第一章　Noether 对称性理论

本章讨论 Noether 对称性与不变量。1918 年德国女科学家 A. E. Noether 提出了一个定理，揭示了力学系统的守恒量与其内在的动力学对称性之间的关系，后来被称之为 Noether 定理。按照 Noether 的思路，人们逐步认识到，对于更为复杂的力学系统，寻求其不变量的有效途径之一就是研究力学系统的对称性。在本章里，我们将系统地介绍 Noether 定理及其逆定理。

第一节　经典 Noether 定理

研究力学系统的不变量有三种方法：1. 直接研究运动微分方程；2. 研究在无穷小变换下 Hamilton 原理的变换性质；3. 从微分变分原理研究守恒量。我们采用第二种方法。

一、Hamilton 原理

考虑一个有限自由度的完整有势力学系统，描述其位形的广义坐标为 $q_j(t)(j=1,\cdots,n)$，系统的运动可由 Lagrange 函数 $L=L(t,q_i,\dot{q}_i)$ 来描述，其中 $\dot{q}_i=\frac{dq_i}{dt}$ 为广义速度；$L=T-V$，其中 T 为系统的动能。泛函

$$I[q]=\int_{t_0}^{t_1}L(t,q_i,\dot{q}_i)dt \tag{1.1.1}$$

称为 Hamilton 作用量。

Hamilton 原理　对于完整保守的力学系统，在某一时间间隔内系统的真实运动与在同一时间内具有相同起始位置的可能运动相比较，真实运动使 Hamilton 作用量取驻值，即

$$\delta I=0 \tag{1.1.2}$$

Hamilton 原理给出了从可能运动中挑选出真实运动的法则，并由此建立力学系统的运动微分方程。

根据 Hamilton 原理，对 Hamilton 作用量变分得

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \tag{1.1.3}$$

式(1.1.3)中相同下标表示求和(下同)。对于完整系统，存在交换关系

$$\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \delta \dot{q}_i \tag{1.1.4}$$

利用交换关系式(1.1.4)，将式(1.1.3)右端第二项分部积分，并考虑到

$$\delta q_i \mid_{t=t_0} = \delta q_i \mid_{t=t_1} = 0 \tag{1.1.5}$$

则可得泛函 $I[q]$ 的变分

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \tag{1.1.6}$$

对于力学系统的真实运动 $\delta I = 0$，根据完整系统 δq_i 的独立性，由变分学的基本引理，我们可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{1.1.7}$$

式(1.1.7)通常称为 Lagrange 方程，由此可确定力学系统的真实运动。

Hamilton 原理在力学、理论物理中有非常重要的作用，它的优点不仅在于用简洁的数学式描述力学系统运动的规律，也在于它提出了用比较可能运动与真实运动的方法确定力学系统的运动规律的原则。

可以证明，如果在 Hamilton 作用量中的 Lagrange 函数上添加上一个函数关于时间的全微分项，系统的 Lagrange 方程(1.1.7)将保持不变。由此可知，描述力学系统运动的 Lagrange 函数是不唯一的。

二、对称性和不变量

我们所处的世界是丰富多彩、千变万化的。然而，只要我们仔细观察，就可以从这个变化万千的世界里找到一类普遍存在的现象——对称。世界上各种事物的对称性表现在两个方面：一是物体几何形体的对称性，另一是事件进程或物理规律的对称性。

物体几何形体的对称性是指物体各部分之间有一定的秩序，或按一定的规律互相重复，如左右对称、旋转对称、平移对称、镜像对称等。

物理规律的对称性是指物理规律在某种变换下的不变性。限于本书的目的，我们只讨论物理规律的对称性。

我们知道，在很多物理问题中存在能量守恒、动量守恒、动量矩守恒等。这么多守恒量(即不变量)的存在不是偶然的，它们是物理规律具有多种对称性的自然结果。以后我们将会看到：一种对称性通常情况下对应着一条守恒定律(或对应着一个不变量)。守恒量也称为不变量、首次积分、第一积分等。

对于完整保守的力学系统，在 Lagrange 体系中，对称性与不变量的关系是由经典 Noether 定理给出的。

我们考察使完整保守力学系统的 Hamilton 作用量不变的对称变换。

设无穷小变换为

$$\bar{t} = t + \varepsilon_\sigma \tau^\sigma(t, q, \dot{q}) \tag{1.1.8a}$$

$$\bar{q}_i = q_i + \varepsilon_\sigma \xi_i^\sigma(t, q, \dot{q}) \tag{1.1.8b}$$

其中 τ^σ，ξ_i^σ 称为无穷小变换的生成函数，$\varepsilon_\sigma(\sigma = 1,2,\cdots,s)$ 为无穷小参数。

在比较真实运动与可能运动时除考虑等时变分外也可以考虑非等时变分(图 1)，分别记为 δq_i，Δq_i，且

$$\delta q_i = \bar{q}_i(t) - q_i(t) \tag{1.1.9a}$$

$$\Delta q_i = \bar{q}_i(\bar{t}) - q_i(t) \tag{1.1.9b}$$

由(1.1.9)式可得

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t \tag{1.1.10}$$

实际上,(1.1.10)式对任意函数 f 的等时变分与非等时变分均成立。对于 $f = \dot{q}$ 则有

$$\Delta \dot{q}_i = \delta \dot{q}_i + \ddot{q}_i \Delta t \tag{1.1.11}$$

由式(1.1.10)和(1.1.8)可得用生成函数表示的等时变分

$$\delta q_i = \epsilon_\sigma (\xi_i^\sigma - \dot{q}_i \tau^\sigma) \tag{1.1.12}$$

