(x,0)\qquad x=l \tag{6.9.24}$$

Keer和Silva报导了他们利用Simpson法计算核函数中的有限积分与无限积分所得到的方程(6.9.19)的数值解．正如所设想的，当ν变小时，计算越来越复杂．他们给出了位移、接触应力及作用在端部$x=0$上的载荷S与挠度δ之比（例6.9.1）．他们发现，当$h/l=0.1$时，无量纲比值$(1-\nu)\delta l^3/(2\mu\delta h^3)$与由柱面弯曲理论得到的比值16/21相差为2%．

Civelek和Erdogan(1975)考虑了条带向上翘起的效应，问题如图6.9.2所示，同时受到向上的集中力P_0、条带向下的自重和均匀夹紧压力P的作用．

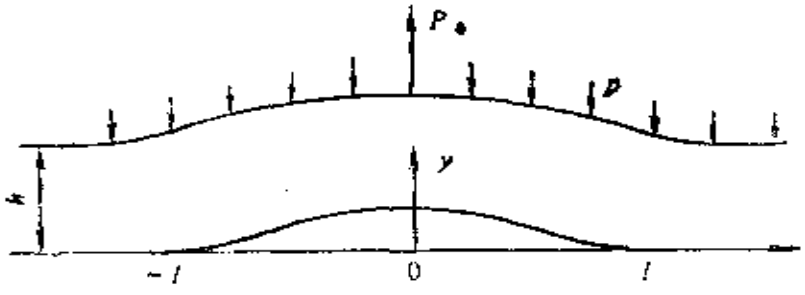


图6.9.2 对称条带的翘起

其解可以看作是两部分的叠加，即，一部分是重力和夹紧压力引起的位移，由下式给出

$$2\mu u_0(x,y) = \nu(p+\rho gh/2)x \tag{6.9.25}$$

$$2\mu v_0(x,y) = -(1-\nu)py + \rho g y[\nu(y-h) - (1-\nu)h/2] \tag{6.9.26}$$

另一部分是(6.3.12)形式的Papkovich-Neuber 解. 边界条件为

$$\tau_{xy}(x,0) = 0 = \tau_{xy}(x,h),\ \tau_{yy}(x,h) = P_0\delta(x) - p,\quad -\infty < x < \infty \tag{6.9.27}$$

$$v(x,0) = 0,\ |x| > a,\ \tau_{yy}(x,0) = 0,\quad |x| < a \tag{6.9.28}$$

考虑对称性，可以表明$u(x,y)$为x的奇函数，$v(x,y)$为偶函数，即

$$B(-\xi) = -A(\xi),\ D(-\xi) = C(\xi),\ -\infty < \xi < \infty \tag{6.9.29}$$

并且可以把Papkovich-Neuber位移写成为，如例6.3.4那样的形式：

$$u(x,y) = F_c[U(\xi,y);\xi \to x] \tag{6.9.30}$$

$$v(x,y) = F_c[V(\xi,y);\xi \to x] \tag{6.9.31}$$

而总应力可以写成

$$\tau_{xy}(x,y) = F_c[T_{12}(\xi,y);\xi \to x] \tag{6.9.32}$$

$$\tau_{yy}(x,y) = F_c[T_{22}(\xi,y);\xi \to x] - p + \rho g(y-h) \tag{6.9.33}$$

其中U，V，T_{12}和T_{22}是由(6.3.12)中删去之而得到的.

由于

$$F_c[1;\xi \to x] = (2\pi)^{1/2}\delta(x) \tag{6.9.34}$$

所以面$y = h$上的条件为

$$2C = Q\exp(\omega) + B\exp(2\omega) - (3-4\nu)A - 2\omega A \tag{6.9.35}$$

$$2D = Q\exp(-\omega) - A\exp(-2\omega) + (3-4\nu)B - 2\omega B \tag{6.9.36}$$

其中，$(2\pi)^{1/2}p\delta = Q$. 条件$\tau_{yy}(x,0) = 0$给出

$$A[\exp(-2\omega) - 1 - 2\omega] + B[-1 + 2\omega + \exp(2\omega)] + Q\sinh\omega = 0 \tag{6.9.37}$$

因此有

$$v'(x,0) = -F_0[A + B;\ \xi \to x] \tag{6.9.38}$$

$$\tau_{yy}(x,0) = -F_0[2(1+\nu)A + C - 2(1-\nu)B + D;\ \xi \to x] - p - \rho gh \tag{6.9.39}$$

有两种情形需要考虑. 如果力P_0不充分大，条带将保持与基础完全接触，那么$a = 0$和$v(x,0) = 0$对任意x值都成立. 在这种情形下，可以写出

$$x = ht,\quad \lambda = P_0/[h(p+\rho gh)] \tag{6.9.40}$$

我们得到

$$(p+\rho gh)^{-1}\tau_{yy}(x,0) = -1 + 2\lambda\pi^{-1}\int_0^\infty H(\omega)\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{6.9.41}$$

其中

$$H(\omega) = (\sinh\omega + \omega\cosh\omega)/(\sinh 2\omega + 2\omega) \tag{6.9.42}$$

当λ由零开始增加时，接触压力将处处为压缩作用，直到临界λ_{cr}时，接触压力才在原点变成零. 临界值λ_{cr}由下面式子给出

$$2\lambda_{cr}\int_0^\infty H(\omega)\mathrm{d}\omega = \pi \tag{6.9.43}$$

Civelek和Erdogan求出$\lambda_{cr} = 1.088$.

当$\lambda > \lambda_{cr}$时，条带将离开基础，使得非零的a可以作为标准长度. 令

$$x = at,\quad a\xi = \tau,\quad \gamma = h/a,\quad p + \rho gh = p_0 \tag{6.9.44}$$

$$v'(x,0) = \delta p_0 f(t),\quad \tau_{yy}(x,0) = p_0 g(t) \tag{6.9.45}$$

$$-(p_0 a)^{-1}(A(\xi) + B(\xi)) = F(\tau) \tag{6.9.46}$$

那么方程(6.9.38)可以写成

$$f(t)=F_c[F(\tau);t],\quad 0\leqslant\xi<1 \tag{6.9.47}$$

而(6.9.39)变成

$$g(t)=F_c[(1+K(\omega))F(\tau);\tau\to t]+(2/\pi)\lambda\gamma\int_0^\infty H(\omega)\cos\tau t\,d\tau-1 \tag{6.9.48}$$

其中

$$K(\omega)=\{\exp(-2\omega)-(1+2\omega+2\omega^2)\}/(\sinh 2\omega+2\omega) \tag{6.9.49}$$

利用方程(5.5.12)和例5.5.3，可以将$F(\tau)$中的项用$f(\xi)$表示。方程(6.9.48)变成

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(\tau)K(\tau-t)d\tau+\frac{2\lambda\gamma}{\pi}\int_0^\infty H(u)\cos\tau\,d\tau-1 \tag{6.9.50}$$

其中

$$k(\xi)=\int_0^\infty K(\omega)\sin(\tau\xi)d\tau=\gamma^{-1}\int_0^\infty K(u)\sin(\omega\xi/\gamma)du \tag{6.9.51}$$

并且通常已经将$f(\tau)$扩充为在$-1<\xi<0$上的奇函数。现在，对于$|t|<1$的方程$g(t)=0$已经具有形式(6.3.25)，并且可以用§6.4中的方法求解；无约束接触条件指的是在条件(6.4.36)下，$f(x)$必须在形式(6.4.20)中去寻找。图6.9.3是从Civelek和Erdogan(1975)的文章中复制的，它表示λ与a/h的曲线图形，为了比较，还得到了简单梁的曲线$\lambda=4a/(3h)$。Civelek与Erdogan(1976)考虑了放置在刚性基础上条带受法向压力作用的效应。

关于受平板加强物约束的问题，在第七章中讨论。很多文章讨论了受约束的条带或局部受约束于另一条带或一个半平面的问

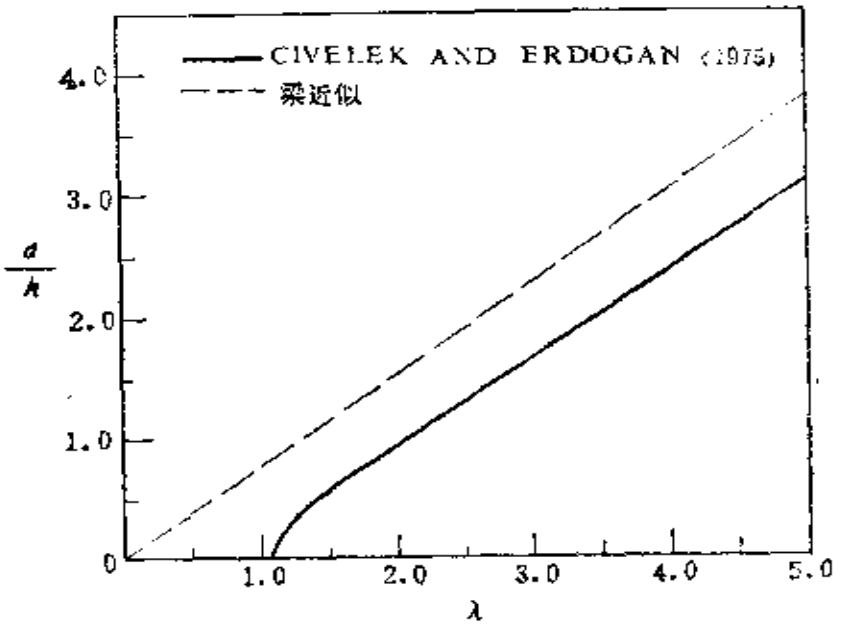


图6.9.3 a/h与λ的函数关系

题；其中包括Goland和Reissner(1944)，Keer(1974)，Chang和Muki(1974)，Chantaramungkorn和Keer(1975)以及Keer和Chantaramungkorn(1975)的工作。

例6.9

1. 试表明，作用在图6.9.1所示的条带端部的总剪力为

$$S=\frac{2ip}{\pi}\int_{-1}^{1}L(t)f(t)\mathrm{d}t$$

其中

$$L(t)=\int_0^\infty \omega^{-1}\left(\frac{\sinh^2\omega-\omega^2}{\sinh\omega\cosh\omega+\omega}\right)J_0(\omega tl/n)\,\mathrm{d}\omega$$

6.10 非均匀半平面

无体力时，控制平面应变的方程为位移-应变方程(1.2.4)和(1.2.5)，应力-应变方程

$$\left.\begin{aligned} 2\mu e_{xx} &= (1-\nu)(\tau_{xx}+\tau_{yy})-\tau_{yy} \\ 2\mu e_{yy} &= (1-\nu)(\tau_{xx}+\tau_{yy})-\tau_{xx} \\ 2\mu e_{xy} &= \tau_{xy} \end{aligned}\right\} \qquad (6.10.1)$$

和平衡方程

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \qquad (6.10.2)$$

平衡方程的解可以用Airy应力函数表示，如例1.11.3。当介质均匀时，μ和ν为常数，例1.11.2的相容性条件表明Airy应力函数U是双调和的。当μ和ν为x与y的函数时，由相容方程得到

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left\{\frac{1}{\mu}\left\{(1-\nu)\nabla^2 U-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}\right\}$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{1}{\mu}(1-\nu)\nabla^2 U-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right\}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left\{\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right\}=0 \qquad (6.10.3)$$

在实际中更重要的情形是ν为常数，这时变成(Du Ching Hua，杜庆华 (1961)，Rostovtsev(1964b))

$$(1-\nu)\nabla^2\left\{\frac{1}{\mu}\nabla^2 U\right\}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$
$$-\frac{2\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \qquad (6.10.4)$$

下面的情形是值得注意的

$$\mu=my^{\lambda} \qquad (6.10.5)$$

那么

$$\nabla^2(y^{-\lambda}\nabla^2 U)=\frac{\lambda(\lambda+1)}{1-\nu}y^{-\lambda-2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (6.10.6)$$

Rostovtsev(1966b)用Whittaker函数求解了这个方程。对于半空间$y\geqslant c>0$或条带$c\leqslant y\leqslant d$，可以用这些函数来给出解；参考下列作者的著作：Golecki(1961)，Gibson等(1971)及Plevako-

(1973a).

在半空间$y\geqslant 0$和μ的变化为(6.10.5)描述的特殊情形下，Rostovtsev(1964b)寻求Flamant解(§2.1)的非均质材料的对应问题，即寻求纯径向的应力状态，得到了由作用在边界$y=0$上摩擦力引起的应力状态；Lekhnitski(1962a)，(1963b)已经表明，当这种状态存在时，μ和ν如何必须改变，且$\mu=my^{\lambda}$，$\nu=\nu_0$具有所需的变化类型。对于纯径向应力状态，有$\tau_{r\theta}=0=\tau_{\theta\theta}$，且$\tau_{rr}$必须满足

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr})=0 \tag{6.10.7}$$

它给出$\tau_{rr}=r^{-1}F(\theta)$。相应的应变为(1.6.13)，即

$$e_{rr}=\frac{(1-\nu)\tau_{rr}}{2\mu},\quad e_{\theta\theta}=-\frac{\nu\tau_{rr}}{2\mu} \tag{6.10.8}$$

且相容方程(例1.11.5)为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)e_{\theta\theta}+\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)e_{rr}=0 \tag{6.10.9}$$

将(6.10.8)的e_{rr}和$e_{\theta\theta}$代入此式，并且假设μ为变量，ν为常数，我们求得

$$(1-\nu)\nabla^2\left(\frac{\psi}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2},\quad \psi=\frac{m}{\mu}r\tau_{rr}=\frac{m}{\mu}F(\theta) \tag{6.10.10}$$

这个方程具有包含任意参数的封闭形式的解

$$\psi(r,\theta)=r^{q}(A\cos q\theta+C\sin q\theta) \tag{6.10.11}$$

$$q=q(\alpha)=\{(1-\alpha)[1+\alpha\nu/(1-\nu)]\}^{1/2} \tag{6.10.12}$$

可以由Stieltjes积分得到一个更一般形式的解

$$\psi=\int r^{q}\{\cos[\theta q(\alpha)]\mathrm{d}A(\alpha)+\sin[\theta q(\alpha)]\mathrm{d}C(\alpha)\} \tag{6.10.13}$$

在(6.10.5)情形下，$\mu=m(r\sin\theta)^{\lambda}$，且

$$F(\theta)=r^{\lambda}(\sin\theta)^{\lambda}r^{q}(A\cos q\theta+C\sin q\theta) \tag{6.10.14}$$

这样$\alpha=-\lambda$，$q=q(-\lambda)$，且

$$\tau_{rr}=r^{-1}(\sin\theta)^{\lambda}(A\cos q\theta+C\sin q\theta) \qquad (6.10.15)$$

这个解可以用§2.1中的步骤来检验．由围绕原点的半圆域上的应力所得出的合力，在x方向和y方向的分量，由下式给出

$$-P=\int_0^{\pi}\tau_{rr}r\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}\sin\theta(\sin\theta)^{\lambda}(A\cos p\theta+C\sin q\theta)\,d\theta \qquad (6.10.16)$$

$$-S=\int_0^{\pi}\tau_{rr}r\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}\cos\theta(\sin\theta)^{\lambda}(A\cos q\theta+C\sin q\theta)\,d\theta \qquad (6.10.17)$$

利用Gradshteyn和Ryzhik(1965，3,631)的方法，我们求出

$$-2IP=\pi(A\cos\beta+C\sin\beta),\quad -2JS=\pi(A\sin\beta-C\cos\beta) \qquad (6.10.18)$$

其中$\beta=\pi q/2$，并且

$$\left.\begin{aligned} I&=2^{\lambda}(\lambda+2)B,\quad qJ=2^{\lambda}(\lambda+1)(\lambda+2)B\\ B&=B\left\{\frac{\lambda+q+3}{2},\frac{\lambda-q+3}{2}\right\}\end{aligned}\right\} \qquad (6.10.19)$$

且后者为Beta函数．这样

$$\left.\begin{aligned} \pi A&=-2\left[IP\cos\beta+JS\sin\beta\right]\\ \pi C&=-2\left[IP\sin\beta-JS\cos\beta\right]\end{aligned}\right\} \qquad (6.10.20)$$

$$\tau_{rr}=-\frac{2\sin^{\lambda}\theta}{\pi r}\left\{IP\cos q\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+JS\sin q\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\} \qquad (6.10.21)$$

在均质情形有$\lambda=0$，$q=1=I=J$，且

$$\tau_{rr}=-\frac{2}{\pi r}\{P\sin\theta+S\cos\theta\} \qquad (6.10.22)$$

与公式(2.1.11)和例2.1.1相一致．这样(6.10.21)给出由于在原点上有分量为S和P的力作用在上半平面上产生的应力分布．由

(6.10.21)得到的位移为

$$u_r=\frac{1-\nu}{\pi m}\frac{r^{-\lambda}}{\lambda}\left\{IP\cos q\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+JS\sin q\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\} \tag{6.10.23}$$

$$u_\theta=\frac{1-\nu}{\pi m}\frac{qr^{-\lambda}}{\lambda(1+\lambda)}\left\{IP\sin q\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-JS\cos q\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\} \tag{6.10.24}$$

根据下面的应力分布

$$\tau_{yy}(t,0)=-p(t),\quad \tau_{xy}(t,0)=-s(t) \tag{6.10.25}$$

我们可以推断出轴$y=0$上的在直角坐标中的位移u和v

$$u(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\{g_{11}s(t)+g_{12}\mathrm{sign}(x-t)p(t)\}\,|x-t|^{-\lambda}\mathrm{d}t \tag{6.10.26}$$

$$v(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\{-g_{12}\mathrm{sign}(x-t)s(t)+g_{22}p(t)\}\,|x-t|^{-\lambda}\mathrm{d}t \tag{6.10.27}$$

$$g_{11}=\frac{(1-\nu)J\sin\beta}{\pi m\lambda},\ g_{12}=\frac{(1-\nu)I\cos\beta}{\pi m\lambda},\ g_{22}=\frac{(1-\nu)\alpha I\sin\beta}{\pi m\lambda(1+\lambda)} \tag{6.10.28}$$

Rostovtsev(1984b)运用此解得到了非均质半空间的相应的结果，可以参考本书§12.5.

由于积分(6.10.26)与(6.10.27)在壤力学中具有重要的意义，所以我们用几种特殊来检验它们. 如果$[-b,b]$上载荷为法向均匀的，且如果$0<\lambda<1$，那么位移$v(x,0)$为

$$v(x,0)=g_{22}P_0\int_{-b}^{b}|x-t|^{\lambda}\mathrm{d}t \tag{6.10.29}$$

于是

$$v(x,0)=\begin{cases}g_{22}P_0[(b-x)^{1-\lambda}+(b+x)^{1-\lambda}]/(1-\lambda), & |x|\leqslant b\\ g_{22}P_0[(|x|+b)^{1-\lambda}-(|x|-b)^{1-\lambda}]/(1-\lambda), & |x|>b\end{cases} \tag{6.10.30}$$

存在三种特殊情形：

（Ⅰ）$\lambda=0$，均匀介质．这里从(6.10.22)到(6.10.23)，(6.10.24)的途径是通不过的，并且法向位移由例2.1.6给出．

（Ⅱ）$\lambda=1, \nu\neq 1/2$．这是一种剪切模量正比于深度的可压缩介质．在这种情形下，当$|x|<b$时，积分(6.10.29)是奇异的；而$v(x,0)-v(0,0)$可以由(6.10.29)作为Cauchy主值计算出来，即

$$v(x,0)-v(0,0)=g_{22}P_0\left\{\int_{-b}^{x-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{x-t}+\int_{x+\varepsilon}^{b}\frac{dt}{t-x}\right.$$

$$\left.-\int_{-b}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}t}{-t}-\int_{\varepsilon}^{b}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}=g_{22}P_0\ln(1-x^2/b^2) \qquad (6.10.31)$$

当$|x|>b$时

$$v(x,0)=g_{22}P_0\ln[(|x|+b)/(|x|-b)] \qquad (6.10.32)$$

当$\lambda=1$时，表达式(6.10.28)推导出$g_{22}=\varphi/(2m)$．方程(6.10.31)和(6.10.32)出现在Awojobi和Gibson(1973)的著作中．

（Ⅲ）$\lambda=1$，$\nu=1/2$．这是所谓的"Gibson"介质．在这种情形下，我们可以对(6.10.30)取$\lambda\to 1-$时的极限．当$\lambda\to 1-$时，$g_{22}/(1-\lambda)$的极限为$1/(2m)$，它给出

$$v(x,0)=\begin{cases}P_0/(2m), & |x|<b\\ 0, & |x|>b\end{cases} \qquad (6.10.33)$$

Gibson(1976)指出，由于叠加原理成立，方程组(6.10.33)的含义为：

(a)介质的性质同Winkler基础(§2.10)完全一样，在这种意义上，如果边界$y=0$上作用任意法向载荷$p(x)$，那么它与边界上的位移的关系为方程

$$p(x)=kv(x,0),\quad k=2m \qquad (6.10.34)$$

他也发现：

(b)边界上的法向载荷在Gibson介质中形成的应力分布（而不是位移场）同在均匀介质中的完全相同. Calladine和Greenwood(1978)在一篇易懂的文章中表明了(b)可以简单地由考虑方程(6.10.21)而得到. 当$\lambda=1$, $\nu=1/2$, 则$q=0$及$I=1$, 原点上的法向载荷P引起的应力场为

$$\tau_{rr}=-2P\sin\theta/(\pi r) \qquad (6.10.35)$$

这与$S=0$时的(6.10.22)一样. Calladine与Greenwood是从纯径向位移场

$$u_r=P(2\pi mr),\quad u_\theta=0 \qquad (6.10.36)$$

出发的，在这种情形下，此式由(6.10.23)和(6.10.24)给出.

对于$\nu=\nu_0$, $\mu=\mu_0+my$这种一般情形的表面下沉$v(x,0)$由Gibson, Brown和Andrews(1971), P.T.Brown与Gibson(1972)等等给出，而更深层的由Awojobi与Gibson(1973)给出. Awojobi分析了$\mu=\mu_0 h/(h-y)$时深度为h的枕垫. 平面应变横观各向同性的Gibson介质的性能是Gibson和Kolsi(1974), Gibson和Sills(1975)及Calladine和Greenwood (1978) 讨论的. 横观各向同性轴取为垂直于表面(y轴)，平面应变在xy平面内. 存在两个均正比于y的剪切模量μ和μ'，即$\mu=my$, $\mu=n\mu'$. 这样的介质具有上述性质(a)，但是这里的k正如m一样，与n有关，性质(b)不再成立.

6.11 正交多项式方法

在很多情形下，接触问题的解可以归结为一个或多个积分方程的解. 积分方程中的未知量通常为接触应力，由接触应力给出接触区位移的值. 在以前的章节中，求解积分方程所用的方法之一，在下面将要用到，就是找到基本应力分布，使得由此积分（即，位移）可以显式地得以计算. 这个方法已经有了很大的发展，特别是在G.Ia.Popov的著作中.

在最简单的情形下，无摩擦各向同性半平面中，积分方程由例2.1.4给出，即

$$v(x)=-\frac{\vartheta}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\left|\frac{x-x'}{a}\right|p(x')\mathrm{d}x' \tag{6.11.1}$$

其适当的积分关系式为

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|x-t|\,T_n(t)\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{1/2}}=\begin{cases}\ln 2, & n=0\\ n^{-1}T_n(x), & n\neq 0\end{cases} \tag{6.11.2}$$

正如Popov(1963a)所给出且在第二章中所讨论的。核$\ln|x-t|$是Popov(1963a),(1969)称为多项式核，或更简单地称为π核的例子。Popov给出一组定义，但是对我们来说，指明$\Pi(x,t)$为π核已经足够，如果存在一组多项式$P_n(x)$，使得

$$\int_a^a \Pi(x,t)g(t)P_n(t)\mathrm{d}t=\sigma_n h(x)P_n(x),\quad n=1,2,\cdots \tag{6.11.3}$$

这里$P_n(x)$的阶为n，并且$g(x)$和$h(x)$为与n无关的函数。对于非均匀半平面无摩擦接触问题，方程(6.10.27)给出

$$v(x,0)=g_{22}\int_{-a}^{a}\frac{p(t)\mathrm{d}t}{|x-t|^{\lambda}} \tag{6.11.4}$$

对此，Popov得到下面的积分关系（适用于$0\leqslant\lambda<1$）

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{C_n^{\lambda/2}(t)\mathrm{d}t}{|x-t|^{\lambda}(1-t^2)^{(1-\lambda)/2}}$$

$$=\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\cos(\pi\lambda/2)\Gamma(\lambda)n!}C_n^{\lambda/2}(x),\quad |x|\leqslant 1 \tag{6.11.5}$$

这里$C_n^{\lambda/2}(x)$是Gegenbauer多项式。利用下面的极限，由关系式(6.11.5)可以得出(6.11.2)

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\left[\left\{\frac{1}{|x-t|^{\lambda}}-1\right\}\frac{1}{\lambda}\right]=\ln\left\{\frac{1}{|x-t|}\right\}\\ &\lim_{\lambda\to 0}\Gamma(\lambda/2)C_n^{\lambda/2}(x)=\frac{2}{n}T_n(x)\end{aligned}\right\} \tag{6.11.6}$$

Popov(1963a)提出，式(6.11.5)可以看作如下的运用于$0\leqslant\lambda<1$，$\mu>-1$的更一般情形的公式的特例

$$\int_0^1(1-t^2)^{-\omega}t^{\mu+1}W_\mu^\lambda(t,x)P_n^{(\mu,-\omega)}(1-2t^2)\mathrm{d}t$$
$$=\mu_n x^\mu P_n^{(\mu,-\omega)}(1-2x^2) \qquad (6.11.7)$$

其中$\omega=(1-\lambda)/2$，$P_n^{(\mu,-\omega)}$为Jacobi多项式，且

$$W_\mu^\lambda(t,x)=\int_0^\infty \xi^\lambda J_\mu(\xi t)J_\mu(\xi x)\mathrm{d}\xi \qquad (6.11.8)$$

$$\mu_n=\frac{(-1)^n 2^{\lambda-1}\pi\Gamma(1+n-\mu-\omega)}{\sin\pi\omega\Gamma(1+n+\mu)\Gamma(\omega-n)n!} \qquad (6.11.9)$$

在$\lambda=0=\mu$的情形下，可以给出结果(2.6.12)和(2.6.13)，因为

$$P_n^1(t)=P_n^{(1,1/2)}(1-2t^2)=P_{2n}[(1-t^2)^{1/2}] \qquad (6.11.10)$$

而$\lambda=0$，$\mu=m$的情形中，则出现在§10.5中(见例10.3.4和方程(10.5.25)—(10.5.27)；那里多项式$P_n^{(m,-1/4)}$是用Legendre函数P_ν^μ表示的)。

在例2.1.4中令$s(x)=kp(x)$，可以得到各向同性半平面上具有极限摩擦的接触控制方程，它是

$$\frac{2\mu}{(1-2\nu)k}v(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sign}(x-x')\right.$$
$$\left.-\frac{1}{nk\varphi}\ln\left|\frac{x-x'}{a}\right|\right\}p(x')\mathrm{d}x' \qquad (6.11.11)$$

当$|x|\leqslant 1$时，Popov(1966)找到一个适当的积分关系式

$$\int_{-1}^1\left\{\frac{1}{2}\mathrm{sign}(x-t)-\frac{\cot\pi\alpha}{\pi}\ln|x-t|\right\}\frac{P_{n,\alpha}(t)\mathrm{d}t}{\phi_\alpha(t)}$$
$$=\mu_n P_{n,-\alpha}(x) \qquad (6.11.12)$$

其中，$P_{n,\alpha}(t)=P_n^{(-\gamma,-\delta)}(t)$，$\phi_\alpha(t)=(1-t)^\gamma(1+t)^\delta$，并且$\gamma=1/2-\alpha$，$\delta=1/2+\alpha$，$|\mathrm{Re}(\alpha)|<1/2$，$n=0,1,2,\cdots$，

$$\left.\begin{aligned}2\mu_0&=\pi\sec\pi\alpha-2\mathrm{cosec}\pi\alpha[\ln 2+\psi(\delta)-\psi(1)]\\ \mu_n&=(n\sin\pi\alpha)^{-1}\end{aligned}\right\} \qquad (6.11.13)$$

其中，ψ是Euler的ψ函数。§6.10中非均匀半平面的相应问题的控制方程为

$$v(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\{g_{22}-kg_{12}\mathrm{sign}(x-t)\}\frac{p(t)\mathrm{d}t}{|x-t|^{\lambda}} \qquad (6.11.14)$$

对此，Popov(1967a)，(1967b)对他的早期结果作了概括和推广，也可以参考Popov(1964),(1967c),(1970),(1972a),(1973a)的著作。

第七章　经过加强的板

7.1　引　　言

由加强筋或弦边引起的载荷在弹性板内扩散的问题，在飞机结构的设计上很重要，已经成为一个广泛的研究课题。

这个课题的研究，事实上是从Melan（1932a，1932b）的两篇文章开始的。在他的第一篇文章中（见§5.8），他推导了在平面内一点受一单位集中力作用而边界$y=0$的自由情形下，上半平面的应力分布。这一结果后来一再用来求得剪切应力对于板的效应，这种剪切应力是由一个加强筋的附着而引起的，下面将介绍这一问题。在他的第二篇论文中，对于一个具有无限长度的、薄的直加强筋，他解决了两个基本问题。第一个问题涉及占有上半平面的板当全边界$y=0$被加强时的响应，这时在原点处作用一个在板平面内沿x方向的力，如图7.2.1所示。其第二个问题如图7.2.3所示，涉及占有整个xy平面的板沿x轴加强的情形。对这两个问题的分析，在形式上是一致的，因而都称为“Melan问题”。在这两个问题中，加强筋仅仅有拉伸作用。

Reissner（1940）是建立加强板的第三个基本问题的第一位研究者，该问题如图7.7.1所示。这里边界上的法向载荷通过一条横向弦边而扩散到板内，弦边是垂直于边界的。Reissner假定弦边较薄，以致载荷作用在一条线上，并且他承认，他所得到的奇异积分方程，与出现在空气动力学中的Prandtl举力线理论中的方程有相似性。他没有解这个方程，最后也没有确定作用在弦边端部和第一个附着点的剪应力边界条件，而代之以直观的判断，认为没有集中载荷能够作用在这些点上。

接着发表的文章，总的可以分成两组：一组主要是这三个基本问题之一的某种普遍化的数学分析，另一组是试图说明载荷渗透的力学，特别是，回答了 Reissner 提出的问题. 在某种意义上，如常常发生的那样，很难把数学与力学分开. 深入分析不同几何结构形状的控制积分方程，是澄清力学机理的唯一的适宜的方法.

进行数学分析的第一篇重要文章，是 E. L. Buell (1948) 写的，他考虑了半无限长加强件的Melan第一问题，即它占有半直线$x>0$，如图7.4.1所示. 利用平面弹性双调和 控制方程的势函数解和全xy平面到单位圆内的保角映射，他得到了用 Fourier 级数表示的近似解. 在 §7.4中，将以大为简化的形式介绍他的分析. Buell的结果经E.H.Brown(1957)推广到其他可能的半平面载荷. Koiter(1955)注意到，虽然Buell的分析完全可以满足实用要求，但由于他没有建立他的无限的控制方程组解的收敛性，因而不够严格. Koiter 根据 §9.2 中介绍的 Mellin 变换推导了Melan的两个半无限筋条问题的严格解. Kalandia (1969b) 根据 Muskhelishvili 方法给出一个优美的解，将在 §7.4 中讨论它. Vorob'ev (Воробьев) 与 Popov (1970) 解决了数学上更困难的问题，其中单位载荷不作用在半无限加强筋的端部而是作用在距离端部任意位置处.

Pflüger(1947) 第一次对一有限长度的薄加强件(允许加强件厚度变化) 建立了Melan (第一) 问题的公式. 他求解的问题的控制积分方程，使之与Prandtl举力线理论中的方程具有完全相同的形式，虽然他没有解这个方程，但他考虑了不同剪应力分布对于板的效应. Benscoter (1949)独立地作出Melan(第二)问题的"公式表示"，并且用求解空气动力学方程的数值方法去求解它. 他的"公式表示"，在 §7.3中介绍，那里用Chebyshev多项式求解该方程，并且使 Benscoter 数值结果得到了验证. Glover (1950) 在评论 Benscoter 的文章中，注意到，若传给

板的剪应力在加强件的宽度上均匀分布，而不是沿中心线作用，那么积分方程的核在$x=t$处具有一种简单的跳跃式的不连续性，而不是具有Cauchy奇异性$(x-t)^{-1}$。在这种情形下，在加强筋的端部有一个集中载荷传给平板。

1938～1948年期间，在英国航空研究署的报告与备忘录中建立了关于载荷扩散的详细的和根本上分开的文献，由H. L. Cox, E. H. Mansfield, J. H. Argyris 以及其他人完成的这项工作中，以平面应力解来模拟平板，并且使用简化“片”模型来模拟平板，对不同构形的板，推导出Melan与Reissner问题。特别是，推导了作用在无限或半无限板的平面载荷的基本响应函数，找到了某些“反”解或设计用解——亦即加强筋横截面形状对应于给定的应力分布。这方面的参考文献，可以在Mansfield (1948) 的评述文章中查到。

Goodier与Hsu (1954) 再次研究Reissner问题。他们首先研究处于（广义）平面应力下为某区域D所界限的两张板。结果表明，若两张板的Poisson比ν_1和ν_2相等，那么束缚力将仅仅分布在接触区D的边界上，而在$\nu_1\neq\nu_2$时，此力将分布在整个D内，此外，线载荷分布在D的边界上。他们得到了仅仅是D内的应力、应变的显式表达式，应变是平面内的，都以D外部和板内的应力表示出来。以同样的方式，他们得到D内的线分布〔Muki和Sternberg (1968b) 以确定的形式讨论过这一类问题〕。然后他们把这种分析应用到Reissner问题中，但是作了些简化假设。他们假设弦边给平板作用一种线载荷，然而他们注意到，在Krahn (1955) 的讨论中，当弦边和板有相同Poisson比时，正如他们所假设的，将作用一种载荷，作为弦边两侧的沿着两棱的平行的两种线载荷。他们建立了弦边张力$p(y)$的积分方程，使用他们的一般理论来描述板和弦边接触点上的集中载荷，但是用另一种假设，$p'(a)=0$，作为所需的弦边端部的条件。尽管有这些假设，他们仍获得与实验相吻合的结果。Krahn(1955)评论此文章时建议，

在弦边侧面应有均匀分布的剪切载荷，并且建立了这一假设下的积分方程。可是，Goodier与Hsu却指出，所考虑了的这一分布的结果与实验吻合得不好。Lefevre, Mudge和Dickie (1966) 重新有效地研究了Krahn的模型，建立了积分方程，并且求出作用在板两端的载荷，或某种等价条件，张力$p(y)$ 在两端$y=0$和$y=l$的不连续性. 可是，他们对适当的端点条件的推导，很烦琐，他们的分析被一个初等的代数错误糟踏了，这个错误影响了其数值结果。Reissner 问题的确切的研究，包括不同载荷假设下的结果与实验的比较，已被Muki和Sternberg (1968a) 完成了，他们的结果，将在下面详细讨论。

在Benscoter (1949) 之后，Bufler(1959, 1961, 1964)，Budiansky和Wu (1961)，Tamate和 Kamada (1963)，以及Muki和Sternberg (1967)，都研究过Melan 问题。Bufler一般性地讨论了加强筋的变化和载荷的形状，而Muki 和 Sternberg分析了各种可能的假设，这些假设涉及无限棱边 的加强筋的基本分布的载荷渗透方式。这些文章将在以后讨论到。

载荷渗透的更为复杂的三维问题，在Muki与Sternberg 的一系列文章 (1968b, 1969, 1970) 中作了分析，Sternberg (1970) 综述了这些以及其它问题。

7.2 Melan原始问题

弹性模量为E_1、横截面积为A的加强筋，附着在厚度为h的处于广义平面应力状态的半无限平板的边界$y=0$上。设$q(x)$ 表示加强筋上的纵向力，$s(x)$ 表示加强筋与平板之间的剪应力，$f(x)$ 为作用在加强筋的单位长度上的力，如图7.2.1所示。假设可以略去加强筋的弯曲刚度及其上的法向压力，则加强筋处于单轴应力状态。如图7.2.1所表明，有

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}+f(x)=hs(x) \tag{7.2.1}$$

加强筋中的纵向应力为

$$\varepsilon^{(1)}(x)=\frac{q(x)}{AE_1} \tag{7.2.2}$$

由剪应力$\tau_{xy}(x,0)=-s(x)$引起的上半平面位移，可以由例题5.4.1得到，在广义平面应力中，用$\nu^*=\nu/(1+\nu)$代替ν，得到

$$\left.\begin{aligned}&E_2u(x,0)=2F^*[\,|\xi|^{-1}S(\xi);x]\\&S(\xi)=F[s(x);\xi]\end{aligned}\right\} \tag{7.2.3}$$

所以

$$E_2\varepsilon^{(2)}(x,0)=-2\mathrm{i}F^*[S(\xi);x] \tag{7.2.4}$$

但由于加强筋和平板是相接的，$\varepsilon^{(1)}(x)=\varepsilon^{(2)}(x,0)$，所以将$q(x)=AE_1\ \varepsilon^{(2)}(x,0)$代入式(7.2.1)，可得

$$f(x)=F^*[\{h+2AE_1|\xi|/E_2\}S(\xi);x] \tag{7.2.5}$$

可以反演以给出$S(\xi)$．如果在区间$[-a,a]$上的合力P，是以单位长度上的均匀的力$f=P/(2a)$的方式作用的，则

$$\begin{aligned}&\{h+2AE_1|\xi|/E_2\}S(\xi)=F[f(x);\xi]\\&=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}P\sin a\xi/(a\xi)\end{aligned} \tag{7.2.6}$$

特别是，如果$a\to 0$，则此力在原点变成点力，于是，

$$\{h+2AE_1|\xi|/E_2\}S(\xi)=(2\pi)^{-1/2}P \tag{7.2.7}$$

引进长度$l=2AE_1/E_2h$，令$x=l\overline{x}$，$\overline{\xi}=l\xi$；剪应力为

$$s(x)=F_c[s(x);\ x]=\frac{PE_2}{2\pi AE_1}\int_0^\infty\frac{\cos\overline{\xi}\,\overline{x}}{1+\overline{\xi}}\mathrm{d}\overline{\xi} \tag{7.2.8}$$

其积分可以用下面的式子表示

$$s_i(\overline{x})=-\int_{\overline{x}}^\infty\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\ C_i(\overline{x})=-\int_{\overline{x}}^\infty\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \tag{7.2.9}$$

此表示可见Abramowitz和Stegun (1972) 的著作．那么

$$s(x)=-\frac{PE_2}{2\pi AE_1}\left\{\cos\overline{x}\,C_i(\overline{x})+\sin\overline{x}\ s_i(\overline{x})\right\} \tag{7.2.10}$$

由例题5.4.1推演出，表面应力$\tau_{zz}(x,0)$成为

$$\tau_{zz}(x,0)=\frac{PE_2}{\pi AE_1}\left\{\cos\overline{x}\,s_i(\overline{x})-\sin\overline{x}\,C_i(\overline{x})\right\} \tag{7.2.11}$$

例题7.2.3表明了应力如何从边界衰减下去．图7.2.2表示无量纲量

$$-AE_1s(x)/(PE_2),\quad AE_1\tau_{zz}/(PE_2)$$

很明显，在$|x|>8l$时，$s(x)$是可以忽略的，而在$|x|=8l$时，τ_{zz}均为其最大值的10%．

图7.2.3表示了Melan第二问题的模型．面积为A、宽度为h的加强筋沿x方向约束了整个xy平面，可假设它处于广义平面应

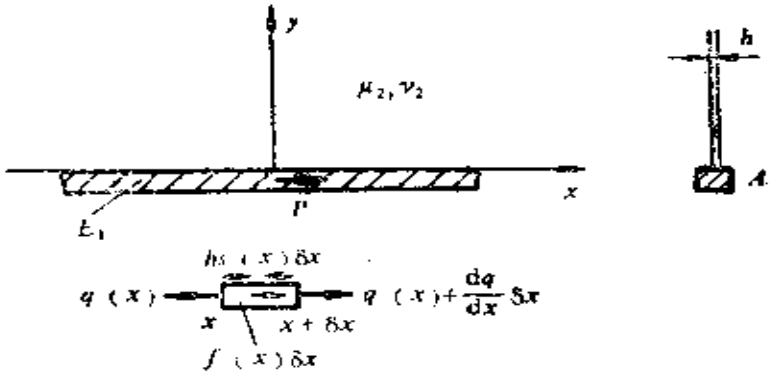


图 7.2.1 Melan第一问题

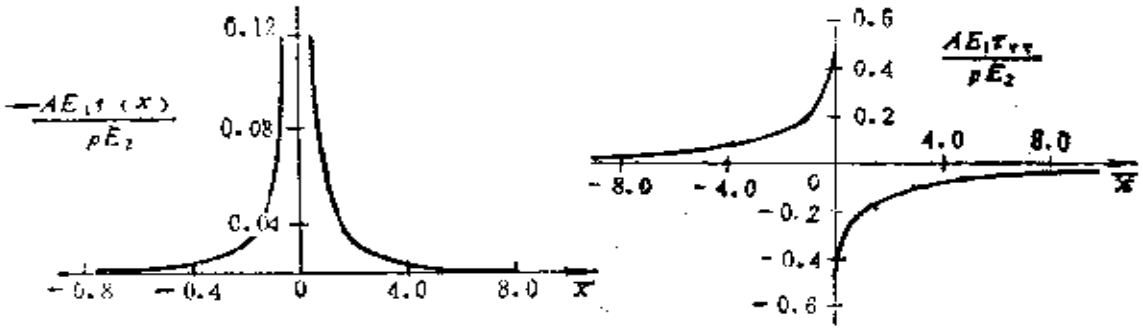


图7.2.2 Melan问题中的无量纲应力

力状态．因为忽略了弯曲效应，故宁可假设有两条加强筋，每条的面积为$A/2$，处于平板的两侧，以取代只有一条面积为A的加强筋．联系$q(x)$、$f(x)$和$s(x)$的方程，仍为式（7.2.1）；应变由式（7.2.2）给出，但是方程（7.2.3）须由这样的方程代替，它给出整个xy平面上剪应力分布引起的位移．按照Melan的原始文章，我们假设载荷作用在直线$y=0$上．平板内的位移，可以在例题5.8.2中以ν^*取代ν而得到．所以

$$E_1^* u(x,0) = 2F^*[\,|\xi|^{-1} s(\xi), x] \qquad (7.2.12)$$

其中

$$E_1^* = 8E_1/[(3-\nu)(1+\nu)] \qquad (7.2.13)$$

现在，比较式（7.2.3）与式（7.2.2），可以看出，问题等价于Melan第一问题，若以E_1^*代替E_1，所以分析与前面相同．

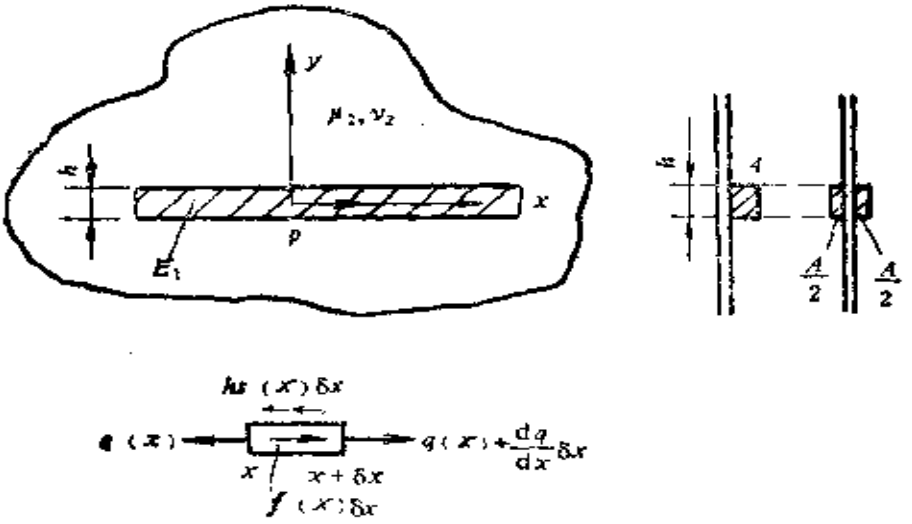


图7.2.3 Melan第二问题

Martynovich和Yurinets（1975，1976，1977）解决了非均匀、非各向同性的半平面的Melan问题．Sarkisian和Avanesian（1977）考虑了无限长的弦边约束下、固结边界的两个弹性长条的Melan问题．

例7.2

1．试表明

$$\lim_{x\to 0\pm}\left[\cos\overline{x}\,s_i(\overline{x})-\sin\overline{x}\,C_i(\overline{x})\right]=\mp\frac{\pi}{2}$$

2. 如图 7.2.1 所示，当坐标r为小量时，证明："边缘被加强的"平板的应力场为

$$\tau_{xx}=\frac{PE_2}{2\pi AE_1}\left\{\frac{\sin 2\theta}{2}-\pi+2\theta\right\}+O(1)$$

$$\tau_{xy}=\frac{PE_2}{2\pi AE_1}\ln r+o(1)$$

$$\tau_{yy}=-\frac{PE_2}{4\pi AE_1}\sin 2\theta+o(1)$$

利用积分

$$\int_0^\infty \exp(-ax)\sin(bx)\mathrm{d}x=b/(a^2+b^2)$$

$$\int_0^\infty x^{-1}\exp(-ax)\sin(bx)\mathrm{d}x=\operatorname{arctg}(b/a),a>0$$

3. 如图 7.2.1 所示，对于大的r值，证明："边缘被加强的"平板的应力场为

$$\tau_{xx}=-\frac{2P}{\pi hr}\left\{\cos^3\theta+\frac{\alpha\sin 2\theta(1-4\cos^2\theta)}{2\omega r}+O(r^{-2})\right\}$$

$$\tau_{xy}=-\frac{2P}{\pi hr}\left\{\sin\theta\cos^2\theta+\frac{\alpha\cos 4\theta}{2\omega r}+O(r^{-2})\right\}$$

$$\tau_{yy}=-\frac{2P}{\pi hr}\left\{\sin^2\theta\cos\theta+\frac{\alpha\sin\theta\cos 3\theta}{\omega r}+O(r^{-2})\right\}$$

其中，$\alpha=A/h_1,\omega=h_2E_2/(2h_1E_1)$。注意，在这些表达式中，第一项是未经"加强边缘的"平板的应力（见例题2.2.1）。

7.3 有限长度加强筋的Melan问题

考虑广义平面应力（§1.11）状态下、占据上半平面$y>0$的平板。假设在边界$y=0$的$[-a,a]$区间中已经被厚度为h、横截面面积为A的弹性加强筋作用而得到强化，如图7.3.1所示。假设加强筋的弯曲刚度及加强筋作用在平板上的法向压力，都可以忽略，则加强筋处于受拉伸状态。这样，加强筋就处在单轴应力状态，

其弹性模量为E_1，由Hooke定律给出加强筋中的应力变$e^{(1)}_{xx}$

$$e^{(1)}_{xx} = u^{(1)}_{,x}(x) = \frac{1}{AE_1}\left[h\int_{-a}^{x} s(t)\,dt - Q_0\right] \tag{7.3.1}$$

其中，加强筋和平板上的（平均）剪应力为

$$\tau^{(1)}_{xy}(x) = \tau^{(2)}_{xy}(x) = -s(x), \quad -a \leqslant x \leqslant a \tag{7.3.2}$$

Q_0是作用在加强筋左端的力，如图7.3.1所示．另一方面，半平板边界位移，由例题2.1.3给出，其中 $\theta_2 = (1-\nu_2^*)/\mu_2 = 2/E_2$，并且

$$e^{(2)}_{xx} = u^{(2)}_{,x}(x) = \frac{2}{\pi E_2}\int_{-a}^{a} \frac{s(t)\,dt}{t-x} \tag{7.3.3}$$

在$[-a,a]$上，位移值u_1和u_2相等，它给出

$$\left.\begin{aligned} \int_{-a}^{a} \frac{s(t)\,dt}{t-x} &= \frac{\lambda}{a}\left[\int_{-a}^{x} s(t)\,dt - \frac{Q_0}{h}\right] \\ \lambda &= \frac{\pi h a E_2}{2AE_1} \end{aligned}\right\} \tag{7.3.4}$$

作用在加强筋上的合力P_0为

$$h\int_{-a}^{a} s(t)\,dt = P_0 + Q_0 \tag{7.3.5}$$

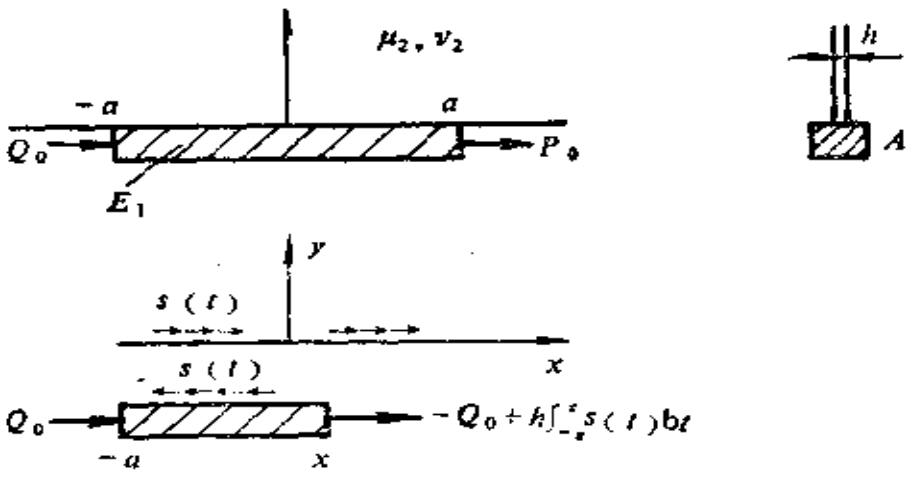


图 7.3.1　有限长的加强筋附着在平板上

方程（7.3.4）可以写成多种形式。根据Reissner(1940)，可以写为

$$q(x)=h\int_{-a}^{x}s(t)\mathrm{d}(t)-Q_0,\quad q'(x)=hs(x) \tag{7.3.6}$$

则方程（7.3.4）变成一个积分微分方程

$$\int_{-a}^{a}\frac{q(t)\mathrm{d}t}{t-x}=\frac{\lambda}{a}q(x),\quad -a\leqslant x\leqslant a \tag{7.3.7}$$

其端部条件为

$$q(a)=P_0,\ q(-a)=-Q_0 \tag{7.3.8}$$

方程（7.3.7）出现在空气动力学中Prandtl举力线理论里，恰好是Benscoter（1949）应用近似方法推导的Prandtl方程。在Muskhelishvili（1953b）第十七章中，研究过这个方程，而参考文献则追溯到德国、特别是苏联早期研究工作者的工作，而I. N. Vekua和L. G. Magnaradze更详尽地将这个方程化为第二类Fredholm积分方程。我们倾向于给出易于推导的且适合计算机处理的方程的级数解。

按照Morar'(Мораръ)和 Popov(1970)的办法，利用恒等式

$$\int_{-a}^{x}s(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}s(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_{x}^{a}s(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{-a}^{x}s(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{P_0+Q_0}{2h}-\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\operatorname{sign}(t-x)s(t)\mathrm{d}t \tag{7.3.9}$$

写出如下形式的方程

$$\int_{-a}^{a}\left\{\frac{1}{t-x}+\frac{\lambda}{2a}\operatorname{sign}(t-x)\right\}s(t)\mathrm{d}t=\frac{\lambda(P_0-Q_0)}{2Qh} \tag{7.3.10}$$

这个方程具有式（6.3.25）的形式，剪应力在 $\pm a$ 处有平方根的奇异性。

为了方便起见，我们分别考虑对称和反对称载荷。前者，$Q_0=-P_0$，$s(t)$为奇函数，解的形式如下

$$s(t) = (P_0/h)(a^2 - t^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(t/a) \tag{7.3.11}$$

n为偶数时，$a_n = 0$. 式（7.3.10）中的积分，可用式（2.3.26）计算出来，其结果为

$$\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \frac{\operatorname{sign}(t-x)T_n(t/a)\,\mathrm{d}t}{(a^2-t^2)^{1/2}} = \begin{cases} -\arcsin(x/a), & n=0 \\ n^{-1}(1-x^2/a^2)^{1/2}U_{n-1}(x/a), & n=1,2,\cdots \end{cases} \tag{7.3.12}$$

适用于$|x| \leqslant a$，它是由Popov（1968）导出的. 我们求出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{\pi + \lambda n^{-1}(1-x^2/a^2)^{1/2}\} a_n U_{n-1}(x/a) = \lambda \tag{7.3.13}$$

两边同乘以$(1-x^2/a^2)^{1/2}U_{n-1}(x/a)$，运用例题2.3.2中的正交性条件，方程变成

$$a_m + \frac{2\lambda}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n} a_n = \frac{a\lambda}{\pi^3} b_m \tag{7.3.14}$$

其中m和n为奇数，且

$$K_{m,n} = n^{-1}\int_{-1}^{1} (1-t^2)U_{n-1}(t)U_{m-1}(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.3.15}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2m[1+(-1)^{n-m}]}{[n^2-(m-1)^2][n^2-(m+1)^2]}, & n \neq m-1,\ n \neq m+1 \\ 0, \text{ 对于其它} \end{cases} \tag{7.3.16}$$

$$b_m = \begin{cases} 2m[1+(-1)^m]/(m^2-1)^2, & m \neq 1 \\ \dfrac{\pi^2}{4}, & m = 1 \end{cases} \tag{7.3.17}$$

在反对称状态，$P_0 = Q_0$，解与式（7.3.11）同形式，且对奇数n有$a_n = 0$，方程（7.3.5）给出$\pi a_0 = 2$，式（7.3.13）由下面的方程代替

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{\pi+\lambda n^{-1}(1-x^2/a^2)^{1/2}\}a_nU_{n-1}(x/a)$$

$$=2\lambda\pi^{-1}\arcsin(x/a) \qquad (7.3.18)$$

得到的方程组仍为式（7.3.14），其中 m 和 n 为偶数. 注意，在 Arutiunian和 Mkhitrarian（1971）的分析中采用了同样方法，但存在若干正负号的错误. Arutiunian（1968）早期的解，极其繁琐，而由Morar′（Морарь）和 Popov（1970）给出的解，在其方程（1.7）之后，出现错误. Erdogan和Gupta（1971）作出的分析与上面描绘的非常相象.

对于有限长为 $2a$ 而宽度为 h，附着在无限长平板上 x 轴方向的加强筋，可在量 λ 中用 E_1^* 代替 E_2 而得到相应问题的解，见 §7.2 中的讨论.

对所有的 λ 值，在Kantorovich和 Krylov（1958）的意义上，当 m 和 n 均为奇数时或均为偶数时，方程组（7.3.14）是完全正则的. 方程组

$$x_m=\sum_{n=1}^{\infty}c_{m,n}x_n+b_m \qquad m=1,2,\cdots \qquad (7.3.19)$$

是完全正则的，若存在这样一个数 θ，使得

$$s_m=\sum_{n=1}^{\infty}|c_{m,n}|\leqslant(1-\theta)<1,\ m=1,2,\cdots \qquad (7.3.20)$$

在这种情形下，假如 $|b_m|$ 有界，则由式（7.3.19）的前 N 个方程得到的解 $\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$ 在 $N\to\infty$ 时的极限，将是方程组（7.3.19）的解. 为了证明方程组（7.3.14）是完全正则的，注意，当 m 与 n 具有相同的奇偶性时，有

$$K_{m,n}\begin{cases}=4m/(4m^2-1), & n=m\\ <0, & n\neq m\end{cases} \qquad (7.3.21)$$

这样，方程组（7.3.14）可以写为

$$\left[1+\frac{8\lambda m}{\pi^2(4m^2-1)}\right]a_m+\frac{2\lambda}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}{}'K_{m,n}a_n=\frac{4\lambda}{\pi^3}b_m \tag{7.3.22}$$

其中“,”的意思是$m\neq n$. 因为$m/(4m^2-1)<1/3$，且$K_{m,n}$是负数，则

$$s_m=\frac{2\lambda}{\pi^2}\left(1+\frac{8\lambda m}{\pi^2(9m^2-1)}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}{}'|K_{m,n}|$$

$$\leqslant -2\lambda\left(1+\frac{8\lambda}{\pi^2}\cdot\frac{1}{3}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}{}'K_{m,n} \tag{7.3.23}$$

但是，很容易证明（例题7.3.2）

$$-\sum_{n=1}^{\infty}{}'K_{m,n}=\frac{4m}{4m^2-1}-\sum_{n=1}^{\infty}K_{m,n} \tag{7.3.24}$$

并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}K_{m,n}=\begin{cases}\pi^2/8, & m\text{和}n\text{同时为奇数，}m=1\\ 0\quad, & m\text{和}n\text{同时为奇数，}m\neq 1\\ 2m/(m^2-1)^2, & m\text{和}n\text{同时为偶数}\end{cases} \tag{7.3.25}$$

那么

$$s_m\leqslant\frac{2\lambda}{\pi^2}\left(1+\frac{8\lambda}{3\pi^2}\right)^{-1}\frac{4m}{4m^2-1}\leqslant\frac{8\lambda}{3\pi^2}\left(1+\frac{8\lambda}{3\pi^2}\right)^{-1}<1 \tag{7.3.26}$$

所以方程组为完全正则的. Arutiunian和Mkhitarian(1971)，Erdogan和Gupta (1971)，都证明了仅当λ在某个范围内该方程组是完全正则的.

Bufler(1959，1961)对有限长的加强筋〔对刚性 (1959) 和弹性拉伸 (1961) 两者均包括在内〕的Melan 问题作了详细的研究，同时也考虑到许多情形：在横向的单向拉伸状态下，半无限板的边缘附加以加强筋；径向拉伸的平板有中心加强筋；连接两张半无限平板的加强筋；平板的边缘加强筋承受拉伸、剪切和扭

转的各种组合作用而产生变形；两张半无限平板的公共边界上附着一条加强筋，承受不同组合的作用力。Bufler 文章（1961）中的大部分分析，可以大量利用本节介绍的 Chebyshev 多项式表达的积分而得到简化；他给出广泛的数值结果及某些实验验证。Keer和Freedman（1973）考虑了横观各向同性的狭长体上附着的加强筋。

Erdogan（1971）对于任意多的加强筋（覆盖板）附着在弹性无限平板上的一般性问题，建立了公式。他应用 Muskhelishvili的复变数分析，并特别考虑了二条、三条或周期分布的多条加强筋的几种情形。他得到了对于一条、两条及周期分布的多条的不可伸长的加强筋的封闭形式的解，以及弹性加强筋的数值解。

涉及一对相同加强筋的问题，不论是反对称加载（如图7.2.3所示），或对称加载（如图 7.3.3 所示），都可以使用 §4.8 中的对于两个冲头的方法进行分析。控制方程为

$$e_{xx}^{(1)} = u_x^{(1)\prime}(x) = \begin{cases} -\dfrac{h}{AE_1}\displaystyle\int_x^{-b} s(t)\,\mathrm{d}t, & -a \leqslant x \leqslant -b \\ \dfrac{h}{AE_1}\displaystyle\int_b^x s(t)\,\mathrm{d}t, & b \leqslant x \leqslant a \end{cases} \tag{7.3.27}$$

和

$$e_{xx}^{(2)} = u_x^{(2)\prime}(x) = \frac{2}{\pi E_2}\int_{L'} \frac{s(t)\,\mathrm{d}t}{t-x} \tag{7.3.28}$$

其中L'为$[-a,-b]$与$[b,a]$的联合，并且有

$$\tau_{xy}^{(1)}(x) = \tau_{xy}^{(2)}(x) = -s(x), \quad 在L'上 \tag{7.3.29}$$

根据载荷是反对称（a）或对称（s），我们得到结果

$$(a)\quad P_0 = h\int_{-a}^{-b} s(t)\,\mathrm{d}t = h\int_b^a s(t)\,\mathrm{d}t, \quad s(-t) = s(t) \tag{7.3.30}$$

$$(a)\ u^{(1)\prime}(x) = -\frac{h}{2AE_1}\int_{L'}\operatorname{sign}(t-x)\,s(t)\,\mathrm{d}t,$$

x在L'上 (7.3.31)

$$(s)\ P_0 = -h\int_{-a}^{-b} s(t)\,\mathrm{d}t = h\int_{b}^{a} s(t)\,\mathrm{d}t,\quad s(-t) = -s(t)$$

(7.3.32)

$$(s)\ u^{(1)\prime}(x) = -\frac{h}{2AE_1}\int_{L'}\operatorname{sign}(t-x)\,s(t)\,\mathrm{d}t + \frac{P_0}{AE_1}$$

x在L'上 (7.3.33)

因而有

$$(a)\int_{L'}\left\{\frac{1}{t-x}+\frac{\lambda}{2a}\operatorname{sign}(t-x)\right\}s(t)\,\mathrm{d}t = 0,\quad x\text{在}L'\text{上}$$

(7.3.34)

$$(s)\int_{L'}\left\{\frac{1}{t-x}+\frac{\lambda}{2a}\operatorname{sign}(t-x)\right\}s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\lambda P_0}{ah},\quad x\text{在}L'\text{上}$$

(7.3.35)

$s(t)$在两端点$(\pm a, \pm b)$上有平方根的奇异性. 在例题 4.8.6 中，如果

$$\tau = (2t^2 - a^2 - b^2)/(a^2 - b^2) \tag{7.3.36}$$

则多项式$T_n(\tau)$以权函数$|t|\{(a^2-t^2)(t^2-b^2)\}^{-1/2}$的形式在$L'$上正交. 在反对称情形下，我们假设有一个解，其形式如下

$$s(t) = P_0\,|t|\,h^{-1}\{(a^2-t^2)(t^2-b^2)\}^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nT_n(\tau)$$

(7.3.37)

因而式 (7.3.30) 给出$\pi a_0 = 2$. 式 (7.3.34) 中的第一个积分，由例题4.8.5给出，而第二个则将式(7.3.36)代入式 (7.3.12)，由式 (7.3.12) 变换后得到

$$\int_{L'}\frac{\operatorname{sign}(t-x)\,|t|\,T_n(\tau)\,\mathrm{d}t}{\{(a^2-t^2)(t^2-b^2)\}^{1/2}}$$

$$=\begin{cases}-(\pi/2+\arcsin\xi)\operatorname{sign}(x), & n=0\\ n^{-1}(1-\xi^2)^{1/2}U_{n-1}(\xi)\operatorname{sign}(x), & n=1,2,\cdots\end{cases}\qquad(7.3.38)$$

其中，$\xi=(2x^2-a^2-b^2)/(a^2-b^2)$。于是，当$x$在$L'$上，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-4\pi a\,|x|\,(a^2-b^2)^{-1}+\lambda n^{-1}(1-\xi^2)^{1/2}\right\}U_{n-1}(\xi)$$

$$=\lambda a_0(\pi/2+\arcsin\xi)\qquad(7.3.39)$$

两边同乘以$(1-\xi^2)^{1/2}U_{m-1}(\xi)$并且运用恒等式

$$(1-\xi^2)^{1/2}=2\{(a^2-x^2)(x^2-b^2)\}^{1/2}/(a^2-b^2)\qquad(7.3.40)$$

最终的方程组是

$$a_m-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}K_{m,n}a_n=-b_m\qquad(7.3.41)$$

其中

$$K_{m,n}=\frac{a^2-b^2}{2\pi^2 an}\int_0^{\pi}\frac{\sin m\theta\sin n\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(a^2\cos^2\theta/2+b^2\sin^2\theta/2)^{1/2}}\qquad(7.3.42)$$

$$b_n=\frac{\lambda(a^2-b^2)}{\pi^3 a}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-\theta)\sin m\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(a^2\cos^2\theta/2+b^2\sin^2\theta/2)^{1/2}}\qquad(7.3.43)$$

在对称情形下，我们假设解的形式如下

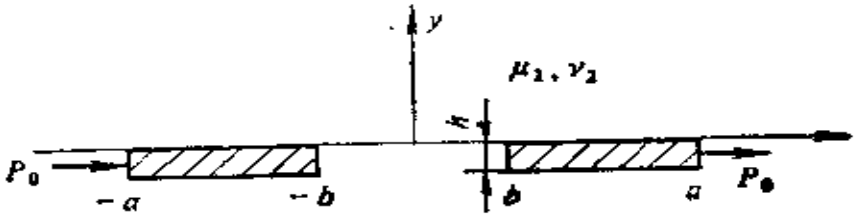


图7.3.2　两条相同的加强筋承受反对称载荷

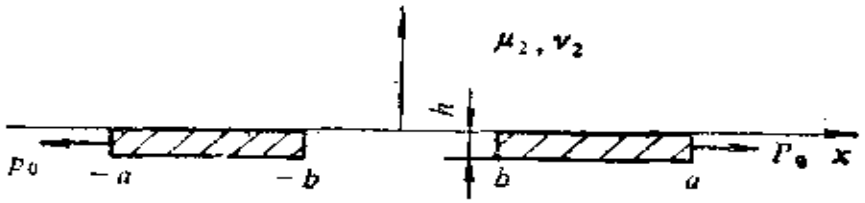


图7.3.3 两条相同的加强筋承受对称载荷

$$s(t)=P_0 a h^{-1}\{(a^2-t^2)(t^2-b^2)\}^{-1/2}\operatorname{sign}(t)\sum_{n=0}^{\infty}a_n T_n(\tau) \tag{7.3.44}$$

象在式（7.3.9）中那么处理，我们可以将方程（7.3.35）写成如下形式

$$\int_L \frac{s(t)\,dt}{t-x}=\frac{\lambda}{a}\int_b^a s(t)\,dt,\quad b\leqslant x\leqslant a \tag{7.3.45}$$

并利用 $m=0$ 时的例题4.8.5，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n U_{n-1}(\xi)=-\frac{\lambda(a^2-b^2)}{4a^2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_n c_n(\theta) \tag{7.3.46}$$

其中

$$c_n(\theta)=a\int_0^{\pi}(a^2\cos^2\theta/2+b^2\sin^2\theta/2)^{-1/2}\cos n\phi\,d\phi \tag{7.3.47}$$

并且 $\cos\theta=\xi, 0\leqslant\theta\leqslant\pi$. 右侧加强筋的总载荷是 P_0，它给出

$$2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n c_n(0) \tag{7.3.48}$$

两边同乘以 $x(1-\xi^2)^{1/2}U_{n-1}(\xi)$，在区间 $[b,a]$ 上积分，我们得到

$$a_m+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}K_{m,n}a_n=0,\quad m=1,2,\cdots \tag{7.3.49}$$

其中

$$K_{m,n}=\frac{a^2-b^2}{2\pi^2 a^2}\int_0^{\pi}\sin m\theta\sin\theta\, c_n(\theta)\,d\theta \tag{7.3.50}$$

上面的分析遵循 Arutiunian 和 Mkhitarian (1971) 的工作，但是排除了他们的著作中的某些符号错误。他们证明，方程 (7.3.41) 和 (7.3.49) 对任何λ值至少是准完全正则的。即是说，对足够大的m，不等式 (7.3.20) 成立。同时，对足够小的λ，该方程组是完全正则的（见例题7.3.3）。也可以参阅Arutiunian和Mkhitarian (1975) 的著作。

例7.3

1．对于图7.3.1所示的加强筋，试表明它的轴向力，对于对称情形等于

$$q(x)=P_0\left[1-(1-x^2/a^2)^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nU_{n-1}(x/a)\right]$$

其中n为奇数；对于反对称情形等于

$$q(x)=P_0\left[(2/\pi)\arcsin(x/a)-(1-x^2/a^2)^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nU_{n-1}(x/a)\right]$$

其中n为偶数。

2．试表明，当m和n具有相同的奇偶性时，式(7.3.16)的$K_{m,n}$可以写成

$$K_{m,n}=\frac{1}{2(m-1)}\left[\frac{1}{n-m+1}-\frac{1}{n+m-1}\right]+\frac{1}{2(m+1)}\left[\frac{1}{n+m-1}-\frac{1}{n-m-1}\right]$$

并且证明，若m和n具有相同的奇偶性时，就n求和，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n-m+1}-\frac{1}{n+m-1}\right]=\begin{cases}0, & m\text{与}n\text{为奇数},\ m\neq 1\\ 1/[2(m-1)], & m\text{与}n\text{为偶数}\end{cases}$$

并且由此导出式 (7.3.25)。

3．试表明

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin p\theta\,d\theta}{(a^2\cos^2\theta/2+b^2\sin^2\theta/2)^{1/2}}\leqslant\frac{A}{|p|},\quad A=\frac{a+b}{b^2}\left\{\frac{b}{2}+\frac{\pi(a-b)}{46}\right\}$$

然后证明，对于式 (7.3.42) 及式 (7.3.50) 中的每个$K_{m,n}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|K_{m,n}|=0$$

于是两个方程组均为准完全正则的。λ 在什么范围内，它们才是完全正则的？

4. 刚性平直的加强筋，沿着 $y=0$ 附着在平板半平面上，在 $-a\leqslant x\leqslant a$ 处。假设半平面处于广义平面应力状态，加强筋在平面内，扭转一个小角度 ϕ，接触区域上的法向正应力和剪切应力分别为 $p(x)$ 与 $s(x)$，利用例题2.1.2，试表明

$$-(1-\nu)p(x)+\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{s(t)\mathrm{d}t}{t-x}=0$$

$$E\varphi=(1-\nu)s(x)+\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(t)\mathrm{d}t}{t-x}$$

对于不同弹性性质的两个半平面，在区间 $(-a,a)$ 上连接起来，试求出相应的方程组。这些方程组，可以由 §3.5的方法求解，在Büfler (1959) 文中有详细的叙述。

5. 试表明，如图7.3.2所示，作用在加强筋右侧某点上的无量纲单轴作用力，可以写成

$$q(x)/P_0=1-\phi/\pi-\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-1}a_n\sin n\phi$$

其中，$(2x^2-a^2-b^2)/(a^2-b^2)=\xi=\cos\phi$。

7.4 半无限加强筋

考虑如图7.4.1 或图 7.4.2 所示的占有的区域为 $x>0$，$y=0$ 的半无限长的加强筋。使用前面的符号，加强筋的纵向应变 $e_{xx}^{(1)}$ 为

$$e_{xx}^{(1)}=\frac{1}{AE_1}\left[h\int_0^x s(t)\mathrm{d}t-P_0\right] \tag{7.4.1}$$

而该半平面上相应点的这个应变值则为

$$e_{xx}^{(2)}=\frac{2}{\pi E_2}\int_0^{\infty}\frac{s(t)\mathrm{d}t}{t-x} \tag{7.4.2}$$

对于图7.4.2的中央加强筋，E_2必须由式（7.2.13）中的E_1^*代替。加强筋上的合力为

$$P_0 = h\int_0^\infty s(t)\,\mathrm{d}t \tag{7.4.3}$$

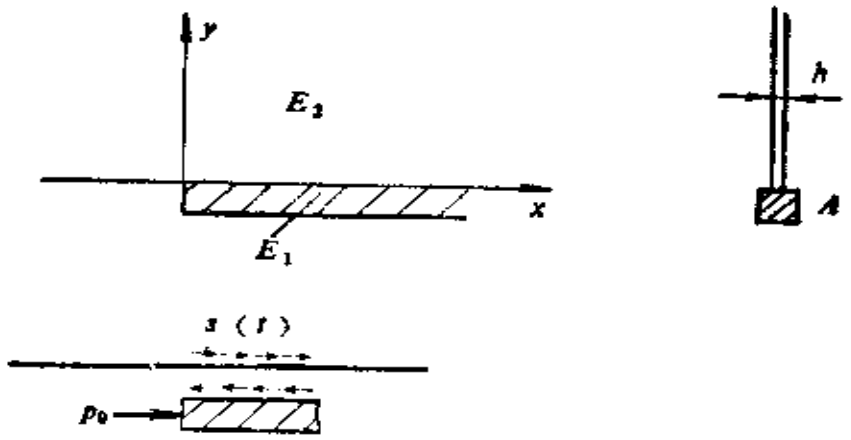


图7.4.1 半无限长的边缘加强筋

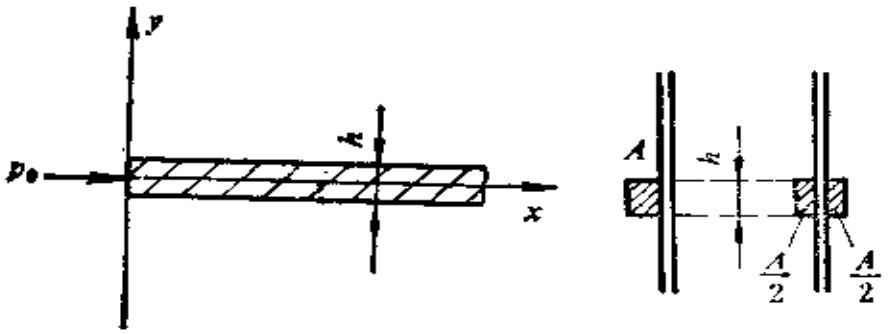


图7.4.2 半无限长的中央加强筋

首先引进无量纲变量

$$\left.\begin{aligned}&\xi = \left(\frac{hE_2}{AE_1}\right)x,\ \eta = \left(\frac{hE_2}{AE_1}\right)t\\&\tau(\xi) = \left(\frac{AE_1}{P_0E_2}\right)s(x),\ q(\xi) = \frac{AE_1}{P_0}e_{xx}\end{aligned}\right\} \tag{7.4.4}$$

则 $\tau(\xi)$和$q(\xi)$分别为无量纲剪切应变和纵向应变（或弦边力）。方程（7.4.1）和（7.4.2）给出

$$q(\xi) = -\int_{\xi}^{\infty} \tau(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \quad q(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\tau(\eta)\,\mathrm{d}\eta}{\eta - \xi} \tag{7.4.5}$$

而方程（7.4.3）给出

$$\int_{0}^{\infty} \tau(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 1 \tag{7.4.6}$$

E. L. Buell（1948）利用保角变换，将z平面映射到单位圆的内部，给出了这个问题的有意义的解．我们首先对方程组(7.4.5)应用直接变换，推导出他得到的最终方程组；注意到他的解的某些缺陷，我们简短地写出Koiter（1955）的严格解．Buell的方法很适宜于给出数值解，并且和 Koiter 用很困难的方法获得的结果是吻合的．

考虑变换

$$u = \frac{1-\eta}{1+\eta}, \quad \eta = \frac{1-u}{1+u} \tag{7.4.7}$$

它将半平面 $\eta \geqslant 0$变换到 $-1 \leqslant u \leqslant 1$．令 $\tau(t) = (1+u)S(u)$，$\xi = (1-v)/(1+v)$，我们发现式（7.4.5）变成

$$(1+v)\int_{-1}^{1} \frac{S(u)\,\mathrm{d}u}{u-v} = \pi\int_{-1}^{v} \frac{S(u)\,\mathrm{d}u}{1+u}, \quad -1 \leqslant v \leqslant 1 \tag{7.4.8}$$

于是，利用式（7.3.9）和

$$1 = \int_{0}^{\infty} \tau(\eta)\,d\eta = 2\int_{-1}^{1} \frac{S(u)\,\mathrm{d}u}{1+u} \tag{7.4.9}$$

我们得到

$$\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{u-v} + \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sign}(u-v)}{(1+u)(1+v)}\right\}S(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4(1+v)} \tag{7.4.10}$$

由于这个方程具有式（6.3.25）的形式，所以它的解，在$u = \pm 1$处，具有平方根的奇异性，而（1+u）出现在核函数第二项的分母上，所以$s(-1)$必须为零．那么我们寻求$s(u)$的形式如下

$$S(u)=[(1+u)/(1-u)]^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nT_n(u) \tag{7.4.11}$$

因而式（7.4.9）给出$2\pi a_0=1$。以τ和η为变量，这便有

$$\tau(\eta)=\frac{2\eta^{-1/2}}{1+\eta}\sum_{n=0}^{\infty}a_nT_n\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right) \tag{7.4.12}$$

现在把式（7.4.12）代入式（7.4.10），由式（2.3.27）和式（2.3.12），并令$v=\cos\phi$，我们计算积分值，结果为

$$(1+\cos\phi)\left\{a_0+(1+\cos\phi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin n\phi}{\sin\phi}\right\}$$

$$=a_0(\pi-\phi)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin\phi}{n} \tag{7.4.13}$$

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{n^{-1}+2\cos^3\phi/2\operatorname{cosec}\phi/2\}a_n\sin n\phi$$

$$=a_0\{\pi-\phi-2\cos^2\phi/2\} \tag{7.4.14}$$

这与Buell得到的方程是一致的。应该注意，所得到的解(7.4.12)有一个基本的缺点：在计算加强筋的纵向应变时，由式(7.4.5)的左端计算，对于大的$|\xi|$，基础误差为$O(\xi^{-1/2})$，而由它的右端计算，这个误差为$O(\xi^{-1})$；Koiter证明后者是正确的〔见下面的式(7.4.44)〕。

为了求解方程(7.4.14)，Buell建议该方程两边同时乘以$\sin\phi/2\sin m\phi$，然后在区间$[0,\pi]$上积分，则该方程给出

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_{m,n}\,a_n=b_m \tag{7.4.15}$$

其中

$$c_{m,n}=A_1(m,n)+A_2(m,n) \tag{7.4.16}$$

$$A_1(m,n)=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin\phi/(2\sin m\phi)\,\mathrm{d}\phi=\frac{1}{2n}d(m,n,1) \tag{7.4.17}$$

$$d(m,n,p)=\frac{1}{2(m-n)+p}-\frac{1}{2(m-n)-p}$$

$$+\frac{1}{2(m+n)-p}-\frac{1}{2(m+n)+p} \qquad (7.4.18)$$

$$A_2(m,n)=2\int_0^{\pi}2\sin m\phi\sin n\phi\cos^3\phi\,\mathrm{d}\phi$$

$$=\frac{(-1)^{m-n}}{4}\{3d(m,n,1)-d(m,n,3)\} \qquad (7.4.19)$$

$$b_m=a_0\int_0^{\pi}\{\pi-\phi-2\cos^3\phi/2\}\sin\phi/(2\sin m\phi)\,\mathrm{d}\phi$$

$$=\frac{16a_0m}{4m^2-1}\left\{\frac{1}{4m^2-1}-\frac{(-1)^m}{4m^2-9}\right\} \qquad (7.4.20)$$

很难证明方程组（7.4.15）是正则的或者是非正则的，但另一方面，Buell发现，计算出的值a_n的正负号是交替变化的，而且它的数值稳定地迅速地减小，使得$q(\xi)$和$\tau(\xi)$的近似值迅速地收敛。

半无限长加强筋的Melan原始问题的一种替换解法，可以利用§9.2的Mellin变换解推导出来. 由于正x轴为极坐标系中的直线$\theta=0$，所以第一问题的边界条件为

$$\tau_{\theta\theta}(r,\theta)=0,\ \theta=0,\ \pi;\ \tau_{r\theta}(r,\pi)=0 \qquad (7.4.21)$$

$$\tau_{r\theta}(r,0)=-s(r) \qquad (7.4.22)$$

以及

$$e_{rr}(r,0)=-\frac{h}{AE_1}\int_r^{\infty}s(t)\,\mathrm{d}t \qquad (7.4.23)$$

现在引进无量纲变量式（7.4.4），再应用条件（7.4.21）式到解（9.4.15）式中，使用$\kappa=3-4\upsilon^*$，象适合于广义平面应力一样。我们找到

$$A_0+A_1=0=B_0+B_1,\ A_0\sin\pi s=B_0\cos\pi s \qquad (7.4.24)$$

它给出$\tau(\xi)$和$q(\xi)$的无量纲的Mellin变换

$$T(s)=M[\tau(\eta);s]\text{和}Q(s)=M[q(\eta);s] \tag{7.4.25}$$

之间的关系式，正如式（7.4.4）中定义的，为

$$Q(s+1)=2\cot\pi sT(s+1) \tag{7.4.26}$$

式（7.4.5）的头一个方程的变换是

$$Q(s)=-s^{-1}T(s+1) \tag{7.4.27}$$

它与方程（7.4.26）和（7.4.27）一起，给出

$$T(s+1)=-2s\cot\pi sT(s) \tag{7.4.28}$$

$T(s)$满足的规一化方程为

$$T(1)=\int_0^\infty\tau(\eta)\mathrm{d}\eta=1 \tag{7.4.29}$$

Koiter（1955）将Mellin变换直接应用在式（7.4.5）上，导出式（7.4.28），后者是一个线性差分方程．式（7.4.28）是如下方程的一个特例

$$T(s+w)=\phi(s)T(s) \tag{7.4.30}$$

$\phi(s)$可以被表示成两个解析函数之比，其一般解曾由Barnes（1904）讨论过，进一步的文献可在Kuczma（1968）的著作中找到，该著作讨论了单变量的范围很广泛的泛函方程的解的存在性与唯一性问题．Koiter利用Alblas建议的方法，解出了方程（7.4.28）．在Alblas（1965）后来的一篇文章中，发表了更精确的解法．我们乐于直接构造这个解．

函数$\Gamma(s)$满足方程组

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\ \Gamma(s)\Gamma(1-s)=\pi/\sin\pi s \tag{7.4.31}$$

而第二个关系式表明：因子$-s\cot\pi s$可以写成

$$-s\cot\pi s=-\frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(3/2-s)\Gamma(s-1/2)} \tag{7.4.32}$$

Alexeiewsky的G函数由下式定义〔Whittaker和Watson（1952,p264）〕：

$$G(z+1)=(2\pi)^{z/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}[z(z+1)+\gamma z^2]\right\}$$

$$\times \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n}\exp\left[-z+z^{2}/2n\right]\right\} \qquad (7.4.33)$$

其中，γ为Euler-Mascheroni 常数，G函数是一个积分函数，在$z=-n,(n=1,2,3,\cdots)$，有n个零点，并且满足递推关系

$$G(z+1)=\Gamma(z)G(z) \qquad (7.4.34)$$

因此 $G(2+s)=\Gamma(1+s)G(1+s)$，$G(5/2-s)=\Gamma(3/2-s)\times G(3/2-s)$，$G(2-s)=\Gamma(1-s)G(1-s)$，$G(s+1/2)=\Gamma(s-1/2)G(s-1/2)$. 所以，注意到式 (7.4.32) 中的四个因子和规一化条件 (7.4.29) 式，我们得到

$$T'(s)=\frac{2^{s-1}}{\Gamma(1/2)}\cdot\frac{G(1+s)G(5/2-s)}{G(s-1/2)G(2-s)} \qquad (7.4.35)$$

这是在$s=n+1$ $(n=1,2,\cdots)$ 有n重极点的局部全纯函数，而在$s=3/2-k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ 有k重极点；特别是，$T(s)$在带形区域$1/2<\mathrm{Re}(s)<2$是全纯函数，且在该带内当$|s|\to\infty$时它趋近于零. 解 (7.4.35) 并不是式 (7.4.28) 的满足条件 (7.4.29) 的唯一解；事实上，$T(s)$可以乘以周期为1的任何函数，它在$1/2<\mathrm{Re}(s)<2$内全纯，且在$s=1$处等于1. 可是，这样的函数，当在该带内$|s|\to\infty$时，至少具有$\exp(2\pi|s|)$阶，而且它的替换解，在这个带形区域内、在$|s|\to\infty$时，违反了 $T(s)\to 0$ 的要求. 由此可知式 (7.4.35) 是满足对$T(s)$所有要求的唯一解.

（无纲量）剪应力和弦边力可以由$T(s)$和$Q(s)$ 的反演而得到. 因此，式 (9.2.2) 表明

$$\tau(\eta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}T(s)\eta^{-s}ds \qquad (7.4.36)$$

其中，$1/2<\mathrm{Re}(c)<2$. 遵循Koiter (1955) 的思路，我们考虑图7.4.3中所示的迴路. 可以证明，当$\omega\to\infty$和$k\to\infty$时，围绕迴路分别从$\mathrm{Im}(s)=\pm\omega$及$\mathrm{Re}(s)=-k+3/4$进行积分，则积分值都趋近于零. 由于在$s=3/2-k$时$T(s)\eta^{-s}$有极点，所以

$$\tau(\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}\{\mathrm{res}\{T(s)\eta^{-s}\}\}\text{❶},\quad \text{当}s=3/2-k \tag{7.4.37}$$

因为$s=3/2-k$是k重极点，所以根据留数计算法则我们有

$$\tau(\eta)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}s^{k-1}}\left[(s+k-3/2)^{k}T(s)\eta^{-s}\right]\right\}_{s=3/2-k} \tag{7.4.38}$$

使用相同的方法，可以得到

$$\begin{aligned}q(\xi)&=-\int_{\xi}^{\infty}\tau(\eta)\mathrm{d}\eta=-1+\int_{0}^{\xi}\tau(\eta)\mathrm{d}\eta\\&=-1+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\frac{T(s)}{1-s}\xi^{1-s}\mathrm{d}s\\&=-1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}s^{k-1}}\left[(s+k-3/2)^{k}\right.\right.\\&\left.\left.\times\frac{T(s)}{1-s}\xi^{1-s}\right]\right\}_{s=3/2-k}\end{aligned} \tag{7.4.39}$$

其中，我们现在取$1/2<c<1$.

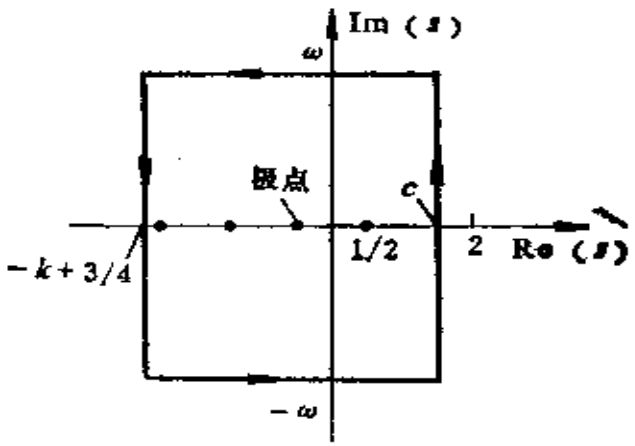


图7.4.3 Koiter用于计算$T(s)$的Mellin变换反演的通路

❶ 式中res代表留数——译者

式（7.4.38）和式（7.4.39）中的第一项涉及

$$\lim_{s\to 1/2}\{(s-1/2)T(s)\}$$

$$=\lim_{s\to 1/2}\left\{\frac{2^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}\frac{\Gamma(s-1/2)}{G(s-1/2)}\frac{G(3/2)G(s)}{G(3/2)}\right\} \qquad (7.4.40)$$

但是

$$\lim_{s\to 1/2}\left\{\frac{s-1/2}{G(s-1/2)}\right\}=\lim_{s\to 1/2}\left\{\frac{(s-1/2)\Gamma(s-1/2)}{G(s+1/2)}\right\}$$

$$=\lim_{s\to 1/2}\left\{\frac{\Gamma(s+1/2)}{G(s+1/2)}\right\}=\frac{\Gamma(1)}{G(1)} \qquad (7.4.41)$$

于是

$$\lim_{s\to 1/2}\{(s-1/2)T(s)\}=\frac{2^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}\frac{\Gamma(1)G(2)}{G(1)}=(2\pi)^{-1/2} \qquad (7.4.42)$$

并且

$$\left.\begin{aligned}\tau(\eta)&=(2\pi\eta)^{-1/2}+O(\eta^{1/2})\\ q(\xi)&=-1+(2\xi/\pi)^{1/2}+O(\xi^{1/2})\end{aligned}\right\} \qquad (7.1.43)$$

Koiter展示了q级数的下二项，并且表明 Buell 的近似分析给出$q(\xi)\approx -1+c\xi^{1/2}$，其中，当$n=6$时，$c$与$(2\pi)^{1/2}$相差约2.5%. 从方程（7.4.38)和（7.4.39）计算τ和q时，涉及复杂的极限计算，因而，若以数值计算为目的，Buell的分析是很好的. Koiter表明，对于较大的ξ，无量纲的弦边力

$$q(\xi)=\frac{2}{\pi\xi}-\frac{4}{\pi^2\xi^2}(\ln 2-r-\ln\xi)+\cdots \qquad (7.4.44)$$

Benthem和van der Vooren（1959），Albias和 Kuypers(1965/1966）研究了楔形板整个一条边缘上附着的长加强筋引起的载荷渗透，所用的方法和Koiter的相类似. Kalandia

● 原著这里把$\Gamma(s-1/2)$误写成$(s-1/2)$——译者

(1969b) 提出了一个Koiter问题的一种优美的替换解法，他对方程 (7.4.5) 作 Fourier 变换，得到一个方程(具有变系数)，它联系着复平面上割线$(-1,1)$任一侧的分段全纯函数的值；这个方程是使用Muskhelishvili (1953b) 描述的方法解出来的. Bantsuri (1973) 发展了这个方法，应用它分析楔形的一条边被加强的问题〔可参考Bantsuri(1975)，Vorob'ev(Воробьев)和Popov (1970)〕. Rybakov 和 Cherepanov (1977) 考虑了半无限长的加强筋以一些离散点附着在平板上的问题.

7.5 周期性加强的板

考虑图7.5.1所示的平板，它被长度为 $2a$ 的无限个相同的加强筋所加强，筋和筋的中心距离为$2l$. 同前面一样，假设加强筋可伸长但抗弯刚度为零. 按照§7.3 的分析和符号，我们求得任何一条加强筋中的应变$e_{xx}^{(1)}$为

$$e_{xx}^{(1)} = u^{(1)\prime}(x) = \frac{1}{AE_1}\left[h\int_{-a}^{a} s(t)\,dt - Q_0\right] \tag{7.5.1}$$

每条加强筋上作用的合力为

$$P_0 + Q_0 = h\int_{-a}^{a} s(t)\,dt \tag{7.5.2}$$

在半平面边界上，位移的导数为

$$e_{xx}^{(2)} = u^{(2)\prime}(x) = \frac{2}{\pi E_2}\int_{-a}^{a} s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t+nl-x} \tag{7.5.3}$$

但是

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t+nl-x} = \frac{1}{t-x} + 2(t-x)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2 - n^2l^2}$$

$$= \frac{\pi}{l}\cot\left[\frac{\pi(t-x)}{l}\right] \tag{7.5.4}$$

使位移的导数相等，于是我们得到基本方程

$$\left.\begin{aligned}\int_{-a}^{a} s(t)\cot\left[\frac{\pi(t-x)}{l}\right]\mathrm{d}t &= \lambda\left[\int_{-a}^{a} s(t)\,\mathrm{d}t - \frac{Q_0}{h}\right]\\ \lambda &= \frac{hlE_2}{2AE_1}\end{aligned}\right\} \tag{7.5.5}$$

也可以写成

$$\int_{-a}^{a}\left\{\cot\left[\frac{\pi(t-x)}{l}\right]+\frac{l}{2}\mathrm{sign}(t-x)\right\}s(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{(P_0-Q_0)}{2h} \tag{7.5.6}$$

这个方程是由Arutiunian和Mkhitarian（1969）推导出来的。他们的分析极其烦琐，所以我们将使用§4.9中介绍的变换，按照Marar′（Мораръ）和Popov（1971）发展的较简便的方法进行叙述。Erdogan(1971)给出了基于Muskhelishvili复变分析法的交替解。

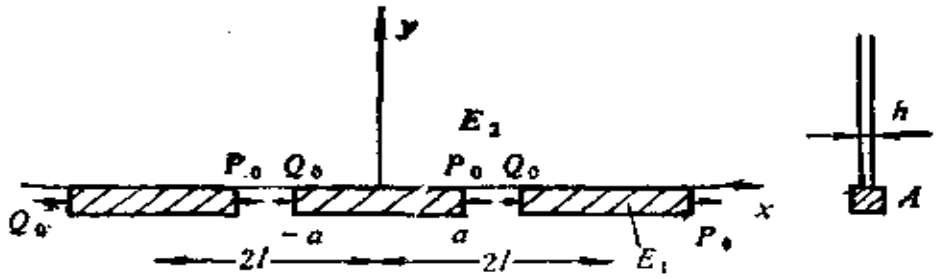


图7.5.1 周期性加强的平板

由积分（2.3.26）开始，即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{(1-\tau^2)^{1/2}(\tau-\zeta)} = U_{n-1}(\zeta),\ n=0,1,2,\cdots,\ -1\leqslant\zeta\leqslant 1 \tag{7.5.7}$$

同时作代换

$$\left.\begin{aligned}&\pi t = l\eta,\ \pi x = l\xi,\ \pi a = -l\alpha\\ &\tau = \mathrm{tg}\eta\cot\alpha,\ \zeta = \mathrm{tg}\xi\cot\alpha\end{aligned}\right\} \tag{7.5.8}$$

得到

$$A_n(\xi)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\cot(\eta-\xi)T_n(\mathrm{tg}\eta\cot\alpha)\,\mathrm{d}\eta}{[\cos^2\eta-\cos^2\alpha]^{1/2}\cos\eta} \tag{7.5.9}$$

并且对于 $|\xi|\leqslant\alpha$ 有

$$A_n(\xi)=\begin{cases}\pi\sec\alpha\,\mathrm{tg}\xi, & n=0\\ \pi\mathrm{cosec}\alpha\sec^2\xi U_{n-1}(\mathrm{tg}\xi\cot\alpha), & n=1,2,\cdots\end{cases} \tag{7.5.10}$$

使用相同的方程，我们从积分(7.3.12)开始，即

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{sign}(\tau-\xi)T_n(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{(1-\tau^2)^{1/2}}=\begin{cases}-\arcsin\xi, & n=0\\ n^{-1}(1-\xi^2)^{1/2}U_{n-1}(\xi), & n=1,2,\cdots\end{cases} \tag{7.5.11}$$

上式对于 $-1\leqslant\xi\leqslant1$ 有效，使用代换 (7.5.8) ，可以得到

$$B_n(\xi)=\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\mathrm{sign}(\eta-\xi)T_n(\mathrm{tg}\eta\cot\alpha)\,\mathrm{d}\eta}{[\cos^2\eta-\cos^2\alpha]^{1/2}\cos\eta} \tag{7.5.12}$$

且有

$$B_n(\xi)=\begin{cases}-\sec\alpha\arcsin[\mathrm{tg}\xi\cot\alpha], & n=0\\ 2[n\sin2\alpha\cos\xi]^{-1}[\cos^2\xi-\cos^2\alpha]^{1/2}U_{n-1}(\mathrm{tg}\xi\cot\alpha),\\ \qquad n=1,2,\cdots\end{cases} \tag{7.5.13}$$

现在得到式 (7.5.6) 的解的形式如下：

$$s(t)=\sec\eta[\cos^2\eta-\cos^2\alpha]^{-1}*\sum_{n=0}^{\infty}a_nT_n(\mathrm{tg}\eta\cot\alpha) \tag{7.5.14}$$

代入式 (7.5.6)，利用关系式 (7.5.9) 和 (7.5.12)，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nA_n(\xi)+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nB_n(\xi)=\frac{\lambda(P_0-Q_0)}{2h}\frac{l}{\pi},\quad-\alpha\leqslant\xi\leqslant\alpha \tag{7.5.15}$$

现在使用变量 ζ，可以把 $A_n(\xi)$ 和 $B_n(\xi)$ 重新写成

$$A_n(\xi)=\begin{cases}(\pi\sec\alpha\,\mathrm{tg}\alpha)\zeta, & n=0\\ \pi\mathrm{cosec}\alpha(1+\zeta^2\mathrm{tg}^2\alpha)U_{n-1}(\xi), & n=1,2,\cdots\end{cases} \tag{7.5.16}$$

$$B_n(\xi)=\begin{cases}-\sec\alpha\arcsin\xi, & n=0\\ n^{-1}\sec\alpha(1-\xi^2)^{1/2}U_{n-1}(\xi), & n=1,2,\cdots\end{cases}\quad(7.5.17)$$

如果将 $A_n(\xi)$ 和 $B_n(\xi)$ 的这些表达式代入式 (7.5.15) 中，并且对方程两边乘以 $\cos\alpha(1-\xi^2)^{1/2}(1+\xi^2\mathrm{tg}^2\alpha)^{-1}U_{m-1}(\xi)$，再在 $(-1,1)$ 上积分，结果为

$$\pi^2\cot\alpha a_m/2+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}c_{m,n}a_n=b_m,\quad m=1,2,\cdots\quad(7.5.18)$$

其中

$$c_{m,n}=\frac{1}{n}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)U_{n-1}(\xi)U_{m-1}(\xi)\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2\mathrm{tg}^2\alpha}\quad(7.5.19)$$

$$b_m=\int_{-1}^{1}\left[\frac{\lambda(P_0-Q_0)}{2h}\frac{l}{\pi}\cos\alpha-\pi a_0\xi\mathrm{tg}\alpha+\lambda a_0\arcsin\xi\right]\frac{(1-\xi^2)^{1/2}U_{m-1}(\xi)\mathrm{d}\xi}{(1+\xi^2\mathrm{tg}^2\alpha)}\quad(7.5.20)$$

而且 a_0 由方程 (7.5.2) 和 (7.5.14) 决定，即

$$a_0=(P_0+Q_0)\cos\alpha/(hl)\quad(7.5.21)$$

系数 $c_{m,n}$ 由下面的恒等式计算

$$(1+\xi^2\mathrm{tg}^2\alpha)^{-1}=2\cot\alpha\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\mathrm{tg}\alpha/2)^{2k+1}U_{2k}(\xi)\qquad|\alpha|<\pi/2,\ |\xi|\leqslant 1\quad(7.5.22)$$

得出

$$c_{m,n}=2n^{-1}\cot\alpha\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\mathrm{tg}\alpha/2)^{2k+1}I_{n-1,m-1,2k}\quad(7.5.23)$$

其中

$$I_{k,m,n}=\int_{-1}^{1}(1-k^2)U_k(x)U_m(x)U_n(x)\,dx$$

$$=-\frac{4(k+1)(m+1)(n+1)[\cos(k+m+n)\pi/2]^2}{[(m+1)^2-(k-n)^2][(m+1)^2-(k+n+2)^2]}$$

$$k,m,n=0,1,2,\cdots$$

(7.5.24)

使用式 (7.5.22) 推演出下列积分，可以计算系数b_m，即

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-\xi^2)^{1/2}U_{m-1}(\xi)\,d\xi}{(1+\xi^2\mathrm{tg}^2\alpha)}=\pi\cot\alpha\sin(m\pi/2)(\mathrm{tg}\alpha/2)^m$$

(7.5.25)

$$\int_{-1}^{1}\frac{\xi(1-\xi^2)^{1/2}U_{m-1}(\xi)\,d\xi}{(1+\xi^2\mathrm{tg}^2\alpha)}$$

$$=\pi\cot^2\alpha\sin[(m-1)\pi/2](\mathrm{tg}\alpha/2)^m \qquad (7.5.26)$$

和积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{\arcsin\xi(1-\xi^2)^{1/2}U_{m-1}(\xi)\,d\xi}{(1+\xi^2\mathrm{tg}^2\alpha)}$$

$$=8m\cot\alpha\sin^2[(m-1)\pi/2]S_m \qquad (7.5.27)$$

$$S_m=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\mathrm{tg}\alpha/2)^{2k+1}(2k+1)/[(2k+1)^2-m^2]^2$$

(7.5.28)

Morar'(Mopapb) 和Popov证明，当$\lambda<\sqrt{2}\cot\alpha$时，方程组是完全正则的，而对其余所有$\lambda$值，则是准完全正则的.

