符 号 表

A	截面面积，常数
B	常数
C	常数
C_α、C_β	滑移线常数
D	常数，直径
E	弹性模量
F	力，单位体积力，截面面积
F_x、F_y、F_z	直角坐标表面力分量
G	剪切弹性模量
I_y、I_z	截面对 y 或 z 轴的惯性矩
I_p	截面极惯性矩
I_1、I_2、I_3	应力第一、第二、第三不变量
I'_1、I'_2、I'_3	应变第一、第二、第三不变量
J_1、J_2、J_3	应力偏量第一、第二、第三不变量
K	体积弹性模量
L	功
M	弯矩，力矩
M_y、M_z、M_x	在 xz、xy 或 yz 平面内的弯矩
M_t	扭矩
M_e	弹性极限弯矩
M_p	塑性极限弯矩
N	轴向力
P	集中外力

Q	水平集中外力，剪力
R	圆杆半径
R_A、R_B	支反力
S_y、S_z	截面对于 y 轴或 z 轴的静矩
S_1、S_2、S_3	主应力偏量
T	温度，表面力
U	总应变能
U_v	体积变形应变能
U_f	形状变形应变能
V	体积、速度
V_x、V_y、V_α、V_β	在 x、y、α、β 方向的速度分量
W	单位体积应变能
W	塑性耗散功率
W_y、W_z	截面抗弯系数
a、b	椭圆半径，柱或盘的内外半径
a	正方形的边长
$b(y)$、$b(z)$	高度为 y 或 z 的截面宽度
c	常数
d	柱体的直径
d_i、d_e	柱体的内、外直径
e_{ij}	应变偏量张量
f_x、f_y、f_z	单位体积力分量
g	重力加速度
h	矩形截面的高度
k	剪切屈服极限
h_e	弹性核高度
l	杆的长度
m	质量

l、m、n	外法线方向余弦
n	安全系数
p	表面正压力
q	分布载荷
p_i、p_e	内压力、外压力
r	圆盘或圆柱半径
r_s	弹塑性分界半径
s_{ij}	应力偏量张量
t	时间、厚度
u、v、w	直角坐标中的位移分量
v	速度，体积
u_r、u_θ、u_z	柱坐标中的位移分量
u、w	轴对称位移分量
w	挠度
x、y、z	直角坐标
z	距中性层的距离
θ	体积应变，转角，单位长度扭转角
Θ	正应力之和
Φ、ψ	应力函数
α	热膨胀系数，内摩擦角
γ	剪应变
γ_8	八面体剪应变
γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}	直角坐标剪应变分量
$\gamma_{r\theta}$、$\gamma_{\theta z}$、γ_{zr}	柱坐标中剪应变分量
δ_{ij}	Kronecker 符号
e	正应变
e_x、e_y、e_z	直角坐标中正应变分量
e_r、e_θ、e_z	柱坐标中正应变分量

e_1、e_2、e_3	主应变分量
ϵ_N	颈缩时应变
e_i	应变强度
ξ、η	滑移线常数
$\mathfrak{R}$	椭圆长短轴半径之比或厚壁筒内外半径之比，塑性极限载荷与弹性极限载荷之比
λ	Lamé 常数
$\dot{\lambda}$	Levy–Mises，Prandtl–*Reuss* 理论比例系数
ν	波桑比
μ_σ、μ_ϵ	应力及应变的 Lode 参数
ρ	密度、杆的曲率半径
ρ_r、ρ_θ	圆板的主曲率半径
ρ_x、ρ_y	矩形板的曲率半径
σ_x、σ_y、σ_z	直角坐标中的正应力分量
σ_r、σ_θ、σ_z	柱坐标中的正应力分量
σ_r、σ_θ、σ_φ	球坐标中的正应力分量
σ_e	弹性极限
σ_i	应力强度
σ_m	平均应力
σ_s	屈服极限
σ_t	真应力
σ_b	强度极限
σ_ν	外法线为 ν 截面上的正应力
τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}	直角坐标中的剪应力分量
$\tau_{r\theta}$、$\tau_{\theta z}$、τ_{zr}	柱坐标中的剪应力分量
$\tau_{r\theta}$、$\tau_{\theta\phi}$、$\tau_{\phi r}$	球坐标中的剪应力分量
τ_1、τ_2、τ_3	主剪应力
τ_ν	外法线为 ν 截面上的剪应力

τ_8 八面体剪应力

φ 扭转角

ω 角速度

ω_e 弹性极限转速

ω_p 塑性极限转速

第一章　基本概念

§ 1.1　塑性力学的研究对象及其特点

当作用在物体上的外力取消后，物体的变形不完全恢复，而产生一部分永久变形时，我们称这种变形为塑性变形，研究这种变形和作用力之间的关系，以及在塑性变形后物体内部应力分布规律的学科称为塑性力学。

塑性力学是固体力学的一个重要分支，它与弹性力学有着密切的关系。弹性力学中的大部分基本概念和处理问题的方法（如平衡方程、协调方程）都可以在塑性力学中得到应用。

一般说来，当外力较小时，物体是处于弹性状态的。而当外力逐渐增大到某一值时，物体中某一点的应力状态达到了某一极限值，物体中即开始产生塑性变形。塑性力学和弹性力学之间的根本差别在于弹性力学是以应力与应变成线性关系的广义 Hooke 定律为基础的。在塑性力学的范围中，应力与应变之间的关系，一般说来已经是非线性的了。而这种非线性的特征又是与所研究的具体材料有关。因此塑性力学就没有像广义 Hooke 定律那样统一的规律。对于不同的材料，在不同的条件下，都具有不同的规律。

塑性变形的基本规律，应当建立在实验的基础上，即从实验中去找出材料超出弹性极限以后的特性，从而定出物理关系，建立塑性力学中的基本方程。解出这些方程则可以得到不同情况的塑性状态下的应力和变形。利用这些基本规律来讨论材料发生塑性变形后内部应力重新分布的情况，以便做出更合理的设计，在这方面也已做了许多工作，并且已经解决了不少问题。但是对于一些较复杂的

问题，由于数学上的困难是较难解决的，因此在塑性力学中利用塑性问题中的某些特点，克服数学上的困难，使各种方法得到发展，有着重要意义。

塑性力学在工程实践中有着重要的用途。因为物体达到塑性阶段时，并没有破坏，它还有能力继续工作。所以可以把构件设计到部分达到塑性、部分保持弹性状态，从而可以节省材料，因此应用塑性理论能更合理地定出工程结构和机械零件的安全系数。以塑性力学为基础的极限设计理论在结构设计中有很大用途。另一方面，在金属塑性加工中，如金属的压延、锻造、切削等都是塑性过程，把这些工艺现象提高到理论阶段，从而又进一步地指导实践，对生产技术的发展也是有意义的。关于金属塑性加工的工艺过程已有不少专门文献，这里不去进一步讨论。

在实际问题中，允许塑性变形的大小视不同工程领域而有不同的量级。在工程结构及机械零件的设计中是不允许大变形的，因为如果变形太大，结构便不能正常地工作，因此在这类问题中，塑性变形要限制在弹性变形的量级，而在金属塑性加工的工艺过程中，塑性变形可以是很大的，因而在这类问题中，弹性变形是完全可以忽略的。

与弹性力学比较，塑性力学问题具有如下主要特点：

1、 应力与应变之间的关系是非线性的，其比例系数不仅与材料有关而且与塑性应变有关。

2、 由于塑性变形的出现，应力与应变之间不再存在一一对应的关系，它与加载历史有关。

3、 变形体中可分为弹性区与塑性区，在弹性区，加载与卸载都服从广义 Hooke 定律，但在塑性区，加载过程服从塑性规律而在卸载过程中则服从弹性的 Hooke 定律。即材料的弹性性质不受塑性变形的影响。

在实验的基础上，塑性力学一般采用以下假设：

1. 材料是连续的，均匀的。
2. 平均正应力（静水压力）不影响屈服条件和加载条件。
3. 体积的变化是弹性的。
4. 不考虑时间因素对材料性质的影响。

§ 1.2 塑性力学的发展简史

人们很早就发现塑性变形的现象，然而进行塑性力学的研究，是从 1773 年 C. A. Coulomb 提出塑性固体（主要是土壤）的屈服条件开始的。关于金属塑性力学的研究，最早始于法国工程师 H. Tresca，他于 1864 年公布了关于冲压和挤压的一些初步实验报告。根据这些实验，他认为金属在最大剪应力达到某一临界值时就发生塑性屈服。随后 Saint—Venant 于 1870 年提出一个平面情况下理想刚塑性的应力-应变关系并假设最大剪应力与最大剪应变率方向是一致的，他应用了 Tresca 屈服条件计算圆柱体受扭转或弯曲而处于部分塑性状态时的应力（1870 年）、以及圆管受内压而处于全塑性状态时的应力（1872 年），他认识到在应力和总塑性应变之间没有一一对应的关系，因而假设应变速度主轴和应力主轴是重合的。1870 年，Lévy 采用了 Saint-Venant 关于理想塑性材料的概念，提出了在应力和塑性应变速度之间的三维关系。此后有一段时期进展是缓慢的，直到 1900 年 Guest 作了薄管的联合拉伸和内压实验，初步证实最大剪应力屈服条件。此后二十年内进行了许多类似的实验，提出许多种屈服条件，其中最有意义的是 M. Huber (1904) 和 R. Von Mises (1913) 从数学简化要求所提出的条件，后来被解释为最大弹性形变能的屈服条件，这期间 Mises 还独立地得出了 Lévy 曾提出过的应力-应变关系。

到本世纪二十年代 A. Nadai (1923) 同时用理论和实验的方法研究了柱体的扭转问题，H. Hencky(1923) 和 L. Prandtl (1923)

提出了平面塑性应变问题中滑移线的理论。尤其值得重视的是，他进行了复杂应力状态下塑性变形规律的第一批系统的实验研究，1926年 Lode 用钢、铜和镍的薄壁管试件进行了在不同的轴向拉伸和内压力的联合作用下的实验， Taylor 和 Quinney 在 1931 年也是用薄壁管，但在轴向拉伸和扭转的联合作用下进行试验。这些实验证明了 Lévy-Mises 关系是在真实情况下很好的近似。 Reuss（1932）为了更好地符合实验结果，在 Prandtl 启示下、提出包括弹性应变部份的三维弹塑性应力应变关系。至此，经典塑性理论已初步形成。但是当时除了平面应变滑移线理论以外，用在解具体问题上的进展仍很少。

Hencky 于 1924 年提出的全量理论在实践中使用很方便，Nadai 考虑了加工硬化情况，并建立了大应变情况下的应力应变关系。此后，苏联的 Ильюшин 很好地发展了这个理论， 提出了简单加载定理和卸载定理，并大量地应用这一理论求解具体边值问题。虽然全量理论在理论上不适用于复杂加载的应力变化，但是某些问题计算的结果却和实验结果符合得很好。在1950年初为此曾展开了增量和全量理论的讨论，促使从更根本的理论基础上对它们进行探讨。1951 年美国的 Drucker 从稳定材料的定义出发、讨论了塑性势函数，证明了塑性应变率与屈服面的正交性，并提出相关联的流动法则的概念，为塑性极限分析理论带来很大的方便。在等向强化模型以外，Prager 又提出随动强化等模型，这个模型虽然比较复杂，但却更接近实际情况。 60 年代前后，对结构承载能力的研究有很大发展，特别是 Drucker， Prager 等对三维应力状态提出了极值原理，从而引出上、下限定理，随着有限元计算方法的发展，把解题的关键集中到提出更符合实际的本构关系上来。所以在 70 年代对塑性本构关系的研究是很活跃的；实验研究也集中在求后继屈服面的形状以及如何用数学工具来描述它们的问题。随着生产和科学的不断发展的要求，塑性力学必将得到进一步的发展和广泛的应用。

§ 1.3 基本实验资料

在塑性力学中，有两个基本实验：一个是单向拉伸的实验；另一个是材料在静水压力作用下，物体体积变形的实验。这两个实验的结果是建立各种塑性理论的基础，现分别说明如下：

（一）应力应变曲线

从单向拉伸（或压缩）、薄壁管扭转实验所得到的应力应变曲线，说明了材料的强度和塑性性能，它是塑性理论最基本的实验资料。由于纯扭实验所得的曲线几乎与拉伸图完全相似，因此只介绍单向拉伸（或压缩）的某些实验结论。

（1）一般金属材料根据其塑性变形性能的不同可分为两类：一是有明显的屈服流动阶段，有的材料流动阶段是很长的，往往应变可以达到 1%，例如低碳钢，铸钢，某些合金钢（图 1.1a）通常把初始屈服时的应力作为屈服极限，用 σ_s 表示，另一类是没有明显的屈服流动阶段，例如中碳钢，某些高强度合金钢及某些有色金属等，则规定具有 0.2%的残余应变时的应力作为条件屈服极限 $\sigma_{0.2}$，或者把割线模量 $E_s=0.7\ E$时的应力作为条件屈服极限 σ_s（E 为弹性模量）。

从拉伸实验结果可以知道，如应力小于弹性极限，则在加载和卸载时都服从弹性的 Hooke 定律。材料进入塑性阶段以后，加载和卸载将遵循不同的规律。例如图 1 中的 B 点，从那里卸载，应力与应变不沿原曲线 BAO 退回到 0 点，而将沿 BD 线变化，当应力全部消失时，将保留永久应变 OD。实验表明，材料在塑性变形后再卸载时，可取 BD 平行于 OA，以 ε^p 表示塑性应变 OD，则 B 点的应变为：

$$\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^p=\frac{\sigma}{E}+\varepsilon^p$$

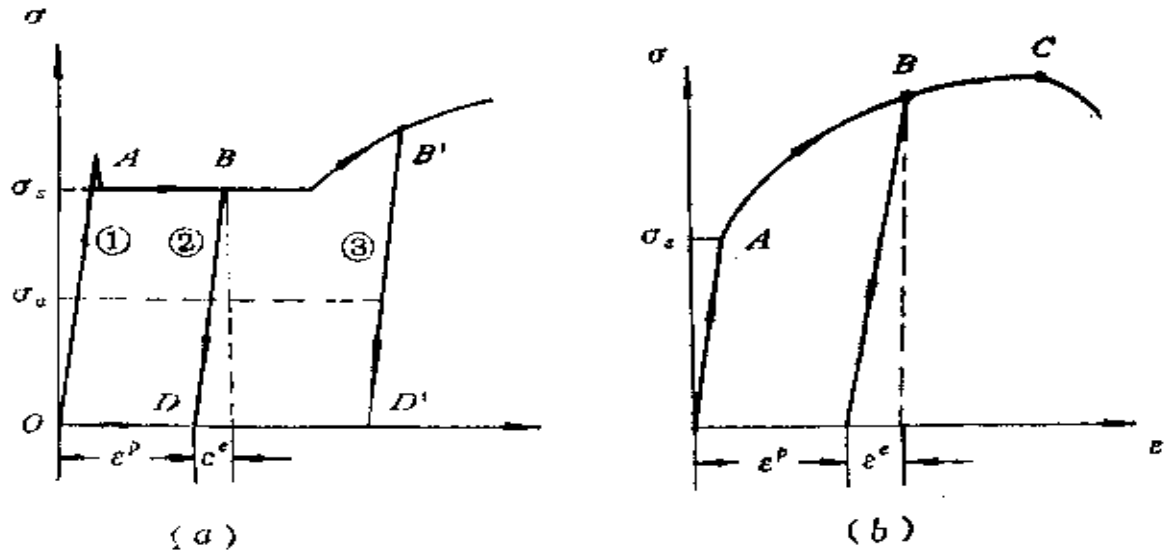


图 1.1 应力应变曲线

(a) 有明显屈服极限；(b) 无明显屈服极限。

如果从 D 点重新加载，开始时仍按 DB 线变化，在回到 B 点后才恢复按原有曲线继续变化，产生新的塑性变形。B 点成为这时的屈服极限，也可认为它是第二次加载时新的屈服应力。在第二次加载过程中，弹性系数仍保持不变，但弹性极限及屈服极限有升高现象，其升高程度与塑性变形的历史有关，决定于前面塑性变形的程度。这种现象称为应变强化或加工硬化。$\sigma-\varepsilon$ 曲线的切线斜率越大，则硬化效应越显著。B 点的应力称为加载应力。对于均匀应力状态的情形，全部卸除外载之后，宏观应力等于零，而保留了宏观的残余应变。

从图 1.1a 中可以看出：应力与应变之间不是单值对应的关系，它与加载历史有关。例如对应于 σ_e 的应力，根据加载历史的不同，可对应于 ①、②、③ 处的应变。因此，塑性力学的问题应该是从某一已知的初始状态（可以是弹性状态）开始，跟随加载过程，用应力增量与应变增量的关系，逐步将每个时刻的各个增量，累加起来得到物体内的应力和应变分布。

（2）对一般金属材料，拉伸和压缩试验曲线在小弹塑性变形阶段基本重合，但在大塑性变形阶段，将有显著的差别，一般应变量不超过 10% 时，可认为两者一致（图 1.2），但精确的试验发现某些高强度合金钢的 σ_s 和 E 在拉伸和压缩的情况下有区别。因此对于一般金属材料，在变形不大的情况下，用简单拉伸试验代替简单压缩试验进行塑性分析是偏于安全的，但对于拉伸与压缩曲线有明显区别的材料如铸铁，混凝土则需另作专门研究。

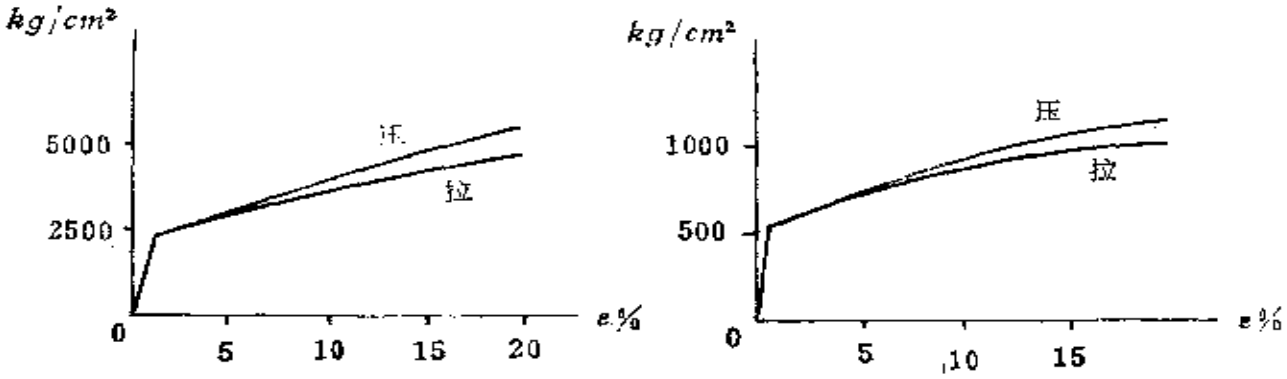


图 1.2

（3）如卸载后，进行反向加载（拉伸改为压缩）首先出现压缩的弹性变形，后产生塑性变形，但这时新的屈服极限将有所降低，即压缩应力应变曲线比通常的压缩试验曲线屈服得更早了，见图 1.3，压缩屈服极限为 σ_s'，卸载后反向加载的屈服极限为 σ_s''，则 $\sigma_s''<\sigma_s'$（此处 σ_s、σ_s'、σ_s'' 均指绝对值）。

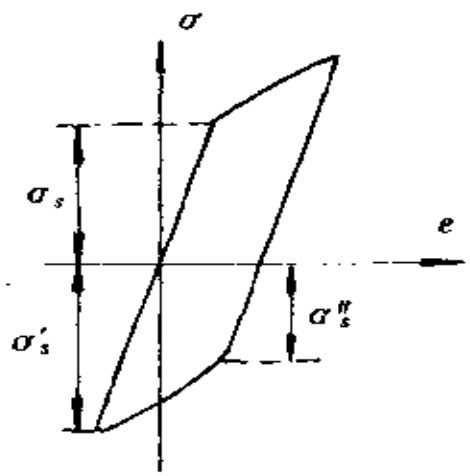


图 1.3

这种出现拉伸塑性变形后使压缩屈服极限降低的现象称为Bauschinger

效应。由于考虑这个效应，使塑性力学处理问题时变得非常复杂，因此一般塑性理论中都忽略它的影响。

（二）静水压力（各向均匀受压）的试验

（1）关于体积变化

在不同的应力状态下，Bridgman 曾对静水压力对变形过程的影响作过比较全面的研究。

当压力达到 15000 大气压时，他提出各向均匀压力 p 和单位体积变化之间的关系为

$$e_m = \frac{\triangle V}{V_0} = \frac{1}{K} p \left(1 - \frac{1}{K_1} p \right).$$

其中 K 为体积压缩模量，K_1 为派生模量，对不同的金属其数值是不同的。$\triangle V$ 及 V_0 相应为体积的增量和初始体积。上式又可写为

$$\frac{\triangle V}{V_0} = ap - bp^2$$

其中铜、铝、铅的系数 a、b 如下表所示：

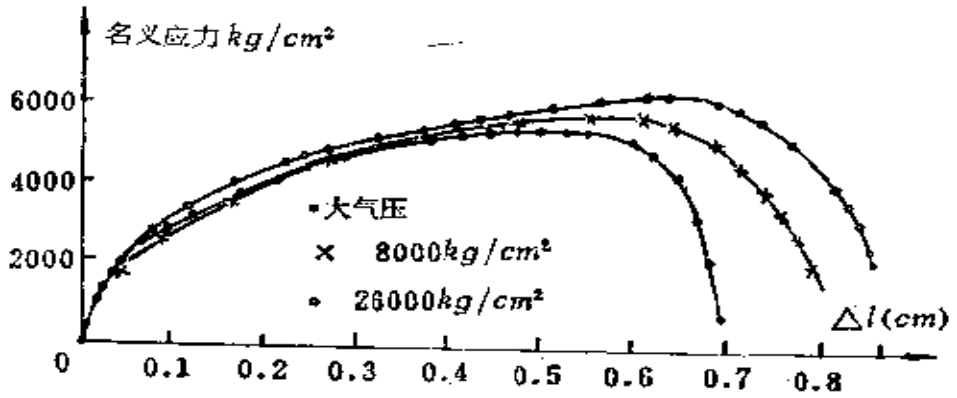
	铜	铝	铅
a	7.32×10^{-7}	13.34×10^{-7}	23.73×10^{-7}
b	2.7×10^{-12}	3.5×10^{-12}	17.25×10^{-12}

由 Bridgman 公式看出，体积应变实际上与静水压力是线性关系。对于不太大的压力，公式中的压力平方项是完全可以忽略的。在 10000 大气压力下对弹簧钢作试验，其体积仅缩小 2.2%，而镍仅缩小 1.8%，但也有一些松散结构的碱性金属，如锶在 1.5×10^4 大气压作用下，体积改变量约为 $1/3$，这时体积变化显然不

能忽视。对于一般金属材料，可以认为体积变化基本是弹性的，除去静水压力后体积变形可以完全恢复，没有残余的体积变形。而且在塑性变形的过程中，体积变形与塑性变形相比，往往是可以忽略的，因此在塑性变形较大时，忽略体积的变化，认为材料是不可压缩的假设是有实验基础的。

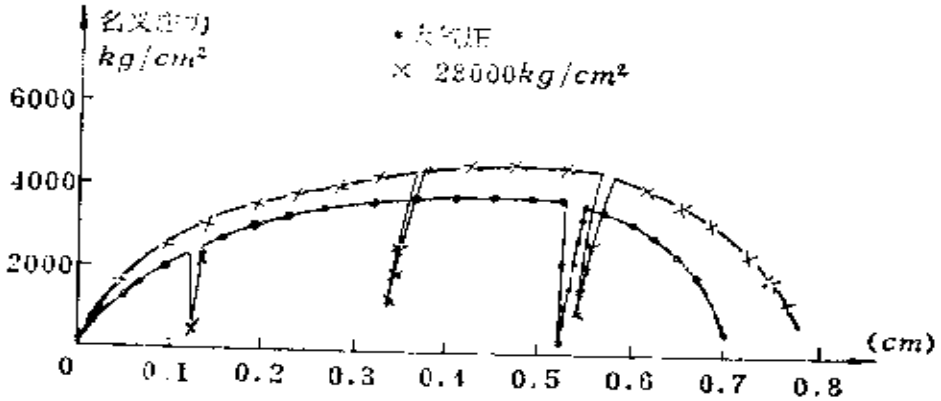
（2）静水压力对屈服极限的影响

在不同的静水压力作用下，Bridgman 曾对镍和铌的拉伸曲线作过研究，并获得了相应的试验结果。由图 1.4*a* 及图 1.4*b* 上看



（*a*）

图 1.4(*a*)　在不同静水压力作用下镍的拉伸曲线



（*b*）

图 1.4(*b*)　在不同静水压力作用下铌的拉伸曲线

出，在静水压力增加的条件下，塑性强化效应增加不大，但对出现颈缩点以及破坏时的塑性变形却有不小的影响，即增加了颈缩时的塑性变形和破坏时的塑性变形。钢和其他金属材料也有相类似的性质。1960 年 L. W. Hu 对黄铜在静水压力的作用下的应力应变曲线作了研究，他发现静水压力对拉伸曲线的塑性变形初始阶段也有一定影响。但是 Bridgman 和其他研究人员的实验结果确认，在静水压力不大的条件下（例如材料的屈服极限量级，这是大多数塑性变形时的情况），它对材料屈服极限的影响是完全可以忽略的。静水压力对金属的破坏准则和其他的性质却可能有不可忽视的影响，例如对于像铸造金属、矿物等材料，则静水压力影响就比较大，不能忽略。

值得指出，变形速度、时间、温度等因素对应力应变曲线都有影响，但这些影响在一定条件下才比较明显，对金属材料在普通的变形速度及室温条件下影响不大，上述试验也即是在普通加载变形速度及室温下进行的。

§ 1.4 变形体的“模型”

对于不同的材料、不同的应用领域，我们可以采用不同的变形体的模型，这种模型将关系到材料性质的基本假设。我们所选取的“模型”必须符合材料的实际性质，否则，计算的结果便不能反映结构或构件中的真实的应力及应变状态。其次，我们所选取的“模型”在数学上必须是足够地简单，以便使我们在解决具体问题时，能够容易地获得解答。

我们所熟悉的线性弹性体的“模型”是最简单的情况：即应力与应变之间是一种线性关系（Hooke 定律）。它与载荷增加的过程无关，即每个外载荷的线性组合都引起同样的应力应变及位移的组合。

不同材料是有不同的拉伸曲线的，但是它们也具有一些共同性质。当变形较小时，ε 及 σ 之间的关系是线性的。而变形也是可以恢复的，即物体除去外载荷后，完全可以恢复到初始状态，而且在物体内无任何残余变形及残余应力。这时应力与应变之间的关系可以用下列关系表示：

$$\sigma = E\varepsilon$$



图 1.5 线性弹性体

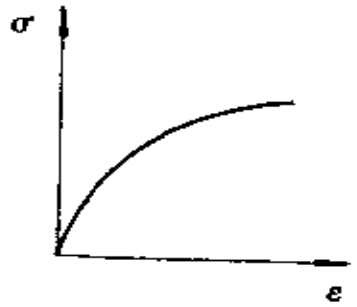


图 1.6 非线性弹性体

如果应力相应地增加，并达到某一极限值时，ε 及 σ 之间的关系即变为非线性关系。随着变形中塑性变形的增加，亦将出现材料强化现象。达到屈服极限时的变形对不同的材料是不同的，经常介于 0.001 及 0.002 之间(图 1.7)。

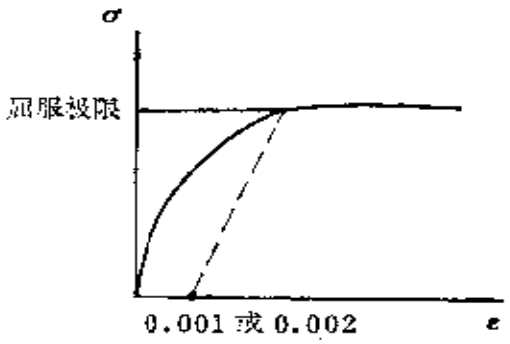


图 1.7 没有明显屈服极限材料的拉伸曲线

在图 1.8 中 A 点的应力称为比例极限。在到达 B 点前变形是可以恢复的，B 点的应力称为弹性极限，C 点及 D 点是上屈服极限及下屈服极限。应力由 C 点降至 D 点是突然的，但是应变却是连续地增加。由 D 点至 E 点这根线平行于变形轴，这一段可以是很长的，往往可以达到 0.01。

由 E 点开始出现强化现象。屈服极限的上限与试验的速度有关，有时试件的形状对它也有影响。某些材料并无屈服极限上限，而这些因素对下限的影响却是很小的。因此我们经常要采取屈服极限的下限。在这种情况下，卸载线 EF 是平行于 AO 线的。

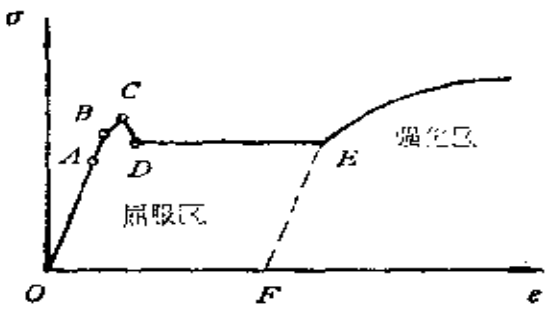


图 1.8 材料的拉伸曲线图

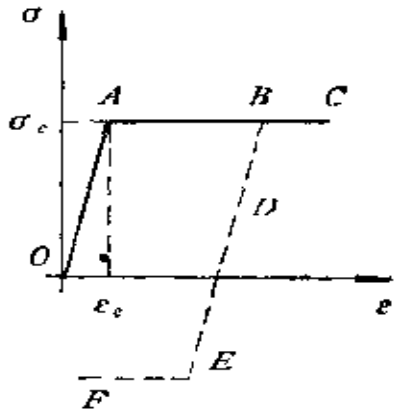


图 1.9 理想弹塑性材料

然而，如果我们接受这种情形作为基本假设，则在解决具体问题时将是异常复杂的。因此将进行一些简化。

如果不考虑材料的强化性质，并且忽略屈服极限上限的影响，则可以得到如图 1.9 所示理想弹塑性体的“模型”。线段 OA 是弹性阶段，AB 则是塑性阶段。应力可用下列公式求出：

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= Ee && \text{当 } \varepsilon \leqslant \varepsilon_e \\ \sigma &= \sigma_e = E\varepsilon_e && \text{当 } \varepsilon > \varepsilon_e \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

即 OA 是服从 Hooke 定律的直线，在弹性极限外的应力应变曲线是平行于 e 轴的直线，具有这种应力应变曲线的材料，我们称它为理想弹塑性材料。公式 (1.4) 中有两个缺点：

1. 它只包括了两个参数 E 及 ε_e，因而它不能准确地表示应力应变曲线。

2. 它的分析表达式在 $\varepsilon = \varepsilon_e$ 点开始变化，因而在计算中将

引进某些困难。

如果我们考虑到材料的强化性质，应力应变曲线则可用图 1.10 来表示，在图中也只包括了两条直线 OA 及 AB，这种近似的解析表达式为

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon \qquad \text{当} \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_e \\ \sigma &= \sigma_e + E_1(\varepsilon - \varepsilon_e) \quad \text{当} \quad \varepsilon \geqslant \varepsilon_e\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

E 及 E_1 是线段 OA 及 AB 的斜率，具有这种应力应变关系的材料，叫做弹塑性线性强化材料。这种近似对某些材料是足够准确的。对一些材料来说线段 AB 的斜率是相当小的。因而做为理想塑性体来考虑它，并不致于引进很大的误差。在计算中却可大大的简化与减少很多麻烦。但是同理想弹塑性材料一样，它的解析表达式在 $\varepsilon = \varepsilon_e$ 点时也有变化，所以是不方便的。

如果要避免在解析式中的这些变化，我们可以使用同前面不一样的公式，即

$$\sigma = A\varepsilon^n \tag{1.6}$$

公式中的 n 叫强化系数，n 是介于 0 与 1 之间的正数。公式 (1.6) 所代表的曲线称为幂强化材料曲线，当 $n=0$ 时，代表理想塑性体的“模型”，当 $n=1$ 时，则为理想弹性体的模型。由于公式 (1.6) 只有两个参数 A 及 n，因而也不能准确地表示材料的性

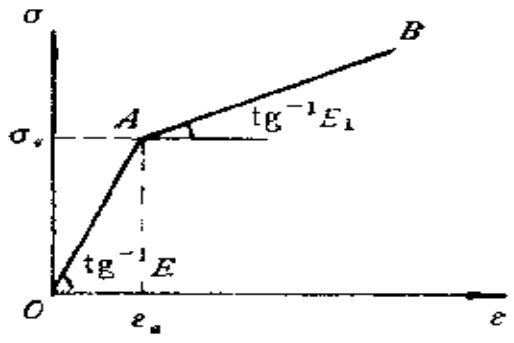


图 1.10 线性强化材料

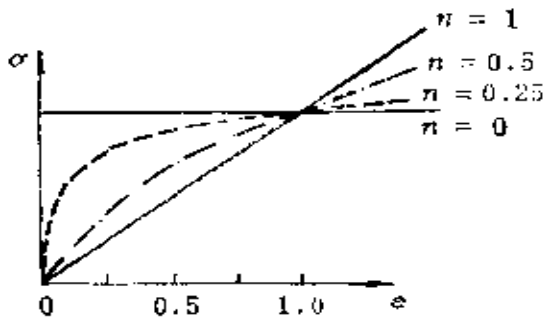


图 1.11 幂强化材料

质，然而由于它的解析式很简单，所以也经常被使用。公式（1.6）的几何图形如图 1.11 所示。

如果弹性变形比塑性变形小得多，则可以忽略弹性变形，此时即为刚塑性的“模型”。在这种模型中，假设应力在到达屈服极限前，变形等于零。在图 1.12 及 图 1.13 中给出了理想刚塑性的模型及具有线性强化性质的刚塑性模型。在图 1.12 中，线段 AB 是平行于 e 轴的，而卸载线 BE 则是平行于 σ 轴的。

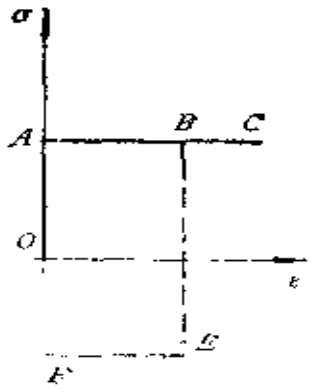


图 1.12 刚塑性材料

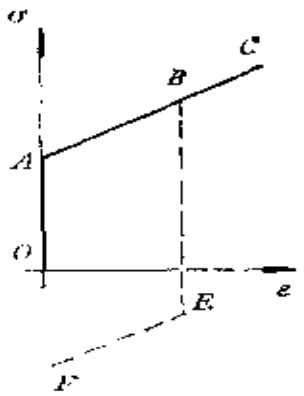


图 1.13 刚塑性线性强化材料

§ 1.5 关于应变的表示方法

假设两质点相距为 l_0，经变形后距离为 l_n，则其变形程度一般用 e 表示，即

$$e=\frac{l_n-l_0}{l_0}$$

但在有的情况，由于变形程度较大，上述表示方法不足以反映实际的变形情况。因为在实际变形过程中，长度 l_0 系经过无穷多个中间数值而逐渐变成 l_n，如 l_0，l_1，l_2，$l_3\cdots\cdots l_{n-1}$，l_n，其中相邻两长度相差均极微小，由 l_0 至 l_n 的总变形程度，可以近似地看作是各个阶段相对变形之和，即

$$\frac{l_1-l_0}{l_0}+\frac{l_2-l_1}{l_1}+\frac{l_3-l_2}{l_2}+\cdots\cdots\frac{l_n-l_{n-1}}{l_{n-1}}$$

或用微分概念，设 dl 是每一变形阶段的长度增量，则物体的总变形程度为

$$\epsilon=\int_{l_0}^{l_n}\frac{dl}{l}=\ln\frac{l_n}{l_0}$$

ϵ 反映了物体变形的实际情况，故称之为自然应变或对数应变。在大变形问题中，只有用自然应变才能得出合理的结果，这是因为：

(1) 相对应变不能表示变形的实际情况，而且变形程度愈大，误差也愈大。

如将自然应变以相对应变表示，并按 Taylor 级数展开，则有

$$\epsilon=\ln\frac{l_n}{l_0}=\ln(1+e)=e-\frac{e^2}{2}+\frac{e^3}{3}-\frac{e^4}{4}+\cdots\cdots \tag{1.7}$$

由此可见，只有当变形程度很小时，e 才近似等于 ϵ。变形程度愈大，误差也愈大。图 1.14 所示，为用 e 与 ϵ 计算变形程度的结果。当变形程度小于 10% 时，e 与 ϵ 的数值比较接近，但当变形程度大于 10% 以后，误差逐渐增加。

(2) 自然应变为可加应变，相对应变为不可加应变。假设某物体的原长为 l_0，经历 l_1、l_2 变为 l_3，总相对应变为

$$e=\frac{l_3-l_0}{l_0}$$

各阶段的相对应变为

$$e_1=\frac{l_1-l_0}{l_0};\quad e_2=\frac{l_2-l_1}{l_1};\quad e_3=\frac{l_3-l_2}{l_2}$$

显然　　$$e \neq e_1 + e_2 + e_3$$

但用自然应变 $\epsilon = \ln\frac{l_3}{l_0}$ 表示变形程度，则无上述问题，因为各阶段的自然应变为

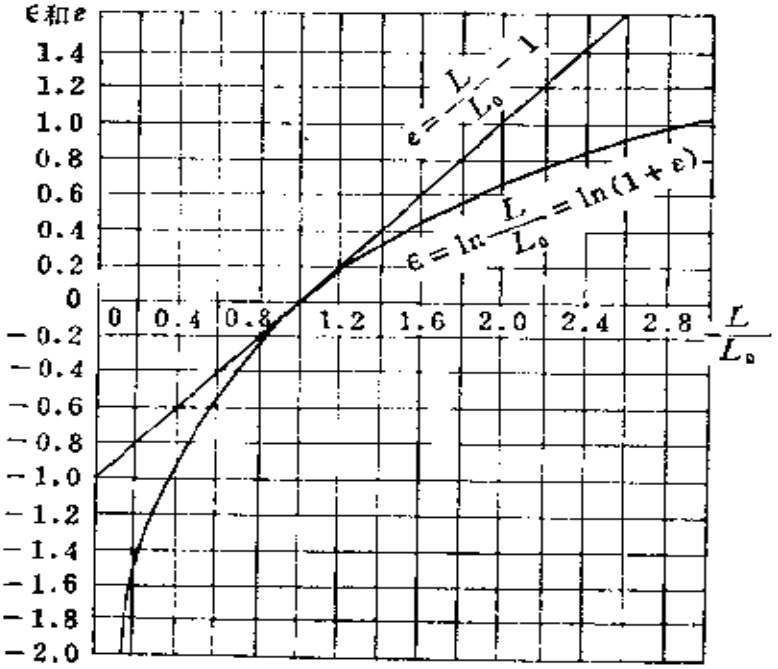


图　1.14　e，ϵ 与 $\frac{L}{L_0}$ 的关系

$$\epsilon_1 = \ln\frac{l_1}{l_0}\ ;\quad \epsilon_2 = \ln\frac{l_2}{l_1}\ ;\quad \epsilon_3 = \ln\frac{l_3}{l_2}$$

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \ln\frac{l_1}{l_0} + \ln\frac{l_2}{l_1} + \ln\frac{l_3}{l_2} = \ln\frac{l_1\ l_2\ l_3}{l_0\ l_1\ l_2} = \ln\frac{l_3}{l_0} = \epsilon$$

所以自然应变又称为可加应变。

（3）自然应变为可比应变，相对应变为不可比应变。假设某物体由 l_0 拉长一倍后，尺寸变为 $2l_0$，其相对应变为

$$e = \frac{2l_0 - l_0}{l_0} = 1 = 100\%$$

如果缩短一倍，尺寸变为 $0.5l_0$，则其相对应变为

$$\varepsilon^- = \frac{0.5l_0 - l_0}{l_0} = -0.5 = -50\%$$

当拉长一倍与缩短一倍时，物体的变形程度应该是一样的。然而如用相对应变表示拉压的变形程度则数值相差悬殊，失去可以比较的性质。为了避免这一缺陷，只有将拉压的变形程度各用不同的方式表示。对于拉应变取

$$\varepsilon^+ = \frac{l - l_0}{l_0}$$

对于压应变取

$$\varepsilon^- = \frac{l - l_0}{l}$$

式中 l_0 为变形物体的原长，l 为变形以后物体的长度。这样一来，在上述例子中，拉长一倍与缩短一倍的变形程度就完全相同了。其绝对值均为 100%，但是却给实际运算带来很大的麻烦。

用自然应变表示拉压两种不同性质的变形程度，并不失去可以比较的性质。例如在上例中，拉长一倍的自然应变为

$$\epsilon^+ = \ln \frac{2l_0}{l_0} = \ln 2 = 69\%$$

缩短一倍的自然应变为

$$\epsilon^- = \ln \frac{0.5l_0}{l_0} = \ln \frac{1}{2} = -69\%$$

相对应变 ε 也称为工程应变或条件应变。

§ 1.6 真实应力和颈缩问题

当塑性变形较大时，往往需要用真实应力的概念来描述物体中应力的情况。设已知结构钢的应力应变曲线如图 1.15 和图 1.16

所示。图中由 c 点到 e 点，应力不断增加，材料不断强化。当应力达到 e 点时试件的某一部分开始形成颈缩，随后逐渐发展，如图 1.17 所示，由于试件颈缩处的横截面积显著减小，拉力 P 即开始下降，到 f 点试件断裂。相应于 e 点的应力称为强度极限，以 σ_b 表示。

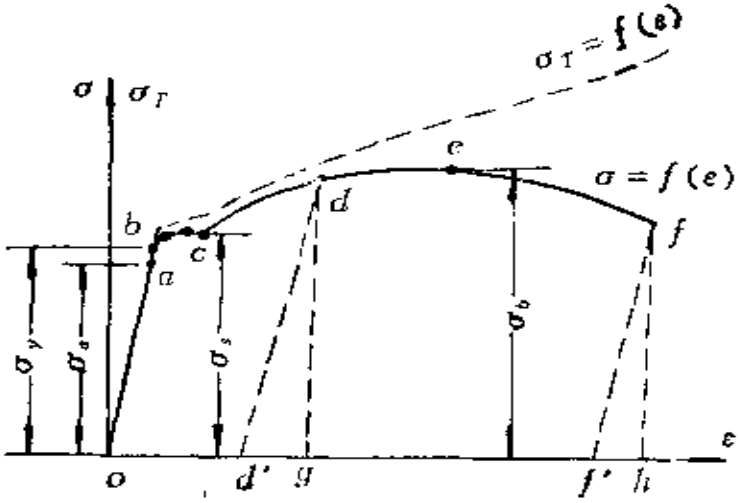


图 1.15 结构钢（如低炭钢）典型的应力应变曲线（未按比例）

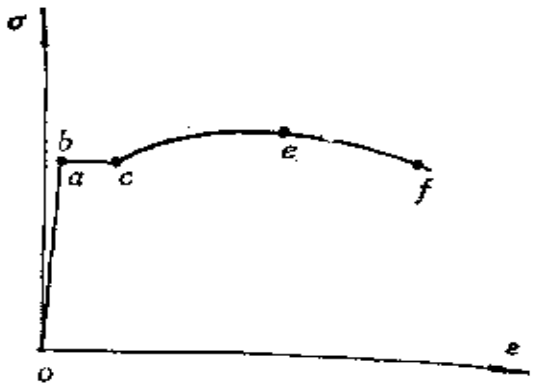


图 1.16 结构钢（如低炭钢）典型的应力应变曲线（按比例图）

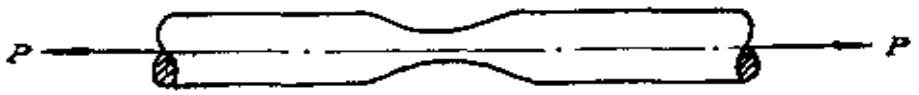


图 1.17 试件受拉时的颈缩

在 bc 范围内，材料进入塑性状态，试件产生塑性变形（断面相应地减少），其伸长量将等于比例极限时所产生的伸长量的 10 倍或 15 倍，从 c 到 f 的应变还要更大于从 b 到 c 的应变。用真实的比例绘制的图形示于图 1.16 中，该图从 o 点至 a 点的应变与从 a 点到 f 点的应变相比是非常小的，图中的直线部分接近于一条竖直线。

在一般拉伸实验 $\sigma=f(\varepsilon)$ 曲线中，$\sigma=\frac{P}{F_0}$，F_0 是试件原始截面积，σ 并不是试件截面上真实应力，因为在拉伸过程中，试件的截面积是逐渐缩小的。这种现象在到达 b 点之前一般认为对应力应变图没有影响，因为一般金属的弹性变形量 $<1\%$，因此其误差可以忽略。

过了 b 点以后进入塑性变形阶段，塑性变形阶段体积是不变的，试件长度伸长，其横截面面积将相应减小。面积的减小对于应力的计算值将有明显的影响。设试件截面上真实应力为 σ_T，则应有

$$\sigma_T=\frac{P}{F}$$

其中 F 为某一瞬间试件的实际截面面积。在常规的 $\sigma=f(\varepsilon)$ 曲线中 $\sigma=\frac{P}{F_0}$，F_0 为试件原始截面面积，故 $\sigma<\sigma_T$。

在 e 点处试件发生颈缩，截面积开始迅速减小。如果用此颈缩处狭窄部分的实际横截面积 F 来计算应力 σ_T，则 σ_T 将单调增加。在 $\sigma=f(\varepsilon)$ 曲线中 ef 段是单调减小，这虽然说明在此阶段试件能承受的总荷载及条件应力 σ 确实减小，这种减小是由于面积的缩小，而不是因为材料自身强度的损失。直到破坏点 f 之前，材料实际上一直经得起应力的增加，其 σ_T 是单调增加的。图 1.15 中虚线部分就是表示真实应力曲线 $\sigma_T=f(\varepsilon)$。真实应力应变曲线也称为硬化曲线，它可表示塑性变形的抗力和变形程度之间的关系。

真实应力与名义应力之间的关系为

$$\sigma_T=\sigma(1+\varepsilon) \tag{1.8}$$

或

$$\sigma_T=\sigma\cdot\frac{1}{(1-\psi)} \tag{1.9}$$

其中 σ 为名义应力，ε 为工程应变，ψ 为截面收缩率。

在出现颈缩时，由于最大载荷 $P_{\max}=\sigma_T A$，故此时应有

$$dP_{\max}=Ad\sigma_T+\sigma_T dA=0 \tag{1.10}$$

由体积不变条件

$$d(Al)=ldA+Adl=0 \tag{1.11}$$

故由式（1.10）及（1.11）可得

$$\frac{d\sigma_T}{\sigma_T}=-\frac{dA}{A}=\frac{dl}{l}=d\epsilon \tag{1.12}$$

但由式（1.7）知

$$\frac{d\epsilon}{de}=\frac{1}{1+e}$$

因此

$$\frac{d\sigma_T}{de}=\frac{d\sigma_T}{d\epsilon}\cdot\frac{d\epsilon}{de}=\sigma_T\frac{1}{1+e} \tag{1.13}$$

由此得到失稳时应力的表达式为

$$\sigma_T=(1+e)\frac{d\sigma_T}{de} \tag{1.14}$$

例 试证在颈缩点处，真实应力和截面收缩率之间的关系为

$$\sigma_T=\frac{d\sigma_T}{d\psi}(1-\psi)$$

证明 当体积不变时，工程应变和截面收缩率之间的关系为

$$(1+e)(1-\psi)=1 \tag{i}$$

由式（i）可得

$$e=\frac{\psi}{1-\psi},\quad \psi=\frac{e}{1+e} \tag{ii}$$

由式（1.9）知

$$\sigma_T = \frac{\sigma}{1-\psi} \tag{iii}$$

对式（iii）微分后，可得

$$\frac{d\sigma_T}{d\psi} = \frac{d\sigma}{d\psi} \cdot \frac{1}{1-\psi} + \frac{\sigma}{(1-\psi)^2}$$

或

$$\frac{d\sigma_T}{d\psi}(1-\psi) = \frac{d\sigma}{d\psi} + \frac{\sigma}{1-\psi} \tag{iv}$$

但式（iv）中的

$$\frac{d\sigma}{d\psi} = \frac{d\sigma}{de} \cdot \frac{de}{d\psi} = \frac{d\sigma}{de} \cdot \frac{1}{(1-\psi)^2} = 0$$

（因为在颈缩处 $\frac{d\sigma}{de} = 0$ ）。

由式（iv）和式（1.9）得

$$\sigma_T = (1-\psi) \cdot \frac{d\sigma_T}{d\psi}$$

§ 1.7 三杆桁架的弹塑性平衡

为了介绍塑性力学中的一些重要基本概念，我们以三杆桁架作为研究对象，通过分析，找出一些规律性的结果。

设已知三杆桁架如图 1.18 所示，三根杆的截面积都相同，并有 $F=1$。杆件是由弹塑性线性强化材料所制成的。在节点 D受到竖向力 P 的作用，以 u、v 表示节点 D 的水平（向右为正）和竖直（向下为正）位移，δ_1、δ_2 表示 1 杆、2 杆的总伸长。

平衡方程为

$$P = N_1 + 2N_2\cos 30^\circ = (\sigma_1 + \sqrt{3}\,\sigma_2)$$

几何关系为

$$\delta_1 = v, \qquad \varepsilon_1 = \frac{v}{h}$$

$$\delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} v, \qquad \varepsilon_2 = \frac{3}{4} \frac{v}{h} = \frac{3}{4} \varepsilon_1$$

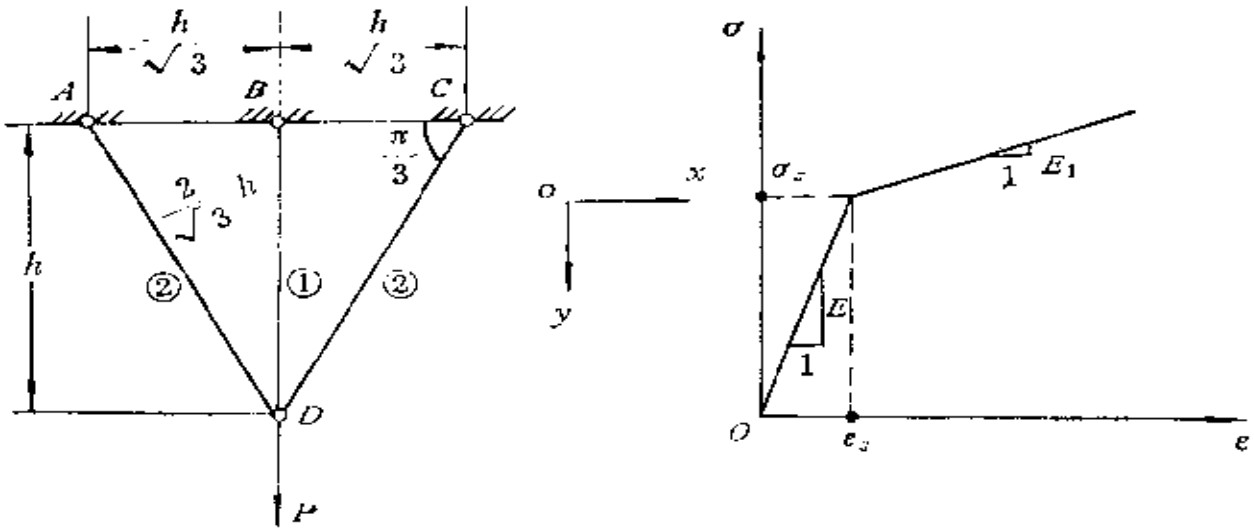


图 1.18

本构方程为

当 $\sigma \leqslant \sigma_s$ 时，$\sigma = E\varepsilon$

当 $\sigma > \sigma_s$ 时，$\sigma = \sigma_s + E_1(\varepsilon - \varepsilon_s)$

$$= E_1\varepsilon + \sigma_s(1 - \beta) \quad \text{其中 } \beta = \frac{E_1}{E}$$

弹性解：当 P 足够小时，三杆均处于弹性状态，应力与应变成比例，由于

$$\varepsilon_2 = \frac{3}{4}\varepsilon_1 \quad \text{故} \quad \sigma_2 = \frac{3}{4}\sigma_1$$

$$P=(\sigma_1+\sqrt{3}\sigma_2)=\sigma_1\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

因为 $\varepsilon_1>\varepsilon_2$，所以 $\sigma_1>\sigma_2$，杆 1 最先到达塑性状态，当 $\sigma_1=\sigma_s$ 时，$\varepsilon_1=\frac{v}{h}=\varepsilon_s$，于是桁架开始出现塑性变形的载荷为

$$P_1=\sigma_s\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

P_1 称为弹性极限载荷。

弹塑性解：$\sigma_1>\sigma_s$，$\sigma_2\leqslant\sigma_s$，$P>P_1$，由基本方程可得

$$P=E_1\varepsilon_1+\sigma_s(1-\partial\theta)+2E\varepsilon_2\cos 30^\circ$$

$$=\frac{Ev}{h}\left(\partial\theta+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)+(1-\partial\theta)\sigma_s$$

当 $\sigma_2=\sigma_s$ 时，即 $\varepsilon_2=\frac{3}{4}\frac{v}{h}=\varepsilon_s$ 时，桁架全部进入塑性状态，对应的载荷为

$$P_2=E_1\varepsilon_1+\sigma_s(1-\partial\theta)+2\sigma_s\cos 30^\circ$$

$$=\frac{E\partial\theta v}{h}+\sigma_s(1+\sqrt{3}-\partial\theta)$$

塑性解：$\sigma_1>\sigma_s$，$\sigma_2>\sigma_s$，$P>P_2$，根据基本方程应有

$$P_3=E_1\varepsilon_1+(1-\partial\theta)\sigma_s+\sqrt{3}\,[E_1\varepsilon_2+(1-\partial\theta)\sigma_s]$$

$$=E\partial\theta\frac{v}{h}\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)+(1-\partial\theta)(1+\sqrt{3})\sigma_s$$

在 P 由零逐渐增加（单调加载）的过程中，桁架的变形可以分为三个不同的阶段，即

弹性阶段　　$P\leqslant P_1$

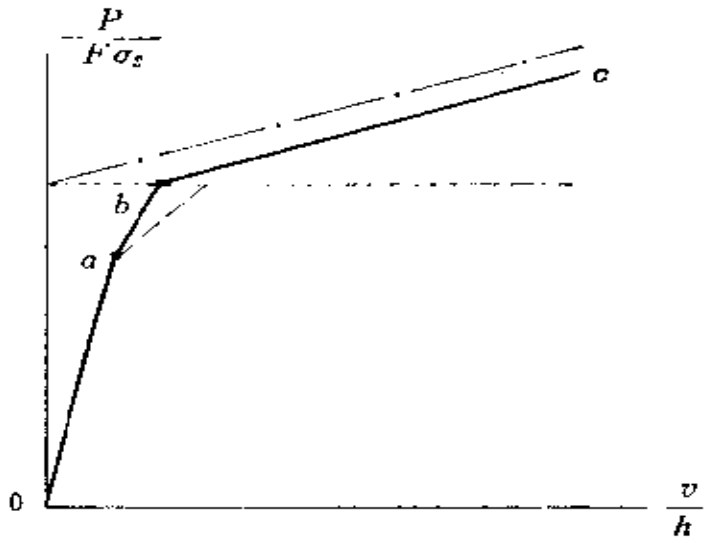
弹塑性阶段　　$P_1 \leqslant P \leqslant P_2$

塑性阶段　　$P > P_2$

在弹塑性阶段，①杆虽然进入塑性状态，但由于其余两杆仍处在弹性状态，杆①的塑性变形受到限制，整个桁架的变形仍限制于弹性变形的量级，这个阶段可称为约束的塑性变形阶段。在塑性阶段，三杆都进入塑性状态，桁架的变形大于弹性变形量级。一般说来，所有的弹塑性结构在外力的作用下，都会有这样三个变形阶段。

如果材料是刚性线性强化的，则在以上的结果中，可以令 $E \to \infty$，$\beth E = E_1$。如果是理想弹塑性材料，则可令 $E_1 = 0$，$\beth = 0$。对于刚塑性材料的桁架，则应令 $E \to \infty$，$\beth E = E_1 = 0$。当然，也可以根据不同的 $\sigma \sim e$ 曲线的简化模型，建立基本方程，并直接求解这些基本方程。

根据上列结果，可绘制 P–v 图，如图 1.19 所示。



——弹性线性强化材料

- · -刚性线性强化材料

- - -理想弹塑性材料

……刚塑性材料。

图　1.19

由 P–v 图上可以看出：

（1）对于弹性线性强化的三杆桁架结构：oa 段是表示三杆均处于弹性状态；ab 段表示①杆处于塑性状态而②杆处于弹性状态，bc 段表示三杆均处于塑性

状态。在约束塑性变形阶段（ab 段），开始显示出材料的强化效应。在塑性变形阶段，随着变形的增加，弹性变形的影响越来越小，而强化的效应则越来越大，因而变形增加很快。如果结构不允许出现较大的变形时，一般就忽略材料的强化效应，使容许载荷不超过 P_2 的值。

（2）理想弹塑性材料的结构或刚塑性材料的结构均能承受一个最大的载荷值，在此载荷作用下，结构可以无限制地变形，这时即为塑性流动状态。这个载荷称为结构的极限载荷。应该指出，强化材料的结构是没有极限载荷的。而刚塑性材料和理想弹塑性材料结构的极限承载能力（极限载荷）是一样的。

§ 1.8 变形路径对塑性变形和极限载荷的影响

在弹性力学中，由于应力和应变之间有简单的线性关系，而且可以使用叠加原理，因此可以不去考虑变形路径的影响。但在塑性力学中，由于物理关系的非线性性质以及存在加载和卸载的区别，因此应力和应变之间没有一一对应的关系，不同的变形路径将会得到不同的变形结果。现以简单三杆桁架为例，说明变形路径对物体或结构变形的影响。

如已知图 1.20 中的桁架，设截面面积 $F=1$，杆件由理想弹塑性材料制成，现分两种变形路径进行研究：

1. 变形路径Ⅰ 先加竖向力 $P(\triangle u=0)$，使桁架刚到达极限状态，则保持 v 不变，加上 Q （P 将变化），使桁架再次到达另一极限状态。

2. 变形路径Ⅱ 先加水平力 Q（$\triangle v=0$），使桁架刚到达极限状态，则保持 u 不变，加上 P（Q 将变化），使桁架再次进

入另一极限状态。

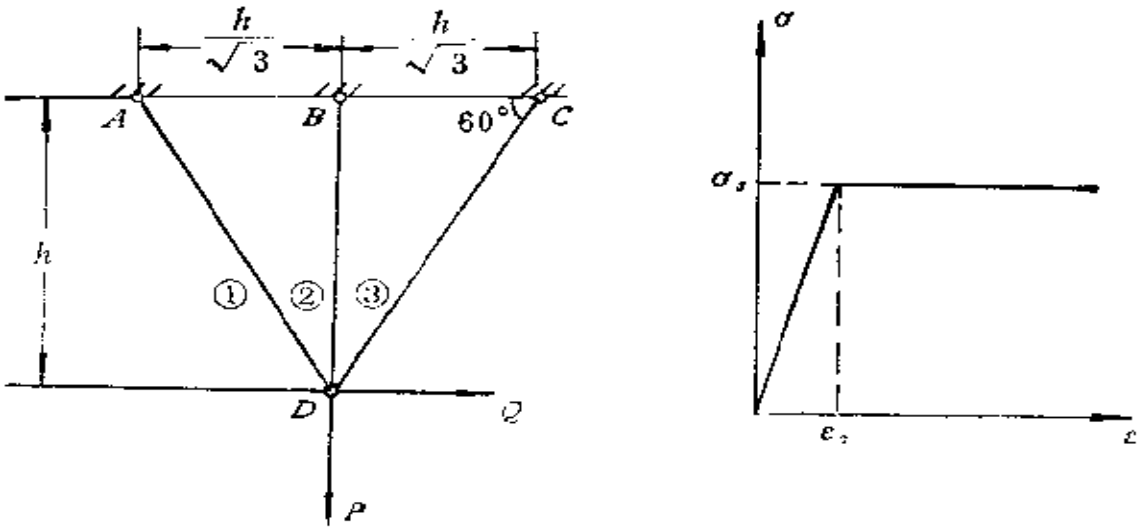


图 1.20 受力 P 和 Q 作用的桁架

求解这个问题，需考虑变形路径，并按应力增量和应变增量进行计算。在这种条件下，有

平衡方程为

$$\triangle P = \triangle\sigma_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(\triangle\sigma_1 + \triangle\sigma_3)$$

$$\triangle Q = \frac{1}{2}(\triangle\sigma_1 - \triangle\sigma_3)$$

几何方程为

$$\triangle\delta_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}h\triangle e_1 = \triangle u\cos 60^\circ + \triangle v\cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}(\triangle u + \sqrt{3}\triangle v)$$

$$\triangle\delta_2 = h\triangle e_2 = \triangle v$$

$$\triangle\delta_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}h\triangle e_3 = \triangle v\cos 30^\circ - \triangle u\cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\ (\sqrt{3}\triangle v - \triangle u)$$

由上式可以解出：

$$\triangle e_1 = \frac{\sqrt{3}}{4h}(\triangle u + \sqrt{3}\triangle v)$$

$$\triangle e_2 = \frac{\triangle v}{h}$$

$$\triangle e_3 = \frac{\sqrt{3}}{4h}\ (\sqrt{3}\triangle v - \triangle u)$$

本构方程为

$\triangle\sigma_j = E\triangle e_j$ 对应于 $\sigma_j^2 < \sigma_s^2$ 或对应于 $\sigma_j^2 = \sigma_s^2$，

但 $e_j\triangle e_j < 0$（卸载）

$$\triangle\sigma_j = 0,\ \sigma_j = \sigma_s \text{ 且 } e_j\triangle e_j > 0 \text{（加载）}$$

变形路径 I：

在第一阶段中，初始值都是零（自然状态），因此，所有增量都可以用全量来表示。这一段的变形的特点是 $\triangle u = 0$，$\triangle Q = 0$，于是可得

$$\sigma_1 = \sigma_3$$

$$e_1 = e_3 = \frac{3}{4}e_2$$

因此，平衡方程为

$$P = \sigma_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_2 + \sqrt{3}\sigma_1$$

在 $\sigma_j < \sigma_s$ 时，各杆都是弹性的，并根据

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{3}{4}\varepsilon_2 \quad \text{可得} \quad \sigma_1 = \sigma_3 = \frac{3}{4}\sigma_2,$$

因此

$$P = \sigma_2\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

杆 ② 首先屈服，

$$\sigma_2 = \sigma_s, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_s = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma_s}{E} = \frac{v}{h}$$

所以，最后得

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{3}{4}\sigma_s, \quad \sigma_2 = \sigma_s, \quad \frac{v}{h} = \varepsilon_s \\ &u = 0, \quad P = \sigma_s\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right), \quad Q = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

在第二阶段中，初始值为式（A），P 继续增加，但 $\triangle\sigma_2 = 0$（因为是理想塑性材料），$\sigma_2 = \sigma_s$，于是当 $\triangle\sigma_1$ 到达某值，使得

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{3}{4}\sigma_s + \triangle\sigma_1 = \sigma_s$$

此时，桁架到达极限状态，所以在本阶段内杆的应力增量为

$$\triangle\sigma_1 = \triangle\sigma_3 = \frac{1}{4}\sigma_s, \qquad \triangle\sigma_2 = 0$$

再代入平衡方程，则得

$$\triangle P = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \times \frac{1}{4}\sigma_s = \frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_s$$

$$\triangle\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\triangle\sigma_1 = \frac{1}{E}\cdot\frac{\sigma_s}{4} = \frac{1}{4}\varepsilon_s = \frac{3}{4}\cdot\frac{\triangle v}{h}$$

于是，在本阶段各量的最后值为

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_s\\
&P=\sigma_s\left(1+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\sigma_s=(1+\sqrt{3})\sigma_s\\
&Q=0\\
&v=h\varepsilon_s+\triangle v=h\varepsilon_s+\frac{1}{3}h\varepsilon_s=\frac{4}{3}h\varepsilon_s\\
&\frac{v}{h}=\frac{4}{3}\varepsilon_s\\
&u=0
\end{aligned}\right\}\quad(B)$$

在第三阶段中，初始值为式（B），在本阶段应有 $\triangle v=0$，由于加上 Q 后（P 将变化）由基本方程可得

$$\triangle\varepsilon_1>0,\quad \triangle\varepsilon_2=0,\quad \triangle\varepsilon_3<0$$

因此杆 ①，② 的应力保持不变，而杆 ③ 开始卸载，即

$$\triangle\sigma_1=\triangle\sigma_2=0,\quad \triangle\sigma_3=E\triangle\varepsilon_3$$

当 $\sigma_3=\sigma_s+\triangle\sigma_3=-\sigma_s$ 时，全桁架又进入另一个屈服状态，所以在本阶段内 $\triangle\sigma_3=-2\sigma_s$

$$\triangle\varepsilon_3=\frac{\triangle\sigma_3}{E}=-2\frac{\sigma_s}{E}=-2\varepsilon_s=-\frac{\sqrt{3}\triangle u}{4h}$$

将上述各值代入平衡方程式后，则可得

$$\triangle P=\frac{\sqrt{3}}{2}\triangle\sigma_3=-\sqrt{3}\sigma_s$$

$$\triangle Q=-\frac{1}{2}\triangle\sigma_3=\sigma_s$$

因此，最后可得应力、应变和外载荷的值为

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_1=\sigma_2=\sigma_s,\ \ \sigma_3=\sigma_s+\triangle\sigma_3=-\sigma_s\\
&\frac{v}{h}=\frac{4}{3}e_s,\ \ \frac{\triangle u}{h}=\frac{8}{\sqrt{3}}e_s\\
&P=(1+\sqrt{3})\sigma_s+\triangle P=(1+\sqrt{3})\sigma_s-\sqrt{3}\sigma_s=\sigma_s\\
&Q=\triangle Q=\sigma_s
\end{aligned}\right\}\quad (C)$$

变形路径Ⅱ：

在第一阶段中，初始值都是零（自然状态），因此所有增量都可用全量表示。本阶段变形路径的特点是 $\triangle v=0$，$\triangle P=0$，于是根据基本方程可得

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_2=0,\ \ \sigma_1=-\sigma_3=\sigma_s\\
&e_2=0,\ \ e_1=-e_3=\frac{\sqrt{3}u}{4h}=e_s\\
&f=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=\sigma_s,\quad P=0\\
&r=\frac{4he_s}{\sqrt{3}},\ \ v=0
\end{aligned}\right\}\quad (D)$$

在第一阶段最后，杆 ② 仍处于弹性状态，而杆 ①，③ 则刚进入塑性状态。

第二阶段，初始值为 (D)，在本阶段 $\triangle u=0$，增加垂直力 P，由基本方程可得如下结果：

$$\triangle\sigma_1=0,\quad \triangle\sigma_2=\sigma_s,$$

$$-\sigma_s+\triangle\sigma_3=\sigma_s,\quad \triangle\sigma_3=2\sigma_s,\quad \sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_s$$

$$\triangle P=\sigma_s+\frac{\sqrt{3}}{2}(0+2\sigma_s)=(1+\sqrt{3})\sigma_s$$

$$\triangle Q=\frac{1}{2}(0-2\sigma_s)=-\sigma_s$$

最后得：

$$P=(1+\sqrt{3})\sigma_s$$

$$Q=0,\quad u=\frac{4he_s}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle e_3=\frac{3\triangle v}{4h}=\frac{\triangle\sigma_3}{E}=\frac{2\sigma_s}{E}=2e_s$$

$$\triangle v=\frac{8he_s}{3},\quad v=\frac{8}{3}he_s$$

二种变形路径的计算结果都示于图 1.21 中，由图可见：

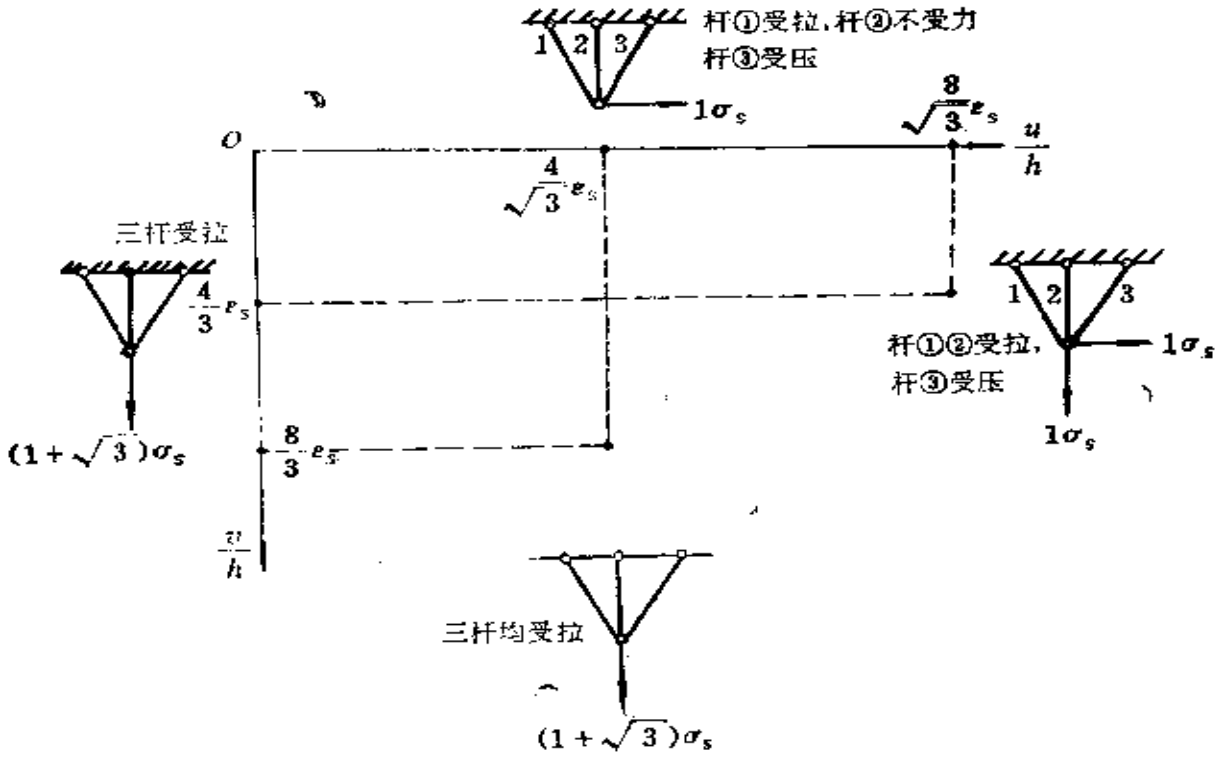


图 1.21　不同加载路径时P、Q 与 u、v 之间的关系

(1) 一定的极限应力状态对应于一定的极限载荷，与变形路径无关，即变形的途径不影响极限载荷的数值。例如当三杆应力都是σ_s

时，两种加载途径所得的极限载荷都是 $P=(1+\sqrt{3})\sigma_s$。因此，在工程中计算极限载荷，可以不必予先知道结构已经经历的变形历史。

（2）对于一定的极限状态，结构的变形却因变形的路径不同而有差别。

第一章 习 题

1. 已知材料的真实应力应变曲线为 $\sigma_T=B\epsilon^n$ 或 $\sigma_T=ce^m$

   试证： $$m=1-e^{-n}$$

2. 已知名义应力应变曲线，试通过作图法求出真实应力应变曲线。

3. 已知真实应力应变曲线为 $\sigma_T=30\epsilon^{0.4}$，其中 ϵ 为对数应变，若已知此杆在颈缩前工程应变为 0.25，试求当工程应变再增加多大时，杆件方能进入颈缩状态。

4. 已知应力应变曲线为 $\sigma_T=c\epsilon^n$，如材料的屈服极限为 σ_s，强度极限为 σ_b，试证明

$$\ln\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_b}\right)=n\ln\frac{\epsilon_s}{\epsilon_N}+\epsilon_N-\epsilon_s$$

   式中 ϵ_N 为颈缩时对数应变。

5. 在拉杆中，如 F_0 和 l_0 为试件的原始截面积和原长，而 F 和 l 为拉伸后的截面积和长度。如截面收缩率为 $\psi=\frac{F_0-F}{F_0}$，而应变 $e=\frac{l-l_0}{l_0}$，试证当体积不变时，有如下关系

$$(1+e)(1-\psi)=1$$

6. 如 σ_N 为拉伸颈缩时的真实应力，而 e_N 为颈缩时工程应变，若材料的应力应变曲线为 $\sigma_T=ce^m$ 试证

$$\sigma_T = \sigma_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_N} \right)^{\frac{\varepsilon_N}{1+\varepsilon_N}}$$

7．如已知应力和颈缩 ψ 之间的关系为 $\sigma_T = c\psi^n$，如 σ_N 为拉伸失稳（颈缩）时的真实应力，而 σ_{nB} 为名义强度极限，试证

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{nB}}{1-\psi_N} \left(\frac{\psi}{\psi_N} \right)^{\frac{\psi_N}{1-\psi_N}}$$

8．由三根截面相同的杆件组成的结构，受垂直载荷 P 作用于 D 点，如已知 AD 杆和 DC 杆的应力应变曲线为 $\sigma_T = B_2\varepsilon^{n_2}$，而 BD 杆为 $\sigma_T = B_1\varepsilon^{n_1}$，为了合理使用材料、要求三杆同时到达拉伸失稳状态，试求布置杆件时，应使 θ 角为多大？

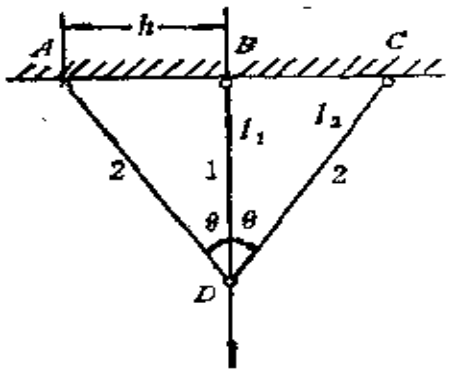


图 1.22

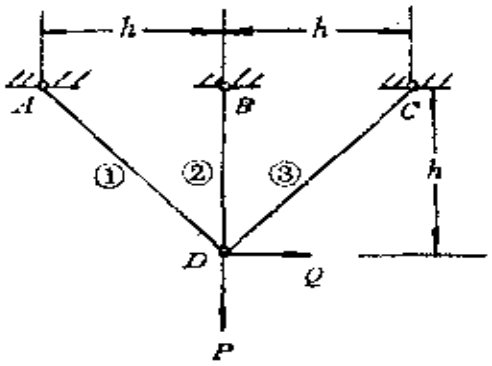


图 1.23

9．图 1.23 所示桁架，$F=1$，材料属理想弹塑性，现考虑两种变形路径：

变形路径Ⅰ，先加竖向力 $P(\triangle u=0)$，使桁架刚到达极限状态，则保持 v 不变，加上 Q（P 将变化），使桁架再次到达极限状态；

变形路径Ⅱ，先加水平力 $Q(\triangle v=0)$，使桁架刚到达极限状

态，则保持 u 不变，加上 P（Q 将变化），使桁架再次进入极限状态。以 u，v 表示节点 D 的水平（向右为正）和竖直（向下为正）位移。

试求变形各阶段的 P、Q、u、v 及各杆的应力 σ 的值。

10. 如图 1.24 所示，三杆的材料和截面积都相同，面积为 F，材料是弹性线性强化的，在节点 D 受到竖向力 P 的作用，以 v 表示节点 D 的竖直位移（向下为正），$\delta_j(j=1, 2)$ 表示杆的总伸长。试求弹性阶段、弹塑性阶段和塑性阶段时 P 的表达式。

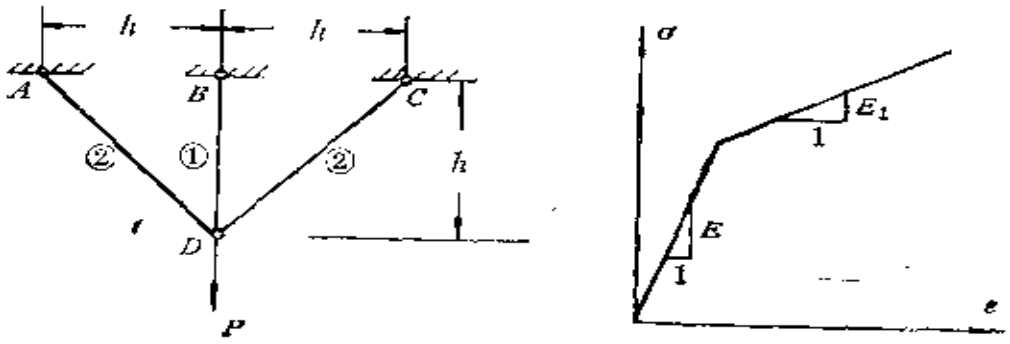


图 1.24

第一章 习题答案

1. 提示：拉伸失稳时由 $\sigma_T = B\epsilon^n$ 得到 $\epsilon = n$，由 $\sigma_T = C\varepsilon^m$ 得到 $\varepsilon = \dfrac{m}{1-m}$，而 $\epsilon = \ln(1+\varepsilon)$ 即可证明 $m = 1 - e^{-n}$。
2. 提示：利用 $\sigma_T = \sigma(1+\varepsilon)$ 关系，可用几何作图法求出 $\sigma_T = f(\varepsilon)$ 曲线。
3. 再增加 $e_2 = 0.193$。
4. 提示：$\sigma_T = C\epsilon^n$ 故有 $n = \epsilon$
5. 提示：将 e 和 ψ 的公式代入，并应用体积不变条件，便可证明。

6．证明（略）

7．提示：$\frac{d\sigma_N}{d\psi_N}=Cn\psi_N^{n-1}=\frac{C\psi_N^n}{1-\psi_N}$，$C=\frac{\sigma_N}{\psi_N^n}$，$n=\frac{\psi_N}{1-\psi_N}$

8．$\cos\theta=\frac{l_1}{l_2}=\frac{1-n_1}{1-n_2}\sqrt{\frac{n_2(2-n_2)}{n_1(2-n_1)}}$

9．变形路径Ⅰ：

第一阶段　$\triangle u=0$，$\triangle Q=0$

$$\sigma_1=\sigma_3=\frac{1}{2}\sigma_s,\quad \sigma_2=\sigma_s,\quad \frac{v}{h}=\varepsilon_s,\quad u=0$$

$$P=\sigma_s\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad Q=0$$

第二阶段，$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_s$，$P=(1+\sqrt{2})\sigma_s$

$$Q=0,\quad \frac{v}{h}=2\varepsilon_s,\quad u=0$$

第三阶段，$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_s$，$\sigma_3=-\sigma_s$

$$\frac{v}{h}=2\varepsilon_s,\quad \frac{u}{h}=4\varepsilon_s,\quad P=\sigma_s,\quad Q=\sqrt{2}\sigma_s$$

变形路径Ⅱ：

第一阶段　$\triangle v=0$，$\triangle P=0$

$$\sigma_2=0,\quad \sigma_1=-\sigma_3=\sigma_s,\quad P=0,\quad Q=\sqrt{2}\sigma_s$$

$$u=2\varepsilon_s,\quad v=0$$

第二阶段　$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_s$，$P=(1+\sqrt{2})\sigma_s$

$$Q=0,\quad u=2\varepsilon_s,\quad v=4\varepsilon_s$$

弹性阶段：$\sigma \leqslant \sigma_s$ 时　$P = F\sigma_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

弹性极限载荷　$P_1 = F\sigma_s\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

杆 ① 刚进入塑性，杆 ② 仍处于弹性

弹塑性阶段：$\sigma_1 > \sigma_s$，　$\sigma_2 \leqslant \sigma_s$，　$P > P_1$

$$P = FEe_1\left(\partial\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + F(1 - \partial\theta)\sigma_s$$

当 $\sigma_2 = \sigma_s$ 时　$e_2 = \frac{1}{2}e_1 = e_s$ 桁架全部进入塑性，对应的载荷为

$$P_2 = F\sigma_s(\partial\theta + \sqrt{2} + 1)$$

塑性阶段

$$\sigma_1 > \sigma_s,\quad \sigma_2 > \sigma_s,\quad P > P_2$$

$$P_3 = F(1 + \sqrt{2})[(1 - \partial\theta)\sigma_s + \frac{1}{\sqrt{2}}E\partial\theta e_1]$$

第二章　屈服条件

§ 2.1　屈服条件的概念

在塑性力学中，我们必须知道材料受力到什么程度才开始发生塑性变形。在简单拉伸时，问题是很明显的，即引起塑性变形的是屈服极限应力 σ_s，而 σ_s 是可以在拉伸曲线上找到的。然而在复杂应力状态时，问题就不这样简单了。我们知道这时某一点的应力状态是由六个应力分量确定的，显然我们不应该任意选取某一个应力分量的数值作为判断材料是否进入塑性状态的标准。为此，要引进应力空间和应变空间的概念，它们分别是以应力分量和应变分量为坐标的空间，在这些空间中，每一点都代表一个应力状态或一个应变状态，应力或应变的变化在相应的空间中绘出一条曲线，称为应力路径或应变路径。

根据不同的应力路径所进行的实验，可以定出从弹性阶段进入塑性阶段的各个界限。在应力空间中将这些屈服应力点连接起来，就形成一个区分弹性和塑性的分界面，称为屈服面。描述这个屈服面的数学表达式称为屈服函数或称为屈服条件。

在用应力表示的屈服条件中，还应注意到所有六个分量的数值与所选取的坐标方向有关，采取不同的坐标方向，就会得到不同数值的应力分量。因此，如果材料是各向同性的，就应该采用与方向无关的量来表示屈服条件。由于在弹性区内，应力与应变有唯一的关系，所以屈服条件是一定可以用应力的函数表示的。这时屈服函数可以表示如下：

$$g(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx})=0$$

然而一点的应力状态总是可以找到它的应力主轴的；因此上式也可以写成

$$g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

这里 σ_1、σ_2、σ_3 的组合应该代表所有使材料进入塑性的应力状态。

假设我们探讨的材料是各向同性的。则塑性条件必须对于三个主轴是对称的。也就是说三个应力主轴应该满足互换的条件。我们知道，应力的三个不变量是满足三个主应力互换条件的。而应力不变量又是应力的函数，因此塑性条件应该是可以用应力不变量来表示的，即

$$f(I_1,\ I_2,\ I_3) = 0$$

但由实验知道，材料在很高的静水压力作用下，金属密度的增加是很小的，而且体积的变化是弹性的。因此可以认为静水压力对材料进入塑性状态影响很小，而静水压力却正是由应力第一不变量所表示的，因而 I_1 可以不包括在塑性条件中，这时我们有：

$$f_1(I_2,\ I_3) = 0$$

对于各向同性体说来，拉伸和压缩的屈服应力是相等的，然而当应力改变符号时，$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 也改变符号，因此如果在屈服函数中包括 I_3 时，它必须是一个偶函数。

§ 2.2 应力偏量和 Lode 参数

（一）应力张量的分解及应力偏量

对于一般的空间问题，一点的应力状态可以由几个应力分量表示，如在直角座标中，一点的应力状态可由以下应力分量表示：

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx},\ \tau_{yx},\ \tau_{zy},\ \tau_{xz}$$

如图 2.1 所示。在固定受力情况下，其大小与座标轴的方向有关，对于新的座标系的应力分量，由弹性力学知道可以通过座标变换关系而得到具有这种变换关系的几个分量，总体称为应力张量，它可以表示一点的应力状态（张量本身是个数学名词，依赖于座标的选择，座标变换时，有某种指定的形式者，这些量总称为张量，张量与矢量有类同之处，其分量与座标有关，但矢量在直角座标系中分量是随座标的投影而变，而张量的分量则是随座标的变换而异。两者有所不同，故张量又可理解为广义的矢量）。

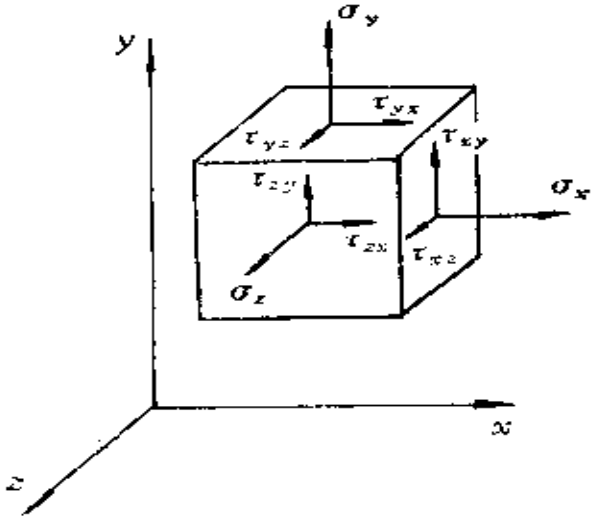


图 2.1 单元体上的应力

符号 σ_{ij} 表示应力张量，可写为如下形式

$$\sigma_{ij}=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix}$$

式中 $\sigma_{xx}=\sigma_x$，$\sigma_{yy}=\sigma_y$，$\sigma_{zz}=\sigma_z$

$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，$\tau_{zx}=\tau_{xz}$ 因此应力张量为“二阶对称张量”。

应力张量与矢量一样，可以分解，三个正应力的平均值称为平均应力，并用 σ_m 表示：

即 $$\sigma_m=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

于是

$$\sigma_x = \sigma_m + (\sigma_x - \sigma_m)$$

$$\sigma_y = \sigma_m + (\sigma_y - \sigma_m)$$

$$\sigma_z = \sigma_m + (\sigma_z - \sigma_m)$$

应力张量可以分解为两个分张量

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{pmatrix}$$

等式右端第一个张量可用 $\sigma_m\delta_{ij}$ 表示，称为球张量，第二个张量用 s_{ij} 表示，称为应力偏量。即

$$\delta_{ij} = \begin{cases} = 1 \text{（当 } i = j\text{）} \\ = 0 \text{（当 } i \neq j\text{），} \end{cases}$$

$$\sigma_m\delta_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}, \quad s_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{pmatrix},$$

应力偏量的分量又习惯用 s_x，s_y，s_z，τ_{xy}，τ_{yx}，τ_{yz}，τ_{zy}，τ_{zx}，τ_{xz} 表示，以区别应力张量的分量，其表达式为

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & s_z \end{pmatrix}$$

式中 $s_x = \sigma_x - \sigma_m$，$s_y = \sigma_y - \sigma_m$，$s_z = \sigma_z - \sigma_m$

这样把原来应力状态分解为应力球张量和应力偏量如图 2.2 所示，应力球张量表示各向均值应力状态（即静水压力情况）。原应

力张量扣去静水压力即得应力偏量。由第一章所介绍的实验资料知道，静水压力不影响屈服。即塑性变形与静水压力无关，而与应力偏量有关。因而在塑性力学中对应偏量研究很重要，它显示出与塑性变形有关的部份，而应力球张量只产生体积改变，因此应力偏量又显示出与形状改变有关的部份。

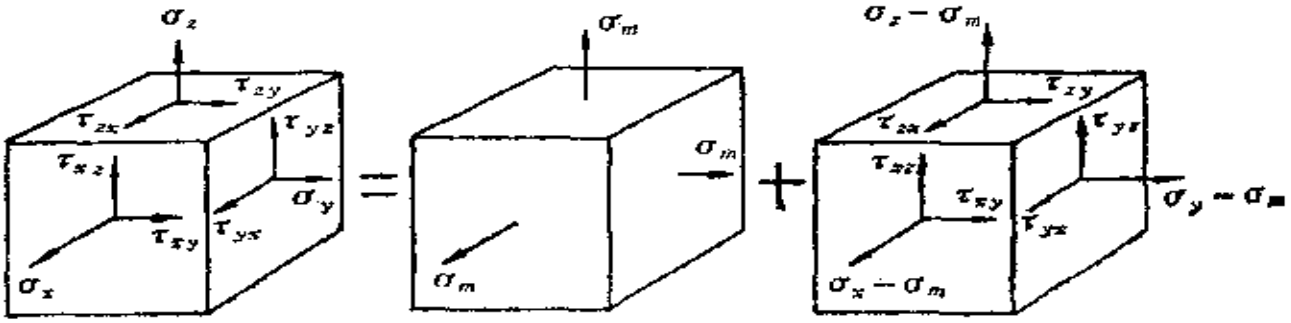


图 2.2　应力张量的分解

（二）关于 Lode 参数：

二维应力状态下任意截面上的应力可用 Mohr 圆图解法得到，三维应力情况时同样可以用三维应力圆进行分析；取横座标为正应力 σ，纵座标为剪应力 τ，设已知主应力为 σ_1，σ_2，σ_3，令 $0P_1=\sigma_1$，$0P_2=\sigma_2$，$0P_3=\sigma_3$，以 P_1P_2，P_2P_3，P_1P_3 为直径画三个圆如图 2.3，其半径为

$$\frac{P_1P_2}{2}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2},\quad \frac{P_2P_3}{2}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\quad \frac{P_1P_3}{2}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

$\frac{P_1P_2}{2}$，$\frac{P_2P_3}{2}$，$\frac{P_3P_1}{2}$ 称为主剪应力，半径最大者为最大剪应力。设任一截面的法线为 N 其方向余弦为 l，m，n，则该截面上的正应力 σ_n 及剪应力 τ_n 必然在图示影线的范围内。由于在塑性理论中，静水压力不影响屈服，因此，讨论一下这个问题是有意

义的。如果把图 2.3 中座标原点 O 移到新的位置 O'，如图 2.4，使

$$OO' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_m$$

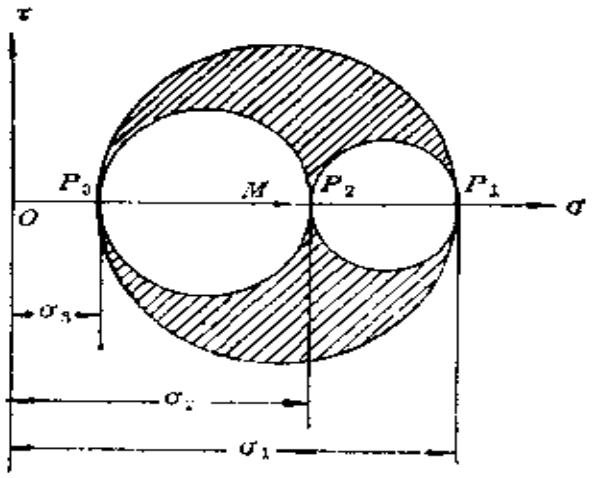


图 2.3

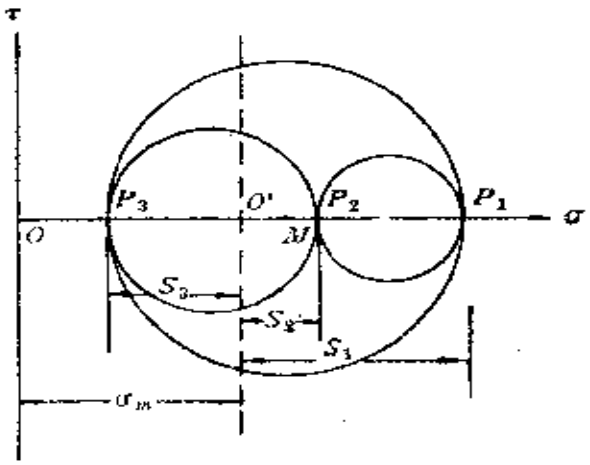


图 2.4

这时

$$O'P_1 = \sigma_1 - \sigma_m = s_1$$

$$O'P_2 = \sigma_2 - \sigma_m = s_2$$

$$O'P_3 = \sigma_3 - \sigma_m = s_3$$

所得移轴后的应力圆即是描写应力偏量的应力圆。

若原点任意平移一个距离，则相当于在原有的应力状态上叠加一静水压力，这个叠加并不影响屈服和塑性变形，因此 τ 轴的移动对塑性变形无关，有决定作用的倒是应力圆本身。若以 M 表示 P_1P_3 的中点，则

$$MP_1 = \tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$MP_2 = \frac{1}{2}(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)$$

考虑到中间应力 σ_2 对屈服的影响，确定 σ_2 的相对位置，由

MP_2 与 MP_1 之比得到，用参数 μ_σ 表示，若主应力次序为

$$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$$

则

$$\mu_\sigma=\frac{MP_2}{MP_1}=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}=2\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}-1$$

这里 μ_σ 称为 Lode 参数，P_2 由 P_3 变到 P_1，因此 μ_σ 的变化范围为

$$-1\leqslant\mu_\sigma\leqslant1$$

由上式可见 μ_σ 为应力主值比值的函数，说明了主值的比例关系，与静水压力的大小无关。

由下面几个简单的应力状态下 μ_σ 的数值，便可看出 μ_σ 的含意。

(1) 单向拉伸情况：$\sigma_1>0\quad\sigma_2=\sigma_3=0$，$\mu_\sigma=-1$.

(2) 纯剪情况：$\sigma_2=0$，$\sigma_1=-\sigma_3$，$\mu_\sigma=0$.