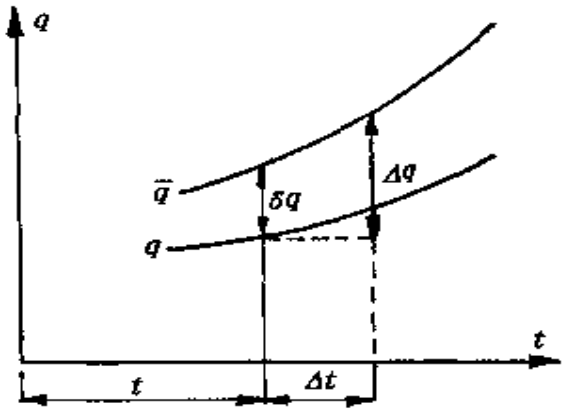


图 1　可能运动路径及其路径变分

在(1.1.8)式变换下,系统的作用量变为

$$I' = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \bar{L}(\bar{t}, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) d\bar{t}$$

其中 $\bar{L}$ 是变换后新形式的 Lagrange 函数。若式(1.1.8)为对称变换,则有

$$\delta I' = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \bar{L}(\bar{t}, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) d\bar{t} - \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt = 0 \tag{1.1.13}$$

由于描述系统运动特征的 Lagrange 函数不是唯一的,在其上乘一个任意常数或添加一个任意函数的全导数项不改变系统的运动微分方程,因此,在无穷小对称变换下,可能有

$$\bar{L}[\bar{t}, \bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t})] = L(\bar{t}, \bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t})) - \frac{dP(\bar{t}, \bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t}))}{dt} \tag{1.1.14}$$

根据式(1.1.13)有

$$L(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t}))d\bar{t} - dP(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t})) = L(t,q,\dot{q})dt \tag{1.1.15}$$

由(1.1.8a)式,有

$$d\bar{t} = dt + d(\varepsilon_\sigma \tau^\sigma) \tag{1.1.16}$$

将式(1.1.16)代入式(1.1.15)得

$$L(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t}))dt - L(t,q,\dot{q})dt = dP(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t})) - L(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\bar{q}(\bar{t}))d(\varepsilon_\sigma\tau^\sigma) \tag{1.1.17}$$

由于

$$L(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t})) - L(t,q,\dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta \dot{q}_i + O(\varepsilon^2) \tag{1.1.18}$$

$$L(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t}))d(\varepsilon_\sigma\tau^\sigma) = L(t,q,\dot{q})d(\varepsilon_\sigma\tau^\sigma) + O(\varepsilon^2) \tag{1.1.19}$$

将式(1.1.18),(1.1.19)及式(1.1.10)代入式(1.1.17)则得

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i}(\delta q_i + \dot{q}_i\Delta t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\delta \dot{q}_i + \ddot{q}_i\Delta t) - \frac{dP}{dt} + L(t,q,\dot{q})\frac{d}{dt}(\varepsilon_\sigma\tau^\sigma) = 0 \tag{1.1.20}$$

由于

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\Delta t + L\frac{d}{dt}(\varepsilon_\sigma\tau^\sigma) = \frac{dL}{dt}\Delta t + L\frac{d\Delta t}{dt} = \frac{d}{dt}(L\Delta t) \tag{1.1.21}$$

且

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \tag{1.1.22}$$

故(1.1.20)式可改写为

$$(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta q_i+\frac{d}{dt}(L\Delta t+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i-P)=0 \tag{1.1.23}$$

利用系统的 Lagrange 方程(1.1.7),沿着系统的运动轨道可得

$$\frac{d}{dt}(L\Delta t+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i-P)=0 \tag{1.1.24}$$

或

$$L\Delta t+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\Delta q_i-\dot{q}_i\Delta t)-P=\text{const.} \tag{1.1.25}$$

取规范函数 $P=\varepsilon_\sigma P^\sigma$,由于参数 ε_σ 的独立性,有

$$L\tau^\sigma+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i^\sigma-\dot{q}_i\tau^\sigma)-P^\sigma=\text{const.}\quad(\sigma=1,2,\cdots,s) \tag{1.1.26}$$

这样,我们就得到了完整保守力学系统的 Noether 定理的结果。

Noether **定理** 如果完整保守力学系统的 Hamilton 作用量在变换式(1.1.8)下保持不变,则沿着力学系统的运动轨线,系统存在 s 个守恒律((1.1.26)式)。

在(1.1.26)式中涉及到 P^σ,怎样确定它的表达式呢? 下面我们讨论这一问题。

考虑 Lagrange 函数 L 的变分

$$\Delta L=\bar{L}(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}})-L(t,q,\dot{q}) \tag{1.1.27}$$

在无穷小变换(1.1.8)式下,由(1.1.14)式有

$$\begin{aligned}\Delta L&=\bar{L}(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}})-L(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}})+L(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}})-L(t,q,\dot{q})\\&=-\frac{dP}{dt}+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta\dot{q}_i\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

