I 单自由度系统

第 1 章　结构动力学的科学与技巧

作为引言的这一章，本书一开始就着重讨论数学公式与数学原理，这样可能有助于读者来敲开结构动力学这个具有魅力科目的大门。作为一名结构动力技术人员，必须精通数学模拟这门“技巧”，并在众多的情况下，结构动力技术人员还必须掌握结构动力的试验方法。为了能够得到有用的成果，要求能锻炼出熟练的技巧与判断能力。

本章将完成如下内容：

- 在结构分析中，指出何时需要考虑动力问题。
- 动力问题研究的三个阶段。
- 论动力分析中结构的数学模型。
- 论结构动力试验。

§1.1　结构动力学引言

制造一辆地面交通运输工具，并沿其轨道高速行驶；或在海洋区域建立一座近海钻井平台；或一架喷气式飞机正飞越过雷暴区等等。它们的共同问题是什么呢？答案只有一个，那就是所有都属于结构，而所有的结构又都要承受动力荷载。这样就将结构的安全、结构的性能和结构的可靠性问题放在一个突出的位置上。这类问题就带来了需要做大量的分析和试验工作，以确定它们的动力荷载响应。

从上面的问题来看，**动力学**意味着是时间的变化。动力荷载就是一个随时间而变化的幅值、方向和作用点。由此而得到与时俱变的挠度和应力，这就构成了动力响应。如果荷载已知为时间的函数，该荷载就叫作**确定性的**。一个指定的结构系统对一个确定性的荷载就叫做**确定性分析**。如果荷载的时间历程并不十分完全清楚，而只知道其统计含义时，那么荷载就叫作**随机的**。本书仅论述确定性荷载。

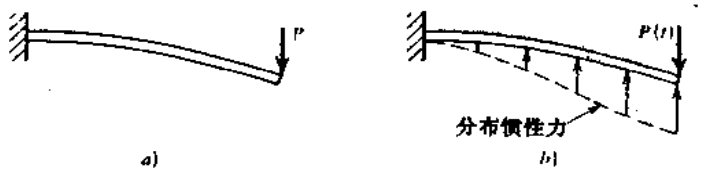


图 1.1　一悬臂梁承受
a)静力荷载；b)动力荷载

结构动力问题在两个重大的方面不同于相应的静力问题。首先上面一开始就指出了，即激励的与时俱变性质。那么重要的是加速度在结构的动力问题中起了主要作用。图 1.1a 表示了一根在静荷载作用下的悬臂梁，它的挠度与内应力直接取决于荷载 P。其次，图 1.1b 表示的是一根相似的悬臂梁，承受了一个与时俱变的荷载 $P(t)$。则梁的加速度引起一个分布的惯性力。如果惯性力对结构的挠度和内应力有显著影响时，就需要研究它的动力问题了。

图 1.2 是一幅动力研究的典型步骤图。它分为三个主要的阶段：**设计阶段**、**分析阶段**和**试验阶段**。动力研究常常是需要其中的一个或两个方面。例如，土木工程师可以要求完成一座现有大坝的动力分析工作，并以大坝的动力试验来验证所做的分析[1.1]。分析与试验的成果可以订出一个最大水深标准，使大坝能够抵抗规定的地震激励所造成的破坏，以确保大坝的安全。又如汽车工程师要做许多分析和试验工作，来确定新设计汽车的动力特性。[1.2]这样的分析与试验成果常常要导致设计的改变，以便改进车辆的行驶性能和降低车辆的成本。

本书主要是论述动力研究中的分析阶段，然而，为了强调理论与实践的紧密结合，也要讨论结构的动力试验方法。同时，在本书后面要叙述应用计算机程序或其他结构的动力计算机程序，以研究重要的设计参数。

§1.2 结构动力特性分析

在任何动力分析阶段，最大的愿望多半是构思一个结构的数学模型。以图 1.2 中 2a 和 2b 的步骤来说明这个过程。在 2a 步骤中，读者必须设计一个结构系统的理想模型来进行研究，使之与实际的系统基本一样（不管是已有的系统，还是正在计划中的系统）；并使之数学分析比较容易。这样的**解析模型**应包括：(1)一组简化的假定，使之简化的真实系统成为解析模型。(2)一组描述解析模型的简图。(3)设计参数一览表（尺寸、材料等）。

解析模型可分为两种基本类型：**连续模型**与**离散参数模型**。图 1.3a 所表示的是一悬臂梁的连续模型。为了表示出全部有效惯性力的效应，所以必须考虑位移参量的数目，这称之为系统的**自由度(DOF)数目**。因此一个连续系统的模型就表示了一无限个自由度的系统。另外图 1.3b 与图 1.3c 表示的是一有限个自由度的系统。这里所表示的离散参数模型叫作**集中质量模型**，因为系统的质量假定是用很少数目点的质量或质点来表示的。在第 2 章和第 11 章中将进一步讨论构成离散参数模型的集中质量法和一些其他的方法。

要构成一个有用的解析模型，读者必须认真地考虑你所计划中解析模型的应用，也就是说，假定的模型应正确地表达其真实系统的特性。它必须表示出系统的典型特性以确定解析模型的复杂程度。例如图 1.4 表示了应用在阿波罗土星 V 型(Apollo Saturn)宇宙火箭动力特性研究中的四种不同的解析模型。这个 30-**DOF** 梁-杆模型是用来进行初步研究的，并且用来确定所需要的足尺试验。另外在图 1.4 示出的 300-**DOF** 模型，是需要给出在飞行时传感器位置运动的精确描述。只要模型足够地表示了所需要的性能，则解析模型愈简单愈好。

一旦读者建立了结构的解析模型并希望去研究，那么应用物理定律[即牛顿(Newton)定律，应力-应变关系等]来取得用数学语言描述解析模型的运动微分方程组。连续模型导致了偏微分方程组，而离散参数模型则引出常微分方程组。如此推导出的运动微分方程组就称为结构的**数学模型**。想得到数学模型，读者要应用动力学[即牛顿定律，拉格朗日(Lagrange)方程]和变形体力学的研究方法（即应力－应变关系，应变－位移关系），并将这些组合起来，即可得到描述变形结构动力特性的微分方程组。

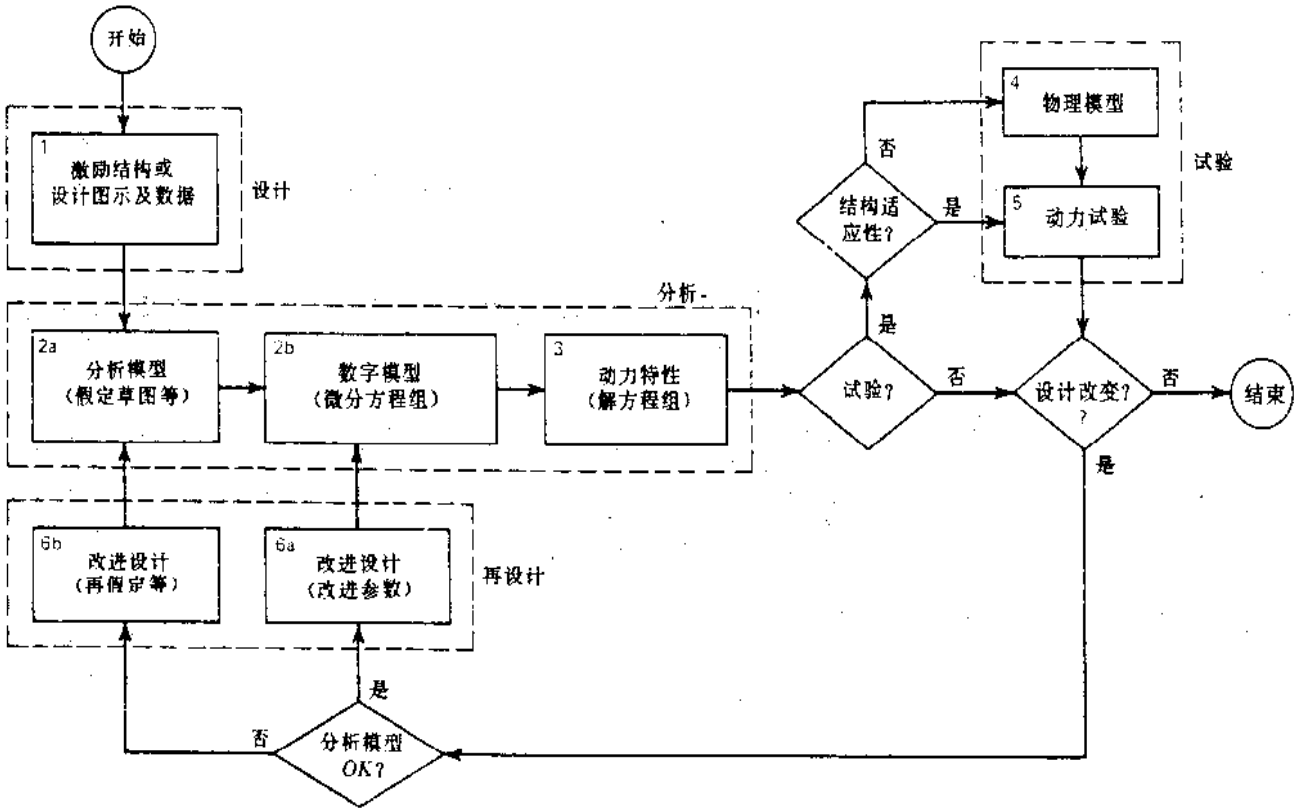

开始
1
激励结构或
设计图示及数据
设计
分析
2a
分析模型
（假定草图等）
2b
数字模型
（微分方程组）
3
动力特性
（解方程组）
试验?
否
是
结构适
应性?
否
是
4
物理模型
5
动力试验
试验
设计改变?
?
否
是
结束
6b
改进设计
（再假定等）
6a
改进设计
（改进参数）
再设计
是
否
分析模型
OK?

图 1.2　动力研究的步骤

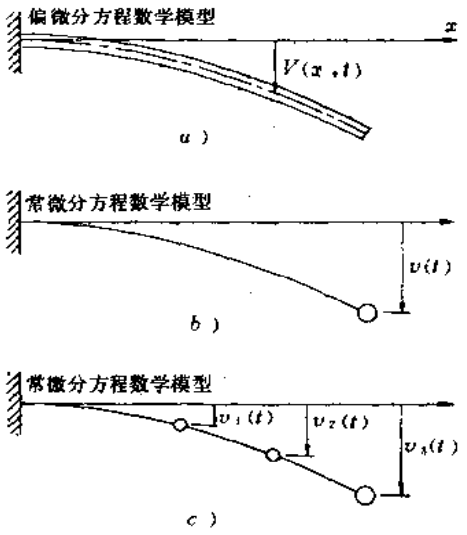


图 1.3　悬臂梁的连续和离散参数解析模型

a)分布质量悬臂梁——连续模型；

b)一个自由度模型——离散参数模型；

c)三个自由度模型——精确的离散参数模型；

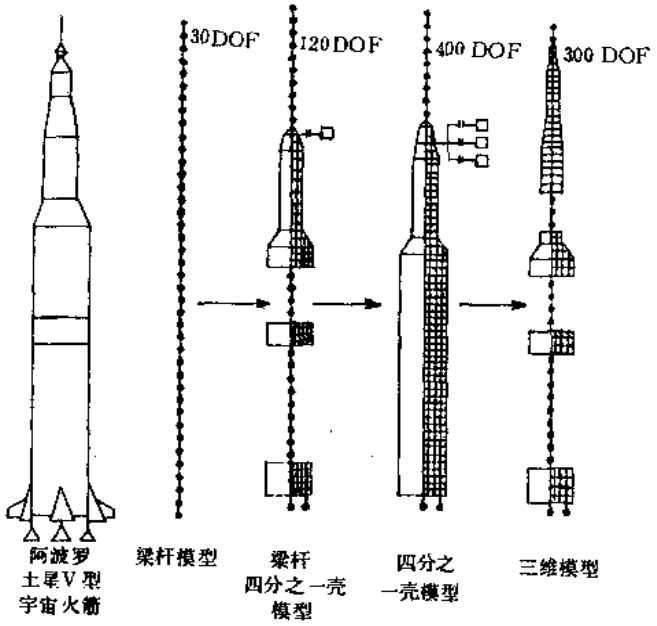


图 1.4　阿波罗土星 V 宇宙火箭动力研究时所使用的不同复杂程度的解析模型

实际上，读者会发现，首先构成一个解析模型，而后构成一个数学模型的整个过程，可简称为**数学模拟**。在使用大型计算机程序，例如 **NASTRAN**[1.3]或 **SAP**[1.4]进行动力分析时，读者的主要模拟工作是简化该系统，并提供其尺寸、材料特性、荷载等等的输入数据。这正是结构动力

技巧发挥其作用的地方。另一方面实际上形成微分方程与解微分方程皆由计算机来完成。图1.5表示为一辆大型轿车车体的照片和由计算机所形成的结构概化图，即解析模型，是输入到计算机中的。计算机绘图用在形成结构数学模型时，已变成无法估价的有用工具了。

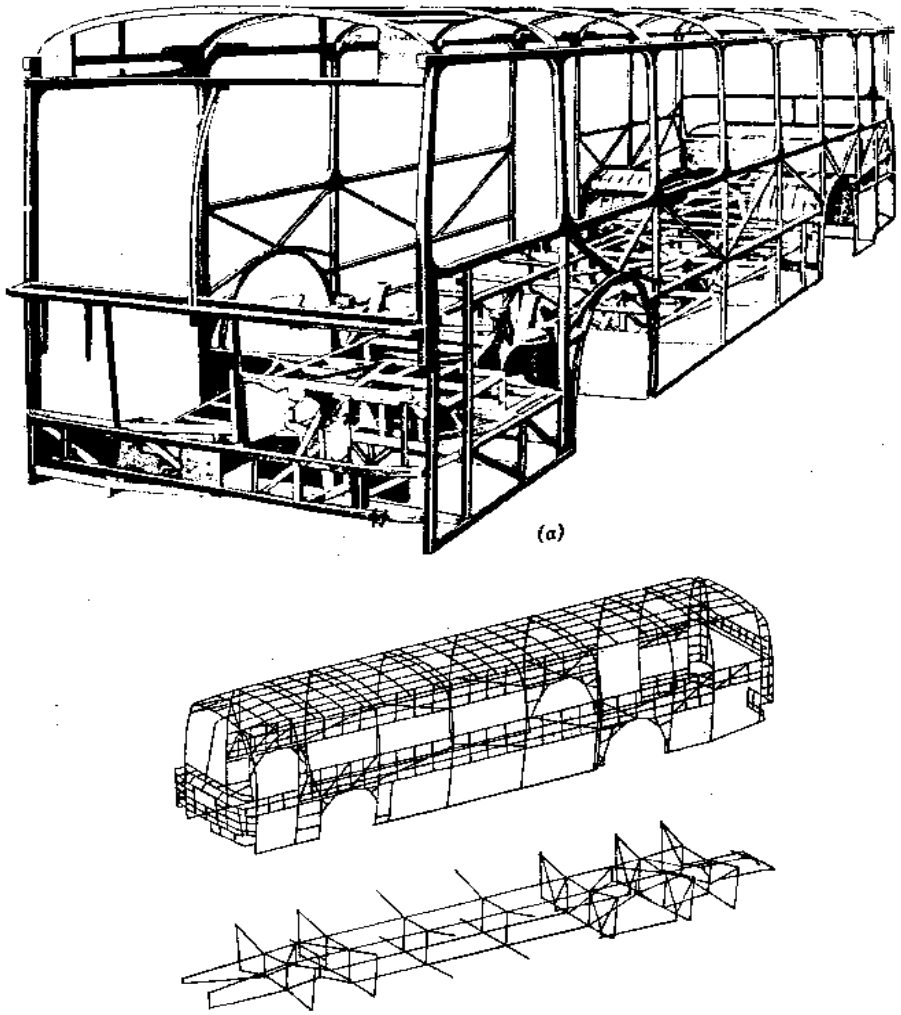


图 1.5　a)大型轿车车体结构；b)大型轿车车体(结构)的有限元模型

待列出了数学模型公式以后，下一步的动力分析工作是解这个微分方程组，以求得动力响应。在结构应用中，有两种主要类型的动力特性，一种是**自由振动**，另一种是**强迫响应**。前者是由规定的初始条件而得到的运动，后者是由外激励源规定为系统的输入而得到的运动。读者去解系统受到所规定的初始条件以及外激励源输入的运动微分方程组，以得到该结构运动时所形成的时间历程。这样就形成了实际结构所预示的动力特性，即**响应**。

动力研究的**分析阶段**是由以上所述的三个步骤所组成：确定**分析模型**，推导**数学模型**和解**动力响应**。在所规定的动力研究中，这三个步骤常常都是需要的。本书主要是论述动力研究中分析阶段的第二步与第三步。

§1.3 结构动力试验

动力试验的基本目的是来证实数学模型。在多数情况下，用来求得有关荷载以及在动力分析中所需要的其他重要参量。在某些情况下，可以进行一些小比尺的物理模型试验，例如飞机模型的风洞试验。另外有的时候，如果做些原型结构试验是可行的话，就进行这些试验。

一个新结构正在设计中时(海洋平台、飞机等)，在设计方案初常常需用试验的方法来核定其数学模型，同时也要得到结构在使用期间遭遇到可能荷载的有效数据。为了这个目的，要构成一个**物理模型**。图 1.6 展示了一 枚宇宙航天飞行运载火箭[1.6]的四分之一模型的地面振动

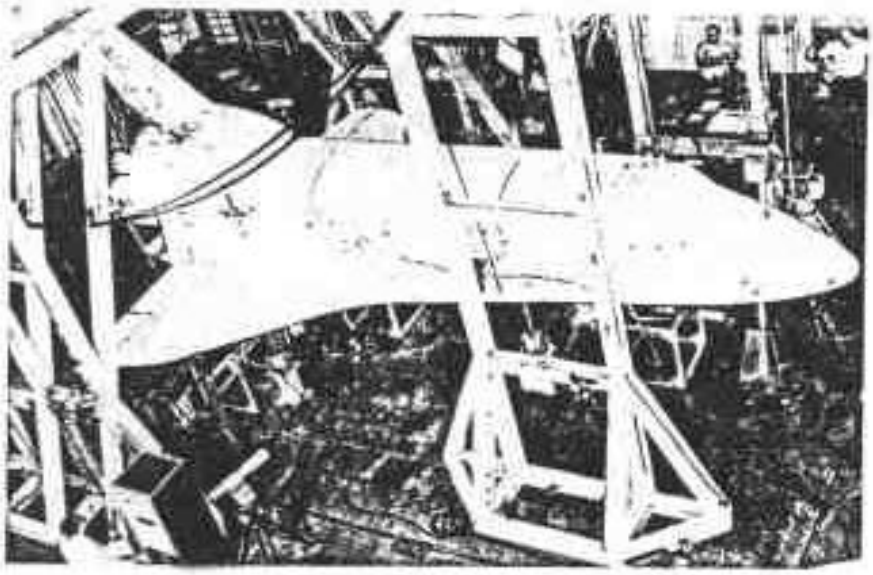


图 1.6 宇宙航天飞机运载火箭四分之一
模型的地面振动试验

试验的一张照片。缩小比尺的模型试验，大多数做成十分之一的模型或更小一些。

俟该实际结构成为可采纳时则应做进一步的实验，例如航天火箭在实际飞行前，必须在地面接受广泛深入的静动力试验。图 1.7 为一张波音(Boeing) YC-14 型飞机在进行一次地面振动试验的照片。注意图片中在机翼端的下部与水平机尾下部置有电振动器。

还可以应用物理模型的动力试验对结构动力性能，特性的等级进行定性与定量分析。例如图 1.8 为一张圆柱形容器，槽内装有液体的结构在振动台上的照片。[1.8]

§1.4 本书范围

本书开始的大部分章节，包括第 2 章至第 8 章是论述单自由度 SDOF 系统的。第 2 章所叙述的是拟定 SDOF 系统数学模型的方法，牛顿定律和虚位移原理的应用。第 3 章的内容是无阻尼系统与粘滞阻尼系统的自由振动。整个第 4 章读者会学到简谐(正弦曲线型)激励的 SDOF 系统响应。这大概是全书中最重要的内容，因为它们描述了动力响应的基本特性。第 5、6 和 7 章中连续地讨论了 SDOF 系统的动力响应。第 5 章论述了特殊输入时间历程的 SDOF 系统响

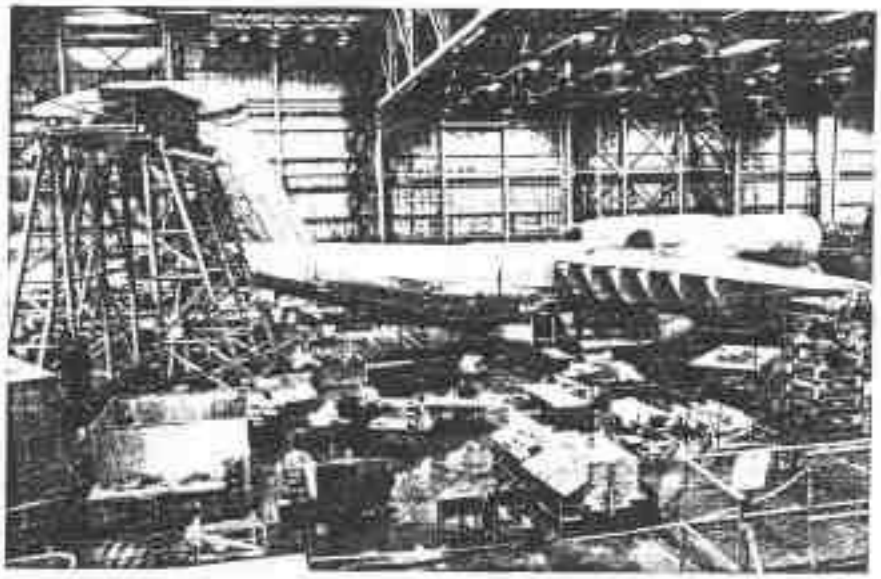


图 1.7 波音 YC-14 型飞机的地面振动试验

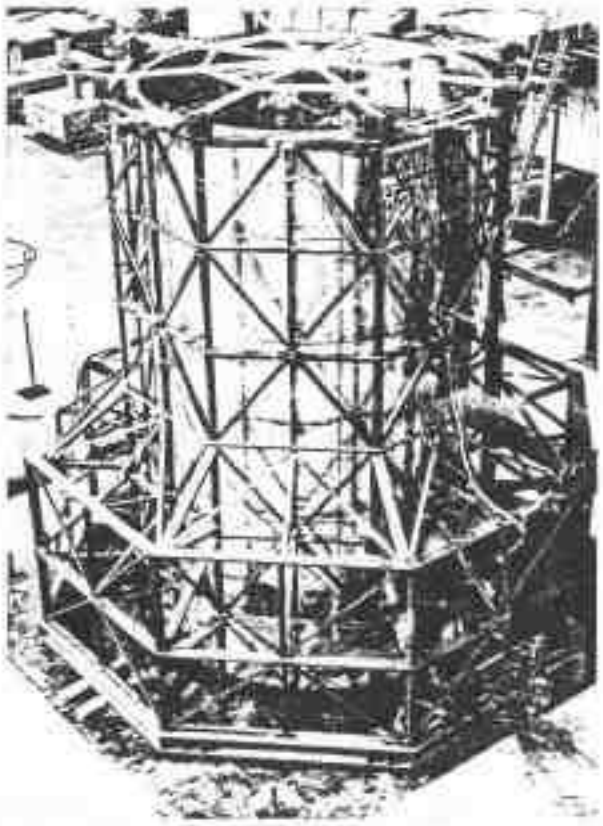


图 1.8 充满槽片的液体受到模拟的地震激励

应。全部第 6 章论述了杜哈梅(Duhamel)积分法，用来确定所规定的一般输入时间历程响应，以及应用反应谱来提供响应计算的结果。在第 7 章中，提供了 SDOF 系统运动方程的两种数值

解的近似法。第 8 章的内容为第 I 部分的结论。这一部分首先研究了周期激励的 **SDOF** 系统响应，以及介绍频域方法，它成了讨论周期激励的一个自然扩充部分。目前这种方法已广泛地应用在动力试验中了。

第 II 部分论述的是模拟成连续系统的结构，全部内容都是重要的，如所讨论的微分方程数学模型的确定（第 9 章）和模态与频率的确定（第 10 章）。第 II 部分的基本目的是提供精确解，使之能用来评价在第 III 部中所阐述的多自由度（**MDOF**）模型近似表示法的精度。

中等复杂程度的结构动力特性分析是需要应用 **MDOF** 模型的，这是第 **III** 部分所要研究的对象。在第 11 章中一开始就讨论 **MDOF** 系统的数学模型，虽然应用牛顿定律来推导了某些 **MDOF** 系统，而推导这种模型所使用的主要工具是拉格朗日方程。应用假定振型法的 **MDOF** 模型来近似表示连续系统，这将在 § 11.4 中做介绍。第 12 章论述了无阻尼 **2-DOF** 系统的振动，介绍了在学习 **MDOF** 系统响应中的许多重要概念，例如固有频率（特征值）、固有模态（特征向量），与振型叠加。

第 13 章讨论了许多关于模态与频率的数学性质；并介绍了近似确定复杂系统固有频率的瑞利-里兹（Rayleigh-Ritz）的重要方法。接下来的第 14 章是扼要介绍求解模态与频率的数值方法。

分析 **MDOF** 系统响应中应用最广泛的方法是振型叠加法。有两种振型叠加的形式，即第 15 章中所叙述的振型位移法与振型加速度法。

从第 11 章至第 15 章，读者将会对于某些方法，如得到 **MDOF** 数学模型，分析确定它的模态与频率，和解它所规定动力激励的响应有个更好的了解。第 16 章是第 11 章的延续将给读者介绍建立 **MDOF** 数学模型一个重要的有限元法。以前是否学过有限元法即结构矩阵分析，这对学习第 16 章来说并不是必要的条件。

在第 17 章中，应用 **ISMIS** 计算机程序所提供的有限元法来求解一些例题。不曾学过 **ISMIS** 程序详细内容的读者将要注意各种有限自由度模型的解与第 10 章中所确定的连续模型精确解应加以对照比较。

第 18 章介绍了用直接积分求 **MDOF** 系统包括非线性系统响应的数值方法。在第 19 章中，读者会看到用分量模态综合来模拟更复杂的结构。最后，第 20 章是介绍结构地震响应的课题。在第 **III** 部分中整个所表示的顺序可以看成是无规律的，即：模拟（第 11 章），模态与频率计算（第 12 章至第 14 章），响应计算（第 15 章），模拟（第 16 章），模态与频率计算（第 17 章），响应计算（第 18 章），模拟（第 19 章），和响应计算（第 20 章）。整个讨论是以较为复杂的课题到那些更为复杂的课题。如果读者希望立即获得 **MDOF** 系统动力概况的话，则只需要学习第 11 章、第 12 章和第 15 章即可。那些章节里提供了基本概念。

参考文献

1.1 R. M. Stephen and J. G. Bouwkamp, "Dynamic Response of Morrow Point Dam," *Advances in Civil Engineering Through Engineering Mechanics*, 302—305(1977).

1.2 A. L. Klosterman, "A Combined Experimental and Analytical Procedure for Improving Automotive System Dynamics," *Society of Automotive Engineers*, Paper No. 720093(1972).

1. 3 *NASTRAN Theoretical Manual* (*Level* 16. 0), National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC(1976).

1. 4 K. J. Bathé, E. L. Wilson, and F. E. Peterson, *SAP — IV — A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems*, Report EERC 73—11, College of Engineering, University of California, Berkeley (June 1973, rev Apr, 1974).

1. 5 D. H. Emero, "The Quarter—Scale Space Shuttle Design, Fabrication, and Test," *AIAA/ASME/ASCE/AHS 20th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*), St. Louis, MO, 395—402(1979).

1. 6 D. Clough and R. W. Clough, "Earthquake Simulator Study of Cylindrical Liquid Storage Tanks," *ASCE Fall Convention*, San Francisco, CA(1979).

第 2 章　SDOF 系统数学模型

在第 1 章中已经向读者介绍了数学模型的概念。在这一章中，将阐述单自由度(**SDOF**)的模型，即用一个二阶常微分方程来描述模型。运用牛顿定律和虚位移原理来推导出集总参数系统的运动方程；然后用 **SDOF** 广义参数模型将虚位移原理推广到近似的一个连续系统。

本章将完成以下内容：

- **应用牛顿定律来推导出单质点或具有 1-DOF 刚体的运动方程。**
- **应用具有达伦倍尔力的虚位移原理来推导出一个质点的刚体的或具有 1-DOF 物体集合的运动方程。**
- **应用虚位移原理与假定振型推导出广义参数 SDOF 模型所表示结构的运动方程。**

§2.1　杆件的集总参数模型

一个结构的集总参数模型的成份分别为力与位移、速度和加速度的关系所构成的。力与位移的关系通常叫做**弹簧**。图 2.1 所表示的为一个理想的无质量弹簧和一个以伸长率为函数的弹簧力的曲线图。弹簧力的作用总是沿着弹簧两个端点的连线。大多数的结构材料其伸长量是很小的，$e=u_2-u_1$，力与伸长(压缩)量间存在着线性关系。这个关系为：

$$f_S = ke \tag{2.1}$$

其中 k 叫做**弹簧常数**，k 的单位为每英寸磅(lb/in)或每米牛顿(N/m)*。

在弹性范围内的弹簧像一个能量的储存装置，当弹簧在线弹性区域内被拉伸一个量 e 时，就在弹簧内储存了能量，这叫**应变能**。其关系表示如下：

$$V = \frac{1}{2}(ke^2) \tag{2.2}$$

图 2.1 中 f_s-e 曲线下的面积定为应变能。

当弹簧成为一个能量储存装置时，也有这样含意弹簧是一个变形结构能量的逸散装置，这叫做**阻尼机构**。虽然一些研究课程的项目已经提出了众多的数学方法来描述阻尼[2.1]，但是通常还不太可能确定结构中阻尼的确切性质。在结构动力分析中最普通的阻尼分析模型为**线性粘滞阻尼器**的模型，见图 2.2 中所说明的。阻尼力 f_D 为：

$$f_D = c(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \tag{2.3}$$

* 英制和 SI 单位制给出各种参量的单位。使用其他的单位制也能解题，例如，kip=(1000 lb)，ft、kN、mm 和其他。

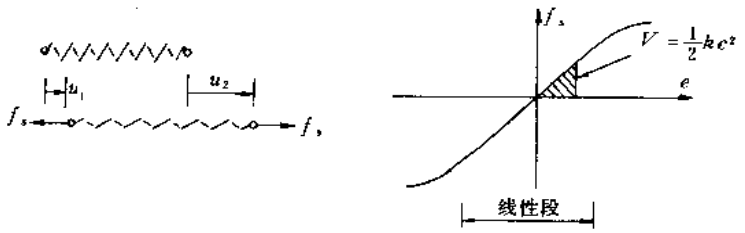


图 2.1　弹簧的力-变形特征

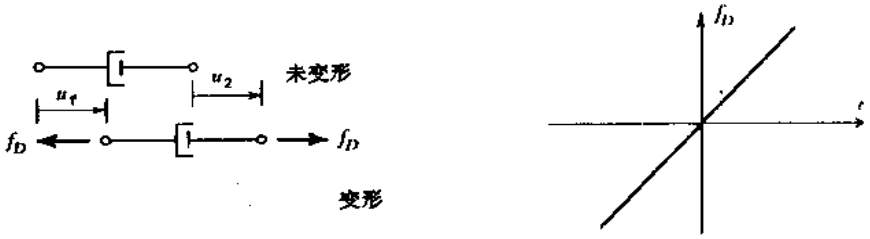


图 2.2　线性粘滞阻尼器

于是阻尼器两端之间的相对速度是一个线性函数关系。常数 C 叫做**粘滞阻尼系数**，它的单位是每英寸秒磅(1b—s/in)　或是牛顿秒每米(N·s/m)。

应用**牛顿第二定律**写出质点的运动方程

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{2.4}$$

其中 m 为质点的质量，$\mathbf{a}$ 为质点对惯性参考系* 的加速度。质量的单位为(1b—s^2/in)或(N·s^2/m)。

结构动力问题经常是引入达伦倍尔力，即**惯性力**。

$$\mathbf{f}_I = -m\mathbf{a} \tag{2.5}$$

用所产生的惯性力加上作用在质点上的其他力的合力，那么公式 2.4 就可写成一个动力平衡方程式

$$\sum \mathbf{F}' = \mathbf{f}_I + \sum \mathbf{F} = 0 \tag{2.6}$$

图 2.3 表示一个质点和两个刚体在一般平面内运动的惯性力。

在第 11 章中需要用到质点和刚体的动能。图 2.3 中的质点和刚体，其动能如下：

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(点的质量)}$$

$$T = \frac{1}{2}m(v_{Gx}^2 + v_{Gy}^2) + \frac{1}{2}I_G w^2 \text{(刚体)} \tag{2.7}$$

其中 v 是各物体的线速度，w 是各物体的角速度。

* 惯性参考系是一组假想的直角坐标，在空间没有位移和转动。

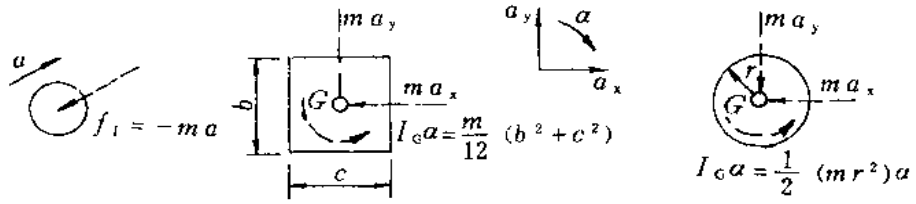


图 2.3 惯性力

§2.2 集总参数模型的牛顿定律应用

在本节中应用牛顿定律即相应的达伦倍尔力的方法将推导出几个集总参数模型的运动方程。本节作为读者以前学过动力学的一个复习，而且要给读者介绍确定 **SDOF** 系统模型的数学方法。

例题 2.1

应用牛顿定律推导图 E2.1.1 简单的质-弹阻尼系统。假定运动的方向是竖向的，而且弹簧是线性的，其弹簧常数为 k。不计空气阻力、弹簧的质量和弹簧的内阻尼。$p(t)$是一个外力，作用在该质量上。

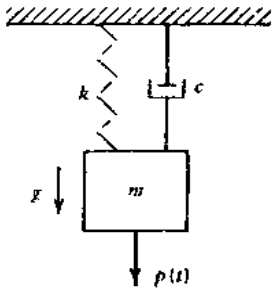


图 E2.1.1

解：

a. 建立参考系和位移坐标(见图 E2.1.2)：

选定沿运动的直线为 x 轴，并选定弹簧未被伸长时的位置为坐标原点(即 $x=0$)。

b. 画出质点在任意移动位置时的自由体图：如图 E2.1.3

c. 应用牛顿第二定律：

$$+\downarrow \sum F_x = m\ddot{u} \tag{1}$$

(注：+意思是向下，因为 u 为正时方向向下。)

根据自由体图，确定公式 1 左边项的力。

$$p - f_s - f_D + W = m\ddot{u} \tag{2}$$

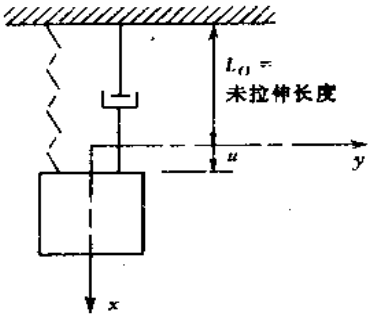


图 E2.1.2

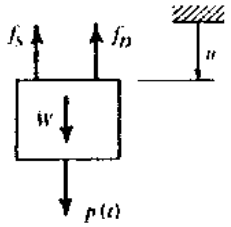


图 E2.1.3

d. 各力对运动的变量

$$f_s = ke = ku \tag{3}$$

$$f_D = c\dot{e} = c\dot{u} \tag{4}$$

($u=0$ 为未被伸长时的弹簧。)

e. 合并各项并简化；将未知项放在公式的左边：

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = W + p(t)} \tag{5}$$

注意这是一个常系数、二阶、线性、非齐次的常微分方程。这个方程可用下面的分析方法简化。

线弹簧上重量 W 的静态位移可给出

$$u_{st} = \frac{W}{k} \tag{6}$$

令质点对于静态平衡位置的位移为 u_r，即是

$$u = u_r + u_{st} \tag{7}$$

因为 u_{st} 为一常数，则公式 5 可以写成

$$\boxed{m\ddot{u}_r + c\dot{u}_r + ku_r = p(t)} \tag{8}$$

若系统的位移是相对于静态平衡位置时，则重力是可以消去的。

例题 2.1 中的公式 8 可以认为是**结构动力学**和**线性振动理论**的基本方程；而读者要花大量的时间去求它的解，这将应用在 **SDOF** 系统与 **MDOF** 系统的结构动力学问题中。

在例题 2.1 中直接应用了牛顿第二定律，因此在自由体图中没有出现惯性力。例题 2.2 要用惯性力来证明，并且还要说明**支座激励**，即**基础运动**的重要特点；例如一座建筑物在一次地震中的经历。

例题 2.2

应用达伦倍尔力的方法来确定质量 m 的运动方程式，如图 E2.2.1。假定在系统中的阻尼力能够用线性粘滞阻尼器来表示，并假定支座的激励 $z(t)$ 为已知，当 $u=z=0$ 时，表示弹簧未伸长。

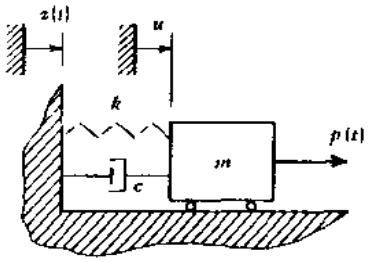


图 E2.2.1

解：

a. 画出质量包括真实力以及惯性力的自由体图，见图 E2.2.2。

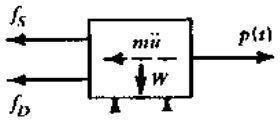


图 E2.2.2

b. 写出动力平衡方程式：

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \tag{1}$$

由自由体图得到

$$p - f_s - f_D - m\ddot{u} = 0 \tag{2}$$

c. 写出力对运动的变量并简化之：

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{z}) + k(u - z) = p \tag{3}$$

注意运动质量的阻尼力和弹簧力是相对于移动的支座，公式(3)可以用所有已知量写在公式的右边。因此

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{z} + kz + p} \tag{4}$$

公式(4)是质量对惯性参考系，即 $u(t)$ 的真实位移的运动方程，经常按相对位移列出运动方程的公式。

$$w = u - z \tag{5}$$

因为作用在该质量上的力直接与这个相对位移有关，在公式 3 的两边减去 $m\ddot{z}$ 与应用公式 5，读者就可得到如下公式：

$$\boxed{m\ddot{w} + c\dot{w} + kw = p - m\ddot{z}} \tag{6}$$

因此，基础运动具有在作用力上附加一个相反的惯性力 $p_{\text{eff}}(t) = -m\ddot{z}$ 的效应。公式 6 比公式 4 有用的多，因为相对运动比绝对运动重要，并且测量基础的加速度比测量参与公式中 4 基础的速度和位移要容易得多。

牛顿定律可由一个质点推广到下面给出的一个刚体在平面内运动的方程式。力的方程式为

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \tag{2.8}$$

其中 $\mathbf{a}_G$ 为物体质心的加速度矢量。

还需要下面的一个力矩方程式

$$\sum \boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{I}_G\alpha \tag{2.9a}$$

式中假设力矩是对质心的，α 是物体的角加速度*，I_G 是对 G 的质量惯性矩；即

$$\sum \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{I}_0\alpha \tag{2.9b}$$

其中 0 碇辖其转动的固定轴，即

$$\sum \boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{I}_c\alpha \tag{2.9c}$$

式中 c 为通过 G 点的加速度向量。公式 2.9a 为一般方程式，在许多情况中都要应用的；公式 2.9b 只对固定轴转动有效；公式 2.9c 是限制应用的(例如匀质盘的滚动，滑动除外)。

例题 2.3

一个飞机引擎和挂架与机翼相连，模拟成一个刚体(通过一无重梁弹性地)约束在一个固定刚体上，研究其特殊的横向运动，如图 E2.3.1 推导其微小位移的运动方程，不计阻尼。图 E2.3.1 上之转动弹簧表示在梁上产生恢复力矩的作用，它与梁跟垂线所夹的角度成正比。引擎通过质心轴，所具有的质量惯性矩为 I_G，其位置如图 E2.3.1 所示。

解：

a. 在任意移动的位置上取其自由体，并给出位移坐标，见图 E2.3.2。

b. 写出运动方程

---

* α 在后面表示为相位角，这样的重复不致引起混乱。

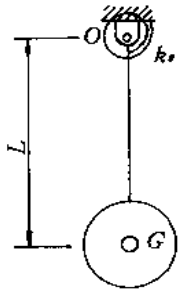


图 E2.3.1

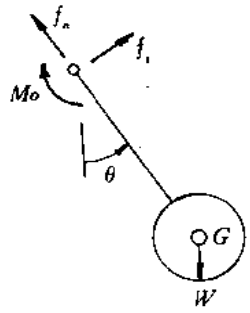


图 E2.3.2

在这个问题中可以不用公式 2.8 力的方程，除非希望要求销钉力 f_n 和 f_t。因为这是一个固定轴的转动问题，所以需用公式 2.9 的力矩方程。

$$\circlearrowleft + \sum M_0 = I_0\ddot{\theta}$$

（+表示+θ 方向）

根据自由体图有

$$-M_\theta - WL\sin\theta = I_0\ddot{\theta} \tag{1}$$

c. 写出力-位移方程：

$$\mathbf{M}_\theta = \mathbf{k}_\theta\boldsymbol{\theta} \tag{2}$$

d. 合并、简化方程：

根据平行轴定理

$$I_0 = I_G + mL^2 \tag{3}$$

根据公式(1)、(2)和(3)，得到了最后运动方程。

$$\boxed{(I_G + mL^2)\ddot{\theta} + k_\theta\theta + WL\sin\theta = 0} \tag{4}$$

作为最后的一个例题，是直接应用牛顿定律，即在动力平衡方程式中应用惯性力来推导 **SDOF** 系统的运动方程。现在研究例题 2.4。

例题 2.4

一个巨型匀质圆盘固定在一个轴的顶端，不计轴的重量与阻尼，推导出圆盘扭转摆动的运动方程。轴是由剪切弹性模量为 G 的材料制成，见图 E2.4.1。

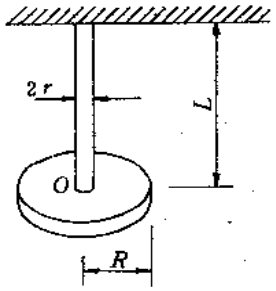


图 E2.4.1

解：

a. 画出任意移动位置上的圆盘自由体图，并规定位移坐标见图 E2.4.2。

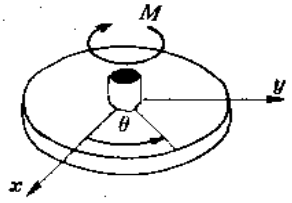


图 E2.4.2

b. 写出运动方程

根据公式 2.9b 有

$$\circlearrowleft + \sum M_0 = I_0\alpha \tag{1}$$

根据自由体图有

$$-M = I_0\alpha \tag{2}$$

c. 写出‘力-位移’方程

根据材料强度，在轴端点的扭矩 M 与扭角 θ 之间的关系为

$$M = \left(\frac{GJ}{L}\right)\theta \tag{3}$$

式中

$$J = \frac{\pi r^4}{2} \tag{4}$$

d. 合并与简化

$$I_0\ddot{\theta} + \left(\frac{GJ}{L}\right)\theta = 0 \tag{5}$$

即

$$\boxed{\frac{1}{2}(mR^2)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi r^4 G}{L}\right)\theta = 0} \tag{6}$$

注意该式具有如下形式

$$m_\theta\ddot{\theta}+k_\theta\theta=0$$

此式与前面例题中所得到的相似。

§2.3 集总参数模型的虚位移原理应用

在前一节中，简要回顾了动力学的基本知识，并且可以应用牛顿定律，即引用了惯性力来得到 **SDOF** 系统的运动方程。在本节中将给读者介绍虚位移原理。应用它不仅能够解§2.1中的问题，而且，当应用到连接的刚体或是以有限个 **DOF**（§2.4）近似表示的连续体模型时，虚位移原理就显得特别有用处了。在介绍虚位移原理之前，需要先引进几个定义。

- **位移坐标**是所规定的系统相对位置变化时所应用的一个参量。
- **约束**是假定系统相对位置在可能方向上运动的限制。
- **虚位移**是假想系统的相对位置发生与约束相一致的无穷小变化。

图 2.4 表示的是一长度为 L 的刚杆，其质量 m 作用在顶端。采用 u 和 v 为位移坐标，用**约束方程**来限制质量 m 在一个圆方向上的移动。

$$u^2+v^2=L^2 \tag{2.10}$$

u 和 v 因此不是独立的。事实上，它们都与角位移坐标 θ 有关。

$$u=L\cos\theta, v=L\sin\theta \tag{2.11}$$

图 2.4 也表示系统虚位移相对位置一个微小的变化 $\delta\theta$。δu 与 δv 用图解能够得到或应用公式 2.11 计算。例如

$$\begin{aligned} v+\delta v &= L\sin(\theta+\delta\theta) \\ &= L(\sin\theta\cos\delta\theta+\sin\delta\theta\cos\theta) \end{aligned} \tag{2.12}$$

因为 $\delta\theta$ 是无穷小的，所以 $\cos\delta\theta\doteq1$ 和 $\sin\delta\theta\doteq\delta\theta$。因此

$$v+\delta v=L\sin\theta+L\cos\theta\delta\theta$$

即

$$\delta v=(L\cos\theta)\delta\theta \tag{2.13a}$$

同理

$$\delta u=-(L\sin\theta)\delta\theta \tag{2.13b}$$

注意 δu 和 δv 的性质就如同微分一样。

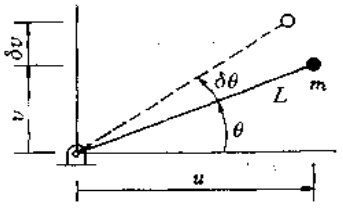


图 2.4 强迫，虚位移

继续其上述定义：

• **广义坐标组**是一组线性独立位移坐标。广义坐标要与约束相一致，而且要满足所描述系统任意的相对位置。例如，在图 2.4 中，**SDOF** 系统的 θ 是广义坐标。符号 $q_i(i=1,2,\cdots\cdots N)$是经常用来标示 **N-DOF** 系统的广义坐标。

• **虚功** δW 是力作用在发生了一个虚位移系统上所做的功。虚功可以写成

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} Q_i \delta q_i \tag{2.14}$$

• **广义力**是 Q_i，该参量乘以 δq_i，即为 δq_i 所做的虚功。即 Q_i 当 $\delta q_i=1$ 和 $\delta q_i=0$，且 $i\neq j$ 时所做的虚功。广义力是结构动力学中一个很重要的概念，读者应能非常熟悉地去识别和注意做虚功的广义力这一方法。

例题 2.5

分布力作用在一根刚梁上(如图 E2.5.1)，确定其所做的虚功，假定力作用的方向保持垂直于梁

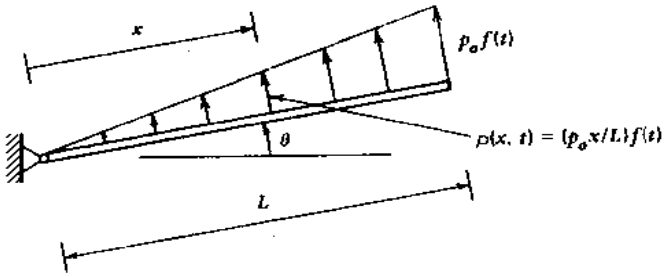


图 E2.5.1

解：

根据功的基本定义(力乘所移动的距离)

$$\delta W = \int_0^L p(x,t)\delta v(x,t)dx \tag{1}$$

式中 δv 是杆的虚位移，则由角的虚位移 $\delta\theta$ 而引起的。即

$$\delta v = x\delta\theta \tag{2}$$

则

$$\delta W = \int_0^L \left(\frac{p_0 x f}{L}\right)(x\delta\theta)dx \tag{3}$$

即

$$\boxed{\delta W = \left(\frac{P_0 L f}{2}\right)\left(\frac{2L\delta\theta}{3}\right) = \left(\frac{P_0 f L^2}{3}\right)\delta\theta} \tag{4}$$

这个答案要注意两个问题：(1)该结果与等效静态荷载($p_0 fL/2$)作用在它的重心处($2L/3$)所得到的结果相同。(2)广义力 Q_θ 是由 $Q_\theta = p_0 fL^2/3$ 所给。

• 应用到动力问题中的**虚位移原理**，现在可叙述如下：一个系统任何的任意位移，其实

际力与惯性力所做的虚功之和必须为零。

就是

$$\delta W' \equiv \delta W_{\text{实际力}} + \delta W_{\text{惯性力}} = 0 \tag{2.15}$$

现在研究下面的例题。应用§2.2中的牛顿定律，很容易地处理例题2.6。而例题2.7向读者表示用虚功列公式的优点。

例题 2.6

应用虚位移原理，推导图E2.6.1概化系统的运动方程(不计重力，并假定梁的转动很小)。

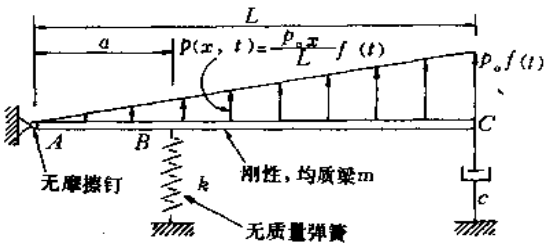


图 E2.6.1

解：

a. 画出该物体任意移动的相对位置，也附加一个虚位移的图、图E2.6.2写出所需要的运

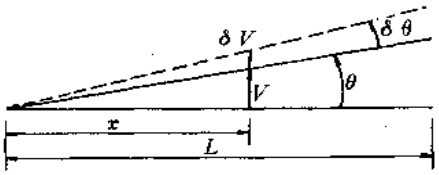


图 E2.6.2

动方程

$$v(x,t) = x\tan\theta(t) \tag{1}$$

如θ很小，则

$$v(x,t) = x\theta(t) \tag{2a}$$

$$\delta v(x,t) = x\delta\theta \tag{2b}$$

b. 在画出的被移动的物体上，表示出能做功的所有的力，包括惯性力，见图E2.6.3

c. 写出虚功方程

$$\delta W' = 0 \tag{3}$$

根据公式2与图E2.6.3，有

$$\delta W' = -f_s(a\delta\theta) - f_I\left(\frac{L\delta\theta}{2}\right) - M_I(\delta\theta)$$

$$+ f_p\left(\frac{2L\delta\theta}{3}\right) - f_D(L\delta\theta) = 0 \tag{4}$$

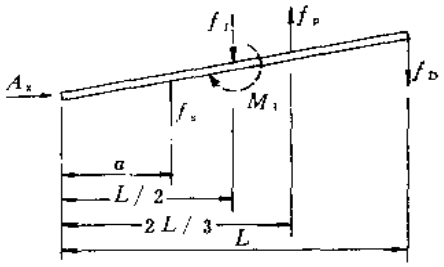


图 E2.6.3

d. 力与运动变量的关系

$$\left.\begin{aligned} f_s &= ka\theta \\ f_I &= \left(\frac{mL}{2}\right)\ddot{\theta} \\ M_I &= \left(\frac{mL^2}{12}\right)\ddot{\theta} \\ f_P &= \left(\frac{p_0 L}{2}\right) f(t) \\ f_D &= cL\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

e. 合并公式 4 和 5，并简化

$$\left[\left(\frac{mL^2}{3}\right)\ddot{\theta} + (cL^2)\dot{\theta} + (ka^2)\theta - \frac{p_0 L^2 f}{3}\right]\delta\theta = 0 \tag{6}$$

因为 $\delta\theta \neq 0$，则运动方程为

$$\boxed{\left(\frac{mL^2}{3}\right)\ddot{\theta} + (cL^2)\dot{\theta} + (ka^2)\theta = \left(\frac{p_0 L^2}{3}\right) f(t)} \tag{7}$$

注意例题 2.6 中是应用虚位移原理解的方法，与应用牛顿定律解的方法稍有不同。因为关键问题是虚功方程 $\delta W' = 0$，所以，所需要的参量是(1)做功的力包括惯性力，和(2)变形运动学的位移包括虚位移。据此，画出表示做功的力，并画出所表示的变形图以代替自由体图。当直接应用牛顿定律时，这是必不可少的。

当然例题 2.6 中的方法是比较容易的，只是应用牛顿定律画一自由体图。然而，当有刚体连接时，在应用牛顿定律的解中，将需要有几个自由体图和许多方程。而虚功方法就可以大大简化这个解，正如读者在例题 2.7 中将会见到的。

例题 2.7

一个质量为 M 的仪器外壳，用两根质量为 m 的薄型刚梁连接在一个正在运动的车壁上，如图 E2.7.1。应用虚功原理推导仪器外壳的运动方程。不计重力与阻尼力，并假定支承刚梁角运动很小。

解：

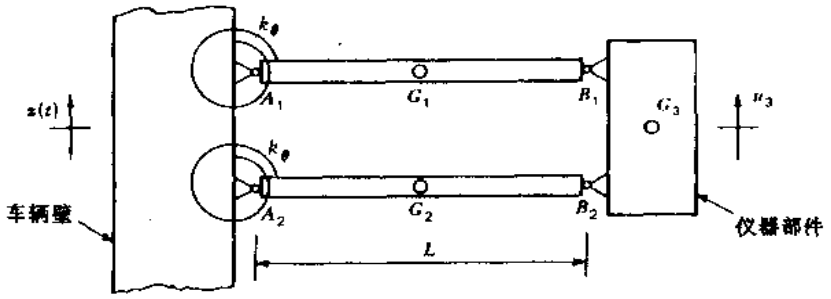


图 E2.7.1

a. 画出系统任意移动一相对位置图(如图 E2.7.2)也要附加上虚位移。写出所需要的运动学方程

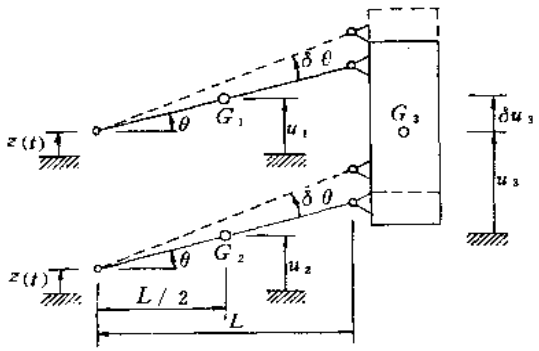


图 E2.7.2

因为 θ 很小,$\delta\theta$ 很小,则,

$$u_1 = u_2 = z + \left(\frac{L}{2}\right)\theta, \quad \delta u_1 = \delta u_2 = \left(\frac{L}{2}\right)\delta\theta$$

$$u_3 = z + L\theta, \quad \delta u_3 = L\delta\theta \tag{1}$$

(注意,因为 z 是一个规定的时间函数 $z(t)$,图上没有出现虚位移 δz。还要注意,G_1、G_2 和 G_3 的运动全部能够按已知位移 z 来表示,唯一的未知数为位移 θ。因此这是一个 **SDOF** 系统;虽然它包括了几个刚体运动。)

b. 在位移的物体图上(如图 E2.7.3)表示出所有的作用力,包括所有的惯性力

c. 应用虚功方程公式 2.5

$$\delta W' = 0 \tag{2}$$

$$-(2k_\theta\theta)\delta\theta - m\ddot{u}_1\delta u_1 - I_{G_1}\ddot{\theta}\delta\theta$$

$$- m\ddot{u}_2\delta u_2 - I_{G_2}\ddot{\theta}\delta\theta - M\ddot{u}_3\delta u_3 = 0 \tag{3}$$

d. 合并公式 1 和公式 3,并简化

$$2k_\theta\theta\delta\theta + 2m\left[\ddot{z} + \left(\frac{L}{2}\right)\ddot{\theta}\right]\left[\left(\frac{L}{2}\right)\delta\theta\right] \tag{4}$$

即

$$+ 2\left[\left(\frac{1}{12}\right)mL^2\right]\ddot{\theta}\delta\theta + M(\ddot{z} + L\ddot{\theta})(L\delta\theta) = 0$$

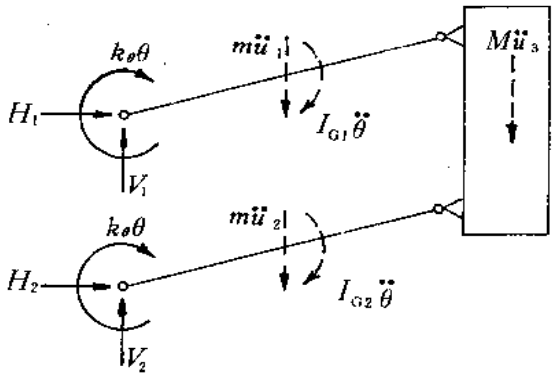


图 E2.7.3

$$\left[\left(M+\frac{2m}{3}\right)L^2\ddot{\theta}+2k_\theta\theta+(m+M)L\ddot{z}\right]\delta\theta=0 \tag{5}$$

最后，因为 $\delta\theta\neq0$，所以公式(5)成为

$$(M+\frac{2m}{3})L^2\ddot{\theta}+2k_\theta\theta=-(m+M)L\ddot{z} \tag{6}$$

这是系统的运动方程式。

根据例题 2.6 和例题 2.7，读者可以看到 **SDOF** 系统在应用虚位移原理时，会导出一个唯一的虚功方程的形式。

$$[F(\ddot{q},\dot{q},q,t)]\delta q=0 \tag{2.16}$$

因为 δq 是一个任意小的位移，它不应为零，所以在括号中的表达式必须为零。因此，这是系统的运动微分方程，正如读者在例题 2.6 和例题 2.7 中所见。

§2.4 连续模型的虚位移原理应用——假定振型法

在 §2.3 中，读者已经看到，应用虚位移原理在推导连接的刚体运动方程时，可以大大简化工作量。而**刚体**的假想，对它本身即是一个系统的概化。例如，在例题 2.6 中，所谓的"刚性"梁，在受到确定的与时俱变的函数 $f(t)$ 所激励时，则该梁的全长上就不保持刚体了，而是发生明显的变形，即它的中性轴假定成随时间变化的曲线形式。因此，假定梁为一刚体，在整个振型分析中就不那么适合了。图 1.3a)的悬臂梁，如果我们一定要模拟成刚体的话，那么整个梁就不会自由变形。

然而，虚位移原理可以推广到连续系统的**广义参数模型**中。在一定程度上，近似于系统的挠曲特性，这种方法称之为**假定振型法**。在这里应用它构成 **SDOF** 广义参数模型，并且将要推广到第 11 章的 **MDOF** 系统中。

开始需要明确几个定义。

- **连续系统**是说系统的变形可用一个、二个或三个空间变量和时间的一个或多个函数

来描述。例如，图 1.3a)中悬臂梁的变形规定是以中性轴挠曲线 $v(x,t)$表示。

• **几何边界条件**是规定运动的约束，它位于物体边界有位移的地方或(和)有角变的部位。

• 连续系统的**虚位移**是无穷小的，是假想的变化。位移函数要与全部几何边界条件相容。

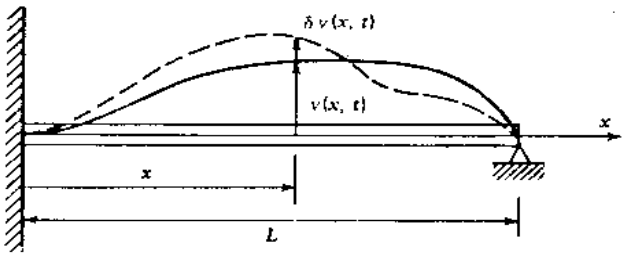


图 2.5　几何边界条件和虚位移的说明

图 2.5 说明了以上的定义。这个支撑的悬臂梁以 $v(x,t)$给出了变形，其几何边界条件是

$$v(0,t) = v'(0,t) = v(L,t) = 0 \tag{2.17}$$

以虚线表示了该梁的一个可能的虚位移 $\delta(x,t)$。仅是这个条件 $\delta v(x,t)$就满足了相同的几何边界条件 $v(x,t)$，即

$$\delta v(0,t) = \delta v'(0,t) = \delta v(L,t) = 0 \tag{2.18}$$

注意 $\delta V(x,t)$与 $v(x,t)$意义相同，不是一个时间函数。更确切地说，符号 $\delta V(x,t)$的意思只是为梁在时间 t 时相对位置的一个任意微小变化。

现在继续说明定义：

• **可取函数**是一个为满足所研究系统几何边界条件的函数，并且其导数的阶至少与该系统在应变能表达式中出现的相等(即公式 2.23)。

• **假定振型**即**形函数**是用一个可取函数去近似表示连续系统的变形。

利用一个假定振型，来构成连续系统广义参数的 **SDOF** 模型。例如梁的挠曲线可以近似地表示为

$$v(x,t) = \psi(x)v(t) \tag{2.19}$$

任何可取函数可以作为 $\psi(x)$，而形状应该选择与结构变形时的形状相似为宜。在公式 2.19 中的 $v(t)$称为这个 **SDOF** 模型的**广义位移**。当为集总参数模型情况时，可用一个常微分方程的解来确定。

根据公式 2.19，现在可以使用虚位移原理来构成 **SDOF** 广义参数模型。如前所述，应用公式 2.15。然而对于连续系统引进势能，即用保守力做功是很方便的。令

$$\delta W_{\text{真实力}} = \delta W_{\text{保守力}} + \delta W_{\text{非保守力}} \tag{2.20}$$

式中 $\delta W_{\text{保守力}}$表示保守力所做的虚功；$\delta_{\text{非保守力}}$表示非保守力所做的虚功。根据势能定义

$$\delta W_{\text{保守力}} = -\delta V \tag{2.21}$$

式中 δV 是势能的改变，根据保守力作用在假想相对位置改变的系统上。例如梁通过 $\delta V(x,t)$，则公式 2.15 就变成：

$$\delta W' = \delta W_{\text{非保守力}} - \delta V + \delta W_{\text{惯性力}} = 0 \tag{2.22}$$

一根杆受轴向变形 $u(x,t)$，或一根梁受横向挠曲 $v(x,t)$，其应变能表达式为

$$V_{\text{轴向}} = \frac{1}{2}\int_0^L AE(u')^2 dx \tag{2.23a}$$

和

$$V_{\text{弯曲}} = \frac{1}{2}\int_0^L EI(v'')^2 dx \tag{2.23b}$$

因此，已知 δV 分别为

$$\delta V_{\text{轴向}} = \int_0^L (AEu')\delta u' dx \tag{2.24a}$$

和

$$\delta V_{\text{弯曲}} = \int_0^L (EIv'')\delta v'' dx \tag{2.24b}$$

例题 2.8

一轴力 $P(t)$作用在一根均质、线弹性直杆的末端，如图 E2.8.1。选择一个简单的函数 $\phi(x)$，用假定振型法推导出杆形成 **SDOF** 模型的运动方程。

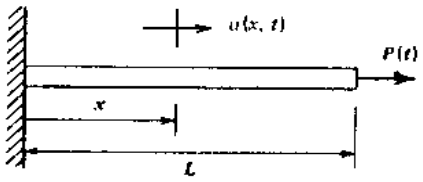


图 E2.8.1

解：

a. 选择一形函数 $\phi(x)$使其与几何边界条件相容，这里几何边界条件只是

$$u(0,t) = 0 \tag{1}$$

因此，形函数 $\phi(x)$必须满足

$$\phi(0) = 0 \tag{2}$$

要满足这个条件的最简单函数为 $\phi(x)=x$。然而，使 $\phi(x)$正规化是较为方便的。因此，在某些合适的地方，它是有值的，比方说 $x=L$。因此，选择

$$\boxed{\phi(x) = \frac{x}{L}} \tag{3}$$

则

$$u(x,t) = \left(\frac{x}{L}\right)u(t) \tag{4}$$

式中 $u(t)$是杆端实际的与时俱变的广义位移。

b. 建立虚功方程公式 2.22

$$\delta W' = \delta W_{\text{非惯性力}} - \delta V + \delta W_{\text{惯性力}} = 0 \tag{5}$$

$$\delta W_{\text{非惯性力}} = P\delta u(L,t) = P\delta u \tag{6}$$

根据公式 2.22a

$$\begin{aligned}\delta V &= \int_0^L (AEu')\delta u' dx \\ &= AE\int_0^L \left(\frac{u}{L}\right)\left(\frac{\delta u}{L}\right) dx \\ &= \left(\frac{AEu}{L}\right)\delta u\end{aligned} \tag{7}$$

$(-\rho A\ddot{u})$是沿杆分布的惯性力。因此，惯性力所做的虚功为

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{惯性力}} &= \int_0^L (-\rho A\ddot{u})\delta u dx \\ &= -\left(\frac{\rho A\ddot{u}\delta u}{L^2}\right)\int_0^L x^2 dx \\ &= -\left(\frac{\rho AL}{3}\right)\ddot{u}\delta u\end{aligned} \tag{8}$$

c. 合并与简化

$$\left[P - \left(\frac{AE}{L}\right)u - \left(\frac{\rho AL}{3}\right)\ddot{u}\right]\delta u = 0 \tag{9}$$

公式 9 具有公式 2.16 的形式，其条件 δu 为任意的，导出下面的 **SDOF** 模型广义参数的微分方程。

$$\boxed{\left(\frac{\rho AL}{3}\right)\ddot{u} + \left(\frac{AE}{L}\right)u = P(t)} \tag{10}$$

注意该方程具有相似的形式

$$m\ddot{u} + ku = p(t)$$

见前面的集总参数例题。

读者记得公式 10 是基于公式 4 而来，它是近似表示实际的与时俱变的运动 $u(x,t)$。这个运动是杆将实际地受到作用力 $P(t)$的结果，这是很重要的。

以上例题表明如何特定选择一个形函数 $\psi(x)$引入常微分方程来表示连续系统的 **SDOF** 模型。其次提供了一个很重要的通用的假定振型法的例题。读者要仔细地研究这个例题。

例题 2.9

确定如图 E2.9.1 所示的系统在下面的广义参数运动方程中的 m、C、k、k_G 和 P 的表达式。

$$m\ddot{v} + c\dot{v} + (k - k_G)V = p(t)$$

应用通用的假定振型形式

$$v(x,t) = \psi(x)v(t)$$

以 $\psi(L)=1$。轴向压力 N 是常数并保持水平方向，不计重力影响。

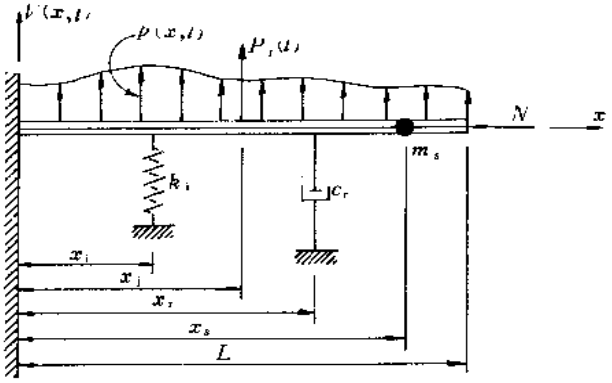


图 E2.9.1

解：

a. 应用虚功方程，公式 2.22

$$\delta W' = \delta W_{\text{非保守力}} - \delta V + \delta W_{\text{惯性力}} = 0 \tag{1}$$

b. 根据惯性力确定 m：

$$\delta W_{\text{惯性力}} = \int_0^L (-\rho A\ddot{v})\delta v dx - m_s\ddot{v}(x_s,t)\delta v(x_s,t) \tag{2}$$

将 $\ddot{v}$ 与 $\delta\ddot{v}$ 代入上面方程，得到：

$$\delta W_{\text{惯性力}} = -\left[\int_0^l \rho A\psi^2(x)dx + m_s\psi^2(x_s)\right]\ddot{v}\delta v \tag{3}$$

推导所期望的最后方程，令

$$\delta W_{\text{惯性力}} = -m\ddot{v}\delta v \tag{4}$$

式中

$$\boxed{m = \int_0^L \rho A\psi^2 dx + m_s\psi_s^2} \tag{5}$$

为**广义质量**

c. 由粘滞阻尼器确定 c

$$\delta W_{\text{阻尼}} = -c_r\dot{v}(x_r,t)\delta v(x_r,t) \tag{6}$$

令

$$\delta W_{\text{阻尼}} = -c\dot{v}\delta v \tag{7}$$

式中

$$c = c_r\psi_r^2 \tag{8}$$

为**广义粘滞阻尼系数**。

d. 由线性弹簧和弹性梁确定 k：

根据公式 2.2

$$\delta V_{\text{弹簧}} = k_i e_i\delta e_i = k_i v(x_i,t)\delta v(x_i,t) \tag{9}$$

因此

$$\delta V_{\text{弹簧}} = k_i\psi_i^2 v\delta v \tag{10}$$

根据公式 2.24b

$$\delta V_{\text{弯曲}} = \int_0^L EIv''\delta v''dx \tag{11}$$

则
$$\sigma V_{\text{弯曲}} = [\int_0^L EI(\psi'')^2 dx]v\delta v \tag{12}$$

令
$$\delta V_{\text{弯曲}} + \delta V_{\text{弹簧}} = kv\delta v \tag{13}$$

则广义刚度系数为
$$k = \int_0^L EI(\psi'')^2 dx + k_i\psi_i^2 \tag{14}$$

e. 由轴向压力 N 确定 k_G：

由于横向挠曲，在梁顶部的轴向以及横向上作用力 N 将发生移动，因此 N 作功；见图 E2.9.2。

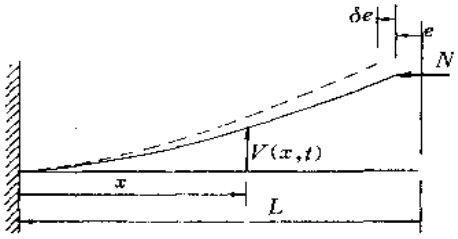


图 E2.9.2

研究一个单元体 dx，确定由于横向挠曲而产生的压缩效应。假定单元体 AB 的长度 dx 还

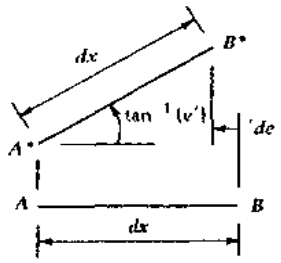


图 E2.9.3

保持 dx 长，而由于横向挠曲 $v(x,t)$ 转动后的位置为 A^*B^*，见图 E2.9.3。
$$\overline{AB} = \overline{A^*B^*}\cos[\tan^{-1}(v')] + de \tag{15}$$

如 $v' \ll 1$ 时，
$$\cos[\tan^{-1}(v')] \doteq \cos(v') \doteq 1 - \frac{1}{2}(v')^2 \tag{16}$$

于是，由公式(15)和公式(16)有
$$dx = dx[1 - \frac{1}{2}(v')^2] + de$$

即
$$de = \frac{1}{2}(v')^2 dx \tag{17}$$

因此，由于横向挠曲而轴向缩短为

$$e = \frac{1}{2}\int_0^L (v')^2 dx \tag{18}$$

$$\delta W_N = N\delta e = N\int_0^L v'\delta v' dx \tag{19}$$

将假定振型代入此式，得到

$$\delta W_N = k_G v\delta v \tag{20}$$

式中

$$\boxed{k_G = N\int_0^L (\psi')^2 dx} \tag{21}$$

为**广义几何刚度系数**。

f. 最后由横向作用力确定 $p(t)$：

$$\delta W_P = \int_0^L p(x,t)\delta v(x,t)dx + P_i\delta v(x_i,t) \tag{22}$$

将 δv 代入上式，得到

$$\delta W_P = p(t)\delta v \tag{23}$$

式中**广义外力**已知为

$$\boxed{p(t) = \int_0^L p(x,t)\psi(x)dx + P_i(t)\psi_i} \tag{24}$$

g. 以上 δV 和 δW 的表达式与公式 1 合并，并简化：

$$[-c\dot{v} + p(t) + k_G v - kv - m\ddot{v}]\delta v = 0 \tag{25}$$

因为 $\delta v \neq 0$，可以写成这个系统的运动方程为

$$\boxed{m\ddot{v} + c\dot{v} + (k - k_G)v = p(t)} \tag{26}$$

如需要，此处系数可按以上规定给出。

注意用假定振型法来确定以上的微分方程，除了 k_G 项外，在形式上与例题 2.1 中的公式 8 相同。推导的这个最后的方程为简单的集总参数质-弹-阻尼系统。假定振型法引入**广义参数模型**时，它的位移函数是**广义(位移)坐标** $v(t)$。相应地，称 m 为广义质量系数或简称为**广义质量**，c 为**广义粘滞阻尼**，k 为**广义刚度**，k_G 为**广义几何刚度**，和 $p(t)$ 为**广义力**。下面将给出这些更一般形式的表达式*

$$m = \int_0^L \rho A\psi^2 dx + \sum_s m_s\psi_s^2 \tag{2.25}$$

$$c = \int_0^L c(x)\psi^2 dx + \sum_r C_r\psi_r^2 \tag{2.26}$$

$$k = \int_0^L EI(\psi'')^2 dx + \int_0^L k(x)\psi^2 dx + \sum_i k_i\psi_i^2 \tag{2.27}$$

---

* 这里按照前面集总参数模型的介绍，对广义参数也采用了相同的符号 m,c,k,p；因为该符号在最后的运动微分方程中适用于相同的函数。

$$k_G = \int_0^L N(x)(\psi')^2 dx \tag{2.28}$$

和

$$p(t) = \int_0^L p(x,t)\psi dx + \sum_j P_j\psi_j \tag{2.29}$$

式中$\sum$表示为若干离散单元或可以表示为力，允许有分布阻尼$c(x)$和分布弹性基础$k(x)$。轴向内荷载$N(x)$可随其位置而变化。

参考文献

2.1 C. W. Bert, "Material Damping: An Introductory Review of Mathematical Models, Measures and Experimental Techniques," *J. Sound and Vibration*, v. 29, 129—153(1973).

习题组 2.2*

应用牛顿定律确定习题 2.1 至 2.6 的 SDOF 系统的运动方程。并表示所需要的自由体图。

2.1 一根刚性水平杆件BC，质量为m，用两根弯曲刚度为EI的竖向杆件支撑，不计BC重量对竖直杆件刚度的影响，如图 P2.1 确定其运动方程。

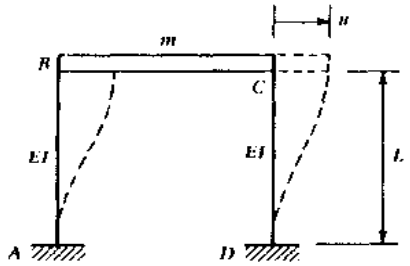


图 P2.1

2.2 一个半径为R、质量为m的重型圆盘连接在一根长为L轴的中间部位，轴的两端是刚性固结的，轴的半径为r，如图 P2.2 确定圆盘的运动方程。令θ为位移坐标。

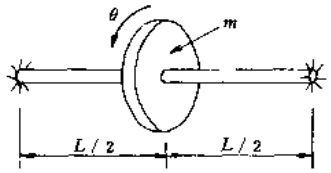


图 P2.2

2.3 一根刚梁AB，用力在弹簧BC上去激励它，其C点的运动规定为$z(t)$，如图 P2.3。

* 习题的标题数是该习题组属于本书的哪一章节。

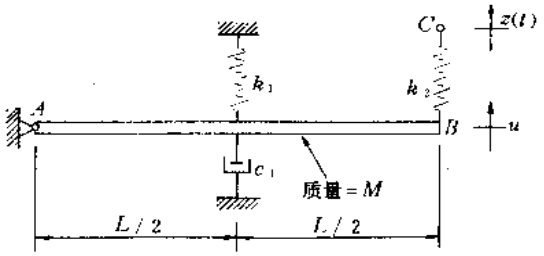


图 P2.3

按 B 点的垂直运动 u 来确定系统的运动方程，假定运动是微小的。

2.4 模拟一辆汽车为一集中质量 m，以及根据所示输入的弹簧和阻尼器，假定汽车沿着已知以位置为函数的粗糙路面上等速运行，如图 P2.4。

(a)确定系统的运动方程。

(b)讨论这个模型的某些可能的限制。

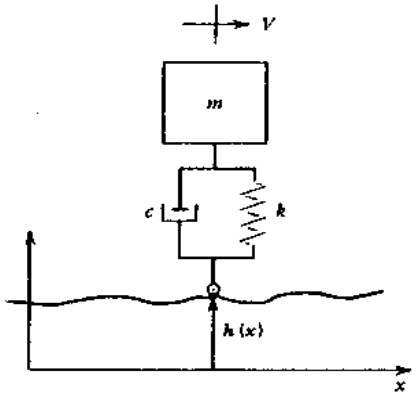


图 P2.4

2.5 系统如图 P2.5，确定按下形式的运动方程。

$$\mathrm{mu}+c_u+k_u=p_u(t)$$

其中 u 为 E 点的垂直运动。假定薄刚杆 AE 质量为 M，其转动很小。

2.6 根据所确定的惯性矩 I_A，称控制调整片重，确定其重心并做自由振动试验，可以计算飞机升降舵控制调整片的惯性特性。图 P2.6 所示为上升时的振动试验，应用牛顿定律确定对 A 轴微小转动时的运动方程。

习题组 2.3

2.7 应用虚位移原理来推导图 P2.3 中系统的运动方程。

2.8 应用虚位移原理来推导图 P2.5 中系统的运动方程。

2.9 应用虚位移原理来推导本题图 P2.9 中系统的运动方程。全杆的角位移为位移坐标。假定角的转动很小。三角形分布荷载是与时俱变的，而 N 保持水平常量。

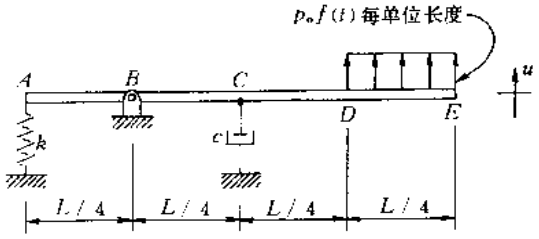


图 P2.5

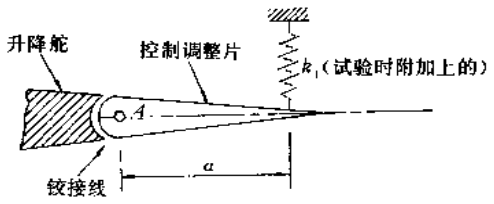


图 P2.6

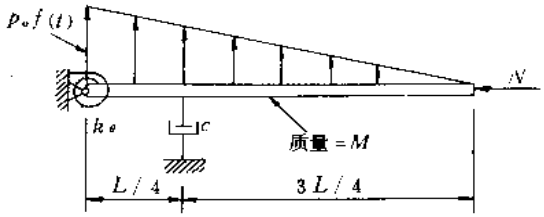


图 P2.9

2.10 将飞机着陆传动装置模拟成一集中质量 m 并由弹簧与阻尼器连在飞机 M 上。根据弹簧 k_2 底部运动的结果来模拟质量上的轮胎力。假定飞机以常量速度 V 通过正弦曲线的粗糙路面。应用虚位移原理来确定质量的运动方程。假定飞机质量 M 为水平运动，如图 P2.10。

2.11 经常用摆的试验来测定质量的惯性特性。本题图 P2.11 中一重量为 W 的均匀杆用两根无重量垂直钢丝垂挂着，杆对垂直轴有很小的转动摆动，应用虚位移方法来确定运动方程。令转角为位移坐标。

2.12 应用虚位移来求习题 2.6 中系统的运动方程。

习题组 2.4

2.13 一根均匀杆，图 P2.13 其单位体积质量密度 ρ，并具有顶部质量 M，应用假定振型法 $\psi(x)=x/L$ 来推导该系统轴向自由振动的运动方程。假定 $AE=$常数。

2.14 应用 $\psi(x)=\sin(\pi x/2L)$ 重做习题 2.13。

2.15 一锥形杆，每单位体积的质量密度为 ρ，并为圆截面。如图 P2.15。应用假定振型法 $\psi(x)=x/L$，推导杆的轴向自由振动的运动方程。

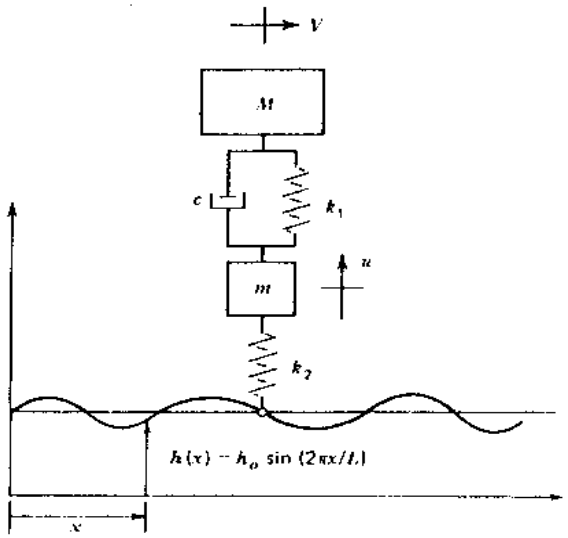


图 P2.10

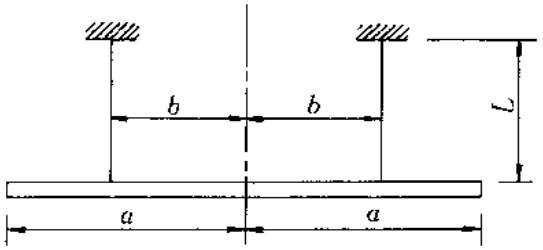


图 P2.11

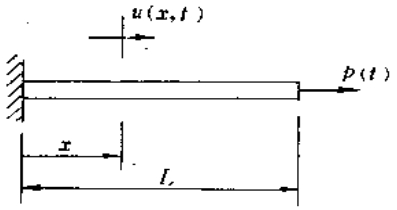


图 P2.13

2.16 一杆的两端为刚性支承如图 P2.16。若

(a) $\psi(x)$是一个多项式

(b) $\psi(x)$是正弦曲线

确定用于表示轴向运动的一个恰当形函数。

2.17 一均匀悬臂梁作用有一常量水平力 N 和一与时俱变的横向分布荷载 $p(x,t)$，如图 P2.17 $\psi(x)$采用一简单多项式来推导悬臂梁横向振动的运动方程。

2.18 娱乐公园中的一个监测塔模拟成一个刚性均匀圆杆体，如图 P2.18。质量 Mc、半径

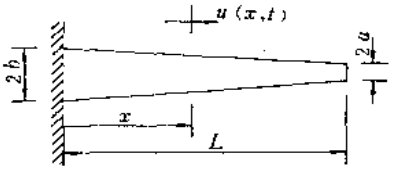


图 P2.15

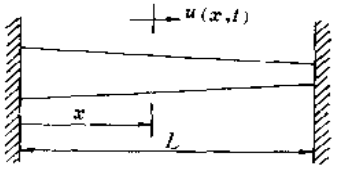


图 P2.16

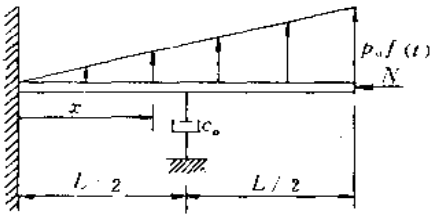


图 P2.17

为 R 作用在均匀柔性柱的顶部；柱的总质量 M_T，刚度为 EI。假设 $H \ll L$，即圆柱体可以认为是一个薄圆盘，其重心在柱的顶部。但必须包含这个圆盘的平移和转动惯量。

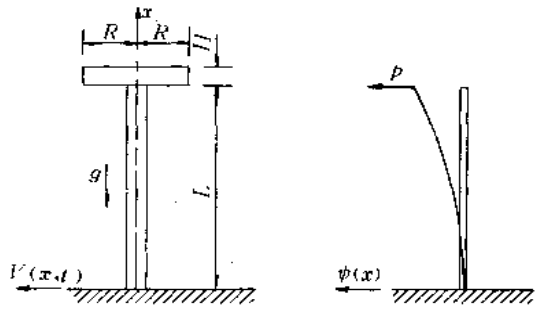


图 P2.18

应用假定振型法推导该系统的横向振动运动方程。$\psi(x)$采用均匀梁顶上集中力的静挠度曲线，包含 Mc 与 M_T 两者参与的几何刚度在内。

第 3 章　SDOF 系统自由振动

在第 2 章中已介绍了几种推导 SDOF 系统运动方程的方法。读者可以看到所有线性 SDOF 系统的运动方程都有如下形式

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{3.1}$$

式中 m，u 等可以叫做广义参量。公式(3.1)为图 3.1 系统的运动方程。因此，图 3.1 的系统可以认为是 SDOF 系统的原型。现在开始研究这样一个系统对一已知激励 $p(t)$ 与初始条件的响

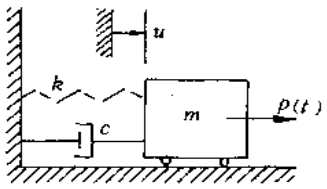


图 3.1　SDOF　系统原型

应，例如在 $t=0$ 时的速度与位移。已知为

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \tag{3.2}$$

式中 u_0 和 $\dot{u}_0$ 分别规定为初始位移与初始速度。

用 m 除公式 3.1 可以容易地得到

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = \left(\frac{\omega_n^2}{k}\right) p(t) \tag{3.3}$$

式中

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{3.4a}$$

和

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} \tag{3.4b}$$

式中

$$c_{cr} = 2m\omega_n = \frac{2k}{\omega_n} = 2\sqrt{km} \tag{3.4c}$$

ω_n 称为**无阻尼固有圆频率**，它的单位为弧度/秒(rad/s)。ζ 为一个无量纲的参量，称为**粘滞阻尼因数**。c_{cr}为**临界阻尼系数**。ω_n 与 ζ 在计算 SDOF 系统中是很重要的计算参数。

公式 3.3 是线性，常系数的常微分方程，它的解即**总响应**是由两个不同性质部分的线性组合。一部分是**强迫振动** $u_p(t)$，直接与 $p(t)$有关；另一部分是**固有运动** $u_c(t)$使它能满足任意初始条件。因此，

$$u(t) = u_p(t) + u_c(t) \tag{3.5}$$

在数值计算方法中，微分方程的**通解**是由一个**特解** $u_p(t)$ 和一个**齐次解** $u_c(t)$ 所组成。

在本章中，读者只学习**自由振动**，即固有运动。固有运动是当 $p(t)=0$ 时公式 3.3 的解。则

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \tag{3.6}$$

解公式 3.6 的一般方法是假定一个解的形式*

$$u = \bar{C}e^{\bar{s}t} \tag{3.7}$$

当用公式 3.7 代入公式 3.6 中，得到

$$(\bar{s}^2 + 2\xi\omega_n\bar{s} + \omega_n^2)\bar{C}e^{\bar{s}t} = 0 \tag{3.8}$$

公式 3.8 对所有 t 都成立，因此必须是

$$\bar{s}^2 + 2\zeta\omega_n\bar{s} + \omega_n^2 = 0 \tag{3.9}$$

公式 3.9 称为**特征方程**。

在 § 3.1 中，读者要研究无阻尼自由振动，即当 $\zeta=0$ 时，公式 3.9 的解。然后在 § 3.2 中，读者将研究 $\zeta\neq 0$ 时即表示为粘滞阻尼时的解。

本章将完成如下内容：

- **确定无阻尼 SDOF 系统的无阻尼固有频率、周期、幅值、相位和在所规定的初始条件下而得到的运动结果。**
- **确定粘滞阻尼 SDOF 系统的阻尼固有频率、阻尼因数、对数衰减、时间常量和在所规定的初始条件下而得到的运动结果。**
- **试验确定简单的低阻尼 SDOF 系统的固有频率与阻尼因数的近似值。**

§ 3.1 无阻尼 SDOF 系统自由振动

无阻尼 SDOF 系统的运动方程为

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0 \tag{3.10}$$

相应的特征方程为

$$\bar{s}^2 + \omega_n^2 = 0 \tag{3.11}$$

公式 3.11 的根为

$$\bar{s}_{1,2} = \pm i\omega_n \quad \text{式中} \quad i = \sqrt{-1} \tag{3.12}$$

将两个根代入公式 3.7，得到**通解**

$$u = \bar{C}_1 e^{i\omega_n t} + \bar{C}_2 e^{-i\omega_n t} \tag{3.13}$$

引入欧拉(Euler)方程

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \tag{3.14}$$

可按三角函数重写公式 3.13 为

$$u = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t \tag{3.15}$$

---

* 如在本章后面所见，$\bar{C}$ 和 $\bar{s}$ 是复数，在本书中复数要用一横线标示。

式中 A_1 和 A_2 是实常数，可根据公式(3.2)的初始条件来确定。将公式(3.2)与(3.15)引入

$$u(0) = u_0 = A_1$$
$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0 = A_2\omega_n \tag{3.16}$$

因此

$$u = u_0\cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)\sin\omega_n t \tag{3.17}$$

为无阻尼 SDOF 系统的自由振动响应。

首先研究系统的这种情况，即从它的平衡位置移动了大小为 u_0 的距离，并释放之，因此 $\dot{u}(0)=0$，所以

$$u = u_0\cos\omega_n t \tag{3.18}$$

图 3.2 是它的曲线图。可以看到，所得到的运动是一个幅值为 u_0 的**简谐运动**，**无阻尼固有周期**

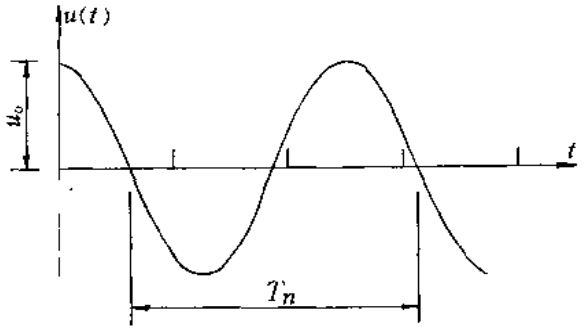


图 3.2　无阻尼 SDOF 系统 $\dot{u}(0)=0$ 时的自由振动

为

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (s) \tag{3.19}$$

无阻尼固有频率为

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (\mathrm{Hz}) \tag{3.20}$$

Hz 代表赫兹。1 赫兹=1 周/s。

图 3.3 表示公式 3.17 的一条曲线，当 u_0 与 $\dot{u}_0$ 都不为零时的情况。这仍是周期为 T_n 的简单的简谐运动。u(t)可用公式 3.17 来表示，或用下面的公式

$$u(t) = U\cos(\omega_n t - \alpha) = U\cos\omega_n\left(t - \frac{\alpha}{\omega_n}\right) \tag{3.21}$$

式中 U 为**幅值**，α 为**相位角**，用 $u(t)$滞后于函数 $\cos\omega_n t$ 来确定其值。将这些参量与 u_0 和 $\dot{u}_0$ 相联系，并使用转动矢量即复平面，就可方便地表示简单的简谐运动。

图 3.4a 表示一个复数 $\bar{C}$，如何能在复平面中用极坐标形式

$$\bar{C} = Ce^{i\theta} \tag{3.22a}$$

或用矩形坐标表示

$$\bar{C} = R(\bar{C}) + iI(\bar{C}) = C_R + iC_I \tag{3.22b}$$

式中 $R()$代表'实部'，$I()$代表'虚部'。这两种形式可用欧拉方程、公式 3.15 联系起来，因此

$$C_R = C\cos\theta, \quad C_I = C\sin\theta \tag{3.23}$$

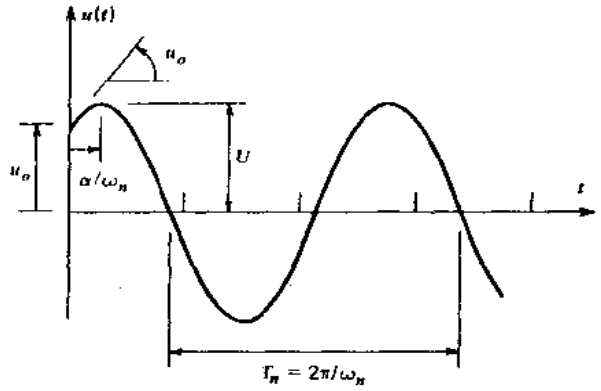


图 3.3　无阻尼 SDOF 系统一般自由振动响应

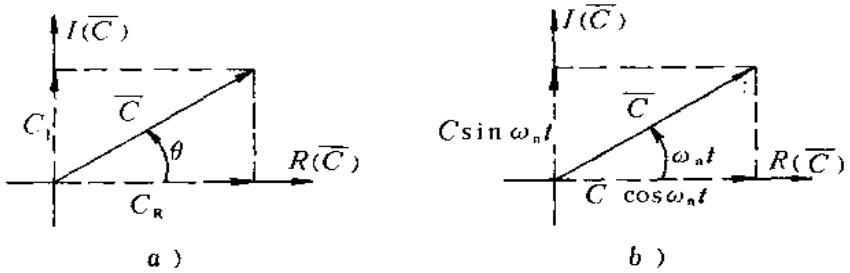


图 3.4　复平面(Argand)中矢量表示法
a)复数表示法;b)SHM 的转动矢量表示法

图 3.4b 表示,当角度 θ 为 $\omega_n t$ 时,则 $\overline{C}$ 变成一个转动矢量

$$\overline{C} = Ce^{i\omega_n t} = C\cos\omega_n t + iC\sin\omega_n t \tag{3.24}$$

其水平投影,即 $\overline{C}$ 的实部分量表示简谐运动 $C\cos\omega_n t$,其垂直投影、即虚部分量表示简谐运动 $C\sin\omega_n t$。

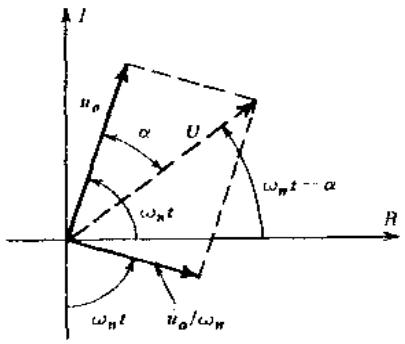


图 3.5　无阻尼自由振动转动矢量表示法

图 3.5 表示如何处理两个转动矢量。公式 3.17 $u(t)$的右侧表达式相应于在实轴上的投影，以及公式 3.21 $u(t)$的右侧表达式相应于它的结果的投影。因此，根据图 3.5 可看到在公式 3.21 中的幅值 U 和相位角 α，以下式给出

$$U^2 = u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2;$$

和

$$\tan\alpha = \frac{\dot{u}_0/\omega_n}{u_0} \tag{3.25}$$

§3.2 粘滞阻尼 SDOF 系统自由振动

读者根据公式(3.21)与图 3.3 可以看到，一个无阻尼系统一旦以初始条件 u_0 与 $\dot{u}_0$ 开始运动，则该运动将要继续不停(理论上)。事实上，系统都会有阻尼的，即逸散能，最终运动停止。

现在研究线性粘滞阻尼 SDOF 系统的三种运动情况。它的运动方程为公式(3.6)，这里重写

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \tag{3.26}$$

假定解的形式为

$$u = \bar{C}e^{\bar{s}t} \tag{3.27}$$

由此得到特征方程

$$\bar{s}^2 + \zeta\omega_n\bar{s} + \omega_n^2 = 0 \tag{3.28}$$

方程的根 $\bar{s}_1$ 与 $\bar{s}_2$ 为

$$\bar{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{3.29}$$

利用阻尼因数 ζ 的大小可以区分成三种情况：**弱阻尼**($0<\zeta<1$)，**临界阻尼**($\zeta=1$)和**过阻尼**($\zeta>1$)。图 3.6 说明了这三种情况。弱阻尼的情况，运动是幅值衰减的摆动。过阻尼的情况是不发生摆动，并且幅值是慢慢的衰减。临界阻尼系统，则不发生摆动，并且幅值的衰减比弱阻尼和过阻尼的情况都快。因为弱阻尼的情况在结构动力应用中占有非常重要的位置，所以首先要讨论它。

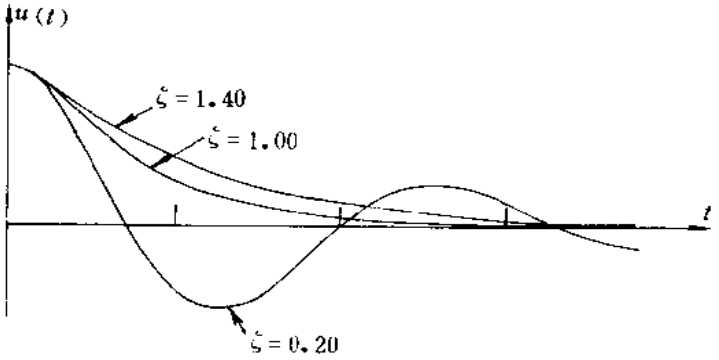


图 3.6 粘滞阻尼 SDOF 系统不同阻尼程度的响应

弱阻尼情况($\zeta<1$)

如果 $\zeta<1$ 时，公式(3.39)可以很容易地写成下式

$$\bar{s}_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_d \tag{3.30}$$

式中 ω_d 是**阻尼固有圆频率**，为

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \tag{3.31a}$$

相应的**阻尼周期** T_d 为

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \tag{3.31b}$$

辅以欧拉公式，则通解 $u(t)$ 可以写成下式：

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A_1\cos\omega_d t - A_2\sin\omega_d t) \tag{3.32}$$

再用 u_0 与 $\dot{u}_0$ 去计算 A_1 和 A_2，其结果为

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u_0\cos\omega_d t + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right] \tag{3.33}$$

公式(3.33)可以写成下式

$$u(t) = Ue^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \alpha) \tag{3.34}$$

使用转动矢量方法表示

$$U^2 = u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d}\right)^2 \tag{3.35}$$

和

$$\tan\alpha = \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_d u_0}$$

图 3.7 表示具有低于临界阻尼不同水准的 **SDOF** 系统响应。在每种情况中、因 $u_0=0$，则响应已知为

$$u(t) = \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_d}\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \tag{3.36}$$

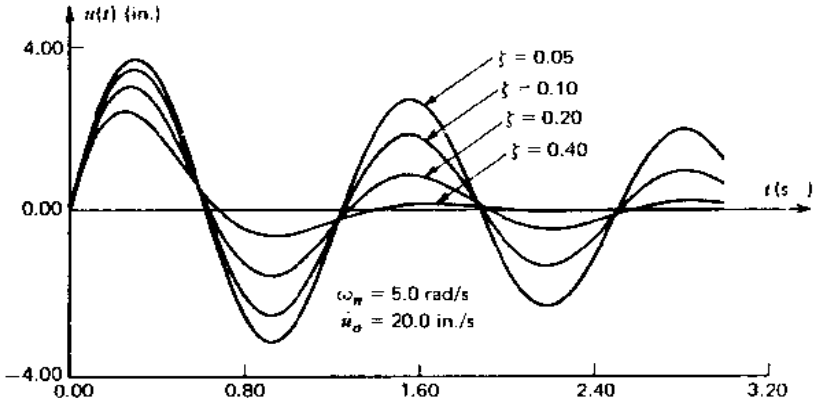


图 3.7　各种阻尼水准自由振动效应

虽然 ζ 值 ω_d 上有影响，但最显著的阻尼影响是运动的消失变化率，即 $e^{-\zeta\omega_n t}$ 项。这种效应将在 § 3.3 中进一步研究，这节将论述阻尼的测试。

例题 3.1

一个 **SDOF** 系统，具有无阻尼固有频率为 5rad/s 和阻尼因数为 20%；初始条件已知为 u_0

$=0$ 和 $\dot{u}_0=20\text{in/s}$，计算阻尼固有频率，并确定 $t>0$ 时该系统运动的表达式。

解：

$$\omega_n=5\text{rad/s},\quad \zeta=0.2$$
$$u_0=0,\quad \dot{u}_0=20\text{in./s}$$

根据公式 3.30

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=5\sqrt{1-(0.2)^2}=4.90\text{rad/s} \tag{1}$$

$$f_d=\frac{\omega_d}{2\pi}=\frac{4.90}{6.28}=0.78 \tag{2}$$

$$\boxed{f_d=0.78\text{Hz}} \tag{3}$$

根据公式 3.33 或 3.36

$$u(t)=\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_d}\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \tag{4}$$

则

$$u(t)=\left(\frac{20}{4.90}\right)e^{-(0.2)(5.0)t}\sin(4.90)t \tag{5}$$

即

$$\boxed{u(t)=4.08e^{-t}\sin(4.90)t} \tag{6}$$

这个结果的曲线图是图 3.6 中的一条曲线。

如果不是有意将结构系统的阻尼引入一个显著的数值，则阻尼将会进入到弱阻尼类型；一般为 0.5%至 5%的范围。然而，为了叙述完整起见，临界阻尼与过阻尼的情况亦将作简单地论述。

临界阻尼情况($\zeta=1$)

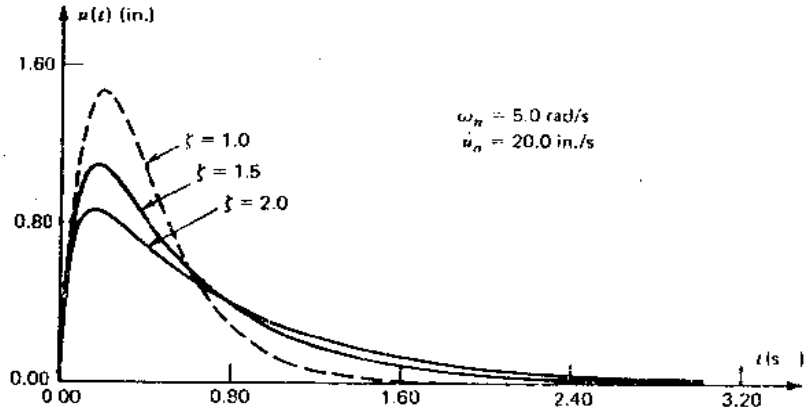


图 3.8　过阻尼系统响应

当 $\zeta=1$ 时，公式 3.29 只给了一个解

$$\bar{s} = -\zeta\omega_n \tag{3.37}$$

则响应的形式为

$$u(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\zeta\omega_n t} \tag{3.38}$$

而不是公式 3.27 所给的形式。当考虑初始条件时，发现临界阻尼系统的响应为

$$u(t) = [u_0 + (\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0)t]e^{-\zeta\omega_n t} \tag{3.39}$$

这种不摆动响应类型的例子，可见之于图 3.6 和图 3.8。

过阻尼情况($\zeta<1$)

当 $\zeta>1$ 时，有两种不同的性质，公式(3.29)给了负实根，令

$$\omega^* = \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \tag{3.40}$$

则过阻尼系统的响应可以写成下式：

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(C_1\cosh\omega^* t + C_2\sinh\omega^* t) \tag{3.41}$$

式中 C_1 和 C_2 取决于初始条件。图 3.8 表示不同阻尼水准的响应效应。对于较小阻尼情况，表明曲线的第一突峰是比较大的。但是阻尼的大小接近于 $\zeta=1$ 时，其最后的衰减是比较快的。

上面的讨论，读者可以看到这种形式，或者说是特性，就是响应只取决于特征方程的根 $\bar{s}_i$。此外，这些根又只决定于系统的两个参数 ω_n 和 ζ，而不是决定于初始条件。在图 3.9 中的 $\bar{s}$ 平面曲线，概括了根与阻尼因数的相互关系，读者比较此图与图 3.6 就可以看到在 $\bar{s}$ 平面内，根的位置与其响应特性的关系如何。

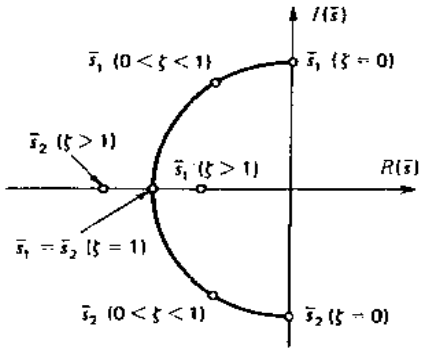


图 3.9 特征方程根的 $\bar{S}$ 平面图

§3.3 试验确定 SDOF 系统的固有频率和阻尼因数

常常需要以试验的方法来确定一个已知系统的动力特性(即固有频率和阻尼因数)。测试一个简单的 **SDOF** 系统的弹簧常数 k 和质量 m 是可能的，而阻尼是很少出现的，在某种意义上可以直接测试阻尼系数 c。一个实际体系的阻尼通常是由节点的松度、材料的内阻尼等等构成，不是由什么粘滞阻尼器而得。然而，只要振动的幅值按对数衰减(或近似的那样)，如图 3.7 所示，则就能假设系统的数学模型可以采用粘滞型的阻尼。阻尼因数 ζ 通常是要测试的。根据公式 3.4b 可以计算出一个有效的 c 值。

一个简单的 **SDOF** 系统的无阻尼固有频率可由静态测试确定，如例题 3.2 说明。

例题 3.2

采用静态变位测试来确定一个简单的 **SDOF** 系统的固有频率，如图 E3.2.1。

解：

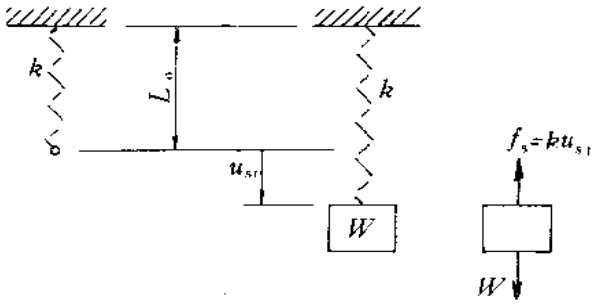


图 E3.2.1

根据公式 3.4a

$$\omega_n^2 = k/m \tag{1}$$

悬吊在弹簧上的质量、其平衡表达式为

$$+\downarrow \sum F = 0 \tag{2}$$

即

$$W - f_s = 0 \tag{3}$$

根据弹簧力与伸长公式

$$f_s = ku_{st} \tag{4}$$

公式 3 与公式 4 合并成

$$f_s = mg = ku_{st} \tag{5}$$

则，公式 1 和公式 5

$$\boxed{\omega_n^2 = \frac{g}{u_{st}}} \tag{6}$$

若系统中的阻尼较小($\zeta < 0.2$)，则公式 3.31 所表示的 ω_d 就接近等于 ω_n。例题 3.3 将表示如何利用自由振动试验来确定 **SDOF** 系统的固有频率。

例题 3.3

由动力确定悬臂梁顶端有一集中质量时的固有频率。以大小为 $A=1$ in 使质量变位，并释放之，产生如图 E3.3.1 的运动，并且系统的阻尼是很小的。以弧度每秒和以赫兹来计算固有频率。周期是多少。(见图 E3.3.2)

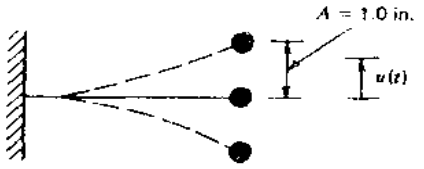


图 E3.3.1

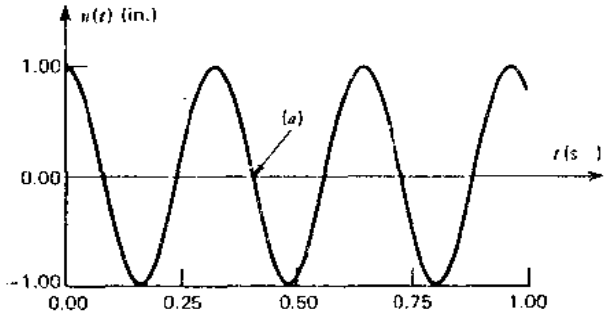


图 E3.3.2

解：

在点(a)质量已完成 $1\frac{1}{4}$ 周

$$f_n \doteq \frac{1.25 cycles}{0.4 s} = 3.125 \quad \text{Hz} \tag{1}$$

$$\omega_n = 2\pi f_n \doteq (6.28)(3.125) = 19.6 \quad \text{rad/s} \tag{2}$$

$$T_n = \frac{1}{f_n} \doteq \frac{1}{3.125} = 0.32 \quad s \tag{3}$$

利用 **SDOF** 系统自由振动的衰减记录：确定阻尼因数 ζ 有两种相似的方法，**对数衰减率法**与**半幅值法**。两种方法都根据公式 3.34 而来。

在对数衰减率法中，测试运动的幅值在一个循环的开始为 u_p，在该循环的终了为 u_Q。在一个周期终了(即一个循环)，其 $\cos(\omega_d t - \alpha)$ 的值复原到循环开始的值，因此，由公式 3.34 得到表达式为

$$\frac{u_p}{u_Q} = e^{\zeta \omega_n T_d} \tag{3.42}$$

规定**对数衰减率** δ 为

$$\delta = \ln\left(\frac{u_p}{u_Q}\right) = \zeta \omega_n T_d \tag{3.43}$$

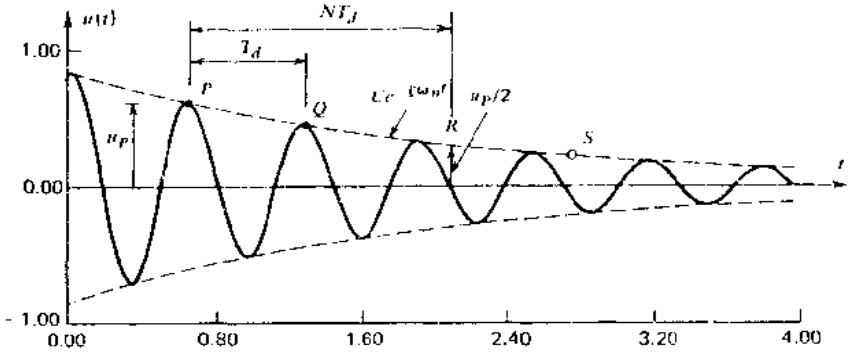


图 3.10 阻尼系统衰减记录

式中 T_d 为**阻尼固有周期**

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3.44}$$

因此，由公式 3.42 和公式 3.43 得到

$$\delta = \zeta\omega_n T_d = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3.45}$$

如为弱阻尼时($\zeta<0.2$)，则对数衰减率近似为

$$\delta \doteq 2\pi\zeta \tag{3.46}$$

这是可以接受的，根据公式使之阻尼因数能得到

$$\zeta = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\ln\left(\frac{u_p}{u_Q}\right) \tag{3.47}$$

由类似的方法可以导出**半幅值法**，由一个非常简单的计算就能得到阻尼因数的结果。半幅值法是根据振幅的**包络曲线**而定。

$$\hat{u}(t) = Ue^{-\zeta\omega_n t} \tag{3.48}$$

在包络线的 P 点和 R 点上

$$\hat{u}_R = \frac{\hat{u}_p}{2} \tag{3.49}$$

这两点间隔为 N 个阻尼周期，这里的 N 不需要是整数，则

$$\frac{\hat{u}_p}{u_R} = e^{\zeta_n N T_d} = 2 \tag{3.50}$$

根据公式 3.44 和公式 3.50，得到

$$\frac{2\pi N\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \ln(2) \tag{3.51}$$

图 3.11 表示了 ζ 与 N 的关系。然而阻尼很小 $\zeta^2 \ll 1$ 时，则由公式 3.51 给出

$$2\pi N\zeta \doteq \ln(2) \tag{3.52}$$

即

$$\zeta \doteq \frac{0.11}{N} \tag{3.53}$$

公式 3.53 提供了一个很方便的方法，即估算弱阻尼($\zeta<0.1$，即 $N>1$)系统中的阻尼值。

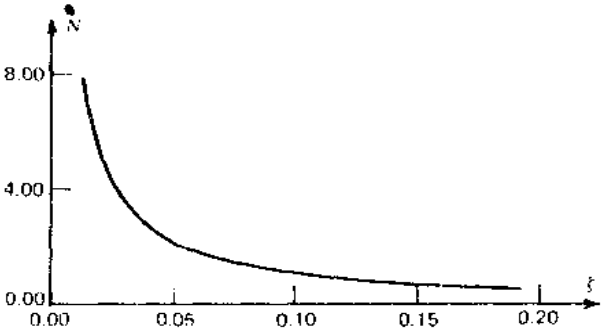


图 3.11　幅值减少 50%时阻尼因数与循环数的曲线

例题 3.4

应用半幅值法估算图 3.10 中所记录的系统运动阻尼。

解：

a. 画包络曲线(已给在例题中)。

b. 在一峰值上择点 P、并量出 u_p；

$$u_p=0.44 \quad \text{in}。$$

c. R 点的位置，使包络线的幅值为 $u_p/2=0.22$ in。

d. 定出 P 点与 R 点间的循环数：

$$N=2.25 \text{ 周}$$

e. 应用公式 3.53 计算 ζ：

$$\boxed{\zeta=\frac{0.11}{2.25}=0.049}$$

系统中的阻尼水准也反映出了一个参量**叫时间常数** τ，定义为振幅减少到 $1/e$ 时所需的时间。从某种意义上看，这个方法类似于所推导出的半幅值法的公式，可以得到时间常数的表达式。再应用图 3.10 的包络线，并令 S 为该点，所以

$$\frac{u_p}{u_s}=\frac{u_p}{u_p(1/e)}=e \tag{3.54}$$

则

$$\frac{u_p}{u_s}=\frac{U\exp(-\zeta\omega_n t_p)}{U\exp[-\zeta\omega_n(t_p+\tau)]}=e \tag{3.55}$$

即

$$e^{\zeta\omega_n\tau}=e \tag{3.56}$$

两边取对数，得到

$$\zeta\omega_n\tau=1 \tag{3.57}$$

则，时间常数 τ，得到

$$\tau = \frac{1}{\zeta\omega_n} = \frac{T_n}{2\pi\zeta} \tag{3.58}$$

由于 $1/e=1/2.718=0.368$，因此，时间常数 τ 为振动幅值减少到 63% 时所需要的时间。

§3.4 库伦阻尼 SDOF 系统自由振动

由粘滞阻尼导出的线性运动微分方程公式 3.1，相对比自由振动或强迫振动响应的解来得容易，所以这样的阻尼模型在研究分析中是经常应用的。然而，结构的实际阻尼可由节点的松动性、构件之间的干摩擦、材料阻尼以及其他许多复杂原因所引起。其中任何一种都会引起结构的非线性特性。所有这些形式的阻尼不可能进行处理，但粘滞阻尼对**库伦阻尼**即**干摩擦阻尼**进行比较和对照还是有益处的。

图 3.12 表示一质量在一粗糙表面上滑动，则产生一滑动摩擦力

$$f_D = \mu_k N = \mu_k mg \tag{3.59}$$

式中 μ_k 为**动摩擦系数**或滑动摩擦系数。该摩擦力总是与运动方向相反，即它的方向与速度 $\dot{u}$

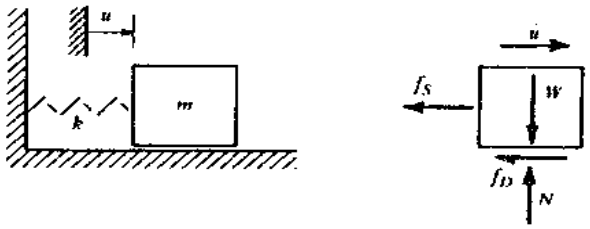


图 3.12 库伦摩擦 SDOF 系统

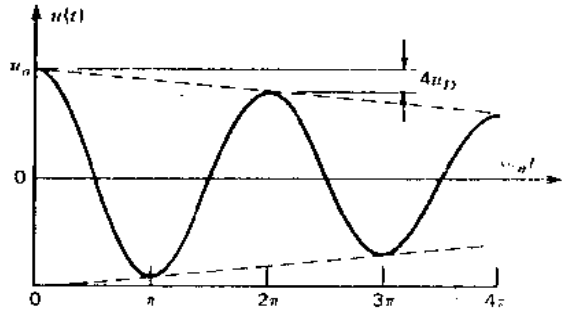


图 3.13 库伦摩擦系统的自由振动响应

反向。应用牛顿第二定律，得到

$$-f_s - f_D = m\ddot{u} \tag{3.60}$$

而且

$$f_s = ku$$

和

$$f_D = \mu_k mg\,\mathrm{sgn}(\dot{u}) \tag{3.61}$$

则

$$m\ddot{u} + ku = -\mu_k mg, \quad \dot{u} > 0 \tag{3.62}$$

$$m\ddot{u} + ku = +\mu_k mg, \quad \dot{u} < 0$$

令

$$u_D = |f_D|\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\mu_k g}{\omega_n^2} \tag{3.63}$$

公式(3.62)和公式(3.63)可以合并，得到

$$\begin{aligned} \ddot{u} + \omega_n^2 u &= -\omega_n^2 u_D, \quad \dot{u} > 0 \\ \ddot{u} + \omega_n^2 u &= +\omega_n^2 u_D, \quad \dot{u} < 0 \end{aligned} \tag{3.64}$$

所得到的运动曲线如图 3.13。注意图 3.13 中库伦阻尼系统的特性很像阻尼 **SDOF** 系统，它的平衡位置在每半个循环端点是改变的。响应的特点如图 3.13 所示，其幅值的衰减与时间成线性关系，不像粘滞阻尼的情况成对数关系。

习题组 3.1

3.1 图 P2.1 中的结构具有如下特性：$m=0.10$ k−s²/ft，$L=12$ft，$EI=1200$ k−ft²。求它的无阻尼固有周期。

3.2 图 P2.6 的控制片具有如下特性：$k_1=600$N/m，$a=0.10$m。当控制片由静止状态释放开稍稍移动一点位置时，可以看到：它具有一个很低的阻尼，并且其无阻尼固有频率为 5.0Hz。求质量惯性矩 I_A。

3.3 一根柔杆其总质量为 M，它的弯曲刚度为 EI。一个集中质量 μM 作用在杆的顶部，如图 P3.3，由于顶部质量的惯性与几何刚度影响，确定其 ω_n^2 的近似变化的表达式。可应用例题 2.9 中的假定振型表达式，以及 $\phi(x)$采用静位移函数，均匀梁用集中横向端部力(见图 P2.18)。

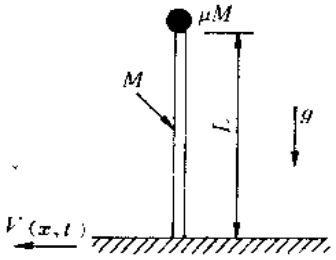


图 P3.3

3.4 一个 22kg 质量的 m_1，用一根弹簧悬挂着，弹簧的弹簧常数 $k=17$kN/m。第二个质量 $m_2=10$kg，由高度 $h=0.2$m 处降落，并附着在质量 m_1 上，如图 P3.4。

(a)确定两个质量相碰瞬间后的运动 $u(t)$表达式。

(b)确定两个质量的最大位移。

习题组 3.2

3.5 图 P2.3 中的系统具有如下特性：$M=10.01$b−s²/ft，$K_1=15.0$k/ft，$k_2=0$，和 $L=10.0$ft，其阻尼系数 c_1 是这样的，$\zeta=0.10$。

(a)求 c_1 的数值。

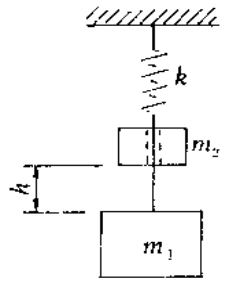


图 P3.4

(b)若 B 端垂直向上移动 0.10ft，并在 $t=0$ 时由静止释放，在最大弹簧力降低到 0.2k 之前，将要发生多少次整循环的振动？

3.6 在习题 3.5(b)中所叙述的"拉拽试验"所得到的结果，画出顶端运动 $u(t)$图。

3.7 一台机械它的质量是 70kg，安装在弹簧上，弹簧总刚度为 15kN·s/m，总阻尼为 1.2kN·s/m 如图 P3.7，求下面初始条件的运动 $u(t)$：

(a) $u(0)=10\text{mm}$， $\dot{u}(0)=0$

(b) $u(0)=0$， $\dot{u}(0)=100\text{mm/s}$

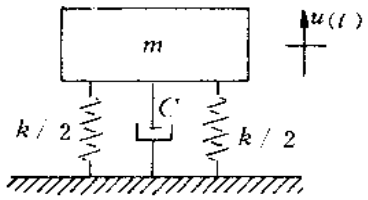


图 P3.7

3.8 模拟风涡轮成一个集中质量(涡轮的)在一根无重量、长度为 L 的塔顶上。确定该系统的动力特性，塔旁用一台大型起重机，而且沿着涡轮轴给一横向力 $P=200$ lb，如图 P3.8，这样引起 1.0in 的水平位移。

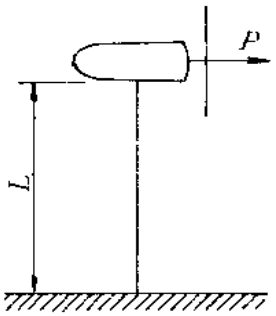


图 P3.8

联在涡轮到起重机的绳索立即突然切断，记录到涡轮的自由振动结果。在两个整循环后，时间为 1.25s，其幅值为 0.64in。

根据以上数据确定如下：

(a)无阻尼固有频率 ω_n。

(b)有效刚度 k(lb/in.)。

(c)有效质量 m(lb·s²/in.)。

(d)有效阻尼因数 ζ。

3.9 从公式 3.41 入手确定一过阻尼系统，其初始条件为 $u(0)=u_0$ 和 $\dot{u}(0)=\dot{u}_0$ 时的位移 $u(t)$表达式。

3.10 确定图 P2.5 中系统临界阻尼系数 c_{cr}的表达式。

习题组 3.3

3.11 时间历程如图 P3.11

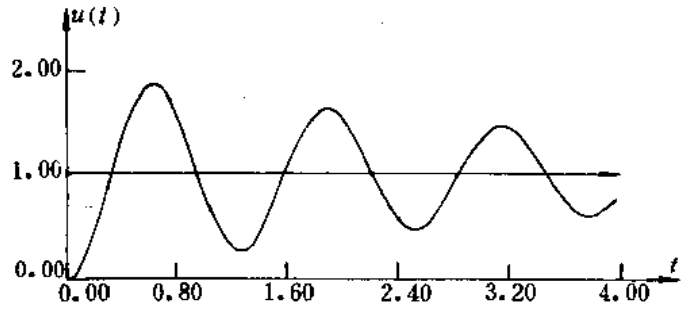


图 3.11

(a)计算以赫兹表示的阻尼固有频率。

(b)应用半幅值法估计阻尼因数 ζ。

3.12 图 3.12 是一张 **SDOF** 系统位移的示波器扫描的照片。

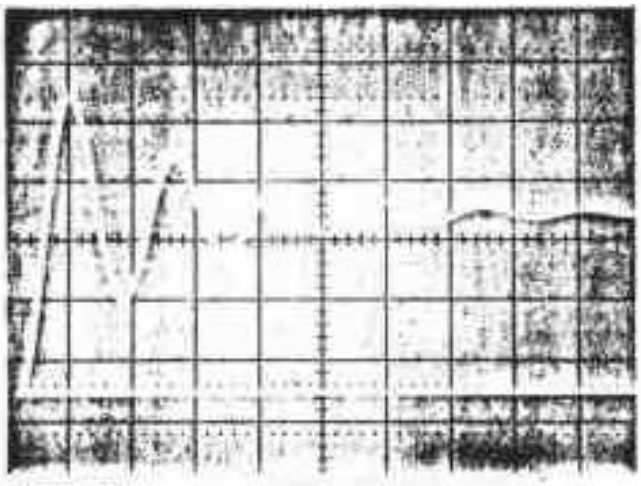


Figure P3.12

图 P3.12

(a)计算以赫兹表示阻尼固有频率。

(b)应用半幅值法计算阻尼因数 ζ。

习题组 3.4

3.13

(a)由公式(3.64)入手,确定 $\dot{u}>0$ 和 $\dot{u}<0$ 时的 $u(t)$表达式。

(b)若 $u(0)=u_0$ 和 $\dot{u}(0)=0$,$u(t)$的表达式是什么:(1)$0\leqslant t\leqslant \pi/\omega_n$, (2)$\pi/\omega_n\leqslant t\leqslant 2\pi\omega$。