方程 (7.5.23) 和 (7.5.24) 表明，当m和n具有相反的奇偶性时$c_{m,n}=0$. 在反对称情形，当每条加强筋的端部作用相同的力时，则$P_0=Q_0$，而方程 (7.5.26) 和 (7.5.27) 表明，m为奇数时，$b_m=0$，所以m为奇数时，$a_m=0$，且有

$$s(t)=(1+\tau^2\mathrm{tg}^2\alpha)\mathrm{cosec}\alpha(1-\tau^2)^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}T_{2k}(\tau)$$

(7.5.29)

加强筋内的法向力为

$$AE_1e_{xx}^{(1)}(x)=h\int_{-1}^{x}s(t)\mathrm{d}t-P_0$$

$$=\pi^{-1}lh\sec\alpha\int_{-1}^{\xi}(1-\tau^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nT_{2n}(\tau)\mathrm{d}\tau-P_0$$

$$=\pi^{-1}lh\sec\alpha\{a_0\arcsin\xi-(1-\xi^2)^{1/2}$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}(2n^{-1})a_nU_{2n-1}(\xi)\}\qquad(7.5.30)$$

在对称情形，当m为偶数时，如果$Q_0=-P_0$，则$a_0=0$，$b_m=0$。现在，在m为偶数时，$a_m=0$，并且

$$s(t)=(1+T^2\mathrm{tg}^2\alpha)\mathrm{cosec}\alpha(1-\tau^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}T_{2n+1}(\tau)$$

$$(7.5.31)$$

$$AE_1e_{xx}^{(1)}(x)=P_0-\pi^{-1}lh\sec\alpha(1-\xi^2)^{1/2}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-1}a_{2n+1}U_{2n}(\xi)\qquad(7.5.32)$$

7.6 Melan问题的改进

Mnki与Sternberg（1967）在他们关于Melan问题的肯定性分析中，详细地考虑了以下三个问题。

（1）无限长边界被加强的平板的原始Melan问题

（2）在梁的初等理论的范围里，考虑加强筋的弯曲刚度的中间性问题

（3）完全属于薄平板经典理论中的问题，假设加强筋是厚度为h的平板，其Poisson比为ν_1，剪切模量为μ_1和宽度为a，如图7.6.1所示。问题（1）在§7.2中讨论过了，问题（2）由

Buller (1964) 解出，现在这样讨论这个问题：应用§5.4和§6.3相应的上半平面及狭长体的解来构成它的解。直线 $y=0$ 上的边界条件为

$$u^{(1)}(x,0)=u^{(2)}(x,0),v^{(1)}(x,0)=v^{(2)}(x,0) \tag{7.6.1}$$

$$h_1\tau_{xy}^{(1)}(x,0)=h_2\tau_{xy}^{(2)}(x,0),$$

$$h_1\tau_{yy}^{(1)}(x,0)=h_2\tau_{yy}^{(2)}(x,0) \tag{7.6.2}$$

而在边界 $y=-a$ 上没有应力：

$$\tau_{xy}^{(1)}(x,-a)=0=\tau_{yy}^{(1)}(x,-a) \tag{7.6.3}$$

按照Muki与 Sternberg 的思路，假设作用在加强筋的体力场与 y 无关，并且平行于 x 轴，x 的一个偶函数在区段 $-\varepsilon\leqslant x\leqslant\varepsilon$ 之外等于零，合力为 P，那么

$$F_x(x,y)=f(x)/h_1,F_y(x,y)=0 \tag{7.6.4}$$

并且

$$a\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}f(x)\,dx=P, \tag{7.6.5}$$

如果在 $\varepsilon\to0$ 时取极限，便得到Melan问题。

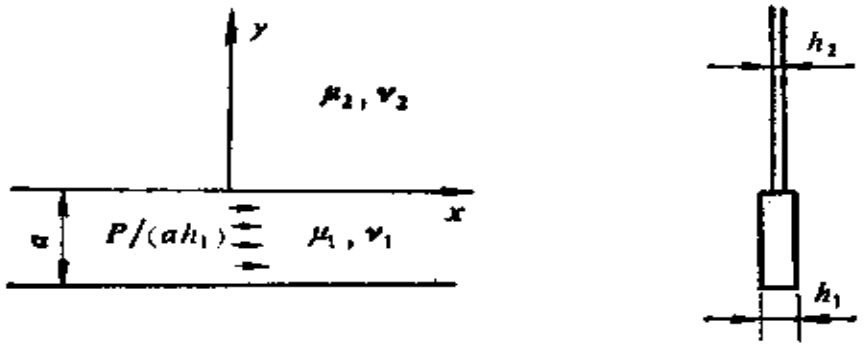


图7.6.1 边缘上的加强筋模拟薄的狭长体

在例题5.4.2和例题6.3.4中，问题是反对称的。因此，我们分别将式 (5.4.6) 中的 A，C，和式 (6.3.12) 中的 A，B，C，D 用 $-iA_1,-iC_1,-iA_2,-iB_2,-iC_2,-iD_2$ 去代替，如果 U 和 T_{12} 是 u 和 τ_{xy} 的Fourier余弦变换 F_c，而 V,T_{11},T_{22} 是 v_1,τ_{xx},τ_{yy} 的Fourier正弦变换 F_s，则 $y>0$ 的上半平面的变换值由下式给出

$$2\mu_2\xi U=C_2,\quad -2\mu_2\xi V=(3-4\nu_2)A_2+C_2 \tag{7.6.6}$$

$$-T_{12}^{(2)}=(1-2\nu_2)A_2+C_2,T_{22}^{(2)}=2(1-\nu_2)A_2+C_2 \tag{7.6.7}$$

狭长体的相应的变换值为

$$\left.\begin{aligned}2\mu_1\xi U&=C_1+\nu_1+(1-2\nu_1)F\\-2\mu_1\xi V&=(3-4\nu_1)A_1+C_1+(3-4\nu_1)B_1-D_1\end{aligned}\right\} \tag{7.6.8}$$

$$\left.\begin{aligned}-T_{12}^{(1)}&=(1-2\nu_1)A_1+C_1+(1-2\nu_1)B_1-D_1\\T_{22}^{(1)}&=2(1-\nu_1)A_1+C_1-2(1-\nu_1)B_1+D_1-\nu_1F\end{aligned}\right\} \tag{7.6.9}$$

这里，$F=F_1/[(1-\nu_1)\xi h_1]$，$F_1=F_0[f(x);\xi]$，包含 F 的项取自例题5.4.5. 且须注意，由于板处于广义平面应力状态，$\nu_i(i=1,2)$应理解为$\nu_i^*=\nu_i/(1+\nu_i)$. 最后，$y=-a$上的边界条件给出

$$[(1-2\nu_1)A_1-sA_1+C_1]\exp(s)+[(1-2\nu_1)B_1+sB_1-D_1]\exp(-s)=0 \tag{7.6.10}$$

$$[2(1-\nu_1)A_1-sA_1+C_1]\exp(s)+[-2(1-\nu_1)B_1-sB_1+D_1]\exp(-s)-\nu_1F=0 \tag{7.6.11}$$

其中$s=a\xi$.

方程 (7.6.10) 和 (7.6.11) 给出

$$2C_1=[2s-(3-4\nu_1)]A_1+B_1\exp(-2s)+\nu_1F\exp(-s) \tag{7.6.12}$$

$$2D_1=[2s+(3-4\nu_1)B_1-A_1\exp(2s)+\nu_1F\exp(s) \tag{7.6.13}$$

现在令两个物体在连接面上的U与V相等，得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mu_1}{\mu_2}C_2&=C_1+D_1+(1-2\nu_1)F\\\frac{\mu_1}{\mu_2}(3-4\nu_2)A_2&=(3-4\nu_1)(A_1+B_1)-2D_1-(1-2\nu_1)F\end{aligned}\right\} \tag{7.6.14}$$

利用$y=0$上的应力条件，便可以得到关于A_2和C_2的其他表达式，现在可以从四个方程中消去A_2和C_2，从而得到两个方程，即

$$\{4(1-\nu_1)-\gamma[1-\exp(2s)]\}A_1-2\gamma sB_1$$
$$=\{1-\nu_1-\gamma\nu_1[1-\exp(s)]\}F \tag{7.6.15}$$

$$2\beta sA_1-\{4(1-\nu_1)+\beta[1-\exp(-2s)]\}B_1$$
$$=\{1-\nu_1+\beta\nu_1[1-\exp(-s)]\}F \tag{7.6.16}$$

其中

$$\beta=\frac{\mu_1 h_1}{\mu_2 h_2}-1,\quad \gamma=\frac{\mu_1 h_1}{\mu_2 h_2}(3-4\nu_2)+1 \tag{7.6.17}$$

方程（7.6.15）和（7.6.16）的解可以方便地得到，办法是引进$p(s)$和$q(s)$，其定义式为

$$p=-1+4\Delta^{-1}\{\gamma\nu_1[\beta+4(1-\nu_1)]\exp(s)$$
$$-\gamma\beta\nu_1(1-2s)\exp(-s)-\beta(1-\nu_1-\gamma\nu_1)\exp(-2s)$$
$$+(1-\nu_1-\gamma\nu_1)[\beta+4(1-\nu_1)]-2(1-\nu_1+\beta\nu_1)\gamma s\} \tag{7.6.18}$$

$$q=1-4\Delta^{-1}\{\beta\nu_1[\gamma-4(1-\nu_1)]\exp(-s)$$
$$-\beta\gamma\nu_1(1+2s)\exp(s)+\gamma(1-\nu_1+\beta\nu_1)\exp(2s)$$
$$-(1-\nu_1+\beta\nu_1)[\gamma-4(1-\nu_1)]-2(1-\nu_1-\gamma\nu_1)\beta s\} \tag{7.6.19}$$

其中Δ是式（7.6.15）和式（7.6.16）的系数行列式，即

$$\Delta=\gamma[\beta+4(1-\nu)]\exp(2s)+\beta[\gamma-4(1-\nu)]\exp(-2s)$$
$$-[\beta+4(1-\nu)][\gamma-4(1-\nu)]-(1+4\beta\gamma)s^2 \tag{7.6.20}$$

当$\varepsilon\to 0$时取极限，$F_1=(2\pi)^{-1/2}P_0/a$，那么

$$F=(2\pi)^{-1/2}P_0/[(1-\nu)a\xi h_1] \tag{7.6.21}$$

并且

$$4A_1=(p+1)F,\quad 4B_1=(q-1)F \tag{7.6.22}$$

现在方程（7.6.9）给出

$$\beta[T^{(1)}_{2k}-T^{(1)}_{1k}]=4(1-\nu_1)B_1+(1-\nu_1)F$$

$$= (1-\nu_1)qF \tag{7.6.23}$$

而方程 (7.6.9) 和 (7.6.22) 给出

$$\gamma(T^{(1)}_{22}+T^{(1)}_{12}) = 4(1-\nu_1)A_1-(1-\nu_1)F$$
$$= (1-\nu_1)PF \tag{7.6.24}$$

那么，联立式 (7.6.21)、(7.6.23) 和 (7.6.24)，我们有

$$h_1\tau^{(1)}_{xy}(x,0) = h_2\tau^{(2)}_{xy}(x,0)$$
$$= \frac{P}{2\pi a\beta\gamma}\int_0^\infty [\beta p(s)-\gamma q(s)]\frac{\cos(\xi x)}{\xi}d\xi \tag{7.6.25}$$

$$h_1\tau^{(1)}_{yy}(x,0) = h_2\tau^{(2)}_{yy}(x,0)$$
$$= \frac{P}{2\pi a\beta\gamma}\int_0^\infty [\beta p(s)+\gamma q(s)]\frac{\sin(\xi x)}{\xi}d\xi \tag{7.6.26}$$

其余系数 A_2, C_2, C_1和D_1 可由 方程 (7.6.12) ～ (7.6.14) 求出。

在平板的 极坐标 r 较大或较小时， 应力的形式是 特别有趣的。在r值小时，应力值可像通常那样，由大ξ的变换式来得到。对于大的ξ和s，有

$$\left.\begin{aligned} A_2 &\approx -\frac{h_1(1-\nu_1)F}{h_2\gamma} \\ (3-4\nu_2)A_2+C_2 &\approx \frac{h_1}{h_2}\frac{(1-\nu_1)(1-4\nu_1)}{\beta+4(1-\nu_1)}F \end{aligned}\right\} \tag{7.6.27}$$

那么，注意到F的形式， 利用例题 7.2.2 给出的变换，以 $\nu_1^* = \nu_1/(1+\nu_1)$ 代替ν_1，我们得到

$$\tau_{xx} = -\frac{P}{4\pi\gamma a h_2}\{(3+\alpha)(\pi-2\theta)-2\sin 2\theta\}+o(1) \tag{7.6.28}$$

$$\tau_{yy} = -\frac{P}{4\pi\gamma a h_2}\{(1-\alpha)(\pi-2\theta)+2\sin 2\theta\}+o(1) \tag{7.6.29}$$

$$\tau_{xx} \approx \frac{P}{4\pi\gamma a h_2}(1+\alpha)\ln r + o(1) \qquad (7.6.30)$$

其中

$$\alpha = \frac{(1-4\nu_1^*)\gamma}{\beta+4(1-\nu_1^*)} = \frac{(1-3\nu_1)\gamma}{\beta(1+\nu_1)+4} \qquad (7.6.31)$$

对于大的γ，应力具有如下形式

$$\tau_{xx} \approx -\frac{2P}{\pi h_2 r}\{\cos^3\theta + \frac{\alpha}{2\omega r}\sin 2\theta[1-4\cos^2\theta+\omega\cos 2\theta] + O(r^{-2})\} \qquad (7.6.32)$$

$$\tau_{yy} \approx -\frac{2P}{\pi h_2 r}\{\sin^2\theta\cos\theta + \frac{\alpha}{\omega r}\sin\theta[\cos 3\theta + 2\omega\sin^2\theta\cos\theta] + O(r^{-2})\} \qquad (7.6.33)$$

$$\tau_{xy} \approx -\frac{2P}{\pi h_2 r}\{\sin\theta\cos^2\theta + \frac{\alpha}{2\omega r}[\cos 4\theta + \omega\sin\theta\sin 3\theta]\} + O(r^{-2}) \qquad (7.6.34)$$

其中，$\omega = h_2E_2/(2h_1E_1)$

Muki和Sternberg (1967) 得到了这些结果，他们注意到，由Melan原始分析 (例题7.2.3) 和由“精确”分析得到的远场的应力，在非加强筋上都出现了带r^{-1}的项。而且当$\omega \to 0$时，精确解与近似解中带r^{-2}的项的比率为$1+O(\omega)$。结果，当弦边变硬时，Melan解偏离精确解就比较小了。Muki和Sternberg计算

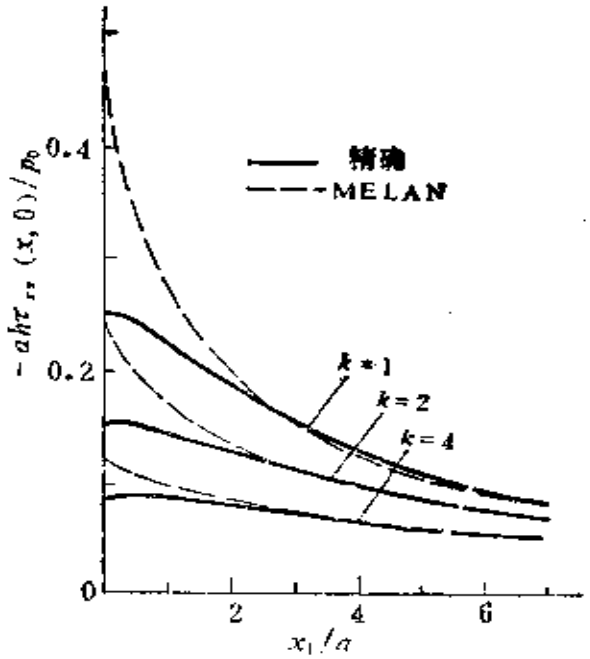


图7.6.2 接触面上的应力τ_{xx}

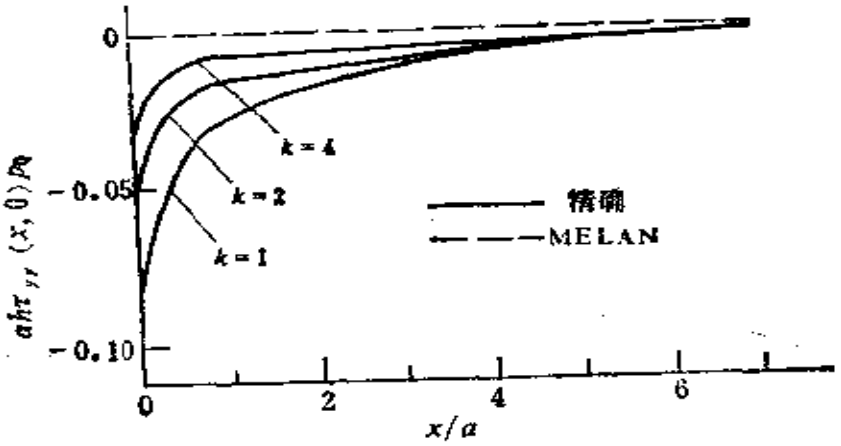


图7.6.3 接触面上的应力τ_{yy}

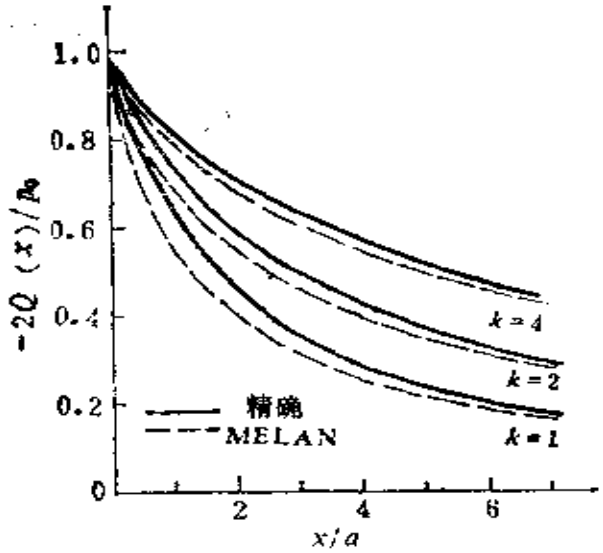


图7.6.4 加强筋的轴向力的衰减

了各种$\kappa=\mu_1 h_1/\mu_2 h_2$值下，接触面的应力值，并且表明了，Melan的分析预言了剪切应力$\tau_{xy}(x,0)$及轴向力

$$Q(x)=h_1\int_{-a}^{a}\tau_{11}^{(1)}(x,y)\,dy$$

对所有参数都极其接近。图7.6.2～7.6.4，取自他们的文章，表明了$\tau_{xx}(x,0)$和$\tau_{yy}(x,0)$的变化。在Melan的分析中，后者恒为零，而加强筋的力为$Q(x)$。

Erdogan和Civelek (1974) 考虑了弹性狭长体被一正交异性的弹性狭长体所加强，他们之间的联系，或者由第三条狭长体来联接，或者粘着一起，或者经过一条没有剪切的狭长体。他们认真地研究了粘着狭长体的作用，给出了数值结果，并且考虑了极限情形。

7.7 Reissner问题及其普遍化

Reissner (1940) 考虑了横向拉伸杆的载荷扩散到半无限弹性体上，如图7.7.1所示。其中，杆可以由两根相同的杆来等价地代替，其厚度为单杆的一半，分别放在平板的两侧。按照Reissner原始的假设，我们再假设，加强筋的宽度$2b$足够小，使得载荷可以认为只作用在y轴，而加强筋只处于单轴应力状态。如果$p(y)$是截面y上的杆力，那么杆截面y上的拉伸应变为

$$\sigma_{yy}^{(1)}(y)=\frac{p(y)}{AE_1} \tag{7.7.1}$$

围绕这个问题的争论之一，集中在这样的问题上，即端部载荷P_i是平滑地渗透到板内还是在加强筋的端部$y=0$和$y=l$上有集中力作用在板上。Reissner依照物理背景，否定了这种力，而Muki和Sternberg (1968a) 则证明了事实就是如此。假设，如果可能，则有力P_1和P_2，像图示的那样，$q(y)$为截面y上、加强筋的每单位长度上的剪切力。加强筋由0到y的平衡状态，给出

$$p(y)=P_0-P_1-\int_0^y q(t')\,\mathrm{d}t' \tag{7.7.2}$$

那么

$$p(0)=P_0-P_1,$$

$$p(l)=P_0-P_1-\int_0^l q(t')\,\mathrm{d}t'=P_2 \tag{7.7.3}$$

板的截面y上，位移$v^{(2)}(0,y)$以及$e_{yy}^{(1)}(0,y)$，可以由§5.8中的分析得到，具有自由边界的半平面的内点上作用着平面场力，§5.8的分析给出了关于这种力的关系式，前提是，在广义平面应力情形下，用$\nu^*=\nu/(1+\nu)$代替ν。在那种分析中，单位体积上作用的体力取为$-q(t)/(2ah)$，$-P_1\delta(y)/(2ah)$以及$-P_2\delta(l-y)/(2ah)$，同时，沿加强筋宽度均匀地分布着，那么

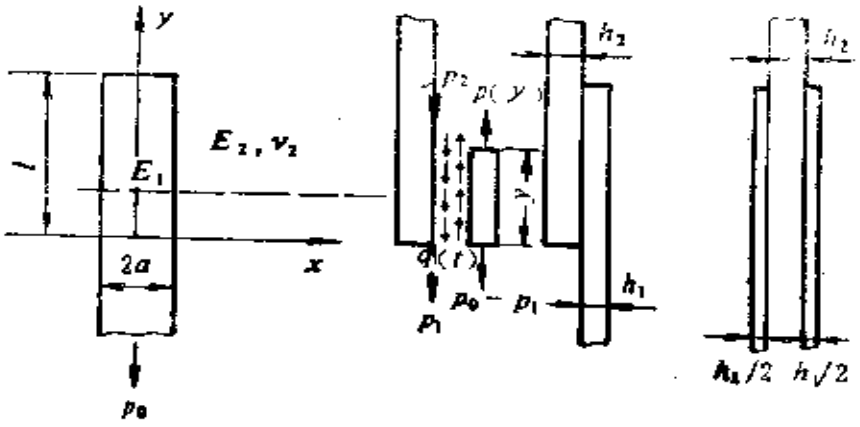


图 7.7.1 一张半无限大的弹性薄平板，附着一根或两根横向拉伸杆

$$4\pi lhE_2 e_{yy}^{(2)}(0,y) = K(y,0)P_1 + K(y,l)P_2 + \int_0^l K(y,t')q(t')\mathrm{d}t' \qquad (7.7.4)$$

其中

$$K(y,t') = -4\pi lE_2 \frac{\partial}{\partial y} K_{22}^*(0,y,t)$$

$$= l\left\{-\frac{(3-\nu)(1+\nu)}{t'-y} + \frac{8-(3-\nu)(1+\nu)}{t'+y} + \frac{2(1+\nu)^2 t'(y-t')}{(t'+y)^3}\right\} \qquad (7.7.5)$$

这里，K_{22}^*由方程（5.8.30）所定义．令应变$e_{yy}^{(1)}$和$e_{yy}^{(2)}$相等，利用方程（7.7.1）和（7.7.4），我们写出

$$y = l\xi,\quad t' = l\eta,\quad q(t') = P_0 f(\eta)/l,\quad P_i = P_0 G_i \quad (i=1,2) \qquad (7.7.6)$$

$$\lambda = \frac{AE_1}{4\pi lhE_2} \qquad (7.7.7)$$

得到

$$1 - G_1 - \int_0^\xi f(\eta)\mathrm{d}\eta = \lambda[G_1 K(\xi,0) + G_2 K(\xi,1)$$

$$+\int_0^1 K(\xi,\eta)f(\eta)]\mathrm{d}\eta \qquad (7.7.8)$$

方程（7.7.8）是确定剪应力分布的积分方程.按照Muki与Sternberg（1968a）的思路，我们首先表明这个方程包含有$G_1=0=G_2$，即是说，在点$y=0$及$y=l$上没有集中力.这是可以做到的，只要证明，在$K(\xi,0)$及$K(\xi,1)$中的奇异性ξ^{-1}和$(1-\xi)^{-1}$不能由式（7.7.8）右端最后一项的奇异性分别抵消.这最后一项的这种特性是可以证实的，只需假定$f(\eta)$具有形式

$$f(\eta)=\frac{f^*(\eta)}{\eta^\alpha(1-\eta)^\beta},\quad 0<\alpha<1,\quad 0<\beta<1 \qquad (7.7.9)$$

并且$f^*(\eta)$在$[0,1]$上满足Hölder条件，此时，式子

$$I(\xi)=\int_0^1 K(\xi,\eta)f(\eta)\mathrm{d}\eta$$

在靠近点0和1的值，可以由§3.2的分析推演出来.于是，我们写出

$$K(\xi,\eta)=-\frac{C}{\eta-\xi}+\frac{8-C}{\eta+\xi}-D\left\{\frac{1}{\eta+\xi}\right.$$
$$\left.-\frac{3\xi}{(\eta+\xi)^2}+\frac{2\xi^2}{(\eta+\xi)^3}\right\} \qquad (7.7.10)$$

其中，$C=(3-\nu)(1+\nu)$，$D=2(1+\nu)^2$.积分

$$I_1(\xi)=\int_0^1\frac{f^*(\eta)\mathrm{d}\eta}{\eta^\alpha(1-\beta)^\beta(\eta-\xi)} \qquad (7.7.11)$$

可以由式（3.2.24）在$\xi=0$附近直接推算出来，它的形式如下

$$I_1(\xi)=\pi\cot(\alpha\pi)f^*(0)\xi^{-\alpha}+J_1(\xi) \qquad (7.7.12)$$

其中，当$\xi\to 0$时，$\xi^\alpha J_1(\xi)\to 0$.积分

$$I_2(-\xi)=\int_0^1\frac{f^*(\eta)\mathrm{d}\eta}{\eta^\alpha(1-\eta)^\beta(\eta+\xi)} \qquad (7.7.13)$$

可以看成积分$I_2(z)$在$z=-\xi$时的值，再注意，$I_2(z)$在负实轴

上是连续的。现在，方程（3.2.32）表明，在$\xi=0$附近

$$I_2(-\xi)=\frac{\pi\exp(i\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)}f^*(0)(-\xi)^{-\alpha}+J_2(\xi)$$

(7.7.14)

其中$(-\xi)^{-\alpha}=[\xi\exp(i\pi)]^{-\alpha}=\xi^{-\alpha}\exp(1-i\alpha\pi)$

而且$J_2(\xi)$为幂级数。那么

$$I_2(-\xi)=\pi\operatorname{cosec}(\alpha\pi)f^*(0)\xi^{-\alpha}+J_2(\xi) \qquad (7.7.15)$$

包含$(\eta+\xi)^{-2}$和$(\eta+\xi)^{-3}$的其余的积分，可以由$I_2(-\xi)$的微分得到。于是

$$I_2'(-\xi)=-\int_0^1\frac{f^*(\eta)\mathrm{d}\eta}{\eta^\alpha(1-\eta)^\beta(\eta+\xi)^2}$$
$$=-\alpha\pi\operatorname{cosec}(\alpha\pi)f^*(0)\xi^{-\alpha-1}+J_2'(\xi) \qquad (7.7.16)$$

而且

$$I_2''(-\xi)=2\int_0^1\frac{f^*(\eta)\mathrm{d}\eta}{\eta^\alpha(1-\eta)^\beta(\eta+\xi)^3}$$
$$=\alpha(\alpha+1)\pi\operatorname{cosec}(\alpha\pi)f^*(0)\xi^{-\alpha-2}+J_2''(\xi)$$

(7.7.17)

把这些项集合起来，在靠近$\xi=0$处，我们得到

$$I(\xi)=\pi\operatorname{cosec}(\alpha\pi)f^*(0)\xi^{-\alpha}\{C\cos[(1-\alpha)\pi]+8-C$$
$$-(1-\alpha)^2D\}+J(\xi) \qquad (7.7.18)$$

其中，当$\xi\to0$时，$\xi^\alpha J(\xi)\to0$。现在将此式代入式（7.7.8）。既然$f(\eta)$有假设的形式（7.7.9），积分

$$\int_0^\xi f(\eta)\mathrm{d}\eta$$

在$\xi=0$上没有奇异性，则奇异性项ξ^{-1}和$\xi^{-\alpha}$的系数必须分别等于零，这使得$G_1=0$而且

$$C\cos[(1-\alpha)\pi]+8-C-(1-\alpha)^2D=0 \qquad (7.7.19)$$

积分在$\xi=1$附近的行为，就更简单一些。方程（3.2.24）表明，在$\xi=1$附近，

$$I_1(\xi)=-\pi\cot(\beta\pi)f^*(1)(1-\xi)^{-\beta}+J_3(\xi) \qquad (7.7.20)$$

其中，当$\xi\to 1$时，$(1-\xi)^{\beta}J_2(\xi)\to 0$. 那么，$G_2=0$，而且

$$\cot(\beta\pi)=0 \qquad (7.7.21)$$

不难知道，如果$0<\nu<1/2$，方程（7.7.19）没有复数根，其实数根在（0,1）内，对于ν值的这种范围，有且仅有一个在（0，1）内的实根α_*；当$\nu=0$时，在[0,1]内唯一的实根为$\alpha=0$。α_*对ν的依赖关系，如图7.7.2所示，此图取自Muki和Sternberg（1968a）的文章。方程（7.7.21）有唯一的实数根，在（0,1）内的唯一的实数根为$\beta=1/2$。

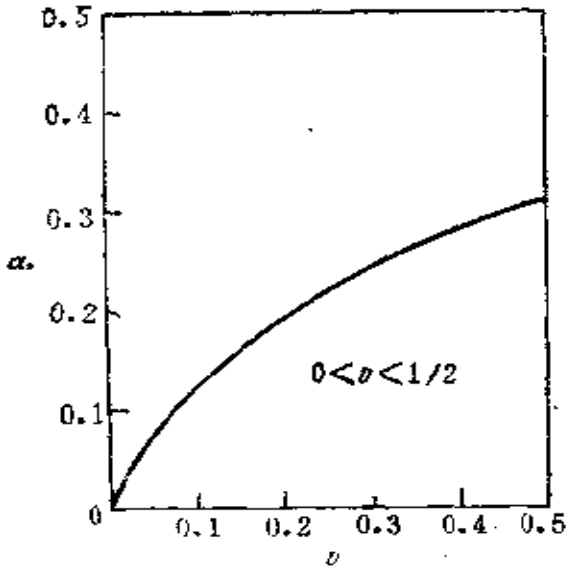


图7.7.2 α_*与Poisson比ν的关系

由以上的分析，可以导出

$$\int_0^{\xi} f(\eta)\,\mathrm{d}\eta+\lambda\int_0^1 K(\xi,\eta)f(\eta)\,\mathrm{d}\eta=1 \qquad (7.7.22)$$

以及$p(0)=P_0$，$p(l)=0$和

$$\int_0^1 f(\eta)\,\mathrm{d}\eta=1 \qquad (7.7.23)$$

方程（7.7.22）似乎仍然没有解出来。

Muki和Sternberg（1968a）考虑了两种可能的办法，用单面接触来代替Reissner的弦边附着直线接触模型。他们考虑狭长体通过另一个宽为$2b$的狭长体被固定在平板上，假设弦边单位长度的联结力$q(y)$沿着狭长体的宽度均匀分布。他们考虑了两种可能的联结条件。最初在对Goodier和Hsu（1954）的文章的讨论中，Krahn（1955）建议使平板每个截面y上的“按狭长体宽度平均”的应变，同相应的轴向应变相等起来。那么，

$$e_{yy}^{(1)}=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}e_{yy}^{(2)}(x,y)\,dx,\quad 0<y<l \tag{7.7.24}$$

这个等式，这里不会再予利用，但可以加以完善，即应用§5.8中的影响函数$K_{22}^{*}(x,y,t)$，得到与式（7.7.4）相似的式子，用来代替$e_{yy}^{(2)}(x,y)$．得到的积分方程，已经由Muki和Sternberg完全解出来了，它给出的结果与应用中心线匹配模式得到的结果，是非常相似的，只在 $y=0$ 的直接邻域有例外．中心线匹配模式是Lefevre、Mudge和Dickie（1966）提出的，并且经过Muki和Sternberg（1968a）加以修正；其中弦边的轴向应变，同“分布的联结力$q(y)$引起的中心线$x=0$上的应变”相等，即是

$$e_{yy}^{(1)}(y)=e_{yy}^{(2)}(0,y),\quad 0<y<l \tag{7.7.25}$$

在这两种模式中，一部分载荷传递到平板两端$y=0$和$y=l$上，在这两种情形下，仅仅可能在对控制接触的积分方程的求解过程中得到P_1和P_2．中心线匹配模式阐明如下．

平板截面y上的位移$v^{(2)}(0,y)$及相应的应变$e_{yy}^{(2)}(0,y)$，可以再应用§5.4中的分析确定出来．事实上，需要考虑的，是对方程（7.7.4）加以修正，以考虑一个事实：在加强筋两端和沿其长度方向的两种联结力，是沿加强筋的宽度而适当地分布的．那么

$$4\pi lhE_2e_{yy}^{(2)}(0,y)=\mathring{K}(y,d)P_1+\mathring{K}(y,l)P_2+\int_0^l\mathring{K}(y,t')q(t')\,dt' \tag{7.7.26}$$

其中

$$\mathring{K}(y,t')=-\frac{4\pi l}{2b}E_2\int_{-b}^{b}\frac{\partial}{\partial y}K_{22}^{*}(-t,y,t')\,dt' \tag{7.7.27}$$

K_{22}^{*}是由式（5.8.30）定义的，且用ν^{*}代替ν．现在$\mathring{K}(y,t')$涉及反正切函数，在数值计算中，它不是一个方便的核函数；而且在$t'=y$点，它有跳跃式的有限的不连续性，这种不连续性出现在

K_{22}^{*}的$-(3-4\nu^{*})\ln r_1 - x^2 r_1^{-2}$项中。不难表明

$$\mathring{K}(y,y^{+}) - \mathring{K}(y,y^{-}) = -2\pi(1-\nu^{2})l/b \qquad (7.7.28)$$

所以，若我们对式（7.7.26）的最后一项作分部积分，利用式（7.7.2）得到方程$\partial p/\partial y = -q(y)$，则我们求出

$$\begin{aligned} 4\pi l h_2 E_2 e_{yy}^{(1)}(0,y) = {} & \mathring{K}(y,0)P_1 + \mathring{K}(y,l)P_2 \\ & - \left[\mathring{K}(y,t')\,p(t')\right]_{0}^{y^{-}} \\ & - \left[\mathring{K}(y,t')\,p(t')\right]_{y^{+}}^{l} \\ & + \int_0^l \frac{\partial \mathring{K}(y,t')}{\partial t'} p(t')\,\mathrm{d}t' \end{aligned} \qquad (7.7.29)$$

因之，利用方程（7.7.3）和（7.7.28），我们得到

$$\begin{aligned} 4\pi l h_2 E_2 e_{yy}^{(1)}(0,y) = {} & P_0 \mathring{K}(y,0) - \frac{2\pi(1-\nu^{2})l}{b} p(y) \\ & + \int_0^l \frac{\partial \mathring{K}(y,t')}{\partial t'} p(t')\,\mathrm{d}t' \end{aligned} \qquad (7.7.30)$$

把$e_{yy}^{(1)}(y)$的方程（7.7.1）代入，以得到无量纲方程

$$\phi(\xi) - \omega\int_0^1 \hat{K}(\xi,\eta)\phi(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \omega\hat{M}(\xi) \qquad (7.7.31)$$

其中，ξ和η以及λ，由式（7.7.6）给出，$h_1 = h_2$，并且

$$\phi(\xi) = \frac{p(y)}{P_0},\quad \gamma = \frac{b}{l},\quad \omega = \frac{\lambda}{4\gamma[\gamma + 2(1-\nu^{2})\pi\lambda]} \qquad (7.7.32)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}(\xi,\eta) = {} & 4\{(1+\nu)(3-4\nu)\rho_1^{-2} - 2(1+\nu)^2\gamma^2\rho_1^{-4} \\ & - [4+(1-\nu)^2]\rho_2^{-2} + 2(1+\nu)(3-\nu)\gamma^2\rho_2^{-4} \\ & - 2\frac{(1+\nu)^2}{(\xi+\eta)^2}\left[\frac{\xi\eta}{\rho_2^{2}} + \frac{[(\xi+\eta)^2-\gamma^2][\xi^2-\xi\eta-\eta^2]}{\rho_2^{4}}\right. \\ & \left. + 2\xi\eta\frac{[(\xi+\eta)^2-\gamma^2]^2}{\rho_2^{6}}\right]\} \end{aligned} \qquad (7.7.33)$$

其中，$\rho_1^2=(\xi-\eta)^2+\gamma^2$，$\rho_2^2=(\xi+\eta)^2+\gamma^2$，$\hat{K}(\xi,\eta)$是由式(7.7.30)中的积分计算后得到的$\partial\mathring{K}/\partial t'$的无量纲形式。核$\hat{K}(\xi,\eta)$在正方形开区域$0<\xi<1$，$0<\eta<1$上是解析的，并且在其闭区域上，除去原点处具有有限的间断性之外，是连续的。接近原点处，方括号中的不连续项是

$$-\frac{8(1+\nu)^2}{(\xi+\eta)^2}(4\xi\eta-\xi^2+\eta^2)\to-8(1+\nu)^2\frac{(4m-m^2+1)}{(m+1)^2}$$

这个极限是点(ξ,η)沿着$\xi=m\eta$趋近时得到的。函数$\hat{M}(\xi)$由下式定义

$$\left.\begin{aligned}\hat{M}(\xi)&=\frac{16}{\gamma}(1-\eta)\operatorname{arctg}\left(\frac{\gamma}{\xi}\right)+\frac{16(1+\nu)\xi}{\xi^2+\eta^2},\quad \xi\neq 0\\ \hat{M}(0)&=\frac{8(1-\nu)\pi}{\gamma}\end{aligned}\right\}\tag{7.7.34}$$

方程(7.7.31)适合于数值处理。由Muki和Sternberg (1968a)得出的图7.7.3以及图7.7.4，给出了两种方法的结果与实验的比较。图7.7.3与三种参数有关，即

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{AE_1}{4\pi l h_2 E_2}=\frac{1}{2\pi}\frac{l}{b}\frac{h_1E_1}{h_2E_2}=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{12}\\ \gamma&=\frac{b}{l}=\frac{1}{12},\quad \nu=0.3\end{aligned}\right\}\tag{7.7.35}$$

并且表明$P_1/P_0=1-p(0)/P_0=1-\phi(0)=0.6$，$P_2/P_0=0.08$，因之60%的载荷作用在$y=0$，8%在$y=l$。Muki与Sternberg指出，两端的虚曲线的斜率是有限的，而相应于平均应变匹配的两端的实曲线的斜率则是无限的（具有对数奇异性），这个图因比例所限而没有表示出$y=l$处的奇异性。图7.7.4表示了它们同Lefevre, Mudge和Dickie (1966)所采用的数值有关，即$\lambda=1/(6\pi)$，$\gamma=1/6$，$\nu=0.5$；理论和实验在端部的不吻合，并不奇怪，因为细长比$2l/b=3$，太小了，不能够使近似分析产生真实的

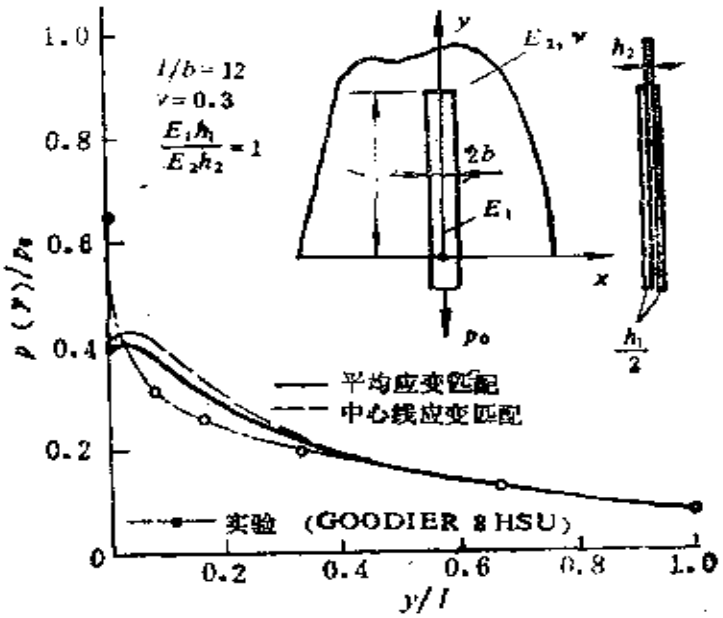


图7.7.3 面接触.载荷的理论渗透值与实验值的比较

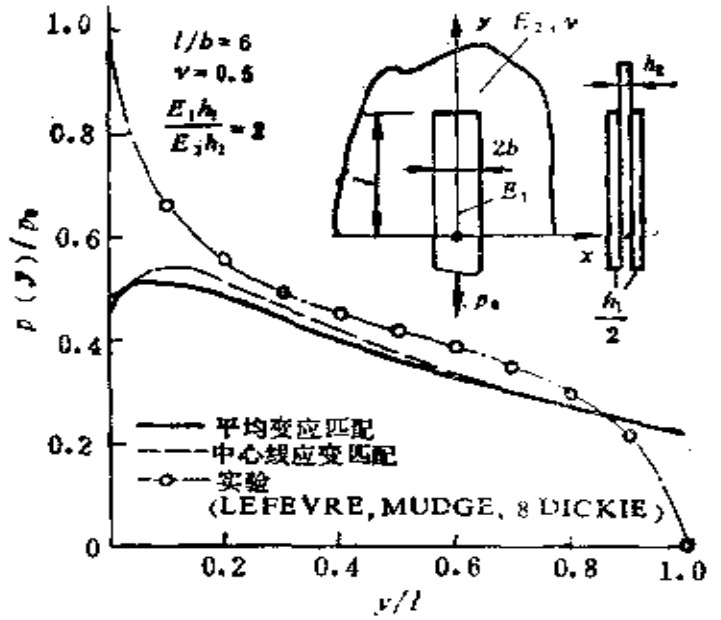


图7.7.4 面接触.载荷的理论渗透值与实验值的比较

结果.

Arutiunian和Mkhitarian (1972)，对于以各种方式加强的半空间，提出了对接触问题的基础广泛的观点，他们考虑了细长的加强筋，有限长的、半无限长的或者无限长的.

第八章　涉及圆形边界的平面问题

8.1　引　　言

在以前的章节中考虑的几乎所有平面接触问题，都假设区域是直线上的，通常为实轴的一部分．例如抛物线状冲头压挤入半平面（§2.4），其边界条件是给定在实轴上的，这类问题通常称为Hertz接触问题．Hertz在他研究两个三维曲线物体的接触时，假设在接触区域每个接触物体可以被看作是具有微小位移的半空间．之所以作出这样的假设，是为了简化分析；在此假设的基础上推导出来的结果，符合于大量实际问题的实验结果，这个事实表明，这一假设是合理的．

必须注意，Hertz提出了两个假定：首先，物体可以近似地取为半空间；其次，边界条件列写在未变形的表面上，在这里，即$z=0$处．前者是Hertz接触的特有的假定，后者是小变形弹性理论的基本假设之一．

本章讨论的平面接触问题是给定一个或两个接触物体的未变形表面上的边界条件，这样的表面是圆．首先我们建立适用于圆边界的平面弹性方程的复变数形式，即Muskhelishvili(1953a)著作中描写的一般理论的严密简炼的表述．然后，构造一些特殊函数，使圆弧上的Cauchy积分的计算得以简化成代数的计算，我们再把此理论应用于某些典型的与圆形边界有关的压挤、夹杂和支承接触问题．

8.2　复变公式表示

在第四章的分析中曾经假设上半平面为弹性体．现在，代替

那条假设的，是该物体占据圆的内部或外部，或者可用保角变换映射成圆外部的某些区域。我们首先考虑圆的内部区域，记为D^+，它在表面$|z|=a$上承受外力作用而产生变形。其余的情形可以由此做一些小的修改而加以讨论。

我们首先回顾一下在无体力情形下，直角坐标系中的位移u和v，和极坐标系中的应力，以下方程同§4.2中的复位势联系起来：

$$2\mu(u+iv)=\kappa\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)} \tag{8.2.1}$$

$$\Theta=\tau_{rr}+\tau_{\theta\theta}=2[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}] \tag{8.2.2}$$

$$\Xi\exp(2i\theta)=\tau_{\theta\theta}-\tau_{rr}+2i\tau_{r\theta}$$
$$=2\exp(2i\theta)[\overline{z}\Phi'(z)+\Psi(z)] \tag{8.2.3}$$

其中，后两个方程是由方程（4.2.15）和（4.2.16）加上例题4.2.3得到的.函数$\Phi(z)$和$\Psi(z)$被定义在D^+上，即$|z|<a$，并且使用§4.3的论断，可以证明$\Phi(z)$和$\Psi(z)$在D^+内是解析的。函数$\Phi(z)$可以连续延拓到D^-上，即应用方程

$$\Phi(z)=-\overline{\Phi}(z_*)+z_*\overline{\Phi'}(z_*)+(z_*/a)^2\overline{\Psi}(z_*),\quad z在D^-中 \tag{8.2.4}$$

其中$z_*=a^2/z$，在C上 $z_*=\overline{z}$。

选择了这个方程，就可以使应力的联合表达式$\tau_{rr}+i\tau_{r\theta}$化成特别简洁的形式，如下所述。在方程（8.2.4.）中，把z_*与z互相交换，现在假设z属于D^+，那么

$$\Phi(\overline{z_*})=-\overline{\Phi}(\overline{z})+\overline{z}\overline{\Phi'}(\overline{z})+(\overline{z}/a)^2\overline{\Psi}(\overline{z}),\quad z属于D^+ \tag{8.2.5}$$

当$|z|<a$时，这个方程可以看成$\Psi(z)$的一个方程，它用$\Phi(z)$和$\Phi(z_*)$表示出来，即

$$a^{-2}\Psi(z)=z^{-2}\Phi(z)+z^{-2}\overline{\Phi}(z_*)-z^{-1}\Phi'(z),\quad z属于D^+ \tag{8.2.6}$$

在z属于D^+时，用$\Phi(z)$和$\Psi(z)$表示的方程，（8.2.2）和（8.2.3）表达了应力；方程（8.7.6）用D^+和D^-中的$\Phi(z)$

表示了D^+中的$\Psi(z)$，所以应力完全可以用$\Phi(z)$表示. 如果在D^+上ϕ和ψ是全纯的，则方程（8.2.4）给出的Φ，在D^-上也是全纯的，而且在无穷远处有界. 另一方面，如果$\Phi(z)$在D^+和D^-上是全纯的，则有

$$\Phi(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots, \quad z\text{属于}D^+ \tag{8.2.7}$$

$$\Phi(z) = B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \cdots, \quad z\text{属于}D^- \tag{8.2.8}$$

那么，式（8.2.6）定义的$\Psi(z)$在$z=0$有一个极点，否则

$$A_0 + \overline{B_0} = 0, \quad B_1 = 0 \tag{8.2.9}$$

方程（8.2.2）和（8.2.3）以及$\exp(-2i\theta) = \bar{z}z^{-1}$给出

$$\tau_{rr} + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi}(\bar{z}) - \bar{z}z^{-1}[z\overline{\Phi}'(\bar{z}) + \Phi(\bar{z})], \quad z\text{属于}D^+ \tag{8.2.10}$$

但是方程（8.2.5）表明了

$$\overline{\Phi(z)} - \bar{z}\overline{\Phi}'(\bar{z}) = a^{-2}\bar{z}^2\Phi(\bar{z}) - \overline{\Psi(z_*)} \tag{8.2.11}$$

使得

$$\tau_{rr} + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}_*) + a^{-2}\bar{z}(\bar{z} - z_*)\overline{\Psi}(\bar{z}), \quad z\text{属于}D^+ \tag{8.2.12}$$

把方程(8.2.1)对θ求导数可以得到位移导数的类似表达式，即

$$\frac{d\phi(z)}{d\theta} = \frac{d\phi(z)}{dz}\frac{dz}{d\theta} = \Phi(z)ir\exp(i\theta) = iz\Phi(z) \tag{8.2.13}$$

$$2\mu(u' + iv') = [\kappa\Phi(z) - \overline{\Phi}(\bar{z}) + \bar{z}\overline{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{z}z^{-1}\overline{\Psi}(\bar{z})] \tag{8.2.14}$$

在这里要记住$\Phi(z) = \phi'(z)$，并且

$$u' = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad v' = \frac{\partial v}{\partial z} \tag{8.2.15}$$

现在使用方程（8.2.11）代换表达式$\overline{\Phi}(\bar{z}) - \bar{z}\overline{\Phi}'(\bar{z})$则得到

$$2\mu(u' + iv') = [\kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}_*) - a^{-2}\bar{z}(\bar{z} - z_*)\overline{\Psi}(\bar{z})], \quad z\text{属于}D^+ \tag{8.2.16}$$

注意在 (8.2.12) 和 (8.2.16) 中，$\Psi(z)$ 必须理解为由方程 (8.2.6) 所给定的.

现在引进一些条件来代替式(4.4.14)和(4.4.15).假设当z从D^+和D^-接近于圆 $|z|=a$ 时，$\Phi(z)$在圆的周界C上是连续的，除了C上有限个点c_k而外，靠近c_k有

$$|\Phi(z)|<A|z-c_k|^{-\alpha},\quad 0<\alpha<1 \tag{8.2.17}$$

而且，假设

$$\lim_{r\to a}(a-r)\Phi'(z)=0,\quad z=r\exp(i\theta) \tag{8.2.18}$$

除了在点c_k之外，对所有的θ值，式 (8.2.18) 都成立. 很容易由方程 (8.2.6) 看出，这些条件包含着

$$\lim_{r\to a}(\bar{z}-z_k)\Psi(z)=\lim_{r\to a}\exp(-i\theta)(r-a^2r^{-1})\Psi(z)=0 \tag{8.2.19}$$

运用这些条件计算当z由D^+接近 $t=a\exp(i\theta)$ 时方程(8.2.12)和 (8.2.16) 的极限值，我们得到

$$\tau_{rr}+i\tau_{r\theta}=\Phi^+(t)-\Phi^-(t) \tag{8.2.20}$$

$$2\mu(u'+iv')=\kappa\Phi^+(t)-\Phi^-(t) \tag{8.2.21}$$

方程 (8.2.20) 表明了$\Phi(z)$ 的行为恰好类似半平面对应的$\Phi(z)$，它在穿过边界C的无载荷部分时是连续的.现在有可能对一类的圆形边界值问题建立公式和求它们的解，正如前面在半平面问题中所做的一样. 记C'为圆的有限个弧状的集会，C''为C 的其余部分. 假设C'上给定位移，而C''上不受载荷，即

$$u+iv=g(t),\quad 在C'上 \tag{8.2.22}$$

$$\tau_{rr}+i\tau_{r\theta}=0,\quad 在C''上 \tag{8.2.23}$$

那么，方程 (8.2.20) 和 (8.2.21) 给出

$$\kappa\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=2\mu g'(t),\quad 在C'上 \tag{8.2.24}$$

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=0,\quad 在C''上 \tag{8.2.25}$$

其中

$$g'(t) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \tag{8.2.26}$$

当C'表示有限个圆弧段的集会时，方程（8.2.24）和（8.2.25）的详尽解答，可以参考Muskhelishvili的著作[（1953a，Chapter 18），（1953b，§104）]；与半平面问题中的解很相似。当C'只是$t=t_1$到$t=t_2$的一个圆弧段时，这个问题的通解为

$$\Phi(z) = \frac{\mu}{\pi \mathrm{i}\kappa} X_0(z) \int_{C'} \frac{g'(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)(t-z)} + (Az+B)X_0(z) \tag{8.2.27}$$

其中

$$X_0(z) = (z-t_1)^{-1/2+\mathrm{i}\alpha}(z-t_2)^{-1/2-\mathrm{i}\alpha} \tag{8.2.28}$$

$$\kappa = \exp(2\pi\alpha),\quad \alpha = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2,\quad -1/2 < \alpha_2 < 1/2$$

对$X_0(z)$，要理解为沿C'割开的平面中全纯的一支，并满足

$$\lim_{z\to\infty} z X_0(z) = 1 \tag{8.2.29}$$

实际上，边界承受应力作用的部分所具有的边界条件并不简单地是（8.2.22）：在这种情形下，宁可作应力边值问题来建立问题，即，假设（初始未知的）C'上的应力分布，使得

$$\tau_{rr} + \mathrm{i}\tau_{r\theta} \equiv \Phi^+(z) - \Phi^-(t) = f(t),\ \text{在 } C' \text{上} \tag{8.2.30}$$

在这种情形下，复势$\Phi(z)$为

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c'} \frac{f(t)}{t-z}\,\mathrm{d}t + A \tag{8.2.31}$$

对于这个函数，公式（8.2.7）和（8.2.8）中的A_0和B_0为

$$A_0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c'} \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t} + A,\quad B_0 = A \tag{8.2.32}$$

而

$$B_1 = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c'} f(t)\mathrm{d}t \tag{8.2.33}$$

那么

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{4\pi i}\int_{C'}\frac{f(t)}{t}dt \tag{8.2.34}$$

并且方程$B_1=0$给出

$$\int_{C'}(\tau_{rr}+i\tau_{r\theta})e^{i\theta}d\theta=0 \tag{8.2.35}$$

这说明，作用在C'上的应力的合力等于零；这是通常的情形。有时，作用在C'上的应力被体力所平衡，则全部复势公式要有一些轻微的改变（参考§4.2和§8.6）。

现在假设弹性体占据着简单闭曲线C的外部区域D^-。当D^-不是单连通时，多值性问题必须予以认真考虑。那么立即可知，导致方程（4.3.1）的那些论据被破坏了，而必须建立新的论据，如下所述。应力和位移在D^-上是单值的。那么，Θ和$\mathrm{Re}[\Phi(z)]$也是单值的。但是，$\mathrm{Im}[\Phi(z)]$并不是这样，因为沿着包围C的通路L转一圈，$\mathrm{Im}[\Phi(z)]$可以增加$2\pi iB$，其中B是实数。现在不失一般性地假设$z=0$位于C内，即是在D^+的区域中，那么$\ln z$在绕（沿反时针方向）L一周时，增加$2\pi i$，于是$\Phi(z)-B\ln z$将是单值的；可以推断出

$$\Phi(z)=B\ln z+\Phi^*(z) \tag{8.2.36}$$

其中，$\Phi^*(z)$在D^-上是全纯的，可能在无穷远处属于例外。由此方程积分，可知（例题8.2.1）

$$\phi(z)=\beta z\ln z+\gamma\ln z+\phi^*(z) \tag{8.2.37}$$

其中γ是复常数，除了可能在无限远处之外，$\phi^*(z)$在D^-内是全纯的，现在方程

$$\Xi=-2[z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}] \tag{8.2.38}$$

表明，$\Psi(z)$在D^-内是全纯的，因之它的积分$\psi(z)$具有形式

$$\psi(z)=\gamma'\ln z+\psi^*(z) \tag{8.2.39}$$

现在考虑位移的单值性：在绕L转一圈后

$$[2\mu(u+iv)]_L=2\pi i[(\kappa+1)Bz+(\kappa\gamma+\overline{\gamma'})] \tag{8.2.40}$$

如果位移是单值的，则有

$$B=0, \qquad \kappa\gamma+\overline{\gamma'}=0 \tag{8.2.41}$$

正如半平面问题的情形一样，常数γ和γ'与作用在物体边界上的合力有关．方程（4.2.26）表现，作用在物体的孔C上的总外力为

$$X+\mathrm{i}Y=\mathrm{i}[\phi(z)+z\overline{\phi'}(\overline{z})+\overline{\psi}(\overline{z})]_C=-2\pi(\gamma-\overline{\gamma'}) \tag{8.2.42}$$

利用§1.4的约定并且注意到，如果C被按照反时针方向经历一次时，$\hat{n}$指向外侧，则式（4.2.26）的正负号必须改变．方程（8.2.41）和（8.2.42）给出

$$\gamma=-\frac{X+\mathrm{i}Y}{2\pi(1+\kappa)}, \qquad \gamma'=\frac{\kappa(X-\mathrm{i}Y)}{2\pi(1+\kappa)} \tag{8.2.43}$$

现在我们可以回到Φ与Ψ；像在§4.3内一样，考虑到应力在无限远处的有界性，对于式(8.2.43)重新给出γ和γ'的值，可以推论出方程（4.3.7）、（4.3.9.）、（4.3.10）与（4.3.11）是成立的．

如果D^-是单位圆的外部，那么在D^+内由式（8.2.4）定义的$\Phi(z)$除$z=$点之外将是全纯的，在这一点的附近，有

$$\Phi(z)=\overline{\Gamma}'z^{-2}+\overline{\gamma'}z^{-1}+O(1) \tag{8.2.44}$$

除去这一点之外，上面的分析只要作一明显的很小的改动之后仍然有效（见例题8.2.2）．

现在假设物体占据区域G^-，这个区域可以用变换$z=\omega(\zeta)$保角地映射到单位圆的外部D^-，这个变换使点$z=\infty$与$\zeta=\infty$互相对应．实际中最重要的情形是，G^-是轴长为$2a$，$2b(a>b)$的椭圆的外部．那么

$$\omega(\zeta)=R(\zeta+m\zeta^{-1}), \quad R>0, \quad 0\leqslant m<1 \tag{8.2.45}$$

并且

$$a=R(1+m), \quad b=R(1-m) \tag{8.2.46}$$

前面记为$\phi(z)$，$\psi(z)$，$\Phi(z)$，$\Psi(z)$的函数，现在分别改写

成$\phi_1(z)$，$\psi_1(z)$，$\Phi_1(z)$，$\Psi_1(z)$，并且引进记号

$$\phi(\zeta)=\phi_1(z)=\phi_1(\omega(\zeta)),\psi(\zeta)=\psi_1(z)=\psi_1(\omega(\zeta)) \tag{8.2.47}$$

$$\Phi(\zeta)=\Phi_1(z)=\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},\ \Psi(\zeta)=\Psi_1(z)=\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \tag{8.2.48}$$

现在当$\zeta\in D^-$，即$|\zeta|>1$时，函数$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$和$\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)$全纯，方程(8.2.1)～(8.2.3)变成

$$2\mu(\mu+\mathrm{i}\upsilon)=\kappa\phi(\zeta)-\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\overline{\phi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)} \tag{8.2.49}$$

$$\Theta=2[\Phi(\zeta)+\overline{\Phi(\zeta)}] \tag{8.2.50}$$

$$\Theta=2[\overline{\omega(\zeta)}\frac{\Phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}+\Psi(\zeta)] \tag{8.2.51}$$

令$\zeta=\rho\exp(\mathrm{i}\delta)$，我们可以在$z$平面上引进曲线坐标系．那么，对于变换（8.2.45），曲线$\rho=\mathrm{const}$为共焦点椭圆族（见例题8.2.10），而$\delta=\mathrm{const}$.为一组与之正交的共焦双曲线，如图8.2.1所示．椭圆（8.2.46）是$\rho=1$的曲线．如果在任意点z，相应于ρ和δ都增加的方向❶，分别记为ρ与δ，那么，ρ与x轴之间的夹角为δ（例题8.2.2）

$$\exp(\mathrm{i}\delta)=\frac{\zeta}{\rho}\ \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \tag{8.2.52}$$

用δ代替θ，方程（8.2.3）成立，因而

$$\tau_{\rho\rho}-\tau_{\delta\delta}+2\mathrm{i}\tau_{\rho\delta}=2\exp(2\mathrm{i}\delta)[\overline{\omega(\zeta)}\ \frac{\Phi'(\zeta)}{\zeta\omega'(\zeta)}+\Psi(\zeta)] \tag{8.2.53}$$

并且

❶ 即法线方向——译者

$$\tau_{\rho\rho}+i\tau_{\rho\sigma}=\overline{\Phi(\xi)}+\Phi(\xi)-\frac{\overline{\xi}\omega(\xi)}{\xi\omega'(\xi)}\overline{\Phi'(\xi)}-\frac{\overline{\xi\,\omega'(\xi)}}{\xi\omega'(\xi)}$$

$$\times\overline{\Psi(\xi)}\quad \xi在G^+内 \tag{8.2.54}$$

我们用下面方程定义D^+中的$\omega'(\xi)\Phi(\xi)$

$$\omega'(\xi)\Phi(\xi)=-\omega'(\xi)\overline{\Phi}(\xi^{-1})+\xi^{-2}\omega(\xi)\overline{\Phi}'(\xi^{-1})$$

$$+\xi^{-2}\overline{\omega'}(\xi^{-1})\overline{\Phi}(\xi^{-1}) \tag{8.2.55}$$

特别是，当$\omega(\xi)$由式(8.2.45)给出时，$\omega'(\xi)\Phi(\xi)$在除了$\xi=0$点而外的D^+是全纯的. 假设Φ和Ψ在无限远处具有形式(4.3.7)和(4.3.9)，那么可以发现奇异性，因而

$$\Phi(\xi)=\Gamma+\gamma z^{-1}+O(z^{-2})=\Gamma+\gamma R^{-1}\xi^{-1}+O(\xi^{-2}) \tag{8.2.56}$$

$$\Psi(\xi)=\Gamma'+\gamma' z^{-1}+O(z^{-2})=\Gamma'+\gamma R^{-1}\xi^{-1}+O(\xi^{-2}) \tag{8.2.57}$$

于是，在点$\xi=0$附近有●

$$\omega'(\xi)\Phi(\xi)=(m\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma'})R\xi^{-1}+\overline{\gamma'}\xi^{-1}+O(1) \tag{8.2.58}$$

由式(8.2.55)给出$\Phi(\xi)$之后，应力的联写形式(8.7.54)变成

$$\tau_{\rho\rho}+i\tau_{\rho\theta}=\Phi^-(t)+\Phi^+(t),\quad t=\exp(i\theta) \tag{8.2.59}$$

此式说明，Φ在边界的不受载荷作用的部分上是连续的。可以证明，当椭圆上合力为零时，则$\gamma=0=\gamma'$，除了在$\omega'(\xi)$的零点上它有简单极点之外，$\Phi(\xi)$在D^-上全纯，且有

$$\Phi(\xi)=-F(\xi)+\Gamma+\frac{A}{\xi^2-m} \tag{8.2.60}$$

其中

● 公式(8.2.58)中的R与r在这里暂时未交待，读者可以查 Muskhelishvili (1953a)的著作，有中文译本《数学弹性力学中的几个基本问题》，赵惠元译——译者

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{(\tau_{\rho\rho}+i\tau_{\rho\omega})}{t-\zeta}dt \qquad (8.2.61)$$

这里C代表沿反时针绕行的圆周$|\zeta|=1$，由这个方程，使$\omega'(\zeta)\cdot\Phi(\zeta)$内含$\zeta^{-2}$项的系数与式（8.2.58）中的相应系数相等，我们导出

$$A=m(\Gamma+\overline{\Gamma})+\overline{\Gamma}'-mF(0) \qquad (8.2.62)$$

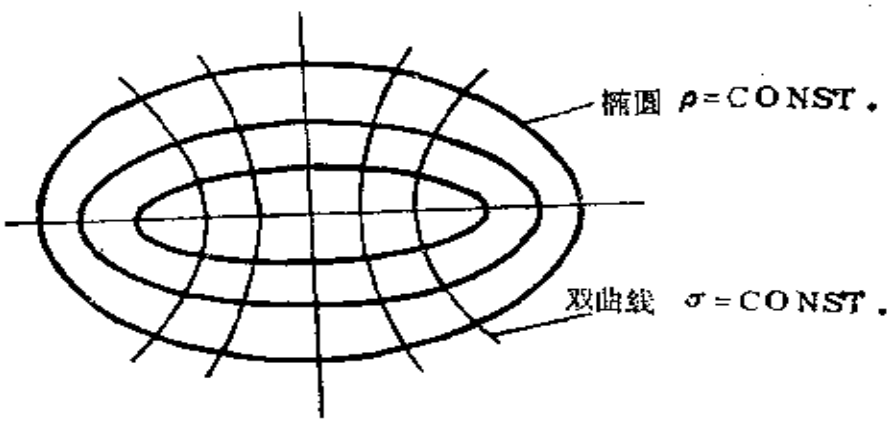


图8.2.1 与变换(8.2.45)相关的共焦椭圆组和双曲线组

例8.2

1. D^-代表区域$|z|>a$，$\Phi(z)$在D内全纯，z和z_0是D^-内的两个点，由D^-内的一条弧线连接起来，证明

$$\int_{z_0}^{z}\Phi(z)dz=c\ln(z)+\phi(z)$$

其中$\phi(z)$是全纯的，c为复常数。提示：对$\Phi(z)$的Laurent展开式进行积分。

2. 利用本节的分析和例题4.3.1，证明，区域$|z|>1$作用着表面力$\tau_{rr}+i\tau_{r\theta}=f(t)$，并且在$|z|=1$上表面力的合力为零，在无穷远处为$\tau_{xx}=T_1,\tau_{yy}=T_2$，则位势$\Phi(z)$为

$$\Phi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma'}\frac{f(t)dt}{t-z}+\frac{T_2+T_1}{4}+\frac{T_2-T_1}{2z^2}$$

3. 证明由方程（8.2.6）通过积分可以导出

$\psi(z)=-z_0\Phi(z)-\overline{\phi}(z_0)$，$z$在$D^+$内

4. 记作方程（1.3.3.），$\Phi(z)=Cz$，其中C为实数，代表刚体旋转，证明：条件（8.2.9）指的是，作用“在区域D^+内并且环绕原点的一条闭曲线上”的应力的力矩与合力为零.

5. 试表明，对应于圆$r=a$上的均匀压力$\tau_{rr}=-p$的复位势$\Phi(z)$和$\Psi(z)$为

$$\Phi(z)=\begin{cases}-p/2, & |z|<a\\ p/2, & |z|>a\end{cases},\quad \Psi(z)=0$$

因此表明圆上的径向位移为$-(\kappa-1)pa/(4\mu)$.表明，由于区域$|z|>a$上均匀分布的径向应力p的作用，圆$r=a$上相应的径向位移为$\kappa pa/(2\mu)$.

6. 如图8.2.2所示，两个等值而反向的点载荷作用在图$|z|<a$上，试表明，若$\zeta=a\exp(i\alpha)$，则复势$\Phi(z)$和$\psi(z)$可以写成

$$\Phi(z)=-\frac{P}{4\pi}\left(\frac{1}{z+\bar{\zeta}}-\frac{1}{z-\zeta}\right)+\frac{P\cos\alpha}{2\pi a}$$

$$\psi(z)=\frac{P}{2\pi}\ln\left(\frac{z+\bar{\zeta}}{z-\zeta}\right)-\frac{P}{2\pi}\left(\frac{\bar{\zeta}}{z+\bar{\zeta}}+\frac{\bar{\zeta}}{z-\zeta}\right)$$

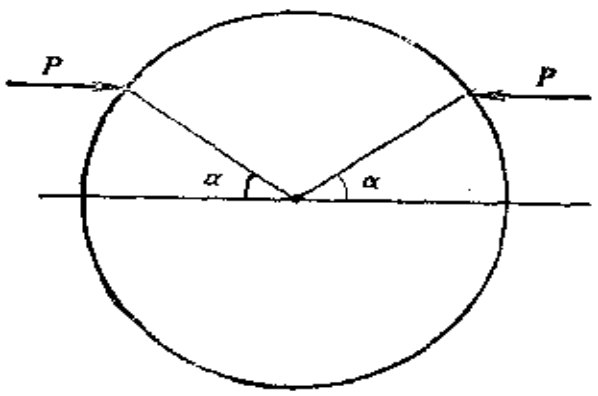


图8.2.2 作用在半径为a的圆上的两个大小相等方向相反的力

7. 试表明ρ与x轴形成的夹角δ（见图8.2.1，为式(8.2.45)的一个特殊情形）由方程（8.2.52）给出.

8. 令例题4.2.4中，$\alpha=(\pi/2)+\Omega$，试表明在C上

$$\tau_{rr}+i\tau_{r\theta}=(t/a)[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]$$

9. 试表示，若“′”表示在C上对$t=\exp(i\sigma)$求导，那么方程（8.2.49）的导数为

$$2\mu(u'+iv')=\omega'(t)[\kappa\Phi(t)+\Phi^+(t)]$$

10. 试表明椭圆组$\rho=\text{const}$及双曲线组$\sigma=\text{const}$的焦点在$\pm 2Rm^{1/2}$处.

8.3 对于圆弧的基本函数

在讨论圆域的某些特殊问题的求解以前，我们应该首先建立一段或者两段圆弧上受载荷的基本复势函数.

首先考虑图 8.3.1 中连接点$\exp(\pm i\theta_0)$的圆弧C'，并且令$X(z)$表示下面的函数

$$X(z) = [(z-\exp(i\theta_0))(z-\exp(-i\theta_0))]^{1/2}$$
$$= [z^2 - 2z\cos\theta_0 + 1]^{1/2} \qquad (8.3.1)$$

函数$1/X(z)$是Legendre多项式的生成函数〔Abramwitz与Stegun (1972, p.783)〕，在沿曲线C'割开的平面中是全纯的，满足关系

$$X(z^{-1}) = -z^{-1}X(z) \qquad (8.3.2)$$

并且具有展开式

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{X(z)} &= -\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, && |z|<1 \\ \frac{1}{X(z)} &= z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^{-k}, && |z|>1 \end{aligned}\right\} \qquad (8.3.3)$$

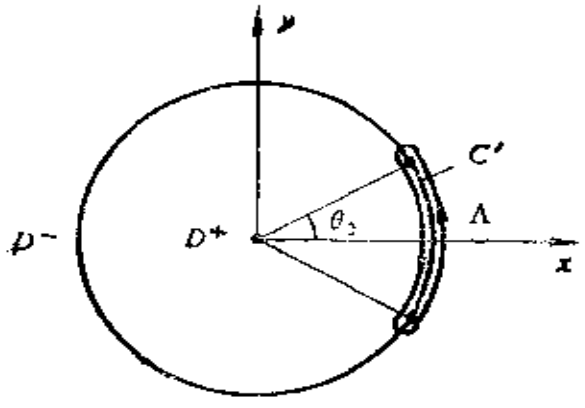


图8.3.1 单位圆上单个圆弧的几何结构

其中

$$p_k = P_k(\cos\theta_0) \qquad (8.3.4)$$

当z从D^+ ($|z|<1$) 或D^- ($|z|>1$)趋近于点$t = \exp(i\theta)$时，$X(z)$的边值满足

$$X^+(t) = -X^-(t) \qquad (8.3.5)$$

除去无穷远点之外，函数$z^k/(z)$在图 8.3.1 的回路Λ的外部是全纯的，具有形式

$$\frac{z^n}{X(z)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1-k} z^k + O(z^{-1}) \tag{8.3.6}$$

但是方程（3.2.10）表明

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda} \frac{\xi^n d\xi}{X(\xi)(\xi - z)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1-k} z^k - \frac{z^n}{X(z)} \tag{8.3.7}$$

因之，处置Λ，使它沿 C'^- 前进并且沿 C'^+ 返回，注意到式（8.3.5），我们求出

$$\frac{1}{\pi i}\int_{C'} \frac{t^n dt}{X^+(t)(t - z)} = \frac{z^n}{X(z)} - \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-1-k} z^k \tag{8.3.8}$$

现在令

$$W_n(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{C'} \frac{t^n dt}{X^+(t)(t - z)} + C_{n-1} \tag{8.3.9}$$

选择C_{n-1}，使得如果$W_n(z)$展开成（8.2.7）与（8.2.8）的形式，则有$A_0 + B_0 = 0$. 这意味着$W_n(z)$将是对于$\Phi(z)$的一个适当的候选者. 对于$W_0(z)$，由于式（8.3.8）中p_{-1}必须取为零，所以$B_0 = C_{-1}$，$A_0 = -1 + C_{-1}$，这样$C_{-1} = 1/2$. 对于$n > 0$，有$B_0 = C_{n-1}$，$A_0 = -p_{n-1} + C_{n-1}$，以致$C_{n-1} = (1/2)p_{n-1}$. 这样

$$C_n = 1/2, \quad n = -1; \quad C_n = (1/2)p_n, \quad n \geqslant 0 \tag{8.3.10}$$

并且

$$W_n(z) = z^n / X(z) - N_{n-1}(z) \tag{8.3.11}$$

其中

$$N_n(z) = \sum_{k=0}^{n}{}' p_{n-k} z^k, \quad n \geqslant 0, \quad N_{-1}(z) = -1/2 \tag{8.3.12}$$

这里“′”表示常数项($k=0$)要减半。用同样的方法，我们可以表明

$$W_{-n+1}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C'}\frac{t^{-n+1}dt}{X^+(t)(t-z)}+C_{n-1}$$

$$=\frac{z^{-n+1}}{X(z)}+N_{n-1}(z^{-1})=-W_n(z^{-1}) \qquad (8.3.13)$$

对于某些压痕和夹杂问题，载荷作用在图8.3.2所示的对称位置的圆弧上。现在我们考虑函数

$$Y(z)=[(z-\exp(i\theta_0))(z-\exp(-i\theta_0))(z+\exp(i\theta_0))\cdot(z+\exp(-i\theta_0))]^{1/2}$$

$$=[z^4-2\cos 2\theta_0 z^2+1]^{1/2} \qquad (8.3.14)$$

当角为$2\theta_0$时，很明显，它是$X(z^2)$。如果C'表示$|z|=1$上的一对圆弧，按反时针方向经过它们，那么

$$V_n(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C'}\frac{t^n dt}{Y^+(t)(t-z)}+A_{n-2}$$

$$=\frac{z^n}{Y(z)}-M_{n-2}(z) \qquad (8.3.15)$$

$$A_{-2}=1/2,\quad M_{-2}(z)=-1/2,\quad A_{-1}=0,\quad M_{-1}(z)=0 \qquad (8.3.16)$$

并且，对于$n\geqslant 0$，当n为偶数时，$A_n=(1/2)P_n$；当n为奇数时，$A_n=0$；而且

$$M_n(z)=\sum_{k=0}^{m}{}'\,p_k z^{n-2k},\quad p_k=P_k(\cos 2\theta_0) \qquad (8.3.17)$$

其中 $m=[n/2]$ 表示小于或等于 $n/2$ 的最大整数，“′”表示(8.3.17)式中常数项（如果n为偶数）要减半。类似地，有

$$V_{-n+2}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{C'}\frac{t^{-n+2}dt}{Y^+(t)(t-z)}+A_{n-2}$$

$$= \frac{z^{-n+2}}{Y(z)} + M_{n-2}(z^{-1}) = -V_n(z^{-1}) \quad (8.3.18)$$

这些函数将在§8.4～§8.6中用到.

例8.5

1. 函数$(z-z_0)^{1/2}$必须定义在这样的平面内，它被沿着z_0到∞的某直线切开一条割缝。试表明，如果$X(z)$的两个因子被定义在图8.3.3所示的被弧线切口割缝的平面上，那么在$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$上的$X(z)$具有形式如下的边界值

$$X^+(t) = -X^-(t) = -\exp(i\theta/2)[2\cos\theta - 2\cos\theta_0]^{1/2}$$

并且$X(z)$在从1到∞跨过割缝时是连续的.利用方程(8.3.2)在C'的下半部分上的相应点$2\pi-\theta$上计算这个函数的值，如果$|z|<1$，则有$|z^{-1}|>1$。试表明在$\theta_0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$上，$Z(z)$的这一支的值为

$$X(t) = i\exp(i\theta/2)[2\cos\theta_0 - 2\cos\theta]^{1/2}$$

2. 试表明，若$X(z)$如例题8.3.1那样选取，则当z趋近于$t=\exp(i\theta)$ $(0\leqslant\theta\leqslant\theta_0)$时，$W_n(z)$的边界值满足

$$W_n^+(t) - W_n^-(t) = -2\exp[i(n-1/2)\theta][2\cos\theta - 2\cos\theta_0]^{-1/2}$$

而$V_n(z)$的边界值满足

$$V_n^+(t) - V_n^-(t) = -\exp[i(n-1)\theta][\cos^2\theta - \cos^2\theta_0]^{-1/2}$$

3. 试表明

$$\sum_{k=0}^{\infty}\cos(k+1/2)\theta P_k(\cos\theta_0) = \begin{cases}[2(\cos\theta-\cos\theta_0)]^{1/2}, & 0<\theta<\theta_0\\ 0 & \theta_0<\theta<\pi\end{cases}$$

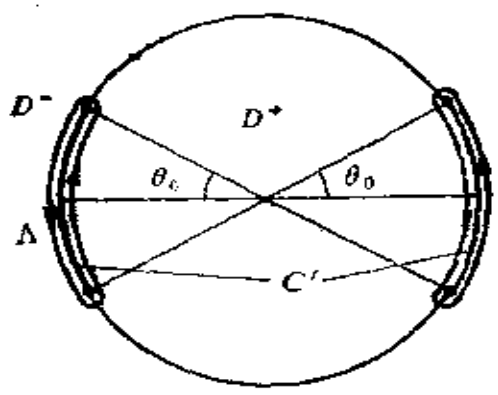


图8.3.2单位圆上一对圆弧的几何结构

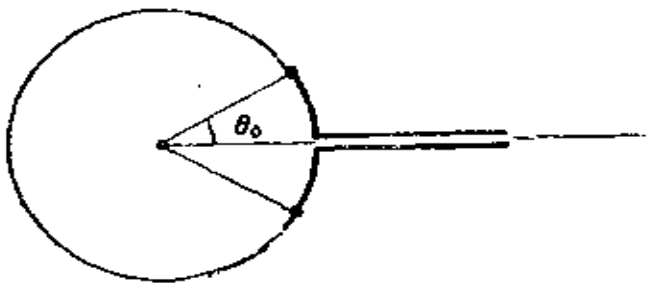


图8.3.3 用于定义$X(z)$的复平面上的割缝

4. 利用例题8.3.3的结果，试表明

$$\int_{\theta}^{\pi/2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cos(2k+1)\theta\,(1+\cos2\theta)P_k(\cos2\theta_0)\,d\theta$$

$$=\int_{\theta}^{\pi/2-\theta}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{1/2}}=E(\cos\vartheta_0)$$ ❶

8.4 弹性圆柱体的压缩

我们知道，Hertz 对于两个三维弹性体建立的接触理论（§2.9）给出了在应用上鲜明的精确的结果，尽管它是建立在一个假定上，即为了由给出的表面作用力计算位移，而把每个弹性体近似地看作一个半空间。为了找到同样满意的三维理论，已经作了很多尝试。在§2.4中描述了一个简单的理论，可以把它看作是Hertz理论（例题2.9.2，2.9.3）的极限情形；其缺点是，用两个“半平面”代替处于平面应变状态的两个圆柱体，这两个“半平面”承受到不平衡力作用在其平边界上，而在二维弹性中，此力系产生的位移，虽然只是在局部上有意义，但在远离力的作用区域却是不真实的，特别是，在无限远处这种位移变成无穷大；位移还包含一个任意常数的平移。这有两个直接的后果：（1）不可能列出这种条件的公式，它对应于 Hertz 理论的方程（2.9.3）；而在接触区域之外，圆柱体不能互相穿透；（2）也不可能求出两个物体的“接近量”；注意，当物体只在一个方向有曲率时，在例题2.9.2中，“接近量”δ就变得没有意义了。

❶E的意义，原作者没有交代，由被积函数可知它应该是第二类完全椭圆积分——译者

为了消除这种不确定性，特别是关于δ的这种不确定性，至少必须考虑接触体之一的形状和大小．最有实际意义的，是夹在圆柱体之间的有限半径的弹性滚柱的压缩，这两个圆柱体不一定是相同的，而且其弹性性质也可能和滚柱的不同．

罗祖道（Loo，1958）考虑了一个滚柱受两个相同的任意半径的圆柱体的挤压，圆柱体与滚柱的材料不一定相同．罗祖道应用的工具是首先由Hertz（1883）给出的一个圆柱体的位移场，这个位移场是由两个相等而反向的不在直径上的共线的力所产生的[例题8.2.6以及Muskhelishvili的著作(1953a，§80a)]．他假设，外边的两根圆柱也受到沿连心线方向的“等值而反向”的力系的作用，从而正确地建立了接触问题的积分方程．然后他忽略了此方程中的高阶项，把它变成一个具有简单核的积分方程，这种核表征半平面问题（参考方程6.2.16），但是，其右端是经过修正的，依据曲率、弹性常数和总载荷进行修正的．用这种方法他获得了外边两个圆柱体的接近量的第一阶近似值．

我们所考虑的这一类问题的精确的建立和封闭形式的解源于Sternberg和Turteltaub（1972）的独具匠心的论文中．他们注意到罗祖道所忽略的项与Hertz的分析中忽略的项，是同阶的，因而对他的解提出了质疑．他们考虑了罗祖道问题的特殊情形的封闭形式的解，在这种特殊情形中，半径为R的滚柱受到两块刚性平板的挤压．我们应用他们的公式，证明他们所指出的这个问题有唯一的解，可以使用§8.3中推导出来的基本复势$V_*(z/R)$的简单组合来推导其解．

这个问题的几何关系如图8.4.1所示．边界条件取成如下的形式

$$\tau_{rx}=0，\ 在C''上；\quad \tau_{ry}=0，\ 在C上 \tag{8.4.1}$$

$$u=R(\mathrm{sign}x\cos\theta_*-\cos\theta)，\ 在C'上 \tag{8.4.2}$$

这里C是圆$r=R$，C'是接触区域，C''是C上的非接触区域．方程（8.4.1）表明，在接触区外部，圆柱表面上没有载荷作用，并

且接触是无摩擦的，方程（8.4.2）表明，在接触区域内，圆柱位移的水平分量是已知的；这里θ_*与两平板的相对接近量δ有关，由下式给定

$$\delta = 2R(1-\cos\theta_*) \tag{8.4.3}$$

考虑到对称性，$u(x,y)$是x的奇函数，y的偶函数；而$v(x,y)$是x的偶函数，y的奇函数；在这些限制下，方程（8.4.2）可以用下面的式子来代替

$$u = R(\cos\theta_* - \cos\theta),\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \tag{8.4.4}$$

还是受对称性的制约，其余的条件为分离条件

$$u \leqslant R(\cos\theta_* - \cos\theta),\quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \tag{8.4.5}$$

这说明变了形的滚柱没有穿入平板，滚柱与平板在接触区上没有拉伸面力，即

$$\tau_{rx} \leqslant 0,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \tag{8.4.6}$$

平衡条件

$$-R\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \tau_{rx}\mathrm{d}\theta = P \tag{8.4.7}$$

还有一个条件，即说明在接触区的边缘上，接触应力为零，即

$$\tau_{rx} = 0,\quad \theta = \theta_0 \tag{8.4.8}$$

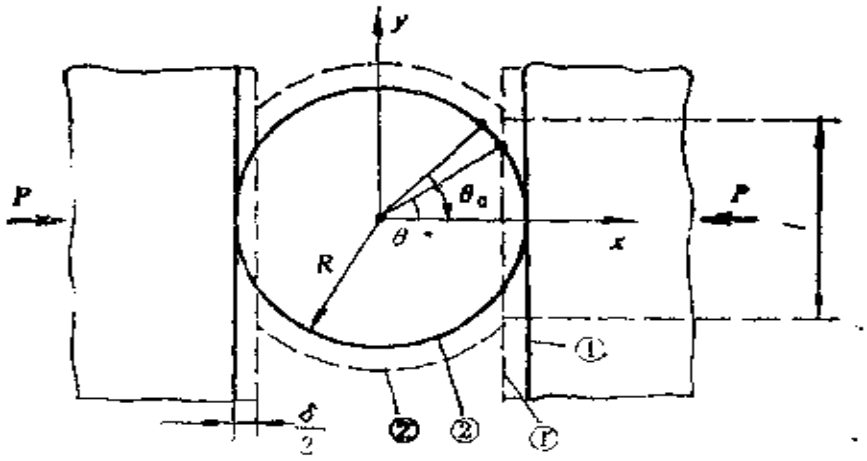


图8.4.1　一滚柱被夹挤在两块刚性平板之间；1——平板初始位置；1′——平板终止位置；2——未变形的滚柱；2′——变形后的滚柱

应当注意，上面的公式与弹性小变形接触问题的标准公式有所不同。在普通的公式中，边界条件完全列写在未变形的边界上，而式（8.4.1）的第二式和式（8.4.2）一起，所指的是，作用力切于滚柱的变了形的表面部分，而位移垂直于它。这些与实际不符合，但却是必要的，因为圆柱体的初始表面的法向位移事先是不知道的，而垂直于平板表面的位移，除了初始未知常数$\cos\theta_0$之外，则是确定的。注意，边界条件(8.4.1)和(8.4.2)式是作用在未变形的表面上的，即作用在圆柱面上，所以只在弹性小变形的限制下，解才成立。

第一步是确定§8.2中的复势$\Phi(z)$所受的条件，它在C上必须满足$\tau_{r,y}=0$。例题8.2.8表明，在C上有

$$\tau_{r,x}+\mathrm{i}\tau_{r,y}=(t/R)[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)] \tag{8.4.9}$$

那么，这个条件就是说，在C上，$t[\Phi^+(t)-\Phi^-(t)]$必须是实函数。因此方程（8.4.1）包含有$\Phi(z)$在跨过C''时是连续的，复势可以设想成具有如下形式

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{N}[a_nV_n(z/R)+b_nV_{-n}(z/R)] \tag{8.4.10}$$

例题8.3.2表明，对于这个Φ，在$t=R\exp(\mathrm{i}\theta)$而$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$时，有

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=-S(\theta)\sum_{n=0}^{N}\{a_n\exp[\mathrm{i}(n-1)\theta]+b_n\exp[-\mathrm{i}(n+1)\theta]\} \tag{8.4.11}$$

其中$S(\theta)=(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{1/2}$。由对称性条件表明$a_n$，$b_n$是实的；而且当$n$为奇数时，$a_n=0$；而条件$\tau_{r,y}=0$表明$a_n=b_n$。于是

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{N}a_n[V_n(z/R)-V_{-n}(z/R)],\quad n\text{为偶数} \tag{8.4.12}$$

并且可以证明，这个$\Phi(z)$满足方程（8.2.9）.

现在考虑位移条件. 方程（8.3.15）和（8.3.18）表明，当$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$时，有

$$it[U^{\pm}(t)+V_{-}^{\pm}(t)]=\mp Ri\cos n\theta S(\theta)+it[M_n(R/t)-M_{n-2}(t/R)] \tag{8.4.13}$$

于是，对于$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$，例题8.2.9给出

$$2\mu\left(\frac{du}{d\theta}+i\frac{dv}{d\theta}\right)=(1-\kappa)RiS(\theta)\sum_{n=0}^{N}a_n\cos n\theta+(1+\kappa)it\sum_{n=0}^{N}a_n[M_n(R/t)-M_{n-2}(t/R)] \tag{8.4.14}$$

由于第一项是虚的，所以$du/d\theta$由第二项的实部给出；使此实部满足$du/d\theta=R\sin\theta$，并且由式(8.3.16)和（8.3.17）取M_{-2}，M_0，M_2的值，我们求得

$$2\mu R\sin\theta=(1+\kappa)R\mathrm{Re}\{i\exp(i\theta)[a_0+a_2(-1/2+\exp(-2i\theta)+p_1/2)+\cdots]\} \tag{8.4.15}$$

其中没有明显表示出的那些项将含有倍角的指数，所以其相应的a_n必须为零. 使两端的$\sin\theta$前面的系数相等，我们得到

$$4\mu=(1+\kappa)[-2a_0+(3-p_1)a_2] \tag{8.4.16}$$

我们回到方程（8.4.9）并且计算τ_{rz}，它是

$$\tau_{rz}=-2S(\theta)[a_0+a_2\cos2\theta],\quad 0\leqslant\theta\leqslant\theta_0 \tag{8.4.17}$$

方程（8.4.8）说明$\tau_{rz}(\theta)=0$，因之

$$a_0+a_2\cos2\theta_0=0 \tag{8.4.18}$$

因为$p_1=\cos2\theta_0$，方程（8.4.16）和（8.4.18）给出

$$a_2=1/[2\vartheta(1+\cos^2\theta_0)] \tag{8.4.19}$$

其中$\vartheta=(1+\kappa)/4\mu=(1-\mu)/\mu$，那么

$$\tau_{rz}=-\frac{2R(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{1/2}}{\vartheta(1+\cos^2\theta_0)},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\theta_0 \tag{8.4.20}$$

而最大压力为

$$p_0 = 2R\sin\theta/[\vartheta(1+\cos^2\theta_0)] \qquad (8.4.21)$$

由平衡条件（8.4.7）得到P和θ_0的关系式如下，其中的积分为椭圆积分

$$P = \frac{4R}{\vartheta(1+\cos^2\theta_0)}[E(\sin\theta_0) - \cos^2\theta_0 K(\sin\theta_0)] \qquad (8.4.22)$$

这里$K(\sin\theta_0) = F(\sin\theta_0, \pi/2)$，$E(\sin\theta_0) = E(\sin\theta_0, \pi/2)$分别为第一类与第二类完全椭圆积分.

方程（8.4.14）和（8.4.19）表明

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = \frac{R\sin^2\theta\cos\theta}{1+\cos^2\theta_0} - R\varphi\frac{(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0)^{1/2}}{1+\cos^2\theta_0}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \qquad (8.4.23)$$

这个方程可用条件$v(0) = 0$进行积分，结果为

$$v(\theta) = \frac{R\sin^2\theta_0\sin\theta}{1+\cos^2\theta_0} - \frac{R\varphi}{1+\cos^2\theta_0}[E(\sin\theta_0, \phi) - \cos^2\theta_0 F(\sin\theta_0, \phi)], \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \qquad (8.4.24)$$

其中，F和E是非完全椭圆积分，并且角度ϕ与θ的关系为$\sin\theta = \sin\theta_0\sin\phi$.为了求得$\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$上的$u(\theta)$，必须求得$\theta \leqslant \theta \leqslant \pi/2$上的$u'(\theta)$，然后在条件$u(\pi/2) = 0$下积分.方程（8.3.15）和（8.3.18）加上边界值

$$Y(t/R) = 2\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}\theta)[\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta]^{1/2}, \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \qquad (8.4.25)$$

给出

$$\mathrm{i}(t/R)[V_n(t/R) + V_{-n}(t/R)] = T(\theta)\cos n\theta + \mathrm{i}(t/R)[M_n(R/t) - M_{n-2}(t/R)] \qquad (8.4.26)$$

其推导见例题8.3.1，这里

$$T(\theta) = (\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta)^{1/2}, \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$$

于是

$$2\mu(u',iv') = (\kappa+1)R\{T(\theta)(a_0 + a_2\cos2\theta + a_4 i\exp(i\theta) + a_3 i[((p_1-1)/2)\exp(i\theta) + \exp(-i\theta)]\},$$
$$\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \qquad (8.4.27)$$

根据式 (8.4.18) 和 (8.4.19) 进行化简，得出

$$u'(\theta) = R\sin\theta - 2R(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta)^{1/2}/(1+\cos^2\theta_0),$$
$$\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \qquad (8.4.28)$$

$$v'(\theta) = R\sin^2\theta_0\cos\theta/(1+\cos^2\theta_0),\ \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \qquad (8.4.29)$$

这样把$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$中的$u(\theta)$和$\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$中的$u'(\theta)$的表达式联立起来，我们求出

$$u(\pi/2) - u(0) = R(1-\cos\theta_0)$$
$$= R - \frac{2R}{1+\cos^2\theta_0}[E(\cos\theta_0) - \sin^2\theta_0 K(\cos\theta_0)] \qquad (8.4.30)$$

于是两个板之间的接近量由式 (8.4.3) 得到

$$\delta = 2R\{1 - 2[E(\cos\theta_0) - \sin^2\theta_0 K(\cos\theta_0)]/(1+\cos^2\theta_0)\} \qquad (8.4.31)$$

因而得到$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$上的位移为

$$u(\theta) = \begin{cases} 2R[E(\cos\theta_0) - \sin^2\theta_0 K(\cos\theta_0)]/(1+\cos^2\theta_0) \\ \qquad - R\cos\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \\ 2R[E(\cos\theta_0,\chi) - \sin^2\theta_0 F(\cos\theta_0,\ \chi)]/ \\ (1+\cos^2\theta_0) - R\cos\theta \quad \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \end{cases} \qquad (8.4.32)$$

式中的χ与θ的关系是$\cos\theta = \cos\theta_0\sin\chi$。

如图8.4.1所示，方程 (8.4.24) 给出的接触长度l为

$$l = 2R\sin\theta_0 + 2v(\theta_0) = \frac{2R\sin\theta_0}{1+\cos^2\theta_0} - \frac{R\varphi}{1+\cos^2\theta_0}$$
$$\times[E(\sin\theta_0) - \cos^2\theta_0 K(\sin\theta_0)] \qquad (8.4.33)$$

这样就有效地完成了求解. 已知复势$\Phi(z)$,就可以计算出圆内的应力. 可以用椭圆积分显式表示圆柱内的位移. 最重要的方程是 (8.4.22), (8.4.31) 和 (8.4.33), 它们给出总载荷、接近量和接触长度, 都以R, μ, ν和θ_0 的函数表示. 对于小的θ_0, 用下面的无量纲参数

$$\gamma = \left(\frac{2\vartheta P}{\pi R}\right)^{1/2} \tag{8.4.34}$$

是很方便的. 利用椭圆积分$K(\cos\theta_0)$, $E(\cos\theta_0)$, $K(\sin\theta_0)$ 和$E(\sin\theta_0)$的展开式, 我们得到以下对于最大压力、接近量以及接触长度的无量纲方程

$$\vartheta p_c = \gamma + \frac{3\gamma^3}{16} + O(\gamma^5) \tag{8.4.35}$$

$$\frac{\delta}{R} = \gamma^2\left[\ln\left(\frac{4}{\gamma}\right) - \frac{1}{2}\right] + \frac{9\gamma^4}{32} + O(\gamma^6\ln\gamma) \tag{8.4.36}$$

$$\frac{l}{R} = 2\gamma - \frac{1}{2}\pi\gamma^2 + O(\gamma^3) \tag{8.4.37}$$

对于Hertz接触, 式 (8.4.35) 和 (8.4.37) 的主要项与例题7.9.3的结果相同. 在特殊情形下, δ/R 中的主要项与罗祖道的第一次近似相同. 〔注意, 在他们方程 (24) 中的$(4\beta/P)^{1/2}$应当是$(4B/P)^{1/2}$〕.

上面对图8.4.1所示的问题所做的精确分析, 可以应用两个刚性圆柱体夹压, 一个弹性滚柱、或者两个弹性圆柱体相挤压的问题中, 给出这些问题以近似解.Schwartz和Harper(1971)已经运用匹配渐近展开式考虑过这些问题.