而作用量的不变性要求

$$\begin{aligned}\bar{L}(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}})d\bar{t}&=L(t,q,\dot{q})dt\\&=L(t,q,\dot{q})(1-\frac{d(\Delta t)}{d\bar{t}})d\bar{t}\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

由(1.1.27),(1.1.28),(1.1.29)三式可得

$$(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \Delta \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d(\Delta t)}{dt}) L = \frac{dP}{dt} \tag{1.1.30}$$

当系统的 Lagrange 函数 L 已知时,对应于某一无穷小变换,代入上式左端,可能出现三种结果:(1)能构成某一函数的时间全微分,因此该函数即所求的 P;(2)左端为零,则有 $P=0$,表明无穷小变换保持 Lagrange 函数不变;(3)不能形成某函数的时间全微分,即 P 不确定,表明此无穷小变换不是该系统的对称变换。

例 对于势力场中相互作用的 n 个质点的系统,它的 Lagrange 函数是

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V(r_{ij})$$

其中 m_i 和 (x_i, y_i, z_i) 分别标记第 i 个质点的质量和坐标,而

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

下面分别讨论各无穷小对称变换所导致的守恒律。

(1)时间平移

时间起点平移的无穷小变换

$$\bar{t} = t + \Delta t$$
$$\bar{q}_i = q_i$$

其中 $\Delta t = \Delta b$ 为无穷小量,代入(1.1.30)式,由于 Lagrange 函数 L 不显含时间 t,故

$$0 = \Delta b \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dP}{dt}$$

由此可得 $P = \text{const.}$ 再由(1.1.26)式得

$$\Delta b (L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = \text{const.}$$

即

$$H = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const.}$$

H 为系统的 Hamilton 函数。

由此可见，当时间平移变换为对称变换时，系统将存在能量积分，即时间均匀性导致系统的能量守恒。

(2)空间平移

考虑沿 x 轴的无穷小平移变换

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{x}_i = x_i + \varepsilon \quad \bar{y}_i = y_i \quad \bar{z}_i = z_i \\ \dot{\bar{x}}_i = \dot{x}_i \quad \dot{\bar{y}}_i = \dot{y}_i \quad \dot{\bar{y}}_i = \dot{z}_i \end{cases}$$

代入(1.1.30)式，有 P =const. 故由(1.1.26)式，得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = P_x = \text{const.}$$

这表明系统的总动量在 x 轴上的分量守恒。

类似地，沿 y，z 轴方向的无穷小平移变换，分别可得系统总动量的 y 分量、z 分量都不变。一般空间平移变换下，有

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} (P_{ix}\boldsymbol{i} + P_{iy}\boldsymbol{j} + P_{iz}\boldsymbol{k}) = \text{常矢量}$$

由此可见，当空间平移变换为系统的对称变换时，系统将存在对应的动量守恒，即空间的均匀性导致系统的动量守恒。

(3)空间转动

坐标轴绕 y 轴转过无穷小角 $\delta\theta$ 的变换为

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{x}_i = x_i + \delta\theta y_i \quad \bar{y}_i = y_i - \delta\theta x_i \quad \bar{z}_i = z_i \\ \dot{\bar{x}}_i = \dot{x}_i + \delta\theta \dot{y}_i \quad \dot{\bar{y}}_i = \dot{y}_i - \delta\theta \dot{x}_i \quad \dot{\bar{z}}_i = \dot{z}_i \end{cases}$$

代入(1.1.30)式，有 P =0，故由(1.1.26)式有

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - y_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i p_{iy} - y_i p_{ix})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i)_y = \text{const.}$$

表明系统总动量矩的 z 分量守恒。类似地，考虑绕 x 轴和 y 轴的无穷小转动，分别可得

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i)_x = \text{const.}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i)_y = \text{const.}$$

由此可见：当空间转动为系统的对称变换时，系统将存在角动量守恒，即空间各向同性导致系统的角动量守恒。

(4)Galileo 推动变换

沿 x 轴的无穷小 Galileo 推动变换为

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{x}_i = x_i - t\delta v \qquad \bar{y}_i = y_i \qquad \bar{z}_i = z_i \\ \dot{\bar{x}}_i = \dot{x}_i - \delta v \qquad \dot{\bar{y}}_i = \dot{y}_i \qquad \dot{\bar{z}}_i = \dot{z}_i \end{cases}$$

代入(1.1.30)式可得

$$P = -\delta v \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

于是，由(1.1.26)式有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i - t\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i = \text{const.}$$

类似地，沿 y，z 轴的 Galileo 推动变换可以导致

$$\sum_{i=1}^{n} m_i y_i - t\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i = \text{const.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i z_i - t\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i = \text{const.}$$

进而可得矢量式

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i - t\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i = \text{常矢量}$$

由于

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad \boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$$

因而有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \boldsymbol{r}_c - t\boldsymbol{p} = \boldsymbol{G} = \text{常矢量}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{r}}_c = \frac{\boldsymbol{p}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \text{常矢量}$$