(c)确定每周幅值衰减大小的表达式。

第 4 章　SDOF 系统简谐激励响应

在第 2 章中已提供了推导 SDOF 系统运动微分方程的几种方法。在第 3 章中读者已开始研究了 SDOF 系统的自由振动的解。本章中读者将用无阻尼或粘滞阻尼 SDOF 系统简谐激励响应开始研究强迫运动。这个题目极为重要，它不仅是因为重多的 SDOF 系统承受了简谐激励、而更重要的是因为本章所研究的成果也还要引用到处理 MDOF 的结构，以及处理结构承受更为复杂类型的激励问题。

本章将完成如下内容：

- 确定无阻尼系统承受简谐激励时的稳态响应和总响应。
- 确定粘滞阻尼系统承受简谐激励时的稳态响应和总响应。
- 阐述阻尼因数和粘滞阻尼 SDOF 系统承受一简谐激励力时稳态响应中的幅值和相位与频比的关系。
- 画出不同频比的矢量力多边形，以表示稳态力作用在 SDOF 系统上幅值与相位的关系。
- 应用复频响应法得到粘滞阻尼 SDOF 系统稳态响应幅值与相位的表达式。
- 建立基础激励问题的运动方程。并求得绝对运动和质量相对基础运动的稳态解（频响函数）。
- 已知基础激励、求系统的放大因数与相位角的数值。
- 讨论地震传感器的工作原理，即测振计和加速度计。
- 阐述如何利用频响函数的数据来确定粘滞阻尼 SDOF 系统的无阻尼固有频率和阻尼因数。
- 用所规定的逸散力来计算简谐运动中每次循环所做的功。
- 计算所规定逸散力的等效粘滞阻尼系数。
- 讨论结构阻尼与粘滞阻尼有何不同。列出结构阻尼系统的矢量响应图的主要特性。

§4.1　无阻尼 SDOF 系统简谐激励响应

正如第三章所述，线性系统的总响应是由强迫运动与固有运动叠加而成。在简谐激励中、强迫运动称为稳态响应。本节将叙述简谐激励无阻尼 SDOF 系统的响应，§4.2 至 §4.8 为叙

述阻尼系统响应。

图 4.1 表示为所研究的无阻尼 **SDOF** 系统。假设系统是线性的，并且激励幅值为 p_0 和激励频率 Ω 为常数。

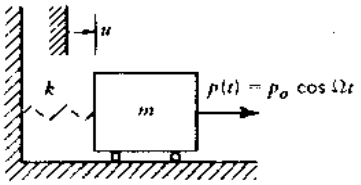


图 4.1　无阻尼 **SDOF** 系统的简谐激励

其运动方程为

$$m\ddot{u} + ku = p_0\cos\Omega t \tag{4.1}$$

据此，在公式 4.1 左边出现的仅为偶阶导数，此式为强迫运动即**稳态响应**，将有解的形式为

$$u_p = U\cos\Omega t \tag{4.2}$$

确定稳态响应的幅值 **U**，将公式 4.2 代入公式 4.1 中，得到

$$U = \frac{p_0}{k - m\Omega^2} \tag{4.3}$$

若 $(\mathbf{k}-\mathbf{m}\Omega^2)\neq 0$ 时，令

$$U_0 = \frac{p_0}{k} \tag{4.4}$$

此式为静态挠度，则公式 4.3 可以写成

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 - r^2}, \quad r \neq 1 \tag{4.5}$$

式中

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} \tag{4.6}$$

叫做**频比**。

$$H(\Omega) = \frac{U}{U_0} \tag{4.7}$$

叫做**频响函数**。频响函数 $\mathbf{H}(\Omega)$ 根据频比函数 **r** 给出了稳态运动的大小和符号。其幅值大小

$$D_s = |H(\Omega)| \tag{4.8}$$

叫做**稳态放大因数**，即增值。图 4.2 画出了它的曲线。

公式 4.2 至公式 4.5 可以合并，得到稳态响应。

$$u_p = \left(\frac{U_0}{1 - r^2}\right)\cos\Omega t, \quad r \neq 1 \tag{4.9}$$

若 $\mathbf{r}<1$ 时，响应与激励是同相位的，因为 $(1-\mathbf{r}^2)$ 为正。若 $\mathbf{r}>1$ 时，响应与激励相位差为 180°，即可以写成

$$u_p = \left(\frac{U_0}{r^2 - 1}\right)(-\cos\Omega t) \tag{4.10}$$

公式 3.15 给出了无阻尼 **SDOF** 系统固有运动的一般形式。（注意公式 3.17 仅对自由振动成

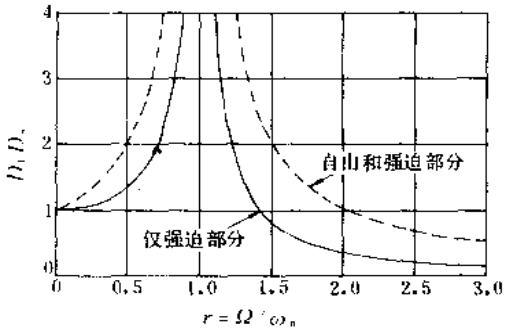


图 4.2　无阻尼 **SDOF** 系统 $P(t)=P_0\sin\Omega t$ 的动力放大因数

立!)因此，公式 3.15 与公式 4.9 可以合并得到总响应

$$u = \left(\frac{U_0}{1-r^2}\right)\cos\Omega t + A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t \tag{4.11}$$

下面的例题将说明公式 4.11 的应用。

例题 4.1

图 4.1 所表示的系统具有 $k=40$lb/in，质量重为 38.6lb。若系统是静止的，即 $u_0=\dot{u}_0=0$，当激励 $p(t)=10\cos(10t)$作用时，确定所产生的运动表达式，画出得到的运动曲线。

解：

根据公式 4.11，给出总响应

$$u = \frac{U_0}{1-r^2}\cos\Omega t + A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t \tag{1}$$

可微分此式，得到速度

$$\dot{u} = \frac{-U_0\Omega}{1-r^2}\sin\Omega t - A_1\omega_n\sin\omega_n t + A_2\omega_n\cos\omega_n t \tag{2}$$

根据公式 3.4a

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{kg}{W}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{40(386)}{(38.6)}} = 20\text{rad/s} \tag{3}$$

根据公式 4.4

$$U_0 = \frac{p_0}{k} = \frac{10}{40} = 0.25\text{in.} \tag{4}$$

根据公式 4.7

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{10}{20} = 0.5 \tag{5}$$

因此，

$$\frac{U_0}{1-r^2} = \frac{0.25}{1-(0.5)^2} = \frac{0.25}{1-0.25} = \frac{0.25}{0.75} = 0.33\text{in.} \tag{6}$$

应用初始条件计算 A_1 和 A_2。

$$u(0) = 0 = \frac{U_o}{1 - r^2} + A_1 \tag{7}$$

因此，

$$A_1 = -\frac{U_o}{1 - r^2} = -0.33 \quad \text{in.} \tag{8}$$

$$\dot{u}(0) = 0 = A_2\omega_n \tag{9}$$

所以

$$A_2 = 0 \tag{10}$$

最后

$$\boxed{u = 0.33[\cos(10t) - \cos(20t)] \quad \text{in.}} \tag{11}$$

画出该方程的曲线，如图 E4.1.1。

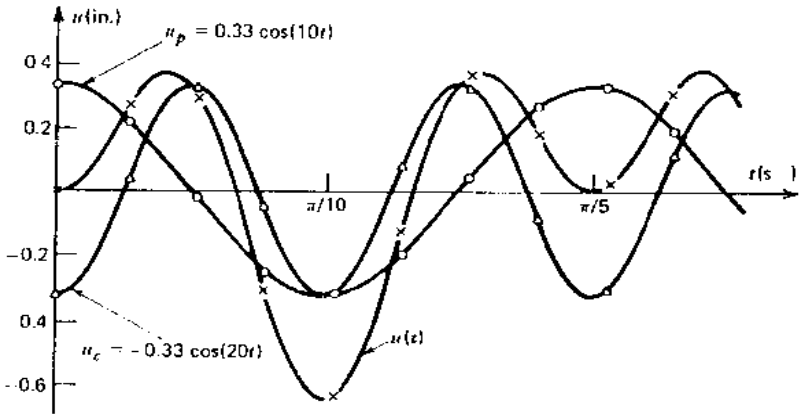


图 E4.1.1

根据例题 4.1 的响应曲线，可以观察到：

a. 稳态响应具有与激励相同的频率，并与激励同相位，因为 $r<1$。

b. 强迫运动与固有运动，时而相互增强，时而相互抵消，出现了**拍的现象**。因此，总响应不是简单的简谐运动。

c. 最大总响应值（$u=-0.66$in，在 $t=\pi/10$ s.）比最大稳态响应值（$u_p=0.33$ in，在 $t=0$）要大。

总动力放大因数规定为

$$D = \max \frac{|u(t)|}{U_o} \tag{4.12}$$

在上面的例题中，其值为 0.66/0.33=2。图 4.2 表示的是无阻尼系统、初始状态静止、受简谐激励 $p_o\sin\Omega t$ 的总动力放大因数 D 和稳态放大因数 D_s 成频比 r 的函数的曲线。

公式 4.9 与公式 4.11，在 $r=1$ 时，不成立。$r=1$ 的条件，即 $\Omega=\omega_n$，叫做**共振**。很明显，根据图 4.2 在激励频率接近共振时，响应就变得非常之大。从避免共振条件出发，要着重于研究简谐激励的结构响应，即响应最大部分，此处能够发生巨大的幅值运动。当 $r=1$ 时，需用假定

解来代替公式 4.2

$$u_p = Ct\sin\Omega t, \quad \Omega = \omega_n \tag{4.13}$$

则将公式 4.13 代入公式 4.1 中，得到

$$C = \frac{P_0}{2m\omega_n} \tag{4.14}$$

即

$$u_p = \frac{1}{2}(U_0\omega_n t)\sin\omega_n t \tag{4.15}$$

该曲线画在图 4.3 中。注意，虽然图 4.2 表示的是 $r=1$ 的一个有限幅值，而图 4.3 则表示的是幅值与时间构成的线性函数关系。

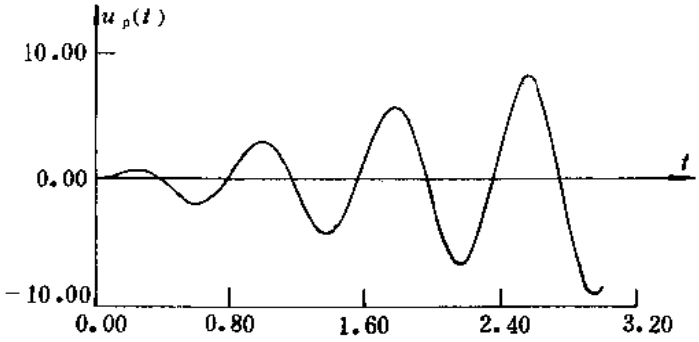


图 4.3 共振时 $\Omega=\omega_n$ 的响应 $u_p(t)$

§4.2 粘滞阻尼 SDOF 系统简谐激励响应

线性 **SDOF** 系统的典型分析是图 3.1 的质-弹-阻尼模型。当系统受到简谐激励 $P_0\cos\Omega t$ 时，它的运动方程为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0\cos\Omega t \tag{4.16}$$

由于公式 4.16 中的阻尼项存在，所以稳态响应与激励是不会同相位的(即相位差为 180°)，而将为

$$u_p = U\cos(\Omega t - \alpha) \tag{4.17}$$

式中 U 是**稳态幅值**，α 是稳态响应对激励的**相位角**。应用转动矢量来表示 U 和 α 是比较方便的。在公式 4.16 中，所需要的速度、加速度为

$$\dot{u}_p = -\Omega U\sin(\Omega t - \alpha) \tag{4.18}$$

$$\ddot{u}_p = -\Omega^2 U\cos(\Omega t - \alpha)$$

图 4.4 表示为转动矢量的关系，所以它们在实轴上的投影为 $p_0\cos\Omega t$ 以及在公式 4.17 和公式 4.18 中的位移、速度与加速度表达式。

当公式 4.17 和公式 4.18 代入到公式 4.16 中时，这里得到

$$-m\Omega^2 U\cos(\Omega t - \alpha) - c\Omega U\sin(\Omega t - \alpha)$$

$$+ kU\cos(\Omega t - \alpha) = p_0\cos\Omega t \tag{4.19}$$

用一个**力矢量多边形**很方便的表示了上式，因为公式 4.19 中的每项表示为一个力作用在图

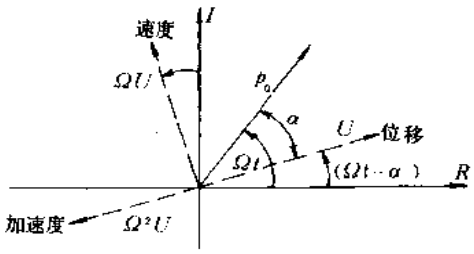


图 4.4　转动矢量表示 P、u、$\dot{u}$ 和 $\ddot{u}$

3.1 的质量上。图 4.5 表示一个 $m\Omega^2U<kU$ 情况的力矢量多边形，即 $\Omega<\omega_n$。在图 4.5 中的虚线矢量投影在水平(实)轴上，就是公式 4.19 左边项，实线矢量在实轴上的投影是公式 4.19 的

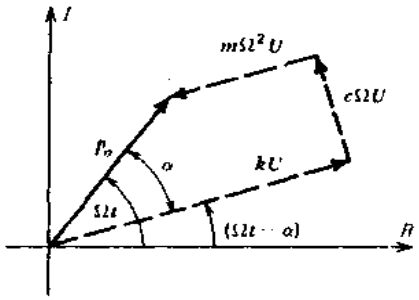


图 4.5　力矢量多边形

右边项。从图 4.5 中很容易地看到

$$p_0^2=(kU-m\Omega^2U)^2+(c\Omega U)^2 \tag{4.20a}$$

和

$$\tan\alpha=\frac{c\Omega}{k-m\Omega^2} \tag{4.20b}$$

这些能写成

$$D_s=\frac{U}{U_0}=\frac{1}{[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2]^{1/2}} \tag{4.21a}$$

和

$$\tan\alpha=\frac{2\zeta r}{1-r^2} \tag{4.21b}$$

式中 ζ、r 和 U_0 如前面所规定。图 4.6 中的曲线为**稳态放大因数** D_s 和相位角 α。幅值与相位数据资料合起来称为系统的**频响**。图 4.6 中的曲线叫做线性的曲线，因为水平轴和垂直轴都为线性定标。

根据公式 4.17、公式 4.21 和图 4.6 可以观察到稳态响应下面的特殊性质：

a. 公式 4.17 所描述的运动是简谐运动，其频率与激励相同。

b. 稳态响应的幅值是激励幅值和频率以及系统的固有频率和阻尼因数的函数。稳态放大因数明显地大于 1 或小于 1。

c. 稳态响应 $u_p=U\cos(\Omega t-\alpha)$ 与激励 $p=p_0\cos\Omega t$ 是不同相位的，即在同一时间内没有获

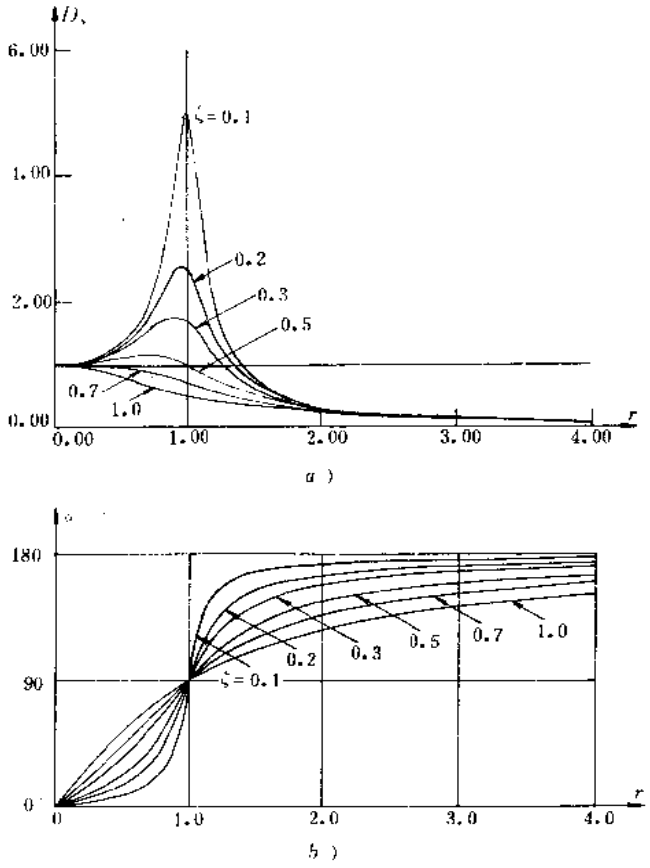


图 4.6 a)以频比为函数的各种阻尼值(线性标绘)的放大因数;
b)以频比为函数的各种阻尼值(线性标绘)的相位角

得最大值。响应滞后激励一个相位角 α;这相应滞后了一个时间 α/Ω。

d. 共振时,$r=1$,仅用阻尼力来限制幅值,

$$(D_s)_{r=1}=\frac{1}{2\zeta} \tag{4.22}$$

同时,共振时,响应滞后激励 90°,即 $\alpha=90°$。

因为动力放大因数在接近共振时,其值甚大,而且所关心的激励覆盖了一个很宽的频域,因此,图 4.6 的曲线经常以对数定标画出,如图 4.7 所示。这个叫做 **Bode 曲线**。

$u=u_p+u_c$ 给出总响应,根据公式 4.17、公式 4.21 和公式 3.32,可以写成

$$u=\frac{U_0}{[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2]^{1/2}}\cos(\Omega t-\alpha)$$

$$+e^{-\zeta\omega_n t}(A_1\cos\omega_d t+A_2\sin\omega_d t) \tag{4.23}$$

式中 α 由公式 4.21b 给出,A_1 和 A_2 是常数根据初始条件而定。因为公式 4.23 的固有运动是随时间而消失的,所以称为**初始瞬态**。

例题 4.2

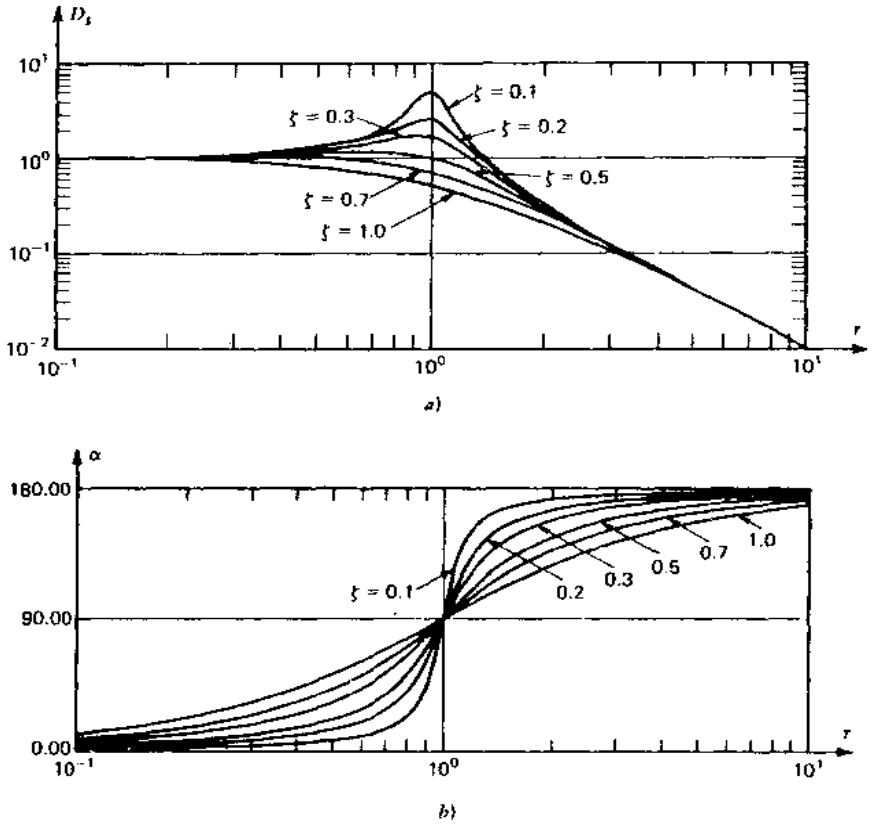


图 4.7　a)以频比为函数的各种阻尼因数(对数标绘)的放大因数；
b)以频比为函数的各种阻尼因数(频率对数标绘)的相位角

若在例题 4.1 系统上的阻尼相应于 $\zeta=0.2$ 并且有相同的激励和初始条件，确定所得到的运动的表达式，并画出运动图。

解：

公式 4.23 给出了总响应函数

$$u = U\cos(\Omega t - \alpha) + e^{-\zeta\omega_n t}(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t) \tag{1}$$

式中

$$U = \frac{U_o}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \tag{2}$$

ω_n、U_o 和 r 在例题 4.1 中可以查到。

$$\left.\begin{aligned} \omega_n &= \left(\frac{k}{m}\right)^{1/2} = 20 \text{ rad/s} \\ U_o &= \frac{p_o}{k} = \frac{10}{40} = 0.25 \text{ in.} \\ r &= \frac{\Omega}{\omega_n} = \frac{10}{20} = 0.5 \\ \zeta\omega_n &= (0.2)(20) = 4 \text{ rad/s} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

因此，根据公式 2 和公式 3

$$U=\frac{0.25}{\{[1-(0.5)^2]^2+[2(0.2)(0.5)]^2\}^{1/2}}=\frac{0.25}{[(0.75)^2+(0.2)^2]^{1/2}} \tag{4}$$

$$=\frac{0.25}{\sqrt{0.6025}}=\frac{0.25}{0.776}=0.32\text{in.}$$

从公式 4.21*b*

$$\tan\alpha=\frac{2\zeta r}{1-r^2}=\frac{2(0.2)(5)}{1-(0.5)^2}=\frac{0.2}{0.75}=0.267 \tag{5}$$

因此

$$\alpha=0.26\ \text{rad} \tag{6}$$

由公式 3.31*a*

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=20\sqrt{1-(0.2)^2}=20(0.98)=19.6\ \text{rad/s} \tag{7}$$

公式 1 对时间微分，得到

$$\dot{u}=-\Omega U\sin(\Omega t-\alpha)$$

$$+e^{-\zeta\omega_n t}[(A_2\omega_d-A_1\zeta\omega_n)\cos\omega_d t-(A_1\omega_d+A_2\zeta\omega_n)\sin\omega_d t] \tag{8}$$

计算 $c=0$ 时，令公式 1 和公式 8 等于初始条件

$$u(0)=0=0.32\cos(-0.26)+A_1 \tag{9}$$

因此

$$A_1=-0.32\cos(-0.26)=-0.32(0.966)=-0.31\ \text{in.} \tag{10}$$

$$\dot{u}(0)=0=-(0.32)(10)\sin(-0.26)$$

$$+[A_2(19.6)-(-0.31)(0.2)(20)] \tag{11}$$

$$A_2=-0.11\ \text{in} \tag{12}$$

因此，合并公式 1、4、6、10 和 12，可得

$$\begin{aligned}u&=0.32\cos(10t-0.26)\\&-e^{-4t}[0.31\cos(19.6t)+0.11\sin(19.6t)]\text{in.}\end{aligned} \tag{13}$$

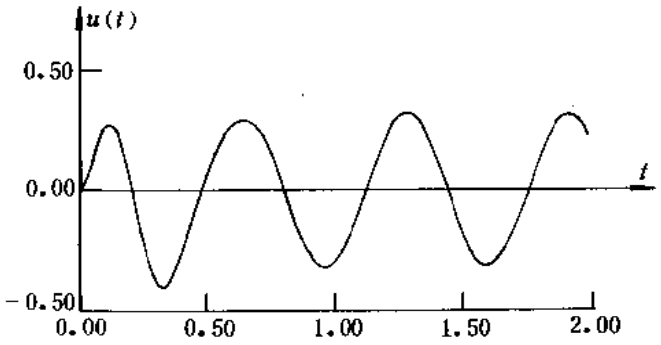


图 E4.2.1

比较图 E4.2.1 与例题 4.1 的结果，可以看到阻尼的效应。

§4.3 复频响应

在前面一节中，激励 $P_o\cos\Omega t$ 的稳态响应幅值 U 和相位角 α 可由转动矢量投影到实轴上来得到公式 4.19 中的各项。在本节中将进一步研究在复平面中矢量的应用，因为它大大地简化了频响计算，并且也提供了一个检验试验结果的有用方法，如在后面所见到的。

再来研究图 3.1 中的 **SDOF** 系统的稳态响应。用下标 R(投影在实轴上的)标明为稳态。即由 $\cos\Omega t$ 的激励来强迫运动，为此

$$m\ddot{u}_R + c\dot{u}_R + ku_R = p_o\cos\Omega t \tag{4.24}$$

和

$$u_R = U\cos(\Omega t - \alpha) \tag{4.25}$$

同样，令

$$m\ddot{u}_I + c\dot{u}_I + ku_I = p_o\sin\Omega t \tag{4.26}$$

和

$$u_I = U\sin(\Omega t - \alpha) \tag{4.27}$$

这些方程为相应的运动方程和激励 $\sin\Omega t$ 的稳态解。现在，如用 $i=\sqrt{-1}$ 来乘公式 4.26，并附在公式 4.24 中和应用欧拉公式 3.14，这里得到

$$m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k\bar{u} = \bar{p} = p_o e^{i\Omega t} \tag{4.28}$$

式中符号上的横杠表示在复平面中的矢量。公式 4.28 称为**复数运动方程**。其矢量

$$\bar{u} = u_R + iu_I \tag{4.29}$$

称为**复数响应**。要明白实际上的稳态运动既由 $\bar{u}$ 的实部也由 $\bar{u}$ 的虚部给出。取决于激励是 $\cos\Omega t$ 还是 $\sin\Omega t$ 的类型。

可以假定公式 4.28 的稳态解具有如下形式

$$\bar{u} = \bar{U}e^{i\Omega t} \tag{4.30}$$

式中 U 是复数幅值，它也可以写成

$$\bar{U} = Ue^{-i\alpha} \tag{4.31}$$

式中 U 和 α 是公式 4.17 所介绍的相同的幅值和相位角。

将公式 4.30 代入公式 4.28 中，直接得到

$$\bar{U} = \frac{p_o}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} \tag{4.32}$$

可以写成下式

$$\bar{H}(\Omega) = \frac{\bar{U}}{U_o} = \frac{1}{(1 - r^2) + i(2\zeta r)} \tag{4.33}$$

式中 $\bar{H}(\Omega)$ 叫做**复频响应**。

根据公式 4.31 和公式 4.33，清楚的知道，在确定稳态响应的幅值和相位时，我们只需要找到公式 4.33 右边项复数表达式的幅值和相位角即可。

根据复数理论概括几点：

- **直角坐标表示法与极坐标表示法**。如在直角坐中表示一个复数(矢量)用

$$\bar{A} = A_R + iA_I \tag{4.34a}$$

极坐标表示，用

$$\overline{A} = Ae^{i\alpha} \tag{4.34b}$$

则

$$A \equiv |\overline{A}| = \sqrt{A_R^2 + A_I^2} \tag{4.34c}$$

和

$$\tan\alpha = \frac{A_I}{A_R} \tag{4.34d}$$

• **两个复数的商**。如 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 是两个复数，则

$$\frac{\overline{B}}{\overline{A}} = \left(\frac{Be^{i\beta}}{Ae^{i\alpha}}\right) = \left(\frac{B}{A}\right)e^{i(\beta-\alpha)} \tag{4.35}$$

用公式 4.34 在极坐标中表示公式 4.33 的分母和用公式 4.35 来得到公式 4.33 中的幅值和相位，因此得到

$$|\overline{H}\Omega| = \frac{U}{U_0} = \frac{1}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \tag{4.36a}$$

和

$$\tan\alpha = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \tag{4.36b}$$

这与公式 4.21 中得到结果相同。因此，复频响应 $\overline{H}(\Omega)$ 包括了稳态响应的大小和相位角。并且可用公式 4.34 和公式 4.35 非常容易地得到这个响应的大小和相位角的数据资料。

总之，用复数矢量确定稳态响应所运用的四个步骤是：

1. 按照复数激励和复数响应写出微分方程公式 4.28。
2. 假定复数幅值 $\overline{U}$ 的解如公式 4.30。
3. 将假定响应代入微分方程，得到一个复频响应 $\overline{H}(\Omega)$ 的表达式。
4. 应用公式 4.34 和公式 4.35 得到复频响应的幅值和相位角。

现在可以使用 § 4.2 中的力矢量多边形直接与公式 4.28 的复数微分方程联系起来。微分公式 4.30，得到

$$\begin{aligned} \dot{\overline{u}} &= i\Omega\overline{U}e^{i\Omega t} = i\Omega\overline{u} \\ \ddot{\overline{u}} &= (i\Omega)^2\overline{U}e^{i\Omega t} = -\Omega^2\overline{u} \end{aligned} \tag{4.37}$$

因此按照复数矢量可以重新标示图 4.4 和图 4.5 成为图 4.8a 所表示的，和图 4.8b 中的力矢量多边形直接表示了公式 4.28。

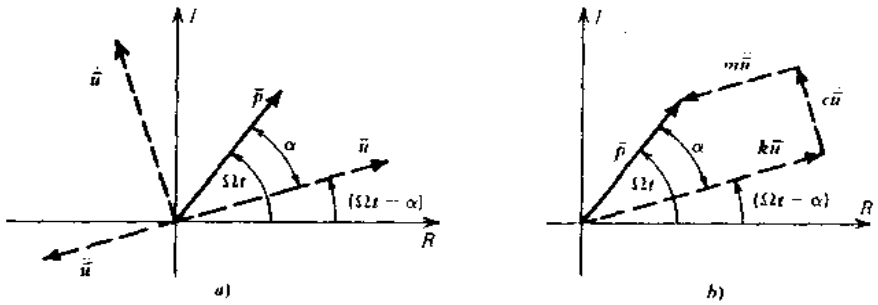


图 4.8　复数矢量表示转动矢量

用公式 4.21a 与公式 4.21b 给出的结果，已画成了图 4.6 中的幅值和相位角曲线。用公式 4.33 的结果画在复平面上的曲线，可将幅值和相位角数据合并在单一的一个曲线上。所得到的曲线叫做**矢量响应曲线**。也可用著者的名字命名为 Nyquist 曲线或 Argand 曲线。图 4.9 表示为 $\zeta=0.1$ 和 $\zeta=0.05$ 的矢量响应曲线。

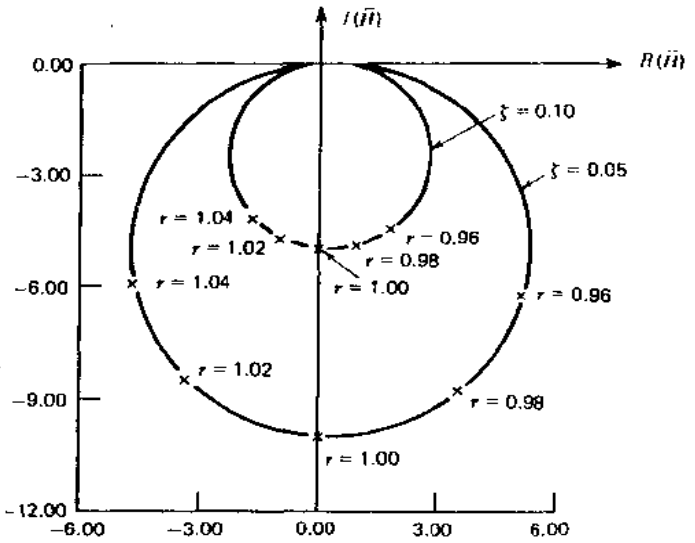


图 4.9　粘滞阻尼系统稳态振动的矢量响应曲线

矢量响应图在检验结构动力试验结果时是很有用处的。如后面所见，对于以频率为函数的 $\boldsymbol{R}(\overline{\boldsymbol{H}})$和 $\boldsymbol{I}(\overline{\boldsymbol{H}})$曲线也有帮助。

§4.4　隔振——力的可传性和基础运动

已经研究了 **SDOF** 系统频响的基本特性，现在来研究关于频响的两个重要课题：(a)力通过 **SDOF** 系统的弹簧和阻尼器传递到支承的固定基础上。(b)带有弹簧与阻尼器支承的基础运动时，其运动传递给质量。图 4.10 就说明了这些情况。前者的情况，出现在一台机器用一些可以模拟成弹簧和粘滞阻尼器组合的隔振固定架连接在地板结构上。有大量基础运动的应用问题，如建筑物的地震运动，汽车通过粗糙路面的运动等等。虽没有根本上解决，但应用复频响应方法解以上两种隔振的问题还是比较方便的。

力的可传性

根据图 4.8b，力传递给基础可按矢量形式写成

$$\overline{f}_{tr}=\overline{f}_{s}+\overline{f}_{D}=k\,\overline{u}+c\,\dot{\overline{u}} \tag{4.38}$$

结合公式 4.30 和公式 4.37a，得到

$$\overline{f}_{tr}=(k+ic\Omega)\overline{U}e^{i\Omega t} \tag{4.39}$$

公式 4.33 中 $\overline{U}$ 的表达式可代入到公式 4.39 中，得到

$$\overline{f}_{tr}=\left[\frac{(k+ic\Omega)U_{o}}{(1-r^{2})+i(2\zeta r)}\right]e^{i\Omega t} \tag{4.40}$$

即

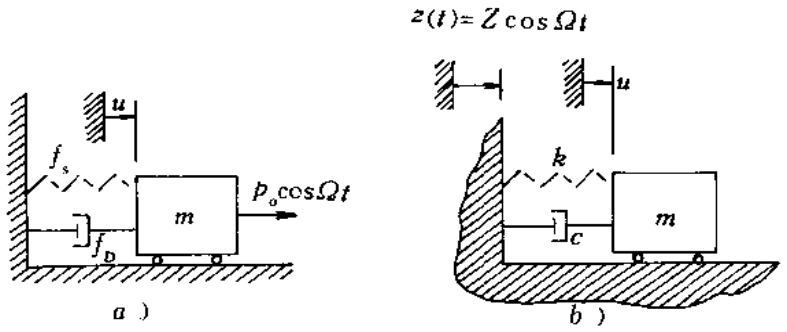


图 4.10　隔振情况

a)力传递到稳定基础;b)运动的基础

$$\overline{f}_{tr}=\left[\frac{1+i(2\zeta r)}{(1-r^2)+i(2\zeta r)}\right]kU_o e^{i\Omega t} \tag{4.41}$$

因为$|e^{i\Omega t}|=1$,又根据公式 4.35$|\overline{B}/\overline{A}|=|\overline{B}|/|\overline{A}|$,可找到传递力的大小为:

$$|\overline{f}_{tr}|=\frac{kU_o[1+(2\zeta r)^2]^{1/2}}{[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2]^{1/2}} \tag{4.42}$$

力的**传递率**定义为动力$|\overline{f}_{tr}|$与力$p_o=kU_o$之比。如果力p_o为静态作用,则将其传递到基础上。因此

$$TR=\frac{|\overline{f}_{tr}|}{kU_o}=D_s[1+(2\zeta r)^2]^{1/2} \tag{4.43}$$

图 4.11 表示TR值为频比的函数。根据图 4.11 的曲线,可以得出两个重要的结论:(a)若$r>\sqrt{2}$时,则动态地传递到基础上的力要小于静态力。(b)若$r>\sqrt{2}$时,阻尼减小,则传递力就减少。参考文献 4.1 和 4.2 中可以查到有关隔振装置设计的进一步论述。

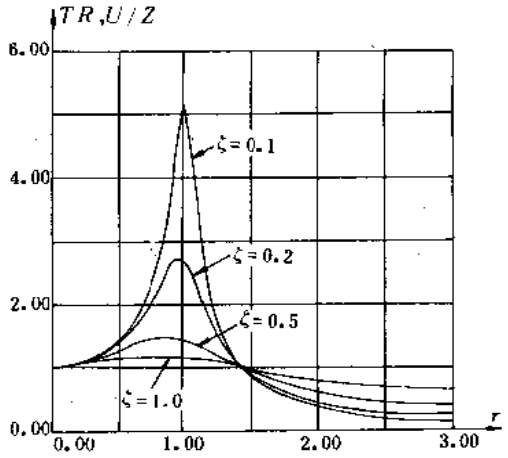


图 4.11　传递性,基础激励的绝对响应

基础运动

在例题 2.2 中已推导过绝对运动的运动方程u与相对运动$w=u-z$。现在要研究这样的情况,当$p(t)=0$与基础承受简单的简谐运动$z=Z\cos\Omega t$时,运动的复数方程可以写成

$$m\ddot{\bar{u}} + c\dot{\bar{u}} + k\bar{u} = c\dot{\bar{z}} + k\bar{z} = (k + ic\Omega)Ze^{i\Omega t} \tag{4.44}$$

和

$$m\ddot{\bar{w}} + c\dot{\bar{w}} + k\bar{w} = -m\ddot{\bar{z}} = \Omega^2 mZe^{i\Omega t} \tag{4.45}$$

假定稳态复数响应的形式

$$\bar{u} = \bar{U}e^{i\Omega t}, \quad \bar{w} = \bar{W}e^{i\Omega t} \tag{4.46}$$

得到复频响应函数

$$\frac{\bar{U}}{Z} = \frac{k + ic\Omega}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} = \frac{1 + i(2\zeta r)}{(1 - r)^2 + i(2\zeta r)} \tag{4.47}$$

和

$$\frac{\bar{W}}{Z} = \frac{m\Omega^2}{(k - m\Omega^2) + ic\Omega} = \frac{r^2}{(1 - r^2) + i(2\zeta r)} \tag{4.48}$$

根据上面的复频响应函数，我们能够确定绝对响应和相对响应的大小为频率的函数。

$$\frac{U}{Z} \equiv \frac{|\bar{U}|}{Z} = D_s[1 + (2\zeta r)^2]^{1/2} \tag{4.49}$$

和

$$\frac{W}{Z} \equiv \frac{|\bar{W}|}{Z} = r^2 D_s \tag{4.50}$$

因为公式 4.49 中所给出的 U/Z 是等于 TR，所以图 4.11 给出的是绝对响应曲线。图 4.12 表示的是相对响应。

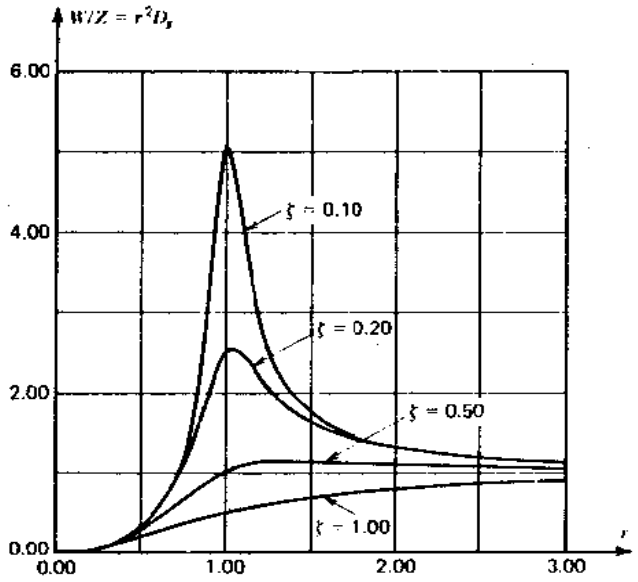


图 4.12　相对运动频响函数

根据图 4.12 表示的相对运动频响函数可以引出如下重要结论。

1. 当 $\Omega \ll \omega_n$ 时，即 $r \ll 1$，在质量与基础之间有小的相对运动，即质量对基础的移动。

2. 当 $\Omega \doteq \omega_n$ 时，通常可观察到共振现象。即小型基础仅在阻尼力所限制的幅值范围内、出现很大幅值的相对运动。

3. 当 $\Omega \gg \omega_n$ 时，由于质量的惯性力作用阻止了它产生较大的移动。所以，相对运动基本上

是基础相对于质量的运动。

以上基础运动的分析，对于研究 § 4.5 中运动的测试装置是很重要的。

例题 4.3

一具有多个自由度复杂系统的车辆。然而，在第一次的近似研究中，其行驶车辆的质量可以使用下面的 **SDOF** 解析模型。如果车辆的行驶速度为 100km/h，通过一条具有正弦曲线变化与 4m 周期的无粗糙路面（见图 E4.3.1），则确定车辆满载与空载时，车辆绝对运动的稳态放大因数。车辆的质量满载时为 $1200kg$、空载时为 $400kg$ 和有效弹簧常数为 $400kN/m$。当车辆满载时的阻尼因数为 $\zeta_f = 0.4$。

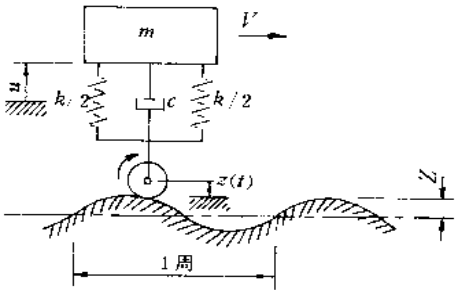


图 E4.3.1

下面假定

a. 如车辆以一常数向前移动，仅需考虑垂直运动 $u(t)$

b. 车轮有无限刚度，即 $z(t)$ 表示为车轴的运动。

c. 车轮与路面保持接触

解：

a. 计算激励频率

$$\Omega = \frac{(100{,}000\text{m/hr})(6.28\text{rad/ 周})}{(4\text{m/ 周})(3600\text{s/hr})} \tag{1}$$

$$\Omega = 43\text{rad/s} \tag{2}$$

b. 计算空车的阻尼因数

根据公式 3.4

$$c = 2\zeta\sqrt{km} \tag{3}$$

因为 c 与 k 不变化，而 m 变化，则

$$c = 2\zeta_f\sqrt{km_f} = 2\zeta_e\sqrt{km_e} \tag{4}$$

式中下标 f 表示满载，e 表示空载的车辆，因此

$$\zeta_e = \zeta_f\left(\frac{m_f}{m_e}\right)^{1/2} = 0.4\left(\frac{1200}{400}\right)^{1/2} \tag{5}$$

即

$$\zeta_e = 0.693 \tag{6}$$

c. 计算放大因数

根据公式 4.49 和公式 4.21a，有

$$\frac{U}{Z}=\frac{[1+(2\zeta r)^2]^{1/2}}{[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2]^{1/2}} \tag{7}$$

下面表中提供了计算结果。

	空　载	满　载
$\omega_n=\sqrt{k/m}$	$[400(10^3)/400]^{1/2}=31.6rad/s$	$[400(10^3)/1200]^{1/2}=18.3rad/s$
$r=\Omega/\omega_n$	43.6/31.6=1.38	43.6/18.3=2.38
$2\zeta r$	2(0.693)(1.38)=1.91	2(0.4)(2.38)=1.90
$(1-r^2)^2$	$[1-(1.38)^2]^2=0.818$	$[1-(2.38)^2]^2=21.8$
$[1+(2\zeta r)^2]^{1/2}$	$(1+3.65)^{1/2}=2.16$	$(1+3.61)^{1/2}=2.15$
$[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2]^{1/2}$	$(0.818+3.65)^{1/2}=2.11$	$(21.8+3.61)^{1/2}=5.04$
U/Z	2.16/2.11=1.02	2.15/5.04=0.43

注意当车重变化时，阻尼因数与固有频率会发生变化和这两个因素要参与放大因数的计算。

§4.5　振动测试仪器

在第 1 章中讨论了振动试验的重要性。图 4.13 表示一个振动测试系统的三大部分[4.3]。这个系统 包括一个运动检测传感系统，一个中间信号处理系统(即放大器)和一个显示系统(即

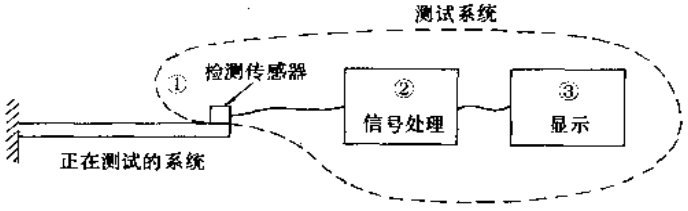


图 4.13　运动测试系统的组成部分

示波器)。测试运动的参量可以是位移、速度或加速度。检测传感系统的目的是检测所希望的运动参量。并且在多数情况下，产生一个输出，它与输入运动成比例，但可具有不同形式。许多广泛应用于运动系统的传感器是加速度传感器。这样的装置意味着加速度，使之产生一个正比于加速度输入的输出电压。其它的运动传感器有测试位移的振动计，电动速度传感器，涡流位移传感器和光导干涉仪。[4.4]

振动计和加速度计称为**地震传感器**，地震传感器是一个应用质弹系统来测试运动的。应用 §4.4 的结果可以分析传感器的特性。图 4.14 表示一个地震传感器的工作原理图。它的主要部分是一个 **SDOF** 振动系统。一个质量用弹簧接在传感器的底盘上。有时具有粘滞阻尼，而不总是有的。传感器的底盘要牢固地接在被测运动的结构上。相对运动的仪器(**RMI**)测试为时

间的函数，该相对运动是运动的质量(点 a)与传感器底盘(点 b)之间的相对运动。***RMI*** 通常提供一个电信号为它的输出信号。它与 a，b 两点间的相对位移成比例，因此，需要研究相对运动如何。

$$w = u - z \tag{4.51}$$

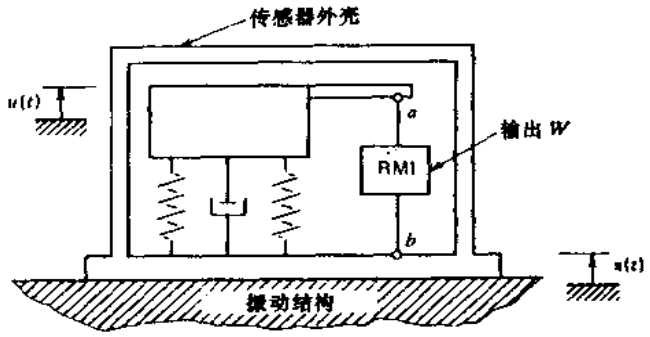


图 4.14　地震传感器工作原理

是对底盘运动 $z(t)$的。研究底盘简谐运动的响应 $z = Z\cos\Omega t$。

振动计

振动计是一台地震仪器，它的输出是与仪器底盘的位移成正比的。根据公式 4.50 和公式 4.21 稳态相对位移幅值与输出位移幅值的关系为

$$\frac{W}{Z} = \frac{r^2}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{1/2}} \tag{4.52}$$

图 4.12 是该频响函数的曲线图。根据这个图，可以看到，如 r 变得很大时，则 $W/Z \to 1$，在测试位移 $z(t)$时，是很有用处的。因此，一个振动计对激励频率而言，必须有一个低的固有频率。因为低的固有频率的系统应具有一个大的质量(相对地)，和一个柔的弹簧，因此必须会有大的静态位移发生。振动计与其他一些地震测试仪器不同，它是很少用的。

加速度计

加速度计是一台地震仪器，它的输出与仪器底盘加速度 $\ddot{z}(t)$成比例。由于底盘的简谐运动，则应首先研究稳态输出 $W_p(t)$。底盘加速度为

$$a_z(t) = \ddot{z} = -\Omega^2 Z\cos\Omega t \tag{4.53}$$

我们需要如何确定输出 $w_p(t)$，应该使用加速度 $a_z(t)$的时间历程来表示，它的幅值是 $\Omega^2 Z$。公式 4.52 给出了 w_p 的幅值，可以写成

$$W = (\Omega^2 Z)\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right) D_s \tag{4.54}$$

式中 D_s 是图 4.6a 中所画出的频响函数曲线。根据公式 4.48，可以看到 w_p 有相位滞后，已知为

$$\tan\alpha = \frac{2\zeta r}{1-r^2} \tag{4.55}$$

因此，

$$w_p(t) = \left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)(\Omega^2 Z) D_s \cos\Omega\left(t - \frac{\alpha}{\Omega}\right) \tag{4.56}$$

关于加速度计除去必须要校准的频域以外，还要研究所在区域[实际上是确定 $D_s(\Omega)$]都是有用的。希望选择一个 D_s 近似地等于常数的可操作的频率范围。从图 4.6a 中可以看到，这个条件适用于 $r \ll 1$，这里 $D_s \doteq 1$。

研究一个较为一般的加速度输入形式

$$a_z(t) = A_1 \cos\Omega_1 t + A_2 \cos\Omega_2 t \tag{4.57}$$

希望输出的形式为

$$w_p(t) = C[A_1 \cos\Omega_1(t - \tau) + A_2 \cos\Omega_2(t - \tau)] \tag{4.58}$$

即输出可沿时间轴以一个参量 τ 来代替，并且用一个常数 C 换算出。但是该部件不能以不同的参量来替换，也不能用不同的系数来换算。如果前者发生，就称传感器发生**相位畸变**；如果后者发生，就称传感器发生**幅值畸变**。许多现代的加速度计具有很低的阻尼。因此，传感器产生的相位畸变就会很小。为了尽量减少幅值畸变，则加速度计的固有频率必须大大超过输入的最大频率，例如 $\omega_n > 10\Omega_{max}$。要用 $\zeta \doteq 0.7$ 的阻尼，那么加速度计的频率可以延伸到 $0.6\omega_n$[4.5]。进一步讨论加速度计的性能特点以及选择加速度计的系数可查阅参考文献 4.6 至 4.9。参考文献 4.20 是一篇专题论文，内容为冲击与振动测试传感器的标定方法。

§4.6 频响数据确定弱阻尼 SDOF 系统的固有频率和阻尼因数

在 §3.3 中讨论了应用自由振动确定弱阻尼 **SDOF** 系统的固有频率和阻尼因数的方法。也可以用试验的方法，使用强迫振动的简谐与非简谐激励来确定这些系统的参数。也可以运用强迫振动的方法来确定 **MDOF** 系统的系统参数[4.10-4.16]。这里将研究图 3.1 所示的粘滞阻尼 **SDOF** 系统。假定用试验方法确定频响(幅值与相位)数据资料；这样可以画出如图 4.6 中形式的幅值与相位的曲线，或画出如图 4.9 中的矢量响应曲线。

无阻尼固有频率

如图 4.6a)中所见，当阻尼是很小时，一个明显的共振峰发生。其最大幅值发生在激励频率刚好稍低于无阻尼固有频率的地方。从图 4.6b)中看到，当激励频率等于系统的固有频率时，其稳态响应的相位角为 90°。由图 4.9 中可以看出，在 $r=1$ 附近时(即 $\Omega=\omega_n$)，沿频响曲线弧长的增量 Δs 相应于已知频率的增量(即 $\Delta r = 0.01$，即 $\Delta\Omega = 0.01\omega_n$)是最大的，即当 $\Omega=\omega_n$ 时，$\Delta s/\Delta\Omega = \max$。因此用激励频率所产生下面的频响数据可以十分精确地计算出无阻尼 **SDOF** 系统的固有频率。

a. 响应滞后输入 90°(这个意思是 $R(\overline{U}) = 0.0$)。

b. 响应值是最大的。

c. 响应的虚部 $|I(\overline{U})|$ 是最大。

d. 矢量响应曲线的 $\Delta s/\Delta\Omega$ 是最大。

阻尼因数

虽然由公式 4.22 已知在共振时的幅值为

$$\left(\frac{U}{U_0}\right)_{r=1} = \frac{1}{2\zeta} \tag{4.59}$$

用这个公式来确定 ζ 时，将需要确定静态挠度 U_0，因而一般就不用这个公式来确定 ζ 了。现在将讨论其他的方法叫**半功率法**。图 4.15 中表示的是一段频响曲线，在共振频率前后的响应幅值为 $\sqrt{2}/2$ 倍的共振响应幅值时，该点叫**半功率点**。令相应频率比 r_1 与 r_2 的频率写作 Ω_1 与

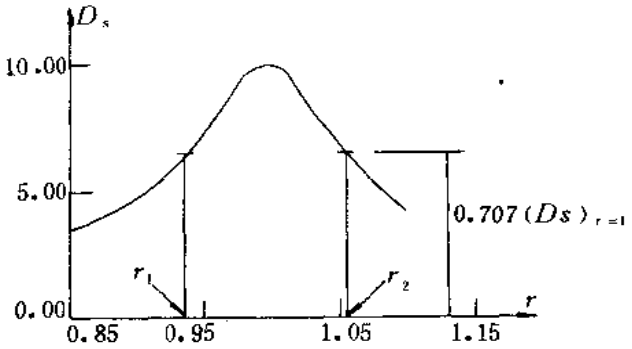


图 4.15　表示半功率点的响应曲线

Ω_2。用 $U_i=(\sqrt{2}/2)U_{r=1}$ 和公式 4.21a 可得到这个频率。公式 4.21a 自乘，得到

$$\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 = \frac{1}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2} \tag{4.60}$$

令 $U_i=(\sqrt{2}/2)U_{r=1}$ 和应用公式 4.59，得到

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\zeta}\right)^2 = \frac{1}{(1-r_i^2)^2+(2\zeta r_i)^2} \tag{4.61}$$

式中 $r_i=r_1$ 或 r_2。公式 4.61 可以写成

$$r_i^4 - 2(1-2\zeta^2)r_i^2 + (1-8\zeta^2) = 0 \tag{4.62}$$

它的根为

$$r_i^2 = (1-2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2} \tag{4.63}$$

假定 $\zeta \ll 1$，并且不计 ζ 的高阶项，得到这样的结果

$$r_i^2 = 1 \pm 2\zeta \tag{4.64}$$

应用二项式展开，得到

$$r_2 = (1+2\zeta)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(2\zeta) + \cdots\cdots \tag{4.65}$$

$$r_1 = (1-2\zeta)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}(2\zeta) + \cdots\cdots$$

因 $\zeta \ll 1$

$$r_2 - r_1 = 2\zeta \tag{4.66}$$

半功率法测试阻尼因数是根据公式 4.66。

该方法如下：

a. 用以上所叙述的方法之一确定无阻尼固有频率、然后确定共振响应幅值 $U_{r=1}$。

b. 注意响应幅值曲线上，那里的幅值为$(\sqrt{2}/2)U_r=1$的点。称为相应频率Ω_1和Ω_2。

c. 然后根据公式 4.66

$$\zeta=\frac{r_2-r_1}{2}=\frac{1}{2}\left|\frac{\Omega_2-\Omega_1}{\omega_n}\right| \tag{4.67}$$

用公式 4.67 计算ζ的精度是取决于原来频响数据中的频率分辨。

在计算阻尼时，也可以应用有关沿矢量响应曲线，用间隔点的方法[4.17,4.18]。这个方法有时叫做 Kennedy-Pancu 法或圆拟合法。

§4.7 等效粘滞阻尼

在所有摆动的系统中都具有阻尼。阻尼的主要效应是从系统中消去能量。阻尼系统的能量损失就会使自由振动的幅值衰减。如第 3 章所见。在稳态强迫振动中，用激励所提供的能量来平衡其能量损失。在系统中能引起阻尼的有许多不同的机构：惯性力、流体阻抗、滑动摩擦等等。线性粘滞阻尼提供了最简单的阻尼数学模型，即力与速度成正比。当系统中真实阻尼远远比线性粘滞阻尼更加复杂时，就引用了一个等效粘滞阻尼来保持线性粘滞阻尼模型的简单性，这还是可能的。本节将指出如何确定这样的等效粘滞阻尼。

正如以上所指出的，系统中阻尼的主要效应之一是从系统中消去能量。因此，等效粘滞阻尼的概念是用一粘滞阻尼的机构消去的能量和已知一非粘滞阻尼机构消去的能量等效为依据。

图 4.16 表示作用在一个物体上的两个力，弹性的弹簧力f_s是与系统的势能有关，和阻尼

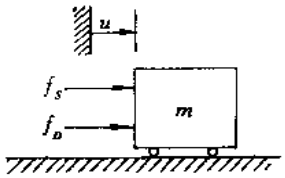


图 4.16 作用在物体上的阻尼力与弹性力

力f_D是与能量逸散有关。分别给出这些力所做的功为W_s和W_D

$$W_S=\int_{u_i}^{u_f}f_S du=\int_{t_i}^{t_f}f_s\dot{u}dt \tag{4.68}$$

和

$$W_D=\int_{t_i}^{t_f}f_D\dot{u}dt \tag{4.69}$$

通常要计算在简谐运动中一个循环的能量逸散。现在研究具有粘滞阻尼器的 **SDOF** 系统的能量逸散。那么

$$f_D=-c\dot{u} \tag{4.70}$$

稳态运动的位移和速度已知为

$$\begin{aligned}u&=U\cos(\Omega t-\alpha)\\ \dot{u}&=-U\Omega\sin(\Omega t-\alpha)\end{aligned} \tag{4.71}$$

因此，f_D每次循环所做的功为

$$W_D = \int_0^{2\pi/\Omega} (-c\dot{u})\dot{u}dt$$

$$= -c\Omega^2 U^2 \int_0^{2\pi/\Omega} \sin^2(\Omega t - \alpha)dt$$

即

$$W_D = -\pi c\Omega U^2 \tag{4.72}$$

粘滞阻尼每次循环所逸散的能量为($\pi c\Omega U^2$)。因此，由线性粘滞阻尼每次循环的能量损失是与阻尼系数、激励频率和幅值的平方成正比。

图 4.17 画出了作用在图 4.16 中的系统上总力的 f_D+f_S 曲线，其中 $f_S=-ku$，$f_D=-c\dot{u}$。该系统正进行稳态简谐运动。其曲线下部是 $\dot{u}>0$ 的运动(即物体向右运动)。曲线上部是 $\dot{u}<0$ 时的循环部分(即物体向左运动)。画对角阴影线的三角形面积是弹性贮存势能的最大值。椭圆形曲线内的面积是被阻尼力每次循环所逸散的能量，即 W_D。后者经常称为**滞回圈**，该环曲线是逸散力的特征。

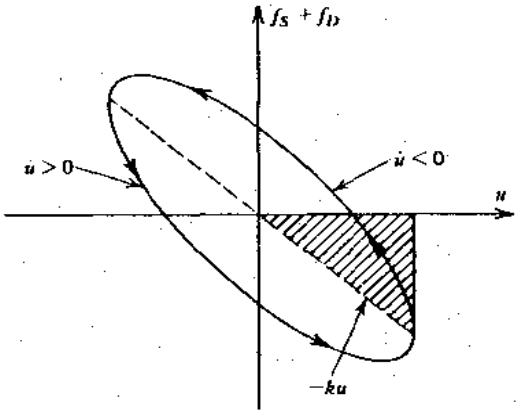


图 4.17　线弹性粘滞阻尼系统的位移函数的力

如系统中的阻尼不是线性粘滞阻尼类型时，那么，可规定一个**等效粘滞阻尼系数**为

$$c_{eq} = -\frac{W_D}{\pi\Omega U^2} \tag{4.73}$$

式中 W_D 为非粘滞阻尼机构的逸散能。例题 4.4 将说明 c_{eq} 系数的计算方法。

例题 4.4

在流体试验中，物体从中等速度运动，所受到的阻力正比于速度的平方。计算这种类型阻尼的等效粘滞阻尼系数。

解：

令表示阻尼力的公式为

$$f_D = \pm a\dot{u}^2 \tag{1}$$

式中，当 $\dot{u}$ 为正时、用负号，当 $\dot{u}$ 为负时、用正号。假设以时间表示的简谐运动是从负位移的末端位置来起始量测，如图 E4.1.1，那么

$$u = -U\cos\Omega t \tag{2}$$

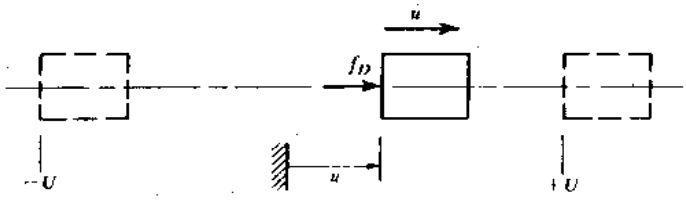


图 E4.4.1

$$\dot{u} = U\Omega\sin\Omega t \tag{3}$$

每次循环的逸散能是

$$W_D = -2\int_{-U}^{U} a\dot{u}^2 du = -2\int_0^{\pi/\Omega} a\dot{u}^3 dt \tag{4}$$

$$W_D = -2a\Omega^3U^3\int_0^{\pi/\Omega}\sin^3(\Omega t)dt$$

则

$$W_D = -\left(\frac{8}{3}\right)a\Omega^2U^3 \tag{5}$$

由公式 4.73

$$c_{eq} = \frac{-W_D}{\pi\Omega U^2} = \frac{(8/3)a\Omega^2U^3}{\pi\Omega U^2}$$

即

$$\boxed{c_{eq} = \left(\frac{8}{3\pi}\right)a\Omega U} \tag{6}$$

应用公式 4.73 和公式 3.4b 与 3.4c 来确定等效阻尼因数 ζeq 较为方便

则

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{-W_D/\pi\Omega U^2}{2k/\omega_n} \tag{4.74}$$

而根据弹性能可计算 k(图 4.17 表示的阴影部分)。

$$W_S = \left(\frac{1}{2}\right)kU^2 \tag{4.75}$$

因此,

$$\zeta_{eq} = \frac{-W_D}{W_S}\left(\frac{\omega_n}{4\pi\Omega}\right) \tag{4.76}$$

式中 Ω 是在求得 W_D 时的强迫频率。

§4.8 结构阻尼

在 § 4.3 中引进的复数表示法,要特别很好研究在结构动力分析中经常使用的一种阻尼类型。例如飞机的振动与颤振的研究,这种类型的阻尼叫做**结构阻尼**。它与位移成正比,而与简谐摆动系统的速度同相位。Theodorsen 和 Garrick 在很早的颤振研究中[4.19]用了这样的阻尼形式。介绍在 **SDOF** 系统的运动方程中通常用的方法写成

$$m\ddot{\bar{u}} + k(1 + i\gamma)\bar{u} = p_0 e^{i\Omega t} \tag{4.77}$$

式中 γ 是**结构阻尼因数***。参量 $k(1+i\gamma)$ 叫做**复数刚度**。

设解的形式为

$$\bar{u} = \bar{U}e^{i\Omega t} \tag{4.78}$$

将此解代入公式 4.77 中，得到

$$\bar{U} = \frac{p_0}{(k - m\Omega^2) + ik\gamma} \tag{4.79}$$

即

$$\frac{\bar{U}}{U_0} = \frac{1}{(1 - r^2) + i\gamma} \tag{4.80}$$

比较公式 4.80 与公式 4.32，我们可以看到，前者的因数 γ 相应于后者的因数 $(2\zeta\gamma)$。因为当阻尼因数很小时（在结构中一般情况如此），在共振附近的频率，阻尼是起主要作用的。可以看到，在简谐激励条件下，结构阻尼基本上与粘滞阻尼等效。

$$\zeta = \frac{\gamma}{2r} \doteq \frac{\gamma}{2} \tag{4.81}$$

根据公式 4.80，可以得到响应的幅值与相位角为

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + \gamma^2]^{1/2}} \tag{4.82}$$

和

$$\tan\alpha = \frac{\gamma}{1 - r^2} \tag{4.83}$$

式中 $\bar{U} = Ue^{-i\alpha}$。Bishop 和 Gladwell[4.14]对于具有结构阻尼系统的简谐激励作了杰出的研究。

图 4.18 是公式 4.80 的矢量响应曲线图。应注意下面事项：

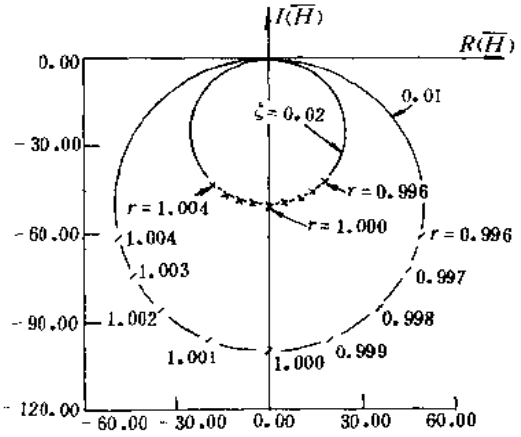


图 4.18　结构阻尼 SDOF 系统稳态响应的矢量响应曲线

a. 在 $r=1$（共振）

* 在某些著作中，是用 g 这个符号表示结构阻尼因数的。然而，恐与重力常数相混，所以这里采用了 γ 符号。

$$\frac{\overline{U}}{U_0} = \frac{1}{i\gamma} = -i\left(\frac{1}{\gamma}\right)$$

因此

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{\gamma}, \text{和 } \alpha = 90° \text{ 在 } r = 1$$

b. 结构阻尼的矢量响应曲线为一个圆。圆的直径是由阻尼因数确定的。

c. 等频率点的间隔，在 $r=1$ 附近，差异是很大的。即已知 $\Delta r = r_2 - r_1$，在圆上 $r=1$ 附近的间隔是最大的。

参考文献

4.1 C. E. Crede, *Vibration and Shock Isolation*, Wiley, New York(1951).

4.2 C. M. Harris and C. E. Crede (eds.), *Shock and Vibration Handbook*, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York(1976).

4.3 T. G. Beckwith and N. L. Buck, *Mechanical Measurements*, 2nd Ed., AddisonWesley, Reading, MA(1969).

4.4 J. S. Wilson, "Instrumentation for Dynamic Measurement: Accelerometers and Other Motion Transducers," *Sound and Vibration*, v. 11, 9-13(1977).

4.5 F. S. Tse, I. E. Morse, and R. T. Hinkle, *Mechanical Vibrations-Theory and Applications*, 2nd Ed., Allyn and Bacon, Boston(1978).

4.6 J. T. Brock, *Mechanical Vibration and Shock Measurements*, Brüel & Kjaer, Naerum, Denmark.

4.7 J. S. Wilson, "Performance Characteristics and the Selection of Accelerometers," *Sound and Vibration*, v. 12, 24-29, (1978).

4.8 N. D. Change, *General Guide to ICP Instrumentation*, Bulletin G-0001, PCB Piezotronics, Inc., Buffalo, NY.

4.9 *Instrument Notes*, Gould Inc., Statham Instruments Div., Oxnard, CA(1967).

4.10 M. Richardson, "Modal Analysis Using Digital Test Systems," *Seminar on Understanding Digital Control and Analysis in Vibration Test Systems*, The Shock and Vibration Information Center, Washington, DC, 43-64(1975).

4.11 M. Richardson and R. Potter, "Identification of the Modal Properties of an Elastic Structure from Measured Transfer Function Data," *20th International Instrumentation Symposium*, Instrument Society of America, 239-246(1974).

4.12 K. A. Ramsey, "Effective Measurements for Structural Dynamics Testing," *Sound and Vibration*, Pt. I, v. 9, 24-35(1975), Pt. II, v. 10, 18-31(1976).

4.13 S. Smith et. al., "MODALAB-A Computerized Data Acquisition and Analysis System for Structural Dynamics Testing," *21st International Instrumentation Symposium*, Instrument Society of America, 183k-189(1975).

4.14 A. L. Klosterman, *On the Experimental Determination and Use of Modal*

Representations of Dynamic Characteristics, Ph. D. Dissertation, U. of Cincinnati, Cincinnati, OH(1971).

4.15 R. B. Randall, *Frequency Analysis*, Brüel & Kjaer, Naerum, Denmark(1977).

4.16 G. F. Lang, "Understanding Vibration Measurements,"*Sound and Vibration*, v. 10, 26-37(1976).

4.17 C. C. Kennedy and C. D. P. Pancu, "Use of Vectors in Vibration Measurement and Analysis,"*J. Aero. Sci.*, v. 14, 603-625(1947).

4.18 R. E. D. Bishop and G. M. L. Gladwell, "An Investigation Into the Theory of Resonance Testing,"*Phil. Trans.*, v. 255, 241-280(1963).

4.19 Th. Theodorsen and I. E. Garrick, *Mechanism of Flutter. A Theoretical and Experimental Investigation of the Flutter Problem*, NACA, Report 685 (1940).

4.20 R. R. Bouche, *Calibration of Shock and Vibration Measuring Transducers*, Monograph SUM-11, The Shock and Vibration Information Center, Naval Research Laboratory, Washington, DC(1979).

习题组 4.1

4.1 图 4.1 的系统在 $t=0$ 时为静止状态，后来作用一简谐荷载 $p(t)=p_0\sin\Omega t$。

(a)确定其稳态响应的表达式。

(b)确定其总响应的表达式。

(c)当激励频比 $\Omega/\omega_n=1.5$ 时，其最大总响应与最大稳态响应之比为多少?(答案请看证明图 4.2。)

4.2 如果一个无阻尼系统的稳态响应要小于或等于 p_0 的五倍静态挠曲时，为什么一定要避开 $\Omega_l/\omega_n\leqslant\Omega/\omega_n\leqslant\Omega_u/\omega_n$ 的频域?

4.3 图 4.1 所表示的系统具有如下特性：$k=10\text{kN/m}$，$m=4\text{kg}$。当系统是静止状态起始激励为 $120\sin(40t)\text{N}$ 时，确定所得到运动的表达式。

4.4 类似图 4.1 所示的一个所谓无阻尼系统在使用简谐激励时确定其固有频率与质量。当频率为 $\Omega=6\text{rad/s}$ 时，得到共振条件，即往往引起响应增加超出范围，因此就视该频率为无阻尼固有频率，即 $\omega_n=6\text{rad/s}$。其次，若一质量 m 附加一质量 $\Delta m=1\text{kg}$，并重作共振试验。当共振发生时为 $\Omega=5.86\text{rad/s}$ 时。

(a)确定质量 m 值。

(b)确定弹簧常数 k 值。

4.5 (a)开始用公式 4.11 确定一无阻尼系统在 $t=0$ 时为静止状态，然后作用 $p(t)=p_0\cos\Omega t$ 的表达式。

(b)令 $\Omega=\omega_n+\Delta\omega$，这里 $\Delta\omega/\omega_n\ll1$。以幅值慢慢变化，就出现一个振荡为 $A\sin(2\omega_n+\Delta\omega_n)t$，(这叫做拍的现象)，其响应表示可按如下形式

$$u(t)=A\sin(\Delta\omega t)\sin(2\omega_n+\Delta\omega)t$$

4.6 飞机上一个升降控制调正片用铰连接在升降器的轴 A 上。虽然习题 2.6 曾建议用自由振动试验来确定 I_A，但是调正片的动力特性也取决于控制连接装置的线刚度，如图 P4.6 模拟成的扭转弹簧。因为 k_θ 不能用静态测定，需做共振试验。升降器是固定的，调正片是用弹簧 k_1 所支承，简谐激励是通过弹簧 k_2 作用，如图示。

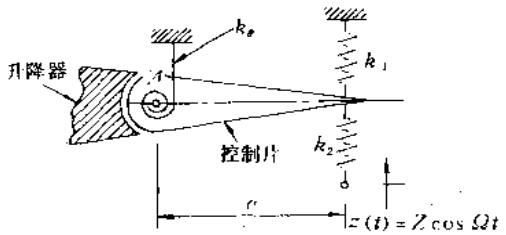


图 P4.6

(a)证明升降器的 ω_n 与它的单独控制铰的 $\omega_n=\sqrt{k_\theta/I_A}$。

(b)如果在试验中向下调整得到共振频率 ω_r，按照 ω_r、I_A 和表示在图上的其他参数来确定 k_θ 的表达式。

习题组 4.2

4.7 图 4.5 所示为对应于简谐激励 $\Omega<\omega_n$。画出下面激励频率的力矢量多边形：

(a)$\Omega=\omega_n$。

(b)$\Omega>\omega_n$ 的典型情况

4.8 转动机械中的不平衡是振动的一个普遍激励源。概要地说明图 P4.8 中的如此情况。令$(M-m)$是机械的质量，m 是转动不平衡块在 Ωrad/s 时的质量。

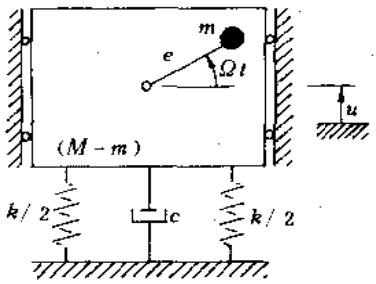


图 P4.8

(a)推导机械竖向的运动方程。

(b)推导该系统稳态响应的表达式和证明图 4.12 是这种情况的频响曲线。

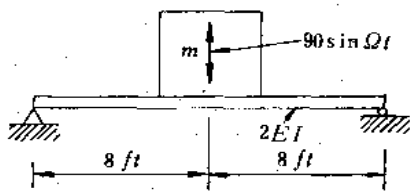


图 P4.9

4.9 一个工业用的空气调节器重 1200 lb，作用在两个平行简单支承钢梁的中部，见图 P4.9；它的净跨为 16ft。每一钢梁的惯性矩为 20 in^4。马达的转速为 300 rpm(转/分)，在此转速下转子产生转动不平衡力的幅值为 90 lb。假定粘滞阻尼因数为 10%并不计梁的重量，根据转动不平衡的结果来确定稳态的振动幅值。

习题组 4.3

4.10 一个 **SDOF** 系统，在 P 点作用一简谐激励 $z(t)=Z\cos\Omega t$。已知 m,c,k,Z 和 Ω，见图 P4.10。

(a)根据已知条件，用 $u(t)$ 推导系统的运动方程。

(b)据已知条件，用 $w(t)=z-u$ 推导系统的运动方程。

(c)推导该系统 ω_n 和 ζ 的表达式。

(d)确定 $\overline{U}/Z,\overline{W}/Z$ 的复频响应函数。

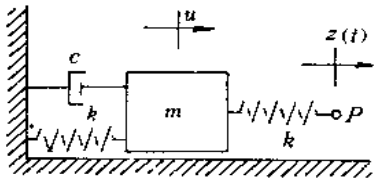


图 P4.10

4.11 用复频响应法，确定图 P2.3 中所示系统如下的表达式。

(a)$\overline{U}/Z$，其中 $z(t)=Z\cos\Omega t$。

(b)U 和 α，其中 $u(t)=U\cos(\Omega t-\alpha)$。

4.12 用复频响应法得到图 P2.3 中所示系统，由于简谐激励 $z(t)=Z\cos\Omega t$ 在弹簧 BC 中最大稳态力的表达式。

4.13 机械设备经常使用转动装置，它可使支承结构受力增加，例如建筑物屋顶上的空气调节设备。根据图 4.11 来判断，使用隔振器可以减少支承结构的受力。假定一台机器以 20Hz 运行，并希望应用弹簧型式的隔振装置使传递的力减少 90%，即

(a)根据强迫频率函数和静弯曲 $\delta_{st}=mg/k$ 来确定已知力减少的百分比的表达式。

(b)计算静弯曲，$\delta_{st}=$mg/k，其条件如上，即在 20Hz 时减少 90%。以毫米表示。

4.14 安装在实验室里的一个隔振块，使之邻近工厂运转试验不会产生振动干扰。如隔振块重 2000 lb，而四周地面和基础振动为 24 Hz 时的幅值为 0.01 in，计算隔振块仅产生 0.002 in 的幅值时，隔振系统的刚度。见图 P4.14。

4.15 转旋的不平衡导致了简谐力。非转动时质量为 $(M-m)$，在以偏心 e，角速率 Ω rad/s 反向转动时质量为 $(m/2)$，见图 P4.15。

(a)确定该系统的运动方程。

(b)应用复频响应法来确定 $M\overline{u}/me$ 的表达式。

(c)以非量纲形式 $\overline{f}_{tr}/me\Omega^2$ 来求得传递到基础上的力。

4.16 确定例题 4.3 中车辆将要产生共振条件时的速度

(a)假设车辆为空载。

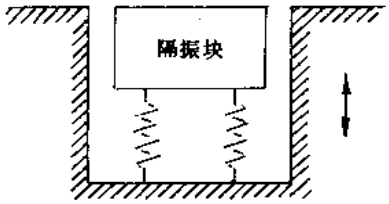


图 P4.14

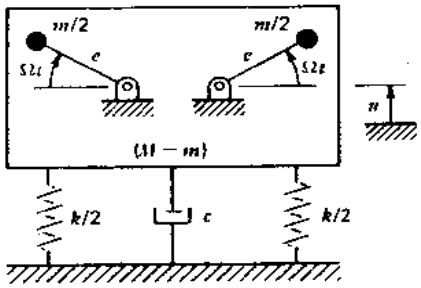


图 P4.15

(b)假设车辆为满载。

习题组 4.4

4.17 在振动的结构上一个点，已知其运动为 $z=Z_1\cos\Omega_1 t+Z_2\cos\Omega_2 t=0.05\cos(60\pi t)+0.02\cos(120\pi t)$

(a)用一加速度计其阻尼因数 $\zeta=0.70$ 和 20 kHz 共振频率来确定振动记录 $\omega_p(t)$。

(b)用加速度计是否能引起有效幅值或相位畸变?

习题组 4.5

4.18 应用图 4.9 中外层“圆”的数据

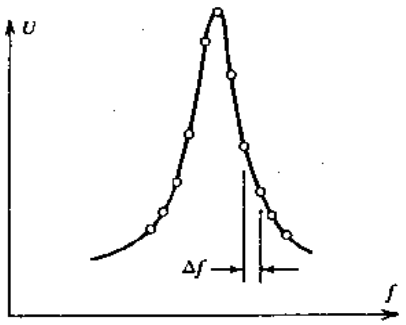


图 P4.19

(a)构成以 r 为函数的曲线 $D_s=|\overline{H}|$。

(b)用半功率法检验 $\zeta=0.05$，如该曲线上所表示的。(估算 r_2 和 r_1)。

4.19 可用 $f=\Omega/2\pi$ 为 U 的函数形式来得到试验振动数据，见图 P4.19。如系统具有 1% 的阻尼，为了得到 **SDOF** 系统 ζ 的一个合理的精确计算，应用该数据来计算频率分辨率 $\triangle f$。

习题组 4.6

4.20 一个力 $p_0\sin\Omega t$ 作用在一质量上，该质量是在具有动摩擦系数为 μk 的表面上，如图 P4.20(见 § 3.4)。

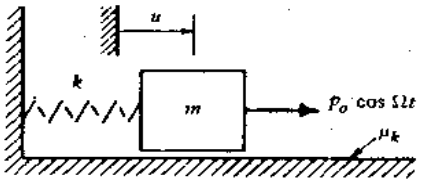


图 P4.20

(a)确定相应的粘滞阻尼系数。

(b)确定相应粘滞阻尼系统的响应幅值 U。

4.21 确定例题 4.4 中的平方阻尼系统的稳态响应幅值。

习题组 4.7

4.22 应用公式(4.77)所表示的复数形式可表达简谐运动的结构阻尼力，即 $\overline{f}_d=-i\gamma k$

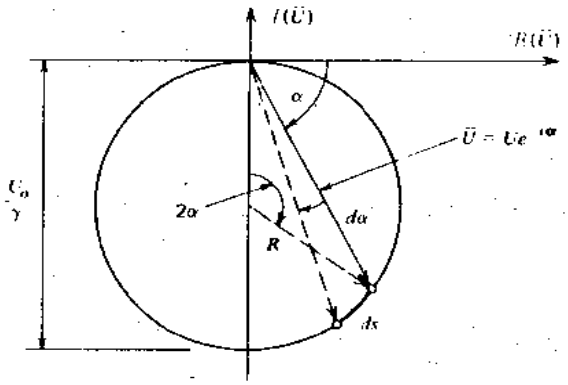


图 P4.23

$\overline{u}$，或用实型

$$f_d=-\gamma k\dot{u}\frac{|u|}{|\dot{u}|}=-\gamma k|u|\mathrm{sgn}(\dot{u})$$

(a)画出简谐激励一个循环以 u 为函数的 f_d 图。这里

$$u=-U\cos(\Omega t-\alpha)$$

(b)确定每次循环作功的表达式。

(c)确定 c_{eq} 的表达式。

(d)将 c_{eq} 代入公式 4.20a，确定 U/U_0 的表达式。这个与公式 4.82 比较，并讨论你所观察到的不同之处。

4.23 应用公式 4.80 表示结构阻尼的矢量响应图是圆心在虚轴上的一个圆，并通过原点。如图 4.18 或图 P4.23 所示。

4.24

(a)应用图 P4.23 沿圆的弧长与频率变化之比来确定 $ds/d(r^2)$ 的表达式。

(b)用计算 $ds/d(r^2)$ 在 $r=1$ 时来说明阻尼水准 γ 如何影响上面的导数。

第 5 章　SDOF 系统特殊形式激励响应

读者在第 4 章中研究了简谐激励的 SDOF 系统响应；并研究了主要决定于系统阻尼因数和激励频比的稳态响应。在研究一般激励的 SDOF 系统响应之前，我们先研究几个简单的非简谐激励的形式，以便深入了解影响响应的某些系统参数和激励参数。第 6 章至第 8 章将论述确定一般激励 SDOF 系统响应的方法。

本章将完成如下内容：

- 应用经典微分方程解 SDOF 系统 $t=0$ 时脉冲荷载，作用在 $t=0$ 时阶跃荷载或斜坡荷载响应。
- 描述同一系统的快速加载与慢速加载的差异。
- 说明为什么激励不再作用系统上后，欲可能发生脉冲的最大动力响应。

§5.1　粘滞阻尼 SDOF 系统理想阶跃输入响应

令图 3.1 所示的 SDOF 系统原型受到一理想阶跃输入，如图 5.1 所示。公式 3.1 给出了运

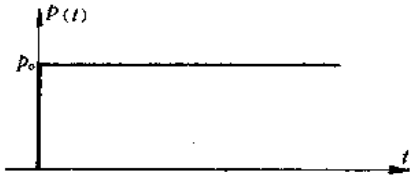


图 5.1　理想阶跃输入

动方程，因此

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p_0,\ t\geqslant 0 \tag{5.1}$$

令系统在 $t=0$ 时，处于静止状态，于是

$$u(0)=\dot{u}(0)=0 \tag{5.2}$$

根据公式 5.1，得到特解

$$u_p=\frac{p_0}{k} \tag{5.3}$$

和公式 3.32 给出的齐次解($\zeta<1$)，组成了公式 5.1 的解

$$u = \frac{p_0}{k} + e^{-\zeta\omega_n t}(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t) \tag{5.4}$$

应用初始条件，计算 A_1 与 A_2，得到

$$u = \frac{p_0}{k}\left\{1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t + \left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\right)\right]\sin\omega_d t\right\} \tag{5.5}$$

检验动力响应的一个有效方法是研究**响应比**，即动力荷载因数，定义为*

$$R(t) = \frac{ku(t)}{p_{max}} \tag{5.6}$$

因此，响应比是动力响应与静态变形之比。对于理想阶跃输入，已知为 $R(t)$如下：

$$R(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left[\cos\omega_d t + \left(\frac{\zeta\omega_n}{\omega_d}\right)\sin\omega_d t\right] \tag{5.7}$$

图 5.2 表示了一个标准响应比曲线。在响应比曲线上 $R(t)=1$ 的位置为相应静态位移。因为荷载是瞬时作用的，所以有个峰值。经过多次周期的阻尼摆动之后，系统又回到了静态值 1。阻尼的大小决定了曲线峰值的大小和对静态平衡位置摆动的衰减比值。

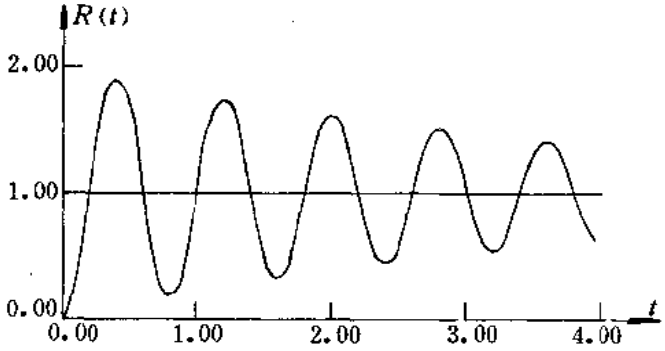


图 5.2　阶跃输入响应比曲线

对于无阻尼系统，则公式 5.5 变成

$$u(t) = \frac{p_0}{k}(1 - \cos\omega_n t) \tag{5.8}$$

并且 $R_{max}=2$。因此，当荷载瞬时作用在无阻尼系统上时，则所得到的最大位移为两倍于静态位移。据此，经常以 2 为安全因数应用在承受快速加载的结构设计中，

§5.2　无阻尼 SDOF 系统矩形脉冲与斜坡荷载响应

在 § 5.1 中，研究了理想阶跃输入的无阻尼 SDOF 系统响应。注意最大峰值发生在形成摆动半个周期之后，以及阻尼的存在会减小峰值。现在我们要研究两个问题——一个无阻尼系统在加载时会产生什么效应？加载的时间增长其响应会有什么影响？

图 5.3 表示了无阻尼系统的矩形脉冲输入及其响应比的情况

$$(a)\ t_d > \frac{T_n}{2},\quad (b) t_d < \frac{T_n}{2}$$

* 用 $(\ )_{max}$ 表示最大绝对值的缩写，即 $t|(\ )|$。

式中 t_d 为矩形脉冲**持续时间**。

从图 5.3 中可以清楚的看出，当 $t_d \geq \frac{T_n}{2}$ 时最大峰值发生在**强迫振动**阶段，即在 t_d 之前。假定 $t_d < \frac{T_n}{2}$ 时，最大值发生在**残余振动阶段**，就是在 t_d 之后。我们能够确定每种情况发生最大值的表达式。

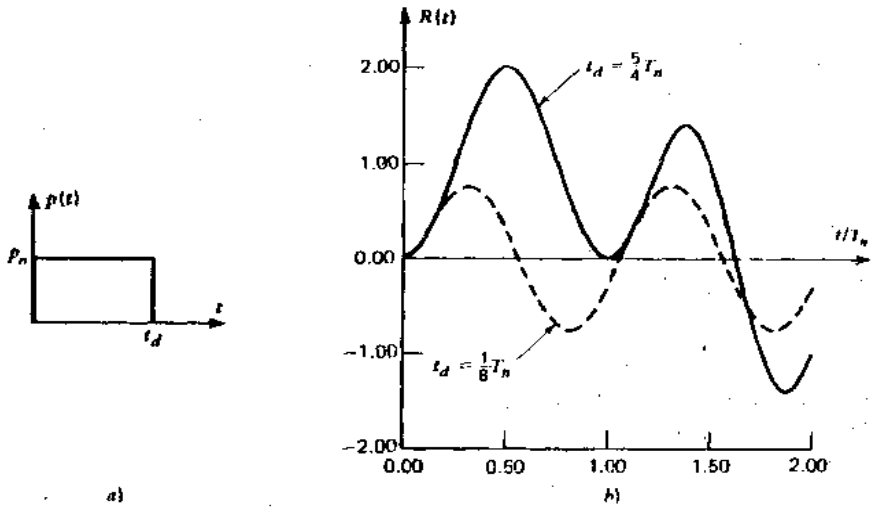


图 5.3 矩形脉冲输入响应

a)矩形脉冲；b)响应比

第一种情况。强迫振动阶段($0 \leqslant t \leqslant t_d$)

这种情况的 $R(t)$ 是与理想阶跃荷载作用相同，即

$$R_1(t) = 1 - \cos\omega_n t, \quad 0 \leq t \leq t_d \tag{5.9}$$

并且最大值为

$$(R_1)_{max} = R_1\left(\frac{T_n}{2}\right) = 2 \tag{5.10}$$

第二种情况 残余振动阶段($t_d < t$)

图 5.3b 表示在 $t_d = T_n/8$ 期间一个脉冲的 $R(t)$。注意 R_{max} 发生在残余振动的时候。因为 $t > t_d$ 的响应是"初始"条件为 $R_1(t_d)$ 与 $\dot{R}_1(t_d)$ 的自由振动；所以公式 3.17 能应用在下面的公式中，$t \geqslant t_d$

$$R_2(t) = R_1(t_d)\cos\omega_n(t - t_d) + \left[\frac{\dot{R}_1(t_d)}{\omega_n}\right]\sin\omega_n(t - t_d) \tag{5.11}$$

对 $t \geq t_d$、式中 $R_1(t_d)$ 和 $\dot{R}_1(t_d)$ 是从公式 5.9 得到的，可以应用公式 3.25 来确定该响应的幅值。

$$(R_2)_{max}\text{」} = \left\{[R_1(t_d)]^2 + \left[\frac{\dot{R}_1(t_d)}{\omega_n}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{5.12}$$

可以减化成

$$(R_2)_{max} = 2\sin\left(\frac{\pi t_d}{T_n}\right) \tag{5.13}$$

图 5.4a 表示的是最大响应比为脉冲持续时间的函数。根据该图或公式 5.13 可以看到，脉冲大

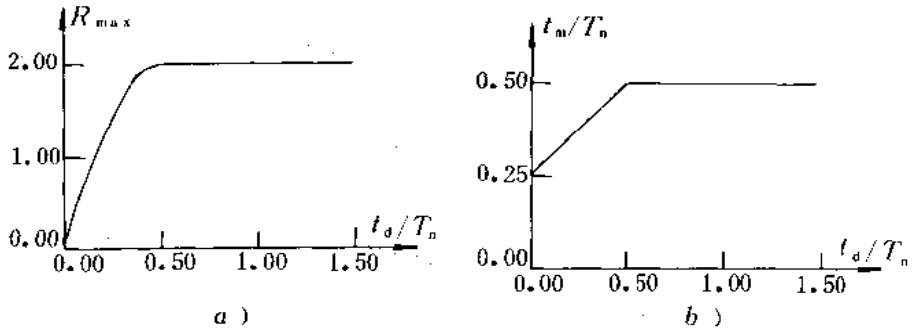


图 5.4 矩形脉冲激励的最大响应比
a)最大响应幅值；b)最大响应发生的时间

于 $T_n/6$ 的持续时间，会发生大于静态位移 p_0/k 的一个位移。大于 $T_n/2$ 的脉冲，其最大位移为静态位移值的二倍。图 5.4b 表示的是发生最大响应的时间。图 5.4b 中的曲线是根据一个练习(习题 5.4)推导画出的。

要是考虑研究荷载作用持续时间的最大响应效应时，那么就让我们现在检验时间增长的影响。图 5.5 中表示所要研究的一个与时间 t_r 增长的斜坡荷载作用在无阻尼 **SDOF** 系统上。系

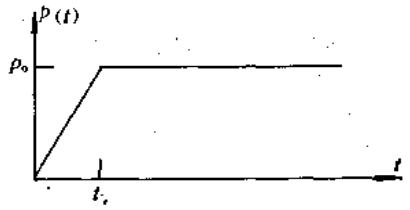


图 5.5 斜坡输入函数

统在荷载作用之前是静止的。其运动方程和初始条件为

$$m\ddot{u} + ku = \begin{cases} \left(\frac{t}{t_r}\right) p_0 & 0 \leq t \leq t_r \\ p_0 & t_r \leq t \end{cases} \tag{5.14}$$

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0 \tag{5.15}$$

在 $0 \leqslant t \leqslant t_r$ 时，其特解为

$$u_p = \left(\frac{t}{t_r}\right)\left(\frac{p_0}{k}\right) \tag{5.16}$$

则

$$u = \left(\frac{t}{t_r}\right)\left(\frac{p_0}{k}\right) + A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t \tag{5.17}$$

公式 5.15 应用初始条件，得到

$$u = \left(\frac{p_0}{k}\right)\left[\left(\frac{t}{t_r}\right) - \left(\frac{1}{\omega_n t_r}\right)\sin\omega_n t\right] \tag{5.18}$$

在 $t \geqslant t_r$ 时，公式 5.14b 的解可以表示为

$$u=\left(\frac{p_0}{k}\right)\left\{1+\left(\frac{1}{\omega_n t_r}\right)[\sin\omega_n(t-t_r)-\sin\omega_n t]\right\} \tag{5.19}$$

图 5.6a 表示一个 $t_r > T_n$ 的输入响应，也是一个 $t_r < T_n$ 的输入响应。图 5.6b 概括了时间的增长对最大响应的影响。

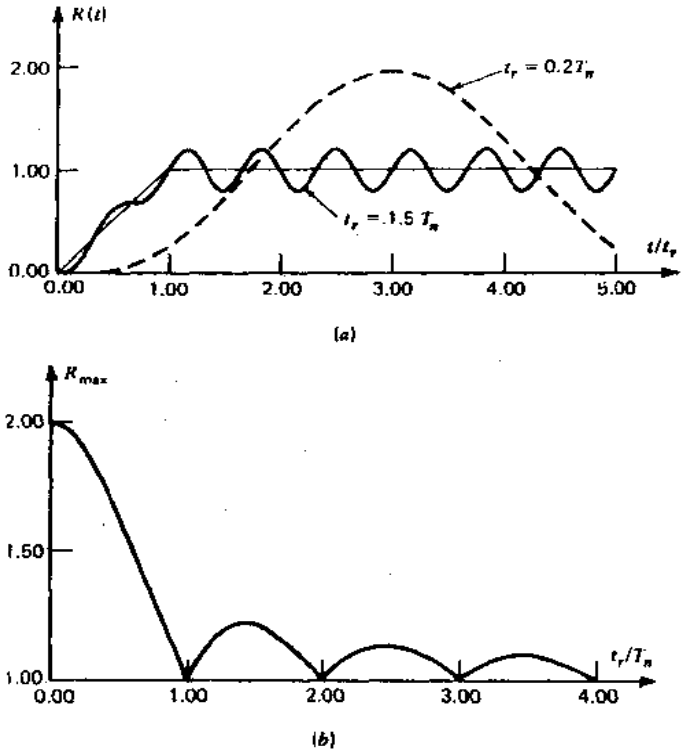


图 5.6 斜坡输入无阻尼 SDOF 系统响应

a)斜坡输入响应；b)斜坡输入最大响应

由图 5.6 可以看到，一个理想的斜坡输入产生的最大响应为 $R_{max}=2$（即 $t_r=0$ 时）。对 $t_r \gg T_n$ 的斜坡荷载将会出现小的突峰，刚好是系统在伪静力挠曲线周围产生的小摆动。

$$u_{伪静态}=\left(\frac{t}{t_r}\right)\left(\frac{p_0}{k}\right), \quad 0 \leq t \leq t_r \tag{5.20}$$

因此，可以认为荷载若是慢速加载，并且作用的时间超过 $3T_n$ 时，动力效应一般可以忽略。

类似图 5.4a 与图 5.6b 的曲线称为反应谱曲线。在 § 6.2 中要较为详细地讨论反应谱。

§ 5.3 无阻尼 SDOF 系统短时作用脉冲响应——单位脉冲响应

大概最重要的特殊激励形式要算是短时作用脉冲，因为也要经常地用它来确定更一般的激励形式的系统响应，如将在下一章所看到的。

研究一无阻尼 SDOF 系统受到一脉冲，在 $t_d \leqslant T_n$ 期间。

$$I=\int_0^{t_d} p(t)dt \tag{5.21}$$

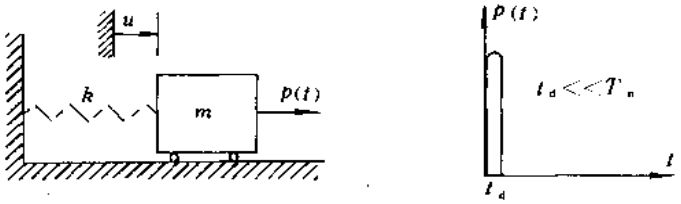


图 5.7　无阻尼 **SDOF** 系统承受短时脉冲

令系统在 $t \leq 0$ 为静止，即激励作用之前。其运动方程和初始条件为

$$m\ddot{u} + ku = \begin{cases} p(t) & 0 < t \leq t_d \\ 0 & t_d < t \end{cases} \tag{5.22}$$

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0 \tag{5.23}$$

公式 5.22a 对时间积分，并给出初始条件，得到

$$m\dot{u}(t_d) + ku_{avg}t_d = I \tag{5.24}$$

式中 u_{avg} 是在 $0 < t \leq t_d$ 时的（小的）平均位移如 $t_d \to 0$ 时，即 $t_d \ll T_n$，则公式 5.24 中的第二项可以忽略，剩下

$$m\dot{u}(0^+) = I \tag{5.25}$$

因此，一个巨大的力作用在非常短的时间内所形成的脉冲，具有给定质量的一个初始速度的效应，其初始速度为

$$\dot{u}(0^+) = \frac{I}{m} \tag{5.26a}$$

而系统具有如下的初始位移开始摆动

$$u(0^+) = 0 \tag{5.26b}$$

可以将“初始”条件应用在公式 5.22b 的自由振动问题中。应用公式 3.17，得到**脉冲响应**

$$(u)t = \left(\frac{I}{m\omega_n}\right)\sin\omega_n t \tag{5.27}$$

根据公式 5.27，令 $I=1$，可得到无阻尼 **SDOF** 系统的**单位脉冲响应函数**。经常将单位脉冲响应函数习惯上写成 $h(t)$，因此

$$h(t) = \left(\frac{1}{m\omega_n}\right)\sin\omega_n t \tag{5.28}$$

对于 $\zeta=1$ 的粘滞阻尼 **SDOF** 系统，其脉冲响应函数可以写成

$$u(t) = \left(\frac{I}{m\omega_d}\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \tag{5.29}$$

相应的单位脉冲响应函数为

$$h(t) = \left(\frac{1}{m\omega_d}\right)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \tag{5.30}$$

例题 5.1

设脉冲 $I = \int p(t)dt$ 作用在一无阻尼 **SDOF** 系统上，其力 p_0 为常数，作用在 $0 < t \leq t_d$ 范围内，系统在 $t=0$ 时为静止。证明在 $t_d \ll T_n$ 时，公式 5.11 简化成公式 5.27。

解：

a. 由公式 5.8 确定 $u(t_d)$和 $\dot{u}(t_d)$：

$$u(t_d) = \left(\frac{p_0}{k}\right)(1 - \cos\omega_n t_d) \tag{1}$$

$$\dot{u}(t_d) = \left(\frac{\omega_n p_0}{k}\right)\sin\omega_n t_d \tag{2}$$

因 $\omega_n T_n = 2\pi$， $t_d \ll T_n$， $\omega_n t_d \ll 2\pi$。因此，

$$(1 - \cos\omega_n t_d) \doteq \frac{1}{2}(\omega_n t_d)^2$$

$$\sin\omega_n t_d \doteq \omega_n t_d$$

然而，因为 $I = p_0 t_d$

$$u(t_d) \doteq \frac{1}{2}\left(\frac{p_0}{k}\right)(\omega_n t_d)^2 = \left(\frac{I}{2}\right)\left(\frac{t_d}{m}\right)$$

$$\dot{u}(t_d) \doteq \left(\frac{\omega_n p_0}{k}\right)(\omega_n t_d) = \frac{I}{m} \tag{3}$$

b. 根据公式 5.1 计算 $u(t)$，令 $t_d \to 0$：

$$u(t) = \lim_{t_d \to 0}\left[\left(\frac{I t_d}{2m}\right)\cos\omega_n(t - t_d) + \left(\frac{I}{m\omega_n}\right)\sin\omega_n(t - t_d)\right] \tag{4}$$

因此，$t_d \to 0$ 时

$$\boxed{u(t) = \left(\frac{I}{m\omega_n}\right)\sin\omega_n t} \tag{5}$$

正如公式 5.27 中所查到的。

在第 6 章中，读者将要学习怎样确定一般激励的 **SDOF** 系统响应。只要 $p(t)$的持续时间很短，即 $t_d \ll T_n$，那么 $p(t)$的形式就不是什么重要的事情了。这样读者就有可能表示了。因此，确定应用 $p(t)$的粘滞阻尼系统，公式 5.27 或公式 5.29 可给出一个很接近实际的近似响应。

总之，读者已经研究了，当 $t_d \ll T_n$ 时，激励可以考虑为一个脉冲。另一方面，如果它的增长时间 t_r 大于 T_n 时，荷载可认为是“静态”作用。对快速加载必须考虑动力突峰。

习题组 5.1

5.1 用一个非常简单的模型来研究着陆的一架轻型飞机的冲击。飞机模拟成图 P5.1，即以一个线性弹簧的集中质量表示着陆的装置。当弹簧触到地面时，质量 m 具有一垂直下降速度 V。接触时 $t = 0$，并令 $u(0) = 0$。

(a)确定弹簧保持在接触地面时间内，质量的竖向位置成为时间函数的表达式；

(b)确定弹簧回弹脱离地面接触的时间。

5.2 运送一件仪器设备重 40 lb，是用泡沫包装在一容器内。该容器的有效刚度 $k = 100$ lb/in，有效阻尼因数 $\zeta = 0.05$，若整个容器和它的内包装以垂直速度 $V = 150$ in/s 碰撞在地面上，求泡沫包装作用在仪器设备上的最大的总力，如图 P5.2 所示。

(注意：仿照图 P5.1 成一个质量作用在一个弹簧上，并加一粘滞阻尼器。)

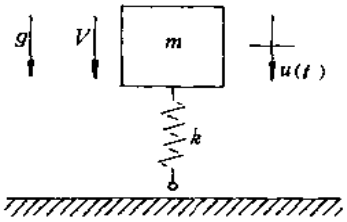


图 P5.1

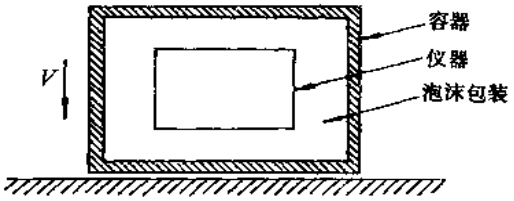


图 P5.2

5.3 根据图 5.1 确定一个理想阶跃输入的阻尼 **SDOF** 系统的瞬时响应表达式，其初始条件 $u(0)=0$，$\dot{u}(0)=\dot{u}_0$。

习题组 5.2

5.4 确定一无阻尼 **SDOF** 系统承受如图 5.3a 所示的矩形脉冲，在 t_m 时所发生的最大响应表达式。$t_d/T_n \leqslant 0.5$ 的一个表达式及 $t_d/T_n \geqslant 0.5$ 的第二个表达式(见图 5.4b)

5.5 一无阻尼 **SDOF** 系统承受如图 5.5 形式的斜坡荷载作用。确定 $0 \leq t_r \leq T_n$ 时的如下表达式

(a)t_m＝发生最大响应的时间。

(b)R_{max}＝最大响应比。

假定 $u(0)=\dot{u}(0)=0$ (见图 5.6)。

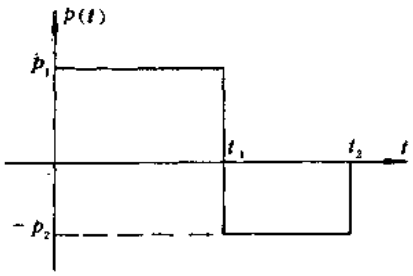


图 P5.6

5.6 确定无阻尼 **SDOF** 系统对如下的每一时间间隔内的响应表达式，力作用如图 P5.6。

(**a**) $0 \leqslant t \leqslant t_1$；

(**b**) $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$；

(**c**) $t_2 \leqslant t$。

假定 $u(0)=\dot{u}(0)=0$

第 6 章　SDOF 系统一般动力激励响应

在第 5 章中，应用了经典微分方程的方法解三种特殊形式输入的 **SDOF** 系统响应，用“检验”的办法是很容易得到它的特解的。要强调的是注意其激励参数的重要性，如时间增长和持续时间。除了前面所应用的经典方法以外，还有三种被广泛使用的方法可以得到一般动力荷载系统响应的解析表达式——杜哈梅(Duhamel)积分法(时域解)，拉普拉斯(Laplance)变换法(拉域解)和傅立叶(Fourier)变换法(频域解)。拉普拉斯变换法提供了一个很有用的变换工具，它可将运动的微分方程转换成代数方程；并且可以确定系统的特性。然而，在这一章中，我们只能研究杜哈梅积分法。第 8 章再讨论傅立叶变换。

在一个指定的系统中受到了一个所规定的输入时，那么就可以能够很方便的比较出在规定的输入对不同系统的响应。为此目的，反应谱是很有用处的，并在本章后面的部分要叙述的。

本章将完成如下内容：

- **应用杜哈梅积分法得到简单瞬时输入的 SDOF 系统响应**
- **利用反应谱确定 SDOF 系统承受指定输入时的设计参数**

§6.1　SDOF 系统一般动力激励响应——杜哈梅积分法

杜哈梅积分是用来确定一般动力激励 **SDOF** 系统响应的。可以由 §5.3 所得到的脉冲响应函数来推导出。在多数情况下，是可以得到响应的解析表达式的。对于更复杂形式的激励则需要响应的数值计算。如在第 7 章与第 8 章中将叙述的。

杜哈梅积分是以叠加原理为依据的，仅对线性系统有效。图 6.1 表示一无阻尼 **SDOF** 系统在初始状态时为静止，然后受到一输入 $p(t)$，如图示。系统对一个脉冲 $dI=p(\tau)d\tau$ 的响应称 $du(t)$，已知为

$$du(t)=\left(\frac{dI}{m\omega_n}\right)\sin\omega_n(t-\tau) \tag{6.1}$$

在 t 时的总响应将是在 t 时间以前，所有脉冲增量的响应之和。因此

$$u(t)=\left(\frac{1}{m\omega_n}\right)\int_0^t p(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)dr \tag{6.2}$$

即

$$u(t)=\int_0^t p(\tau)h(t-\tau)dr \tag{6.3}$$

式中 $h(t-\tau)$ 是由公式 5.28 的无阻尼系统所得。若应用公式 5.30 得到 $h(t-\tau)$ 时，则公式 6.3 对有阻尼系统同样有效。因此，如阻尼系统初始静止时，则

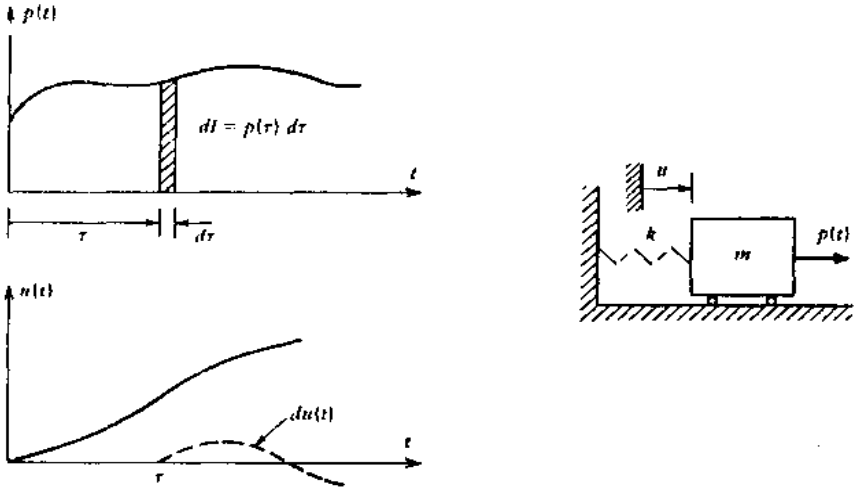


图 6.1　无阻尼 SDOF 系统的增量响应

$$u(t)=\left(\frac{1}{m\omega_d}\right)\int_0^t p(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau \tag{6.4a}$$

即

$$u(t)=\left(\frac{1}{m\omega_d}\right)I\left[\int_0^t p(\tau)e^{(i\omega_d-\zeta\omega_n)(t-\tau)}d\tau\right] \tag{6.4b}$$

公式 6.2 与公式 6.4 分别叫做无阻尼和有阻尼 **SDOF** 系统响应的**杜哈梅积分**表达式。

公式 6.3 常称为**卷积**。它的更一般形式为

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \tag{6.5}$$

若系统初始为静止时，因此可用公式 6.2 或公式 6.4 来确定一般动力激励的 **SDOF** 系统响应。若系统初始条件非零时，则由公式 3.17 或由公式 3.33 的 $\zeta<1$ 来确定初始条件。因此，无阻尼系统响应为

$$u(t)=\left(\frac{1}{m\omega_n}\right)\int_0^t p(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau+u_0\cos\omega_n t+\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)\sin\omega_n t \tag{6.6}$$

低阻尼系统的响应为

$$u(t)=\left(\frac{1}{m\omega_d}\right)\int_0^t p(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)d\tau+u_0e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t+\left(\frac{1}{\omega_d}(\dot{u}_0+\zeta\omega_n u_0)e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t\right. \tag{6.7}$$

在计算杜哈梅积分时，利用下面的三角公式是很方便的。

$$\sin\omega(t-\tau)=\sin\omega t\cos\omega\tau-\cos\omega t\sin\omega\tau \tag{6.8}$$

例题 6.1

用杜哈梅积分解定无阻尼 **SDOF** 系统对指定为三角脉冲的爆炸荷载的响应。对 $t<t_d$ 和 t

$>t_d$ 所得到的表达式是成立的，见图 E6.1.1。该系统初始为静止状态。

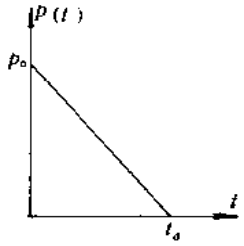


图 E6.1.1

解：

利用公式 6.2，及

$$p(t) = p_0\left(1 - \frac{t}{t_d}\right) \qquad 0 \le t \le t_d \tag{1}$$

$$p(t) = 0 \qquad t_d < t \tag{2}$$

a. 如 $0 \leqslant t \leqslant t_d$：

$$\begin{aligned} u(t) &= \left(\frac{1}{m\omega_n}\right)\int_0^t p_0\left(1 - \frac{\tau}{t_d}\right)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau \\ &= \left(\frac{p_0}{k}\right)\sin\omega_n t\int_0^t\left(1 - \frac{\tau}{t_d}\right)\cos\omega_n\tau d(\omega_n\tau) \\ &\quad - \left(\frac{p_0}{k}\right)\cos\omega_n t\int_0^t\left(1 - \frac{\tau}{t_d}\right)\sin\omega_n\tau d(\omega_n\tau) \end{aligned} \tag{3}$$

应用部分积分，得到

$$\begin{aligned} \int\tau\cos\omega_n\tau d(\omega_n\tau) &= \tau\sin\omega_n\tau - \left(\frac{1}{\omega_n}\right)\int\sin\omega_n\tau d(\omega_n\tau) \\ &= \tau\sin\omega_n\tau + \left(\frac{1}{\omega_n}\right)\cos\omega_n\tau \end{aligned} \tag{4}$$

同理

$$\int\tau\sin\omega_n\tau d(\omega_n\tau) = -\tau\cos\omega_n\tau + \left(\frac{1}{\omega_n}\right)\sin\omega_n\tau \tag{5}$$

因此，

$$\begin{aligned} u(t) = \left(\frac{p_0}{k}\right)\Big\{&\sin\omega_n t\left[\sin\omega_n t - \left(\frac{t}{t_d}\right)\sin\omega_n t - \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\cos\omega_n t + \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\right] \\ &- \cos\omega_n t\left[-\cos\omega_n t + 1 + \left(\frac{t}{t_d}\right)\cos\omega_n t - \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\sin\omega_n t\right]\Big\} \end{aligned} \tag{6}$$

简化该式，得到

$$\boxed{R_1(t) = 1 - \left(\frac{t}{t_d}\right) - \cos\omega_n t + \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\sin\omega_n t} \tag{7}$$

b. 如 $t_d < t$：

$$u(t) = \left(\frac{1}{m\omega_n}\right)\int_0^{td} p_0\left(1 - \frac{\tau}{t_d}\right)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau \tag{8}$$

注意该式与公式 3 相同，除了它所计算的时间为 t_d 外，因为在 $t > t_d$ 时，$p(\tau) = 0$。应用公式 6 令方括号内 $t = t_d$，因此

$$u(t) = \left(\frac{p_0}{k}\right)\left\{\sin\omega_n t\left[-\left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\cos\omega_n t_d + \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\right]\right.$$

$$-\cos\omega_n t\left[1-\left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\sin\omega_n t_d\right]\Bigg\}$$

于是

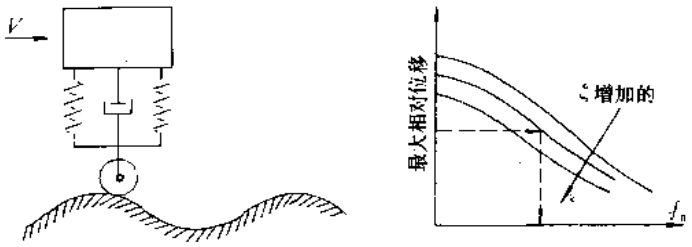
$$R_2(t)=\left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\left[\sin\omega_n t(1-\cos\omega_n t_d)-\cos\omega_n t(\omega_n t_d-\sin\omega_n t_d)\right] \tag{9}$$

(以 f_n 为函数的 R_{max} 值的曲线将在 § 6.2 中画出。)

根据例题 6.1,读者能够了解到,对任意输入的响应,原则上是可以采用杜哈梅积分法来得到的。但积分计算的工作量可能是过大的。然而也可以只需要有一已知自动记录曲线的输入来得到响应,例如以时间为函数的地面加速度的曲线,而不是需用解析形式。像这样的情况,就需要用数值计算方法了。对于计算动力响应的数值方法在第 7 章和第 8 章中将要讨论。

§ 6.2 反应谱

在前面讨论的响应计算中,已假定系统是确定的,如 k、m 和 c 都是已知的。希望得到所规定输入的响应。经常在设计中遇到的问题,特别是在初步设计中所遇到的问题是,要选择一个或多个系统的参数。从某种意义上说,是限制所确定的响应量。例如,当系统承受一已知输入时,应规定出其绝对最大位移或最大应力值的范围。为此目的,在结构设计中,为抵抗地震的激励,[6.1,6.2]要在隔振设计[6.3,6.4]和其他设计研究中使用反应谱。



a)　　b)

图 6.2　利用反应谱解设计例题

a)车辆在颠簸的路面上运动;　b)相对位移的反应谱

反应谱是 SDOF 系统以某系统参数,一般为无阻尼固有频率为函数的一个已知输入的最大"响应"曲线(即位移、应力、加速度等)。一组这样的曲线,例如曲线是以不同阻尼值画出的就叫做**反应谱**。

图 6.2 说明如何在设计中使用反应谱。图 6.2b 表示一个系统的相对位移反应谱,它的基础激励有如图 6.2a 的形式。若给出了最大允许相对位移和阻尼水准,就可以根据图 6.2b 按打点线的方法来标出所选定的相应于系统的固有频率。应用固有频率值与已知质量来确定所需要的弹簧刚度 k。

例题 6.2

应用响应比表达式计算例题 6.1

a. 在 $0 \leqslant t/t_d \leqslant 2.0$ 时，以 t/t_d 为函数画出 $t_d/T_n = 0.25$、0.5、1.0 和 1.5 的响应比曲线。

b. 应用此数据，确定 $t \leqslant t_d$ 与 $t \geqslant t_d$ 时的最大响应表达式，画出以 f_n 为函数的 R_{max} 形式的反应谱曲线。

解：

a. 以 t/t_d 为函数的响应比曲线如图 E6.2.1 所示

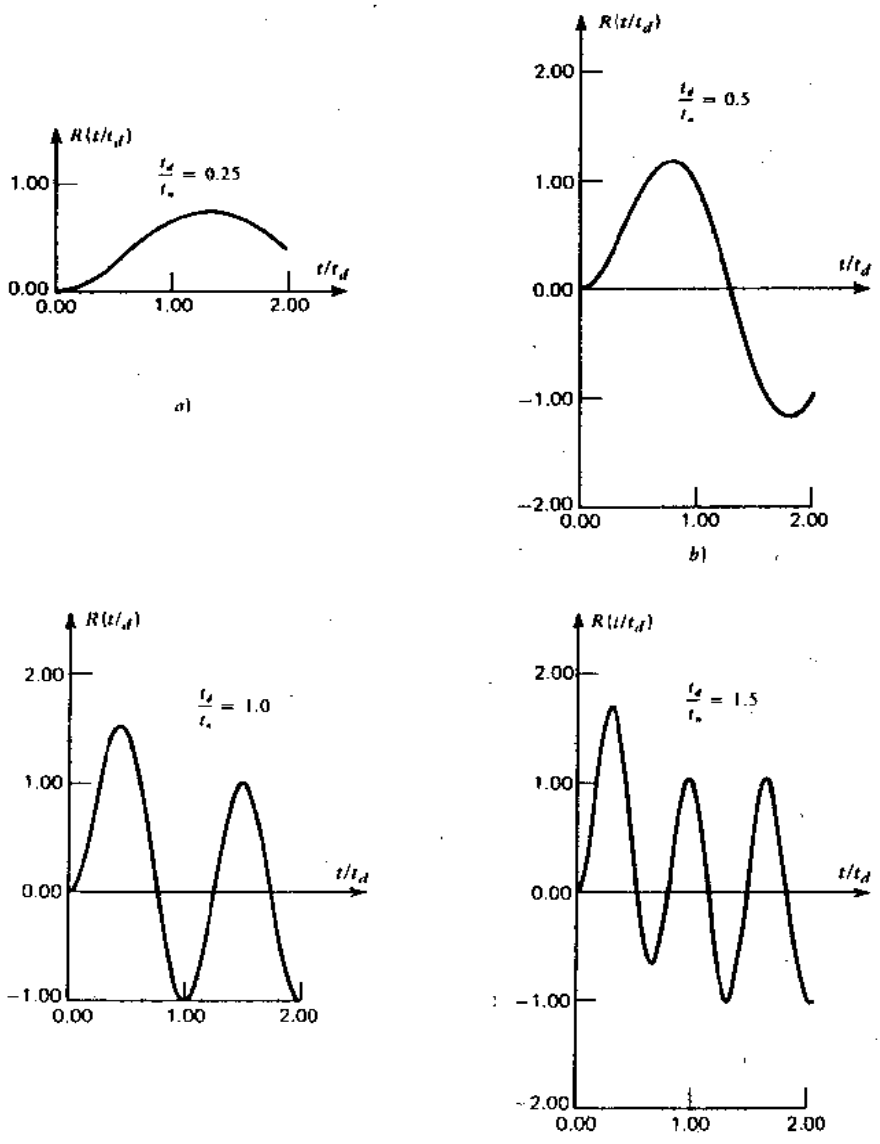


图 E6.2.1

b. 首先确定 R_{max} 对 $0 \leqslant t \leqslant t_d$ 的表达式。（根据上面的曲线可以看到，发生在这个时间间隔的 R_{max}，不包括短时作用荷载，即上面的 $t_d/T_n = 0.25$ 的曲线。）

根据例题 6.1

$$R_1(t) = 1 - \left(\frac{t}{t_d}\right) - \cos\omega_n t + \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\sin\omega_n t \tag{1}$$

那么

$$\dot{R}_1(t) = \left(\frac{1}{t_d}\right)(-1 + \omega_n t_d \sin\omega_n t + \cos\omega_n t) \tag{2}$$

令 $\dot{R}_1 = 0$，得到

$$\omega_n t_d \sin\omega_n t_m = 1 - \cos\omega_n t_m \tag{3}$$

这里用了三角公式

$$\begin{aligned}(1 - \cos 2\alpha) &= 2\sin^2\alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned} \tag{4}$$

则公式 3 可简化成

$$\tan\left(\frac{\omega_n t_m}{2}\right) = \omega_n t_d \tag{5}$$

根据上面的曲线(*b*)至(*d*)可以看到，最大响应发生在首先出现 $\dot{R}_1 = 0$ 的地方。因此，$(\omega_n \tau_m/2)$ 是在第一象限，并

$$\omega_n t_m = 2\tan^{-1}(\omega_n t_d) \tag{6}$$

则根据公式 1

$$\boxed{(R_1)_{max} = 1 - \frac{\omega_n t_m}{\omega_n t_d} - \cos\omega_n t_m + \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\sin\omega_n t_m} \tag{7}$$

其次，根据例题 6.1 的公式 9 确定 R_{max} 在 $t \geqslant t_d$ 时的表达式。

$$R_2(t) = \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)[(1 - \cos\omega_n t_d)\sin\omega_n t - (\omega_n t_d - \sin\omega_n t_d)\cos\omega_n t] \tag{8}$$

可以利用公式 3.25 确定这个响应的幅值。于是

$$\boxed{(R_2)_{max} = \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)[(1 - \cos\omega_n t_d)^2 + (\omega_n t_d - \sin\omega_n t_d)^2]^{1/2}} \tag{9}$$

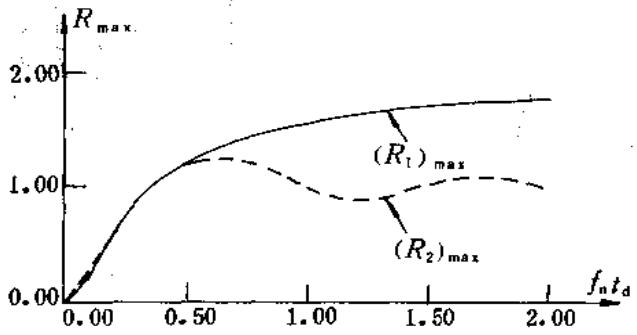


图 E6.2.2

画出公式 7 的曲线如图 E6.2.2 中的实线，并画出公式 9 的虚线。在 $f_n t_d < 0.371$ 时，公式 9 给出 R_{max} 的较大值。在 $f_n t_d > 0.371$ 时，其最大响应发生在强迫振动时候，并以公式 7 控制之。反

应谱则是最大值的合成，即最大值曲线。

一般说来，制成一个反应谱不是一件容易的工作，因为确定发生最大值的时间要涉及到解超越方程。并还要根据许多局部的最大值来仔细地选择其极大值。因此，对于不同系统参数的反应谱需要响应的数值计算进行确定才是。

在例题 6.3 中，将研究在例题 6.2 中所推导反应谱的应用问题。

例题 6.3

一个建筑结构模拟成 **SDOF** 系统承受炸破力荷载作用如图 E6.3.1。如位移限制在 5mm 时，并且(1) $t_d=0.4$s，(2)$t_d=0.04$s 时，确定系统所能经受的最大炸破力。$k=9.0$GN/m，m $=10$Mg

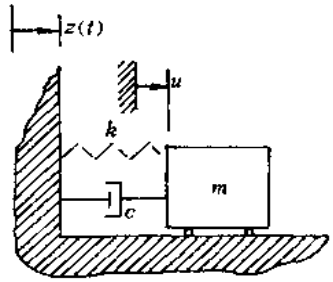


图 E6.3.1

解：

a. 确定系统的固有频率：

$$\omega_n=\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}=\left[\frac{9(10^9)}{10(10^6)}\right]^{1/2}=30\ \text{rad/s} \tag{1}$$

$$f_n=\omega_n/2\pi=4.77\text{Hz}$$

b. 根据例题 6.2 的图所示，确定最大响应比：

第一种情况

$$f_nt_d=4.77(0.4)=1.91 \tag{2a}$$

根据例题 6.2 的反应谱

$$R_{max}=1.75 \tag{2b}$$

第二种情况

$$f_nt_d=4.77(0.04)=0.191 \tag{3a}$$

也根据例题 6.2 的反应谱

$$R_{max}=0.58 \tag{3b}$$

c. 确定每种情况中的静态位移与 p_0：

$$u_{max}=5\text{mm}$$

$$u_{max}=R_{max}\left(\frac{p_0}{k}\right) \tag{4}$$

即

$$p_0=\frac{ku_{max}}{R_{max}} \tag{5}$$

因此，在第一种情况

$$(p_0)_1 = \frac{9(10^9)(5)(10^{-3})}{1.75}$$

$$\boxed{(p_0)_1 = 25.7\text{MN}}$$

$$(p_0)_2 = \frac{9(10^9)(5)(10^{-3})}{0.58} \tag{6}$$

$$\boxed{(p_0)_2 = 77.6\text{MN}} \tag{7}$$

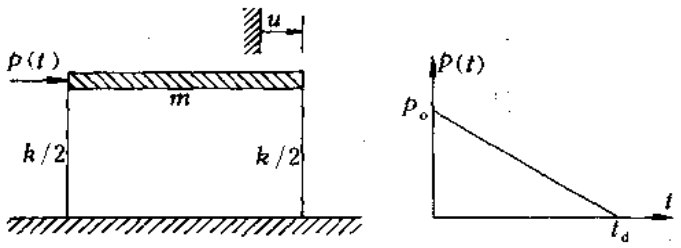


图 E6.3.1 **SDOF** 系统相对运动原型

因为反应谱的许多应用问题都涉及到相对位移运动，所以确定这种情况下的相应响应值是有用的。图 6.3 表示的是一个 **SDOF** 系统相对运动的原型，正如例题 2.2 一样。令其相对位移为

$$w = u - z \tag{6.9}$$

则运动方程可以写成

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + kw = -m\ddot{z} \tag{6.10}$$

公式 5.6 已给出了响应比的定义，响应比决定于相对运动；因此定义成

$$R(t) = \frac{-w(t)}{mz_{\max}/k} = \frac{-w_n^2 w(t)}{z_{max}} \tag{6.11}$$

令 $\ddot{z} = \ddot{z}_{\max} f_a(t)$、并参考公式 6.4，则 $R(t)$可用杜哈梅积分形式表示。如 $w(0) = \dot{w}(0) = 0$ 时，阻尼系统

$$R(t) = \frac{\omega_n^2}{\omega_d}\int_0^t f_a(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}sin\omega_d(t-\tau)d\tau \tag{6.12}$$

无阻尼系统

$$R(t) = \omega_n\int_0^t f_a(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau \tag{6.13}$$

根据公式 6.11，其相对最大位移给出如下

$$w_{max} = \left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)R_{\max}\ddot{z}_{\max} \tag{6.14}$$

关心的是第二个参量、绝对最大加速度 $\ddot{u}_{max}$。公式 6.10 可以写成

$$m\ddot{w} + c\dot{w} + kw = 0 \tag{6.15}$$

对无阻尼系统 $\ddot{u}_{max}$可以很容易从公式 6.14，和公式 6.15 中确定

$$\ddot{u}_{max} = \omega_n^2 w_{max} \tag{6.16}$$

或从公式 6.14 和公式 6.16 中确定

$$\ddot{u}_{max} = R_{max}\ddot{z}_{max} \quad (c = 0) \tag{6.17}$$

则公式 6.14 和公式 6.17 是将质量的相对最大位移和绝对最大加速度通过 R_{max}与基础的最大加速度联系起来。R_{max}可从公式 6.12 或公式 6.13 中得到。

例题 6.4 说明一个基础的反应谱，并按对数定标绘图表示一个标准形式的反应谱。

例题 6.4

如图 6.2a)中的无阻尼 **SDOF** 系统受到了基础加速度的影响，如图 E6.4.1。其初始条件全部为零。推导出 w_{max}和 $\ddot{u}_{max}$的表达式，并画出以 f_n 为函数的 w_{max}的 log-log 曲线。

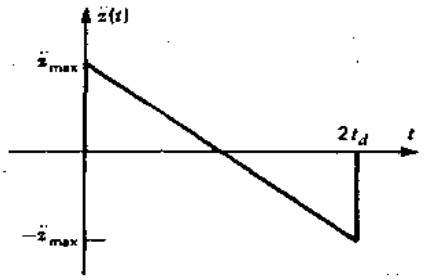


图 E6.4.1

式中

$$\ddot{z} = \ddot{z}_{max} f_s(t)$$

$$f_s(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t}{t_d} & 0 \le t \le 2t_d \\ 0 & 2t_d < t \end{cases}$$

解：

a. 确定 $0 \leqslant t \leqslant 2t_d$ 的响应：

因为 $0 \leqslant t \leqslant 2t_d$ 时的激励与例题 6.1 的形式相同，所以 $R_1(t)$将与例题 6.1 中公式 7 相同。即

$$R_1(t) = 1 - \left(\frac{t}{t_d}\right) - \cos\omega_n t + \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\sin\omega_n t \tag{1}$$

b. 确定 $2t_d < t$ 的响应：

表示这个响应的最直接的方法是应用公式 3.17 的形式

$$R_2(t) = R_1(2t_d)\cos\omega_n(t - 2t_d) + \left(\frac{\dot{R}_1(2t_d)}{\omega_n}\right)\sin\omega_n(t - 2t_d) \tag{2}$$

c. 确定发生在强迫运动时候 $0 \leqslant t \leqslant 2t_d$ 的最大响应：

$$\dot{R}_1(t) = \frac{1}{t_d}[-1 + (\omega_n t_d)\sin\omega_n t + \cos\omega_n t] \tag{3}$$

根据例题 6.2，令 $\dot{R}=0$，并导出

$$\omega_n t_m = 2\tan^{-1}(\omega_n t_d) \tag{4}$$

不像例题 6.2，而是这个激励现在延伸到 $f_n(t)$的负值，因此，$R_1(t)$的绝对最大值可能发生在 $t=0$ 附近或 $t=2t_d$ 附近。在前一种情况下：

$$\omega_n t_m = 2\tan^{-1}(\omega_n t_d) \tag{5}$$

使$(\omega_n t_m/2)$置于第一限象。在后一种情况下：

$$\omega_n t_m = 2[\tan^{-1}(\omega_n t_d) + p\pi] \tag{6}$$

式中 p 是 $\omega_n t_m < 2\omega_n t_d$ 的最大整数，并且 $\tan^{-1}(\omega_n t_d)$是处在第一象限，则

$$(R_1)_{max} = 1 - \left(\frac{\omega_n t_m}{\omega_n t_d}\right) - \cos\omega_n t_m + \left(\frac{1}{\omega_n t_d}\right)\sin\omega_n t_m \tag{7}$$

d. 发生在残余振动时候$(2t_d < t)$的最大响应：根据公式 2 简化

$$(R_2)_{max} = \left\{[R_1(2t_d)]^2 + \left[\frac{\dot{R}_1(2t_d)}{\omega_n}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{8}$$

式中 $R_1(2t_d)$和 $\dot{R}_1(2t_d)$是根据公式 1

e. 确定 w_{max}和 $\ddot{u}_{max}$的响应：

根据公式 6.14

$$\frac{w_{max}}{z_{max}t_d^2} = \left(\frac{1}{\omega_n^2 t_d^2}\right) R_{max} \tag{9}$$

和

$$\frac{\ddot{u}_{max}}{\ddot{z}_{max}} = R_{max} \tag{10}$$

式中 R_{max}是最大响应，即$(R_1)_{max}$与$(R_2)_{max}$的较大者。

f. 画出以 f_n 为函数的 w_{max}用 log-log 定标的曲线：

以无量纲化的固有频率 $f_n t_d$ 为函数，画出无量纲响应 $w_{max}/(\ddot{z}_{max}t_d^2)$的曲线是最为方便的，见图 E6.4.2。

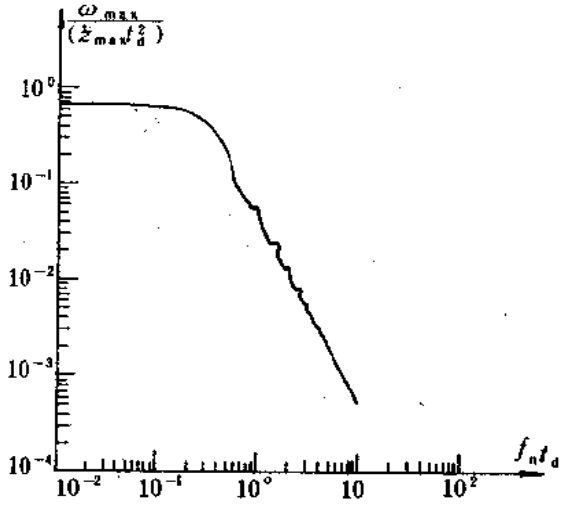


图 E6.4.2

根据上面的例题，以 log-log 形式表示反应谱还是方便的。因为反应谱经常是以两三段直线用小范围的变化连接起来的。例如，注意根据例题 6.4 中的公式 9，若 R_{max}＝常量，$w_{max}\sim(1/f_n^2)$，相当于斜率为－2 的 log-log 曲线。若 $f_n t_d$ 的值较大时，则上面的 log-log 曲线与这个特性近似。

虽然为一个给定输入制做反应谱是件繁杂的工作，但是反应谱是个很有用的工具。如许多系统规定一已知瞬时输入在基础上的响应，例如一个已知地震的时程。第 20 章将介绍用反应谱来确定地震激励的线性 **SDOF** 和 **MDOF** 系统响应。

参考文献

6.1 J. M. Biggs, *Introduction to Structural Dynamics*, McGraw-Hill, New York (1964).

6.2 G. W. Housner, "Design Spectrum," Chapter 5, *Earthquake Engineering* (Ed. R. L. Wiegel), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1970).

