第一章 绪 论

§1.1 固体材料的塑性性质 屈服与强化的概念

塑性力学是固体力学的一个分支学科，是研究可变形固体受到外荷载、温度变化及边界约束变动等作用时，塑性变形和应力状态的科学。塑性力学这个名词是根据固体材料在受外部作用时所呈现出的塑性性质命名的。塑性力学讨论固体材料塑性变形阶段的力学问题。可变形固体的弹性阶段和塑性阶段是整个变形过程中的不同阶段，弹性力学和塑性力学是研究这两个密切相连阶段的力学问题的科学。

塑性力学是人们在长期生产斗争与科学实验的丰富成果的基础上发展起来的。它的发展与社会发展有着特别密切的关系，它来源于生产实践，又反过来为生产实践服务。塑性力学作为固体力学的一个分支学科已有100多年的历史。它有一套较完善的经典理论和方法，在工程技术的许多领域得到了广泛的应用。目前，由于现代科学技术的进一步发展，生产向塑性力学提出了一系列新课题、新任务。因而，研究塑性力学的新理论、新方法是非常必要的。在目前，塑性力学仍然是一门富有生命力的学科。

在弹性力学中，我们讨论问题中应力-应变间有惟一的、单值对应的关系，材料的弹性性质的根本特征是其变形过程是可逆的。当应力值超过弹性极限之后，一方面应力与应变关系将不再呈线性关系；另一方面，变形将不可完全恢复，即材料已产生了不可恢复或不可逆的塑性变形。如果在实际工作中不考虑塑性变形，即规定结

构必须在弹性状态下工作，则当结构中某一“危险点”处及其附近的应力达到或超过弹性极限时，其它大部分材料所承受的应力仍然在弹性范围内，构件有可能并不会“破坏”或失效，这种设计和校核在一定程度上将造成浪费。所以在结构设计中考虑材料的塑性性质是可取的。

由材料力学知识可知，弹性变形是物体卸载后就完全消失的那种变形，而塑性变形是指卸载后不能消失的那部分变形。塑性变形的机理要考虑晶体结构细节。例如夹杂、微孔、晶界、位错群等，都是影响塑性变形发展的因素。固体材料的弹性与塑性性质可以用简单拉伸实验来说明。

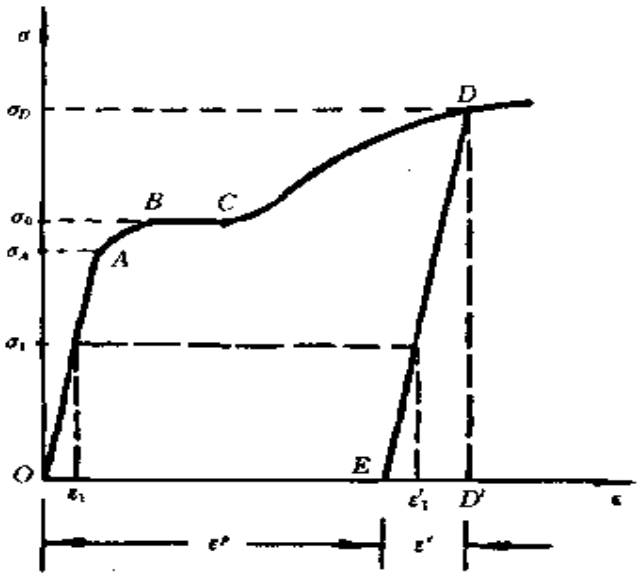


图 1-1

图 1-1 是熟知的低碳钢试件简单拉伸试验应力-应变曲线。其中 A 点所对应的应力 σ_A 称为比例极限，A 点以下 OA 段为直线。B 点所对应的应力 σ_0 为弹性极限。当应力超过 σ_A 时，应力应变关系不再是直线，但仍属弹性阶段，在 B 点之前，即 $\sigma<\sigma_0$，如卸载，则应力应变关系按原路径恢复到原始状态。σ_0 称为屈服应力。可见，应力

在达到屈服应力以前经历了线性弹性阶段（OA 段）和非线性弹性阶段（OB 段）。应力超过屈服应力以后，如卸载，则应力与应变关系就不再按原路径回到原始状态，而有残余应变，即有塑性应变保留下来。BC 段称为塑性平台。在 BC 段上，在应力不变的情况下可继续发生变形，通常称为塑性流动。

当应力达到 σ_D 时，如卸载，则应力应变关系自 D 点沿 DE 到 E 点，OE 称为塑性应变部分，ED' 称为弹性应变部分，就是说，总应变可分为两部分：弹性部分 ε^e 和塑性部分 ε^p，如总应变为 ε，则有

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{1-1}$$

若在 D 点卸载后重新加载，则在 $\sigma<\sigma_D$ 之前，材料呈弹性性质，当 $\sigma>\sigma_D$ 以后才重新进入塑性阶段。这就相当于提高了屈服应力。材料的这种当应力超出了弹性极限以后，就相当于增加了材料内部对变形抵抗能力的性质，叫做强化。

塑性力学研究的问题是弹性力学的继续，为了更好地了解固体材料在外力作用下较全面的性质，塑性理论的研究是十分必要的。

§1.2 实用的简化模型

为了使求解弹塑性力学问题成为可能，并能得到尽可能简单而又符合工程要求的解答，往往将 $\sigma-\varepsilon$ 曲线作进一步简化，一般常见简化模型有四种。

一、弹性线性强化材料模型

在这种模型中，认为材料经过线性弹性阶段后进入线性塑性强化阶段，在线性塑性强化阶段 E_1 = 常数，其材料本构关系为

$$\begin{cases} \sigma = E\varepsilon & \text{当 } \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \sigma \leqslant \sigma_0 \\ \sigma = E_1\varepsilon + (1-\lambda)\sigma_0 & \text{当 } \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \sigma \geqslant \sigma_0 \end{cases} \tag{1-2}$$

$$\lambda = E_1/E$$

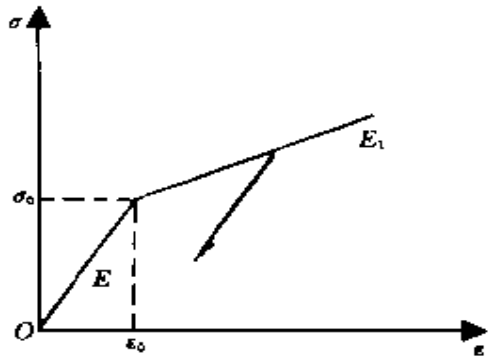


图 1-2

二、刚性线性强化材料

一般地，由于弹性变形比塑性变形小很多，为简化解，可以省略，即认为材料不经过弹性阶段，直接进入线性塑性强化阶段，在这种模型中，有 $E\to\infty$，$E_1=$常数，其本构关系为

$$\begin{cases}\epsilon = 0 & \text{当 } \sigma \leqslant \sigma_0 \\ \sigma = \sigma_0 + E_1\epsilon & \text{当 } \sigma > \sigma_0\end{cases} \tag{1-3}$$

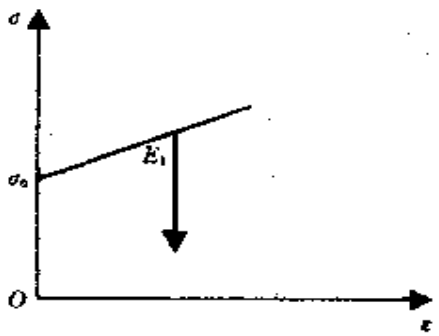


图 1-3

三、弹性理想塑性材料模型

该材料模型认为材料经过线性弹性阶段后，便进入流动状态，即塑性变形在屈服应力 σ_0 作用下可无约束地发展，这就相当于前述的塑性平台，只是略加扩大了。此时 $E_1=0$，其材料本构关系为

$$\begin{cases}\sigma = E\varepsilon & \text{当 } \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \\ \sigma = \sigma_0 & \varepsilon \geqslant \varepsilon_0,\varepsilon \text{ 值不定}\end{cases} \tag{1-4}$$

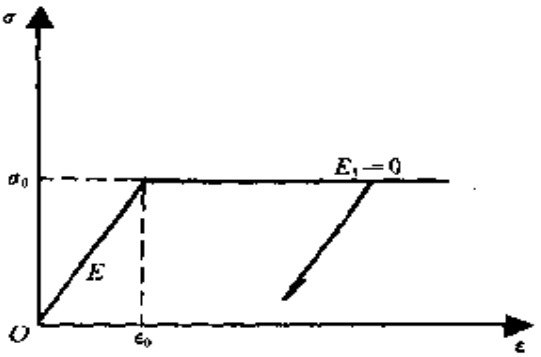


图 1-4

四、刚性理想塑性材料模型

刚性理想塑性材料模型认为材料在应力达到屈服应力 σ_0 时，便进入塑性流动状态，应力小于 σ_0 时，则处于刚性状态，即无应变状态。其材料本构关系为

$$\begin{cases}\sigma = \sigma_0,\varepsilon \geqslant 0,\varepsilon \text{ 值不定} \\ \sigma < \sigma_0,\varepsilon = 0\end{cases} \tag{1-5}$$

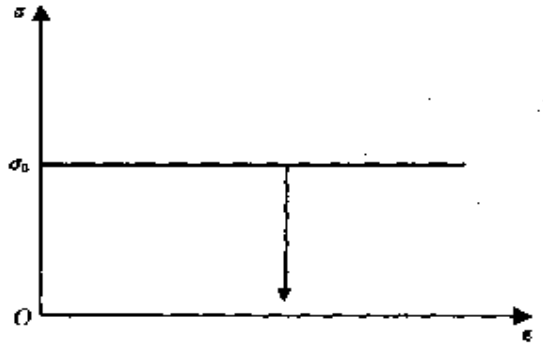


图 1-5

理想塑性材料的特点是：当 $\sigma<\sigma_0$ 时，材料为弹性的或刚性的，一旦应力达到屈服极限 σ_0，则变形可“无限”地增长，但应力不变；同时应力值不可能超过屈服极限。应力卸载时，对于弹性理想塑性

材料，应力应变关系遵循胡克定律；对于刚性理想塑性材料，应变保持不变，材料表现为刚性。

今后，在许多情况下，略去弹性变形而采用刚塑性分析所带来的误差非常小，故在大量的工程设计中可以允许用简化的理想刚塑性或理想弹塑性本构关系进行塑性分析。

§1.3 塑性力学的发展与应用前景

塑性力学的发展已有百余年历史，Coulomb C. A. (1773) 和 Rankine W. T. M. (1853) 首先研究了土壤的屈服准则，并给出了著名的 Coulomb 公式和 Rankine 理论等。Tresca H. (1864) 发表了关于金属挤压的实验报告，并指出金属在最大剪应力达到某一量值时，材料即发生塑性流动。从此产生了关于金属材料的第一个屈服准则。之后，Mises R. von (1913) 根据能量理论得出了一个新的屈服准则。令人高兴的是，Mises 屈服准则得到了大多数金属材料实验结果的支持。至今，Coulomb 公式，Tresca 和 Mises 屈服条件仍在工程中得到广泛应用。

本世纪上半叶是塑性力学发展最旺盛的时期，在这一时期，静力学问题得到了完善的发展，理想塑性的平面问题和轴对称问题都可得到完全解。值得指出的是 Prandtl L. (1921) 和 Hencky H. (1923)对平面塑性力学问题求解方法及滑移线场理论的贡献是有重要意义的。在这时期塑性增量理论已日臻完善，同时 Hencky H.，Nadai A. (1931)，Il'yushin A. A. (1940)，Sokolovsky W. W. (1940) 等发展了全量理论。之后，Prager W. (1943)，Ziegler H. (1959)，Drucker D. C.，Symonds P. S.，Koiter W. T.，Kachanov L. M.，Hill R.，Ivlev D. D.，Lee E. H.，Melan E. 等人发展强化理论，极限分析理论，本构理论，安定性理论，多种类型的变分原理，极值原理以及位移限界定理等等。从此塑性力学得到多方面的大发展，基本上完善了塑性力学学科的理论框架，同

时在工程上也得到了广泛的应用，如结构的塑性设计，最小重量设计以及机械加工方面的应用等等。

在第二次世界大战期间，由于军工的需要，塑性动力学问题得到了发展。前苏联 Rakhmatulin Kh. A.，Shapiro G. S. 及美国的 Taylor G. I. 等人研究了塑性杆及索中应力波的传播理论和卸载波理论等，从此弹塑性波的传播以及结构塑性动力响应理论得到快速发展。Malvern L. E.，Perzyna P.，Hodge P. G. Jr.，Clifton R. J.，Ting T.C.T. 等人在动力学方面做出了卓越贡献。由于应用的需要从而诞生了侵彻力学，穿甲力学，冲压成型力学，非线性波动力学等等新的学科分支。

我国学者在塑性力学的发展中曾做出了不少重要贡献，且至今仍进行着新的研究课题。北京大学，清华大学，中国科技大学，中国科学院力学研究所，上海交通大学以及太原理工大学（原太原工业大学）等单位的学者们在研究结构塑性分析，弹塑性动力屈曲，结构动力响应分析，弹塑性断裂力学问题，弹塑性损伤力学问题，塑性本构理论方面，塑性成形力学方面，复合应力波传播理论方面以及冲击屈曲理论和弹塑性结构动力系统的稳定性，分叉，非规则运动，混沌运动等方面都有重要研究成果。

面临科学技术的飞速发展的 21 世纪新时代，塑性力学亟待扩大理论体系，与相邻学科协调发展有众多亟待研究解决的问题。例如，塑性有限变形理论，特别是在强动载荷作用下的有限变形的基本塑性行为，本构理论，非规则运动的控制理论以及塑性力学和材料科学与工程实际有密切的关系。从而引发了塑性变形与材料内部结构的关系，所谓应变场的尺度效应，应变梯度塑性理论的研究等等。这些问题都离不开创造新的实验手段和新的实验技术，发现新现象，建立新模型、新理论。

塑性力学的发展与工程应用有着直接密切的关系。为了充分发挥材料的潜力，最早发展了塑性极限设计，在建筑结构工程、船舶、

桥梁工程中得到了广泛应用；同时，在材料的拉拔、压延等成形、铸造工业方面，也发挥了塑性力学的重要作用。塑性力学有着广阔的应用前景。在短时强载荷作用下的弹塑性体，能量的吸收主要由其塑性变形吸收。有限变形条件下的塑性动力学将在塑性成形动力学、穿甲力学等领域有着重要应用。

当材料的本征长度为微米量级，应变梯度的影响必然表现在微机电系统以及信息材料、微元件的力学行为。诸如微细元件的断裂、损伤、强度及稳定性等等问题。以应变梯度理论为核心的微结构塑性力学将会迅速得到发展，应用于高新技术的众多领域。

第二章　应力与应变

§2.1　一点的应力状态

为了研究一点 P 处的应力状态，我们在 P 点处沿坐标轴 x、y、z 方向取一个微小的平行六面体(图 2-1)，其六个面的外法线方向分别与三个坐标轴的正负方向重合，各边长分别为 Δx、Δy、Δz，假定应力在各面上均匀分布，于是各面上的应力便可用作用在各面中心点的一个应力矢量来表示。每个面上的应力矢量又可分解为一个正应力和两个切应力分量。按前面约定的表示法，图 2-1 给出的各应力分量均为正方向。

由图 2-1 可知，当微小的平行六面体趋于无穷小时，六面体上的应力就代表 P 点处的应力。因此，P 点处的应力分量共有 9 个，其

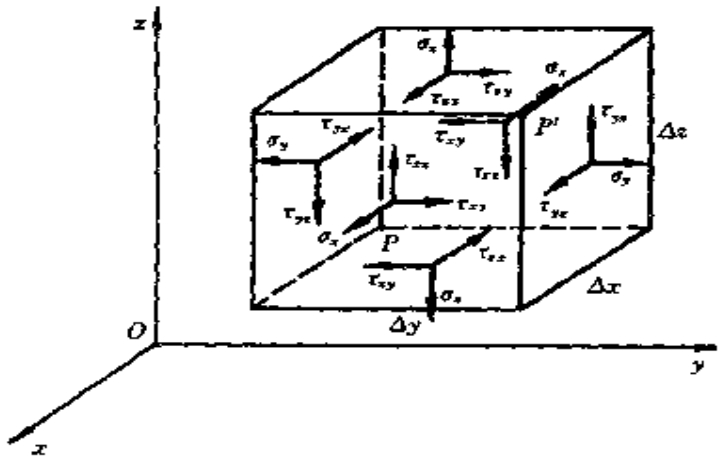


图 2-1

中有 3 个正应力分量、6 个切应力分量（以后将证明切应力互等定理，从而，实际上独立的切应力分量只有 3 个）。我们把这 9 个应力分量按一定规则排列，令其中每一行为过 P 点的一个面上的 3 个应力分量，即

$$\begin{cases} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{cases} \tag{2-1}$$

以上这 9 个应力分量定义一个新的量 Σ，它描绘了一种物理现象，即 P 点处的应力状态。Σ 是对坐标系 $Oxyz$ 而言的，当坐标系变换时，它们按一定的变换式变换成另一坐标系 $Ox'y'z'$ 中的 9 个量

$$\begin{cases} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{cases}$$

这 9 个分量描绘同一点 P 的同一物理现象，所以它们定义的仍为 Σ。而 σ_x、σ_y…这 9 个量就称为 Σ 的元素。数学上，在坐标变换时，服从变换式的 9 个数所定义的量叫做二阶张量。根据这一定义，Σ 是一个二阶张量，并称为应力张量。以后将证明，应力张量为一对称二阶张量。各应力分量即为应力张量的元素。在 § 2.3 中我们将给出应力分量在坐标变换时服从的变换公式。

应力张量通常表示为 σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{2-2}$$

其中 i，$j=x$，y，z，当 i，j 任取 x，y，z 时，便得到相应的分量①。

式 (2-2) 与 3×3 阶的矩阵写法相同。如令 i 代表行，j 代表列，行列数 1，2，3 对应于 x，y，z。例如第二行第三列的元素为 τ_{23}，即

① σ_{xx}，σ_{yy}，σ_{zz}已简写为 σ_x，σ_y，σ_z。

应力分量为 τ_{yz}，余类推。

应当指出，物体内各点的应力状态，一般说来是不同的，即非均匀分布的。亦即各点的应力分量应为坐标 x，y，z 的函数。所以，应力张量 σ_{ij} 与给定点的空间位置有关，谈到应力张量总是针对物体中的某一确定点而言的，以后我们将看到，应力张量 σ_{ij} 完全确定了一点处的应力状态。

张量符号与下标记号法使冗长的弹性力学公式变得简明醒目，在文献中已被广泛应用，今后我们将逐渐熟悉这种标记法。

§2.2 主应力、主方向与应力不变量

在三维的情况下，我们在任意一点 O 附近取出一微小四面体单元 $OABC$，斜面 ABC 的外法线为 n（图 2-2）。如令斜面 ABC 的面积为 1，则三角形 OBC、OAC、OAB 的面积分别为

$$1 \times \cos(n,x) = l_1$$

$$1 \times \cos(n,y) = l_2$$

$$1 \times \cos(n,z) = l_3$$

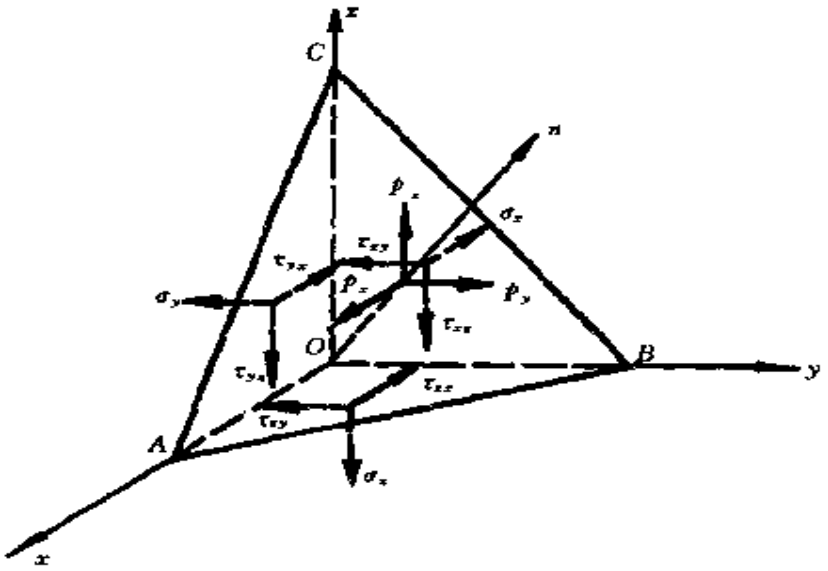


图 2-2

图 2-2 中的微小四面体上力的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 \\ p_y &= \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3 \\ p_z &= \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3 \end{aligned}\right\}$$

在过受力物体内一点任意方向的微小面元上，一般都有正应力与切应力，不同方向的面元上这些应力有不同的数值。当此微小面元转动时，它的法线方向 n 随之改变，面元上的正应力 σ_n 与切应力 τ_n 的方向和它们的值也都要发生变化。在 n 方向不断改变的过程中，必然要出现这样的情况，即面元上只有正应力，而切应力 τ_n 等于零。我们把这时面元的法线方向 n 称为主方向，相应的正应力 σ_n 称为主应力，σ_n 所在的面称为主平面。以下将说明，物体中任一点都有三个主应力和相应的三个主方向。

在图 2-2 中，如令 p_x、p_y、p_z 为 ABC 面上单位面积面力 $\bar{p}$ 的三个分量，则有

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \tag{a}$$

ABC 面上的正应力 σ_n 即为

$$\sigma_n = p_x l_1 + p_y l_2 + p_z l_3 \tag{b}$$

将图 2-2 中微小四面体上力的平衡方程代入式（b）得

$$\begin{aligned} \sigma_n &= (\sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3) l_1 + (\tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3) l_2 + \\ &\quad (\tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3) l_3 \\ &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y l_2^2 + \sigma_z l_3^2 + 2(\tau_{xy} l_1 l_2 + \tau_{yz} l_2 l_3 + \tau_{zx} l_1 l_3) \end{aligned} \tag{2-3}$$

式（2-3）为 n 方向（亦即任意方向）斜面上的正应力的表达式。该面上的切应力为

$$\tau_n^2 = p^2 - \sigma_n^2 \tag{2-4}$$

将式（a）及式（2-3）代入式（2-4），可得法线方向为 n 的面上的切应力。

如果在一个斜面上的切应力为零，即 $\tau_n = 0$，则从式（2-4）有 σ_n^2

$=p^2$，此时该斜面上的正应力 σ_n 就是主应力。在这种情况下该斜面上的正应力 σ_n 即与 $\overline{p}$ 的大小和方向完全相同①。于是有

$$\left.\begin{aligned} p_x &= pl_1 = \sigma_n l_1 \\ p_y &= pl_2 = \sigma_n l_2 \\ p_z &= pl_3 = \sigma_n l_3 \end{aligned}\right\} \tag{c}$$

将式（c）代入图 2-2 中微小四面体上力的平衡方程得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 &= \sigma_n l_1 \\ \tau_{xy} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3 &= \sigma_n l_2 \\ \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 + \sigma_z l_3 &= \sigma_n l_3 \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

式（d）可改写为

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_n) l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 &= 0 \\ \tau_{xy} l_1 + (\sigma_y - \sigma_n) l_2 + \tau_{yz} l_3 &= 0 \\ \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} l_2 + (\sigma_z - \sigma_n) l_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

或

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_n) l_j = 0 \tag{2-5'}$$

此处 δ_{ij}为柯氏 δ（Kronecker-δ），定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

l_1，l_2，l_3 满足下列关系式

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \tag{2-6}$$

于是我们得到了含有 σ_n，l_1，l_2，l_3 四个未知数的四个方程（2-5）和（2-6），求解之后便可得到主应力及与之对应的主方向。现在我们用下述方法来讨论问题的解。由于式（2-6）说明 l_1，l_2，l_3 这三个方向余弦不可能同时等于零，所以式（2-5）可看成关于 l_1，l_2，l_3 的线性齐次方程组，而且应当有非零解存在。由齐次方程组有非零解的条件得到

① 该斜面的面积取为 1。

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n \end{vmatrix} = 0 \tag{2-7}$$

式（2-7）展开后得

$$(\sigma_x - \sigma_n)(\sigma_y - \sigma_n)(\sigma_z - \sigma_n) + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}$$
$$- \tau_{xz}\tau_{xz}(\sigma_y - \sigma_n) - \tau_{yz}\tau_{yz}(\sigma_x - \sigma_n) - \tau_{xy}\tau_{xy}(\sigma_z - \sigma_n) = 0$$

或

$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0 \tag{2-8}$$

其中

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{2-9}$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_z\sigma_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \tag{2-9'}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{2-9''}$$

方程（2-8）是关于 σ_n 的三次方程，它的三个根，即为三个主应力，其相应的三组方向余弦对应于三组主平面。方程（2-8）的三个根都是实根，因为，式（2-5）说明主应力是应力张量 σ_{ij} 的特征值，式（2-7）或式（2-8）为特征方程。因应力张量为对称张量，其各元素均为实数，故必有实特征根，即三个主应力都是实数，其方向余弦为应力张量 σ_{ij} 的特征向量。方程（2-8）的三个根均为实数的证明还可以从三次方程根的性质的代数理论中得到。至于其方向，可以通过将三个主应力分别代入式（2-5）（即将主应力 σ 换 σ_n），再利用式（2-6）而求得。可以证明，若三个主应力互不相等，即方程（2-8）无重根。则它们的方向即主方向，且必相互垂直。还可以进一步讨论方程(2-8)有两个或三个重根的情况。

主应力的大小与坐标选择无关，故方程(2-8)的三个系数 I_1、I_2、I_3 也必与坐标选择无关，不然的话，主应力就要随坐标选择的不同

而变化，所以 I_1、I_2、I_3 为不变量，分别称为第一、第二、第三应力张量的不变量，简称应力不变量。

解方程（2-8）后，得到所考虑点的三个主应力，从大到小记为 σ_1、σ_2、σ_3，即 $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$。

如果坐标轴恰与主方向重合，则应力不变量用主应力表示为

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}\right\} \tag{2-10}$$

以主应力 σ_1、σ_2、σ_3 的方向为坐标轴（记为 1、2、3）的几何空间，称为主向空间或主应力空间。要了解在主向空间任意斜面上的应力，可假定某一斜面的应力矢量为 $\overline{p}$，该斜面的方向余弦为 l_1、l_2、l_3（图 2-3），注意到 $\overline{p}$ 在坐标轴方向的三个投影分别为 $p_1=\sigma_1 l_1$、$p_2=\sigma_2 l_2$、$p_3=\sigma_3 l_3$，于是该面上的正应力 σ 与切应力 τ 的关系为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= p^2-\tau^2 \\ &= p_1^2+p_2^2+p_3^2-\tau^2 \\ &= \sigma_1^2 l_1^2+\sigma_2^2 l_2^2+\sigma_3^2 l_3^2-\tau^2 \end{aligned} \tag{2-11}$$

由于

$$\sigma = p_1 l_1+p_2 l_2+p_3 l_3 = \sigma_1 l_1^2+\sigma_2 l_2^2+\sigma_3 l_3^2 \tag{2-12}$$

故有

$$\tau = \sqrt{\sigma_1^2 l_1^2+\sigma_2^2 l_2^2+\sigma_3^2 l_3^2-(\sigma_1 l_1^2+\sigma_2 l_2^2+\sigma_3 l_3^2)^2} \tag{2-13}$$

现在我们讨论一种特殊情况，即在主向空间取一斜面，该斜面的法线 n 与三个坐标轴呈等倾斜，即

$$l_1 = l_2 = l_3$$

由于

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2 = 1$$

故

$$l_1 = l_2 = l_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

或

$$\arccos(l_1) = \arccos(l_2) = \arccos(l_3) = 54°44'$$

在这个三维空间中的上半空间（xy 平面以上，即 z 的正方向）可

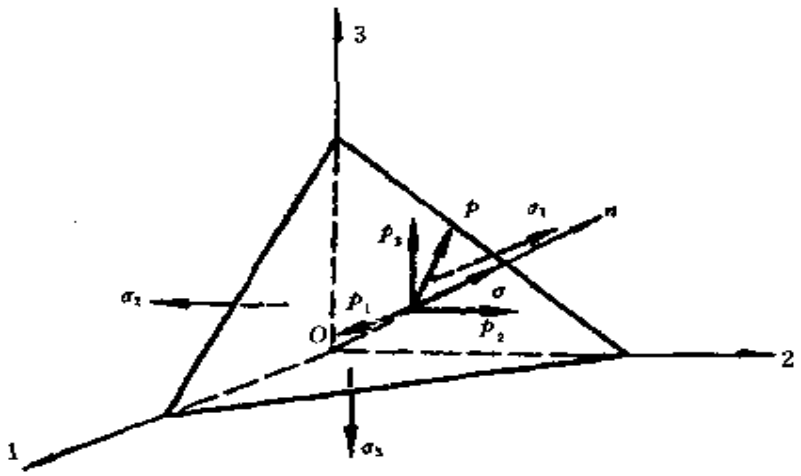


图 2-3

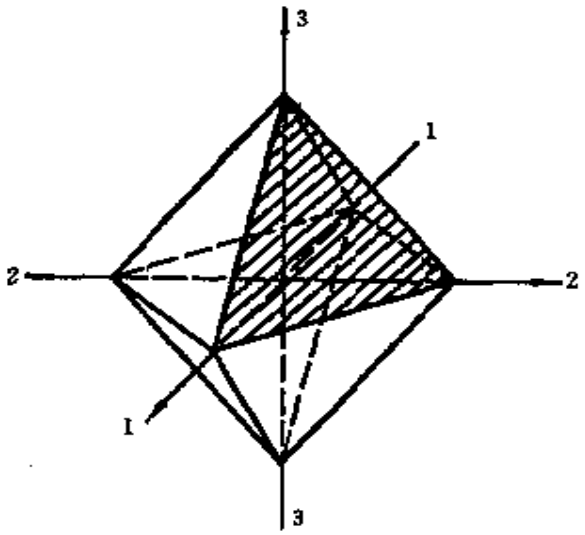


图 2-4

构成四个这样的面，在下半空间（xy 平面以下，即 z 的负方向）也可构成四个这样的面，共有八个，这八个面组成了一个正八面体，其中每一个面称为八面体平面。图 2-4 给出了八面体的图形。

鉴于八面体平面上的应力的特殊性，下面我们给出八面体平面上的正应力和切应力。八面体平面上的正应力 σ_8 由式（2-12）得

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{2-14}$$

由式（2-13）得八面体面上的切应力为

$$\tau_8 = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \tag{2-15}$$

一般情况为

$$\tau_8 = \frac{1}{3}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{\frac{1}{2}} \tag{2-15'}$$

§2.3 球张量与应力偏量

在外力作用下，物体的变形，通常可分为体积改变和形状改变两种成分；通常认为，体积的改变是由于各向相等的应力引起的。试验证明，固体材料在各向相等的应力作用下，一般都表现为弹性性质①。因而可以认为，材料的非弹性变形主要是物体产生形状变化时产生的。这样，在塑性理论中，常要根据这一特点把应力状态进行分解。

在一般情况下，某一点处的应力状态可以分解为两部分，一部分是各向相等的压（或拉）应力 σ，另一部分记为 S_{ij}，即

$$\sigma_{ij} = \sigma + S_{ij} \tag{2-16}$$

其中

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

① 布里治曼（Bridgman，P. W. 1925）的实验证明：对于钢铁，在 1000MPa 的静水压力作用下，引起的体积变化仅为 0.06%。

$$S_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x-\sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma_m & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma_m\end{bmatrix}$$

$$\sigma_m=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_8$$

σ 可定义为球形应力张量，简称球张量；而 S_{ij} 则称为偏斜应力张量，简称应力偏量。

球张量表示一种“球形”应力状态。实际上，在主向空间内，如令一斜面 n 上的应力矢量为 $\bar{p}$，其沿 1、2、3 轴的分量为

$$p_1=\sigma_1 l_1$$
$$p_2=\sigma_2 l_2$$
$$p_3=\sigma_3 l_3$$

代入式（2-6）后则得

$$\frac{p_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{p_2^2}{\sigma_2^2}+\frac{p_3^2}{\sigma_3^2}=1 \qquad (2\text{-}17)$$

式（2-7）是一个椭球面方程，它表示在以 p_1、p_2、p_3 为坐标轴的空间内的主半轴为 σ_1、σ_2、σ_3 的一个椭球面，称为应力椭球面［图 2-5（a）］。意思是说，当任一点 O 的每一斜面上的应力都用应力矢量 $\bar{p}$（其分量为 p_1、p_2、p_3）表示的话，则任一从 O 做出的这种矢量的矢端都落在此椭球面上，如图 2-5（a）所示。

当 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_m$ 时，式（2-17）可化为

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2=\sigma_m^2$$

这是一个以 σ_m 为半径，以坐标原点为球心的球面的方程，是上述应力椭球面的特殊情况。它表示一个球形应力状态，如图 2-5（b）所示。球张量便由此而得名。

应力偏量则只由偏应力分量 $\sigma_x-\sigma_m=S_1$、$\sigma_y-\sigma_m=S_2$、$\sigma_z-\sigma_m=S_3$ 及切应力分量 τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{xz} 构成。以主应力表示的应力偏量为

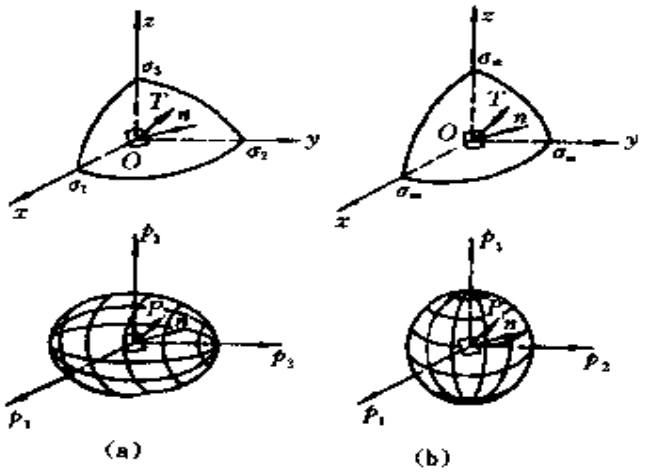


图 2-5

$$S_{ij}=\begin{bmatrix}\dfrac{2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3}{3} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{2\sigma_2-\sigma_3-\sigma_1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2}{3}\end{bmatrix}$$

对于球张量和应力偏量 S_{ij}，可以类似于应力张量 σ_{ij}那样得到其应力不变量。应力偏量的三个不变量为

$$\begin{aligned}J_1&=0\\ J_2&=-\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]\\ &=-\frac{1}{2}(S_1^2+S_2^2+S_3^2)\\ &=S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1\\ J_3&=S_1S_2S_3\end{aligned}\tag{2-18}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}S_1&=\sigma_1-\sigma_m\\ S_2&=\sigma_2-\sigma_m\\ S_3&=\sigma_3-\sigma_m\end{aligned}\right\}\tag{2-19}$$

§2.4 主应变与主应变方向

前面我们讨论了受力物体的应力，现在开始讨论与应力相对应的应变。三维应力状态下的各应变分量为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{2-20}$$

显然，x 轴与 y 轴间的角度变化与 y 轴与 x 轴间的角度变化是没有什么不同的，即有

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \tag{2-21}$$

式（2-20）称为应变位移关系式。用张量符号可缩写为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (i,j = x,y,z) \tag{2-21'}$$

由以上讨论可知，当 $i=j$ 时，得到的是正应变；当 $i \neq j$ 时，得到的是切应变。对切应变有

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \tag{2-22}$$

与讨论应力状态时相似，我们把切应变等于零的面叫做主平面，主平面的法线方向叫做主应变方向，主平面上的正应变就是主应变。

与应力情况相类似地有

$$\begin{cases}(\varepsilon_x-\varepsilon_n)S_x+\varepsilon_{xy}S_y+\varepsilon_{xz}S_z=0\\ \varepsilon_{xy}S_x+(\varepsilon_y-\varepsilon_n)S_y+\varepsilon_{yz}S_z=0\\ \varepsilon_{xz}S_x+\varepsilon_{yz}S_y+(\varepsilon_z-\varepsilon_n)S_z=0\end{cases}\tag{2-23}$$

或

$$(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\varepsilon_n)S_j=0\tag{2-23'}$$

可以得到一个以 ε_n 为未知量的三次方程

$$\varepsilon_n^3-I_1'\varepsilon_n^2+I_2'\varepsilon_n-I_3'=0\tag{2-24}$$

其中

$$I_1'=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

$$I_2'=\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_z-(\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{yz}^2+\varepsilon_{xz}^2)$$

$$I_3'=\begin{vmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_z\end{vmatrix}$$

$$=\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z+2\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{zx}-(\varepsilon_x\varepsilon_{yz}^2+\varepsilon_y\varepsilon_{xz}^2+\varepsilon_z\varepsilon_{xy}^2)\tag{2-25}$$

分别称为第一、第二、第三应变张量的不变量。

方程（2-24）有三个实根，即主应变 ε_1、ε_2、ε_3 完全类似地可以得到最大切应变为

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1&=\pm(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\\ \gamma_2&=\pm(\varepsilon_1-\varepsilon_3)\\ \gamma_3&=\pm(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\end{aligned}\right\}\tag{2-26}$$

八面体切应变为

$$\gamma_8=\frac{2}{3}[(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+6(\varepsilon_{xy}^2+\varepsilon_{yz}^2+\varepsilon_{xz}^2)]^{\frac{1}{2}}\tag{2-27}$$

前已述及，对于大多数金属来说，在很大的静水压力作用下仍表现为弹性，因而可引进应变偏量这一表畸变变形的量，即各应变偏量的分量为

$$\varepsilon_x-\varepsilon_m=e_1,\varepsilon_y-\varepsilon_m=e_2,\varepsilon_z-\varepsilon_m=e_3$$

及 $\gamma_{xy},\gamma_{yz},\gamma_{zx}$，其中 ε_m 为平均正应变

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

以主应力表示的应变偏量及其不变量分别为

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(2\varepsilon_3 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1) \end{bmatrix} \tag{2-28}$$

及

$$J_1' = 0$$

$$J_2' = e_1e_2 + e_2e_3 + e_1e_3$$

$$J_3' = e_1e_2e_3$$

为了应用方便起见，现在引进以下两个特殊量 ε_i（或 $\bar{\varepsilon}$）和 σ_i（或 $\bar{\sigma}$），即定义

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}} \tag{2-29}$$

称为等效应变（也称应变强度或有效应变），及

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}} \tag{2-30}$$

称为等效应力（也称应力强度或有效应力）。

于是在简单拉伸时，若材料不可压缩，则可得

$$\varepsilon_i = \varepsilon \tag{2-31}$$

$$\sigma_i = \sigma \tag{2-32}$$

还可定义

$$\Gamma = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}} \tag{2-33}$$

称为等效剪应变（或剪应变强度），及

$$T = \sqrt{\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}} \tag{2-34}$$

称为等效剪应力（或剪应力强度）。

在纯剪条件下可得

$$\Gamma = \gamma \tag{2-35}$$

$$T = \tau \tag{2-36}$$

不难建立 σ_i 与 τ_8 及 T，ε_i 与 γ_8 及 Γ 之间的关系式。

习　　题

2.1　已知一点处的应力状态为：$\begin{vmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times 10^3\text{Pa}$

试求该点处的最大主应力及主方向。

答案：$\sigma_1 = 17.083 \times 10^3\text{Pa}$，$\sigma_1$ 与 x 轴间的夹角为 $40°16'$。

2.2　试用初等理论求出受均布载荷作用的简支梁（矩形截面）的应力状态，并校核所得结果是否满足平衡方程与边界条件。

2.3　试证在坐标变换时，I_1 为一不变量。

2.4　已知下列应力状态

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 11 \end{bmatrix} \times 10^5\text{Pa}$$

试求八面体正应力与切应力。

2.5　试用 $u_x=u_\rho\cos\varphi-u_\varphi\sin\varphi$，$\varepsilon_x=\dfrac{\partial u_x}{\partial x}$ 及极坐标与直角坐标之间的关系，导出极坐标下的应变与位移关系

$$\begin{cases}\varepsilon_\rho=\dfrac{\partial u_\rho}{\partial\rho}\\ \varepsilon_\varphi=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\dfrac{u_\rho}{\rho}\\ \gamma_{\rho\varphi}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\dfrac{u_\varphi}{\rho}\end{cases}$$

第三章　屈服条件与本构方程

§3.1　常用屈服条件

对于屈服条件的研究已经有两个多世纪。经过许多实验检验，证明符合工程材料特性，又便于工程应用的常用屈服条件有以下几种：

一、最大剪应力条件

屈雷斯加（H. Tresca）根据自己的实验结果，认为最大剪应力达到某一数值时材料就发生屈服。即

$$\tau_{max} = \tau_0 \tag{3-1}$$

此处，τ_0 为材料的剪切屈服应力。对于不同的固体材料 τ_0 值要由实验确定。

最大剪应力条件要求预先知道最大与最小主应力。假定 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$，则 $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$。在简单拉伸情况下，当 $\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$（$\sigma_0$ 为简单拉伸屈服应力），则

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0$$

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \tau_0 = \frac{1}{2}\sigma_0 \tag{3-2}$$

在纯剪情况下，$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_0, \sigma_2 = 0$，将此值代入式（3-1）得

$$\tau_0 - (-\tau_0) = \sigma_0$$

同样得

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\sigma_0$$

这就是说，根据最大剪应力条件，纯剪屈服应力是简单拉伸屈服应

力之半。

在一般情况下，即 σ_1、σ_2、σ_3 不按大小次序排列，则下列表示最大剪应力的六个条件中的任一个成立时，材料就开始屈服

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1-\sigma_2&=\pm\sigma_0\\ \sigma_2-\sigma_3&=\pm\sigma_0\\ \sigma_3-\sigma_1&=\pm\sigma_0\end{aligned}\right\}\tag{3-3}$$

或一般地写为

$$\tau_{max}=\tau_0=\frac{1}{2}\max\{|\sigma_1-\sigma_2|,|\sigma_2-\sigma_3|,|\sigma_3-\sigma_1|\}\tag{3-4}$$

其中 τ_0 为最大剪应力屈服值［由式（3-2）可知，该值等于简单拉伸屈服应力值之半］，等号右边表示取绝对值为最大的一个两主应力之差。式（3-4）即最大剪应力条件或屈雷斯加条件。它表示主应力空间内与坐标轴成等倾斜的各边相等的正六角柱体（图 3-1），通常称为屈雷斯加六角柱体。

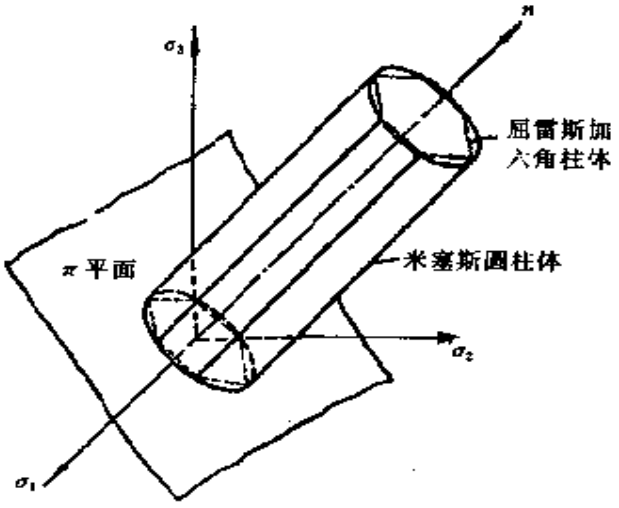


图 3-1

对于二维应力状态（$\sigma_3=0$），则有

$$
\left.\begin{array}{ll}
\sigma_1-\sigma_2=\sigma_0 & \text{如 } \sigma_1>0,\sigma_2<0\\
\sigma_1-\sigma_2=-\sigma_0 & \text{如 } \sigma_1<0,\sigma_2>0\\
\sigma_2=\sigma_0 & \text{如 } \sigma_2>\sigma_1>0\\
\sigma_1=\sigma_0 & \text{如 } \sigma_1>\sigma_2>0\\
\sigma_1=-\sigma_0 & \text{如 } \sigma_1<\sigma_2<0\\
\sigma_2=-\sigma_0 & \text{如 } \sigma_2<\sigma_1<0
\end{array}\right\} \qquad (3\text{-}5)
$$

式（3-5）在 $\sigma_1-\sigma_2$ 平面内的图形为一六边形（图 3-2）称为屈服六边形。

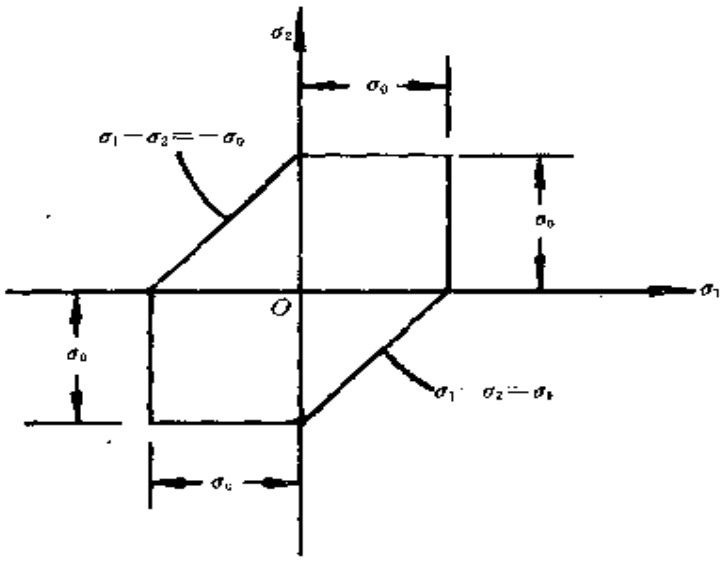


图 3-2

在讨论屈服条件时，我们仍采用应力空间的概念。在二维应力状态，主应力空间退化为一个平面，称为主应力平面。显然，一定的应力状态（σ_1，σ_2），在主应力平面内是一个确定点（应力点），当应力点在屈服六边形内部时，材料处于弹性状态；当应力点达到屈服六边形上的任一点时，材料便开始进入塑性状态。对于理想弹塑性材料，应力点不可能跑出屈服六边形之外。对于弹塑性强化材料开始屈服以后的情况，则应另行专门讨论。

二、畸变能条件（米赛斯条件）

畸变能条件认为，与物体中一点的应力状态对应的畸变能达到某一数值时该点便屈服。以主应力表示的畸变能屈服条件为

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = k^2 \quad (3\text{-}6)$$

其中 k 为表征材料屈服特征的参数，可由简单拉伸屈服实验确定。此时 $\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$，$\sigma_0$ 为简单拉伸屈服应力。将此值代入式（3-6）可得

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_0 \quad (3\text{-}7)$$

在纯剪状态，$\sigma_1 = -\sigma_2, \sigma_3 = 0$，则 k 恒等于在纯剪应力状态时的最大剪应力。因而 k 可由纯剪实验（例如薄管受扭作用实验）得到。式（3-7）说明，根据畸变能条件，纯剪屈服应力是简单拉伸屈服应力的 $\frac{1}{\sqrt{3}}$（约 0.577 倍）。

对于二维应力状态，畸变能条件为

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2 \quad (3\text{-}8)$$

或

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_0}\right)^2 = 1 \quad (3\text{-}8')$$

式（3-8）为 σ_1、σ_2 平面内的一个椭圆（图 3-3）。

如前所述，当应力点落在屈服椭圆以内（即 $\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 < \sigma_0^2$ 或 $f < 0$）时，材料处于弹性状态；当应力点落到屈服曲线上（$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$ 或 $f = 0$）时，材料进入塑性状态。

畸变能条件系米赛斯（Von Mises）所提出，故称为米赛斯条件。式（3-6）是它的一般形式。从式（3-6）看出，米赛斯条件在主应力空间是对坐标轴 σ_1、σ_2、σ_3 为等倾斜的圆柱体，称它为米赛斯圆柱。进一步分析可以证明，米赛斯圆柱外接于屈雷斯加六角柱体。

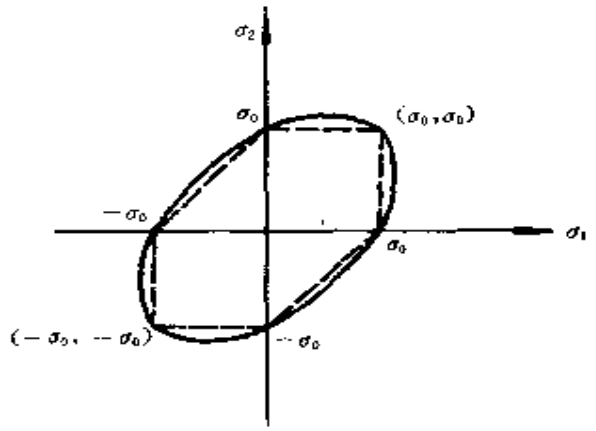


图 3-3

以上两种屈服条件各有优缺点，最大剪应力条件是主应力分量的线性函数，因而对于已知主应力方向及主应力间的相对值的一类问题，是比较简便的，而畸变能条件则显然复杂得多。但从理论上讲最大剪应力条件忽略了中间主应力对屈服的影响，似嫌不佳，而畸变能条件则克服了这一不足。实验证明：畸变能条件比最大剪应力条件更接近于实验结果。

§3.2 强化模型与加载条件

材料在简单拉压时，经过塑性变形后，屈服应力提高了，我们称之为应变强化。在复杂应力状态下发生塑性变形，屈服条件将发生变化，不但是发生塑性变形的这个屈服应力提高了，而且所有其它应力组合的屈服应力也发生了变化。经过变化的屈服条件我们称之为加载条件。在应力空间中对应的表面称之为加载面。我们用

$$\sigma^s = \sigma^s(\sigma, H_\alpha) \tag{3-9}$$

表示屈服面，而用

$$\varphi(\sigma, H_\alpha) = 0 \tag{3-10}$$

表示加载面。H_α是表示与应力历史有关的函数。以下是两个较为普遍采用的强化模型。

一、等向强化模型

等向强化模型认为，材料如果在一个方向得到强化，则在各个方向都有同等的强化。在一维应力情况下则有

$$\sigma_{\pm}^{*} \equiv |\sigma^{*}| \tag{3-11}$$

或者写成函数形式

$$\varphi(\sigma, H_{\alpha}) = \sigma^{2} - \sigma^{*2} = 0 \tag{3-12}$$

其中 σ^{*} 为此前历史中应力在数值上曾达到的最大值。当 $\sigma^{*2} < \sigma_{0}^{2}$ 时，取 $\sigma^{*2} = \sigma_{0}^{2}$。加载和卸载准则可写为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \mathrm{d}\sigma > 0 (\text{加载}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \mathrm{d}\sigma < 0 (\text{卸载}) \end{aligned}\right\} \tag{3-13}$$

若取塑性比功 W^{p} 或塑性应变强度 ε_{e}^{p} 作为记录史参数。而

$$W^{p} = \int_{\sigma_{0}}^{\sigma^{*}} \sigma \mathrm{d}\varepsilon^{p} = \int_{\sigma_{0}}^{\sigma^{*}} \frac{\sigma \mathrm{d}\sigma}{E_{p}} \tag{3-14}$$

$$\varepsilon_{e}^{p} = \int |\mathrm{d}\varepsilon^{p}| \tag{3-15}$$

加载函数可分别写为

$$\sigma^{2} - F(W^{p}) = 0 \tag{3-16}$$

$$\sigma^{2} - g(\varepsilon_{e}^{p}) = 0 \tag{3-17}$$

二、随动强化模型

随动强化模型认为，材料若在一个方向强化了，则在相反方向将同等弱化。在一维应力情况下，则有

$$\sigma_{+}^{*} - \sigma_{-}^{*} = 2\sigma_{0} \tag{3-18}$$

加载函数可写为

$$\varphi(\sigma, H_{\alpha}) = (\sigma - \overset{\wedge}{\sigma})^{2} - \sigma_{0}^{2} = 0 \tag{3-19}$$