(3) 纯压缩情况：$\sigma_1=\sigma_3=0$，$\sigma_3<0\quad\therefore\ \mu_\sigma=1$

由这些数值可见 μ_σ 是表达了一点应力状态的值。

从 μ_σ 的表达式可证，若纵轴由原点移一距离 C，即表示原应力状态减去静水压力，这时 μ_σ 值仍然不变。

$$\mu_\sigma=\frac{2(\sigma_2-C)-(\sigma_1-C)-(\sigma_3-C)}{(\sigma_1-C)-(\sigma_3-C)}=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}$$

因此 μ_σ 也是描写应力偏量状态的值。

§ 2.3 在等倾面上对应力状态的研究

在讨论屈服条件之前，先来研究一下等倾面上的应力情况是很有必要的，所谓等倾面即八面体平面、即对于三个应力主方向具有相同斜率的平面，这个平面的法线的方向余弦应该满足下列等式：

$$|\cos(n,\ 1)|=|\cos(n,\ 2)|=|\cos(n,\ 3)|$$

$$\cos^2(n,\ 1)+\cos^2(n,\ 2)+\cos^2(n,\ 3)=1$$

在第一象限的等倾面，其法线的方向余弦为

$$\cos(n,\ 1)=\cos(n,\ 2)=\cos(n,\ 3)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

如图 2.5 所示，BCD 面是等倾面，它与三个应力主轴成等角，取 $BC=CD=DB$、取 $F_{\triangle BCD}=1$，则

$$F_{\triangle ABC}=F_{\triangle ACD}=F_{\triangle ABD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

P 为等倾面上的合应力（总应力），P_1、P_2、P_3 为 P 在

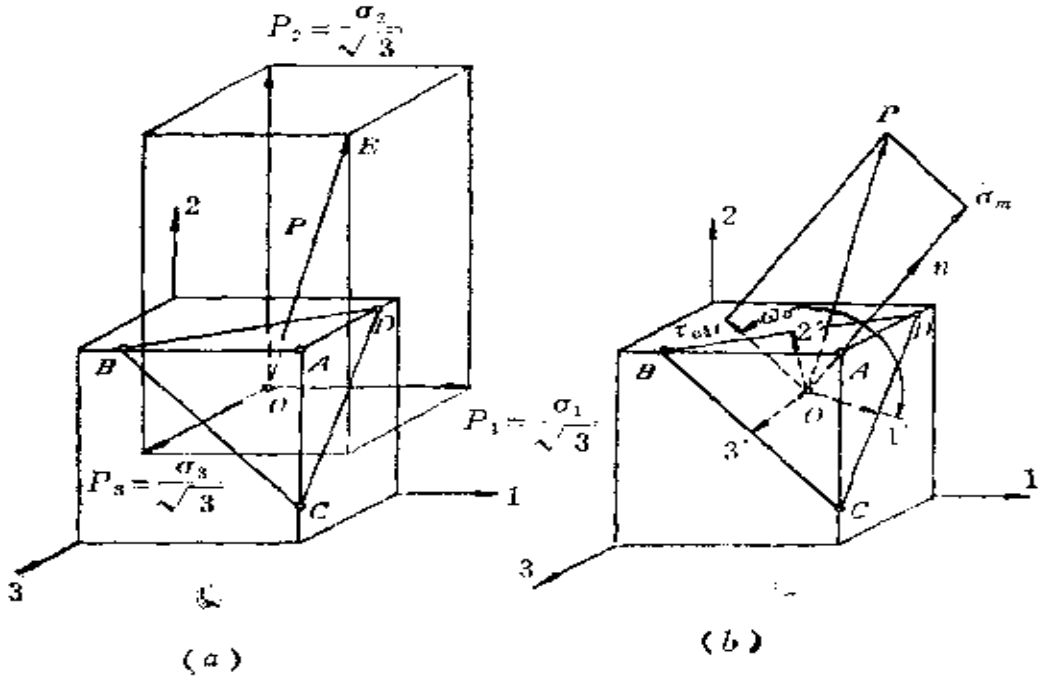


图 2.5　作用在立方体角上（指等倾面上）的合应力

(a) 用直角坐标 σ_1、σ_2、σ_3 表示

(b) 用正坐标 σ_m、$\tau_{oct}(\tau_8)$、ω_σ 表示

三个主方向上的分量（即投影），σ_8 为等倾面上的法向应力，τ_8 为等倾面上的剪应力。ω_σ 为 τ_8 与 1′ 轴的夹角（1′ 轴为 1 轴在等倾面上的投影），称为应力型式指数。

由力的平衡方程可以求得：

$$P_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1,\quad P_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_2,\quad P_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3.$$

$\overrightarrow{OA}$ 的方向就是等倾面的法线 $\overrightarrow{On}$ 方向，

$$\sigma_8=P_1\cos(n,\ 1)+P_2\cos(n,\ 2)+P_3\cos(n,\ 3)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}(P_1+P_2+P_3)=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_m.$$

将三个应力主方向投影到等倾面上便得到 01′，02′，03′，它们之间的夹角为 120°。

τ_8 是等倾面上剪切应力、也是总应力向量 P 在等倾面上的投影，τ_8 应等于 P_1、P_2、P_3 在等倾面上投影的总和（几何相加）。

P_1 与等倾面夹角为 $(OP_1,\ OP_1')=\theta$，OP_1' 为 OP_1 在等倾面上的投影线，它与 $O1'$ 线重合，而 OP_1 与应力主方向 1 平行，见图 2.6。$(n,\ 1)=(n,\ OP_1)$，

$$\theta=\frac{\pi}{2}-(n,\ 1),$$

$$OP_1'=OP_1\cos\theta$$

$$=OP_1\sin(n,\ 1)$$

$$=OP_1\sqrt{1-\cos^2(n,\ 1)}$$

$$=OP_1\sqrt{\frac{2}{3}}$$

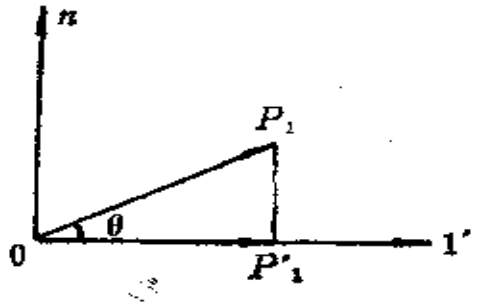


图 2.6

$$OP_1' = \sqrt{\frac{2}{3}} OP_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1$$

同理：

$$OP_2' = \sqrt{\frac{2}{3}} OP_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_2$$

$$OP_3' = \sqrt{\frac{2}{3}} OP_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_3$$

如图 2.7 所示

$$\overrightarrow{\tau_8} = \overrightarrow{OP_1'} + \overrightarrow{OP_2'} + \overrightarrow{OP_3'},$$

$$\cos\omega_\sigma = \frac{P_1' - (P_2' + P_3')\cos 60°}{\tau_8}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1 - \frac{\sqrt{2}}{3}(\sigma_2 + \sigma_3)\frac{1}{2}}{\tau_8}$$

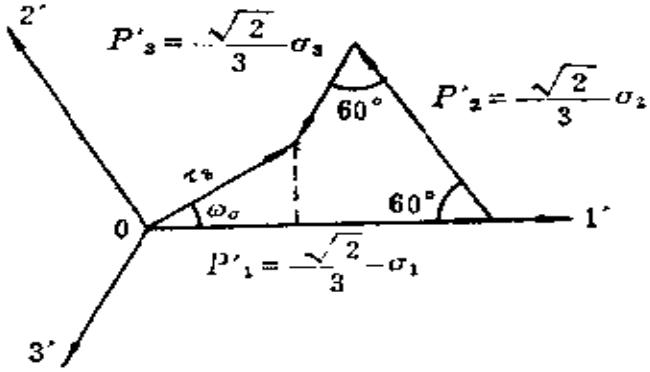


图 2.7 向量在等倾面上的投影

$$\cos\omega_\sigma = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3)}{3\sqrt{2}\,\tau_8}$$

由图 2.7 以可得出

$$\tau_8^2 = \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right]\right\}^2 + \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_2 \sin 60° - \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_3 \sin 60°\right]^2$$

$$= \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

故 $$\tau_8=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

在单向拉伸时 $\sigma_1>0$，$\sigma_2=\sigma_3=0$，

$$\cos\omega_\sigma=\frac{2\sigma_1}{3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\sigma_1\sqrt{2}}=1,\quad \omega_\sigma=0^\circ$$

在双向均匀拉伸时 $\sigma_1=\sigma_2>0$，$\sigma_3=0$

$$\cos\omega_\sigma=\frac{1}{2}\qquad \omega_\sigma=60^\circ=\frac{\pi}{3}$$

为了以后计算方便，将图 2.7 的值都乘以相同的数值$\frac{3}{\sqrt{2}}$，则图 2.7 就变成图 2.8。将$\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_8$ 定义为 σ_i，σ_i 在塑性力学中称为应力强度。

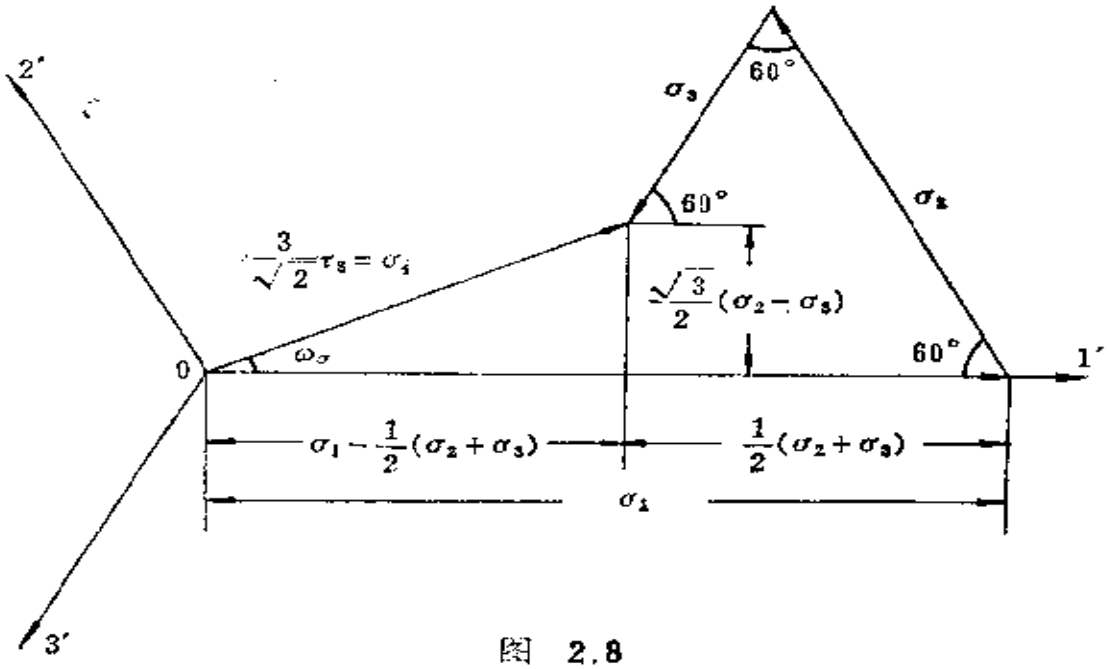


图 2.8

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_8 = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$\cos\omega_\sigma = \frac{(\sigma_1-\sigma_2)+(\sigma_1-\sigma_3)}{3\sqrt{2}\,\tau_8} = \frac{(\sigma_1-\sigma_2)+(\sigma_1-\sigma_3)}{2\sigma_i} \qquad (2.1)$$

无论应力状态如何，σ_i 永远是个正值，并且与平均法向应力无关。它在塑性力学的形变理论中是很重要的。由式（2.1）知道，静水应力状态也不会影响 ω_σ 的值。但是静水压力却能影响平均应力 σ_m，如果将主应力都减去平均应力 σ_m，则得

$$s_1 = \sigma_1 - \sigma_m,\quad s_2 = \sigma_2 - \sigma_m,\quad s_3 = \sigma_3 - \sigma_m$$

这里的 s_1、s_2、s_3 即为前面给出的应力偏量分量。

静水压力表示各方向受相同的压应力，由于这个应力状态不能使材料由弹性状态进入塑性状态，因而塑性变形只与应力偏量有关，因而这里引入应力偏量的概念也是很有好处的。

任意应力状态都可以认为是应力偏量与静水压力（或平均应力）的和，当应力偏量只相差静水压力时，它们的偏量是相同的，如将应力偏量用应力表示，则有：

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{3}\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right] \\ s_2 &= \frac{2}{3}\left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\right] \\ s_3 &= \frac{2}{3}\left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

由图 2.8 中的几何关系我们得到：

$$\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_i \cos\omega_\sigma$$

$$\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_i \cos(\omega_\sigma - 120°)$$

$$\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_i \cos(\omega_\sigma - 240°)$$

因此

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{2}{3}\sigma_i \cos\omega_\sigma \\ s_2 &= \frac{2}{3}\sigma_i \cos(\omega_\sigma - 120°) \\ s_3 &= \frac{2}{3}\sigma_i \cos(\omega_\sigma - 240°) \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

应力偏量分量 s_1、s_2、s_3 可直接通过图 2.9 由原点取 $\frac{2}{3}\sigma_i$ 的 B 点向三个座标轴作垂直线而获得。

$$s_1 = \frac{2}{3}\sigma_i \cos\omega_\sigma$$

$$s_2 = \sigma_i \cos(\omega_\sigma - 120°) = -\frac{2}{3}\sigma_i \cos(\omega_\sigma + 60°)$$

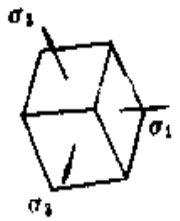
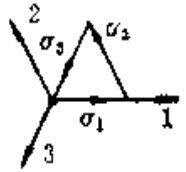
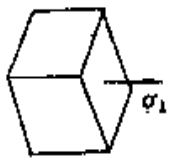
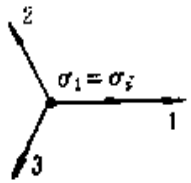
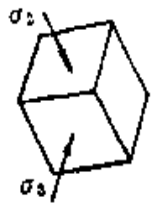
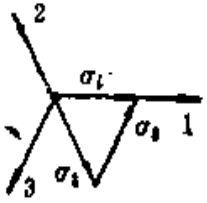
$$s_3 = \frac{2}{3}\sigma_i \cos(\omega_\sigma - 240°) = -\frac{2}{3}\sigma_i \cos(60 - \omega_\sigma)$$

因此

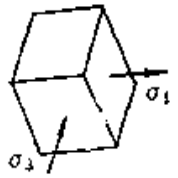
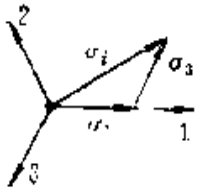
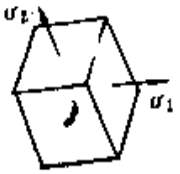
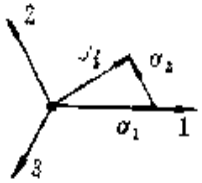
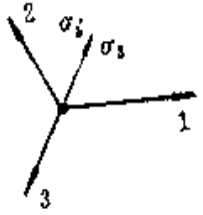
$$s_1 + s_2 + s_3 = 0$$

根据上面的推导，对于不同的应力状态，可以很容易地求出它的应力偏量、应力强度，以及在正八面体上的几何表示，现举几个简单的例子列表如下：

表 2.1

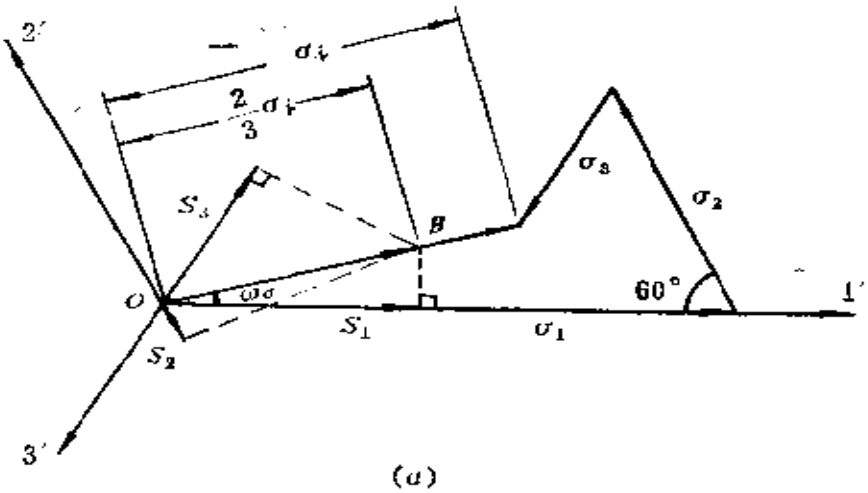
应力状态	单元体应力图	应力分量	应力偏量	柱坐标应力分量	八面体平面(等倾面)上的几何表示	Lode 参数 μ_σ
各向等拉		$\sigma_1=\sigma$ $\sigma_2=\sigma$ $\sigma_3=\sigma$	$s_1=0$ $s_2=0$ $s_3=0$	$\sigma_i=0$ $\sigma_m=\sigma$		
单向拉伸		$\sigma_1=\sigma$ $\sigma_2=0$ $\sigma_3=0$	$s_1=\frac{2}{3}\sigma$ $s_2=-\frac{1}{3}\sigma$ $s_3=-\frac{1}{3}\sigma$	$\sigma_i=\sigma$ $\sigma_m=\frac{1}{3}\sigma$ $\cos\omega_\sigma=1$		-1
双向等压		$\sigma_1=0$ $\sigma_2=-\sigma$ $\sigma_3=-\sigma$	$s_1=\frac{2}{3}\sigma$ $s_2=-\frac{1}{3}\sigma$ $s_3=-\frac{1}{3}\sigma$	$\sigma_i=\sigma$ $\sigma_m=-\frac{2}{3}\sigma$ $\cos\omega_\sigma=1$		-1

续上表

应力状态	单元体应力图	应力分量	应力偏量	柱坐标应力分量	八面体平面(等倾面)上的几何表示	Lode 参数 μ_σ
纯　剪		$\sigma_1=\sigma$ $\sigma_2=0$ $\sigma_3=-\sigma$	$s_1=\sigma$ $s_2=0$ $s_3=-\sigma$	$\sigma_i=\sqrt{3}\sigma$ $\sigma_m=0$ $\cos\omega_\sigma=\frac{\sqrt{3}}{2}$		0
二向非等拉		$\sigma_1=\sigma$ $\sigma_2=\frac{1}{2}\sigma$ $\sigma_3=0$	$s_1=\frac{1}{2}\sigma$ $s_2=0$ $s_3=-\frac{1}{2}\sigma$	$\sigma_i=\frac{\sqrt{3}}{2}\sigma$ $\sigma_m=\frac{1}{2}\sigma$ $\cos\omega_\sigma=\frac{\sqrt{3}}{2}$		0
单向压缩		$\sigma_1=0$ $\sigma_2=0$ $\sigma_3=-\sigma$	$s_1=\frac{1}{3}\sigma$ $s_2=\frac{1}{3}\sigma$ $s_3=-\frac{2}{3}\sigma$	$\sigma_i=\sigma$ $\sigma_m=-\frac{\sigma}{3}$ $\cos\omega_\sigma=\frac{1}{2}$		+1

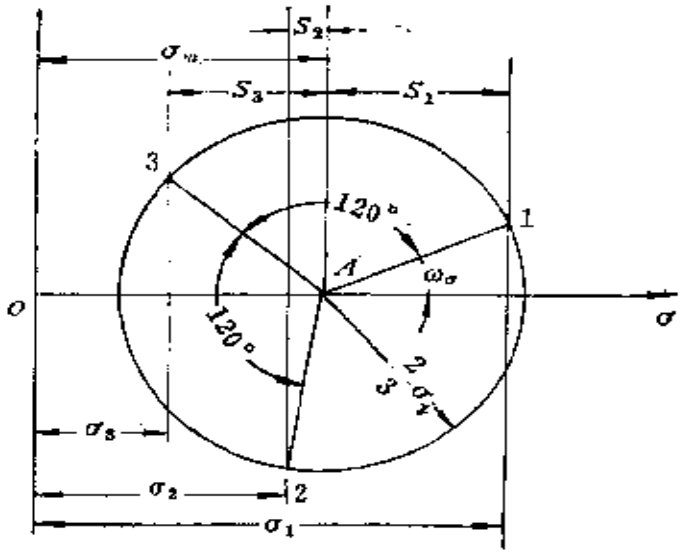
等倾面上法向应力为

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m$$



(a)

图 2.9a　应力偏量与 ω_σ 之间关系的几何表示



(b)

图　2.9(b)

剪应力为 $$\tau_8=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

公式（2.3）可以用表示应力状态的偏量圆来表示。在图 2.9*b* 上，以距离原点为 σ_m 的 A 点，以 $\frac{2}{3}\sigma_i$ 为半径画一个圆，称为偏量圆并由 A 点出发画出倾角为 ω_σ，$\omega_\sigma+120°$，$\omega_\sigma+240°$ 相应为 $A1$，$A2$，$A3$ 三条线与圆交于 1，2，3 点，其在水平轴上的投影相应为应力偏量分量 s_1，s_2，s_3。由图上看出，静水压力 σ_m 的值只能使偏量圆移动水平位置，但不影响偏量的大小。

由（2.3）式可得

$$s_1^2+s_2^2+s_3^2=\frac{4}{9}\sigma_i^2[\cos^2\omega_\sigma+\cos^2(\omega_\sigma-120°)+\cos^2(\omega_\sigma-240°)]$$

而 $$\cos^2\omega_\sigma+\cos^2(\omega_\sigma-120°)+\cos^2(\omega_\sigma-240°)=\frac{3}{2}$$

故 $$\sigma_i=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2} \qquad (2.4)$$

由图 2.10 可得 μ_σ 与 ω_σ 之间的简单关系：

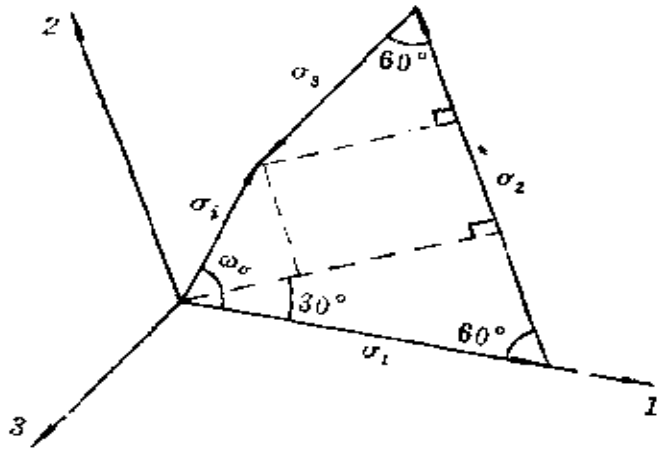


图 2.10 μ_σ 和 ω_σ 之间的几何关系

$$\operatorname{tg}\left(\omega_\sigma-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)\cos 60^\circ}{(\sigma_1-\sigma_3)\sin 60^\circ}$$

$$=\frac{2\sigma_2-(\sigma_1+\sigma_3)}{\sqrt{3}(\sigma_1-\sigma_3)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\mu_\sigma$$

$$\mu_\sigma=\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\omega_\sigma-\frac{\pi}{6}\right) \tag{2.5}$$

Lode 参数 μ_σ 与应力型式指数 ω_σ 都是代表应力状态的参数。

在表达 μ_σ 的公式与(2.5)推导过程中都假定了 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$。

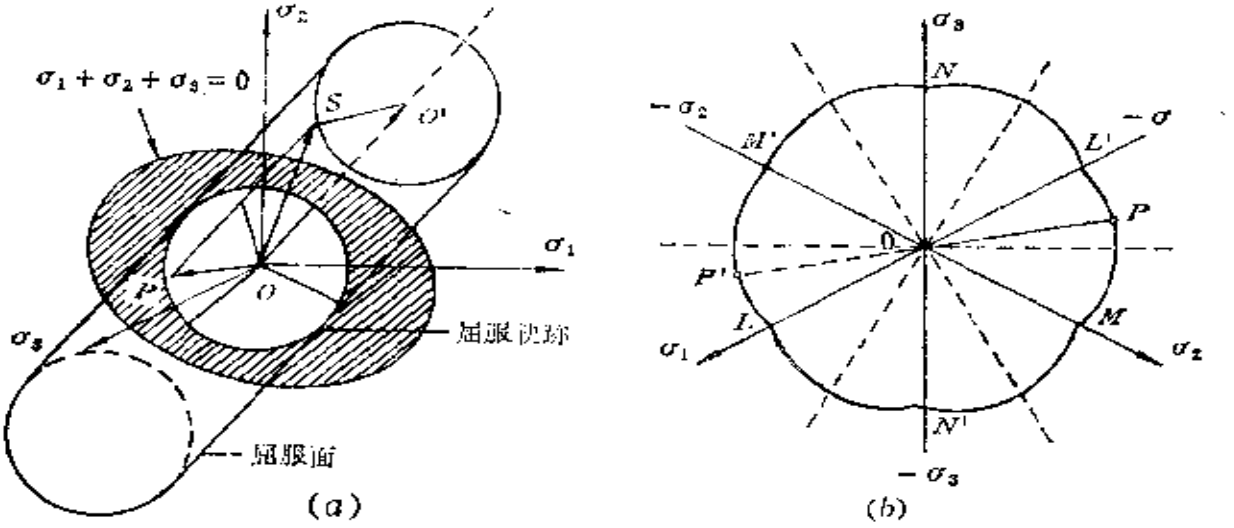
§ 2.4 Tresca 及 Mises 屈服条件

在物体内一定点出现塑性变形时，其所受应力必须满足的条件，称为屈服条件（或塑性条件）。在前面，我们曾在等倾面上研究了一点的应力状态。假设 OO' 是通过座标原点 O 而与轴 σ_1、σ_2、σ_3 成等角的直线，也就是说直线 OO' 对 σ_1、σ_2、σ_3 的方向余弦都是 $1/\sqrt{3}$。现在通过 O 点做一个以 OO' 为法线的面，在该面上 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$。即平均主应力为零。在所述的应力空间中，一点的应力状态可以通过一个向量来表示。在图 2.11(a) 中 OS 为一个应力向量，它代表了某一点的应力状态。OS 可以分解成两个向量，一个在平面 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ 上，称它为 OP，另一个垂直于该平面，为 PS，$PS=OO'$，根据前面的分析我们知道向量 PS 代表各向等值应力。由于各向等值应力不影响材料屈服，所以屈服函数 $f_1(I_2,\ I_3)=0$ 在应力空间中一定是具有垂直于 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ 平面的正柱体，而这个屈服面与 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$

面相交的线称为屈服轨迹。我们将只在 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ 的平面考虑屈服轨迹。

由于材料初始时是各向同性的，因而如果（σ_1、σ_2、σ_3）是屈服应力，那么（σ_1、σ_3、σ_2）也一定是屈服点的应力，因此屈服轨迹一定对称于 LL'。同样道理，它也一定对称于 MM' 和 NN'。对材料还有另一假定，即正屈服应力和负屈服应力相等，因此，通过 O 的直线一定和屈服轨迹相交在等距离的地方。屈服轨迹不但对称于 LL'，MM' NN' 三个轴，而且也一定对称于这三个轴的分角线。

关于材料进入塑性状态的原因有不同的假设，第一个假设曾由 Galilieo 在 17 世纪时提出，他认为材料进入塑性是由最大主应力引起的，即当最大主应力达到 σ_s 时，材料即进入塑性状态。这个假定已被实验所推翻，因为在各向相等压缩时，压应力可以远远超过屈服极限 σ_s，而材料并未进入塑性状态，也未破坏。第二个假设曾由 St-Venant 提出过，他认为最大的主应变能使材料进入塑性状态，这个假设同前面一样也被实验否定。此外还有 Beltrami



（a）屈服面和屈服轨跡　　（b） 各向同性材料屈服轨跡的一般形状

图 2.11

的假定，他认为：当最大弹性能达到一定值时，材料即开始屈服，这个假设也与实验结果相抵触，因而我们今后也不能使用它。

1864 年，Tresca 作了一系列的挤压实验来研究屈服条件，发现从金属变形上来看，可以看到有很细的痕迹，而这些痕纹的方向很接近于最大剪应力的方向，因此塑性变形可以是由于剪切应力所引起的晶体纲格的滑移而引起的。这些痕纹称为滑移线。Tresca 认为当最大剪切应力 τ_{max} 获得某一极限值时，材料即进入塑性状态，这个条件可写为下式：

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k \qquad \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3 \tag{2.6}$$

在空间应力状态时应写为：

$$\left.\begin{aligned} |\sigma_2 - \sigma_3| &\leqslant 2k \\ |\sigma_3 - \sigma_1| &\leqslant 2k \\ |\sigma_1 - \sigma_2| &\leqslant 2k \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

(2.7) 式并不要求 (2.6) 式中的不等式必须成立。在 (2.7) 式中如果三式皆为不等式，则材料即处于弹性状态。如果有一个式子为等号时，则材料即进入塑性状态。由于 $2k>0$，所以三个式子不能同时为等号。在 (2.7) 式中，我们注意到这个条件与静水压力无关，因为如果把静水压力状态代入 (2.7) 式时便可以相应地消去。其次这个条件的表达式是 σ_1，σ_2，σ_3 的对称函数，因为它们之间可以互相调换。此外，我们在 (2.6) 式及 (2.7) 式中看到中间应力并不影响屈服。

最大剪应力屈服条件的几何表示是一个垂直于 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ 平面的正六角柱体面 (图 2.12)，而屈服面在 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ 平面上的轨迹是一个正六边形 (图 2.12b)。屈服面在 $\sigma_3=0$ 时平面上的轨迹则是一个六角形 (图 1.13)。因为当 $\sigma_3=0$ 时，(2.7) 式将为

$$|\sigma_2| \leqslant 2k, \quad |\sigma_1| \leqslant 2k, \quad |\sigma_1 - \sigma_2| \leqslant 2k$$

最大剪应力假设由于与实验结果较符合，因而一般是被接受的。但是在使用这个条件时，主应力的大小次序应该知道，因为

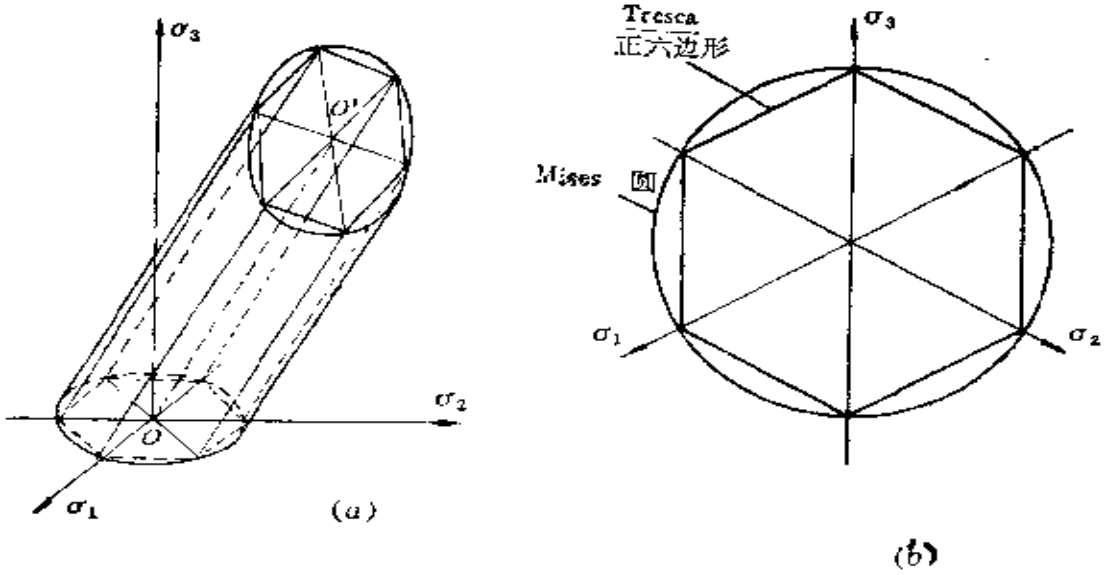


图 2.12 在主应力空间中的 Mises 和 Tresca 屈服条件

这时才能求出最大剪切应力 τ_{max} 来。但是一般说来主应力的次序是未知的，而且其次序可能由于加载而改变，而使用一般的公式又是很困难的。然而在某些简单问题中，如轴对称问题时，主应力的次序是事先知道的，这时使用Tresca条件是很方便的，因为它在数学上是个非常简单的表达式。

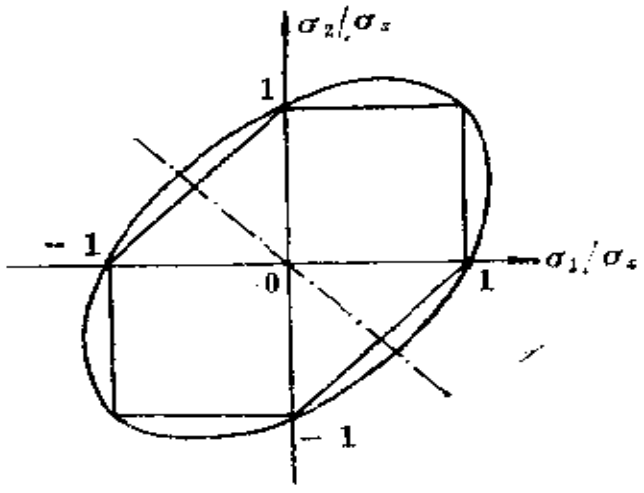


图 2.13 当 $\sigma_3=0$ 时的 Mises 和 Tresca 屈服条件

1913 年，Mises 曾指出，在 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ 的平面上

Tresca 六边形的六个顶点是由实验得到的，但是连接这六个点的直线却是假设的。这种假设是否合理尚需证明。他认为，如果用一个圆来连接这六个点可能更合理，而且又可以避免由于曲线不光滑而产生数学上的困难。他认为 Tresca 条件是个准确的条件而他的条件却是个近似的条件。Mises 条件是一个垂直于 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ 平面的圆柱体，在 $\sigma_3=0$ 平面上则是一个椭圆。

Mises 条件可用下列方程式表示：

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=6B^2\\ \text{或}\quad&(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\\&\qquad+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)=6B^2\end{aligned}\right\}\qquad(2.8)$$

如果 $(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2<6B^2$，则材料仍处于弹性状态。如果满足（2.8）式时，则材料即进入塑性状态。由此式看出静水压力状态并不影响材料屈服，而且满足互换原则，因此与实验相符。虽然 Mises 在提出这个条件时，并未认为它是准确的，但实验证明，对于韧性金属材料这个条件则更接近实际。因而 Hencky 于 1924 年对这个条件又进行了解释。他认为 Mises 方程相当于弹性形变能量等于常数的情况。由于静水压力不能使材料进入塑性状态，所以当变形能达到某一极限值时，材料即将进入塑性状态。现用 W、W_s、W_V 分别代表弹性总能量，弹性形变能量及弹性体积变形能量。在弹性区域内 W、W_s、W_V 将为

$$W=\frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_2+\sigma_3\varepsilon_3)$$

$$=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)]$$

$$W_V=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$$

$$= \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

弹性形变能量等于总能量减去体积变形能量，即

$$W_s = W - W_V = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)$$

$$-\frac{1-2\nu}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2]$$

$$= \frac{1}{12G}[(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]$$

Hencky 认为，当 W_s 达到一定值时，材料即开始屈服，这与 Mises 条件是相同的。Nadai 于 1937 年对 Mises 方程作了另一个解释，他认为当正八面体上剪切应力

即 $$\tau_8 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

为某一常数时，材料即开始进入塑性状态。这个方程式也与 Mises 方程相同。此后 A. A. Ильюшин 认为当应力强度 σ_i 等于单向拉伸的屈服极限 σ_s 时，即

$$\sigma_i = \sigma_s$$

材料便进入塑性状态。Ильюшин 把复杂的应力状态的应力强度与单向拉伸的屈服极限 σ_s 联系起来，对于建立小弹塑性变形理论，具有重要意义。

§ 2.5 两种屈服条件的比较

Tresca 条件是基于某种韧性金属屈服点的剪应力达到一定值时，材料即开始进入塑性状态。也就是说只有最大及最小主应力对

屈服有影响。当物体处于简单拉伸状态时，即 $\sigma_1>0$，$\sigma_2=\sigma_3=0$，这时我们有

$$\sigma_1=2k$$

此时剪切应力为

$$\tau_T=k \tag{2.9}$$

当纯剪状态时，即

$$\sigma_1=-\sigma_2,\quad \sigma_3=0$$

则得

$$\tau_T=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)=k$$

剪切应力为

$$\bar{\tau}_T=k \tag{2.10}$$

上式中 τ 表示用 Tresca 屈服条件时的剪切应力。一横表示纯剪时的屈服应力，而无一横时则表示简单拉伸时的屈服应力。由（2.9）及（2.10）看到在 Tresca 屈服条件时，简单拉伸和纯剪时最大剪应力为同样的数值。纯剪应力 τ 可以由薄管扭转的实验中得到。

根据 Mises 屈服条件，在简单拉伸时由（2.8）得到：

$$\sigma_1=\sqrt{3}\,B$$

此时剪切应力为：

$$\tau_M=\frac{\sqrt{3}}{2}B \tag{2.11}$$

当纯剪状态时，即

$$\sigma_1=-\sigma_2=\overline{\sigma}\quad \sigma_3=0$$

代入（2.8）式则得

$$\overline{\sigma}=B$$

而剪切应力为

$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \overline{\sigma}$$

因此

$$\overline{\tau}_M = B \tag{2.12}$$

Mises 条件是基于某种金属在屈服时

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

达到一定数值 B，即三个主应力对屈服都有影响。式中 τ_M 表示用 Mises 屈服条件时的剪切应力，一横表示纯剪时的屈服应力，而无一横则表示简单拉伸时的屈服应力。我们看到这两种情况下最大剪应力是不同的，前者为 B，后者为 $\frac{\sqrt{3}}{2}B$。

Tresca 屈服条件在 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$ 面上是一个正六边形，而 Mises 条件则是一个外接于正六边形的圆。因而在相交的六个点上应力状态完全相同，而这两个条件在纯剪切状态下屈服应力相差最大。现用 σ_s 表示简单拉伸时的屈服应力，因而由 (2.9) 得到

$$k = \frac{1}{2}\sigma_s$$

由 (2.11) 得到

$$B = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}, \qquad \left(\because \quad B = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\right)$$

纯剪时比较两个剪应力 $\overline{\tau}_T$ 及 $\overline{\tau}_M$ 则得

$$\frac{\overline{\tau}_M}{\overline{\tau}_T} = \frac{B}{k} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

也就是说，在纯剪切情况下，由 Mises 条件所得到的屈服应力是由 Tresca 条件所得到的 $2/\sqrt{3}$ 倍或 1.155 倍。由此看来，由两个条件所计算的结果相差不大。前面的比较也可以在图 2.14 上看出。当纯剪时 $\sigma_1=-\sigma_2$ 或在 $\sigma_1+\sigma_2=0$ 直线上按最大剪切应力条件计算时

$$\sigma_1=-\sigma_2=\pm\frac{\sigma_s}{2}$$

而按形变能条件计算时，

$$\sigma_1=-\sigma_2=\pm\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

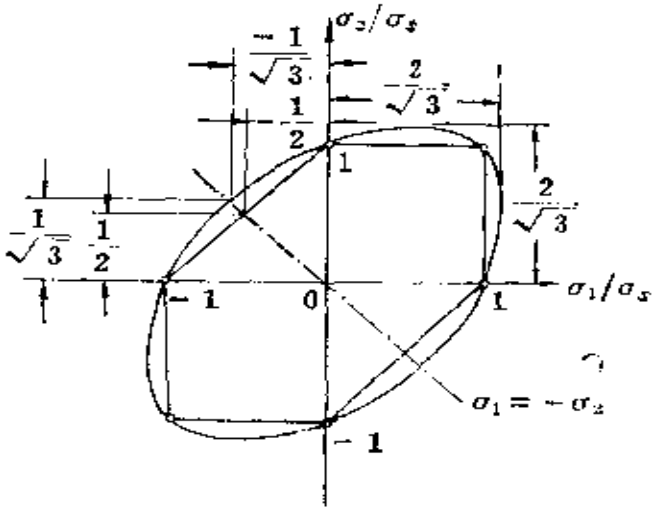


图 2.14 当 $\sigma_3=0$ 时，Mises 屈服条件和 Tresca 屈服条件的比较

这两个条件的正确性很容易由实验来确定，可以用薄管试验在拉伸及内压的配合载荷（或拉伸及扭转的配合载荷）下得到不同应力状态的屈服应力。当管子的厚度与半径之比为很小时，可以近似地假定管子的应力分布是均匀的。曾经用铜镍合金的管子在拉伸及内压的配合下，得出了中间主应力对屈服有影响，因而支持了 Mises 条件，Taylor 及 Quinney 曾配合扭转及拉伸载荷加于薄管试件上，如图 2.16 所示。在这种应力状态下 Mises 条件可由 (2.8) 求出

$$\sigma^2+3\tau^2=\sigma_s^2 \tag{2.13}$$

而 Tresca 屈服条件可由 Mohr 圆求出：

$$\sigma^2+4\tau^2=\sigma_s^2 \tag{2.14}$$

(2.13) 及 (2.14) 代表两个椭圆方程式，现将它们画于图 2.16 上。Taylor 及 Quinney 所用的薄管试件有三种不同金属，

即铝，铜和软钢。在图 2.16 上画出了他们所做的实验的结果。由图上看出，对于这几种材料，Mises 屈服条件比 Tresca 条件更接近于实验数据。

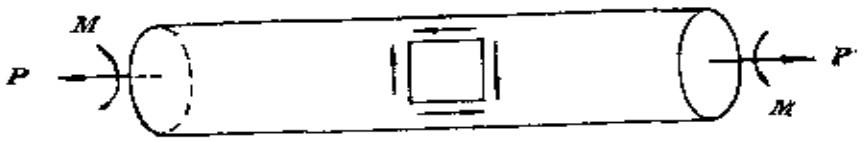


图 2.15　同时受拉和受扭的圆管

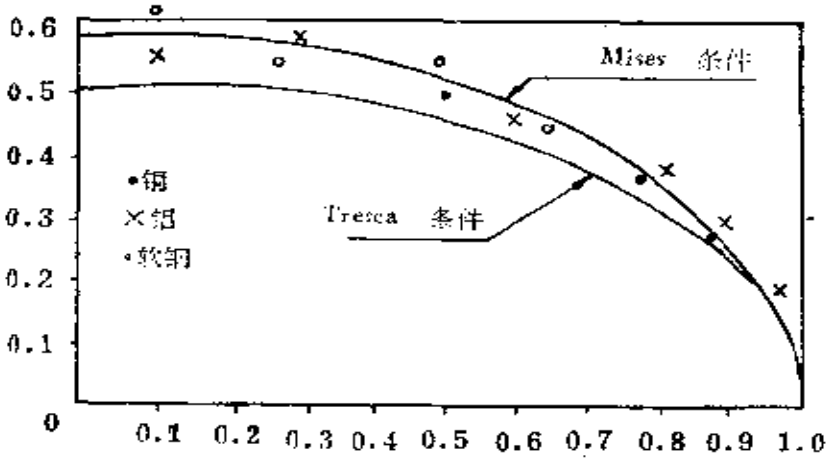


图 2.16　Taylor 和 Quinney 拉扭联合实验的结果

这二种屈服条件都不受平均应力 σ_m 的影响，在判断由主应力组合的任意应力状态下材料的性态时，都只要求知道一个材料常数，即单向应力状态时的屈服极限，同时都假设拉伸和压缩时屈服极限是相同的。

表示最大剪应力屈服条件（Tresca 屈服条件）的屈服曲面是正六角棱柱面其轴线是 Λ 直线、与坐标轴成等角。

表示变形能量屈服条件（Mises 屈服条件）的屈服曲面是圆柱面、其轴线亦是 Λ 直线，此圆柱体是外接上述的正六角棱柱体。

用垂直于 Λ 直线的平面与屈服曲面相交得一圆，其半径为

$$R=\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$$

与六角棱柱体相交得正六边形，边长为

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s=R$$

而 $\sin 60^\circ=\frac{h}{R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}R=\frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}$$

因此 $$\frac{R}{h}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{1.732}$$

$$=1.15$$

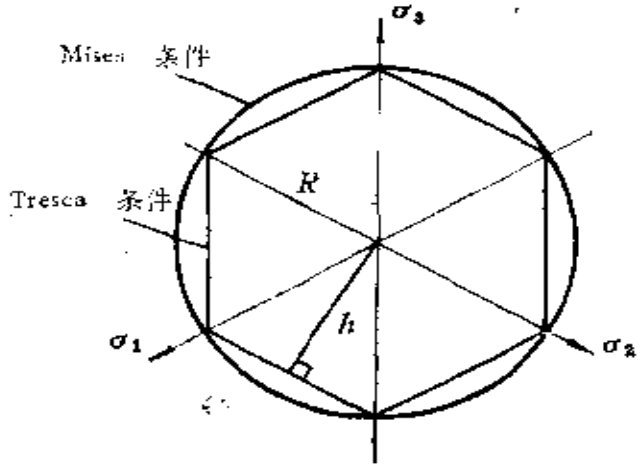


图 2.17 Mises 屈服条件和 Tresca 屈服条件的比较

屈服曲面与 $\sigma_3=0$ 平面相交得图 2.18。

图 2.18 中的 B 点和 E 点表示二向等拉或等压的应力状态。而 A、C、D、F 四点表示单向应力状态。在这些应力状态下，两个屈服条件给出的结果是相同的

A 点 $\sigma_1=\sigma_s$ B 点 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_s$ C 点 $\sigma_2=\sigma_s$

D 点 $\sigma_1=-\sigma_s$ E 点 $\sigma_1=\sigma_2=-\sigma_s$ F 点 $\sigma_2=-\sigma_s$

表示纯剪应力状态 $\sigma_1=-\sigma_2$ 的点 G_1、G_2、H_1 和 H_2 根据最大剪应力条件，此时材料开始屈服的应力值为：

$$\sigma_1=-\sigma_2=\pm\frac{\sigma_s}{2}$$

但根据形变能量条件，材料开始屈服的应力值为：

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \pm\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

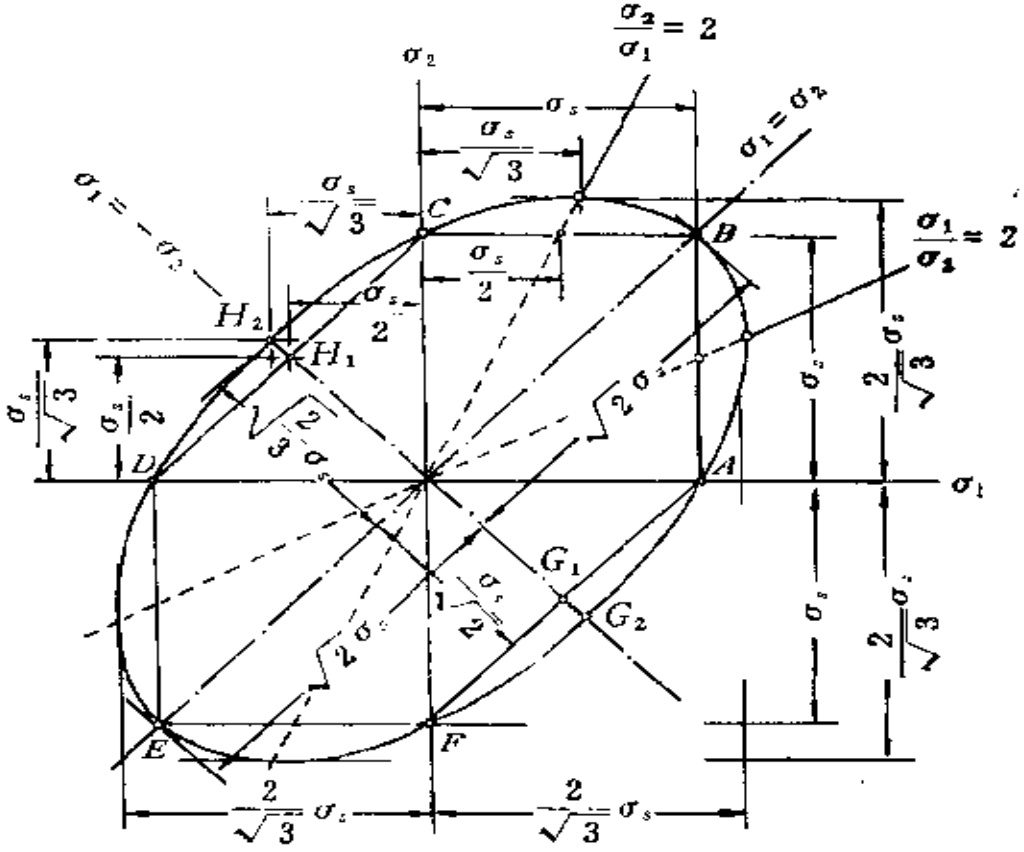


图 2.18 平面应力状态（$\sigma_3=0$）塑性条件的图形表示
六角形表示最大剪应力条件（Tresca）；
椭圆表示能量条件（Mises）。

例题：已知二端封闭的薄壁筒受内压 p 的作用，直径为 $40cm$，厚度为 $4mm$，材料的屈服极限为 $25kg/mm^2$，试用 Mises 和 Tresca 条件，求出圆管的屈服压力并给出如考虑 σ_r 时，影响将为多大？设薄壁筒的内直径为 $40cm$。

解：在圆筒处

$$\sigma_z = \frac{pr}{2t} > 0 \qquad \sigma_t = \frac{pr}{t} > 0$$

在内壁

$$\sigma_r = -p$$

而在外壁

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_t = \sigma_1,$$

$$\sigma_z = \sigma_2, \quad \sigma_r = \sigma_3$$



图 2.19 受内压作用的薄壁筒

① 当考虑 σ_r 影响时，即

$$\sigma_r = -p = \sigma_3$$

由 Mises 屈服条件知道

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

$$= \left(\frac{pr}{t} - \frac{pr}{2t} \right)^2 + \left(\frac{pr}{2t} + p \right)^2$$

$$+ \left(-p - \frac{pr}{t} \right)^2$$

$$\left(\frac{p400/2}{2\times 4} \right)^2 + \left(\frac{p200}{8} + p \right)^2 + \left(-\frac{p400}{8} + p \right)^2$$

$$= 2(25)^2 kg^2/mm^4$$

$$p^2(625 + 676 + 2601) = 2(625) kg^2/mm^4$$

$$p = \sqrt{\frac{2(625)}{3902}} = 0.566 kg/mm^2 = 56.6 kg/cm^2$$

由 Tresca 屈服条件可得

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pr}{t} + p = \sigma_s$$

$$p = \frac{\sigma_s}{1 + \frac{r}{t}} = \frac{25}{1 + \frac{400}{4 \times 2}} = \frac{25}{51} = 0.49 kg/mm^2$$

$$= 49 kg/cm^2$$

② 当不考虑 σ_r 的影响时，即

$$\sigma_3 = \sigma_r = 0$$

由 Mises 条件得

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

$$= \left(\frac{pr}{2t}\right)^2 + \left(\frac{pr}{2t}\right)^2 + \left(\frac{pr}{t}\right)^2$$

$$= 6\left(\frac{pr}{2t}\right)^2 = 2\sigma_s^2$$

$$p^2 = \frac{1}{3}\sigma_s^2 \left(\frac{2t}{r}\right)^2 = \frac{1}{3}(25)^2 \left(\frac{2 \times 4}{200}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}(25)^2 \frac{1}{25^2} = \frac{1}{3} kg^2/mm^4$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577 kg/mm^2 = 57.7 kg/cm^2$$

而由 Tresca 条件得

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{pr}{t} = \sigma_s,$$

$$p = \frac{t}{r}\sigma_s = \frac{4}{200} \times 25 = 0.5 kg/mm^2 = 50 kg/cm^2$$

将计算结果总结如下：

考虑 σ_r 的影响时　　Mises 条件　　$p=56.6kg/cm^2$

$(\sigma_r=\sigma_3=-p)$　　Tresca条件　　$p=49kg/cm^2$

不考虑 σ_r 的影响时　　Mises 条件　　$p=57.7kg/cm^2$

$(\sigma_r=\sigma_3=0)$　　Tresca 条件　　$p=50kg/cm^2$

§ 2.6　屈服条件的实验验证

我们知道一点的应力状态可以用三向应力 Mohr 圆来表示，如图 2.20 中三个圆的半径各为

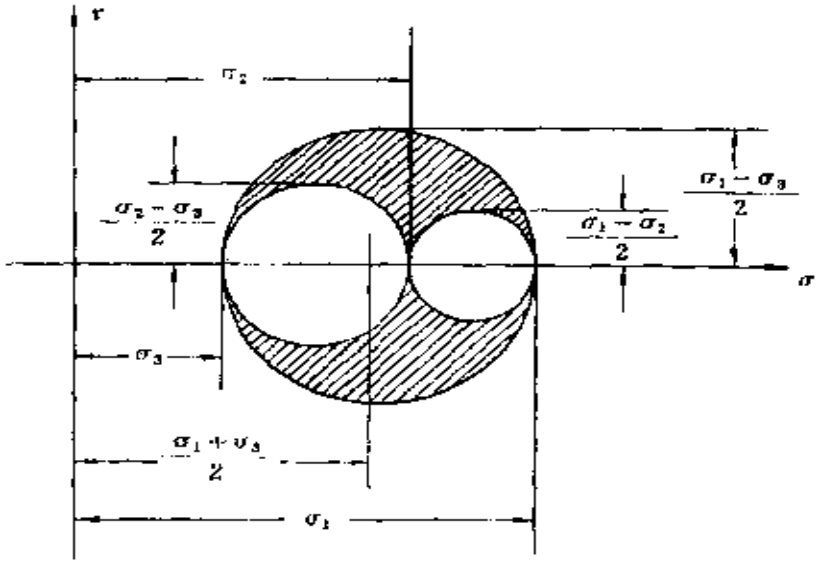


图 2.20　三向应力 Mohr 圆

$$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2),\quad \frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3),\quad \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$$

显然，当在已知应力状态上再迭加上各向等拉或等压应力状态时，各圆的半径并不改变，其影响只是使整个应力圆图形沿 σ 轴

移动一距离（等于所迭加的均匀应力的大小）。

现在我们引进 Lode 参数 μ_σ，使它只代表图 2.20 中三个圆的相对位置，而不管整个应力圆的图形沿 σ 轴的位置。令参数 μ_σ 为：

$$\mu_\sigma = \frac{\left(\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)}{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

一般称 μ_σ 为 Lode 参数。不难证明 Lode 参数 μ_σ 是与平均应力 σ_m 无关的。我们还可将屈服条件写成带有 Lode 参数的形式。Mises 屈服条件为

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2$$

又从 Lode 参数表达式

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

改写成

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{4} + \mu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

那么

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \mu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \mu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$= \frac{1 - \mu_\sigma}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \qquad (2.15)$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \mu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \sigma_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \mu_\sigma \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$= \frac{1+\mu_\sigma}{2}(\sigma_1-\sigma_3) \tag{2.16}$$

将 (2.15) 式和 (2.16) 式代入 Mises 条件，则得

$$\frac{(1-\mu_\sigma)^2}{4}(\sigma_1-\sigma_3)^2+\frac{(1+\mu_\sigma)^2}{4}(\sigma_1-\sigma_3)^2$$

$$+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2\sigma_s^2$$

$$(\sigma_1-\sigma_3)^2\left[\frac{(1-\mu_\sigma)^2}{4}+\frac{(1+\mu_\sigma)^2}{4}+1\right]=2\sigma_s^2$$

$$(\sigma_1-\sigma_3)^2\left(\frac{3+\mu_\sigma^2}{2}\right)=2\sigma_s^2$$

$$\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_s}\right)^2=\frac{4}{3+\mu_\sigma^2}$$

于是

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_s}=\frac{2}{\sqrt{3+\mu_\sigma^2}} \tag{2.17}$$

再将 Tresca 屈服条件写成

$$\sigma_1-\sigma_3=\sigma_s$$

即

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_s}=1 \tag{2.18}$$

Lode 曾采用不同金属做过薄壁圆管试验、使薄管受轴向拉力 P 和内压 p，见图 2.21，并用参数 μ_σ 来表示的屈服条件 (2.17)、(2.18) 式、实验结果如图 2.22 所示，图中横座标用 μ_σ 表示，纵座标用$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_s}$表示。用不同的轴向拉力 P 及内压 p 之比，即不同的 μ_σ 作实验，实验结果较符合 Mises 屈服条件，见图 2.22a。

Taylor 和 Quinney 还用薄壁圆管做过受轴向拉力 P 和扭矩

M 的实验。实验结果亦较符合 Mises 屈服条件，见图 2.22b。

塑性力学中一个很重要的问题是材料处在塑性阶段中，它的应

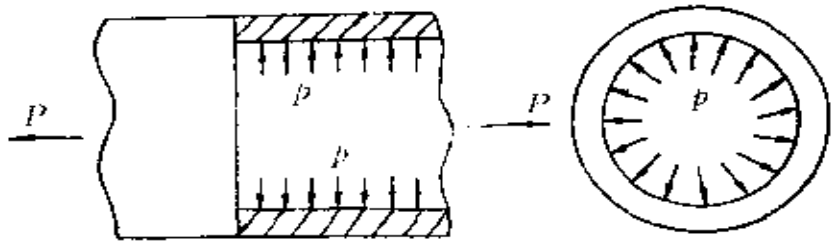


图 2.21　受内压和拉伸作用的薄壁圆管

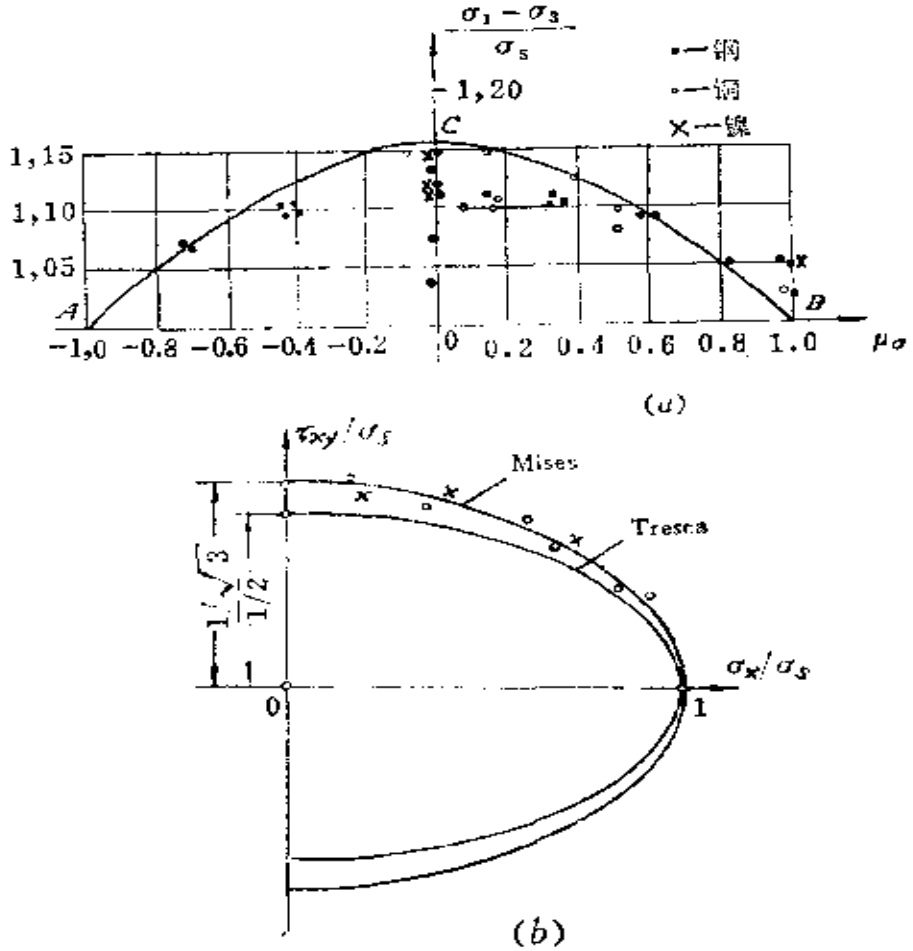


图 2.22　两个屈服条件和实验结果的比较

力分量和应变分量的关系究竟是怎样？我们知道，材料在弹性阶段中，应力与应变的关系是线性关系，即符合 Hooke 定律，但在塑性阶段中，应力和应变的关系却不是成线性关系了。要解决塑性阶段中应力和应变关系的问题，和处理弹性阶段时一样，要建立在实验的基础上。

对于单向拉伸问题（σ_1 存在，$\sigma_2=\sigma_3=0$），我们可以用简单拉伸的办法找出 σ_1 和 ε_1 的关系。但是在复杂应力情况，即是 σ_1，σ_2、σ_3 都存在的情况，应力分量 σ_1、σ_2、σ_3 和应变分量 ε_1、ε_2、ε_3 又是怎样的关系呢？

Taylor 和 Quinney 曾经做过薄壁圆管的实验。使薄壁圆管承受轴向力 P 及内压 p，圆管的材料采用钢、铜、镍。用不同的轴向力 P 和内压 p 之比，可得不同的主应力数值，再按

$$\mu_\sigma=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}$$

可求得不同的 Lode 参数 μ_σ。

对于应变的处理，我们也可以采用 Lode 参数的办法，就是令应变的 Lode 参数 μ_ε 为

$$\mu_\varepsilon=\frac{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}$$

式中 ε_1、ε_2、ε_3 为主应变。

我们前面谈到应力 Lode 参数 μ_σ 是代表应力 Mohr 圆的相对位置。对于应变情况，我们也可建立应变 Mohr 圆（建立应变 Mohr 圆的方法与建立应力 Mohr 圆相似，这里不作详细介绍）。应变 Lode 参数也是代表应变 Mohr 圆的相对位置。

将薄壁圆管实验所得的结果用图表示，横座标用应力 Lode 参数 μ_σ 表示，纵座标用应变 Lode 参数 μ_ε 表示，见图 2.23。

从图上可以看出，实验所得的点（包括不同材料、不同的 P

和 p 值）均密集在对角线 $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon$ 的附近。

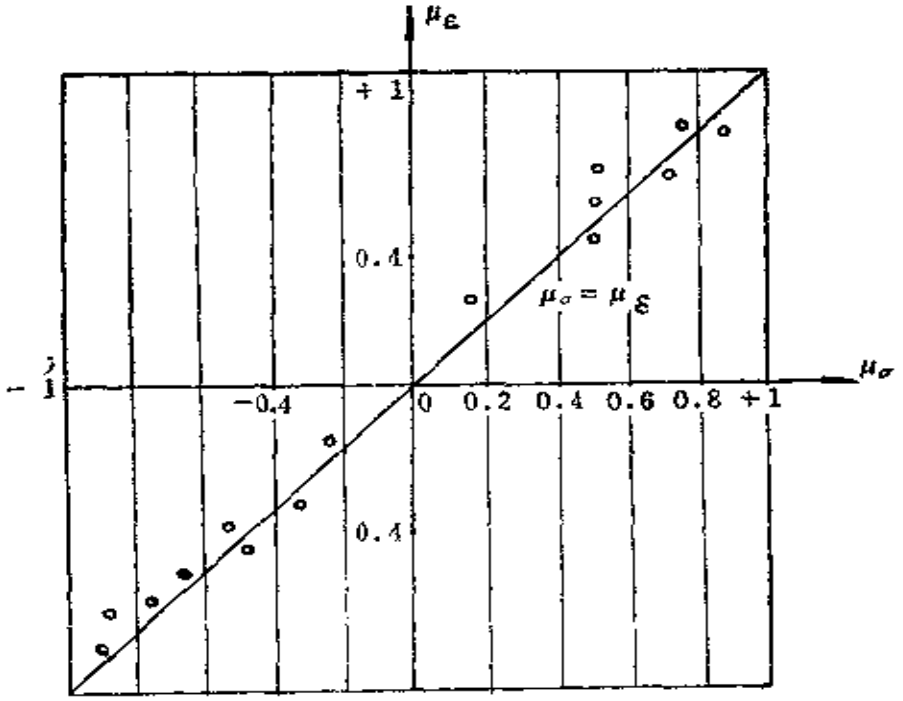


图 2.23 在 μ_σ 和 μ_ε 座标上的实验结果

我们知道 μ_σ，μ_ε 分别代表应力 Mohr 圆和应变 Mohr 圆的相对位置。$\mu_\sigma = \mu_\varepsilon$ 说明应力 Mohr 圆和应变 Mohr 圆相似，见图 2.24。

根据应力 Mohr 圆和应变 Mohr 圆的相似性，我们可以列出下面的式子：

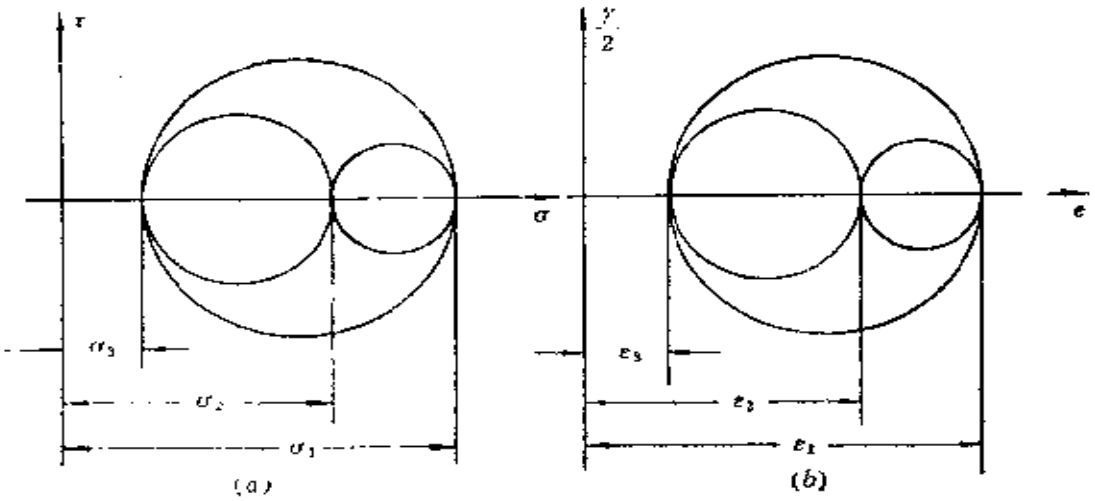
$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} \tag{2.19}$$

根据（2.19）式同样可以导出 $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon$ 的结论。下面进行推导。从代数中知道，如果

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F}$$

则

$$\frac{A \pm C}{B \pm D} = \frac{E}{F}$$



(a) 应力 Mohr 圆　　(b) 应变 Mohr 圆

图 2.24

变换 (2.19) 式

$$\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2) - (\sigma_2 - \sigma_3)} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

$$\frac{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_2}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_1}$$

或

$$\frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

根据应力 Lode 参数 μ_σ 和应变 Lode 参数 μ_ε 的定义，即得

$$\mu_\varepsilon = \mu_\sigma$$

根据（2.19）式可以得出塑性阶段中应力分量和应变分量的表达式，这将在下一章讨论。

从薄壁圆筒的实验还观察到应力的主方向和应变的主方向是重合的。处理塑性力学的问题基本上和处理弹性力学问题类似，所不同处主要在于应力与应变的关系上，弹性力学的应力与应变的关系是线性的，而塑性力学的应力与应变关系则是非线性的。

塑性力学中的理论主要分二种类型，一种是建立在应变增量 de_x、de_y、……和应力分量 σ_x、σ_y、……之间关系基础上的理论，称为增量理论或流动理论；另一种是建立在应变分量 e_x、e_y……和应力分量 σ_x、σ_y、……之间关系基础上的理论，称为形变理论。下一章的讨论中将仅限于形变理论中的弹塑性小变形理论。这个理论虽然考虑材料进入塑性变形，但仍认为变形不是太大，因而在考虑位移和应变的关系式（几何方程）中，仍旧采用小变形情况下所得的关系式。

第二章习题

1．设 s_1、s_2、s_3 为应力偏量，试证明用应力偏量表示 Mises 屈服条件时，其形式为

$$\sqrt{\frac{3}{2}(s_1^2+s_2^2+s_3^2)}=\sigma_s^2$$

提示：$s_1+s_2+s_3=0$。

2．设 I_1、I_2 为第一、第二应力不变量，试用 I_1、I_2 表示 Mises 屈服条件。

3．试用 I_1、I_2 写出八面体剪应力的表达式。

4．证明应力分量

$$\sigma_1=\frac{2}{3}\sigma_s\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)+\sigma_m$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{3}\sigma_s \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma_m$$

$$\sigma_3 = -\frac{2}{3}\sigma_s \cos\varphi + \sigma_m$$

恒满足 Mises 条件，又当 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$ 时，对 φ 有什么限制？

5. 一薄壁圆管（见图2.25），平均半径为 R，壁厚为 t，管的二端封闭，内部作用压力 p_1，外部作用有压力 p_2（p_2 对轴向力无影响），设比值 $\frac{p_2}{p_1} = x$，分别用 Mises 和 Tresca 屈服条件，讨论 p_1 为多大时管子开始屈服（规定纯剪时二种屈服条件重合）。

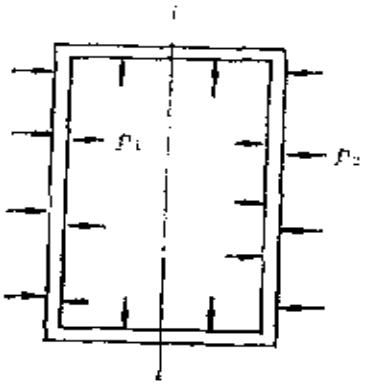


图 2.25

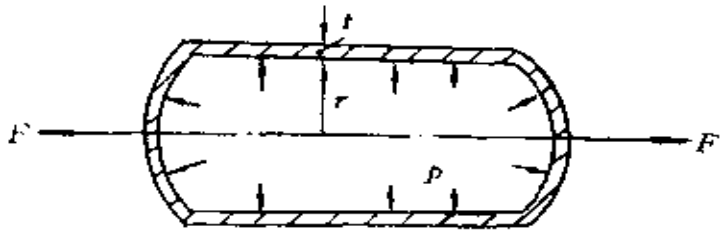


图 2.26

6. 已知二端封闭的薄壁圆筒，半径为 r，厚度为 t，受内压及轴向拉应力 σ 的作用（图 2.26），试求此时圆筒的屈服条件，并画出屈服条件的图。

7. 如图 2.27 所示，薄壁圆管受拉力 σ 和剪应力 τ 的作用，试写出在此情况下 Mises 条件和 Tresca



图 2.27

条件。

8. 已知半径为 $50mm$，厚为 $3mm$ 的薄壁圆管，保持 $\frac{\tau_{r\theta}}{\sigma_z}=1$，材料拉伸屈服极限为 $40kg/mm^2$，试求此圆管屈服时轴向载荷 P 和扭矩 M_s。

9. 已知薄壁圆球，其半径为 r_0，厚度为 t_0，受内压 p 的作用，试求使用 Trsca 条件时，p 值为多少？

10. 将 Mises 条件用主应力写出，并研究二种特殊情况：（a）$\sigma_1=\sigma_2$ 和（b）$\sigma_2=\sigma_3$，将这二种特殊情况中所写出的屈服条件和根据 Tresca 条件所得的结果相比较。

第二章习题答案

1. 证明（略）

2. $I_1^2-3I_2=\sigma_s^2$。

3. $\tau_8=\frac{\sqrt{2}}{3}(I_1^2+3I_2)^{\frac{1}{2}}$

4. $(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\sigma_s^2\left\{\left[\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2\right.$$

$$\left.+\left[\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\varphi\right]^2+\left[-\cos\varphi-\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]^2\right\}$$

$$=2\sigma_s^2$$

当 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$ 时则 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{3}$。

5. $J_2^*=\tau_s^2$，$\tau_{max}=\tau_s$

$\sigma_z=\frac{p_1R}{2t}$，$\sigma_\theta=p_1(1-\frac{x}{t})R$，$\sigma_r=0$（$\because$ $R\gg t$ 故 $\sigma_r\approx0$）

Mises 条件： $p_1=\dfrac{\sqrt{3}\,\tau_s t}{R\sqrt{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}}}$

Tresca 条件： 当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$p_1=\dfrac{2\tau_s t}{R(1-x)}$

当 $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，$p_1=\dfrac{4\tau_s t}{R}$

当 $x\geqslant 1$ 时，$p_1=\dfrac{4\tau_s t}{(2x-1)R}$

6. Mises 条件 $\dfrac{\sigma^2}{\sigma_s^2}+\left(\dfrac{pr}{2t}\right)^2\Big/\left(\dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\right)^2=1$

Tresca 条件 $\sigma\geqslant\dfrac{pr}{2t}$ 时，$\dfrac{\sigma}{\sigma_s}+\dfrac{pr}{2t\sigma_s}=1$

$\sigma<\dfrac{pr}{2t}$时，$\dfrac{pr}{2t\sigma_s}=0.5$。

7. Mises 条件，$\sigma^2+3\tau^2=\sigma_s^2$；Tresca 条件 $\sigma^2+4\tau^2=\sigma_s^2$

8. Mises 条件，$P=18.84T$，$M_s=942kg-m$

Tresca 条件 $P=16.9T$，$M_s=843kg-m$。

9. $p=\dfrac{2t_c}{r_0}\sigma_s$。

10. Mises 塑性条件 $(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2\sigma_s^2$，上述二种情况的屈服条件相同，可写为 $\sigma_1-\sigma_3=\sigma_s$。

第三章　形变理论（全量理论）

§ 3.1　形变理论与比例变形

弹塑性小变形理论又称形变理论，它主要曾由 Hencky 及 Ильюшин 研究过。因此有时亦称 Hencky-Ильюшин 理论。前面已经讲过弹性力学及塑性力学之间的主要区别在于描写应力应变关系上，而这个关系则主要应由实验来确定。弹性力学中的广义 Hooke 定律我们是很熟悉的。将塑性力学的物理关系与弹性力学的物理关系作一个比较，便可看出塑性力学的特点。弹塑性小变形的物理关系是比弹性力学的物理关系更为广义的关系。因为它既包括了弹性极限内的关系，也包括了弹性极限外的关系。

为了说明这个理论，我们首先来看看变形问题是很有必要的。前面已经说过，材料在高的静水压力作用下，体积变化仍是弹性的。因此可以认为塑性变形只是形状改变的部分。在变形状态中，确定形状改变的应变部分称为应变偏量，它是与前面所叙述过的应力偏量相对应的。如果我们只研究主应变时，则应变偏量的分量将由下列公式确定

$$\left.\begin{aligned} e_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_m,\quad e_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_m,\quad e_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_m \\ \varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

式中 ε_m 称为平均应变。e 为工程应变的应变偏量。

由公式（3.1）知道：

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \tag{3.2}$$

同分析一点的应力状态一样，我们也将研究在等倾面上的互相成120°角的三个坐标轴上一点的变形状态。如果已经知道一点的形状变化是用 e_1、e_2 及 e_3 表示的，则可以在这三条坐标轴上量出 e_1、e_2、e_3，然后在这三点做垂直于这三个座标轴的垂直线必然相交于一点 P_1。假如我们还知道代表其它变形状态的点 P_2、P_3、P_4……时，则我们可以在这个座标轴上通过 P_1、P_2、P_3、P_4……、等点，联成一条线，从而画出整个变形的过程。在变形的过程中，如果 e_1、e_2、e_3 是按比例增加的，则很明显由原点开始代表变形过程的将是一条直线。而这种按照比例变形的过程即称为简单变形。根据图 3.1 很容易找出 e_i、e_t、e_z 及 e_3 之间的关系为：

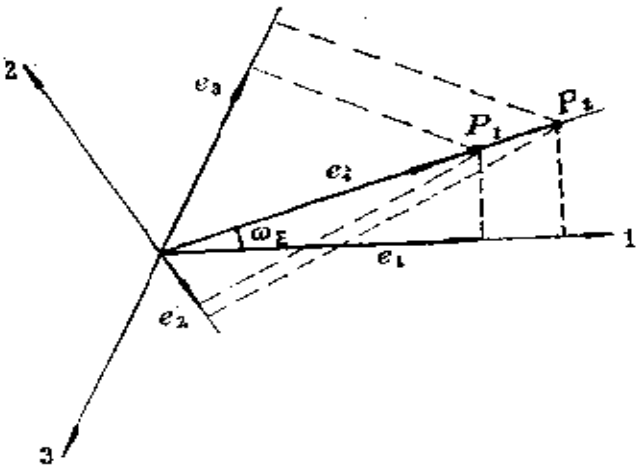


图 3.1　在等倾面上应力状态的几何表示

$$e_1 = e_i \cos\omega_\varepsilon,\quad e_2 = e_i \cos(\omega_\varepsilon - 120°),$$

$$e_3 = e_i \cos(\omega_\varepsilon - 240°) \tag{3.3}$$

由公式（3.3）可以得到

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = e_i^2[\cos^2\omega_\varepsilon + \cos^2(\omega_\varepsilon - 120°) + \cos^2(\omega_\varepsilon - 240°)] = \frac{3}{2} e_i^2$$

因此

$$e_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2} \tag{3.4}$$

而 $$e_1^2=(\varepsilon_1-\varepsilon_m)^2=\left(\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}\right)^2=\frac{1}{9}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2$$

$$=\frac{1}{9}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)]^2=\frac{1}{9}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2$$

$$+2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)(\varepsilon_1-\varepsilon_3)]$$

$$e_2^2=\frac{1}{9}[(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2+2(\varepsilon_2-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)]$$

$$e_3^2=\frac{1}{9}[(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_2)^2+2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)(\varepsilon_3-\varepsilon_2)]$$

故 $$e_1^2+e_2^2+e_3^2$$

$$=\frac{2}{9}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2$$

$$-\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_2\varepsilon_3-\varepsilon_3\varepsilon_1]$$

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2=\frac{1}{3}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2] \qquad (3.5)$$

如果三个应力偏量是按比例增长的，则在图 3.2 上 OB 线是一条直线，应力型式指数 ω_σ 保持不变。此时称为比例加载，或简单加载。在使用形变理论时，应该满足应力主方向与应变主方向重合的条件，即 $\omega_\sigma=\omega_\varepsilon$ 的条件，而且应力主方向应该始终保持不变。如果描述一点应力状态的六个应力分量按同一个比例增加，则与它所对应的六个应变分量也将按同一比例增加，此时应力 Lode 参数 μ_σ 和应变 Lode 参数 μ_ε 保持不变，而且有 $\mu_\sigma=\mu_\varepsilon$。由此知道，应力Mohr

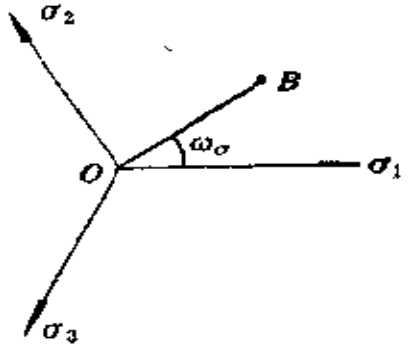


图 3.2 比例加载时 OB 是一条直线

圆和应变 Mohr 圆也将是相似的。只有在此条件下，才能使用形变理论，用这个理论计算出来的结果才能够比较接近实际情况。然而，有时当偏离简单加载不大时，也可以使用这个理论，但在分析具体问题时应该特别注意所求得的结果是否合理，是否符合实际情况也是完全必要的。

§ 3.2 弹性理论中的物理方程

由于形变理论是按全量来分析问题的，和线性弹性力学分析问题的方法一致，因此，分析一下弹性力学的物理方程，找出它的特点，对建立弹塑性问题的物理方程是很有好处的。

弹性力学中的广义 Hooke 定律可以写为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\varepsilon_m + 2Ge_x & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_m + 2Ge_y & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_m + 2Ge_z & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

其中 $\lambda = \dfrac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$，$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

$$\varepsilon_m = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z .$$

体积变化的规律为

$$\sigma_m = 3K\varepsilon_m \tag{3.7}$$

其中 $K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$。

而应力偏量的表达式为

$$\left.\begin{aligned} s_x &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_m) = 2Ge_x & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ s_y &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_m) = 2Ge_y & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ s_z &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_m) = 2Ge_z & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

或写成张量形式

$$s_{ij} = 2G e_{ij}$$

公式（3.8）有时亦称形状变化定律，即应力偏量分量与应变偏量分量成比例，或者说形状改变只是由应力偏量引起的。

现在我们再从另一个角度上探讨一下公式（3.6），如果我们把前三个方程互相相减则得：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \\ \sigma_y - \sigma_z &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_z) \\ \sigma_z - \sigma_x &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_x) \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

因此

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sigma_y - \sigma_z} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\varepsilon_y - \varepsilon_z},\quad \frac{\sigma_y - \sigma_z}{\sigma_z - \sigma_x} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_z}{\varepsilon_z - \varepsilon_x} \tag{3.10}$$

我们知道三维应力状态及三维应变状态的 Mohr 圆的形式如 3.2，而方程（3.9）说明应力 Mohr 圆在几何上与应变 Mohr 圆在几何上是相似的。

我们将方程（3.9）写成主应力的形式，则得

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2) &= 2G(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\ (\sigma_2 - \sigma_3) &= 2G(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ (\sigma_3 - \sigma_1) &= 2G(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

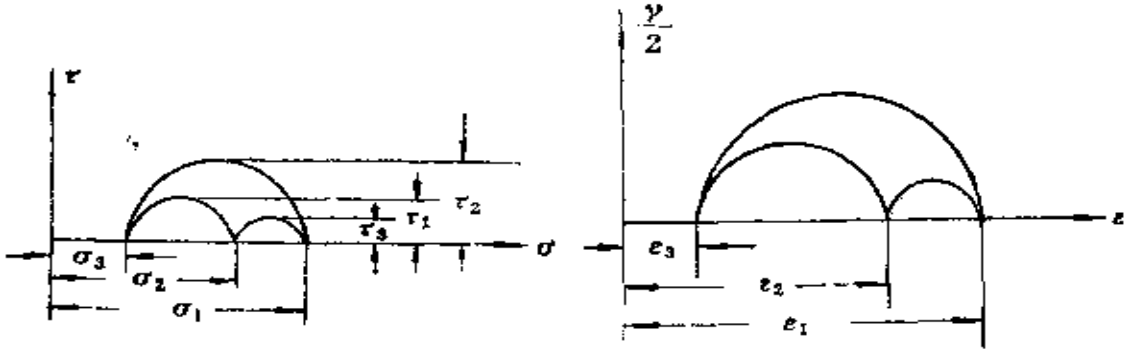


图 3.3 应力 Mohr 圆与应变 Mohr 圆相似

我们令

$$2\tau_1=(\sigma_2-\sigma_3)\quad 2\tau_2=(\sigma_3-\sigma_1)\quad 2\tau_3=(\sigma_1-\sigma_2)$$

$$\gamma_1=(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\quad \gamma_2=(\varepsilon_3-\varepsilon_1)\quad \gamma_3=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$$

因此由公式（3.7）即可得到

$$\tau_1=G\gamma_1\qquad \tau_2=G\gamma_2\qquad \tau_3=G\gamma_3$$

或

$$\frac{\tau_3}{\gamma_3}=\frac{\tau_2}{\gamma_2}=\frac{\tau_1}{\gamma_1}=G$$

式中 τ 按弹性力学符号规定，即主剪切应力与主剪切应变成比例。由前面知正八面体上剪切应力为

$$\tau_8=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\qquad(3.12)$$

由式（3.11）可以得到

$$\tau_8=\frac{2G}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}$$

或

$$\tau_8=G\gamma_8\qquad(3.13)$$

上式中

$$\gamma_8=\frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}\qquad(3.14)$$

由(3.13)可以得到复杂应力状态下应力应变关系的另一表达式

$$\sigma_i=E\varepsilon_i\qquad(3.15)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\\ \varepsilon_i&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(1+\nu)}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2}\end{aligned}\right\}\qquad(3.16)$$

公式（3.15）在塑性力学中具有重要意义，因为它表示了应力强度 σ_i 与应变强度 ε_i 之间的关系。

由式（3.15）可得

$$E = \frac{\sigma_i}{e_i} \tag{3.17}$$

但

$$2G = \frac{E}{1+\nu} = \frac{\sigma_i}{(1+\nu)e_i} \tag{3.18}$$

因此由式（3.11）及式（3.18）可得

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{\varepsilon_2-\varepsilon_3} = \frac{\sigma_3-\sigma_1}{\varepsilon_3-\varepsilon_1} = 2G = \frac{\sigma_i}{(1+\nu)e_i} \tag{3.19}$$

此式表述了弹性变形时，复杂应力状态应力分量与应变分量之间的比例关系。

由上面的讨论，可以得到下面几点结论：

1. 在弹性变形中应力主轴与应变主轴是重合的。
2. 平均应力与平均变形（或称体积变形）成比例。
3. 应力偏量分量与应变偏量分量成比例。
4. 应力强度与应变强度成比例。

§ 3.3 形变理论的物理方程

形变理论是塑性力学中物理关系比较简单的一种。这个理论和弹性力学分析问题的方法是一致的，即要以变形的全量作为基础，因此确定物理方程时，就需要保持弹性力学物理方程中的一些特点。为了建立塑性力学中全量理论的物理方程，需要采用如下几个假定：

1） 应力主方向与应变主方向是重合的，即应力 Mohr 圆与应变 Mohr 圆相似，应力 Lode 参数 μ_σ 和应变 Lode 参数 μ_ε 相等，而且在整个加载过程中主方向保持不变。

2） 平均应力与平均应变成比例。

3） 应力偏量分量与应变偏量分量成比例。

4） 应力强度是应变强度的函数，而这个函数对每个具体材料都应通过实验来确定。即

$$\sigma_i = E' \varepsilon_i$$

这里的 E' 不仅与材料有关，而且也和塑性变形程度有关。

很容易将上述几点假设与广义 Hooke 定律做一个比较，这里只有第四点与弹性力学不同，而式 (3.17) 却包括了前一种情况，因为 Hooke 定律是这里的一种特殊情况。因此我们可以把形变理论作为比弹性理论更为一般的理论。

应力主方向与应变主方向重合，可以通过最大剪应力与最大剪应变的方向一致得到证明。Lode 试验证明 $\mu_\sigma = \mu_\varepsilon$ 即 $\omega_\sigma = \omega_\varepsilon$，但有一定误差，因此这条假定具有近似性质。Bridgman 研究了金属各向受相等压力时体积变化的情况。他的试验结果与第二条假设是符合的。

根据以上的假设，可以写出如下方程：

$$\frac{\sigma_x - \sigma_m}{\varepsilon_x - \varepsilon_m} = \frac{\sigma_y - \sigma_m}{\varepsilon_y - \varepsilon_m} = \frac{\sigma_z - \sigma_m}{\varepsilon_z - \varepsilon_m} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}$$

$$= \frac{2\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{2\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = 2G' \tag{3.20}$$

式中 G' 为材料性质及塑性变形程度有关的系数。根据式(3.20)有

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_m &= 2G'(\varepsilon_x - \varepsilon_m), \quad & \tau_{xy} &= 2G' \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \sigma_y - \sigma_m &= 2G'(\varepsilon_y - \varepsilon_m), \quad & \tau_{yz} &= 2G' \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \sigma_z - \sigma_m &= 2G'(\varepsilon_z - \varepsilon_m), \quad & \tau_{zx} &= 2G' \frac{\gamma_{zx}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

由式 (3.21) 得

$$\frac{\sigma_x-\sigma_y}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}=\frac{\sigma_y-\sigma_z}{\varepsilon_y-\varepsilon_z}=\frac{\sigma_z-\sigma_x}{\varepsilon_z-\varepsilon_x}$$

$$=\frac{\tau_{xy}}{\frac{\gamma_{xy}}{2}}=\frac{\tau_{yz}}{\frac{\gamma_{yz}}{2}}=\frac{\tau_{zx}}{\frac{\gamma_{zx}}{2}}=2G' \tag{3.22}$$

或

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\varepsilon_1-\varepsilon_2}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\varepsilon_2-\varepsilon_3}=\frac{\sigma_3-\sigma_1}{\varepsilon_3-\varepsilon_1}=2G' \tag{3.23}$$

式 (3.23) 表明应力 Mohr 圆和应变 Mohr 圆是相似的，设物体的体积是不可压缩的，即 $\nu=\frac{1}{2}$ 此时应有

$$\varepsilon_m=0,\quad G'=\frac{E'}{2(1+\nu)}=\frac{E'}{3} \tag{3.24}$$

由式 (3.21) 中的第一式可得

$$2G'\varepsilon_x=\sigma_x-\sigma_m$$

$$=\sigma_x-\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

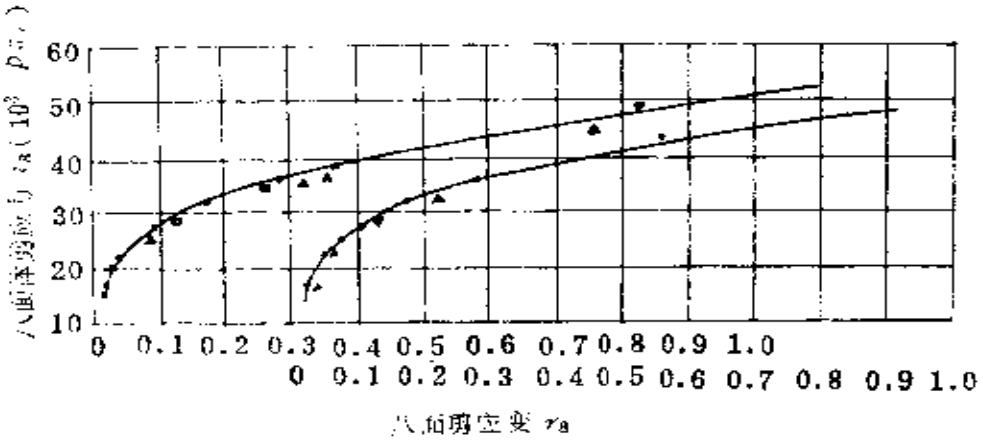
$$=\frac{2}{3}\left[\sigma_x-\frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\right]$$

考虑式 (3.21) 及式 (3.24) 得如下应力应变关系：

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x&=\frac{1}{E'}\left[\sigma_x-\frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\right],\quad \tau_{xy}=G'\gamma_{xy}\\
\varepsilon_y&=\frac{1}{E'}\left[\sigma_y-\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_z)\right],\quad \tau_{yz}=G'\gamma_{yz}\\
\varepsilon_z&=\frac{1}{E'}\left[\sigma_z-\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\right],\quad \tau_{zx}=G'\gamma_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

式(3.25)与广义的 Hooke 定律是非常相似的，只要将广义 Hooke 定律中的 E、G、ν 相应地用 E'、G'、$\frac{1}{2}$ 代替便可得到式(3.25)。但应注意，虽然式 (3.25) 在形式上与广义 Hooke 定律相似，但由于 E' 及 G' 是与 σ_i 及 e_i 有关的函数，所以在解具体问题时比弹性力学复杂得多。

1945 年 E. A. Davis 曾用铜和中碳钢所制成的薄壁筒作过承受拉伸和内压同时作用的试验，每次试验都使拉力值和内压力值的比例保持为常数，比例系数可以是变化的，其中包括只有拉力和只有内压作用的两种情况，其试验结果如图 3.4 所示。



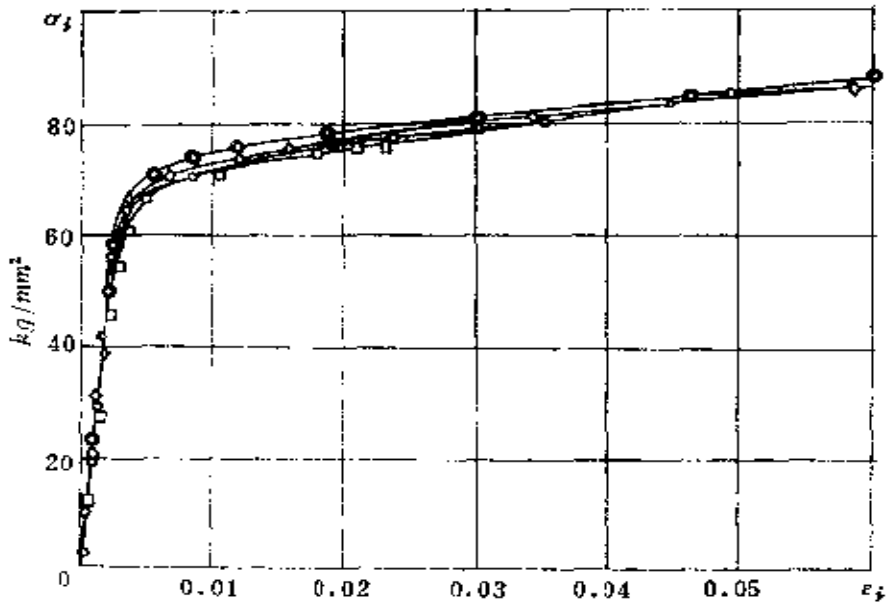
σ_i/σ_i ◎—0; △—500; ■—750; ▼—762; ◪—775; ○—800; ▲—875; □—1000 ▽—2000; ·—∞。

图 3.4 Davis 实验

此后 A. M. Жуков(1955) 也作过类似的实验，其实验曲线如图 3.5 所示。这些试验结果表明，只要是在简单加载或偏离简单加载不大的情况下，尽管应力状态不同，但应力应变曲线都可近似地用单向拉伸曲线表示。这一假设称为单一曲线假定。

根据单一曲线假定，把复杂应力状态的应力应变曲线和一维的应力应变曲线联系起来了。Davis 使用 $\tau_8=\phi(\gamma_8)$ 的形式，而 Жуков 则用 $\sigma_i=\phi(\varepsilon_i)$ 的形式，由于 $\sigma_i=\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_8$，$e_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_8$.