6.3 C. M. Harris and C. E. Crede (eds.), *Shock and Vibration Handbook*, 2nd Ed., McGraw-Hill, New York (1976).

6.4 W. T. Thomson, *Theory of Vibration with Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1972).

习题组 6.1

应用杜哈梅积分法确定习题 6.1 至 6.4 的无阻尼 **SDOF** 系统在所规定的全部时间间隔内响应的表达式。令 $u(0)=\dot{u}(0)=0$。

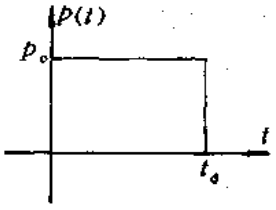


图 P6.1

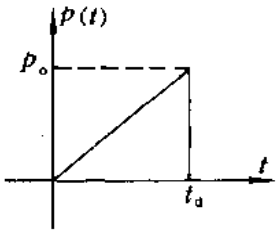


图 P6.2

6.1 确定 $u(t)$在$(a)0\leqslant t\leqslant t_d$ 和$(b)t_d\leqslant t$ 时的响应。见图 P6.1

6.2 确定 $u(t)$在$(a)0\leqslant t\leqslant t_d$ 和$(b)t_d\leqslant t$ 时的响应。见图 P6.2。

6.3 确定 $u(t)$在$(a)0\leqslant t\leqslant t_d$ 和$(b)t_d\leqslant t$ 时的响应。见图 P6.3。

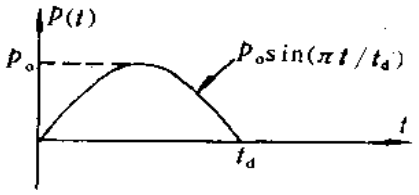


图 P6.3

6.4 确定 $u(t)$在$(a)0\leqslant t\leqslant t_d$ 和$(b)t_d\leqslant t$ 时的响应，见图 P6.4。

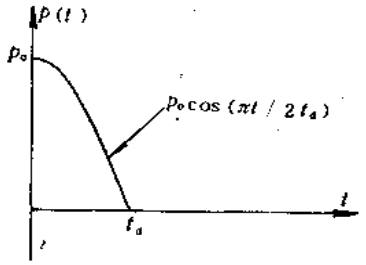


图 P6.4

6.5 例题 4.3 中的车辆，当满载时，以 100 km/h 速度通过一半正弦曲线形的凸起路面。凸起的长度为 2m，如图 P6.5 所示。确定被弹簧支承的质量 m 所受到的最大力。

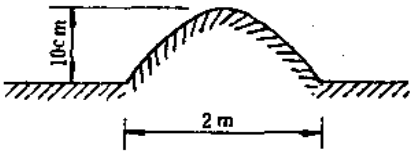


图 P6.5

习题组 6.2

6.6 画出习题 6.2 中 R_{max}的反应谱及以 t_d/T_n 为函数的 t_m/T_n 最大响应和力函数的时间。

6.7 画出习题 6.3 中 R_{max}的反应谱及以 t_d/T_n 为函数的 t_m/T_n 最大响应和力函数的时间。

6.8 画出习题 6.4 中 R_{max}的反应谱及以 t_d/T_n 为函数的 t_m/T_n 最大响应和力函数的时间。

第 7 章　SDOF 系统动力响应数值计算

在第 6 章中得到了无阻尼与低阻尼线性的 **SDOF** 系统任意激励响应的杜哈梅积分表达式。在闭型解中能够计算这些表达式的简单形式的激励。对于复杂形式的激励就需要用数值解了。在本章中将阐述所要应用的两种通用的方法：(1)激励插值法、即杜哈梅积分的积分插值法，(2)微分方程的近似求导。对于线性系统来说两种方法都可以应用；对于非线性系统只能应用第二种方法，但本章不加阐述。

本章将完成如下内容：

- **利用激励插值法来计算线性 SDOF 系统对于在已知离散时间 t_i 上的激励响应。**
- **推导平均加速度与线性加速度的计算方法。**
- **应用平均加速度法与线性加速度法来计算线性 SDOF 系统在时间 t_i 时的响应。**
- **应用平均加速度法计算阻尼力为 $f_D(\dot{u})$ 与弹性力为 $f_s(u)$ 的 SDOF 系统响应。**

§7.1　激励函数插值数值解

在许多特殊结构的动力问题中，不知道激励函数 $p(t)$ 的解析表达式形式，但是知道一组离散值 $p_i \equiv p(t_i)$，$i=0 \rightarrow N$。这些值可以列成表格的形式或表示成图解的形式，如图 7.1。其时间间隔

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \tag{7.1}$$

Δt 总是定为一常数。

有一种近似方法可得到这些激励的响应，那就是应用数值求积公式(即梯形法则或辛普森 $\frac{1}{3}$ 法则)来计算在公式 6.6 或 6.7[7.1]中出现的杜哈梅积分表达式中的积分。在这两个公式中涉及到了这个积分的插值。

一个更直接有效的方法涉及到激励函数 $p(t)$ 的插值和应用第 5 章与第 6 章所得到的线性响应问题的精确解。图 7.2 表示激励函数为**常量分段**插值与**线性分段插值**。对于常量分段插值，是在 t_i 至 t_{i+1} 区间其力的大小为 $\tilde{p}_i$，令 p_i 为区间的开始 p_{i-1} 为区间的末了。即平均值为 $\tilde{p}_i = 0.5(p_i + p_{i+1})$。对于线性分段插值，其插值的力为

式中

$$p(\tau) = p_i + \left(\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\right)\tau \tag{7.2}$$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i \tag{7.3}$$

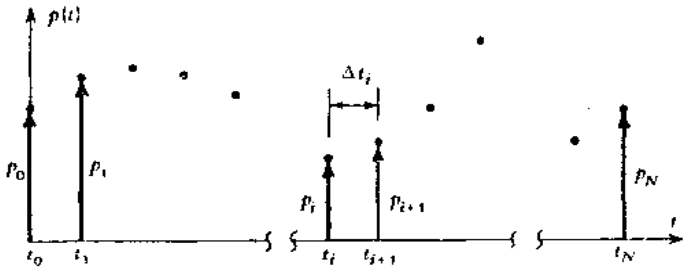


图 7.1　激励指定在离散点上

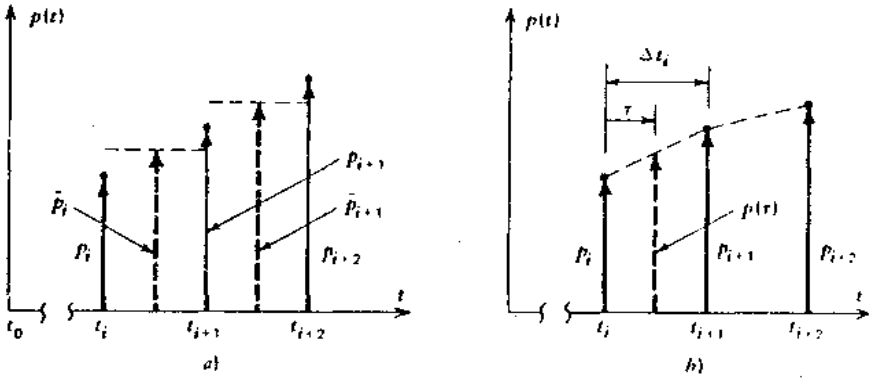


图 7.2　激励函数插值

a)常量分段插值;b)线性分段插值

现在研究一个无阻尼系统的响应。对于常量分段插值,其强迫响应可由公式 5.8 得到,以及非零初始条件的响应可由公式 3.17 得到。因此,

$$u(\tau) = u_i\cos\omega_n\tau\left(\frac{\dot{u}i}{\omega_n}\right)\sin\omega_n\tau + \left(\frac{\tilde{p}_i}{k}\right)(1 - \cos\omega_n\tau) \tag{7.4a}$$

和

$$\frac{\dot{u}(\tau)}{\omega_n} = -u_i\sin\omega_n\tau + \left(\frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\right)\cos\omega_n\tau + \left(\frac{\tilde{p}_i}{k}\right)\sin\omega_n\tau \tag{7.4b}$$

计算在时间 t_{i+1}时的这些表达式(即 $\tau=\Delta t_i$)。得到

$$u_{i+1} = u_i\cos(\omega_n\Delta t_i) + \left(\frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\right)\sin(\omega_n\Delta t_i) + \left(\frac{\tilde{p}_i}{k}\right)[1 - \cos(\omega_n\Delta t_i)] \tag{7.5a}$$

$$\frac{\dot{u}_{i+1}}{\omega_n} = -u_i\sin(\omega_n\Delta t_i) + \left(\frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\right)\cos(\omega_n\Delta t_i) + \left(\frac{\tilde{p}_i}{k}\right)\sin(\omega_n\Delta t_i) \tag{7.5b}$$

公式 7.5 是**递推公式**，为了计算在时间 t_{i+1} 时的动态 $(u_{i+1}, \dot{u}_{i+1})$，已知在时间 t_i 时的动态为 $(u_i, \dot{u}_i)$。

与激励常量分段插值相对照，其线性分段插值则允许是一个比较接近的近似表达式。可以应用公式 7.2 来导出递推公式；它是用激励线性分段插值的。对于无阻尼系统，则得到

$$u_{i+1} = u_i\cos(\omega_n\Delta t_i) + \left(\frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\right)\sin(\omega_n\Delta t_i) + \left(\frac{p_i}{k}\right)[1-\cos(\omega_n\Delta t_i)] + \left(\frac{\Delta p_i}{k}\right)\left(\frac{1}{\omega_n\Delta t_i}\right)[\omega_n\Delta t_i - \sin(\omega_n\Delta t_i)] \tag{7.6a}$$

$$\frac{\dot{u}_{i+1}}{\omega_n} = -u_i\sin(\omega_n\Delta t_i) + \left(\frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\right)\cos(\omega_n\Delta t_i) + \left(\frac{p_i}{k}\right)\sin(\omega_n\Delta t_i) + \left(\frac{\Delta p_i}{k}\right)\left(\frac{1}{\omega_n\Delta t_i}\right)[1-\cos(\omega_n\Delta t_i)] \tag{7.6b}$$

如公式 7.5 和公式 7.6 递推公式可以很方便地按下式表示

$$u_{i+1} = Ap_i + Bp_i + Cu_i + D\dot{u}_i \tag{7.7a}$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'p_i + B'p_{i+1} + C'u_i + D'\dot{u}_i \tag{7.7b}$$

表 7.1 给出弱阻尼（$\zeta<1$），线性力插值的系数 A 至 D' 的表达式。也可以推导出临界阻尼、过阻尼情况的系数[7.2]。

弱阻尼 SDOF 系统递推公式的系数 表 7.1

$$A = \frac{1}{k\omega_d h}\left\{e^{-\beta h}\left[\left(\frac{\omega_d^2-\beta^2}{\omega_n^2}-\beta h\right)\sin\omega_d h - \left(\frac{2\omega_d\beta}{\omega_n^2}+\omega_d h\right)\cos\omega_d h\right] + \frac{2\beta\omega_d}{\omega_n^2}\right\}$$

$$B = \frac{1}{k\omega_d h}\left\{e^{-\beta h}\left[-\left(\frac{\omega_d^2-\beta^2}{\omega_n^2}\right)\sin\omega_d h + \left(\frac{2\omega_d\beta}{\omega_n^2}\right)\cos\omega_d h\right] + \omega_d h - \frac{2\beta\omega_d}{\omega_n^2}\right\}$$

$$C = e^{-\beta h}\left[\cos\omega_d h + \left(\frac{\beta}{\omega_d}\right)\sin\omega_d h\right]$$

$$D = \left(\frac{1}{\omega_d}\right)e^{-\beta h}\sin\omega_d h$$

$$A' = \frac{1}{k\omega_d h}\{e^{-\beta h}[(\beta+\omega_n^2 h)\sin\omega_d h + \omega_d\cos\omega_d h] - \omega_d\}$$

$$B' = \frac{1}{k\omega_d h}[-e^{-\beta h}(\beta\sin\omega_d h - \omega_d\cos\omega_d h) + \omega_d]$$

$$C' = -\left(\frac{\omega_n^2}{\omega_d}\right)e^{-\beta h}\sin\omega_d h$$

$$D' = e^{-\beta h}\left[\cos\omega_d h - \left(\frac{\beta}{\omega_d}\right)\sin\omega_d h\right]$$

式中 $\beta \equiv \zeta\omega_n$ 和 $h \equiv \Delta t_i$

若时间步长 Δt_i 为常数，则系数 A 至 D' 仅需一次计算，计算是高速的。因为上面给出的递推公式是根据由不同作用力的插值对运动方程的精确积分，所以只要限制其时间步长 Δt_i 的大小，它就能得到一个接近激励的近似表达式；并且得到了它所希望的那个时间的输出 $(u_i, \dot{u}_i)$。最后考虑到，如果希望得到其最大响应时，则时间步长就应满足 $\Delta t_i \leqslant T_n/10$，因此这将不会漏掉固有频率的峰值。

例题 7.1

例题 4.1 中的无阻尼 **SDOF** 系统，来确定 $0 \leqslant t \leqslant 0.25$ 时的响应 $u(t)$。

a. 应用以 $\Delta t = 0.02$s 的作用力线性分段插值。

b. 计算这些时间步长 $u(t)$的精确表达式。

解：

根据例题 4.1 $k = 40$ lb/in，$\omega_n = 20$ rad/s，和 $p(t) = 10\cos(10t)$ lb。

a. 对线性插值法，其位移与速度能写成公式 7.7 的形式。

$$u_{i+1} = Ap_i + Bp_{i+1} + Cu_i + D\dot{u}_i \tag{1a}$$

$$\dot{u}_{i+1} = A'p_i + B'p_{i+1} + C'u_i + D'\dot{u}_i \tag{1b}$$

式中系数 A 至 D'可以直接由公式 7.6 所得及在表 7 中令 $\beta = 0$ 和 $\omega_d = \omega_n$。因此 $\Delta t \equiv h$，

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{k\omega_n h}(\sin\omega_n h - \omega_n h\cos\omega_n h) \\
B &= \frac{1}{k\omega_n h}(\omega_n h - \sin\omega_n h) \\
C &= \cos\omega_n h \\
D &= \left(\frac{1}{\omega_n}\right)\sin\omega_n h \\
A' &= \frac{1}{kh}(\omega_n h\sin\omega_n h + \cos\omega_n h - 1) \\
B' &= \frac{1}{kh}(1 - \cos\omega_n h) \\
C' &= -\omega_n\sin\omega_n h \\
D' &= \cos\omega_n h
\end{aligned} \tag{2}$$

因此

$$\begin{aligned}
\omega_n h &= 20(0.02) = 0.4 \text{ rad} \\
\sin\omega_n h &= 0.38942 \\
\cos\omega_n h &= 0.92106 \\
A &= \frac{0.38942 - 0.4(0.92106)}{40(0.4)} = 1.312 \times 10^{-3} \\
B &= \frac{0.4 - 0.38942}{40(0.4)} = 6.613 \times 10^{-4} \\
C &= 9.211 \times 10^{-1} \\
D &= \frac{0.38942}{20} = 1.947 \times 10^{-2} \\
A' &= \frac{0.4(0.38942) + 0.92106 - 1}{40(0.02)} = 9.604 \times 10^{-2} \\
B' &= \frac{1.0 - 0.92106}{40(0.02)} = 9.868 \times 10^{-2} \\
C' &= -20.0(0.38942) = -7.788 \\
D' &= 9.211 \times 10^{-1}
\end{aligned} \tag{3}$$

b. 用例题 4.1 中公式 11 给出了精确解。对离散时间 t_i，这个公式可以写成

$$u_i = 0.3333[\cos(10t_i) - \cos(20t_i)]$$

比较激励线性分段插值的解与精确解，我们看到其结果相符。因为激励周期为

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 0.0628\ s \tag{5}$$

激励线性分段插值法的数值解(括号中为幂)

i	t_i	p_i	Ap_i	Bp_{i+1}	Cu_i	$D\dot{u}_i$	u_i
0	0	10.0000	1.312(−2)	6.481(−3)	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.02	9.8007	1.286(−2)	6.091(−3)	1.805(−2)	3.753(−2)	1.960(−2)
2	0.04	9.2106	1.208(−2)	5.458(−3)	6.865(−2)	6.762(−2)	7.453(−2)
3	0.06	8.2534	1.083(−2)	4.607(−3)	1.417(−1)	8.406(−2)	1.538(−1)
4	0.08	6.9671	9.141(−3)	3.573(−3)	2.221(−1)	8.293(−2)	2.412(−1)
5	0.10	5.4030	7.089(−3)	2.396(−3)	2.927(−1)	6.322(−2)	3.178(−1)
6	0.12	3.6236	4.754(−3)	1.124(−3)	3.366(−1)	2.711(−2)	3.654(−1)
7	0.14	1.6997	2.230(−3)	−1.931(−4)	3.404(−1)	−2.040(−2)	3.696(−1)
8	0.16	−0.2920	−3.831(−4)	−1.502(−3)	2.966(−1)	−7.221(−2)	3.221(−1)
9	0.18	−2.2720	−2.981(−3)	−2.752(−3)	2.050(−1)	−1.203(−1)	2.226(−1)
10	0.20	−4.1615	—	—	—	—	7.900(−2)

i	t_i	p_i	$A'p_i$	$B'p_{i+1}$	$C'u_i$	$D'\dot{u}_i$	u_i
0	0	10.0000	9.604(−1)	9.671(−1)	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.02	9.8007	9.413(−1)	9.089(−1)	−1.527(−1)	1.775	1.928
2	0.04	9.2106	8.846(−1)	8.144(−1)	−5.805(−1)	3.199	3.473
3	0.06	8.2534	7.927(−1)	6.875(−1)	−1.198	3.977	4.318
4	0.08	6.9671	6.691(−1)	5.332(−1)	−1.878	3.923	4.259
5	0.10	5.4030	5.189(−1)	3.576(−1)	−2.475	2.991	3.247
6	0.12	3.6236	3.480(−1)	1.677(−1)	−2.846	1.283	1.392
7	0.14	1.6997	1.632(−1)	−2.881(−2)	−2.878	−9.649(−1)	−1.048
8	0.16	−0.2920	−2.804(−2)	−2.242(−1)	−2.508	−3.416	−3.709
9	0.18	−2.2720	−2.182(−1)	−4.107(−1)	−1.733	−5.689	−6.177
10	0.20	−4.1615	—	—	—	—	−8.051

精确响应函数的数值解(括号中为幂)

i	t_i	$\cos(10t_i)$	$\cos(20t_i)$	$u_i=0.3333[\cos(10t_i)-\cos(20t_i)]$
0	0			0
1	0.02	9.801(−1)	9.211(−1)	1.967(−2)
2	0.04	9.211(−1)	6.967(−1)	7.478(−2)
3	0.06	8.253(−1)	3.624(−1)	1.543(−1)
4	0.08	6.967(−1)	−2.920(−2)	2.419(−1)
5	0.10	5.403(−1)	−4.161(−1)	3.188(−1)
6	0.12	3.624(−1)	−7.374(−1)	3.665(−1)
7	0.14	1.700(−1)	−9.422(−1)	3.707(−1)
8	0.16	−2.920(−2)	−9.983(−1)	3.230(−1)
9	0.18	−2.272(−1)	−8.968(−1)	2.232(−1)
10	0.20	−4.161(−1)	−6.536(−1)	7.916(−2)

接近 30 倍 Δt，所以线性分段 $\cos(\Omega t)$ 的近似表达式将会是十分满意的。

为了手算其响应，利用例题 7.1 中列表格的形式还是比较方便的。由公式 7.7 中给出的递推公式是很容易地编成数字计算机的程序、或可编成计算器的程序。

§7.2 近似导数数值解——逐步数值积分

在 § 7.1 中得到了激励插值的递推关系。这样可以得到不连续时间 t_i 的线性系统的响应。另外一种近似法也可以用来确定线性系统和非线性系统的响应。它可以近似表示所出现在系统运动方程中的导数，并且利用时间步长 Δt_i 来得到逐步解。在本节中，将使用这个方法来处理线性系统；而且将要扩大到 § 7.4 中处理非线性系统。还有其他许多方法可以处理这类数值积分问题(即参考文献 7.3，7.4 和 7.5)，但是在这许多有用的方法中，其中一种方法是很有用处的，那就是**平均加速度法***。现在将研究平均加速度法。

已知初始条件 u_0 和 $\dot{u}_0$ 来积分运动方程

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{7.8}$$

其加速度，如图 7.3 所示来近似表示。

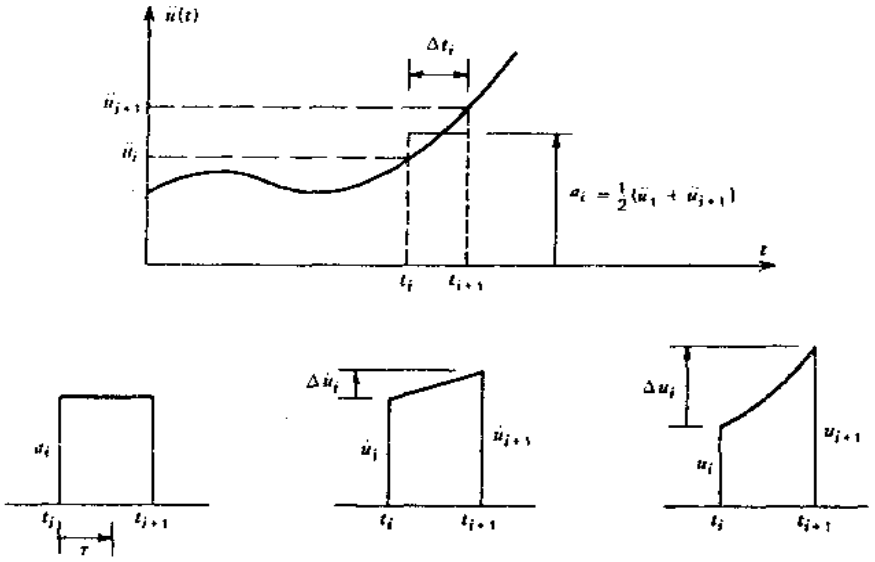


图 7.3 应用平均加速度法的数值积分

在 t_i 至 t_{i+1} 时间间隔的加速度是用时间间隔的初始与终端加速度的平均值，即

$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \tag{7.9}$$

公式 7.9 积分两次，得到

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \left(\frac{\Delta t_i}{2}\right)(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \tag{7.10}$$

* 这个方法也叫做纽玛克 Newmark $\beta = \frac{1}{4}$ 法，梯形法则，或定值平均加速度法。

和
$$u_{i+1}=u_i+\dot{u}_i\Delta t_i+\left(\frac{\Delta t^2}{4}\right)(\ddot{u}_i+\ddot{u}_{i+1}) \tag{7.11}$$

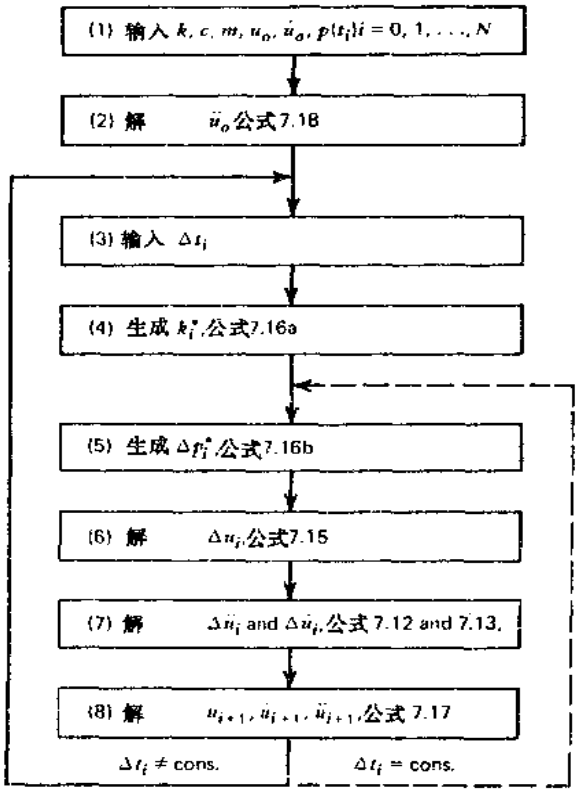


图 7.4 平均加速度法的逐步数值积分流程图

对于这样的数值积分所要使用的计算方法是用参数增量 Δp_i，Δu_i，$\Delta\dot{u}_i$ 和 $\Delta\ddot{u}_i$，是比较方便的。其中 $\Delta p_i=p_{i+1}-p_i$，其他同理。* 。因此，公式 7.7 可以解 $\Delta\ddot{u}_i$；合并公式 7.10 和公式 7.11，可得到 $\Delta\dot{u}_i$ 如下：

$$\Delta\ddot{u}_i=\left(\frac{4}{\Delta t_i^2}\right)(\Delta u_i-\dot{u}_i\Delta t_i)-2\ddot{u}_i \tag{7.12}$$

和
$$\Delta\dot{u}_i=\left(\frac{2}{\Delta t_i}\right)\Delta u_i-2\dot{u}_i \tag{7.13}$$

因为，在 t_i 和 t_{i-1} 时要满足公式 7.8，

$$m\Delta\ddot{u}_i+c\Delta\dot{u}_i+k\Delta u_i=\Delta p_i \tag{7.14}$$

公式 7.12 至公式 7.14 可以合并，得到

$$k_i^*\Delta u_i=\Delta p_i^* \tag{7.15}$$

式中
$$k_i^*=k+\left(\frac{2c}{\Delta t_i}\right)+\left(\frac{4m}{\Delta t_i^2}\right) \tag{7.16a}$$

和
$$\Delta p_i^*=\Delta p_i+\left[\left(\frac{4m}{\Delta t_i}\right)+2c\right]\dot{u}_i+2m\ddot{u}_i \tag{7.16b}$$

* 在 § 7.4 的非代性分析中将要采用这里所表示的增量形式，另一种形式"算子列方程"将在第 18 章中叙述。

一旦从公式 7.15 确定了 Δu_i，则可从公式 7.13 得到 $\Delta \dot{u}_i$ 和从公式 7.12 得到 $\Delta \ddot{u}_i$，并从下式来校正所确定的 u，$\dot{u}$，和 $\ddot{u}$。

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \Delta u_i \\ \dot{u}_{i+1} &= \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i \\ \ddot{u}_{i+1} &= \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i \end{aligned} \tag{7.17}$$

由运动方程也能得到加速度

$$\ddot{u}_i = \left(\frac{1}{m}\right)(p_i - c\dot{u}_i - ku_i) \tag{7.18}$$

而不用公式 7.12 和公式 7.17。也可以用这个公式得到 $\ddot{u}_0$。

在流程图中(图 7.4)是综合了上面公式的一种计算方法。若 Δt_i 是常数时，则第二步与第三步可以从第 i 循环中除去。第 18 章将进一步讨论数值积分法，包括了平均加速度法。

例题 7.2

在例题 4.1 与例题 7.1 中的无阻尼 **SDOF** 系统应用平均加速度法来计算 $0 \leqslant t \leqslant 0.2$s 时的响应 $u(t)$。采用时间步长为常数 $\Delta t = 0.02$s，与 $\Delta t = 0.005$s。比较该题与例题 7.1 精确解的结果。

用平均加速度法确定 $u(t_i)$(括号中为幂)

t_i	精确解	$\Delta t = 0.02$s	$\Delta t = 0.005$s
0	0	0	0
0.02	1.967(−2)	1.904(−2)	1.963(−2)
0.04	7.478(−2)	7.247(−2)	7.464(−2)
0.06	1.543(−1)	1.498(−1)	1.540(−1)
0.08	2.419(−1)	2.356(−1)	2.416(−1)
0.10	3.188(−1)	3.116(−1)	3.184(−1)
0.12	3.665(−1)	3.602(−1)	3.662(−1)
0.14	3.707(−1)	3.673(−1)	3.705(−1)
0.16	3.230(−1)	3.243(−1)	3.231(−1)
0.18	3.232(−1)	2.303(−1)	2.237(−1)
0.20	7.916(−2)	9.221(−2)	8.002(−2)

解：

根据例题 4.1，$k = 40$ lb/in，$c = 0$，$m = 0.1$ lb-s^2/in，$\omega_n = 20$ rad/s 和 $p(t) = 10\cos$ lb。

Δt 应满足 $\Delta t \leqslant T/10$，其中 T 为激励的最小周期(见第 8 章)或固有周期 T_n 择其较小者。在例题 2.2 中的固有周期 $T = 2\pi/\omega_n = 0.314$s，是小于激励周期 $T = 0.628$s 的。其时间步长 $\Delta t = 0.02$s 满足经验要求，正如在例题 7.2 中所见，给出了满意的精度。在较短时间步长 $\Delta t = 0.005$s，其结果与精确解几乎相等。第 18 章将进一步给出时间步长与解的精度关系数据。

§7.3 非线性 SDOF 系统

逐步数值积分方法，如在前面一节中所叙述的平均加速度法，这在解非线性系统响应中是

特别有用的。在研究非线性运动方程的数值解以前，让我们先研究一下某些物理现象，再引入到 **SDOF** 系统非线性运动方程中。* 线性的 **SDOF** 系统运动方程当然是

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t) \tag{7.19a}$$

非线性 SDOF 系统运动方程可以写成如下形式

$$m\ddot{u} - f(u,\dot{u},t) = 0 \tag{7.19b}$$

因为这个公式不是线性微分方程，所以叠加原理不适用。因此，例如不能用杜哈梅积分来得到非线性响应解 $u(t)$。

在 § 4.7 中已经指出，在运动方程中，由于阻尼通常引起非线性项。并且有时用相应的粘滞阻尼来近似表示系统中实际的非线性阻尼。液体通过一个物体流动并作用在它上面的阻尼力是引用了库伦(Coulomb)阻尼作为非线性的阻尼机理。

相对于位移 $u(t)$的两种重要的非线性分类是**几何非线性**与**材料非线性**。这些将作简要说明。

现在研究一条绷紧的具有集中质量 m 弹跳的绳子(不考虑弯曲)如图 7.5。该绳的拉力为

$$T = T_0 + \left(\frac{AE}{L}\right)\delta \tag{7.20}$$

式中 T_0 为未弯曲时，绳的拉力，δ 为绳的伸长度，已知为

$$\delta = (L^2 + u^2)^{1/2} - L \tag{7.21}$$

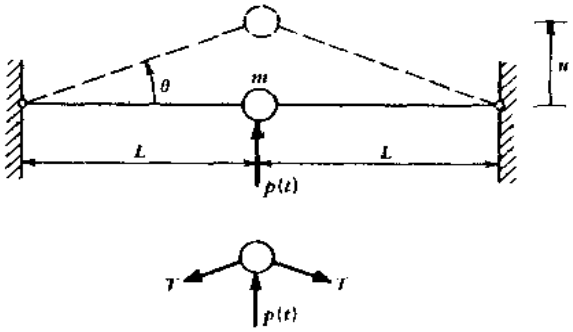


图 7.5 一个绷紧弹跳绳上质量的大挠度

根据图 7.5 自由体图示，其运动方程为

$$\sum F_u = m\ddot{u} \tag{7.22}$$

即

$$p - 2T\sin\theta = m\ddot{u} \tag{7.23}$$

$$\text{而 } \sin\theta = \frac{u}{(L^2 + u^2)^{1/2}} \tag{7.24}$$

因此，非线性运动方程为

$$m\ddot{u} + 2\left\{T_0 + \left(\frac{AE}{L}\right)[(L^2 + u^2)^{1/2} - L]\right\}\left[\frac{u}{(L^2 + u^2)^{1/2}}\right] = p(t) \tag{7.25}$$

这个精确的非线性微分方程具有公式 7.19 的非线性项是**几何非线性**的形式。即非线性仅决定

* 参考文献 7.6，7.7，7.8 和许多其他的参考文献是可用的。它比本书更进一步地讨论了非线性结构动力问题。参考文献 7.9 特别处理了结构承受地震的非线性问题。

于几何量、长度和位移，而不决定于任何材料特性。假若是小位移，即 $u \ll L$ 时，则公式 7.25 就能用线性方程来近似表示

$$m\ddot{u} + 2T_0\left(\frac{u}{L}\right) = p(t) \tag{7.26}$$

如果稍微大点位移时，则

$$\delta \doteq L\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{L}\right)^2\right] - L = \left(\frac{1}{2L}\right)u^2$$

$$\sin\theta \doteq \frac{u}{L}$$

所以，公式 7.25 可以近似表示为

$$m\ddot{u} + \left(\frac{2T_0}{L}\right)u + \left(\frac{AE}{L^3}\right)u^3 = p(t) \tag{7.27}$$

公式 7.27 中的立方项先用正号，这时叫做**刚化弹跳**。这样的系统在简谐激励作用下，其频响特性用图 7.6 所示。图中虚线表示共振频率的轨迹，指出共振频率是随响应幅值的增加而增大。注意在某些 Ω/ω_n 值的范围内，可能出现三种不同的幅值。参考文献 7.6，7.7 以及其他资料给出了刚化弹跳或软化弹跳在简谐激励作用下，其系统响应的详细研究。

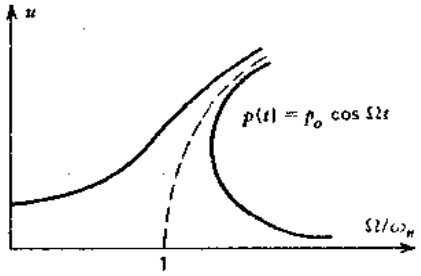


图 7.6 SDOF 系统刚化弹跳的频响曲线

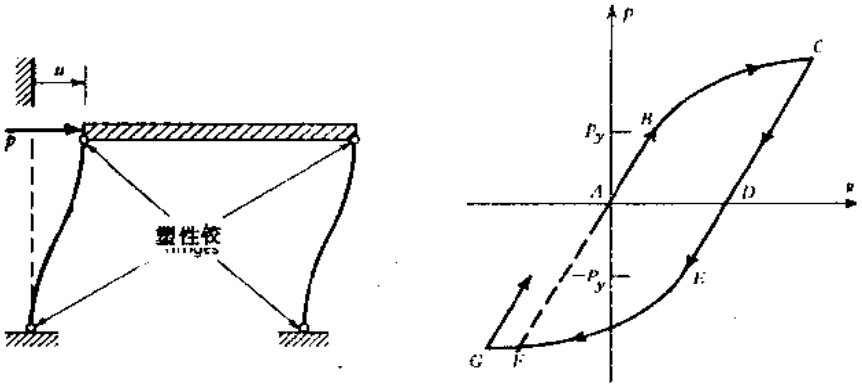


图 7.7 钢结构加载引起柱屈服

其次让我们研究一个**材料非线性**的例子。图 7.7a 表示一个理想的刚构，假定柱的柔度大于水平屋顶的柔度。设荷载是慢慢增加的。则荷载-挠度曲线的结果为图 7.7b)。该曲线的特

性为，从 *A* 至 *B* 是线性，*B* 点标志外缘纤维开始屈服形成塑性铰，此时弯矩最大。荷载继续增加至 *C* 点，此后，荷载减少，加载曲线从 *C* 至 *E* 点为直线且平行于原 *AB* 段的斜率。在 *D* 点加载方向为反向。闭合圈 *ACFA* 叫做**滞回环**。环所包围的面积为逸散能，是根据循环塑性变形而定。参考文献 7.8 和 7.9 讨论了图 7.7b 的力-位移关系，以及其他结构非线性模型。§7.4 中例题 7.3 将阐述一个简单的完全的弹塑性模型

§7.4 非线性 SDOF 系统响应逐步数值解

在 §7.2 中，用逐步积分法来计算线性系统响应，也可以用来计算非线性系统响应。图 7.8a表示一个 **SDOF** 系统具有可能的非线性弹簧与非线性的阻尼单元。图 7.8b 说明了一个力-位移的非线性曲线，使其 f_s 表示位移 u 的函数。假定质量保持常量，虽然这个质量也能容易地概括为已知时间的函数。（将用 f_s 与 f_D 符号，不管叫做时间的函数还是叫做位移的函数或

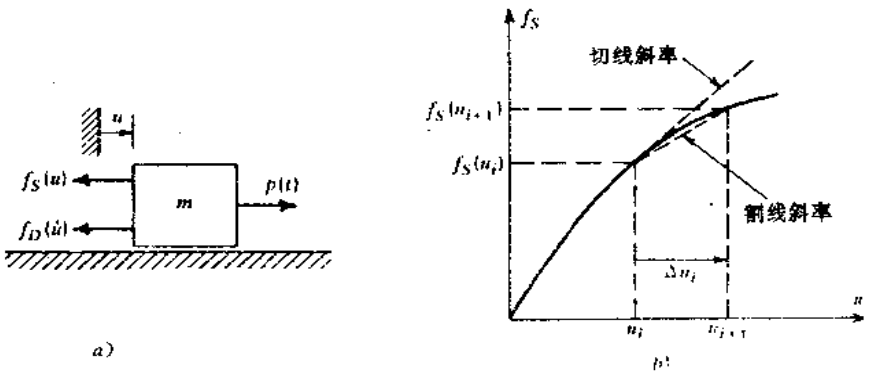


图 7.8 非线性 **SDOF** 系统
a)SDOF 系统；b)力-变形曲线

速度的函数。）那么，可以写成在时间 t_i 和 $t_{i+1}=t_i+\Delta t_i$ 时的运动方程。如下：

$$m\ddot{u}_i + f_{Di} + f_{si} = p_i \tag{7.28a}$$

$$m\ddot{u}_{i+1} + f_{D(i+1)} + f_{s(i+1)} = p_{i+1} \tag{7.28b}$$

从公式 7.28b 减去公式 7.28a，得到

$$m\Delta\ddot{u}_i + \Delta f_{Di} + \Delta f_{si} = \Delta p_i \tag{7.29}$$

式中

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{u}_i &= \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i \\ \Delta f_{Di} &= f_{D(i+1)} - f_{Di} \\ \Delta f_{si} &= f_{s(i-1)} - f_{si} \\ \Delta p_i &= p_{i+1} - p_i\end{aligned} \tag{7.30}$$

公式 7.29 不同于公式 7.14（只有非线性 f_D 与 f_s 项），应用在逐步积分法中。一个近似表示的 Δf_{si} 项为

$$\Delta f_{si} = k_i \Delta u_i \tag{7.31a}$$

式中 k_i 为图 7.8b）所表示的在 u_i 的正切斜率曲线。同理，一个近似表示的 f_D 项可以写成如下形式

$$\Delta f_{Di} = c_i \Delta \dot{u}_i \tag{7.31b}$$

式中 c_i 是以 $\dot{u}_i$ 为函数的 f_D 在 $\dot{u}_i$ 的正切斜率。因此，公式 7.29 变成

$$m\Delta\ddot{u}_i + c_i\Delta\dot{u}_i + k_i\Delta u_i = \Delta p_i \tag{7.32}$$

此式可代替 § 7.2 中逐步积分法的公式 7.14。因此，一个非线性系统响应可以利用图 7.4 的步骤要点来计算。并用 c_i，k_i 代替 c 和 k 计算中的每一时间步长的开始。用公式 7.28b 计算本时间步长终了的加速度(并且是下一个时间步长的开始)，在每一时间步长内都要考虑动力平衡。由于公式 7.31 为近似表示，如用公式 7.12 与公式 7.17c 来计算 $\ddot{u}_i$ 时那么动力平衡在时间 t_{i-1} 时就不会满足，否则 c 与 k 在整个时间步长应保持常数。总之，时间步长 Δt_i 必须足够小，使之，通过一个时间步长的线性解与非线性解能够产生不大的差别。

下面的例题说明应用平均加速度的逐步积分法来计算非线性 **SDOF** 系统的响应。

例题 7.3

图 7.7a)中的刚构具有一个弹性，理想的塑性力-变形特性，如图 E7.3.1 表示(这是图 7.7b特性的理想化表示。刚构承受一矩形脉冲荷载如图示(这个问题与 § 5.2 中相应的线性问题加以比较)。该刚构在 $t=0$ 为静止状态。应用平均加速度法计算 $t=0$ 至 $t=0.55$s 时的响应 $u(t)$。使用 $\Delta t=0.05$s(常数)。

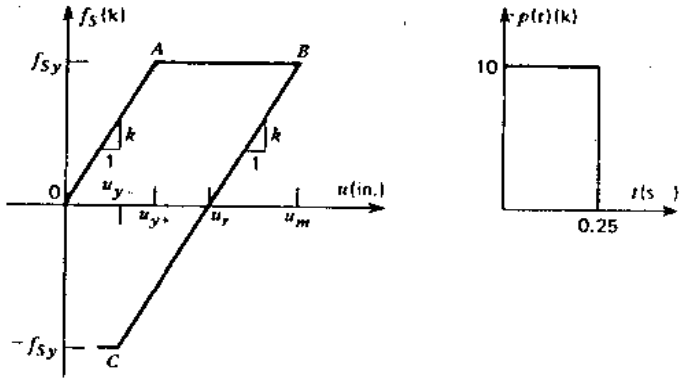


图 E7.3.1

$m=0.2$ k-s^2/in，$k=30$ k/in(总的)，$f_{sy}=15$ k

解：

可以应用图 7.4 的流程图。利用下面的公式

$$\ddot{u}_i = \left(\frac{1}{m}\right)(p_i - f_{si})$$

$$= 5.0(p_i - f_{si}) \tag{1}$$

$$k_i^* = k_i + \left(\frac{4m}{\Delta t^2}\right)$$

$$= k_i + 320.0 \tag{2}$$

$$\Delta p_i^* = \Delta p_i + \left(\frac{4m}{\Delta t}\right)\dot{u}_i + 2m\ddot{u}_i$$

$$= \Delta p_i + 16.0\dot{u}_i + 0.4\ddot{u}_i \tag{3}$$

$$\Delta u_i = \frac{\Delta p_i^*}{k_i^*} \tag{4}$$

$$\Delta \dot{u}_i = \left(\frac{2}{\Delta t}\right)\Delta u_i - 2\dot{u}_i = 40.0\Delta u_i - 2\dot{u}_i \tag{5}$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i \tag{6}$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i \tag{7}$$

目前的问题是 k_i 具有 $k=30$ k/in 或零，它取决变形历程。在下面的表中概括了这个计算。

$$u_y = \frac{f_{sy}}{k} = 15/30 = 0.5 \text{ in} \tag{8}$$

$u_m = \dot{u}$ 由(+)转换为(−)的位移

u_r = 残留(非弹性)位移 $= u_m - u_y = u_m - 0.5$。

$$f_{si} = \begin{cases} k_{ui} & OA \text{ 段} \quad (9a) \\ f_{sy} & AB \text{ 段} \quad (9b) \\ f_{sy} - k(u_m - u_i) & BC \text{ 段} \quad (9c) \\ \text{等} \end{cases}$$

表中数据是按照弹塑性系统和弹性系统(假定 $f_y > \max|f_s|$，即忽略屈服)使用平均加速度法计算的响应。图 E7.3.2 表示的是弹塑性响应。

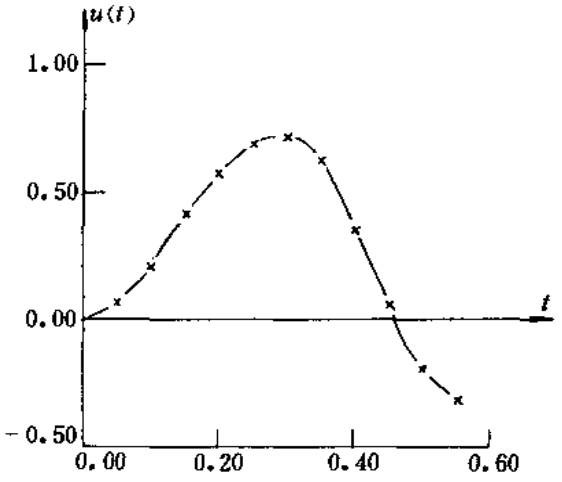


图 E7.3.2

注意：k_i^* 与 f_{si} 表达式在有符号+的地方变化，首先这里的 u_i 先超过 u_y，其次这里的 Δp_i^* 改变正负号。如计算是连续的，则将需要更进一步改变。

平均加速度法计算弹塑性响应的数值解

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
i	t_i	p_i	f_{si}	$\bar{u}_i$	Δp_i	Δp^*_i	k_i^*	Δu_i	$\Delta \dot{u}_i$	u_i	$\dot{u}_i$
			E_q=9	5[(3)−(4)]		(6)+16(12)−0.4(5)	E_q=2	(7)/(8)	40(9)−2(12)×11)+(9)		(12)+(10)
0	0.00	10.0	0	50.0000	0.0	20.0000	350.0	0.05714	2.2857	0.00000	0.00000
1	0.05	10.0	1.7143	41.4286	0.0	53.1429	350.0	0.15184	1.5020	0.05714	2.2857
2	0.10	10.0	6.2694	18.6531	0.0	68.0653	350.0	0.19447	0.2034	0.20898	3.7878
3	0.15	10.0	12.1036	−10.5178	0.0	59.6511	350.0	0.17043	−1.1650	0.40345	3.9911
4	0.20	10.0	15.0000	−25.0000	0.0	35.2181	320.0	0.11006	−1.2500	0.57388+	2.8261
5	0.25	10.0	15.0000	−25.0000	0.0	15.2181	320.0	0.04756	−1.2500	0.68394	1.5761
6	0.30	0.0	15.0000	−75.0000	−10.0	−34.7819+	350.0	−0.09938	−4.6273	0.73150	0.3261
7	0.35	0.0	12.0186	−60.0929	0.0	−92.8565	350.0	−0.26530	−2.0098	0.63212	−4.3012
8	0.40	0.0	4.0595	−20.2973	0.0	−109.0943	350.0	−0.31170	0.1540	0.36682	−6.3110
9	0.45	0.0	−5.2915	26.4574	0.0	−87.9284	350.0	−0.25122	2.2650	0.05512	−6.1570
10	0.50	0.0	−12.8282	64.1410	0.0	−36.6156	350.0	−0.10462	3.5994	−0.19611	−3.8920
11	0.55	0.0	—	—	—	—	—	—	—	−0.30072	−0.2926

平均加速度法计算弹性响应的数值解

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
i	t_i	p_i	$f_{si}=ku_i$	$\bar{u}_i$	Δp_i	Δp^*_i	k_i^*	Δu_i	$\Delta \dot{u}_i$	u_i	$\dot{u}_i$
			30(11)	5[(3)−(4)]		(6)+16(12)+0.4(5)	E_q=2	(7)/(8)	40(9)−2(12)×11)+(9)		(12)+(10)
0	0.00	10.0	0.0000	50.0000	0.0	20.0000	350.0	0.05714	2.2857	0.00000	0.0000
1	0.05	10.0	1.7143	41.4286	0.0	53.1429	350.0	0.15184	1.5020	0.05714	2.2857
2	0.10	10.0	6.2694	18.6531	0.0	68.0653	350.0	0.19447	0.2034	0.20898	3.7878
3	0.15	10.0	12.1036	−10.5178	0.0	59.6511	350.0	0.17043	−1.1650	0.40345	3.9911
4	0.20	10.0	17.2165	−36.0825	0.0	30.7851	350.0	0.08796	−2.1340	0.57388	2.8261
5	0.25	10.0	19.8552	−49.2761	0.0	−8.6359	350.0	−0.02467	−2.3713	0.66184	0.5922
6	0.30	0.0	19.1150	−95.5751	−10.0	−75.0959	350.0	−0.21456	−5.2242	0.63717	−1.6791
7	0.35	0.0	12.6782	−63.3911	0.0	−135.8088	350.0	−0.38803	−1.7145	0.42261	−6.9033
8	0.40	0.0	1.0375	−5.1873	0.0	−139.9586	350.0	−0.39988	1.2402	0.03458	−8.6177
9	0.45	0.0	−10.9590	54.7949	0.0	−96.1227	350.0	−0.27464	3.7696	−0.36530	−7.3775
10	0.50	0.0	−19.1981	95.9904	0.0	−19.3304	350.0	−0.05523	5.0066	−0.63994	−3.6079
11	0.55	0.0	—	—	—	—	—	—	—	−0.69517	1.3987

以上例题扼要的说明了非线性结构动力问题数值解的复杂性质。在§18.2中要讨论非线性 **MDOF** 问题的数值解。

参考文献

7.1 R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York (1975).

7.2 *NASTRAN Theoretical Manual* (*Level* 16.0), National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC(1976).

7.3 N. M. Newmark, "A Method of Computation for Structural Dynamics," *Trans. ASCE*, v. 127, pt. 1, 1406-1435(1962).

7.4 K. J. Bathe and E. L. Wilson, "Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods," *Earthquake Engr. and Structural Dyn.*, v. 1, 283-291(1973).

7.5 H. M. Hilber, T. J. R. Hughes, and R. L. Taylor, "Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics," *Earthquake Engr. and Structural Design*, v. 5, 283-292(1977).

7.6 J. J. Stoker, *Nonlinear Vibrations*, Wiley, New York(1950).

7.7 W. J. Cunningham, *Introduction to Nonlinear Analysis*, McGraw-Hill, New York (1958).

7.8 M. A. Sozen, "Hysteresis in Structural Elements," *Applied Mechanics in Earthquake Engineering*, AMD-v. 8, ASME, New York, 63-98(1974).

7.9 A. K. Chopra, "Earthquake Analysis of Complex Structures," *Applied Mechanics in Earthquake Engineering*, AMD-v. 8 ASME, New York, 163-203(1974).

习题组 7.1

7.1 确定例题 4.1 中无阻尼 **SDOF** 系统的 $0 \leqslant t \leqslant 0.4$s 响应。应用力定数分段插值与力在每一时间步长 $\Delta t = 0.02$s 的起始来确定每个脉冲的幅值的方法。见图 P7.1。

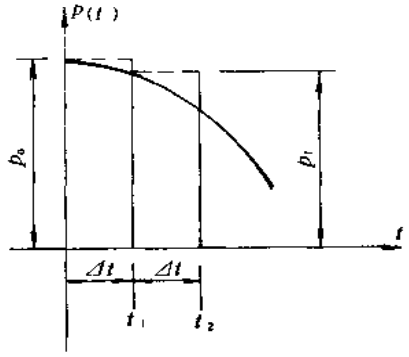


图 P7.1

7.2 用力在每一时间步长 $\Delta t = 0.02$s 的中点，来重算习题 7.1，用每个脉冲的幅值方法来确定。

7.3 用力在每一时间步长 $\Delta t = 0.02$s 的终端来确定每个脉冲的幅值的方法重算习题 7.1。

7.4 (a)用双倍的时间步长 $\Delta t = 0.04$s 重算例题 7.1(a)部分。

(b)根据(a)中所算的结果制表，并以它们与精确解和习题 7.1 中的数值解相比较。

习题组 7.2

7.5 纽玛克 β 法，指的是 § 7.2 中第一个注释体现在方程中为

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \left(\frac{\Delta t_i}{2}\right)(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t_i + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{u}_i (\Delta t_i)^2 + \beta \ddot{u}_{i+1} (\Delta t_i)^2$$

(a)表明 $\beta = \frac{1}{6}$ 相应于"线性加速度法",这里图 7.3 中的加速度近似法用图 P7.5 线性插值法代替。

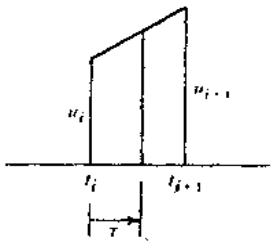


图 P7.5

(b)确定 k^* 和 Δp^* 的表达式,线性加速度法的表达式类似于公式 7.16a 和公式 7.16b 所给出的平均加速度法。

7.6 应用习题 7.5 中所推导的线性加速度法,不是平均加速度法重算例题 7.2。

习题组 7.4

7.7 应用习题 7.5 所推导的线性加速度法,不是平均加速度法重算例题 7.3。

第 8 章　SDOF 系统周期激励响应——频域分析

在第 4 章，读者研究了简谐激励的 SDOF 系统响应，以及熟习了一些重要的概念，例如共振等。研究了如何应用复频响应来简化粘滞阻尼系统的分析。根据第 4 章的这些概念，现在可以扩展到研究周期激励的 SDOF 系统响应。

本章将完成以下内容：

- **应用傅立叶(Fourier)级数的实数形式确定周期函数的傅立叶级数表示法。**
- **应用傅立叶级数的复数形式确定周期函数的傅立叶级数表示法。**
- **应用实数或复数形式确定周期激励 SDOF 系统的稳态响应。**
- **计算瞬时函数 $p(t)$的傅立叶变换。**
- **瞬态激励 SDOF 系统响应的傅立叶变换的讨论。建立，但不进行计算 $u(t)$的傅立叶逆变换的复数积分。**
- **定义离散傅立叶变换(DFT)和快速傅立叶变换(FFT)。讨论傅立叶变换数值计算中的 FFT 法的优点。**

§8.1　周期激励响应——实数型傅立叶级数

作用在结构上的力经常是周期性的，或是能够近似以周期表示的。例如，通过某公路路面的一辆以等速运行的汽车，其作用力可以认为是周期性的。以一个时间为函数的 $p(t)$，其周期为 T_1，就能运用傅立叶级数展开，分解成许＋多简谐分量。这一节就要研究实数型的傅立叶级数。在 §8.2 中要介绍复数型的傅立叶级数。复数型的傅立叶级数是极为有用的，将同第四章的复频响应函数一起来研究阻尼系统响应。

图 8.1 中表示为一周期函数，其周期为 T_1，就是

$$p(t+T_1)=p(t) \tag{8.1}$$

$p(t)$可以利用**傅立叶级数展开**的方式，将它分解成许多简谐分量。它可以定义为

$$p(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega_1 t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\Omega_1 t) \tag{8.2}$$

式中

$$\Omega_1=\frac{2\pi}{T_1} \tag{8.3}$$

为基频，a_n 与 b_n 为 n 次简谐系数。系数 a_0，a_n 和 b_n 与 $p(t)$有关，其公式为

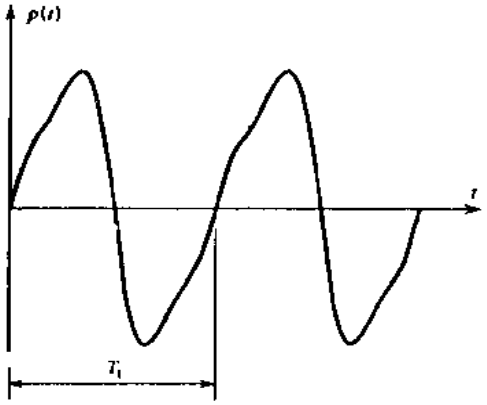


图 8.1　周期为 T_1 的周期函数

$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t)dt = p(t)\text{ 的平均值}$$

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t)\cos(n\Omega_1 t)dt,\ n \neq 0 \qquad (8.4)$$

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t)\sin(n\Omega_1 t)dt$$

式中 τ 为任意时间。

虽然，在理论上 $p(t)$ 的傅立叶级数表达式是需要无限项，但实际上，$p(t)$ 通常相对地以很少几项来近似表示，就可以达到足够的精度。例题 8.1 以一方波说明傅立叶级数表示法的应用。

例题 8.1

a. 确定方波（见图 E8.1.1）以傅立叶级数表示法中的系数表达式，写出 $p(t)$ 的傅立叶级数表示法；

b. 分别运用傅立叶级数的一、二和三项，画出截断级数曲线

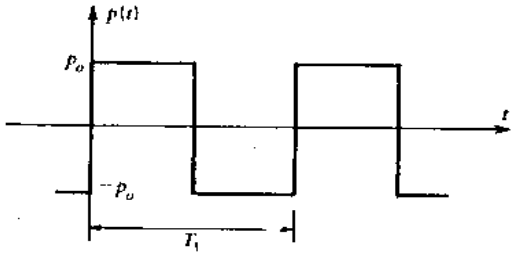


图　E8.1.1

解：

a. 通过周期 $-T_1/2 \leqslant t \leqslant T_1/2$，可以计算公式 8.4 的积分。因此写出

$$a_0 = \frac{1}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} p(t)dt \tag{1}$$

$$a_n = \frac{2}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} p(t)\cos(n\Omega_1 t)dt \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T_1}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} p(t)\sin(n\Omega_1 t)dt \tag{3}$$

式中

$$p(t)=\begin{cases} -p_0 & -\dfrac{T_1}{2}<t<0 \\ p_0 & 0<t<\dfrac{T_1}{2} \end{cases} \tag{4}$$

将公式 4 代入公式 1 和公式 2，得到

$$\boxed{a_0=a_n=0} \tag{5}$$

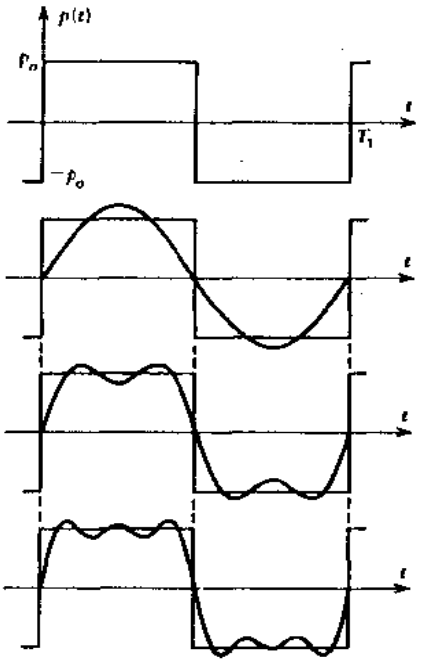


图　E8.1.2

这个结果是根据这样的事实，$p(t)$是 t 的奇函数，即 $p(t)=-p(-t)$，其 a_0 与 a_n 为傅立叶级数中的偶数项系数。

$$b_n = \frac{4p_0}{T_1}\int_0^{T_1/2} \sin(n\Omega_1 t)dt \tag{6}$$

所以

$$b_n = \frac{4p_0}{T_1}\left(\frac{-1}{n\Omega_1}\right)\cos(n\Omega_1 t)\Big|_0^{T_1/2} \tag{7}$$

而

$$\Omega_1 T_1 = 2\pi \tag{8}$$

所以

$$b_n=\frac{-2p_o}{n\pi}[\cos(n\pi)-1] \tag{9}$$

即

$$\boxed{b_n=\frac{4p_o}{n\pi}} \qquad n=1,3,5\cdots\cdots \tag{10}$$

因此，方波的傅立叶表示为

$$p(t)=\frac{4p_o}{\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}\left(\frac{1}{n}\right)\sin(n\Omega_1 t) \tag{11}$$

b. 画出图 E8.1.2 方波的傅立叶级数表达式的第一至三非零项的影响曲线。

在第 4 章中，已经确定了简谐激励 **SDOF** 系统的响应；并且也规定了如何按照它的简谐分量来表示周期函数。因此，现在我们就有可能来确定周期激励的 **SDOF** 系统响应了。在例题 8.2 中，研究一无阻尼 **SDOF** 系统，所承受的激励为例题 8.1 所示的方波。

例题 8.2

一无阻尼系统如图 E8.2.1 承受例题 8.1 中的方波激励。

若 $\omega_n=6\Omega_1$ 时，计算系统的稳态响应。

解：

根据公式 4.9，简谐激励 $p_o\cos\Omega t$ 的无阻尼 **SDOF** 系统的稳态响应为

$$u=\left(\frac{p_o/k}{1-r^2}\right)\cos\Omega t \tag{1}$$

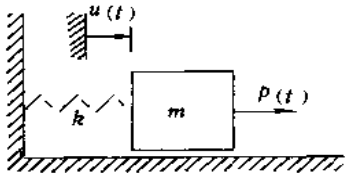


图 E8.2.1

式中

$$r=\Omega/\omega_n=\Omega\sqrt{m/k}. \tag{2}$$

由例题 8.1，可将 $p(t)$写成如下形式。

$$p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n\sin(n\Omega_1 t) \tag{3}$$

式中

$$P_n=\begin{cases}\dfrac{4p_o}{n\pi} & n=\text{奇数}\\ 0 & n=\text{偶数}\end{cases} \tag{4}$$

因此，稳态响应的典型项形式为

$$U_n=\frac{P_n}{k(1-r_n^2)} \tag{5}$$

其中

$$r_n=\frac{n\Omega_1}{\omega_n} \tag{6}$$

则稳态响应为

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}U_n\sin(n\Omega_1 t) \tag{7}$$

式中

$$U_n=\frac{4p_0}{nk\pi[1-(n\Omega_1/\omega_n)^2]},\qquad n=\text{奇数} \tag{8}$$

即

$$\boxed{u=\frac{4p_0}{k\pi}\sum_{n=1,3,\cdots}\frac{\sin(n\Omega_1 t)}{n[1-(n\Omega_1/\omega_n)^2]}} \tag{9}$$

在此例题中，$\Omega_1/\omega_n=\frac{1}{6}$。

可以很容易地设想，将周期函数看成是以频率为函数的各简谐分量幅值的频谱图。根据例题 8.1 和例题 8.2 画出图 8.2 中的 $p(t)$和 $u(t)$的频谱图。根据例题 8.2 中的公式 4 和公式 8

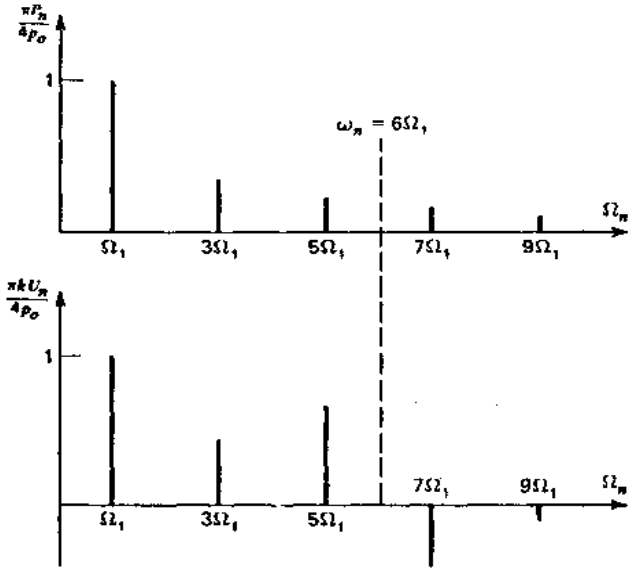


图 8.2　例题 8.2 的激励与响应谱

$$\frac{P_n}{p_0}=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi} & n=\text{奇数}\\ 0 & n=\text{偶数}\end{cases} \tag{8.5a}$$

$$\frac{U_n}{p_0/k}=\begin{cases}\dfrac{4}{n\pi[1-(n/6)^2]} & n=\text{奇数}\\ 0 & n=\text{偶数}\end{cases} \tag{8.5b}$$

和

$$\Omega_n=n\Omega_1 \tag{8.5c}$$

注意对于激励傅立叶分量的一些特殊频比 Ω_1/ω_n 是在共振频率以下，而其他一些是在共振频率之上。如果某些 n 值，使其 $n\Omega_1$ 接近 ω_n 时，那么，其响应会有一个非常大的傅立叶分量。

§8.2 周期激励响应——复数型傅立叶级数

在 §4.3 中，引进了复频响应函数 $\overline{H}(\Omega)$来表达简谐激励粘滞阻尼系统的响应，成为一个很方便的方法。周期函数的复数傅立叶级数表达方法同样证明了是很有用处的。令

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{P}_n(\Omega)e^{i(n\Omega_1 t)} \tag{8.6}$$

p_n 上方加一横杠的符号表示级数的系数可以是复数。在计算这些分量时要注意

$$\int_{\tau}^{\tau+T_1}e^{i(n\Omega_1 t)}e^{-i(m\Omega_1 t)}dt=\begin{cases}0 & n\neq m;\\ T_1 & n=m\end{cases} \tag{8.7}$$

因此，用 $e^{-i(m\Omega_1 t)}$乘公式 8.6，并在一个周期内积分，得到

$$\overline{P}_n=\frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1}p(t)e^{-i(n\Omega_1 t)}dt,\quad n=0,\pm 1,\cdots \tag{8.8}$$

注意

$$\overline{P}_{-n}-\overline{P}_n^*=\overline{P}_n\text{ 的复数共轭} \tag{8.9}$$

和

$$\overline{P}_0=\frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1}p(t)dt=p(t)\text{ 的平均值} \tag{8.10}$$

[实际上，$\overline{P}_0$ 为实数值，因为 $p(t)$是个实数值。]

例题 8.3

a. 若 $p(t)$为一实值函数，则公式 8.6 中的右侧将出现实值。

b. 若 $p(t)$为一奇函数，则 $\overline{P}_n(\Omega)$为虚数，且 $\overline{P}_{-n}=-\overline{P}_n$。

解：

a. 展开公式 8.6，得到

$$\begin{aligned}p(t)=\overline{P}_0&+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{P}_n[\cos(n\Omega_1 t)+i\sin(n\Omega_1 t)]\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{P}_{-n}[\cos(n\Omega_1 t)-i\sin(n\Omega_1 t)]\end{aligned} \tag{1}$$

由公式 8.10 可见 P_0 为实值，并根据公式 8.9，公式 1 能表示成如下形式

$$p(t)=\overline{P}_0+2\sum_{n=1}^{\infty}[R(\overline{P}_n)\cos(n\Omega_1 t)+I(\overline{P}_n)\sin(n\Omega_1 t)] \tag{2}$$

此为实值。证毕(**Q**、**E**、**D**)。

b. 公式 8.8 可写出为

$$\overline{P}_n = \frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t)[\cos(n\Omega_1 t) - i\sin(n\Omega_1 t)]dt \tag{3}$$

比方说，因为 $p(t)$是一个 t 的奇函数

$$\overline{P}_{+n} = \frac{-i}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t)\sin(n\Omega_1 t)dt \tag{4}$$

则

$$\begin{aligned}\overline{P}_{-n} &= \frac{-i}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t)\sin(-n\Omega_1 t)dt \\ &= \frac{i}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t)\sin(n\Omega_1 t)dt\end{aligned} \tag{5}$$

因此，$\overline{P}_n$ 为纯虚数，并且 $\overline{P}_{-n} = -\overline{P}_n$**Q**、**E**、**D**

比较上面例题的公式 2 与公式(8.2)，读者要留意：

$$a_n = 2R(\overline{P}_n), \quad b_n = 2I(\overline{P}_n) \tag{8.11}$$

例题 8.4

---

a. 计算例题 8.1 中方波的 $\overline{P}_n$。

b. 画出 $R(\overline{P}_n)$，$I(\overline{P}_n)$的频谱图和 $|\overline{P}_n|$。见图 E8.4.1。

解：

a. 通过周期 $0<t<T_1$，可计算公式 8.8 得到

$$\overline{P}_n = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1/2}(p_0)e^{-i(n\Omega_1 t)}dt + \frac{1}{T_1}\int_{T_1/2}^{T_1}(-p_0)e^{-i(n\Omega_1 t)}dt \tag{1}$$

$$\overline{P}_n = \frac{-p_0}{in\Omega_1 T_1}\left[e^{-i(n\Omega_1 t)}\Big|_0^{T_1/2} - e^{-i(n\Omega_1 t)}\Big|_{T_1/2}^{T_1}\right] \tag{2}$$

而

$$\Omega_1 T_1 = 2\pi,$$

如此

$$e^{-i(n\Omega_1 T_1/2)} = e^{-in\pi} = \begin{cases}+1 & n=\text{偶数} \\ -1 & n=\text{奇数}\end{cases} \tag{3}$$

$$e^{-i(n\Omega_1 T_1)} = e^{-i(2n\pi)} = 1$$

所以

$$\overline{P}_n = \frac{ip_0}{2\pi n}[2e^{-in\pi} - 1 - e^{-i(2n\pi)}] \tag{4}$$

即

$$\boxed{\overline{P}_n = \frac{ip_0}{2\pi n}(2e^{-in\pi} - 2) = \begin{cases}0 & n=\text{偶数} \\ \dfrac{-2p_0 i}{n\pi} & n=\text{奇数}\end{cases}}$$

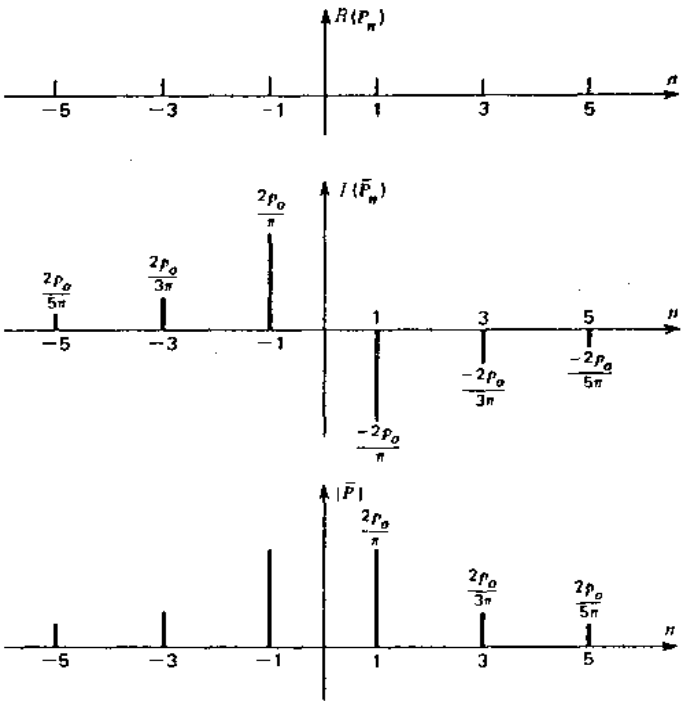


图 E8.4.1

(注意，$\overline{P}_n$ 也能用 $e^{-i(n\Omega_1 t)}$ 来计算成$[\cos(n\Omega_1 t)-i\sin(n\Omega_1 t)]$。)

根据公式(4.30)和公式(4.33)可以将 **SDOF** 系统的稳态响应写成复数形式为

$$\overline{u}(t)=\overline{U}e^{i\Omega t}=\overline{H}(\Omega)p_0 e^{i\Omega t} \tag{8.12}$$

式中 $\overline{H}(\Omega)$是公式(4.33)给出的复频响应函数。即

$$\overline{H}(\Omega)=\frac{1/k}{[1-(\Omega/\omega_n)^2]+i(2\zeta\Omega/\omega_n)} \tag{8.13}$$

对于周期激励，可以应用复数傅立叶级数

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{P}_n e^{i(n\Omega_1 t)} \tag{8.14}$$

并且，其稳态响应可以写成

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{U}_n e^{i(n\Omega_1 t)} \tag{8.15}$$

注意根据公式(8.12)，对简谐激励 $\overline{\boldsymbol{U}}=\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{P}_0$，可见

$$\overline{U}_n=\overline{H}_n\,\overline{P}_n=|\overline{H}_n||\overline{P}_n|e^{i(\alpha_{Hn}+\alpha_{Pn})} \tag{8.16}$$

式中

$$\overline{H}_n(\Omega)=\frac{1/k}{[1-(n\Omega_1/\omega_n)^2+i(2\zeta n\Omega_1/\omega_n]} \tag{8.17}$$

例题 8.5 阐述了应用复数傅立叶级数来计算 **SDOF** 系统承受周期激励时的稳态响应。若系统为一无阻尼系统时，那么这方法将更为有用。

例题 8.5

a. 重复例题 8.2，确定无阻尼 **SDOF** 系统受到一 $\omega_n=6\Omega_1$ 方波激励时的 $\overline{U}_n$ 表达式。

b. 画 $|\overline{U}_n|$ 与 ∂_{Un} 图。见图 E8.5.1。

解：

a. 根据公式 8.16

$$\overline{U}_n=\overline{H}_n\overline{P}_n=|H_n||P_n|e^{i(\alpha_{Hn}+\alpha_{Pn})} \tag{1}$$

并且根据公式 8.17，与 $\zeta=0$

$$\overline{H}_n=\frac{1/k}{1-(n\Omega_1/\omega_n)^2}=\frac{1/k}{1-(n/6)^2} \tag{2}$$

根据例题 8.4

$$\overline{P}_n=\begin{cases}0 & n=\text{偶数}\\ \dfrac{-2p_oi}{n\pi} & n=\text{奇数}\end{cases} \tag{3}$$

因此

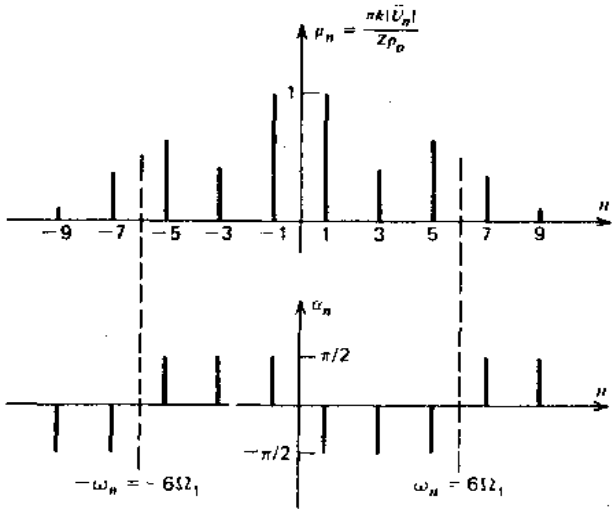


图 E8.5.1

$$\boxed{\overline{U}_n=\overline{H}_n\overline{P}_n=\begin{cases}\dfrac{-i(2p_o)}{n\pi k[1-(n/6)^2]} & n=\text{奇数}\\ 0 & n=\text{偶数}\end{cases}} \tag{4}$$

b. 根据公式 4

$$|\overline{U}_n|=\frac{2p_o/\pi k}{|n[1-(n/6)]^2|} \tag{5}$$

$$\alpha_{Un}=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2} & n=+1,+3,+5,-7,-9,\cdots\\ \dfrac{\pi}{2} & n=-1,-3,-5,+7,+9,\cdots\end{cases} \tag{6}$$

为了画图，计算下式

$$\mu_n \equiv \frac{(\pi/2)|\overline{U}_n|}{p_0/k} = \frac{|1/n|}{|1-(n/6)^2|}, \qquad n = \pm 1, \pm 3, \cdots \tag{7}$$

给出

$$\mu_1 = \mu_{-1} = \frac{36}{35} = 1.029$$

$$\mu_3 = \mu_{-3} = \frac{4}{9} = 0.444$$

$$\mu_5 = \mu_{-5} = \frac{36}{55} = 0.655$$

$$\mu_7 = \mu_{-7} = \frac{36}{91} = 0.396$$

$$\mu_9 = \mu_{-9} = \frac{4}{45} = 0.089$$

比较例题 8.5 中 μ_n 图与图 8.2b)，知道复数系数的幅值为实数系数之半。其原因，已由复数傅立叶级数中$(-n)$项的影响说明了这个差异。

这个问题是很容易想像的，如例题 8.5 是通过将时域变换成频域(谱)和从频域变换成时域的。图 8.3 就说明这个问题。

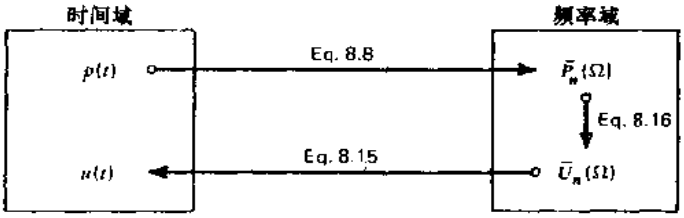


图 8.3　变换成频域解周期响应问题

§8.3　非周期激励响应——傅立叶积分

在前面一节中，读者可以看到一个周期函数可用傅立叶级数表示成公式 8.2 或公式 8.6 的形式。当该函数若为一非周期函数时，那么，可以用傅立叶积分来表示；它是由傅立叶级数，令周期 T_1 在接近无穷大时来得到。使用复数傅立叶级数来推导傅立叶积分表达式将会感到方便的。这里重复给出

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{P}_n(\Omega) e^{i(n\Omega_1 t)} \tag{8.18}$$

式中 $\overline{P}_n$ 如积分存在

$$\overline{P}_n = \frac{1}{T_1}\int_{\tau}^{\tau+T_1} p(t) e^{-i(n\Omega_1 t)} dt \tag{8.19}$$

令 $T_1 \to \infty$，将方便的得到

$$\Omega_1 = \Delta\Omega$$

$$n\Omega_1 = \Omega_n$$
$$\overline{P}_n(\Omega_n) = T_1 \overline{P}_n = \left(\frac{2\pi}{\Delta\Omega}\right)\overline{P}_n \tag{8.20}$$

则公式 8.18 可以写成

$$p(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{P}(\Omega_n)e^{i\Omega_n t}\Delta\Omega \tag{8.21}$$

式中

$$\overline{P}(\Omega_n) = \int_{T_1/2}^{T_1/2} p(t)e^{-i\Omega_n t}dt \tag{8.22}$$

因为已将公式(8.22)表示作为积分的极限，所以当 $T_1 \to \infty$ 时，将包含了 $p(t)$ 的全部时间历程，不管其 $p(t)$ 的具体形式如何。

如 $T_1 \to \infty$，则 Ω_n 变成一个连续变量 Ω，$\Delta\Omega$ 变成微分 $d\Omega$，因此公式 8.21 和 8.22 可以写成

$$p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{P}(\Omega)e^{i\Omega t}d\Omega \tag{8.23}$$

和

$$\overline{P}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i\Omega t}dt \tag{8.24}$$

公式 8.23 与公式 8.24 叫做**傅立叶变换对**。已知 $\overline{P}(\Omega)$ 为 $p(t)$ 的**傅立叶变换**，则 $p(t)$ 叫做 $\overline{P}(\Omega)$ 的**傅立叶逆变换**。$p(t)$ 表达式的傅立叶变换需要公式 8.24 中的积分存在。如果 $p(t)$ 在 $-\infty<t<\infty$ 区间满足狄利克雷(Dirichlet)条件[8.1]，并且，下面积分收敛时

$$\int_{-\infty}^{\infty}|p(t)|dt$$

这个就有保证。实际上用许多可实现的函数，所表示的力、位移和其他，就可以保证这些条件。最后如果按照频率 $f=\Omega/2\pi$ 表示则公式 8.23 和公式 8.24 可以写成更对称的形式，则

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{P}(f)e^{i(2\pi ft)}df \tag{8.25}$$

和

$$\overline{P}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-i(2\pi ft)}dt \tag{8.26}$$

在公式(8.15)和公式(8.16)中，找到周期激励 **SDOF** 系统响应，可按下式表式

$$u(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{H}_n\overline{P}_n e^{i(n\Omega_1 t)} \tag{8.27}$$

按照公式(8.18)至公式(8.24)的过程，可以得到下面 **SDOF** 系统响应 $u(t)$ 的傅立叶变换对。

$$\overline{U}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-i(2\pi ft)}dt \tag{8.28}$$

和

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{U}(f)e^{i(2\pi ft)}df \tag{8.29}$$

式中

$$\overline{U}(f)=\overline{H}(f)\overline{P}(f) \tag{8.30}$$

它是复频响应函数与激励傅立叶变换的乘积。

由公式(8.26)可清楚知道，正傅立叶变换包含了一个直接积分，正如在例题 8.6 中将要见到的。

例题 8.6

令 $p(t)$是矩形脉冲

$$p(t)=\begin{cases}0 & t<-T\\ p_0 & -T<t<T\\ 0 & t>T\end{cases}$$

计算这个脉冲的傅立叶变换，它是对称于 $t=0$ 的。

解：

根据公式(8.28)

$$\overline{P}(\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t)e^{-i\Omega t}dt \tag{1}$$

$$=\int_{-T}^{T}p_0e^{-i\Omega t}dt \tag{2}$$

$$=\left(\frac{p_0}{-i\Omega}\right)(e^{-i\Omega T}-e^{i\Omega T})$$

此式也可以写成

$$\boxed{\overline{P}(\Omega)=2p_0T\left(\frac{\sin\Omega T}{\Omega T}\right)} \tag{3}$$

因此 $\overline{P}(\Omega)$是一个实函数。它可以画成以 Ω 为函数的曲线。并与例题 8.4 相应的离散傅立叶级数加以比较。

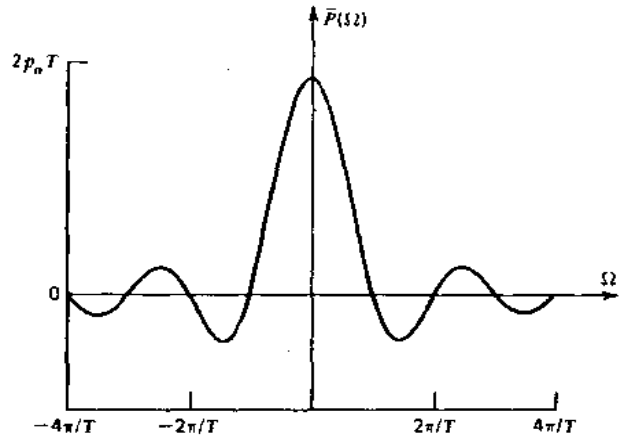


图 E8.6.1

根据公式(8.29)和公式(8.30)可用下面的傅立叶逆变换表示其响应

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{H}(f)\overline{P}(f)e^{i(2\pi ft)}df \tag{8.31}$$

例如，粘滞阻尼系统 $\overline{H}(f)$ 由下式给出

$$\overline{H}(f)=\frac{1/k}{[1-(f/f_n)^2]+i(2\zeta f/f_n)} \tag{8.32}$$

在例题 8.6 中的矩形脉冲由下式给出。

$$\overline{P}(f)=2p_0T\left[\frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT}\right] \tag{8.33}$$

公式(8.31)的傅立叶逆变换的计算是需要复平面的围线积分，但它已超出本书的范围，不另叙述。根据数值计算观点，傅立叶积分的重要性在于它是用离散傅立叶变换(**DFT**)进行近似计算，是用快速傅立叶变换(**FFT**)法进行计算的。关于 **DFT** 与 **FFT** 将在 8.5 中加以扼要介绍。

§8.4 复频响应与单位脉冲响应关系

以复频响应 $\overline{H}(\Omega)$ 或 $\overline{H}(f)$ 用来描述系统在频域中的响应特性。单位脉冲响应是用来描述系统在时域中的响应。例如公式 8.32 给出了粘滞阻尼系统的 $\overline{H}(f)$。在这里重复给出公式 5.30，

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_d t \tag{8.34}$$

$h(t)$是一个单位脉冲作用在 $t=0$ 时的响应。根据公式 8.26，这个单位脉冲的傅立叶变换是用下式给出的

$$\overline{P}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t)e^{-i(2\pi ft)}dt=1 \tag{8.35}$$

因此，公式(8.31)可与公式(8.35)合并，得到

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{H}f(t)e^{i(2\pi ft)}df \tag{8.36}$$

于是，可以断定，$h(t)$是 $\overline{H}(f)$的傅立叶逆变换。

$$\overline{H}(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i(2\pi ft)}dt \tag{8.37}$$

因此，图 8.3 的框图能扩大到非周期函数中，如图 8.4 中所示。

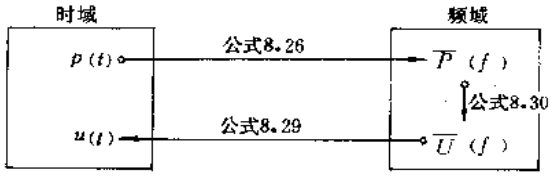


图 8.4 变换成频域解瞬时响应问题

然而，正如以上所指出的，公式 8.29 的逆变换用数值方法来完成是比较理想的。这在§8.5中将扼要讨论之。

§8.5 离散傅立叶变换(DFT)与快速傅立叶变换(FFT)

在§8.3中，虽然已经讨论过傅立叶积分，并提供了确定系统瞬时响应的计算方法，可是在1965年发表了Cooley-Tukey的快速傅立叶变换法[8.1]，使得傅产叶积分的数值化程序变成了现实可行了。自从**FFT**问世以后，在许多技术领域中，实质上导致了一场革命；如在测试与仪表领域中(参考文献8.2，8.3与8.4)。

傅立叶变换的数值计算包括两个步骤(如参考文献8.5与8.6)。首先，推导出相应于公式8.25和公式8.26的离散傅立叶变换(**DFT**)。其次，对描述计算**DFT**的有效数值计算方法(**FFT**)。

对于傅立叶变换的数值方法处理，需要首先确定相应公式8.25和公式8.26傅立叶变换对的离散傅立叶变换对。第一，一个连续函数必须变换成在离散时间间隔为Δt上取样。第二，连续变量所取离散值的有限数目N必须考虑到计算机的存储与计算时间的限制。函数的取样与截断是影响连续信号近似值的，可用周期$T_1=N\Delta t$的周期信号在时间$t_m=m\Delta t$上取值来表示。令

$$\Omega_1=\frac{2\pi}{T_1} \tag{8.38}$$

因为一个周期T_1内取N个离散值，则公式8.22的积分可以用下面的有限和来取代。

$$\overline{P}(\Omega_n)=\sum_{m=0}^{N-1}p(t_m)e^{-i(n\Omega_1)(m\Delta T)}\Delta t \tag{8.39}$$

即

$$\overline{P}(\Omega_n)=\Delta t\sum_{m=0}^{N-1}p(t_m)e^{-i(2\pi mn/N)},n=0,1,\cdots N-1 \tag{8.40}$$

离散傅立叶逆变换可由公式8.21用相似的方法得到。因此，

$$p(t_m)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\overline{P}(\Omega_n)e^{i(n\Omega i)(m\Delta T)}\Omega_1 \tag{8.41}$$

即

$$p(t_m)=\frac{1}{T_1}\sum_{n=0}^{N-1}\overline{P}(\Omega_n)e^{i(2\pi mn/N)},m=0,1,\cdots,N-1 \tag{8.42}$$

公式(8.40)与公式(8.42)定义为**离散傅立叶变换对**。傅立叶变换对的精确推导可在文献参考8.5中查找。

离散傅立叶变换(**DFT**)的精度取决于取样的时间间隔Δt与取样的数目。讨论这个问题已超出了本书的范围了。

快速傅立叶变换(**FFT**)并不是一个什么新的变换类型，可是在计算离散傅立叶变换时，是一个颇为有效的数值计算方法。它的重要性，在于事实上消除了离散傅立叶变换中的许多重复计算。它可以使得离散傅立叶变换高速进行计算。

公式(8.40)与公式(8.42)可按下面形式计算

$$A_m=\sum_{n=0}^{N-1}B_nW_N^{mn},\quad m=0,1,\cdots,N-1 \tag{8.43}$$

式中

$$W_N = e^{-i(2\pi/N)} \tag{8.44}$$

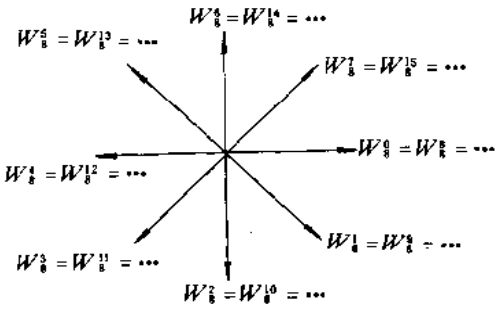


图 8.5 W_N^{mn} N=8 的循环性质

公式 8.43 中计算工作量的多少要看复数乘积的数目，也就是看公式的形式和所取 m 的范围。可以清楚的看到，有 N 个之和，每个之和都需要有 N 个复数乘积，即需有 N^2 个乘积来计算全部的 A_m。如利用 W_n 幂的循环性质，则总的计算工作量就可以大大地减化。图 8.5 表示 W_8^{mn} 的重复循环。快速傅立叶变换(FFT)计算法的复数乘积数目为$(N/2)\log_2 N$。例如，$N=512$ 时，FFT 的运算数是原来 DFT，运算数为 1%不到。

鼓励读者要进一步查阅更多的参考文献(如文献 8.5 和 8.6)，通过快速傅立叶变换(FFT)来彻底探讨数字信号分析。

参考文献

8.1 J. W. Cooley and J. W. Tukey, "An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series," *Math Computation*, V. 19, 297-301(1965).

8.2 M. Richardson, "Modal Analysis Using Digital Test Systems," *Seminar on Understanding Digital Control and Analysis in Vibration Test Systems*, The Shock and Vibration Information Center, Washington, DC, 43-64(1975).

8.3 K. A. Ramsey, "Effective Measurements for Structural Dynamics Testing," *Sound and Vibration*, Pt. I, V. 9, 24-35(1975), Pt. II, v. 10, 18-31(1976).

8.4 S. Smith et al., "MODALAB-A Computerized Data Acquisition and Analysis System for Structural Dynamics Testing," 21*st International Instrumentation Symposium*, Instrument Society of America, 183-189(1975).

8.5 E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1974).

8.6 S. D. Stearns, *Digital Signal Analysis*, Hayden Book Co., Rochelle Park, NJ (1975).

习题组 8.1

8.1 确定图 P8.1 中周期激励的实数型傅立叶级数。

8.2 确定图 P8.2 中周期激励的实数型傅立叶级数。

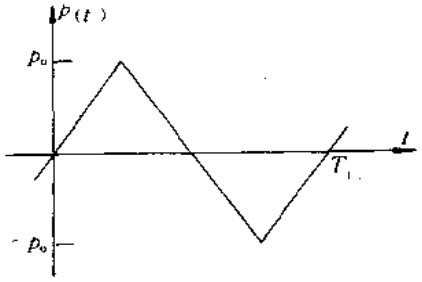


图 P8.1

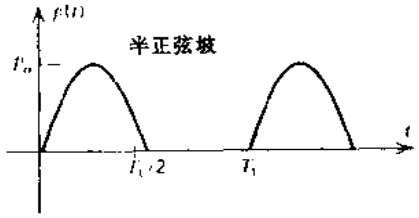


图 P8.2

8.3 (a)确定如图 P8.3 所示方波的实数型傅立叶级数。

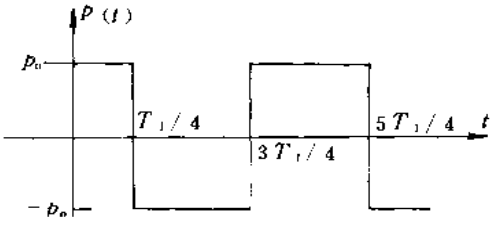


图 P8.3

(b)用(*a*)所得结果与例题 8.1 中结果相比，观察到什么，是激励相位漂移的影响吗？

8.4 图 *P*8.4 中无阻尼 **SDOF** 系统承受了习题 8.1 中所给的激励 $p(t)$.

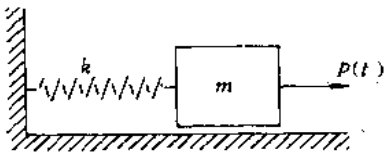


图 P8.4

(a)如 $\omega_n=2.5\Omega_1$ 时，确定系统的稳态响应。

(b)类似于图 8.2 中所示，画出 $\boldsymbol{P}_n$ 与 $\boldsymbol{U}_n$ 的反应谱。

习题组 8.2

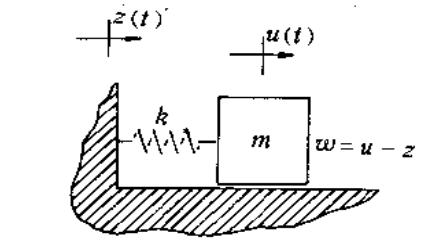
8.5 (a)确定习题 8.1 中相应激励 $p(t)$复数型傅立叶级数的系数。

(b)据例题 8.4 画出实部和虚部,以及复数系数的幅值。

8.6 (a)确定习题 8.3 中相应激励 $p(t)$复数型傅立叶级数的系数。

(b)根据例题 8.4 画出实部和虚部,以及复数系数的幅值。

8.7 图 P8.7 为无阻尼基础运动系统,令



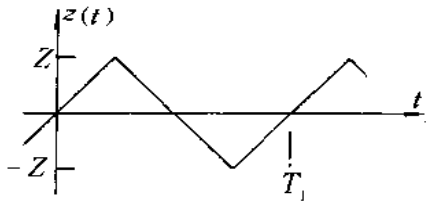


图 P8.7

$$\overline{W}_n=\overline{H}_n\overline{Z}_n$$

其中

$$z(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{Z}_n e^{i(n\Omega_1 t)}$$

$$w(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{W}_n e^{i(n\Omega_1 t)}$$

(a)确定 $\overline{H}_n$

(b)确定 $\overline{Z}_n$(这将与习题 8.1 的 $\overline{P}_n$ 具有相同形式)

(c)根据例题 8.4 确定 $\overline{W}_n$,并画出以频序为函数的 $|\overline{W}_n|/Z$ 曲线。

习题组 8.3

8.8 确定图 P8.8 中矩形脉冲的傅立叶变换。(注意,这里包含了例题 8.6 中脉冲的时间漂移)。

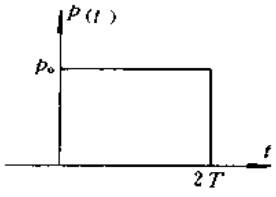


图 P8.8

8.9 确定下面各个函数傅立叶变换的实部与虚部。

(a) $p(t)=p_0 e^{\alpha(t)}$

(b) $$p(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ p_0\sin(2\pi f_0 t) & 0\leqslant t\leqslant \dfrac{1}{2f_0} \\ 0 & t>\dfrac{1}{2f_0} \end{cases}$$

Ⅱ 连续系统

第 9 章　连续系统数学模型

在实际中所有的结构都是三维的物体。并且，在这些物体中的每一个无约束的点都能在三个相互垂直的方向上移动。比方说 x、y 与 z 方向。在第 1 章中已经说明了结构的离散参数模型与连续模型的区别。在第 2 章与第 8 章中，我们已经研究了单自由度模型和它在各种类型激励作用下的响应。在这一章以及第 11 章中，我们将扼要的研究用连续模型来表示结构，即以偏微分方程来表示。本书的剩下部分将要广泛论述多自由度模型的基本原理。

本章将完成如下内容

- **应用牛顿定律来推导一维物体在承受轴向变形、扭转变形，弯曲变形或以上各项的联合作用下的运动方程。**
- **论述具有不同支承条件杆件的轴向、横向或扭转自由振动的相应边界条件。**
- **应用哈密顿(Hamilton)原理来推导一维物体在轴向变形、扭转变形、弯曲变形或以上联合作用下的运动方程。**

§9.1　牛顿定律应用——轴向变形

我们首先研究薄壁长轩的轴向变形，图 9.1a 表示它的一部分。用割离出长度为 Δx 的一个单元的自由体，来推导轴向振动的运动方程。令 $u(x,t)$ 为横截面沿轴向的位移，$p(x,t)$ 为外部作用的轴力，就是沿杆形心轴的外合力。[$A(x)$ 为横截面面积，$\rho(x)$ 为质量密度，即单位体积的质量。]轴向变形假定按初等材料力学为

a.　横截面保持为平面，并垂直于杆件的轴。

b.　材料为线弹性。

c.　在给定截面上，材料特性(E，ρ)为常量。也可随 x 而变。

根据这些假设，得到下面三个方程式

$$\varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9.1}$$

$$\sigma=E\varepsilon \tag{9.2}$$

和

$$P=A\sigma \tag{9.3}$$

若应用牛顿第二定律在图 9.1b 中的自由体上，得到

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x=(\Delta m)a_x \tag{9.4}$$

$$p\triangle x+P(x+\triangle x,t)-P(x,t)=\rho A\triangle x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9.5}$$

这里，因为极限方法是按照上式的第一和最后一项是取其 x，而不是按平均$\triangle x$。$\triangle x\to 0$ 时取极限，得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{P(x+\Delta x,t)-P(x,t)}{\Delta x}\right)+p=\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

即

$$\frac{\partial P}{\partial x}+p=\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9.6}$$

公式(9.1)至公式(9.3)可代入公式(9.6)中，得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(AE\frac{\partial u}{\partial x}\right)+p=\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9.7}$$

这就是线弹性杆的轴向振动运动方程。

有两种最普通的边界条件，即端点条件为力-自由端和固定端。在一端的相应边界条件 $x=x_e$ 为：

$$P(x_e,t)=0 \qquad \text{力-自由端} \tag{9.8a}$$

$$u(x_e,t)=0 \qquad \text{固定端} \tag{9.8b}$$

用公式(9.1)至公式(9.3)，可以写公式 9.8a

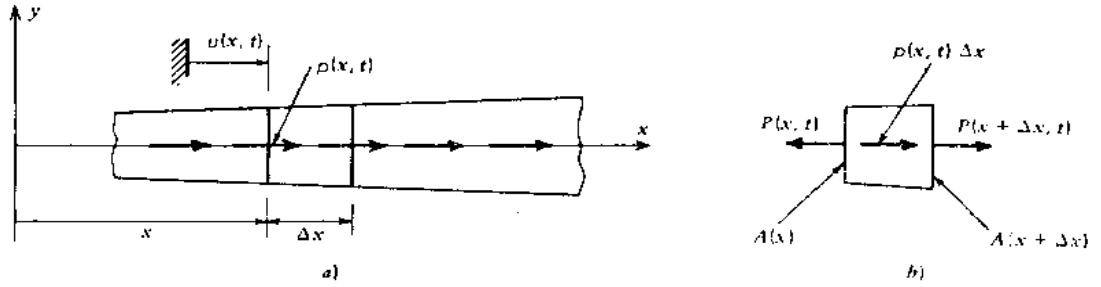


图 9.1　轴向变形杆件

a)承受轴向变形的部分杆件；b)自由体图

成为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_e}=0 \qquad \text{自由端} \tag{9.8c}$$

只用上面公式的其中一个，即 9.8b 或 9.8c，就可以表示一已知端。

例题 9.1

如图 E9.1.1 的两根杆件，确定在 $x=0$ 处轴向变形的边界条件

解：

a. 画出杆顶端质量的自由体图，如图 E9.1.2

顶部质量的运动方程为

$$P(0,t)=m\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=0} \tag{1}$$

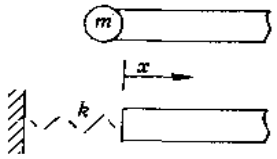


图 E9.1.1

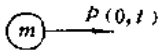


图 E9.1.2

根据公式(9.1)至公式(9.3)

$$P(0,t)=AE\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} \tag{2}$$

因此，$x=0$ 处的端点条件为

$$\boxed{AE\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=0}} \tag{3}$$

当 $m=0$ 时，上式可以减化成公式(9.8c)。

b. 画出杆在 $x=0$ 处的线性弹簧的变形，如图 E9.1.3。

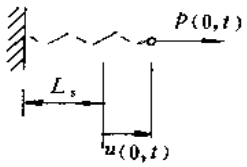


图 E9.1.3

根据线性弹簧的外力-变形方程

$$P(0,t)=ku(0,t) \tag{4}$$

与公式(2)结合，得到

$$\boxed{AE\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=ku(0,t)} \tag{5}$$

§9.2 牛顿定律应用—线弹性梁横向振动(伯努利-欧拉理论)

薄壁长杆在承受横向振动时，也可以应用牛顿第二定律来推导运动方程。图 9.2a 表示杆件在横向运动时的一部分。图 9.2b 表示的是自由体图。$v(x,t)$为梁中性轴上一点$(x,0)$的横向运动。弯矩为 $M(x,t)$，横向剪力为 $S(x,t)$，单位长度上的外力为 $p(x,t)$。应用梁初等理论的伯努利-欧拉(Bernoulli-Euler)假定，即：

a. 梁上有一根轴线，表现即没有拉伸，也无压缩。x-轴就位于沿着这个中性的轴线上。

b. 在未变形的梁中，横截面垂直于中性轴，并保持平面。在变形的中性轴上亦保持垂直，即忽略横向剪切变形。

c. 材料为线弹性，梁在任意截面的性质都是相同的。

d. σ_y 与 σ_z 对 σ_x 来说，可忽略不计。

e. x-y 平面为主平面。

梁在静定分析时所应用的上述假定之外，还要假定在力矩方程中，其转动惯量是可以忽略不计的。

根据运动学，应变与梁的曲率 $1/\mu$ 的关系为

$$\varepsilon=\frac{-y}{\mu} \tag{9.9}$$

式中 y 为在横截面内，从中性轴至所要计算点的距离。

其次，如果一根线弹性的梁，它的性质要与横截面的位置无关的话，那么弯矩与曲率的关系为

$$M(x,t)=\frac{EI}{\mu} \tag{9.10}$$

式中 I 为横截面的惯性矩。

上面自由体图中质量 Δm 的运动方程，可应用牛顿定律来推导，因此

$$+\uparrow \Sigma F_y=(\Delta m)a_y \tag{9.11}$$

和

$$\curvearrowright+\Sigma M_G=(\Delta I_G)\alpha \tag{9.12}$$

式中 G 为 Δm 的质心，α 为角加速度。然而，按前面的规定，在力矩方程中不计转动惯量；因此，公式 9.12 可减化为

$$\Sigma M_G=0 \tag{9.13}$$

自由体图应用公式(9.11)，可得

$$S(x,t)-S(x+\Delta x,t)+p(x,t)\Delta x=\rho A\Delta x\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{9.14}$$

用 Δx 除公式(9.14)，并取极限，得到

$$-\frac{\partial S}{\partial x}+p(x,t)=\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{9.15}$$

根据力矩方程，公式(9.13)，我们得到类似样式的公式

$$S=\frac{\partial M}{\partial x} \tag{9.16}$$

若梁的斜率 $\partial v/\partial x$ 保持很小，则曲率可用 $\partial^2 v/\partial x^2$ 来近似表示，所以公式 9.10 变成

$$M(x,t)=EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{9.17}$$

公式(9.15)，(9.16)和(9.17)合并，我们得到

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)+\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=p(x,t) \tag{9.18}$$

这是一个梁的横向强迫振动的运动方程，它满足上述假定条件。此公式只是对于相对长的薄型

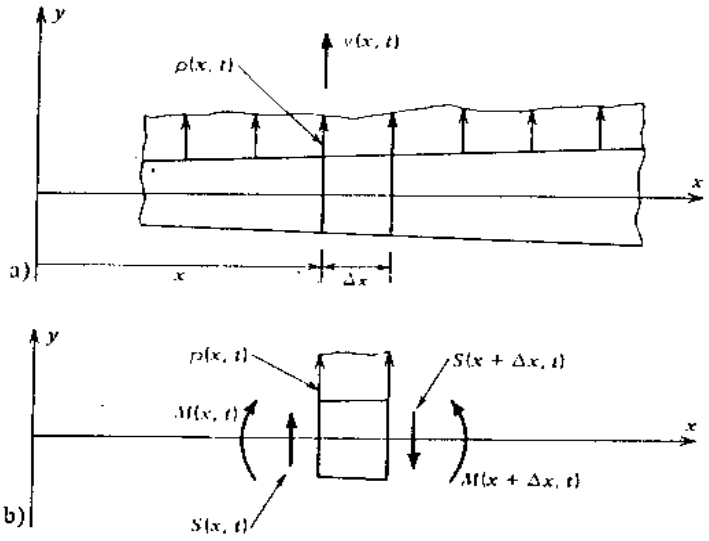


图 9.2　横向振动杆件

梁成立。在例题 9.3 中将要改进上面的推导，来说明梁上预先加轴载的情况。在 § 9.4 中，将要加上剪切变形和转动惯量。

在伯努利-欧拉梁的分析振动中，最常遇到的边界条件如下：

a. 固定端：

$$v(x_e,t)=0 \tag{9.19a}$$

和

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_e}=0 \tag{9.19b}$$

即在固定端的位移和斜率为零。

b. 简支端*

$$v(x_e,t)=0 \tag{9.20a}$$

和

$$M(x_e,t)=0 \tag{9.20b}$$

即在简支端的位移和弯矩为零。根据公式 9.20b 和公式 9.17，得到按 v 表示的第二个边界条件，即

$$\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x=x_e}=0 \tag{9.20c}$$

c. 外力-自由端

$$S(x_e,t)=0 \tag{9.21a}$$

和

$$M(x_e,t)=0 \tag{9.21b}$$

即横向剪力与弯矩为零。公式(9.16)和(9.17)与公式(9.21a)和(9.21b)可以合并，得到

---

* 在简支端的力矩不必为零。这是经常的情况；相反 $M(x_e,t)=M_e(t)=$已知力矩。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{x=x_e}=0 \tag{9.22a}$$

和

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Bigg|_{x=x_e}=0 \tag{9.22b}$$

因此，一根梁的各端，需要两个端点条件。例如，当集中质量或一根弹簧放在梁的端部时，就出现了不同的端点条件。在这种情况下，最好的办法是用图 9.2b 中所规定的符号，仔细地画出自由体图。

例题 9.2

如果一个点的质量为 m 放在梁的端点 $x=L$ 处，确定其适当的边界条件。见图 E9.2.1。

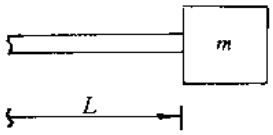


图 E9.2.1

解：

画出分离质点 m 的自由体图如图 $E9.2.2$。应用图 9.2b 中的规定符号。

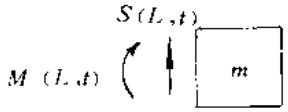


图 E9.2.2

该质点应用牛顿定律

$$+\uparrow \sum F_y=ma_y \tag{1}$$

根据自由体图

$$S(L,t)=m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Bigg|_{x=L} \tag{2}$$

合并公式(2)，(9.16)和(9.17)得到

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{x=L}=m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Bigg|_{x=L}} \tag{3}$$

因为质点没有转动惯量

则

$$\sum M_G=0 \tag{4}$$

即

$$M(L,t)=0 \tag{5}$$

$$\boxed{\left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0} \tag{6}$$

公式(3)与公式(6)适用于顶部-质量及它的转动惯量 I_G 可以不计的端点条件。

例题 9.3

一根梁承受一个巨大的端荷载压力 N，它平行于 x 一轴，确定其运动方程，不计轴向应变(注意耦联的轴向弯曲运动将在习题 9.1 中加以考虑)，如图 E9.3.1 所示。

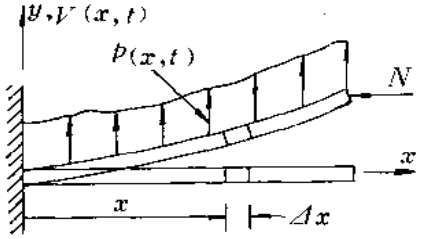


图 E9.3.1

解：

a. 画出单元长度为 Δx 的自由体图，见图 E9.3.2。

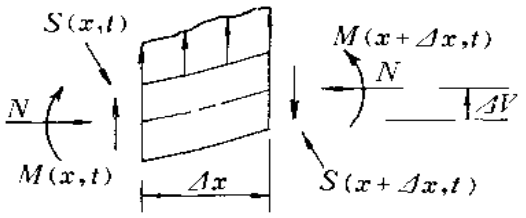


图 E9.3.2

b. 写出运动方程

根据前面推导出的没有 N 的梁，

$$+\uparrow \sum F_y = \Delta m a_y \tag{1}$$

$$\searrow + \sum M_G = 0 \tag{2}$$

由公式(1)引出

$$-\frac{\partial S}{\partial x}+p(x,t)=\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{3}$$

如前，公式(2)给出

$$M(x+\Delta x,t)-M(x,t)+N[v(x+\Delta x,t)-v(x,t)] -S(x+\Delta x,t)\Delta x=0 \tag{4}$$

用 Δx 除之，并取 $\Delta x \to 0$ 的极限，得到

$$\frac{\partial M}{\partial x} + N\frac{\partial v}{\partial x} = S \tag{5}$$

公式(3)和公式(5)可以合并，得到

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + N\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x,t) \tag{6}$$

最后，公式(9.17)与公式(6)合并，得到

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + N\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x,t)} \tag{7}$$

§9.3 哈密顿原理应用

在第2章中，使用牛顿定律与虚位移原理已推导出各种 **SDOF** 系统的运动方程。下面将要论述的哈密顿(Hamilton)原理，是直接关系到虚位移原理* 的。在第2章中已叙述了应用虚位移原理推导出 **SDOF** 系统的运动方程。因为它用的是动能与势能，它们是标量，而没有使用惯性力与弹性力的虚功，它们必须由有矢的参量得出，所以哈密顿原理应用起来比虚位移原理来得容易。因此连续系统应用哈密顿原理会带来一个很大的好处，即在得到运动方程** 的过程中，可以系统地处理边界条件。

在系统地阐述哈密顿原理时，要应用虚位移，即相对位置的虚变化。图2.5表示了一个相对位置有虚变化的悬臂梁，$\delta v(x,t)$。根据§2.4中的注意事项，相对位置的虚变化必须满足全部几何边条件。哈密顿又假定：其相对位置是规定在时间 t_1 和 t_2。对于悬臂梁，这样将意味着 $\delta v(x,t_1) = \delta v(x,t_2) = 0$。

哈密顿原理可以叙述为***

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2}\delta W_{nc}dt = 0 \tag{9.23}$$

式中

T = 系统的总动能。

V = 系统的势能，包括了应变能与保守外力的势能。

δW_{nc} = 非保守力所做虚功，包括了阻尼力和没有计算在 V 中的外力。

$\delta(\ \ )$ = 该符号表示括号中参量的第一变分，即虚变化。

t_1, t_2 = 已知系统相对位置变化的时间。

在本节中将应用哈密顿原理来推导悬臂园杆在承受扭转变形时的运动方程与边界条件。(用牛顿定律也能得到同样的结果。)

图9.3中所研究的杆是由于分布的外扭矩 $t(x,t)$ 以及端部扭矩 $T_L(t)$ 而受到的扭转变形。x 截面的转动用 $\theta(x,t)$ 表示。其几何边界条件只有

---

* 经常把动力学的研究再细分成牛顿力学或分析力学。后面又叫做能量法研究。虚位移原理、哈密顿原理和拉格朗日方程是分析力学中所要处理的课题。

** 见参考文献9.1，过去在系统地阐述平板弯曲理论中能量法起着重要作用的讨论。

*** 哈密顿原理可以从虚功原理来推导。见参考文献9.1和9.2。

$$\theta(0,t)=0 \tag{9.24}$$

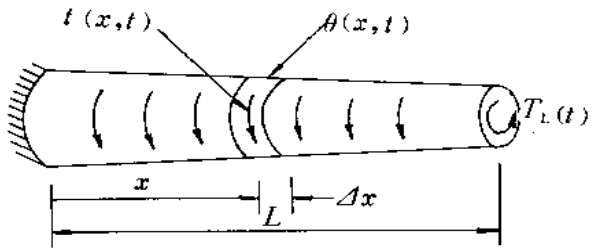


图 9.3 扭转变形杆

极面积矩为*

$$I_p = J = \iint r^2 dA = \frac{\pi R^4}{2} \tag{9.25}$$

式中 $R(x)$=杆在 x 截面处的半径。势能与动能给出为

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L GJ(\theta')^2 dx \tag{9.26}$$

和

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L pI_p(\dot{\theta})^2 dx \tag{9.27}$$

式中

$$(\quad)' = \frac{\partial(\quad)}{\partial x}$$

$$\dot{(\quad)} = \frac{\partial(\quad)}{\partial t}$$

外力所做的虚功为

$$\delta W_{nc} = \int_0^L t(x,t)\delta\theta(x,t)dx + T_L(t)\delta\theta(L,t) \tag{9.28}$$

将公式(9.26)至(9.28)代入公式(9.23),得到

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\delta\left[\frac{1}{2}\int_0^L \rho I_p(\dot{\theta})^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^L GJ(\theta')^2 dx\right]dt \\ &+\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_0^L t(x,t)\delta\theta(x,t)dx + T_L(t)\delta\theta(L,t)\right]dt = 0\end{aligned} \tag{9.29}$$

如在 2.4 中

$$\delta V = \int_0^L GJ\theta'\,\delta\theta'\,dx \tag{9.30}$$

同理

$$\delta T = \int_0^L \rho I_p\,\dot{\theta}\,\delta\,\dot{\theta}\,dx \tag{9.31}$$

需要从 $\delta\theta'$ 与 $\delta\,\dot{\theta}$ 中消去($)'$ 和($\dot{}$)。用部分积分就可得到。对 x 部分积分

---

* 圆截面 $J=I_p$。其他横截面形式 $I_p=\iint r^2dA\neq J$。读者可参阅高等材料力学或弹性力学,能得到 J 的表达式。

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta V\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L GJ\theta'\,\delta\theta'\,dx\,dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[(GJ\theta'\,\delta\theta)\Big|_0^L-\int_0^L(GJ\theta')'\,\delta\theta dx\right]dt \tag{9.32}$$

对 t 部分积分，得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta T\,dt=\int_0^L\int_{t_1}^{t_2}\rho I_p\,\dot\theta\,\delta\,\dot\theta\,dt\,dx$$
$$=\int_0^L\left[(\rho I_p\,\dot\theta\,\delta\theta)\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\rho I_p\ddot\theta\delta\theta dt\right]dx \tag{9.33}$$