在第一个问题中, 如图8.4.2所示, 如果接触角很小, 无摩擦条件仍可以写成$\tau_{r\theta}=0$, 接触区的位移条件可以近似地写成

$$u(\theta) = R(1 + R/R')(1 - \cos\theta) - \delta/2 \tag{8.4.38}$$

那么,由方程(8.4.4)开始, 自始至终存在因子 $(1 + R/R')$,

最终导出由式（8.4.36）的第一项给出δ/R的近似值，但有一个新的参数

$$\gamma=\left[\frac{2\vartheta P}{\pi R\ (1+R/R')}\right]^{1/2} \qquad (8.4.39)$$

Belokon'（Белоконь，1969）考虑了一个弹性圆盘受到两个紧密装配的圆形刚性冲头所挤压的问题。

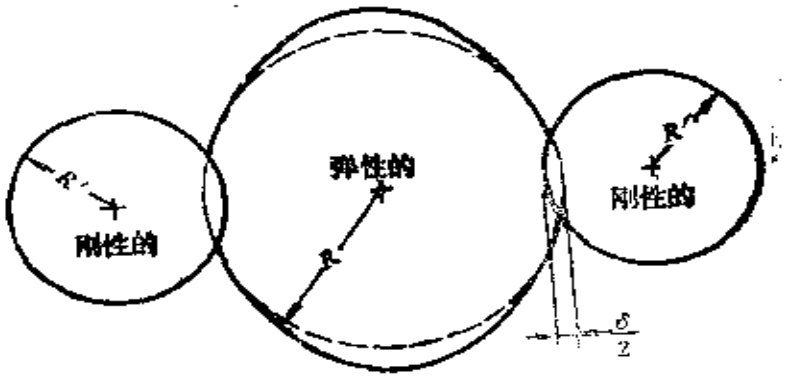


图8.4.2　受到两个刚性圆柱体挤压的弹性滚柱

例8.4

1．应用本节的分析来考虑以下的Sternberg和Turteltaub（1972）曾经考虑过的问题，一个滚柱对称地受到两个平底刚体冲头的挤压，冲头长度为$l=2R\sin\theta_0$，，试表明，当且仅当

$$P\geqslant\frac{4R[4R^2E(\sin\theta_0)-(4R^2-l^2)K(\sin\theta_0)]}{\vartheta\ (8R^2-l^2)}$$

冲头与滚柱完全接触。

8.5　夹杂问题

§8.2和§8.3所述理论的第二个应用是夹杂一类问题，如平板的孔中夹有刚性或弹性圆盘。圆盘是光滑的，并且在无应力的状态下，圆盘与孔刚好配合上。平板在无限远处受到应力作用，使得夹杂物在某一部分边界上同孔分离开。要求找到接触的弧段及沿此弧段上的压力分布。

Sheremet'ev（Шерметьев，1952）建立了圆形夹杂物

的夹杂问题的公式，并且在他的一篇累赘的文章（1961）中给出了解答。Stippes，Wilson和Krull（1962）注意到Szelagowski（1956）的公式是不正确的，独立地针对夹杂物和平板内同样材料构成这一特殊情形，建立了公式，并且推导出封闭解；他们的分析，由于系统地应用了§8.3推导出的函数，得以大大地简化，下面将要介绍这些内容。Wilson（1964a），和Noble与Hussain(1967，1969a)针对夹杂物和平板具有不同弹性性质的情形，给出了数值解.Keer、Dundurs和Kiatikomol(1973)，对于可以化为具有弱奇异核的第二类Fredholm积分方程，发展了一种替代的分析方法。他们给出了一组综合数值结果。Wilson（1964b）建立了刚性椭圆形夹杂问题，而Goree(1965)用数值方法解决了这个问题。

无摩擦圆形夹杂物的夹杂问题的几何图形，如图8.5.1所示。无限远处的应力T_1和T_2，引起了夹杂物（即物体1）与平板（即物体2）之间的局部分离，以致接触区C'由两段位置对称的弧段组成。首先必须确定什么时候会发生这种部分接触的情形。为此，我们考虑图8.5.1中的问题，其中，夹杂物与平板在整个边界上接触.如果例题8.5.1的解给出的法向接触应力，在某部分为压应力，而在另外的部分为拉应力，则平板与夹杂物就分离了。当平板与夹杂物一旦分离，则例题8.5.1的分析不再成立，而下面的分析被特定化，只针对图8.5.1的构形成立。对于两个物体，§8.2中的分析都适用；复势$\Phi(z)$在穿过C''时是连续的，并且满足

$$\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)=f(t)，\quad 在C'上 \tag{8.5.1}$$

$$\kappa_1\Phi_1^+(t)+\Phi_1^-(t)=2\mu_1(u_1'+iv_1')，在C上 \tag{8.5.2}$$

其中$f(t)=\tau_{r\theta}(t)$是实函数。物体1的位移，将由式（8.2.1）给出，即

$$2\mu_1(u_1+iv_1)=\kappa_1\phi_1(z)-z\overline{\phi_1'(z)}-\overline{\psi_1(z)}，\quad 在D^+上 \tag{8.5.3}$$

方程（8.5.1）的适宜的解，将由方程（8.2.34）给出，即

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma'}\frac{f(t)}{t-z}dt+B,\quad B=\frac{-1}{4\pi i}\int_{\sigma'}\frac{f(t)}{t}dt \tag{8.5.4}$$

复势$\Psi_1(z)$由方程（8.2.6）给出，由于方程（8.2.9）得到满足，所以该复势在D^+上全纯．对于物体2，即平板，相应的方程式为

$$\Phi_2^-(t)-\Phi_2^+(t)=f(t)，\text{在}C'\text{上} \tag{8.5.5}$$

$$\kappa_2\Phi_2^-(t)+\Phi_2^+(t)=2\mu_2(u_2'+iv_2')，\text{在}C\text{上} \tag{8.5.6}$$

$$2\mu_2(u_2+iv_2)=\kappa_2\phi_2(z)-z\overline{\phi_2'(z)}-\overline{\psi_2(z)}，\text{在}D^-\text{上} \tag{8.5.7}$$

现在的$\Phi_2(z)$，由例题8.2.2给出为

$$\begin{aligned}\Phi_2(z)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma'}\frac{f(t)}{t-z}dz+\frac{T_2+T_1}{4}+\frac{T_2-T_1}{2z^2}\\&=-\Phi_1(z)+A+2Gz^{-1}/3\end{aligned} \tag{8.5.8}$$

其中

$$A=(T_2+T_1)/4+B,\ G=3(T_2-T_1)/4 \tag{8.5.9}$$

并且$\Psi_2(z)$由方程（8.2.6）用D^-上的$\Phi_2(z)$给出．

接触是光滑的，$f(t)$是实函数，并且式（8.5.1）给出

$$\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)=\overline{\Phi_1^+(t)}-\overline{\Phi_1^-(t)}=\overline{\Phi}_1^-(t^{-1})-\overline{\Phi}^+(t^{-1})，\text{在}C'\text{上} \tag{8.5.10}$$

因之

$$\Phi_1^+(t)+\overline{\Phi}_1^+(t^{-1})=\Phi_1^-(t)+\overline{\Phi}_1^-(t^{-1})，\text{在}C'\text{上} \tag{8.5.11}$$

这说明，$\Phi_1(z)+\overline{\Phi}_1(z^{-1})$在$C'$上是连续的，这个在全平面上全纯的函数是一个常数．但是，由于$\Phi_1(z)$满足（8.2.9a），则此常数为零，并且

$$\overline{\Phi}_1(z^{-1})=-\Phi_1(z),\quad \overline{\Phi_1^\pm(t)}=-\Phi^\mp(t) \tag{8.5.12}$$

在C'上的位移条件是

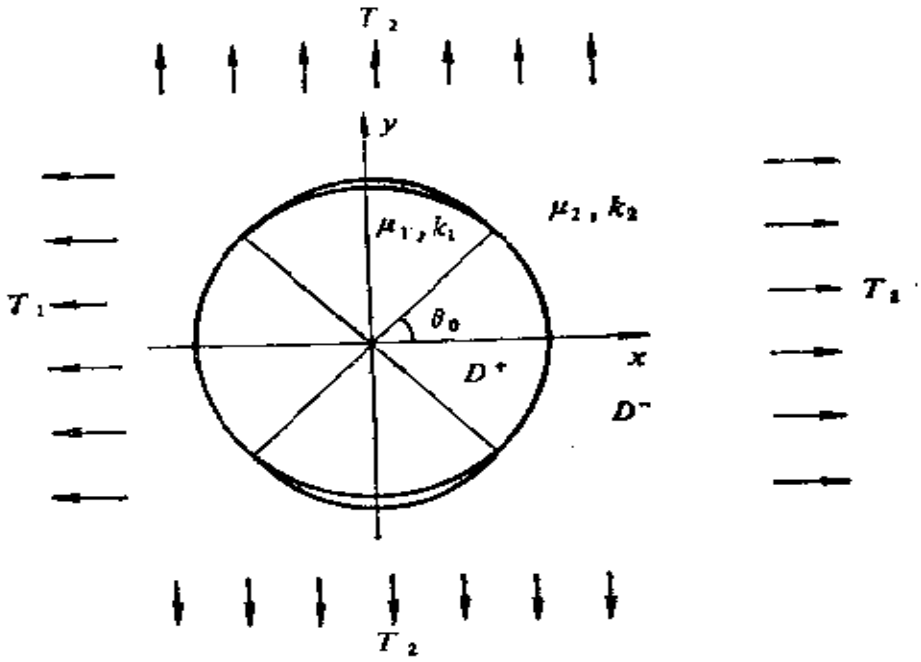


图8.5.1 圆形夹杂问题的几何关系

$$(u_r)_1 = (u_r)_2 \tag{8.5.13}$$

因为

$$2u_r = t^{-1}(u + iv) + t(u - iv) \tag{8.5.14}$$

则立即有

$$\begin{aligned} L(u_r) &= 2\frac{d}{dt}\left[t^3\frac{d}{dt}(t^{-1}u_r)\right] \\ &= -(u' + iv') + t(u'' + iv'') + 3t^2(u' - iv') \\ &\quad + t^3(u'' - iv'') \end{aligned} \tag{8.5.15}$$

现在u和v是t的实函数，因而$u(t) = \overline{u(t)}$，并且

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}\overline{u}(\overline{t}) = \frac{d}{dt}\overline{u}(t^{-1}) = -t^{-2}\overline{u}'(\overline{t}) \tag{8.5.16}$$

那么方程（8.2.21）的复共轭方程为

$$\begin{aligned} 2\mu_1(u_1' - iv_1') &= -t^{-2}[\kappa_1\overline{\Phi_1^+(t)} + \overline{\Phi_1^-(t)}] \\ &= t^{-2}[\kappa_1\Phi^-(t) + \Phi_1^+(t)] \end{aligned} \tag{8.5.17}$$

并且方程（8.5.7）的微分给出

$$2\mu_1 L_1(u_r) = (1-\kappa_1)[\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)] + (1+\kappa_1) \times t\frac{d}{dt}[\Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t)] \tag{8.5.18}$$

对平板的类似处理给出

$$2\mu_2 L_2(u_r) = (1-\kappa_2)(\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)) - (1+\kappa_2) \times \frac{d}{dt}(\Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t)) - 2(1+\kappa_2)[A + G(t^{-2} + t^2)] \tag{8.5.19}$$

因而有条件

$$L_1(u_r) = L_2(u_r), \quad 在C'上 \tag{8.5.20}$$

当用（4.8.13）式的不匹配参数α与β表示时，它是

$$\beta(\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)) - t\frac{d}{dt}(\Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t)) = (1-\alpha)\{A + G(t^2 + t^{-2})\} \tag{8.5.21}$$

这个方程仅仅和弹性常数的组合α与β有关的这个事实，同§4.10中讨论的平板退让接触的一般理论是一致的。而且这个理论还说明，接触区域的范围，即角度θ_0，与载荷大小无关，而仅仅同α，β和T_1/T_2有关。

方程（8.5.21），即式（8.5.20），同位移的导数有关，并且为了保证方程（8.5.13）得到满足，必须满足更进一步的条件。由于问题的对称性，加入以下条件，是必要与充分的

$$u_1(1) + iv_1(1) = u_2(1) + iv_2(1) \tag{8.5.22}$$

可以表明，这个条件可以写成

$$(1-\beta)\int_1^\infty \Phi_1^*(x)dx - (1+\beta)\int_0^1 \Phi_1^*(x)dx = (1+\alpha)B + (1-\alpha)(T_2 - 3T_1)/4 \tag{8.5.23}$$

其中

$$\Phi_1^*(x) = \Phi_1(x) - B \tag{8.5.24}$$

首先考虑相同材料的情形，因而$\alpha = 0 = \beta$。可是要注意

[Noble和Hussian(1969b)]，下面的分析在运用到$\alpha=0$而$\beta\neq0$时，仅需做普通方式的修正（参考例题8.5.2）。在式（8.5.21）中，写出$F(z)=\mathrm{d}\Phi_1/\mathrm{d}z$，我们求出

$$F^+(t)+F^-(t)=-At^{-1}-G(t+t^{-3}),\quad 在C'上 \tag{8.5.25}$$

这个方程是§3.4中考虑的那一类型的线性关系，但是，仅仅是针对C'是实轴上的一个区间这一情形。然而，也可以采用将式（3.4.1）变换为（3.4.20）的那种分析，用下面的齐次方程的基本解代替$X_1(z)$

$$F^+(t)+F^-(t)=0,\quad 在C'上 \tag{8.5.26}$$

这正是方程（8.3.14）给出的函数$[Y(z)]^{-1}$。那么式(8.5.25)的在C'的两端具有可积奇异性的通解为

$$F(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}Y(z)}\int_{C'}\frac{Y^+(t)[At^{-1}+G(t+t^{-3})]\mathrm{d}t}{t-z}+\frac{P(z)}{Y(z)} \tag{8.5.27}$$

其中$P(z)$是一个多项式。因为$\Phi_1(z)$在$B_1=0$（见式8.2.35）处具有式（8.2.8）的形式并且在无限远处有$F(z)=O(z^{-3})$，因而$P(z)=0$。式(8.5.27)中的积分可以计算出来，办法是把$Y^+(t)$写成

$$Y^+(t)=(t^4-2t^2\cos2\theta_0+1)/Y^+(t) \tag{8.5.28}$$

将分子展开为t和t^{-1}的幂级数，并且利用§8.3中的积分$V_n(z)$。那么

$$\begin{aligned}F(z)=&\frac{1}{2Y(z)}[A\{V_3(z)-2\cos2\theta_0V_1(z)+V_{-1}(z)\\&+G\{V_5(z)-2\cos2\theta_0V_3(z)+V_1(z)\}+G\{V_1(z)\\&-2\cos2\theta_0V_{-1}(z)+V_{-3}(z)\}]\\=&-\frac{A}{2z}-\frac{G}{2}(z+z^{-3})-\frac{1}{2Y(z)}[A\{-M_1(z)\end{aligned}$$

$$+M_1(z^{-1})\}+G\{-M_3(z)+2\cos2\theta_0 M_1(z)$$
$$-2\cos2\theta_0 M_1(z^{-1})+M_3(z^{-1})\}]$$
$$=\frac{A}{2z}-\frac{G}{2}(z+z^{-3})-\frac{1}{2Y(z)}\{A(-z+z^{-1})$$
$$+G[-z^3+z^{-3}+\cos2\theta_0(z-z^{-1})]\} \qquad (8.5.29)$$

并且，对于大的和小的$|z|$，$[Y(z)]^{-1}$的展开式表明，当$|z|$小时$F(z)=O(z)$，而当$|z|$大时为$O(z^{-3})$。复势$\Phi_1(z)$由对$F(z)$积分而得到，并且Gradshteyn和Ryzhik (1965, 2.261, 2.266)给出

$$\int(z^{-1}+z)\frac{dz}{Y(z)}=-\ln\left[\frac{1+z^2+Y(z)}{z}\right] \qquad (8.5.30)$$

$$\int\{z^{-3}-z^3+\cos2\theta_0(z-z^{-1})\}\frac{dz}{Y(z)}$$
$$=-\frac{1}{2}(1+z^{-2})Y(z) \qquad (8.5.31)$$

因而

$$\Phi_1(z)=\frac{A}{2}\ln\left[\frac{1+z^2+Y(z)}{z^2}\right]+\frac{G}{4}(z^{-2}+z^2)$$
$$+\frac{G}{4}(1+z^{-2})Y(z)+D \qquad (8.5.32)$$

其中D是待定常数，它的确定必须使$\Phi_1(z)$满足条件

$$\Phi_1(\infty)=-\Phi(0)=B \qquad (8.5.33)$$

利用对于大的或小的$|z|$的$Y(z)$的展开式，表明

$$\Phi_1(0)=\frac{A}{2}\ln(1+\cos2\theta_0)-\frac{G}{4}(1-\cos2\theta_0)+D$$
$$(8.5.34)$$

$$\Phi_1(\infty)=\frac{A}{2}\ln2+\frac{G}{4}(1-\cos2\theta_0)+D \qquad (8.5.35)$$

它们给出

$$A(2+\ln\cos\theta0)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{G}{4}\sin^2\theta_0\ ,$$

$$D=-\frac{A}{2}\ln(2\cos\theta_0) \tag{8.5.36}$$

由方程（8.5.1）给出的弧段$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$上的法向应力由下面的方程表示

$$f(t)=-A\ln\left[\frac{\cos\theta+(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{1/2}}{\cos\theta_0}\right]$$

$$-2G\cos\theta(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{1/2} \tag{8.5.37}$$

剩下的工作是确定接触角θ_0，为此，比较简单的，是固定住θ_0而给这个接触角找到一个相应的外载荷比值$T_1:T_2$。当$\alpha=0=\beta$时，可以对方程（8.5.23）使用分部积分，得到

$$\int_1^\infty(x-x^{-1})F(x)\,\mathrm{d}x=B-\frac{(T_2-3T_1)}{4} \tag{8.5.38}$$

由方程（8.5.29）给出$F(x)$，把$[Y(x)]^{-1}$按x^{-1}的幂展开，可以计算这个积分，并且利用例题8.3.4和下面所写的类似的结果

$$\int_0^{\pi/2-\theta_0}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{(\cos^2\theta-\sin^2\theta_0)}=E(\cos\theta_0)+\frac{1}{3}[\sin^2\theta_0$$

$$\times K(\cos\theta_0)-2(1+\sin^2\theta_0)E(\cos\theta_0)] \tag{8.5.39}$$

根据（8.5.33）—（8.5.36）可以导出最终的方程，为

$$\frac{T_2+T_1}{T_2-T_1}=(1+\sin^2\theta_0)\ln\cos\theta_0+\frac{4+\sin^2\theta_0}{2}$$

$$-2\sin^2\theta_0(2+\ln\cos\theta_0)\frac{K(\cos\theta_0)}{E(\cos\theta_0)} \tag{8.5.40}$$

当$T_1=0$时，这个方程化成Stippes等（1962）建立的方程。图8.5.2表明θ_0随$(T_2+T_1)/(T_2-T_1)$的变化。

当夹杂物与平板具有不同的弹性常数时，将Plemelj公式（3.2.17）和（3.2.18）应用于方程（8.5.4），表示出

$$\Phi_1^+(t)+\Phi_1^-(t)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{c'}\frac{f(s)}{s-t}\mathrm{d}s-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c'}\frac{f(s)}{s}\mathrm{d}s$$

(8.5.41)

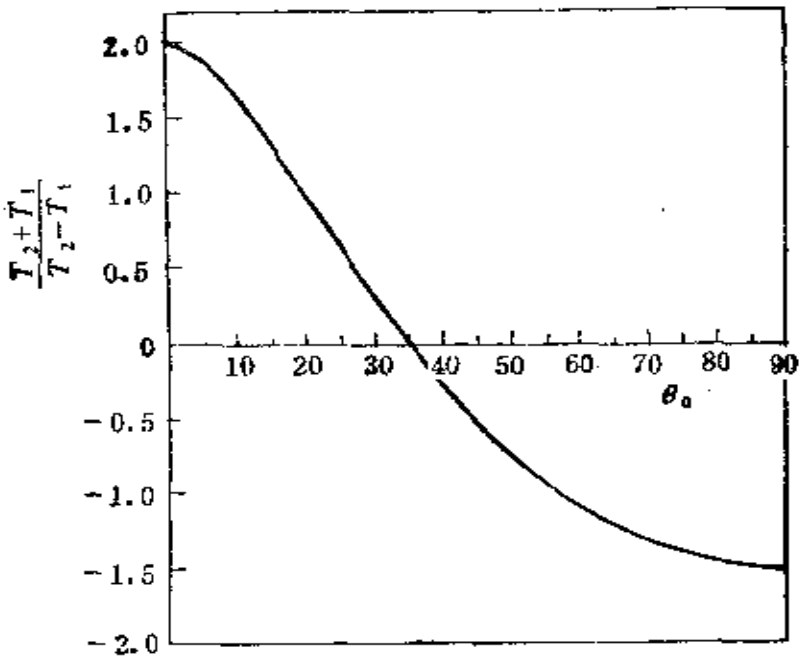


图8.5.2 θ_0随$(T_2+T_1)/(T_2-T_1)$的变化

并且Muskhlishvili(1953b,p376)证明了在C'的两端当$f(s)=0$时，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{a'}\frac{f(s)}{s-t}\mathrm{d}s=\int_{a'}\frac{f'(s)}{s-t}\mathrm{d}s \qquad (8.5.42)$$

那么，方程（8.5.31）可以重新写成

$$\beta f(t)-\frac{t}{\pi \mathrm{i}}\int_{c'}\frac{f'(s)}{s-t}\mathrm{d}s=(1-\alpha)\{A+G(t^2+t^{-2})\}$$

在C'上 (8.5.43)

这正是Muskhelishvili (1953b) 在其著作第十七章中考虑的那一类型的积分-微分方程，最基本的情形是C'为$(-1,1)$的弧段，可以参考进一步的文献，这个方程通常称为空气箔方程.

Wilson(1964a)用数值方法求解方程（8.5.43），这里对他们的分析作一些修正. 出发点是对于接触应力$f(t)$做适当的展开. 当$\alpha=0=\beta$时，方程（8.5.37）给出接触应力. 现在考虑下

面方程的边界值

$$(1-2zt+t^2)^{-1/2}\ln\left[\frac{z-t+(1-2zt+t^2)^{1/2}}{(z^2-1)^{1/2}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}t^kQ_k(z) \tag{8.5.44}$$

此方程对 $|t|<1$和$\mathrm{Re}(z)>1$成立，这是Gradshteyn和Ryzhik（1965，8.7912）给出的，说明了，当$0<\theta<\theta_0$时，有

$$\ln\left[\frac{\cos\theta+(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{1/2}}{\cos\theta_0}\right]=-2(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{1/2}$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(\cos2\theta_0)\cos(2k+1)\theta \tag{8.5.45}$$

这里$Q_k(z)$是联属Legendre函数●，这说明$f(t)$应具有形式

$$f(t)=(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{1/2}\sum_{n=0}^{N}a_n\cos(2n+1)\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\theta_0 \tag{8.5.46}$$

取$f(t)$形式如下，或许更容易一些

$$f(t)=(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{-1/2}\sum_{n=0}^{N}a_n\cos(2n+1)\theta$$

$$=-\sum_{n=0}^{N}a_n(t^{2n+1}+t^{-2n})/Y^+(t) \tag{8.5.47}$$

然后加给条件$f(\exp(i\theta_0))=0$。对于这个$f(t)$，方程（8.3.15）和（8.3.18）给出式（8.5.4）的$\Phi_1(z)$为

$$2\Phi_1(z)=-\sum_{n=0}^{N}a_nV_{2n+2}(z)-\sum_{n=0}^{N}a_nV_{-2n}(z), \tag{8.5.48}$$

●也有人译成缔合Legendre多项式。——译者

那么

$$[\Phi_1^+(t)+\Phi_1^-(t)] = \sum_{n=0}^{N} a_n[M_{2n}(t)-M_{2n}(t^{-1})]$$

$$= \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n}{}' p_k 2i\sin(2n-2k)\theta \qquad (8.5.49)$$

并且

$$t\frac{d}{dt}[\Phi_1^+(t)+\Phi_1^-(t)] = 4\sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n}{}' (n-k)p_k \times \cos(2n-2k)\theta \qquad (8.5.50)$$

因而方程（8.5.21）的近似形式为

$$\beta(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{-1/2}\sum_{n=0}^{N} a_n\cos(2n+1)\theta$$

$$-4\sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{k=0}^{n}{}' (n-k)p_k\cos(2n-2k)\theta$$

$$= (1-\alpha)\{A+2G\cos 2\theta\}+\varepsilon_N(\theta) \qquad (8.5.51)$$

这个方程必须对$0\leqslant\theta<\theta_0$成立；考虑到问题的对称性，我们注意到，对于一个近似解，可以令在$0\leqslant\theta<\theta_0$而$m=0,1,\cdots,(N-1)$时误差$\varepsilon_N(\theta)$与$\cos 2m\theta$正交。Gradshtey和Ryzhik（1965，8.823）给出

$$\int_0^{\theta_0}(\cos^2\theta-\cos^2\theta_0)^{-1/2}\cos(2n+1)\theta\,d\theta$$

$$= \pi P_n(\cos 2\theta_0) = \pi p_n \qquad (8.5.52)$$

于是用$\cos m\theta$乘（8.5.51）式，并且在$(0,\theta_0)$上积分，得到

$$\beta\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{N} a_n[p_{2n+2m+1}+p_{|2n-2m+1|}]$$

$$-4\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}(n-k)p_k c_{m,n-k}a_n=(1-\alpha)\{Ac_{m,0}$$

$$+2Gc_{m,1}\}m=0,\ 1,\cdots,\ N-1 \tag{8.5.53}$$

其中

$$c_{m,n}=\int_0^{\theta_0}\cos 2m\theta\cos 2n\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{8.5.54}$$

方程（8.5.53）加上方程

$$\sum_{n=0}^{N}a_n\cos(2n+1)\theta_0=0 \tag{8.5.55}$$

给出$N+1$个方程，可写出如下

$$\sum_{n=0}^{N}d_{m,n}a_n=Be_m^{(0)}+(T_2+T_1)e_m^{(1)}+(T_2-T_1)e_m^{(2)} \tag{8.5.56}$$

其中，由式（8.5.9）用$B+(T_2+T_1)/4$表示A。方程(8.5.56)的解可以写成

$$a_n=Ba_n^{(0)}+(T_2+T_1)a_n^{(1)}+(T_2-T_1)a_n^{(2)} \tag{8.5.57}$$

这里$\Phi_1(z)$尽管自动满足$\Phi_1(\theta)=-\Phi_1(\infty)$，仍然需要令它满足$\Phi_1(\infty)=B$。方程（8.5.48）表明

$$\Phi_1(\infty)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}a_n p_n \tag{8.5.58}$$

位移条件（8.5.23）可以重新写成

$$\beta\int_0^{\theta_0}f(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta+\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta_0}f(\theta)\cos\theta\ln(\cot(\theta/2))\,\mathrm{d}\theta$$

$$=-(1+\alpha)B+(1-\alpha)\frac{(T_2-3T_1)}{4} \tag{8.5.59}$$

式（8.5.58）和（8.5.59）提供了联系B，T_2+T_1，T_2-T_1的两

个齐次方程，其中B可以消去，得到$(T_2+T_1)/(T_2-T_1)$的由θ_*表示的函数方程。当$\alpha=0=\beta$时，方程（8.5.59）变成方程（8.5.40）的一个近似形式。

Wilson(1964a)利用$f(t)$的（8.5.46)表达式并且找到a_*，使得积分

$$\int_0^{\theta_*}\varepsilon_N^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

应当被极小化。他确定了$T_1:T_2$，并且用叠代法求出了这个比值所对应的角度θ_0。他利用不同的N值检查了近似方法的数值精度，并且给出了孔和夹杂物边界上的θ_*值，用曲线和表格表示的法向应力及周向应力的广泛结果。

刚性夹杂物在椭圆孔中的夹杂问题，是由Wilson（1946b）建立的；其分析遵循了§8.2中所给出的结果。平板的复势为

$$\Phi(\zeta)=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma'}\frac{f(t)}{t-\zeta}\,\mathrm{d}t+\Gamma+\frac{A}{\zeta^2-m}\qquad(8.5.60)$$

其中

$$A=m(\Gamma+\overline{\Gamma})+\overline{\Gamma}'+2mB,\quad B=-\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma'}\frac{f(t)}{t-\zeta}\mathrm{d}t\qquad(8.5.61)$$

并且C'是用函数（8.2.45)把椭圆接触弧段映射到单位圆$|\zeta|=1$上的一个圆弧。常数Γ和Γ'是与无限远处的应力有关的量（见式8.2.56和8.2.57），在这里

$$\Gamma=(T_2+T_1)/4,\quad \Gamma'=(T_2-T_1)/2\qquad(8.5.62)$$

C上面的位移的导数，由下式给出

$$2\mu(u'+\mathrm{i}v')=\omega'(t)[\kappa\Phi^-(t)+\Phi^+(t)]\qquad(8.5.63)$$

其中“′”表示对$t=\exp(\mathrm{i}\theta)$的导数。由于夹杂物是刚性的，所以垂直于接触弧段的位移分量u_ρ必须为零。这个条件如下所示

$$2|\omega'(t)|u_\rho=(u+\mathrm{i}v)(t^{-1}-mt)+(u-\mathrm{i}v)(t-mt^{-1})=0$$

在C'上 (8.5.64)

重复对这个方程求导数，得出

$$(t-mt^3)(u''+iv'')+(t^3-mt)(u''-iv'')-(3mt^2+1)\times(u'+iv')+(3t^2+m)(u'-iv')=0 \quad (8.5.65)$$

并且以式 (8.5.63) 代替$u'+iv'$，我们得到

$$\beta(1-m^2)f(t)+3m(t^2-t^{-2})\frac{1}{\pi i}\int_{a'}\frac{f(s)ds}{s-t}$$

$$-t[1+m^2-m(t^2+t^{-2})]\frac{1}{\pi i}\int_{a'}\frac{f'(s)ds}{s-t}$$

$$=[2m+3(t^2+t^{-2})]A+2(1-m^2)\Gamma+2[1-m^2-3m(t^2-t^{-2})]B \quad (8.5.66)$$

当 $m=0$时，即如果夹杂物是刚性体的情形。这个方程与$\alpha=-1$时的方程 (8.5.43) 相同。Goree (1965)表明，应用$f(\theta)$的同样表达式 (8.5.46) 可以有效地求解方程 (8.5.66)。

有一类夹杂问题，我们把它们视为力－拟合问题而不按接触问题处理，其中，沿整个基体与夹杂物的边界上作用摩擦力是相等的，而且在边界上位移是不连续的。有关这些工作的早期文献，见Muskhelishvili (1953a, §109) 的著作，而近期的工作可见 Theocaris和Ioakimidis (1977a) 的论著。Margetson 和 Morland (1970a) 考虑了具有半径为1的孔的板，最初受到初始半径为$1+\varepsilon$圆盘的压挤。在无限远处拉伸是沿y方向的。当拉伸T由零开始单调上升时，分离弧段首先发生在$\theta_0=\pm\pi/2$处，而分离的弧段逐渐扩展。Margetson和Morland令θ_0是$T/\{\varepsilon[(\kappa_1+1)/\mu_1+(\kappa_2+1)/\mu_2]\}$的函数，得到 $T_1=0$ 和 $\varepsilon=0$ 时的角度 $\theta_0=19.62°$，如图8.5.2所示。该作者们在这篇文章中讨论了控制接触的积分方程的数值解。Margetson和Morland (1970b) 的文章也讨论了同样的问题。也可以参阅 Morar′ (Мораръ) 和 Popov (1976) 的文章。

例8·5

1. 为了检查圆夹杂和和无限大板的部分接触，我们考虑下面的边值问题：

在$r=1$上

$$(u_r)_1=(u_r)_2,(\tau_{r\theta})_1=0=(\tau_{r\theta})_2,(\tau_{rr})_1=(\tau_{rr})_2$$

并且平板（介质2）内应力满足

$\tau_{xx}=T_1,\tau_{yy}=T_2$，在无穷远处

方程(8.5.12)表明，$\Phi_1(z)=-\overline{\Phi_1}(z^{-1})$，那么考虑到对称性，给出$\Phi_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}z^{2n}$，试表明

$$a_0=\frac{1-\alpha}{1-\alpha+2\beta}\left(\frac{T_1+T_2}{4}\right),\quad a_1=\frac{3(1-\alpha)}{2-\beta}\left(\frac{T_1-T_2}{4}\right)$$

并且$a_n=0,n>1$。由此表明

$$\tau_{rr}=\frac{3(1-\alpha)}{2-\beta}\{(T_1-T_2)\cos^2\theta+\frac{T_2-\kappa T_1}{1+\kappa}\},\text{在}r=1\text{上}$$

其中$\kappa=(1-3\alpha+7\beta)/(5-3\alpha+5\beta)$是满足$-0.5\leqslant\kappa\leqslant 1$的参数。由此表明

如果$T_2-\kappa T_1>0$和$\kappa T_2-T_1<0$，则对所有的θ值，有$\tau_{rr}\geqslant 0$；

如果$\kappa T_2-T_1>0$和$T_2-\kappa T_1<0$，则对所有的θ值，有$\tau_{rr}\leqslant 0$；

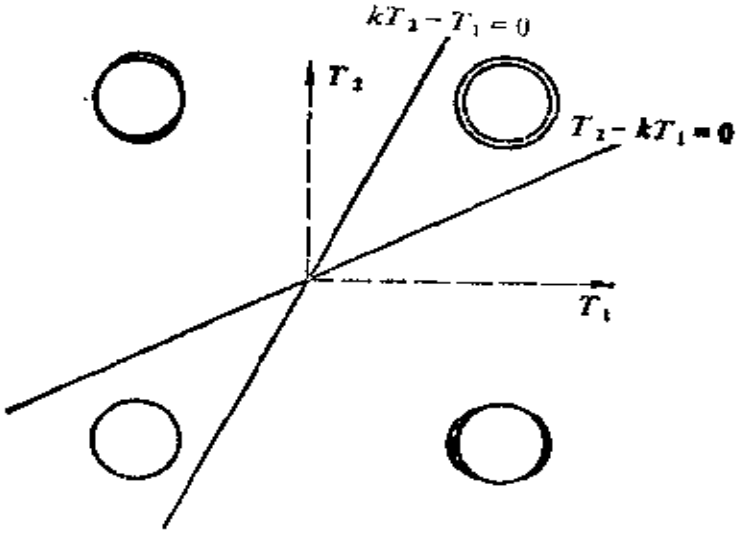


图8.5.3 可能的接触情形：全接触，不接触和部分接触

其余情形下，τ_{rr}有时为正，有时为负。

这四种情形如图8.5.3所示，其中$\kappa>0$.应当注意，这个解并不是对于部分接触情形的正确的解，因为在这种情形下，边界条件不适用于整个圆周$r=1$.(注意，这个图形是Keer,Dundurs和Kiattikomol(1973)的文章中给出的（并不正确的）).(由于此图不正确，原作者给译者的最新来信中，建议中文版读者可以不读此例题。)

2. 弹性常数为μ_1和κ_1的半径为R的光滑弹性圆盘，嵌入弹性常数为μ_2和κ_2的无限大平板上半径为a的孔中．利用例题8.2.5的结果分析这个夹杂压挤问题.假设$R>a$并且$R-a\ll a$，试表明交界面的压力为

$$p=\frac{4\mu_1\mu_2}{2\mu_1\kappa_2+\mu_2(\kappa_1-1)}\left(\frac{R}{a}-1\right)$$

并且求出交界面的半径.

8.6 摇晃接触问题

摇晃指的是这样一种情形，在其中，一个圆形截面的物体，处于平面应力或平面应变状态，静止或压顶在另外一个称之为摇篮的物体上.Kalandia(1957)对于两个这样的问题建立了公式，即刚性或弹性圆柱体，在中心受力，被压入无限大平板的同样半径的孔中．他得到了这个问题的近似解，办法是将控制接触的积分-微分方程化到区间$(-1,1)$上；两个方程都在Kalandia(1957)的文章得到了深入的研究．Wilson和Hill(1972)考虑了受自重作用的重弹性圆柱体压入刚性的摇架内，该摇架必须是圆形的．我们建立这些问题的公式并简短地讨论如何求解控制方程.

这三个问题基本上具有共同的几何图形，如图8.6.1所示．圆柱体占有区域$D^+(|z|<1)$，而摇篮，如果是弹性的，占有$|z|>1$．首先考虑刚性圆柱体与弹性摇篮的无摩擦接触．§8.2的理论表明，如果P是作用在摇篮上的总力，则对于较大的$|z|$，复势$\Phi_2(z)$和$\Psi_2(z)$具有形式

$$\Phi_2(z)=\gamma z^{-1}+O(z^{-2}),\quad \Psi_2(z)=-\kappa\gamma z^{-1}+O(z^{-2}) \tag{8.6.1}$$

其中

$$\gamma = -P/[2\pi(1+\kappa_2)] \tag{8.6.2}$$

依照式 (8.2.4)，定义D^+上的$\Phi(z)$，在D^+上，除O点之外是全纯的，靠近O点，有

$$\Phi_2(z) = -\kappa_2\gamma z^{-1} + O(1) \tag{8.6.3}$$

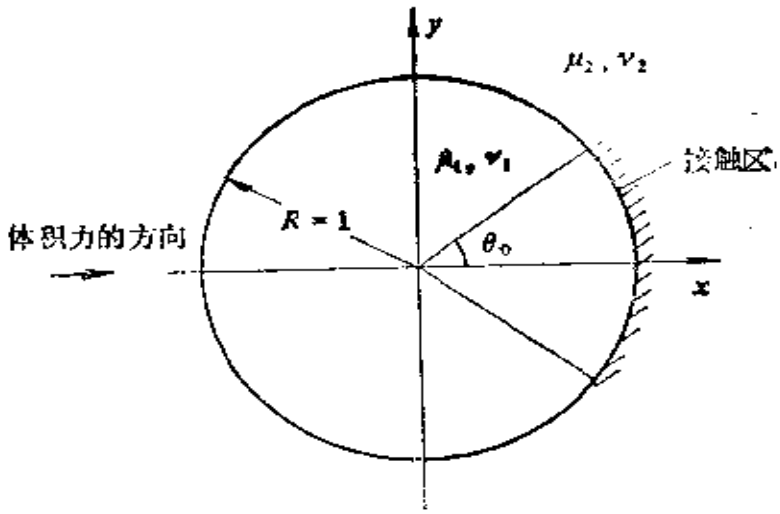


图8.6.1 摇晃接触的几何图形

C(即$|z|=1$)上的边界条件为

$$\tau_{rr} = 0, \text{ 在}C\text{上}; \tau_{r\theta} = 0, \text{ 在}C''\text{上} \tag{8.6.4}$$

$$u_r = 0, \text{ 在}C'\text{上} \tag{8.6.5}$$

其中，C'仍代表接触区域，而C''是C上其余的部分。仿照§8.2的推导过程，我们得到

$$\Phi_2^-(t) - \Phi_2^+(t) = \tau_{rr} = f(t), \text{ 在}C'\text{上} \tag{8.6.6}$$

$$\kappa_2\Phi_2^-(t) + \Phi_2^+(t) = 2\mu_2(u_2' + iv_2'), \text{ 在}C\text{上} \tag{8.6.7}$$

$$2\mu_2(u_2 + iv_2) = \kappa_2\phi_2(z) - z\overline{\phi_2'(z)} - \overline{\psi_2(z)}, \text{ 在}D^-\text{上} \tag{8.6.8}$$

联立方程 (8.6.3) 和(8.6.6)，我们推演出，$\Phi_2(z) + \overline{\Phi_2(z^{-1})}$除了点和无穷远点之外在全平面全纯。但是

$$\Phi_2(z) = \gamma z^{-1} + O(z^{-2}), \text{ 在}z=\infty \tag{8.6.9}$$

$$\Phi_2(z) = -\kappa_2\gamma z^{-1} + A + Bz + O(z^2), \text{ 在}z=0\text{附近} \tag{8.6.10}$$

那么

$$\Phi_2(z)+\overline{\Phi}_2(z^{-1})=\gamma' z^{-1}-\kappa_2\gamma+A+Bz^{-1}+O(z^{-2}),$$
$$在z=\infty \qquad (8.6.11)$$

$$\Phi_2(z)+\overline{\Phi}_2(z^{-1})=-\kappa_2\gamma z^{-1}+A+Bz+\gamma z+O(z^2)$$
$$在z=0附近 \qquad (8.6.12)$$

于是，$B+\gamma=-\kappa_2\gamma$，$B=-(1+\kappa_2)\gamma$，且有

$$\Phi_2(z)+\overline{\Phi}_2(z^{-1})=-\kappa_2\gamma(z+z^{-1})+A \qquad (8.6.13)$$

因之，把这个方程与式（8.2.11）联立，我们推导出

$$z\Psi_2(z)+\Phi_2'(z)=-\kappa_2\gamma(z+z^{-1})+A \qquad (8.6.14)$$

由方程（8.6.6），我们得到

$$\Phi_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c'}\frac{f(t)}{t-z}\,dt+A_0+B_0z^{-1} \qquad (8.6.15)$$

对于大的$|z|$或小的$|z|$展开这个式子，我们有

$$A_0=0,\quad B_0=-\kappa_2\gamma,\quad A=-\frac{1}{2\pi i}\int_{c'}\frac{f(t)}{t}\,d(t),$$

$$i\int_{c'}f(t)\,dt=P \qquad (8.6.16)$$

其中最后一式是平衡方程。由于接触发生在一条弧线上，而不象夹杂问题在两条弧线上，则可以使用导数形式$L_2(u_r)=0$代替接触位移方程，其中算子L如式（8.5.15）所定义。推导过程如§8.5，且注意方程（8.6.13）现在包含着

$$\Phi_2^+(t)+\Phi_2^-(t)=-\kappa_2\gamma(t+t^{-1})+A,\quad 在C上 \qquad (8.6.17)$$

我们求出

$$2\mu_2L_2(u_r)\equiv(1-\kappa_2)f(t)-(1+\kappa_2)\frac{t}{\pi i}\int_{c'}\frac{f'(s)}{s-t}\,ds$$

$$+\frac{(1+\kappa_2)}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(s)}{s}ds+2(1+\kappa_2)\kappa_2\gamma_2(t+t^{-1})=0,$$

在C'上 (8.6.18)

因此问题归结为在以下条件下求解方程 (8.6.18)

$$f(\exp(\pm i\theta_0))=0,\quad i\int_{C'}f(t)dt=P \tag{8.6.19}$$

现在假设圆柱体是弹性的，并且和前面相同，在其中心受到集中力P的作用。方程 (8.5.1) 和 (8.5.2) 成立，即

$$\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)\equiv\tau_{rr}=f(t),\ \text{在}C'\text{上} \tag{8.6.20}$$

$$\kappa_1\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)=2\mu_1(u_1'+iv_1'),\quad \text{在}C\text{上} \tag{8.6.21}$$

复势$\Phi_1(z)$和$\Psi_1(z)$ 在$z=0$处有奇异性 (见例题4.2.5)：

$$\Phi_1(z)=\gamma_1z^{-1}+O(1),\ \Psi_1(z)=\kappa_1\gamma_1z^{-1}+O(1),$$

在$z=0$附近 (8.6.22)

其中

$$\gamma_1=-P/[2\pi(1+\kappa_1)] \tag{8.6.23}$$

类似于 (8.6.9)—(8.6.13) 的分析，表明，$\Phi_1(t)+\overline{\Phi}_1(z^{-1})=-\gamma_1(z+z^{-1})$，而且

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(t)}{t-s}dt+\gamma_1(z^{-1}-2z)+\frac{A}{2} \tag{8.6.24}$$

其中A是在 (8.6.16) 中给出的。现在

$$2\mu_1L_1(u_r)=(1-\kappa_1)f(t)+\frac{(1+\kappa_1)t}{\pi i}\int_{C'}\frac{f'(s)}{s-t}ds$$

$$-2(1+\kappa_1)\gamma_1(t+t^{-1}) \tag{8.6.25}$$

那么，方程

$$L_1(u_r)=L_2(u_r)\qquad (\text{在}C'\text{上}) \tag{8.6.26}$$

为

$$\beta f(t)-\frac{t}{\pi i}\int_{C'}\frac{f'(s)}{s-t}ds=\frac{1-\alpha}{2}A+(i-\beta)\frac{P}{2\pi}(t+t^{-1})$$

(8.6.27)

这个方程仅仅和α，β有关，尽管两物体之间的接触没有退让；另一方面，接触区的范围与P有关，正如在扩展接触中所指望的。

如果作用在圆柱体上的力p是单位面积上的体力$p=P/\pi$，则可以按如下方式建立圆柱体的复势。首先建立体力pF_x的相对应的场。因为有关的场很多，我们选择其中之一，使得$\Xi=0$。方程（4.2.15）—(4.2.18)表明

$$\left.\begin{aligned}&V=-p(z+\bar{z})/2,\quad W=-p(2z^2+z\bar{z})/4\\&\Phi_0(z)=-\varphi pz/2,\quad \Psi_0(z)=0\end{aligned}\right\}\quad(8.6.28)$$

并且

$$\theta_0=-2px,\quad \Xi_0=0,\quad 2\mu D_0=-(1-2\nu)pz^2/2$$

(8.6.29)

现在我们来建立合力为零的表面作用力产生的场，这个场被C''上的表面力的场（8.6.29）所完全平衡。根据§8.2的理论，必须找出$\Phi(z)$，使得

$$\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)=p(t+t^{-1})/2+f(t),\quad 在C上$$

(8.6.30)

（注意，$\Xi=0$指的是$\tau_{\theta\theta}=\tau_{rr}$，$\tau_{r\theta}=0$，$\Theta=2\tau_{rr}$），其中在$C''$上，有$f(t)=0$（而且由于$\tau_{r\theta}=0$，则$f(t)$必须为实函数）。由于$\Phi_0(z)$产生的法向应力是$-px=-p(t+t^{-1})/2$，则$f(t)$是圆柱面上的法向应力。场$\Phi_1(z)$由下式给出

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{4\pi i}\int_{C'}\frac{f(t)}{t}dt+\frac{pz}{2},\quad |z|<1$$

(8.6.31)

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{4\pi i}\int_{C'}\frac{f(t)}{t}dt-\frac{p}{2z},$$

$$|z| > 1 \qquad (8.6.32)$$

条件（8.2.9）给出平衡方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_{C'} f(t)\,dt + p = 0 \qquad (8.6.33)$$

这与式（8.6.16）的最后一个式子相同，并且

$$2\mu_1 L_1(u_r) = (1-\kappa_1)(\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)) + (1+\kappa_1)t \times \frac{d}{dt}(\Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t)) = (1-\kappa_1)f(t) + \frac{(1+\kappa_1)}{\pi i} \times t\int_{C'} \frac{f'(s)}{s-t}\,ds + \frac{p}{2}(t+t^{-1}) \qquad (8.6.34)$$

那么，除了最后一项不仅仅和α，β有关之外，由式（8.5.20）得到的方程与式（8.6.27）完全相同；事实上，只是用$(\mu_2 + 2\kappa_2\mu_1)/[\mu_2(1+\kappa_1) + \mu(1+\kappa_2)]$代替了$(1-\beta)$。

方程（8.6.27）基本上与方程（8.5.43）的形式相同，只是C'包含一条单个弧段而不是一对弧段。当$\beta = 0$时，使得圆柱与摇篮有相同的性质，则有类似于Stippes（1962）等得到的封闭解。当$\beta = 0$时，求解时可以令

$$f(t) = 2(2\cos\theta - 2\cos\theta_0)^{-1/2}\sum_{n=0}^{N} a_n \cos(n+1/2)\theta = -\sum_{n=0}^{N} a_n (t^{n+1} - t^{-n})/X^+(t) \qquad (8.6.35)$$

推导过程如（8.5.48）～（8.5.58）那样。Kalandia(1957)首先利用下面的变换，将C'映射成ζ平面上的线段$[-1, 1]$

$$z = \frac{i\sigma - \zeta}{i\sigma + \zeta}, \quad \sigma = \cot(\theta_0/2) \qquad (8.6.36)$$

方程（8.6.27）变成

$$\frac{\beta\sigma}{\chi^2+\sigma^2}f(\chi)+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f'(\xi)\,d\xi}{\xi-\chi}=-\frac{(1-\alpha)}{2}\frac{\sigma^2}{(\chi^2+\sigma^2)}$$

$$\times\int_{-1}^{1}\frac{f(\xi)}{\xi^2+\sigma^2}d\xi-(1-\beta)\frac{P}{\pi}\sigma\frac{(\chi^2-\sigma^2)}{(\chi^2+\sigma^2)^2},\quad -1\leqslant\chi\leqslant 1$$

(8.6.37)

而辅助条件(8.6.19)变成

$$f(-1)=0=f(1),\quad 2\sigma\int_{-1}^{1}\frac{(\xi^2-\sigma^2)f(\xi)}{(\xi^2+\sigma^2)^2}\,d\xi=P$$

(8.6.38)

Kalandia考虑方程

$$\frac{f(x)}{B(x)}-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f'(t)}{t-x}dt=g(x),\qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

(8.6.39)

为了数值计算的目的，用Lagrange展开式

$$f_N(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}f(x_n)\frac{\sin(N+1)\theta\sin\theta_n}{\cos\theta-\cos\theta_n}$$

(8.6.40)

近似地表示$f(x)$，其中

$$x=\cos\theta,\quad x_n=\cos\theta_n,\quad \theta_n=n\pi/(N+1),\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,$$
$$n=1,\ 2,\ \cdots,\ N \qquad (8.6.41)$$

这个展开式具有性质

$$f_N(x_n)=f(x_n),\quad f_N(\pm 1)=0 \qquad (8.6.42)$$

$f_N(x)$的表达式可以写成另一种形式

$$f_N(x)=\frac{2}{N+1}\sum_{n=1}^{N}f(x_n)\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\sin k\theta_n \qquad (8.6.43)$$

那么

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f'_N(t)\,dt}{t-x}=\frac{1}{\pi}\int_{\theta_n}^{\pi}\frac{df}{d\theta}\frac{d\theta}{\cos\theta-\cos\phi}$$

$$= \frac{2}{N+1}\sum_{s=1}^{N} f(x_s)\sum_{k=1}^{N} k\sin k\theta_m I_k \quad (8.6.44)$$

其中，由于式(2.3.27)有

$$I_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos k\theta\,\mathrm{d}\theta}{\cos\theta-\cos\phi} = \frac{\sin k\phi}{\sin\phi} \quad (8.6.45)$$

这样，令式(8.6.39)的两端在x_m处相等，得到方程

$$\frac{f(x_m)}{B(x_m)} - \sum_{s=1}^{N} f(x_s)\left\{\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\frac{k\sin k\theta_s\sin k\theta_m}{\sin\theta_m}\right\} = g(x_m) \quad (8.6.46)$$

针对$m=1, 2, \cdots, N$，此式给出了$f(x_m)$的N的方程。

Wilson和Hill(1972)考虑了放置在任意形状的刚性摇篮的弹性圆柱，有效地利用了接触应力表达式（8.6.35），圆柱体的位移与摇架外形之差应当为最小。根据这个条件，建立了a_s的方程组。他们的数值研究的重要结论之一是，接触应力$f(\theta)$的变化，可以近似地看成适合方程

$$\left[\frac{f(\theta)}{f(0)}\right]^m + \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2 = 1 \quad (8.6.47)$$

其中m大约等于1.5；Hertz理论适用于接触长度比摇架和圆柱体的半径小很多的情形，Hertz理论在这里给出$m=2$。

第九章　楔形物和直棱的接触问题

9.1　引　　言

这一章简短地介绍这个课题的研究成果。我们将介绍：基本理论的表述，典型问题的解，最新进展的资料；但是，按这个课题的性质，前两方面内容的介绍尽量从简，对后一问题的讨论则予以扩大。这种安排的原因有：所包含的分析从根本上看很长；在普通的杂志上都有介绍；为了透彻的处理，要求高水平的严格，这超出了本书的标准。

9.2节 给出形式上的 Mellin 变换；与楔形有关的弹性理论综述在§9.3中介绍；而Mellin变换的应用由9.4节描述。

9.2　Mellin变换

Mellin变换的定义〔Tranter(1956)，Sneddon (1972)〕如下：

$$f^*(x) = M[f(x);s] = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x \qquad (9.2.1)$$

式中的参数s是复变量$s=\sigma+\mathrm{i}\tau$。式(9.2.1) 这样的无限积分的存在性取决于三个因素：积分

$$\int_a^b f(x)x^{s-1}\mathrm{d}x$$

对任意有限区间$0<a\leqslant x\leqslant b<\infty$存在；对于大的$x$，$\sigma$必须不太大，即当$\sigma<\sigma_2$，存在性质$|f(x)x^{s-1}| = |f(x)|x^{\sigma-1}$以及对于小的$x$，$\sigma$必须不太小，即当$\sigma>\sigma_1$，具有性质$|f(x)x^{s-1}| = |f(x)|$

$\times x^{\sigma-1}$❶．后两个因素的含意是，积分在区域$\sigma_1<\sigma<\sigma_2$中收敛。如果下面的积分

$$\int_0^\infty |f(x)|\,x^{\sigma-1}\mathrm{d}x$$

存在，则称 Mellin 变换绝对收敛。尽管更强的结果可以得到证明，但是下面所要得到的三点，对我们的目的来说已经足够了。



图9.2.1 Mellin反变换的积分路径

1．如果$M[f(x);\ s]$在带形区域$\alpha_1\leqslant\sigma\leqslant\alpha_2$内绝对收敛，则$f^*(s)$在带形区域$\alpha_1<\sigma<\alpha_2$内是全纯的．这可以由双边Laplace变换的相应的定理加以修改后而得到证明（Sneddon (1972), p.137ff)。

2．而且，如果$f(x)$在x点是连续的，则

$$f(x)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}f^*(s)x^{-s}\mathrm{d}s \qquad (9.2.2)$$

对区域$\alpha_1\leqslant c\leqslant\alpha_2$上所有的$C$都成立〔Doetsch (1950, Vol.I, p.212)〕，积分路径如图9.2.1所示。

3．假设$f^*(s)$在带形区$\alpha_1<\sigma<\alpha_2$内全纯，则对于任意的$\eta>0$，当在带形$\alpha_1+\eta\leqslant\sigma\leqslant\alpha_2-\eta$内，$|\tau|\to\infty$时，则$f^*(s)$一致地趋于零，并且对于$\alpha_1<\sigma<\alpha_2$内的每一个$\sigma$值，积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^*(\sigma+\mathrm{i}\tau)\mathrm{d}\tau$$

绝对收敛．如果$f(x)$由式(9.2.2)所定义，则对所有满足$\alpha_1<\mathrm{Re}(s)<\alpha_2$的$s$，$f^*(s)$是由式(9.2.1)式给出的（Sneddon (1972), p.273)。

或许 Mellin 变换的最简单的例子可以由下面的积分而得到

❶原文在这里漏掉了等号及等式右端——译者

$$\int_0^\infty x^{n-1}\exp(-x)\,dx=(n-1)!,\quad n=1,2,\cdots \tag{9.2.3}$$

积分

$$\int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)\,dx$$

对于所有满足$\mathrm{Re}(s)=\sigma>0$的复变量s都存在，而且这个积分被用来定义Γ函数

$$\int_0^\infty x^{s-1}\exp(-x)\,dx=\Gamma(s),\quad \sigma>0 \tag{9.2.4}$$

其中，对于$s=n$，$\Gamma(n)=(n-1)!$。注意因为Mellin变换(9.2.4)在半平面$\sigma>0$存在，这样$\alpha_1=0$和$\alpha_2=\infty$。

对于任意的s，函数x^a的 Mellin 变换不存在，因为仅当s分别位于不同的特殊区域$\mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(-\alpha)$和$\mathrm{Re}(s)<\mathrm{Re}(-\alpha)$之内，该积分在(0,1)和(1,∞)范围内才存在。可是，如果

$$f(x)=\begin{cases} x^a, & 0<x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases} \tag{9.2.5}$$

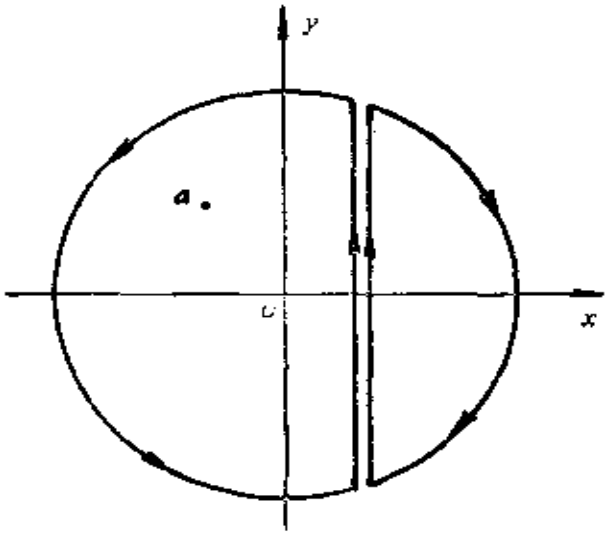


图9.2.2 式 (9.2.6) 给出的$f^*(s)$的反演计算所用的积分路径

那么方程 (9.2.1) 立即给出

$$f^*(s)=(s+a)^{-1},\quad \mathrm{Re}(s)>\mathrm{Re}(-\alpha) \tag{9.2.6}$$

于是这里$\alpha_1=-\alpha$，$\alpha_2=\infty$。为了验证反变换(9.2.2)，我们对图9.2.2中的积分路径应用 Cauchy 定理。写出 $x=\exp(u)$，$s=R\cdot\exp(i\theta)$，那么 $|x^{-s}|=|\exp[-uR\exp(i\theta)]|=$

$\exp(-uR\cos\theta)$，因此，如果$0<x<1$，则$u<0$，大半圆到左边的积分当$R\to\infty$时，此积分值趋于零，此时$\cos\theta<0$。而在$s=-\alpha$时，积分(9.2.3)将是$x^{-\alpha}(s+\alpha)^{-1}$的留数$x^{-\alpha}$。当$x>1$使得$u>0$时，对于$R\to\infty$，在大半圆到右边的积分趋近于零，这时$\cos\theta>0$，而且式(9.2.2)的积分将为零，使得$M^{-1}[(s+\alpha)^{-1};x]=x^{\alpha}$，如果$0<x<1$；而当$x>1$时，该积分为零，这是根据方程(9.2.5)得来的。也可以见例题9.2.3。

几条规则：

$$M[f(ax);s]=a^{-s}f^*(s) \tag{9.2.7}$$

$$M[x^{\alpha}f(x);s]=f^*(s+\alpha) \tag{9.2.8}$$

$$M[f(x^{\alpha});s]=a^{-1}f(s/a),\quad a>0 \tag{9.2.9}$$

其中a和s必须使变换存在。这些公式的验证很容易。导数的Mellin变换的规则如下式定义

$$M[f'(x);s]=\int_0^{\infty}f'(x)x^{s-1}\mathrm{d}x \tag{9.2.10}$$

那么，由分部积分，我们得到

$$M[f'(x);s]=\left[f(x)x^{s-1}\right]_0^{\infty}-(s-1)\int_0^{\infty}f(x)x^{s-2}\mathrm{d}x \tag{9.2.11}$$

如果s满足

$$\lim_{x\to 0}f(x)x^{s-1}=0=\lim_{x\to\infty}f(x)x^{s-1} \tag{9.2.12}$$

那么

$$M[f'(x);s]=-(s-1)M[f(x);s-1] \tag{9.2.13}$$

例 9.2

1. 用变换$u=ax$和$u=x^{\alpha}$分别证明方程(9.2.7)和(9.2.9)。

2. 证明$M[xf'(x);s]=-sf^*(s)$。

3. 如果

$$I(c)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}(s+\alpha)^{-1}x^{s}\mathrm{d}s$$

试表明，当$\mathrm{Re}(c)<\mathrm{Re}(-\alpha)$时，有$I(c)=0$，这时$0<x<c$；当$x>1$时，有$I(c)=-x^{\alpha}$。

9.3 平面楔形体的弹性理论

在无重力的情形下，在平面极坐标系中，控制平面应变弹性问题的方程，是平衡方程(1.5.2)—(1.5.3)，即

$$r\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta}=0 \tag{9.3.1}$$

$$r\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{\theta\theta}}{\partial\theta}+2\tau_{r\theta}=0 \tag{9.3.2}$$

和应力-应变方程

$$(1-2\nu)\tau_{rr}=2\mu[(1-\nu)e_{rr}+\nu e_{\theta\theta}],\quad \tau_{r\theta}=2\mu e_{r\theta} \tag{9.3.3}$$

$$(1-2\nu)\tau_{\theta\theta}=2\mu[(1-\nu)e_{\theta\theta}+\nu e_{rr}] \tag{9.3.4}$$

这些方程与应变-位移关系一起，包含一种意义：在其他方程中，存在例题1.11.6的协调方程，即

$$\nabla^2(\tau_{rr}+\tau_{\theta\theta})=0 \tag{9.3.5}$$

基本上有三种途径求解这些方程。Michell(1899)用如下形式（例题1.11.6）表示应力

$$\left.\begin{aligned}\tau_{rr}&=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2U}{\partial\theta}\\ \tau_{\theta\theta}&=\frac{\partial^2U}{\partial r^2},\qquad \tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)\end{aligned}\right\} \tag{9.3.6}$$

这些式子自动满足了式（9.3.1）和（9.3.2），方程（9.3.5）表明，U必须是双调和的，即

$$\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}^2U=0 \tag{9.3.7}$$

Carothers (1913) 考虑了图9.3.1表示的顶角为$\pm\gamma$的楔形体，并且运用分离变量解（例题9.3.1）

$$U = r^n[A\sin n\theta + B\cos n\theta + C\sin(n-2)\theta + D\cos(n-2)\theta] \tag{9.3.8}$$

求得对应于某些简单应力分布的解. 特别是他提出

$$U = \frac{Q(2\theta\cos\gamma - \sin 2\theta)}{2(\sin 2\gamma - 2\gamma\cos 2\gamma)} \tag{9.3.9}$$

作为适宜于原点作用着集中力矩Q的应力函数. 方程 (9.3.6) 表明U产生的应力为

$$\left.\begin{aligned} \tau_{rr} &= \frac{2Q\sin 2\theta}{r^2(\sin 2\gamma - 2\gamma\cos 2\gamma)}, \quad \tau_{\theta\theta} = 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{Q(\cos 2\theta - \cos 2\gamma)}{r^2(\sin 2\gamma - 2\gamma\cos 2\gamma)} \end{aligned}\right\} \tag{9.3.10}$$

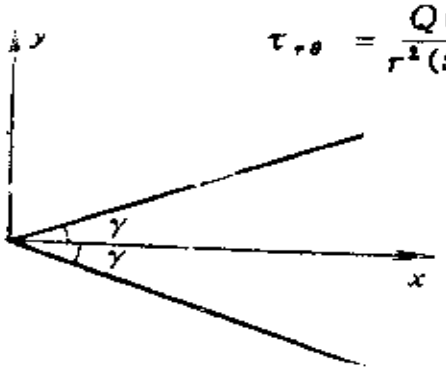


图9.3.1 顶角为$\pm\gamma$的楔形体

于是楔形体的表面是没有应力的：

$$\tau_{r\theta}(r, \pm\gamma) = 0 = \tau_{\theta\theta}(r, \pm\gamma), \quad 0 < r < \infty \tag{9.3.11}$$

令$X(r)$，$Y(r)$和$M(r)$分别表示笛卡尔坐标系中的合力和合力矩，它们分别作用在直线$\theta = \pm\gamma$所包围的有限范围内和半径为r的圆弧上. 那么

$$\left.\begin{aligned} X(r) &= -r\int_{-\gamma}^{\gamma}(\tau_{rr}\cos\theta - \tau_{r\theta}\sin\theta)\,d\theta \\ Y(r) &= -r\int_{-\gamma}^{\gamma}(\tau_{rr}\sin\theta + \tau_{r\theta}\cos\theta)\,d\theta \end{aligned}\right\} \tag{9.3.12}$$

$$M(r) = -r^2\int_{-\gamma}^{\gamma}\tau_{r\theta}\,d\theta \tag{9.3.13}$$

并且应力(9.3.10)给出

$$X(r) = 0 = Y(r), \quad M(r) = Q, \quad 0 < r < \infty \tag{9.3.14}$$

当γ等于方程 $\mathrm{tg}2\gamma=2\gamma$的唯一非零解 $\gamma^*=0.715\pi$时，应力函数(9.3.9) 显然没有意义. 在一篇重要的文章中， Sternberg 和 Koiter(1958)指出 Carother 解是无限多个解中唯一满足以下三个条件的解：(a)应力在整个楔形区域($0\leqslant r<\infty$， $-\gamma\leqslant\vartheta\leqslant\gamma$)内满足平衡方程与协调方程，并且这些应力在闭区域($0\leqslant r<\infty$，$-\gamma\leqslant\theta\leqslant\gamma$) 内除了在原点有奇异性之外是正则的，并且在无穷远处，应力将趋于零，即

$$\tau_{rr},\ \tau_{\theta\theta},\ \tau_{r\theta}\to 0 \quad 当 r\to\infty$$

(b)边界是自由的，不承受外力作用，即方程 (9.3.11) 成立.

(c) 原点处出现应力奇异性是由于该点作用集中力或力矩.

Sternberg与Koiter还指出，反对称分布的法向载荷 $p(r)$ 作用在$\theta=\pm\gamma$，$0<r<a$上， 如果我们企图从$a\to 0$ 时的这种载荷的极限来获得集中力矩的解（如图9.3.1所示）， 那是能够有办法解释这种极限的， 这种办法不依赖 $p(r)$的特殊分布， 只要求 $0<\gamma<\gamma^*$. 而当$\gamma^*<\gamma<\pi$时， 此极限不存在， 除非另一种条件成立，这一附加条件又不可能得出有意义的物理解释，并且通常在这个场中全部应力分量是无限的. Sternberg 和 Koiter 文章的重要性在于他们归纳出的以下结论. (1) 在应用St.Venant 原理时，一定要注意：在$\gamma^*<\gamma<\pi$的楔形物问题中， 存在一个在无穷远处衰减的自平衡的应力场， 其衰减速度比起应力函数 (9.3.9) 对应的场要慢一些， 这后一个场有一个力偶为应力的合力. (2) 对于某些楔形体问题， 即对于 $\gamma<\gamma^*<\pi$，一个集中力偶的想法，是没有意义的. 注意，$p(r)$具有其所要求的合力偶 Q，但是并不限制它是反对称的，那么，必须把γ限制在$0<\gamma<\pi$范围内. (3) 在应用Mellin变换及其反演的过程中，有时必须极其小心. 请读者认真阅读这篇文章.

Brahtz(1933)曾经应用如下形式的解

$$U=\int_0^\infty A(m)\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\cos m\xi\\ \sin m\xi\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\cos hm\theta\\ \sin hm\theta\end{Bmatrix}\mathrm{d}\theta \qquad (9.3.15)$$

其中$\zeta=\ln r$，对于直角内顶角的平面边界上作用着集中载荷的问题，可用此函数求应力. Shepherd (1935) 使用这样的解，对于任意的楔角，完成了较详细的计算.

方程(9.3.1) ~(9.3.4) 的第三种解法，是由 Papkovich--Neuber的解(1.10.11)提供的. 对于平面问题，可以把它写成如下形式

$$2\mu u=\kappa((\psi_1\cos\theta+\psi_2\sin\theta)-r\cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial r}-r\sin\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial r}-\frac{\partial\phi}{\partial r}$$

(9.3.16)

$$2\mu v=\kappa(-\psi_1\sin\theta+\psi_2\cos\theta)-\cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}$$

$$-\sin\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \qquad (9.3.17)$$

其中$u=u_\theta$，$v=u_r$，函数中ϕ、ψ_1及ψ_2为平面调和函数。这些表达式将在下面一节中与Mellin变换结合加以应用.

最后，M.L. Williams(1956) 和England(1971b) 将第四章中介绍的复变量分析应用于楔形物问题，在 §9.5 中将简要的介绍.

例9.3

1. 试表明，对于任意的n，式(9.3.8)是式(9.3.7)的解. 对于特殊情形$n=0,1,2$，其解是什么？应用$n=2$的解求出满足$\tau_{r\theta}(r,\pm\gamma)=0$，$\tau_{\theta\theta}(r,\pm\gamma)=\pm p$或$\tau_{\theta\theta}(r,\pm\gamma)=-p$的应力分布.

9.4 Mellin变换在楔形物问题中的应用

Tranter(1948)应用应力函数(9.3.6)，结合Mellin变换，得到表面$\theta=\pm\gamma$上受下列任意压力和剪应力

$$p_1(r)=-\tau_{\theta\theta}(r,\gamma),\qquad q_1(r)=\tau_{r\theta}(r,\gamma) \qquad (9.4.1)$$

$$p_2(r) = -\tau_{\theta\theta}(r,-\gamma), \quad q_2(r) = \tau_{r\theta}(r,-\gamma) \tag{9.4.2}$$

时，图9.4.1所示楔形体问题的形式解.

他注意到$U(r,\theta)$是双调和的，如果$U^*(s,\theta) = M[U(r,\theta); r\to s]$满足

$$\frac{\partial^4 U^*}{\partial\theta^4} + [(s+2)^2 + s^2]\frac{\partial^2 U^*}{\partial\theta^2} + s^2(s+2)^2 U^* = 0 \tag{9.4.3}$$

其解为

$$U^*(s,\theta) = A\sin s\theta + B\cos s\theta + C\sin(s+2)\theta + D\cos(s+2)\theta \tag{9.4.4}$$

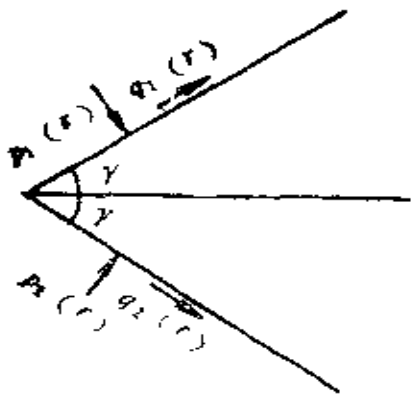


图 9.4.1 作用在楔形物表面的法向应力及切向应力

其中A,B,C,D是s的函数，可以由边界条件(9.4.1)～(9.1.2)确定.这样，经过两次应用式(9.2.13)，记$\partial/\partial r \equiv '$，我们得到

$$\begin{aligned} P_n(s) &\equiv M[p_n(r); s+2] \\ &= -M[U''(r,\pm\gamma); r\to s+2] \\ &= -(s+1)sM[U(r,\pm\gamma); r\to s] \\ &= -(s+1)sU^*(r,\pm\gamma) \end{aligned} \tag{9.4.5}$$

运用式(9.2.8)和(9.2.13)可以得到

$$\begin{aligned} Q_n(s) &\equiv M[q_n(r); s+2] = -M[(r^{-1}\partial U/\partial\theta)'; r\to s+2] \\ &= (s+1)\frac{\partial U^*}{\partial\theta}(r,\pm\gamma) \end{aligned} \tag{9.4.6}$$

其中$n=1,2$分别由符号+或−表示.这样

$$2(s+1)\begin{Bmatrix} GA \\ GB \\ GC \\ GD \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (s+2)\cos(s+2)\gamma, & -(s+2)\cos(s+2)\gamma, \\ -\cos s\gamma, & \cos s\gamma, \\ -(s+2)\sin(s+2)\gamma, & -(s+2)\sin(s+2)\gamma, \\ \sin s\gamma, & \sin s\gamma, \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s\sin(s+2)\gamma, & s\sin(s+2)\gamma \\ -\sin s\gamma, & -\sin s\gamma \\ \cos(s+2)\gamma, & -\cos(s+2)\gamma \\ -\cos s\gamma, & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1(s) \\ P_2(s) \\ Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{Bmatrix} \tag{9.4.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} G(s,\gamma) &= (s+1)\sin 2\gamma - \sin 2(s+1)\gamma \\ H(s,\gamma) &= (s+1)\sin 2\gamma + \sin 2(s+1)\gamma \end{aligned}\right\} \tag{9.4.8}$$

Tranter详细考虑了一种情形，其中$q_1 = 0 = q_2$，并且

$$p_1(r) = p_2(r) = \begin{cases} 1, & r<a \\ 0, & r>a \end{cases} \tag{9.4.9}$$

还证明了，当 $\gamma = \pi/2$ 时，已知的半平面的解. Sternberg 和 Koiter(1958)指出如何将方程(9.4.7)应用于实践中. Harrington 和Ting(1971)，Tsamasphyros和 Theocaris (1976)，对Mellin变换分析作了检验.

Ufliand(1965)应用Papkovich-Neuber解式 (1.10.11)去求解混合边值一类接触问题，其中接触问题只是一部分. 不可能引入联系ψ_1，ψ_2和ϕ的一个关系式；按照 Ufliand 方法，我们假设ψ_1和ψ_2满足Cauchy-Riemann关系

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial\psi_2}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} \tag{9.4.10}$$

使得应力$\tau_{\theta\theta}$和$\tau_{r\theta}$变成

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \cos\theta\,\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial r}$$

$$-\frac{1}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\theta^2} + \sin\theta\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\theta^2}\right) \tag{9.4.11}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \cos\theta\,\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta} + \sin\theta\,\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r}$$

$$\left(\cos\theta\frac{\partial\psi_1}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial\psi_2}{\partial\theta}\right) \tag{9.4.12}$$

现在记

$$\overline{\phi}\equiv\phi^*(s,\theta)=M[\phi(r,\theta);\ r\to s] \tag{9.4.13}$$

$$\overline{\psi_n}\equiv\overline{\psi}^*(s+1,\theta)=M[\psi_n(r,\theta);\ r\to s+1),\ n=1,2 \tag{9.4.14}$$

由于ψ_1, ψ_2和ϕ是调和函数，并且满足式（9.4.10），我们得到

$$\left.\begin{aligned}\overline{\phi}(s,\theta)&=A_0\cos s\theta+B_0\sin s\theta\\ \overline{\psi}_1(s,\theta)&=A_1\cos(s+1)\theta+B_1\sin(s+1)\theta\\ \overline{\psi}_2(s,\theta)&=-A_1\sin(s+1)\theta+B_1\cos(s+1)\theta\end{aligned}\right\} \tag{9.4.15}$$

Ufliand考虑了边界条件

$$u(r_1-\gamma)=u_0(r),\ v(r_1,-\gamma)=v_0(r) \tag{9.4.16}$$

$$\tau_{\theta\theta}(r,\gamma)=-p(r),\ \tau_{r\theta}(r,\gamma)=q(r) \tag{9.4.17}$$

记

$$\overline{u},\ \overline{u_0},\ \overline{v},\ \overline{v}_0=M[u(r,\theta),\ u_0(r),\ v(r,\theta),\ v_0(r);\ r\to s+1] \tag{9.4.18}$$

$$\overline{\tau}_{\theta\theta},\ \overline{p},\ \overline{\tau}_{r\theta},\overline{q}=M[\tau_{\theta\theta}(r,\theta),\ p(r),\ \tau_{r\theta}(r,\theta),\ q(r);\ r\to s+2] \tag{9.4.19}$$

那么，边界条件（9.4.16）和（9.4.17）可以改写成

$$\overline{u}(-\gamma)=\overline{u}_0(s),\ \overline{v}(-\gamma)=\overline{v}_0(s) \tag{9.4.20}$$

$$\overline{\tau}_{\theta\theta}(\gamma)=-\overline{p},\ \overline{\tau}_{r\theta}(\gamma)=\overline{q} \tag{9.4.21}$$

而方程（1.10.11），（9.4.11）和（9.4.12）的变换为

$$2\mu\overline{u}=(\kappa+s+1)[\overline{\psi}_1\cos\theta+\overline{\psi}_2\sin\theta]+s\overline{\phi} \tag{9.4.22}$$

$$2\mu\overline{v}=(\kappa-s-1)[-\overline{\psi}_1\sin\theta+\overline{\psi}_2\cos\theta)-\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\theta} \tag{9.4.23}$$

$$\overline{\tau}_{\theta\theta}=s(s+1)[\overline{\phi}+\overline{\psi}_1\cos\theta+\overline{\psi}_2\sin\phi] \tag{9.4.24}$$

$$\overline{\tau}_{r\theta}=(s+1)\frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\theta}+(s+2)\left[\frac{\partial\overline{\psi}_1}{\partial\theta}\cos\theta\right.$$

$$+\frac{\partial\overline{\psi_2}}{\partial\theta}\sin\theta\Big] \qquad (9.4.25)$$

注意，式（9.4.13）、（9.4.14）和（9.4.19）中的宗量分别是s，$s+1$和$s+2$。

由四个边界条件(9.4.16)～(9.4.17)导出四个关于A_0，B_0，A_1，B_1的方程，利用Mellin逆变换由这些方程可以解得位移和应力，但是需要找到一个带形区域，c必须在此区域中取值，亦即，一个公共的带形区域，使得Mellin变换在其中为全纯函数。如果我们假设u_0，v_0，$p(r)$，$q(r)$为连续函数，对于大的r，有

$$u_0,\ v_0=O(r^{-\delta}),\ p(r),\ q(r)=O(r^{-1-\delta}) \qquad (9.4.26)$$

再有，如果$\mathrm{Re}(s)<\delta-1$，则Mellin变换$\overline{u}_0$，$\overline{v}_0$，$\overline{p}$，$\overline{q}$中出现的积分，绝对地收敛于其上极限值。进一步说，如果当$r\to0$时位移有界而应力具有可积奇异性，亦即

$$p(r),\ q(r)=O(r^{-\varepsilon}),\qquad \varepsilon<1 \qquad (9.4.27)$$

则当$\mathrm{Re}(s)>-1$时，积分将绝对地收敛于其下极限值。那么，Mellin变换$\overline{u}_0$，$\overline{v}_0$，$\overline{p}$，$\overline{q}$在带形区域$-1<\sigma<-1+\delta$上是全纯的。应力的变换可以经过求解关于A_0，B_0，A_1，B_1的方程（9.4.20）～（9.4.25）而得，这些量中的每一个均被表示成比率的形式。分子是正弦，余弦及$\overline{u}_0$，$\overline{v}_0$，$\overline{p}$，$\overline{q}$的联合形式；分母是方程组的行列式，这个分母可以由求s的那些值而求得，这些值是使应力函数满足下面的夹紧-自由条件

$$u(r,-\gamma)=0=v(r,-\gamma)=\tau_{\theta\theta}(r,\gamma)=\tau_{r\theta}(r,\gamma) \qquad (9.4.28)$$

行列式为

$$D(s+1)=4\kappa\sin^2 2(s+1)\gamma+4(s+1)^2\sin^2 2\gamma-(\kappa+1)^2 \qquad (9.4.29)$$

令s_1为$D(s+1)=0$具有最小实部的根，但是$\mathrm{Re}(s_1)<-1$；那么在带形区域$-1<\sigma<\sigma_0$中，变换$\overline{u}$，$\overline{v}$，$\overline{\tau}_{r\theta}$，$\overline{\tau}_{\theta\theta}$的每一个都是全纯的，其中$\sigma_0=\min(\mathrm{Re}(s_1),\ -1+\delta)$；$c$必须在这个带形

区域中取值.

为了考察可能具有的应力奇异性，我们考虑如何计算积分

$$\{\tau_{r\theta}(r,\ \theta),\ \tau_{\theta\theta}(r,\ \theta)\}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left\{\overline{\tau}_{r\theta}(\theta),\ \overline{\tau}_{\theta\theta}(\theta)\right\}r^{-s-2}ds \qquad (9.4.30)$$

对于小的r，可以使用左侧大半圆所代表的封闭迴路$\mathrm{Re}(s)=c$ 而计算这些积分，如图9.2.2所示. 如果变换 $\overline{\tau}_{r\theta}$ 和$\overline{\tau}_{\theta\theta}$ 之一有简单极点，亦即如果$D(s+1)$有简单的零点s_0，它满足$\mathrm{Re}(s_0)<-1$，那么相应的应力将包含一项 $c(s_0)r^{-s_0-2}$，它是由该积分在s_0点的留数而出现的，而且，如果$\mathrm{Re}(s_0)>-2$，则在原点上，该应力是无界的. 对$D(s+1)$ 的零点的研究，是奇异性分析的一部分，将在§9.5中讨论.

由方程(9.4.13) ～(9.4.25)给出的楔形物问题的形式解，不适宜进行数值计算，为此，Lutchenko(1966) 和Lutchenko与Popov(1970)推导了更为适宜的方程. 他们考虑了一种特殊的情形，即楔形物的一个侧缘$\theta=\gamma$ 被固定住，而另一个 侧缘 $\theta=-\gamma$的一部分表面同无摩擦的冲头接触，这样

$$u(r_1,-\gamma)=0=v(r_1,-\gamma);\qquad \tau_{r\theta}(r,\ \gamma)=0;\qquad r>0 \qquad (9.4.31)$$

$$\left.\begin{aligned} &v(r,\ \gamma)=f^*(r),\qquad 0\leqslant r\leqslant a\\ &\tau_{\theta\theta}(r,\ \gamma)=\begin{cases}-p(r), & 0<r<a\\ 0, & r>a\end{cases}\end{aligned}\right\} \qquad (9.4.32)$$

其中$f^*(r)$表示冲头的形状在满足边界条件 (9.4.31)之后，有

$$\overline{v}(s,\gamma)=\frac{\vartheta(\kappa\sin 4s\gamma-s\sin 4\gamma)\,\overline{\tau}_{\theta\theta}(s+1,\ \gamma)}{s[8(1-\nu)^2-2\kappa\sin^2 2s\gamma-2s^2\sin^2 2\gamma]} \qquad (9.4.33)$$

于是在进行积分变换并且假设可沿虚轴$\mathrm{Re}(s)=0$进行 Mellin反

演之后，我们得到

$$-\frac{\vartheta}{\pi}\int_a^c v_\gamma^*\left[\ln\left(\frac{x}{r}\right)\right]p(x)\,dx = f^*(r), \qquad 0\leqslant r\leqslant a \tag{9.4.34}$$

其中

$$v_\gamma^*(z) = \int_0^\infty \frac{\phi_\gamma(t)}{t}\cos zt\,dt \tag{9.4.35}$$

$$\phi_\gamma(t) = \frac{\kappa\sinh 4t\gamma t\sin 4\gamma}{8(1-\nu)^2+2\kappa\sinh^2 2t\gamma+2t^2\sin^2 2\gamma} \tag{9.4.36}$$

注意，楔形物的压陷量 $-v(r,\ \gamma)\equiv -f^*(r)$.

Lutchenko和Popov注意到，v_γ^*在$x=r$处即 $z=0$处有奇异性. 他们写出

$$v_\gamma^*(z) = \int_0^\infty \phi_\gamma(t/\pi)\ \frac{\cos zt\,dt}{t} = k_0(z/\pi)+k(z/\pi) \tag{9.4.37}$$

其中

$$k_0\ (z) = \int_0^\infty \frac{\tanh t}{t}\cos zt\,dt,$$

$$k(z) = \int_0^\infty \frac{\phi_\gamma(t/\pi)-\tanh t}{t}\cos zt\,dt \tag{9.4.38}$$

并且$k(z)$在实轴上是正则的. 现在引进无量纲变量ξ和 ρ，使得

$$x=a\xi,\ r=a\rho,\ \chi(\xi)=a\rho(x),\ f(\rho)=\pi f^*(r)/\vartheta \tag{9.4.39}$$

$$-\int_0^1\left\{k_0\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\xi}{\rho}\right)\right]+k\left[\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\xi}{\rho}\right)\right]\chi(\xi)\,d\xi = f(\rho) \tag{9.4.40}$$

在§6.12的意义下，核k_0是一个多项式，因为

$$k_0\left[\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\xi}{\rho}\right)\right] = \ln\left[\frac{\xi^{1/2}+\rho^{1/2}}{\xi^{1/2}-\rho^{1/2}}\right]$$

$$= \int_0^{\min(\xi,\rho)} \frac{d\sigma}{[(\xi-\sigma)(\rho-\sigma)]^{1/2}} \qquad (9.4.41)$$

并且具有谱关系

$$\int_0^1 k_0\left[\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\xi}{\rho}\right)\right]\frac{U_{2m}[(1-\xi)^{1/2}]d\xi}{(1-\xi)^{1/2}}$$

$$= \pi\rho^{1/2}\quad\frac{U_{2m}[(1-\rho)^{1/2}]}{m+1/2} \qquad (9.4.42)$$

其中$U_m(x)$为第二类Chebyshev 多项式. 假设下面的展开式成立，方程(9.4.34)可以近似地解出来

$$\chi(\xi) = (1-\xi)^{1/2}\sum_{n=0}^{N} a_n U_{2n}[(1-\xi)^{1/2}] \qquad (9.4.43)$$

对式 (9.4.34) 两边同时乘以 $(1-\rho)^{-1/2}U_{2m}[(1-\rho)^{1/2}]$, 在(0,1) 上积分，并且运用$U_{2m}$的连续正交性或离散的正交性. Lutchenko和Popov运用了前一种方法；而后者见§6.4的叙述●. 对于平底冲头沿法向压挤楔形物，以及表面$\theta=\alpha$上放置着弯曲梁的各种情形，Lutchenko和 Popov 给出了详细的计算. 可以参阅Lutchenko(1972)的文章.

下面简短地提一提其他的几篇论文. Matchzynski(1963)得到了受对称载荷的楔形物的近似解，这个问题有特殊的位移条件$v=\delta r^{\lambda}$, $0<r<1$；他应用了Wiener-Hopf积分方程的Koiter(1954)近似解. Benthem(1963) 考虑了各向异性的楔形物. Srivastav和Prem Narain(1965)提出了如何处理由 Mellin变换推得方程式(9.4.33)和(9.4.34)，使接触压力的Mellin变换化成第二类Fredholm积分方程的形式. Kurshin(1959)和Hetenyi(1960)讨论了四分之一圆（即四分之一平面）的混合边值问

● 这里“前一种方法”是指利用U_{2m}的连续正交性，“后者”是指离散正交性。——译者

题.这些问题已被Sneddon(1971)作了综述和分析. V.M.Aleksandrov (1967a,1976b) 得到了楔形物在单独一个侧面的区间$a<r<b$内受到刚性冲头压挤时的近似解. 也可参考V.M.Aleksandrov和Kapasenko(1968)的文章. Nuller (1972) 考虑了通过刚性曲杆联结在楔形物的顶点上而作用以力的问题.Popov和Tikhonenko (1974, 1975) 探讨了楔形物的一面上放一根梁的问题. Nuller (1974) 讨论一根梁放在楔形物的中线$\theta=0$上的情形. Erdogan和Arin(1976a, 1976b) 对于楔形物的许多接触问题, 以数值分析作了仔细的研究. Babeshko 和 Berkovich (1972), Ufliand(1972)和Berkovich (1974), 考虑了三维楔形物的问题.

9.5 尖角处的应力奇异性

尖角处的应力奇异性问题五十多年来一直吸引着研究人员的注意力; 这一节将要简短地论述这个问题.

几乎每个学者都评论过应力奇异性这个事实, 这里应力变成无限大, 它发生在小变形线性弹性理论中, 在某种意义上, 此理论只适用于位移和应力都较小的情形下. 例如, Dempsey 和 Sinclair(1979)有过下面叙述: "在固体力学中, 应力集中有趋于最高的倾向. 线性弹性理论以这种典型的应力集中来模拟应力奇异性. 这些应力奇异性反映出这种理论的有限的物理应用范围, 因为它是实际材料所不能承受的; 另外, 应力奇异性是随这种理论的数学假设而变化的. 尽管如此, 弹性奇异解仍然能够对应力集中提供有用的信息. 当然, 如果忽略了奇异性, 那么, 弹性的有限数学模型就变得没有用了. 关键是, 应力奇异性并不在现实世界上发生, 它们是线性弹性理论中的事实, 并且必须在任何弹性分析中加以考虑."

楔形物的奇异性分析的基本问题在于研究一种应力场，它满足平面应变方程组和在两个侧面 $\theta = \pm\gamma$ 上一组齐次边界条件。Knein (1926) 应用式 (9.3.6) 的 Airy 应力函数，对于直角 ($\gamma = \pi/4$) 楔形物做出了这样的分析。M.L.Williams (1962) 考虑了一般角度的楔形物，并且假设每个边或者为自由的，即 $\tau_{\theta\theta} = 0 = \tau_{r\theta}$，或者为固定的，即 $u = 0 = v$。沿着 Huth (1953) 的思路，M.L.Williams (1956) 用复变函数方法重新作了这个分析；也可以参阅Kalandia (1969a) 的文章。England (1971b) 也对这个问题作了中肯的分析。

楔形物的每一侧 $\theta = \pm\gamma$ 上的条件可以是下列之一：

(a) 不受应力：$\tau_{r\theta} = 0 = \tau_{\theta\theta}$

由例题4.2.6可以写成

$$\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} = 0 \qquad (9.5.1)$$

(b) 零位移：$u = 0 = v$

方程(4.2.5)给出

$$\kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 0 \qquad (9.5.2)$$

(c) 无摩擦：$u_\theta = 0 = \tau_{r\theta}$

Williams和England取复势如下

$$\phi(z) = A_1 z^\lambda + A_2 z^{\bar{\lambda}},\quad \psi(z) = B_1 z^\lambda + B_2 z^{\bar{\lambda}} \qquad (9.5.3)$$

λ 的下限可以由楔形物顶点处位移连续性的要求而得出，这相当于要求楔形物的任何区域内的应变能为有限值；两者都可以推出 $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$。如果 $\mathrm{Re}(\lambda) > 1$，则顶点处的应力值是有限的。于是，楔形物顶点处的应力奇异性由特征值 λ 所控制，这种 λ 使 $\mathrm{Re}(\lambda)$ 极小，并且满足

$$0 < \mathrm{Re}(\lambda) < 1 \qquad (9.5.4)$$

England检查了四种情形，其中表面 $\theta = +\gamma$ 和 $\theta = -\gamma$ 上的条件分别为

(1) $a-a$，(2) $b-b$，(3) $c-a$，(4) $a-b$ (9.5.5)

例如，在情形（4）中，在$\theta=\gamma$上，方程(9.5.1) 给出

$$A_1 r^{\lambda}\exp(i\lambda\gamma) + \overline{\lambda}\overline{A_1} r^{\bar{\lambda}}\exp[-(\lambda-2)i\gamma] + B_1 r^{\bar{\lambda}}\exp(-i\overline{\lambda}\gamma) + A_2 r^{\bar{\lambda}}\exp(i\overline{\lambda}\gamma) + \lambda\overline{A}_2 r^{\lambda}\exp[-(\lambda-2)i\gamma] + \overline{B}_2 r^{\lambda}\exp(-i\lambda\gamma) = 0 \tag{9.5.6}$$

使r^{λ}和$r^{\bar{\lambda}}$幂等于零，我们得到

$$A_1\exp(i\lambda\gamma) + \lambda\overline{A}_2\exp[-(\lambda-2)i\gamma] + \overline{B}_2\exp(-i\lambda\gamma) = 0 \tag{9.5.7}$$

$$\lambda A_1\exp[(\lambda-2)i\gamma] + \overline{A}_2\exp(-i\gamma\lambda) + B_1\exp(i\lambda\gamma) = 0 \tag{9.5.8}$$

同样，$\theta=-\gamma$上的条件(b)，亦即方程(9.5.2) 给出

$$\kappa A_1\exp(-i\lambda\gamma) - \lambda\overline{A}_2\exp[(\lambda-2)i\gamma] - \overline{B}_2\exp(i\lambda\gamma) = 0 \tag{9.5.9}$$

$$-\lambda A_1\exp[-(\lambda-2)i\gamma] + \kappa\overline{A}_2\exp(i\lambda\gamma) - B_1\exp(-i\lambda\gamma) = 0 \tag{9.5.10}$$

而且方程(9.5.7)—(9.5.10)的行列式为

$$D(\lambda) = 4\kappa\sin^2 2\lambda\gamma + 4\lambda^2\sin^2 2\gamma - (\kappa+1)^2 \tag{9.5.11}$$

当把$\lambda=-s-1$代入此式，便得到式(9.4.29)．我们首先检查一些特殊情形．当$2\gamma=\pi$时，使得楔形物的两个侧缘是一条无限长直线的两半部分，则方程$D(\lambda)=0$变成

$$\sin\lambda\pi = \pm(\kappa+1)\kappa^{-1/2}/2 \tag{9.5.12}$$

于是主特征值为

$$\frac{1}{2} + \frac{i\ln\kappa}{2\pi} \tag{9.5.13}$$

这是半平面粘着接触问题遇到的指数，见方程组（4.6.13)．图9.5.1，取自England(1971b)的文章，是方程（9.5.11）主根的轮廓线．在区域C中，特征值是复数，其实部几乎与弹性常数κ无关，并且当楔形物的角γ增加时，它减小．在区域R中，特征值为实的，而且与κ和γ两者均有关．可以看出，对于角$2\gamma<\pi/4$的楔形物❶，可能没有奇异性．对于直角楔形物$2\gamma=\pi/2$，特征

值是实的，而对于$2\gamma=\pi$，特征值是复的．满足$0<\mathrm{Re}(\lambda)<1$的根λ的这些信息，可以应用于§9.4中的 Mellin变换分析；在应力变换式$\overline{\tau}_{r\theta}$，$\overline{\tau}_{\theta\theta}$，$\overline{\tau}_{rr}$中，根$\lambda$给出相应的极点$s=-\lambda-1$，它满足$-2<\mathrm{Re}(s)<-1$。

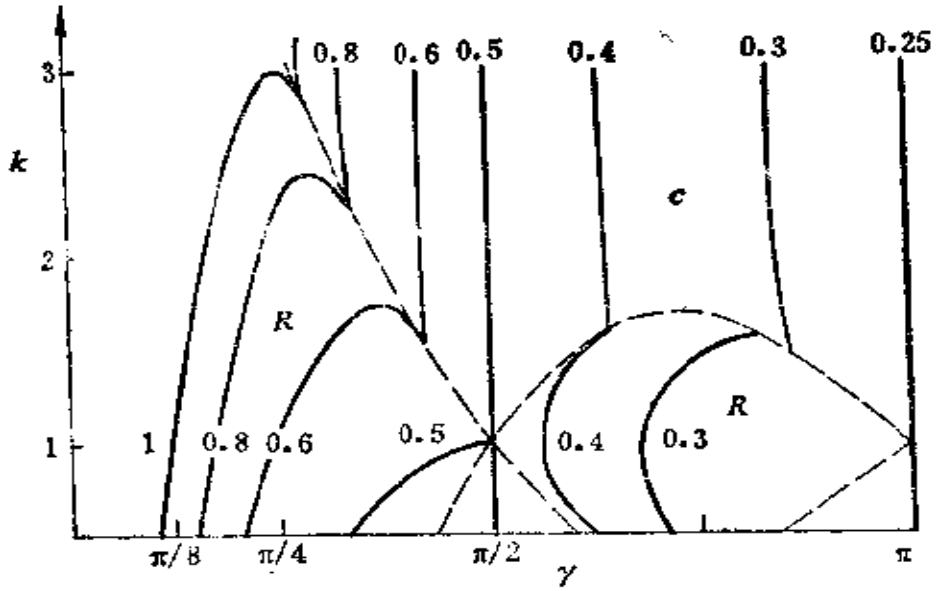


图9.5.1 $D(\lambda)=0$的主根实部的轮廓线

对于行列式方程$D(\lambda)=0$的不同的根λ，可以总结出下列结论，它关系到顶点处应力的阶数

τ_{rr}，$\tau_{r\theta}$，$\tau_{\theta\theta}$

$=O(r^{\lambda-1})$，对于实数λ，并且$0<\lambda<1$ (9.5.14)

$=O[r^{\xi-1}\cos(\eta\ln r)]$或者$O[r^{\xi-1}\sin(\eta\ln r)]$

对于复数$\lambda=\xi+i\eta$，并且$0<\xi<1$ (9.5.15)

$=O(\ln r)$，对于$\lambda=1$以及当$\lambda=1$时$\dfrac{\partial D}{\partial\lambda}=0$ (9.5.16)

$=O(\ln r)$，对于D在$0<\mathrm{Re}(\lambda)<1$上没有零点，以及在$\lambda=1$时$\dfrac{\partial D}{\partial\lambda}\neq 0$ (9.5.17)

❶ 原文“$2\gamma<\pi/4$”应改为“$2\gamma>\pi/4$”．

——校者注

Dempsey和Sinclair(1979) 对此进行了广泛的分类，并且得到其它的奇异解.