因此这两组曲线是可以相互变换的。



◎——$A^*=1.25$；　○——$A^*=1.5$

□——$A^*=0.—0.82$　◇——$A^*=0.9—1.15$

图 3.5　Жуков 实验

假设已知材料的单向拉伸曲线（图 3.6），如果变形未超过弹性极限，这时一般说来应力与应变之间的关系应为线性的，因而应该满足下列方程：

$$\sigma = Ee \qquad (3.26)$$

如果 $e>\varepsilon_e$，应力与应变之间的关系即变为非线性关系，而且是不可恢复的。实际上，它只与材料性质有关，而与试件形状无关。因此可以用某一函数来表示他们之间

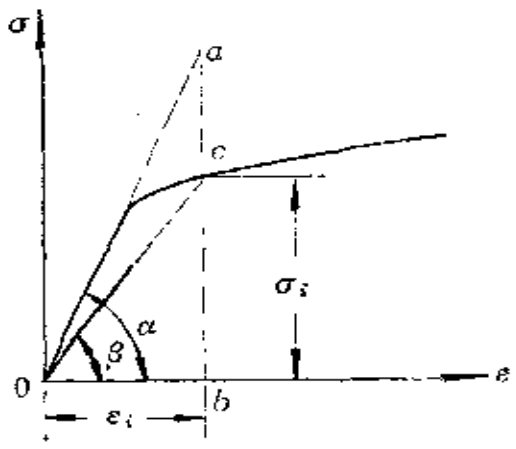


图　3.6

的关系。

$$\sigma = \phi(\varepsilon) \tag{3.27}$$

为了使上式能具有与（3.15）相似的形式，我们将取式(3.17)的形式，即

$$\sigma = E'\varepsilon$$

由图 3.3 看出

$$E' = \operatorname{tg}\beta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \psi(\varepsilon) \tag{3.26}$$

如果已知拉伸曲线，则 E' 为变形的已知函数。
我们知道在弹性极限内对于复杂的应力状态具有下列简单关系：

$$\sigma_i = E\varepsilon_i \tag{3.27}$$

不难看出，这个公式与（3.15）是非常相似的，它们的区别是：公式（3.15）是在单向拉伸时的关系而（3.27）是在复杂应力状态下的关系。超出弹性极限以后，根据单一曲线假定，有

$$\sigma_i = E'\varepsilon_i \tag{3.28}$$

因此最后得

$$E' = \frac{\phi(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i} = \frac{\phi(\varepsilon)}{\varepsilon} \tag{3.29}$$

有时将式（3.28）写成类似于弹性规律的形式，即

$$\sigma_i = E\varepsilon_i[1-\omega(\varepsilon_i)] \tag{3.30}$$

式（3.30）中的 E 为弹性模量，$E\varepsilon_i$ 相当于图 3.6 中的 ab 段，$E\varepsilon_i\omega(\varepsilon_i)$ 相当于 ac 段，因此 $\omega(\varepsilon_i)$ 的几何意义可以理解为$\frac{ac}{ab}$，它是 ε_i 的函数，如取 $\nu=\frac{1}{2}$ 则式（3.30）又可写为

$$\sigma_i = 3G[1-\omega(\varepsilon_i)]\varepsilon_i \tag{3.31}$$

由于 $\phi(e_i)$ 与简单拉伸时的 $\phi(e)$ 具有相同的形式，因此，应力强度 σ_i 与应变强度 e_i 的概念具有重要意义，因为它将空间的应力状态问题变成简单拉伸应力状态问题，而且式 (3.28) 无论是在弹性区还是塑性区都是适用的。式 (3.30) 中的 $\omega(e)$ 称为 Ильюшин 函数。对于不同的材料简化模型，其表达式是不一样的，例如对于幂强化材料 $\omega=1-\frac{Ae^{n-1}}{E}$，对于理想弹塑性材料及理想弹性线性强化材料在弹性阶段 $\omega=0$，在塑性阶段相应为

$$\omega=1-\frac{e_s}{e},\quad \omega=\left(1-\frac{E_1}{E}\right)\left(1-\frac{E_s}{e}\right)。$$

由式 (3.21) 可得如下与弹性状态相似的物理关系

$$\left.\begin{aligned}&s_x=2G'e_x,\quad s_y=2G'e_y,\quad s_z=2G'e_z\\&\tau_{xy}=2G'\frac{1}{2}\gamma_{xy},\quad \tau_{yz}=2G'\frac{1}{2}\gamma_{yz},\quad \tau_{zx}=2G'\frac{1}{2}\gamma_{zx}\end{aligned}\right\}\tag{3.32}$$

由 (3.15) 知道，$E'=\frac{\sigma_i}{e_i}$，故 $G'=\frac{\sigma_i}{3e_i}$

最后我们将 G' 的表达式代入式 (3.21) 则得：

$$\left.\begin{aligned}&s_{ij}=\frac{2\sigma_i}{3e_i}e_{ij}\\&s_x=\frac{2\sigma_i}{3e_i}e_i,\quad s_y=\frac{2\sigma_i}{3e_i}e_y,\quad s_z=\frac{2\sigma_i}{3e_i}e_z\\&\tau_{xy}=\frac{2\sigma_i}{3e_i}\cdot\frac{1}{2}\gamma_{xy},\quad \tau_{yz}=\frac{2\sigma_i}{2e_i}\cdot\frac{1}{2}\gamma_{yz},\\&\tau_{zx}=\frac{2\sigma_i}{3e_i}\cdot\frac{1}{2}\gamma_{zx}\end{aligned}\right\}\tag{3.33}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\\ e_i &= e_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_2-e_3)^2+(e_3-e_1)^2}\end{aligned}\right\} \quad (3.34)$$

事实上式（3.33）也可以通过假设 $\omega_\sigma=\omega_\varepsilon$ 的条件以及（2.3）和式（3.3）得出，这时

$$\frac{e_1}{s_1}=\frac{e_2}{s_2}=\frac{e_3}{s_3}=\frac{3e_i}{2\sigma_i}$$

由于总应变等于弹性应变和塑性应变之和，即

$$\left.\begin{aligned}e_x &= e_x^e+e_x^p, \quad \gamma_{xy}=\gamma_{xy}^e+\gamma_{xy}^p\\ e_y &= e_y^e+e_y^p, \quad \gamma_{yz}=\gamma_{yz}^e+\gamma_{yz}^p\\ e_z &= e_z^e+e_z^p, \quad \gamma_{zx}=\gamma_{zx}^e+\gamma_{zx}^p\end{aligned}\right\} \quad (3.34)$$

由式（3.34）、（3.25）的第一式及广义 Hooke 定律（取 $\nu=\frac{1}{2}$）可得

$$\begin{aligned}e_x^p = e_x - e_x^e &= \left(\frac{1}{3G'}-\frac{1}{3G}\right)\left[\sigma_x-\frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\right]\\ &= \frac{\left[\frac{G}{G'}-1\right]}{3G}\left[\sigma_x-\frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\right]\\ &= \frac{\phi}{3G}\left[\sigma_x-\frac{1}{2}(\sigma_y-\sigma_z)\right]\end{aligned}$$

其中 $\phi=\frac{G}{G'}-1$，因此有

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^p &= \frac{\phi}{3G}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\right] \quad \gamma_{xy}^p = \frac{\phi}{G}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y^p &= \frac{\phi}{3G}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_z)\right] \quad \gamma_{yz}^p = \frac{\phi}{G}\tau_{yz} \\ \varepsilon_z^p &= \frac{\phi}{3G}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\right] \quad \gamma_{zx}^p = \frac{\phi}{G}\tau_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

式（3 35）亦可写为如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^p &= \left(\frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1}{2G}\right)s_x, \quad \gamma_{xy}^p = \left(\frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{G}\right)\tau_{xy} \\ \varepsilon_y^p &= \left(\frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1}{2G}\right)s_y, \quad \gamma_{yz}^p = \left(\frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{G}\right)\tau_{yz} \\ \varepsilon_z^p &= \left(\frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1}{2G}\right)s_z, \quad \gamma_{zx}^p = \left(\frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{G}\right)\tau_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{3.36}$$

从前面的分析看来，在形变理论中，问题归结于要求出 E' 的值，因为知道了它，便可以把塑性力学中的物理关系式写出来，而 E' 的形式是与应力强度 σ_i 及变形强度 ε_i 相联系着的。而 σ_i 的形式又是与具体的材料有关，并且它的表达式与屈服条件是一样的，因此对于不同材料 E' 的表达式是不同的。

现在来看看对理想弹塑性体“模型” E' 的表达式，见图 3.7a。

在弹性区域内（线段 OA）

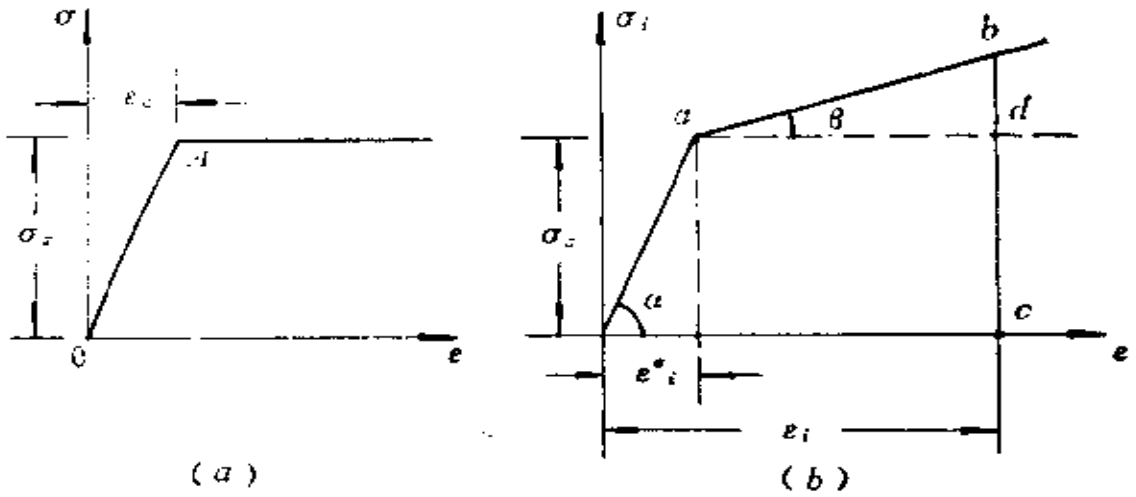
$$\sigma_i = E\varepsilon_i$$

如变形强度继续增加，则线段 AE 将表示变形状态。

这里 $$\sigma_i = \sigma_s$$

因此 $$E' = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_i}$$

在这种状态下，σ_i 及 e_i 没有一一对应的关系，即当应力达到某一极限值后，变形将无限增加，这也正是理想塑性体的特点。



(a) 理想弹塑性材料　　(b) 理想弹塑性强化材料

图 3.7

下面再来看看具有线性强化性质的弹塑性材料 E' 的表达式，(图3.7b)，同前面一样，在弹性极限内，应满足 (3.32)，而在线段 AE 上有下列关系：

$$bc = bd + dc$$

故

$$\sigma_i = e_i^e \operatorname{tg}\alpha + (e_i - e_i^e)\operatorname{tg}\beta$$

由于

$$\operatorname{tg}\alpha = E$$

$$\operatorname{tg}\beta = E_1$$

所以 (3.34) 可以写为：

$$\sigma_i = e_i^e E + (e_i - e_i^e)E_1$$

$$= E_1 e_i + e_i^e E\left(1 - \frac{E_1}{E}\right)$$

$$= E_1 e_i + \sigma_s \left(1 - \frac{E_1}{E} \right)$$

$$= E'_1 e_i + \sigma_s \left(1 - \frac{E_1}{E} \right)$$

由（3.35）及（3.24）我们可以求出 E' 的表达式，即

$$E' = E_1 + \frac{\sigma_s}{e_i} \left(1 - \frac{E_1}{E} \right) \tag{3.37}$$

E_1 有时亦称为强化模量。在简单拉伸时，当 $\sigma > \sigma_s$ 时，物体即进入塑性状态。在复杂应力状态下，当满足屈服条件时，这里即满足 $\sigma_i = \sigma_s$ 时，物体就进入塑性状态。

前面所讲的物理关系，对于塑性体或者是对于物理关系是非线性的弹性体在主动变形时都是适用的。只有在卸载时，非线性弹性体才与塑性体有区别，因为在主动变形时并没有考虑材料变形的不可恢复性。这里应该强调的是，在简单加载时，每一点的变形都是主动的，而应力强度到处都在增加，因而我们便可使用前面的一些定律，因此它们只有在主动变形时才能使用。

§ 3.4 卸 载 问 题

前面讲过，考虑卸载问题是区别非线性弹性体与塑性体的标志，而在卸载过程中，只有弹性变形恢复，而塑性变形保持不变。为了说明卸载过程的计算，我们首先来看看受单向拉伸的杆件。设这个试件开始时拉到 σ_1^*，而 $\sigma_1^* > \sigma_s$ 这时杆件的变形为 e_1^*，这时将杆件卸载至 σ_1。

$$\sigma_1 < \sigma_1^* \tag{3.37}$$

由图 3.7 我们看出残余变形将为

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^* - \widetilde{\varepsilon_1} \tag{3.38}$$

$$\sigma_1 = \sigma_1^* - \widetilde{\sigma_1}$$

卸载时，应力应变的变化符合弹性规律即

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{\sigma_1} = E\widetilde{\varepsilon_1} \\ &(\sigma_1^* - \sigma_1) \\ &= E(\varepsilon_1^* - \varepsilon_1) \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

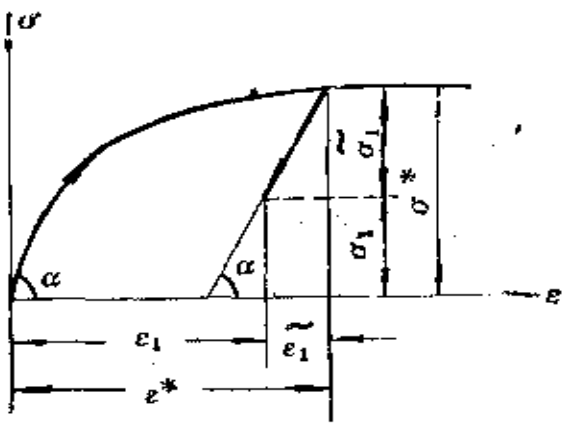


图 3.8 卸载时应力与应变变化的规律

σ_1^*，ε_1^* 为开始卸载时的应力和应变，σ_1、ε_1 为卸载终了时的应力和应变，，$\widetilde{\sigma_1} = \sigma_1^* - \sigma_1$，$\widetilde{\varepsilon_1} = \varepsilon_1^* - \varepsilon_1$ 为卸载过程中应力和应变的改变量。

上面的讨论对于简单加载情况是很明显的。在复杂应力状态时的卸载也有相似的情况，即应力分量的改变量与应变分量的改变量之间有着弹性关系。但是这个关系应该在被动变形状态，外力按比例地变化，即简单卸载时才适用。因为这时载荷、应力、应变的改变量之间有着与弹性体情况相同的联系。可先以载荷的改变量（P^*-P_1）为假想的载荷，按弹性理论计算所引起的应力及变形，它仍实际上就是应力和应变的改变量。从卸载前的应力及应变减去这些改变量就得到卸载后的应力及应变了。由此可以看出在全部载荷卸去后，即外载等于零的情况下，在物体内不仅有残余变形，而且还有残余应力。应力的改变量是按弹性计算的，而卸载前的应力是按弹塑性体计算的，所以它们不会完全相等，因此相减后就得到残余应力。

$$s_{ij} = 2G'e_{ij}$$

$$\left.\begin{aligned} s_x &= 2G'e_x \qquad s_{xy} = 2G'e_{xy} \quad \text{即} \quad \tau_{xy} = G'\gamma_{xy} \\ s_y &= 2G'e_y \qquad s_{yz} = 2G'e_{yz} \qquad \tau_{yz} = G'\gamma_{yz} \\ s_z &= 2G'e_z \qquad s_{zx} = 2G'e_{zx} \qquad \tau_{zx} = G'\gamma_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

广义 Hooke 定律为

$$s_{ij} = 2Ge_{ij}$$

$$\left.\begin{aligned} s_x &= 2Ge_x \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \\ s_y &= 2Ge_y \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\ s_z &= 2Ge_z \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

对于复杂应力状态，实验证明，如果是简单卸载，则应力和应变同样按弹性规律变化，即

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\sigma}_m &= 3K\tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{s}_{ij} &= 2G\tilde{e}_{ij} \end{aligned}\right. \tag{3.40}$$

或：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_m &= \sigma_m^* - 3K\tilde{\varepsilon}_m \\ s_{ij} &= s_{ij}^* - \tilde{s}_{ij} = s_{ij} - 2G\tilde{e}_{ij} \end{aligned}\right.$$

式中 $\tilde{\sigma}_m$，$\tilde{\varepsilon}_m$，$\tilde{s}_{ij}$，$\tilde{e}_{ij}$ 分别表示卸载过程中的平均应力、平均应变、应力偏量和工程应变偏量的改变量。而 σ_m^*，ε_m^*，s_{ij}^*，e_{ij}^* 和 σ_m、ε_m、s_{ij}、e_{ij} 分别表示各量在卸载开始时和卸载终了时的值。

$$\left.\begin{aligned} s_{ij} &= s_{ij}^* - \tilde{s}_{ij} = 2G'e_{ij} - 2G\tilde{e}_{ij} \\ s_x &= s_x^* - \tilde{s}_x = 2G'e_x - 2G\tilde{e}_x \\ s_y &= s_y^* - \tilde{s}_y = 2G'e_y - 2G\tilde{e}_y \end{aligned}\right.$$

$$
\begin{aligned}
s_z &= s_z^* - \tilde{s}_z = 2G'e_z - 2G\tilde{e}_z \\
s_{xy} &= s_{xy}^* - \tilde{s}_{xy} = 2G'e_{xy} - 2G\tilde{e}_{xy} = G'\gamma_{xy} - G\tilde{\gamma}_{xy} \\
s_{yz} &= s_{yz}^* - \tilde{s}_{yz} = 2G'e_{yz} - 2G\tilde{e}_{yz} = G'\gamma_{yz} - G\tilde{\gamma}_{yz} \\
s_{zx} &= s_{zx}^* - \tilde{s}_{zx} = 2G'e_{zx} - 2G\tilde{e}_{zx} = G'\gamma_{zx} - G\tilde{\gamma}_{zx}
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

$$e_{ij}(e_x,\ e_y,\ e_z,\ \gamma_{xy},\ \gamma_{yz},\ \gamma_{zx})$$

为卸载开始时的工程应变偏量，

$$\tilde{e}_{ij}\ (\tilde{e}_x,\ \tilde{e}_y,\ \tilde{e}_z,\ \tilde{\gamma}_{xy},\ \tilde{\gamma}_{yz},\ \tilde{\gamma}_{zx})$$

为卸载过程中工程应变偏量的改变量。

$$s_{ij}(s_x,\ s_y,\ s_z,\ \gamma_{xy},\ \gamma_{yz},\ \gamma_{zx})$$

为卸载终了时的应力偏量（即残余的应力偏量）。

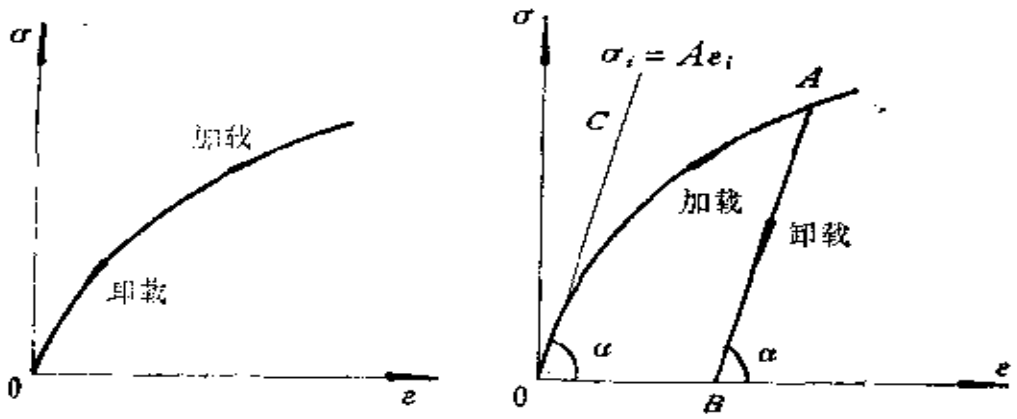
在简单卸载的情况下，可以先根据载荷在卸载过程中的改变量（表面力改变量 $\tilde{P}_i$ 和体积力的改变量 $\tilde{X}_i(i=1,\ 2,\ 3)$，按弹性力学公式算出应力和应变的改变量 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 和 $\tilde{e}_{ij}$，然后再从卸载开始时的应力和应变 σ_{ij}^*，e_{ij}^* 减去相应的改变量，便得到卸载后的应力 σ_{ij} 和应变 e_{ij}。不难看出，如果将载荷全部卸去，即

$$\tilde{P}_i = P_i^*,\ \ \tilde{X}_i = X_i^*$$

这时物体内不仅留有残余变形，而且还有残余应力。因为卸载后的应力为 $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* - \tilde{\sigma}_{ij}$，其中 σ_{ij}^* 是根据 P_i^*，X_i^* 按弹塑性状态的应力应变关系计算的，而 $\tilde{\sigma}_{ij}$ 是根据 $\tilde{P}_i$、$\tilde{X}_i$ 按弹性规律计算的，两者并不相等。

非线性弹性体与塑性体的加载特点一样，卸载规律则不一样，如图 3.9 所示。图 3.9*a* 所示的是线性弹性体，其加载与卸载规律都沿着同一条曲线，变形是可逆的。图 3.9*b* 所示是应变强化塑性体的加载与卸载规律，其应力应变曲线为 $\sigma_i = Ae_i^m$，当 $m=1$ 时，

$\sigma_i = Ae_i$ 为弹性应力应变曲线，卸载时，按平行于此线的路径进行。



（a）　　（b）

（a）非线性弹性体　　（b）应变强化塑性体

图 3.9

§ 3.5 简单加载定理

在 Hencky，Nadai 工作的基础上，Ильюшин 将形变理论的形式和所必须满足的条件整理得比较简单和明确。他提出了物体内每个单元都处于简单加载的具体条件，并且证明了当物体处于简单加载状态时，即外载荷从一开始便按同一比例系数增加，则由形变理论所计算出的结果将是正确的。满足简单加载的几个具体条件是：

1．外载荷（包括体积力）按比例增加，变形体处于主动变形过程（即应力强度 σ_i 是处于不断增加的过程，在变形过程中不出现中途卸载的情况）；

2．体积是不可压缩的，即取波桑比 $\nu = \frac{1}{2}$；

3．材料的应力应变曲线具有幂强化的形式，即

$$\sigma = Ae^n \quad 或 \quad \sigma_i = Ae_i^n;$$

4. 满足小弹塑性变形的各项条件，塑性变形和弹性变形属于同一量级。

设 σ_{ij}^*、ε_{ij}^*、u_i^* 相应为物体内初始时的应力场、应变场和位移场；它们是问题的塑性解，因此应满足塑性力学中所应该满足的基本方程，即

平衡方程：

$$\sigma_{ij,j}^* + F_i^* = 0, \quad F^* \text{ 为单位体积力}$$

几何方程：

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$$

物理方程：

$$s_{ij}^* = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i^*}e_{ij}^* = \frac{2}{3}Ae_i^{*n-1}\cdot e_{ij}^*。$$

因为 $\nu = \frac{1}{2}$， 故 $e_{ij}^* = \varepsilon_{ij}^*$

边界条件：

力的边界条件为

$$\sigma_{ij}^* n_j = T_i^*,$$

位移的边界条件为

$$u^* = 0。$$

现在要证明当外载荷按比例增加时，即当 $F_i = F_i^* a$，$T_i = T_i^* a$，按比例 a 增加的各应力分量以及按比例 b 增加的各应变分量和位移分量，即

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* a & s_{ij} = s_{ij}^* a & \sigma_i = \sigma_i^* a \\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* b & u_i = u_i^* b & e_i = e_i^* b \end{array}\right\} \qquad (\text{i})$$

能够满足塑性力学中上述全部方程和边界条件。

证明：由于应力与应变之间的关系满足如下公式，

$$\sigma = A(\varepsilon)^n$$

因此应有

$$(\sigma^* a) = A(\varepsilon^* b)^n$$

但在初始状态时有

$$\sigma^* = A\cdot(\varepsilon^*)^n$$

因此可得

$$a = b^n$$

或

$$b = \sqrt[n]{a} \qquad \text{(ii)}$$

平衡方程：

$$\sigma_{ij,j} = \sigma^*_{ij,j}\, a = -F_i^* a = -F_i$$

几何方程：

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* \sqrt[n]{a} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)\sqrt[n]{a}$$

$$= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

物理关系，由于

$$s_{ij}^* = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i^*}\varepsilon_{ij}^* \qquad \text{(iii)}$$

将式（ii）两端都乘以比例系数 a，则有

$$s_{ij} = a s_{ij}^* = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i^*}{\varepsilon_i^*}\varepsilon_{ij}^*\cdot a$$

$$= \frac{2}{3} \cdot A \varepsilon_i^{*(n-1)} \cdot \varepsilon_{ij}^* \cdot a^{n \cdot \frac{1}{n}+1}$$

$$= \frac{2}{3} A (\varepsilon_i^* a^{\frac{1}{n}})^{n-1} \cdot \varepsilon_{ij}^* \cdot a^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{2}{3} A (\varepsilon_i)^{n-1} \cdot \varepsilon_{ij}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \right) \varepsilon_{ij} \text{。}$$

力的边界条件为

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij}^* a \cdot n_j = T_i^* a = T_i$$

位移的边界条件为

$$u_i - u_i^* \sqrt{a} = 0$$

由此可见应力状态和应变状态（i）能够满足全部的塑性力学方程，外载荷按比例增加是满足简单加载的必要条件，因为如果载荷不按比例增加，不仅保证不了物体内部的简单加载状态，而且在物体的表面上已经不能满足简单加载的条件了。取体积不变的假设，即 $\nu = \frac{1}{2}$ 既简化了具体计算，基本上符合实验的结果，而且也使形变理论的物理关系，只集中在研究 s_{ij} 按比例变化，使之只有 $\sigma_i = A \varepsilon_i^n$ 一个物理关系。使用幂强化的规律，不仅可以避免区分弹性区和塑性区，使问题证明简化，而且它并不限制我们选取不同材料的简化模型，因为不同的简化模型是可以通过选取参数 A 和 n 来描述实际材料的行为的。这个理论只适用于小变形的范围，这是因为在平衡方程和几何关系中都需要利用这一假定。

当不满足简单加载条件时，小弹塑性变形理论一般是不应使用的。但是由于用全量理论解题和线弹性力学相似，比较方便，因此也有在不是简单加载的条件下使用了这个理论，而且有时所获得的

结果和实验结果相当接近，因此全量理论的适用范围，实际上比简单加载条件要更大些。因此许多作者还研究了在偏离简单加载情况时，这个理论的使用问题。

§ 3.6 关于Hencky 理论和 Nadai 理论

(1) Heancky 理论

Hencky 理论建立于 1924 年，他的基本假设是应力偏量分量与塑性应变偏量分量（而不是应变的全部）成比例，即

$$\frac{e_x^p}{s_x}=\frac{e_y^p}{s_y}=\frac{e_z^p}{s_z}=\frac{\gamma_{xy}^p}{2\tau_{xy}}=\frac{\gamma_{yz}^p}{2\tau_{yz}}$$

$$=\frac{\gamma_{zx}^p}{2\tau_{zx}}=\frac{\phi}{2G} \tag{3.42}$$

或可写成张量形式

$$e_{ij}^p=\frac{\phi}{2G}s_{ij} \tag{3.43}$$

Hencky 认为体积变形按弹性规律变化，而总应变偏量等于弹性应变偏量与塑性应变偏量之和，即

$$\begin{aligned}e_{ij}&=e_{ij}^e+e_{ij}^p+\varepsilon_m\delta_{ij}\\&=\frac{s_{ij}}{2G}+\frac{\phi}{2G}s_{ij}+\frac{1-2\nu}{E}\sigma_m\delta_{ij}\\&=\frac{1+\phi}{2G}\left[s_{ij}+\frac{1-2\nu}{(1+\nu)(1+\phi)}\sigma_m\delta_{ij}\right]\\&=\frac{1+\phi}{2G}\left[\sigma_{ij}-\sigma_m\delta_{ij}+\frac{1-2\nu}{(1+\nu)(1+\phi)}\sigma_m\delta_{ij}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1+\phi}{2G}\left[\sigma_{ij} - \frac{\phi + \frac{3\nu}{1+\nu}}{1+\phi}\sigma_m\delta_{ij}\right]$$

展开后可得

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1+\phi}{2G}\left(\sigma_x - \frac{\phi + \frac{3\nu}{1+\nu}}{1+\phi}\sigma_m\right) & \gamma_{xy} &= \frac{1+\phi}{G}\tau_{xy}\\
\varepsilon_y &= \frac{1+\phi}{2G}\left(\sigma_y - \frac{\phi + \frac{3\nu}{1+\nu}}{1+\phi}\sigma_m\right) & \gamma_{yz} &= \frac{1+\phi}{G}\tau_{yz}\\
\varepsilon_z &= \frac{1+\phi}{2G}\left(\sigma_z - \frac{\phi + \frac{3\nu}{1+\nu}}{1+\phi}\sigma_m\right) & \gamma_{zx} &= \frac{1+\phi}{G}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.44)$$

ν 为波桑比，ϕ 为非负的标量因子（它在卸载过程中为零），公式中 ε_{ij} 包括了塑性应变和弹性应变。Hencky 还指出，在一些实际问题中可以从一开始就近似地选择 $\nu = \frac{1}{2}$（即假设材料是不可压缩的）由式（3.44）可得

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\phi}{2G}(\sigma_{ij} - \sigma_m\delta_{ij}) = \frac{1+\phi}{2G}s_{ij}$$

此时则有 $\phi = \frac{3G\varepsilon_i^p}{\sigma_i}$ 以及

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1+\phi}{2G}s_x & \gamma_{xy} &= \frac{1-\phi}{G}\tau_{xy}\\
\varepsilon_y &= \frac{1+\phi}{2G}s_y & \gamma_{yz} &= \frac{1+\phi}{G}\tau_{yz}\\
\varepsilon_z &= \frac{1+\phi}{2G}s_z & \gamma_{zx} &= \frac{1+\phi}{G}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.45)$$

令 $K_0=\frac{1-2\nu}{E}$，$\frac{1+\phi}{2G}=\psi$，Hencky 又将应力应变关系写成另一形式，即

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}&=\frac{1+\phi}{2G}s_{ij}+K_0\sigma_m\delta_{ij}\\&=\psi(\sigma_{ij}-\sigma_m\delta_{ij})+K_0\sigma_m\delta_{ij}\\&=\psi\left[\sigma_{ij}-\frac{\psi-K_0}{\psi}\sigma_m\delta_{ij}\right]\end{aligned}$$

展开后可得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\psi\left[\sigma_x-\frac{\psi-K_0}{\psi}\sigma_m\right],\quad\gamma_{xy}=2\psi\tau_{xy}\\\varepsilon_y&=\psi\left[\sigma_y-\frac{\psi-K_0}{\psi}\sigma_m\right],\gamma_{yz}=2\psi\tau_{yz}\\\varepsilon_z&=\psi\left[\sigma_z-\frac{\psi-K_0}{\psi}\sigma_m\right],\quad\gamma_{zx}=2\psi\tau_{zx}\end{aligned}\right\}\qquad(3.46)$$

当 $\nu=\frac{1}{2}$时，则 $K_0=0$ 此时上式可写成更为简单的形式

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\psi s_x\qquad\gamma_{xy}=2\psi\tau_{xy}\\\varepsilon_y&=\psi s_y\qquad\gamma_{yz}=2\psi\tau_{yz}\\\varepsilon_z&=\psi s_z\qquad\gamma_{zx}=2\psi\tau_{zx}\end{aligned}\right\}\qquad(3.47)$$

式中比例系数 ψ 是塑性变形和位置的函数，Hencky 所考虑的是理想弹塑性材料，但他并没有明确地提出这种应力应变关系在什么条件下可以使用的问题。如将 Hencky 的表达式与 Ильюшин 的表达式相比则可得

$$2G' = \frac{2G}{1+\phi}$$

(2) Nadai 理论

Nadai 理论也是形变类型的理论，但是他考虑的是强化材料和大应变的情况，他认为八面体剪应力

$$\tau_8 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

可以用来表示在不同应力状态材料进入塑性状态的准则，而八面体上法向应力

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \sigma_m$$

对屈服没有影响。对于强化材料，τ_8 是一个变量，其数值随着材料的强化而增加，材料的强化条件可用下式表示：

$$\tau_8 = f(\gamma_8)$$

式中
$$\gamma_8 = \frac{2}{3}\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_2-e_3)^2+(e_3-e_1)^2}$$

τ_8 和 γ_8 的关系是通过实验得到的。对于理想塑性材料，τ_8 = 常量，这时就与 Mises 屈服条件一致。也就是说，Nadai 对 Mises 屈服函数给出了另一个物理意义，同时将这个屈服函数推广到强化材料。

Nadai 采用了大应变的概念，他将 P. Ludwik 和 Hencky 等提出的大应变条件下的应变微分方程

$$d\epsilon = \frac{dl}{l}$$

进行积分，得到了大应变概念的应变（即自然应变）

$$\epsilon = \int_{l_0}^{l} \frac{dl}{l} = \ln\frac{l}{l_0} = \ln(1+e)$$

式中 l_0 和 l 分别为微分单元体的初始长度和瞬时长度。e 就是通常小应变概念的工程应变。

Nadai 在引进了自然应变之后，对自然剪应变$\overline{\gamma_1}$、$\overline{\gamma_2}$、$\overline{\gamma_3}$作了如下的定义：

$$\left.\begin{aligned}\overline{\gamma_1} &= \epsilon_2 - \epsilon_3 = \ln(1+e_2) - \ln(1+e_3)\\ \overline{\gamma_2} &= \epsilon_3 - \epsilon_1 = \ln(1+e_3) - \ln(1+e_1)\\ \overline{\gamma_3} &= \epsilon_1 - \epsilon_2 = \ln(1+e_1) - \ln(1+e_2)\end{aligned}\right\} \qquad (3.48)$$

但应注意 Nadai 对 $\overline{\gamma_2}$ 定义为 $\epsilon_3-\epsilon_1$，而不是 $\epsilon_1-\epsilon_3$。

八面体面素的自然剪应变$\overline{\gamma_8}$的定义是用其增量 $d\overline{\gamma_8}$ 来表示的（不直接定义$\overline{\gamma_8}$，这与定义 $d\epsilon=\frac{dl}{l}$相似，不直接定义 ϵ），因为在大应变情况下，应变增量之间的相互关系同小应变概念下应变之间的关系是相同的，因此根据（3.61）式可得：

$$d\overline{\gamma_8} = \frac{2}{3}\sqrt{(d\epsilon_1 - d\epsilon_2)^2 + (d\epsilon_2 - d\epsilon_3)^2 + (d\epsilon_3 - d\epsilon_1)^2}$$

Nadai 认为：当主应变的增量成比例地增大时，即

$$d\epsilon_1 : d\epsilon_2 : d\epsilon_3 = C_1 : C_2 : C_3$$

便可得到形变理论的应力应变关系。将（3.66）式积分，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\epsilon_1}{d\epsilon_2} &= \frac{C_1}{C_2} \qquad d\epsilon_2 = \frac{C_2}{C_1}d\epsilon_1 \qquad \epsilon_2 = \frac{C_2}{C_1}\epsilon_1 + D_2\\ \frac{d\epsilon_1}{d\epsilon_3} &= \frac{C_1}{C_3} \qquad d\epsilon_3 = \frac{C_3}{C_1}d\epsilon_1 \qquad \epsilon_3 = \frac{C_3}{C_1}\epsilon_1 + D_3\end{aligned}\right\} \qquad (3.49)$$

当初始应变为零时，可得 $D_2 = D_3 = 0$，这时

$$\epsilon_1:\epsilon_2:\epsilon_3=C_1:C_2:C_3$$

将式（3.66）代入式（3.65）得

$$d\overline{\gamma_8}=\frac{2}{3}\sqrt{\left(1-\frac{C_2}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_2}{C_1}-\frac{C_3}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_3}{C_1}-1\right)^2}\,d\epsilon_1$$

将上式积分后，则得

$$\overline{\gamma_8}=\frac{2}{3}\sqrt{\left(1-\frac{C_2}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_2}{C_1}-\frac{C_3}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_3}{C_1}-1\right)^2}\,\epsilon_1+D$$

当初始应变为零时可得 $D=0$，并将（3.66）结果代入(3.65)式，得

$$\overline{\gamma_8}=\frac{2}{3}\sqrt{(\epsilon_1-\epsilon_2)^2+(\epsilon_2-\epsilon_3)^2+(\epsilon_3-\epsilon_1)^2}$$

应当注意，上式只适用于主应变增量成比例地增大，并且初始应变为零的情况。Nadai 应力应变方程写为

$$\begin{aligned}
\epsilon_x&=\Phi\left[\sigma_x-\frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)\right],\quad \gamma_{xy}=3\Phi\tau_{xy}\\
\epsilon_y&=\Phi\left[\sigma_y-\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_z)\right],\quad \gamma_{yz}=3\Phi\tau_{yz}\\
\epsilon_z&=\Phi\left[\sigma_z-\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\right],\quad \gamma_{zx}=3\Phi\tau_{zx}
\end{aligned}\qquad(3.50)$$

式中 $\Phi=\frac{1}{3}\cdot\frac{\overline{\gamma_8}}{\tau_8}$。如考虑 $\sigma_x-\frac{1}{2}(\sigma_y+\sigma_z)=\frac{3}{2}s_x$，则式(3.50)中的第一式又可写为

$$\epsilon_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{\gamma_8}}{\tau_8}\cdot s_x$$

因此式（3.50）可以写为

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{\gamma_s}}{\tau_s}s_x & \gamma_{xy} &= \frac{\overline{\gamma_s}}{\tau_s}\tau_{xy}\\
\epsilon_y &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{\gamma_s}}{\tau_s}s_y & \gamma_{yz} &= \frac{\overline{\gamma_s}}{\tau_s}\tau_{yz}\\
\epsilon_z &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{\gamma_s}}{\tau_s}s_z & \gamma_{zx} &= \frac{\overline{\gamma_s}}{\tau_s}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.51)$$

或写成张量形式

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{\gamma_s}}{\tau_s}s_{ij} \qquad (3.52)$$

硬化条件可按下式确定

$$\tau_s = \varphi(\overline{\gamma_s}) \qquad (3.53)$$

Nadai 理论和 Hencky 及 Ильюшин 理论一样，都是属于形变（全量）理论的类型，但 Nadai 理论忽略了总应变中的弹性应变部分，而且考虑的是大变形和强化材料的情况，但在使用 Nadai 理论时，要使主应变的方向和比例保持不变，而且初始应变应该等于零。

§ 3.7 形变理论的小结

前面已经叙述了弹塑性形变理论的物理方程，现将其中要点总结如下：

（一）体积变化规律：在弹性及塑性的主动或被动变形时，固体体积的改变与平均应力成正比，而体积应变系数始终保持为同一常数。即

$$\sigma_m = 3K\epsilon_m \quad \text{而} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

（二）主动变形时形状改变规律：在弹性变形及简单加载时的塑性变形情况下，应力偏量分量与相应的应变偏量分量成正比，即

$$s_x = \frac{2\sigma_i}{3e_i} e_x, \quad \cdots\cdots$$

（三）主动加载时，应力强度与应变强度之间关系的规律：任何一种材料，在某一主动变形（弹性或塑性）情况下，物体中的 σ_i 是 e_i 的一定函数，即

$$\sigma_i = \Phi(e_i)$$

这里 Φ 的形式只与材料的性质有关，而 σ_i 与 e_i 的关系应由实验确定。由前面探讨中，我们知道它可以通过单向拉伸实验得到。

（四）被动变形规律：将塑性状态的物体简单地卸载（部分地或全部地），在卸载开始后任何一时刻的应力偏量分量与卸载开始时的相应应变偏量分量及卸载时所引起的相应的弹性应变偏量分量有关，即

$$s_{ij} = s_{ij}^* - \widetilde{s_{ij}} = 2G'e_{ij} - 2G\widetilde{e_{ij}}$$

有了上面所叙述的几点规律，我们便可以去解决具体问题了。在弹性理论中，求解具体问题时必须从基本方程出发。这些基本方程是，平衡方程、几何方程及物理方程。解塑性理论问题时也有相同的情况，不同之点在于物理方程已经不是 Hooke 定律，而是前面所讲的弹塑性小变形理论的物理方程。现在我们把这些基本方程列于下面：

（一）平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

（二）几何方程

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

（三）物理方程

(a) Ильюшин 理论　　$e_{ij} = \frac{3}{2} \cdot \frac{e_i}{\sigma_i} s_{ij}$

其中　　$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2}$$

$$\sigma_i = E' e_i$$

(b) Nadai 理论　　$\epsilon_{ij} = \frac{\overline{\gamma_8}}{2\tau_8} s_{ij}$

其中　　$\overline{\gamma_8} = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}$

$$\tau_8 = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\tau_8 = \phi(\overline{\gamma_8})$$

(c) Hencky 理论　　$e_{ij} = \frac{1+\phi}{2G} s_{ij} = \psi s_{ij}$

或　　$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\phi}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{\phi + \frac{3\nu}{1+\nu}}{1+\phi} \sigma_m \delta_{ij} \right]$

其中　　$\phi = \frac{3G e_i^p}{\sigma_i}$

$$e_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1^p - \varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_2^p - \varepsilon_3^p)^2 + (\varepsilon_3^p - \varepsilon_1^p)^2}$$

当考虑材料强化效应时，$\sigma_i = \Phi(e_i)$，不考虑强化效应时 $\sigma_i = \sigma_s$。

$$\psi = \frac{3e_i^p G + \sigma_s}{3\sigma_i G}$$

总结起来，在形变理论中，有三个平衡方程，六个几何方程，六个物理方程，σ_i，e_i（或 τ_8，γ_8），的表达式以及它们之间的关系。共有十八个方程式，未知函数有六个应力分量，六个应变分量，三个位移分量，以及 σ_i，F'，e_i，也是十八个，因而从数学形式上，问题得到了解决，当然在求解问题时，还应该满足相应的边界条件：

$$\sigma_{ij} n_j = T_i$$

但是，实际上这样一般性所提出的问题，由于包括了非线性的物理方程，经常是很难求得解答的。由于求解的困难，在塑性理论中常常作一些简化，例如略去弹性变形，略去硬化现象等。这样对于某些简单的问题是能够找出解答的。

§ 3.8 例　　题

例一、圆轴扭转

已知受扭矩作用的圆轴，材料是理想弹塑性的，试求圆轴弹性极限扭矩，塑性极限扭矩，弹塑性分界半径与扭转角 θ 之间的关系，以及卸载后残余应力和残余应变的值。

解：因为圆杆处于纯扭状态，故

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \gamma_{r\theta} = \gamma_{zr} = 0$$

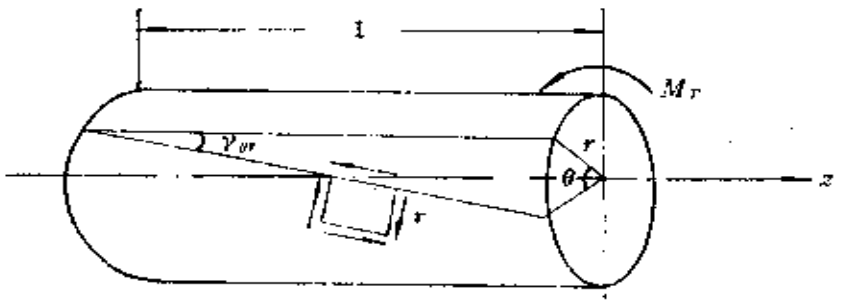


图 3.10 受扭的圆轴

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{r\theta} = \tau_{zr} = 0$$

因此可得 $$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{3}{2}\gamma_{\theta z}^2} = \frac{\gamma_{\theta z}}{\sqrt{3}}$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{6\tau_{\theta z}^2} = \sqrt{3}\,\tau_{\theta z}$$

$$M_T = \int_0^R \tau_{\theta z}(2\pi r\,dr)r$$

$$= 2\pi\int_0^R \tau_{\theta z} r^2 dr$$

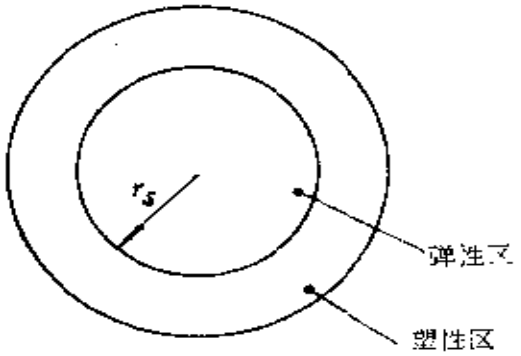


图 3.11 受扭圆轴的弹塑性区

弹性阶段：

$$\tau_{\theta z} = G\gamma_{\theta z} = Gr\theta$$

$$M_T = 2\pi\int_0^R Gr\theta r^2 dr = 2\pi G\theta\frac{r^4}{4}\Big|_0^R$$

$$= \frac{\pi G\theta R^4}{2} = \frac{\pi R^3}{2}\tau_{\theta z}$$

此处 $\tau_{\theta z}$ 是 $r = R$ 处的剪应力。

塑性阶段：

由于最外层剪应力最大，故外层首先进入塑性阶段，即外层为

塑性区，内层为弹性区，由于已经假定材料为理想弹塑性体，故在弹性区应有

$$\sigma_i = E\varepsilon_i = 3G\varepsilon_i$$

在塑性区，由于材料是理想弹塑性体，故

$$\sigma_i = \sigma_s$$

在弹性区与塑性区交界处（$r = r_s$ 处）σ_i 应相等

$$\sigma_i = 3G\varepsilon_i = \sigma_s, \quad \varepsilon_i = \frac{\sigma_s}{3G}$$

已有 $$e_i = \frac{\gamma_{\theta z}}{\sqrt{3}}, \quad \gamma_{\theta z} = \sqrt{3}\,\varepsilon_i = \theta r$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{\theta}\varepsilon_i, \qquad dr = d\left(\frac{\sqrt{3}}{\theta}e_i\right) = \frac{\sqrt{3}}{\theta}de_i$$

因此 $$M_T = \int_0^R \tau_{\theta z}(2\pi r\,dr)r = 2\pi\int_0^R \tau_{\theta z}r^2dr$$

已有 $$\sigma_i = \sqrt{3}\,\tau_{\theta z}, \quad \text{故} \quad \tau_{\theta z} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}$$

$$\int \tau_{\theta z}r^2dr = \int \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\theta}e_i\right)^2\frac{\sqrt{3}}{\theta}de_i$$

$$= \int \frac{3}{\theta^3}\sigma_i e_i^2 de_i$$

当 $r = 0$ 时， $\varepsilon_i = 0$

当 $r = R$ 时，

$$\varepsilon_i = \frac{\frac{R}{\sqrt{3}}}{\theta} = \frac{R\theta}{\sqrt{3}}$$

故 $$M_T = 2\pi \int_0^{\frac{R\theta}{\sqrt{3}}} \frac{3}{\theta^3}\sigma_i e_i^2 d e_i$$

$$= \frac{6\pi}{\theta^3} \int_0^{R\theta/\sqrt{3}} \sigma_i e_i^2 d e_i$$

沿着不同半径 r 处 e_i、σ_i 均不同。

在弹性区 $$e_i = \frac{\theta}{\sqrt{3}} r$$

$$\sigma_i = 3G e_i = \sqrt{3}\, G\theta r$$

在塑性区 $$\sigma_i = \frac{\theta}{\sqrt{3}} r$$

$\sigma_i = \sigma_s$（与半径无关，保持为常数）。M_T 公式可分二段积分，即弹性区与塑性区分别积分，在分界处 $r = r_s$。

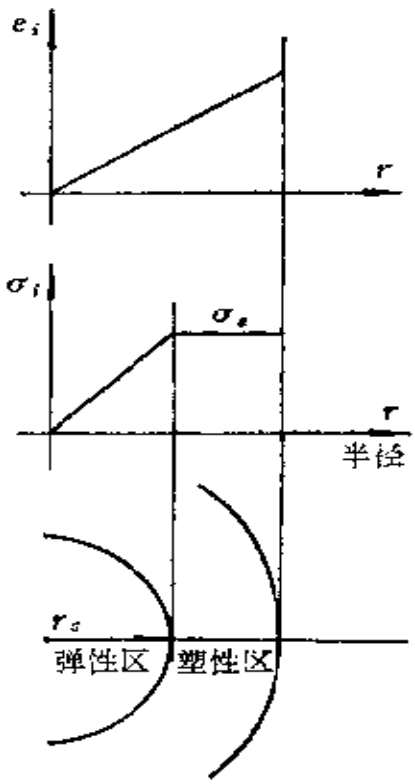


图 3.12 弹性区与塑性区的 σ_i 和 ε_i

在 $r = r_s$ 处，

$$e_i = \frac{\sigma_s}{3G}, \qquad e_i = \frac{\theta}{\sqrt{3}} r_s,$$

$$r_s = \frac{\sigma_s}{3G} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\theta} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G\theta}$$

$$M_T = \frac{6\pi}{\theta^3}\left(\int_0^{\frac{\sigma_s}{3G}} \sigma_i e_i^2 d e_i + \int_{\frac{\sigma_s}{3G}}^{\frac{R\theta}{\sqrt{3}}} \sigma_i e_i^2 d e_i \right)$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}}\sigma_s - \frac{\pi \sigma_s^4}{54 G^3 \theta^3}$$

此值为圆轴处于弹塑性阶段所能承受的扭矩。当整个截面都处于塑性阶段时，则有

$$M_T^p = \frac{6\pi}{\theta^3}\int_0^{\frac{R\theta}{\sqrt{3}}} \sigma_i \varepsilon_i^2 d\varepsilon_i = \frac{6\pi}{\theta^3}\int_0^{\frac{R^3}{\sqrt{3}}} \sigma_s \varepsilon_i^2 d\varepsilon_i = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}R^3\sigma_s$$

弹性极限扭矩 M_T^e 可按下式求出

由于 $$\tau_{\theta z} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} = \frac{3G\varepsilon_i}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,G\theta r/\sqrt{3} = G\theta r$$

$$M_T^e = 2\pi\int_0^R G\theta r^3 dr = \frac{\pi R^4}{2}G\theta$$

在 $r = R$ 处， $$\sigma_1 = \sigma_3 = \sqrt{3}\,\tau_{\theta z} = \sqrt{3}\,\theta RG$$

故 $$G\theta = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}R}$$

弹塑性分界半径为 $$r_s = \sqrt{\frac{\sigma_s}{3G\theta}}$$

故最后有 $$M_T^e = \frac{\pi R^4}{2}\cdot\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}R} = \frac{\pi R^3}{2\sqrt{3}}\sigma_s$$

将 M_T^p 和 M_T^e 相比，则有

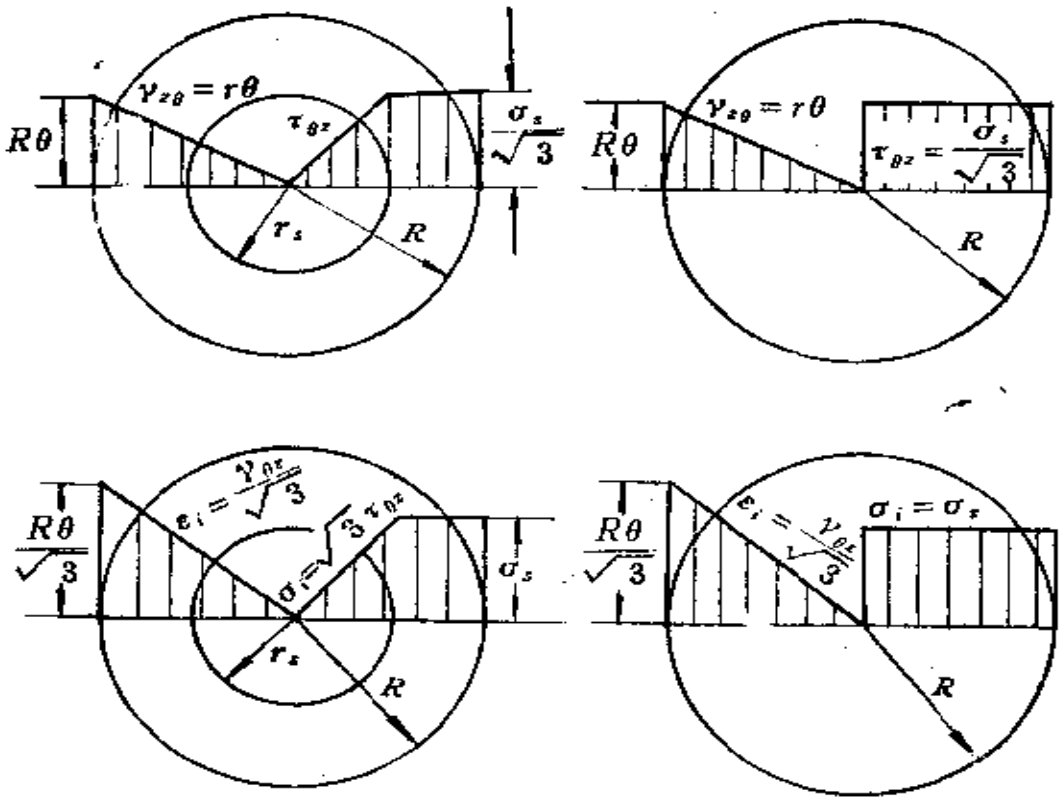
$$\frac{M_T^p}{M_T^e} = \frac{\frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}}\sigma_s}{\frac{\pi R^3}{2\sqrt{3}}\sigma_s} = \frac{4}{3}$$

当外载荷全部去除后，残余应力及残余变形可分下述情况计算：

(1) 内层弹性区、外层塑性区的情况

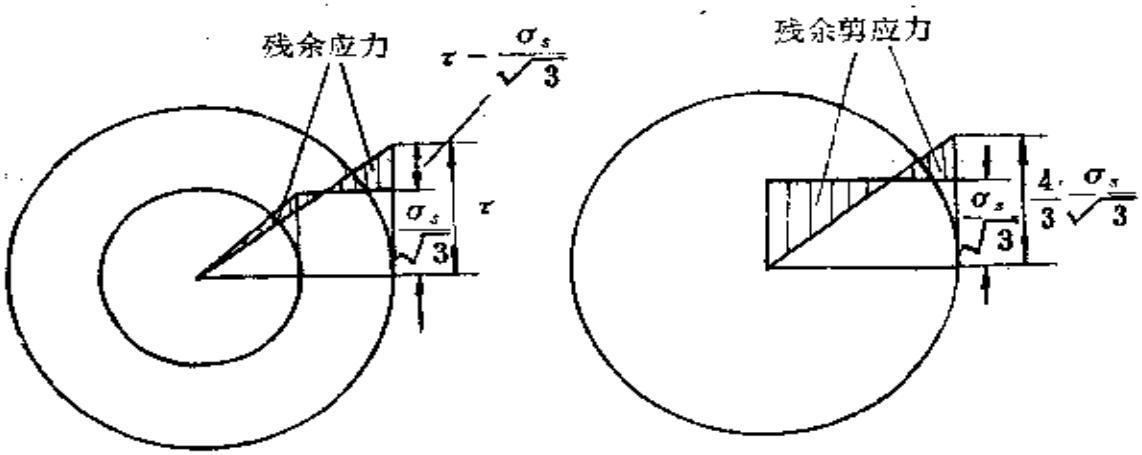
$$M_T = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}}\sigma_s - \frac{\pi\sigma_s^4}{54G^3\theta^3}$$

$$M_T = \frac{\pi R^4}{2}G\theta, \quad RG\theta = \tau, \quad M_T = \frac{\pi R^3}{2}\tau$$



A 内层弹性区，外层塑性区　　*B* 整个截面都进入塑性区。

截面左侧为应变分布，右侧为应力分布。



弹塑性截面杆的残余应力分布图　　塑性截面杆的残余应力分布图

图　3.13

$$\tau = \frac{M_T}{\frac{\pi R^3}{2}} = \frac{M_T R}{J_0}, \quad J_0 = \frac{\pi R^4}{2}$$是圆的极惯性矩

卸去扭矩 M_T，意味着需卸去剪应力 τ，而 τ 成线性分布。残余应力，如图 3.13 所示，阴影区即为残余应力，二处的残余剪应力符号相反。

$$\tau'|_{r=0} = 0$$

$$\tau'|_{r=R} = \tau - \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = \frac{M_T}{\frac{\pi R^3}{2}} - \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

$$\tau'|_{r=r_s} = -\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} + \tau\frac{r_s}{R} = \frac{M_T}{\frac{\pi R^3}{2}}\frac{r_s}{R} - \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

(2) 整个截面完全是塑性区的情况：

$$\tau = \frac{M_T}{\frac{\pi R^4}{2}}, \quad M_T = M_T^p = \frac{2\pi R^4}{3\sqrt{3}}\sigma_s, \quad \tau = \frac{4}{3}\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

残余应力如图 3.13 中阴影线所示。

$$\tau'|_{r=0} = -\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}, \quad \tau'|_{r=R} = \tau - \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

即圆轴中心处残余应力的绝对值最大。应力，应变和残余应力的分布画于图 3.13 上。

例二、设作用于具有图 3.14 所示的应力应变曲线的材料上的三个主应力为

$$\sigma_1 = 10kg/mm^2$$

$$\sigma_2 = 2kg/mm^2$$

$$\sigma_3 = -5kg/mm^2$$

试求此时产生的主应变 e_1、e_2、e_3。

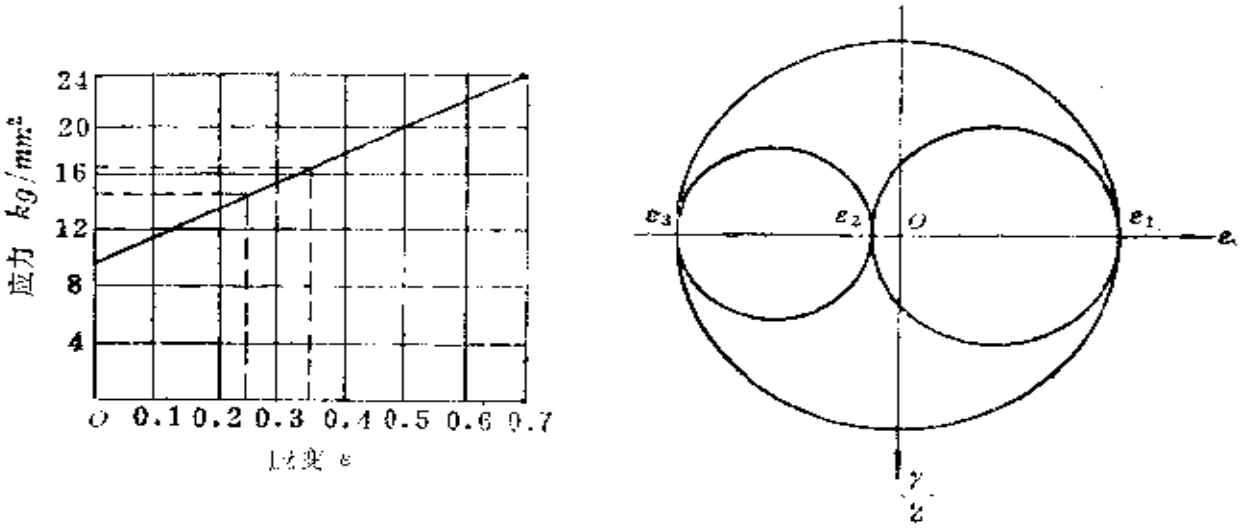


图 3.14

解：

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(10-2)^2+(2+5)^2+(-5-10)^2}$$

$$= \sqrt{169} = 13 kg/mm^3$$

由曲线查得 $e_i = 0.15$

$$E' = \frac{\sigma_i}{e_i} = \frac{13.0}{0.15} = 86.5 kg/mm^2$$

$$e_1 = \frac{1}{E'}\left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)\right] = \frac{1}{86.5}\left[10 - \frac{1}{2}(2-5)\right]$$

$$= \frac{11.5}{86.5} = 0.133$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E'}\left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_1)\right] = \frac{1}{86.5}\left[2 - \frac{1}{2}(-5+10)\right]$$

$$= -\frac{0.5}{86.5} = -0.006$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E'}\left[\sigma_3 - \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\right] = \frac{1}{86.5}\left[-5 - \frac{1}{2}(10+2)\right]$$

$$= -\frac{11}{86.5} = -0.127$$

习　　题

1. 设已知厚壁筒的内半径为 a，外半径为 b，受内压 p 的作用，如应力应变关系可用幂函数 $\sigma_i = A\varepsilon_i^m$ 表示，试求厚壁筒内应力分量 σ_r，σ_θ 及 p 的表达式。
2. 试证明理想弹性线性强化材料当进入塑性阶段后，Ильюшин 函数为 $\omega = \left(1 - \frac{E_1}{E}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon}\right)$ 式中所给的值如图 3.7*b* 所示。
3. 平板在 x 轴方向均匀受拉，在板上每一点的应力都有 $\sigma_x = \text{const}$，试问 σ_y 为多大时板的应力强度和应变强度将为最小？
4. 设有理想弹塑性材料，体积变形是纯弹性的，试分析单向拉伸时，由于杆件的伸长，横向变形系数变化的规律。
5. 已知小单元体受压时的状态为 $\sigma_2 = 0$，$\varepsilon_3 = 0$，试求屈服开始时 σ_1 和 ε_1 的表达式。
6. 对内径为 a，外径为 b 的空心圆轴，
   ① 求弹性极限扭矩 T_e 和塑性极限扭矩 T_s。（材料是理想弹塑性的）。
   ② 求扭矩 T 和单位长度扭转角 α 之间的关系。

7. 试推导线性弹塑性材料的 $\omega(\varepsilon)$：

$$\omega(\varepsilon)=\begin{cases}0 & |\varepsilon|\leqslant\varepsilon_s\\ \lambda\left[1-\dfrac{\varepsilon_s}{\varepsilon}\operatorname{sign}\varepsilon\right], & |\varepsilon|>\varepsilon_s\end{cases}$$

$$0\leqslant\lambda=1-\frac{E'}{E}\leqslant 1$$

8. 对线性弹塑性随动强化模型，若 $E'=\dfrac{E}{100}$，试求：

(1) 已给定路径为 $0\to 1.5\sigma_s\to 0\to-\sigma_s\to 0$，求应力二次为零时，与应力对应的应变值为何？

(2) 已给定应变路径 $0\to 4\varepsilon_s\to 0\to-4\varepsilon_s\to 0$，求应变二次为零时对应的应力值如何？

9. 为了使幂次强化曲线在 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_s$ 满足 Hooke 定律，建议用公式

$$\sigma=\begin{cases}E\varepsilon & \varepsilon\leqslant\varepsilon_s\\ A(1-\varepsilon_e)^n & \varepsilon>\varepsilon_s,\quad 0<n<1\end{cases}$$

试求：(1) 为保证 σ 及 $\dfrac{d\sigma}{d\varepsilon}$ 在 $\varepsilon=\varepsilon_s$ 处连续，试确定 A、ε_e 值。

(2) 如将该曲线表示成 $\sigma=E\varepsilon[1-\omega(\varepsilon)]$ 形式，试给出 $\omega(\varepsilon)$ 的表达式。

答　　案

1. $\sigma_r=\dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+1}A\cdot B^m\left(\dfrac{1}{b^{2m}}-\dfrac{1}{r^{2m}}\right)$,

$\sigma_\theta=-\dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m+1}AB^m\left(\dfrac{1}{b^{2m}}+\dfrac{2m-1}{r^{2m}}\right)$,

$$p = -\frac{1}{2m}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} AB^m\left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{a^{2m}}\right)。$$

其中 $B = r \cdot u$

2. 证明从略

4. 提示：由 σ_1 和 σ_2 所确定的平面应力状态，其应力强度为

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

令 $$\sigma_x = \sigma_1 = S, \quad \sigma_y = \xi\sigma_x$$

则 $$\sigma_i = |\sigma_1|\sqrt{1 + \xi^2 - \xi}$$

由 $\frac{d\sigma_i}{d\xi} = 0$ 得到只有当 $\xi = \frac{1}{2}$ 时 σ_i 获得最小值

$$\sigma_i\min = \frac{\sqrt{3}}{2}|\sigma_1|$$

当 $$\sigma_2 = 0 \text{ 或 } \sigma_2 = \sigma_1 \text{ 时 } \sigma_i = |\sigma_1|$$

如果应变强度 ε_i 是应力强度 σ_i 的单调函数，则也在 $\xi = \frac{1}{2}$ 时获得最小值。

4. $$\nu' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\xi}(1 - 2\nu),$$

$$\xi = \frac{E}{\sigma_s}\varepsilon_s$$

对于钢材可取 $$\nu = 0.3, \quad \nu' = \frac{1}{2} - \frac{1}{5\xi}$$

ξ	1	2	3	4	5	10	∞
ν'	0.3	0.4	0.433	0.45	0.46	0.48	0.5

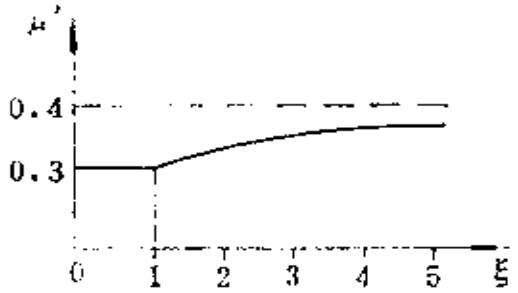


图 3.15

5. $$\varepsilon_1=\frac{1}{E}(\nu^2-1)\sigma_2=-\frac{1}{E}(\nu^2-1)\sigma_1$$

6. (1) $$T_e=\frac{\pi\tau_s}{2b}(b^4-a^4),\quad T_s=\frac{2}{3}\pi\tau_s(b^3-a^3)。$$

(2) $$T=T_s\left\{1-\frac{\left(\frac{a_s}{a}\right)^3+3\left(\frac{a}{a_s}\right)-4}{4\left[\left(\frac{b}{a}\right)^3-1\right]}\right\},\quad a_s=\frac{\tau_s}{aG}。$$

7. 证明（略）。

8. (1) 对应的应变为 $0\to 51\varepsilon_s\to 49.5\varepsilon_s\to-\varepsilon_s\to 0$。

(2) 对应的应力为 $0\to 1.4\sigma_s\to-0.99\sigma_s\to-1.4\sigma_s\to 0.99\sigma_s$。

9. (1) $$\varepsilon_e=(1-n)\varepsilon_s,\quad A=\frac{E\varepsilon_s}{(n\varepsilon_s)^n},$$

$$\sigma=\begin{cases}E\varepsilon & \varepsilon\leqslant\varepsilon_s\\ \dfrac{E\varepsilon_s}{(n\varepsilon_s)^n}[\varepsilon-(1-n)\varepsilon_s]^n & \varepsilon>\varepsilon_s\end{cases}\quad(0<n<1)。$$

(2) $$\omega(\varepsilon)=\begin{cases}0 & \varepsilon\leqslant\varepsilon_s\\ 1-\dfrac{\left[1+\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}-1\right)\right]^n}{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}} & \varepsilon>\varepsilon_s\end{cases},\quad 0<n<1$$

第四章　增量理论

§ 4.1　概　　述

增量理论又称流动理论，是描述材料在塑性状态时应力与应变速度或应变增量之间关系的理论。历史上这个理论发展得比形变理论更早，它不受加载条件的限制，在理论上比形变理论更有优越性，但在实际应用时，需要按加载过程中的变形路径进行积分，因此计算是比较复杂的。St·Venant 首先提出了应变增量主轴与应力主轴相重合的假定，此后 Lèvy 进一步提出在塑性变形过程中应变增量各分量与相应的应力偏量成同一比例，从而建立了 Lèvy—Mises 理论，在此基础上，Prandtl 和 Reuss 考虑了材料屈服后应变中的弹性部分，即认为在塑性变形阶段的应变增量应包括弹性部分 de_{ij}^{e} 和塑性部分 de_{ij}^{p}，从而建立了 Prandtl—Reuss 理论。在五十年代初期，Drucker 提出了稳定材料的假说，根据这一假说，并引进塑性势的概念，可以证明 St·Venant—Lèvy 关于应变增量主轴与应力主轴重合假设的正确性。增量理论尽管在处理具体问题时比较困难，近年来应用到解决塑性力学中的平面应变问题和极限分析问题中，都取得了很大的进展。

在形变理论中，由于假设了简单加载的条件，因而满足比例变形的条件，如图 4.1.a 所示。在复杂加载的条件下，变形过程将不按统一的比例变化，因而问题比形变理论复杂得多。在这种情况下，可以假设在某一瞬时，应变增量 de_{ij} 的主轴与应力偏量的主轴是重合的，因而各应力偏量分量与各应变增量分量在此瞬时成同一比例（如图 4.1.b）。由此在各向同性体的塑性流动理论中，

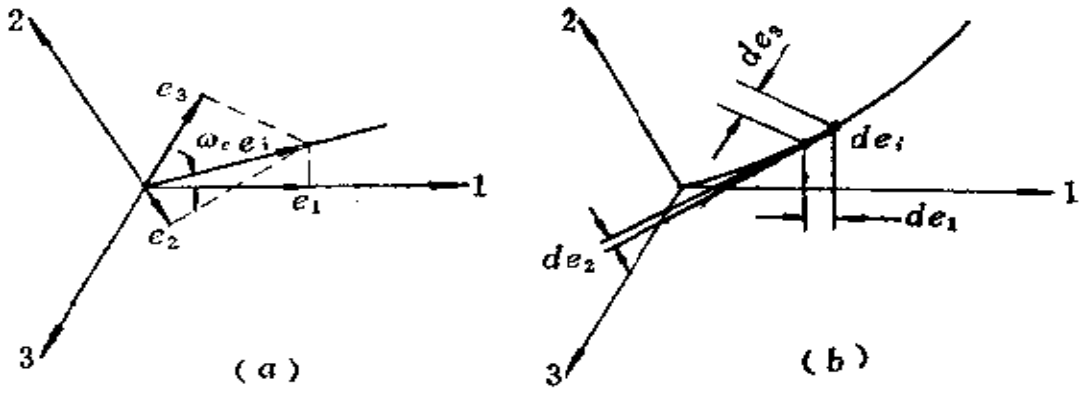


图 4.1

(a) 比例变形过程; (b) 复杂（非比例）变形过程。

有下列假设，而这些假设一般是可以通过实验验证的。

1. 主伸长增量（速度）的方向与主应力方向重合。

2. 体积变形的变化与平均压力成正比，而且完全是弹性的。

3. 应力偏量与应变增量（速度）成比例。

4. 应力强度是变形增量（速度）强度的函数。对于理想塑性材料，应力强度是个常数。

在塑性变形过程中，变形体各质点在运动时，其间的距离是变化的，质点间距离改变得越快，则应变速度越大。设介质变形时，沿 x，y，z 方向的位移速度分量为 $\dot{u}$、$\dot{v}$、$\dot{w}$，位移速度与位移本身都是时间的连续函数：

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

如果应变很小，位移速度分量可用相应的位移分量对时间 t 的偏导数来表达：

$$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t} \qquad \dot{v}=\frac{\partial v}{\partial t} \qquad \dot{w}=\frac{\partial w}{\partial t}$$

如果考察离得很近的二点，则沿某一方向的应变速度可由该二点速度差与二点之间距离的比值的极限来确定。根据小变形的几何关系，应有

$$\dot{e}_x=\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial e_x}{\partial t}$$

$$\dot{\gamma}_{xy}=\frac{\partial \dot{u}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{v}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}$$

即相对伸长速度为

$$\dot{\varepsilon}_x=\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}=\frac{\partial e_x}{\partial t},\quad \dot{\varepsilon}_y=\frac{\partial \dot{v}}{\partial y}=\frac{\partial e_y}{\partial t},\quad \dot{\varepsilon}_z=\frac{\partial \dot{w}}{\partial z}=\frac{\partial e_z}{\partial t}$$

相对剪切速度为

$$\dot{\gamma}_{xy}=\frac{\partial \dot{u}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{v}}{\partial x}=\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t},$$

$$\dot{\gamma}_{yz}=\frac{\partial \dot{v}}{\partial z}+\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}=\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial t},$$

$$\dot{\gamma}_{zx}=\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{u}}{\partial z}=\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial t}.$$

因此，应变速度分量等于位移速度分量对相应坐标的偏导数，也等于应变对时间的偏导数。应变速度张量 $\dot{e}_{ij}$ 也可以分解，从而得到应变速度偏量 $\dot{e}_{ij}$ 和 $\dot{e}_m$。应变速度强度 $\dot{e}_i$ 可用下式表示：

$$\dot{e}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \times$$

$$\sqrt{(\dot{e}_x - \dot{e}_y)^2 + (\dot{e}_y - \dot{e}_z)^2 + (\dot{e}_z - \dot{e}_x)^2 + \frac{3}{2}(\dot{\gamma}^2_{xy} + \dot{\gamma}^2_{yz} + \dot{\gamma}^2_{zx})}$$

如用主应变速度 $\dot{e}_1$、$\dot{e}_2$、$\dot{e}_3$ 表示时，则有

$$\dot{e}_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\dot{e}_1 - \dot{e}_2)^2 + (\dot{e}_2 - \dot{e}_3)^2 + (\dot{e}_3 - \dot{e}_1)}$$

在一般情况下，$\dot{e}_{ij}$ 和 e_{ij} 的主轴不一定是重合的，因此

$$\dot{e}_i \neq \frac{\partial}{\partial t} e_i$$

只有在 $\dot{e}_{ij}$ 和 e_{ij} 的主轴是重合时，上面的等式才成立。而且只有在小变形时，才有

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} e_{ij}$$

在塑性力学中，通过大量的实验验证，发现塑性变形的规律和时间因素是没有关系的。因此这里的并不代表真实的时间，可理解为代表一个加载变形的过程。因而有时用应变增量张量 de_{ij} 代替应变速度张量 $\dot{e}_{ij}$ 更能表示不受时间参数影响的特点。

§ 4.2 Lévy-Mises 理论

Mises 曾指出：有些材料在屈服后一小段内，应力应变曲线与理想塑性材料相似，还有一些材料硬化程度弱，接近理想塑性材料，因此在他所提出的理论中假设材料是理想塑性的。Mises 还认为材料到达塑性后，由于塑性变形较大，总应变即等于塑性应变，即假设材料符合刚塑性模型，这个理论的要点可以进一步归纳如下：

(1) 在塑性区可忽略弹性应变，即总应变等于塑性应变

$$de_{ij} = de^e_{ij} + de^p_{ij} = de^p_{ij}$$

（2）体积变化是弹性的，在塑性区可认为体积不变

$$K d\theta = d\sigma_m \tag{4.1}$$

$$d\theta = de^p_x + de^p_y + de^p_z = 0 \quad \therefore K \to \infty \quad \nu = \frac{1}{2}$$

（3）塑性应变增量的偏量与应力偏量成正比

$$de^p_{ij} = s_{ij} d\lambda$$

由于忽略弹性应变，故上式又可写为 $de_{ij} = s_{ij} d\lambda$ (4.2)

由于 $de_m = 0$，$\therefore \quad de_{ij} = s_{ij} d\lambda$ 或 $de^p_{ij} = s_{ij} d\lambda$

（4.2）式表示两个含意：

（i）塑性应变增量偏量与应力偏量主轴是重合的，即塑性应变增量与应力的主方向重合。

（ii）塑性应变增量偏量是与应力偏量是相似的，或者可表达为 $\mu_{d\varepsilon} = \mu_\sigma$，即应变偏量增量的分量与应力偏量的分量成比例。

张量表达式（4.2）写为一般方程式时为

$$\frac{de^p_x}{s_x} = \frac{de^p_y}{s_y} = \frac{de^p_z}{s_z} = \frac{d\gamma^p_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{d\gamma^p_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma^p_{zx}}{2\tau_{zx}} = d\lambda \tag{4.3a}$$

或

$$\frac{de_x}{s_x} = \frac{de_y}{s_y} = \frac{de_z}{s_z} = \frac{d\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = d\lambda \tag{4.3b}$$

$$\frac{d\varepsilon_x}{s_x} = \frac{d\varepsilon_y}{s_y} = \frac{d\varepsilon_z}{s_z} = \frac{d\gamma_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{d\gamma_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma_{zx}}{2\tau_{zx}} = d\lambda \tag{4.3c}$$

$$\frac{de^p_x}{s_x} = \frac{de^p_y}{s_y} = \frac{de^p_z}{s_z} = \frac{d\gamma^p_{xy}}{2\tau_{xy}} = \frac{d\gamma^p_{yz}}{2\tau_{yz}} = \frac{d\gamma^p_{zx}}{2\tau_{zx}} = d\lambda \tag{4.3d}$$

如座标沿主方向，则有

$$d\varepsilon_1^p = s_1 d\lambda, \quad d\varepsilon_2^p = s_2 d\lambda, \quad d\varepsilon_3^p = s_3 d\lambda \tag{4.3e}$$

式中 $d\lambda$ 为比例因子，随载荷与变形程度及点的位置而变，在同一瞬间同一载荷同一点位置，$d\lambda$ 的值是常量。

（4）屈服条件：使用 Mises 屈服准则，并认为材料是理想塑性的，此时有

$$\sigma_i = \sigma_s \text{ 即 } (\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2$$

$$\text{或 } J_2^* = k^2 \text{ 即 } \frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2] = k^2 \tag{4.4}$$

$$\text{或 } J_2^* = \frac{1}{2}(s_x^2+s_y^2+s_z^2)+\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2 = k^2$$

将方程（4.3e）中三个式子两两相减后代入（4.4）中的第一式，即得：

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}\,d\lambda}[(d\varepsilon_1^p-d\varepsilon_2^p)^2+(d\varepsilon_2^p-d\varepsilon_3^p)^2+(d\varepsilon_3^p-d\varepsilon_1^p)^2]^{\frac{1}{2}}$$

令 $d\varepsilon_i^p$ 为塑性应变增量强度，其表达式为

$$d\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3}[(d\varepsilon_1^p-d\varepsilon_2^p)^2+(d\varepsilon_2^p-d\varepsilon_3^p)^2+(d\varepsilon_3^p-d\varepsilon_1^p)^2]^{\frac{1}{2}}$$

代入上式后，得

$$\sigma_i = \frac{3d\varepsilon_i^p}{2d\lambda} \quad \therefore \quad d\lambda = \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} = \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_s} \tag{4.5}$$

由于不计弹性应变，故总应变增量等于塑性应变增量，将上述方程中的上标 p 去掉即可得该理论完整的应力应变方程式：

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3d\varepsilon_i}{2\sigma_s}s_{ij} \tag{4.6}$$

其展开式为：

$$d\varepsilon_x=\frac{3de_i}{2\sigma_s}(\sigma_x-\sigma_m),\qquad d\gamma_{xy}=\frac{3de_i}{\sigma_s}\tau_{xy},$$

$$d\varepsilon_y=\frac{3de_i}{2\sigma_s}(\sigma_y-\sigma_m),\qquad d\gamma_{yz}=\frac{3de_i}{\sigma_s}\tau_{yz},$$

$$d\varepsilon_z=\frac{3de_i}{2\sigma_s}(\sigma_z-\sigma_m)\qquad d\gamma_{zx}=\frac{3de_i}{\sigma_s}\tau_{zx}$$

展开式中只有五个独立方程，同时应满足

$$d\varepsilon_x+d\varepsilon_y+d\varepsilon_z=0 \tag{4.7}$$

式中 $$d\varepsilon_i=\sqrt{\frac{2}{3}}[(d\varepsilon_x-d\varepsilon_y)^2+(d\varepsilon_y-d\varepsilon_z)^2+(d\varepsilon_z-d\varepsilon_x)^2$$

$$+\frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)]^{\frac{1}{2}} \tag{4.8}$$

方程（4.6）也可写成应变率的形式：

$$\varepsilon_{ij}=\lambda s_{ij} \tag{4.9}$$

其展开式为

$$\dot{\varepsilon}_x=\lambda(\sigma_x-\sigma_m),\qquad \dot{\varepsilon}_y=\lambda(\sigma_y-\sigma_m)\qquad \dot{\varepsilon}_z=\lambda(\sigma_z-\sigma_m),$$

$$\dot{\gamma}_{xy}=2\lambda\tau_{xy},\qquad \dot{\gamma}_{yz}=2\lambda\tau_{yz},\qquad \dot{\gamma}_{zx}=2\lambda\tau_{zx},$$

其中 $\lambda=\dfrac{3\dot{\varepsilon}_i}{2\sigma_s}$

这里 $$\dot{\varepsilon}_i=\sqrt{\frac{2}{3}}[(\dot{\varepsilon}_x-\dot{\varepsilon}_y)^2+(\dot{\varepsilon}_y-\dot{\varepsilon}_z)^2+(\dot{\varepsilon}_z-\dot{\varepsilon}_x)^2$$

$$+\frac{3}{2}(\dot{\gamma}_{xy}^2+\dot{\gamma}_{yz}^2+\dot{\gamma}_{zx}^2)]^{\frac{1}{2}}$$

因此
$$\frac{\dot{\varepsilon}_x}{s_x}=\frac{\dot{\varepsilon}_y}{s_y}=\frac{\dot{\varepsilon}_z}{s_z}=\frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2\tau_{xy}}=\frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2\tau_{yz}}=\frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2\tau_{zx}}=\dot{\lambda}$$

根据以上分析可见，如果已知应变增量，便能求得应力偏量的分量，或法向应力之差 $(\sigma_1-\sigma_2)$、$(\sigma_2-\sigma_3)$、$(\sigma_3-\sigma_1)$，但一般求不出应力分量 σ_1，σ_2，σ_3，因为 $d\theta$ 等于零，故 $d\sigma_m$ 便不能唯一地确定，如果已知应力分量，则能求得应力偏量，但不能求得应变增量的分量数值，只能求得它们之间的一个比例值，因为对于理想塑性材料，在应力和应变关系式（4.6）中，应变分量的增量与应力分量之间没有单值的关系。

§ 4.3 Prandtl-Reuss 理论

Prandtl—Reuss 理论是在 Mises 理论的基础上发展的，这个理论认为对于变形较大的问题，忽略弹性应变是可以的，但当变形较小时，例如当弹性应变与塑性应变部份相比属于同一量级时，显然略去弹性应变常会带来较大的误差，因而提出在塑性区应考虑弹性应变部份。即总应变增量偏量的分量是由两部分组成的，其表达式为

$$de_{ij}=de_{ij}^{e}+de_{ij}^{p}, \tag{4.10}$$

弹性变形部份由虎克定律确定，即

$$\begin{aligned}&de_x^e=\frac{1}{2G}ds_x,\quad de_y^e=\frac{1}{2G}ds_y,\quad de_z^e=\frac{1}{2G}ds_z\\&d\gamma_{xy}^e=\frac{1}{G}d\tau_{xy},\quad d\gamma_{yz}^e=\frac{1}{G}d\tau_{yz},\quad d\gamma_{zx}^e=\frac{1}{G}d\tau_{zx}\end{aligned} \tag{4.11}$$

塑性变形规律按（4.3a）式确定，代入（4.10）即得应变分量

的总增量表达式，

$$\left.\begin{aligned} de_x &= \frac{1}{2G}ds_x + s_x d\lambda, \qquad d\gamma_{xy} = \frac{d\tau_{xy}}{G} + 2\tau_{xy}d\lambda \\ de_y &= \frac{1}{2G}ds_y + s_y d\lambda, \qquad d\gamma_{yz} = \frac{d\tau_{yz}}{G} + 2\tau_{yz}d\lambda \\ de_z &= \frac{1}{2G}ds_z + s_z d\lambda, \qquad d\gamma_{zx} = \frac{d\tau_{zx}}{G} + 2\tau_{zx}d\lambda \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

即 $$de_{ij} = \frac{1}{2G}ds_{ij} + s_{ij}d\lambda$$

方程（4.12）同样可表达为对时间的导数的形式

$$\left.\begin{aligned} \dot{e}_x &= \frac{1}{2G}\dot{s}_x + \dot{\lambda}s_x, \qquad \dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{G}\dot{\tau}_{xy} + 2\dot{\lambda}\tau_{xy} \\ \dot{e}_y &= \frac{1}{2G}\dot{s}_y + \dot{\lambda}s_y, \qquad \dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{G}\dot{\tau}_{yz} + 2\dot{\lambda}\tau_{yz} \\ \dot{e}_z &= \frac{1}{2G}\dot{s}_z + \dot{\lambda}s_z, \qquad \dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{G}\dot{\tau}_{zx} + 2\dot{\lambda}\tau_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

即 $$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G}\dot{s}_{ij} + s_{ij}\dot{\lambda}.$$

为了确定比例系数 λ，将屈服条件写成如下形式

$$J_2^* = \frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = k^2 \tag{4.14}$$

将上式对时间求导数，则有

$$s_x\dot{s}_x + s_y\dot{s}_y + s_z\dot{s}_z + 2\tau_{xy}\dot{\tau}_{xy} + 2\tau_{yz}\dot{\tau}_{yz} + 2\tau_{zx}\dot{\tau}_{zx} = 0 \tag{4.15}$$

以 s_x、s_y、s_z 分别乘方程（4.13）的左三式，以 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} 分别乘（4.13）的右三式并相加，利用（4.15）即得

$$2k^2 \cdot 2G\dot{\lambda} = 2G(\dot{e}_x s_x + \dot{e}_y s_y + \dot{e}_z s_z + \dot{\gamma}_{xy}\tau_{xy} + \dot{\gamma}_{yz}\tau_{yz} + \dot{\gamma}_{zx}\tau_{zx})$$

如令 $$\dot{W} = s_x\dot{e}_x + s_y\dot{e}_y + s_z\dot{e}_z + \tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy} + \tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz} + \tau_{zx}\dot{\gamma}_{zx}$$

此处 $\dot{W}$ 即可解释为对应于形状改变功的变化率（或功的速率）。在塑性流动时，$\dot{W}$ 恒大于零，即得 $\lambda = \frac{\dot{W}}{2k^2}$，于是方程（4.13）可改写为：

$$\left.\begin{aligned} \dot{s}_x &= 2G\left(\dot{e}_x - \frac{\dot{W}}{2k^2}s_x\right) & \dot{\tau}_{xy} &= G\left[\dot{\gamma}_{xy} - \frac{\dot{W}}{k^2}\tau_{xy}\right] \\ \dot{s}_y &= 2G\left(\dot{e}_y - \frac{\dot{W}}{2k^2}s_y\right) & \dot{\tau}_{yz} &= G\left[\dot{\gamma}_{yz} - \frac{\dot{W}}{k^2}\tau_{yz}\right] \\ \dot{s}_z &= 2G\left(\dot{e}_z - \frac{\dot{W}}{2k^2}s_z\right) & \dot{\tau}_{zx} &= G\left[\dot{\gamma}_{zx} - \frac{\dot{W}}{k^2}\tau_{zx}\right] \end{aligned}\right\} \quad (4.16)$$

即 $$\dot{s}_{ij} = 2G\left(\dot{e}_{ij} - \frac{\dot{W}}{2k^2}s_{ij}\right).$$

Prandtl—Reuss 理论与 Lévy—Mises 的基本假设是类似的，差别在于第一条，前者考虑了塑性区的弹性应变部份，因而得到了不同的应力应变表达式。增量理论着重指出了塑性应变增量的偏量与应力偏量的关系，可理解为它是建立起各瞬时应力（或应力增量）与应变的变化关系。考虑各瞬时在某一应力状态 σ_1、σ_2、σ_3 下对应于该应力状态，产生一个相应的塑性应变分量的增量是 de_1^p，de_2^p，de_3^p（并且在此瞬时应力主轴方向与塑性应变增量的主方向一致），而整个变形过程可以由各瞬时的变形累积而得。因此该理论能表达出加载过程对变形的影响，能反映出复杂加载的状况。这两个理论都是在加载的情况时才能应用，卸载情况仍需按 Hooke 定律进行计算。

§ 4.4 关于应变强化的模型

当材料发生塑性变形后，弹性范围的边界称为加载曲面或强化

曲面，其函数表达式称为后继屈服函数，又称强化函数或强化条件。对于理想塑性材料，初始屈服面和后继屈服面是重合的，有时将理想塑性材料的屈服曲面称为极限曲面。对于强化材料，其加载曲面随着应变强化的发展而产生形状和位置的变化。一般说来，加载曲面的形状和位置不仅依赖于相应的应力状态，而且还依赖于整个变形历史。

强化模型的选取，决定了加载曲面的变化规律，这个规律应和实验结果相符合。但是这个问题是相当复杂的，即使在单向拉压的情况下，材料强化的特性也因不同材料和不同条件而变化。如图 4.2 所示，当试件首先承受拉伸，在应力超过屈服极限后的 B 点，进行卸载，并向反方向加载，这时所得到的压缩屈服极限因不同材料和不同条件而不同。

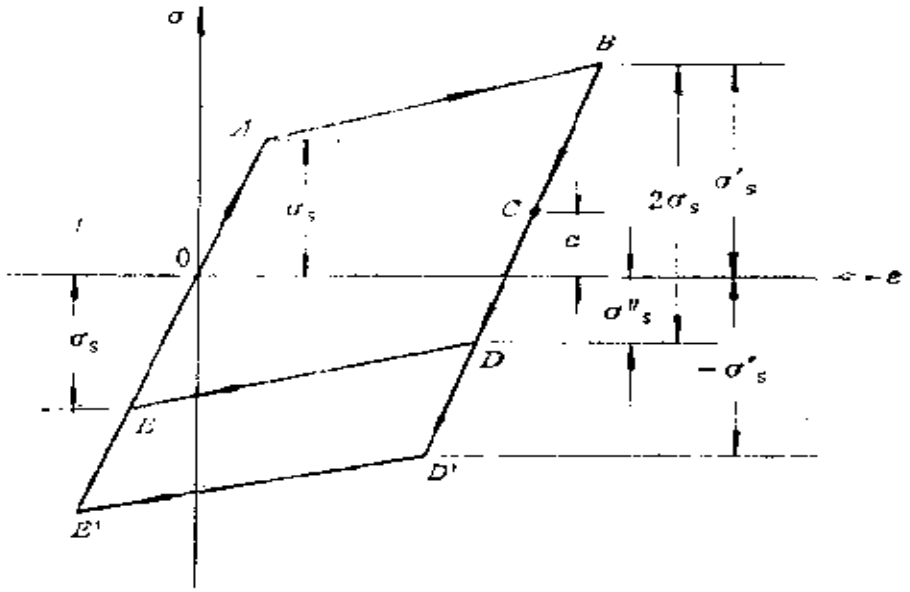


图 4.2 单向强化和随动强化示意图

图 4.2 中 $OABD'E'$ 代表等向强化，也称作各向同性强化。根据这一模型，无论在哪个方向加载，拉伸和压缩的强化总是相等地产生和发展，如图中 B 与 D' 点所对应的应力值均为 σ_s'（指绝对值），在这种情况下，压缩屈服应力和弹性区间都随着材

料的强化而增大。它可表示成

$$|\sigma| = \sigma_s + H(\int |de^p|).$$

这里不论 de^p 是正还是负，$|\sigma|$ 都在不断增加，函数 $H(\int |de^p|)$ 是表征材料强化程度的参量，曲线 H 可由拉伸实验来确定。

等向强化模型是不考虑反向加载时的 Bauschinger 效应的。

图 4.2 中的 $OABCDE$ 代表随动强化模型，弹性卸载区间是初始屈服应力 σ_s 的两倍，根据这种模型，材料总的弹性区间保持不变，但是由于拉伸时强化而使得压缩屈服应力的幅值减小了，即随动强化模型是考虑 Bauschinger 效应的。随动强化模型用下式表示

$$\sigma_s' - \sigma_s'' = 2\sigma_s$$

如果 C 点是 BD 线段的中点，并记 α 是 C 点的纵坐标值，则加载曲线可写成

$$f = |\sigma - \alpha| - \sigma_s = 0$$

即

$$|\sigma - \alpha| = \sigma_s$$

对线性强化情形可令 $\alpha = c\varepsilon^p$，此时有

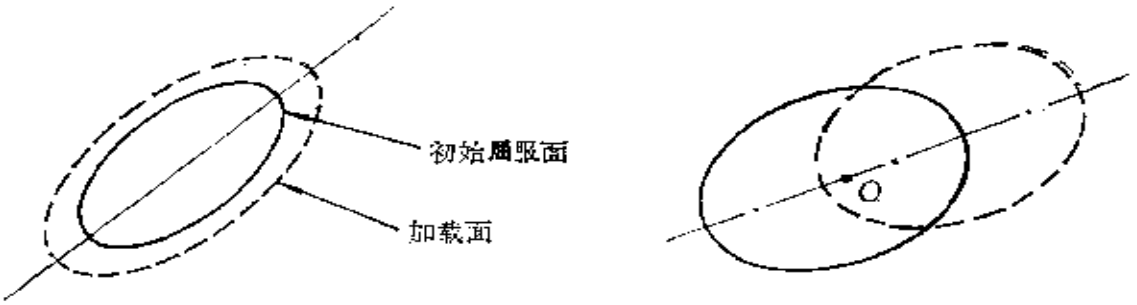
$$f = |\sigma - c\varepsilon^p| - \sigma_s = 0$$

这两种应变强化模型也可以推广到复杂应力状态：

(1) 等向强化　即假设无论怎样加载，拉伸和压缩的强化总是相同地产生和发展的，如拉伸屈服应力为 σ_s，则相应的压缩屈服应力便是 $-\sigma_s$，这种强化模型导至加载曲面保持原来的形状、中心和方位，围绕着其中心产生均匀膨胀。见图 4.3a，这种强化模型是最简单的一种。加载曲面方程可写为

$$f(\sigma_{ij}) = F(q) \qquad (4.17)$$

式中标量 $q>0$ 为强化程度的某种量度，F 为递增函数。强化量



（a） 各向同性强化的加载曲面　　（b） 随动强化的加载曲面

图 4.3

通常是用塑性功

$$W_p = \int \sigma_{ij} d e_{ij}^p \tag{4.18}$$

或塑性应变增量

$$d e_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{d e_{ij}^p \cdot d e_{ij}^p}$$

来表示的。

这时变形强化假设（4.17）可以写成

$$f(\sigma_{ij}) = F(\int \sigma_i d e_i^p) \tag{4.19}$$

因此 σ_i 仅仅是 $\int d e_i^p$ 的函数，其中积分路线应沿着应变路线进行，这时上式又可写为

$$f(\sigma_{ij}) = H(\int d e_i^p) \tag{4.20}$$

显然等向强化模型不能反映 Bauschinger 效应。由于加载曲面是随着塑性变形增长而均匀地膨胀，故它始终保持着相似的形状。

（2）随动强化　这种模型是假定加载面在塑性变形方向作刚体移动。如图 4.3.*b* 所示，图中实线表示初始屈服面，而虚线则表示产生塑性变形后加载面的位置，由图可知，材料在塑性变形方向屈服极限增长了，而在塑性变形的相反方向屈服极限降低了。因此随动强化模型能够反映 Bauschinger 效应。

随动强化模型的加载曲面可用如下方程表示

$$f(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})=k \tag{4.21}$$

式中 α_{ij} 为加载曲面中心的坐标，它随着塑性变形的增长而改变。确定 α_{ij} 最简单的办法是：

令 $$\alpha_{ij}=Ce_{ij}^{p}$$

其中 C 为一个与材料性质有关的正的常数。式（4.21）表示加载曲面的刚体位移是塑性应变的线性函数。由于随动强化模型比较复杂，所以在处理问题时是相当困难的。

增量理论方程式比形变理论更为复杂，数学上遇到的困难更大，特别是弹塑性问题只有较简单的问题能够求解。

根据前面的讨论，强化材料屈服后只有满足（4.20）式时，才会产生新的屈服。

函数 H 可以通过简单拉伸时拉应力与总塑性应变 ε^{p} 之间的关系来确定。(4.20)式为等向强化材料的硬化规律，由(4.20)式可得 $df=H'de_i^{p}$，故 $H'=\dfrac{df}{de_i^{p}}$.