公式(9.33)中，在 t_1 和 t_2 的计算项中，包括了 $\delta\theta(x,t_1)$和 $\delta\theta(x,t_2)$。在哈密顿原理中所列的公式是假定初始与最后的相对位置为已知，即 $\theta(x,t_1)$和 $\theta(x,t_2)$为已知。因此，$\delta\theta(x,t_1)=\delta\theta(x,t_2)=0$，所以在公式 9.33 右边的积分项为零。合并公式 9.29，9.32 和 9.33，得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\{[(GJ\theta')\delta\theta]_{x=0}-[(GJ\theta'-T_L)\delta\theta]_{x=L}\}dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L[(GJ\theta')'-\rho I_p\ddot\theta+t]\delta\theta dx dt=0 \tag{9.34}$$

因为公式 9.24 中的几何边界条件，必须置 $\delta\theta(0,t)=0$，所以，在公式 9.34 中的第一项为零。因为 $\theta(L,t)$没有规定，所以 $\delta\theta(L,t)$是完全任意的。那么，可以得到固有边界条件。

$$(GJ\theta')_{x=L}=T_L(t) \tag{9.35}$$

当应用虚位移原理时，**固有边界条件**是这样一种边界条件，在它的边界部分上没有呈现所规定的几何边界条件。它提供了外力类型的边界条件。

在 $0<x<L$ 的区间，$\delta\theta(x,t)$为任意的。因此，在公式 9.34 中的最后一项导出了运动的偏微分方程。

$$-(GJ\theta')'+\rho I_p\ddot\theta=t(x,t) \tag{9.36}$$

于是，运动的偏微分方程公式(9.36)，在 $x=0$ 的几何边界条件公式(9.24)。和在 $x=L$ 的固有边界条件公式(9.35)，就决定了杆件的扭转运动。

§9.4 哈密顿原理应用——梁弯曲包括剪切变形与转动惯量（铁木辛科梁理论）

在 §9.2 中所推导出的薄型长梁横向振动的运动方程中，忽略其剪切变形与转动惯量是正确的。在本节中，应用哈密顿原理所推导的运动方程和边界条件时，是包括了这些效应的。所以短粗梁也能进行分析。

图 9.4 表示梁变形的运动，除了承受纯弯曲外，还承受了剪切变形。$v(x,t)$是梁中性轴总的横向位移。根据图 9.4

$$\beta=\alpha-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{9.37}$$

根据梁的初等理论，其力矩-曲率方程为

$$M=EI\alpha' \tag{9.38}$$

其相应的弯曲应变能为

$$V_b=\frac{1}{2}\int_0^L EI(\alpha')^2dx \tag{9.39}$$

剪切应变能可表示为

$$V_s = \frac{1}{2}\int_0^L \kappa GA\beta^2 dx \tag{9.40}$$

式中剪切系数 κ 可由剪切所计算出的应变能来得到

$$V_s = \frac{1}{2}\int_0^l \int_A \int \tau\gamma dA dx \tag{9.41}$$

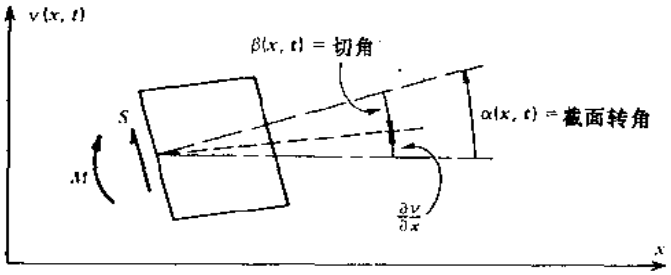


图 9.4　具有剪切变形梁的变形运动

矩形梁，$\kappa=\frac{5}{6}$。

梁的动能为

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A(\dot{v})^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L \rho I(\dot{\alpha})^2 dx \tag{9.42}$$

第一项是由于平移的动能；第二项是转动惯量项。对于具有横向分布荷载 $P(x,t)$ 的梁

$$\delta W_{nc} = \int_0^L p(x,t)\delta v(x,t) dx \tag{9.43}$$

我们可推测，几何边界条件可以使得截面产生平移 $v(x,t)$ 和横截面转动 $\alpha(x,t)$。因此，v 和 α 保留为未知位移的函数，并且可以应用公式(9.37)来消去剪切角 $\beta(x,t)$。将公式(9.39)、(9.40)、(9.42)和(9.43)代入哈密顿原理公式(9.32)中，得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \delta[\rho A\dot{v}^2 + \rho I\dot{\alpha}^2 - EI(\alpha')^2 - \kappa GA(\alpha - v')^2]dx \\ + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho\delta v dx = 0\end{aligned} \tag{9.44}$$

按 § 3.9 中所做的部分积分，注意 $\delta v(x,t_1)=\delta v(x,t_2)=\delta\alpha(x,t_1)=\delta\alpha(x,t_2)=0$，得到

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \{-\rho A\ddot{v} - [\kappa GA(\alpha - v')]' + p\}\delta v dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L [-\rho I\ddot{\alpha} + (EI\alpha')' - \kappa GA(\alpha - v')]\delta\alpha dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2}[\kappa GA(\alpha - v')\delta v]\Big|_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2}[(EI\alpha')\delta\alpha]\Big|_0^L dt = 0\end{aligned} \tag{9.45}$$

因为，这里除了几何边界条件是规定的以外，δv 与 $\delta\alpha$ 是任意的，所以由公式(9.45)导出了下面的运动偏微分方程：

$$[\kappa GA(\alpha - v')]' + \rho A\ddot{v} = p(x,t) \tag{9.46a}$$

$$\kappa GA(\alpha - v') - (EI\alpha')' + \rho I\ddot{\alpha} = 0 \tag{9.46b}$$

下面的**广义边界条件**也可以由公式(9.45)得到：

$$(\kappa GA\beta)\delta v = 0, \text{ 在 } x = 0 \tag{9.47a}$$

$$(\kappa GA\beta)\delta v = 0, \text{ 在 } x = L \tag{9.47b}$$

$$(EI\alpha')\delta\alpha = 0, \text{ 在 } x = 0 \tag{9.47c}$$

$$(EI\alpha')\delta\alpha = 0, \text{ 在 } x = L \tag{9.47d}$$

上面的四个边界条件中的任一个必须满足几何边界条件，即 v(或 α)的规定，而且也要满足固有边界条件，即 $\beta=0$(或 $\alpha'=0$)。

若梁为非均匀截面的性质，可以合并公式(9.46)，来得到用 v 表示的一单个方程式。根据公式(9.46a)

$$\alpha' = v'' + \left(\frac{1}{\kappa GA}\right)(p - \rho A\ddot{v}) \tag{9.48}$$

微分公式(9.46b)，并将公式(9.48)代入所得到的公式中，得到

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \left(p - \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) - \rho I\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} \tag{9.49}$$

伯努利—欧拉理论　　主转动惯量项

$$+\frac{EI}{\kappa GA}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p - \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) - \frac{\rho I}{\kappa GA}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(p - \rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) = 0$$

主剪切变形项　　合并的转动惯量和剪切变形

根据公式(9.49)，识别伯努利-欧拉理论项，以及剪切变形和转动惯量的校正项是可能的。

参考文献

9.1 H. L. Langhaar, (*Energy Methods in Applied Mechanics*), Wiley, New York (1962).

9.2 L. Meirovitch, (*Analytical Methods in Vibrations*), Macmillan, New York (1967).

习题组 9.1

9.1 在例题 9.1 中讨论了顶部质量边界条件的轴向振动和例题 9.2 中讨论的弯曲振动的效应。如果质量偏于杆端，如图 P9.1 所示，其轴向和弯曲振动是耦联的。应用近似自由体图，确定轴向和横向振动的边界条件。

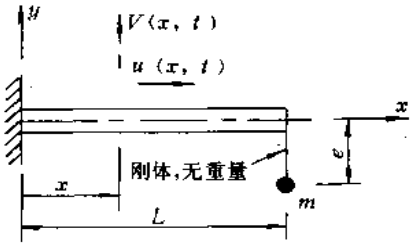


图　P9.1

9.2 一均匀薄刚杆 BC 的质量 m，长度 L 附在一均匀柔性梁 AB 上，设侧向位移很小。应用恰当的自由体图，确定 A 与 B 点的边界条件。见图 P9.2。

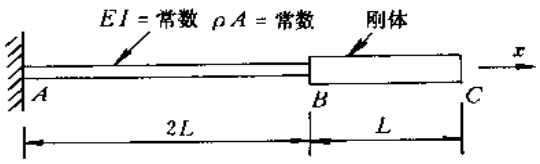


图 P9.2

习题组 9.2

9.3 一小的质量 $m=(\rho AL/4)$连接在一均匀刚性无重量长度为 e 的臂上，如图 P9.1 所示。只研究在 x-y 平面内的振动。应用哈密顿原理推导系统的运动微分方程和系统的边界条件。

9.4 一均匀悬臂杆具有扭转刚度 GJ，垂直弯曲刚度 EI，单位长度质量 ρA 和扭转质量惯性矩 ρI_p。在 B 端接连一刚性无重量杆 BC 平行于 y-轴。在 C 点附有一集中质量 m 在 BC 杆上，并在 C 点平行于 z-轴作用一荷载 $P(t)$。设杆在垂直(x-z)平面内弯曲为挠曲 $v(x,t)$和对该轴的扭转为扭转角 $\theta(x,t)$。假定全部挠曲是很小的(即假定 θ 很小，m 移动近似垂直)以及不计重力。见图 P9.4。

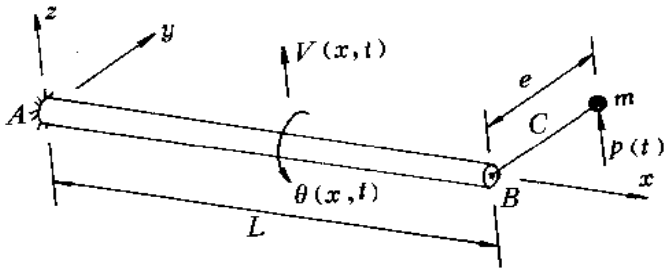


图 P9.4

应用哈密顿原理来推导运动方程和该系统的边界条件。

9.5 用哈密顿原理推导习题 9.2 中柔性梁 AB 的运动方程和边界条件。

第 10 章　连续系统自由振动

第 9 章已经推导了几种一维结构连续模型的运动方程与边界条件。所谓一维结构，即结构变形取决于一个空间变量和时间 t。在本章中将要讨论连续系统自由振动的固有频率和振型的重要概念。在这一章中，以均匀杆所得到的结果作为精确解与下一章的多自由度中所得到的结果作相互比较。在本书中不论述连续系统的强迫振动，因为只有很少的实际结构才能比较容易地应用均匀连续杆件来进行模拟。

本章将完成如下内容

- **均匀杆件在规定的边界条件下，解轴向、横向及扭转自由振动的固有频率和振型。**
- **讨论梁的横向振动，包括剪切变形和(或)转动惯量的条件。**
- **讨论均匀梁在轴向振动与横向振动时的频率关系。**
- **应用瑞利(Rayleigh)法近似计算杆件的基频。论述近似解频率与精确解频率间的关系。**
- **推导杆的轴向、横向或扭转振动时的正交方程。**
- **描述正规振型的三种方法，定义广义刚度与广义质量。**

§10.1　轴向自由振动

公式(9.7)已给出了分布轴向荷载杆件的轴向振动的运动方程。对于自由振动，则可以减化成

$$(AEu')' = \rho A\, u \tag{10.1}$$

设已知为简谐运动，则方程为

$$u(x,t) = U(x)\cos(\omega t - \alpha) \tag{10.2}$$

将该式代入公式(10.1)中，得到**特征值方程**

$$(AEU')' + \rho A\omega^2 U = 0 \tag{10.3}$$

对于已知一组边界条件的这个常微分方程，其所具有的解只是确定 ω_r 值和相应的函数 $U_r(x)$。现在研究一均匀杆，即 A=常量，E=常量和 ρ=常量。则公式(10.3)可减化成

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \left(\frac{\rho\omega^2}{E}\right)U = 0 \tag{10.4}$$

该式可以写成

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\lambda^2U=0 \tag{10.5}$$

其中

$$\lambda^2=\frac{\rho\omega^2}{E} \tag{10.6}$$

公式(10.5)的通解为

$$U(x)=A_1\cos\lambda x+A_2\sin\lambda x \tag{10.7}$$

用公式(10.2)代入公式(9.8b)和(9.8c)中，得到自由振动的端点条件。

(a)固定端：

$$U=0 \tag{10.8a}$$

(b)自由端：

$$\frac{dU}{dx}=0 \tag{10.8b}$$

例题 10.1

推导均匀悬臂杆，在轴向运动时的固有频率和振型。见图 E10.1.1

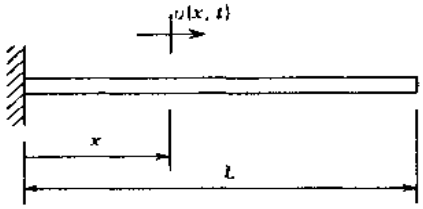


图 E10.1.1

解：

边界条件为

$$U(0)=\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=L}=0 \tag{1}$$

公式(10.7)对 x 的微分，得到

$$\frac{dU}{dx}=-A_1\lambda\sin\lambda x+A_2\lambda\cos\lambda x \tag{2}$$

计算公式(1)的两个边界条件，得到

$$U(0)=A_1=0 \tag{3}$$

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=L}=A_2\lambda\cos\lambda L=0 \tag{4}$$

因为 $A_1=A_2=0$，所以表示为平凡解，又因公式(3)需要 $A_1=0$，所以必须在公式(4)中选择 λ 如此，

$$\cos\lambda L=0 \tag{5}$$

这个就是本例题的**特征方程**。特征方程的根为

$$\lambda L=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\cdots,(r-\frac{1}{2})\pi,\cdots \tag{6}$$

应用公式(10)，得到

$$\omega_r=\lambda_r\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}=\frac{(\lambda L)_r}{L}\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \tag{7}$$

所以固有频率为

$$\boxed{\omega_r=\frac{(2r-1)\pi}{2L}\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}} \tag{8}$$

合并公式(10.7)与公式(3)，得到相应的振型

$$U_r(x)=C\sin\lambda_r x \tag{9}$$

即

$$\boxed{U_r(x)=C\sin\left[\left(r-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{L}\right]} \tag{10}$$

式中 C 为任意定标系数。(§10.5 讨论定标。)因此，振型为正弦曲线，如图 E10.1.2 所示。

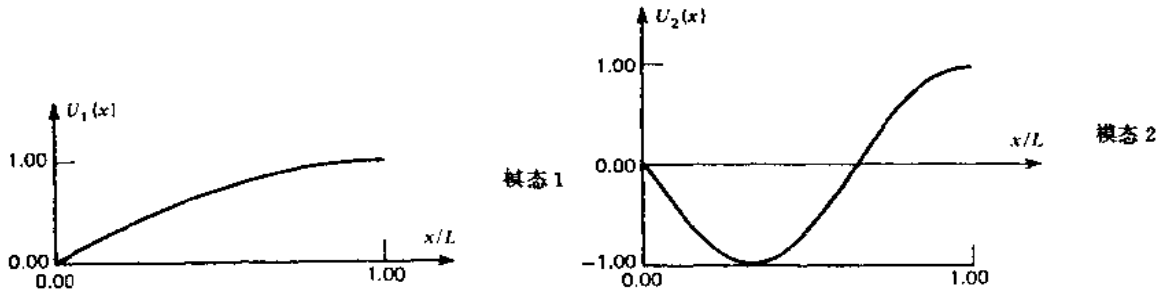


图 E10.1.2

在数学词汇中，公式(10.5)是一个**特征方程**，λ_r 为**特征值**，$U_r(x)$为相应的**特征函数**。

注意例题 10.1 中的 $U_1(x)$曲线显示了没有与 x-轴相交，而 $U_2(x)$的曲线有一个点相交，其 $U(x)=0$。这个点称为**节点**。根据模态数 r 的增加，节点数也相应增加，如 $U_5(x)$将会有四个节点。

§10.2 伯努利-欧拉梁横向自由振动

伯努利-欧拉梁的横向振动由公式(9.18)所决定。其自由振动可减化成

$$(EIv'')''+\rho A\ddot{v}=0 \tag{10.9}$$

其次设为已知简谐运动，其方程为

$$v(x,t)=V(x)\cos(\omega t-\alpha) \tag{10.10}$$

将该式代入公式(10.9)中，得到特征值方程

$$(EIV'')''-\rho A\omega^2 V=0 \tag{10.11}$$

因为不可能得到这个带变量系数方程的闭型解，所以这会限制研究均匀梁的自由振动。均匀梁的横向自由振动已经广泛研究[10.1,10.2]。已经常应用的均匀梁的振型以及其近似方法将在

§11.4 中加以讨论。

均匀梁的自由振动，公式(10.11)可减化为

$$\frac{d^4V}{dx^4}-\lambda^4V=0 \tag{10.12}$$

式中

$$\lambda^4=\frac{(\rho A\omega^2)}{EI} \tag{10.13}$$

公式(10.13)的通解可以写成如下形式

$$V(x)=A_1e^{\lambda x}+A_2e^{-\lambda x}+A_3e^{i\lambda x}+A_4e^{-i\lambda x} \tag{10.14a}$$

有两个有用的替换形式为

$$V(x)=B_1e^{\lambda x}+B_2e^{-\lambda x}+B_3\sin\lambda x+B_4\cos\lambda x \tag{10.14b}$$

和

$$V(x)=C_1\sinh\lambda x+C_2\cosh\lambda x+C_3\sin\lambda x+C_4\cos\lambda x \tag{10.14c}$$

在通解中有五个常数，即四个幅值常数与特征值 λ。在计算这些常数时，要利用端点的边界条件。这些准备在下面的例题中加以说明。如果均匀梁为自由振动时，公式(10.10)可以代入到 §9.2 中的端点条件，得到

(a)固定端

$$V=0 \tag{10.15a}$$

$$\frac{dV}{dx}=0 \tag{10.15b}$$

(b)简支端：

$$V=0 \tag{10.16a}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=0 \tag{10.16b}$$

(c)自由端：

$$\frac{d^2V}{dx^2}=0 \tag{10.17a}$$

$$\frac{d^3V}{dx^3}=0 \tag{10.17b}$$

例题 10.2

计算两端简支均匀梁的固有频率及模态，见图 E10.2.1。

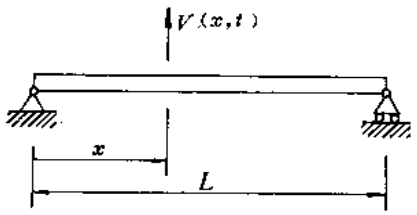


图 E10.2.1

解：

利用公式(10.14c)中的已知通解

$$V(x)=C_1\sinh\lambda x+C_2\cosh\lambda x+C_3\sin\lambda x+C_4\cos\lambda x \tag{1}$$

边界条件为：

$$V(0)=0 \tag{2}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0}=0 \tag{3}$$

$$V(L)=0 \tag{4}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=L}=0 \tag{5}$$

根据公式(1)

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\lambda^2(C_1\sin\lambda x+C_2\cosh\lambda x-C_3\sin\lambda x-C_4\cos\lambda x) \tag{6}$$

计算 $x=0$ 处的边界条件，得到

$$C_2+C_4=0 \tag{7}$$

$$\lambda_2(C_2-C_4)=0 \tag{8}$$

因此 $C_2=C_4=0$。计算剩下的边界条件，得到

$$C_1\sin\lambda L+C_3\sin\lambda L=0 \tag{9}$$

$$\lambda^2(C_1\sinh\lambda L-C_3\sin\lambda L)=0 \tag{10}$$

因为这是一对齐次解，以 C_1 和 C_3 表示的线性代数方程，只要系数的行列式为零，则非平凡解成立，即

$$\begin{vmatrix}\sinh\lambda L & \sin\lambda L\\ \lambda^2\sinh\lambda L & -\lambda^2\sin\lambda L\end{vmatrix}=0$$

即

$$-2\lambda^2\sinh\lambda L\sin\lambda L=0$$

即

$$\sinh\lambda L\sin\lambda L=0 \tag{11}$$

因为只要(λL)$=0$，则 $\sin\lambda L=0$，

若

$$\sin\lambda L=0 \tag{12}$$

才能得到公式(11)的非平凡解。公式(12)为该例题的**特征方程**。如果公式(12)代回到公式(9)(或公式(10))时，则可计算特征值 λ_i，得到

$$C_1=0 \tag{13}$$

因此

$$C_1=C_2=C_4=0,\qquad V(x)=C\sin\lambda x \tag{14}$$

式中 λ 是根据公式(12)计算的。C 为任意一个幅值因数。根据公式(12)，

$$\begin{aligned}\lambda_1L&=\pi\\ \lambda_2L&=2\pi\\ &\vdots\\ &\vdots\\ \lambda_rL&=r\pi\end{aligned} \tag{15}$$

合并公式(10.13)与公式(15),能得到固有频率 ω_r

$$\boxed{\omega_r=\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2\left(\frac{EL}{\rho A}\right)^{1/2}} \tag{16}$$

当公式(15)代入公式(14)时,振型方程变为

$$\boxed{V_r(x)=C\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right)} \tag{17}$$

画出几个振型曲线图,如图 E10.2.2。

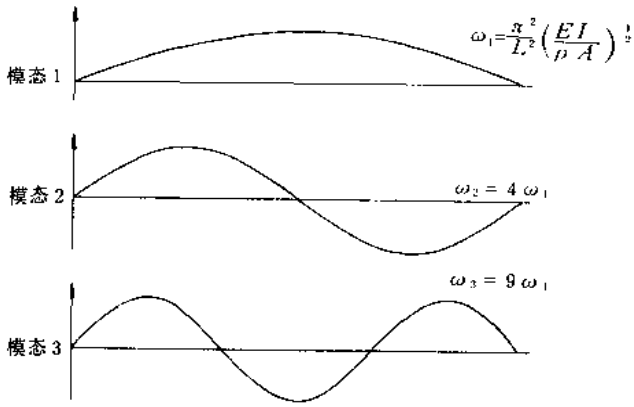


图 E10.2.2

例题 10.3

计算均匀悬臂梁的固有频率和固有模态,如图 E10.3.1。

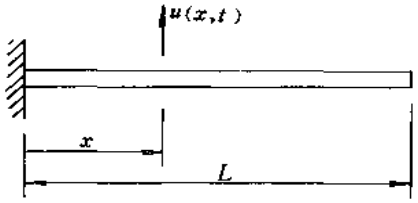


图 E10.3.1

解:

利用公式(10.14)中的已知通解

$$V(x)=C_1\sinh\lambda x+C_2\cosh\lambda x+C_3\sin\lambda x+C_4\cos\lambda x \tag{1}$$

边界条件为

$$V(0)=0 \tag{2}$$

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{x=0}=0 \tag{3}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=L}=0 \tag{4}$$

$$\left.\frac{d^3V}{dx^3}\right|_{x=L}=0 \tag{5}$$

根据公式 1

$$\frac{dV}{dx}=\lambda(C_1\cosh\lambda x+C_2\sinh\lambda x+C_3\cos\lambda x-C_4\sin\lambda x) \tag{6}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\lambda^2(C_1\sinh\lambda x+C_2\cosh\lambda x-C_3\sin\lambda x+C_4\cos\lambda x) \tag{7}$$

$$\frac{d^3V}{dx^3}=\lambda^3(C_1\cosh\lambda x+C_2\sinh\lambda x-C_3\cos\lambda x+C_4\sin\lambda x) \tag{8}$$

将公式 1 与公式 6 至 8 代入边界条件方程公式 2 至 5，可以得到下面的公式

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \lambda^2\sinh\lambda L & \lambda^2\cosh\lambda L & -\lambda^2\sin\lambda L & -\lambda^2\cos\lambda L \\ \lambda^3\cosh\lambda L & \lambda^3\sinh\lambda L & -\lambda^3\cos\lambda L & \lambda^3\sin\lambda L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

若这组齐次方程有非平凡解，则系数的行列式必须为零。这样导出**特征方程**

$$\cos\lambda L\cosh\lambda L+1=0 \tag{10}$$

它的根是特征值 λr 乘以长度 L。该特征方程的根没有适用的简单的表达式，所以需要公式 10 的数值解。($\lambda_r L$)的值可在参考文献 10.2 中的表内查到，在 Young 和 Felgar[10.1]的原著中有它的校正误差。下面列出几个值。

$$\begin{aligned} \lambda_1 L &= 1.8751 \\ \lambda_2 L &= 4.6941 \\ \lambda_3 L &= 7.8548 \\ \lambda_4 L &= 10.996 \end{aligned} \tag{11}$$

根据公式 10.13

$$\omega_r=\frac{(\lambda_r L)^2}{L^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2} \tag{12}$$

所以

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{3.516}{L^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2} \\ \omega_2 &= \frac{22.03}{L^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2} \\ \omega_3 &= \frac{61.70}{L^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{13}$$

利用公式 9 中的四个方程式中的三个来确定振型，按照第四个常数来表示其他三个，也可以是任意的。比方说，公式 9 的第一、二方程

$$\begin{aligned} C_4 &= -C_2 \\ C_3 &= -C_1 \end{aligned} \tag{14}$$

又比如第三个方程

$$C_1\sinh(\lambda_r L)+C_2\cosh(\lambda_r L)-C_3\sin(\lambda_r L)-C_4\cos(\lambda_r L)=0 \tag{15}$$

它与公式 14 可以合并，得到

$$C_1\sinh(\lambda_r L)+C_2\cosh(\lambda_r L)+C_3\sin(\lambda_r L)+C_2\cos(\lambda_r L)=0$$

即

$$C_1=-C_2\left[\frac{\cosh(\lambda_r L)+\cos(\lambda_r L)}{\sinh(\lambda_r L)+\sin(\lambda_r L)}\right]=-k_r C_2 \tag{16}$$

公式 14 和公式 16 可以与公式 1 合并得到振型

$$V_r(x)=C\{\cosh(\lambda_r x)-\cos(\lambda_r x)-k_r[\sinh(\lambda_r x)-\sin(\lambda_r x)]\} \tag{17}$$

式中 k_r 在公式 16 中为已知，C 是任意幅值常数。画出均匀悬臂梁的三个振型，如图 E10.3.2。

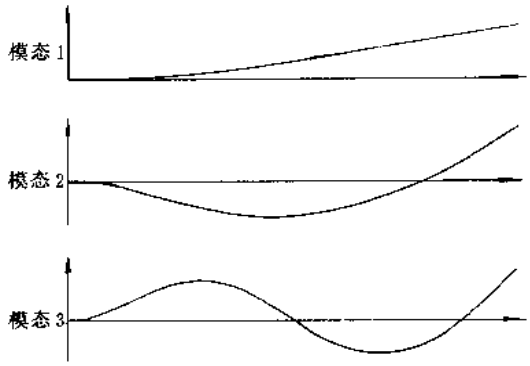


图 E10.3.2

在上面的例题中，要注意用解超越方程的根来计算固有频率(特征值)。还要注意每个振型都有一个任意的幅值。模态和频率的这些特性和其他一些特性将在 § 10.5 中加以讨论。

§ 10.3 连续系统固有频率瑞利近似表示法

在 § 2.4 中，为了得到一个连续系统 **SDOF** 的近似表示法，曾给读者介绍了假定振型法。实际上是瑞利(Rayleigh)[10.3]推广的一种方法，是用来估算无阻尼连续系统的基频。现在研究与例题 2.9 中相似的一根梁。

瑞利考察了无阻尼自由振动，其运动是简单的简谐运动。因此

$$v(x,t)=V(x)\cos(\omega_R t)=\hat{V}\psi(x)\cos(\omega_R t) \tag{10.18}$$

式中 ω_R 将标明瑞利近似表示的基频；$\psi(x)$是在 § 2.4 中的假定型函数。瑞利也观察到能量是守恒的。因此，就因能量守恒，所以最大势能等于最大动能，即

$$T_{max}=V_{max} \tag{10.19}$$

图 10.1 中的梁，已知其应变能为

$$V=\frac{1}{2}\int_0^L EI(v'')^2dx+\frac{1}{2}k_i v_i^2 \tag{10.20}$$

已知其动能为

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L \rho A(\dot{v})^2dx+\frac{1}{2}m_s\dot{v}_s^2 \tag{10.21}$$

将公式 10.18 代入这些成果

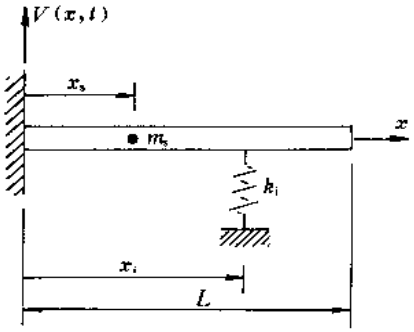


图 10.1　梁的自由振动

$$V_{max}=\frac{1}{2}k\hat{V}^2 \tag{10.22}$$

和

$$T_{max}=\frac{1}{2}\omega_R^2\hat{V}^2 \tag{10.23}$$

这里根据 § 2.4

$$k=\int_0^L EI(\psi'')^2dx+k_i[\psi(x_i)]^2 \tag{10.24}$$

和

$$m=\int_0^L \rho A\psi^2dx+m_s[\psi(x_s)]^2 \tag{10.25}$$

最后，根据公式 10.19、10.22 和 10.23，得到所谓的**瑞利商**

$$R(V)=\omega_R^2=\frac{k}{m} \tag{10.26}$$

注意在公式 3.4a 中采用 § 2.4 中的广义刚度和广义质量、因而得到了相同的自由振动结果。因此，瑞利法与假定振型法导出了近似频率的相同表达式。

例题 10.4

利用瑞利法计算均匀悬臂梁的近似基频。利用

$$\psi(x)=\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

所得到的基频与例题 10.3 中所得到基频的精确解作比较。

解：

$$\psi''=\frac{2}{L^2} \tag{1}$$

$$k=\int_0^L EI(\psi'')^2dx=EIL\left(\frac{4}{L^4}\right)$$

$$k=\frac{4EL}{L^3} \tag{2}$$

$$m=\int_0^L \rho A\psi^2dx=\frac{\rho A}{L^4}\int_0^L x^4dx$$

$$m=\frac{\rho AL}{5} \tag{3}$$

根据公式 10.26

$$\omega_R^2=\frac{k}{m}=\frac{20EI}{\rho AL^4} \tag{4}$$

则

$$\omega_R=\left(\frac{20}{L^2}\right)^{1/2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2} \tag{5}$$

即

$$\boxed{\omega_R=\frac{4.472}{L^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2}} \tag{6}$$

比较一下该值与例题 10.3 所得到 ω_1 的精确值

$$\omega_1=\frac{3.516}{L^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2}$$

在 § 10.5 中将指出，采用瑞利法所得到的基频总是给出精确解的上限。这与上面的例题情况相同。

§ 10.4 具有剪切变形与转动惯量梁自由振动

在 § 9.4 中已推导出铁木申科梁的运动方程与广义边界条件。为了进一步了解梁的剪切变形与转动惯量的振动效应。因此，研究如例题 10.2 中的一根均匀、简支梁。简支梁的几何边界条件为

$$v(0,t)=v(L,t)=0 \tag{10.27}$$

因为在端点没有规定转角 α，所以公式 9.47c 和公式 9.47d 给出了固有边界条件

$$\alpha'(0,t)=\alpha'(L,t)=0 \tag{10.28}$$

尽管同等满意地选择公式 9.46，但是利用公式 9.48 与公式 9.49 作为运动方程还是比较方便的。对于运动方程的自由振动简化成

$$\alpha'=v''-\left(\frac{\rho}{\kappa G}\right)\ddot{v} \tag{10.29}$$

和

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\rho Ar_G^2\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\partial t^2}\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)+\frac{\rho^2 Ar_G^2}{\kappa G}\frac{\partial^4 v}{\partial t^4}=0 \tag{10.30}$$

式中 r_G 为回转半径，$r_G^2=I/A$。

设简谐运动形式为

$$v(x,t)=V(x)\cos\omega t \tag{10.31}$$

公式 10.29 则变成

$$a' = \left[V'' + \left(\frac{\rho\omega^2}{\kappa G}\right)V\right]\cos\omega t \tag{10.32}$$

所以，公式 10.27 和 10.28 的边界条件分别简化成

$$V(0) = V(L) = 0 \tag{10.33a}$$

和

$$V''(0) = V''(L) = 0 \tag{10.33b}$$

这与简单梁理论是相同的。将公式 10.31 代入公式 10.30，得到

$$V^{iv} - \lambda^4 V + \lambda^4 r_G^2 V''\left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) + \lambda^8 r_G^4\left(\frac{E}{\kappa G}\right)V = 0 \tag{10.34}$$

式中 λ^4 由公式 10.13 给出。

简支梁的振型

$$V_r(x) = C\sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \tag{10.35}$$

要满足边界条件。公式 10.33 与运动方程公式 10.34。因此，它给这类问题提供了一个解。将此解代入公式 10.34，得到

$$\underset{(a)}{\left(\frac{r\pi}{L}\right)^4} - \underset{(a)}{\lambda^4} - \underset{(b)}{\lambda^4 r_G^2\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2\left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right)} + \underset{(d)}{\lambda^8 r_G^4\left(\frac{E}{\kappa G}\right)} = 0 \tag{10.36}$$

所标注的(a)项是那些简支梁理论特征方程。判断(c)与(d)项的相对重要性，用简支梁解$(r\pi/L)^4$来近似表示在(d)项中的 λ^4，则(d)项近似表示为

$$\underset{(d)}{\lambda^8 r_G^4\left(\frac{E}{\kappa G}\right)} = \underset{(c)}{\lambda^4 r_G^2\left(\frac{r\pi}{L}\right)^2\left(\frac{E}{\kappa G}\right)}\left(\frac{r\pi r_G}{L}\right)^2$$

因此，当$(r\pi r_G/L) \ll 1$ 时，最后一项比(c)项小。(d)项与(c)项的比较，可以看到，以典型结构材料作成的矩形梁，其 $E/\kappa G = 3$。因此，剪切修正项(c)约为三倍，与转动惯量修正项(b)同样重要。

若不计(d)项，我们就可以近似得到公式 10.36 特征方程的解，以

$$\lambda^4 = \left(\frac{r\pi}{L}\right)^4\left[\frac{1}{1 + r_G^2(r\pi/L)^2(1 + E/\kappa G)}\right] \tag{10.37}$$

因此，当模态数 r 增加，其剪切与转动惯量的修正值增加，当细长比 L/r_G 增加，其剪切与转动惯量的修正值减少。注意，虽然可以人为地将梁变为细长，即 L/r_G 的值增大，不管是否需要对剪切变形和转动惯量进行修正，然而影响细长比效应的是依据波长 L/r、而不是物理长度。这是很重要的。

§10.5 固有模态特性

在§10.1 与§10.2 中介绍了确定连续杆件模态与频率的典型例题。这一节，我们要研究与模态有关的一些特性：定标(即正规化)，正交性，展开定理和瑞利商。现在利用伯努利-欧拉梁的方程来说明这些特性。然而，下面所讨论的不限于均匀梁，所叙述的这些特性同样也能应用到其他的连续系统中[10.4]。

根据公式 10.11，特征值方程为

$$(EIV''_r)''-\rho A\omega_r^2 V_r=0 \tag{10.38}$$

可以规定同类的**广义边界条件**为

$$(EIV'')'\delta V=0 \quad 在\ x=0 \tag{10.39a}$$

$$(EIV'')\delta V'=0 \quad 在\ x=0 \tag{10.39b}$$

$$(EIV'')'\delta V=0 \quad 在\ x=L \tag{10.39c}$$

$$(EIV'')\delta V'=0 \quad 在\ x=L \tag{10.39d}$$

根据这些，可以得到固定，简支及自由端的任何组合。

如前面所指出的，公式 10.38 和公式 10.39 可以确定一组**固有频率** $\omega_r(r=1,2,\cdots)$和相应的**固有模态** $V_r(x)(r=1,2,\cdots)$，其中后边这项只是确定里边的一个常数乘子，即确定**振型**，而不是**幅值**。因此，可用任何一种简便的方法来定标模态。

定标(正规化)

定标模态就是使它们有个唯一的幅值，以 $\phi_r(x)$来表示，令

$$V_r(x)=c_r\phi_r(x) \tag{10.40}$$

将 $\phi_r(x)$看成是无量纲，并且令 c_r 含有单位的 $V(x)$，这样比较方便。模态定标经常使用三种方法：

1. 模态定标就是在结构上的一个特定位置，规定一个幅值，例如在一指定位置 x_s*，使其 $\phi_r(x_s)=1$。

2. 模态定标就是在一点的 $|\phi_r(x)|$ 为一指定值，使该点的 $|\phi_r(x)|$ 为最大，例如 $\max_x|\phi_r(x)|=1$。

3. 模态定标就是使广义质量，即**模态质量**定义为

$$M_r=\int_0^L \rho A\phi_r^2 dx \tag{10.41}$$

使其具有一指定值。通常该值采用 $M_r=1$**

使模态的幅值变成唯一的这个过程叫做**正规化**。并将所得到的模态 $\varphi_r(x)$叫做**正规模态*****

第 r 阶模态的广义刚度，即**模态刚度**定义成

$$K_r=\int_0^L EI(\phi''_r)^2 dx \tag{10.42}$$

k_r 与 M_r 在下面的方法中是相互有关的。令公式 10.38 乘 φ_r，并从 0 到 L 积分，则

$$\int_0^L (EI\phi''_r)''\phi_r dx-\omega_r^2\int_0^L \rho A\phi_r^2 dx=0 \tag{10.43}$$

注意 K_r 包括$(\phi''_r)^2$，能用两次部分积分公式 10.43 的第一项得到

---

* 有时用这种定标方法，x_s 点具有特定的相对位置，例如海洋平台的主台面位置，建筑物顶层位置等等。这种方法要比下面的方法(2)和方法(3)有更多的限制性。然而，因为有时位置 x_s 可以是某模态的一个节点，因此，$V_r(x_s)=0$。所以这种定标方法，是不能使用在这样一种模态上的。

** 因为考虑 ϕ_r 为无量纲是方便的，所以用 M_r 作为质量单位，例如 $M_r=1 lb_f-s^2/ft$。

*** 某些著作者将"正规模态"用更一般的意义叫做任意振型。另外将"正规模态"的词限制在那些模态是正规化的，所以 $M_r=1$。

$$(EI\phi''_r)'\phi_r\Big|_0^L-(EI\phi''_r)\phi'_r\Big|_0^L+\int_0^L EI(\phi''_r)^2dx$$
$$-\omega_r^2\int_0^L\rho A\phi_r^2dx=0 \tag{10.44}$$

根据公式 10.39 由于几何或固有边界条件，不管每端的支承类型如何，要承认在公式 10.44 中的所有边界项为零。根据 M_r 与 K_r 的定义，则公式 10.44 减化成

$$\omega_r^2=\frac{K_r}{M_r} \tag{10.45}$$

正交性

固有模态的最重要特性为**正交性**。推导正交性，用 $\phi_s(\neq\phi_r)$ 乘公式 10.38，并从 0 到 L 积分

$$\int_0^L(EI\phi''_r)''\phi_s dx-\omega_r^2\int_0^L\rho A\phi_r\phi_s dx=0 \tag{10.46}$$

用部分积分，并注意模态 r 与 s 的边界条件相同，我们就能减化公式 10.46 为

$$\int_0^L EI\phi''_r\phi''_s dx-\omega_r^2\int_0^L\rho A\phi_r\phi_s dx=0 \tag{10.47}$$

开始用公式 10.38 写模态 s，用 ϕ_r 乘，并从 0 至 L 积分，得到

$$\int_0^L EI\phi''_r\phi''_s dx-\omega_s^2\int_0^L\rho A\phi_r\phi_s dx=0 \tag{10.48}$$

从公式 10.48 中减去公式 10.47，得到

$$(\omega_r^2-\omega_s^2)\int_0^L\rho A\phi_r\phi_s dx=0 \tag{10.49}$$

两个模态具有不同频率时，那么，其**正交性性质**

$$\int_0^L\rho A\phi_r\phi_s dx=0\qquad \omega_r\neq\omega_s \tag{10.50}$$

为有效。就是说该模态**与质量分布正交**。将公式 10.50 代入公式 10.47 或公式 10.48 中的一个，可以看到模态 ϕ_r 与 ϕ_s 也**与刚度分布正交**，其定义为

$$\int_0^L EI\phi''_r\phi''_s dx=0 \tag{10.51}$$

$M_r=1$ 的模态 $\phi_r(x)$ 要满足正规化条件

$$\int_0^L\rho A\phi_r^2dx=1 \tag{10.52}$$

并且要满足正交性条件

$$\int_0^L\rho A\phi_r\phi_s dx=0 \tag{10.53}$$

这组模态 $\phi_r(x)$，$r=1,2,\cdots$，就叫做**正规模态组**。

展开定理

连续系统的**展开定理**叙述如下[10.4]：被满足相同边界条件的，一组正规化模态，$\phi_r(r=1,2,\cdots)$ 和它的 $(d^2/dx^2)(EId^2V/dx^2)$ 是一个连续函数，来满足任何函数 $V(x)$ 都可表示成一个无条件的和均匀收敛的级数形式。

$$V(x)=\sum_{r=1}^{\infty}c_r\phi_r(x) \tag{10.54}$$

其中系数 c_r 已知为

$$c_r=\frac{\int_0^L\rho AV\phi_r dx}{\int_0^L\rho A\phi_r^2 dx} \tag{10.55a}$$

即

$$c_r=\int_0^L\rho AV\phi_r dx \qquad r=1,2,\cdots \tag{10.55b}$$

从公式 10.54 推导公式 10.55 中，使用了正交方程、公式 10.53 和正规化方程、公式 10.52。

瑞利商

令 $\boldsymbol{V}(x)$ 为任意函数要满足上面展开定理中所提到的边界条件与连续条件。对于一个没有集中弹簧或质量的梁，那么**瑞利商**就定义为

$$R(V)=\frac{k}{m}=\frac{\int_0^L EI(V'')^2dx}{\int_0^L\rho AV^2dx} \tag{10.56}$$

在 §10.3 中已用瑞利商得到了基频的一个近似值。公式 10.45 表示，当 $\boldsymbol{V}=c_r\phi_r(x)$，则 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V})=\omega_r^2$。令公式 10.54 代入公式 10.56 中，则利用正规化条件可得到

$$R(V)=\frac{c_1^2\omega_1^2+c_2^2\omega_2^2+c_3^2\omega_3^2+\cdots}{c_1^2+c_2^2+c_3^2+\cdots}$$

也可以写成这个形式

$$R(V)=\omega_1^2\left[\frac{1+(c_2/c_1)^2(\omega_2/\omega_1)^2+(c_3/c_1)^2(\omega_3/\omega_1)^2+\cdots}{1+(c_2/c_1)^2+(c_3/c_1)^2+\cdots}\right] \tag{10.57}$$

逐项比较分子和分母，我们看到，因为 ω_1 为最低频率，所以分子要大于分母。因此，

$$R(V)\geqslant\omega_1^2 \tag{10.58}$$

当 $c_2=c_3=\cdots=0$ 时，则该式保持相等。瑞利商因此就为基频提供了上界，正如在例题 10.4 中所见。

§10.6 薄板振动

在第 9 章中，已推导了几种一维结构杆件的运动方程。到第 10 章目前为止，已得到了这些杆件模态与频率的解。虽然板、壳振动的讨论超出了本书的范围，但是在这里还是作了一些简要的介绍。为此读者应注意在多维结构中所出现的某些特点。Leissa 已编写了板的振动[10.5]和壳的振动[10.6]的这个极好的课题论文。

平板运动方程根据 Kirchhoff 理论[10.5]为

$$D\Delta^4w+\rho hw_{tt}=0 \tag{10.59}$$

式中下标表示偏微分，D 为板的弯曲刚度、定义为

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{10.60}$$

式中 h 为板的厚度(常数)。$w(x,y,t)$为点$(x,y,z=0)$的横向位移。∇^4 为双调合算子

$$\nabla^4()=()_{xxxx}+2()_{xxyy}+()_{yyyy} \tag{10.61}$$

图 10.2 表示一个矩形板。y 边=常数,下面的广义边界条件适用:

$$[w_{yyy}+(2-v)w_{xxy}]\delta w=0 \tag{10.62a}$$

$$[w_{yy}+vw_{xx}]\delta w_y=0 \tag{10.62b}$$

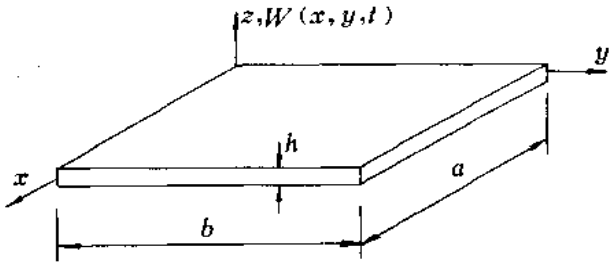


图 10.2 矩形板

置换 x 与 y,可得到 x 边=常数的条件。

只有两对边简支的矩形板的自由振动,才可能有精确解。四边简支的矩形板,它的解特别容易得到。在这里提供一些平板振动特点的说明。简支板的边界条件为:

$$w(0,y)=w(a,y)=w(x,0)=w(x,b)=0 \tag{10.63a}$$

$$w_{xx}(0,y)=w_{xx}(a,y)=w_{yy}(x,0)=w_{yy}(x,b)=0 \tag{10.63b}$$

公式 10.63a 为几何边界条件,公式 10.63b 为固有边界条件,是根据公式 10.62b 得到的。

运动方程容许有一个解,就是时间的简谐运动,即

$$w(x,y;t)=W(x,y)\cos(\omega t-\alpha) \tag{10.64}$$

则公式 10.59 就变成特征值方程

$$\nabla^4W-\lambda^4W=0 \tag{10.65}$$

式中

$$\lambda^4=\frac{\omega^2\rho h}{D} \tag{10.66}$$

其空间函数

$$W_{(m,n)}(x,y)=C\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{10.67}$$

要满足所有边界条件,并代入公式 10.65 时,应得到

$$\lambda^2_{(m,n)}=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{10.68}$$

利用公式 10.66 与公式 10.68,固有频率 $\omega_{(m,n)}$可以表示为

$$\omega_{(m,n)}=\left(\frac{\pi^4D}{\rho ha^4}\right)^{1/2}\left[m^2+n^2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right] \tag{10.69a}$$

即

$$\omega_{(m,n)}=\left(\frac{\pi^4D}{\rho hb^4}\right)^{1/2}\left[m^2\left(\frac{b}{a}\right)^2+n^2\right] \tag{10.69b}$$

应用参数(m,n)来描述模态是较方便的,而不用单个参数,如在一维结构杆件中所使用的。对于简支板,要分别规定在 x 与 y 方向上半正弦波的数目;公式 10.67。

二维结构的模态经常用画**节线**的办法来形象化表示，如图 10.3。这些线的位置必须对全

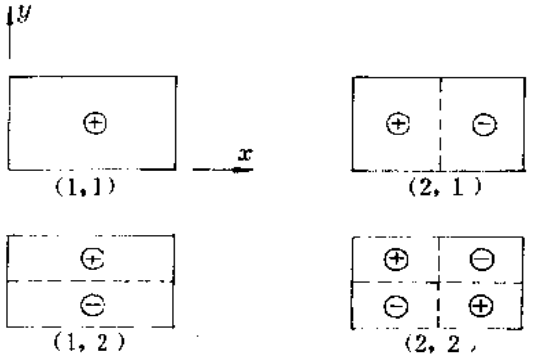


图 10.3　矩形板节线

部时间的 $w(x,y;t)=0$。⊕和⊖表示各不同部位 $W(x,t)$的相对符号。注意根据公式 10.69a，假如 $a>b$ 时，则模态(2.1)的频率比模态(1,2)的频率小；利用图 10.3 就可说明这些。比方说将板分成方块。

在简支矩形板中很容易论证一个特征，这个特征也能发生在其他结构中，就是重频现象，即 $\omega_{(m,n)}=\omega_{(n,m)}$，因为 $a=b$。令 $\boldsymbol{W}_{(m,n)}$和 $\boldsymbol{W}_{(n,m)}$为相应于 $\lambda_{(m,n)}=\lambda_{(n,m)}$的不同空间模态。那么，任何的线性组合 $\boldsymbol{W}_{(m,n)}+c\boldsymbol{W}_{(n,m)}$应满足方程

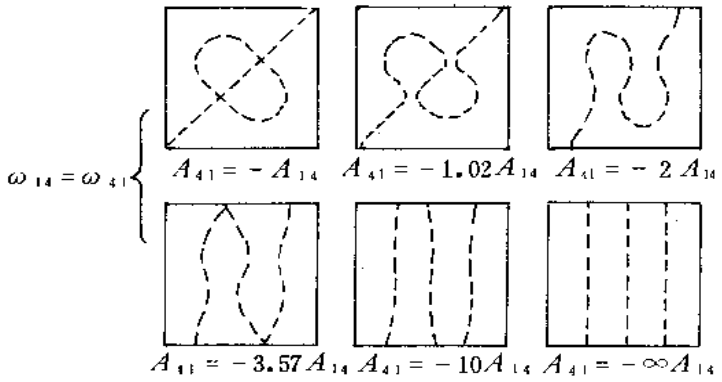


图 10.4　固有频率 $\omega_{(1,4)}=\omega_{(4,1)}$板的节线(参考文献 5)

$$\nabla^4 W-\lambda^4 W=0 \tag{10.70}$$

这个意思就是没有两个唯一的振型，而是一个二维模态子空间的形式

$$W=A_{(m,n)}W_{(m,n)}+A_{(n,m)}W_{(n,m)} \tag{10.71}$$

图 10.4 表示某些方形板所得到的一些有趣的波形图。这里 $\boldsymbol{W}_{(1,4)}$与 $\boldsymbol{W}_{(4,1)}$是由公式 10.67 所规定

参考文献

10.1 D. Young and R. P. Felgar, Jr., *Tables of Characteristic Funcitions Representing*

Normal Modes of Vibration of a Beam, Engr. Res. Series No. 44, Bureau of Engr. Research, The University of Texas, Austin, TX(1949).

10.2 T-C. Chang and R. R. Craig, Jr., "Normal Modes of Uniform Beams," *Proc. ASCE*, v. 95, n. EM4, 1025-1031(1969).

10.3 G. Temple and W. G. Bickley, *Rayleigh's Principle*, Oxford University Press, London(1933). Reprinted by Dover Publications, Inc., New York(1956).

10.4 L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan, New York(1967).

10.5 A. W. Leissa, *Vibration of Plates*, NASA SP-160, National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC(1969).

10.6 A. W. Leissa, *Vibration of Shells*, NASA SP-288, National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC(1973).

习题组 10.1

10.1 研究图 P10.1 中匀质杆的轴向振动。

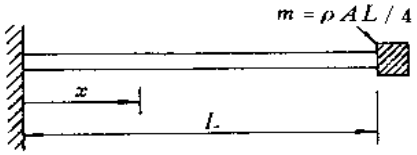


图 P10.1

(a)由特征值求得特征方程。

(b)解杆的轴向基频。

(c)沿杆每隔 $L/5$ 图形所显示的值画出基本振型。

10.2 自由体结构的轴向频率有时是极为重要的，正如一些火箭所经受到的纵向振动问题。图 P10.2 中是研究匀质自由杆的轴向运动。

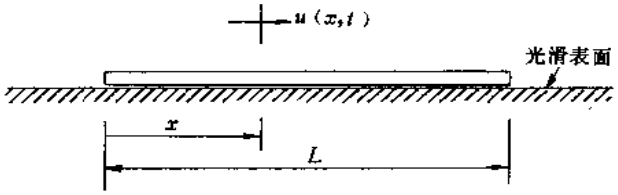


图 P10.2

(a)表示系统有一零频即刚体模态。

(b)确定非零频的特征方程。

(c)解基频。

(d)沿杆每 $L/5$ 处的图形所显示值画出基本(弯曲)模态。

习题组 10.2

10.3 研究图 P10.3 中匀质固定端梁的横向振动。

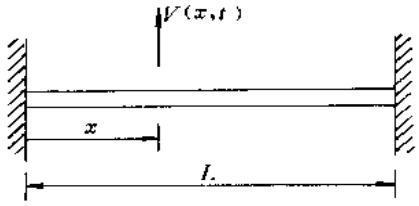


图 P10.3

(a)确定特征方程。

(b)解基频。

(c)沿梁每 $L/8$ 处用计算的与图形所显示的值画出基本模态。

(d)应用例题 10.2 的结果，比较固定端梁与简支梁的基频。

10.4 未被约束的飞船和火箭的飞行器，因此它们能承受刚体运动。将匀质自由体梁视为像自由体结构的性质。现在研究如图 P10.4 所示匀质梁的横向振动。

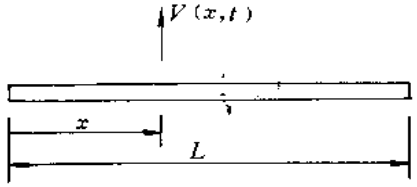


图 P10.4

(a)表示梁的两个零频即刚体模态，一个是平移、一个是转动。

(b)确定非零频的特征方程。(注意：这是与习题 10.3 中夹固端梁有相同的方程。)

(c)解基频。

(d)沿梁每 $L/8$ 处以计算的与图形显示的值画出基本(弯曲)模态。

10.5 有许多结构梁，即不是固定端的也非简支的，而可以考虑成有局部弯曲。确定如图 P10.5 所示梁的特征方程，其中 $0\leqslant\beta\leqslant\infty$ 是个控制参数，控制转动约束的大小。

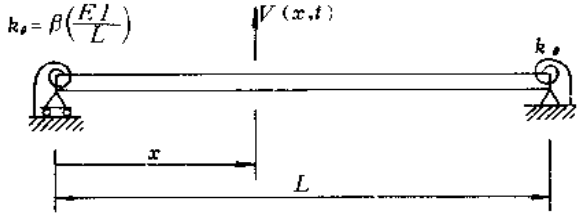


图 P10.5

10.6 "不计轴向运动"常常在模拟框架结构中所遇到的一种处理的说法。如图 P10.6a)中的结构。这种提法在于轴向与横向振动的固有频率是有道理的。利用例题 10.1 和 10.3 的结果，列出悬臂梁前四个轴向频率和前四个弯曲频率。采用 12ft，W10×25 的钢梁($I=248.6$ in^4，$A=13.24$ in^2，$r=0.284$ lb/in^3)如图 P10.6b)所示。

10.7 在习题 9.3 中，对于系统在弯曲一轴向运动所确定的频率，求其特征方程。

10.8 研究图 P10.1 中梁的**横向**振动 $v(x,t)$。

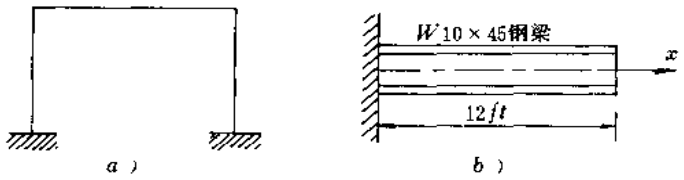


图 P10.6

(a)求特征方程

(b)解横向弯曲的基频。

习题组 10.3

10.9 例题 10.4 中假定模态 $\psi(x)=(x/L)^2$ 仅给了匀质悬臂梁基频的一个粗略计算。

(a)确定一匀质梁承受均匀分布荷载静挠曲的表达式。

(b)利用此静挠曲线为 $\psi(x)$，用瑞利法计算匀质悬臂梁的基频。

10.10 研究图 P10.1 中顶部具有一质量梁的**横向**振动。利用瑞利法计算其弯曲基频。令 $\psi(x)$为匀质梁端部有一集中力的静挠曲线，如图 P10.10 所示。(习题 10.8 给出了基频的精确解。)

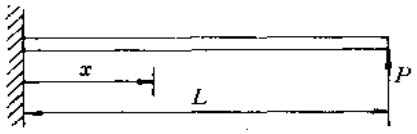


图 P10.10

10.11 一大型空气调节器位于一简支梁中心如图 P10.11 所示。应用瑞利法计算空气调节器质量在梁上的基频表达式。$\psi(x)$仅用于匀质梁的基本振型，如例题 10.2 中所得到的。

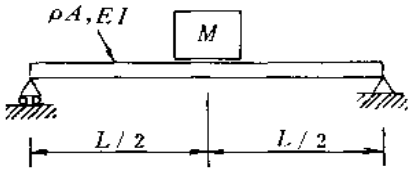


图 P10.11

10.12 一发射塔是由一匀质柱和顶上的设备工作间组成。工作间为一集中质量 $M_p=\mu Mc$，其中 $Mc=\rho AL=$柱的质量。利用瑞利法与 $\psi(x)=(x/L)^2$，计算该系统的基频。如图 P10.12包括 M_p 的几何刚度效应(见例题 2.9)。

习题组 10.4

10.13 研究图 P10.1 中，匀质杆的**轴向**振动。令

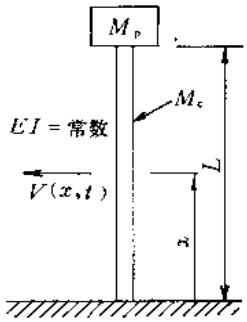


图 P10.12

$$M_r = \int_0^L \rho A \phi_r^2 dx + m[\phi_r(L)]^2$$

和

$$K_r = \int_0^L EA(\phi'_r)^2 dx$$

指出当 M_r 和 K_r 用此方法确定时，则公式 10.45 成立。

10.14

(a)推导图 P10.1 中系统轴向振动模态 ϕ_r 和 ϕ_s 的方程，如它们与质量分布正交，则一定满足。

(b)对于刚度分布的正交，必须满足什么样的方程？

10.15 推导图 P10.5 中梁的方程。定义：

(a)模态 ϕ_r 和 ϕ_s 对质量分布正交；

(b)模态 ϕ_r 和 ϕ_s 对刚度分布正交；

(c)K_r 和 M_r。

Ⅲ　多自由度系统

第 11 章　MDOF 系统数学模型

在第 2 章中已经运用了牛顿定律和虚位移原理推导出 **SDOF** 模型的运动方程。虽然以 **SDOF** 系统可以足够地来描述某些系统的动力特性；然而，在许多情况下，还需要利用更"高级"的模型来描述，例如 **MDOF** 模型。为了说明这个问题，需要研究一根均匀悬臂杆的轴向振动，如图 11.1 所示。在 §10.1 中已叙述了杆的连续模型，它具有无限个固有频率与相应的振型。如果 $p(t)$ 只是时间的"渐变"函数，那么杆的动力问题用 **SDOF** 模型来描述就已经足够了。

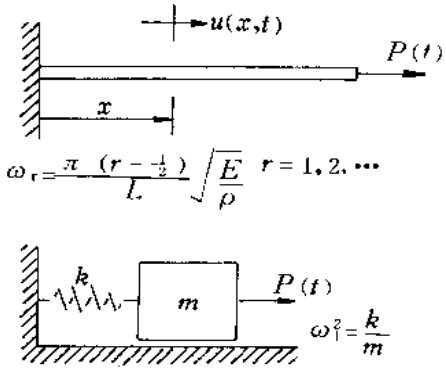


图 11.1　均匀悬臂杆的模型

例如，图 11.1 所表示的质-弹模型。若为连续模型时，就如第 10 章所研究的那样，对于几个具有简单几何图形系统(即均匀杆和梁)的动力问题已给予了深入的有价值的研究。但是对于许多实际结构的分析是根据多自由度(**MDOF**)模型进行的。这一章和下一章，读者将会更进一步地深入研究这个模拟的重要课题。

本章将完成如下内容

- **利用牛顿定律来推导质点和刚体系统的平面运动方程。**
- **应用拉格朗日方程来推导质点和刚体系统的平面运动方程。**
- **应用拉格朗日方程来推导连续系统假定振型模型的运动方程。**

§11.1　集总参数模型牛顿定律应用

在第 2 章中研究了 **SDOF** 模型的应用。对于质点与刚体连接的系统和刚体在一般平面内的运动应引入 **MDOF** 模型。现在应用牛顿定律研究这样系统的几个例题。

例题 11.1

如图 E11.1.1 所示的三个系统、基本上都具有相同的运动方程组。推导如图示质-弹系统的三个运动方程。

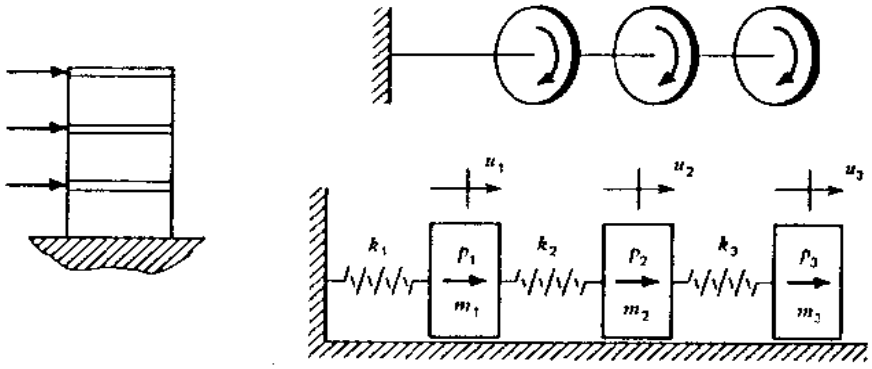


图 E11.1.1

解：

a. 画出每个质点的自由体图，见图 E11.1.2 并标明全部未知力。

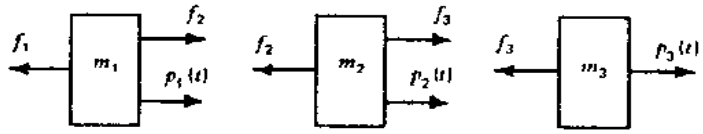


图 E11.1.2

b. 写出每个质点的牛顿第二定律

$$+\rightarrow \sum F_1 = m_1\ddot{u}_1 = p_1 + f_2 - f_1 \tag{1a}$$

$$+\rightarrow \sum F_2 = m_2\ddot{u}_2 = p_2 + f_3 - f_2 \tag{1b}$$

$$+\rightarrow \sum F_3 = m_3\ddot{u}_3 = p_3 - f_3 \tag{1c}$$

c. 弹性力与位移的关系，如图 E11.1.3。

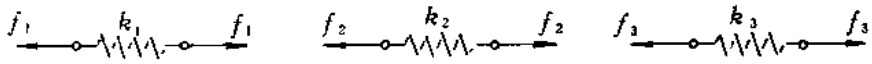


图 E11.1.3

$$f_1 = k_1e_1 = k_1u_1 \tag{2a}$$

$$f_2 = k_2e_2 = k_2(u_2 - u_1) \tag{2b}$$

$$f_3 = k_3e_3 = k_3(u_3 - u_2) \tag{2c}$$

d. 合并、简化公式

$$m_1\ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2u_2 = p_1(t) \tag{3a}$$

$$m_2\ddot{u}_2 - k_2u_1 + (k_2 + k_3)u_2 - k_3u_3 = p_2(t) \tag{3b}$$

$$m_3\ddot{u}_3 - k_3u_2 + k_3u_3 = p_3(t) \tag{3c}$$

按矩阵形式可写出这三个运动方程，即

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2+k_3) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\boxed{\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{ku} = \mathbf{p}(t)} \tag{5}$$

即上面的公式 4 和公式 5 中使用了矩阵的符号，它实质上不是去解这个 3-**DOF** 的问题，而是用这个语言来描述大型的 **MDOF** 系统，特别是使用计算机做这样的系统动力分析。**m** 叫做**质量矩阵**，**k** 为**刚度矩阵**，**u** 为**位移矢量** $\mathbf{p}(t)$ 为**荷载矢量**。

在上面例题的公式 4 中，注意质量矩阵是对角的。因为刚度矩阵 **k** 中有非对角项，则该系统就称为有**刚度耦联**。

在例题 11.1 中，是按绝对位移 u_1、u_2 和 u_3 写出的运动方程。根据 § 2.2 中的注意事项，当系统受到该基础的运动时，应用基础与结构质量间的相对运动是较为方便的。现在研究下面的 2-**DOF** 系统。

例题 11.2

应用牛顿定律推导如图 E11.2.1 示的系统运动方程。

按相对于基础的位移来列出运动方程表达式。

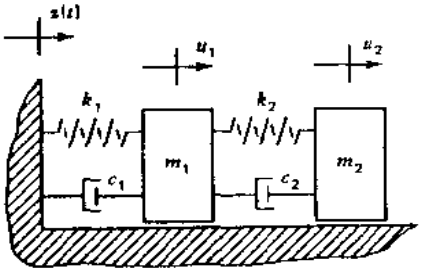


图 E11.2.1

解：

令相对位移规定为

$$w_1 = u_1 - z \tag{1a}$$

$$w_2 = u_2 - z \tag{1b}$$

a. 画出质量和全部未知力的自由体图。

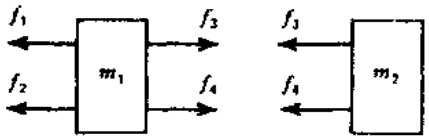


图 E11.2.2

b. 写出运动方程

$$+\rightarrow \sum F_1 = m_1\ddot{u}_1 = -f_1 - f_2 + f_3 + f_4 = m_1(\ddot{w}_1 + \ddot{z}) \tag{2a}$$

$$+\rightarrow \sum F_2 = m_2\ddot{u}_2 = -f_3 - f_4 = m_2(\ddot{w}_2 + \ddot{z}) \tag{2b}$$

c. 弹性力与位移、阻尼力与速度间的关系。

$$f_1 = k_1(u_1 - z) = k_1 w_1 \tag{3a}$$

$$f_2 = c_1(\dot{u}_1 - \dot{z}) = c_1\dot{w}_1 \tag{3b}$$

$$f_3 = k_2(u_2 - u_1) = k_2(w_2 - w_1) \tag{3c}$$

$$f_4 = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = c_2(\dot{w}_2 - \dot{w}_1) \tag{3d}$$

d. 合并、简化以上公式。

$$m_1\ddot{w}_1 + c_1\dot{w}_1 + k_1 w_1 - c_2(\dot{w}_2 - \dot{w}_1) - k_2(w_2 - w_1) = -m_1\ddot{z}$$

$$m_2\ddot{w}_2 + c_2(\dot{w}_2 - \dot{w}_1) + k_2(w_2 - w_1) = -m_2\ddot{z}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1+c_2) & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1+k_2) & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_1\ddot{z} \\ -m_2\ddot{z} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

即

$$\boxed{\mathbf{m}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{k}\mathbf{w} = \mathbf{P}_{\text{eff}}} \tag{5}$$

注意不按绝对位移而按相对位移写出的运动方程，其优点有：(1)公式 5 右边项的有效力形式是直接与加速度 $\ddot{z}$ 有关的。这比用 z 或 $\dot{z}$ 来度量要简单。(2)在计算弹性力时，能够直接应用相对位移，如公式 3a 所见。

下一个例题是将系统处理模拟成为刚体的平面运动。

例题 11.3

应用集总参数模型研究如图 E11.3.1 所示的一座建筑物在承受地震激励时的运动。

利用牛顿定律(扩大到刚体上)推导该系统的运动方程。考虑 θ 很小，基础质量为 m 一个质点。

解：

a. 画出系统两个部分的自由体图，及标出全部未知力，如图 E11.3.2。

b. 写出每个自由体的基本运动方程。

对图(a)：

$$+\rightarrow \sum F_x = m\ddot{u} = -2f_1 - 2f_2 + f_3 \tag{1}$$

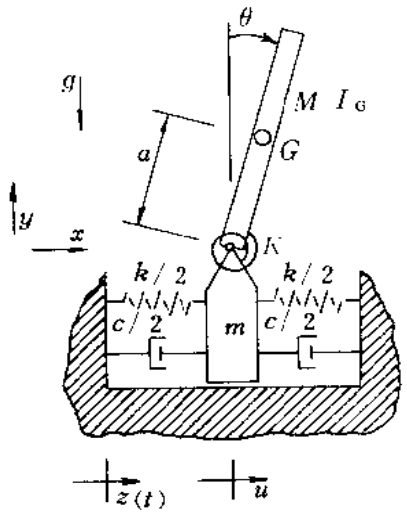


图 E11.3.1

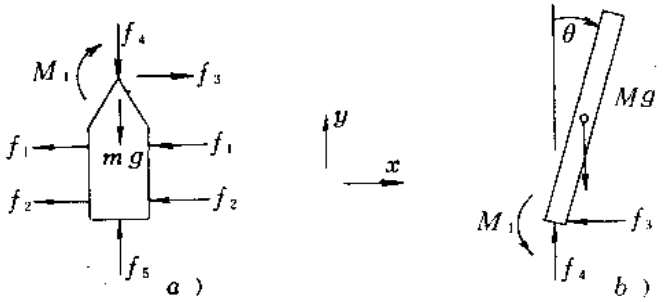


图 E11.3.2

(不需要运动的垂直方程如力矩方程。)

对图(b):

$$\pm \sum F_x = M\ddot{x}_G = -f_3 \tag{2a}$$

$$+\uparrow \sum F_y = M\ddot{y}_G = f_4 - Mg \tag{2b}$$

$$\# + \sum M_G = I_G\ddot{\theta} = -M_1 + f_4 a\sin\theta + f_3 a\cos\theta \tag{2c}$$

c. 弹性力与位移、阻尼力与速度的关系。

$$f_1 = \frac{k}{2}(u - z) \tag{3a}$$

$$f_2 = \frac{c}{2}(\dot{u} - \dot{z}) \tag{3b}$$

$$M_1 = K\theta \tag{3c}$$

d. 应用运动学写出 x_G 和 y_G 与 u 和 θ 的关系。

如果 θ 很小,$\sin\theta \doteq \theta$,$\cos \doteq 1$。

$$x_G = u + a\sin\theta \doteq u + a\theta \tag{4a}$$

$$y_G = a\cos\theta \doteq a \tag{4b}$$

用矩阵形式表示得到的两个运动方程

$$\begin{bmatrix}(M+m) & Ma\\ Ma & (I_G+Ma^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}c & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}\\ \dot{\theta}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & (K-Mga)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ \theta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}c\dot{z}+kz\\ 0\end{Bmatrix} \tag{5}$$

即

$$\boxed{\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{P}_{\text{eff}}} \tag{6}$$

注意基础运动 $z(t)$ 引起了公式右边的"力"项，并且该系统有**惯性耦联**，因为在 m 矩阵中有非对角项。

根据以上例题说明，应用牛顿定律去推导刚体耦联系统的运动方程时，会使公式变得冗长。在许多情况下推导 **MDOF** 系统运动方程时，要应用拉格朗日方程，这样可使工作量大大减少，讨论如下。

§11.2 拉格朗日方程

例题 11.3 说明应用牛顿定律去推导连接的物体运动方程时，会出现很多困难。它需要对每个部分取隔离的自由体，这就不得不消掉相互作用的力来得到最后的运动方程组。例题 2.7 所表示的是直接应用虚位移原理来直接消除必须使用的相互作用力。虽然虚位移原理是能够允许扩展到推导 **MDOF** 系统的运动方程，但是对于这样的目的来应用拉格朗日方程就能使计算大大简化。这种方法可以使用标量、用功与动能以代替向量的力与位移。用虚位移原理[11.1]或是哈密顿原理，就能够推导出拉格朗日方程。这里将要利用一些近来研究的成果。

再来研究一下例题 11.3，注意虽然在写质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的运动方程时需要 x_G 与 y_G，然而公式 4 中是允许 x_G、y_G 与 μ，θ 发生关系的，它只是坐标出现在最后运动方程公式 5 中。因此运动方程公式 4 叫做**约束方程**。例题 11.3 中所研究的系统是一个 **2-DOF** 系统；并且该系统的任意相对位置都可以用给定的 μ 和 θ 值来规定。注意当 μ 保持为常量时，变化 θ 也是可以的；反之亦然。那么这种类型的坐标叫做**广义坐标**。对于一个 ***N*-DOF** 系统，广义坐标定义为任一 N 个独立参量、它能完全充分地规定系统中每个点的位置。

为了方便起见，这里重复公式 9.23 中所叙述的哈密顿原理。

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt+\int_{t_1}^{t_2}\delta W_{nc}dt=0 \tag{11.1}$$

式中 T 是系统的总动能，V 为系统的势能，δW_{nc} 是作用在系统上非保守力的虚功。

对于多数的机械与结构系统，其动能可按广义坐标与时间的一阶导数表示、且势能单独按广义坐标表示。同样在广义坐标中用任意变分来表示非保守力作用在所发生虚位移上的虚功、表达成这些变分的线性函数。为此

$$T=T(q_1,q_2,\cdots,q_N,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_N,t) \tag{11.2a}$$

$$V=V(q_1,q_2,\cdots,q_N,t) \tag{11.2b}$$

$$\delta W_{nc}=Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\cdots\cdots+Q_N\delta q_N \tag{11.2c}$$

式中 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_N$ 叫做**广义力**。广义力有单位，因此每项 $Q_i \delta q_i$ 有功的单位。

例题 11.4

一个质量为 m 的质点沿着一无质量杆滑动。按 q_1、q_2 与它们的时间导数、写出质量的动能。见图 E11.4.1。

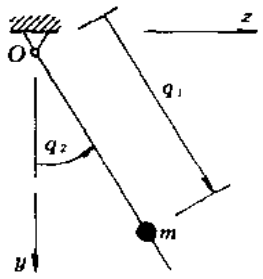


图 E11.4.1

解：

a. 已知动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{y}^2+\dot{z}^2) \tag{1}$$

b. 根据运动学

$$y=q_1\cos q_2 \tag{2a}$$

$$z=q_1\sin q_2 \tag{2b}$$

因此

$$\dot{y}=\dot{q}_1\cos q_2-q_1\dot{q}_2\sin q_2 \tag{3a}$$

$$\dot{z}=q_1\sin q_2+q_1\dot{q}_2\cos q_2 \tag{3b}$$

c. 合并、简化，得到

$$\boxed{T=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+q_1^2\dot{q}_2^2)} \tag{4}$$

注意公式 4 具有公式 11.2a 的形式，即广义坐标与广义速度都出现在 T 中。

例题 11.5

一个力 P 切向作用在重量为 W 的一个质点上，其 W 又连在一长度为 L 的刚杆上。用 P 求出 W 的势能与所做虚功的表达式。同样确定广义力 Q_θ 的表达式。见图 E11.5.1。

解：

a. 令 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，势能为零，则

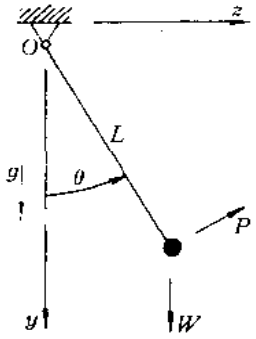


图 E11.5.1

$$\boxed{V=-Wy=-WL\cos\theta} \tag{1}$$

b. 以 θ 的变分、确定 δW_p，表示如图 E11.5.2。

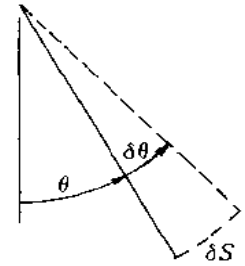


图 E11.5.2

$$\delta s=L\delta\theta \tag{2}$$

是 ***P*** 在切向移动的距离。因此

$$\boxed{\delta W_p=P\delta_s=(PL)\delta\theta} \tag{3}$$

则根据公式 11.2c

$$\boxed{Q_\theta=PL} \tag{4}$$

由于该问题的 θ 是广义坐标，公式 1 具有公式 11.2b 所规定的形式；公式 3 具有公式 11.2c的形式。

现在继续推导拉格朗日方程，将公式 11.2 代入公式 11.1，得到

$$\begin{aligned}\int_{t_2}^{t_2}\Big(&\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial T}{\partial q_2}\delta q_2+\cdots+\frac{\partial T}{\partial q_N}\delta q_n+\frac{\partial T}{\partial \dot q_1}\delta\dot q_1+\frac{\partial T}{\partial \dot q_2}\delta\dot q_2\\&+\cdots+\frac{\partial T}{\partial \dot q_N}\delta\dot q_N-\frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1-\frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2-\cdots-\frac{\partial V}{\partial q_N}\delta q_N+Q_1\delta q_1\\&+Q_2\delta q_2+\cdots+Q_N\delta q_N\Big)\,dt=0\end{aligned} \tag{11.3}$$

对含 δq_i 项、用部分积分成下式。

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i dt=\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt \tag{11.4}$$

上面公式右边第一项是对每个坐标为零，因为 $\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0$ 为推导哈密顿原理的基本条件，是成立的。当公式 11.4 代入公式 11.3 时，得到的公式可写成如下形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{\partial V}{\partial q_i}+Q_i\right]\delta q_i\right\}dt=0 \tag{11.5}$$

因为变分 $\delta q_i(i=1,2,\cdots n)$ 必须是独立的，一般只有当公式 11.5 中加括号的表达式对每个 i 值都为零时，公式 11.5 才能满足，即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=Q_i,\quad i=1,2,\cdots,N \tag{11.6}$$

公式 11.6 通称为拉格朗日方程。

在推导公式 11.6 所强加的限制是坐标 q_i 为独立的；并且 T，V 和 δW_{nc} 具有公式 11.2 所表达的形式。因此，公式 11.6 对于非线性系统以及线性系统都是正确的。在 § 11.5 中要介绍拉格朗日方程延伸到约束(即非独立的)坐标所表示的系统。

§ 11.3 集总参数模型拉格朗日方程应用

下面的例题要说明拉格朗日方程应用到集总参数模型所表示的系统。

例题 11.6

一机身外壳 M 用长度为 L 的刚杆连着翼-体质量 m 来摸拟飞机翼-体组合的对称振动。用扭转弹簧常数为 k 来摸拟机翼的弹性特征，该弹簧是连接在机体与机翼之间。应用拉格朗日方程推导该系统的运动方程。假定 θ 很小，不计重力，见图 E11.6.1。

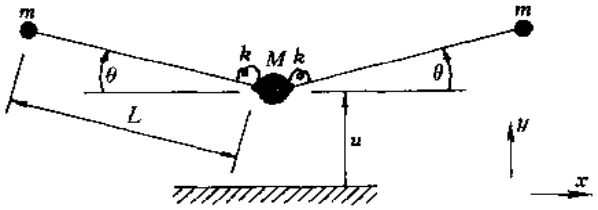


图 E11.6.1

解：

令 $$q_1\to u,\ q_2\to\theta$$

a. 写出 T 与 V 的表达式

$$T=2\left[\frac{1}{2}m\dot{y}_m^2\right]+\frac{1}{2}M\dot{u}^2 \tag{1}$$

如 θ 很小，

$$y_m\doteq u+L\theta \tag{2}$$

$$T = m(\dot{u} + L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M\dot{u}^2 \tag{3}$$

$$V = 2\left[\frac{1}{2}k\theta^2\right] \tag{4}$$

b. 应用拉格朗日方程公式 11.6：

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = 2m(\dot{u} + L\dot{\theta}) + M\dot{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 2mL(\dot{u} + L\dot{\theta})$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = 2k\theta$$

$$Q_u = Q_\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \tag{6}$$

因此

$$2m(\ddot{u} + L\ddot{\theta}) + M\ddot{u} = 0 \tag{7a}$$

$$2mL(\ddot{u} + L\ddot{\theta}) + 2k\theta = 0 \tag{7b}$$

公式 7 可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}(M+2m) & 2mL\\ 2mL & 2mL^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}\\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ \theta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{8}$$

注意在得到上面的运动方程时，没有必要使用自由体图和机翼与机体间的相互作用力。

例题 11.7

应用拉格朗日方程来推导例题 11.3 中所示系统的运动方程。

解：

令 $q_1 \to u$，$q_2 \to \theta$

a. 写出 T，V 和 δW_{nc} 的表达式：

$$T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

根据运动学

$$x_G = u + a\sin\theta \tag{2a}$$

$$y_G = a\cos\theta \tag{2b}$$

如 θ 很小，则 $\sin\theta \doteq \theta$，$\cos\theta \doteq 1 - \frac{1}{2}\theta^2$。因此

$$\dot{x}_G = \dot{u} + a\dot{\theta} \tag{3a}$$

$$\dot{y}_G \doteq 0 \tag{3b}$$

这里，在 $\dot{y}_G$ 项中忽略了非线性 $\theta\dot{\theta}$ 项。所以

$$T=\frac{1}{2}m\dot{u}^2+\frac{1}{2}M(\dot{u}+a\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \tag{4}$$

贮存在弹簧中的势能为弹性应变能和重力势能。

$$V=2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}\right)(u-z)^2\right]+\frac{1}{2}K\theta^2+Mga\cos\theta \tag{5}$$

如果 θ 很小，则

$$V=2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}\right)(u-z)^2\right]+\frac{1}{2}K\theta^2+Mga\left(1-\frac{1}{2}\theta^2\right) \tag{6}$$

在这个问题中的非保守力是施加于基础质量上的阻尼力。在图 E11.7.1 中表示了这些力！（注意这不是自由体图，只表示阻尼力的图）

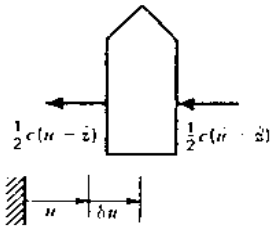


图 E11.7.1

$$\delta W_{nc}=-2\left[\frac{1}{2}c(\dot{u}-\dot{z})\right]\delta u \tag{7}$$

b. 应用拉格朗日方程：

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}=m\dot{u}+M(\dot{u}+a\dot{\theta})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=Ma(\dot{u}+a\dot{\theta})+I_G\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u}=\frac{\partial T}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial u}=k(u-z),\ \frac{\partial V}{\partial \theta}=K\theta-Mga\theta \tag{8}$$

$$Q_u=-c(\dot{u}-\dot{z}),Q_\theta=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=Q_i \tag{9}$$

因此

$$(M+m)\ddot{u}+Ma\ddot{\theta}+k(u-z)=-c(\dot{u}-\dot{z}) \tag{10a}$$

$$Ma\ddot{u}+(Ma^2+I_G)\ddot{\theta}+(K-mga)\theta=0 \tag{10b}$$

可以观察到公式 10 与例题 11.3 的公式 5 相同。

同样最后应用拉格朗日方程于集总参数系统来研究下面的非线性问题。

例题 11.8

一个质量为 m 的质点沿着一长度为 L，质量为 M 的均匀薄壁杆滑动。应用拉格朗日方程来推导系统的运动方程，见图 E11.8.1。

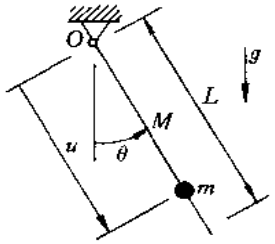


图 E11.8.1

解：

a. 写出 T 和 V 的表达式(该系统没有非保守力)：

根据例题 11.4，得到 m 的动能，则

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\dot{\theta}^2 + 1/2m(\dot{u}^2 + u^2\dot{\theta}^2) \tag{1}$$

$$V = -\left[Mg\left(\frac{L}{2}\right) + mgu\right]\cos\theta \tag{2}$$

b. 应用拉格朗日方程：

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = m\dot{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3}ML^2\dot{\theta} + mu^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = mu\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = -mg\cos\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \left[Mg\left(\frac{L}{2}\right) + mgu\right]\sin\theta$$

因此 $$Q_u = Q_\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \tag{4}$$

$$m\ddot{u}-mu\dot{\theta}^2-mg\cos\theta=0 \tag{5a}$$

$$\left(\frac{1}{3}ML^2+mu^2\right)\ddot{\theta}+2mu\dot{u}\dot{\theta}+\left[Mg\left(\frac{L}{2}\right)+mgu\right]\sin\theta=0 \tag{5b}$$

这个运动方程为高阶非线性。

§11.4 连续系统拉格朗日方程应用——假定振型法

在§2.4中假定连续系统的位移有如下形式

$$u(x,t)=\psi(x)u(t) \tag{11.7}$$

这种假定使连续系统产生了一个以$u(t)$为广义坐标的单自由度模型。在§10.3中已经讨论过的一个类似的方法导出了瑞利法。

为了使一个连续系统生成一个***N*-DOF**模型，公式11.7可以扩大包括有N个$\phi_i(x)$函数，因此，$u(x,t)$可以近似地表示为

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)u_i(t) \tag{11.8}$$

假定振型法[11.2]是将公式11.8代入T、V和δW_{nc}的表达式，然后应用拉格朗日方程去推导得到的**N-DOF**模型的运动方程。在这一章里、要研究整体**假定振型法**，即函数$\phi_i(x)$表示为所要研究整个结构的各自位移形状。在第16章中要说明假定振型法与有限元法的关系。

所选用的函数$\phi_i(x)$是分析者所规定的**N-DOF**的模型。该函数$\phi_i(x)$必须为一组线性独立的形式。另外，每个$\phi_i(x)$所具有的导数必须等于V中所出现的阶数，而且必须满足所有规定的边界条件，即位移类型的边界条件。满足这些条件的函数叫做**可取函数**(admissible functions)。

图11.2中带有支承的悬臂梁，其每个$\phi_i(x)$必须满足该边界条件。

$$\phi_i(0)=\phi_i'(0)=\phi_i(L)=0$$

因此它对全部时间t

$$v(0,t)=v'(0,t)=v(L,t)=0$$

由于伯努利-欧拉梁的应变能表达式包含了$v''(x,t)$，所以每个$\phi_i(x)$必须是一个x的连续函数。并且它对x的一阶导数也必须是连续的(即梁不能有位移或斜率的突变)。

不需要$\phi_i(x)$也来满足**固有边界条件**、即力类型的边界条件，例如在图11.2中的$M(L,t)=0$。然而，在这种情况下，如果满足所规定的边界条件与固有边界条件时，取得$\phi_i(x)$函数是可能的。在公式11.8中可以应用这样的函数。

介绍假定振型法是为了我们应用它。首先来确定线弹性杆轴向振动的近似解问题。在这种情况下，$u(x,t)$表示在x处的截面轴向运动，如图11.3所示。

已知杆的应变能为

$$V=\frac{1}{2}\int_0^L EA(u')^2dx \tag{11.9}$$

由于杆的轴向位移$u(x,t)$、已知其动能为

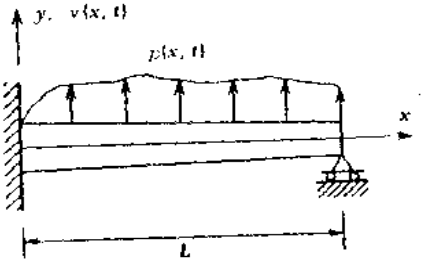


图 11.2　边界条件实例

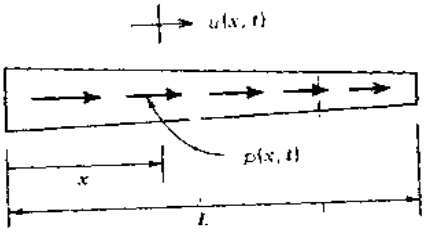


图 11.3　薄杆的轴向运动

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A(\dot{u})^2 dx \tag{11.10}$$

式中 $\rho(x)$是每单位体积的质量，$A(x)$是横截面面积。

将公式 11.8 代入公式 11.9 时，则所得到的势能表达式可以写成

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} k_{ij}\, u_i\, u_j \tag{11.11}$$

式中

$$k_{ij} = \int_0^L EA\psi'_i\psi'_j dx \tag{11.12}$$

换言之，V 为一个广义坐标的二次函数。所用的二次式中的系数是在公式 11.12 中规定。用矩阵形式可以很方便地写出二次式，即

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\mathbf{u} \tag{11.13}$$

式中

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix} \tag{11.14}$$

以类似方法，可以合并公式 11.8 和公式 11.10。

得到

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} m_{ij}\,\dot{u}_i\,\dot{u}_j \tag{11.15}$$

式中

$$m_{ij}=\int_0^L \rho A\psi_i\psi_j dx \tag{11.16}$$

矩阵形式

$$T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\,\dot{\mathbf{u}} \tag{11.17}$$

如在§16.2中所解释的理由，用公式11.16来确定系统的质量矩阵时，则该矩阵叫做**相容质量矩阵**。

如图11.3所示的杆，若承受了外力，则相应的广义力就使用虚功来确定。因此

$$\delta W=\int_0^L p(x,t)\delta u(x,t)dx=\sum_{i=1}^{N}p_i\delta u_i \tag{11.18}$$

根据公式11.18，必须把$\delta u((x、t)$近似表示为

$$\delta u(x,t)=\sum_{i=1}^{N}\psi_i(x)\delta u_i \tag{11.19}$$

因此，根据联立公式11.18与公式11.19，得到

$$p_i(t)=\int_0^L P(x,t)\psi_i(x)dx \tag{11.20}$$

现在可以应用拉格朗日方程来确定由公式11.8所规定的***N*-DOF**模型的运动方程。将公式11.11和公式11.15代入公式11.16中时，得到

$$\sum_{j=1}^{N}m_{ij}\ddot{u}_j+\sum_{j=1}^{N}k_{ij}u_j=p_i,\quad i=1,2,\cdots,N \tag{11.21}$$

此式可以写成类似的矩阵形式

$$\mathbf{m}\,\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\boldsymbol{P} \tag{11.22}$$

虽然通过拉格朗日方程得出了公式11.22，但是可以看到、在应用假定振型法来得到一个***N*-DOF**模型的运动方程时，实际上所需要的唯一步骤为：

1. 选择一组N个可取函数$\psi_i(x)$；
2. 用公式11.12计算刚度矩阵系数；
3. 用公式11.16计算质量矩阵系数；
4. 用公式11.20计算相应作用力的广义力；
5. 用公式11.22建立运动方程。

现在将说明这个方法。

例题 11.9

用多项式$u(x,t)$近似表达式的假定振型法求均匀悬臂杆承受一杆端力$\boldsymbol{P}(t)$的**2-DOF**模型的轴向振动。见图E11.9.1。

解：

a. 选择形函数$\psi_i(x)$

唯一所规定的边界条件为

$$u(0,t)=0 \tag{1}$$

因此，该函数$\psi_i(x)$必须满足

$$\psi_1(0)=\psi_2(0)=0 \tag{2}$$

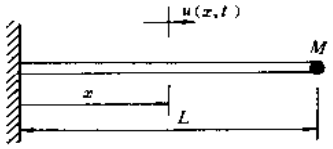


图 E11.9.1

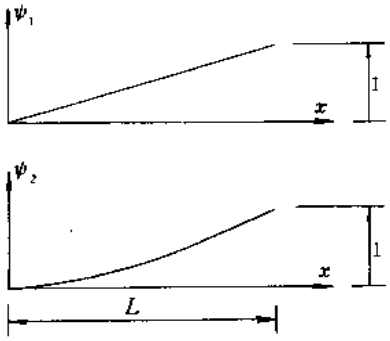


图 E11.9.2

于是，令

$$\psi_1(x) = \frac{x}{L} \tag{3a}$$

$$\psi_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 \tag{3b}$$

见图 E11.9.2。

（据公式 3 中已使 ψ 函数非量纲化，这虽不是什么本质的问题，但它是方便的）。

b. 计算刚度系数 k_{ij}

根据公式 3

$$\psi'_1 = \frac{1}{L} \tag{4a}$$

$$\psi'_2 = \left(\frac{2}{L}\right)\left(\frac{x}{L}\right) \tag{4b}$$

那么，根据公式 11.12

$$k_{11} = \int_0^L EA(\psi'_1)^2 dx = \frac{EA}{L} \tag{5a}$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{EA}{L} \tag{5b}$$

$$k_{22} = \frac{4EA}{3L} \tag{5c}$$

计算质量系数 m_{ij}，根据公式 11.16

$$m_{11} = \int_0^L \rho A(\phi_1)^2 dx = \frac{\rho AL}{3} \tag{6a}$$

$$m_{12} = m_{21} = \frac{\rho AL}{4} \tag{6b}$$

$$m_{22}=\frac{\rho AL}{5} \tag{6c}$$

c. 计算广义力 p_i

已推导出图 11.3 表示的分布力的公式 11.20。为了确定集中端点力 $P(t)$的广义力，可回到虚功问题上，并写出

$$\delta W=P\delta u(L,t)=p_1\delta u_1+p_2\delta u_2 \tag{7}$$

而

$$\delta u(L,t)=\phi_1(L)\delta u_1+\phi_2(L)\delta u_2 \tag{8}$$

因此

$$p_1=P\psi_1(L)=P \tag{9a}$$

$$p_2=P\psi_2(L)=P \tag{9b}$$

d. 按矩阵形式写出运动方程

$$\rho AL\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P(t)\\ P(t)\end{Bmatrix} \tag{10}$$

应用假定振型法、以同样方式可以推导出其他弹性系统的运动方程。下面给出伯努利-欧拉梁的应变能

$$V=\frac{1}{2}\int_0^L EI(v'')^2dx \tag{11.23}$$

式中 $v(x,t)$叫做横向运动，如图 11.2。而且这里 EI 也可以是 x 的函数。已知其动能为

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L \rho A(\dot{v})^2dx \tag{11.24}$$

由公式 11.23 与公式 11.24 导出了下面形式的刚度和质量系数的表达式

$$k_{ij}=\int_0^L EI\psi_i''(x)\psi_j''(x)dx \tag{11.25}$$

$$m_{ij}=\int_0^L \rho A\psi_i(x)\psi_j(x)dx \tag{11.26}$$

已知如图 11.2 中所示分布横向力 $p(x,t)$的广义力为

$$p_i=\int_0^L p(x,t)\psi_i(x)dx \tag{11.27}$$

例题 11.10

海洋钻井台架模拟成长度为 L 的均匀弯曲梁，顶部有一集中质量 M，底部有一扭转弹簧 k。应用假定振型法来推导该结构为 2-**DOF** 模型的运动方程。设在 $x=0$ 处的转动很小。见图 E11.10.1。

解：

a. 选择形函数 $\phi_i(x)$。

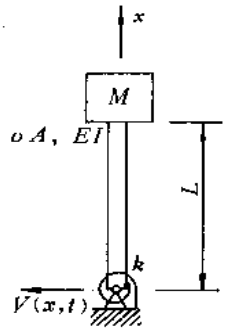


图 E11.10.1

唯一规定的边界条件为

$$v(0,t)=0 \tag{1}$$

因此，该函数必须满足

$$\psi_1(0)=\psi_2(0)=0 \tag{2}$$

最简单的函数是用 x 的多项式。因此，如在例题 11.9 中所选择的

$$\psi_1=\frac{x}{L} \tag{3a}$$

$$\psi_2=\left(\frac{x}{L}\right)^2 \tag{3b}$$

b. 计算刚度系数 k_{ij}。

当该梁弯曲如图 E11.10.2 所示，就有势能贮存在基础弹簧和该梁中。因此，必须将弹簧中的势能补充在公式 11.23 中，为此。

$$V=\int_0^L EI(V'')^2dx+\frac{1}{2}k\theta_0^2 \tag{4}$$

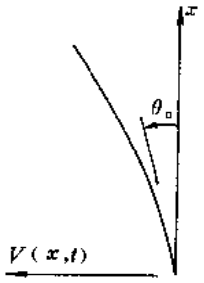


图 E11.10.2

如果基础有很小的转动时，

$$\theta_0\doteq v'(0,t)=\sum_{i=1}^{N}\psi'_i(0)v_i(t) \tag{5}$$

将公式 5 代入公式 4 中的第二项中，我们就会看到公式 11.25 的改进形式

$$k_{ij}=\int_0^L EI\psi''_i\psi''_jdx+k\psi'_j(0)\psi'_i(0) \tag{6}$$

根据公式 3

$$\psi'_1 = \frac{1}{L}, \quad \psi''_1 = 0 \tag{7a}$$

$$\psi'_2 = \frac{2}{L}\left(\frac{x}{L}\right), \quad \psi''_2 = \frac{2}{L^2} \tag{7b}$$

因此

$$k_{11} = 0 + k\left(\frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{k}{L^2} \tag{8a}$$

$$k_{12} = k_{21} = 0 + 0 = 0 \tag{8b}$$

$$k_{22} = \frac{4EI}{L^3} + 0 = \frac{4EI}{L^3} \tag{8c}$$

c. 计算质量系数 m_{ij}。

由于在 $x=L$ 处有质量 M 存在，则必须改进公式 11.24 中 T 的表达式。这个结果在改变公式 11.26 得到

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \phi_i \phi_j dx + M\phi_i(L)\phi_j(L) \tag{9}$$

所以

$$m_{11} = \rho A \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx + M(1)(1)$$

即

$$m_{11} = \frac{\rho AL}{3} + M \tag{10a}$$

同理

$$m_{12} = m_{21} = \frac{\rho AL}{4} + M \tag{10b}$$

$$m_{22} = \frac{\rho AL}{5} + M \tag{10c}$$

d. 按矩阵形式写出运动方程。

没有外力，所以 $p_1 = p_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} \left(M+\frac{\rho AL}{3}\right) & \left(M+\frac{\rho AL}{4}\right) \\ \left(M+\frac{\rho AL}{4}\right) & \left(M+\frac{\rho AL}{5}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{k}{L^2}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{4EI}{L^3}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

像例题 11.10 的情况，这里的杆件承受了轴向荷载(即由于 M 的重量)，也承担了横向弯曲；因此，轴向荷载具有杆件的刚度效应。公式 2.28 已给出了 1-**DOF** 模型的几何刚度系数。而 ***N*-DOF** 系统的相应表达式为

$$k_{Gij} = \int_0^L N(x)\psi'_i(x)\psi'_j(x)dx \tag{11.28}$$

例题 11.11

用分布阻尼模拟一个基础竖向运动时油的阻尼效应，因此基础就存在着阻尼力与速度成正比的关系。即

$$P(x,t)=-\xi(x)\dot{v}(x,t)$$

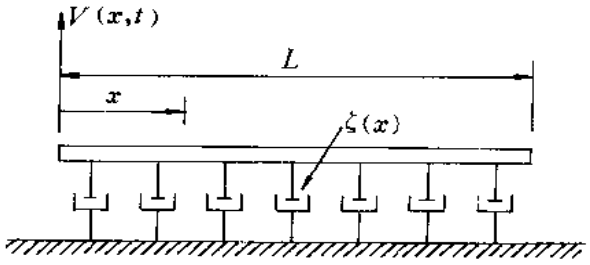


图 E11.11.1

式中$\zeta(x)$是分布阻尼系数。确定相应这个阻尼的广义阻尼力的表达式，见图 E11.11.1。

解：

直接能应用公式 11.27。于是

$$p_i=\int_0^L P(x,t)\phi_i(x)dx$$

$$=\int_0^L\left[-\xi(x)\sum_{j=1}^{N}\phi_j(x)\dot{v}_j(t)\right]\phi_i(x)dx$$

即

$$\boxed{p_i=-\sum_{j=1}^{N}\dot{v}_j\left[\int_0^L\xi(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx\right]}$$

当粘滞阻尼影响系统时，如例题 11.11，则广义力就相应可以写成这样

$$p_i=-\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\dot{v}_j \tag{11.29}$$

因为这些广义力是根据未知广义速度而定，所以粘滞阻尼力 p_i 可以放在公式 11.21 的左边。这时公式 11.22 可写成：

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{k}\mathbf{q}=\boldsymbol{Q} \tag{11.30}$$

式中 **c** 叫做**阻尼矩阵**。

根据实用的观点，系统的阻尼特性是很少知道的。在某些方面、系统的惯量与刚度特性是知道的。所以去寻找阻尼系统矩阵 **c** 是不实际的。用其他的方法来处理阻尼的问题要在第 15 章与第 18 章中加以介绍。

§11.5 约束坐标与拉格朗日乘子

在 §11.2 中应用了一组 N 个广义坐标，$q_1, q_2, \cdots, q_N$，来推导拉格朗日方程。在推导公式 11.5 至 11.6 时，关键的地方是需要坐标为独立的。有时也希望使用一组不独立的坐标。令 g_1，$g_2, \cdots, g_M$ 表示不独立的坐标，式中 $M>N$。涉及到这组约束坐标的、将是一组 $C=(M-N)$的约束方程。虽然现代动力学教科书中也讨论非常一般的约束情况，然而这里还是要满足读者来

研究一些只包含坐标 g_i(没有导数)的约束方程。令这些约束方程的形式为

$$f_j(g_1,g_2,\cdots,g_M)=0,\quad j=1,2,\cdots,C \tag{11.31}$$

令每个坐标 gr 的变分已知为 δg_r。则

$$\delta f_j=\frac{\partial f_j}{\partial g_1}\delta g_1+\frac{\partial f_j}{\partial g_2}\delta g_2+\cdots+\frac{\partial f_j}{\partial g_M}\delta g_M=0 \tag{11.32}$$

即

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{\partial f_j}{\partial g_i}\delta g_i=0,\quad j=1,2,\cdots,C \tag{11.33}$$

于是,δg 不是独立的,而是公式 11.33 的 C 个方程相互联系。

现在回到哈密顿原理,以扩大公式 11.5 使之包括 **M** 个坐标,即

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{M}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_i}\right)+\frac{\partial T}{\partial g_i}-\frac{\partial V}{\partial g_i}+Q_i\right]\delta g_i\right\}dt=0 \tag{11.34}$$

刚好不能使方括号中的表达式为零,因为 δg_i 不是独立的,如在公式 11.6 中所做。然而,这一点可以引进拉格朗日乘子函数,即**拉格朗日乘子** $\lambda_j(t)$,$j=1,2,\cdots,C$。在公式 11.33 中,用相应的拉格朗日乘子 λ_j 乘 C 个方程的每一个,并相加,即

$$\sum_{j=1}^{c}\lambda_j\sum_{i=1}^{M}\frac{\partial f_j}{\partial g_i}\delta g_i=0 \tag{11.35}$$

因为这个之和仍等于零,所以可将它放入公式 11.34 中,得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{M}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_i}\right)+\frac{\partial T}{\partial g_i}-\frac{\partial V}{\partial g_i}+Q_i+\sum_{j=1}^{c}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial g_i}\right]\delta g_i\right\}dt=0 \tag{11.36}$$

当 δg_i 仍不是独立的时候,可选择拉格朗日乘子 λj,以便使括号中 δj_i 的表达式($i=1,2,\cdots,C$)等于零。剩下的 $N=M-C$ 个坐标可以认为是独立的,所以方括号中的 $\delta g_i(i=C+1,\cdots,M)$表达式也必须为零。因此加括号的所有 g_i 的表达式必须为零。得到下面修正的拉格朗日方程。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial g_i}+\frac{\partial V}{\partial g_i}-\sum_{j=1}^{C}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial g_i}=Q_i,\ i=1,2,\cdots,M \tag{11.37}$$

用另一种方法,拉格朗日方程可写成如下形式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{g}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial g_i}+\frac{\partial V^*}{\partial g_i}=Q_i,\ i=1,2,\cdots,M \tag{11.38}$$

式中 V^* 是势能修正函数,为

$$V^*=V-\sum_{j=1}^{C}\lambda_j f_j \tag{11.39}$$

总之,可见公式 11.31 和 11.38 在 $M+C$ 个未知 g_i 与 λ_i 中提供了一组 $M+C$ 个方程。

现在给出一个应用拉格朗日乘子的很简单的例题。在第 19 章中要给出一个较复杂的例题。

例题 11.12

应用带拉格朗日乘子的假定振型法来推导一个固端-固端杆的轴向振动的运动方程。如图

E11.12.1。应用

$$u(x,t)=\left(\frac{x}{L}\right)g_1+\left(\frac{x}{L}\right)^2 g_2$$

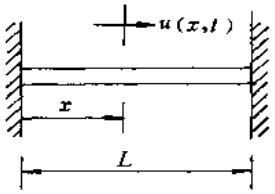


图 E11.12.1

解：

a. 建立约束方程。

规定杆的边界条件为

$$u(0,t)=u(L,t)=0 \tag{1}$$

首先选择形函数(x/L)和$(x/L)^2$来满足这些条件。其次，我们必须加上其他的边界条件，令

$$f(g_1,g_2)\equiv u(L,t)=g_1+g_2=0 \tag{2}$$

此式是公式 11.31 所表示的约束方程形式。

b. 计算质量与刚度系数。

因为该题与例题 11.9 中的相同，而且两个形函数亦相同，所以可用 k_{ij}和 m_{ij}推导

$$\mathrm{k}=\left(\frac{EA}{L}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{4}{3}\end{bmatrix},\quad \mathrm{m}=\rho AL\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix} \tag{3}$$

c. 应用公式 11.37 得到运动方程。

因为只有一个约束方程，所以只需要在它们的各自方程中附加 $\lambda(\partial f/\partial g_1)$和 $\lambda(\partial f/\partial g_2)$。而根据公式 2

$$\frac{\partial f}{\partial g_1}=\frac{\partial f}{\partial g_2}=1 \tag{4}$$

因此，运动方程变为

$$\rho AL\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{g}_1\\ \ddot{g}_2\end{Bmatrix}+\left(\frac{EA}{L}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}g_1\\ g_2\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\lambda\\ \lambda\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{5}$$

因此，公式 2 和公式 5 是解 g_1，g_2 和 λ 的。

参考文献

11.1 H. L. Langhaar, *Energy Methods in Applied Mechanics*, Wiley, New York (1962).

11.2 L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan, New York (1967).

11. 3 D. T. Greenwood, *Principles of Dynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1965).

11. 4 L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, New York (1970).