$\overset{\wedge}{\sigma}$ 为弹性范围的中心在应力轴上的位移。当 E_{p} = 常数时，可证明

$$\overset{\wedge}{\sigma} = E_{p}\varepsilon^{p} \tag{3-20}$$

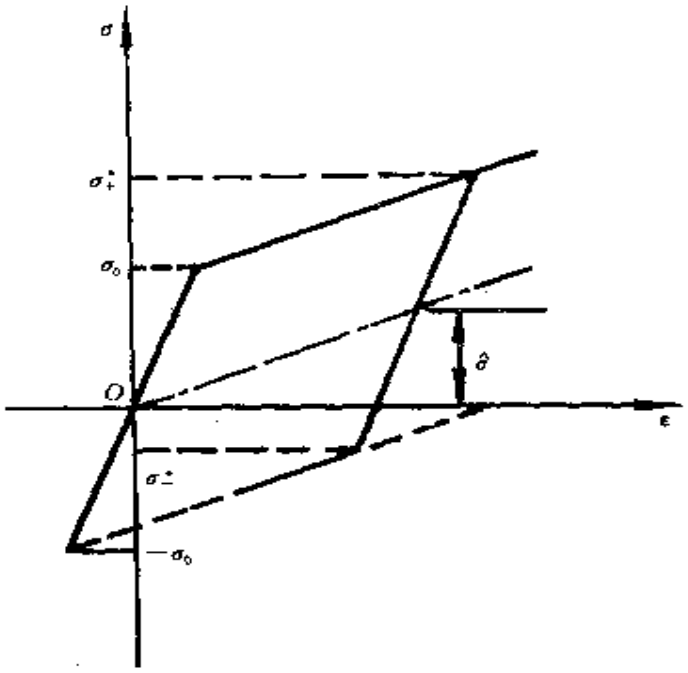


图 3-4

$\hat{\sigma}$或 ε^p 都可以作为随动强化材料记录史的参数。

§3.3 卓柯公设与依留申公设

一、卓柯（Drucker）公设

卓柯在应力空间中对稳定性材料作了如下假设［所谓稳定性材料，即有$\frac{d\sigma}{d\varepsilon}>0$及$\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2}<0$特性的材料，如图 3-5（a）所示］。

（1）在加载过程中，应力增量所做的功恒为正。即有

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij} > 0 \tag{3-21}$$

（2）在加载与卸载的整个闭循环过程中，应力增量所做的净功恒为非负。即有

$$\oint_{\sigma_{ij}^0}(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^0)d\varepsilon_{ij} \geqslant 0 \tag{3-22}$$

不等式（3-21）是显而易见的，不需证明，在不等式（3-22）中，由

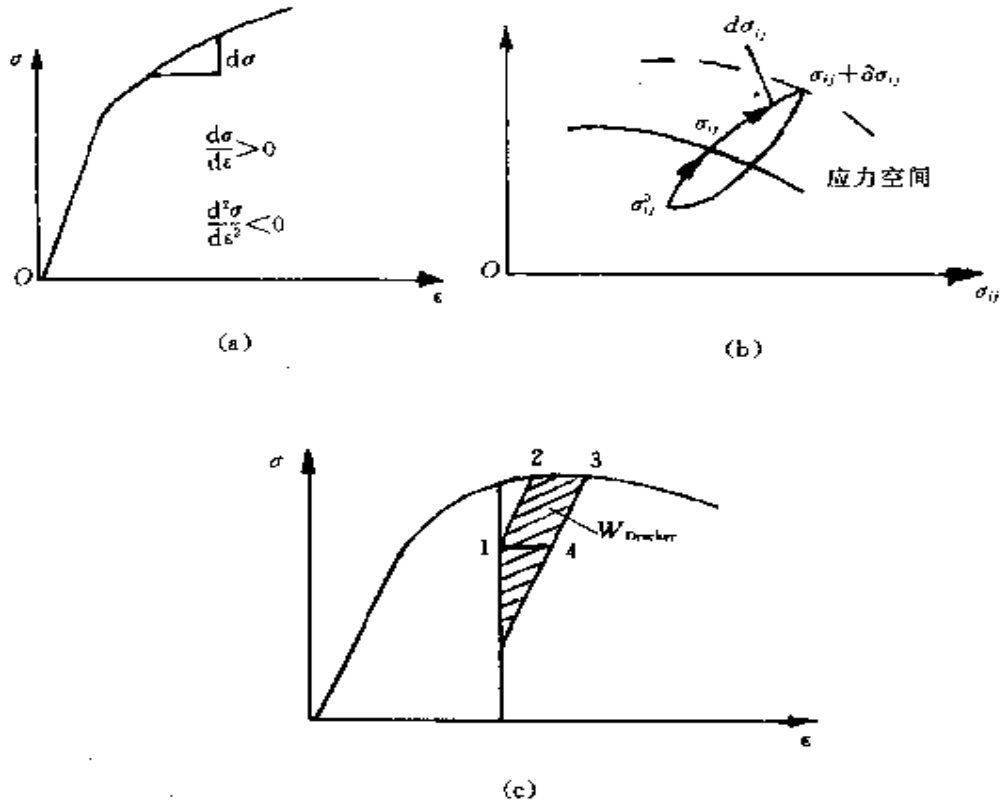


图 3-5

于弹性应变 ε_{ij}^{e}在应力循环中是可逆的，即

$$\oint_{\sigma_{ij}^{0}}(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{0})\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{e}=0$$

于是，不等式（3-22）可写为

$$\oint_{\sigma_{ij}^{0}}(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{0})\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p}\geqslant 0$$

考虑在应力循环中，$\delta\sigma_{ij}$和 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$均为无穷小量，则不难得到

$$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{0})\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p}\geqslant 0 \tag{3-23}$$

卓柯公设可写为下列形式

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p}\geqslant 0 \tag{3-24}$$

不等式（3-24）常称为卓柯不等式。

二、依留申（Il'yushin）公设

前述卓柯公设，是针对塑性功的讨论，从而揭示了材料塑性的一些重要性质和塑性本构关系的一般原则。卓柯公设是在应力空间的讨论［图 3-5（b）］。图 3-5（c）中的阴影部分即为整个循环中应力增量所做的净功。依留申（Il'yushin A. A.，1961）提出在应变空间可做类似的讨论［见图 3-6（a）］，且对软化材料更为方便。

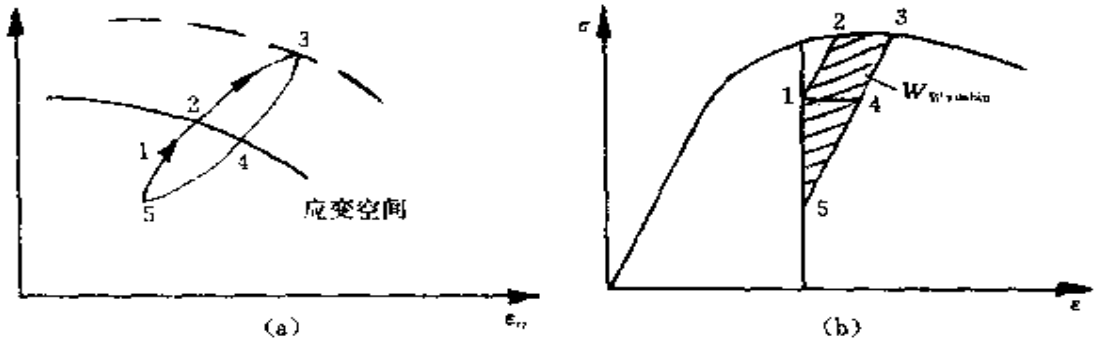


图 3-6

依留申公设表述为：当弹塑性材料的物质微元体在应变空间的任一应变循环中所完成的功为非负，即有

$$\oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geqslant 0 \tag{3-25}$$

成立，且仅当此过程为弹性循环时取等号。

现在我们证明不等式（3-25）对各类弹塑性材料均成立。图 3-6（b）是一维情况应变软化材料及其应变循环的路径（材料强化部分有类似的情况），在这种情况下不难理解应变点 1 与 5 重合。图 3-6（b）所示为由于材料进入塑性状态以后，不管是强化还是软化，弹性卸载过程中的塑性应变具有不可逆性，所引起的全部应变能将是非负，为图 3-6（b）中的阴影部分，即式（3-25）成立。

由图 3-5 可见，Drucker 所讨论的塑性功是图 3-5（c）中的阴影部分 $W\!\!\!/_{\text{Drucker}}$，而 Il'yushin 公设所讨论的是图 3-6（b）中的阴影部分 $W\!\!\!/_{\text{Il'yushin}}$，即

$$W^p_{\text{Drucker}} < W^p_{\text{Il'yushin}}$$

这就是说，凡 Drucker 公设成立的情况，Il'yushin 公设也必然成立，反之则不然。

三、屈服面外凸性的证明

如将塑性应变空间与应力空间重合起来，上述不等式可解释为两个矢量 $d\sigma_{ij}$ 与 $d\varepsilon^p_{ij}$ 的数量积，即

$$d\sigma_{ij} \cdot d\varepsilon^p_{ij} \geqslant 0 \tag{3-26}$$

或

$$|d\sigma_{ij}| \cdot |d\varepsilon^p_{ij}|\cos\theta \geqslant 0$$

于是必有

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

同样地，可以证明 $\sigma_{ij}-\sigma^0_{ij}$ 与 $d\varepsilon^p_{ij}$ 互成锐角（图 3-7）。

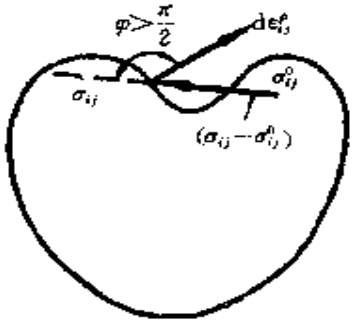


图 3-7

这样，我们可以得到：所有应力点 σ^0_{ij} 均应在垂直于 $d\sigma\varepsilon^p_{ij}$ 的平面的一侧，即屈服面必须为外凸曲面。此外，类似地可以证明，在应变空间的屈服面也具有外凸性。

§3.4 增量理论

当受力物体中一点的应力状态满足屈服条件而进入塑性阶段以后，弹性本构关系（即广义胡克定律）对该点就不再适用。因而，需

要建立塑性阶段的本构方程描述塑性应力与应变之间或应力增量与应变增量之间的关系。

塑性应力应变关系的重要特点是它的非线性和不惟一性。所谓非线性是指应力应变关系不是线性关系；所谓不惟一性是指应变不能由应力惟一确定。我们知道，当外荷载变化时，应力也要变化。在应力空间代表一点应力状态的应力点就要移动，应力点移动的轨迹称为应力路径，这一过程称为应力历史。对应于外荷载还有所谓加载路径和加载历史。在弹性阶段，应变可由应力直接用胡克定律求出，而不需了解这一应力状态是怎样达到的，即不必了解其应力历史。在塑性阶段，应变状态不但与应力状态有关，而且依赖于整个的应力历史，或者说应变是应力和应力历史的函数。这一点可以用一个简单的例子说明。从简单拉伸曲线来看就可知道，零应力状态可对应于经过各种加载历史而最终卸载至零而残留的应变状态。

一点处应力状态进入塑性状态以后，相应的总应变 ε_{ij} 可以分为两部分：弹性应变 ε_{ij}^{e} 和塑性应变 ε_{ij}^{p}

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}$$

其中弹性部分服从胡克定律，塑性部分为总应变与弹性应变之差。容易理解，塑性部分是卸载后不能消失的残留应变，当卸载发生时保持不变，而仅在继续加载时才发生变化。有时为了方便，ε_{ij}^{p} 的初始值假定为零，之后的应变值便是与零应变相比较的相对值。

以上说明，塑性应变与加载路径有关，所以，我们必须讨论应力的变化特征和应变的变化特征，并且将进一步限定从考虑其无穷小的变化，计算其全部加载历史过程的增量，之后用积分或求和的办法求出总应变。这就是塑性理论为什么具有增量特征的原因。

应当指出，工程上常有一种重要的加载路径，叫做比例加载。在这种加载条件下，塑性应变仅与最终应力状态有关。在比例加载的条件下，外荷载与应力均按同一比例增长，问题的分析将由此得到简化，这种情况，以后要进一步讨论。

以上说明，塑性本构关系本质上是增量关系。因而，一般情况下，难以一概像胡克定律那样建立全量的塑性应力应变关系。以下讨论增量理论（又称流动理论）。

弹塑性体内任一点的总应变已知为

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{p} + \varepsilon_{ij}^{e} \tag{3-27}$$

当外荷载有微小增量时，总应变也要有微小增量 $d\varepsilon_{ij}$，而 $d\varepsilon_{ij}$ 应为弹性应变量 $d\varepsilon_{ij}^{e}$ 与塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ 之和，从而有

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^{e} \tag{3-28}$$

式（3-28）展开为

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_{x}^{p} &= d\varepsilon_{x} - d\varepsilon_{x}^{e}, \cdots\cdots, \\ d\gamma_{xy}^{p} &= d\gamma_{xy} - d\gamma_{xy}^{e}, \cdots\cdots, \end{aligned}\right\} \tag{3-28'}$$

前曾述及：在一般大小的平均正应力作用下，物体的变形只可能是弹性体积改变，而不会产生塑性体积改变。在应力偏量作用下，物体将产生畸变，而不发生体积改变。物体的畸变又可分为两部分，即弹性变形和塑性变形。这就是说，塑性变形仅由应力偏量所引起。且在塑性状态，材料不可压缩，即体积变形等于零

$$d\varepsilon_{x}^{p} + d\varepsilon_{y}^{p} + d\varepsilon_{z}^{p} = 0 \tag{3-29}$$

或

$$d\varepsilon_{ii}^{p} = 0 \tag{3-29'}$$

而

$$d\varepsilon_{m} = \frac{1}{3}(d\varepsilon_{x} + d\varepsilon_{y} + d\varepsilon_{z}) = \frac{1}{3}d\varepsilon_{ii}^{e} = d\varepsilon_{m}^{e} \tag{3-30}$$

于是，应变偏量的增量为

$$de_{x} = d\varepsilon_{x} - d\varepsilon_{m}, de_{y} = d\varepsilon_{y} - d\varepsilon_{m}, de_{z} = d\varepsilon_{z} - d\varepsilon_{m}$$

及 $d\gamma_{xy}$，$d\gamma_{yz}$，$d\gamma_{zx}$，或即

$$de_{ij} = d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{m}\delta_{ij} \tag{3-31}$$

在弹性阶段，根据广义胡克定律，有

$$d\varepsilon_x^e = \frac{1}{E}[d\sigma_x - v(d\sigma_y + d\sigma_z)]$$

$$d\varepsilon_y^e = \frac{1}{E}[d\sigma_y - v(d\sigma_z + d\sigma_x)]$$

……

注意到，应力偏量的增量为 $dS_{ij}=d\sigma_{ij}-\frac{1}{3}d\sigma_{ij}\delta_{ij}$，则有

$$\begin{aligned} de_x^e &= \frac{1}{3}(2d\varepsilon_x^e - d\varepsilon_y^e - d\varepsilon_z^e) \\ &= \frac{1+v}{3E}(2d\sigma_x - d\sigma_y - d\sigma_z) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2G}(2d\sigma_x - d\sigma_y - d\sigma_z) \\ &= \frac{1}{2G}dS_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} de_y^e &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2G}(2d\sigma_y - d\sigma_z - d\sigma_x) \\ &= \frac{1}{2G}dS_y \end{aligned}$$

……

即

$$\left.\begin{aligned} de_x^e &= \frac{1}{2G}dS_x \\ &\cdots\cdots \\ d\gamma_{xy}^e &= \frac{1}{G}d\tau_{xy} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{3-32}$$

或

$$\frac{dS_x}{de_x^e} = \frac{dS_y}{de_y^e} = \frac{dS_z}{de_z^e} = \frac{d\tau_{xy}}{d\varepsilon_{xy}} = \frac{d\tau_{yz}}{d\varepsilon_{yz}} = \frac{d\tau_{zx}}{d\varepsilon_{zx}} = 2G \tag{3-32'}$$

式（3-32′）表明，在弹性阶段，应力偏量增量与应变偏量增量成比

例，比例常数为 $2G$。

考虑到，平均正应力增量 $d\sigma_m$ 和平均正应变增量 $d\varepsilon_m^e$ 之间的关系还可以得出增量形式的广义胡克定律为

$$\left.\begin{aligned} d\sigma_m/d\varepsilon_m &= 3K \\ dS_{ij}/de_{ij}^e &= 2G \end{aligned}\right\} \tag{3-33}$$

由此，塑性应变增量由式（3-28）为

$$d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_x - d\varepsilon_x^e = de_x + d\varepsilon_m - d\varepsilon_x^e = de_x - de_x^e$$

……

即有

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= de_x - \frac{dS_x}{2G} \\ &\cdots\cdots \\ d\varepsilon_{xy}^p &= d\varepsilon_{xy} - \frac{d\tau_{xy}}{2G} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{3-34}$$

或

$$d\varepsilon_{ij}^p = de_{ij} - de_{ij}^e = de_{ij} - \frac{dS_{ij}}{2G} \tag{3-34'}$$

以下讨论塑性应变增量的表达式，即增量理论的本构方程。

增量理论基于以下假定：在塑性变形过程中的任一微小时间增量内，塑性应变增量与瞬时应力偏量成比例，即

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{S_x} = \frac{d\varepsilon_y^p}{S_y} = \frac{d\varepsilon_z^p}{S_z} = \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{\tau_{xy}} = \frac{d\varepsilon_{yz}^p}{\tau_{yz}} = \frac{d\varepsilon_{xz}^p}{\tau_{xz}} = d\lambda \tag{3-35}$$

或

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij} \tag{3-35'}$$

其中 $d\lambda$ 为非负的标量比例常数，且可根据加载历史的不同而变化。

前已述及，由于体积变化是弹性的，即平均正应变的塑性分量等于零。在式（3-35）中，塑性应变增量也就是塑性应变偏量增量。由于总应变可视为弹性应变分量与塑性应变分量之和，将式（3-35）

代入式（3-34）后，得总应变增量与应力偏量之间的下列关系式

$$\left.\begin{aligned}
de_x &= \frac{1}{2G}dS_x + d\lambda S_x \\
de_y &= \frac{1}{2G}dS_y + d\lambda S_y \\
de_z &= \frac{1}{2G}dS_z + d\lambda S_z \\
d\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}d\tau_{xy} + d\lambda\tau_{xy} \\
d\gamma_{yz} &= \frac{1}{G}d\tau_{yz} + d\lambda\tau_{yz} \\
d\gamma_{zx} &= \frac{1}{G}d\tau_{zx} + d\lambda\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{3-36}$$

或

$$de_{ij} = \frac{1}{2G}dS_{ij} + d\lambda S_{ij} \tag{3-36'}$$

上式称为普兰特-雷斯（Prandtl-Reuss）方程。

方程（3-36）表示，塑性应变增量依赖于该瞬时的应力偏量，而不是达到该状态所需的应力增量。这就是说，应力主轴与塑性应变增量主轴相重合。这些方程本身直接给出了一个不同方向间塑性应变增量之比的关系式，而其实际的大小并不确定。这一点我们以后还要讨论。

由方程（3-35）有

$$\left.\begin{aligned}
d\varepsilon_x^p &= \frac{2}{3}d\lambda\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\
d\varepsilon_y^p &= \frac{2}{3}d\lambda\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right] \\
&\cdots\cdots \\
d\varepsilon_{xy}^p &= d\lambda\tau_{xy} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{3-37}$$

以上引进了一个参数 $d\lambda$，不过也增加了一个屈服条件，$d\lambda$ 在应

力满足屈服条件时才不等于零，因此可以通过屈服条件来求 $d\lambda$。为此，在式（3-37）中，将第一式减第二式得

$$d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p = \frac{2}{3}d\lambda\left[\frac{3}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right] = d\lambda(\sigma_x - \sigma_y)$$

两边平方后，得

$$(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 = (d\lambda)^2(\sigma_x - \sigma_y)^2$$

类似地，求出 $(d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2$，$(d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2$ 及 $(d\gamma_{xy}^p)^2$，$(d\gamma_{yz}^p)^2$，$(d\gamma_{zx}^p)^2$ 后，可得

$$\begin{aligned}&(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2\\&+ 6\left[(d\gamma_{xy}^p)^2 + (d\gamma_{yz}^p)^2 + (d\gamma_{zx}^p)^2\right]\\&= (d\lambda)^2\Big[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\\&+ 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\Big]\end{aligned} \tag{3-38}$$

即

$$\frac{9}{4}(d\gamma_8^p)^2 = 9(d\lambda)^2\tau_8^2 \tag{3-38'}$$

于是得

$$d\lambda = \frac{d\gamma_8^p}{2\tau_8} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{d\gamma_8^p}{\sqrt{J_2}} \tag{3-39}$$

其中 γ_8^p 为八面体剪应变的塑性部分。如定义有效应力（或称应力强度）和有效塑性应变增量（或称塑性应变强度增量）分别为

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\\&\quad + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\Big]^{\frac{1}{2}}\\&= \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_8\end{aligned}$$

$$= \sqrt{3J_2} \tag{3-40}$$

$$d\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\varepsilon_y^p - d\varepsilon_z^p)^2 + (d\varepsilon_z^p - d\varepsilon_x^p)^2 + \frac{3}{2}(d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} d\gamma_8^p \tag{3-41}$$

将式（3-40）、式（3-41）代入式（3-39）得

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i} \tag{3-42}$$

于是本构方程（3-37）化为

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ d\varepsilon_y^p &= \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right] \\ d\varepsilon_z^p &= \frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\ d\varepsilon_{xy}^p &= \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy} \\ d\varepsilon_{yz}^p &= \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{yz} \\ d\varepsilon_{zx}^p &= \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{3-43}$$

或

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}S_{ij} \tag{3-43′}$$

式（3-43′）是普兰特-雷斯方程的另一种形式。如在式（3-43′）中将塑性应变增量换成总应变增量，亦即忽略弹性应变部分，则得利维-米赛斯（Levy-Mises）方程

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}S_{ij} \qquad (3\text{-}44)$$

由方程（3-43′）、（3-44）看出，流动理论的本构方程与广义胡克定律在形式上相似，除含应变增量外，所不同的是系数部分。如将胡克定律中的泊松比用$\frac{1}{2}$代替，$\frac{1}{E}$用$\frac{d\varepsilon_i}{\sigma_i}$来代替，便得流动理论的本构方程。这反映了塑性变形过程中的不可压缩性和塑性变形的非线性，及其对加载路径的依赖性等。在此方程中，如应变增量为已知，则可惟一地求出应力偏量。

本构方程（3-43）或（3-44）为σ_i（即J_2）的函数，这就是说，上述方程要用到米赛斯屈服条件。所以（3-43）和（3-44）为与米赛斯条件相关连的本构关系。

§3.5 全量理论

在增量理论中，我们得到了塑性应变增量的分量与应力分量之间的关系。为要得到总塑性应变分量与应力分量之间的关系，应将方程（3-43）对全部加载路径积分。从而求出总应变分量与瞬时应力分量之间的关系式。由此可见，应力与应变的全量关系必然与加载的路径有关。而全量理论则企图直接建立用全量形式表示的与加载路径无关的本构关系。但我们知道，塑性应变一般地不是与加载路径无关的。所以全量理论一般说来是不正确的。不过，从理论上讲，沿路径积分总是可能的。但要在积分结果中引出明确的应力应变的全量关系式，而又不包含应变历史的因素，则仅在某些特殊情况下方为可能。以下说明这种情况。

如果加载形式是所谓比例加载，即在加载过程中，任一点的各应力分量都按比例增长，即各应力分量与一个共同的参数成比例，在这种情况下，增量理论便可简化为全量理论。实际上，如果σ_{ij}^0为t_0时刻的任--非零的参考应力状态，则任意瞬时t的应力状态为σ_{ij}，为

$$\sigma_{ij} = k\sigma_{ij}^0 \qquad (3\text{-}45)$$

k 为单调增长的时间函数，则

$$S_{ij} = kS_{ij}^0 \quad \sigma_i = k\sigma_i^0 \tag{3-46}$$

于是（3-43′）化为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_i}{\sigma_i^0}S_{ij}^0 \tag{3-47}$$

式（3-47）等号两边积分，得

$$\int \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^p = \int \frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_i}{\sigma_i^0}S_{ij}^0 = \frac{3}{2}\frac{S_{ij}^0}{\sigma_i^0}\int \mathrm{d}\varepsilon_i = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i^0}S_{ij}^0$$

由此有

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}S_{ij},\ \varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_i) \tag{3-48}$$

展开为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x^p &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\
\varepsilon_y^p &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)\right] \\
\varepsilon_z^p &= \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\
\gamma_{xy}^p &= \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{xy} \\
\gamma_{yz}^p &= \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{yz} \\
\gamma_{zx}^p &= \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{3-48′}$$

于是得到塑性应变 ε_{ij}^p 仅为瞬时应力状态的函数。上述全量理论的本构方程（3-48）称为汉基-依留申方程。在小变形条件下，依留申进一步证明了下式成立

$$e_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}S_{ij},[\varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_i)] \quad \sigma_m = 3k\varepsilon_m \tag{3-48″}$$

应注意到，式(3-48)实际上是物理非线性弹性理论的本构方程，

把它用于弹塑性过程时，必须在全部变形过程中保证物体内各点的应力都处于比例加载过程。我们知道，当卸载发生时，本构关系不服从式（3-48）。因为此时塑性应变保持不变。所以在卸载过程，应力分量的改变量与应变分量的改变量之间服从广义胡克定律。卸载以后的应力和应变，可用外荷载的改变量作为假想荷载作用到物体上，按弹性理论求出应力和应变，再从卸载前的相应的应力和应变中减去这些因卸载引起的应力与应变的改变量，从而得到卸载后的应力与应变状态。这就是卸载所应遵守的法则。显然，当外荷载全部卸去后，所得到的应变和应力即残余应变与残余应力。

这样看来，使用全量理论必须满足一定的条件，以保证物体内全部点处于同一过程：加载与卸载。现已证明，使用全量理论的充分条件即所谓简单加载定理。该定理证明了在以下三个条件下，物体内所有的点都处于同一简单加载过程。

（1）材料是不可压缩的，即 $\nu=\frac{1}{2}$；

（2）有效应力 σ_i 与有效应变 ε_i 之间有幂函数关系，即 $\sigma_i=A\varepsilon_i^m$（$A$、$m$ 为常数）；

（3）外荷载按比例增长。

在以上三个条件中，第三条是基本的，当条件 1 与条件 2 采用近似值时，只产生不大的偏差。

从实际的观点来看，有大量的工程问题与比例加载相差不大，所以已用全量理论解了不少实际问题，并得到了满意的结果。关于全量理论应用的进一步讨论见参考文献［10］。

§3.6 塑性势的概念

在弹性力学中我们曾学习关于弹性势的概念并得到其表达式

$$\frac{\partial U_0(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}=\varepsilon_{ij} \tag{3-49}$$

式（3-49）中 $U_0(\sigma_{ij})$ 为一势函数，称为弹性势。式（3-49）说明，

在弹性阶段，一点处的应变状态可由求弹性势函数$U_0(\sigma_{ij})$关于σ_{ij}的偏导数得到。在塑性阶段，类似地可引进塑性势函数$f(\sigma_{ij})$，并从$f(\sigma_{ij})$关于σ_{ij}的偏导数导出塑性应变增量$d\varepsilon_{ij}^p$。实际上，畸变能屈服函数就是上述塑性势。因畸变能条件为

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}) &= \frac{1}{6}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2 \\ &\quad +6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)] \\ &= 2\sigma_0^2 \end{aligned}$$

如令

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{3-50}$$

其展开式为

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_1^p &= d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_1} \\ d\varepsilon_2^p &= d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_2} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{3-50'}$$

或

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^p}{\partial f/\partial\sigma_{ij}} = d\lambda \tag{3-50''}$$

其中$d\lambda$是一个非负的比例常量。

由式（3-6），并注意到$2\tau_{xy}=\tau_{xy}+\tau_{yx}$，有

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial\sigma_1} &= \frac{1}{6}[2(\sigma_1-\sigma_2)-2(\sigma_2-\sigma_3)] \\ &= \frac{1}{6}(4\sigma_1-2\sigma_2-2\sigma_3) \\ &= \sigma_1-\sigma_m \\ &= S_x \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} = S_y$$

……

其中 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$，于是式（3-50）可写为

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = S_1 d\lambda$$

$$d\varepsilon_2^p = S_2 d\lambda$$

……

即

$$\frac{d\varepsilon_1^p}{S_1} = \frac{d\varepsilon_2^p}{S_2} = \cdots = d\lambda$$

或

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij} \tag{3-51}$$

及

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{3-52}$$

由此可见，可将函数 $f(\sigma_{ij})$ 既作为屈服函数，又作为塑性势函数。因而，此函数的选择应使其对三个主应力对称，亦即 $f(\sigma_{ij})$ 应与所取坐标系无关，或即与主应力方向无关。

在式（3-52）中，屈服函数的梯度 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$，为应力空间内在屈服面上一点的与该点外法线方向同向的矢量。式（3-52）说明，$d\varepsilon_{ij}^p$ 与屈服面一点的外法线方向一致。即方程（3-51）、（3-52）建立了塑性应变增量方向与塑性势曲面的外法线方向相同这样一种关系（如图 3-8）。而曲面 $f(\sigma_{ij})$ 在 $(\sigma_1、\sigma_2、\sigma_3)$ 点外法线方向余弦比为

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial f}{\partial \sigma_3}$$

故有

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} : \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} : \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} \tag{3-53}$$

由塑性变形过程中，材料的不可压缩性，附加限制条件为

$$d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0 \qquad (3\text{-}54)$$

畸变能屈服条件满足这一要求。

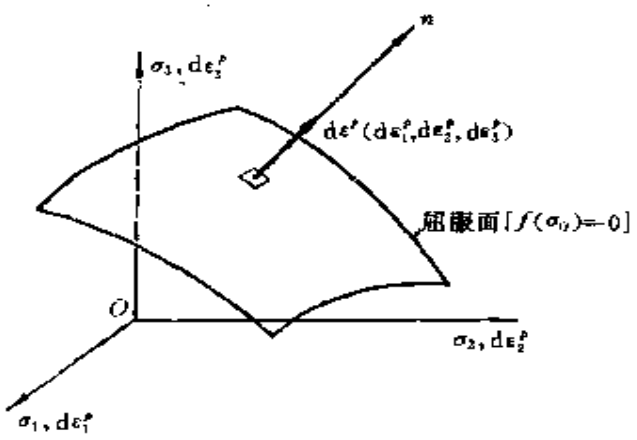


图 3-8

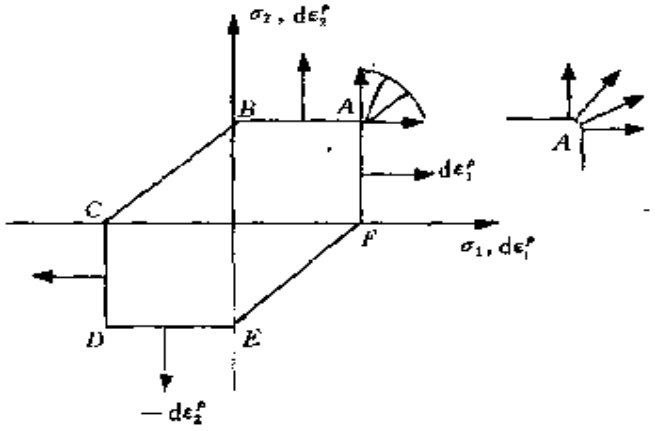


图 3-9

塑性势函数与屈服函数 f 重合，意味着屈服面上任一点只有惟一的外法线。但是，在采用最大剪应力屈服条件时，在角点和棱边处将出现外法线不惟一的情况。当应用以上得到的塑性应变增量垂直于屈服面的重要结果时，应做以下处理：由于交点（或交线）两

侧的塑性应变增量的方向已知，则交点（或交线）处的塑性应变率方向认为是该两侧外法线方向间夹角范围内的任意方向。实际上，这种尖角可理解为光滑曲线的极端情况，如图 3-9 中右边一个小图即表示尖角 A 是由圆弧过渡来的。例如，采用最大剪应力条件，则在 AB 边有

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = 0 : 1 : -1 \tag{3-55}$$

对 AF 边有

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = 1 : 0 : -1 \tag{3-55'}$$

将以上两关系式各乘以任意常数 $\mu(0\leqslant\mu\leqslant1)$ 及 $(1-\mu)$ 相加后，即得角点处的本构关系（流动法则）

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = (1-\mu) : \mu : -1 \tag{3-55''}$$

如此，便得到了与最大剪应力条件相关联的流动法则。

习　　题

3.1　薄壁管受拉扭联合作用，只有正应力 σ 和切应力 τ，试用 σ、τ 表示 Mises、Tresca 两种屈服条件。

3.2　给出以下问题的最大剪应力条件与畸变能条件：

(1) 受内压作用的封闭长薄管；

(2) 受拉弯作用的杆。

3.3　求图 3-9 中 C 点处流动法则。

3.4　给出简单拉伸时的增量理论与全量理论。

3.5　试求下列情况的塑性应变增量之比：

(1) 简单拉伸：$\sigma=\sigma_0$；

(2) 二维应力状态：$\sigma_1=\frac{\sigma_0}{3}$，$\sigma_2=-\frac{\sigma_0}{3}$；

(3) 纯剪：$\tau_{xy}=\sigma_0$。

第四章　简单的弹塑性问题

§4.1　塑性力学问题的提法及弹性解方法

塑性力学边值问题的提法必须使定解问题是适定的，即要求所提问题：①有解；②解是惟一的；③解是稳定的。就是说，如定解条件（边界条件和初始条件）有微小变化，只引起解作微小变化。以下分别讨论增量理论和全量理论的情况。

弹塑性力学边值问题的基本方程为

（1）平衡方程

对增量理论为

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{F}_{bi} = 0 \qquad \text{在 } V \text{ 内} \qquad (4\text{-}1)$$

对全量理论为

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0 \qquad \text{在 } V \text{ 内} \qquad (4\text{-}2)$$

（2）几何方程

对增量理论为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \qquad \text{在 } V \text{ 内} \qquad (4\text{-}3)$$

对全量理论为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad \text{在 } V \text{ 内} \qquad (4\text{-}4)$$

（3）本构关系

对增量理论为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G}\dot{S}_{ij} + d\lambda\, \dot{S}_{ij} \qquad \text{（弹塑性材料）在 } V \text{ 内} \qquad (4\text{-}5)$$

或 $$\dot{\varepsilon}_{ij} = \mathrm{d}\lambda \dot{S}_{ij} \qquad \text{（刚塑性材料）在 } V \text{ 内} \tag{4-6}$$

其中 $$\mathrm{d}\lambda = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_i}{\sigma_i} \tag{4-7}$$

$$S_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4-8}$$

而 $f=0$ 则为应力空间的屈服面或加载面

$$\begin{cases} f(\sigma_{ij}) - F(\overline{W}^p) = 0 & \text{在 } V \text{ 内} \\ f(\sigma_{ij} - \alpha\varepsilon_{ij}^p) = 0 & \text{在 } V \text{ 内} \end{cases} \tag{4-9}$$

对全量理论为

$$\begin{cases} e_{ij} = \dfrac{3}{2}\dfrac{\varepsilon_i}{\sigma_i}S_{ij} & [\varepsilon_i = \varepsilon_i(\sigma_i)] \\ \sigma_m = 3k\varepsilon_m \end{cases} \tag{4-10}$$

及 $\sigma_i = A\varepsilon_i^m$，$A$、$m$ 是材料常数。

(4) 边界条件

对增量理论为

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{ij}n_j = \dot{\overline{p}}_i & \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \\ \dot{u}_i = \dot{\overline{u}}_i & \text{在 } S_u \text{ 上} \end{cases} \tag{4-11}$$

对全量理论为

$$\begin{cases} \sigma_{ij}n_j = \overline{p}_i & \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \\ u_i = \overline{u}_i & \text{在 } S_u \text{ 上} \end{cases} \tag{4-12}$$

此处带横线段的量为给定量（下同）。

以下分别讨论采用全量理论和采用增量理论解题时，塑性力学边值问题的提法。

一、采用增量理论时问题的提法

在这种情况下，若物体的加载历史为已知，则在 t 时刻的位移场 u_i、应变场 ε_{ij}和应力场 σ_{ij}以及该时刻物体各点的加载面方程均为已知。此外，在此时刻给定物体的体力率 $\dot{F}_{bi}$、在表面 S_σ 上的面力率 $\dot{p}_i$ 和表面 S_u 上的速度场 $\dot{u}_i$ 则可由以上给出的平衡方程 (4-1)、几何方

程（4-3）、本构方程（4-5）～（4-9）、含屈服条件以及边界条件（4-11）等，求出该时刻（$t+\Delta t$）相应的位移场、应变场和应力场。

我们知道，上述应力场不仅与应变场有关，而且与变形历史有关，而物体的变形和材料的内部结构的变化有关。因而，描述物体的变形历史通常采用一组称为内变量 ξ_α（$\alpha=1, 2, \cdots, n$）的参量来描述这一现象。因此应力可表示为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}, \xi_\alpha)$$

内变量的演化方程为

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_\alpha &= g_\alpha(\epsilon_{ij}, \xi_\alpha)\\ &= g_\alpha[\epsilon_{ij}(\sigma_{ij}, \xi_\alpha), \xi_\alpha]\\ &= g'_\alpha(\sigma_{ij}, \xi_\alpha)\end{aligned}$$

当 $\xi_\alpha=0$，为一平衡状态，此时的应力与应变有一一对应关系。

显然，$t+\Delta t$ 时刻位移场可近似地写为

$$u_i|_{t+\Delta t} = u_i|_t + \dot{u}_i\Delta t$$

以及应变场和应力场分别为

$$\epsilon_{ij}|_{t+\Delta t} = \epsilon_{ij}|_t + \dot{\epsilon}_{ij}\Delta t$$

$$\sigma_{ij}|_{t+\Delta t} = \sigma_{ij}|_t + \dot{\sigma}_{ij}\Delta t$$

该时刻的内变量为

$$\xi_\alpha|_{t+\Delta t} = \xi_\alpha|_t + \dot{\xi}_\alpha\Delta t$$

故新的加载面为

$$f(\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}\Delta t, \xi_\alpha + \dot{\xi}_\alpha\Delta t) = 0$$

有了以上关系式，在求解实际问题时，可将加载过程划分为小段增量、分步加载，步长的划分应考虑计算的工作量、精度要求以及解的稳定性等有关问题。

最后我们指出[①]，用增量理论求解塑性力学边值问题，所得应力

① 有关增量理论中解的惟一性问题的证明可参考有关参考书，见参考文献［10］。

率是惟一的，除对理想塑性材料以外，应变率也是惟一的。从而，在给定加载历史的情况下，所得应力也是惟一的。

二、采用全量理论时问题的提法

在物体加载过程中，如外载荷为比例加载，物体中每一点的应力（或应变）的路径都满足简单加载路径[①]，则应力与应变之间有一一对应关系。于是，在给定体力 $\overline{F}_{bi}$、物体表面上的面力 $\overline{p}_i$ 和位移 $\overline{u}_i$ 后，便可由平衡方程（4-2）、几何方程（4-4）、本构方程（4-10）和边界条件（4-12）求出位移场 u_i、应力场 σ_{ij} 和应变场 ε_{ij}。

用全量理论求得的边值问题的解，只要物体内的每一点都满足简单加载条件，则不难证明应变可由应力惟一确定[②]。

弹性解方法是一种用于全量理论有效的解题方法。其主要思路是，将平衡方程和边界条件用位移表示，逐步求渐近解，且采用解弹性力学的办法。主要步骤为：

（1）令本构关系 $S_{ij}=2G\left[1-\omega\left(\varepsilon_i\right)\right]e_{ij}$ 中的 $\omega\left(\varepsilon_i\right)=0$，因而问题化为线性弹性问题，求解后得零次近似解；

（2）用零次近似解解得的 e_{ij} 及 ε_i 计算出 ω^l；

（3）将位移表示的平衡方程和边界条件写成以下形式

$$\left.\begin{aligned} &L[u_i]+F_{bi}/G-2[\omega(\varepsilon_i)e_{ij}]_{,j}+2[\omega(\varepsilon_i)e_m]_{,i}=0 \quad \text{在 } V \text{ 内} \\ &L'[u_i]=p_i/G+2\omega(\varepsilon_i)e_{ij}n_j-2\omega(\varepsilon_i)e_m n_i \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上} \end{aligned}\right\} \tag{4-13}$$

此处 L 和 L' 是拉梅（Lame）线性弹性问题算子。

$$\left.\begin{aligned} &L[u_i]=\Delta u_i+\left(\frac{3k}{G}+1\right)e_{m,i}=u_{i,kk}+\frac{1}{3}\left(\frac{3k}{G}+1\right)u_{k,ki} \\ &L'[u_i]=(u_{i,j}+u_{j,i})n_j+\frac{1}{3}\left(\frac{3k}{G}-2\right)u_{j,j}n_i \end{aligned}\right\} \tag{4-14}$$

---

① J. B. Martin 提出了极值路径的概念。并指出，若应力和应变按极值路径变化，则全量理论的本构关系成立。见参考文献 [10]。

② 见参考文献 [10]。

(4) 将零次近似解的结果（例如 ω' 等）代入式 (4-13) 等号右边作为已知项，于是解一个弹性力学问题，得一次近似解。

(5) 重复以上步骤，直至得到相邻两次解的值相差甚小，即可认为是满意的弹塑性解为止。

§4.2 梁的弹塑性弯曲

本节讨论受均布载荷作用的简支梁的弹塑性弯曲（图 4-1），并采用初等理论的简化假定，即

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zz} = 0$$

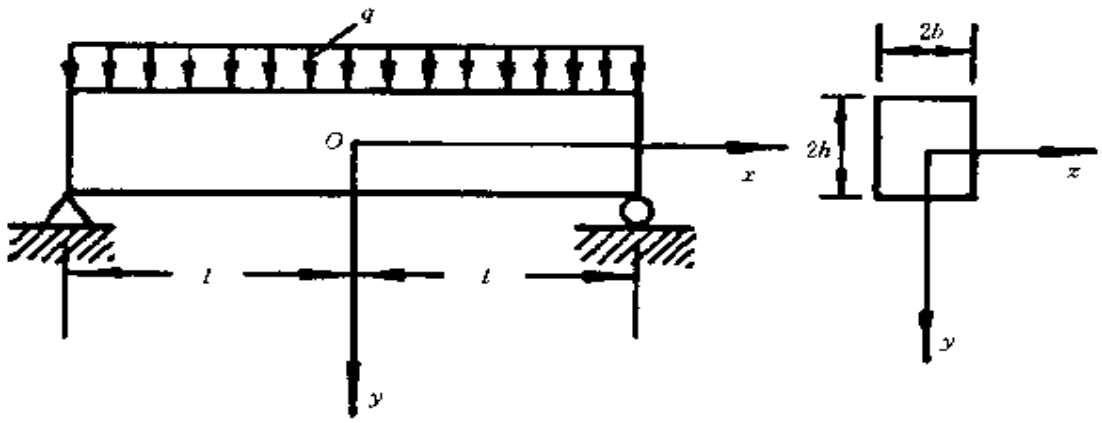


图 4-1

而只考虑 $\sigma_x = \sigma$，$\tau_{xy} = \tau$。此外，认为梁的弯曲为小变形，剪应力 τ 与 σ 相比为小量加以忽略。在弯曲过程中，梁的截面仍保持为平面且与变形后的梁轴垂直。于是，应力偏量为

$$S_x = \frac{2}{3}\sigma, S_y = -\frac{1}{3}\sigma, S_z = -\frac{1}{3}\sigma \tag{4-15}$$

畸变能条件为

$$|\sigma| = k\sqrt{3} \tag{4-16}$$

k 为纯剪屈服极限。

由材料力学知识可知梁的轴向应变为

$$\varepsilon_x = -y\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} \tag{4-17}$$

其中 v 为梁的 y 方向上的位移。

在弹性区各点的应力为

$$\sigma = -Ey\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} \tag{4-18}$$

而在塑性区，则为

$$\sigma = \pm k\sqrt{3} \tag{4-19}$$

由式（4-18）可见，$y=\pm h$ 处，应力同时达到最大值，即塑性区将自上下两边开始对称地扩展。两式中的正负号相互对应，因 y 为负值时 σ 为正，式（4-18）中取正号对应于式（4-19）中的正号。

令 $y=\pm\xi(x)$（$0\leqslant\xi\leqslant h$）表示弹性与塑性区的分界面，如图4-2所示。

$$\left.\begin{aligned} -h\leqslant y\leqslant -\xi \quad & \sigma = -k\sqrt{3} \\ -\xi\leqslant y\leqslant \xi \quad & \sigma = \frac{ky\sqrt{3}}{\xi} \\ \xi\leqslant y\leqslant h \quad & \sigma = k\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \tag{4-20}$$

在任一截面 x 处的弯矩为

$$M(x) = 4b\int_0^h \sigma(x,y)y\mathrm{d}y$$

如截面全部处于弹性状态，则

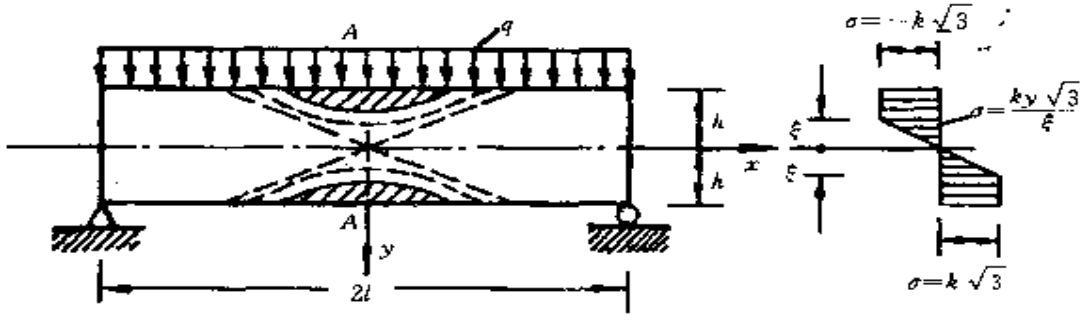


图 4-2

$$M = -\frac{4}{3}Ebh^3\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} \tag{a}$$

如整个截面处于塑性状态，则此时的弯矩称为塑性极限弯矩，记作 M_0，即

$$M = 2\sqrt{3}\,bkh^3 = M_0 \tag{b}$$

如截面处于弹塑性状态，则由图 4-2 可知

$$M = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,kb(3h^2 - \xi^2) \tag{c}$$

但已知

$$M(x) = \frac{1}{2}q(l^2 - x^2)$$

故有

$$\frac{1}{2}q(l^2 - x^2) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,kb(3h^2 - \xi^2)$$

或

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - \rho\left(\frac{x}{l}\right)^2 = 1 - \rho \tag{4-21}$$

其中

$$\rho = \frac{q}{q'}\left(\frac{l}{h}\right)^2, q' = 4\sqrt{3}\,kb \tag{4-22}$$

方程（4-21）为一双曲线方程，可见弹塑性区交界为一双曲线（图 4-3），当 $\rho=1$ 时为双曲线的渐近线。因 ξ 必须满足 $0<\xi<h$，故 ρ 必须满足

$$\frac{2}{3} < \rho < 1$$

显然，ρ 的下限对应于梁中点上下边缘处刚刚开始进入塑性状态时的荷载值 q^*，而 ρ 的上限则对应于梁中点处全截面进入塑性状态。

在全截面进入塑性状态以前（对应的外荷载为 q_1），因梁的变形（挠度 v）受弹性区的约束，故变形仍可认为如弹性变形量级（图

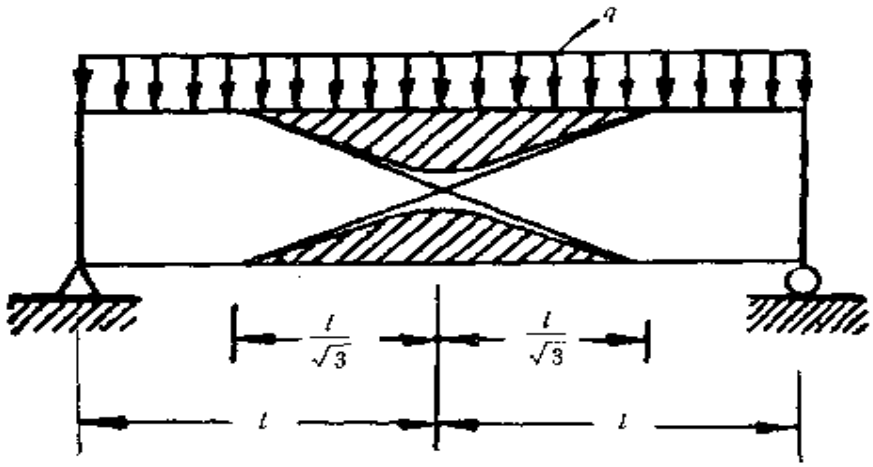


图 4-3

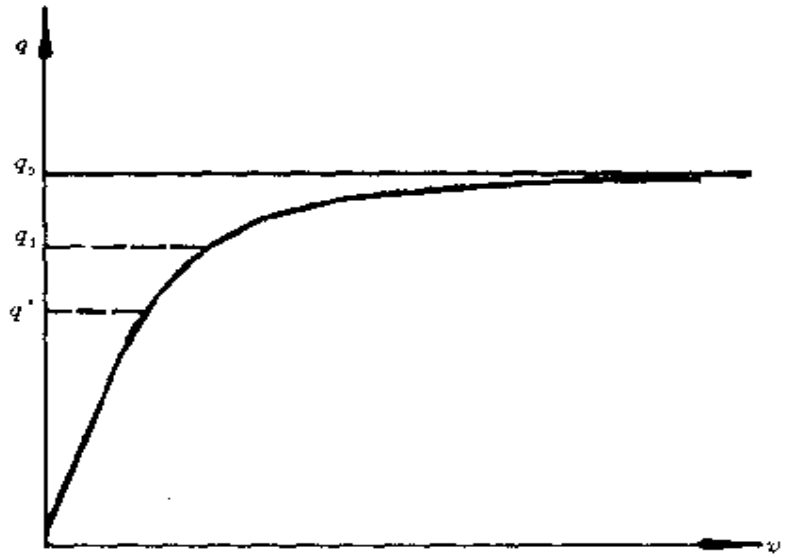


图 4-4

4-4)，梁的挠度 v 也还较小，可认为梁处于弹塑性小挠度状态。当荷载继续增加，一直到 q_0，这时梁的某个截面（此处为中央截面）全部进入塑性状态，梁的变形将可能出现无限制地塑性流动。就好像该截面变成一个铰一样。不过此处的弯矩不是零而是 M_0（塑性极限

弯矩)，所以叫塑性铰。这时梁形成一个机构，失去了正常工作的能力，与这种状态对应的外荷载叫做极限荷载 q_0。

在我们讨论的问题中，极限荷载 q_0 为

$$q_0 = 4\sqrt{3}kb\left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{3}{2}q^* \tag{4-23}$$