由（4.5）式知 $$d\lambda=\frac{3de_i^{p}}{2\sigma_i}=\frac{3df}{2\sigma_i H'}$$

这时 Prandtl—Reuss 应力应变关系可表达为

$$\left.\begin{aligned}
de_x&=\frac{ds_x}{2G}+\frac{3df}{2\sigma_i H'}s_x, & d\gamma_{xy}&=\frac{d\tau_{xy}}{G}+\frac{3df}{\sigma_i H'}\tau_{xy}\\
de_y&=\frac{ds_y}{2G}+\frac{3df}{2\sigma_i H'}s_y, & d\gamma_{yz}&=\frac{d\tau_{yz}}{G}+\frac{3df}{\sigma_i H'}\tau_{yz},\\
de_z&=\frac{ds_z}{2G}+\frac{3df}{2\sigma_i H'}s_z & d\gamma_{zx}&=\frac{d\tau_{zx}}{G}+\frac{3df}{\sigma_i H'}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

§ 4.5 增量理论中几个常用的表达式

前面已经提到在变形中的强化现象，这个现象是现代塑性力学中的一个基本问题。在单向拉伸时，材料强化的特点可以由曲线 $\sigma = f(\varepsilon)$ 简单地描写出来。描写这个现象的根本困难还在于复杂应力状态，因而某些塑性理论完全忽略了这个现象。在研究复杂的应力状态情况下，当材料进入塑性状态时，将满足一个准则，这个准则就是屈服条件。它可以用下列方程描述：

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \tag{4.23}$$

F 是 σ_{ij} 的对称函数，当 $F<0$ 时，物体处于弹性状态或者是刚性的。当 $F=0$ 时，材料即进入塑性状态（图 4.4）。

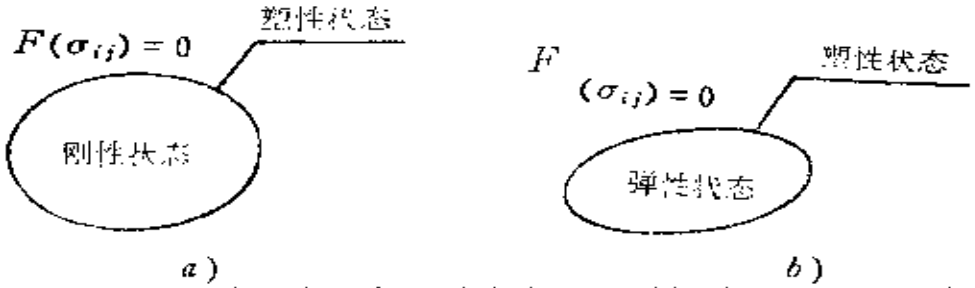


图 4.4 当应力状态达到屈服面上，材料便进入塑性状态

在弹塑性物体中，总变形速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 是弹性变形速度及塑性变形速度之和，即

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} \tag{4.24}$$

而变形偏量则可表示如下：

$$\dot{e}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{m}\delta_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{m} = \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{ii}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{4.25}$$

应力速度偏量则可写成如下形式

$$\dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma}_{m}\delta_{ij}, \quad \dot{\sigma}_{m} = \frac{1}{3}\dot{\sigma}_{ii} \tag{4.26}$$

弹性变形速度是可以恢复的，在弹性极限内应力和应变之间的关系具有下列形式：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{e}=\frac{\dot{s}_{ij}}{2G}+\frac{1-2\nu}{E}\dot{\sigma}_{m}\delta_{ij} \tag{4.27}$$

E 为弹性模量，G 为剪切模量，ν 为波桑比。

公式（4.27）用来表示弹性关系是比较方便的，它也可以用两个式子写成，即

$$\dot{e}_{ij}^{e}=\frac{1}{2G}\dot{s}_{ij},\qquad \dot{e}_{m}=\frac{1}{3K}\dot{\sigma}_{m} \tag{4.28}$$

这里

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$$

我们假设，在塑性状态时，材料是不可压缩的，即塑性变形不影响体积改变。不可压缩条件可用下式表示：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p}=0 \tag{4.29}$$

§ 4.6 Drucker 假设

在简单加载时，材料的屈服极限在变形过程中是不断变化的，就应力应变曲线行为说来，可以有下面三种形式：

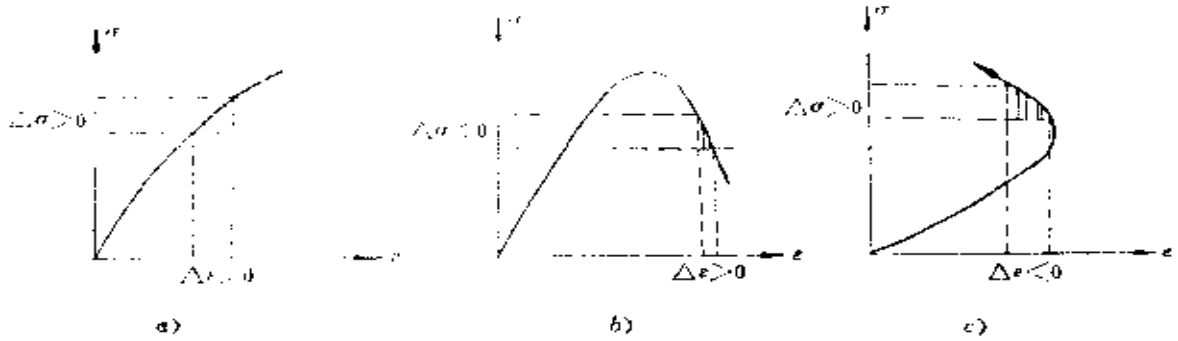


图 4.5 应力应变曲线的形式

a) 应力随着载荷增大，这时附加应力 $\triangle\sigma$ 和附加应变 $\triangle e$ 所作的功是正的，即 $\triangle\sigma\triangle e>0$。这种类型的材料称为稳定材料。

b) 附加应变 $\triangle e$ 增加，而附加应力 $\triangle\sigma$ 却在减少，在这一阶段中，附加应力和附加应变作负功，即 $\triangle\sigma\triangle e<0$ 这种类型的材料称为是不稳定的。

c) 随着应力增加，应变却在减小，这种情况和能量守恒原理是矛盾的，因为它允许自由地提取有用的功，例如受拉杆的载荷减少了，反而使杆拉长了，这是不可能的。

在上述三种情况中，只有第一种情况符合实际材料的行为。Drucker 将这个概念推广到复杂应力状态中，并且获得了十分重要的结论。

设强化材料的单元体中初始应力状态为 σ^0_{ij}，在此小单元体上加上附加应力，然后再将它除去，而且假定加载和卸载都是缓慢地进行的，整个过程是等温的。这时可以认为

1. 在加载过程中，附加应力作正功。

2. 如果产生塑性变形时，则在加载和卸载整个循环中附加应力将作正功。对于硬化材料只有在纯弹性变形时所作的功才等于零。

这里应该强调说明的是所考虑的只是附加应力对于附加应变所作的功，而不是总的应力所作的功。在情况 b) 中，虽然

$$\triangle\sigma\triangle\varepsilon<0,$$

但是应力 σ 所作的功却是正的。

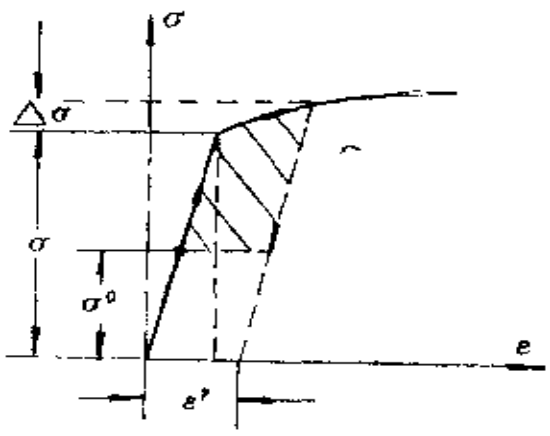


图 4.6 单向拉伸时的应力应变曲线

在图 4.6 上如初始应力为 σ^0，处于弹性状态，然后加载至

σ，材料开始屈服，如再继续加载到 $\sigma+\triangle\sigma$，则产生塑性变形 e^p，此时如将载荷卸去，使应力恢复到 σ^0，如在整个应力循环过程中，所作的塑性功不小于零，则这种材料便是稳定的。用数学公式表示时，即为

$$(\sigma+d\sigma-\sigma^0)de^p\geqslant 0 \tag{4.29}$$

此式即为图 4.6 中所示的阴影面积，如 $d\sigma$ 为无穷小量，则式(4.29)便可写为

$$(\sigma-\sigma^0)de^p\geqslant 0.$$

下面分析一下复杂应力状态的情况。在图 4.7 上，应力由 A 点移至 B 点和由 C 点移至 D 点都为弹性状态，应按弹性力学规律进行计算。

应力由屈服曲面上 E 点移至 G 点或停留于 E、G 点则为塑性状态。对于强化材料，由初始屈服面向外亦为塑性状态。

设物体在体积力及表面力的作用下，处于平衡状态，此时如果在物体上加上某一外力，然后再将此外力除去，根据前面分析知道，这时由外力作用所完成的功将是正的，而整个加载及卸载循环所做的功将不是负的。这是因为塑性变形过程是不可恢复的。

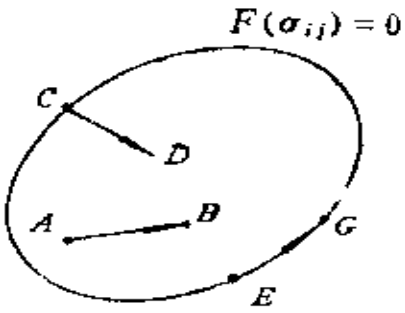


图 4.7 应力空间中的不同应力状态

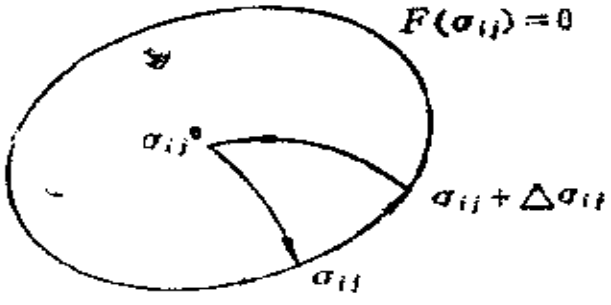


图 4.8 在应力空间中应力循环过程

设在时间 $t=0$ 时，位于屈服面内部的应力状态点 σ_{ij}^0 与体

积力及表面力是平衡的。如果由于外力作用在时间 t 时，应力状态点到达位于屈服面上的 σ_{ij} 点，然后在屈服面上移动。在时间 $t+\triangle t$ 时应力状态点位于 $\sigma_{ij}+\triangle\sigma_{ij}$ 处。如果将外力除去则应力状态点仍回至 σ_{ij}^0。

在整个应力循环过程中所作的功为

$$\triangle W_T = \int_0^t \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dt + \int_t^{t+\triangle t}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dt + \int_{t+\triangle t}^{t^*}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dt \qquad (4.30)$$

由 $\sigma_{ij}^0 \to \sigma_{ij}$　由 $\sigma_{ij} \to \sigma_{ij}+\triangle\sigma_{ij}$　由 $\sigma_{ij}+\triangle\sigma_{ij} \to \sigma_{ij}^0$

在屈服面上（即在塑性状态区），总变形速度等于弹性变形速度与塑性变形速度之和，即

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p$$

因此

$$\triangle W_T = \int_0^t \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^e dt + \int_t^{t+\triangle t}\sigma_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p)dt + \int_{t+\triangle t}^{t^*}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^e dt \qquad (4.31)$$

$$\triangle W_T = \int_0^t \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^e dt + \int_t^{t+\triangle t}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^e dt + \int_{t+\triangle t}^{t^*}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^e dt + \int_t^{t+\triangle t}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p dt$$

$$= \oint \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^e dt + \int_t^{t+\triangle t}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p dt$$

$\oint \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^e dt$ 表示整个应力循环的弹性功，它必须等于零，这时

$$\triangle W_T = \int_t^{t+\triangle t}\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p dt \qquad (4.32)$$

而
$$\triangle W_0 = \int_t^{t+\triangle t} \sigma_{ij}{}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}{}^p dt \tag{4.33}$$

因为应力循环不是从 $\sigma_{ij}=0$ 开始的，而是从 $\sigma_{ij}{}^0$ 开始的(相当于单向拉伸曲线中的 σ^0)，故在整个应力循环中所作的塑性功应为

$$\triangle W_T - \triangle W_0 = \int_t^{t+\triangle t} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}{}^p dt - \int_t^{t+\triangle t} \sigma_{ij}{}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}{}^p dt$$

$$= \int_t^{t+\triangle t} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}{}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}{}^p dt \tag{4.34}$$

而塑性功率（耗散能率）应为：

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle W_T - \triangle W_0}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\int_t^{t+\triangle t} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}{}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}{}^p dt}{\triangle t}$$

$$= (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}{}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}{}^p$$

如 $\triangle t > 0$，上式亦可通过将式 (4.34) 在 t 处按 Taylor 级数展开得到，即

$$\triangle W_T(t+\triangle t) - \triangle W_0(t+\triangle t)$$

$$= [(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\dot{\varepsilon}_{ij}^p]_t(\triangle t) + \frac{1}{2}[\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p + (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)\ddot{\varepsilon}_{ij}^p]_t(\triangle t)^2$$

$$+ O[(\triangle t)^3] \tag{4.35}$$

由于 $\triangle t$ 足够小，式 (4.35) 右边的第二、第三各项可以忽略不计；因此，为了使式 (4.35) 恒为正值，此式右边的第一项必须为非负值，因此可得

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}{}^0) \dot{\varepsilon}_{ij}{}^p \geqslant 0 \tag{4.36}$$

上式对屈服面的形状和塑性应变的增量行为都具有非常重要的限制。，而且也适用于有强化性质的材料。

现将 Drucker 假设归纳如下：

考虑某应力循环，初始应力 σ_{ij}^0 在加载面内，然后到达 σ_{ij}，刚好在加载面上，再继续在加载面上加载到 $\sigma_{ij}+d\sigma_{ij}$，在这一阶段，将产生塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$，最后将应力又卸回到 σ_{ij}^0。若在整个应力循环过程中所作的塑性功不小于零，则这种材料就是稳定的。

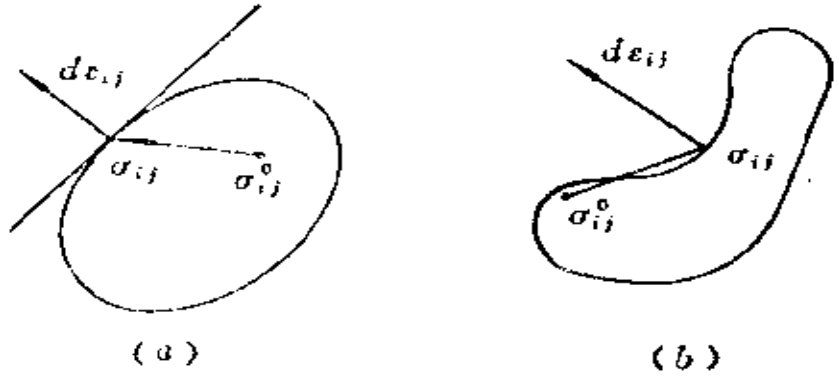
§ 4.7 加载曲面的外凸性和应变增量的流动法则

在应力空间中，一点的应力状态可以用矢量表示，而一点的应变状态也可以用一个矢量表示。在应力应变的复合空间中设应力主轴与应变增量主轴重合。设 $(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^0)=\overrightarrow{AB}$ 而应变增量用 $d\varepsilon_{ij}^p$ 表示，由式（4.36）则得

$$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^0)d\varepsilon_{ij}^p=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{d\varepsilon_{ij}^p}|\cos\theta\geqslant 0 \qquad (4.37)$$

此式限制了屈服面的形状，应力向量 $\overrightarrow{AB}$ 与塑性应变量向量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 之间所成的夹角不应该大于 90°，这个条件必须适用于任意应力状态，因此，如果通过 σ_{ij} 作一个屈服曲面的切平面，则所有可能的 σ_{ij}^0 都应该在这个切平面的一边，最多只能在此平面上才能满足 $\cos\theta\geqslant 0$ 的条件，由此得出结论，稳定材料的屈服曲面必须是凸的。如果屈服曲面是凹的，则在屈服曲面内立刻可以找到一个应力状态(图4.9b)，使$(\overrightarrow{\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^0})$ 与 $\overrightarrow{d\varepsilon_{ij}^p}$ 向量间的夹角 $\theta>\frac{\pi}{2}$，满足不了式（4.37）的条件，这对稳定材料说来是不可能的。另一方面

由于这两个向量之间的夹角不应该是钝角，因而在这一点上只有当 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ 垂直于屈服面时，条件（4.36）才能被满足，也就是说塑性变形增量的向量必须垂直于屈服面。



(a) 满足稳定材料的屈服面　　(b) 不满足稳定材料的屈服面

图 4.9

由矢量分析知道，在数量场中每一点处的梯度，垂直于过该点的等值面，并且指向函数增大的方向。根据这一性质，如果将加载曲面的外法线方向用加载函数的梯度矢量（其分量为 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$）来表示，则上述塑性应变增量的正交性可用下式表示：

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=dc\cdot\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.38}$$

式中 $dc>0$ 为未定的标量因子。

§ 4.8 塑性位势理论

与弹性位势理论相类比，Mises 于 1928 年提出了塑性位势形式的本构关系。但是 Mises 并没有规定塑性位势和屈服函数之间

的关系。如果将式（4.38）中的 f 作为塑性位势并令它等于屈服函数，则式（4.38）便可称为与屈服条件相关联的流动法则，它将塑性应变的规律与屈服条件联系起来了，由此可见，屈服条件与塑性应力应变关系有着直接的联系。

如果将 f 取为 Mises 屈服函数，则

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 6s_{ij} \tag{4.39}$$

这时（4.38）便化为 Lèvy—Mises 流动理论

$$de_{ij}^{p} = 6dC \cdot s_{ij} \quad \text{即} \quad d\lambda = 6dC$$

则

$$de_{ij}^{p} = s_{ij} d\lambda \tag{4.40}$$

此式即为 Lèvy—Mises 理论的基本方程式，如果再考虑弹性应变，便得 Prandtl—Reuss 理论。

$$de_{ij} = de_{ij}^{e} + de_{ij}^{p} = \frac{1}{2G} ds_{ij} + s_{ij} d\lambda$$

方程（4.38）称为塑性势流动理论，有时亦称为相关联的塑性流动法则，因为它与屈服函数 f 相关联，通过式(4.38)我们可以采用更复杂形式的屈服面，从而使塑性流动方程作各种各样的推广。

同理，塑性应变速度的正交性可用下式表示：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = C \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.41}$$

式中 $C \geqslant 0$ 为未定的标量因子。

用与前面相同的方法可以得到

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = 6Cs_{ij} = \lambda s_{ij}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \lambda s_{ij}$$

此式即为 Lèvy—Mises 理论的基本公式。由此看来，Lèvy—Mises 理论的基本假设、稳定材料的假说、塑性位势理论以及与屈服条件相关联的流动法则，都具有重要的联系。同时也说明了 Lèvy—Mises 理论关于塑性应变增量的偏量与应力偏量成比例假设的正确性。

式（4.38）形式的关联流动法则要求屈服面（这里包括初始屈服面和后继屈服面）是光滑的，即曲面上各点都有唯一的法线方向。然而我们不能把带有奇点的屈服面（例如有棱边情况）排除在讨论之外。Tresca 屈服面都是带棱边的六角形柱体。用 Tresca 条件来代替 Mises 条件，经常可以导致数学上的简化。因此应该讨论一下在屈服面有奇点时的关联流动法则。为简单起见，我们只讨论一条棱边。

我们假定棱边上的塑性应变增量是棱边二侧塑性应变增量的线性组合，即

$$de_{ij}^{p}=dC_1\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_{ij}}+dC_2\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (4.42)$$

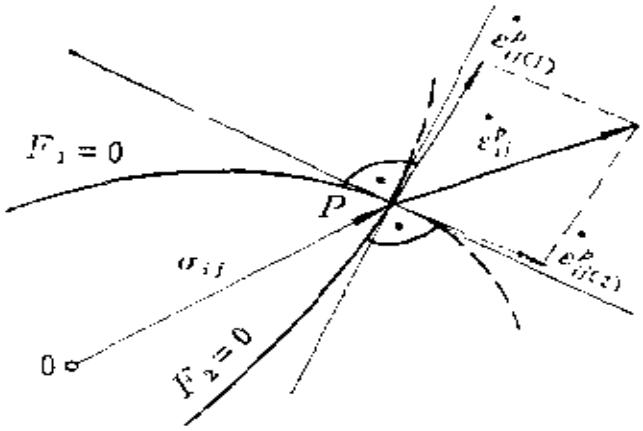


图 4.10 在屈服面的奇点上的流动法则

式中：

$f_1=const$，$f_2=const$ 为棱边二侧的二个屈服面方程，dC_1、dC_2 为非负的未定因子。

据此 de_{ij}^{p} 的方向在相邻二曲面的法线之间（如图 4.10 所示），二个极端的情况是：

$$①\quad dC_1=0,\ 则\ de_{ij}^{p}=dC_2\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}}, \qquad (4.43)$$

这时 de_{ij}^{p} 与曲面 $f_2=const$ 正交。

② $dC_2=0$，则 $de_{ij}^p=dC_1\frac{\partial f_1}{\partial\sigma_{ij}}$， (4.44)

这时 de_{ij}^p 与曲面 $f_1=const$ 正交。

如果 dC_1、dC_2 均不为零，则 de_{ij}^p 便位于两曲面的法线之间。

在屈服面的光滑点上，根据（4.38)可知，塑性应变增量 de_{ij}^p 的方向是固定的（屈服面外法线方向），而其幅值则是未定的，未定因子 dC 可在解具体问题的过程中确定，dC 与 $d\sigma_{ij}$ 有关。对于后继屈服面，屈服函数 f 不仅取决于应力状态 σ_{ij}，而且还依赖于塑性应变 ε_{ij}^p，即

$$f=f(\sigma_{ij},\ \varepsilon_{ij}^p)=0 \tag{4.45}$$

$$df=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}+\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_{ij}^p}de_{ij}^p \tag{4.46}$$

但是在（4.38）式中，标量因子 dC 只影响 de_{ij}^p 的幅值，不影响它的方向，所以在屈服面的光滑点上，de_{ij}^p 的方向与 $d\sigma_{ij}$ 无关。

在屈服面的棱边上，根据（4.42），塑性应变增量 de_{ij}^p 的方向和幅值都是未定的。未定因子 dC_1、dC_2 应在解具体问题的过程中确定。解题时，二个屈服条件 $f_1=const$，$f_2=const$（即棱边二侧的屈服面方程）都应被满足。在（4.42）中，标量因子 dC_1、dC_2 不仅影响 de_{ij}^p 的幅值，同时亦影响它的方向。

从塑性应变增量向量垂直于屈服面的结论，对于 Tresca 屈服准则来说，若将角点除外，则仅有六个不同方向的法线与屈服面相联系。屈服条件如下：

$$
\left.\begin{aligned}
f_1 &= \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_s = 0 \\
f_2 &= \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_s = 0 \\
f_3 &= \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_s = 0 \\
f_4 &= \sigma_3 - \sigma_2 - \sigma_s = 0 \\
f_5 &= \sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_s = 0 \\
f_6 &= \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_s = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (4.47)
$$

在 f_1 线上：

$$\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} = 1,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} = -1$$

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} = 0,$$

$$d\varepsilon_2^p = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} = d\lambda_1$$

$$d\varepsilon_3^p = d\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} = -d\lambda_1$$

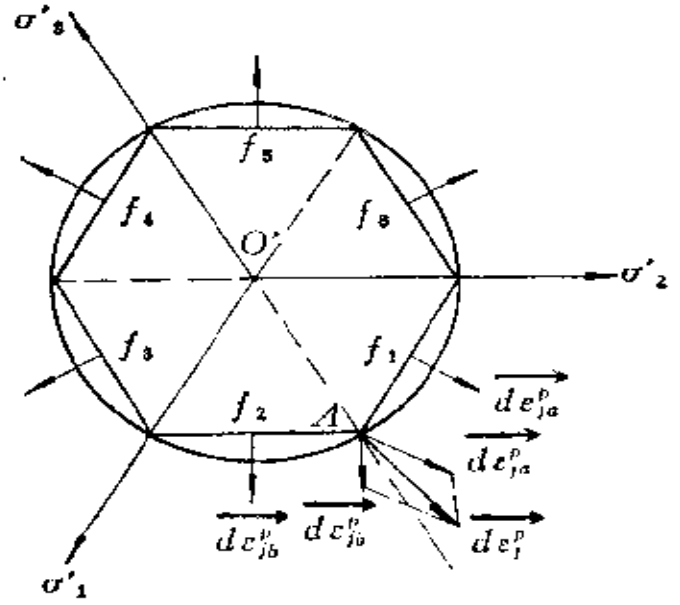


图 4.11 屈服面在 π 平面上投影

上式符合体积不变假定，即 $d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0$，由此可得 $d\varepsilon_2^p = -d\varepsilon_3^p$（大小相等，符号相反）

在 f_2 线上：

$$\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_3} = -1$$

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1} = d\lambda_2, \qquad d\varepsilon_2^p = d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2} = 0,$$

$$d\varepsilon_3^p = d\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_3} = -d\lambda_2$$

此式同样符合 $d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0$ 的条件。

在 f_1 线 $\overrightarrow{d\varepsilon_{ja}^p}$ 垂直于 f_1 线，在 f_2 线上 $\overrightarrow{d\varepsilon_{jb}}$ 垂直于 f_2 线。

在 f_1 线与 f_2 线交点 A 上，$\overrightarrow{d\varepsilon_j^p}$ 向量的方向介于 $d\varepsilon_{ja}^p$ 和 $d\varepsilon_{jb}^p$ 之间，即

$$\begin{aligned}\overrightarrow{d\varepsilon_j^p} &= \overrightarrow{d\varepsilon_{ja}^p} + \overrightarrow{d\varepsilon_{jb}^p} \\ &= (0 + d\lambda_1 j - d\lambda_1 k) + (d\lambda_2 i + 0 - d\lambda_2 k) \\ &= d\lambda_2 i + d\lambda_1 j - (d\lambda_1 + d\lambda_2)k\end{aligned}$$

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = d\lambda_2 : d\lambda_1 : [-(d\lambda_1 + d\lambda_2)]$$

如引进系数 $$\nu = \frac{d\lambda_1}{d\lambda_1 + d\lambda_2},$$

则 $$d\lambda_1 = \nu(d\lambda_1 + d\lambda_2), \quad (1-\nu)d\lambda_1 = \nu d\lambda_2$$

$$d\lambda_2 = \frac{1-\nu}{\nu} d\lambda_1,$$

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = \frac{1-\nu}{\nu} d\lambda_1 : d\lambda_1 : -\frac{d\lambda_1}{\nu} = (1-\nu) : \nu : (-1).$$

由于 Tresca 条件的线性性质，使用起来是比较方便的，在交点处的塑性应变增量的方向介于 $f_1 = 0$ 面上的法线方向和 $f_2 = 0$ 面上的法线方向之间，这一点的应变方向只有在具体问题周围的应力和应变情况对其有约束时，才能确定。但出现在交点处的应力状态是比较特殊的，许多边值问题都可在 $f_1 = 0$ 或 $f_2 = 0$ 的面上找

到合适的解答。

§ 4.9 关于增量理论的实验验证

Lode 曾做了薄壁圆管受轴向拉伸和内压力同时作用的实验。他所用的参数是

$$\mu_\sigma = 2\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}-1,\quad \mu_{d\varepsilon^p}=2\frac{d\varepsilon_2^p-d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p-d\varepsilon_3^p}-1 \tag{4.48}$$

通过实验，由应变算出 $\mu_{d\varepsilon^p}$ 值，由应力算出 μ_σ 值，然后画出 μ_σ 和 $\mu_{d\varepsilon^p}$ 之间关系的实验曲线和理论曲线，如图 4.12 所示，Lode 实验结果表明 $\mu_\sigma=\mu_{d\varepsilon^p}$ 大致上是成立的。Taylor 和 Quinney 在 1931 年用铜铝、软钢作的薄管作拉扭试验，这时主方向不断变化。实验结果表明 s_{ij} 和 de_{ij}^p 的主轴方向误差不超过 2°，但 $|\mu_\sigma|>|\mu_{d\varepsilon^p}|$，如图 4.12 所示。在 1976 年 Ohashi 又重新作了实验，并设法考虑了管中各向异性的影响，实验结果支持了两个 Lode 参数相等的结论。由此，在实验上，也肯定了 Lèvy—Mises 理论和 Prandtl—Reuss 理论关于应变增量偏量和应力偏量成比例的假设。

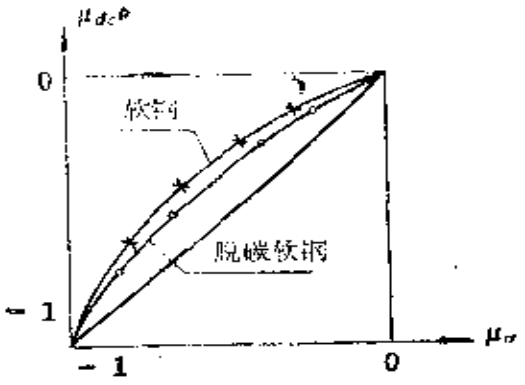


图 4.12 增量理论的实验验证

§ 4.10 几种理论之间的关系

一、在简单加载条件下，流动理论与形变理论的结果是一致的。

由 Lèvy—Mises 理论可知

$$d\lambda = \frac{de_1}{s_1} = \frac{de_2}{s_2} = \frac{de_3}{s_3} = \frac{3}{2}\frac{de_i}{\sigma_i}$$

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(de_1-de_2)^2+(de_2-de_3)^2+(de_3-de_1)^2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-d_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(de_1-de_2)^2+(de_2-de_3)^2+(de_3-de_1)^2}}{\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}}$$

在简单加载（比例加载）过程中，应变主轴方向不变，而应变分量的增量保持比例不变，即 $de_1:de_2:de_3=C_1:C_2:C_3$

$de_1=\frac{C_1}{C_2}de_2$，　$de_1=\frac{C_1}{C_3}de_3$ 积分后可得：

$$e_2=\frac{C_2}{C_1}e_1+D_1, \qquad e_3=\frac{C_3}{C_1}e_1+D_2$$

设初始应变为零，代入方程得：

$$D_1=D_2=0$$

因此　$\frac{e_1}{e_2}=\frac{C_1}{C_2}$，　$\frac{e_1}{e_3}=\frac{C_1}{C_3}$　$\therefore\ e_1:e_2:e_3=C_1:C_2:C_3$

将关系式　$de_2=\frac{C_2}{C_1}de_1$，$de_3=\frac{C_3}{C_1}de_1$ 代入 de_i 的表达式，则有：

$$de_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(1-\frac{C_2}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_2}{C_1}-\frac{C_3}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_3}{C_1}-1\right)^2}\,de_1$$

积分后则得：

$$e_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(1-\frac{C_2}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_2}{C_1}-\frac{C_3}{C_1}\right)^2+\left(\frac{C_3}{C_1}-1\right)^2}\,e_1+D_3$$

设初始应变为零，即初始应变分量及应变强度均为零，故 $D_3=0$，

$$e_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\times$$

$$\sqrt{\left(e_1-\frac{C_2}{C_1}e_1\right)^2+\left(\frac{C_2}{C_1}e_1-\frac{C_3}{C_1}e_1\right)^2+\left(\frac{C_3}{C_1}e_1-e_1\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_2-e_3)^2+(e_3-e_1)^2}$$

在比例加载条件下，$\int de_i=e_i$ (4.49)

否则 $\int de_i\neq e_i$

由此可知在比例加载的条件下应有

$$s_{ij}=Cs_{ij}^0,\quad \sigma_i=C\sigma_i^0,\quad ds_{ij}=s_{ij}^0dC. \tag{4.50}$$

其中 C 为随时间变化的参数，s_{ij}^0 为初始应力偏量张量。由 Prandtl—Reuss 方程应有

$$de_{ij}=\frac{ds_{ij}}{2G}+s_{ij}d\lambda$$

$$=s_{ij}^0\left(\frac{dC}{2G}+Cd\lambda\right) \tag{4.51}$$

把式（4.51）积分则得

$$e_{ij}=s_{ij}^0\left(\frac{C}{2G}+\int Cd\lambda\right)$$

但 $d\lambda=\frac{3de_i^p}{2\sigma_i}$，因此有

$$e_{ij} = s_{ij}{}^0 C\left[\frac{1}{2G} + \frac{1}{C}\int \frac{3}{2} C \cdot \frac{de_i{}^p}{\sigma_i{}^0 C}\right]$$

$$= s_{ij}{}^0 C\left[\frac{1}{2G} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{C\sigma_i{}^0}\int de_i{}^p\right]$$

利用式（4.49）、（4.50）的关系，可得

$$e_{ij} = s_{ij}\left(\frac{1}{2G} + \frac{3}{2}\cdot\frac{e_i{}^p}{\sigma_i}\right) \tag{4.52}$$

如令 $\phi = \frac{3Ge_i{}^p}{\sigma_i}$，则式（4.52）可以写成

$$e_{ij} = \frac{1+\phi}{2G}\cdot s_{ij} \tag{4.53}$$

此式即为 Hencky 方程。如采用体积不可压缩条件，并令

$$\frac{1+\phi}{2G} = \frac{1}{2G'},$$

则由式（4.53）便可得到 Ильюшин 方程的形式：

$$s_{ij} = 2G'e_{ij}$$

或

$$s_{ij} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sigma_i}{e_i}e_{ij} \tag{4.54}$$

由于 $\sigma_i = \frac{3\tau_8}{\sqrt{2}}$，$e_i = \frac{\gamma_8}{\sqrt{2}}$

并考虑大应变的情况，则由式（4.54）便可得到 Nadai 的物理方程

$$\epsilon_{ij} = \frac{\bar{\gamma}_8}{2\tau_8}\cdot s_{ij}$$

		弹性应变	塑性应变	应力应变关系
形变理论（全量理论）	Hencky	$e_{ij}^e = \frac{s_{ij}}{2G}$	$e_{ij}^p = \frac{\phi s_{ij}}{2G}$	$e_{ij} = \frac{1+\phi}{2G} s_{ij}$
	Ильюшин	$e_{ij}^e = \frac{s_{ij}}{2G}$	$e_{ij}^p = \left(\frac{G'}{G} - 1\right) \frac{s_{ij}}{2G}$	$e_{ij} = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} s_{ij}$
	Nadai	不考虑	$\epsilon_{ij}^p = \frac{\bar{\gamma}_8}{2\tau_8} s_{ij}$	$\epsilon_{ij} = \frac{\bar{\gamma}_8}{2\tau_8} s_{ij}$
增量理论（流动理论）	Lévy—Mises	$de_{ij}^e = 0$	$de_{ij}^p = s_{ij} d\lambda$ $d\lambda = \frac{3}{2} \frac{de_i}{\sigma_s}$	$de_{ij} = \frac{3}{2} \frac{de_i}{\sigma_s} s_{ij}$
	Prandtl—Reuss	$de_{ij}^e = \frac{ds_{ij}}{2G}$	$de_{ij}^p = s_{ij} d\lambda$ $d\lambda = \frac{3dW}{2\sigma_s^2}$	$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} + s_{ij} d\lambda = \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{3dW}{2\sigma_s^2} s_{ij}$

理论比较表

波桑比 ν	应变大小	加载条件	屈服条件	考虑的材料	理论建立的年代
$\nu \leqslant \frac{1}{2}$	小应变	简单加载	$W_s = \frac{\sigma_s^2}{6G}$ 实质上是 Mises 条件	理想弹塑性	1924
$\nu = \frac{1}{2}$	小应变	简单加载	$\sigma_i = \sigma_s$ (Mises 条件)	幂强化材料	1943
$\nu = \frac{1}{2}$	大应变	简单加载	$\tau_8 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_s$	强化材料	1937
$\nu = \frac{1}{2}$	增量（每个瞬间是小应变）	复杂加载	$\sigma_i = \sigma_s$	理想刚塑性	Levy 1871 Mises 1913
$\nu \leqslant \frac{1}{2}$	增量（每个瞬间是小应变）	复杂加载	$s_{ij} \cdot s_{ij} = \frac{2\sigma_s^2}{3}$ 实质上是 Mises 条件	理想弹塑性	Prandtl 1924 Reuss 1930

由前面的分析和上表可见在比例加载条件下，增量理论的方程积分后就得出形变理论的方程，这也说明了在比例加载条件下，形变理论是正确的，而几种形变理论之间也有着密切的关系。

上面的推证说明在简单加载条件下形变理论的合理性，这一点也被实验所证实。但要描写复杂加载下的塑性变形规律还是比较困难的，由于形变理论最简单，在运用上比其他理论都方便，从工程应用的角度出发，还有不少人研究它在复杂加载情况下的适用性。从理论研究和实验结果来看这个理论在改变载荷状态时（例如先拉伸再加扭转的转折点）有明显差别。而在稍偏离比例加载时（加载过程中应力主轴、应变主轴的方向改变不大者）则误差不大，仍可使用。但对于复杂加载情况下确切的使用范围及所引起的误差的估计还需要进一步去研究。在分析的基础上，可将使用范围适当放宽，不仅限于简单加载情况。

增量理论不受加载途径的限制，复杂加载的实验资料证实了应力张量与塑性应变增量张量的主轴方向重合，μ_σ 与 $\mu_{d\varepsilon^p}$ 接近相等。

但是在某些复杂加载的情况下，由于增量理论假设屈服面是光滑的，并且不考虑由于塑性变形引起材料的各向异性性质，因而也与实际情况有一定的误差。Lévy—Mises 理论忽略了弹性应变部分，当变形比较大，弹性应变远小于塑性应变部分时，使用它是合理的，在弹性应变与塑性应变属同一量级的情况时，则应使用 Prandtl—Reuss 理论。

§ 4.11 薄管受轴向力及扭矩作用时的解

例题：

已知由不可压缩弹塑性材料做成的薄管，受轴向力及扭矩作用，如图 4.14 所示，当变形为

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E} = \frac{\sigma_s}{3G} \quad 以及 \quad \gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G}$$

时，按下列加载路线试用 Prandtl—Reuss 理论计算管中的应力。

1. 首先让薄管在轴向力的作用下伸长 $\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E} = \frac{\sigma_s}{3G}$，使其进入塑性状态，在继续有轴向力作用的基础上再加扭矩，使管子扭转角为

$$\gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G}.$$

2. 让薄管在扭矩的作用下，使其扭转角 $\gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G}$，进入塑性状态。在继续有扭矩作用的基础上，再加轴向力，使管子伸长

$$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E} = \frac{\sigma_s}{3G}.$$

3. 既拉伸又扭转，并使 $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ 保持为常数进入塑性状态。

解：

一、分析

1. 拉伸刚达到塑性状态时，应有 $\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E}$ 而 $E = 2(1+\nu)G$，

因为材料是不可压缩的，故 $\nu = \frac{1}{2}$，$E = 3G$，

即
$$e = \frac{\sigma_s}{E} = \frac{\sigma_s}{3G}.$$

2. 只扭转刚达到塑性状态：$\gamma = \frac{\tau_s}{G}$ 是属于纯剪应力状态

$$\tau = \sigma_1 = -\sigma_3, \quad \sigma_2 = 0$$

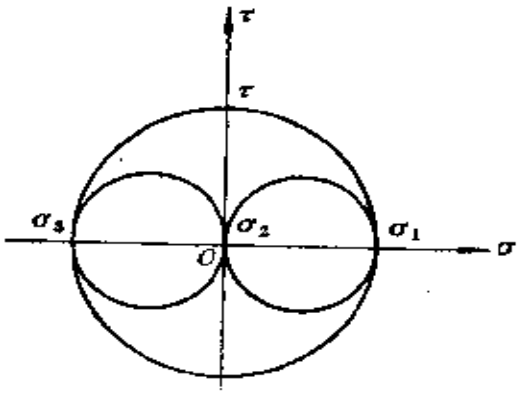


图 4.13 纯扭（纯剪）应力图

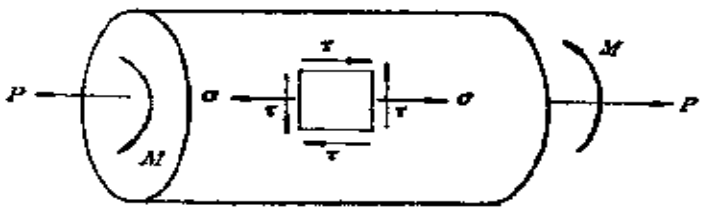


图 4.14

根据 Mises 屈服条件

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2,$$

$$\tau^2 + \tau^2 + (-2\tau)^2 = 2\sigma_s^2, \quad \tau = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = \tau_s,$$

即当 $\tau = \tau_s = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ 时，用纯扭方式使材料达到塑性，此时

$$\gamma = \frac{\tau_s}{G} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G}$$

3. 薄壁圆管受拉力 σ 和剪应力 τ 作用下的屈服条件为

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Mises 条件：

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2$$

将 σ_1、σ_2、σ_3 值代入此式得：

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_s^2, \qquad \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2} + \frac{\tau^2}{\left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

如图 4.16 所示。

二、按先拉后扭加载路线

在轴向力作用下管子伸长 $\varepsilon = \frac{\sigma_s}{E} = \frac{\sigma_s}{3G}$ 后，管子即已进入塑性状态，这时的应力状态为 $\sigma = \sigma_s$，$\tau = 0$，此时应变状态用（ε、γ）图（4.15）中 A 点表示，此时应力状态已达到屈服曲面，可用（σ、τ）图 4.16 中 A 点表示。

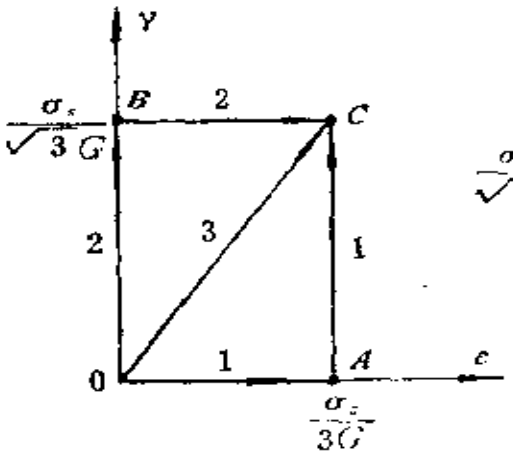


图 4.15 加载路线

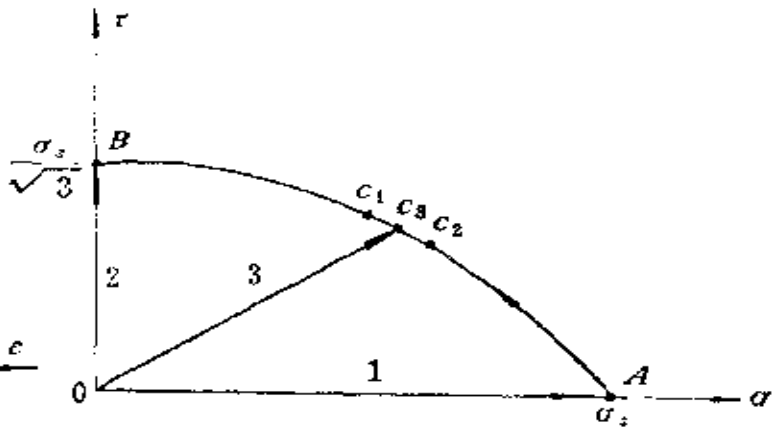


图 4.16 Mises 屈服条件

在继续有轴向力作用的基础上再加扭矩，使管子扭转

$$\gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G},$$

此时在 (e, γ) 图 4.15 上由 A 点移至 C 点（即是在 $e = \frac{\sigma_s}{3G}$ 不变的基础上再加 $\gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}G$）。在 (σ, τ) 图 4.16 中 A 点沿屈服曲线移至 C_1 点，根据 Mises 屈服条件 $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_s^2$，对于各种具体材料均有确定的 σ_s 值，若是理想塑性材料 σ_s = 常数（没有变形硬化），剪应力由 $0 \to \tau$，则正应力 σ 必然减少，以满足 $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_s^2$ = 常数的条件。

如采用圆柱坐标，则应有

$$\sigma_z = \sigma, \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0, \quad \tau_{z\theta} = \tau,$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{3}, \quad s_z = \sigma - \frac{\sigma}{3} = \frac{2}{3}\sigma, \quad s_r = s_\theta = -\frac{1}{3}\sigma.$$

由体积不可压缩条件得 $\varepsilon_m = 0$，

$$e_z = \varepsilon_z = \varepsilon = \frac{\sigma_s}{3G},$$

$$e_r = \varepsilon_r = -\frac{1}{2}\varepsilon = -\frac{\sigma_s}{6G},$$

$$e_\theta = \varepsilon_\theta = -\frac{1}{2}\varepsilon = -\frac{\sigma_s}{6G},$$

$$\gamma_{z\theta} = \gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}G, \quad \gamma_{r\theta} = \gamma_{zr} = 0,$$

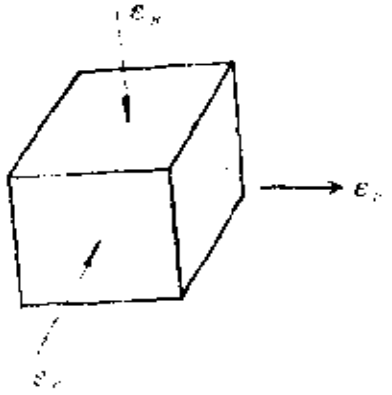


图 4.17 应变状态图

$$\dot{e}_z = \frac{1}{2G}\dot{s}_z + \dot{\lambda}s_z, \qquad \dot{e}_z = \frac{1}{3G}\dot{\sigma} + \frac{2}{3}\dot{\lambda}\sigma,$$

$$\dot{e}_r = \frac{1}{2G}\dot{s}_r + \dot{\lambda}s_r = -\frac{1}{6G}\dot{\sigma} - \frac{\dot{\lambda}}{3}\sigma,$$

$$\dot{e}_\theta = \frac{1}{2G}\dot{s}_\theta + \dot{\lambda}s_\theta = -\frac{1}{6G}\dot{\sigma} - \frac{\dot{\lambda}}{3}\sigma, \quad \dot{\gamma}_{r\theta} = \dot{\gamma}_{zr} = 0,$$

$$\dot{\gamma}_{z\theta} = \frac{\dot{\tau}_{z\theta}}{G} + 2\dot{\lambda}\tau_{z\theta} = \frac{\dot{\tau}}{G} 2\lambda\tau, \quad \dot{\lambda} = \frac{\dot{W}}{2k^2}, \quad k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}},$$

$$\dot{W} = s_r\dot{e}_r + s_\theta\dot{e}_\theta + s_z\dot{e}_z + \tau_{\theta z}\dot{\gamma}_{\theta z}$$

$$= \left(-\frac{s_z}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\dot{e}_z\right) + \left(-\frac{s_z}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\dot{e}_z\right) + s_z\dot{e}_z + \tau_{\theta z}\dot{\gamma}_{\theta z}$$

$$= \frac{3}{2}s_z\dot{e}_z + \tau_{\theta z}\dot{\gamma}_{\theta z} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2\sigma}{3}\cdot\dot{\varepsilon}_z + \tau\dot{\gamma} = \sigma\dot{\varepsilon}_z + \tau\dot{\gamma} = \sigma\dot{\varepsilon} + \tau\dot{\gamma}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{W}}{2k^2} = \frac{\sigma\dot{\varepsilon} + \tau\dot{\gamma}}{2\cdot\frac{\sigma_s^2}{3}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma\dot{\varepsilon} + \tau\dot{\gamma}}{\sigma_s^2}$$

$$\dot{e}_z = \frac{1}{2G}\dot{s}_z + \lambda s_z$$

$$= \frac{1}{2G}\cdot\frac{2}{3}\dot{\sigma} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma\dot{\varepsilon} + \tau\dot{\gamma}}{\sigma_s^2}\cdot\frac{2}{3}\sigma$$

$$= \frac{\dot{\sigma}}{3G} + \frac{\sigma(\sigma\dot{\varepsilon} + \tau\dot{\gamma})}{\sigma_s^2} = \dot{\varepsilon}_z = \dot{\varepsilon}$$

$$\dot{\gamma}_{z\theta} = \frac{\dot{\tau}}{G} + 2\dot{\lambda}\tau = \frac{\dot{\tau}}{G} + 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma\dot{\varepsilon} + \tau\dot{\gamma}}{\sigma_s^2}\tau$$

$$= \frac{\dot{\tau}}{G} + 3\tau\left(\frac{\sigma\dot{\varepsilon} + \tau\dot{\gamma}}{\sigma_s^2}\right) = \dot{\gamma}$$

因此得到：

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{3G} + \frac{\tau\dot{\gamma} + \sigma\dot{\varepsilon}}{\sigma_s^2}\sigma$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{3\tau(\tau\dot{\gamma} + \sigma\dot{\varepsilon})}{\sigma_s^2}$$

现在我们所考虑的情况是在塑性状态时只有扭转，即考虑图 4.15 和图 4.16 由 A 点$\longrightarrow C$ 点［在（ε，γ）曲线］或由 A 点$\longrightarrow C$ 点［在（σ，τ）曲线］.

由 $A\longrightarrow C$ 点，$\varepsilon = \frac{\sigma_s}{3G}$ = 常数，故 $\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = 0$，

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{3G} + \frac{\tau\dot{\gamma}\sigma}{\sigma_s^2} = \frac{1}{3G}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\tau\sigma}{\sigma_s^2}\frac{d\gamma}{dt} = 0$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{3\tau^2\dot{\gamma}}{\sigma_s^2} = \frac{1}{G}\frac{d\tau}{dt} + \frac{3\tau^2}{\sigma_s^2}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}$$

将以上二式均乘以 dt 则得

$$\frac{1}{3G}d\sigma + \frac{\tau\sigma}{\sigma_s^2}d\gamma = 0$$

$$\frac{1}{G}d\tau + \frac{3\tau^2}{\sigma_s^2}d\gamma = d\gamma, \quad \frac{1}{G}d\tau = \gamma d\left(1 - \frac{3\tau^2}{\sigma_s^2}\right)$$

$$Gd\gamma = \frac{d\tau}{1 - \frac{3\tau^2}{\sigma_s^2}}$$

将此式积分后，则得

$$G\gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\operatorname{arcth}\frac{\sqrt{3}}{\sigma_s}\tau + C$$

在刚开始剪切变形时，即在 A 点处 $\gamma = 0$，$\tau = 0$，因此可得 $C = 0$，即

$$G\gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\operatorname{arcth}\frac{\sqrt{3}}{\sigma_s}\tau$$

故
$$\gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G}\operatorname{arcth}\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s}$$

$$\frac{\sqrt{3}G\gamma}{\sigma_s} = \operatorname{arcth}\frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s},\quad \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{3}G\gamma}{\sigma_s}\right) = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sigma_s}$$

$$\tau = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{3}G\gamma}{\sigma_s}\right)$$

由公式$\frac{d\sigma}{3G} + \frac{\sigma\tau}{\sigma_s^2}d\gamma = 0$ 或屈服条件可以求出 σ，

$$\sigma = \sigma_s/\operatorname{ch}\frac{\sqrt{3}G\gamma}{\sigma_s},\ \text{由于}\ \gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G},$$

因此　　$\sigma = 0.648\sigma_s$，　　$\tau = 0.439\sigma_s$.

三、按先扭后拉的加载路线

先扭转　　$\gamma = \gamma_{z\theta} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G}$，　$\tau_{z\theta} = \tau$，

再拉伸　$\varepsilon = \varepsilon_z = \frac{\sigma_s}{3G}$，　$\sigma_z = \sigma$，　$\sigma_r = \sigma_\theta = 0$，　$\tau_{r\theta} = \tau_{zr} = 0$，　$\tau_{z\theta} = \tau$

在 $\gamma = f(\varepsilon)$ 曲线：由 $0 \to B \to C$.

在 $\tau = f(\sigma)$ 曲线：由 $0 \to B \to C_2$，BC_2 系屈服曲线 BA 中的一段，

$$\gamma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G} = \text{常数，故}\ \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} = 0,$$

$$3G\,d\varepsilon = \frac{d\sigma}{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2}} \qquad (4.48)$$

$$\frac{1}{G}d\tau+\frac{3\tau\sigma}{\sigma_s^2}d\varepsilon=0$$

对（4.48）式进行积分得

$$3G\varepsilon=\sigma_s\mathrm{arcth}\frac{\sigma}{\sigma_s}+C$$

在 BC 段：当在 B 点时 $\varepsilon=0$，$\sigma=0$，故 $C=0$，

$$\varepsilon=\frac{\sigma_s}{3G}\mathrm{arcth}\frac{\sigma}{\sigma_s}$$

$$\sigma=\sigma_s\mathrm{th}\frac{3G\varepsilon}{\sigma_s} \tag{4.49}$$

在 C 点处 $\varepsilon=\frac{\sigma_s}{3G}$ 代入（4.49）后，得

$$\sigma=\sigma_s\mathrm{th}1=0.762\sigma_s$$

$$\tau=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}\cosh 1}=0.374\sigma_s$$

四、按比例 $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ = 常数加载

按 $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ = 常数加载，最后使 $\gamma=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G}$，$\varepsilon=\frac{\sigma_s}{3G}$，

得 $\frac{\gamma}{\varepsilon}=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}G}\Big/\frac{\sigma_s}{3G}=\sqrt{3}$，在（$\varepsilon\cdot\gamma$）图上由 0 沿着与 ε 轴成 60° 方向按比例到达 C 点，由于 $\frac{\gamma}{\varepsilon}$ 成比例地变化，因此 $\frac{\tau}{\sigma}$ 也将按比例地变化。在（σ，τ）图上应力将由 0 点沿直线到达 C_s 点。在未到达 C 点（或 C_s）以前是处于弹性状态，应遵守 Hooke 定律，即

$\sigma = Ee$，$\tau = G\gamma$，故 $\dfrac{\tau}{\sigma} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$。

由屈服条件 $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_s^2$ 得

$$\sigma = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}} = 0.707\sigma_s, \qquad \tau = \frac{\sigma}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{6}} = 0.408\sigma_s.$$

第四章 习 题

1. 已知三个主应力如下表所示情况时，试求塑性应变 e_1^p，ε_2^p，ε_3^p 的表达式。

主应力 \ 情况	1	2	3	4	5	6	7
σ_1	2σ	σ	0	σ	0	0	σ
σ_2	σ	0	$-\sigma$	0	$-\sigma$	0	σ
σ_3	0	σ	-2σ	0	$-\sigma$	$-\sigma$	0

2. 已知一长封闭圆筒平均半径为 r，壁厚为 t，并受内压 p 的作用，从而产生塑性变形，材料是各向同性的，如果忽略弹性应变，试求周向、轴向和径向应变的比例。

3. 在如下二种情况下，试求塑性应力增量的比。(1) 单向拉伸应力状态，$\sigma_1 = \sigma_s$。(2) 纯剪应力状态 $\tau = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$。

4. 已知薄壁圆筒受拉应力 $\sigma_z = \dfrac{\sigma_s}{2}$ 作用，若使用 Mises 塑性条件，试求屈服时扭转应力应为多少？并求出此时塑性应变增量的表达式。

5. 如有二向应力状态 $\sigma_1 = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$，$\sigma_2 = -\dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$，$de_1^p = C$，

试求相应的应变增量和塑性功增量表达式。

6. 已知直径为 $200mm$，厚为 $4mm$ 的薄壁球受 $p=2kg/mm^2$ 的内压作用，如果材料的本构方程为 $\sigma_i=50\varepsilon_i^{0.5}kg/mm^2$，试求此时直径的变化量。

7. 二端封闭的薄壁筒，其直径为 $400mm$，厚度为 $4mm$，受 100 大气压作用，试求此时壁厚的减少量。设材料的应力应变曲线为 $\sigma=80^{0.25}kg/mm^2$。

8. 受内压作用的薄壁球，其半径为 r，壁厚为 t，当内压增加时，将出现颈缩现象，其失稳条件作为 $\frac{dp}{d\varepsilon}=0$，设球材料的应力应变曲线为 $\sigma=k'\varepsilon^n$，试问颈缩时壁厚变化多少？

9. 如有二端封闭的薄圆筒，内压为 p，达到塑性拉伸失稳状态，即 $dp=0$，试证明此时失稳条件 $\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}=\sqrt{3}\sigma_i$，如材料的塑性应力应变曲线为 $\sigma=k'(a+\varepsilon)^n$，试求此时的内压和周向应变。

10. 已知材料应力应变曲线为 $\varepsilon_i=\frac{\sigma_i}{E}+\frac{\sigma_i-\sigma_s}{F}$，薄壁圆管受拉伸应力和扭转应力作用，试用增量理论按如下应力加载路线计算轴向应变 ε_z 和剪切应变 $\gamma_{\theta z}$。

① 开始时沿 z 轴方向加载直至 $\sigma_z=\sigma_s$，保持此应力值再增加剪应力直至 $\tau_{r\theta}=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$。

② 开始时使剪应力达到 $\tau_{r\theta}=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$，保持 $\tau_{r\theta}$ 的应力值，再增加轴向应力 σ_z，使达到 σ_s。

③ 轴向应力和剪切应力按 $\sqrt{3}:1$ 的比例增加，直至 $\sigma_z=\sigma_s$，$\tau_{\theta z}=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$，并将所计算的结果和形变理论算得的结果比较。

第四章 习题答案

1. 由于静水压力不影响塑性变形，所以 1、2、3 情况时将

给出同样的塑性应变。同样，4、5 情况以及 6、7 情况亦将给出相同的塑性应变。

1、2、3 情况时 $\varepsilon_1^p = -\varepsilon_3^p = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i^p$，$\varepsilon_2^p = 0$；

4，5 情况时 $\varepsilon_1^p = \varepsilon_i^p$，$\varepsilon_2^p = \varepsilon_3^p = \frac{1}{2}\varepsilon_i^p$；

6，7 情况时 $\varepsilon_1^p = \varepsilon_2^p = \frac{1}{2}\varepsilon_i^p$，$\varepsilon_3^p = -\varepsilon_i^p$。

2. 求出应力偏量的表达式，再求应变偏量增量得

$$d\varepsilon_\theta : d\varepsilon_r : d\varepsilon_z = 1 : -1 : 0$$

3 (1) $d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = 2 : (-1) : (-1)$；

(2) $d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = 1 : 0 : (-1)$

4. 由于 $\sigma_z = -\frac{\sigma_s}{2}$，故平均应力 $\sigma_m = \frac{\sigma_s}{6}$，因此可得

$$s_\theta = s_r = -\frac{\sigma_s}{6},$$

$$s_z = -\frac{\sigma_s}{3},\quad d\varepsilon_r^p : d\varepsilon_\theta^p : d\varepsilon_z^p : d\gamma_{rz}^p = (-1) : (-1) : 2 : 6$$

5. $$\frac{\sqrt{3}\,d\varepsilon_1^p}{\sigma_s} = -\frac{\sqrt{3}\,d\varepsilon_2^p}{\sigma_s} = \frac{\sqrt{3}\,C}{\sigma_s},\quad d\varepsilon_3^p = 0,$$

$$d\varepsilon_1^p = C,\quad d\varepsilon_2^p = -C,\quad d\varepsilon_3^p = 0.$$

因此 $$dW^p = \sigma_i d\varepsilon_i^p,$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} = \sigma_s$$

$$dW^p = \frac{2\sigma_s C}{\sqrt{3}},\quad \varepsilon_i^p = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(C^2+C^2)} = \frac{2C}{\sqrt{3}}.$$

6. $r = r_0 \exp\frac{1}{8} = r_0 \times 1.133$,

直径增长为 $2(1.133 - 1.000) = 26.6mm$

7. $t = t_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} e_i\right)$, $e_i = \left(\frac{5}{8}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4$,

$t = t_0 \exp(-0.0743) = 0.9283 t_0 = 3.72mm$,

因此壁厚的减少量为 $4(1 - 0.9288) = 0.285mm$.

8. 颈缩时，壁厚为 $t = t_0 \exp\left(-\frac{2}{3} n\right)$,

如果 $n = 0.25$，则 $t = 0.846 t_0$.

9. 经过推导可得 $p = \frac{2t_0}{\sqrt{3} r_0}[\exp(-\sqrt{3} e_i)]\sigma_i$,

取 $\frac{dp}{de_i} = 0$，可得 $\frac{d\sigma_i}{de_i} = \sqrt{3}\sigma_i$.

$$r = r_0 \exp\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{n}{\sqrt{3}} - a\right)\right],$$

$$p = \frac{t_0}{r_0}\frac{2F}{\sqrt{3}}\left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right)^n \exp(\sqrt{3}a - n).$$

10. $$r_{z\theta} = \frac{d\tau_{z\theta}}{G} + 3\tau_{z\theta}\frac{de_i^p}{\sigma_i},$$

$$de_z = \frac{d\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_z(\sigma_z d\sigma_z + 3\tau_{z\theta} d\tau_{z\theta})}{F(\sigma_z^2 + 3\tau_{z\theta}^2)}$$

(1) 先拉后扭：

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E} + \frac{\sigma_z}{F}(0.346),$$

$$r_{z\theta}=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{G}+\frac{3}{F}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

(2) 先扭后拉：

$$e_z=\frac{\sigma_s}{E}+\frac{\sigma_s}{F}(0.215),$$

$$r_{z\theta}=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{G}+\frac{3}{F}\ln\sqrt{2}\right].$$

(3) 扭、拉保持一定比例，即 $\frac{\tau_{z\theta}}{\sigma_z}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，

$$e_z=\frac{\sigma_s}{E}+\frac{\sigma_s}{F}(0.293),$$

$$\gamma_{z\theta}=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{G}+\frac{3}{F}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right].$$

在扭、拉保持一定比例时用形变理论或用增量理论，其计算结果是相同的。

第五章　简单弹塑性问题

当塑性变形相当于弹性变形的量级时，弹性变形与塑性变形相比不能忽略，则应按弹塑性问题进行分析。对于简单梁的弹塑性弯曲、圆柱形截面杆的弹塑性扭转问题，以及轴对称和球对称的问题，由于在平衡方程中与屈服条件中的未知函数和方程式的数目相等，因而结合边界条件一般便可找出结构中应力分布的规律，而应变和位移则可根据物理关系和几何的连续条件分别求出。这一章将按梁的弹塑性弯曲，杆的弹塑性扭转，旋转圆盘，厚壁圆筒和厚壁球壳分别给出基本公式和解题的方法。

§ 5.1　梁的弹塑性弯曲

在梁的弯曲问题中，基本假设和材料力学是一致的。在弹性区，应力 σ_x 和应变 ε_x 成线性关系，在塑性区，除应力 σ_x 外，不考虑其他应力分量对屈服条件的影响。

如杆的截面没有对称面，则截面由弹性进入弹塑性范围时，截面的中性轴不仅将有移动，而且还可能有转动。但当有对称轴截面情况时，弹性阶段的中性轴在塑性阶段时仍保持为中性轴。

在理想弹塑性材料情况时，截面上的应力分布随着进入塑性阶段的不同（见图 5.1）可能有三种情况。即双三角形表示弹性状态，双梯形表示弹塑性状态、双矩形表示塑性极限状态。

如令 A_1 表示中性轴上面的面积，A_2 表示中性轴下面的面积，在极限情况下，根据截面上力的平衡条件，应有

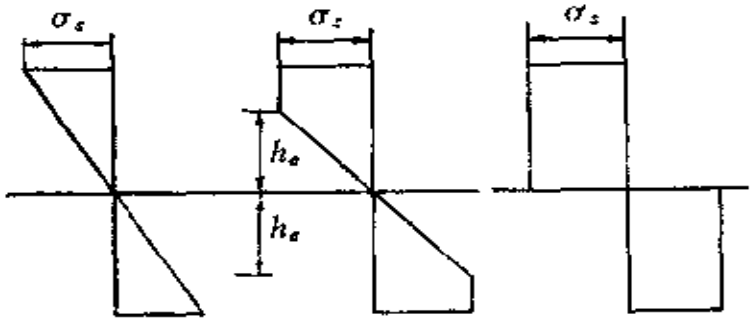


图 5.1 截面的应力分布

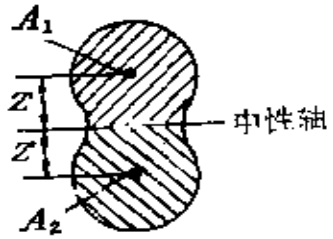


图 5.2 受弯杆的截面

$$\sigma_s \iint_{A_1} dA - \sigma_s \iint_{A_2} dA = 0 \tag{5.1}$$

由式（5.1）得 $A_1 = A_2$

极限弯矩为 $$M_p = \iint_{A_1} \sigma_s \eta dA + \iint_{A_2} \sigma_s \eta dA$$

根据整个截面对 x 轴的静矩为零的条件可得

$$\iint_{A_1} \eta dA = -\iint_{A_2} \eta dA = S_y(\eta) \tag{5.2}$$

式中 $S_y(\eta)$ 为截面 A_1 对中性轴的静矩。

由于在 A_1 和 A_2 上的应力异号，可将塑性弯矩写成如下形式

$$M_p = 2\sigma_s S_y(\eta)$$

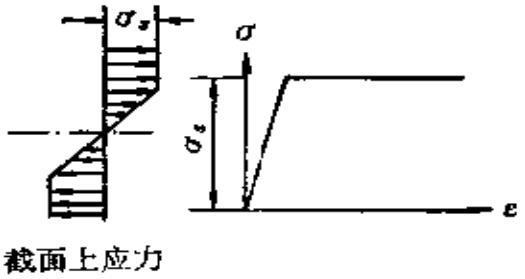
如 h_e 为矩形截面中弹性核的高度，则根据不同材料弯矩也可以用 h_e 表示。现按理想弹塑性材料和线性强化材料将表达式写出如下：

（1）理想弹塑性材料（图 5.3）

如在矩形截面上弹性核的高度为 h_e，则弹塑性弯矩为

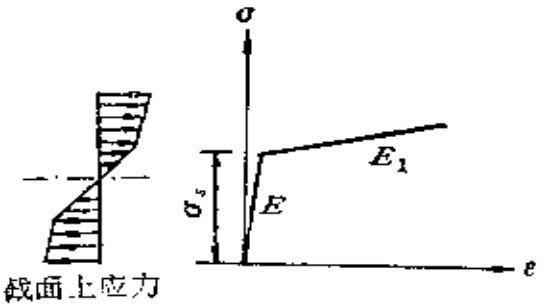
$$M = 2\int_0^{h_e} b\eta\sigma d\eta + 2\int_{h_e}^{h} b\eta\sigma d\eta \tag{5.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{在弹性区：}\ 0<\eta<h_e,\quad \sigma=\frac{\eta}{h_e}\sigma_s \\ &\text{在塑性区：}\ h_e<\eta<h,\quad \sigma=\sigma_s \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$



截面上应力

图 5.3 理想塑性材料截面上的应力



截面上应力

图 5.4 线性强化材料截面上的应力

将式（5.5）代入式（5.4）后得：

$$M=bh^2\sigma_s\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{h_e}{h}\right)^2\right] \tag{5.6}$$

当 $h_e=h$ 时，　　$M=M_e=\frac{2}{3}bh^2\sigma_s$

当 $h_e=0$ 时，　　$M=M_p=bh^2\sigma_s$

根据平面假设，我们有

$$\varepsilon=\frac{h_e}{\rho}=\frac{\sigma_s}{E}$$

由式（5.6）得

$$M=bh^2\cdot\sigma_s\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{\sigma_s\rho}{hE}\right)^2\right]$$

（2） 线性强化材料（图 5.4）

线性强化材料的应力应变关系可写为如下形式：

$$\sigma = g(\varepsilon) = g\left(\frac{\eta}{\rho}\right) = E\varepsilon + \sigma_s\left(1 - \frac{E_1}{E}\right) \tag{5.7}$$

此时弯矩表达式为

$$M = 2\int_0^{h_e} \frac{b\eta^2\sigma_s}{h_e} d\eta + 2\int_{h_e}^{h} b\eta g\left(\frac{\eta}{\rho}\right) d\eta \tag{5.8}$$

积分式（5.8）后，可得

$$M = b\sigma_s\left(h^2 - \frac{h_e^2}{3}\right) + b\sigma_s\frac{E_1}{E}\left(\frac{2}{3}\frac{h^3}{h_e} + \frac{h_e^2}{3} - h^2\right) \tag{5.9}$$

当对称截面的宽度是高度 η 的函数时，（5.8）式和（5.9）式相应可写为

$$M = 2\frac{\sigma_s}{h_e}\int_0^{h_e} b(\eta)\eta^2 d\eta + 2\sigma_s\int_{h_e}^{h} b(\eta)\eta d\eta \tag{5.10}$$

$$M = 2\frac{\sigma_s}{h_e}\int_0^{h_e} b(\eta)\eta^2 d\eta + \frac{2\sigma_s}{h_e}\int_{h_e}^{h} b(\eta)\eta^2 d\eta + 2\sigma_s\left(1 - \frac{E'}{E}\right)\int_{h_e}^{h} b(\eta)\eta d\eta \tag{5.11}$$

残余变形问题

当杆件由于外力作用而发生塑性变形时，除去外力后，杆件中将保留塑性变形，因而将有残余应力，其表达式为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma - \sigma_e\\ \varepsilon_r &= \varepsilon - \varepsilon_e\end{aligned}\right\} \tag{5.12}$$

式中 σ_e 及 ε_e 为弹性应力及弹性应变，而 σ_r 及 ε_r 为残余应力及残余应变。

例题：已知等腰三角形截面的杆受外弯矩作用，杆件处于纯弯状态，试求此杆顶端及底边进入塑性时，中性轴距底面的距离 η_n，

并求出整个截面进入塑性状态后，中性轴所移动的距离 z_0（图 5.5）。

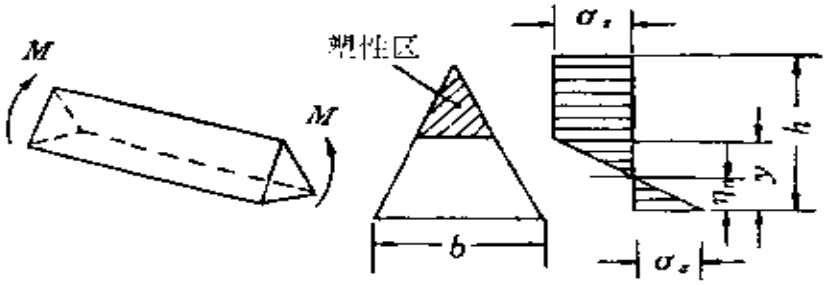


图 5.5 等腰三角形截面的杆件受弯矩作用时截面上应力分布

解：弹性变形时，中性轴距底边的距离 η_n 为

$$\eta_n = \frac{\int_0^h \eta dA}{A} = \frac{1}{A}\int_0^h \frac{b}{h}(h-\eta)\eta d\eta = \frac{h}{3}$$

由于 $h-\eta_n > \eta_n$，故三角形将由顶点开始屈服。

三角形截面底边开始屈服时，η_n 由下式确定：

$$\eta_n' = \frac{y\int_y^h b_\eta d\eta + \int_0^y b_\eta \eta d\eta}{A}$$

$$= \frac{y\int_y^h \frac{b}{\eta}(h-\eta)d\eta + \int_0^y \frac{b}{h}(h-\eta)\eta d\eta}{\frac{1}{2}bh}$$

$$= h\left[\frac{1}{3}\left(\frac{y}{h}\right)^3 - \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \frac{y}{h}\right] \qquad \text{(i)}$$

由于三角形底边开始屈服时，$y-\eta_n = \eta_n$，因而

$$y = 2\eta_n \qquad \text{(ii)}$$

由（i）式和（ii）式得

$$\frac{1}{3}\left(\frac{y}{h}\right)^3 - \left(\frac{y}{h}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{y}{h} = 0 \qquad \text{(iii)}$$

解方程式（3）后，得

$$y=\frac{3-\sqrt{3}}{2}h,\quad \eta_n'=\frac{3-\sqrt{3}}{4}h$$

当整个截面处于塑性状态时，则有

$$-\int_0^{\eta_n''}\sigma_s\frac{b}{h}(h-\eta)d\eta+\int_{\eta''}^{h}\sigma_s\frac{b}{h}(h-\eta)d\eta=0 \qquad \text{(iv)}$$

η'' 为此状态时中性轴距底边的距离。积分（iv）式得

$$h^2-4h\eta_n''+2\eta_n''^2=0 \qquad \text{(v)}$$

解方程（v）则有

$$\eta_n''=\frac{2-\sqrt{2}}{2}h$$

由此得知，当截面由弹性进入完全塑性后，中性轴移动的距离 z_0 为

$$z_0=\eta_n-\eta_n''=\frac{h}{3}-\frac{2-\sqrt{2}}{2}h\cong 0.0403h$$

下面再来看看简单梁的弹塑性弯曲问题的计算。假设一个受弯的杆件，受弯矩 M 的作用，如图 5.6 所示，这时杆件上的每一

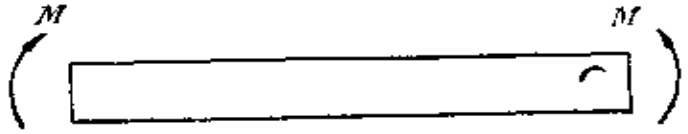


图 5.6　受弯的杆件

个截面都有相同的应力状态。这里假设材料是理想弹塑性的，即略去材料在屈服后的强化效应。让我们逐渐增加弯矩，这时就可以得到三个阶段的法向应力图。图 5.1a 表示截面在弹性阶段的工作情况，这里在整个截面上应力都不超过屈服极限。图 5.1b 为杆件的弹塑性工作阶段。在这里距中性层一定距离的地方应力已经达到了屈服极限，而且由于我们考虑的是理想弹塑性材料，所以应力将是

一个常数。但是接近中性层的部分由于应力仍较小，故仍处在弹性工作阶段，其应力沿截面高度线性地由 $-\sigma_s$ 变到 $+\sigma_s$，图 5.1c 表示截面工作的极限状态，即假设弹性工作区域已减到很小，而整个截面完全处于塑性工作阶段，因而用两个矩形应力图来表示极限状态。

在材料力学里计算受弯杆件时，都采取了杆上的纵向伸长沿截面高度按线性规律分布，即截面变形时的平面假设。这是个几何假设，与材料性质是无关的，当材料处于弹性状态时可以使用它，材料处于塑性状态时也可以使用它。经验证明，这个假设在变形较小时，是与实验符合的，平面假设可以用下列数学公式表示

$$\varepsilon = Az \tag{5.13}$$

这里 ε—纵向伸长，z—距中性层的距离，A—常数。

公式（5.13）中的 A，可以由图（5.7）中两个相似三角形的比例中求出，即

$$\frac{dx}{\rho} = \frac{\varepsilon dx}{z} \tag{5.14}$$

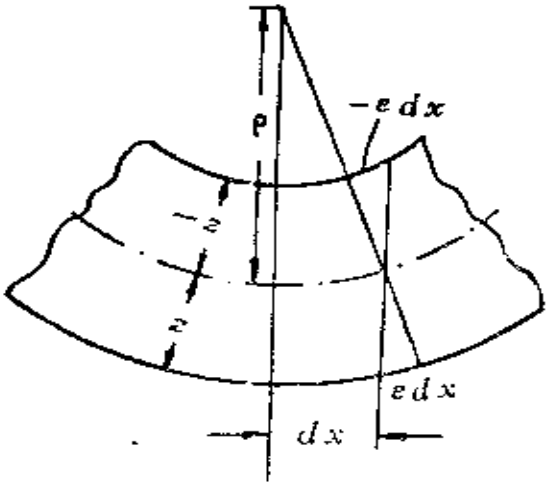
ε—杆件边缘纤维的变形，

这里 ρ 为杆中性轴的曲率半径。将（5.14）与（5.13）相比后则得 $A = \frac{1}{\rho}$，但是我们知道，杆中性轴的曲率可以近似地用其轴线的二次导数表示，故最后得到

$$A = \frac{d^2w}{dx^2} \tag{5.15}$$

现在我们就来看看杆件在弹塑性工作阶段时曲率和弯矩之间的关系。下面我们将看到，对于不同几何形状的横截面，这个关系是不同的。

以矩形截面为例，设截面弹性部份的高度为 h_e，则弹性部份



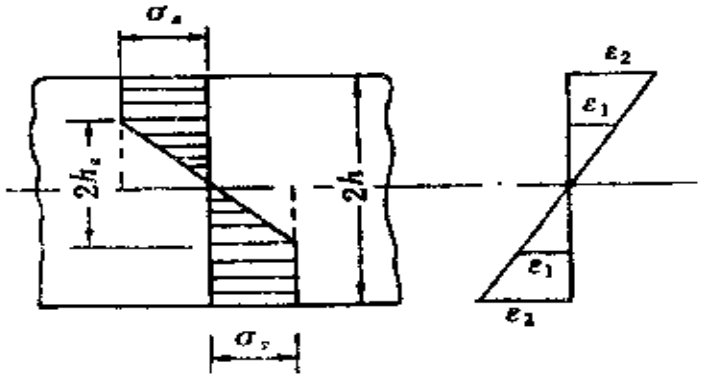


图 5.7　曲率半径和弹性核之间的关系　图 5.8　弹塑性截面上的应力和应变

最大轴向应变为

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_s}{E}$$

而整个杆件最外层的轴向应变为 ε_2，这时由图 5.8 便可以找到下列关系

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_1}{h_e} = \frac{\varepsilon_2}{h} = \frac{\sigma_s}{Eh_e} \tag{5.16}$$

因此

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{\sigma_s}{Eh_e} \tag{5.17}$$

或

$$h_e = \frac{\sigma_s}{E\dfrac{d^2w}{dx^2}} \tag{5.18}$$

故式（5.6）又可写成：

$$M = b\sigma_s\left(h^2 - \frac{\sigma_s^2}{3E^2\left(\dfrac{d^2w}{dx^2}\right)^2}\right) \tag{5.19}$$

由公式（5.6）知道，当整个截面尚处于弹性工作状态时，即 $h_e = h$，则弯矩 $M = M_e = \frac{2b\sigma_p h^2}{3}$，而当整个截面处于塑性阶段工作时，即当 $h_e = 0$时，则 $M = M_p = b\sigma_p h^2$，由这两个式子知道，对于矩形截面说来塑性弯矩与弹性极限弯矩之比为

$$\frac{M_p}{M_e} = \frac{3}{2} = 1.5$$

这个值对不同的截面是不一样的。让我们再来看看公式(5.19)的另一表达式

$$M = b\sigma_p h^2\left(1 - \frac{\sigma_s^2}{3E^2h^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2}\right) = M_e\left[\frac{3}{2} - \frac{\sigma_s^2}{2E^2h^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2}\right]$$

或

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}Eh} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{M}{M_e}}} \tag{5.20}$$

应该注意到这个式子只有对于矩形截面，弯矩大于弹性弯矩时才能使用。

在研究杆件的弹塑性弯曲问题时，首先应该确定杆件受弯时的塑性区域，因为只有知道了那部份是弹性区，那部份是塑性区，才能正确地使用相应的物理规律，从而正确地反映实际情况。

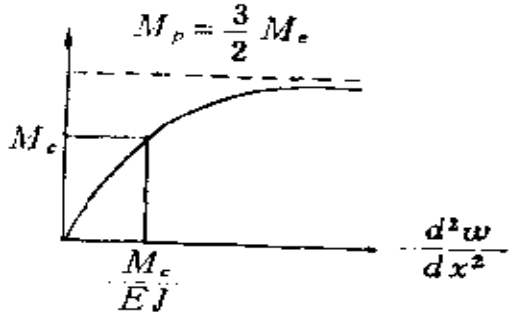


图 5.9 弯矩和曲率之间的关系

为了使问题简单，我们仍来研究矩形截面的情形。当杆件在弹性工作阶段时，应力与应变之间的线性关系为

$$-\frac{M}{EJ} = \frac{d^2w}{dx^2} \tag{5.21a}$$

在弹塑性阶段工作时，则可使用公式（5.21a），当 $M = M_p$时，

即$M=\frac{3}{2}M_s$时，由公式（5.20）得$\frac{d^2w}{dx^2}=\infty$（图 5.9）。

塑性区可以通过变化公式（5.6）求得下列表达式。

$$h_e=h\sqrt{3\left(1-\frac{M}{M_p}\right)} \tag{5.21b}$$

公式中的 M 表示弯矩，一般说来，它是杆件长度的函数。例如一个受集中力作用下的简支杆件在极限情况下可用下式表达

$$M=M_p\left(1-\frac{x}{l}\right) \tag{5.21c}$$

而在均布荷载作用下的简支梁则将为

$$M=M_p\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right) \tag{5.21d}$$

利用公式（5.21b）及（5.21c）则可得到集中载荷作用时的塑性区的表达公式

$$h_e=h\sqrt{\frac{3x}{l}} \tag{5.22}$$

当 $h_e=0$ 时　　$x=0$

$h_e=h$ 时　　$x=\frac{l}{3}$

即当 $x=\frac{l}{3}$时截面完全处于弹性工作状态。而当均布载荷作用时，则可得到

$$h_e=\sqrt{3}h\frac{x}{l} \tag{5.23}$$

当 $h_e=0$ 时　　$x=0$

$h_e=h$ 时，　　$x=\frac{l}{\sqrt{3}}$，

即在这种情况下当 $x=\frac{l}{\sqrt{3}}$时，截面则完全处于弹性工作状态。这两种情况都表示在图（5.10）及图（5.11）上。图上阴影部份即为塑性区域。在集中力作用的情况下，塑性区占杆件的$\frac{1}{3}$跨度。而在均布荷载作用的情况时，塑性区占杆件 0.577 的跨度。

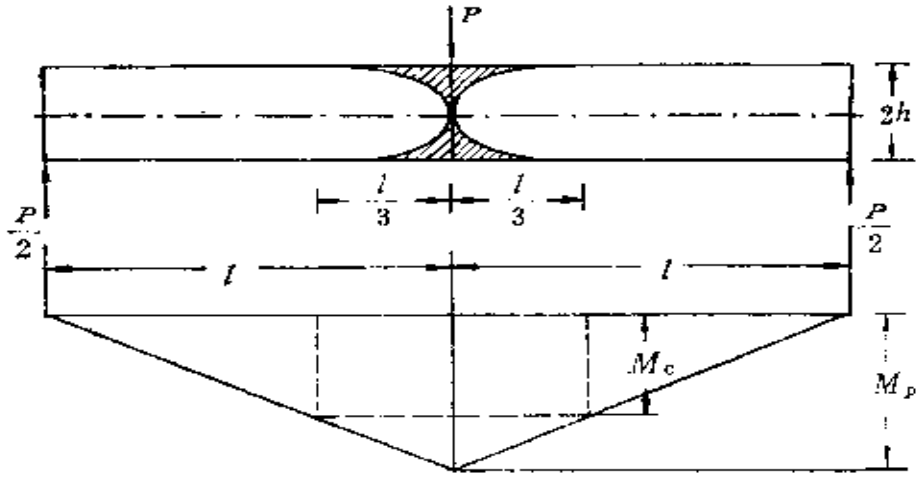


图 5.10　受集中力作用的简支梁时在极限状态时的弹塑性区

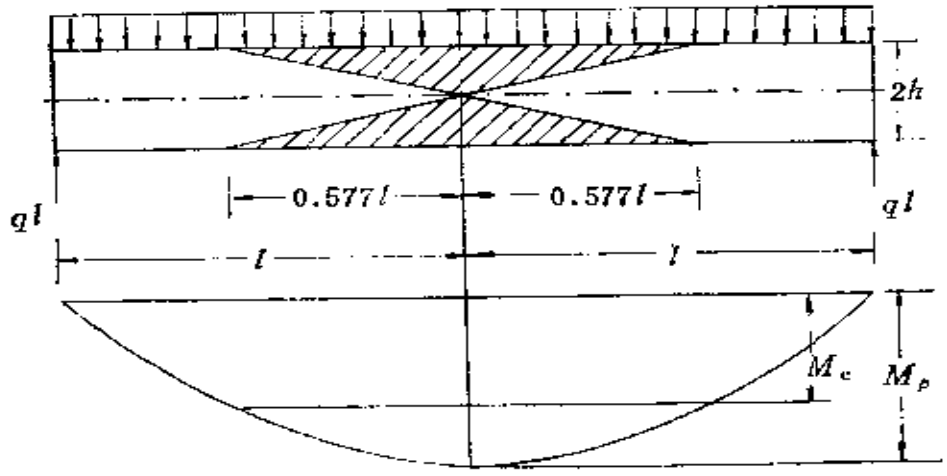


图 5.11　受均布载荷作用的简支梁在极限状态时的弹塑性区

例题：已知理想弹塑性材料制成的悬臂梁（图 5.12），设集中载荷作用于梁的自由端处，而梁的截面是矩形的。若杆件处于极限

工作状态，而弯矩小于 M_e 的线段的长度为 a，试求自由端处的挠度值。

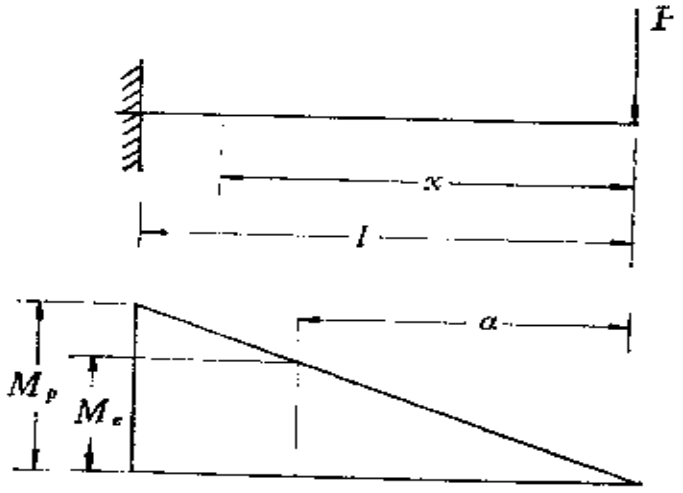


图 6.12　受集中力作用的悬臂梁

解：在 $x<a$ 段的杆件弯曲轴线方程为

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ} = \frac{Px}{EJ} \tag{i}$$

而在 $a<x<l$ 的部份上则应用

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{2}Eh}\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{x}{a}} \tag{ii}$$

将（ii）式积分后则得

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{2\sigma_p a}{\sqrt{2}hE}\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{x}{a}} + C_1 \tag{iii}$$

$$w = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sigma_p a^2}{\sqrt{2}hE}\sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{a}\right)^3} + C_1 x + C_2 \tag{iv}$$

积分常数 C_1、C_2 可通过在固支处挠度及转角为零的边界条件定出

$$w(l) = \frac{dw(l)}{dx} = 0$$

在极限状态时，由图（5.12）中两个相似三角形知道

$$\frac{a}{l} = \frac{M_e}{M_p} = \frac{2}{3}$$

故 $$C_1 = C_2 = 0$$

由公式（iii）及（iv），可以求出挠度和转角在极限状态下的表达式

$$w_p = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\sigma_s a^2}{2Eh}}\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{3x}{2l}\right)^3}$$

$$\frac{dw_p}{dx} = -\sqrt{\frac{2\sigma_s a}{2Eh}}\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{3x}{2l}}$$

当 $x = \frac{2}{3}l$ 时

$$\left.\begin{aligned} w_p\left(\frac{2}{3}l\right) &= \frac{1}{3}\cdot\frac{\sigma_s a^2}{Eh} \\ \frac{dw_p\left(\frac{2}{3}l\right)}{dx} &= -\frac{\sigma_s \cdot a}{Eh} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(vi)}$$

现在再来看看在弹性部份的弯曲轴线，即公式(i)的积分

$$\frac{dw}{dx} = \frac{Px^2}{2EJ} + C_3 \qquad \text{(vii)}$$

$$w = \frac{Px^3}{6EJ} + C_3 x + C_4 \qquad \text{(viii)}$$

上式中的$-\frac{P}{EJ}$项可以用下式表示

$$\frac{P}{EJ}=\frac{Pl}{lE\cdot\frac{1}{3}b\cdot h^3}=\frac{M_p}{aEbh^3}=\frac{\sigma_s bh^2}{aEbh^3}=\frac{\sigma_s}{aEh}$$

故得

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\sigma_s}{2aEh}x^2+C_3 \qquad \text{(vii)}'$$

$$w=\frac{\sigma_s x^3}{6aEh}+C_3x+C_4 \qquad \text{(viii)}'$$

当 $x=a=\frac{2}{3}l$ 时转角和挠度应与式(vi)相等，因此

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sigma_s a}{2Eh}+C_3=-\frac{\sigma_s a}{Eh}\ \text{故}\ C_3=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma_s a}{Eh}\\&\frac{\sigma_s a^2}{6Eh}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma_s a^2}{Eh}+C_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sigma_s a^2}{Eh},\quad C_4=\frac{5}{3}\cdot\frac{\sigma_s a^2}{Eh}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(ix)}$$

将 C_3，C_4 代入 (viii)′ 则得

$$w=\frac{\sigma_s}{6ahE}x^3-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma_s a}{Eh}x+\frac{5}{3}\cdot\frac{\sigma_s a^2}{Eh} \qquad \text{(viii)}''$$

当 $x=0$ 时，$\quad w=\frac{5}{3}\cdot\frac{\sigma_s a^2}{hE}$

当 $a=\frac{2}{3}l$ 时 $\quad w=\frac{20}{27}\cdot\frac{\sigma_s l^2}{Eh}$ (x)

如果杆件到处都是弹性的，即将条件 $w(l)=\frac{dw(l)}{dx}=0$ 代入公式 (vii)′ 及 (viii)′ 后得到

$$C_3=-\frac{\sigma_s l}{2Eh},\quad C_4=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sigma_s l^2}{Eh} \qquad \text{(xi)}$$

将公式（xi）代入（viii）后则得，

$$w=\frac{\sigma_s x^3}{6ahE}-\frac{\sigma_s l}{2Eh}x+\frac{1}{3}\frac{\sigma_s l^2}{Eh} \tag{xii}$$

当 $x=0$ 时

$$w_e=\frac{1}{3}\frac{\sigma_s l^2}{Eh} \tag{xiii}$$

将式（x）及式（xiii）比较后我们有

$$\frac{w_p}{w_e}=\frac{20}{9}=2.22 \tag{xv}$$

由这个例子看出，对于矩形截面的悬臂梁，按塑性理论得到的极限挠度比用普通弹性理论计算的极限挠度大 2.22 倍。因此固定端虽有无限大的曲率，但尚未产生无限大的挠度。

§5.2 杆件的弹塑性扭转

一、圆形杆件的弹塑性扭转

杆件的弹塑性扭转也是静定问题，利用平衡方程，塑性条件及边界条件，一般就可以找出杆中应力分布的规律。

在弹塑性扭转问题中，圆形截面的扭转是最简单的情况。

（1）圆形截面杆件的弹塑性扭转

设有半径为 R，长为 l 的圆形截面杆件，受扭矩 M_s 的作用，如杆件的相对扭角为 φ，则单位扭转角为 θ 此时有

$$\theta=\frac{\varphi}{l}, \tag{5.24}$$

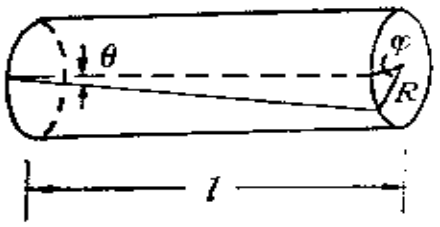


图 5.13 扭转角 φ 与单位扭转角 θ 之间的关系

而在任意半径 r 处的剪应变 γ 应为

$$\gamma = r\theta \tag{5.25}$$

这时扭矩应为

$$M_s = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr \tag{5.26}$$

在弹性范围内，应满足 Hooke 定律，即

$$\tau = G\gamma \tag{5.27}$$

将（5.27）代入（5.26）式后，则可得

$$M_s = G\theta J_0$$

这里 $J_0 = \dfrac{\pi R^4}{2}$，

若此时外载荷继续增加，则在圆柱最外层开始屈服，如 r_s 为弹塑性区的分界线，则

$$\left.\begin{array}{l} \text{在弹性区，即 } r_s > r > 0 \text{ 处，} \tau = G\gamma = Gr\theta \\ \text{在塑性区，即 } R > r > r_s \text{ 处，} \tau = k \end{array}\right\}$$

这里，当使用 Mises 屈服条件时， $k = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$

当使用 Tresca 屈服条件时， $k = \dfrac{\sigma_s}{2}$

由式（5.26）可得，在弹塑性状态时扭矩 M_s 应为

$$M_s = 2\pi \left\{ \int_0^{r_s} k\frac{r}{r_s} r^2 dr + \int_{r_s}^R kr^2 dr \right\}$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 k \left\{ 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)^3 \right\} \tag{5.28}$$

当 $r_s=R$ 时，圆柱体开始屈服 $M_s=\frac{1}{2}\pi R^3 k$

当 $r_s=0$ 时，圆柱体全部屈服 $M_s=\frac{2}{3}\pi R^3 k$

（2）薄壁圆筒的剪力和扭矩的关系

在薄壁圆筒情况下，剪应力和扭矩之间的关系为

$$\tau=\frac{M_s}{2\pi r^2 t} \tag{5.29}$$

如令 k 为纯剪时的屈服应力，则开始屈服时的扭矩应为

$$M_s=2\pi r^2 t k \tag{5.20}$$

其中 r 为圆筒的半径，而 t 为圆筒的厚度。

（3）圆形截面杆件受扭后残余应力

如圆形截面杆件受扭矩 M_s 作用后，将 M_s 除去，则弹性应力将恢复，残余应力的表达式可写为

$$\tau_r=\tau-\tau_e \tag{5.31}$$

而弹性剪应力为 $\tau_e=\frac{M_s}{J_0}r$

$$\tau_e=-\frac{M_s}{J_0}r$$

因此在弹性区即 $0<r<r_s$ 范围内

$$\tau_r=k\cdot\frac{r}{r_s}-\frac{M_s}{J_0}r=k\left(\frac{r}{r_s}\right)\left\{1-\frac{4}{3}\left(\frac{r_s}{R}\right)\cdot\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)^3\right]\right\} \tag{5.32}$$

在塑性区，即 $r_s<r<R$ 处

$$\tau_r=k-\frac{M_s}{J_0}r=k\left\{1-\frac{4}{3}\frac{r}{R}\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)^3\right]\right\} \tag{5.33}$$

如果整个截面都已进入塑性状态后再卸载时，则

$$\tau_r = k\left(1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{r}{R}\right) \tag{5.34}$$

由式（5.34）看出当 $r = \frac{3}{4}$ 时，残余应力 $\tau_r = 0$

另一方面残余扭转角 θ_r 也可以通过将塑性状态时的扭转角减去弹性扭角而得到，即

$$\theta_r = \theta - \theta_e \tag{5.35}$$

扭转角 θ 和 r_s 之间关系为 $r_s\theta = \frac{k}{G}$，因此得

$$\theta = \frac{k}{Gr_s}$$

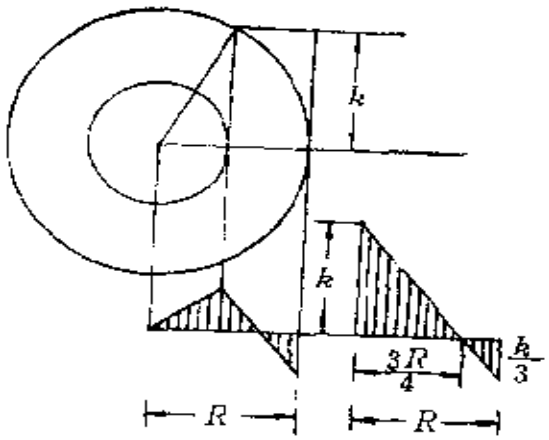


图 5.14 受扭杆件的应力分布

但 $\theta_e = \frac{M_s}{GJ_0}$，因此我们最后得残余扭角的表达式为

$$\theta_r = \frac{k}{Gr_s} - \frac{M_s}{GJ_0} = \theta\left\{1 - \frac{4r_s}{3R}\cdot\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)^3\right]\right\} \tag{5.36}$$

二、任意截面杆件的弹塑性扭转

根据 Saint Venant 所给出的弹塑性杆件自由扭转问题的解知道，在弹性范围内，如果 z 轴和杆件的轴重合，则 τ_{zx} 和 τ_{zy} 都不等于零。在塑性范围中可以取类似的假设，并由此得出，这样的假设将满足所有的塑性理论方程，从而可以得到准确的解答。

应力分量 τ_{zx} 和 τ_{zy} 应满足平衡方程

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} = 0 \tag{5.37}$$

以及理想塑性体的屈服条件

$$\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2=k^2 \tag{5.38}$$

其中 k 为剪切屈服极限。边界条件为

$$\tau_{zx}dy-\tau_{zy}dx=0 \tag{5.39}$$

方程式（5.37）（5.38）及边界条件（5.39）具有两个未知数，因此完全可以确定塑性截面中的应力分布。在弹塑性扭转问题中，还应找到弹塑性区的分界线的条件，这个条件也可用应力表示，因为在分界线上剪应力 $\tau=k$，此外，在弹塑性分界线上还应满足应力分量 τ_{zx}、τ_{zy} 的连续条件。由这里看出，在此情况下应力分布和所使用的塑性理论的类型（形变理论或增量理论）是无关的。

可以通过应力函数将式（5.37）和式(5.38）合并成一个式子，即取

$$\tau_{zx}=-\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad \tau_{zy}=\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{5.40}$$

式（5.40）满足平衡方程，而将它代入式（5.37）后，则得

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2=k^2 \tag{5.41}$$

上式为一阶非线性的微分方程，而边界条件（5.39）将有形式

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=0 \tag{5.42}$$

积分后，则得

$$\phi=\text{const}$$

对于单连通截面，C 一般取为零。

如果设位移 u 和 v 是 x、y 的线性函数，则应有

$$u=\theta yz,\quad v=-\theta xz \tag{5.43}$$

其中 θ 为单位扭转角。截面翘曲位移 w 只是 x、y 的函数，即 $w=w(x、y)$，这时应有

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_x=\varepsilon_y=\varepsilon_z=\gamma_{xy}=0,\\&\gamma_{zx}=\theta y+\frac{\partial w}{\partial x},\\&\gamma_{zy}=-\theta x+\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{5.44}$$

将所得的 τ_{zx}，τ_{zy} 代到应力应变关系中去，便可得到确定 w 或 ψ 的一阶偏微分方程式。

由方程式（5.41）知道，偏导数平方和是应力函数梯度的长度，因此式（5.41）又可写为

$$\left.\begin{aligned}&|\mathrm{grad}\phi|^2=k^2\\\text{或}\quad&|\mathrm{grad}\phi|=k=\mathrm{const}\end{aligned}\right\}\tag{5.45}$$

方程式（5.45）$|\mathrm{grad}\phi|$ 代表一点总切应力，在物理上便是在薄膜表面一点的最大斜率。如果 k 表示纯剪时的屈服应力，于是当一点屈服时便应满足（5.41），这就是对一点梯度可能达到的值给以限制。当梯度常数值一经达到，则再增加扭矩就使得发生屈服的面积扩展。梯度保持为常数这一情况，可以想象为，是在与杆截面相同形状的基础上，建造一个常斜率的顶盖。

方程式（5.45）和理想沙丘方程是类似的，即

$$|\mathrm{grad}\,w|=\mathrm{tg}\,\alpha\tag{5.46}$$

这里 w 是沙丘的高度，而 α 为内摩擦角。

在单连通区域以及完全塑性的截面中，$\phi=0$ 的边界条件对应 $w=0$，这一点可以在所分析的截面上通过建造一个沙堆得到。这一问题最初曾被 Nadai 注意到，这一点在实际中意义是很大的，因

为建造一个沙丘是很容易的，而知道了沙丘的形状便可确定应力的分布。由弹性力学知道，扭矩应由下式确定

$$M_s = 2\int\int_F \phi dF \tag{5.47}$$

而由（5.45）及（5.46）的比拟关系知道

$$\frac{\phi}{k_0} = \frac{w}{\mathrm{tg}\alpha} \tag{5.48}$$

因此应有

$$M_s = \frac{2k}{\mathrm{tg}\alpha}\int\int_F w dF = \frac{2k}{\mathrm{tg}\alpha}V_P \tag{5.49}$$

这里 V_p 为具有内摩擦角为 α 沙丘的体积。知道了沙丘的体积，便可算出相应的扭矩 M_s，此 M_s 为使整个截面进入塑性时的扭矩，也就是截面受扭时的极限承载能力。V_p 的值也可直接用几何方法计算，此时即可得到已知的扭矩公式。对于几种简单情况，扭矩是很容易计算的，例如对于圆断面，沙丘为一锥体，其高度为 $h = R\cdot\mathrm{tg}\alpha$，因而

$$V_p = \frac{1}{3}R^2\pi\,\mathrm{tg}\alpha, \qquad M_s = \frac{2\pi R^3 k}{3} \tag{5.50}$$

对于矩形截面

$$h = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\alpha,$$

其体积 V 为

$$V = (b-a)\frac{ah}{2} + \frac{1}{3}a^2h = (b-a)\frac{a^2\mathrm{tg}\alpha}{4} + \frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a}{2}\mathrm{tg}\alpha$$

因此，

$$M_s=\left[(b-a)\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}\right]k=\frac{a^2}{6}k[3b-a] \qquad (5.51)$$

当 $b=a$ 时，即正方形截面时

$$M_s=\frac{a^3k}{3}$$

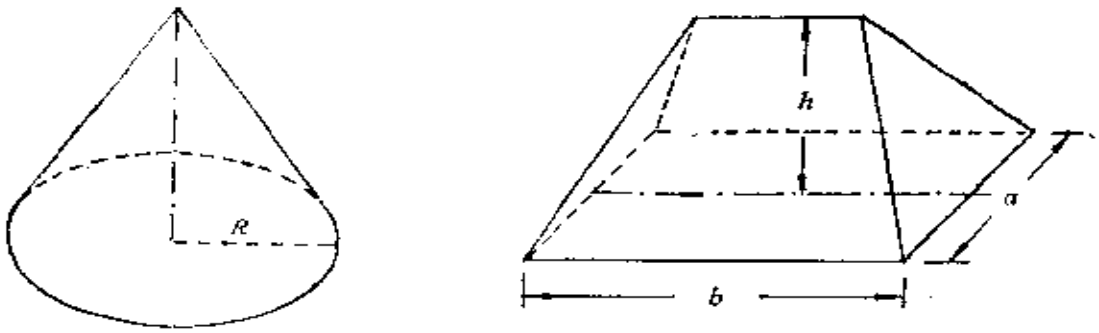


图 5.15 圆断面和矩形断面的沙丘堆体

§ 5.3 旋转圆盘

在轴对称载荷情况下，解决圆盘和环盘问题是一个一维问题，因为所有的应力分量和应变分量都只是半径 r 的函数。当圆盘匀速旋转时，其平衡方程为

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}=(\sigma_\theta-\sigma_r)-\frac{\gamma\omega^2r^2}{g} \qquad (5.52)$$

式中 ω 为转盘的均匀角速度；γ 是单位体积的重量。

在弹性状态下，其位移和应力的表达式为

$$u=C_1r+\frac{C_2}{r}-\frac{\gamma\omega^2(1-\nu^2)}{8Eg}r^3$$

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\nu)-\frac{\gamma\omega^2(1-\nu^2)}{8g}(3+\nu)r^2-\right.$$

$$\sigma_\theta=\frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\nu)-\frac{\gamma\omega^2(1-\nu^2)}{8g}r^2(1+3\nu)r^2-(1-\nu)\frac{C_2}{r^2}\right] \tag{5.53}$$

其中常数由边界条件确定。

在理想塑性情况下，屈服条件中只有应力，此时将屈服条件和平衡方程联合求解，便可求出应力的表达式。当使用非线性的 Mises 屈服条件时，在积分过程中将遇到较大的困难，此时可利用参数方程求解。在使用 Tresca 屈服条件时，虽然积分较为简单，然而此时则需要分析所得结果在什么范围内是可用的。

在自由旋转的圆盘中，一般有 $\sigma_\theta>\sigma_r>0$，此时 Tresca 屈服条件为

$$\sigma_\theta=\sigma_s \tag{5.54}$$

当圆盘完全进入塑性时，内外半径处的两个边界条件可以用来确定积分常数和极限转速 ω，而在弹塑性应力状态时，除通常使用的边界条件外，还可取弹塑性分界处应力相等的条件，因此这些积分常数不用分析变形便可求出。如将所得积分常数代入应力表达式后，在整个塑性区不满足 $\sigma_\theta\geqslant\sigma_r\geqslant0$ 的条件时，则应再分别考虑两种情况，即为 $\sigma_r\geqslant\sigma_\theta\geqslant0$ 时，取 $\sigma_r=\sigma_s$，当 $\sigma_\theta\geqslant0\geqslant\sigma_r$ 时，取 $\sigma_\theta-\sigma_r=\sigma_s$。当圆盘开始屈服时的旋转角速度，称为弹性极限角速度，以 ω_e 表示，当圆盘全部进入塑性时，则称此时的旋转角速度为塑性极限角速度，并以 ω_p 表示。

例一：设有一弹塑性材料制成的旋转圆盘以旋转速度 ω 旋转，若 $\omega_e<\omega<\omega_p$ 即实心圆盘中部分为弹性区，部分为塑性区，以 $r=r_s$ 表示塑性区和弹性区的分界线，试求弹塑性半径和转速 ω 之间的关系。

解：在塑性区，应有 $\sigma_\theta > \sigma_r > 0$，故屈服条件应取为

$$\sigma_\theta = \sigma_s,$$

由平衡方程可得

$$\sigma_r = \sigma_s - \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma \omega^2}{g} r^2 + C_3 \tag{i}$$

在盘心处，即当 $r = 0$ 时，应力应为有限值，因此 $C_3 = 0$，由此应力表达式为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_s - \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 \\ \sigma_\theta &= \sigma_s \end{aligned}\right\} \tag{ii}$$

在弹性区，应力表达式可用式（5.53）表示，其中常数 A，C 由边界条件和弹塑性交界处应力的连续条件确定，边界条件为

当 $r = b$ 时，$\sigma_r = 0$

应力的连续条件为

当 $r = r_s$ 时，$(\sigma_r)_e = (\sigma_r)_p$，$(\sigma_\theta)_e = (\sigma_\theta)_p$，其中 $(\sigma_r)_e$ 表示在弹性区域中 $r = r_s$ 时得出的 σ_r，而 $(\sigma_r)_p$ 表示在塑性区域中 $r = r_s$ 时得出的 σ_r。此时有

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 b^2 + \frac{C_1 E}{1-\nu} - \\ &\quad - \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{C_2 E}{b^2} = 0 \\ \sigma_r &= -\frac{3+\nu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_s^2 + \frac{C_1 E}{1-\nu} - \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{C_2 E}{r_s^2} = \\ &= \sigma_s - \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_s^2 \end{aligned}\right| \tag{iii}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta = -\frac{1+3\nu}{8}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2\cdot r_s^2+\frac{C_1E}{1-\nu}+\\ +\frac{1}{1+\nu}\cdot\frac{C_2E}{r_s^2}=\sigma_s\end{aligned}\right\}$$

联立求解式（iii）的后二式，则得

$$C_2=\frac{1+\nu}{E}\left(\frac{1+3\nu}{24}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\omega^2 r_s^4\right)$$

$$C_1=\frac{1-\nu}{E}\left[\sigma_s+\frac{1+3\nu}{12}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\omega r_s^2\right]$$

因此弹性区的应力公式为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r=-\frac{3+\nu}{8}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2r^2+\sigma_s+\frac{1+3\nu}{12}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot r_s^2\\ -\frac{1+3\nu}{24}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{r_s^4}{r^2}\\ \sigma_\theta=-\frac{1+3\nu}{8}\cdot\frac{\gamma}{g}\omega^2r^2+\sigma_s+\frac{1+3\nu}{12}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot r_s^2\\ -\frac{1+3\nu}{24}\cdot\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{r_s^4}{r^2}\end{aligned}\right\}\qquad(\text{iv})$$

当 $r=b$ 时，$\sigma_r=0$，由此得

$$\omega=\omega_s^2=\frac{24\sigma_s b^2}{m[(1+3\nu)r_s^4-2(1+3\nu)b^2r_s^2+3(3+\nu)b^4]}\qquad(\text{v})$$

上式给出了部分塑性时的转速与弹塑性交界处的半径 r_s 的关系。在开始屈服时 $r_s=0$

$$\omega_s^2=\frac{24\sigma_s b^2}{3m(3+\nu)b^4}=\frac{8}{3+\nu}\cdot\frac{\sigma_s}{mb^2}$$

$$\omega_s = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{8}{3+\nu}\frac{\sigma_s}{m}} = \omega_e,$$

如 $\nu = \frac{1}{3}$，则 $\omega_e = \frac{1.55}{b}\sqrt{\frac{\sigma_s}{m}}$.