习题组 11. 1

应用牛顿定律(根据需要可扩大到刚体)来确定下面的 **MDOF** 系统运动方程。对每一习题画出全部所需要的自由体图。

11. 1 根据坐标,推导质量 1 的绝对运动和质量 2 对于质量 1 的相对运动(图 P11. 1)。

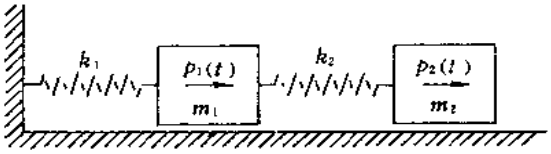


图 P11. 1

11. 2 用如图 P11. 2 的 2-**DOF** 系统,模拟一个机翼截面的运动。根据坐标利用 C 点的竖向位移和转角。假设转角很小。略去重力。

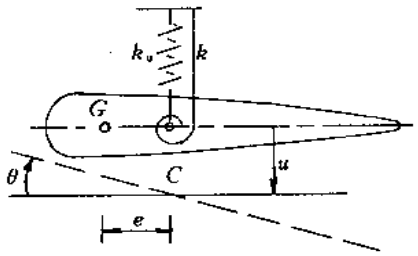


图 P11. 2

11. 3 在图 P11. 3 的系统,根据坐标定两个质量的竖向位移。假定杆的转动很小。

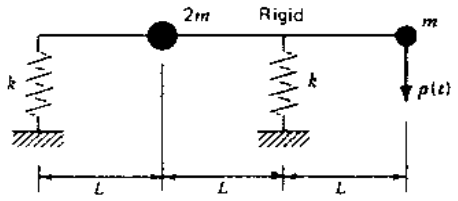


图 P11. 3

11. 4 一个三层剪切型结构承受地震运动以及风力。应用相对于地面坐标来推导集中质量位移的运动方程(见图 P11. 4)。

11. 5 一车辆模拟成一刚体 AB 具有质量 M 和对质心的质量惯性矩 I_G。车轴与车轮的质

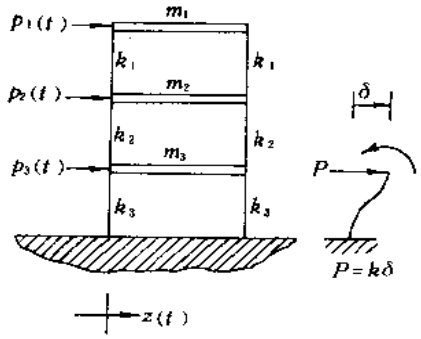


图 P11.4

量用集中质量 m 来模拟，用 k_1 来模拟弹簧刚度、和用 k_2 来模拟轮胎刚度。减振器模拟成如图 P11.5 示的粘滞阻尼器。采用按坐标较小质量的竖向位移和 ***A***. ***B*** 点的位移。假定刚体 ***AB*** 的转角很小。

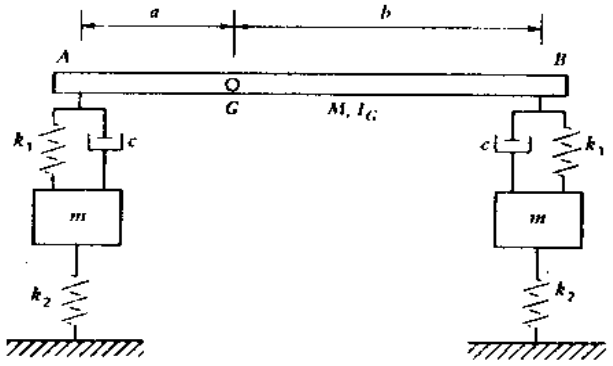


图 P11.5

11.6 一台机器的不平衡转动引起在弹簧支承上竖向运动。机器质量为 m_1，转动的不平衡具有质量 m，在机器质量 m_1 上用弹簧 k_2、附加一质量 m_2 用来作为一个振动减震器，若转动臂以 Ωrad/s 逆时针转动，则首先确定在 C 点由于不平衡转动臂产生的竖直力 $P(t)$。然后确定 m_1 和 m_2 的运动方程，不计重力(见图 P11.6)。

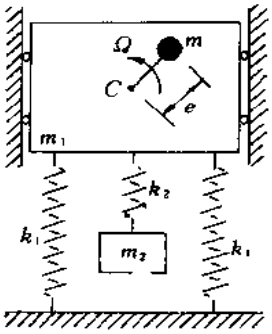


图 P11.6

11.7 一幅双摆耦联系统模拟成两个集中质量连接在无质量的刚杆上，并以弹簧刚度为

k 的弹簧所连接。应用角坐标 θ_1 和 θ_2(见图 P11.7)。

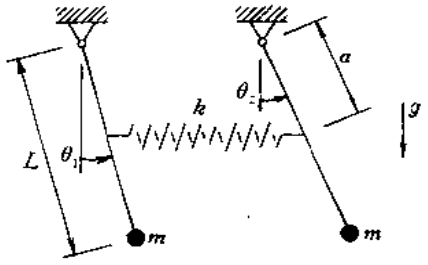


图 P11.7

11.8 图 P11.8 中 2-**DOF** 系统是一高速单轨火车的模型,两节车箱是用弹簧和阻尼器所耦联在一起,应用相对于 m_1 的坐标、定 m_1 和 m_2 的绝对运动。

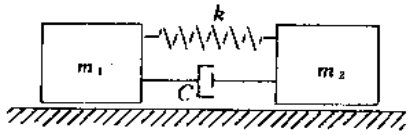


图 P11.8

11.9 在一根轴上有两个齿轮如图 P11.9 所示。依据坐标应用齿轮绝对转角确定其运动方程。

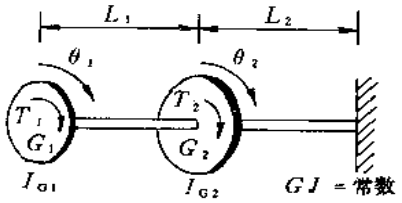


图 P11.9

11.10 一座观测塔模拟成一个集中质量 m 支承在高为 L,刚性无质量的柱上。集中其基础与土的共同作用以弹簧表示如图 P11.10 所示。基础受到水平激励 $z(t)$。考虑 m 的重力效应,以基础的水平运动和以柱的竖向转角为坐标。假定转角很小。

习题组 11.2

应用拉格朗日方程、推导下面系统的运动方程式。

11.11 习题 11.1 所描述的系统。

11.12 见习题 11.2。

11.13 见习题 11.3。

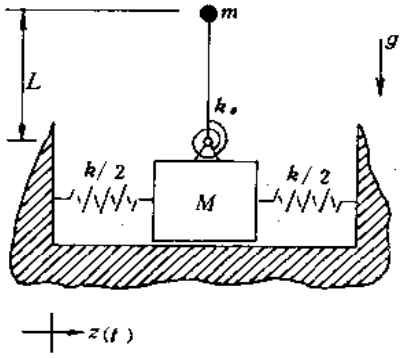


图 P11.10

11.14 见习题 11.4。

11.15 见习题 11.5。

11.16 见习题 11.8。

11.17 见习题 11.9。

11.18 见习题 11.10。

11.19 设图 P11.19 中两根刚杆的转动很小。

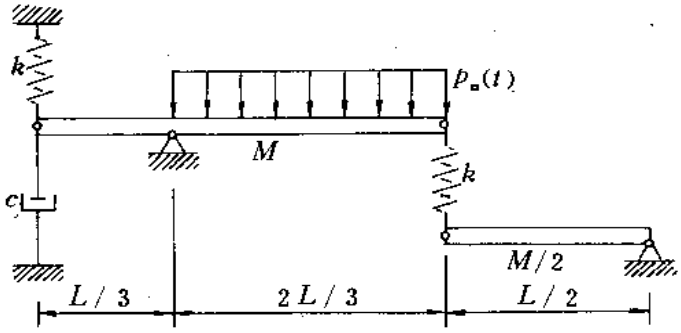


图 P11.19

11.20 一个复摆模拟成集中质量和无质量刚杆如图 P11.20 所示。不计摩擦。$P(t)$保持水平。利用 θ_1 和 θ_2 为系统的广义坐标。θ_1 和 θ_2 不需很小。

习题组 11.3

11.21 一均匀杆、两端为刚性支承(见图 P11.21)。

(a)下面的形函数满足所规定的边界条件

$$\psi_1(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\psi_2(x)=\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

(b)根据以上的形函数推导 2-**DOF** 振型模型的运动方程。

11.22 图 P11.21 中两端固定的杆,根据一个如下 x 的多项式形式和所规定的两个边界

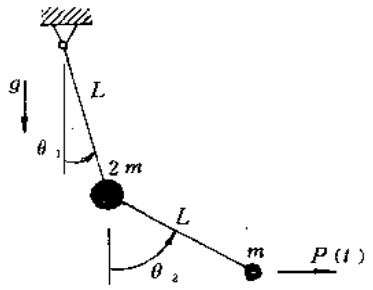


图 P11.20

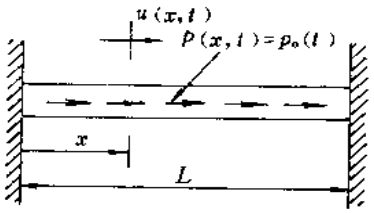


图 P11.21

条件确定两个形函数 $\psi_1(x)$和 $\psi_2(x)$

$$\psi(x)=a+b\left(\frac{x}{L}\right)+c\left(\frac{x}{L}\right)^2+d\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

11.23 一总质量为 M 的匀质梁、在中心承受一重型机器 m，如图 P11.23 所示。应用如下形函数推导该系统的 2-**DOF** 假设振型模型。

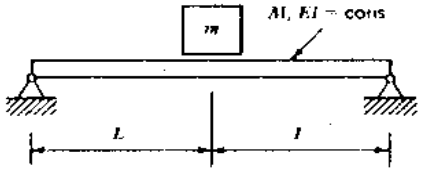


图 P11.23

$$\psi_1(x)=\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$\psi_2(x)=\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

11.24 一均质梁承受一恒定水平压力 N 如图 P11.24 所示。根据一 x 的多项式、应用 2-**DOF** 假设振型的模型，来确定该系统横向振动的运动方程。

11.25 一个圆截面的锥形轴如图 P11.25 所示，根据如下形函数表示 2-**DOF** 假设振型模型，推导该轴转动的两个运动方程。轴的直径已知为 $d(x)=a\left(\frac{x}{L}\right)$

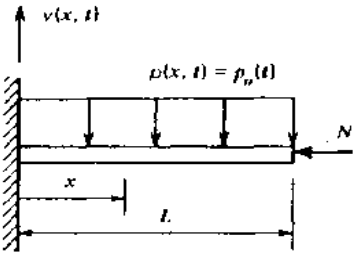


图 P11.24

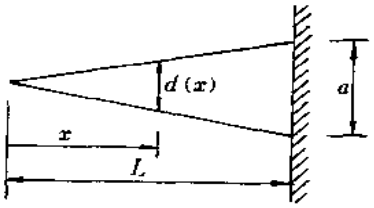


图 P11.25

$$\psi_1(x)=\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

$$\psi_2(x)=\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

11.26 一根悬臂梁是用 2-DOF 假定振型模型来模拟的如图 P11.26 所示，它的广义坐标是以自由端的挠曲与斜率(很小)表示，即 $v(t)$ 与 $\theta(t)$。图示符合形函数的振型。

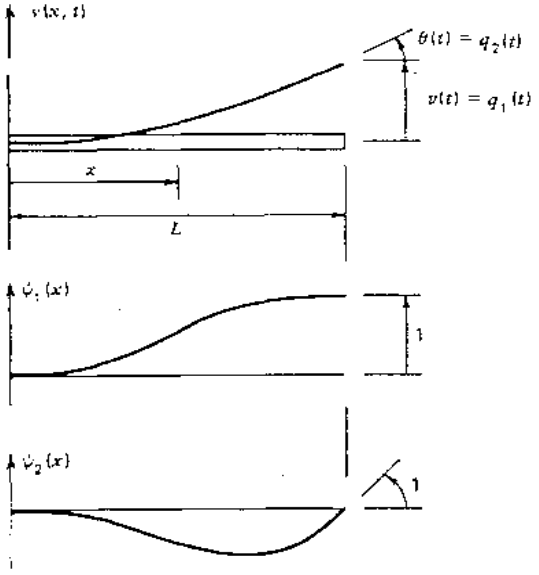


图 P11.26

(a) 根据一般多项式来推导 ψ_1 与 ψ_2 多项式型式的形函数

$$\psi(x)=a+b\left(\frac{x}{L}\right)+c\left(\frac{x}{L}\right)^2+d\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

(b)推导这个 2-DOF 模型的运动方程

11.27 一个信号标志牌模拟成一质量为 M 的均匀矩形块在一无质量柔性的电杆上，如图 11.27 所示以横向平移与 B 点的挠度为坐标，确定该标志牌的运动方程(提示：利用习题 11.26 的结果)。

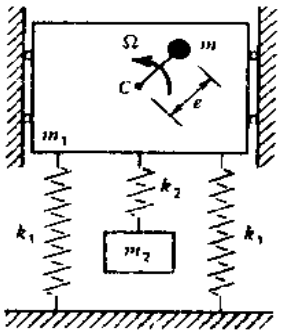


图 P11.27

第 12 章　无阻尼 2-DOF 系统自由振动

根据第 11 章中所推导的具有 MDOF 系统的运动方程，现在读者能立即着手进行多自由度系统动力响应的研究了。然而，在开始的时候，只研究具有 2-DOF 无阻尼系统是有指导作用的。2-DOF 系统的运动方程为如下形式

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \tag{12.1}$$

式中的坐标 u_i 可以是物理位移，或可以是广义坐标。公式 12.1 的解将由一个齐次解加上一个特解组成。齐次解是由公式 12.1 右边项为零得到，所包含的系统动力特性称为固有频率与固有模态。在研究 2—DOF 系统的简谐激励响应时，要给读者介绍在结构动力学中的另一个重要课题，即振型叠加法。

本章将完成如下内容：

- **计算 2—DOF 系统的固有频率与固有模态。**
- **写出 2—DOF 系统的非零初始条件的响应表达式。**
- **计算具有刚体模态的 2—DOF 或 3—DOF 模型的固有频率和固有模态。**
- **确定 2—DOF 系统的广义质量矩阵和广义刚度矩阵。**
- **写出 2—DOF 系统在主坐标与物理坐标中的稳态响应。**

§ 12.1　2—DOF 系统自由振动

现在研究 2—DOF 系统运动方程的解。可以按照下面的步骤来得到自由振动的解，即方程组的解。

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{12.2}$$

1　设为简谐解的形式

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1 \cos(\omega t - \alpha) \\ u_2 &= U_2 \cos(\omega t - \alpha) \end{aligned} \tag{12.3}$$

2　将假定解代入运动方程中，得到**代数特征值问题**。

$$\left[\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{12.4}$$

3 因为这是一组齐次线性代数方程，所以只有相应于 ω^2 值的公式 12.4 的非平凡解才能满足**特征方程**

$$\left|\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}\right| = 0 \tag{12.5}$$

即公式 12.4 系数的行列式等于零。这是 ω_i^2 的二阶多项式。

4 解特征方程的两个根。这些根为 ω_1^2 与 ω_2^2，$\omega_1 \leqslant \omega_2$。$\omega_1$ 和 ω_2 叫做**固有圆频率**。或简称固有频率(在数学中，ω_1^2 与 ω_2^2 叫**特征值**)。

5 将 ω_1^2 代回公式 12.4 的第一行(或第二行，但不要两行都代)。得到 $\beta_1 = (U_2/U_1)^{(1)}$ 比。这个比规定为相应于固有频率 ω_1 的**固有模态**，即**振型**。用同样方法计算 ω_2 的 $\beta_2 = (U_2/U_1)^{(2)}$。(在数学中，固有模态叫做**特征向量**。无阻尼系统的固有模态有时叫做**实模态**，以区别于发生在某些线性阻尼系统中的**复模态**。)画出固有模态图。

6 根据第四步所确定的，自由振动只能发生在频率 ω_1 和 ω_2，而且用第 5 步分别确定其 β_1 与 β_2 之比。公式 12.2 的通解是这两个的线性组合。由初始条件确定常数 A_1, A_2, α_1 与 α_2。

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbf{A}_1\cos(\omega_1 t - \alpha_1) + \mathbf{A}_2\cos(\omega_2 t - \alpha_2) \\ u_2 &= \beta_1 \mathbf{A}_1\cos(\omega_1 t - \alpha_1) + \beta_2 \mathbf{A}_2\cos(\omega_2 t - \alpha_2) \end{aligned} \tag{12.6}$$

通解的另一种形式为

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbf{A}_1\cos\omega_1 t + \mathbf{B}_1\sin\omega_1 t + \mathbf{A}_2\cos\omega_2 t + \mathbf{B}_2\sin\omega_2 t \\ u_2 &= \beta_1 \mathbf{A}_1\cos\omega_1 t + \beta_2 \mathbf{B}_1\sin\omega_1 t + \beta_2 \mathbf{A}_2\cos\omega_2 t + \beta_2 \mathbf{B}_2\sin\omega_2 t \end{aligned} \tag{12.7}$$

当应用公式 12.7 时，则由初始条件确定 $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2$。

例题 12.1

求图 E12.1.1 所表示的系统固有频率与振型。该运动方程为

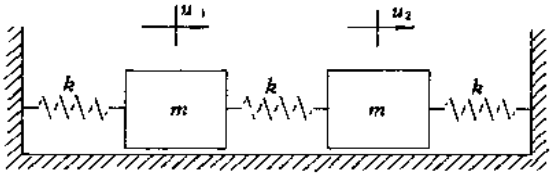


图 E12.1.1

$$m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = 0 \tag{1a}$$

$$m\ddot{u}_2 - ku_1 + 2ku_2 = 0 \tag{1b}$$

解：

第 1 步：设简谐解

$$u_1 = U_1\cos(\omega t - \alpha) \tag{2a}$$

$$u_2 = U_2\cos(\omega t - \alpha) \tag{2b}$$

注意这个意思是 u_1 和 u_2 具有同一时间相关性，并在全部时间内 $u_2/u_1 = U_2/U_1$ 的幅值比具有相同的值。

第 2 步：将公式 2 代入公式 1，得到代数特征值问题：

$$\begin{bmatrix}(2k-m\omega_i^2) & -k\\ -k & (2k-m\omega_i^2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \tag{3}$$

第 3 步：建立特征方程，为公式 3 中矩阵系数的行列式：

$$\begin{vmatrix}(2k-m\omega_i^2) & -k\\ -k & (2k-m\omega_i^2)\end{vmatrix}=0 \tag{4}$$

展开行列式，得到

$$(2k-m\omega_i^2)^2-k^2=0$$

即

$$m^2\omega_i^4-4km\omega_i^2+3k^2=0 \tag{5}$$

第 4 步：求特征方程的根

在这种情况下，可分解因式，容易得到

即

$$(m\omega_i^2-k)(m\omega_i^2-3k)=0$$

即

$$\omega_1^2=\frac{k}{m} \tag{6a}$$

$$\omega_2^2=\frac{3k}{m} \tag{6b}$$

于是，该固有(圆)频率为

$$\boxed{\omega_1=\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}\qquad \omega_2=\left(\frac{3k}{m}\right)^{1/2}} \tag{7}$$

注意，ω_1 称为低频。

第 5 步：将公式 6 给出的特征值代入公式 3 的第一行，得到振型比：

即

$$(2k-m\omega_i^2)U_1^{(i)}-kU_2^{(i)}=0 \tag{8}$$

$$\beta_i=\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{(i)}=\frac{2k-m\omega_i^2}{k}=2-\frac{m\omega_i^2}{k}$$

因此

$$\boxed{\begin{aligned}\beta_1&=2-1=1\\ \beta_2&=2-3=-1\end{aligned}} \tag{9a}\ \tag{9b}$$

令 $U_1^{(i)}=1$，则 $U_2^{(i)}=\beta_i U_1^{(i)}=\beta_i$，以此画出振型图(图 E12.1.2)。

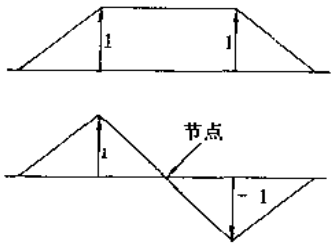


图 E12.1.2

模态 1

$$\omega_1=\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2},\quad \mathbf{U}_1=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

模态 2

$$\omega_2=\left(\frac{3k}{m}\right)^{1/2},\quad \mathbf{U}_2=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

注意原系统对于中间弹簧的中心是对称的。据此，振型出现对称(模态 1)与反对称(模态 2)。这是一个重要的结果，因为许多结构。都具有这样的物理对称。例如，飞机通过机体轴线的垂直平面是对称的(名义上)。

并注意模态 2 具有一个**节点**，即该点永远保持固定不变。

无阻尼 2-**DOF** 系统自由振动的通解已由公式 12.6 或公式 12.7 中的任一个给出。注意不论发生哪种情况，该运动是由系统频率为 ω_1 的振型 1 与频率为 ω_2 的振型 2 组合而成。在下面的例题中，读者能够看到，如何确定公式 12.7 中的四个任意常数。

例题 12.2

在例题 12.1 中所研究的系统上，给予如下初始条件

$$u_1(0)=\dot{u}_1(0)=\dot{u}_2(0)=0$$
$$u_2(0)=u_0$$

确定所发生的自由振动。

解： 应用公式 12.7 所给的通解。

$$u_1 = A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t \tag{1a}$$
$$u_2 = A_1\beta_1\cos\omega_1 t + B_1\beta_1\sin\omega_1 t + A_2\beta_2\cos\omega_2 t + B\beta_2\sin\omega_2 t \tag{1b}$$

微分公式 1，得到

$$\dot{u}_1 = -A_1\omega_1\sin\omega_1 t + B_1\omega_1\cos\omega_1 t - A_2\omega_2\sin\omega_2 t + B_2\omega_2\cos\omega_2 t \tag{2a}$$
$$\dot{u}_2 = -A_1B_1\omega_1\sin\omega_1 t + B_1\beta_1\omega_1 cos\omega_1 t - A_2\beta_2\omega_2\sin\omega_2 t + B_2\beta_2\omega_2\cos\omega_2 t \tag{2b}$$

根据例题 12.1 所得到的振型数据

$$\beta_1=1,\ \beta_2=-1 \tag{3}$$

因此

$$u_1(0) = A_1 + A_2 = 0 \tag{4}$$
$$u_2(0) = A_1\beta_1 + A_2\beta_2 = u_0$$
$$\dot{u}_1(0) = B_1\omega_1 + B_2\omega_2 = 0$$
$$\dot{u}_2(0) = B_1\beta_1\omega_1 + B_2\beta_2\omega_2 = 0$$

解这些公式，得到

$$A_1 = \frac{u_0}{2},\ A_2 = \frac{-u_0}{2}$$

$$B_1 = 0,\ B_2 = 0 \tag{5}$$

因此

$$u_1 = \left(\frac{u_0}{2}\right)(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \tag{6a}$$

$$u_2 = \left(\frac{u_0}{2}\right)(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \tag{6b}$$

给出的系统有如上所述的初始条件时，两个质量的运动取 $u_0 = 2$ in 和 $\omega_1 = 1$ rad/s。根据例题 12.1，$\omega_2 = \omega\sqrt{3}$。因此 $\omega_2 = \sqrt{3} = 1.732$ rad/s。所得到的运动，$u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 如图 E12.2.1所示。

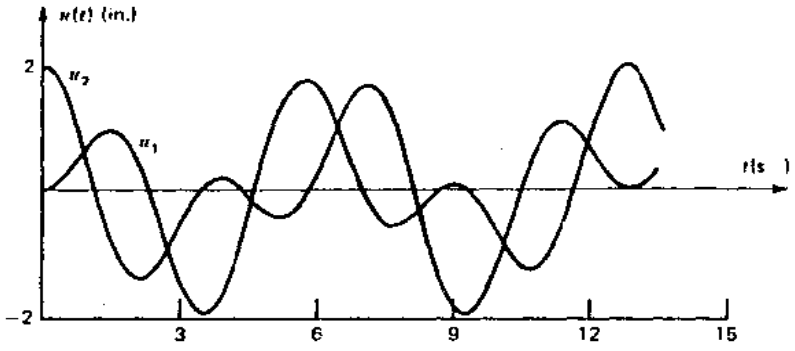


图 E12.2.1

选择一个适当的初始条件，使之一开始就可能成为一单个模态的自由振动。这个问题在习题练习中加以考虑。

§12.2 模态与频率的例题

前面一节中的例题 12.1 与例题 12.2 已完全说明了在确定 2-DOF 系统的自由振动时所需要的基本步骤。本节中再复习一下确定固有频率与模态的方法，指出如何将这个方法应用到假定振型模型中。并且还介绍有相同物理系统的不同模型之比较。

例题 12.3

在例题 11.9 中，已得到了一个 2-DOF 的假定振型模型的悬臂杆，解该模型的固有频率与模态，并画出模态图。用该符号 $q_1 \rightarrow u_1$，$q_2 \rightarrow u_2$（见图 E12.3.1）。

解：

a. 写出自由振动的运动方程。

根据例题 11.9 中公式 10

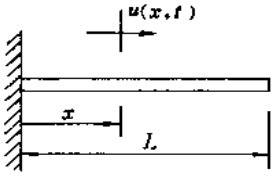


图 E12.3.1

$$\frac{\rho AL}{60}\begin{bmatrix}20 & 15\\ 15 & 12\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\frac{EA}{3L}\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{1}$$

b. 设简谐运动。

$$\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\end{Bmatrix}\cos(\omega t-\alpha) \tag{2}$$

c. 得到代数特征值问题

$$\left[\begin{bmatrix}3 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\mu_i^2\begin{bmatrix}20 & 15\\ 15 & 12\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{3}$$

式中

$$\mu_i^2=\left(\frac{\rho L^2}{20E}\right)\omega_i^2 \tag{4}$$

d. 根据系数行列式，得到特征方程

$$(3-20\mu_i^2)(4-12\mu_i^2)-(3-15\mu_i^2)^2=0$$

即

$$15(\mu_i^2)^2-26(\mu_i^2)+3=0 \tag{5}$$

e. 解特征方程的根

$$\mu_i^2=\frac{26\pm\sqrt{496}}{30}=0.1243,\quad 1.6090 \tag{6}$$

则根据公式 4 和公式 6，有

$$(\omega_1 L)^2=\left(\frac{20E}{\rho}\right)\mu_1^2=2.486\left(\frac{E}{\rho}\right) \tag{7a}$$

$$(\omega_2 L)^2=\left(\frac{20E}{\rho}\right)\mu_2^2=32.18\left(\frac{E}{\rho}\right) \tag{7b}$$

在 § 10.1 中，找到了该系统精确解的固有频率为

$$(\omega_1 L)^2_{\text{精确解}}=2.467\left(\frac{E}{\rho}\right) \tag{8a}$$

$$(\omega_2 L)^2_{\text{精确解}}=22.21\left(\frac{E}{\rho}\right) \tag{8b}$$

注意在这两种情况中，近似解的频率大于精确解的频率，并且所计算出基频(最低)的精度远大于第二频率。这些现象将在 § 17.1 中进一步讨论。假定振型模型的特性就是计算出的频率太高，并且所计算出的高频是不太精确的。

f. 确定振型

将 μ_i^2 代入公式 3 中的第一行

$$(3-20\mu_i^2)U_1^{(i)}+(3-15\mu_i^2)U_2^{(i)}=0 \tag{9}$$

即
$$\beta_i \equiv \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{(i)} = -\frac{(3-20\mu_i^2)}{(3-15\mu_i^2)} \tag{10}$$

因此
$$\beta_1 = -\frac{0.514}{1.136} = -0.453 \tag{11a}$$
$$\beta_2 = -1.381 \tag{11b}$$

画出振型，必须由例题 11.9 写出
$$u(x,t) = \left(\frac{x}{L}\right)u_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^2 u_2(t) \tag{12}$$

由公式 2.10 和公式 12，我们求出已知 i 阶模态的运动为
$$u^{(i)}(x,t) = \left[\left(\frac{x}{L}\right) + \beta_i\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]\cos(\omega_i t - \alpha_i) \tag{13}$$

即
$$u^{(i)}(x,t) = \phi_i(x)\cos(\omega_i t - \alpha_i) \tag{14}$$

式中：$\phi_i(x)$是振型，已知为
$$\phi_i(x) = \left(\frac{x}{L}\right) + \beta_i\left(\frac{x}{L}\right)^2 \tag{15}$$

画出振型图（见图 E12.3.2）

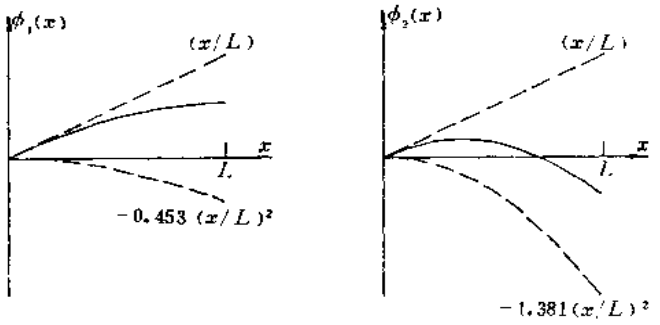


图　E12.3.2

用例题 10.1 中所表示精确解模态与该形状相比较。

上面的例题表明、应用假定振型模型可以得到一个很好的固有频率的估算。现在研究来比较假定振型模型与 2-DOF 集中质量模型模型。

例题 12.4

现在用无质量均匀杆，带有两个集中质量来表示原来系统的质量，以模拟例题 11.9 的悬臂杆。这是用 $k=2AE/L, m=\rho AL$ 来等效该质-弹系统（见图 E12.4.1）。

确定该模型的固有频率与正规模态。

解：

按照前面例题中的同样步骤。

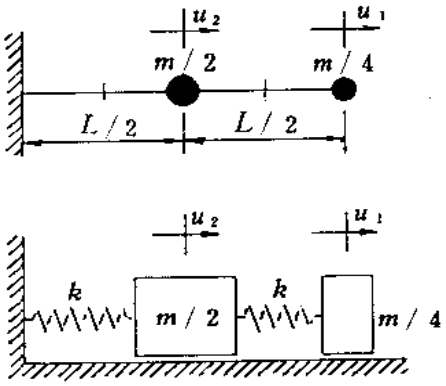


图 E12.4.1

$$\frac{\rho AL}{4}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\frac{2AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{1}$$

$$u=U\cos(\omega_i t-\alpha) \tag{2}$$

$$\left[\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}-\mu_i^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{3}$$

式中

$$\mu_i^2=\left(\frac{\rho L^2}{8E}\right)\omega_i^2 \tag{4}$$

$$(1-\mu_i^2)(2-2\mu_i^2)-(-1)(-1)=0$$

$$2\mu_i^4-4u_i^2+1=0 \tag{5}$$

$$\mu_i^2=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}=1\pm\sqrt{2}/2 \tag{6}$$

$$\mu_1^2=0.2929,\quad \mu_2^2=1.707$$

$$(\omega_1 L)^2=8(0.2929)\left(\frac{E}{\rho}\right)=2.343\left(\frac{E}{\rho}\right) \tag{7a}$$

$$(\omega_2 L)^2=8(1.707)\left(\frac{E}{\rho}\right)=13.66\left(\frac{E}{\rho}\right) \tag{7b}$$

前述相应的精确解值是 2.467 和 22.21，因此，可以看到，在各种情况下，集中质量模型所给出的频率是低于精确解的值。在 § 17.1 中将给出另一些例题。

公式 3 给出了振型

即
$$(1-\mu_i^2)U_1^{(i)}-U_2^{(i)}=0 \tag{8}$$

即
$$\beta_i=\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{(i)}=1-\mu_i^2 \tag{9}$$

因此

$$\beta_1=0.707,\quad \beta_2=-0.707$$

并且可画出振型图(见图 E12.4.2)。

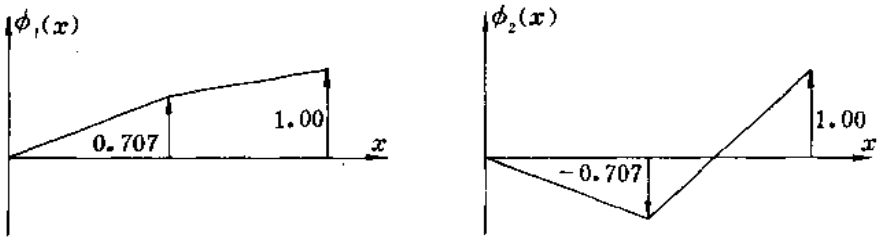


图 E12.4.2

该例题与例题 12.3 以及 § 10.1 相比较,读者可以观察到,模型的选择是十分重要的。虽然集中质量模型是近似表示,不能给出与假定振型模型基频相同的精确结果,但是如果集中质量的数目是很大的话,而且所需要的频率数目只占系统总自由度的很小一部分时,则集中质量模型还是可以采用的。

§ 12.3 刚体模态系统

系统经常是由一个或多个**刚体模态**连接在一起的,即模态在没有变形的弹性杆件中。这对于飞行中的航天运载工具的描述是真实的,因为它是成为一个没有变形的刚体在自由移动。例如在图 12.1 中,一架飞机的机翼和机体是用三个集中质量与一根柔性梁所模拟,其具有的振型表示在图 12.1 中。第 1 与第 2 模态是刚体模态(一个"颠簸"型和一个"滚动"型)。刚体模态具有一个零频率,这将在例题 12.5 中见到。

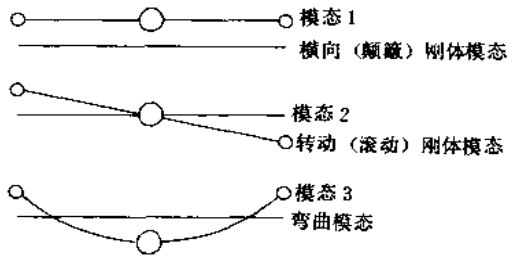


图 12.1 机翼用三个质量模型的振型说明刚体模态

模态 1 横向(颠簸)刚体模态

模态 2 转动(滚动)刚体模态

模态 3 弯曲模态

为了说明如何来处理刚体模态,将要研究例题 12.5 中的系统。该系统只有一个刚体模态。

例题 12.5

确定如图 E12.5.1 中所示系统的固有频率与振型。

2.4.14

（注意系统以弹簧保持未被伸长、成为刚体的自由平移。就是质量在没有任何外力作用下能够移动 $u_1=u_2$。）

解：

完全根据前面相同的方法进行，即效仿 § 12.1 中的步骤要点。运动方程为

$$\begin{aligned} 2m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - 2ku_2 &= 0 \\ m\ddot{u}_2 - 2ku_1 + 2ku_2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

第 1 步，设

$$\begin{aligned} u_1 &= U_1\cos\omega_i t \\ u_2 &= U_2\cos\omega_i t \end{aligned} \tag{2}$$

第 2 步. 根据特征值方程

$$\begin{bmatrix} (2k-2m\omega_i^2) & -2k \\ -2k & (2k-m\omega_i^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

第 3 步. 令公式 3 中系数的行列式为零，得到 特征方程

$$(2k-2m\omega_i^2)(2k-m\omega_i^2)-(2k)^2=0$$

即

$$m\omega_i^2(2m\omega_i^2-6k)=0 \tag{4}$$

第 4 步. 解方程的根（特征值）

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1^2 &= 0 \\ \omega_2^2 &= \frac{3k}{m} \end{aligned}} \tag{5}$$

第 5 步. 根据公式 3，计算振型

$$(2k-2m\omega_i^2)U_1^{(i)}-2kU_2^{(i)}=0$$

即

$$\beta_i=\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^{(i)}=\frac{2k-2m\omega_i^2}{2k}=1-\omega_i^2\left(\frac{m}{k}\right) \tag{6}$$

因此

$$\boxed{\begin{aligned} \beta_1 &= 1-0=1 \\ \beta_2 &= 1-3=-2 \end{aligned}} \tag{7}$$

画振型图。在每种情况。令 $U_1=1$

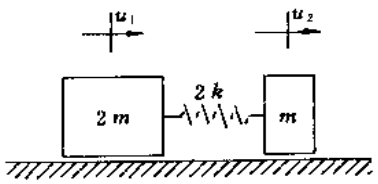


图 E12.5.1

模态 1

$$\omega_1 = 0,\ \mathbf{U}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{（刚体模态）}$$

模态 2

$$\omega_2 = \sqrt{3k/m},\ \mathbf{U}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}\text{(弯曲模态)}\ \rrbracket$$

注意在刚体模态中，其频率为零，弹簧未变形，在模态 2 中，质量在相对的方向移动，并有一个节点(即该点保持稳定)，如图 E12.5.2)所示。

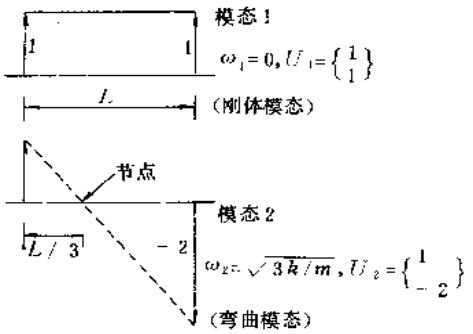


图 E12.5.2

关于特征值的问题，在得到一个或多个零的特征值时，如例题 12.5 就称为**半定特征值问题**。在结构动力学中，当结构能以刚体移动，则会得到零特征值。从数学上讲，零特征值是由刚度矩阵为奇异时所得，即刚度矩阵系数的行列式为零。

§ 12.4 无阻尼 2-DOF 系统简谐激励响应——振型叠加

在第 4 章中，读者已经研究了 1-DOF 系统的简谐激励响应。熟悉了当 $\Omega = \omega_n$ 时、共振发生，即无阻尼系统的位移这时变成无边界了。在这一章的前面几节中，读者已看到了 MDOF 系统具有多个固有频率，所以在研究 MDOF 系统中、共振是一个重要因素，是有道理的。在本节中，读者要研究 2-DOF 系统的简谐激励响应。另外，将介绍给读者振型叠加法来解 MDOF 系统的动力响应问题。这个重要的课题在第 15 章中会更加详细地加以研究。

例题 12.6

如图 E12.6.1 所示的 2-DOF 系统受到一个简谐力，$p_1 = P_1 \cos \Omega t$。确定每个质点为一个频率函数的稳态响应。应用振型叠加法解这个问题。系统的运动方程为：

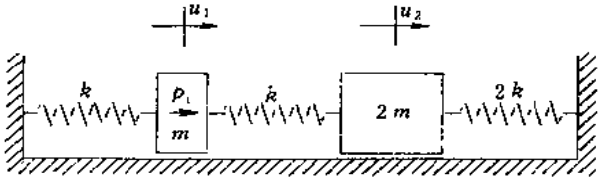


图 E12.6.1

$$m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_1\\ 0\end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

其固有频率与模态为(见图 E12.6.2)

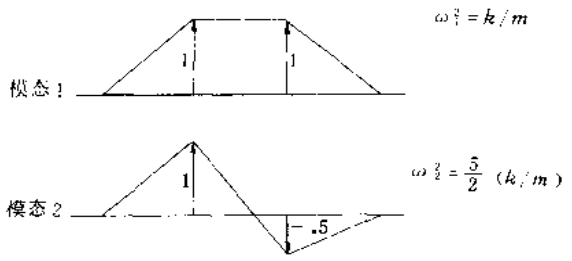


图 E12.6.2

模态 1 $\quad \omega_1^2 = k/m$

模态 2 $\quad \omega_2^2 = \frac{5}{2}(k/m)$

解:

a. 根据模态矩阵

这是一个矩阵,其中各列为固有模态。

$$\Phi=[\phi_1\phi_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix} \tag{1}$$

b. 用矩阵变换定义主坐标组 η_1 和 η_2

$$\mathbf{u}=\Phi\eta \tag{2}$$

$$\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\eta_1+\eta_2\\ \eta_1-\frac{1}{2}\eta_2\end{Bmatrix} \tag{3}$$

c. 运动方程对主坐标变换

$$\Phi^{\mathrm{T}}[\mathbf{m}(\Phi\ddot{\eta})+\mathbf{k}(\Phi\eta)=\mathbf{p}(t)] \tag{4}$$

即 $$(\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\Phi\ddot{\eta})+(\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\Phi)\eta=\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{p}$$

即 $$\boldsymbol{M}\ddot{\eta}+\boldsymbol{K}\eta=\boldsymbol{P} \tag{5}$$

式中 $$\boldsymbol{M}=\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\Phi,\ \boldsymbol{K}=\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\Phi,\ \boldsymbol{P}=\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{p} \tag{6}$$

(***M*** 和 ***K*** 通常称为**模态质量矩阵**与**模态刚度矩阵**,***P*** 称为**模态力向量***。)应用公式 1 至公式 6 计算这些。

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & 2m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2k & -k\\ -k & 3k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & \frac{15}{4}\end{bmatrix} \tag{8}$$

* 广义质量矩阵这个词经常被模态质量矩阵的词来代替,其他同。

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P_1\\ 0\end{Bmatrix}\cos\Omega t=\begin{Bmatrix}P_1\\ P_1\end{Bmatrix}\cos\Omega t \tag{9}$$

因此，在主坐标中的运动方程为

$$m\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1\\ \ddot{\eta}_2\end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & \frac{15}{4}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_1\\ P_1\end{Bmatrix}\cos\Omega t \tag{10}$$

然而对主坐标的变换具有**非耦联运动方程**(比较公式 10 与原运动方程)。这样导致了两个独立的单自由度方程，可以用第 4 章中的方法解。因此，解该方程。

$$3m\ddot{\eta}_1+3k\eta_1=P_1\cos\Omega t \tag{11a}$$

$$(3/2)m\ddot{\eta}_2+(15/4)k\eta_2=P_1\cos\Omega t \tag{11b}$$

d. 解稳态响应的非耦联运动方程。

设简谐激励

$$\eta_1=Y_1\cos\Omega t \tag{12a}$$

$$\eta_2=Y_2\cos\Omega t \tag{12b}$$

则

$$Y_1=\frac{P_1}{3k-3m\Omega^2}=\frac{(1/3k)P_1}{1-(\Omega/\omega_1)^2} \tag{13a}$$

$$Y_2=\frac{P_1}{(15/4)k-(3/2)m\Omega^2}=\frac{(4/15k)P_1}{1-(\Omega/\omega_2)^2} \tag{13b}$$

e. 变换回到物理坐标

公式 3，12 和 13 可以合并得到

$$u_1=U_1\cos\Omega t \tag{14a}$$

$$u_2=U_2\cos\Omega t \tag{14b}$$

式中

$$U_1=\left[\left(\frac{P_1/3k}{1-(\Omega/\omega_1)^2}\right)+\left(\frac{4P_1/15k}{1-(\Omega/\omega_2)^2}\right)\right] \tag{15a}$$

$$U_2=\left[\left(\frac{P_1/3k}{1-(\Omega/\omega_1)^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{4P_1/15k}{1-(\Omega/\omega_2)^2}\right)\right] \tag{15b}$$

图 E12.6.3 表示 $U_1(\Omega)$和 $U_2(\Omega)$。注意图中的共振峰是在 $\Omega=\omega_1$ 和 $\Omega=\omega_2$。

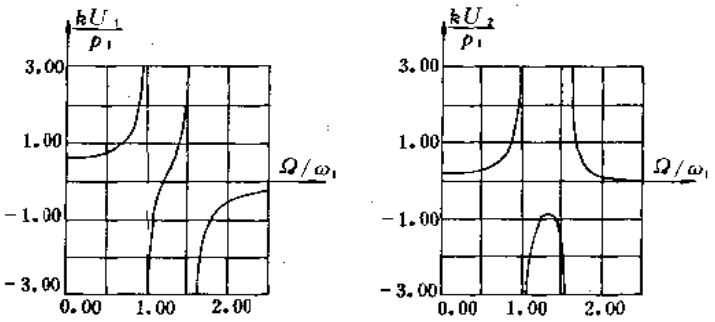


图 E12.6.3

用公式 14 直接代入原运动方程，能很容易地解上面的例题。这已不是用一般激励 $P(t)$ 的情况了，正如读者将会在第 15 章中所见到的。

根据例题 12-6，读者会发现在解 **MDOF** 系统模态与频率时的两个重要的理由：(1)用固有频率和模态将判定系统对动力激励如何响应。(2)应用模态矩阵对无阻尼和某些有阻尼系统的运动方程可以去耦。

在下一章中，读者将要研究模态与频率的一些重要特性；在第 14 章中，读者会学到适用于解多自由度系统的模态和频率的一些数值计算方法。

习题组 12.1

12.1 有一两层建筑结构的刚度与质量矩阵表示如下：

$$\mathrm{k}=600\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\ \mathrm{k/in},\quad \mathrm{m}=2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ \mathrm{k\text{-}sec^2/in.}$$

(a)求该结构的两个固有周期。

(b)求相应的两个振型。按比例画出两个模态图，其最大位移为 1.0(见图 P12.1)。

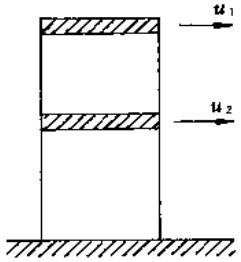


图 P12.1

12.2 集中质量的梁模拟成具有如下刚度与质量的矩阵：

$$\mathrm{k}=k\begin{bmatrix}2 & -5\\ -5 & 16\end{bmatrix}\ \mathrm{lb/in},\quad \mathrm{m}=m\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\ \mathrm{lb\text{-}sec^2/in.}$$

(a)求两个固有频率。

(b)求两个振型。按比例画出两个模态图，其最大位移为 1.0(见图 P12.2)。

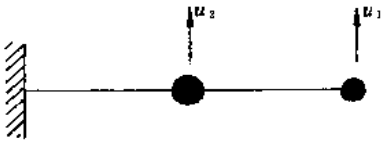


图 P12.2

12.3 一根细的匀质刚性梁支承在两个线性弹簧上。

(a)按照端点位移 u_1 和 u_2 写出其运动方程。

(b)求两个固有频率。

(c)求两个振型。按比例画出两个振型图，其最大位移为 1.0(见图 P12.3)。

12.4 有一集中质量体系如图 P12.4 所示。

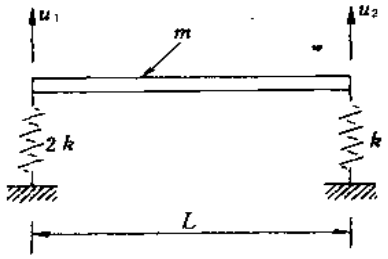


图 P12.3

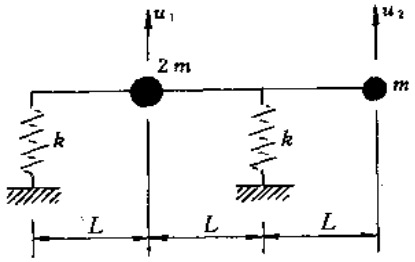


图 P12.4

(a)求两个固有频率。

(b)确定振型。

12.5 图 P12.1 中结构的频率和振型是 $\omega_1^2=175.7\ \text{rad}^2/\text{s}^2$，$\omega_2^2=1024\ \text{rad}^2/\text{s}^2$，和

$$\mathbf{U}_1=\begin{Bmatrix}1.000\\0.414\end{Bmatrix}\qquad \mathbf{U}_2=\begin{Bmatrix}-0.414\\1.000\end{Bmatrix}$$

如果初始条件为

$$u_1(0)=2\text{in},\ u_2(0)=1\text{in},\ \dot{u}_1(0)=\dot{u}_2(0)=0$$

时，求 $u_1(t)$与 $u_2(t)$的表达式。

12.6 在例题 12.1 中用具有刚度为 $k/10$ 的弱耦联弹簧替换质量 m_1 和 m_2 之间的弹簧。

(a)确定两个固有频率 ω_1 和 ω_2。

(b)确定两个振型，并以最大位移为 1.0 按比例画出每个振型图。

(c)根据如下的初始条件，确定 $u_1(t)$与 $u_2(t)$的表达式：

$$u_1(0)=u_0,\ \dot{u}_1(0)=u_2(0)=\dot{u}_2(0)=0$$

(d) $u_1(t)$和 $u_2(t)$可以按如下形式写出

$$u_1(t)=u_0\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$$

$$u_2(t)=u_0\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t$$

注意：这种形式表明该系统将会显示出大家所熟习的“拍的现象”。就是运动是以较快的$\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$为频率，并以频率为$\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)$时的渐变幅值做简谐运动。

习题组 12.2

12.7 图 P10.1 中系统的轴向振动模拟成 2-DOF 系统，根据

$$\psi_1(x)=\frac{x}{L},\ \psi_2(x)=\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

(a)确定该 2-DOF 模型的运动方程。

(b)计算两个固有频率，并比较其基频与习题 10.1 中所计算的精确解的频率。

(c)计算两个振型，并根据例题 12.3 所采用的每隔 $L/5$ 的计算值画出振型图。

12.8 有一 2-DOF 均匀悬臂梁的横向振动，根据

$$\psi_1(x)=\left(\frac{x}{L}\right)^2,\ \psi_2(x)=\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

(a)推导出该 2-DOF 模型的运动方程。

(b)计算固有频率。比较该频率与例题 10.3 的精确解频率。并比较该基频与例题 10.4 的频率值。

12.9 令图 P10.11 中梁的 $\mathbf{M}=\rho AL/2$。

(a)推导该系统 2-DOF 模型的运动方程，应用

$$\psi_1=\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),\ \psi_2=\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

(b)计算该 2-DOF 模型的固有频率，并比较其固有频率与例题 10.11 中用瑞利法得到的频率。

习题组 12.3

12.10 确定如图 P12.10 中系统的固有频率与振型。并画出三个振型图(注意：$\omega_1=0$)。

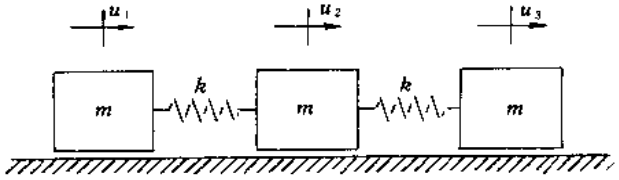


图 P12.10

12.11 如图 P12.11 所示，应用集中质量模型来研究两端自由匀质杆的轴向运动。以矩阵形式表示所得到的运动方程为

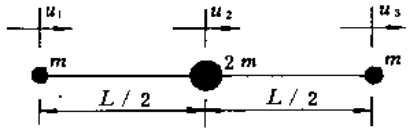


图 P12.11

$$m\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\\\ddot{u}_3\end{Bmatrix}+k\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

式中 $$m=\rho AL/4,\ k=2AE/L.$$

(a)解该系统的三个固有频率(注意:$\omega_1=0$)。

(b)解出三个振型。以最大位移为 1.0 按比例画出每个振型图。

(c)将该频率与习题 10.2 所得的精确值加以比较。

习题组 12.4

12.12 例题 12.6 中所说明的振型叠加法,将在第 15 章中加以广泛应用。利用公式 14 直接代入运动方程中,就可得到例题 12.6 中系统的一个稳态响应的更为直接的解法。所得到的结果即为公式 15 中的频响表达式。

12.13 有一种方法可降低 **SDOF** 系统承受简谐激励的振动幅值,就是附加上一个可调频的振动阻尼器,使它成为两个质-弹系统。如图 P12.13 所得到的 2-**DOF** 系统

(a)确定其运动方程;

(b)用下式给出其稳态响应

$$u_1(t)=U_1\cos\Omega t$$
$$u_2(t)=U_2\cos\Omega t$$

并用下式表示

$$U_1(\Omega)=\frac{(k_2-\Omega^2m_2)P_1}{D(\Omega)}$$
$$U_2(\Omega)=\frac{k_2P_1}{D(\Omega)}$$

式中 $$D(\Omega)=(k_1+k_2-\Omega^2m_1)(k_2-\Omega^2m_2)-k_2^2$$

(c) 阻尼器是可调的,因此,$k_2/m_2=k_1/m_1$。所以,当 $\Omega^2=k_1/m_1$,即原来系统发生共振时,则响应幅值 U_1 可减到零。对于一个特殊的可调阻尼器系统令 $m_2/m_1=0.25$,画出以频比 $r=\Omega\sqrt{k_1/m_1}$ 为函数的 k_1U_1/P_1 和 k_1U_2/P_1 的曲线。

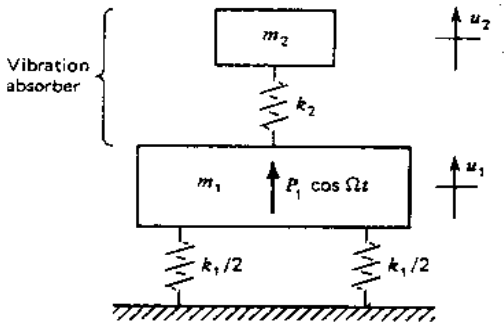


图 P12.13

12.14 利用习题 12.1 和 12.5 的资料，以及采用例题 12.6 的振型叠加法，确定图 P12.1 中两层结构对如下简谐激励的稳态响应。

$$\mathbf{P}(t)=\begin{Bmatrix}10\\0\end{Bmatrix}\sin(25t)k$$

12.15 应用例题 12.6 的振型叠加法，用下式给出的对称简谐激励

$$\begin{Bmatrix}P_1\\P_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\P\end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

仅对例题 12.1 的对称系统表示在对称模态中所发生的稳态响应。

第 13 章　MDOF 系统自由振动

在第 11 章中已经推导出 MDOF 系统的运动方程，同时在第 12 章中通过考虑两个自由度系统的自由振动介绍了求固有频率与固有模态的方法。在本章中讨论 MDOF 系统固有频率与固有模态的一些特性。

本章将完成以下内容：

- **定义下面术语：正定矩阵、奇异矩阵、固有模态、正规模态、模态刚度、模态质量、正交性、模态矩阵、瑞利方程、柔度系数。**
- **已知系统有相异或重复的固有频率、确定 MDOF 系统的振型。**
- **陈述导出系统刚体模态的条件。**
- **应用瑞利法得到 MDOF 系统基本频率的估算、及陈述瑞利商的基本特性。**
- **应用瑞利—里兹法得到 N-DOF 系统的 N 频率（$N \leqslant N$）的估算，说明这些频率的估算如何改善。**

§ 13.1　固有频率与固有模态特性

这一节的目的是讨论固有频率与模态一些更重要的性质，感兴趣的是将方程最简要的写成矩阵的形式。在研究频率与模态性质前，通常研究结构动力问题中所遇见的刚度矩阵与质量矩阵的某些性质是非常有用的。

k 与 m 的性质

在第 11 章，**k** 与 **m** 都曾以二次式形式表示应变能与动能。

$$V=\frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{k}\mathbf{u} \tag{13.1a}$$

及

$$T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^T\mathbf{m}\,\dot{\mathbf{u}} \tag{13.1b}$$

可以看出 **k** 与 **m** 是对称的*，即 $\mathbf{k}^T=\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{m}^T=\mathbf{m}$。对于许多结构 **k** 与 **m** 为**正定矩阵**。即当任意向量 **u** 与 $\dot{\mathbf{u}}$ 选定，并由公式 13.1 计算 V 及 T 时，则 V 与 T 的计算结果为正；除了无价值的 $\mathbf{u}=0$ 及 $\dot{\mathbf{u}}=0$。它的物理意义如下：

a）对于 MDOF 系统无位形改变的任何位移，应变能为正。

* 刚度系数的对称性，即 $k_{ij}=k_{ji}$，对于线性结构通常认为是麦克斯威尔互等关系，k_{ij} 由假定振型法（例如公式 11.12）得到。习题 13.1 说明一个非对称的刚度与质量矩阵是如何建立的。

b)对于任何任意速度分布的 MDOF 系统将得到正的动能。

具有刚体自由度系统、正定的 **k** 除外，于是位移 **u** 可作为刚体模态，在这种情形下 **k** 可称为**半正定的**。即 V 可以为零(刚体模态)或大于零(变形模态)。当 **k** 为半正定，$|\mathbf{k}|=\det(\mathbf{k})=0$。一个矩阵的行列式为零称为**奇异矩阵**。半正定系统的例子如例题 13.2。

自由度无惯性联系的系统其 **m** 为非正定的例外。这样的模型通常出现在如图 13.1 所说明的集中质量，并在 § 16.2 中进一步讨论。

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

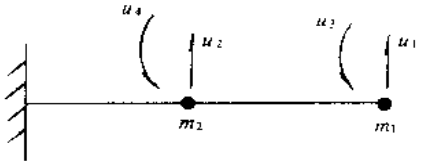


图 13.1　具有半正定质量矩阵体系

特征解

无阻尼 MDOF 系统的运动方程，由公式 11.22 可记为

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{0} \tag{13.2}$$

其中 **m** 与 **k** 为$(N\times N)$矩阵，以及 $\mathbf{u}(t)$为$(N\times 1)$物理或广义位移坐标的向量。

简谐运动给出为

$$\mathbf{u}=\mathbf{U}\cos(\omega t-\alpha) \tag{13.3}$$

代入公式 13.2 可得出 N 阶代数特征值问题

$$(\mathbf{k}-\omega^2\mathbf{m})\mathbf{U}=\mathbf{0} \tag{13.4}$$

由公式 13.4 的非平凡解，需要

$$\boldsymbol{det}(\mathbf{k}-\omega^2\mathbf{m})=0 \tag{13.5}$$

这称为**特征方程**。当公式 13.5 的行列式展开，其结果为 N 次 ω^2 的多项式公式，其根是**特征值**，即固有频率的平方 ω_r^2。这些可从低到高排列

$$0\leqslant\omega_1^2\leqslant\omega_2^2\cdots\leqslant\omega_r^2\leqslant\cdots\leqslant\omega_N^2 \tag{13.6}$$

相应于每一个特征值 ω_r^2 将有一个特征向量，即固有模态 $\mathbf{U}_r$，这里

$$U_r=\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdots \\ U_N \end{Bmatrix}_r \qquad r=1,2,\cdots,N \tag{13.7}$$

模态仅是确定内部的一个定数乘子，因此模态可以用任何方便的方式度量。

定标(正规化)

如果一个固有模态向量 $\mathbf{U}_r$ 的一个元素值指定为一个特殊值，于是确定其余$(N-1)$元素值是唯一的。固有模态进行定标过程，因此它的每一个元素具有唯一值，称为**正规化**，同时模态向量的结果称为**正规模态**。

用 ϕ_r 表示一个模态所取的比值使它的幅值是唯一的。假定 ϕ_r 是无量纲的，即任何一个相应于 ω_r 的模态向量值，可以写成这种形式

$$U_r = c_r \phi_r \tag{13.8}$$

其中 c_r 是定标常数，它的单位如同 $\phi_r^T \mathbf{m} \phi_r$，具有质量的量纲*。

模态正规化的三种方法已在§10.5 连续系统中提出，可以应用相应的方法于 **MDOF** 系统。

1. 在一指定坐标 i 取 $(\phi_i)_r = 1$ 定标 r 阶模态。
2. 定标 r 阶模态，取 $(\phi_i)_r = 1$，这里 $|(\phi_i)_r| = \max_j |(\phi_j)_r|$，即在坐标 i 的最大位移。
3. 定标 r 阶模态，因而广义质量或**模态质量**定义为：

$$M_r = \phi_r^T \mathbf{m} \phi_r \tag{13.9}$$

具有指定的值，取值经常应用** $M_r = 1$。

r 阶模态广义刚度，即**模态刚度**，定义为

$$K_r = \phi_r^T \mathbf{k} \phi_r \tag{13.10}$$

如果公式 13.4 记为 r 阶模态并前乘 ϕ_r^T，得到

$$(\phi_r^T \mathbf{k} \phi_r) = \omega_r^2 (\phi_r^T \mathbf{m} \phi_r) \tag{13.11}$$

于是

$$\omega_r^2 = \frac{K_r}{M_r} \tag{13.12}$$

是对连续系统在公式 10.44 所见到的。

振型-相异频率情况

如果 ω_r 为相异的特征值，ϕ_r 可以用下面的方式确定，取

$$\mathbf{D}(\omega_r) \equiv \mathbf{k} - \omega_r^2 \mathbf{m} \tag{13.13}$$

假定坐标 1 不是 r 阶模态的节点，即它不是位移为零的点。公式 13.4 分块表示如下

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{aa}(\omega_r) & \mathbf{D}_{ab}(\omega_r) \\ \mathbf{D}_{ba}(\omega_r) & \mathbf{D}_{bb}(\omega_r) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_b \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{13.14}$$

其中 ϕ_r 已用 $\phi_1 = 1$ 定标，以及

$$(\phi_b)_r = \begin{Bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \\ \cdots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_r \tag{13.15}$$

因为 ω_r 是一个特征值，公式 13.4 指出 $\det[\mathbf{D}(\omega_r)] = 0$，即 $\mathbf{D}(\omega_r)$ 是奇异的。矩阵的**秩**定义为具有非零行列式的最大子矩阵。如果 ω_r 为相异的特征值，$\mathbf{D}(\omega_r)$ 的秩是 $(N-1)$、同时座标可以标记的，以致 $\mathbf{D}_{bb}(\omega_r)$ 为非奇异的。所以 $[\mathbf{D}_{bb}(\omega_r)]^{-1}$ 存在；并且对于振型 ϕ_r 的余项公式 13.14 中较低的分块可以求解。即

$$(\phi_b)_r = -[\mathbf{D}_{bb}(\omega_r)]^{-1} \mathbf{D}_{ba}(\omega_r) \tag{13.16}$$

下面例子说明特征多项式以及公式 13.16 的应用。

---

* 对'无量纲'这个特殊定义的理解是一些向量 U 可包含混合类型坐标，例如弯曲与转动。从一般意义上说无量纲 ϕ 的所有构成成分不可能同时发生。

** 象前面所指出的定标 ϕ_r 是很方便的，因此 $\phi_r^T m \phi_r$ 结果具有单位质量，于是应用 $M_r = 1$kg(或 1slug)是非常方便的。

例题 13.1

a. 表示在图 E13.1.1 中的系统确定 $\omega_r^2(r=1,2,3)$值，并绘出特征多项式图形。

b. 求相应于 ω_2 的振型。

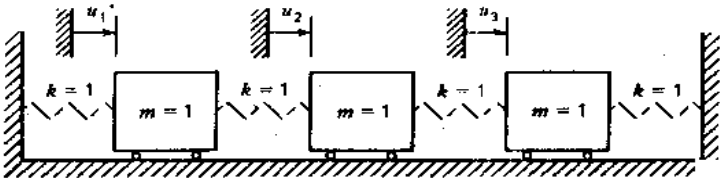


图 E13.1.1

解：

a. 刚度矩阵与质量矩阵为

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

于是

$$\mathbf{D}(\omega)=\begin{bmatrix} (2-\omega^2) & -1 & 0 \\ -1 & (2-\omega^2) & -1 \\ 0 & -1 & (2-\omega^2) \end{bmatrix} \tag{2}$$

应用第一行(或)列展开 $\det[\mathbf{D}(\omega)]$得到

$$\det[\mathbf{D}(\omega)]=(2-\omega^2)\begin{vmatrix} (2-\omega^2) & -1 \\ -1 & (2-\omega^2) \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & (2-\omega^2) \end{vmatrix}$$

特征多项式为

$$\det[\mathbf{D}(\omega)]=(2-\omega^2)(\omega^4-4\omega^2+2) \tag{3}$$

于是

$$\boxed{\omega_1^2=2-\sqrt{2},\ \omega_2^2=2,\quad \omega_3^2=2+\sqrt{2}} \tag{4}$$

对各种 ω 值计算特征多项式，并绘图如图 E13.1.2

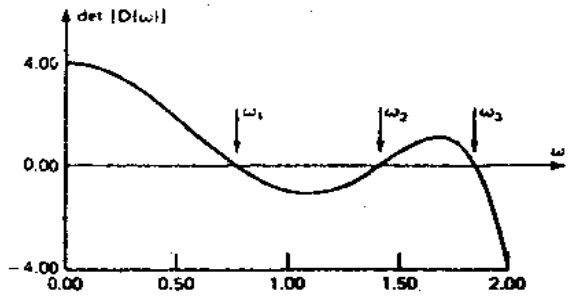


图 E13.1.2

b. $\mathbf{D}(\omega_2)$可以分块如公式 13.14

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{aa}(\omega_2) & \mathbf{D}_{ab}(\omega_2) \\ \mathbf{D}_{ba}(\omega_2) & \mathbf{D}_{bb}(\omega_2) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \tag{5}$$

于是

$$\mathbf{D}_{bb}(\omega^2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}_{ba}(\omega_2) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

$\mathbf{D}_{bb}$的逆矩阵是

$$[\mathbf{D}_{bb}(\omega^2)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

由公式 13.16 得到

$$(\phi_b)_2 = -[\mathbf{D}_{bb}(\omega_2)]^{-1}\mathbf{D}_{ba}(\omega_2) = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

于是,因为 $\phi_1 = 1$,模态 2 成为

$$\boxed{\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}} \tag{9}$$

表示如图 E13.1.3

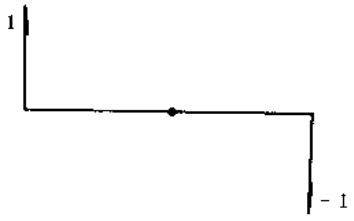


图 E13.1.3

下面例子具有半正定系统的一些特征,即具有一个刚体模态,下面予以说明。

例题 13.2

可应用 §11.4 假定振型法(或在 16 章讨论的有限元法)求得下面 3-**DOF** 模型一均匀杆无约束的轴向运动(见图 E13.2.1)。

ρA=常数,EA=常数

$$\frac{\rho AL}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(a)表示 **k** 是奇异的

(b)对固有频率求解,因此表示 $\omega_1^2 = 0$

(c)应用公式 13.16 的方法确定刚体模态

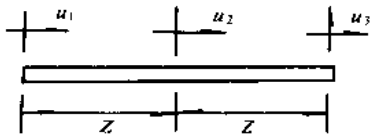


图 E13.2.1

$\rho A=\text{cons}, EA=\text{cons}$

解：

a. 计算 det(**k**)

$$\det(\mathbf{k})=\frac{EA}{L}\begin{vmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}$$

所以，用第一行展开得

$$\det(\mathbf{k})=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&-1\\0&1\end{vmatrix}=0 \tag{1}$$

因此 det(**k**)=0，**k** 是奇异的。

b. 建立特征多项式，并求它的根

令

$$\mu=\omega^2\left(\frac{\rho L^2}{6E}\right) \tag{2}$$

于是，**D**(ω)可写成如下分块形式

$$\mathbf{D}(\mu)=\left[\begin{array}{c:cc}(1-2\mu)&(-1-\mu)&0\\\hdashline(-1-\mu)&2(1-2\mu)&(-1-\mu)\\0&(-1-\mu)&(1-2\mu)\end{array}\right] \tag{3}$$

展开 det[**D**(μ)]得到特征多项式

$$\det[\mathbf{D}(\mu)]=\mu(1-2\mu)(-2+\mu)=0 \tag{4}$$

于是特征多项式的根为

$$\mu_1=0,\ \mu_2=1/2,\ \mu_3=2 \tag{5}$$

所以

$$\boxed{\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=\frac{3E}{\rho L^2},\ \omega_3^2=\frac{12E}{\rho L^2}} \tag{6}$$

c. 对于一个刚体模态、其 $\omega=0$。所以用公式 13.16 确定 ϕ_1，是个刚体模态由公式 3

$$\mathbf{D}_{bb}(\omega_1)=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix},\ \mathbf{D}_{ba}=\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix} \tag{7}$$

$\mathbf{D}_{bb}(\omega_1)$逆矩阵是

$$[\mathbf{D}_{bb}(\omega_1)]^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix} \tag{8}$$

于是，由公式 13.16

$$\begin{aligned}(\phi_b)_1&=-[\mathbf{D}_{bb}(\omega_1)]^{-1}\mathbf{D}_{ba}(\omega_1)\\&=-\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{9}$$

因 $\phi_1=1$，其刚体模态为

$$\boxed{\phi_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}} \tag{10}$$

这是一个予想到的表示刚体振型，因为公式 10 表明杆件上所有的点在该模态移动了相同的距离，因此沿着杆长无变形。

正交性

固有模态最重要的性质是**正交性性质**，先对 r 模态写出公式 13.4，同时用 ϕ_s^T 前乘这个公式得

$$(\phi_s^T\mathbf{k}\phi_r)-\omega_r^2(\phi_s^T\mathbf{m}\phi_r)=0 \tag{13.17}$$

于是，对 s 阶模态写出公式 13.4 并用 ϕ_r^T 前乘得

$$(\phi_r^T\mathbf{k}\phi_s)-\omega_s^2(\phi_r^T\mathbf{m}\phi_s)=0 \tag{13.18}$$

因为 **k** 与 **m** 是对称的，公式 13.18 可互相置换记为

$$(\phi_s^T\mathbf{k}\phi_r)-\omega_s^2(\phi_s^T\mathbf{m}_Z\phi_r)=0 \tag{13.19}$$

从公式 13.17 减去公式 13.19 得出

$$(\omega_s^2-\omega_r^2)(\phi_s^T\mathbf{m}\phi_r)=0 \tag{13.20}$$

对于相异频率的模态，即 $\omega_r\neq\omega_s$，它必须有

$$\phi_s^T\mathbf{m}\phi_r=0\ (\omega_r\neq\omega_s) \tag{13.21}$$

称为 r 阶模态与 s 阶模态**对于质量矩阵正交**。公式 13.21 代入公式 13.17 可以表示 r 阶模态与 s 阶模态也**对刚度矩阵正交**，即

$$\boldsymbol{\phi}_s^T\mathbf{k}\boldsymbol{\phi}_r=\mathbf{0} \tag{13.22}$$

振型-重频情况

这经常发生在复杂系统，这里频率间隔密，即 ω_r 与 ω_{r+1} 约差 1%的情况。一个系统有**重频**是偶然发生的，即 $\omega_r=\omega_{r+1}=\cdots=\omega_{r+p-1}$。线性代数理论论述*：如果特征值重复 p 次，将有与重复特征值有关的 p 个线性独立的特征向量。虽然它不需要这些特征向量彼此正交，事实上可能的选择特征向量、即使 $\omega_r=\omega_s$，使之将满足公式 13.21 与公式 13.22 的正交性关系。

确定相应重频振型的程序与根据公式 13.16 所提供的及例题 13.1 和 13.2 说明的稍有不同。如果频率 ω_r 有 p 个重复，则 $\mathbf{D}(\omega_r)$ 的秩为 $(N-p)$。令公式 13.4 写成分块的形式为

$$\begin{bmatrix}\underset{p\times p}{\mathbf{D}_{aa}(\omega_r)} & \underset{p\times(N-p)}{\mathbf{D}_{ab}(\omega_r)}\\ \underset{(N-p)\times p}{\mathbf{D}_{ab}(\omega_r)} & \underset{(N-p)\times(N-p)}{\mathbf{D}_{bb}(\omega_r)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_a\\ \phi_b\end{Bmatrix}_r=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{Bmatrix} \tag{13.23}$$

其中 $\mathbf{D}_{bb}$ 是非奇异的，以及

$$(\phi_a)_r=\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \cdots\\ \phi_p\end{Bmatrix},\quad (\phi_b)_r=\begin{Bmatrix}\phi_{p+1}\\ \phi_{p+2}\\ \cdots\\ \phi_N\end{Bmatrix} \tag{13.24}$$

---

* 通常用这个理论来证明标准特征值问题 $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$，这里 **A** 是对称的。然而将广义特征值问题 $\mathbf{K}\phi=\omega^2\mathbf{m}\phi$ 可以成为所要求的标准、对称的形式。

对较低的分块$(\phi_b)_r$可以求解

$$(\phi_b)_r = -[\mathbf{D}_{bb}(\omega_r)]^{-1}\mathbf{D}_{ba}(\omega_r)(\phi_a)_r \tag{13.25}$$

按照上面陈述的理论，将有相应于重频 $p\omega_r$ 个线性独立向量，因之必须选择 p 个线性独立向量$(\phi_a)_r, (\phi_a)_{r+1}, \cdots, (\phi_a)_{r+p-1}$，同时公式 13.25 将确定其模态向量的其余分量等等。其向量为：

$$(\phi_a)_r = \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \cdots\\ \phi_p\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{Bmatrix}, (\phi_a)_{r+1} = \begin{Bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{Bmatrix}, \cdots, (\phi_a)_{r+p-1} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \cdots\\ 1\end{Bmatrix} \tag{13.26}$$

应用这个向量 ϕ_a 形成一组适合的线性独立向量。例题 13.3 说明对于一个 $\omega_1 = \omega_2 = 0$ 的系统，即 $\omega_r = 0, p = 2$，此时 $\mathbf{D}(\omega_r)$如何分块。

例题 13.3

一个均匀梁模型处理成在三个节点上的集中质量，如图 E13.3.1 所示*。

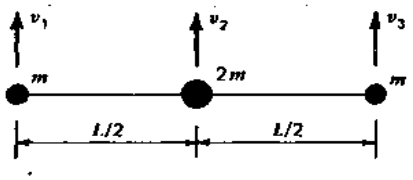


图 E13.3.1

其运动方程的结果是

$$\frac{\rho AL}{4}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{v}_1\\ \ddot{v}_2\\ \ddot{v}_3\end{Bmatrix} + \frac{12EI}{L^3}\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

a. 求该系统的三个固有频率。

b. 求该系统的三个固有模态。

c. 计算 $\phi_1^T\mathbf{m}\phi_2$ 及 $\phi_1^T\mathbf{m}\phi_3$。

解：

a. 建立与求解特征方程

令

$$\mu = \omega^2\left(\frac{\rho AL^4}{48EL}\right) \tag{1}$$

于是特征值方程

$$(\mathbf{k}-\omega^2\mathbf{m})\phi = \mathbf{0} \tag{2}$$

可写成这种形式

---

* 称为网格点是与节点应用于结构上位移座标的位置，例如指定为 v_1、v_2。节点这个用法不应当与振型节点混淆，如例题 12.1 所指出的。

$$\mathbf{D}(\mu)\phi = \begin{bmatrix} (1-\mu) & -2 & 1 \\ -2 & 2(2-\mu) & -2 \\ 1 & -2 & (1-\mu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

特征方程为 $\det[\mathbf{D}(\mu)] = 0$，简化为

$$\mu^2(\mu-4) = 0 \tag{4}$$

因此

$$\mu_1 = \mu_2 = 0,\ \mu_3 = 4 \tag{5}$$

于是

$$\boxed{\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 4\left(\frac{48EL}{\rho AL^4}\right)} \tag{6}$$

b. 首先求相应于唯一频率 ω_3 的模态 3。

应用例题 13.1 与 13.2 相同的步骤；$D(\mu_3)$分块用隔离顶上一行与最左边一列

$$\begin{bmatrix} D_{aa}(\mu_3) & \mathbf{D}_{ab}(\mu_3) \\ \mathbf{D}_{ba}(\mu_3) & \mathbf{D}_{bb}(\mu_3) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} -3 & -2 & 1 \\ \hline -2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}\right] \tag{7}$$

则 $\mathbf{D}_{bb}(\mu_3)$是非奇异的

$$[\mathbf{D}_{bb}(\mu_3)]^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

由公式 13.6

$$\begin{aligned}(\phi_b)_3 &= -[\mathbf{D}_{bb}(\mu_3)]^{-1}\mathbf{D}_{ba}(\mu_3) \\ &= -\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}\end{aligned} \tag{9}$$

因为$(\phi_a)_3$ 假定为 1，见图 E13.3.2。

$$\boxed{\phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \tag{10}$$

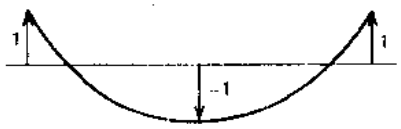


图 E13.3.2

解相应于 $\omega = 0$ 的两个模态。$\mu = 0$、$\mathbf{D}(\mu)$变为

$$\mathbf{D}(\mu_1) = \mathbf{D}(\mu_2) = \mathbf{D}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

这很容易看出，每一行(列)是第一行(列)的倍数，及没有 $\mathbf{D}(0)$的 2×2 阶子矩阵它具有一个非零行列式。于是 $\mathbf{D}(0)$的秩是$(N-p) = (3-2) = 1$，对于 $\mu = 0$，将公式(3)写成分块形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{aa}(0) & \mathbf{D}_{ab}(0) \\ \mathbf{D}_{ba}(0) & D_{bb}(0) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & -2 & 1 \\ \hline -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \tag{12}$$

由公式 13.25，

$$(\phi_3)_r = -1[1 \quad -2]\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}_r, \qquad r = 1,2 \tag{13}$$

选择线性独立向量

$$\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix} \text{ 及 } \begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix} \tag{14}$$

由公式 13 与 14，

$$(\phi_3)_1 = [-1 \quad 2]\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix} = -1 \tag{15a}$$

$$(\phi_3)_2 = [-1 \quad 2]\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix} = 2 \tag{15b}$$

于是

$$\boxed{\phi_1 = \begin{Bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{Bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{Bmatrix}} \tag{16}$$

其刚体模态绘在图 E13.3.3

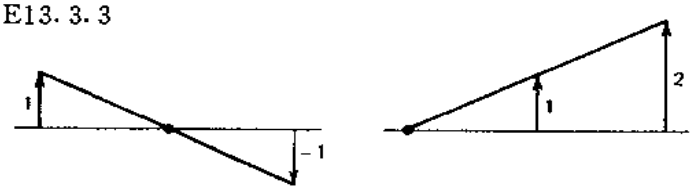


图 E13.3.3

c. 计算 $\phi_1^T\mathbf{m}\phi_2$ 及 $\phi_1^T\mathbf{m}\phi_3$

$$\phi_1^T\mathbf{m}\phi_2 = [1 \quad 0 \quad -1]\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & 2m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{Bmatrix} = -2m \neq 0 \tag{17}$$

所以，两个刚体模态虽然线性独立，但不正交。令 $\phi_2 = \phi_2 + \phi_1$，是上面的刚体模态的一种特殊线性组合。于是

$$\phi_1^T\mathbf{m}\,\phi_2 = [1 \quad 0 \quad -1]\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & 2m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix} = 0 \tag{18}$$

因此，模态 ϕ_1 与 ϕ_2 形成一组刚体模态表示与质量矩阵正交。

现在计算 $\phi_1^T\mathbf{m}\phi_3$。

$$\phi_1^T\mathbf{m}\phi_3 = [1 \quad 0 \quad -1]\begin{Bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & 2m & 0\\ 0 & 0 & m\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{Bmatrix} = 0 \tag{19}$$

因为 $\omega_1 \neq \omega_3$，因此满足正交性。

上面例题指出，系统具有重频，或是很密间隔的频率；确定其固有模态时需要专门考虑。

模态矩阵

在这一节的余下部分很方便的将假定所有模态是正交的，即公式 13.21 与 13.22 对于 $r \neq s$ 成立，这里包含 $\omega_r = \omega_s$ 的情况。系统的**模态矩阵**，它的列分别是正规模态。

即
$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \cdots \phi_N] \tag{13.27}$$

广义质量矩阵与广义刚度矩阵

应用公式 13.9 和 13.10 给出的模态质量与模态刚度的定义与公式 13.21 和公式 13.22 的正交性公式，得到一个对角**模态质量矩阵** M 和一个对角**模态刚度矩阵** K，给出为

$$M = \Phi^T \mathbf{m} \Phi = \text{diag}(M_1 M_2 \cdots M_N) \tag{13.28}$$

及
$$K = \Phi^T \mathbf{k} \Phi = \text{diag}(K_1 K_2, \cdots K_N) \tag{13.29}$$

如果固有模态为正规化，因此 $M_r = 1$，这种形式称为**向量正规化组**，于是 M 变为单位矩阵，

即
$$\Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{I} \tag{13.30}$$

及
$$\Phi^T \mathbf{k} \Phi = \Lambda \tag{13.31}$$

这里
$$\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \cdots \omega_N^2) \tag{13.32}$$

展开定理

在公式 10.54 对连续系统所论述的展开定理同样可以用于对 **MDOF** 系统的论述，正规模态 $\phi_r, r = 1, 2, \cdots, N$，形成一组相互正交的 N 维向量。可以表示（见习题 13.8）N 个模态也形成一组线性独立的 N 维向量。因此，一个任意向量 u 可表示成正规模态的线性组合，用下面公式

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{N} c_r \phi_r \tag{13.33}$$

其中 c_r 为

$$c_r = \left(\frac{1}{M_r}\right) \phi_r^T \mathbf{m} \mathbf{u} \tag{13.34}$$

公式 13.33 建立了一个基础知道什么是**正规模态**与**振型迭加法**，这已在例题 12.6 中用过，同时将在第 15 章中更详细的论述。

例题 13.4

一均匀梁曾经在例题 13.3 中用三个集中质量放在一个无质量的梁上来模拟，模型对于中心质量是对称的。相互正交的正规模态可以认定是两个对称模态及一个反对称模态（见图 E13.4.1）。

应用公式 13.35 表示任何任意的对称挠度 v 的展开式，将只包含结构的对称模态。

解：

需要表示为任意一对称向量的形式

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ a \end{Bmatrix} \tag{1}$$

系数 c_1 在展开式中变为零

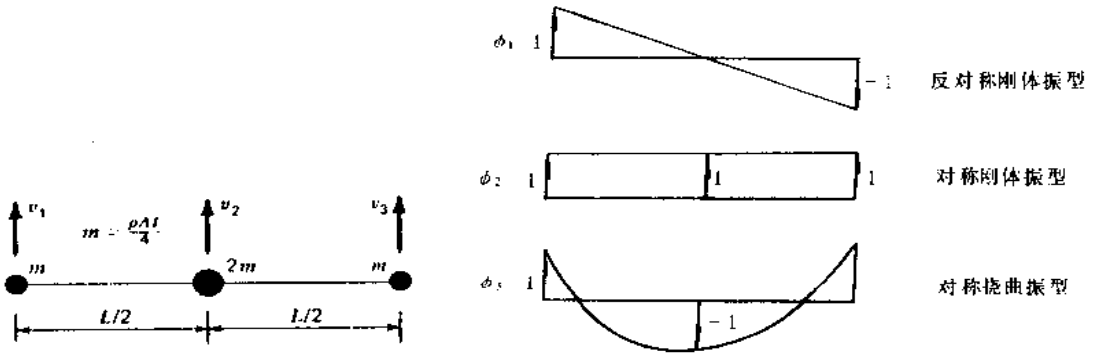


图 E13.4.1

$$\mathbf{v} = \sum_{r=1}^{3} c_r \boldsymbol{\phi}_r \tag{2}$$

所以，由公式 13.34 计算 c_1，

$$c_1 = \frac{\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{v}}{\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1} \tag{3}$$

但是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{m}\mathbf{v} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0 & 0\\ 0 & 2m & 0\\ 0 & 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ b\\ a\end{Bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}ma\\ 2mb\\ ma\end{Bmatrix} = 0\end{aligned} \tag{4}$$

所以，$c_1 = 0$，并且任何对称变形的展开式仅包含系统的对称模态。

自由振动的通解

回到公式 13.3，看到一个无阻尼 **N-DOF** 系统的自由振动*，第 r 阶固有模态的振动给出为

$$\mathbf{u}_r = c_r\boldsymbol{\phi}_r\cos(\omega_r t - \alpha_r) \tag{13.35}$$

因此，对于自由振动**通解**可写成形式

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{\mathrm{N}} c_r\boldsymbol{\phi}_r\cos(\omega_r t - \alpha_r) \tag{13.36}$$

或者下面的形式，曾在例题 12.2 用过。

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{\mathrm{N}} \boldsymbol{\phi}_r[a_r\cos(\omega_r t) + b_r\sin(\omega_r t)] \tag{13.37}$$

$2N$ 个系数 (c_r, α_r) 或 (a_r, b_r)，由初始条 $\mathbf{u}(0)$ 与 $\dot{\mathbf{u}}(0)$ 确定。系数 a_r 与 b_r，可由公式 13.33 与 13.34 确定，因此

---

* 这个结果所表示的是系统无刚体模态与阻尼，具有刚体模态与阻尼的一般情况的系统将在第 15 章中论述。

$$\mathbf{u}(0) = \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_r a_r \tag{13.38a}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_r \omega_r b_r \tag{13.38b}$$

公式 13.38 乘以($\boldsymbol{\phi}_r^T m$)，并考虑模态正交性，得到

$$a_r = \frac{\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_r} \tag{13.39a}$$

$$b_r = \frac{\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}} \mathbf{m}\, \dot{\mathbf{u}}(0)}{M_r \omega_r} \tag{13.39b}$$

这里提供了一个确定公式 13.37 中系数的简单方法，因此由 $\mathbf{u}(0)$与 $\dot{\mathbf{u}}(0)$确定自由振动。

例题 13.5

应用公式 13.37 与 13.39 确定例题 12.1 与 12.2 的 2-**DOF** 系统的自由振动响应表达式，假定初始条件为

$$\mathbf{u}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ u_0 \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

系统的质量矩阵与振型为

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

解：

a. 由公式 13.9 确定模态质量

$$M_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r \tag{1}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2m \tag{2}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 2m$$

b. 由公式 13.39 确定系数 a_r 与 b_r。

$$a_r = \frac{\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_r}, \quad b_r = \frac{\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \dot{\mathbf{u}}(0)}{M_r \omega_r} \tag{3}$$

$$\mathbf{m}\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ mu_0 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

所以

$$a_1 = \frac{\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_1} = \left(\frac{1}{2m}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ mu_0 \end{Bmatrix} = \frac{u_0}{2}$$

$$a_2 = \frac{\boldsymbol{\phi}_2^{\mathrm{T}} \mathbf{m} \mathbf{u}(0)}{M_2} = \left(\frac{1}{2m}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ mu_0 \end{Bmatrix} = -\frac{u_0}{2} \tag{5}$$

最后，由公式 13.37，

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{2} a_r \boldsymbol{\phi}_r \cos\omega_r t$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{u_0}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\cos(\omega_1 t) - \frac{u_0}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}\cos(\omega_2 t)$$

或者

$$\boxed{\begin{aligned} u_1(t) &= \left(\frac{u_0}{2}\right)[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)] \\ u_2(t) &= \left(\frac{u_0}{2}\right)[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] \end{aligned}}$$

它在例题 12.2 中用不同的方法得到相同的结果。

虽然例题 12.2 的方法对 2-**DOF** 问题适合，但用此种方法在这个例中是有规则的，并对任何大小系统的自由振动应响很容易用计算机求解。

---

§13.2 瑞利法、瑞利-里兹法

对于连续系统的瑞利商已在公式 10.25 中定义，对于 **MDOF** 系统**瑞利商**定义为

$$\omega_R^2 = \boldsymbol{R}(\mathbf{U}) = \frac{\mathbf{U}^T\mathbf{k}\mathbf{U}}{\mathbf{U}^T\mathbf{m}\mathbf{U}} \tag{13.40}$$

令 U 用正规模态 $\boldsymbol{\phi}_r$ 的级数展开而成，即 $M_r = 1$。

$$\mathbf{U} = \sum_{r=1}^{N} c_r \boldsymbol{\phi}_r \tag{13.41}$$

于是，由于模态的正交性质

$$\boldsymbol{R}(\mathbf{U}) = \frac{\omega_1^2 c_1^2 + \omega_2^2 c_2^2 + \cdots + \omega_N^2 c_N^2}{c_1^2 + c_2^2 + \cdots\cdots + c_N^2} \tag{13.42}$$

应用公式 13.42，可以证明

$$\omega_1^2 \leqslant \boldsymbol{R}(\mathbf{U}) \leqslant \omega_N^2 \tag{13.43}$$

假如 $\omega_1 \neq 0$，可将公式 13.42 记成下面形式

$$\boldsymbol{R}(\mathbf{U}) = \omega_1^2\left[\frac{1 + (c_2/c_1)^2(\omega_2/\omega_1)^2 + \cdots + (c_N/\mathbf{c}_1)^2(\omega_N/\omega_1)^2}{1 + (c_2/c_1)^2 + \cdots + (c_N/c_1)^2}\right] \tag{13.44}$$

因为 $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_N$，分子中的每一项都大于或等于在分母中相对应的项，所以

$$\boldsymbol{R}(\mathbf{U}) \geqslant \omega_1^2 \tag{13.45}$$

可以用同样的方法表示 $\boldsymbol{R}(\mathbf{U}) \leqslant \omega_N^2$，于是用公式 14.43 可证明。

瑞利法曾经在 §10.3 中介绍，如以 **SDOF** 系统近似表示连续系统，同时应用能量守恒计算一个近似的基频，表示为 ω_R。以相同的步骤可用于减化 ***N*-DOF** 系统成为 **SDOF** 系统，使其逼近于系统的基本模态。

令

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}\cos(\omega_R t) = \boldsymbol{\phi}\hat{U}\cos(\omega_R t) \tag{13.46}$$

于是

$$\dot{\mathbf{u}} = -\omega_R \mathbf{U}\sin(\omega_R t) = -\omega_R \boldsymbol{\phi}\hat{U}\sin(\omega_R t) \tag{13.47}$$

因为

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{k}\mathbf{u}, \quad T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^T\mathbf{m}\,\dot{\mathbf{u}} \tag{13.48}$$

于是 $$V_{max}=\frac{1}{2}\hat{k}\hat{U}^2,\quad T_{max}=\frac{1}{2}\omega_R^2\hat{m}\hat{U}^2 \tag{13.49}$$

其中 $$\hat{k}=\psi^T\mathbf{k}\psi,\quad \hat{m}=\psi^T\mathbf{m}\psi \tag{13.50}$$

由能量守恒，$V_{max}=T_{max}$，得出

$$R(\mathbf{U})=\omega_R^2=\frac{\hat{k}}{\hat{m}} \tag{13.51}$$

由公式 13.43 与 13.51，于是有

$$\omega_1^2\leqslant\omega_R^2\leqslant\omega_N^2 \tag{13.52}$$

一个靠近真实基本模态 ϕ_1 形式的假定振型 ψ 将要给出一个接近 ω_1 的上限。

对于 **MDOF** 系统**瑞利-里兹法**允许用 $\hat{N}$ 个模态($\hat{N}<N$)的频率近似值来计算，假定位移是时间的谐函数

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{U}\cos(\omega t-a) \tag{13.53}$$

形状向量 U 假定用级数展开式给出

$$\mathbf{U}=\sum_{i=1}^{\hat{N}}\hat{U}_i\phi_i=\psi\hat{\mathbf{U}} \tag{13.54}$$

其中 $$\Psi=[\phi_1\ \phi_2\cdots\phi_N] \tag{13.55}$$

预选 ϕ_i 为线性独立假定振型向量，取 $T_{max}=V_{max}$ 导出瑞利商

$$R(\mathbf{U})=\hat{\omega}^2=\frac{\sum_{i=1}^{\hat{N}}\sum_{j=1}^{\hat{N}}\hat{U}_i\hat{U}_j\hat{K}_{ij}}{\sum_{i=1}^{\hat{N}}\sum_{j=1}^{\hat{N}}\hat{U}_i\hat{U}_j\hat{m}_{ij}}=\frac{\hat{\mathbf{U}}^T\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{U}}}{\hat{\mathbf{U}}^T\hat{\mathbf{m}}\hat{\mathbf{U}}} \tag{13.56}$$

其中 $$\hat{\mathbf{k}}=\Psi^T\mathbf{k}\Psi,\hat{\mathbf{m}}=\Psi^T\mathbf{m}\Psi \tag{13.57}$$

比较公式 13.51 与 13.56，可以看出一个确定的频率 ω_R 是由前一个公式决定，而公式 13.56 的 $\hat{\omega}^2$ 值决定于 $\hat{U}_i$ 的值($i=1,2,\cdots,\hat{N}$)。

里兹提出是选择 $\hat{U}_i$ 的系数使 $R(\mathbf{U})$成为稳态的，即令

$$\frac{\partial R(\mathbf{U})}{\partial\hat{U}_i}=0\quad i=1,2,\cdots,\hat{N} \tag{13.58}$$

令 $$R(\mathbf{U})=\frac{N(\mathbf{U})}{D(\mathbf{U})} \tag{13.59}$$

于是，公式 13.58 给出

$$N(\mathbf{U})\frac{\partial D(\mathbf{U})}{\partial\hat{U}_i}-D(\mathbf{U})\frac{\partial N(\mathbf{U})}{\partial\hat{U}}=0 \tag{13.60}$$

但是，因为 $\hat{k}_{ij}=\hat{k}_{ji}$

$$\frac{\partial N(\mathbf{U})}{\partial\hat{U}_i}=2\sum_{j=1}^{\hat{N}}\hat{k}_{ij}\hat{U}_j \tag{13.61}$$

同样对 $D(\mathbf{U})$求导，联合公式 13.56，13.60 及 13.61 得到

$$\sum_{j=1}^{\hat{N}}(\hat{k}_{ij}-\hat{\omega}^2\hat{m}_{ij})\hat{U}_j=0,\ (i=1,2,\cdots,\hat{N}) \tag{13.62}$$

或 $$(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\omega}^2\hat{\mathbf{m}})\hat{\mathbf{U}}=0 \tag{13.63}$$

这个特征值问题导出一组 $\hat{N}$ 个近似频率 $\hat{\omega}_i$ 及相应模态 $\hat{\mathbf{U}}_i$，$\hat{N}$ 个近似频率对 N 个精确频率的关系在本节的后面论述。

上面介绍的瑞利-里兹法可以认为是应用假定振型法对一个 **MDOF** 系统自由振动的特殊

情况。假定振型法可用于减化一 N-DOF 系统为一$\hat{N}$-DOF 系统，假设

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{\hat{N}} \phi_i \hat{u}_i(t) = \psi \hat{\mathbf{u}}(t) \tag{13.64}$$

这个近似式代入公式 13.48 的 V 与 T 表达式，并将这个结果代入拉格朗日方程公式 11.6，给出无阻尼自由振动。

$$\hat{\mathbf{m}}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{u}} = 0 \tag{13.65}$$

对于粘滞阻尼系统的强迫振动为

$$\hat{\mathbf{m}}\ddot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{c}}\dot{\hat{\mathbf{u}}} + \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{p}}(t) \tag{13.66}$$

其中

$$\hat{\mathbf{c}} = \Psi^T \mathbf{c} \Psi, \quad \hat{\mathbf{p}}(t) = \Psi^T \mathbf{p}(t) \tag{13.67}$$

选择假定振型向量 ψi 的几种专门方法将在 § 16.6 中讨论。

特征值(固有频率)的一个很值得研究和有用的性质是**特征值隔离特性**[13.1]，令原来的 N-DOF 特征值表示为

$$(\mathbf{k} - \lambda \mathbf{m})\mathbf{U} = \mathbf{0} \tag{13.68}$$

其中 $\lambda = \omega^2$以及令

$$(\mathbf{k}^{(m)} - \lambda^{(m)}\mathbf{m}^{(m)})\mathbf{U}^{(m)} = \mathbf{0}, \quad m = 0,1,\cdots 0,(N-1) \tag{13.69}$$

为 m 阶约束特征值问题，其中 $\mathbf{k}^{(m)}$与 $\mathbf{m}^{(m)}$是 $\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{k}$ 各自删去后面的 m 行与 m 列得到的，分别相应的 $\mathbf{k}^{(0)} = \mathbf{k}, \mathbf{m}^{(0)} = \mathbf{m}$。于是**特征值隔离理论**表述为

$$\begin{aligned} &\lambda_1^{(m)} \leqslant \lambda_1^{(m+1)} \leqslant \lambda_2^{(m)} \leqslant \lambda_2^{(m+1)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{(N-m)}^{(m)} \\ &m = 0,1,2,\cdots(N-2) \end{aligned} \tag{13.70}$$

即第$(m+1)$个特征值问题隔离为 m 阶特征值问题，像在图 13.2 所说明的，其中

$$p^{(m)}(\mu) = \det(\mathbf{k}^{(m)} - \mu \mathbf{m}^{(m)}) \tag{13.71}$$

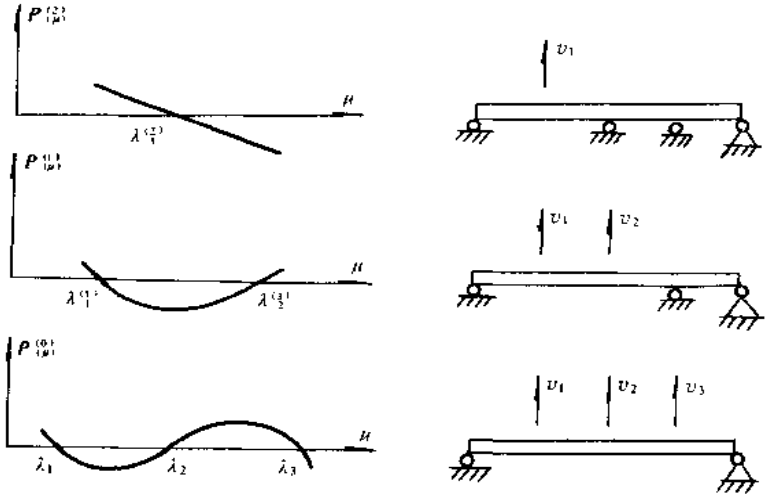


图 13.2　特征值隔离性质的说明

可直接用公式 13.70 的特征值隔离理论来表示由瑞利－里兹法得到的频率收敛性质，这个结果表示在表 13.1 中。因此由瑞利-里兹近似法将 N-DOF 系统减化成 N 个特征值中的每一个是相应精确特征值的一个上限。根据以上所述自由度数目 $\hat{N}$ 的增加特征值就逼近精确值。

瑞利-里兹频率的收敛特性　　表 13.1

DOF=N=	1	2	3	…	N
约束=m =	N−1	N−2	N−3	…	0
第一特征值	$\lambda_1^{(N-1)}\geqslant$	$\lambda_1^{(N-2)}\geqslant$	$\lambda_1^{(N-3)}\geqslant$	…	$\searrow\lambda_1$
第二特征值		$\lambda_2^{(N-2)}\geqslant$	$\lambda_2^{(N-3)}\geqslant$	…	$\searrow\lambda_2$
第三特征值			$\lambda_3^{(N-3)}\geqslant$	…	$\searrow\lambda_3$
…					…
N 阶特征值					$\searrow\lambda_N$

参考文献

13.1 K－J. Bathe and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice—Hall, Englewood Cliffs, NJ(1976).

习题组 13.1

13.1 图 P13.1 所示 2-**DOF** 系统这个习题说明 **k** 与 **m** 的对称性取决于所采用的坐标。

(a)应用牛顿定律求得运动方程，并用两个质量的绝对运动 u_1 与 u_2 为坐标。

(b)重作(a)，但取质量 m_1 的绝对运动 u_1 及质量 m_2 相对于 m_1 的位移 u_r 为坐标。

(c)应用(b)中坐标，用拉格朗日方程导出运动方程，读者能够作出什么结论？

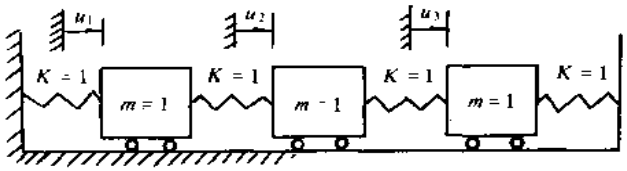


图　P13.1

13.2

(a)图 P13.2 所示的系统确定特征多项式

$$p(\omega^2) = \det(\mathbf{k}-\omega^2\mathbf{m})$$

(b)绘出 $p(\omega^2)$图，取 $\omega^2 = 0\sim3.2$，增量 $\Delta\omega^2 = 0.2$

(c)求解 $\omega_1^2\omega_2^2$ 与 ω_3^2。

13.3

(a)应用公式 13.14 的方法求例题 13.1 系统的模态 ϕ_1 与 ϕ_3 的解。

(b)定标模态 ϕ_1 与 ϕ_3，使 $M_1 = M_3 = 1$。

(c)表示 ϕ_3 与 ϕ_1 对于质量矩阵正交。

13.4

(a)应用公式 13.14 的方法求例题 13.2 系统的模态 ϕ_2 与 ϕ_3 的解。

(b)选择振型 ϕ_2 与 ϕ_3，使 $M_2 = M_3 = 1$。

(c)表示 ϕ_2 对于 ϕ_1 与 ϕ_3(对于质量)正交。

13.5

(a)在图 P13.5 的系统具有重频 $\omega_2 = \omega_3$，确定这三个频率。

(b)应用公式 13.23 的方法确定 ϕ_2 与 ϕ_3。

(c)已得到了该模态正交于质量矩阵?

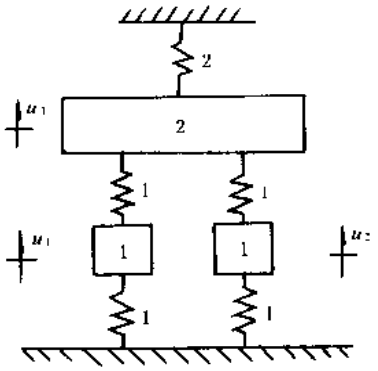


图 P13.2

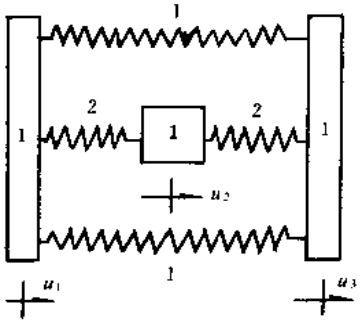


图 P13.5

13.6 重作习题 12.5，应用公式 13.37 与 13.39 确定自由振动响应。

13.7 对于一个具有刚体模态的系统可用下式取代公式 13.37 的自由振动响应可表示为

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^{N_r} \phi_r (a_r + b_r t) + \sum_{r=N_r+1}^{N} \phi_r [a_r \omega_3(\omega_r t) + b_r \sin(\omega_r t)] .$$

(a)如果模态 $\phi_r (r = 1,2,\cdots N)$ 形成一组相互正交模态，确定 a_r 与 b_r 表达式，$r = 1,2,\cdots N_r$。

(b)例题 13.4 的模态 ϕ_1，ϕ_2 与 ϕ_3 形成一组相互正交模态，确定例题 13.3 中系统的 $\mathbf{v}(t)$，假如体系

$$\mathbf{v}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{v}}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

13.8 证明：因为正规模态 ϕ_r 相互正交，因此它们形成一组线性独立的 N 维向量。

习题组 13.2

13.9 分别限制质量 1，然后质量 2 及质量 3 来证明例题 13.1 中的系统，其在公式 13.70 中的特征值隔离理论是成立的。

第 14 章　MDOF 系统模态与频率数值计算

在第 12 章已经学习了如何由特征(多项式)公式来求解 2-DOF 系统的频率与模态。在第 13 章讨论了 MDOF 系统频率与模态的许多性质。本章将介绍各种方法用求得大型特征值问题的数值解,即确定具有十个、百个,甚至几千个自由度系统的频率和模态。然而,详细叙述这些方法已超出本书范围。

本章将完成如下内容

- **掌握求解结构动力特征问题的各种数值方法,并且懂得选择一种方法的主要因素。**
- **能够应用向量叠代法确定 N-DOF 系统($N \leqslant 5$)的两个最低的频率与模态。**
- **能够应用 ISMIS 计算机程序求解一个特征问题,并解释由 ISMIS 程序计算机输出所得到的结果。**

§14.1　介绍解代数特征问题方法

结构 MDOF 模型可以有十个至一万个(或者更多)自由度,这些结构的动力分析通常包含确定一部分或全部的固有频率(特征值)及固有模态(特征向量),求解该方程

$$(\mathbf{k}-\lambda_i\mathbf{m})\phi_i = \mathbf{0} \tag{14.1}$$

其中 $\lambda_i \equiv \omega_i^2$。第 12 章所使用的确定 2-DOF 系统固有频率的多项式求根法仅是求解许多代数特征问题、公式 14.1 方法中的一种,其它方法可能对于有些情况更优越。许多大型结构动力计算机程序提供了多种方法,因此设计者可以选择所给定问题的许多方法中最适宜的一种。这一节为了这个目的只不过是使读者更多的了解各种代数特征解,并向读者建议在选择特征解中所必须考虑的一些重要因素。高级的教材[14.1]和近代著作[14.2,14.3]提供了详细的特征解,对研究结构动力特征问题是特别适合的。

在第 13 章讨论的固有频率与模态的基本性质这对于各种特征解的方法提供了基础。这些方法分为三个主要类型,依据基本性质在解的过程中得到最显著的应用。

直接用公式 14.1 论述的性质之方法称为**向量迭代**法(或加权法)。**矩阵变换**法构成第二类,它们用正交性质

$$\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\Phi = \Lambda \tag{14.2a}$$

及

$$\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\Phi = \mathbf{I} \tag{14.2b}$$

其中　$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N]$及 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i), i = 1,2,\cdots,N$。

多项式求根是特征解方法的第三类基础，这个公式最显著的应用是

$$\det(\mathbf{k}-\lambda\mathbf{m}) = 0 \tag{14.3}$$

或

$$\det(\mathbf{k}^{(r)}-\lambda_i^{(r)}\mathbf{m}^{(r)}) = 0 \tag{14.4}$$

其中 $\mathbf{k}^{(r)}$ 与 $\mathbf{m}^{(r)}$ 在 §13.2 中已定义，最终许多实用特征解如 **HQRI** 法及子空间迭代法[14.1]，所用到的方法都是根据上面的基本特性。

上面三种类型的每一种中都包含有许多专门的方法，例如，向量迭代法中有：直接迭代，逆迭代法(Vianello 法与 Stodola 法)，以及谱漂移(移位)的各种逆迭代。矩阵变换法包括：Jacobi 法、Lanczos 法、Givens 法、Householder 法以及 **QR** 法。多项式求根包含行列式搜索法以及 Stürm 序列法。

由于上述方法有较多的选择方式，希望应用计算机解结构动力特征问题的人们，不得不考虑哪种方法最适合问题的类型。最直接影响选择特征解的因素是：(1)N 的阶数以及带宽，$\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{k}$ 的 $M_{\mathbf{m}}$ 及 $M_{\mathbf{k}}$；(2)所需要的特征值与特征向量的数目。Bathe 与 Wilson[14.1]给出下面的结论：

1. 当一个矩阵需求所有的特征值和特征向量以及有一个很大的带宽或者充满矩阵时，Householder-QR 逆迭代，(**HQRI**)解是最有效的。

2. 行列式搜索法对很小带宽系统的最低特征值与相应的特征向量的计算是非常有效的。

3. 子空间迭代解用于计算大型带宽系统的最低特征值与相应的特征向量是非常有效的，要求计算机高速运行与非常大的贮存。

一种三对角线减化，**FEER**[14.2,14.3]也曾发现对上面所描述的第三类问题的解是非常有效的。

向量迭代法可以象一个独立的特征 解应用，或可以与其它的方法联合应用。例如，上面称为 **HQRI** 法。当一个很小的系统($N\leqslant 5$)需要一至两个模态时，向量迭代解可以应用手算完成。因此下一节，将介绍向量迭代方法。

振动分析特征解的评述见参考文献[14.10]。

§14.2 向量迭代法

手算一个很小系统($N\leqslant 10$)的几个特征值与特征向量最有效的方法是**逆迭代法**。Vianello (1898)曾应用它求解一构件的翘曲，Stodola(1904)用过它求解传动轴的振动。开始研究公式(14.1)，将它写成下面的形式：

$$\mathbf{k}\phi = \lambda\mathbf{m}\phi \tag{14.5}$$

假定基频是相异的，同时特征值 λ_i 按顺序排列：

$$\lambda_1<\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots\leqslant\lambda_N \tag{14.6}$$

当公式 14.5 的左边等于右边时，就得到了一个特征值 λ_i 及相应的特征向量 ϕ_i，根据公式 14.5 的一种迭代法可建立下面形式：

$$\mathbf{k}\mathbf{v}_{(s+1)} = \mathbf{m}\mathbf{u}_{(s)} \tag{14.7}$$

或

$$\mathbf{v}_{(s+1)} = \mathbf{D}\mathbf{u}_{(s)} \tag{14.8}$$

其中 D 是**动力矩阵**，给定为

$$\mathbf{D} = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{m} \tag{14.9}$$

于是 $\mathbf{u}_{(s+1)}$ 定义为

$$\mathbf{u}_{(s+1)} = \lambda_{(s+1)}\mathbf{v}_{(s+1)} \tag{14.10}$$

其中 $\lambda_{(s+1)}$是一个近似选择的定标因数，例如可选择 $\lambda_{(s+1)}$成 $\mathbf{u}_{(s+1)}$的最大元素等于+1，或者选择 $\lambda_{(s+1)}$成 $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}_{(s+1)}\mathbf{m}\mathbf{u}_{(s+1)}=1$

指出公式 14.8 可解释为由 S 阶的变形形式与惯性力联合求解第$(s+1)$个所产生的形式。这个方法称为逆迭代，因为公式 14.8 中应用了 $\mathbf{k}$ 的逆。

首先将考虑上述方法的一个例题(例题 14.1)。然后要证明、若公式 14.6 中所假定的 $\lambda_1<\lambda_2$ 时，那么这个方法将始终导致收敛于基本模态。

例题 14.1

应用逆迭代法求解图 E14.1.1 表示的 3-**DOF** 系统的基频与模态。

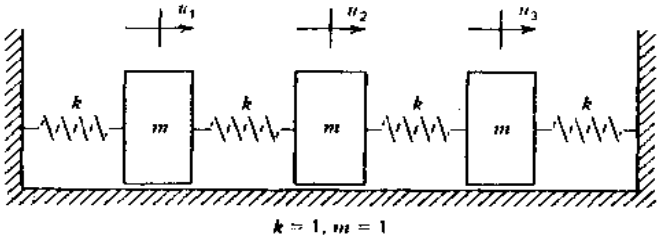


图 E14.1.1

对该系统

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2-\sqrt{2} = 0.5858, \quad \lambda_2 = 2.0, \quad \lambda_3 = 2+\sqrt{2} = 3.412$$

同时 $\mathbf{k}^{-1}$可表示为

$$\mathbf{k}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.50 & 0.25 \\ 0.50 & 1.00 & 0.50 \\ 0.25 & 0.50 & 0.75 \end{bmatrix}$$

解：

a. 由动力矩阵

$$\mathbf{D} = \mathbf{k}^{-1}\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.50 & 0.25 \\ 0.50 & 1.00 & 0.50 \\ 0.25 & 0.50 & 0.75 \end{bmatrix} \tag{1}$$

b. 选择一个初向量 $\mathbf{u}_{(0)}$，令

$$\mathbf{u}_{(0)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

c. 应用公式 14.8 得到 $\mathbf{v}_{(s+1)}$，$S = 0,1,2,\cdots$，以及定标 $\mathbf{v}_{(s+1)}$使 $\mathbf{u}_{(s+1)}$的最大元素等于+1。两次迭代循环的结果见下表。

$u_{(0)}$	$v_{(1)}$	$u_{(1)}$	$v_{(2)}$	$u_{(2)}$
1.000	1.500	0.750	1.250	0.714
1.000	2.000	1.000	1.750	1.000
1.000	1.500	0.750	1.250	0.714
	$\lambda_{(1)}=0.500$		$\lambda_{(2)}=0.571$	

注意特征值估算逼近于真实值 $\lambda_1=0.588$，根据下面计算。由计算相应的每一个形式 $\mathbf{v}_{(s+1)}$的(瑞利商)可以得到较好特征值的估算。

$$\lambda_{(s+1)}=\frac{\mathbf{v}_{(s+1)}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\mathbf{v}_{(s+1)}}{\mathbf{v}_{(s+1)}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{v}_{(s+1)}}=\frac{\mathbf{v}_{(s+1)}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{u}_{(s)}}{\mathbf{v}_{(s+1)}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{u}_{(s+1)}} \tag{3}$$

上面表达式的分母也可应用于定标公式：

$$\mathbf{u}_{(s+1)}=\frac{\mathbf{v}_{(s+1)}}{(\mathbf{v}_{(s+1)}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\mathbf{v}_{(s+1)})^{1/2}} \tag{4}$$

应用公式 3 与 4，下表摘记两个迭代循环。

$u_{(0)}$	$v_{(1)}$	$u_{(1)}$	$v_{(2)}$	$u_{(2)}$
1.000	1.500	0.5145	0.8575	0.5024
1.000	2.000	0.6860	1/2010	0.7037
1.000	1.500	0.5145	0.8575	0.5025
	$\lambda_{(1)}=\frac{5.000}{8.500}=0.588$		$\lambda_{(2)}=\frac{1.706}{2-913}=0.586$	

虽然瑞利商的计算比上面(c)使用定标包括更多的计算，但是可以看出甚至一次迭代循环之后瑞利商即给出一个很好的近似 λ 的精确解，两次迭代循环之后基本频率与振型近似表达为

$$\lambda_1=0.586 \qquad \phi_1=\begin{Bmatrix}0.5024\\0.7037\\0.5024\end{Bmatrix}$$

参考文献[14.1]介绍一种包括实现瑞利商计算在内的逆迭代的计算机运算的有用方法。

现在证明上述逆迭代法导致收敛于一个系统的基本模态。回忆§13.3一个任意向量可写成特征向量表达式，所以可记 $\mathbf{u}(0)$为。

$$\mathbf{u}(0)=\sum_{i=1}^{N}c_i\phi_i \tag{14.11}$$

其中 $\phi_i(i=1,2,\cdots N)$为精确振型

由公式 14.1 与 14.9

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_i = \frac{1}{\lambda_i}\boldsymbol{\phi}_i \tag{14.12}$$

于是

$$\mathbf{D}\mathbf{u}_{(0)} = \sum_{i=1}^{N} c_i \mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_i = \sum_{i=1}^{N} c_i \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)\boldsymbol{\phi}_i \tag{14.13}$$

象前面一样，假定 $\lambda_1 < \lambda_2$，每一步迭代循环应用公式 14.8 及 14.10，包含公式 14.8 的解及公式 14.10 的定标运算。因为定标不影响收敛，所以可略去定标步骤，及应用公式 14.8 的 S 倍得到

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^s\mathbf{u}_{(0)} &= \sum_{i=1}^{N} c_i \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^s \boldsymbol{\phi}_i \\ &= \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^s \sum_{i=1}^{N} c_i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\right)^s \boldsymbol{\phi}_i\end{aligned} \tag{14.14}$$

因为 $\lambda_1 < \lambda_i$，$(\lambda_1/\lambda_i)^s \to 0$ 对于 $i > 1$，所以

$$\mathbf{D}^s\mathbf{u}_{(0)} \to \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^s c_1\boldsymbol{\phi}_1 \tag{14.15a}$$

于是

$$\mathbf{D}^{s+1}\mathbf{u}_{(0)} \to \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^{s+1} c_1\boldsymbol{\phi}_1 \tag{14.15b}$$

因此收敛于一个与 $\boldsymbol{\phi}_1$ 成比例的向量，收敛的比率决定于 λ_1/λ_2 比，特别是 $(\lambda_1/\lambda_2)c_1$ 以及 c_1 的比值，即构成初始向量。

公式 14.15 指出如果在初始向量 $\mathbf{u}(0)$ 中 $c_1 \neq 0$，逆迭代将永远收敛于基本模态 $\boldsymbol{\phi}_1$。这个建议必需从 $\mathbf{u}(0)$ 中消除 $\boldsymbol{\phi}_1$ 分量，导致收敛于 $\boldsymbol{\phi}_2$。但是由于舍入错误可能促使重新引出 $\boldsymbol{\phi}_1$ 进入下一次迭代，在对 $\boldsymbol{\phi}_2$ 迭代中必需从每个 $\mathbf{u}_{(s)}$ 中清除 $\boldsymbol{\phi}_1$ 分量。由逆迭代确定 $\boldsymbol{\phi}_3$，在迭代过程中必须从每个 $\mathbf{u}_{(s)}$ 中清除 $\boldsymbol{\phi}_1$ 与 $\boldsymbol{\phi}_2$ 等。Gram-Schmidt **正交化与矩阵降阶**是指定应用在所使用的方法要实现确定特征向量前的清除工作。[14.4]。

Gram-Schmidt 正交化可以描述如下，

令

$$\hat{\mathbf{u}}_{(s)} = \mathbf{u}_{(s)} - \alpha_1\boldsymbol{\phi}_1 \tag{14.16}$$

选择 α_1，因此 $\hat{\mathbf{u}}_{(s)}$ 对 $\boldsymbol{\phi}_1$ 正交，即

$$\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{m}\hat{\mathbf{u}}_{(s)} = 0 \tag{14.17}$$

于是

$$\alpha_1 = \frac{\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{m}\mathbf{u}_{(s)}}{\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1}$$

或者

$$\hat{\mathbf{u}}_{(s)} = \mathbf{S}_1\mathbf{u}_{(s)} \tag{14.18}$$

其中

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{I} - \frac{\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{m}}{\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1} \tag{14.19}$$

其结果收敛于 $\boldsymbol{\phi}_2$，在公式 14.8 中 $\mathbf{u}_{(s)}$ 由 $\hat{\mathbf{u}}_{(s)}$ 替换。它是由公式 14.18 与 14.19 确定。于是

$$\mathbf{v}_{(s+1)} = \mathbf{D}_2\mathbf{u}_{(s)} \tag{14.20}$$

其中

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}\mathbf{S}_1 = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{m}}{\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1} \tag{14.21}$$

联合公式 14.12 与 14.21 给出

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D} - \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{\boldsymbol{\phi}_1\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{m}}{\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1}\right) \tag{14.22}$$

可应用类似于公式 14.6 至 14.22 的方法定义 $\mathbf{D}_3$、$\mathbf{D}_4$ 等来清除高阶模态，这种方法称为**矩阵降阶或矩阵压缩**[14.4]。

手算的频率与模态要高于基本频率与模态，**清除矩阵**方法[14.5]比上面叙述的 Gram-

Schmidt 正交化法更好一点，这个方法由例题 14.2 说明。

例题 14.2

应用清除矩阵对例题 14.1 系统的第二频率与模态求迭代解。振型 ϕ_1，用例题 14.1 中得到的下面结果。

$$\phi_1=\begin{Bmatrix}1.000\\1.400\\1.000\end{Bmatrix}$$

解：

正交性条件公式 14.17 必须实施，令

$$\hat{\mathbf{u}}_{(s)}=\begin{Bmatrix}\hat{u}_1\\\hat{u}_2\\\hat{u}_3\end{Bmatrix} \tag{1}$$

于是公式 14.17 变成

$$\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\hat{\mathbf{u}}_{(s)}=\begin{bmatrix}1.000 & 1.400 & 1.000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{u}_1\\\hat{u}_2\\\hat{u}_3\end{Bmatrix} \tag{2}$$

或

$$\hat{u}_1+1.400\hat{u}_2+\hat{u}_3=0 \tag{3}$$

可以处理成在 $\hat{u}_1$ 上的约束，并记为

$$\hat{u}_1=-1.400\hat{u}_2-\hat{u}_3 \tag{4}$$

所以

$$\begin{Bmatrix}\hat{u}_1\\\hat{u}_2\\\hat{u}_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.400&-1.000\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{u}_2\\\hat{u}_3\end{Bmatrix} \tag{5}$$

但是，可任意选择 $\hat{u}_2$ 与 $\hat{u}_3$，因此可令 $\hat{u}_2=u_2$，$\hat{u}_3=u_3$，将公式 5 写成下面形式

$$\begin{Bmatrix}\hat{u}_1\\\hat{u}_2\\\hat{u}_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1.400&-1.000\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix} \tag{6}$$

其中 u_1 是虚设的，与公式 6 有关。公式 6 是公式 14.18 的形式，可记作

$$\mathbf{D}_2=\mathbf{D}\mathbf{S}_1 \tag{7}$$

其中 $\mathbf{S}_1$ 称为**清除矩阵**，因为它从 $\hat{\mathbf{u}}$ 中清除 ϕ_1 应用例题 14.1 中的 $\mathbf{D}$ 以及公式 6 中的 $\mathbf{S}_1$ 得到

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_2&=\begin{bmatrix}0.75&0.50&0.25\\0.50&1.00&0.50\\0.25&0.50&0.75\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1.400&-1.000\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&-0.550&-0.500\\0&0.300&0\\0&0.150&0.500\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

其次应用迭代公式

$$\mathbf{v}_{(s+1)}=\mathbf{D}_2\mathbf{u}_{(s)} \tag{9}$$

并定标，$\mathbf{u}_{(s+1)}$)因此它的实际最大元素为 1。四次循环迭代结果列于下表：

$u_{(0)}$	$v_{(1)}$	$u_{(1)}$	$v_{(2)}$	$u_{(2)}$
1.000	(−1.050)	(−1.615)	(−0.754)	(−1.325)
1.000	0.300	0.462	0.139	0.244
1.000	0.650	1.000	0.569	1.00
	$\lambda_{(1)}=$ 1.539		$\lambda_{(2)}=$ 1.757	
$u_{(2)}$	$v_{(3)}$	$u_{(3)}$	$v_{(4)}$	$u_{(4)}$
(−1.325)	(−0.634)	(−1.181)	−0.575	−1.106
0.244	0.073	0.136	0.041	0.079
1.000	0.537	1.000	0.520	1.000
	$\lambda_{(3)}=$ 1.864		$\lambda_{(4)}=$ 1.922	

精确特征值是 $\lambda_2=$ 2.0，上面的 λ 是收敛的。特征向量 $\mathbf{u}_{(3)}$ 尚未收敛于精确特征向量(反对称)

$$\phi_2=\begin{Bmatrix}-1\\0\\1\end{Bmatrix}$$

收敛很慢的原因是因为提供的是一个对称的初始向量 $\mathbf{u}_{(0)}$，而真实的特征向量是反对称的，所以上述过程必然导致反对称性。

上面的解中在圆括号中所包含的数量不是根本上得到频率与振型的最后估算。

倘若使用了一个很小的收敛公差参数，以便特征向量的计算结果逼近真实的特征向量时，则可以使用前面如那些所描述的正交化方法，总共得到四个或五个模态。

导致收敛于一个特征值，而不是基频的一种有效方法是使用**谱漂移(移位)逆迭代**。公 μ 为所要研究的频率附近的一个数。例如，在图 14.1 中，μ 比其他特征值更接近于 λ_2。于是，用 $\mu\mathbf{m}$ 来改进公式 14.1 给出漂移的特征问题。

$$[(\mathbf{k}-\mu\mathbf{m})-(\lambda_i-\mu)\mathbf{m}]\phi_i=0 \tag{14.23}$$

令

$$\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{k}-\mu\mathbf{m},\quad \hat{\lambda}_i=\lambda_i-\mu \tag{14.24}$$

于是公式 14.23 变成

$$(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\lambda}_i\mathbf{m})\phi_i=0 \tag{14.25}$$

图 14.1 表示 λ 与 $\hat{\lambda}$ 的**谱**(即绘在频率轴上)，注意从这个图上假如 $\lambda_i<\mu$，$\hat{\lambda}_i$ 将为负。同样证明以公式 14.11 至 14.15 可用来表示逆迭代应用于漂移的特征问题。公式 14.25 结果收敛于 λ_i，最接近漂移值 μ。

谱漂移的逆迭代是广泛应用的一种方法(例如在 **HQRI** 法中)，在求到特征值后的特征向量用其它方法已得到。这个方法也用于避免具有刚体模态系统 $\mathbf{k}^{-1}$ 不存在的问题。一个很小的漂移值可以用于清除奇异性。刚体模态系统用逆迭代的其它方法见参考文献[14.6]与其它文献的论述。

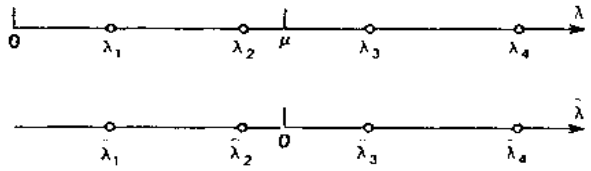


图 14.1 特征值谱

§14.3 应用'ISMIS'程序解 MDOF 系统模态与频率

在§14.1中已经学习了解 MDOF 系统的频率与模态的许多方法。在§14.2中学习了有关的逆迭代法，正交化逆迭代以及谱漂移的逆迭代。虽然迭代用手工计算求解几个小的($N<5$)问题是值得花精力的，但也要学习很多计算机程序的使用如 ISMIS；而读者将把时间花费在系统模拟以及由计算机计算所得到的频率和模态的物理意义分析上。

象§14.1中所指出的计算多于2个而小于100个自由度系统的固有频率与振型最好的数值解的方法之一是 HQRI 逆迭代法(精确的数值解取决于计算机运算速度与高度贮存能力等)。其 ISMIS 计算机程序在 EIGEN 指令中有这种编码。本节的任务是向读者介绍 EIGEN 指令、以及用它解某些集中参数的振动问题。在16章有限元法将以广义刚度与广义质量矩阵应用在 EIGEN 指令中。在17章许多例题将说明数值特征解的重要特征，例如收敛性。详细研究 HQRI 法已超出本教材范围，但在更高级的教材中论述。

对于公式14.1求解其 EIGEN 指令具有的形式

EIGEN,K,M,L,PT,NI

其中**K** = N×N 刚度矩阵，前面已确定。

M = N×N 质量矩阵，前面已确定。或前面确定的 1×N 行向量，含对角质量矩阵元素。

L = 1×N，由 EIGEN 计算的特征值行向量。

PT = (N1)×N 矩阵，它的行是相应于在 L 中首项 N1 特征值的特征向量。

N1 = 计算特征向量的数目。

特征向量是正规化的，因此

$$\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_1 = 1 \tag{14.26}$$

这里提供两个例题，另一个例题取自 ISMIS 用户手册，虽然这个计算机程序有处理大型问题的能力，然而为了清晰起见、其自由度的数目还是保持较少的。

例题 14.3

在例题12.1中令弹簧常数 k = 10 lb/in，以及令每个质量 5 lb(g = 386 in/s²)，应用'EIGEN'决定系统的频率和模态，并绘出振型图。

解：

$$(\mathbf{k}-\omega_i^2\mathbf{m})\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0}$$

$$m = \frac{W}{g} = \frac{5\ \text{lb}}{386\ \text{in/s}^2} = 0.013\ \text{lb-s}^2/\text{in} \tag{1}$$

$$k = 10\ \text{lb/in}$$

由例题 12.1

$$\mathbf{k} = k\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix}\text{lb/in}$$

$$\mathbf{m} = m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.013 & 0 \\ 0 & 0.013 \end{bmatrix}\text{lb-s}^2/\text{in}$$

令 **ISMIS** 表示法为

k→K,m→M,ω^2→W2,Φ^T→PT

EIGEN,K,M,W2,PT,2

下面的输出是由 **ISMIS** 程序执行上面的特征解、于相互作用的过程中在计算机终端产生的。一行开始的冒号表示一行的输入。其余的行是由计算机生成的。

```
: START
: *
: EXAMPLE14.3
: LOAD,K,2,2
        2 ROWS 2 COLUMNS
: 20,-10,20
: PRINT,K
SCALED BY 1.OE+01
          1        2
   1 2.00 -1.00
   2 -1.00 2.00
: LOAD,M,1,2
        1 ROWS 2 COLOMNS
: .013,.013
: PRINT,M
SCALED BY 1.OE-02
          1        2
   1  1.30   1.30
: BIGEN,K,M,W2,PT,2
    NUMBER OF EIGENVECTORS DESTRED = ORIGINAL TRACE = 3.07 =
      ORIGINAL TRACE = 3.0792308E+03 SUM OF EIGENVALUES =
      3.07692308E+03
:PRINT,W2,2
:SCALED BY      1.OE+03
          1        2
1.76923077   2.30769231
:TRANS,PT,P
```

```
:PRINT,P,1
  SCALED BY 1.OE+00
          1         2
    1  6.20174 -6.20174
    2  6.20174  6.20174
:STOP
```

由上面计算机输出得

$$\omega_1^2 = 769.2\ \text{rad}^2/\text{s}^2, \quad \omega_2^2 = 2308\ \text{rad}^2/\text{s}^2$$

及

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 6.20 \\ 6.20 \end{Bmatrix}, \quad \phi = \begin{Bmatrix} -6.20 \\ 6.20 \end{Bmatrix}$$

振型如图 E14.3.1。

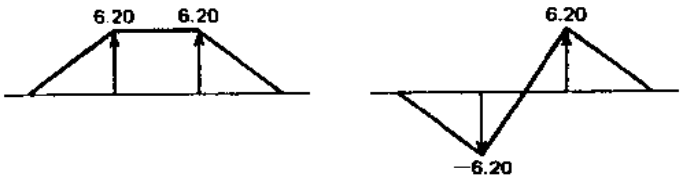


图 E14.3.1

这些与例题12.1得到相同的结果。除了这里的结果以外，它们都是定标的，使得 $\phi_i^T \mathbf{m} \phi_i = 1$。

当设计一个结构必须承受特殊的动力荷载(例如作用在飞机上的狂风和降落时作用的荷载，作用于海上平台上的风浪荷载等)时，设计过程中的重要步骤之一是确定结构的固有频率与振型。为了改善结构的动力性能通常变成对结构需要修改。关于结构的计算机自动化设计的课题，目前还正在积极研究中；包括设计遇到专门动力荷载的要求。本书不深入研究设计方面的题目，但在例题14.4中说明如何通过设计参数的改变达到改进结构的动力性能(在这种情形下的频率和模态)。

例题14.4

如图 E14.4.1所示的两个质量与三个弹簧系统，对于给定的参数求解特征值问题，列固有频率表，绘振型图，并讨论改变系统参数对系统的频率与模态所具有的影响。

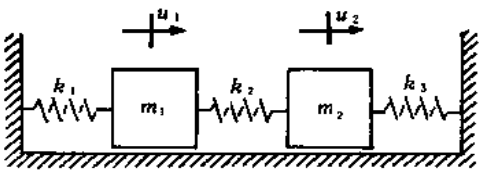


图 E14.4.1

情况 *A*(对称系统)：

$$k_1=k_2=k_3=1,\quad m_1=m_2=1$$

情况 *B*(对称系统,质量增加)：

$$k_1=k_2=k_3=1,\quad m_1=m_2=2$$

情况 *C*(对称系统,刚度增加)：

$$k_1=k_3=1,\quad k_2=2,\quad m_1=m_2=1$$

情况 *D*(非对称系统)：

$$k_1=k_2=k_3=1,\quad m_1=1,\quad m_2=2$$

解：由系统的运动方程可建立刚度与质量矩阵

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2+k_3\end{bmatrix}\qquad \mathbf{m}=\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}$$

于是

$$\mathbf{k}_A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{m}_A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{m}_B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_C=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\qquad \mathbf{m}_C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_D=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{m}_D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

应用 ISMIS 程序求解 $\mathbf{kU}=\omega^2\mathbf{mU}$ 特征值问题。

```
    :START
    :
    :EXAMPLE 14.4
    :LOAD,KA,2,2
          2   ROWS       2   COLUMNS
    :2,-1,-1,2
    :PRINT,KA
    SCALED BY      1.OE+00
    1      2
1   2.00   -
           1.00
2   -      2.00
    1.00
    :LOAD,MA,1,2
          1   ROWS       2   COLUMNS
    :1,1
    :PRINT,MA
    SCALED BY      1.OE+00
    1      2
```

```
1    1.00   2.00
     :LOAD,KC,2,2
              2 ROWS 2 COLUMNS
     :3,−2,−2,3
     PRINT,KC
     SCALED BY       1.OE+00
     1        2
1    3.00   −
              2.00
2    −2.    3.00
     00
     :DUPL,MA,MC
     :DUPL,KA,MD
     :LOAD,MD,1,2
              1   ROWS      2   COLUMNS
     :1,2
     :PRINT,MD
     SCALED BY       1.OE+00
     1        2
1    1.00   2.00
     :BIGEN,KA,KM,WA2,UAT,2
         NUMBER OF EIGENVECTORS DESIRED =          2
           ORIGINAL TRACE = 4.00000000E+00
           SUM OF EIGENVALUES = 4.00000000E+00
     :PRINT,WA2,2
     SCALED BY       1.0E+00
     1                2
1    1.00000000   3.00000000
     :PRINT,UAT,1
     SCALED BY       1.0E−01
     1            2
1    7.07107    7.07107
2    −      7.    7.07107
     07107
     :BIGEN,KB,MB,WB2,UBT,2
         NUMBER OF EIGENVECTORS DESIRED =       2
           ORIGINAL TRACE = 2.00000000E+00
           SUM OF EIGENVALUES = 2.00000000E+00
     :PRINT,WB2,2
     SCAED BY       1.0E−01
```

```
      1          2
1   5.00       5.00
2   5.00       -5.00
    :EIGEN,KC,MC,WC2,UCT,2
        NUMBER OF EICENVECTORS DESIRED =       2
          ORIGINAL TRACE = 6.00000000E+00
          SUM OF EIGENVALUES = 6.00000000E+00
    :PRINT,WC2,2
    SCAED BY      1.0E-01
      1          2
1   7.07107    7.07107
2   -     7.   7.07107
    07107
    :EIGEN,KD,MD,WD2,UDT,2
        NUMBER OF EIGENVECTORS DESIRED =       2
          ORIGINAL TRACE = 3.00000000E+00
          SUM OF EIGENVALUES = 3.00000000E+00
    :PRINT,UD2,2
    SCALED BY      1.0E+00
      1              2
1   .63397460      2.36602540
    :PRINT,UDT,1
    SCALED BY      1.0E-01
      1            2
1   4.59701      6.27963
2   8.88074      -3.25058
    :STOP
```

特 征 值

情况	ω_1^2	ω_2^2
A	1.00	3.00
B	0.50	1.50
C	1.00	5.00
D	0.63	2.37

特征向量如图 E14.4.2所示。

讨论：

a. 由于情况 **A**、**B** 及 **C** 全部为对称系统，它们都有一个对称模态和一个反对称模态；模态的这种对称性质在情况 **D** 中不存在；因为它的质量分布是不对称的。

b. 所有质量简单地按比例的增加，所有特征值以相同的比例减少，比较情况 **A** 与 **B** 所见

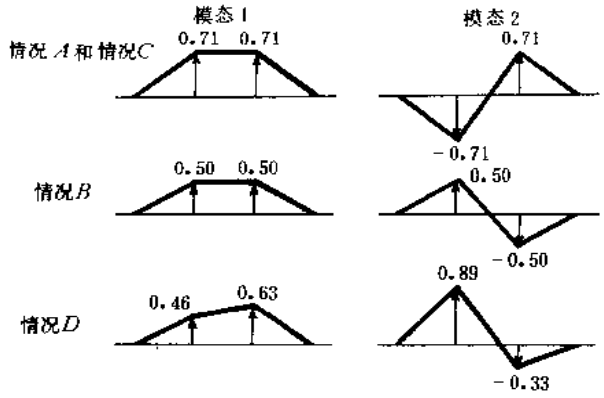


图 E14.4.2

到的。除了全部幅值外(定标)对于模态不受影响。

c. 在情况 C 中增加联结弹簧的常数,不影响对称模态(这时弹簧仍然无变形),但是反对称模态的频率增加,联结弹簧发生变形。

d. 情况 D 仅增加质量 m_2,影响所有的频率与振型;频率减小,振型变歪斜。

设计研究如上面所处理的,要考察系统动力性质的各种设计改变的影响,要反复进行,直到获到适当的设计为止。比较多的修改去逼近最佳设计(例如,用计算机优化计算指定固有频率约束来为确定最小重量的结构)也是可取的(例如,参考文献14.7～14.9)。

参考文献

14.1 K－J Bathe and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Andlysis*, Prentice—Hall, Englewood Cliffs, NJ(1976)

14.2 M. Newman and P. F. Flanagan, *Eigenvalue Extraction in NASTRAN by the Tridiagonal Reduction (FEER) Method—Real Eigenvalue Analysis*, NASACR－2731, National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC(1976).

14.3 A. Pipano, A. Raibstein, and A. Amnar, "Fast Modal Extraction in SAP Via the Tridiagonal Reduction Method," *First SAP Users'Conference and Computer Workship*, UCLA, Los Angeles, CA(1976).

14.4 L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw—Hill, New York(1975).

14.5 W. C. Hurty and M. F. Rubinstein, *Dynamies of Struetures*, Prentice－Hall, Egnlewood Cliffs, NJ(1964).

14.6 R. R. Craig, Jr. and M. C. C. Bampton, "On the Iterative Solution of Semidefinite Eigenvalue Problems," *Aero. J. of the Royal Aero Soc.*, V. 75, 287—290(1971).

14.7 M. J. Turner, "Design of Minimum Mass Structures with Specified Natural Frequencies," *AIAA Journal*, v. 5, 406－412(1967).

14.8 W. J. Stroud,"Automated Structural Design with Aeroelastic Constaints:AReview and Assessment of the State of the Art;" *Structural Optimization Symposium*,AMD—v. 7,ASME,New York(1974).

14.9 M. A. V. Rangacharyulu and G. T. S. Done,"A Survey of Structural Optimization Under Dynamic Constraints,"*The Shock and Vibration Digest*,v. 11,n. 12,15—25(1979)。

14.10 A. Jennings,"Eigenvalue Methods for Vibration Analysis," *The Shock and Vibration Digest*,*v*. 12,n. 2,3—16(1980).

习题组14.1

14.1.(a)应用逆迭代法求解习题13.2系统的基本频率与振型。

(b)应用清除矩阵(如例题14.2)确定该系统的第二频率与振型。

14.2 (a)应用逆迭代法求图 P14.2所示的三层建筑物的基本频率与振型。

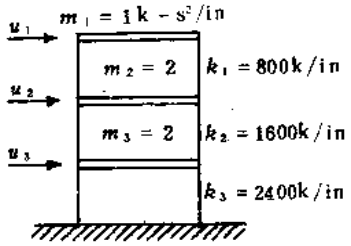


图 P14.2

(b)应用清除矩阵(如例题14.2)确定该建筑物的第二频率与振型。

14.3 实行一个 $\mu = 0.5$的谱漂移,如公式14.23在例题14.1的系统上,应用逆迭代法计算漂移问题的特征值(频率)与特征向量(振型),并与原来系统的基本频率与振型进行比较。

14.4 实行一个 $\mu = 2.2$的谱漂移,如公式14.23。在习题13.2系统上应用逆迭代法计算漂移问题的频率与振型,原来系统上什么样的频率和振型与这些结果相符合?

14.5 在一个刚体模态系统上实行谱漂移,它有可能除去 $\mathbf{k}$ 的奇异性,因此逆迭代法可以用。在习题13.5系统上实行一个 $\mu = -1$的谱漂移,并用逆迭代法求漂移问题的基本频率与振型。

14.6 实行谱漂移逆迭代,下面列举的步骤形成一种有效的算法(见参考文献14.1),根据这种算法构成一个程序框图。

1. 输入 $\mathbf{k},\mathbf{m},\mu$。

2 形成 $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - \mu\mathbf{m}$

3. 选择一个初始向量 $\mathbf{u}_{(0)}$

4. 形成 $\mathbf{y}_{(0)} = \mathbf{m}\mathbf{u}_{(0)}$

对 $n = 0,1\cdots\cdots$,计算下面:

5. 对 $\mathbf{v}_{(n+1)}$求解 $\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{(n+1)} = \mathbf{y}_{(n)}$

6. 形成 $\mathbf{w}_{(n+1)} = \mathbf{m}\mathbf{v}_{(n+1)}$

7. 计算瑞利商

$$\hat{\lambda}_{(n+1)}=\frac{\mathbf{v}_{(n+1)}^{T}\hat{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{(n+1)}}{\mathbf{v}_{(n+1)}^{T}\mathbf{m}\mathbf{v}_{(n+1)}}=\frac{\mathbf{v}_{(n+1)}^{T}\hat{\mathbf{y}}_{(n)}}{\mathbf{v}_{(n+1)}^{T}\mathbf{w}_{(n+1)}}$$

8. 检验收敛性 $|\hat{\lambda}_{(n+1)}-\hat{\lambda}_{(n)}|\leqslant\varepsilon$?