在梁的上下侧最大塑性长度为 $l/\sqrt{3}$。

如上述简支梁中点受集中力 P，则当中央截面进入塑性状态时荷载为

$$P^* = \frac{3\sqrt{3}kbh^2}{3l} \tag{4-24}$$

此时

$$M(x) = \frac{P}{2}(l-x)$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{3}kb(3h^2-\xi^2) = \frac{P}{2}(l-x)$$

$$\frac{P^*}{4}\frac{l}{h^2}(3h^2-\xi^2) = \frac{P}{2}(l-x)$$

$$3h^2-\xi^2 = \frac{2Ph^2}{P^*l}(l-x)$$

可见，弹塑性区的边界为一抛物线（图 4-5）。

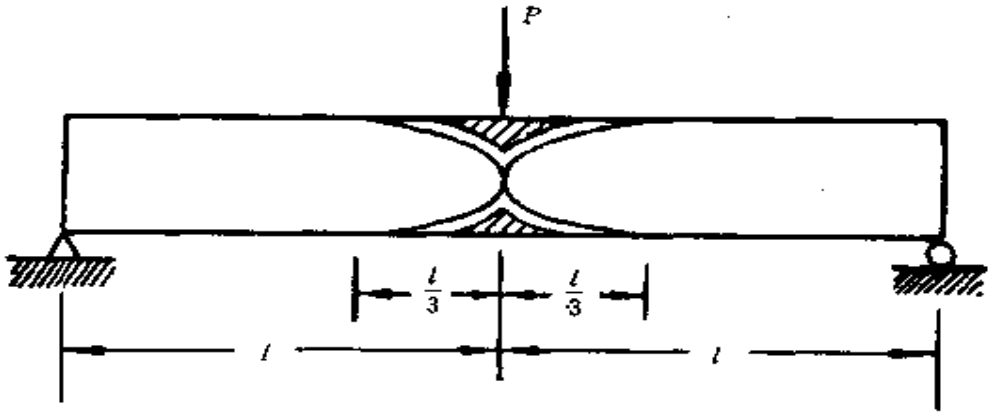


图 4-5

极限荷载为

$$P_0 = \frac{3}{2}P' = \frac{3}{2} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3}kb\frac{h^2}{l} = \frac{4\sqrt{3}kbh^2}{l}$$

梁的上下侧塑性区长度为 $l/3$。

§4.3 厚壁筒的弹塑性解

现在研究受内压 P_1 和外压 P_2 作用的厚壁圆筒（图 4-6），圆筒的内径为 $2a$，外径为 $2b$。设圆筒的长度比起圆筒的直径来说足够大，以致可以认为离两端足够远处的应力和应变分布沿筒长方向没有差异。由对称性可知，原来的任一横截面变形后仍保持平面。因而，应力与应变的分布对称于圆筒的中心轴线。如取图 4-6 所示的坐标，则 Oz 为对称轴。每一点的位移将只有 r 方向的分量 u 和 z 方向的分量 w，即 u、w 均与 θ 无关。由于垂直于 Oz 轴的平面变形后仍为平面，沿圆筒长度一样，故知 u 只依赖于 r，w 只依赖于 z。于是各应变分量由弹性力学极坐标基本方程得

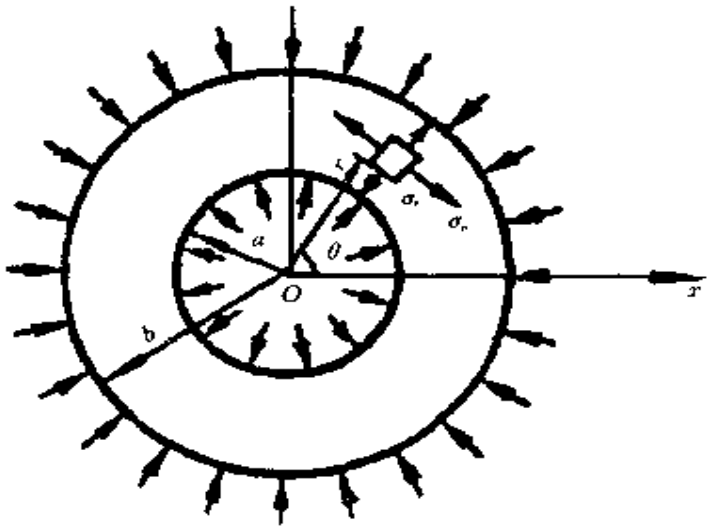


图 4-6

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}\\ \gamma_{r\theta} &= \gamma_{\theta z} = \gamma_{rz} = 0\end{aligned}\right\} \tag{4-25}$$

及

$$\varepsilon_z = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$$

由此，相对体积变形 e 为

$$e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{u}{r} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \tag{4-26}$$

将应变位移关系代入广义胡克定律，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= 2G\left(\varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right)\\ &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)\\ \sigma_\theta &= 2G\left(\varepsilon_\theta + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right)\\ &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)\\ \sigma_z &= 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-2\nu}e\right)\\ &= \frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)\\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta z} = \tau_{rz} = 0\end{aligned}\right\} \tag{4-27}$$

假定略去体力不计，则平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{4-28}$$

由于 $\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$，$z$ 方向的平衡条件为

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{4-29}$$

将式（4-27）中的 σ_z 表达式代入式（4-29）得

$$\frac{d^2w}{dz^2}=0$$

于是得

$$\varepsilon_z=\frac{dw}{dz}=\text{常数}$$

将式（4-27）代入式（4-28），化简后可得

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^2}=0 \tag{4-30}$$

考虑自由端即 $\sigma_z=0$ 的情况，此时的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} r=a \quad \sigma_r&=-P_1\\ r=b \quad \sigma_r&=-P_2\end{aligned}\right\} \tag{4-31}$$

用以上条件，可得弹性解的公式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{P_1a^2-P_2b^2}{b^2-a^2}-\frac{(P_1-P_2)a^2b^2}{(b^2-a^2)r^2}\\ \sigma_\theta&=\frac{P_1a^2-P_2b^2}{b^2-a^2}+\frac{(P_1-P_2)a^2b^2}{(b^2-a^2)r^2}\\ u&=\frac{1-\nu}{E}\frac{(P_1a^2-P_2b^2)r}{b^2-a^2}+\frac{1+\nu}{E}\frac{(P_1-P_2)a^2b^2}{(b^2-a^2)r}\end{aligned}\right\} \tag{4-32}$$

如外侧压力为零，即 $P_2=0$，则式（4-32）化为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{P_1a^2}{b^2-a^2}-\frac{P_1a^2b^2}{(b^2-a^2)r^2}\\ \sigma_\theta&=\frac{P_1a^2}{b^2-a^2}+\frac{P_1a^2b^2}{(b^2-a^2)r^2}\\ u&=\frac{1-\nu}{E}\frac{P_1a^2r}{b^2-a^2}+\frac{1+\nu}{E}\frac{P_1a^2b^2}{(b^2-a^2)r}\end{aligned}\right\} \tag{4-33}$$

在无外侧压力（$P_2=0$）的情况下，材料的屈服一定从内侧开始，如采用最大剪应力条件，将 $r=a$ 代入式（4-32）前两式可以求得

$$\tau_{max}=\frac{1}{2}(\sigma_\theta-\sigma_r)=\frac{P_1b^2}{b^2-a^2}=k \tag{4-34}$$

此处 $k=\frac{\sigma_0}{2}$，σ_0 为简单拉伸屈服应力。式（4-34）可改写为

$$\frac{P_1}{\sigma_0}=\frac{b^2-a^2}{2b^2} \tag{4-35}$$

如采用畸变能条件，则有

$$\begin{aligned}&(\sigma_\theta-\sigma_r)^2+(\sigma_r-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_\theta)^2\\&=\left(\frac{P_1a^2}{b^2-a^2}\right)^2\left[\frac{6b^4}{r^4}+2(1-2\nu)^2\right]\\&=2\sigma_0^2\end{aligned}$$

则筒内侧（$r=a$）开始屈服时有

$$\frac{P_1}{\sigma_0}=\frac{b^2-a^2}{\left[3b^4+(1-2\nu)^2a^4\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{4-36}$$

如取 $\nu=\frac{1}{2}$，则有

$$\frac{P_1}{\sigma_0}=\frac{b^2-a^2}{\sqrt{3}\,b^2} \tag{4-36'}$$

当 P_1 继续增加，塑性区将逐渐向外扩展，形成一个环状塑性区，此时，圆筒截面分为两部分，外层为弹性区，内层为塑性区（由于对称，弹塑性区交界必为一个半径为某一数值 c 的圆）。在塑性区内平衡方程仍然成立

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0$$

如材料服从最大剪应力条件，则平衡方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r}-\frac{\sigma_0}{r}=0 \tag{4-37}$$

对式（4-37）积分后，有

$$\sigma_r=\sigma_0\ln r+c$$

其中 c 为待定常数。

由边界条件，$r=a$，$\sigma_r=-P_1$，得

$$\sigma_r=\sigma_0\ln\frac{r}{a}-P_1 \tag{4-38}$$

当 $r=c$ 时

$$\sigma_c = \sigma_0 \ln \frac{c}{a} - P_1 \tag{4-39}$$

因而，对于外层弹性区来说，σ_c 就是作用到该区内侧的径向压力，此时问题化为半径为 $b-c$ 的圆筒，受压力 $P_1=\sigma_c$ 作用的弹性问题。于是，由式（4-39），有

$$\sigma_0 = -\sigma_c \frac{2b^2}{b^2-c^2} \tag{4-39'}$$

因在 $r=c$ 处 σ_r 必须连续，故可由式（4-39'）及式（4-39）消去 σ_c，可得

$$\frac{P_1}{\sigma_0} = \ln\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) \tag{4-40}$$

这是弹塑性交界 c 应满足的方程，此乃一超越方程，当给定 P_1 时，可由数值方法求出 c 值。

综上所述，塑性区的应力解为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_0 \ln \frac{r}{a} - P_1 (a \leqslant r \leqslant c) \\ \sigma_\theta &= \sigma_r + \sigma_0 \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4-41}$$

而弹塑性交界面的半径 c 由式（4-40）确定之。

以上结果说明，σ_r、σ_θ 的确定无须使用变形条件和本构关系，而直接由平衡方程、屈服条件即得到各应力分量。这种问题是所谓“静定”问题。当塑性区前沿一直扩展到圆筒的外侧时，整个厚壁筒全部处于塑性状态，称为全塑性状态或极限状态。在极限状态以前，由于有外侧弹性区的约束，圆筒内侧塑性区的变形只能与弹性变形为同量级。从极限状态开始，上述这种约束就已解除。圆筒将开始产生较大的塑性变形，故常称为无约束塑性流动。极限状态以前，圆筒可认为尚能正常工作，极限状态以后就不再认为是正常工作阶段了，所以说，极限状态是从正常工作状态转向不正常工作状态的一

种临界状态。与之对应的外力称为极限荷载，计作 P_0，为

$$P_0 = \sigma_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right) \tag{4-42}$$

§4.4 薄壁管的组合拉扭塑性变形

薄壁管的组合受载实验是一个可以很方便地验证塑性应力应变关系的实验，它的优越性在于应力分量各自只与一个外力有关，只要调整外力，就得到各应力分量的不同加载路径。

一、先扭转后拉伸的加载路径

假设薄壁管首先被扭转到一个确定的角度使剪应力达到屈服点然后保持这个角度沿轴长拉伸。正应力 σ 和剪应力 τ 沿壁厚为常数。采用 Mises 屈服条件，材料本构方程为

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon &= \frac{d\sigma}{E} + \frac{2}{3}\sigma d\lambda \\ d\gamma &= \frac{d\tau}{2G} + \tau d\lambda \end{aligned}\right\} \tag{4-43}$$

ε 和 γ 是轴向应变和环向剪应变。

采用拉扭组合的 Mises 屈服条件

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2 \tag{4-44}$$

在式（4-43）中消去 $d\lambda$ 并引用式（4-44），可以得到

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} - \frac{\sigma}{3G}\frac{d\tau}{\tau} = \frac{d\sigma}{E} + \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2 - \sigma^2}\frac{d\sigma}{3G} \tag{4-45}$$

由于正应力才由零开始增加时剪应力由屈服点 $Y/\sqrt{3}$ 减小，式(4-45)的积分为

$$\frac{6G}{\sigma_0}\varepsilon = \left(\frac{1-2\nu}{1+\nu}\right)\frac{G}{\sigma_0} + \ln\left(\frac{\sigma_0+\sigma}{\sigma_0-\sigma}\right) \tag{4-46}$$

轴向应变由零开始增加，σ 将很快增加到接近 σ_0 值。式（4-46）的第一项可以忽略。$\nu=0.3$ 时，当剪应力 τ 达到 $\sigma_0/\sqrt{3}$ 时，轴向应力 σ 将小于 $\sigma_0/100$。

二、先拉伸后扭转的加载路径

现在改变加载次序，先将薄壁管在轴向拉伸使轴向应力达到屈服点，然后保持轴向应力在 Y 值并在塑性区域扭转。只有在应变强化条件下才可以继续加载。假设一个等效应力 σ_i，使

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 + 3\tau^2$$

则

$$\sigma_i \mathrm{d}\sigma_i = 3\tau \mathrm{d}\tau$$

当 $\mathrm{d}\sigma=0$，本构方程（4-43）仍成立，且

$$\frac{2}{3}\mathrm{d}\lambda = \frac{\mathrm{d}\sigma_i}{H\sigma_i} = \frac{3\tau \mathrm{d}\tau}{H(\sigma_0^2 + 3\tau^2)}$$

这里 H 是应变强化时的强化模量。假设 H 为常数，则可积分本构方程

$$\begin{cases} \varepsilon = \dfrac{\sigma_0}{E} + \dfrac{\sigma_0}{2H}\left(1 + \dfrac{3\tau^2}{\sigma_0^2}\right) \\ \gamma = \dfrac{\tau}{2G} + \dfrac{3}{2H}\left[\tau - \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}\,\tau}{\sigma_0}\right)\right] \end{cases} \tag{4-47}$$

由于是等速扭转，剪应变的增量为

$$\mathrm{d}\gamma = \gamma \frac{\mathrm{d}\varphi}{2l}$$

这里 φ 为整个薄壁管的扭转角，l 为薄壁管的长度，r 是管的名义半径。

三、拉扭同时加载的路径

采用 Mises 流动准则

$$\begin{cases} \mathrm{d}\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}l}{l} = \dfrac{\sigma \mathrm{d}\bar{\sigma}}{H\bar{\sigma}} \\ \mathrm{d}\gamma = \dfrac{r\mathrm{d}\varphi}{2l} = \dfrac{3\tau \mathrm{d}\bar{\sigma}}{2H\bar{\sigma}} \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{r} = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} = -\dfrac{\mathrm{d}l}{2l} \end{cases} \tag{4-48}$$

可以得到

$$\frac{r}{r_0}=\frac{t}{t_0}=\sqrt{\frac{l_0}{l}}$$

由于薄壁管的内部体积在加载时保持不变，由式（4-48）可以得到

$$\begin{cases}\dfrac{3\tau}{\sigma}=r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}=r_0\sqrt{\dfrac{l_0}{l}}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}\\ \bar{\sigma}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sigma\left\{1+\dfrac{r_0^2 l}{3l}\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}\right)^2\right\}^{1/2}\end{cases}\tag{4-49}$$

由式（4-48）的第二式和式（4-49）的第二式消去 σ 可以得到

$$\int_Y^{\bar{\sigma}}\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{H}=\int_{l_0}^{l}\left\{1+\frac{r_0^2 l}{3l}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}\right)^2\right\}^{1/2}\frac{\mathrm{d}l}{l}\tag{4-50}$$

假如$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}$是沿管壁长度的给定函数，则上式的右边可以用数值积分得到 σ_i 与 l 的关系。

习　　题

4.1　设有理想弹塑性材料制成的厚壁圆筒，内半径为 a、外半径为 b，承受内压 P 的作用，试求此厚壁圆筒进入塑性状态时和完全进入塑性状态时的压力比值是多少。

4.2　已知理想弹塑性材料制成的厚壁圆筒，内半径为 a、外半径为 b，承受内压 P_i 的作用，若 ρ 为厚壁圆筒中弹塑性分界半径，试求 ρ 和内压 P_i 之间的关系。设 k 为剪切屈服极限。

第五章　塑性平面应变和滑移线场理论

§5.1　基本关系式

本章讨论理想刚塑性材料的平面应变问题，这种材料的特性为，屈服前处于无变形刚体状态；一旦屈服，即进入塑性流动状态。

容易理解，刚塑性材料是为了简化的目的而提出的一种假想的固体。根据这种假定做出的分析，只有在物体内某一方向可以开始发生无约束的塑性流动后，才比较真实地接近弹塑性材料的分析结果。对于工程中常见的塑性极限平衡问题，如压延、金属成型等问题，刚塑性分析不会引起大的误差。

由前面的讨论可知，平面塑性应变状态是物体中各点的塑性流动都平行于给定的 xy 平面，即变形与 z 无关。在体积不可压缩和小变形条件下，任一微小单元在塑性应变状态下的畸变增量是一个纯剪变形。所以，每一点的应力状态为一个纯剪应力 τ 加一个静水压力 σ_m。由此，垂直于流动平面的应力 σ_z 应等于 σ_m，实际上，对于平面应变问题有

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x,y);\varepsilon_y = \varepsilon_y(x,y);\varepsilon_z = 0 \tag{5-1}$$

应力分量也只与 x、y 有关，故

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

由此得出，z 方向为一主方向，σ_z 为一主应力。

增量理论的本构方程给出

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda S_{ij} = \frac{3d\varepsilon_i}{2\sigma_i} S_{ij} \tag{5-2}$$

或

$$\left.\begin{aligned} d\varepsilon_x &= \frac{2}{3}d\lambda\left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ d\varepsilon_y &= \frac{2}{3}d\lambda\left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\ d\varepsilon_z &= \frac{2}{3}d\lambda\left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\ d\gamma_{xy} &= d\lambda\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{5-2'}$$

由 $d\varepsilon_z = 0$ 得

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{5-3}$$

于是，对于平面应变（在 xy 平面内）有

$$\sigma_z = \sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \tag{5-4}$$

畸变能条件为

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 6k^2 \tag{5-5}$$

其中 k 为纯剪屈服应力，将式 (5-4) 及 $\tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ 代入式 (5-5) 得

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \sigma_x\right]^2 + 6\tau_{xy}^2 = 6k^2$$

化简后为

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2 \tag{5-6}$$

已知 σ_z 为一主应力，其它两个主应力由下式确定

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

于是，在塑性区内主应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}\\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}\end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

最大剪应力为[①]

$$\tau_{max}=k=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2} \tag{5-8}$$

于是主应力可写为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_m+k\\ \sigma_2 &= \sigma_m\\ \sigma_3 &= \sigma_m-k\end{aligned}\right\} \tag{5-9}$$

这就是说，在塑性区内任一点的应力状态，可用静水压力 σ_m 与纯剪压力 $\tau=k$ 两个分量来表示（图 5-1）。

在不计体力的情况下，平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}&=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\} \tag{5-10}$$

式（5-10）和方程（5-6）共有三个方程，含有三个未知函数 σ_x、σ_y、τ_{xy}，所以在给定应力边界条件时，是可以求解的。当还需要求出位移、速度时，则需补充条件。这类不需要本构关系就可以求出应力分布的问题，称为“静定”问题，如边界上给定位移边界条件，则

① 由式（5-8）可见，如采用最大剪应力条件，$\tau_{max}=k$，则得与畸变能条件式（5-6）相同的结果。

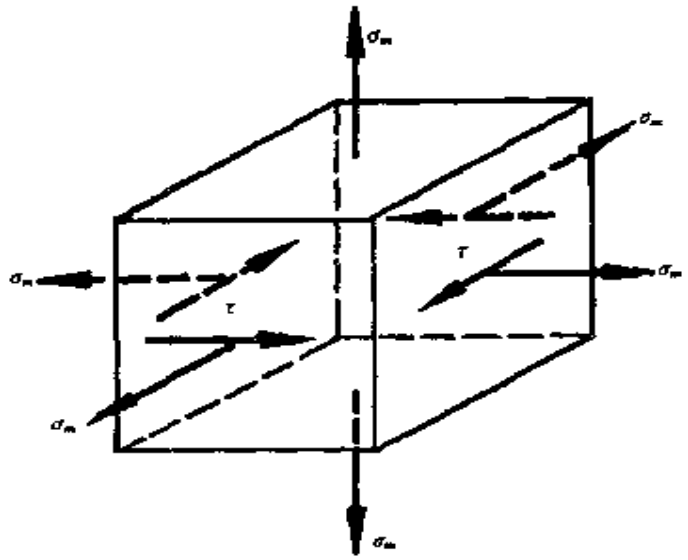


图 5-1

须考虑位移速度问题，这将在§5.6中讨论。

§5.2 滑移线场理论

由以上讨论知道，物体中任一点 P 在 xy 平面内的应力状态如图 5-2 (a) 所示。在垂直于纸面 z 方向，则只有 $\sigma_z=\sigma_m=\sigma_2$ 作用。过 P 点的另两个主平面内主应力为 σ_1、σ_3 [图 5-2 (b)]。由第二章的讨论知道，最大剪应力所在的面与主轴方向呈 $\pm\frac{\pi}{4}$ 角 [图 5-2 (c)]。我们用面元的外法线方向来表示各个平面。则这两个相互正交的平面记作（Ⅰ）和（Ⅱ），在平面（Ⅰ）和（Ⅱ）上，剪应力达最大值 k，正应力为 σ_m。图 5-2 (c) 中（Ⅰ）、（Ⅱ）平面的方向将随 P 点的位置不同而不同。当 P 点位置连续变化时，与 P 点的最大剪应力面的法线相切的线元，则连成相互正交的两条曲线，就叫做第一、第二最大剪应力线。显然，过该线上的任一点都有这样两条相互正交的最大剪应力线。

现在来确定过任一点处的最大剪应力线的方向。

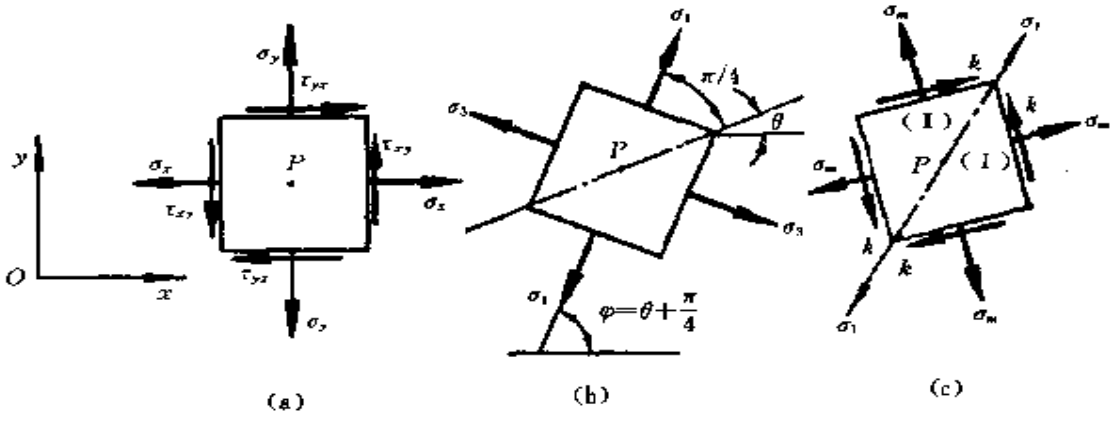


图 5-2

令最大主应力的方向与 x 轴成 φ 角 [图 5-2 (b)]，则由第二章给出的公式有

$$\operatorname{tg}2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{5-11}$$

最小主应力所在的面与 σ_1 所在的面为正交，而第一最大剪应力线与 x 轴夹角为 θ，并以由 x 轴逆时针旋转为正 (图 5-3)。于是有

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \tag{5-12}$$

比较式 (5-11) 与式 (5-12)，得

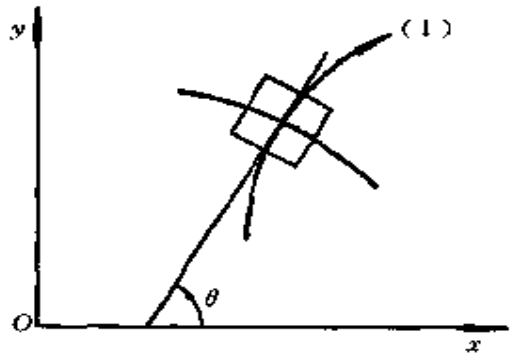


图 5-3

$$\mathrm{tg}2\theta = -\frac{1}{\mathrm{tg}2\varphi}$$

由于平面应变的屈服条件为

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$$

将式（5-12）代入后有

$$(2\tau_{xy}\mathrm{tg}2\theta)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2$$

即

$$\tau_{xy}^2 = k^2\cos^2 2\theta$$

$$\tau_{xy} = k\cos 2\theta$$

此外，由于

$$\sigma_y - \sigma_x = 2\tau_{xy}\mathrm{tg}2\theta$$

$$\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma$$

所以

$$\sigma_x = \sigma - \tau_{xy}\mathrm{tg}2\theta = \sigma - k\sin 2\theta$$

于是得

$$\left.\begin{aligned}\cos 2\theta &= \frac{\tau_{xy}}{k}\\ \sin 2\theta &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2k}\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}13)$$

显然，最大剪应力线的方向，惟一地由 θ 确定。

对刚塑性体来说，当最大剪应力 $\tau_{max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \pm k$ 时，材料进入塑性流动状态，如前所述，塑性应变状态下的应变增量是一个纯剪变形，此时，材料沿最大剪应力线滑动，所以最大剪应力线又叫滑移线。并分别将第一、第二最大剪应力线称为 α 族滑移线与 β 族滑移线，简称 α、β 线（图 5-4）。于是，滑移线为两族正交曲线。滑移线上每一点的切线方向就是最大剪应力方向。因为，α 族滑移线的切线与 x 轴所成的角度为 θ（图 5-4），如最大主应力 σ_1 与 x 轴所

成的角度为 φ（φ 同 θ 均由 x 轴正方向算起，逆时针旋转为正）。由于 α 线方向（最大剪应力方向）与最大主应力方向相差 45°角，故在某一点已知主应力方向时，该点 α 线方向可由最大主应力方向顺时针旋转 45°得到，β 线可由最小主应力方向以同样方式得到，图 5-4 中标出的量都是正的。这样，当以 $\alpha\beta$ 为一右手坐标系时，最大主应力过其第一、三象限。

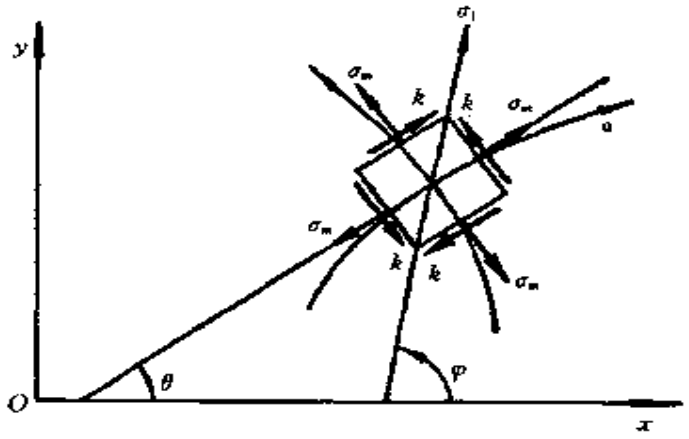


图 5-4

在 xy 平面内，α、β 线的微分方程为

$$\left.\begin{aligned} \alpha\text{ 族}:&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\operatorname{tg}\theta \\ \beta\text{ 族}:&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\operatorname{ctg}\theta \end{aligned}\right\} \tag{5-14}$$

任一点 P 的应力 σ_x、σ_y、τ_{xy}，可用 σ_m、k 来表示。实际上，由莫尔应力图作图法便不难得到。图 5-5（a）是在应力平面 σ、τ 内的莫尔圆，其相应的物理平面如图 5-5（b）所示。

图中给出了任一点 P 各特定平面上的应力。物理平面上的 X 面对应于莫尔圆上的一点 X，第一最大剪应力面（Ⅰ）对于莫尔圆上的（Ⅰ）点，（Ⅰ）面的方向恰恰是 α 线的方向，（Ⅰ）面的方向则恰与 β 方向相同，根据材料力学的知识，不难理解图中指出的相互关

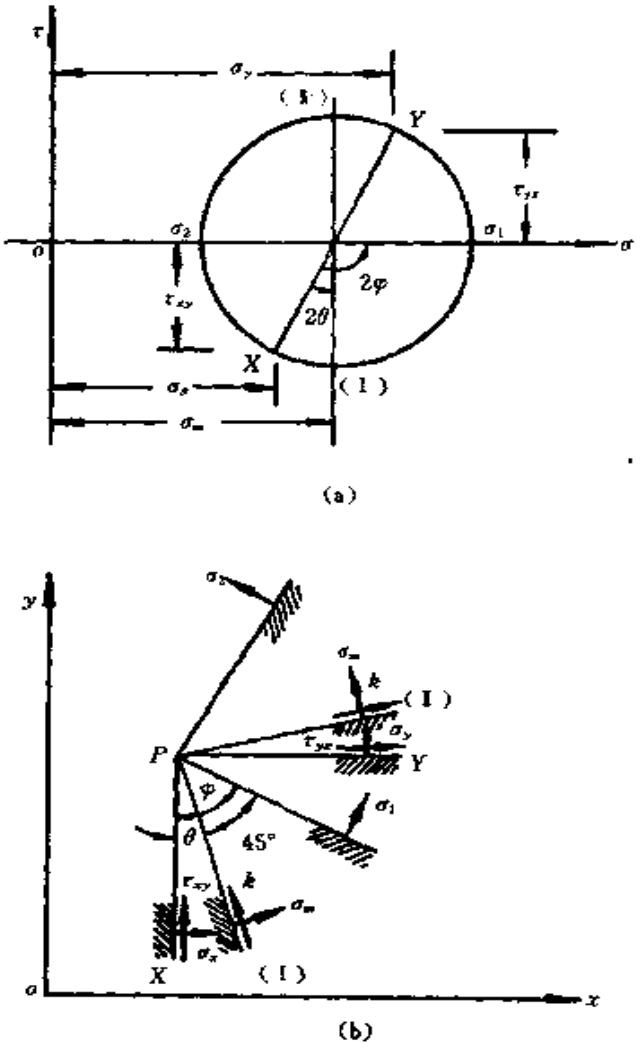


图 5-5

(a) 应力平面；(b) 物理平面

系，由图可得下列关系式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_m - k\sin 2\theta\\ \sigma_y &= \sigma_m + k\sin 2\theta\\ \tau_{xy} &= k\cos 2\theta\end{aligned}\right\} \tag{5-15}$$

式 (5-15) 显然满足屈服条件式 (5-6)，而代入平衡方程 (5-10) 后，

可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_m}{\partial x}-2k\left(\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}+\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)=0\\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial y}-2k\left(\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}-\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{5-16}$$

式（5-16）是一个关于 $\sigma_m=\sigma_m(x,y)$ 和 $\theta=\theta(x,y)$ 的双曲线型拟线性偏微分方程组。求这一方程组的解，就是要在 xy 平面的某一区域内求具有一阶连续偏导数，并满足方程（5-16）的函数 $\sigma_m(x,y)$ 和 $\theta(x,y)$。

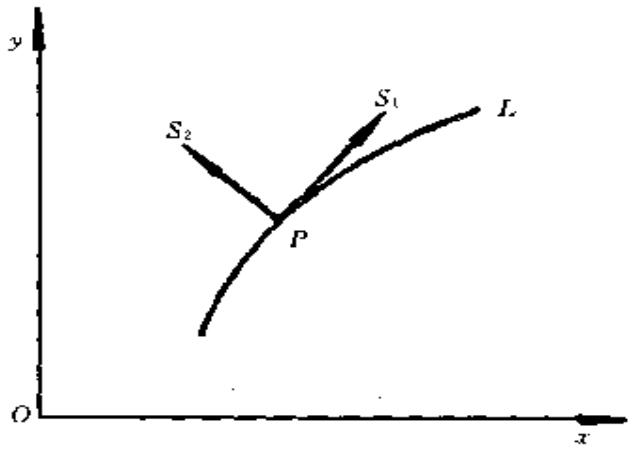


图 5-6

假定在 xy 平面内沿某一曲线 L [其参数方程是 $x=x(S)$，$y=y(S)$]，已知 σ_m、θ，从而 $\frac{\partial \sigma_m}{\partial S}$、$\frac{\partial \theta}{\partial S}$ 亦为已知，如 S_1，S_2 为 L 曲线上 P 点的切线和外法线（图 5-6），以此作为局部坐标，则式（5-16）仍保持原来的形式，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_m}{\partial S_1}-2k\left(\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial S_1}+\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial S_2}\right)=0\\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial S_2}-2k\left(\sin 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial S_1}-\cos 2\theta\frac{\partial \theta}{\partial S_2}\right)=0\end{aligned}\right\}\tag{5-17}$$

此处 θ 由 S_1 轴算起。

若在 xy 平面内，沿某曲线 L 给定了函数 σ_m 和 θ，则沿 L 应有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_m}{\partial x}\mathrm{d}x-\frac{\partial \sigma_m}{\partial y}\mathrm{d}y&=\mathrm{d}\sigma_m\\ \frac{\partial \theta}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \theta}{\partial y}\mathrm{d}y&=\mathrm{d}\theta\end{aligned}\right\}\tag{5-18}$$

于是式（5-16）和式（5-18）都是以 $\frac{\partial \sigma_m}{\partial x}$、$\frac{\partial \sigma_m}{\partial y}$、$\frac{\partial \theta}{\partial x}$、$\frac{\partial \theta}{\partial y}$ 作为未知量的代数方程组，此方程组的解为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_m}{\partial x}&=\frac{D_1}{D}\\ \frac{\partial \sigma_m}{\partial y}&=\frac{D_2}{D}\\ \frac{\partial \theta}{\partial x}&=\frac{D_3}{D}\\ \frac{\partial \theta}{\partial y}&=\frac{D_4}{D}\end{aligned}\right\}\tag{5-19}$$

其中

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2k\cos 2\theta & -2k\sin 2\theta\\ 0 & 1 & -2k\sin 2\theta & +2k\cos 2\theta\\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{d}x & \mathrm{d}y\end{vmatrix}\tag{5-20}$$

而 D_1、D_2、D_3、D_4 分别为将 D 中的第一列、第二列、第三列、第四列各元素代之以 0、0、$\mathrm{d}\sigma_m$、$\mathrm{d}\theta$［即式（5-16）和式（5-18）右端项组成的列元素］之后所成的行列式。当行列式 D 不等于零时，式（5-19）有惟一确定的值，但当

$$D=0\tag{5-21}$$

时，式（5-19）诸值就不能惟一确定，此时越过 L 线，导数可能不连续，即已知 L 线一侧的导数，若无其它条件，就不能求出 L 线另一侧的导数。具有这种性质的曲线叫做特征线，式（5-21）叫做特征方程。

由式（5-21）得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\text{ctg}2\theta\left(\frac{dy}{dx}\right) - 1 = 0$$

上式的两个根为

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\theta, \frac{dy}{dx} = -\text{ctg}\theta$$

此即特征线的微分方程式，且称第一式所表示的曲线为正特征线，第二式所表示的曲线为负特征线，它们与前面得出的滑移线的微分方程式（5-14）相同。所以，特征线与滑移线相重合。实际上，如在特

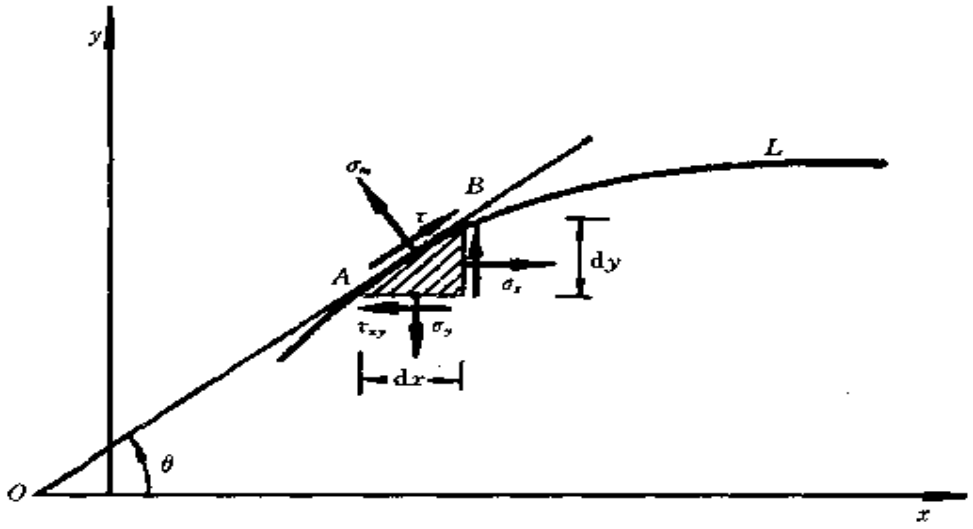


图 5-7

征线 L 上取一微小弧段 $AB=dS$（图 5-7），则在 AB 上的剪应力 τ 为

$$\tau dS = \tau_{xy}\cos\theta dx - \tau_{xy}\sin\theta dy + \sigma_y\sin\theta dx - \sigma_x\cos\theta dy$$

$$= \left[\tau_{xy}\cos 2\theta + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\theta\right]dS$$

于是由式（5-15）可得上式括号中的量等于 k，从而有

$$\tau = k$$

这就是说，L 线是最大剪应力轨迹，即所谓滑移线，这就进一步证明，微分方程（5-16）的特征线恰为滑移线，且 α 族滑移线与正特征线相重合，β 族滑移线与负特征线相重合。

如局部坐标轴 S_1、S_2（图 5-6）与滑移线的切线重合，则式（5-17）化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial S_\alpha}(\sigma_m - 2k\theta) = 0\\ \frac{\partial}{\partial S_\beta}(\sigma_m + 2k\theta) = 0\end{aligned}\right\} \tag{5-22}$$

其中$\frac{\partial}{\partial S_\alpha}$、$\frac{\partial}{\partial S_\beta}$为沿 α、β 线的导数，由此沿 α、β 族滑移线有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{tg}\theta \qquad \sigma_m - 2k\theta = \zeta \quad \text{沿 } \alpha \text{ 线}\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{ctg}\theta \quad \sigma_m + 2k\theta = \eta \quad \text{沿 } \beta \text{ 线}\end{aligned}\right\} \tag{5-23}$$

其中 ζ、η 均为常数，但由一族的某一条特征线转移到本族另一条特征线时，这些常数是要变化的。在式（5-23）中

$$\left.\begin{aligned}\sigma_m - 2k\theta = \zeta \quad \text{沿 } \alpha \text{ 线}\\ \sigma_m + 2k\theta = \eta \quad \text{沿 } \beta \text{ 线}\end{aligned}\right\} \tag{5-24}$$

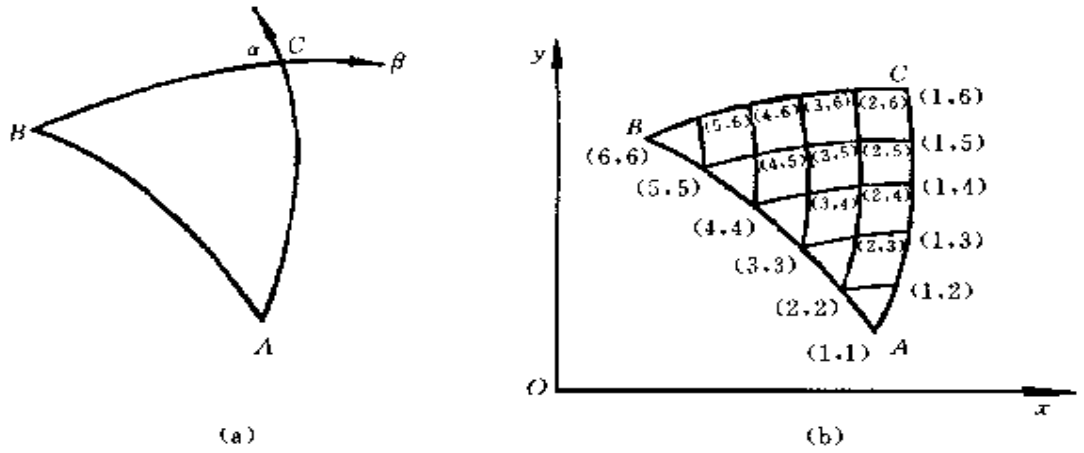
称为汉基方程。

如已知滑移线场及其 ζ、η 值，则各点的 σ_m、θ 已知，从而 σ_x、σ_y、τ_{xy}即为已知。在数学物理方程中，根据边界条件的不同，建立滑移线场的问题可分为以下三类：

第一类边值问题，称为初值问题或柯西问题，此问题的特点是在 xy 平面内的一条光滑线段 AB 上给定 σ_m 和 θ，该线段处处不和滑移线相切，且和每一条滑移线只有一次相交，则在该线段的任一侧均可建立以线段 AB 为底的曲线三角形 ABC 范围内的惟一的滑移线场（图 5-8）。

以下给出滑移场的数值计算法概要。

实际上，如在 AB 上给定 σ_m、θ，则可将 AB 分成有限个微小线段［图 5-8 (b)］，并由各分点划出两条特征线，于是，ABC 区被分成许多网格，网格的交点分别记作（1，1），(2，2），…，(1，2），(1，3），…［如图 5-8 (b) 所示］，根据汉基方程，可得



(a) (b)

图 5-8

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{m(1,1)}-2k\theta_{(1,1)}&=\sigma_{m(1,2)}-2k\theta_{(1,2)}\\ \sigma_{m(2,2)}+2k\theta_{(2,2)}&=\sigma_{m(1,2)}+2k\theta_{(1,2)}\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

由此，有

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{m(1,2)}&=\frac{1}{2}[\sigma_{m(2,2)}+\sigma_{m(1,1)}+2k(\theta_{(2,2)}-\theta_{(1,1)})]\\ \theta_{(1,2)}&=\frac{1}{2}[\sigma_{m(2,2)}-\sigma_{m(1,1)}+2k(\theta_{(2,2)}+\theta_{(1,1)})]\end{aligned}\right\}\qquad(b)$$

类似地可求出 $\sigma_{m(2,3)}$，$\sigma_{m(3,4)}$，…，$\theta_{(2,3)}$，$\theta_{(3,4)}$，…，在 ABC 区域内各点的 σ_m 和 θ 值均可近似地求出。ABC 域称为影响区。

第二类边值问题，称为初特征问题或黎曼问题。在两滑移线线段 OA 和 OB 上，给定函数 σ_m 和 θ[图 5-9(a)]，则以此两滑移线段为邻边的曲线四边形 $OACB$ 内可建立惟一的滑移线场，此问题的特征之一是两滑线之一退缩为一点，从而形成一个扇形场[图 5-9(b)]。

此时，影响区分别为 $OACB$ 和 OAC。

第三类为混合问题，即以上两类问题之混合。在一条特征线上，如 α 线上 OA 段给定 σ_m、θ，即 σ_m、θ 满足沿 OA 的平衡条件，另一条与之相交的非特征线 OB（假定 $\angle AOB$ 为锐角）上给定 θ（图 5-10）。

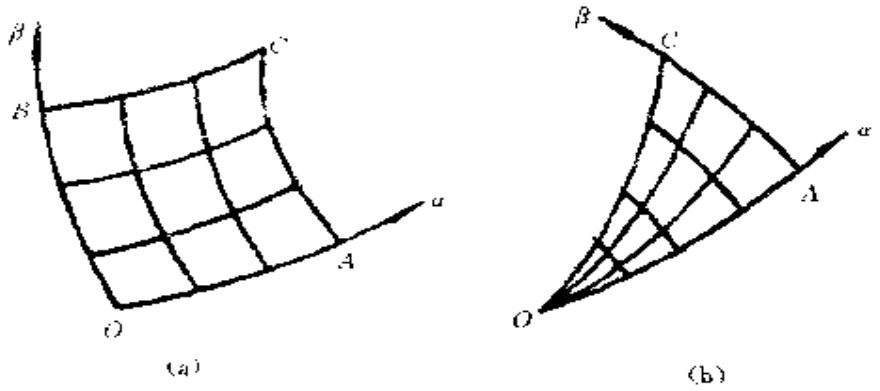


图 5-9

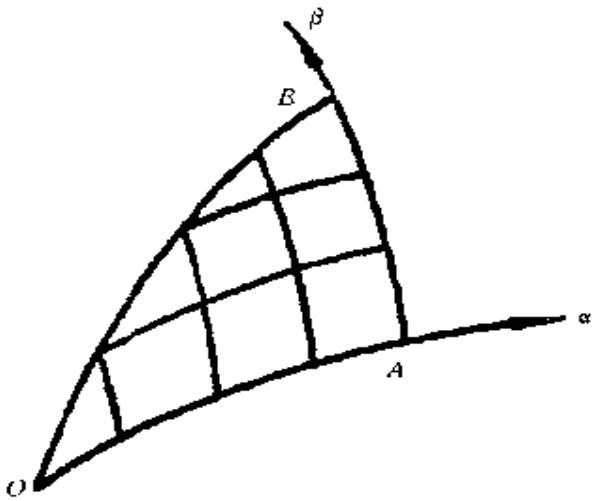


图 5-10

第二类和第三类边值问题都可根据滑移场的性质用数值法求解。

§ 5.3 滑移线场的主要性质

以下介绍滑移线场几个主要几何特性。

性质1 沿滑移线的压力变化与滑移线和x轴所成的角度成比例。

这是因为沿 α 线有 $\sigma_m = 2k\theta +$ 常数，沿 β 线有 $\sigma_m = -2k\theta +$ 常

数，所以，不管沿 α 线还是沿 β 线，σ_m 的变化总是和 θ 角度成比例。

性质 2 如沿 α 族滑移线中的任一条移动，从滑移线 β_1 转到同族滑移线 β_2，则所转过的角度和压力 σ_m 的变化量保持常数（图 5-11）。

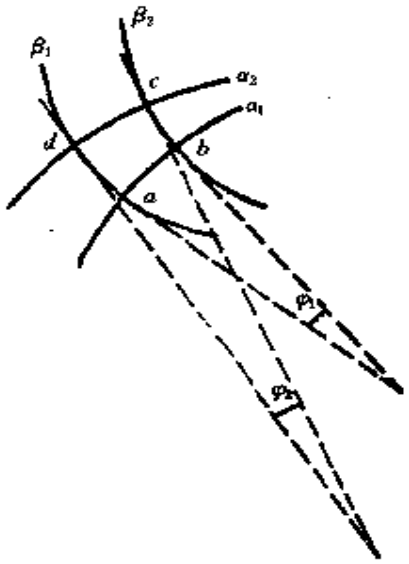


图 5-11

实际上，由

$$\left.\begin{aligned}\sigma_m - 2k\theta &= \zeta\\ \sigma_m + 2k\theta &= \eta\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

可得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_m &= \frac{1}{2}(\zeta+\eta)\\ \theta &= \frac{1}{2k}(\eta-\zeta)\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

然后将 α_1、α_2、β_1、β_2 的 ζ_1、ζ_2、η_1、η_2 值代入式（b），不难求得在交点 a、b、c、d 处有

$$\varphi_1 = (\theta_b - \theta_a) = \frac{1}{2k}(\eta_2 - \zeta_1) - \frac{1}{2k}(\eta_1 - \zeta_1) = \frac{1}{2k}(\eta_2 - \eta_1)$$

$$\phi_2 = (\theta_c - \theta_d) = \frac{1}{2k}(\eta_2 - \zeta_2) - \frac{1}{2k}(\eta_1 - \zeta_2) = \frac{1}{2k}(\eta_2 - \eta_1)$$

即

$$\phi_1 = \phi_2 \tag{5-25}$$

类似的方法可得

$$\sigma_{mb} - \sigma_{ma} = \sigma_{mc} - \sigma_{md} \tag{5-26}$$

式（5-25）和式（5-26）称为汉基第一定理。

性质 3 如已知滑移线网中任一点的 σ_m 值，则可在全场中算出各处的 σ_m 值。实际上如 A 点（图 5-12）的 σ_{mA} 已知，则该点的 θ_A 也已知，则可算出过 A 点的滑移线 β_1 的参数 η_1 值，然后求出

$$\sigma_{mB} = \eta_1 - 2k\theta_B \tag{c}$$

和

$$\zeta_1 = \sigma_{mB} - 2k\theta_B \tag{d}$$

从而可得

$$\sigma_{mC} = \zeta_1 + 2k\theta_C \tag{e}$$

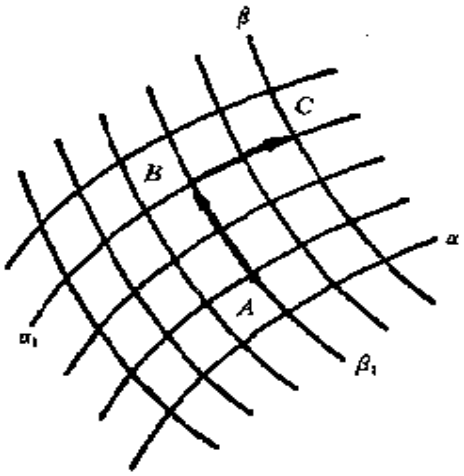


图 5-12

如此等等。

性质 4 如滑移线的某段为直线，则沿此线段 σ_m、θ、ζ、η 以及 σ_x、σ_y、τ_{xy}均为常数。进而可知，如在某一区域中两族滑移线均为直线，则此区域内的应力为均匀分布，参数 ζ、η 均为常数。这一性质可由性质 2 得到。

性质 5 如沿某一滑移线移动，则另一族滑移线在交点处的曲率半径的变化就是沿该线所通过的距离（图 5-13）。

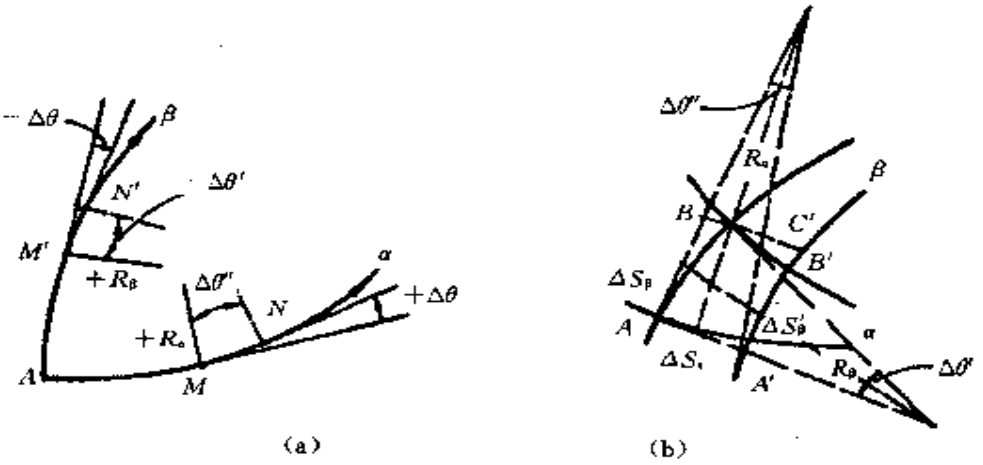


图 5-13

以下证明这一性质。如 α、β 线的曲率半径分别为 R_α、R_β，则

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{R_\alpha}&=\frac{\partial\theta}{\partial S_\alpha}\\ \frac{1}{R_\beta}&=-\frac{\partial\theta}{\partial S_\beta}\end{aligned}\right\}\tag{f}$$

R_α（或 R_β）的正负规定为曲率中心处于 S_β（S_α）增加方向为正，反之为负。由于我们已经规定了 θ 角以逆时针旋转为正，则由图 5-13（a）可知，式（f）中 β 线的曲率必为负。

式（f）可改写为

$$\left.\begin{aligned}R_\alpha\Delta\theta''&=\Delta S_\alpha\\ -R_\beta\Delta\theta'&=\Delta S_\beta\end{aligned}\right\}\tag{g}$$

令 $AB=\Delta S_\beta$，$A'B'=\Delta S'_\beta$，则

$$\Delta S'_\beta = \Delta S_\beta + \frac{\partial}{\partial S_\alpha}(\Delta S_\beta)\Delta S_\alpha$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial S_\alpha}(\Delta S_\beta)\Delta S_\alpha \approx \frac{(R_\beta - \Delta S_\alpha)\Delta\theta' - R_\beta\Delta\theta'}{\Delta S_\alpha}\Delta S_\alpha = -\Delta\theta'\Delta S_\alpha$$

于是有

$$A'B' - AB = -\Delta\theta'\Delta S_\alpha$$

$$\frac{\partial(\Delta S_\beta)}{\partial S_\alpha} = \Delta\theta'$$

或

$$\frac{\partial}{\partial S_\alpha}(-R_\beta\Delta\theta') = \Delta\theta'$$

根据汉基第一定理，上式中 $\Delta\theta'$ 为一常数，因而有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial S_\alpha}(R_\beta) &= -1\\ \frac{\partial}{\partial S_\beta}(R_\alpha) &= -1\end{aligned}\right\} \tag{5-27}$$