在全部进入塑性状态时的极限状态时，则有 $r_s = b$

$$\omega_s^2 = \frac{24\sigma_s}{mb^2[1+3\nu-2-6\nu+9+3\nu]} = \frac{3\sigma_s}{mb^2}$$

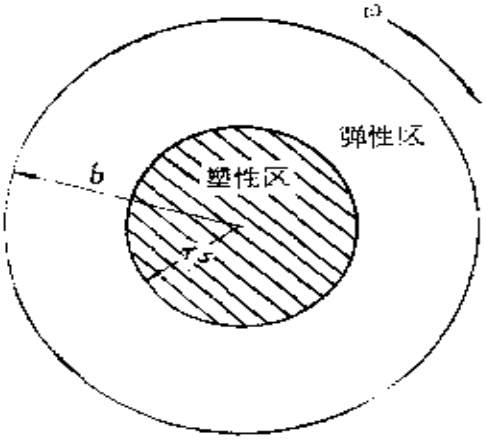


图 5.16 部分塑性实心圆盘

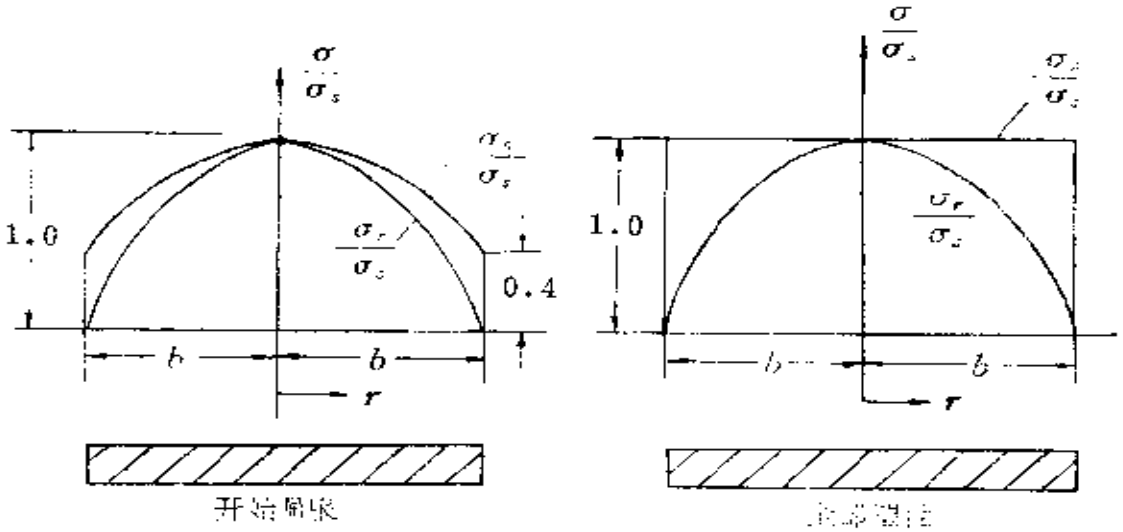


图 5.17 旋转圆盘的应力分布

$$\omega_s=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{3\sigma_s}{m}}=\omega_p$$

当 $r=\frac{1}{3}$时，　　$\frac{\omega_b}{\omega_e}=\frac{1.73}{1.55}=1.11$；

$r=\frac{1}{2}$时，　　$\frac{\omega_p}{\omega_e}=\frac{1.73}{1.51}=1.14$。

例二：设有空心等速旋转圆盘，内半径为 a，外半径为 b，若圆盘由理想弹塑性材料制成，其屈服极限为 σ_s，试用 Tresca 屈服条件求出此环盘的极限转速 ω_p。

解：由于在旋转环盘中 $\sigma_\theta>\sigma_r>0$．故屈服条件应取为 $\sigma_\theta=\sigma_s$，将屈服条件代入平衡方程后，则有

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r)=\sigma_s-\frac{\gamma}{g}\omega^2r^2 \tag{i}$$

积分上式后，得

$$\sigma_r=\sigma_s-\frac{\gamma\omega^2}{3g}r^2+\frac{C}{r} \tag{ii}$$

当 $r=a$ 时，$\sigma_r=0$，因此常数

$$C=-a\left(\sigma_s-\frac{\gamma\omega^2}{3g}a^2\right),$$

故应力为

$$\sigma_r=\sigma_s\left(1-\frac{a}{r}\right)-\frac{\gamma\omega^2}{3g}\left(r^2-\frac{a^3}{r}\right) \tag{iii}$$

由上式看出，到处都满足 $\sigma_\theta\geqslant\sigma_r\geqslant0$ 的条件，利用 $r=b$ 时，$\sigma_r=0$ 的条件得

$$\sigma_s\left(1-\frac{a}{b}\right)-\frac{\gamma\omega_p^2}{3g}\left(b^2-\frac{a^3}{b}\right)=0 \tag{iv}$$

由此得

$$\omega_p^2 = \frac{3g\sigma_s}{\gamma(b^2+ab+a^2)}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{3g\sigma_s}{\gamma(b^2+ab+a^2)}}$$

§ 5.4 轴对称平面应变问题和平面应力问题

在极坐标中，当有轴对称载荷时，而且结构和边界条件也都是轴对称的，这时应力分量和应变分量都只是半径 r 的函数。在轴对称平面应变问题中，应有如下关系：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{位移分量}\quad u=u(r),\ v=w=0.\\
&\text{应变分量}\quad e_r=\frac{du}{dr},\quad e_\theta=\frac{u}{r},\ e_z=\gamma_{\theta z}=\gamma_{zr}=\gamma_{r\theta}=0\\
&\text{屈服条件}\quad (\sigma_\theta-\sigma_r)=\sigma_s\quad \text{Tresca 条件}\\
&\qquad\qquad (\sigma_\theta-\sigma_r)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s\quad \text{Mises 条件}
\end{aligned}\right\}\qquad (5.55)$$

平衡方程

$$r\cdot\frac{d\sigma_r}{dr}=\sigma_\theta-\sigma_r$$

在轴对称平面应力问题中，则将有

$$\left.\begin{aligned}
&\text{应力分量}\quad \sigma_r=\sigma_r(r),\ \sigma_\theta=\sigma_\theta(r),\ \sigma_z=\tau_{\theta z}=\tau_{zr}\\
&\qquad\qquad =\tau_{rz}=0\\
&\text{屈服条件}\quad (\sigma_\theta-\sigma_r)=\sigma_s\quad \text{Tresca 条件}\\
&\qquad\qquad \sigma_r^2-\sigma_r\sigma_\theta+\sigma_\theta^2=\sigma_s^2\quad \text{Mises 条件}
\end{aligned}\right\}\qquad (5.56)$$

在使用 Mises 屈服条件时，往往采用参数方程来简化计算的过程。现用如下两个例题，说明轴对称弹塑性问题的解题步骤。

例一：设有理想弹塑性材料制成的厚壁圆筒受内压 p 的作用，处于平面应变状态。如内半径为 a，外半径为 b，弹塑性分界半径为r_s，试用 Mises 屈服条件，求出内压 p 和 r_s 之间关系的表达式。

解：如图 5.18 所示，在 $r_s \leqslant r \leqslant b$ 内为弹性区，令在弹塑性交界处的 σ_r 为

$$[\sigma_r]_{r=r_s} = q \qquad \text{(i)}$$

目前 r_s 和 q 都还未知，在塑性区，轴对称平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

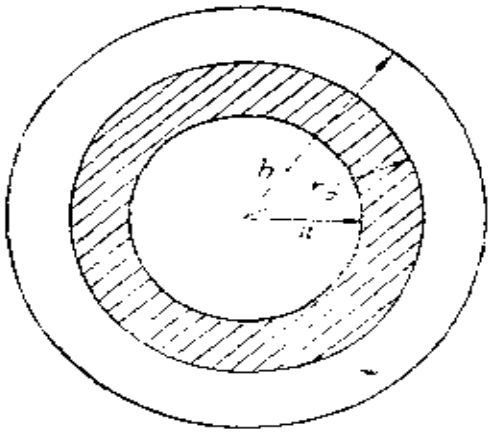


图 5.18 厚壁筒的弹性区与塑性区

Mises 的屈服条件为

$$(\sigma_\theta - \sigma_r) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \qquad \text{(iii)}$$

将式（iii）中屈服条件代入式（ii）则得

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_s}{r} = 0 \qquad \text{(iv)}$$

将它写成为一形式

$$d\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \frac{dr}{r}$$

积分后得

$$\sigma_r = C + \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln r \qquad \text{(v)}$$

积分常数可以由边界条件定出，塑性区中的筒壁内侧边界条件为

$$r = a, \qquad \sigma_r = -p$$

所以

$$C = -p - \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln a$$

代入式（v）后得

$$\sigma_r = -p + \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln \frac{r}{a} \qquad \text{(vi)}$$

再由式（iii）和式（vi）得

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s = -\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s - p + \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln \frac{r}{a} \qquad \text{(vii)}$$

从式（vi）和式（vii）便可得出在塑性区域中应力分布的情形。

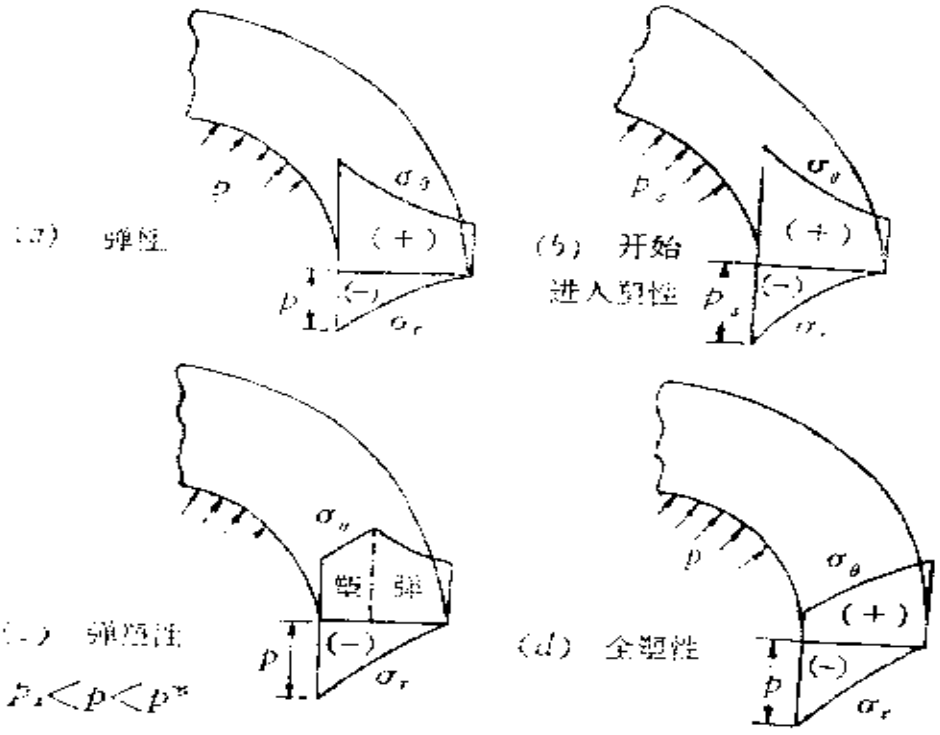


图 5.19 厚壁筒应力分布

应力 q 对弹性区域说来，相当于使弹性区刚进入塑性状态时的压力 p_s。根据弹性力学中厚壁筒的应力表达式，应有

$$\sigma_r = -\frac{p}{\frac{b^2}{a^2}-1}\left(\frac{b^2}{r^2}-1\right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{\frac{b^2}{a^2}-1}\left(\frac{b^2}{r^2}+1\right) \tag{viii}$$

由 Mises 屈服条件，可得

$$p_s = \left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \tag{ix}$$

这时，可用内径为 r_s，外径为 b 并受压力为 q 的厚壁筒代入上式，则得

$$q = \left(1-\frac{r_s^2}{b^2}\right)\cdot\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \tag{x}$$

如取式（vi）中的 $\sigma_r = q$，则比较式（vi）与式（x）则得

$$\ln\frac{r_s}{a}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_s^2}{b^2}\right)=\frac{\sqrt{3}\,p}{2\sigma_s} \tag{xi}$$

如已知 p，便可由上式求出弹塑性交界处的半径 r_s，当 $r_s = b$ 时，

$$p = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s \ln\frac{b}{a} \tag{xii}$$

在极限状态时，应力分布如图 5.18d 所示。此时，σ_θ 的最大值出现在筒的外壁。

例二：设有一无穷大的平板，平板中有一半径为 a 的圆孔而孔壁受均匀内压 p 的作用。如果平板服从（1）Mises 屈服条件，（2）Tresca 屈服条件，试求平板中屈服区和半径 a 之间的关系。

解：由于平板处于平面应力状态，故 $\sigma_z = 0$，而由弹性力学知道

$$\sigma_r = -p\frac{a^2}{r^2}, \qquad \sigma_\theta = p\frac{a^2}{r^2} \tag{i}$$

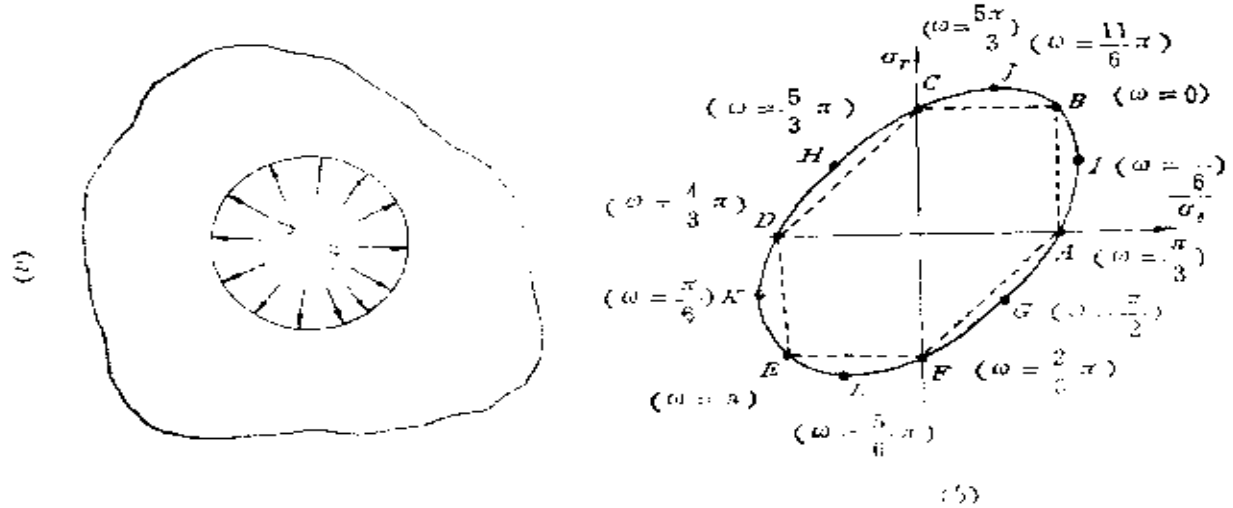
（1）当采用 Mises 屈服条件时，则

$$\sqrt{\sigma_\theta^2 - \sigma_\theta\sigma_r + \sigma_r^2} = \sigma_s$$

从弹性解中看出内壁应力较大，故将首先进入塑性状态，在 $r = a$ 处，$\sigma_r = -p$，$\sigma_\theta = p$

$$\sqrt{p^2 - 2p(-p) + (-p)^2} = \sqrt{3}\,p = \sigma_s$$

$p_e = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$，当内压 $p = p_e = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ 时，内壁刚进入塑性状态，而此时无穷大平板的其余部分尚处于弹性状态。



受内压作用的无穷大平板　　应力状态与 ω 之间的关系

图 5.20

选用 Mises 屈服条件的参数方程为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}\cos\left(\omega + \frac{\pi}{6}\right)\\ \sigma_\theta &= \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}}\cos\left(\omega - \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}\right\} \qquad \text{(ii)}$$

Mises 屈服条件 $\sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_r^2 = \sigma_s^2$ 是在转角与 x 轴为 $\pi/4$ 的新坐标系中标准椭圆，其长半轴为 $a = \sqrt{2}\,\sigma_s$，短半轴为

$$b = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$$

在参数方程中，σ_r，σ_θ 随 ω 的变化而变化，现列表如下：

	R	I	A	G	F	L
ω	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$
σ_θ	σ_s	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$	σ_s	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$
σ_r	σ_s	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$	$-\sigma_s$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$

E	K	D	H	C	J
π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
$-\sigma_s$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$	$-\sigma_s$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$
$-\sigma_s$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$	σ_s	$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$

按 Mises 条件定出塑性区范围：

在 $r=a$ 处，刚进入塑性状态，故

$$\sigma_r=-p_e=-\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}},\quad \sigma_\theta=p_e=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

对应于 G 点，即

$$\omega=\frac{\pi}{2}$$

受均匀内压的轴对称物体的平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0$$

如果压力继续升高，那末某一半径以内的圆环材料就进入塑性状态，其平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr}=\frac{\sigma_\theta-\sigma_r}{r}$$

将式（ii）代入平衡方程则得

$$\sin\left(\omega+\frac{\pi}{6}\right)\frac{d\omega}{dr}+\frac{1}{r}\left[\cos\left(\omega-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\omega+\frac{\pi}{6}\right)\right]=0$$

整理后，得

$$\frac{dr}{r}=-\frac{\sin\left(\omega+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\omega}d\omega=-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+\operatorname{ctg}\omega)d\omega$$

或

$$2\frac{dr}{r}=(-\sqrt{3}-\operatorname{ctg}\omega)d\omega \qquad \text{(iii)}$$

积分上式后，得

$$2\ln r = -\sqrt{3}\omega - \int \operatorname{ctg}\omega d\omega$$

而 $$\int \operatorname{ctg}\omega d\omega = \int \frac{\cos\omega}{\sin\omega} d\omega = \int \frac{d\sin\omega}{\sin\omega} = \ln\sin x + C$$

$$\ln r^2 = -\sqrt{3}\omega - \ln\sin\omega + \ln C^2$$

$$\ln\left(\frac{r^2\sin\omega}{C^2}\right) = -\sqrt{3}\omega,$$

故 $$\left(\frac{C}{r}\right)^2 = e^{\sqrt{3}\omega}\sin\omega \qquad \text{(iv)}$$

此式只对塑性区有效，r_s 为弹性区与塑性区分界处的半径。

在 $r = r_s$ 处，材料刚由弹性状态进入塑性状态，是以

$$\sigma_\theta = -\sigma_r = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$$

的应力状态方式进入塑性状态的，故 $\omega = \pi/2$（对应于 G 点）

$$\therefore \quad \left(\frac{C}{r_s}\right)^2 = e^{\sqrt{3}\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2} = e^{\sqrt{3}\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(v)}$$

将式（iv）与式（v）相比则得

$$\left(\frac{r_s}{r}\right) = e^{\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)}\sin\omega$$

$r = a$ 处是以 $\sigma_\theta = -\sigma_r = p_e = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$ 应力状态，从 G 点（对应 $\omega = \frac{\pi}{2}$）进入屈服状态的，随着内压 p 的不断增大，塑性区范围不断扩大，不断有新的点由弹性过渡到塑性，在塑性变形的过程中，已进入屈服状态的点，其应力状态要发生变化。

当内压不断增大时，在 $r = a$ 处的 σ_r 的绝对值也不断增大。

（因为 $\sigma_r|_{r=a}=-p$），但 σ_r 的绝对值增大是受屈服条件限制的，在平面应力状态条件下 $|\sigma_r|\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$，即对应于 $\omega=\frac{5}{6}\pi$，如 $\sigma_r=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$ 此时在 $r=a$ 处应力状态对应于 L 点，即

$$\sigma_r=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s,\quad \sigma_\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s,\quad \omega=\frac{5}{6}\pi$$

因此有

$$\left(\frac{C}{a}\right)^2=e^{\sqrt{3}\frac{5}{6}\pi}\sin\frac{5\pi}{6}$$

至此，内压 $p=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$ 已达极限值，已不可能再增大了，故

$$\left(\frac{r_s}{a}\right)=e^{-\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}+\frac{1}{2}e^{1.82}=3.06$$

由此得 $r_s=1.75a$，即根据 Mises 条件，塑性区的最大半径 $r_s=1.75a$.

当 $r=r_s$ 以 $\omega=\frac{\pi}{2}$ 进入塑性状态，此时 $r=a$ 处的应力状态已重新调整至 $\omega=\frac{5}{6}$（对应于 L 点），而 $a<r<r_s$ 各点依次处于 LG 之间，即各点均是从 G 点（$\omega=\frac{\pi}{2}$）进入塑性状态，而后沿屈服面按顺时针方向由 G 点向 F 点再向 L 点（$\omega=\frac{5}{6}\pi$）移动。

（2） Tresca 屈服条件

根据弹性解应有

$$\sigma_\theta=-\sigma_r,$$

由于 Tresca 屈服条件为

$$\sigma_\theta-\sigma_r=\sigma_s \qquad \text{(ii)}$$

因此得

$$\sigma_\theta = p \cdot \left(-\frac{a}{r}-\right)^2 = -\frac{\sigma_s}{2} \tag{iii}$$

故由弹性状态向塑性状态过渡是沿图 5.21 所示的 G_1 点进入屈服状态的。

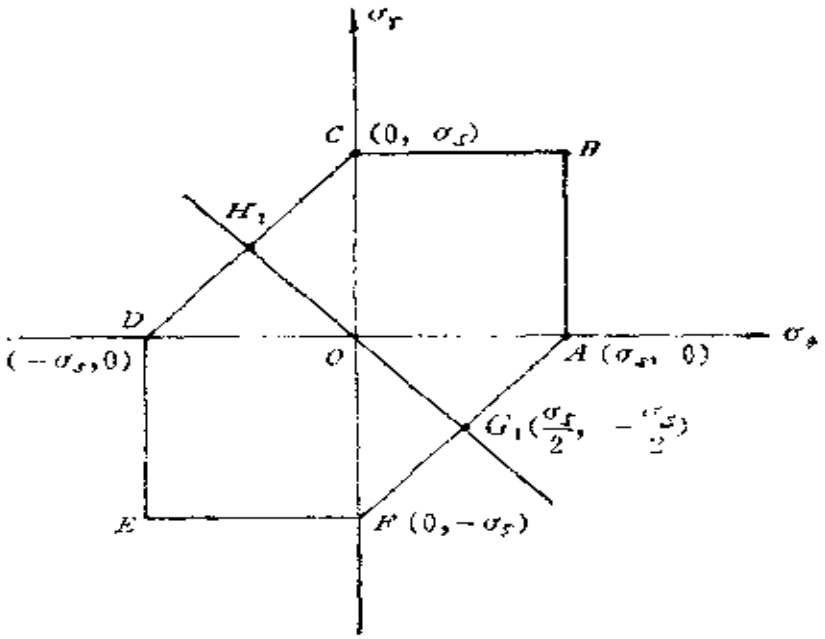


图 5.21 Tresca 屈服条件

当 $p = p_s = \frac{\sigma_s}{2}$ 时，在 $r = a$ 处即开始进入屈服状态，随着 p 值不断增大，塑性区不断扩大。

此时平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{iv}$$

考虑屈服条件后，有

$$\frac{d\sigma_r}{\sigma_s} = \frac{dr}{r}$$

积分后，则得

$$\sigma_r = \sigma_s \ln r + C \tag{v}$$

当 $r = r_s$ 时，$\sigma_r = -\frac{\sigma_s}{2}$，因此得 $C = -\frac{\sigma_s}{2} - \sigma_s \ln r_s$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma_s}{2}\left(2\ln\frac{r}{r_s} - 1\right) \\ \sigma_\theta &= \sigma_r + \sigma_s = \frac{\sigma_s}{2}\left(2\ln\frac{r}{r_s} + 1\right) \end{aligned}\right\} \tag{vi}$$

随着 p 的增大，在 $r = a$ 处的 σ_r 的绝对值也不断增大，在极限情况时

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = \frac{\sigma_s}{2}\left(2\ln\frac{a}{r_s} - 1\right) \tag{vii}$$

因此

$$\ln\frac{a}{r_s} = -\frac{1}{2}, \qquad \ln\frac{r_s}{a} = \frac{1}{2}$$

故可得

$$r_s = ae^{\frac{1}{2}} = 1.65a$$

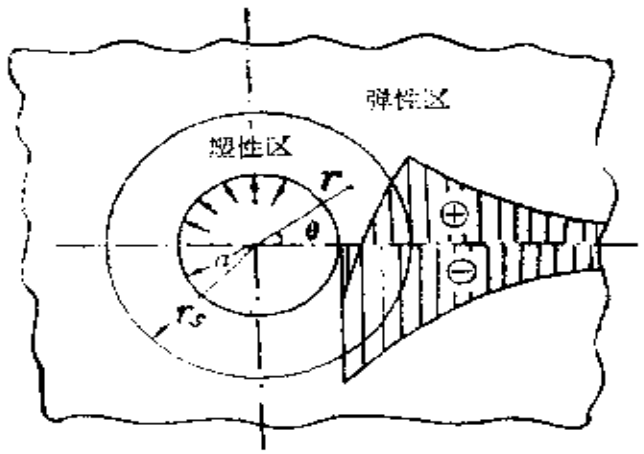


图 5.22　在具有圆孔的无穷板弹性区与塑性区的应力分布

在弹性区应力的表达式为

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_s}{r}\right)^2, \qquad \sigma_r = \frac{-\sigma_s}{\sqrt{3}}\left(\frac{r_s}{r}\right)^2.$$

§ 5.5 厚壁球壳

在球对称问题中，应力分量为

$$\sigma_\theta(r) = \sigma_\varphi(r),\ \sigma_r(r),\ \tau_{r\varphi} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta\varphi} = 0. \tag{5.57a}$$

应变分量为

$$\begin{aligned} &\varepsilon_\varphi(r) = \varepsilon_\theta(r) = \frac{u}{r}, \\ &\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \\ &\gamma_{r\varphi} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{5.57b}$$

平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0. \tag{5.57c}$$

由于 $\sigma_\varphi = \sigma_\theta$，故 Mises 条件和 Tresca 条件具有相同的形式，即

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s \tag{5.57d}$$

由以上基本方程可以求解厚壁球壳的问题。

例：设有理想弹塑性材料的厚壁球壳，内半径为 a，外半径为 b，试求内压力 p 和弹塑性分界半径之间关系的表达式，并求当 $b/a = 1$（薄壁球壳），$b/a = 2$ 时，p_0/p_e 的比值（p_0 为整个球壳进入塑性状态时的压力，p_e 为球壳开始进入塑性时的压力）。

解：由弹性力学知道球壳应力的表达式为

$$\sigma_\theta = \frac{a^3 p}{b^3 - a^3}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{r^3}\right) \tag{i}$$

$$\sigma_r = \frac{a^3 p}{b^3 - a^3}\left(1 - \frac{b^3}{r^3}\right)$$

根据球壳的屈服条件表达式，在 $r = a$ 处刚进入塑性状态时应有

$$p_e \frac{3a^3 b^3}{2a^3(b^3 - a^3)} = \sigma_s$$

即

$$p_e = \frac{2\sigma_s}{3}\left(1 - \frac{a^3}{b^3}\right) \tag{ii}$$

如整个球体到处满足屈服条件 $\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_s$，将这个条件代入平衡方程后，则有

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - 2\frac{\sigma_s}{r} = 0 \tag{iii}$$

积分上式后，则有

$$\sigma_r = 2\sigma_s \ln r + C_1$$

利用边界条件：当 $r = a$ 时，$\sigma = -p$；当 $r = b$ 时，$\sigma_r = 0$ 可得

$$\sigma_r = 2\sigma_s \ln\frac{r}{a} - p$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \sigma_s$$

$$p_p = 2\sigma_s \ln\frac{b}{a}$$

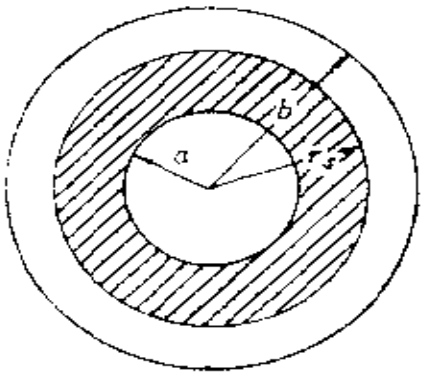


图 5.23 厚壁球的弹塑性区

在 $r=r_s$ 时，

$$\sigma_r = 2\sigma_s \ln\frac{r_s}{a} - p \qquad \text{(vi)}$$

在弹性区

$$\sigma_r = -\frac{2}{3}\sigma_s\left(1-\frac{b^3}{r_s^3}\right)$$

由于在 $r=r_s$ 处，应力 σ_r 应该是连续的，故有

$$p = 2\sigma_s\left\{\ln\frac{r_s}{a} + \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{r_s}{b}\right)^3\right]\right\} \qquad \text{(vii)}$$

塑性极限载荷与弹性极限载荷之比 $\mathfrak{H}$ 为

$$\mathfrak{H} = \frac{p_p}{p_e} = \frac{2\sigma_s \ln\dfrac{b}{a}}{\dfrac{2}{3}\sigma_s\left(1-\dfrac{a^3}{b^3}\right)} = 3\frac{\dfrac{b^3}{a^3}\ln\dfrac{b}{a}}{\dfrac{b^3}{a^3}-1} \qquad \text{(viii)}$$

令 $b/a=A$ 则

$$\mathfrak{H} = \frac{3A^3\ln A}{A^3-1}$$

当 $b/a=A\to 1$ 时，为薄壁球壳

$$\mathfrak{H} = 3\lim_{A\to 1}\frac{A^3\ln A}{A^3-1} = 3\lim\frac{(A^3\ln A)'}{(A^3-1)'} = 3\lim_{A\to 1}\frac{3A^2\ln A + A^3\dfrac{1}{A}}{3A^2}$$

$$= 3\lim_{A\to 1}\left(\ln A + \frac{1}{3}\right) = 1$$

即

$$\mathfrak{H} = \frac{p_p}{p_e} = 1$$

当 $b/a=A=2$ 时，

$$\mathscr{C}=\frac{3(2)^3\ln 2}{2^3-1}=\frac{24}{7}\ln 2=2.38$$

习　　题

1. 已知材料屈服极限为 σ_s，试求下列截面塑性弯矩的值。设材料是理想塑性的。（图 5.24）

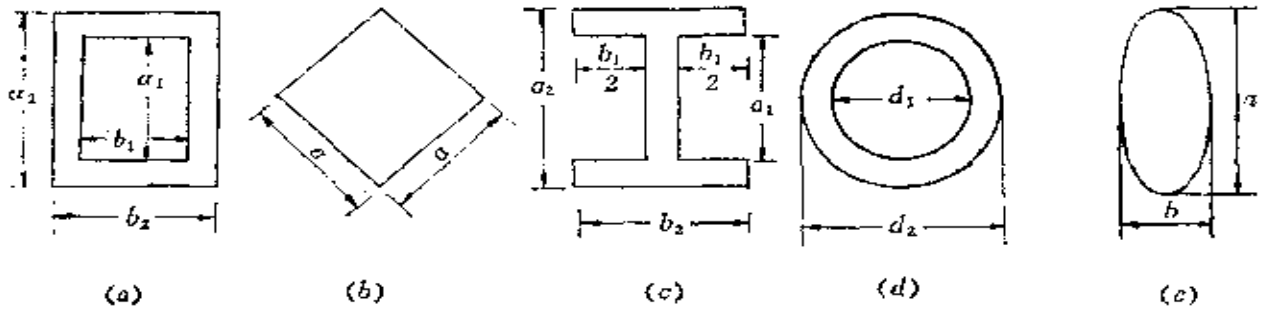


图 5.24

2. 由于考虑材料的塑性性质，试求受弯杆件承载能力增加的百分比，杆的截面为

a）正方形、b）圆形、c）内外半径之比为 $\mathscr{C}=a/b$ 的圆环、d）正方形沿对角线受弯、e）工字形截面，其尺寸如图 5.25(e) 所示。

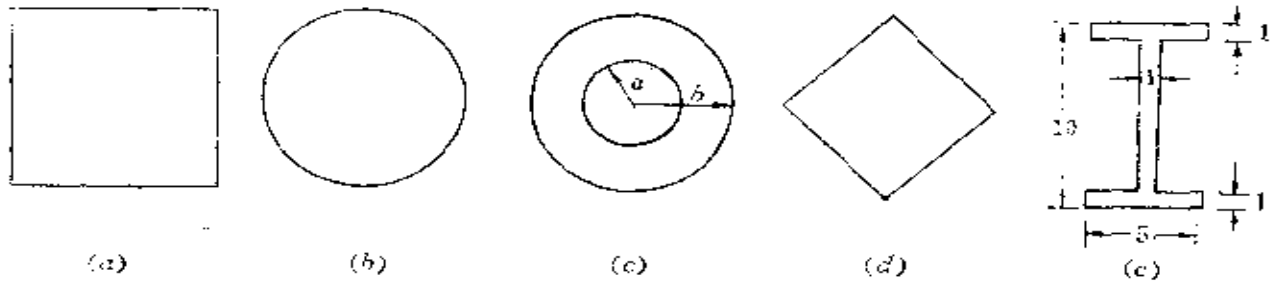


图 5.25

3. 设有理想弹塑性材料的高为 $2h$，宽为 b 的矩形截面梁，受外力作用，弹性核高度 $h_e=h/2$，试求此时弯矩值为多少？并求

出卸载后残余曲率半径与受载荷作用时曲率半径之比（图 5.26）。

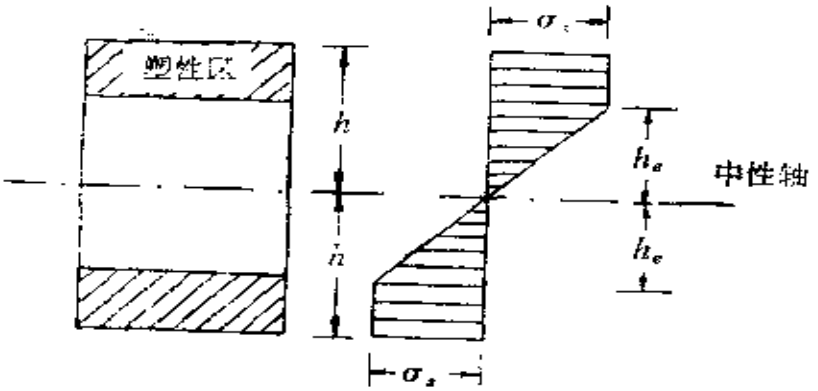


图 5.26

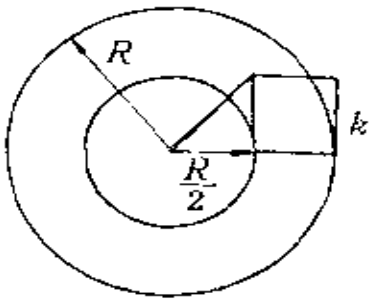


图 5.27

4. 已知理想弹塑性材料的受扭圆杆，若其剪切屈服极限为 k 圆轴的半径为 R，试求下列情况的扭矩值，并给出扭矩和弹塑性分界线 r_s 之间的关系图（5.27）

1) 轴外层进入塑性状态；

2) 在 $r=R/2$ 处进入塑性状态；

3) 整个截面进入塑性状态。

5. 试用 Nadai 的沙堆比拟法计算如下截面的塑性极限扭矩，如图 5.28，求：

a) 半径为 a 的圆；

b) 边长为 $2a$ 的等边三角形；

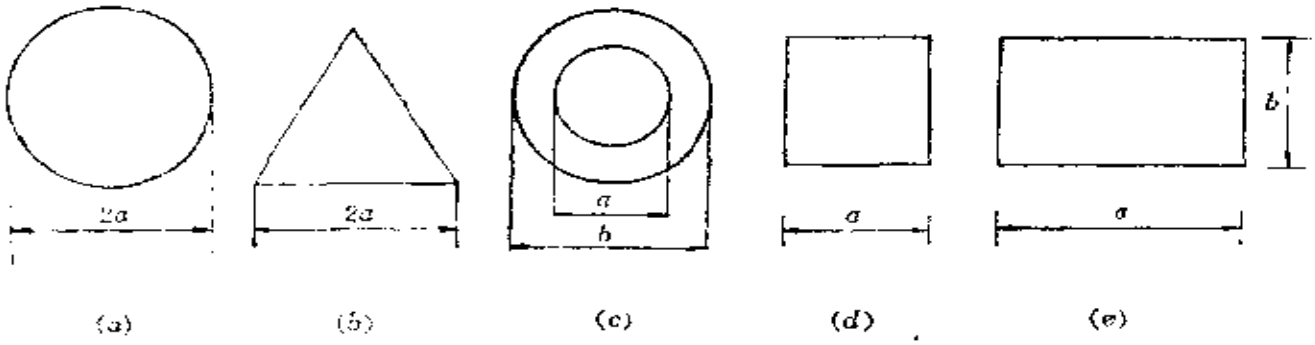


图 5.28

c) 外半径为 b，内半径为 a 的圆筒；

d) 边长为 a 的正方形；

e) 边长为 a 和 b 的矩形，其中 $a>b$。

6. 已知厚壁筒内半径为 a，外半径为 b，材料屈服极限为 σ_s，试求如下情况下筒内壁进入塑性状态时的内压 p 的值：

(1) 二端封闭，(2) 二端自由：$\sigma_z=0$，(3)二端受约束 $e_z=0$。

7. 设有一封闭厚壁圆筒，材料服从 Mises 屈服条件，同时受均匀内压 p_i 和受扭矩 M_s 作用，如果外径与内径之比为 $b/a=\beta$，试求在内表面与外表面都达到屈服时 $M_s/p_i=?$

8. 如屈服极限沿圆盘半径按如下规律变化

$$\sigma=\sigma_s\left(1+\frac{r}{b}\right)$$

试求此等厚度旋转圆盘在极限状态下的转速 ω，以及径向和环向应力的表达式。

9. 已知等厚度旋转圆盘，由不可压缩材料制成，如盘中所有点都同时进入塑性状态，则此屈服条件表达式应有何形式，试分别按 Mises 屈服条件及 Tresca 屈服条件计算，当完全进入塑性状态时，那一个角速度将大些？

10. 已知厚壁球，内径为 $7.6cm$，外径为 $17.6cm$，受内压 p 的作用，试求此厚壁球的弹性承载能力，塑性承载能力，以及当塑性半径 $r_s=12.6cm$ 时的内压 p^* 为多少？ 屈服极限 $\sigma_s=60kg/mm^2$。

第五章 习题答案

1. (a) $\frac{a_2^2b_2-a_1^2b_1}{4}\sigma_s$，　(b) $\frac{a_2^2b_2-a_1^2b_1}{4}\sigma_s$，

(c) $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3\sigma_s$，　(d) $\frac{d_2^2-d_1^3}{6}\sigma_s$，

(e) $\frac{a^2b}{6}\sigma_s$.

2. 如用 Z 表示承载能力增加的百分比，即

$$Z=\left(\frac{M_p}{M_e}-1\right)\times 100\%$$

则有 (a) $Z=50\%$, (b) $Z=69.8\%$, (c) $Z=27.2\sim 69.8\%$, (d) $Z=100\%$, (e) $Z=24\%$.

3. $M=\frac{11}{12}bh^2\sigma_s$, $\rho_r/\rho=\frac{16}{5}$.

4. (1) $M_e=\frac{1}{2}\pi kR^3$, (2) $M_{\frac{R}{2}}=\frac{31}{48}\pi kR^3$,

(3) $M_p=\frac{2}{3}\pi kR^3$,

$$M=\frac{2\pi R^3}{3}k\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{r_s}{R}\right)\right]$$

5. (1) $M_p=\frac{2}{3}\pi a^3k$, (2) $M_p=\frac{1}{12}\pi a^3k$,

(3) $M_p=\frac{2}{3}\pi k(b^3-a^3)$, (4) $M_p=\frac{a^3}{3}k$,

(5) $M_p=\frac{b^3k}{3}+\frac{b^2(a-b)}{2}k$.

6. (1) $\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)$, (2) $\frac{\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}{\sqrt{1+\frac{a^4}{3b^4}}}$,

(3) $$\frac{\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}{\sqrt{1+(1-2\nu)^2\frac{a^4}{3b^4}}},$$

7. $$\frac{M_z}{p_i}=\frac{b^3\pi(\beta^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2\beta^3}.$$

8. $$\omega^2=\frac{9}{2}\frac{\sigma_s g}{rb^2},\qquad \sigma_r=\sigma_s\left(1+\frac{r}{2b}-\frac{3}{2}\frac{r^2}{b^2}\right),$$

$$\sigma_\theta=\sigma_s\left(1+\frac{r}{b}\right).$$

9 按 Mises 屈服条件计算时，屈服条件应为

$$\sigma=\sigma_s\frac{1}{b^2}\sqrt{b^4-\frac{12}{7}b^2r^2+\frac{39}{49}r^4},\qquad \omega_p=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{16g\sigma_s}{7\gamma}},$$

按 Tresca 屈服条件计算时，屈服条件应为

$$\sigma=\sigma_s\left(1-\frac{5}{7}\frac{r^2}{b^2}\right),\qquad \omega_p=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{16g\sigma_s}{7\gamma}}.$$

10. $$p=2\sigma_s\left[\ln\frac{c}{a}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{c^3}{b^3}\right)\right],$$

当 $c=a$ 时，$p_e=36.8kg/mm^2$；

当 $c=b$ 时，$p_b=101kg/mm^2$；

当 $b=12.6cm$ 时，$p^*=86kg/mm^2$。

第六章　塑性平面应变问题和滑移线场理论

§ 6.1　基本假设和基本方程

理想刚塑性材料的平面应变问题，是塑性力学中研究比较完善的内容。

在塑性平面应变问题中，假设材料是均匀的，各向同性的，而且是不可压缩的，由于塑性变形较大，故可忽略弹性变形部分，即采用刚塑性材料“模型”的假设。因此可以采用增量理论中的Lévy—Mises 理论。设在变形的过程中，位移与直角座标的 z 轴无关，此时各点的位移都发生在 xoy 平面内，即

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),\quad w=0. \tag{6.1}$$

因此应变分量为

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=0,\quad \gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0,$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6.2}$$

根据条件 $\varepsilon_z=0$ 和塑性应力应变关系应有

$$\sigma_z=\sigma_m=\sigma=\frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)=\frac{1}{2}(\sigma_{\max}+\sigma_{\min}) \tag{6.3}$$

由最大和最小主应力公式可得最大剪应力为

$$\tau=\frac{1}{2}(\sigma_{\max}+\sigma_{\min}) \tag{6.4}$$

因此，由式（6.3）及（6.4）可得

$$\sigma_{\max}=\sigma+\tau,\quad \sigma_{\min}=\sigma-\tau,\quad \sigma_z=\sigma. \tag{6.5}$$

由式（6.5）可见，任一点的应力状态，都可以用静水压力 σ 和纯剪应力 τ 来表示。最大剪应力所在的面与应力主平面成 45° 角。在平面应变问题中，由于满足式（6.3）的条件，故 Mises 条件为

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2=4k^2 \tag{6.6}$$

其中 $k=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$，在使用 Tresca 条件时，根据主应力的表达式，可得与式（6.6）相同形式的屈服条件，但 $k=\frac{\sigma_s}{2}$。

平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0\\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{6.7}$$

由增量理论的 Lèvy—Mises 方程可得

$$\left.\begin{aligned}\dot\varepsilon_x&=\dot\lambda(\sigma_x-\sigma)\\ \dot\varepsilon_y&=\dot\lambda(\sigma_y-\sigma)\\ \dot\gamma_{xy}&=2\dot\lambda\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

由式（6.8）可得

$$\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2\tau_{xy}}=\frac{\dot\varepsilon_y-\dot\varepsilon_x}{\dot\gamma_{xy}}=\frac{\dfrac{\partial\dot v}{\partial y}-\dfrac{\partial\dot u}{\partial x}}{\dfrac{\partial\dot v}{\partial x}+\dfrac{\partial\dot u}{\partial y}} \tag{6.9}$$

又由材料不可压缩条件可得

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{v}}{\partial y}=0 \tag{6.10}$$

其中 $\dot{u}$，$\dot{v}$ 为位移速度，由此可见，对于五个未知函数 σ_x、σ_y、τ_{xy}、$\dot{u}$ 和 $\dot{v}$，有五个方程式，即式（6.6）、（6.7）、（6.9）、（6.10）.因而由形式上来看问题是可以得到解答的。

§ 6.2 滑移线的一般概念

在平面塑性变形时，塑性区内的各点应力状态应满足屈服条件。任意一点的二个最大剪应力相等，而且互相垂直。将塑性变形区内各点的最大剪应力方向连接起来，绘成连续的曲线便得二族正交曲线，此正交曲线即称为滑移线网络。

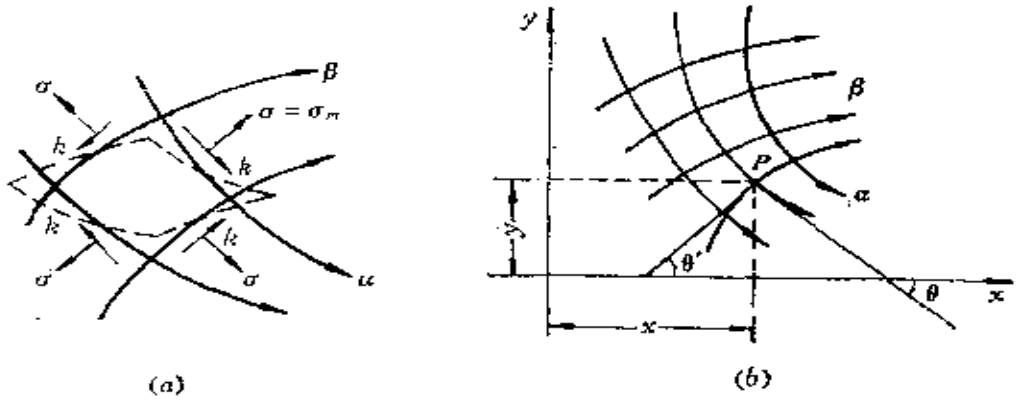


图 6.1 (a)应力图 (b)滑移线 α，β 与 x 轴之间的关系

以滑移线作为二族曲线坐标，取任意一点 P 的单元微体，它的应力和变形如图 6.1(a) 所示。

根据剪应力方向不同，一族曲线叫 α 族，另一族叫 β 族，α 线二旁的最大剪应力组成顺时针的方向，而 β 线二旁的最大剪应力组成逆时针的方向，见图6.2。

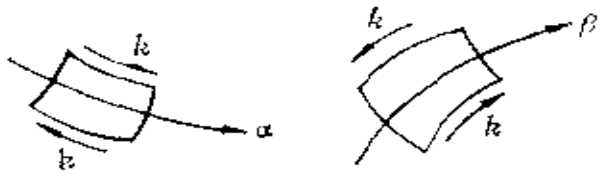


图 6.2

如图 6.1.(b) 所示，设 P 点的坐标为 (x, y)，这一点沿 α 线切线和 x 轴交角为 θ，θ 角为 α 线在 P 点切线的正向与 ox 轴正向之间的夹角，θ 角度量起始线是 ox 轴的正向，θ 角符号的规定是：逆时针旋转形成的 θ 角为正值，顺时针旋转而形成的 θ 角为负值。α 线的正向就是 α 线的切线的正向。而 P 点沿 β 线的切线正向与 ox 轴正向之间夹角为 $\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}$，此时二族曲线的微分方程式为

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \text{ 线族：} && \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta \\ &\beta \text{ 线族：} && \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta' = -\operatorname{ctg}\theta \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

图 6.1.(b) 上的 θ 是负值、θ' 是正值，由应力 Mohr 圆可知

$$\operatorname{tg}2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

（此处 τ_{xy} 按塑性力学中的符号规定处理）

由于平面应变的屈服条件为

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$$

$$(-2\tau_{xy}\operatorname{tg}2\theta)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$$

因此 $$\tau_{xy}^2 = k^2\cos^2 2\theta$$

即 $$\tau_{xy} = k\cos 2\theta$$

而 $$\sigma_m = \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 2\sigma \\ \sigma_x - \sigma_y = -2\tau_{xy}\operatorname{tg}2\theta \end{cases}$$

$$\sigma_x = \sigma - \tau_{xy}\,\mathrm{tg}2\theta = \sigma - k\sin 2\theta$$

$$\sigma_y = \sigma + \tau_{xy}\,\mathrm{tg}2\theta = \sigma + k\cos 2\theta$$

所以当已知滑移线场内任意一点的 θ 角（α 族切线与 ox 轴交角）和平均应力 $\sigma = \sigma_m$ 后，则该点的 σ_x，σ_y，τ_{xy} 即可由下式求出：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma - k\sin 2\theta\\ \sigma_y &= \sigma + k\sin 2\theta\\ \tau_{xy} &= k\cos 2\theta\end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

在平面应变状态下，不可压缩材料中的任意一点上，总有二个互相垂直的方向：α 线方向和 β 线方向，它们各二等分主方向，单元体在这二个方向上的线应变（e_α，e_β）都等于零，而剪应变则是最大的。

滑移线有如下一般特点：

1. 滑移线是变形体进入塑性状态后的最大剪应力的迹线，是二族正交的曲线族，过一点只能有二条滑移线。
2. 滑移线与主应力迹线相交成 45°。
3. 滑移线场分布于整个变形体中，一直延伸到变形体的边界。
4. 应力场不同，滑移线场也不同。若滑移线场已确定则应力场就已确定。
5. 滑移线场中任意点的最大剪应力均相同 $\tau_{\max} = k$，但各点平均应力 σ 则不相同，而 σ 仅与 θ 有关。

§ 6.3 Hencky 应力方程

变形体中任一点的应力状态可以用应力 Mohr 圆表示。如果某一点的平均应力 σ 为已知，则应力 Mohr 圆在 σ 轴上的位置便为已知，而最大剪应力 k 为 Mohr 圆的半径，所以这一点的各应力分量便可以完全确定。因此，只要能找到滑移线上的正应力 σ

的变化规律，便可以找到物体中每一点的应力分量。这是应用滑移线的性质，求解平面问题的实质。由于滑移线上最大剪应力为 k，所以找出平均应力 σ 和 α 族滑移线上的切线与 x 轴所成夹角 θ 之间的关系，是求解这类问题的关键。平均应力 σ 与角 θ 之间的关系，称为 Hencky 应力方程。下面我们介绍 Hencky 方程的两种推导方法。

(1) Hencky方程的第一种推导方法

将式 (6.12) 中 σ_x、σ_y、τ_{xy} 的表达式代入平衡方程 (6.7) 得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+0-2k\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}-2k\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}=0\\ 0+\frac{\partial\sigma}{\partial y}-2k\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+2k\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{6.13}$$

式 (6.13) 是包含对于未知函数 $\sigma(x、y)$、$\theta(x、y)$ 的一阶偏导数的非线性微分方程组，其中

$$\sigma=\sigma(x、y),\qquad \theta=\theta(x、y)$$

假如在 xy 平面内，沿某曲线段 $y=f(x)$ 给定了函数 σ 与 θ，那末，沿此线段应有如下微分关系

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma}{\partial y}dy+0+0=d\sigma\\ 0+0+\frac{\partial\theta}{\partial x}dx+\frac{\partial\theta}{\partial y}dy=d\theta\end{aligned}\right\}\tag{6.14}$$

于是 (6.13) 和 (6.14) 是以函数 σ、θ 对 x、y 的四个偏导数作为未知数代数方程组。解此方程组后，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{\triangle_1}{\triangle},\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial y}=\frac{\triangle_2}{\triangle}\\ \frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\triangle_3}{\triangle},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\triangle_4}{\triangle}\end{aligned}\right\}\tag{6.15}$$

其中

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2k\cos 2\theta & -2k\sin 2\theta \\ 0 & 1 & -2k\sin 2\theta & +2k\cos 2\theta \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} \tag{6.16}$$

行列式 $\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$、$\triangle_4$ 是以方程（6.13）、（6.14）等号右边的项，分别取代△行列式中第一直行、第二直行、第三直行、第四直行所组成的行列式。在一般情况下、$\triangle\neq 0$，（6.13）、（6.14）所构成的线性方程组有解、并且解是唯一的，即（6.15）式诸值恒能唯一地确定；即跨过曲线 $y=f(x)$，导数是连续的。

但是，如

$$\triangle=0 \tag{6.17}$$

则（6.15）式诸值不能唯一确定，这时，跨过 $y=f(x)$ 线的导数可能不连续，即已知一侧的导数，假如没有另外的条件，就不可能以此推导另一侧的导数，具有这样性质的线称为特征线，（6.17）式称为特征方程。在方程组（6.13）中，偏导数的系数中含有未知函数 θ，象这样的方程称为准线性的；另一种方程，系数中不含未知函数的方程称为线性的。这二类方程的特征方程展开后，都是关于 $\frac{dy}{dx}$ 的二次代数方程。

根据（6.17），特征方程为

$$\triangle=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2k\cos 2\theta & -2k\sin 2\theta \\ 0 & 1 & -2k\sin 2\theta & +2k\cos 2\theta \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -2k\sin 2\theta & 2k\cos 2\theta \\ dy & 0 & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}-2k\cos 2\theta\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2k\cos 2\theta \\ dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & dy \end{vmatrix}$$

$$+2k\sin 2\theta \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2\sin 2\theta \\ dx & dy & 0 \\ 0 & 0 & dx \end{vmatrix}$$

$$= 2k\cos 2\theta dx dy + 2k\sin 2\theta (dy)^2 + 2k\cos 2\theta dx dy - 2k\sin 2\theta (dx)^2$$

$$= 0$$

整理后，得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\operatorname{ctg} 2\theta \left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0 \tag{6.18}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg}\theta\right)\left(\frac{dy}{dx} + \operatorname{ctg}\theta\right) = 0$$

即特征线的微分方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}\theta \\ \frac{dy}{dx} &= -\operatorname{ctg}\theta \end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

根据二次方程根的三种不同情况，可以判别微分方程属于什么类型。第一种情况有两个不等的实根，即 xy 平面上存在着两个实特征线族，沿着这些线的偏导数不能唯一确定，这种微分方程称为双曲线型方程。(6.17) 方程的特征方程有两个不等实根，即 $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta$，$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\theta$。第二种情况有二个相等实根，只有一族实特征线，这种方程称为抛物线型。第三种情况有两个复数根，不存在实特征线，所属方程称为椭圆型方程。

在双曲线型方程中，一般说来，根据如上求得的特征方程的二个根式，若是线性偏微分方程，则式中将不含有未知函数，在 xy 平

面内的特征线族可以在微分方程解尚未求得时建立。但对于准线性的方程，其特征方程中也含有未知函数，所以特征线必须和原方程的解同时求出；我们所面对的方程（6.13）就属于这种情况。因此，还必须考虑方程组（6.13）与（6.14）的协调条件；从（6.15）式，如果诸导数不定，则在要求 $\triangle=0$ 的同时也要求 $\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$、$\triangle_4$ 为 0（若 $\triangle$ 为零，而 $\triangle_1$、$\triangle_2$、$\triangle_3$、$\triangle_4$ 不为零，则导数为无限大，所决定的是断裂线，它可能是特征线，也可能是特征线的包线）。计算这些等于零的条件，才能得到我们问题中的两族特征线方程。当 $\triangle_1=0$ 时，有

$$\triangle_1=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2k\cos 2\theta & -2k\sin 2\theta \\ 0 & 1 & -2k\sin 2\theta & +2k\cos 2\theta \\ d\sigma & dy & 0 & 0 \\ d\theta & 0 & dx & dy \end{vmatrix}$$

$$=-2k\cos 2\theta\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2k\cos 2\theta \\ d\sigma & dy & 0 \\ d\theta & 0 & dy \end{vmatrix}+2k\sin 2\theta\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2k\sin 2\theta \\ d\sigma & dy & 0 \\ d\theta & 0 & dx \end{vmatrix}$$

$$=+2k\cos 2\theta(2k\cos 2\theta d\theta dy+d\sigma dy)$$

$$+2k\sin 2\theta(2k\sin 2\theta d\theta dy-d\sigma dx)$$

$$=0 \qquad (6.20)$$

化简（6.20）后得

$$\frac{d\sigma}{dx}\left(\cos 2\theta\frac{dy}{dx}-\sin 2\theta\right)+2k\frac{d\theta}{dx}\frac{dy}{dx}=0 \qquad (6.21)$$

将（6.19）与（6.21）联立求解

当 $\frac{dy}{dx}=\mathrm{tg}\theta$ 时，由（6.21）得

$$\frac{d\sigma}{dx}(\cos 2\theta \operatorname{tg}\theta - \sin 2\theta) + 2k\frac{d\theta}{dx}\operatorname{tg}\theta = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dx}(-\operatorname{tg}\theta) + 2k\frac{d\theta}{dx}\operatorname{tg}\theta = 0$$

$$d\sigma - 2kd\theta = 0$$

积分后得

$$\sigma - 2k\theta = C_\alpha, \quad 或 \quad \frac{\sigma}{2k} - \theta = \frac{C_\alpha}{2k} = \xi$$

当 $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\theta$ 时，由（6.21）得

$$\frac{d\sigma}{dx}(-\cos 2\theta \operatorname{ctg}\theta - \sin 2\theta) - 2k\frac{d\theta}{dx}\operatorname{ctg}\theta = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dx}(-\operatorname{ctg}\theta) - 2k\frac{d\theta}{dx}\operatorname{ctg}\theta = 0$$

$$d\sigma + 2kd\theta = 0$$

积分后得

$$\sigma + 2k\theta = C_\beta \quad 或 \quad \frac{\sigma}{2k} + \theta = \frac{C_\beta}{2k} = \eta$$

至此，即得到两族特征线方程为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \qquad \sigma - 2k\theta = C_\alpha \\ &\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\theta, \quad \sigma + 2k\theta = C_\beta \end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

特征方程（6.22）就是 Hencky 应力方程，特征线就是滑移线。在一定边界条件下解方程（6.13），就相当于在 xy 平面内，按某给定线段建立滑移线场。

（2）Hencky 方程的第二种推导方法

取相邻二对滑移线为界的单元微体 P（曲线单元体）进行分析。如任意点 P 的坐标为 (x,y)，这一点沿 α 线切向与 x 轴之间的夹角为 θ 角，（θ 是以 x 轴正方向为度量的起始线）则

α 线的微分方程为 $\quad \dfrac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\theta$

β 线的微分方程为 $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\operatorname{ctg}\theta$

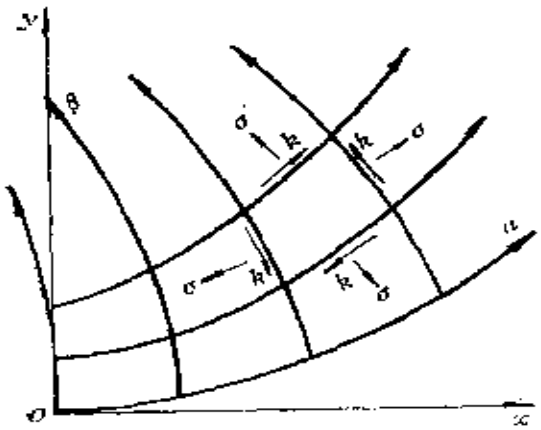


图 6.3

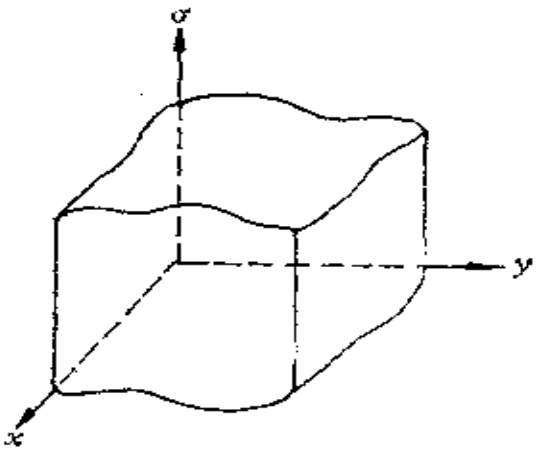


图 6.4 $\sigma=\sigma(x,y)$图形

在方程(6.13)中右半部是包含对于未知函数 $\sigma(x,y)$、$\theta(x,y)$ 的一阶偏导数的非线性微分方程组，其中

$$\sigma=\sigma(x,y),$$

$$d\sigma=\frac{\partial\sigma}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma}{\partial y}dy \tag{6.23}$$

在二维平面上 $\sigma=\sigma(x,y)$，x,y 为各自独立的变量，在整个所讨论的平面域里，有

$$d\sigma=\frac{\partial\sigma}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma}{\partial y}dy$$

恒成立。$\sigma=\sigma(x,y)$ 是空间曲面如图（6.4）所示。

现在要研究滑移线上的情况，即要研究特征线的问题，在滑移线上 $y=y(x)$ 即 y 和 x 不是二个独立变量，而是有函数关系，此时 $\sigma=\sigma(x,y)=\sigma[x,y(x)]=\sigma(x)$。即 σ 是中间变量 x，y 的函数又是自变量 x 的复合函数（y 为中间变量，而 x 既是中间变量又是自变量）。

将（6.23）式全式除以 dx，即得 σ 的导数公式：

$$\frac{d\sigma}{dx}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

或

$$\frac{d\sigma}{dx}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \tag{6.24}$$

$$\sigma=\sigma(x,y)=\sigma[x,y(x)]=\sigma(x)$$

$\frac{d\sigma}{dx}$ 称为 σ 对于 x 的全导数，实际上此时已将 $y=y(x)$ 代入 $\sigma(x,y)$ 中，已不是研究一般平面域的问题，而是研究滑移线 $y=y(x)$ 上的情况。即在 $\frac{d\sigma}{dx}$ 式中 σ 已是单一自变量 x 的复合函数，$\frac{\partial\sigma}{\partial x}$ 叫作 σ 对于 x 的偏导数，即 $\sigma=\sigma(x,y)$，将 σ 当成中间变量 x,y 的函数。$\frac{\partial\sigma}{\partial y}$ 叫作 σ 对于 y 的偏导数，$\frac{dy}{dx}$ 是滑移线 $y=y(x)$ 的导数，也就是滑移线的斜率

$$\theta=\theta(x,y),\ d\theta=\frac{\partial\theta}{\partial x}dx+\frac{\partial\theta}{\partial y}dy \tag{6.25}$$

在二维平面上 $\theta=\theta(x,y)$，x，y 为各自独立的变量，在整个所讨论的平面域里，（6.25）式恒成立。

现在研究滑移线 $y=y(x)$ 上 θ 的变化规律，如 $\theta=\theta(x,y)=\theta[x,y(x)]=\theta(x)$ 并将（6.25）式全式除以 dx，则得

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{dy}{dx} \tag{6.26}$$

$\frac{d\theta}{dx}$是 θ 对 x 的全导数。$\frac{\partial\theta}{\partial y}$是 θ 对 y 的偏导数。$\frac{\partial\theta}{\partial x}$是 θ 对 x 的偏导数。$\frac{dy}{dx}$是滑移线 $y=y(x)$ 的一阶导数，即是滑移线的斜率。将 α 族滑移线的微分方程$\frac{dy}{dx}=\mathrm{tg}\theta$ 代入（6.24）与（6.26）则得

$$\frac{d\sigma}{dx}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial\sigma}{\partial y}\mathrm{tg}\theta,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{d\sigma}{dx}-\frac{\partial\sigma}{\partial y}\mathrm{tg}\theta \tag{6.27}$$

$$\frac{d\theta}{dx}=\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\mathrm{tg}\theta,\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{d\theta}{dx}-\frac{\partial\theta}{\partial y}\mathrm{tg}\theta \tag{6.28}$$

将（6.27）、（6.28）代入（6.13）得

$$\frac{d\sigma}{dx}-\frac{\partial\sigma}{\partial y}\mathrm{tg}\theta-2k\left[\cos 2\theta\frac{d\theta}{dx}+\frac{\partial\theta}{\partial y}(\sin 2\theta-\cos 2\theta\mathrm{tg}\theta)\right]=0$$

其中
$$\sin 2\theta-\cos 2\theta\mathrm{tg}\theta=\mathrm{tg}\theta$$

因此

$$\frac{d\sigma}{dx}-2k\cos 2\theta\frac{d\theta}{dx}-\mathrm{tg}\theta\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}+2k\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)=0 \tag{6.29}$$

如将（6.28）代入（6.13）的第二式，则得

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}-2k\left[\sin 2\theta\frac{d\theta}{dx}-\frac{\partial\theta}{\partial y}(\sin 2\theta\mathrm{tg}\theta+\cos 2\theta)\right]=0$$

其中
$$\sin 2\theta\mathrm{tg}\theta+\cos 2\theta=1$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}-2k\sin 2\theta\frac{d\theta}{dx}+2k\frac{\partial\theta}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y}+2k\frac{\partial\theta}{\partial y}=2k\sin 2\theta\frac{d\theta}{dx} \tag{6.30}$$

将（6.30）式的结果代入（6.29）式得：

$$\frac{d\sigma}{dx} - 2k\cos 2\theta \frac{d\theta}{dx} - \mathrm{tg}\theta\left(2k\sin 2\theta \frac{d\theta}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dx} - 2k\frac{d\theta}{dx}(\cos 2\theta + \sin 2\theta \,\mathrm{tg}\theta) = 0$$

因此得

$$\frac{d\sigma}{dx} - 2k\frac{d\theta}{dx} = 0$$

等式二边乘 dx 得　　$d\sigma - 2kd\theta = 0$

积分后得　　$\sigma - 2k\theta = C_\alpha$　　(6.31)

(6.31) 式及 $\frac{d\sigma}{dx} - 2k\frac{d\theta}{dx} = 0$ 仅对 α 族滑移线才成立，因为在公式的推导过程中已运用了 $\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\theta$ 的条件。

如沿 β 线，将微分方程 $\frac{dy}{dx} = -\mathrm{ctg}\theta$ 代入 (6.24) 与 (6.26)并用与上面相同的方法，可得

$$\sigma + 2k\theta = C_\beta \qquad (6.32)$$

(6.32) 式及 $\frac{d\sigma}{dx} + 2k\frac{d\theta}{dx} = 0$ 仅对 β 族滑移线才能成立，因为在公式推导的过程中已运用了 $\frac{dy}{dx} = -\mathrm{ctg}\theta$ 这一条件。

从方程 (6.22)，(6.31)，(6.32) 可以看出，在塑性区内，沿任意一滑移线上，C_α 或 C_β 为一常数，它们的数值可根据边界条件定出。如利用滑移线网络的特性绘出滑移线场，就可解出塑性区内任意一点的 σ 和 θ 值，从而求出任意一点的 σ_x、σ_y、τ_{xy}。

从 α 族滑移线中的一条滑移线转至另一条时，一般说来 C_α 会改变。同样从 β 族滑移线中的一条滑移线转到另一条时，C_β 也会改变。

但要注意在利用方程进行实际计算时，θ 角应按弧度值计算。

§ 6.4 滑移线的性质

根据 H. Hencky 的研究，滑移线具有许多重要的性质，现将其重要性质简单叙述如下：

一、沿着滑移线的压力变化与滑移线和 x 轴所成的角度变化成比例，滑移线的方向变化得愈大，即（θ_{ab}）愈大，平均应力的变化也就愈大。如图 6.5 所示。

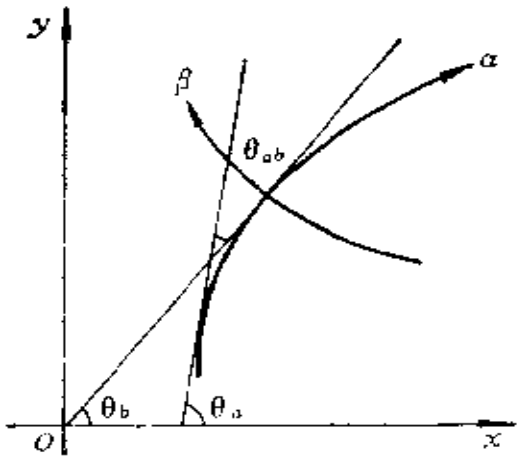


图 6.5 压力变化与角度变化之间的关系

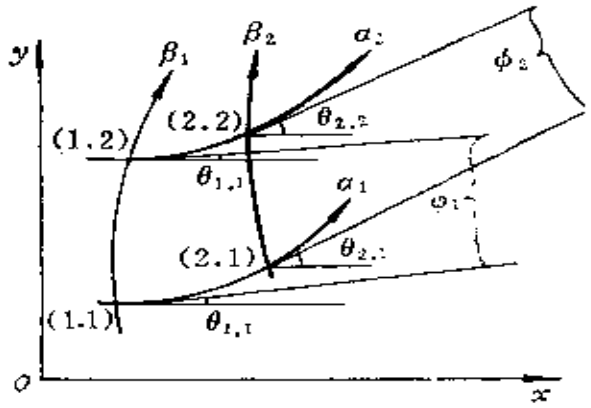


图 6.6 滑移线场的单元网格

二、如果由一条滑移线 α_1 转到另一条滑移线 α_2，则沿任何一个 β 族的滑移线而变化的 θ 角和压力 σ 的改变值将保持常数。

取 α 族中二条任意的滑移线 α_1、α_2 和 β 族中二条滑移线 β_1、β_2 组成滑移线场单元网格（图 6.6）。相交的结点标号分别为 $A_{11}=(1,\ 1)$，$A_{12}=(1,\ 2)$，$A_{21}=(2,\ 1)$，$A_{22}=(2,\ 2)$ 即 α 族顺序号标在后，β 族顺序号标在前。

$$\begin{cases} \sigma - 2k\theta = C_\alpha & \text{沿 } \alpha \text{ 族滑移线} \\ \sigma + 2k\theta = C_\beta & \text{沿 } \beta \text{ 族滑移线} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{2}(C_\alpha + C_\beta)\\ \theta &= -\frac{1}{4k}(C_\beta - C_\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{6.33}$$

此式是指过同一点的 σ，θ，C_α，C_β 关系式

$$\theta_{1\cdot1} = \frac{1}{4k}(C_{\beta1} - C_{\alpha1}),\quad \theta_{1\cdot2} = -\frac{1}{4k}(C_{\beta1} - C_{\alpha2})$$

$$\theta_{2\cdot1} = \frac{1}{4k}(C_{\beta2} - C_{\alpha1}),\quad \theta_{2\cdot2} = -\frac{1}{4k}(C_{\beta2} - C_{\alpha2})$$

$$\phi_1 = \theta_{1\cdot1} - \theta_{1\cdot2} = \frac{1}{4k}(C_{\alpha2} - C_{\alpha1})$$

$$\phi_2 = \theta_{2\cdot1} - \theta_{2\cdot2} = \frac{1}{4k}(C_{\alpha2} - C_{\alpha1})$$

所以
$$\theta_{1\cdot1} - \theta_{1\cdot2} = \theta_{2\cdot1} - \theta_{2\cdot2} = \phi_1 = \phi_2 \tag{6.34}$$

同理
$$\sigma_{1\cdot1} = \frac{1}{2}(C_{\alpha1} + C_{\beta1}),\qquad \sigma_{1\cdot2} = \frac{1}{2}(C_{\alpha2} + C_{\beta1})$$

$$\sigma_{1\cdot1} - \sigma_{1\cdot2} = \frac{1}{2}(C_{\alpha1} - C_{\alpha2})$$

$$\sigma_{2\cdot1} = \frac{1}{2}(C_{\alpha1} + C_{\beta2}),\qquad \sigma_{2\cdot2} = \frac{1}{2}(C_{\alpha2} + C_{\beta2})$$

$$\sigma_{2\cdot1} - \sigma_{2\cdot2} = \frac{1}{2}(C_{\alpha1} - C_{\alpha2})$$

故
$$\sigma_{1\cdot1} - \sigma_{1\cdot2} = \sigma_{2\cdot1} - \sigma_{2\cdot2} \tag{6.35}$$

如果 β_1 线沿任意的 α 线转到 β_2 线，按上述方法同样可得到

$$\left.\begin{aligned}\theta_{1,1}-\theta_{2,1}&=\theta_{1,2}-\theta_{2,2}\\ \sigma_{1,1}-\sigma_{2,1}&=\sigma_{1,2}-\sigma_{2,2}\end{aligned}\right\}\qquad(6.36)$$

滑移线的这个性质亦称 Hencky 第一定理。(6.33)、(6.34)、(6.35)、(6.36) 表示单元网格四个结点上的应力（静水压）和倾斜角之间的相互关系，若已知单元网格三个结点上的 σ、θ 值，则第四个结点上的 σ、θ 值即可求出。

根据这一关系，并用弧线或直线表示两结点间的曲线段，在给出的边界条件下，就能绘出滑移线网格和塑性区的应力分布。

三、假定滑移线网络中各点的坐标（x，y）、θ 值均为已知，则只要知道滑移线网络中任何一点的 σ 值，就可定出场内各处的 σ 值。

设已知 A 点（图 6.7）的 σ_A，该点 θ_A 也为已知，

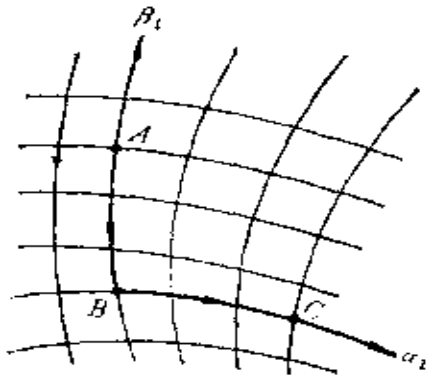


图 6.7 已知σ_A.θ_A 求 σ_B,σ_C

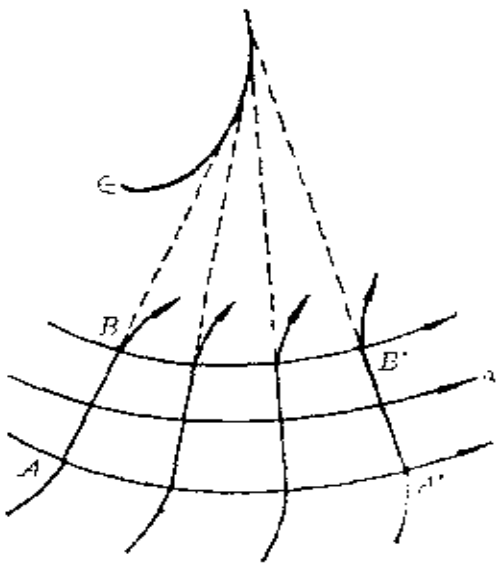


图 6.8

沿 β_1 线 $\quad\sigma_A+2k\theta_A=C_{\beta 1}$ $\quad$ $C_{\beta 1}$ 可算出

$$\sigma_B+2k\theta_B=C_{\beta 1}$$

σ_B 即可算出（因 θ_B 为已知）；

沿 α_1 线　　$\sigma_B - 2k\theta_B = C_{\alpha 1}$　即　$C_{\alpha 1}$ 可算出；

$\sigma_C - 2k\theta_C = C_{\alpha 1}$

由此式 σ_C 即可算出（因 θ_C 为已知）；同理，滑移线场内任何点的 σ 值均可求出。

四、如果滑移线的某些线段是直线，则沿着那些直线的 σ、θ、C_α、C_β 、以及应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy} 都是常数。

设 α 线的线段是直线，则沿该线的 θ = 常数、C_α = 常数、$\sigma = 2k\theta + C_\alpha$ = 常数。因此，$\sigma_x = \sigma - k\sin 2\theta$ = 常数，$\sigma_y = \sigma + k\sin 2\theta$ = 常数，$\tau_{xy} = k\cos 2\theta$ = 常数。

而在所研究的线段上的 C_β 也同样是常数（因 $\sigma + 2k\theta = C_\beta$），即 $C_{\beta 1} = C_{\beta 2} = \cdots$ = 常数，同理可以推出，如果在某些区域中两族滑移线是直线，则在这种区域中的应力是均匀分布的，并且参数 C_α、C_β 是常数。

五、如果 β 族（或 α 族）滑移线的某一线段是直线，则被 α 族（或 β族）滑移线所切截的所有 β（或 α）线的相应线段（图 6.8）皆是直线。这个结论可由 Hencky 第一定理推出。

设 AB 为直线段，则 $\theta_A - \theta_B = 0 = \theta_{A'} - \theta_{B'}$，即 $\theta_{A'} = \theta_{B'}$（说明 $A'B'$ 也是直线段），在这种区域内沿着每一个直线线段的应力 σ_x、σ_y、τ_{xy} 保持常数。但是当由 β 的一个直线段转到另一个直线段时则有所变化，我们称这一类应力状态为简单应力状态。

按照已有的证明可知，沿直线线段中的每一条线段的两个参数 C_α，C_β 是常数，由于参数 C_α 沿每一条 α 线皆为常数，则在 $ABB'A'$ 的全部区域中 C_α = 常数。

六、若沿着某一滑移线移动，则这时在交叉点处的另外一族滑移线的曲率半径的变化即为沿该线所通过的距离。（图 6.9）

α、β 线的曲率半径 R_α、R_β 可用如下关系式表示

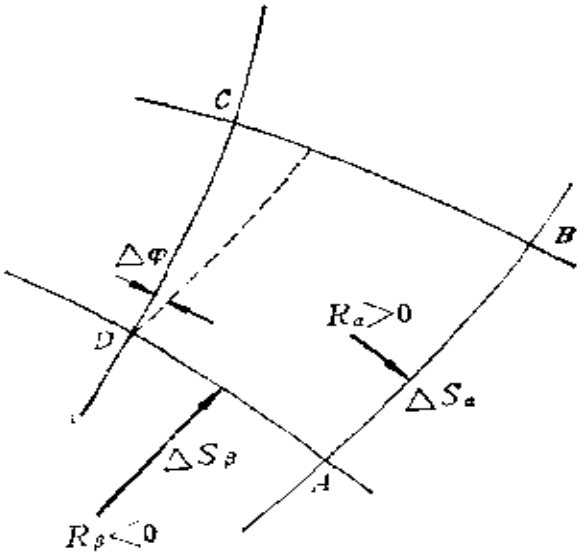


图 6.9 $\triangle\varphi=\triangle\theta$

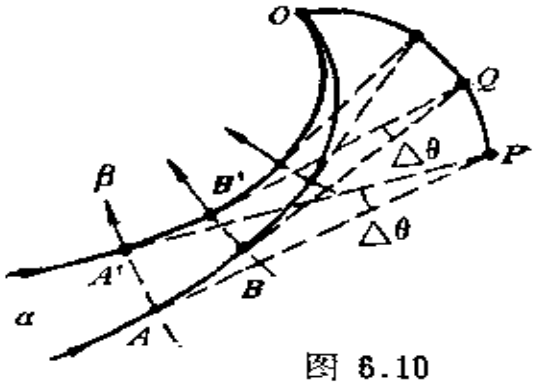


图 6.10

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R_\alpha}&=\frac{\partial\theta}{\partial S_\alpha}\\ \frac{1}{R_\beta}&=-\frac{\partial\theta}{\partial S_\beta}\end{aligned}\right\}\qquad(6.37)$$

如果曲率中心处于 S_β 增加（或 S_α 增加）的方向，则曲率半径 R_α（或 R_β）为正。现在考察由无限接近的 α、β 族的线所围成的滑移线面素 $\triangle S_\alpha\triangle S_\beta$（图 6.9）。曲线 AB 为 α 线，其正向为从 $A\to B$，曲线 AD 为 β 线，其正向为从 $A\to D$。

在图 6.9 中 $\theta_D>\theta_A$，由于 $\partial\theta/\partial S_\beta>0$，$R_\beta<0$。因此 R_β 的中心在 S_α 减少的一侧，在图上 $\triangle\theta=\theta_D-\theta_A(>0)$ 由式（6.37）得 $-\triangle\theta\cdot R_\beta=\triangle S_\beta=AD$，如由 D 点作 AB 的平行线，则此时有

$$\triangle S_\beta'=BC=\triangle S_\beta+\triangle S_\alpha\triangle\theta$$

由此得

$$\frac{\partial\triangle S_\beta}{\partial S_\alpha}=\frac{\triangle S_\beta'-\triangle S_\beta}{\triangle S_\alpha}=\triangle\theta=-\frac{\partial(R_\beta\triangle\theta)}{\partial S_\alpha}$$

由于滑移线的性质二，即 $\triangle\theta$ 为常数，所以在最后一项中，可以将 $\triangle\theta$ 提到微分号外，这时有

$$\triangle\theta = -\triangle\theta\frac{\partial R_\beta}{\partial S_\alpha} \tag{6.38}$$

由上式可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R_\beta}{\partial S_\alpha} &= -1\\ \frac{\partial R_\alpha}{\partial S_\beta} &= -1\end{aligned}\right\} \tag{6.39}$$

同理可得

滑移线的这个性质亦称 Hencky 第二定理。式（6.39）说明，如果我们沿着一条滑移线移动，那末另一族滑移线在交点处的曲率半径将按所移动的距离而改变。当我们朝向滑移线凹的那一边移动时，曲率半径将缩短，并且所有同族滑移线都凹向同一方向。因此，如果塑性状态扩张得足够远时，曲率半径最后必须变为零，图 6.10。

§ 6.5 塑性区的边界条件

建立某一问题的滑移线场，需要利用边界上的受力条件。边界上一般是给出法向应力和剪应力，但滑移线场所牵涉到的是平均应力 σ 和角度 θ，所以需要将边界上的法向应力 σ_n 和剪应力 τ_n 转化成平均应力 σ 和角度 θ。

设在边界 C 上 P 点给定的法向应力 σ_n 和剪应力 τ_n（图 6.11 所示），边界 C 的法线 n 和 ox 轴之间的夹角用 ϕ 表示。对于平面塑性应变问题，其斜截面上的应力公式为（将边界面当成斜截面）

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x\cos^2\phi + \sigma_y\sin^2\phi + \tau_{xy}\sin 2\phi\\ \tau_n &= \tfrac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\phi + \tau_{xy}\cos 2\phi\end{aligned}\right\} \tag{6.40}$$

如物体已进入塑性，则必将满足屈服条件

$$\sigma_x = \sigma - k\sin 2\theta \quad \sigma_y = \sigma + k\sin 2\theta \quad \tau_{xy} = k\cos 2\theta$$

将此式代入上式后则有

$$\sigma_n = \sigma - k\sin 2(\theta - \phi) \tag{6.41}$$

$$\tau_n = k\cos 2(\theta - \phi) \tag{6.42}$$

但需注意此处 τ_n 正负号是按照弹性力学符号的规定，如果在边界 C 上各处的 σ_n、τ_n 已经给出，那末边界 C 上各处的平均应力 σ 和角度 θ 便可以求得

$$\sigma = \sigma_n + k\sin 2(\theta - \phi) \tag{6.43}$$

$$\theta = \phi \pm \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{\tau_n}{k} \tag{6.44}$$

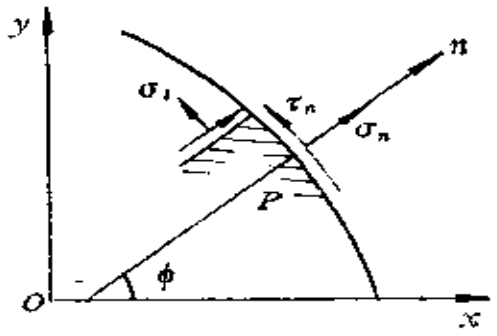


图 6.11

平均应力 σ 还可写成

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t)$$

σ_t 是垂直于法线方向的正应力（图 6.11所示），因而

$$\sigma_t = 2\sigma - \sigma_n \tag{6.45}$$

当边界 C 上仅存在法向应力 σ_n 而不存在剪应力（$\tau_n = 0$）时，则有

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \phi \pm \frac{\pi}{4} \\ \sigma &= \sigma_n \pm k \\ \sigma_t &= \sigma_n \pm 2k \end{aligned}\right\} \tag{6.46}$$