有很多Mellin 变换和/或奇异分析的其它结果已经作出，其中，详细的和信息丰富的文章的作者有：Koiter及Alblas(1954—7)， M.L.Williams (1959)， Kurshin (1959)，Karp 和Karal(1962)，Zak 和Williams (1963)。Bogy和Sternberg (1968) 在考虑直角楔形物剪切载荷的效果时，针对上面的情形1 (见例题9.5.1)。Bogy(1968)讨论了在法向载荷和切向载荷作用下联结在一起的两个不相似的正交的弹性楔形物。在这篇文章的公开发表的讨论中，Dundurs (1969) 指出，两种介质的弹性常数仅仅是由两个不匹配参数 α 和 β 而进入公式中的（见§4.10)。Bogy(1970) 重新分析并且扩充了他在1968年发表的文章，以考虑Dundurs 的建议。Bogy (1971)，Bogy 和Wang (1971)，Hein和Erdogan(1971)，对于不同材料和任意顶角的两个联结在一起的楔形物作了相似的分析。对于由调和或双调和方程控制的问题，考虑不同的材料联结在一起，会合在顶角上——Rao (1971) 对这一大组的问题进行了分类。在这些问题当中，他讨论了联结在一起的楔形物，它有柔软的但是不可伸长的加强筋附着边缘上 (图9.5.2)，他还讨论了弹性冲头压挤弹性半平面的问题 (图9.5.3)。

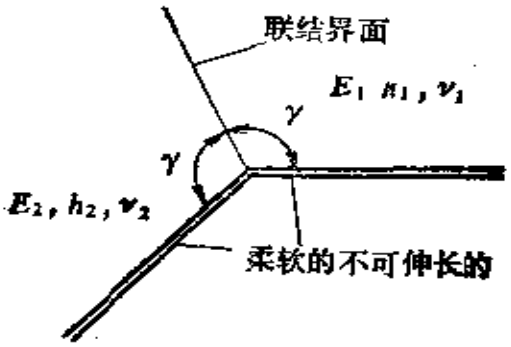


图9.5.2 两个楔形物联结在一起并且有不可伸长的边缘支承物

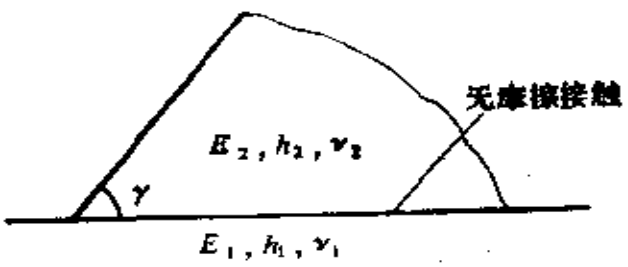


图9.5.3 一个弹性冲头压挤弹性半平面

注意，Rao说明，接触物体的Poisson比 ν_1和ν_2 对于特征值“没有影响”，他仅仅对不同的$e=E_2h_2/E_1h_1$值进行了计算和揭示. 可是Dundurs和Lee(1972)注意到，由于接触是无摩擦的和退让的，所以可以归入§4.10（方程（4.10.22））的范围内，其中，弹性常数仅仅在方程（4.10.13）的参数α中出现（见例题4.10.1）$\Gamma=\mu_2h_2/\mu_1h_1$. Rao的观察是经验的，其所谓“没有影响”应由“没有鲜明影响”代替. 行列式$D(\lambda,\ \alpha,\ \gamma)$为

$$D(\lambda,\ \alpha,\ \gamma)=(1+\alpha)\cos\lambda\pi(\lambda^2\sin^2\gamma-\sin^2\gamma)$$
$$-(1-\alpha)\sin\lambda\pi(\lambda\sin2\gamma+\sin2\gamma\lambda)/2 \qquad (9.5.18)$$

尽管Dundurs和Lee没有能够解析地证明D仅有实根，但他们在大量的数值研究中没有发现复根. 方程$D(\lambda,\ \alpha,\ \gamma)=0$总有根$\lambda=1$，但是，一般说来，它不是主根，另有一根$\lambda$满足$0<\lambda<1$. α和γ的数值之间的边界值，一方面，导致有限的应力，另一方面，与$\gamma=0$处的奇异场相关，可以要求较小的根也为1而得到这种边界. 那么，在$\lambda=1$时，有重根，并且$\lambda=1$时$\partial D/\partial\lambda=0$. 这是当下式成立时才出现的

$$\alpha=\frac{(\pi+\gamma)\cos\gamma-\sin\gamma}{(\pi-\gamma)\cos\gamma+\sin\gamma} \qquad (9.5.19)$$

图9.5.4给出了，对于α和γ值的物理范围和λ的轮廓线. 注意，λ的最小值，即$\lambda=0.5$，出现在刚性楔形物中，$\alpha=1$，与楔形物顶角γ无关. Dundurs和Lee得出结论，如果接触体之间的刃缘是不可避免的，则可以利用边缘切槽，有效地降低局部的离应力，以致α和γ二者落入图9.5.4左侧空白区域.

Gdoutos和Theocaris(1975)研究了弹性楔形物与半平面相接触时出现的摩擦对奇异性的作用. Comninou(1976)更详细地探讨了奇异性质；也可以参阅Theocaris和Gdoutos(1976)的文章. 关于两个以上楔形物在一点相会合的奇异性研究，是Theocaris(1974)所考虑的，并且被Dempsey和Sinclair(1979)进一步发展了.

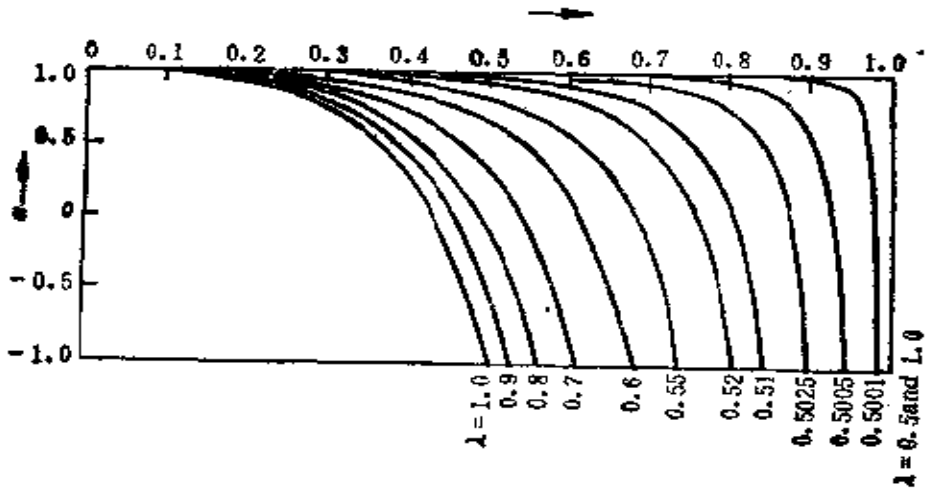


图9.5.4 方程（9.5.48）的主实根

关于两条弹性窄条之间的接触问题，或者窄条与半平面之间的接触问题，曾经由下列作者考虑过：Bogy (1975a, 1975b), Adams和Bogy(1976a, 1976b, 1977).

楔形刚性冲头的尖顶压挤在半平面上的奇异性质，或类似问题的相应的奇异性，已经由很多研究者研究过，他们包括Galin (1947a), Rvachev(1959a), Galin (1961), S.N. Brown 和 Stewartson(1969), V.M.Aleksandrov和Babeshko(1972), Bueckner(1973), Bazant (1974), Bazant和Keer (1974), Morrison和Lewis(1976), Keer 和Parihar (1978), Parihar 和Keer(1978, 1979).

例9.5

1. 试利用复势(9.5.3)表明，当楔形物两边缘$\theta = \pm\gamma$上没有应力时，方程（9.5.6）在情形1中的行列式$D(\lambda)$为

$$D(\lambda) = \lambda^2\sin^2 2\gamma - \sin^2 2\lambda\gamma .$$

试表明，当$2\alpha<\pi$时，在$0<\mathrm{Re}(\lambda)\leqslant 1$之中，具有最小实部的根是$\lambda=1$，而当$\pi<2\alpha<2\pi$时，具有最小实部的根为实数，并且满足$1/2<\lambda<\pi/(2\alpha)$ [England(1971b)].

2. 试表明对于图9.5.3的楔形物在归于方程（9.5.5）情形2中时，行列式D由（9.5.18）给出.

第十章　弹性半空间的轴对称接触问题

10.1　引　　言

这一章几乎全部是研究一个刚性轴对称压头与占有$z \geqslant 0$的弹性半空间之间的准静态接触.

这一接触问题可以按照压头的类型进行分类，亦即压头是圆形的还是带角的，压头表面是平的还是曲的；按刻凿类型分类，亦即它是围绕一个或其它轴旋转或平移；按照接触的类型分类，亦即它是无摩擦的，粘结的或有限摩擦的，如果为无摩擦接触，则是完全接触还是不完全接触.

遵循Gladwell(1968)的文章，可以假定用压头位移规定刻凿的类型，它可以是下面情形之一：

(1) 绕z轴的旋转，

(2) 在z方向的平移，

(3) 绕y轴的旋转，

(4) 在x方向的平移.

上面(2)和(4)给出了两个不同的极端的问题，其中每一个可以假设为完全粘结接触(a) ❶，或者完全无摩擦接触(f).情形(1)的无摩擦提法，是在半空间完全不变形的意义上的一个通俗说法.

问题的分类也可以由纯数学基础作出.所有的接触问题可以由Hankel变换求解，把它们化成求对偶积分方程组(或对)的解.

---

❶ (a)是粘结(adhesive)接触的简写，(f)是无摩擦(frictionless)接触的简写.——译者注

考虑具有平底面刻凿的重要情形的问题. 那些导致一个积分方程对的问题，包括1(*a*)，首先由Reissner与Sagoci(1944) 用扁球坐标、尔后由Sneddon (1947) 用Hankel变换求解； 2(*f*)，解为式 (2.6.25)， 这个解是已知的， 由Boussinesq给出， 后又由Chong(1952)作出； 3(*f*)由Abramov (1959) 解出， 4(*f*) 由Mindlin (1949)解出. 对问题1(*a*)，在§10.2中求解， 对3(*f*)与4(*f*)，在§10.3中求解. 那些导致两个积分方程对的问题， 包括2(*a*)，由这些人解出：Mossakovskii(1954a)，(1963)；Abramian，Arutiunian与Babloian(1966)以及Spence(1968*a*). 这最后两篇文章用Wienier-Hopf方法求解.在§10.3中，表明方程可以化成在§3.5中研究过的那种类型的奇异积分方程. 问题3(*a*)与4(*a*)包括三对对偶积分方程； 4(*a*)由 Ufliand(1956) 用 Mehler-Fok 变换解得； 这两个问题由 Gladwell(1969) 用 Hankel 变换，接着用Khadem(1967)方法化成Spence(1968b)所考虑过的类型的方程解出；一个简单的解在§10.4中给出.

半空间接触问题已经导致了一些重要数学工具的发展. 扁球坐标在§10.5中介绍，椭球坐标在§10.3中介绍，各种各样的表示，在§10.6中给出.

10.2 半空间轴对称问题的Hankel变换解

相应于轴对称问题的Papkovich-Neuber解， 在使用柱坐标 (r,θ,z) 和采用记号

$$\vec{\psi}=\psi_1\hat{r}+\psi_2\hat{\theta}+\psi_3\hat{k},\quad \vec{r}=r\hat{r}+z\hat{k} \tag{10.2.1}$$

之后，从式(1.10.11)得到. 可取 $\vec{\psi}$的一个分量等于零，令它为 ψ_1，由于问题呈轴对称，所以$\psi_2\equiv 0$.记$\psi_3=\psi$，我们有

$$2\mu u = -\frac{\partial}{\partial r}(z\psi+\phi), 2\mu w = 4(1-\nu)\psi - \frac{\partial}{\partial z}(z\psi+\phi) \tag{10.2.2}$$

其中，u,v,w，在这一章中分别表示u_r,u_θ与u_z.我们将不考虑体积力；方程(1.10.13)表明ϕ与ψ是调和的. 方程(5.6.20)给出

$$H_0[\nabla^2 f(r,z);r\to\xi] = (D_z^2-\xi^2)\overline{f_0}(\xi,z) \tag{10.2.3}$$

其中

$$\overline{f_0}(\xi,z) = H_0[f(r,z),r\to\xi] \tag{10.2.4}$$

这表明，若$f(r,z)$在上半空间$z\geqslant 0$是调和的，那么$(D_z^2-\xi^2)\times\overline{f_0}(\xi,z)=0$,所以由反演得到

$$f(r,z) = H_0[A(\xi)\exp(-\xi z);\xi\to r] \tag{10.2.5}$$

取

$$\psi(r,z) = H_0[\xi^{-1}A(\xi)\exp(-\xi z);\xi\to r] \tag{10.2.6}$$

$$\phi(r,z) = H_0[\xi^{-2}C(\xi)\exp(-\xi z);\xi\to r] \tag{10.2.7}$$

我们求得位移与应力具有形式

$$u(r,z) = H_1[U(\xi,z);\xi\to r],$$
$$w(r,z) = H_0[W(\xi,z);\xi\to r] \tag{10.2.8}$$
$$\tau_{rz}(r,z) = H_1[T_{13}(\xi,z);\xi\to r],$$
$$\tau_{zz}(r,z) = H_0[T_{33}(\xi,z);\xi\to r] \tag{10.2.9}$$

其中

$$\begin{pmatrix} 2\mu U \\ 2\mu V \\ -T_{13} \\ -T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{\xi z A + C\}\xi^{-1} \\ \{(3-4\nu)A + \xi z A + C\}\xi^{-1} \\ (1-2\nu)A + \xi z A + C \\ (2-2\nu)A + \xi z A + C \end{pmatrix} \exp(-\xi z) \tag{10.2.10}$$

另外的非零应力为 τ_{rr}与$\tau_{\theta\theta}$，它们可以用变换H_0和变换H_1表示（例10.2.2）。〔注意Harding与Sneddon(1945)，或许首次用Hankel变换解这类问题的是他们，即运用解

$$2\mu u = -\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}, 2\mu v = 2(1-\nu)\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \nabla^4\phi = 0$$

(10.2.11)

这个解导出了为许多标准教材所引用的应力表达式(例10.2.5)。例如见 Timosenko 与 Goodier (1951，第13章)，Sneddon (1951，第十章)。在$z=0$上只有一个应力，即法向应力作用时，所以

$$\tau_{rz}(r,0)=0, \tau_{zz}(r,0)=-p(r), 0\leqslant r<\infty, \quad (10.2.12)$$

那么方程(10.2.10)表明，若$P(\xi)=H_0[p(r);\xi]$，则有

$$(1-2\nu)A+C=0, (2-2\nu)A+C=P(\xi) \quad (10.2.13)$$

所以在平面$z=0$上有

$$w(r,0)=\vartheta H_1[\xi^{-1}P(\xi);r] \quad (10.2.14)$$

$$\tau_{zz}(r,0)=-H_0[P(\xi);r] \quad (10.2.15)$$

方程(10.2.14)以及它所对应的$w(r,z)$和$u(r,z)$可以用$p(r)$表示，可以导出式(2.5.28)，(2.5.30)的轴对称提法以及用$p(r)$表示的式(2.6.4)和(2.6.5)的一部分。

方程(10.2.14)和(10.2.15)表明，§10.1的问题2(f)的边界条件，常常称为轴对称的Boussinesq问题，即

$$w(r,0)=d+f(r), \quad 0\leqslant r<a \quad (10.2.16)$$

$$\tau_{rz}(r,0)=0, \quad 0\leqslant r<\infty, \tau_{zz}(r,0)\equiv -p(r)=0, r>a \quad (10.2.17)$$

(并且不失一般性，可以取$f(0)=0$)，导致对偶积分方程

$$w(r,0)\equiv\vartheta H_0[\xi^{-1}P(\xi);r]=d+f(r), 0\leqslant r<a \quad (10.2.18)$$

$$p(r)\equiv H_0[P(\xi);r]=0, \quad r>a \quad (10.2.19)$$

这个方程对，象出现在平面问题中的式(6.2.20)，(6.2.21)一样是对偶积分方程

$$H_\nu[\xi^\alpha A(\xi);x]=f(x), \quad 0<x<1 \quad (10.2.20)$$

$$H_\nu[A(\xi);x]=g(x), \quad x>1 \quad (10.2.21)$$

的一个特例。现在给出静电学与弹性静力学中出现的这些方程的

历史的一个轮廓，是有意义的；ν，α的典型取值为 $\nu = 0, \pm 1/2, 1, 2$，$\alpha = \pm 1$，α必须在范围 $-2 < \alpha < 2$内。

这些方程可以化成这样的形式，其中$g(x) = 0$。按照Gordon(1954)，我们可以写

$$A(\xi) = A_1(\xi) + A_2(\xi) \qquad (10.2.22)$$

其中$A_2(\xi)$选取为适合条件

$$H_\nu[A_2(\xi); x] = g(x)H(x-1), x \geqslant 0 \qquad (10.2.23)$$

以及$A_2(\xi)$可以由H_ν的反演而得到。那么$A_1(\xi)$必须由下列方程解出

$$H_\nu[\xi^\alpha A_1(\xi); x] = f_1(x), 0 \leqslant x < 1 \qquad (10.2.24)$$

$$H_\nu[A_1(\xi); x] = 0, \quad x > 1 \qquad (10.2.25)$$

其中 $f_1(x) = f(x) - H_\nu[\xi^\alpha A_2(\xi); x]$。方程 (10.2.24) 和(10.2.25)有其原象的形式，只是$g(x) = 0$；这将是这类方程的标准形式。

这个问题的历史发展分两个方面：一个是方法的推导，它可以一致地用于ν与α值尽可能广泛的一个范围，二是企图产生一些方法，在应用上简单，并且不必要求很多数学背景就可以。对$\nu = 0, \alpha = \pm 1$和$f(x) =$常数的情形，H.Weber(1875) 给出过一些特殊的解答。Beltrami给出过$\nu = 0, \alpha = -1$和任意$f(x)$时的一个解。MacDonald(1895)解决了$\nu = n, \alpha = -1, f(x) = J_n(cx)$时的问题；King(1935) 解决了$\nu = n, \alpha = -1$，$f(x)$为任意函数时的问题。Titchmarsh(1937)用Mellin变换给出了这种对偶积分方程一个普遍解，这个解为Busbridge(1938)所证明，当ν被适当限定时，对$0 < \alpha < 2$是成立的，Busbrige给出了$-2 < \alpha < 0$时成立的另一个解。Copson(1947) 仅仅用Abel 变换给出了$\nu = n$，$\alpha = -1$和$f(x)$为任意函数时的简单形式的解。而 Tranter(1951) 发表了有关$g(x) \neq 0$时的一个形式解。Gordon(1954)用间断Weber-Schafheitlin积分〔Abramwitz与Stegun(1972, p,487)〕推导了一个解，对$\nu > -1, 0 < \alpha < 2$或$-2 < \alpha < 0$成立。Noble

(1958)推导了另一种形式的解，对 $-2<\alpha<0, 2\nu+\alpha+2>0$，他用的是Busbridge方法，但他在扩充$\alpha>0$时的解所作的推导太复杂。Noble(1955)对限定ν的取值范围时，推广Copson的方法给出了一些解；对 $-2<\alpha<0$，要求$\nu>0$；对$0<\alpha<2$，要求$2\nu-\alpha+2>0$。Sneddon(1960)，用Lebedev与Ufliand(1958) 建议的方法，取$A(\xi)$作为Fourier余弦或正弦变换，使方程(10.2.25) 自动满足，然后作Abel积分方程的反演，这个Abel 积分方程就是由(10.2.24)得到的，这样他给出了$\nu=0, \alpha=\pm 1$情形的一个简单的解；对这一基本方法将叙述如下。Sneddon考虑的是三角函数情形，$\nu=\pm 1/2, \alpha=-1$分别出现在他的(1961)的文章中；Copson (1961)和Lowengrub与Sneddon(1963)推广Sneddon 的方法到一般的问题中去。W.E.Williams(1962) 简化了对偶积分方程的Mellin变换解。Burlak(1963a)，(1963b)检验了各种已被建议的和改进的Copson 方法的适用范围。Nobel (1963) 推广Cooke(1956)的结果，推导了求解对称积分方程的算子方法，这种算子方法使下述Abel变换A_1, A_2的使用普遍化。对于问题的确定性的处理和分数导数的应用以及Kober-Erdelyí算子，读者可以查阅Sneddon(1966a)的著作。

现在回到特殊的方程对(10.2.18)，(10.2.19)。首先注意到方程(2.6.8)的核$k_{33}(r,s)$通过记

$$P(\xi)=H_0[p(s);s\to\xi]=\int_0^\infty sp(s)J_0(s\xi)\mathrm{d}s \qquad (10.2.26)$$

而可以得到，把此式代入(10.2.18)有

$$w(r,0)=\int_0^\infty sk_{33}(r,s)p(s)\mathrm{d}s \qquad (10.2.27)$$

其中

$$k_{33}(r,s)=\vartheta\int_0^\infty J_0(r\xi)J_0(s\xi)\mathrm{d}\xi \qquad (10.2.28)$$

可以用椭圆积分表示出来；见方程(2.6.2)和(2.6.8)。对于w_0

$p(r)$的Legendre多项式解族，由 §2.6给出.

(10.2.18),(10.2.19)的解的第二形式可以用表5.7.1中的算子而得到；这与Sneddon (1960,1965) 采用的方法只是表面上不同. 首先，通过

$$\rho = r/a, x = a\xi, d + f(r) = \vartheta P_0 a^{-1}(\delta + \chi(\rho)) \quad , \quad (10.2.29)$$

$$\Phi(x) = P(\xi)/P_0, \phi(\rho) = a^2 p(r)/P_0 \quad (10.2.30)$$

于是

$$(\vartheta P_0 a^{-1})^{-1} w(r,0) = H_0[x^{-1}\Phi(x);\rho] = \delta + \chi(\rho), 0 \leqslant \rho < 1 \quad (10.2.31)$$

$$a^2 \tau_{zz}(r,0)/P_0 = -H_0[\Phi(x);\rho] = -\phi(\rho)H(1-\rho), \rho \geqslant 0 \quad (10.2.32)$$

现在用第十款●对式(10.2.32)进行运算得到

$$F_0[\Phi(x);\tau] = A_2[\rho\phi(\rho)H(1-\rho);\tau] = \psi(\tau) \quad (10.2.33)$$

并且因为$\tau > 1$时$\psi(\tau) = 0$,得出

$$\Phi(x) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^1 \psi(\tau)\cos\tau \times d\tau \quad (10.2.34)$$

现在用第一款对(10.2.31)进行运算，得到

$$F_0[\Phi(x);\tau] = \psi(\tau) = A_1^{-1}[\delta + \chi(\rho);\tau] \quad (10.2.35)$$

这导出$\psi(\tau)$. 现在方程(10.2.33)给出形如下式

$$\rho\phi(\rho) = -(2/\pi)^{1/2} D_\rho \int_\rho^1 \tau(\tau^2 - \rho^2)^{-1/2}\psi(\tau)d\tau \quad (10.2.36)$$

的无量纲接触压力. 在微分之前进行分部积分，我们得到

$$\phi(\rho) = (2/\pi)^{1/2}\left\{\psi(1)(1-\rho^2)^{-1/2} - \int_\rho^1 (\tau^2 - \rho^2)^{-1/2}\ \psi'(\tau)d\tau\ \right\} \quad (10.2.37)$$

●这里的“第十款”以及下面的“第一款”实际是指第五章中表5.7.1的第十款及第一款. ——译者

方程(10.2.30),(10.2.34)导出总载荷

$$P = 2\pi\int_0^a r p(r)dr = 2\pi P_0\int_0^1 \rho\phi(\rho)\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi(2/\pi)^{1/2}P_0\int_0^1 \psi(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (10.2.38)$$

并且方程(10.2.35)表明

$$\int_0^1 \psi(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^1 D_\tau A_1\{\rho(\delta+\chi(\rho)),\tau\}\mathrm{d}\tau$$

$$= (2/\pi)^{1/2}\left\{\delta + \int_0^1 (1-\rho^2)^{1/2}\chi'(\rho)\mathrm{d}\rho\right\} \qquad (10.2.39)$$

当压头与半空间之间的接触是不完全的，当$\rho\to 1-$时$\phi(1)\to 0$的条件提供了接触深度或穿透深度d的表达式．可以表明，若$\psi(\tau)$在$\tau=1$的邻域是可微的，那么(10.2.37)中的积分将是有限的，并且当$\rho\to 1-$时，它将趋于零，于是不完全接触的条件是

$$\psi(1) = 0 \qquad (10.2.40)$$

但是方程(10.2.35)表明

$$\psi(\tau) = (2/\pi)^{1/2}D_\tau\int_0^\tau \rho[\delta+\chi(\rho)](\tau^2-\rho^2)^{-1/2}\mathrm{d}\rho$$

$$= (2/\pi)^{1/2}\left\{\delta + \tau\int_0^\tau (\tau^2-\rho^2)^{-1/2}\chi'(\rho)\mathrm{d}\rho\right\} \qquad (10.2.41)$$

借助于(10.2.40),由此式导出

$$\delta = -\int_0^1 (1-\rho^2)^{-1/2}\chi'(\rho)\mathrm{d}\rho \qquad (10.2.42)$$

并且当此式被代入(10.2.39)之后，我们得到

$$P = -4P_0\int_0^1 \rho^2(1-\rho)^{-1/2}\chi'(\rho)\mathrm{d}\rho$$

$$= -4\vartheta^{-1}\int_0^a r^2(a^2-r^2)^{-1/2}f'(r)\mathrm{d}r \qquad (10.2.43)$$

可见此式与(2.8.23),(2.8.24)相一致.

不同外形的轴对称压头的载荷与穿透量之间的关系的研究是众多研究工作的课题. Love(1929)考虑了常压力、常位移（平面）和Hertz（抛物面）压力，采用本质上是§2.5的方法，Love(1939)还研究了刚性锥的Boussinesq问题，采用的是扁球坐标（§10.5）和其他特解. 接触问题中球坐标(§10.5)和椭球坐标（§11.3）的系统研究是大量地由Lur'e(Лурье)（1941，1964）开展的. Harding与Sneddon(1945)引用Hankel变换化接触问题为对偶积分方程，然后引用Titchmarsh艰深的解，这根本上是 Sneddon（1951）的专著中所描述的分析. Sneddon(1946)考虑了平端部的圆柱压头，分析详尽. Galin(1946)研究了有摩擦和无摩擦的多种构形的冲头问题. Mossakovskii(1954a)发展了一大类接触问题的全面的处理，他的分析，运用现代算子方法，因而大为简化. 而Segedin(1957)从Papkovich-Neuber解式出发，得到对于平端部的解，然后用它去构造抛物形的、锥形的和其他形状的具有一般多项式外形的冲头；一个类似的分析由Mossakovskii(1963)给出. Deich(1962)研究了当冲头外形给定为$f(r)=Ar^{2\lambda}$的情形，并且λ不必是整数Sneddon.(1965)使用本质上为上述的分析给出了平的，抛物形的，球形的（例题10.2.8）和锥形的（例题（10.2.9））外形的压头的详细结果并且重新推得了 Segedin 结果. 一个替换的分析，通常称为Mehler-Fok变换，由 Ufliand（1965)给出. 一圆顶压头，具有外形$z=f(r)$，这里 $f(r)$ 可以近似是一个r的偶函数的多项式. 对这样一个压头，§2.6的分析，特别是对于p,w 的表达式(2.6.12),(2.6.13)，或许给出了解的最简单的形式；相应于接触区外的位移场在§10.5中讨论. 用那个分析没有涉及的重要的情形仅仅是锥形压头；若半锥垂角是γ，如图10.2.1 所示，那么〔Sneddon(1948)〕

$$f(r)=-\varepsilon r/a,\quad d=b+\varepsilon,\quad \varepsilon=a\cot\gamma, \tag{10.2.44}$$

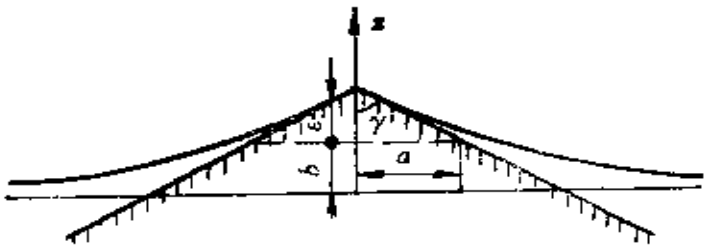


图10.2.1 具有半锐直角γ的锥形压头

并且方程(10.2.42)导出$d=\varepsilon\pi/2$，解的细节在例题10.2.9中给出。

Selvadurai(1978) 发现了刚性圆形压头与一个弹性半空间的相互作用的解，这里外力作用在半空间内的一点。

Reissner-Sagoci问题

扭转接触问题1(a)，所谓的Reissnor-Sagoci 问题的分析，遵循的是与问题2(f)非常相同的思路。此问题的 Hankel变换分析为Sneddon(1947, 1951) 给出，但后来 (1966b) 得到简化。Reissner(1944)和Sagoci(1944)原始的分析使用的是扁球坐标，对此，可见§10.5和例题10.5.6.

Papkovich-Neuber解式

$$\vec{\psi}=\psi(r,\ z)\hat{\theta}\,,\qquad \phi=0 \tag{10.2.45}$$

导出位移与应力

$$2\mu v=4(1-\nu)\psi,\tau_{\theta z}=\mu\frac{\partial v}{\partial z},\ \tau_{r\theta}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r}\right) \tag{10.2.46}$$

矢量$\vec{\psi}$是调和的 (因而$\psi\cos\theta$，$\psi\sin\theta$是调和的，但ψ不是调和的)；因为$\partial^2\hat{\theta}/\partial\theta^2=-\hat{\theta}$，我们发现

$$\nabla^2\vec{\psi}=\hat{\theta}(D_r^2+r^{-1}D_r-r^{-2}+D_z^2)\psi=\hat{\theta}(B_1+D_z^2)\psi=0 \tag{10.2.47}$$

这里记号是(5.6.18)中的记号。现在用(5.6.18)得到

$$H_1[(B_1+D_z^2)\psi(r,z);r\to\xi]$$
$$=(D_z^2-\xi^2)H_1[\psi(r,z);r\to\xi]=0 \tag{10.2.48}$$

于是$\psi(r,z)$在半空间$z\geqslant 0$中适宜的形式是

$$\psi(r,z)=H_1[\xi^{-1}A(\xi)\exp(-\xi z);\xi\to r] \qquad (10.2.49)$$

现在假设具有平底面的图形压头粘着在半空间的表面$r\leqslant a$，$z=0$上，并且给定一个关于它的轴的扭转γ。边界条件是

$$v(r,0)=\gamma r,0\leqslant r<a;\tau_{r\theta}(r,0)=0,r>a. \qquad (10.2.50)$$

记$\tau_{\theta z}(r,0)=-q(r)H(a-r)$，我们有

$$\mu v(r,0)=H_1[\xi^{-1}Q(\xi);\xi\to r]=\mu f(r),0\leqslant r<a, \qquad (10.2.51)$$

$$-\tau_{\theta z}(r,0)=H_1[Q(\xi);\xi\to r]=q(r)H(a-r), \qquad (10.2.52)$$

其中在这个特殊问题中$f(r)=\gamma r$。

再有，求解这些方程有多种途径，这些方程构成(10.2.24)，(10.2.25)的另外一种特殊情形。运用算子方法，以表5.7.1中的第2款与第11款，我们发现

$$\mu s^{-1}A_1^{-1}[rv(r,0);s]=F_s[Q(\xi);s]=g(s),0\leqslant s<a \qquad (10.2.53)$$

$$-sA_2[\tau_{\theta z}(r,0);s]=F_s[Q(\xi);s]=0,s>a \qquad (10.2.54)$$

其中，在此问题中$g(s)=\mu s^{-1}A_1^{-1}[rf(r);s]$具有值$2\mu\gamma\cdot(2/\pi)^{1/2}s$.这些方程的解是

$$Q(\xi)=(2/\pi)^{1/2}\int_0^a g(s)\sin(s\xi)\mathrm{d}s$$

$$=\frac{4\mu\gamma a}{\pi\xi}\left[\frac{\sin(a\xi)}{a\xi}-\cos(a\xi)\right] \qquad (10.2.55)$$

实际上为了得到应力分布，没有必要计算$Q(\xi)$，因为(10.2.53)，(10.2.54)给出

$$sA_2[q(r);s]=g(s)H(a-s) \qquad (10.2.56)$$

于是

$$q(r)=-\frac{4\mu\gamma}{\pi}D_r\int_r^a s(s^2-r^2)^{1/2}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{4\mu\gamma r}{\pi}(a^2-r^2)^{-1/2} \qquad (10.2.57)$$

则总扭矩为

$$T^{\circ}=2\pi\int_{0}^{a}r^{2}q(r)\mathrm{d}r=\frac{16\pi\mu\gamma a^{3}}{3} \tag{10.2.58}$$

方程(10.2.57)表明剪应力在$r=0$时等于零，并且当$r\to a-$时具有平方根奇异性。接触区外的位移也可以从方程(10.2.53)，(10.2.54)得到；这样

$$\mu s^{-1}A_{1}^{-1}[rv(r,0);s]=g(s)H(a-s) \tag{10.2.59}$$

所以

$$\mu rv(r,0)=(2/\pi)^{1/2}\int_{0}^{a}(r^{2}-s^{2})^{-1/2}sg(s)\mathrm{d}s \tag{10.2.60}$$

给出

$$v(r,0)=\frac{2\gamma}{\pi}\left[r\sin^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)-a\left(1-\frac{r^{2}}{a^{2}}\right)^{1/2}\right] \tag{10.2.61}$$

它在r趋于$a+$和∞时具有所指望的值γ和零。

例10.2

1．试表明对应于剪应力分布$\tau_{rz}(r,0)=-t(r),0\leqslant r<\infty$的状态矢量的变换为下式所给，其中$T(\xi)=H_{1}[t(r);\xi]$

$$\begin{Bmatrix}2\mu U\\2\mu W\\-T_{13}\\-T_{33}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(-\xi z+2-2\nu)\xi^{-1}\\(-\xi z-1+2\nu)\xi^{-1}\\-\xi z+1\\-\xi z\end{Bmatrix}T(\xi)\exp(-\xi z)$$

2．试表明对应于(10.2.10)的应力$\tau_{rr},T_{\theta\theta}$是

$$\tau_{rr}=H_{0}\{(-2\nu A+\xi zA+C)\exp(-\xi z);\xi\to r\}$$
$$-r^{-1}H_{1}\{\xi^{-1}(\xi zA+C)\exp(-\xi z);\xi\to r\}$$
$$\tau_{\theta\theta}=H_{0}\{-2\nu A\exp(-\xi z);\xi\to r\}$$
$$r^{+-1}H_{1}\{\xi^{-1}(\xi zA+C)\exp(-\xi z);\xi\to r\}$$

3．试表明若$U(\xi),P(\xi)$等记$U(\xi,0),P(\xi,0)$等，那么

$$\begin{Bmatrix}U(\xi)\\W(\xi)\end{Bmatrix}=\vartheta\xi^{-1}\begin{bmatrix}1&-\varphi\\-\varphi&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T(\xi)\\P(\xi)\end{Bmatrix}$$

其中$\varphi=(1-2\nu)/(2-2\nu)$.

4. 利用方程(10.2.15)和例题(10.2.1)的结果，用$p(r),t(r)$重写(10.2.10)中的变换以重新发现方程(2.6.4),(2.6.5).

5. 试表明对应于解(10.2.11)的应力是

$$\tau_{rr}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu D^2\phi-\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right),\tau_{\theta\theta}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu D^2\phi-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right),$$

$$\tau_{zz}=\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)D^2\phi-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right],\tau_{rz}=\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)D^2\phi-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right].$$

若$\phi(r,z)=H_0[\Phi(\xi,z);\xi\to r]$试表明$(D^2-\xi^2)^2\Phi(\xi,z)=0$，并且由此表明$\Phi(\xi,z)=(A+B\xi z)\exp(\xi z)+(C+D\xi z)\exp(-\xi z)$，其中$A,B,C,D$是$\xi$的函数.

6. 试完成具有平底面压头的解.表明

$$w(r,0)=\begin{cases}\delta & ,0\leqslant r<a\\ \dfrac{2\delta}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{a}{r}\right), & r>a\end{cases}$$

并且函数$\Phi(x),\psi(\tau)$和$\phi(\rho)$是

$$\Phi(x)=\frac{2\delta}{\pi}\frac{\sin x}{x},\ \psi(\tau)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\delta,\phi(\rho)=\frac{2\delta}{\pi}(1-\rho^2)^{-1/2}$$

其中d与方程(10.2.29)给出的δ相关.试表明表面径向位移为

$$u(r,0)=-\frac{2\varphi d}{\pi}\begin{cases}[a-(a^2-r^2)^{1/2}]/r, & r\leqslant a\\ a/r, & r>a\end{cases}$$

7. 试建立半空间上总载荷的方程(10.2.38)，并且表明对于一个平底面压头$P_0=4ad/\vartheta$

8. 对于半径为R的一个球形压头，函数$f(r)=(R^2-r^2)^{1/2}-R$.试表明总压入量d和力P_0同R相关，并且接触半径a由下式给出

$$d=\frac{a}{2}\ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right),P_0=\vartheta^{-1}\left((a^2+R^2)\ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right)-aR\right)$$

9. 试表明，对图10.2.1所示的锥形压头

$$\psi(\tau)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{a}{\vartheta P_0}(1-\tau),\tau<1;\phi(\rho)=\frac{\varepsilon a}{\vartheta P_0}\operatorname{arc\ cosh}\left(\frac{1}{\rho}\right),\rho<1$$

用表5.7.1中的第一款表明(10.2.31)的位移$w(r,0)$可以写成

$$w(r,0)=\frac{\vartheta P_0}{a}A_1[\psi(t);r]$$

并且由此表明锥形压头接触面积之外的位移是

$$w(r,0)=\frac{2d}{\pi a}\left(\arcsin\frac{a}{r}-r+(r^2-a^2)^{1/2}\right)$$

10. 试表明，对于大的r，(10.2.61)的位移v满足

$$v=\frac{4\gamma a^3}{3\pi r^2}+O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$

11. 试表明，对于所有的r，若$\tau_{rz}(r,0)=0$，那么方程(10.2.2)的ϕ必须被选取为$\partial\phi/\partial z=(1-2\nu)\phi$，并且

$$2\mu w=2(1-\nu)\phi-z\frac{\partial\phi}{\partial z},\ \tau_{zz}=\frac{\partial\phi}{\partial z}-z\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)$$

12. 试表明位移(10.2.27)具有性质，在$r\to\infty$时

$$w(0,0)=\vartheta\int_0^a p(s)ds;\ w(r,0)=\frac{\vartheta}{r}\int_0^a sp(s)ds+O\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

这第二个关系表明，对主导阶，位移同集中于原点的总载荷作用时所得到的相同。

13. 对Reissner-Sagoci问题，利用方程(10.2.55)去求得半空间$z>0$中的应力分布。利用积分(Gradshteyn与Ryzhik(1965,6,7521))

$$\int_0^\infty x^{-1}\exp(-ax)J_1(cx)\sin bx\,dx=b(1-r)/c$$

其中 $b^2=c^2/(1-r^2)-a^2/r^2$。

10.3 半空间的某些非轴对称问题

为了求解§10.1的类型3与4的问题，必须推导适宜的Papkovich-Neuber解式。一般方程(1.10.2)的一个灵感表明，在柱坐标系中存在某些解，对于这种坐标，与θ的关系为

$$u\sim\cos m\theta,\ v\sim\sin m\theta,\ w\sim\cos m\theta \qquad (10.3.1)$$

Papkovich-Neuber解式的显式形式在柱坐标中为

$$2\mu u = 4(1-\nu)\psi_1 - \frac{\partial}{\partial r}(r\psi_1 + z\psi_3 + \phi) \tag{10.3.2}$$

$$2\mu v = 4(1-\nu)\psi_2 - \frac{\partial}{r\partial\theta}(r\psi_1 + z\psi_3 + \phi) \tag{10.3.3}$$

$$2\mu w = 4(1-\nu)\psi_3 - \frac{\partial}{\partial z}(r\psi_1 + z\psi_3 + \phi) \tag{10.3.4}$$

其中$\vec{\psi} = \psi_1\hat{r} + \psi_2\hat{\theta} + \psi_3\hat{k}$是调和的. 对于$\theta$关系(10.3.1)，这些势函数将具有形式

$$\psi_1 = \Psi_1\cos m\theta, \psi_2 = \Psi_2\sin m\theta, \psi_3 = \Psi_3\cos m\theta, \phi = \Phi\cos m\theta \tag{10.3.5}$$

其中Ψ_i, Φ是r, z的函数. 现在，在笛卡尔坐标系中

$$\vec{\psi} = \left[\frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2}\right]\left[\hat{i}\cos(m-1)\theta - \hat{j}\sin(m-1)\theta\right]$$

$$+\left[\frac{\Psi_1 + \Psi_2}{2}\right]\left[\hat{i}\cos(m+1)\theta + \hat{j}\sin(m+1)\theta\right]$$

$$+ \hat{k}\Psi_3\cos m\theta \tag{10.3.6}$$

在$z \geqslant 0$时，$\vec{\psi}$的每一个笛卡尔分量必须是调和的，注意到(5.6.20)，我们必须找到形如下面的解

$$\Psi_1 - \Psi_2 = 2H_{m-1}[\xi^{-1}A_1(\xi)\exp(-\xi z); \xi \to r] \tag{10.3.7}$$

$$\Psi_1 + \Psi_2 = 2H_{m+1}[\xi^{-1}A_2(\xi)\exp(-\xi z); \xi \to r] \tag{10.3.8}$$

$$\Psi_3 = 2H_m[\xi^{-1}B(\xi)\exp(-\xi z); \xi \to r] \tag{10.3.9}$$

$$\Phi = 2H_m[\xi^{-2}C(\xi)\exp(-\xi z); \xi \to r] \tag{10.3.10}$$

在Papkovich–Neuber解式的四个分量中有一个是多余的，取$A_1(\xi) = A_2(\xi) = A(\xi)$则消除了这个多余的分量. 经过某些代数运算之后，可以发现

$$u(r,\theta,z) = (u^* + v^*)\cos m\theta, \quad v(r,\theta,z) = (-u^* + v^*)\sin m\theta \tag{10.3.11}$$

$$w(r,\theta,z) = w^*\cos m\theta \tag{10.3.12}$$

$$\tau_{rz}(r,\theta,z) = -(s+t)\cos m\theta, \tau_{\theta z}(r,\theta,z) = (s-t)\sin m\theta \tag{10.3.13}$$

$$\tau_{zz}(r,\theta,z) = -p\cos m\theta \tag{10.3.14}$$

其中

$$u^* = H_{m-1}[U(\xi,z);\xi\to r], v^* = H_{m+1}[V(\xi,z);\xi\to r] \tag{10.3.15}$$

$$w^* = H_m[W(\xi,z);\xi\to r] \tag{10.3.16}$$

$$s = H_{m-1}[S(\xi,z);\xi\to r], t = H_{m+1}[T(\xi,z);\xi\to r] \tag{10.3.17}$$

$$p = H_m[P(\xi,z);\xi\to r] \tag{10.3.18}$$

并且

$$\begin{Bmatrix} 2\mu U \\ 2\mu V \\ 2\mu W \\ S \\ T \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi^{-1}\{(4-4\nu-m)A - \xi zB - C\} \\ \xi^{-1}\{(4-4\nu-m)A + \xi zB + C\} \\ \xi^{-1}\{2mA + 2(3-4\nu)B + 2\xi zB + 2C\} \\ (2-2\nu-m)A - (1-2\nu)B - \xi zB - C \\ (2-2\nu+m)A + (1-2\nu)B + \xi zB + C \\ 2mA + 4(1-\nu)B + 2\xi zB + 2C \end{Bmatrix} \exp(-\xi z) \tag{10.3.19}$$

对应于$m=1$的笛卡尔分量和应力与刚性压痕有关，为

$$u_x = u^* + v^*\cos 2\theta, u_y = v^*\sin 2\theta, v_z = w^*\cos\theta \tag{10.3.20}$$

$$\tau_{xx} = -s - t\cos 2\theta, \tau_{yz} = -t\sin 2\theta, \tau_{xz} = -p\cos\theta \tag{10.3.21}$$

这个分析可以用于带有平底面的刚性图形压模的接触问题. 在问题3(f)中，第一个为Abramov(1939)所解决，其边界条件是

$$\tau_{xz} = 0 = \tau_{yz} = 0, 在z = 0上 \tag{10.3.22}$$

$$w(r,\theta,0) = \gamma r\cos\theta, 在0 \leqslant r < a上, \tau_{zz}(r,\theta,0) = 0, r > a \tag{10.3.23}$$

其中γ是关于y轴的旋转角. 实际上, 这一位移将由圆形截面的压头所产生, 它的轴稍微偏斜z轴一点, 如图10.3.1a所示, 或等价地, 用一个倾斜的面来代替, 如图10.3.1b所示. 在每一种情形, 在$0\leqslant r<a$上的法向位移将是$w=d+\gamma r\cos\vartheta$, 由刻凿引起的半空间中的弹性位移场当叠加一个例题10.2.6中的轴对称场而可以得到, 此轴对称场下面将给出. 取$m=1$, 有关的场转化成

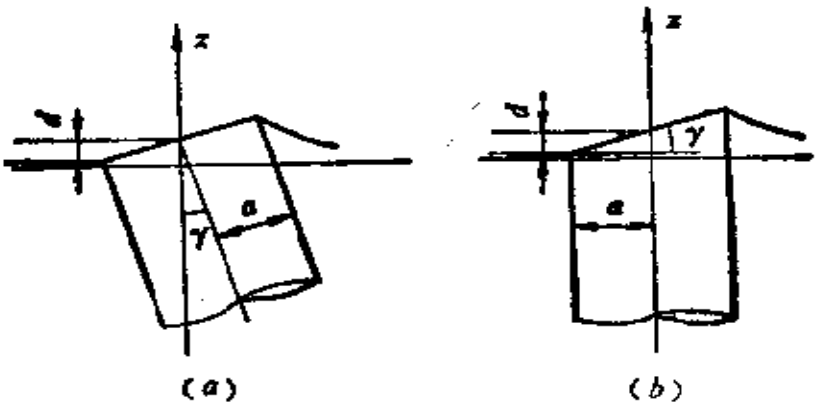


图10.3.1 圆形截面压头以倾角γ刻凿在半空间上

$$S(\xi,0)=0=T(\xi,0) \tag{10.3.24}$$

$$w^*(r,0)=\gamma r,\ 0\leqslant r<a;\ p(r,0)=0,\quad r>a \tag{10.3.25}$$

或者, 在A,B,C选择之后, 使方程(10.3.24)被满足, 我们发现

$$w^*(r,0)\equiv\vartheta H_1[\xi^{-1}P(\xi);r]=\gamma r,\ 0\leqslant r<a, \tag{10.3.26}$$

$$p(r,0)=H_1[P(\xi);r]=0,\qquad r>a \tag{10.3.27}$$

这些方程在形式上与方程(10.2.51),(10.2.52)相同, 其解可以在§10.2找到, 并且在例题10.3.2中予以讨论. 此问题作为Muki(1960)著作中对圆形接触区域的非轴对称问题的一般解式的一个样板, 也可以见Keer(1964c)的工作. Muki从弹性平衡方程的一个不同的通解出发(见例题10.3.3). 对若干非对称接触问题他给出了详细的分析解和接触面下各点应力分布的图形结果; Westman(1965)用Muki的分析解决了问题4(f)和其他问题.

问题4(f), 由于一个平的无摩擦刚性压头在x轴方向移动而引起的位移, 曾为Mindlin(1949)用Boussinesg理论(§2.5)解决

过．其边界条件是

$$\tau_{rz}=0=\tau_{zz},\quad 在z=0上 \tag{10.3.28}$$

$$u_z(r,\theta,0)=d,0\leqslant r<a;\ \tau_{zz}(r,\theta,0)=0,r>a \tag{10.3.29}$$

它变换成下列形式，相当于取$m=1$

$$T(\xi,0)=0=P(\xi,0) \tag{10.3.30}$$

$$u^*(r,0)=d,v^*(r,0)=0,0\leqslant r<a;s(r,0)=0,r>a \tag{10.3.31}$$

这些方程具有一个非寻常的性质，其中，方程的解

$$u^*(r,0)=d,\ 0\leqslant r<a;\ s(r,0)=0,\quad r>a \tag{10.3.32}$$

等价于对偶积分方程

$$2\mu u^*(r,0)\equiv(2-\nu)H_0[\xi^{-1}S(\xi,0);r]=2\mu d,0\leqslant r<a \tag{10.3.33}$$

$$s(r,0)\equiv H_0[S(\xi,0);r]=0,\quad r>a \tag{10.3.34}$$

其解已在§10.2中给出，即

$$S(\xi,0)=\frac{2}{\pi}\ \frac{2\mu d}{2-\nu}\ \frac{\sin a\xi}{\xi} \tag{10.3.35}$$

这使得

$$2\mu v^*(r,0)\equiv\nu H_2[\xi^{-1}S(\xi,0);r]\equiv 0,0\leqslant r<a \tag{10.3.36}$$

注意，$v^*(r,0)$对$r>a$不为零，$w^*(r,0)$对$r>a$或$r<a$皆不为零（例10.3.4）．

例10.3

1．试用方程(10.3.19)表明，若$P(\xi)$，$U(\xi)$等分别记$P(\xi,0)$，$U(\xi,0)$等，那么，不论对哪个m值，有

$$2\mu\begin{Bmatrix}U(\xi)\\W(\xi)\\V(\xi)\end{Bmatrix}=\xi^{-1}\begin{bmatrix}2-\nu & (1-2\nu)/2 & \nu\\ 1-2\nu & 2-2\nu & -(1-2\nu)\\ \nu & -(1-2\nu)/2 & 2-\nu\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}S(\xi)\\P(\xi)\\T(\xi)\end{Bmatrix}$$

2．对于一倾斜的刚性压头，对它有$w=d+\gamma r\cos\theta,r\leqslant a$，试表明压力分布为

$$p=\frac{2}{\pi\gamma(a^2-r^2)^{1/2}}(d+2\gamma r\cos\theta)$$

它是早些在(2.7.10)中所说结果的一个特殊情形.试表明扭矩对旋转角γ的比值

$$\frac{M}{\gamma}=\frac{8a^3}{3\vartheta}$$

3. 试表明无体力的弹性平衡方程满足下列表达式

$$2\mu u=-\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},2\mu v=-\frac{\partial^2\phi}{r\partial\theta\partial z}-\frac{2\partial\psi}{\partial r},$$

$$2\mu w=2(1-\nu)\nabla^2\phi-\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

其中ϕ,ψ满足$\nabla^4\phi=0=\nabla^2\psi$.若$\phi=\Phi(r,z)\cos m\theta,\psi=\Psi(r,z)\sin m\theta$，试表明

$$(Bm^2+Dz^2)^2\Phi(r,z)=0,(Bm^2+Dz^2)\Psi(r,z)=0$$

并且这些方程的通解可以写成

$$\Phi(r,z)=H_m[G(\xi,z);\xi\to r],\Psi(r,z)=H_m[H(\xi,z);\xi\to r],$$

其中

$$G(\xi,z)=(A+B\xi z)\exp(\xi z)+(C+D\xi z)\exp(-\xi z)$$

$$H(\xi,z)=E\exp(\xi z)+F\exp(-\xi z)$$

4. 试利用例题10.3.1和方程(10.3.35)表明问题4(f)中的半空间表面上的位移对$r<a$与$r>a$分别有

$$u^*(r,0)=d,v^*(r,0)=0,w^*(r,0)=\frac{2d}{\pi}\frac{1-2\nu}{2-\nu}\left\{1+\left[1-\frac{r^2}{a^2}\right]^{1/2}\right\}^{-1},$$

$$u^*(r,0)=\frac{2d}{\pi}\arcsin\left(\frac{a}{r}\right),v^*(r,\theta)=\frac{2d}{\pi}\frac{\nu}{2-\nu}\frac{a}{r}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2},$$

$$w^*(r,0)=\frac{2d}{\pi}\frac{1-2\nu}{2-\nu}\frac{a}{r}$$

并且表明应τ_{zz}的分布是

$$\tau_{zz}=-s=-\frac{4\mu d}{\pi(2-\nu)}(a^2-r^2)^{-1/2}$$

于是总力与位移的比值为

$$\frac{T}{d}=\frac{8\mu a}{2-\nu}$$

5. 利用例 10.3.1 表明由作在 $|r|\leqslant a$ 上的压力 $\tau_{zz}(r,0)=-p(r)\cdot\cos m\theta$ 引起的表面法向位移由下式给出

$$w^*(r)=\vartheta\int_0^a sw_m^0(r,s)p(s)ds$$

其中w_m^0由(6.11.8)所定义.

6. 试表明，若$\tau_{\theta z}=0$以及τ_{zz}与θ无关，那么$\tau_{rz}=\tau_{zz}\cos\theta,\tau_{\theta r}=-\tau_{zz}\sin\theta$，则位移由(10.3.11)～(10.3.19)给出，其中$m=1,t=0=p,s=-\tau_{zz}$.进而用笛卡尔坐标系表示的位移为$u_x=u^*+v^*\cos x\theta,u_y=v^*\sin x\theta$.

7. 试利用例题10.3.6表明由应力$\tau_{zz}=-A\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}$，$r\leqslant a$引起的同一区域上的位移分量由下式给出

$$32\mu au^*=2(2-\nu)Ax(2a^2-r^2),32\mu av^*=\nu Axr^2.$$

10.4 半空间的粘结接触问题

在这一节中我们研究§10.1中的问题2(a),3(a),4(a)，亦即压头与半空间粘着接触，其中压头的位移是(2)z方向的一个平移，(3)关于y轴的一个转动，或者(4)在x方向的一个平移。我们将对一个具有平底面的刚性冲头研究这些问题，研究具有(轴对称的)任意或者多项式外形的刚性冲头的一般问题2(a)，以及能引出考虑两个弹性粘着接触的某些结论。

Mossakovskii解

对于具有平底面的刚性压头的问题2(a)曾为Mossakovskii(1954a)所解决。对此对称问题的边界条件是

$$u(r,0)=0,w(r,0)=w_0,\ 0\leqslant x<a, \tag{10.4.1}$$

$$\tau_{rz}(r,0)=0=\tau_{zz}(r,0),\ r>a \tag{10.4.2}$$

Mossakovskii以Trefftz(1928)的弹性方程的势函数解(例题1.10.3)作为其文章的基础。位移$w(r,0)$具有形式

$$w(r,0)=w_0\Phi(r/a).$$

函数$\Phi(r/a)$将由下面导出，并且由方程(10.4.50)～(10.4.51)给出(Ufliand(1956，1965)的文章中坐标和Mehler-Fok变换给出了一个完全独立的解)。

对于一般刚性压头的问题2(a)不是立即可以求解的，因为径向位移$u(r,0)$在一开始是未知的。Goodman(1962)曾发展了一个近似的增量解式，而Mossakovskii(1963)发明了下述分段增量法。

Mossakoviskii法

假设接触力，或等价地，接触半径是逐渐增加的，表面位移$u(r,0)$和$w(r,0)$将是r与a两者的函数；分别记它们为$u(r;a)$，$w(r;a)$。当这个表面上的一点已带到与压头相接触之中，其径向位移$u(r;a)$便不可能进一步随a变化，即

$$\frac{\partial u}{\partial a}(r;a)=0, \qquad r<a \tag{10.4.3}$$

如图10.4.1所示，此图取自Spence(1968a)的论文。

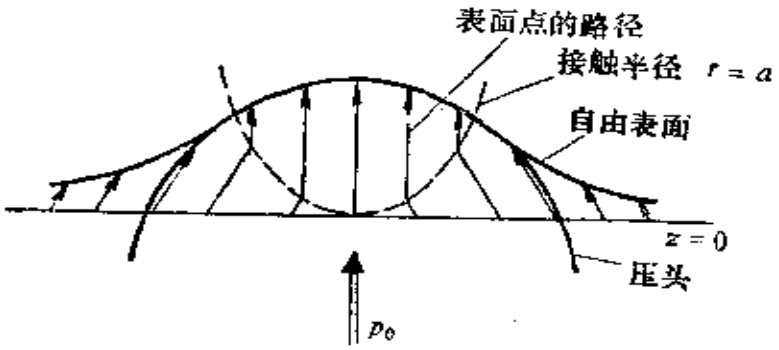


图10.4.1 半空间的增量变形

位移$w(r;a)$由物体的形状和穿透深度$w_0(a)$决定，为

$$w(r;a)=w_0(a)+f(r), \qquad r<a \tag{10.4.4}$$

其中$z=f(r)$是相对于接触区的顶点的压头的方程，因此$f(0)=0$。现在考虑接触半径的一个小的增量，那么

$$w(r;a+\delta a)=w_0(a+\delta a)+f(r), r<a+\delta a$$

是于

$$\frac{\partial w}{\partial a}(r;a)=\lim_{\delta a\to 0}\left[\frac{w(r;a+\delta a)-w(r,a)}{\delta a}\right]=w_0'(a), \qquad r<a \tag{10.4.5}$$

这意味着$\partial u/\partial a, \partial w/\partial a$对于具有压痕$w_0'(a)$的平压头满足条件

(10.4.4)，特别

$$\frac{\partial w}{\partial a}(r;a) = w_0'(a)\Phi(r/a) \tag{10.4.6}$$

并且

$$w(r;a) = \int_0^a w_0'(t)\Phi(r/t)\mathrm{d}t \tag{10.4.7}$$

现在方程（10.4.4），(10.4.7) 导出关于未知函数 w_0（a）的Mossakovskii积分方程

$$w_0(a) + f(r) = \int_0^a w_0'(t)\Phi(r/t)\mathrm{d}t, r<a \tag{10.4.8}$$

注意若$r<t$，$\Phi(r/t)=1$，我们可以写此方程

$$f(r) = -w_0(r) + r\int_0^1 w_0'(rx)\Phi(1/x)\mathrm{d}x \tag{10.4.9}$$

Mossakovskii 注意到（例题10.4.1），若$f(r) = -Br^n$，那么$w_0(r) = A\gamma^n$；他也发现，对于一个刚性压头无摩擦接触的一个势函数，有一个类似于（10.4.8）的方程。我们将不进一步追纵Mossakovskii解，而是乐于描述Spence的工作，然后得到所归结的Fredholm积分方程的解。

Spence解

Spence(1968a)发展了一个类似论断，独立于Mossakovskii对于具有外形$z = -Br^n$一类冲头的问题2(a)的分析。这一类外形包括球面($n=2, B=1/(2R)$)，和锥（$n=1$，$B=\gamma$，其中$\pi-\gamma$是半锥角）（对于小位移弹性理论，在这种情形下成立，我们必须分别有$a \ll R$和$\gamma \ll 1$）。对于第一类型冲头，不断增大的加载问题，具有自相似解，在平面$z=0$上的每一个无量纲量

$$\frac{u}{a},\ \frac{w}{a},\ \frac{\tau_{rz}}{2\mu},\ \frac{\tau_{zz}}{2\mu}$$

的意义上，这个解可以表示成r/a的函数乘一个标量因子，记为$S(a)$，对所有这四个量，采取一个相同的方式以保证边界条件

(10.4.3)，(10.4.4)得以满足．若函数$f(r)=-Br^n$，那么方程(10.4.4)表明

$$\frac{w}{a}=\frac{w_0(a)}{a}-\frac{Br^n}{a}=\frac{w_0(a)}{a}-a^{n-1}B\left(\frac{r}{a}\right)^n,\ r<a \tag{10.4.10}$$

并且这将有所要求的相似性形式，仅仅若$w_0(a)=Aa^n$，其中A与a无关，所以

$$\frac{w}{a}=a^{n-1}(A-B\rho^n),\ \rho<1 \tag{10.4.11}$$

这里$u=r/a$；位移u/a现在将有形式

$$\frac{u}{a}=a^{n-1}C\rho^n,\qquad \rho<1 \tag{10.4.12}$$

其中C与a无关．这给出

$$u=Cr^n,\qquad r<a \tag{10.4.13}$$

它满足方程(10.4.3)．边界条件(10.4.11)，(10.4.12)为条件

$$\tau_{rz}(\rho,0)=0=\tau_{zz}(\rho,0),\qquad \rho>1 \tag{10.4.14}$$

为条件(10.4.11)，(10.4.12)，(10.4.14)规定的问题的解对常数A，C的范围是任意的，某些附加的物理条件必须被征用以保证解的唯一性．这些条件被提供的是，应变应该连续，应力应该有界，实际上，在圆$r=a$上，应力等于零．这将导出一对关于A与C的线性方程，因而能够唯一地与B相联系，联系它们的仅仅是与指数n和半空间的Poisson比有关的常数．当$n=2$的情形已在例题10.4.4中研究了．

当压头具有一般多项式的形式

$$z=f(r)=-\sum_{n=1}^{N}B_nr^n \tag{10.4.15}$$

我们找一个解，其中

$$u(r)=\sum_{n=1}^{N}C_nr^n,\qquad r<a \tag{10.4.16}$$

$$w_0(a)=\sum_{n=1}^{N}A_n a^n \qquad (10.4.17)$$

并且边界条件(10.4.2)～(10.4.4)被满足．在这种情形下，应力τ_{rr}与τ_{zz}在$r=a$将与常数A_n,B_n,C_n线性相关，这些应力在$r=a$处为零的条件将导出两个方程

$$\sum_{n=1}^{N}a^{n-1}(a_{n1}A_n+b_{n1}B_n+c_{n1}C_n)=0$$

$$\sum_{n=1}^{N}a^{n-1}(a_{n2}A_n+b_{n2}B_n+c_{n2}C_n)=0 \qquad (10.4.18)$$

其中系数a_{ni},b_{ni},c_{ni}仅仅与n和 Poisson 比ν有关．这些方程必须对所有的a值成立，因而在每一个方程中a^{n-1}的系数必须等于零，这导出联系A_n,C_n与B_n的两个方程和如前的唯一解．

上述论断——对于$r<a$，$u(r,0)$的形式的导出——将粘结接触问题化为标准的混合边值问题，其中u与w由$r=a$处被指定，而在接触区外$\tau_{rz}=0=\tau_{zz}$．A.Ia. Aleksandrov 与 Solov'ev (Соловьев)(1964a)曾表明，这个问题可以化成二维问题，它能用Muskhelishvili(1953a)方法求解．他们的推导技巧，在§10.6中描述，同下面叙述的等价．Abramian, Arutiunian和Babloian(1966)以及Spence(1968a)化这个问题为奇异积分方程

$$\phi(x)+\lambda\int_0^{\infty}k(x-t)\phi(t)\mathrm{d}t=\chi(x) \qquad (10.4.19)$$

其中$k(x)=(\sin x)/x$．前面两个作者采用为 Bapoport (1943)推导的这个方程的一个解；后一位作者，在Spence(1968b)的论文中，使用Wiener-Hopf方法求解这个方程．我们将表明，这个问题可以化成求 Fredholm 积分方程 (3.5.1)的解；这附带地表明，方程(10.4.19)可以化成(3.5.1)求解．

导向Fredholm积分方程 (3.5.1)

问题2(a)的边界条件是

$$u(r,0)=e(r),\quad w(r,0)=w_0(a)+f(r),\quad 0\leqslant r<a \tag{10.4.20}$$

$$\tau_{rz}(r,0)=0,\quad \tau_{zz}(r,0)=0,\quad r<a \tag{10.1.21}$$

由§10.2的一般理论，在特例10.2.3中，表明

$$u(r,0)\equiv\vartheta H_1[\xi^{-1}\{T(\xi)-\varphi P(\xi)\};r]=e(r),0\leqslant r<a \tag{10.1.22}$$

$$w(r,0)\equiv\vartheta H_0[\xi^{-1}\{P(\xi)-\varphi T(\xi)\};r]=w_0(a)+f(r),\quad 0\leqslant r<a \tag{10.4.23}$$

$$\tau_{rz}(r,0)=-H_1[T(\xi);r]=0,\quad r>a \tag{10.4.24}$$

$$\tau_{zz}(r,0)=-H_0[P(\xi);r]=0,\quad r>a \tag{10.4.25}$$

运用表5.7.1中的算子2,1,11,10,分别地，我们得到

$$s^{-1}A_1^{-1}\{ru(r,0);s\}\equiv\vartheta F_e[T(\xi)-\varphi P(\xi);s]=e^*(s),\quad 0\leqslant s<a \tag{10.4.26}$$

$$A_1^{-1}\{w(r,0);s\}\equiv\vartheta F_e[P(\xi)-\varphi T(\xi);s]=f^*(s),\quad 0\leqslant s<a \tag{10.4.27}$$

$$-sA_2\{\tau_{rz}(r,0);s\}\equiv F_e[T(\xi);s]=0\quad s>a, \tag{10.4.28}$$

$$-A_2\{r\tau_{zz}(r,0);s\}\equiv F_e[P(\xi);s]=0\quad s>a, \tag{10.4.29}$$

其中$e^*(s)=s^{-1}A_1^{-1}\{re(r);s\}$, $f^*(s)=A_1^{-1}\{w_0(a)+f(r);s\}$

记

$$F_e[T(\xi);s]=\psi(s),F_e[P(\xi);s]=\phi(s),\quad 0\leqslant s<a \tag{10.4.30}$$

通过平面的方程扩充$\psi(s)$,$\phi(s)$到负的s时

$$\psi(-s)=-\psi(s),\quad \phi(-s)=\phi(s) \tag{10.4.31}$$

并且应用方程(5.5.12)和例题5.5.1我们得到

$$\vartheta\{\psi(s)+\varphi h[\phi(\sigma);s]\}=e^*(s),\quad |s|<a \tag{10.4.32}$$

$$\vartheta\{\phi(s)-\varphi h[\psi(\sigma);s]\}=f^*(s)\quad |s|<a \tag{10.4.33}$$

其中$e^*(-s)=-e^*(s)$, $f^*(-s)=f^*(s)$. 方程(10.4.32),(10.4.33)可以联合化成一个关于$\chi(s)=\psi(s)+i\phi(s)$的复方程

$$I(s)\equiv\vartheta\left\{\chi(s)+\frac{\varphi}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(\sigma)d\sigma}{\sigma-s}\right\}=e^{*}(s)+if^{*}(s),\ |s|<a$$

(10.4.34)

方程(10.4.34) 非常类似于出现在一个压头压挤一半平面的粘结接触问题的相应的方程(6.2.43),但有两点不同. 这里出现在方程右端的是位移而不是它的导数；这是一个与空间问题，不像平面问题，不可能求得压头的绝对穿透量. 第二个不同是，弹性常数φ作为乘子出现在第二项中，而不是在第一项中，这点有重要的结果. 这意味着，这个方程归入例题3.5.4 的范畴，特别地，基本解$X_0(z)$在点±1是非奇异的.

若$e(r),f(r)$是多项式，那么$e^{*}(s),f^{*}(s)$也将是多项式（见例题5.7.10).在那种情形下,方程(10.4.34)的解直接由例3.5.4得到. 在方程(10.4.34)中，置

$$x=s/a,\qquad t=\sigma/a,\qquad \omega(x)=\chi(s)\tag{10.4.35}$$

$$F(x)=\frac{q(x)}{1-\varphi}=\frac{e^{*}(s)+if^{*}(s)}{\vartheta(1-\varphi)}=2\mu\{e^{*}(s)+if^{*}(s)\}$$

(10.4.36)

那么

$$\Omega(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\omega(t)dt}{t-x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{\chi(\sigma)d\sigma}{\sigma-s}$$

$$=\frac{1}{2\vartheta\varphi}A_1^{-1}\{rs^{-1}u(r,0)+i\omega(r,0);s\},\ s>a\tag{10.4.37}$$

这个方程表明$\Omega(x)$对大的$|x|$必须为零. 所以例题3.5.4 中的A必须等于零。这样

$$\omega(x)=X_0^{+}(x)S(x)\tag{10.4.38}$$

其中$S(x)$是一个与$F(x)$共轭的多项式. 接触区中的应力给出为

$$\tau_{rz}(r,0)=-A_2^{-1}[s^{-1}\psi(s);r]=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}D_r\int_r^a\frac{\psi(s)ds}{r(s^2-r^2)^{1/2}},$$

(10.4.39)

$$r\tau_{zz}(r,0) = -A_2^{-1}[\phi(s);r] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} D_r \int_r^a \frac{s\phi(s)ds}{(s^2-r^2)^{1/2}}, \tag{10.4.40}$$

其中$\psi(s)$与$\phi(s)$为$\chi(s) = \omega(x)$的实部与虚部. 这样本质上完成了问题的解, 剩下的工作是确定$e(r)$和$w_0(a)$中的参数, 以使$\tau_{rz}(r,0), \tau_{zz}(r,0)$等于零(除去当压痕为平直的情形之外), 如下所述.

对于一个具有平底的压头$e(r) = 0 = f(r)$, 于是$f^*(s) = A_1^{-1}\{w_0(a);s\} = (2/\pi)^{1/2} w_0(a)$

以及

$$F(x) = if_0 = S(x), \quad \text{其中} f_0 = (2/\pi)^{1/2} 2\mu w_0 \tag{10.4.41}$$

$$\omega(x) = if_0 X_0^+(x) = if_0[(1-x)\exp(i\pi)]^{i\alpha}(1+x)^{-i\alpha} \tag{10.4.42}$$

$$\Omega(x) = (\kappa-1)^{-1} if_0[1 - X_0(x)], \quad |x| > 1 \tag{10.4.43}$$

其中$\exp(2\pi\alpha) = \kappa$.

为了计算接触应力, 置

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{a+s}{a-s} = \exp(2\theta), \quad |x| < 1 \tag{10.4.44}$$

于是

$$\omega(x) = if_0 \exp(-\pi\alpha)\exp(-i2\alpha\theta) \tag{10.4.45}$$

并且

$$\psi(s) = f_0 \exp(-\pi\alpha)\sin 2\alpha\theta, \phi(s) = f_0 \exp(-\pi\alpha)\cos 2\alpha\theta \tag{10.4.46}$$

于是, 记着$\exp(\pi\alpha) = \kappa^{1/2}$, 我们得到

$$\left.\begin{aligned} \tau_{zz}(r,0) &= \frac{4\mu w_0}{\pi\kappa^{1/2}} D_r \int_r^a \frac{\sin 2\alpha\theta ds}{(s^2-r^2)^{1/2}} \\ r\tau_{rz}(r,0) &= \frac{4\mu w_0}{\pi\kappa^{1/2}} D_r \int_r^a \frac{s\cos 2\alpha\theta ds}{(s^2-r^2)^{1/2}} \end{aligned}\right\} \tag{10.4.47}$$

这些与Spence(1968a)发现的结果一致. 接触区外的表面位移在

注意到方程(10.4.34)中的$I(s)$而可以得到，$I(s)$是

$$I(s)=s^{-1}A_1^{-1}[ru(r,0);s]+iA_1^{-1}[w(r,0);s]$$
$$=\begin{cases}F(x)/(2\mu), & s<a\\ 2\vartheta\varphi\Omega(x), & s>a\end{cases} \qquad (10.4.48)$$

对于平面压头因而是

$$s^{-1}A_1^{-1}[ru(r,0);s]=\begin{cases}0, & s<a\\ -(2/\pi)^{1/2}w_0\sin 2\alpha\theta, & s>a\end{cases} \qquad (10.4.49)$$

其中

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{s+a}{s-a}=\exp(2\theta) \qquad s>a \qquad (10.4.50)$$

并且

$$A_1^{-1}[w(r,0);s]=\begin{cases}(2/\pi)^{1/2}w_0, & s<a\\ (2/\pi)^{1/2}w_0(1-\cos 2\alpha\theta), & s>a\end{cases} \qquad (10.4.51)$$

由此式，$u(r,0)$和$w(r,0)$可以计算出来.

对于平的、抛物形的和锥形的压头的表面位移和应力场可以在Spence(1968a)的论文中找到；也可以见Gladwell(1969)，Lin$_2$和Noble(1971)以及Abramian(1975)的工作. 少数几句话在这里要交待一下. 对于具有平底压头的无摩擦接触，只有一个法向接触应力$p=-\tau_{zz}(r,0)$并且此应力在压头的边缘具有平方根奇异性$(a^2-r^2)^{-1/2}$.在这种情形下，存在一个表面径向位移（例题10.7.6），然而它在$r\to a^-$时具有一项$(a^2-r^2)^{1/2}$.对于平底冲头的粘结接触，在冲头下的表面径向位移等于零，但除去法向应力之外，存在一个切向接触应力.$\tau_{rz}(r,0)$，$\tau_{zz}(r,0)$两者都具有平方根奇异性$(a^2-r^2)^{-1/2}$，但现在它们分别被乘以$\cos\gamma$，$\sin\gamma$这种项. 这里γ是r的函数，在$r\to a$时趋于无穷大。这意味着，当$r\to a$时，应力越来越快地振荡. 这个性质同Muskhelishvili 在相应的平面问题(4.6.11)中所发现的相类似，但不是完全相同.对于与半空间不完全粘结接触的刻凿，表面径向位移不等于零，它可以由满足接

触区的边界处应力等于零的条件而求出来。Spence(1968a)曾表明，对一个多项式外形的压头问题的形式解可以由 Mellin 变换得到（例题10.4.2）。Spence（1975b）解决了具有有限摩擦的 Hertz 接触的一般问题，也可以见Gubenko, Grabko和Nakashidze(1971)和Nakashidze（1975)的工作。Nayak 和 Srinivasan(1974)解决了一个“完全挠曲”圆板同半空间的粘结接触问题，外载荷为均布载荷。这里边界条件为$u(r,0)=0$，$\tau_{zz}(r,0)=-p, 0\leqslant r<a; \tau_{rz}(r,0)=0=\tau_{zz}(r,0), r>a$。

Mossakovskii(1963)和Spence(1968a)两人均考虑过两个轴对称弹性体的法向粘着接触，这两个物体在接触区中是平直的，以及可认为它们每一个都是半空间体。若Ox, Oy, Oz_1和Ox, Oy, Oz_2取为坐标轴，并且Oz_1, Oz_2指向两物体内部，如同§2.9那样，那么在接触圆$r=a$内，有：

$$\frac{\partial}{\partial a}\{u_1(r;a)-u_2(r;a)\}=0,$$

$$w_1(r;a)+w_2(r;a)=w_0(a)+f_1(r)+f_2(r), \qquad (10.4.52)$$

$$\tau_{zz_1}(r,0)=\tau_{zz2}(r,0)=-p(r),$$

$$\tau_{rz1}(r,0)=-\tau_{rz2}(r,0)=-\tau(r), \qquad (10.4.53)$$

并且关于u_1, u_2的条件暗示着

$$u_1(r;a)-u_2(r;a)=e(r), \qquad 0\leqslant r<a \qquad (10.4.54)$$

对每一个半空间将有联系$u_i, w_i, \tau_{rzi}, \tau_{zzi}$与$T_i(\xi), P_i(\xi)$的四个方程的一个方程组。方程(10.4.53)表明

$$P_1(\xi)=P_2(\xi)=P(\xi), T_1(\xi)=-T_2(\xi)=T(\xi) \qquad (10.4.55)$$

那么方程(10.4.52)导出

$$u_1(r,0)-u_2(r,0)\equiv\vartheta H_1[\xi^{-1}\{T(\xi)-\varphi P(\xi)\};r]=e(r), \quad 0\leqslant r<a \qquad (10.4.56)$$

$$w_1(r,0)+w_2(r,0)=\vartheta H_0[\xi^{-1}\{P(\xi)-\varphi T(\xi)\};r] =w_0(a)+f(r), \quad 0\leqslant r<a \qquad (10.4.57)$$

其中

$$\vartheta=\vartheta_1+\vartheta_2,\varphi=\frac{\vartheta_1\varphi_1-\vartheta_2\varphi_2}{\vartheta_1+\vartheta_2},f(r)=f_1(r)+f_2(r)$$

(10.4.58)

这些方程与方程(10.4.22),(10.4.23)相一致. 注意 φ 是方程(4.10.13)的β,于是,当两个半空间的材料相同时,则 $\beta=0$,并且方程(10.4.56),(10.4.57)不耦合.

问题3(a)和4(a)的求解公式的建立可利用§10.3的分析去进行. 对于具有平底面的压头的,关于联合问题,其边界条件将如下述方程(10.4.59),(10.4.60)所给,这里所谓联合问题是指整个接触区沿x方向有一移动量d,沿y轴有一个旋转角γ,而压头同半空间完全粘着:

$$u_r(r,0)=d,u_y(r,0)=0,u_z(r,0)=\gamma r\cos\theta,\quad 0\leqslant r<a \tag{10.4.59}$$

$$\tau_{rz}(r,0)=0=\tau_{\theta z}(r,0)=\tau_{zz}(r,0),r>a \tag{10.4.60}$$

这可以用(10.3.20),(10.3.21)的记号写成

$$u^*(r,0)=d,v^*(r,0)=0,w^*(r,0)=\gamma r,0\leqslant r<a \tag{10.4.61}$$

$$s(r,0)=0=t(r,0)=p(r,0)\qquad r>a, \tag{10.4.62}$$

那么,利用例题10.3.1有

$$2\mu u^*(r,0)\equiv H_0[\xi^{-1}\{(2-s)S(\xi)+(1-2\nu)P(\xi)+\nu T(\xi)\};r]=2\mu d,\quad 0\leqslant r<a \tag{10.4.63}$$

$$2\mu w^*(r,0)\equiv H_1[\xi^{-1}\{(1-2\nu)S(\xi)+4(1-\nu)P(\xi)-(1-2\nu)T(\xi)\};r]=2\mu\gamma r,\quad 0\leqslant r<a \tag{10.4.64}$$

$$2\mu v^*(r,0)\equiv H_2[\xi^{-1}\{\nu S(\xi)-(1-2\nu)P(\xi)+(2-\nu)T(\xi)\};r]=0,\qquad 0\leqslant r<a \tag{10.4.65}$$

$$s(r,0)\equiv H_0[S(\xi);r]=0,\qquad r>a \tag{10.4.66}$$

$$p(r,0)\equiv H_1[P(\xi);r]=0,\qquad r>a \tag{10.4.67}$$

$$t(r,0)\equiv H_2[T(\xi);r]=0,\qquad r>a \tag{10.4.68}$$

现在分别用表5.7.1中的1,2,3,10,11,12而得到

$$2\mu A_1^{-1}[u^*(r);\rho]\equiv F_0[\{(2-\nu)S(\xi)+(1-2\nu)P(\xi)$$

$$+\nu T(\xi)\};\rho]=(2/\pi)^{1/2}2\mu d,\ 0\leqslant\rho<a \tag{10.4.69}$$

$$2\mu A_1^{-1}[r\omega^*(r);\rho]\equiv F_e[\{(1-2\nu)S(\xi)+4(1-\nu)P(\xi)-(1-2\nu)T(\xi)\};\rho]=2(2/\pi)^{1/2}2\mu\gamma\rho,$$
$$0\leqslant\rho<a \tag{10.4.70}$$

$$2\mu\rho A_1[r^{-2}D_r r^2 v^*(r);\rho]\equiv -F_e[\{\nu S(\xi)-(1-2\nu)P(\xi)+(2-\nu)T(\xi)\};\rho]=-(2/\pi)^{1/2}2\mu c,\ 0\leqslant\rho<a \tag{10.4.71}$$

$$A_2[rs(r);\rho]\equiv F_o[S(\xi);r]=0,\quad \rho>a \tag{10.4.72}$$

$$\rho A_2[p(r);\rho]\equiv F_e[P(\xi);r]=0,\quad \rho>a \tag{10.4.73}$$

$$\int_0^\infty uA_2[r^{-2}D_r r^2 t(r);u]\mathrm{d}u\equiv F_o[T(\xi);\rho]=0,\quad \rho>a \tag{10.4.74}$$

其中c是一个待定常数. 现在置

$$F_o[S(\xi);\rho]=\psi_1(\rho),\ F_o[T(\xi);\rho]=\psi_2(\rho),\quad 0\leqslant\rho<a \tag{10.4.75}$$

$$F_e[P(\xi);\rho]=\phi(\rho),\quad 0\leqslant\rho<a \tag{10.4.76}$$

其中，在$-a<\rho<a$上，$\psi_1(\rho),\psi_2(\rho)$为偶函数，$\phi(\rho)$为奇函数，并且使用方程(5.5.12)和例题5.5.1得到

$$(2-\nu)\psi_1(\rho)+(1-2\nu)h[\phi(\sigma);\rho]+\nu\psi_2(\rho)=(2/\pi)^{1/2}2\mu d \tag{10.4.77}$$

$$-(1-2\nu)h[\psi_1(\sigma);\rho]+4(1-\nu)\phi(\rho)+(1-2\nu)h[\psi_2(\sigma);\rho]=2(2/\pi)^{1/2}2\mu\gamma\rho \tag{10.4.78}$$

$$-\nu\psi_1(\sigma)+(1-2\nu)h[\phi(\sigma);\rho]-(2-\nu)\psi_2(\sigma)=-(2/\pi)^{1/2}2\mu c, \tag{10.4.79}$$

其中h为由方程(5.5.6)定义的Hilbert变换. 由方程(10.4.79)减去(10.4.77)我们得到

$$2[\psi_1(\rho)+\psi_2(\rho)]=(2/\pi)^{1/2}2\mu(d+c) \tag{10.4.80}$$

又设

$$2\psi(\rho)=\psi_1(\rho)-\psi_2(\rho) \tag{10.4.81}$$

我们可以把(10.4.77)+(10.4.79)以及(10.4.78)记成形式

$$\vartheta\{\psi(\rho)+\varphi h[\phi(\sigma);\rho]\}=(2/\pi)^{1/2}(d-c)/2,\ |\rho|<a \tag{10.4.82}$$

$$\vartheta\{\phi(\rho)-\varphi h[\psi(\sigma);\rho]\}=(2/\pi)^{1/2}\gamma\rho \quad |\rho|<a \tag{10.4.83}$$

它们与方程(10.4.32)，(10.4.33) 具有精确相同的形式. 常数c的计算和这些方程的解，是例题10.4.5的研究课题.

如果压头上沿x方向的总力为T而关于y轴的矩是M，那么有

$$16\mu a^2 d=(2+\beta+3\omega d)aT+3\omega M \tag{10.4.84}$$

$$16\mu a^2\gamma=3\omega T+3\omega M/(\alpha a) \tag{10.4.85}$$

其中

$$\exp(2\pi\alpha)=\kappa,\ \beta=(1-2\nu)/(\pi\alpha),\ \omega=\alpha\beta/(1+\alpha^2) \tag{10.4.86}$$

这与Ufliand (1956) 得到的结果一致，但有一点除外，即他那里一个等价的（用现在的记号）2β，为 (10.4.84) 中间一项的β所代替. 这个误差是由于他的方程 (4.19) 中的算术错误所引起的.

方程 (10.4.84)，(10.4.85) 的片断的校核，可以取$\nu=1/2$而提供；那么

$$\alpha\to 0,\quad \beta\to 1,\quad \omega\to 0,\quad \omega/\alpha\to 1 \tag{10.4.87}$$

于是

$$16\mu a^2 d=3ad,\quad 16\mu a^2\gamma=3M/a \tag{10.4.88}$$

如所应该的那样，这与例题10.3.2和例题10.3.4给出的无摩擦的结果一致.这些和其他接触阻抗的寻常的概括在Gladwell(1968)的工作给出.

例10.4

1. 试表明，方程(10.4.9)具有解

$$f(r)=-Br^n,\ w_0(r)=Ar^n,\text{其中}$$

$$B=A\left\{1-n\int_0^1 x^{n-1}\phi(1/x)\,dx\right\}.$$

2. 若$f^*(s)=M[f(r);s]$，$w_0^*(s)=M[w_0(r);s]$，试表明方程(10.4.9)导出关系式$f^*(s)=-[1+s\phi^*(s)]w_0^*(s)$。

3. 试表明在问题2(a)中，对于一个具有平面的粘着压头，总力P_0与位移w_0的比值$P_0/w_0=16\pi\mu a\alpha/(\kappa-1)$。所含的积分是

$$\int_0^\infty \cos 2\alpha\theta\,\mathrm{sech}^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\pi\alpha\,\mathrm{cosech}(\pi\alpha)$$

见Gradshteyn与Ryzhik(1965,3.9821)。量$q=aw_0/(\vartheta p_0)$由例题2.6.3所定义。对$\nu=0,0.1,0.5$计算问题2(a)中的粘着平压头的这个量，并且表明对$\nu=0.5$，这个量等于例2.6.2的无摩擦压头的相应的量。

4. 对一个抛物面的压头，法向与径向位移由方程(10.4.11)，(10.4.13)给出为

$$w(r,0)=Aa^2-Br^2,\quad u(r,0)=Cr^1,\quad 0\leqslant r<a$$

其中$B=1/(2R)$，并且R是压头的曲率半径。试表明条件$\tau_{rz}(a,0)=0=\tau_{zz}(a,0)$导出关于$A$，$C$的联立方程，其解是$A=1/[I(\alpha)R]$，$C=-16a^2\kappa^{1/2}f/[3(\kappa-1)I(\alpha)R]$，其中

$$I(\alpha)=1-4\alpha^2\,\mathrm{cosec}(\pi\alpha)\int_0^{\pi/2}\cot(t)\sinh(2\alpha t)\,\mathrm{d}t$$

试表明总法向载荷P_0是

$$P_0=\frac{32\pi\mu a^3\alpha}{3R(\kappa-1)}$$

以及它等于无摩擦接触在$\nu=0.5$时的值。

5. 试表明方程(10.4.82)～(10.4.83)的解是

$$\phi(\rho)+i\phi(\rho)=X_0^+(x)G(x)$$

其中$x=\rho/a$，$X_0^+(x)$由(10.4.42)给出，$G(x)$是同$F(x)$共轭的多项式，并且

$$F(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{\vartheta}\left\{\frac{d-c}{2}+i\gamma ax\right\}$$

试表明剪应力$t(r)$在$r>a$时为

$$r^2t(r)=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^a\psi_2(\rho)\,\mathrm{d}\rho=0$$

现在用例题10.4.3中的积分表明这导致

$$c(2+\beta)=d(2-\beta)-4\gamma a\alpha$$

并且由此推出方程(10.4.84)，(10.4.85)〔提示：利用

$r\cdot\frac{d}{dr}(r^{-1}J_1(\xi r))=-\xi J_2(\xi r)$ 以及

$$\int_0^\infty J_1(\xi r)\cos(\xi\rho)d\xi=r^{-1}\quad 若r>\rho].$$

10.5 扁球坐标的应用

在§2.6中曾表明，半空间$z\geqslant 0$表面的圆$r\leqslant a$上的压力按形式$(1-r^2/a^2)^{1/2}P_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}]$分布，在区域$r\leqslant a, z=0$中产生一个正比于$P_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}]$的位移．在这一节中，我们表明如何在扁球坐标中用分离变量法推导出这个结果来，并且考虑它的某些一般化．

这一节的基础材料的确定性处理可以在 Hobson (1931) 的著作中查到；也可以参考Morse和Feshbach (1953) 的第十章或 Whittaker与Watson (1952) 的著作．分离变量解的根可以追溯到Inglis (1913) 和 Griffith(1920)关于裂纹问题的工作．它们在弹性问题中的应用见于 Love (1939)，Lur′e (Лурье) (1941)，Reissner 和 Sagoci (1944) 以及 Sack (1946) 的工作．内压头与裂纹问题的轴对称 (亦即$m=0$) 情形由 Payne (1953) 给出．Hobsen (1931) 和Payne (1953) 也研究环形 (toroidal) 坐标中的解，其中球形压头容易解决，这些解可以在 Ufliand 的许多文章中找到，并且在 Ufliand (1965, Part Ⅸ) 的著作中作了充分的讨论．分离变量解之间关系的一个有启发性的讨论，以及那些为 Green 和Zerna (1954) 以及Collins (1959a) 使用的分离变量解，可以在England与Shail (1977) 的著作中查到．

扁球坐标ξ,η,θ与柱坐标r,z,θ通过方程 (例题10.5.1)

$$r=a[(1+\xi^2)(1-\eta^2)]^{1/2},\quad z=a\xi\eta \qquad (10.5.1)$$

相联系，其中$-1\leqslant\eta\leqslant 1, \xi\geqslant 0$．曲面$\xi=\text{const}$，$\eta=\text{const}$分别是

椭球面和双曲面（的一叶）

$$\frac{r^2}{a^2(1+\xi^2)}+\frac{z^2}{a^2\xi^2}=1,\quad \frac{r^2}{a^2(1-\eta^2)}-\frac{z^2}{a^2\eta^2}=1 \tag{10.5.2}$$

曲面$\xi=0$与$\eta=0$分别是圆$r=a$，$z=0$的内部与外部.

Laplace方程在扁球坐标中是

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1+\xi^2)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right]+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right]+\frac{(\xi^2+\eta^2)}{(1+\xi^2)(1-\eta^2)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0 \tag{10.5.3}$$

它有分量变量解

$$\psi(\xi,\eta,\theta)=\Xi(\xi)H(\eta)\Theta(\theta) \tag{10.5.4}$$

其中Ξ，H，Θ满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1+\xi^2)\frac{\mathrm{d}\Xi}{\mathrm{d}\xi}\right]-\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1+\xi^2}\right]\Xi=0 \tag{10.5.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\eta^2}\right]H=0 \tag{10.5.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}=-m^2\Theta, \tag{10.5.7}$$

$\Theta(\theta)$所要求的周期性和解Ξ，H的收敛性，要求m，n是整数，于是

$$\psi(\xi,\eta,\theta)=\begin{Bmatrix}P_n^m(i\xi)\\ Q_n^m(i\xi)\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}P_n^m(\eta)\\ Q_n^m(\eta)\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{Bmatrix} \tag{10.5.8}$$

其中P_n^m与Q_n^m分别为第一类与第二类 Legendre 函数，并$m\leqslant n$ (Hobson(1931)).

若应力τ_{zz}，$\tau_{\theta z}$在$z=0$等于零，那么静态弹性方程的 Papkovich-Neuber解式可以用单个势函数$\psi_3\equiv\psi$表示出来，而它与ϕ有如下联系，即

$$(1-2\nu)\psi=\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{10.5.9}$$

法向位移与法向应力可以写成

$$2\mu w=2(1-\nu)\psi-z\frac{\partial\psi}{\partial z},\ \tau_{zz}=\frac{\partial\psi}{\partial z}-z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{10.5.10}$$

于是，特别地在$z=0$有

$$w(x,y,0)=\vartheta\psi,\ p(x,y,0)\equiv-\tau_{zz}(x,y,0)=-\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{10.5.11}$$

联系w，p和圆$r=a$的混合边值问题有四个；它们是

内压头($i.\ p.$) w在$0\leqslant r<a$上给定；$p=0$，$r>a$ (10.5.12)

外压头($e.\ p.$) $p=0$，$0\leqslant r<a$；w在$r>a$上给定 (10.5.13)

内裂纹($i.\ c.$) p在$0\leqslant r<a$上给定；$w=0$，$r>a$ (10.5.14)

外裂纹($e.\ c.$) $w=0$，$0\leqslant r<a$；p在$r>a$上给定. (10.5.15)

后两个问题与一个裂纹有关，此裂纹由于压力的作用产生在两个半空间之间(Sneddon与Lowengrub (1969))；所有四个问题的解将需要§10.7中的圆环问题的近似分析.

现在研究方程 (10.5.8) 所示的哪些函数的组合表示ψ是合格的. $P_n^m(i\xi)$在$\xi=\infty$($r=\infty$，$z=0$)无界，而$Q_n^m(\eta)$在$\eta=\pm1$($r=0$，$z=0$) 具有对数奇异性，这两者都应剔除. 剩下的组合是

$$\psi(\xi,\eta,\theta)=b_{n,m}Q_n^m(i\xi)P_n^m(\eta)\cos m(\theta+\gamma) \tag{10.5.16}$$

方程 (10.5.1)表明

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{a(\xi^2+\eta^2)}\left\{\eta(1+\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi(1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\right\} \tag{10.5.17}$$

于是在$z=0$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{a\eta}\frac{\partial}{\partial\xi},\text{对}\xi=0\ (r<a),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{a\xi}\frac{\partial}{\partial \eta},\quad \text{对}\eta=0\ (r>a), \tag{10.5.18}$$

因而适宜于压头（*i. p.*）问题在$z=0$上的w与p是

$$w=\begin{cases}\vartheta b_{n,m}Q_n^m(i0)P_n^m(\eta)\cos m(\theta+\gamma), & 0\leqslant r<a\\ \vartheta b_{n,m}Q_n^m(i\xi)P_n^m(\sigma)\cos m(\theta+\gamma), & r>a\end{cases} \tag{10.5.19}$$

$$p=\begin{cases}-\dfrac{b_{n,m}}{a\eta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}Q_n^m(i0)P_n^m(\eta)\cos m(\theta+\gamma), & 0\leqslant r<a\\ -\dfrac{b_{n,m}}{a\xi}Q_n^m(i\xi)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}P_n^m(0)\cos m(\theta+\gamma), & r>a\end{cases} \tag{10.5.20}$$

若$\mathrm{d}P_n^m(\eta)/\mathrm{d}\eta\,|_0=0$，亦即$m$，$n$具有相同的奇偶性时，压力对于$r>a$将等于零。注意，若$\xi=0$，则$\eta=(1-r^2/a^2)^{1/2}$，而$\eta=0$，则$\xi=(r^2/a^2-1)^{1/2}$，我们得到

$$w=\begin{cases}\vartheta b_{n,m}Q_n^m(i0)P_n^m[(1-r^2/a^2)^{1/2}]\cos m(\theta+\gamma), & 0\leqslant r<a\\ \vartheta b_{n,m}Q_n^m[i(r^2/a^2-1)^{1/2}]P_n^m(0)\cos m(\theta+\gamma), & r>a\end{cases} \tag{10.5.21}$$

$$p=-b_{n,m}(a^2-r^2)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}Q_n^m(i0)$$

$$\times P_n^m[(1-r^2/a^2)^{1/2}]\cos m(\theta+\gamma),\quad 0\leqslant r<a \tag{10.5.22}$$

当m，n具有相同的奇偶性时，Gradsteyn与Ryzhik (1965, 8.23～8.75) 表明

$$\left.\begin{aligned}Q_n^m(i0)&=-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\exp(-m\mathrm{i}\pi/2)P_n^m(0)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}Q_n^m(i0)&=\mathrm{i}\exp(-m\mathrm{i}\pi/2)\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{1}{P_n^m(0)}\end{aligned}\right\} \tag{10.5.23}$$

于是，在引进记号

$$-\mathrm{i}\exp(-mi\pi/2)\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{b_{n,m}}{P_n^m(0)}=aa_{n,m} \qquad (10.5.24)$$

之后，我们得到

$$w=\vartheta\frac{\pi}{2}aa_{n,m}[P_n^m(0)]^2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\cos m(\theta+\gamma)W(r) \qquad (10.5.25)$$

其中

$$W=\begin{cases}P_n^m[1-r^2/a^2)^{1/2}], & 0\leqslant r<a\\ \dfrac{2\mathrm{i}}{\pi}\exp(mi\pi/2)Q_n^m[\mathrm{i}(r^2/a^2-1)^{1/2}], & r>a\end{cases} \qquad (10.5.26)$$

以及

$$p(r)=a_{n,m}(1-r^2/a^2)^{-1/2}P_n^m[(1-r^2/a^2)^{1/2}]\cos m(\theta+\gamma) \qquad (10.5.27)$$

当$m=0$，和n为偶数时，并且n为$2n$代替，这些结果与方程(2.6.15)，(2.6.16)一致。

对于内裂纹，相应的结果已由例10.5.2给出。

为了得到对应于外压头的和外裂纹问题的解，我们用Kelvin定理（Hobson (1931)，P.120)，其陈述为，若$V(x,y,z)$是笛卡尔坐标中的Laplace方程的解，以及$R^2=x^2+y^2+z^2$，那么$R^{-1}V(a^2x/R^2,a^2y/R^2,a^2z/R^2)$是另一个解.现在$R^2=r^2+z^2=a^2(1+\xi^2-\eta^2)$，所以从解$V(x,y,z)=Q_n^m(i\xi)P_n^m(\eta)\cos m(\theta+\gamma)$出发，我们得到解（例10.5.3）

$$\psi(\xi,\eta,\theta)=b_{n,m}(1+\xi^2-\eta^2)^{-1/2}P_n^m[\xi/(1+\xi^2-\eta^2)^{1/2}]\times Q_n^m[i\eta/(1+\xi^2-\eta^2)^{1/2}]\cos m(\theta+\gamma). \qquad (10.5.28)$$

记

$$\sigma=\frac{\xi}{(1+\xi^2-\eta^2)^{1/2}},\quad \tau=\frac{\eta}{(1+\xi^2-\eta^2)^{1/2}} \qquad (10.5.29)$$

于是 $(1-\sigma^2+\tau^2)=1/(1+\xi^2-\eta^2)$，那么

$$\psi(\xi,\eta,\theta)=b_{n,m}(1+\sigma^2+\tau^2)^{1/2}P_n^m(\sigma)Q_n^m(i\tau)\cos m(\theta+\gamma) \tag{10.5.30}$$

考虑外裂纹问题（Lowengrub与Sneddon (1965)）。对 z 的导数是（例题10.5.4）

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1+\tau^2}{a\tau}\frac{\partial}{\partial\sigma}, \quad 对\sigma=0 \ (r<a);$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1-\sigma^2}{a\sigma}\frac{\partial}{\partial\tau}, \quad 对\tau=0 \ (r>a). \tag{10.5.31}$$

于是势 (10.5.28) 导出

$$w=\begin{cases}\vartheta b_{n,m}(1+\tau^2)^{1/2}P_n^m(0)Q_n^m(i\tau)\cos m(\theta+\gamma), & 0\leqslant r<a\\ \vartheta b_{n,m}(1-\sigma^2)^{1/2}P_n^m(\sigma)Q_n^m(i0)\cos m(\theta+\gamma), & r>a\end{cases} \tag{10.5.32}$$

$$p=\begin{cases}-b_{n,m}\dfrac{(1+\tau^2)^{3/2}}{a\tau}\dfrac{d}{d\sigma}P_n^m(\sigma)Q_n^m(i\tau)\cos m(\theta+\gamma), & 0\leqslant r<a\\ -b_{n,m}\dfrac{(1-\sigma^2)^{3/2}}{a\sigma}P_n^m(\sigma)\dfrac{d}{d\tau}Q_n^m(i0)\cos m(\theta+\gamma), & r>a\end{cases} \tag{10.5.33}$$

若 $P_n^m(0)=0$，则 $r<a$ 时位移等于零，亦即，若 m，n 具有相同的奇偶性时，则有此结果。注意，在这种情形

$$\left.\frac{d}{d\sigma}P_n^m(\sigma)\right|_0=-P_n^{m+1}(0), \quad \left.\frac{d}{d\tau}Q_n^m(i\tau)\right|_0$$

$$=-\frac{\pi}{2}\exp(im\pi/2)P_n^{m+1}(0) \tag{10.5.34}$$

$$Q_n^m(i0)=-\exp(-im\pi/2)\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{1}{P_n^{m+1}(0)} \tag{10.5.35}$$

并且记

$$\exp(-im\pi/2)\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{b_{n,m}}{P_n^{m+1}(0)}=aa_{n,m} \tag{10.5.36}$$

我们得到

$$w=\vartheta\frac{a^3}{r}a_{n,m}P_n^m[(1-a^2/r^2)^{1/2}]\cos m(\theta+\gamma),\quad r>a \tag{10.5.37}$$

$$p=\frac{\pi}{2}a_{n,m}[P_n^{m+1}(0)]^2\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\cos m(\theta+\gamma)\mathscr{P}(r) \tag{10.5.38}$$

$$\mathscr{P}(r)=\begin{cases}\dfrac{2a^3}{\pi r^2(a^2-r^2)^{1/2}}\exp(im\pi/2)Q_n^m[i(a^2/r^2-1)^{1/2}], \\ \qquad\qquad 0<r<a \\ \dfrac{a^3}{r^2(r^2-a^2)^{1/2}}P_n^m[1-a^2/r^2)^{1/2}],\ r>a\end{cases} \tag{10.5.39}$$

对应于外压头的结果由例10.5.5给出。应该指出，对于本节四个问题中的每一个，平面$z=0$之外的量$w(x,y,z)$和$p(x,y,z)$由方程(10.5.16)显式地给出，而其余的位移与应力含有方程(10.5.9)的势函数ϕ，它是ψ的一个积分.