这表明 Galileo 推动变换的不变性导致系统的质心速度是恒定的。

第二节　Noether 定理的逆定理

上一节 Noether 定理表明，如果力学系统的作用量在无穷小变换(1.1.8)式下保持不变，则沿着系统运动的轨线，系统将存在 s 个守恒量。反过来，如果系统存在 s 个守恒量，是否可以根据这些守恒量找出相应的无穷小对称变换(1.1.8)式，使系统的 Hamilton作用量保持不变呢？下面我们讨论这一问题。

设系统的 Lagrange 函数 L 的 Hess 矩阵 (H_{ij}) 适合

$$\det(H_{ij}) = \det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right| \neq 0 \qquad (1.2.1)$$

此 Lagrange 函数描述的系统称为正规系统，否则称为奇异系统。

对正规系统，Hess 矩阵 $W = (H_{ij})$ 的逆矩阵存在，$W^{-1} = (\overline{H}_{ij})$，其矩阵元满足

$$\overline{H}_{kj} H_{ji} = \delta_{ki} \qquad (1.2.2)$$

其中 δ_{ki} 为 Kronecker 符号。

由 D'Alembert-Lagrange 原理，对于受有理想约束的保守系统，任意虚位移 δq_i 必满足$(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta q_i = 0$，因此有

$$(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})(\xi_i^\sigma - \dot{q}_i \tau^\sigma) = 0 \quad (\sigma = 1, \cdots, s) \qquad (1.2.3)$$

假设系统存在 s 个独立的守恒律(首次积分)

$$D^\sigma(t, q, \dot{q}) = C^\sigma \qquad (\sigma = 1, \cdots, s) \qquad (1.2.4)$$

将(1.2.4)式对时间求导后与(1.2.3)式合并,则有

$$\frac{dD^\sigma}{dt}-\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)(\xi_i^\sigma-\dot{q}_i\tau^\sigma)=0\quad(\sigma=1,\cdots,s)\tag{1.2.5}$$

将(1.2.5)式展开,得

$$\frac{\partial D^\sigma}{\partial t}+\frac{\partial D^\sigma}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial D^\sigma}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i-\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial t}+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)(\xi_i^\sigma-\dot{q}_i\tau^\sigma)=0\quad(\sigma=1,\cdots,s)\tag{1.2.6}$$

对于(1.2.6)式,$\ddot{q}_i$ 前的系数应等于零,因而有

$$\frac{\partial D^\sigma}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j}(\xi_j^\sigma-\dot{q}_j\tau^\sigma)=0\quad(i=1,\cdots,n;\sigma=1,\cdots,s)\tag{1.2.7}$$

解方程组(1.2.7)式可得

$$\xi_j^\sigma-\dot{q}_j\tau^\sigma=\bar{H}_{ij}\frac{\partial D^\sigma}{\partial \dot{q}_i}\quad(i=1,\cdots,n;\sigma=1,\cdots,s)\tag{1.2.8}$$

若取

$$D^\sigma=L\tau^\sigma+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i^\sigma-\dot{q}_i\tau^\sigma)-P^\sigma\tag{1.2.9}$$

则根据(1.2.9)式可得

$$\tau^\sigma=L^{-1}\left(D^\sigma-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i^\sigma-\dot{q}_i\tau^\sigma)\right)\tag{1.2.10}$$

当 D^σ 是已知的时候,根据(1.2.8),(1.2.10)二式可求解得 ξ_i^σ,τ^σ,由此得到的(1.1.8)式为对称变换,即使系统的 Hamilton 作用量不变。

Noether 定理的逆定理 如果已知完整保守力学系统的 s 个独立的首次积分,则由(1.2.8),(1.2.10)式得到的无穷小变换必是系统的对称变换。

例 研究数学摆的小振动,摆长为 l,质量为 m,Lagrange 函数 $L=\frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}^2-k^2\varphi^2)$,其中 $k^2=\frac{g}{l}$,φ 是摆对铅垂线的夹角。该系统存在首次积分

$$ml^2(\dot{\varphi}^2 + k^2\varphi^2) = C$$

这里，$D = ml^2(\dot{\varphi}^2 + k^2\varphi^2)$，由式(1.2.8)有

$$\xi - \dot{\varphi}\tau = \frac{1}{ml^2}\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}} = 2\dot{\varphi}$$

因此有

$$\tau = L^{-1}(D - \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}(\xi - \dot{\varphi}\tau)) = -2$$

故有

$$\tau = -2 \qquad \xi = 0$$

因而说明，时间的平移变换为系统的对称变换。

第三节　广义 Killing 方程

Noether 定理给出了在已知系统的 Lagrange 函数和对称变换时确定力学系统的首次积分的方法，而 Noether 逆定理给出了在已知系统的 Lagrange 函数和守恒律时确定相应的对称变换的结论。更一般的问题是，对于给定的力学系统，如何寻找对称变换群的无穷小变换生成函数 τ^α，ξ_i^α 及规范函数 P，使由他们生成的变换保持系统的作用量不变，从而确定系统的守恒律。

在第一节中，我们曾经讨论了在无穷小变换(1.1.8)式作用下，力学系统的作用量不变的条件是(1.1.23)式，或

$$(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})(\xi_i^\alpha - \dot{q}_i\tau^\alpha) + \frac{d}{dt}[(L - \dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\tau^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\xi_i^\alpha - P^\alpha] = 0 \tag{1.3.1}$$