式（6.44）及（6.46）取正号或负号都可以满足屈服条件，这里出现多值解的原因是由于屈服条件具有二次方的性质。

上列各式中的正负号可通过 σ_t 的符号来确定，而 σ_t 的符号可以根据整个物体的受力情况来判断。

当边界 C 给出后，ϕ 角（边界法线方向与 x 轴的夹角）便为已知，再根据边界上已给出的 σ_n 和 τ_n，便可决定边界 C 上各处的 θ、σ 和 σ_1。

边界 C 上各点的 θ 值和 σ 值确定以后，便可作出边界附近区域的滑移线场。

已知边界条件后，便可定出那一族为 α 线以及每族线的积分常数 C_α，C_β、如物体某部分为不受力的自由表面，则有

$$\sigma_1 = 2k$$

在边界上一单元体内，滑移线（最大剪应力方向）与主应力 σ_1 方向成 45° 夹角。最大剪应力指向由应力圆图可定出，也可由四个最大剪应力平面构成的单元体的变形趋势定出。在本例中应如图 6.13 所示。

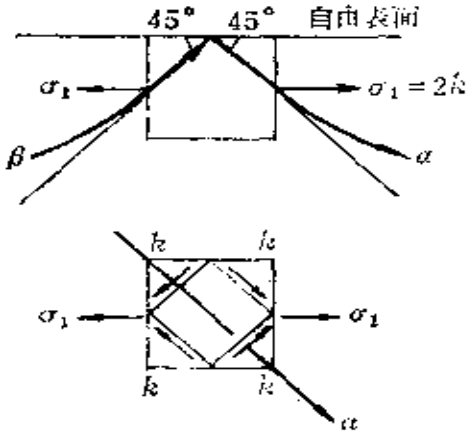


图 6.12

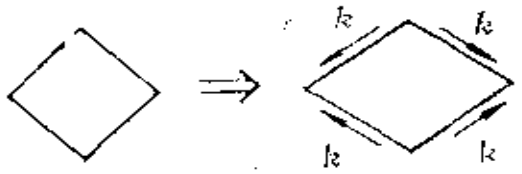


图 6.13

即单元体在 σ_1 的作用下沿水平方向伸长，剪应力方向与剪应变方向应一致，因此最大剪应力指向便可确定，同时 α，β 线方位也就确定了。

§ 6.6 常见的滑移线場

常见的滑移线场有如下几种：

一、两组正交的平行直线族（均匀应力状态）

在图 6.14，$\sigma_1>0$，$\sigma_3=0$ （侧面为自由表面）

$$\sigma_2=\sigma=\frac{\sigma_1}{2}=k=\tau_{\max}$$

σ_2 方向垂直于纸面这是平面变形状态的一种特例，滑移线为两组正交的平行直线族，在这种滑移线场上的平均应力 σ 是相同的，故称均匀应力场。在均匀应力场中任何点的 σ，θ，σ_x，σ_y，τ_{xy}，C_α，C_β 的值都完全一样。

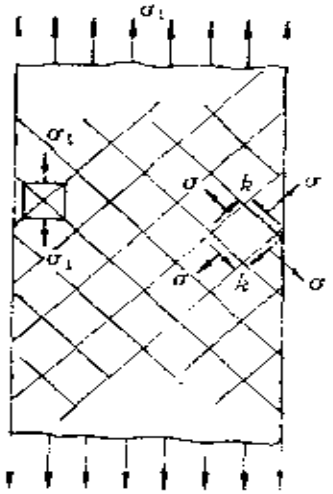


图 6.14 均匀应力状态

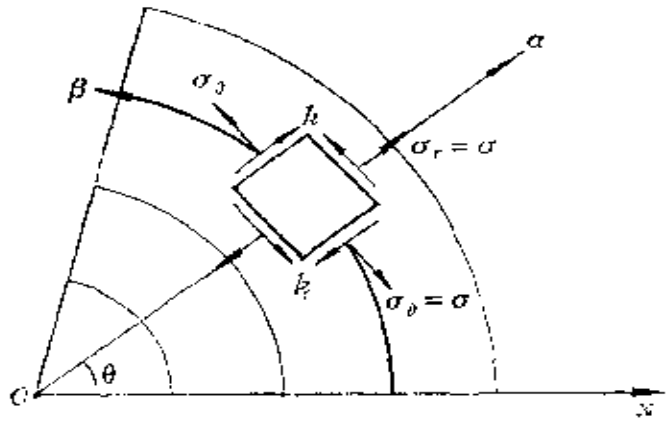


图 6.15 中心扇形滑移线场

二、简单应力状态

简单应力状态的一般情况是一组滑移线（例如 β），由直线组成，正交于这些直线的曲线形成第二个 α 族滑移线，这时 C_β = 常数。

$$\alpha \text{ 线} \quad \sigma-2k\theta=C_\alpha \qquad \beta \text{ 线} \quad \sigma+2k\theta=C_\beta$$

β 线是直线，则沿每一条 β 线上的 θ = 常数，σ = 常数。但各条 β 线上 θ 角取不同的常数值在整个区域中 C_α = 常数（$C_{\alpha 1} = C_{\alpha 2} = \cdots$ = 常数），当由一条 β 线转到另一条 β 线时，σ 也将改变。

在图 6.15 中由直线族和同心圆组成的滑移线的中心场是简单应力状态的一个重要情况。

如果将直角坐标系上的应力分量变换到极坐标系上的应力分量 σ_r 和 σ_θ，其转换关系式为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta\end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

由于变形体满足屈服条件，故将（6.12）式代入(6.47)式后，则可得

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_m = \sigma$$

(6.47) 式亦可直接由图 6.15 根据滑移线性质立刻得出 $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma$，因为径向、切向是 α 线与 β 线的切线方向，就是最大剪应力 $\tau_{\max} = k$ 的轨迹方向，而最大剪应力 k 作用面的法向应力当然就是 σ，因此 $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma$。

这表明在同一根幅射线上（对于图 6.15 来说，是指同一根 α 线上），σ_r 和 σ_θ 相等，并且等于平均应力 σ。由于在滑移线场的区域里，平均应力 σ 仅是 θ 的函数，因此 σ_r 和 σ_θ 仅是 θ 的函数。这种滑移线场称为中心扇形滑移线场。

三、轴对称滑移线场

如图 6.16 所示，滑移线与主平面相交成 45°，故应有

$$\frac{dr}{r d\phi} = \pm \operatorname{tg} 45^\circ = \pm 1$$

$$\frac{dr}{r} = \pm d\phi, \quad d\phi = \pm \frac{dr}{r}$$

二边均积分后，得

$$\phi = \pm(\ln r - \ln C) \quad \therefore \phi = \pm \ln \frac{r}{C} \tag{6.48}$$

此方程式为对数螺线方程。它也是两族正交曲线。式（6.48）可写为

$$\left.\begin{aligned} \phi - \ln \frac{r}{a} &= C_\alpha \\ \phi + \ln \frac{r}{a} &= C_\beta \end{aligned}\right\} \tag{6.49}$$

式（6.48）可写为

$$\frac{r}{C} = e^{\pm\phi}$$

在轴对称问题中，当 $r = a$，$\phi = 0$，因此有 $C = a$，即

$$r = ae^{\pm(\theta - \frac{\pi}{4})}$$

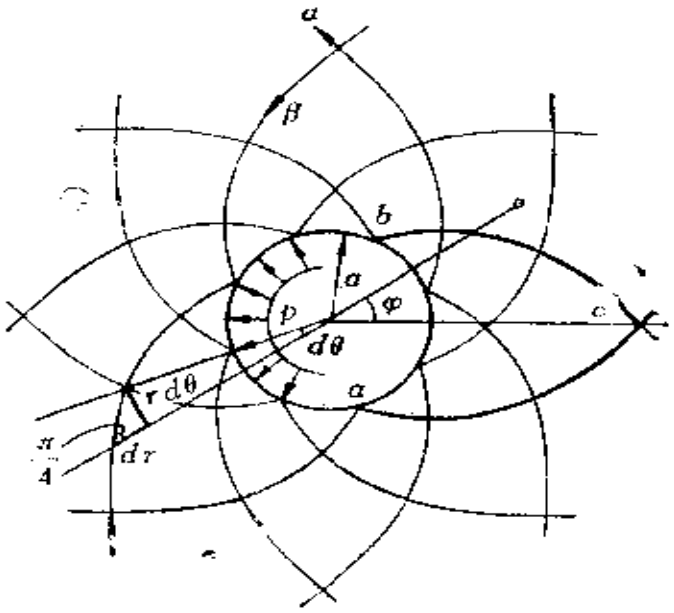


图 6.16　圆孔周围滑移线的分布图，滑移线为对数螺线

四、在与均匀应力状态区域相连接时，总能得到简单应力状态（即至少其中一组滑移线是直线的情况）。

图 6.17 所示，区域 A 是均匀应力状态、滑移线段 L 是区域 A 的边界，比如说它是属于 β 滑移线族的，边界 L 是直线而且是滑移线，根据滑移线的第五个性质（如果 β 族滑移线的某一线段是直线，则被 α 族滑移线所切截的所有的 β 线的相应线段都是直线），于是与区域 A 相邻接的区域 B 中的一组 β 滑移线族将由直线段所组成。

图 6.18 是二个均匀应力区 A 与 C，中间夹个中心扇形区 B。

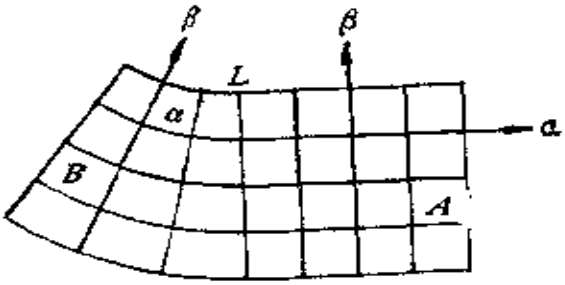


图 6.17

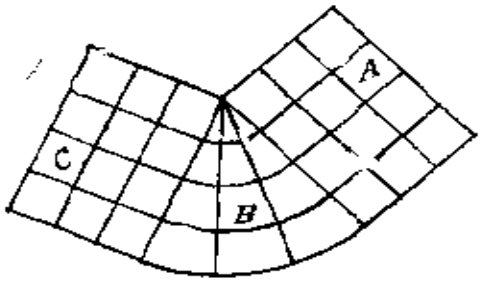


图 6.18 均匀应力区 A、C 和扇形区 B 相连接

§ 6.7 滑移线場的近似作法

用数值差分方法解决应力和位移速度问题是比较方便和有效的方法。在滑移线场中，可以有如下三类边值问题。第一类问题为在边界 $C—C$ 上给出 σ 和 θ 的值，而边界 $C—C$ 与滑移线不重合，这类问题称为初始值问题，或称为 Cauchy 问题（图 6.19.a）. 第二类问题是根据给定的滑移线来求其附近的滑移线场问题，称为初始特征问题，或称为 Riemann 问题（图 6.19.b）.第三类问题为混合问题（图 6.19.c）。

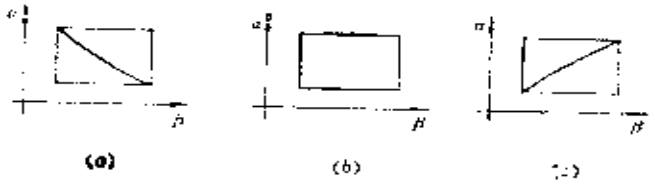


图 6.19 应力平面的边值问题

(a)Cauchy 问题 (b)Riemann 问题 (c)混合问题

(1) 初始值问题

在边界上给定载荷根据边界上给定的载荷 σ_n 和 τ_n，可按式(6.43) (6.44) 确定平均应力 σ 和角度 θ 的值。将边界 C—C 分成若干段，并将各节点编号为(1.1)、(2.2)……点(1.1)的θ 角用 $\theta_{1.1}$ 表示，平均应力用 $\sigma_{1.1}$ 表示(图 6.20)。由于 θ 角是以 α 族滑移线上某点切线与 x 轴的夹角，因此可以由点 (1.1) 作出对 x 轴的顶角为 $\theta_{1.1}$ 的线段 (α 族滑移线)，再从点 (2.2) 作角度为 $\theta_{2.2}+\frac{\pi}{2}$ 的线段 (β 族滑移线)，此两族线段交于点 (1.2)，这时可以认为点 (1.2) 是在通过点 (1.1) 的滑移线上。用相同的方法可以定出点 (2.3)、点 (3.4) ……的位置。定出这些点的位置后，可以根据式 (6.22) 的关系求出 $\sigma_{1.2}$ 和 $\theta_{1.2}$ 的表达式，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{1.2}&=\frac{1}{2}(\sigma_{2.2}+\sigma_{1.1})+k(\theta_{2.2}-\theta_{1.1})\\ \theta_{1.2}&=\frac{1}{4}(\sigma_{2.2}-\sigma_{1.1})+\frac{1}{2}(\theta_{2.2}-\theta_{1.1})\end{aligned}\right\}\qquad(6.50)$$

点 (2.3)、点 (3.4) ……都可以用相同的方法得出。重复相同的方法，又可得到点 (1.3)、点 (2.4) 的位置，并求出 $\sigma_{1.3}$，$\sigma_{2.4}$ ……和 $\theta_{1.3}$、$\theta_{2.4}$……的数值。继续进行相同的过程便可确定 C—C 附近的滑移线场。将式 (6.50) 写成一般形式，则有

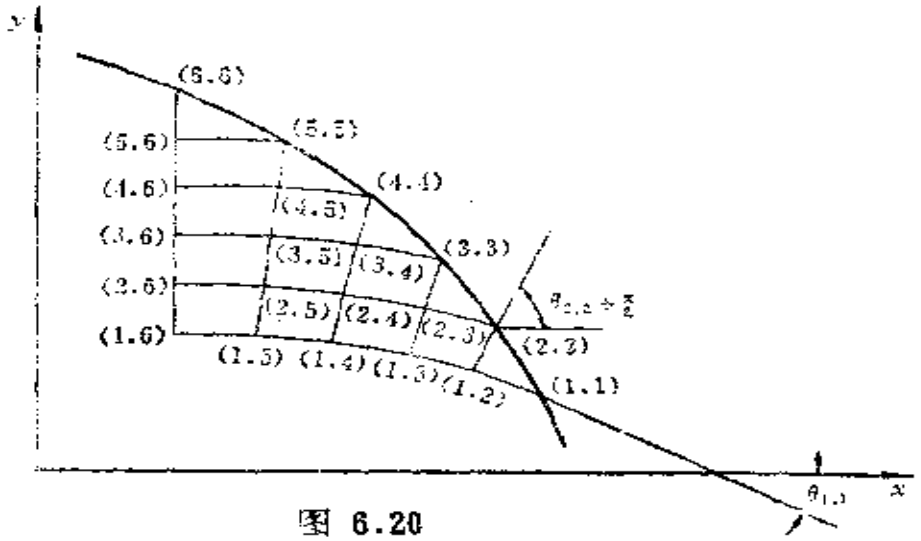


图 6.20

$$\left.\begin{aligned}\theta_{m-1,m}&=\frac{1}{4k}\left[\sigma_{m,m}-\sigma_{m-1,m-1}\right]+\frac{1}{2}\left[\theta_{m,m}+\theta_{m-1,m-1}\right]\\ \sigma_{m-1,m}&=\frac{1}{2}\left[\sigma_{m,m}+\sigma_{m-1}\sigma_{m-1}\right]+k\left[\theta_{m,m}-\theta_{m-1,m-1}\right]\end{aligned}\right\}(6.51)$$

(2) 初始特征问题。

在图 6.21 上设 $O\alpha$ 和 $O\beta$ 为两条相交的滑移线，当滑移线的位置确定后，则线上各点的 θ 便可确定。将 $O\alpha$ 和 $O\beta$ 分为若干段，$O\alpha$ 线上为点(0.0)、点 (1.0)点(2.0)……。在 $O\beta$ 线上为点 (0.0)、(0.1)、(0.2)……在这些点上的 θ 皆为已知。则点 (1.1) 的 $\theta_{1.1}$ 和点 (1.1) 的位置可以利用滑移线的第二条性质按如下公式确定

$$\left.\begin{aligned}\theta_{1.1}-\theta_{1.0}&=\theta_{0.1}-\theta_{0.0}\\ \theta_{1.1}&=\theta_{1.0}+\theta_{0.1}-\theta_{0.0}\end{aligned}\right\}\qquad(6.52)$$

即

$$\left.\begin{aligned}y_{1.1}-y_{0.1}&=(x_{1.1}-x_{0.1})\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta_{1.1}+\theta_{0.1})\\ y_{1.1}-y_{1.0}&=-(x_{1.1}-x_{1.0})\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta_{1.1}+\theta_{1.0})\end{aligned}\right\}\qquad(6.53)$$

如将式（6.52）和式（6.53）写成一般形式的表达式，则有

$$\left.\begin{aligned}\theta_{m\cdot n}&=\theta_{m\cdot 0}+\theta_{0\cdot n}-\theta_{0\cdot 0}\\ \sigma_{m\cdot n}&=\sigma_{m\cdot 0}+\sigma_{0\cdot n}-\sigma_{0\cdot 0}\end{aligned}\right\}\tag{6.54}$$

如（$m-1$，n）及（m，$n-1$）的坐标为已知，角度为已知，则有

$$\left.\begin{aligned}y_{m\cdot n}-y_{m-1\cdot n}&=(x_{m\cdot n}-x_{m-1\cdot n})\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\theta_{m\cdot n}+\theta_{m-1\cdot n})\\ y_{m\cdot n}-y_{m\cdot n-1}&=-(x_{m\cdot n}-x_{m\cdot n-1})\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(\theta_{m\cdot n}+\theta_{m\cdot n-1})\end{aligned}\right\}\tag{6.55}$$

（3）混合问题

沿一根滑移线 OA 给定边界上 σ、θ 值，而沿 OB 线给定 θ 值。将 OA 分成，(1.0)、(2.0)、(3.0)……，由(1.0)出发，沿 α 的法线方向引一直线交于 OB 线的 P' 点，在 OB 线上，找出 P' 点的 θ 值，按照(1.0) 点及 P' 点算出 θ 角的平均值，并按此值重新由 (1.0) 点引一 α 线的垂直线交 OB 线于 P'' 点，如此反复几次，直到 P 点的逐次位置之间的差数变得很小为止，这样便确定了 (1.1) 点。此时，(2.1)，(3.1)……，各点可按初始特征情况算出，而 (2.2)……点的位置，则应按确定 (1.1) 逐次逼近的方法确定。

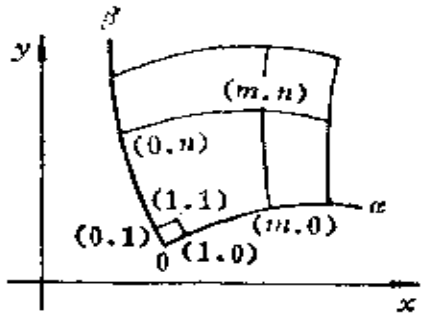


图 6.21

§ 6.8 用滑移线場理论求解塑性极限载荷的例题

例一、已知顶部被削平的对称楔体的削平面上，受均匀压力 q 的作用，试求达到极限状态时载荷 q 的表达式（图6.22）。

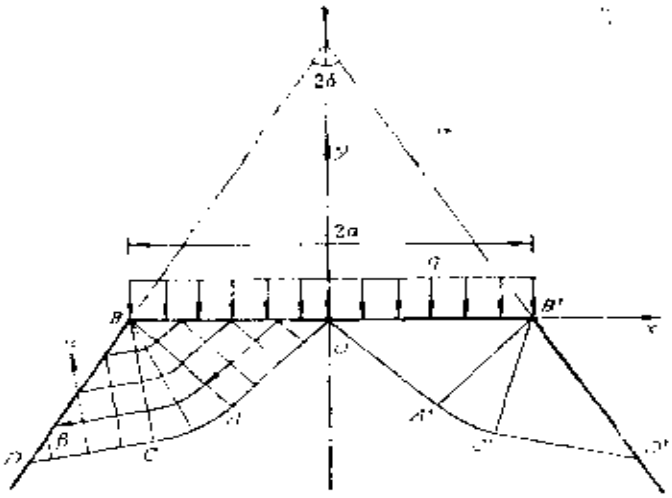


图 6.22　顶部被削平的楔体

1．　第一种解法：

楔顶角为 2δ，由于是对称楔，故只需研究对称楔的一半。首先研究 OB 边的受力状态。在 OB 边界上受有均布压力 q 的作用，$\sigma_n = -q$，$\tau_n = 0$

$$\theta = \varphi \pm \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{\tau_n}{k} = \varphi \pm \frac{\pi}{4}$$

φ 为边界 OB 垂线与 OX 轴正向之间的夹角，此处 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma = \sigma_n + k\sin 2(\theta - \varphi) = -q + k\sin 2(\pm\frac{\pi}{4}) = -q \pm k$$

$$\sigma_t = 2\sigma - \sigma_n = -2q \pm 2k - (-q) = -q \pm 2k$$

由图 6.22 中 OAB 的受力状态可以定出 α 线的方向，见图 6.13，因而得出 $\theta = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{4}\pi$，即在以上各式中取“+”号

因此　　$\sigma_t - \sigma_n = 2k$，　$\sigma = -q + k$，　$\sigma_t = -q + 2k$

OAB 为均匀应力区，各点的应力 θ、C_α、C_β 均相同。

BD 边界为自由边界，故 $\sigma_n = \tau_n = 0$

$$\theta = \varphi \pm \frac{\pi}{4} = \pi - \delta \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma = 0 + k\sin 2\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm k$$

$$\sigma_t = 2\sigma - \sigma_n = \pm 2k$$

此处应选取“$-$”号，因为由 $\triangle OAB$ 区的 α 线正向已定可以看出，在 $\triangle BDC$ 中的均匀应力区中 α 线正向应比其小 δ 角。而从受力情况来看 $\triangle BCD$ 中的 σ_t 应是压应力。

在 $\triangle BCD$ 中，$\theta = \frac{3}{4}\pi - \delta$，$\sigma = -k$，$\sigma_t = -2k$。

BCA 为中心扇形区，由于 $OACD$ 为同一根 β 线，因此

$$C_{BD} = \sigma_D + 2k\theta_D = -k + 2k\left(\frac{3}{4}\pi - \delta\right)$$

$$C_{BO} = \sigma_O + 2k\theta_O = -q + k + 2k\frac{3}{4}\pi$$

由于 $C_{BD} = C_{BO}$ 故

$$q = 2k(1+\delta).$$

δ 角需要弧度代入公式

$$l' = 4ak(1+\delta).$$

2. 第二种解法：

设滑移线场如图 6.23 所示，此时在 $\triangle BLB'$ 中

$$\theta = -\frac{\pi}{4}, \quad \sigma_t = -q + 2k, \quad \sigma = -q + k$$

在 $\triangle BNM$ 中，有

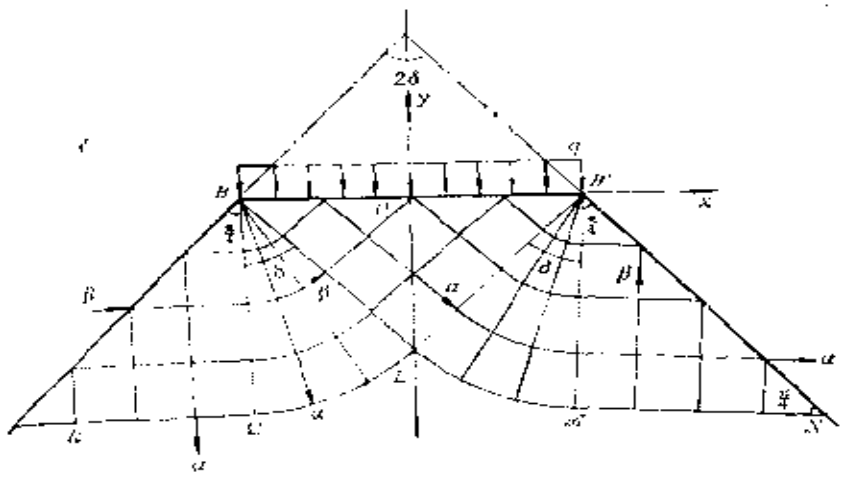


图 6.23　顶部被削平的棱体的第二种滑移线场

$$\theta = -\frac{\pi}{4} + \delta, \qquad \sigma_1 = -2k \quad \sigma = -k$$

$$C_{aA} = \sigma_A - 2k\theta_A = -q + k - 2k\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$C_{aB} = \sigma_B - 2k\theta_B = -k - 2k\left(-\frac{\pi}{4} + \delta\right)$$

由于　$C_{aA} = C_{aB}$，　故有

$$q = 2k(1+\delta), \quad P = 4ak(1+\delta) \tag{i}$$

两种不同的解法、所得到的极限载荷都是 $q = 2k(1+\delta)$，在第一种解法中 $\triangle OAB$，$\triangle OA'B'$，$\triangle BCD$，$\triangle B'C'D'$ 为均匀应力区满足屈服条件。BAC，$B'A'C'$ 扇形区是塑性区(当然也满足屈服条件)，其余处均为刚性区。在第二种解法中均匀应力区扩大为 $\triangle BLB'$，$\triangle BQR$，$\triangle B'MN$ 塑性区扩大为 BLQ，$B'LM$，而其余各处仍为刚性区。对于弹塑性物体来说，塑性变形是随着载荷的增大而逐渐扩展的，最初弹性区域抑制着物体的变形，随着弹性区域的减小，这个抑制的影响也逐渐减弱，而最后开始了自由的

塑性流动，它就相应于极限状态，这时在塑性区域的变形比弹性区变形大得多，因而弹性区域的变形可以忽略，并认为是不变形的刚体。

根据本例所得的结果可以得到许多重要问题的极限载荷 q 的值。例如当单边受压力 q 作用下的钝角楔体如图 6.24 所示。其滑移线场与被削平的对称楔体中 $OACDB$ 中的滑移线场是完全一致的。因此由图 6.24 可见

$$2\gamma = \frac{\pi}{2} + \delta$$

或

$$\delta = 2\gamma - \frac{\pi}{2} \tag{ii}$$

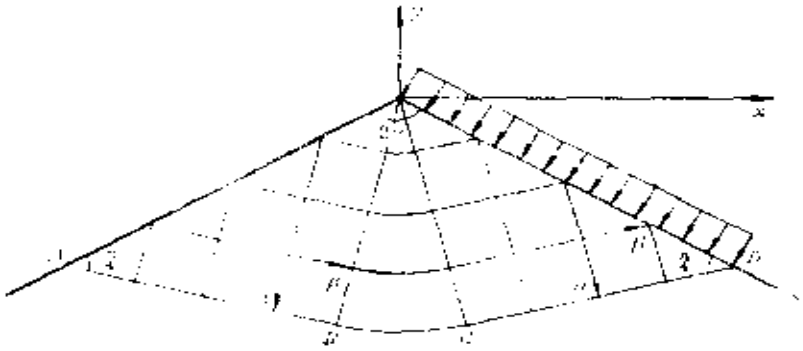


图 6.24　单边受压的钝角楔体

因此由式（ii）可得单边受压力 q 作用下的钝角楔体的极限载荷为

$$q = 2k\left(1 + 2\gamma - \frac{\pi}{2}\right) \tag{iii}$$

而当 $2\gamma = \frac{\pi}{2}$ 时，即为直角楔体时，

$$q = 2k$$

当平冲头模压入时，如图 6.25 所示。此时 $\delta = \frac{\pi}{2}$ 因此由式（i）可得此情况下的极限载荷为

$$q = 2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = k(2 + \pi) \tag{iv}$$

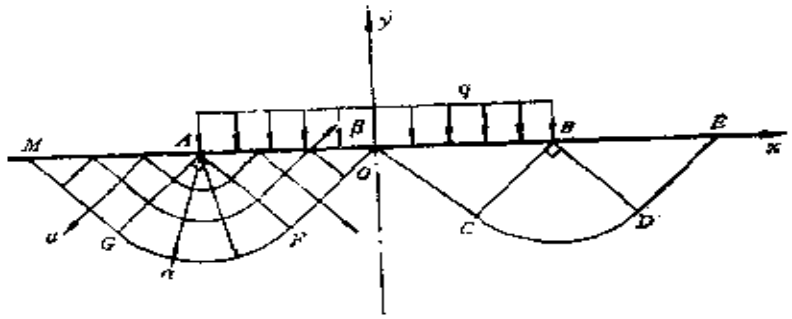


图 6.25　平冲头的压入

例二、已知具有尖角为 2γ 的楔体，在外力 P 的作用下，插入具有相同角度的 V 形缺口内，试分别按如下两种情况画出滑移线场并求出两种情况的极限载荷（图6.26）。

1）　楔体与 V 形缺口之间完全光滑；

2）　楔体与 V 形缺口接触处因摩擦作用其剪应力为 k。

解： 1．　当接触面无摩擦时

接触面上无剪应力，只有正应力（压应力）$-q$，其滑移线图如 $ODGFE$ 所示，在图 6.26 中

$$\sigma_1 = -2k$$

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + 0) = -k \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

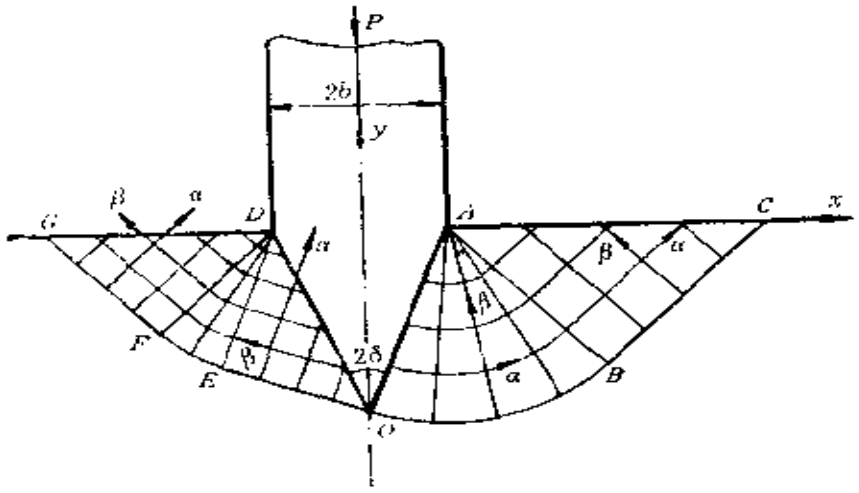


图 6.26　尖角为 2γ 的楔体插入相同角度的 V 形缺口

在三角形 ODE 中，应有

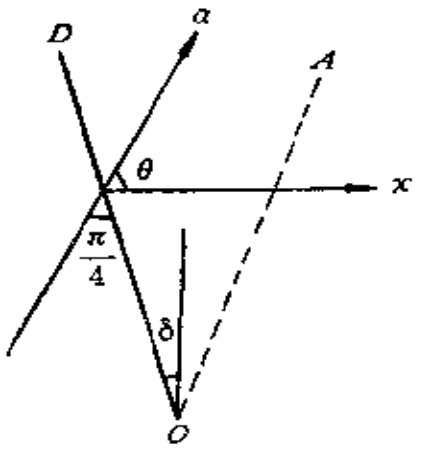


图 6.72

$$\sigma_t-(-q)=2k,\quad \sigma_t=2k-q$$

$$\sigma=\frac{1}{2}(\sigma_t+\sigma_n)=k-q$$

$$\theta+\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)=\pi$$

$$\theta=\delta+\frac{\pi}{4}$$

沿同一条 β 线：

$$C_\beta=\sigma+2k\theta=-k+2k\left(\frac{\pi}{4}\right)=k-q+2k\left(\delta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-k=k-q+2k\delta$$

$$q=2k(1+\delta),\qquad \sin\delta=\frac{b}{OD},\qquad OC=\frac{b}{\sin\delta}$$

$$p=q\sin\delta,$$

$$P=(OD+OA)\,q\sin\delta=\frac{2b}{\sin\delta}q\sin\delta=2bq$$

$$P=2b[k(1+\delta)]=4bk(1+\delta),\qquad \frac{P}{2b}=2k(1+\delta).$$

当 $2\delta=\frac{\pi}{2}$ 时，$q=2k\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$，$P=4bk\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$，

$$\frac{P}{2b}=2k\left(1+\frac{\pi}{4}\right).$$

当 $2\delta=\pi$ 时，$q=2k\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$；$P=4bk\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$，

$$\frac{p}{2b} = 2k\left(1+\frac{\pi}{2}\right).$$

2. 接触面为粗糙摩擦时

摩擦剪应力为 k，接触面就是滑移线（图 6.29）。

$$\sigma_n = \sigma = \sigma_t = -q, \qquad |\theta| + \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$|\theta| = \delta, \qquad \theta = -\delta.$$

AC 边为自由边，分析方法与 GD 边相同

$$\sigma_t = -2k, \qquad \sigma = -k, \qquad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

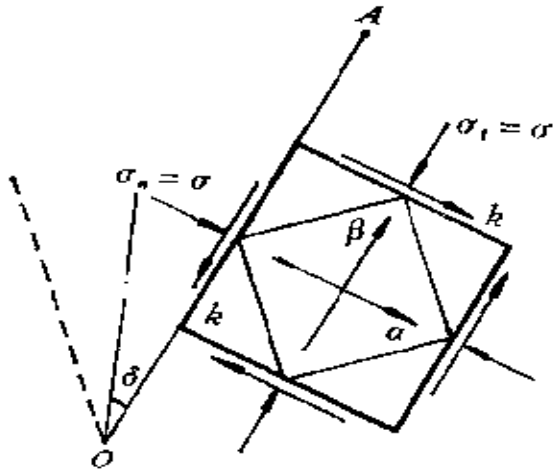


图 6.28

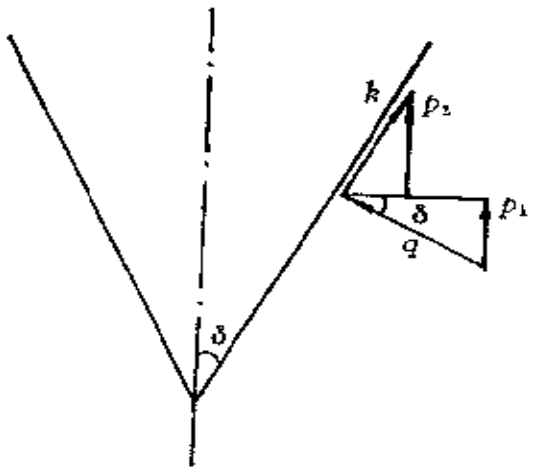


图 6.29

OBC 为同一条 α 线，因此

$$C_\alpha = \sigma - 2k\theta = -k - 2k\left(\frac{\pi}{4}\right) = -q - 2k(-\delta)$$

$$q = k + 2k\delta + 2k\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2k\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \delta\right) = k\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\delta\right)$$

$$q = p\sin\delta + k\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = q\sin\delta + k\cos\delta = p_1 + p_2$$

$$P = (OD + OA)(q\sin\delta + k\cos\delta)$$

$$= \frac{2b}{\sin\delta}(q\sin\delta + k\cos\delta)$$

$$= 2b(q + k\operatorname{ctg}\delta)$$

$$= 2b\left[k\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\delta\right) + k\operatorname{ctg}\delta\right]$$

$$= 2bk\left[1 + \frac{\pi}{2} + 2\delta + \operatorname{ctg}\delta\right]$$

$$\frac{P}{2b} = k\left(1 + \frac{\pi}{2} + 2\delta + \operatorname{ctg}\delta\right).$$

例三、试用滑移线场理论求出内半径为 a，外半径为 b 的厚壁圆筒的极限载荷（图 6.30）。

解：根据式（6.48）所求得的滑移线，其方程式为

$$r = ce^{(\theta - \frac{\pi}{4})} \qquad \text{(i)}$$

通过边界条件 $\varphi = 0$ 时，$r = a$，$\theta = \frac{\pi}{4}$，可得

$$c = a$$

因此方程（i）可写为

$$r = ae^{(\theta - \frac{\pi}{4})} \qquad \text{(ii)}$$

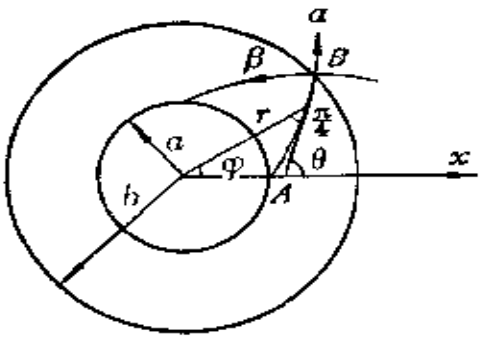


图6.30 用滑移线场求厚壁筒的极限载荷

当厚壁筒受内压作用时

$$\sigma_1 = \sigma_\theta(>0) \quad \sigma_2 = \sigma_r(<0) \quad \text{平均应力} \quad \sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2},$$

故在滑移线 α 上，应有

$$\sigma_r + \sigma_\theta - 4k\theta = \text{const} \tag{iii}$$

由式（ii）得

$$\theta = \ln\frac{r}{a} + \frac{\pi}{4} \tag{iv}$$

将式（iv）代入式（iii）并考虑 $\sigma_\theta = 2k + \sigma_r$，可得

$$2\sigma_r + 2k - 4k\ln\frac{r}{a} - k\pi = \text{const} \tag{v}$$

当 $r = b$ 时，$\theta = \ln\frac{b}{a} + \frac{\pi}{4}$，$\sigma_r = 0$，$\sigma_\theta = 2k$，

即

$$2k - 4k\ln\frac{b}{a} - k\pi = \text{const} \tag{vi}$$

由式（v）和（vi）最后得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -2k\ln\frac{b}{r}\\ \sigma_\theta &= 2k\left(1 - \ln\frac{b}{r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{vii}$$

因此当整个截面进入塑性时，

$$p = 2k\ln\frac{b}{a}$$

此结果与第五章中所得结果完全一致。

例四，已知圆形切口的板条，受外力 P 的作用，如 a 为圆弧半径。$2h$ 为板条的宽度如图 6.31 所示，试分别按如下两种情况求出此板条的极限载荷。（1）$\frac{h}{a} < 3.81$　（2）$\frac{h}{a} > 3.81$

解：

设圆弧角为 $2\gamma_1$，图 6.31 所示 $a + h = r_1$

则由极坐标的滑移线表达式，有

$$\phi - \ln\frac{r}{a} = C_\alpha$$

$$\phi + \ln\frac{r}{a} = C_\beta$$

由图 6.31 知，在 β 线的 A 点上，应有 $\varphi = 0$

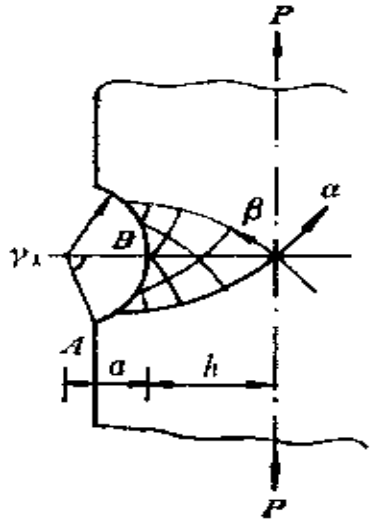


图 6.31 当 $\frac{h}{a} \leqslant 3.81$ 的情形

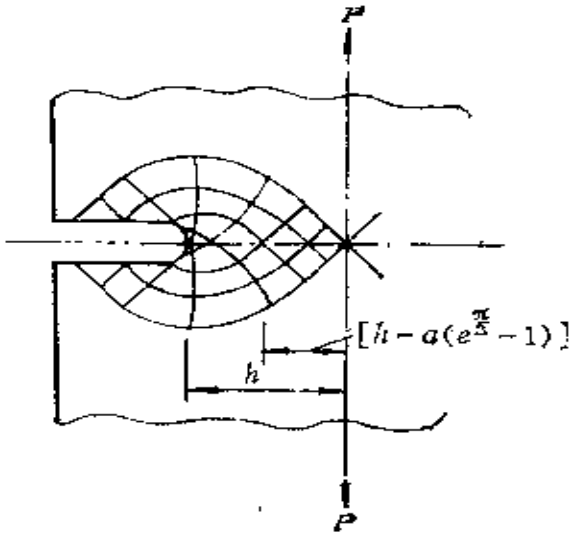


图 6.32 当 $\frac{h}{a} \geqslant 3.81$ 的情况

故

$$\ln\frac{r_1}{a} = C_\beta$$

在 B 点上，

$$\phi = \gamma + \ln\frac{a}{a} = C_\beta = \ln\frac{r_1}{a}$$

即

$$\gamma = \ln\frac{r_1}{a}$$

但 γ 在小于 $\frac{\pi}{2}$ 的范围内，可得

$$\gamma = \ln\frac{r_1}{a} = \ln\frac{h+a}{a} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

由此得

$$\frac{h+a}{a} \leqslant e^{\frac{\pi}{2}}$$

即

$$\frac{h}{a} \leqslant e^{\frac{\pi}{2}} - 1 = 3.81$$

因此当 $\frac{h}{a} \leqslant 3.81$ 时，滑移线场由对数螺线组成，而当 $\frac{h}{a} \geqslant 3.81$ 时，滑移线场中除对数螺线外，还应有均匀应力场的滑移线，如图 6.32 所示。

现分别按两种情况解出这一问题的极限载荷。

(1) 当 $\frac{h}{a} \leqslant 3.81$ 的情况

在使用极坐标时，如载荷 $p=0$，则由平衡方程和屈服条件可得应力表达式为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 2k\ln\frac{r}{a} \\ \sigma_\theta &= 2k\left(1+\ln\frac{r}{a}\right) \end{aligned}\right\} \tag{i}$$

由此可得极限载荷的表达式为

$$P = 2\times 2k\int_a^{a+h}\left(1+\ln\frac{r}{a}\right)dr$$

$$= 4k[(a+h)\ln(1+\frac{h}{a})] \tag{ii}$$

如令

$$p^* = 4kh$$

则得

$$\frac{P}{P^*} = [(1+\frac{a}{h})\ln(1+\frac{h}{a})] \tag{iii}$$

(2) 当 $\frac{h}{a}\geqslant 3.81$ 的情况 (图 6.32)

如图所示，在 $h_1=(e^{\frac{\pi}{2}}-1)a=3.81a$ 范围内，应有

$$\ln\frac{r_1}{a}=\gamma,\quad r_1=ae^{\gamma},\quad 故\quad dr_1=ae^{\gamma}d\gamma$$

$$\sigma_\theta=2k(1+\gamma)$$

因此这部分所能承受的外载荷 P_1 为

$$P_1=4k\int(1+\gamma)dr_1$$

$$=4k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\gamma)e^{\gamma}ad\gamma$$

$$=4ak\cdot\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}=2ak\pi e^{\frac{\pi}{2}}\qquad(i)$$

在 $[h-(e^{\frac{\pi}{2}}-1)a]$ 部分为均匀应力场，极限载荷为

$$\sigma_2=2k(1+\frac{\pi}{2})$$

因此这部分所能承受的载荷为

$$P_2=2k(1+\frac{\pi}{2})[h-a(e^{\frac{\pi}{2}}-1)]\qquad(ii)$$

总的载荷为

$$P=P_1+P_2=4hk\left\{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{a}{h}\left[e^{\frac{\pi}{2}}-1-\frac{\pi}{2}\right]\right\}\qquad(iii)$$

§ 6.9 速 度 场 问 题

从应力边界条件解出滑移线场后，便可以研究塑性区内变形和位移的问题。滑移线场必须和变形位移的分布一致，所得到的解答

才是正确的。

一、设沿滑移线方向的位移速度分量为 V_α，V_β，根据平面塑性应变方程式应有

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)(\sigma_y-\sigma_x)+2\tau_{xy}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}-\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)=0$$

根据体积不变假设有

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0$$

式中 $V_x=\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 是变形体内任一质点的位移速度 V 在 x 轴上的速度分量；

$V_y=\dfrac{\partial v}{\partial t}$ 是变形体内任一质点的位移速度 V 在 y 轴上的速度分量；

上述二个方程式对任意的直角坐标系都成立。如果应力是已知的，则对于速度来说问题是线性的，这个方程组是双曲线型方程，而且其特征线也与滑移线相重合。

如在 O 点沿滑移线切线方向建立直角坐标系 Oxy，沿滑移线弧长 S_α，S_β 的微分可用对应的坐标轴的微分来表示，此时有

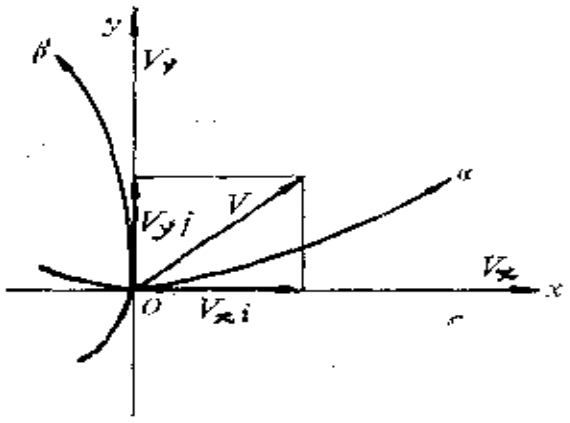


图 6.33

$$V_x=V_\alpha,\quad V_y=V_\beta,\quad \sigma_x=\sigma_y=\sigma,\quad \tau_{xy}=k,$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}=\frac{\partial V_\alpha}{\partial x}=\frac{\partial V_\alpha}{\partial S_\alpha}.$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y}=\frac{\partial V_\beta}{\partial y}=\frac{\partial V_\beta}{\partial S_\beta},$$

将上式代入平面塑性应变方程后，则得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V_\alpha}{\partial S_\alpha}-\frac{\partial V_\beta}{\partial S_\beta}=0\\ \frac{\partial V_\alpha}{\partial S_\alpha}+\frac{\partial V_\beta}{\partial S_\beta}=0\end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

因此 $\frac{\partial V_\alpha}{\partial S_\alpha}=0$，$\frac{\partial V_\beta}{\partial S_\beta}=0$ 也就是 $\frac{\partial V_x}{\partial x}=0$，$\frac{\partial V_y}{\partial y}=0$

$\frac{\partial V_\alpha}{\partial S_\alpha}=\frac{\partial V_x}{\partial x}=0$ 意味着在 0 点的无限小的邻区内，其位移速度 v 在 0 点的 α 线切线方向（即 x 轴方向）的速度分量 V_α 是常数，即 $V_\alpha=D_\alpha$，D_α 为某个确定的代数值。

公式 $\frac{\partial V_\beta}{\partial S_\beta}=\frac{\partial V_y}{\partial y}=0$ 意味着在 0 点的无限小邻区内，其位移速度 V 在 0 点的 β 线切线方向（即 y 轴方向）的速度分量 V_β 是常数 $V_\beta=D_\beta$，D_β 为某确定的代数值。

即 $\left.\begin{aligned}\frac{\partial V_x}{\partial x}=\dot{\varepsilon}_x=0\\ \frac{\partial V_y}{\partial y}=\dot{\varepsilon}_y=0\end{aligned}\right\}$ 或 $\left.\begin{aligned}\frac{\partial V_\alpha}{\partial S_\alpha}=\dot{\varepsilon}_\alpha=0\\ \frac{\partial V_\beta}{\partial S_\beta}=\dot{\varepsilon}_\beta=0\end{aligned}\right\}$ (6.57)

$\dot{\varepsilon}_\alpha=\dot{\varepsilon}_\beta=0$ 说明在 0 点的无限小邻区内，沿滑移线方向的应变速度等于零。

二、Geiringer 速度方程

过 P 点建立直角坐标系 xoy（P 点与 O 点重合），画出过 P 点的滑移线 α 与 β，作滑移线的切线，此二切线构成新坐标系 $x'oy'$，如 P 点的位移速度为 V，

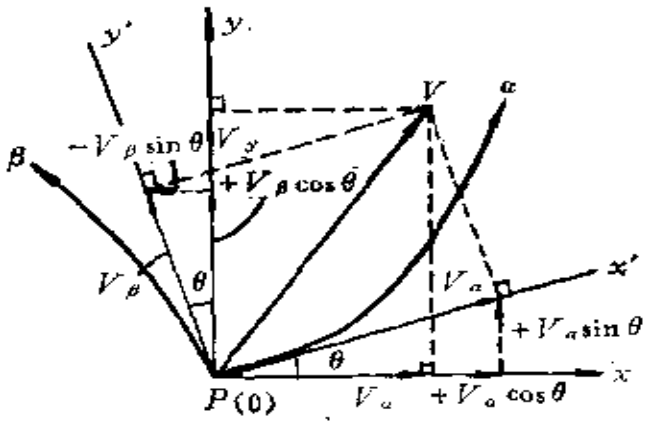


图 6.43 在平面应变条件下 P 点位移速度的分解

此时由图 6.34 中的几何关系便可得到

$$\left.\begin{aligned} V_x &= V_\alpha \cos\theta - V_\beta \sin\theta \\ V_y &= V_\beta \cos\theta + V_\alpha \sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{6.58}$$

如对式（6.58）取微分，则有

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = -V_\alpha \sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial V_\alpha}{\partial x} - V_\beta \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sin\theta \frac{\partial V_\beta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} = -(\sin\theta) V_\beta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \cos\theta \frac{\partial V_\beta}{\partial y} + V_\alpha \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial V_\alpha}{\partial y} \tag{6.59}$$

上二式对任意直角坐标系皆成立，若将直角坐标系建立在 P 点的滑移线切线方向上，则 $\theta = 0$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)_{\theta=0} &= \frac{\partial V_\alpha}{\partial S_\alpha} = 0 \\ \left(\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)_{\theta=0} &= \frac{\partial V_\beta}{\partial S_\beta} = 0\end{aligned}\right\}$$

因此

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V_\alpha}{\partial x} - V_\beta \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V_\beta}{\partial y} + V_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$dV_\alpha = dV_\alpha(x, y) = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial V_\alpha}{\partial y}dy$$

$$dV_\beta = dV_\beta(x, y) = \frac{\partial V_\beta}{\partial x}dx + \frac{\partial V_\beta}{\partial y}dy$$

$$d\theta = d\theta(x, y) = \frac{\partial \theta}{\partial x}dx + \frac{\partial \theta}{\partial y}dy$$

如沿着过 P 点的 α 线的切线方向使 $dy = 0$

则

$$dV_\alpha = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x}dx, \quad \frac{\partial V_\alpha}{\partial x} = \frac{dV_\alpha}{dx}$$

$$d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}dx, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{dx}$$

因此

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x} - V_\beta \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{dV_\alpha}{dx} - V_\beta \frac{d\theta}{dx} = 0$$

等式二边同乘 dx 则得

$$dV_\alpha - V_\beta d\theta = 0 \quad (\text{沿一条 } \alpha \text{ 线})$$

同理可证在 P 点沿 β 线切线方向 $dx = 0$

$$dV_\beta + V_\alpha d\theta = 0 \quad (\text{沿一条 } \beta \text{ 线})$$

过 P 点的速度方程为

$$\left.\begin{aligned} dV_\alpha - V_\beta d\theta = 0 \quad (\text{沿一条}\ \alpha\ \text{线}) \\ dV_\beta + V_\alpha d\theta = 0 \quad (\text{沿一条}\ \beta\ \text{线}) \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

V_α 为在 P 点沿 α 线切线方向的速度分量，V_β 为在 P 点沿 β 线切线方向的速度分量。当滑移线为直线时，即 θ = 常数，则沿每一条直线的速度分量都是常数。$d\theta$ 为在 P 点邻域向沿滑移线方向 θ 的微分，相当于 θ 角的增量。

以上公式的推导过程是将直角坐标系的坐标轴必须在 P 点滑移线的切线方向上。若将坐标系放在别处，则 $d\theta$ 角仍不改变，dV_α，dV_β 也不变，因此速度方程仍成立。

这二个公式是由 Geiringer 在 1930 年导出的，它表明沿滑移线的伸长率等于零。

三、关于割线上的速度

1. 滑移线具有完全刚性的特性

滑移线场中任何一条滑移线上所有质点均满足 $\dot{e}_\alpha = \dot{e}_\beta = 0$ 的条件，在定常塑性变形过程中，该滑移线既不伸长也不缩短，此时，形状也不改变，具有完全刚性的特性。

2. 同一条滑移线上任何二点的位移速度在该二点连线方向上的速度分量相等。

例如以某一条 α 线为例，在其上取任意二点 P 与 Q，在塑性变形过程中该滑移线长短与形状是不变的，因此 PQ 的长短就不变。P 点的位移速度 V_1 在 PQ 方向的分量 V_{1k}。

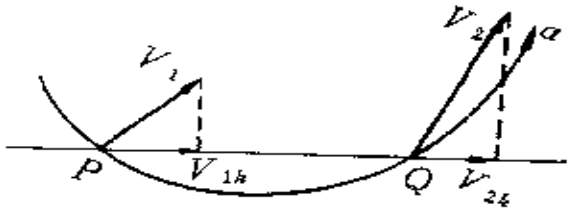


图 6.35 割线速度相等的示意图

Q 点的位移速度 V_2 在 PQ 方向的分量为 V_{2k}，要使 PQ 不变，则 $V_{1k}=V_{2k}$（大小相等，指向相同）。

四、速度图和滑移线之间的关系

在图 6.36 中，设 P_1、P_2、P_3 为 α 滑移线上相邻的三个结点，V_1、V_2、V_3、为各点的速度。现以 O 为原点，作速度图画出各点的速度矢量。作 $\overline{OQ}\parallel\overline{P_1P_2}$，取 $\overline{OP_1'}=V_1$，用 $\overline{P_1'P_2}$ 代替 P_1 的切线，用 $\overline{P_2'P_3}$ 代替 P_2 的切线。这样代替是有误差的，但随着分段越多，各相邻点距离缩小，误差也就越小。

$\frac{\partial V_\alpha}{\partial S_\alpha}=0$ 说明沿滑移线方向速度分量改变等于零。

V_1，V_2 在 P_1P_2 线上的投影（速度分量）必然相等。

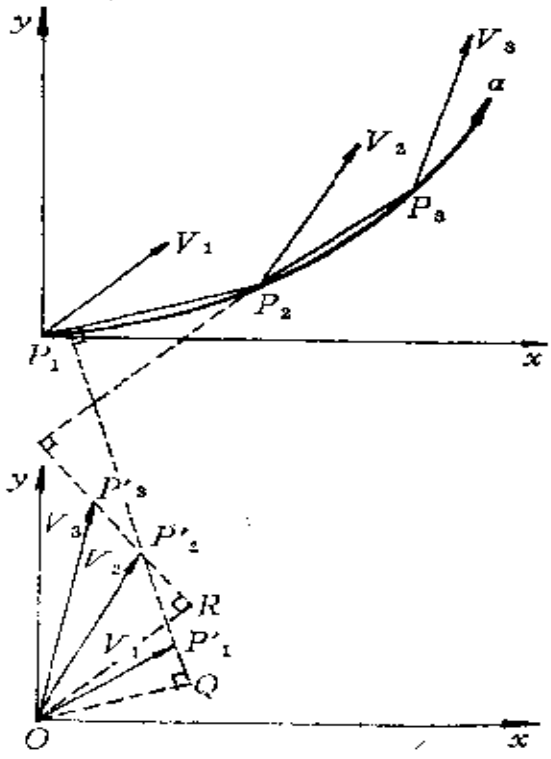


图 6.36 速度图和滑移线之间的关系。

作 $\overline{P_1'Q}\perp OQ$ 即 $\overline{P_1'Q}\perp\overline{P_1P_2}$，延长 QP_1' 线，过 O 点作 V_2 的平行线与之相交于 P_2' 点 $\overline{OP_2'}=V_2$（大小相等、方向相同）。

V_1、V_2 在 P_1P_2 线方向的投影（速度分量）都是 $\overline{OQ}$。同样过 P_2' 点作 P_2P_3 的垂直线，过 O 点作 V_3 的平行线与之相交于 P_3'，则 $\overline{OP_3'}=V_3$（大小相等、方向相同）。

V_2、V_3 在 $\overline{P_2P_3}$ 线方向的投影（速度分量）均为 $\overline{OR}$，依次也可作出其它各点的速度。

利用速度图用几何作图法，根据边界条件或已知条件，就可将

滑移线场内各点的速度求出。

五、平冲头压入半无限体情况下的速度场

设冲头下的压力为均匀分布，当载荷 P 达到极限值时，压力为 q。冲头的宽度为 $2b$，冲头和坯料的接触面之间，没有相对运动，冲头的二侧为自由表面，假设冲头的刚度、强度足够大、在变形过程中可当成刚体。下面给出三种不同的滑移线场。

(1) Prandtl 解的速度场

如图 6.37 所示的滑移线场是 Prandtl 首先给出的，

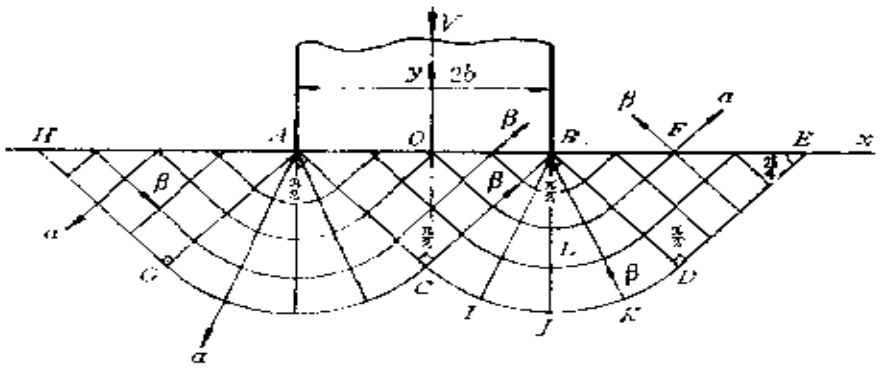


图 6.37 滑移线场

其中 C 点是速度场的奇异点，在 C 以上的质点以位移速度 V 向下运动，在 C 以下的质点的位移速度为零。

在 C 点以上的部分，有 $V_x = V_\alpha \cos\theta - V_\beta \sin\theta = 0$

$$V_y = V_\alpha \sin\theta + V_\beta \cos\theta = -V$$

(oy 轴正向朝上，故位移速度向下、它在 oy 轴上的速度分量为负值)，此处 V 取绝对值

$$\theta_c = -\frac{\pi}{4}$$

代入上式后，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}} V_\alpha + V_\beta \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$V_\alpha = -V_\beta$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}V_\alpha + V_\beta\frac{1}{\sqrt{2}} = -V$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}V_\beta = -V$$

$$V_\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}V$$

$$V_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}V$$

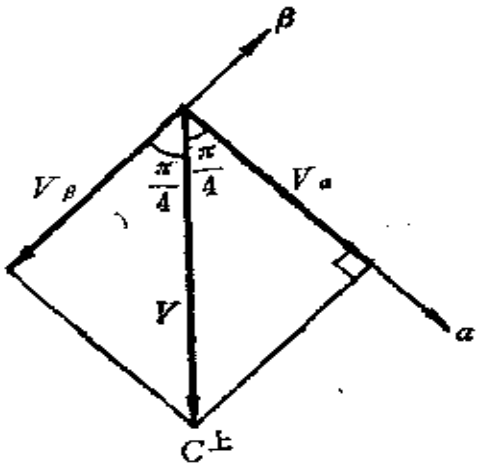


图 6.38

在 $\triangle ABC$ 的全区内，各点的速度均为 V 时（朝下），则应有

$$\left.\begin{aligned} V_x &= 0 \\ V_y &= -V \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} V_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}V \\ V_\beta &= -\frac{1}{\sqrt{2}}V \end{aligned}\right\}$$

V_α 的指向与 α 线的正向一致，而 V_β 的指向与 β 线的正向相反。在 $\triangle ABC$ 中，沿着其中每一条直线的速度分量都是常数，而且全区各点的速度都是一样，因此称为均匀速度场。

沿 BC 线的切向速度分量是不连续的，在 BC 线上 $\theta = -\frac{\pi}{4} = \text{const}$，即 $d\theta = 0$

因此

$$dV_\beta + V_\alpha d\theta = dV_\beta = 0$$

$$V_\beta = \text{const}$$

在 BC 线的左侧，$V_\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}V$. 在 BC 线右侧，C 点下侧位于刚性区，其位移速度应为零，在 C 点右侧，$V_\beta = 0$，因为此处的 V_β 就是 CD 线在该处的法向速度，法向速度应该是连续的，否则在

刚性区与扇形塑性区之间就要出现裂缝或重迭，同理可得出 BC 边右侧 $V_\beta=0$。在 BC 边上的法向速度应该连续，即在 BC 边上 $V_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}V$，$V_\alpha$ 的指向与 α 线的正向一致，即 BC 边是均匀应力区与扇形塑性区的分界线，也是位移速度的间断线。

沿 CD 线的切向速度分量 V_α 也是不连续的，而其法向分量 $V_\beta=0$，因为 CD 线下方是刚性区，位移速度等于零，CD 线法向速度分量 V_β 应该连续，而 BCD 扇形塑性区的 β 线均是直线线段，$d\theta=0$，$dV_\beta=0$，$V_\beta=$常数，因此在整个 BCD 扇形区内任意点的 $V_\beta=0$，而任意点沿 α 线的速度方程为 $dV_\alpha-V_\beta d\theta=dV_\alpha=0$，$V_\alpha=$常数，而从 BC 线看来，其法向速度分量 V_α 应该是连续的。因此在扇形区 BCD 中，$V_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}V$，$BD$ 线是扇形区与均匀应力区的分界线，它不是速度间断线，BD 线法向速度分量应该是连续的，即 $V_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}V$ 在 $\triangle BDE$ 中是由二族正交直线组成的，$d\theta=0$，因此

沿 α 线：　　$dV_\alpha-V_\beta d\theta=dV_\alpha=0$，$V_\alpha=$常数$=\frac{1}{\sqrt{2}}V$，

沿 β 线：　　$dV_\beta+V_\alpha d\theta=dV_\beta=0$，$V_\beta=$常数。

而 DE 线为刚性区与均匀应力区的分界线，DE 线的法向速度分量 V_β 应该连续。因此 $V_\beta=0$ 即 $\triangle BDE$ 区中的任意点都应有 $V_\beta=0$，$V^*=V_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}V$。$V^*$ 是所研究点的位移速度。

最后有$\triangle BAC$中任意点，$V^*=V$，$V_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}V$，$V_\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}V$，为均匀速度场。

在 BCD 扇形区中任意点 $V_\beta=0$，$V^*=V_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}V$，

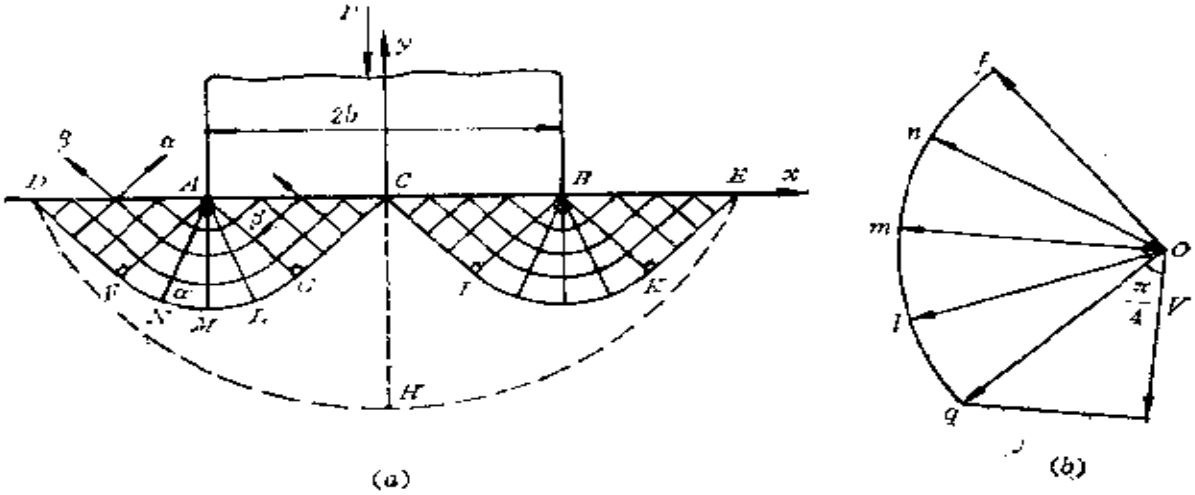
在 $\triangle BDE$ 中任意点 $V_\beta=0, V^*=V_\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}V$ 也是均匀速度场。

(2) Hill 解的速度场

如图 6.39 所示的滑移线场是由 Hill 给出的。

设冲模的向下速度为 V，沿 AC 线 $V_y=-V$，V 为向下速度的绝对值。Oy 轴朝上为正，故位移速度 V^*，在 Oy 轴上速度分量为 $-V$。因为塑性材料可以沿经过润滑的冲模底面自由滑动，故我们对塑性材料沿 AC 上的速度分量 V_x 不能作出任何的推测。

以上所得的左边部分的塑性区域是由 β 线 $CGFD$ 围成的，在此线以下的材料仍处于静止状态。因为在大多数情况下，切于此线的速度分量 V_β 在通过此线时可以间断，但沿 $CGFD$ 线法向速度分量 V_α 则不能间断，应保持连续，而 $CGFD$ 线是 β 线，其法向正是 α 线的直线族。



(a) Hill 解的滑移线场　　(b) 位移速度图

图 6.39

α 线的速度方程为 $dV_\alpha-V_\beta d\theta=0$。由于 $d\theta=0$ $dV_\alpha=0$ 故 $V_\alpha=$ 常数。在 $CGFD$ 线下方的位移速度为零，由此得出

整个左半部滑移线区 $V_\alpha=0, V^*=V_\beta$ 即初始塑性流动的流线是沿着 β 线的切线方向。$\triangle AGC$ 随冲头有向下移动速度 V，$V_y=-V$

$$\left.\begin{aligned} V_x &= V_\alpha\cos\theta - V_\beta\sin\theta \\ V_y &= V_\alpha\sin\theta + V_\beta\cos\theta = -V \end{aligned}\right\}$$

已知 $$V_\alpha=0, \quad \theta=\frac{3}{4}\pi$$

故有 $$V_x=-V_\beta\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}V_\beta,$$

$$V_y=V_\beta\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}V_\beta=-V,$$

$$V_\beta=\sqrt{2}V,\ V_x=-V=V_y,\ V^*=V_\beta=\sqrt{2}V$$

在整个 $\triangle ACG$ 区域中，速度均具有 CG 方向，此区域作为刚体以等于$\sqrt{2}V$ 的速度沿 CG 方向滑移。

在左半部的滑移线区内，有

$$dV_\beta+V_\alpha d\theta=0,$$

由于 $V_\alpha=0$ 故 $dV_\beta=0$，$V_\beta=$常数。$V_\beta=V^*=\sqrt{2}V$ 沿 β 线的切线方向速度分量的模不变。

在 AFG 扇形区中，沿每一圆弧流线上的速度都具有等于 $\sqrt{2}V$ 的常数值(V_β 只改变方向、不改变大小)，最后区域 ADF 也作为刚体以等于$\sqrt{2}V$ 的速度沿 FD 方向滑移。因此 Hill 解的应力场可以有一个满足所有边界条件的速度场与之相联系。在图 6.39.b 中，有

$\overrightarrow{Og}$ 代表 $\triangle AGC$ 的位移速度；

$\overrightarrow{Ol}$ 代表 AL 线各点的位移速度 $\overrightarrow{Ol}\perp AL$；

$\overrightarrow{Om}$ 代表 AM 线各点的位移速度 $\overrightarrow{Om}\perp AM$ $\overrightarrow{Om}$ 沿水平方

向；

$\overrightarrow{On}$ 代表 AN 线各点的位移速度 $\overrightarrow{On} \perp AN$；

$\overrightarrow{Od} = \overrightarrow{Of}$ 代表 $\triangle AFD$ 各点的位移速度 $\overrightarrow{Of} \perp AF$。

$CGFD$，$CIKE$，为速度间断线，A、C、B 为速度场的奇异点。

按照 Hill 解的速度场，y 轴左边的塑性流动限于区域 $DFGC$ 内，根据刚塑性体的假设，则 $DFGC$ 是塑性区与刚性区的分界线，但实际上 $DFGC$ 以下材料并不处于完全刚性状态，实际应力应变状态是：$DFGC$、$CIKE$ 线以上材料处于塑性应力状态、在速度间断线（$CGFD$、$CIKE$）上有塑性变形；而弹塑性边界大概具有 DHE 形状、在 $DFGCIKE$ 和 DHE之间的材料，虽然处于塑性应力状态，但在初始塑性流动期间仍保持静止。

(3) W.Prager 与 P.G.Hodge 解的速度场

这个解是将 Prandtl 解与 Hill 解组合而得的解。在区域 $HKMP$ 中的应力和速度如 Hill 解所示；在区域 $CHKMPENLI$ 中则如 Prandtl 解所示。因此 $HKMP$ 和 HI 线是速度场的间断线，而 $ILNE$ 线则为分隔塑性流动场与刚性区域的线。

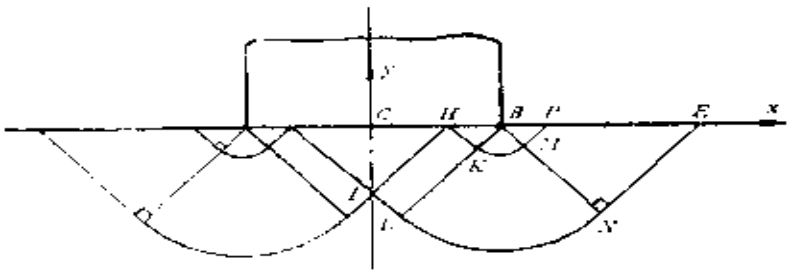


图 6.40 在经过润滑的平头冲模下的另一种应力场

以上三种解都是讨论初始塑性流动的问题，三种解得出的极限载荷都是

$$q = k(2 + \pi), \quad P = 2bq = 2bk(2 + \pi)$$

即在刚塑性假设的前提下，应力场虽然不同，但极限载荷 q 却是一样的，而其位移场（速度场）则不是唯一的。在三种解中 Hill 解比较合理，因为塑性区域是在点 A 和 B 开始形成的，然后塑性区扩展而并合，因此，在它扩展到 Prandtl 解和 Prager 解的滑移线场所需的大小之前，它已先达到 Hill 解所示塑性流动场所需要的外载荷的值。

§ 6.10 关于间断解（不连续解）

在平面应变问题中，计算产生无限制塑性流动时的极限载荷，必须处理间断应力分布的问题。例如在受弯梁中随着弯矩的增大，在梁厚 h 度上的轴向应力分布，开始为纯弹性分布（图 5.1a），然后转为弹塑性分布（图 5.1b），再变为纯塑性分布（图 5.1c），在弯曲过程的任一阶段里，梁的弯曲刚度都随弹性核（图 5.1b）的高度 h 而异。只有在纯塑性应力分布（图 5.1c）的情况下，弹性核的高度才减为零，从而梁的弯曲刚度才减为零，因此，计算产生无限制塑性流动时的极限弯矩必须以如图 5.1c 所示的间断应力分布为依据。

在许多情况下以连续的应力或者速度来建立解是不可能的，但却存在着具有满足边界条件的间断应力（或速度）的解。一般说来在间断处必须遵守从平衡方程式及塑性条件所得出的简单关系式。设 L 是间断线、现在研究位于 L 上的无限小元素（图 6.41）。

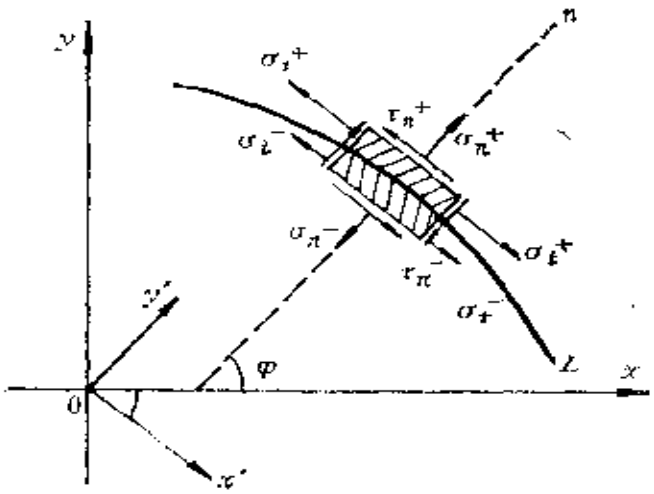


图 6.41 应力间断线图

在间断线二边的应力分量

值将以注脚“+”、“-”来区分，由于单元体应保持平衡所以应该有

$$\sigma_n^+ = \sigma_n^- = \sigma_n$$
$$\tau_n^+ = \tau_n^- = \tau_n$$

法向应力 σ_n 是不允许间断的，若 σ_n 间断，则沿间断线就要出现裂缝或重迭。因而只可能在切向分量 σ_t 中有间断。在 L 二边的单元体均需满足屈服条件，即

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \begin{cases} k = \dfrac{\sigma_s}{2} & \text{(Tresca 屈服条件)} \\ k = \dfrac{\sigma_s}{\sqrt{3}} & \text{(Mises 屈服条件)} \end{cases}$$

将坐标系旋转 $-(\frac{\pi}{2}-\varphi)$ 角，屈服条件的表达式则将为

$$(\sigma_x' - \sigma_y')^2 + 4\tau_{xy}'^2 = 4k^2,$$

由此得 $$\sigma_x' = \sigma_y' \pm 2\sqrt{k^2 - \tau_{xy}'^2}$$

如令 $$\sigma_x' = \sigma_t, \quad \sigma_y' = \sigma_n, \quad \tau_{xy}' = \tau_n$$

则有 $$\sigma_t = \sigma_n \pm 2\sqrt{k^2 - \tau_n^2}$$

或 $$\sigma_t^+ - \sigma_t^- = 4\sqrt{k^2 - \tau_n^2}$$

但 $$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_n + \sigma_t) = \sigma_n \pm \sqrt{k^2 - \tau_n^2}$$

如 $$\sigma^+ = \sigma_n + \sqrt{k^2 - \tau_n^2} \quad \sigma^- = \sigma_n - \sqrt{k^2 - \tau_n^2}$$

则有 $$\sigma^+ - \sigma^- = 2\sqrt{k^2 - \tau_n^2}$$

按照前面的假设，L 是间断线，所以对于 σ_t^+ 和 σ_t^- 的数值来说，应该取 $\sigma_t^+ = \sigma_n + 2\sqrt{k^2 - \tau_n^2}$，$\sigma_t^- = \sigma_n - 2\sqrt{k^2 + \tau_n^2}$，不可能取别的数值，这是屈服条件决定的。即应力的间断值，必须是某一固定的数值。

设在周界 L 上已给定应力的法向分量和切向分量 σ_n，τ_n，并且 $|\tau_n| \leqslant k$，则

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2\varphi + \sigma_y \sin^2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \\ \tau_n &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi\end{aligned}\right\}$$

周界 L 的法线和 x 轴之间的角度用 φ 表示。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma - k\sin 2(\theta - \varphi) \\ \tau_n &= k\cos 2(\theta - \varphi)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \varphi \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{\tau_n}{k} + m\pi \\ \sigma &= \sigma_n + k\sin 2(\theta - \varphi)\end{aligned}\right\}$$

由上式所确定的 σ，θ 不是单值的，式中的 arc cos 应理解为是它的主值，而 m 则是任意整数，σ 和 θ 具有满足屈服条件的二个解存在。

前面已证在间断线 L 的二旁 σ_n，τ_n 应满足连续条件

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n^+ &= \sigma_n^- = \sigma_n \\ \tau_n^+ &= \tau_n^- = \tau_n\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma^+ - k\sin 2(\theta^+ - \varphi) = \sigma^- - k\sin(\theta^- - \varphi) \\ \tau_n &= k\cos 2(\theta^+ - \varphi) = k\cos 2(\theta^- - \varphi)\end{aligned}\right\}$$

由此得到

$$\cos 2(\theta^+ - \varphi) = \cos 2(\theta^- - \varphi)$$

$$2(\theta^+ - \varphi) = \pm[2(\theta^- - \varphi) + 2m\pi],\ m \text{ 是整数}$$

$$\theta^+ - \varphi = \pm(\theta^- - \varphi) \pm m\pi$$

如果在右边部分的括号前取“+”号，则得到

$$\theta^+ - \varphi = \theta^- - \varphi + m\pi$$

$$\theta^+ = \theta^- + m\pi$$

$$\sigma^+ = \sigma^-$$

说明沿 L 线上应力分布是连续的，因此 L 线将不是应力间断线。为了研究间断问题，我们取“－”号，这时：

$$\theta^- - \varphi = -(\theta^+ - \varphi) - m\pi = -\theta^+ + \varphi - m\pi$$

$$\theta^- = -\theta^+ + 2\varphi - m\pi$$

$$\sigma^- = \sigma_n - k\sin 2(\theta^- - \varphi)$$

$$\sigma^+ = \sigma_n + k\sin 2(\theta^+ - \varphi)$$

因此可得

$$\sigma^+ - \sigma^- = 2k\sin 2(\theta^+ - \varphi) \tag{6.62}$$

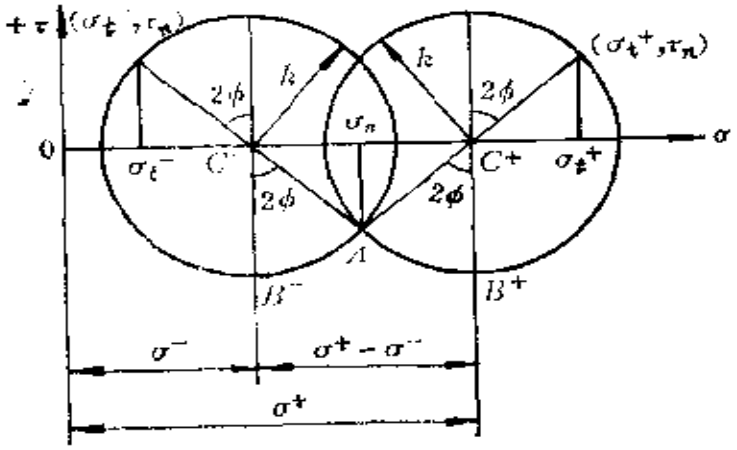


图 6.42

由图 6.42 应力圆中可以看出：

$$\sigma_t^- = \sigma_n + 2\sqrt{k^2 - \tau_n^2},\quad \sigma_t^- = \sigma_n - 2\sqrt{k^2 - \tau_n^2}$$

$\sigma_t^+ - \sigma_t^- = 4\sqrt{k^2 - \tau_n^2}$ 此值称为切向应力的间断值。

单元体图中各面方位的相对位置与应力圆中各点相对位置是一一对应的。

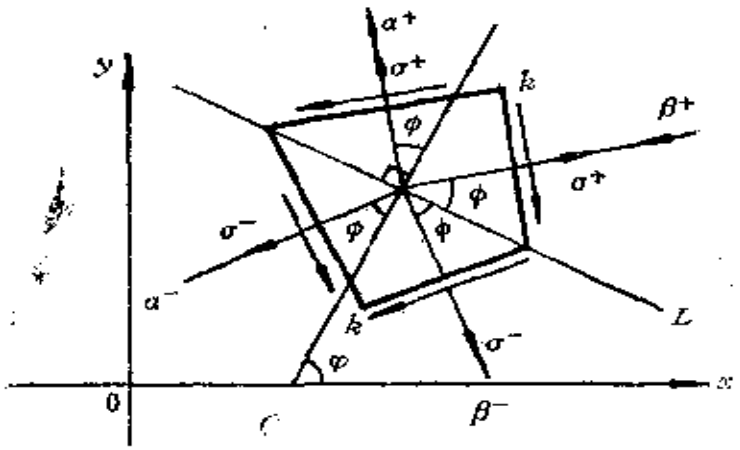


图 6.43

从间断线上的每一点来看，间断线 L 是一个由两条同一名称的滑移线所组成的角的平分线。

$$\sigma^{+}-\sigma^{-}=2k\sin 2(\theta^{+}-\varphi)=2k\sin 2\phi$$

$$\phi=\theta^{+}-\varphi$$

$$\sigma^{+}=\frac{1}{2}(\sigma_{n}+\sigma_{t}^{+})$$

$$\sigma^{-}=\frac{1}{2}(\sigma_{n}+\sigma_{t}^{-})$$

因为不允许出现裂纹，所以 L 线的法向速度分量不应存在间断，因此应该只讨论有关切向分量的间断问题。就是讨论在跨过应力间断线时切向速度是否也可以间断的问题，如果把刚塑性材料看成是弹性模量允许无限大的弹塑性材料，则作为弹性区域极限位置的间断线可以代之以一层薄的弹性层，在这个弹性层内，作为由薄层元素的平衡方程式而得出的应力 σ_n、τ_n 差不多是常数，而在极限状态时则准确地不变。然而，切向应力 σ_t 将沿着薄层的厚度迅速地变化（由 σ_t^{+} 变到 σ_t^{-}），因为纯塑性应力分布的间断线

可以看作是弹性区域的最后痕迹，即将应力场中的间断线看作是分隔二个塑性区域的线，对于略去所有弹性应变的 Mises 理论来说，这条线必须视作不可伸长的，应力间断线既然是不可伸长的，因而也就不允许间断线二旁的切向速度发生间断。

速度场也可以有间断，在速度场中通过间断线时，切于此线的速度分量可以发生间断式的变化，但垂直于此间断线的速度分量在此线的二侧必须相同，否则要出现裂缝或重迭。

正如应力场中的间断线可看成是从一个塑性应力场连续过渡到另一个塑性应力场的弹性薄层的极限情况一样，速度场中的间断线也可看作是从一个速度场连续过渡到另一个速度场的薄层的极限情况。

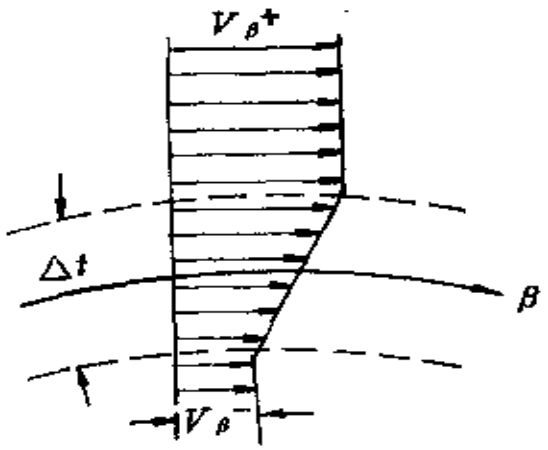


图 6.44 速度间断的过渡

设沿着某线 β 的应力是连续的而速度矢量是不连续的，在 β 上的任意点上如引入坐标系 oxy，其 y 轴与 β 线的切线同向。在法线方向的速度分量 V_x 是不可能不连续的，所以只需研究切向分量 V_y 的不连续问题。间断线 β 上任意点 P，其速度 V_x 差不多保持为常数，而速度 V_y 沿其厚度作迅速变化（由 V_y^- 变到 V_y^+），随着薄层厚度的减小 $\frac{\partial V_y}{\partial x}\to\infty$，$\dot{\gamma}_{xy}=\frac{\partial V_y}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial y}\to\infty$（因为 V_y 发生突变，故 $\frac{\partial V_y}{\partial x}\to\infty$），同时其余的变形速度分量的变化则很小。这就是说间断线的方向应该限制在与滑移线的方向相重合的范围内。这样一来，速度矢量的间断线必然是滑移线或者是滑移线的包络线。

沿着 α 线 V_β 是连续的，而 V_α 可能不连续。沿着 β 线 V_α 是连续的，而 V_β 则可能不连续。沿着速度间断线的剪应力为 k，在变形的过程中，由于存在速度的间断，消耗的单位功率应

为：

$$\dot{W} = \tau \triangle V_\beta = \tau(V_\beta^+ - V_\beta^-),\ |\tau| = k \qquad (6.63)$$

根据塑性功率应为正值，因而知道

$$\tau(V_\beta^+ - V_\beta^-) \geqslant 0$$

因此当　　$\triangle V_\beta > 0$，$(V_\beta^+ > V_\beta^-)$ 时，$\tau = k$

$\triangle V_\beta < 0$，$(V_\beta^+ < V_\beta^-)$ 时，$\tau = -k$

例六　试求锐角楔体单边受均布载荷作用时的极限载荷。

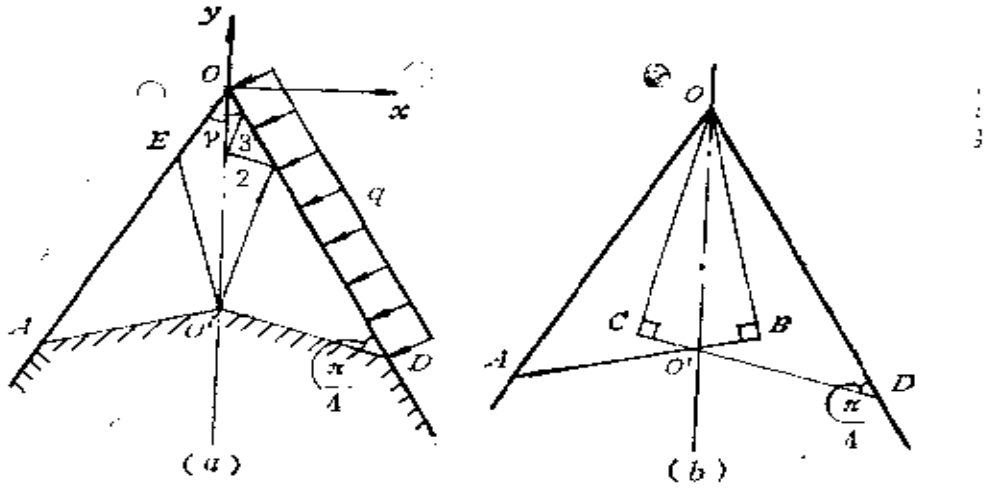


图 6.54　锐角楔体单边的受压

在 $\gamma < \frac{\pi}{4}$ 的情况下，三角形 OAB 和 OCD 互相重迭，因而导致应力状态的多值性，在这种情况下不可能有连续的应力场，故 OO' 为间断线。

在 AE 线上，有　　$\sigma_1 = -2k$，　　$\sigma = -k$，

$$|\theta = \frac{\pi}{2} + \gamma - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \gamma, \qquad \theta = (\frac{\pi}{4} + \gamma)$$

在 OD 线上，有　$\sigma_1 - \sigma_n = \sigma_1 + q = 2k$，$\sigma_1 = 2k - q$，$\sigma = k - q$，

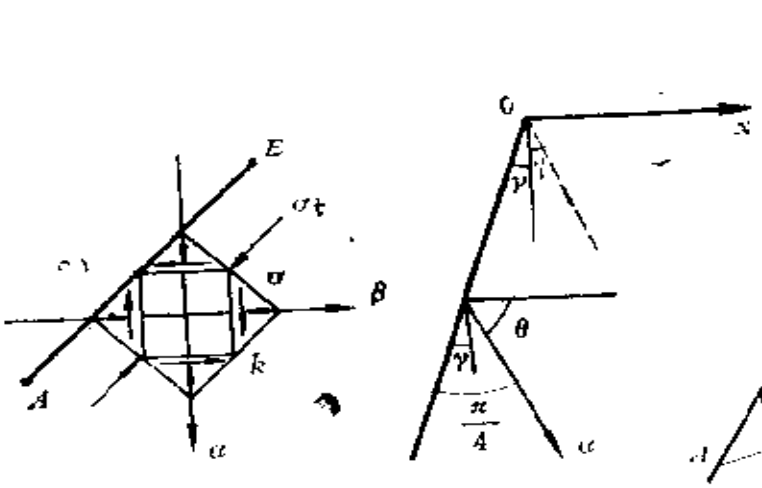


图 6.46

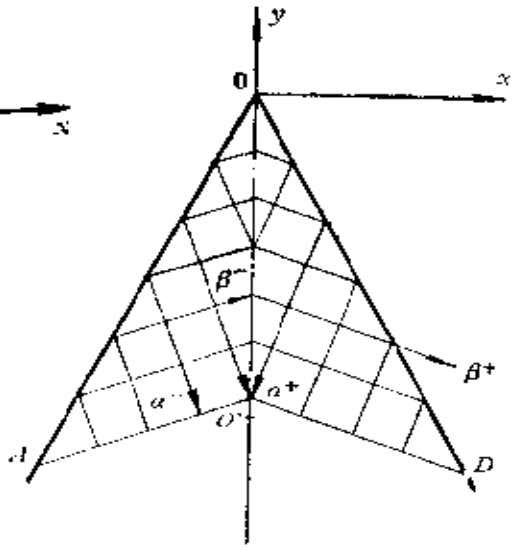


图 6.47

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \gamma = \frac{3\pi}{4} - \gamma, \quad \theta = \gamma - \frac{3}{4}\pi$$

即在 $\triangle OO'D$ 中

$$\theta^{+} = \gamma - \frac{3}{4}\pi, \qquad \sigma^{+} = k - q$$

在 $\triangle OO'A$ 中

$$\theta^{-} = -\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right), \quad \sigma^{-} = -k$$

利用式 (6.62)

$$\sigma^{+} - \sigma^{-} = 2k\sin 2(\theta^{+} - \varphi)$$

间断线 $OO' \perp Ox$，因此 $\varphi = 0$

从而得

$$k - q - (-k) = 2k - q$$

$$= 2k\sin 2\left(\gamma - \frac{3}{4}\pi\right) = 2k\sin\left(2\gamma - \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$2k - q = 2k\cos 2\gamma$$

即
$$q = 2k(1 - \cos 2\gamma)$$

当 $2\gamma = \frac{\pi}{2}$ 时（锐角楔变成直角楔）

$$q = 2k$$

§ 6.11 通过矩形模、缩减比 $r = \frac{1}{2}$ 的挤压问题

一、滑移线场的建立

现在分析一个简单挤压问题的应力和变形状态。

图 6.48 表示挤压板料，$H = 2h$，挤压筒壁光滑，摩擦剪应力为零时的滑移线场的解。塑性区上下是对称的，滑移线场由二个带中心的扇形场组成，在 $\triangle ABC$ 内是一个不变形的刚性区。

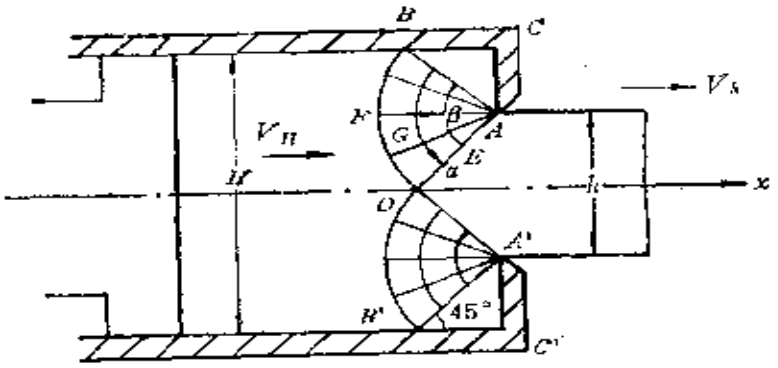


图 6.48 $H=2h$ 的板料挤压

AA' 为挤压板料的出口，如不考虑凹模的摩擦阻力，则 AA' 线自由表面，如图 6.49.a 所示，此时有

$$\sigma_1 = -2k, \quad \alpha = -k, \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

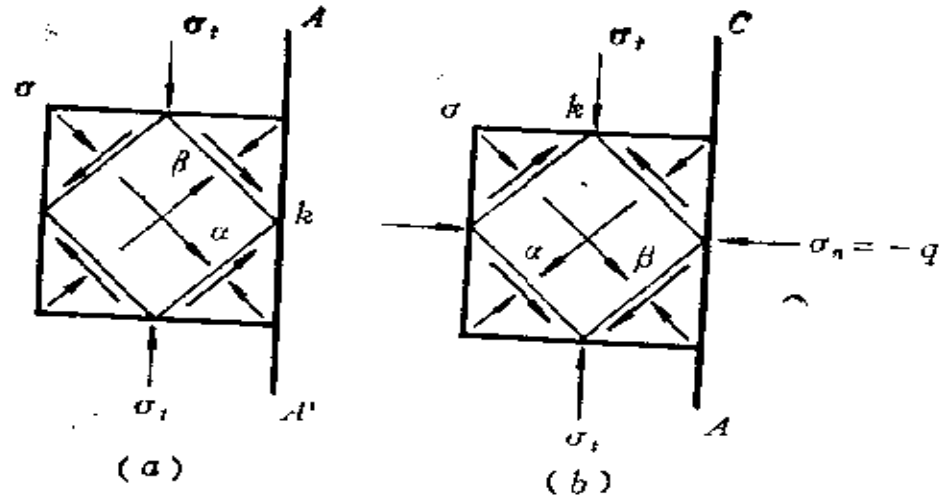


图 6.49

$\triangle AOA'$ 区为均匀应力区，各点的应力状态都相同。

现分析 AC 线的情况，（图 6.49.b）

$$\sigma_t - \sigma_n = 2k, \quad \sigma_t = \sigma_n + 2k = -q + 2k$$

$$\sigma = k - q, \quad \theta = -\frac{3}{4}\pi$$

$\triangle ABC$ 为均匀应力区，其上各点的应力状态均相同，此区不变形，故可看成是刚性区。在二个均匀应力区之间必夹有一个中心扇形场，DE 线是同一条滑移线（α 线），因此

$$C_\alpha = \sigma_D - 2k\theta_D = \sigma_E - 2k\theta_E$$

$$k - q - 2k\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -k - 2k\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$q = 2k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

所需要的挤压力为

$$P=(AC+A'C')Lq=\frac{1}{2}HLq=k\left(1+\frac{\pi}{2}\right)HL$$

其中 L 为宽度。单位面积平均挤压力为 p_m

$$p_m=\frac{P}{LH}k=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

二、速度场

设 V_H 为单位速度，则 $V_k=2V_H$，$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 是不变形区，$\triangle AOA'$ 区是均匀应力区，A、B、O、A'、B' 为速度奇异点。现研究 B 点邻区的情况，其中

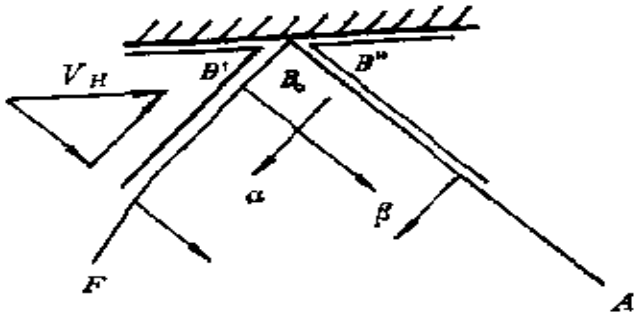


图 6.60

在 B' 点，$V=V_H=1$

在 B'' 点，$V=0$

BF，BA 都是速度间断线，在 BF 线上 V_H 可分解为法线速度分量 V_{Hn} 与切向速度分量 V_{Ht}

$$V_{Hn}=V_{Ht}=\frac{V_H}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

穿过 BF 线时法向速度的分量应该连续，即扇形区在 B 点处 $V_B=V_{Hn}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，穿过 BA 线法向速度的分量也应该连续，即扇形区在 B 点处 $V_a=0$。