本节表达的结果没有提供所列四个压头与裂纹问题的完全解。而这里的结果只是一组比较简单的形式的解，这一组解可用于建立这些问题在某些情形下的解。关于解的形式的限制，由方程(10.5.26)～(10.5.27)对内压头作了示范。这种限制基本上是要求m，n具有相同的奇偶性。然而从实践上看，这个限制并不重要，因为若压头在$r\leqslant a$上接触，具有外形$z=f(x,y)$，其中f是一个多项式，那么$r\leqslant a$上给定的外向位移为

$$w(x,y,0)=d+f(r\cos\theta,r\sin\theta),\ 0\leqslant r\leqslant a \tag{10.5.40}$$

它可以表示成形式

$$w(x,y,0)=\Sigma c_{n,m}P_n^m[(1-r^2/a^2)^{1/2}]\cos m(\theta+\gamma) \tag{10.5.41}$$

其中m，n具有相同的奇偶性．注意，当m，n具有相同的奇偶性时，$P_n^m[(1-r^2/a^2)^{1/2}]$是r/a的多项式，它的奇偶性与m，n相同．这提供了Galin定理（Galin（1961））的简单的证明，此定理说，$r\leqslant a$上的多项式位移$w(x,y,0)$，在$r\leqslant a$上产生的压力分布具有形式

$$(1-r^2/a^2)^{-1/2}\times(x,y)\text{ 的多项式}\qquad(10.5.42)$$

Galin并没有表明如何由位移多项式求得压力多项式的系数，这样一个显式的关系由方程（10.5.26），(10.5.27）提供．Galin定理的某些推广由§12.1，§12.2中给出．

例10.5

1．用$x=a\cosh\alpha\sin\beta\cos\theta$，$y=a\cosh\alpha\sin\beta\sin\theta$，$z=a\sinh\alpha\cos\beta$或$z+ir=a\sinh(\alpha+i\beta)$表示方程（10.5.1)的一种替代的形式．

2．试表明，当m，n具有相反的奇偶性时，方程(10.5.16）提供了由裂纹问题的一个解．试表明，若$b_{n,m}$按照方程(10.5.36)进行选择，那么

$$w=\vartheta a a_{n,m}P_n^m[(1-r^2/a^2)^{1/2}]\cos m(\theta+\gamma)$$

并p由(10.5.38)给定，这里

$$p(r)=\begin{cases}(1-r^2/a^2)^{-1/2}P_n^m[(1-r^2/a^2)^{1/2}], & 0\leqslant r<a\\ (2/\pi)\exp(im\pi/2)(r^2/a^2-1)^{-1/2}Q_n^m[i(r^2/a^2-1)^{1/2}], & r>a\end{cases}$$

3．试表明方程(10.5.29)的τ，σ是在点a^2x/R^2，a^2y/R^2，a^2z/R^2的扁球坐标ξ，η．

4．试表明

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{a(\sigma^2+\tau^2)}\left\{\tau(1-\sigma^2)(1+\sigma^2+\tau^2)\frac{\partial}{\partial\sigma}+\sigma(1+\tau^2)(1-\sigma^2-\tau^2)\frac{\partial}{\partial\tau}\right\}$$

5．试表明，当m，n具有相同的奇偶性时，方程（10.5.28）提供了外压头问题(10.5.13)的一个解．若$b_{n,m}$按照(10.5.24)进行选择，那么w由（10.5.25)给出，其中

$$W(r)=\begin{cases}(2i/\pi)(a/r)\exp(im\pi/2)Q_n^m[i(a^2/r^2-1)^{1/2}], & 0<r\leqslant a\\ (a/r)P_n^m[(1-a^2/r^2)^{1/2}], & r>a\end{cases}$$

$$p(r)=-a_{n,m}(a/r)^2(1-a^2/r^2)^{-1/2}P_n^m[(1-a^2/r^2)^{1/2}]\cos m(\theta+\gamma),\quad r>a.$$

6. 试表明方程(10.2.45)等代表的Reissner-Sagoci问题的适宜的势ψ是

$$\psi(r,z)=Q_n'(i\xi)P_n'(\gamma)\cos(\theta+\gamma)$$

其中n为奇的.由此表明，对于边界条件(10.2.50)，表面位移由方程(10.2.61)给出.

7. 试表明由Hertz接触压力

$$p(r)=\frac{3P}{2\pi a^2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2}$$

引起的法向位移$w(r)$是

$$w_i(r)=3\vartheta P(2a^2-r^2)/(16a^3),\quad r<a$$

$$w_e(r)=\frac{3\vartheta P}{8\pi a}\left[\left(2-\frac{r^2}{a^2}\right)\arcsin\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{r}{a}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}\right],\quad r>a,$$

表明，若对$r>a$，$w_i(r)$由上面定义，那么对$r>a$，$w_e(r)w_i(r)$，而$r=a$，它们相等.这证明了Hertz接触在这种情形下的“分离”条件.

10.6 轴对称问题的另一些积分表示

适宜轴对称弹性方程的 Papkovich-Neuber 解式的形式是

$$2\mu u=-\frac{\partial}{\partial r}(z\psi+\phi),\ 2\mu w=4(1-\nu)\psi-\frac{\partial}{\partial z}(z\psi+\phi)\qquad(10.6.1)$$

这里在柱坐标r,θ,z中$u\equiv u_r$，$w=u_z$，并且ψ和ϕ是调和的.§10.2中的分析基于表示

$$\psi(r,z)=H_0[\xi^{-1}A(\xi)\exp(-\xi z);\xi\to r]\qquad(10.6.2)$$

$$\phi(r,z)=H_0[\xi^{-2}C(\xi)\exp(-\xi z);\xi\to r]\qquad(10.6.3)$$

由这些方程人们可以推导文献中出现的若干积分表示；这个分析是形式上的. 某些结果出现在 Sneddon (1966a,p.775) 的著作中.

首先考虑最简单的问题，即半空间的无摩擦内压头 (*i. p.*) 问题. 例题 10.2.11 曾表明这是等价于寻求 $z\geqslant 0$ 上的调和函数 $\psi(r,z)$的问题，要求

$$\psi(r,0)=f(r),\quad r\leqslant a \tag{10.6.4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}(r,0)=0,\quad r>a \tag{10.6.5}$$

由表示 (10.6.2)，这给出

$$H_0[\xi^{-1}A(\xi);r]=f(r),\quad 0\leqslant r\leqslant a;H_0[A(\xi);r]=0,\quad r>a \tag{10.6.6}$$

现在分别引进表5.7.1的算子 1 与10，则这些方程为

$$F_0[A(\xi);x]=F(x),\quad 0\leqslant x\leqslant a;F_0[A(\xi);x]=0,\quad x>a, \tag{10.6.7}$$

其中$F(x)=A_1^{-1}[f(r);x]$. 这样

$$A(\xi)=F_0[F(x);\xi]=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^a F(x)\cos(x\xi)\,dx, \tag{10.6.8}$$

于是

$$\psi(r,z)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^a F(x)\left\{\int_0^\infty J_0(r\xi)\exp(-\xi z)\cos x\xi\,d\xi\right\}dx \tag{10.6.9}$$

现在

$$\int_0^\infty \exp(-p\xi)J_0(r\xi)\,d\xi=(p^2+r^2)^{-1/2},\quad \mathrm{Re}(p)>0, \tag{10.6.10}$$

所以，定义$g(x)$作为$[-a,a]$上的一个偶函数，我们得到

$$\psi(r,z)=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\frac{g(x)\,dx}{[r^2+(z+ix)^2]^{1/2}},$$

$$g(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}F(x) \tag{10.6.11}$$

在$z=0$时，平方根可以表示成

$$[r^2+(z+ix)^2]^{1/2}=\begin{cases}(r^2-x^2)^{1/2}, & r>|x|\\ i(x^2-r^2)^{1/2}, & r<|x|\end{cases} \tag{10.6.12}$$

这表示以及其他表示有其原始出处，如在A. E. H. Love(1939)，Copson (1947)，Green (1949) 以及 Rostovtsev (1953)，(1955)，(1957) 的论著中。这些积分收敛性的深入研究出现在E. R. Love (1939) 的论文中；Green与Zerna (1954，P. 173 ff) 对这个表式作了讨论，并且为 Collins (1959a，1959b)，(1961)，(1963)和Keer (1964c) 作了广泛的应用。也可以参考例题10.6.1，10.6.2。

第二类表示用表5.7.1的条款之一对 (10.6.2) 进行运算而得到，选第10款，我们得到

$$A_1^{-1}[\psi(r,z);r\to x]=F_c[A(\xi)\exp(-\xi z);\xi\to x]$$
$$=\Psi(x,z)。 \tag{10.6.13}$$

函数$\Psi(x,z)$在上半空间$z\geqslant 0$是调和的，是一个 Fourier 余弦变换，是 x的对称函数。这个方程允许通过轴对称调和函数构造一个平面调和函数，反之亦然。现在假设势函数$\psi(r,z)$ 对应轴对称半空间$z\geqslant 0$，物体仅在边界$z=0$上作用法向面力；位移w和应力τ_{zz}由例10.2.11给出为

$$\left.\begin{aligned}2\mu w(r,z)&=2(1-\nu)\psi(r,z)-z\frac{\partial\psi}{\partial z}(r,z)\\ \tau_{zz}(r,z)&=\frac{\partial\psi}{\partial z}(r,z)-z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(r,z)\end{aligned}\right\} \tag{10.6.14}$$

势函数$\psi(x,z)$可以与半空间$z\geqslant 0$的应力的平面状态有关，x,z平面仅仅在其边界上作用法向面力。方程 (2.1.1)，(2.1.6)，(2.1.8) 表明，对应于这个势的位移w'和应力τ'_{x}是

$$\left.\begin{aligned}2\mu w'(x,z)&=2(1-\nu)\Psi(x,z)-z\frac{\partial\Psi}{\partial z}(x,z)\\ \tau'_{x}(x,z)&=\frac{\partial\Psi}{\partial z}(x,z)-z\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}(x,z)\end{aligned}\right\} \tag{10.6.15}$$

现在方程 (10.6.13) 可用于联系位移$w(r,z)$ 与$w'(x,z)$，联系应力$\tau_{zz}(r,z)$ 与$\tau'_{x}(x,z)$。这样

$$A_1^{-1}[w(r,z);\ r\to x]=w^*(x,z)$$
$$A_1^{-1}[w(r,z);\ r\to x]=\tau_{zz}^*(x,z) \qquad (10.6.16)$$

若，例如半空间在$\pm a$处作用两个相等的集中法向载荷P（此载荷必须关于$x=0$对称），那么在半空间中相应的应力是

$$\tau_{zz}(r,0)=A_1[\tau_{yy}(x,0);r]=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^r\frac{P\delta(a)\,dx}{(r^2-x^2)^{1/2}} \qquad (10.6.17)$$

所以

$$\tau_{zz}(r,\sigma)=0,\ 0\leqslant r<a;\ \tau_{zz}=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{P}{(r^2-a^2)^{1/2}},\ r>a \qquad (10.6.18)$$

平面问题与轴对称问题之间关系的研究——这种联系已含在（10.6.13）之中——已有长久的历史. C. Weber (1925) 用关系式❶

$$\psi(r,z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(r\cos\theta,z)\,d\theta \qquad (10.6.19)$$

由平面调和函数Ψ求得空间调和函数ψ（见例10.6.6），并且在C. Weber (1940) 的著作中揭示了这个关系和它的逆运算，也可以见Lebedev (1937). 平面问题和轴对称问题紧密相联系的事实，在Marguerre (1937) 的著作中已很明白. Mossakovskii (1954a, 1954b) 推导出 (10.6.13) 以及对具有与$\cos m\theta$相关问题的类似关系，并且用它们把问题化成复变数问题，得到了问题的有效地解答. A. Ia. Aleksandrov (1959a) 研究过用物理上转动一个平面应变的应力状态所得到的轴对称应力状态，这个平面应变的应力状态在x,z平面中对x对称，关于z轴旋转了角度π. 在这样一个应力状态中，位移和应力在每一个平面$y=\text{const}$中将是相同的，所以，例如，一个法向集中应力$\tau_{zz}^*=(x,0)=-p\delta(a)$在事实上是一条集中应力线$\tau_{zz}(x,y,0)=-p\delta(a)$位于空间的线

❶ 原文中的积分上限为“2”，应为“2π”，故改动。——译者

$x=a$，$z=0$上，如图 10.6.1 所示。Aleksandrov 曾表明应力 $\tau^{P}_{z}(x,0)=-p\delta(a)-p\delta(-a)$ 当旋转给出如下一个轴对称应力时

$$\tau_{zz}(r,0)=\begin{cases}0, & r<a\\ -2P(r^2-a^2)^{-1/2}, & r>a\end{cases} \tag{10.6.20}$$

它和应力状态（10.6.18）的不同只是相差一个常数因子。

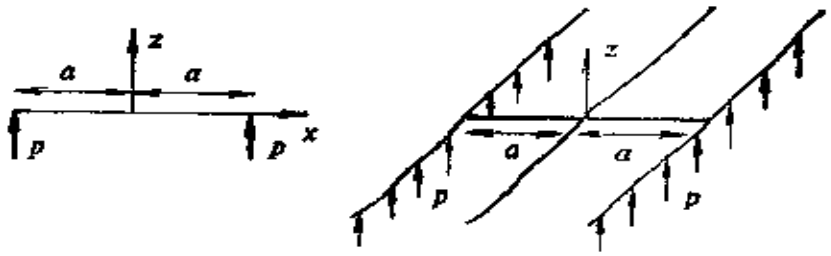


图10.6.1　两个集中载荷P实际上代表了平面上的两条线载荷

因为用旋转平面状态得到轴对称应力状态的作法不便于求解轴对称问题，似乎用纯粹基于Fourier和 Hankel 变换的方法进行求解是合乎需要的。方程（5.4.6）和例题5.4.2一起表明，若 $A(\xi)$，$C(\xi)$分别由$\xi A(\xi)$，$\xi C(\xi)$代替，那么关于 $x=0$ 对称的状态有

$$\left.\begin{aligned}
&2\mu u^{P}(x,z)=F_s\{[\xi zA+C]\exp(-\xi z);\xi\to x\}\\
&2\mu w^{P}(x,z)=F_c\{[\kappa A+\xi zA+C]\exp(-\xi z);\xi\to x\}\\
&-\tau^{P}_{xz}(x,z)=F_c\{\xi[2\nu A-\xi zA-C]\exp(-\xi z);\xi\to x\}\\
&-\tau^{P}_{xx}(x,z)=F_s\{\xi[(1-2\nu)A+\xi zA+C]\exp(-\xi z);\xi\to x\}\\
&-\tau^{P}_{zz}(x,z)=F_c\{\xi[2(1-\nu)A+\xi zA+C]\exp(-\xi z);\xi\to x\}
\end{aligned}\right\} \tag{10.6.21}$$

另一方面，轴对称量由方程（10.2.10）给出，亦即

$$\left.\begin{aligned}
&2\mu u(r,z)=H_1\{\xi^{-1}[\xi zA+C]\exp(-\xi z);\xi\to r\}\\
&2\mu w(r,z)=H_0\{\xi^{-1}[\kappa A+\xi zA+C]\exp(-\xi z);\xi\to r\}\\
&-\tau_{rz}(r,z)=H_1\{[(1-2\nu)A+\xi zA+C]\exp(-\xi z);\xi\to r\}\\
&-\tau_{zz}(r,z)=H_0\{[2(1-\nu)A+\xi zA+C]\exp(-\xi z);\xi\to r\}
\end{aligned}\right\}$$

(10.6.22)

并且表5.7.1的算子表明

$$x^{-1}A_1^{-1}\{ru(r,z);x\}=w^p(x,z),A_1^{-1}\{w(r,z);x\}$$
$$=w^p(x,z) \quad (10.6.23)$$

$$x^{-1}A_1^{-1}\{r\tau_{rz}(r,z);x\}=\tau_{rz}^p(x,z),A_1^{-1}\{\tau_{zz}(r,z);x\}$$
$$=\tau_{zz}^p(x,z) \quad (10.6.24)$$

其它类似的关系式可以采用关于$x=0$反对称的一个平面应力状态或者分别用$\xi^{-1}A(\xi)$，$\xi^{-1}C(\xi)$取代$A(\xi)$，$C(\xi)$的平面状态而得到；那么这两个状态是与算子A_2相联系的．这些结果的差别可以在A. Ia. Aleksandrov (1959b, 1961a, 1961b) 的论文中查到，其中分析大部分是基于应力状态的一个实际物理转动；Belenkii (1960)运用一个算子方法；Mossakovskii 和 Rybka (1964) 这个方法解决了一个轴对称裂纹的问题．在平面的和轴对称问题的表面位移和应力之间的许多关系式可以在 Noble 和 Spence (1971) 的工作中查到．

类似于 (10.6.19) 的其它关系是基于积分

$$J_0(\xi r)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp(-\xi r\cos\theta)\,d\theta \quad (10.6.25)$$

这导致 (10.6.2) 的$\psi(r,z)$并被表示成形式

$$\psi(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\int_0^\infty A(\xi)\exp[-\xi(z+ir\cos\theta)]\,d\xi\,d\theta \quad (10.6.26)$$

这也可以写成一个不同的形式，注意到

$$\psi(0,z)=\int_0^\infty A(\xi)\exp(-\xi z)\,d\xi \quad (10.6.27)$$

所以

$$\psi(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(0,z+ir\cos\theta)\,d\theta \quad (10.6.28)$$

这个归于Poisson的表示，通常称为Whittaker解．这一点的发

展以及有关的表示的研究已经由 Temple(1958)给出。(10.6.28)的其它形式已经Meins 和 Mac Camy (1960a, 1960b) 给出，之中，有

$$\psi(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r}\frac{\psi(0,z+\mathrm{i}p)\mathrm{d}p}{(r^2-p^2)^{1/2}} \tag{10.6.29}$$

(10.6.26) 式的另一形式多出现在俄文文献中并且出自A. Ia. Aleksandrov (1959b) 的工作。引进复变量$t=z+\mathrm{i}r$，并且让ξ是z，r平面上的任一点。那么

$$I\equiv\exp(-\xi z)J_0(\xi r)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp[-\xi(z+\mathrm{i}r\cos\theta)]\mathrm{d}\theta \tag{10.6.30}$$

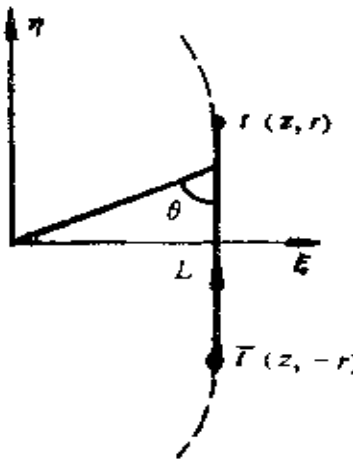


图10.6.2 定义在沿联结t，$\bar{t}$到$\xi=\infty$上曲线的割缝平面的函数 $[(\xi-t)(\xi-\bar{t})]^{1/2}$

这个积分可以变换成沿联接$\bar{t}$到t的曲线L的积分，L由图10.6.2所示，在此曲线上$\xi=z+\mathrm{i}r\cos\theta$，所以

$$I=\frac{1}{\pi}\int_{\bar{t}}^{t}\exp(-\xi\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{i}r\sin\theta} \tag{10.6.31}$$

现在为了用ξ表示$\sin\theta$，必须选取函数$[(\xi-t)(\xi-\bar{t})]^{1/2}$的一支，它在包围$L$的区域上全纯并且在$L$上是实的。这个平方根可以定义在沿着联结$t$，$\bar{t}$到$\xi=\infty$的曲线割开的平面上。那么，在$L$上

$$[(\xi-t)(\xi-\bar{t})]^{1/2}=[\mathrm{i}r(\cos\theta-1)(\mathrm{i}r)(\cos\theta+1)]^{1/2}$$
$$=r\sin\theta \tag{10.6.32}$$

于是

$$\psi(r,z)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\bar{t}}^{t}\int_0^{\infty}A(\xi)\exp(-\xi\xi)\mathrm{d}\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{[(\xi-t)(\xi-\bar{t})]^{1/2}}$$
$$=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\bar{t}}^{t}\frac{\Psi(\xi)\mathrm{d}\xi}{[(\xi-t)(\xi-\bar{t})]^{1/2}} \tag{10.6.33}$$

其中

$$\Psi(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\xi)\exp(-\xi\zeta)\mathrm{d}\xi \tag{10.6.34}$$

通过记$\zeta=z+\mathrm{i}r\cos\theta$我们看到

$$\mathrm{Re}[\Psi(\zeta)]=\mathrm{Re}[\Psi(\overline{\zeta})],\quad \mathrm{Im}[\Psi(\zeta)]=-\mathrm{Im}[\Psi(\overline{\zeta})] \tag{10.6.35}$$

现在积分（10.6.33）可以沿一个$\Psi(\zeta)$在其中全纯的区域中的任一路径积分，并且这个区域不同此根式的支割相切割.

若位移用两个势函数ψ与ϕ给出，它们每一个可以用形式(10.6.5)写出；亦即

$$\phi(r,z)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\bar{\imath}}'\frac{\Phi(\xi)\mathrm{d}\xi}{[(\xi-t)(\xi-\overline{t})]^{\frac{1}{2}}} \tag{10.6.36}$$

那么

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=\frac{1}{\pi\mathrm{i}r}\int_{\bar{\imath}}'\frac{(\xi-z)\Phi'(\xi)\mathrm{d}\xi}{[(\xi-t)(\xi-\overline{t})]^{\frac{1}{2}}} \tag{10.6.37}$$

所以位移u，w是

$$2\mu u(r,z)=-\frac{1}{\pi\mathrm{i}r}\int_{\bar{\imath}}'\frac{[z\Psi'(\xi)+\Phi'(\xi)](\xi-z)\mathrm{d}\xi}{[(\xi-t)(\xi-\overline{t})]^{\frac{1}{2}}} \tag{10.6.38}$$

$$2\mu w(r,z)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_{\bar{\imath}}'\frac{[\kappa\Psi(\xi)-z\Psi'(\xi)-\Phi'(\xi)]\mathrm{d}\xi}{[(\xi-t)(\xi-\overline{t})]^{\frac{1}{2}}} \tag{10.6.39}$$

这些结果是A. Ia. Aleksandrov 与Solov'ev (Соловьев) 在他们 (1959)～(1968) 一系列文章中推导出来的；也可以见A. Ia. Aleksandrov (1959b,1961b,1968)，A. Ia. Aleksandrov 与Solov'ev (1962, 1964a) 的论文. 为与后面的文章相一致起来可以置

$$\Psi(\zeta)=2\phi(\zeta),\quad \Phi'(\zeta)=\kappa\phi(\zeta)-\zeta\phi'(\zeta)+\psi(\zeta) \tag{10.6.40}$$

在他们1964a的文章中，函数$\phi(\xi)$，$\psi(\xi)$被表示成沿r，z平面上的曲线的Cauchy积分，当此平面关于z轴旋转时，形成弹性体的边界。在（1964b）的文章中，A. Ia. Aleksandror和Solov'ev研究了对θ具有关系$\cos m(\theta+\alpha)$的弹性状态并且重新写出作为在ζ平面中从$\bar{t}$到t的积分的Hankel变换解（10.3.19）；所要求的基本结果是

$$J_n(z)=\frac{i^n}{\pi}\int_0^{\pi}\exp(-ir\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta \qquad (10.6.41)$$

它导致

$$\exp(-\xi z)J_n(\xi r)=\frac{i^n}{\pi i}\int_{\bar{t}}^{t}\exp(-\xi\zeta)T_n\left[\frac{\zeta-z}{ir}\right]\frac{d\zeta}{[(\zeta-t)(\zeta-\bar{t})]^{1/2}} \qquad (10.6.42)$$

这一表示可以同Keer（1965）所得到那些进行比较。

关于这些表示的进一步的研究包含广义解析函数的概念，对于这些内容的参考文献可在Chemeris（1965），Iu. I. Solov'ev（1966），Kapshivyi与 Maslyuk（1967）以及特别是在Polozhii（1965，1967）的论文中查到。

例10.6

1．试表明外压头问题（见§10.5）

$$\frac{\partial\psi(r,0)}{\partial z}=0,\ 0\leqslant r<a;\quad \psi(r,0)=f(r),\ r>a$$

的解由

$$\psi(r,z)=\frac{1}{2i}\int_{-a}^{a}\frac{h(x)\,dx}{[r^2+(z-ix)^2]^{1/2}},\ h(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}F(x)$$

给出，其中$F(x)=A_2^{-1}[f(r);x]$，并且$h(x)$是定义在$(-a,a)$上的偶函数。

2．试表明内裂纹问题

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}(r,0)=f(r),\ 0\leqslant r<a;\ \psi(r,0)=0,\ r>a$$

的解为

$$\psi(r,z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\int_{-\infty}^{-a}+\int_{a}^{\infty}\right\}\frac{h(x)\,\mathrm{d}x}{[r^2+(z-\mathrm{i}x)^2]^{1/2}}$$

$$h(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}F(x),\ F(x)=A_1[rf(r);x]$$

其中$h(x)$定义在$[-\infty,-a]$上，同时$h(x)=-h(-x)$。

3. 利用例题 5.7.10 的最后结果表明，若 (10.6.4) 中的 $f(r)$ 是 $P_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}]$，那么(10.6.11) 的$g(x)$是 $(2/\pi)P_{2n}(x/a)/P_{2n}(0)$。这样，通过比较由(10.5.16)所给$m=0$的$\psi(r,z)$ 的解和由 (10.6.11) 所给的$\psi(r,z)$的解，去推导由E.R.Love(1949)得到的结果

$$P_{2n}(\gamma)Q_{2n}(\mathrm{i}\xi)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{P_{2n}(t/a)\,\mathrm{d}t}{[r^2+(z+\mathrm{i}t)^2]^{1/2}}$$

见Gladwell与England(1977)，Fngland与shail(1977)和England (1979) 关于进一步的结果的研究。

4. 试表明，若(10.6.21)中的$A(\xi)$，$C(\xi)$由$\xi^{-1}A(\xi)$，$\xi^{-1}C(\xi)$ 所代替，那么平面和轴对称状态的联系可以由下面式子给出

$$xA_2\{u(r,z);x\}=u^p(x,z),\ A_2\{rw(r,z);x\}=w^p(x,z),$$

$$xA_1\{\tau_{rz}(r,z);x\}=\tau_{xz}^p(x,z),\ A_2\{r^2\sigma_{zz}(r,z);x\}=\tau_{zz}(x,z)。$$

5. 试表明，若$\psi(x,z)$是平面调和函数，那么由(10.6.19)给定的 $\phi(r,z)$是空间调和函数。

10.7 圆环形体的接触问题

Boussinesq（亦即无摩擦）接触或者圆环区域$b\leqslant r\leqslant a$，$z=0$的压头问题，是确定半空间$z\geqslant 0$弹性方程在边界条件

$$\tau_{rz}(r,0)=0,\ r\geqslant 0;\ \tau_{zz}(r,0)=0,\ 0\leqslant r\leqslant b,\ r>a; \tag{10.7.1}$$

$$w(r,0)=d+f(r),\ b\leqslant r\leqslant a \tag{10.7.2}$$

下的解。相应于Reissner-Sagoci或扭转问题具有边界条件

$$v(r,0)=\gamma r,\ b\leqslant r\leqslant a;\ \tau_{z\theta}(r,0)=0,\ 0\leqslant r<b,\ r>a \tag{10.7.3}$$

这些问题的研究可以分成三个主要的类别：作为一个或多个积分方程的精确解式，以及对$\epsilon = b/a$的某些值时的解，另外的近似解，某些基于把问题化更为简单的问题的组集，以及对小的或大的 ϵ 的渐近结果。

Gubenko和Mossakovskii (1960) 利用由平面调和函数得到的轴对称调和函数的表示 (10.6.13) 解决了压头问题。(也可以见Gubenko(1960)对一个弹性层状物的相应的问题的研究)。这样他们得到了下面的方程 (10.7.25),(10.7.26)，它们联合成一个方程并且对于小ϵ被解出。Collins(1963)用表示 (10.6.11) 有效地得到同一方程。Borodachev与 Borodacheva (1966) 用 Hankel 变换建立了扭转问题的解式。压头和扭转问题两者都是为Tranter (1960)，Cooke (1963a，1963b，1965) 和 W. E. Williams (1963) 研究过的三段积分方程的特例。进一步的文献可以在这些文章中以及圆环的静电势问题的讨论中查到，这里的圆环的静电势问题（在形式上等价于压头问题）可在Sneddon (1966a) 著作的第八章中查到；也可以见V. M. Aleksandrov 和 (1967d)，Valov (1968)和Jain与Kanwal (1971)，(1972) 的论文。

Olesiak (1965) 力图通过化成对偶积分方程组去求解压头问题；收敛性是满意的，但即使对平压头都极其复杂冗长。Moss和Kobayashi (1971) 运用一个类似的迭代技巧，但他们解的基础是表示 (10.6.13)。Parias 与 Michalopoulos(1972)研究过茎径的刚性螺钉和外径b被一径向载荷P压入半空间。Shibuya，Koizumi和Nakahara (1974) 在处理压头问题时，假设对压头下的压力以参量a_1，a_2，…进行级数展开，得到关于 a_n的一个无限线性代数方程组。然而，由于这个方程组的系数是四个Bessel函数乘积的积分，难以认为能够达到他们开始所说简单解的目的。不过他们发表了平面 $z = 0$ 上以及平面 $z = 0$处的位移与应力的有力的图解结果。Shibuya (1976)，Hara，Shibuya，Koizumi，

Nakahara (1977, 1978a, 1978b) 和Shibuya, Koizumi, Nakahara和Hara (1979) 曾在其他问题中使用了类似的方法。

Collins (1963)和 Cooke (1963b) 对压头问题得到总载荷的以ε为幂的展开式. Boradachev与 Borodacheva (1966) 在扭转问题中对接触应力和总扭矩得到以 ε 为幂的级数. Boroda-chev (1976a, 1976c)对压头问题得到应力集中系数，是用积分方程的解表示的，这种方程只能用数值方法求解.

Barber (1976) 对凹面压头给予特殊的关注，其中内接触半径b的大小必须予以确定，使得 $r=b$ 处的接触压力等于零. 他用一个先前提供的结果 (Barber (1974))，此结果说明，若具有 $z=0$，$b\leqslant r\leqslant a$上给定法向位移的Boussinesq问题已经得到一个解，以及若$P(b)$ 是环$b\leqslant r\leqslant a$上的总载荷，那么正确的内径 b可以通过求P的驻值，即$\partial P/\partial b=0$而得到. 他利用这个结果同 $\varepsilon=b/a$时的Collins (1963) 积分方程的联系（该方程即下面 (10.7.27) 式），或者是这个结果同ε接近 1 时的Grinberg和Kuri-tsyn (1962) 展开式的联系，建立了ε与总载荷P的联系.

当剪应力 τ_{rz}在$z=0$ 上等于零，Papkovich-Neuber 解式 (10.2.2) 给出（例题10.2.11）

$$2\mu w=2(1-\nu)\psi-z\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad \tau_{zz}=\frac{\partial\psi}{\partial z}-z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{10.7.4}$$

于是边界条件 (10.7.1)，(10.7.2) 式导出调和函数 ψ 的下述Dirichlet问题

$$\psi(r,0)=F(r)\equiv\vartheta^{-1}(d+f(r)),\quad b\leqslant r\leqslant a \tag{10.7.5}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}(r,0)=0,\quad 0\leqslant r<b,\quad r>a \tag{10.7.6}$$

现在假设$F(r)$可以表示成形式

$$F(r)=\sum_{n=0}a_nr^n+\sum_{n=1}a_{-n}r^{-n}=F_1(r)+F_2(r) \tag{10.7.7}$$

这样一个表示是唯一的，并且$F_i(r)$可以扩充到零，$F_e(r)$可以扩充到无穷大。现在引进调和函数 $\psi_{iaD}(r,z)$，$\psi_{ebD}(r,z)$，它们是下述内部与外部混合边值问题的解

$$\psi_{iaD}(r,0)=F_i(r),\ 0\leqslant r\leqslant a;\ \frac{\partial\psi_{iaD}}{\partial z}(r,0)=0,\ r>a \tag{10.7.8}$$

$$\psi_{ebD}(r,0)=F_e(r),\ r\geqslant b;\ \frac{\partial\psi_{ebD}}{\partial z}(r,0)=0,\ r<b \tag{10.7.9}$$

这些解的下标中的D是表示它们为Dirichlet问题的解。(10.2.31)～(10.2.36) 表明

$$\psi_{iaD}(r,z)=H_0[\xi^{-1}\Phi_{iaD}(\xi)\exp(-\xi z);r] \tag{10.7.10}$$

其中

$$\Phi_{iaD}(\xi)=F_c[\Psi_{iaD}(t);\xi] \tag{10.7.11}$$

$$\Psi_{iaD}(t)=0,\ t>a,\ \Psi_{iaD}(t)=A_i^{-1}[F_i(r);t],\ t<a \tag{10.7.12}$$

一个类似的分析表明，若

$$\psi_{ebD}(r,z)=H_0[\xi^{-1}\Phi_{ebD}(\xi)\exp(-\xi z);r] \tag{10.7.13}$$

那么表5.7.1的第4和第7款的应用给出

$$\Phi_{ebD}(\xi)=F_c[\Psi_{ebD}(t);\xi)\ \Psi_{ebD}(t)=0,\ t<0 \tag{10.7.14}$$

$$\Psi_{ebD}(t)=A_e^{-1}[F_e(r);t],\ t>b \tag{10.7.15}$$

解ψ可以写成形式

$$\psi=\psi_{iaD}+\psi_{eaD}+\psi_{eaN}+\psi_{ibN} \tag{10.7.16}$$

其中ψ_{eaN}，ψ_{ibN}分别是$r=a$的外部和$r=b$的外部 Neumann 型问题的解。这样

$$\psi_{eaN}(r,0)=0,\ r\leqslant a;\ \psi_{ibN}(r,0)=0,\ r\geqslant b \tag{10.7.17}$$

所以方程 (10.7.5) 被满足。剩下的条件 (10.7.6) 将被满足，若

$$\left.\begin{aligned} I_i(r) &\equiv \frac{\partial}{\partial z}(\psi_{iaD}+\psi_{eaN}+\psi_{ibN})=0,\ r<b \\ I_e(r) &\equiv \frac{\partial}{\partial z}(\psi_{eaD}+\psi_{eaN}+\psi_{ibN})=0,\ r>a \end{aligned}\right\} \quad (10.7.18)$$

势函数ψ_{eaN}, ψ_{ibN}可以写成

$$\left.\begin{aligned} \psi_{eaN}(r,z) &= H_0[\xi^{-1}\Phi_{eaN}(\xi)\exp(-\xi z);r] \\ \psi_{ibN}(r,z) &= H_0[\xi^{-1}\Phi_{ibN}(\xi)\exp(-\xi z);r] \end{aligned}\right\} \quad (10.7.19)$$

其中表5.7.1的第 1 与第 7 款表明

$$\Phi_{eaN}(\xi)=F_e[\Psi_{eaN}(t);\xi],\ \text{这里}\Psi_{eaN}(t)=0,\ t<a \quad (10.7.20)$$

$$\Phi_{ibN}(\xi)=F_i[\Psi_{ibN}(t);\xi],\ \text{这里}\Psi_{ibN}(t)=0,\ t>b \quad (10.7.21)$$

方程 (10.7.18) 等价于

$$\left.\begin{aligned} H_0[(\Phi_{ia}+\Phi_{ea}+\Phi_{ib});r]=0,\ r<b \\ H_0[(\Phi_{eb}+\Phi_{ea}+\Phi_{ib});r]=0,\ r>a \end{aligned}\right\} \quad (10.7.22)$$

现在运用表5.7.1的算子 4 与10得到

$$\left.\begin{aligned} F_e[(\Phi_{ia}+\Phi_{ea}+\Phi_{ib});\ t]=0,\ t<b; \\ F_e[(\Phi_{eb}+\Phi_{ea}+\Phi_{ib});\ t]=0,\ t>a. \end{aligned}\right\} \quad (10.7.23)$$

§5.5曾表明一个变换$F_e(F_i)$的变换$F_i(F_e)$可以写成一个Hilbert变换. 这样例题5.5.1和方程 (5.5.12) 表明

$$F_i[\Phi_{iaD}(\xi);t]=-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\Psi_{iaD}(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau-t}=-\frac{2t}{\pi}\int_0^a\frac{\Psi_{iaD}(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau^2-t^2} \quad (10.7.24)$$

其中$\Psi_{iaD}(\tau)=\Psi_{iaD}(-\tau)$在区间$-a\leqslant\tau\leqslant 0$上. 方程(10.7.23)的另外的项可以类似方式处理而得到

$$\Psi_{ibN}(t)=\frac{2t}{\pi}\int_0^a\frac{\Psi_{iaD}(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau^2-t^2}+\frac{2t}{\pi}\int_a^\infty\frac{\Psi_{eaN}(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau^2-t^2},\ t<b \quad (10.7.25)$$

$$\Psi_{eaN}(t)=-\frac{2}{\pi}\int_0^b\frac{\tau\Psi_{ibN}(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau^2-t^2}-\frac{2}{\pi}\int_b^\infty\frac{\tau\Psi_{eaD}(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau^2-t^2},\quad t>a \tag{10.7.26}$$

它们可以联合写成一个单一的方程如下

$$\Psi_{eaN}(t)=\frac{2}{\pi^2}\int_a^\infty\frac{1}{\tau^2-t^2}\left\{\tau\ln\left[\frac{\tau+b}{\tau-b}\right]-t\ln\left[\frac{t+b}{t-b}\right]\right\}\psi_{eaN}(\tau)\mathrm{d}\tau+\Phi(t), \tag{10.7.27}$$

其中

$$\Phi(t)=\frac{2}{\pi^2}\int_a^\infty\frac{1}{t^2-\tau^2}\left\{\tau\ln\left[\frac{\tau+b}{\tau-b}\right]-t\ln\left[\frac{t+b}{t-b}\right]\right\}\Psi_{iaD}(\tau)\mathrm{d}\tau-\frac{2}{\pi}\int_b^\infty\frac{\tau\Psi_{eaD}(\tau)\mathrm{d}\tau}{\tau^2-t^2} \tag{10.7.28}$$

这些是Gubenko与Mossakovskii (1960) 得到的方程，他们还得到方程 (10.7.27) 对$b\ll a$的情形的级数解.

通过假定$\psi(r,z)$取形式（见例题10.7.1）

$$\psi(r,z)=H_0[\xi^{-1}\Phi(\xi)\exp(-\xi z);r] \tag{10.7.29}$$

得到一个不同的、但等价的解的公式表述，这里注意到方程 (10.7.6) 的要求

$$\Phi(\xi)=\int_a^\infty g(y)J_0(\xi y)\mathrm{d}y \tag{10.7.30}$$

压头问题的一个简单近似解可以利用§10.5的Legendre函数解表达ψ_{ibN}，ψ_{eaN}. 这样，若ξ_b，η_b记圆$r=b$处 (10.5.1) 的坐标ξ，η，σ_a，τ_a记圆$r=a$处(10.5.29)的坐标σ，τ，那么所假设的ψ_{ib}，ψ_{ea}的形式是

$$\psi_{ibN}(\xi_b,\eta_b)=\sum_{k=1}^{N}b_kQ_{2k-1}(i\xi_b)P_{2k-1}(\eta_b) \tag{10.7.31}$$

$$\psi_{eaN}(\sigma_a,\tau_a)=(1-\sigma_a^2+\tau_a^2)^{1/2}\sum_{k=1}^{N}a_kQ_{2k-1}(i\tau_a)P_{2k-1}(\sigma_a) \tag{10.7.32}$$

并且 a_k，b_k 通过假设方程（10.7.18）在某种意义上被满足而被确定，或者暂时地，使

$$\int_0^b I_i(r)m_k(r)dr = 0 = \int_a^\infty I_e(r)n_k(r)\mathrm{d}r \qquad (10.7.33)$$

对于乘子$m_k(r)$，$n_k(r)$，$k=1,2,\cdots,N$，或者在I_i中r的前N个领头系数和I_e中的r^{-1}的前 N 个领头系数为零。平压头($f(r)=0$，$F(r)=d/\vartheta$)和$N=1$表示过程的作用。势函数ψ_{iaD}是

$$\psi_{iaD}(\xi_a,\eta_a) = c_0Q_0(\mathrm{i}\xi_a)P_0(\eta_a) \qquad (10.7.34)$$

函数$\mathrm{i}Q_{2k}(\mathrm{i}\xi)$由England与Shail（1977）给出为

$$\mathrm{i}Q_{2k}(\mathrm{i}\xi) = (-1)^k\xi\int_0^1 \frac{x^{2k}(1-x^2)^k\mathrm{d}x}{(\xi^2+x^2)^{k+1}} \qquad (10.7.35)$$

所以$\mathrm{i}Q_0(\mathrm{i}\xi) = \mathrm{arctg}(\xi^{-1})$。这样对 $r<a(\xi=0)$，$\psi_{iaD}(0,\eta_a) = C_0Q_0(\mathrm{i}0) = \rho$，结果是$c_0 = 2\mathrm{i}\delta/\pi$，以及

$$\frac{\partial\psi_{ia}}{\partial z} = \frac{c_0}{a\eta_a}\frac{\mathrm{d}Q_0(\mathrm{i}\xi_a)}{\mathrm{d}\xi_a}\bigg|_a = \frac{c_0\mathrm{i}}{a\eta_a} = -\frac{2\delta}{\pi a}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2},\quad r<a \qquad (10.7.36)$$

对$N=1$，势函数ψ_{ib}，ψ_{ea}可以写成

$$\psi_{ibN}(\xi_b,\eta_b) = \delta b_1Q_1(\mathrm{i}\xi_b)P_1(\eta_b), \qquad (10.7.37)$$

$$\psi_{eaN}(\sigma_a,\tau_a) = \delta a_1(1-\sigma_a^2+\tau_a^2)^{1/2}Q_1(\mathrm{i}\tau_a)P_1(\sigma_a), \qquad (10.7.38)$$

并且奇数下标的 $Q_j(j=2k+1)$● 可以计算出来（England和Shail（1977））

$$Q_{2k+1}(\mathrm{i}\xi) = (-1)^{k+1}\xi\int_0^1 \frac{x^{2k+1}(1-x^2)^{k+1/2}}{(\xi^2+x^2)^{k+3/2}}\mathrm{d}x \qquad (10.7.39)$$

于是，特别地，$Q_1(\mathrm{i}\xi) = -1+\xi\mathrm{arctg}(\xi^{-1})$。这样，利用联系

● 为明确起见，这里为译者所补充。 ——译者

ξ_b, η_b与σ_a, τ_a的方程，我们得到

$$\delta^{-1}\psi = \begin{cases} 1 - b_1\left(1 - \dfrac{r^2}{b^2}\right)^{1/2}, & \sigma \leqslant r \leqslant b \\ 1, & b \leqslant r \leqslant a \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{a}{r}\right) - a_1\dfrac{a}{r}\left(1 - \dfrac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}, & r > a \end{cases} \tag{10.7.40}$$

$$-\delta^{-1}a\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{2}{\pi}R\left(\frac{r}{a}\right) - a_1\frac{a^3}{r^3}S\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{b_1}{\varepsilon}S\left(\frac{b}{r}\right) \tag{10.7.41}$$

其中

$$R(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{-1/2}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

$$S(x) = \begin{cases} \arcsin x - x(1-x^2)^{-1/2}, & 0 < x < 1 \\ \pi/2, & x > 1 \end{cases} \tag{10.7.42}$$

可以记住到，对于小的$|x|$，$S(x) = -x^3/3 + O(x^5)$. 注意，$\partial\psi/\partial z$，给出接触压力，在接触区外是有限的，而在$x = b+$，$x = a-$具有所指望的平方根奇异性. 可以表明，系数a_1, b_1按(10.7.35)选择，其中$m_1(r) = r = n_1(r)$，或者使得$I_1(r)$中的系数和$I_2(r)$中的r^{-3}的系数等于零，那么得到的位移与应力与 Shibuya 等（1974）针对ε直到 0.8 的计算得到的那些结果很接近。可以见Gladwell与Gupta（1979）的论文。

扭转问题可以用类似的方式进行分析. 现在个别的势函数ψ_{isD}, ψ_{osN}等等将都有形式（10.2.49），对应于（10.7.25），（10.7.26）的方程在例题10.7.2中给出. 用扁球坐标的逆似分析现在使用解P_n^1, Q_n^1，但其它的方式仍多采取相同的研究路线。现在发现Gladwell和 Gupta（1979），只用ψ_{osN}, ψ_{isN}每一个中的一项，所得到的结果同Shibuya（1976）的数值结果极为接近。

Popov (1967c)和Kolybikhin与Popov (1969) 对横观各向同性和非均匀半空间的环问题已经进行了研究。

例10.7

1. 对$\psi(r,z)$的表示式(10.7.29)给出积分方程

$$\int_0^a g(y)\left\{\int_0^\infty J_0(\xi r)J_0(\xi y)\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}y = F(r)$$

利用事实

$$\int_0^\infty J_0(\xi r)J_0(\xi y)\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\min(r,y)} \frac{\mathrm{d}s}{(r^2-s^2)^{1/2}(y^2-s^2)^{1/2}}$$

试表明若

$$g(y) = -\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_y^a \frac{sG(s)\mathrm{d}s}{(s^2-y^2)^{1/2}} \text{和} F(r) = 1,$$

那么用变换积分次序我们可以写出对于$G(s)$的方程为

$$G(s) + \frac{s}{(s^2-b^2)^{1/2}}\int_b^a \frac{tG(t)K(s,t)\mathrm{d}t}{(t^2-b^2)^{1/2}} = \frac{s}{(s^2-b^2)^{1/2}}$$

其中

$$K(s,t) = \frac{2}{\pi^2(s^2-t^2)}\left\{\frac{s^2-b^2}{s}\ln\left[\frac{s+b}{s-b}\right] - \frac{t^2-b^2}{t}\ln\left[\frac{t+b}{t-b}\right]\right\}$$

2. 对环的Reissner-Sagoci问题进行类似于(10.7.19)～(10.7.26)的分析。对应于(10.7.25),(10.7.26)的方程是

$$\Psi_{ibN}(t) = -\frac{2}{\pi}\int_0^a \frac{\xi\Psi_{tap}(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi^2-t^2} - \frac{2}{\pi}\int_a^\infty \frac{\xi\Psi_{aaN}(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi^2-t^2} + C,\ 0\leqslant t\leqslant b$$

$$\Psi_{aaN}(t) = \frac{2t}{\pi}\int_0^b \frac{\Psi_{ibv}(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi^2-t^2} + \frac{2t}{\pi}\int_b^\infty \frac{\Psi_{abp}(\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi^2-t^2},\ t>a$$

其中C可以令方程两边在$t=0$时相而得到确定。

第十一章 板和夹层的接触问题

11.1 基 础 类 型

关于弹性基础上的板的研究课题、已经写出了数以百计的文章和书籍. 这些论著中的许多涉及了板——基础这种类构形的接触应力与接触位移的近似计算，这些构形是工程中出现的. 这一论题并不是我们这里的主要兴趣所在. 这样一种理论和实践的考虑（特别它与数量众多的俄文文献有关——已经由Gorbunov-Posadov和Malikova (1973) 给出. Gorbunov-Posadov自己曾指出，在基础问题中近似方法的应用（有时是粗糙的，但通常有效）从1935年开始(例如见Gorbunov-Posadov (1939, 1940, 1941, 1949))。这一课题的更为数学化的处理——基于Galerkin（变分）法，化偏微分方程为常微分方程——已由Vlasov与Leont'ev(Леонтьев) (1966)的著作提供. 这两方面的论著提供了大量的数表和图形，适于实际计算. 涉及这一课题的数学分析的俄文文献的新近评论已由 Popov (1972b) 给出，他的分析，特别是对正交多项式在接触问题中的应用较有研究。其他的评论已经由 Korenev (1960b)，Hetenyi (1964) 作出. Selvadurai (1979) 已经对土壤-基础间的相互作用作了精辟的研究.

许多1962年以前发表的文献今天只有较小的价值；作者们考虑特殊的构形，不切合实际，或者他们的分析不可能简便地推广到更一般的情形. 分析技巧的发展和高速电子计算机的应用，已使许多研究变得陈旧.

考虑一性质尚不详知的基础，占有半空间$z\geqslant 0$. 对于涉及基

础与任意其它物体之间接触的任何问题的数学表述，对于半空间来说，知道影响系数矩阵$R_{ij}(x, y, x_0, y_0)$已足够。典型的系数$R_{32}(x, y, x_0, y_0)$标记由于作用在点$(x_0, y_0, 0)$沿y方向的单位集中力在表面上的点(x, y)引起的位移$u_3(x, y, 0) = w(x, y, 0)$。基础可以按照影响系数矩阵的牵强附会进行分类。

最简单类型的基础，用与法向位移$w(x, y, 0)$有关的单个影响系数$R_{33}(x, y, x_0, y_0) = R(x, y, x_0, y_0)$表征，此位移发生在表面$z = 0$上，由作用在点$(x_0, y_0, 0)$的法向载荷引起。最简单的例子是由独立的弹簧作成的Winkler基础，其中

$$R(x_0, y_0, x, y) = k\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \qquad (11.1.1)$$

这里δ是Dirac δ函数。许多研究者已经作出对Winkler基础的修正，以考虑与在接触表面上的弹簧端部相联系的剪切效应，这种表面为一剪切夹层（Pasternak (1964)），为一弯曲中的板（Hetenyi (1950)），或为一受拉伸的薄膜（Filonenko-Borodich (1945)）所接触。这些修正和更一般的基础可以用Vlasov与Leont'ev (1966)使用过的方法加以统一。他们的基本考虑是控制方程——它们是最重要的——而不是用于得到这些方程的数学或物理模型。

他们使用如下的数学程序：

（1）具有有限深度H，或无限深度的基础，被假设成是一均匀、各向同性弹性介质。

（2）基础中的位移u, v, w被被假设成具有形式

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{k} u_i(x, y)\phi_i(z), v(x, y, z) = \sum_{j=1}^{m} v_j(x, y)\chi_j(z),$$

$$w(x, y, z) = \sum_{k=1}^{n} w_k(x, y)\psi_k(z) \qquad (11.1.2)$$

其中函数$\phi_i(z), \chi_j(z), \psi_k(z)$假设是已知的、无量纲的和线性

无关的函数。

（3）控制未知函数u_i，v_j，w_k的方程由使用对于应力的虚功原理而得到，这些应力由具有虚位移ϕ_i，χ_j，ψ_k的位移而得到的。这一过程导出关于u_i, v_j, w_k的$(l+m+n)$个二阶偏微分方程。

该分析进行如下。应力-应变关系给出

$$\tau_{xx}=\frac{2\mu}{(1-2\nu)}[(1-\nu)e_{xx}+\nu(e_{yy}+e_{zz})$$

$$=\frac{2\mu}{(1-2\nu)}[(1-\nu)\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial u_i}{\partial x}\phi_i(z)+\nu\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial v_j}{\partial y}\chi_j(z)$$

$$+\nu\sum_{k=1}^{n}w_k\psi_k'(z)] \qquad (11.1.3)$$

$$\tau_{yy}=\frac{2\mu}{(1-2\nu)}[(1-\nu)\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial v_j}{\partial y}\chi_j(z)+\nu\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial u_i}{\partial x}\phi_i(z)$$

$$+\nu\sum_{k=1}^{n}w_k\psi_k'(z] \qquad (11.1.4)$$

$$\tau_{zz}=\frac{2\mu}{(1-2\nu)}[(1-\nu)\sum_{k=1}^{n}w_k\psi_k'(z)+\nu\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial u_i}{\partial x}\phi_i(z)$$

$$+\nu\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial v_j}{\partial y}\chi_j(z)] \qquad (11.1.5)$$

$$\tau_{yz}=2\mu e_{yz}=\mu\left[\sum_{j=1}^{m}v_j\chi_j'(z)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial w_k}{\partial y}\psi_k(z)\right] \qquad (11.1.6)$$

$$\tau_{xz}=\mu\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial w_k}{\partial x}\psi_k(z)+\sum_{i=1}^{l}u_i\phi_i'(z)\right] \qquad (11.1.7)$$

$$\tau_{xy}=\mu\left[\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial u_i}{\partial y}\phi_i(z)+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial v_j}{\partial x}\chi_j(z)\right] \qquad (11.1.8)$$

通过积分平衡方程(1.9.5)~(1.9.7)与移位ϕ_i, χ_j, ψ_k的乘积，积分对基础的深度进行，同时对含有z的导数的项作分部积分，虚功方程可以推导出来．于是

$$\int_0^H \left\{\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+F_x\right\}\phi_i(z)\mathrm{d}z=0 \qquad (11.1.9)$$

给出

$$\int_0^H \left\{\left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+F_x\right]\phi_i(z)-\tau_{xz}\phi_i'(z)\right\}\mathrm{d}z+[\tau_{xz}\phi_i(z)]_0^H=0 \qquad (11.1.10)$$

而其余的两个方程给出

$$\int_0^H \left\{\left[\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+F_y\right]\chi_j(z)-\tau_{yz}\chi_j'(z)\right\}\mathrm{d}z+[\tau_{yz}\chi_j(z)]_0^H=0 \qquad (11.1.11)$$

$$\int_0^H \left\{\left[\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+F_z\right]\psi_k(z)-\tau_{zz}\psi_k'(z)\right\}\mathrm{d}z+[\tau_{zz}\psi_k(z)]_0^H=0 \qquad (11.1.12)$$

把应力的表达式(11.1.3)～(11.1.8)代入方程(11.1.10)～(11.1.12)中并且进行积分，控制广义位移u_i, v_j, w_k的方程可以得到，它们都包含已知函数的积分．

在最简单的情形，其中

$$u(x,y,z)\equiv 0\equiv v(x,y,z),\quad w(x,y,z)=w_2(x,y)\psi_2(z) \qquad (11.1.13)$$

只有一个方程，由(11.1.12)推导出来，即

$$r_{22}(\mu\nabla_2^2 w_2+F_2)-s_{22}[2\mu(1-\nu)/(1-2\nu)]w_2+[\tau_{zz}\psi_2(z)]_0^H=0 \qquad (11.1.14)$$

其中

$$r_{22}=\int_0^H \psi_2^2(z)\mathrm{d}z,\quad s_{22}=\int_0^H \psi_2'^2(z)\mathrm{d}z \qquad (11.1.15)$$

函数$\psi_2(z)$控制 $w(x,y,z)$ 的z方向的变化。 如果基础是位于刚性地基上的一个浅层，我们可以假设

$$\psi_2(z)=\frac{(H-z)}{H} \tag{11.1.16}$$

而函数

$$\psi_2(z)=\frac{\sinh\gamma(H-z)}{\sinh\gamma H} \tag{11.1.17}$$

更接近于厚（或有限厚的）层。 在任何一种情形下，$\psi_2(0)=1$，$\psi_2(H)=0$❶。 如果没有体积力，亦即，$F_z=0$，以及$\tau_{zz}(x,y,0)=-p(x,y)$，那么方程(11.1.14)变成

$$r_{22}\mu\nabla_1^2 w_2-s_{22}[2\mu(1-\gamma)/(1-2\gamma)]w_2+p(x,y)=0 \tag{11.1.18}$$

这与包括一系列顶端用一个受拉伸的薄膜或剪切层相连弹簧的基础得到的方程形式相同。更高阶的四阶、八阶的方程，相应于连接有Winkler弹簧的平板，等等，可由更多的形函数的适当选择而得到。

Popov (1972b) 提出基于Fourier 变换的十分不同的统一理论。他考虑了一般性的基础，其中影响系数给出了由如下形式表面载荷引起的表面位移

$$R_{jk}(x,y,x_0,y_0)=H_{jk}(x-x_0,y-y_0) \tag{11.1.19}$$

作为一个特例，这一类问题包含非各向同性弹性半平面，其中所有21个弹性常数任意地依赖于z。 但是

$$H_{jk}(x,y)=F^*_{(x)}[\widetilde{H}_{jk}(\xi_1,\xi_2);\ (\xi_1,\xi_2)\to(x,y)] \tag{11.1.20}$$

用缩写$H(x,y)$，$\widetilde{H}(\xi_1,\xi_2)$代替法向系数$H_{33}(x,y)$，$\widetilde{H}_{33}(\xi_1,\xi_2)$。半平面表面位移$u_j(x,y,0)$基于分布

$$\tau_{j3}(x_0,y_0,0)=-g_j(x_0,y_0) \tag{11.1.21}$$

---

❶ 原文这里为$\psi_2(1)=1$，$\psi(0)=0$，显然不对，这里作了更正。

译者

在平面$z=0$上，可以写成

$$u_j(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_{jk}(x-x_0,y-y_0)g_k(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

(11.1.22)

关于$F_{(2)}$变换的卷积定理(5.7.4)允许如下的表达

$$u_j(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{H}_{jk}(\xi_1,\xi_2)G_k(\xi_1,\xi_2)\exp(-\mathrm{i}\xi_1x-\mathrm{i}\xi_2y)\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$$

(11.1.23)

其中G_k是g_k的$F_{(2)}$变换。特别地，如果只有一个法向载荷，则

$$w(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{H}(\xi_1,\xi_2)P(\xi_1,\xi_2)\exp(-\mathrm{i}\xi_1x-\mathrm{i}\xi_2y)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2$$

(11.1.24)

其中$P(\xi_1,\xi_2)=F_{(2)}[p(x,y);(x,y)\to(\xi_1,\xi_2)]$。各种特殊情况现在可以识别。如果$\tilde{H}(\xi_1,\xi_2)$是$\xi=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{1/2}$的函数，那么式(5.7.10)表明核$H(x,y)$为

$$H(x,y)=F_{(2)}^{-1}[\tilde{H}(\xi);(\xi_1,\xi_2)\to(x,y)]=H_0[\tilde{H}(\xi);r]$$

(11.1.25)

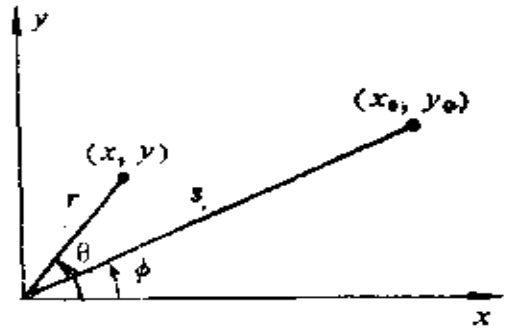


图11.1.1关于(x,y)与(x_0,y_0)的极坐标

其中$r=(x^2+y^2)^{1/2}$，在这种情况下，$H(x-x_0,y-y_0)$仅依赖于(x,y)与(x_0,y_0)之间的距离$R=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}$，如图11.1.1所示。

如果（法向）载荷$p(x_0,y_0)$是轴对称的，所以$p(x_0,y_0)=p(s)$，那么w是轴对称的，且

$$w(r)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}sH(r\cos\theta-s\cos\phi,r\sin\theta-\sin\phi)p(s)\mathrm{d}s$$

(11.1.26)

但是

$$\int_0^{2\pi} H(r\cos\theta - s\cos\phi, r\sin\theta - s\sin\phi)\mathrm{d}\phi =$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\infty}\xi\tilde{H}(\xi)J_0(\xi R)\mathrm{d}\xi \qquad (11.1.27)$$

其中$R=(r^2+s^2-2rs\cos(\theta-\phi))^{1/2}$以及

$$(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}J_0(\xi R)\mathrm{d}\phi = J_0(\xi r)J_0(\xi s) \qquad (11.1.28)$$

所以

$$w(r)=\int_0^{\infty}sk(r,s)p(s)\mathrm{d}s, \qquad (11.1.29)$$

其中

$$k(r,s)=2\pi\int_0^{\infty}\xi\tilde{H}(\xi)J_0(\xi r)J_0(\xi s)\mathrm{d}\xi \qquad (11.1.30)$$

对于各向同性半空间$\tilde{H}(\xi_1,\xi_2)=\vartheta/(2\pi\xi)$，所以$H(x,y)=\vartheta/(2\pi r)$，并且

$$H(x-x_0,y-y_0)=\vartheta/[2\pi\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}^{1/2}] \qquad (11.1.31)$$

与(2.5.27)一致．在这种情形下，核$k(r,s)$为

$$k(r,s)=\vartheta\int_0^{\infty}J_0(\xi r)J_0(\xi s)\mathrm{d}\xi \qquad (11.1.32)$$

与(10.2.28)一致．

如果

$$\tilde{H}_\lambda(\xi)=(2\pi k)^{-1}\exp(-\lambda\xi) \qquad (11.1.33)$$

其中$\lambda>0$，那么

$$H_\lambda(x,y)=(2\pi k)^{-1}\lambda(r^2+\lambda^2)^{-3/2} \qquad (11.1.34)$$

当$\lambda\to 0$时，核的极限值很有意义．事实上，对于Winkler基础，

此极限值是这个核，亦即

$$\lim_{\lambda\to 0} H_\lambda(x,y) = k^{-1}\delta(x)\delta(y) \qquad (11.1.35)$$

足以证明.

$$\lim_{\lambda\to 0} H_\lambda(x,y) = 0 \quad \text{如果} x^2+y^2\neq 0 \qquad (11.1.36)$$

并且对于所有的 x,y，$H_\lambda(x,y)$ 的积分为k^{-1}. 方程 (11.1.36) 立即从式(11.1.34)得到，而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_\lambda(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k^{-1}\int_0^\infty \lambda r(r^2+\lambda^2)^{-3/2}\mathrm{d}r = k^{-1} \qquad (11.1.37)$$

于是对于Winkler基础

$$\tilde{H}_w(\xi) = (2\pi k)^{-1}, H_w(x,y) = k^{-1}\delta(x)\delta(y) \qquad (11.1.38)$$

如果

$$\tilde{H}(\xi) = (2\pi k)^{-1} + \vartheta/(2\pi\xi) \qquad (11.1.39)$$

那么

$$H(x,y) = k^{-1}\delta(x)\delta(y) + \vartheta/(2\pi r) \qquad (11.1.40)$$

它是为Winkler基础所覆盖的弹性半空间（问题积分）的核，如Zhemochkin与Sinitsyn(1948)所讨论的.

在§12.5中考虑了非均匀弹性介质，并且特别表明，半空间 $z\geqslant 0$，剪切模量直接正比于z，并且$\nu = 1/2$，在

$$H(x,y) = k^{-1}\delta(x)\delta(y) \qquad (11.1.41)$$

的意义上，它等价于Winkler基础.

在§11.2中我们将讨论板与基础的接触. 名词“薄板”在那里要用到.这指的是由经典Poisson-Kirchhoff 理论控制的板，如Selvadural(1979,pp.165～169)所描写的情形. 利用一些简化假设，这一理论归结为板的表面$z=0$的法向位移，假设

$$u = 0 = v, \quad w = w_1(x,y) \qquad (11.1.42)$$

并且推导出由压力$p(x,y)$引起的控制挠度方程

$$D_1\nabla_1^4 w_1(x,y) = p(x,y) \qquad (11.1.43)$$

其中$\nabla_1^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$，且$D_1$为板的挠曲刚度.

例11.1

1. 试表明，如果$\widetilde{H}(\xi_1,\xi_2)$是$(\xi_1^2+\gamma^2\xi_2^2)^{1/2}$的函数，那么$H(x,y)$是$(y^2+\gamma^2y^2)^{1/2}$的函数。

2. 试表明，若$\widetilde{H}(\xi_1,\xi_2)=[P_n(\xi_1,\xi_2)]^{-1}$，其中$P_n$为$\xi_1,\xi_2$的任意阶多项式，且$p,w$由方程(11.1.22)相联系，那么

$$P_n\left(i\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)w(x,y)=p(x,y)$$

于是方程(11.1.22)可以变换成w的单个微分方程。推导由$p_n(\xi_1,\xi_2)=k_1^2\xi^2+k_2$给出的双参量基础的微分方程。这个模型出自Vlasov与Leont'ev(1966)，Filonenko-Borodich(1940)以及Pasternak(1954)的文章中。

11.2 无限大板和基础之间的完全接触

Vlasov-Leont'ev基础上的薄板

最简单的例子是薄板（1）与基础（2）在整个平面$z=0$上完全接触，作用力为法向的，可以是拉伸或压缩。位移边界条件为

$w_1(x,y,0)=w_2(x,y,0)$对于所有x,y控制同Vlasov与Leont'ev型双参量基础相接触、挠曲刚度为D_1的薄板挠度方程为

$$\left.\begin{aligned}D_1\nabla_1^4w_1(x,y)&=p_1(x,y)-p_2(x,y)\\r_{22}\mu\nabla_1^4w_2(x,y)-s_{22}[2\mu(1-\nu)/(1-2\nu)]w_2(x,y)&\\+p_2(x,y)&=0\end{aligned}\right\}\quad(11.2.1)$$

$$w_1(x,y)=w_2(x,y,0)\qquad(11.2.2)$$

其中下标1,2分别代表板与基础，r_{22}，s_{22}如（11.1.15）所定义。这些方程导出

$$\{D_1\nabla_1^4-r_{22}\mu\nabla_1^2+s_{22}[2\mu(1-\nu)/(1-2\nu)]\}w_1(x,y)=p_1(x,y)\qquad(11.2.3)$$

也可以等价地写成

$$(\nabla_1^4-2r^2\nabla_1^2+s^4)w_1(x,y)=p_1(x,y)/D_1\qquad(11.2.4)$$

这些方程可以用二维Fourier变换求解。令

$$w_1(x,y)=F_{(2)}^{*}[W_1(\xi_1,\xi_2);(x,y)] \tag{11.2.5}$$

$$p_1(x,y)=F_{(2)}^{*}[P_1(\xi_1,\xi_2);(x,y)] \tag{11.2.6}$$

并且记$\xi^2=\xi_1^2+\xi_2^2$，我们得到

$$(\xi^4-2r^2\xi^2+s^4)W_1=P_1/D_1 \tag{11.2.7}$$

由此可以得到一些特解.

Vlasov-Leont'ev板-基础系统

Valsov 等的方法可以自然地用作厚板的近似处理. 于是，考虑一个厚板，厚度为h，放置在双参量的厚度为H的基础上，如图11.2.1所示. 这个板可以用剪切模量为μ_1，Poisson 比为ν_1的Vlasov-Leont'ev夹层去模拟，而基础可以用参数μ_2，ν_2的层状物代表. 位移u,v,w可以取为如下形式

$$\left.\begin{aligned}u(x,y,z)&=u_1(x,y)\phi_1(z)\\ v(x,y,z)&=v_1(x,y)\phi_1(z)\end{aligned}\right\} \tag{11.2.8}$$

$$w(x,y,z)=w_1(x,y)\psi_1(z)+w_2(x,y)\psi_2(z) \tag{11.2.9}$$

其中，对于$0<z<h$

$$\phi_1(z)=(h-2z)/2,\quad \psi_1(z)=(h-z)/h,\ \psi_2(z)=1 \tag{11.2.10}$$

而对于$h<z<h+H$

$$\phi_1(z)=0,\quad \psi_1(z)=0,\quad \psi_2(z)=(H+h-z)/H \tag{11.2.11}$$

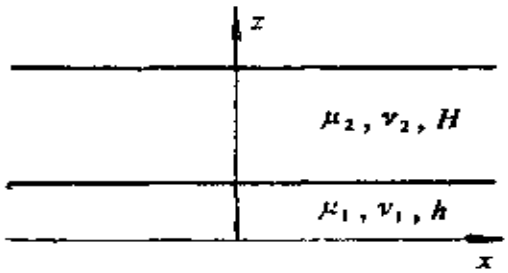


图11.2.1 厚h的板放置在厚H的夹层上

函数$\phi_1(z)$控制板的剪切畸变，而$\psi_1(z)$描述垂直压缩. 假设板和基础之间没有摩擦. 控制分布法向载荷作用下系统变形的方程组是可以得到的，利用无体力的一般理论(11.1.3)～(11.1.12)以及条件

$$\tau_{zz}=0=\tau_{yz},\quad \tau_{zz}=-q(x,y),\ 在z=0 \tag{11.2.12}$$

并且关于整个深度$H+h$进行积分。

Popov基础上的薄板

如果应用Popov基础模型，挠曲刚度为D_1、在整个平面$z=$的面积Ω上与基础相接触的薄板的挠度控制方程为

$$D_1\nabla^4 w_1(x,y)=p_1(x,y)-p_2(x,y) \tag{11.2.13}$$

$$w_2(x,y,0)=\iint_{\Omega} H(x-x_0,y-y_0)p_2(x_0,y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{11.2.14}$$

其中$p_1(x,y)$为外载荷而$p_2(x,y)$为接触压力。令$W_1(\xi_1,\xi_2)$，$P_1(\xi_1,\xi_2),P_2(\xi_1,\xi_2)$分别为$w_1(x,y),p_1(x,y),p_2(x,y)$的$F_{(2)}$变换；那么将$F_{(2)}$的卷积定理（5.7.4）应用于（11.2.14）得到

$$w_2(x,y)=2\pi(H\circ p_2)(x,y) \tag{11.2.15}$$

因此(5.7.5)导出

$$W_2(\xi_1,\xi_2)=2\pi H(\xi_1,\xi_2)P_2(\xi_1,\xi_2) \tag{11.2.16}$$

或者

$$P_2(\xi_1,\xi_2)=f_2(\xi_1,\xi_2)W_2(\xi_1,\xi_2)。 \tag{11.2.17}$$

另一方面，例11.1.2表明

$$D_1\xi^4W_1(\xi_1,\xi_2)=P_1(\xi_1,\xi_2)-P_2(\xi_1,\xi_2) \tag{11.2.18}$$

所以，消去$P_2(\xi_1,\xi_2)$我们得到

$$W_1(\xi_1,\xi_2)=P_1(\xi_1,\xi_2)/[D_1\xi^4+f_2(\xi_1,\xi_2)] \tag{11.2.19}$$

以及

$$w_1(x,y)=F^{*}_{(2)}\{P_1(\xi_1,\xi_2)/[D_1\xi^4+f_2(\xi_1,\xi_2)];(x,y)\} \tag{11.2.20}$$

这些表达式基本上由Korenov(1954)，(1960)得到。

Leonov（1939a）曾考虑过对于一个半空间的方程（11.2.13)，(11.2.14)，对于这种情形$H(x,y)=\vartheta_2/(2\pi r)$，并且化成$w_1(x,y)$的单个六阶偏微分方程，当$\tilde{H}(\xi_1,\xi_2)=\vartheta_2\xi^{-1}$时，方程（11.2.20）给出了这一方程的变换解。在接着的一篇文章

(1939b) 中，Leonov 研究了基础为弹性半空间的情形，但现在位移u $(x,y,0)$，$v(x,y,0)$被限制为零．对这个半空间，应用近似Papkovich-Neuber解，他表明H $(x,y)=\vartheta_2^*/(2\pi r)$，其中$\vartheta_2^*=(3-4\nu_2)/[4\mu_2(1-\nu_2)]$，所以上面的分析当$\vartheta_2$为$\vartheta_2^*$代替时也成立．

当载荷是轴对称时，所有$F_{(n)}$变换均可以由H_0取代，例如方程 (11.2.20)，变成

$$w(r)=H_0\{P_1(\xi)/[D_1\xi^4+f_2(\xi)];r\} \qquad (11.2.21)$$

这个方程具有一段长的历史．Winkler基础的特殊情形为Hertz (1884) 给出．其它的解由以下作者们给出，其中 Marguerre (1937) 针对 Winkler半空间；Holl (1938)，(1939) 针对 Winkler模型，半空间和夹层，后者利用了Marguerre (1933) 对夹层的分析；Woinowsky-Krieger(1932)，(1949)针对Winkler模型和半空间；Hogg(1938)针对半空间，Hogg(1944)针对夹层．对于各种理论问题的有启发性的讨论由Reissner(1955) 给出，这些理论问题是与基础承载能力相联系的．关于理论和图解结果的进一步的细节由 Sneddon，Gladwell 和Coen (1975) 给出．

对于Winkler 基础，方程 (11.1.36)，(11.2.16) 导出$f_2(\xi)=k_2$，

$$w(r)=D^{-1}H_0\{P_1(\xi)/[\xi^4+\alpha^4];r\},\alpha^4=k_2/D_1 \qquad (11.2.22)$$

对于在原点的点载荷P_0，$P_1(\xi)=P_0/(2\pi)$，并且

$$w(r)=\frac{P_0}{2\pi D_1}\int_0^\infty\frac{\xi J_0(\xi r)\mathrm{d}\xi}{\xi^4+\alpha^4} \qquad (11.2.23)$$

所以

$$w(0)=\frac{P_0}{2\pi D_1}\int_0^\infty\frac{\xi\mathrm{d}\xi}{\xi^4+\alpha^4}=\frac{P_0}{8D_1\alpha^2} \qquad (11.2.24)$$

以及

$$w(r)=-\frac{P_0}{2\pi D_1 a^2}\mathrm{kei}_0(ar) \qquad (11.2.25)$$

其中kei_0是Kelvin函数，其定义为

$$K_0\{z\exp(\pi i/4)\}=\mathrm{ker}_0(z)+\mathrm{kei}_0(z) \qquad (11.2.26)$$

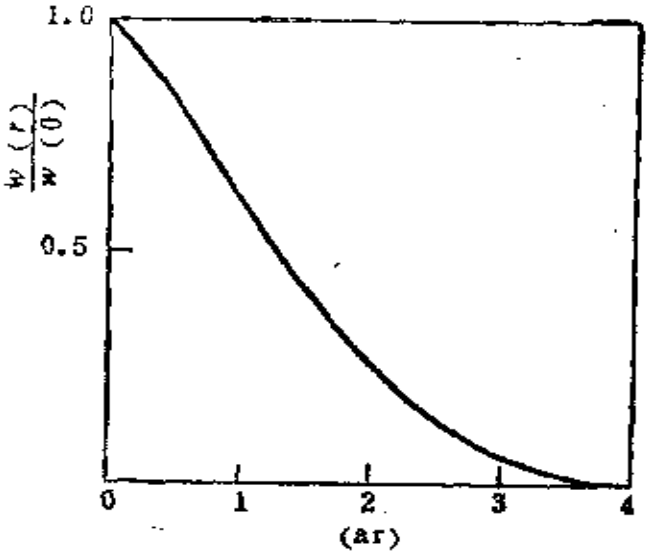


图11.2.2 Winkler基础上的板在点载荷作用下的无量纲位移

图11.2.2表明

$$\frac{w(r)}{w(0)}=-\frac{4}{\pi}\mathrm{kei}(ar) \qquad (11.2.27)$$

被描绘成作为ar的一个函数.

在$r=3.91/a$挠度为零! 如果假设在板与基础之间仅存在(Weitsman (1970))压应力，那么此时板与基础在这个半径将失去接触，但是相应的理论必须修正为从开始就考虑分离. 这在§11.5中讨论. 注意到挠度(11.2.27)在r增大时振荡，其第二个零点在$r=8.34/a$，但挠度保持很小，亦即，对$ar>4$，$|w(r)/w(0)|<0.025$.

Reismann (1954)将Hertz的分析推广到Winkler基础的环形板及非轴对称载荷的情形.

对一弹性半空间，对于$\widetilde{H}(\xi)=\vartheta_2/(2\pi\xi)$，方程(11.2.21)给出

$$w(r)=\frac{1}{D_1}\int_0^\infty \frac{P_2(\xi)J_0(\xi r)\mathrm{d}\xi}{\xi^3+c^3},\quad c^3=1/(D_1\vartheta_2) \qquad (11.2.28)$$

所以，对于一个在原点的集中载荷，有

$$\frac{w(r)}{w(0)}=\frac{3\sqrt{2}}{2\pi}\omega(cr),\quad \omega(x)=\int_0^{\infty}\frac{J_0(xt)\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

(11.2.29)

图11.2.3表示对于无量纲比$K=\vartheta_1/\vartheta_2$的五个不同值的$r/h$的函数$w(r)/w(0)$，其中板的挠曲刚度可以写成

$$D_1=\frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1^2)}=\frac{h^3}{6\vartheta_1}\qquad(11.2.30)$$

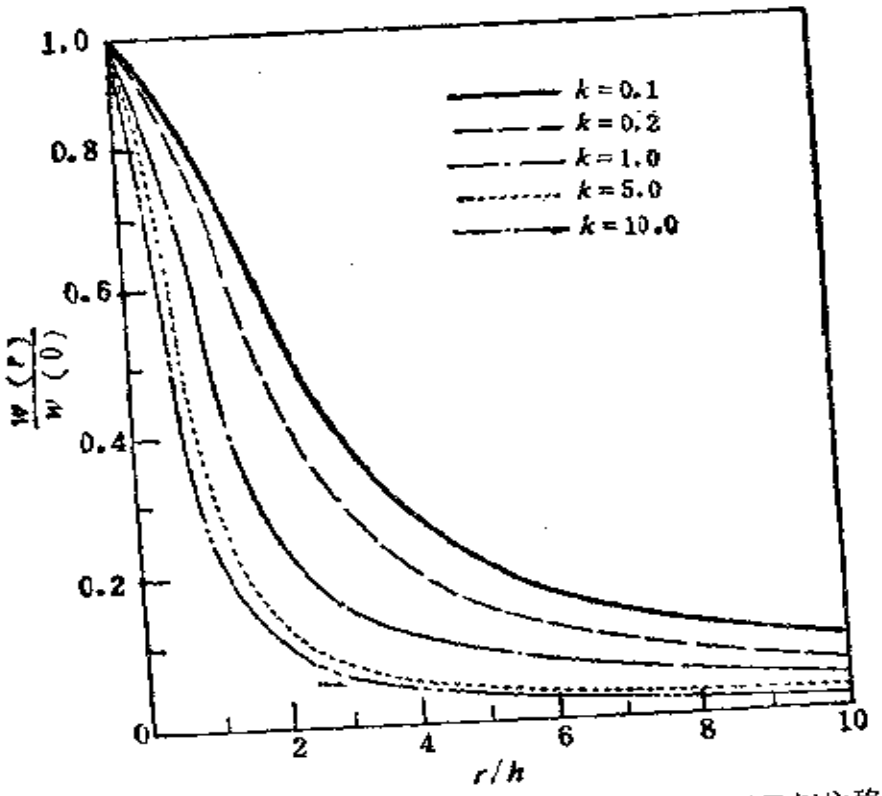


图11.2.3 弹性基础上的板由点载荷引起的无量纲位移

上述分析涉及无限大薄板与基础的完全接触。Naghdi与Rowley (1953)应用Reissner (1944,1945,1950) 导出的厚板理论分析了与Winkler基础完全接触的板，他们用所谓的Schleicher (1926a, 1926b, 1926c) 函数求解其分析中出现的四阶方程

$$\nabla^4 f-b^2\nabla^2 f+f=0\qquad(11.2.31)$$

Frederick (1956)作了类似的更为详尽的研究，考虑了轴对称与非轴对称载荷。Bardanov与Popov (1966) 分析了控制无限大厚板与一弹性半空间完全接触的方程。

Popov (1961c) 研究了线性变形基础上半无限大板弯曲的 Wiener-Hopf 问题；进一步的文献可以在他的文章以及在 Paskalenko与Popov (1972)，Vorob'ev，Popov与Serdyuk (1977) 的论文。

例11.2

1. 利用$F_{(2)}$变换，试表明如下定义的算子

$$L[p(x_0,y_0);(x,y)]=(2\pi)^{-1}\iint_D\times\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}^{-1/2}\times p(x_0,y_0)\,dx_0dy_0$$

的反演为$L^{-1}=-L\nabla_1^2$。同时表明 $L\nabla_1^2=\nabla_1^2L$。然后表明，对于半空间 $H(x,y)=\vartheta/(2\pi r)$，方程(11.2.13)，(11.2.14)可以化成

$$\nabla_1^6w+(\vartheta_2D_1)^{-2}w=D_1^{-1}\nabla_1^2p_1+(\vartheta_2D_1^2)^{-1}Lp_1$$

2. 试表明，若位移$u(x,y,0)$，$v(x,y,0)$被限制为零，那么$w(x,y,0)$与$\tau_{zz}(x,y,0)=-p_2(x,y)$之间关系由(11.2.14)给出，现在这里$H(x,y)=\vartheta^*/(2\pi r)$，$\vartheta^*=(3-4\nu)/[4\mu_2(1-\nu_2)]$。($z=0$上的边界条件为$u(x,y,0)=0=v(x,y,0)$，$\tau_{zz}(x,y,0)=-p_2$)。

11.3 有限板与基础的完全接触

有限尺寸圆形薄板与 Winkler 基础完全接触的解，已由 Hertz (1884)给出。控制方程为

$$D_1\nabla_1^4w_1(r)+kw_1(r)=p_1(r) \qquad (11.3.1)$$

相应的边界条件为

$$w_1''+\upsilon_1w_1/r=0=w_1'''+w_1''/r-w_1'/r^2,\ \text{在}r=a \qquad (11.3.2)$$

对应于$p_1=0$的齐次方程的通解为

$$w_1(r) = A\mathrm{ber}(x) + B\mathrm{bei}(x) + C\mathrm{ker}(x) + D\mathrm{kei}(x) \tag{11.3.3}$$

其中$x = (k/D_1)^{1/4}r$，而ber，bei，kei为Kelvin函数(Abramowitz与Stegun(1972, p.379))。在原点ber，bei取有限值，ker具有$\ln x$奇异性，而kei$x$的性质象$x^2\ln x$。如果$w_1(x)$在原点取有限值，则C必须等于零；除非在原点作用集中力，D将等于零；A，B将被确定，所以整个$w_1(x)$由齐次方程的通解(11.3.3)加上一个含有$p_1(x)$的特解而得到，这个解在板的边缘满足边界条件。各种实例可以在Schleicher (1926a, 1926b, 1926c)以及Timoshenko与Woinowsky-Krieger(1940)和Kerr(1963)的论文中找到。

Borowicka(1936, 1939, 1943a)分析过放置在弹性半空间上的有限尺寸圆形薄板。板的控制方程是(11.1.41)，(11.3.2)，而半空间的控制方程是(11.1.27)，即

$$w_2(r) = \int_0^a sk(r,s)p_2(s)\mathrm{d}s \tag{11.3.4}$$

板与半空间之间的接触要求

$$w_1(r) = w_2(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a \tag{11.3.5}$$

他的方法如下。板的控制方程为

$$D_1\nabla_1^4 w_1(r) = p_1(r) - p_2(r) \tag{11.3.6}$$

它与边界条件(11.3.2)相结合。相应于方程(11.3.6)的齐次方程的解为

$$w_1(r) = c_0 + c_1\ln r + c_2 r^2 + c_3 r^2\ln r \tag{11.3.7}$$

以及，在无集中载荷的情形下$c_1 = 0 = c_3$。假定接触压力$p_2(r)$具有形式

$$p_2(r) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} r^{2n}, \qquad 0 \leqslant r \leqslant a \tag{11.3.8}$$

由此得到挠度$w_1(r)$具有形式

$$w_1(r) = c_0 + c_2 r^2 + \sum_{m=2}^{\infty} a_{2m} r^{2m} \qquad (11.3.9)$$

系数c_2，a_{2m}可以由$p_1(r)$表示，这里假设$p_1(r)$为常数，而b_2.由(11.3.2)，(11.3.6)表示。将(11.3.8)代入(11.3.4)导出$w_2(r)$的表达式，象$w_1(r)$一样，是含有a_2.和以r^2为幂。令w_1与w_2的级数中r^{2n}的系数相等，我们得到解。Borowicka描绘中心接触压力是

$$k = \frac{D_1 \vartheta_2}{a^3} = \frac{1}{6} \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \frac{h^3}{a^3} \qquad (11.3.10)$$

的一个函数，并且接触应力分布作为k与r的函数。进而，表明当$k \to \infty$，接触压力的级数还原为平冲头时接触压力的级数。

Borowicka 解的缺点在于，在接触压力中没有出现正确的$(a_2 - r_2)^{-1/2}$奇异性。Ishkova(1947)对同一问题进行了分析，但假定

$$p(r) = A(a^2 - r^2)^{-1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} r^{2n} \qquad (11.3.11)$$

并且证明了这个级数收敛。Ishkova的解可以称为这个问题的“精确”解，但在计算应力等方面它未能提供一个方便的方法。在后来的工作中，Ishkova(1957，1958，1960)推广了这一工作，得到了关于非轴对称载荷的精确解，关于联合基础(1962)的近似解。这些分析是长而复杂的。

Klubin(1952)对于以表达式(2.6.16)，亦即以

$$p_2(r) = (1 - r^2/a^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_{2n}[(1 - r^2/a^2)^{1/2}] \qquad (11.3.12)$$

为接触压力的问题，推导出一个有效的数值方法。如在(2.6.15)中所表明的那样，由于这个压力引起的弹性半空间表面的位移可以显式地得以确定，它是

$$w_2(r)=\vartheta_2 a\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n a_n P_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}] \qquad (11.3.13)$$

其中$\lambda_n=\pi[P_{2n}(0)]^2/2$。这里他针对压力(11.3.12)解出了板方程，并且使$w_2(r)$的多项式中式以及$w_1(r)$表达式中的r/a幂相等，$w_1(r)$的表达式包含两个多项式，分别含$(a^2-r^2)^{-1/2}$项以及含对数项。这后一步骤自然地导致大量的算术和代数分析，他把计算进行下去直至得到最终的解，并且对若干载荷组态给出了接触应力等的图和表。

计算方法最有用的基础，或许是以积分形式表示位移与压力之间的关系，对基础和板两者均如此。这是一个为 Leonov (1939a)所遵循的方法，他使用

$$w_2(r)\equiv w_2(x,\ y)=\frac{\vartheta_2}{2\pi}\iint_S\frac{p_2(x_0,y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0}{\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}^{1/2}} \qquad (11.3.14)$$

描写半空间体，而使用

$$D_1w_1(r)=\int_0^a sG_1(r,\ s)[p_1(s)-p_2(s)]\mathrm{d}s+c_0 \qquad (11.3.15)$$

描写平板。这里$G(r,\ s)$记板在给定边缘条件下的Green函数。让(11.3.14)与(11.3.15)相等，我们得到关于$p(s)$的积分方程，此方程为Leonov所建议，能够以$2\pi/(D_1\vartheta_2)$为幂迭代地解出，见 Leonov(1939b, 1940)关于求解的其它尝试。若问题在事实上是轴对称的，最好把(11.3.14)写成轴对称形式

$$w_2(r)=\vartheta_2\int_0^a sk(r,s)p_2(s)\mathrm{d}s \qquad (11.3.16)$$

以得到积分方程

$$\int_0^a s[k(r,s)+cG(r,s)]p_2(s)\mathrm{d}s=c\left[\int_0^a sG(r,s)p_1(s)\mathrm{d}s+c_0\right] \qquad (11.3.17)$$

其中$c=(D_1\beta_2)^{-1}$。显然，这个方程可以对任意的基础推导出来，对这种基础，w_2与p_2通过一个方程，例如(11.3.16) 相联系。

下面是弹性基础上的板的其他文章的一个目录。应该注意不同作者在所使用的术语上给出不同的意义；某些更完全的目录可以在Iyer(1973)的文章中查到，而Selvadurai(1979) 给出了一个内容广泛的目录。

Szabo(1951a, 1951b, 1952a, 1952b)研究过由高阶板理论控制的一个有限尺寸圆板，无摩擦或有摩擦地同一各向同性半空间相接触。Pickett等(1951)和Pickett 与 Mclormick(1952) 研究无限大的薄板或圆形薄板放置在Winkler 基础上，放置在一个夹 层上或一 个半空间 上。 Reismann (1954) 也 研 究过在 Winkler基础上的这样 的板。Yi-Yuan Yu(1957)研究过修正的Winkler 基础上的一个圆薄板， 这种基础也可以 阻止转动。Palmov(1960)研究过弹性夹层上的无限大薄板。Golub与Mossakovskii(1960) 研究过半空间上的具 有剪切效应的板， 也可以见Golub(1964)。Essenburg与Gulati(1966) 研究过两个轴对称Reissner板的接触。

例11.3

1. 在边界条件(11.3.2)下的积分方程(11.3.6) 以及在$r\neq 0$处适宜的正则性条件给出(11.3.15)式。

11.4 夹层的方程

轴对称夹层的控制方程可以由 §10.2 中的弹 性 半 空 间 的 Papkovich-Neuber 势得到，其中包括$\exp(\xi z)$的项。或者，求这个解的一个捷径可以利用 §10.6 中提出的轴对称解与x对称的平面解的关系结合 §6.5中的平面条 带 解 而 得 到。 这样，例

10.6.5与例6.3.4给出

$$u(r,z) = A_i^{-1}[x^{-1}u^*(x,z);r]$$
$$= A_i^{-1}[x^{-1}F_*\{U(\xi,z);x\};r]$$
$$= H_i[U(\xi,z);r] \qquad (11.4.1)$$

其中U由方程(6.3.12)的第一个式子给出，但这里把i略去. 以一个类似的方式，我们可以得方程(10.2.8),(10.2.9) 的另外三个部分，其中W,T_{is}与T_{ss}由方程(6.3.12)的第 2 、 第 4 与第 5 个式子给出,这里再次略去i. 这意味着,在$z=0,h$处某些边界条件作用下的夹层的控制方程可用适宜的H算子取代平面方程的F算子而得到.

作为一个例子，考虑放置在$z=h$处的一个无摩擦刚性基础上的夹层，为$z=0,r<a$上的一个刚性或弹性的轴对称的压头所压挤. 此问题的边界条件是

$$\tau_{rz}(r,0) = 0 = \tau_{rz}(r,h); \quad w(r,b) = 0, \quad r>0 \qquad (11.4.2)$$

$$w(r,0) = f(r), \quad r<a; \quad \tau_{zz}(r,0) = -p(r)H(a-r) \qquad (11.4.3)$$

这些方程类似于条带问题的方程(6.3.4)～(6.3.6)，所以类似于方程(6.3.15)～(6.3.16)

$$\tau_{zz}(r,0) = -H_0[P(\xi);r] = -p(r)H(a-r) \qquad (11.4.4)$$

$$w(r,0) = \vartheta H_0[\xi^{-1}L(\omega)P(\xi);r] = f(r), r<a \qquad (11.4.5)$$

其中$\omega=\xi h$，而$L(\omega)$由(6.7.20)给出；这些方程首先由 Marguerre(1933)给出. 它们可以化成如同(6.3.17)～(6.3.20) 的无量纲形式

$$aP_0^{-1}\tau_{zz}(r,\ 0) = -H_0[\Phi(s);\xi] = -\phi(\xi)H(1-\xi) \qquad (11.4.6)$$

$$(\vartheta P_0)^{-1}w(r,0) = H_0[s^{-1}L(\omega)\Phi(s);\xi] = \chi(\xi) \quad \xi<1 \qquad (11.4.7)$$

这些方程可以用多种不同的方式处理. 可以参考Tranter(1950)

对于这些方程的一个早期的研究。这样，用于(6.3.38)的方法的类比是利用表5.7.1的第10款去运算方程(11.4.6)以得到

$$F_c[\Phi(s);\tau]=A_2[\xi\phi(\xi)H(1-\xi);\tau]=\psi(\tau) \tag{11.4.8}$$

其中 $\psi(\tau)=0$ 对于$\tau>1$。于是

$$\Phi(s)=F_c[\psi(\tau);s]=(2/\pi)^{1/2}\int_0^1\psi(\tau)\cos s\tau d\tau \tag{11.4.9}$$

所以表5.7.1的第1款变换(11.4.7)为

$$\psi(\tau)=\int_0^1 H(t,\tau)\psi(t)dt=\theta(\tau) \tag{11.4.10}$$

其中

$$H(t,\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty N(\omega)\cos st\cos s\tau ds \tag{11.4.11}$$

以及

$$L(\omega)=1+N(\omega),\quad \theta(\tau)=A_1^{-1}[\chi(s);\tau] \tag{11.4.12}$$

这些方程为Lebedev与Ufliand(1958)得到，对于平底压头的情形，他们得到了一个数值解。Pupyrev与Ufliand(1960)研究了弹性夹层的一般问题，这里假设夹层的一个表面上的边界条件为一个圆所分离。Keer(1964a)研究了弹性夹层为一个弹性球刻凿的问题。这里用到了Hertz近似，所以球当作一个具有抛物形曲面的半空间来处理。这个控制积分方程精确地具有形式(11.4.4)，(11.4.5)，只是$L(\omega)$有轻微的变更（见例11.4.4）。Keer对大h/a值求解了这些方程。

当接触区不必是圆形的，弹性夹层上压模的作用可以用双重Fourier变换联合 Papkovich-Neuber 势而得以确定。于是便假设，例如，夹层不会上升地放置在光滑的刚性基础$z=h$上，而上表面$z=0$作用一个法向载荷$p(x,y)$。其边界条件为

$$\tau_{xz}(x,y,0)=0=\tau_{yz}(x,y,0) \tag{11.4.13}$$

$$\tau_{zz}(x,y,0)=-p(x,y) \tag{11.4.14}$$

$$\tau_{zz}(x,y,h)=0=\tau_{yz}(x,y,h)=w(x,y,h)$$

(11.4.15)

可以表明（例11.4.2)(Lur'e(Лурье)(1964))$w,\tau_{zz},\tau_{yz},\tau_{zz}$的$F_{(2)}$变换分别如下列式子给出

$$2\mu\xi\Delta W(\xi_1,\xi_2)=2P(\xi_1,\xi_2)[-2(1-\nu)\sinh\xi(z-h)\times\sin\xi h+\xi z\cosh\xi(z-h)\sinh\xi h-\xi h\sinh\xi z] \quad (11.4.16)$$

$$\xi\Delta\tau_{zz}(\xi_1,\xi_2)=-2i\xi_1P(\xi_1,\xi_2)[\xi z\cosh\xi(z-h)\sin\xi h-\xi h\sin\xi z] \quad (11.4.17)$$

$$\xi\Delta\tau_{yz}(\xi_1,\xi_2)=-2i\xi_2P(\xi_1,\xi_2)[\xi z\cosh\xi(z-h)\sin\xi h-\xi h\sinh\xi z] \quad (11.4.18)$$

$$\Delta T_{zz}(\xi_1,\xi_2)=-2P(\xi_1,\xi_2)[\sinh\xi h\cos\xi(z-h)-\xi z\sinh\xi\sinh\xi(z-h)+\xi h\cosh\xi z]$$

(11.4.19)

其中$\xi=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{1/2}$以及$\Delta=2\xi h+\sinh(2\xi h)$。这样，若一无摩擦压头同$z=0$平面的一个区域$\Omega$上的夹层相接触，则边界条件为

$$w(x,y,0)=\delta+\alpha x+\beta y+f(x,y),\ (x,y)\text{在}\Omega\text{中}$$

(11.4.20)

那么联系$w(x,y,0)$与$p(x,y)$的积分关系是

$$2\mu\xi\Delta W(\xi_1,\xi_2)=4(1-\nu)\sinh^2\xi hP(\xi_1,\xi_2) \quad (11.4.21)$$

亦即

$$w(x,y,0)=\vartheta F_{(2)}^{*}[\xi^{-1}L(\omega)P(\xi_1,\xi_2);(\xi_1,\xi_2)\to(x,y)]$$

(11.4.23)

以及卷积定理并且与Ω外$p(x,y)$等于零的事实相结合，允许上式改写成，对Ω内的(x,y)为

$$w(x,y,0)=\iint H_{33}(x-x_0,y-y_0)\,p(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$

(11.4.24)

其中

$$H_{33}(x,y)=\frac{\vartheta}{2\pi}F_{(2)}^{*}[\xi^{-1}L(\omega);(\xi_1,\xi_2)\to(x,y)] \tag{11.4.25}$$

因为这运算是一个ξ的函数，$F_{(2)}^{*}$算子可以由H_0代替（见(5.7.10)）。若$p(x,y)$以及区域是轴对称的，在(11.4.3)中的$F_{(2)}^{*}$算子可以由H_0代替导出（例11.4.3）

$$w(r)=\int_0^a sk_{33}(r,s)p(s)\mathrm{d}s \tag{11.4.26}$$

其中

$$k_{33}(r,s)=\vartheta\int_0^\infty L(\omega)J_0(\xi r)J_0(\xi s)\mathrm{d}\xi \tag{11.4.27}$$

对于一般的非轴对称的情形，见Dovnorovich(1964)的论文。

方程(11.4.10)与(11.4.26)非常类似于在§6.5与§6.7中对平面条带问题得到的那些方程。事实上，由于轴对称和x轴对称的量由方程

$$\left.\begin{aligned}w(r,z)&=r^{-1}A_2^{-1}[w^{\mathrm{I}}(x,z);r]\\ \tau_{zz}(r,z)&=r^{-1}A_1^{-1}[\tau_{zz}^{\mathrm{I}}(x,z);r]\end{aligned}\right\} \tag{11.4.28}$$

方程(11.4.26)，例如，可以用一个适当的A_2算子作用在(6.3.31)而得到。这意味着，在§6.7中描述的对小的或大的h/a，求解平面方程的方法，在作了所需要的变化之后，可以用于解决空间问题。因此我们将给出求解过程的一个简短的考虑。

V.M.Aleksandrov(1963b)研究过方程(11.4.24)，并且取$L(\omega)=1+N(\omega)$以及

$$\begin{aligned}H_{33}(x,y)&=\frac{\vartheta}{2\pi r}+\frac{1}{h}\int_0^\infty N(\omega)J_0\left(\frac{\omega r}{h}\mathrm{d}\omega\right)\mathrm{d}\omega\\&=\frac{\vartheta}{2\pi r}+\frac{f(r/h)}{h}\end{aligned} \tag{11.4.29}$$

所以，对于(x,y)在Ω中取值时，方程(11.4.24)变成

$$w(x,y,0)=\frac{\vartheta}{2\pi}\iint_{a}\frac{p(x_0,y_0)}{R}\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$$
$$+\frac{1}{n}\iint_{a}f(p/h)\,p(x_0,y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0 \tag{11.4.30}$$

其中$R^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$. 对于大的h, 上式中的第二项可以略去，则它化成关于半空间问题相应的方程，其许多解为已知的。适宜于h相对接触区尺寸较大时的高阶近似，由Vorovich和Ustinov(1959)，V.M.Aleksandrov与对于Vororich(1960)，V.M.Aleksandrov(1963b)作出.h的值很小时，§6.7中使用的论断加以修正之后可以表明H_{33}近似地写成

$$H_{33}(x,y)=\frac{\vartheta A}{h}\delta\left(\frac{R}{h}\right) \tag{11.4.31}$$

其中δ为Dirac δ函数. 这样

$$p(x,y)=w(x,y,0)/[\vartheta Ah] \tag{11.4.32}$$

V.M.Aleksandrov(1964b)注意到，虽然由(11.4.30)得到的$p(x,y)$在接触区的边缘将具有平方根的奇异性，这是半空间接触问题的一个特征，但是由(11.4.32)却发现将不具有这一奇异性. 他通过以方程(6.7.32)中$L_0(\omega)$代替$L(\omega)$，而得到一个具有这一奇异性的解. 也可以见V.M.Aleksandrov, Babeshko与Kucherov(1966)的论文.