同理可得

$$\left.\begin{aligned}&\text{沿 } \alpha \text{ 线}: dR_\beta + R_\alpha d\theta = 0\\ &\text{沿 } \beta \text{ 线}: dR_\alpha - R_\beta d\theta = 0\end{aligned}\right\} \tag{5-28}$$

此即汉基第二定理。

§ 5.4 边界条件

在边界 C 上 P 点处取一微小单元，其外法线方向为 n，n 与 x 轴所成的角度为 φ(图 5-14)。如已知 P 处的正应力为 σ_n，剪应力为 τ_n，且 $\tau_n \leqslant |k|$。则可得边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x\cos^2\varphi + \sigma_y\sin^2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi \\ \tau_n &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi\end{aligned}\right\} \tag{5-29}$$

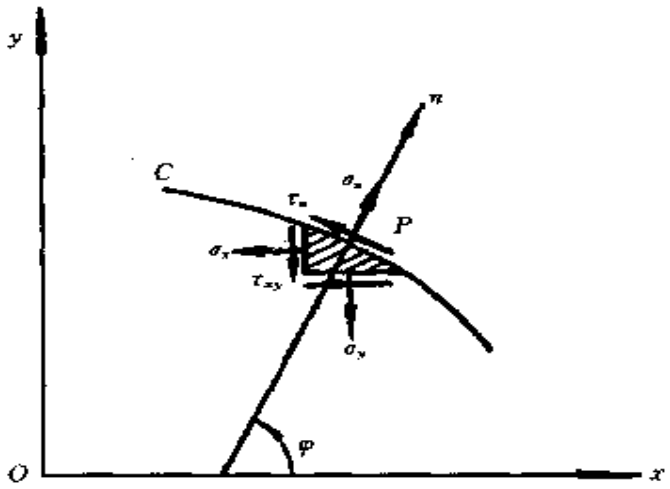


图 5-14

考虑介质处于塑性状态，则可将式（5-15）代入式（5-29），于是得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_m - k\sin 2(\theta - \varphi) \\ \tau_n &= k\cos 2(\theta - \varphi)\end{aligned}\right\} \tag{5-30}$$

式（5-30）即塑性区的边界条件。

在边界上，如 σ_n、τ_n 已知，则 σ_m、θ 可按式（5-30）求得。然而，σ_m、θ 并不能惟一确定，因为解式（5-30）后给出

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \varphi \pm \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{\tau_n}{k} + m\pi \\ \sigma_m &= \sigma_n + k\sin 2(\theta - \varphi)\end{aligned}\right\} \tag{5-31}$$

其中 $\cos^{-1}\frac{\tau_n}{k}$ 是 θ 的主值，m 是任一整数。式（5-31）说明，对应于给定的 σ_n、τ_n，可有两对 σ_m、θ 存在。这两个解都满足屈服条件和边界条件，这种情况的产生是由于屈服条件为二次方程所带来的，以后，将根据具体问题的特定边界条件，选取正确的值。

例 5-1 设有处于平面应变状态的单向受压构件，如图 5-15 所

示，试讨论其自由直线边界附近滑移线的方向。

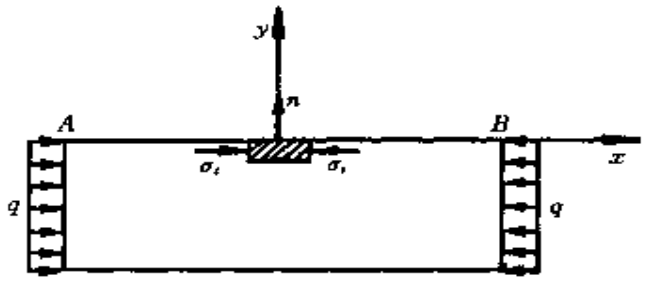


图 5-15

解 对于自由边界 AB 有

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \sigma_n = \tau_n = 0$$

于是，由式（5-31）得

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \sigma_m &= \pm k \end{aligned}\right\} \tag{5-32}$$

如令沿边界 AB 方向的应力分量为 σ_t，则由式（5-4）得

$$\frac{1}{2}(\sigma_t + \sigma_n) = \sigma_m$$

于是有

$$\sigma_t = \pm 2k$$

式（5-33）表示，在自由（无荷载）边界附近是单向拉伸（或压缩）应力状态，同样说明，自由边界是一个主方向，若另一主应力是压应力时，则 $\sigma_1 = 0$ 即为最大主应力，即式（5-33）中应取负号，于是有 $\sigma_t = -2k$。

任一点的滑移线方向都表示最大剪应力方向，所以滑移线与自由表面成 $\pm\frac{\pi}{4}$ 角。这和式（5-32）给出的结果（只考虑主值）相一致（图 5-16）。如 $\sigma_1 = 0$ 为最大主应力，则 σ_1 位于 $\alpha\beta$ 右手坐标系的第一和第三象限（图 5-16）。这样，滑移线的方向也就确定了。

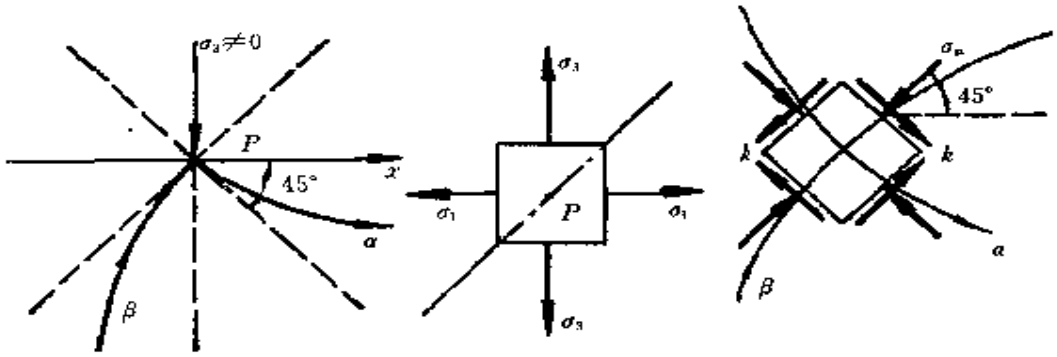


图 5-16

例 5-2 试讨论光滑直线边界处的滑移线方向。

光滑的直线边界上只可能有垂直于边界的荷载（图 5-17），在这种情况下

$$\phi = 0, \tau_n = 0, \sigma_n \neq 0$$

解 于是，由式（5-31）有

$$\theta = \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + m\pi$$

$$\sigma_m = \sigma_n \pm k$$

在塑性区边界上各点处的应力必须满足屈服条件

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$$

如 $\sigma_1 \neq 0$，则 $\sigma_3 > 2k$，于是 σ_1 为最大主应力，σ_3 为最小主应力，而中间主应力为静水压力 σ_m，根据 σ_1 应在 $\alpha\beta$ 右手坐标系第一和第三象

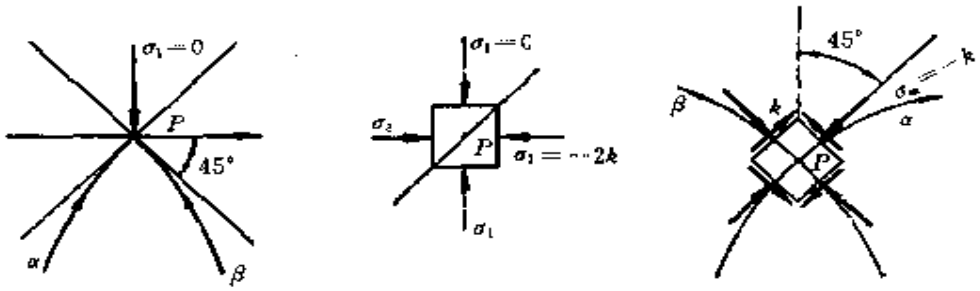


图 5-17

限的要求，边界上一点的滑移线如图 5-17 所示。

§5.5 应用简例

一、均匀应力状态

如某一区域 D 为均匀应力状态，即 σ_x、σ_y、τ_{xy}在 D 内各点均相同，则 σ_m 在 D 内保持常数，于是由汉基方程（5-24）知道，θ 在 D 内均为常数，这就是说，α、β 线为两族相互正交的直线（图 5-18）。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_m - 2k\theta &= \zeta\\ \sigma_m + 2k\theta &= \eta\end{aligned}\right\}$$

在均匀应力区内，α、β 滑移线的方向要根据该区的边界条件来确定。自由边界和非自由边界可能是均匀应力区的边界。

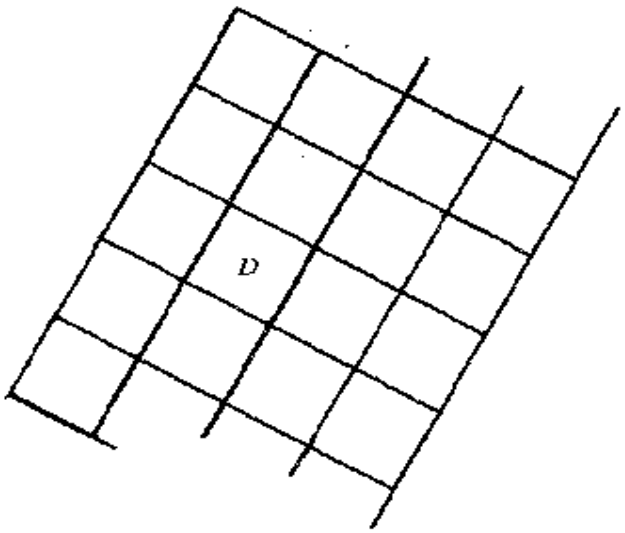


图 5-18

二、简单应力状态

如在某一区域 D 中，静水压力 σ_m 沿某一方向为常数，则当该方向为一最大剪应力方向（例如 α 线方向）时，由汉基方程（5-24）知道，沿此 α 线方向的 θ 也是常数，于是 α 线是一族直线；另一方面，设沿 β 方向静水压力 σ_m 为线性变化，则在 α 线为直线的情况下，由

汉基方程知道，β 线为一族同心圆。

实际上，在下式中

$$\left.\begin{aligned}\sigma_m - 2k\theta &= \zeta \quad \text{沿 } \alpha \text{ 线}\\ \sigma_m + 2k\theta &= \eta \quad \text{沿 } \beta \text{ 线}\end{aligned}\right\}$$

因 σ_m 沿 α 线为常数，所以 θ 为常数，今取极坐标系，如图 5-19 所示。在此坐标系中，σ_m 沿 r（即 α 线）为常数，而沿 β 随 θ 成线性变化。由此 σ_m 与 r 无关，且沿一圆形滑移线 β 随 θ 的增加而减小。根据式

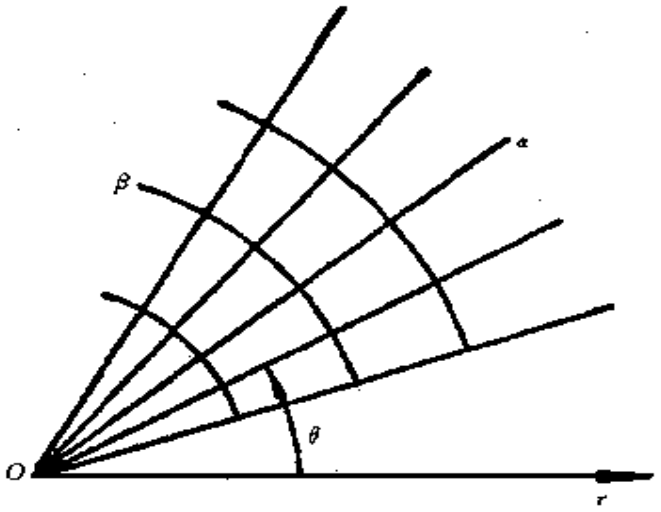


图 5-19

(5-15) 可知，σ_r、σ_θ、$\tau_{r\theta}$或 σ_x、σ_y、τ_{xy}也都与 r 无关。这就是说，在塑性区，静水压力 σ_m 与径向和周向应力 σ_r、σ_θ 的分布规律相同。它们是 θ 的线性函数，于是，滑移线场是一个中心扇形。中心 O 是应力状态的奇点，因为它是无穷多数值中的任一个值。

三、长条基础下地基的极限平衡（刚模压入问题）

平底刚性冲模对理想塑性材料的压入问题是一个平面应变问题的典型例子，在土建工程中，长条基础下地基的极限平衡属于这类问题。

应当指出，根据已有的滑移线场的知识，来构造有应力边界条

件影响区的滑移线场，一般地说，条件是不充分的，对于混合边值问题，则更困难些。所以，以下的讨论基于试算法。

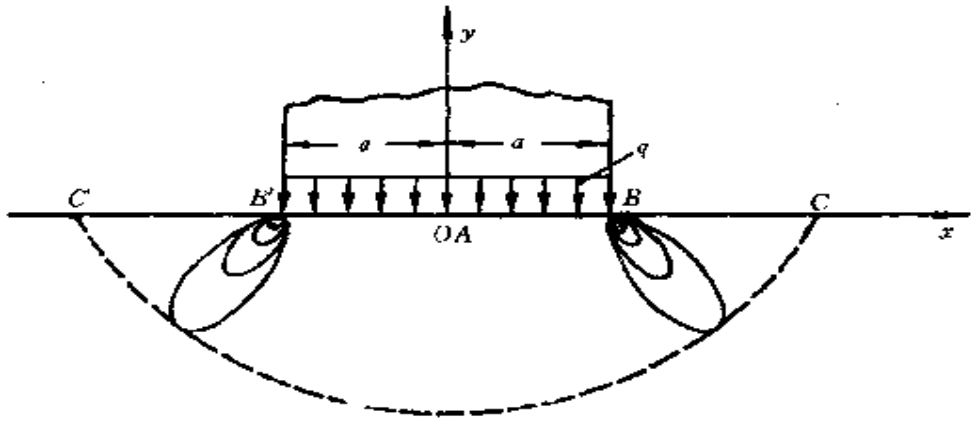


图 5-20

设基础宽为 $2a$，其压力强度为 q（图 5-20），坐标系如图中所示，地基可作为表面光滑的理想刚塑性材料看待。设荷载 q_0 为极限荷载，是使基底塑性区由 B 和 B' 两点逐渐扩展，而最终连成一体，以致产生塑性流动时的临界值。在开始塑性流动的瞬时，可以设想，基础将以速度 v_0 向下运动，塑性区的扩展范围假定是图 5-20 中的虚线所围成的区域。塑性区地基由两侧向外运动。其中 BC 和 $B'C'$ 是自由直线边界，BAB' 是光滑直线边界。

这一问题的解，可先从 BB' 开始求解一个柯西问题，给出该影响区内的解。另外，根据 $B'C'$ 及 BC 两段自由边界的条件，再解柯西问题，然后，进一步考虑两个影响区的过渡和连结。

在自由边界附近，假定是一个均匀应力区，B 点为应力奇点，所以可以推定，与 BC 的影响区相邻的为一个中心扇形区。假定基础下的压应力是常数，则边界 ABC 附近的滑移线场是两族与边界相交成 45°的正交直线网和一个中心扇形区（图 5-21）。

现在假定 AB 和 $A'B'$ 把影响区分成左右两部分，于是可只考虑右半边的塑性变形区，在此情况下滑移线场包括 ABD、DBE 和

BCE 三个塑性变形区［图 5-21（a）］。

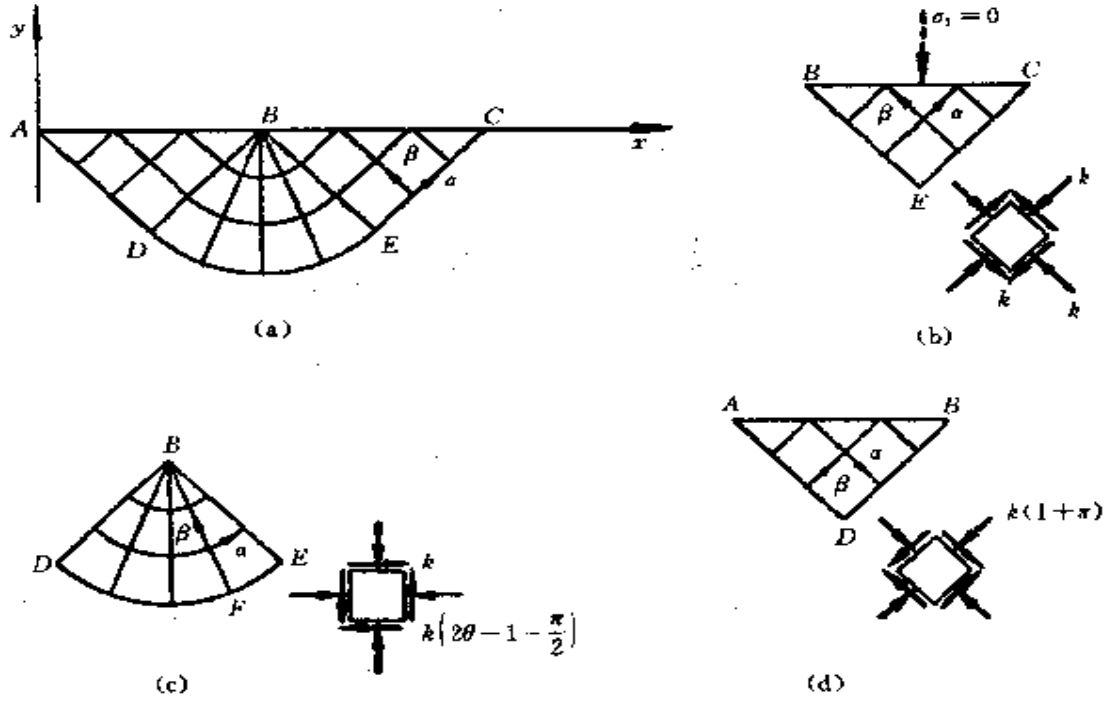


图 5-21

（1）在 BCE 区［图 5-21（b）］，有

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

于是由屈服条件

$$\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2$$

得出

$$\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 = k^2, \text{或 } \sigma_x = \pm 2k$$

容易理解，BEC 区的运动方向为向外向上，所以，该区受到挤压。又因为 BEC 是一个均匀应力区，因而可以认为 BEC 是处于静水压力（不是静水拉力）状态。这样，$\sigma_z = -2k$，$\sigma_m = -k$，于是，σ_1（$=0$）为最大主应力。由式（5-15），有

$$\sin 2\theta = 1, \quad \cos 2\theta = 0$$

从而，$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$。取 $m=0$，得 $\theta = \frac{\pi}{4}$，这就确定了 α 线的方向。实际上，由 BEC 区的运动方向容易判定 α 线的方向［如图 5-21 (b) 所示］。因沿 BC 处处有：$\sigma_m = -k$，$\theta = \frac{\pi}{4}$，故在 BEC 全区内有

$$\sigma_m = -k, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \tag{a}$$

(2) 在中心扇形 BDE 区［图 5-21 (c)］，过 BE 线，应力应当连续，于是 α、β 线应当一致，而 θ 是变化的，沿 BE 时，$\theta = \frac{\pi}{4}$，注意到 θ 以由 x 轴正向算起逆时针旋转为正，则沿 BD，$\theta = -\frac{\pi}{4}$。

由中心扇形区应力状态的特性知道，沿扇形区的放射线，即 β 线、σ_m 为常数。此外，由滑移线场的性质 2 知道，沿任一 α 线，θ 在 DE 间任一点 F［图 5-21 (c)］与 D 之间的变化为一常数。于是有

$$(\sigma_m)_{BF} - 2k\theta_{BF} = -k - 2k \cdot \frac{\pi}{4}$$

或

$$(\sigma_m)_{BF} = -k + 2k\left(\theta_{BF} - \frac{\pi}{4}\right)$$

由此得

$$(\sigma_m)_{BD} = -k + 2k\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = -k(1+\pi) \tag{b}$$

(3) 在 ABD 区［图 5-21 (d)］，由应力沿 BD 的连续性，在全区应有

$$\sigma_m = -k(1+\pi)$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

及

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_m - k\sin 2\theta = -k\pi \\ \sigma_y &= \sigma_m + k\sin 2\theta = -k(2+\pi) \\ \tau_{xy} &= k\cos 2\theta = 0\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

显然，上式满足 AB 边界的边界条件。

以上对右半部分三个区的滑移线场做了分析，左半部分的分析可类似地做出，最后得到整体滑移线场，如图 5-22 所示。

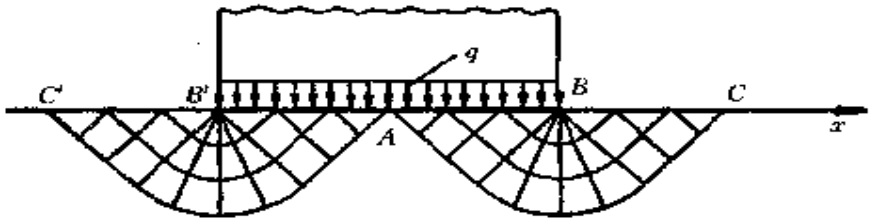


图 5-22

由 AB 上正应力为常数的条件可得极限荷载 q_0 为

$$q_0 = |\sigma_y|$$

由式（c）得

$$q_0 = k(2+\pi)$$

或

$$Q_0 = 2ak(2+\pi) \tag{d}$$

以上是希尔（R. Hill）得到的解，这个解并不是惟一的，此外尚有普兰特解（图 5-23）。

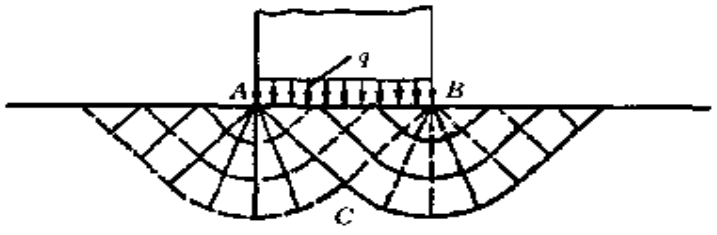


图 5-23

——为 α 线；·····为 β 线

由图 5-23 可以看出，普兰特解与希尔解的差异只在于塑性区的大小不同，具体分析方法两者相同。最终得到相同的极限荷载 Q_0 值。当基底摩擦力较大，三角形 ABC 和基础作为一个整体向下运动时，滑移线场和普兰特解接近，在基底光滑的情况下，滑移线场和希尔解接近，而实际情况则往往是介于两种解的中间状态。

四、短悬臂梁的弯曲

设有矩形截面的悬臂宽梁，端部受均布力作用（图 5-24），现求其极限荷载。

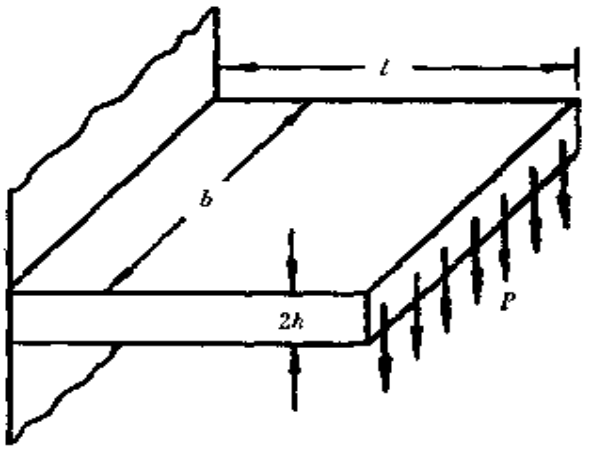


图 5-24

当 b 远大于 $2h$ 时，此问题可作为刚塑性平面应变问题处理（要求 b 至少大于梁高 6 倍以上）。其滑移线场的可能情况如图 5-25 所示。此时三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 分别为受拉区和受压区，其应力状态分别为简单拉伸和简单压缩，即在 ABC 中有

$$\sigma_x = 2k$$

在 $A'B'C'$ 中有

$$\sigma_x = -2k$$

所以在三角形 ABC 中，由自由边界条件可得

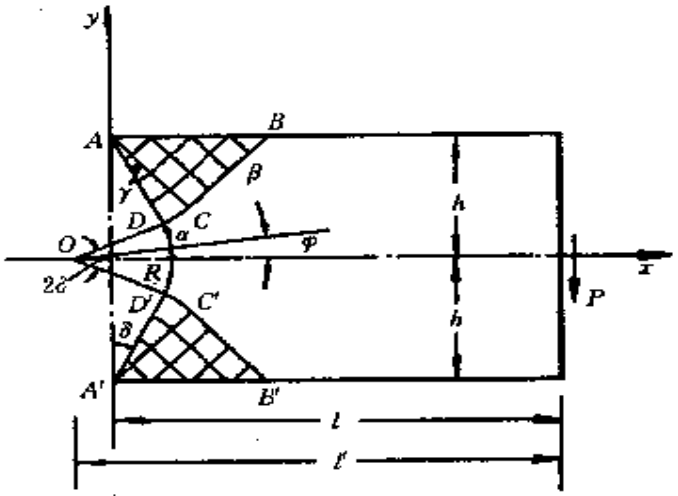


图 5-25

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$

及

$$\sigma_m = \sigma_x + k\sin 2\theta = 2k - k = k$$

于是，由汉基方程，得

沿 α 线

$$\zeta_1 = \sigma_m - 2k\theta = k - 2k\left(-\frac{\pi}{4}\right) = k\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

沿 β 线

$$\eta_1 = \sigma_m + 2k\theta = k + 2k\left(-\frac{\pi}{4}\right) = k\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

在与 ABC 相邻的中心扇形场内，沿 β 线有

$$\eta_1' = \eta_1$$

而沿 α 线（AD）有

$$\theta' = -\frac{\pi}{4} - \gamma$$

此处

$$\gamma = \angle DAC$$

由于 AC 线上应力连续 $\eta_1'=\eta_1$，则有

$$k\left(1-\frac{\pi}{2}\right)=\sigma_m'+2k\left(-\frac{\pi}{4}-\gamma\right)$$

于是，沿 AD 有

$$\sigma_m'=k-\frac{\pi}{2}k-2k\left(-\frac{\pi}{4}-\gamma\right)=k(1+2\gamma)$$

在受压区，沿 $A'D'$ 为

$$\theta''=-\frac{3}{4}\pi+\gamma \qquad \sigma_m''=-k(1+2\gamma)$$

两个中心扇形区 ADC 和 $A'D'C'$ 由一半径为 R 的圆弧 $\overset{\frown}{DD'}$ 相联结。在极限情况下，梁的右边部分沿这条圆弧滑动，弧 $\overset{\frown}{DD'}$ 的展开角用 2δ 表示。由图 5-25 得出

$$2\delta=\frac{\pi}{2}-2\gamma$$

$ADD'A'$ 为一连续的 α 滑移线，在该线上 $\zeta=$常数，即

$$\zeta_{AD}=\zeta_{A'D'}$$

于是得

$$2\gamma=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}=16°20'$$

由此

$$2\delta=\frac{\pi}{2}-2\gamma=73°40'$$

设 AD 的长度为 d，OD 的长度为 R，则 d 可从下列几何关系确定

$$R\sin\delta+d\cos\delta=h$$

其中 R 为未知量，为求 R 可从作用在 $ADD'A'$ 弧线右面部分上的全部外力在 y 方向的投影之和等于零的条件（$\Sigma Y=0$）来确定。已知沿 $ADD'A'$ 上之切应力为 k，正应力按下式确定

$$\zeta=\text{常数}=\zeta_{AD}$$

因 $\zeta=\sigma_m-2k\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$，故沿 DD 有 $\sigma_m=2k\varphi$，此处 φ 角由水平线算起（图 5-25），由 $\Sigma Y=0$ 得

$$\frac{P}{2}=kd\cos\delta-k(1+2\gamma)d\sin\delta+kR\int_0^\delta\cos\varphi d\varphi-2kR\int_0^\delta\varphi\sin\varphi d\varphi$$

或

$$0.0300d+0.4296R=\frac{P}{2k}$$

由 $\Sigma M_0=0$

$$kdR-\frac{1}{2}\sigma'_m d^2+k\delta R^2=\frac{1}{2}Pl'$$

其中 l' 为右端至 O 点之距离

$$l'=l+R\cos\delta-d\sin\delta$$

对于较短的梁，半径 R 随着力的增长而增长，而 $ABCD$ 区则迅速缩小，此时塑性变形实际上只限于沿 $ADD'A$ 一条独立的圆弧形滑移线产生。以上方程给出了极限荷载 P_0 与 l/h 之间的关系。

对于 $2\gamma<\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ 的情况，由 DD' 圆弧退化为一点，上下两个三角形塑性区在中性轴相遇，成为以上解的特殊情况（图 5-26），此时 $l/2h\geqslant 13.73$，等号成立时为 DD' 恰恰重合的情况。如 l 很长，则上述解给出较小的极限荷载值，因而是工程上适用的。实验的结果，大体符合以上结论。

五、厚壁圆筒的全塑性状态

在 §4.3 中曾经讨论了这一问题的弹塑性解，并得出塑性应力解为式（4-41）

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\sigma_0\ln\frac{r}{a}-P_i\\ \sigma_\theta&=\sigma_r+\sigma_0\\ \tau_{r\theta}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

在此情况下，$\sigma_1=\sigma_\theta$，$\sigma_3=\sigma_r$，且 $\sigma_1>0$，$\sigma_3<0$ 故不难由以上讨论知

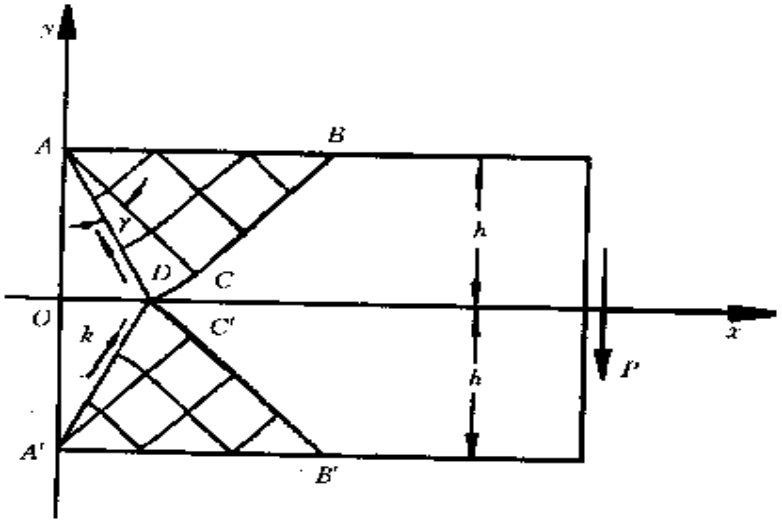


图 5-26

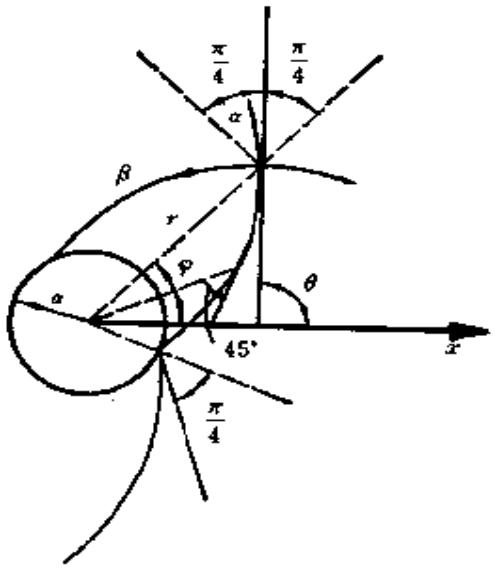


图 5-27

道，滑移线场为与每一径向相交呈±45°角的两族曲线（图 5-27），具有这种性质的曲线，即对数螺线。此处为

$$r = ce^{\pm\varphi\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)} = ce^{\pm\varphi} = ce^{\pm\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)}$$

对于厚壁筒当 $\varphi=0, r=a$ 时，$\theta=\frac{\pi}{4}$ 于是得 $c=a$，由此得滑移线的曲线方程为

$$r = ae^{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} \tag{b}$$

在此情况下，有

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r) \tag{c}$$

故沿 α 线（图 5-28）

$$\sigma_m - 2k\theta = \zeta \tag{d}$$

$$\theta = \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{\pi}{4}$$

屈服条件给出

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2k \tag{e}$$

在外周边 $r=b$ 处，有

$$\theta = \ln\frac{b}{a} + \frac{\pi}{4}; \sigma_r = 0; \sigma_\theta = 2k$$

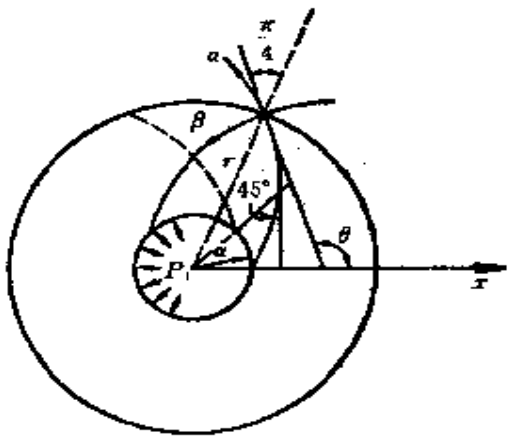


图 5-28

沿 α 线有 $\zeta_b=\zeta_r$，将以上结果代入得

$$2\sigma_r + 2k - 4k\ln\frac{r}{a} - k\pi = 2k - 4k\ln\frac{b}{a} - k\pi$$

由此

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -2k\ln\frac{b}{r}\\ \sigma_\theta &= 2k\left(1-\ln\frac{b}{r}\right)\end{aligned}\right\} \tag{f}$$

极限内压 P_0 为

$$P_0 = 2k\ln\frac{b}{a} \tag{g}$$

其滑移线场如图 5-29 所示。

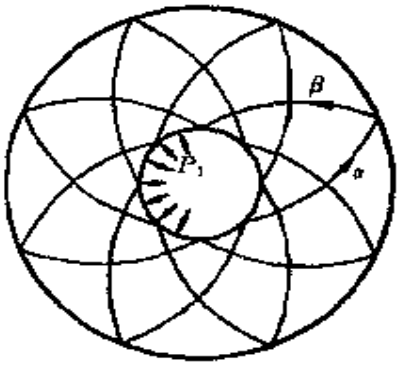


图 5-29

我们已经知道，滑移线是最大剪应力的方向线，它不但指出了塑性应力场中最大剪应力的方向，而且指出了剪应变速度的方向，位移速度问题在下一节讨论。

§ 5.6 位移速度方程

以上所讨论的是给定应力边界条件的问题，在这种情况下，平面应变问题归结为“静定”问题，即不需要考虑位移速度和本构方程即可求出塑性区的应力场，当边界上一部分给定位移条件时，问题便成为“超静定”问题了，即需要速度和应力联合求解，本节给出塑性流动时位移速度应满足的关系式。

对于平面应变问题，刚塑性材料的本构关系（利维—米赛斯方

程）为

$$\frac{d\varepsilon_x - d\varepsilon_y}{d\varepsilon_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} \tag{5-33}$$

及

$$d\varepsilon_z = 0$$

材料不可压缩条件为

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_y = 0 \tag{5-34}$$

将应变分量除以时间增量 dt 有

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}$$

此处 $\dot{u}$ 为 x 方向的速度，即 $\dot{u} = \frac{du}{dt}$，同样地，有 $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$，于是式（5-33）、式（5-34）化为

$$\frac{(\partial \dot{u}/\partial x) - (\partial \dot{v}/\partial y)}{(\partial \dot{u}/\partial y) - (\partial \dot{v}/\partial x)} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{5-35}$$

及

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} = 0 \tag{5-36}$$

在 § 3.4 中曾经得出：应力主轴与塑性应变增量主轴相重合。由此可知，最大剪应力线与最大剪切速度线相重合，或应力滑移线同时也是速度滑移线。

前面曾经讲过，沿滑移线有最大剪应力（$=k$）作用，而在滑移线上各点法线方向的正应力处处都等于静水压力 σ_m，这就是说，沿滑移线只有剪切变形，而无伸长和缩短，因而有

$$\frac{d\varepsilon_\alpha}{dt} = \frac{d\varepsilon_\beta}{dt} = 0 \tag{5-37}$$

可见沿滑移线方向的线应变速度等于零。或者说，塑性区的变形只有沿滑移线方向的剪切流动。“滑移线”即由此而得名。

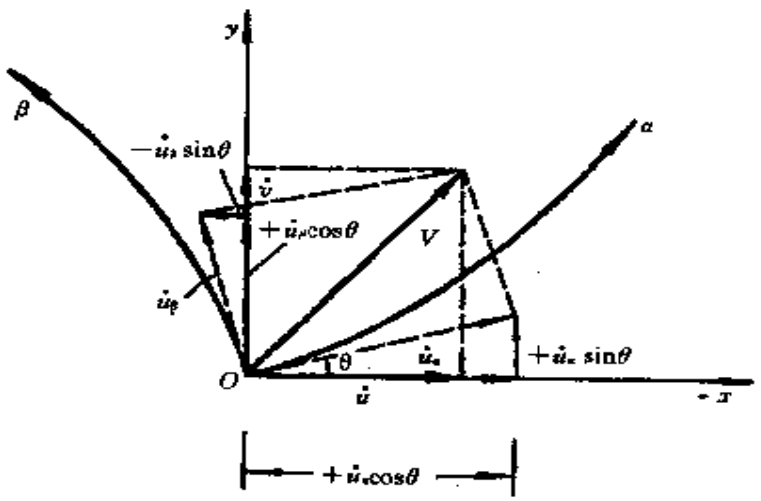


图 5-30

现在考虑滑移方向的速度。为此，考虑图 5-30 中的两条滑移线 α 和 β，如任一速度矢量为 v，其 x、y 方向的分量为 $\dot{u}$、$\dot{v}$，则由图 5-30 得出

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=\dot{u}_\alpha\cos\theta-\dot{u}_\beta\sin\theta\\ \dot{v}&=\dot{u}_\alpha\sin\theta+\dot{u}_\beta\cos\theta\end{aligned}\right\}\tag{5-38}$$

其中 $\dot{u}_\alpha$、$\dot{u}_\beta$ 分别为沿 α、β 线的速度，如 $\theta=0$，α 方向和 x 轴重合，式（5-38）可写成

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_\alpha&=\left(\frac{\partial\dot{u}_\alpha}{\partial x}\right)_{\theta=0}=0\\ \dot{\varepsilon}_\beta&=\left(\frac{\partial\dot{u}_\beta}{\partial y}\right)_{\theta=0}=0\end{aligned}\right\}\tag{5-39}$$

由式（5-39）得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\dot{u}_\alpha}{\partial x}-\dot{u}_\beta\frac{\partial\theta}{\partial x}&=0\\ \dot{u}_c\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial\dot{u}_\beta}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\}\tag{5-40}$$

因 x 与 α 方向重合，y 与 β 方向重合，故式（5-40）化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial \alpha}-\dot{u}_\beta\frac{\partial \theta}{\partial \alpha}=0\\ \frac{\partial \dot{u}_\beta}{\partial \beta}+\dot{u}_\alpha\frac{\partial \theta}{\partial \beta}=0\end{aligned}\right\}\tag{5-41}$$

如式（5-41）的第一式中令 β 保持常数，在第二式中令 α 保持常数，则式（5-41）化为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}\dot{u}_\alpha-\dot{u}_\beta\mathrm{d}\theta=0 \quad \text{沿}\ \alpha\ \text{线}\\ \mathrm{d}\dot{u}_\beta+\dot{u}_\alpha\mathrm{d}\theta=0 \quad \text{沿}\ \beta\ \text{线}\end{aligned}\right\}\tag{5-42}$$

此即速度协调方程，简称速度方程，又称格林盖尔(H. Geiringer)方程。

对于均匀应力状态，因 $\mathrm{d}\theta=0$，故由式（5-42）得

$$\dot{u}_\alpha=\dot{u}_\alpha(\alpha),\ \dot{u}_\beta=\dot{u}_\beta(\beta)\tag{5-43}$$

对于中心扇形场，沿径向直线的 θ 为常数，例如沿 α 线 $\theta=$常数，这时沿 α 线的 $\dot{u}_\alpha=$常数，即 $\dot{u}_\alpha=\dot{u}_\alpha(\theta)$，于是由式（5-42）得

$$\dot{u}_\beta=\psi_1(\theta)+\psi_2(r);\dot{u}_\alpha=\psi_1'(\theta)\tag{5-44}$$

其中 ψ_1、ψ_2 为任意函数，r 为离中心点 O（图 5-19）的距离。

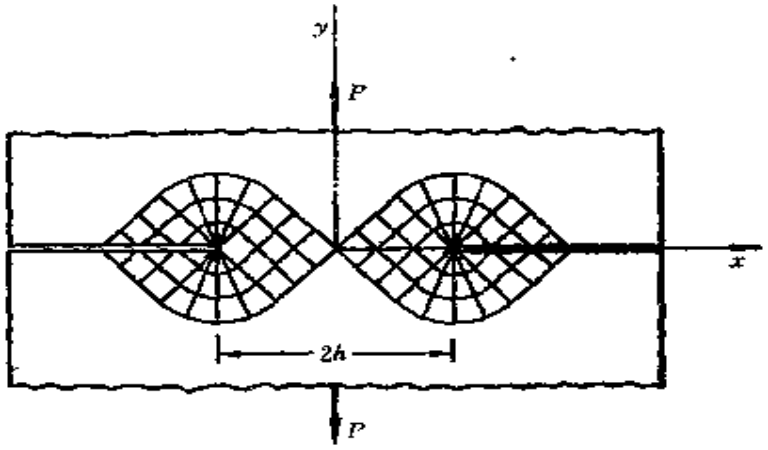
以上说明，沿直线滑移线（$\theta=$常数）的速度分量为常数。

如上所述，如问题是“超静定”的，则汉基方程要与速度方程联立，同时用应力与速度边界条件一起来求解，一般地说，这是一类困难的问题。在实践中，不得不采用试算法，即假定一个满足全部应力条件的滑移线场，之后计算速度，检验是否满足速度方程，如不满足，则修改开始的滑移线场，重复进行，直到满足时为止。

习　　题

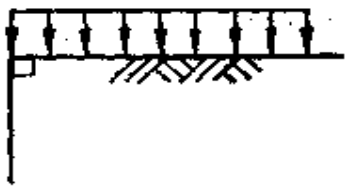
5.1　求图中有无限狭切口的长条板的极限荷载 P_0（图中给出了滑移线场）。

答案：$P_0=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)4kh$



题 5.1 图

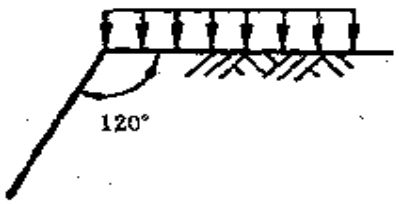
5.2　试作出地基极限平衡时普兰特解的滑移线场分析。



题 5.2 图

5.3　试求图示直角边坡的最大承载能力。

答案：$q_0=2k$



题 5.3 图

5.4　试求图示斜坡的最大承载能力。

答案：$q_0=\frac{k}{3}(6+\pi)$

5.5　给出圆弧形自由边界附近的滑移线场。

第六章　柱体的扭转

§6.1　问题的提出　基本关系式

本章研究弹塑性柱体的扭转问题。这类问题在航空、土建及机械工程中是常见的。所谓柱体的扭转，是指圆柱体和棱柱体只在端部受到扭矩的作用，且扭矩矢量与柱体的轴线 z 的方向相重合。

圆形截面柱体的扭转，在材料力学中已经进行过讨论。其特点是扭转变形前后的截面都是圆形（图 6-1）而且每一个截面只作刚体转动，在小变形条件下，没有轴向位移，即 $w(x, y, z)=0$。这样，变形后截面的半径及柱体长度基本不变。

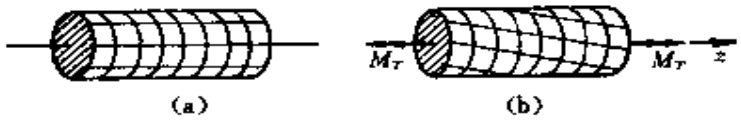


图 6-1

非圆形截面柱体的情况要复杂得多。由于截面的非对称形式，在扭转过程中，截面不再保持为平面，而发生了垂直于截面的翘曲变形，即 $w(x, y, z)\neq 0$。函数 $w(x, y, z)$ 称为翘曲函数。图 6-2 为矩形截面柱体的扭转示意图。本章主要讨论棱柱体的扭转问题。

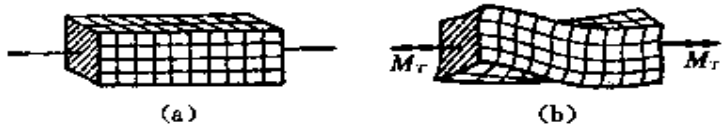


图 6-2

以下以截面为任意形状柱体扭转为例写出扭转问题的基本方程式。设有任意的等截面柱体，受扭矩 M_T 作用，如图 6-3 所示。

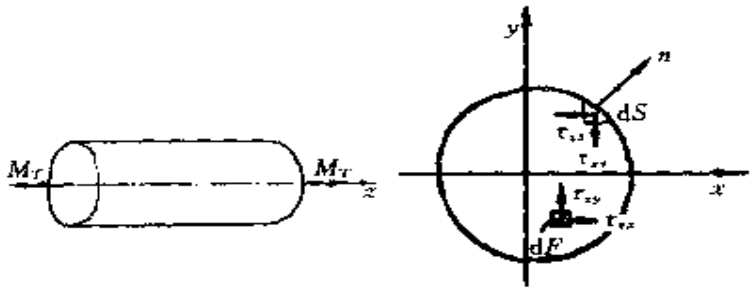


图 6-3

为了求解扭转问题，要适当选取坐标系，对于有两个对称轴的截面，坐标原点应选在两个对称轴的交点，即对称中心处。对于扭转问题，柱体的侧面为自由表面，其边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x l+\tau_{xy}m&=0\\ \tau_{xy}l+\sigma_y m&=0\\ \tau_{zx}l+\tau_{yz}m&=0\end{aligned}\right\}\tag{6-1}$$

其中 $l=\cos(n,x)$，$m=\cos(n,y)$。

在端部有

$$\left.\begin{aligned}&\iint\tau_{zx}\mathrm{d}F=0\\ &\iint\tau_{zy}\mathrm{d}F=0\\ &\iint\sigma_z\mathrm{d}F=0\\ &\iint\sigma_z x\mathrm{d}F=0\\ &\iint\sigma_z y\mathrm{d}F=0\\ &\iint(\tau_{zy}x-\tau_{zx}y)\mathrm{d}F=M_T\end{aligned}\right\}\tag{6-2}$$

根据圣维南半逆解法做的假定，认为截面的翘曲变形与 z 无关，即各截面的翘曲都一样。这就是说，翘曲函数 w 仅为 x、y 的函数，即

$$w = f(x,y) \tag{6-3}$$

此外，假定柱体发生变形后，截面只有绕 z 轴的刚体转动，并且单位长度的扭转角 θ 是一个常数。

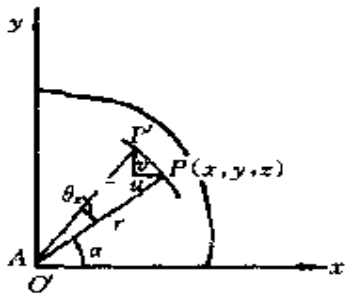


图 6-4

若截面上距扭转中心 A 为 r 的任一点 P (x, y)，扭转后移到 P' $(x-u, x+v)$（图 6-4）。且 $z=0$ 端没有转动只有翘曲，P 点位移的 x、y 方向的分量为

$$\left.\begin{aligned} u &= -(r\theta z)\sin\alpha = -y\theta z \\ v &= (r\theta z)\cos\alpha = x\theta z \end{aligned}\right\} \tag{6-4}$$

其中 α 为 AP 与 x 轴所成的角。由于截面总扭转角与该截面到坐标原点的距离成正比，故 AP 的转角为 θz。将式 (6-3)、式 (6-4) 代入应变位移关系式后，得

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \gamma_{xy} = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0 \\ &\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - y\theta \\ &\gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + x\theta \end{aligned}\right\} \tag{6-5}$$

广义胡克定律化为

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\
&\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\theta\right) = G\gamma_{zx} \\
&\tau_{zy} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x\theta\right) = G\gamma_{zy}
\end{aligned}\right\} \tag{6-6}$$

平衡方程（不计体力）化为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6-7}$$

将式（6-6）的表达式对 y 微分，τ_{zy}的表达式对 x 微分后相减，可得用应力表示的应变协调方程，即

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = -2G\theta \tag{6-8}$$

于是，任意形状截面的柱体扭转时的应力，可根据边界条件由解式（6-7）、式（6-8）求得。

上述问题的解，可采用应力函数法。为此，如取一个函数 φ，使得

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{6-9}$$

此处 φ 称为普兰特应力函数，显然，式（6-9）满足平衡方程。而应变协调方程（6-8）化为

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta \tag{6-10}$$

由此得出，应力函数 φ 应当满足上述偏微分方程（6-10），这种形式的方程称为泊松方程。

在无侧面面力作用的情况下，边界条件式（6-1）简化为

$$\tau_{zx}l + \tau_{zy}m = 0 \tag{6-11}$$

考虑到

$$\left.\begin{aligned} l &= \cos(n,x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}S} \\ m &= \cos(n,y) = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S} \end{aligned}\right\} \tag{6-12}$$

其中 $x=x(S)$，$y=y(S)$，并且 S 增加时，y 增加，而 x 减少（图 6-3）。故在 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 前冠以正负号来表示这种关系。将式（6-9）和式（6-12）代入式（6-11）得出在边界上应有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}S} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}S} = 0 \tag{6-13}$$

或

$$\varphi = \text{常数}$$

上式说明，沿柱体任意截面的边界曲线，应力函数 $\varphi(x, y)$ 为一任意常数。因为在此问题中，我们所注意的只限于 φ 的一阶导数。即切应力分量，所以，将常数取为零无损于一般性，即有

$$\varphi = 0(\text{沿周边 } C) \tag{6-14}$$

而任一点的合剪应力为

$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2} \tag{6-15}$$

或

$$\tau = |\mathrm{grad}\varphi|$$

或

$$\tau = \frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

此处 n 为沿 φ 等值线的方向，τ 的方向为沿 φ 等值线的切线方向，因而 φ 等值线也称为剪应力线，由于边界上的剪应力方向必须与边界的切线一致。故周界线 C 本身也是一条剪应力线。

对于给定的 θ 值，不难由方程（6-10）和（6-14）惟一地确定应力函数 φ。从而由式（6-9）求出应力，从式（6-6）求出应变，以及翘曲函数 f，但我们注意到，由式（6-6）和式（6-9）有

$$\gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{G}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{G}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

当通过积分来求位移函数和翘曲函数时，所得结果中总含有表示刚体位移的 积分常数。所以位移函数和翘曲函数可准确到一个附加常数的范围内。

按上述方法求得的应力分布还应满足端部条件，即

$$M_T=\iint_A(\tau_{zy}x-\tau_{zx}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint x\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int\mathrm{d}y\int x\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x\int y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathrm{d}y$$

其中 A 为截面面积。

对上式分部积分后，得

$$M_T=-\int x\varphi\Big|_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}y+\iint\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int y\varphi\Big|_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}x+\iint\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因在边界上 $\varphi=0$，x_1、x_2、y_1、y_2 为侧面的点，故得

$$M_T=2\iint\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-16}$$

式（6-16）表示，如在截面上每一点有一个 $\varphi(x,y)$ 值，则扭矩 M_T 为 φ 曲面下所包体积的 2 倍。

由以上讨论得出，如能找到一个函数 φ，其在边界上的值为零，在截面内满足方程（6-10）；则截面的剪应力分布及扭矩 M_T 就都可求得。

今后我们把用以除扭矩 M_T 而得到单位长度扭角 θ 的因子称为扭转刚度。扭转刚度是一个有用的概念，通常记作 K_T，其单位与扭矩的单位相同。

§6.2 塑性扭转 沙堆比拟法

由薄膜比拟法知道，薄膜表面任一点对 $z=0$ 面的最大坡度和该对应点的合剪应力 $|\mathrm{grad}\varphi|$ 之间有简单的关系。现在我们进一步利用这种比拟求解弹塑性扭转问题。