在 $\triangle BAC$ 区中，$V=0$，穿过 BA 线法向速度分量应该连续，即 AB 线在扇形区一侧 $V_a=0$ 而 B 点 $V_B=\frac{1}{\sqrt{2}}$，BA 线

为β线，根据 Geiringer 速度方程 $dV_\beta + V_\alpha d\theta = 0$ 应有 $V_\alpha = 0$，则 $dV_\beta = 0$。即沿 BA 线各点的位移速度向量均为一样，其大小为 $V = \frac{1}{\sqrt{2}} = V_\beta$，其方向是由 B 指向 A。扇形区各条辐射线都是 β线，而且是直线，$d\theta = 0$，因此沿每条 β 线其 $dV_\beta = 0$，$V_\beta =$ 常数。

OA 线右端的速度为 V_h，穿过 OA 线法向速度分量应该是连续的，即如图 6.52 所示 $V_\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}}$，即 AO 线左侧各点的 V_α 都相同，均为 $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$，因此 AO 线左侧各点的位移速度向量均相同。可用 O 点位移速度向量来表示。

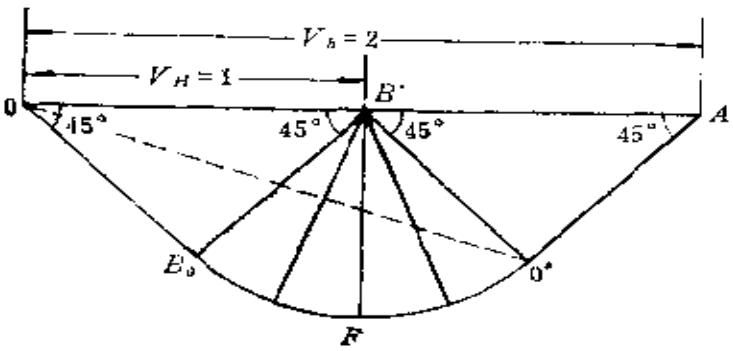


图 6.51

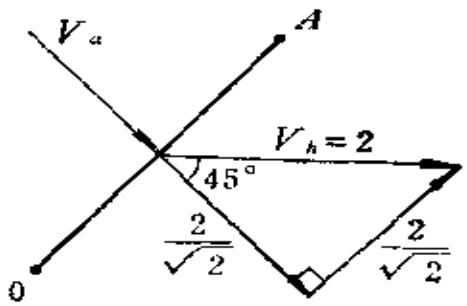


图 6.52

AO 线各点的位移速度是一样的，AB 线上各点的位移速度也是相同的，根据速度方程，有

沿 α 线　　$dV_\alpha - V_\beta d\theta = 0$,

考虑到由 AB 线到 AF 线 $d\theta$ 是确定值，故

由 $B \to F$　　$dV_\alpha - V_{\beta B} d\theta = 0$,

$$dV_\alpha = V_{\alpha F} - V_{\alpha B}$$

由 $D \to G$　　$dV_\alpha - V_{\beta D} d\theta = 0$,

$$dV_\alpha = V_{\alpha G} - V_{\alpha D}$$

而 $V_{\beta B}=V_{\beta D}$　　$V_{\alpha B}=V_{\alpha D}$

故 $V_{\alpha F}=V_{\alpha G}$

前面已经证明在每条辐射线上 V_β = 常数，现在又证明了每条辐射线上 V_α 为常数，因此每条辐射线（β 线）上质点的移位速度向量保持不变。即扇形区各根 β 线位移速度可用 $\overset{\frown}{OFB}$ 弧上相应点的位移速度来表示。

在图 6.53 中，OF、OA 线均是速度间断线，但法线速度分量应该是连续的，因此在 O 点的速度分量为

$$V_\alpha=\frac{2}{\sqrt{2}}\qquad V_\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad V=\sqrt{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{2.5}$$

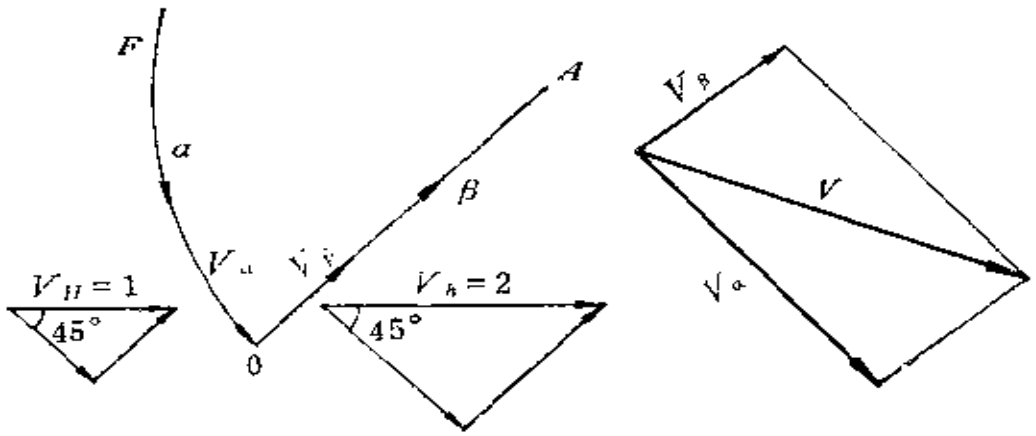


图 6.53

应该指出，如将已经有塑性变形的物体进行研磨，抛光和相应的处理后，便可以使物体上的塑性变形成为可见的，而在变形体上所形成的自然图形的线条又恰好与最大切应力的轨迹线相重合。因此可以认为塑性变形是由于金属颗粒相对滑动所引起的。而这样的条纹也正是我们所研究的滑移线场。由此可见，滑移线场理论是有实验基础的。

第六章习题

1. 某牌号钢材在高温塑性变形时是刚塑性体，在锻压某瞬间某点的应力状态为

$$\sigma_x = 200kg/cm^2 \qquad \sigma_y = -100cm^2$$

$$\sigma_z = 50kg/cm^2 \qquad \tau_{yz} = 260kg/cm^2$$

$$\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$$

试求：(1) σ_1、σ_2、σ_3、τ_{max}、k、$\mathrm{tg}2\alpha$、$\mathrm{tg}2\theta_s$，画应力园，标出各点位置；

(2) 画出该点主平面、最大剪应力作用面的平面方位示意图，在图上注明应力分量；

(3) 画出过该点的滑移线图，定出 θ 值，σ 值，C_α、C_β 值。

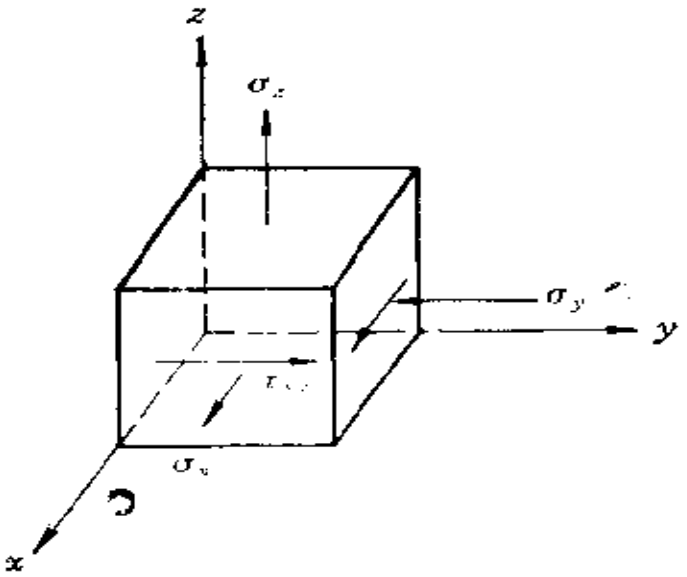


图 6.54

2. 已知某另件在高温锻压变形时是刚塑性体，而且是平面塑性变形，其滑移线场如图 6.55：α 线是直线族，β 线是一族同心圆 $\sigma_c = -900kg/cm^2$，$k = 600kg/cm^2$。

试求：(1) C 点的应力状态

①θ_c, σ_c, σ_x, σ_y, τ_{xy}, $C_{\sigma 1}$ ②应力圆：$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, τ_{12max}, τ_{23max}, τ_{13max}, 画出空间方位图（包括最大剪应力面方位）。

(2) D 点应力状态：

① θ_D, σ_D, σ_x, σ_y, τ_{xy} ② 应力圆 σ_1, σ_2, σ_3, τ_{12max}, τ_{23max}, τ_{13max}, $\mathrm{tg}2\alpha$, 画出空间方位图（包括最大剪应力面方位）。

3. 已知楔体由不可压缩材料制成，处于平面应变状态，沿楔体一侧受均布垂直载荷 q 作用，试问当 q 为多大时，楔体开始进入塑性？并给出沿那条线开始进入塑性状态。材料的屈服极限为 σ_s，并利用

(a) Mises 屈服条件；(b) Tresca 屈服条件。

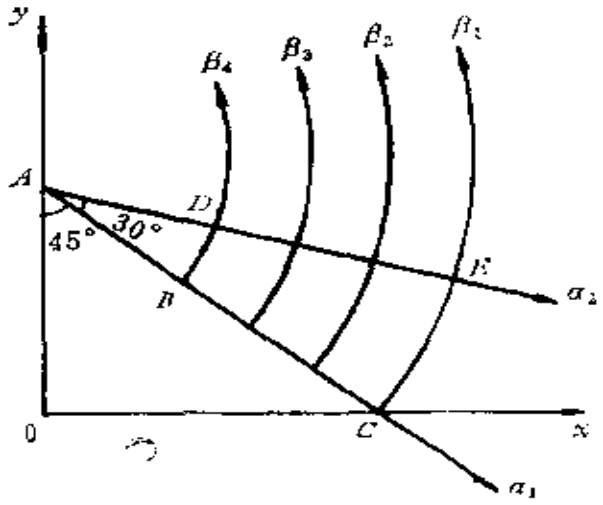


图 6.55

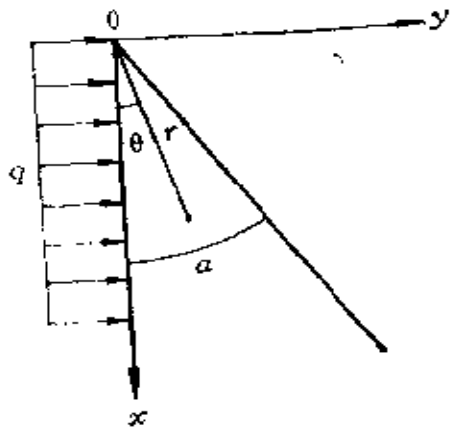


图 6.56

4. 已知具有角形切口的板条，试求此板条的极限载荷(图 6.57)。

5. 已知削平的楔体，两侧面受外压 p 的作用，顶面受压力 q 的作用如图 6.58 所示，试按如下两种情况求出极限载荷的值。

(1) $p = q$

(2) $p>q$

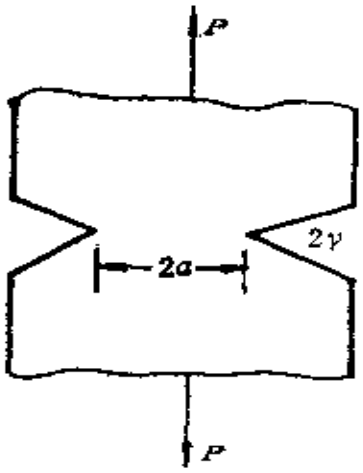


图 6.57

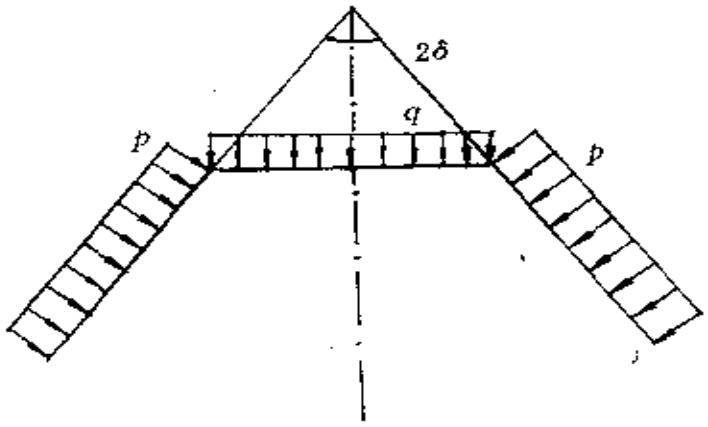


图 6.58

6. 设具有角形深切口的厚板，其滑移场构造如图 6.59，试求此时该板所能承受弯矩的值。

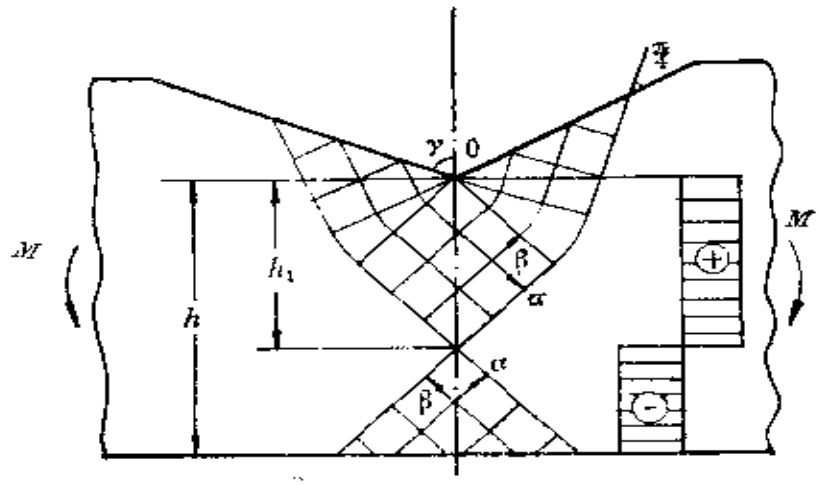


图 6.59

7. 设有二边有对称角形深切口的厚板如图 6.60 所示，试求该板所能承受的弯矩值。

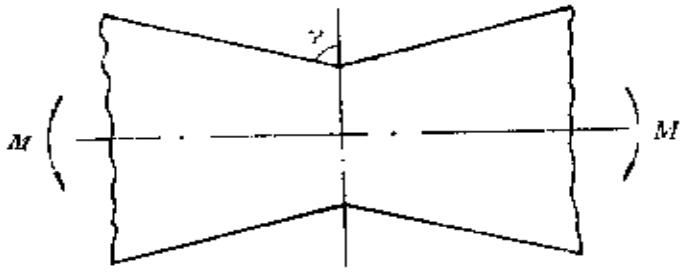


图 6.60

8. 已知具有角为 2γ 的刚性楔体，切入一刚塑性介质中去（图 6.61），如楔体和介质之间的摩擦可以忽略不计，试求当楔体切入介质深度为 h 时所需的压力 P 为多少？$AC=l$，设 AB 线接触压力 p 是均匀的。

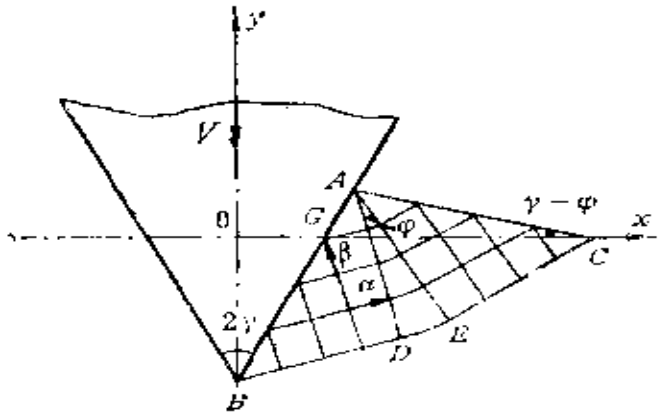


图 6.61

9. 在理想刚塑性平面应变问题中，如果采用 Tresca 屈服条件，能否得出应力偏量 $s_{xz}=s_{yz}=s_{zz}=0$。

10. 试求如图 6.62 所示双边切口试件以及中心切口试件的极限载荷（试件厚度为 B）。

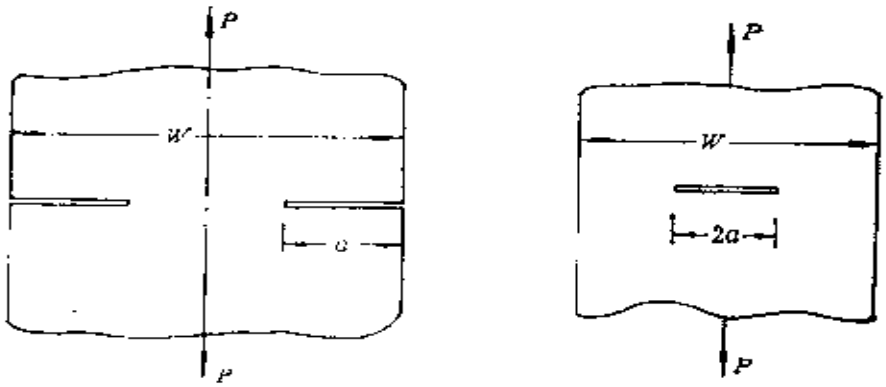


图 6.62

第六章　习 题 答 案

1. $\sigma_1 = 350kg/cm^2$，　$\sigma_2 = \sigma_z = 50kg/cm^2$，　$\sigma_3 = -250kg/cm^2$，

$\tau_{max} = k = 300kg/cm^2$，　$\theta = -\frac{\pi}{12}$，　$C_\alpha = 207kg/cm^2$，

$C_\beta = -107kg/cm^2$，图形（略）。

2. $\theta_b = \theta_c = -\frac{\pi}{4}$，　$\sigma_b = \sigma_c = -900kg/cm^2$，　$\theta_D = -\frac{\pi}{12}$

① C 点：

$\sigma_x = -300kg/cm^2$，　$\sigma_y = -1500kg/cm^2$，　$\tau_{xy} = 0$，

$\sigma_1 = -300kg/cm^2$，　$\sigma_2 = 900kg/cm^2$，　$\sigma_3 = -1500kg/cm^2$，

$C_{\alpha 1} = 44k\lambda/cm^2$

② D 点：

$C_{\beta 3} = -1844kg/cm^2$，$\sigma_D = -1530kg/cm^2$，$\sigma_x = -1230kg/cm$，

$\sigma_y = -1830kg/cm^2$，　$\tau_{xy} = 520kg/cm^2$，　$\sigma_1 = -930kg/cm^2$，

$\sigma_2 = \sigma_D = \sigma_z = -1530kg/cm^2$，　$\sigma_3 = -2139kg/cm^2$ 图形（略）

3. （a）使用 Mises 条件时，根据楔体的弹性解，由于材料不可压缩 $\nu = \frac{1}{2}$，

$$\sigma = \frac{q}{2(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)} \times$$

$$\times \sqrt{\begin{array}{l}(1-2\nu)^2(2\theta\cos\alpha - 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha)^2 \\ +3[1-2\cos\alpha\cos(2\theta-\alpha)+\cos^2\alpha]\end{array}}$$

当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，沿 $\theta=0$ 和 $\theta=\alpha$ 开始进入塑性，

其压力 $q=\frac{2}{\sqrt{3}}(1-\alpha\mathrm{ctg})\sigma_s$

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$q=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s$ 即整个楔体同时进入塑性；

当 $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$ 时，在 $\theta=\frac{\alpha}{2}$ 处开始进入塑性，

$q=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\sigma_s$ 此式为增函数，当 $\alpha=\pi$ 时

$q=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sigma_s$。

(*b*) 当使用 Tresca 条件时，将上述公式中的 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 改成 1，便可得到所求的解答。

4. $P=2ak(2+\pi-2\gamma)$。

5. (1) $p=q$：楔体处于静水压应力状态，无论 p，q 多大，楔体均不屈服

   (2) $p>q$：$p-q=2k(1+\delta)$

6. $\frac{M}{M_0}=1+\frac{\pi-2\gamma}{4+\pi-2\gamma}$，其中 $M_0=\frac{1}{2}kh^2$

7. 此题滑移场与前题上部滑移场一致。

$$\frac{M}{M_0}=1+\frac{\pi}{2}-\gamma$$

8. $p=-2k(1+\varphi)$

楔在 z 方向内单位厚度上总合力为 $P=2pl\sin\gamma$。

9. 能得出 $s_{xz}=s_{yz}=s_{zz}=0$。

10. $(a)P=k(2+\pi)(W-2a)B$，如果取 Mises 屈服条件 $k=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$

则 $P=2.97(W-2a)B$，

$(b)P=2k(W-2a)B$，如取 $k=\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$

则 $P=1.155\sigma_s(W-2a)B$，

第七章　理想刚塑性体的极值定理及其应用

§7.1　基本概念

由于塑性理论中数学上的困难，目前很多工程技术问题都还未能得出精确的解。因此，需要用近似的方法来进行计算。根据极值原理，这些计算有可能不必对微分平衡方程进行积分而直接得到近似的解。

计算极限载荷的方法有二种，一种为下限法，其计算结果小于实际的数值，另一种为上限法，其所计算的结果大于实际的数值。

由理想塑性材料制成的结构或另件经常可能发生这样的情况，即当载荷增加到某一数值时，结构或另件达到所谓的极限状态。这时，即使载荷不再继续增长，塑性变形也可以自由地发展，这样的载荷值称为极限载荷。求结构或另件的极限载荷的问题，一般只限于理想塑性体。

我们假设物体弹性变形与塑性变形相比要小得多，可以略去不计，即认为材料是刚塑性的。也就是说：当载荷值尚未到达极限载荷前，物体完全不产生变形，因此极限状态的开始也就是变形的开始。

极值定理中有二个名词现解释如下：

1．　静力容许（可能）的应力场

凡满足平衡方程和力的边界条件，并且不违背屈服条件的应力场，称为静力容许（可能）的应力场，用 σ_{ij}^* 来表示，换句话说，σ_{ij}^* 符合下列要求：

① 满足平衡方程

$$\sigma^*_{ij,j} + F_i^* = 0 \tag{7.1}$$

② 满足力的边界条件

在 S_F 上 $T_i^* = T_i$， (7.2)

T_i、T_i^* 为单位表面积上的表面力

③ 不违背屈服条件

$$s_{ij}^* s_{ij}^* \leqslant 2k^2 \tag{7.3}$$

显然，材料处于极限状态时，真实的应力场必定是静力可能的，但是静力可能容许的应力场不一定是极限状态的真实应力场。

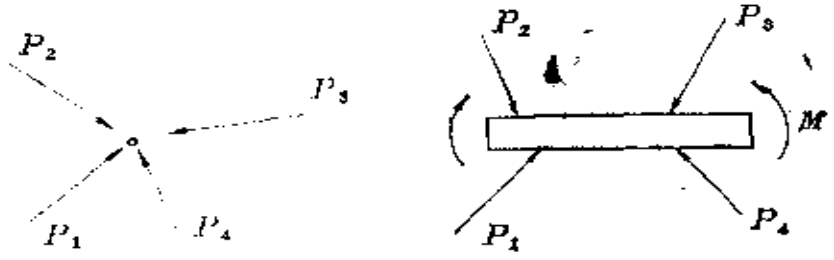
2. 机动容许（可能）的位移场

凡满足几何约束条件并使外力作正功的位移场，称为机动容许（可能）的位移场，用符号 u_i^0 表示。它必需满足位移的边界条件。

显然，材料处于极限状态时，真实的位移场必定是机动可能的，但是机动可能的位移场不一定是极限状态的真实位移场。

§ 7.2 虚功原理

所谓虚位移，即不一定是实际的位移。在产生虚位移的过程中真实的力所做的功称为虚功。



a）对于一个质点　　b）对于一个刚体

图 7.1 虚位移原理

当一个质点在力系的作用下处于静力平衡时，我们可以给该质点沿任何方向一个虚位移，在产生此虚位移的过程中，外力所做的虚功必须等于零，因为这些力处于平衡状态，这个简单的叙述即称为虚位移原理。

虚位移原理可用于在载荷系作用下处于平衡的刚体，该载荷系可以包括力、力偶和分布载荷，若给刚体一个虚位移（包括沿任何方向平移、绕任何轴旋转或者旋转和平移相结合的位移），那么在所有的情况下诸力所做的虚功将等于零。通常必须限制虚位移为一很小的位移，以使在产生虚位移的过程中，诸力的作用线不改变。

虚功原理可表述如下：在载荷系作用下处于平衡的变形结构，若给一微小的虚变形，那么由于外力（或载荷）所做的虚功必等于内力（或应力合力）所做的虚功。

在力学中虚功原理是极为重要的手段，在结构分析中有很多用处，然而，在应用该原理之前，强调一下如下两个特点却是很重要的。

第一，虚变位或虚位移必须与结构的支承不相矛盾，还必须保持结构的连续性。在遵守这个限制之下，形状的虚变化可以任意加于结构上；不应把它与真实载荷所引起结构形状的变形混淆起来。

第二，在虚功原理的论述中，根本没有涉及结构的材料特性，所以，虚功原理适用于所有结构，不管材料性能是线性的或是非线性的，也不论是弹性的或非弹性的。应用虚功原理时，所有作用力在虚位移中都当作是常量。

根据虚功原理，变形体若处于平衡状态，当给予物体微小虚位移时，外力的总虚功等于物体的总虚应变能。设变形体处于平衡受力状态，体积为 v，总表面积为 s，并分为两部分，即 s_F 与 s_V，在 s_F 部分作用于表面上的力 T_i 为已知，在 s_V 上，其位移速度 V_i 为已知，变形体内部受力状态为 σ_{ij}，并满足平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0 \tag{7.4}$$

其中 F_i 为单位体积力。在曲面 s_F 上应有

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \tag{7.5}$$

n_j 为外法线 n 的方向余弦。

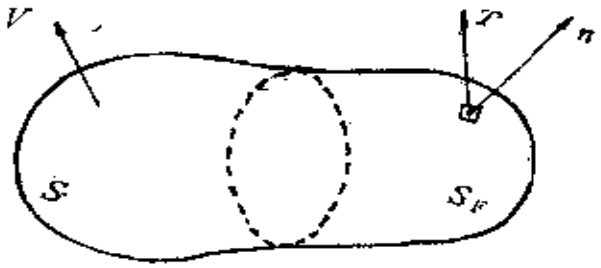


图 7.2 总体积为 v 总面积为 S

在 s_V 部分给出了位移速度，其分量由 V_i 表示。设应力场和位移场都是连续的；整个物体由外力所作的功率可用下式表示

$$\dot{W} = \int_S T_i V_i \, ds + \int_v F_i V_i \, dv \tag{7.6}$$

式中第一项为物体整个表面上的积分，而第二项为物体整个体积中的积分。表面积分可用下式表示

$$\int_S T_i V_i \, ds = \int_S \sigma_{ij} n_j V_i \, ds$$

因此在考虑 Green 公式后，式 (7.6) 将为

$$\begin{aligned} &\int_S T_i V_i \, ds + \int_v F_i V_i \, dv \\ &= \int_S \sigma_{ij} n_j V_i \, ds + \int_v F_i V_i \, dv \\ &= \int_v \frac{\partial (\sigma_{ij} V_i)}{\partial x_j} dv + \int_v F_i V_i \, dv \end{aligned}$$

$$= \int_v \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} V_i + \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + F_i V_i \right) dv$$

$$= \int_v \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) V_i \, dv + \int_v \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, dv$$

由于等式右侧第一项（括弧内）积分满足平衡方程（7.4）并且为零，因此虚功原理方程应为

$$\int_s T_i V_i \, ds + \int_v F_i V_i \, dv = \int_v \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, dv \tag{7.7}$$

当体积力为零时，上式为

$$\int_s T_i V_i \, ds = \int_v \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, dv \tag{7.8}$$

§ 7.3 有间断场时的虚功原理

公式（7.8）是在连续应力场和位移速度场的条件下得到的。但在刚塑性材料的塑性变形中，经常遇到应力间断和位移速度间断的问题。因此需要考察一下有间断场时，对虚功原理表达式形式的影响。

1. 有应力间断曲面

设在物体中有间断曲面 $s_k (k = 1, 2, 3\cdots)$，这些曲面将物体分成若干个有限部分，在每一部分应力都是变化的。相应的曲面积分应分别在单独的曲面上进行。例如在曲面 s_k 的一侧，力的分量为 $T_i^{(1)} = \sigma_{ij} n_j^{(1)}$，而在曲面 s_k 的另一侧，力的分量为 $T_i^{(2)} = \sigma_{ij} n_j^{(2)}$。在单元体的应力间断面上，由于平衡的要求应有

$$\sigma_{ij} n_j^{(1)} - \sigma_{ij} n_j^{(2)} = 0 \tag{7.9}$$

由式（7.9）看出，如果将物体每个单独部分写下的方程加起来，则所有沿不连续面 s_k 的积分都相互抵消，因此，应力不连续情况

的存在并不影响虚功原理的形式。

2. 速度间断面

设物体由速度间断面分为区域（1）和区域（2），如图 7.3 所示。对于不可压缩材料，在金属塑性变形的过程中，垂直于速度间断面的速度分量必须是连续的，否则就将出现裂纹或重迭的现象。即在间断曲面 s_D 上要求

$$V_i^{(1)} n_i = V_i^{(2)} n_i \tag{7.10}$$

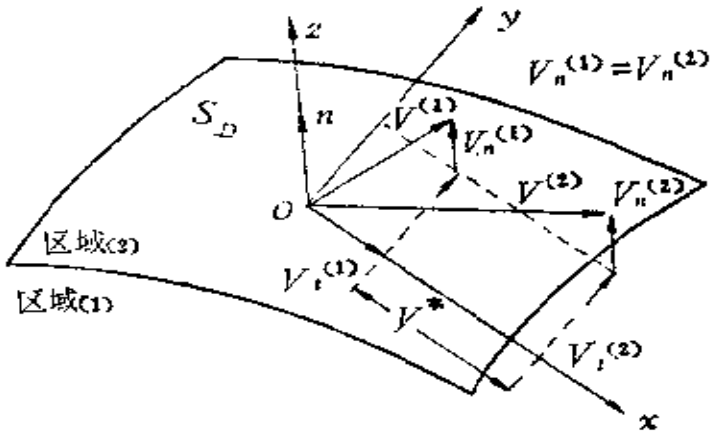


图 7.3 速度间断面 S_D 将物体分为区域（1）和区域（2），切向速度间断

因此速度间断只能在间断曲面 s_D 的切线方向发生。在图 7.3 中速度间断曲面上的某一点，取一直角坐标系，并令 z 轴垂直于此间断曲面。在区域（1）和区域（2）的速度相应为 $V_i^{(1)}$ 和 $V_i^{(2)}$。而间断面两侧剪切速度分量为 $V_i^{(1)}$ 和 $V_i^{(2)}$。而切向速度间断值为

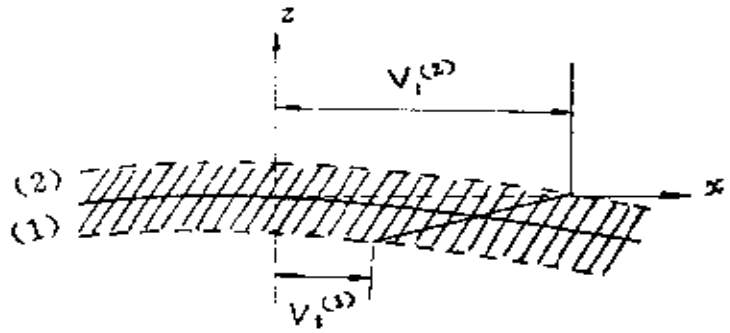


图 7.4 速度间断面 S_D 是速度连续急剧变化的薄层区

$V_t^{(2)} - V_t^{(1)}$。并假设其方向与 x 轴的方向重合。

速度间断曲面可以认为是一个薄层区，速度在层内急剧而连续地变化，在此薄层区内，将消耗塑性功。在图 7.4(b) 中只在 x 方向出现急剧的变化，而其他两个方向在薄层区都是常数。即剪应变速度 $\dot{\gamma}_{zx}$ 比其他应变速度分量都要大得多，即在薄层区中 $\dot{\gamma}_{zx} \to \infty$。在间断面上的 x 方向的剪应力用 τ 表示。

现在来分析一下间断面 s_D 上的单元体。在区域 (1) 所完成的功率由下面的公式表示

$$-(\sigma_n V_n + \tau_y V_y + \tau V_t^{(1)}) ds_D \tag{7.11}$$

其中 τ_y 及 V_y 为 y 方向的应力分量和切向速度分量。而在区域 (2)，应力所完成的功率为

$$+(\sigma_n V_n + \tau_y V_y + \tau V_t^{(2)}) ds_D \tag{7.12}$$

由此应力所完成功率的代数和为

$$-\tau\{V_t^{(1)} - V_t^{(2)}\} ds_D = \tau\{V_t^{(2)} - V_t^{(1)}\} ds_D \tag{7.13}$$

如用 $[V_t]$ 表示速度的间断量，则在速度间断面 s_D 由应力所作的功率可用下式表示

$$\int_{s_D} \tau [V_t] ds_D$$

如果速度间断面不是一个，则应取这些间断面上所作功率之和，即

$$\Sigma \int_s \tau [V_t] ds$$

其中 $s = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots$，在此情况下，虚功原理可用下式表示

$$\int_s T_i V_i \, ds + \int_v F_i V_i \, dv =$$

$$= \int_v \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}\,dv + \int_s \tau[V_t]ds \qquad (7.14)$$

上式中忽略了求和符号，对于任何处于平衡状态连续体都是适用的。在塑性平衡的应力场中以及相关联的速度场中应有

$$\int_s \tau[V_t]ds \leqslant k\int[V_t]ds \qquad (7.15)$$

其中 k 为剪切屈服极根。当不考虑体积力的影响时，式（7.14）又可以写为

$$\int_s T_i V_i\,ds = \int_v \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}\,dv + \int_{s_v} \tau[V_t]ds \qquad (7.16)$$

§ 7.4 下限定理

当物体处于塑性状态，且经受着微小的位移增量（或位移速度），则在 s_V 上，真实的表面力所作的功（或功率）大于或等于任何其他静力容许应力场所引起的表面力所作的功（或功率）。它也可以表述为：在所有与静力可能的应力场相对应的载荷中，极限载荷为最大。

设 σ_{ij}、$\dot{e}_{ij}$、V_i 相应为刚塑性体上的真实应力场，应变速度场和位移速度场，设此物体整个表面为 s，整个体积为 v，在 s_F 上作用力 T_i 而在另一部分 s_V 上给出位移速度场 V_i。而且物体处于屈服状态。应力和应变速度可用 Lévy-Mises 物理关系描述，并且满足平衡方程和连续条件。对于真实的应力场和位移速度场，如果不考虑体积力的影响，则虚功原理方程为

$$\int_s T_i V_i\,ds = \int_v \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}\,dv + \int_{s_D} k[V_t]ds_D \qquad (7.17)$$

如令 σ_{ij}^* 表示某一静力容许应力场，它满足平衡微分方程以及在 s_F 表面部分的边界条件，而且任何地方都不破坏屈服条件。应力场可以是间断的，在此静力容许场中

$$\int_s T_i^* V_i \, ds = \int_v \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} \, dv + \int_{s_D} \tau^* [V_i] ds_D \quad (7.18)$$

其中 τ^* 为速度间断面上速度间断方向的容许应力场中的切向应力，而真实速度场为 V_i，此时

$$\int_s T_i V_i \, ds = \int_{s_F} T_i V_i \, ds_F + \int_{s_V} T_i V_i \, ds_V \quad (7.19)$$

这样式（7.17）可以写为

$$\int_{s_F} T_i V_i \, ds_F + \int_{s_V} T_i V_i \, ds_V = \int_v \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \, dv + \int_{s_D} k[V_i] ds_D \quad (7.20)$$

同时

$$\int_s T_i^* V_i \, ds = \int_{s_F} T_i^* V_i \, ds_F + \int_{s_V} T_i^* V_i \, ds_V \quad (7.21)$$

由于在 s_F 上 $T_i = T_i^*$，故上式又可写为

$$\int_s T_i^* V_i \, ds = \int_{s_F} T_i V_i \, ds_F + \int_{s_V} T_i^* V_i \, ds_V \quad (7.22)$$

由式（7.20）和式（7.22）可得

$$\int_{s_V} T_i^* V_i ds_V + \int_{s_F} T_i V_i \, ds_F = \int_v \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} \, dv + \int_{s_D} \tau^* [V_i] ds_D \quad (7.23)$$

由式（7.20）减去式（7.23）可得

$$\int_{s_V} (T_i - T_i^*) V_i \, ds_V = \int_v (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij} dv + \int_{s_D} (k - \tau^*) [V_i] ds_D \quad (7.24)$$

应变速度向量 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 垂直于极限曲面，而应力向量 σ_{ij}^* 一般地说是在极限曲面之内，因为它满足静力容许场，因此向量差 $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)$ 可以用虚线表示。由于极限曲面是凸形的，因此向量的点积应该不是负数，即

$$|\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*|\cdot|\dot{\varepsilon}_{ij}^p|\geqslant 0 \tag{7.25}$$

如果 $\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^*$，则上式即为等式。间断值 $[V_i]$ 在真实的位移场中还是未知数，但由于材料剪切屈服极限 $k\geqslant\tau^*$ 而且 $k[V_i]>0$。因此等式（7.24）的第二项是非负数。由此可得：

$$\int_{s_V}(T_i-T_i^*)V_i\,ds_V\geqslant 0$$

或

$$\int_{s_V}T_iV_i\,ds_V\geqslant\int_{s_V}T_i^*V_i\,ds_V \tag{7.26}$$

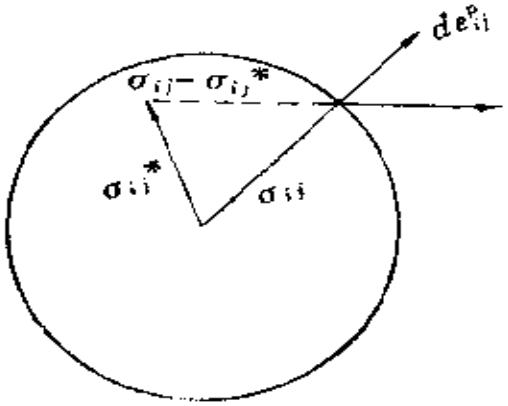


图 7.5 应力向量差（$\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^*$）及应变速度向量 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 在屈服面上所形成角度之间的关系。

公式（7.26）为第一极值定理，利用它可以求出极限载荷的下限。

§ 7.5 上限定理

在所有与机动可能的位移场相对应的载荷中，极限载荷为最小。

和前面一样，设 σ_{ij}，$\dot{\varepsilon}_{ij}$，V_i 为问题的解。我们研究另一个机动容许速度场 V_i^*，这个速度场在表面 s_V 部分满足速度边界条件。同时满足材料不可压缩的条件。速度场 V_i^* 在某一曲面上可

以是间断的。在前面的推导过程中，要求在物体的每一点上都满足平衡方程。而在推导上限定理时，并不要求满足平衡方程，因此 σ_{ij}^* 并不一定是静定容许的。但是速度场则必须是机动容许的。虚功原理方程对真实应力场和机动容许速度场 V_i^* 都是适用的，这个机动容许场满足不可压缩条件，并且在表面 s_V 部分满足速度的边界条件，此时

$$\int_s T_i V_i^* \, ds = \int_v \sigma_i \dot{e}_{ij}^* dv + \int_{s_D^*} \tau[V_i^*] ds_D^* \quad (7.27)$$

如果 σ_{ij}^* 为应力场，它不一定是静力容许的，它引起应变速度场

$$\dot{e}_{ij}^* = \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial V_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j^*}{\partial x_i} \right\} \quad (7.28)$$

此时应有

$$\int_v (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{e}_{ij}^* \, dv \geqslant 0 \quad (7.29)$$

因此，由于 $k \geqslant \tau$，则

$$\int_s T_i V_i^* \, ds = \int_v \sigma_{ij} \dot{e}_{ij}^* \, dv + \int_{s_D^*} \tau[V_i^*] ds_D^*$$

$$\leqslant \int_v \sigma_{ij}^* \dot{e}_{ij}^* \, dv + \int_{s_D^*} k[V_i^*] ds_D^*$$

但在 s_V 部分，$V_i^* = V_i$

$$\int_s T_i V_i^* \, ds = \int_{s_V} T_i V_i \, ds_V + \int_{s_F} T_i V_i^* \, ds_F$$

因此，最后得

$$\int_{s_V} T_i V_i \, ds_V \leqslant \int_v \sigma_{ij}^* \dot{e}_{ij}^* \, dv + \int_{s_D^*} k[V_i^*] ds_D^* - \int_{s_F} T_i V_i^* \, ds_F \quad (7.30)$$

如果变形是平面的，并且按刚性块在速度间断面上相互移动，则式（7.30）中的第一项应为

$$\int_v \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* \, dv = 0$$

在许多情况下力的边界条件为

$$\int_{S_F} T_i V_i^* \, ds_F = 0$$

在此特殊情况下式（7.30）可简化为

$$\int_{S_V} T_i V_i \, ds_V \leqslant \int_{S_D^*} k[V_i^*] ds_D^* \tag{7.31}$$

如果有几个速度间断面时，则上式又可写为

$$\int_{S_V} T_i V_i \, ds_V \leqslant \Sigma \int_{S_D^*} k[V_i^*] ds_D^* \tag{7.32}$$

利用式（7.32）可以求出极限载荷的上限。

§ 7.6 理想刚塑性体解的唯一性定理

设有各向同性不可压缩的刚塑性材料，物体的总表面积为 s，体积为 v，在 S_F 部分，在 T_i 的作用下进入屈服状态，在 S_V 部分上，位移由 V_i 确定。应力场满足平衡条件，而且到处不破坏屈服条件，速度场满足不可压缩条件并满足与塑性势相关联的流动法则，即

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \tag{7.33}$$

如 σ_{ij}、V_i 及 σ_{ij}^*、V_i^* 是屈服物体的两种可能的应力状态及相应的位移场，若不考虑体积力和惯性力的影响，虚功原理将为

$$\int_v \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}\,dv + \int_s \tau[V_t]ds = \int_s T_i V_i\,ds \qquad (7.34)$$

因此有

$$\int_v \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}\,dv + \int_{s_{D1}} k[V_t]ds_{D1} = \int_s T_i V_i\,ds$$

$$\int_v \sigma_{ij}\dot{e}_{ij}^*dv + \int_{s_{D2}} \tau[V_t]^*ds_{D2} = \int_s T_i V_i^*\,ds$$

$$\int_v \sigma_{ij}^*\dot{e}_{ij}\,dv + \int_{s_{D1}} \tau^*[V_t]ds_{D1} = \int_s T_i^* V_i\,ds$$

$$\int_v \sigma_{ij}^*\dot{e}_{ij}^*dv + \int_{s_{D2}} k[V_t]^*ds_{D2} = \int_s T_i^* V_i^*\,ds$$

s_{D1}、s_{D2} 为速度场 V_i 及 V_i^* 的间断曲面，$[V_t]$ 及 $[V_t]^*$ 为相应的间断速度，而 τ 及 τ^* 为作用在间断面 s_{D1}，s_{D2} 上的剪应力。因此可得

$$\int_s (T_i - T_i^*)(V_i - V_i^*)ds$$

$$= \int_v (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)(\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}^*)dv + \int_{s_{D1}} (k - \tau^*)[V_t]ds_{D1} + \int_{s_{D2}} (k - \tau)[V_t]ds_{D2} \qquad (7.35)$$

由于在表面 S_F 上，$T_i = T_i^*$。在表面 S_V 上，$V_i = V_i^*$。因此式（7.35）的左边应为零。根据 Drucker 假说

$$\int_v (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\dot{e}_{ij}dv \geqslant 0$$

$$\int_v (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})\dot{e}_{ij}^*dv \geqslant 0$$

考虑到 $k \geqslant \tau$，右边第二项和第三项都不小于零，因此每项都必须

等于零，由此得

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{*}$$

因此，如果某一问题有两个可以确定的全解，则这两个解的应力场（除刚性区外）必然是唯一确定的。

§ 7.7 上限定理在平面应变问题中的应用

对平面变形问题使用上限定理时，可假设变形区是由速度间断线所包围起来的，但满足机动可能位移场(机动可能速度边界条件)的刚性块所组成。

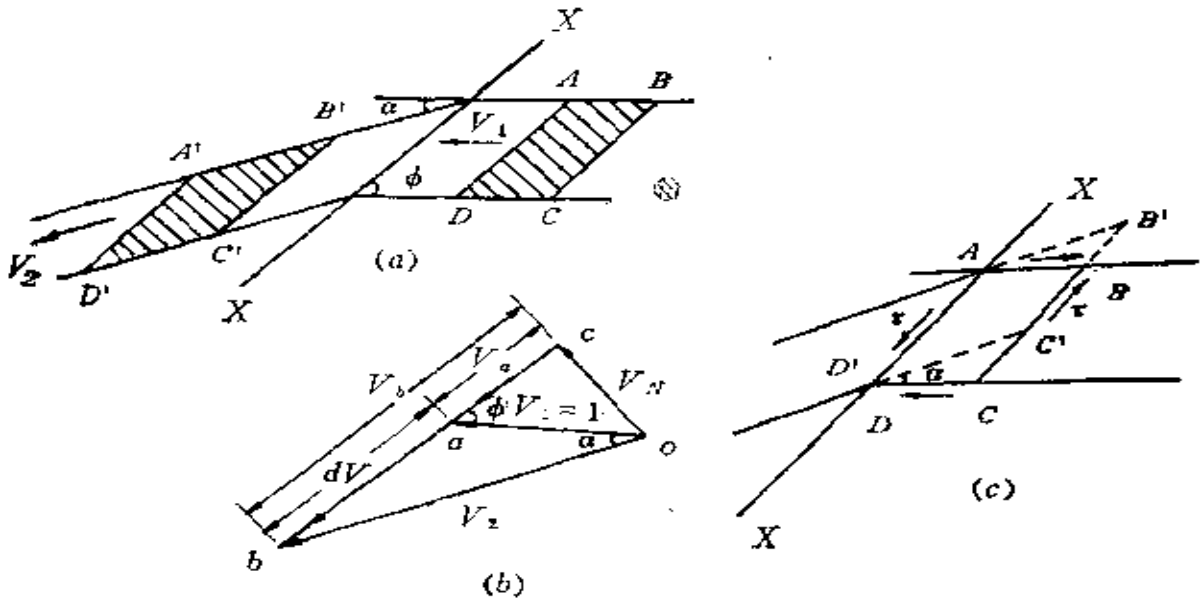


图 7.6 在刚塑性材料中确定内能散逸率的变形样式与速端图

现考虑一个有单位高度的刚性材料平行四边形 $ABCD$，此平行四边形的厚度也是一个单位，以单位速度向左移动。若干时间以后一侯跨过 XX，平行四边形 $ABCD$ 突变为一个新平行四边形 $A'B'C'D'$，且以速度 V_2 朝一与原来方向成 α 角的新的固定方向

运动；有关速度符号见速端图，原来的单位速度可分解为二个分量 V_N 和 V_a，为了要满足不可压缩条件（体积不变条件），V_N 必须同时是单位速度 V_1 与速度 V_2 的垂直分量（V_N 垂直速度间断线 XX），$\overrightarrow{dV}=\vec{V}_b-\vec{V}_a=\vec{V}_2-\vec{V}_1$，$dV=V_b-V_a$ 代表“速度不连续”，它和 XX 相切。当然，事实上的“速度不连续”并不是瞬时完成的而且也不会急遽得在跨过象 XX 的一条线便完成；但是，速度改变的确是在窄带域中完成，其极限自然可以取为一条线。

现在考虑从形状 $ABCD$ 变到形状 $A'B'C'D'$ 所作的功，假设 $AD\parallel XX$，所以 AD 以及和它平行的线在跨过 XX 后都将保持不变。现在，若将 $ABCD$ 与 $A'B'C'D'$ 迭起来使得有一个公共基底 AD，如果 τ 是作用在平行方块对边的切应力，则所作功即等于 $(\tau BC)\,CC'$ 或者用内能散逸率来表示，则为 $\frac{(\tau BC)CC'}{t}$，其中 t 为 DC 跨过 XX 的时间。由于平行四边形是以单位速度 $V_1=1$ 进行运动，

$$V_1=\frac{DC}{t}=1,\qquad DC=t$$

因此
$$\frac{(\tau\cdot BC)CC'}{t}=\frac{(\tau\cdot BC)CC'}{DC}$$

比较三角形 $C'CD$ 与速端图，可以看到 $\triangle C'CD\backsim\triangle oab$

这时有
$$\frac{C'D}{ob}=\frac{CD}{oa}=\frac{CC'}{ab},$$

$$\frac{CC'}{CD}=\frac{ab}{oa}=\frac{dV}{V_1}=dV$$

能量散逸率 $\frac{dW}{dt}$ 可写成

$$\frac{dW}{dt} = \tau \cdot BC \cdot \frac{CC'}{t} = \tau \cdot BC \cdot \frac{CC'}{DC}$$
$$= \tau \cdot BC\, dV = \tau \cdot AD \cdot dV \tag{7.36}$$

如取 $\tau = k$，材料发挥它对变形的最大抗力，其中 k 是平面应变条件下的剪切屈服应力，是 τ 的最大可能值，此时得

$$\frac{dW}{dt} = k \cdot AD \cdot dV \tag{7.37}$$

若发生速度不连续线是曲线，则可用 ds 代替 AD，于是

$$\frac{dW}{dt} = \int (k dV)\, ds \tag{7.38}$$

上式积分应沿着不连续线 XX 运算，这时 dV 在 XX 线上逐点不同，如果 XX 为直线，则公式（7.38）又回到原来的简单形式

$$\frac{dW}{dt} = k dV s \tag{7.39}$$

s 是 XX 线的长度，dV 在 XX 线上任一点都相等。

若对于一给定情况应用此公式找到一些$\frac{dW}{dt}$值，则$\frac{dW}{dt}$的最小值将是最佳值。在本节讨论中，没有涉及应力平衡条件，在一般情况下速度间断面不止一个，而 dV 也不一定恒正，则

$$\frac{dW}{dt} = \Sigma \int_{s_D} k |dV|\, ds$$

$$\int_{s_V} T_i V_i\, ds \leqslant \Sigma \int_{s_D} k |dV|\, ds \tag{7.40}$$

即真实外力在给定的速度边界上所作的功率永远小于或等于各速度间断面上所作功率的总和。

上限定理要满足机动容许边界条件（即在 S_V 上，$V_i = V_i^0$）并需满足外力所作的功为正值。

在数学弹性理论中，最小势能原理和最小余能原理是求复杂边值问题近似解的有力工具，在塑性理论中，求精确解要比弹性理论更为困难，因而，我们期望极值原理在塑性理论中能起同等的或更重要的作用。

§ 7.8 例　　题

例 1. 带尖切口板的弯曲

设有带尖切口的板，其几何参数如图 7.7 所示，设板在切口底以上的部分应力为零，而在下部处于纯弯状态。这样板被分为 A、B、C 三个部分。在 A 部分，应力为零，在 B 和 C 部分分别为纵向拉伸和压缩应力，其值为 $\pm 2k$，根据下限定理可知，相应于这种可能的应力状态的弯矩，是塑性极限弯矩的一个下限值，即

$$M = 0.5ka^2$$

为了求出弯矩的上限值，需要求出旋转时内部能量变化率和外部所作的功率，内部能量变化率为

$$U = 2klr\omega$$

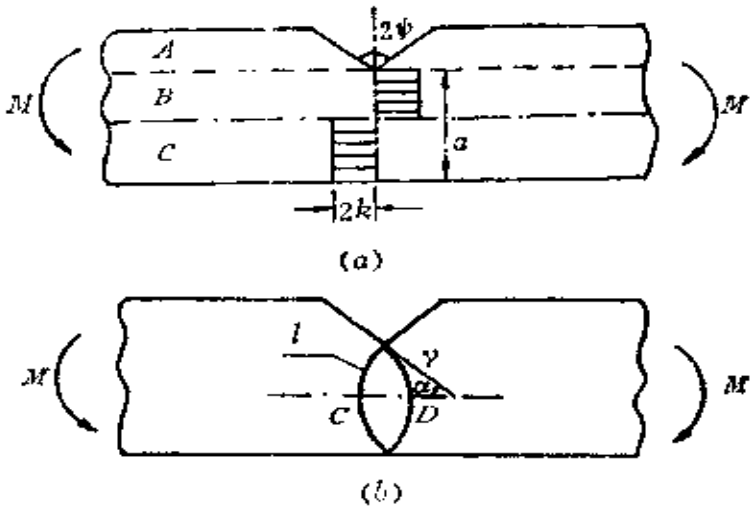


图 7.7　带尖切口板的应力分布

外部所作的功率则为

$$L = 2M\omega$$

其中 r 为圆弧的半径。由几何关系得

$$l = 2r\alpha, \quad r = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sin\alpha}$$

由于 $U = L$，因此可得

$$M = k\alpha r^2 = k\frac{a^2\alpha}{2\sin^2\alpha}$$

通过 M 的极值条件，得

$$\frac{dM}{d\alpha} = \frac{ka^2}{2} \cdot \frac{\sin^2\alpha - 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^4\alpha} = 0$$

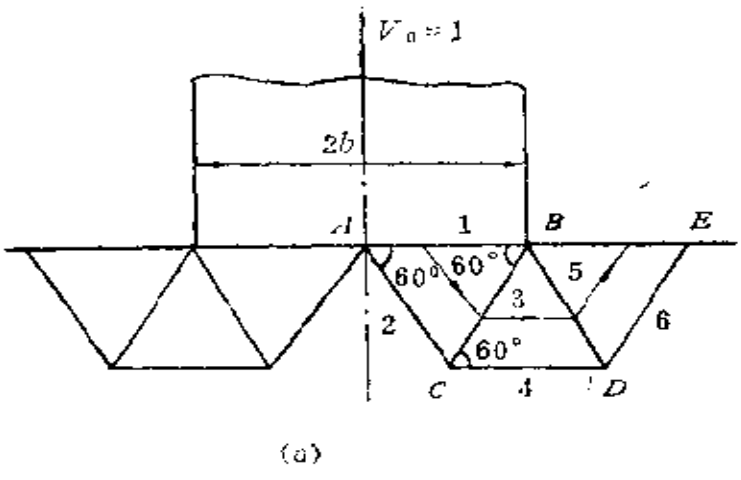
因此得

$$2\alpha = \operatorname{tg}\alpha, \quad \alpha = 66°47'$$

故弯矩的上限为 $M = 0.69ka^2$。因此可用下式表示弯矩的界限

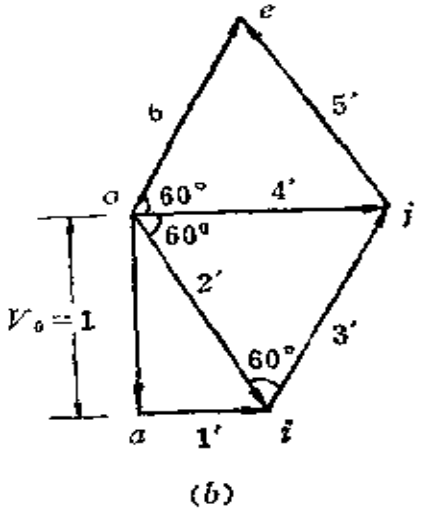
$$0.5 \leqslant \frac{M}{ka^2} < 0.69。$$

例 2. 平滑冲头压入半无限体的载荷上限



(a)

图 7.8a



(b)

图 7.8b 速端图

我们已知，由滑移线场理论解出的 q 值为

$$\frac{q}{2K} = 1 + \frac{\pi}{2} = 2.57$$

现在用上限法计算这一问题，当冲头向下压入时，冲头下面的金属向下和向外流出，变形方式可以近似地用三个等边三角形的相互移动来代表。由于对称，只考虑右边一半，三角形 ABC、BCD、BDE 内是刚性区，三角形之间以及三角形和其余金属之间由速度间断面 AC、BC、CD、BD、DE 隔开，在 $ACDE$ 以下的材料视为刚性区。

在 $\triangle ABC$ 中的质点，被迫向下移动，但滑移方向则平行于 AC，当其中质点到达 BC，则被剪切而发生平行于 CD 的移动，此后再在 BD 发生剪切，作平行于 DE 的移动（即 $\triangle ABC$ 向下向右移动，$\triangle BCD$ 向右平移，$\triangle BDE$ 向右向上运动）。

$\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 之间的相对移动速度为 $\vec{ij}$，$\triangle BCD$ 和 $\triangle BDE$ 之间的相对移动速度为 $\vec{je}$，$\triangle ABC$ 和冲头表面的相对滑动速度为 $\vec{oi}$（图 7—7b）。

$$V_0 = 1, \quad |\vec{oi}| = |\vec{ij}| = |\vec{oj}| = |\vec{je}| = |\vec{oe}| = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$|\vec{ai}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\triangle ABC$、$\triangle BCD$，$\triangle BDE$ 各边长 $S = b$，设冲头下的平均压力为 q，冲头以单位速度 $V_0 = 1$ 向下移动。根据上限定理，则外力所作的功率

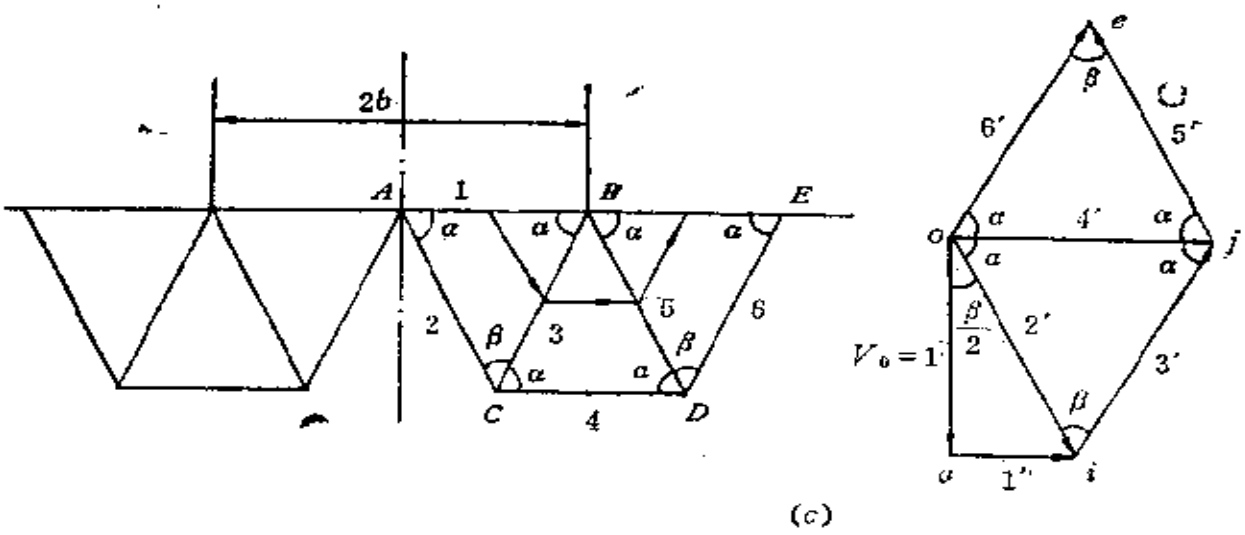
$$W = \frac{dW}{dt} = q\,b\,V_0 = q\,b \cdot 1$$

$$W \leqslant \Sigma kS|dV|$$

$$\Sigma kS|dV| = (AC + BC + CD + BD + DE)\frac{2}{\sqrt{3}}k = \frac{10b}{\sqrt{3}}k$$

$$qb \leqslant \frac{10b}{\sqrt{3}}k \qquad q \leqslant \frac{10k}{\sqrt{3}} \qquad \frac{q}{2k} \leqslant 2.89$$

若选取的是等腰三角形



(c)

图 7.8

则有 $$\overline{ai} = V_0 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\overline{oj} = 2\overline{ai} = 2\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{V_0}{oi} = \frac{1}{oi} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\overline{oi} = \frac{1}{\sin\alpha} = \overline{ij} = \overline{jc} = \overline{oe}$$

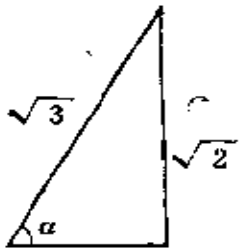
$$\sum k S_i |dV_i| =$$

$$= k(AC \cdot \overline{oi} + BC \cdot \overline{ij} + CD \cdot \overline{oj} + BD \cdot \overline{ej} + DE \cdot \overline{oe}),$$

$AB = CD = b$, $\cos\alpha = \dfrac{\frac{b}{2}}{AC}$

$$AC = BC = BD = DE = \frac{b}{2\cos\alpha}$$

因此 $$\sum kS|dV| = 2bk\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right) = f(\alpha)$$



(d)

图 7.8d 连端图

为了求出上式的极值，将 $f(\alpha)$ 对 α 求导，得

$$\frac{df}{d\alpha} = 2bk\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha\right)$$

$$\frac{df}{d\alpha} = 2bk\left(-4\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = 0$$

因此 $$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$$

当 $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$ 时，使 $f(\alpha)$ 取得极值，即

$$f(\alpha) = 2bk\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}\,bk$$

故 $$qb \leqslant 4\sqrt{2}\,bk$$

$$\frac{q}{2k} \leqslant 2\sqrt{2} = 2.82 < 2.89$$

由此可以得出：当按等腰三角形解题，并取 $\alpha = \mathrm{tg}^{-1}\sqrt{2}$ 时，$f(\alpha)$ 需用上限定理计算的最小值

$$\frac{q}{2k} \leqslant 2.82$$

例 3. 板料挤压的上限计算

通过对称布置单孔模的恒定状态挤压，也可以用上限法计算，即假设变形是由直线不连续线所构成的，此时所得到近似的挤压压力仍是很有价值的。一般说来，这种方法给出的挤压压力高于滑移线场所给出的值，但是它的优点在于它具有简捷的图解性质，容易而且能迅速地得到所需要的结果。而且在加以简化后，它将给出一个清楚的变形型样图。

一、对称楔形模

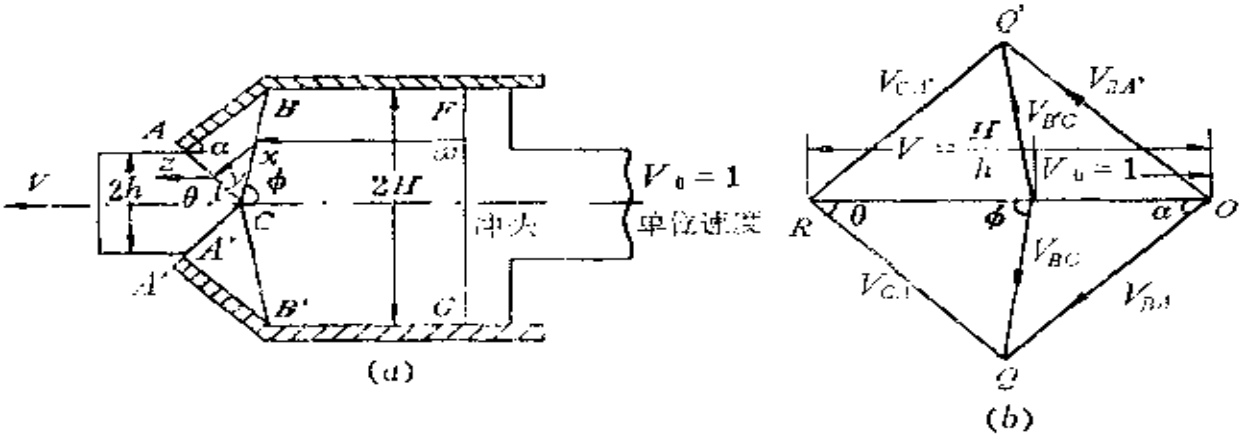


图 7.9 垂直对称楔形模的挤压

挤压容器与模具如图 7.9 所示，假定模具是完全光滑的，考虑图示的速度不连续。速度不连续是沿着 AC、$A'C$、BC、$B'C$ 发生的。在 BCB' 以右的材料是作为一刚性块以单位速度向左移动，而沿着 FG 作用有均匀压力 p，当冲头前进时，WX 的长度减少，在 WX 上每一质点跨过 CB 时，它的路线立即改变到和模面相平行的方向移动；当前进到 Y，质点速度又一次地立即发生

改变，而向模孔的法线方向前进，即沿着 YZ 前进。

图 7.9*b* 的速度图（速端图）对应于图 7.9*a*，OP 表示邻近于冲头的刚性区域 $CBFGB'$ 内质点的速度，并假定为等于一个单位。当这群质点遇到 CB 时，它们经受一平行于 CB 的速度突然改变 V_{BC}（从 P 画一条线与 OP 延长线相交成 ϕ 角），这就使得这些质点作平行于模面的移动，和原来方向交角为 α。这样，以 O 为始点，作线 $OQ=V_{BA}$，使速度三角形 OPQ 闭合。直到和 CA 相遇前，速度 V_{BA} 为常数，和CA 相遇后方向突然改变，质点仍按照最初的方向前进。这样，作直线 $QR=V_{CA}$，QR 和 OP 延长线在 R 相交成 θ 角，这就保证了 $QR \parallel AC$。OR 就是材料逸出速度 $\frac{H}{h}$。最后作对于 OR 的反射三角形 $OQ'R$ 以对应于图中的三角形 $A'CB'$，这样就画成了速端图。

当质点遇到速度间断线时，均认为只有切向速度分量发生突然变化，而法向速度分量保持不变，否则工件就要产生裂缝或重迭。挤压力的上限由下式给出

$$p \cdot 1 \cdot H = (BC \cdot V_{BC} + CA \cdot V_{CA})k$$

其中内能散逸只考虑沿着 AC、$A'C$、BC、$B'C$，由于模面光滑，故沿模面没有能量散逸。

上面方程所提供的 P 值依赖于所选用 θ 的值，见图 7.10，最好的 $\frac{p}{2k}$ 估算值是最小值，故必须假定不同的 θ 值才能找到最小的 p 值。图 7.9*a* 是有比例尺的图，它的 $\alpha=40°$，$\theta \cong 45°$，缩减比 $\nu=0.57$。图 7.9*b* 也是按比例尺画出的此系统的速端图。从图 7.9*a* 量取各有关长度，容易计算 $\frac{p}{2k}$ 值等于 1.01，用滑移线场解出的 $\frac{p}{2k}$ 值为 0.95。

图 7.10 中 θ 值的改变，意味着图 7.9*a* 中 C 点在轴线方向发生改变，即假定不同的 $\triangle ABC$、$\triangle A'CB'$。使用光滑模时，当选用 $\theta=40°$，$\frac{p}{2k}=1.0$ 是极小值。（滑移线场解是 $\frac{p}{2k}=0.95$）。当使

用粗糙模时，$\theta=32°$，$\frac{p}{2k}=1.62$ 是极小值，在这种粗糙模条件下滑移线场解是 1.48。因若假定图 7.9a 有完全粗糙的模面，沿该面材料受剪切，于是沿着模面 AB 和 $A'B'$ 有内功散逸，而在总能量散逸的表达式中必须加入 $AB\cdot V_{AB}k$ 的项，故$\frac{p}{2k}$的极小值是 1.62 而不是 1.0。

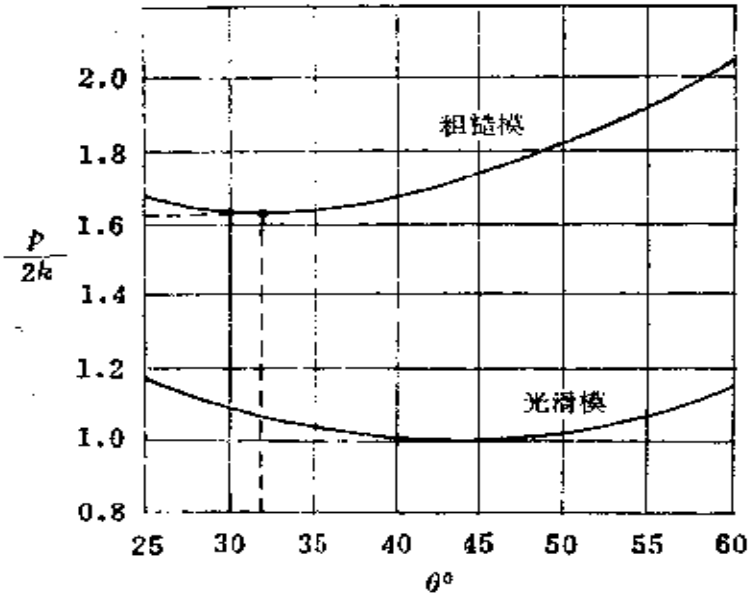


图 7.10 挤压力与角 θ^0 之间的关系

二、$\frac{H}{h}=2$ 的对称方形模

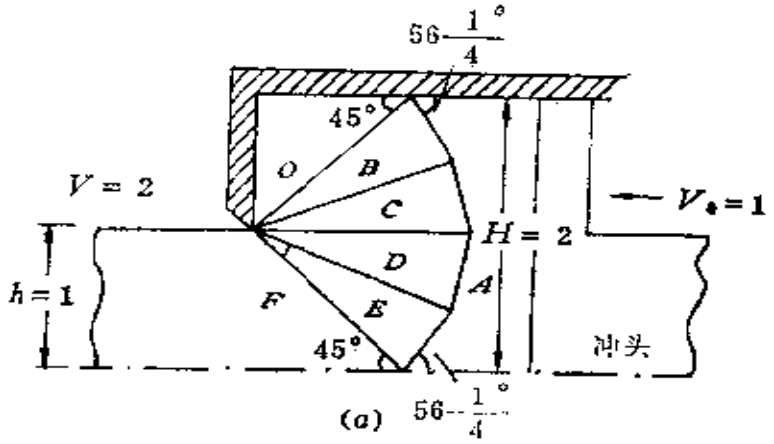
根据滑移线场所得的解为

$$\frac{p}{2k}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=1.285$$

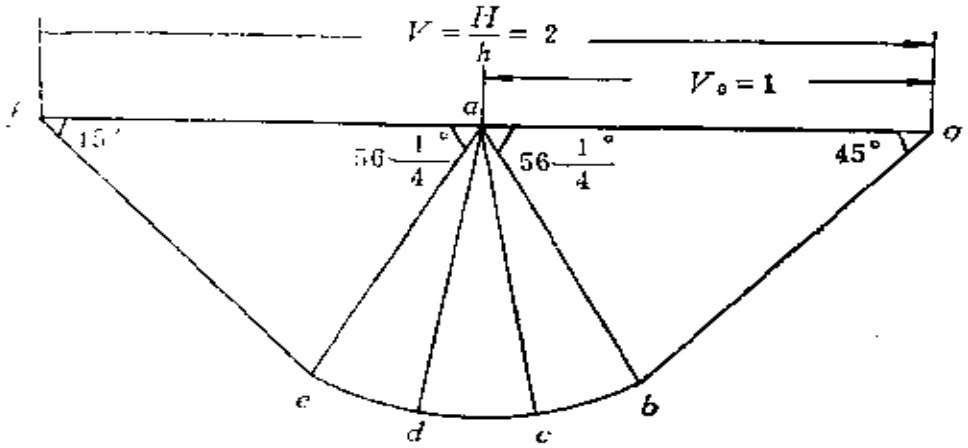
现在用不同个数的三角形刚性块进行上限法计算。

1. 图 7.11a 是将中心扇形等分为四个等腰三角形，相应的速端图如图 7.11b 所示。由图（a）中可知

$\overline{OB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\sqrt{2}$，$\overline{OB}$ 为 O 区与 B



(a)



(b)

图 7.11 (a) 通过对称方形模的挤压 (b) 速端图

区交线的长度。

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AE} = 2\sqrt{2}\sin 11\frac{1}{4}°$$

$$\overline{ab} = \overline{ac} = \overline{ad} = \overline{ae} = \sin 45° \frac{1}{\sin 78\frac{3}{4}°} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin 78\frac{3}{4}°}$$

$$\overline{ob} = \overline{ef} = \sin 56\frac{1}{4}° \frac{1}{\sin 78\frac{3}{4}°},$$

$$\overline{bc} = 2\overline{ab}\sin 11\frac{1}{4}^\circ = \sqrt{2}\,\frac{\sin 11\frac{1}{4}^\circ}{\sin 78\frac{3}{4}^\circ}.$$

塑性耗散功率 $\dot{W} = \sum kSV^*$

$$\dot{W} = P\cdot 2\cdot 1 = k[OB\cdot\overline{ob} + BC\cdot\overline{bc} + CD\cdot\overline{cd} + DE\overline{de}$$
$$+ EF\overline{ef} + AB\,\overline{ab} + AC\cdot\overline{ac} + AD\overline{ad} + AE\,\overline{ae}]$$

OB 为 O 区与 B 区交线长度，沿此交线有切向速度分量突变，其突变值为 $dV_t = V_{OB}^* = \overline{ob}$，而其法向速度分量是连续的，$O$ 区是死角区，位移速度为零，$\overline{ob} /\!/ OB$ 同理 $BC /\!/ \overline{bc}$，$CD /\!/ \overline{cd}$……

$$\dot{W} = 2p = k[OB\cdot\overline{ob} + EF\,\overline{ef}) + BC(\overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de})$$
$$+ AB(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ad} + \overline{ae})]$$
$$= k[2OB\overline{ob} + 3BC\overline{bc} + 4AB\overline{ab}]$$
$$= k\left[2\sqrt{2}\,\frac{\sin 56\frac{1}{4}^\circ}{\sin 78\frac{3}{4}^\circ} + 14\cdot\frac{\sin 11\frac{1}{4}^\circ}{\sin 78\frac{3}{4}^\circ}\right] = 5.18k$$

故 $$p = 2.59 \quad 或 \quad \frac{p}{2k} = 1.295.$$

2. 按图 7.12 进行计算

BC 是水平线，B 区三角形与速端图中 $\triangle oab$ 相似，C 区三角形与速端图中 $\triangle acb$ 相似。

首先计算变形区内三角形的各边长度，设 BC 的长度为 X，由此得

$$OB = \frac{1}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \csc\alpha, \quad BC = X$$

$$CD = \frac{1}{\cos(90^\circ - \beta)} = \frac{1}{\sin\beta} = \csc\beta,$$

$$AB = \sqrt{OB^2 + BC^2 - 2OB \cdot BC\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{X^2 + \frac{1}{\sin^2\alpha} - 2X\operatorname{ctg}\alpha}$$

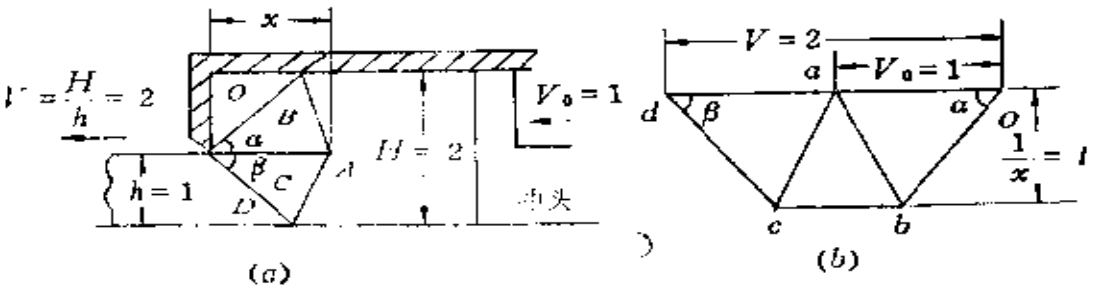


图 7-12 通过对称方形模的挤压

$$AC = \sqrt{X^2 + \frac{1}{\sin^2\beta} - 2X\operatorname{ctg}\beta}$$

速端图上各矢量长度可根据相似三角形计算

$$\overline{ob} = \frac{OB}{X}, \quad \overline{ab} = \frac{AB}{X}, \quad l = \overline{ob}\sin\alpha = \frac{OB}{X}\sin\alpha = \frac{1}{X},$$

$$\overline{dc} = \frac{DC}{X}, \quad \overline{ac} = \frac{AC}{X}$$

$$\overline{bc} = 2 - \overline{ob}\cos\alpha - \overline{cd}\cos\beta = 2 - \frac{1}{X}\operatorname{ctg}\alpha - \frac{1}{X}\operatorname{ctg}\beta$$

塑性耗散功率 $\dot{W} = 2p \cdot 1 = \Sigma k S V^*$

$$\dot{W} = 2p \cdot 1 = k[OB \cdot \overbrace{ob} + BC \cdot \overbrace{bc} + CD \cdot \overbrace{cd} + AB \cdot \overbrace{ab} + AC \cdot \overbrace{ac}]$$

$$\dot{W} = \frac{k}{X}\left(4X^2 - 3X\operatorname{ctg}\alpha - 3X\operatorname{ctg}\beta + 2\csc^2\alpha + 2\csc^2\beta\right)$$

选 X，α、β 参数，使 $\dot{W}$ 为极小值

当 $\dfrac{\partial \dot{W}}{\partial X} = 0$，$X = \sqrt{\dfrac{16}{7}} = 1.51$

当 $\dfrac{\partial \dot{W}}{\partial \alpha} = 0$，$\dfrac{\partial \dot{W}}{\partial \beta} = 0$ 得 $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{3}{4}X$

代入 $\dot{W}$ 计算式内则得

$$\frac{p}{2k} = \frac{\dot{W}}{2k \cdot 2} = \frac{\sqrt{7}}{2} = 1.32$$

如果将中心扇形等分成 6 个等腰三角形，则$\dfrac{p}{2k} = 1.29$，这说明中心扇形分得愈细，则计算结果和滑移线理论值愈近。计算的最大误差约为 16%。

用滑移线法及上限法计算的结果列表如下：

	滑移线场法	上限法	
		图 7.11	图 7.12
$\dfrac{p}{2k}$	1.285	1.295	1.32

例 4. 如图 7.13 所示，边长为 $2b$ 的正方形截面中间有半径为 a 的圆孔的受压容器，在圆孔中受内压 p 的作用，试按上、下限定理求出此受压容器极限载荷的上、下限。(a) 图中虚线为静定容许场的应力间断线；(b) 机动容许场沿径向应变速度为$\dfrac{v_r}{r}^k$。

设 $\int \ln\cos x\,dx$

$$= -x\ln 2 + \frac{\sin^2 x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 6x}{18}。$$

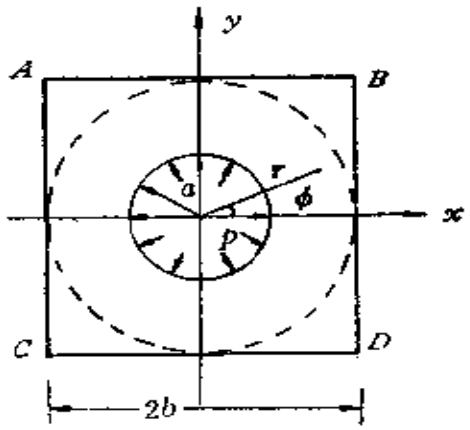


图 7.13 受压容器的示意图

解：

为了求出下限解，可以取下列的不连续应力状态：引入一个假想的，半径为 b 的圆周。在区域 $a\leqslant r\leqslant b$ 中，取相当于圆管极限状态的轴对称的应力场（相应的极限压力以 p_s 表示），在图 7.13 中虚线表示的角中的应力将认为等于零，显然，平衡方程式和边界条件都是满足的，任何地方都未破坏屈服条件。根据增加材料不能降低极限载荷的道理，可知

$$p^*\geqslant p_s$$

而

$$p_s = 2k\ln\frac{b}{a}$$

故本题下限解为 $2k\ln\dfrac{b}{a}$

上限解：

令径向位移速度为

$$\dot{v}_r{}^k = \frac{C}{r} = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

此时有

$$\dot{u}^k = \dot{v}_r{}^k\cos\theta = \frac{Cx}{x^2+y^2}$$

$$\dot{v}^k = \dot{v}_r{}^k \sin\theta = \frac{C y}{x^2 + y^2}$$

故由此得

$$\dot{\varepsilon}_x{}^k = \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial x} = \frac{C(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\dot{\varepsilon}_y{}^k = \frac{\partial \dot{v}^k}{\partial y}$$

$$\dot{\gamma}_{xy}^k = \frac{\partial \dot{u}^k}{\partial y} + \frac{\partial \dot{v}^k}{\partial x} = -\frac{4C xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

由体积不变假设，应有

$$\dot{\varepsilon}_x{}^k + \dot{\varepsilon}_y{}^k = 0$$

由应变圆图可得

$$\left.\begin{matrix}\dot{\varepsilon}_1{}^k \\ \dot{\varepsilon}_2{}^k\end{matrix}\right\} = \frac{\dot{\varepsilon}_x{}^k + \dot{\varepsilon}_y{}^k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{\varepsilon}_x{}^k - \dot{\varepsilon}_y{}^k}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot{\gamma}_{xy}^k}{2}\right)^2}$$

$$\dot{\gamma}^k{}_{\max} = \dot{\varepsilon}_1{}^k - \dot{\varepsilon}_2{}^k = 2\sqrt{\frac{(\dot{\varepsilon}_x{}^k - \dot{\varepsilon}_y{}^k)^2}{4} + \frac{(\dot{\gamma}_{xy}^k)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{(\dot{\varepsilon}_x{}^k - \dot{\varepsilon}_y{}^k)^2 + (\dot{\gamma}_{xy}^k)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4C^2(y^2 - x^2)^2 + 16C^2x^2y^2}{(r^2)^4}} = \frac{2C}{r^2}$$

$$\dot{w}^{pk} = \sigma_{ij}{}^k \dot{\varepsilon}_{ij}{}^k = k\dot{\gamma}^k{}_{\max} = \frac{2kC}{r^2}$$

在 $r = a$ 处，$\sigma_r = -p$，$\dot{v}_r{}^k = \dfrac{C}{a}$

在板的四周 $\sigma_x = \sigma_y = 0$。

$$p\frac{C}{a}\oint ds \leqslant \int\int \frac{2kC}{r^2}\,dx\,dy$$

$$2\pi pC \leqslant 2kC \int\int \frac{r\,d\theta\,dr}{r^2}$$

$$= 8kC \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_a^{b\sec\theta} \frac{dr}{r}$$

$$= 8kC \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\frac{b}{a}\sec\theta\right) d\theta$$

$$= 2\pi kC \left[\ln\frac{b}{a} + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sec\theta\, d\theta \right]$$

由于 $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sec\theta\, d\theta = \theta\ln 2 - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 4\theta}{8} - \frac{\sin 6\theta}{18}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{18} \right) = 0.0999$$

由此 $$2\pi p \leqslant 2k2\pi\left(\ln\frac{b}{a} + 0.0999\right)$$

即 $$p \leqslant 2k\left(\ln\frac{b}{a} + 0.0999\right)$$

故有 $$2k\ln\frac{b}{a} \leqslant p \leqslant 2k\left(\ln\frac{b}{a} + 0.0999\right)$$

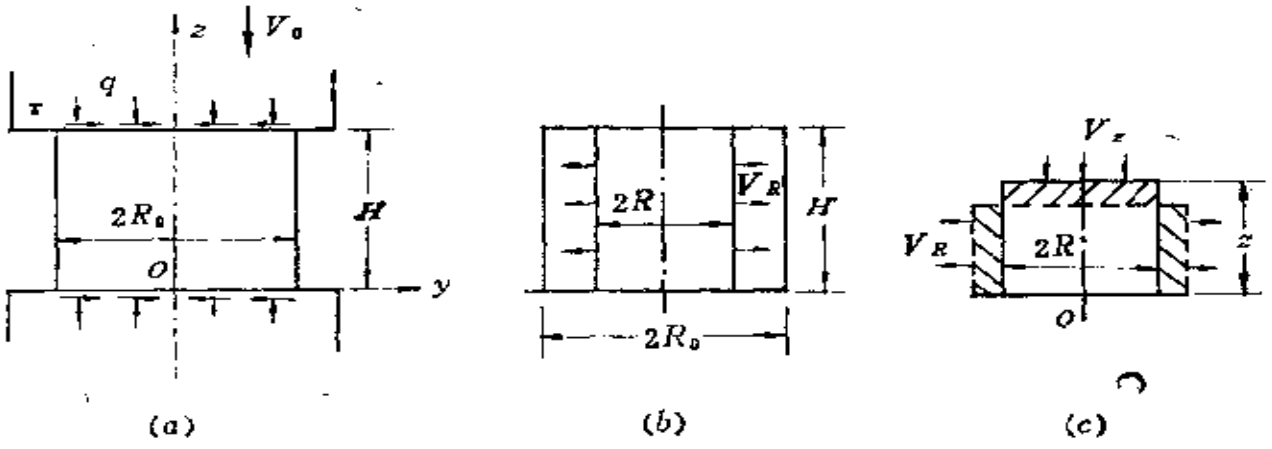
例 5. 圆柱坯料镦粗

应用极值原理的上限法可以较简便地计算出圆柱形坯料镦粗情况下的变形力和功率。

设在镦粗过程中，坯料变形后仍保持为圆柱体。取圆柱坐标系，令 Z 轴和坯料中心轴重合，如图 7.14 所示。如上锤砧向下移动的速度为 V_0，和原点 O 相距为 z 的平截面向下移动的速度为 V_z，则

$$V_z = \frac{z}{H} V_0 \tag{i}$$

在坯料内取出半径为 R、高为 z 的圆柱体如图 7.14c 所示，



(a) (b) (c)

图 7.14 圆柱体镦粗

此圆柱体在变形过程中上端面向下移动速度为 V_z，而圆柱体侧面径向移动速度为 V_R，根据体积不变的原则应有

$$-\pi R^2 V_z = 2\pi R Z V_R$$

$$V_R = \frac{-R}{2z} V_z = \frac{-R}{2H} V_0 \tag{ii}$$

因为已经假定坯料变形前后均为圆柱体，故同一半径 R 处的径向移动速度 V_R 均相同（即 V_R 与 z 坐标的位置无关）。

圆柱体内应变速度可以计算如下：

$$\dot{\varepsilon}_R = \frac{\partial \varepsilon_R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_R}{\partial R}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial u_R}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial V_R}{\partial R} = \frac{-V_0}{2H} \tag{iii}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_R}{\partial t} = -\frac{V_0}{2H} \quad 或 \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{V_R}{R} = -\frac{V_0}{2H}$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{H} V_0\right) = \frac{V_0}{H}$$

$$\dot{\gamma}_{R\theta} = \dot{\gamma}_{\theta z} = \dot{\gamma}_{zR} = 0 \qquad \text{(iv)}$$

式（iii）满足体积不变条件，即

$$\varepsilon_R + \dot{\varepsilon}_\theta + \dot{\varepsilon}_z = -\frac{V_0}{2H} - \frac{V_0}{2H} + \frac{V_0}{H} = 0$$

单位体积的塑性变形功率为 $d\dot{W}$

$$d\dot{W} = \sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + \sigma_z \dot{\varepsilon}_z + \tau_{xy}\dot{\gamma}_{xy} + \tau_{yz}\dot{\gamma}_{yz} + \tau_{zx}\dot{\gamma}_{zx}$$

$$= \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = s_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}$$

但

$$d\dot{W} = s_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda(2k^2) = \frac{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}}{k\sqrt{2}}(2k^2)$$

$$= k\sqrt{2}\sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}$$

对于圆柱体镦粗（用圆柱坐标系），其单位体积塑性变形功率为

$$d\dot{W}_1 = k\sqrt{2}\sqrt{\dot{\varepsilon}_R^2 + \dot{\varepsilon}_\theta^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 + \frac{1}{2}(\dot{\gamma}_{r\theta}^2 + \dot{\gamma}_{\theta z}^2 + \dot{\gamma}_{zr}^2)}$$

$$= k\sqrt{2}\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1^2}\ \frac{V_0}{H}$$

$$= k\sqrt{2}\sqrt{\frac{6}{4}}\ \frac{V_0}{H} = \sqrt{3}\,k\,\frac{V_0}{H}$$

总塑性变形功率为

$$\dot{W}_1 = \int_V \sqrt{3}\,k\,\frac{V_0}{H}dv = \sqrt{3}\,k\,\frac{V_0}{H}(\pi R_0^2 H)$$

$$= \sqrt{3}\,k\pi R_0^2 V_0 \qquad \text{(v)}$$

如在变形过程中坯料上下端面与锤砧接触面上摩擦阻力所耗散的功率为 $\dot{W}_2$，$\dot{W}_2=\Sigma(-\tau V^* S)$，$\tau$ 与 V^* 方向相反，故应加负号。坯料和工具的相对运动速度为 V^*，

$$V^*=V_R=-\frac{R}{2H}V_0$$

设摩擦应力 τ 为常数，所以

$$\dot{W}_2=2\int_s -\tau V_R\,ds=2\int_s(-\tau)\left(-\frac{R}{2H}V_0\right)ds$$

$$=\frac{\tau}{H}V_0\int_0^{R_0}R2\pi R\,dR$$

$$=\frac{\tau}{H}V_0(2\pi)\frac{1}{3}R^3\Big|_{R=0}^{R=R_0}=\frac{2\pi}{3}\frac{\tau V_0}{H}R_0^3 \qquad \text{(vi)}$$

外力所作的功率为 PV_0，根据虚功原理可得

$$PV_0=\dot{W}_1+\dot{W}_2=\sqrt{3}k\pi R_0^2V_0+\frac{2\pi}{3}\frac{\tau V_0}{H}R_0^3 \qquad \text{(vii)}$$

设 $\tau=\mu\cdot 2k$

$P=\pi R_0^2 q_m$，q_m 为接触面上平均单位压力。

$$q_m=\sqrt{3}k+\frac{2}{3}\frac{\mu\cdot 2k}{H}R_0=\sqrt{3}k\left(1+\frac{4\mu}{3\sqrt{3}}\frac{R_0}{H}\right) \qquad \text{(viii)}$$

根据 Mises 屈服条件 $k=\left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\right)$，$\sigma_s=\sqrt{3}k$

可得

$$q_m=\sigma_s\left(1+\frac{4\mu}{3\sqrt{3}}\frac{R_0}{H}\right) \qquad \text{(ix)}$$

在粗糙摩擦条件下可令 $\mu=0.5$，$\tau=k$ 则 (ix) 式将为

$$q_m=\sigma_s\left(1+\frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{D_0}{H}\right)。$$

第七章　习　题

1．已知顶部被削平的对称楔体，有如图 7.15 所示四根速度间断线，试求此时极限载荷的上限。

2．已知金属矩形块厚为 $2h$，在刚性光滑平板间压缩，板宽为 $2w$，以单位速度移动，如图 7.16 所示，交叉线代表速度不连续线，与台板相交的角为 θ，如伸出部分为刚性，试求极限载荷 q。

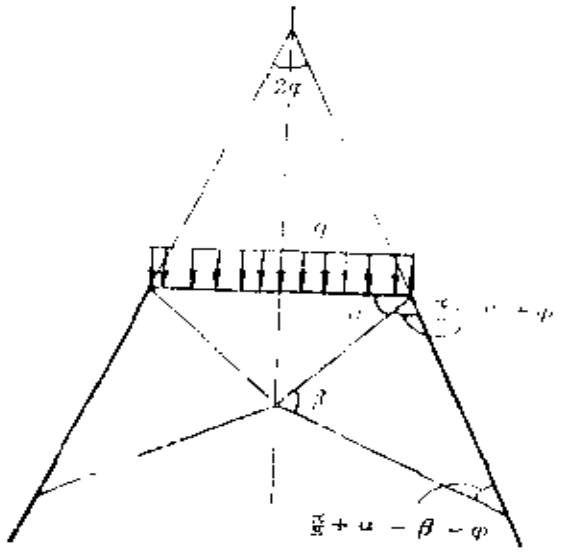


图　7.15

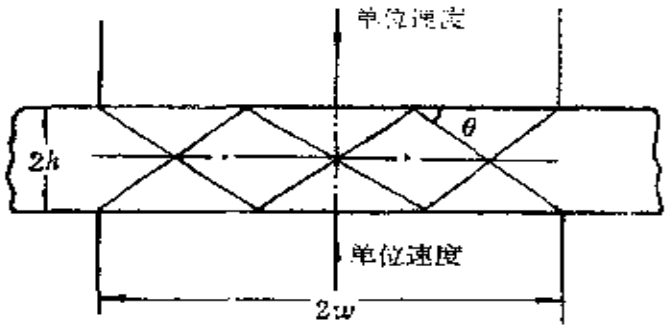


图　7.16

3．图 7.17 所示的矩形长条，宽为 b，厚为 h，裂纹宽度为 a，二端用合力 P 拉伸，利用上下限定理，证明极限拉力为 $P=\sigma_s h(b-a)$（机动场可用图示的速度间断场）。

4．图 7.18 所示的半无限平面上的压模受集中力 P 的作用，已作出某种应力分布如图所示（图中的 0 表示零应力），试问这个应力场是否是静力容许的？

5．宽为 b 的半无限长条，上面作用着宽为 h 的压模，压模上

作用着集中力 P，对于图 7.19 所示的二种机动场，当 $b=3h$ 及 $b=4h$ 时，比较二种方案并求出的上限 P^* 那一个较好？

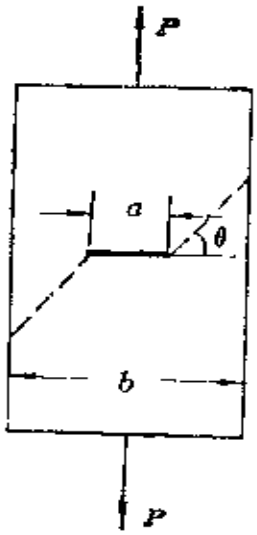


图 7.17

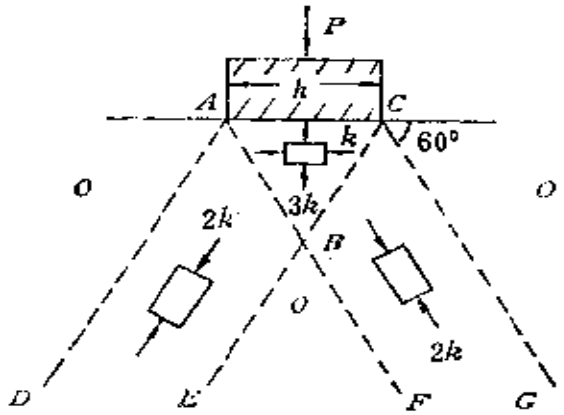
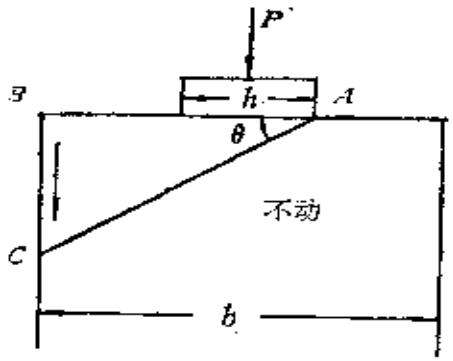
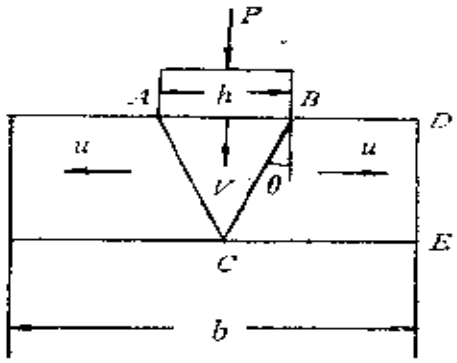