V.M.Aleksandrov (1967c)研究了由方程(11.4.26), (11.4.27)给出的公式表达并且记

$$k_{33}(r,s)=k_{33}^0(r,s)+k_{33}^1(r,s) \tag{11.4.33}$$

其中$k_{33}^0(r,s)$是对于半空间问题的核(2.6.5)，这样

$$k_{33}^1(r,s)=\vartheta\int_0^\infty J_0(\xi r)J_0(\xi s)\mathrm{d}\xi \tag{11.4.34}$$

$$k_{33}^1(r,s)=\vartheta\int_0^\infty[L(\omega)-1]J_0(\xi r)J_0(\xi s)\mathrm{d}\xi \tag{11.4.35}$$

并且后者可以展开成一个级数

$$k_{33}^{1}(r,s)=\vartheta a^{-1}\sum_{m,n=0}^{\infty}e_{mn}P_{2m}[(1-r^2/a^2)^{1/2}]P_{2n}[(1-s^2/a^2)^{1/2}]$$

(11.4.36)

若

$$w(r)=a\sum_{n=0}^{\infty}b_nP_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}] \qquad (11.4.37)$$

$$p(r)=(1-r^2/a^2)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}] \qquad (11.4.38)$$

那么§2.6或§10.5中的分析表明

$$\int_0^a sk_{33}^{0}(r,s)\,p(s)\,ds=\frac{\pi}{a}\,\vartheta a\sum_{n=0}^{\infty}[P_{2n}(0)]^2a_nP_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}]$$

(11.4.39)

而$P_{2n}[(1-r^2/a^2)^{1/2}]$在$(0,a)$上的正交性给出

$$\int_0^a sk_{33}^{1}(r,s)\,p(s)\,ds=\vartheta a\sum_{m,k=0}^{\infty}(4k+1)^{-1}e_{mk}a_kP_{2m}[(1-r^2/a^2)^{1/2}]$$

(11.4.40)

所以令(11.4.26)两边的系数P_{2m}相等，我们得到

$$\frac{\pi}{2}\vartheta[P_{2n}(0)]^2a_n+\vartheta\sum_{k=0}^{\infty}(4k+1)^{-1}e_{nk}a_k=b_n\quad(n=0,1,\cdots)$$

(11.4.41)

V.M.Aleksandrov(1967c)讨论了级数(11.4.36)的收敛性和方程组(11.4.41)的正则性. V.M.Aleksandrov(1969)研究了更粗略的渐近解. R.S.Rao与Shadley(1970)用不变嵌入法解得方程(11.4.10). 也可以参考Kalaba, Yakush与Zagustin(1972,1976),Kalaba与Zagustin(1972a,1972b,1973,1975)和Buell等(1972), Potelezhko与Filippov(1967), Dhaliwal

(1970)，I.S. Rau 与 Dhaliwal (1972) 以及 Civelek 与 Erdogan (1974) 分析了一个压头压入一个弹性夹层的轴对称接触问题，而这个夹层自身以完全接触的方式放置在一个各向同性弹性半空间上，其中积分方程以迭代法或数值法求解. Gecit与Erdogan(1978)研究了夹层与无摩擦刚性基础的分离. Kizima (1964)得到了平压头与夹层粘结接触的近似解. 夹层上环形压头的作用，其中夹层自身放置在一个半空间上，已经由 Valov (1968)，Gubenko, Kiselev, Lamzyuk (1975) 研究过，其他研究过这一问题的作者在这些文章中曾被援引. Shibuya,Koizumi, Nakara与Tanaka(1975, 1977) 研究过一个夹层，在夹层的两个表面上受到两个相同的压头的相反的作用，这种作用是法向位移或扭转位移. Low(1964a), (1964b) 研究了端部是平的、具有半径为a的圆形刚性压头刻凿一个夹层，其中夹层静止地置于一个基础上，此基础的圆形 $0\leqslant r\leqslant a$ 部分前先被削去. 得到的一对Fredholm积分方程在大 h/a 值下用叠代法求解. Bielak 与 Martinez (1974)以及Keer与Luk(1976) 研究了弹性夹层的非对称问题. Goodman与Keer(1975)研究了弹性夹层对接触物体切向柔度(§12.4)的影响. England (1962) 研究了横观各向同性夹层的轴对称压头问题，包括对不完全接触的讨论；对这样一种夹层的一般公式表述已经由 Lekhnitskii (1962b)给出. Zlatin与Ufliand(1976) 研究了一有限弹性柱体刻凿一个弹性夹层的轴对称接触问题. Kuz'min (Кучьмин)与Ufliand(1967)分析了一个夹层，此夹层的两个相对的表面为两个刚性压头施以相反方向的刻凿而使它受压挤. 也可以参考 Greenwood (1964) 与 Zakorko (1974). Hooper (1974, 1975,1976)对于各向同性和横观各向同性介质与挠曲轴的粘结接触的各种问题进行了广泛的分析. 他分析了各种可能的解，给出了广泛的参考文献和许多数值结果. Bufler (1971) 评论了多层介质理论的研究. 也可以参考Naumov与Shevlyakov(1967),

Wu与Chiu(1967)，Puo，Wu与Chiu(1971)．Robinson(1973)提出了计算任意法向载荷作用下夹层性质的方法并且评论了类似的实用性研究工作。

例11.4

1． 试由方程(11.4.6)，(11.4.7)推导方程(11.4.10)。

2． 取$\phi_1=0,\phi_2=\phi_3=\phi$时的Papkovich-Neuber解(1.10.11)并且表明$\tau_{xz},\tau_{yz},\tau_{zz},w$的$F_{(2)}$变换由下列式子给出

$$\tau_{xz}=i\xi_1 T,\qquad \tau_{yz}=i\xi_2 T,$$

$$\tau_{zz}=2(1-\nu)\frac{\partial\Psi}{\partial z}-\xi^2\Phi,$$

$$2\mu W=4(1-\nu)\Psi-\frac{\partial}{\partial z}(z\Psi+\Phi),$$

$$T=-2(1-\nu)\Psi+\frac{\partial}{\partial z}(z\Psi+\Phi)$$

3． 试表明，若$p(x,\ y)=f(r)\sin\theta$，其中$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，那么

$$P(\xi_1,\ \xi_2)=F_{(2)}[p(x,\ y);(x,\ y)\to(\xi_1,\ \xi_2)]$$
$$=i\sin\phi H_1[f(r);\xi]$$

其中$\xi_1=\xi\cos\phi$，$\xi_2=\xi\sin\phi$。

4． 利用分布(11.4.16)～(11.4.19)试表明，在一个厚度为h的夹层上，半径为a，尖角为γ的刚性平端部压头作用下的法向应力及其相应的位移$w(r,\ \theta,\ 0)=r\sin\theta$，由一对偶积分方程对给出(Florence(1961))

$$w(r,\ \theta,\ 0)\equiv\vartheta\sin\theta H_1[\xi^{-1}L(\omega)F(\xi);r]=\gamma r\sin\theta,\quad r<a$$

$$\tau_{zz}(r,\ \theta,\ 0)\equiv -H_1[F(\xi);r]=0,\quad r>a$$

这里记$F(\xi)=F_1[g(t);\xi]$，并且得到$g(t)$的Fredholm积分方程。

5． 试表明在Hertz近似下，弹性“球”(物体2)弹性夹层(物体1)之间接触的控制积分方程为

$$H_0[P(\xi);r]=0,\quad r>a$$

$$H_0[\xi^{-1}(\vartheta_1L(\omega)+\vartheta_2)P(\xi);r]=f(*),\quad r<a$$

11.5 圆板与基础之间的退让接触

§11.3的分析基于板与基础保持连续接触的假设。然而，容易表明（见Privarnikov(1972) 关于放置在上半空间上的夹层情形的论文），在一有限区域上一般的载荷分布，所设想的接触区的一部分面积上，板与基础之间的接触应力变成负的（亦即变成拉伸应力），板与基础之间将发生分离，除非用某些方法阻止这种分离的发生。在这一节中我们描述板——基础构形的几种分析，其中假定，若接触压力为正（亦即，处于压缩状态）时，接触才得以保持。在这种分析中一个主要的未知量是接触面积的范围，在这个范围的边界上，接触压力为零。

问题可以规定如下。一半径为a以及挠曲刚度为D_1的圆板静止地置于一个轴对称基础上，在其自重和其他轴对称载荷作用下，板发生变形，所以它与基础在某个（轴对称）区域S上相接触。要求确定S的范围，板与基础的接触压力和接触位移。

或多或少为大多数研究者所遵循的基本公式是以积分形式把板和基础的位移通过接触压力和外载荷表达出来，因而得到接触压力作为未知函数的积分方程。在接触区的边界上接触压力为零为限制性条件下求解这一方程，这一限制将导出接触区的范围。

最重要的情形是接触区S为一半径等于c的圆。控制方程，对于板来说为

$$w_1(r) = \int_0^c sG(r,s)\{p_1(s) - p_2(s)\}\mathrm{d}s \qquad (11.5.1)$$

对于基础来说为

$$w_2(r) = \int_0^c sk(r,s)\,p_2(s)\mathrm{d}s \qquad (11.5.2)$$

由于接触只发生在半径为c的圆上，(11.5.1)中的$p_2(s)$仅关于这个圆积分，这导出方程

$$\int_c^a s\{k(r,s)+G(r,s)\}p_2(s)\,ds=\int_0^a sG(r,s)\,p_1(s)ds=f(r) \tag{11.5.3}$$

半径c必须由条件$p_2(c)=0$确定. 在考虑此方程的解之前，我们给出求解这一问题的图谋的一个简短的历史评论.

Jung(1952) 曾研究过基础是半空间的情形，并且使用方程(10.2.14)，(10.2.15)，亦即

$$w_2(r)=\vartheta_2 H_0[\xi^{-1}P_2(\xi);r] \tag{11.5.4}$$

$$p_2(r)=H_0[P_2(\xi);r] \tag{11.5.5}$$

然后他取表达式

$$P_2(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\xi^{-(n+1/2)}J_{n+1/2}(c\xi) \tag{11.5.6}$$

此式导出一个接触压力$p_2(r)$，在$r>c$时它自动地等于零，并且给出一个位移，在$r\leqslant c$时它是一个多项式. 然而在(11.5.4)中压力的使用导致极其复杂的积分. 此外，因为在(11.5.6)中的项，彼此之间非常相似，在某些近似方式下，由令$w_1(r)$，$w_2(r)$相等而得到方程是严重病态的. Jung的方法为Iyer(1973)重新详细地研究过.

Weitsman(1969)研究过一个无限大无自重的板，为在中心处一个集中载荷所加载，在积分(11.5.1)与(11.5.2)中他进行了分部积分，并且用$p_2'(s)$表达w_1，w_2和积分方程(11.5.3)；积分方程的核具有$\ln(a^2-r^2)$的奇异性. 然后他使用Noble与Hussain(1967)提出的可用于具有奇异性$\ln(a^2-r^2)$核的积分方程的变分法，得到$p_2'(s)$的一个近似的只有一项的解，以及接触半径的一个近似结果. 他假设$p_2'(s)$具有形式

$$p_2'(s)=B(c)(c^2-s^2)^{-1/2}+g(s) \tag{11.5.7}$$

其中$g(s)$在$s=c$连续，并且用变分法得到c，取$g(s)=A(c)(c^2-s^2)^{1/2}$并且选择使$B(c)=0$. 然而可以表明，用这一方式选择的c并不正确，因为即使c的正确值能得到，我们指望在$s=c$附近

$p_2(s)$ 具有形式 $g(s)(c^2-s^2)^{1/2}$，所以 $p'(s)$ 仍然将有奇异性 $(c^2-s^2)^{-1/2}$. Weitsman的问题为 Gladwell 与 Iyer(1974) 和 Gladwell(1975)所解决，这些工作请见下述.

对于一个无限大无自重的板，在一半径为 b 的圆形区域上受载荷，静止地置于一个半空间上，§4.10的一般理论表明，接触半径将与载荷水平无关，虽然它与尺寸b有关. 对于在板的中心受一集中载荷的问题，它将包含三个参数：接触半径c，板的刚度$D_1\equiv h^3/(12\vartheta_1)$ 以及基础的材料常数ϑ_2；量纲分析表明，这三个参数必须以关系式

$$(c/h)^3=k(\vartheta_2/\vartheta_1) \qquad (11.5.8)$$

相联系，其中k为一数值常数. Weitsman(1969)得出值$k=4.18$，而Gladwell(1975)在分析了有限半径a的板之后，指出对于大的(a/h)，k几乎与(a/h)无关，并且对$a/h=50$，有$k=4.15$. Weitsman的结果与这一结果的一致是由于他在$s=c$附近的 $p_2(s)$性质的错误假设和在变分法中应用单项近似联合起来造成的巧合所致. 应该注意，在梁的不完全接触问题中，Weitsman 假设在$y=c$附近，$p_2'(y)$在$\propto(c^2-y^2)^{1/2}$导出一个相应于k的常数的完全错误的数值（见方程(6.7.32)）.

应该注意到，如果半空间是刚性的，所以 $\vartheta_2=0$，那么方程(11.5.8)得出$c=0$，这意味着平板与基础只有点接触. 这个在物理上不真实的结果是由于应用了薄板理论而造成的；这种理论只有当接触半径与板的厚度相比为大值时才可以使用. 板被作为夹层处理的分析可见§11.7.

有限圆板受到轴对称载荷以及其自重的挤压与一弹性半空间的无界接触，为Gladwell(1975) 所研究. 其分析如下. 板的方程(11.3.6)可以积分而得到

$$w_1'(r)=\int_0^r sf_1(r,s)\{p_1(s)-p_2(s)\}\mathrm{d}s \qquad (11.5.9)$$

其中

$$4D_1 f_1(r,s)=\begin{cases}\kappa_1 rs^2/a^2+s^2/r, & s<r\\ \kappa_1 rs^2/a^2+r+2r\ln(s/r), & s\geqslant r\end{cases}\qquad(11.5.10)$$

半空间方程(11.5.4),(11.5.5)可以解得为

$$P_2(\xi)=\int_0^\infty g(t)\cos\xi t\,\mathrm{d}t\qquad(11.5.11)$$

那么

$$w_2(r)=\vartheta_2\int_0^{\min(c,r)}(r^2-t^2)^{-1/2}g(t)\,\mathrm{d}t\qquad(11.5.12)$$

并且无界接触的条件隐含着$g(c)=0$. 方程(11.5.12)可以反解得出❶

$$g(t)-g(0)=\frac{2}{\pi\vartheta_2}t\int_0^t\frac{w_2'(t)\,\mathrm{d}t}{(t^2-r^2)^{1/2}}\quad t\leqslant c\qquad(11.5.13)$$

通过代入w_2'的表达式到(11.5.13)中可以把方程(11.5.9),(11.5.13)联合起来,以$g(t)$表示$p_2(r)$,得到Fredholm积分方程

$$2\pi\vartheta_2 D_1 g(t)=\int_0^\infty H(t,u)g(u)\,\mathrm{d}u\qquad(11.5.14)$$

这个方程对于给定的c值和给定的特征值$2\pi\vartheta_2 D_1$最好求解,此特征值可以用Dundurs的不匹配参数α表示,而c是正确的接触半径. 进一步的细节和图形结果可以在Gladwell(1975)的论文中查到.

例11.5

1. 试表明,若$P_2(\xi)$由(11.5.11)给出,那么对于$r>c$有$p_2(r)=0$;试表明,若$p_2(c)=0$,那么$w_2(r)$由(11.5.12)给出.

2. 推导关于$g(t)$的方程(11.5.14).

---

❶这是一种Abel积分方程,由其反演可以得出这里的结果.

——译者

11.6 扭转接触问题

扭转问题的分析遵循与半空间问题同样的路线．这样，由Papkovich-Neuber势(11.2.45)，位移和应力由方程(10.2.46)给出，并且现在

$$\psi(r,z)=H_1[\xi^{-1}\{A(\xi)\exp(-\xi z)+B(\xi)\exp(\xi z)\};\xi\to r] \tag{11.6.1}$$

所以若夹层占有$0\leqslant z\leqslant h$，并且若

$$v(r,h)=0,\quad \tau_{\theta z}(r,0)=-q(r) \tag{11.6.2}$$

那么

$$\mu v(r,z)=H_1\left[\xi^{-1}\frac{\sinh\xi(h-z)}{\cosh\xi h}Q(\xi);\xi\to r\right] \tag{11.6.3}$$

$$\tau_{\theta z}(r,z)=-H_1\left[\frac{\cosh\xi(h-z)}{\cosh\xi h}Q(\xi);\xi\to r\right] \tag{11.6.4}$$

其中$Q(\xi)=H_1[q(r);\xi]$．这样半径为a的刚性盘与$z=0$上的夹层相接触，扭转角为γ时，这一问题的对偶积分方程为

$$\mu v(r,0)\equiv H_1[\xi^{-1}\tanh\xi h Q(\xi);\xi\to r]=\gamma r,\ r\leqslant a \tag{11.6.5}$$

$$\tau_{\theta z}(r,0)\equiv -H_1[Q(\xi);\xi\to r]=0,\qquad r>a \tag{11.6.6}$$

应用表5.7.1中的算子11于方程(11.6.6)，我们得到

$$xA_2[\tau_{\theta z}(r,0);x]\equiv -F_s[Q(\xi);x]\equiv -g(x)=0,\ x>a \tag{11.6.7}$$

所以

$$Q(\xi)=F_s[g(x);\xi]=(2/\pi)^{1/2}\int_0^a g(x)\sin x\xi\,dx \tag{11.6.8}$$

并且应用表5.7.1中的算子2于方程(11.6.5)，我们得到

$$\mu x^{-1}A_1^{-1}[rv(r,0);x]=F_s[Q(\xi);x]+F_s[(\tanh\xi h-1)$$

$$\times Q(\xi);x] \qquad (11.6.9)$$

所以(Florence(1961), Gladwell(1969))

$$g(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^a M(x,y)g(y)\mathrm{d}y=(2/\pi)^{1/2}2\mu\gamma x \qquad (11.6.10)$$

其中

$$M(x,y)=\int_0^\infty(\tanh\xi h-1)\sin x\xi\sin y\xi\mathrm{d}\xi \qquad (11.6.11)$$

对于大的 h/a, 这个方程可以把$M(x,y)$展开成形式

$$M(x,y)=\frac{1}{h}\sum_{m=1}^{\infty}a_m\left\{\left(\frac{x+y}{h}\right)^{2m}-\left(\frac{x-y}{h}\right)^{2m}\right\} \qquad (11.6.12)$$

以进行求解，并且得形式为

$$g(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}2\mu\gamma\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{h}\right)^n\theta_n(x) \qquad (11.6.13)$$

的解（例(11.6.2)）.

O′connor (1966) 对于一个厚度为h的夹层为两个相同的球压在中间的问题，作了类似的分析，这两个球是如此地大，以致它们可以被认为是半空间. Jahali(1975) 曾分析过半径为a的刚性盘与厚度为h、剪切模量为μ的夹层的扭转接触问题，而此夹层又与剪切模量为μ_2的半空间相接触. Dhaliwal与Singh(1978c)曾分析过这一问题的非均匀弹性的情形. 可见 Hassan(1979).

上面所列的每一个问题中的接触应力在接触区的边缘($r=a$)处具有平方根奇异性；实际上，在这个边界的附近，粘结将被破坏，并且将有滑移. 作了很多努力去构造一个模型，其中，在半径为b的内圆上，保持完全粘结，而在环形区$b\leqslant r\leqslant a$上发生滑动. 这些努力关于半空间的计算，在§12.4中给出；Keer(1964b)曾分析过夹层的问题，并且假设了一个“摩擦定律”，亦即，在滑动区内的剪应力是任意的. 这包括了Lubkin(1951)的假定，即剪切应力是两个无摩擦弹性球之间法向应力的乘数，这可以作为一个特殊情形. 因此，Keer问题的边界条件为

$$v(r,\theta,0)=\gamma r,\quad 0\leqslant r\leqslant b;\quad \tau_{\theta z}(r,\theta,0)=-\mu f(r),\quad b<r\leqslant a \tag{11.6.14}$$

$$\tau_{\theta z}(r,\theta,0)=0,\quad r>a;\quad v(r,\theta,0)=0,\quad r\geqslant 0 \tag{11.6.15}$$

其解可以作为两个部分的和而求得：(*i*) 对于半径为b的Florence问题(11.6.10)～(11.6.11)与(*ii*)对于下列边界条件问题的解

$$v(r,\theta,0)=0,\quad 0\leqslant r\leqslant b;$$

$$\tau_{\theta z}(r,\theta,0)=-\mu f(r)H(a-r),\quad r>b \tag{11.6.16}$$

$$v(r,\theta,0)=0,\quad r\geqslant 0 \tag{11.6.17}$$

Keer用形如(10.6.11)的表示解决了这第二个问题，这一表示，早先曾为England(1962)所使用过，不过这一问题用(11.6.5)～(11.6.6)一样可以求解. 在$r\to b-$处，这每一个问题的解中，应力$\tau_{\theta z}(r,\theta,0)$都呈现$(b^2-r^2)^{-1/2}$的奇异性；找到$a$，$b$，$\gamma$与$f(r)$之间的关系，求解便得以完成，并且可以消除这种奇异性.

这样，对于问题(*i*)，剪应力$\tau_{\theta z1}$是

$$\tau_{\theta z1}=-A_2^{-1}[x^{-1}g_1(x);r]=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_r^b\frac{g_1(x)\,\mathrm{d}x}{(x^2-r^2)^{1/2}} \tag{11.6.18}$$

其中$g_1(x)$满足

$$g_1(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^b M(x,y)\,g_1(y)\,\mathrm{d}y=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}2\mu\gamma x \tag{11.6.19}$$

问题(*ii*)可以通过在(11.6.5)中引进$\tanh\xi hQ(\xi)=G_2(\xi)$导致

$$\mu v_2(r)\equiv H_1[\xi^{-1}G_2(\xi);r]=0,\quad r\leqslant b \tag{11.6.20}$$

$$\tau_{\theta z2}\equiv -H_1[\coth\xi hG_2(\xi);r]=\mu f(r)H(a-r)\quad r>b \tag{11.6.21}$$

而得解，并且用表 5.7.1 中的款 2 与款11分别对这些方程进行运算，我们得到

$$\mu x^{-1}A_1^{-1}\{rv_2(r);x\}=F_0[G_2(\xi);x]\equiv g_2(\xi)=0,\quad x\leqslant b \tag{11.6.22}$$

$$-xA_2\{\tau_{\theta z2};x\}\equiv g_2(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty M(x,y)\,g_2(y)\,dy=\mu F(x)$$

(11.6.23)

其中

$$\left.\begin{aligned}M(x,y)&=\int_0^\infty(\coth\xi h-1)\sin x\xi\sin y\xi\,d\xi\\F(x)&=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}x\int_x^a\frac{f(r)\,dr}{(r^2-x^2)^{1/2}}\end{aligned}\right\}\qquad(11.6.24)$$

方程(11.6.19)，(11.6.23)两者都是标准的Fredholm积分方程，它们可以对g_1,g_2解出。容易验证

$$\tau_{\theta z1}=-(2/\pi)^{1/2}g_1(b)\,(b^2-r^2)^{-1/2}+O(b^2-r^2)^{1/2},\quad \text{当}r\to b-\qquad(11.6.25)$$

方程(11.6.23)给出

$$\tau_{\theta z2}=-A_2^{-1}\left\{x^{-1}\left[g_2(x)+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty N(x,y)\,g_2(y)\,dy\right];r\right\}$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{d}{dr}\int_r^\infty\frac{g_2(x)\,dx}{(x^2-r^2)^{1/2}}-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}$$

$$\times\int_0^\infty N^*(r,y)\,g_2(y)\,dy\qquad(11.6.26)$$

其中

$$N^*(r,y)=\int_0^\infty\xi(\coth\xi h-1)J_1(r\xi)\sin y\xi\,d\xi\qquad(11.6.27)$$

(11.6.26)中的第一项可以用(11.6.29)重新改写并且导出

$$\tau_{\theta z2}=r(b^2-r^2)^{-1/2}\left\{\frac{2\mu}{\pi}\int_b^a\frac{(s^2-b^2)^{1/2}f(s)\,ds}{s^2-r^2}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\int_0^\infty g_2(y)\,dy\int_b^\infty\frac{(t^2-b^2)^{1/2}}{(t^2-r^2)}N^*(t,y)\,dt\right\}$$

$$-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2}\int_b^\infty N^*(r,y)g_2(y)\mathrm{d}y \qquad (11.6.28)$$

所以当$r\to b-$时不存在应力奇异性的条件是

$$g_1(b)+\frac{2}{\pi}b\int_b^\infty g_2(y)\mathrm{d}y\int_b^\infty (t^2-b^2)^{-1/2}N^*(t,y)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\mu b\int_b^a (t^2-b^2)^{-1/2}f(s)\mathrm{d}s \qquad (11.6.29)$$

对于半空间，这与Lubkin的结果（例10.2.12）相一致。

有一类扭转接触问题，包含一个半径为a的柱体夹杂在一半空间或一个夹层中，或者一个弹性杆与半空间相关联的问题，等等。这些问题，总是包含考虑 Bessel 函数方程的根，例如，$J_0(\mu_k a)=0$，并且应用对偶级数方程，这里将不去研究。读者可以参考：Srivastav(1964)，Arutiunian 与 Babloian(1966)，Sneddon(1966a)，Freeman与Keer(1967a,1967b)，Abramian与Arutuinian(1967)，Grilitskii与Kizyma(1967)，以及Dhaliwal,Singh与Sneddon(1979)。进一步的文献可以在这些文章中以及Sneddon(1966a)的书中查到。

例11.6

1. 试表明，对$h/a>1$，核$M(x,y)$可以表示成形式

$$M(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(1-2^{-2m})\zeta(2m+1)}{2^{2m+1}h^{2m+1}}\left\{(x+y)^{2m}-(x-y)^{2m}\right\}$$

其中 $\zeta(2m+1)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(2m+1)}$是Riemann ζ函数。

2. 利用例11.6.1得到一个解

$$g(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}2\mu\gamma\times\left\{1+\frac{\zeta(3)}{4\pi}\left(\frac{a}{h}\right)^3-\frac{\zeta(5)}{32\pi}\left(\frac{(5x^2+3)}{a^2}\right)\left(\frac{a}{h}\right)^5\right.$$

$$\left.+\cdots\right\}$$

并且试表明由圆盘所作用的总扭矩为

$$T = -2\pi\int_0^a r^2\tau_{\theta z}\,dr = 4\pi\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/3}\int_0^\infty tg(t)\,dt$$

$$= \frac{16\mu a^3\gamma}{3}\left\{1+\frac{\zeta(5)}{4}\left(\frac{a}{h}\right)^3-\frac{3\zeta(5)}{16\pi}\left(\frac{a}{h}\right)^5+\frac{\zeta^2(3)}{16\pi^2}\left(\frac{a}{h}\right)^6+\cdots\right\}$$

11.7 夹层与基础之间的退让接触

在§11.5中给出的退让接触（见§4.10）的分析，基于夹层可以处理成由Kirchhoff理论控制的板；这一分析的物理上不真实的结果之一是，在点载荷作用下，为半空间所压的板，仅仅同基础在一点接触．在这一节中，板考虑由§11.4的理论所控制的夹层．

属于本标题下的这一类问题中，首先考虑为Keer，Dundurs与Tsai(1972)所研究过的、在§6.8中分析过的轴对称类推．分布在表面$z=-h$的一个半径为b的圆上的法向压力，把一个夹层压入占据$z\geqslant 0$的半空间．夹层与半空间之间的接触保持在圆$r\leqslant a$，$z=0$上．边界条件为

$$\tau_{zz}^{(1)}(z,-h)=0,\qquad \tau_{rz}^{(1)}(r,-h)=-q(r)H(b-r) \tag{11.7.1}$$

$$\tau_{rz}^{(1)}(r,0)=0=\tau_{rz}^{(2)}(r,0) \tag{11.7.2}$$

$$\tau_{zz}^{(1)}(r,0)=\tau_{zz}^{(2)}(r,0)=-p(r)H(a-r) \tag{11.7.3}$$

$$w^{(1)}(r,0)=w^{(2)}(r,0),\quad 0\leqslant r\leqslant a \tag{11.7.4}$$

利用§10.6中给出的平面问题与轴对称问题之间的关系，特别是（例10.6.5）

$$[\tau_{zz}(r,z),\ w(r,z)]=r^{-1}A_2^{-1}[\tau_{xz}^{F}(x,z),w^{F}(x,z);r] \tag{11.7.5}$$

由方程(6.8.1)～(6.8.32) 可以推导出控制方程. 这些关系的系统的应用，表明

$$p(r)=H_0[P(\xi);r],\quad P(\xi)=F_0[\phi(x);\xi] \tag{11.7.6}$$

其中，对于$x>a$，$\phi(x)=0$，则

$$p(r)=r^{-1}A_2^{-1}[\phi(x);r]$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(a^2-r^2)^{-1/2}\phi(a)-\int_r^a(x^2-r^2)^{-1/2}\phi'(x)\mathrm{d}x \tag{11.7.7}$$

并且退让接触条件是$\phi(a)=0$。此外，总作用力为

$$P_0=2\pi\int_0^a rp(r)\mathrm{d}r=2\pi P(0)=2\pi\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^a\phi(x)\mathrm{d}x \tag{11.7.8}$$

位移$w^{(1)}(r,0)$，$w^{(2)}(r,0)$给出为

$$w^{(i)}(r,0)=H_0[\xi^{-1}V^{(i)}(\xi);r] \tag{11.7.9}$$

并且方程(11.3.12)结合(11.7.4)导出

$$(\vartheta_1+\vartheta_2)\phi(s)+\frac{2}{\pi}\vartheta_1\int_0^a K_1(s,t)\phi(t)\mathrm{d}t=C \tag{11.7.10}$$

其中C是一个与夹层和半空间相对任意刚体位移有关的常数，并且

$$K_1(s,t)=\int_0^\infty[e(u)\cos\xi t-f(u)\hat{Q}(\xi)]\cos\xi s\mathrm{d}\xi \tag{11.7.11}$$

其中$e(u)$,$f(u)$由(6.8.10)给出，并且

$$\hat{Q}(\xi)=(2\pi/P_0)H_0[q(r);\xi] \tag{11.7.12}$$

对(11.7.10) 中的积分进行分部积分，接着对得到的方程进行微分，导出

$$\int_0^a K_2(s,t)\phi'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{1+\alpha}\phi'(s) \tag{11.7.13}$$

其中α是不匹配参数(6.8.31)以及

$$K_2(s,t)=\int_0^\infty[t\xi f(u)\ \hat{Q}(\xi)-e(u)\sin\xi t]\sin\xi s\,d\xi \quad (11.7.14)$$

Keer等(1972)对两种情形研究过方程(11.7.13)：在$r=0$作用一个集中载荷和在半径$r=b$的圆上作用一个均布载荷。为了数值计算的目的，选择a和找到α值($-1\leqslant\alpha\leqslant1$)是方便的，对这些值，方程(11.7.13)有一个对应于纯压缩接触应力的解。在每一种情形，可以发现a的这个值是唯一的。可以容易验证，a/h与总载荷无关，因此它是b/h与α的函数。图 11.7.1 示出a/h在不同b/h值下作为α的函数.同时显示了 Weitsman(1969)得到的值，它们在§11.5中叙述过，并且对刚性半空间($\alpha=1$)导出$a=0$。

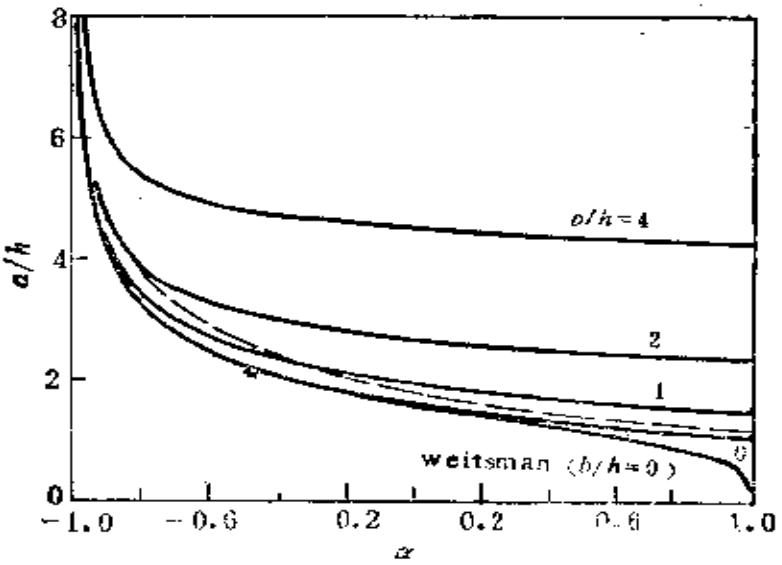


图11.7.1 均匀分布载荷与集中载荷的接触范围

这个题目的问题早先已为不少其它研究者所研究过。Hussain与Anderson (1969) 建立了夹层和基础之间退让接触问题的基本公式表述，并且用变分法求解了控制积分方程。对于点载荷，他们发现值$a/h=1.16$，正如图11.7.1所示，并且稍微高于Keer等得到的值。Pu与Hussian(1970) 建立了半空间上的夹层问题的基本公式表述，并且用单项变分近似再次求解出控制方程，得到了图11.7.1中虚线所示结果。Lamziuk与Privarnik-

ov（1971）考虑了被置于$z=-h$与$z=0$之间的一个夹层，为一轴对称刚性凸压头所作用，在$z=-h$，$r=0$处受一集中法向力所压挤。压头的凸面为$z=f(r)$所给出，而侧表面是一个半径为R的圆柱。压头与夹层在半径$a<R$的圆上为不完全接触。作者们表明，所有的可能接触的表面中，平表面是接触半径最大的一个表面，并且在这种情形$a/h=1.1$。这个值与Keer等所给的$a=1$值相一致。Gecit与Erdogan(1978)研究了夹层与光滑基础之间在轴对称载荷作用下的分离。

其他的文章，我们指出为Tu与Gazis(1964)和Tu(1967)的那些，两者均涉及为两个球压在中间的夹层，前者给出了适宜于大h/a的方法，后者对于小h/a的情形，给出了一个简单的数值方法。Keer与Luk(1976)分析了相同材料的夹层与半空间的附着（连带）问题。

第十二章　三维接触问题

12.1　各向异性半空间

弹性半空间接触问题求解的基本工具，是给出位移u_j（x_1，x_2，x_3)的影响函数H_{jk}，尤其对应于表面$x_3=0$处，由于点(x_1'，x_2'，0)的单位集中面力τ_{k3}引起位移的影响函数．对各向同性半空间，可以用所谓Papkovich-Neuber的表示，把接触问题化成势函数问题，如第十章中的讨论，对于一般各向异性半空间，这种推导是不可能的，但Willis（1966）已经表明，运用二维Fourier变换（§5.7），关于影响函数的足够重要的信息可以得到，以致很多重要的接触问题，包括Hertz问题，可以化成一维积分进行计算．在这一节中，介绍Willis的分析，以及它在横观各向同性介质中的特殊形式，在这种情况下势函数解是存在的，我们将讨论这一特殊形式．

在无体力时，均匀弹性半空间的静力弹性应力-应变关系式（1.8.1)，在这里可以写成

$$\tau_{jk,k}=0 \tag{12.1.1}$$

和

$$\tau_{jk}=c_{jklm}e_{lm} \tag{12.1.2}$$

式（12.1.1）中的逗号表示求导数，式（12.1.2）中的记号由§1.8给出，重复下标表示对1,2,3求和．引进这一规定很方便，即拉丁字母下标取值为1，2，3，而希腊字母取值为1，2.那么，在（12.1.1）中消去τ_{ij}，按照Willis（1966）的文章，我们得到

$$c_{j\alpha k\beta}u_{k,\alpha\beta}+(c_{j\alpha k3}+c_{j3k\alpha})u_{k,\alpha 3}+c_{j3k3}u_{k,33}=0 \tag{12.1.3}$$

现在定义二维Fourier变换（§5.7）$F_{(2)}$为

$$\tilde{u}_j(\xi_1,\xi_2,x_3)=F_{(2)}\left[u_j(x_1,x_2,x_3);\ (x_1,x_2)\to(\xi_1,\xi_2)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}u_j(x_1,x_2,x_3)\exp i(x_\alpha\xi_\alpha)\,dx_1dx_2$$

(12.1.4)

其中，$x_\alpha\xi_\alpha=x_1\xi_1+x_2\xi_2$，并且对式（12.1.3）作变换$F_{(2)}$，得到

$$-\xi_\alpha\xi_\beta c_{j\alpha k\beta}\tilde{u}_k-i\xi_\alpha(c_{j\alpha k3}+c_{j3k\alpha})\,\tilde{u}_{k,3}+c_{j3k3}\tilde{u}_{k,33}=0$$

(12.1.5)

这是含有三个二阶常微分方程的一个方程组，具有通解

$$\tilde{u}_j(\xi_1,\xi_2,x_3)=\sum_{A=1}^{6}a_A^j(\xi_1,\xi_2)\exp[im_A(\xi_1,\xi_2)x_3]b_A(\xi_1,\xi_2)$$

(12.1.6)

其中，m_A是行列式方程

$$\left|-\xi_\alpha\xi_\beta c_{j\alpha k\beta}+m\xi_\alpha(c_{j\alpha k3}+c_{j3k\alpha})-m^2c_{j3k3}\right|=0$$

(12.1.7)

的六个根，并且a_i^A是方程

$$\left[-\xi_\alpha\xi_\beta c_{j\alpha k\beta}+m_A\xi_\alpha(c_{j\alpha k3}+c_{j3k\alpha})-m_A^2c_{j3k3}\right]a_k^A=0$$

(12.1.8)

的适当的无量纲解，其中$j,k=1,2,3$，$A=1,2,\cdots,6$以及$b_A(\xi_1,\xi_2)$是任意的。

因为方程(12.1.3)是椭圆型的，所以根m_A不是实的，并且式(12.1.7)中的所有系数都是实的，则m_A将以复数共轭对形式出现。记具有正虚部的三个根为m_1,m_2,m_3，我们注意到，适合半空间$x_3\geqslant 0$的解，为

$$\tilde{u}_j(\xi_1,\xi_2,x_3)=\sum_{\alpha=1}^{3}a_j^\alpha(\xi_1,\xi_2)\exp[im_\alpha(\xi_1,\xi_2)x_3]b_\alpha(\xi_1,\xi_2)$$

(12.1.9)

当两个根m_α重合时，如发生在各向同性半空间中的那样，该理论必须经修改，这在下面将要讨论。

未知量$b_\alpha(\xi_1,\xi_2)$必须由边界条件确定。若它们与给定的$x_3=0$上的表面应力有关，则只研究在原点的集中点载荷就够了，任意分布载荷，可由点载荷叠加而得到。这样假定

$$\tau_{j3}(x_1,x_2,0)=-\delta_{jk}\delta(x_1)\delta(x_2) \tag{12.1.10}$$

其中，k取1,2,3，δ_{jk}是Kronecker的δ符号，$\delta(x_1),\delta(x_2)$是Dirac的δ函数。于是，

$$\tilde{\tau}_{j3}(\xi_1,\xi_2,0)=-\delta_{jk}/(2\pi) \tag{12.1.11}$$

但是

$$\tau_{j3}(x_1,x_2,x_3)=c_{j3l\alpha}u_{l,\alpha}+c_{j3l3}u_{l,3} \tag{12.1.12}$$

所以

$$\tilde{\tau}_{j3}(\xi_1,\xi_2,x_3)=-i\xi_\alpha c_{j3l\alpha}\tilde{u}_l+c_{j3l3}\tilde{u}_{l,3} \tag{12.1.13}$$

式(12.1.9),(12.1.11)与(12.1.13)联立，我们得到

$$\sum_{s=1}^{3}\{-i\xi_\alpha c_{j3l\alpha}+im_\alpha c_{j3l3}\}a_l^s b_s(\xi_1,\xi_2)=-b_{jk}/(2\pi) \tag{12.1.14}$$

方程(12.1.7)表明，m_α是ξ_1,ξ_2的+1级齐次正数。所以，b_α，$\tilde{u}_j$都是ξ_1,ξ_2的−1级齐次正数。作用在表面$x_3=0$上原点处k方向的单位载荷引起的位移$\tilde{u}_j$，将记为$\tilde{H}_{jk}(\xi_1,\xi_2)$，它是$\xi_1,\xi_2$的−1级齐次函数。由叠加原理可知，$x_3=0$处区域$S$的分布

$$\tau_{k3}(x_1',x_2',0)=-g_k(x_1',x_2') \tag{12.1.15}$$

引起在x_1,x_2处的表面位移，可以写成

$$u_j(x_1,x_2)=\iint_S H_{jk}(x_1-x_1',x_2-x_2')\,g_k(x_1',x_2')\,dx_1'\,dx_2' \tag{12.1.16}$$

其中

$$H_{jk}(x_1,x_2)=F_{(2)}^{-1}[\tilde{H}_{jk}(\xi_1,\xi_2);\ (\xi_1,\xi_2)\to(x_1,x_2)] \tag{12.1.17}$$

将是x_1,x_2的-1级齐次函数，变换$F_{(2)}$(5.7.4)的卷积定理，可使(12.1.6)写成

$$u_j(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{H}_{jk}(\xi_1,\xi_2)G_k(\xi_1,\xi_2)\times\exp(-i\xi_1x_1-i\xi_2x_2)\,d\xi_1d\xi_2 \tag{12.1.18}$$

其中

$$G_k(\xi_1,\xi_2)=F_{(2)}[g_k(x_1',x_2');\ (x_1',x_2')\to(\xi_1,\xi_2)] \tag{12.1.19}$$

Willis(1966)给出半空间中的位移表达式。Svelko(1964)表明，对正交各向同性介质，特别是轴对称载荷下，某些简单结果可以得到。也可以参考Kim与Sunchelev(1970)与Svelko(1970)，(1974)。

当介质是横观各向同性（例1.8.3），且以x_3轴为对称轴，则应力—应变关系将给出

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{11}&=c_{11}u_{1,1}+c_{12}u_{2,2}+c_{13}u_{3,3},\\
\tau_{22}&=c_{12}u_{1,1}+c_{11}u_{2,2}+c_{13}u_{3,3},\\
\tau_{33}&=c_{13}u_{1,1}+c_{13}u_{2,2}+c_{33}u_{3,3},\\
\tau_{23}&=c_{44}(u_{2,3}+u_{3,2}),\\
\tau_{31}&=c_{44}(u_{3,1}+u_{1,3}),\\
\tau_{12}&=c_{66}(u_{1,2}+u_{2,1}),
\end{aligned}\right\} \tag{12.1.20}$$

其中，$c_{66}=(c_{11}-c_{12})/2$，而方程(12.1.8)化为

$$\begin{Bmatrix} c_{11}\xi_1^2 + c_{66}\xi_2^2 + c_{44}m_1^2, & \frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\xi_1\xi_2, & -(c_{13}+c_{44})\xi_1 m \\ \frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\xi_1\xi_2, & c_{66}\xi_1^2 + c_{11}\xi_2^2 + c_{44}m^2, & -(c_{13}+c_{44})\xi_2 m \\ -(c_{13}+c_{44})\xi_1 m, & -(c_{13}+c_{44})\xi_2 m, & -c_{44}(\xi_1^2+\xi_2^2) + c_{33}m^2 \end{Bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = 0 \qquad (12.1.21)$$

这些方程具有解$a_1 = \xi_1, a_2 = \xi_2, a_3 = \beta\xi$，其中，$\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$，如果

$$\left.\begin{aligned} c_{11}\xi^2 + c_{44}m^2 - (c_{13}+c_{44})\beta\xi m = 0 \\ -(c_{13}+c_{44})\xi m + (c_{44}\xi^2 + c_{33}m^2)\beta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12.1.22)$$

也就是，只要$m^2 = \kappa^2\xi^2$，其中κ^2满足

$$c_{33}c_{44}\kappa^4 + (c_{11}c_{33} - 2c_{13}c_{44} - c_{13}^2)\kappa^2 + c_{11}c_{44} = 0 \qquad (12.1.23)$$

这样，（12.1.21）对应于头两个根的解，可以写成

$$a_\alpha{}^A = \xi_\alpha, \beta_A = \frac{(c_{11} + c_{44}\kappa_A^2)}{(c_{13}+c_{44})\kappa_A}, \quad A = 1,2 \qquad (12.1.24)$$

其中，κ_1, κ_2是(12.1.23) 具有正虚部的两个根；仅有的重要情形，发生在各向同性介质中，此时（12.1.23）式的根是重根。式（12.1.21）的第三个解是

$$a_1{}^3 = \xi_2, \quad a_2{}^3 = -\xi_1, \quad a_3{}^3 = 0 \qquad (12.1.25)$$

这将满足式（12.1.23），尚若$m_3 = \kappa_3\xi$以及

$$\kappa_3{}^2 = -(c_{11} - c_{12})/(2c_{44}) \qquad (12.1.26)$$

应力τ_{j3}为

$$\left.\begin{aligned} \tau_{13} &= c_{44}(u_{3,1} + u_{1,3}) \\ \tau_{23} &= c_{44}(u_{3,2} + u_{2,3}) \\ \tau_{33} &= c_{13}(u_{1,1} + u_{2,2}) + c_{33}u_{3,3} \end{aligned}\right\} \qquad (12.1.27)$$

所以，在$x_3=0$面上，应力的Fourier变换为

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\tau}_{13}&=c_{44}\mathrm{i}\{b_1\xi_1(m_1-a_3^1)+b_2\xi_1(m_2-a_3^2)+b_3\xi_2m_3\}\\ \tilde{\tau}_{23}&=c_{44}\mathrm{i}\{b_1\xi_1(m_1-a_3^1)+b_2\xi_2(m_2-a_3^2)-b_3\xi_1m_3\}\\ \tilde{\tau}_{33}&=-\mathrm{i}\{b_1(c_{13}\xi^2-c_{33}m_1a_3^1)+b_2(c_{13}\xi^2-c_{33}m_2a_3^2)\}\end{aligned}\right\}\tag{12.1.28}$$

因此，在式（12.1.11）中当$k=3$时，我们有

$$b_1=-\mathrm{i}(\kappa_2-\beta_2)C\xi^{-2},\quad b_2=\mathrm{i}(\kappa_1-\beta_1)C\xi^{-2},\quad b_3=0\tag{12.1.29}$$

以及

$$2\pi C\{c_{13}(\kappa_2-\beta_2-\kappa_1+\beta_1)+c_{33}[\kappa_2\beta_2(\kappa_1-\beta_1)-\kappa_1\beta_1(\kappa_2-\beta_2)]\}=1$$

即

$$2\pi C\{(c_{13}-c_{33}\beta_1\beta_2)(\kappa_2-\kappa_1)-(c_{13}-c_{33}\kappa_1\kappa_2)(\beta_2-\beta_1)\}=1\tag{12.1.30}$$

方程（12.1.24）表明

$$\beta_2-\beta_1=-\frac{(c_{11}-c_{44}\kappa_1\kappa_2)}{(c_{13}+c_{44})\kappa_1\kappa_2}(\kappa_2-\kappa_1),\quad \beta_1\beta_2=\frac{c_{11}}{c_{33}\kappa_1\kappa_2}\tag{12.1.31}$$

所以

$$2\pi C\frac{(\kappa_2-\kappa_1)}{\kappa_1\kappa_2}(c_{13}\kappa_1\kappa_2-c_{11})+(c_{13}-c_{33}\kappa_1\kappa_2)\frac{(c_{13}-c_{44}\kappa_1\kappa_2)}{(c_{13}+c_{44})}=1$$

这化成

$$2\pi C(\kappa_2-\kappa_1)(c_{13}^2-c_{11}c_{33})=(c_{13}+c_{44})\tag{12.1.32}$$

根κ_1^2，κ_2^2或者（1）为实的和负的，所以$\kappa_1^2=-K_1^2$，$\kappa_2^2=-K_2^2$，$\kappa_1=\mathrm{i}K_1$，$\kappa_2=\mathrm{i}K_2$，这种情形下，C为纯虚数，或者（2）为复共轭，所以，$\kappa_1^2=K^2(\cos 2\gamma+\mathrm{i}\sin 2\gamma)$，$\kappa_2^2=\overline{\kappa_1^2}$，

$\kappa_1 = K(\cos\gamma + i\sin\gamma)$，$\kappa_2 = -\overline{\kappa_1}$，$\kappa_2 - \kappa_1 = -2\kappa\cos\gamma$，$\kappa_1\kappa_2 = -K^2$，所以，$C$是纯实数。

量$\tilde{H}_{jk}(\xi_1, \xi_2)$与变换$\tilde{u}_j(\xi_1, \xi_2, 0)$有关。取$j = k = 3$，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{u}_3(\xi_1, \xi_2, 0) &= a_3^1 b_1 = a_3^1 b_2 + a_3^2 b_3 \\ &= -iC\xi^{-1}\{\beta_1(\kappa_2 - \beta_2) - \beta_2(\kappa_1 - \beta_1)\} \\ &= \frac{ic_{11}}{2\pi(c_{11}c_{33} - c_{33}^2)} \cdot \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1\kappa_2} \frac{1}{\xi} \\ &= \frac{\vartheta}{2\pi\xi} \qquad (12.1.33)\end{aligned}$$

并且在（1）与（2）两种情形下，ξ^{-1}的系数是实的，ϑ是弹性常数的组合，在各向同性时，变成$(1-\nu)/\mu$。在半空间里的点上，

$$\begin{aligned}\tilde{u}_3(\xi_1, \xi_2, x_3) = -iC\xi^{-1}\{&\beta_1(\kappa_2 - \beta_2)\exp(i\kappa_1 x_3\xi) \\ &-\beta_2(\kappa_1 - \beta_1)\exp(i\kappa_2 x_3\xi)\} \qquad (12.1.34)\end{aligned}$$

它给出在原点作用的单位法向载荷所引起的法向位移，即

$$\begin{aligned}u_3(x_1, x_2, x_3) = &-iC\beta_1(\kappa_2 - \beta_2)(x_1^2 + x_2^2 - \kappa_1^2 x_3^2)^{-1/2} \\ &+iC\beta_2(\kappa_1 - \beta_1)(x_1^2 + x_2^2 - \kappa_2^2 x_3^2)^{-1/2} \\ &\qquad (12.1.35)\end{aligned}$$

并且可以再次验证，它总是实的。这特别表明，由原点单位集中法向力在$x_3 = 0$面上引起的位移，正比于r^{-1}，正如在各向同性情形一样（例12.1.7）。进一步的结果，可以在Lekhnitskii (1962b)，(1963a) 的论文与著作中查到；分析横观各向同性半空间实践的例子，可以在 Conway，Farnham（1967b），Conway，Farnham，Ku (1967)，Fabrikant (1971)，Dahan，Zarka (1977)，Pouyet，Lataillade (1979) 等人的论文中找到。这些结果，特别是(12.1.33)，将用于§12.2中的某些接触问题。

上面给出的关于横观各向同性介质的分析，可以利用下面的表达式改写

$$\left.\begin{aligned} u_1(x_1,x_2,x_3) &= \phi^1_{,1} + \phi_{,2}^{\,2} - \phi_{,3}^{\,3} \\ u_2(x_1,x_2,x_3) &= \phi_{,2}^{\,1} + \phi_{,3}^{\,2} + \phi_{,1}^{\,3} \\ u_3(x_1,x_2,x_3) &= -\frac{\beta_1}{\kappa_1}\phi_{,3}^{\,1} - \frac{\beta_2}{\kappa_2}\phi_{,3}^{\,2} \end{aligned}\right\} \qquad (12.1.36)$$

其中，$\phi^k(x_1,x_2,x_3)$是满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{1}{k_k^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\phi^k = 0, \quad k = 1,2,3 \qquad (12.1.37)$$

的势函数。这些表达式将在例12.1.6中，作进一步研究，并且已经为H. A. Elliott(1948,1949)与Shield(1951)用于裂纹问题与压头问题；也可以见Green与Zerna(1954,p183)与Deutsch(1963)的作品。Svelko(1969)根据表达式

$$u_1 = \phi_{,1}^{\,1} + \phi_{,2}^{\,2}, \quad u_2 = \phi_{,2}^{\,1} - \phi_{,1}^{\,2}, \quad u_3 = \phi_{,3}^{\,3} \qquad (12.1.38)$$

发展了另外一种分析。Bickford (1977) 已经推广Papkovich-Neuber解于横观各向同性介质。当介质为各向同性的，即

$$c_{33} = c_{11} = \frac{2u(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad c_{33} = c_{12} = \frac{3u\nu}{1-2\nu},$$
$$c_{44} = \mu \qquad (12.1.39)$$

则方程(12.1.23) 的根为$\kappa_1^2 = \kappa_2^2 = \kappa_3^2 = -1$。在这种退化情形中，方程 (12.1.9) 变成

$$\left.\begin{aligned} \tilde{u}_1(\xi_1,\xi_2,x_3) &= \exp(-\xi x_3)\{b_1\xi_1 + b_2\xi_1(\xi x_3 - \kappa) - 2b_3\xi_2\} \\ \tilde{u}_2(\xi_1,\xi_2,x_3) &= \exp(-\xi x_3)\{b_1\xi_1 + b_2\xi_2(\xi x_3 - \kappa) + 2b_3\xi_1\} \\ \tilde{u}_3(\xi_1,\xi_2,x_3) &= \exp(-\xi x_3)\{-ib_1\xi - ib_2\xi^2 x_3\} \end{aligned}\right\} \qquad (12.1.40)$$

以及

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{13}(\xi_1,\xi_2,x_3) &= 2\mu\xi\exp(-\xi x_3)\{-b_1\xi_1+b_2\xi_1(2-2\nu-\xi x_3)\\
&\qquad +b_3\xi_2\}\\
\tilde{\tau}_{23}(\xi_1,\xi_2,x_3) &= 2\mu\xi\exp(-\xi x_3)\{-b_1\xi_2+b_2\xi_2(2-2\nu-\xi x_3)\\
&\qquad -b_3\xi_1\},\\
\tilde{\tau}_{33}(\xi_1,\xi_2,x_3) &= 2\mu i\xi^2\exp(-\xi x_3)\{b_1-b_2(1-2\nu-\xi x_3)\}
\end{aligned}\right\}$$

(12.1.41)

方程（12.1.40）和（12.1.41）导致与（2.5.25）～（2.5.27）相同的结果，如例12.1.3表明。

对各向异性的压头问题，特别是六方晶系弹性半空间，已经为Guidera(1975)和Guidera，Lardner与Tupholme(1978)所研究。

例2.1

1．试表明，对于各向同性介质，由原点的单位集中法向载荷，引起位移的Fourier变换，为

$$4\pi\mu\tilde{u}_1(\xi_1,\xi_2,x_3) = i\xi^{-2}\xi_1\exp(-\xi x_3)[-1+2\nu+\xi x_3]$$

$$4\pi\mu\tilde{u}_2(\xi_1,\xi_2,x_3) = i\xi^{-2}\xi_2\exp(-\xi x_3)[-1+2\nu+\xi x_3]$$

$$4\pi\mu\tilde{u}_3(\xi_1,\xi_2,x_3) = \xi^{-1}\exp(-\xi x_3)[2-2\nu+\xi x_3]$$

其中，$\xi^2=\xi_1^2+\xi_2^2$。

2．利用例12.1.1，试表明，对于一个各向同性介质，有

$$\tilde{H}_{13}(\xi_1,\xi_2) = -\frac{i(1-2\nu)\xi_1}{4\pi\mu\xi^2},\quad \tilde{H}_{23} = -\frac{i(1-2\nu)\xi_2}{4\pi\mu\xi^2},$$

$$\tilde{H}_{33}(\xi_1,\xi_2) = \frac{\nu}{2\pi\xi}$$

再证明，当介质变成各向同性时，以式（12.1.33）取极限值，可以得到$\tilde{H}_{33}$同样的值．试再表明，

$$\widetilde{H}_{11}(\xi_1,\xi)=\frac{(1-\nu)\ \xi_1^2+\xi_2^2}{2\pi\mu\xi^2},\quad \widetilde{H}_{21}(\xi_1,\xi_2)=\frac{\nu\xi_1\xi_2}{2\pi\mu\xi^2},$$

$$\widetilde{H}_{31}(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\ (1-2\nu)\ \xi_1}{4\pi\mu\xi^2}$$

3. 对例12.1.1中的$\widetilde{u}_k$，用变换$F^*_{(2)}$计算位移$u_k(x_1,x_2,x_3)$。利用

$$\begin{aligned}F^*_{(2)}&[\xi^{-1}\exp(-\xi x_1)\ ;\ (\xi_1,\xi_2)\to(x_1,x_2)]\\&=H_0[\xi^{-1}\exp(-\xi x_3)\ ;\xi\to r]\\&=R^{-1}\end{aligned}$$

其中，$r^2=x_1^2+x_2^2$，$R^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$，试推导式(2.5.25) ~ (2.5.27)中与法向载荷有关的部分。

4. 试表明，若C_{ijkl}满足$C_{ijkl}=C_{jikl}=C_{klij}$，那么，$\widetilde{H}_{jk}(\xi_1,\xi_2)=\widetilde{H}_{kj}(\xi_1,\xi_2)$，其中，字母顶上的矢横"－"表示复数共轭，这暗示

$$H_{jk}(x_1-x_1',x_2-x_2')=H_{kj}(x_1'-x_1,x_2'-x_2)$$

这是互易定理的一种特殊形式。

5. 试表明对于横观各向同性介质

$$\widetilde{H}_{\alpha\beta}(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\xi_\alpha\xi^2}{2\pi}\frac{(c_{13}\kappa_1\kappa_2+c_{11})}{(c_{11}c_{33}-c_{13}^2)}\frac{1}{\kappa_1\kappa_2},\qquad \alpha=1,2$$

6. 试求出对应于式(12.1.36)的应力$\tau_{jk}(x_1,x_2,x_3)$；并且表明在$x_3=0$上，若$\tau_{13}=\tau_{23}=0$，当$x_3=0$时则有$\phi^1=0$，$(1-\beta_1/\kappa_2)\phi'+(1-\beta_2/\kappa_2)\phi^0=0$。令

$$\phi^1=\frac{\kappa_1}{\kappa_1-\beta_1}\Phi(x_1,x_2,x_1),\quad \phi^2=\frac{-\kappa_2}{\kappa_2-\beta_2}\Phi(x_1,x_2,x_2)$$

其中，$z_\alpha=-i\kappa_\alpha x_3$，并且$\Phi(x_1,x_2,x_3)$满足$(\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2)\Phi=0$，试表明

$$u_3=\frac{i\beta_1\kappa_1}{\kappa_1-\beta_1}\frac{\partial\Phi(x_1,x_2,z_1)}{\partial z_1}-\frac{i\beta_2\kappa_2}{\kappa_2-\beta_1}\frac{\partial\Phi(x_1,x_2,z_2)}{\partial z_2}$$

$$\tau_{33}=-(c_{13}-c_{33}\beta_1\kappa_1)\frac{\kappa_1}{\kappa_1-\beta_1}\frac{\partial^2\Phi(x_1,x_2,z_1)}{\partial z_1^2}$$

$$+(c_{13}-c_{33}\beta_2\kappa_2)\frac{\kappa_2}{\kappa_2-\beta_1}\frac{\partial^2\Phi(x_1,x_2,z_2)}{\partial z_2^2}$$

当$x_3=0$时，则

$$u_3=\left\{\frac{i\beta_1\kappa_1}{\kappa_1-\beta_1}-\frac{i\beta_2\kappa_2}{\kappa_2-\beta_2}\right\}\frac{\partial\Phi\ (x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}\Bigg|_{x_3=0}$$

$$\tau_{23}=\left\{-\ (c_{12}-c_{23}\beta_1\kappa_1)\ \frac{\kappa_1}{\kappa_1-\beta_1}\right.$$

$$\left.+\ (c_{12}-c_{23}\beta_2\kappa_2)\ \frac{\kappa_2}{\kappa_2-\beta_2}\right\}\frac{\partial^2\Phi\ (x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3^2}\Bigg|_{x_3=0}$$

所以，针对各向同性体的Boussinesq问题发展的方法，可以直接推广到横观各向同性体。

7．试表明，均匀分布在圆$x_1^2+x_2^2=a^2$上的单位载荷引起的$G_3(\xi_1,\xi_2)$，为

$$G_3\ (\xi_1,\xi_2)\ =\frac{J_1\ (\xi a)}{\pi\xi a}$$

那么，对一个在原点的单位集中载荷，$G_3\ (\xi_1,\xi_2)\ =1/2\pi$。方程（12.1.18）说明，由于法向载荷分布而引起的法向位移的 Fourier 变换，由式子$\widetilde{u}_3\ (\xi_1,\xi_2,0)\ =2\pi\kappa\widetilde{H}_{33}\ (\xi_1,\xi_2)\ G_3\ (\xi_1,\xi_2)$给出。利用这一结果，试表明，由原点上的单位法向集中载荷引起的法向位移，为

$u_3\ (x_1,x_2,0)\ =\vartheta/\ (2\pi r)$〔提示：利用积分

$$\int_0^\infty xJ_0(\xi r)\,dr=aJ_1(\xi a)/\xi;\qquad \int_0^\infty J_0\ (\xi r)\ d\xi=1/r\Big]$$

8．由例12.1.2，利用$\widetilde{H}_{33}$和积分

$$\int_0^{2\pi}\exp\ (ir\cos\ (\theta-\phi)\ d\theta=2\pi J_0(r)$$

试表明，由均匀分布在圆$r^2=x_1^2+x_2^2\leqslant a^2$上的载荷$P_0$引起的位移$u_3(x_1,x_2,0)$，为

$$u_3(x_1,x_2,0)=\vartheta P/(\pi a)\int_0^\infty\xi^{-1}J_1(a\xi)\,J_0(r\xi)\,d\xi$$

并与例2.6.1进行比较。

12.2 椭圆区域上的载荷

Klubin(1952)——他或许是第一次注意到了作用在一个各向同性半空间表面的圆$r\leqslant a$上的法向压力为

$$p(r)=p_0(1-r^2/a^2)^{-1/2}P_2[(1-r^2/a^2)^{1/2}] \qquad (12.2.1)$$

的人——给出了该表面上圆内的法向位移$w(r)$，它正比于多项式$P_2[(1-r^2/a^2)^{1/2}]$。这个结果——在§2.6作过说明，曾在§10.5中出现，作为用扁球坐标得到的弹性方程分离变量解的一个特殊情形——为Popov(1962)所重新推导出来的，它得到显式表达式为

$$w(r)=\lambda_*\vartheta p_0 P_2[(1-r^2/a^2)^{1/2}] \qquad (12.2.2)$$

其中

$$\lambda_*=\pi[P_2(0)]^2/2 \qquad (12.2.3)$$

椭圆区域$S:x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1, z=0$上，载荷的几种特殊形式，在§12.9中曾叙述和应用过。例如，自从Hertz时代以来所熟知的载荷

$$p(x,y)=p_0(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{-1/2},(x,\ y)在S中, \qquad (12.2.4)$$

给出常位移

$$w(x,y)=\vartheta b p_0 K(e),(x,y)在S中, \qquad (12.2.5)$$

其中，$e^2=1-b^2/a^2$以及$K(\cdot)$为第一类完全椭圆积分。这个例子以及§2.9中给出的其它例子，是由Mindlin (1949)与Lur'e (Лурье) (1964)给出的，后者是在§2.5中给出的受载区域上的Boussinesq积分得到的。它们以场点(x,y)为原点变换成一组极坐标，计算了积分。他们的计算，除了复杂之外，还有缺陷，然而并不影响最后的结果。许多精确的与近似的关系式以及数值结果，由Deresiewicz (1960)给出。Galin (1947b, 1961)表明，S上具有形式

$$p(x,y) = (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{-1/2} P_n(x,y), (x,y) 在 S 中 \tag{12.2.6}$$

其中$P_n(x,y)$是以x,y为变数的，阶数为n的多项式，它给出一种位移，此位移在S中为多项式$q_n(x,y)$，这一结果常称为Galin定理。Galin没有给出P_n与q_n之间的显式关系。Willis（1966）表明，在各向异性弹性半空间表面上的载荷

$$p(x,y) = p_0 (1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)^{1/2}, (x,y) 在 S 中, \tag{12.2.7}$$

在区域S中产生一个二次多项式位移，并且他把这个结果应用到两个各向异性体之间的Hertz接触问题。Shield(1951)已经较早地考虑过一六方晶系各向异性半空间的椭圆压头与裂纹问题。利用§2.9中的记号，我们假定，在未受应力状态下，两个物体的接触点附近，这两个物体的形状由（2.9.1）式给定。Hertz的基本假定是，两个物体可以用半空间近似地代表，接触区S上的压力引起半空间表面上的位移的变化w_1, w_2满足

$$w_1 + w_2 = \delta - Ax^2 - By^2 - 2Hxy, (x,y) 在 S 中 \tag{12.2.8}$$

（在各向异性情形中，方便的是，选择x与y轴沿接触椭圆的主轴方向，不致于使得含H的项为零）。Willis表明，物体间的接触应力将具有形式（12.2.7）；在一般情形下，p_0, a, b与δ, A, B, H之间的关系，将含有某些复杂积分的计算，但当介质为横观各向同性时，这些积分容易计算出来，如下面将要表明的那样。

Willis（1967）表明，作用在一个各向异性半空间上的一个多项式位移为$w = q_n(x,y)$，其次，多项式P_n和q_n的系数之间，包含有复杂的迴路积分。Willis（1968,1970）找到了对一个椭圆裂纹可资比较的结果。Gladwell（1978）得到对于横观各向同性介质情形下，多项式P_n和q_n之间的关系。用椭圆坐标，Shail（1978）给出各向同性半空间的椭圆压头与裂纹问题的综合处理；Lur'e（1941）与Galin（1961）作过类似的推导，但

他们得到的结果比较少。Shibuya（1977）用本质上类似于下面给出的方法，曾分析过一个椭圆压头的接触问题。

方程(12.1.18)是一个方便的起点，这里我们将恢复用x_1，x_2记x，y，如§12.1中那样。这给出了由表面应力分布

$$\tau_{k3}(x_1', x_2', 0) = -g_k(x_1', x_2'), \quad (x_1', x_2') \text{ 在 } S \text{ 中} \tag{12.2.9}$$

引起的位移$u_j(x_1, x_2)$，其形式为

$$u_j(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}_{jk}(\xi_1, \xi_2) G_k(\xi_1, \xi_2) \times \exp(-i\xi_1 x_1 - i\xi_2 x_2) d\xi_1 d\xi_2 \tag{12.2.10}$$

其中，$G_k(\xi_1, \xi_2)$是g_k的二维Fourier变换$F_{(2)}$。为了计算$G_k(\xi_1, \xi_2)$，我们用坐标

$$x_1' = a\rho\cos\phi, \quad x_2' = b\rho\sin\phi \tag{12.2.11}$$

其中，S是一个区域$|\rho| \leqslant 1$，$0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$。假定用这些坐标，$g_k$具有形式

$$g_k(x_1', x_2') = F(\rho)\cos m(\phi + \phi_0) \tag{12.2.12}$$

那么

$$G_k(\xi_1, \xi_2) = \frac{ab}{2\pi}\int_0^1 \rho F(\rho) d\rho \int_0^{2\pi} \cos m(\phi + \phi_0) \exp \times [i(a\xi_1\cos\phi + b\xi_2\sin\phi)\rho] d\phi \tag{12.2.13}$$

令

$$a\xi_1 = c\cos\psi, \quad b\xi_2 = c\sin\psi \tag{12.2.14}$$

那么，式（12.2.13）中对ϕ的积分变成

$$I_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos m(\phi + \phi_0) \exp[ic\rho\cos(\phi - \psi)] d\phi \tag{12.2.15}$$

它能表示成

$$I_m = \mathrm{i}^m \cos m(\psi + \phi_0) J_m(c\rho) \tag{12.2.16}$$

所以

$$G_k(\xi_1, \xi_2) = ab\mathrm{i}^m \cos m(\psi + \phi_0) \int_0^1 \rho F(\rho) J_m(c\rho) \mathrm{d}\rho \tag{12.2.17}$$

要求找一个由式(12.2.6)那样的载荷（法向或切向的）引起的表面位移。$g_k(x_1', x_2')$的一个典型项是

$$\begin{aligned}&(1 - x_1'^2/a^2 - x_2'^2/b^2)^{-1/2}(x_1')^p (x_2')^q \\ &= (1-\rho^2)^{-1/2} a^p b^q \rho^{p+q} \cos^p\phi \sin^q\phi\end{aligned} \tag{12.2.18}$$

并且$\cos^p\phi\sin^q\phi$可以表示成诸项$\cos m(\phi + \phi_0)$的线性组合，其中m的值与$p+q$类同。每项$\rho^{p+q}\cos m(\phi+\phi_0)$，在$p+q \geqslant m$时，可以表示诸项$P_n^m[(1-\rho^2)^{1/2}]\cos m(\phi+\phi_0)$的联合，其中，$m$和$n$类同，而且$n \geqslant m$。这样，取

$$F(\rho) = (1-\rho^2)^{-1/2} P_n^m[(1-\rho^2)^{1/2}] \tag{12.2.19}$$

是足够的，其中，m,n类同，并且$n \geqslant m$。在这种情形下，积分(12.2.17)是

$$I_{n,m}(c) = \int_0^1 \rho(1-\rho^2)^{-1/2} p_n^m[1-\rho^2)^{1/2}] J_m(c\rho)\mathrm{d}\rho \tag{12.2.20}$$

以及（例12.2.1）

$$I_{n,m}(c) = (-1)^{(n-m)/2} P_n^m(0) j_n(c) \tag{12.2.21}$$

其中，$j_n(c)$是第一类球Bessel函数。这样，

$$G_k(\xi_1, \xi_2) = ab(-1)^{n/2} P_n^m(0) \cos m(\psi + \phi_0) j_n(c) \tag{12.2.22}$$

现在将此式代入式（12.2.10)中，进行代换（12.2.14），利用

§12.1中提供的事实，即$\tilde{H}_{jk}(\xi_1,\xi_2)$是$-1$级齐次式，因而有

$$\tilde{H}_{jk}(\xi_1,\xi_2)=c^{-1}\tilde{H}_{jk}(a^{-1}\cos\psi,b^{-1}\sin\psi)$$
$$=c^{-1}\omega_{jk}(\psi) \qquad (12.2.23)$$

那么

$$u_j(x_1,x_2)=P_n^m(0)\left\{(-1)^{n/2}\int_0^\infty \exp(-i\xi c)\,j_n(c)\,dc\right\}$$
$$\times\int_0^{2\pi}\omega_{jk}(\psi)\cos(m\psi+\phi_0)\,d\psi \qquad (12.2.24)$$

其中

$$\xi=a^{-1}x_1\cos\psi+b^{-1}x_2\sin\psi \qquad (12.2.25)$$

然而ω_{jk}亦即$\tilde{H}_{jk}$不是实的.若半空间具有Green型各向异性，那么，例12.1.4表明，当$j=k$时，$\tilde{H}_{jk}$是实的；在其它情形下也是实的，见例12.1.2.在这一情形下，仅考虑(12.2.24)式中括号的实部，即足够；这为(Abramowitz与Stegun (1972,11·4.26))

$$\mathrm{Re}\left\{(-1)^{n/2}\int_0^\infty \exp(-i\xi c)\,j_n(c)\,dc\right\}$$
$$=\begin{cases}(\pi/2)\,P_n(\xi), & |\xi|\leqslant 1\\ 0, & |\xi|>1\end{cases} \qquad (12.2.26)$$

在椭圆内部，x_1和x_2可以写成

$$x_1=ar\cos\theta,\quad x_2=br\sin\theta,\quad |r|\leqslant 1 \qquad (12.2.27)$$

所以，$\xi=r\cos(\theta-\psi)$，以及$|\xi|\leqslant 1$.这样，在S内部

$$u_j(x_1,x_2)=(\pi/2)P_n^m(0)\int_0^{2\pi}\omega_{jk}(\psi)P_n[r\cos(\theta-\psi)]$$
$$\times\cos m(\psi+\phi_0)\,d\psi \qquad (12.2.28)$$

这是$r\cos\theta, r\sin\theta$亦即x_1, x_2表示的多项式.当$j=k=3$时，$\omega_{jk}(\psi)$是实的. 所以，载荷(12.2.9)式给出的法向表面位移$u_3(x_1,x_2)$，它是x_1和x_2表示的多项式. 这证明了各向异性半空间的 Galin定理.

多项式$q_n(x, y)$中的系数，仅仅当$\omega_{jk}(\psi)$已知时，才能确定. 在半空间为横观各向同性和$j=k=3$时，则

$$\tilde{H}_{33}(\xi_1,\xi_2) = (2\pi)^{-1}\vartheta(\xi_1^2+\xi_2^2)^{-1/2} \tag{12.2.29}$$

其中，ϑ是弹性常数的组合，在半空间为各向同性时，它等于$(1-\nu)/\mu$.那么，

$$\omega_{33}(\psi) = (2\pi)^{-1}\vartheta[a^{-2}\cos^2\psi + b^{-2}\sin\psi^2]^{-1/2} \tag{12.2.30}$$

$$u_3(x_1,x_2) = \vartheta b P_n^m(0) J_{n,m} \tag{12.2.31}$$

$$J_{n,m} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-e^2\cos^2\psi)^{-1/2}P_n[r\cos(\theta-\psi)]\cos m(\psi + \phi_0)\,d\psi \tag{12.2.32}$$

Legendre函数满足加法定理 (Gradshteyn与Ryhzik (1965 8.7 94))

$$P_n[r\cos(\theta-\psi)] = 2\sum_{l=0}^{n}{}' \frac{(n-l)!}{(n+l)!}P_n^l[(1-r^2)^{1/2}] \times \cos l(\theta+\psi) \tag{12.2.33}$$

这里"′"说明第一项需除以2.现在，因为当l和n具有相反的阶时，$P_n^l(0)$等于零，所以我们仅仅考虑积分 (17.2.33) 中，l, m和n具有相同的奇偶性的那些项. 被积分的典型项，为

$$\int_0^{2\pi}(1-e^2\cos^2\psi)^{-1/2}\cos l(\theta-\psi)\cos m(\psi+\theta_0)\,d\psi$$

$$= 2\cos(m\gamma - l\theta)K_M(e) + 2\cos(m\gamma + l\theta)K_L(e) \tag{12.2.34}$$

其中$M=(m+l)/2, L=|(m-l)/2|$，以及

$$K_p(e)=\int_0^{\pi/2}(1-e^2\cos^2\psi)^{-1/2}\cos 2p\psi\,d\psi \qquad (12.2.35)$$

这样，

$$J_{m,n}=\sum_{l=0}^{n}{}'\frac{(n-l)!}{(n+l)!}P_n^l(0)P_n^l[(1-r^2)^{1/2}]\{\cos(m\phi_0-l\theta)K_M(e)+\cos(m\phi_0+l\theta)K_L(e)\} \qquad (12.2.36)$$

积分$K_p(e)$可以表示成完全椭圆积分$K(e)$和$E(e)$的组合，其系数是e^{-2}的多项式。这样，通过与Byrd和Friedman(1971)著作的560.04及561.03条的比较，我们推导出

$$K_p(e)=Q_{p-1/2}(z),\quad z=e^{-2}-1 \qquad (12.2.37)$$

其中，$Q_{p-1/2}$是第二类Legendre函数。这意味着，K_p可以由初始值予以确定

$$K_0(e)=K(e)$$
$$K_1(e)=(2e^{-2}-1)K_0(e)-2e^{-2}E(e) \qquad (12.2.38)$$

并且有递推关系

$$(2n+1)K_{n+1}(e)=4n(2e^{-2}-1)K_n(e)-(2n-1)K_{n-1}(e) \qquad (12.2.39)$$

它可以由递推关系

$$(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(z)=(2\nu+1)zP_{\nu}^{\mu}(z)-(\nu+\mu)P_{\nu-1}^{\mu}(z) \qquad (12.2.40)$$

推演出来，而且（12.2.39）能够被P_ν^μ和Q_ν^μ所满足。作为这些结果的一个应用，我们考虑载荷（12.2.7）。这里，$m=0$，以及

$$F(\rho)=1-x_1'^2/a^2-x_2'^2/b^2=1-\rho^2$$
$$=a_0P_0+a_1P_2[(1-\rho^2)^{1/2}]=a_0+a_1(2-3\rho^2)/2 \qquad (12.2.41)$$

于是，$a_0 = 1/3$，$a_1 = 2/3$.方程（12.1.31）和（12.1.36）给出椭圆内部的法向位移，即

$$u_3(x_1, x_2, 0) = \vartheta b[P_0(0)J_{0,0} + 2P_2(0)J_{2,0}] \tag{12.2.42}$$

其中$J_{0,2} = K_0(e)$，以及

$$\begin{aligned} J_{2,0} &= P_0(0)P_2[(1-r^2)^{1/2}]K_0(e) \\ &\quad + 2P_2^2(0)P_2[(1-r^2)^{1/2}]\cos 2\theta K_1(e)/4! \\ &= -\frac{(2-3r^2)}{4}K(e) + \frac{3}{4}r^2K_1(e)\cos 2\theta \end{aligned} \tag{12.2.43}$$

现在，记 $r^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2$，$r^2\cos 2\theta = x^2/a^2 - y^2/b^2$，我们重新得到了（2.7.6）式.

这一节的分析，导出了所要求的 Galin 定理对各向异性介质的推广，特别地，给出了形如（12.2.6）式的载荷下接触区域中的法向位移. 这些结果的不同形式，可以由文献中找到，诸如，Thomas 与 Hoersch (1930)， Cattaneo (1938)， Way (1940)，Galin (1947b, 1961)，Mindlin (1949)，Lur'e (1964)，V.M.Aleksandrov与Solov'ev (Соловьев) (1966)和Segedin(1968).应该强调，这推广了方程(12.1.28)，也叙述了由 S 中具有式为（12.1.12）和（12.1.19）的载荷 $\tau_3(x_1, x_2, 0)$所引起的S中的位移$u_j(x_1, x_2, 0)$，它们是x_1和x_2的n级多项式，只当$\tilde{H}_{jk}$为实数的. 已知当$j = k$时，$\tilde{H}_{jk}$是实的；当$j = 1$时，$k = 2$（或$j = 2, k = 1$）时，对各向同性介质，它也是实的. 这一节的方法，将不很适宜于计算接触区以外的位移与应力，甚至对各向同性介质也是这样；对此，最好用下一节介绍的椭球坐标.

例12.2

1. 试表明，当m, n为偶数时，式(12.2.21)是由Gradshteyn与Ryzhik (1965)的7.3331得出的. 当m, n都为奇整数时，式(12.1.21)的积分，由

Gladwell (1978)得出.

2. 用例12.1.2给出的$\widetilde{H}_{11}, \widetilde{H}_{21}$值，试表明由剪应力

$$\begin{cases} \tau_{13}(x_1,x_2,0) = \dfrac{-p}{2\pi ab}\left(1-\dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{x_2^2}{b^2}\right)^{1/2} & (x_1,x_2)\text{在}S\text{内} \\ \tau_{13}(x_1,x_2,0) = 0, & \text{在}S\text{外} \end{cases}$$

引起的在椭圆内的位移，为

$$u_1(x_1,x_2,0) = \frac{P}{2\pi\mu a}\{K(e) - \gamma B(e)\}$$

$$u_2(x_1,x_2,0) = 0$$

其中，$B(e)$由(2.7.7)式给出.什么是在S外的$x_3=0$处的位移？

12.3 椭球坐标的应用

正如在§10.5中，使用扁球坐标导致圆线分割的边界条件的问题的统一处理那样，应用椭球坐标，会导致椭圆形区域相关问题的统一处理. §12.2的处理，得出了各向异性和横观各向同性介质的一般结果，但不能确定接触区以外的场变量——位移与应力. 这样，即使对比较简单的问题，确定由压力（12.2.4）式引起的法向位移$w(x,y,0)$的问题，当(x,y)在S外时，必须计算积分

$$\frac{1}{2}\int_{\theta-\beta}^{\theta+\beta}\{1-k^2\sin^2 x\}^{-1/2}\mathrm{d}x, \quad \beta = \arcsin\left(\frac{1}{r}\right).$$

这可以写成$1/2\{F(\theta+\beta,k) - F(\theta-\beta,k)\}$，并且可以表示成形式$F(\omega,k)$，其中，$\omega = \arcsin(1/\rho)$，$\rho$似乎是$\theta$，$\beta$，$k$的一个复杂的函数. 仅仅当使用椭圆坐标时，$\rho$才明白地成为这种坐标系中的一个坐标，这种坐标可用以拟合椭圆.

有三种方式引进椭球坐标，（1）用代数函数，（2）用Weierstrass椭圆函数，（3）用Jacobi椭圆函数. 这第一种，为Hobson(1931)用作一般的处理，也为Galin（1947b，1961），

Lur'e (1940, 1941, 1964) 和Green 与Sneddon (1950) 用在接触问题中❶，这种方式以坐标τ,σ,ρ为基础，它们位于区间

$$0\leqslant\tau^2\leqslant k^2,\quad k^2\leqslant\sigma^2\leqslant 1,\quad 1\leqslant\rho^2<\infty$$

并且与x,y,z通过下述关系相联系

$$k^2x^2=a^2\rho^2\sigma^2\tau^2,\quad k'^2k^2y^2=a^2(\rho^2-k^2)(\sigma^2-k^2)(k^2-\tau^2) \tag{12.3.1}$$

$$k'^2z^2=a^2(\rho^2-1)(1-\sigma^2)(1-\tau^2) \tag{12.3.2}$$

其中$k'^2=1-k^2$. 这是公式（10.5.1）的椭球类似. 基于Weierstrass椭球函数的发展，可以参阅Whiltaker与Watson（1952）的书. 这里我们将应用Jacobi椭圆函数，遵循Erdelyi（1955）的第三卷和Arscott（1962）的著作；在接触问题中的应用，则引用Shail(1978).关于文献资料，可以查上述著作.

我们以关系式

$$x=ak^2\mathrm{sn}\alpha\mathrm{sn}\beta\mathrm{sn}\gamma,\ y=-ak^2k'^{-1}\mathrm{cn}\alpha\mathrm{cn}\beta\mathrm{cn}\gamma,$$

$$z=\mathrm{i}ak'^{-1}\mathrm{dn}\alpha\mathrm{dn}\beta\mathrm{dn}\gamma \tag{12.3.3}$$

引进椭球坐标，其中，为了确定性的缘故，α，β，γ在下列范围内取值：α从$-2K$到$2K$；β从K到$K+\mathrm{i}K'$；γ从$\mathrm{i}K'$到$K+\mathrm{i}K'$，这里$K=K(k)$和$K(k')$，是第一类完全椭圆积分. 对这些范围，x，y，z将是实的.

椭圆函数，在标准的教程（例如Byrd与Friedman (1971)）中给出了其定义. 这样，基本关系是

$$\zeta(y,k)\equiv\zeta=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}t}{[(1-t^2)(1-k^2t^2)]^{1/2}}=$$

$$=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\theta}{[1-k^2\sin^2\theta]^{1/2}}$$

---

❶事实上，Green与Sneddon研究的不是接触问题而是裂纹问题. 此外，下面公式（12.3.15），（12.3.16）中的函数ns,ds，cs原文中未交待，读者可以查《断裂力学基础》，范天佑编著，江苏科学技术出版社，1978年，第491页，那里有介绍.

——译者

$$= F(\phi, k) \qquad (12.3.4)$$

对一给定的y值，这第一个积分定义了ξ。椭圆函数$\mathrm{sn}\xi$给出了这个方程的逆运算，$\mathrm{sn}\xi$代表y的值，对于它，积分给出了ξ。我们写

$$y = \sin\phi = \mathrm{sn}(\xi, k) = \mathrm{sn}\xi, \phi = am(\xi, k) = am\xi, \qquad (12.3.5)$$

所以，"sn"可以看作$\sin(am\xi)$的缩写。函数$\mathrm{cn}\xi$，$\mathrm{dn}\xi$是

$$\mathrm{cn}\xi = \cos\phi = (1 - \mathrm{sn}^2\xi)^{1/2}, \mathrm{dn}\xi = (1 - k^2\sin^2\phi)^{1/2}$$
$$= (1 - k^2\mathrm{sn}^2\xi)^{1/2} \qquad (12.3.6)$$

并且注意，(12.3.4)式给出$d\xi/d\phi = (1 - k^2\sin^2\phi)^{-1/2}$，所以，

$$\mathrm{dn}\xi = (1 - k^2\sin^2\phi)^{1/2} = \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}(am\xi) \qquad (12.3.7)$$

其它的导数是

$$\frac{d}{d\xi}(\mathrm{sn}\xi) = \mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi, \quad \frac{d}{d\xi}(\mathrm{cn}\xi) = -\mathrm{sn}\xi\mathrm{dn}\xi$$

$$\frac{d}{d\xi}(\mathrm{dn}\xi) = -k^2\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi \qquad (12.3.8)$$

$\mathrm{sn}\xi$，$\mathrm{cn}\xi$，$\mathrm{dn}\xi$是双周期函数，分别具有周期$(2K, 2iK')$，$(4K, 2K + 2iK')$，$(2K, 4iK')$。这些函数也满足下列关系：

$$\mathrm{sn}(-\xi) = -\mathrm{sn}\xi, \ \mathrm{cn}(-\xi) = \mathrm{cn}\xi, \ \mathrm{dn}(-\xi) = \mathrm{dn}\xi \qquad (12.3.9)$$

$$\mathrm{sn}(0) = 0, \ \mathrm{sn}(K) = 1, \ \mathrm{cn}(0) = 1, \ \mathrm{cn}(K) = 0, \ \mathrm{dn}(0) = 1,$$
$$\mathrm{dn}(K) = k' \qquad (12.3.10)$$

$$\mathrm{sn}(\xi + K) = \frac{\mathrm{cn}\xi}{\mathrm{dn}\xi}, \ \mathrm{cn}(\xi + K) = -\frac{k'\mathrm{sn}\xi}{\mathrm{dn}\xi},$$
$$\mathrm{dn}(\xi + K) = \frac{k'}{\mathrm{dn}\xi} \qquad (12.3.11)$$

$$\mathrm{sn}(\xi + iK') = \frac{1}{k\mathrm{sn}\xi}, \mathrm{cn}(\xi + iK') = -\frac{i\mathrm{dn}\xi}{k\mathrm{sn}\xi},$$

$$\mathrm{dn}(\xi+\mathrm{i}K')=-\frac{\mathrm{icn}\xi}{\mathrm{sn}\xi} \tag{12.3.12}$$

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}\xi,k)=\frac{\mathrm{isn}(\xi,k')}{\mathrm{cn}(\xi,k')},\quad \mathrm{cn}(\mathrm{i}\xi,k)=\frac{1}{\mathrm{cn}(\xi,k')},$$

$$\mathrm{dn}(\mathrm{i}\xi,k)=\frac{\mathrm{dn}(\xi,k')}{\mathrm{cn}(\xi,k')} \tag{12.3.13}$$

许多其它的关系式，可以从这些公式推出（见例12.3.1，12.3.2）。常用的缩写是

$$\mathrm{cd}(\xi)=\frac{\mathrm{cn}(\xi)}{\mathrm{dn}(\xi)},\quad \mathrm{nd}(\xi)=\frac{1}{\mathrm{dn}(\xi)},\quad \mathrm{sd}(\xi)=\frac{\mathrm{sn}(\xi)}{\mathrm{dn}(\xi)} \tag{12.3.14}$$

这些公式表明，若α，β，γ位于所说的范围内，于是$\beta=k+\mathrm{i}\xi$，$\gamma=\eta+\mathrm{i}K'$，其中，ξ、η是实的，那么，

$$x=k\mathrm{asn}\alpha\mathrm{nd}(\xi,k')\mathrm{ns}\eta,\quad y=k\mathrm{acn}\alpha\mathrm{sd}(\xi,k')\mathrm{ds}\eta, \tag{12.3.15}$$

$$z=\mathrm{adn}\alpha\mathrm{cd}(\xi,k')\mathrm{cs}\eta, \tag{12.3.16}$$

于是，若$\eta=K$，则有

$$x=k\mathrm{asn}\alpha\mathrm{nd}(\xi,k'),\quad y=k'k\mathrm{acn}\alpha\mathrm{sd}(\xi,k'),$$

$$z=0, \tag{12.3.17}$$

以及x，y位于椭圆

$$\frac{x^2}{[k\mathrm{and}(\xi,k')]^2}+\frac{y^2}{[k'k\mathrm{asd}(\xi,k')]^2}=1 \tag{12.3.18}$$

中。这个椭圆具有长半轴与短半轴$k\mathrm{and}(\xi,k')$与$kk'\mathrm{asd}(\xi,k')$，并且例12.3.3表明$|k\mathrm{nd}(\xi,k')|\leqslant 1$，$|k\mathrm{asd}(\xi,k')|\leqslant 1$，所以椭圆(12.3.18)位于椭圆$S_0$内，即$x^2/a^2+y^2/k'^2a^2=1$内。这一状态可以描述为$\gamma=K+\mathrm{i}K'$是$S_0$内部的区域，实际上，已经是两次使用这一描述了。一个类似的论断表明，$\beta=K+\mathrm{i}K'$是平面$z=0$在S_0外部的区域。

函数sn，cn，dn都满足二阶微分方程；这些方程可以从(12.

3.8）推导出来，并且都具有形式

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}\xi^2}+(h-2k^2\mathrm{sn}^2\xi)Y=0 \qquad (12.3.19)$$

其中，h分别取值$1+k^2,1,k^2$。

椭球坐标是正交的；当Laplace方程$\nabla^2W(x,y,z)=0$用它们表示时，变成

$$(\mathrm{sn}^2\gamma-\mathrm{sn}^2\beta)\frac{\partial^2W}{\partial\alpha^2}+(\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2\gamma)\frac{\partial^2W}{\partial\beta^2}$$

$$+(\mathrm{sn}^2\beta-\mathrm{sn}^2\alpha)\frac{\partial^2W}{\partial\gamma^2}=0 \qquad (12.3.20)$$

这个方程将具有分离变量解$W=A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)$，若

$$(\mathrm{sn}^2\gamma-\mathrm{sn}^2\beta)\frac{A''}{A}+(\mathrm{sn}^2\alpha-\mathrm{sn}^2\gamma)\frac{B''}{B}+(\mathrm{sn}^2\beta-\mathrm{sn}^2\alpha)\frac{C''}{C}=0 \qquad (12.3.21)$$

并且，因为这必须是α,β,γ的恒等式，所以必须具有常数h,l，使得

$$\frac{A''}{A}=l\mathrm{sn}^2\alpha-h,\quad \frac{B''}{B}=l\mathrm{sn}^2\beta=h,\quad \frac{C''}{C}=l\mathrm{sn}^2\gamma-h \qquad (12.3.22)$$

我们写出，$l=k^2n(n+1)$，可以发现，A，B，C必须满足Lamé方程

$$\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}\xi^2}+\{h-k^2n(n+1)\mathrm{sn}^2\xi\}Y=0 \qquad (12.3.23)$$

在标准的教程中证明了，若式（12.3.23）的一个解是双周期的，像sn，cn与dn，那么n必须是整数，它可以取为非负的，而h必须是特征值$2n+1$的一个；在那种情形下，（12.3.23）的第二个解则完全不是周期的。

显然，$Y=1$是式（12.3.23）在$h=0=n$条件下的一个解，这给出了调和函数$W=1$。比较方程（12.3.19）和（12.3.23），

我们看到，$\mathrm{sn}\zeta$，$\mathrm{cn}\zeta$，$\mathrm{dn}\zeta$ 都是对应于 $n=1$ 的解，分别具有特征值 $h=1+k^2$，1，k^2。这些给出了 W 函数 $\mathrm{sn}\alpha\mathrm{sn}\beta\mathrm{sn}\gamma$，$\mathrm{cn}\alpha\mathrm{cn}\beta\mathrm{cn}\gamma$，$\mathrm{dn}\alpha\mathrm{dn}\beta\mathrm{dn}\gamma$，方程（12.3.3）表明，它们分别与 x，y，z 差一个常数因子。

在研究式（12.3.23）对应于高的 n 值的解之前，我们考虑如何由式(12.3.23)的一个解 Y_1 的知识去导出第二个解 Y_2。如同在 Sturm-Liouville 理论中那样，我们注意到，若 Y_1，Y_2 是解，那么，$Y_1Y_2''-Y_2Y_1''=0$，给出 $Y_1Y_2'-Y_2Y'=$ 常数 $=H$。现在置 $Y_2=Y_1Z$，我们看到 $Y_1^2Z'=H$，所以，

$$Y_2=HY_1\int_{\zeta_0}^{\zeta}[Y_1(w)]^{-2}\mathrm{d}w \tag{12.3.24}$$

为了使第二个解规一化，必须选择 H 和数据 ζ_0。在球坐标中，$\gamma=\mathrm{i}K'$ 对应于无穷远点的球，所以，取 $\zeta_0=\mathrm{i}K'$，是方便的；在这种情形下，$Y_2(\mathrm{i}K')=0$。

若 $Y_1(\zeta)=\mathrm{sn}\zeta$ 那么

$$Y_2(\zeta)=\mathrm{sn}\zeta I(\zeta)$$

$$I(u)=\int_{\mathrm{i}K'}^{u}(\mathrm{sn}w)^{-2}\mathrm{d}w \tag{12.3.25}$$

这个积分，可以计算如下。置 $\zeta=\mathrm{i}K'+\eta$，$w=\mathrm{i}K'+t$；那么，（12.3.12）式给出 $\mathrm{sn}w=1/(k\mathrm{sn}t)$。置 $\mathrm{sn}t=\sin\phi$，$\mathrm{sn}\eta=\sin\psi$；那么，$\mathrm{dn}t\mathrm{d}t=\mathrm{d}\phi$，因而，$\mathrm{d}w=\mathrm{d}t=\mathrm{d}\phi/\mathrm{dn}t=(1-k^2\sin^2\phi)^{-1/2}\mathrm{d}\phi$，于是

$$I(\zeta)=\int_0^{\psi}(1-k^2\sin^2\psi)^{-1/2}k^2\sin^2\phi\mathrm{d}\phi$$

$$=F(\psi,\ k)-E(\psi,\ k) \tag{12.3.26}$$

但 $F(\psi,\ k)=\eta=\zeta-\mathrm{i}K'$ 以及 $E(\psi,\ k)=E(am\eta,k)$，所以

$$Y_2(\zeta)=\mathrm{sn}\zeta\{\zeta-\mathrm{i}K'-k(am(\zeta-\mathrm{i}K'),\ k)\} \tag{12.3.27}$$

方程（12.3.23）的第一个解，全部可以写成1，$\mathrm{sn}\zeta$，$\mathrm{cn}\zeta$，

$\mathrm{dn}\zeta$这些项中的三个以及$\mathrm{sn}^2\zeta$的多项式的乘积. 这些解称为Lamé多项式，用记号$qE_n^m(\xi)$表示，其中m，n为非负整数，n代表多项式的总阶，q的取值为$n,s,c,d,\mathrm{sc},\mathrm{sd},\mathrm{cd},\mathrm{scd}$，以表示哪一个乘积出现在多项式前面. 于是

$$n=0:\ {}_nE_0^0(\xi)=1,\ h=0 \tag{12.3.28}$$

$$\left.\begin{aligned} n=1:\ {}_nE_1^0(\xi)&=\mathrm{sn}\xi, h=1+k^2\\ {}_cE_1^0(\xi)&=\mathrm{cn}\xi, h=1\\ {}_dE_1^0(\xi)&=\mathrm{dn}\xi, h=k^2\end{aligned}\right\} \tag{12.3.29}$$

$$\left.\begin{aligned} n=2:\ {}_{sc}E_2^0(\xi)&=\mathrm{sn}\xi\mathrm{cn}\xi, h=4+k^2\\ {}_{sd}E_2^0(\xi)&=\mathrm{sn}\xi\mathrm{dn}\xi, h=1+4k^2\\ {}_{cd}E_2^0(\xi)&=\mathrm{cn}\xi\mathrm{dn}\xi, h=1+k^2\end{aligned}\right\} \tag{12.3.30}$$

$${}_nE_2^m(\xi)=\xi n^2\xi-\lambda_m, h_m=3(1+k^2-k^2\lambda_m) \tag{12.3.31}$$

$$\lambda_m=[1+k^2+(1-k^2k'^2)^{1/2}]/3k^2,\ m=1,2 \tag{12.3.32}$$

在$n=0$，1以及式（12.3.24）中的常数$H=1$情形下的相应的第二个解为

$$n=0:\ {}_nF_0^0(\xi)=\eta \tag{12.3.33}$$

$$\left.\begin{aligned} n=1:\ {}_nF_1^0(\xi)&=\mathrm{sn}\xi[\eta-E(\eta)],\\ {}_cF_1^0(\xi)&=k'^{-2}\{\mathrm{sn}\xi[k'^2\eta-E(\eta)]-\mathrm{i}k\mathrm{cn}\eta\}\end{aligned}\right\} \tag{12.3.34}$$

$$n=2:\ {}_nF_2^0(\xi)=a_m\{(\mathrm{sn}^2\xi-\lambda_m)[(1-\lambda_mk^2)\eta-E(\eta)]+\lambda_m\mathrm{cn}\eta\mathrm{dn}\eta\} \tag{12.3.35}$$

其中，$\xi=\mathrm{i}K'+\eta$，$E(\eta)$表示$E(am\eta,k)$，以及

$$a_m=1/[2\lambda_m(1-\lambda_m)(1-\lambda_mk^2)] \tag{12.3.36}$$

现在考虑区域S_0上的无摩擦压头问题. 根据§2.5，这一问题等阶于确定调和函数ϕ，ψ，以及$\partial\phi/\partial z=(1-2\nu)\psi$和

$$2\mu u=-z\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad 2\mu v=-z\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial y}, \tag{12.3.37}$$

$$2\mu w = 2(1-\upsilon)\psi - z\frac{\partial \psi}{\partial z},\quad \tau_{zz} = \frac{\partial \psi}{\partial z} - z\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \tag{12.3.38}$$

关于ψ的边界条件，为

$$\vartheta\psi(x,y,0) = f(x,y),\quad (x,y)\text{在}S_0\text{中} \tag{12.3.39}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}(x,y,0) = 0,(x,\ y)\ \text{在}S_0\text{外} \tag{12.3.40}$$

用椭球坐标表示，以及借助于例12.3.7的帮助，这些条件可写成

$$\vartheta\psi(\alpha,\beta,K+\mathrm{i}K') = f(\alpha,\beta),\frac{\partial \psi}{\partial \beta}(\alpha,K+\mathrm{i}K',\gamma) = 0 \tag{12.3.41}$$

对于平底椭圆压头，有$f(\alpha,\ \beta) = d_0$，并且方程(12.3.41)可以立即解得

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma) = \vartheta^{-1}d_0(\gamma - \mathrm{i}K')/K = \vartheta^{-1}d_0\eta/K \tag{12.3.42}$$

再注意到它与$E^*(\gamma)$仅差一个常数因子．在$z=0$上，区域S_0外的位移为

$$w(\alpha,K+\mathrm{i}K',\ \mathrm{i}K+\eta) = \vartheta\psi = d_0\eta/K \tag{12.3.43}$$

例12.3.6表明，$\mathrm{sn}\eta = 1/\rho$，所以，$\eta = F(\omega,k)$，其中，$\sin\omega = 1/\rho$．这样，

$$w(x,\ y,\ 0) = d_0F(\omega,k),\ \text{在}S_0\text{外}. \tag{12.3.44}$$

接触压力由（12.3.36）给出，为

$$p = \frac{-\partial \psi}{\partial z} = -\frac{d_0}{\vartheta K}\frac{\partial \gamma}{\partial z} = \frac{d_0}{\vartheta K}\frac{\mathrm{dn}(\xi,k')}{k'a\mathrm{dn}\alpha\mathrm{cn}(\xi,k')}$$

$$= \frac{d_0}{\vartheta Kk'a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{k'^2a^2}\right)^{-1/2} \tag{12.3.45}$$

而作用在压头上的合力为

$$p = \frac{2\pi d_0 a}{\vartheta K} \tag{12.3.46}$$

对于平头压头，不难得到平面$z=0$以外的应力与位移．这样，

方程(12.3.38)表明，w和τ_{zz}包含$\partial\psi/\partial z$与$\partial^2\psi/\partial z^2$. 导数$\partial\gamma/\partial z$，在例12.3.7给出；它包含$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，这些量又只包含在椭圆函数中，所以它可以表示成坐标ρ，θ，τ的初等函数，见例12.3.8.