9. 如果达到收敛，取 $M=1$ 定标特征向量，

$$\phi=\frac{\mathbf{v}_{(n+1)}}{\left[\mathbf{v}_{(n+1)}^{T}\mathbf{m}\mathbf{v}_{(n+1)}\right]^{1/2}}=\frac{\mathbf{v}_{n+1}}{\left[\mathbf{v}_{(n+1)}^{T}\mathbf{w}_{(n+1)}\right]^{1/2}}$$

10. 如果没达到收敛，形成

$$\mathbf{y}_{(n+1)}=\mathbf{m}\mathbf{u}_{(n+1)}=\frac{\mathbf{w}_{(n+1)}}{\left[\mathbf{v}_{(n+1)}^{T}\mathbf{w}_{(n+1)}\right]^{1/2}}$$

并从第五步继续迭代。

习题组14.2

14.7 应用 **ISMIS** 计算机程序(或其它专门程序)求解习题13.2系统的频率与模态。

14.8 应用 **ISMIS** 计算机程序(或其它专门程序)求解习题13.5系统的频率与模态。

14.9 应用 **ISMIS** 计算机程序(或其它专门程序)求解习题14.2系统的频率与模态。

14.10 a)重作习题14.9，令 $m_1=2\text{k-s}^2/\text{in}$，讨论三个频率与模态的每一个发生的变化。

b)重作习题14.9，令 $k_2=2000\text{k/in}$，讨论三个频率与模态的每一个发生的变化，并与14.9得到的结果比较。

第 15 章　MDOF 系统动力响应 -振型叠加法

通过例题 12.6 研究 2-DOF 系统简谐激励响应来介绍 MDOF 系统的动力响应。为了解 MDOF 系统的动力响应还介绍了重要的振型迭加法。在本章将更详细的研究振型迭加法，学习如何应用它。第 18 章研究的系统动力响应不适宜用振型迭加法。

本章将完成如下内容：

- **变换 N-DOF 系统的运动方程为主坐标。**
- **确定主坐标中的初始条件。**
- **应用振型-位移法确定 N-DOF 系统在简谐或瞬时激励下的位移与内应力响应。**
- **应用振型-加速度法确定 N-DOF 系统在简谐或瞬时激励下的位移与内应力响应。假定(a)系统无刚体模态，或(b)系统具有刚体模态。**
- **具有非耦联的模态阻尼 N-DOF 系统生成复频响应曲线，及描述所得到的曲线类型。如果(a)该系统具有宽间隔频率及弱阻尼，或(b)该系统具有密间隔频率及弱阻尼。**
- **确定模型静位移，并描述模态响应中输入力的分配含义。**

§15.1　主坐标

线性 MDOF 系统运动方程已在公式 11.30 给出，这里重述。

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{p}(t) \tag{15.1}$$

通常公式 15.1 中的 $\mathbf{m}$、$\mathbf{c}$、$\mathbf{k}$ 矩阵系数可能具有非零耦联项(例如 $k_{ij}=k_{ji}\neq 0$)，因此求解公式 15.1 现在的形式需要同时求解 N 个未知数的 N 个方程。本节将简述**振型迭加法**，即**正规模态法**，通过应用系统的正规模态将这样一组耦联方程变成一组不耦联的方程。在 § 15.2 至 § 15.4 中将要考虑例如无阻尼系统及特殊形式的粘滞阻尼系统。具有一般粘滞阻尼或具有弹性力系统响应引进非线性将在第 18 章中加以研究。

公式 15.1 是一个 N-DOF 系统原来的运动耦联方程组；其中 $\mathbf{u}(t)$ 可以是物理或几何坐标。对激励 $\mathbf{p}(t)$ 与初始条件为：

$$\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}_0,\qquad \dot{\mathbf{u}}(0)=\dot{\mathbf{u}}_0 \tag{15.2}$$

求解其系统响应。

第一步用振型迭代法得到系统的固有频率与模态(这里假定 N 个模态全部应用，应用少于 N 个模态的重要截断课题最终将在 § 15.2 至 § 15.6 中研究)，于是固有频率与模态满足

$$(\mathbf{k}-\omega_r^2\mathbf{m})\boldsymbol{\phi}_r=\mathbf{0} \tag{15.3}$$

给出(ω_r^2,ϕ_r),$r=1,2,\cdots,N$,假定模态ϕ_r已经用列在§13.1中的一种方法正规化,同时模态质量M_r与模态刚度K_r用下式计算。

$$\begin{aligned} M_r &= \phi_r^T \mathbf{m} \phi_r \\ K_r &= \omega_r^2 M_r \end{aligned} \tag{15.4}$$

假定其中如有任意重频则模态彼此正交,因此正交性方程为

$$\phi_r^T \mathbf{m} \phi_s = \phi_r^T \mathbf{k} \phi_s = 0 \tag{15.5}$$

其满足所有$r \neq s$。于是根据模态来集成**模态矩阵** Φ,即

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2 \cdots \phi_N] \tag{15.6}$$

在振型叠加过程中的关键步骤是导出坐标变换。

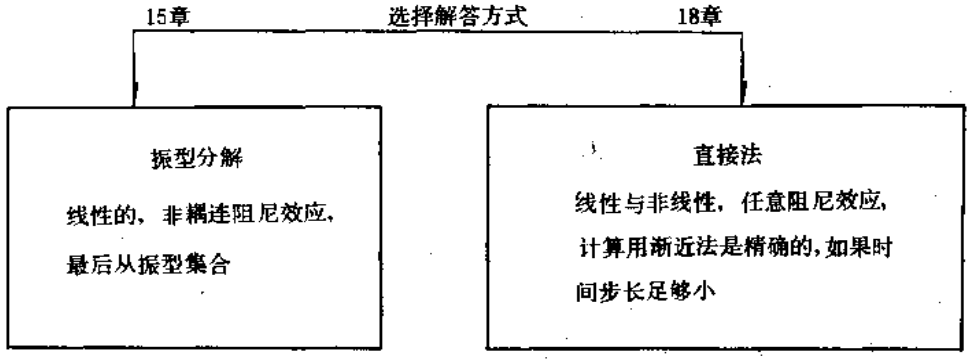


图 15.1　两种基本解的对策

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \eta(t) = \sum_{r=1}^{N} \phi_r \eta_r(t) \tag{15.7}$$

坐标$\eta_r(t)$称为**主坐标**。* 公式15.7代入公式15.1,同时将方程结果乘以Φ^T,得到主坐标的运动方程,即

$$M\ddot{\eta} + C\dot{\eta} + K\eta = P(t) \tag{15.8}$$

其中

$$\begin{aligned} &M = \Phi^T \mathbf{m} \Phi && \text{模态质量矩阵} \\ &C = \Phi^T \mathbf{C} \Phi && \text{模态阻尼矩阵} \\ &K = \Phi^T \mathbf{K} \Phi && \text{模态刚度矩阵} \\ &P(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t) && \text{模态力向量} \end{aligned} \tag{15.9}$$

由于公式15.5的正交性条件,因此模态坐标条件的运动方程中M与K为对角矩阵,公式15.8仅由于在模态阻尼矩阵C中的非对角系数有非零项而耦联。为了这个原因将在§15.2与§15.3中首先研究无阻尼系统的振型叠加解,然后在§15.4中将看到模态阻尼矩阵为对角阵的一些特殊情况。在第18章中当接受运动方程直接积分的课题时,将反过来研究系统阻尼耦联的情况。为了综合其MDOF运动方程得到动力响应,图15.1提出了两种求解的基本对策。

整个响应$\eta(t)$可单独的由初始条件引起的响应与由激励单独引起的响应叠加而得到。初始条件引起的响应可以应用§13.1同样的方式对待(例如公式13.37至13.39)。由公式15.7

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0) &= \Phi \eta(0) \\ \dot{\mathbf{u}}(0) &= \Phi \dot{\eta}(0) \end{aligned} \tag{15.10}$$

* 一些著作称这些为固有(自然)坐标或正规坐标,一些著作[15.1,15.2]当模态正规化时$M_r=1$保留了用正规坐标的名字。

这些公式以 $\Phi^T\mathbf{m}$ 前乘，得到

$$\begin{aligned}\Phi^T\mathbf{m}\mathbf{u}(0)&=M\eta(0)\\ \Phi^T\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)&=M\dot{\eta}(0)\end{aligned}\tag{15.11}$$

因为 M 为对角矩阵，公式 15.11 可解出对应于**模态初始条件**为

$$\left.\begin{aligned}\eta_r(0)&=(\frac{1}{M_r})\phi_r\mathbf{m}\mathbf{u}(0)\\ \dot{\eta}_r(0)&=(\frac{1}{M_r})\phi_r\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}}(0)\end{aligned}\right\}\quad r=1,2,\cdots,N\tag{15.12}$$

在例题 13.5 中给出一个自由振动振型叠加的例子。

§15.2 振型位移解无阻尼 MDOF 系统响应

在公式 15.7 相对于物理(或广义的)坐标 u 和模态坐标 η 的坐标变换中包含系统的所有 N 个模态。然而在图 15.1 中指出振型叠加法对系统响应仅包含系统模态相对很少的子集合时最为有效。因此在检验其截断的可能性和确定其因素时应当考虑为了得到精确的结果在振型叠加解中断定所包含模态的数目。

位移 $\mathbf{u}(t)$近似表示为

$$\hat{u}(t)=\hat{\Phi}\hat{\eta}(t)\sum_{r=1}^{\hat{N}}\phi_r\eta_r(t)\tag{15.13}$$

其中 $\hat{\Phi}=[\phi_1\ \phi_2\cdots\phi_{\hat{N}}]$ (15.14)

公式 15.13 是用模态截断从 N 到 $\hat{N}\ll N$(例如 $N=1000,\hat{N}=50$)的振型叠加之坐标变换。

对无阻尼系统，公式 15.8 减化为

$$\hat{M}\ddot{\hat{\eta}}+\hat{K}\hat{\eta}=\hat{P}(t)\tag{15.15}$$

因为模态刚度矩阵与模态质量矩阵为对角阵，则公式 15.15 可写成 $\hat{N}$ 个非耦联方程

$$M_r\ddot{\eta}_r+K_r\eta_r=P_r(t),\quad r=1,2,\cdots\hat{N}\tag{15.16}$$

其中 M_r 与 K_r 由公式 15.4 给出，

$$P_r=\phi_r^T\mathbf{p}\tag{15.17}$$

其中第 r 个模态的总响应可用公式 15.12 给出由模态初始条件响应和，由 $P_r(t)$的模态响应相叠加来表示。用杜哈梅积分可象征性地表示其响应。因此

$$\eta_r(t)=\eta_r(0)\cos(\omega_r t)+(\frac{1}{\omega_r})\dot{\eta}_r(0)\sin(\omega_r t)+(\frac{1}{M_r\omega_r})\int_0^t P_r(T)\sin\omega_r(t-T)dt\tag{15.18}$$

第 7 章中的任何数值解法当然可用于计算模态的时间历程 $\eta_r(t)$。

计算模态响应及将它代回公式 15.13 得到近似的系统响应的过程、称为**振型-位移法**。

研究无阻尼尼 **MDOF** 系统简谐激励的稳态响应给出为

$$\mathbf{p}(t)=\mathbf{P}\cos\Omega t\tag{15.19}$$

从公式 15.9d 与 15.19

$$P(t)=(\phi^T\mathbf{P})\cos\Omega t\tag{15.20a}$$

或

$$P_r(t)=F_r\cos\Omega t\tag{15.20b}$$

其中

$$F_r=\phi_r^T\mathbf{P}\tag{15.20c}$$

将公式 15.20b 代入公式 15.16 及应用公式 4.4 与 4.9、将得到稳态响应

$$\eta_r(t)=\left(\frac{F_r}{K_r}\right)\left[\frac{1}{1-(\Omega/\omega_r)^2}\right]\cos\Omega t \tag{15.21}$$

于是合并公式 15.13 与 15.21，得到下面在原坐标中的近似表示的稳态响应。

$$\hat{\mathbf{u}}(t)=\sum_{r=1}^{\tilde{N}}\boldsymbol{\phi}_r\frac{F_r}{K_r}\frac{1}{1-(\Omega/\omega_r)^2}\cos\Omega t \tag{15.22}$$

现在研究一个稳态响应的例题。

例题 15.1

抗剪建筑的固有频率与模态矩阵如图 E15.1.1 所示，简谐激励 $P_1\cos\Omega t$ 作用在顶层。只研究(c)至(e)部分的稳态响应。

a. 确定四个模态质量 M_r 与模态刚度 K_r。

b. 确定四个模态力 $P_r(t)$。

c. 确定稳态响应表达式 $\eta_r(t)$。

d. 应用公式 15.13 确定 $\hat{u}_1(t)$表达式。

e. 制定一个表格表示 $\hat{u}_1(t)$的幅值，应用 $N=1$、2、3，及激励频率 $\Omega=0$，$\Omega=0.5\omega_1$ 和 $\Omega=1.3\omega_3$，同时应用 $N=4$，确定 $u_1(t)$。

f. 由表(e)的结果，对于截断一个、两个或者三个模态时可做出什么结论？

$$\mathbf{k}=800\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&3&-2&0\\0&-2&5&-3\\0&0&-3&7\end{bmatrix},\qquad \mathbf{m}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\omega^2=\begin{bmatrix}0.17672\\0.87970\\1.68746\\3.12279\end{bmatrix}\times10^3,\qquad \omega=\begin{bmatrix}13.294\\29.660\\41.079\\55.882\end{bmatrix}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix}1.00000&1.0000&-0.90145&0.15436\\0.77910&-0.09963&1.00000&-0.44817\\0.49655&-0.53989&-0.15859&1.00000\\0.24506&-0.43761&-0.70797&-0.63688\end{bmatrix}$$

解：

a. 由公式 15.4a 确定模态质量，及公式 15.4b 确定模态刚度。

$$M_r=\boldsymbol{\phi}_r^T\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r,\quad K_r=\omega_r^2M_r \tag{1}$$

例如：

$$M_1=\begin{Bmatrix}1.00000\\0.77910\\0.49655\\0.23506\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.00000\\0.77910\\0.49655\\0.23506\end{Bmatrix}$$

$$M_1=2.87288$$

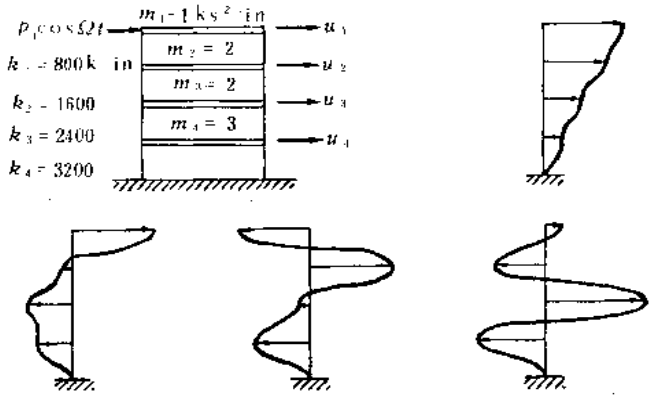


图 E15.1.1

$$K_1=\omega_1^2 M_1$$

$$K_1=176.72(2.87288)=507.695$$

以同样的方式计算其余的质量与刚度给出

$$\boxed{\begin{aligned} M_1&=2.87288 & K_1&=507.695\\ M_2&=2.17732 & K_2&=1915.39\\ M_3&=4.36658 & K_3&=7368.43\\ M_4&=3.64239 & K_4&=11374.4 \end{aligned}} \tag{2}$$

b. 模态力由公式 15.17 计算，因为

$$\mathbf{P}=\begin{Bmatrix} P_1\\ 0\\ 0\\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

及

$$F_r=\phi_r^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \tag{4}$$

于是

$$\boxed{\begin{aligned} F_1&=P_1\\ F_2&=P_1\\ F_3&=-0.90145P_1\\ F_4&=0.15436P_1 \end{aligned}} \tag{5}$$

c. 因为这是简谐激励，公式 15.21 给出

$$\boxed{\eta_r(t)=\frac{(F_r/K_r)\cos\Omega t}{(1-r_r^2)}} \tag{6}$$

其中

$$r_r=\frac{\Omega}{\omega_r} \tag{7}$$

d. 振型-位移近似表达式 $\hat{\mathbf{u}}(t)$ 由公式 15.22 给出，对于 $\hat{u}_1(t)$ 取每个 ϕ_r 的第一分量得

$$\boxed{u_1(t)=\sum_{r=1}^{N}\phi_{1r}\eta_r(t)} \tag{8}$$

e. 可写出无截断的 $u_1(t)$表达式，然后指出相应于 $\hat{N}=1,2$，和 3 的项，于是

$$u_1(t)=\left.\begin{aligned}&\frac{1.0(P_1\cos\Omega t)}{507.695[1-(\Omega^2/176.72)]}\hat{N}=1\\&+\frac{1.0(P_1\cos\Omega t)}{1915.39[1-(\Omega^2/879.70)]}\end{aligned}\right]\hat{N}=2\left.\begin{aligned}&+\frac{(-0.90145)(-0.90145P_1\cos\Omega t)}{7368.43[1-(\Omega^2/1687.46)]}\\&+\frac{0.15436\times0.15436P_1\cos\Omega t}{11374.4[1-(\Omega^2/3122.79)]}\end{aligned}\right]\hat{N}=3 \tag{9}$$

对于 $\Omega=0.5\omega_1$，　$\Omega=6.6468$，　$\Omega^2=44.179$

$\Omega=1.3\omega_3$，　$\Omega=53.402$，　$\Omega^2=2851.80$

$u_1(t)=CP_1\cos\Omega t$。C 为常数

	N_1	N_2	N_3	N_4
$\Omega=0$	1.970 (10^{-3})	2.492 (10^{-3})	2.602 (10^{-3})	2.604 (10^{-3})
$\Omega=0.5\omega_1$	2.626 (10^{-3})	3.176 (10^{-3})	3.289 (10^{-3})	3.291 (10^{-3})
$\Omega=1.3\omega_3$	−0.1301 (10^{-4})	−0.363 (10^{-4})	−0.5228 (10^{-4})	−0.4987 (10^{-4})

（注：各项值均乘以 10^{-3}）

f. 可得出下面结论：

1. 一个模态解对于三个频率的任何一个都是不精确的。

2. 三个模态解对于 $\Omega=0$ 及 $\Omega=0.5\omega_1$ 是十分精确的，而当 $\Omega=1.3\omega_3$ 几乎等于 ω_4，这个频率对 $u_1(t)$最重要是第四模态的成份。截断解在这个频率没有用。

例题 15.1　中的公式 9 说明关于响应的频率及分布的重要性，同样也可由公式 15.22 中看出。输入力分布的重要性也由下面例题说明。比较公式 4.9 与公式 15.21，可以看到其**模态静变位**[15.3]定义为

$$D_r=\frac{F_r}{K_r}=\frac{\phi_r^T\mathbf{P}}{K_r} \tag{15.23}$$

SDOF 系统的 U_0 充当类似静变位的角色。

例题 15.2

例题 15.1 中的四层建筑物，计算 F_r 与 D_r，对两种荷载分布表示为

$$\mathbf{P}_a=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\0\end{Bmatrix},\qquad \mathbf{P}_b=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}$$

解：a. 应用例题 15.1 振型，得到

a.
$$F_{1a}=\boldsymbol{\phi}_1^T\mathbf{P}_a=\begin{Bmatrix}1.00000\\0.77910\\0.49655\\0.23506\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=1.00000 \tag{1a}$$

$$F_{1b}=\phi_1^T\mathbf{P}_b=\begin{Bmatrix}1.00000\\0.77910\\0.49655\\0.23506\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\1\end{Bmatrix}=2.51071 \tag{1b}$$

其它模态力以类似的方式确定

$$\begin{array}{ll}F_{1a}=1.00000, & F_{1b}=2.51071\\ F_{2a}=1.00000, & F_{2b}=-0.07713\\ F_{3a}=-0.90145, & F_{3b}=-0.76861\\ F_{4a}=0.15436, & F_{4b}=0.06931\end{array} \tag{2}$$

b. 应用(a)与例题 15.1 计算的广义刚度的结果一起，得到

$$D_r=\frac{F_r}{K_r} \tag{3}$$

$$\begin{array}{ll}D_{1a}=1.9697\times10^{-3} & D_{1b}=4.9553\times10^{-3}\\ D_{2a}=5.2009\times10^{-4} & D_{2b}=-0.4027\times10^{-4}\\ D_{3a}=-1.2234\times10^{-4} & D_{3b}=-1.0423\times10^{-4}\\ D_{4a}=1.3571\times10^{-5} & D_{4b}=0.6094\times10^{-5}\end{array} \tag{4}$$

指出：虽然(b)情况总的作用力是(a)情况的四倍，但是振型与力的分布共同来确定 F_r 值、而且由此确定了一个特殊模态的激励力的水平。也指出了：当模态是正规化时、因此最大分量是 1，其刚度随模态数而增加。这影响了模态静变位 D_r。

§15-3 振型加速度解无阻尼 MDOF 系统响应

正如例题 15.1 所说明的，即使那时使用了静荷载而振型-位移解仍难以得到精确解，经常收敛较慢，而且给出一个精确振型-位移解则需要许多个模态。应用振型-加速度法可以减轻这个困难。因为这个方法改善了收敛的性质，可以减少 $\hat{N}$ 个，并且据特征解需要少数几个频率与模态即可。

研究无阻尼 **MDOF** 系统

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{p}(t) \tag{15.24}$$

振型-位移(近似值)解 $\hat{u}$ 由公式 15.3 给出，完全忽略由($\hat{N}$+1)至 N 个模态。

振型-加速度解依据，公式 15.24 记为

$$\mathbf{u}=\mathbf{k}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}) \tag{15.25}$$

由振型-位移项的 $\hat{\mathbf{u}}$，近似值 $\ddot{\mathbf{u}}$ 项于是振型-加速度解 $\tilde{u}$，给出为*

$$\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{k}^{-1}(\mathbf{p}-\mathbf{m}\ddot{\hat{\mathbf{u}}}) \tag{15.26}$$

合并公式 15.26 与 15.13，得

* 具有刚体模态系统将在 §15.6 中论述。

$$\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}-\mathbf{k}^{-1}\sum_{r=1}^{\hat{N}}\mathbf{m}\boldsymbol{\phi}_r\ddot{\eta}_r \tag{15.27}$$

以及合并公式 15.3，得到

$$\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}-\sum_{r=1}^{\hat{N}}\left(\frac{1}{\omega_r^2}\right)\boldsymbol{\phi}_r\ddot{\eta}_r \tag{15.28}$$

上面公式中的第一项为伪静态效应；而第二项给出这个方法的名称**振型-加速度法。这项在分母上出现的 ω_r^2 与振型-位移法相比，改善了这个方法的收敛性**[15.4,15.5]。**威尔逊首先提出了振型-加速度法**[15.6]。

例题 15.3

对例题 15.1 的四层建筑物：

a. 应用公式 15.28 确定 $\tilde{u}_1(t)$表达式。

b. 制定表格表示 $\tilde{u}_1(t)$的幅值，应用 $\hat{N}=1$。$\hat{N}=2$ 及 $\hat{N}=3$，激励频率 $\Omega=0$，$\Omega=0.5\omega_1$，及 $\Omega=1.3\omega_3$

c. 在(b)制定的表与例题 15.1 的振型-位移表进行比较，可说明两种方法的收敛性得出的任何结论。

a. $$\mathbf{a}\equiv\mathbf{k}^{-1}=\begin{bmatrix}2.60417 & 1.35417 & 0.72917 & 0.31250\\ 1.35417 & 1.35417 & 0.72917 & 0.31250\\ 0.72917 & 0.72917 & 0.72917 & 0.31250\\ 0.31250 & 0.31250 & 0.31250 & 0.31250\end{bmatrix}(10^{-3})$$

解：

a. 如例题 15.1，中的(e)部分可以写无截断 $u_1(t)$表达式。同时指明相应 $N=1$、2、3 的项，于是从公式 15.28 推得。

$$\tilde{u}_1(t)=a_1P_1\cos\Omega t-\sum_{r=1}^{\hat{N}}\left(\frac{1}{\omega_r^2}\right)\phi_{1r}\ddot{\eta}_r \tag{1}$$

将其与公式 15.21 联合，给出

$$u_1(t)=a_1P_1\cos\Omega t+\sum_{r=1}^{\hat{N}}\left(\frac{\Omega^2}{\omega_r^2}\right)\phi_{1r}\eta_r \tag{2}$$

于是

$$\begin{aligned}u_1(t)=&2.60417(10^{-3})(P_1\cos\Omega t)\\ &+\frac{(\Omega^2/176.72)\cdot(1.0)(P_1\cos\Omega t)}{(507.695)[1-(\Omega^2/176.72)]}\Bigg]\bar{N}=1\\ &+\frac{(\Omega^2/879.70)\cdot(1.0)(P_1\cos\Omega t)}{(1915.39)[1-(\Omega^2/879.70)]}\Bigg]\hat{N}=2\\ &+\frac{(\Omega^2/1687.46)(-0.90145)(-0.90145P_1\cos\Omega t)}{(7368.43)[1-(\Omega^2/1687.46)]}\\ &+\frac{(\Omega^2/3122.79)(0.15436)(0.15436P_1\cos\Omega t)}{(11374.4)[1-(\Omega^2/3122.79)]}\Bigg]\bar{N}=3\end{aligned} \tag{3}$$

b. 如例题 15.1，研究三个给出的频率

$$\Omega^2=0,\qquad \Omega^2=44.197,\qquad \Omega^2=2851.80$$

$u_1(t)=CP_1\cos\Omega t$　　其中 C 为常数

	$\hat{N}=1$	$\hat{N}=2$	$\hat{N}=3$	$\hat{N}=4$
$\Omega=0$	2.604	2.604	2.604	2.604
$\Omega=0.5\omega_1$	3.261	3.288	3.291	3.291
$\Omega=1.3\omega_1$	5.044	−2.506	−5.207	−4.987

（注：第一、二行值乘 10^{-3}，第三行乘 10^{-4}）

c. 从上表得出以下结论：

1. 在 $\Omega=0$，由正规模态无任何分布所产生的精确静态解。

2. 在低频 $0.5\omega_1$，甚至取一项的解已十分精确。对于振型-位移解 $\hat{N}=2$ 与 $\hat{N}=3$ 两处相比较、其解是精确的。

3. 当强迫频率 $\Omega=1.3\Omega_3$ 位于 ω_3 与 ω_4 之间，截断的振型加速度解并不优于截断的任何振型位移解——在任何一种情况都需要第四模态。

如例题 15.3 所指出的，振型-加速度法在改善静态的（译注：$\Omega=0$）及低频响应收敛方面是非常有用的。无论应用振型-位移法或振型-加速度法、它始终是重要的；包括所有模态和它的邻近于激励频率的固有频率。

公式 15.8 可应用得到 $\ddot{\eta}_r(t)$ 的一般表达式，将其代入振型-加速度公式 15.28，于是

$$\ddot{\eta}_r(t)=-\omega_r^2\eta_r(0)\cos\omega_r t-\omega_r\dot{\eta}_r(0)\sin\omega_r t+\frac{P_r(t)}{M_r}-\frac{\omega_r}{M_r}\int_0^t P_r(\tau)\sin\omega_r(t-\tau)d\tau \tag{15.29}$$

取分部积分以变换公式 15.29 为另一种形式

$$\ddot{\eta}_r(t)=-\omega_r^2\eta_r(0)\cos\omega_r t-\omega_r\eta_r(0)\sin\omega_r t+\frac{1}{M_r}\{P_r(0)\cos\omega_r t+\int_0^t\frac{d}{d\tau}[P_r(t)]\cos\omega_r(t-\tau)d\tau\} \tag{15.30}$$

第 7 章的数值方法也可用于确定振型加速度计算过程，例子见图 7.4。

§15.2 及本节曾普遍指出 $\hat{N}<N$ 个模态可以用于前面 $\hat{N}$ 个模态的振型叠加（即从最低频率开始、计算 N 个模态组中的 $\hat{N}$ 个最低频率模态）。在确定包含多少个模态时、需要工程上的判断。例题 15.1 至 15.3 想要指出频比的重要性及判明以多少模态在振型中是重要的。

§15.4　振型叠加解粘滞阻尼系统响应

在这节中研究粘滞阻尼系统响应的振型叠加解，其阻尼按模态的运动方程非耦联的方式分布。也将利用这个机会研究这样的系统在简谐激励下响应的性质，这种响应在结构实验中确定其动力性能中发挥了一种很重要的作用，例如参考文献[15.7]与[15.8]。

考虑具有粘滞阻尼的 MDOF 系统，公式 15.8 给出模态的运动方程。在本章假定阻尼矩阵 C 是这样的：

$$\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{c}\boldsymbol{\phi}_s=0\ ,\quad r\neq s \tag{15.31}$$

即通过模态坐标变换使阻尼矩阵是非耦联的(第 18 章将讨论在这种条件下这是可能的),于是公式 15.8 变成一组非耦联的模态方程,可记成下面的形式:

$$\ddot{\eta}_r+2\zeta_r\omega_r\dot{\eta}_r+\omega^2\eta_r=\frac{1}{M_r}P_r(t)\qquad r=1,2,\cdots,N \tag{15.32}$$

其中 ζ_r 为模态阻尼因数,定义为

$$\zeta_r=\frac{C_r}{2M_r\omega_r}=(\frac{1}{2M_r\omega_r})\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{c}\boldsymbol{\phi}_r \tag{15.33}$$

公式 15.32 解可写成 **SDOF** 系统解的相同的形式给出在公式 6,7 即

$$\eta_r(t)=(\frac{1}{M_r\omega_{dr}})\int_0^t P_r(\tau)e^{-\zeta_r\omega_r(t-\tau)}\sin\omega_{dr}(t-\tau)d\tau$$
$$+\eta_r(0)e^{-\zeta_r\omega_r t}\cos\omega_{dr}t+(\frac{1}{\omega_{dr}})[\dot{\eta}_r(0)+\zeta_r\omega_r\eta_r(0)]e^{-\zeta_r\omega_r t}\sin\omega_{dr}t \tag{15.34}$$

其中

$$\omega_{dr}=\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2} \tag{15.35}$$

在缺乏阻尼方面更权威性的资料时、经常简单地假定模态阻尼如同公式 15.32 是成立的,并且假定 ζr 值是'合理的'。

如对 N 个模态方程求解,将公式 15.32 代回公式 15.7 中,于是响应 $u(t)$确定的。在解中如果仅保留 $\hat{N}$ 个模态,并应用公式 15.13,将有一个振型-位移解,而完全可以不理由$(\hat{N}+1)$到 N 的模态的作用。

如无阻尼系统情况,对这些粘滞阻尼系统可得到**振型-加速度解**,写成公式 15.1 的形式的得到

$$\mathbf{u}=\mathbf{k}^{-1}[(\mathbf{p}(t)-\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}-\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}] \tag{15.36}$$

同时可以得到近似表示的速度与加速度项与它们的振型-位移的近似表达式,于是振型-加速度近似表达式给出为

$$\tilde{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}(t)-\mathbf{k}^{-1}\mathbf{c}\sum_{r=1}^{\hat{N}}\boldsymbol{\phi}_r\dot{\eta}_r(t)-\mathbf{k}^{-1}\mathbf{m}\sum_{r=1}^{\hat{N}}(\frac{1}{\omega_r^2})\boldsymbol{\phi}_r\ddot{\eta}_r(t) \tag{15.37}$$

末一项可简化成正如公式 15.28 得出的无阻尼系统所完成的(见习题 15.5)。所得到的**振型-加速度解**为

$$\tilde{\mathbf{u}}(t)=\mathbf{k}^{-1}\mathbf{p}(t)-\sum_{r=1}^{\hat{N}}\frac{2\zeta_r}{\omega_r}\boldsymbol{\phi}_r\dot{\eta}_r(\mathrm{t})-\sum_{r=1}^{\hat{N}}\frac{1}{\omega_r^2}\boldsymbol{\phi}_r\ddot{\eta}_r(\mathrm{t}) \tag{15.38}$$

根据公式 15.38,参考文献[15.9]给出一些有意义的数值收敛研究的材料。

现在考虑对一个粘滞阻尼系统承受简谐激励 $\mathbf{p}=\mathbf{p}\cos\Omega t$ 的稳态响应的振型叠加解。于是

$$\ddot{\eta}_r+2\zeta_r\omega_r\dot{\eta}_r+\omega_r^2\eta_r=(\frac{1}{M_r})F_r\cos\Omega t \tag{15.39}$$

如 *SDOF* 系统情况,可应用复频响应的方法解公式 15.39,得

$$\ddot{\bar{\eta}}_r+2\zeta_r\omega_r\dot{\bar{\eta}}_r+\omega_r^2\bar{\eta}_r=\omega_r^2\left(\frac{F_r}{K_r}\right)e^{i\Omega t} \tag{15.40}$$

于是稳态解 $\bar{\eta}_r$ 可写成

$$\bar{\eta}_r=\bar{H}_{\eta_r/F_r}(\Omega)F_re^{i\Omega t} \tag{15.41}$$

其中 $\bar{H}_{\eta_r/F_r}(\Omega)$为**主坐标复频响应函数**:

$$\overline{H}_r(\Omega)=\overline{H}_{\eta_r/F_r}(\Omega)=\frac{1/K_r}{(1-r_r^2)+i(2\zeta_r r_r)} \tag{15.42}$$

如§4.3，可确定 $\overline{H}_r(\Omega)$的幅值与相位，于是 $\eta_r(t)$变为

$$\eta_r(t)=\frac{F_r/K_r}{\sqrt{(1-r_r^2)^2+(2\zeta_r r_r)^2}}\cos(\Omega t-\alpha_r) \tag{15.43a}$$

其中

$$\tan\alpha_r=\frac{2\zeta_r r}{1-r_r^2} \tag{15.43b}$$

物理(或几何)坐标 u 的复频响应可由公式 15.7 以复数形式得到

$$\bar{\mathbf{u}}(t)=\Phi\bar{\eta}(t)=\sum_{r=1}^{N}\boldsymbol{\phi}_r\bar{\eta}_r(t) \tag{15.44}$$

联合公式 15.20c，15.41，15.42 及 15.43 得

$$\bar{\mathbf{u}}(t)=\sum_{r=1}^{N}\frac{\boldsymbol{\phi}_r\boldsymbol{\phi}_r^T\mathbf{P}}{K_r}\left[\frac{1}{(1-r_r^2)}+i(2\zeta_r r_r)\right]e^{i\Omega t} \tag{15.45}$$

物理坐标的复频响应函数 $\overline{H}_{ij}(\Omega)$，给出由于 p_j 单位简谐激励在坐标 u_i 的响应，于是从公式 15.45

$$\overline{H}_{ij}(\Omega)\equiv\overline{H}_{u_i/p_j}(\Omega)=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{K_r}\right)\left[\frac{1}{(1-r_r^2)+i(2\zeta_r r_r)}\right] \tag{15.46}$$

稳态效应 $u(t)$也可以由公式 15.45 得到。

$$\mathbf{u}(t)=\sum_{r=1}^{N}\frac{\boldsymbol{\phi}_r\boldsymbol{\phi}_r^T\mathbf{P}}{K_r}\left[\frac{1}{\sqrt{(1-r_r^2)^2+i(2\zeta_r r_r)^2}}\right]\cos(\Omega t-\alpha_r) \tag{15.47}$$

其中 α_r 再由公式 15.43b 给出。

公式 15.46 在复平面上曲线认为是复频响应曲线，在这种情况，Ω 是一个参数，以及 $I(\overline{H})$作为 $R(\overline{H})$的函数画出的。另一方面，它们经常是将 $R(\overline{H})$以 $f=\Omega/2\pi$ 为函数，及 $I(\overline{H})$以 f 为函数来表示是很方便的。从公式 15.46 可得到关于这些的表达式。于是

$$R(\overline{H}_{ij})=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{K_r}\right)\left[\frac{1-r_r^2}{(1-r_r^2)^2+(2\zeta_r r_r)^2}\right] \tag{15.48a}$$

及

$$I(\overline{H}_{ij})=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{K_r}\right)\left[\frac{-2\zeta_r r_r}{(1-r_r^2)^2+(2\zeta_r r_r)^2}\right] \tag{15.48b}$$

复频响应函数(有时称为**传递函数**)如公式 15.46 所给出的是经常用于确定一个实验系统的振动特性。将举两个例题表示复频响函数的性质，例题 15.4 论述具有弱阻尼及宽间隔固有频率的 2-DOF 系统，而例题 15.5 说明的问题是当两个频率非常接近时所产生的。

例题 15-4

图 E15.4.1 2-DOF 系统

a. 确定 f_1，f_2，ϕ_1 与 ϕ_2

b. 确定 M、C 与 K

c. 确定 ζ_1 与 ζ_2

d. 确定 $\overline{H}_{11}^{21}(\Omega)$与 $\overline{\mathbf{H}}(\Omega)$

e. 在复平面上画出 $\overline{H}_{11}$与 $\overline{H}_{21}$，　$f=4$Hz 至 $f=7$Hz

f. 画出 $R(\overline{H}_{11})$以 f 为函数及 $I(\overline{H}_{11})$为 f 为函数图，$f=4$Hz 至 7Hz

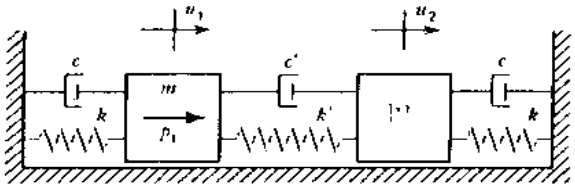


图 E(15.4.1)

$$p_1=p_1\cos\Omega t, \qquad k=987, \qquad k'=217, \qquad m=1$$
$$c=0.6284, \qquad c'=0.0698$$

解:**a.** 应用 12 章的方法确定频率与振型为

$$\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}c+c' & -c'\\ -c' & c+c'\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{u}_1\\ \dot{u}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k+k' & -k'\\ -k' & k+k'\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}p_1\\ 0\end{Bmatrix} \tag{1}$$

无阻尼自由振动为

$$\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}k+k' & -k'\\ -k' & k+k'\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{2}$$

令

$$u=\varphi\cos\omega t \tag{3}$$

于是可写出代数特征方程

$$\begin{bmatrix}k+k' & -k'\\ -k' & k+k'\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{4}$$

频率与模态可确定为

$$\omega_1^2=\frac{k}{m}, \qquad \omega_2^2=\frac{k+2k'}{m} \tag{5}$$

$$\phi_1=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}, \qquad \phi_2=\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix} \tag{6}$$

对于上面的指定值 k,k' 与 m

$$\omega_1^2=\frac{987}{1}=987, \qquad \omega_2^2=\frac{1421}{1}=1421$$
$$\omega_1=31.42, \qquad \omega_2=37.70$$

$$\boxed{f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}=5.00\text{Hz}, \quad f_2=\frac{\omega_2}{2\pi}=6.00\text{Hz}} \tag{7}$$

b. 确定 $\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{C}$ 及 $\boldsymbol{K}$

$$\Phi=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{M}=\Phi^T\mathbf{m}\Phi=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \tag{8b}$$

$$\boldsymbol{C}=\Phi^T\mathbf{c}\Phi=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6912 & -0.0628\\ -0.0628 & 0.6912\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6284 & 0.7540\\ -0.6284 & -0.7540\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1.2568 & 0\\ 0 & 1.5080\end{bmatrix}$$

$$K_1=\omega_1^2M_1=987(2)=1974$$

$$K_2=\omega_2^2M_1=1421\times 2=2842$$

所以

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1974 & 0\\ 0 & 2842\end{bmatrix} \tag{8c}$$

c. 应用公式(15.33)，确定 ζ_1 与 ζ_2

$$\zeta_r=\frac{C_r}{2M_r\omega_r} \tag{9}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\zeta_1&=\frac{1.2568}{2\times 2\times 31.42}=0.0100\\ \zeta_2&=\frac{1.5080}{2\times 2\times 37.10}=0.0100\end{aligned}} \tag{10}$$

d. 应用公式 15.46 确定 $\overline{H}_{11}(\Omega)$与 $\overline{H}_{21}(\Omega)$。

$$\overline{H}_{ij}(\Omega)=\sum_{r=1}^{2}\left(\frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{K_r}\right)\left[\frac{1}{1-(\Omega/\omega_r)^2+i(2\zeta_r\Omega/\omega_r)}\right]$$

$$\overline{H}_{11}(\Omega)=\left[\frac{1\times 1}{1974}\right]\left[\frac{1}{1-(\Omega/31.42)^2+i[2\times(0.01)\Omega/31.42]}\right]+\left[\frac{1\times 1}{2842}\right]\left[\frac{1}{1-(\Omega/37.10)^2+i[2\times(0.01)\Omega/37.70]}\right] \tag{11}$$

$$\boxed{\overline{H}_{11}=\frac{5.066\times 10^{-4}}{1-(\Omega/31.42)^2+i(0.02\Omega/31.42)}+\frac{3.519\times 10^{-4}}{1-(\Omega/37.10)^2+i(0.02\Omega/37.70)}} \tag{12a}$$

同理，由公式 11

$$\overline{H}_{21}(\Omega)=\left[\frac{1\times 1}{1974}\right]\left[\frac{1}{1-(\Omega/31.42)^2+[i(2\times 0.01\times(\Omega/31.42)]}\right]+\left[\frac{-1\times 1}{2842}\right]\left[\frac{1}{1-(\Omega/37.70)^2+i[2\times(0.01)\times\Omega/37.70]}\right]$$

于是

$$\boxed{\overline{H}_{21}(\Omega)=\frac{5.066\times 10^{-4}}{1-(\Omega/31.42)^2+i(0.02\Omega/31.42)}-\frac{3.519\times 10^{-4}}{1-(\Omega/37.70)^2+i(0.02\Omega/37.70)}} \tag{12b}$$

e. 在复平面上画出 $\overline{H}_{11}$与 $\overline{H}_{21}$

需要画出 $R(\overline{H}_{ij})$对 $I(\overline{H}_{ij})$曲线图，公式 15.48a 与 15.48b 给出这些

$$\overline{R}(\overline{H}_{ij})=\sum_{r=1}^{2}\frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{K_r}\left(\frac{1-(\Omega/\omega_r)^2}{[1-(\Omega/\omega_r)^2+(2\zeta\Omega/\omega_r)^2}\right) \tag{13a}$$

$$I(\overline{H}_{ij})=\sum_{r=1}^{2}\frac{\phi_{ir}\phi_{jr}}{K_r}\left(\frac{-2\zeta_r\Omega/\omega_r}{[1-(\Omega/\omega_r)^2]^2+(2\zeta\Omega/\omega_r)^2}\right)$$

在公式 13 对 $\overline{H}_{11}$与 $\overline{H}_{21}$需要的数值可从公式 12.a 与 12.b 取到，这里将不重复(注意：图 E15.4.2 使用不同的比例尺)。

f. 公式 13 也可应用画出 $\boldsymbol{R}(\overline{\boldsymbol{H}}_{11})$与 $\boldsymbol{I}(\overline{\boldsymbol{H}}_{11})$曲线图，以激励频率 $f=\frac{\Omega}{2\pi}$为函数。**E**15.4.3

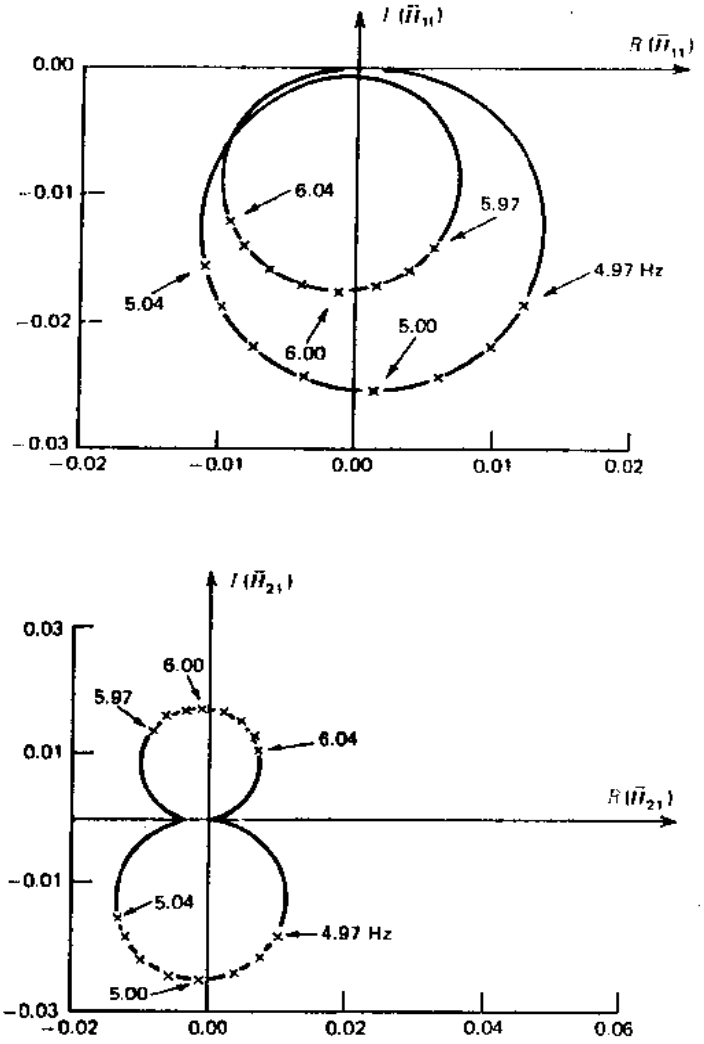


图 E15.4.2

从上面例题(*e*)部分中的 $\overline{H}_{11}$ 复频响应图可以看出：

a. 响应相似于两个特殊的 SDOF 系统复频响应图，如图 4.9 所见，即该 2-DOF 系统类似于两个 SDOF 独立系统。

b. 频率间隔非常接近于无阻尼固有频率，$f_1=5.00$Hz 与 $f_2=6.00$Hz。

c. 逼近这些固有频率处 $R(\overline{H}_{11})=0$。

d. 在这些固有频率处 $I(\overline{H}_{11})$ 有极大值。

结论(c)与(d)也可相应的由 $R(\overline{H}_{11})$ 与 $I(\overline{H}_{11})$ 图分别推论得出。

复频响应 $\overline{H}_{21}$ 图导出类似的结论，但它也显示出由于模态 1 与模态 2 符号不同则其相位改变。

任何复杂的实际结构经常全都有密间隔的频率，即一个结构可能有大大超过 100 以上的

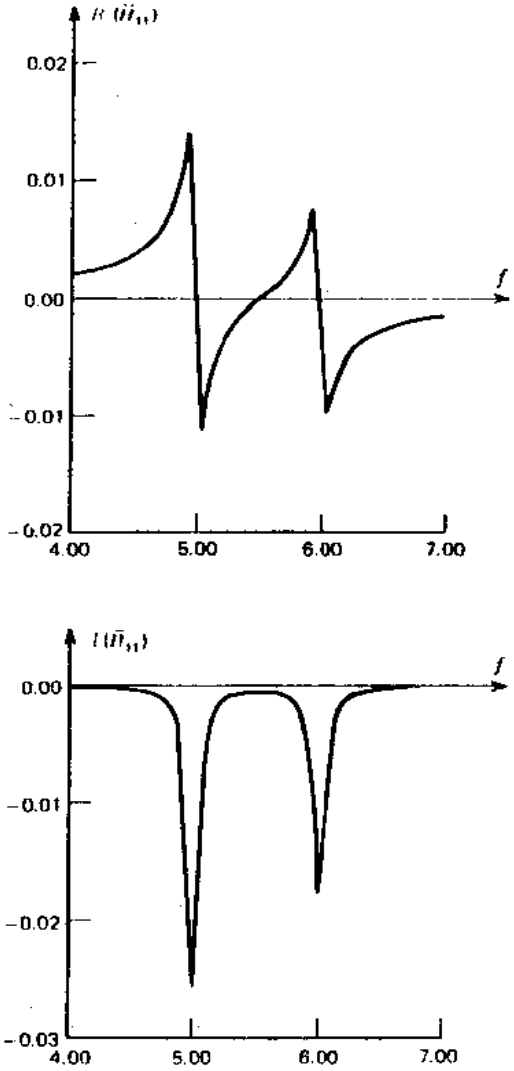


图 E15.4.3

固有频率在 0 至 50Hz 之间。§13.1 中讨论了处理重频系统的方法；同时指出重频相应的振型不是唯一的。在例题 15.5 中要讨论一个频率密间隔的系统，指出这样一个系统例题 15.4 中具有宽间隔频率的那样的一个系统其响应曲线有何不同[15.10,15.11]。

例题 15.5

应用下面系统参数，$k=987$， $k'=10$， $c=0.6284$， $c'=0.0031$，重做例题 15.4。

（注意：这些参数选择给出 1%阻尼以及 1%频率间隔）

解：

a. 运动方程与例题 15.4 的形式相同，所以频率给定为

$$\omega_1^2=\frac{k}{m}, \qquad \omega_2^2=\frac{k+2k'}{m} \tag{1}$$

振型将与例题 15.4 一样。

$$\omega_1^2=\frac{987}{1}=987,\qquad \omega_2^2=\frac{1007}{1}=1007$$

$$\omega_1=31.42,\qquad \omega_2=31.73$$

$$\boxed{f_1=\frac{\omega_1}{2\pi}=5.00\text{Hz},\qquad f_2=\frac{\omega_2}{2\pi}=5.05\text{Hz},Z)\ \rrbracket} \tag{2}$$

b. 由例题 15.4

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{M}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} \tag{3a、b}$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{C}\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6315 & -0.0031\\ -0.0031 & 0.6315\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \tag{3c}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.6284 & 0.6346\\ 0.6284 & -0.6346\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.2568 & 0\\ 0 & 1.2692\end{bmatrix}$$

$$K_1=\omega_1^2M_1=987\times 2=1974$$

$$K_2=\omega_2^2M_2=1007\times 2=2014$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1974 & 0\\ 0 & 2014\end{bmatrix} \tag{3d}$$

c. 应用公式 15.33 确定 ζ_1 与 ζ_2

$$\zeta_r=\frac{C_r}{2M_r\omega_r} \tag{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\zeta_1&=\frac{1.2568}{2\times 2\times 31.42}=0.0100\\ \zeta_2&=\frac{1.2692}{2\times 2\times 31.73}=0.0100\end{aligned}} \tag{5}$$

d. 应用例题 15.4 的公式 11 以及由上面的数值得到

$$\bar{H}_{11}(\Omega)=\left[\frac{1\times 1}{1974}\right]\left[\frac{1}{1-(\Omega/31.42)^2+i\left[(2\times 0.01\Omega/31.42\right]}\right]$$

$$+\left[\frac{1\times 1}{2014}\right]\left[\frac{1}{1-(\Omega/31.73)^2+i\left[2\times 0.01\Omega/31.73\right]}\right]$$

于是

$$\boxed{\bar{H}_{11}=\frac{5.066\times 10^{-4}}{1-(\Omega/31.42)^2+i(0.02\Omega/31.42)}+\frac{4.965\times 10^{-4}}{1-(\Omega/31.73)^2+i(0.02\Omega/31.73)}} \tag{6a}$$

$$\boxed{\bar{H}_{21}=\frac{5.066\times 10^{-4}}{1-(\Omega/31.42)^2+i(0.02\Omega/31.42)}-\frac{4.965\times 10^{-4}}{1-(\Omega/31.73)^2+i(0.02\Omega/31.73)}} \tag{6b}$$

e. 应用公式 6a 与 6b 的数值由公式 15.48 绘出 $\bar{H}_{11}$ 与 $\bar{H}_{21}$ 曲线图。图 E15.5.1。

f. 如例题 15.4 得到实部与虚部曲线图。图 E15.5.2

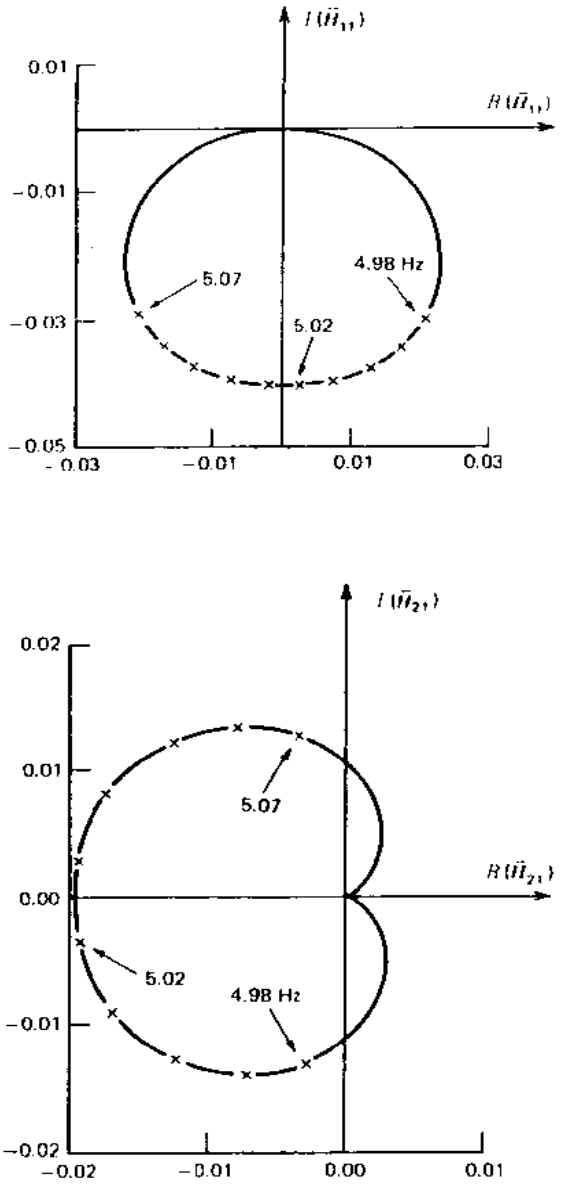


图 E15.5.1

比较例题 15.4 与例题 15.5 的频响图可以看到、具有密间隔频率系统的 $\bar{H}_{11}$ 频响应图给出了一个小的迹象、表现出了两个模态。以强迫频率为函数的 $\bar{H}_{11}$ 图同样是真实的。另一方面、密间隔模态的 $\bar{H}_{21}$ 图表示出其相位差有个突变，而且指出出现两个模态，它们在这个坐标上的响应具有相反的符号。以实验的方法来区分具有密间隔频率或具有过阻尼系统的模态会遇到很大的困难。图 15.2 表示一个惯性 Bode 曲线，即一个复杂系统的响应是用一点上的激励，在另一点上所测到响应的加速度或力成为一个频率的函数。

§15.5 振型叠加解动应力

在 §15.2 与 §15.3 中对确定位移历程 u(t)的基本方法是用已论述过的振型位移法与振

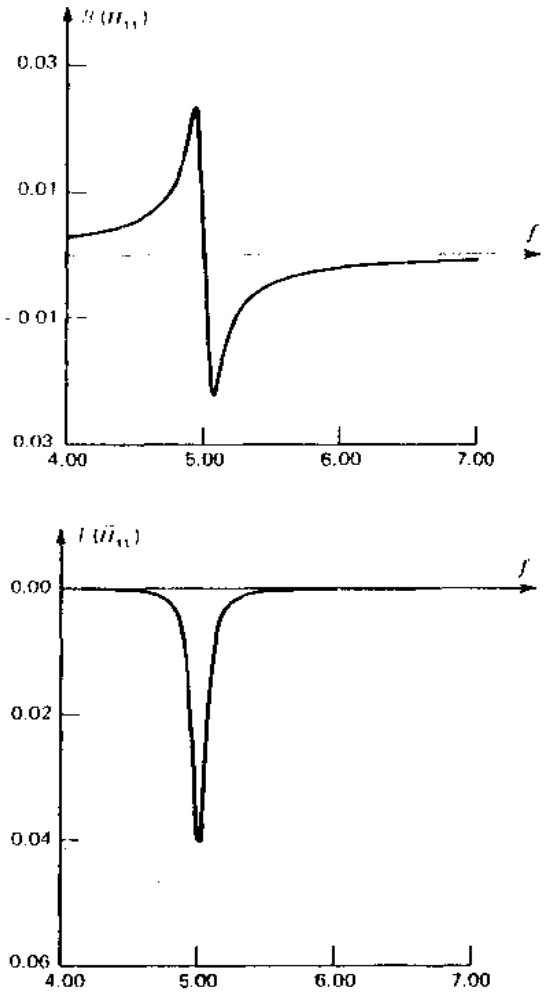


图 E15.5.2

型加速度法。除了确定位移历程 u(t)外，通常动力分析还包含应力历程(例如，力矩、剪力、轴向应力等)，或者至少确定结构特殊部位的最大应力值。下面用振型叠加法得到的应力的象征表达式。对于振型位移法

$$\hat{\sigma}(t)=\sum_{r=1}^{N}\mathbf{s}_r\eta_r(t) \tag{15.49}$$

其中 s_r 为由第 r 个模态单位位移，即 $\eta_r=1$ 时对应力向量 δ 的贡献。对于振型加速度法，用一个无阻尼系统由公式 15.28 近似表示导出应力近似表达式。

$$\bar{\sigma}=\sigma_{\text{伪静态}}-\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{\omega_r^2}\right)\mathbf{s}_r\ddot{\eta}_r(t) \tag{15.50}$$

振型-加速度法在内应力收敛速度方面是特别有效的，如在例题 15.6 所要见到的。

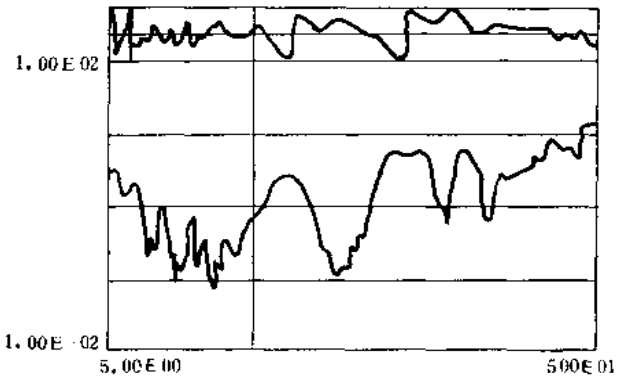


图 15.2　复杂体系惯性 Bode 曲线

例题 15.6

例题 15.1 抗剪建筑列出层间相应于 r 阶模态剪力 σ_i 表达式。

解：层向应力由相对底层位移来确定

$$\begin{aligned}\sigma_1&=k_1(u_1-u_2)\\ \sigma_2&=k_2(u_2-u_3)\\ \sigma_3&=k_3(u_3-u_4)\\ \sigma_4&=k_4u_4\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1 & -k_1 & 0 & 0 & u_1\\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 & u_2\\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 & u_3\\ 0 & 0 & 0 & k_4 & u_4\end{bmatrix}\tag{2}$$

于是当位移形式为 φ_r，公式 2 对 s_r 导出下面表达式：

$$\begin{Bmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1 & -k_1 & 0 & 0\\ 0 & k_2 & -k_2 & 0\\ 0 & 0 & k_3 & -k_3\\ 0 & 0 & 0 & k_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \phi_4\end{Bmatrix}\tag{3}$$

由例题 15.1 的 $\mathbf{k}$ 与 $\boldsymbol{\phi}$ 的数值，可应用公式 3 计算模态剪力。

$$\mathbf{s}_1=\begin{Bmatrix}176.72\\ 452.08\\ 627.58\\ 752.19\end{Bmatrix},\qquad \mathbf{s}_2=\begin{Bmatrix}879.70\\ 707.42\\ -245.47\\ -1400.35\end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_3=\begin{Bmatrix}-1521.16\\ 1835.74\\ 1318.51\\ -2265.50\end{Bmatrix},\qquad \mathbf{s}_4=\begin{Bmatrix}482.02\\ -2317.07\\ 3928.51\\ -2038.02\end{Bmatrix}\tag{4}$$

注意到在例题 15.1 给出模态 φ_r，和应用上面例题确定模态的剪力 s_r，是这样定标的，以每个模态的最大位移为+1。模态剪力的幅值趋向于模态数目的增加而增加。由于这个原因应力的收敛比位移的收敛慢，因之当计算应力时，振型加速度法证明是非常有效的[15.4]。

§15.6 刚体模态无阻尼系统的振型叠加

振型叠加法可用于确定具有刚体模态系统的响应。本节将研究振型-位移法与振型-加速度法对于具有刚体模态无阻尼系统的应用。

振型叠加法的基本公式 15.7 可写成下面形式：

$$\mathbf{u}(t)=\mathbf{u}_R(t)+\mathbf{u}_E(t)=\Phi_R\eta_R(t)+\Phi_R\eta_E(t) \tag{15.51}$$

其中 Φ_R 与 Φ_E 为模态矩阵，分别包含 N_R 个刚体模态与 N_E 弹性体模态（$N=N_R+N_E$）。公式 15.51 代入运动方程公式 15.1，用 $c=0$ 得到

$$\boldsymbol{M}_R\ddot{\eta}_R=\Phi_R^T\mathbf{p} \tag{15.52a}$$

及

$$\boldsymbol{M}_E\ddot{\eta}_E+\boldsymbol{K}_E\eta_E=\Phi_E^T\mathbf{p} \tag{15.52b}$$

刚体坐标由公式 15.52a 重积分得到，即

$$\eta_r=\int_0^t\int_0^\tau\left(\frac{1}{M_r}\right)\Phi_r^T\mathbf{p}(\xi)d\xi d_\tau+t\dot{\eta}_r(0)+\eta_r(0)$$

$$r=1,2,\cdots,N_R \tag{15.53}$$

对于弹性体坐标同前由公式 15.18 给出。

振型-位移法

由振型-位移法确定系统位移，公式 15.51 是将弹性体模态的数目截断到 $\hat{N}_E$ 个来使用，因此

$$\hat{\mathbf{u}}(t)=\Phi_R\eta_R(t)+\hat{\Phi}_E\hat{\eta}_E(t) \tag{15.54}$$

其中 $\hat{\Phi}_E$ 包含 $\hat{N}_E$ 个弹性体模态。公式 15.53 与 15.18 应用确定刚体与弹性体模态的位移历程。

用振型-位移法确定应力，修改公式 15.49 说明刚体位移不引起内应力，因此

$$\hat{\sigma}(t)=\hat{\mathbf{S}}_E\hat{\eta}_E(t)=\sum_{r=1}^{\hat{N}_E}\mathbf{s}_r\eta_r(t) \tag{15.55}$$

其中 $\hat{\mathbf{S}}_E$ 的列是对应于 $\hat{N}_E$ 个保留弹性体模态中每个模态的单位值的内应力向量。

振型-加速度法

由于具有刚体模态的系统的刚度矩阵是奇异的，所以不可能求逆，振型-加速度法不可能使用公式 15.38 以简单的方式表示。

开始由公式 15.52b 求解 η_E，并将其代入公式 15.51，得到

$$\mathbf{u}=\Phi_R\eta_R+(\Phi_E\boldsymbol{K}_E^{-1}\Phi_E^T)\mathbf{p}-(\Phi_E\boldsymbol{K}_E^{-1}\boldsymbol{M}_E)\ddot{\eta}_E \tag{15.56}$$

确定刚体项的如同振型-位移公式，即保留所有刚体模态，使得公式 15.56 成为类似于公式 15.28 的振型-加速度形式，可以看到在公式 15.28 中截断最后一项导出如公式 15.28 相同的表达式，因此重写公式 15.56 为下面形式：

$$\mathbf{u}=\Phi_R\eta_R+\mathbf{a}_E\mathbf{p}-\hat{\Phi}\boldsymbol{K}_E^{-1}\hat{\boldsymbol{M}}_E\ddot{\hat{\eta}}_E \tag{15.57}$$

其中只有伪静态变位项导出是困难的，它们记作 $\mathbf{a}_E\mathbf{p}_E$。

弹性体柔度矩阵 a_E 的表达式之一为

$$\mathbf{a}_E=\Phi_E K_E^{-1}\Phi_E^T \tag{15.58}$$

这是由公式 15.56 得出来的。然而希望确定 $\mathbf{a}_E$，不是对所有弹性体模态求解，如果应用公式 15.18 那么就不得不去解所有弹性体模态。

首先将公式 15.51 代入运动方程，注意 $\mathbf{ku}_R=0$，于是

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_E+\mathbf{k}\mathbf{u}_E=\mathbf{p}_E \tag{15.59a}$$

其中

$$\mathbf{p}_E=\mathbf{p}-\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_R \tag{15.59b}$$

于是在确定弹性体位移中、应用力与刚体惯性力的自动平衡力系统，因为由公式 15.51 与 15.52a 有

$$\ddot{\mathbf{u}}_R=\Phi_R\ddot{\eta}_R=\Phi_R M_R^{-1}\Phi_R\mathbf{p} \tag{15.60}$$

可写出弹性体力向量 $\mathbf{p}_e$ 为

$$\mathbf{p}_E=R\mathbf{p} \tag{15.61a}$$

其中

$$R=I-\mathbf{m}\Phi_R M_R^{-1}\Phi_R^T \tag{15.61b}$$

使系统的柔度矩阵 $\mathbf{a}$ 相应于一些静定约束，其约束相应的行或列为零，

然后令

$$\mathbf{w}=\mathbf{a}\mathbf{p}_E \tag{15.62}$$

是系统的弹性体位移施加于静定约束上，但是变形 $\mathbf{w}$ 可能包含一些刚体模态分量，这样一个新的向量 $\mathbf{w}_E$ 生成，使之正交刚体模态。

令

$$\mathbf{w}_E=\bar{\mathbf{w}}-\Phi_R\mathbf{c}_R \tag{15.63}$$

其中 $\mathbf{c}_R$ 是这样的，即由 $\Phi_R^T\mathbf{m}\mathbf{w}_E=0$，

于是

$$\Phi_R^T\mathbf{m}(\mathbf{w}-\Phi_R\mathbf{c}_R)=0 \tag{15.64}$$

或

$$\mathbf{c}_R=M_R^{-1}\Phi_R^T\mathbf{m}\mathbf{w} \tag{15.65}$$

于是

$$\mathbf{w}_E=(\mathbf{I}-\Phi_R M_R^{-1}\Phi_R^T\mathbf{m})\mathbf{w}=R^T\mathbf{w} \tag{15.66}$$

最终，得到

$$\mathbf{w}_E=\mathbf{a}_E\mathbf{p} \tag{15.67}$$

其中 $\mathbf{a}_E$ 具有与公式 15.58 中相同的含义，但现在给出为

$$\mathbf{a}_E=R^T\mathbf{a}R \tag{15.68}$$

具有刚体模态系统的振型-加速度法于是包括由公式 15.68 定义的 $\mathbf{a}_E$ 用在公式 15.27 中。

具有刚体模态在内的系统应力可由振型-加速度表达式确定：

$$\tilde{\sigma}(t)=\sigma_{\text{伪静态}}-\sum_{r=1}^{\hat{N}_E}\left(\frac{1}{\omega_r^2}\right)\mathbf{s}_r\ddot{\eta}_r(t) \tag{15.69}$$

其中 $\sigma_{\text{伪静态}}$ 是由公式 15.59b 给出的自动平衡弹性力向量 $\mathbf{p}_E$ 所得到的内应力向量。应用公式 15.69 确定应力要比通过用公式 15.57 与 15.68 确定位移更为简便。例题 15.7 说明振型-位移法与振型-加速法确定内应力的应用。

例题 15.7

应用振型-位移法与振型加速度法确定由于作用一阶跃力 $p_3(t)=p_0\ t\geqslant 0$ 时两个弹簧各自承受最大力的表达式，比较两种方法的收敛性。系统在 $t=0$ 时静止。见图 E15.7.1。

解：

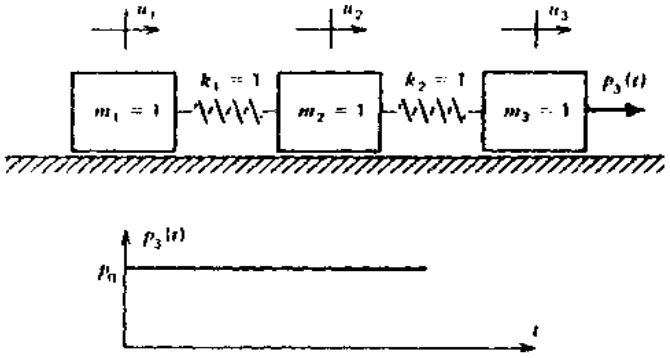


图 E15.7.1

a. 求频率与模态

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\\\ddot{u}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{1}$$

令 $\mathbf{u}=\boldsymbol{\phi}\cos\omega_i$，于是代数特征值方程是 (2)

$$\begin{bmatrix}1-\omega^2&-1&0\\-1&(2-\omega^2)&-1\\0&-1&(1-2)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\\\phi_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{3}$$

取公式 3 行列式的系数为零，得特征方程

$$\omega^2(\omega^4-4\omega^2+3)=0 \tag{4}$$

其根为

$$\omega_1^2=0,\qquad \omega_2^2=1,\qquad \omega_3^2=3 \tag{5}$$

相应的模态是

$$\boldsymbol{\phi}_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\qquad \boldsymbol{\phi}_2=\begin{Bmatrix}1\\0\\-1\end{Bmatrix}\qquad \boldsymbol{\phi}_3=\begin{Bmatrix}1\\-2\\1\end{Bmatrix} \tag{6}$$

广义质量与广义刚度给定为

$$M_r=\boldsymbol{\Phi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{\Phi}_r=\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_r \tag{7}$$

与

$$K_r=\omega_r^2M_r \tag{8}$$

所以

$$\begin{aligned}&M_1=3 \qquad M_2=2 \qquad M_3=6\\&K_1=0 \qquad K_2=2 \qquad K_3=18\end{aligned} \tag{9}$$

b. 因为系统初始为静止

$$\eta_r(0)=\dot{\eta}_r(0)=0 \qquad (r=1,2,3) \tag{10}$$

c. 广义力给定为

$$P_r(t)=\boldsymbol{\phi}_r^{\mathrm{T}}\mathbf{p}(t) \tag{11}$$

所以

$$\begin{aligned}&P_1=p_3(t)=p_0 \qquad P_2=p_3(t)=-p_0\\&P_3=p_3(t)=p_0\end{aligned} \tag{12}$$

d. 在模态坐标中的运动方程是

$$\left.\begin{aligned} 3\ddot{\eta}_1 &= p_0 \\ 2\ddot{\eta}_2+2\eta_2 &= -p_0 \\ 6\ddot{\eta}_3+18\eta_3 &= p_0 \end{aligned}\right\} t\geq 0 \tag{13}$$

于是

$$\eta_1=\frac{p_0 t^2}{6}$$

$$\eta_2=-\frac{p_0}{2}(1-\cos\omega_2 t) \tag{14}$$

$$\eta_3=\frac{p_0}{18}(1-\cos\omega_3 t)$$

其中后两个可由公式 5.8 得到。由公式 13 与 14

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\eta}_2 &= -\frac{p_0}{2}\cos\omega_2 t \\ \ddot{\eta}_3 &= \frac{p_0}{6}\cos\omega_3 t \end{aligned}\right. \tag{15}$$

e. 确定模态应力，即由于弹性体模态 ϕ_1 与 ϕ_2 的弹簧力

$$\mathbf{s}_r=\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

所以

$$\mathbf{s}_2=\begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{s}_3=\begin{Bmatrix} -3 \\ 3 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

f. 振型-位移法近似表示的弹簧力(内应力)由公式 15.5 给出，即

$$\hat{\sigma}(t)=\mathbf{s}_2\eta_2(t) \tag{18a}$$

如用一个弹性体模态

$$\hat{\sigma}=\sigma(t)=\mathbf{s}_2\eta_2(t)+\mathbf{s}_3\eta_3(t) \tag{18b}$$

如包含两个弹性体模态，于是

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}=\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix}\left(-\frac{p_0}{2}\right)(1-\cos\omega_2 t) \\ &= \frac{p_0}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}(1-\cos\omega_2 t) \end{aligned} \tag{19a}$$

$$\begin{aligned} \sigma=\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} &= \frac{p_0}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}(1-\cos\omega_2 t) \\ &= \frac{p_0}{6}\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}(1-\cos\omega_2 t) \end{aligned} \tag{19b}$$

g. 振型-加速度解内应力是根据公式 15.69，自动平衡荷载 $\mathbf{p}_E$ 如图 $E15.7.2$ 所示。因此，取自由体图得到

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}_{\text{伪静态}}=\begin{Bmatrix} \frac{p_0}{3} \\ \frac{2p_0}{3} \end{Bmatrix}$$

于是振型-加速度解根据一个弹性体模态为

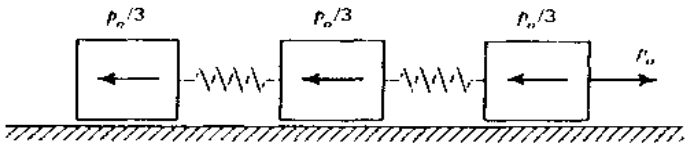


图 E15.7.2

$$\tilde{\sigma}=\sigma_{\text{伪静态}}-\left(\frac{1}{\omega_2^2}\right)\mathbf{s}_2\ddot{\eta}_2 \tag{21a}$$

以及根据两个弹性体模态为

$$\tilde{\sigma}\equiv\sigma=\sigma_{\text{伪静态}}-\frac{1}{\omega_2^2}\mathbf{s}_2\ddot{\eta}_2-\frac{1}{\omega_2^2}\mathbf{s}_3\ddot{\eta}_2 \tag{21b}$$

最后

$$\boxed{\tilde{\sigma}=\begin{Bmatrix}\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{\sigma}_2\end{Bmatrix}=\frac{p_0}{3}\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix}-\frac{p_0}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\cos\omega_2 t}$$

及

$$\boxed{\tilde{\sigma}\equiv\sigma=\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{Bmatrix}=\frac{p_0}{3}\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix}-\frac{p_0}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\cos\omega_2 t+\frac{p_0}{6}\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}\cos\omega_3 t} \tag{22}$$

应当指出，两个模态解 19b 与 22b 是相等的，因为仅有两个弹性体模态。

比较振型-位移(*M-D*)法与振型-加速度(*M-A*)法计算的的最大弹簧力

	M-D	*M-A*	
	I 模态	*I* 模态	精确的
σ_1/P_0	1.000000	0.833333	0.999933
σ_2/P_0	1.000000	1.166667	1.333241

由公式 19b 在 1^0 时间间隔至 $t=100\pi$ 估算 σ_1 与 σ_2 来计算精确值，。

上面例题对指出振型-加速法对于改善收敛性超过振型-位移法实在是太小了。然而它说明了应用两种方法求内应力的步骤。一个具有刚体模态系统的两种更广泛应用的方法见于参考文献 15.5。

参考文献

15.1 S. P. Timoshenko, D. H. Young, and W. Weaver, Jr. Vibration Problems in Engineering, *4th Ed.*, *Wiley*, *New York* (1974).

15.2 L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York (1975)

15.3 J. M. Biggs, *Introduction to Structural Dynamics*, McGraw-Hill, New York (1964)

15.4 W. T. Thomson, *Theory of Vibration with Applications*, Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, NJ (1972).

15.5 R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, and R. L. Halfman, *Aeroelasticity*, Addison-Wesley,

Reading,MA(1955).

15.6 D. Williams, *Dynamic Loads in Aeroplanes Under Given Impulsive Loads with Particular Reference to Landing and Gust Loads on a Large Flying Boat*, Great Britain RAE Reports SME 3309and 3316(1945).

15.7 R. E. D. Bishop and G. M. L. Gladwell, "An Investigation Into the Theory of Resonance Testing," *Phil. Trans.*, v. 225, 241—280(1963).

15.8 A. L. Klosterman, *On the Experimental Determination and Use of Modal Representations of Dynamic Characteristics*, Ph. D. Dissertation, U. of Cincinnati, Cincinnati, OH(1971).

15.9 R. E. Cornwell, *On the Applicability of the Mode-Acceleration Method to Structural Engineering Problems*, M. S, Thesis, The University of Texas at Austin, Austin, TX(1979).

15.10 J. W. Pendered, "Theoretical Investigation Into the Effects of Close Natural Frequencies," *J. Mech. Engr. Sci.*, v. 7, 372—379(1965).

15.11 C. C. Kennedy and C. D. P. Pancu, "Use-of Vectors in Vibration Measurement and Analysis," *J. Aero. Sci.*, v. 14, 603—625(1947).

习题组 15-1

15.1 习题 14.2 的三层建筑具有下面的刚度与质量矩阵，固有频率及振型

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix} 800 & -800 & 0 \\ -800 & 2400 & -1600 \\ 0 & -1600 & 4000 \end{bmatrix} \quad (\mathrm{k/in})$$

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\mathrm{k\text{-}s^2/in})$$

$$\omega_1^2=251.1 \qquad \omega_2^2=1200.0 \qquad \omega_3^2=2548.9 \quad \mathrm{rad^2/s^2}$$

$$\Phi=\begin{bmatrix} 1.00000 & 1.00000 & 0.31386 \\ 0.68614 & -0.50000 & -0.68614 \\ 0.31386 & -0.50000 & 1.00000 \end{bmatrix}$$

(a)确定 M 及 K

(b)如果

$$\mathbf{p}(t)=\begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

确定 $F_r(r=1,2,3)$。

(c)确定稳态响应 $\eta_r(t)$表达式。

(d)应用振型叠加方程 15.7 决定响应 $u_1(t)$，以及如例题 15.1 清楚地表明每一模态的贡献。

(e)如例题 15.1，应用 $\Omega=0$ $\Omega=0.5\omega_1$ 及 $\Omega=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$建立一个表格。

15.2 习题 14.2 与 15.1 的三层建筑

(a)确定 F_r 及 $D_r(r=1,2,3)$，力的分配为

$$\mathbf{p}(t)=\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_1\\0\\0\end{Bmatrix}\cos\Omega t$$

(b)如果在图 P14.2 结构的基础具有简谐运动 $z(t)=Z\cos\Omega t$，确定有效力 $\mathbf{p}_{有效}$(f)。应用有效力的向量，确定相应的 F_r 与 D_r 表达式。

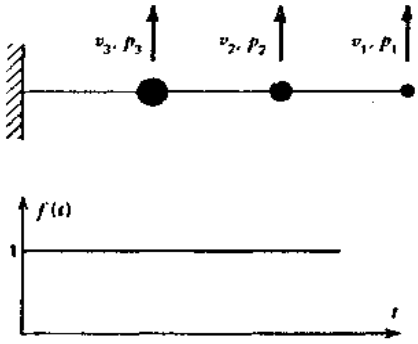


图 P15.3

15.3 一轻型飞机的水平稳定器模型为如图 P15.3 所示的三个集中质量系统，其刚度矩阵与质量矩阵及频率与振型已经给定，如果飞机突然遇到气流撞击产生阶跃力。

$$\mathbf{p}(t)=\begin{Bmatrix}500\\100\\100\end{Bmatrix}\cdot f(t)lb$$

其中 f(t)为单位阶跃力。

a. 确定模态响应 $\eta_r(t)$表达式，假定 $\mathbf{V}(0)=\dot{\mathbf{V}}(0)=0$。

b. 应用公式 15.7 确定响应 $v_1(t)$表达式，清楚地表明每一个模态的贡献。

$$\mathbf{k}=\begin{bmatrix}0.0656 & -0.1538 & 0.1220\\ -0.1538 & 0.4997 & -0.5843\\ 0.1220 & -0.5843 & 1.2593\end{bmatrix}\times 10^5 \quad \text{lb/in}$$

$$\mathbf{m}=\begin{bmatrix}4.0 & 0 & 0 & \\ 0 & 6.0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 8.0 & 386\end{bmatrix} \quad \text{lb-s}^2/\text{in}$$

$$\omega_1^2=5.99\times 10^4 \qquad \omega_2^2=1.33\times 10^2 \qquad \omega_3^2=8.40\times 10^6$$

$$\boldsymbol{\phi}_1=\begin{Bmatrix}8.31\\4.08\\1.10\end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\phi}_2=\begin{Bmatrix}-4.96\\5.36\\3.80\end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\phi}_3=\begin{Bmatrix}1.70\\-4.35\\5.71\end{Bmatrix}$$

习题组 15.2

15.4 习题 14.2 与 15.1 的三层建筑具有下面柔度矩阵。

$$\mathbf{a}=\mathbf{k}^{-1}=\begin{bmatrix}2.2916 & 1.4167 & 0.41667\\ 1.4167 & 1.4167 & 0.41667\\ 0.41667 & 0.4167 & 0.41667\end{bmatrix}(10^{-1})\text{in/k}$$

(a)应用习题 15.1(c)$\eta_r(t)$表达式以及公式 15.28,采用 $u_1(t)$全部三个模态确定振型加速度表达式,以及象例题 15.3 指明相应于 $\hat{N}=1$ 与 $\hat{N}=2$ 部分的解。

(b)如习题 15.1,用 $\Omega=0$,$\Omega=0.5\omega_1$ 及 $\Omega=\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$制成一份表格。

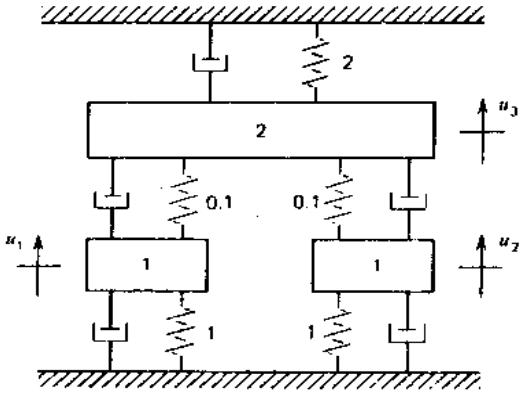


图 P15.7

习题组 15.3

多自由度系统简谐激励响应的课题密切关系到模型试验课题(回忆第 1 章所述),如表示在 § 15.4 中的那些响应图基本上是说明系统的性质;比如公式 15.46 至 15.48 的响应公式,然而从根本上必须增补图解表示。鼓励读者具有图解使用的数字模拟,或者用实验数据的富利叶分析去探讨这个重要的课题。

15.5 如果阻尼具有公式 15.31 至 15.33 给定的形式,说明公式 15.37 的阻尼项可表示为公式 15.38 的形式。

15.6 (a)例题 15.4 系统变更刚度耦联系数为 $k'=40.25$ 以及阻尼耦联系数为 $c'=0.0125$,并重复例题 15.4 的所有步骤。

(b)用例题 15.4 与 15.5 比较读者的结果,在这个习题中能否将频率分类为密间隔? 读者回答说明。

(c)能否从 $I(\bar{H}_{11})-f$ 图的峰值精确识别固有频率? 能否从 $I(H_{21})-f$ 图的峰值精确识别固有频率?

15.7 图 $P15.7$ 中的三个自由度系统是在习题 13.2 系统的改进,假定阻尼器提供阻尼为 $\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=0.01$。

(a)确定 $\bar{H}_{11}$与 $\bar{H}_{31}$表达式

(b)在复平面上作 $\bar{H}_{11}$与 $\bar{H}_{31}$图

(c)作出 $I(\bar{H}_{11})-f$ 与 $I(\bar{H}_{31})-f$ 图

(d)按照图(b)与(c),的曲线,简要描述一段系统响应的重要特征。

习题组 15.4

15.8 (a)应用例题 15.6 模型层间剪力 s_r 与从例题 15.1 模型稳态效应 $\eta_r(t)$,用振型-位移法公式 15.49 确定动剪力表达式。

(b)再应用层间剪力，由振型-加速度法公式 15.50 确定动剪力表达式。

(c)令底层剪力 $\sigma_4(t)$ 记为

$$\sigma_4(t)=CP_1\cos\Omega t$$

如例题 15.1 与 15.3 建立一种表格，用它表示 $\sigma_4(t)$ 幅值的收敛性，当在(a)与(b)推导的表达式，是在 $\Omega=0$，$\Omega=0.5\omega_1$ 及 $\Omega=1.3\Omega_3$ 时计算。

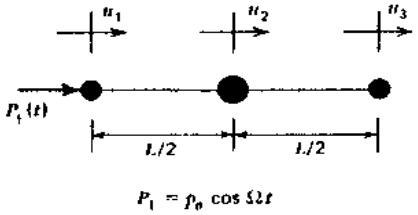


图 P15.9

习题组 15.5

15.9 图 P15.9 的一两端自由均匀杆的轴向振动，模拟为习题 12.11 的三个自由度集中质量系统。系统表示在图 P15.9。用一个力 $P_1(t)$ 作用在左端。

(a)应用习题 12.11 的结果，确定模型在两个弹簧中由于弹性模态的轴向应力，即确定

$$\mathbf{s}_2=\begin{Bmatrix}s_1\\s_2\end{Bmatrix}_2 \quad 及 \quad \mathbf{s}_3=\begin{Bmatrix}s_1\\s_2\end{Bmatrix}_3$$

其中 S_1 是联结质量 m_1 与 m_2 杆的轴向应力，S_2 是联结质量 m_2 与 m_3 杆的轴向应力。

(b)令

$$\sigma(t)=\begin{Bmatrix}\sigma_1(t)\\\sigma_2(t)\end{Bmatrix}$$

为两杆轴向动应力，应用振型-位移法公式 15.55 计算稳态应力向量 $\sigma(t)$。保留两个弹性模态并表明每个弹性模态的贡献。

(c)用振型-加速度法公式 15.69 来计算稳态应力向量 $\sigma(t)$。保留的个弹性模态并指定每个模态的贡献。

第 16 章　结构有限元模拟

在 § 11.4 中、对一个连续系统的有限个自由度的模型介绍了假定振型法。因为所描述的假定模态 φ_i 变形的型式遍及了整个结构，因此所描述的方法称为整体假定振型法。各种假定振型法中最有效的一种近似表示方法是有限元法。本章提供在结构动力分析中介绍一种有限元法的应用。并在第 17 章中将使用有限元模型研究结构的自由振动与强迫响应。

本章将完成如下内容。

- 推导轴单元与欧拉弯曲单元的形函数
- 参照轴单元、弯曲单元和扭转单元的单元轴建立单元刚度矩阵、质量矩阵与荷载向量
- 推导桁架和刚架单元的转换矩阵及对整体参考系的转换单元矩阵
- 用直接刚度法与强制边界条件装配系统的刚度矩阵、质量矩阵和荷载向量
- 应用静凝聚法缩减集中质量模型自由度数目
- 建立里兹转换矩阵相应规定一组位移约束方程

§ 16.1　有限元法概述

在 § 11.4 中、应用**整体假定振型法**来建立有限自由度近似表示成的连续系统。即连续系统用位移函数来近似表示。表达式形式为

在 11.4 节逼近于连续体系的有限自由度建立应用整体虚拟振型法，即对连续体系用位移函数逼近，表达式的形式为

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^{N}\phi_i(x)v_i(t) \tag{16.1}$$

其中每项 $\phi_i(x)$ 来描述整个结构的变形型式。如 § 11.4 中所指出的，一个 N-DOF 数学模型以结构的广义刚度系数与广义质量系数和广义力是包括 $\phi_i(x)$ 的积分与它的微分得到。虽然数字计算机的出现促进了这些积分的计算，但未能补救整体假定振型法的严重弊端，即 1) 对分析一具有复杂几何形状的结构选择一组 $\phi_i(x)$ 型式极端困难。2) 应用整体假定振型法所得的方程式通常是高度耦联的；它所需要计算机的时间和贮存要比如果系数矩阵是稀疏排列的多的多。3) 从一个题目转入下一个题目发生延迟，即对每一个新的几何形状结构必需选择一组新的 $\phi_i(x)$。本章所介绍的有限元法克服了这些困难。然而在结构动力学中要深入研究有限元法这已超出本书范围。

结构的有限元模拟可以认为是假定振型法的应用，其中的 $\phi_i(x)$ 表示结构的一部分（有限个单元）变形型式，用单元集合形成结构系统。图 16.1a 与 16.1b 表示圆锥梁及一种截面均匀典型梁的单元，图 16.1c 及 16.1d 表示由三角形单元模拟的重力坝。这些单元在结点*或节点处联结在一起，同时在这些结点处强制位移协调。虽然有限元法具有很广泛的应用，但是，这里将仅叙述应用于结构动力学中的有限元方面的理论。为了简化表达式，重点将安排在一维单元，如图 16.1*b* 中的梁单元。

在 § 16.2 中对各种类型的有限元求刚度矩阵、质量矩阵及力向量。在 § 16.3 中处理这些单元矩阵的变换，因此所有的力与位移都是参照一个整体参考系。最后，在 § 16.4 中描述单元集合形成结构系统。§ 16.5 至 § 16.7 讨论强制边界条件以及其它形式的约束，包括施加约束来减少一个系统实际自由度的数目。

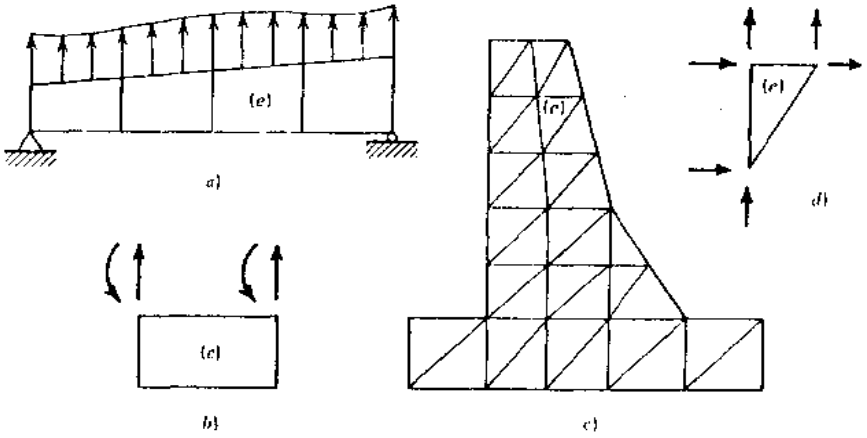


图 16.1　结构有限单元表示

§ 16.2　单元刚度矩阵、质量矩阵与力向量

在这一节中，推导均匀的一维单元所承受轴向变形、弯曲与扭转以及这些作用叠加时的刚度矩阵、质量矩阵与荷载向量。

轴向运动

考虑一均匀单元的长度为 l，质量密度 ρ。弹性模量 E，以及横截面积 A。选取参考系如图 16.2 所示。这认为是一个**单元参考系**，因为沿着单元的一个轴成直线。轴向位移最简单的是用单元两端的位移来近似表示。给出为：

$$u(x,t)=\phi_1(x)u_1(t)+\phi_2(x)u_2(t) \tag{16.2}$$

由于 $u(0,t)=u_1(t)$ 与 $u(L_1,t)=u_2(t)$，**振形函数**（假定模态）ϕ_1 与 ϕ_2 必须满足边界条件（见图 16.3）

$$\begin{aligned}\phi_1(0)&=0 \qquad \phi_1(L)=0\\ \phi_2(0)&=0 \qquad \phi_2(L)=0\end{aligned} \tag{16.3}$$

'节点'一词通常用于有限元文献中，但在本书中将用'结点'一词；因为在结构动力学与结构振动中'节点'一词的意义可替换。

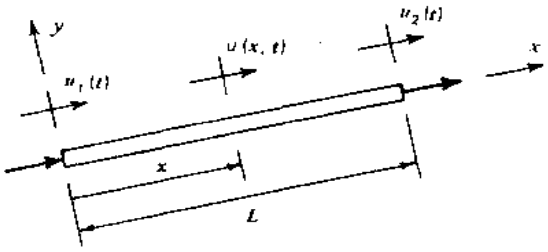


图 16.2　轴向变形下的均匀单元

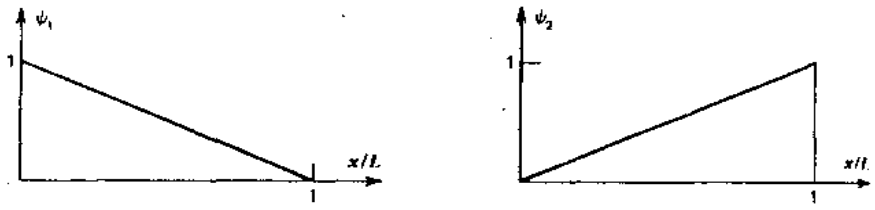


图 16.3　轴单元的形函数

推导形函数可以考虑在静荷载作用下并将产生公式 16.3 的边界条件的轴向变形。专门研究公式 9.7 静变形给出

$$(AEu')'=0 \tag{16.4}$$

均匀单元 AE＝常量，因此

$$u(x)=c_1+c_2\left(\frac{x}{L}\right) \tag{16.5}$$

线性项$\frac{x}{l}$是正规化的，因此 c_1 与 c_2 两者含有 $u(x)$的量纲，从公式 16.3 与 16.5 得到

$$\psi_1(x)=1-\frac{x}{L} \qquad \psi_2(x)=\frac{x}{L} \tag{16.6}$$

轴向运动刚度系数 K_{ij}，质量系数 m_{ij}及广义力 p_i 的表达式是由公式 11.12，11.16 及 11.20 分别给出，因此：

$$k_{ij}=\int_0^L EA\psi_i'\psi_j'dx \tag{16.7a}$$

$$m_{ij}=\int_0^L \rho A\psi_i\psi_j dx \tag{16.7b}$$

$$p_i=\int_0^L p(x,t)\psi_i dx \tag{16.7c}$$

将公式 16.6 代入公式 16.7a 与 16.7b 中，得到下面的均匀单元刚度矩阵与质量矩阵。

$$\mathbf{k}=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{16.8a}$$

$$\mathbf{m}=\frac{\rho AL}{\sigma}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \tag{16.8b}$$

在例题 16.1 中说明公式 16.7c 的应用。

横向运动－伯努利－欧拉理论

考虑均匀梁单元长度 L，质量密度 ρ，弹性模量 E，横截面积 A 以及惯性矩 I。对横向运动位移坐标限为端位移与斜率值。如图 16.4 所示。令

$$v(x,t)=\sum_{i=1}^{4}\psi_i(t)v_i(t) \tag{16.9}$$

其中函数 $\psi_i(x)$ 满足边界条件

$$\begin{aligned}
&\psi_1(0)=1 \quad , \quad \psi'_1(0)=\psi_1(L)=\psi'_1(L)=0\\
&\psi'_2(0)=1 \quad , \quad \psi_2(0)=\psi_2(L)=\psi'_2(L)=0\\
&\psi_3(L)=1 \quad , \quad \psi_3(0)=\psi'_3(0)=\psi'_3(L)=0\\
&\psi'_4(L)=1 \quad , \quad \psi_4(0)=\psi'_4(0)=\psi_4(L)=0
\end{aligned} \tag{16.10}$$

研究图 16.4 中的梁单元用剪力和力矩静态加载产生各种静态变形的型式、就可以很容易导出适合的形函数，即满足公式 16.10。因之，仅对端部加载的梁，其平衡方程为

$$(EIv'')''=0 \tag{16.11}$$

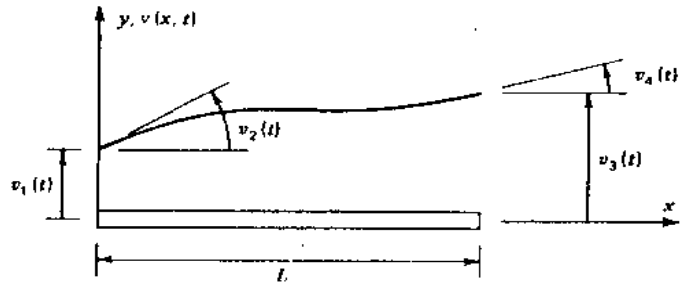


图 16.4　横向变形的均匀单元

对于匀质梁公式 16.9 的通解为三次多项式

$$v(x)=c_1+c_2\left(\frac{x}{L}\right)+c_3\left(\frac{x}{L}\right)^2+c_4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{16.12}$$

注意这里 $\frac{x}{L}$ 再一次应用而不是 x，因此所有 c_i 具有相同的量纲。公式 16.10 四组边界条件代入公式16.12，得到下面的形函数。

$$\begin{aligned}
\psi_1&=1-3\left(\frac{x}{L}\right)^2+2\left(\frac{x}{L}\right)^3\\
\psi_2&=x-2l\left(\frac{x}{L}\right)^2+L\left(\frac{x}{L}\right)^3\\
\psi_3&=3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3\\
\psi_4&=-L\left(\frac{x}{L}\right)^2+L\left(\frac{x}{L}\right)^3
\end{aligned} \tag{16.13}$$

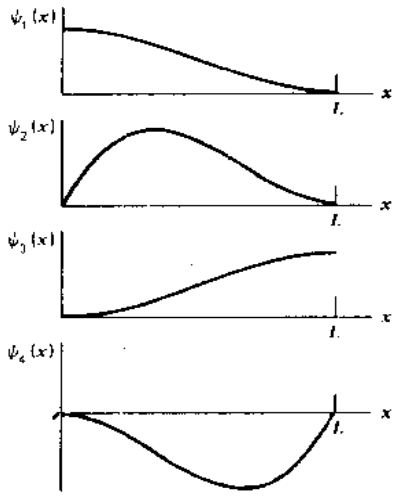
在图 16.5 中说明这些形函数。

公式 11.25 至 11.27 为伯努里-欧拉梁 k_{ij}，m_{ij} 与 p_i 的表达式。于是

$$k_{ij}=\int_0^L EI\psi''_i\psi''_j dx \tag{16.14a}$$

$$m_{ij}=\int_0^L \rho A\psi_i\psi_j dx \tag{16.14b}$$

图 16.5　横向变形梁单元形函数



$$p_i=\int_0^L p(x_0,t)\psi_i dx \tag{16.14c}$$

公式 16.3 代入公式 16.14 和 16.14b 得到

$$\mathbf{k}=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ 对 & & 12 & -6L\\ & 称 & & 4L^2\end{bmatrix} \tag{16.15a}$$

$$\mathbf{m}=\frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix}156 & 22l & 54 & -13L\\ & 4L^2 & 13L & -3lL^2\\ 对 & & 156 & -22L\\ & 称 & & 4L^2\end{bmatrix} \tag{16.15b}$$

例题 16.1

如图 E16.1.1 所示，梁单元承受均布横向荷载 $f(t)$、确定广义荷载向量 $\mathbf{p}_0$

解：

梁单元位移坐标用单元轴线表示在图 E16.1.2，以及形函数给在公式 16.13，于是

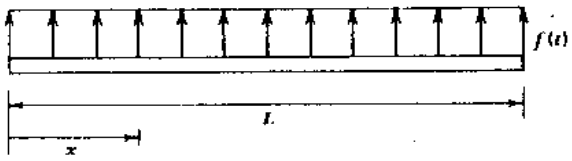


图 E16.1.1



图 E16.1.2

$$\begin{aligned}\psi_1(x)&=1-3(\frac{x}{L})^2+2(\frac{x}{L})^3\\ \psi_2(x)&=x-2L(\frac{x}{L})^2+L(\frac{x}{L})^3\\ \psi_3(x)&=3(\frac{x}{L})^2-2(\frac{x}{L})^3\\ \psi_4(x)&=-L(\frac{x}{L})^2+L(\frac{x}{L})^3\end{aligned}\tag{1}$$

广义力分量为公式 16.14c，即

$$p_{i(t)}=\int_0^L p(x_0,t)\psi_1(x)dx \tag{2}$$

联立公式 1 与 2 得

$$\begin{aligned}p_i(t)&=f(t)\int_0^L\psi_1(x)dx\\ &=f(t)\int_0^L[1-3(\frac{x}{L})^2+2(\frac{x}{L})^3]dx\\ &=fL[x-(\frac{x}{L})^3+\frac{2}{4}(\frac{x}{L})^4]_0^L\end{aligned}\tag{3}$$

$$\boxed{p_1(t)=\frac{f(t)L}{2}} \tag{4}$$

以同样的方式得

$$\boxed{\begin{aligned}p_2(t)&=\frac{1}{12}f(t)L^2\\ p_3(t)&=\frac{1}{2}f(t)L\\ p_4(t)&=-\frac{1}{12}f(t)L^2\end{aligned}}$$

扭转

在§9.3中，已求得圆轴的扭转变形运动方程及边界条件，现在希望求得如图 16.6 所表示的长为 L 的均匀扭转单元的刚度、质量系数与广义力(力矩)。令局部 x 一轴为形心轴线。令 I_P 为对形心轴的极惯性矩及令 GJ 为扭转刚度。* 于是纯扭转的变形能及动能给出为：

$$V=\frac{1}{2}\int_0^L GJ(\theta')^2dx \tag{16.16a}$$

* 对于圆截面 $J=I_P$，对于其它横截面形式 J 的表达式读者可参考高等材料力学或弹性力学。对非圆截面杆件扭转轴线与形心线通常是不重合的，这导致弯曲与扭转的耦联。飞机机翼的振动即为一例，这已为许多著作所论述，见参考文献 16.1，16.2 及 16.3。注意在任何结构动力问题中都包括杆件扭转。

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L \rho I_\rho(\dot{\theta})^2 dx \tag{16.16b}$$

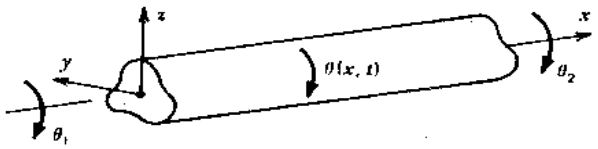


图 16.6　扭转变形的均匀单元

单元转角由假定振型形式给出为

$$\theta(x,t)=\psi_1(x)\theta_1(t)+\psi_2(x)\theta_2(t) \tag{16.17}$$

其形函数的适合边界条件由公式 16.3 给出，一扭转杆件承受静载为端扭矩，其平衡公式 9.36 得到

$$(GJ\theta')'=0 \tag{16.18}$$

因为这个公式与轴向变形平衡方程、公式 16.4 具有相似的形式，同时因为扭转形函数必须满足如轴向变形形函数相同的边界条件，所以扭转单元及轴单元的形函数是一样的，即 ψ_1 与 ψ_2 由公式 16.6 给出。

这个方法已在第 11 章中使用，可将公式 16.17 与 16.18 联立得到表达式

$$\begin{aligned} k_{ij}&=\int_0^L GJ\psi'_i\psi'_j dx \\ m_{ij}&=\int_0^L \rho I_P\psi_i\psi_j dx \\ p_i&=\int_0^L t(x,t)\psi_i dx \end{aligned} \tag{16.19}$$

其中 $t(x,t)$ 为每单位长度上的分布扭矩，公式 16.6 形函数代入公式 16.19，得到均匀扭转单元的

$$\mathbf{k}=\frac{GJ}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \tag{16.20a}$$

$$\mathbf{m}=\frac{\rho I_P L}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \tag{16.20b}$$

三维刚架单元

对于细长的三维刚架单元的刚度矩阵与质量矩阵可由上面所讨论轴向、弯曲及扭转单元得到，特别是伯努里-欧拉梁理论应用求得弯曲单元。Prezemenieckil[16.4]介绍推导包含剪切变形与转动惯量效应的三维刚架单元的刚度矩阵与质量矩阵。

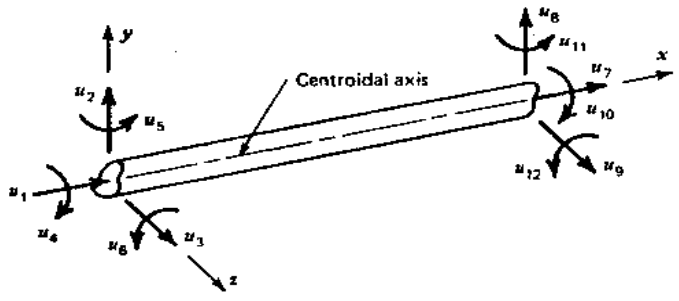


图 16.7　三维杆件单元表示法

图 16.7 表示一个均匀三维刚架单元的局部参考系与位移坐标，其 x 轴沿着横截面形心线，y 轴与 z 轴为横截面上的主轴。I_y 与 I_z 为横截面惯矩，以及 I_ρ 是对 x 轴的极惯性矩。

涉及 u_1 与 u_7 的刚度系数及质量系数是根据公式 16.8；u_2，u_6，u_8 及 u_{12}这些系数是基于公式 16.15，在 xy 平面的挠曲，而 u_9，u_{11}，u_3 及 u_5 的系数是在 xz 平面内的弯曲。这些弯曲自由度的类型保存着转动的含义，表示在图 16.4 中。最后涉及 u_4 及 u_{10}的这些系数是从公式 16.20 得到。

其它单元

其它有限元的刚度与质量矩阵，包含二维与三维的单元，可见参考书及有限元的文章杂志，如参考文献 16.4。

$$
\mathbf{k}=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\frac{EA}{L} & & & & & & \frac{-EA}{L} & & & & & & 1 \\ \hline
 & \frac{12EI_z}{L^3} & & & & \frac{6EI_z}{L^2} & & \frac{-12EI_z}{L^3} & & & & \frac{6EI_z}{L^2} & 2 \\ \hline
 & & \frac{12EI_y}{L^3} & & \frac{-6WI_y}{L^2} & & & & \frac{-12EI_y}{L^3} & & \frac{-6EI_y}{L^2} & & 3 \\ \hline
 & & & \frac{GJ}{L} & & & & & & -\frac{GJ}{L} & & & 4 \\ \hline
 & & \frac{-6EI_y}{L^2} & & \frac{4EI_y}{L} & & & & \frac{6EI_y}{L} & & \frac{2EI_y}{L} & & 5 \\ \hline
 & \frac{6EI_z}{L_z} & & & & \frac{4EI_z}{L} & & \frac{-6EI_z}{L^k} & & & & \frac{2EI_z}{L} & 6 \\ \hline
\frac{-EA}{L} & & & & & & \frac{EA}{L} & & & & & & 7 \\ \hline
 & \frac{-12EI_z}{L^3} & & & & \frac{-6EEI_z}{L_3} & & \frac{12EI_z}{L_z} & & & & \frac{-6EI_z}{L^2} & 8 \\ \hline
 & & \frac{-12EI_y}{L^3} & & \frac{6EI_y}{L^2} & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & & \frac{6EI_y}{L^2} & & 9 \\ \hline
 & & & \frac{-GL}{L} & & & & & & \frac{GJ}{L} & & & 10 \\ \hline
 & & \frac{-6EI_y}{L^2} & & \frac{2EI_y}{L} & & & & \frac{6EI_y}{L^2} & & \frac{4EI_y}{L} & & 11 \\ \hline
 & \frac{6EI_z}{L} & & & & \frac{2EI_z}{L} & & \frac{-6EI_z}{L^2} & & & & \frac{4EI_z}{L} & 12 \\ \hline
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \\ \hline
\end{array}
\tag{16.21a}
$$

$$m=\frac{\rho AL}{420}$$

140						70						1
	156				$22L$		54				$-13L$	2
		156		$-22L$				54		$13L$		3
			$\frac{140I_P}{A}$						$\frac{70I_P}{A}$			4
		$-22L$		$4L^2$				$-13L$		$-3L^2$		5
	$22L$				$4L^2$		$13L$				$-3L^2$	6
70						140						7
	54				$13L$		156				$-22L$	8
		54		$-13L$				156		$22L$		9
			$\frac{70I_P}{A}$						$\frac{140I_P}{A}$			10
		$13L$		$-3L^2$				$22L$		$4L^2$		11
	$-13L$				$-3L^2$		$-22L$				$4L^2$	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	

(16.21b)

梁单元集中质量矩阵

上面得到的质量矩阵称为**相容质量矩阵**，因为相同的形函数用于求导质量矩阵系数同样用于求导刚度矩阵系数。见公式 16.21a 及公式 16.21b。这导致了例如一根梁在质量矩阵中的座标平移及转动之间的耦联，如公式 16.15b。一个梁的惯性性质的简单模型是**集中质量**模型。图 16.8 表示一个梁划分为有限个单元是将单元的质量集中在单元的端部，以及装配成一个梁的集中质量模型的形式。对于等长度单元、图 16.8 梁的集中质量矩阵应为

$$\mathbf{m}=\frac{\rho AL}{4}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{16.22}$$

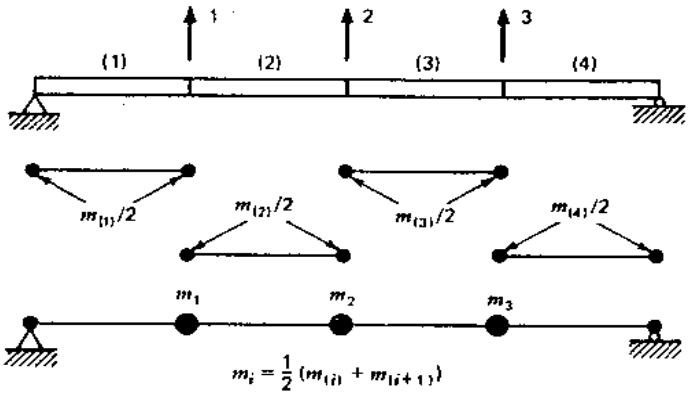


图 16.8　梁的集中质量模型

Archer[16.5]，Leckie 和 Lindberg[16.6]，Tong，Pian 和 Bucciarelli[16.7]等曾经根据集中质量与相容质量公式比较过特征解。在 § 16.6 中，当讨论静凝聚时再回到这个题目上来。

至此已经得到单元刚度矩阵、质量矩阵以及单元荷载向量的表达式。对处理结构中阻尼的一些方法将在第 18 章中讨论。

§ 16.3 单元矩阵变换

在 § 16.1 中曾经指出、有限元法包括了局部地近似表示的位移，然后通过位移相容条件将单元在结点连系在一起。因一个单元的位移，它是直接接近似表示的，所以这种近似法称为**位移法**。有关有限元法的教材也讨论**力法**，这里的应力是直接近似表示的，还有**混合法**。本书只研究位移法，因为它是用于结构动力分析中一种最普遍的方法。

§ 16.2 中参照单元参考系 xyz 推导具有位移坐标单元的刚度矩阵与质量矩阵。通常桁架与刚架结构的杆件不会调正成一组公共的轴线，即**整体坐标** XYZ，如图 16.9 中的这种简单平面桁架情况。单元的端部记为 i 及 j，并局部轴线记号习惯起始位置在 i 端与沿着杆件 x-轴从 i 朝向 j。

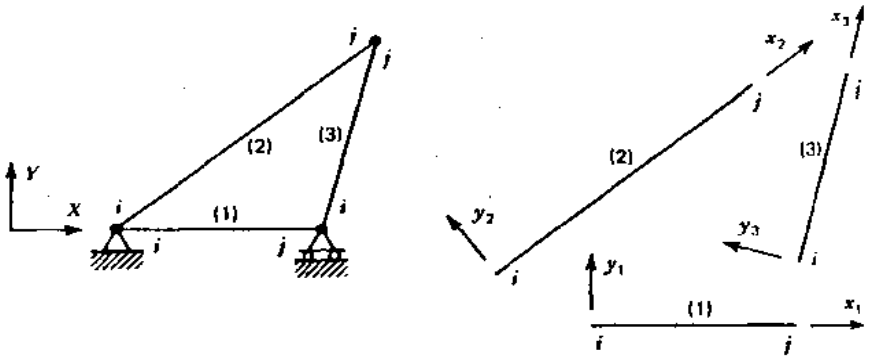


图 16.9 平面桁架整体及单元坐标系

本节研究单元矩阵(位移和力向量、刚度和质量矩阵)对整体参考系的变换。因此，相容方程与系统矩阵的装配更可以直接地处理。

平面桁架变换

图 16.10a 表示参照单元轴线的单元位移坐标(ECE)，以及图 16.10b 表示一个平面桁架参照整体轴线的单元位移坐标(ECG)。在前一种情况仅需要轴向位移 u_1 与 u_2。当桁架单元装配成桁架的一根杆件时，则不管位移是否沿着整体坐标方向 $\hat{x}(=X)$ 及 $\hat{y}(=Y)$ 都是要使用的。那么该单元，$\hat{u}_1$ 及 $\hat{u}_2$ 是在单元 i 端沿 $\hat{x}$ 及 $\hat{y}$ 方向的位移，而 $\hat{u}_3$ 及 $\hat{u}_4$ 是在单元 j 端相应的位移。

图 16.11 表示桁架单元由于位移 $\hat{u}_1$ 及 $\hat{u}_2$ 位形的改变，需要确定由于 $\hat{u}_1$ 及 $\hat{u}_2$ 引起位移的轴向分量 u_1。由图 16.11a 可见

$$u_1=\hat{u}_1\cos$$

图 16.11b

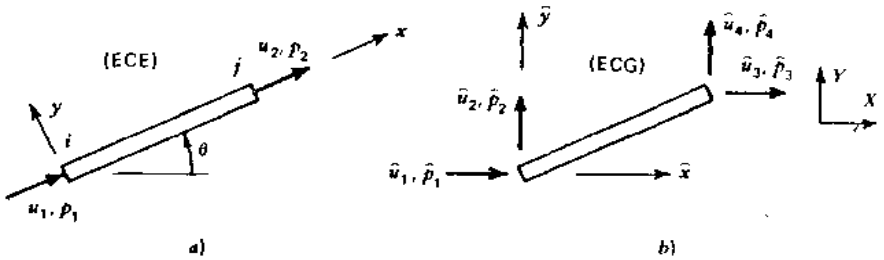


图 16.10　参照单元坐标轴及整体坐标轴的位移与力

a)单元坐标;b)整体坐标

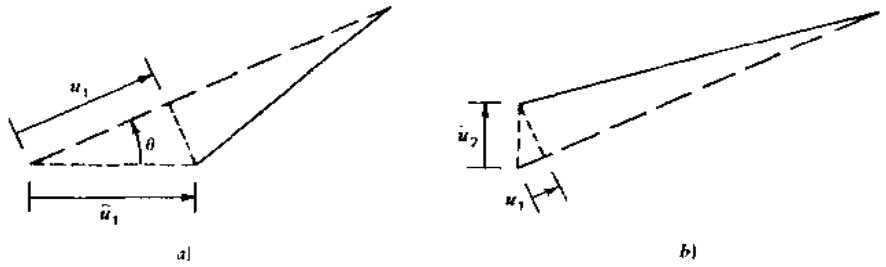


图 16.11　平面桁架单元的位移变换

a)i 点 X 方向位移;b)i 点 Y 方向位移。

$$u_1=\hat{u}_2\sin\theta$$

如果 $\hat{u}_1$ 与 $\hat{u}_2$ 表示两个位移分量,因此

$$u_1=\hat{u}_1\cos\theta+\hat{u}_2\sin\theta \tag{16.23a}$$

同理,对于 j 端

$$u_2=\hat{u}_3\cos\theta+\hat{u}_4\sin\theta \tag{16.23b}$$

这些公式可以合并为一单个矩阵公式

$$\mathbf{u}=\mathbf{T}\hat{\mathbf{u}} \tag{16.24}$$

其中

$$\mathbf{u}^T=[u_1 \quad u_2] \quad , \quad \hat{\mathbf{u}}=[\hat{u}_1 \quad \hat{u}_2\hat{u}_3\hat{u}_4] \tag{16.25}$$

及

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix} \tag{16.26}$$

例题 16.2

如图 E.16.2.1 所示三杆联结成一个平面桁架,建立单元(1)的变换矩阵。单元端点的标志在图上说明,应用如图 E16.2.2 所示的整体坐标 XY。

解:

$$L=\sqrt{(30)^2+(40)^2}=50\text{ in}$$

$$\cos\theta=\frac{4}{5} \quad , \quad \sin\theta=\frac{3}{5}$$

$$\boxed{\mathbf{T}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 3\end{bmatrix}}$$

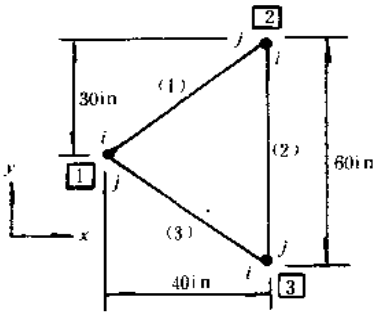


图 E16.2.1

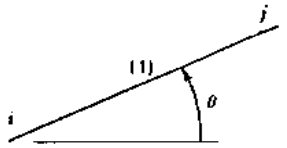


图 E16.2.2

平面刚架单元在每个端部具有三个位移坐标。图 16.12 中表示标志(a)单元位移坐标参照单元坐标轴，及(b)单元位移坐标参照整体坐标轴。从位移 $\hat{\mathbf{u}}$ 变换至位移 u 与公式 16.24 具有相同的形式，记为

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{u}_5 \\ \hat{u}_6 \end{Bmatrix} \tag{16.27}$$

注意在两个坐标系中转动是相同的，即 $u_3=\hat{u}_3$ 与 $u_6=\hat{u}_6$，u_1 的表达式与的建立在公式 16.23a 的桁架是相同。求横向位移 u_5 留下当作一个练习。

图 16.3 表示一个三维的桁架单元，在每一端具有三个位移坐标。位移 $\hat{\mathbf{u}}$ 变换至位移 $\mathbf{u}$ 的位移变换矩阵可记为一个方向余弦矩阵，因此

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} \mathbf{T}_c & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_c \end{bmatrix} \tag{16.28}$$

其中

$$\mathbf{T}_c=\begin{bmatrix} \cos(x\hat{x}) & \cos(x\hat{y}) & \cos(x\hat{z}) \\ \cos(y\hat{x}) & \cos(y\hat{y}) & \cos(y\hat{z}) \\ \cos(z\hat{x}) & \cos(z\hat{y}) & \cox(z\hat{z}) \end{bmatrix} \tag{16.29}$$

对于力向量、刚度矩阵及质量矩阵适合用虚功与能量的概念来得到。涉及位移向量 $\mathbf{u}$ 的力向量 $\mathbf{p}$ 变换成涉及 $\hat{\mathbf{u}}$ 的一个力向量 $\hat{\mathbf{p}}$ 要考虑虚功。两个表达式的 δW 量值定标应是相同的。

$$\delta W=\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}=\delta\hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{p}} \tag{16.30}$$

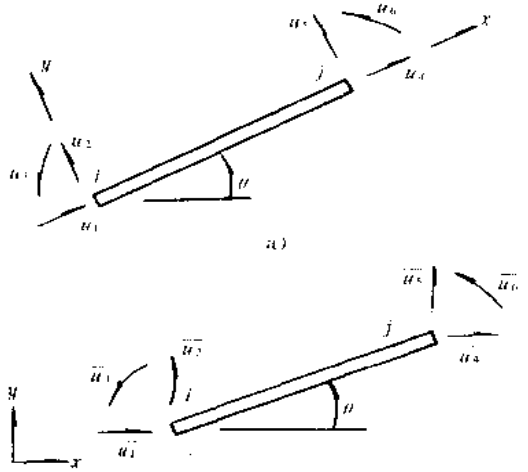


图 16.12　平面刚架单元两组单元位移坐标

a)属于单元轴线的刚架单元位移；

b)属于整体轴线的刚架单元位移

公式 16.24 代入上式得

$$\delta W=\delta\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}=(\delta\hat{\mathbf{u}}^{T}T^{\mathrm{T}})\mathbf{p}=\delta\hat{\mathbf{u}}^{T}(\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}) \tag{16.31}$$

这些项乘 $\delta\hat{u}_1,\delta\hat{u}_2$ 等相比较，在公式 16.30 与 16.31 中得到的结论

$$\hat{\mathbf{p}}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{p} \tag{16.32}$$

因之 $\delta\hat{u}_i$ 是独立的。

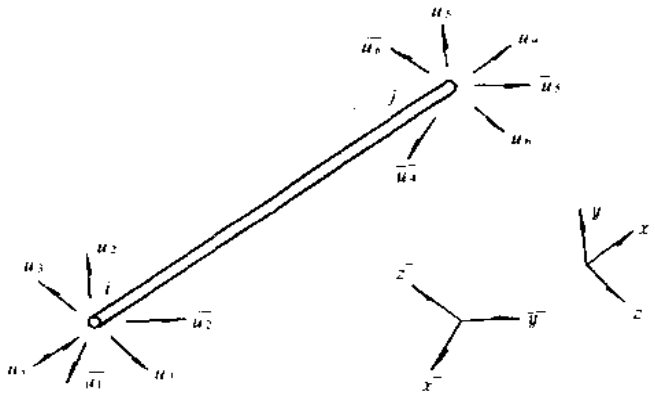


图 16.13　三维桁架单元的位移坐标

可应用变形能及动能求得刚度与质量矩阵的变换公式，由公式 11.13 与 11.17 有

$$V=\frac{1}{2}(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\mathbf{u})=\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{k}}\hat{\boldsymbol{u}}) \tag{16.33a}$$

及

$$T=\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\dot{\mathbf{u}})=\frac{1}{2}(\dot{\hat{\mathbf{u}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\,\dot{\hat{\mathbf{u}}}) \tag{16.33b}$$

于是

$$\mathbf{V}=\frac{1}{2}(\hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}})\mathbf{k}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{u}})=\frac{1}{2}\hat{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}}(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\mathbf{T})\hat{\mathbf{u}} \tag{16.34}$$

$$\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}\mathbf{T} \tag{16.35a}$$

同理从动能得到

$$\hat{\mathbf{m}}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{m}\boldsymbol{T} \tag{16.35b}$$

对平面桁架单元公式 16.8a，16.26 及 16.35a 很方便的联立给出

$$\hat{\mathbf{k}}=k\begin{bmatrix} c^2 & cs^2 & -c^2 & -cs \\ & s^2 & -cs & -s^2 \\ \text{对} & & c^2 & cs \\ & & \text{称} & s^2 \end{bmatrix} \tag{16.36}$$

其中 $k=\frac{AE}{L}$ $c=\cos\theta$ 及 $s=\sin\theta$

§16.4 系统矩阵装配-直接刚度法

最终得到一组系统运动方程所包括的各种方法基于有限元模拟，至今已经研究了以单元状态生成单元矩阵，并变换它们成整体坐标的方法。留下的问题是系统矩阵的装配，强制边界条件，以及假定任何的其它强加的约束（例如减少系统坐标的数目）。在许多有限单元著作中这些步骤方法是同时进行的，即将边界条件与其它约束列入系统矩阵进行装配，为了表达的简单，将分别单独考虑。

在§16.3 中已经介绍变换矩阵 T 容许所有单元矩阵参照一个共同的参考系，即整体坐标 XYZ。在本节中用直接刚度法根据相应的单元矩阵装配成系统矩阵 **M**，**K** 及 **P**。

当各种单元联合形成一个结构时，**公共系统位移坐标**组将指定为向量 U。图 16.14 表示无约束的三杆桁架的六个系统位移。结点表示为 1、2 及 3，其系统位移取下面规则：U_1＝在结点 1 沿 X 方向位移，U_2＝在结点 1 沿 Y 方向位移，等等表示在图 16.14 中。注意到现在已介绍了三种不同类型的位移坐标：单元位移参照单元轴，单元位移参照整体坐标轴，以及系统位移。在这一节中将应用后两种类型之间的关系来装配系统矩阵。

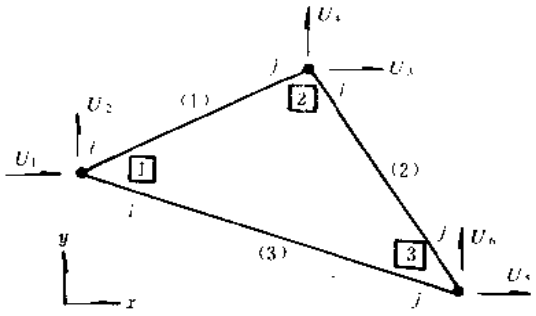


图 16.14 三杆桁架的系统位移坐标

直接刚度法装配的系统矩阵是基于系统的功与能量是线性量这个事实，因此例如结构整个变形能是分布于各单元变形能的总和。另外参照整体坐标的单元位移可简单地用适当的系统位移来表示，即单元 e 的位移 $\hat{\mathbf{u}}$。可用系统位移 U 来表示。例如考虑在图16.14的三杆桁架单元 3。参照整体坐标的单元位移表示在图 16.15 中，其单元轴的定向为 i，j，如图 16.14 所示。

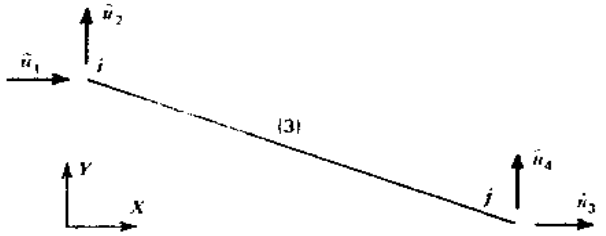


图 16.15　参照整体坐标的单元位移

比较图 16.15 与图 16.14，指出单元 3 的位移关系为

$$\hat{u}_1=U_3, \qquad \hat{u}_2=U_4$$
$$\hat{u}_3=U_5, \qquad \hat{u}_4=U_6 \tag{16.37}$$