图 7.18



(a)



(b)

图 7.19

6. 如图 7.20 所示顶角为 2ψ 的纯角楔体，在楔体一侧受均布载荷 p 的作用，图 7.20a 表示静定容许场，图 7.20b 表示机

动容许场，试按上下限定理求出极限载荷 p。

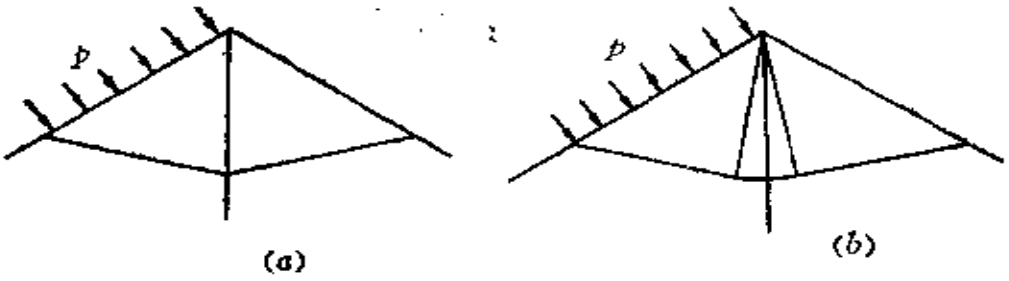


图 7.20

7. 图 7.21 所示是平面应变拉拔通过一半角为 20° 的光滑模，缩减率为 0.19，图中绘制了速度不连续型样，试对此型样作速端图，并据以计算拉拔应力的上限。

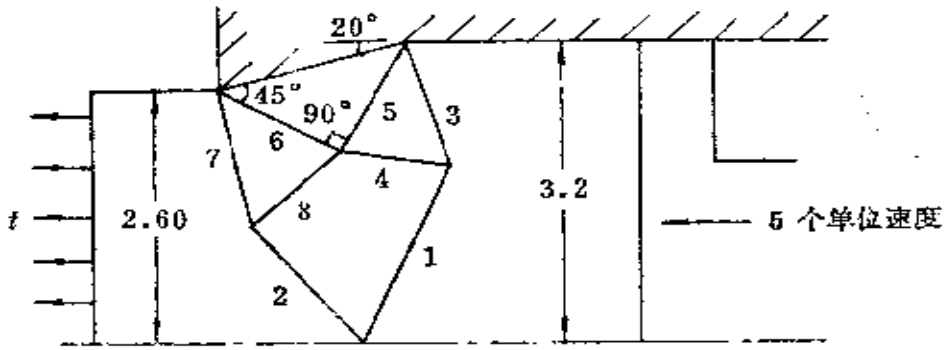


图 7.21

8. 设已知受剪板的厚度为 h，受剪力 P 的作用，试按图 7.22 所示的静定容许场，试求出此板的极限剪断力 P 的下限的值。

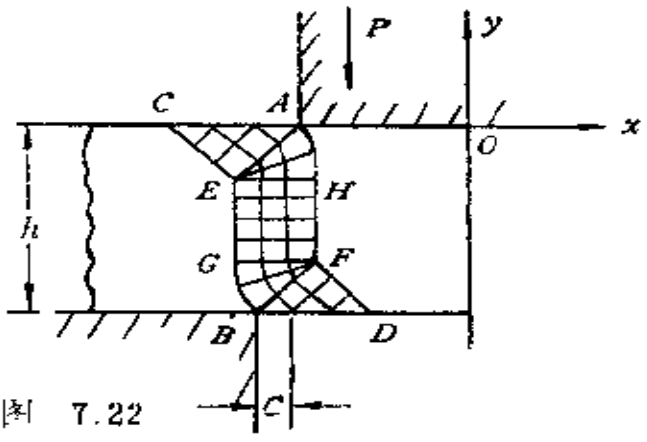


图 7.22

9. 试按图 7.23a.b. 所示的平面挤压速度间断线求出平面挤压力 P 的上限值。

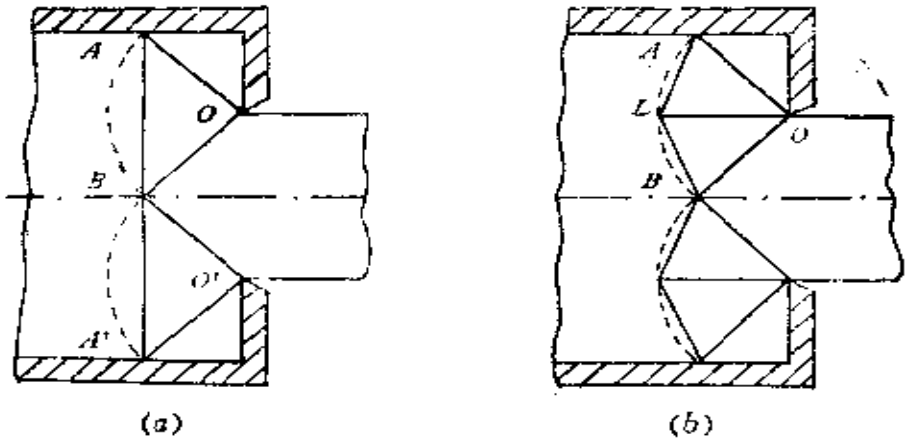


图 7.23

10. 当金属冲头压入金属内部时，试按如图 7.24 所示的速度间断线，求出压力 q 的上限表达式。

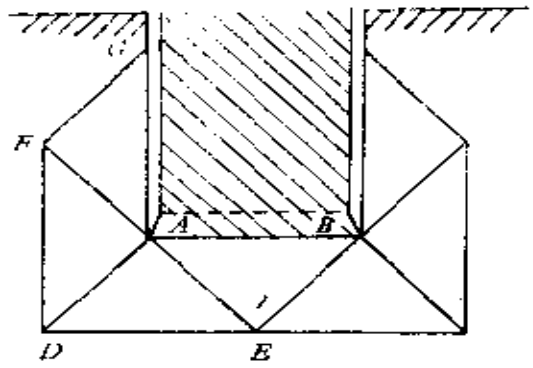


图 7.24

习 题 答 案

1. $q=2k\frac{\cos(\beta-\alpha)}{\cos\alpha\sin\beta}$；当 $\psi=\frac{\pi}{6}$ 时 $\alpha=49°$，$\beta=68°$，$q\simeq 2k\times 1.55$ 由滑移场所得结果为 $q=2k\left(1+\frac{\pi}{6}\right)=2k(1.525)$，相差为 $\frac{1.550-1.525}{1.525}=1.6\%$。

2. $q=\frac{2k}{\sin 2\theta}=k(\mathrm{tg}\theta+\mathrm{ctg}\theta)$。

3. 上限解：$P=\sigma_s(b-a)h$，下限解：$P=\sigma_s(b-a)h$
由于上、下限极限载荷相等，故 $P=\sigma_s(b-a)$ 是真实的极限载荷。

4. 这个应力场是静力容许的。

5. 方案 (a)：$P=\frac{k(b+h)}{\sin 2\theta}$ 取 P 的最小值得 $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\frac{P^*}{kh}=1+\frac{b}{h}=\begin{cases}4, & (b=3h)\\ 5, & (b=4h)\end{cases}$$

方案 (b)：$\frac{P^*}{kh}=2\sqrt{1+\frac{b}{h}}=\begin{cases}4, & b=3h\\ 2\sqrt{5}=4.47, & b=4h。\end{cases}$

当 $b=3h$ 时二种方案的结果是一样的，当 $b=4h$ 方案 (b) 的结果较好。

6. (a) $2k(1-\cos 2\psi)$，　(b) $2k(1+2\psi-\frac{\pi}{2})$。

7. $\frac{t}{k}=0.34$。

8. $P=(h-ac)k$，其中 $a\cong 0.82$，
$P=(h-c)h$。

9. (a) $\frac{p}{2k}=1.29$，(b) $\frac{p}{2k}=1.33$。

10. $q=10k$。

第八章　塑性极限分析

§ 8.1　极限分析的假设及其任务

由于外载荷的逐渐增加，结构将由弹性状态进入塑性状态，最后进入极限状态，此时结构在极限载荷的作用下，变形将无限制地增长。有时极限分析也称为结构破损状态的分析。极限分析的计算可以用两种不同的方法进行：一种方法是由弹性状态开始通过弹塑性阶段，最后达到极限状态。但是这种办法是很麻烦的，至今只有较简单的问题得到了解决。另一种方法是极限分析的办法，即只考虑结构的极限状态，而忽略中间弹塑性过渡的过程。两种方法所得到的最后结果应该是一样的。而在后一方法中，当分析梁时，我们将使用塑性铰的概念。塑性变形只能在塑性铰处发生，此处梁的曲率变化可以任意增长，由于曲率变化率出现不连续，就好像一个铰一样，故称为塑性铰。塑性铰和普通铰（普通结构上的铰）不完全相同。其相同处是铰两边的截面可以发生有限的相对转角。其区别有两点：即普通铰所受的弯矩为零，而塑性铰却能承受塑性弯矩 M_p；其次，普通铰是双向铰，相对转角可以沿两个方向自由转动，塑性铰是单向铰，只能沿一个方向自由转动。因此塑性弯矩的方向总是与转角的方向一致的。塑性铰为单向铰，是由于材料屈服造成的。当变形方向与应力方向一致时，则可以发生自由塑性变形。如果变形方向与应力方向相反时，则材料又将处于弹性状态，而不能自由变形。这种只考虑极限状态的方法在计算上比前种方法要简单得多，而在实际问题中却又有一定的意义，因此近年来获得了较大的发展。在极限分析中，我们采取了下面几个假定：

1. 材料是理想刚塑性的，即不考虑强化效应。

2. 变形足够小，变形前后都能使用同一个平衡方程。

3. 在获得极限载荷前，结构不失去稳定性。

4. 塑性铰并不影响塑性弯矩的传递，弯矩可以由铰的一端传到另一端。

5. 所有荷载都按同一比例增加，即为简单加载。

在极限分析中，主要应该求出极限载荷的大小，即要知道结构在极限状态下，能承受多大的载荷，如果超过这个载荷值，结构即将破坏。其次应该求出结构在极限状态下弯矩（或力）的分布图，从而根据这个弯矩图进行更合理的结构设计。在这个基础上应该知道已知的结构在极限状态下将按什么形式破坏。在极限分析中应该满足平衡条件，这一点与弹性分析是一样的，即外载荷必须要由相应的反力来支承。但在弹性分析中，应该满足转角和挠度的连续条件，而在极限分析中，塑性铰的出现破坏了连续条件。但是这里却要求满足破坏机构条件，即结构（或其中部份）必须破坏才能求出相应的极限载荷。另外在弹性分析中结构上的应力不应超出弹性极限（或只有某一点达到了这个值）。但在塑性分析中却可能有几个点都达到了极限值即塑性弯矩的值，当然在理想刚塑性体的情况中不能超过塑性弯矩的值。

为了更清楚地了解弹性分析和极限分析的差别，现以均布载荷固支梁为例，作出下面一个表（图 8.1）。

在极限分析中，如果同时能满足平衡条件，破坏机构条件及塑性弯矩条件，则所得到的解答即为极限分析的全解。而所得到的极限荷载也就是真实的极限荷载。但是在较复杂的结构中，一般说来不大容易同时满足这三个条件，因而只能求出极限载荷的上限或下限。

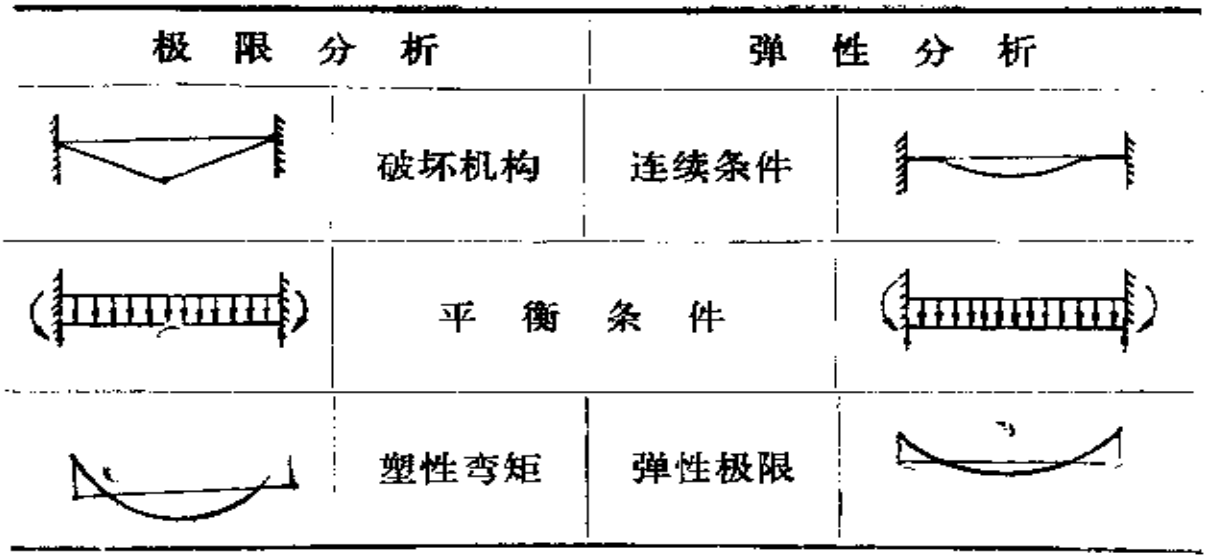


图 8.1

§ 8.2 计算极限载荷的方法

现在让我们先来讨论一下计算极限载荷的方法。这里有三种计算极限载荷的方法：静力法，破坏机构法（或称机动法）以及简化屈服条件法。在静力法中，我们将放松对破坏机构条件的要求而只要求满足平衡条件及塑性弯矩条件，因而在这样荷载作用下，结构并不一定破坏。这样所求出的极限载荷只能比实际载荷小。在这个方法中我们将假设一个满足 $M \leqslant M_p$ 条件的弯矩图。然后通过平衡方程求出极限载荷。当然如果这时在结构上，能够有足够的塑性铰，从而使它形成破坏机构时，所求得的结果才是真实的极限载荷的值。在破坏机构法中，我们将放松对塑性弯矩的要求而只要求满足平衡条件及破坏机构条件。我们将假设某一个破坏机构，而利用平衡方程去求出极限载荷的值。这样所求出的值，只能比实际载荷大。当然如果它还能满足塑性弯矩条件时，则所获得的解将是真实的解。简化屈服条件法则将放松对屈服条件的要求，使问题能够比较容易地获得解答。

一、静力法

为了寻找满足 $M \leqslant M_p$ 的弯矩图，并且能使结构形成破坏机构，需按如下步骤进行求解。

（1）将超静定结构化成静定结构，并确定超静定值。

（2）将所化成的静定结构，根据外载荷的作用形式，画出弯矩图。

（3）画出超静定值所引起的弯矩图。

（4）将弯矩图叠加起来，并使结构形成破坏机构。

（5）画出破坏机构。

（6）解平衡方程，从而求出极限载荷。

（7）检查是否满足破坏机构条件。

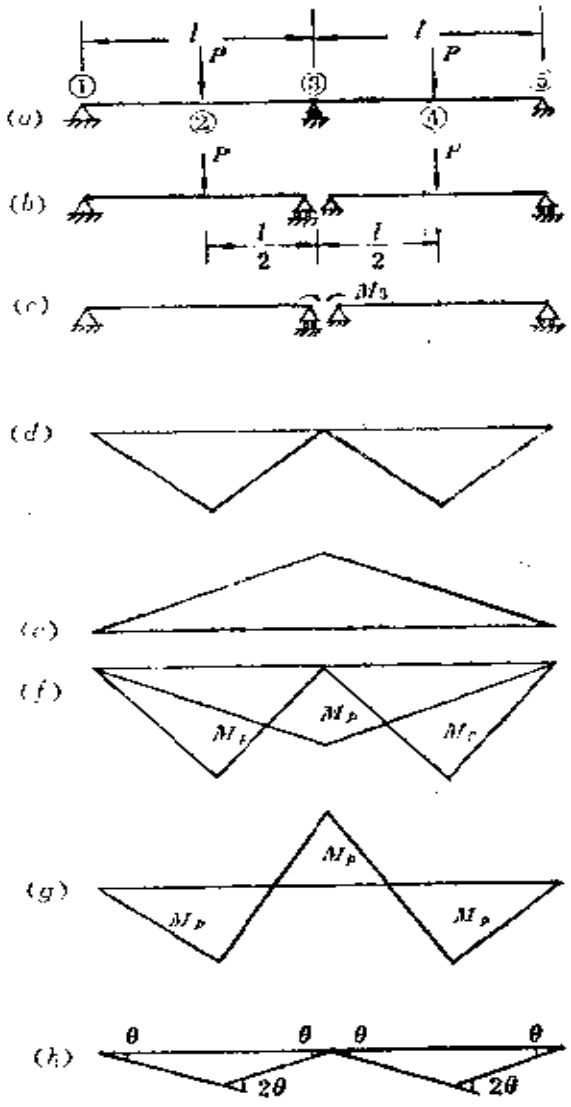


图 8.2 受集中载荷作用的连续梁

为了说明静力法的使用方法，现研究一下受两个集中载荷作用下的连续梁。图 8.2a 这个结构是一次超静定的。我们选择在点③处的弯矩为超静定值，这样，便将连续梁分成了两个静定的简支梁。这两个简支梁在载荷 P 作用下的弯矩图将如图 8.2d 所表示那样，其最大弯矩值为 $\frac{Pl}{4}$，而超静定值 M_3 在这两个梁上作用所引起的弯矩图将如 8.2e 所示。将这两个弯矩图叠加后则得图 f，如果在 ② ③ ④ 三点弯矩

都等于塑性弯矩时，则结构即将破坏，从而形成破坏机构。这样我们根据图 8.2f 上 ② 点的弯矩值，可以得到下列方程式：

$$\frac{Pl}{4}=M_p+\frac{M_p}{2}$$

因此

$$P=\frac{6M_p}{l} \tag{8.1}$$

由于在载荷 P 的作用下，结构能形成破坏机构，即满足破坏机构条件，因而公式按（8.1）所求到的值将是准确的值。

二、破坏机构法

为了寻找结构的破坏形式，并且使它满足塑性弯矩条件，即要求 $M\leqslant M_p$，需按如下步骤进行求解。

（1）确定结构上可能出现塑性铰的位置。一般是在集中载荷作用的地方、联结的地方、支承地方以及当均布载荷作用时剪切力为零的地方。

（2）画出可能的破坏机构。

（3）按照破坏机构，根据虚功原理，求出极限载荷。

（4）检查 $M\leqslant M_p$ 的条件。

为了说明机动法的使用方法，我们仍举前面受集中载荷作用下连续梁的例子。第一步，我们应该确定塑性铰的位置，在这个问题中塑性铰将出现在 ② ③ ④ 三个截面上。因为结构是对称的，因此只有一种破坏机构的形式（如图 8.2h）。设在 ① 点的转角为 θ，则根据几何关系可以算出在 ② ③ ④ 各点的转角皆为 2θ。设在点 ② 及 ④ 处的位移为 $\triangle$，因而外力功 W_E 将为 $P\cdot\triangle$ 而 $\triangle$ 又可通过下式算出

$$\triangle_2=\triangle_4=\frac{L}{2}\cdot\theta$$

因此总外力将为

$$W_e = P\cdot\left(\frac{L}{2}\cdot\theta\right)+P\left(\frac{L}{2}\cdot\theta\right)$$

因为结构是刚塑性的，所以内力功只计算在塑性铰上的功就行了。按照图 8.2f 的破坏形式，整个内力功将为

$W_i =$	$M_p\times 2\theta$		$+M_p\times 2\theta$		$+M_p\times 2\theta$	
	截面 2 的塑性弯矩	截面 2 的转角	截面 3 的塑性弯矩	截面 3 的转角	截面 4 的塑性弯矩	截面 4 的转角

根据内力功等于外力功的虚功原理可以得到

$$2\cdot\frac{Pl}{2}\cdot\theta = 3M_p(2\theta)$$

因此

$$P=\frac{6M_p}{L}$$

当然这个值与（8.1）式所得的结果完全一样，因此这个解是准确的解。

三、简化屈服条件法

简化屈服条件法在极限分析理论中是一个很有发展前途的方法。因为它可以根据实际情况将屈服条件加以简化，使复杂的非线性屈服条件线性化，从而获得问题的近似解答。这个方法的依据是：在结构的任何部分提高材料的屈服极限不会降低结构的承载能力，而在结构的任何部分降低材料的屈服极限不会提高结构的承载能力。对于复杂结构的屈服条件的数学表达式往往是非线性的，如果将它和复杂结构的平衡偏微分方程联合求解，经常在数学上遇到很大的困难。因此把非线性的屈服条件用线性屈服条件代替，从而找到复杂结构的完全解是求解极限载荷上、下限的有效方法。如图 8.3 所示的屈服条件中，如曲线 a 为实际的屈服条件，内接多边形

b 为线性化了的近似屈服条件，外接多边形 c 也是近似的屈服条件，这时按 b 计算的极限载荷将不大于真实的极限载荷，而按 c 计算的极限载荷将不小于真实的极限载荷。

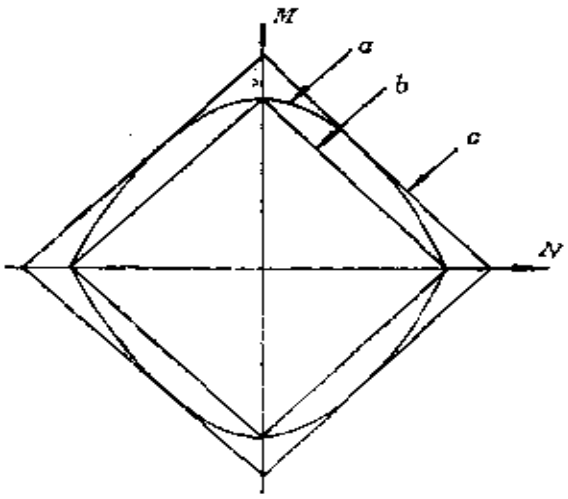


图 8.3　极限载荷曲线及其简化图

§ 8.3　极限分析中的上下限定理

前面所举的例子是比较简单的，而且实际上考虑了一切可能的内力图及机动可能的位移图。然而在较复杂的情况下，却很难考虑一切可能的情况，而往往只可能找出极限载荷的上限和下限。因此除了平衡条件外，可以将破坏机构条件及塑性弯矩条件放弃一个。从而得到极限荷载的上限或下限。凡是满足平衡方程及边界条件，并且不破坏塑性弯矩条件的应力场称为静力容许场，它们不一定是实际产生的应力场。每一个这样的静力容许场都对应一个极限载荷的值，而且可以证明任何一个这样载荷值都不会大于极限载荷。因此，我们如果有几个这样的值则应该选取其中最大的一个。因为它最接近真实的极限载荷。在最好的情况下，将等于实际载荷。这里我们注意到并没有考虑到变形的问题，因而放松了对破坏机构条件

的要求，即在这种载荷作用下，结构并不破坏。另一方面，不在几何方面引起矛盾，并且使外力作正功的位移场称为机动容许场，但它并不一定就是极限状态时的位移。这样的位移会产生变形，而变形与内力所做的功称为内力功，由于变形与内力的方向是一致的，因而内力功总是正值，利用内力功与外力功相等的原理，就可以算出载荷的数值。而且这个数值不会小于真实的极限载荷。因此在这种情况下，应该选取其中最小的一个，因为它最接近实际破坏时的载荷，在最好的情况下，将等于实际载荷。这里我们没有提到塑性弯矩条件，因而在有些情况下，可能超出了这个值，即破坏了静定容许条件。

现在我们再将上下限定理用下列形式写出：

下限定理

设满足平衡条件而且不破坏塑性弯矩条件的应力场，它能和外载荷平衡，则这个外载荷不会比极限载荷大。即在所假设的不比塑性弯矩大的弯矩分配图所计算出来的载荷，总将小于实际载荷。

上限定理

假设存在着一个机动容许场，它使外载荷所做的功不小于内部变形所做的功，则这个外载荷不会比极限载荷低。即在所假设的破坏机构下，计算出来的载荷总是比实际载荷大。

下限定理指出，物体能依赖材料的理想塑性性质以最有利的形式来承担载荷。通过它可以计算结构承载能力的下限。

上限定理指出，如果存在着破坏途径，也就是存在着内力功不比外力功大的变形状态，结构将要破坏，通过它可以计算结构承载能力的上限。

如果一个载荷既是极限载荷的上限，又是它的下限，则这个载荷便是真实的极限载荷。在极限分析中，除了应用上下限定理求出极限载荷的上下限的方法外，还可以通过简化屈服面来找到问题的完全解，即以相应于外切屈服面上的上限解作为上限，而以内接屈

服面的下限解作为下限，虽然这种作法可能使上、下限距离很大，但通过这种方法却可以处理许多比较复杂的问题。

上、下限定理可以用虚功原理来证明。设 P 表示单位载荷，而载荷 m_sP 将引起一个静力容许的应力场，这里 m_s 称为静力载荷参数，如果 m_s 是单调增长的，则载荷变化的情形称为简单加载。在实际载荷 mP 的作用下将出现弯矩 M_i，转角 θ_i 及位移 W。根据虚功原理，可将实际弯矩及静定容许弯矩在实际转角 θ 上所做的功写成如下形式：

$$\sum M_i\theta_i = \int mPW\,dx$$

$$\sum M_i^s\theta_i = \int m_sPW\,dx$$

这里 M_i^s 为在载荷 m_sP 作用下引起的弯矩。将上列二式相减则得

$$(m - m_s)\int PW\,dx = \sum(M_i - M_i^s)\theta_i \tag{8.3}$$

如果 θ_i 是正的，则 $M_i = M_p$，由于静力容许弯矩 M_i^s 不能超过 M_p，因此

$$(M_i - M_i^s)\cdot\theta_i \geqslant 0 \tag{8.4}$$

如果 θ_i 是负的，则 $M_i = -M_p$，而 $M_i^s \geqslant -M_p$ 则(8.4)式仍然成立。由于外力功 $\int PW\,dx$ 是正值。因此由公式(8.3)知道

$$m - m_s \geqslant 0 \quad 或 \quad m \geqslant m_s \tag{8.5}$$

这样，我们便证明了实际载荷参数总是大于或等于静力载荷参数。

我们假设，在载荷 m_kP 的作用下将引起一个机动容许场，这时相应的弯矩为 M_i^k，转角为 θ^k 而位移为 W^k。在实际载荷 mP 的作用下将引起弯矩 M_i。根据虚功原理，实际载荷作用在机动容

许位移上的功将为

$$\sum M_i\theta_i^K = \int mPW^K dx$$

另一方面，设机动容许参数的定义为：

$$m_K = \frac{\sum M_i^K \cdot \theta_i^K}{\int PW^K dx},$$

此时有

$$\sum M_i^K\theta_i^K = \int m_K PW^K dx$$

如将上列两式相减，则得

$$(m_K - m)\int PW^K dx = \sum (M_i^K - M_i)\cdot\theta_i^K \qquad (8.6)$$

在塑性铰处，$M_i^K = \pm M_p$，其符号与 θ_i^K 的符号相等，因此根据与前面同样的道理，公式（8.6）的右端是个正值。由于外力功 $\int PW^K dx$ 是个正值，因此

$$m_K - m \geqslant 0 \quad 或 \quad m_K \geqslant m \qquad (8.7)$$

这样我们又证明了实际载荷参数总是小于或等于机动容许载荷参数的。

由于以上两条定理，我们可以得到一条重要结论：即当机动载荷参数等于静力载荷参数时，则这个值便是实际载荷参数。

现在我们就来看看一个简单刚架的例子。如图 8.4 所示具有相等截面的刚架，受两个集中力的作用。这个刚架是二次超静定的。

如令在铰支处的垂直反力为 V，水平反力为 H，最大弯矩点可能在 A、B、C、D 四点产生，固支点为 A 点，力 P 作用点为 B 点，力 $2P$ 作用点为 D 点，刚架右上端为 C 点，根据平衡条件可以写出如下方程式：

$$M_C = -2lH, \qquad M_D = -2lH + lV,$$

$$M_B = -2lH + 2.5lV - 3lP, \quad M_A = 2.5lV - 3lP - 2lP。$$

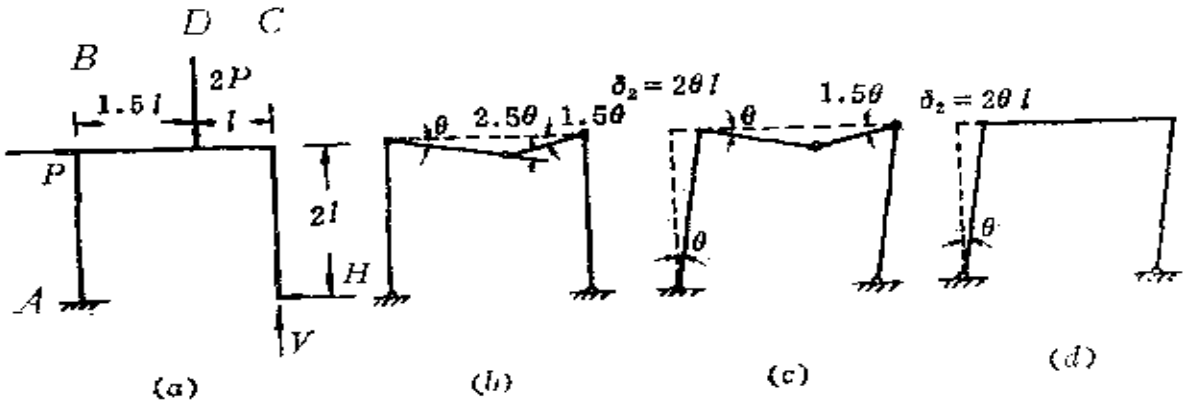


图 8.4a 刚架的受力图

将上式中的 H 和 V 消去后，得

$$-M_B-1.5M_C+2.5M_D=3lP$$

$$-M_A-2.5M_C+2.5M_D=5lP$$

如果在 B，C，D 三点的弯矩达到塑性极限弯矩 M_P 时，即 $M_B=-M_P$，$M_C=-M_P$，$M_D=M_P$，则将形成破坏机构，将这些值代入平衡方程后，便得

$$P=1.67\frac{M_P}{l}$$

如果在 A、D、C 三点的弯矩达到塑性极限弯矩值 M_P，即 $M_A=-M_P$，$M_C=-M_P$，$M_D=M_P$，并将这些值代入平衡方程后，便可得

$$P=1.2\frac{M_P}{l}$$

如果在 A、B、C 三点处弯矩达到塑性极限弯矩值 M_P，即 $M_A=-M_P$，$M_B=+M_P$，$M_C=-M_P$，并由平衡方程中消去 M_D，则可得

$$-M_A+M_B-M_C=2lP$$

此时得

$$P = 1.5\frac{M_P}{l}$$

通过比较可得　最低的载荷是

$$P = 1.2\frac{M_P}{l}。$$

§ 8.4　轴向力对极限载荷的影响

有些结构的截面除受弯矩和剪力作用外还受轴向力的作用。

假设杆件截面有两个对称轴，同时受力 N 及弯矩M的作用。当 N 及 M 增加时，截面上的应力也随着变化。最初，应力在弹性阶段，该向应力沿截面是直线分布的（图 8.5b)。载荷增加后，截面上开始出现塑性区，并且逐渐扩展（图 8.5c)，最后截面上全部达到 σ_s（图 8.5d)。因而形成塑性铰。截面分为两个塑性区，其应力的正负号相反。令 F 表示截面的面积，F_1 表示较小塑性区的面积，z 表示 F_1 的重心到对称轴的距离。显然，在极限状态

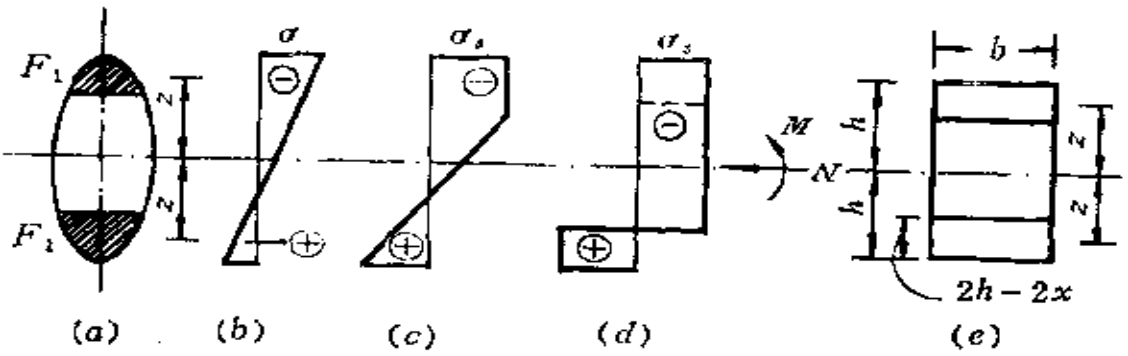


图 8.5　同时受弯矩和受压梁截面上的应力图

下，轴力和弯矩各为

$$N = (F - 2F_1)\sigma_s \qquad M = 2z\sigma_s F_1 \tag{8.8}$$

由此可见，N 及 M 都是面积 F_1 的函数。所以这两个值之间存在着一定的关系，对于矩形截面很容易求得这个关系。

$$\left.\begin{aligned} F &= 2bh, \\ F_1 &= 2b(h-z) \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

代入（8.8）式后

得

$$\left.\begin{aligned} N &= 2b\sigma_s(2z-h) \\ M &= 4\sigma_s b(h-z)z \end{aligned}\right\} \tag{8.10}$$

消去 z 后我们有

$$N^2 + 4\sigma_s bM = 4\sigma_s^2 b^2 h^2 \tag{8.11}$$

当截面只受轴力时，轴力的极限值为

$$N_P = 2bh\sigma_s \tag{8.12}$$

当截面只受弯矩作用时，弯矩的极限值为

$$M_P = b \cdot h^2 \cdot \sigma_s \tag{8.13}$$

利用公式（8.12）及（8.13），可将（8.11）写成下面形式

$$\frac{M}{M_P} = 1 - \left(\frac{N}{N_P}\right)^2 \tag{8.14}$$

这个关系是一个二次抛物线。由于 M 的值可以是正的，也可以是负的，因此（8.14）可以画成图（8.6a）的形式。由图上可以看出当 $\frac{M}{M_0} = 0$ 时，$N = N_P$ 即表示只受轴向力作用的情况。当 $\frac{N}{N_P} = 0$ 时，则 $M = M_P$，即为杆件只受弯矩作用的情况。为了说明轴向力作用对极限载荷的影响，让我们来讨论一个曲杆的极限载荷问题（图 8.6b）。假设在杆的顶端作用外力 P，而曲杆是圆弧的一部份，其夹角是 α，而圆的半径则为 R，杆的尾端固定于 B

点，而外力 P 作用于 D 点，设 ϕ 为某一任意角，轴向力 N 及弯矩 M 在角 ϕ 处的值应为：

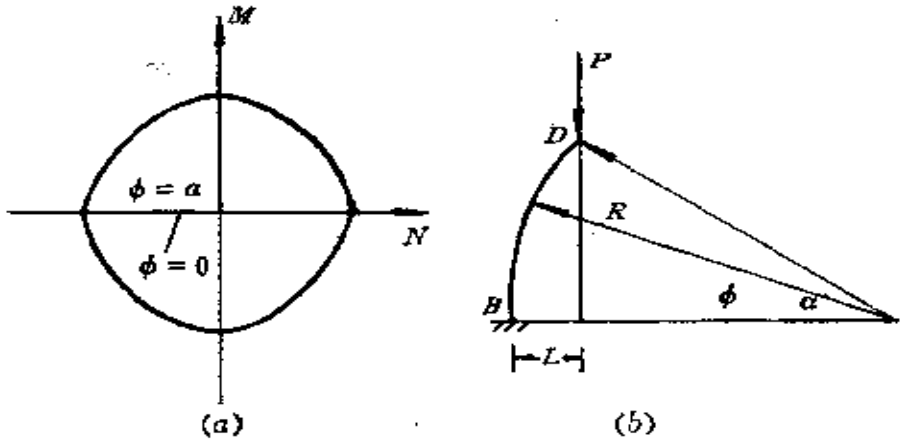


图 8.6　受集中力作用的曲杆及其极限曲线

$$N(\phi) = -P\cos\phi \qquad M = -PR(\cos\phi - \cos\alpha) \tag{8.15}$$

当忽略轴向力的作用来求出曲杆的极限载荷时，如果在曲杆固支端力矩达到 M_P 时，曲杆即失去承载能力，这时前式可以写成：

$$-M_P = -P_P \cdot R(1-\cos\alpha)$$

因此

$$P_P = \frac{M_P}{R(1-\cos\alpha)} \tag{8.16}$$

式中 P_P 即为不考虑轴向力的极限载荷。

现在再来看看轴向力对于极限载荷的影响。由公式（8.15）知道，轴向力也是在 $\phi=0$ 处获得最大值的，因此我们就来考虑在 $\phi=0$ 处的极限状态。为了计算简单，我们引进下列标号：

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{M}{M_P} = -\frac{\bar{p}R(1-\cos\alpha)}{b\sigma_s h^2} \quad 或 \quad \bar{p} = -\frac{mb\sigma_s h^2}{R(1-\cos\alpha)} \\ n &= \frac{N}{N_P} = -\frac{\bar{p}}{2b\sigma_s h} = \frac{mh}{2R(1-\cos\alpha)} = \frac{h}{2L}\cdot m \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

式中 $L = R(1 - \cos\alpha)$

如将（8.17）代入（8.14）式后则得：

$$m + \left(\frac{h}{2L}\, m\right)^2 = 1 \qquad (8.18)$$

$$m = 2\left(\frac{L}{H}\right)^2\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{H}{L}\right)^2}\right],$$

因为$\frac{H}{L}$是很小的，因此m的值可表示为

$$m = 1 - \left(\frac{H}{2L}\right)^2 + 2\left(\frac{H}{2L}\right)^4 + \cdots \qquad (8.19)$$

如果我们将（8.19）及（8.16）所算出的结果比较一下，如 $L = H$，则由两式所算出的结果误差为 17.2%，如果 $L = 3H$，则误差将比 3% 还小。

§ 8.5 板的极限分析

一、基本假设

在前几节中，我们研究过了杆件及简单刚架的极限分析问题，在分析结构工作过程时，可以分为两个状态，即静定平衡状态及极限状态。在静定平衡状态时，载荷每增加一点都会伴随着有限的变形，这时结构是几何不可变的，因而能承受外载荷作用。而在极限状态时，结构是几何可变的，已经不能承受外载荷的作用，因而已不能工作。在板的极限分析中，我们要研究结构在破坏时的内力分析，并求出极限载荷。但是并不去研究由于塑性变形增加而引起的内力变化。这里我们将认为弹性变形比塑性变形小得多，因此可以把它忽略掉，从而采用刚塑性的“模型”。在解决塑性板的问题时，我们将采用与弹性薄板相似的假设，即

（1）与中线垂直的法线，在变形后仍是直线，并且垂直于变形后的中面；

（2）在中面上没有平行于中面的位移；

（3）略去垂直于中面的正应力；

（4）板的挠度比板的厚度小，因而变形方程是线性的。

在结构理论中，一般都是使用内力分量，如 M_x、M_y、M_{xy}，而很少直接使用应力 σ_x、σ_y……等。因此在这里我们也将使用内力的概念。所谓内力即为在结构中所出现的弯矩，如 M_x、M_y……，薄膜力如 N_x、N_y……，剪力如 Q_x、Q_y 等。如果内力包括在塑性条件中，则这些内力称为广义力。

二、圆板的屈服条件及其静定解与机动解

当研究圆板的屈服条件时，我们将假设 M_θ、M_r 为广义力。即只有径向弯矩及周向弯矩参与使材料进入塑性的条件。实验证明，在薄板的情况下，剪切力对材料进入塑性的影响是很小的。这样，屈服条件则可写为

$$\phi(M_\theta,\ M_r) = B \tag{8.20}$$

在上式中，ϕ 为某一函数，它的形式与所使用的屈服条件有关。而 B 在刚塑性“模型”时为一常数。公式（8.20）即称为圆板的屈服条件。

如果我们将（8.20）微分后，由于 B 是常数，则可得：

$$\frac{\partial \phi}{\partial M_\theta} dM_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial M_r} \cdot dM_r = 0 \tag{8.21}$$

由于偏导数 $\frac{\partial \phi}{\partial M_\theta}$、$\frac{\partial \phi}{\partial M_r}$ 代表垂直曲线（8.20）的向量分量，因而代表弯矩变化的向量分量 dM_θ、dM_r 将相切于曲线（8.20）。

如果由于载荷作用而产生了变形增量 dk_θ、dk_r，这时内力在变形增量上所做的功将为

$$dV = M_\theta dk_\theta + M_r dk_r \tag{8.22}$$

但是内力的增量 dM_θ、dM_r 在变形增量 dk_θ 及 dk_r 上并未做功，因而变形增量的向量必须垂直于广义力的增量向量，即变形增量向量必须与垂直于曲线（8.20）的向量方向重合，因此

$$dk_\theta = \nu \frac{\partial \phi}{\partial M_\theta}, \qquad dk_r = \nu \frac{\partial \phi}{\partial M_r} \tag{8.23}$$

增量 dk_θ、dk_r 有时亦用 k_θ 及 k_r 表示。ν 必须是个正数。

公式（8.23）在塑性力学的增量理论中称为相关联的流动法则，它表示了变形增量与广义力之间的关系。通过它可以找出结构的破坏形式，因此它是很重要的。可以证明这个公式是一般性的。在板壳的极限分析中，经常会用到它。

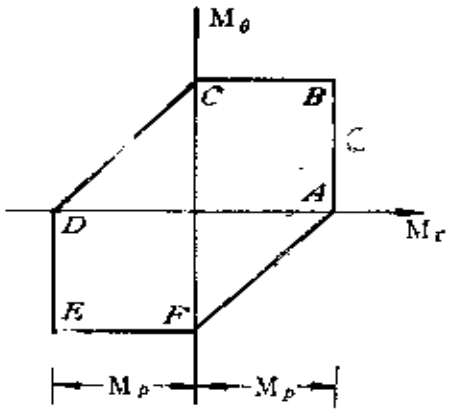


图 8.7　圆板的 Tresca 屈服条件

我们知道 Mises 条件在平面应力情况时，有如下形式：

$$\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_s^2 \tag{8.24}$$

如果弯矩用下列形式表示

$$M_r = \sigma_r H^2, \quad M_\theta = \sigma_\theta H^2, \quad M_P = \sigma_s H^2$$

则式（8.24）将为

$$M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2 = M_P^2 \tag{8.25}$$

如果考虑流动法则，（8.23）式则有

$$dk_\theta = \nu(2M_\theta - M_r), \quad dk_r = \nu(2M_r - M_\theta) \tag{8.26}$$

在 Tresca 条件时，则力矩的屈服条件将为

$$\max(|M_r|,\ |M_\theta|,\ |M_\theta - M_r|) = M_P$$

或

$$|M_r| = M_P,\ |M_\theta| = M_P,\ |M_\theta - M_r| = M_P。 \tag{8.27}$$

由于在实际问题中极限曲面的形式是很复杂的，因此有时取简化的屈服曲面来求解问题。最大正弯矩屈服曲面是比较简单的一种假设，这个屈服曲面对于拉、压屈服极限不同的材料，例如混凝土材料使用起来是比较方便的。最大正弯矩屈服条件可用如下方程组确定：

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= M_1 - M_P = 0, & \Phi_2 &= M_2 - M_P = 0 \\ \Phi_3 &= -M_1 - M_P = 0, & \Phi_4 &= -M_2 - M_P = 0。 \end{aligned}\right\} \tag{8.28}$$

相关联的流动法则由下式确定

$$\dot{k}_\alpha = \nu_\alpha \frac{\partial \phi_K}{\partial M_\alpha}, \qquad \alpha = 1,\ 2。 \tag{8.29}$$

图 8.8 给出了式 (8.28) 的几何图形。

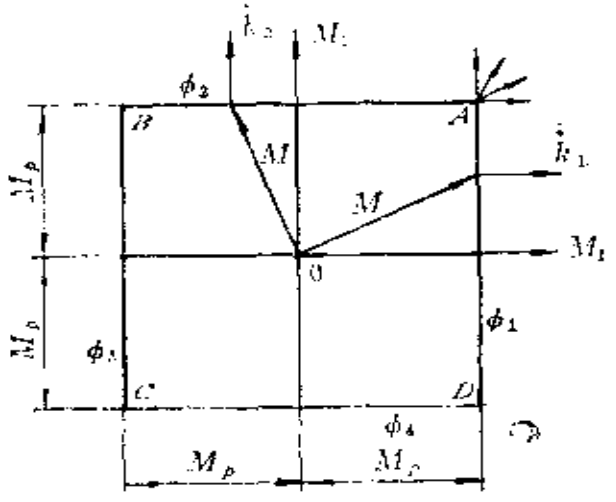


图 8.8 [illegible]的简化屈服条件及流动法则

求圆板的极限载荷，可以用静力法，也可以用机动法。用静力

法时，应满足平衡方程、应力边界条件以及屈服条件。这样便可以求出极限载荷的下限，而且板将继续工作，而不破坏。用机动法时，则应假设板有塑性变形，从而已按某一形式破坏并且应用内力功等于外力功的原理求出极限载荷的上限。

静力解：在静力解中，我们将使用平衡方程，在轴对称的圆板情况下，它的形式是

$$r\frac{dM_r}{dr}+M_r-M_\theta=r\,Q_r \tag{8.30}$$

在图 8.9 上给出了弯矩 M_r、M_θ 以及剪力 Q_r 的正方向，剪切力的值则可通过当 r = 常数时所有垂直方向力的投影得到。当均布载荷时

$$\int_A P(r)dA+2\pi rQ_r=0$$

设 $dA=2\pi r dr$，这时

$$rQ_r=-\int_0^r P(r)r\,dr \tag{8.31}$$

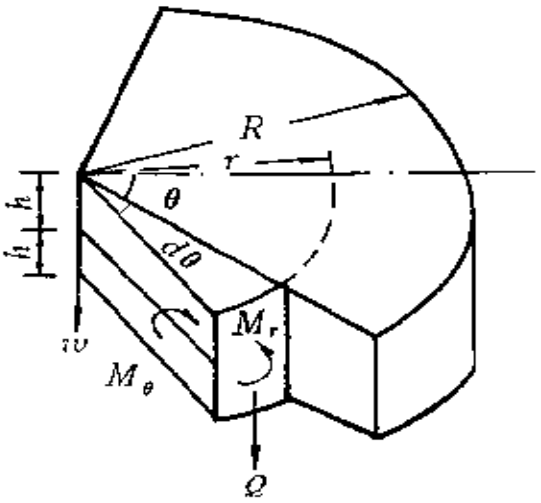


图 8.9 圆板中弯矩及剪力的正方向

屈服条件则可使用 Mises 条件 (8.25)，也可使用 Tresca 条件 (8.27)。有了平衡方程和屈服条件，并且满足应力的边界条件，则可得到板的极限载荷的下限。

机动解：这里假设板已进入塑性状态，并且已成为几何可变机构。根据内力功等于外力功的原理，便可以求出极限载荷的上限。如果变形方程为 $\dot{w}=\dot{w}(r)$，这时外力功将为

$$\delta L=\int_0^a P(r)\dot{w}(r)2\pi r\,dr \tag{8.32}$$

而内力功的表达式则与所使用的屈服条件有关。由于在轴对称的圆

板的情况下，使用 Tresca 条件比较简单，所以我们将只给出在满足这个条件时内力功的表达式。

$$\delta V = \pi M_P \int_0^a (|k_r| + |k_\theta| + |k_r + k_\theta|) r dr + \delta V_n \qquad (8.33)$$

上式中 $k_r = \dfrac{d^2\dot{w}}{dr^2}$，$k_\theta = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d\dot{w}}{dr}$ 为曲率增量。δV_n 为塑性铰线处所做的功。

三、两个简单圆板例题

在分析圆板问题时，主应力是已知的，因而使用 Tresca 屈服条件（8.27）比较方便，因为它是一个线性方程。如果将 Mises 条件（8.25)′，代入平衡方程(8.30)后，将得到一个非线性的微分方程式，因而很难得到封闭解。现在我们就来看看使用 Tresca 条件的情况。在使用 Tresca 条件时，首先应该知道式（8.27）中那一个方程式能代表板中的应力状态，或在图 8.7 中那一个边代表极限状态时的应力状态。这个问题应通过边界条件和平衡方程来确定。下面在我们就举两个例子来说明这个问题。

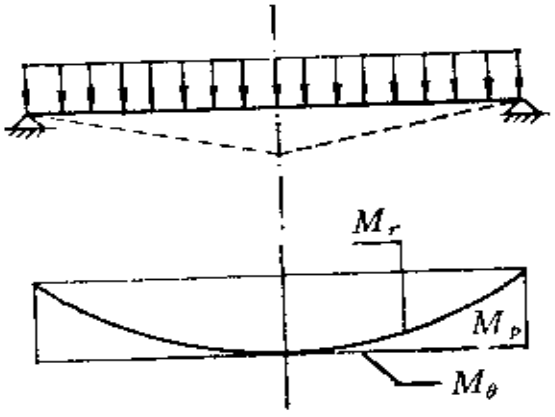


图 8.10 简支圆板的弯矩图

例一：受均布荷载作用的简支圆板（图 8.10）。

解：由于简支的边界条件，以及载荷的方式，在板中只能出现正弯矩。因此应力状态只能由图 8.7 中的 AB 或 BC 二条线代表。根据平衡方程在 $r=0$ 时，弯矩 M_r、M_θ 应该相等，并且在塑性状态时 $M_r = M_\theta = M_P$，由于弯矩应该是连续的，所以应力状态应由 BA 边或 BC 边表示，但是在使用 AB 边时，即当 $M_r = M_P$ 得到 $\dfrac{dM_r}{dr} = 0$，而另一方面，由平衡方程

得出当 $M_\theta < M_P$， $p > 0$ 时 $\frac{dM_r}{dr} < 0$，因而是矛盾的，所以 AB 边不能代表这个板的应力状态。这样一来，只有 BC 边能表示圆板的应力状态了。即设

$$M_\theta = M_P \tag{8.34}$$

将（8.34）式代入平衡方程后则得

$$M_r = M_P - \frac{1}{6} pr^2 + \frac{C}{r} \tag{8.35}$$

当 $r = 0$ 时 $M_r = M_\theta$，因而积分常数 $C = 0$，当 $r = a$ 时 $M_r = 0$，这时我们有

$$\begin{aligned} p &= \frac{6M_P}{a^2} \\ M_\theta &= M_P = \frac{pa^2}{6} \\ M_r &= \frac{pa^2}{6}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \end{aligned} \tag{8.36}$$

由于（8.36）式的解是基于（8.34）式的，因此由流动法则知道在这个条件下应满足

$$k_r = \frac{d^2\dot{w}}{dr^2} = 0 \tag{8.37}$$

积分（8.37）式后，得到有两个常数的 $\dot{w}$ 表达式，两个常数则通过下列条件定出

$$\begin{aligned} \text{当} \quad r &= a, \qquad \dot{w} = 0 \\ r &= 0, \qquad \dot{w} = \dot{w}_0 \end{aligned}$$

最后我们得出下列变形表达式：

$$\dot{w} = \dot{w}_0\left(1 - \frac{r}{a}\right) \tag{8.38}$$

式（8.38）表示变形是一个圆锥体，说明在极限状态时圆板将按一个圆锥形式破坏。

应用机动法解题时可将（8.38）代入（8.32）及（8.33）式即可得

$$p = \frac{M_p a^2}{6} \tag{8.39}$$

这个表达式与前面所得的结果完全一致，因而它是完全解。在图（8.10b）上给出了在塑性状态时的弯矩图。

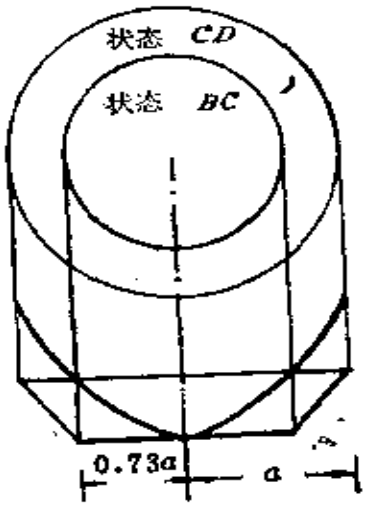


图 8.11 固支圆板的弯矩图

例二：受均布荷载的固支圆薄板

解：在此情况中，径向的弯矩有正有负，因此我们所使用的屈服条件与前面应该是不同的。在板的中部弯矩都是正的，可以使用与前面相同的条件。但在靠近固支处，径向弯矩是负的，故需使用另一个条件。设当 $r = r_b$ 时，$M_r = 0$。并且当 $0 < r < r_b$ 时的应力状态由图 8.7 上的 BC 边表示；而在 $r_b < r < a$ 部份的应力状态由 CD 边表示。

将 $M_\theta - M_r = M_p$ 的表达式代入平衡方程后，则得

$$Mr_2 = M_p \ln r - \frac{1}{4} pr^2 + D, \quad r_b \leqslant r \leqslant a \tag{8.40}$$

而由（8.35）知道

$$M_{r_1} = M_p - \frac{1}{6} pr^2 + \frac{C}{r}, \quad 0 \leqslant r < r_b \tag{8.41}$$

根据边界条件

$$r=0,\ M_{r1}=M_P,\ r=r_b,\ M_{r2}=0,\ M_{r1}=0$$

并且当 $r=a$ 时，$M_r=-M_P$

由上式得出

$$M_P=\frac{1}{6}pr_b^2 \quad 或 \quad p=\frac{6M_P}{r_b^2} \tag{8.42}$$

而 r_b 则由下式求出

$$1+\ln\frac{a}{r_b}=\frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{r_b^2}-1\right) \tag{8.43}$$

由（8.43）式知道 $r_b=0.73a$，将此式代入（8.42）后，则得

$$p=11.3\frac{M_P}{a^2} \tag{8.44}$$

在板的中心部份，即当 $0\leqslant r\leqslant r_b$ 采用了 BC 线即 $M_\theta=M_P$ 的屈服条件，因此根据流动法则的公式我们知道；

$$k_r=-\frac{d^2\dot{w}_1}{dr^2}=0 \tag{8.45}$$

在板的边缘处，即当 $r_b\leqslant r\leqslant a$ 时，为 CD 线，由流动法则我们得到

$$k_r+k_\theta=-\frac{d^2\dot{w}_2}{dr^2}-\frac{1}{r}\cdot\frac{d\dot{w}_2}{dr}=0 \tag{8.46}$$

如果将（8.46）积分后，并且考虑边界条件

当 $$r=a,\quad \dot{w}_2=0$$

及变形连续条件即当 $r=r_b$ 时，应有

$$\dot{w}_1=\dot{w}_2,\quad \frac{d\dot{w}_1}{dr}=\frac{d\dot{w}_2}{dr}$$

这时我们便可得到两个不同区域的变形方程

$$\left.\begin{aligned} \dot{w}_1 &= -C\left(\frac{r-r_b}{r_b}+\ln\frac{r_b}{a}\right) \qquad 0\leqslant r\leqslant r_b \\ \dot{w}_2 &= -C\ln\frac{r}{a} \qquad\qquad\qquad\quad r_b\leqslant r\leqslant a \end{aligned}\right\} \tag{8.47}$$

我们看到，上式满足变形的连续条件。

这个问题也可以用机动法求得解答，根据公式（8.32），外力功应为

$$\delta L = 2\pi p\left\{\int_0^{r_b}\dot{w}_1 r\,dr+\int_{r_b}^{a}\dot{w}_2 r\,dr\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\pi pc(3a^2-r_b^2)$$

而根据（8.33）及（8.47）求得内力功的表达式为

$$\delta V=\pi M_P\left\{\int_0^{r_b}\left(\frac{C}{rr_b}+0+\frac{C}{rr_b}\right)r\,dr+\right.$$

$$\left.+\int_{r_b}^{a}\left(\frac{C}{r^2}+\frac{C}{r^2}+0\right)r\,dr\right\}+2\pi aM_P\frac{C}{a}$$

积分后得到

$$\delta V=2\pi M_P C\left(2+\ln\frac{a}{r_b}\right)$$

由等式 $\delta V=\delta L$ 我们得到

$$p=12M_P\frac{2+\ln\dfrac{a}{r_b}}{3a^2-r_b^2} \tag{8.48}$$

在公式（8.48）中，未知数 r_b 可以通过条件 $\dfrac{dp}{dr}=0$定出，因为这时所求出的 p 为最小，很容易检查，这时便可得到与（8.43）

完全相同的方程式。从而知道 $r_b=0.73a$，再将这个值代入（8.42）后则得 $p=11.3\frac{M_P}{a^2}$，这个值与前面所得结果完全相同。由于两种方法得到了同样的结果，因此这个解是完全解。在图 8.11 上给出了固支板在极限状态时的弯矩图。

四、其他屈服条件圆板的一般解

解圆板问题时，对 Tresca 六边形的每一个边都可以得到一个相应的解答。

在轴对称载荷情况下，使用 Tresca 屈服条件时，圆板的弯矩可由平衡方程和屈服条件求出，平衡方程为

$$(rM_r)'-M_\theta=-\int_0^r rp(r)dr=-I(p) \tag{8.49}$$

$I(p)$ 为作用于板中 $0<\xi<r$ 范围外载荷积分。如将屈服条件代入平衡方程，则可得到相应的弯矩，例如在 Tresca 六边形的 BC 边上有

$$\left.\begin{aligned} M_\theta &= M_P \qquad 0\leqslant M_r\leqslant 1\\ M_r &= -\frac{1}{R}\int_0^r I(p)dr+M_P+\frac{C}{r}\end{aligned}\right\} \tag{8.50}$$

其中 C 为积分常数，应由边界条件确定。对于其他的屈服条件都可以得到相应的弯矩，现将所得结果列于表 8.1。

上述公式的使用范围决定于具体的边界条件。由屈服条件可以求出相应的流动法则。例如使用 BC 边的屈服条件时，

$$k_r=-\dot{w}''=0 \qquad k_\theta=-\frac{1}{r}\dot{w}'=v$$

由于 $k_r=0$ 故圆板在变形后将成为锥体

$$\dot{w}=Ar+B \tag{8.51}$$

如应力状态用 $M_r=M_P$ 表示，则相应的曲率为

$$k_r=-\dot{w}''=v, \quad k_\theta=-\frac{1}{r}\dot{w}'=0 \tag{8.52}$$

表 8.1

屈服条件	M_r	M_θ	$\dot{w}$
BC	$M_P+\frac{C_1}{r}-\frac{1}{r}\int I(p)dr$	M_P	A_1r+B_1
CD	$\ln r+C_2-\int\frac{I(p)}{r}dr$	$\ln r+C_2-M_P-\int\frac{I(p)}{r}dr$	$A_2\ln r+B_2$
DE	$-M_P$	$I(p)-M_P$	$C=\text{const}$
EF	$-M_P+\frac{C_3}{r}-\frac{1}{r}\int I(p)dr$	$-M_P$	A_1r+B_1
FA	$-\ln r+C_4-\int\frac{I(p)}{r}dr$	$-\ln r+C_4+M_P-\int\frac{I(p)}{r}dr$	$A_2\ln r+B_2$
AB	M_P	$I(p)+M_P$	$C=\text{const}$

因此上式只有当

$$\dot{w}=\text{const} \tag{8.53}$$

时才能在有限范围内被满足。而 $\dot{w}$ 为常数的条件，只有在板的局部作为刚体运动才有可能。由表上看出弯矩和挠曲速度并不是直接互相联系的，同一个破坏机构可以对应不同的应力状态，即对应不同的外载荷情况。

例：设有筒支圆板，在 $a\leqslant r\leqslant R$ 区域受均匀环状载荷 p 的作用，即

$$p=\begin{cases}0 & 0\leqslant r\leqslant a\\ \text{const} & a\leqslant r\leqslant R\end{cases}$$

如应力状态可用 BC 边表示，而且板的边界条件为

$$M_r(0)=M_\theta(0)=M_P,\quad M_r(R)=0 \tag{8.54}$$

由表上可得

$$I(p)=\int_0^r \xi p(\xi)d\xi=\begin{cases}0 & 0\leqslant r\leqslant a\\ \dfrac{p}{2}(r^2-a^2) & a\leqslant r\leqslant R\end{cases} \tag{8.55}$$

积分平衡方程则有

$$\left.\begin{aligned}&M_r=M_\theta=M_P, && 0\leqslant r\leqslant a\\ &M_r=M_P-\frac{C_1}{r}-\frac{p}{2}\left(\frac{r^2}{3}-a^2\right),\quad M_\theta=M_P, && a\leqslant r\leqslant R\end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

根据 M_r 在 a 处必须连续的条件和板的边界条件 $M_r(R)=0$，可得极限载荷的表达式为

$$p=\frac{6M_P}{R^2-3a^2+2\dfrac{a^3}{R}} \tag{8.57}$$

$$M_r=M_PR(R-r)\frac{R+r-2\dfrac{a^3}{R^2}}{R^3-3a^2R+2a^3},\quad M_\theta=M_P \tag{8.58}$$

在整个区域 $0\leqslant r\leqslant R$ 中，径向弯矩 M_r 满足条件 $0\leqslant M_r\leqslant M_P$，因此上述解答是静力容许的。同时它也是机动容许的，因为挠曲速度场满足机动的边界条件，即 $\dot w(a)=\dot w_0$，$\dot w(R)=0$，挠曲速度表达式为

$$\left.\begin{aligned} \dot{w} &= \dot{w}_0 && 0 \leqslant r \leqslant a \\ \dot{w} &= \dot{w}_0 \frac{R-r}{R-a} && a \leqslant r \leqslant R \end{aligned}\right\} \tag{8.59}$$

五、塑性薄板的近似计算方法

前面所讲的圆板问题，当采用 Tresca 屈服条件时，可以较容易地获得封闭解。但是对矩形薄板或其他形状的薄板现在还很少能够找到封闭解。因此我们将采用近似的计算方法来讨论其他形状板的极限载荷问题。我们在杆件分析中已经建立了塑性铰的概念。在板的分析中，将引用与塑性铰相似的塑性铰线的概念。所谓塑性铰线即为当弯矩达到极限值 M_P 后，在板上形成一条铰线，它能承受弯矩 M_P 并且允许在塑性铰线上有某一转角。只要薄板不失去几何不变性，那么塑性铰就一直在发展，直至板成为几何可变机构而破坏。塑性铰线也是单向的。但是在大多数情况下，板将按照那条铰线破坏则是未知的。因此破坏载荷可以由简化的破坏简图确定。塑性铰线通常都认为是直线的。计算简图应该由各种破坏可能，选取给出最小的极限载荷的一个，或者由实验的经验直接定出。首先让我们来看看周边简支的多边形板在板的某一点 C 处作用集中力 P（图 8.12）。这时板的破坏形状将是以 C 点为顶点的角锥体，它的棱就是从支承周边到顶点的塑性铰线，角锥体的高度就是塑性状态时在力 P 下的挠度。但是板的挠度与板的其它尺寸比较起来是很小的，因而角锥体的棱的水平投影可以认为等于棱长。在考虑内力功时，略去弹性力所做的功，而只考虑塑性铰处极限弯矩对相对转角所做的功。而外力功则等于外力 P 乘上锥顶的挠度 δw。因此根据虚功原理，内力功应该等于外力功，而内力功则为单位塑性弯矩 M_P 乘上塑性铰处相对转角和塑性铰线长度的总和，因此有

$$P \cdot \delta w = M_P \sum \theta_i l_i \tag{8.60}$$

现通过 C 点作一平面与塑性铰线垂直，这个平面与薄板原来

的水平面相交于 AB 线，AB 线垂直于棱 OC 的投影。我们曾假设 C 点的挠度为 δw 而 A 点和 B 点的挠度为零。因为折面的棱，即塑性铰线的倾角很小，所以由 C 点到 AB 线的距离就可以认为等于 C 点的挠度。因此 ACB 线 C 点的折角等于 θ_i 角，这个角是很小的，由（图 8.12）可以求出它的值为

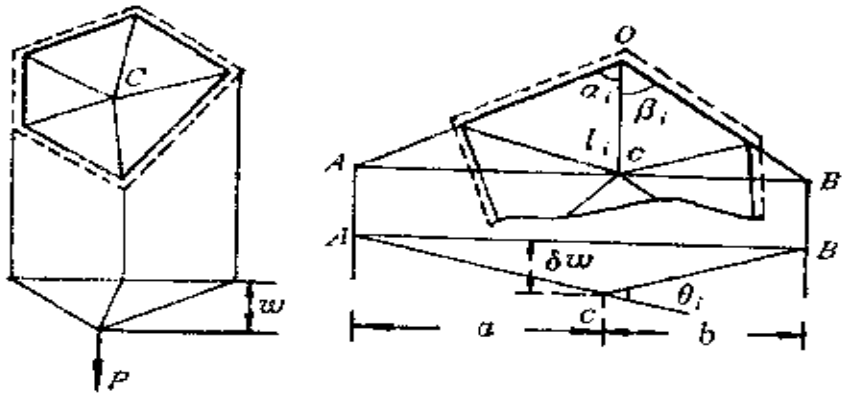


图 8.12　正n边形板的塑性铰线

$$\theta_i = \frac{\delta w}{a} + \frac{\delta w}{b}, \tag{8.61}$$

式中 a 和 b 为 AB 线被 C 点所分成的两段。由（图 8.12）知道

$$c = l_i \operatorname{tg}\alpha_i \qquad b = l_i \operatorname{tg}\beta_i \tag{8.62}$$

因此

$$\theta_i = \frac{\delta w}{l_i}(\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}\beta_i) \tag{8.63}$$

将（8.63）代入（8.60）得到

$$P = M_p \sum (\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}\beta_i) \tag{8.64}$$

式中 α_i 及 β_i 为塑性铰线与薄板周边所成的夹角。

当薄板是正多边形时，而且力 P 作用在板的中心，由于 $\alpha_i = \beta_i = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$，因而由（8.64）得到简化公式：

$$P = 2M_P \cdot n\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} \tag{8.65}$$

式中 n 为正多边形的边数。

n	3	4	5	6	8	10	12	16	24	∞
$\frac{P}{M_P}$	10.39	8	7.27	6.93	6.63	6.50	6.43	6.34	6.32	6.28

当 $n=\infty$ 时，就得到周边简支并承受集中载荷的圆板的极限值：

$$P = 2\pi M_P$$

极限状态时，圆薄板的表面形成圆锥体，即塑性铰线为无穷多，从而整个薄板形成了塑性区域。

矩形薄板承受集中荷载时，根据公式（8.64）得出：

$$P = 4M_P\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \tag{8.66}$$

式中 a、b 为矩形板的边长。而当 $a=b$ 时则得到正方形板的极限载荷 $P=8M_P$，它与前面所获得的结果相同。

如果薄板的周边是固支的，它的破坏机构和边缘是自由支承的板的破坏机构相同。但是这时内力功除径向的塑性铰线上塑性弯矩 M_P 所做的功外，还应包括四周边缘上的塑性铰线上所做的功。假设薄板是各向同性的，当边缘的周边为多边形时，边缘塑性铰处塑性弯矩所做的功，等于弯矩 M_P 乘以周边直线段长度 l 再乘以转角的总和。当力 P 下面的挠度为 δw 时，则 $\overline{\theta_i}=\frac{\delta w}{d_i}$，$d_i$ 是力 P 作用点到 l_i 边的垂线长度（图 8.13），塑性弯矩对整个边

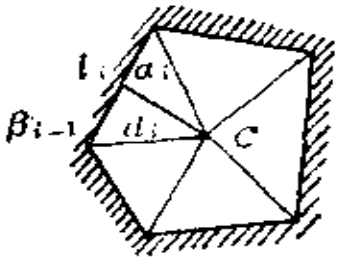


图 8.13 固支多边形板的塑性铰线

缘塑性铰线所作的总功等于

$$M_P \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta w}{d_i} l_i \qquad (8.67)$$

式中 n 为边缘塑性铰线的周边的边数。

如果现在用角 α_i 和 β_i 表示$\frac{l_i}{d_i}$的比值，则得

$$\frac{l_i}{d_i} = \operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}\beta_{i-1}$$

这时（8.67）式则可写为

$$\delta w M_P \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}\beta_{i-1})$$

因此对于固支板极限集中载荷为

$$P = 2M_P \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}\beta_i) \qquad (8.68)$$

前面所举的几个例子中，薄板都是受集中荷载作用，由于它在破坏时，都形成角锥的形状，因而我们可以比较容易地找到它的解。下面我们再举两个受均布载荷作用时矩形板的极限载荷。

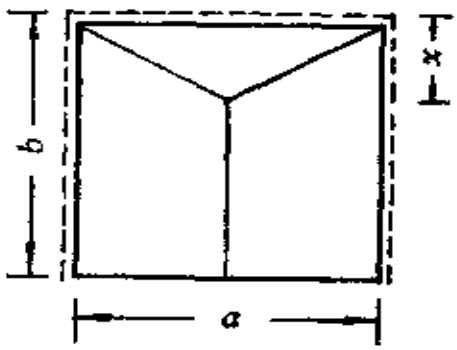


图 8.14 受均布载荷作用的三边简支一边自由的矩形板

例：已知边长为 a 和 b 的矩形板，三边简支，第四边自由，板受均布载荷 q 的作用，试按图 8.14 所示的塑性铰线，求出板的极限载荷。

设已知自由边中点的位移为 δw，此时外力功为

$$W_e = a x \frac{q}{3} \delta w + \frac{q}{2} (b - x) a \delta w$$

$$= \frac{1}{6} qa\delta w(3b - x)$$

内力功为

$$W_i = 2(\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta) M_P \delta w + (b - x) M_P \frac{4\delta w}{a}$$

但已知 $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{a}{2x}$, $\mathrm{ctg}\beta = \frac{2x}{a}$

根据内力功等于外力功的原理可得

$$\frac{1}{6} qa\delta w(3b - x)$$

$$= 2\left(\frac{a}{2x} + \frac{2x}{a} \right) M_P \delta w + (b - x) \frac{4M_P \delta w}{a}$$

化简后可得

$$q = \frac{6(a^2 + 4bx)}{a^2 x(3b - x)} M_P$$

按此式取极值，则有

$$x = \frac{a^2}{4b} \left(\sqrt{1 + 12 \frac{b^2}{a^2}} - 1 \right)$$

当 $a = \frac{b}{2}$时， $x = \frac{3}{4}a$。

$$q = \frac{32}{3} \cdot \frac{M_P}{a^2}$$

例：已知四边简支的矩形板，设边长为 a 和 b 受均布载荷作用的薄板如图 8.15 所示，如已知弯矩分布由如下三个公式描述

$$M_x = M_P - \alpha x^2$$

$$M_y = M_P - \beta y^2$$

$$M_{xy} = -\gamma xy$$

其中 α、β 和 γ 为待定常数，试用最大正应力条件找出薄板的极限承载能力。

根据题意，应力边界条件为

当 $x = \pm\frac{a}{2}$，$M_x = 0$

当 $y = \pm\frac{b}{2}$，$M_y = 0$

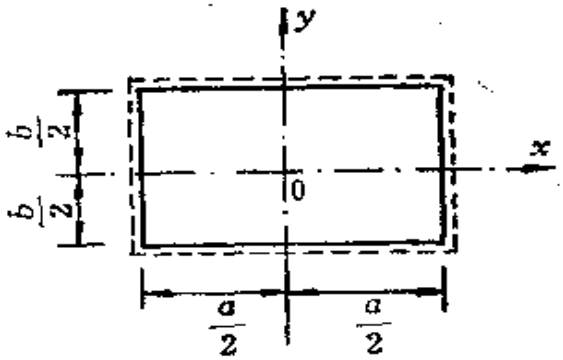


图 8—15 四边简支的矩形板

由此可以确定

$$\alpha = \frac{4M_P}{a^2}, \qquad \beta = \frac{4M_P}{b^2}$$

在板的四角处，$x = \pm\frac{a}{2}$，$y = \pm\frac{b}{2}$

$$M_{xy} = -\gamma xy = -\gamma\left(\pm\frac{a}{2}\right)\left(\pm\frac{b}{2}\right) = -\frac{\gamma ab}{4} = -M_P$$

故有

$$\gamma = \frac{4M_P}{ab}$$

将 α、β、γ 代入矩形板的平衡方程后，则有

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q$$

$$-\frac{8M_P}{a^2} - \frac{8M_P}{b^2} - \frac{8M_P}{ab} = -q$$

故得

$$q=\frac{8M_P}{b^2}\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

弯矩分布表达式为

$$M_x=M_P-\frac{4M_P}{a^2}x^2$$

$$M_y=M_P-\frac{4M_P}{b^2}y^2$$

$$M_{xy}=-\frac{4M_P}{ab}xy$$

根据以上弯矩的分布，可按下式算出主弯矩

$$M_{1,2}=\frac{1}{2}(M_x+M_y)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(M_x-M_y)^2+4M_{xy}^2}$$

由此式得

$$M_1=M_P,\quad M_2=M_P-4M_P\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$$

在整个板的内部满足最大正应力条件，当 $x=\pm\frac{a}{2}$、$y=\pm\frac{b}{2}$ 时，$M_2=-M_P$。因此所得的结果，是极限载荷的下限。对于不同的 a/b 值，所算得 qb^2 的结果列于表 8.3 及图 8.16 中。

$\frac{a}{b}$	1.0	1.6	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	∞
$q\cdot b^2$	24	16.125	14.000	12.480	11556	10.500	9.920	8.000

表 8.3

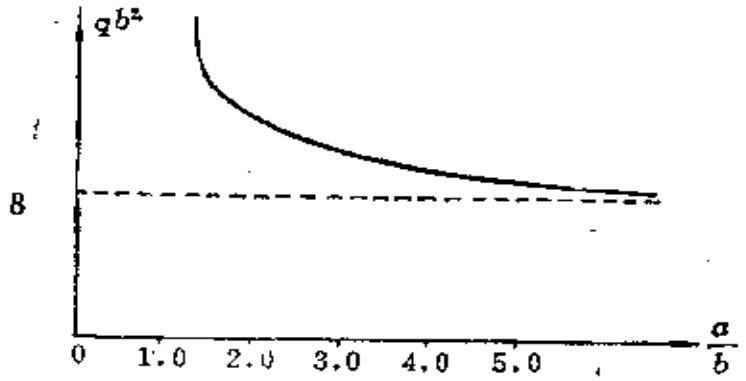


图 8.16

§ 8.6 安定理论的概念

在实际问题中，外载荷往往在一定范围内变化。当载荷在某一范围内作周期性的变化或按其他规律变化时，则称此载荷为变值载荷。弹塑性结构在变值外载荷的作用下，有两种可能的破坏形式，如果变值外载荷在结构内所引起的弹性应力变化大于屈服应力 σ_s 的二倍，则将使结构反复发生异号（拉伸、压缩）塑性变形的破坏，这种破坏与通常的疲劳破坏相似，但导致破坏载荷循环次数，要比后者少得多，这种情况称为塑性循环破坏。当载荷系统 A 作用在弹塑性结构上，使结构上的某些点的材料进入屈服状态，因此卸载后，结构中将保留有残余应力，在此情况下，如有载荷系统 B 再作用在此结构上，可能使另外一些点也进入屈服状态，则当卸去载荷系统 B 之后，又将产生另一组残余应力，使得载荷系统 A 再作用时，又导致此结构的进一步屈服。如 A、B 交替作用，势必增加此结构总变形和总应变的积累，直至使结构破坏。如果不发生上述两种形式的破坏，就称此弹塑性结构是安定的。也就是说结构在外载荷的作用下，除在初始阶段产生一些塑性变形并达到一定残

余变形状态后，若此载荷在给定的范围内变化，在结构中只引起弹性变形，这种状态即称为安定状态。

E. Melan 早在 1938 年对于一般弹性体曾给出了静力安定理论的证明，这个安定理论指出：如果可以找出一组与时间无关的自相平衡的残余应力分布，它与弹性应力(即假定结构行为是弹性的)共同构成了一个处于屈服极限之内的应力系统，则结构能够达到安定。

W. Koiter 于 1956 年证明了机动安定定理。这个定理是建立在容许塑性应变率的概念上的，而容许塑性应变率能够构成机动容许场。机动定理指出：对于一个已知结构，当容许塑性应变率循环所完成的塑性耗散能，大于变值载荷和位移速度所作的外力功率，则结构将是安定的。

安定定理指出，如果我们能为结构找出一组自平衡的残余应力，从而使对于所有的变值载荷所引起的弹性应力与残余应力变化之和不引起屈服，则认为结构达到了安定。

根据以上的分析，我们看到，在进行安定分析时，必须考虑残余应力对结构行为的影响。由于焊接和装配应力，自平衡的残余应力在结构中总是存在的，因此按照弹性分析所计算的应力并不是结构中真正的应力。它只能是由压力变化引起的应力变化。总应力则应是弹性应力和残余应力之和。而弹性应力的变化不应引起结构的屈服。

对弹性结构说来，当结构在外载荷的作用下产生变形，而塑性区的发展先后次序是残余应力的函数，因此结构最终破坏载荷，将与残余应力有关，因为残余应力还将决定屈服区域的充分发展，并决定结构达到破坏时的挠度的大小。

例如对于理想弹塑性材料的内半径为 a，外半径为 b 的厚壁圆筒当受内压 p 的作用时，应有

$$p_e = k\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$p_P = 2k\ln\frac{b}{a}$$

其中 p_e 为弹性极限压力，p_P 为塑性极限压力。

当使用 Tresca 屈服条件时，$k = \frac{\sigma_s}{2}$；

当使用 Mises 屈服条件时，$k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}$。

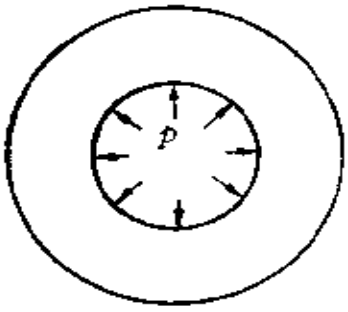


图 8.17 受内压作用的厚壁筒

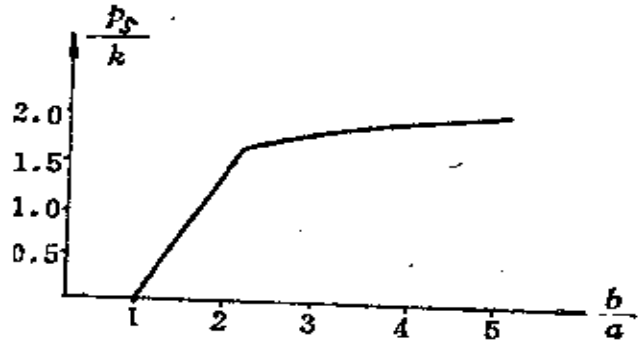


图 8.18

设 $\sigma_{\theta a}$ 为厚壁筒内壁的周向应力，如果当变值载荷 $p^* = p$ 时，满足 $0 < \sigma_{\theta a} < \sigma_s$ 的条件，而当 $p = 0$ 时，满足 $-\sigma_s < \sigma_{\theta a} < 0$ 的条件，则内壁周向应力 $\sigma_{\theta a}$ 将按弹性规律卸载。当 $p^* \leqslant 2p_e$ 并当 $p^* < p_P$ 的条件时，就将出现安定状态。因此变值载荷的安定载荷 p_s 为

$$p_s = \min[2p_e,\ p_P]$$

上式可用图 8.18 表示。当 $p^* > p_s$ 时，则将出现塑性循环破坏或积累破坏。在应用安定性定理时，必须进行全面的弹塑性分析。为了避免积累型的破坏，还应该考虑允许的塑性变形循环，因

此使用时是比较麻烦的。除了一些较简单的问题外，完整的安定状态的解析解是较难得到的。

习　　题

1. 试用静力法及破坏机构法求出图 8.19 所示超静定梁的极限载荷。

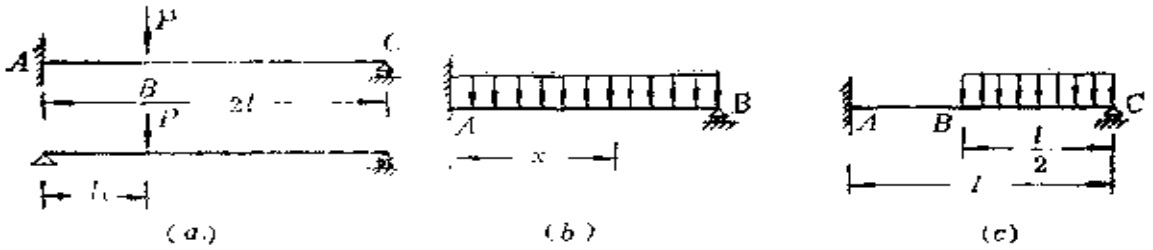


图 8.19

2. 试用破坏机构法求出图 8.20 所示连续梁的极限载荷 P。

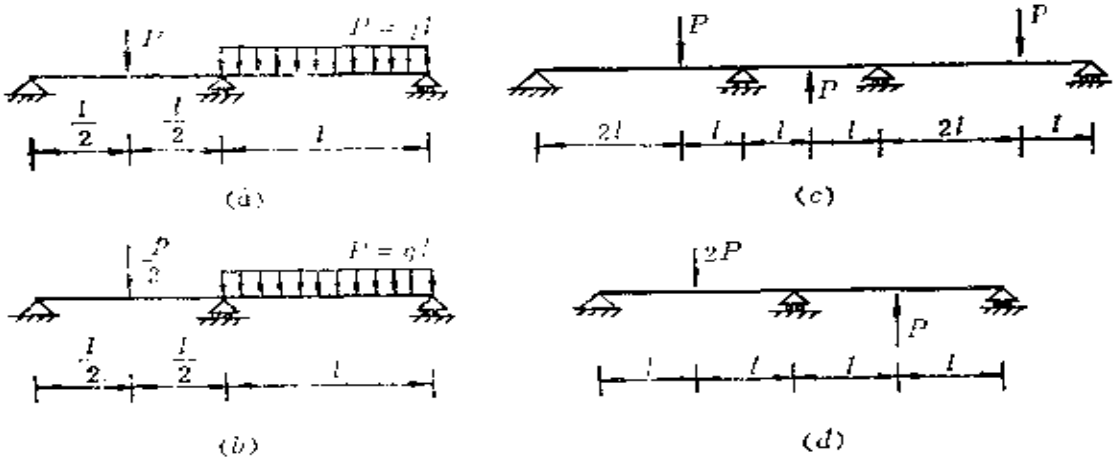


图 8.20

3. 试求图 8.21 所示刚架的极限载荷。

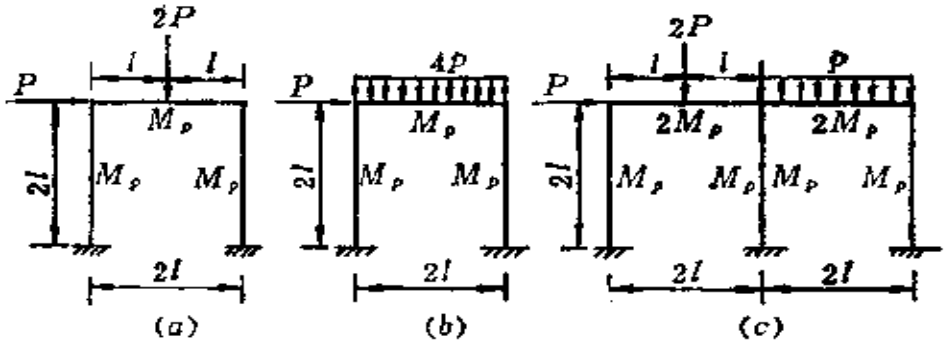


图 8.21

4. 简支圆板半径为 R，受半径为 a 轴对称均布外载作用，试按 Tresca 条件求极限载荷 q（图 8.22）。

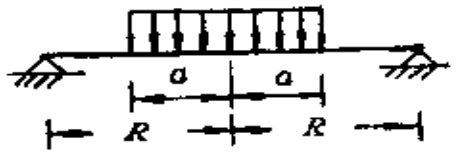


图 8.22

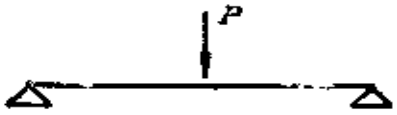


图 8.23

5. 简支圆板的半径为 R，在圆板中心受集中力 P 的作用，试按 Tresca 屈服条件求极限载荷 P 的值（图 8.23）。

6. 已知半径为 R 的简支圆板受如图 8 24 所示载荷作用，试按 Tresca 屈服条件求出极限载荷 P_1 及 P_2 与塑性弯矩之间的关系。

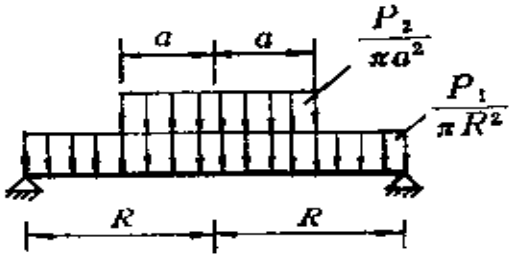


图 8.24

7. 在简支圆板上作用总量为 P，但按半径为 a 圆周线分布的集中载荷，试求此板的极限载荷 P（图 8.25）。

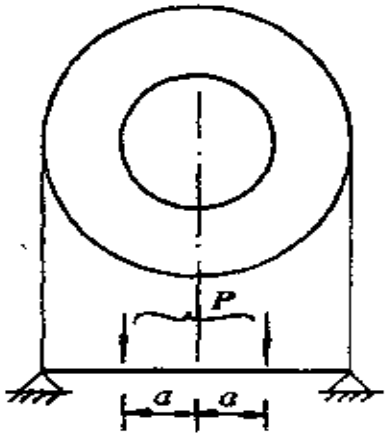


图 8.25

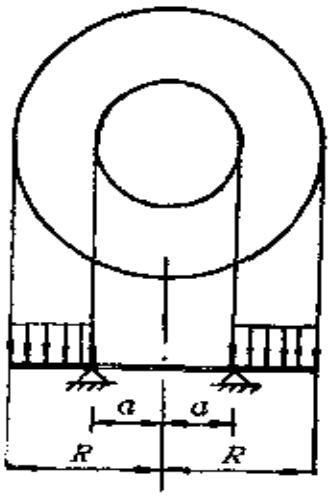


图 8.26

8. 已知简支悬臂环板受轴对称均布载荷作用，如环板内半径为 a，外半径为 R，试求此板的极限载荷 q 及挠曲速度方程（图 8.26）。

9. 已知简支薄板的边长为 a 和 b（图 8.27），受均布载荷 q 的作用，其塑性铰线如图所示，挠度为 δw，x 暂时为未知数，试求此板的极限载荷 q，并讨论当 $a=b$ 和当 $a\to\infty$ 时的情况。

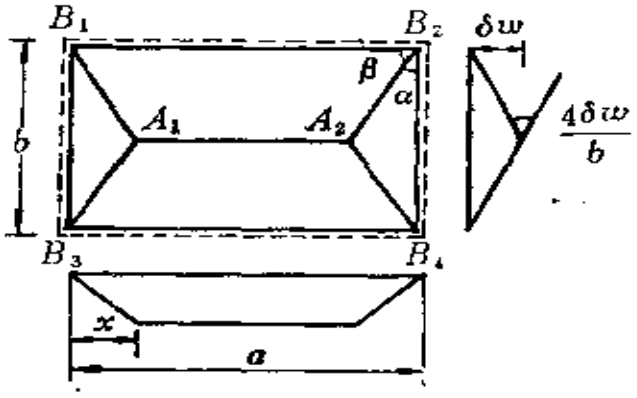


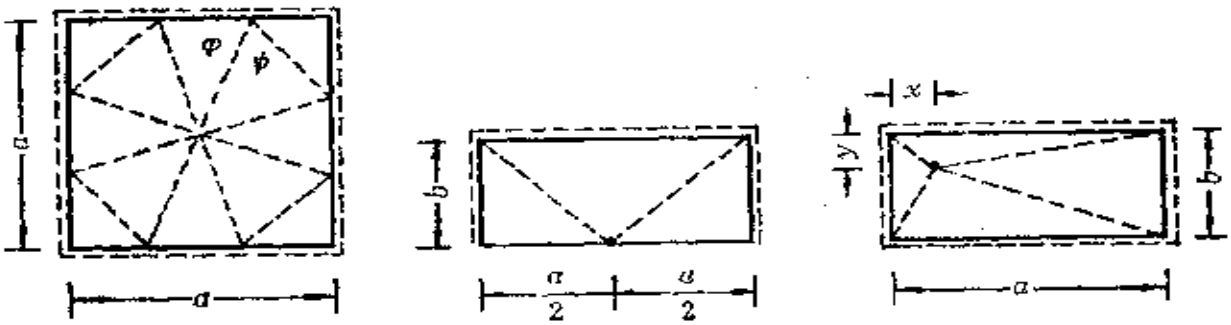
图 8.27

10. 试用塑性铰线法，求图 8.28 所示板的极限载荷 P：

a) 四边简支，边长为 a 的正方形板。

b) 三边简支一边自由的矩形板，在自由边中点承受集中力的作用。

c) 在矩形板上任意点（x、y）承受集中载荷的作用。



(a) (b) (c)

图 8.28

习 题 答 案

1. (a) $P = M_P \cdot \dfrac{4l - l_1}{l_1(2l - l_1)}$。

(b) $q = 11.65\dfrac{M_P}{l^2}$，$\xi = 0.586$，$q^K = 12\dfrac{M_P}{l^2}$，

$M_{\max} = \dfrac{25}{24}M_P$，$q^S = \dfrac{24}{25}$，$q^K = 11.52\dfrac{M_P}{l^2}$。

(c) $q = 19.2\dfrac{M_P}{l^2}$。

2. (a) $P=6\dfrac{M_P}{l}$, (b) $P=11.66\dfrac{M_P}{l}$, (c) $P=\dfrac{13}{8}\dfrac{M_P}{l}$,

(d) $P=1.33\dfrac{M_P}{l}$。

3. (a) $P=1.5\dfrac{M_P}{l}$, (b) $P=1.48\dfrac{M_P}{l}$, $\overline{x}=0.838l$,

(c) $P=2.75\dfrac{M_P}{l}$。

4. $q=\dfrac{6M_PR}{a^2(3R-2a)}$。

5. $P=2\pi M_P$。

6. $P_1+P_2\left(3-\dfrac{2a}{R}\right)=6\pi M_P$。

7. $P=2\pi M_P\left(1-\dfrac{a}{R}\right)$

8. $q=4M_P\ln\dfrac{R}{a}\Big/\left(2R^2\ln\dfrac{R}{a}-R^2+a^2\right)$, $w=w_b\ln\dfrac{r}{a}\Big/\ln\dfrac{R}{a}$

9. $q=\dfrac{24a^2}{b^2(\sqrt{b^2+3a^2}-b)^2}\cdot M_P$, $x=b\left(\dfrac{-b}{2a}+\sqrt{\dfrac{b^2}{4a^2}+\dfrac{3}{4}}\right)$。

当 $a=b$ 时, $q=\dfrac{24M_P}{a^2}$。

当 $a\to\infty$ 时, $q=\dfrac{8M_P}{a^2}$。

10. (a) $P = 16M_P \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$。

(b) $P = M_P\left(4\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$。

(c) $P = M_P\left(\frac{a}{y} + \frac{a}{b-y} + \frac{b}{x} + \frac{b}{a-x}\right)$。

参 考 书 目

[1] J. B. Martin, Plasticity: Fundamentals and General Results, The MIT Press, 1975.

[2] W. Johnson, P. B. Mellor, Engineering Plasticity, VNR, 1973.

[3] R. A. C. Slater, Engineering Plasticity, The Macmillan Press LTD, 1977.

[4] L. M. Kachanov, Foundations of the Theory of Plasticity, North-Holland Publishing Company, 1971.

[5] A. A. 伊留申著，王振常译，塑性，建筑工程出版社，1957.

[6] H. P. 尔然尼采著，赵超燮等译，考虑材料塑性的结构计算，建筑工程出版社，1957.

[7] A. Nadai, Theory of flow and fracture of solids, McGraw Hill, 1950.

[8] W. Olszak, P. Perzyna, A. Sawczuk, Teoria plastyczności, PWN, 1965.

[9] 鹫津久一郎著，塑性论，上海科学技术出版社，1961.

[10] B. B. 索科罗夫斯基著，王振常译，塑性力学，建筑工程出版社，1957.

[11] O. 霍夫曼、G. 沙克斯著，乔端、孙梁译，工程塑性理论基础，中国工业出版社，1965.

[12] 益田森治，室田忠雄共著，工業塑性力学，養賢堂発行，1972.

[13] 葉山益次郎著，塑性学と塑性加工，オーム社，1969.

[14] 赵祖武编，塑性理论基础，人民教育出版社，1963.

[15] R. 希尔著，王仁等译，塑性数学理论，科学出版社，1966.

[16] 杨桂通编，弹塑性力学，人民教育出版社，1981.

[17] 王仁、熊祝华、黄文彬著，塑性力学基础，（即将出版）。

[18] 蒋咏秋、穆霞英编，塑性力学基础，机械工业出版社，1981.

[19] 山口柏树著，弹・塑性力学，森北出版株式会社，1975.

[20] P. G. 霍奇著，蒋咏秋，熊祝华译，结构塑性分析，科学出版社，1965.

[21] A. Sawczuk, T. Jaeger, Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten, Springer-Verlag, 1963.

[22] P. G. Hodge, Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells, Prentice-Hall Inc. 1963.

[23] M. A. Save, C. E. Massonnet, Plastic analysis and design of plates, shells and disks, NHPC, 1972.

[24] W. Olszak, Z. Mróz, P. Perzyna, Recent trends in the development of the theory of plasticity, Pergamon Press-PWN, 1963.

[25] 徐秉业主编，弹性与塑性力学－例题与习题，机械工业出版

社，1981.
[26] 王祖唐编，金属压力加工原理，机械工业出版社，1966.
[27] 徐芝纶编，弹性力学，人民教育出版社，1979.
[28] 徐秉业、陈森灿编，塑性理论简明教程习题解答，清华大学出版社，1981.
[29] 王仁编，塑性力学引论，1980.
[30] 熊祝华编，塑性力学讲课提纲，1980.
[31] 黄文彬编，塑性力学基础（一）、（二），北京农业机械化学院印，1979.
[32] 孔超群、李康先编，塑性力学，哈尔滨船舶工程学院、上海交通大学印，1979.
[33] 夏志皋编，塑性力学，同济大学印，1979.
[34] 大连工学院工程力学教研室编，塑性力学，大连工学院印，1978.
[35] 上海交通大学 170 教研组编，塑性力学，上海交通大学印，1977.