当合剪应力在某一点达到屈服应力值时，柱体开始屈服，此时，$|\mathrm{grad}\varphi|$ 在该点达到最大值，相对应的薄膜该点的坡度也达到最大值。由于边界上的剪应力首先达到最大值，所以首先屈服的点一定在截面的边界上。当扭矩继续增加，塑性区的范围就逐渐加大，而达最大坡度的区域也逐渐由截面边界向内部延伸。对于塑性区，仍采用以前的假设，则米赛斯条件给出

$$\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2=k^2 \tag{6-17}$$

其中 k 为纯剪屈服应力。

在弹塑性应力状态，剪应力分量满足平衡方程

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=0$$

以及由式（6-5）导出的应变协调条件

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}=-2\theta$$

引进弹塑性应力函数 $F(x,y)$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xz}&=\frac{\partial F}{\partial y}\\ \tau_{yz}&=-\frac{\partial F}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{6-18}$$

在弹性状态，应力函数 $F(x,y)$ 就是前面讨论过的普兰特应力函数

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\varphi(x,y)=-2G\theta\\ &\varphi=\text{常数(在周边上)}\end{aligned}\right\} \tag{6-19}$$

在塑性状态，应力函数 $F(x,y)$ 改写为 $F_p(x,y)$，代入屈服函

数后得到

$$\left(\frac{\partial F_p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F_p}{\partial y}\right)^2=k^2 \tag{6-20}$$

按梯度公式，式（6-20）为

$$|\mathrm{grad}F_p|=k^2 \tag{6-21}$$

或

$$\frac{\partial F_p}{\partial n}=k \tag{6-21'}$$

由式（6-13）知道，在边界上有

$$F_p=\text{常数}=0 \tag{6-22}$$

式（6-21）的几何意义是在曲面 $z=F_p(x,\ y)$（称为应力曲面）上任一点的梯度都等于常数 k。这就是说，在周边筑起的是等倾斜表面。对于中间没有孔的截面，建造这种表面很容易实现，只要将干沙堆在一个与柱体横截面相同的水平硬纸板面上就能形成这种表面，好像在硬纸板基础上建立了一个常坡度的顶盖一样（如图 6-5 所示）。这就是所谓沙堆比拟法。

在塑性区，剪应力矢量的大小是一个常数，而其方向则垂直于

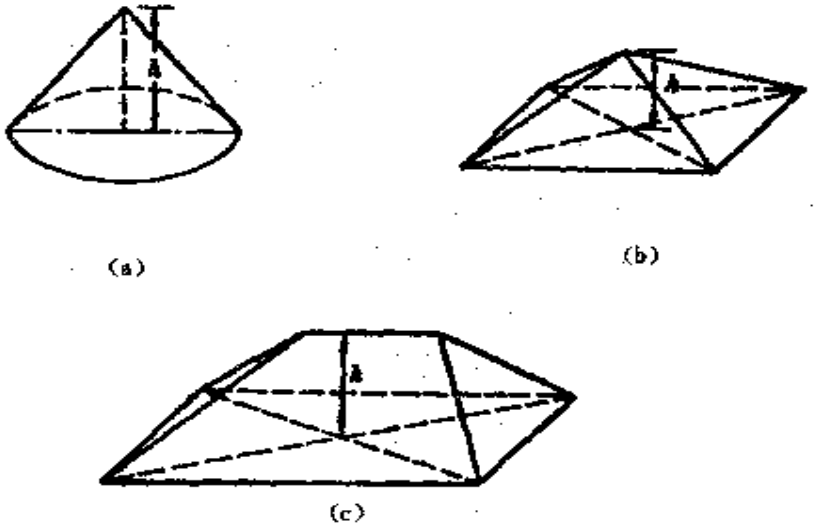


图 6-5

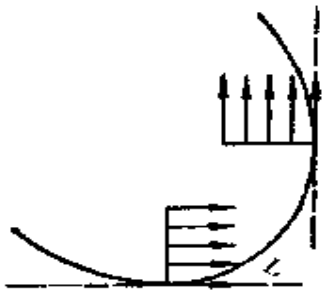


图 6-6

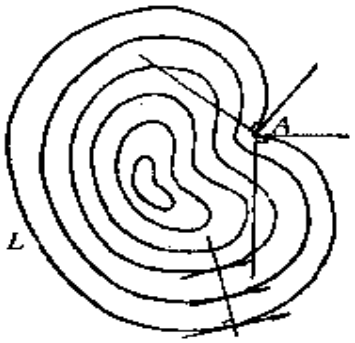


图 6-7

区域周界的法线，如图 6-6。即剪应力线平行于区域的周界，当周边有凹角时，如图 6-7，则剪应力以圆弧线绕过尖角。沙堆顶盖的“屋脊”是剪应力的间断线，τ_{zx}、τ_{zy}过这种线时不连续。也就是说，剪应力 $\tau=k$ 的方向发生跳跃式的变化。图 6-8 中的屋脊线 AB，便是这种间断线。由图 6-8 看出，在应力间断线 AB 两侧，剪应力的方向发生了跳跃式的变化。实际上，在间断线两侧的 F_p 面的坡度发生了间

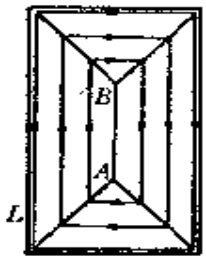


图 6-8

断，而且是跳跃式的变化。

以上是整个截面处于塑性状态时的情况，材料进入这种完全塑性状态以后，无限制的塑性流动成为可能。完全塑性状态也叫极限状态。与此状态对应的扭矩称为极限扭矩。

显然，极限扭矩 M_T^0 为

$$M_T^0 = 2\iint_A F_\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6-23}$$

即极限扭矩为给定周边基础上建造起来的等坡度顶盖下体积的 2 倍。

这样一来，极限扭矩的计算变得容易了。例如，对于矩形截面 $(a\times b)$ 的杆，坡度 $h/(a/2)=k$，体积

$$V = (b-a)\frac{ah}{2} + 2\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2h}{2}\right)$$

$$M_T^0 = \frac{1}{2}ka^2b - \frac{ka^3}{6} \tag{6-24}$$

而

$$M_T^* = \beta ka^2b \tag{6-25}$$

其中 M_T^* 为塑性变形刚开始时的扭矩。

对于正方形截面的柱体，有

$$M_T^0 = \frac{1}{3}a^3k$$

$$M_T^* = \beta a^3k$$

此时 $\beta=0.208$，于是 $M_T^0=1.587M_T^*$。

对半径为 a 的圆截面杆，坡度 $h/a=k$，高 $h=ka$，体积 $V=\frac{1}{3}\pi a^2h$，于是

$$M_T^0 = \frac{2}{3}a^3\pi k \tag{6-26}$$

$$M_T^* = \frac{1}{2}\pi a^3 k \tag{6-27}$$

对于不规则形状截面的杆，计算沙堆体积有困难时，可用称沙堆重量的办法来解决。例如称得所考虑截面上的沙堆重为 W_1；另一圆截面上沙堆重 W_2，则由 $\frac{W_1}{W_2}=\frac{M_{T1}}{M_{T2}}$，从而求得 M_T^0。

§6.3 弹塑性扭转 薄膜—屋顶比拟法

在柱体截面的一部分进入塑性状态以后，尚未到达极限状态以前，属于弹塑性扭转状态。显然，在弹性区与塑性区交界处应力应当连续。在交界线 L 上既要满足弹性区的应力条件，又要满足塑性区的应力条件。已知在塑性区应力函数必须满足

$$|\mathrm{grad}F_p| = k$$

而在弹性区，应力函数应满足

$$\nabla^2\varphi = -2G\theta$$

在 L 上应有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{\partial F_p}{\partial x}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{\partial F_p}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{6-28}$$

或

$$F_p = \varphi + \text{常数}, \text{或} F_p = \varphi(\text{在 } L \text{ 上})$$

由此可见，弹塑性应力分布问题就相当于求函数 $F(x, y)$。在弹性边界，函数 F 即 φ，在塑性边界 F 即 F_p，F 在周边 C 上等于零，

其一阶导数在C围成的区域内均为连续，在L上或其内部F的梯度的绝对值都不应大于常数k。在$|\mathrm{grad}\varphi|<k$处，函数F即φ，必须满足$\nabla^2\varphi=-2G\theta$，这一命题在分析上是一个困难的问题，纳达依（A. Nadai，1923）为解决这一问题提出了一种薄膜—屋顶比拟法。

薄膜—屋顶比拟法也是一种通过实验来确定函数F，从而求得弹塑性扭矩的方法。做法是这样的：在上述薄膜比拟法中，在开好的孔上作一个透明的“屋顶”，让它符合于纯塑性状态的应力函数（即沙堆的自然坡度），然后仍在孔上敷以薄膜，当薄膜的底侧受均匀的不大的压力作用时，杆全部处于弹性状态，薄膜不受“屋顶”的阻碍，和上述薄膜比拟法情况相同。当压力增大后，薄膜的挠度加大，则在边缘上有一部分将与屋顶接触，表示有一部分断面进入塑性状态，即应力函数满足塑性应力函数的条件，F（即F_p）的梯度的绝对值等于常数k。当压力继续加大，则薄膜与屋顶的接触面也继续扩大，这便是塑性区的扩展（图 6-9）。自由薄膜与受约束薄膜是连续的，且自由薄膜与“屋顶”相切。于是，由薄膜挠度表示的应力函数值具有连续的一阶导数，即应力分量在越过弹塑性边界时是连续的。于是弹塑性扭转时的应力函数就完全可以由薄膜自由部分和约束部分来表示。对于任一有限的θ角，截面总是包含弹性核和塑性区两部分，从这一实验容易看出。沙堆比拟中的脊线（间断线）就是弹性区收缩的极限。

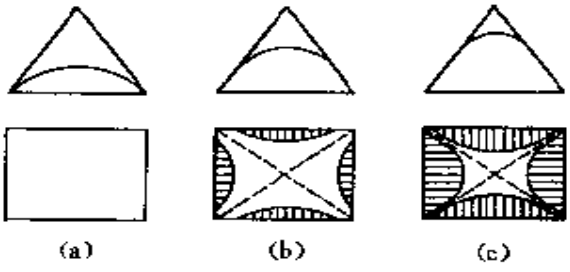


图 6-9

由于扭矩公式（6-16）是从静力平衡条件得来的，因而它不仅

适用于弹性状态和纯塑性状态，也适用于弹塑性状态。

例 6-1 设有半径为 a 的圆断面柱体，求弹塑性扭转情况下的扭矩。

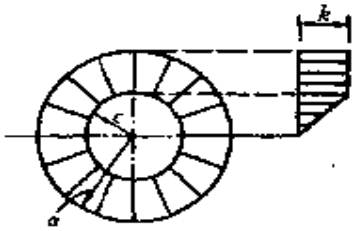


图 6-10

解 在此问题中，弹性扭转角的极限值，即周边应力刚刚等于常数 k 时为

$$\theta^{*} = \frac{k}{Ga}$$

当 $\theta > \theta^{*}$ 时，扭转为弹塑性状态。此时弹塑性分界线必为一个半径小于 a 的圆（图 6-10），可见，当 $r \leqslant c$ 时

$$\tau = \frac{r}{c}k$$

当 $r \geqslant c$ 时

$$\tau = k$$

(1) 弹性区

在弹性区，应力函数 φ 满足泊松方程 $\nabla^2\varphi = -2G\theta$，由对称性知，$\varphi = \varphi(r)$，此处 $r = \sqrt{x^2+y^2}$，当 $r=0$ 时，$\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r = 0$，弹性区边界方程为

$$x^2 + y^2 = r^2$$

取 φ 为

$$\varphi = A(r^2 - x^2 - y^2)$$

为满足式（6-10）常数 A 应为

$$A = \frac{1}{2}G\theta$$

故有

$$\varphi = \frac{1}{2}G\theta r^2 + B \quad (0 \leqslant r \leqslant c)$$

其中 B 为常数，由弹塑性分界线上的条件来确定。

（2）塑性区

在塑性区，应力函数 F 为 F_p

$$F_p = k(a - r) \quad (c \leqslant r \leqslant a)$$

在弹塑性分界线上，有

$$(F_p)_{c+0} = (\varphi)_{c-0}$$

由此，可得

$$k(a - c) = -\frac{1}{2}G\theta c^2 + B$$

$$B = \frac{1}{2}G\theta c^2 + k(a - c)$$

从而得

$$\varphi = \frac{1}{2}G\theta(c^2 + r^2) + k(a - c)$$

$$F_p = k(a - r)$$

如扭转角 θ 为已知，则弹塑性交界线的半径 c 即可求出。为此，由弹性解

$$\tau = G\theta r$$

当 $r = c$ 时有

$$k = G\theta c$$

由此得出

$$c = \frac{k}{G\theta}$$

此式表明，对任一有限的扭转角 θ，$c \neq 0$ 即总有弹性核存在。

扭矩 M_T 按式（6-16）计算

$$M_T = 2\iint \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^c \left[\frac{1}{2}G\theta\left(\frac{k^2}{G^2\theta^2} + r^2\right) + k\left(a - \frac{k}{G\theta}\right)\right]2\pi r\mathrm{d}r$$

$$+2\int_0^a k(a-r)2\pi r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3 k\left[1-\frac{1}{4a^3}\left(\frac{k}{G\theta}\right)^3\right]$$

使 $\theta\to\infty$ 得极限扭矩 M_T^0

$$M_T^0=\frac{2}{3}\pi a^3 k$$

习　题

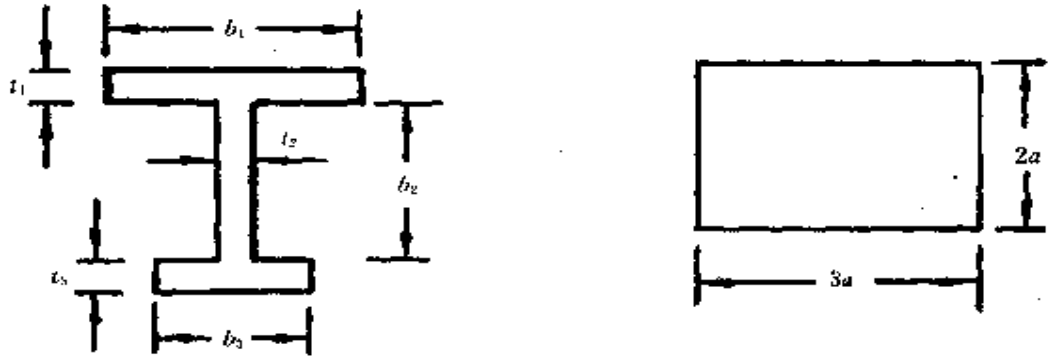
6.1　试证柱体扭转时，任一横截面上的剪应力方向与边界切线方向重合。

提示：利用柱体侧表面的自由边界条件容易得到。

6.2　如有边长为 a 的正方形截面柱体和直径为 a 的圆截面柱体，试求各自的最大剪应力。哪一种截面的扭转刚度较大。

6.3　试求有以下形状的截面柱体的扭转刚度 K_T。

答案：(a) $K_T=G\ (b_1t_1^3+b_2t_2^3+b_3t_3^3)$；(b) $K_T=4.72Ga^4$



(a)　　(b)

题 6.3 图

6.4　试证明 $\varphi=A(r^2-a^2)$ 既可以用来求解实心圆截面柱体也可解圆管的扭转问题。求出用 $G\theta$ 表示的 A。

答案：$A=-0.5G\theta$

6.5　试求椭圆形截面受扭作用时的最大剪应力。

提示：取应力函数为

$$\varphi=k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

k 为任意常数，a、b 为椭圆的长短轴。

答案：$\tau_{\max}=\dfrac{2M_T}{\pi ab^2}$

6.6　试求正方形截面柱体的极限扭矩。

答案：$M_T=\dfrac{1}{3}ka^3$

第七章　极值原理与变分原理

本章将介绍塑性力学中的极值原理、变分原理和限界定理。由于塑性力学问题的求解可用两种理论，即增量理论和全量理论。这两种理论各有其优点。所以我们将分别介绍。基于这两种理论的极值原理或变分原理，本章最后两节将讨论极限分析的两个定理，为以后的讨论打下基础。

容易理解，极值原理较变分原理为较强的原理，因为极值原理告诉我们：在所有的某一类许可的函数中，某一族函数将使某种所讨论的泛函取极小（或极大）值。而变分原理则不是断言某一泛函是否取极值，而是给出该泛函取驻值的条件。显然，在精确解不易求得时，极值原理可用来计算近似解。例如，在没有其他信息的情况下，有两个速度场可供选择，我们可选其中使速度场极值原理取极小值的一个为近似解。而变分原理则是边值问题的一种表述形式，是建立数值法进行物体离散化所必须的理论依据。但这两类有着密切关系，有的极值原理就隐含着与之对应的变分原理。以后我们将遇到这种情况。

以下先介绍增量理论的极值原理，其中§7.1～§7.4均以增量理论为基础。

§7.1　虚速度原理

假定在物体 B 的表面 S_u 上，存在满足位移边界条件的位移（或速度），并由此可根据位移应变（或应变率）关系导出应变 ϵ_{ij}（或应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}$），则称该位移场 u_i^*（或位移速度场 $\dot{u}_i^*$）为运动许可的位

移场（或位移速度场）。而在物体内满足平衡方程，在表面 S_σ 上满足应力（或应力率）边界条件的应力场 σ_{ij}^*（或应力率场 $\dot{\sigma}_{ij}^*$）称为静力许可的应力场（或应力率场）。

假定任意运动许可的应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$ 及与之对应的位移速度为 $\dot{u}_i^*$，而 $\dot{\sigma}_{ij}^*$ 为任一静力许可的应力率场，则下列虚速度原理成立。

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* \mathrm{d}V = \int_V \bar{\dot{F}}_{bi} \dot{u}_i^* \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{\dot{p}} \dot{u}_i^* \mathrm{d}S + \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_j \bar{\dot{u}}_i \mathrm{d}S \quad (7\text{-}1)$$

实际上

$$\begin{aligned}\int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* \mathrm{d}V &= \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{u}_{i,j}^* \mathrm{d}V \\ &= \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^* \dot{u}_i^*)_{,j} \mathrm{d}V - \int_V \dot{\sigma}_{ij,j}^* \dot{u}_i^* \mathrm{d}V \\ &= \int_V \bar{\dot{F}}_{bi} \dot{u}_i^* \mathrm{d}V + \int_S \dot{\sigma}_{ij}^* n_j \dot{u}_i^* \mathrm{d}S \\ &= \int_V \bar{\dot{F}}_{bi} \dot{u}_i^* \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \bar{\dot{p}} \dot{u}_i^* \mathrm{d}S + \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_j \bar{\dot{u}}_i \mathrm{d}S\end{aligned}$$

于是虚速度原理得证。

在不计体力的情况，因

$$\int \dot{p}_i v_i \mathrm{d}S = \int \sigma_{ij} v_i n_j \mathrm{d}S$$

故式（7-1）可以写成

$$\int \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V = \int \dot{p}_i v_i \mathrm{d}S \qquad (7\text{-}2)$$

式（7-2）中第一个积分遍及整个物体 V，第二个积分遍及全部表面 S。于是，方程（7-2）称为基本能量方程。

当物体中有不连续面 Σ 存在时（如图 7-1 所示），则可将 Σ 视为 V^1、V^2 两部分的边界，由于 Σ 的外法线方向 n_j 对 V^1 为正，而对 V^2 为负，则考虑这部分边界时应取负号。于是两部分相加后不难得出

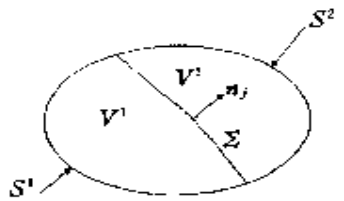


图 7-1

此时的虚速度原理为

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V + \int_\Sigma \dot{\sigma}_{ij}^* [\dot{u}_i^*] n_j \mathrm{d}S = \int_V \dot{\bar{F}}_{bi} \dot{u}_i^* \mathrm{d}V + \int_{S_\sigma} \dot{\bar{p}}_i \dot{u}_i^* \mathrm{d}S + \int_{S_u} \dot{\sigma}_{ij}^* n_j \dot{\bar{u}}_i \mathrm{d}S \tag{7-3}$$

此时基本能量方程（不计体力）为

$$\int \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V + \int \dot{\sigma}_{ij} [v_i] n_j \mathrm{d}S = \int \dot{p}_i v_i \mathrm{d}S \tag{7-4}$$

最后我们指出，虚速度原理与虚位移原理一样，与材料性质无关。

§7.2 弹塑性材料的应力率极值原理

若 σ_{ij}^* 为静力许可的应力率，相应的由应力应变关系给出的应变率为 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$，今后为简便计，公式的推导不计体力（计人体力并不带来什么困难），于是由格林（Green）公式可得

$$\int_{S_\sigma} (\dot{p}_j^* - \dot{\bar{p}}_j) \dot{u}_j \mathrm{d}S = \int_{S_\sigma} (\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}) n_j \mathrm{d}S = \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}) \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_i} \mathrm{d}V \tag{7-5}$$

在 S_σ 表面上，$\dot{p}_j^* = \dot{\bar{p}}_j$，考虑到 σ_{ij}^* 和 $\dot{\sigma}_{ij}$ 的对称性，得

$$\int_V (\dot{\sigma}_{ij}^* - \dot{\sigma}_{ij}) \dot{\varepsilon}_{ij} \mathrm{d}V = \int_S (\dot{p}_j^* - \dot{\bar{p}}_j) \dot{u}_j \mathrm{d}S \tag{7-6}$$

对非强化材料（即理想弹塑性材料），本构关系可写为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\dot{\sigma}_{ij} - \frac{v}{1+v} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij}\right) + \dot{\lambda} S_{ij} \tag{7-7}$$

将式（7-7）两边分别乘以 $\dot{\sigma}_{ij}$ 和 $\dot{\sigma}^*_{ij}$，则可得下列不等式

$$\left.\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij} &\geqslant \frac{1}{2G}\left(\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}-\frac{v}{1-v}\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\right)+\lambda S_{ij}\sigma_{ij}\\ \dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij} &\leqslant \frac{1}{2G}\left(\dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\sigma}_{ij}-\frac{v}{1+v}\dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\sigma}_{ij}\right)+\lambda S_{ij}\sigma^*_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{7-8}$$

对于加载情况有

$$\dot{\sigma}_{ij}S_{ij}=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dot{\sigma}_{ij}=0;\dot{\lambda}=0$$

对于卸载情况有

$$\dot{\sigma}_{ij}S_{ij}<0;\dot{\lambda}=0$$

于是有

$$\dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\varepsilon}^*_{ij}-2\dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}+\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\geqslant\left[(\dot{\sigma}^*_{ij}-\dot{\sigma}_{ij})(\dot{\sigma}^*_{ij}-\dot{\sigma}_{ij})-\frac{v}{1+v}(\dot{\sigma}^*_{kk}-\dot{\sigma}_{kk})^2\right] \tag{7-9}$$

式（7-9）的右边，若 $\dot{\sigma}^*_{ij}\neq\dot{\sigma}_{ij}$，则必为正．于是有

$$\int_V(\dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\varepsilon}^*_{ij}-\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij})\mathrm{d}V>2\int_V(\dot{\sigma}^*_{ij}-\dot{\sigma}_{ij})\,\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}V \tag{7-10}$$

则由 Green 定理得

$$\int_V\dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\varepsilon}^*_{ij}\mathrm{d}V-2\int_{S_u}\dot{p}^*_j\,\bar{\dot{u}}_j\mathrm{d}S>\int_V\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}V-2\int_{S_u}\dot{p}_i\,\bar{\dot{u}}_j\mathrm{d}S \tag{7-11}$$

或

$$\int_V\dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\varepsilon}^*_{ij}\mathrm{d}V-2\int_{S_u}\dot{\sigma}^*_{ij}n_j\bar{v}_j\mathrm{d}S>\int_{S_\sigma}\bar{\dot{p}}_jv_j\mathrm{d}S-\int_{S_u}\dot{p}_i\,\bar{v}_j\mathrm{d}S \tag{7-11′}$$

或即

$$-\frac{1}{2}\int_V \dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}dV+\int_{S_u}\dot{p}_i\,\bar{v}_i dS>-\frac{1}{2}\int_V \dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\varepsilon}^*_{ij}dV+\int_{S_u}\dot{\bar{p}}^*_i\,\bar{v}_i dS \tag{7-11''}$$

此处，$v_j=\dot{u}_j$ 及只有 $\dot{\sigma}^*_{ij}=\dot{\sigma}_{ij}$ 时等号成立。式（7-11）即理想塑性材料的应力率极值原理。它说明在所有的静力许可的应力率场中，真实的应力率场使不等式（7-11′）右边部分取极小值。此即应力率极值原理①。由（7-11″）可见真实的应力增量的最大性质。

§7.3 弹塑性材料的应变率极值原理

现在讨论弹塑性材料的第二个极值原理。设有运动许可的应变率场 $\dot{\varepsilon}^*_{ij}$，其相应的速度场满足边界条件，与之相应的应力场满足应力应变关系，但不一定满足平衡方程。现在考虑下列积分

$$\int(v^*_j-\bar{v}_j)\,\dot{p}_j dS=\int(v^*_j-\bar{v}_j)\,\dot{\sigma}_{ij}n_i dS=\int\dot{\sigma}_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}(v^*_j-\bar{v}_j)dV$$

考虑到，在 S_u 上 $v^*_j=\bar{v}_j$，故上式为

$$\int_V(\dot{\varepsilon}^*_{ij}-\dot{\varepsilon}_{ij})\,\dot{\sigma}_{ij}dV=\int_{S_\sigma}(v^*_j-\bar{v}_j)\,\dot{\bar{p}}_i dS \tag{7-12}$$

考虑到 $\dot{\sigma}_{ij}$ 的对称性及不等式（7-8）可得

$$\dot{\sigma}^*_{ij}\,\dot{\varepsilon}^*_{ij}-2\,\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^*_{ij}+\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\geqslant 0$$

只有 $\dot{\sigma}^*_{ij}=\dot{\sigma}_{ij}$ 时等号成立。上式对于理想弹塑性及弹塑性强化材料都成立。由此导出

① 应力率最小原理为 P.G. Hodge Jr. 和 W. Prager（1948）所证明。

$$2\int_{S_\sigma}(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}-\dot{\varepsilon}_{ij})\,\dot{\sigma}_{ij}\mathrm{d}V<\int_{V}(\dot{\sigma}_{ij}^{*}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}-\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij})\mathrm{d}V$$

或

$$2\int_{V}\bar{\dot{p}}_{i}v_{j}^{*}\,\mathrm{d}S-\int_{V}\dot{\sigma}_{ij}^{*}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\mathrm{d}V<\int_{S_\sigma}\bar{\dot{p}}_{i}v_{j}\mathrm{d}S-\int_{V}\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}V\quad(7\text{-}13)$$

或即

$$2\int_{V}\bar{\dot{p}}_{i}v_{j}^{*}\,\mathrm{d}S-\int_{V}\dot{\sigma}_{ij}^{*}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\mathrm{d}V<\int_{S_\sigma}\bar{\dot{p}}_{i}v_{j}\mathrm{d}S-\int_{S_u}\dot{p}_{i}\,\bar{v}_{j}\mathrm{d}S\quad(7\text{-}13')$$

或

$$\frac{1}{2}\int_{V}\dot{\sigma}_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}V-\int_{S_u}\bar{\dot{p}}_{i}v_{j}\mathrm{d}S\leqslant\frac{1}{2}\int_{V}\dot{\sigma}_{ij}^{*}\,\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\mathrm{d}V-\int_{S_\sigma}\bar{\dot{p}}_{i}v_{j}^{*}\,\mathrm{d}S\quad(7\text{-}13'')$$

在$\dot{\sigma}_{ij}^{*}=\dot{\sigma}_{ij}$时等号成立。

以上不等式（7-13）、（7-13′）说明，在所有的运动可能的应变率场中，真实的应变率场使不等式（7-13′）左边部分取极大值。此即应变率极值原理[①]，不等式（7-13″）说明了真实的应变率（增量）的最小性质。

§7.4 刚塑性材料的极值原理

类似地，我们可以给出对于刚塑性材料的极值原理，包括真实的速度场的最小性质和真实的应力状态的最大性质，刚塑性材料所特有的性质是当由刚性区到塑性区过渡时将不可避免地遇到速度不连续面和应力不连续面以及其他方面的问题。

以下我们讨论较简单情况的问题。

对刚塑性体若给定一个运动许可的速度场v_i^*（不含不连续面），并定义泛函Ω^*

① 该原理由 R. Hill（1956）对正则屈服面给出，次年（1957）W. E. Royce 和 W. Prager 推广到奇异屈服面的情况。

$$\Omega^* = \int_V \dot{\sigma}_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* \mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i v_i^* \mathrm{d}S \tag{7-14}$$

而

$$\Omega = \Omega^* \big|_{v_i^* = v_i}$$

$$\Omega = \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{v}_i \mathrm{d}S$$

于是有

$$\Omega^* - \Omega = \int_V [\sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* - \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \sigma_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij}^* - \dot{\varepsilon}_{ij})] \mathrm{d}V \tag{7-15}$$

由最大塑性耗散能原理和式（7-15）中被积函数为非负，即

$$\Omega^* \geqslant \Omega \tag{7-16}$$

式（7-16）说明，在所有的运动许可的速度场中，真实的速度场使泛函（7-14）取极小值①。

由式（7-15）和式（7-16）可直接导出

$$\int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \bar{v}_i \mathrm{d}S \geqslant \int_{S_u} \sigma_{ij}^* n_j \bar{v}_j \mathrm{d}S \tag{7-17}$$

当 $\dot{\sigma}_{ij}^* = \dot{\sigma}_{ij}$ 时取等号，且 σ_{ij} 具有惟一性，σ_{ij}^* 与 σ_{ij} 为塑性等价的。不等式（7-17）为 Hill. R.（1948）所给出，并称为最大塑性功原理。

在这里我们没有计及不连续面。实际上，由 § 7.1 可知，计入不连续面并不带来困难，而问题是，运动许可的速度场 v_i^* 和相应的应变率场 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$，在 $\Omega^* = \Omega$ 时其相对应的应力场 σ_{ij}^* 应该是静力许可的，并且处处服从屈服条件，但它与真实的应力状态可能相差一个常数，其数量等于静水压力。只有在全部表面 S_u 处处给定为非零速度时，这种不确定性便会消失。

§ 7.5 全量理论的变分原理

前面曾经讨论过，全量理论成立的条件是物体各点的加载路径

① 最小速度场原理又称为 Markov 原理，Markov，AA.（1949）年给出。

都是比例加载路径①。我们以下的讨论即遵循这一原则。

为简便计，以下仍不计体力，故平衡方程为

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{在 } V \text{ 内}$$

边界条件为

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上}$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{在 } S_u \text{ 上}$$

在全量理论中，能量原理的数学表述与非线性弹性是一致的，故有以下虚功原理与虚余功原理

$$\int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i\delta u_i\mathrm{d}S = 0 \tag{7-18}$$

和

$$\int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V - \int_{S_u} \delta\sigma_{ij}n_j\,\bar{u}\mathrm{d}S = 0 \tag{7-19}$$

以上两个原理都与材料性质无关，现在令

$$\delta U = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \tag{7-20}$$

$$\delta U' = \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} \tag{7-21}$$

则可得出最小势能原理和最小余能原理

$$\delta\Pi = 0 \tag{7-22}$$

和

$$\delta\Pi' = 0 \tag{7-23}$$

其中

$$\Pi = \int_V U(u_i)\mathrm{d}V - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i\mathrm{d}S \tag{7-24}$$

$$\Pi' = \int_V U'(\sigma_{ij})\mathrm{d}V - \int_{S_u} \sigma_{ij}n_j\,\bar{u}_i\mathrm{d}S \tag{7-25}$$

这样，我们只须把全量理论的本构关系代入式（7-20）、（7-21）和（7-22）、（7-23）即得全量理论的两个变分原理。

① 进一步研究证明加载路径成为极值路径，见参考文献［10］。

已知全量理论的本构关系为

$$e_{ij} = \frac{3\epsilon_i}{2\sigma_i}S_{ij}; e_{ij} = \psi S_{ij} \tag{7-26}$$

$$\sigma_m = 3ke_m; \sigma_m = \frac{\mathscr{E}}{1-2v}e_m \tag{7-27}$$

若令

$$\mathscr{S} = (S_{ij}S_{ij})^{1/2}; \mathscr{E} = (e_{ij}e_{ij})^{1/2} \tag{7-28}$$

则

$$\mathscr{S}\mathrm{d}\mathscr{S} = S_{ij}\mathrm{d}S_{ij}; \mathscr{E}\mathrm{d}\mathscr{E} = e_{ij}\mathrm{d}e_{ij} \tag{7-29}$$

假定此处所讨论的是严格意义下的稳定材料，$\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{E}$ 的单值连续函数，则有

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathscr{E}) \tag{7-30}$$

$$\frac{\mathscr{S}}{\mathscr{E}} = \frac{3\epsilon_i}{2\sigma_i} = \psi; \frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}\mathscr{E}} > 0 \tag{7-31}$$

其中 $\mathscr{S}$-$\mathscr{E}$ 关系曲线可根据单一曲线假定由简单拉伸曲线来模拟。由以上关系式（7-27）可得

$$\left.\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{\mathscr{S}(\mathscr{E})}{\mathscr{E}}e_{ij} \\ e_{ij} &= \frac{\mathscr{E}(\mathscr{S})}{\mathscr{S}}S_{ij} \end{aligned}\right\} \tag{7-32}$$

考虑到式（7-27），则得

$$U = \frac{3\mathscr{E}}{2(1-v)}e_m^2 + \int_0^E \mathscr{S}(\mathscr{E})\mathrm{d}\mathscr{E} \tag{7-33}$$

$$U' = \frac{3(1-v)}{2\mathscr{E}}\sigma_m^2 + \int_0^E \mathscr{E}(\mathscr{S})\mathrm{d}\mathscr{S} \tag{7-34}$$

由式（7-24）和式（7-25）得

$$\delta\Pi=\delta\left\{\int_V\left[\frac{3\mathscr{E}}{2(1-2v)}e_m^2+\int_0^E\mathscr{S}(\mathscr{E})\mathrm{d}\mathscr{E}\right]\mathrm{d}V-\int_{S_u}\bar{p}_i u_i\mathrm{d}S\right\}=0 \tag{7-35}$$

和

$$\delta\Pi'=\delta\left\{\int_V\left[\frac{3(1-2v)}{2\mathscr{E}}\sigma_m^2+\int_0^K\mathscr{E}(\mathscr{S})\mathrm{d}\mathscr{S}\right]\mathrm{d}V-\int_{S_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i\mathrm{d}S\right\}=0 \tag{7-36}$$

进一步还可以证明

$$\delta^2\Pi\geqslant 0;\delta^2\Pi'\geqslant 0 \tag{7-37}$$

式(7-35)即全量理论的最小势能原理：在一切满足运动许可的位移场和应变场中，与真实的位移场相对应的势能取最小值。而式(7-36)即全量理论的最小余能原理：在一切满足静力许可的静力场中，与真实的应力场相对应的余能取最小值。这两个变分原理系卡恰诺夫(Kachanov, L. M. 1942)所给出。此外 Haar. A 和 Von Karman H. (1909)在一定条件下还证明了理想弹塑性材料的变分原理。

例 7-1① 设有一矩形截面悬臂梁，其高为 h，宽为 b，长度为 l，在自由受力 P 作用，梁的材料为理想弹塑性体，其本构关系为

$$\frac{M}{M_0}=\begin{cases}\dfrac{\kappa}{\kappa_e} & (\kappa\leqslant\kappa_e)\\ \dfrac{1}{2}\left[3-\left(\dfrac{\kappa_e}{\kappa}\right)^2\right] & (\kappa\geqslant\kappa_e)\end{cases} \tag{a}$$

其中

$$M_e=\frac{\sigma_0 bh^2}{6};\kappa_e=\frac{2\sigma_0}{Eh}$$

当 $P=1.1P_e=1.1\dfrac{M_e}{l}$时固定端进入塑性状态

① 见参考文献 [29]。

$$\kappa(x) = A(x - l) \tag{b}$$

试用势能最小原理求自由端挠度 δ。

解 应变比能为

$$U = \int_0^{\kappa} M \mathrm{d}\kappa = \begin{cases} \dfrac{M_e}{2\kappa_e}\kappa^2 \\ \dfrac{M_e\kappa_e}{2} + \dfrac{M_e}{2}\left[3|\kappa| + \dfrac{\kappa_e^2}{|\kappa|}\right] - 4\kappa_e \end{cases}$$

已知上式中的 κ（x）为

$$\kappa(x) = A(x - l)$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = A(x - l)$$

积分，并代入边界条件得

$$w(l) = \frac{A}{3}l^3 = \delta$$

若弹塑性交界在 $x = x_1$ 处，则 κ（x_1）$= -\kappa_e$，即

$$l - x_1 = \frac{\kappa_e}{A}$$

梁的总势能为

$$\Pi = \int_0^{x_1}\left\{\frac{M_e\kappa_e}{2} + \frac{M_e}{2}\left[3A(l - x) + \frac{\kappa_e^2}{A(l - x)} - 4\kappa_e\right]\right\}\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{l}\frac{M_e}{2\kappa_e}A^2(l - x)^2\mathrm{d}x - \frac{p}{3}Al^3$$

注意到

$$lx_1 - \frac{x_1^2}{2} = \frac{1}{2}\left(l^2 - \frac{\kappa_e^2}{A^2}\right)$$

$$x_1 = l - \frac{\kappa_e}{A}$$

则由全量理论的最小势能原理

$$\delta\Pi = 0$$

考虑到 $P=1.1M_s/l$、$t=\kappa_s/A$，消去 M_s 后可得

$$\frac{3}{4}l^2-\frac{5}{12}t^2-\frac{t^2}{2}\ln\left(\frac{l}{t}\right)-\frac{l^2}{3}=0$$

或

$$4.6y-3\ln y-5=0$$

其中 $y=(l/t)^2$，求解后得

$$y=1.213;A=\frac{\kappa_s}{l}\sqrt{y}=1.014\frac{\kappa_s}{l}$$

$$\delta=\frac{1}{3}Al^3=0.3671\kappa_s l^2$$

例 7-2 设有下列简单梁，受均布载荷 q 作用，梁的材料为理想弹塑性，试用最小余能原理求支座反力。

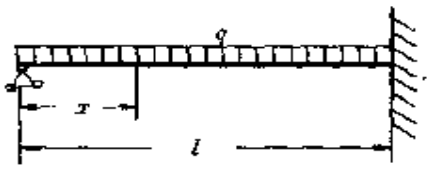


图 7-2

解 梁单位长度的比余能为

$$U'=\int_0^M K\mathrm{d}M=\frac{1}{3A^2}M^3\mathrm{sign}M$$

已知

$$M(x)=Qx-\frac{q}{2}x^2$$

当 $0\leqslant x\leqslant x_1=\frac{2Q}{q}$ 时，$M\geqslant 0$；$x_1\leqslant x\leqslant l$ 时，$M\leqslant 0$。

由此总余能为

$$\Pi'=\frac{1}{3A^2}\left[\int_0^{x_1}\left(Qx-\frac{q}{2}x^2\right)^3\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{l}\left(Qx-\frac{q}{2}x^2\right)^3\mathrm{d}x\right]$$

根据最小余能原理$\frac{\partial \Pi'}{\partial Q}=0$，得

$$\int_0^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{l} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

式中 $f(x) = \left(Qx - \frac{q}{2}x^2\right)^2 x$。

将上式积分，并将 $x_1 = \frac{2Q}{q}$ 代入，消去 Q^6/q^4，令 $t = \frac{Q}{ql}$ 后得

$$2\left(4 - \frac{32}{5} + \frac{8}{3}\right) - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{5t^2} - \frac{1}{24t^6} = 0$$

乘以 $15t^6$，可得方程

$$8t^6 - \frac{15}{4}t^2 + 3t - \frac{5}{8} = 0$$

解得

$$Q = 0.3846ql$$

§7.6 极限分析定理

弹塑性静力学问题的精确解，必须满足几个基本方程，包括平衡条件，变形协调条件和材料的本构关系，屈服条件，弹塑性交界面的连续条件以及边界条件等。如果所求得的解不能完全满足这几个条件，就称它为近似解。

在近似解中有所谓限界解。限界解分为两类，即上限解与下限解。上限解高于精确解，下限解低于精确解，有了解的上下限也就有了精确解所处的范围。对于不易求出精确解的问题，讨论问题的限界是很有必要的。

在研究工程结构承载能力的问题时，人们关心的是结构物在外力作用下，因塑性变形的发展使结构开始变为机构，丧失正常工作能力，即进入极限状态时所对应的外荷载，即极限荷载，或其上下限值。这类问题的研究，即所谓塑性分析或极限分析。本节给出极限分析的两个基本定理。

结构物的极限状态有两个特征：

(1) 其应力场为静力许可的应力场；

(2) 其应变率场为机动许可的应变率场。

本节定义静力许可的应力场是满足下列条件的应力场。

(1) 满足平衡方程

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0$$

(2) 满足应力边界条件

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i \quad (\text{在 } S_T \text{ 上})$$

(3) 满足屈服不等式

$$f(\sigma_{ij}) \leqslant 0$$

所谓机动许可的应变率场是满足下列条件的应变率场

(1) 满足几何条件

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$$

即应变率场可由速度场导出。

(2) 满足速度边界条件

$$\dot{u}_i = \bar{\dot{u}}_i \quad (\text{在 } S_u \text{ 上})$$

(3) 满足作用力的功率与耗散率相等的要求①，或

$$\int_{S_u} \bar{p}_i \dot{u}_i \mathrm{d}S > 0$$

(4) 满足不可压缩条件

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = 0$$

求极限荷载一般都采用比例加载，即给定荷载间的比值，使其按同一参数 k 而增长。对于给定的这组荷载，静力许可的应力场可有

① 从能量平衡的角度看，对于理想刚塑性体，外部作用力的功率全部转化为材料的塑性耗散功率。因耗散功率恒大于零，故 $\int_{S_u} \bar{p}_i \dot{u}_i \mathrm{d}S > 0$。

无穷多种，每一种应力场对应于一种荷载强度，可证明它一定是极限荷载的下限，记作 P_-。类似地，对于给定的机动许可的速度场和给定的加载形式，可证明对应的荷载是极限荷载的上限 P_+，此时，该外荷载所做的功在数量上等于在屈服机构（塑性变形机构）中耗散的能。

从能量原理出发，可以建立塑性极限分析的下列两个重要定理：

定理一（下限定理） 如有任意静力许可的应力场存在，则极限荷载 P_0，是所有 P_- 中最大的一个，即

$$P_- \leqslant P_0 \tag{7-38}$$

此处 P_- 与一种静力许可的应力场相对应，为极限荷载的下限。

定理二（上限定理） 如有任意机动许可的速度场存在，则极限荷载 P_0 是所有 P_+ 中最小的一个，即

$$P_+ \leqslant P_0 \tag{7-39}$$

此处 P_+ 与一种机动许可的速度场相对应，可证明为极限荷载的上限。

以下首先证明下限定理。

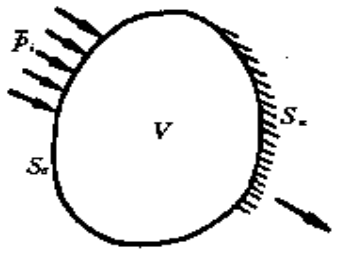


图 7-3

设有一刚塑性物体（图 7-3），其体积 V，总表面积为 S，在 S_σ 部分上给定面力 $\bar{p}_i$，在 S_u 部分上给定位移增量 $\mathrm{d}u_i$。对于真实应力场的虚位移原理（略去体力）给出

$$\int_S p_i \mathrm{d}u_i \mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} \mathrm{d}V = \int_V S_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_{ij} \mathrm{d}V \tag{7-40}$$

其中 S_{ij} 为应力偏量。式（7-40）说明，面力在位移增量 du_i 上所作的功的增量，在数量上等于产生塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}$ 所需耗散的能。同样，对于静力许可的应力场 σ_{ij}^* 和面力 p_i^* 这一系统，有

$$\int_S p_i^* du_i dS = \int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij} dV = \int_V S_{ij}^* d\varepsilon_{ij} dV \tag{7-41}$$

其中 $S=S_\sigma+S_u$，故式（7-40）可写成

$$\int_{S_\sigma} p_i du_i dS + \int_{S_u} p_i du_i dS = \int_V S_{ij} d\varepsilon_{ij} dV \tag{7-42}$$

考虑到在 S_σ 上有 $p_i=p_i^*$，则式（7-42）可写为

$$\int_{S_u} p_i^* du_i dS + \int_{S_\sigma} p_i du_i dS = \int_V S_{ij}^* d\varepsilon_{ij} dV \tag{7-43}$$

将式（7-42）与式（7-43）两式相减，并由最大耗散能原理得

$$\int_{S_u} (p_i - p_i^*) du_i dS = \int_V (S_{ij} - S_{ij}^*) d\varepsilon_{ij} dV \geqslant 0 \tag{7-44}$$

于是有

$$\int_{S_u} p_i du_i dS \geqslant \int_{S_u} p_i^* du_i dS \tag{7-45}$$

由此得出 S_u 上有

$$p_i \geqslant p_i^* \tag{7-46}$$

而在全部表面上式（7-46）仍成立。此即下限定理，$P \geqslant P_0$。

如果我们定义，初始塑性流开始时，任意面力与真实面力（体力不计）之比为 f，f 称为安全系数。则真实的应力场与面力 fp_i 相平衡，任意一静力许可的应力场 σ_{ij}^* 则与 $f_s p_i$ 相平衡，f_s 称为静力许可因子。于是式（7-45）可改写为

$$(f - f_s) \int_{S_u} p_i du_i dS \geqslant 0 \tag{7-47}$$

不等式（7-47）中的积分号恒为正，故有

$$f \geqslant f_s \tag{7-48}$$

这就是，任一静力许可的因子 f_s 不能大于安全系数 f。

现在证明上限定理：

假定 $d\varepsilon_{ij}^{*}$ 为任一机动许可的塑性应变率场。$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{*}$ 可由速度场导出。现在考虑速度场沿某一表面 S_D 出现间断。但沿间断线法向方向的速度分量必须是连续的（图 7-4）。如果不是这样，而允许物体沿 S_D 分成两部分，各自向相背的方向运动，则 S_D 便要形成裂隙，这样 S_D 上的一个点就有可能占据多于一个的空间位置。物体变形的协调就遭到破坏。但 S_D 两侧的两部分如只是沿 S_D 做相对滑动的话，就不会出现变形不协调的问题。此时，垂直于 S_D 面的法向速度分量是连续的。如令 S_D 面上任一点法向单位矢量为 n_j，则

$$[\dot{u}_i n_j]_{S_D} = 0$$

此处方括号 $[\cdots]$ 表示沿 S_D 面的间断量（以下省略下标 S_D）。这就是说，位移速度 $\dot{u}_i$（或以增量表示为 $\mathrm{d}u_i$）越过 S_D 面时，其法向分量应该连续。显然，在 S_D 面内的切向速度分量可以不连续，即允许有间断出现。速度或其他力学量过某一表面 S_D 出现不连续的问题，都可理解为它们是以很陡的变化率连续越过了一个很窄的 S_D 带状区。

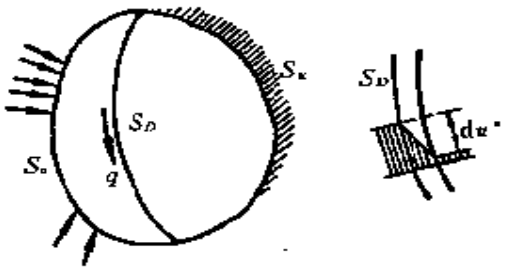


图 7-4

在我们讨论的问题中，由虚位移原理，有

$$\int_S p_i \mathrm{d}u_i^* \,\mathrm{d}S = \int_V \sigma_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^* \,\mathrm{d}V + \Sigma \int_{S_D} q[\mathrm{d}u^*]\mathrm{d}S_D \qquad (7\text{-}49)$$

其中，$[\mathrm{d}u^*]$ 为沿 S_D 上切向位移增量的间断量，Σ 表示对各间断面

求和，q 为沿间断线 S_D 的 σ_{ij} 的切向分量。若 σ_{ij}^* 是根据塑性势的概念由 $d\varepsilon_{ij}^*$ 导出的，但不一定是静力许可的应力场，则有

$$\int_V (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) d\varepsilon_{ij}^* dV \geqslant 0 \tag{7-50}$$

由此，式（7-49）化为

$$\int_S p_i du_i^* dS \leqslant \int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* dV + \Sigma \int_{S_D} k[du^*] dS_D \tag{7-51}$$

其中 k 为剪切屈服极限，且 $k \geqslant q$。因有

$$\int_S p_i du_i^* dS = \int_{S_u} p_i d\bar{u}_i dS + \int_{S_\sigma} p_i du_i^* dS$$

故式（7-51）化为

$$\int_{S_u} p_i d\bar{u}_i dS \leqslant \int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* dV + \Sigma \int_{S_D} k[du^*] dS_D - \int_{S_\sigma} p_i du_i^* dS$$

上式不等号右边为

$$\int_V \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^* dV + \Sigma \int_{S_D} k[du^*] dS_D - \int_{S_\sigma} p_i du_i^* dS = \int_{S_u} p_i^* du_i^* dS$$

$$= \int_{S_u} p_i^* d\bar{u}_i dS$$

于是有

$$\int_{S_u} p_i d\bar{u}_i dS \leqslant \int_{S_u} p_i^* du_i^* dS$$

$$p_i \leqslant p_i^* \tag{7-52}$$

即

$$P_0 \leqslant P_+$$

式（7-52）即上限定理。证毕。

如果定义机动许可因子 f_k 为

$$f_k = \frac{k\sqrt{2}\int_V \sqrt{(d\varepsilon_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^*)} dV}{\int_S p_i du_i^* dS} \tag{7-53}$$

并考虑到

$$\int_V \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^* dV \leqslant k\sqrt{2}\int_V \sqrt{(d\varepsilon_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^*)}dV \tag{7-54}$$

及

$$f\int_S p_i du_i^* dS \leqslant k\sqrt{2}\int_V \sqrt{(d\varepsilon_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^*)}dV \tag{7-55}$$

由什瓦兹（Schwarz）不等式 $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^* \leqslant \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}\sqrt{\varepsilon_{ij}^*\varepsilon_{ij}^*}$ 则可得

$$f \leqslant \frac{k\sqrt{2}\int_V \sqrt{(d\varepsilon_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^*)}dV}{\int_S T_i du_i^* dS} = f_k \tag{7-56}$$

此处 f 对应于真实解，所以它也是一个机动许可的因子。于是由式(7-48)、式（7-56）得

$$f_s \leqslant f \leqslant f_k \tag{7-57}$$

式（7-57）说明，安全系数 f 不小于静力许可因子 f_s，不大于机动许可因子 f_k。

以上两个重要定理给极限分析提供了理论基础。但要看到，在实用上往往由于不易选取合适的应力场，使得下限解与上限解的差距很大。为了改善这种情况，近年来发展了极限分析的广义变分原理①。使得应力场与位移可以同时独立变分，比较容易接近真实解。

在用上、下限定理进行塑性极限分析时，我们总是希望得到问题的完全解。所谓完全解，是同时满足静力许可（下限）与机动许可（上限）的解答。实际上，在极限荷载作用下处于平衡状态时，可有一个不破坏屈服条件的应力场存在，它是满足平衡方程和应力边界条件的一个解。同时，由此应力场和本构方程可以求得一个满足

① 参看，薛大为《建议一组关于极限分析的定理》，科学通报，第 20 卷，第 4 期，175—181（1975）及 MureT.，et al.，QAM，1963，243—248 和 1965，171—179。