参照单元轴线的单元坐标经过**定位**(或标志)**矩阵** L_e 可与系统位移坐标有关，于是有

$$\hat{\mathbf{u}}_e=\mathbf{L}_e\mathbf{U} \tag{16.38}$$

例如，对于单元 3

$$\mathbf{L}_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{16.39}$$

当然 L_e 的行数等于 $\hat{\mathbf{u}}_e$ 的行数，以及 $\mathbf{L}_e$ 的列数等于系统自由度的数。因为 $\mathbf{L}_e$ 仅由 1 与 0 组成，这在计算机应用贮存定位数据成为**定位向量** $\mathbf{I}_e$ 更为有效，它列出了相应于各自单元坐标 $\hat{\mathbf{u}}_e$ 的系统坐标，例如对单元 3

$$\mathbf{I}_3^T=[1 \qquad 2 \qquad 5 \qquad 6] \tag{16.40}$$

由单元应变能总和表示为结构的应变能，可得到直接刚度装配法。即

$$V=\sum_{e=1}^{N_e}V_e=\sum_{e=1}^{N_e}\left(\frac{1}{2}\hat{\mathbf{u}}_e^T\hat{\mathbf{k}}_e\hat{\mathbf{u}}_e\right)=\sum_{e=1}^{N_e}\frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{K}_e\mathbf{U} \tag{16.41}$$

其中应用到公式 16.38，以及

$$\mathbf{K}_e=\mathbf{L}_e^T\hat{\mathbf{K}}_e\mathbf{L}_e \tag{16.42}$$

系统应变能也可记为

$$V=\frac{1}{2}\mathbf{U}^T\mathbf{K}\mathbf{U} \tag{16.43}$$

其中 $\mathbf{K}$ 为系统**刚度矩阵**，给出为

$$\mathbf{K}=\sum_{e=1}^{N_e}\mathbf{K}_e \tag{16.44}$$

虽然由 Ne 个单元矩阵 $\hat{\mathbf{k}}_e$ 装配为系统刚度矩阵的过程包含两个步骤由公式 16.42 与 16.44 给出，这两步骤可合并为一个有效的过程称为**直接刚度法**，这将用图 16.14 的三杆桁架说明。

首先，将表示公式 16.42 仅仅对 $\hat{\mathbf{k}}e$ 矩阵元素简单地定位，将其定位到相应于系统单元 e 自由度适当的行与列的位置。考虑单元 3，其 $\mathbf{L}_3$ 由公式 16.38 给出，令

$$\hat{\mathbf{k}}_3=\begin{bmatrix}\hat{k}_{12} & \hat{k}_{12} & \hat{k}_{13} & \hat{k}_{14}\\ \hat{k}_{21} & \hat{k}_{22} & \hat{k}_{23} & \hat{k}_{24}\\ \hat{k}_{31} & \hat{k}_{32} & \hat{k}_{33} & \hat{k}_{34}\\ \hat{k}_{41} & \hat{k}_{42} & \hat{k}_{43} & \hat{k}_{44}\end{bmatrix} \tag{16.45}$$

于是

$$\hat{\mathbf{k}}_3\mathbf{L}_3=\begin{bmatrix}\hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} & 0 & 0 & \hat{k}_{13} & \hat{k}_{14}\\ \hat{k}_{21} & \hat{k}_{22} & 0 & 0 & \hat{k}_{23} & \hat{k}_{24}\\ \hat{k}_{31} & \hat{k}_{32} & 0 & 0 & \hat{k}_{33} & \hat{k}_{34}\\ \hat{k}_{41} & \hat{k}_{42} & 0 & 0 & \hat{k}_{43} & \hat{k}_{44}\end{bmatrix} \tag{16.46}$$

即用一个 $\mathbf{L}_e$ 矩阵后乘仅将 $\hat{\mathbf{k}}_e$ 的系数放置于 $\mathbf{K}_e$ 中适当的列，用 $\mathbf{L}_e^T$ 前乘展开行并将系数放置到 $\mathbf{K}_e$ 中适当的行，最后公式 16.44 仅将系数附加到 $\mathbf{K}$ 中的适当位置。

后乘 $\mathbf{L}_e$ 与前乘 $\mathbf{L}_e^T$ 包含许多不必要的乘法运算，因为最后结果仅将 $\hat{\mathbf{k}}_e$ 的元素移动附加到 $\mathbf{K}$ 中适当行与列的位置。经过这些相乘以及只是直接将 $\hat{\mathbf{k}}_e$ 系数附加到 $\mathbf{K}$ 中适当的位置，通过定位数据形成一个定位向量 $\mathbf{l}_e$ 如公式 16.40，这称为装配 $\mathbf{K}$ 的**直接刚度法***。这个过程将表示在例题 16.3 中。

系统质量矩阵可以同样的方式装配(例如用直接刚度法)，如考虑系统的动能可以看到，

$$T=\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N_e}\dot{\hat{\mathbf{u}}}_e^T\hat{\mathbf{m}}_e\dot{\hat{\mathbf{u}}}_e \tag{16.47}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N_e}\dot{\mathbf{U}}^T\mathbf{M}_e\dot{\mathbf{U}}=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}$$

其中

$$\mathbf{M}_e=\mathbf{L}_e^T\hat{m}_e\mathbf{L}_e \tag{16.48a}$$

及

$$\mathbf{M}=\sum_{e=1}^{N_e}\mathbf{M}_e \tag{16.48b}$$

例题 16.3

在例题 16.2 中桁架的每根杆件具有相同的横截面积 A 及弹性模量 E，用例题 16.2 中所表示的长度与单元及结点号。

a. 参照整体坐标的三个单元刚度矩阵。

b. 系统刚度矩阵。

解：

单元坐标号及系统坐标号是用单元与结点号以及单元端部(i,j)所规定，已表示在例题 16.2 中。

a. 确定单元刚度矩阵 $\hat{\mathbf{k}}_i$

因为单元为平面桁架单元，所以公式 16.36 可用于求 $\hat{\mathbf{k}}_i$：

* 直接刚度法已形成公式，根据每个单元对结构整个应变能和对结构刚度矩阵的贡献之合得出。在参考文献 16.4 中使用虚功与动能的类似的方法。在参考文献 16.8 中介绍直接刚度法的另一种选择，根据是节点力的和来满足节点的平衡条件。

$$\hat{\mathbf{k}}_i=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_is_i & -c_i^2 & -c_is_i \\ 对 & s_i^2 & -c_is_i & -s_i \\ & 称 & c_i^2 & c_is_i \\ & & & s_i^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

由图 E16.3.1(a)有

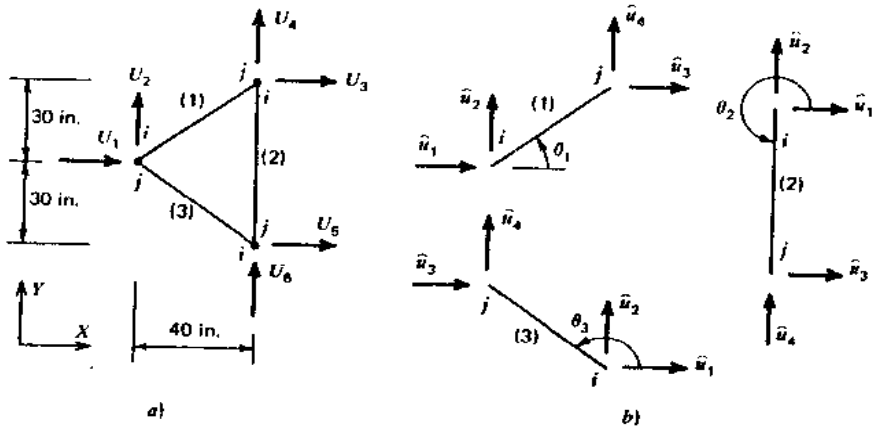


图 E16.3.1

$$\cos\theta_1=\frac{4}{5}\quad,\quad \sin\theta_1=\frac{3}{5}$$
$$\cos\theta_2=0\quad,\quad \sin\theta_2=-1 \tag{2}$$
$$\cos\theta_3=-\frac{4}{5}\quad,\quad \sin\theta=\frac{3}{5}$$

及

$$L_1=L_3=50\text{in}.\quad,\quad L_2=60\text{in}. \tag{3}$$

$$\hat{\mathbf{k}}_1=\left(\frac{AE}{50}\right)\left(\frac{1}{25}\right)\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix}\begin{bmatrix} 16 & 12 & -16 & -12 \\ 12 & 9 & -12 & -9 \\ -16 & -12 & 16 & 12 \\ -12 & -9 & 12 & 9\ 4 \end{bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}$$

$$\hat{\mathbf{k}}_2=\frac{AE}{60}\begin{matrix}3 & 4 & 5 & 6\end{matrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix}3\\4\\5\\6\end{matrix} \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{k}}_3=\left(\frac{AE}{50}\right)\left(\frac{1}{25}\right)\begin{matrix}5 & 6 & 1 & 2\end{matrix}\begin{bmatrix} 16 & -12 & -16 & 12 \\ -12 & 9 & 12 & -9 \\ -16 & 12 & 16 & -12 \\ 12 & -9 & -12 & 9 \end{bmatrix}\begin{matrix}5\\6\\1\\2\end{matrix}$$

b. 应用上面矩阵 $\hat{\mathbf{k}}_1$ 中邻近的行与列定位数据，由 $\hat{\mathbf{k}}_1$ 矩阵单元总合放入 **K** 中适当的行与列来装配 **K**，公式 16.44 是这种直接刚度装配方法的基本方程。

$$\mathbf{K}=\frac{AE}{25}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ (\frac{16}{50}+\frac{16}{50}) & (\frac{12}{50}-\frac{12}{50}) & \frac{-16}{50} & \frac{-12}{50} & \frac{-16}{50} & \frac{12}{50} & 1 \\ (\frac{12}{50}+\frac{12}{50}) & (\frac{9}{50}+\frac{9}{50}) & \frac{-12}{50} & \frac{-9}{50} & \frac{12}{50} & \frac{-9}{50} & 2 \\ \frac{-16}{50} & \frac{-12}{50} & \frac{16}{50} & \frac{12}{50} & 0 & 0 & 3 \\ \frac{-12}{50} & \frac{-9}{50} & \frac{12}{50} & (\frac{9}{50}+\frac{25}{60}) & 0 & \frac{-25}{50} & 4 \\ \frac{-16}{50} & \frac{12}{50} & 0 & 0 & \frac{16}{50} & \frac{-12}{50} & 5 \\ \frac{12}{50} & \frac{-9}{50} & 0 & \frac{-25}{60} & \frac{-12}{50} & (\frac{9}{50}+\frac{25}{60}) & 6 \end{bmatrix} \tag{5}$$

可应用荷载所作的虚功得到相应系统位移 **U** 的系统荷载向量 **P**。

因此
$$\delta W=\sum_{e=1}^{N_e}\delta\hat{\mathbf{u}}_e^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{p}}_e=\delta\hat{\mathbf{U}}^T\mathbf{P} \tag{16.49}$$

合并公式 16.37 与 16.49，得

$$\sum_{e=1}^{N_e}\delta\hat{\mathbf{u}}_e\hat{\mathbf{p}}_e=\delta\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(\sum_{e=1}^{N_e}\mathbf{L}_e^T\hat{\mathrm{p}}_e) \tag{16.50}$$

因为虚位移 δU_i 是独立的，所以

$$\mathbf{P}=\sum_{e=1}^{N_e}\mathbf{L}_e^T\hat{\mathbf{p}}_e \tag{16.51}$$

正如它在公式 16.42 中不需要实行前乘与后乘一样，公式 16.51 中也不需要实行相乘。装配系统荷载向量 **P** 只需要应用定位数据，把每个单元荷载向量 $\hat{\mathbf{p}}_e$ 的分量分配给系统荷载向量 **P** 适当的行。

例题 16-4

如图 E16.4.1 所示，一个梁划分为两个单元，每个单元上的横向荷载仅是时间的函数，确定系统的荷载向量 **P**。

解：

因为单元与整体的 X-坐标轴一致 $\hat{\mathbf{p}}_e=\mathbf{p}_e$，对于在一个梁单元上的均布荷载的广义单元荷载向量给出在例题 16.1 中，于是

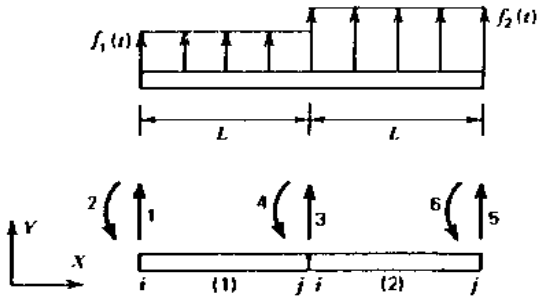


图 E16.4.1

$$\hat{\mathbf{p}}_e=\mathbf{p}_e=f_eL_e\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{L_e}{12}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{-L_e}{12}\end{Bmatrix} \tag{1}$$

因此

$$\mathbf{p}_1=f_1L\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{L}{12}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{-L}{12}\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix},\qquad p_2=f_2L\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{L}{12}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{-L}{12}\end{Bmatrix}\begin{matrix}3\\4\\5\\6\end{matrix} \tag{2}$$

定位数据与单元荷载向量并列在旁边表示。这里给出的系统自由度相当于特殊单元的自由度。按照公式 16.51，用这个数据将单元基值加入系统荷载向量。

$$\mathbf{P}(t)=\begin{Bmatrix}\frac{f_1L}{2}\\ \frac{f_1L^2}{12}\\ \frac{f_1L}{2}+\frac{f_2L}{2}\\ -\frac{f_1L^2}{12}+\frac{f_2L^2}{12}\\ \frac{f_2L}{2}\\ \frac{-f_2L}{12}\end{Bmatrix}\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{matrix} \tag{3}$$

§16.5 边界条件

在矩阵形式中，论述动力问题需要结合两种类型的边界条件：规定的力和规定的位移。公式 16.51 提供了由单元力向量装配成系统力向量，这个能够增加作用在结点上的任意集中荷载。前面已经研究过（§4.4）结构具有一基础运动，它利用在结构上的一些结点位移为时间的函数。本节将研究在一个结构有限元模型上施加边界约束的方法。

在§16.4 中系统矩阵 **K** 和 **M** 的装配，好像结构的所有结点全未被限制（如图 16.14 所见）。这样就导出了一个奇异的刚度矩阵 **K**，并且系统具有刚体自由度。当许多结点位移规定为零时，则要施实这个条件最简单的方法是将系统分块成活动自由度与约束自由度。因此，对于一个无阻尼系统的分块运动方程为

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{aa} & \mathbf{M}_{ac}\\ \mathbf{M}_{ca} & \mathbf{M}_{cc}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{U}}_a\\ \ddot{\mathbf{U}}_c\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ac}\\ \mathbf{K}_{ca} & \mathbf{K}_{cc}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{U}_a\\ \mathbf{U}_c\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{P}_a\\ \mathbf{P}_c\end{Bmatrix} \tag{16.52}$$

但是，假如 $\mathbf{U}_c=0$，由于 c 坐标约束，公式 16.52 可记为

$$\mathbf{M}_{aa}\ddot{\mathbf{U}}_a+\mathbf{P}_{aa}\mathbf{U}_a=\mathbf{P}_a \tag{16.53a}$$

$$\mathbf{P}_c=\mathbf{M}_{ca}\ddot{\mathbf{U}}_a+\mathbf{K}_{ca}\mathbf{U}_a \tag{16.53b}$$

公式 16.53*a* 必须首先救解活动位移向量 $\mathbf{U}_a(t)$。然后在约束处的反力可从公式 15.53b 中得到。然而，因为在求解活动位移向量 $\mathbf{U}_a$ 中，只需要 $\mathbf{M}_{aa}$和 $\mathbf{K}_{aa}$，因此 **K** 和 **M** 矩阵的剩余部分是不需要由相应的单元矩阵来装配的。假若是这种情况，其剩余部分完成计算之后，则反力可以由单元力来得到，用不着公式 16.53b。

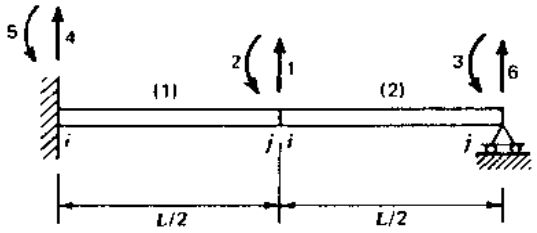


图 E16.5.1

例题 16.5

如图 E16.5.1 所示，一均匀的悬臂梁划分为 $L_1=L_2=\frac{L}{2}$ 长度的两个单元。仅由装配活动矩阵 $\mathbf{M}_{aa}$及 $\mathbf{K}_{aa}$实施系统边界条件。

解：

系统位移坐标编号为：活动坐标为 1，2 及 3，约束坐标为 4、5 及 6，单元矩阵由公式 16.15 给出、

$$\hat{\mathbf{k}}_e = \frac{EI}{L_e^3}\begin{bmatrix} \overset{4}{1} & \overset{5}{2} & \overset{1}{6} & \overset{2}{3} & \\ 12 & 6L_e & -12 & 6L_e & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 & \begin{matrix}4\\5\end{matrix} \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e & \begin{matrix}6\\3\end{matrix} \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\hat{\mathbf{m}}_e = \frac{\rho AL_e}{420}\begin{bmatrix} \overset{4}{1} & \overset{5}{2} & \overset{1}{6} & \overset{2}{3} & \\ 156 & 22L_e & 54 & -13L_e & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \\ 22L_e & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 & \begin{matrix}4\\5\end{matrix} \\ 54 & 13L_e & 156 & -22L_e & \begin{matrix}6\\3\end{matrix} \\ -13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 & \begin{matrix}1\\2\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{2}$$

单元定位数据并列于 $\hat{\mathbf{k}}_e$ 与 $\hat{\mathbf{m}}_e$ 的行与列旁边，使这些数据能够装配 $\mathbf{K}_{aa}$ 与 $\mathbf{M}_{aa}$。

$$\mathbf{K}_{aa} = \frac{\mathrm{EI}}{(L/2)^3}\begin{bmatrix} \overset{1}{(12+12)} & \overset{2}{(-3L+3L)} & \overset{3}{3L} & \begin{matrix}1\end{matrix} \\ (-3L+3L) & (L^2+L^2) & (\frac{L^2}{2}) & \begin{matrix}2\end{matrix} \\ 3L & (\frac{L^2}{2}) & L^2 & \begin{matrix}3\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{3}$$

或

$$\boxed{\mathbf{K}_{aa} = \frac{4EI}{L^3}\begin{bmatrix} 48 & 0 & 6L \\ 0 & 4L^2 & L^2 \\ 6L & L^2 & 2L^2 \end{bmatrix}} \tag{4}$$

$$\mathbf{M}_{aa} = \frac{\rho AL}{840}\begin{bmatrix} \overset{1}{(156+156)} & \overset{2}{(-11L+1L)} & \overset{3}{\left(\frac{-13L}{2}\right)} & \begin{matrix}1\end{matrix} \\ (-11L+11L) & (L^2+L^2) & \left(\frac{-3L^2}{4}\right)\left(\frac{-3L^2}{4}\right) & \begin{matrix}2\end{matrix} \\ \left(\frac{-13L}{2}\right) & \left(\frac{-3L^2}{4}\right) & L^2 & \begin{matrix}3\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{5}$$

或

$$\boxed{\mathbf{M}_{aa} = \frac{\rho \mathrm{AL}}{3360}\begin{bmatrix} 1248 & 0 & -26\mathrm{L} \\ 0 & 8\mathrm{L}^2 & -3\mathrm{L}^2 \\ -26\mathrm{L} & -3\mathrm{L}^2 & 4\mathrm{L}^2 \end{bmatrix}} \tag{6}$$

§16.6 约束-缩减自由度

在前节论述的利用约束成为结构上的边界条件，通常这里产生一种在系统位移坐标之间需要一种特殊的关系。这种坐标变换可记作

$$\mathbf{U}=\mathbf{T}\hat{\mathbf{U}} \tag{16.54}$$

其中 $\hat{N}\leqslant N$，及 $\hat{\mathbf{U}}$ 为广义坐标向量。公式 16.54 可认为是一种里兹变换，这是一种类似于公式 11.8 的有限个自由度变换。

应用能量守恒，如根据前面许多道理作过的，得到运动方程

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\hat{\mathbf{U}}}+\hat{\mathbf{C}}\dot{\hat{\mathbf{U}}}+\mathbf{K}\hat{\mathbf{U}}=\hat{\mathbf{P}} \tag{16.55}$$

其中

$$\hat{\mathbf{M}}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{T}\quad,\quad \hat{\mathbf{C}}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}$$

$$\hat{\mathbf{K}}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathrm{T}\quad,\quad \hat{\mathbf{P}}=\mathrm{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \tag{16.56}$$

变换矩阵 **T** 可以产生各种系统位移坐标间所需要的特殊关系的结果。约束方程可记成矩阵形式为

$$\mathbf{RU}\equiv[\mathbf{R}_{da}\mathbf{R}_{dd}]\begin{Bmatrix}\mathbf{U}_a\\ \mathbf{U}_d\end{Bmatrix}=\mathbf{0} \tag{16.57}$$

其中 U_d 是不独立坐标 N_d 的向量，U_a 是独立的或活动坐标的向量。公式 16.57 可求解 U_d 给出

$$\mathbf{U}_d=-\mathbf{R}_{dd}^{-1}\mathbf{R}_{da}\mathbf{U}_a \tag{16.58}$$

于是原来的 **U** 坐标组与活动坐标的关系由公式给出

$$\mathbf{U}\equiv\begin{pmatrix}\mathbf{U}_a\\ \mathbf{U}_d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{I}_{aa}\\ \mathbf{T}_{da}\end{pmatrix}\mathbf{U}_a\equiv\mathbf{T}\mathbf{U}_a \tag{16.59}$$

其中 $\hat{\mathbf{U}}$ 活动坐标形式，以及

$$\mathbf{T}_{da}=-\mathbf{R}_{dd}^{-1}\mathbf{R}_{da} \tag{16.60}$$

象公式 16.57 的约束方程可以从一个刚体与一个弹性结构联结处产生。例题 16.6 将论述这个问题。Weaver[16.9]曾经进一步讨论过弹性体联结刚体的动力问题。

例题 16.6

如图 E16.6.1 所示，一刚性平板用两个结点与平面桁架相联结，写出约束方程，讨论板的平移与转动坐标成为活动坐标，假定转动很小。

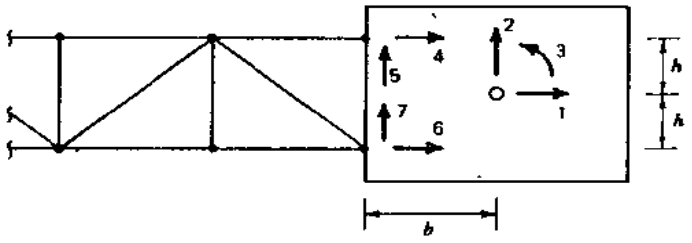


图 E16.6.1

解：

很容易依次用每个主动位移，及确定不独立坐标 U_4，……U_7 所到的位移结果。

对于

$$\begin{aligned} &U_1\neq 0:\\ &U_4=U_6=U_1 \quad , \quad U_5=U_7=0 \end{aligned} \tag{1}$$

对于

$$\begin{aligned} &U_2\neq 0:\\ &U_5=U_7=U_2 \quad , \quad U_4=U_6=0 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &U_3\neq 0:\\ &U_4=-hU_3 \quad , \quad U_5=-bU_3\\ &U_6=-hU_3 \quad , \quad U_7=-bU_3 \end{aligned} \tag{3}$$

合并公式 1 至 3，可列出下面约束方程，它使不独立坐标 U_4，U_5，U_6 及 U_7 与活动坐标 U_1，U_2 及 U_3 有关。

$$\left[\begin{array}{ccc:cccc} -1 & 0 & h & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & b & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -h & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & b & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} U_1\\ U_2\\ U_3\\ \cdots\\ U_4\\ U_5\\ U_6\\ U_7 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

上面分块是按照公式 16.57 进行的。

静凝缩是应用约束方程减少一些坐标的另外的例子。研究无阻尼系统，其惯性力用集中质量矩阵表示，象在 §16.2 中所述。运动方程可记为分块矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_a\\ \ddot{\mathbf{U}}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ad}\\ \mathbf{K}_{da} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_a\\ \mathbf{U}_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_a\\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{16.61}$$

其低部分提供一个静约束方程

$$\mathbf{K}_{da}\mathbf{U}_a+\mathbf{K}_{dd}\mathbf{U}_d=0 \tag{16.62}$$

这与公式 16.57 的相同，于是其变换矩阵为

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{aa}\\ \mathbf{T}_{da} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa}\\ -\mathbf{K}_{dd}^{-1}\mathbf{K}_{da} \end{bmatrix} . \tag{16.63}$$

公式 16.63 与公式 16.56 与 16.61 连同用于变换矩阵来建立活动坐标 $\mathbf{U}_a$ 的运动方程。确定缩减质量矩阵与刚度矩阵为

$$\hat{\mathbf{M}}_{aa}=\mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} & \mathbf{T}_{da}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{aa} & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa}\\ \mathbf{T}_{da} \end{bmatrix}=\mathbf{M}_{aa} \tag{16.64a}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{aa}=\mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T}=\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa} & \mathbf{T}_{da}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ad}\\ \mathbf{K}_{da} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{aa}\\ \mathbf{I}_{da} \end{bmatrix} \tag{16.64b}$$

$$= \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{da}^{T}\mathbf{K}_{dd}^{-1}\mathbf{K}_{da}$$

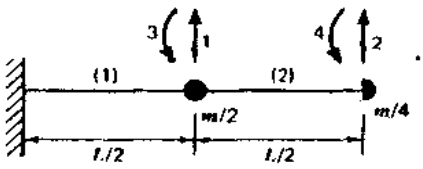
于是仅用具有惯性参与的坐标可以缩减集中质量模型问题的规模。质量矩阵无变化，而刚度矩阵变为**缩减刚度矩阵** $\hat{\mathbf{K}}_{aa}$，由公式 16.64b 确定。

例题 16.7

建立长度为 L 均匀悬臂梁的两个自由度集中质量模型，如图 E16.7.1 所示。

解：

一个可能的模型是具有长度为 $L/2$ 的两个单元。



$m = \rho AL$

图 E16.7.1

单元刚度矩阵是从公式 16.15a

$$\hat{\mathbf{k}}_e = \mathbf{k}_e = \frac{8EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 3L & -12 & 3L \\ 3L & L^2 & -3L & \frac{L^2}{2} \\ -12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & \frac{L^2}{2} & -3L & L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x\ 1 \\ x\ 3 \\ 1\ 2 \\ 3\ 4 \end{matrix} \qquad (1)$$

（1 3 2 4 / x x 1 3）

装配系统运动方程给出

$$\frac{\rho AL}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \\ \ddot{U}_4 \end{Bmatrix}$$

$$+\frac{8EI}{L^3}\begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & 3L \\ -12 & 12 & -3L & -3L \\ 0 & -3L & 2L^2 & \frac{L^2}{2} \\ 3L & -3L & \frac{L^2}{2} & L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

按公式 16.61 的形式给出，于是

$$\mathbf{K}_{da}=\frac{8EI}{L^3}\begin{bmatrix}0 & -3L\\ 3L & -3L\end{bmatrix},\qquad \mathbf{K}_{dd}=\frac{8EI}{L}\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{dd}^{-1}\mathbf{K}_{da}=\frac{L}{14EI}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}\left(\frac{8EI}{L^3}\right)\begin{bmatrix}0 & -3L\\ 3L & -3L\end{bmatrix}=\frac{-6}{7L}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -4 & 3\end{bmatrix} \tag{3}$$

据公式 16.64b

$$\hat{\mathbf{K}}_{aa}=\mathbf{K}_{aa}-\mathbf{K}_{da}^{T}\mathbf{K}_{dd}^{-1}\mathbf{K}_{da}$$

$$=\frac{8EI}{L^3}\begin{bmatrix}24 & -12\\ -12 & 12\end{bmatrix}-\frac{8EI}{L^3}\begin{bmatrix}0 & 3L\\ -3L & -3L\end{bmatrix}\left(-\frac{6}{7L}\right)\begin{bmatrix}1 & 1\\ -4 & 3\end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{aa}=\frac{8EI}{L^3}\begin{bmatrix}\left(24-\frac{72}{7}\right) & \left(-12+\frac{54}{7}\right)\\ \left(-12+\frac{54}{7}\right) & \left(12-\frac{72}{7}\right)\end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{aa}=\frac{8EI}{7L^3}\begin{bmatrix}96 & -30\\ -30 & 12\end{bmatrix} \tag{5}$$

据公式 16.64a

$$\hat{\mathbf{M}}_{aa}=\mathbf{M}_{aa}=\frac{\rho AL}{4}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6}$$

于是在缩减坐标中系统运动方程为

$$\frac{\rho AL}{4}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{U}_1\\ \ddot{U}_2\end{Bmatrix}+\frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix}16 & -5\\ -5 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{7}$$

一种经常用于缩减系统自由度数目的方法称为**盖恩**(Guyan)**缩减法**[16.10]，既然惯性与所有坐标相关联，那就任意选择坐标的子集合成为活动(或主动的)坐标组，并且其余坐标为不独立的(或从属的)坐标。于是认为公式 16.54 的里兹变换矩阵与公式 16.63 所得到的集中质量系统相同。里兹基本向量是里兹变换矩阵 **T** 的行，是当 d-坐标被释放 时，位移的型式分别涉及 a-坐标的单位位移。Anderson，Irons 和 Zienkiewicz[16.11]在振动与翘曲分析中讨论了这种缩减方法的应用，以及表示坐标选择的影响和在得到精确 的特征值与特征向量时所保存的坐标数。参考文献 16.12 和 16.13 讨论了用子结构为选择自由度时是保留还是去掉的 一种方法；同时讨论了用盖恩缩减来改善所得到的频率与模态二次特征解的一种方法。将在 §17.1 中提供一个盖恩缩减解的例子。在第 19 章中要讨论涉及子结构坐标缩减的一些特殊形式。

§16.7 刚体模态系统

一些代数特征解，例如在 §14.2 中那些讨论的迭代方法，需要求解特征值方程

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi}=\left(\frac{1}{\lambda}\right)\boldsymbol{\phi} \tag{16.65}$$

当一个结构具有刚体模态，**K** 不可能求逆，因为 **K** 是奇异的。消去刚体自由度的一种方法可表示为一个坐标变换的形式，即由弹性体变形坐标中分离出刚体坐标。令原来的 **K** 矩阵记为

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{er}\\ \mathbf{K}_{re} & \mathbf{K}_{rr}\end{bmatrix} \tag{16.66}$$

里兹变换具有公式 16.54 的形式，即

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{U}_e\\ \mathbf{U}_r\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{ee}-(\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{er}) & \\ 0 & \mathbf{I}_{rr}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{\mathbf{U}}_e\\ \hat{\mathbf{U}}_r\end{Bmatrix} \tag{16.67}$$

与公式 16.56c 一起导出广义刚度矩阵

$$\hat{\mathbf{K}}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{ee} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{16.68}$$

由公式 16.67 给出的变换导出了 $\hat{\mathbf{K}}$ 的一个特别简单的形式，这清楚的表明了坐标 $\mathbf{U}_r$ 表示为刚体位移。任何线性独立的向量组可代替公式 16.67 中的 $\mathbf{I}_{er}$ 矩阵，但其它的选择不可能象在公式 16.68 中导出的 $\hat{\mathbf{K}}_{ee}=\mathbf{K}_{ee}$。参考文献 16.14 进一步讨论了刚体问题的数值解。

例题 16.8

如图 E16.8.1 所示模拟一均匀杆取长度为 $\frac{L}{2}$ 的两个单元。令

$$k=\frac{2EA}{L},\quad 及\ U_1=U_3$$

a. 求公式 16.67 的变换矩阵。

b. 绘出相应这个变换的里兹基本向量的形函数图。

c. 表示 $\hat{\mathbf{K}}$ 具有公式 16.68 的形式

解：

a. 建立系统刚度矩阵如公式 16.66 的分块形式

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{er}\\ \mathbf{K}_{re} & \mathbf{K}_{rr}\end{bmatrix}=\mathbf{K}\left[\begin{array}{cc:c}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ \hdashline 0 & -1 & 1\end{array}\right] \tag{1}$$

所以

$$\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{er}=\frac{1}{k}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}k\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix} \tag{2}$$

于是从公式 16.67 及公式 2 得

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{ee} & (-\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{er})\\ 0 & \mathbf{I}_{re}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right] \tag{3}$$

b. 给出相应里兹基本向量形函数图，(图 E16.8.2)即 T 的列

图 E16.8.1

注意第三列，即 t_3 相应于刚体平移。

c. 应用公式 16.56c 及 3 形成 $\hat{\mathbf{K}}$。

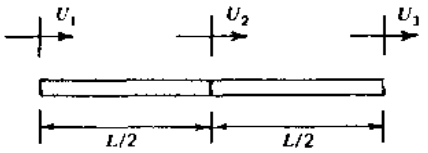


图 E16.8.1

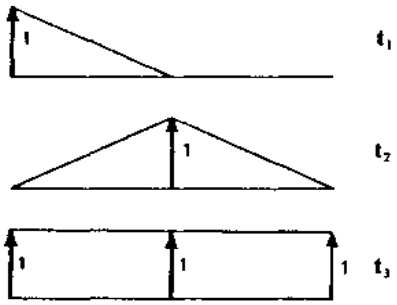


图 E16.8.2

$$\hat{\mathbf{K}}=\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}(k)\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}=\mathbf{k}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{4}$$

$\hat{\mathbf{K}}$ 使之具有公式 16.68 表示的形式。

参考文献

16.1 Y. C. Fung, *An Introduction to the throry of Aefoelasticity*, Wiley, New York (1955).

16.2 R. M. Rivello, *Theory and Analysis of Flight Structures*, McGraw—Hill, New York (1969).

16.3 W. C. Hurty and M. F. Rubinstein, *Dynamics of Structures*, Prentice—Hall, Englewood Cliffs, *NJ* (1964).

16.4 J. S. Przemieniecki, *Theory of* Matrix Structural Analysis, McGraw—Hill, New York (1968).

16.5 J. S. Archer, "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems," *J. Struct.*

Div., *Proc. ASCE*, *V.* 89, 161—178(1963).

16.6 F. A. Leckie and G. M. Lindberg, "The Effect of Lumped Parameters on Beam Frequencies," *Aeron. Quart.*, 224—240(1963).

16.7 P. Tong, T. H. H. Pian, and L. L. Bucciarelli, "Mode Shapes and Frequencies by Finite Element Method Using Consistent and Lumped Masses", *Comps. Struct.*, v. 1, 623—628(1971).

16.8 W. McGuire and R. H. Gallagher, *Matrix Structural Analysis*, Wiley, New York (1979).

16.9 W. Weaver, Jr., "Dynamics of Elastically Rigid Bodies," *Proc. 3rd Southeastern* Columbia, SC, 543—562(1966).

16.10 R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Matrices", *AIAA Journal*, *v.* 3, 380 (1965).

16.11 R. G. Anderson, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, "Vibration and Stabillity of plates Using Finite Elements," *Int*, *j*, *Solids Struct.*, *v.* 4, 1031—1055(1968).

16.12 C. P. Johnson et. al., "Quadratic Reduction for the Eigenproblem," Int. J. Num. Meth. in Engr., *v.* 15, 911—923(1980).

习题组 16.1

16.1 由公式 16.10 与 16.12 导出公式 16.13。

16.2 应用公式 16.13 与 16.14 公式 16.15 中的 k_{12} 与 m_{23} 项。

16.3 刚度系数可以下面方式求得："刚度系数 k_{ij} 是由于 j 自由度处发生单位位移而所有其它自由度受约束时在 i 自由度处产生的力"。用这个定义，当梁的变形形状为 $\psi_2(x)$，如图 P16.3 所示核检 k_{12} 在左端的剪力。

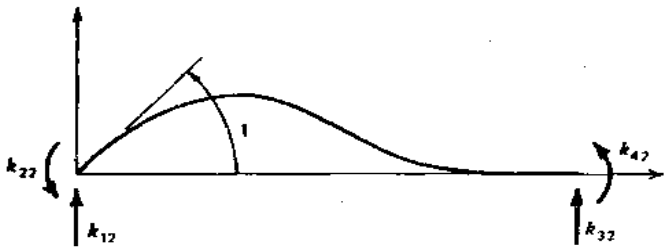


图 P16.3

16.4 由公式 16.14c 给出的力 p_i 称为相容结点荷载，或固端力。力 $p_2(t)$ 在例题 16.1 中确定，它等于图 P16.4 梁左端的伪静态固端弯矩。

16.5 确定图 P16.6 中的三角形分布荷载的，相容结点荷载 $p_1(t)$ 至 $p_4(t)$。

16.6 应用公式 16.19a 与 16.6，确定图 P16.6 截头圆锥扭转单元刚度矩阵 **k**。

习题组 16.2

16.7 在图 16.12b 平面刚架单元上实施位移 $\hat{u}_4$ 与 $\hat{u}_5$，由公式 16.27 确定 u_5 表达式。

16.8 图 16.13 三维桁架单元采用绘出草图来 确定 u_1 表达式，按位移 $\hat{u}_1$，$\hat{u}_2$ 与 $\hat{u}_3$ 表示

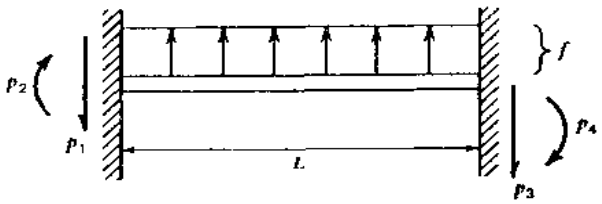


图 P16.4

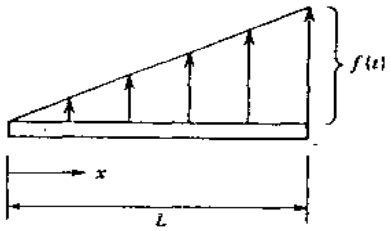


图 P16.5

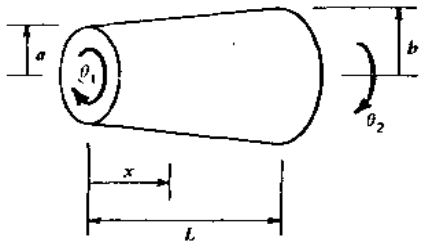


图 P16.6

(解答应与公式 16.28 的第一行相符)。

16.9 应用图 P16.9,确定力 $\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3$ 及 $\hat{p}_4$,相应于所表示的位移 $\hat{u}_1$(注意解答相应于方程 16.36 的第一列,因为 $\hat{\mathbf{p}}=\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{u}}$)。

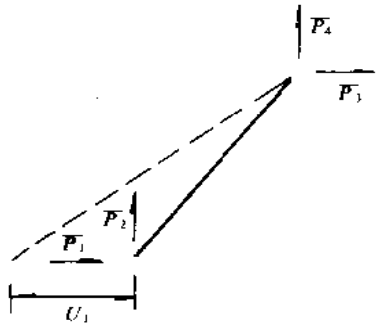


图 P16.9

16.10 在公式 16.32 力的变换应用虚功法推导得到,也可简单的由力的分量投影推导。

应用图 P16.10 核检公式 16.32，其中 T 对于平面桁架单元由公式 16.26 给出。

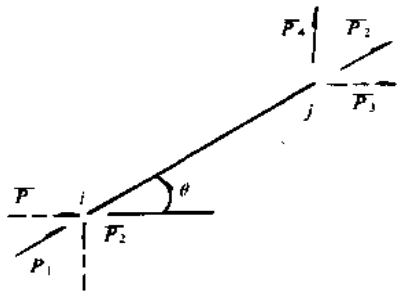


图 P16.10

习题组 16.3

16.11 图 P16.11 所示的平面桁架的每根杆件具有相同的截面性质 AE。

(a)由公式 16.36 确定三个单元刚度矩阵 $\hat{\mathbf{k}}_1$，$\hat{\mathbf{k}}_2$ 与 $\hat{\mathbf{k}}_3$。

(b)用直接刚度法装配无约束系统 8×8 阶刚度矩阵。

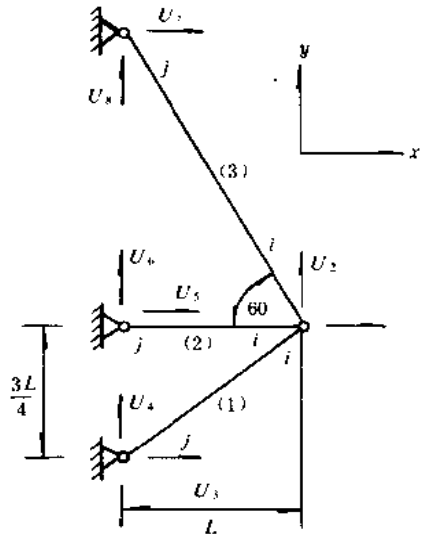


图 P16.11

16.12 一起重机吊架由一根连接杆支承的均匀梁组成，如图 $P16.12$ 所示。

(a)求得两个单元的刚度矩阵 $\hat{\mathbf{k}}_1$ 与 $\hat{\mathbf{k}}_2$。

(b)装配无约束系统 8×8 阶刚度矩阵。

$$\mathrm{E}=30\times10^3 \quad \text{ksi} \qquad I_1=10.8\ \text{in}^4$$

$$A_1=4.1\ \text{in}^2 \qquad A_2=0.8\ \text{in}^2$$

16.13 对于图 P16.13 所示的平面刚架：

(a)确定单元刚度矩阵 $\hat{\mathbf{k}}_1=\hat{\mathbf{k}}_3$ 及 $\hat{\mathbf{k}}_2$。

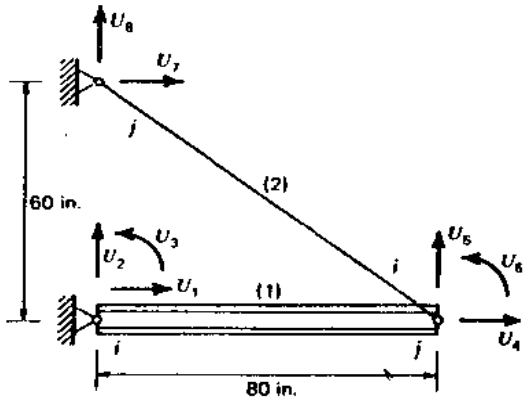


图 P16.12

b. 忽略所有单元的轴向变形而形成的三个自由度模型，建立其系统运动方程。即 $U_5=U_6=0$ 及 $U_4=U_3$。

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

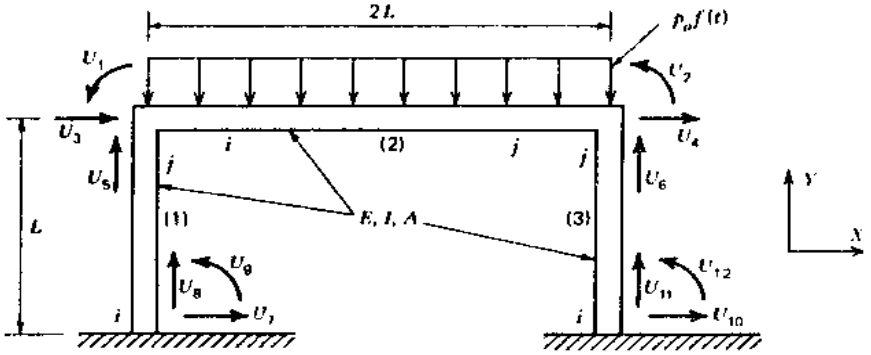


图 P16.13

习题组 16.4

16.14 在例题 16.7 中去掉转动得出 2×2 阶刚度矩阵与质量矩阵。如在公式 16.64a 所指出的缩减质量矩阵 $\hat{\mathbf{M}}_{aa}$ 刚好是原来质量矩阵的非零部分 $\mathbf{M}_{aa}$。梁表示在图 P16.14 中。

(a)确定 4×4 阶相容质量矩阵。

(b)略去转动，建立转换矩阵 T。

(c)应用盖恩缩减法确定 2×2 阶缩减质量矩阵。

(d)应用例题 16.7 的公式 7 确定两个自由度集中质量模型的固有频率。

(e)应用上面(c)确定的质量矩阵与从例题 16.7 中的刚度矩阵 $\hat{\mathbf{K}}_{aa}$，从而确定两个自由度

盖恩缩减模型的固有频率。

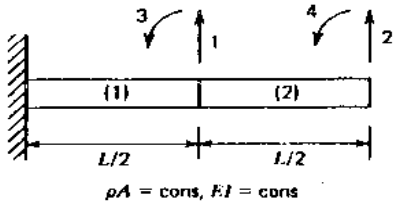


图 P16.14

(f)将结果(d)及(e)与均匀悬臂梁的精确频率进行比较。ρA 与 EI 为常量

16.15 如图 P16.15 所示，大方块可视为一块均匀的刚性板，它与一柔性柱的顶部刚性联结，令整个质量矩阵相对于柱自由度 U_1，U_2 及 U_3 为

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_c+\mathbf{M}_p$$

其中

$$\mathbf{M}_p=\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I_G \end{bmatrix}$$

应用公式 16.56，16.59 及 16.60 变换平板的惯性项，由重心坐标 U_4，U_5 及 U_6 变至柱坐标 U_1，U_2 及 U_3，假定转动很小。

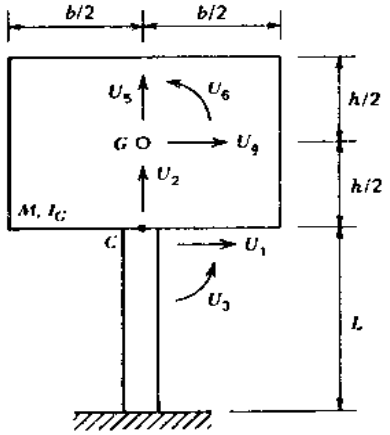


图 P16.15

习题组 16.5

16.16

(a)确定在例题 16.8 中系统 $\hat{\mathbf{M}}$。

(b)用矩阵形式列出运动方程，以及求得振型与频率。

16.17 图 P16.17 所示的单个匀均梁单元，令 U_1 与 U_2 为弹性变形坐标，U_3 与 U_4 为刚体坐标。

(a)根据 **K** 与 **M** 给坐标编号。

(b)根据 16.67 变换矩阵给这个系统编号。

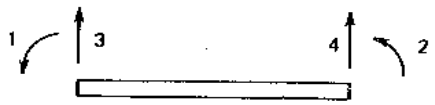


图 P16.17

(c)确定质量矩阵 $\hat{\mathbf{M}}$,它相应于公式 16.68 的 $\hat{\mathbf{K}}$。

(d)求系统的柔性模态,绘出模态。

第 17 章　振动分析有限元模型

本章的目的是根据杆件有限元的表达式，来介绍简单结构的模态和频率的一些解；介绍 ISMIS 计算机程序求解结构动力问题的应用；以及介绍应用 ISMIS 程序得到整个结构动力响应解。相容质量与集中质量的有限单元模型比较，并示范坐标的缩减。

本章将完成如下内容：

- **使用 ISMIS 计算机程序或一些类似有限元的程序应用相容质量或集中质量有限元模型来确定结构的频率和模态。**
- **应用盖恩(Guyan)缩减法得到缩减的自由度模型。**
- **根据相容质量模型与集中质量模型，以连续模型(即偏微分方程)所确定的频率来论述简单结构频率的关系。**
- **应用 ISMIS 计算机程序或类似的程序得到在特殊激励及初始条件下的动力响应。**

§17.1　有限元解固有频率与模态

在例题 11.9 已经建立一均匀悬臂杆承受轴向振动的两个自由度的假定振型模型，同时在例题 12.3 中已求得这个模型的固有频率及模态(习题 17.1 涉及一个相同的悬臂杆承受轴向振动的两个自由度有限单元模型)，本节集中在一个均匀悬臂梁的横向振动，以及应用它说明下面问题：

a. 根据有限单元模型求解两个自由度的曲柄。

b. 相容质量矩阵有限元模型自由度数目增加的影响。

c. 应用盖恩缩减法对自由度缩减的影响。

d. 集中质量模型与相容质量模型的比较。

例题 17.1

a. 用公式 16.15 所给出的均匀梁的刚度矩阵与质量矩阵，建立一个均匀质悬臂梁的两个自由度的数学模型，见图 E17.1.1。

b. 求该模型的固有频率解，并将与其例题 10.3 给出的精确频率进行比较。

解：

a. 公式 16.15 的刚度矩阵与质量矩阵符合单元坐标编号，如图 E17.1.2 所示。

在建立系统质量矩阵与刚度矩阵时，按自由端有两个系统自由度，可应用下面定位数据。

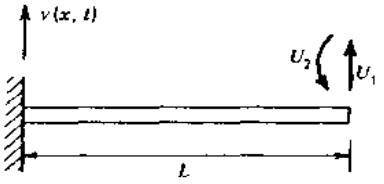


图 E17.1.1

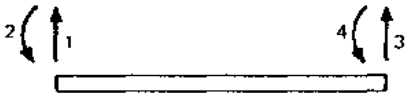


图 E17.1.2

单元	系统
1	约束的
2	约束的
3	1
4	2

这个结果是如下系统公式

$$\frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix}156 & -22L\\ -22L & 4L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\end{Bmatrix}+\left(\frac{EI}{L^3}\right)\begin{bmatrix}12 & -6L\\ -6L & 4L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\ U_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{1}$$

b. 公式 1 具有形式

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}+\mathbf{K}\mathbf{U}=0 \tag{2}$$

假定

$$\mathbf{U}(t)=\phi\cos\omega t \tag{3}$$

以及令

$$\mu=\frac{\omega^2\rho AL^4}{420EI} \tag{4}$$

于是

$$\begin{bmatrix}12 & -6L\\ -6L & 4L^2\end{bmatrix}-\mu\begin{bmatrix}15\sigma & -22L\\ -22L & 4L^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varnothing_1\\ \varnothing_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{5}$$

取系数的行列式为零，得

$$(12-15\sigma\mu)(4L^2-4L^2\mu)-(-6L+22L\mu)^2=0 \tag{6}$$

公式 6 的根为

$$\mu_1=2.97147\times10^{-2}\qquad \mu_2=2.88457$$

于是

$$\omega_1^2 = 12.4802\,\frac{EI}{\rho AL^4}$$

$$\omega_2^2 = 1211.52\,\frac{EI}{\rho AL^4} \tag{7}$$

$$\boxed{\omega_1 = 3.533\left(\frac{EI}{\rho AL^4}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\omega_2 = 34.81\left(\frac{EI}{\rho AL^4}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

由例题 10.3 精确解

$$\boxed{\omega_1 = 3.516\left(\frac{EI}{\rho AL^4}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\omega_2 = 22.03\left(\frac{EI}{\rho AL^4}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{8}$$

由例题 17.1 的单元可视为单独单元，两个自由度模型产生出第一与第二精确解频率偏大。两个自由度模型的基频是十分精确的，而第二频率大大高于其它方法所求得的结果。这些结果与在表 13.1 中摘记的瑞利-里兹的数据范围是一致的，这里连续模型的自由度数目是无限的，即 $N=\infty$。

现用 **ISMIS** 计算机程序解例题 17.1 的两个自由度问题。

例题 17.2

应用 **ISMIS** 计算机程序解例题 17.1 陈述的问题。

解：

ISMIS 计算机程序具有指令 FRAMEL 与 FRAMMS，平面刚架单元建立 6×6 阶单元刚度矩阵与质量矩阵，它的单元坐标编号表示在图 E17.2.1 中。在例题 17.1 中放大因数 $\left(\frac{EI}{\rho AL^4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 为常量，用 $E=\rho=I=A=L=1$。

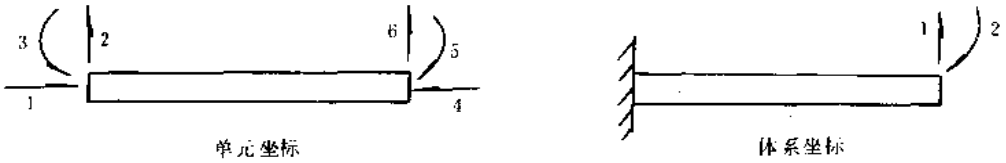


图 E17.2.1

ISMIS 程序目录为

START

```
''EXAMPIE 17.2''
FRAMPIE,KE
1,0,1,1,1
PRINT,KE,1
FRAMMS,ME
1,0,1,1
PRINT,ME,1
RMVSM,KE,K,5,5,2,2
RMVSM,ME,M,5,5,2,2
BIGEN,K,M,VAL,VECT,2
TRANS,VECT,VEC
*
''OMEGA SQ''
PRINT,VAL,2
SQREI,VAL
*
OMEGA''
PRINT,VAL,2
*
''OMEGA''
PRINT,VAL,2
*
''MODES(COIS)* *
PRINT,VEC,1
STOP
```

ISMIS 输出结果为

```
START
''EXAMPIE 17.2''
FRAMEI KE
      6 ROWS              6COLUMNS
DX=1,000E+00            A=1,000E+00
DY=0                    E=1,000E+00
L=1,000E+00             I=1,000E+00
PRINT KE
      SCALED   BY    1,0E+01
```

	1	2	3	4	5	6
1	.10000	0.00000	0.00000	−.10000	0.00000	0.0000
2	0.00000	1.20000	.60000	0.00000	−1.20000	.60000
3	0.00000	.60000	.40000	0.00000	−.60000	.20000
4	−1.00000	0.00000	0.00000	.10000	0.00000	0.00000
5	0.00000	−1.20000	−.60000	0.00000	1.20000	−.60000
6	0.00000	.60000	.20000	0.00000	−.60000	.40000

```
FRAMMS ME
                6   ROWS        6   COLUMNS
```

```
DX=1.000E+00        DY=0
RO=1.000E+00      AR=1.000E+00      L=1.000E+00
PRINT    ME
  SCALED BY 1.0E-01
          1        2        3        4        5        6
     1  3.33333  0.00000  0.00000  1.6667   0.00000  0.00000
     2  0.00000  3.71429   .52381  0.00000  1.28571  -.3095
     3  0.00000   .52381   .9524   0.00000   .30952  -.07143
     4  1.66667  0.00000  0.00000  3.33333  0.00000  0.00000
     5  0.00000  1.28571   .30952  0.00000  3.71429  -.52381
     6  0.00000  -.30952  -.7143   0.0000   -.52381   .09524
RMVSM          KE          K
  ROW  NVMBER    5,COLUMN NUMBER    5
2  ROWS          2COLVMNS
  RMVSM      ME    M
ROW    NUMBER    5,COLUMN NUMBER   5
2   ROWS         2 COLUMNS
EIGEN   K     M     VAL VECT
NUMBER OF EIGENVECTORS DESIRED=2
  ORIOGINAL TRACE=1.22400000E+03
SVM OF EIGENVALUES=1.2240000E+03
TRANS   VECT   VEC
* *OMEGA   SQ* *
PRINT   VAL
    SCALED By 1.0E+0.3
      1        2
1      .01238019        1.21151981
* * MODES (COLS) * *
PRINT VEC
  SCALED By 1.0E+01
      1            2
1    .20195     .28145
2    .27819    2.14537
STOP
```

注意频率打印在"OMEGA"下面，与例题 17.1 的公式 8 一致。

说明了相容质量有限单元模型自由度的数目与应用这个模型所得到的精确频率之间的关系。ISMIS 程序在例题 17.2 中运算的与这很相似，其结果制成表 17.1。

表 17.1 说明在前面表 13.1 所表明的瑞利-里兹界限，即对于特殊模型的高模态频率的精度变差，但精度随模型自由度数目的增加而提高。指出模态的数目等于单元的数目时精度十分好，但通常对剩下的模态则很差。

其次，应用§16.6中所述的盖恩缩减法对上面悬臂梁问题去掉转动。令活动坐标表示为'a'，以及减去的坐标为'd'。如§16.6中所表示的，则分块的质量矩阵与刚度矩阵为

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{aa} & \mathbf{m}_{ad}\\ \mathbf{m}_{da} & \mathbf{m}_{dd}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ad}\\ \mathbf{K}_{da} & \mathbf{K}_{dd}\end{bmatrix} \tag{17.1}$$

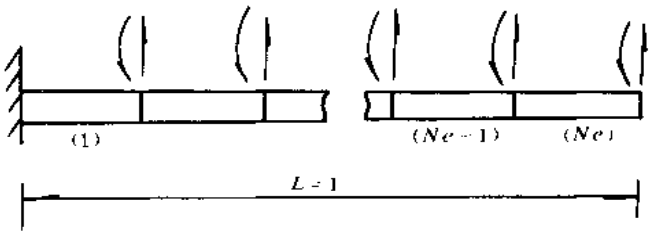


图 17.1　均匀悬臂梁有限单元模型

应用公式16.63建立的变换矩阵，得到由公式16.64给出的缩减刚度矩阵，表示为

$$\hat{\mathbf{K}}_{aa}=\mathbf{K}_{aa}+\mathbf{K}_{ad}\mathbf{T}_{da} \tag{17.2}$$

其中

$$\mathbf{T}_{da}=-\mathbf{K}_{dd}^{-1}\mathbf{K}_{da} \tag{17.3}$$

因为相容质量矩阵具有涉及 d 坐标的非零项，必须应用公式16.56a与16.63计算 $\hat{\mathbf{M}}_{aa}$，因此

$$\mathbf{M}_{aa}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{aa}\mathbf{T}_{da}^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{aa} & \mathbf{M}_{ad}\\ \mathbf{M}_{da} & \mathbf{M}_{dd}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{aa}\\ \mathbf{T}_{da}\end{bmatrix} \tag{17.4}$$

或

$$\hat{\mathbf{M}}_{aa}=\mathbf{M}_{aa}+\mathbf{M}_{ad}\mathbf{T}_{da}+(\mathbf{M}_{ad}\mathbf{T}_{da})^{T}+\mathbf{T}_{da}^{T}\mathbf{M}_{dd}\mathbf{T}_{da} \tag{17.5}$$

例题17.3说明如何矩阵操作与单元矩阵公式相结合，同时如何使用 **ISMIS** 程序进行盖恩缩减来装配系统矩阵。

均匀悬臂梁的相容质量有限元模型与连续模型的比较　　表 17.1

模态序号 \ 单元数	1	2	3	4	5	精确解（参考文献17.1）
1	3.5273	3.51772	3.51637	3.51653	3.51606	3.51602
2	34.8069	22.2215	22.1069	22.0602	22.0455	22.0345
3		75.1571	62.4659	62.1749	61.9188	61.6972
4		218.138	140.671	122.657	122.320	120.902
5			264.473	228.137	203.020	199.860
6			527.796	366.390	337.273	298.556
7				580.849	493.264	416.991
8				953.051	715.341	555.165
9					1016.20	713.079
10					1494.88	890.732

例题 17.3

图 E17.3.1 为去掉两个单元梁的转动自由度，写出一个 ISMIS 程序

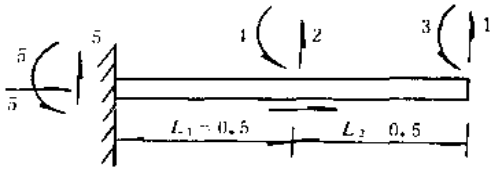


图 E17.3.1

解：

用平面刚架单元，指定约束坐标 5 来限制所有的位移为零。结构的刚度及质量矩阵为

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} AA & AD & AC \\ DA & DD & DC \\ CA & CD & CC \end{bmatrix} \end{array}$$

```
START
*
** EXAMPIE 17.3 **
*
** GUYAN REDUCTION **
*
** FORM EIEMENT MATRICES*
FRAMEL,KE
5.0,1,1
PRINT,ME,1
*
*,ASSEMBLE SYSTEM MATRICES,*
FORM,KS,5,5
FORM,MS,5,5
ADDMAT,KS,KE
5,5,5,5,2,4
ADDMAT,MS,ME
5,5,5,5,2,4
ADDMAT,KS,KE
5,2,4,5,1,3
ADDMAT,MS,ME
5,2,4,5,1,3
*
*,REDUCE STIFFNESS MATRIX,*
RMVSM,KS,KAA,1,1,2,2
RMVSM KS,KAD,1,3,2,2
RMVS  KDA,3,1,2,2
RMVSM  KDD,3,3,2,2
SYMIAV,KDD
```

```
MULT,KDD,KDA,TDA
SCALE,TDA,-1
TRANS,TDA,TAD
MULT,KAD,TDA,T
ADD,KAA,T
*
* REDUCE MASS MATRIA,*
RMVSM,MS,MAA,1,1,2,2
RMVSM,MS,MAD,1,3,2,2
RMVSM,MS,MDD,3,3,2,2
MULT,MAD,TDA,T
ADD,MAA,T
TRANS,T,TT
ADD,MAA,TT
MULT,MDD,TDA,T
MULT,TAD,T,ADA
ADD,MAA,ADA
*
* SOLVE EIGENPROBLEM*
EIGEN,KAA,MAA,VAL,VECT,2
TRANS,VECT,VES
*
* OMGA ** 2.*
PRINT,VAL,2
*
*.MODES(COLUMS)*
PRINT,VCE,1
STOP
```

表 17.2 给出用去掉所有转动来得到频率，指出每种情况的频率高于表 17.1 中相应的频率，再次说明瑞利-里兹界限理论。指出表 17.2 两个下面带横线的值不是立刻就小于它们左边的值。这是可能的，因为表 17.2 中 Ne 列的值是用去掉转动得到的，是表示在表 17.1 中相应的列得到的；而不是用模型附加自由度由表 17.2 的 Ne-1 列来得到。

应用盖恩缩减去掉转动得到的均匀悬臂梁频率 表 17.2

模态序号 \ 单元数	1	2	3	4	5	精确值（参考文献 17.1）
1	3.56753	2.52198	3.51699	3.51628	3.51611	3.51602
2		22.2790	22.2362	22.0946	22.0573	22.0345
3			62.6685	62.9703	62.2180	61.6972
4				123.545	124.725	120.902
5					205.277	199.860

虽然盖恩缩减法的确减化了本征问题的规模已能解，并且对于保留模态有个好的百分比时通常确实导致精确频率。因此必须注意两点：(a). 频率得到的精度取决于其坐标是保留或者去掉，如在 Anderson 等著作中表明的[17.2]。(b). 而 **K** 与 **M** 可能为带状的，盖恩缩减破坏带状并可能导致对特征解花太多代价，即使 $\hat{\mathbf{K}}$、$\hat{\mathbf{M}}$ 的阶数比 **K**、**M** 小许多。

应用与前面相同的悬臂梁，现在讨论 § 16.2 中叙述的在现行中用集中质量来得到的频率的精度。缩减的刚度矩阵再用公式 17.2 给出，得到下面的频率。

匀质悬臂梁集中质量模型的频率 表 17.3

模态序号 \ 单元数	1	2	3	4	5	精确值（参考文献 17.1）
1	2.44949	3.15623	3.34568	3.41804	3.45266	3.51602
2		16.2580	18.8859	20.0904	20.7335	22.0345
3			47.0284	53.0217	55.9529	61.6972
4				92.7302	104.436	120.902
5					153.017	199.860

从表 17.3 可以看出特殊的集中质量方法的运用（例如单元质量的一半分配于单元的每一端），集中质量方法产生的频率收敛十分缓慢。

Archer 在一篇论文中提出了相容质量矩阵的名称[17.3]；他比较了集中模型与相容质量模型的频率、该模型都用了两端自由和两端简支的均匀梁、包括了与排除了转动自由度。他的结论是：如果构成的质量矩阵采用了相应于瑞利-里兹近似法的公式（如相容质量近似）来代替结构质量通常在坐标点上自然集中的方法，那么所用均匀刚度和分布质量的两个梁的固有模态分析及以后的动力响应分析，则是个重要的改善。与 Archer 论文同时发表的一篇文章、Leckie 和 Lindberg[17.4]介绍了梁的频率误差估算以及证明：如用集中质量法，则达到一个期望的精度之所需单元数取决于边界条件。如用相容质量表达式，则不是这种情况。Tong 等[17.5]应用相容质量与集中质量有限元模型所得到的振型与频率确立了收敛率。如果连续模型用二阶微分方程表达，那么他们指出质量集中是适合的。但是相容质量公式将用于高阶系统，例如梁与板。

至今仅研究均匀有限元，虽然图 16.1 表示为一圆锥梁，但可模拟成均匀单元的集合。在 § 16.2 中简单介绍了形函数的应用以及 k_{ij} 的与 m_{ij} 的表达式。例如公式 16.7，单元组成的大小与物理性质是单元内位置的函数。Gallagher 与 Lee[17.6]比较了圆锥梁用圆锥单元表示和用均匀单元表示的特征解。并证明对于一已知的单元数，应用圆锥单元则达到很高的精度。

§ 17.2 振型位移法确定动力响应的有限元解

现在应用 16 章中有限元法建立一个简单结构的有限单元模型，以及应用 § 15.2 中振型-位移法计算一给定激励的响应。虽然这个例题应用 **ISMIS** 计算机程序，但例题的主要目的是在于说明动力响应问题解的各种步骤，不是说明 **ISMIS** 程序本身的应用。动力响应求解应用下述步骤：

1. 形成单元刚度矩阵。

2. 形成单元质量矩阵。

3. 装配系统刚度矩阵并包括约束。

4. 装配系统质量矩阵并包括约束。

5. 求解特征问题及得到频率(ω_r)与振型(ϕ_r)向量，并打印结果。

6. 在物理坐标中形成激励向量。

7. 仅应用保留模态将激励向量变换成主坐标。

8. 应用适当的时间步长建立激励历程。

9. 假定模态阻尼因数、并应用数值积分得到在主坐标中的响应历程。

10. 变换响应到物理坐标。

11. 打印及(或)绘出响应历程。

例题 17.4

一均匀铝质悬臂梁静止 $t=0$，一个 10 lb 集中质量突然附加到梁的端部见图 E17.4.1，它的边界条件和性质表示在图 E17.4.2 中。梁模拟成三个 10in 平面刚架单元。计算下面的数据并打印(或视需要绘图)。

(a). 具有端部质量梁横向振动的固有频率。

(b). 相应于三个最低频率的振型。

(c). 梁的端部位移时间历程，应用第一模态表示，选择时间步长满足 $\Delta t<0.1T_1$，其中 T_1 为基本周期。

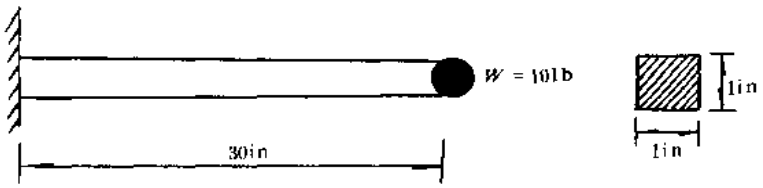


图 E17.4.1

$$E=10\times10^4 \quad \text{psi}$$

$$A=bh=1 \quad \text{in}^2$$

$$I=\frac{bh^3}{12}=8.333\times10^{-2}\text{in}^4$$

$$\rho=\frac{\gamma}{g}=\frac{0.100}{386}=2.591\times10^{-4} \quad \text{lb-s}^2/\text{in}^4$$

$$m=\frac{W}{g}=\frac{10}{386}=0.02591 \quad \text{lb-s}^2/\text{in}$$

解：

令系统坐标如图 E17.4.3 所示。

ISMIS 编目输入文件

START

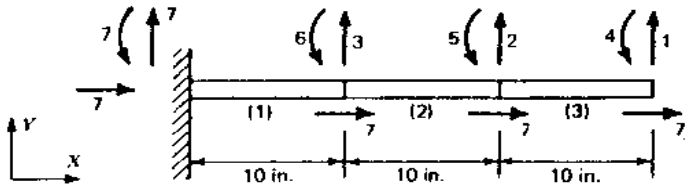


图 E17.4.2

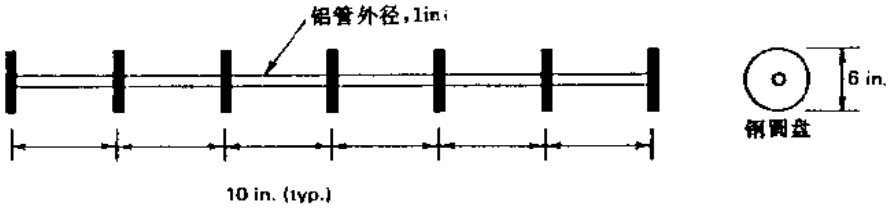


图 E17.4.3

```
*
** EXAMPLE 17.4 **
*
** DYMNIC RESPONSE CAICUIATION **
*
** MODE — DISPLACEMENT METHOD **
*
** STEP 1 ELEMENT STIFFNESS *
FRAMEL,KE
10,1,0,10,E+6,8.333E—2,1
PRINT,KE,1


* STEP 2,ELEMENT MASS *
FRAMMS,ME
10,0,2.591E — 4,1
PRINT,ME,1
*
* STEP3,ASSEMBLE SYSTEM STIFFNESS,*
FROM,KS,7,7
ADDMAT,KS,KE
7,7,7,7,3,6
ADDMAT,KS,KE
7,3,6,7,2,5
ADDMAT,KS,KE
7,2,5,7,1,4
RMVSM,KS,K,1,1,6,6
```

```
PRINT,K,1

''STEP 4,ASSEMBLE SYSTEM MASS'
*
'. INCORPORATE LUMPED MASS. '
FORM,MS,7,7
ADDMAT,MS,ME
7,7,7,7,3,6
ADDMAT,MS,ME
7,3,6,7,2,5
ADDMAT,MS,ME
7,2,5,7,1,4
LOAD LM,1,1
02591
PRINT,LM,1
ADDSM,MS,LM,1,1,1
RMVSM,MS,M,1,1,6,6
PRINT,M,1
*
' STEP5. SOLVE EIGENPROBLEM. *
EIGEN,K,M,VAL,VECT,6
TRANS.VECT,VEC
*
' OMEGA '' 2'
PRINT,VAL,2
SQREL,VAL
DUPI,VAL,HZ
SCALE,HZ,1592
*
' OMEGA (RAD/SEC)'
PRINT,HZ,2
*
' MODES (COLUMNS)'
PRINT,VEC,1
*
' SSTEP 6,FORM EXCITATION VECTOR. '
LOAD,P,6,1
-10,0,0,0,0,0
PRIN,P,1
*
' STEP,7,TRANSFORM IXCITATION VECTOR. '
RMVSM,VECT,ULT,1,1,1,6
MULT,UIT,P,F
*
```

```
* STEP 8,OENERATE EXCITATION TIME HIST. *
LOAD,FTIN,1
PRINT,FTIN,FT,41.005
*
* STEP 9. PERFORM RESPONSE CALCS. *
RMVSM,VAL,W1,1,1,1,1
RESPON,WI,F,FT,V,1,0,0,.005
*
*. STEP 10,TRANSFORM RESPONSE. *
RMYSM,UIT,U11,1,1,1,1
MSCALE,V,U11
*
*. STEP 11,PRINT AND PLOT RESVITS. *
PRINT,V,1
PLOT,V,1
**** TRANSIENT RESPONSE AT OF BEAM ****
STOP
ISMIS 程序输出记录
START
** EXAMPIE 17.4 * *
** DYNAMIC RESPONSE CAICULATION **
** MODE-DISPLACEMENT METHOD **
* STEP1 ELEMENT STIFFNESS *
PRAME KE
      6ROWS        6COIUMNS
DX=1.000E+01       A=1.000E+00
DY=0               E=1.000E+07
L=1.000E+01        I=8.333-02
PRINT      KE
SCALED     BY      1.0E+06
6                    1         2         3         4         5
     1      1.00000   0.00000   0.00000  -1.00000   0.00000   0.00000
     2      0.00000   .01000    .05000    0.0000   -.01000    .05000
     3      0.00000   .05000    .33332    0.00000  -.05000    .16666
     4     -1.00000   0.00000   0.00000   1.00000   0.00000   0.00000
     5      0.00000  -.01000   -.05000    0.00000   .01000   -.05000
     6      0.00000   .05000    .16666    0.00000  -.05000    .33332
*. STEP 2. ELEMENT MASSS . *
PRAMMS    ME
    6     ROWS     6 COLUMNS
DX=  1.000E+01     DY=  0.
RO=  2.591E-04     AR=  1.000E+00     L=1.000E+01
PRINT   ME
```

```
SCALED     BY     1.0E-03

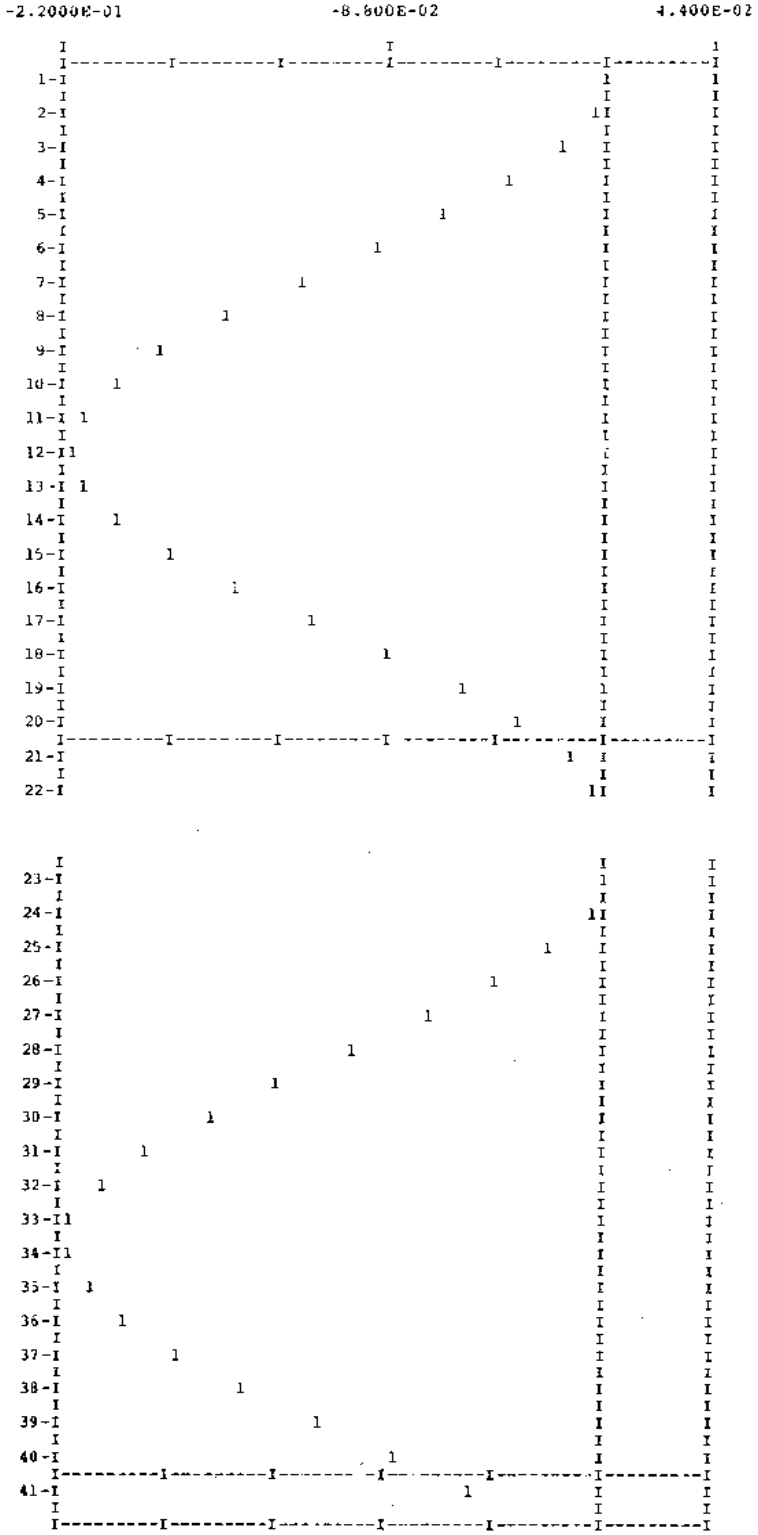
            1         2         3         4         5         6
    1     .86367    0.00000   0.00000   .43183    0.00000   0.00000
    2     0.00000   .96237    1.35719   0.00000   .33313    -.80198
    3     0.00000   1.35719   2.46762   0.00000   .80198    -1.85071
    4     .43183    0.00000   0.00000   .86367    0.00000   0.00000
    5     0.00000   .33313    .80198    0.00000   .96237    -1.35719
    6     0.00000   -.80198   -1.85071  0.00000   -1.35719  2.46762
*. STEP 3. ASSEMBLE SYSTEM STIFFMESS .*
    FORM       KS
    7 ROWS 7 COLUMNS
    ADDMAT     KS    KE
      DEGREES OF FREEDOM=7    7    7    7    3    6
    ADDMAT     KS    KE
      DEGREES OF FREEDOM=7    3    6    7    2    5
    ADDMAT     KS    KE
      DEGREES OF FREEDOM=7    2    5    7    1    4
    RMVSM      KS    K
      ROW NUMBER     1, COLUMN NUMBER     1
        6 ROWS     6 COLUMNS
    PRINT      K
    SCALED BY    1.0E+05
    1       2          3          4          5          6
    1    .10000    -.10000   0.00000   -.49998   .-49998   0.00000
    2   -.10000    .19999    -.10000   .49998    0.00000   -.49998
    3    0.00000   -.10000   .19999    0.00000   .49998    0.00000
    4   -.49998    .49998    0.00000   3.33320   1.66660   0.00000
    5   -.49998    0.00000   .49998    1.66660   6.66640   1.66660
    6    0.0000    -.49998   0.00000   0.00000   1.66660   6.66640
*. STEP 4. ASSEMBLE SYSTEM MASS .*
    *. INCORPORATE LUMPED MASS .*
    FORM MS
        7 ROWS       7 COLUMNS
    ADDMAT       MS       ME
      DEGREES OF FREEDOM=7    7    7    7    3    6
```

```
ADDMAT      MS      ME
  DEGREES OF FREEDOM=7   3   6   7   2   5
ADDMAT      MS      ME
  DEGREES OF FREEDOM=7   2   5   7   1   4
LOAD      LM
    1 ROWS      1 COLUMNS
PRINT     LM
SCALED BY   1.0E-02
             1
  1    2.59100
ADDSM      MS      LM
  ROW NUMBER   1,   COLUMN NUMBER    1
RMVSM      MS      M
  ROW NUMBER   1,   COLUMN NUMBER    1
    6 ROWS      6 COLUMNS
PRINT     M
SCALED     BY      1.0E-2
 ..........................................................................................
              1         2         3         4         5         6
    1      2.68724   .03331   0.00000   -.13572   .08020   0.00000
    2      .03331    .19247   .03331    -.08020   0.00000   .08020
    3      0.00000   .03331   .19247    0.00000   -.08020   0.00000
    4      -.13572   -.08020  0.00000   .24676    -.18507   0.00000
    5      .08020    0.00000  -.08020   -.18507   .49352    -.18507
    6      0.00000   .08020   0.00000   0.00000   -.18507   .49352
'.STEP 5. SOLVE EIGENPROBLEM .'
  EIGEN      K      M      VAL      VECT
    NUMBER OF EIGENVECTORS DESIRED=      6
      ORIGINAL TRACE=9.23532264E+08
      SUM OF EIGENVALUES=9.23532264E+08
  TRANS      VECT      VE
  'OMEGA''2'
  PRINT      VAL
  SCALED     BY    1.0E+08
        1          2          3          4          5          6
  1  .00003337  .00981368  .10378622  .56095007  2.06994600  6.49079329
```

```
SOREL      VAL
DUPL       VAL      HZ
SCALE      HZ
SCALAR= 1.5920000E-01
'OMEGA (RAD/SEC)'
PRINT VAL
SCALED BY   1.0E+04
        1          2          3          4          5          6
1  .00577673  .09906403  .32215869  .74896600  1.43873069  2.54770353
'FREQ (HZ)'
PRINT      HZ
SCALED BY   1.0E+03
        1          2          3          4          5          6
1  .00919655  .15770994  .51287664  1.19235388  2.29045926  4.05594402
'MODES (COLUMNS)'
PRINT    VES
SCALED BY   1.0E+01
        1          2          3          4          5          6
1  .60031    .11347    -.06523    .05023     .04000    -.03948
2  .31238   -1.60078   1.17777    .45598    1.53259    -.47041
3  .08961   -1.11811   -1.77354   -.92425   -.43371    -.76482
4  .02985    .22509     -.39541   .76785    1.29914   -2.21588
5  .02665    .07322     .27246    -.71828   -.19961   -1.83442
6  .01677   -.14148    .02933     .60952    -1.24188   -.88340
*.STEP 6. FORM EXCITATION VECTOR .*
LOAD P
    6 ROWS     1 COLUMNS
PRINT     P
SCALED BY   1.0E+01
        1
1   -1.00000
2    0.00000
3    0.00000
4    0.00000
5    0.00000
6    0.00000
```

```
*. STEP 7. TRANSFORM EXCITATION VECTOR .*
   RMVSM      VECT      UIT
   ROW NUMBER    1,    COLUMN NUMBER    1
      1 ROWS      6 COLUMNS
   MULT       UIT       P       E
   *. STEP 8. GENERATE EXCITATION TIME HIST. .*
   LOAD       FTIN
      2 ROWS      2 COLUMNS
   PRINT      FTIN
   SCALED BY    1.0E+00
            1         2
   1    0.00000    1.00000
   2    1.00000    1.00000
   FUNGN      FTIN      FT
     NUMBER OF VALUES DESIRED=   41
     X-INTERVAL DESIRED=   5.000E-03
   *. STEP 9. PERFORM RESPONSE CALCS. .*
   RMVSM      VAL       W1
   ROW NUMBER    1,    COLUMN NUMBER    1
      1 ROWS      1 COLUMNS
   RESPON   W1    F   FT    V
      OUTPUT INTERVAL=   1
   DAMPING RATIO=      0.00000
   INTEGRATION INTERVAL=5.000E-03
   COORDINATE       INITIAL DISP.       INITIAL VEL.
              1      0.                  0.
*. STEP 10. TRANSFORM RESPONSE .*
   RMVSM      U1T      U11
   ROW NUMBER    1, COLUMN NUMBER    1
         1 ROWS      1 COLUMNS
MSCALE V U11
SCALAR=6.0030915E+00
*. STEP 11. PRINT AND PLOT RESULTS .*
PRINT       V
SCALED    BY    1.0E-01
            1         2         3         4         5         6         7         8
   1     0.00000  -.04443  -.17406  -.337822  -.64013  -.93821  -1.24796  -1.54388
            9        10        11        12        13        14        15        16
```

***** TRANSIENT RESPONSE AT TIP OF BEAM *****



```
  1    -1.80162  -1.99998  -2.12263  -2.15949  -2.10751  -1.97098  -1.76113  -1.49523
         17        18        19        20        21        22        23        24
  1    -1.19516  -.88560   -.59203   -33.860   -.14617   -.03057   -.00131   -.06080
         25        26        27        28        29        30        31        32
  1    -.20415   -.41955   -.68929   -.99118   -1.30036  -1.59140  -1.84035  -2.02674
         33        34        35        36        37        38        39        40
  1    -2.13522  -2.15686  -2.08989  -1.93982  -1.71899  -1.44557  -1.14207  -.83345
         41
  1    -.54512
PLOT     V
```

注意：初步运行到第 5 步确定 $f_1=9.2$HZ 选择时间步长 $\Delta t=0.005$，即接近 $T_1/20$（为后面的响应计算）。因为响应计算中仅保留第一模态，时间步长短到足以保证用线性加速度法所在'RESPON'指令中的稳定性（第 18 章讨论稳定性课题）。响应曲线图具有$(1-\cos\omega_n t)$的形式，这对一个 SDOF 模型承受一阶跃输入是可能的。

因为典型动力响应分析输出的结果数量很大，所以整个打印选择与输出（画图都是）非常重要的。振型与固有频率的知识在振型迭加解中是很有用处的，能解释响应历程的输出是很重要的。

参考文献

17.1 T-C Chang and R.R. CRaig, Jr., "Normal Modes of Uniform Beams", *Proc. ASCE*. v. 95. nX EM4, 1025-1031(1969).

17.2 R.G. Anderson. B.M. Irons, and O.C. Zienkiewicz, "Vibrayion and stability of plates Using Finite Elements". *Int. J. Solids struct.*, v. 4, 1031-1055(1968).

17.3 J.S. Archer, "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems". *J. Struct, Div Proc. ASCE*, v, 89, 161-178(1963).

17.4 F.A. Leckie and G.M. Lindberg, "The Effect of lumped parameters on beam Freqencies", *Aeron. Quart.*, v. 14, 224-240(1963).

17.5 P. Tong, T.H.H. Pian, and L.L. Buceiarelli, "Mode Shapes and Frequencies by Finite Element Methad Using Consistent and lumped Masses", *Comps. Struot.* v. 11623-628(1971).

17.6 R. Gallgher and B lee, "Matrix Dynamic and Instalility Analysis with Noniform Elements", *Int J. Num, meth, Engr.*, v. 265-276(1970).

习题组 17.1

17.1

(a)应用 ISMIS 计算机程序（或其它专门程序）求解 5 个单元均匀悬臂梁的固有频率和振型（见图 p17.1），包括轴向与横向运动，应用相容质量矩阵。

取 $$A=I=E=\rho=1$$

(b)最低的三个轴向及最低的三个横向弯曲频率与精确值的比较。

(c)绘出六个振型，其频率见(b)。

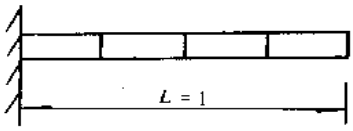


图 P17.1

17.2 空间宇宙飞船模型设计成(见参考文献 19.13)近似表示一个轨道飞行器与助推器联合构成外形,以便于能够进行在绪论中所指出的动力方面试验。飞行器模型($E=10\times10^6$psi)外径为 1in 及壁厚为 0.035in,长 50.5in 的铝套筒,沿套筒等长放置六个刚性圆盘,外径 6in,内径 1in,厚度 0.5in 的钢板(密接在管子上面),如图 P17.2 所示。

(a)应用 ISMIS 计算机程序计算这个结构的轴向与横向振动的频率和振型。假定两端是自由的,即没有边界约束。

(b)绘出最低的三个轴向模态的振型及最低的三个横向弯曲模态的振型。

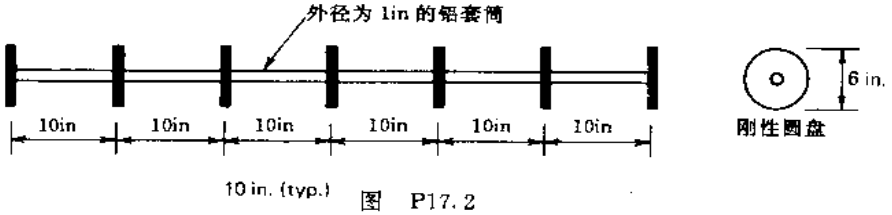


图 P17.2

17.3 应用盖恩缩减法去掉全部转动,重作习题 17.1。

17.4 重作习题 17.3,用一个集中质量矩阵代替原来的相容质量矩阵。

17.5 图 P17.5 表示三层建筑物的基本设计。

(a)应用 ISMIS(或其它专门计算机程序)确定该结构的固有频率及振型,并绘出振型。

(b)如果底层柱子刚度减少 5%,这对于频率与振型有何影响?

$$m_1=m_2=40\text{k-s}^2/\text{ft},\quad m_3=50\text{k-s}^2/\text{ft}$$

$$k_1=30\times10^3\text{k/ft},\quad k_2=40\times10^3\text{k/ft}$$

$$k_3=50\times10^3\text{k/ft}$$

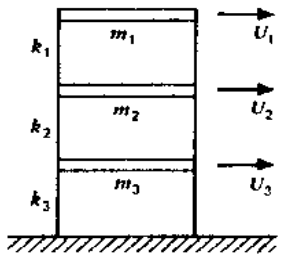


图 P17.5

17.6 一刚性平台焊接在圆锥钢管柱子上,如图 P17.6 所示。由于圆柱的倾斜,把它作为象在习题 2.1 中的简单的 SDOF 模型是不适合的。

(a)应用 ISMIS 计算机程序(或其它专门程序)对这个结构的三个自由度模型求解频率与模态,应用所示的系统坐标,略去柱子的惯性(注意:§16.6 的方法可用柱子位移与三个系统位移有关)。

(b)略去位移 2 与 3 系统为单自由度系统是否适合?

(c)在三个自由度模型中,略去质量惯性矩 I_G 是否可行?

$m=907\text{kg}$　　$A=2000\text{mm}^2$

$I_G=302\text{kg.m}^2$　　$I=300\text{cm}^4$

$E=200\text{GN/m}^2$

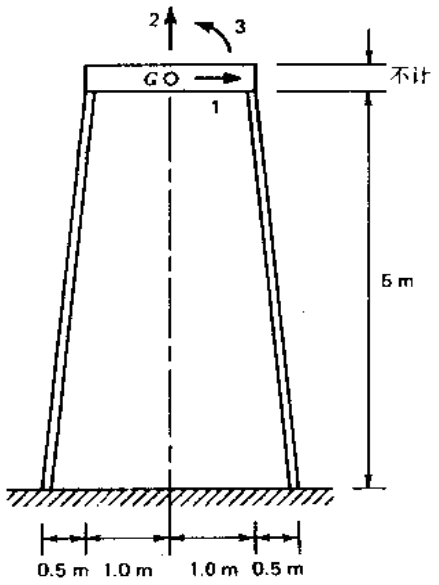


图　P17.6

习题组 17.2

17.7　在图 P17.5 三层剪力建筑承受风荷载,假定具有形式

$$\mathbf{P}(t)=\begin{Bmatrix}0.4\\0.7\\1.0\end{Bmatrix}f(t)k$$

其中 $f(t)$表示在图 P17.7 中,应用 ISMIS 计算机程序(或其它专门程序)确定在 $0\leqq t\leqq 1.0S$ 间的动力响应,假定 $\mathbf{U}(0)=\dot{\mathbf{U}}(0)=\mathbf{0}$

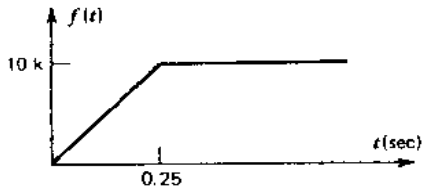


图　P17.7

第 18 章　动力响应直接积分法

第 15 章用振型叠加法将运动方程变换成主坐标得到线性 MDOF 系统的动力响应，以及求解非耦联运动方程组的结果。图 15.1 指出 MODF 系统为非线性或具有阻尼耦联的，则需要直接积分耦联运动方程组。本章首先要研究如何表示系统中的阻尼，它的响应完全不能用振型叠加计算。然后将非线性系统分析的增量法扩展到 MODF 系统中；增量法已在第 7 章 SDOF 系统中用过。最后检验数值积分算法用 SDOF 系统时的稳定性与精度的性质，并且要研究这些算法用于 MDOF 系统运动方程直接积分的含义。

本章将完成如下内容：

- 生成 MDOF 系统合理的系统阻尼矩阵。
- 积分材料非线性 MDOF 系统方程来建立增量分式。
- 定义下面各项：无条件稳定、条件稳定、无条件的不稳定、周期误差、幅值误差、数值阻尼。
- 讨论上述各项与时间步长的关系。
- 各种逐步数值积分法名称，以及讨论它们对 MDOF 系统运动方程直接积分的适应性。

§18.1　MDOF 系统的阻尼

在 §15.4 中曾经讨论过，具有特殊形式的粘滞阻尼 MDOF 系统的响应曾经讨论过，这种阻尼形式满足正交性方程

$$\boldsymbol{\Phi}_r^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi}_s = 0 \qquad r \neq s \tag{18.1}$$

其中 C 是在物理坐标（或广义）中的系统粘滞系阻尼矩阵，其中 ϕ 为系统模态。那么模态阻尼因数 ζ_i 可假定为基于研究中的典型结构类型所提供的阻尼，这类阻尼在著作中称为**正交的，经典的，模态的**或**成比例**的阻尼。

这里有许多情形下的阻尼完全不能用上面的模式表示。建筑物及其地基土壤的模拟即是一例。建筑物在刚性地基上的阻尼水准小于土壤地基，当建立联合的有限元模型并且当用土壤-结构体系模式来确定主坐标时，则在主坐标中所得到的阻尼矩阵含有非对角耦联项。海上结构具有流体阻尼，以及具有集中吸收能量的结构提供了其他的例证，这些必须考虑非比例阻尼。

对于具有非线性阻尼系统响应的解曾提出过各种近似的方法。Hurtg 与 Rubinstein[18.1]在 15 中章的类似于振型迭加法中应用复合模型。Warburton 与 Soni[18.2]等曾试图建立等效的对

角阻尼矩阵，或者至少建立非比例阻尼可近似作为比例阻尼的标准。Colugh 与 Mojtahedi[18.3]比较了具有非比例阻尼统系响应各种求解方法，并得出结论：'最有效的方法是根据一组截断的无阻尼模态坐标来表示响应，同时直接积分所是到的方程'。肯定这种近似方法是很简单的，是应用有效的分析工具（特征解用系统实际模态处理系统，直接积分算法等），同时避免不必要的近似表示，可以期望研究工作在继续按照分析与实验两个方面来处理阻尼。

至今我们曾经研究两类阻尼课题：1. 具有比例阻尼线性 **MDOF** 系统的响应使用振型迭加法求解（第 15 章）；2. 具有非比例阻尼系统的响应。现在提出第三类课题，当需要一个在物理坐标中的阻尼矩阵时，阻尼如何表示？一种情形是产生于土壤-结构问题，这里分别需要土壤和结构的物理阻尼矩阵。对于非线性问题也需要物理阻尼矩阵，介绍一个粘滞阻尼矩阵用所有机械装置的能量逸散，不是材料屈服来解释。

原则上，单元阻尼矩阵可用 § 16.2 中得到单元刚度矩阵与单元质量矩阵相类似的程序求得。然而材料阻尼性质这样确定是不适合的，此外在结构中的许多阻尼是从结点及非结构单元（例如隔板）得来的。所以结构阻尼通常由系统直接确定，而不是根据个别单元的性质。

一种确定系统阻尼矩阵的方法是用比例阻尼的一种特殊形式，称为**瑞利阻尼**。定义为

$$\mathbf{C}=a_0\mathbf{M}+a_1\mathbf{K} \tag{18.2}$$

在非线性系统情形，$\mathbf{K}$ 可表示为初始的切线刚度矩阵，$\mathbf{C}$ 可随刚度变化而变化。常数 a_0 与 a_1 可选择由给定的两个模态产生所规定的模态阻尼因数得到，令 (ω_r,Φ_r) 为其特征对相应于

$$(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M})\phi_r=\mathbf{0} \qquad r=1,2,\cdots,N \tag{18.3}$$

正交性方程为

$$\phi_r^T\mathbf{M}\phi_s=M_r\delta_{rs} \tag{18.4a}$$

$$\phi_r^T\mathbf{K}\phi_s=\omega_r^2M_r\delta_{rs} \tag{18.4b}$$

于是，由公式 18.2 定义瑞利阻尼

$$\phi_r^T\mathbf{C}\phi_s=(a_0+a_1\omega_r^2)M_r\delta_{rs} \tag{18.5}$$

因之，从公式 15.33

$$C_r=\phi_r^TC\phi_r=2M_r\omega_r\zeta_r \tag{18.6}$$

系统的阻尼因数为

$$\zeta_r=\frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{\omega_r}+a_1\omega_r\right) \tag{18.7}$$

于是瑞利阻尼容易由选择两个模态的 ζ_r 来确定并求解 a_0 与 a_1。剩下的模态中的阻尼于是可由公式 18.7 确定。$a_0\mathbf{M}$ 在公式 18.2 对阻尼的贡献体现在公式 18.7 对 ξ_r 的贡献，它与 ω_r 成反比。另一方面，$a_1\mathbf{K}$ 项导致对 ζ_r 的贡献，它与 ω_r 为线性增加。

瑞利阻尼不利的是不可能确定所有研究中模态的真实阻尼。而这种方法容许下面的阻尼矩阵，它对于给定的模态数目用特殊的阻尼因数导出比例阻尼。

从公式 15.9b

$$C=\Phi^T\mathbf{C}\,\Phi=\mathrm{diag}(2\zeta_r\omega_rM_r) \tag{18.8}$$

于是，物理阻尼矩阵 C 给出为

$$\mathbf{C}=-\Phi^{-T}C\,\Phi^{-1} \tag{18.9}$$

对于 Φ^{-1} 合适的表达式，可从模态的正交性质演变而来，由于

$$M=\Phi^T\mathbf{M}\,\Phi \tag{18.10a}$$

于是，

$$\mathbf{I}=M^{-1}M=(M^{-1}\Phi^T\mathbf{M})\Phi=\Phi^{-1}\Phi \tag{18.10b}$$

所以，
$$\Phi^{-1}=M^{-1}\Phi^{T}\mathbf{M} \tag{18.10c}$$
公式 18.9 与 18.10c 联立给出
$$\mathbf{C}=(\mathbf{M}\,\Phi\,M^{-1})C(M^{-1}\Phi\,\mathbf{M}) \tag{18.11}$$
因为 M 与 C 是对角阵，公式 18.11 可写成形式
$$\mathbf{C}=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{2\zeta_r\omega_r}{M_r}\right)(\mathbf{M}\phi_r)(\mathbf{M}\phi_r)^{T} \tag{18.12}$$
由于模态的正交性可看出公式 18.12 给出
$$\Phi_s^{T}\mathbf{C}\,\Phi_s=2\zeta_s\omega_s M_s \tag{18.13}$$
因此，在公式 18.12 中说明对 ζ_r 非零值的模态，它具有阻尼表示为 $\mathbf{C}$，而在公式 18.12 中无阻尼的这些模态，其 ζ_r 规定为零。

如果在响应计算中考虑有限个低频模态的数目是重要的，那么可用公式 18.12 的截断形式可用如下表示
$$\mathbf{C}=\sum_{r=1}^{N_c}\left(\frac{2\zeta_r\omega_r}{M_r}\right)(\mathbf{M}\,\Phi_r)(M\,\Phi_r)^{T} \tag{18.14}$$
这样产生一个阻尼矩阵 $\mathbf{C}$，认为在模态 $(N_c+1),(N_c+2),\cdots,N$ 中无阻尼。然而希望在这些高模态中可给出阻尼，这样可修改公式 18.14，模态 $r=1,2,\cdots,N_c$ 具有指定的阻尼比，同时模态 $N_c+_1,N_c+_2,\cdots,N$ 具有比模态 N_c 更大的阻尼，这是可能的，令
$$\mathbf{C}=a_1\mathbf{K}+\sum_{r=1}^{N_c-1}\frac{2\zeta_r\omega_r}{\mathrm{M}_r}(\mathbf{M}\phi_r)(\mathbf{M}\phi_r)^{T} \tag{18.15}$$
其中
$$a_1=\frac{2\zeta_{N_c}}{\omega_{N_c}} \tag{18.16a}$$
$$\zeta_r=\zeta_r-\zeta_{N_c}\left(\frac{\omega_r}{\omega_{N_c}}\right) \tag{18.16b}$$
于是
$$\zeta_s=\begin{cases}\text{指定值 } s=1,2,\cdots N_c\\ \zeta_{N_c}\dfrac{\omega_s}{\omega_{Nc}}\quad,\quad s=N_c+1,N_c+2\cdots N\end{cases} \tag{18.17}$$
任何时候直接积分需要使用物理阻尼矩阵，瑞利阻尼由公式 18.2 确定，广义的比例阻尼由公式 18.12 确定，同时公式 18.15 可用于近似表示阻尼。

例题 18.1

a. 用公式 18.15 对例题 15.1 的建筑物建立物理阻尼矩阵，相应的 $\zeta_1=\zeta_2=0.01$。

b. 确定阻尼比 ζ_3 与 ζ_4。

解：

a. 由公式 18.15
$$\mathbf{C}=a_1\mathbf{K}+\left(\frac{2\zeta_1\omega_1}{M_1}\right)\mathbf{M}\phi_1(M\phi_1)^{T} \tag{1}$$
其中
$$a_1=\frac{2\zeta_2}{\omega_2} \tag{2a}$$
$$\zeta_1=\zeta_1-\zeta_2\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \tag{2b}$$
于是，

$$a_1=\frac{2\times 0.01}{29.660}=6.7431\times 10^{-4} \tag{3a}$$

$$\zeta_1=0.01-0.01\times\frac{13.294}{29.660}=5.5179\times 10^{-3} \tag{3b}$$

$$\boldsymbol{M\phi}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0000\\0.77910\\0.49655\\0.23506\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.00000\\1.55820\\0.99310\\0.70518\end{Bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&3&-2&0\\0&-2&5&-3\\0&0&-3&7\end{bmatrix} \tag{5}$$

上面代入公式(1)给出

$$\boxed{\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0.59051&-0.45988&0.05071&0.0360\\-0.45988&1.74233&-0.99987&0.05611\\0.05071&-0.99987&2.74760&-1.58258\\0.03601&0.05611&-1.58258&3.80153\end{bmatrix}} \tag{6}$$

b. 由方程 18.17b

$$\zeta_s=\zeta_2\left(\frac{\omega_s}{\omega_2}\right)\quad,\quad s=3,4 \tag{7}$$

于是

$$\boxed{\begin{aligned}\zeta_3&=0.01\left(\frac{41.079}{29.660}\right)=0.0138\\ \zeta_4&=0.01\left(\frac{55.882}{29.660}\right)=0.0188\end{aligned}} \tag{8}$$

§18-2 非线性 MDOF 系统

在§7.4中已经论述了一种逐步渐近法求解非线性 **SDOF** 系统的响应，瞬态非线性结构特性的有限元分析课题是一个广泛流行的研究课题(例如参考文献 18.4，18.5 与 18.6)。在这一小节中不打算作更多的论述，仅介绍一种渐近法能够求解一些非线性 **MDOF** 结构动力问题。

振型叠加法已用于确定具有比例阻尼、线性 **MDOF** 系统的响应，它不适合于确定非线性响应。然而，根据体系的初始质量及刚度以及作为从物理坐标变换成一组主坐标为基础，它仍然有效地确定系统模态。当出现非线性即阻尼耦联时，则主坐标中的运动方程必须用逐步渐近法解。用前节中讨论的方法可用来建立合理的阻尼矩阵在非线性分析中使用。

威尔逊等[18.7]对 **MDOF** 系统的非线性运动方程的逐步积分提出一个增量表示法。这种方法类似于§7.4中表示的非线性 **SDOF** 系统，除了 Wilson-θ 法之外不是平均加速度法，是采用了近似求导运动方程，因此逐步积分就能完成。(在§18.3中要讨论为什么 Wilson-θ 法以及其他方法可能对 **MDOF** 系统是优于平均加速度法。)

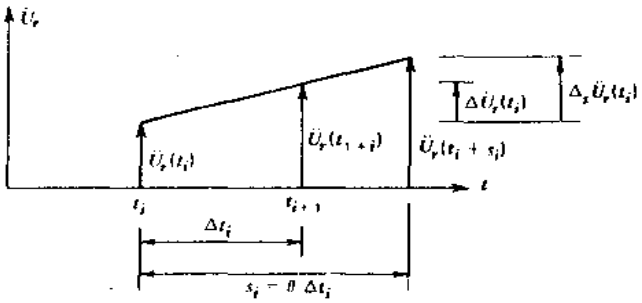


图 18.1　威尔逊-θ 法的线性加速度假定

wilson-θ 法的基本假定是加速度向量 ü 的每一个分量 $\ddot{U}_r$ 随时间线性变化，**扩充时间步长** $s_i=\theta\Delta t_i$ 如图 18.1 所指出。在 § 18.3 中将表示 θ 必须满足 $\theta\geq 1.37$。虽然 θ 的最佳值已经表示为 1.420815，但通常取值 $\theta=1.4$（见参考文献 18.8）。应用上面的线性假定可表示为

$$\Delta_s\dot{\mathbf{U}}(t_i)=s_i\ddot{\mathbf{U}}(t_i)+\frac{s_i}{2}\Delta_s\ddot{\mathbf{U}}(t_i) \tag{18.18a}$$

$$\Delta_s\mathbf{U}(t_i)=s_i\dot{\mathbf{U}}(t_i)+\frac{s_i^2}{2}\ddot{\mathbf{U}}(t_i)+\frac{s_i^2}{6}\Delta_s\ddot{\mathbf{U}}(t_i) \tag{18.18b}$$

其中

$$\Delta_s\mathbf{U}(t_i)\equiv\mathbf{U}(t_i+s_i)-\mathbf{U}(t_i) \tag{18.19a}$$

$$\Delta_s\dot{\mathbf{U}}(t_i)\equiv\dot{\mathbf{U}}(t_i+s_i)-\dot{\mathbf{U}}(t_i) \tag{18.19b}$$

$$\Delta_s\ddot{\mathbf{U}}(t_i)\equiv\ddot{\mathbf{U}}(t_i+s_i)-\ddot{\mathbf{U}}(t_i) \tag{18.19c}$$

根据 $\Delta_s\mathbf{U}(t_i)$ 公式 18.19 可对 $\Delta_s\ddot{\mathbf{U}}(t_i)$ 与 $\Delta_s\dot{\mathbf{U}}(t_i)$ 求解

$$\Delta_s\ddot{\mathbf{U}}(t_i)=\frac{3}{s_i^2}\Delta_s\mathbf{U}(t_i)-\frac{6}{s_i}\dot{\mathbf{U}}(t_i)-3\ddot{\mathbf{U}}(t_i) \tag{18.20a}$$

$$\Delta_s\dot{\mathbf{U}}(t_i)=\frac{3}{s_i}\Delta_s\mathbf{U}(t_i)-3\dot{\mathbf{U}}(t_i)-\frac{s_i}{2}\ddot{\mathbf{U}}(t_i) \tag{18.20b}$$

将这些代入增量平衡公式

$$\mathbf{M}\Delta_s\ddot{\mathbf{U}}(t_i)+\mathbf{C}(t_i)\Delta_s\dot{\mathbf{U}}(t_i)+\mathbf{K}(t_i)\Delta_s\mathbf{U}(t_i)$$
$$=\hat{\mathbf{P}}(t_i+s_i)-\mathbf{P}(t_i) \tag{18.21}$$

其中设计荷载 $\mathbf{P}(t_i+s_i)$ 为

$$\hat{\mathbf{P}}(t_i+s_i)=\mathbf{P}(t_i)+\theta[\mathbf{P}(t_i+\Delta t_i)-\mathbf{P}(t_i)] \tag{18.22}$$

这是必需的，因为假定这种荷载仅在 t_i 与 $t_i+\Delta t_i$ 等情形给出，公式 18.2 到 18.22 可联合给出

$$\mathbf{K}^*(t_i)\Delta_s\mathbf{U}(t_i)=\mathbf{P}^*(t_i) \tag{18.23}$$

其中

$$\mathbf{K}^*(t_i)=\mathbf{K}(t_i)+\frac{3}{s_i}\mathbf{C}(t_i)+\frac{6}{s_i^2}\mathbf{M} \tag{18.24a}$$

$$\mathbf{P}^*(t_i)=\theta[\mathbf{P}(t_i+\Delta t_i)-\mathbf{P}(t_i)]+\mathbf{M}\left[\frac{6}{s_i}\dot{\mathbf{U}}(t_i)+3\ddot{\mathbf{U}}(t_i)\right]$$
$$+\mathbf{C}(t_i)\left[3\dot{\mathbf{U}}(t_i)+\frac{s_i}{2}\ddot{\mathbf{U}}(t_i)\right] \tag{18.24b}$$

于是公式 18.23 可对 $\Delta_s\mathbf{U}(t_i)$ 求解等这个已经得到后，公式 18.20a 给出加速度增量 $\Delta_s\ddot{\mathbf{U}}(t_i)$。从图 18.1 可以看出

$$\Delta\ddot{\mathbf{U}}(t_i)=\frac{1}{\theta}\Delta_\theta\ddot{\mathbf{U}}(t_i) \tag{18.25}$$

$\Delta_\theta\ddot{\mathbf{U}}(t_i)$取的值，类似于公式 18.18 给出公式

$$\dot{\mathbf{U}}(t_i+\Delta t_i)=\dot{\mathbf{U}}(t_i)+\Delta t_i\ddot{\mathbf{U}}(t_i)+\frac{\Delta t_i}{2}\Delta\ddot{\mathbf{U}}(t_i) \tag{18.26a}$$

$$\mathbf{U}(t_i+\Delta t_i)=\mathbf{U}(t_i)+\Delta t_i\dot{\mathbf{U}}(t)+\frac{\Delta t_i^2}{2}\ddot{\mathbf{U}}(t_i)+\frac{\Delta t_i^2}{6}\Delta\ddot{\mathbf{U}}t_i \tag{18.26b}$$

为保证在 $t_i+\Delta t_i$ 的动力平衡，其加速度 $\ddot{\mathbf{U}}(t_i+\Delta t_i)$从平衡方程得到

$$\ddot{\mathbf{U}}(t_i+\Delta t_i)=\mathbf{M}^{-1}[\mathbf{P}(t_i+\Delta t_i)-\mathbf{F}_D(t_i+\Delta t_i)-\mathbf{F}_s(t_i+\Delta t_i)] \tag{18.26c}$$

而不是从公式 18.25 的 $\Delta\ddot{\mathbf{U}}(t_i)$直接得到。公式 18.26 给出 F一个时间步长的初始条件。

§18.3 逐步数值积分算法特性

在第 7 章中已经论述平均加速度算法，以及在 §18.2 中已用过 Wilson-θ 法。这些是许多有效方法中的两个例子。为了实现线性或非线性运动方程的逐步数值积分来得到结构的瞬态响应，这些数值积分有两个很重要的性质、即稳定性与精度、现在要进行讨论。首先研究用数值积分解线性 **SDOF** 问题，然后要讨论涉及这些方法应用于 **MDOF** 系统运动方程的直接积分。

逐步积分算法的运算公式

下面讨论稳定性与精度，逐步积分算法公式用算子形式[18.8,18.9]将是有用的。应用 §7.2 中平均加速度法作为例子，三个相关的方程是在时刻 $t_i+\Delta t_i$ 的运动方程。

$$M\ddot{U}_{i+1}+C\dot{U}_{i+1}+KU_{i+1}=P_{i+1} \tag{18.27}$$

并由公式 7.10 与 7.11 运动学的近似表达式

$$\dot{U}_{i+1}=\dot{U}_i+\frac{\Delta t_i}{2}(\ddot{U}_i+\ddot{U}_{i+1}) \tag{18.28}$$

$$U_{i+1}=U_i+\Delta t_i\dot{U}_i+\frac{\Delta t_i^2}{4}(\ddot{U}_i+\ddot{U}_{i+1}) \tag{18.29}$$

这些可方便的表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix}K & C & M\\ 0 & 1 & \frac{-\Delta t_i}{2}\\ 1 & 0 & \frac{-\Delta t_i^2}{4}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_{i+1}\\ \dot{U}_{i+1}\\ \ddot{U}_{i+1}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{\Delta t_i}{2}\\ 1 & \Delta t_i & \frac{\Delta t_i^2}{4}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_i\\ \dot{U}_i\\ \ddot{U}_i\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}P_{i+1}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{18.30}$$

或

$$\mathbf{K}_1\mathbf{U}_{i+1}=\mathbf{K}_0\mathbf{U}_i+\mathbf{P}_{i+1} \tag{18.31}$$

公式 18.30 可明确地用 $\mathbf{K}_1$ 的转置得到解

$$\mathbf{L}=\mathbf{K}_1^{-1}=-\frac{1}{M+\frac{C\Delta t_i}{2}+\frac{K\Delta t_i^2}{4}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{-\Delta t_i^2}{4} & \frac{C\Delta t_i}{4} & -\left(M+\frac{C\Delta t_i}{2}\right)\\ \frac{-\Delta t_i}{2} & -(M+\frac{K\Delta t_i^2}{4}) & \frac{K\Delta t_i}{2}\\ -1 & C & -K\end{bmatrix} \tag{18.32}$$

这还称为**荷载算子**，于是建立**递推关系**

$$\mathbf{U}_{i+1}=\mathbf{A}\mathbf{U}_i+\mathrm{LP}_{i+1} \tag{18.33}$$

其中

$$\mathbf{A}=\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_0=\frac{1}{1+\frac{\eta}{2}+\frac{\xi}{4}}\begin{bmatrix}\left(1+\frac{\eta}{2}\right) & \Delta t_i\left(1+\frac{\eta}{4}\right) & \frac{\Delta t_i^2}{4}\\ \frac{-\xi}{2\Delta t_i} & \left(1-\frac{\xi}{4}\right) & \frac{\Delta t_i}{2}\\ \frac{-\xi}{\Delta t_i^2} & \frac{-(\xi+\eta)}{\Delta t_i} & -\left(\frac{\eta}{2}+\frac{\xi}{4}\right)\end{bmatrix} \tag{18.34}$$

称为**放大系数矩阵**，及

$$\mathbf{F}_{i+1}=\mathbf{L}\mathbf{P}_{i+1}=\frac{1}{1+\frac{\eta}{2}+\frac{\xi}{4}}\begin{Bmatrix}\frac{\Delta t_i^2}{4}\\ \frac{\Delta t_i}{2}\\ 1\end{Bmatrix}\frac{\boldsymbol{P}\mathrm{i}+1}{\boldsymbol{M}} \tag{18.35}$$

称为**荷载向量**，其中

$$\xi=\frac{K\Delta t_i^2}{M}=\omega_n^2\Delta t_i^2$$

$$\eta=\frac{C\Delta t_i}{M}=2\zeta\omega_n\Delta t_i \tag{18.36}$$

例题 18-2

应用平均加速度法得到无阻尼 *SDOF* 系统自由振动响应。取

$$K=M=U(0)=1,\quad \dot{U}(0)=0$$

选择合理的时间步长，以及对 $0\leqslant t\leqslant 2.0\mathrm{s}$ 实行积分。

解：

$$\omega_n=\left(\frac{K}{M}\right)^{1/2}=1 \tag{1}$$

$$T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=2\pi\mathrm{s} \tag{2}$$

应用 $\Delta t_i=0.2\mathrm{s}=$常量，这比根据经验值 $T_n/10$ 短。

$$\xi=\omega_n^2\Delta t^2=1\times 0.2^2=0.04 \tag{3}$$

$$\eta=2\zeta\omega_n\Delta t=0 \tag{4}$$

因为这是自由振动，公式 18.33 递推关系变成

$$\mathbf{U}_{i+1}=\mathbf{A}\mathbf{U}_i \tag{5}$$

其中 A 由公式 18.34 给出

$$\mathrm{A}=\frac{1}{1.01}\begin{bmatrix}1.00 & 0.20 & 0.01\\ -0.10 & 0.99 & 0.10\\ -1.00 & -0.20 & -0.01\end{bmatrix} \tag{6}$$

运动方程为

$$\ddot{U}+U=0 \tag{7}$$

如此初始条件向量为

$$\mathbf{U}_0=\begin{Bmatrix}U(0)\\ \dot{U}(0)\\ \ddot{U}(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{Bmatrix} \tag{8}$$

于是，从公式 5

$$\mathbf{U}(0.2)\equiv\mathbf{U}_1=\mathbf{A}\mathbf{U}_0=\frac{1}{1.01}\begin{Bmatrix}0.99\\ -0.20\\ -0.99\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.98020\\ -0.19802\\ -0.98020\end{Bmatrix} \tag{9}$$

继续

$$\mathbf{U}(0.4)\equiv\mathbf{U}_2=\mathbf{A}\mathbf{U}_1=\frac{1}{1.01}\begin{Bmatrix}0.93079\\ -0.39208\\ -0.93079\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.92158\\ -0.38820\\ 0.92158\end{Bmatrix} \tag{10}$$

下表为计算摘要及逐步解与精确解的比较，$U(t)=\cos(t)$。

自由振动平均加速度解

i	t_i	$\mathbf{U}_i$	$\dot{\mathbf{U}}_i$	$\ddot{\mathbf{U}}_i$	$\cos(t_i)$
0	0.0	−1.00000	0.00000	1.00000	1.00000
1	0.2	−0.98020	−0.19802	0.98020	0.98007
2	0.4	−0.92158	−0.38820	0.92158	0.92106
3	0.6	−0.82646	−0.56300	0.82646	0.82534
4	0.8	−0.69861	−0.71551	0.69861	0.69671
5	1.0	−0.54309	−0.83968	0.54309	0.54030
6	1.2	−0.36606	−0.93059	0.36606	0.36236
7	1.4	−0.17454	−0.98465	0.17454	0.16997
8	1.6	0.02390	−0.99971	−0.02390	−0.02920
9	1.8	0.22139	−0.97519	−0.22139	−0.27720
10	2.0	0.41011	−0.91024	−0.41011	−0.41615

稳定性

正如例题 18.2 所述自由振动

$$\mathbf{U}_{i+1}=\mathbf{A}\mathbf{U}_i \tag{18.37}$$

为此

$$\mathbf{U}_1=\mathbf{A}\mathbf{U}_0\quad,\quad\mathbf{U}_2=\mathbf{A}\mathbf{U}_1=\mathbf{A}^2\mathbf{U}_2 \tag{18.38}$$

依此即每一步积分相应提高放大系数矩阵的幂。积分算子的这种性质可用特征值的特征来描述，研究特征值问题。

$$\mathbf{A}\phi_r=\lambda_r\phi_r \tag{18.39}$$

因为 **A** 为一个 3×3 矩阵，它的元素通常依赖于 ξ，η 及 Δt_i（见公式 18.34），将有三个特征值依赖于这些公式。三个特征方程可联立，记作

$$\mathbf{A}\,\Phi=\Phi\,\Lambda \tag{18.40}$$

于是

$$\mathbf{A}=\boldsymbol{\Phi}\,\Lambda\,\boldsymbol{\Phi}-1 \tag{18.41}$$

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}=\boldsymbol{\Phi}\,\Lambda^2\,\boldsymbol{\Phi}^{-1} \tag{18.42}$$

$$\mathbf{A}^s=\boldsymbol{\Phi}\,\Lambda^s\,\boldsymbol{\Phi}^{-1}$$

由公式 18.42 可以看出，如果 A 的三个特征值的任意数值大于 1，则是每一时间步长的解会有一个放大，这导出下面稳定的定义。

积分算子引起的解与时间步长无关的无限制增长称为**无条件不稳定算子**。如果时间步长满足 $\Delta t_i \leqslant \Delta t_{cr}$，算子导出有限制解的称为**条件稳定**，算子导出有限制的解与时间步长无关称为无条件稳定算子。虽然，如果注意时间步长的限制，条件稳定算子是可能应用的，但是**无条件稳定算子是最寄与希望的**。平均加速度算子是无条件稳定。Wilson-θ 法仅当 $\theta \geqslant 1.37$ 时是无条件稳定。算子稳定性的进一步论述可见参考文献 18.8，18.9 与 18.10。

积分算子的稳定性课题是与**数值衰减**或**数值逸散**课题密切相关的，积分算子的**谱半径**定义为

$$\rho=\max|\lambda_r| \tag{18.43}$$

如果 $\rho>1$ 算子是不稳定的，因为其解将在每一时间步长放大。另一方面，如 $\rho<1$ 将是数值衰减的解，图 18.2 表示各种算子时间步长与谱半径之间的关系，包括在参考文献 18.11 中介绍的一种新的算子，以及根据这个图的稳定性与数字逸散得到定性的表示。

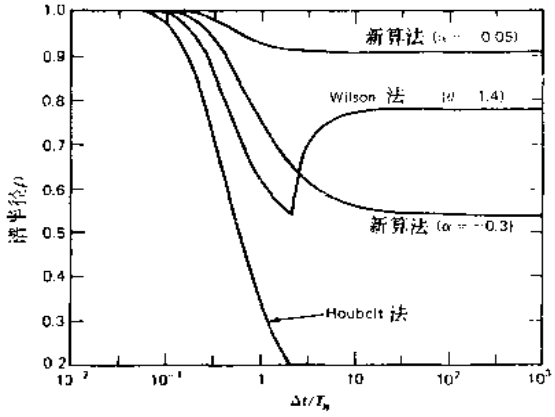


图 18.2　以 $\Delta t/T_n$ 为函数的谱半径[18.12]

精度

数值积分算法的精度特征可由两方面属性表示：**幅值精度**与**周期精**度。图 18.3 表示为无阻尼 **SDOF** 系统自由振动的精确响应以及用一个短的时间步长计算的数值解，可以看出，即便是一个短的时间步长，使用这个积分算子同样产生不精确的解。幅值衰减由于数值逸散的结果，及也有周期延长。图 18.4 表示根据平均加速度算法的相应响应计算。这种情况没有数值逸散，但是有周期延长。降低周期误差可用减少时间步长比$\frac{\Delta t}{T_n}$得到。图 18.5 与 18.6 表示各种积分算子以时间步长比$\frac{\Delta t}{T_n}$为函数的数值衰减因数及相对周期误差。参考文献 18.8，18.9 及 18.11 可作为更详细的参考。

MDOF 系统直接积分

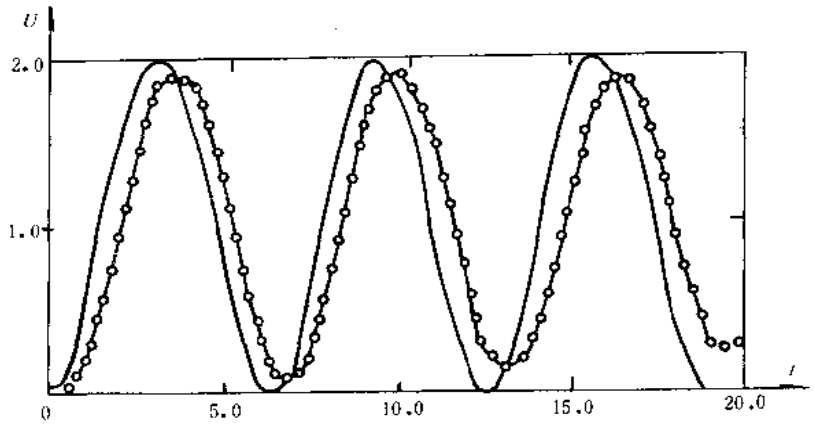


图 18.3　在数值解中振幅与周期误差的说明[18.13]

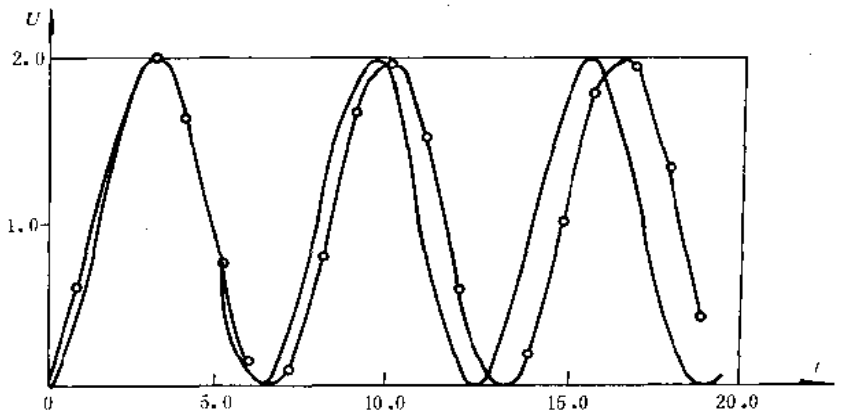


图 18.4　应用平均加速度算子数值积分[18.14]

前面的图示可以清楚地看出，在确定 **SDOF** 系统数值解的稳定性与精度中，时间步长起了关键作用，现在研究这些数值积分法对 **MDOF** 系统运动方程直接积分的一种应用，虽然方程可解，不是非耦联的方程，但是很容易想到响应如同是系统在它的 N 个模态中的每一个响应的叠加。这个问题分解为：使用什么样的数值积分算法？及应用什么样的时间步长？对这些问题将作重点的叙述。

在选择一种方法时首先考虑的是它的稳定性。最好的情况是希望所采用的方法是无条件稳定*。这里留下一个广泛的选择包括平均加速度法，Wilson-θ 法以及其它方法。其次，它可从图 18.5 观察到平均加速度法不产生幅值误差（例如无数值逸散），与时间步长无关系，以及由图 18.6 可以看出表示在图上的方法具有最低周期误差。这些特征使得平均加速度法对于积分 **SDOF** 系统为最好的选择。然而，对 **MDOF** 系统的要求则是严谨的，回忆表 17.1 的讨论，在最多有限个自由度模型（例如假定振型或有限元模型）中高频率与振型不精确，表明了较高模态的数学模拟是缺少的。因此在直接积分中希望用数值逸散来滤出这些高模态影响，产生的结果

* 明晰的方法不是无条件稳定的，是比任何无条件稳定方法计算简单，当时间步长已由其它因素限制时（如在非线性分析中），则更是这样。

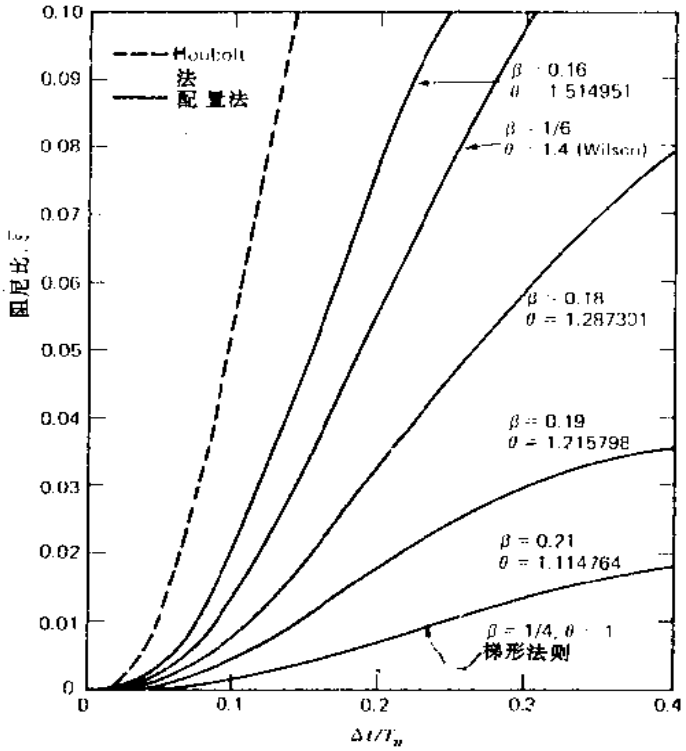


图 18.5 对于各种积分数字阻尼因子图解[18.15]

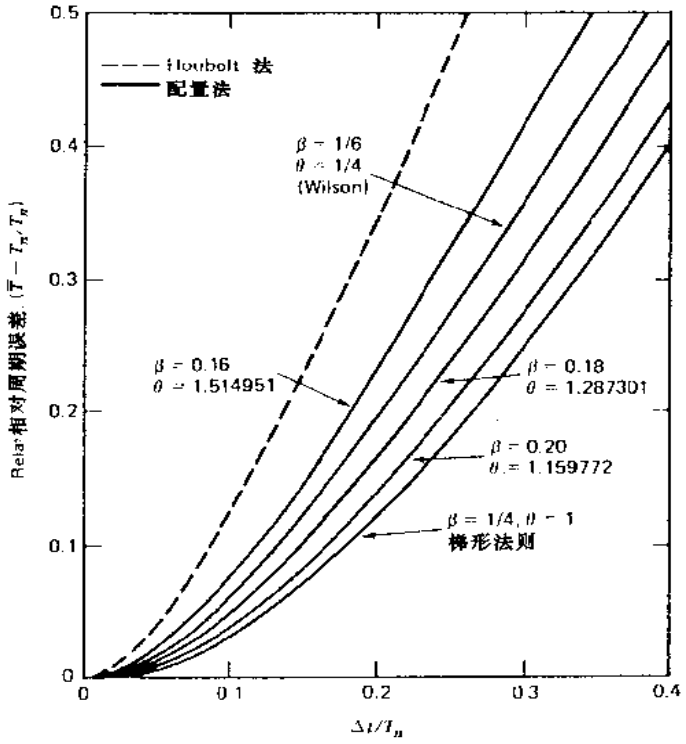


图 18.6 对各种积分相对周期误差图解[18.16]

类似于用截断在振型迭加解中所保留的模态数来达到。因此这里出现一个数值积分算法公式

的目标，在某种意义上具有最佳数值逸散的性质。Wilson-θ 法确定为高模态衰减作了准备，例如，对于$\frac{\Delta t}{T_r}\geqslant 1.0$ 的模态，然而新近也提出了一些其它有希望的方法[18.10,18.11]。

上述讨论稳定性与精度要严格应用仅限于线性系统。鼓励读者在非线性动力分析方面查阅附加的参考文献。

参考文献

18.1 W. C. Hurty and M. F. Rubinstein, *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ(1964).

18.2 G. B. Warburton and S. R. Soni, "*Errors in Response Calculations for NonClassically Damped Structures*," *Earthquake Engr, and Str, Dyn.*, v. 5, 365376(1977).