对一般的Boussinesq压头问题，我们注意到，若$f(x,y)$是一个定义在椭圆S_0域内$\gamma = K + iK'$上的多项式，那么，$f(x,y)$可以表示成$\mathrm{sn}\alpha$，$\mathrm{sn}\beta$，$\mathrm{cn}\alpha$，$\mathrm{cn}\beta$的多项式，这个多项式对α,β对称. 利用Arscoot (1962) 讨论过的正交关系式，我们可以把(x,y)展开成Lamé乘积${}_qE_r^n(\alpha,\beta) \equiv {}_qE_r^n(\alpha){}_qE_r^n(\beta)$的线性组合，其中，$q$是$s$，$c$或$sc$. 这样，考虑在椭球坐标中，以单项${}_qEp_r^n(\alpha,\beta)$作为外形的压头，这便已足够. 因而方程(12.3.41)化成

$$\vartheta\psi(\alpha,\beta,K+iK') = {}_qE_r^n(\alpha,\beta)$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial\beta}(\alpha,K+iK'_1\gamma) = 0 \qquad (12.3.47)$$

其解为

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma) = \vartheta^{-1}{}_qEp_r^n(\alpha,\beta){}_qF_r^n(\gamma)/{}_qF_r^n(K+iK') \qquad (12.3.48)$$

相应的接触压力，具有形式

$$p = = \frac{-\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{\vartheta a}\frac{\mathrm{nd}\alpha\mathrm{nd}\beta}{{}_qF_r^n(K+iK')}{}_qEp_r^n(\alpha,\beta){}_qF_r^{n\prime}(K+iK') \qquad (12.3.49)$$

并且由例12.3.10，此式可以写成

$$p = \frac{1}{\vartheta ak'}\frac{{}_qF_r^{n\prime}(K+iK')}{{}_qF_r^n(K+iK')}\left\{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{k'^2a^2}\right\}^{-1/2}{}_qEp_r^n(\alpha,\beta) \qquad (12.3.50)$$

它是一个常数，带有乘子——原来的多项式${}_qEp_r^n(\alpha,\beta)$和$(1-x^2/a^2-y^2/k'^2a^2)^{-1/2}$. 这再次证明了Galin定理. 在$z=0$上，$S_0$外部的法向位移由(12.3.47)得到，为

$$w(\alpha, K+\mathrm{i}K', \gamma') = {}_qEP_n^m(\alpha, K+\mathrm{i}K')\,{}_qF_n^m(\gamma)/{}_qF_n^m(K+\mathrm{i}K') \tag{12.3.51}$$

这样，ψ与w的计算，化成了适当的第二个解$F_n^m(\gamma)$的计算；对$n=0,1,2$，这些解由（12.3.33）式～（12.3.35）式给出，见例12.3.12.

Hertz接触问题的位移与应力的计算，已由不同的作者们给出，参考Morton与Close(1922)，Thomas与Hoersch(1930)和J.O.Smith与Lin（1953）的论著.

例12.3

1. 试表明：

$$\mathrm{sn}(\zeta+2K) = -\mathrm{sn}\zeta, \qquad \mathrm{cn}(\zeta+2K) = -\mathrm{cn}\zeta,$$
$$\mathrm{dn}(\zeta+2K) = \mathrm{dn}\zeta, \qquad \mathrm{sn}(\zeta+2\mathrm{i}K') = \mathrm{sn}\zeta,$$
$$\mathrm{cn}(\zeta+2\mathrm{i}K') = -\mathrm{cn}\zeta, \qquad \mathrm{dn}(\zeta+2\mathrm{i}K') = -\mathrm{dn}\zeta.$$

2. 试表明：

$$\mathrm{sn}(K+\mathrm{i}K') = -k^{-1},$$
$$\mathrm{cn}(K+\mathrm{i}K') = -\mathrm{i}k^{-1}k', \qquad \mathrm{dn}(K+\mathrm{i}K') = 0$$

3. 试表明，若ζ是实的，那么

$$-1\leqslant\mathrm{sn}\zeta\leqslant 1, \quad -1\leqslant\mathrm{cn}\zeta\leqslant 1, \quad k'\leqslant\mathrm{dn}\zeta\leqslant 1$$

4. 试表明，有两个曲面，α,β,γ在其中一个上为常数，则该二曲面为下面的方程给出

$$\frac{x^2}{k^2a^2\mathrm{sn}^2\zeta} - \frac{y^2}{k^2a^2\mathrm{cn}^2\zeta} - \frac{z^2}{a^2\mathrm{dn}^2\zeta} = 1, \quad \zeta = \alpha,\beta,\gamma,$$

试再表明，当α=实函数，$\beta = K+\mathrm{i}\xi$，$\gamma = \mathrm{i}K'+\eta$，则$\alpha$=常数代表双叶双曲面；而$\beta$=常数代表单叶双曲面；$\gamma$=常数 代表椭球面.

5. 若$\beta = K+\mathrm{i}\xi$，$\gamma = \mathrm{i}K'+\eta$，试表明：

$$\mathrm{sn}\beta = \mathrm{nd}(\xi,k'), \qquad \mathrm{cn}\beta = -\mathrm{i}k'\mathrm{sd}(\xi,k'),$$
$$\mathrm{dn}\beta = k'\mathrm{cd}(\xi,k'), \qquad \mathrm{sn}\gamma = k^{-1}\mathrm{ns}\eta,$$
$$\mathrm{cn}\gamma = -\mathrm{i}k^{-1}\mathrm{ds}\eta, \qquad \mathrm{dn}\gamma = -\mathrm{ics}\eta.$$

6. 试表明式（12.3.1），（12.3.2），（12.3.3），（12.3.15）和（12.3.16）之间的对应，可以由置换

$$\tau = k\mathrm{sn}\alpha, \sigma = k\mathrm{sn}\beta = k\mathrm{nd}(\xi,k'),$$

$$\rho = k\mathrm{sn}\gamma = \mathrm{ns}\eta$$

而得到。

7. 对于z微分（12.3.3）的所有三个方程，试表明

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{1}{ak^2k'}\frac{\mathrm{dn}\alpha\mathrm{dn}\beta\mathrm{sn}\gamma\mathrm{cn}\gamma}{(\mathrm{sn}^2\beta - \mathrm{sn}^2\gamma)(\mathrm{sn}^2\gamma - \mathrm{sn}^2\alpha)}$$

8. 利用例12.3.5写出导数$\partial\gamma/\partial z$为

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{\mathrm{dn}\alpha\mathrm{cd}(\xi,k')\mathrm{ns}\eta\mathrm{ds}\eta}{a[k^2\mathrm{nd}^2(\xi,k') - \mathrm{ns}^2\eta][\mathrm{ns}^2\eta - k^2\mathrm{sn}^2\alpha]}$$

并且试表明这个式子的写成

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{\rho}{ak'}\frac{[(1-\tau^2)(1-\sigma^2)(\rho^2-k^2)]^{1/2}}{(\sigma-\rho^2)(\rho^2-\tau^2)}$$

9. 试表明，对方程(12.3.3)的第三式关于z微分，然后取$\beta = K + \mathrm{i}\xi$，$\gamma = \eta + \mathrm{i}K'$，那么，

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{a\mathrm{dn}\alpha\mathrm{dn}\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} = -\frac{\mathrm{dn}(\xi,k')}{k'a\mathrm{dn}\alpha\mathrm{cn}(\xi,k')}\frac{\partial}{\partial\eta},$$

(x,y)在S_0中

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{-1}{a\mathrm{dn}\alpha\mathrm{dn}\gamma}\frac{\partial}{\partial\beta} = \frac{-\mathrm{sn}\eta}{a\mathrm{dn}\alpha\mathrm{cn}\eta}\frac{\partial}{\partial\xi},\ (x,y)\text{在}S_0\text{外}$$

10. 试表明，若x,y由式(12.3.15)和(12.3.16)给出，那么，

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k'^2a^2} = \mathrm{dn}^2\alpha\mathrm{cd}^2(\xi,k') + \frac{\mathrm{dn}^2\alpha\mathrm{dn}^2\beta}{k'^2}$$

11. 利用(12.3.3)，试表明，当$\gamma = K + \mathrm{i}K'$时，那么，面元$\mathrm{d}S$由下式给出：

$$\mathrm{d}S = \mathrm{i}k^2a^2\mathrm{dn}\alpha\mathrm{dn}\beta(\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{sn}^2\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$
$$= -k^2k'^2a^2\mathrm{dn}\alpha\mathrm{cd}(\xi,k')[\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{nd}^2(\xi,k')]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\xi$$

若$p(\alpha,\xi)$由式(12.3.45)给出，试表明

$$\int_{-2K}^{2K}\int_0^{k'}\mathrm{d}S = \pi k'a^2,\quad \int_{-2K}^{2K}\int_0^{k'}p(\alpha,\xi)\mathrm{d}S = \frac{2\pi d_3\alpha}{K\vartheta}$$

提示：第二个积分是Legendre恒等式

$EK' + E'K - KK' = \pi/2$。 左端的一个倍数。

12. 对于椭圆S_0上的Hertz接触问题，位势$\psi(\alpha,\beta,\gamma)$可以考虑到形式

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma) = A_0\frac{{}_*F_0(\gamma)}{{}_*F_0(K+\mathrm{i}K')} + \sum_{m=1}^{3}A_{m,0}Ep_2^m(\alpha,\beta)$$

$$\times \frac{{}_{\alpha}F_2''(\gamma)}{{}_{\alpha}F_2''(K+iK')}$$

常数A_0, A_1, A_2必须选取为使得接触压力具有形式

$$p(\alpha,\beta,K+iK') = \frac{-\partial\psi}{\partial z} = \frac{1}{a\mathrm{dn}\alpha\mathrm{dn}\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}$$

$$= p_0\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{k'^2a^2}\right)^{1/2}$$

$$= p_0(k')^{-1}\mathrm{dn}\alpha\mathrm{dn}\beta$$

其中，$3P = 2\pi ab p_0$。

试表明A_0, A_1和A_2具有值：$A_0 = (\lambda_1-\lambda_2)KC$，$A_1 = {}_{\alpha}F'_2(K+iK')C$，$A_2 = -{}_{\alpha}F_2^2(K+iK')C$，其中，$C = k'ap_0/[3(\lambda_1-\lambda_2)]$. 由此，试表明，在平面$z=0$上，$S_0$的外部，有

$$w(x,y) = \frac{3\vartheta p}{4\pi a}\left[\eta + \frac{x^2}{a^2k^2}\left\{E(\eta)-\eta\right\} - \frac{y^2}{a^2k^2}\left\{\frac{E(\eta)}{k'^2}-\eta - \frac{k^2}{k'^2}\frac{\mathrm{sn}\eta\mathrm{cn}\eta}{\mathrm{dn}\eta}\right\}\right]$$

其中，$E(\eta)\equiv E[am(\eta),k]$；亦即$\mathrm{sn}\eta = \sin\omega = 1/\rho$，$\eta = F(\omega,k)$。这个结果出现在Way(1940)工作中，他把它归诸于Thomas与Hoersch(1930)

13。关于椭圆的例12.3.12的$w(x,y)$，在$sn=1$时，对于方程(2.9.6)给出的值（亦即对于$\vartheta_1=\vartheta, \vartheta_2=0$），$w(x,y)$是连续的。试证明。

$$-\frac{\partial w}{\partial\eta} = \frac{3\vartheta p}{4\pi a}(1-k^2\sin^2\omega)^{1/2}\left[1-\frac{x^2}{a^2}\sin^2\omega - \frac{y^2}{a^2}\cdot\frac{\sin^2\omega}{(1-k^2\sin^2\omega)}\right];$$

试再表明，当用ρ和τ表达时，括号中的项是$-(k^2-\tau^2)(\rho^2-1)/k^2$。在椭圆之外，$\eta$从它在椭圆上的值$K$变小。这意味着分离条件(7.9.2)式亦即，$w > s - Ax^2 - By^2$，在椭圆外是得到满足的。试构造一个关于这个结果的更为简单的证明。

12.4 弹性体在接触中的柔度

我们遵着Mindlin（1949）在本领域最重要的文章之一中得到的结果，来总结这一章。在这篇文章中，假设两物体处于§2.9

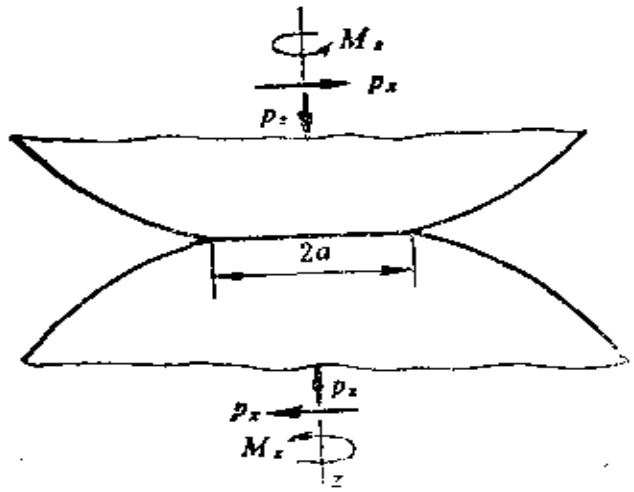


图12.4.1　作用在两个接触物体上的附加力系

所述的Hertz接触．一个附加的力系作用在物体上，如图12.4.1所示，这样，横过接触面，一物体作用于另一物体以一个小的附加力，在Oz方向，一个小的力垂直于Oz方向，和一个以Oz为轴的力偶．柔度被定义为由于这些小力引起的相对位移的变化率．在这一节中，u，v和w将表示笛卡尔（坐标系）位移．

法向柔度可以由方程（2.9.6）～（2.9.11）直接得到

$$\delta_z = \frac{3(\vartheta_1+\vartheta_2)}{4\pi} - \kappa(e)\frac{P_z}{a},$$

$$\frac{\partial \delta_z}{\partial P_z} = \frac{3(\vartheta_1+\vartheta_2)\kappa(e)}{4\pi a}\left\{1 - \frac{P_z}{a}\frac{\partial a}{\partial P_z}\right\} \qquad (12.4.1)$$

并且方程（2.9.10）表明，$\partial a/\partial P_z = a/(3P_z)$，所以法向柔度为

$$C_z = \frac{\partial \delta_z}{\partial p_z} = \frac{(\vartheta_1+\vartheta_2)}{2\pi a}K(e) \qquad (12.4.2)$$

为了求得Mindlin所称谓的切向柔度是甚么，亦即，由一物体对另一物体作用的在x方向的小力，引起x方向相对的位移．与此相关，他首先考虑这样一种情形，其中，该系统已含两个弹性物体，而在几何上，对称于三个坐标平面的每一个．若一力场p_x（体力或外力）具有性质$P_x(x,y,z_1) = -P_x(x,y,z_2)$，作用于这个系统，那么，我们将希望根据Saint Venant原理，每一个物体在无限远处的位移等于零，并且

$$w_1(x,y,z_1) = -w_2(x,y,z_2) \qquad (12.4.3)$$

然而，如所假设，这只有在两物体是弹性相似和几何相似时，才能成立。此外，若力场具有性质

$$P_x(x,y,z_1)=P_x(x,-y,z_1),P_z(x,y,z_1)=-P_z(-x,y,z_1),$$

(12.4.4)

那么，在这两个物体中的笛卡尔坐标场，必须满足

$$u_1(x,h,z_1)=-u_2(x,y,z_2)-\delta_z,v_1(x,y,z_1)=-v_2(h,y,z_2)$$

(12.4.5)

若在接触区，即椭圆S上不存在滑移，那么这些条件隐含着

$$u_1(x,y,0)=u_2(x,y,0)=\delta_z/2,v_1(x,y,0)=0=v_2(x,y,0),$$

(x,y)在S中。

(12.4.6)

条件（12.4.5）式与横过S的法向应力的平衡相结合在一起，导出

$$\tau_{zz}(x,y,0)=0,(x,y)\text{在}S\text{中}\qquad(12.4.7)$$

我们的结论是，在这一情形，位移δ_z与总的力F_z成正比，接触区S作为一个刚体移动了一个距离δ_z，柔度为

$$C_z=\delta_z/F_z\qquad(12.4.8)$$

当这两个物体在几何上不等同时，那么，接触区将不再严格地是xy平面，但稍微翘曲了一点（参考方程(2.9.4)），不过这种翘曲在小位移和小转动理论下能够（在事实上，必须）被忽略。若这两个物体不是弹性地等同，那么，在S上的连续条件$w_1=-w_2$，只有在S上附加以法向应力时，才能保持住。若以§2.9中的不要求切向位移（亦即u,v）连续性的Hertz理论为前提，则这个法向应力可以略去。

由于这个简化，每一个物体可以处理成一个分离的半空间，并且研究下面的$z\geqslant 0$半空间问题，即足够：

$$u(x,y,0)=\delta_z',v=(x,y,0)=0,\tau_{zz}(x,y,0)=0,(x,y)\text{在}S\text{内}$$

(12.4.9)

$$\tau_{xz}(x,y,0)=0=\tau_{yz}(x,y,0)=\tau_{zz}(x,y,0)\quad (x,y)\text{ 在}S\text{ 外} \tag{12.4.10}$$

并且计算

$$C_z^i=\delta_z^i/F_z \tag{12.4.11}$$

其中

$$F_z=-\iint_S\tau_{zz}(x,y,0)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{12.4.12}$$

那么，

$$C_z=C_z^1+C_z^2=(\delta_z^1+\delta_z^2)/Fx \tag{12.4.13}$$

当S是半径为a的圆，问题（12.4.9）式和（12.4.10）的解，已由（10.3.28）～（10.3.36）给出，并且例题10.3.3表明$C_z^i=(2-\nu_i)\,\delta\mu_i a$，所以

$$C_z=\frac{1}{8a}\left[\frac{2-\nu_1}{8\mu_1}+\frac{2-\nu_2}{8\mu_2}\right] \tag{12.4.14}$$

一般情况下，S将是椭圆$x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1$.在这种情形，$C_z^i$由例题12.2.2给出，为

$$C_z^i=\frac{1}{2\pi\mu_i a}[K(\mathrm{e})-\nu_i B(\mathrm{e})] \tag{12.4.15}$$

其中，$B(\mathrm{e})$由12.7.7式给出，并且$b^2=a^2(1-\mathrm{e}^2)$．当$a=b$，便还原成前面得到的值（参考例题12.4.1）．

在前述解中的剪应力τ_{zz}，在接触区的边缘，具有平方根的奇异性．因此，Mindlin构造了一个修正问题，其中剪应力绝不超出摩擦系数k与Hertz的法向应力p的乘积.进而他假定存在一个外侧的滑移区，其中，剪应力保持其最大值kp.这样，在$z=0$处的边界条件为

$$u=\delta,v=0,0\leqslant-\tau_{zz}\leqslant kp,\tau_{yz}=0=\tau_{xz},(x,y)\text{ 在}S'\text{ 中} \tag{12.4.16}$$

$$\tau_{zz}=-kp,\tau_{yz}=0=\tau_{xz},(x,y)\text{ 在}S\text{ 中和}S'\text{ 外} \tag{12.4.17}$$

$$\tau_{zz}=0=\tau_{yz}=\tau_{xz},(x,y)\text{ 在}S\text{ 外} \tag{12.4.18}$$

Keer和Goodman（1976）考虑了抗滑移的阻力为任意值的情形。

首先考虑S是一个半径为a的圆，并且S'是一个半径为a'的圆，有$a'<a$.对应于总的法向为P_z和接触半径为a的Hertz法向应力由§2.9给出为

$$p=\frac{3P_z}{2\pi a^2}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} \tag{12.4.19}$$

Mindlin首先考虑作用在整个S上的$\tau_{zz}=-kp$所引起的位移，构造了一个解。这些位移，由例题10.3.6得到，为

$$\left.\begin{aligned}64\mu a^3u&=3kP_z[2(2-\nu)(2a^2-r^2)+\nu r^2\cos 2\theta]\\64\mu a^3v&=3kP_z\nu r^2\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \tag{12.4.20}$$

其中$r\leqslant a$，即它们代表圆内的位移。现在加上由剪应力

$$\tau'_{zz}=\frac{3kQ}{2\pi a'^2}\left(1-\frac{r^2}{a'^2}\right)^{1/2},\quad 0\leqslant r\leqslant a' \tag{12.4.21}$$

在圆$r\leqslant a'$内引起的位移。在圆$r\leqslant a$内，这些位移是

$$\left.\begin{aligned}64\mu a'^3u'&=-3kQ[2(2-\nu)(2a'^2-r^2)+\nu r^2\cos 2\theta]\\64\mu a'^3v'&=-3kQ\nu r^2\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \tag{12.4.22}$$

位移$u+u'$，$v+v'$，在S'内，将满足方程(12.4.5)，若$Q=P_za'^2/a^3$。那么

$$\left.\begin{aligned}16\mu a^3(u+u')&=3kP_z(2-\nu)(a^2-a'^2)\\v+v'&=0,\quad 0\leqslant r\leqslant a\end{aligned}\right\} \tag{12.4.23}$$

并且总的剪切力P_z为

$$P_z=k(P_z-Q)=kP_z(1-a'^3/a^3) \tag{12.4.24}$$

于是，

$$a'=a(1-P_z/kP_z)^{1/3} \tag{12.4.25}$$

现在柔度C_z由例题12.4.2给出。总剪应力$\tau_{zz}+\tau'_{zz}$也满足摩擦条件。最后，因为已经知道，由于附加的某些正则性条件，此问题

有n值的解，故可以得出结论，已经得到的解即是问题的这种解。对应于一个椭圆接触区的解，由Cattaneo (1938) 给出，但这个解也可以用§12.2的方法得到；这个分析表明，S上的剪应力分布$-kp$，导出一个(二阶的) 多项式位移u,v，它们分布在S内（例题12.4.3）。

对应于总扭转力偶的柔度，可以用类例的方式得到。再一点，可以表明，围绕z轴的力矩，将不引起接触面上的法向应力，所以，每一物体将转动，而在xy平面上不发生畸变。因此，在$z=0$处的边界条件为

$$u=-\gamma y,\quad v=\gamma x,\quad \tau_{zz}=0,\quad (x,y)\text{ 在}S\text{内} \tag{12.4.26}$$

$$\tau_{zz}=0=\tau_{yz}=\tau_{zx}\quad (x,y)\text{ 在}S\text{外} \tag{12.4.27}$$

对于圆接触区域的这个问题，已在§10.2解决了，方程（10.2.58）给出了一个物体的扭转柔度为

$$\frac{\gamma}{T}=\frac{3}{16\mu a^3} \tag{12.4.28}$$

对于椭圆接触区域，§10.9的一般理论表明，一个剪应力分布——其中τ_{zx}和τ_{yz}具有形式（12.2.12）和（12.2.19），当$m=n=1$时——将给出S内的位移，它们是x,y的线性函数。详细的计算表明，S中的剪应力分布

$$\tau_{zx}=-T_1 y(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{-1/2},$$

$$\tau_{yz}=T_2 x(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{-1/2} \tag{12.4.29}$$

给出S内的位移，为

$$\mu u=by\{BT_1+\nu C[T_2-(1-e^2)T_1]\} \tag{12.4.30}$$

$$\mu v=bx\{-DT_2+\nu C[T_2-(1-e^2)T_1]\} \tag{12.4.31}$$

其中，B,D由方程（2.7.7）给出，以及$C=(D-B)/e^2$。因此，若满足方程（12.2.26），那么，T_1,T_2必须有数值

$$T_1=\frac{a\gamma}{b}\,\frac{(D-2\nu C)}{BD-\nu CE},$$

$$T_2 = \frac{M\gamma}{b} \frac{[B - 2\nu(1-e^2)C]}{BD - \nu CE} \tag{12.4.32}$$

作用在该半空间的总的力矩为

$$M = \iint_S (y\tau_{zx} + x\tau_{yz})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ ❶

$$= \frac{2}{3}\mu a^3 \gamma\pi \frac{[E - 4\nu(1-e^2)C]}{BE - \nu CE} \tag{12.4.33}$$

并且扭转柔度为

$$\frac{\gamma}{M} = \frac{3}{16\mu a^3} \frac{8(BD - \nu CE)}{\pi[E - 4\nu(1-e^2)C]} \tag{12.4.34}$$

当椭圆变成圆时，这第二个因子变成1.

再者，由方程（10.2.57）给出的圆域接触剪应力，或由方程（12.4.29）给出的椭圆域接触剪应力，在接触区域的边界上是奇异的. 这说明，事实上物体将滑移. Lubkin（1951）研究了圆接触域问题，它假定在一半径为 a' 的内圆上没有滑移，而剪应力在圆环 $a' < r < a$ 上达到其最大值 kp（p 为Hertz法向应力）. 再就是，对于两个接触物体的柔度，能够由对于分离的两个半空间的柔度求和而得到. 对于后者，必须求解在边界条件

$$u_\theta = \gamma r, \quad |\tau_{\theta z}| \leqslant kp(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant a' \tag{12.4.35}$$

$$\tau_{\theta z} = -kp(r), \quad a' \leqslant r \leqslant a \tag{12.4.36}$$

下的轴对称半空间问题，其中 k 为摩擦系数，$p(r)$ 由方程（12.4.18）所给. 这是例题10.11.4的研究课题. 完全滑移的特殊情形，后来为Hetenyi与Mc-Donald（1958）所详细研究.

在接触体之间压着一个夹层，关于该夹层的效应分析，以及接触柔度，其最近的述评工作，可以在Goodnan与Keer（1975）

---

❶原文 $y\tau_{xz}$ 误写成 $y\tau_{yz}$，这里作更正.

——译者

的论文中查到。

例12.4

1．试表明，在接触区为椭圆S时，单个弹性体的柔度$C_z=\delta_z/P_z$是

$$C_z=\frac{1}{2\pi\mu a}[K(e)-\nu D(e)]$$

2．试表明，由方程(12.4.22)给出的切向柔度是，$Cx=(2-\nu)/[8\mu a']$。注意柔度是$\partial u/\partial Px$，并且a'是Px的函数

3．试表明，作用在椭圆S上的剪向力$\tau_{rz}=-kp$在S上产生下列位移

$$u=\frac{3kP_z}{2\pi a\mu}\left\{(K-\nu B)\left(1-\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{2b^2}\right)-[2D-K)-\nu(D-C-B/2)]\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right\}$$

$$v=3kP_z\nu Cxy/(\pi\mu a^2)$$

并且由此得到满足(12.4.16)和(12.4.17)式的位移，其中S是椭圆$x^2/a'^2+y^2/b'^2\leqslant 1$以及$a'/a=b'/b$。由此再表明，切向柔度$Cx$是$(K-\nu B)/(2\pi\mu a')$。

4．试表明，对应于边界条件(12.4.35)和(12.4.36)式，在区域$z=0$，$r\leqslant a'$中的剪应力，是

$$T_{\theta z}(r,0)=-\frac{4\mu\gamma r}{\pi}(a'^2-r^2)^{-1/2}+\frac{3kP_z}{2\pi^2a^3}(a'^2-r^2)^{-1/2}\times\int_{a'}^{a}\frac{(s^2-a'^2)^{1/2}(a^2-s^2)^{1/2}}{s^2-r^2}ds$$

并且在$r\to a'^-$时，无奇异性，那么，

$$\frac{\mu a^2}{kP_z}\gamma=\frac{3}{4\pi}[K(e)-E(e)],\quad e^2=1-\frac{a'^2}{a^2}$$

12.5 非均匀半空间

非均匀各向同性弹性半空间的接触问题，具有巨大的实践重要性，并且开始于Borowicka(1943b)的许多努力，已经得到了这种问题的简单的解。关于早期工作的评论，可以在Olszak(1959)的论文中查到，涉及不同Poisson比介质的研究工作的

较晚的评论，可以见Golecki与Knops(1969)的论文。下面将表明，即使在相对直接的情形中，其中，弹性常数μ和ν按照公式

$$\mu = mz^{\lambda}, \quad \nu = \nu_0 \tag{12.5.1}$$

变化，控制一非均匀介质的方程是困难的；由于这个原因，研究者们集中考虑少数特殊情形（注意，在(12.5.1)式中，λ是一个任意常数，满足$0 \leqslant \lambda < 1$，并且不是§1.6中的Lamé常数）。

容易验证，由应变与应力的直接计算和接着代入平衡方程，可知

$$(u, v, w) = \left(z\frac{\partial \psi}{\partial x}, \ z\frac{\partial \psi}{\partial y}, \ -\psi + z\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \tag{12.5.2}$$

是具有(12.5.1)式所给常数的介质的可能位移场，若$\nu = 1/(\lambda + 2)$，并且ψ满足（是例题12.5.1）

$$\nabla^2\psi + \frac{1}{z}\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad 0 \leqslant \lambda < 1 \tag{12.5.3}$$

位移(12.5.2)式对应于剪应力τ_{xz}和τ_{yz}，它们在平面$z = 0$上等于零（例题12.5.3）。这一特殊情形，为Klein (1956)，Korenev (1957)，Mossakovskii (1958)，Popov (1959)，Rakov和Rvachev (1961)以及Belik与Protsenko (1967)所研究。Korenev和Mossakovskii没有清楚地说明ν必须具有以上列出的特殊值。Rostovtsev (1964b)表明，这种情形是仅有的（非奇异）情形，其中，具有$\mu = \mu(z)$，$\nu = \nu_0$的介质，具有一个纯（球形地）径向应力状态。对这样一个应力状态$\tau_{RR} = \sigma$，仅有一个平衡方程

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\sigma) = 0 \tag{12.5.4}$$

并且由于轴对称，于是

$$\sigma = R^{-2}S(\theta) \tag{12.5.5}$$

应变是

$$e_{RR} = e = \sigma/E, e_{\phi\phi} = e_{\theta\theta} = -\nu e, \ e_{R\theta} = 0 = e_{R\phi} = e_{\theta\phi} \tag{12.5.6}$$

并且这些值必须与位移u_R和u_θ以下式相联系，

$$e_{RR}=\frac{\partial u_R}{\partial R},\quad e_{\theta\theta}=\frac{u_R}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta},e_{\phi\phi}=\frac{u_R}{R}+\frac{u_\theta}{R}\cot\theta$$

$$e_{R\theta}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{R}+\frac{\partial u_\theta}{\partial R}\right] \tag{12.5.7}$$

方程$e_{\theta\theta}=e_{\phi\phi}$导致$u_\theta=f(R)\sin\theta$，而$e_{R\theta}=0$给出$u_R=[Rf'(R)-f(R)]\cos\theta+g(R)$。方程$e_{\theta\theta}=-\nu e_{RR}$则给出

$$f'(R)\cos\theta+R^{-1}g(R)=-\nu Rf'(R)\cos\theta-\nu g'(R), \tag{12.5.8}$$

并且因为ν是常数，这隐含有

$$f'(R)=-\nu Rf''(R),\quad g(R)=-\nu Rg'(R) \tag{12.5.9}$$

应变e为

$$e=Rf''(R)\cos\theta+g'(R) \tag{12.5.10}$$

若刚体位移，当$f(R)=$const时，被忽略，那么，方程（12.5.9）的解为

$$f'(R)=AR^{-\lambda-2},\quad g(R)=BR^{-\lambda-2},\quad \lambda=\nu^{-1}-2 \tag{12.5.11}$$

于是E，即比值σ/e，为

$$E=-\nu R^{\lambda+1}S(\theta)/(AR\cos\theta+B) \tag{12.5.12}$$

若E仅仅是$z\equiv R\cos\theta$的函数，那么，$S(\theta)=-\nu^{-1}C(\cos\theta)^{\lambda+1}$，给出

$$E=Cz^{\lambda+1}/(Az+B) \tag{12.5.13}$$

相应的位移是

$$u_R=\frac{A}{1-\nu}R^{-\lambda-1}\cos\theta+BR^{-\lambda-2},\quad u_\theta=-\frac{\nu AR^{-\lambda-1}}{1-\nu}\sin\theta \tag{12.5.14}$$

如果这些位移在原点作用分布载荷的情形下是有意义的，则R的指数必须大于-2。于是，若$A\neq0$，那么，$-\lambda-1>-2$，或者$\nu>1/3$，这意味着ν必须在范围$1/3<\nu<1/2$之间。另一方面，若$B\neq0$，那么，$-\lambda-2>-2$，或者$\nu>1/2$，而这是不可能的。这样，则有，$B=0$和$\mu=mz^\lambda$，$\lambda=\nu^{-1}-2$，亦即，$\nu=1/(2+$

λ），以及 $m = C/[2A(1+\nu)]$。

Rostovtsev排除了这两种极限情形，其中，式 (12.5.14) 中的指数等于 -2。这两种情形是，

(i) $\nu = 1/3$，$B = 0$，对这两种情形，$\lambda = 1$，并且

$$u_R = \frac{3A}{2}R^{-2}\cos\theta,\quad u_\theta = \frac{A}{2}R^{-2}\sin\theta,\quad E = \frac{Cz}{A} \tag{12.5.15}$$

(ii) $\nu = 1/2$，对这种情形，$\lambda = 0$，并且

$$u_R = 2AR^{-1}\cos\theta + BR^{-2},\quad u_\theta = -AR^{-1}\sin\theta, E = Cz/(Az+B) \tag{12.5.16}$$

这些将在本节的末了予以考虑。

仅有的可能非奇异状态是

$$u_R = \frac{AR^{-(\lambda+1)}}{1-\nu}\cos\theta,\quad u_\theta = \frac{-\nu AR^{-(\lambda+1)}}{1-\nu}\sin\theta \tag{12.5.17}$$

其中，$\nu = 1/(2+\lambda)$。这些对应于径向应力

$$\tau_{RR} = -2m(1+\nu)\nu^{-1}AR^{-2}(\cos\theta)^{\lambda+1} \tag{12.5.18}$$

接着，它与原点的法向载荷有关，其大小是

$$P = -2\pi\int_0^{\pi/2} R^2\sin\theta\cos\theta\tau_{RR}\mathrm{d}\theta = 4\pi m\frac{1+\nu}{\nu}\frac{A}{\lambda+3} = 4\pi mA \tag{12.5.19}$$

当$\theta = \pi/2$时，位移 $-u_\theta$是法向位移$w(x,y,0)$。于是，由于$x'y'$平面中、区域S上的法向载荷$P(x',y')$的分布而引起的表面位移，为

$$w(x,y,0) = \iint_S H_{33}(x-x',\ y-y')P(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{12.5.20}$$

其中 (Popov (1961b)，

$$H_{33}(x,y) = \vartheta^0/[2\pi(x^2+y^2)^{(\lambda+1)/2}],\ \vartheta^0 = 1/[2m(\lambda+1)] \tag{12.5.21}$$

当$\lambda=0$，$\nu=1/2$时，这还原为$\vartheta/(2\pi r)$。当区域S是一个半径为a的圆，那么，(12.5.20)式可用以给出w与p的Hankel变换之间的关系，如同为 Mossakovskii (1958) 对轴对称情形和 Kassir (1972) 对一般情形所描述的那样(例12.5.7)。Kassir与 Chuaprasert(1974)曾考虑$\mu=\mu_0(z+c)^\lambda$，$\nu=1/(2+\lambda)$。Ter-Mkrtich'ian (1961) 考虑了$\mu=\mu_0\exp(\lambda z)$，$\nu=\nu_0$；对此情形，控制方程仅仅是平凡地不同于常μ和ν的那类方程，也可以见Puro (1975)。

对扭转问题(Reissner-Sagoci问题)的一般解，在$\mu=\mu(z)$时，可以得到，在这种情形下 (Protsenko (1967)，Kassir (1970))，在柱坐标中，仅有的非零位移为$u_\theta=v(r,z)$，并且

$$\tau_{z\theta}=\mu\frac{\partial v}{\partial z},\quad \tau_{r\theta}=\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) \tag{12.5.22}$$

现在平衡方程 (1.5.3)，亦即

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0 \tag{12.5.23}$$

导出方程

$$\nabla^2 v-\frac{v}{r^2}+q(z)\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad q(z)=\frac{1}{\mu(z)}\frac{\mathrm{d}\mu(z)}{\mathrm{d}z} \tag{12.5.24}$$

它具有解

$$v=\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad \nabla^2\psi+q(z)\frac{\partial\psi}{\partial z}=0 \tag{12.5.25}$$

对于幂律变化 (12.5.1) 式，这导致 (12.5.3)式和解$\psi(r,z)=z^\sigma K_\sigma(sz)J_0(rs)$，其中，$\sigma=(1-\lambda)/2$ (见例题12.5.2)，导致

$$v(r,z)=z^\sigma\int_0^\infty s^{-\sigma}A(s)K_\sigma(sz)J_1(rs)\mathrm{d}s, \tag{12.5.26}$$

$$\tau_{r\theta}(r,z)=mz^{1-\sigma}\int_0^\infty s^{1-\sigma}A(s)K_{1-\sigma}(sz)J_1(rs)\mathrm{d}s \tag{12.5.27}$$

在这种情形下，Reissner-Sagoci 问题导致形如 (10.2.24)，(10.2.25) 式的对偶积分方程，见例题12.5.4。Kassir(1970)

曾考虑过$\mu=\mu_0\exp(\lambda z)$，对此，$q(z)=\lambda$；这只是一种平缓地不同于均匀介质的情形。Kolybiklin(1971)与Singh(1973)曾分析过的情形：$\mu=\mu_0 r^k z^\lambda$；Singh(1972)考虑过$\mu=\mu_0 r^k$；也可以见Dhalinal与Singh(1978b, 1978c)。(12.5.1)式的变化，是不真实的，其中$\mu(0)=0$；Chuaprasert与Kassir(1973)因此考虑了$\mu=\mu_0(z+c)^\lambda$；对于半空间$z\geqslant c>0$，这等价于取(12.5.1)式。

Gibson与Sills(1969)分析过轴对称的Boussinesq问题，对于$\mu=\mu_0$，$\nu=\nu(z)$。当平衡方程用位移（在柱坐标中）表达时，

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)u+\frac{\partial}{\partial r}(g\varepsilon)=0=\nabla^2 w+\frac{\partial}{\partial z}(g\varepsilon) \tag{12.5.28}$$

其中，$g=1/(1-2\nu)$，ε由式(1.6.13)给出。这些方程允许有一个相当简单的Hankel函数解，这导致圆$r\leqslant a$，$z=0$上，由均匀法向压力p引起的表面位移为

$$w(r,0)=\frac{pb}{2\mu}\int_0^\infty \frac{J_0(r\xi)J_1(r\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi^2\Lambda(\xi)},\quad \Lambda(\xi)=\int_0^\infty\frac{\exp(-2\xi z)\mathrm{d}z}{1-\nu(z)} \tag{12.5.29}$$

在§6.10中曾表明，当$\mu=my^\lambda$，$\nu=\nu_0$，由作用在边界上的应力引起的半平面$y\geqslant 0$内的笛卡尔位移，是可能得到的，见式(6.10.26)，(6.10.27)。这个解不服从上述半空间问题中遇到的限制$\nu=1/(2+\lambda)$。Rostovtsev(1964b)用此解去寻求由于轴对称法向载荷、当$\mu=mz^\lambda$，$\nu=\nu_0$时引起的$z=0$上的空间位移，其中ν不必等于$1/(2+\lambda)$。他作出如下推论。在(10.6.16)中表明，在xz平面上，一个x对称状态是与一个由方程

$$\left.\begin{aligned} &w(r,z)=A_1[w^P(x,z);x\to r]\\ &A_1^{-1}[\tau_{zz}(r,z);r\to x]=\tau_{zz}{}^P(x,z)\end{aligned}\right\} \tag{12.5.30}$$

表示半空间$z\geqslant 0$的轴对称相联系的，此方程由A.Ia.Aleksandrov(1961a)给出。这些结果在§10.6中用二维与三维Papkovich-Neuber势被证明了，并且它们对非均匀介质不成立。然而算子A_1与z无关，所以该结果在两种情形中，以相同的方式，对μ，ν与z有关时仍然成立。(Gibson等(1971)曾使用这一手法；也

使用McNamee和Gibson(1960)的结果）．假设在平面问题中

$$w^r(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}K^r(t-x)p^r(t)\mathrm{d}t \qquad (12.5.31)$$

（对于§6.10中考虑的情形，$K^r(t-x)=g_{12}|t-x|^{-1}$）．使用方程（5.7.26）和（12.5.30）写出

$$p^r(x)=\int_0^x p^r(t)\mathrm{d}t=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^x\frac{xp(r)\mathrm{d}r}{(x^2-r^2)^{1/2}} \qquad (12.5.32)$$

那么，形式地

$$w^r(x,0)=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial K^r}{\partial t}(t-r)p^r(t)\mathrm{d}t \qquad (12.5.33)$$

引进K^r，p^r的Fourier变换，亦即

$$\left.\begin{aligned}K_*^r(s)&=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}K^r(t)\exp(\mathrm{i}st)\mathrm{d}t\\ p_*^r(s)&=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}p^r(t)\exp(\mathrm{i}st)\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \qquad (12.5.34)$$

那么卷积定理（5.3.1）和方程（12.5.31）给出❶

$$w^r(x,0)=-\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}sK_*^r(s)p_*^r(s)\exp(-\mathrm{i}xs)\mathrm{d}s \qquad (12.5.35)$$

$$w(r,0)=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^r\frac{\mathrm{d}x}{(r^2-x^2)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}sK_*^r(s)p_*^r(s)\times\exp-(\mathrm{i}xs)\mathrm{d}s \qquad (12.5.36)$$

并且通过交换积分次序，我们得到

$$w(r,0)=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}sK_*^r(s)p_*^r(s)J_0(rs)\mathrm{d}s \qquad (12.5.37)$$

这可用于计算轴对称载荷或一般载荷下的$w(r)$值．对于后者，步骤如下．对于$r\leqslant a$上均匀分布的载荷p

❶从这里开始，原文公式编号都不对．

——译者

$$p(r)=\frac{P}{\pi a^2}H(a-r) \tag{12.5.38}$$

$$p^P(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{P}{\pi}\frac{1}{x+\mathrm{sign}x(x^2-a^2)^{1/2}},\quad x\geqslant a$$

这里必须记住，$p^P(s)$是奇函数；当$a\to 0$，有

$$p^P(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)\frac{P}{\pi}\frac{1}{2x},\quad p_*^P(s)=\frac{iP}{2\pi}\mathrm{sign}(s), \tag{12.5.39}$$

$$w(r,0)=K(r)P,K(r)=(2\pi)^{1/2}\int_0^\infty sK_*^P(s)J_0(rs)\mathrm{d}s \tag{12.5.40}$$

函数$K(r)$是影响函数H_{33}，所以，

$$w(x,y,0)=\iint_s K(R)p(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{12.5.41}$$

其中，$R^2=(x-x')^2+(y-y')^2$。对于§6.10的幂律介质，积分（12.5.40）式可以计算得到，为

$$2\pi K(r)=\vartheta^0(\nu,\lambda)r^{-\lambda-1} \tag{12.5.42}$$

$$\vartheta^0(\nu,\lambda)=\frac{1-\nu}{\pi}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\pi^{1/2}}\right]\left[\frac{qB(\lambda+2)\sin\beta}{(\lambda+1)\Gamma(1+\lambda/2)}\right] \tag{12.5.43}$$

这里，用了§6.10中的记号。对于均匀介质，两个括号中的项均等于1，因而给出$\vartheta=(1/\nu)/\mu$；在$\nu=1(\lambda+2)$时，（12.5.43）式还原为（12.5.21）式。Popov(1973b)对幂律介质曾得到方程（2.6.5）式中的影响系数k_{31}，k_{33}，并且得到§6.11意义上的适宜的积分关系。除去特殊情形外（Gibson等(1971)），平面$z=0$上的位移表达式是极其复杂的，参考Rostovtsev与Kranevshaia(1971)。

对于幂律介质，方程(12.5.41)成为

$$w(x,y,0)=\frac{\vartheta^0(\nu,\lambda)}{2\pi}\iint_s\left[\frac{p(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'}{[(x-x')^2+(y-y')^2]^{(1-\sigma)}}\right] \tag{12.5.44}$$

其中，$\sigma=(1-\lambda)/2$。Rostovtsev（1961）曾表明，Galin定理（§12.3）可以推广到这一介质，其意义是，若S是椭圆$x^2/a^2+y^2/b^2\leqslant 1$以及若

$$P(x',y')=\left(1-\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}\right)^{-\sigma}P_n(x',y') \qquad (12.5.45)$$

其中$P_n(x,y')$是x',y'的n阶多项式，那么，$w(x,y,0)$也是一个S内的多项式$Q_n(x,y)$。Rostovtsev(1964a)运用椭球坐标发展了有关这种介质的一个完全的理论。

具有 $\mu=\mu_0+mz$，$\nu=\nu_0$ 的介质，由法向轴对称载荷引起的弹性位移场，由Gibson（1967）针对不可压缩介质给出，对这种介质，$\nu=1/2$（见下面）。P.T.Brown和Gibson（1972）考虑过一般的$\nu\neq 1/2$的可压缩介质。他们注意到，当$\nu=1/3$或$1/2$时产生的简化。当$\mu_0=0$，$\nu=1/3$时，位移场已在上面由式（12.5.15）给出。对于$\mu=\mu_0+mz,\nu=\nu_0$的完全解为Awojobi与Gibson（1973）给出。Awojobi（1972，1975）建立了非均匀介质的方程，其中，$\mu=\mu(z)$，$\nu=\nu_0$，他利用容变E和局部旋转ω_θ和柱坐标。他注意到，方程变简单了，若(a) $\mu=\mu_0+mz$，(b) $\mu=mz^\lambda$，其中，$\lambda=\nu^{-1}-1$；这是式（12.5.13）所给的$A=0$和$B\neq 0$的情形，并且，除非$\nu=1/2$，否则该情形将是不可能成立的，(c)$\mu=m/(h-z)$。他得到了情形(c)的解。也可以见Kruijtzer(1976)。

我们现在回到方程（12.5.16）所给出的奇异情形（*ii*）。由于不论$A=0$或$A\neq 0$都有$E(0)=0$，实际上，取$A\neq 0$时，得到的结果很少。若$A=0$，那么，

$$u_R=BR^{-2},\quad u_\theta=0,\quad \mu=E/3=Cz/(3B)=mz \qquad (12.5.46)$$

这是所谓的Gibson介质，并且有一纯径向应力状态

$$\tau_{RR}=-6BmR^{-2}\cos\theta \qquad (12.5.47)$$

但这是由原点的法向点力P引起的弹性场，这里

$$P = -2\pi\int_0^{\pi/2} R^2\sin\theta\cos\theta\,\tau_{RR}\,d\theta = 4\pi mB \qquad (12.5.48)$$

于是

$$\tau_{RR} = -3P\cos\theta/(2\pi R^2) \qquad (12.5.49)$$

这是由 Calladine 和Greenwood (1978) 得到的结果，并且表明，在Gibson介质的原点作用法向点载荷引起的应力场，与不可压缩均匀介质的结果相同（例题 12.5.5），也可见 Alexander (1977)。再者，Gibson介质的性质像一个Winkler 基础。在事实上，由圆$0<r<b$上的法向分布载荷引起的法向位移$w(r,z)$是（例12.5.6）

$$w(r,z) = (2m)^{-1}pb\int_0^{\infty} J_1(b\xi)J_0(r\xi)\exp(-\xi z)\,d\xi \qquad (12.5.50)$$

于是

$$w(r,0) = (2m)^{-1}p,\ 0<r<b,\ w(r,0) = 0,\ r>b \qquad (12.5.51)$$

Awojobi (1974) 曾表明，这一结果对具有任意深度h的Gibson土壤层也成立，若它静止地处于一个无摩擦刚性基础上。

当μ和ν是z的已知函数时，非均匀各向同性体的方程的完全解，曾由 Plevako (1971) 给出。把这个解化成两个线性微分方程的解，这两个方程有一个是二阶的，另一个是四阶的。在μ,ν为常数的特殊情形下，重新得到Papkovich-Neuber解。Plevako曾研究过这个解的特殊情形 (1972a, 1972b, 1973b, 1973c, 1974)；也可以见 Rappoport (1976) 和 Rogers 与 Clements (1978) 进一步的文献以及理论和数值结果可以在Geotechnique这本杂志上查到；例如，可见Carrier 与Christian (1973)，Belloni 与 Jamiolowski (1972)，Poulos 与 Davis (1974)，P. T. Brown 与 Gibson (1973)，Gibson (1974)和Selvadurai (1979)。

例12.5

1．试表明，对应于(12.5.2)的应变为

$$e_{xx}=z\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},\quad e_{xz}=z\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z},\quad e_{zz}=z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\text{等等。}$$

试表明，若ψ满足式(12.5.3)，这些应变满足平衡方程(1.4.11)～(1.4.13)。

2．试表明，在圆柱坐标中，当z或者r趋于无穷时，位移与应力有界，解(12.5.26)式具有形式$\psi(r,z,\theta)=z^{\sigma}K_{\sigma}(sz)J_n(sr)\cos n\theta$，其中$2\sigma=1-\lambda$。

3．求出由例题12.5.2中的ψ给出的位移与应力，并且表明在$z=0$时$T_{,z}=0=T_{\theta z}$。

4．试表明，半空间$z\geqslant 0$和按幂律$\mu=mz^{\lambda}$变化的 Reissner-Sagoci 问题导致对偶积分方程

$$\int_0^{\infty}s^{-\lambda-\sigma}A(s)J_1(rs)\,ds=f(r)/[2^{\sigma-1}\Gamma(\sigma)],\quad r\leqslant a$$

$$\int_0^{\infty}A(s)J_1(rs)\,ds=0,\quad r>a$$

5．试表明，作用在原点的法向集中载荷P引起的均匀可压缩介质中的应力分布为(12.5.49)式(利用式(2.5.17))。

6．利用相应于平面应变位移，或利用式(12.5.45)及恒等式

$$\int_0^{2\pi}(\rho^2+r^2+z^2-2\rho r\cos\phi)^{-1/2}d\phi=2\pi[(\rho+r)^2+z^2)]^{-1/2}$$

$$\times{}_2F_1(1/2,\ 1/2;1;\mu^2)$$

$$=2\pi\int_0^{\infty}\exp(-z\xi)J_0(\rho\xi)J_0(r\xi)\,3\xi$$

其中，$\mu^2=4\rho r/[(\rho+r)^2+z^2]$，以推导出式(12.5.50)。

7．试表明，若$p(x,y')$是轴对称的，那么，方程(12.5.44)可以写成

$$w(r)=\vartheta^*H_0[\xi^{\lambda-1}p^*(\xi);r],\quad p(r)=H_0[p^*(\xi);r]$$

其中(Popov(1961b))，$\vartheta^*=\vartheta^0 2^{-\lambda}[(1-\lambda)/2)/\Gamma[(1+\lambda)/2]$（可利用例题5.7.1)。

12.6 各种各样的接触问题

还存在着属于经典接触问题的许多研究领域，没有包括在前

面的篇幅中．对其中的某些问题，现在列出一个简短的、不完全的文献目录如下．

（1）半空间的表面上，既不是圆形也不是椭圆形受载区域的接触问题

这里最多的是 Kalker (1967，1971，1972，1977b) 关于"弹性线型接触"的著作．这与细长形区域上的载荷有关，并且对滚动接触有实际意义．这是本书完全不曾考虑过的一个题目．特别是，Panek与Kalker (1977) 对于具有圆形端部的狭窄矩形压头产生的变形，提供了一个简单的近似解；早一点的解答是Borodachev与Galin (1974)，Sivashinsky (1975) 和Borodachev (1976b) 给出的．

与狭长形压头有关的这一问题，由 Rvachev (1956a)，Borodachev (1962) 和Protsenka (1972) 讨论过，对于半空间上的无限长梁或狭长体（这个梁不被认为是一个简单的一维物体），可参阅 Wieghardt (1922)，Galin (1943)，Rvachev (1956b)，(1958)，(1959)，Lekkerkerker (1960)，Conway与Farnham (1970)，V. S. Protsenko与Rvacher (1976)，V. S. Protsenko与V. G. Protsenko (1972) 已经研究两个狭长形压头，而V. G. Protsenk，V. S. Protsenko 与 Sinekop (1973) 已经研究过半空间上的两根平行梁．Rokov (1962)利用Rvachev (1956a) 的分析，以寻求半空间上的平行梁系统的近似结果．Medovnik与Rakov (1970) 曾分析过一组平行梁的周期系统．

（2）压入半空间或层状物的任意横截面的压头问题的近似解．这里可以提到Gorbunov-Posadov (1939)，Potelezhko (1971)，Golikova与Mossakovskii (1976) 以及Conway及其同事Vogel，Farnham和So (1966)，Conway 与 Farnham (1967b，1968)，Conway与Engel (1969)，Engel与 Conway (1971) 等人的著作．这些较晚的论文，假定每一个元区域

上接触压力是常数，这些元区域是由接触区域分割得来的。这些文章可以看作是有限元法的先驱，有限元法在接触问题中的应用，由Selvadurai (1979, $p.375f$) 所叙述。

(3) 矩形横截面的平面压头的接触问题，特别是考虑了边缘上和角点处的奇异性问题，已由 Borodachev (1967b) 所研究。针对光滑和粘结接触两种情形的广泛的解析和数值结果，可以在Brothers (1976)和Brothers、Sinclair及Segedin(1977)的论文中查到。

(4) 弹性矩形物体的接触问题。对此，可见下列诸作者的著作：Abramian (1957), Galfaian 与 Chobanian (1966), Prasad 与 Chatterjee (1973), Dundurs, Kiattikomol 与 Keer (1974), Prasad与Dasgupta (1975), Galfaian (1975), Dasgupta与Prasad (1976) 以及Chiu, Prasad 与Dasgupta (1976)。

(5) 与两个半平面中的一个刚性体或弹性体相联系的压缩问题，或者两个狭长体间的一个刚性体或弹性体，或者两个半空间，或者两个厚板间的一个刚性体或弹性体的压缩问题。对此，可查Okubo (1951), Khadem与O'Connor (1969a, 1969b), Alblas (1974, 1975), Aihara (1975), Gladwell (1977, 1979) 等人的著作。

(6) 球或球壳的接触问题。这是许多研究文章的论题，其中，有如下一些著作：Sternberg 与 Rosenthal (1957), Sternberg, Eubanks 与 Sadowsky (1952), Mindlin 与 Deresiewicz (1953), Golecki (1957), Lur'e, Abramian, Arutiunian 与 Babloian (1964), Arutiunian 与 Abramian (1964a, 1964b), Goodman与Keer (1965), Wang (1965), DeSilva与Tsai (1969), Noble与Hussian(1969a), Bondareva (1969, 1971), Hussian 与 Pu (1970, 1971b), Updike 与 Kalnins (1970, 1972a, 1972b), Karpenko (1971, 1976),

Guerero与Turtellaub (1972), Grigorovich(1973), Gladwell与England (1975), Golecki (1976).

（7）与埋藏在弹性半无限介质中的块体或柱体相关联的问题. 对此，可以参阅下面一些人的著作：Poulos与 David (1968), Muki与Sternberg (1969, 1970), Parlas与Michalopoulos(1972), Suriyamongkal, Karasudhi与Lee(1973), Haritos (1978), Dhaliwal, Singh与Sneddon(1979), Luk与Keer (1979), Haritos与Keer (1979).

滚动接触、有限元一类的数值方法以及基于数值程序的方法，已经超出了本书的范围. ●

●接触问题已有标准的有限元法计算机程序，例如ADINA程序，已装在国内许多部门的计算机上。 ——译者

参考文献中所引用的杂志及其编号

1 Academie des Sciences. Paris. Comptes Rendues. (1), Q46,A14
2 Academie Polonaise des Sciences. Bulletin. Class Quatrieme. (2), Q60,P6
3 Accademia Nazionale dei Lencei, Rome. Class di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali. Rendiconti. (3)
4 Acta Machanica. (4), TJ3,A4
5 Akademia Gorniczo-Hutnicza w Krakowie. Zeszyty Naukowe: Elekcryfikacja Gornictwa i Hutnictwa. (5)
6 Akademia van Wetenschappen, Amsterdam. Afdeeling Natuurkunde. Proceedings. Series B. Physical Sciences. (6), QH1,A33X
7 Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Melmanika.(7)
8 Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Seriia Fiziko Matematicheskikh nauk. (8)
9 Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33
10 Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. (10), Q60,A33
11 Akademiia nauk S.S.S.R. Institut Mekhaniki. Inzhenernyi Sbornik. (11)
12 Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Mekhanika i Mashinostroenie. (12)
13 Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Mekhanika Tverdogo Tela. (Mechanics of Solids), (13)
14 Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh nauk. (14)
15 Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Otdelenie Tekhnicheskikh nauk. Mekhanika i Mashinostroenie. (15)
16 Akademiia nauk S.S.S.R. Kiev. Dopovide. (16), QA1,A45
17 American Journal of Mathematics. (17), QA1,A49
18 American Society of Civil Engineers. Engineering Mechanics Division. Journal. (18), TA1,A5233
19 American Society of Civil Engineers. Soil Mechanics and Foundations Division. Journal. (19), TA705,A55X
20 Applied Mechanics Reviews. (20), A1.A639
21 Applied Scientific Research. (21), QC1,A745
22 Archive for Rational Mechanics and Analysis. (22), A801,A6
23 Archiwum Mechaniki Stosowanej. (Archives of Mechanics). (23), TA350,A17
24 Arkiv for Matematik Astronomi och Fysik. (24)
25 Bauingenieur. (25), TA3,B26
26 Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17
27 Canadian Geotechnical Journal. (27), TA710,A1C3
28 Communications on Pure and Applied Mathematics. (28), QA1,C718
29 Computers and Mathematics with Applications. (29), QA76,C675X
30 Defence Science Journal. (30)
31 Edinburgh Mathematical Society. Proceedings. (31), QA1,E4
32 Forchung im Inginieurwesen.(32),TA1,F68
33 Franklin Institute. Journal. (33), T1,F8
34 Geotechnique.(34),TA705,G35
35 Glasgow Mathematical Association. Proceedings.(35),QA1,G52
36 Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6

37 Institute of Mathematics and Its Applications. Journal. (37), QA1,I552
38 International Computational Center. Bulletin. (38), QA74,I6
39 International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5
40 International Journal of Fracture Mechanics. (40), TA401,I63
41 International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology. (41), QA1,I525X
42 International Journal of Mechanical Sciences. (42), TJ1,I59
43 International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65
44 Inzhenernyi Zhurnal.(44)
45 Inzhenernyi Zhurnal-Mekhanika Tverdogo Tela. (45)
46 Iowa State College Journal of Science. (46)
47 Journal d'Analyse Mathematique. (47), QA1,J55
48 Journal de Mecanique. (48), QA801,J6
49 Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik. (49), QA1,J59
50 Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6
51 Journal of Applied Physics. (51), QC1,J83
52 Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X
53 Journal of Engineering Mathematics.(53),QA1,J575
54 Journal of Mathematical Analysis and Applications.(54),QA1,J593
55 Journal of Mathematical and Physical Sciences.(55)
56 Journal of Mathematics and Mechanics. (Supersedes the Journal of Rational Mechanics and Analysis). (56), QA1,I593
57 Journal of Mathematics and Physics.(57),QA1,J6
58 Journal of Sound and Vibration.(58),QC221,J6
59 Journal of Strain Analysis. (Journal of Strain Analysis for Engineering).(59),TG265,J6
60 Journal of Mechanics and Physics of Solids.(60),TA350,J68
61 Kansas State College. Bulletin. (61)
62 Letters in Applied and Engineering Sciences.(62)
63 London Mathematical Society. Journal.(63),HM24,J6X
64 London Mathematical Society. Proceedings.(64),QA1.L548
65 Matematicheskii Sbornik.(65),QA1,M4
66 Mathematika.(66),QA1,M84
67 Mechanics Research Communications. (67)
68 Moscow. Inzhenerno-Stroitel'nyi Institut. Sbornik Trudov. (68)
69 Moscow. Moskovskii Elektromekhanicheskii Institut Inzhenerov Zheleznodorozhnogo Transporta. Trudy. (69)
70 Moscow. Universitet. Uchenye Zapiski.(70)
71 National Academy of Sciences, Washington. Proceedings.(71),Q11,N26
72 Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Proceedings of the Section of Sciences. Series A. Mathematical Sciences. (72), QA1,A32X
73 Nederlandse Akademie van Wetenschapen. Afdeeling Natuurkunde. Proceedings of the Section of Sciences. Series B. Physical Sciences. (73), QH1,A33X
74 Nikon Kikaigakkai. Japanese Society of Mechanical Engineers. Bulletin. (74), TJ1,N5
75 Oerterreichische Bauzeitschrift.(75)
76 Osterreichische Ingenieur-Archiv.(76)
77 Philosophical Magazine, a Journal of Theoretical, Experimental and Applied Physics.(77),Q1,P5
78 Physical Society of London. Proceedings. (78), QC1,P52

79 Physics, a Journal of General and Applied Physics. (79), QC1,J85
80 Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7
81 Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853
82 Quarterly Journal of Mathematics.(82),QA1,Q22
83 Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23
84 Quarterly of Applied Mathematics.(84),QA1,Q25
85 Revue Romaine des Sciences Technique. Serie de Mecanique Appliquee. (85), TA350,R48
86 Royal Institution of Naval Architects. Transactions. (86)
87 Royal Society of Edinburgh. Proceedings. Section A. Mathematical and Physical Sciences. (87), Q41,L7
88 Royal Society of London. Philosophical Transactions. Section A. Mathematical and Physical Sciences. (88), Q41,L8
89 Royal Society of London. Proceedings. Series A.(89),Q41,L7
90 Seismological Society of America. Bulletin.(90),QE531,S3
91 Sibirskii Matematicheskii Zhurnal. Siberian Mathematical Journal.(91),QA1,S45
92 Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal. (92), QA1,S72
93 S.I.A.M. Journal on Applied Mathematics. (93), QA1,S73
94 Soils and Foundations.(94),TA710,A1S6
95 Solids Physics. Doklady.(95),QC1,A386
96 Technical Physics of the U.S.S.R.(96)
97 Theoretical and Applied Mechanics. (Japan National Congress for Applied Mechanics). (97)
98 Tohoku University. Technology Reports. (98)
99 Tokyo University. College of Sciences. Journal.(99)
100 Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal. (Ukrainian Mathematical Journal). (100), QA1,A42251,3X
101 Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101)
102 Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik.(102),QA1,Z5
103 Zhurnal Technicheskoi Fiziki. (Soviet Physics-Technical Physics), (103), QC1,S795

参考文献

Abramian, B.L. **On the plane problem of the theory of elasticity for a rectangle** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.21(1957)89-100. 630

Abramian, B.L. Arutiunian, N.Kh. Babloian, A.A. **On two contact problems for the elastic sphere** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.28(1964)622-629,[769-777]. 630

Abramian, B.L. Arutiunian, N.Kh. Babloian, A.A. **On SYMMETRIC PRESSURE OF A CIRCULAR STAMP ON AN ELASTIC HALF-SPACE in the presence of adhesion.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.30(1966)143-147,[173-179]. 458,486

ABRAMIAN, B.L. ARUTIUNIAN, N.KH. **On some contact problems for composite half-spaces.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.31(1967)1001-1008,[1007-1013]. 570

Abramian, B.L. Contact Problems of the Theory of Elasticity. Raleigh: North Carolina State University, Department of Mathematics (1971). 2

Abramian, B.L. Certain asymmetric contact problems for semi-space. In de Pater, A.D. and Kalker, J.J. (Eds.), **The Mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Delft University Press. 84-98. 491**

Abramov, V.M. The problem of contact of an elastic infinite half-plane with an absolutely rigid rough foundation. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. (10), Q60,A33 Vol.17(1937)173-178. 159

Abramov, V.M. **Etude d'un cas d'action non-symetrique d'un poincon circulaire appliqus a un corps elastique d'epaisseur infinie et limite par un plan.** Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. (10), Q60,A33 Vol.23(1939)759-764. 458,476

Abramowitz, M. Stegun, I. **Handbook of Mathematical Functions. 2nd ed. New York: Dover Publications (1972). 260,261,324,389,463,547,592**

Adams, G.G. Bogy, D.B. The plane solution for the elastic contact problem of a semi-infinite strip and half-space. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.43(1976a)603-607. 455

Adams, G.G. Bogy, D.B. **The plane solution for bending of joined dissimilar elastic semi-infinite strips.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.12(1976b)239-249. 455

Adams, G.G. Bogy, D.B. **The plane symmetric contact problem for dissimilar elastic semi-infinite strips of different widths.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.44(1977)604-610. 455

Aihara, T. **On the stress distribution in elastic contact between flat end of a circular cylinder and a semi-infinite body.** Nikon Kikaigakkai. Japenese Society of Mechanical Engineers. Bulletin. (74), TJ1,N5 Vol.19(1975)570-578. 630

Alblas, J.B. **A note on a special difference equation.** Akademia van Wetenschappen, Amsterdam. Afdeeling Natuurkunde. Proceedings. Series B. Physical Sciences. (6), QH1,A33K Vol.68(1965)39-45. 346

Alblas, J.B. Kuypers, W.J.J. **On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate.** Applied Scientific Research. (21), QC1,A745 Vol 15(1965/66)429-439. 350

Alblas, J.B. Kuipers, M. **Contact problems of a rectangular block on an elastic layer of finite thickness. Part I: The thin layer.** Acta Machanica. (4), TJ3,A4 Vol.8(1969)133-145. 271

Alblas, J.B. Kuipers, M. **Contact problems of a rectangular block on an elastic layer of finite thickness. Part II: The thick layer.** Acta Machanica. (4), TJ3,A4 Vol.9(1970a)1-12. 271

Alblas, J.B. Kuipers, M. **On the two-dimensional problem of a cylindrical stamp pressed into a thin elastic layer.** Acta Machanica. (4), TJ3,A4 Vol.9(1970b)292-311. 271

Alblas, J.B. **On the two-dimensional contact problem of a rigid cylinder, pressed between two elastic half-planes.** Mechanics Research Communications. (67) Vol.1(1974)15-20. 630

Alblas, J.B. **On the two-dimensional contact problem of a rigid cylinder, pressed between two elastic layers.** In de Pater, A.D. and Kalker, J.J. (Eds.), The Mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Delft University Press (1975). 110-126. 630

Aleksandrov, A.Ia. **Some relations between the solutions of the plane and axially symmetric elasticity problems for the infinite plate.**

Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.128(1959a)57-60 and 95,Vol.4(1959a)1121-1124. 511

Aleksandrov, A.Ia. **Some relations between the solutions of plane and axially symmetric problems in the theory of elasticity and the solution of axially symmetric problems by means of analytic functions.** Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.129(1959b)754-757 and 95,Vol.4(1959b)1378-1382. 513,514,516

Aleksandrov, A.IA. **Solution of axisymmetric problems of the theory of elasticity with the aid of relations between axisymmetric and plane states of stress.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics), (80), QA201;P7 Vol.25(1961a)912-920,[1361-1375]. 513,623

Aleksandrov, A.Ia. **Solution of some axially symmetric problems in the theory of elasticity by means of analytic functions.** Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.139(1961b)337-340 and 95,Vol.6(1962)630-633. 513,516

Aleksandrov, A.Ia. Solov'ev, Iu.I. **One form of solution of three-dimensional axisymmetric problems of elasticity theory by means of functions of a complex variable and the solution of these problems for the sphere.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.26(1962)138-145,[188-198]. 516

Aleksandrov, A.Ia. Solov'ev, Iu.I. **The solution of the three-dimensional axisymmetric problems in the theory of elasticity by means of line integrals.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.28(1964a)914-919,[1106-1112]. 486,516

Aleksandrov, A.Ia. Solov'ev, Iu.I. **On a generalization of the method of solution of axially symmetric problems in the theory of elasticity by means of analytic functions to spatial problems without axial symmetry.** Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.154(1964b)295-297 and 95,Vol.9(1964b)99-102. 516

Aleksandrov, A.Ia. **Solution of three-dimensional problems of the theory of elasticity for solids of revolution by means of analytic functions.** International Journal of Solids and Structures. (43), T2401,I65 Vol.4(1968)701-721. 516

Aleksandrov, V.M. Vorovich, I.I. **The action of a die on an elastic layer of finite thickness.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika.

(Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.24(1960)323-333,[462-476]. 556

Aleksandrov, V.M. On the approximate solution of a certain type of inbegral equation. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.26(1962)934-943,[1410-1424]. 251,252,255,264,266,269

Aleksandrov, V.M. On the solution of certain contact problems of the theory of elasticity. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.27(1963a)970-972,[1490-1494]. 268,270

Aleksandrov, V.M. Some contact problems for the elastic layer. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.27(1963b)758-764,[1164-1174]. 556

Aleksandrov, V.M. On the approximate solution of a class of integral equations. (In Russian). Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Seriia Fiziko Matematicheskikh nauk. (8) Vol.17(1964a)3-8. 265

Aleksandrov, V.M. The solution of a type of two-dimensional integral equation. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.28(1964b)579-581,[714-717]. 556

Aleksandrov, V.M. Vorovich, I.I. Contact problems for the elastic layer of small thickness. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.28(1964)350-351,[425-427]. 270,271

Aleksandrov, V.M. Babeshko, V.A. Contact problems for an elastic strip of slight thickness. (In Russian). Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Mekhanika Tverdogo Tela. (Mechanics of Solids), (13) No.2(1965)95-107. 271

Aleksandrov, V.M. Babeshko, V.A. Kucherov, V.A. Contact problems for an elastic layer of slight thickness. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.30(1966)124-142,[148-172]. 556

Aleksandrov, V.M. Solov'ev, A.S. Some mixed spatial problems in the theory of elasticity.(In Russian). Inzhenernyi Zhurnal-Mekhanika Tverdogo Tela. (45) No.2(1966)134-139. 595

Aleksandrov, V.M. **Contact problems for an elastic wedge. (In Russian).** Inzhenernyi Zhurnal-Mekhanika Tverdogo Tela. (45) No.2(1967a)120-131. 447

Aleksandrov, V.M. **On a contact problem for an elastic wedge. (In Russian).** Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Mekhanika.(7) Vol.20,No.1(1967b)3-14. 447

Aleksandrov, V.M. **On the approximate solution of some integral equations of the theory of elasticity and mathematical physics.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.31(1967c)1117-1131,[1122-1136]. 557,558

Aleksandrov, V.M. **Axisymmetric problem of the effect of an annular die on an elastic half-space.** (In Russian). Inzhenernyi Zhurnal-Mekhanika Tverdogo Tela. (45) No.4(1967d)108-116. 519

Aleksandrov, V.M. Belokon, A.V. **Asymptotic solution ofa class of integral equations and its application to contact problems for cylindrical elastic bodies.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.31(1967)704-710,[718-724]. 271

Aleksandrov, V.M. **Asymptotic methods in contact problems of elasticity theory.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.32(1968)672-683,[691-703]. 265-266,271

Aleksandrov, V.M. Kopasenko, V.V. **Contact problems for an elastic wedge with a rigidly clamped face.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.4 No.7(1968)75-82,[47-50]. 447

Aleksandrov, V.M. **Asymptotic solution of the contact problem for a thin elastic layer.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1969)61-73,[49-63]. 558

Aleksandrov, V.M. **On plane contact problems of the theory of elasticity in the presence of adhesion or friction.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.34(1970)246-257,[232-243]. 167,278

Aleksandrov, V.M. Kucherov, V.A. **On the method of orthogonal**

polynomials in plane mixed problems of elasticity theory. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.34(1970)643-652,[612-621]. 266

Aleksandrov, V.M. Smetanin, B.I. **On an effective method of solving non-classical mixed problems of the theory of elasticity.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.35(1971)80-87,[53-60]. 271

Aleksandrov, V.M. Babeshko, V.A. **On the pressure on an elastic half-space by a wedge-shaped stamp.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1972)83-93,[78-83]. 455

Alexander, L.G. **Comment on Gibson, R.E., (1967).** Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.27(1977)253-254. 626

Arscott, F.M. **Periodic Differential Equations: an introduction to Mathieu, Lame and allied functions. New York:** MacMillan **(1962).** 579,604

Arutiunian, N.Kh. Abramian, B.L. **On the impression of a rigid die into an elastic sphere.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.28(1964a)1101-1105,[1322-1327]. 630

Arutiunian, N.Kh. Abramian, B.L. **On pressing a rigid punch into an elastic sphere. 11th International Congress of Applied Mechanics. Proceedings. Munich (1964b). 630**

Arutiunian, N.Kh. Babloian, A.A. Contact problems for a half-space with an inclusion. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.30(1966)1050-1056,[1249-1255]. 570

Arutiunian, N.Kh. **Contact problem for a half-plane with elastic reinforcement.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.32(1968)632-646,[652-665]. 332

Arutiunian, N.Kh. Mkhitarian, S.M. **Periodic contact problem for a half-plane with elastic laps (cover plates).** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1969)813-843,[791-819]. 351

Arutiunian, N.Kh. Mkhitarian, S.M. Some contact problems for a semi-plane with elastic atiffeners. In Czarnota-Bojarski, R.E., et al (Eds.), Trends in Klasticity and Thermoelasticity,witold Nowacki Anniversary Volume. Groningen: Wolters-Noordhoff(1971). 332,334,339

Arutiunian, N.Kh. Mkhitarian, S.M. Certain contact problems for a half-space reinforced by elastic gussets. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.36(1972)770-787,[727-743]. 374

Arutiunian, N.Kh. Mkhitarian, S.M. Contact problem of pressing a stamp into an elastic half-plane with a thin reinforcing covering. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.39(1975)857-875,[823-841]. 339

Atkinson, K.E. A Survey of Numerical Methods for the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics. 257

Awojobi, A.O. Vertical vibration of a rigid circular foundation on Gibson soil. Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.22(1972)333-343. 626

Awojobi, A.O. Gibson, R.E. Plane strain and axially symmetric problems of a linearly non-homogeneous elastic half- space. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.26(1973)285-302. 312,313,626

Awojobi, A.O. The invariance of Gibson's Law for a stratum on a frictionless base. Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.24(1974)359-366. 626

Awojobi, A.O. The settlement of a foundation on Gibson soil of the second kind. Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.25(1975)221-228. 626

Awojobi, A.O. On the hyperbolic variation of elastic modulus in a non-homogeneous stratum. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.12(1976)739-748. 313

Babeshko, V.A. On an asymptotic method applicable to the solution of integral equations in the theory of elasticity and in mathematical physics. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.30(1966)732-741,[870-880]. 271

Babeshko, V.A. **Certain types of integral equations appearing in contact problems of the theory of elasticity.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1969)1034-1041,[1005-1012]. 271

Babeshko, V.A. Berkovich, V.N. On the theory of mixed problems for the three-dimensional wedge. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.36(1972)943-947, [892-896]. 447

Baker, C.T.H. The Numerical Treatment of Integral Equations. London: Oxford University Press (1977). 257

Bantsuri, R.D. Contact problem for a wedge with an elastic support. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.211(1973)797-800 and 95,Vol.18(1973)561-562. 350

Bantsuri, R.D. Contact problem involving an elastically reinforced anisotropic wedge. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.222(1975)568-571 and 95,Vol.20(1975)368-370. 350

Barber, J.R. Determining the contact area in elastic indentation problems. Journal of Strain Analysis. (Journal of Strain Analysis for Engineering).(59),TG265,J6 Vol.9(1974)230-232. 520

Barber, J.R. Indentation ofthesemi-infinite elastic solid by a concave rigid punch. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.6(1976)149-159. 520

Bardanov, Iu.M. Popov, G.Ia. The bending of an infinite plate adhering to an elastic half-space. (In Russian). Inzhenernyi Zhurnal-Mekhanika Tverdogo Tela. (45) No.1(1966)100-107. 546

Barnes, E.W. On functions generated by linear difference equations of the first order. London Mathematical Society. Journal.(63),HM24,J6X Ser.2,Vol.2(1904)280-292. 346

Bazant, Z.P. Three-dimensional harmonic functions near termination or intersection o gradient singularity lines. A general numerical method. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.12(1974)221-243. 455

Bazant, Z.P. Keer, L.M. Singularities of elastic stresses and of harmonic functions at conical notches or inclusions. International

Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.10(1974)957-964. 456

Begiashvili, A.I. Beguiachvili, A.I. Solution du probleme de la pression d'un systeme de profiles rigides sur la frontiere rectiligne d'un demiplan elastique. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. (10), Q60,A33 Vol.27(1940)914-916. 167

Belen'kii, M.Ia. The mixed problem of the theory of elasticity for an infinitely long strip. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.16(1952)283-292. 249

Belen'kii, M.Ia. Some axially symmetric problems of elasticity theory. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.24(1960)282-283,[868-873]. 513

Belik, G.I. Protsenko, V.S. The contact problem of a half-plane for which the modulus of elasticity of the material is expressed by a power function ofthe depth. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,F6853 Vol.8,No.6(1967)137-140,[80-82]. 618

Belloni, L. Jamiolkowski, M. Comment on Carrier, W.D. and Christian, J.T., (1973). Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.23(1973)596-600. 627

Belokon', A.V. Contact problem on the interaction between an elastic disk and two different rigid stamps. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1969)136-142,[132-139]. 403

Belyaev, N.M. Studies on Elasticity and Plasticity Theory. (In Russian). Moscow: GITTL (1957). 98

Benscoter, S.V. Analysis of a single stiffener on an infinite sheet. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.16(1949)242-246. 320,322,330

Benthem, J.P. Vooren, J. Van der On the diffusion of load from an edge-stiffener into a wedge-shaped plate. Amsterdan: Nat. Lucht. Lab. Technical Note S. 541(1959). 350

Benthem, J.P. **On the stress distribution in anisotropic infinite wedges.** Quarterly of Applied Mathematics.(84),QA1,Q25 Vol.21(1963)189-198. 447

Benthem, J.P. **Note on the Boussinesq-Papkovich stress- functions.** Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.9(1979)201-206. 35

Berkovich, V.N. **Some contact problems for a three-dimensional wedge with a finite number of contact regions.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.38(1974)373-377,[344-350]. 447

Bickford, W.B. **Generalization of the Boussinesq-Papkovich functions to an anisotropic medium.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik.(102),QA1,Z5 Vol.28(1977)723-728. 583

Bielak, J. Martinez, R. **An asymmetric mixed boundary-value problem of the elastic layer: translation of a rigid circular disc parallel to the contact plane.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.12(1974)821-835. 558

Biot, M.A. **Bending of an infinite beam on an elastic foundation.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.4(1937)A1-A7. 279

Blackketter, D.G. Christensen, R.D. **Contact stress between two-dimensional finite elastic bodies.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.36(1969)397-402. 189

Bogy, D.B. **Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.35(1968)460-466. 452

Bogy, D.B. Sternberg, E. **The effect of couple-stresses on the corner singularity due to an asymmetric shear loading.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.4(1968)159-174. 452

Bogy, D.B. **On the problem of edge-bonded elastic quarter-planes loaded at the boundary.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.6(1970)1287-1313. 452

Bogy, D.B. **Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.38(1971)377-386. 452

Bogy, D.B. Wang, K.C. **Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.7(1971)993-1005. 452

Bogy, D.B. **Solution of the plane end problem for a semi-infinite elastic strip.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik.(102),QA1,Z5 Vol.26(1975a)749-769. 455

Bogy, D.B. **The plane solution for joined dissimilar elastic semistrips under tension.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.42(1975b)93-98. 455

Bondareva, V.F. **On the effect of an axisymmetric normal loading on an elastic sphere.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1969)1029-1033,[1001-1005]. 630

Bondareva, V.F. **Contact problems for an elastic sphere.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.35(1971)61-70,[37-45]. 630

Borodachev, N.M. **The plane contact problem for an elastic body of finite width.**(In Russian) Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Otdelenie Tekhnicheskikh nauk. Mekhanika i Mashinostroenie. (15), No.6(1962). 629

Borodachev, N.M. Borodacheva, E.N. **Impression of an annular stamp into an elastic half-space. (In Russian).** Inzhenernyi Zhurnal-Mekhanika Tverdogo Tela. (45) No.1(1966)94-99. 519,520

Borodachev, N.M. Galin, L.A. **Contact problem for a stamp with a narrow rectangular base.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.38(1974)125-130,[108-113]. 629

Borodachev, N.M. **On the nature of the contact stress singularities under an annular stamp.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.40(1976a)372-376,[347-352]. 520

Borodachev, N.M. **Contact problem for a stamp with a rectangular base.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.40(1976b)554-560,[505-512]. 520,629

Borodachev, N.M. On a particular class of solutions of triple integral equations. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.40(1976c)655-661,[605-611]. 520

Borowicka, H. Influence of rigidity of a circular foundation slat on the distribution of pressures over the contact surface. 1st International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Proceedings. Cambridge,Mass. (1936). Vol.1,145-149. 547

Borowicka, H. Druckverteilung unter elastisch Platten. Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6 Vol.10(1939)113-125. 547

Borowicka, H. Uber zusmittig belastete, starre Platten auf elastisch-isotropen Untergrund. Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6 Vol.14(1943a)1-8. 547

Borowicka, H. Die Druckausbreitung im Halbraum bei Linear zunehmendem Elastizitatsmodul. Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6 Vol.14(1943b)75-82. 617

Boussinesq, J. Application des potentials a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques. Paris: Gauthier-Villars (1885). 33

Brahtz, J.H.A. Stress distribution in wedges with arbitrary boundary forces. Physics, a Journal of General and Applied Physics. (79), QC1,J83 Vol.4(1933)56-65. 438

Brothers, P.W. The rigid rectangular punch on the elastic half-space. M.E. Thesis, University of Auckland, New Zealand (1976). 630

Brothers, P.W. Sinclair, G.B. Segedin, C.M. Uniform indentation of the elastic half-space by a rigid rectangular punch. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.13(1977)1059-1072. 630

Brown, E.H. The diffusion of load from a stiffener into an infinite elastic sheet. Royal Society of London. Proceedings. Series A.(89),Q41,L7 Vol.239(1957)296-310. 319

Brown, P.T. Gibson, R.E. Surface settlement of a deep plastic stratum whose modulus of elasticity increases linearly with depth. Canadian Geotechnical Journal. (27), TA710,A1C3 Vol.9(1972)467-476.

313,625

Brown, P.T. Gibson, R.E. Rectangular loads on inhomogeneous elastic soil. American Society of Civil Engineers. Soil Mechanics and Foundations Division. Journal. (19), TA705,A55X Vol.10(1973)917-920. 627

Brown, S.N. Stewartson, K. Flow near the apex of a delta wing. Institute of Mathematics and Its Applications. Journal. (37), QA1,I552 Vol.5(1969)206-216. 455

Budiansky, B. Wu, T.T. Transfer of load to a sheet from a rivet-attached stiffener. Journal of Mathematics and Physics.(57),QA1,J6 Vol.40(1961)142-162. 322

Bueckner, H.F. Field singularities and related integral representations. In Sih, G.C. (Ed.), Mechanics of Fracture I, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Leyden: Noordhoff (1973). 239-314. 455

Buell,. E.L. On the distribution of plane stress in a semi- infinite plate with partially stiffened edge. Journal of Mathematics and Physics.(57),QA1,J6 Vol.26/27(1948)223-233. 319,342

Buell, J. Kagiwada, H. Kalaba, R. Ruspini, E. Zagustin, E. Solution of a system of dual integral equations. International Journal of Engineering Science. (39), TI,I5 Vol.10(1972)503-510. 558

Büfler, H. Einige strenge Losungen fur den Spannungszustand im ebenen Verbundkorpern. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.39(1959)218-236. 322,334,340

Büfler, H. Scheibe mit endlicher, elastischer Versteifung. Forchung im Inginieurwesen.(32),TA1,F68 No.485(1961). 322,334

Büfler, H. Zur Krafteinleitung in Scheiben uber geschweisste oder geklebte Verbindungen. Osterreichische Ingenieur-Archiv.(76) Vol.18(1964)284-292. 322,356

Büfler, H. Theory of elasticity of a multilayered medium. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.1(1971)125-143. 559

Burlak, J. On the solution of certain dual integral equations.

Glasgow Mathematical Association. Proceedings.(35),QA1,G52 Vol.6(1963a)39-44. 463

Burlak, J. On Gordon's method of solving dual integral equations. Glasgow Mathematical Association. Proceedings.(35),QA1,G52 Vol.6(1963b)117-122. 463

Busbridge, I.W. Dual integral equations. London Mathematical Society. Proceedings.(64),QA1.L548 Ser.2,Vol.44(1938)115-129. 462

Byrd, P.F. Friedman, M.D. Handbook of Elliptic Integrals. Berlin: Springer Verlag (1971). 593,597

Calladine, C.R. Greenwood, J.A. Line and point loads on a non-homogeneous incompressible elastic half-space. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.31(1978)507-529. 313,314,626

Carleman, T. Sur la resolution de certaines equations integrales. Arkiv for Matematik Astronomi och Fysik. (24) Vol.16,No.26(1922). 165

Carothers, S.D. Plane strain in a wedge, with applications to masonry dams. Royal Society of Edinburgh. Proceedings. Section A. Mathematical and Physical Sciences. (87), Q41,L7 Vol.33(1913)292-306. 436

Carrier, W.D. Christian, J.T. Rigid circular plate resting on a non-homogeneous elastic half-space. Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.23(1973)67-84. 627

Cattaneo, C. Sul contatto di dua corpi elastici:distribuzione locale degli sforzi. Accademia Nazionale dei Lencei, Rome. Class di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali. Rendiconti. (3) Vol.27(1938)342-348,434-436,474-478. 595,613

Chang, D.J. Muki, R. Stress distribution in a lap joint under tension-shear. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.10(1974)503-517. 307

Chantaramungkorn, K. Keer, L.M. Stress analysis for a layer of finite length bonded to a half-space of identical material. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.11(1975)1079-1096. 307

Chaplygin, S.A. **Pressure of a rigid die on an elastic foundation. (In Russian). Collected Works.** Vol.3(1950)317-323. 140

Chemeris, V.S. On integral equations in the axisymmetrical theory of elasticity. (In Russian). Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.1,No.5(1965)36-46. 517

Chin, P.K. Prasad, S.N. Dasgupta, S. **Indentation of an elastic rectangle by a pair of rough punches with finite friction.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.12(1976)619-634. 630

Chong, F. **Indentation of a semi-infinite medium by an axially symmetric rigid punch.** Iowa State College Journal of Science. (46) Vol.26(1952)1-15. 458

Chuaprasert, M.F. Kassir, M.K. **Torsion of nonhomogeneous solid.** American Society of Civil Engineers. Engineering Mechanics Division. Journal. (18), TA1,A5233 Vol.99(1973)703-714. 622

Civelek, M.B. Erdogan, F. **The axisymmetric double contact problem for a frictionless elastic layer.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.10(1974)639-659. 558

Civelek, M.B. Erdogan, F. **Interface separation in a frictionless contact problem for an elastic layer.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.43(1976)175-177. 306

Civelek, M.B. Erdogan, F. Cakiroglu, A.O. **Interface separation for an elastic layer loaded by a rigid stamp.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.16(1978)669-679. 206

Civelek, M.D. Erdogan, F. **The frictionless contact problem for an elastic layer under gravity.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.42(1975)136-140. 302,306

Cochran, J.A. **Analysis of Linear Integral Equations.New York: McGraw-Hill(1972).** 256

Collins, W.D. On the solution of some axisymmetric boundary value problems by means of integral equations, I. Some electrostatic and hydrodynamic problems for a spherical cap. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.12(1959a)232-241. 499,509

Collins, W.D. On the solution of some axisymmetric boundary value problems by means of integral equations, II. Further problems for a circular disc and a spherical cap. Mathematika.(66),QA1,M84 Vol.6(1959b)120-133. 509

Collins, W.D. On the solution of some axisymmetric boudary value problems by means of integral equations, III. Some scalar diffraction problems for circular disks. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.14(1961)101-117. 509

Collins, W.D. On the solution of som axisymmetric boudary value problems by means of integral equations, IV. Potential problems for a circular annulus. Edinburgh Mathematical Society. Proceedings. (31), QA1,E4 Ser.2,Vol.13(1963)235-246. 509,519,520

Comninou, M. Stress singularity at a sharp edge in contact problems with friction. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik.(102),QA1,Z5 Vol.27(1976)493-499. 455

Conway, H.D. Vogel, S.M. Farnham, K.A. So, S. Normal and shearing contact stresses in indented strips and slabs. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.4(1966)343-355. 630

Conway, H.D. Farnham, K.A. The contact stress problem for indented strips and slabs under conditions of partial slipping. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.5(1967a)145-154. 630

Conway, H.D. Farnham, K.A. Shearing stresses induced on an a xis of symmetry by circular sliding contact on a transversely isotropic body. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.34(1967b)756-757. 582

Conway, H.D. Farnham, K.A. Ku, T.C. The indentation of a transversely isotropic half-space by a rigid sphere. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.34(1967)491-492. 582

Conway, H.D. Farnham, K.A. The relationship between load and penetration for a rigid, flat-end punch of arbitrary cross- section. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.6(1968)489-496. 630

Conway, H.D. Engel, P.A. Contact stresses in slabs due to round rough indenters. International Journal of Mechanical Sciences. (42), TJ1,I59 Vol.11(1969)709-722. 630

Conway, H.D. Farnham, K.A. **Bending of a finite beam in bonded and unbonded contact with an elastic foundation.** International Journal of Mechanical Sciences. (42), TJ1,I59 Vol.12(1970)997-1005. 629

Cooke, J.C. **A solution of Tranter's dual integral equations problem.** Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.9(1956)103-110. 463

Cooke, J.C. **Triple integral equations.** Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.16(1963a)193-203. 519,524

Cooke, J.C. **Some further triple integral equation solutions.** Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Ser.2,Vol.13(1963b)303-316. 519,520

Cooke, J.C. **The solution of triple integral equations in operational form.** Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.18(1965)57-71. 519

Cooper, D.H. **Hertzian contact-stress deformation coefficients.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.36(1969)296-303. 97

Copson, E.T. **On the problem of the electrified disk.** Edinburgh Mathematical Society. Proceedings. (31), QA1,E4 Ser.2,Vol.8(1947)14-19. 462,509

Copson, E.T. **On certain dual integral equations.** Glasgow Mathematical Association. Proceedings.(35),QA1,G52 Vol.5(1961)21-24. 463

Dahan, M. Zarka, J. **Elastic contact between a sphere and a semi-infinite transversely isotropic body.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.13(1977)229-238. 582

Dasgupta, S. Prasad, S.N. **On the phenomenon of separation during compression and frictional sliding of an elastic rectangle.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.43(1976)268-273. 630

Deich, E.G. **On an axially symmetrical contact problem for a non-plane die circular in plan.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.26(1962)931-934,[1404-1409]. 467

Delves, L.M. Walsh, J.(Eds.) **Numerical Solution of Integral Equations. Oxford: Clarendon Press (1974). 257**

Dempsey, J.P. Sinclair, G.B. On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.9(1979)373-391. 448,452,455

Deresiewicz, H. **The half-space under pressure distributed over an elliptical portion of its plane boundary.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.27(1960)111-119. 588

DeSilva, C.N. Tsai, P.J. **On the contact problem of thin elastic shells.** Zeitschrift fuer Angewendte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.49(1969)267-73. 630

Deutsch, E. Indentation of a transversely isotropic half-space by a cylindrical, conical and paraboloidal punch. Academie Polonaise des Sciences. Bulletin. Class Quatrieme. (2), Q60,P6 Vol.11(1963)311-320. 583

Dhaliwal, R.S. **Punch problem for an elastic layer overlying an elastic foundation.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.8(1970)273-288. 558

Dhaliwal, R.S. Rau, J.S. **The axisymmetric Boussinesq problem for a thick elastic layer under a punch of arbitrary profile.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.8(1970)843-856. 558

Dhaliwal, R.S. Singh, B.M. **Annular punch on an elastic layer overlying an elastic foundation.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.15(1977a)263-270. 558

Dhaliwal, R.S. Singh, B.M. **Axisymmetric contact problem for an elastic layer on a rigid foundation with a cylindrical hole.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.15(1977b)421-428. 558

Dhaliwal, R.S. Singh, B.M. **Torsion by an annular die of an elastic layer bonded to a semi-infinite elastic medium.** Journal of Mathematical and Physical Sciences.(55) Vol.12(1978a)127-140. 567

Dhaliwal, R.S. Singh, B.M. On the theory of elasticity of a non-homogeneous medium. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.8(1978b)211-219. 622

Dhaliwal, R.S. Singh, B.M. **Torsion by a circular die of a nonhomogeneous elastic layer bonded to a nonhomogeneous half- space.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.16(1978c)649-658. 567,622

Dhaliwal, R.S. Singh, B.M. Sneddon, I.N. **A problem of Reissner-Sagoci type for an elastic cylinder embedded in an elastic half-space.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.17(1979)139-144. 570,631

Dinnik, A.N. **Selected Works.(In Russian). Kiev:Izd.-vo Akademiia nauk U.R.S.R. Vol. 1(1952). 2,98**

Doetsch, G. **Handbuch der Laplace Transformation. Basel:** Birkhauser(1950). **431**

Dovnorovich, V.I. On the effect of a die of circular planform on a finite thickness elastic layer on a rigid base. (In Russian). Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Mekhanika i Mashinostroenie. **(12)** No.2(1964)119-122. 555

Dundurs, J. Dependence of stress on Poisson's ratio in plane elasticity. International Journal of Solids and Structures. **(43),** TA401,I65 Vol.3(1967)1013-1021. 182

Dundurs, J. Discussion of paper, Bogy, D.B., **Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.36(1969)650-652. 182,188,291,452

Dundurs, J. **Some properties of elastic stresses in a composite. In** Kringen, A.C. **(Ed.), Recent Advances in Engineering Science. New** York: Gordon and Breach (1970). 203-216. 188

Dundurs, J. Stippes, M. Role of elastic constants in certain contact problems. Journal of Applied Mechanics. (50), **TA1,J6** Vol.37(1970)965-970. 182

Dundurs, J. Lee, M-S. **Stress concentrations at a sharp edge in contact problems.** Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.2(1972)109-112. 454

Dundurs, J. Tsai, K.C. Keer, L.M. **Contact between elastic bodies with wavy surfaces.** Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.3(1973)109-115. 181

Dundurs, J. Kiattikomol, K. Keer, L.M. **Contact between plates with sagged supports.** American Society of Civil Engineers. Engineering Mechanics Division. Journal. (18), TA1,A5233 Vol.100(1974)445-456. 630

Dundurs, J. **Properties of elastic bodies in contact. In de Pater, A.D. and Kalker, J.J. (Eds.), The Mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Delft University Press. 54-66.** 182

Dundurs, J. Tsai, K.C. Keer, L.M. Some observations on the smooth contact between a layer and a half-space. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.42(1975)221-222. 295

Elliott, D.A. An algorithm for the numerical solution of linear integral equations. International Computational Center. Bulletin. (38), QA74,I6 Vol.6(1967)207-224. 258

Elliott, H.A. Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.44(1948)522-533. 563

Elliott, H.A. Axial symmetric stress distributions in aeolotropic hexagonal crystals. The problem of the plane and related problems. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.45(1949)621-630. 583

Engel, P.A. Conway, H.D. Contact stress analysis for an elastic cylinder indenting a slab in the presence of friction. International Journal of Mechanical Sciences. (42), TJ1,I59 Vol.13(1971)391-402. 630

England, A.H. A punch problem for a transversely isotropic layer. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.58(1962)539-547. 558,567

England, A.H. Green, A.E. Some two-dimensional punch and crack problems in classical elasticity. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.59(1963)489-500. 181

England, A.H. Complex Variable Methods in Elasticity. London, New York: Wiley-Interscience (1971a). 42,141

England, A.H. On stress singularities in linear elasticity. International Journal of Engineering Science. (38), T1,I5 Vol.9(1971b)571-585. 439,448,451,456

England, A.H. Shail, R. Orthogonal polynomial solutions to some mixed boundary value problems in elasticity II. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.30(1977)397-414. 85,499,518,525

England, A.H. Love's integral and other relations between solutions to mixed boundary problems in potential theory. Private communication (1979). 518

Erdelyi, A. (Ed.) Tables of Integral Transforms. (2 Vols.). New York: McGraw-Hill (1954). 213

Erdelyi, A. (Ed.) Higher Transcendental Functions. (3 Vols.). New York: McGraw-Hill (1955). 134,579

Erdogan, F. Approximate solutions of singular integral equations. S.I.A.M. Journal on Applied Mathematics. (93), QA1,S73 Vol.17(1969)1041-1059. 262

Erdogan, F. Analysis of elastic cover plates. In Developments in Mechanics, Vol. 6. 12th Midwestern Mechanics Conference Proceedings. Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press (1971). 817-829. 335,351

Erdogan, F. Gupta, G.D. The problem of an elastic stiffener bonded to a half-plane. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.38(1971)937-941. 333,334

Erdogan, F. Gupta, G.D. On the numerical solution of singular integral equations. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.29(1972)525-534. 262

Erdogan, F. Gupta, G.D. Cook, T.S. Numerical solution of singular integral equations Mechanics of Fracture I, Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. G. C. Sih (Ed.), Leyden: Noordhoff (1973). (218) 368-425. 262

Erdogan, F. Civelek, M.B. Contact problem for an elastic reinforcement bonded to an elastic plate. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.41(1974)1014-1018. 364

Erdogan, F. Ratwani, M. The contact problem for an elastic layer supported by two elastic quarter planes. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.41(1974)673-678. 447

Erdogan, F. Arin, K. **Fracture and contact problems for an elastic wedge.** Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.6(1976a)57-71. 447

Erdogan, F. Arin, K. **Effect of friction in wedging of elastic solids.** Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.6(1976b)261-275. 447

Erdogan, F. Gupta, G.D. **Contact and crack problems for an elastic wedge.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.14(1976)155-164. 447

Essenburg, F. Solati, S.T. **On the contact of two axisymmetric plates.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.33(1966)341-346. 551

Eubanks, R.A. Sternberg, E. **On the completeness of the Boussinesq Papkovich stress-functions.** Journal of Mathematics and Mechanics (Supersedes the Journal of Rational Mechanics and Analysis). (56), QA1,I593 Vol.5(1956)735-746. 34

Fabrikant, V.I. **Effect of shearing force and tilting moment on a cylindrical punch attached to a transversely isotropic half- space.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.35(1971)178-182,[147-151]. 582

Filon, L.N.G. **On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load, with special reference to points of concentrated or discontinuous loading.** Royal Society of Edinburgh. Proceedings. Section A. Mathematical and Physical Sciences. (87), Q41,L7 Vol.201(1903)63-155. 41

Filonenko-Borodich, M.M. **Certain approximate theories of elastic foundation.(In Russian).** Moscow. Universitet. Uchenye Zapiski.(70) Vol.46(1940). 537

Filonenko-Borodich, M.M. **The simplest model of an elastic foundation which is capable of distributing a load. (In Russian).** Moscow. Moskovskii Elektromekhanicheskii Institut Inzhenerov Zheleznodorozhnogo Transporta. Trudy. (69) Vol.53(1945). 102,104,529

Flavin, J.N. Gallagher, J.P. **A rigid elliptic inclusion in an anisotropic elastic whole space.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.12(1976)671-682.