由于

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\xi_i^\alpha) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d\xi_i^\alpha}{dt} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\xi_i^\alpha \tag{1.3.2}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \tag{1.3.3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\tau^\sigma\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i\tau^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\frac{d\tau^\sigma}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\tau^\sigma \tag{1.3.4}$$

将(1.3.2)～(1.3.4)式代入(1.3.1)式,则得

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau^\sigma + \frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{\xi}_i^\sigma - \dot{q}_i\dot{\tau}^\sigma) + L\dot{\tau}^\sigma - \dot{P}^\sigma = 0 \tag{1.3.5}$$

将(1.3.5)式中的全导数项展开,则有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial t}\tau^\sigma + \frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^\sigma + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \xi_i^\sigma}{\partial t} + \frac{\partial \xi_i^\sigma}{\partial q_j}\dot{q}_j - \dot{q}_i\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial t} - \dot{q}_i\dot{q}_j\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial q_j}\right)\\ &+ L\left(\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial t} + \frac{\partial \tau^\sigma}{\partial q_j}\dot{q}_j\right) + \ddot{q}_j\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \xi_i^\sigma}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_i\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial \dot{q}_j}\right) + L\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial \dot{q}_j}\right]\\ &= \frac{\partial P^\sigma}{\partial t} + \frac{\partial P^\sigma}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial P^\sigma}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

根据假设, τ^σ, ξ_i^σ 中不含 $\ddot{q}_i$,分别比较(1.3.6)式两边与 $\ddot{q}_i$ 项的系数,得到关于生成函数 τ^σ 和 ξ_i^σ 满足的微分方程

$$\begin{aligned}&\tau^\sigma\frac{\partial L}{\partial t} + \xi_i^\sigma\frac{\partial L}{\partial q_i} + \left(\frac{\partial \xi_i^\sigma}{\partial t} + \dot{q}_j\frac{\partial \xi_i^\sigma}{\partial q_j} - \dot{q}_i\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial t} - \dot{q}_i\dot{q}_j\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial q_j}\right)\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\\ &+ L\left(\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial t} + \frac{\partial \tau^\sigma}{\partial q_j}\dot{q}_j\right)\\ &= \frac{\partial P^\sigma}{\partial t} + \frac{\partial P^\sigma}{\partial q_j}\dot{q}_j\end{aligned} \tag{1.3.7a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \xi_i^\sigma}{\partial \dot{q}_j} - \dot{q}_i\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial \dot{q}_j}\right) + L\frac{\partial \tau^\sigma}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial P^\sigma}{\partial \dot{q}_j} \tag{1.3.7b}$$

$$(j = 1,2,\cdots,n;\sigma = 1,2,\cdots,r)$$

(1.3.7a)和(1.3.7b)是关于$(n+1)r$个未知函数 τ^σ, $\xi_i^\sigma(i = 1,\cdots,n;\sigma = 1,\cdots,r)$ 的 $(n+1)r$ 个微分方程,称之为广义 Killing 方程。

考虑经典 Emden 方程为

$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x^5 = 0 \tag{1.3.8}$$

该方程对应系统的 Lagrange 函数为

$$L = t^2(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^6}{6}) \tag{1.3.9}$$

考虑单参数的无穷小变换

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \varepsilon\tau(t,x) \\ \bar{x} &= x + \varepsilon\xi(t,x) \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

设在此变换下系统的 Hamilton 作用量是不变的，且规范函数为零，将(1.3.9)，(1.3.10)式代入(1.3.5)式，有

$$\begin{aligned} &(\dot{x}^2 - \frac{x^6}{3})\tau - tx^5\xi + t\dot{x}(\frac{\partial\xi}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial\xi}{\partial x} - \dot{x}\frac{\partial\tau}{\partial t} - \dot{x}^2\frac{\partial\tau}{\partial x}) \\ &+ t(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^6}{6})(\frac{\partial\tau}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial\tau}{\partial x}) = 0 \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

由 $\dot{x}$ 的各次幂 ($\dot{x}^0, \dot{x}^1, \dot{x}^2$ 及 $\dot{x}^3$) 对应项的系数为零，则得关于 τ 和 ξ 的偏微分方程

$$\frac{x}{3}\tau + t\xi + \frac{tx}{6}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0 \tag{1.3.12}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{x^6}{6}\frac{\partial\tau}{\partial x} = 0 \tag{1.3.13}$$

$$t\tau + t\frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{t^2}{2}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0 \tag{1.3.14}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = 0 \tag{1.3.15}$$

由(1.3.15)式知 $\tau = \tau(t)$，由(1.3.13)式知 $\xi = \xi(x)$，于是，上述方程组化为

$$\frac{x}{3}\tau + t\xi + \frac{tx}{6}\frac{d\tau}{dt} = 0 \tag{1.3.16}$$

$$\tau + t\frac{d\xi}{dx} - \frac{t}{2}\frac{d\tau}{dt} = 0 \tag{1.3.17}$$

(1.3.16)，(1.3.17)式的解为

$$\tau = t \qquad \xi = -\frac{1}{2}x \tag{1.3.18}$$

可以很容易地验证，在变换

$$\begin{cases} \bar{t} = t + \epsilon t \\ \bar{x} = x - \dfrac{1}{2}\epsilon x \end{cases} \tag{1.3.19}$$