18.3 R. W. Clough and Soheil Mojtahedi, "Earthquake Response Analysis Considering Non-proportional Damping," *Earthquake Engr, and Str, Dyn.*, v. 4, 489496(1976).

18.4 T. Belytschko, J. R. Osias, and P. V. Marcal (eds.), *Finite Element Analysis of Transient Nonlinear Structural Behavior*, AMD-v. 14, ASME, New York(1975).

18.5 J. T. Oden et. al(eds.), *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*, Texas Inst. for Comp. Mech., The Univ, of Texas at Austin, Austin, TX(1974).

18.6 K-J Bathe, E. Ramm, and E. L. Wilson, "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis," *Int. J. for Num. Meth. in Engr.*, v. 9, 353-386 (1975).

18.7 E. L. Wilson, I. Farhoomand, and K-J. Bathe, "Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures," *Earthquake Engr, and Str. Dyn.*, v. 1, 241-252(1973).

18.8 R. E. Nickell, "On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics," *Int. J. Solids Struct.*, v. 7, 301-319(1971).

18.9 K-J. Bathe and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ(1976).

18.10 H. M. Hilber and T. J. R. Hughes, "Collocation, Dissipation and 'Overshoot' for Time Integration Schemes in Structural Dynamics," *Earthquake Engr. and Str. Dyn.*, v. 6, 99-177(1978).

18.11 H. M. Hilber, T. J. R. Hughes, and R. L. Taylor, "Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics," *Earthquake Engr, and Str. Dyn.*, v. 51283-297(1977).

习题组 18.1

18.1

(a)对习题 14.2 与 15.1 中三个自由度系统，$\zeta_1=\zeta_2=0.01$，确定公式 18.2 中的瑞利阻尼系数 a_0 与 a_1。

(b)求 ζ_3 的值

18.2

(a)习题 14.2 与 15.1 中三个自由度系统，令 $\zeta_1=\zeta_2=0.01$，应用公式 18.15 确定阻尼矩阵 **C**。

(b)求 ζ_3 的值

18.3

(a)习题 17.1 的悬臂梁的横向弯曲模态，具有 $\zeta_1=\zeta_2=0.01$，确定公式 18.2 中的瑞利阻尼系数 $\mathbf{a}_0$ 与 $\mathbf{a}_1$。

(b)计算阻尼因数 ζ_3，ζ_4 及 ζ_5 结果。

18.4 应用方程 18.15 重作习题 18.3。

习题组 18.2

18.5 (a)公式 18.32 对平均加速法建立了荷载算子，以及公式 18.34 这个方法确定了放大系数矩阵。下面以同样的程序对线性加速度法建立荷载算子及其放大系数矩阵，令 $\theta=1$ 得到，见图 18.1(参看习题 7.5)。

(b)时间步长 Δt_i 取什么值，线加速度法是稳定的？

18.6 考虑例题 18.2 的无阻尼单自由度系统，即

$$K=M=U(0)=1,\quad \dot{U}(0)=0。$$

(a)应用平均加速度法对这个系统的响应求解，对 $0\leqslant t\leqslant 2T_n$，用 $\Delta t_i=\frac{3}{20}T_n$。

(b)制造一个表根据(a)的结果与在相应时间 U 的精确值作比较，其结果与图 18.4 是否相符？

第 19 章　分量模态综合

在第 16 章，介绍了有限元法的结构 **MDOF** 模型在结构动力分析中使用方法和有限元已求得刚度矩阵、质量矩阵以及装配这些成统矩阵。在 § 16.6 中介绍了用假定振型法和约束方程来缩减系统矩阵阶数的一般方法。在本章中一种被称为是分量模态综合的缩减方法，以及动力分析中的子结构耦联。这些方法已经发现介绍对于解决大型结构的动力分析问题是非常有效的，尤其是结构由各种不同成分的部件组成的，例如，建筑物与周围的土壤，空间飞行器与它的**有效荷载**。

本章将完成以下内容：

- **对各类简单部件求得分量模态：**

自由界面正规模态，固定界面正规模态、刚体模态、约束模态、附加模态、剩余附加模态、剩余惯性释放附加模态

- **应用 § 19.3 中的广义分量结联合方法与分量模态任何规定的组合法装配系统矩阵 K 与 M。**

§ 19.1　分量模态综合概述

在前一章已经叙述了应用有限元得到结构承受动力激励的动力响应解。完整的结构通常很复杂，许多部件常常由不同的部门设计与生产，例如空间飞行器的许多部件。因此整体结构以合适的方式装配成为一种有限元模型可能是困难的。另外整体结构的有限元模型可包含许多自由度，对于这个完整体系根据有限元方程完成动力分析是行不通的。由于这些原因，已经提出允许结构再分成**部件**或**子结构**，在较小的部件上完成大量的分析，为整个结构体系建立一种近似的数学模型，这些方法已称为**分量模态法**，或**动力分析子结构耦联法**。本章提供分量模态综合法概况。参考文献 19.1 与 19.2 关于个课题上汇集了许多现行有用的文章，附加参考文献可见本章末。

为了简化分析，首先研究无阻尼系统的自由振动，它的部件无刚体自由度，在 § 19.4 中将应用它扩大到具有刚体自由度的部件。

虽然任何数目的部件可以联结在一起形成一个体系，现仅用两个部件来说明分量模态综合法。图 19.1 表示一简单的两端固定梁，它划分为 α 与 β 两个部件。部件的物理坐标组 $\boldsymbol{P}$ 可分为一组 $\boldsymbol{J}$ 的接合点坐标 u_j 和一组 $\boldsymbol{I}$ 的内部坐标 u_i。接合点坐标是这样的，在这儿部件被联结在一起。

对于一个部件的运动方程（无阻尼）可记为分块矩阵形式

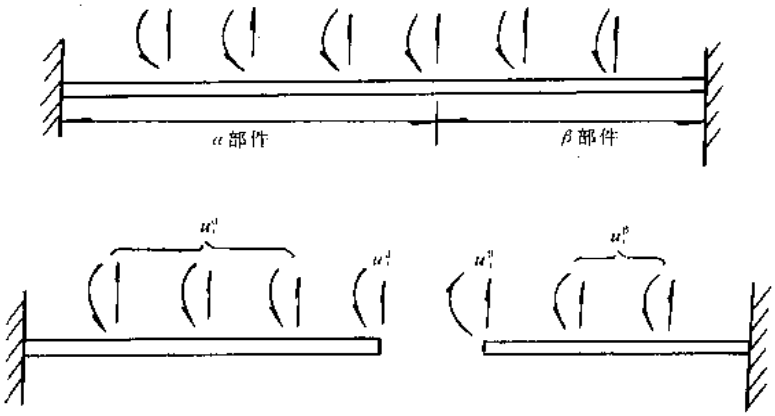


图 19.1　结构的部件

a)耦联结构;b)部件及它们的物理坐标

$$\begin{bmatrix}\mathbf{m}_{ii} & \mathbf{m}_{ij}\\ \mathbf{m}_{ji} & \mathbf{m}_{jj}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{u}}_i\\ \ddot{\mathbf{u}}_j\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ii} & \mathbf{k}_{ij}\\ \mathbf{k}_{ji} & \mathbf{k}_{jj}\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_i\\ \mathbf{u}_j\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{f}_i\\ \mathbf{f}_j\end{Bmatrix} \tag{19.1}$$

物理坐标 u,用坐标变换按分量广义坐标 p 来表示。

$$\mathbf{u}=\Psi\mathbf{p} \tag{19.2}$$

其中 Ψ 为预先选择的下面类型的分量模态矩阵*:刚体模态,自由振动正规模态,约束模态以及附加模态。在§19.2中将叙述这些分量模态,以及在§19.3中要研究根据分量模态将分量结合在一起形成一个系统模态的方法。

§19.2　约束部件的分量模态

正规模态

分量正规模态可以分类成固定界面正规模态、自由界面正规模态、或属于这些的混合界面正规模态,当用一个特征值问题的形式得到分量正规模态时,当用一个特征值问题的形式得到分量正规模态时、则设有一个接合点(界面)坐标或部分接合点坐标不被约束的。

$$(\mathbf{k}-\omega^2\mathbf{m})\phi=0 \tag{19.3}$$

另外,一些综合法[19.3,19.4]用于荷载界面正规模态,这里的刚度与质量系数增加分量的 $\mathbf{k}_{ji}$ 与 $\mathbf{m}_{ji}$ 矩阵。假定模态是关于 $\mathbf{m}$ 正规化,即

$$\Phi_n^T\Phi_n=\mathbf{I}_{nn},\quad \Phi_n^T\mathbf{k}\Phi_n=\Lambda_{nn}=\mathrm{diag}(\omega_i^2) \tag{19.4}$$

其 Φ_n 是一个矩阵,它的列为分量正规模态** 当整个正规模态组振取下标 n 标记,如公式19.4所示时,则正规模态组通常要被截断成一组正规模态,要用 Φ_k(保留的模态)表示。

约束模态

* 注意公式19.2的物理位移向量 u 实际上为假定模态,或里兹近似值。

** 注意到将应用Φ,而不用 Ψ 当假定振型实际上是自由振动的正规模态时。

令物理坐标 u 分块成一组 C，它是与被确定的约束模态有关，以及令 V 是 C 的分量。一个 A **约束模态**是用在 C 组中的一物理坐标静态施加单位位移，而 C 组中余下的坐标位移为零来定义。于是这组约束模态由下面公式确定

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{vv} & \mathbf{k}_{vc}\\ \mathbf{k}_{cv} & \mathbf{k}_{cc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_{vc}\\ \mathbf{I}_{cc}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{vc}\\ \mathbf{R}_{cc}\end{bmatrix} \tag{19.5}$$

其中 $\mathbf{R}_{cc}$ 为在 C 坐标中的"反力"组，由顶部一行分块

$$\Psi_{vc}=-\mathbf{k}_{vv}^{-1}\mathbf{k}_{vc} \tag{19.6}$$

约束模记矩阵为

$$\Psi_c=\begin{bmatrix}\Psi_{vc}\\ \mathbf{I}_{cc}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathbf{k}_{vv}^{-1}\mathbf{k}_{vc}\\ \mathbf{I}_{cc}\end{bmatrix} \tag{19.7}$$

附加模态

令 A 为 P 的子集合，与被确定的**附加模态**有关。一个**附加模态**定义为：分量的静态变形的结果。即是当一个单位力作用于 A 组的一个坐标上，而 A 的其余坐标为强制自由的时候。这里仅论述分量无刚体自由度；在 § 19.4 中论述有刚体自由度的分量。对于一个被限制的分量、令 W 是 A 在 P 中的补充，于是规定附加模态组 Ψ_a，用

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ww} & \mathbf{k}_{wa}\\ \mathbf{k}_{aw} & \mathbf{k}_{aa}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Psi_{wa}\\ \Psi_{aa}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{O}_{wa}\\ \mathbf{I}_{aa}\end{bmatrix} \tag{19.8}$$

令柔度矩阵表示为 $\mathbf{g}=\mathbf{k}^{-1}$，于是对于一个被限制的分量附加模态恰好是柔度矩阵的列

$$\Psi_a=\begin{bmatrix}\Psi_{wa}\\ \Psi_{aa}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{wa}\\ \mathbf{g}_{aa}\end{bmatrix} \tag{19.9}$$

§ 19.3 无阻尼自由振动系统综合

在这一节中论述一种广义子结构联合，或分量模态综合其方法应用于自由振动。因此详细提供一种特效的方法[19.5]。通用的方法可引伸用于阻尼结构及强迫振动，但这个题目超出本教课书的范围。

令系统由 α 与 β 两个分量组成，它们具有共同的面界。在这个界面上的物理座标约束为

$$\mathbf{u}_j^\alpha=\mathbf{u}_j^\beta \tag{19.10}$$

以及界面力关系为

$$\mathbf{f}_j^\alpha+\mathbf{f}_j^\beta=0 \tag{19.11}$$

推导系统运动方程依据具有特定因子的拉格朗日运动方程(见 § 11.5)。最终，需要系统的动能与势能表达式为

$$T=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{p}}^T\boldsymbol{\mu}\dot{\mathbf{p}}=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{p}}^{\alpha T}\mu^\alpha\dot{\mathbf{p}}^\alpha+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{p}}^{\beta T}\mu^\beta\dot{\mathbf{p}}^\beta \tag{19.12}$$

$$V=\frac{1}{2}\mathbf{p}^T\mathsf{T}\mathbf{p}=\frac{1}{2}\mathbf{p}^{\alpha T}\mathsf{T}^\alpha\mathbf{p}^\alpha+\frac{1}{2}\mathbf{p}^{\beta T}\mathsf{T}^\beta\mathbf{p}^\beta$$

其中

$$\mu_\alpha=\Psi^{\alpha T}\mathbf{m}^\alpha\Psi^\alpha,\quad \mathsf{T}^\alpha=\Psi^{\alpha T}\mathbf{k}^\alpha\Psi^\alpha \text{ 等} \tag{19.13}$$

以及
$$\mathbf{p}\equiv\begin{Bmatrix}\mathbf{p}^{\alpha}\\ \mathbf{p}^{\beta}\end{Bmatrix},\mu\equiv\begin{bmatrix}\mu^{\alpha} & 0\\ 0 & \mu^{\beta}\end{bmatrix},\kappa\equiv\begin{bmatrix}\kappa^{\alpha} & 0\\ 0 & \kappa^{\beta}\end{bmatrix} \tag{19.14}$$
如公式 19.10 约束方程可根据广义坐标 P 合成为下面形式的矩阵约束方程形式。
$$\mathbf{C}\mathrm{p}=0 \tag{19.15}$$
系统拉格朗日算子现在可记为
$$L=T-V+\sigma^{T}\mathbf{C}\mathbf{p} \tag{19.16}$$
其中 σ 为拉格朗日乘子的向量。应用下面形式拉格朗日方程现在可得到系统的运动方程
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\zeta}_{s}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\zeta_{s}}=Q_{s} \tag{19.17}$$
其中 ζ_s 涉及 P_s 和 σ_s，Q_s 为广义力，对于自由振动问题、力仅作用在分量界面，因此
$$\begin{aligned}\sigma W&=(\delta\mathbf{u}_{j}^{\alpha})^{T}\mathbf{f}_{j}^{\alpha}+(\delta\mathbf{u}_{j}^{\beta})^{T}\mathbf{f}_{j}^{\beta}\\&=(\delta\mathbf{u}_{j}^{\alpha})(\mathbf{f}_{j}^{\alpha}+\mathbf{f}_{j}^{\beta})=0\end{aligned} \tag{19.18}$$
这里已经用过公式 19.10 与公式 19.11，因为 $\delta W=0$，$Q_s=0$。当公式 19.12 与 19.16 代入公式 19.17 与约束方程 19.15 一起。其结果为系统运动方程
$$\mu\ddot{\mathbf{p}}+k\mathbf{p}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\sigma \tag{19.19}$$
参考文献 19.5 指出实际上是所有子结构联合用所介绍一种线性变换的形式。求解公式 19.15 与 19.19 的耦联方程组。
$$\mathbf{p}=\mathbf{S}\mathbf{q} \tag{19.20}$$
假如需要将 $\mathbf{p}$ 重新安排，将其划分为不独立坐标 $\mathbf{p}_d$ 与线性独立坐标 $\mathbf{p}_l$，并且令公式 19.20 照样地划分，于是
$$\begin{bmatrix}\mathbf{G}_{dd} & \mathbf{C}_{\mathrm{dl}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_{d}\\ \mathbf{p}_{l}\end{Bmatrix}=0 \tag{19.21}$$
其中 $\mathbf{C}_{dd}$ 为非对角方阵，其公式
$$\mathbf{p}\equiv\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_{\mathrm{d}}\\ \mathbf{p}_{\mathrm{l}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{dd}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{dl}}\\ \mathbf{I}_{\mathrm{ll}}\end{bmatrix}\mathbf{p}_{\mathrm{l}}\equiv\mathbf{S}\mathbf{q} \tag{19.22}$$
定义 $\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{q}$，公式 19.21 与 19.22 可见 $\mathbf{CS}=0$
公式 19.19 与 19.20 可联立给出
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{S}^{T}\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{\sigma} \tag{19.23}$$
其中系统质量矩阵与刚度矩阵为
$$\mathbf{M}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mu\boldsymbol{S}\qquad\mathbf{K}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\kappa\mathbf{S} \tag{19.24}$$
因为 $\mathbf{CS}=0$，公式 19.23 希望缩减系统运动方程为
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=0 \tag{19.25}$$

例题 19.1

在许多分量综合法中的使用的广义坐标可规定为接合点自由度与内部自由度，令
$$\mathbf{p}^{\alpha}=\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_{\mathrm{i}}^{\alpha}\\ \mathbf{p}_{\mathrm{j}}^{\alpha}\end{Bmatrix},\qquad\mathbf{p}^{\beta}=\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_{\mathrm{i}}^{\beta}\\ \mathbf{p}_{\mathrm{j}}^{\beta}\end{Bmatrix}$$
其中特别地
$$\mathbf{p}_{\mathrm{j}}^{\alpha}\equiv\mathbf{u}_{\mathrm{j}}^{\alpha}\qquad\mathbf{p}_{\mathrm{j}}^{\beta}=\mathbf{u}_{\mathrm{j}}^{\beta}$$
假定公式 19.10 为唯一的约束方程，令 $\mathbf{p}_{\mathrm{j}}^{\beta}$ 为不独立坐标组。并令

$$\mathbf{q}=[\mathbf{p}_i^{\alpha} \quad \mathbf{p}_j^{\alpha} \quad \mathbf{p}_i^{\beta}]^T$$

a. 列出约束方程公式 19.10，用公式 19.21 表示，并确定合适的 C 矩阵。

b. 确定合适的 S 矩阵

c. 公式 19.19 中对这种情形，拉格朗日乘子向量 σ 的物理解释是什么？

解：

a. 约束方程为

$$\mathbf{p}_j^{\alpha}-\boldsymbol{p}_i^{\beta}=\mathbf{0} \tag{1}$$

不独立坐标为 $\boldsymbol{P}_i^{\beta}$，所以公式 1 可写成下面公式 19.21 的形式

$$[-\mathbf{I}\vdots\mathbf{0}\quad\mathbf{I}\quad\mathbf{0}]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{p}_j^{3}\\ \hdashline \mathbf{p}_i^{*}\\ \mathbf{p}_j^{*}\\ \mathbf{p}_i^{\beta}\end{Bmatrix}=\mathbf{0} \tag{2}$$

其中 **I** 与 **0** 矩阵的量纲由矩阵一致规则确定，因之

$$\mathbf{C}_{dd}=-\mathbf{I} \qquad \mathbf{C}_{d\,I}=[\mathbf{0}\quad\mathbf{I}\quad\mathbf{0}] \tag{3}$$

b. 从在公式 19.22 中 S 的定义及由公式 3

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}-\mathbf{C}_{dd}^{-1}\mathbf{C}_{DI}\\ \mathbf{I}_{11}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc}\mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{0}\\ \hdashline \mathbf{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}\end{array}\right] \tag{4}$$

注意这里给出所期望的结果，即

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_j^{\beta}\\ \mathbf{p}_i^{\alpha}\\ \mathbf{p}_j^{\alpha}\\ \mathbf{p}_i^{\beta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{0}\\ \mathbf{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_i^{\alpha}\\ \mathbf{p}_j^{*}\\ \mathbf{p}_i^{\beta}\end{Bmatrix} \tag{5}$$

它具有 $\mathbf{p}=\mathbf{Sq}$ 形式

c. 对于这部分问题，非常方便的整理 **p** 成为公式 19.14a 所指定的形式，于是公式 2 及 5 可重整如下。

$$[\mathbf{0}\quad\mathbf{I}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{I}]\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_i^{\alpha}\\ \mathbf{p}_j^{\alpha}\\ \mathbf{p}_i^{\beta}\\ \mathbf{p}_j^{\beta}\end{Bmatrix}=\mathbf{0} \tag{6}$$

及

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_i^{\alpha}\\ \mathbf{p}_j^{*}\\ \mathbf{p}_i^{\beta}\\ \mathbf{p}_j^{\beta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}\\ \mathbf{0}&\mathbf{I}&\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_i^{*}\\ \mathbf{p}_j^{*}\\ \mathbf{p}_i^{\beta}\end{Bmatrix} \tag{7}$$

公式 19.14、公式 6 与公式 19.19 合并得到

$$\begin{bmatrix} \mu_{ii}^{\alpha} & \mu_{ij}^{\alpha} & 0 & 0 \\ \mu_{ji}^{\alpha} & \mu_{jj}^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{ii}^{\beta} & \mu_{ij}^{\beta} \\ 0 & 0 & \mu_{ji}^{\beta} & \mu_{jj}^{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{p}}_i^{\alpha} \\ \ddot{\mathbf{p}}_j^{\alpha} \\ \ddot{\mathbf{p}}_i^{\beta} \\ \ddot{\mathbf{p}}_j^{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_{ii}^{\alpha} & \kappa_{ij}^{\alpha} & 0 & 0 \\ \kappa_{ji}^{\alpha} & \kappa_{jj}^{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{ii}^{\beta} & \kappa_{ij}^{\beta} \\ 0 & \kappa_{ji}^{\beta} & \kappa_{ji}^{\beta} & \kappa_{jj}^{\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_i^{\alpha} \\ \mathbf{p}_j^{\alpha} \\ \mathbf{p}_i^{\beta} \\ \mathbf{p}_j^{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \sigma \\ \mathbf{0} \\ -\sigma \end{Bmatrix} \tag{8}$$

从公式 8 的形式可以看出 σ 为 α 分量上的广义界面力，如公式 19.11，在 β 分量上的广义界面力相等并相反为 $-\sigma$。

例题 19.1 中的公式 8 可以看出它刚好的两个分量运动方程的合并，写成分量广义坐标。这些公式已由前面介绍的著者直接使用过，例如见参考文献 19.2。目前应用拉格朗日乘子的方程求导，而比起前面著者使用的直接微分要冗长得多，除了公式 19.10 外，允许约束以系统的方式来综合，正如要在后面例题 19.5 中见到所叙述的方法之一。

归纳广义分量模态综合法步骤为：

1. 选择包含在 Ψ^{α} 与 Ψ^{β} 的分量模态，确定 $\mathbf{p}^{\alpha}$ 与 $\mathbf{p}^{\beta}$。
2. 形成 μ^{α}，μ^{β}，κ^{α} 与 κ^{β}。
3. 在 P 中建立的坐标将是不独立坐标 $\mathbf{p}_d$，剩余形式 $\mathbf{p}_l=\mathbf{q}$。
4. 列出公式 19.15 形式的约束方程，同时从公式 19.22 求解 S。
5. 应用公式 19.24 确定 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{K}$。

分量模态综合最简单的与最精确的一种方法称为 Craig-Bamtpon 法[19.6]，它与 Hurty 法[19.7]仅有微小的不同，两者给出相同的数值结果(例如系统频率等)。在参考文献 19.5 中 Bajan 与 Feng 也论述了 Hurty 原方法相同的改进。Craig-Bampton 法已在例题 19.2 中叙述。

例题 19.2

图 19.1 两个部件的每一个在其界面坐标上规定一组约束模态加上一组截断的固定界面正规模态。图 E19.2.1 为 α 部件的两个约束模态加上对 α 部件的最低频率固定界面正规模态。

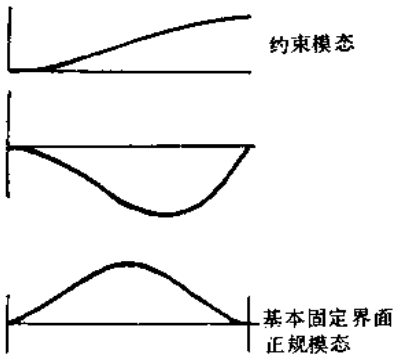


图 E19.2.1

于是，令

$$\mathbf{u}=\Phi\,\mathbf{p}_k+\Psi_{-c}\mathbf{p}_c \tag{1}$$

对于每一部件，公式 1 可写成分块形式

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_i\\ \mathbf{u}_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{ik} & \Psi_{ic}\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_k\\ \mathbf{p}_c\end{Bmatrix} \tag{2}$$

因为正规模态为固定界面模态，及由于 $\mathbf{p}_c=u_j$ 进一步由公式 19.6 给出 Ψ_{ic} 为

$$\Psi_{ic}=-\mathbf{k}_{ii}^{-1}\mathbf{k}_{ij} \tag{3}$$

根据公式 19.4，假定固定界面正规模态已经正规化。

a. 确定 μ^α 与 κ^α。

b. 令 $\mathbf{p}_c^\beta$ 为非独立坐标(如例题 19.1)，就这种方法确定 **C** 及 **S**。

c. 用该方法形成 **M** 与 **K**。

解：

a. 从公式 19.3

$$\mu^\alpha=\psi^{\alpha T}\mathbf{m}^\alpha\psi^\alpha,\quad \kappa^\alpha=\psi^{\alpha T}\mathbf{k}^\alpha\psi^\alpha \tag{4}$$

展开 m^α 与 ψ^α，得到

$$\begin{aligned}\mu^\alpha&=\begin{bmatrix}\mu_{kk} & \mu_{kc}\\ \mu_{ck} & \mu_{cc}\end{bmatrix}^\alpha\\ &=\begin{bmatrix}\Phi_{ik}^T & 0^T\\ \Psi_{ic}^T & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{m}_{ii} & \mathbf{m}_{ij}\\ \mathbf{m}_{ji} & \mathbf{m}_{jj}\end{bmatrix}^\alpha\begin{bmatrix}\Phi_{ik} & \Psi_{ic}\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}^\alpha\end{aligned} \tag{5}$$

进行相乘(在所有矩阵中省去上标 α)，得到

$$\begin{aligned}\mu_{kk}&=\boldsymbol{I}_{kk}\\ \mu_{kc}&=\mu_{ck}^T=\Phi_{ik}^T(\mathbf{m}_{ii}\Psi_{ic}\mathbf{m}_{ij})\\ \mu_{cc}&=\Psi_{ic}^T(\mathbf{m}_{ii}\Psi_{ic}\mathbf{m}_{ij})+\mathbf{m}_{ji}\Psi_{ic}+\mathbf{m}_{ij}\end{aligned} \tag{6}$$

于是在这个模型中，正规模态坐标与约束模态坐标之间有惯性耦联。

以相似的方式可以确定 κ^α，得到

$$\kappa^\alpha=\begin{bmatrix}\kappa_{kk} & \kappa_{kc}\\ \kappa_{ck} & \kappa_{cc}\end{bmatrix} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}\kappa_{kk}&=\Lambda_{kk}\\ \kappa_{kc}^T&=\kappa_{ck}=\mathbf{0}\\ \kappa_{cc}&=\mathbf{k}_{jj}-\mathbf{k}_{ji}\mathbf{k}_{ii}^{-1}\mathbf{k}_{ij}\end{aligned} \tag{8}$$

从上面可以看出，应用约束模态在分量广义坐标中导出一个非偶联的刚度矩阵。矩阵 κ_{cc} 正好是缩减刚度矩阵，它广泛应用静态子结构分析中(见 § 16.6)。

b. 由于 $\mathbf{p}_c^\alpha=\mathbf{u}_j^\alpha$ 及 $\mathbf{p}_c^\beta=\mathbf{u}_j^\beta$，界面位移方程有相容性，公式 19.10 可表示为

$$\begin{bmatrix}0 & \mathrm{I} & 0 & \vdots & -\mathrm{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_k^\alpha\\ \mathbf{p}_c^\alpha\\ \mathbf{p}_k^\beta\\ \text{---}\\ \mathbf{p}_c^\beta\end{Bmatrix}=0 \tag{9}$$

所以

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{I} & 0 & \vdots & -\mathrm{I}\end{bmatrix} \tag{10}$$

$\mathbf{P}_c^\beta$ 为非独立坐标根据公式 19.21 与 19.22P_d　$\mathbf{p}_1$ 的排序是相反的。

对于这个问题由简化形成 $\mathbf{p}=\boldsymbol{S}\mathbf{q}$，来确定 **S** 是很便利的。

于是

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_k^a\\ \mathbf{p}_c^a\\ \mathbf{p}_k^\beta\\ \mathbf{p}_c^\beta\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{I}&0&0\\0&0&\mathrm{I}\\0&\mathrm{I}&0\\0&0&\mathrm{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_k^c\\ \mathbf{p}_k^\beta\\ \mathbf{p}_c^c\end{Bmatrix} \tag{11}$$

这里已选择在接合点坐标 $\mathbf{p}_c^a$ 之前集合所有正规模态坐标 P_k。

c. 公式 19.24 确定 **M** 及 **K**。

$$\mathbf{M}=\mathbf{S}^T\mu\mathbf{S}\ ,\qquad \mathbf{K}=\mathbf{S}^T\mu\mathbf{S} \tag{12}$$

$$M=\begin{bmatrix}\mathrm{I}&0&0&0\\0&0&\mathrm{I}&0\\0&\mathrm{I}&0&\mathrm{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_{kk}^a&\mu_{kc}^a&0&0\\\mu_{ck}^a&\mu_{cc}^a&0&0\\0&0&\mu_{kk}^\beta&\mu_{kc}^\beta\\0&0&\mu_{ck}^\beta&\mu_{cc}^\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{I}&0&0\\0&0&\mathrm{I}\\0&\mathrm{I}&0\\0&0&\mathrm{I}\end{bmatrix} \tag{13}$$

于是

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{kk}^a&0&\mathbf{M}_{kc}^a\\0&\mathbf{M}_{kk}^\beta&\mathbf{M}_{kc}^\beta\\\mathbf{M}_{ck}^a&\mathbf{M}_{ck}^\beta&\mathbf{M}_{cc}\end{bmatrix} \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}_{kk}^a=\mathbf{I}_{kk}^a\\&\mathbf{M}_{kk}^\beta=\mathbf{I}_{kk}^\beta\\&M_{kc}^a=\mathbf{M}_{ck}^a=\mu_{kc}^a\\&\mathbf{M}_{kc}^\beta=\mathbf{M}_{ck}^{\beta T}=\mu_{kc}^\beta\\&\mathbf{M}_{cc}=\mu_{cc}^a+\mu_{cc}^\beta\end{aligned} \tag{15}$$

以类似的方式得到综合的系统刚度矩阵 **K** 给出

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{kk}^a&0&0\\0&\mathbf{K}_{kk}^\beta&0\\0&0&\mathbf{K}_{cc}\end{bmatrix} \tag{16}$$

其中

$$\mathbf{K}_{kk}^a=\Lambda_{kk}^a\qquad \mathbf{K}_{kk}^\beta=\Lambda_{kk}^\beta$$

$$\mathbf{K}_{cc}=\kappa_{cc}^a+\kappa_{cc}^\beta \tag{17}$$

于是系统运动方程只有惯性耦联，因为 Λ_{kk}^a 与 Λ_{kk}^β 在分量特征问题中是有用的，为了装配系统矩阵只需要如下矩阵：μ_{kc}^a，μ_{kc}^β，μ_{cc}^a，μ_{cc}^β，κ_{cc}^a 和 κ_{cc}^β。

参考文献 19.6 介绍 Craig-Bampton 法的原来的推导以及给出数值例题。参考文献 19.8 与 19.9 用这个方法与其它的分量模态综合法比较了所得到的结果。其它方法将在 § 19.5 中叙述。

§ 19.4 无约束部件的分量模态

在 § 19.2 中确定了约束部件的分量模态，即部件无刚体自由度。对于无约束部件的重要区别仅在于增加刚体模态及限定的附加模态。

正规模态

分量正规模态正如在§19.2中确定，此外正规模态组可包括一个或更多的刚体(零频率)模态。

约束模态

约束模态如在§19.2中所定义的，此外 C 组必须足够阻止刚体运动，因此 $\mathbf{k}_{ww}$ 是非奇异的。下面定义刚体模态，它是约束模态的一种特殊情况。

刚体模态

虽然刚体模态可在分量正规模态特征问题求解过程中得到，但它们也是约束模态的一种特殊情况。如果一个部件具有 N_r 刚体自由度，于是 R 坐标组可用于限制部件阻止刚体运动。相应 R 组刚体模态由公式19.5取 $c=r$ 得到，注意在静态确定 R 组约束中无反力，即 $\mathbf{R}_r=0$。于是，如果 V 是 R 在 P 中的补充，则刚体模态确定为

$$\Psi_r \equiv \begin{bmatrix} \Psi_{vr} \\ \mathbf{I}_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_{vv}^{-1}\mathbf{k}_{vr} \\ \mathbf{I}_{rr} \end{bmatrix} \tag{19.26}$$

附加模态

令 P 划分为三组：R. A 及 W，其中 R 为一种静态确定约束组，它提供限制来阻止刚体运动，其中 A 组由物理坐标组成，其单位力用来确定附加模态。于是附加模态与约束组 R 有关确定为

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{k}_{ww} & \mathbf{k}_{wa} & \mathbf{k}_{wr} \\ \mathbf{k}_{aw} & \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ar} \\ \hline \mathbf{k}_{rw} & \mathbf{k}_{ra} & \mathbf{k}_{rr} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \Psi_{wa} \\ \Psi_{aa} \\ \hline 0_{ra} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0_{wa} \\ \mathbf{I}_{aa} \\ \hline \mathbf{R}_{ra} \end{array}\right] \tag{19.27}$$

如在§19.2中，附加模态基本上是一个柔度矩阵的列，因此

$$\Psi_a \equiv \begin{bmatrix} \Psi_{wa} \\ \Psi_{aa} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{wa} \\ \mathbf{g}_{aa} \\ 0_{ra} \end{bmatrix} \tag{19.28}$$

其中 $\mathbf{g}_{wa}$ 与 $\mathbf{g}_{aa}$ 是由公式19.27中 $\mathbf{k}$ 的左上部分求逆得到，在上面公式中 R 组可任意适合的选取，除了 A 之外，其它将要阻止部件抵抗刚体运动。

惯性释放附加模态

对于一个具有刚体自由度的部件其限定的附加模态的一种替换方式导出所谓**惯性释放模态**。这些是由 Mac Neal[19.10]与 Rubin[19.11]在分量模态综合研究中所应用。惯性释放模态是由作用于一个物体上的一个平衡荷载体系 $\mathbf{f}_r$ 得到，$\mathbf{f}_r$ 是由原来的特殊力向量 $\mathbf{f}$ 用刚体达伦贝尔力向量 $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_r$ 来平衡，这里 $\mathbf{u}_r$ 是由于 $\mathbf{f}$ 产生的刚体运动。令刚体模态 Ψ_r 使之所规格化，因此

$$\Psi_r^T \mathbf{m} \Psi_r = \mathbf{I}_{rr} \tag{19.29}$$

那么

$$\mathbf{f}_r = \mathbf{f} - \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_r = \mathbf{P}\mathbf{f} \tag{19.30}$$

其中
$$\mathbf{P}=\mathbf{I}-\mathbf{m}\Psi_r\Psi_r^T \tag{19.31}$$

在公式 19.27 右边这个射影矩阵前乘力矩阵确定关于 R 约束的附加模态 $\hat{\Psi}_a$。于是

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ww} & \mathbf{k}_{wa} & \mathbf{k}_{wr}\\ \mathbf{k}_{aw} & \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ar}\\ \mathbf{k}_{rw} & \mathbf{k}_{ra} & \mathbf{k}_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\Psi}_{wa}\\ \Psi_{aa}\\ 0_{ra}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{ww} & \mathbf{P}_{wa} & \mathbf{P}_{wr}\\ \mathbf{P}_{aw} & \mathbf{P}_{aa} & \mathbf{P}_{ar}\\ \mathbf{P}_{rw} & \mathbf{P}_{ra} & \mathbf{P}_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0_{wa}\\ \mathbf{I}_{aa}\\ 0_{ra}\end{bmatrix} \tag{19.32}$$

因为荷载自动平衡，这里在 R 约束无反作用力。

参考文献 19.10 及 19.11 除去刚体模态，由 $\hat{\Psi}_a$ 取为

$$\Psi_a=\hat{\Psi}_a+\Psi_r\mathbf{C}_r \tag{19.33}$$

其中选择 $\mathbf{C}_r$，所以

$$\Psi_r^T\mathbf{m}\Psi_a=0 \tag{19.34}$$

假如这个满足

$$\Psi_a=\mathbf{P}^T\hat{\Psi}_a=(\mathbf{P}^T\mathbf{G}\mathbf{P})\mathbf{F}_a \tag{19.35}$$

其中 G 是与 R 有关的特殊的柔度矩阵，其值为

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\mathbf{g}_{ww} & \mathbf{g}_{wa} & 0\\ \mathbf{g}_{aw} & \mathbf{g}_{aa} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{19.36}$$

及
$$\mathbf{F}_a=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{wa}\\ \mathbf{I}_{aa}\\ \mathbf{0}_{ra}\end{bmatrix} \tag{19.37}$$

由公式 19.35 确定的附加模态称这为**惯性释放附加模态**。在公式 19.35 矩阵为

$$\mathbf{G}_e=\mathbf{P}^T\mathbf{G}\mathbf{P} \tag{19.38}$$

它为**弹性体柔度矩阵**，也可表示为

$$\mathbf{G}_e=\Phi_e\Lambda_{ee}^{-1}\Phi_e^T \tag{19.39}$$

其中Φ_e 为正规化的弹性体(即柔性的)正规模态组。

例题 19.3

图 E19.3.1 表示的弹簧-质量系统的轴向运动。

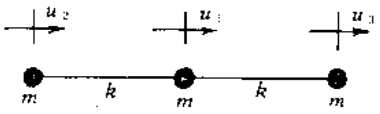


图 E19.3.1

a. 由公式 19.27 与 19.28 确定附加模态，绘出模态图。

b. 确定自动平衡的弹性荷载向量 $\mathbf{PF}_a$。

c. 确定惯性释放附加模态，如公式 19.35 所确定，绘出模态图。

令 $w\rightarrow1$，$a\rightarrow2$，$r\rightarrow3$(按上图选定的排列顺序，所以附加坐标相应于左边质量)，于是

$$\mathbf{k}=k\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{m}=m\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解：

a. 由公式 19.28

$$\Psi_a = \begin{bmatrix} \Psi_{va} \\ \Psi_{aa} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{va} \\ \mathbf{g}_{aa} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_{vv} & \mathbf{g}_{va} \\ \mathbf{g}_{av} & \mathbf{g}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

所以

$$\Psi_a = \frac{1}{k} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

b. 由公式 19.31

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{m}\Psi_r \Psi_r^T \tag{4}$$

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{va} \\ \mathbf{I}_{aa} \\ \mathbf{0}_{ra} \end{bmatrix} \tag{5}$$

有一个刚体模态，可由公式 19.26 计算。然而在这种情形下很清楚所有质量移动了一个相等的数量，于是正化刚体模态为

$$\Phi_r = \frac{1}{\sqrt{3m}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3m} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{F}_a = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

所以

$$\mathbf{P}\mathbf{F}_a = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

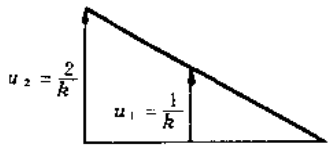


图 E19.3.2

c. 由公式 19.35 惯性释放附加模态给出为

$$\Psi_a = \mathbf{G}_a \mathbf{F}_a = (\mathbf{P}^T \mathbf{G} \mathbf{P}) \mathbf{F}_a \tag{10}$$

图 E19.3.3

从公式(10),19.36,(2)及(19)

$$\Psi_a=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{1}{k}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{1}{3}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}-1\\2\\-1\end{Bmatrix} \tag{11}$$

所以

$$\Psi_a=\frac{1}{9k}\begin{Bmatrix}-1\\5\\-4\end{Bmatrix}$$

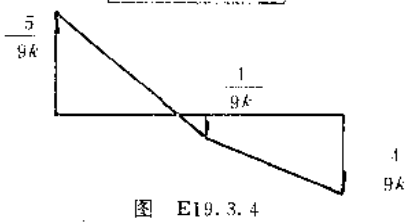


图 E19.3.4

应用公式 19.35 介绍的惯性释放附加模态，而不是应用公式 19.28 所确定的附加模态，其理由是这个近似法与 § 15.6 中振型加速度近似法是一致的，它们表示了应用振型加速度法可改善收敛性。

§ 19.5 剩余柔度；剩余分量模态

在例题 19.2 中约束模态及固定界面正规模态用来作为分量模态。这些模态组取作线性独立的，因为约束模态由界面坐标的单位位移所确定，而分量正规模态是根据一个完全约束的界面。另一方面，当附加模态用于模态综合法时，模态的线性独立方程成立。例如，如果一组完全的自由界面模态是由附加模态增补，那么后者在公式中将是线性不独立的。

公式 19.39 对于构成线性独立的附加模态及正规化模态提供了一个简便的方法。将弹性体正规模态分离成保留模态 Φ_k 与删去模态 Φ_d。于是弹性体柔度矩阵给出为

$$\mathbf{G}_e=\mathbf{\Phi}_e\mathbf{\Lambda}_{ee}^{-1}\mathbf{\Phi}_e^T=\mathbf{\Phi}_k\mathbf{\Lambda}_{kk}^{-1}\mathbf{\Phi}_k^T+\mathbf{\Phi}_d\mathbf{\Lambda}_{dd}^{-1}\mathbf{\Phi}_d^T \tag{19.40}$$

剩余柔度矩阵给出为

$$\mathbf{G}_d=\mathbf{\Phi}_d\mathbf{\Lambda}_{dd}^{-1}\mathbf{\Phi}_d^T \tag{19.41}$$

不用直接理解Φ_d 与 Λ_{dd}，可由合并公式 19.38,19.40 及 19.41 得到，给出

$$\mathbf{G}_d=\mathbf{P}^T\mathbf{G}\mathbf{P}-\mathbf{\Phi}_k\mathbf{\Lambda}_{kk}^{-1}\mathbf{\Phi}_k^T \tag{19.42}$$

由公式 19.35 与 19.42，得到一组**剩余惯性释放附加模态** Ψ_d。

$$\Psi_d=\mathbf{G}_d\mathbf{F}_a \tag{19.43}$$

假如结构无刚体模态，$\mathbf{P}=\mathrm{I}$，则公式 19.42 减化为

$$\mathbf{G}_d=\mathbf{G}-\mathbf{\Phi}_k\Lambda_{kk}^{-1}\mathbf{\Phi}_k^T \tag{19.44}$$

这就是**剩余柔度矩阵**，于是公式 19.43 与 19.44 可联立给出**剩余附加模态**。

例题 19.4

这个例题是例题 19.3 的继续，它说明用公式 19.42 与 19.43 来确定例题 19.3 的三个质量系统剩余惯性释放附加模态。

a. 确定例题 19.3 的三个质量系统的正规模态。

b. 令 $\Phi_r=\phi_1$，$\varphi_k=\phi_2$，以及 $\Phi_d=\phi_3$ 确定剩余惯性释放附加模态。

c. 给出(b)结果的物理解释。

解：

a. 从例题 19.3，其代数特征问题可写为

$$\begin{bmatrix}(2k-\omega^2m) & -k & -k\\ k & (k-\omega^2m) & 0\\ -k & 0 & (k-\omega^2m)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \tag{1}$$

于是频率给出为

$$\mathrm{k}-\omega^2\mathrm{m}=0$$

即

$$\begin{vmatrix}2k-\omega^2m & -k & -k\\ -k & (k-\omega^2m) & 0\\ -k & 0 & (k-\omega^2m)\end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

(3)

这个给出特征值方程

$$\omega^2m(\omega^2m-k)(\omega^2m-3k)=0 \tag{4}$$

这些根为

$$\omega_1^2=0 \qquad \omega_2^2=\frac{k}{m} \qquad \omega_3^2=\frac{3k}{m} \tag{5}$$

从这些公式可得到振型

$$\begin{aligned}(2k-\omega^2m)U_1-kU_2-kU_3&=0\\ -kU_1+(k-\omega^2m)U_2&=0\end{aligned} \tag{6}$$

对模态 1，$\omega_1^2=0$ 所以

$$\begin{aligned}2kU_1-kU_2-kU_3&=0\\ -kU_1+kU_2&=0\end{aligned} \tag{7}$$

那么，如所期望的，刚体模态给出为

$$\mathbf{U}_1\sim\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$$

当正规化，所以 $\mathbf{\Phi}_1^T\mathbf{m}\mathbf{\Phi}_1=1$

$$\boxed{\mathbf{\Phi}_1=\frac{1}{\sqrt{3m}}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}} \tag{8}$$

对振型 2，$\omega^2m=k$ 为此公式 6 变为

$$kU_1 - kU_2 - kU_3 = 0$$
$$-kU_1 = 0 \quad (9)$$

于是 $U_1=0$ 及 $U_2=-U_3$ 即模态 2 具有的形式

$$\mathbf{U}_2 \sim \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

正规化模态 ϕ_2 给出为

$$\boxed{\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} \quad (10)$$

最后，模态 3 可表示为

$$\mathbf{U}_3 \sim \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \Phi_3 = \frac{1}{\sqrt{6m}} \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

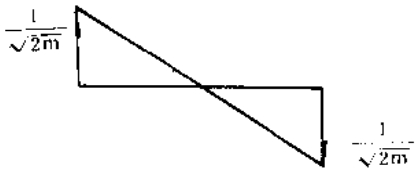


图 E19.4.1

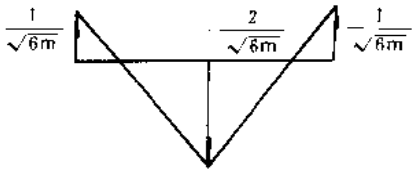


图 E19.4.2

b. 由公式 19.42 与 19.43

$$\Psi_d = (\mathbf{P}^T\mathbf{G}\mathbf{P})\mathbf{F}_a - (\Phi_k\Lambda_{kk}^{-1}\Phi_k^T)\mathbf{F}_a \quad (12)$$

公式 12 首项已在例题 19.3 中确定，在本题中

$$\Phi_k = \Phi_2 \quad 及 \quad \Lambda_{kk} = \omega_2^2 = \frac{k}{m} \quad (13)$$

因此

$$\Phi_k\Lambda_{kk}^{-1}\Phi_k^T = \frac{m}{k}\phi_2\phi_2^T$$

$$= \frac{m}{k}\,\frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} [0 \quad 1 \quad -1] \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2k} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

从公式 19.3

$$\mathbf{F}_a=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix} \tag{15}$$

因此

$$\psi_a=\frac{1}{9k}\begin{Bmatrix}-1\\5\\-4\end{Bmatrix}-\frac{1}{2k}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix} \tag{16}$$

即

$$\psi_a=\frac{1}{18k}\begin{Bmatrix}-2\\1\\1\end{Bmatrix} \tag{17}$$

c. 正如曾经所料到的，剩余附加模态在目前情况下恰好是 ϕ_3 的一个倍数，因为它表示三个质量系统的变形除去刚体运动及第二模态。

在确定附加模态中，一个单位力放置在节点 2(左端)，作用力可按比例分配于不同的模态，如图 E19.4.3 所示。

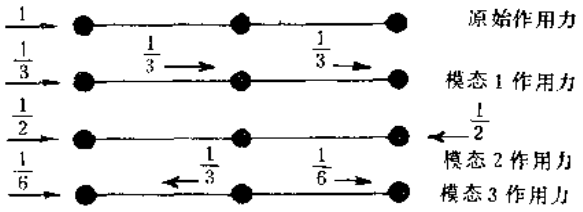


图 E19.4.3

由公式 14 与公式 15

$$\Phi_k\Lambda_{kk}^{-1}\Phi_k^T\mathbf{F}_a=\frac{1}{2k}\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix}$$

应用上面“模态-2 作用力”得到的结果恰好是这个变形形式，同时公式 17 给出 ψ_a 也正好是由“模态 3 作用力”产生的变形形式。

从例题 19.4 可以看出剩余惯性释放附加模态为刚体模态与保持自由界面的正规模态组成的一个模态组提供了合乎逻辑的补充模态。

剩余附加模态已用在各种分量模态综合法中，曾经首先提出现在这种形式的一种方法是 Craig-Chang[19.9]，将在下面叙述。接着 Rubin[19.11]以不同的步骤得到相似的方法。虽然以剩余惯性释放附加模态干脆代替了剩余附加模态来推广到无约束分量是很容易的；但是还是将 Craig 与 Chang 方法介绍到约束分量 α 和 β。

令位移变换方程，公式 19.2 为

$$\mathbf{u}=\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_i\\\mathbf{u}_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{ik}&\Psi_{id}\\\Phi_{jk}&\Psi_{jd}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_k\\\mathbf{p}_d\end{Bmatrix} \tag{19.45}$$

其中正规模态矩阵 Φ_k 包含自由界面正规格模态，以及 Ψ_d 包含由公式 19.41，19.43 与 19.44 确定的剩余附加模态，成为

$$\Psi_d = \mathbf{G}_d \mathbf{F}_a = (\Phi_d \Lambda_{dd}^{-1} \Phi_d^T)\mathbf{F}_a \tag{19.46}$$

或

$$\Psi_d = \mathbf{G}_d \mathbf{F}_a = (\mathbf{G} - \Phi_k \Lambda_{kk}^{-1} \Phi_k^T)\mathbf{F}_a \tag{19.47}$$

在公式 19.45 中，附加模态由位于接合点坐标 $\mathbf{u}_j$ 的单位力确定，由公式 19.37

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 0_{ij} \\ \mathbf{I}_{jj} \end{bmatrix} \tag{19.48}$$

因此公式 19.46 可记为

$$\Psi_d = \Phi_d \Lambda_{dd}^{-1} \Phi_{jd}^T = \Phi_d (\Lambda_{dd}^{-1} \Phi_{jd}^T) \tag{19.49}$$

现在的方法是根据 §15.3 的振型加速度法，那里剩余附加模态包括对删除模态柔度的解释。令公式 19.45 写成类似的形式

$$\mathbf{u} = [\Phi_k \quad \Psi_d] \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_d \end{Bmatrix} \tag{19.50}$$

分量运动方程(无阻尼)采用物理坐标为

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{19.51}$$

当这个方程变换为如公式 19.50 所定义的分量广义坐标时，得到下面的公式

$$\mu_{kk}\ddot{\mathbf{p}}_k + \kappa_{kk}\mathbf{p}_k = \Phi_k^T \mathbf{f} \tag{19.52a}$$

$$\mu_{dd}\ddot{\mathbf{p}}_d + \kappa_{dd}\mathbf{p}_d = \Psi_d \mathbf{f} \tag{19.52b}$$

这些方程是非耦联的，因为在 Ψ_d 中的模态与在 Φ_d 中的模态为线性联合(由公式 19.49 可见)，依次是模态 Φ_d 与 Φ_k 彼此正交。

振型加速度概念是凭借着目前要选择由公式 19.52b 中不计 $\ddot{\mathbf{p}}_d$ 给出的伪静态响应来近似表示坐标 $\mathbf{p}_d$ 响应的这个事实。

即

$$\kappa_{dd}\mathbf{p}_d = \Psi_d^T \mathbf{f} \tag{19.53}$$

因为对于自由振动，$\mathbf{f}$ 仅由界面力 $\mathbf{f}_j$ 组成，以及由于

$$\kappa_{dd} = \Psi_d^T \mathbf{k} \Psi_d \tag{19.54}$$

公式 19.49，19.53 及 19.54 可联立给出

$$(\Phi_{jd} \Lambda_{dd}^{-1} \Phi_{jd}^T)(\mathbf{p}_d - \mathbf{f}_j) = 0 \tag{19.55}$$

因为园括号内矩阵乘积是非奇异的，

$$\mathbf{p}_d = \mathbf{f}_j \tag{19.56}$$

为广义坐标 $\mathbf{P}_d$ 的伪静态近似表示(即为剩余附加模态的响应)。

由于分量 α 与 β 满足公式 19.11，当它们联合在一起时，公式 19.11 及 19.56 可联立给出约束方程。

$$\mathbf{p}_d^\alpha + \mathbf{p}_d^\beta = 0 \tag{19.57}$$

现在要应用 §19.3 中的方法联结两个部件，它们的运动是由公式 19.50 近似表示以及必须满足位移适应约束公式 19.10 以及约束由公式 19.57 独立给出。在例题 19.5 中说明 Craig-Chang 法[19.5,19.9及19.12]。

例题 19.5

在图 19.1 中两个部件的每一个用一组自由界面正规模态和作用于界面坐标确定一组附加模态来表示。图 E19.5.1 说明力作用于 α 部件确定它的附加模态，同时它们也说明一个自

由界面正规模态。

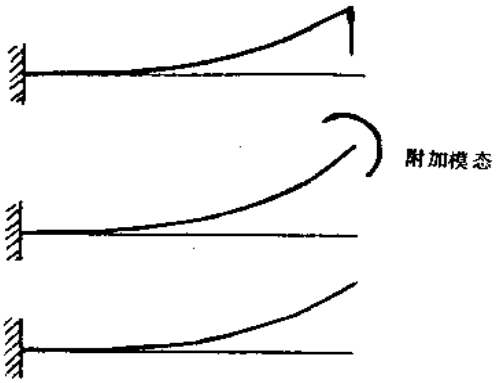


图 E19.5.1

令
$$\mathbf{u}=[\boldsymbol{\Phi}_k \quad \boldsymbol{\Psi}_d]\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_k\\ \mathbf{p}_d\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{ik} & \boldsymbol{\Psi}_{id}\\ \boldsymbol{\Phi}_{jk} & \boldsymbol{\Psi}_{jd}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_k\\ \mathbf{p}_d\end{Bmatrix} \tag{1}$$

a. 确定 μ^α 及 κ^α。

b. 令 $\mathbf{p}_d^\alpha$ 与 $\mathbf{p}_d^\beta$ 为不独立坐标，用此法确定 **C** 与 **S**。

c. 用此法形成 **M** 与 **K**。

解：

a. 由公式 19.3

$$\mu^\alpha=(\boldsymbol{\Psi}_\alpha)^T\mathbf{m}^\alpha\boldsymbol{\Psi}^\alpha, \quad \kappa^\alpha=(\boldsymbol{\Psi}^\alpha)^T\mathbf{k}^\alpha\boldsymbol{\Psi}^\alpha \tag{2}$$

$$\mu^\alpha=\begin{bmatrix}\mu_{kk} & \mu_{kd}\\ \mu_{dk} & \mu_{dd}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_k^T\\ \boldsymbol{\Psi}_k^T\end{bmatrix}^\alpha\mathbf{m}_\alpha[\boldsymbol{\Phi}_k\boldsymbol{\Psi}_d]^\alpha \tag{3}$$

实行乘法(略去所有矩阵的上标 α)，以及用公式 19.49，得到

$$\mu_{kk}=\mathbf{I}_{kk}$$

$$\mu_{kd}=\mu_{dk}^T=0$$

$$\mu_{dd}=\boldsymbol{\Psi}_d^T\mathbf{m}\boldsymbol{\Psi}_d=\boldsymbol{\Phi}_{jd}\boldsymbol{\Lambda}_{dd}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{dd}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{jd}^T \tag{4}$$

以类似方式可确定 κ^α

$$\kappa^\alpha=\begin{bmatrix}\kappa_{kk} & \kappa_{kd}\\ \kappa_{dk} & \kappa_{dd}\end{bmatrix}^\alpha \tag{5}$$

其中
$$\kappa_{kk}=\boldsymbol{\Lambda}_{kk} \tag{6}$$

$$\kappa_{kd}^T=\kappa_{dk}=0 \tag{6,c}$$

$$\kappa_{dd}=\boldsymbol{\Psi}_d^T\mathbf{K}\boldsymbol{\Psi}_d=\boldsymbol{\Phi}_d^j\boldsymbol{\Lambda}_{dd}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{jd}^T=\boldsymbol{\Psi}_{jd}$$

再者，公式 19.49 用于建立 κ_{kd} 与 κ_{dd}，比较公式 6*c* 与公式 19.41 可以看出 κ_{dd} 刚好为剩余柔度矩阵 $\mathbf{G}_d$ 界面部分。于是公式 19.42 或公式 19.44 可用于实际上是计算 κ_{dd}。

b. 有两个强制的约束方程，公式 19.10 与 19.57 这里重复为

$$\mathbf{u}_d^\alpha-\mathbf{u}_j^\beta=0 \tag{7a}$$

$$\mathbf{p}_d^\alpha+\mathbf{p}_d^\beta=0 \tag{7b}$$

令坐标排列如在公式 19.21，即

$$\mathbf{p}=\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_d^{\alpha}\\ \mathbf{p}_d^{\beta}\\ \cdots\\ \mathbf{p}_k^{\alpha}\\ \mathbf{p}_k^{\beta}\end{Bmatrix}\quad,\qquad \mathbf{q}=\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_k^{\alpha}\\ \mathbf{p}_k^{\beta}\end{Bmatrix} \tag{8}$$

合并公式 1、7 及 8 得

$$\mathbf{C}\equiv[\mathbf{C}_{dd}\quad \mathbf{C}_{dl}]=\left[\begin{array}{cc:cc}\Psi_{jd}^{\alpha} & -\Psi_{jd}^{\beta} & \Phi_{jk}^{\alpha} & -\Phi_{jk}^{\beta}\\ \mathrm{I} & \mathrm{I} & 0 & 0\end{array}\right] \tag{9}$$

从公式 19.22

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}-\mathbf{C}_{dd}^{-1}\mathbf{C}_{dl}\\ \mathbf{I}_{ee}\end{bmatrix} \tag{10}$$

在公式 9 中 $\mathbf{C}_{dd}$的形式允许它给出

$$\mathbf{C}_{\mathrm{dd}}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_1\Psi_{jd}^{\beta}\\ -\mathbf{k}_1 & \mathrm{I}-\mathbf{k}_1\Psi_{jd}^{\beta}\end{bmatrix} \tag{11}$$

其中

$$\mathbf{k}_1=(\Psi_{jd}^{\alpha}+\Psi_{jd}^{\beta})^{-1} \tag{12}$$

公式 9 至 11 可联立给出

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}-\mathbf{k}_1\Phi_{jk}^{\alpha} & \mathbf{k}_1\Phi_{jk}^{\beta}\\ \mathbf{k}^2\Phi_{jk}^{\alpha} & -\mathbf{k}_2\Phi_{jk}^{\beta}\\ I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix} \tag{13}$$

c. 系统的质量与刚度矩阵给出为

$$\mathbf{M}=\mathbf{S}_{\mu}^{T}\mathrm{S}\qquad \mathbf{K}=\mathbf{S}^{T}\kappa\mathbf{S} \tag{14}$$

应用公式 3 至公式 6 重新整理相应公式 8 的 μ 与 κ，给出

$$\mu=\begin{bmatrix}\mu_{dd}^{\alpha} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu_{dd}^{\beta} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk}^{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{I}_{kk}^{\beta}\end{bmatrix}\qquad \cdots=\begin{bmatrix}\kappa_{dd}^{\alpha} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \kappa_{dd}^{\beta} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Lambda_{kk}^{\alpha} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_{kk}^{\beta}\end{bmatrix} \tag{15}$$

应用公式 13 与 15，将公式 14 实行乘法，并注意由于公式 6c. 公式 12 可写成形式为

$$\mathbf{k}_1=(\kappa_{dd}^{\alpha}+\kappa_{dd}^{\beta})^{-1} \tag{16}$$

得到

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{M}_{\alpha\alpha} & \mathbf{M}_{\alpha\beta}\\ \mathbf{M}_{\beta\alpha} & \mathbf{M}_{\beta\beta}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta}\\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta}\end{bmatrix} \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\alpha\alpha}&=\mathbf{T}_{kk}^{\alpha}+\Phi_{jk}^{\alpha}\mathbf{m}_1\,\Phi_{jk}^{\alpha}\\ \mathbf{M}_{\alpha\beta}&=\mathbf{M}_{\beta\alpha}^{T}=-\Phi_{jk}^{\alpha T}\mathbf{m}_1\,\Phi_{jk}^{\beta}\\ \mathbf{M}_{\beta\beta}&=\mathbf{I}_{kk}^{\beta\beta}+\Phi_{jk}^{\beta T}+\mathbf{m}_1\,\Phi_{jk}^{\beta}\\ \mathbf{K}_{\alpha\alpha}&=\Lambda_{kk}^{\alpha}+\Phi_{jk}^{\alpha T}\mathbf{k}_1\,\Phi_{jk}^{\alpha}\\ \mathbf{K}_{\alpha\beta}&=\mathbf{K}_{\beta\alpha}^{T}=-\Phi_{jk}^{\alpha T}\mathbf{k}_1\,\Phi_{jk}^{\beta}\\ \mathbf{K}_{\beta\beta}&=\Lambda_{kk}^{\beta}+\Phi_{jk}^{\beta T}\mathbf{K}_1\,\Phi_{\mathrm{jk}}^{\beta}\end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$\mathbf{m}_1=\mathbf{k}_1(\mu_{\alpha\alpha}^{\ell}+\mu_{\mathrm{dd}}^{\beta})\mathbf{k}_1 \tag{19}$$

分量模态综合使用上述方法不象例题 19.2 综合使用 Craig-Bampton 方法那样的简单。然而因最后坐标刚好为正规模态坐标 $\mathbf{p}_i^s$ 与 $\mathbf{p}_i^\beta$，以及剩余附加模态说明了所有模态的柔度，所以这个方法得出了很好的结果。图 19.2 给出一些数值收敛研究的成果[19.9,19.12]，其它的研究甚至表明[19.2]，当结构具有一个很大数目的界面自由度时，Craig-Chang 方法更加先进。

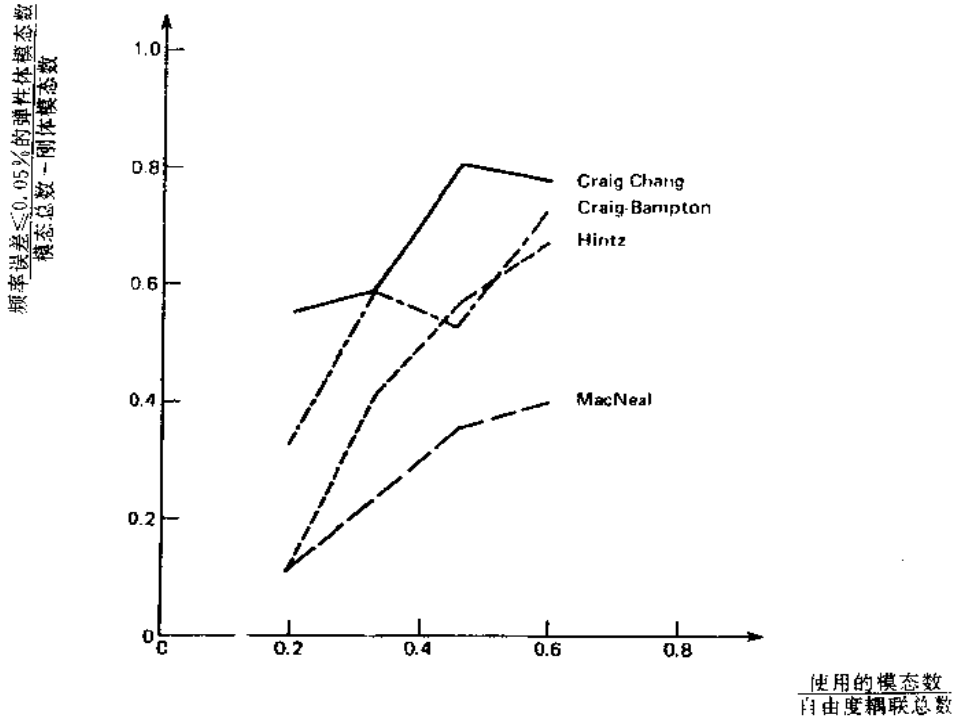


图 19.2 用各种模态分量模态综合法
(对模态数目引起的频率误差≤0.5%的比较)

例题 19.2 与例题 19.5 已经说明了，当两个分量用相同的模态类型表示时的分量模态综合法，例如，在例题 19.2 中的固定界面正规模态加上约束模态。对具有不同表达式分量的连结同样是可能的。例如以固定界面模态加上约束模态表示的一个分量可以连结成以自由界面正规模态加上剩余附加模态表示的一个分量。事实上这样一个表达式已经用于研究空间飞行器有效荷载的动力问题。

许多著作在分量模态综合范围之内曾经考虑阻尼综合(例如参考文献 19.12,19.13 及 19.14)。特别是 Chang[19.12]曾经阐明 *Craig-Chang* 法导出系统模态阻尼要比应用其它分量模态综合法精确。而进一步讨论阻尼已超出本节的范围。

参考文献

19.1 R. R. Craig, Jr., "Methods of Component Mode Synthesis," *Shock and Vib. Digest.* Naval Research Lab. Washington, DC, v. 9, 3-10(1977).

19.2 R. M. Hintz, "Analytical Methods in Component Modal Synthesis," *AIAAJ.*, v. 13, 1007-1016(1975).

19. 3 W. A. Benfield and R. F. Hruda, "Vibration Analysis of Structures by Component Mods Substitution。 *AIAAJ.*, v. 9, 1255-1261(1971).

19. 4 S. Goldenberg and M. Shapiro, *A Study of Modal Coupling Procedures for the Space Shuttle*, NASA CR-112252, Grumman Aerospace Corp., Bethpage, NY (1972)

19. 5 R. R. Craig, Jr. and C-J. Chang, "A Review of Substructure Coupling Methods for Dynamic Analysis," NASA CP-2001, National Aeronautics and Space Admin., Washington, DC, v. 2, 393-408(1976).

19. 6 R. R. Craig, Jr. and M. C. C. Bampton, "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis," *AIAAJ.*, v. 6, 1313-1319(1968).

19. 7 W. C. Hurty, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," *AIAA J.*, V3, 678-685(1965).

19. 8 W. A. Benfield, C. S. Bodley, and G. Morosow, "Modal Synthesis Methods," *Symp. Substr. Testing and Synth.*, NASA Marshall Space Flight Center(1972).

19. 9 R. R. Craig, Jr. and C-J. Chang, "On the Use of Attachment Modes in Substructure Coupling for Dynamic Analysis," Paper 77-405, *AIAA/ASME 18th Struct. Struct. Dyn., and Materials Conf.*, San Diego, CA(1977).

19. 10 R. H. MacNeal, "A Hybrid Nethod of Component Mode Synthesis," *Comp. and Struct.* v. 1, 581-601(1971).

19. 11 S. Rubin, "Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis," *AIAA. J*, v. 13, 995-1006(1975).

19. 12 C-J. Chang *A General Procedure for Substructure Coupling in Dynamic Analysis.* Ph. D. Dissertation. The University of Texas at Austin, Austin, TX(1977).

19. 13 D. D. Kana and S. Huzar, "Synthesis of Shuttle Vehicle Damping Using Substructure Test Results," *J. Spacecraft and Rockets*, v. 10, 790-797(1973).

19. 14 L. R. Klein and E. H. Dowell, "Analysis of Modal Damping by Component Modes Method Using Lagrange Multipliers," *J. Appl. Mech Trans. ASME*, v. 41, 527, 528 (1974).

19. 15 R. L. Bajan and C. C. Feng, "Free Vibration Analysis by the Modal Substitution Method," Paper 68-8-1, *Space Projections from the Rocky Mountain Region*, American Astronautical Society, Denver, CO(1968).

习题组 19. 1

在本章习题中打算用简单的轴向分量弄清所提出的概念和方法。因为许多习题相互联系，在指定所有这些习题时应注意彼此的关系。例如习题 19. 1, 19. 2 及 19. 5, 在 § 19. 2 中所有的习题用图 P19. 1。

19. 1 在图 P19. 1 的轴向分量，应用公式 19. 7 确定约束模态，其中

$$\mathbf{u}_v=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}\qquad \mathbf{u}_c=\{u_3\}$$

19. 2 令 $u_3=0$，图 19. 1 轴力杆确定两个固定界面的正规模态，由模态的正规化，因此

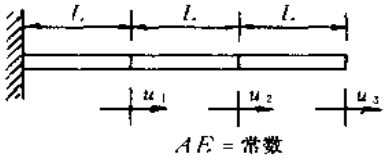


图 P19.1

$M_1=M_2=1$。

19.3 图 p19.1 杆件，应用公式 19.9 确定附加模态，其中

$$\mathbf{u}_w=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix},\qquad \mathbf{u}_a=\{u_3\}$$

19.4

a. 图 P19.1 杆件确定三个自由界面正规模态，定标 $M_1=M_2=M_3=1$。

b. 应用公式 13.34 模态展开定理确定系数 c_r，在展开附加模态用习题 19.3 确定，按自由界面模态上面(a)中确定。

习题组 19.2

19.5 在例题 19.2 中约束模态及一组截断固定界面正规模态作为分量模态应用(见例题 19.2 中的公式 2)。重作例题 19.2(a)，(b)及(c)，应用附加模态定义界面坐标加上一组截断自由界面模态。假定模态形式为一组线性独立。对界面坐标确定附加模态，因为 $u_a\equiv u_j$，模态变换为

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{u}_i\\\mathbf{u}_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{ik} & \boldsymbol{\Psi}_{ia}\\ \boldsymbol{\Phi}_{jk} & \boldsymbol{\Psi}_{ja}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{p}_k\\\mathbf{p}_a\end{Bmatrix}$$

19.6 图 P19.6 中两个分量的每一个，应用分量模态确定习题 19.1 与 19.2 构成一个模型，象例题 19.2 公式 2 中的广义振型迭加模型。

a. 对于每个部件保持两个正规模态，形成 $\kappa^\alpha,\kappa^\beta,\mu^\alpha$ 及 μ^β。

b. 应用例题 19.2 的公式 14 与 15 形成 **M**。

c. 应用例题 19.2 的公式 16 与 17 形成 **K**。

d. 删除相应于每个分量中第二正规模态坐标，并求解三个自由度特征问题结果，将所得结果与 § 10.1 中方法所得的精确频率作比较。

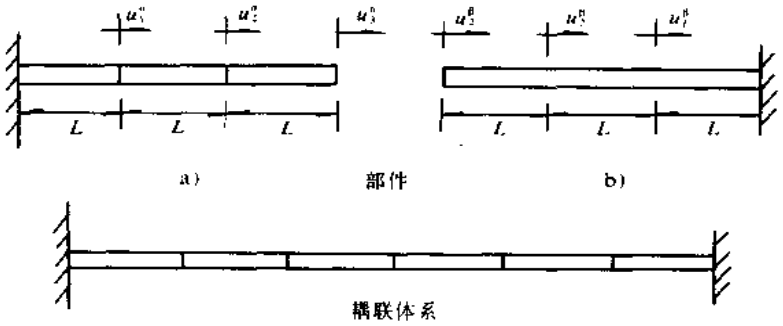


图 P19.6

习题组 19.3

19.7 应用下面杆件(例如应用相容质量矩阵)重作例题 19.3,注意坐标的不同顺序。

$$\mathbf{u}_o=\{u_1\},\quad \mathbf{u}_r=\{u_2\}\quad \mathbf{u}_a=\{u_3\}$$

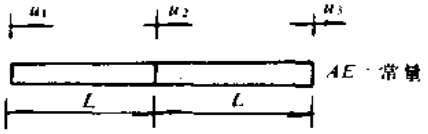


图 P19.7

习题组 19.4

19.8 应用习题 19.3 中确定的附加模态以及习题 19.4 中确定的保留最低频率自由界面模态,来确定剩余附加模态。

19.9 图 P19.7 应用三个自由度杆件,重作例题 19.4,即用相容质量矩阵。

第 20 章　结构地震响应概述

迄今本书介绍的结构动力分析方法已应用于结构动力问题的广大范围，但是，一个有特殊价值的研究是结构抵抗地震激励的分析与设计问题，在前面各章中结构地震响应分析的许多要素已被述及，将在本章中一起引用。然而对这个重要的论题这里只打算作一个简短的介绍。如需要更进一步的了解这方面知识，鼓励读者参考地震工程文献[20.1～20.3]或者结构动力学教科书，以扩大对地震分析与结构设计的视野。

本章将完成如下内容：

- **定义三种类型反应谱—S_a，S_c，S_d，同时说明是如何得到的。**
- **应用震动谱估算一集中质量 SDOF 系统的最大位移与最大恢复力。**
- **应用震动谱估算一柱子 SDOF 假定振型模型承受基础加速度的最大位移与最大地基剪力。**
- **应用震动谱估算一结构集中质量 MDOF 模型承受基础加速度的最大位移与最大基础剪力。**

§ 20.1　引言

虽然每年地震发生几千次，而且它们分布在地球表面的广大范围，但相对地只有其中少数地震引起重大的财产损失及人员伤亡。这些地震是结构工程师所关注的，因为这些地震能够引起结构的破坏，它们被称为**强震运动**。大多数地震强震与弱震多发生在两个地区或地带：一个是太平洋周边地带，围绕太平洋延伸。另一个是阿尔卑斯地带，从喜马拉亚山脉经伊朗与土耳其至地中海延伸。图 20.1 说明地震集中作用于这两个地带。在美国大陆最大的地震作用区域是沿着加利福尼亚海岸与圣安第斯断层联结。里氏等级提供了一个地震按大小分类的简便方法。里氏等级为 5.0 或更大时所产生的地面运动足够造成严重的结构破坏。例如 1906 年的旧金山地震记录为里氏 8.2 级(参考文献 10.1，P.77)。

图 20.2 表示一个发生强震运动时的典型加速度记录，以及由加速度记录的积分得到的速度与位移记录。在地震响应分析中会遇到两种基本困难，那就是激励的随机性[20.4,20.7,20.8]，和响应的非线性[20.9,20.10]。对于这些题目的详细论述都超出了本书范围。然而，地震工程师找到了根据反应谱提供有价值的见解，以近似确定结构的地震激励响应[20.7,20.11,20.14]，因此本书将介绍这种方法。考虑地震响应的重要性不仅对建筑结构设计，而且对装置在这些建筑物中的机器与电器设备的设计都必须计算地震激励的动力响应，这些激励是通过建筑结构物的传递给设备的。

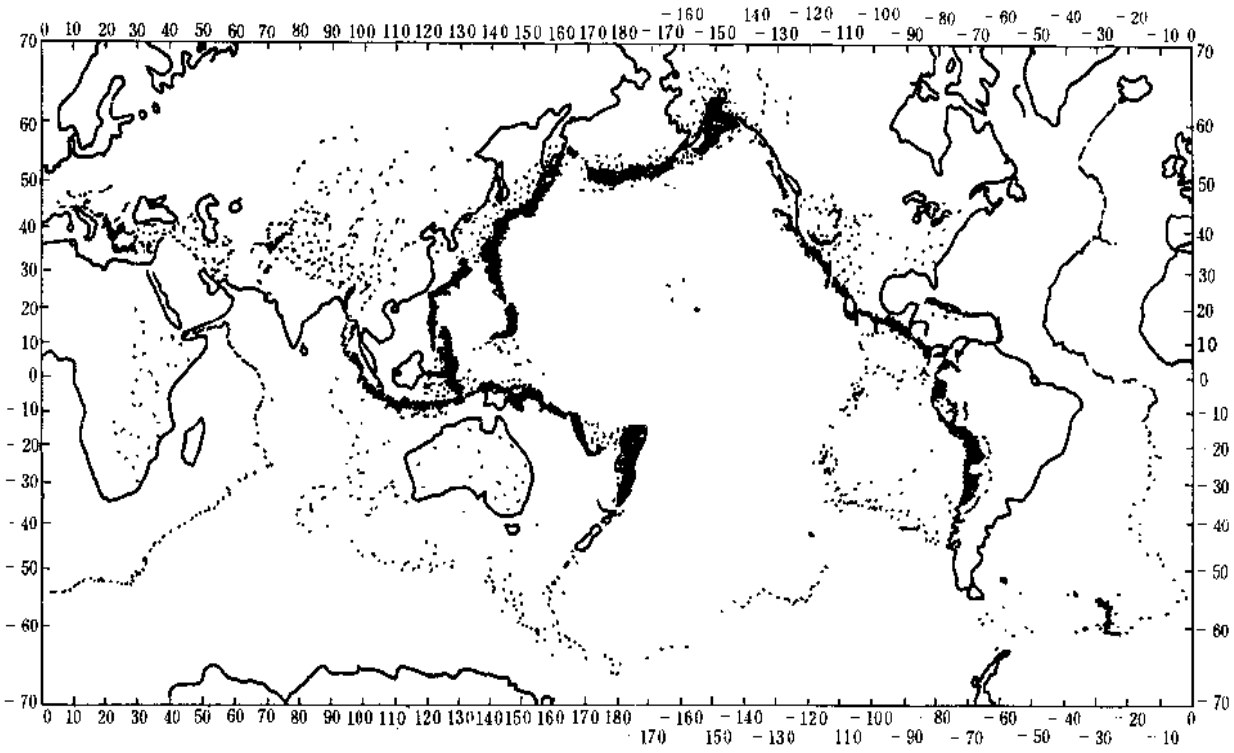


图 20.1　1961 年 1967 年地震记录

结构在地震激励下的响应是基础运动问题(见§4.4及§6.2)。§20.0论述一个SDOF系统在地震类型的基础运动中的响应,而§20.3扩展到分析MDOF系统。

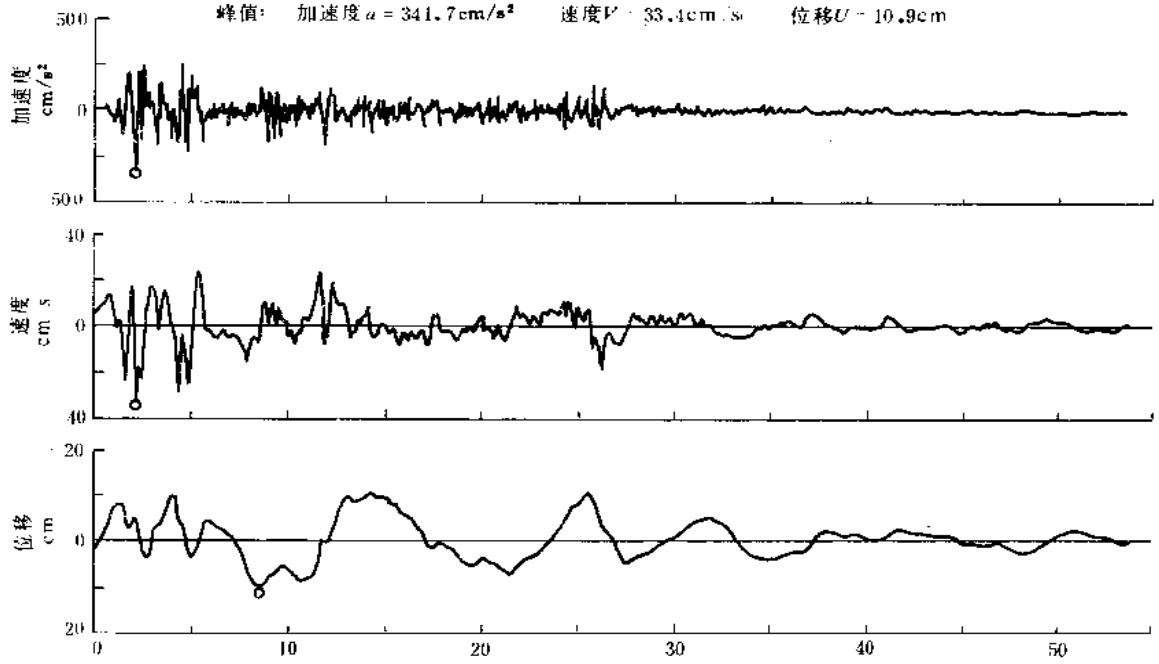


图20.2 El-Centro地震的地面加速度、速度与位移曲线[20.21]

§20.2 SDOF系统地震激励响应——反应谱

地震响应问题本质上是一个基础运动问题,这类似于在§4.4与§6.2所作的介绍。图20.3表示一个承受地面运动的SDOF系统,这是获得基础激励最简单的结构模型。因为它只是线性响应,因之将在这一章论述,图20.3表示的是一个以弹簧常数为k的线性结构。假定基础为刚性以及具有一个地震平移的运动$z(t)$,其绝对运动$u(t)$与相对运动$w(t)$的运动方程已在例题2.2中建立。

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=c\dot{z}+kz \tag{20.1}$$

以及

$$m\ddot{w}+c\dot{w}+kw=-m\ddot{z} \tag{20.2}$$

在§6.2最大相对位移w_{max}与最大绝对加速度(无阻尼系统)表达式已经求得。在公式20.2中通常忽略负号(与$z(t)$的含义效果相反)以及略去ω_n与ω_d之间的微小差别,于是公式20.2的杜哈梅积分解变为(见公式6.12)如下:

$$w(t,\omega_n,l)=\frac{1}{\omega_n}W(t) \tag{20.3}$$

其中

$$w(t)=\int_0^t \ddot{z}(\tau)e^{-l\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau \tag{20.4}$$

相对位移最大值发生在t_m,通常给出符号S_d,称为**谱位移**。

$$S_d(T,\zeta)=w_{max}=\frac{1}{\omega_n}W(t_m) \tag{20.5}$$

S_d曲线依系统固有周期$T=2\pi/\omega_n$而变化,称之为**位移反应谱**,在公式20.4的积分可以

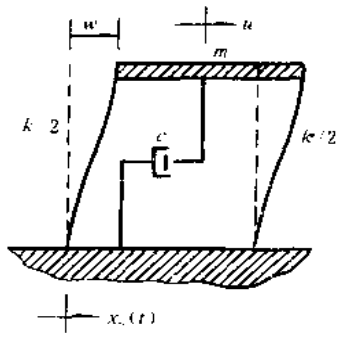


图 20.3　承受基础运动的 **SDOF** 系统

看出速度的大小，这个积分的最大值称为**拟速度谱** S_v，S_v 曲线依 T 而变称为**拟速度反应谱**。

$$S_v=(T,\zeta)=W(t_m)=\omega_n S_d \tag{20.6}$$

公式 6.16 表示一个无阻尼系统最大绝对加速度，为 $\ddot{u}_{max}=\omega_n^2 w_{max}$。虽然这个关系不包含阻尼系统，但弱阻尼系统的最大绝对加速度可近似用**拟加速度谱** S_a。

$$S_a(T,\zeta)=\omega_n^2 S_d=\omega^n S_v \tag{20.7}$$

S_a 曲线依 T 而变称为**拟加速度反应谱**。S_a 从最大弹性力 kS_d 求得

$$(fs)_{max}=kS_d=\left(\frac{k}{\omega_n^2}\right)S_a=mS_a \tag{20.8}$$

即最大弹簧力由拟加速度谱 S_a 乘以质量得到。图 20.4 为拟速度反应谱以线性比例绘制的图最大拟速度是以各种阻尼值的结构固有周期为函数给出的。

图 20.4 中的波峰与波谷为地面运动的局部共振与反共振的结果。为了设计需要。这些不规则折线可以平滑化，以及许多不同的反应谱平均之后正规化得到的一个标准强度，图 20.5 中给出这样一种平均速度反应谱。

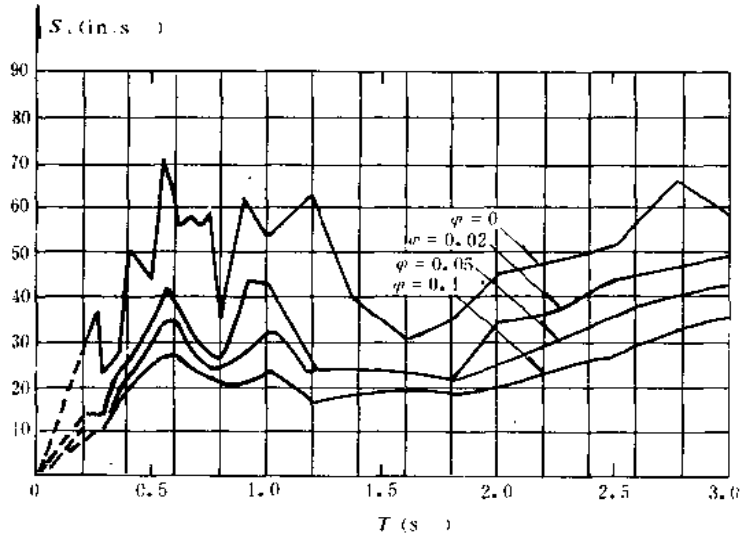


图 20.4　1940.5.18*El-Centro* 地震 N-S 分量拟速度反应谱

由公式 20.7 给出简单的关系式可得到拟速度与拟加速度结果。这些关系可能同时在三部

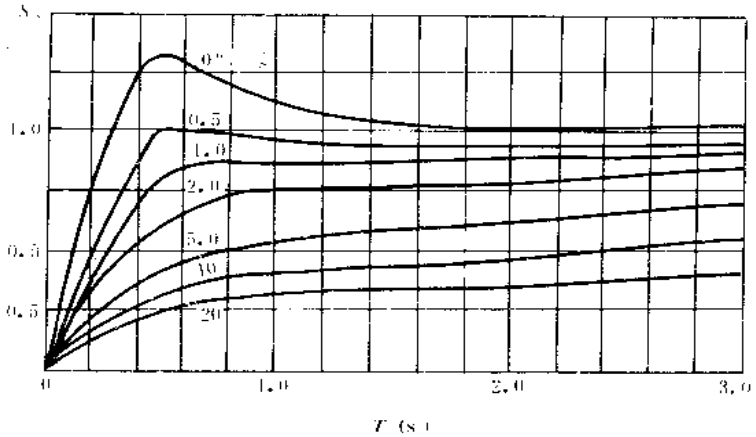


图 20.5　平均速度反应谱 1940El-Centro 地震强度

分对数图上给出所有三种反应谱曲线，如图 20.6 所示。

图 20.4 至 20.6 给出的这些地震反应谱，可以计算 SDOF 系统任何地震作用下的最大效应，根据以上这些，它们是可以推导出来的。例题 20.1 说明对一个集中质量 SDOF 系统的这种计算。

例题 20.1

一 SDOF 框架结构如图 20.3 所示，具有周期 $T=1.0$s 以及阻尼因数$=0.05$，其重量 $W=mg=1500$lb，应用图 20.6 来确定。

a. 最大相对位移 w_{max}。

b. 最大基础剪力 f_s。

解：

$T=1.0$ 及 $\zeta=0.05$ 时，图 20.6 给出下列响应值

$S_d=1.7$in，　$S_v=10.5$in/s，　$S_a=0.17g=66$in/s^2，

据公式 20.5

$$w_{max}=S_d=1.7\text{in}$$

由公式 20.8

$$(f_s)_{max}=mS_a=\left(\frac{W}{g}\right)S_a=1500\times 0.17=255\text{ lb}$$

$$(f_s)_{max}=255\text{ lb}$$

例题 2.9 对伯努利-欧拉梁的横向振动得到了广义参数模型，这个模型可以很容易地推广到类似梁的结构，可用一个 SDOF 广义参数模型来模拟。图 20.7 表示的就是这样一个系统。接着例题 2.9 的相对位移 $w(x,t)$用下面假定振型形式来表示。

$$w(x,t)=\psi(x)w(t) \tag{20.9}$$

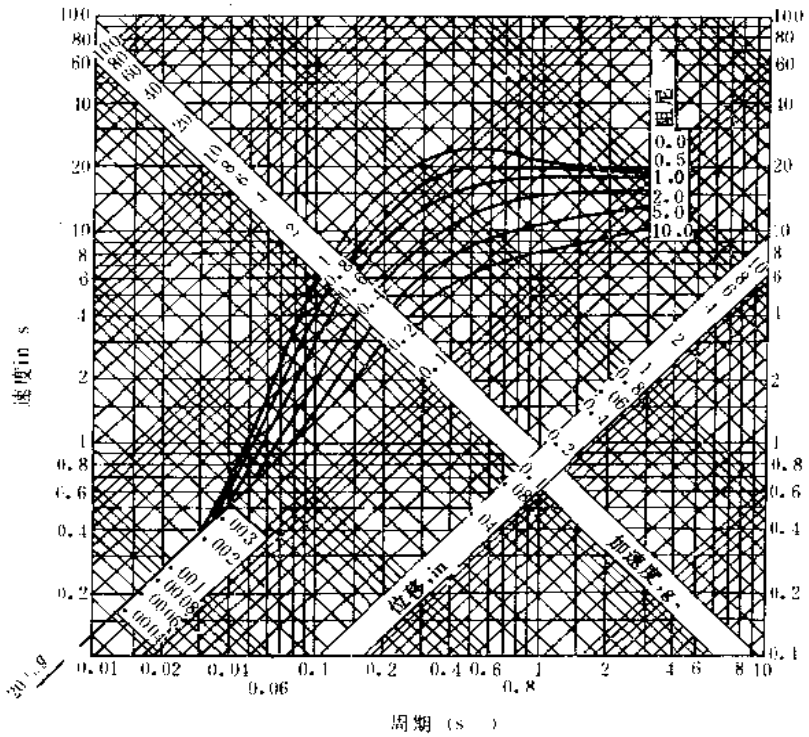


图 20.6　三部分设计谱曲线图(在 $T=0$,以 20%g 比例)

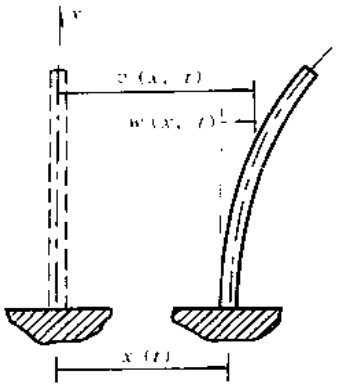


图 20.7　一个 SDOF 广义坐标
悬臂柱的地震

设 $\phi(x)$为正规化,所以 $\phi(L)=1$,$w(t)$表示为相对运动,$w(L,t)$在柱端,从公式 2.22 给出虚功为

$$\delta W' = \delta W_{nc} - \delta V + \delta W_{惯性} \tag{20.10}$$

如果没有分布外荷载,像图 20.7 情形 $\delta Wnc=0$,应变能为相对位移的函数,所以从公式 2.24b 有

$$\delta V = \int_0^L (EIw'')\delta_w dx \tag{20.11}$$

激励惯性力从属于绝对加速度,于是

$$\delta W_{惯性} = \int_0^L -\rho A(\ddot{w} + \ddot{z})\delta w dx \tag{20.12}$$

公式 20.9 至 20.12 合并得到

$$(m\ddot{w}+kw+\ddot{z}\mu)\delta_w=0 \tag{20.13}$$

一般因为 $\delta w \neq 0$，于是 SDOF 广义参数系统的运动方程为

$$m\ddot{w}+kw=-\ddot{z}\mu \tag{20.14}$$

其中正如前面所示

$$m=\int_0^L \rho A\psi^2 dx \tag{20.15}$$

$$k=\int_0^L EI(\psi'')^2 dx$$

基础加速度引起的有效力

$$p_{有效}=-\ddot{z}\mu \tag{20.16}$$

其中 μ 为**地震参预系数**，表示为

$$\mu = \int_c^L \rho A\psi dx \tag{20.17}$$

如果阻尼与相对速度成正比包含在广义参数模型中，公式 20.14 变为

$$m\ddot{w}+c\dot{w}+kw=-\ddot{z}\mu \tag{20.18}$$

（注意在公式 20.18 右边项包含 μ，而不是公式 20.2 出现的 m）。

集中质量 SDOF 系统相对运动方程是公式 20.2，最大相对位移由公式 20.5 给出。比较公式 20.18 与 20.2 可以看出，对于一个分布质量系统有

$$w_{max}=(\frac{\mu}{m})S_d=(\frac{\mu}{m\omega_n})S_v \tag{20.19}$$

其中也应用了公式 20.6。

感兴趣的是确定由于地震相对于基础运动的基础剪力及倾覆力矩，这里将确定基础剪力。

根据公式 9.16 及 9.17，剪力可表示为 $w(x,t)$ 的三阶微分。然而，因公式 20.9 中假定振型解仅仅是近似的，所以三阶微分不可能提供一个可接受的剪力近似表达式。在公式 20.8 中表示对于集中质量 **SDOF** 系统可由拟加速度谱乘以质量得到最大恢复力，而拟加速度谱为位移谱的 ω_n^2 倍。图 20.7 的广义参数模型可以用下面公式定义一个有效加速度 $\ddot{w}_e$

$$\ddot{w}_e=\omega_n^2 w(x,t) \tag{20.20}$$

公式 20.9 与 20.19 合并得到

$$\ddot{w}_e=\omega_n^2\psi(x)w(t) \tag{20.21}$$

从图 20.8 给出基础剪力为

$$S(0,t) = \omega_n^2 w(t)\int_0^L \rho A\psi(x)dx = \mu\omega_n^2 w(t) \tag{20.22}$$

由公式 20.19，20.22 与 20.7 给出最大基础剪力为

$$S_{max}(0,t)=\mu\omega_n^2(\frac{\mu}{m})S_d=\left(\frac{\mu^2}{m}\right)S_a \tag{20.23}$$

基础倾复力矩可以从图 20.8 以同样方式确定。

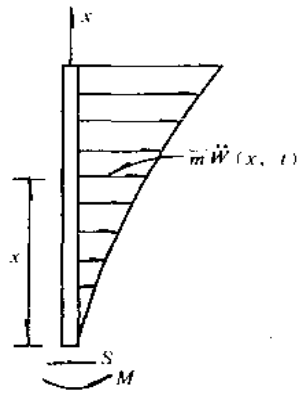


图 20.8　悬臂柱上的有效惯性荷载

例题 20.2

一匀质悬臂柱相似于图 20.7 及 20.8 所表示的，具有重量 W，周期 1.0S，阻尼因数 5%，假定挠曲形函数为

$$\psi(x)=(\frac{x}{L})^2$$

并应用图 20.6 反应谱来确定：

(a)柱顶的最大位移。

(b)以柱子总重的百分数表示最大基础剪力。

解：

a. 因为周期与阻尼因数与例题 20.1 相同，所以

$S_d=1.7\text{in}$　，　$S_v=10.5\text{in/s}$　，　$S_a=0.17\text{g}$

由公式 20.9 与 20.19

$$w_{max}(L,t)\equiv w_{max}=(\frac{\mu}{m})S_d \tag{1}$$

其中由公式 20.15a 与 20.17

$$m=\int_0^L \rho A\psi^2 dx \tag{2}$$

$$\mu=\int_0^L \rho A\psi dx \tag{3}$$

$$m=\frac{W}{gL}\int_0^L \psi^2 dx=\frac{W}{g}(\frac{1}{5}) \tag{4}$$

$$\mu=\frac{W}{gL}\int_0^L \psi dx=\frac{W}{g}(\frac{1}{3}) \tag{5}$$

所以

$$w_{max}=(\frac{(1/3)}{1/5})(1.7) \tag{6}$$

$$\boxed{w_{max}=2.8\text{ in}} \tag{7}$$

b. 由公式 20.23 即

$$S_{max}(0,t)=(\frac{\mu^2}{m})S_a=\frac{(1/3)^2(W/g)^2}{(1/5)(W/g)}(0.17g) \tag{8}$$

因此

$$S_{max}(0,t)=(\frac{5}{9})(0.17W)=0.09 \tag{9}$$

即

$$\boxed{S_{max}(0,t)=9.4\%W} \tag{10}$$

§20.3 MDOF 系统地震激励响应

在第 15 章与 18 章中所论述的确定动力激励 MDOF 系统响应的方法当然可以应用于地震问题。即计算 MDOF 系统在确定的地面运动时间历程的响应可以应用振型迭加法或对运动方程直接积分来求得。然而 SDOF 系统用所介绍的反应谱作可能的一些简化也可扩大到 MDOF 系统中。在本节将要论述相对简单的 MDOF 系统集中质量多层建筑模型，如图 20.9 所示。在 §20.4 中将对这个简单的模型的一些限制作简略的研究讨论。反应谱对于 SDOF 系统是有用的，所以将要应用第 15 章中的振型迭加法。

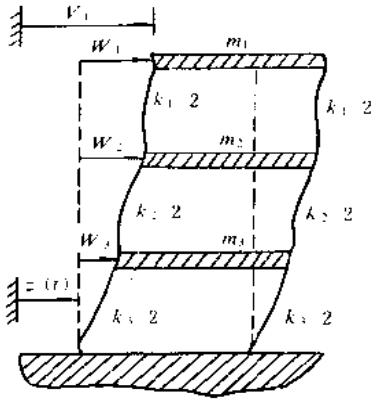


图 20.9 地震激励多层建筑物

假定图 20.9 的建筑模型没有基础转动，以及基础运动视为刚体位移 $z(t)$，因此运动方程可容易的表示为下面的形式

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{v}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{w}}+\mathbf{k}\mathbf{w}=0 \tag{20.24}$$

如果假定粘滞阻尼与相对位移成比例，则向量形式为

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}+\mathbf{1}z \tag{20.25}$$

其中 1 为单位列向量，因此公式 20.24 变为

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{w}}+\mathbf{c}\dot{\mathbf{w}}+\mathbf{k}\mathbf{w}=\mathbf{p}_{有效}(t) \tag{20.26}$$

其中

$$\mathbf{p}_{有效}(t)=-\mathbf{m}\mathbf{1}\ddot{z}(t) \tag{20.27}$$

用振型迭加法求解 MDOF 系统响应的应用已在第 15 章中进行了广泛的论述。特别是公式 15.8 与公式 15.9 应用于具有粘滞阻尼的 MDOF 系统，以及为了运动方程在主坐标中是非

耦联的，则通过公式 15.31 至公式 15.33 将阻尼限定成一种类型。振型迭加解为

$$\mathbf{w}=\Phi\eta=\sum_{r=1}^{N}\phi_r\eta_r(t) \tag{20.28}$$

导出非耦联方程

$$\ddot{\eta}_r+2\zeta_r\omega_r\dot{\eta}_r+\omega_r^2\eta r=\frac{1}{M_r}P_r(t) \tag{20.29}$$

从公式 15.17 与公式 20.27

$$P_r(t)=\phi_r^T\mathbf{m}1\ddot{z}(t) \tag{20.30}$$

（正如前面公式 20.27 的负号在公式 20.30 中被忽略）。用类似公式 20.16 与公式 20.17，可以确定一个**模态地震参与系数** μ_r，为此

$$\mu_r=\phi_r^T\mathbf{m}1=1^T\mathbf{m}\phi_r \tag{20.31}$$

以及

$$P_r(t)=\mu_r\ddot{z}(t) \tag{20.32}$$

最后，与公式 20.2 至公式 20.4 类似

$$\eta_r(t)=\frac{\mu_r}{M_r\omega_r}W_r(t) \tag{20.33}$$

其中

$$W_r(t)=\int_0^t\ddot{z}(\tau)e^{-\zeta_r\omega_r(t-\tau)}\sin\omega_r(t-\tau)d\tau \tag{20.34}$$

最后，从公式 20.28 与公式 20.33

$$\mathbf{w}=\sum_{r=1}^{N}\phi_r\left(\frac{\mu_r W_r(t)}{M_r\mathbf{W}_r}\right) \tag{20.35}$$

虽然公式 20.35 给出一个能直截了当地确定地震激励 **MDOF** 系统相对运动的时间历程，但它包含了公式 20.34 形式的各种模态响应方程的积分。甚至多自由度系统响应用前 n 个模态的响应来表达也是可以接受的，公式 20.35 表示的过程是冗长繁杂的，它仅得出一种个别的基础运动加速度历程响应 $\ddot{z}(t)$。

按照反应谱由于第 r 个模态的最大相对位移可表示为：

$$\max_t|\mathbf{w}_r(t)|=|\phi_r|\frac{|\mu_r|}{M_r\omega_r}S_v(T_r,\zeta_r) \tag{20.36}$$

其中绝对值标记$|\mathbf{w}_r(t)|$与$|\phi_r|$意味着每个自由度的值。困难发生在公式 20.35 的每一模态可以达到它的最大值，由公式 20.36 在不同的时间给出，因此

$$\max_t|\mathbf{w}(t)|\neq\sum_{r=1}^{N}\max|\mathbf{w}_r(t)| \tag{20.37}$$

任一响应最大值的估算通常都可以由均方根(rms)方法得到一个非常满意的结果，即

$$\max|Q(t)|=\left[\sum_{r=1}^{N}(\max|Q_r(t)|)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{20.38}$$

其中 Q 为任一响应值。因此，最大相对位移响应可由均方根(RMS)响应近似表示

$$\max|\mathbf{w}(t)|=\left\{\sum_{r=1}^{N}\left[\left(\frac{|\phi_r||\mu_r|}{M_r\omega_r}\right)S_r(T_r,\zeta_r)\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{20.39}$$

均方根值可以是真实最大响应值的上限或下限。对于系统以恰当地分离频率间隔一般有个较好的估算，但如果系统频率间隔很密时则估算可能非常差。参考文献 20.2 认为公式 20.38 对这种系统最大响应的估算方法不适合。

为了计算 MDOF 系统产生的地震激励模态力，如图 20.9 的建筑物的有效模态加速度可类似由公式 20.20 同理给出

$$(\ddot{\mathbf{w}}_r)_e = \omega_r^2 \mathbf{w}_r \tag{20.40}$$

由 $\mathbf{m}(\ddot{\mathbf{w}}_r)_e$ 给出有效加速度惯性力。对于如图 20.9 这举的结构第 r 个模态对基础剪力的贡献由公式 20.22 同理给出

$$\begin{aligned} S_r(t) &= \sum_{i=1}^{N} m_i (\ddot{w}_{ir})_e = \sum_{i=1}^{N} \omega_r^2 \mathrm{m}_i w_{ir} \\ &= 1^T \mathbf{m} \phi_r \omega_r^2 \eta_r(\mathrm{t}) \\ &= 1^T \mathbf{m} \phi_r \left(\frac{\mu_r \omega_r}{M_r} \right) W_r(\mathrm{t}) = \left(\frac{\mu_r^2 \omega_r}{M_r} \right) \mathrm{W}_r(\mathrm{t}) \end{aligned} \tag{20.41}$$

因此第 r 个模态最大基础剪力可表示为

$$\max_t |S_r(t)| = (\frac{\mu_r^2}{M_r}) S_a(T_r, \zeta_r) \tag{20.42}$$

像位移最大值一样，基础剪力最大值可用均方根值近似表示为

$$\max_t |S(t)| = \left| \sum_{r=1}^{N} \left[\frac{\mu_r^2}{M_r} S_a(T_r, \zeta_r) \right]^2 \right|^{\frac{1}{2}} \tag{20.43}$$

例题 20.3

例题 15.1 的四层建筑，确定其

(a)每个模态的 S_d，S_v 及 S_a，假定每个模态具有 5%阻尼，图 20.6 给出反应谱。

(b)估算顶部质量最大位移的均方根值。

(c)估算最大基础剪力均方根值。

解：

a. 从例题 15.1 给出的 ω_r 值可计算周期 T_r，由图 20.6 的 5%阻尼曲线相应点上确定 S_d，S_v 及 S_a 值，这些值列表于下

r	$T_r(s)$	S_d(in)	S_v(in/s)	$S_a(g)$
1	0.47	0.60	8.0	0.28
2	0.21	0.14	4.0	0.30
3	0.15	0.07	2.7	0.28
4	0.11	0.03	1.6	0.24

b. 由公式 20.39

$$\max |\mathrm{w}_1(t)| = (\sum_{r=1}^{4} \left[\frac{|\phi_{1r}||\mu_r|}{M_r \omega_r} S_{vr} \right]^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

由公式 20.31

$$\mu_r = \phi_r^T \mathbf{m} 1 = 1^T \mathbf{m} \phi_r = \sum_{i=1}^{N} m_i \phi_{ir} \tag{2}$$

因此，应用例题 15.1 的数值得

$$\mu_1 = 4.2565 \quad , \quad \mu_2 = -1.5919$$
$$\mu_3 = -1.3425 \quad , \quad \mu_4 = -0.6526$$

那么

$$\max_t |w_1(t)| = \left\{\left(\frac{1 \times .2565 \times 8}{2.873 \times 13.296}\right)^2 + \left(\frac{1 \times 1.5919 \times 4}{2.177 \times 29.660}\right)^2 + \left(\frac{0.9015 \times 1.3425 \times 2.7}{4.367 \times 41.079}\right)^2 + \left(\frac{0.1544 \times 0.6526 \times 1.6}{3.642 \times 55.882}\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$\max_t |w_1(t)| = (0.7949 + 0.0097 + 0.0003 + 0)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\max_t |w_1(t)| = 0.897 \quad \text{in}}$$

注意其最大响应仅由于模态 1 就为 0.897，因此模态 1 几乎作出地震激励响应的全部贡献。

c. 最大基础剪力可近似应用公式 20.43 得出

于是

$$\max_t |S(t)| = \left[\sum_{r=1}^{N} \left(\frac{\mu_r^2}{M_r} S_{ar}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

于是

$$\max_t |S(t)| = \left[\left(\frac{4.2565^2 \times 0.28 \times 386}{2.873}\right)^2 + \left(\frac{1.5919^2 \times 0.30 \times 386}{2.177}\right)^2 + \left(\frac{1.3425^2 \times 0.28 \times 386}{4.367}\right)^2 + \left(\frac{0.6526^2 \times 0.24 \times 386}{3.642}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\max_t |S(t)| = 696.3\text{k}}$$

再次表明，对基础剪力贡献最多的是第一模态。

§20.4 进一步研究

在本章所论述的结构地震激励响应的论述，是必要的，也是简短有限的。正如所指出的，它对于曾作过详细介绍的线性分析是个必要的工具，然而对于曾作过介绍的非线性分析也同样是所需要的一些计算工具。在本章末尾的参考文献中提供了研究更为困难的结构抗震设计问题的手段。例如线性响应的确定性分析线性与非线性响应的非确定性分析，多支承激励，土壤与结构相互作用，基础转动等。

虽然对于建筑结构的抗震设计与分析，已给予了充分的注意，但是建筑物内部安装的设备抵抗动力激励的设计却注意的很少；象泵、压缩机、管道系统以及发电机等设备必须考虑到大震中发生灾难性后果的功能与作用。参考文献 20.15 论述了涉及装备设计的一个等级问题，即相对于轻量装备的弱阻尼设计问题。有些结构抗震的设计观点也可介绍在其他结构设计问题中。例如对于瞬时环境的宇宙飞船及空间有效负载问题。有些地震观点的设计问题、相对地就难以定义，如对于一个特殊助推器有效负载系统早期飞行的瞬时类型基础激励、随机类型激励

和其他即是如此。参考文献 20.16、例如对于宇宙飞船荷载分析介绍了一种广义模态震动谱的方法。参考文献 20.17 介绍了一种瞬时环境空间有效负载设计问题的评述。

参考文献

20.1 R. L. Wiegel, ed, *Earthquake Engineerig*, Prentice — Hall, Englewood Cliffs, NJ (1970).

20.2 N. M. Newmark and E. Rosenbleuth, *Fundamentals of Earthquake Engineering. Prentice—Hall*, Englewood Cliffs, NJ(19761).

20.3 S. Okamtot, *Introduction to Earthquake Engineering*. Wiley, New York (1973).

20.4 R. W. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Btructures*, McGraw — Hill, New York (1975).

20.5 M. Barazangi and J. Dorman, "World Seismicity Maps Compiled from ESSA, Coast and Geodetic Survey, Epicenter Data, 1961—1967," Bull Seism. Soc. Amer, v. 59, n. 1, 369—380(1969).

20.6 D. E. Hudson et al., *Strong Motion Earthquake Accelerograms—Vol. ll—Corrected Accelerograms and Integrtated Ground Velocity and Displacement Curves—Part A*, Earthquake Engineering Research Laboratory, Report No. EERL 71—50, California Institute of Technology, Pasadena(1971).

20.7 J. M. Biggs, *Introduction to Structural Dynamics*. McGraw—Hill, New York(1964).

20.8 A. H—S Ang, "Probability Concepts in Earthquake Engineering," *Applied Mechanics in Earthquake Engingeering*. AMD—v. 8, ASME, New York, 225259(1974).

20.9 M. A. Sonzen, "Hystere in Structural Elements," *Applied Mechanics in Earthquake Engineering*. AMD—v. 8, ASME, New York, 63—98(1974).

20.10 W. D. Iwan, "Application of Nonlinear Analyis Techniques," *Applied Mechanics in Earthquake Engineering*, AMD—v. 8, ASME, New York, 135—161(1974).

20.11 M. A. Biot, "Analytical and Experimental Methods in Engineering Seismology," Trans. ASCE, v. 108, 365—408(1943).

20.12 G. W. Housner, "Characteristics of Strong — Motion Earthquakes," *Bull, Seism. Soc. Amer, v.* 37, 19—29(1974).

20.13 D. E. Hudson, "Response Spectrum Techniques in Engineering Seismology," *Proc. World Conf. on Earthquake Eng, Berkeley, CA*, 4—1, 4—12(1956).

20.14 N. M. Newmark, "Current Trends in the Seismic Analysis and Design of High—Rise Structures," Ch. 16, *Earthquake Engineering (R. L. Wiegel, ed.)*, Prentice—Hall, Englewood Cliffs, NJ(1970).

20.15 J. L. Sackman and J. M. Kelly, *Rational Design Methods for Light Equipment in Structures Subjected to Groud Motion*, Earthquake Engineering Research Center, Report No. DCB/EERC—78/19, University of California, Berkeley, CA(1978).

20.16 M. Trubert and M. Salama, *A Generalized Modal Shock Spectra Method for Space-*

craft Loads Analysis, *Publ.* 79 — 2, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA (1979).

20.17 B. K. Wada, "Design of Space Payloads for Transient Environments," *Survival of Mechanical Systems in Transient Environments*, ASME, AMD—v. 36(1979).

20.18 G. W. Housner, "Strong Ground Motion," Ch. 4 *in Earthquaske Engineering* (*R. L.* Wiegel, ed.), Prentice—Hall, Englewood Cliffs, NJ(1970).

20.19 *G. W. Housner*, "*Design Spectrum*," *Ch.* 5 *in Earthquake Engineering* (R. L. Wiegel, ed.), Prentice—Hall, Englewood Cliffs, NJ(1970).

习题组 20.2

20.1 应用图 20.5 的 $\zeta=0\%$ 的曲线，画出 $0.2\leqslant T_n\leqslant 2.0$Hz 时 S_a 依 T_n 而变化的曲线。

20.2 一个 MDOF 框架结构如图 20.3 所表示的，周期为 0.8s 阻尼因数 2%，质量 $m=10$ *l*b-s^2/in。

(a)应用图 20.5 确定作用该结构上的速度谱 S_v 值。

(b)确定 S_a 与 S_d。

(c)确定质量的最大位移。

(d)确定最大弹性力。

20.3 应用图 20.8 确定最大倾复力矩 $M(0,t)$的表达式。

20.4 重作例题 20.2，如果柱子的周期为 0.8s，阻尼因数为 2%，以及 $\psi(x)$选择为

$$\psi(x)=1-\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

习题组 20.3

20.5 应用习题 14.2 的三层建筑物，它的固有频率及振型已在习题 15.2 中给出，确定如下：

(a)每个模态的 S_d，S_v 及 S_a 值，假如每个模态阻尼为 2%，假定图 20.6 给出了所考虑的地震激励反应谱。

(b)用均方根法估算顶层质量的最大位移。

(c)用均方根法估算最大基础剪力。

20.6 图 P14.2 所表示的建筑物其刚度值减少 50%，在图 20.6 中用一个因数为 2 来增加响应强度。重作习题 20.5。

附录 A：单位制

在结构动力学问题中根据牛顿第二定律

即 $$力=质量\times加速度 \tag{A1}$$

和这些参量，加上其它相关的参量，必须以单位系统相一致来表示，当今工程实际上已由英制变换为国际单位制(SI)。公式 A1 得到英制量纲的一致性。当力给出 lb，质量为 Slug，加速度为 ft/s^2，这就是 ft-lb-s 英制单位。Slug 为派生单位。从公式 A1 中，$1Slug=1lb\text{-}s^2/ft$。

力与质量单位常常导致紊乱。因为重量这个术语既作为力又作为质量的数量。一方面，一个物体的"重量"这种说法通常是指质量。即物质的数量。在另一方面，在科学上与技术上"物体的重量"这个术语的用法通常意思是力。如果用于物体，将给出一个加速度等于当地的自由落体加速度。这个'重量'可用弹簧测量。假如一个物体的'质量'给出为 lb_m，它必须用重力加速度 $g\simeq32.2ft/s^2$ 除得到质量。参见牛顿第二定律。即 $1lb_m$ 质量由于地球充满引力产生 1lbf 力。

在结构动力学及振动中常采用，in-lbf-s 制。在这个系统中应用 $g=32.2\times12=386$。

国际单位制(SI)是公制的标准说法，[A1]它是 7 个基本单位的**相关体**系在 *SI* 单位中，千克是质量的一个单位。千克力(后缀力经常被省略)将不使用。[A1]。它们的名称与符号以及确切定义已经建立。许多派生单位根据基本单位确定。在一般情况下，每一个指定符号并给予名称。另外有**辅助单位**。

基本单位量纲是独立的，在结构动力学中感兴趣的一种是米(m)，千克* (kg)及秒(s)，SI 制最大的优点之一是每一个物理量有一个仅有一个单位，如长度为米，质量为千克，时间为秒等。

一些派生与辅助的 SI 单位　　表 A1

分量	单位(名称)	符号	公式(量纲)
派生单位：			
频率	赫兹	Hz	s^{-1}
力	牛顿	N	$kg\cdot m/s^2$
应力	帕	pa	N/m^2
能量、功	焦尔	J	$N\cdot m$
辅助单位：			
平面转角	弧度	rad	

长度单位米是"长度等于在真空中氪－86 原子的 $2P_{10}$ 与 $2P_5$ 之间能级转换放射的 1650763.X73 波长"。质量的单位是公斤它等于国际的标准公斤质量，这个标准公斤保存在靠近巴黎的国际计量局。时间的单位是秒，"它是铯－133 原子两个超精细能级之间转换放射的 9192631770 周期"。

参考文献 A1 给出广泛的变换系数与许多记数规则的表，同时它们的单位适合于 SI 形式。表 A2 给出 SI 单位倍数与约数的前缀，而表 A_3 提供英制变换为 SI 制的变换系数。

* 在 SI 单位中，千克是质量的单位。千克力(后缀力经常被省略)将不使用。

1. SI 前缀

a. 当用一个数值与一个单位表示一个数量时，必须选好前缀，其数值取 0.1 至 1000 之间。

SI 单位制倍数与约数的前缀　　表 A2

倍数	前缀	符号	约数	前缀	符号
10^{12}	兆兆	T	10^{-1}	分	d
10^{9}	千兆	G	10^{-2}	厘	c
10^{6}	兆(百万)	M	10^{-3}	毫	m
10^{3}	千	k	10^{-6}	微	μ
10^{2}	百	h	10^{-9}	毫微	n
10	十	dc	10^{-12}	微微	p
			10^{-15}	毫微微	f
			10^{-18}	微微微	a

英制变 SI 单位　　表 A3

英制	公制	相乘数
呎(ft)	米(m)	3.048000E−01
马力(550ft−lb/s)	瓦特(W)	7.456999E+02
吋(in)	米(m)	2.540000E−02
千磅(1000lbf)	牛顿(N)	4.448222E+03
磅−力(lbf)	牛顿(N)	4.448222E+00
磅−力−吋(lbf−in)	牛顿米(N·m)	1.129848E−01
磅−力/吋(lbf/in)	每米牛顿(N/m)	1.751268E+02
磅−力/吋²(lbf/in²)	巴(Pa)	6.894757E+03
磅−质/吋³(lbm/in³)	每立方米公斤(kg/m³)	2.767990E+04
磅−质量(lbm)	公斤(kg)	4.535924E−01

为了在 SI 单位中记数与符号等标准化已经有许多的建议[AU]，下面提供经常遇到的情形。换算中必须注意小心处理相对应之间的数据与数字的精确。

b. 通常前缀必须附加在单位的分子上，一种情形除外，公斤即是这样的单位。

c. 前缀与单位符号之间无间隔。

2. 单位符号

a. 单位符号应当用罗马印刷字体。

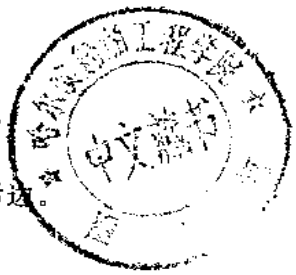
b. 单位后面不用句号，除非是应用在句尾。

c. 在完整表达一个数量时，在数值与单位符号之间应保留间隔。

3. 以乘与除建立单位

用单位名称：

396079



a. 乘积——应用间隔(牛顿　米)或联系符号(牛顿-米)。

b. 商——应用'每'字,不用斜线(/)

c. 幂——应用修饰语'平方'或'立方'放在单位的名称后边。

用单位符号

a. 乘积——使用加上圆点(N·m)。

b. 商——使用下面一种形式:

m/s 或 $\frac{m}{s}$ 或 $m \cdot s^{-1}$

4. 数字

有的地区逗号有时作为小数点的标记。为了避免可能引起混淆，推荐国际惯例要求将数据分成三个一组,从小数点向左与向右计数,并用较小的间距分隔成组。

参考文献

A1 An American National Standard ASTM/IEEE *Standard Metric Practice*。ASTME380—76IEEM Std 268—1976 AnSI Z210—1976。Institute of Electrictrical and Electronics Engineers(1976)