Florence, A.L. **Two contact problems for an elastic layer.** Quarterly

Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.14(1961)453-459. 559,566

Fox, L. Parker, I.B. **Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis.** London: Oxford University Press (1968). 61

Frasier, J.T. Rongved, L. **Force in the plane of two joined semi-infinite plates.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.24(1957)582-584. 235

Frederick, D. **On some problems of bending of thick circular plates on an elastic foundation.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.23(1956)195-200. 546

Freeman, N.J. Keer, L.M. **Torsion of elastic cylinders in contact.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.3(1967a)799-808. 570

Freeman, N.J. Keer, L.M. **Torsion of a cylindrical rod welded to an elastic half-space.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.34(1967b)687-692. 570

G.A., Morar' Popov, G.Ia, **On the contact problem for a half- plane with finite elastic reinforcement.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.34(1970)412-421,[389-399]. 331,332

G.A., Morar' Popov, G.Ia. **On a periodic contact problem for a half-plane with elastic coverings.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.35(1971)172-178,[140-147]. 179,351

Galfaian, P.O. Chobanian, K.S. **Solution of a contact problem for an elastic rectangle.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.30(1966)569-575,[676-684]. 630

Galfaian, P.O. **Contact problem of the theory of elasticity for a rectangle.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.11,No.4(1975)54-64,[387-395]. 630

Galin, L.A. **On the Zimmerman-Winkler hypothesis for beams. (In Russian).** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.7(1[illegible])293-300. 629

Galin, L.A. **Pressure ofa punch with friction and adhesion domains.(In Russian).** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.9(1945)413-424. 272

Galin, L.A. **Three-dimensional contact problems in the theory of elasticity for punches of circular plan form. (In Russian).** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.10(1946)425-448. 457

Galin, L.A. Pressure of a stamp with a flat base in the form of an infinite wedge on an elastic half-space. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.58,No.2(1947a). 455

Galin, L.A. On the pressure of a punch of elliptic shape upon the elastic half-space. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.11(1947b)281-284. 588,595,596

Galin, L.A. Estimate of the displacements in spatial contact problems of the theory of elasticity. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.12(1948)241-250. 89

Galin, L.A. Contact Problems in the Theory of Elasticity. (In Russian). Moscow: Gostekhizdat, 1953. English translation, Sneddon, I.N. (Ed.). Raleigh: North Carolina State College, Department of Mathematics (1961). 2,89,93,140,165,182,272,455,505,588,589,595,596

Galin, L.A. Contact problems of the theory of elasticity in the presence of wear. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.40(1977)981-986,[931-936].

Gdoutos, E.E. Theocaris, P.S. Stress concentrations at the apex of a plane indenter acting on an elastic half-plane. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.42(1975)688-692. 455

Gecit, M.R. Erdogan, F. Frictionless contact problem for an elastic layer under axisymmetric loading. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.14(1978)771-785. 558,574

Gibson, R.E. **Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space.** Geotechnique.(34),TA706,G35 Vol.17(1967)58-67 [errata in Vol.18(1968),275-276 Vol.19(1969)160-161]. 313,625

Gibson, R.E. Sills, G.C. On the loaded elastic half-space with depth-varying Poisson's ratio. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik.(102),QA1,Z5 Vol.20(1969)691-695. 622

Gibson, R.E. Brown, P.T. Andrews, K.R.F. Some results concerning displacements in a non-homogeneous elastic layer. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik.(102),QA1,Z5 Vol.22(1971)855-864. 308,313,623,625

Gibson, R.E. The analytical method in soil mechanics. Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.24(1974)115-140. 99,627

Gibson, R.E. Kalsi, G.S. The surface settlement of a linearly inhomogeneous cross-anisotropic elastic half-space. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik.(102),QA1,Z5 Vol.25(1974)843-847. 313-314

Gibson, R.E. Sills, G.C. Settlement of a strip load on a non-homogeneous orthotropic incompressible elastic half-space. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.28(1975)233-243. 314

Gladwell, G.M.L. The calculation of mechanical impedances relating to an indenter vibrating on the surface of a semi- infinite elastic body. Journal of Sound and Vibration.(58),QC221,J6 Vol.8(1968)215-228. 457,496

Gladwell, G.M.L. A contact problem for a circular cylindrical punch in adhesive contact with an elastic half-space: the case of rocking, and translation parallel to the plane. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.7(1969)295-307. 458,491,566

Gladwell, G.M.L. Iyer, K.R.P Unbonded contact between a circular plate and an elastic half-space. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.4(1974)115-130. 562

Gladwell, G.M.L. Unbonded contact between a circular plate and an elastic foundation. In de Pater, A.D. and Kalker, J.J. (Eds.), The Mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Delft University Press (1975). 99-109. 562,563,564

Gladwell, G.M.L. England, A.H. Contact problems for the spherical shell. 12th Annual Meeting of the Society of Engineering science. Proceedings. Engineering Science. Proceedings. University of Texas at Austin(1975). 869-877. 631

Gladwell, G.M.L. On some unbonded contact problems in plane elasticity theory. Journal of Applied Mechanics. (50) TA1,J6 Vol.43(1976)263-267. 238,268,283

Gladwell, G.M.L. The contact problem for a rigid cylinder pressed between two elastic layers. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.44(1977)36-40. 630

Gladwell, G.M.L. England, A.H. Orthogonal polynomial solutions to some mixed boundary value problems in elasticity theory. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.30(1977)175-185. 518

Gladwell, G.M.L. Polynomial solutions for an ellipse on an anisotropic elastic half-space. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.31(1978)251-260. 589,595

Gladwell, G.M.L. A note on a three-part contact problem, Chebyshev polynomials and elliptic integrals. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.17(1979)(to appear). 630

Gladwell, G.M.L. Gupta, O.P. On the approximate solution of elastic contact problems for a circular annulus. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.9(1979)335-348. 526

Glagolev, N.I. Elastic stresses along the bottom of a dam. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. (10), Q60,A33 Vol.34(1942)187-191. 160,165

Glagolev, N.I. Determination of the stresses for the pressure of systems of rigid profiles. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201.P7 Vol.7(1943)383-388. 160

Glauert, H. Elements of Aerofoil and Airscrew Theory. London: Cambridge University Press (1948). 66

Glover, R.E. Discussion of Benscoter (1949). Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.17(1950)218. 320

Goland, M. Reissner, E. The stresses in cemented joints. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.11(1944)A17-A27. 307

Golecki, J.J. **Analogy between boundary value problems for regions bounded by concentric circles and axially symmetrical boundary value problems for regions bounded by concentric spherical surfaces.** Academie Polonaise des Sciences. Bulletin. Class Quatrieme. (2), Q60,P6 Vol.5(1957)327-333. 630

Golecki, J.J. **On the foundations of the theory of elasticity of plane incompressible non-homogeneous bodies.** In Olszak, W. (Ed.), **Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity.** London: Pergamon Press (1960). 39-51. 308

Golecki, J.J. Knops, R.J. Introduction to a linear elastostatics with variable Poisson's ratio. Akademia Gorniczo-Hutnicza w Krakowie. Zeszyty Naukowe: Elektryfikacja Gornictwa i Hutnictwa. (5) Vol.30(1969)81-92. 617

Golecki, J.J. Divergent integral appearing in Fourier-transform applications in elasticity. International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology. (41), QA1,I525X Vol.6(1975)321-326. 207

Golecki, J.J. **Solutions in terms of homogeneous harmonic functions in three-dimensional elastostatics and the viscous flow theory.** Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6 Vol.45(1976)69-78. 35,631

Golikova, S.S. Mossakovskii, V.I. **Pressure of a plane stamp of nearly circular cross-section on an elastic half-space.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.40(1976)1143-1145,[1085-1088]. 630

Golub, V.K. Mossakovskii, V.I. **The bending of a circular plate on an elastic half-space in the presence of adhesion. (In Russian).** Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Mekhanika i Mashinostroenie.. (12) No.2(1960)88-94. 551

Golub, V.K. **The bending of a circular plate of variable rigidity on an elastic foundation in the presence of adhesion. (In Russian).** Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Mekhanika i Mashinostroenie. (12) No.4(1964)92-95. 551

Goodier, J.N. Hsu, C.S. **Transmission of tension from a bar to a plate.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.21(1954)147-150. 321,370

Goodman, L.E. **Contact stress analysis of normally loaded rough**

spheres. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.29(1962)515-522. 482

Goodman, L.E. Keer, L.M. The contact stress problem for an elastic sphere indenting an elastic cavity. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.1(1965)407-415. 630

Goodman, L.E. Keer, L.M. Influence of an elastic layer on the tangential compliance of bodies in contact. In de Pater, A.D. and Kalker, J.J. (Eds.), The Mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Delft University Press(1975). 127-151. 558,616

Gorbunov-Posadov, M.I. On beams and rectangular plates supported by an elastic half-space. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. (10), Q60,A33 Vol.24(1939)421-425. 528,630

Gorbunov-Posadov, M.I. Analysis of beams and plates on an elastic half-space.(In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (60), QA201,P7 Vol.4,No.3(1940)61-80. 528

Gorbunov-Posadov, M.I. Slabs on Elastic Foundations.(in Russian).Moscow: Gosstroiizdat. 528

Gorbunov-Posadov, M.I. Beams and Slabs on Elastic Foundations. (In Russian). Moscow: Mashstroiizdat (1949). 528

Gorbunov-Posadov, M.I. Malikova, T.A. Calculation of Structures on Elastic Foundation.(In Russian). Structures on Elastic Foundation. (In Russian). Moscow: Stroiizdat (1973). 2,528

Gordon, A.N. Dual integral equations. London Mathematical Society, Journal.(63),HM24,J6X Vol.29(1954)360-363. 461,462

Goree, J.G. Approximate determination of contact stresses in an infinite plate containing a smooth rigid elliptic insert. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.32(1965)437-439. 395,408

Gradshteyn, I.S. Ryzhik, I.M. Tables of Integrals, Series and Products. 4th. ed. Moscow 1963. English translation, Jeffrey,A. (Ed.). New York: Academic Press Inc. (1965). 163,229,310,411,414,415,473,497,502,593,595

Green, A.E. On Boussinesq's problem and penny-shaped cracks. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.45(1949)251-257. 509

Green, A.E. Sneddon, I.N. The distribution of stress in the neighbourhood of a flat elliptical crack in an elastic solid. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.45(1950)159-163. 596

Green, A.E. Zerna, W. Theoretical Elasticity. Oxford: Clarendon Press (1954). 1,141,499,509,583

Greenwood, J.A. The elastic stresses in the mid-plane of a slab by pressures applied symmetrically at its surface. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.60(1964)159-169. 559

Griffith, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. Royal Society of London. Philosophical Transactions. Section A. Mathematical and Physical Sciences. (88), Q41,L8 Vol.221(1920)163-198. 498

Grigorovich, V.M. The contact of a spherical shell with a rigid punch in the presence of adhesion. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.9,No.5(1973)24-30,[483-487]. 631

Grinberg, G.A. Kuritsyn, V.N. Diffraction of a plane electromagnetic wave by an ideally conducting plane ring and the elastostatic problem for such a ring. Zhurnal Technicheskoi Fiziki. (Soviet Physics-Technical Physics). (103), QC1,S795 Vol.31(1961)1017-1027,[Vol.6(1962)743-749]. 520

Gubenko, V.S. Pressure ofan axisymmetric annular die on an elastic layer and half-space. Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Otdelenie Tekhnicheskikh nauk. Mekhanika i Mashinostroenie. (15) No.3(1960)60-64. 519

Gubenko, V.S. Mossakovskii, V.I. Pressure of an axially symmetric circular die on an elastic half-space. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.24(1960)334-340,[477-486]. 519,523

Gubenko, V.S. Grabko, G.K. Nakashidze, G.M. The contact problem for a circular punch and a half-space in the presence of friction forces. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P685

Vol.7,No.3(1971)119-121,[332-334]. 492

Gubenko, V.S. Kiselev, M.Ia. Lamzyuk, V.D. Action of an annular punch with a plane base on a layer lying on an elastic half-space. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.11,No.7(1975)11-16,[694-698]. 558

Guerrero, I. Turtleltaub, M.J. The elastic sphere under arbitrary concentrated loads. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6K Vol.2(1972)21-33. 631

Guidera, J.T. The general non-symmetrical punch and crack problems. Ph.D. Thesis, Simon Fraser University (1975). 583

Guidera, J.T. Lardner, R.W. Taphouse, G.E. The indentation of a half-space of hexagonal elastic material circular punch of arbitrary end-profile. Journal of Engineering Mathematics.(53),QA1,J575 Vol.12(1978)77-82. 583

Gurtin, M.E. Linear Theory of Elasticity. In Flugge, S. (Ed.), Handbuch der Physik Vol. 6a/2. Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1972). 1,32,34

Hannah, M. Contact stress and deformation in a thin elastic layer. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.4(1951)94-105. 264

Hara, T. Shibuya, T. Koizumi, T. Nakahara, I. An axisymmetric mixed boundary value problem of the thick elastic plate: moment applied to the annular rigid stamp. Theoretical and Applied Mechanics. (Japan National Congress for Applied Mechanics). (97) Vol.25(1975)505-512. 520

Hara, T. Shibuya, T. Koizumi, T. Nakahara, I. The bending of an elastic layer with an annular crack. Theoretical and Applied Mechanics. (Japan National Congress for Applied Mechanics). (97) Vol.27(1977)47-53. 520

Hara, T. Shibuya, T. Koizumi, T. Nakahara, I. An axisymmetric mixed boundary value problem of the elastic half space subjected to moment by an annular rigid punch. Nikon Kikaigakkai. Japenese Society of Mechanical Engineers. Bulletin. (74), TJ1,N5 Vol.21(1978a)566-571. 520

Hara, T. Shibuya, T. Koizumi, T. Nakahara, I. Theeffect ofbending onthe infinite elastic solid withan annular crack. Nikon Kikaigakkai. Japenese Society of Mechanical Engineers. Bulletin. (74), TJ1,NS Vol.21(1978b)1517-1525. 520

Harding, J.W. Sneddon, I.N. The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.41(1945)16-26. 460,466

Haritos, G.K. Stress Analysis of a Rigid Block Embedded in an Elastic Half Space. Ph.D. Thesis, Northwestern University. 631

Haritos, G.K. Keer, L.M. Stress analysis of a rigid block embedded in an elastic half-space. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 (to appear). 631

Harrington, W.J. Ting, T.W. Stress boundary-value problems for infinite wedges. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.1(1971)65-81. 441

Hassan, H.A.Z. Reissner-Sagoci problem for a non-homogeneous large thick plate. Journal de Mecanique. (48), QA801,J6 Vol.18(1979)197-210. 537

Hearmon, R.F.S. An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity. London: Oxford University Press (1961). 27

Hein, V.L. Erdogan, F. Stress singularities in a two- material wedge. International Journal of Fracture Mechanics. (40), TA401,I63 Vol.7(1971)317-330. 452

Heins, A.E. MacCamy, R.C. On the scattering of waves by a disk. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik.(102),QA1,Z5 Vol.11(1960a)249-264. 513

Heins, A.E. MacCamy, R.C. On mixed boundary value problems for axially symmetric potentials. Journal of Mathematical Analysis and Applications.(54),QA1,J593 Vol.1(1960b)331-333. 513

Hertz, H. Uber die Beruhrung fester elastischer Korper. Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik. (49), QA1,J59 Vol.92(1882a)156-171. In Hertz, H., Gesammelte Werke, Band 1. Leipzig: Johann Ambrosius Barth (1895)155-173. 93

Hertz, H. Uber die Beruhrung fester elastischer Korper und uber die Harte. Berlin (1882b). In Hertz, H., Gesammelte Werke, Band1. Leipzig: Johann Ambrosius Barth (1895). 174-196. 93

Hertz, H. Uber die Verteilung der Druckfrafte in einem elasteschen Kreiscylinder. (1883). In Hertz, H., Gesammelte Werke, Band 1. Leipzig: Johann Ambrosius Barth (1895). 283-287. 385

Hertz, H. Uber das Gleichgewicht shwimmender elastischer platten. (1884). In Hertz, H., Gesammelte Werke, Band 1. Leipzig: Johann Ambrosius Barth (1895). 288-294. 542,546

Hetenyi, M. Beams on Elastic Foundation. Ann Arbor: University of Michigan Press (1946). 2,98,99,100,102,104,279

Hetenyi, M. A general solution for the bending of beams on an elastic foundation of arbitrary continuity. Journal of Applied Physics. (51), QC1,J83 Vol.21(1950)55-58. 102,529

Hetenyi, M. McDonald, F.H. Jr. Contact stresses under combined pressure and twist. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.25(1958)396-401. 616

Hetenyi, M. A method of solution for the elastic quarter-plane. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.27(1960)289-296. 447

Hetenyi, M. Beams and plates on elastic foundations and related problems. Applied Mechanics Reviews. (20), A1,A639 Vol.19(1964)95-102. 2,99,281,528

Hobson, E.W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. London: Cambridge University Press (1931). 498,500,503,596

Hogg, A.H.A. Equilibrium of a thin plate, symmetrically loaded, resting on an elastic foundation of infinite depth. Philosophical Magazine, a Journal of Theoretical, Experimental and Applied Physics.(77),Q1,P5 Vol.25(1938)576-582. 542

Hogg, A.H.A. Equilibrium of a thin slab on an elastic foundation of finite depth. Philosophical Magazine, a Journal of Theoretical, Experimental and Applied Physics.(77),Q1,P5 Vol.35(1944)265-276. 542

Holl, D.L. Equilibrium of a thin plate, symmetrically loaded, on a

flexible subgrade. Iowa State College Journal of Science. (46) Vol.12(1938)455-459. 542

Holl, D.L. Thin plates on elastic foundations. 5th International Congress of Applied Mechanics, Cambridge, Mass., 1938 Proceedings. New York: John Wiley (1939). 71-74. 542

Hooper, J.A. Analysis of a circular raft in adhesive contact with a thick elastic layer. Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.24(1974)561-580. 559

Hooper, J.A. Elastic settlement of a circular raft in adhesive contact with a transversely isotropic medium. Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.25(1975)691-711. 559

Hooper, J.A. Parabolic adhesive loading of a flexible raft foundation. Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.26(1976)511-525. 559

Hua, Du Ching The two-dimensional problem of the nonhomogeneous isotropic medium. In Radok, J.R.M. (Ed.), Problems of Continuum Mechanics. Philadelphia: Society of Industrial and Applied Mathematics (1961). 104-108. 308

Hussain, M.A. Pu, S.L. Sadowsky, M.A. Cavitation at the ends an elliptic inclusion inside a plate under tension. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.35(1968)505-509. 417

Hussain, M.A. Anderson, G. Lifting of a plate from a foundation due to axisymmetric pressure. In Weiss, J.H., et al (Eds.) Developments in Mechanics, Vol.5. 11th Midwestern Mechanics Conference. Proceedings. (1969). 577-590. 574

Hussain, M.A. Pu, S.L. A note on an elastic sphere indenting an elastic spherical cavity. 15th Conference of Army Mathematicians. Transactions. (1970). 1-24. 630

Hussain, M.A. Pu, S.L. Slip phenomenon for a circular inclusion. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.38(1971a)627-633. 405

Hussain, M.A. Pu, S.L. Non-Hertzian contact of an elastic sphere indenting an elastic cavity. In Developments in Mechanics, Vol.6, 12th Midwestern Mechanics Conconference Proceedings. Notre Dame, Indiana: University of Notre Dame Press (1971b). 647-658. 630

Huth, J.H. The complex-variable approach to stress singularities. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.20(1953)561-562. 448

Inglis, C.E. Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. Royal Institution of Naval Architects. Transactions. (86) Vol.55(1913)219-230. 498

Ishkova, A.G. An exact solution of the problem of bending of a round plate supported by an elastic half-space and subjected to an axially symmetrical uniformly distributed load. Akademiia nauk S.S.S.R. Institut Mekhaniki. Inzhenernyi Sbornik. (11) Vol.56,No.2(1947)129-132. 548

Ishkova, A.G. Some generalizations concerning solutions of problems of bending of a circular plate and an infinite strip lying on an elastic half-space. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.21(1957)287-290. 549

Ishkova, A.G. The bending of a plate lying on an elastic half- space, under the action of a certain non-axisymmetric load. (In Russian). Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Mekhanika i Mashinostroenie. (12) Vol.165(1958)78-84. 549

Ishkova, A.G. Bending of a strip and a circular plate lying on the elastic half-space. (In Russian). Akademiia nauk S.S.S.R. Institut Mekhaniki. Inzhenernyi Sbornik. (11) Vol.28(1960)171-181. 549

Ishkova, A.G. The bending of a strip and a circular plate on a combined foundation. (In Russian). Inzhenernyi Zhurnal.(44) Vol.2(1962)270-279. 549

Iyer, K.R.P. Unbonded Contact of a Circular Plate and an Elastic Half-Space. Ph.D. Thesis, University of Waterloo(1973). 2,550,562

Jabali, H.H. Torsional stiffness of a layer bonded to an elastic half-space. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I55 Vol.11(1975)1219-1221. 566

Jain, D.L. Kanwal, R.P. An integral equation method for solving mixed boundary value problems. S.I.A.M. Journal on Applied Mathematics. (93), QA1,S73 Vol.20(1971)642-658. 519

Jain, D.L. Kanwal, R.P. Three-part boundary value problems in

potential and generalised axially symmetric potential theories. Journal d'Analyse Mathematique. (47), QA1,J56 Vol.25(1972)107-158. 519

Jung, H. Druckverteilung unter elastisch gelagerten Kreisplatten. Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6 Vol.20(1952)8-12. 561

Kalaba, R. Yakush, A. Zagustin, E.A. A new method for the Lebedev-Ufliand integral equation for contact problems of elasticity. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.3(1972)181-189. 558

Kalaba, R. Zagustin, E.A. An initial value method for dual integral equations. International Journal of Engineering Science. (38), TI,I5 Vol.10(1972a)603-608. 558

Kalaba, R. Zagustin, E.A. An improved initial value method for a contact problem with a nonplane punch. International Journal of Engineering Science. (39), TI,I5 Vol.11(1973)459-476. 558

Kalaba, R. Zagustin, E.A. On penetration of a rigid axisymmetric punch into an elastic layer. Computers and Mathematics with Applications. (29), QA76,C675X Vol.1(1975)13-25. 558

Kalaba, R.E. Zagustin, E.A. Initial value treatment for torsion of an elastic layer. Franklin Institute. Journal. (33), TI,F8 Vol.293(1972b)345-353. 558

Kalaba, R.E. Yakush, A. Zagustin, E.A. On a conical punch pressing into an elastic layer. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.6(1976)441-449. 558

Kalandia, A.I. On contact problems in elasticity theory.(In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.21(1957)389-398. 421,427

Kalandia, A.I. On the approximate solution of a class of singular integral equations. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.125,No.4(1959). 263

Kalandia, A.I. Remarks on the singularity of elastic solutions near corners. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1969a)132-135,[127-131]. 448

Kalandia, A.I. Stress conditions in plates reinforced by stiffening ribs. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1969b)538-543,[523-529]. 320,350

Kalker, J.J. On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction. Ph.D. Thesis, Technische Hogeschool, Delft (1967). 629

Kalker, J.J. On the uniqueness of contact problems in the theory of elasticity. Laboratorium voor Technische Mechanica, Delft, Netherlands: Technological University. Report No. 397(1968). 2

Kalker, J.J. On Elastic Line Contact. Complete report. Institute of Mathematics, Delft University of Technology (1971). 49,629

Kalker, J.J. On elastic line contact. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.39(1972)1125-1132. 49,629

Kalker, J.J. Aspects of contact mechanics.In de Pater, A.D. and Kalker, J.J.(Eds.). The Mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Delft University Press (1975). 1-25. 2

Kalker, J.J. A survey of the mechanics of contact between solid bodies. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.57(1977a)T3-T17. 2

Kalker, J.J. The surface displacement of an elastic half-space loaded in a slender, bounded, curved surface region with application to the calculation of the contact pressure under a roller. Institute of Mathematics and Its Applications. Journal. (37), QA1,I552 Vol.19(1977b)127-144. 629

Kantorovich, L.V. Krylov, V.I. Approximate Methods of Higher Analysis. English translation, Benster, A.D. (Ed.). New York: Interscience (1958). 259,333

Kapshivyi, A.A. Maslyuk, G.F. The solution of the mixed axisymmetric problem from the theory of elasticity for a half- space by the method of p-analytic function. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.3,No.7(1967)21-27,[13-16]. 517

Karp, S.N. Karal, F.C. The elastic-field behaviour in the neighbourhood of a crack of arbitrary angle. Communications on Pure

and Applied Mathematics. (28), QA1,C718 Vol.15(1962)413-421. 452

Karpenko, L.N. Approximate solution of a singular integral equation by means of Jacobi polynomials. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.30(1966)564-569,[668-675]. 263

Karpenko, V.A. Axisymmetric contact problem for an elastic sphere. Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Mekhanika.(7) Vol.24,No.4(1971)16-19. 631

Karpenko, V.A. Axisymmetric impression of two stamps into an elastic sphere. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80). QA201,P7 Vol.40(1976)763-766,[711-714]. 631

Kassir, M.K. The Reissner-Sagoci problem for a non-homogeneous solid. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.8(1970)875-885. 621,622

Kassir, M.K. Boussinesq problems for non-homogeneous solid. American Society of Civil Engineers. Engineering Mechanics Division. Journal. (18), TA1,A5233 Vol.98(1972)457-469. 620

Kassir, M.K. Chuaprasert, M.F. A rigid punch in contact with a non-homogeneous elastic solid. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.41(1974)1019-1024. 621

Keer, L.M. The contact stress problem for an elastic sphere indenting an elastic layer. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.31(1964a)143-145. 499,553

Keer, L.M. The torsion of a rigid punch in contact with an elastic layer where the friction law is arbitrary. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.31(1964b)430-434. 567

Keer, L.M. A class of non-symmetrical punch and crack problems. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.17(1964c)423-436. 476,509

Keer, L.M. Nonaxisymmetric punch and crack problems for initially stressed bodies. Quarterly of Applied Mathematics.(84),QA1,Q25 Vol.23(1965)97-108. 517

Keer, L.M. **Mixed boundary-value problems for an elastic half-space.** Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.63(1967)1379-1386. 509

Keer, L.M. Chantaramungkorn, K. **Loss of contact between an elastic layer and half-space.** Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.2(1972)191-197. 294

Keer, L.M. Dundurs, J. Tsai, K.C. **Problems involving receding contact between a layer and a half-space.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.39(1972)1115-1120. 287,571,573

Keer, L.M. Silva, M.A.G. **Two mixed problems for a semi- infinite layer.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.39(1972)1121-1124. 297

Keer, L.M. Dundurs, J. Kiattikomol, K. **Separation of a smooth circular inclusion from a matrix.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.11(1973)1221-1233. 405,420

Keer, L.M. Freedman, J.M. **Static response of a rigid strip bonded to an elastic layer.** Acta Machanica. (4), TJ3,A4 Vol.17(1973)1-15. 334

Keer, L.M. **Stress analysis of bonded layers.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.41(1974)679-683. 307

Keer, L.M. Chantaramungkorn, K. **Stress analysis of a double lap joint.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.42(1975)353-357. 307

Keer, L.M. Goodman, L.E. **Tangential loading of two bodies in contact.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.42(1976)513-514. 612

Keer, L.M. Luk, V.K. **Stress analysis of an elastic layer attached to an elastic half-space of the same material.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.14(1976)735-747. 558,574

Keer, L.M. Parihar, K.S. **A note on the singularity at the corner of a wedge-shaped punch or crack.** S.I.A.M. Journal on Applied Mathematics. (93), QA1,S73 Vol.34(1978)297-302. 456

Kerr, A.D. **Elastic plates on liquid foundations.** American Society of

Civil Engineers. Engineering Mechanics Division. Journal. (18), TA1,A5233 Vol.89,EM3(1963)59-71. 547

Kerr, A.D. **Elastic and viscoelastic foundation models.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.31(1964)491-498. 102

Kerr, A.D. **A study of a new foundation model.** Acta Machanica. (4), TJ3,A4 Vol.1(1965)135-147. 102

Kerr, A.D. **On the derivation of well-posed boundary value problems in structural mechanics.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.12(1976)1-11. 102

Khadem, R. **Some Contact Problems in Elasticity. D. Phil. Thesis, Oxford University (1967).** 458

Khadem, R. O'Connor, J.J. Adhesive or frictionless Compression of an Elastic rectangular between two identical elastic half-spaces. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.7(1969a)153-168. 630

Khadem, R. O'Connor, J.J. **Axial compression of an elastic circular cylinder in contact with two identical elastic half-spaces.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.7(1969b)785-800. 630

Kil'chevskii, N.A. Kostyuk, E.N. **20th century developments in the theory of contact interactions between solids.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.2,No.8(1966)32-39,[19-23]. 98

Kim, I.V. Suncheleev, R.Ia. **A contact problem for an orthotropic half-space.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.6,No.7(1970)40-47,[719-724]. 579

King, L.V. **On the acoustic radiation pressure on circular discs, inertia and diffraction corrections.** Royal Society of London. Proceedings. Series A.(89),Q41,L7 Vol.153(1935)1-16. 462

Kizima, Ia.M. **Contact stresses in the case of adhesion of a circular die to an elastic layer.** Inzhenernyi Zhurnal-Mekhanika Tverdogo Tela. (45) Vol.4,No.2(1964)376-382. 558

Klein, G.K. Taking into account inhomogeneity, discontinuity of strains and other mechanical properties of soil, when calculating structures on solid foundations. (In Russian). Moscow. Inzhenerno-Stroitel'nyi Institut. Sbornik Trudov. (68) Vol.14(1956). 618

Klubin, P.I. Calculation of plate-beams and circular plates on an elastic foundation. (In Russian). Akademiia nauk S.S.S.R. Institut Mekhaniki. Inzhenernyi Sbornik. (11) Vol.12(1952)95-135. 66,83,281,549,587

Knein, M. Zur Theorie des Druckversuchs. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.6(1926)414-416. 448

Koiter, W.T. Approximate solution of Weiner-Hopf type integral equations with applications. Akademia van Wetenschappen, Amsterdam. Afdeeling Natuurkunde. Proceedings. Series B. Physical Sciences. (6), QH1,A33X Vol.57(1954)558-579. 447

Koiter, W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.8(1955)164-178. 319,342,346,348

Koiter, W.T. Solution of some elasticity problems by asymptotic methods. IUTAM Symposium on Applications of the Theory of Functions in Continuum Mechanics. Proceedings. Tbilisi, 1963. Moscow: Nauka. Publishing House (1965). 15-31. 271

Kolybikhin., Golibykhin. See Kolybikhin, Iu.D. Popov, G.Ia. On the contact problem for annular punch. (In Russian). Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Mekhanika.(7) Vol.22,No.6(1969)10-21. 526

Kolybikhin, Iu.D. The contact problem of the torsion of a half- space due to an elastic disk. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 No.12(1971)25-31,[1311-1316]. 622

Korenev, V.G. The Calculation of Beams and Plates on Elastic Foundations. (In Russian). Moscow: Gosstroiizdat (1954). 541

Korenev, V.G. A stamp lying on an elastic half-space whose modulus of elasticity is a power function of depth.(In Russian). Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.112(1957)823-826. 618

Korenev, V.G. Certain Problems of the Theory of Elasticity and Heat Conductance Solvable in Terms of Bessel Functions. (In Russian).

Moscow: Fizmatgiz (1960a).

Korenev, V.G. Structures resting on an elastic foundation. In: Rabinovich, I.M. (Ed.), Structural Mechanics in the U.S.S.R. 1917-1957. English translation, Herrmann, G. (Ed.). New York: Pergamon Press (1960b). 160-190. 99,528

Krahn, E. Transmission of tension from a bar to a plate. Discussion of Goodier and Hsu (1954). Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.22(1958)139-140. 321,370

Krein, M.G. A new method of solving linear integral equations of the first and second kinds. (In Russian). Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.100(1955)413-416. 270

Krenk, S. On the use of the interpolation polynomial for solutions of singular integral equations. Quarterly of Applied Mathematics.(84),QA1,Q25 Vol.32(1975a)479-484. 263

Krenk, S. On quadrature formulas for singular integral equations of the first and second kinds. Quarterly of Applied Mathematics.(84),QA1,Q25 Vol.33(1975b)225-232. 263

Krenk, S. Periodic contact and crack problems in plane elasticity. Letters in Applied and Engineering Sciences.(62) Vol.4(1976)343-353. 181

Krenk, S. Quadrature formulae of closed type for solution of singular integral equations. Institute of Mathematics and Its Applications. Journal. (37), QA1,I552 Vol.22(1978)99-107. 263

Krolevets, M.S. A critical survey of methods of solving the contact problem of elasticity theory. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics) (81), TA349,P6853 Vol.2,No.11(1966)68-82,[36-46]. 2,98

Kruijtzer, G.F.J. Dynamics of a linearly inhomogeneous incompressible isotropic elastic half-space. Applied Scientific Research. (21), QC1,A745 Vol.32(1976)1-29. 626

Kucherov, V.A. Method of orthogonal polynomials in plane antisymmetric mixed problems of elasticity theory with two contact sections. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.38(1974)331-338,[302-309] 174

Kuczma, M. Functional Equations in a Single Variable. Warsaw: PWN - Polish Scientific Publishers (1968). 346

Kurshin, L.M. Mixed plane boundary value problems of the theory of elasticity for a quadrant. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.23(1959)981-984,[1403-1408] 447,452

Kuz'Min, Iu.N. Ufliand, Ia.S. The contact problem of an elastic layer compressed by two punches. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.31(1967)711-715,[725-730]. 559

Kuznetsov, E.A. Periodic fundamental mixed problem of elastic theory for a half-plane. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.12,No.9(1976)89-97,[942-948]. 181

Lanziuk, V.D. Privarnikov, A.K. On the maximum value of the radius of the contact area between a punch and a layer. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.35(1971)1047-1052,[994-999]. 574

Lebedev, N.N. The functions associated with a ring of oval cross-section. Technical Physics of the U.S.S.R.(96) Vol.4(1937)1-24. 511

Lebedev, N.N. Ufliand, Ia.S. Axisymmetric contact problem for an elastic layer. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.22(1958)320-326,[442-450]. 463,553

Lefevre, E.J. Mudge, D.R.J. Dickie, J.F. An analysis of the distribution of tension in a bar attached to a plate. Journal of Strain Analysis. - (Journal of Strain Analysis for Engineering).(59),TG265,J6 Vol.1(1966)389-393. 322,370,373

Lekhnitskii, S.G. Radial distribution of stresses in the wedge and in a half-plane with variable modulus of elasticity. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.26(1962a)146-151,[199-206]. 308

Lekhnitskii, S.G. The elastic equilibrium of a transversely isotropic layer and a thick plate. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.26(1962b)687-696,[1026-1039]. 559,582

Lekhnitskii, S.G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body. English translation, Brandstatter, J.J. (Ed.). San Francisco: Holden-Day (1963a). 254,582

Lekhnitskii, S.G. On the problem of the distribution of stresses in an elastic half-plane with a variable modulus of elasticity. Studies in Elasticity and Plasticity. Leningrad: State University Press (1963b). 308

Lekkerkerker, J.G. Bending of an infinite beam resting on an elastic half-space. Akademia van Wetenschappen. Amsterdam. Afdeeling Natuurkunde. Procesdings. Series B. Physical Sciences. (6), QH1,A33X Vol.63(1960)484-497. 629

Leonov, M.Ia. On the theory of the analysis of elastic foundations. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.3,No.2(1939a)52-78. 541,549

Leonov, M.Ia. Calculation of the horizontal forces for an unlimited plate resting on an elastic half-space.(In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.3,No.3(1939b)67-74. 541,550

Leonov, M.Ia. On the analysis of foundation plates. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.4,No.3(1940)80-96. 550

Lin, P. Noble, B. A numerical method for treating indentation problems. Journal of Engineering Mathematics.(53),QA1,J575 Vol.5(1971)227-231. 491

Lee, Tsu-tao Effect of curvature on the Hertz theory for two circular cylinders in contact. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.25(1958)122-124. 395

Love, A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.4th ed. London: Cambridge University Press (1927). 1,5,7,14,17,26,27,31,43,75,140,232

Love, A.E.H. The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary. Royal Society of London. Philosophical Transactions. Section A. Mathematical and Physical Sciences. (88), Q41,L8 Vol.228(1929)377-420. 78,466

Love, A.E.H. Boussinesq's problem for a rigid cone. Quarterly Journal of Mathematics.(82),QA1,Q22 Vol.10(1939)161-175. 466,498,509

Love, E.R. The electrostatic field of two equal circular co-axial conducting disks. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.2(1949)428-451. 509,518

Low, R.D. On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer. Quarterly of Applied Mathematics.(84),QA1,Q25 Vol.22(1964a)153-157. 558

Low, R.D. On a mixed boundary value problem for an infinite elastic layer. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.17(1964b)395-400. 558

Lowengrub, M. Sneddon, I.N. The solution of a pair of dual integral equations. Glasgow Mathematical Association. Proceedings.(35),QA1,G52 Vol.6(1963)14-18. 463

Lowengrub, M. Sneddon, I.N. The distribution of stress in the vicinity of an external crack in an infinite elastic solid. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.3(1965)451-460. 503

Lubkin, J.L. The torsion of elastic spheres in contact. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.18(1951)183-187. 567,615

Luk, V.K. Keer, L.M. Stress analysis for an elastic half- space containing an axially-loaded rigid cylindrical rod. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 (1979)(to appear). 631

Luke, Y.L. Integrals of Bessel Functions. New York: McGraw-Hill (1962). 213

Lur'e, A.I. Lourie, A. Investigation of asymmetrical pressure of a rigid plane stamp of elliptic cross-section on an elastic semi-space. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S (10), Q60,A33 Vol.28(1940)106-109. 596

Lur'e, A.I. Contact problems of the theory of elasticity.(In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.5(1941)383-408.

466,498,589,596

Lur'e, A.I. Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity. Moscow 1955. English translation, Radok, J.R.M. (Ed.). New York: Interscience (1964). 35,94,466,554,587,595,596,630

Lutchenko, S.A. On pressing a die into the surface of an elastic foundation in the form of a wedge. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.2,No.12(1966)61-66,[40-43]. 445

Lutchenko, S.A. Popov, G.Ia. Some planar-contact problems of elastic theory for a wedge. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.6,No.3(1970)64-71,[276-281]. 445

Lutchenko, S.A. The exact solution of some mixed problems for the elastic wedge. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.8,No.3(1972)117-120,[323-325]. 447

MacDonald, H.M. The electrical distribution induced on a circular disc placed in any field of force. Philosophical Magazine, a Journal of Theoretical, Experimental and Applied Physics.(77),Q1,P5 Ser.1,Vol.26(1895)257-260. 462

Mansfield, E.H. The diffusion of load into a semi-infinite sheet. Parts I and II. Reports and Memoranda 2670, Aeronautical Research Council. London: H.M.S.O.(1948). 321

Margetson, J. Morland, L.W. Separation of smooth circular inclusions from elastic and viscoelastic plates subjected to uniaxial tension. Journal of Mechanics and Physics of Solids.(60),TA350,J68 Vol.18(1970a)295-309. 419

Margetson, J. Morland, L.W. A simplified procedure for singular integral equations with logarithmic kernels. Institute of Mathematics and Its Applications. Journal. (37), QA1,I552 Vol.6(1970b)302-309. 263,419

Marguerre, K. Druckverteilung durch eine elastische Schicht auf starrer rauher Unterlage. Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6 Vol.2(1931)108-117. 264

Marguerre, K. Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der kontinuierlich gestutzten Platte. Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6

Vol.4(1933)332-353. 542,552

Marguerre, K. **Uber den Trager auf elastischer Unterlage.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.17(1937)224-231. 279,511,542

Martynovich, T.L. Yurinets, V.E. **A non-homogeneous isotropic half-plane with reinforced edge.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.11,No.10(1975)63-69,[1075-1079]. 327

Martynovich, T.L. Yurinets, V.E. **Elastic anisotropic half- plane with a non-symmetric beam reinforcement.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.12,No.5(1976)79-84. 327

Martynovich, T.L. Yurinets, V.E. **Heterogeneous isotropic half-plane with a non-symmetrically reinforced edge.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.13,No.3(1977)48-56,[246-253]. 327

Maslyuk, G.F. **The solution of axisymmetric contact problems for a half-space by the method of p-analytic functions.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.3,No.3(1967)100-106,[62-65]. 517

Matczynski, M. **Elastic wedge with discontinuous boundary conditions.** Archiwum Mechaniki Stosowanej. (Archives of Mechanics). (23), TA350,A17 Vol.15(1963)833-855. 647

McNamee, J. Gibson, R.E. **Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media.** Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.13(1960)98-111. 623

Medovnik, M.I. Rakov, A.Kh. **Calculation of a periodic system of parallel beams on elastic foundation.** Akademiia nauk S.S.S.R. Kiev. Dopovide. (16), QA1,A45 Ser.A,No.4(1970). 629

Meijers, P. The contact problem of a rigid cylinder on an elastic layer. Applied Scientific Research. (21), QC1,A745 Vol.18(1968)353-383. 265,266,267,269

Melan, E. **Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbschreibe.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik

und Mechanik. (101) Vol.12(1932a)343-346. 235,318

Melan, E. **Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen.** Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6 Vol.3(1932b)123-129. 318

Michell, J.H. **On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates.** London Mathematical Society. Proceedings.(64),QA1.L548 Vol.31(1899)100-124. 182,435

Mikhlin, S.G. **Integral Equations.** English translation, **Armstrong,** A.H. **(Ed.).** London: **Pergamon Press** (1957). 256

Milne-Thomson, L.M. Plane Elastic Systems. Berlin: Springer Verlag (1960). **27,141**

Milovic, D.M. Touzot, G. Bidimensional stress distribution in an anisotropic layer of finite thickness. Geotechnique.**(34)**,TA705,G35 Vol.20(1970)198-203. 254

Mindlin, R.D. **Force at point in the** interior of **a semi-infinite solid.** Physics, a Journal of General and Applied Physics. (79), QC1,J83 Vol.7(1936)195-202. 35

Mindlin, R.D. **Compliance of elastic bodies in contact.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.16(1949)259-268. 458,477,587,595,608

Mindlin, R.D. **Deresiewicz, H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces.** Journal of Applied Mechanics. **(50), TA1,J6** Vol.20(1953)327-344. 630

Morar', G.A. Popov, G.Ia. **On the theory of contact problems for cylindrical bodies with allowance for friction forces.** Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Mekhanika Tverdogo Tela. (Mechanics of Solids), (13) **Vol.11,No.2(1976)87-96,[75-83]. 419**

Morland, L.W. **Singular integral equations with logarithmic kernels.** Mathematika.(66),QA1,M84 Vol.17(1970)47-56. 263,419

Morrison, J.A. Lewis, J.A. Charge singularity at the corner of a flat plate. S.I.A.M. Journal on Applied Mathematics. (93), QA1,S73 Vol.31(1976)233-250. 456

Morse, P.M. Feshbach, H. **Methods of Theoretical Physics.** New York: McGraw-Hill (1953). 498

Moss, L.W. Kobayashi, A.S. Approximate analysis of axisymmetric problems in fracture mechanics with application to a flat toroidal crack. International Journal of Fracture Mechanics. (40), TA401,I63 Vol.7(1971)89-99. 519

Mossakovskii, V.I. On the question of the estimation of the displacements in spatial contact problems. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.15(1951)635-636. 89

Mossakovskii, V.I. Application of the reciprocity theorem to the determination of the resultant forces and moments in three-dimensional contact problems. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.17(1953)477-482. 89

Mossakovskii, V.I. The fundamental mixed problem of the theory of elasticity for a half-space with a circular line separating the boundary conditions. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.18(1954a)187-196. 458,467,481,511

Mossakovskii, V.I. Pressure of a die, approximately circular in plan-form, on an elastic half-space. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.18(1954b)675-680. 511

Mossakovskii, V.I. Pressure of a circular die (punch) on an elastic half-space whose modulus of elasticity is an exponential function of depth. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.22(1958)123-125,[168-171]. 618,620

Mossakovskii, V.I. Compression of elastic bodies under conditions of adhesion. (Axisymmetric case). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.27(1963)418-427,[630-643]. 458,467,482,492

Mossakovskii, V.I. Rybka, M.T. Generalization of the Griffith-Sneddon criterion for the case of a nonhomogeneous body. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.28(1964)1061-1069,[1277-1286]. 513

Muki, R. Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and a thick plate. In Sneddon, I.N. and Hill, R. (Eds.), Progress in Solid Mechanics. Amsterdam: North Holland (1960). 401-439. 476

Muki, R. Sternberg, E. Transfer of load from an edge-stiffener to a sheet A reconsideration of Helan's problem. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.34(1967)679-686. 322,356,361

Muki, R. Sternberg, E. On the diffusion of load from a transverse tension bar into a semi-infinite elastic sheet. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.35(1968a)737-746. 322,364,366,369,370,372

Muki, R. Sternberg, E. On the stress analysis of overlapping bonded elastic sheets. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.4(1968b)75-94. 321,322

Muki, R. Sternberg, E. On the diffusion of an axial load from an infinite cylindrical bar embedded in an elastic medium. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.5(1969)587-605. 322,631

Muki, R. Sternberg, E. Elastostatic load transfer to a half-space from a partially imbedded axially loaded rod. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.6(1970)69-87. 322,631

Muskhelishvili, N.I. Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. 3rd ed. Moscow 1949. English translation, Radok, J.R.M. (Ed.). Groningen: Noordhoff (1953a). 1,14,30,39,43,107,140,146,151,159,160,164,165,167,182,376,380, 395,418,486

Muskhelishvili, N.I. Singular Integral Equations. 2nd ed. Moscow 1946. English translation, Radok, J.R.M. (Ed.). Groningen: Noordhoff (1953b). 107,116,117,140,155,165,167,182,259,331,350,380,413,414

Naghdi, P.M. Rowley, J.C. On the bending of axially symmetric plates on elastic foundations. 1st Mid Western Conference onSolid Mechanics.Proceedings.Urbana,Illinois. 119-123. 545

Nakashidze, G.M. Taking account of frictional forces in the contact region between a circular punch and an elastic half-space. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.11,No.4(1975)110-113,[432-434]. 492

Naumov, Iu.A. Shevlyakov, Iu.A. **Flexure of circular plates on a multilayered foundation. (In Russian).** Inzhenernyi Zhurnal-Mekhanika Tverdogo Tela. (45) No.1(1967)154-163. 559

Nayak, M. Srinivasan, R.J. **Stresses and displacements under a flexible circular foundation in the presence of friction or adhesion.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.54(1974)225-232. 492

Neuber, H. **Ein neuer Ansatz zur Losung raeumlicher Probleme der Elastizitaetstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.14(1934)203-212. 33,34

Noble, B. **On some dual integral equations.** Quarterly Journal of Mathematics.(82),QA1,Q22 Ser.2, Vol.6(1955)81-87. 463

Noble, B. **Certain dual integral equations.** Journal of Mathematics and Physics.(57),QA1,J6 Vol.37(1958)128-136. 463

Noble, B. **The solution of Bessel-function dual integral equations by a multiplying-factor method.** Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.59(1963)351-362. 463

Noble, B. Hussain, M.A. **Angle of contact for smooth elastic inclusions. 10th Midwestern Mechanics Conference. Proceedings. 459-476. 463**

Noble, B. Hussain, M.A. **A variational method for inclusion and indentation problems.** Institute of Mathematics and Its Applications. Journal. (37), QA1,I552 Vol.5(1969a)194-205. 405,630

Noble, B. Hussain, M.A. **Exact solution of certain dual series for indentation and inclusion problems.** International Journal of Engineering Science. (39), T1.I5 Vol.7(1969b)1149-1161. 409

Noble, B. Spence, D.A. **Formulation oftwo-dimensional and axisymmetric problems for an elast. half-space. Mathematics Research Centre, United States Army, The University of Wisconsin.Technical Summary Report No.1089(1971). 83,513**

Muller, B.M. **Some contact problems for an elastic infinite wedge.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.36(1972)157-163,[146-152]. 447

Muller, B.M. **Deformation of an elastic wedge reinforced by a beam.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol. 38(1974)876-882,[823-829]. 447

O'Connor, J.J. **Compliance under a small torsional couple of an elastic plate pressed between two identical elastic spheres.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.33(1966)377-383. 566

Okubo, H. **On the two-dimensional problem of a semi-infinite elastic body compressed by an elastic plane.** Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.4(1951)260-270. 630

Oleriak, Z. **Annular punch on elastic semi-space.** Archiwum Mechaniki Stosowanej. (Archives of Mechanics). (23), TA350,A17 Vol.17(1965)633-648. 519

Olszak, W. (Ed.) **Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity. New York: Pergamon Press (1959).** 617

Palaov, V.A. **The contact problem of a plate on an elastic foundation.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.24(1960)416-422,[609-618]. 551

Panek, C. Kalker, J.J. **A solution for a narrow rectangular punch.** Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.7(1977)213-218. 629

Pao, Y.C. Wu, T.S. Chiu, Y.P. **Bounds on the maximum contact stress of an indented elastic layer.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.38(1971)608-614. 271,559

Papkovich, P.F. **Solution generale des equations differentielles fondamentales d'elasticite exprimee par trois fonctions harmoniques.** Academie des Sciences. Paris. Comptes Rendues. (1), Q46,A14 Vol.195(1932a)513-515. 33,34

Papkovich, P.F. **Expression for the general integral of the principal equations of the theory of elasticity by harmonic functions . (In Russian).** Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh nauk. (14) No.10(1932b)1425-1435. 33,34

Parihar, K.S. Keer, L.M. **Stress singularity at the corner of a wedge-shaped crack or inclusion.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.45(1978)791-796. 456

Parihar, K.S. Keer, L.M. The singularity at the apex of a bonded wedge-shaped stamp. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.46(1979)(to appear). 456

Parlas, S.C. Michalopoulos, C.D. Axisymmetric contact problem for an elastic half-space with a cylindrical hole. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.10(1972)699-707. 519,631

Paskalenko, A.A. Popov, G.Ia. Plane problem of bending of a semi-infinite beam resting on a linearly deformable foundation. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.36(1972)94-105,[88-94]. 546

Pasternak, P.L. The Basic Features of a New Method of Calculating Foundations on an Elastic Base by Means of Two Bedding Coefficients. (In Russian). Moscow-Leningrad: Gosstroizdat. (1954). 102,104,529,537

Payne, L.E. On axially symmetric punch, crack and torsion problems. Society for Industrial and Applied Mathematics. Journal. (92), QA1,S73 Vol.1(1953)53-71. 498

Pflüger, A. Halbschreibe mit Randglied. Ein Spannungsgleichnis Zum Problem der tragenden Linie. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.25/27(1947)177-185. 320

Pickett, G. Raville, M.E. Janes, W.C. McCormick, F.J. Deflections, moments and reactive pressures for concret pavements. Kansas State College. Bulletin. (81) No.65(1951). 550

Pickett, G. McCormick, F.J. Circular and rectangular plates under lateral load and supported by an elastic solid foundation. 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics. Ann Arbor, Michigan: J.W. Edwards (1952). 331-338. 550

Plevako, V.P. On the theory of elasticity of inhomogeneous media. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.35(1971)853-860,[806-813]. 627

Plevako, V.P. On the possibility of using harmonic functions for solving problems of the theory of elasticity of nonhomogeneous media. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.36(1972a)686-694,[834-842]. 627

Plevako, V.P. **The state of stress of a nonhomogeneous layer resting on an elastic half-space.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.8,No.4(1972b)64-76,[397-403]. 627

Plevako, V.P. **Equilibrium of a nonhomogeneous half-plane under the action of forces applied to the boundary.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.37(1973a)905-913,[858-866]. 308

Plevako, V.P. **The deformation of a nonhomogeneous half-space under the action of a surface load.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.9,No.6(1973b)16-23,[593-598]. 627

Plevako, V.P. **A problem concerned with the action of shear forces applied to the surface of an inhomogeneous half-space.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.9,No.11(1973c)49-55,[1191-1195]. 627

Plevako, V.P. **Inhomogeneous layer bonded to a half-space under the action of internal and external forces.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.38(1974)865-875,[813-823]. 627

Polozhii, G.N. **The Generalized Theory of Analytic Functions of a Complex Variable P-analytic and (p,q) - analytic functions and certain applications of them .(In Russian).Kiev University . 527**

Polozhii, G.N. **On a problem of the theory of axisymmetric potential and on a system of circular and annular dies.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.3,No.12(1967)16-27,[13-19]. 527

Polya, G. Szego,. G. **Inequalities for the capacity of a condenser.** American Journal of Mathematics. (17), QA1,A49 Vol.67(1945)1-32. 93

Popov, G.Ia. **Bending of an unbounded plate supported by an elastic half-space with a modulus of elasticity varying with depth.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.23(1959)1088-1100,[1566-1573]. 618

Popov, G.Ia. **On an approximate method of solution of certain plane contact problems of the theory of elasticity.(In Russian).** Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Seriia Fiziko Matematicheskikh nauk. (8) Vol.14,No.3(1961a)81-96. 66

Popov, G.Ia. **On a method of solution of the axisymmetric contact problem of the theory of elasticity.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.25(1961b)76-85,[105-118]. 314

Popov, G.Ia. **Bending of a semi-infinite plate resting on a linearly deformable foundation.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.25(1961c)342-355,[502-520]. 546

Popov, G.Ia. **The contact problem of the theory of elasticity for the case of a circular area of contact.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.26(1962)152-164,[207-225] 83,587

Popov, G.Ia. **Some properties of classical polynomials and their application to contact problems.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.27(1963a)821-832,[1255-1271]. 66,314,315

Popov, G.Ia. **On the solution of a planar contact problem of elasticity theory in the presence of couple or frictional forces.** Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Serila Fiziko Matematicheskikh nauk. (8) Vol.16(1963b)15-32. 167,278,316

Popov, G.Ia. **Certain properties of classical polynomials and their application in contact problems.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.28(1964)442-451,[544-555]. 317

Popov, G.Ia. **Plane contact problem of the theory of elasticity with bonding or frictional forces.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.30(1966)551-563,[653-667]. 167,278,316

Popov, G.Ia. **Impression of a punch on a linearly-deforming foundation taking into account friction forces.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.31(1967a)337-343,[360-367]. 317

Popov, G.Ia. **Some new relations for Jacobi polynomials.** Sibirskii Matematicheskii Zhurnal. Siberian Mathematical Journal.(91),QA1,S45 Vol.8(1967b)1395-1404,[1059-1061]. 317

Popov, G.Ia. **On an approximate method of solution of the contact**

problem for an annular stamp. (In Russian). Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Mekhanika.(7) Vol.20,No.2(1967c)19-36. 317,526

Popov, G.Ia. **A remarkable property of Jacobi polynomials.** Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal. (Ukrainian Mathematical Journal). (100), QA1,A42251,3X Vol.20(1968)540-547,[467-472]. 315,332

Popov, G.Ia. **On the method of orthogonal polynomials in contact problems of the theory of elasticity.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1969)518-531,[503-517]. 66,69,241,314

Popov, G.Ia. **On integral equations of the theory of elasticity with difference and summation kernels.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.34(1970)603-619,[575-590]. 317

Popov, G.Ia. **On the reduction of integral equations of the theory of elasticity to infinite systems.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.36(1972a)672-681,[633-642]. 317

Popov, G.Ia. **Plates on a linearly elastic foundation (A survey).** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.8,No.3(1972b)3-17,[231-242]. 2,528,533

Popov, G.Ia. **Plane contact problem for a linearly-deformable foundation in the presence of adhesion.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.37(1973a)254-261,[237-243]. 317

Popov, G.Ia. **Axisymmetric contact problem for an adhesive inhomogeneous half-space in the presence of cohesion.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.37(1973b)1109-1116,[1052-1059]. 625

Popov, G.Ia. Tikhonenko, L.Ia. **Two-dimensional problem of the contact between a semi-infinite beam and an elastic wedge.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.38(1974)312-320,[284-292]. 447

Popov, G.Ia. Tikhonenko, L.Ia. **Exact solution of plane problems on the contact between semi-infinite beams and an elastic wedge.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.39(1975)1100-1109,[1054-1063]. 447

Poritsky, H. Stresses and deflections of cylindrical bodies in contact with application to contact of gears and of locomotive wheels. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.17(1950)191-201. 60

Potelezhko, V.P. Filippov, A.P. The contact problem for a slab lying on an elastic base. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.3,No.1(1967)87-91,[49-51]. 558

Potelezhko, V.P. The pressure of a rigid unbounded cylinder on an elastic layer. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.7,No.3(1971)122-125,[335-338]. 271,630

Poulos, H.G. Davis, E.H. The settlement behaviour of single axially-loaded piles and piers. Geotechnique.(34),TA705,G35 Vol.18(1968)351-371. 631

Poulos, H.G. Davis, E.H. Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics. New York: John Wiley (1974). 99,627

Pouyet, J. Lataillade, J.L. Elastic strain of a transversely isotropic half-space caused by a rigid punch. Letters in Applied and Engineering Sciences.(62) Vol.17(1979)765-772. 582

Prager, W. Zur Theorie elastisch gelagerter Konstruktionen. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.7(1927)354-360. 279

Prager, W. Introduction to Mechanics of Continua. New York: Dover Publications (1961). 16

Prasad, S.N. Chatterjee, S.N. Some mixed boundary value problems of elasticity in a rectangular domain. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.9(1973)1193-1210. 630

Prasad, S.N. Dasgupta, S. Effect of sliding friction on contact stresses in a rectangle compressed by rigid planes. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.42(1975)656-661. 630

Privarnikov, A.K. Symmetric contact problem for a layer of finite thickness. (In Russian). Akademiia nauk S.S.S.R., Kiev. Dopovide. (16), QA1,A45 No.3(1963)358-361. 271

Privarnikov, A.K. On the contact between a plate and an elastic half-

space. Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia, Mekhanika Tverdogo Tela. (Mechanics of Solids), (13) Vol.7(1972)163-167. 560

Protsenko, V.G. Protsenko, V.S. Sinekop, N.S. **On the calculation of two infinite beams on elastic foundation.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.9,No.7(1973)104-108,[781-785]. 629

Protsenko, V.S. **Torsion of an elastic half-space with the modulus of elasticity varying according to a power law.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.3(1967)127-130,[82-83]. 621

Protsenko, V.S. Protsenko, V.G. **the solution of the integral equation of the contact problen in the case of two punches.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.8,No.7(1972)60-65,[743-747]. 629

Protsenko, V.S. **The pressure on an elastic half-space due to a strip-shaped punch.** Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.8,No.6(1974)45-50,[618-622]. 629

Protsenko, V.S. Rvachev, V.L. **Plate in the form of an infinite strip on an elastic half-space.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.40(1976)298-305,[273-280]. 629

Pu, S.L. Hussain, M.A. **Note onthe unbonded contact between plates and an elastic half-space.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.37(1970)859-861. 584

Pupyrev, V.A. Ufliand, Ia.S. **Certain contact problems for an elastic layer.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.24(1960)683-690,[1015-1026]. 553

Puro, A.E. **Application of Hankel transforms to the solution of axisymmetric problems when the modulus of elasticity is a power function of depth.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.37(1973)945-948,[896-900]. 621

Pykhteev, G.N. **On the evaluation of certain singular integrals with a kernel of the Cauchy type.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7

Vol.23(1959)1074-1082,[1536-1548]. 66

Rakov, A.F. **Analysis of parallel beams on elastic foundation.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.26(1962)588-592,[863-891]. 629

Rakov, A.Kh. Rvachev, V.L. **Contact problems of the theory of elasticity for a half-space whose modulus of elasticity is a power function of the depth.** Akademiia nauk S.S.S.R. Kiev. Dopovide. (16), QA1,A45 Vol.3(1961)286-290. 618

Rao, A.K. **Stress concentrations and singularities at interface corners.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.51(1971)395-406. 452

Rao, H.S. Shadley, J.R. **An initial value method for an axisymmetric contact problem.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.8(1970)219-229. 558

Rapoport, I.M. **On one class of singular integral equations.** Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.59(1948)1403-1406. 486

Rappoport, R.M. **On the construction of general solutions of the elasticity theory equations for transversely isotropic inhomogeneous bodies.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.40(1976)956-958,[909-912]. 627

Ratwani, M. Erdogan, F. **On the plane contact problem for a frictionless elastic layer.** International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.9(1973)921-936. 296,297

Rau, I.S. Dhaliwal, R.S. **Further considerations on the axisymmetric Boussinesq problem.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.10(1972)659-663. 558

Reismann, H. **Bending of circular and ring-shaped plates on an elastic circular foundation.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.21(1954)45-51. 544,550

Reissner, E. **On the theory of beams on a yielding foundation.** National Academy of Sciences, Washington. Proceedings.(7),Q11,N26 Vol.23(1937)328-333. 279

Reissner, E. Note on the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet. National Academy of Sciences, Washington. Proceedings.(71),Q11,N26 Vol.26(1940)300-305. 318,364

Reissner, E. On the theory of bending of elastic plates. Journal of Mathematics and Physics.(57),QA1,J6 Vol.23(1944)184-191. 545

Reissner, E. Sagoci, H.F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. I. Journal of Applied Physics. (51), QC1,J83 Vol.15(1944)652-654. 458,468,498

Reissner, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.67(1945)A69-A77. 545

Reissner, E. On a variational theorem in elasticity. Journal of Mathematics and Physics.(57),QA1,J6 Vol.29(1950)90-95. 545

Reissner, E. Stresses in elastic plates over flexible subgrades. American Society of Civil Engineers. Engineering Mechanics Division. Journal. (18), TA1,AS233 Vol.81(1955)690-1 - 690-29. 542

Reissner, E. A note on deflections of plates on a viscoelastic foundation. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.25(1958)144-145. 102

Riedel, W. Beitrage zur Losung des ebenen Probleme eines elastischen Korpers mittels der Airyschen Spannungsfunktion. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.7(1927)169-188. 235

Robinson, N.I. Polynominal solutions of elastic layer problems. S.I.A.M. Journal on Applied Mathematics. (93), QA1,S73 Vol.13(1973)29-43. 559

Robinson, N.I. Green's function for bending of a strip on a Pasternak foundation. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.55(1975)182-183. 104

Rogers, C. Clements, D.L. Bergman's integral operator method in inhomogeneous elasticity. Quarterly of Applied Mathematics.(84),QA1,Q25 Vol.36(1978)315-321. 627

Rostovtsev, N.A. Complex stress function in the axisymmetric contact

problem of the theory of elasticity. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.17(1953)611-614. 509

Rostovtsev, N.A. On the problem of torsion of an elastic half-space.(In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.19(1955)55-60. 509

Rostovtsev, N.A. Complex potentials in the problem of a punch of circular section. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.21(1957)77-82. 509

Rostovtsev, N.A. An integral equation encountered in the problem of a rigid foundation bearing on nonhomogeneous soil. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.25(1961)164-168,[238-246]. 625

Rostovtsev, N.A. On certain solutions of an integral equation of the theory of linearly deformable foundation. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.28(1964a)111-127,[127-145]. 625

Rostovtsev, N.A. On the theory of elasticity of a nonhomogeneous medium. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.28(1964b)601-611,[745-757]. 308,311,618,622

Rostovtsev, N.A. Khranevskaia, I.E. The solution of the processing problem for a half-space whose modulus of elasticity is a power function of the depth. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.35(1971)1053-1061,[1000-1009]. 625

Rvachev, V.L. The pressure on an elastic half-space of a punch, strip-shaped in the plane. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.20(1956a)248-254. 629

Rvachev, V.L. On the analysis of an infinite beam lying upon an elastic half-space. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.20(1956b)667-669. 629

Rvachev, V.L. On the bending of an infinite beam on an elastic half-space. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.22(1958)698-700,[984-988]. 629

Rvachev, V.L. The pressure on an elastic half-space of a stamp with a wedge-shaped planform. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.23(1959a)169-171,[229-233]. 455

Rvachev, V.L. On the pressure under an infinite beam resting on an elastic half-space. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.23(1959b)399-400,[565-567]. 629

Rvachev, V.L. Studies on the contact problems of elasticity theory in the Ukraine. Prikladnaia Mekhanika. (Soviet Applied Mechanics). (81), TA349,P6853 Vol.3,No.10(1967)109-116,[76-81]. 2

Rybakov, L.S. Cherepanov, G.P. Discrete interaction of a plate with a semi-infinite stiffener. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.41(1977)322-328,[313-319]. 350

Sack, R.A. Extension of Griffith's theory of rupture to three dimensions. Physical Society of London. Proceedings. (78), QC1,P52 Vol.58(1946)729-736. 498

Sadowsky, M.A. Zweidimensionale Probleme der Elastizitatstheorie. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.8(1928)107-121. 140,155,181

Sadowsky, M.A. Stress concentration caused by multiple punches and cracks. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.23(1956)80-84. 174

Sagoci, H.F. Forced torsional oscillations of an elastic half- space II. Journal of Applied Physics. (51), QC1,J83 Vol.15(1944)655-662. 468

Sarkisian, V.S. Avanesian, R.G. On load transfer from an infinite stringer to two elastic strips with fixed edges Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Mekhanika.(7) Vol.64,No.3(1977)188-192. 327

Schindler, K. Der Trager auf elastischer Bettung unter Ausschluss van Zugkraften zwischen Trager und Unterlage. Oerterreichische Bauzeitschrift.(75) Vol.11,No.3(1956)47-53. 101

Schleicher, F. Zur Theorie des Baugrundes. Bauingenieur. (25), TA3,B26 Vol.48(1926a)931-935. 545,547

Schleicher, F. Zur Theorie des Baugrundes. Bauingenieur. (25), TA3,B26 Vol.49(1926b)949-952. 545,547

Schleicher, F. Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Berlin: Springer Verlag (1926c). 545,547

Schwartz, J. Harper, E.Y. On the relative approach of two-dimensional elastic bodies in contact. International Journal of Solids and Structures. (43), TA401,I65 Vol.7(1971)1613-1626. 403

Segedin, C.M. A note on geometric discontinuities in elastostatics. International Journal of Engineering Science. (39) T1,I5 Vol.6(1968)309-312. 595

Selvadurai, A.P.S. The interaction between a rigid circular punch on an elastic half-space and a Mindlin force. Mechanics Research Communications. (67) Vol.5(1978)57-64. 468

Shail, R. Lame polynomial solutions to some elliptic crack and punch problems. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.16(1978)551-563. 589,597

Shepherd, W.M. Stress systems in an infinite sector. Royal Society of London. Philosophical Transactions. Section A. Mathematical and Physical Sciences. (88), Q41,L8 Vol.148(1935)284-303. 438

Sheremet'ev, M.P. The elastic equilibrium of an infinite plate with an inserted absolutely rigid or elastic disc. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.16(1952)437-448. 405

Sheremet'ev, M.P. The solution of the equations of certain contact problems of the theory of elasticity. (Equations of Prandtl type.) In Radok, J.R.M. (Ed.), Problems of Continuum Mechanics. Philadelphia, Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics (1961). 419-439. 414

Shibuya, T. Koizumi, T. Nakahara, I. An elastic contact probl a for a half-space indented by a flat annular rigid stamp. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.2(1974)759-771. 519,526

Shibuya, T. Koizumi, T. Nakahara, I. Tanaka, S. **An axisymmetric contact problem for a thick elastic plate** indented by a **pair of flat annular rigid punches.** Letters in Applied and Engineering Sciences.(62) Vol.3(1975)177-187. 558

Shibuya, T. **A mixed boundary value problem of an elastic half- space under torsion by a flat annular stamp.** Nikon Kikaigakkai. Japanese Society of Mechanical Engineers. Bulletin. (74),. TJ1,N5 Vol.19(1976)233-238. 520,526

Shibuya, T. **Some elastic contact problems of an elliptical punch.** Nikon Kikaigakkai. Japanese Society of Mechanical Engineers. Bulletin. (74), TJ1,N5 Vol.20(1977)903-914. 589

Shibuya, T. Koizumi, T. Nakahara, I. Tanaka, S. **The stress distribution in a thick elastic plate under torsional displacements by a pair of annular rigid punches.** Nikon Kikaigakkai. Japanese Society of Mechanical Engineers. Bulletin. (74), TJ1,N5 Vol.20(1977)675-679. 558

Shibuya, T. Koizumi, T. Nakahara, I. Hara, T. **Elastic contact problem of a half-space pressed onto a rigid base with a cylindrical protrusion or pit.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.17(1979)349-356. 520

Shield, R.T. **Notes on problems in hexagonal aeolotropic materials.** Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.47(1951)401-409. 583,588

Shield, R.T. **Load-displacement relations for elastic bodies.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik.(102),QA1,Z5 Vol.18(1967)682-693. 89

Shtaerman, A.Ia. Steuermann, E. **To Hertz's theory of local deformations in compressed elastic bodies.** Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. (10), Q60,A33 Vol.25(1939)359-361. 97

Shtaerman, A.Ia. Steuermann, E. **A generalization of Hertz's theory**

of local deformations in elastic bodies pressed against each other. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. (10), Q60,A33 Vol.29(1940)179-181. 97

Shtaerman, A.Ia. Steuermann, E. On the question of local deformations in elastic bodies pressed against one another. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. (10), Q60,A33 Vol.31(1941)738-741. 97

Shtaerman, A.Ia. Some special cases of the contact problem. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady. International Edition. Akademiia nauk S.S.S.R. Comptes Rendues de l'Academie des Sciences de l'U.R.S.S. (10), Q60,A33 Vol.38(1943)197-200. 97

Shtaerman, A.Ia. Contact Problems of the Theory of Elasticity. (In Russian). Moscow, Leningrad: Gostekhteoretizdat (1949). 2,140,155,167,182,252

Singh, B.M. Reissner-Sagoci problem for a nonhomogeneous solid. Defence Science Journal. (30) Vol.22(1972)81-85. 622

Singh, B.M. A note on the Reissner-Sagoci Problem for a non-homogeneous medium. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.53(1973)419-420. 622

Sivashinsky, G.I. The problem of a slender die. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.5(1975)161-166. 629

Smirnov, V.I. Course of Higher Mathematics. Sneddon, I.N. (Ed.). Vol. 4. Oxford: Pergamon Press (1964). 256

Smith, J.O. Liu, C.K. Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with applications to some contact problems. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.20(1953)157-166. 605

Smith, S.F. On a flat punch indenting an elastic layer in plane strain. Quarterly Journal of Mathematics.(82),QA1,Q2Z Ser.2,Vol.15(1964)223-237. 271

Smithies, F. Integral Equations. London: Cambridge University Press (1958). 256

Sneddon, I.N. The stress distribution due to a force in the interior of a semi-infinite elastic medium. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.40(1944)229-238. 235

Sneddon, I.N. Boussinesq's problem for a flat-ended cylinder. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.42(1946)29-39. 467

Sneddon, I.N. Note on a boundary value problem of Reissner and Sagoci. Journal of Applied Physics. (51), QC1,J83 Vol.18(1947)130-132. 458,468

Sneddon, I.N. Boussinesq's problem for a rigid cone. Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.44(1948)492-507. 467

Sneddon, I.N. Fourier Transforms. New York: McGraw-Hill. 197,199,206,213,235,460,466,468

Sneddon, I.N. Berry, D.S. The Classical Theory of Elasticity.In Flugge, S. (Ed.) Handbuch der Physik, Vol.6 Elasticity and Plasticity. Berlin: Springer Verlag(1958). 1-126. 1,7

Sneddon, I.N. The elementary solution of dual integral equations. Glasgow Mathematical Association. Proceedings.(35),QA1,G52 Vol.4(1960)108-110. 463,464

Sneddon, I.N. Dual integral equations with trigonometric kernels. Glasgow Mathematical Association. Proceedings.(35),QA1,G52 Vol.5(1961)147-152. 463

Sneddon, I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.3(1965)47-57. 464,467

Sneddon, I.N. Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory. Amsterdam: North Holland (1966a). 463,508,519,570

Sneddon, I.N. The Reissner-Sagoci problem. Glasgow Mathematical Association. Proceedings.(35),QA1,G52 Vol.7(1966b)136-144. 468

Sneddon, I.N. Lowengrub, M. Crack Problems in the Classical Theory

of Elasticity. New York: John Wiley (1969). 501

Sneddon, I.N. Fourier Transform Solutions of Quarter-Plane Problems in Elasticity. Raleigh: North Carolina State University, Department of Mathematics (1971). 447

Sneddon, I.N. The Use of Integral Transforms. New York: McGraw-Hill (1972). 197,199,430,431,432

Sneddon, I.N. Gladwell, G.M.L. Coen, S. Bonded contact of an infinite plate and an elastic foundation. Letters in Applied and Engineering Sciences.(62) Vol.3(1975)1-15. 102,281,542

Sneddon, I.N. The stress intensity factor for a flat elliptical crack in an elastic solid under uniform tension. International Journal of Engineering Science. (39), TJ,I5 Vol.17(1979a)185-191. 229

Sneddon, I.N. A note on the Boussinesq problem for a flat-ended cylinder with elliptical cross-section. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6X Vol.9(1979b)215-219. 229

Sokolnikoff, I.S. Mathematical Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill (1956). 1,7,141

Solov'ev, A.S. An integral equation and its application to contact problems in the theory of elasticity with friction and cohesion forces. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1969)1042-1050,[1012-1020]. 167,278

Solov'ev, Iu.I. The fundamental mixed problem of the axisymmetric theory of elasticity. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.30(1966)956-962,[1137-1145]. 517

Spence, D.A. Self-similar solutions to adhesive contact problems with incremental loading. Royal Society of London. Proceedings. Series A.(89),Q41,L7 Vol.305(1968a)55-80. 161,458,482,484,486,490,491,492

Spence, D.A. A Wiener-Hopf equation arising in elastic contact problems. Royal Society of London. Proceedings. Series A.(89),Q41,L7 Vol.305(1968b)81-92. 458,486,492

Spence, D.A. **An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction.** Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.73(1973)249-268. 272,278

Spence, D.A. **Similarity considerations for contact between dissimilar elastic bodies.** In de Pater, A.D. and Kalker, J.J. (Eds.), **The Mechanics of the Contact between Deformable Bodies. Delft University Press (1975a).** 67-76. 83

Spence, D.A. The Hertz contact problem with finite friction. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6K Vol.5(1975b)297-319. 492

Srivastav, R.P. **An axisymmetric mixed boundary value problem for a half-space with a cylindrical cavity.** Journal of Mathematics and Mechanics. (Supersedes the Journal of Rational Mechanics and Analysis). (56), QA1,I593 Vol.13(1964)385-393. 570

Srivastav, R.P. Narain, Prem **Certain two-dimensional problems of stress distribution in wedge-shaped elastic solids under discontinuous load.** Cambridge Philosophical Society. Proceedings. (26), Q41.,C17 Vol.61(1965)945-954. 447

Srivastava, K.N. Lowengrub, M. **Finite Hilbert transform technique for triple integral equations with trigonometric kernels.** Royal Society of Edinburgh. Proceedings. Section A. Mathematical and Physical Sciences. (87), Q41,L7 Vol.68(1970)309-321. 174

Sternberg, E. Eubanks, R.A. Sadowsky, M.A. **On the axisymmetric problem of two concentric spheres.** 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics. Proceedings. New York: American Society of Mechanical Engineers (1952). 209-215. 630

Sternberg, E. Rosenthal, F. The elastic sphere under concentrated loads. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.19(1952)413-421. 630

Sternberg, E. Koiter, W.T. **The wedge under a concentrated couple: a paradox in the two-dimensional theory of elasticity.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.25(1958)575-581. 437,441

Sternberg, E. **Load-transfer and load-diffusion in elastostatics.** 6th U.S. National Congress of Applied Mechanics. Proceedings. New York: American Society of Mechanical Engineers . 34-61. 322

Sternberg, E. Turteltaub, M.J. Compression of an elastic roller between two rigid plates. In Sedov, L.I., et al (Eds.), Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis. Muskhelishvili Anniversary Volume. Moscow: Nauka Publishing House (1972). 495-515. 395,404

Stippes, M. Wilson, H.B.Jr. Krull, F.N. A contact stress problem for a smooth disk in an infinite plate. 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics. Proceedings, Vol.2.New York: American Society of Mechanical Engineers (1962). 799-806. 405,412,427

Stippes, M. A unified derivation of displacement potentials in classical elasticity. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6K Vol.1(1971)93-94. 35

Suriyamongkal, S. Karasudhi, P. Lee, S.L. Axially loaded rigid cylindrical body embedded in an elastic half -space In Developments in Mechanics. Vol. 7. 13th Midwestern Mechanics Conference. Proceedings. Pittsburgh: School of Engineering. 333-347. 631

Sveklo, V.A. The action of a stamp on an elastic anisotropic half-space. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.34(1970)172-178,[165-171]. 579

Sveklo, V.A. Herts problem on compression of anisotropic bodies. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.38(1974)1079-1083,[1023-1027]. 579

Svelko, V.A. Boussinesq type problems for the anisotropic 'half-space. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.28(1964)908-913,[1099-1105]. 579

Svelko, V.A. Concentrated force in a transversally-isotropic half-space and in a composite space. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.33(1969)532-537,[517-523]. 583

Szabo, I. Die achsensymmetrisch belastete dicke Kreisplatte auf elastischer Unterlage. Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6 Vol.19(1951a)128-142. 550

Szabo, I. Beitrage zur Theorie der achsensymmetrisch belasteten dicken Kreisplatte insbesondere bei elastischer Lagerung. Ingenieur-

Archiv.(36),TA3,I6 Vol.19(1951b)342-354. 550

Szabo, I. **Die in Achsenrichtung rotationssymmetrisch belastete dicke Kreisplatte auf nachgiebiger und auf starrer Unterlage.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.32(1952a)145-153. 550

Szabo, I. **Beitrage zur Theorie der achsensymmetrisch belasteten schweren dicken Kreisplatte.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.32(1952b)359-371. 550

Szelagowski, F. **The influence of a bolt inserted in a hole of an infinite plate subjected to a one-directional tension or compression on the stresses in the plate.** Academie Polonaise des Sciences. Bulletin. Class Quatrieme. (2), Q60,P6 Vol.4,No.1(1956)9-20. 405

Takakuda, K. Shibuya, T. Koizumi, T. Hara, T. **Elastic contact problems of a half-plane pressed on a rigid base with a protusion or excavation.** Theoretical and Applied Mechanics. (Japan National Congress for Applied Mechanics). (97) Vol.27(1977)91-97. 520

Tamate, O. Kamada, T. **On the simple tension of a semi- infinite plate with partially stiffened edge.** Tohoku University. Technology Reports. (98) Vol.28,No.1(1963)39-47. 322

Temple, G. **Whittaker's work on the integral representation of harmonic functions.** Edinburgh Mathematical Society. Proceedings. (31), QA1,E4 Ser.2, Vol.2(1958)11-24. 513

Teodorescu, P.P. **One hundred years of investigations in the plane problem of the theory of elasticity.** Applied Mechanics Reviews. (20), A1,A639 Vol.17(1964)175-186. 141

Ter-Mkrtich'ian, L.N. **Some problems in the theory of elasticity of non-homogeneous elastic media.** Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.25(1961)1120-1125,[1667-1675]. 621

Terazawa, K. **On the elastic equilibrium of a semi-infinite solid.** Tokyo University. College of Sciences. Journal.(99) Vol.37(1916),Article 7. 86

Theocaris, P.S. **The order of singularity at a multi-edge corner of a composite plate.** International Journal of Engineering Science. (39),

T1,IS Vol.12(1974)107-120. 455

Theocaris, P.S. Gdoutos, E.E. **Stress singularities at vertices of composite plates with smooth or rough interfaces.** Archiwum Mechaniki Stosowanej. (Archives of Mechanics). (23), TA350,A17 Vol.28(1976)693-704. 455

Theocaris, P.S. Ioakimidis, N.I. **The inclusion problem in plane elasticity.** Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q22 Vol.30(1977a)437-448. 419

Theocaris, P.S. Ioakimidis, N.I. **Numerical integration methods for the solution of singular integral equations.** Quarterly of Applied Mathematics.(84),QA1,Q25 Vol.35(1977b)173-183. 263

Thomas, H.R. Hoersch, V.A. **Stresses due to the pressure of one elastic solid upon another.** Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana, Illinois.Bulletin 212(1930). 595,605,608

Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, S. **Theory of Plates and Shells.2nd ed. New York: McGraw-Hill (1940).** 259f. 547

Timoshenko, S. Goodier, J.N. **Theory of Elasticity. New York: McGraw-Hill (1951).** 1,2,5,14,98,460

Ting, E.C. **Unified formulation of two-parameter foundation model.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.53(1973a)636-637. 104

Ting, E.C. **Unbonded beams on a two-parameter foundation.** Franklin Institute. Journal. (33), T1,F8 Vol.296(1973b)77-89. 105

Titchmarsh, E.C. **Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford: Clarendon Press (1937).** 337. 199,462

Todhunter, I. Pearson, K. **History of the Theory of Elasticity. Vol.2, Part 2. Cambridge University Press (1893)** 33,75,78,94

Tonoian, V.S. **On the indentation of the elastic half-plane by two identical rigid stamps. (In Russian).** Akademiia nauk Armianskoi S.S.R. Izvestiia. Seriia Fiziko Matematicheskikh nauk. (8) Vol.17,No.2(1964)81-90. 174

Torvik, P.J. **Note on the boundary conditions for contact problems.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.34(1967)761-763. 95

Tranter, C.J. **The use of the Mellin transform in finding the stress distribution in an infinite wedge.** Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.1(1948)125-130. 439

Tranter, C.J. **On some dual integral equations occurring in potential problems with axial symmetry.** Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.3(1950)411-419. 552

Tranter, C.J. **On some dual integral equations.** Quarterly Journal of Mathematics.(82),QA1,Q22 Ser.2,Vol.2(1951)60-66. 462

Tranter, C.J. **A further note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves.** Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. (83), QA1,Q23 Vol.7(1954)317-325. 462

Tranter, C.J. **Integral Transforms in Mathematical Physics. New York: John Wiley (1956).** 430

Tranter, C.J. **Some triple integral equations.** Glasgow Mathematical Association. Proceedings.(35),QA1,GS2 Vol.4(1960)200-203. 519

Trefftz, E. **Mathematische Elastizitatstheorie.** In Grammel, R. **(Ed.), Handbuch der Physik, Vol. 6, Mechanik der Elastische Korper. Berlin: Julius Springer (1928).** 481

Tsai, K.C. Dundurs, J. **Keer, L.M. Contact between an elastic layer with a slightly, curved bottom and a substrate.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.39(1972)821-823. 293

Tsai, K.C. Dundurs, J. Keer, L.M. **Elastic layer pressed against a half-space.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.41(1974)703-707. 295

Tsai, N.C. Westmann, R.A. **Beam on tensionless foundation.** American Society of Civil Engineers. Engineering Mechanics Division. Journal. (18), TA1,A5233 Vol.93,EM5(1967)1-12. 101

Tsamasphyros, G.J. Theocaris, P.S. **Le premier probleme aux limites pour un coin infini.** Journal de Mecanique. (48), QA801,J6

Vol.15(1976)615-630. 441

Tu, Yih-O A numerical solution for an axially symmetric contact problem. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.34(1967)283-286. 574

Turteltaub, M.J. Sternberg, E. Elastostatic uniqueness in the half-space. Archive for Rational Mechanics and Analysis. (22), A801,A6 Vol.24(1967)233-242. 2

Ufliand, Ia.S. The contact problem of the theory of elasticity for a die, circular in its plane, in the presence of adhesion. (In Russian). Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.20(1956)578-587. 458,481,496

Ufliand, Ia.S. Torsion of an elastic layer. Akademiia nauk S.S.S.R. Doklady.(9),Q60,A33 Vol.129(1959)997-999 and 95,Vol.4(1959)1383-1386. 566

Ufliand, Ia.S. Survey of Articles on the Applications of Integral Transforms in the Theory of Elasticity. English translation, Sneddon, I.N. (Ed.). Raleigh: North Carolina State University, Department of Mathematics (1965). 2,441,467,481,499

Ufliand, Ia.S. Some three-dimensional problems of the theory of elasticity for a wedge. In Sedov, L.I., et al (Eds.), Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis. Muskhelishvili Anniversary Volume. Moscow: Nauka Publishing House. 549-553. 447

Updike, D.P. Kalnins, A. Axisymmetric behaviour of an elastic spherical shell compressed between rigid plates. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.37(1970)635-630. 630

Updike, D.P. Kalnins, A. Axisymmetric postbuckling and nonsymmetric buckling of a spherical shell compressed between rigid plates. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.39(1972a)172-178. 631

Updike, D.P. Kalnins, A. Contact pressure between an elastic spherical shell and a rigid plate. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.39(1972b)1110-1114. 631

Valov, G.M. Infinite elastic layer and half-space under the action of a ring-shaped die. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7

Vol.31(1968)894-907,[917-930]. 519,558

Vesic, A.B. **Bending of beams resting on isotropic elastic solid.** American Society of Civil Engineers. Engineering Mechanics Division. Journal. (18), TA1,A5233 Vol.87(1961)35-53. 281

Vlasov, V.Z. Leont'ev, N.N. **Beams, Plates and Shells on Elastic Foundation.** Jerusalem:Israel, Program for Scientific Translations (1966). 2,102,105,279,528,529,537

Vorob'ev, V.L. Popov, G.Ia. Contact problem for an elastic half-plane and a semi-infinite elastic rod adhering to it. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.34(1970)354-359,[335-341]. 320,350

Vorob'ev, V.L. Popov, G.Ia. Serdyuk, G.N. Bending of two semi-infinite plates lying on linearly de formable foundation of general type. Akademiia nauk S.S.S.R. Izvestiia. Mekhanika Tverdogo Tela. (Mechanics of Solids), (13) Vol.12,No.3(1977)58-64,[50-56]. 546

Vorovich, I.I. Ustinov, Iu.A. Pressure of a die on an elastic layer of finite thickness. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.23(1959)445-455,[637-650]. 556

Wang, I.C. **A contact stress problem for a rigid smooth sphere in an extended elastic solid.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.32(1965)651-655. 630

Watson, G.N. **A Treatise on the Theory of Bessel Functions. 2nd ed.** London: Cambridge University Press (1958). 213

WAY, S. **Some observations on the theory of contact pressures.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.7(1940)A147-A157. 2,595,608

Weber, C. **Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungskorpern.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.5(1925)466-468. 510

Weber, C. Zur Umwandlung von rotationssymmetrischen Problemen in zweidimensionale und umgekehrt. Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.20(1940)117-118. 511

Weber, H. **Ueber die Besselschen Functionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Strome.** Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik. (49), QA1,J59 Vol.75(1873)75-105. 462

Weitsman, Y. **On the unbonded contact between plates and an elastic half-space.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.36(1969)198-202. 562,563,573

Weitsman, Y. **On foundations that react in compression only.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.37(1970)1019-1030. 102,104,543

Weitsman, Y. **A tensionless contact between a beam and an elastic half-space.** International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.10(1972)73-81. 101,283,286

Westman, R.A. **Axisymmetric mixed boundary-value problems of the elastic half-space.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.32(1965)411-417. 477

Whittaker, E.T. Watson, G.N. **A Course of Modern Analysis. 4th ed. London: Cambridge University Press (1952). 47,508,607**

Wieghardt, K. **Uber den Balken auf nachgiebiger Unterlage.** Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. (101) Vol.2(1922)165-184. 629

Williams, M.L. **Surface stress singularities resulting from various boundary condition in angular corners of plates under bending.** 1st U.S. National Congress of Applied Mechanics. Proceedings. 325-330. 448

Williams, M.L. **Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.19(1952)526-528. 448

Williams, M.L. **Complex-variable approach to stress singularities - II.** Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.23(1956)477-478. 448

Williams, M.L. **The stresses around a fault or crack in dissimilar media.** Seismological Society of America. Bulletin.(90).QE531,S3 Vol.49(1959)199-204. 452

Williams, W.E. The solution of certain dual integral equations. Edinburgh Mathematical Society. Proceedings. (31), QA1,E4 Ser.2,Vol.12(1962)213-216. 463

Williams, W.E. Integral equation formulation of some three part boundary value problems. Edinburgh Mathematical Society. Proceedings. (31), QA1,E4 Ser.2,Vol.13(1963)317-323. 519

Willis, J.R. Hertzian contact of anisotropic bodies. Journal of Mechanics and Physics of Solids.(60),TA350,J68 Vol.14(1966)163-176. 575.576,579,588

Willis, J.R. Boussinesq problems for an anisotropic half-space. Journal of Mechanics and Physics of Solids.(60),TA350,J68 Vol.15(1967)331-339. 589

Willis, J.R. The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.6(1968)253-263. 589

Willis, J.R. The distribution of stress in an anisotropic elastic body containing an exterior crack. International Journal of Engineering Science. (39), T1,I5 Vol.8(1970)559-574. 589

Wilson, H.B.Jr. Approximate determination of contact stresses in an infinite plate with a smooth circular insert. 2nd South- Eastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics. Proceedings. (1964a). 147-163. 405,414,417

Wilson, H.B.Jr. Contact stresses in an infinite plate containing a smooth rigid elliptic insert. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.31(1964b)703-704. 405,417

Wilson, H.B.Jr. Hill, J.L. Non-Hertzian contact stresses in a smoothly cradled heavy cylinder. Journal of Elasticity.(52),QA931,J6K Vol.2(1972)143-151. 421,429

Winkler, E. Die Lehre van der Elastizitat und Festigkeit.Prag:Dominicus (1867) 99

Woinowsky-Krieger, S. Uber die Biegung dunner rechteckiger Platten durch Kreislasten. Ingenieur-Archiv.(36),TA3,I6 Vol.3(1932)236-250. 542

Woinowsky-Krieger, [illegible] auf elastischem Halbraum aufliegenden, [illegible] Platte. Ingenieur-Archiv.(36),TA3,J6 Vol.1[illegible]

Wu, T.-S. Chiu, Y.P. On th[illegible]tem of layered elastic bodies. Quarterly of App[illegible]thematics.(84),QA1,Q25 Vol.25(1967)233-242. 271,559

Yu, Yi-Yuan Axisymmetrical banding of circular plates under simultaneous action of lateral load, force in the middle plane, and elastic foundation. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.24(1957)141-143. 550

Zak, A.R. Williams, M.L. Crack point stress singularities at a bi-material interface. Journal of Applied Mechanics. (50), TA1,J6 Vol.30(1963)142-143. 452

Zakorko, V.N. Axisymmetric strain of an elastic layer with a circular line of separation of the boundary conditions on both faces. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.38(1974)131-138. 559

Zhemochkin, B.N. Sinitsyn, A.P. Practical Methods of Calculation of Foundation Beams and Slabs on Elastic Foundation without the Winkler Hypothesis. (In Russian) Moscow: Stroiizdat (1948). 536

Zimmermann, H. Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin: (1888). 99

Zlatin, A.N. Ufliand, IA.S. Axissymmetric Contact Problem on the impression of an elastic cylinder into an elastic layer. Prikladnaia Matematika i Mekhanika. (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). (80), QA201,P7 Vol.40(1976)79-84,[67-72]. 559