下，系统的作用量不变，且 $P^{\sigma} = 0$，因此，根据 Noether 定理，有 Emden 方程的第一积分

$$\frac{t^3}{2}\dot{x}^2 + \frac{t^2}{2}x\dot{x} + \frac{t^3}{6}x^6 = \text{const.} \tag{1.3.20}$$

第四节　增广相空间中的 Noether 定理

在前面我们已经讨论了在广义坐标下的作用量的不变性及由此导致的守恒量，现代数学和现代力学的发展已经表明，力学系统在相空间中具有更好的性质，因此，研究力学系统在增广相空间中的不变性是有意义的。

在增广相空间中，其基本变量包括 q_i, p_i, t。对于完整保守的力学系统，增广相空间中的 Hamilton 原理为泛函

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [p_i\dot{q}_i - H(t, q, p)]dt \tag{1.4.1}$$

在系统的真实运动轨道上取驻值。式中 q_i 为广义坐标，$p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 为广义动量，H 为系统的 Hamilton 函数。

应当注意，增广相空间中的 Hamilton 原理与经典 Hamilton 原理有不同的含义，它们的成立不依赖于相互的直接推导。

对于完整保守的力学系统，在增广相空间中运动正轨由 Hamilton 正则方程组描述

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{14.2}$$

在增广相空间中考虑无穷小多参数变换群

$$\bar{t} = t + \varepsilon^k \tau^k(t, q, \dot{q}, p) \tag{1.4.3a}$$

$$\bar{q}_i = q_i + \varepsilon^k \xi_i^k(t, q, \dot{q}, p) \tag{1.4.3b}$$

$$\dot{\bar{q}}_i = \dot{q}_i + \varepsilon^k [\dot{\xi}_i^k - \dot{q}_i \dot{\tau}^k + \varphi_i^k(t, q, \dot{q}, p)] \tag{1.4.3c}$$

$$\bar{p}_i = p_i + \varepsilon^k \eta_i^k(t, q, \dot{q}, p) \tag{1.4.3d}$$

其中 ε^k 为小参数，$\tau^k, \xi_i^k, \eta_i^k, \varphi_i^k$ 均为(1.4.1)式所含变量的生成函数。在(1.4.3c)式中包含了 φ_i^k，当 $\varphi_i^k = 0$ 时，(1.4.3c)式变成了通常变换下广义速度改变的情况，为让广义速度的变换独立，可取 $\varphi_i^k \neq 0$。

在(1.4.3)式的作用下，(1.4.1)式为

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} (\bar{p}_i \dot{\bar{q}}_i - \bar{H}) d\bar{t} \tag{1.4.4}$$

则变换前后作用量之差为

$$\begin{aligned} \Delta I &= I(\varepsilon) - I \\ &= \varepsilon^k \int_{t_0}^{t_1} \{ p_i(\varphi_i^k + \dot{\xi}_i^k) + (\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}) \eta_i^k \\ &\quad - \frac{\partial H}{\partial t} \tau^k - \frac{\partial H}{\partial q_i} \xi_i^k - H \dot{\tau}^k \} dt \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

经整理可得

$$\begin{aligned} \Delta I = \varepsilon^k \int_{t_0}^{t_1} \{ & \frac{d}{dt}(p_i \xi_i^k - H\tau^k) - (\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i})(\xi_i^k - \dot{q}_i \tau^k) \\ & + (\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i})(\eta_i^k - \dot{p}_i \tau^k) + p_i \varphi_i^k \} dt \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

因而更一般地有

$$\begin{aligned} \Delta I = \varepsilon^k \int_{t_0}^{t_1} \{ & \frac{d}{dt}(p_i \xi_i^k - H\tau^k - P^k) + p_i \varphi_i^k + \dot{P}^k \\ & + (\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i})(\xi_i^k - \dot{q}_i \tau^k) + (\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i})(\eta_i^k - \dot{q}_i \tau^k) \} dt \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

在增广相空间中，我们称力学系统的作用量(1.4.1)式在无穷小变换群作用下的不变性为力学系统对称。

若力学系统具有对称性,则有(1.4.7)式在力学系统的真实轨道上恒为零,因而若有

$$p_i\varphi_i^k + \dot{P}^k = 0 \tag{1.4.8}$$

则力学系统在增广相空间中相应的不变量为

$$p_i\xi_i^k - H\tau^k - P^k = \text{const.} \tag{1.4.9}$$

其中规范函数 $P^k = P^k(t, q, p)$。

究竟什么样的无穷小变换群(1.4.3)式能够使 Hamilton 作用量(1.4.1)式保持不变呢? 将(1.4.8)式代入(1.4.5)式则得,在力学系统的运动轨道上 $\Delta I = 0$ 的条件为

$$\dot{P}^k = p_i\dot{\xi}_i^k - \frac{\partial H}{\partial t}\tau^k - \frac{\partial H}{\partial q_i}\xi_i^k - H\dot{\tau}^k \tag{1.4.10}$$