速度边界条件的速度场。如果是这样的话，我们便得到一个既满足静力许可条件又满足机动许可条件的解答，即完全解。只有在极限简单的情况下，方可得到这种完全解。

例 7-3 用上下限定理证明刚性平底冲模（地基极限平衡）问题的普兰特解是完全解（图 7-5）。

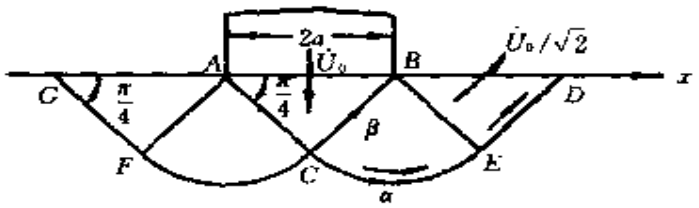


图 7-5

解 如能证明普兰特解不大于下限解，不小于上限解，则必为完全解。

（1）普兰特解的极限荷载不大于下限解 P_-。

由第五章知，静力许可的应力场在 AB 边界上为

$$\sigma_1 = -k(\pi + 2) \quad (\tau = 0)$$

设 AB 边界（S_u）有垂直向下的运动，$\mathrm{d}u_i = 1$，于是下限定理

$$\int_{S_u} p_i \mathrm{d}u_i \mathrm{d}S \geqslant \int_{S_u} p_i^* \mathrm{d}u_i \mathrm{d}S$$

化为

$$\int_{S_u} k(\pi + 2) \cdot 1 \mathrm{d}S \leqslant \int_{S_u} p_i^* \mathrm{d}S = P_-$$

于是得

$$P_- \geqslant 2ka(\pi + 2)$$

（2）普兰特解的极限荷载不小于上限解 P_+。

已设 AB 边界处之位移场为 U_0 垂直向下（如图 7-5），则沿扇形区 BCE 及 ACF 周向的位移速度为 $\frac{\dot{U}_0}{\sqrt{2}}$。而沿周向的应力已知为 k

（见第五章），BD 与 AG 为自由边界（S_σ 边界），$p_x=p_y=0$，AB 面为位移边界 S_u，则将以上结果代入上限定理。

$$\int_{S_u} p_i \mathrm{d}u_i \mathrm{d}S \leqslant \int_V \sigma_{ij}^* \mathrm{d}\tau_{ij}^* \mathrm{d}V + \Sigma \int_{S_D} k[\mathrm{d}u^*]\mathrm{d}S_D - \int_{S_\sigma} p_i \mathrm{d}u_i^* \mathrm{d}S$$

后，可得

$$\begin{aligned} 2Pa\dot{U}_0 \leqslant & \left[2k\frac{\dot{U}_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\right]-0 \\ & +2k\left(\frac{2a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}+4\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\frac{\dot{U}_0}{\sqrt{2}} \\ = & ka\pi\dot{U}_0+2k\left(2+\frac{\pi}{2}\right)a\dot{U}_0 \end{aligned}$$

即

$$P_+ \leqslant k(\pi+2)$$

例 7-4 现在考察一个缺口平板条如图 7-6 所示，求极限载荷的

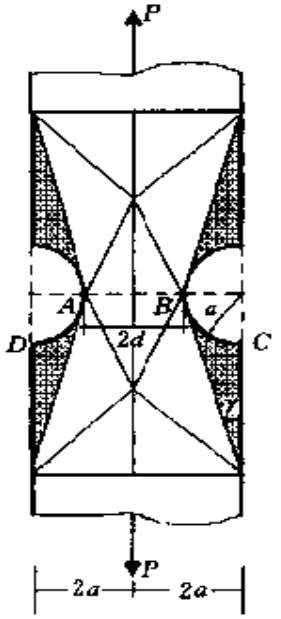


图 7-6

上下限。

解 普拉格给出图示的静力许可的应力场，图中阴影部分为零应力区。

由几何关系得

$$d = 2a - \frac{a}{\cos\gamma} \tag{a}$$

由 AB、CD 面上拉应力的合力平衡条件，并计及式（5-15）

$$\sigma_x = \sigma_m - k\sin 2\theta$$

$$\sigma_y = \sigma_m + k\sin 2\theta$$

$$\tau_{xy} = k\cos 2\theta$$

可得

$$2d \cdot 2k(1 + \sin\gamma) = 4a \cdot 2k(1 - \sin\gamma) \tag{b}$$

由式（a）、（b）得

$$\gamma \cong 21.57°$$

故设 CD 上拉应力的静力许可乘子为

$$f_s = \frac{2k(1 - \sin\gamma)}{\sigma} \cong \frac{1.26k}{\sigma}$$

现在考虑的 σ 机动许可乘子 f_k，为此取图 7-7（a）所示的机动许可的速度场。

由图 7-7（a）可知，由圆弧形缺口底部开始有一速度间断线沿 45°线 AB 向上滑动，为图中箭头所示，AB 以下即为刚体。注意到 AB 线的长度为 $\sqrt{2} \cdot 3a$，单位厚度的外力功率为 $\sigma \cdot 4a \cdot v_0\sqrt{2}$，于是由上限定理得

$$f_k = \frac{k\sqrt{2}v_0 \cdot \sqrt{2} \cdot 3a}{\sigma \cdot 4a \cdot v_0} = \frac{1.5k}{\sigma}$$

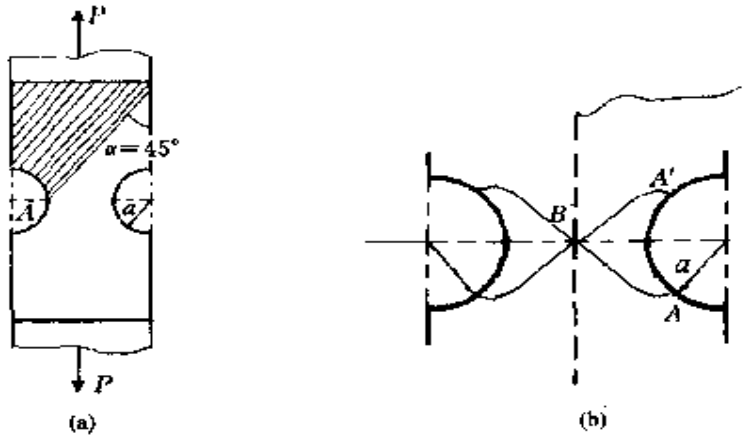


图 7-7

由此得安全因子 f 为

$$\frac{1.26k}{\sigma} \leqslant f \leqslant \frac{1.5k}{\sigma}$$

图 7-7 (b) 给出了一种滑移线场，由滑移线 AB 及 $A'B$ 为界（AB 和 $A'B$ 线互为镜面反射图），这显然为轴对称应力状态。在此区域内的应力 σ_θ 为

$$\sigma_\theta = 2k[1 + \ln \frac{r}{a}]$$

见 § 4.3 厚壁筒的分析曲线 AB 及 $A'B$ 为对数螺线。此处 r 为由小圆心 O 量起的值，于是得单位厚度的轴向力为

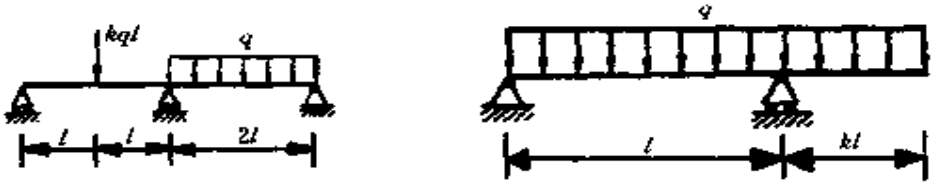
$$P = 2\int_a^{2a} \sigma_\theta dr = 4k\int_a^{2a} [1 + \ln \frac{r}{a}]dr = 8ka\ln q$$

从而有

$$\sigma = 2k\ln 2 = 1.386k$$

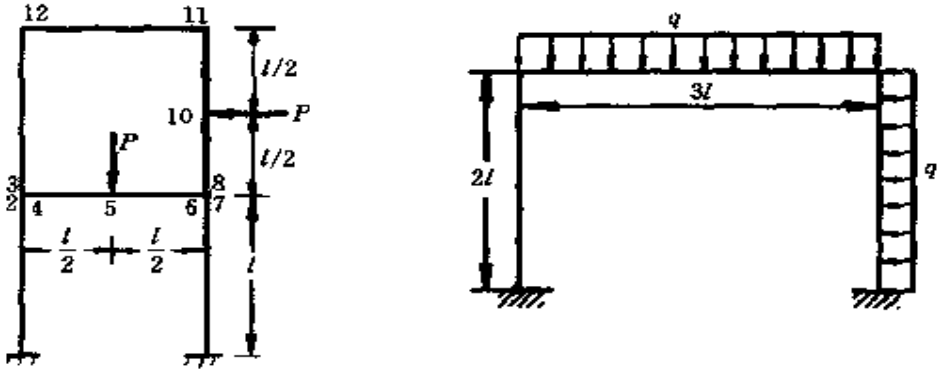
习　　题

7.1　对图示的连续梁，用上限定理求极限荷载 q。



题 7.1 图

7.2　用上限和下限方法求图示刚架的极限荷载 $P(q)$ 值。



题 7.2 图

7.3　一高 h 宽 b 长 l 的矩形截面悬臂梁，在自有端受集中力 P 的作用，梁的材料是理想塑性，其 M-κ 关系为

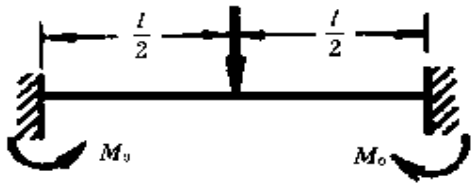
$$\frac{M}{M_e}=\begin{cases}\dfrac{\kappa}{\kappa_e} & (\kappa \leqslant \kappa_e)\\[2ex] \dfrac{1}{2}\left[3-\left(\dfrac{\kappa_e}{\kappa}\right)^2\right] & (\kappa \geqslant \kappa_e)\end{cases}$$

这里 $M_e=\dfrac{\sigma_0 bh^2}{6}$，$\kappa_e=\dfrac{2\sigma_0}{Eh}$。当外载加到 $P=1.1P_e=1.1\dfrac{M_e}{l}$ 时，这时在固定端附近部分梁将进入塑性，求以下两问题：

(1) 试用积分方法求出自由端处的挠度 δ。

(2) 假设曲率变化规律还按弹性时的规律 $\kappa(x)=A(x-l)$，试用势能极值原理近似地求自由端挠度 δ。

7.4　图示两端固定的梁，中点受集中力 P 的作用，其 M-κ 曲线与上题一样，当 P 力作用下使梁的中部和固定端都产生塑性区后，用余能极值原理导出固定端的反力矩 M_0。



题 7.4 图

第八章　结构极限分析

塑性极限分析，是讨论结构的承载能力。也就是讨论结构在开始发生无限制塑性流动前所能承受的最大极限荷载。对于这一问题的讨论可以将弹塑性结构的弹性变形部分略去作为理想的刚塑性体来对待。实验证明，这种简化对于其最大承载能力来说是允许的。

刚塑性体的极限分析，需要针对具体的结构，研究以下三个问题：

(1)分析并选定屈服条件与相应的流动法则；

(2)选取静力许可的应力场；

(3)选取机动许可的速度场。

在第七章中，我们给出极限分析的两个重要定理。可推广到这里来解决以上三个问题求得极限荷载的上限和下限，即可得极限分析的完全解。但在目前，只有在极简单的情况下，方可得到这种完全解。

§8.1　复合应力梁的屈服条件

在许多结构中，其内力既有弯矩 M，又有轴向力 N，而且轴向力的影响是不可忽略的。进行极限分析时，为使截面达到极限状态，应使用包括弯矩和轴向力的极限条件，即

$$\Phi(M,N)=0 \tag{8-1}$$

为了求出在轴向力及弯矩共同作用下的屈服条件，现以 $b\times 2h$ 的矩形截面[图 8-1(a)]的梁为例说明其屈服条件的求法。

对矩形截面来说，其最大极限轴力与最大极限弯矩力

$$N_0=2bh\sigma_0;M_0=bh^2\sigma_0 \tag{8-2}$$

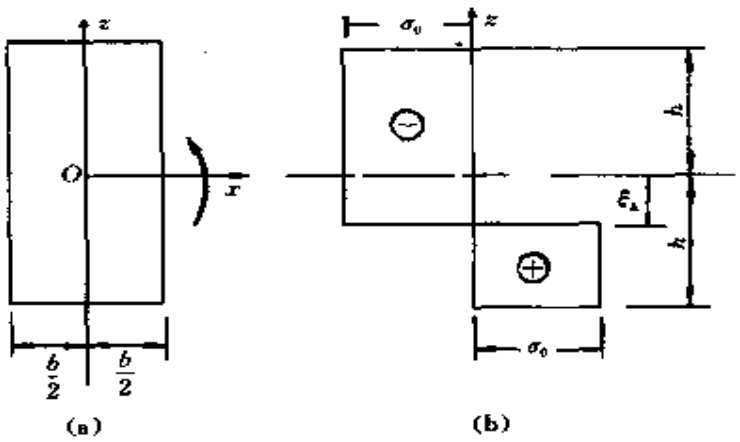


图 8-1

当截面上同时有弯矩与轴向力作用时，极限状态下的应力分布如图 8-1(b)所示，可求得轴向力及弯矩分别为

$$N = 2\sigma_0 bh\xi ; M = \sigma_0 bh(1 - \xi^2) \tag{8-3}$$

式(8-3)包含有材料参数和截面的几何参数。

如果用无量纲量表示轴力及弯矩，则有

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{N}{N_0} = -\frac{\xi}{h} \\ m &= \frac{M}{M_0} = -\left(\frac{\xi^2}{h^2} - 1\right) = 1 - \frac{\xi^2}{h^2} \end{aligned}\right\} \tag{8-4}$$

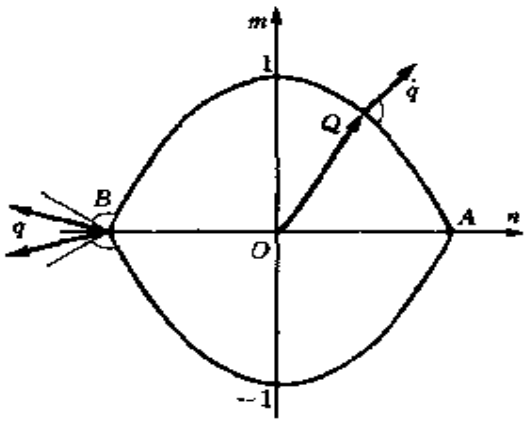


图 8-2

式(8-3)为参数形式的极限关系式，消去参数后得

$$f=\frac{M}{M_0}+\left(\frac{N}{N_0}\right)^2-1=0 \tag{8-5}$$

或

$$f(m,n)=0,m+n^2=1 \tag{8-6}$$

式(8-6)所示的曲线为两条二次抛物线，轴力与弯矩共同作用时的极限条件如图 8-2 所示，图中 Q、$\dot{q}$ 分别为广义应力和广义应变率。

§8.2 板的屈服条件

屈服条件的一般理论在第三章已经讨论过。把已有的屈服条件用到板的问题中来，最好改用广义变量来表示。正如前面在讨论板的屈服问题时所做的那样。所取的广义应力要与广义应变相对应，就是说要使它们的乘积有明确的物理意义，即应为应变比能。实际上，板单位面积的应变能为

$$U_{0i}=\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})\mathrm{d}z \tag{8-7}$$

将应变位移方程代入上式，并考虑到 $w=w(x,y)$ 与 z 无关，可得

$$\begin{aligned}U_{0i}=&\left(-\partial\frac{\partial^2 w}{x^2}\right)\int_{h/2}^{h/2}\sigma_x z\mathrm{d}z+\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-h}^{h}\sigma_y z\mathrm{d}z\\&+\left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy}z\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{8-8}$$

在小变形条件，显然式 (8-8) 括弧中的量为板弯曲后中面的曲率和扭率

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=\frac{1}{\rho_x}=\kappa_x\\-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}&=\frac{1}{\rho_y}=\kappa_y\\-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}&=\frac{2}{\rho_{xy}}=2\kappa_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{8-9}$$

于是有

$$U_{0i}=M_x\kappa_x+M_y\kappa_y+2M_{xy}\kappa_{xy} \tag{8-10}$$

如采用无量纲的量

$$m_x = \frac{M_x}{M_0}; m_y = \frac{M_y}{M_0}; m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_0}$$

$$\kappa_x = h\kappa_x; \kappa_y = h\kappa_y; \kappa_{xy} = h\kappa_{xy} \tag{8-11}$$

其中 M_0 为塑性极限弯矩

$$M_0 = 2\int_0^{h/2} \sigma_0 z \mathrm{d}z = \frac{\sigma_0 h^2}{4} \tag{8-12}$$

则得

$$U_{0i} = \frac{M_0}{h}(m_x\kappa_x + m_y\kappa_y + 2m_{xy}\kappa_{xy})$$

在这种情况下，板的屈服条件应采用广义应力 m_x、m_y、m_{xy}来表示，且应有 $m_x\kappa_x \geqslant 0$、$m_y\kappa_y \geqslant 0$……，而应力场实际上就是 m_x、m_y、m_{xy} 的分布图，应变率场是曲率变化率 $\dot{\kappa}_x$、$\dot{\kappa}_y$、$\dot{\kappa}_{xy}$的分布图。

这样一来，板的屈服条件可用广义力表示为

$$f(m_x, m_y, m_{xy}) = 1 \tag{8-13}$$

在平面应力状态下，畸变能条件已知为

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \tag{8-14}$$

对应于式（8-14），可知板的屈服条件为

$$m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3m_{xy}^2 = 1 \tag{8-15}$$

板的本构关系，由

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

得出为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\kappa}_x &= \lambda(2m_x - m_y) \\ \dot{\kappa}_y &= \lambda(2m_y - m_x) \\ \dot{\kappa}_{xy} &= 6\lambda m_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{8-16}$$

同样地，最大剪应力屈服条件为

$$\max(|m_1|, |m_2|, |m_1 - m_2|) = 1 \tag{8-17}$$

一般来说，板的屈服条件将是一个以 m_x、m_y、m_{xy}为坐标的广义力空间中的曲面，且具有复杂的图形。实用上，通常要做必要的简

化。以下给出几种常用的屈服条件。

一、六边形屈服条件

在轴对称情况下，由于 $m_{r\theta}=0$，故广义力为 m_r、m_θ，在这种情况，m_r、m_θ，即第一、第二主弯矩，最大剪应力屈服条件为

$$\max(|m_r|,|m_\theta|,|m_r-m_\theta|)=1 \tag{8-18}$$

式（8-18）表示的图形为一屈服六边形 $ABCDEF$（图 8-3），与平面应力状态下在主应力平面内的图形相同。

二、正方形屈服条件

将式（8-18）最大剪应力屈服条件进行简化，可得正方形屈服条件，简称詹森（K. W. Johansen）条件，即

$$|m_1|=1;|m_2|=1 \tag{8-19}$$

其图形为图 8-3 中的虚线 $BGEH$ 正方形。

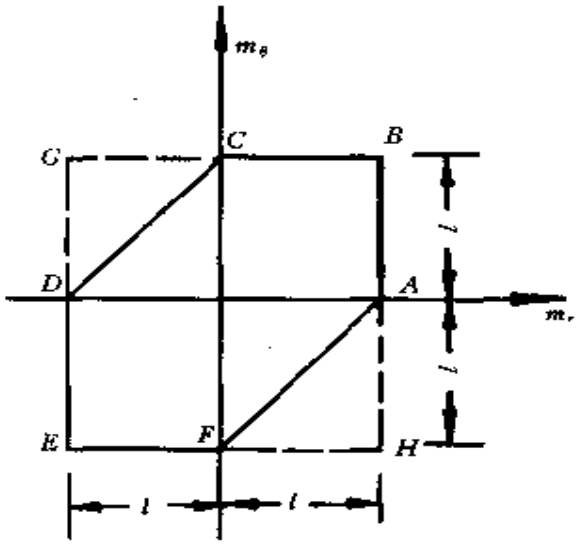


图 8-3

这种屈服条件适用于夹层板和具有上下层纵向和横向的配筋率相同的钢筋混凝土板。图 8-4 在板的屈服完全由钢筋的屈服来支配

时，能给出有一定可靠程度的近似解。

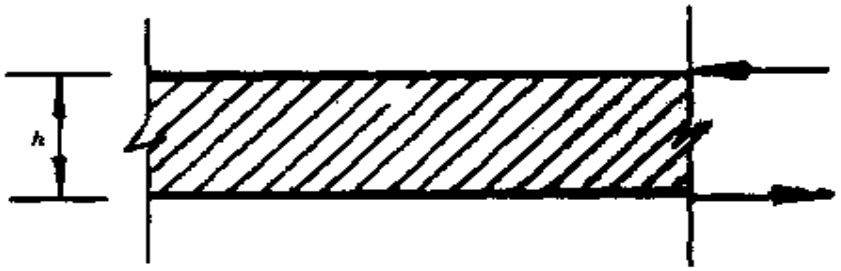


图 8-4

三、偏心正方形屈服条件

当考虑到钢筋混凝土板正负弯矩的屈服极限不同时，应采用下列屈服条件（图 8-5）。

$$m_1 = m_2 = M_{01}$$

$$-m_1 = -m_2 = M_{02} \tag{8-20}$$

其中，M_{01}、M_{02}分别为正负弯矩的极限值。

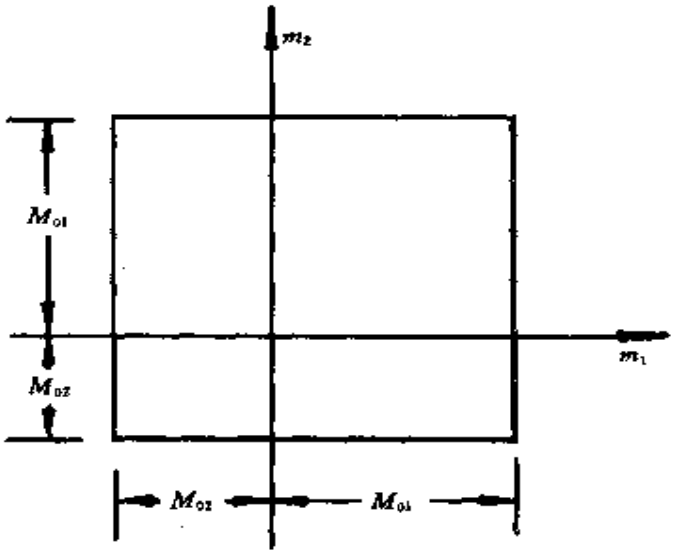


图 8-5

§8.3 拱的塑性极限分析

众所周知拱的塑性极限条件应包括轴向力 N 和弯矩 M。现在考虑一个两铰拱，同时引进下列无量纲量

$$p=\frac{Pa}{M_0};r=\frac{Ra}{M_0}$$

及

$$m=\frac{M}{M_0};n=\frac{N}{N_0};k=\frac{N_0A}{M_0}$$

上式中 k 为描述拱的几何形状及其截面性质的系数。

拱的无量纲量平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}m&=p(\sin\varphi_0-\sin\varphi)-r(\cos\varphi-\cos\varphi_0)\\kn&=p\sin\varphi+r\cos\varphi\end{aligned}\right\}\qquad(8\text{-}21)$$

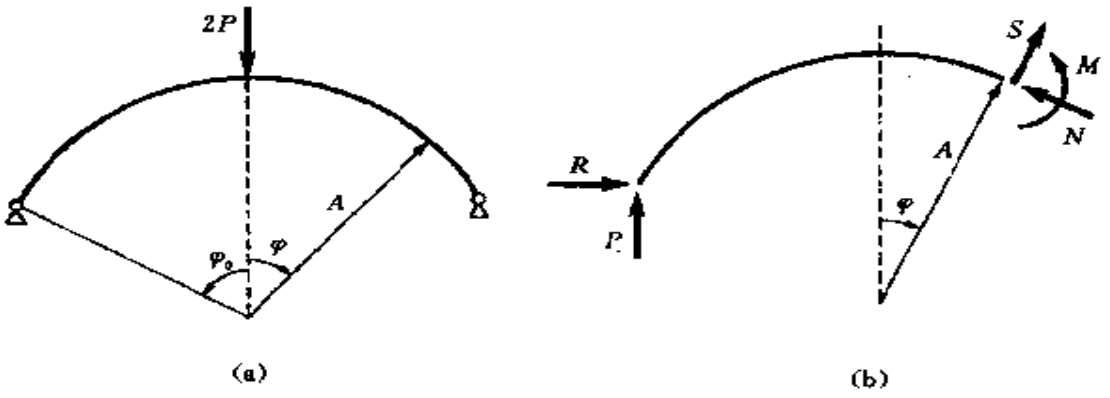


图 8-6

图 8-6（b）中的量均为正值，由以上两式消去 φ 后，可得

$$f(m,n)=m+kn=p\sin\varphi_0+r\cos\varphi_0\qquad(8\text{-}22)$$

式（8-22）$f(m,n)=0$ 表示 (m,n) 平面内的曲线，并称为拱的塑性格式。对于圆拱它是一条直线，且不可能在屈服曲线 $f(m,n)$ 之外。在此情况下，取其为

$$\left.\begin{aligned}m&=\pm1\quad-1\leqslant n\leqslant1\\n&=\pm1\quad-1\leqslant m\leqslant1\end{aligned}\right\}\qquad(8\text{-}23)$$

方程（8-23）是一个（m，n）平面内的正方形。虚线为相应的抛物线屈服曲线。

正方形 $ABCD$ 表示一种简化的极限条件。在极限状态时，拱中塑性铰的位置及极限荷载由 $\varphi=0$ 和 $\varphi=\varphi_1$ 处的屈服条件及静力许可条件式（8-22），并计及式（8-23）而求得。

由于对称性，在拱左半部角度为 φ_1 处的截面上，其内力状态亦应有 $m=-1$ 及 $n<0$。进一步可以研究塑性铰的位置，实际上，它依赖于 $f(m,n)=0$，显然载荷 $2P$ 位置上有一个塑性铰，其它两个在支座与 $2P$ 之间。即拱中出现了三个塑性铰。将 $\varphi=\varphi_1$ 及 $\varphi=0$ 处的 $m=-1$ 及 $m=1$ 代入式（8-9）的第一式，则有

$$\left.\begin{aligned} P(\sin\varphi_0-\sin\varphi_1)-r(\cos\varphi_1-\cos\varphi_0)&=-1\\ P\sin\varphi_1-r(1-\cos\varphi_0)&=1 \end{aligned}\right\} \tag{8-24}$$

由图 8-7 可知，广义应力路径为由 A 点至 B 点再至 C 点，在 B 点和 C 点处表示弯矩和轴向力在极限状态下的组合情况。其在 B 点处的静力许可的条件为

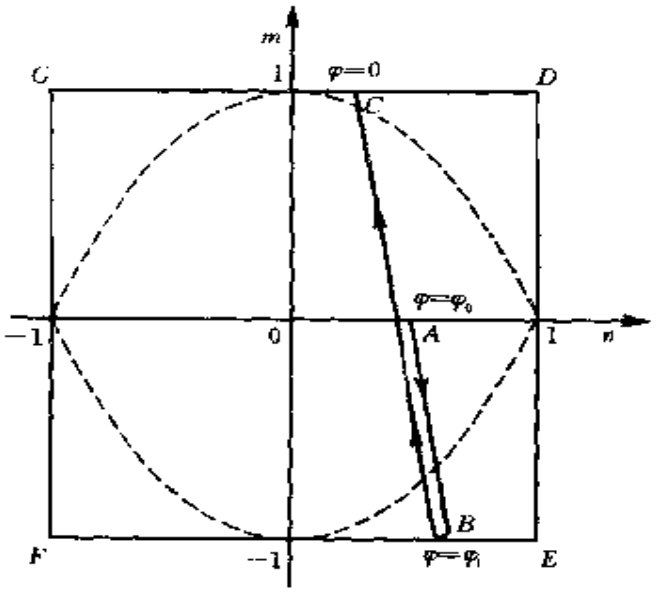


图 8-7

$$\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = P\cos\varphi_1 - r\sin\varphi_1 = 0 \tag{8-25}$$

由式（8-24）及（8-25）可以确定极限载荷 P_0

$$P_0 = \frac{2\left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} \tag{8-26}$$

显然此解［式（8-26）］对应于 $n<1$。

§8.4 圆板的塑性极限分析

现在考虑简支圆板在均布荷载 q 作用下（图 8-8）的承载能力。

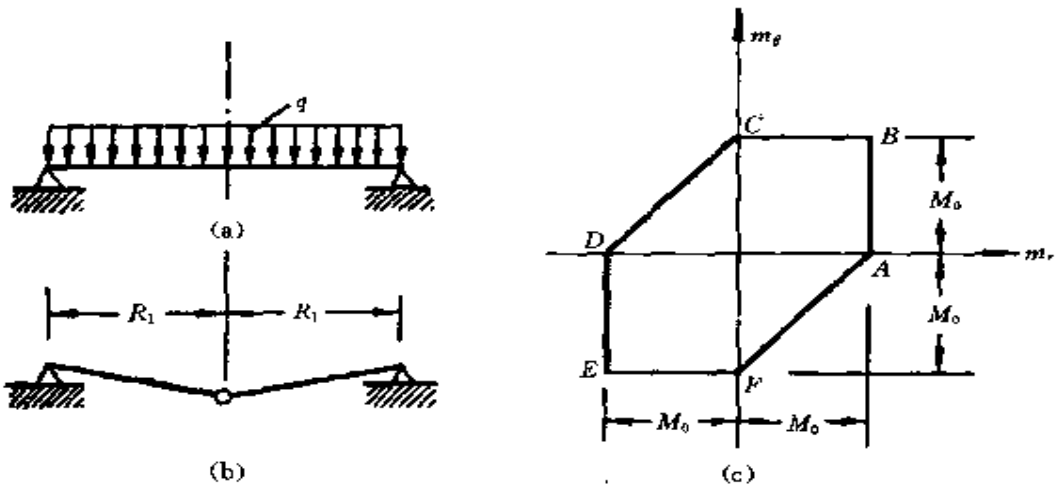


图 8-8

已知板的平衡微分方程为

$$(rM_r)' - M_0 = -\int_0^r qr\mathrm{d}r = -\frac{qr^2}{2} \tag{8-27}$$

假定板服从六边形屈服条件，则板各点应力状态在 m_r、m_θ 平面内用一点（称为应力点）表示，当应力点在屈服六边形内部时，板处于刚性状态，当应力点到达屈服六边形上时，该点即进入塑性状

态。以后我们把应力点的轨迹，叫做应力迹线。

一般来说，应力迹线要经过试算来确定，先由边界条件及对称条件，做大致的估计，然后以所估算的结果求解平衡方程，并检查速度场是否适合，如不能满足速度场的机动许可条件，则应重新修改。现在的情况下，由于对称，在板中心处。有 $M_r=M_\theta$，在简支边界有 $M_r=0$，显然，板开始屈服是在板的中心。故应力迹线必然由 B 点开始，因为 B 点对应的应力状态是

$$M_r = M_\theta = M_0$$

都是正值。这正是板中心的应力状态。应力迹线将止于 C。于是，可以断定，相应于极限状态的应力点都在 BC 上，即板内的任一点的应力状态都不会在 BC 线以外。今后我们把结构进入屈服状态时，应力迹线所在的那部分屈服曲线叫做塑性格式。对于圆板来说，板进入极限状态时，必须遵守塑性格式 BC。如果采用其它塑性格式，则必然产生不协调或发生矛盾。例如，对于 AB，由于曲率变化率（即广义应变率）与屈服曲线的正交性，则必有 $\dot{\kappa}_\theta=0$，于是 $\mathrm{d}\dot{w}/\mathrm{d}r=0$，$\dot{w}$ ＝常数，这便与边界条件相矛盾。在对具体结构进行塑性极限分析时，要在屈服条件中选定适宜的塑性格式。

注意到在塑性格式 BC 上，$M_\theta=M_0$，即在全板任一点均有

$$M_\theta=M_0$$

于是平衡微分方程的解为

$$m_r = 1 - p\rho^2$$

其中

$$\rho = \frac{r}{R_1};p = \frac{qR_1^2}{6M_0};m_r = \frac{M_r}{M_0}$$

边界条件为：当 $\rho=1$ 时，$m_r=0$，于是要求 $p=1$，故问题的解为

$$\left.\begin{aligned} m_r &= 1 - \rho^2 \\ m_\theta &= 1 \qquad (m_\theta = \frac{M_\theta}{M_0}) \\ p &= 1 \end{aligned}\right\}$$

显然，这一组解满足静力许可条件。于是极限荷载为 $p=1$，即

$$q_- = \frac{6M_0}{R_1^2}$$

是极限荷载的下限。如能找到与上述解相适应的速度场，并且满足机动许可的条件，那么就得到了完全解。

令板的位移速度为 $\dot{w}=\dot{w}\ (r)$，应变率分量为

$$\dot{\varepsilon}_r = \dot{\kappa}_r z$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\kappa}_\theta z$$

此处 $\dot{\kappa}_r$，$\dot{\kappa}_\theta$ 为曲率变化率

$$\dot{\kappa}_r = -\frac{\mathrm{d}^2\dot{w}}{\mathrm{d}r^2}$$

$$\dot{\kappa}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\dot{w}}{\mathrm{d}r}$$

与最大剪应力条件相关连的流动法则对塑性格式 BC 来说，为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\kappa}_r &= 0\\ \frac{\mathrm{d}^2\dot{w}}{\mathrm{d}r^2} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{8-28}$$

这是因为广义应变率矢量垂直于 BC 边，故 $\dot{\kappa}_r=0$。积分式 (8-17) 并注意到，当 $r=1$ 时，$\dot{w}=0$，可得

$$\dot{w}=\dot{w}_0\ (1-r)$$

则式 (8-28) 满足，此处 $\dot{w}_0$ 为板中心 ($r=0$) 处的位移速度。这表示在板中心有一个退化了的塑性铰环。此点坡度不连续，二阶导数为无穷大，这点对应于屈服六边形的尖角 B 点，这种不连续并不破坏流动法则。故所选速度场即不破坏流动法则也不破坏边界约束，满足机动许可的条件。故 $p=1$ 同时也是极限荷载的上限。于是

$$q_- = q_+ = q_0 = \frac{6M_0}{R_1^2} \tag{8-29}$$

为问题的完全解

现在考虑周边固定圆板受均布荷载作用时的情况。

由于对称，板在塑性状态时，其中心的应力点仍位于 B 点（因为 B 点满足 $M_r=M_\theta=M_0$），如仍取 $\dot{w}$ 为 r 的递减函数，则应有 $\dot{\kappa}_\theta=-\frac{\mathrm{d}\dot{w}}{\mathrm{d}r}>0$，于是应力迹线应为 BCD [图 8-8 (c)]。

考虑到在板的边界上弯矩为负值，则如固定边界上不是塑性铰环的话，就必然是转角和位移速度为零。但是，这时不可能全板都在 BC 上，如限定在 $r=\eta$ 圆内相应于 BC，$r>\eta$ 区域内相应于 CD，则在 CD 区有 $\dot{\kappa}_r=-\dot{\kappa}_\theta$（因为 CD 线对于 $\dot{\kappa}_r$ 和 $\dot{\kappa}_\theta$ 为等倾斜），或

$$\dot{w}'' + \frac{1}{r}\dot{w}' = 0 \tag{8-30}$$

因 $r=R_1$ 时，$\dot{w}=0$，则微分方程 (8-30) 即

$$(r\dot{w}')' = 0$$

给出

$$\dot{w}= C_1 \ln \frac{r}{R_1} (r > \eta)$$

即 $\dot{w}$ 与 $\ln (r/R_1)$ 成反比例。而在固定边界 $r=R_1$ 处有

$$\dot{w}' \neq 0$$

因而固定边界必为一塑性铰环，且有 $M_r (R_1) = -M_0$。

以上讨论说明，全板必然分为两个塑性区。其中在 $0<r<\eta$ 区间，遵守塑性格式 BC，在 $\eta<r<1$ 区间，遵守塑性格式 CD。相应于塑性格式 C 的 $r=\eta$ 值是需要我们确定的。

在 $0<r<\eta$ 区间，当用前面定义的无量纲的量表示时，有

$$m_r = 1 - pr^2; m_\theta = 1$$

当 $r=\eta$ 时，相应于 C 点，有

$$m_r(\eta) = 0$$

于是，由上式得出

$$p\eta^2 = 1 \tag{8-31}$$

在 $\eta<r<1$ 区间，设 $m_\theta - m_r = 1$，且应有 $m_r(1) = -1$，由平衡微分方程积分可得

$$\left.\begin{aligned} m_r &= \ln r + \frac{3}{2}p(1-r^2) - 1 \quad (\eta < r < 1) \\ m_\theta &= \ln r + \frac{3}{2}p(1-r^2) \end{aligned}\right\} \tag{8-32}$$

式（8-32）满足固定边界 $m_r(1) = -1$ 的条件，同时还应满足在 $r=\eta$ 处塑性格式 C 的要求，即应有

$$m_r(\eta) = \ln\eta + \frac{3}{2}p(1-\eta^2) - 1 = 0 \tag{8-33}$$

由式（8-31）、（8-33）得

$$\eta^2 = \frac{1}{p}$$

$$3p - \ln p - 5 = 0 \tag{8-34}$$

解式（8-34）后，可得极限荷载的下限为

$$p_- = 1.876$$

可以证明，这个解同时也是机动许可的解，因而它是完全解。于是，极限荷载为

$$q_0 = \frac{11.256M_0}{R_1^2} \tag{8-35}$$

§8.5 矩形板的塑性极限分析

在圆板受轴对称荷载作用的情况下，广义力退化为两个主弯矩 M_r、M_θ。这就使问题得到了很大的简化。此外，因屈服条件退化为平面曲线，从而容易求得完全解。对矩形板，情况要复杂得多。主要是由于主弯矩方向往往难以确定。因而屈服条件至少应在 M_x、M_y、M_{xy}三维空间中来描述。对这类问题，很难求得问题的完全解。以下介绍求极限荷载的上限方法与下限方法。

一、上限方法

上限方法中，破裂线理论是值得重视的。用它对矩形钢筋混凝

土板进行塑性极限分析已被工程界广泛采用。

破裂线就是塑性铰线，塑性铰线与梁中的塑性铰的概念相同，只不过此时不只是一个截面进入塑性状态而形成塑性铰，而是沿一条线形成一个很窄的塑性带。今后我们把因正弯矩达到屈服极限 M_0 而形成的破裂线称为正破裂线；把因负弯矩达到 M_0 而形成的破裂线称为负破裂线。

破裂线把一个刚塑性板分成几个不同的刚性区。或者说，各刚性板块由塑性铰线把它们联结在一起，形成一个处于极限状态的破坏机构。这实际上就是假设一个破坏机构，以便应用上限定理来解题。

破裂线理论基于以下基本假定：

(1) 板在行将破坏时，在最大弯矩处形成破裂线（塑性铰线）；且可以只用直线线段来描述。

(2) 沿破裂线只有等于常数的弯矩 M_0 作用，扭矩和横剪力均略去不计，即认为沿破裂线没有相对滑动和扭曲。

(3) 破裂线之间板块的弹性变形与板块绕破裂线的刚体转动相比很小，可略去不计。

(4) 在各种可能的破坏机构（即机动许可的速度场）中，总会给出一个较接近实际的破坏机构。

由此可见，构造合适的破裂线是重要的，为了得到最优破坏机构，应考虑到下列形成破坏机构的一般规律：

(1) 由弹性理论算出的最大正弯矩的位置，一般就是正破裂线的起点；

(2) 沿固定边界形成负破裂线；

(3) 板的支承线，一般地就是转动轴线（图 8-9）；

(4) 破裂线过转动轴的交线（图 8-10）。

以上是构造破裂线的一些基本规律。可靠的最优破坏机构可由实验得出。

构造了破裂线和破坏机构，便可确定极限荷载的上限。

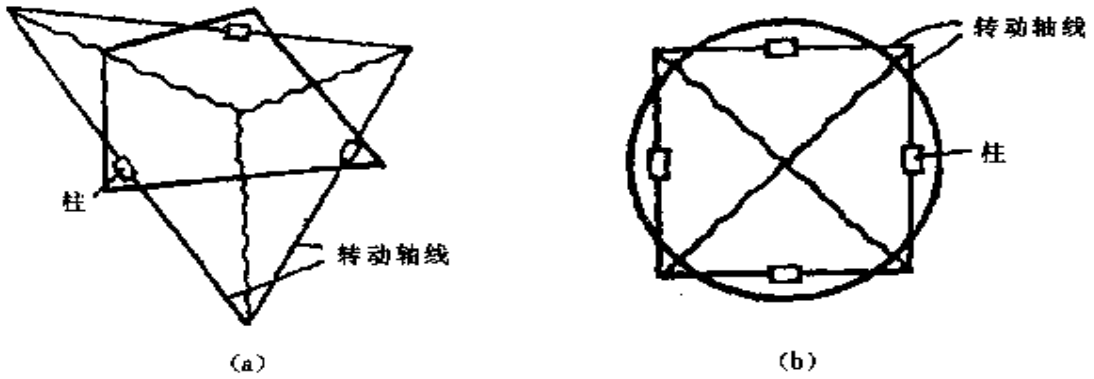


图 8-9

(a) 三柱支承四边形板；(b) 四柱支承圆板

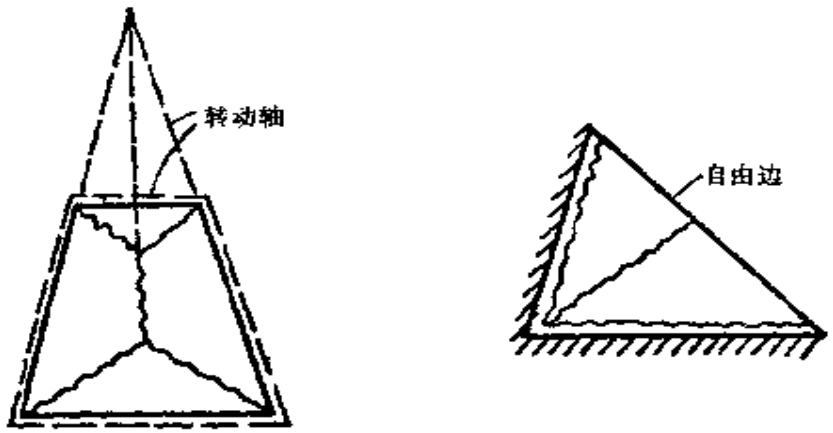


图 8-10

假定已经有了一个破坏机构，但板在破坏前的瞬时仍处于平衡状态，因而由虚位移原理，有

$$W = U$$

此处 W 为外力的总虚功，即

$$W = \sum_{n} \iint_{A} P_n \delta w \mathrm{d}A_n \quad (n = 1,2,\cdots N) \tag{8-36}$$

其中 N 为被破裂线分成的刚性板块数。

U 为板的总虚耗散能

$$U = \sum_n \left(\int_l M_0 \theta \mathrm{d}S \right) \tag{8-37}$$

其中 l 为各破裂线的长度。

为计算方便起见，我们可以把力矩矢量投影到该刚性板块 j 的空间固定转动轴 C 上去（图 8-11），然后乘以相应的该板块的“标准”转角，即板块对 C 轴的转角 $\overline{\theta}_j$，即

$$U = \sum_{j=1}^{N} \overline{\theta}_j \overline{M}_{0j} l_j \tag{8-38}$$

此外 $\overline{M}_{0j}$ 为 j 板块的力矩矢量在 C 轴上的投影（图 8-11），l_j 为第 j 板块破裂线在固定转动轴 C 上的投影的绝对值之和（图 8-11）。

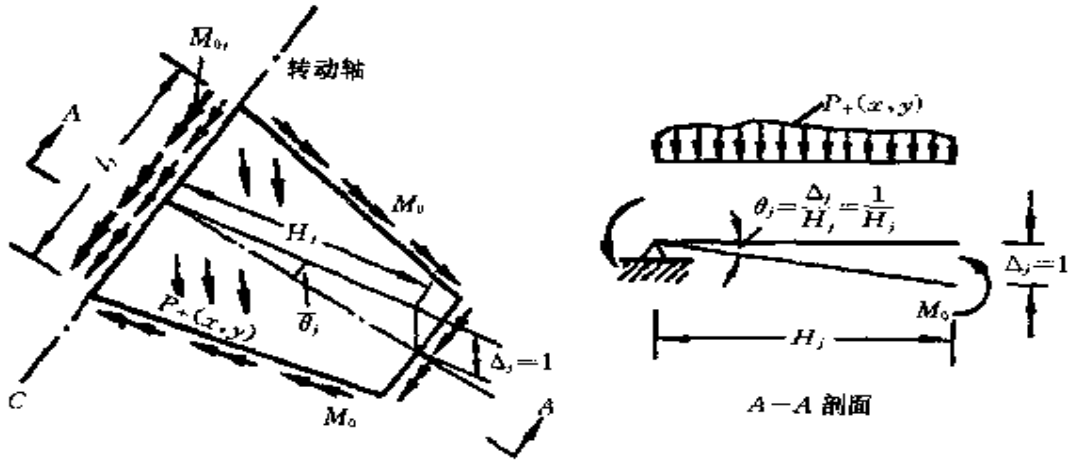


图 8-11

为要求得最优破坏机构，即最小的上限解 P_+，我们引进 x_1，x_2，x_3，…x_r 变量，它们完全确定了破坏机构的形式。对于给定的板的极限荷载的表达式为

$$P_+ = M_0 f(x_1, x_2, x_3, \cdots x_r) \tag{8-39}$$

因而极限荷载中最小的一个，或即最优破坏形式，可由解下列方程组求得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial P_+}{\partial x_1}=0\\
&\frac{\partial P_+}{\partial x_2}=0\\
&\cdots\cdots\\
&\frac{\partial P_+}{\partial x_i}=0
\end{aligned}\right\} \tag{8-40}$$

例 8-1 设有半边受均布荷载作用的矩形板（图 8-12），图中阴影部分为受荷载作用的部分。

试求极限荷载的上限 P_+。

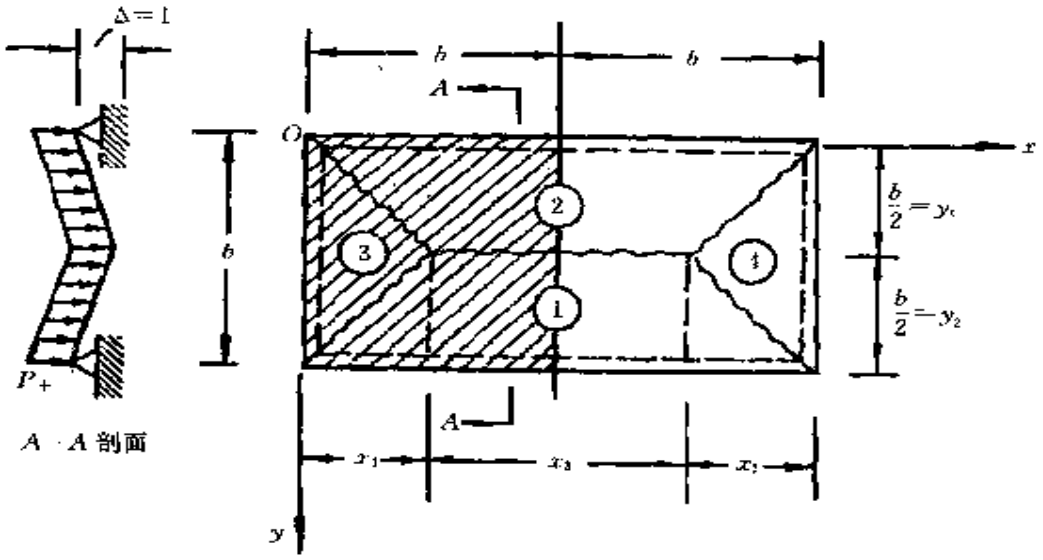


图 8-12

解 首先构造出如图所示的破坏机构，由此可分块计算外力总虚功，为

$$W_{(1)}=\frac{P_+\,b\Delta}{4}\left(b-\frac{2}{3}x_1\right)$$

$$W_{(2)}=W_{(1)}$$

$$W_{(3)}=\frac{P_+ b\Delta}{6}x_1$$

$$W_{(4)}=0$$

故外力的总虚功为

$$W=\frac{P_+ b\Delta}{2}\left(b-\frac{1}{3}x_1\right)$$

板的总虚耗散能为

$$U=U_{(1)}+U_{(2)}+U_{(3)}+U_{(4)}$$

$$=4M_0\Delta+4M_0\Delta+M_0\frac{b}{x_1}\Delta+M_0\frac{b}{x_2}\Delta$$

$$=M_0\left[8+b\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right)\right]\Delta$$

由 $W=U$ 可得

$$P_+=\frac{2M_0}{b\left(b-\frac{x_1}{3}\right)}\left[8+b\left(\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\right)\right]$$

为求 P_+的最小值，我们假定 $x_1=0.3b$，$x_2=\kappa b$，于是

$$P_+=\frac{2M_0}{0.9b}\left[8+\left(\frac{1}{\kappa}+3.33\right)\right]$$

当 $\kappa=1$，$x_2=b$ 时，上式取最小值。用此结果，并令 $x_1=\kappa_1 b$ 则得

$$P_+=\frac{6M_0}{b^2}\left[\left(\frac{9\kappa_1+1}{\kappa_1(3-K_1)}\right)\right]$$

可用作图法求 P_+的最小值。图 8-13 给出了 κ_1 与 $P_+/6M_0b^2$ 的关系曲线，由图可得出 P_+取最小值时，κ_1 的相应值为

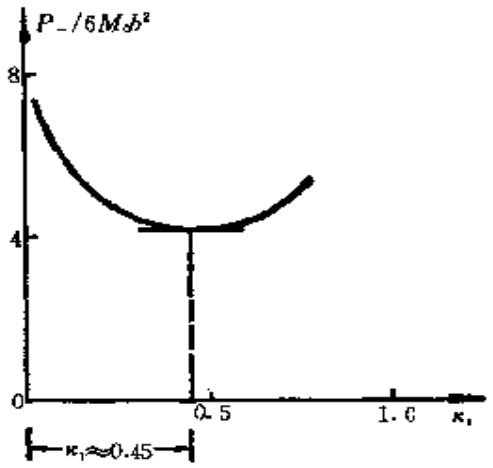


图 8-13

$$\kappa_1 \approx 0.45$$

于是 $x_1=0.45b$ 时，得最优上限解为

$$P_+ = \frac{26.3M_0}{b^2}$$

二、下限方法

如能找到一个应力场，它能够满足静力许可的全部条件，包括屈服条件、应力边界条件和平衡方程，则相应的荷载即为极限荷载的下限。

对于矩形板来说，由屈服条件[①]

$$m_x^2 + m_y^2 - m_x m_y + 3m_{xy}^2 = 1 \qquad (8\text{-}41)$$

是 m_x、m_y、m_{xy}空间的一个曲面，静力许可的内力场难以确定，所以寻求下限解要困难得多。以下我们进行一些简化，即假定在内力场中，扭矩 $m_{xy}=0$。

① 见参考文献 [24]。

在受均布荷载作用的矩形板(图 8-14) 情况下，我们取下列内力场

$$\left.\begin{aligned} M_x &= C_1\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right) \\ M_y &= C_2\left(\frac{b^2}{4}-y^2\right) \\ M_{xy} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