由此我们可以得到如下定理。

定理 在增广相空间中,对于完整保守的力学系统,若无穷小变换(1.4.3)式满足(1.4.10),(1.4.8)式,则它将保持增广相空间中的 Hamilton 作用量不变,且可确定力学系统一定存在相应的守恒量

$$p_i\xi_i^k - H\tau^k - P^k = \text{const.} \tag{1.4.11}$$

若考虑的是单参数的无穷小变换,则上面相应的不变量为

$$p_i\xi_i - H\tau - P = \text{const.} \tag{1.4.12}$$

在(1.4.9),(1.4.10)式中,记 $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$,$H = p_i\dot{q}_i - L$,其中 L 为力学系统的 Lagrange 函数,则该两式可以写为

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\xi_i^k + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\tau^k - P^k = \text{const.} \tag{1.4.13}$$

$$\dot{P}^k = \frac{\partial L}{\partial t}\tau^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{\xi}_i^k - \dot{q}_i\dot{\tau}^k) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^k + L\dot{\tau}^k \tag{1.4.14}$$

此即经典 Noether 理论中的 Noether 不变量和 Killing 方程。

根据上面的讨论,我们可以看出:增广相空间中的 Hamilton 作用量在无穷小变换下的不变性同样可以导致经典的 Noether 不

变量，由于增广相空间中的 Hamilton 原理与经典的 Hamilton 原理之间是独立的，因此上面的结论实际上给出了一种研究力学系统的对称性与不变量的新方法，并且这种方法给出的结果更为简洁。

在增广相间中，确定出与力学系统的不变量对应的无穷小对称变换群也是重要的。

假设有一完整保守的力学系统，它存在一个动力学不变量 $G(t, q, p)$，则有

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ &= \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) + \frac{\partial G}{\partial p_i}\left(p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \\ &\quad + \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (1.4.15)\end{aligned}$$

考虑到(1.4.7)式，则得

$$\begin{aligned}\Delta I(\varepsilon) = \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\Big\{&\frac{d}{dt}(p_i\xi_i - H\tau - P) + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \\ &\times\left(\eta_i - \dot{p}_i\tau + \frac{\partial G}{\partial q_i}\right) - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\left(\xi_i - \dot{q}_i\tau - \frac{\partial G}{\partial p_i}\right) \\ &+ P_i\varphi_i + \dot{P} - \frac{dG}{dt} + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ &- \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\Big\}dt \qquad (1.4.16)\end{aligned}$$

去除规范函数后，(1.4.16)式可以写为

$$\begin{aligned}\Delta I(\varepsilon) = \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\Big\{&\frac{d}{dt}(p_i\xi_i - H\tau - G) + p_i\varphi_i \\ &- \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\left(\xi_i - q_i\tau - \frac{\partial G}{\partial p_i}\right) \\ &+ \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\left(\eta_i - \dot{p}_i\tau + \frac{\partial G}{\partial q_i}\right) \\ &+ \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}\Big\}dt \qquad (1.4.17)\end{aligned}$$

因此，若有关生成函数满足

$$\left.\begin{aligned}
\tau &= H^{-1}(p_i\xi_i - G)\\
\xi_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\tau + \frac{\partial G}{\partial p_i}\\
\eta_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\tau - \frac{\partial G}{\partial q_i}\\
\varphi_i &= p_i^{-1}\left(-\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4.18)$$

则有 $\Delta I(\varepsilon) = 0$，因而我们有上面定理的逆：对于完整保守的力学系统，若 $G(t, q, p)$ 是该系统的一个守恒量，则有(1.4.18)式确定的增广相空间中的无穷小单参数变换群使得该力学系统在此空间中的 Hamilton 作用量保持不变。

对于广义动量的变换而言，由于

$$H(t,q,p) = p_i\dot{q}_i - L(t,q,\dot{q})$$

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ 自然成立，因此在(1.4.17)式中

$$(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i})(\eta_i - \dot{p}_i\tau + \frac{\partial G}{\partial q_i})$$

是恒等于零的，这表明广义动量的变换与力学系统的不变量之间无直接影响。这是增广相空间中无穷小对称变换的一个特征，也是 Hamilton 力学逻辑上的结果，因为 η_i 实际上应由 τ, ξ_i, φ_i 确定。

第五节　运动空间中的 Noether 定理

Noether 定理给出了 Hamilton 作用量在无穷小变换群作用下的不变性与力学系统的不变量之间的关系，这样的结论可以得到推广。在这一节中，我们将讨论在运动空间中的情形。

设 $\overset{(m)}{x^i}$ 为 $3N$ 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}(0;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_{3N})$ 中的坐标变量($i=1,\cdots,3N$)，$\overset{(m)}{x^i} = \frac{d}{dt}\overset{(m-1)}{x^i}$，空间中矢径 $\boldsymbol{X}$ 为

$$\boldsymbol{X} = \overset{(m)}{x^i}\boldsymbol{e}_i \tag{1.5.1}$$

则称该空间 $\boldsymbol{R}$ 为 m 次运动空间。

当 $m=0$ 时，$\boldsymbol{R}$ 为位移空间；$m=1$ 时为速度空间；$m=2$ 时为加速度空间。

为研究 m 次运动空间中力学系统的运动特征，我们首先给出变分法则：

$$\delta t = 0 \qquad \delta \overset{(m-k)}{q_j} = 0 \qquad \delta \overset{(m+l)}{q_j} \neq 0$$
$$(k = 1,2,\cdots,m;\ l \geqslant 0) \tag{1.5.2}$$