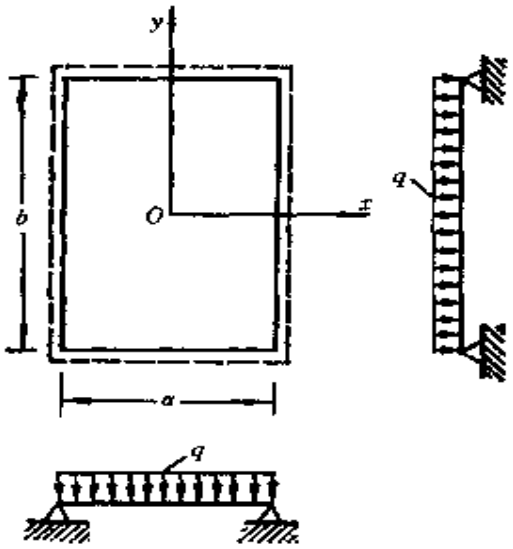


图 8-14

为了满足板的平衡方程，必有

$$C_1 + C_2 = \frac{q}{2} \tag{b}$$

最大弯矩发生在板的中心 $x=0$，$y=0$ 处（图 8-14)。在板中心处 M_x 和 M_y 应同时达到塑性极限弯矩 M_0 值，将 $x=y=0$ 及 $M_x=M_y=M_0$ 代入式 (a) 得

$$C_1 = 4M_0/a^2; C_2 = 4M_0/b^2 \tag{c}$$

由此将式 (c) 代入式 (b)，得极限荷载的下限 q_- 为

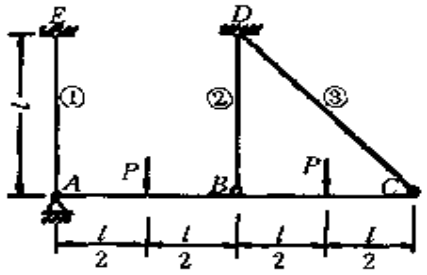
$$q_- = 8M_0\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \tag{d}$$

由以上讨论看出，为求下限解，重要的是选取适当的静力许可的应力场。在非对称情况下，寻求适当的静力场往往是很困难的。为了简化计算可考虑将屈服条件进行简化，以求得近似解。

实践上，在具体计算时，对给定问题，可设法求出其下限解及上限解，然后，取二者之平均值做为所要求的结果。

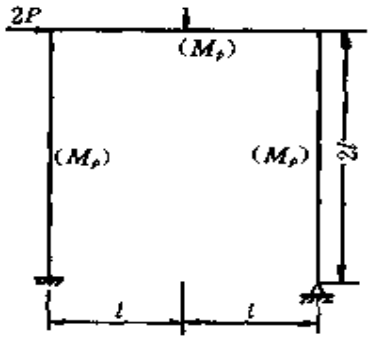
习　题

8.1　已知桁架如图所示，杆 AC 的刚度为无穷大，其余杆件截面积均为 A。试用静力法与机动法求该桁架的极限荷载 P_1。



题 8.1 图

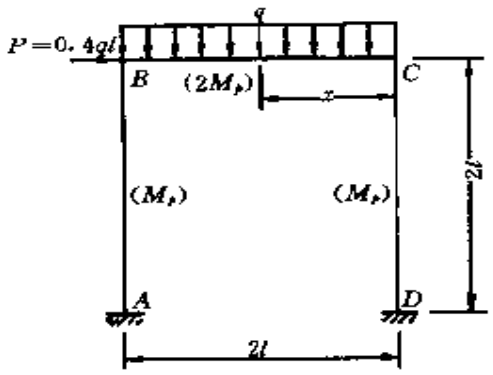
8.2　试用机动法求图示桁架的极限荷载。



题 8.2 图

8.3　试用静力法计算图示刚架的极限荷载。已知柱和梁的极限

弯矩分别为 M_p 和 $2M_p$。



题 8.3 图

第九章　动力学问题

§9.1　一般概念

前面几章，我们讨论了结构物在静载荷作用下的塑性分析。这些分析对于了解结构的应力分布特性以及塑性极限设计，最小重量设计等有重要意义。但当物体受局部撞击、爆炸波载荷、地震载荷以及热冲击、海浪冲击等这类载荷作用时，物体（或结构）的动力反应行为和静力作用时有很大差别。对动载下的结构物，若不做塑性动力行为的研究而沿用静力学的办法则可能导致完全错误的结论。所以人们在生产实践中很早便注意了塑性动力学的研究[①]。

塑性动力学和塑性静力学的主要差别在于在分析问题时不能忽略物体运动时的惯性以及应变率效应等动力学特有的问题。当物体受到突加的短时强载荷作用时，由于物体的惯性，突加载荷对物体各部分质点的扰动不可能同时发生，而要经过一个传播过程，即由扰动区逐步传播到未扰动区。这种现象常称为应力波的传播。由于载荷强度大，扰动区的应力状态可能已不再是弹性状态，而是塑性应力状态，这就要研究塑性波的传播等相关的复杂问题。

对于像梁、板、壳这类结构，它们的结构尺寸总有一个方向的尺寸或两个方向的尺寸远小于其它方向的尺寸，而动力载荷作用的方向又往往就在尺寸最小的方向。在这种情况下，应力波在这一方向传播所需要的时间比起载荷作用的时间要短若干数量级。因此，应

① 见参考文献 [23]。

力波现象很快就消失，结构的动力效应主要表现在结构的弯曲变形随时间的变化，即所谓结构的塑性动力响应。

由此可见塑性动力学问题首先是塑性波的传播和塑性动力响应两大类的问题。此外，尚有与动力失效、失稳相关的穿甲与侵彻的问题，屈曲与断裂的问题等等。

固体材料在动载荷作用下具有与静力作用下不同的力学性质，这就影响到塑性动态本构关系的建立。当允许采用静态塑性本构关系时，则应视为是一种简化的方案。以后常会遇到这种情况。

最主要的固体材料动力特性可列出以下三项：

(1) 屈服极限有明显的提高，如图 9-1 (a) 所示。屈服极限 σ_0 随应变率的提高有明显的提高为 σ_{d0}(σ_{d0}称为动力屈服极限)。图中为钨铝合金材料，试件尺寸为直径 1mm，长度 0.5mm，动力荷载持续为 8μs，应变达 30%。

(2) 瞬时应力随应变率的提高而提高，如图 9-1 (b) 所示[①]。图中曲线 0—0，0—1，0—2，0—3，0—4，0—5 分别对应的应变率为 0.195kPa/s，19.5kPa/s，195kPa/s，1.95MPa/s，19.5MPa/s。

(3) 有明显的应变率历史效应，如图 9-2 所示，图中曲线 1 的应

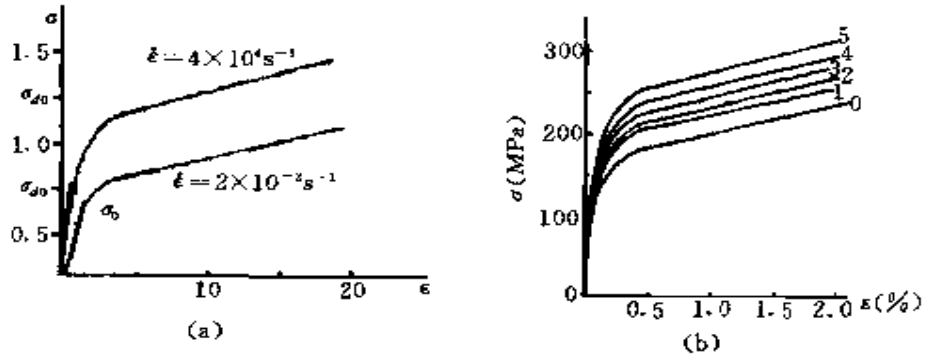


图 9-1

(a) Gorham O. A. 的实验结果 (1979)；(b) Liu 等的实验结果 (1979)

① 见参考文献 [23]。

变率为 0.001s^{-1}，曲线 2 的应变率为 25s^{-1}。

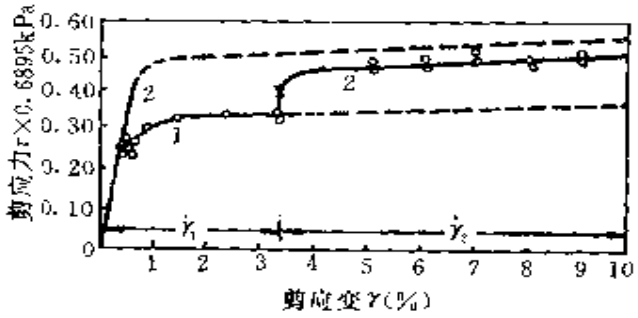


图 9-2　Nicholas 的实验结果（1971）

§9.2　最简单的刚塑性系统的动力响应

由于变形的塑性部分比弹性部分为大，在动力作用下，系统在变形过程中塑性变形所吸收的能量远远超过弹性变形部分所吸收的能量，因此，在许多工程问题中，为了简化计算，往往允许略去变形的弹性部分，从而得到刚塑性模型（图 9-3）。其中图 9-3（a）为理想刚塑性模型；图 9-3（b）为刚性线性强化模型。

现在考虑一个单自由度刚塑性系统，当外力 $p(t)$ 小于流动极限 R_0 时，系统处于静止状态。只有当 $p(t)$ 大于 R_0 时，系统才开始运动。所以，运动开始的条件为 $p(t_1)=R_0$。

此处 t_1 为系统开始运动的时间。于是刚塑性系统线性强化的运

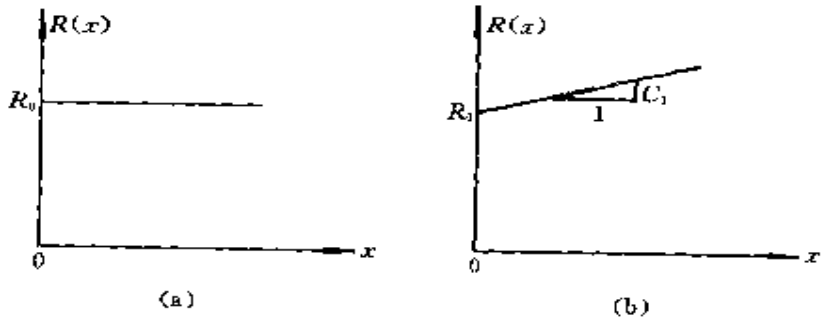


图 9-3

动方程为

$$m\ddot{x} + (R_0 + C_1 x) = p(t) \tag{9-1}$$

式中 C_1 为强化系数。初始条件为

$$x(t_1) = 0; \dot{x}(t_1) = 0 \tag{9-2}$$

如果系统为理想刚塑性的，则 $C_1=0$，运动方程为

$$m\ddot{x} + R_0 = p(t) \tag{9-3}$$

式 (9-3) 在初始条件式 (9-2) 上的解为

$$x = \frac{1}{m}\left[t\int_{t_1}^{t} p(t)\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t} tp(t)\mathrm{d}t - R_0\frac{(t-t_1)^2}{2}\right] \tag{9-4}$$

此处利用了下列等式

$$\int \mathrm{d}t \int p\mathrm{d}t = t\int p\mathrm{d}t - \int tp\mathrm{d}t \tag{9-5}$$

假设系统在开始运动后的某一时刻 t^* ($>t_1$) 到达最大位移，此时速度为零。由此可得确定 t^* 的方程式

$$\frac{1}{t^*-t_1}\int_{t_1}^{t^*} p(t)\mathrm{d}t = R_0 \tag{9-6}$$

当已给定载荷形式 $p(t)$，流动极限 R_0 之后，则可由下列方程组求解运动开始的时刻 t_1、最大位移 x^* 及最大位移到达的时间 t^*

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{m}\left[\frac{1}{2}R_0(t^{*2}-t_1^2) - \int_{t_1}^{t^*} tp(t)\mathrm{d}t\right] \\ p(t_1) &= R_0 \\ \frac{1}{t^*-t_1}\int_{t_1}^{t^*} p(t)\mathrm{d}t &= R_0 \end{aligned}\right\} \tag{9-7}$$

其中 x^* 的表达式已应用式 (9-6) 消去了积分项 $\int_{t_1}^{t^*} p(t)\mathrm{d}t$。

下面分两种载荷情况计算系统的最大位移及最大位移到达的时

间。

一、突加恒载

此时，$p(t)=P=\text{const}$，于是，由式（9-7）第二式可见。当 $P>R_0$ 时，$t_1=0$；当 $P=R_0$ 时，t_1 可取任意值；当 $P<R_0$ 时，t_1 不存在，即系统处于静止状态。将 $p(t)=P=\text{const}$ 代入式（9-4），得到系统在突加恒载作用下的运动规律为

$$x=\frac{1}{m}\frac{P-R_0}{2}(t-t_1)^2 \tag{9-8}$$

当 $P>R_0$ 时，式(9-8) 为($t_1=0$)

$$x=\frac{1}{m}(P-R_0)\frac{t^2}{2} \tag{9-9}$$

系统的位移将随时间的增长而无限地增加。当 $P=R_0$ 时，t_1 不定，x 的值不定，即 $0\leqslant x\leqslant\infty$。当 $P<R_0$ 时，系统处于静止状态，$x\equiv 0$，因此，在突加恒载作用下，理想刚塑性系统的位移不存在最大值。

二、正弦半波载荷

载荷的规律为

$$\left.\begin{aligned} p(t)&=P\sin\pi\frac{t}{T}，当\ t\leqslant T\\ p(t)&=0，当\ t\geqslant T\end{aligned}\right\}$$

系统的最大位移可能出现在卸载之前，即 $t^*\leqslant T$，和卸载之后 $t^*\geqslant T$。

$t^*\leqslant T$ 的情况 将式（9-9）代入式（9-7），可以得到

$$\left.\begin{aligned} x^*&=\frac{1}{m}\left\{\frac{R_0}{2}(t^{*2}-t_1^2)+P\left[\left(\frac{T}{\pi}\right)^2\left(\sin\pi\frac{t^*}{T}-\sin\pi\frac{t_1}{T}\right)\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.-\frac{T}{\pi}\left(t^*\cos\pi\frac{t^*}{T}-t_1\cos\pi\frac{t_1}{T}\right)\right]\right\}\\ \sin\pi\frac{t_1}{T}&=\frac{R_0}{P}\\ \frac{T}{\pi}&\frac{\cos\pi\frac{t_1}{T}-\cos\pi\frac{t^*}{T}}{t^*-t_1}=\frac{R_0}{P}\end{aligned}\right\} \tag{9-10}$$

$t^* < t$ 的情况将式（9-9）代入式（9-7），可以得到

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{m}\left\{\frac{R_0}{2}(t^{*2}-t_1^2) - P\left[-\left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \sin\pi\frac{t_1}{T} + \right.\right.\\ &\qquad \left.\left.\frac{T}{\pi}\left(T + t_1\cos\pi\frac{t_1}{T}\right)\right]\right\}\\ \sin\pi\frac{t}{T} &= \frac{R_0}{P}\\ \frac{T}{\pi}\frac{\cos\pi\frac{t_1}{T}+1}{t^*-t_1} &= \frac{R_0}{P} \end{aligned}\right\} \tag{9-11}$$

从式（9-11）消去 t_1 和 t^* 后，得到最大位移表达式

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{R_0}{m}\left(\frac{T}{\pi}\right)^2\left[\frac{(3-\sqrt{1-k^2})(1+\sqrt{1-k^2})}{2k^2} - \frac{\pi-\sin^{-1}k}{k}\right]\\ k &= R_0/P \end{aligned}\right\} \tag{9-12}$$

x^*-k 的关系曲线如图 9-4 所示。

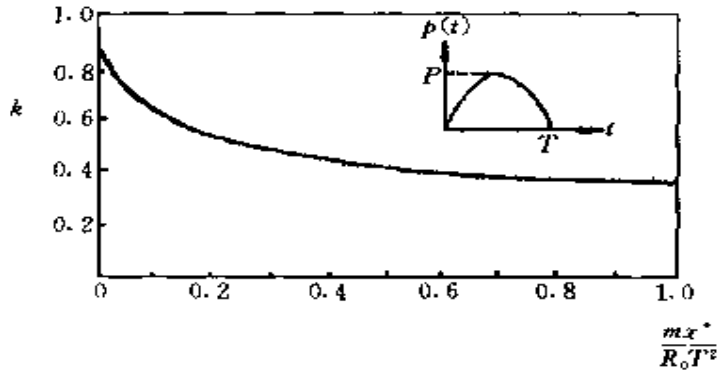


图 9-4

§9.3 刚塑性简支梁的动力响应

设刚塑性简支梁跨长为 $2l$，单位长度上的质量为 m，受到均布动载荷 $q(t)$ 作用［图 9-5（a）］，现在讨论梁的动力响应。

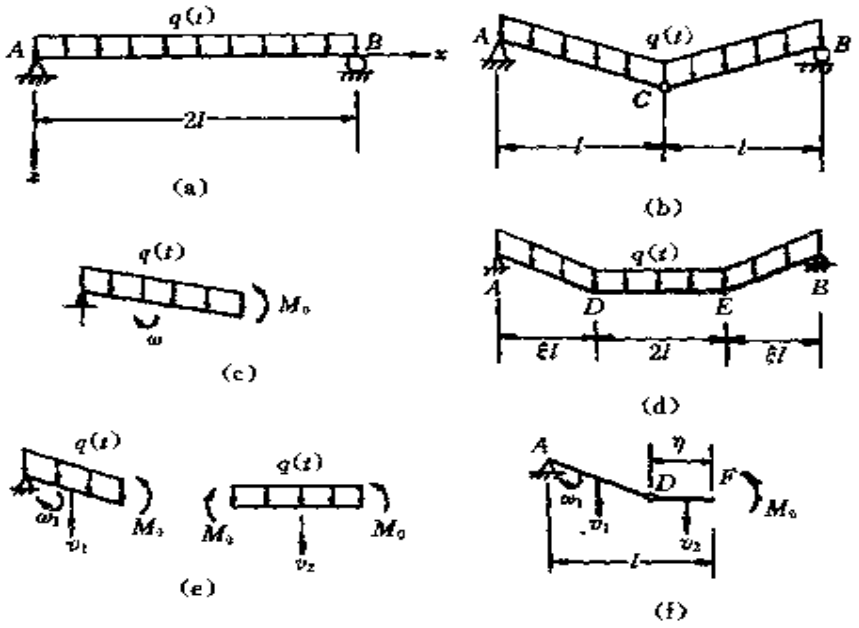


图 9-5

第一种情况 当载荷值比较小时，梁处于刚性状态，不产生任何变形，因而梁静止不动。在此阶段，梁内的弯矩值小于极限值 M_0，当梁内最大弯矩到达极限值时，这一阶段终结，梁将在中点形成一个塑性铰 [图 9-5 (b)、(c)]，并开始运动，所以，梁开始运动时的载荷为

$$M_{\max} = \frac{1}{2}ql^2 = M_0 \tag{9-13}$$

引入载荷参数

$$\mu = ql^2/M_0 \tag{9-14}$$

于是梁处于刚性状态的条件为

$$\mu \leqslant 2 \tag{9-15}$$

第二种情况 当载荷参数满足下列条件

$$\mu \geqslant 2 \tag{9-16}$$

则梁开始运动，这时，梁运动的一种可能性态是全梁被中心不动塑

性铰分为两个刚性区段，每个刚性区段都绕支座作定轴转动［图 9-5 (b)］，因此，可以只讨论一半梁的运动就够了，例如讨论左半梁［图 9-5 (c)］，设此段梁的角速度为 ω，则根据动量矩定理（对 A 点求动量矩），应有

$$\frac{1}{2}ql^2 - M_0 = \frac{1}{3}ml^3\dot{\omega}$$

或者

$$\frac{ml^3\dot{\omega}}{M_0} = \frac{2}{3}(\mu - 2) \tag{9-17}$$

这一运动要求在 $0 \leqslant x \leqslant l$ 内，弯矩不超过极限值 M_0，为此，要求 $x = l$ 处的弯矩为最大值，即

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} \leqslant 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{9-18}$$

根据梁的“平衡”条件，有

$$\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}x^2} = -\bar{q} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{9-19}$$

此处 $\bar{q}$ 是横向分布载荷 q 与惯性力（$-m\ddot{w}$）的合力，即

$$\bar{q} = q + (-m\ddot{w}) = q - m\dot{\omega}x \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{a}$$

于是由式 (9-18) 及式 (9-19)、式 (a) 可见，式 (9-17) 所描述的运动只适用于

$$\bar{q} = q - m\dot{\omega}x \geqslant 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

或者

$$\bar{q} \geqslant m\dot{\omega}l \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{b}$$

将式 (9-17) 代入式 (b)，得到

$$\mu \geqslant \frac{3}{2}(\mu - 2)$$

或者

$$\mu \leqslant 6$$

于是，结合式 (9-16)，可得第二种运动只在下列载荷范围内才能实

现

$$2 \leqslant \mu \leqslant 6 \tag{9-20}$$

当 $\mu>6$ 时，则在左半梁内（右半梁亦同）将有部分区段的弯矩图是向下凸的，即 $\frac{d^2M}{dx^2}>0$，或者说，在左半梁内，将有一个弯矩的极值点（最大值），在图 9-6 中画出了 $\bar{q}$、Q 和 M 的图形，其中实线为 $\mu<6$ 的情况，虚线为 $\mu>6$ 的情况。

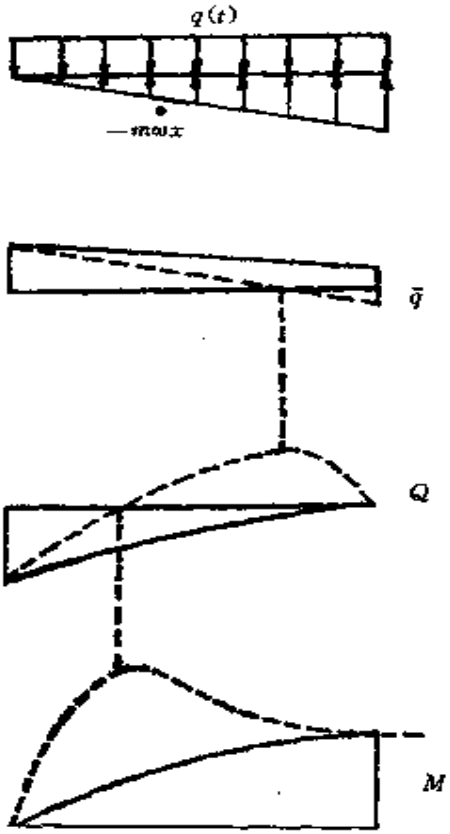


图 9-6

在式（9-20）的范围内，梁的运动规律可由式（9-17）的积分求得

$$\frac{ml^2}{M_0}\dot{w}=\frac{ml^3}{M_0}\omega\frac{x}{l}=\left(\frac{3}{2}\int_0^t\mu dt-3t\right)\frac{x}{l} \tag{9-21}$$

$$\frac{ml^2}{M_0}w=\frac{3}{2}\left(\int_0^t dt\int\mu dt-t^2\right)\frac{x}{l}\qquad(0\leqslant t\leqslant t_f) \tag{9-22}$$

此处 t_f 为左、右两半梁的角速度减小到零的时刻，此时，中间塑性铰消失，在式（9-21）中，令 $t=t_f,\dot{w}=0$，就得到确定 t_f 的式子

$$2t_f-\int_0^{t_f}\mu dt=0 \tag{9-23}$$

已知 $\mu(t)$，则 t_f 可由式（9-23）惟一确定，在式（9-22）中，令 $t=t_f$，并用式（9-23）表示 t_f，可以得到 t_f 时梁的挠度为

$$\frac{ml^2}{M_0}w_f=\frac{3}{2}\left[\int_0^{t_f}dt\int\mu dt-\frac{1}{4}\left(\int_0^{t_f}\mu dt\right)^2\right]\frac{x}{l}$$

再一次指出，以上所描述的运动只限于 $2\leqslant\mu\leqslant6$ 的载荷范围内。

第三种情况 当 $\mu>6$ 时，梁的运动将有另一种性态。这时，梁被分成 AD、DE 及 EB 三个区段［图 9-5 (d)］，D、E 为移动的塑性铰（或称为刚塑性交界）。随着载荷的增大，两侧刚性区段的长度将逐渐减小，即塑性铰向梁端移动，反之，如果载荷减小，则塑性铰向梁跨中心移动。由于对称性，两侧刚性区段仍绕支座作定轴转动，而中间区段则作平行移动，没有转动运动。

先讨论中间区段的运动方程［图 9-5 (e)］，由受力情况可见，在此区段内，$M\equiv M_0$。因此这是塑性区段，根据刚塑性梁在塑性区段的运动方程

$$m\ddot{w}=g(x,t) \tag{9-24}$$

有

$$m\ddot{w}_2=m\dot{v}_2=q(t) \tag{9-25}$$

即载荷强度与惯性力集度大小相等，但方向相反，或者，对整个 DE 段应用刚塑性梁在刚性区段的运动方程

$$mS\,\dot{v}_c = \sum_i P_i \tag{9-26}$$

$$\frac{1}{12}mS^3\dot{\omega} = \sum_i M_i \quad \text{（对质心求矩）} \tag{9-27}$$

将有

$$\left.\begin{aligned} 2ml^3\,\ddot{w}_2 &= 2l'q \\ \frac{1}{12}m\,(2l')^3\,\dot{\omega}_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

由上式第一式可得式（9-25），由第二式及初始条件 $\omega_2=0$，可得中间段 DE 没有转动。积分式（9-25），得到

$$\dot{w}_2 = v_2 = \int \dot{v}_2 dt = \frac{1}{m}\int q(t)dt \tag{9-28}$$

或者写成

$$\frac{ml^2}{M_0}\,\dot{\omega}_2 = \int \mu dt \tag{9-29}$$

中间区段的运动求出之后，易于讨论两侧刚性区段的运动。显然，设刚性区段的角速度为 ω_1［图 9-5 (e)］，则在此段内（$0 \leqslant x \leqslant \xi l$），任一截面的运动速度为

$$\frac{ml^2}{M_0}\,\dot{w}_1 = \frac{ml^3}{M_\phi}\omega_1\,\frac{x}{l} \tag{9-30}$$

在这里，我们没有根据载荷建立运动方程，为了确定角速度 ω_1，可以应用塑性铰处的运动速度连续条件，即

$$\dot{w}\,(\xi_-) = \dot{w}\,(\xi_+)$$

或者

$$\dot{w}\,(\xi l) = \dot{w}_2$$

将式（9-30）及（9-29）代入上式，得到

$$\frac{ml^3}{M_0}\omega_1\xi = \int_0^t \mu dt \tag{9-31}$$

实际上，式（9-31）也可由塑性铰处的下述条件得到

$$[\ddot{w}] + l\dot{\xi}\,[\omega] = 0 \tag{a}$$

其中 $[\ddot{w}]=\ddot{w}(\xi_+)-\ddot{w}(\xi_-)=\ddot{w}_2-\ddot{w}_1(\xi)=\dfrac{q}{m}-\dot{\omega}_1\xi l$；$[\omega]=\omega_2-\omega_1=-\omega$，将这些值代入式（a），得到

$$\dot{\omega}_1\xi l-\frac{q}{m}+\omega_1\dot{\xi}\,l=0$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega_1\xi l)=\frac{q}{m}=\frac{M_0}{ml^2}\mu$$

积分上式，就得到式（9-31）。

在式(9-31)中，还有一个函数 $\xi(t)$有待确定。为此，可以对左半梁[图 9-5(f)]应用动量定理和动量矩定理。前者可以建立计算左支承反力(剪力)的公式，后者可以建立 ω_1 和 ξ 的另一个关系式。

设梁左端支座的反力为 R_1，在 DE 段内，$Q=0$，$M=M_0$，所以左半梁的受力情况如图 9-5（f）所示，其中未画出载荷 q（t）。于是，根据动量定理，有

$$-R_1+ql=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^l m\dot{w}\mathrm{d}x=m\int_0^l\ddot{w}\mathrm{d}x \tag{9-32}$$

由式（9-32）可得

$$R_1=ql-m\int_0^l\ddot{w}\mathrm{d}x \tag{9-33}$$

在式（9-33）中，被积函数 $\ddot{w}$ 在不同的区段有不同的表达式。

对左半梁应用动量矩定理（对左端 A 取矩），有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^l m\dot{w}\,x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}ql^2-M_0 \tag{9-34}$$

由于 $t=0$ 时，$\dot{w}=0$，在 $x=l$ 处，$M=M_0$，所以式（9-34）可以对时间积分，得到

$$m\int_0^l\dot{w}\,x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^t ql^2\mathrm{d}t-\int_0^t M_0\mathrm{d}t$$

或者写成

$$\frac{m}{M}\int_0^l\dot{w}\,x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^t\mu\mathrm{d}t-t \tag{9-35}$$

将各区段的速度式（9-30）及（9-29）代入式（9-35），积分后得到 ω_1 与 ξ 的第二个关系式

$$\frac{1}{3}\frac{ml^3}{M_0}\omega_1\xi^3-\frac{1}{2}\xi^2\int_0^t\mu dt+t=0 \tag{9-36}$$

从式（9-31）及（9-36）可以解出

$$\left(\frac{ml^3}{M_0}\omega_1\right)^2=\frac{1}{6t}\left(\int_0^t\mu dt\right)^3 \tag{9-37}$$

$$\xi^2=6t/\int_0^t\mu dt \tag{9-38}$$

上面第一式（9-37）给出了左端刚性区段的角速度，第二式（9-38）描述了塑性铰沿梁运动的规律，由此可以求出函数 $\xi(t)$。显然，式（9-38）可用于：①已知时刻 t，确定塑性铰的位置；②对于给定的截面（已知 ξ），计算塑性铰到达截面的时间 t。

§9.4 塑性铰的运动规律

对于上述刚塑性梁动力响应问题的研究，关键在于了解非定常塑性铰的运动规律，即求出函数 $\xi(t)$。当然，我们可以仿照上节的做法，直接建立关于函数 $\xi(t)$ 的微分方程，实际上，将式（9-31）对 t 连续两次求导数，分别得到

$$\frac{ml^3}{M_0}(\omega_1\dot{\xi}+\dot{\omega}_1\xi)=\mu \tag{a}$$

$$\frac{ml^3}{M_0}(2\dot{\omega}_1\dot{\xi}+\omega_1\ddot{\xi}+\ddot{\omega}_1\xi)=\dot{\mu} \tag{b}$$

对左端刚性区段 AD 应用动量矩定理，得

$$\frac{1}{3}ml^3\xi^3\dot{\omega}_1=\frac{1}{2}ql^2\xi^2-M_0$$

或者

$$\frac{ml^3}{M_0}\dot{\omega}_1=\frac{3\mu}{2\xi}-\frac{3}{\xi^3} \tag{c}$$

将上式对 t 求导数，得到

$$\frac{ml^3}{M_0}\ddot{\omega}_1=\frac{3}{2}\left(\frac{\dot{\mu}}{\xi}-\frac{\mu\dot{\xi}}{\xi^2}\right)+\frac{9\dot{\xi}}{\xi^4} \tag{d}$$

应用式（a）、（c）、（d）消去式（b）中的 ω_1，$\dot{\omega}_1$ 及 $\ddot{\omega}_1$，得到对于 $\xi(t)$ 的非线性方程

$$\ddot{\xi}(6-\mu\xi^2)+\dot{\xi}(\dot{\mu}\xi^2+6\dot{\xi}/\xi+3\mu\xi\dot{\xi})=0 \tag{9-39}$$

求（9-39）方程的解析解是很困难的，因此，与上节相仿，对左半梁应用动量矩定理及塑性铰处的速度连续条件（或者应用间断面上的运动连续条件）间接求解，实际上，由式（9-29）及（9-37）可得左半梁的速度分布为

$$\frac{ml^2}{M_0}\dot{w}=\frac{ml^3}{M_0}\dot{\omega}_1\frac{x}{l}=\left[\frac{\left(\int\mu dt\right)^3}{6t}\right]^{1/2}\frac{x}{l}\quad\left(0\leqslant\frac{x}{l}\leqslant\xi\right) \tag{9-40}$$

$$\frac{ml^2}{M_0}\dot{w}=\int\mu dt\quad\left(\xi\leqslant\frac{x}{l}\leqslant 1\right) \tag{9-40'}$$

这就回避了直接求解方程（9-39）。

下面讨论可动塑性铰沿梁的运动。将式（9-38）对时间求导数，得到

$$\xi\dot{\xi}=\frac{3}{\left(\int\mu dt\right)^2}\left(\int\mu dt-\mu t\right) \tag{9-41}$$

如果塑性铰是自左向右移动，则 $\xi\dot{\xi}\geqslant 0$，于是由上式应有

$$\int\mu dt\geqslant\mu t$$

将 $\mu=ql^2/M_0$ 代入，得到

$$\int q(t)dt\geqslant tq(t) \tag{9-42}$$

式（9-42）等价于

$$dq(t)/dt\leqslant 0 \tag{9-43}$$

现在，假设载荷规律满足不等式（9-43），讨论梁的运动，为此，首

先求 $t=0$ 时塑性铰的位置 ξ_0。在式（9-38）中，令 $t=0$，得到

$$\xi_0^2 = \lim_{t\to 0} \frac{6t}{\int_0^t \mu dt} = \frac{6}{\mu(0)} = \frac{6M_0}{q(0)l^2} \tag{9-44}$$

设 $x' = \xi l$ 为塑性铰所在位置，则由式（9-44）可知塑性铰的初始位置为

$$x'^2_0 = \frac{6M_0}{q(0)} \tag{9-45}$$

塑性铰起始位置以左刚性区段的挠度可由式（9-40）积分求得

$$\frac{ml^2}{M_0}w = \frac{x}{l}\int \frac{\left(\int \mu dt\right)^{3/2}}{(6t)^{1/2}}dt \quad (0 \leqslant x \leqslant x'_0) \tag{9-46}$$

塑性铰起始位置以右各点的运动则要分为两个阶段，塑性铰通过之前称为第一阶段，塑性铰通过之后为第二阶段。塑性铰通过指定截面 x 的时间 t_* 由式（9-38）确定

$$6t_* = \frac{x}{l}\int_0^{t_*} \mu dt \tag{9-47}$$

在 $t \leqslant t_*$ 时，该截面的挠度由式（9-40′）积分求得

$$\frac{ml^2}{M_0}w = \int_0^t dt \int \mu dt \quad (t \leqslant t_*, x' \leqslant x \leqslant l) \tag{9-48}$$

在 $t > t_*$ 时，该截面的挠度则为两个阶段挠度之和，第二阶段的挠度计算式与式（9-46）相似

$$\frac{ml^2}{M_0}w = \int_0^{t_*} dt \int \mu dt + \frac{x}{l}\int_{t_*}^t \frac{\left(\int \mu dt\right)^{3/2}}{(6t)^{1/2}}dt \quad (x'_0 \leqslant x \leqslant x') \tag{9-49}$$

在塑性铰移动到 $x' = l$ 之前，上述结果都是正确的。当梁上这对相向运动的塑性铰在中点汇合以后，梁运动的第一相即告终结，第二相的运动开始。

梁的第二相运动是在中点有一个不动塑性铰，梁被这个塑性铰分为两个相等的刚性区段，设 t_1 为第二相运动开始的时间，于是，当 $t = t_1$ 时，$\xi = 1$。由式（9-45）可得

$$6t_s = \int_0^{t_s} \mu \mathrm{d}t \tag{9-50}$$

式（9-50）实际上就是式（9-47）中 $x = l$ 的情况。将式（9-50）代入（9-37），得到梁在第一相末的角速度为

$$(\omega_1)_s = \frac{M_0}{ml^3}\int_0^{t_s} \mu \mathrm{d}t \tag{9-51}$$

$t = t_s$ 时的位移分别用式（9-46）及（9-49）计算

$$\left.\begin{aligned} \frac{ml^2}{M_0}w_s &= \frac{x}{l}\int_0^{t_s} \frac{\left(\int \mu \mathrm{d}t\right)^{3/2}}{(6t)^{1/2}}\mathrm{d}t \quad (0 \leqslant x \leqslant x') \\ \frac{ml^2}{M_0}w_s &= \int_0^{t_*} \mathrm{d}t \int \mu \mathrm{d}t + \frac{x}{l}\int_{t_*}^{t_s} \frac{\left(\int \mu \mathrm{d}t\right)^{3/2}}{(6t)^{1/2}}\mathrm{d}t \quad (x_0' \leqslant x \leqslant l) \end{aligned}\right\} \tag{9-52}$$

式中 t_* 由式（9-40）计算，当 $x = l$ 时，$t_* = t_s$，于是梁中点在 t_s 时的挠度为

$$\frac{ml^2}{M_0}w(l, t_s) = \int_0^{t_s} \mathrm{d}t \int \mu \mathrm{d}t \tag{9-53}$$

梁在第二相的运动与上述第二种情况相同，运动方程仍为

$$\frac{ml^3}{M_0}\dot{\omega} = \frac{2}{3}(\mu - 2)$$

积分上式即可得到梁在第二相运动期间的角速度

$$\frac{ml^3}{M_0}\omega = \frac{ml^3}{M_0}(\omega_1)_s + \frac{3}{2}\int_{t_s}^{t} \mu \mathrm{d}t - 3(t - t_s) \tag{a}$$

由式（9-50）及（9-51），可知

$$\frac{ml^3}{M_0}(\omega_1)_s = \int_0^{t_s} \mu \mathrm{d}t = 6t_s = \frac{3}{2}\int_0^{t_s} \mu \mathrm{d}t - 3t_s \tag{b}$$

将式（b）代入式（a），得到

$$\frac{ml^3}{M_0}\omega = \frac{3}{2}\int_0^{t} \mu \mathrm{d}t - 3t \tag{9-54}$$

再积分式（9-54），得到角位移，乘以 x 后，即得第二相运动中梁的

挠度为

$$\frac{ml^2}{M_0}w = \frac{ml^2}{M_0}w_s + \frac{3}{2}\left[\int_{t_s}^{t}\mathrm{d}t\int\mu\mathrm{d}t - (t^2 - t_s^2)\right]\frac{x}{l} \qquad (9\text{-}55)$$

式中 w_s 由式（9-52）计算。

第二相运动一直延续到梁的角速度等于零，此时，梁的运动完全停止，梁的（残余）挠度到达最大值，由于所讨论的情况是 $\mathrm{d}q(t)/\mathrm{d}t < 0$，所以，在梁停止运动以后，即处于刚性状态，梁内弯矩都小于极限值，设 t_f 梁停止运动的时刻，它可由式（9-54）来确定

$$2t_f - \int_0^{t_f}\mu\mathrm{d}t = 0 \qquad (9\text{-}56)$$

梁中点的挠度最大，其值为式（9-55）

$$\frac{ml^2}{M_0}w(l,t_f) = \frac{ml^2}{M_0}w_s(l,t_s) + \frac{3}{2}\int_{t_s}^{t_f}\mathrm{d}t\int\mu\mathrm{d}t - \frac{3}{2}(t_f^2 - t_s^2)$$

将式（9-50）、（9-53）及（9-56）代入上式，得到

$$\begin{aligned}\frac{ml^2}{M_0}w(l,t_f) &= \frac{ml^2}{M_0}w_{\max}\\ &= \int_0^{t_s}\mathrm{d}t\int\mu\mathrm{d}t + \frac{3}{2}\int_{t_s}^{t_f}\mathrm{d}t\int\mu\mathrm{d}t\\ &\quad - \frac{3}{8}\left[\left(\int_0^{t_s}\mu\mathrm{d}t\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\int_0^{t_s}\mu\mathrm{d}t\right)^2\right]\end{aligned} \qquad (9\text{-}57)$$

当 $\mu(t)$ 已知时，则不难由式（9-57）求出梁的最大残余挠度。

在图 9-7 中，给出了三种载荷（矩形脉冲、三角形脉冲和指数函数载荷，它们都满足 $\mathrm{d}q(t)/\mathrm{d}q \leqslant 0$）情况下刚塑性简支梁的最大挠度与载荷的关系曲线

$$\left.\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{q_0 l^2}{M_0}\\ w_0 &= \frac{ml^2}{M_0 T_0^2}w_{\max}\\ T_0 &= \frac{1}{q_0}\int_0^{\infty}q(t)\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}58)$$

图 9-7 中三条曲线非常接近，因此，在满足 $q_0 T_0 = \int_0^{\infty}q(t)\mathrm{d}t$ 的情况下，载荷形式的差别对本例简支梁的最终残余挠度的影响是很小的。

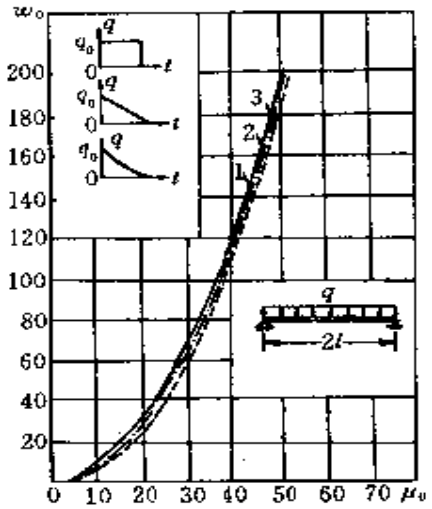


图 9-7

上述关于简支梁动力响应的结果，可直接移用到两端固定的梁，只需将所有公式内的 M_0 代换为 $2M_0$。这是因为，两端固定梁运动时，除了在两端形成塑性铰之外，跨中至少有一个塑性铰。于是在靠近支座的刚性区段上作用的力偶共为 $2M_0$，它使刚性区段绕支座转动（当然还有外载荷作用），而在简支梁的情况下，只有一个力偶 M_0 作用，两端固定梁与简支梁除了这点不同外，所有运动性态和变形情况都完全类似。

§9.5 刚塑性交叉梁系的动力响应分析

设刚塑性正交交叉梁系受到均布动载荷 q (t) 作用，梁系在纵向有 S 根主梁［图 9-8 (a)，图中 $N=2$］，横向有 N 根次梁，且 $N \gg S$。次梁两端固定。假定载荷 q (t) 直接作用在次梁上，然后由支承点以集中反力的形式传递到主梁。设主梁的刚度足够大，当载荷不太大时，主梁处于刚性状态，静止不动，载荷 $q(t)$ 的变化如图所示，于是，次梁为一根两端固定的三跨连续梁。当载荷逐渐增大时，次梁发生运动，主梁静止不动，当载荷足够大时，主梁也将形成塑

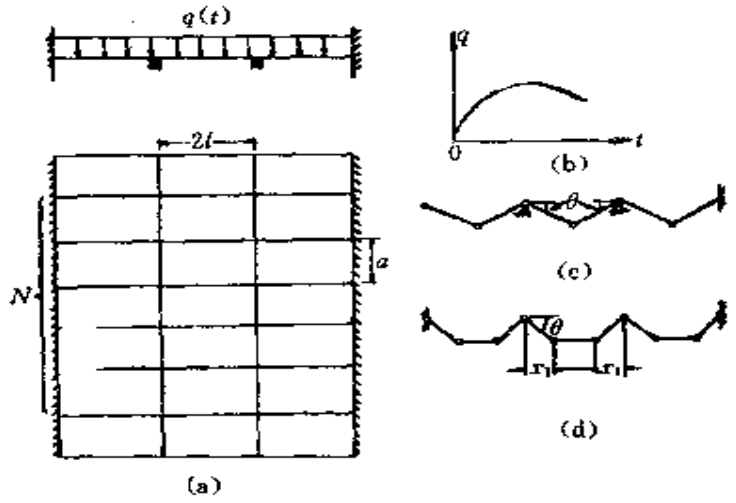


图 9-8

性铰，发生运动。在这里，我们只讨论主梁不动的情况。

三跨连续梁发生运动，必须在梁端、支承处及梁跨中点形成塑性铰，如图 9-8（c）所示。易于求得次梁的静态极限载荷为

$$\frac{1}{4}q_0 l^2 = M_c$$

引入载荷系数

$$\mu' = \frac{ql^2}{2M_0}$$

正如上面所指出的，此处以 $2M_0$ 代换式（9-14）中的 M_0，为了加以区别，用 μ' 代替 μ。于是前面的分析结果全部可以移到本例，只是注意载荷变化规律不同。在前例中，假定载荷是递减的，因此，梁或者是处于静止（刚性）状态［当 μ（0）<2］；或者是第二种情况的运动［当 $2\leqslant\mu$（0）$\leqslant 6$］；或者是第三种情况的运动［设 $\mu(0)>6$］。在此处，则是随着 q（t）的变化，梁相继进入不同相的运动。显然，当 $\mu'<2$ 时，或者 $q<q_0$ 时，次梁静止不动；当 $\mu'\geqslant 2$ 时，次梁开始第一相的运动。

第一相　$2\leqslant\mu'\leqslant 6$ 或 $q_0\leqslant q\leqslant 3q_0$

这时，次梁的运动模式如图 9-8（c）所示。这与前面第二种情况相同，每跨有两个刚性区段，梁跨中点有一个不动塑性铰与之相连，运动方程为

$$\frac{ml^3}{2M_0}\dot{\omega}=\frac{3}{2}(\mu'-2)$$

或者

$$\frac{1}{3}ml\ddot{\theta}=\frac{1}{2}ql^2-M_0 \tag{9-59}$$

式中 $\omega=\dot{\theta},\dot{\omega}=\ddot{\theta}$。式（9-59）即式（9-17），只不过用 $2M_0$、μ' 分别代换 M_0 及 μ，以下的分析与上例第二种情况相似。

第二相　$\mu'>6$ 或 $q>3q_0$

设 t_1 为第一相运动的终止时间，即 $q(t_1)=3q_0$，这时的角速度及塑性铰的位置是第二相运动的初始条件，在第二相运动中，次梁每跨之内出现两个塑性铰，运动模式如图 9-8（d）所示。由于对称性，只讨论左半跨的运动，设 x_1 为可动塑性铰的位置（坐标原点设在次梁每跨的左端），则运动方程为

$$\frac{1}{3}mx_1^3\ddot{\theta}=\frac{1}{2}qx_1^2=2M_0 \quad (0\leqslant x\leqslant x_1) \tag{9-60}$$

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1\dot{\theta})=q \quad (x_1\leqslant x\leqslant l) \tag{9-60'}$$

在前例第三种情况的运动中，我们没有直接建立运动方程，而是根据塑性铰处的速度连续条件建立式（9-31）。

从式（9-60）可以解出 $x_1=x_1(t)$，为此，将式（9-60）写成

$$mx_1^3\dot{\theta}=\frac{3}{2}qx_1^2-6M_0 \tag{a}$$

其中

$$mx_1^3\ddot{\theta}=m\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^3\dot{\theta})-3x_1^2\dot{\theta}\,\dot{x}_1\right]=m\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^3\dot{\theta})-\frac{3}{2}\dot{\theta}\,x_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^2)\right]$$

将上式代入式（a），并利用式（9-60'）消去 q，得到

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^3\dot{\theta})=\frac{3}{2}\left[mx_1\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^2)+m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1\dot{\theta})x_1^2-4M_0\right]$$

$$=\frac{3}{2}\left[m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^3\dot{\theta})-4M_0\right]$$

由上式可解出（注意到 $M_0=\frac{1}{4}q_0l^2$）

$$m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^3\dot{\theta})=12M_0=3q_0l^2$$

当 $t=t_1$ 时，$x_1=l$，于是积分上式，得

$$mx_1^3\dot{\theta}=ml^3\dot{\theta}\ (t_1)+3q_0l^2(t-t_1) \tag{b}$$

积分式（9-60′），得

$$mx_1\dot{\theta}=ml\dot{\theta}\ (t_1)+\int_{t_1}^{t}q\mathrm{d}t \tag{c}$$

令式（b）、（c）两侧相除，就得到非定常塑性铰的运动规律 $x_1(t)$

$$\left(\frac{x_1}{l}\right)^2=\frac{3q_0(t-t_1)+ml\dot{\theta}\ (t_1)}{\int_{t_1}^{t}q\mathrm{d}t+ml\dot{\theta}\ (t_1)} \tag{9-61}$$

如果载荷形式满足不等式 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t\leqslant 0$，则载荷的峰值为 $q(0)$，于是 $t_1=0,\dot{\theta}\ (t_1)=0$[即 $t=0$ 时 $\mu(0)>6$]，式（9-61）变为

$$\left(\frac{x_1}{l}\right)^2=\frac{3q_0t}{\int_0^t q\mathrm{d}t}=\frac{6t}{\int_0^t\mu\mathrm{d}t} \tag{9-62}$$

我们又回到了式（9-38）。

求式（9-61）对时间的导数，得到

$$2\left(\frac{x_1}{l}\right)\left(\frac{\dot{x}_1}{l}\right)=\frac{3q_0\left[\int_{t_1}^{t}q\mathrm{d}t-q(t-t_1)\right]+ml\dot{\theta}\,(t_1)(3q_0-q)}{\left[\int_{t_1}^{t}q\mathrm{d}t+ml\dot{\theta}\,(t_1)\right]^2}$$

(9-63)

从式（9-63）可见，如果 t_1 以后，载荷是递增的，则有 $\dot{x}<0$，这表明塑性铰向跨端移动；反之，如果 t_1 以后，载荷是递减的，则 $\dot{x}>0$，塑性铰向梁跨中点移动，中间区段的长度减小。当两个塑性铰在梁跨中点汇合时，梁的运动进入第三相（条件是 $t>t_1$，$\mathrm{d}q/\mathrm{d}t<0$），其运动模式与第一相者相似，仍由式（9-59）描述。

最后计算次梁与主梁之间相互作用的反力，为此，对刚性区段 OA 应用动量定理（图 9-9），有

$$qx_1-R=mx_1\left(\frac{1}{2}x_1\ddot{\theta}\right)$$

式中 R 为主梁所承受反力的一半（因主梁要同时承受来自左右两跨次梁的反力），将式（9-59）代入上式消去 $\ddot{\theta}$，得到

$$R=\frac{qx_1^2+12M_0}{4x_1}\qquad(9\text{-}64)$$

因而主梁处于刚性状态（静止状态）的条件为

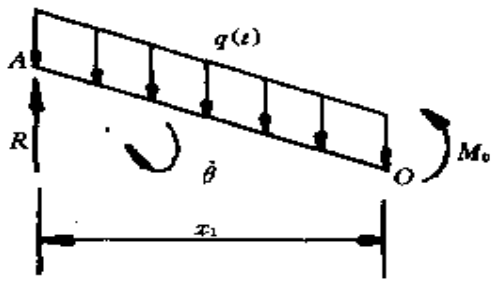


图 9-9

$$\lambda M_0' \geqslant an(n+1-\beta)\frac{qx_1^2+12M_0}{4x_1} \tag{9-65}$$

其中，N 为偶数时，$n=\frac{1}{2}N,\beta=0$；N 为奇数时，$n=\frac{1}{2}(N+1)$，$\beta=1$；当主梁两端简支时，$\lambda=1$，两端固定时 $\lambda=2$。a 为次梁的间距（图 9-8），M_0' 为主梁的极限弯矩。

§9.6 刚塑性体位移限界定理

一般说来，在结构动力分析问题中，往往由于屈服面和本构关系的复杂性而带来的数学上的困难往往难以克服，但在工程应用上，有时只需寻求结构在冲击载荷作用下的最大残余变形的上限或下限便可指导工程设计。从另一方面看，限界定理可以给出动力分析正确性的校验，因而限界定理的研究具有理论与实用的意义。

设有刚性理想塑性体受冲击载荷作用，即当 $t=0$ 时，物体获得初速度 $\dot{u}_i^0(\vec{x})$，在 $t>0$ 时，物体的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}&\hat{p}_i(\vec{x},t)=0 \quad \text{在 } S_\sigma \text{ 上}\\&\hat{\dot{u}}_i(\vec{x},t)=0 \quad \text{在 } S_u \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{9-66}$$

此处 $S=S_\sigma\cup S_u, S_\sigma\cap S_u=0$，如果不考虑体积力。于是，物体在运动过程中便没有外力作功。其初始动能为

$$K_0=\frac{1}{2}\int_V \rho\dot{u}_i^0\dot{u}_i^0 \mathrm{d}V \tag{9-67}$$

在上述条件下，Martin 证明了下列两个具有实用价值的定理。

定理一 在冲击载荷作用下，刚塑性体的运动持续时间 t_f 满足下列不等式

$$t_f \geqslant \int_V \rho\dot{u}_i^0\dot{u}_i^* \mathrm{d}V / D(\dot{\varepsilon}_{ij}^*) \overset{\text{def}}{=} t_f^* \tag{9-68}$$

式中 $\dot{u}_i^*$ 为任一与时间无关的，运动可能的、连续的速度场，$D(\dot{\varepsilon}_{ij}^*)$ 为对应于 $\dot{u}_i^*$ 的塑性耗散能，即

$$D(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}) = \int_V \sigma_{ij}^{*}\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\,\mathrm{d}V > 0 \tag{9-69}$$

式中 σ_{ij}^{*} 为与 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}$ 关连的、满足流动法则的应力场，但不一定是动力许可应力场。

证明 根据卓柯公设，有

$$\sigma_{ij}^{*}\dot{\varepsilon}_{ij}^{*} \geqslant \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}$$

此处 σ_{ij} 为真实应力场，将上式两侧在体积 V 内积分，并应用虚速度原理及式（9-66）、（9-69），可得

$$\int_V \sigma_{ij}^{*}\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\,\mathrm{d}V = D(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}) \geqslant -\int_V \rho\ddot{u}_i\dot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}V \tag{9-70}$$

因为 $\dot{u}_i^{*}$ 与时间无关，在小变形情况下，有下列关系

$$\int_V \rho\ddot{u}_i\dot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\dot{u}_i\dot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}V$$

将上式代入式（9-70），得到

$$D(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}) \geqslant -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\dot{u}_i\dot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}V$$

令上式两侧在 $t = 0$ 及 $t = t_f$ 时段内积分，因为 $D(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*})$ 与时间无关，所以可得

$$t_f \geqslant \frac{1}{D(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*})}\left(-\int_V \rho\dot{u}_i\dot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}V\right)\Bigg|_0^{t_f}$$

已知 $t = 0$ 时 $\dot{u}_i = \dot{u}_i^{0}$，$t = t_f$ 时 $\dot{u}_i = 0$（运动停止），所以由上式可得式（9-68），于是定理一证毕，这个定理表明

$$t_f^{*} = \int_V \rho\dot{u}_i^{0}\dot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}V / D(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*})$$

是物体运动持续时间 t_f 的下限。只要 $\dot{u}_i$ 在 V 内是连续的（不必连续可微），则式（9-68）中的积分总是可以逐段计算的。

如果体积力不等于零，但不因时间而变化，则式（9-68）应改为

$$t_f \geqslant \int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^* \mathrm{d}V / [D(\dot{\varepsilon}_{ij}^*) - \int_V F_i \dot{u}_i^* \mathrm{d}V] \tag{9-71}$$

定理二 在冲击载荷作用下，刚塑性体表面的最大位移 $u_i(t_f) = u_i^f$，满足下列不等式

$$\int_S p_i^0 u_i^f \mathrm{d}S \leqslant \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^0 \mathrm{d}V = K_0 \tag{9-72}$$

式中 $p_i^0 = \sigma_{ij}^0 n_j$ 为一与时间无关的、与静力允许应力场相平衡的面力，称为安全载荷。此处仍然假定速度场是连续的。

证明 根据卓柯公设，有

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \geqslant \sigma_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}$$

此处 σ_{ij}、$\dot{\varepsilon}_{ij}$ 为真实解，在体积 V 内积分上式两侧，并利用虚速度原理、虚功率原理及式 (9-66)，可得下列不等式

$$-\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i \mathrm{d}V \geqslant \int_S T_i^0 \dot{u}_i \mathrm{d}S \tag{9-73}$$

类似于前面所述，有

$$\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K)$$

因为 T_i^0 与时间无关，所以有

$$\int_S T_i^0 \dot{u}_i \mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S T_i^0 u_i \mathrm{d}S$$

将以上两式代入式 (9-73)，得到不等式

$$-\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} \geqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S T_i^0 u_i \mathrm{d}S$$

在 $t = 0$ 与 $t = t_f$ 时段内积分上式两侧，并注意到 $t = 0$ 时 $u_i = 0, K = K_0$；$t = t_f$ 时 $u_i = u_i^f, K = 0$，可得

$$K_0 \geqslant \int_S p_i^0 u_i^f \mathrm{d}S$$

于是式 (9-72) 得证。定理二给出了受冲击载荷作用的刚塑性体运动

停止时表面位移（最大位移）的某种上限不等式。

为了计算物表面指定点处在指定方向上最大位移的上限，可在该点处沿指定方向施加一个集中载荷 R，则由式（9-72）可得 R 方向的最大位移的上限为

$$\delta_f \leqslant \frac{K_0}{R_S} \leqslant \frac{K_0}{R^0} \tag{9-74}$$

其中 R^0 为安全载荷，R_S 为静态极限载荷，根据静态极限分析的下限定理，$R_S \geqslant R^0$

例 9-1 设有受均布冲击载荷作用的梁（图 9-10），跨长为 $2l$，单位长度的质量为 m，当 $t=0$ 时，梁获得初速 v_0，试求梁运动的持续时间 t_f 的下限及梁跨中点最大挠度的上限。

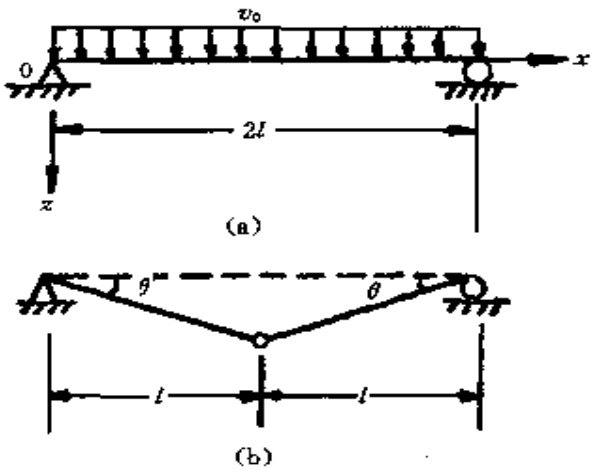


图 9-10

解 取运动可能速度场如图 9-10（b）所示，即

$$\dot{u}_i^* = \dot{w}^* = x\dot{\theta} \quad (0 \leqslant x \leqslant l)$$

于是

$$D(\dot{w}^*) = 2M_0\dot{\theta}$$

$$\int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^* \, \mathrm{d}V = 2\int_0^l m v_0 x\dot{\theta} \, \mathrm{d}x = m v_0 l^2 \dot{\theta}$$

根据定理--，有

$$t_f \leqslant \int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^* \, dV / D(\dot{u}_{ij}^*) = mv_0 l^2 \dot{\theta} / (2M_0 \dot{\theta}) = \frac{1}{2} mv_0 l^2 / M_0$$

所得结果实际上是精确解。

现在，在梁跨中点加一个集中力 R，显然，静态极限载荷为

$$R_S = 2M_0/l$$

于是，由第二定理可得

$$\delta_f \leqslant \frac{K_0}{R_S} = (2mlv_0^2/2)/(2M_0/l) = mv_0^2 l^2/(2M_0)$$

真实解为 $\delta_f = mv_0^2 l^2/(3M_0)$，所以上式所示结果为真实解的一个上限。

例 9-2 设有受均布冲击载荷作用的圆板（图 9-11），当 $t = 0$ 时 $\dot{w} = v_0$，试求 t_f 的下限及板中心最大挠度的上限。

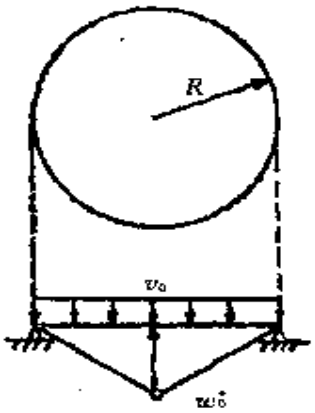


图 9-11

解 取运动可能速度场如图 9-11 所示，即

$$\dot{w}^* = \left(1 - \frac{r}{R}\right)\dot{w}_0^*$$

其中 $\dot{w}_0^*$ 为板中心的速度，于是

$$D(\dot{w}^*) = \int_0^R M_0(\dot{K}_r^* + \dot{K}_\theta^*)2\pi r dr = 2\pi M_0 \dot{w}_0^*$$

$$\int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^* \, dV = \int_0^R m v_0 \dot{w}^* \, 2\pi r dr = \frac{\pi}{3} m v_0 R^2 \dot{w}^*$$

式中 m 为板中面单位面积上的质量。根据定理一，得

$$t_f \leqslant m v_0 R^2 / (6 M_0)$$

在圆板中心加一集中力 R，已知 $R_S = 2\pi M_0$，于是根据定理二，有

$$\delta_f \leqslant \frac{K_0}{R_S} = (m\pi R^2 v_0^2/2)/(2\pi M_0) = m v_0^2 R^2/(4M_0)$$

1970 年，Morales 和 Neville 提出了一个刚塑性体在冲击载荷作用下表面最终位移 u_i^f 的最大值 $(u_i^f)_{\max}$ 的下限。在这里称之为定理三。

定理三 在冲击载荷作用下，刚塑性体表面上最大位移 $(u_i^f)_{\max}$ 有一个下限，即

$$(u_i^f)_{\max} \geqslant t_f^* \left[\int_V \rho \dot{u}_i^0 \tilde{\dot{u}}_i^* \, dV - \int_0^{t_f^*} D(\dot{u}_i^*) dt \right] / \left(\int_V \rho \tilde{\dot{u}}_i^2 dV \right) \tag{9-75}$$

式中

$$\dot{u}_i^* = \tilde{\dot{u}}_i^* \langle (t_f^* - t)/t_f^* \rangle \tag{9-76}$$

$\tilde{\dot{u}}_i^*$ 为与时间无关的一个运动模式，它是 $\vec{x}$ 的连续函数，其中

$$\langle \frac{t_f^* - t}{t_f^*} \rangle = \begin{cases} (t_f^* - t)/t_f^* & (\text{当 } t < t_f^*) \\ 0 & (\text{当 } t \geqslant t_f^*) \end{cases} \tag{9-77}$$

t_f^* 为定理一中所给出的 t_f 的一个下限，即 $t_f \geqslant t_f^*$，于是有

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_i^* &= \tilde{\dot{u}}_i^* \quad (\text{当 } t = 0) \\ \dot{u}_i^* &= 0 \quad (\text{当 } t \geqslant t_f^*) \end{aligned}\right\} \tag{9-78}$$

证明 根据卓柯公设，有

$$\sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* \geqslant \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^*$$

式中

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{*} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j}^{*} + \dot{u}_{i,j}^{*})$$

σ_{ij}^{*} 为与 $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}$ 关联的应力场，将上式两侧在体积 V 内积分，并应用虚速度原理及式 (9-66)，得到

$$\int_V \sigma_{ij}^{*}\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\mathrm{d}V = D(\dot{u}_i^{*}) \geqslant -\int_V \rho\ddot{u}_i\dot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}V \tag{a}$$

再将上式在时段 $0\sim t_f$ 内积分，得到

$$\int_0^{t_f} D(\dot{u}_i^{*})\mathrm{d}t \geqslant -\int_V \mathrm{d}V\int_0^{t_f}\rho\ddot{u}_i\dot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}t \tag{b}$$

注意到 $t > t_f^{*}$ 时，$\dot{u}_i^{*} = 0, D(\dot{u}_i^{*}) = 0$，所以上式可写成

$$\int_0^{t_f^{*}} D(\dot{u}_i^{*})\mathrm{d}t \geqslant -\int_V \mathrm{d}V\int_0^{t_f^{*}}\rho\ddot{u}_i\dot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}t \tag{c}$$

将上式右侧对时间的积分连续进行分部积分，并注意到

$$t = 0 \text{ 时}, u_i = 0, \dot{u}_i = \dot{u}_i^{0}, \dot{u}_i^{*} = \widetilde{\dot{u}}^{*}$$

$$t = t_f^{*} \text{ 时}, \dot{u}_i = 0, u_i = u_i^{f^{*}} \leqslant u_i^{f}$$

可得

$$\int_0^{t_f^{*}}\rho\ddot{u}_i\dot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}t = -\rho\dot{u}_i^{0}\widetilde{\dot{u}}_i^{*} - \rho\ddot{u}_i^{*}u_i^{f^{*}} - \int_0^{t_f^{*}}\rho u_i\dddot{u}_i^{*}\,\mathrm{d}t \tag{d}$$

根据式 (9-77)，当 $t \leqslant t_f^{*}$ 时

$$\left.\begin{aligned}\ddot{u}_i^{*} &= -\widetilde{\dot{u}}^{*}/t_f^{*},\\ \dddot{u}_i^{*} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{e}$$

将式 (d) 和 (e) 代入式 (c)，得到

$$\int_0^{t_f^{*}} D(\dot{u}_i^{*})\mathrm{d}t \geqslant \int_V\left(\rho\dot{u}_i^{0}\widetilde{\dot{u}}_i^{*} - \frac{\rho\widetilde{\dot{u}}_i^{*}u_i^{f^{*}}}{t_f^{*}}\right)\mathrm{d}V$$

或者

$$\frac{1}{t_f^*}\int_V \rho \dot{\tilde{u}}_i^* \dot{u}_i^{f^*}\,\mathrm{d}V \geqslant \int_V (\rho \dot{u}_i^0 \dot{\tilde{u}}_i^*\,\mathrm{d}V) - \int_0^{t_f^*} D(\dot{u}_i^*)\,\mathrm{d}V \qquad \text{(f)}$$

分别取运动模式为 $\dot{\tilde{u}}_1^* \neq 0$，$\dot{\tilde{u}}_2^* = \dot{\tilde{u}}_3^* = 0$，$\dot{\tilde{u}}_2^* \neq 0$，$\dot{\tilde{u}}_1^* = \dot{\tilde{u}}_3^* = 0$，$\dot{\tilde{u}}_3^* \neq 0$，$\dot{\tilde{u}}_2^* = \dot{\tilde{u}}_1^* = 0$，可得

$$\int_V \rho \dot{\tilde{u}}_1^* \dot{u}_1^{f^*}\,\mathrm{d}V \geqslant t_f^* \left[\int_V (\rho \dot{u}_1 \dot{\tilde{u}}_1^*\,\mathrm{d}V) - \int_0^{t_f^*} D(\dot{u}_1^*)\,\mathrm{d}V\right] \qquad \text{(g)}$$

利用中值定理，有

$$\int_V \rho \dot{\tilde{u}}_1^* \dot{u}_1^f \leqslant \left(u_1^{f^*}\right)_{\max} \int_V (\rho \dot{\tilde{u}}_1^*\,\mathrm{d}V) \leqslant (u_1^f)_{\max} \int_V (\rho \dot{\tilde{u}}_1^*\,\mathrm{d}V)$$

将上式代入（g），得到 $(u_1^f)_{\max}$ 的下限

$$(u_1^f)_{\max} \geqslant t_{f_0}^* \left[\int_V (\rho \dot{u}_1^0 \dot{\tilde{u}}_1^*\,\mathrm{d}V) - \int_0^{t_f^*} D(\dot{u}_1^*)\,\mathrm{d}t\right] \Big/ \int_V \rho \dot{\tilde{u}}_1^*\,\mathrm{d}V$$

类似地可以得到 $(u_2^f)_{\max}$ 及 $(u_3^f)_{\max}$ 的下限，将它们写成一般形式即得式（9-75）。于是定理三得证。

例 9-3 试用定理三，求例 9-1 中梁中点挠度的下限。

解 梁在运动中止时，其最大挠度发生在梁的跨度中点，所以可由定理三，求中点挠度的下限。运动模式仍取例 9-1 的形式，则有

$$\int_0^{t_f} D(\dot{w}^*)\,\mathrm{d}t = 2M_0\dot{\theta}\int_0^{t_f^*} \frac{t^* - t_f^*}{t_f^*}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t_f^*(2M_0\dot{\theta}) \qquad \text{(a)}$$

$$\int_v \rho \dot{u}_i^0 \dot{\tilde{u}}_i^*\,\mathrm{d}v = 2\int_0^l m v_0 x\dot{\theta}\,\mathrm{d}x = m v_0 \dot{\theta} l^2 \qquad \text{(b)}$$

$$\int_v \rho \dot{\tilde{u}}^*\,\mathrm{d}v = 2\int_0^l m x\dot{\theta}\,\mathrm{d}x = m\dot{\theta} l^2 \qquad \text{(c)}$$

由例 9-1 知道 $t_f^* = m v_0 l^2/(2M_0)$，故由定理三得

$$\delta_f \geqslant \frac{m v_0 l^2}{2M_0}\left[m v_0 \dot{\theta} l^2 - \left(\frac{m\dot{\theta} l^2}{2M_0}\right) M_0\dot{\theta}\right] \frac{1}{m\dot{\theta} l^2} \qquad \text{(d)}$$

即梁中点挠度的下限为

$$\delta = \frac{mv_0^2 l^2}{4M_0} \tag{e}$$

这一问题的精确解为 $\frac{mv_0^2 l^2}{3M_0}$，比较例 9-1 之上限解 $\frac{mv_0^2 l^2}{2M_0}$，则可得其平均值 $\frac{3mv_0^2 l^2}{8M_0}$。十分接近精确解。

§9.7 杆中弹塑性加载波及卸载波的概念

在本节中我们讨论加载和卸载时塑性应变沿半无限长弹塑性细杆的传播特点，假定杆为等截面杆。当杆变形时，其截面保持为平面，且与 x 轴垂直，忽略杆件的尺寸改变和横向变形对波传播的影响，杆件在变形过程中不发生屈曲。

于是下列控制方程为

$$\left.\begin{array}{ll} \text{连续性方程} & u_x = \varepsilon_t \\ \text{运动方程} & \rho v_t = \sigma_x \\ \text{本构方程} & \sigma = f(\varepsilon, x) \end{array}\right\} \tag{9-79}$$

或等价地写成关于位移 u 的下列方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \frac{1}{\rho} f_x \tag{9-80}$$

其中 x 为质点的物质坐标，及

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_t(\text{质点速度}) \\ \varepsilon = \dfrac{\partial u}{\partial x} = u_x(\text{应变}) \end{array}\right\} \tag{9-81}$$

其中 σ，ρ 分别为应力及材料的密度，a 为波速。

$$a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f(\varepsilon, x)}{\partial \varepsilon} \tag{9-82}$$

此处下标 x，t 分别表示对 x 和 t 求偏微商。显然，在弹性情况下，$\partial f(\varepsilon, x)/\partial \varepsilon = \partial \sigma / \partial \varepsilon = E$，于是弹性波速为 $a_0 = \sqrt{E/\rho}$。

显然有下列关系式

$$\sigma = f(\varepsilon, x) = \begin{cases} \sigma(\varepsilon) & (\text{加载时}) \\ \sigma_m - E(\varepsilon_m - \varepsilon) & (\text{卸载时}) \end{cases} \tag{9-83}$$

其中 σ_m, ε_m 分别为某质点在卸载前所到达的最大应力和最大应变，E 为弹性模量。

上述方程为双曲型偏微分方程，其特征线方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm a \tag{9-84}$$

沿两族特征线上的特征关系为

$$\mathrm{d}\sigma = \pm \rho a \mathrm{d}v \tag{9-85}$$

特征线在物理平面 (x,t) 上代表扰动的传播轨迹，a 代表波阵面传播的速度。$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a$ 为正向波，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a$ 为负向波。图 9-12 中 OA 方向为正向，$O'P$ 为负向。以下给出加载波与卸载波（弹塑性边界）的基本概念。

一、加载波

假设杆端作用有始终不减小的动力载荷且杆的初始状态是未经扰动的，这就是说初始时刻，杆中的质点的位移和速度均为零，当 $t = 0$ 时

$$u(x,0) = \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{9-86}$$

边界条件如图 9-12 所示

$$x = 0, \sigma(0,t) = -p(t), p(t) > 0 \tag{9-87}$$

采用特征线解法[①]，我们看到，在未扰动区 I 区，杆件上各质点的质点运动应力和速度均为零，在 $t = \frac{x}{a_0}$ 以前，在杆件截面 x 处，仍

① 详细解法可参考杨桂通著《塑性动力学》（新版），高等教育出版社，1999

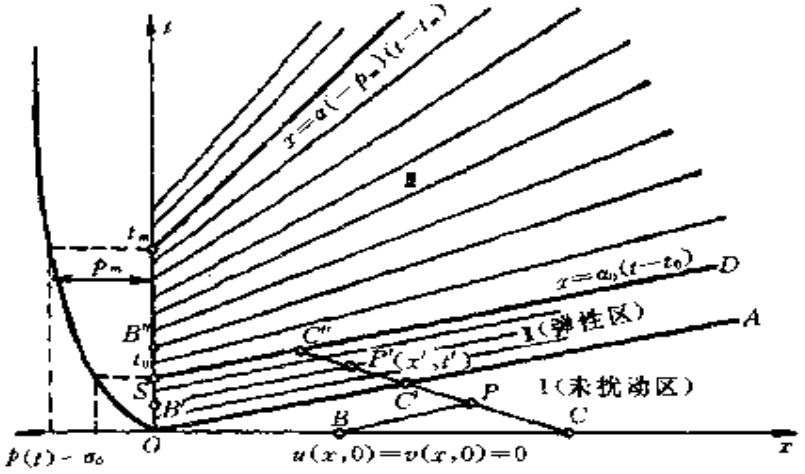


图 9-12

处于未经扰动的不变形状态。

在区域Ⅰ（弹性区）中，由式（9-85）可以得到，沿负向和正向特征线有

$$\left.\begin{aligned} v(x,t) &= -\frac{1}{\rho}\int_0^{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{a_0} \\ v(x,t) &= +\frac{1}{\rho}\int_0^{\sigma}\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{a_0}+C_1' \end{aligned}\right\} \tag{9-88}$$

在弹性区内沿正向特征线 $P'B'$，质点速度和应力均保持不变，只是沿不同的正向特征线保持不同的不变常数。

在塑性加载区Ⅱ内，可以得到类似表达

$$v(x,t)=\frac{1}{\rho}\int_0^{\sigma_{P'}}\frac{\mathrm{d}\sigma}{a(\sigma)}+\text{const} \tag{9-89}$$

在区域Ⅱ的特征线上，应力保持常数。不过由这一条特征线转向另一条特征线时，应力就将变化，因为波剖面发生了变化，对于 $\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^2}<0$ 的材料，塑性波的波剖面将逐渐变得平坦，对于 $\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon^2}>0$ 的材料，塑性波的波剖面将变陡，即所谓会聚波。

区域Ⅱ和Ⅲ中的波称为黎曼（Riemann）波，它具有以下特征：①正向特征线均为直线；②沿特征线，杆中质点的速度、应力和应变均保持不变。这样，利用给定的边界条件，整个问题便得到解决。

二、卸载波

假定在半无限长细杆的一端 $x=0$ 作用有应力 $p(t)$，在 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 区间里，应力单调增加，当 $t=t_0$ 时，应力达到极大值 p_0，此后应力又单调地减小。

$$\sigma(0,t)=\begin{cases}p_1(t),0\leqslant t\leqslant t_0 & (\text{单调增加})\\ p_2(t),t=t_0 & (\text{单调减小})\end{cases}\tag{9-90}$$

而 $p_1(t_0)=p_2(t_0)=p_0$，如图 9-13 所示。

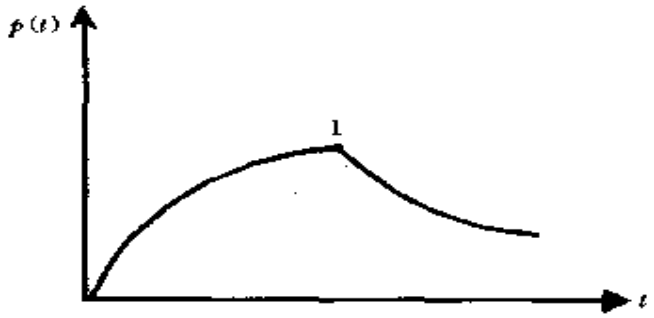


图 9-13

假定材料的应力应变关系曲线如图 9-14，加载时，沿 OAB 进行，当 $\sigma\leqslant\sigma_0$ 时为弹性阶段，当 $\sigma\geqslant\sigma_S$ 时为塑性阶段。在曲线 AB

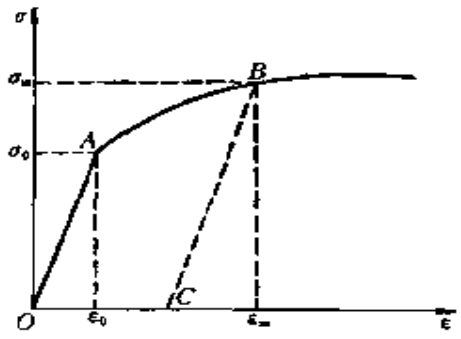
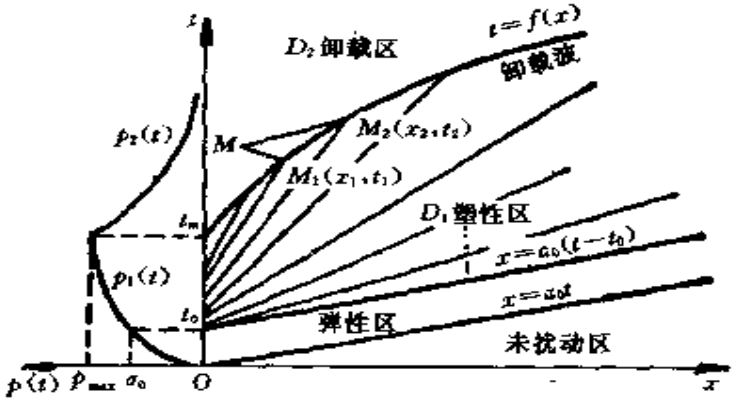


图 9-14

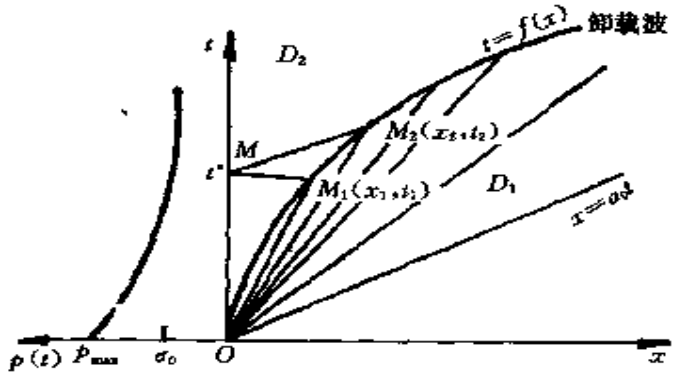
上$\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2}<0$，卸载沿直线 BC 进行，应力 σ 和应变 ε 具有如下线性关系

$$\sigma-\sigma_0(x)=E[\varepsilon-\varepsilon_0(x)] \tag{9-91}$$

式中的 $\sigma_m(x)$ 和 $\varepsilon_m(x)$ 表示某一给定截面的最大应力值和最大应变值。x 为该截面的位置坐标。在相平面 (x,t) 上，对应于 x 截面必存在这样一个时刻 t_m，在该时刻 t_m 截面 x 上的应变达到最大值 $\varepsilon_m(x)$。不同的截面开始卸载的时刻是不同的，于是，不同的数值 x，就对应着不同的 t，将这些不同的点 $M_i(x_i,t_i)$ 连接起来，在 (x,t) 平面上就画出一条曲线，它表示杆中各不同截面在不同时刻达到最大应变。这条曲线就称为卸载波，用 $t=f(x)$ 表示。它是一条弹塑性区的分界线，它的下面是塑性加载区，上面是卸载区。



(a)



(b)

图 9-15

附录一　下标记号法与求和约定

Ⅰ-1　下标记号法

本书广泛地采用下标记号法，对于含有3个独立量的集，通常用一个下标符号表示，例如，对于一点的坐标记为x_i，x_i表示（x_1，x_2，x_3）这3个量，亦即（x，y，z）；一点的位移的3个分量，记作u_i，u_i表示（u_1，u_2，u_3）或（u，v，w）。这就是说，下标i取值为1，2，3（写作$i=1$，2，3）。

在给出声明之后，i自然也取值为1，3，…n。

类似地，对于9个量的集，可用两个下标。因为每一个下标可取3个值。如a_{ij}表示a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33}这9个量；而含有27个量的集，可用3个下标表示，如a_{ijk}；含有81个量的集可用4个下标表示，如a_{ijkl}，等等。

应力分量σ_x，σ_y，…，τ_{zx}和应变分量ε_x，ε_y，…，γ_{zx}各有9个量（独立地各有6个），采用下标记号法，可记作σ_{ij}和ε_{ij}。其中$\sigma_{11}=\sigma_x$，$\sigma_{22}=\sigma_y$，…$\sigma_{31}=\sigma_{zx}=\tau_{zx}$，类似地可以写出各分量。

在谈到应力状态、应变状态时，就以其一般分量形式σ_{ij}和ε_{ij}来表示。

Ⅰ-2　求和约定

我们约定：当在同一项中，有一个下标出现两次时，则对此下标从1到3求和。并限定在同一项中不能有同一下标出现3次或3次以上。这叫作求和约定。例如

$$a_ib_i=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{Ⅰ-1}$$

$$a_{ii}=a_{11}+a_{22}+a_{33} \tag{Ⅰ-2}$$

$$a_{ij}b_j = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_j = a_{i1}b_1 + a_{i2}b_2 + a_{i3}b_3 \qquad (\text{I}-3)$$

$$a_{ij}b_ic_j = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_ic_j$$

$$= a_{11}b_1c_1 + a_{12}b_1c_2 + a_{13}b_1c_3$$
$$+ a_{21}b_2c_1 + a_{22}b_2c_2 + a_{23}b_2c_3$$
$$+ a_{31}b_3c_1 + a_{32}b_3c_2 + a_{33}b_3c_3 \qquad (\text{I}-4)$$

$$a_{ii}^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 \qquad (\text{I}-5)$$

$$(a_{ii})^2 = (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2 \qquad (\text{I}-6)$$

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2\ (\sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{31}\varepsilon_{31} + \sigma_{12}\varepsilon_{12})$$

这一求和规则也适用于含有导数的项，例如

$$a_{i,i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \qquad (\text{I}-7)$$

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \qquad (\text{I}-8)$$

应当注意求和约定是指对重复下标求和。在式（I-7）中是对 i 求和。而在式（I-8）则对 j 求和，i 在此式中没有重复，如指明 i，$j=1$，2，3，则式（I-8）有这样 3 个形式的表达式。而下列情况则为

$$\sigma_{i,jj} = \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial x_3^2} \qquad (\text{I}-9)$$

对于同一项内不重复出现的下标（或肩标）叫做自由标号。用自由标号表示一般项，它可取 1，2，3 中的任一值。在同一方程式中，各项的自由标号应相同，并表示该方程式对所有自由标号的值都成立。例如

$$x_i = c_{ij}y_j (i, j = 1, 2, 3) \qquad (\text{I}\text{-}10)$$

表示以下三个方程式成立

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 \\ x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3 \\ x_3 &= c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{I}\text{-}11)$$

附录二　变分法概要

在数学分析中，曾经讨论过函数的极值问题，变分法是这类问题的推广。

Ⅱ-1　泛函和泛函的极值问题

我们首先引入泛函的概念。泛函是指一个量，它的值依赖于一个或者几个函数。变分法的基本问题是求泛函的极值。下面是一个简单的变分问题的例子。

如给定 x、y 平面上的两定点 P_1 (x_1, y_1) 和 P_2 (x_2, y_2)（图 Ⅱ-1），求满足边界条件的连接这两点的任意曲线 $y=y(x)$ 中的最短线。于是，问题归结为，求 P_1、P_2 两点间的曲线长度

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \qquad (Ⅱ-1)$$

为最小的一条曲线。这条曲线满足连续性要求和边界条件。以后我们把这种满足给定条件的函数称为允许函数。于是，变分法问题就是在允许函数中，寻求给定泛函为极值的特定函数的问题。$L=L(y)$ 是一个泛函，因为它依赖于“变量函数” $y=y(x)$。求 P_1、P_2 两点间最短线的问题是一个变分法问题。

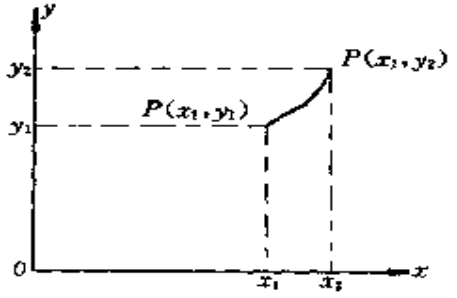


图 Ⅱ-1

上述变分法问题的一般形式为求泛函

$$J[y]=\int_{x_1}^{x_2}F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x \qquad (\text{Ⅱ-2})$$

在满足边界条件

$$y(x_1)=y_1;y(x_2)=y_2 \qquad (\text{Ⅱ-3})$$

下为极小值的函数 $y(x)$。

由数学分析知道，如一个连续函数 $f=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，在点 $x=x_0$ 处达极值（最大或最小），则 x_0 可由下列方程的解给出

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=0 \qquad (\text{Ⅱ-4})$$

或者说，若函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取极值，则 $f(x)$ 的导数在该点等于零。其另一种表达方式为

$$\mathrm{d}f=\left(\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=0 \qquad (\text{Ⅱ-5})$$

由函数 $f(x)$ 二阶导数可知

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } \mathrm{d}^2f(x_0)/\mathrm{d}x^2>0 \text{ 时，函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处取极小值}\\ \text{当 } \mathrm{d}^2f(x_0)/\mathrm{d}x^2<0 \text{ 时，函数 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处取极大值}\end{array}\right\} \qquad (\text{Ⅱ-6})$$

由此可见，对于函数 $f(x)$ 在一点的最小值来说，式（Ⅱ-4）[或式（Ⅱ-5）] 是必要条件，而式（Ⅱ-6）的第一式便是充分条件。同理，可以讨论最大值的情况。

Ⅱ-2 泛函极值的必要条件——欧拉方程

以上求函数极值的方法，可以推广应用到泛函中来，以下仍以最短线为例研究泛函的极值问题。

设 $y(x)$ 为使泛函 J 取最小值的允许函数，函数 $\bar{y}(x)$ 为 $y(x)$ 邻近的任意允许函数，即

$$\bar{y}(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$$

其中 ε 为小参数。而

$$\bar{y}(x)-y(x)=\varepsilon\eta(x) \qquad (\text{Ⅱ-7})$$

称为变量函数 y（x）的变分，记作

$$\delta y = \varepsilon\eta(x) \qquad (\text{Ⅱ-8})$$

η（x）为满足 η（x_1）$=0$，η（x_2）$=0$ 的任意函数（如图 Ⅱ-2 所示）。

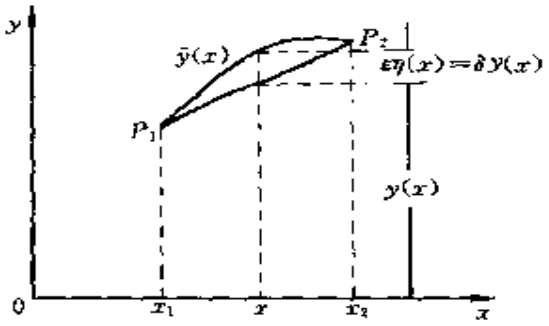


图 Ⅱ-2

应当注意，变分 δy 是指 y 值的任意微小的变化；而微分 $\mathrm{d}y$ 是指自变量 x 的微小变化 $\mathrm{d}x$ 所引起的 y 的微小变化。二者不要混淆。

设

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} F(x,\bar{y},\overline{y'})\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x \qquad (\text{Ⅱ-9})$$

其中，$y'=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$，根据泰勒级数展开，有

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} F(x,\bar{y},\overline{y'})\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} F[x,y+\varepsilon\eta(x),y'+\varepsilon\eta'(x)]\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta'\right)\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2!}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\varepsilon\eta)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\varepsilon^2\eta\eta'\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2}(\varepsilon\eta')^2\right]\mathrm{d}x + \cdots \qquad (\text{Ⅱ-10})\end{aligned}$$

于是得

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2!}\delta^2 J + \frac{1}{3!}\delta^3 J + \cdots \qquad (\text{Ⅱ-11})$$

其中泛函 J 的一阶变分、二阶变分，…，定义为

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta'\right)\mathrm{d}x$$

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\varepsilon\eta)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\varepsilon^2\eta\eta' + \frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2}(\varepsilon\eta')^2\right]\mathrm{d}x \qquad (\text{I}\text{-}12)$$

此处一阶变分 δJ，二阶变分 $\delta^2 J$，…是关于 ε 的一次，二次，…齐次式。

下面导出泛函 J 取极值时的必要条件。为此，选择 $\eta(x)$，使其在积分区间的两端等于零，且在新函数 $y(x)+\varepsilon\eta(x)$ 中，ε 为小参数。对于充分接近于零的一切 ε 值，函数 $y(x)+\varepsilon\eta(x)$ 与曲线 $y(x)$ 有 ε 接近度。因而沿 $\bar{y}(x)$ 积分式（I-10）可视为 ε 的函数，即

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x)+\varepsilon\eta(x), y'(x)+\varepsilon\eta'(x)]\mathrm{d}x \qquad (\text{I}\text{-}13)$$

因 $J(0)$ 是 $J(\varepsilon)$ 的最小值，故有

$$\Delta J = J(\varepsilon) - J(0) \geqslant 0 \qquad (a)$$

由于 ε 为无穷小，故可在 $\varepsilon=0$ 处将 $J(\varepsilon)$ 展开，于是得

$$J(\varepsilon) = J(0) + \left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\varepsilon + O(\varepsilon^2) \qquad (b)$$

因为 ε 可正可负，故为满足式（a），必须有

$$\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = J'(0) = 0$$

由此得出

$$\delta J = J(\varepsilon) - J(0) = 0 \qquad (\text{I}\text{-}14)$$

这就证明了，$J(y)$ 取极值时要求式（I-14）成立，即 J 的一次变分等于零。

由分部积分，则得

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta\Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\varepsilon\eta\mathrm{d}x = 0$$

考虑到边界条件，得 $\delta J=0$ 的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (\text{Ⅱ-15})$$

或写成下列展开式

$$F_{y'y'}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + F_{y'y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_{y'x} - F_y = 0 \qquad (\text{Ⅱ-16})$$

其中 F 的下标表示关于该变量的偏导数，式（Ⅱ-15）和（Ⅱ-16）称为欧拉方程，一般地，设

$$J = \int_v F(x,y,x,\varphi,\varphi_x,\varphi_y,\varphi_z)\mathrm{d}v \qquad (\text{Ⅱ-17})$$

则欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right) = 0 \qquad (\text{Ⅱ-18})$$

由以上讨论可知，求泛函 $J(y)$ 的极值问题可归结为解欧拉方程（Ⅱ-15）或（Ⅱ-16），且满足边界条件（Ⅱ-3）。

如需判断所得的解 $y(x)$，使泛函 $J(y)$ 取极大还是极小，则需考察 δ^2J 的正负号。如 $\delta^2J>0$，则解 $y(x)$ 使 J 为极小；反之，如 $\delta^2J<0$，则解 $y(x)$ 使 J 为极大。这是因为，当 $\delta J=0$ 时，有

$$\Delta J = \frac{1}{2!}\delta^2J + \cdots$$

如 $\delta^2J>0$，即 $\Delta J>0$，这说明函数 J 的极值为极小。

例Ⅱ-1 试求下列泛函

$$J[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[(y')^2 - y^2]\mathrm{d}x$$

及边界条件

$$y(0) = 0;\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

在什么曲线上取极值。

解 欧拉方程为

$$2y + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y') = 0$$

即

$$y'' + y = 0$$

其通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

利用边界条件得

$$C = 0; C_2 = 1$$

故仅在曲线

$$y = \sin x$$

上达极值。

Ⅱ-3 有附加条件的变分问题

有许多变分问题是求泛函

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x \qquad (\text{Ⅱ-19})$$

在边界条件

$$y(x_1) = y_1; y(x_2) = y_2 \qquad (\text{Ⅱ-20})$$

及附加条件

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')\mathrm{d}x = L \qquad (\text{Ⅱ-21})$$

下的极值问题，L 为一常数。这类问题称为有附加条件的变分问题。典型的有附加条件的变分问题的简单例子是所谓等周问题，即求周长为 L 的封闭曲线所围成的面积为最大的问题。

求解这类问题，须用拉格朗日乘子法。即求下列泛函

$$H[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x + \lambda\left[\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')\mathrm{d}x - L\right] \qquad (\text{Ⅱ-22})$$

在边界条件（Ⅱ-20）下的极值的解。

在式（Ⅱ-22）中参与变分的独立变量为 y 和 λ。于是有 $H(y)$ 的一阶变分为

$$\delta H = \int_{x_1}^{x_2} \delta F \mathrm{d}x + \lambda \int_{x_1}^{x_2} \delta G \mathrm{d}x + \delta\lambda \left(\int_{x_1}^{x_2} G \mathrm{d}x - L \right)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} (\delta F + \lambda \delta G) \mathrm{d}x + \delta\lambda \left(\int_{x_1}^{x_2} G \mathrm{d}x - L \right)$$

令

$$F^* = F + \lambda G$$

得

$$\delta H = \frac{\partial F^*}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'} \right) \right] \delta y \mathrm{d}x + \delta\lambda \left(\int_{x_1}^{x_2} G \mathrm{d}x - L \right)$$

由 $\delta H = 0$，得

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'} \right) = 0 \qquad (\text{Ⅱ-23})$$

及

$$\int_{x_1}^{x_2} G \mathrm{d}x - L = 0 \qquad (\text{Ⅱ-24})$$

由此可见，有附加条件的变分问题，归结为在边界条件（Ⅰ-20）及附加条件（Ⅰ-21）下，求解方程（Ⅰ-23）。

如前所述，求泛函 $J[y]$ 的极值问题可归结为在给定边界条件下求解欧拉方程的问题。换言之，求解欧拉方程，与求解泛函的极值问题 $\delta J = 0$ 等价。

以下举例说明，欧拉方程可作为变分问题的极值条件得到。

例Ⅱ-2 若函数 $y(x)$ 的二次泛函为

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} [p(x)y^2 + 2q(x)yy' + r(x)(y')^2 + 2f(x)y + 2g(x)y'] \mathrm{d}x \qquad (\mathrm{a})$$

今证明欧拉方程为

$$(ry')' + (q' - p)y + g' - f = 0 \tag{b}$$

解 实际上

$$\frac{1}{2}\delta J = \int_{x_1}^{x_2}[py\delta y + qy\delta y' + qy'\delta y + ry'\delta y' + f\delta y + g\delta y']\mathrm{d}x$$

$$= (ry' + qy + g)\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}[(ry')' + (q' - p)y + g' - f]\delta y\mathrm{d}x \tag{c}$$

于是，由 $\delta J = 0$，计及零边界条件，并注意到 δy 在积分范围内的任意性，则可得式 (b)。

例 Ⅱ-3 如函数 $y(x)$ 的二次泛函

$$J[y] = \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}[p(x)y^2 + 2q(x)yy' + r(x)(y')^2]\mathrm{d}x \tag{d}$$

在边界条件

$$y(x_1) = y(x_2) = 0 \tag{e}$$

和附加条件

$$\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}k(x)y^2\mathrm{d}x = 1 \tag{f}$$

下取极值的变分问题成立，则相应的欧拉方程为

$$(ry') + (q' - p + \lambda k)y = 0 \tag{g}$$

其中 λ 为标量参数。

解 实际上，引入拉格朗日乘子 λ 后，有

$$H = J[y] - \lambda\left(\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}k(x)y^2\mathrm{d}x - 1\right) \tag{h}$$

计算 δH，有

$$\delta H = \int_{x_1}^{x_2}[py\delta y + qy\delta y' + qy'\delta y + ry'\delta y']\mathrm{d}x$$

$$- \lambda\int_{x_1}^{x_2}ky\delta y\mathrm{d}x - \delta\lambda\left(\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}k(x)y^2\mathrm{d}x - 1\right)$$

$$= (ry' + qy)\delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} [(ry')' + (q' - p + \lambda k)y]\delta y \mathrm{d}x$$

$$- \delta\lambda \left(\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} k(x)y^2 \mathrm{d}x - 1 \right)$$

令 $\delta H = 0$，可得式（f）、式（g）。

Ⅱ-4 变边界问题，自然边界条件

在以上所讨论的泛函极值问题中，边界上的值是固定不变的。在这样的条件下，导出了欧拉方程。现在考虑边界值变动时，即在积分限变动条件下泛函取极值的条件。

当边界和（或）变量函数在边界上的值允许改变时，欧拉方程仍成立，原因是，虽然边界和函数的边界值都可以变化，但在可供选择的变量函数中，含有边界和函数的边界值都不变的一类在内。这就是说，允许函数类中除了与所研究的变量函数有公共边界的比较函数外，还可以取具有变边界的函数。例如，在泛函

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x \qquad (\text{Ⅱ-25})$$

其中 x_1，x_2 以及 $y(x_1)$，$y(x_2)$ 之值都是可变的，就是说，曲线 $y = y(x)$ 的端点位置可变。如在所有可变的曲线中，$y = y(x)$ 是使泛函 $J[y]$ 取极值的一条曲线，则与端点固定的一类曲线相比，$y = y(x)$ 必然的是使 $J[y]$ 取极值的一条曲线。换句话说，不论在哪一条曲线 $y = y(x)$ 上，若能使具有变边界问题达到极值，则对于与其有公共边界点的更窄的曲线类来说，将更能使其达到极值。从而不变边界问题取极值的基本必要条件必须满足。因而，仍满足欧拉方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0$$

下面讨论，当（Ⅱ-25）式中的积分限 x_1，x_2 不变，而 $y(x_1)$，$y(x_2)$ 之值可变时，使泛函 $J[y]$ 取极值的函数 $y(x)$，除了必须满足欧拉方程外，还要满足什么条件。

此时，泛函 J 取极值的条件为

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] \mathrm{d}x = 0$$

注意到

$$\delta y' = \frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \mathrm{d}x = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y' \mathrm{d}x$$

有

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y \mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2}$$

因为 δy 在区间 $[x_1, x_2]$ 上是任意的，故欧拉方程必须仍满足。此外要求在 $x=x_1$，$x=x_2$ 处，有

$$\delta y = 0 \text{ 或} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad (\text{Ⅱ-26})$$

如 y 事先并未规定它在边界上的值（此时 δy 将不等于零），则泛函 J 取极值的必要条件为

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad (\text{Ⅱ-27})$$

式(Ⅱ-26)中第一类边界条件称为强加边界条件或几何边界条件。第二类边界条件，即式（Ⅱ-27），是 $y(x)$ 在端点 $x=x_1$，$x=x_2$ 所应满足的条件，称为自然边界条件。

对于 x_1，x_2 可变的情况，也有类似的边界条件。

例Ⅱ-4 设曲线两端在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 直线上，求 x_1，x_2 间最短线的必要条件，并说明其几何意义。

解 x_1，x_2 间的任意曲线长度为

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} \mathrm{d}x \qquad (\mathrm{a})$$

其欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right]=0 \tag{b}$$

积分后

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=C$$

其通解为

$$y=C_1x+C_2 \tag{c}$$

由式（c）知 y（x）显然是一直线，它尚应满足自然边界条件

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=0 \quad （在 x_1,x_2 处）$$

即

$$y'=0 \quad （在 x_1,x_2 处）$$

式（c）代入式（d）得 $C_1=0$，所以 $y=C_2$。它是平行于 x 轴的直线段。

索　引

中　文	英　文	页　码
比例极限	proportional limit	2
弹性极限	elastic limit	2
屈服应力	yield stress	2
强化	hardening	3
主方向	principle direction	12
主应力	principle stress	12
主平面	principle plane	12
应力不变量	stress constant	15
主应力空间	principle stress space	15
八面体平面	octahedral plane	16
应力球张量	spherical tensor of stress	18
应力椭球面	stress ellipsoid surface	18
主应变	principle strain	20
屈服条件	yield condition	25
屈雷斯加条件	Trssca yield condition	26
米赛斯条件	Mises yield condition	28
加载条件	loading condition	29
卓柯公设	Drucker postulate	32
依留申公设	Il'yushin postulate	33
应力历史	stress history	35
加载路径	loading path	35
加载历史	loading history	35
比例加载	proportional loading	35

续表

中　文	英　文	页　码
增量理论	incremental theory of plasticity	36
有效应力	equivalent stress	40
塑性势	plastic potential	45
流动法则	flow rule	48
弹性解方法	elastic solution for plasticity	52
极限荷载	limitload	63
滑移线	slip lines	71
特征线	characteristic line	75
特征方程	characteristic equation	75
柯西问题	Cauchy problem	77
影响区	influence area	78
黎曼问题	Riemen problem	78
应力滑移线	stress slip line	100
速度滑移线	velocity slip line	100
速度协调方程	quation of velocity compatibility	102
扭转刚度	torsion stiffness	109
沙堆比拟法	sand heap analogy	111
应力率场	strain rate field	121
应力率极值原理	extreme principle of stress rate	124
应变率场	strain rate field	124
应变率极值原理	extreme principle of strain rate	125
下限定理	lower bound theorem	134
上限定理	upper bound theorem	134
塑性格式	plastic profile	151
塑性动力响应	dynamic plastic response	168
加载波	loading wave	198
卸载波	unloading wave	200

参 考 文 献

[1] Chakrabarty, J., Theory of Plasticity, New York, McGRAW HILL Book Company, 1987

[2] Hill, R., Mathematical Theory of Plasticity, 1950, 王仁等译. 塑性数学理论. 北京: 科学出版社, 1966

[3] Hodge, H. G. J., Plastic analysis of structures, New York, McGRAW HILL Book Company, INC, 1959

[4] Il'yushin, A. A. Plasticity, Moscow: Gostekhizdat, 1948 (in Russian), 王振常译. 塑性. 北京: 中国建筑工业出版社, 1958

[5] Johnson, W. And Mellor P. B., Engineering Plasticity, New York, London: Von Nostrand Reihold Company, 1973

[6] Klyushnikov, V. D., Mathematical theory of plasticity, Moscow, MFY (NMU) Press, 1979 (in Russian)

[7] Kolarov, D., Baltov, A., Boncheva, N., Mechanics of plastic medium, Moscow "Mir" Press, 1979 (in Russian)

[8] Kachanov, L. M. Foundations of the theory of plasticity, London: Nortn-Holland publishing Company-Amstrerdom, 1971, 周承倜等译. 塑性理论基础. 北京: 人民教育出版社, 1959

[9] Nadi, A., Theory of flow and fracture of solid, Vol. I, New York, McGRAW HILL Book Company, 1950

[10] Martin, J. B., Plasticity: Fundamentals and General Results, MIT, Press, 1975, 徐秉业, 薛大为, 杨桂通等译. 塑性力学基础及其一般结果. 北京: 北京理工大学出版社, 1990

[11] Prager, W., An Introduction to Plasticity, Addison-Wesley publishing Company, 1959

[12] Slater, R. A. C., Engineering Plasticity, Macmillan Press, London, 1977

[13] Save, M. A., Massonnet C. E., Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks, Amsterdam. London. North-Holland publishing

Company, 1972
[14] Szilard, R., Theory and Analysis of plates, 1974
[15] 王仁，熊祝华，黄文彬著．塑性力学基础．北京：科学出版社，1981
[16] 王仁，黄文彬，黄筑平．塑性力学引论．北京：北京大学出版社，1982
[17] 北川浩著，刘文斌等译．塑性力学基础．北京：高等教育出版社，1986
[18] 庄懋年，马晓士，蒋潞．工程塑性力学．北京．高等教育出版社，1984
[19] 刘信声，徐秉业．工程塑性力学选讲．北京：清华大学出版社，1986
[20] 余同希．塑性力学．北京：高等教育出版社，1988
[21] 张行，吴国勋．工程塑性理论，北京：北京航空航天大学出版社，1998
[22] 陈森译．理想塑性固体理论．北京：科学出版社，1964
[23] 杨桂通．塑性动力学．（新版）北京：高等教育出版社，1999
[24] 杨桂通．弹塑性力学．北京：人民教育出版社，1981
[25] 徐秉业等．弹性力学与塑性力学解题指导及习题集．北京：高等教育出版社，1985
[26] 徐秉业．塑性力学．北京：高等教育出版社，1988
[27] 徐秉业．弹性塑性力学——例题和习题．北京：机械工业出版社，1981
[28] 徐秉业等．结构塑性结构分析．北京：中国建筑工业出版社，1985
[29] 黄文彬等．弹塑性力学难题分析．北京：高等教育出版社，1998
[30] 蒋咏秋，熊祝华译．结构塑性分析．北京：科学出版社，1965
[31] 熊祝华．塑性力学基础知识．北京：高等教育出版社，1986
[32] 熊祝华，洪善桃．塑性力学．上海：上海科学技术出版社，1984