如果某个约束反力沿着约束方程在该空间中所确定的超曲面之法线方向，我们则称之为理想约束。

对于动能 $T = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}_i^2$ 可以证明

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{p}\left[\frac{\partial \overset{(p)}{T}}{\partial \overset{(p)}{q_j}} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right] \tag{1.5.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \dot{T}}{\partial \ddot{q}_j} = \cdots = \frac{\partial \overset{(p)}{T}}{\partial \overset{(p+1)}{q}} \tag{1.5.4}$$

而对势函数 $V = V(t, q_j)$ 也不难证明

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{V}}{\partial \dot{q}_j} = \cdots = \frac{\partial \overset{(p)}{V}}{\partial \overset{(p)}{q_j}} \tag{1.5.5}$$

在 m 次运动空间中，我们可以给出下面的变分原理。

定理 在 m 次运动空间中，如果力学系统受有完整、理想约束，并且所有的主动力都是有势力，势函数 $V = V(t, q_j)$，则系统的真实运动将使泛函

$$I = \int_{t_0}^{t_1}(\overset{(m)}{T} + m\overset{(m)}{T_0} - \overset{(m)}{V})dt \tag{1.5.6}$$

取驻值，其中 $m \neq 1$ 为自然数，而

$$\overset{(m)}{T} = \frac{d}{dt}\overset{(m-1)}{T} \qquad \overset{(m)}{T_0} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\overset{(m+1)}{q_j}$$

证明 由于 $\overset{(m)}{T}_0 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\overset{(m+1)}{q_j}$，可以证明

$$\frac{\partial \overset{(m)}{T}_0}{\partial \overset{(m)}{q_j}} = 0 \qquad \frac{\partial \overset{(m)}{T}_0}{\partial \overset{(m+1)}{q_j}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \tag{1.5.7}$$

而

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{t_0}^{t_1}(\delta \overset{(m)}{T} + m\delta \overset{(m)}{T}_0 - \delta \overset{(m)}{V})dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\left\{[\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_j}} - \frac{\partial \overset{(m)}{V}}{\partial \overset{(m)}{q_j}}]\delta \overset{(m)}{q_j} + (m+1)\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m+1)}{q_j}}\delta \overset{(m+1)}{q_j}\right\}dt\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

根据(1.5.3),(1.5.4),(1.5.5)三式并利用分部积分则得

$$\begin{aligned}\delta I = -\int_{t_0}^{t_1}[\frac{1}{m}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_j}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j]\delta \overset{(m)}{q_j}dt \\ + (m+1)\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m+1)}{q_j}}\delta \overset{(m)}{q_j}\Big|_{t_0}^{t_1}\end{aligned} \tag{1.5.9}$$

考虑系统的运动微分方程

$$\frac{1}{m}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_j}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \tag{1.5.10}$$

及端点变分条件

$$\delta \overset{(m)}{q_j}\Big|_{t=t_0} = 0, \qquad \delta \overset{(m)}{q_j}\Big|_{t=t_1} = 0$$

因而可得

$$\delta I = \delta\int_{t_0}^{t_1}(\overset{(m)}{T} + m\overset{(m)}{T}_0 - \overset{(m)}{V})dt = 0 \tag{1.5.11}$$

如果我们把上述定理作为动力学的逻辑出发点，则由此也可得到力学系统的运动微分方程。因此，我们可以把它作为经典力学的基本原理，称之为力学的新型变分原理。

当 $m=0$ 时，上述定理的形式为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T-V)dt=0$$

此即受有理想约束的完整、保守力学系统的 Hamilton 原理，这也说明：经典的 Hamilton 变分原理说明了力学系统在位形空间中的极值性质。

新型变分原理描述了完整保守的力学系统在 m 次运动空间中的极值性，可以证明它在无穷小变换群作用下的不变性能导致该力学系统的守恒律。下面我们着手研究这一问题。

前面的(1.5.2)式给出了 m 次运动空间中的同时变分规则，在这里，我们进一步给出 m 次运动空间中的非同时变分规则，非同时变分记为 Δ。

考虑 m 次运动空间中的一个函数簇 $h(t)$，定义

$$\delta h=\bar{h}(t)-h(t) \tag{1.5.12}$$

$$\Delta h=\bar{h}(t+\Delta t)-h(t) \tag{1.5.13}$$

于是有

$$\Delta h=\delta h+\dot{h}\Delta t \tag{1.5.14}$$

由(1.5.14)式有

$$\Delta\overset{(m)}{h}=\delta\overset{(m)}{h}+\overset{(m+1)}{h}\Delta t \tag{1.5.15}$$

$$(\Delta h)^{(m)}=(\delta h)^{(m)}+(\dot{h}\cdot\Delta t)^{(m)} \tag{1.5.16}$$

考虑到 δ 与 d 的交换关系，则

$$\Delta\overset{(m)}{h}-(\Delta h)^{(m)}=\overset{(m+1)}{h}\cdot\Delta t-(\dot{h}\cdot\Delta t)^{(m)} \tag{1.5.17}$$

下面，我们给出 m 次运动空间中的非同时变分规则：

$$(\Delta\overset{(m-k)}{q_j})^{(k)}\neq 0\quad(\Delta t)^{(m)}\neq 0$$

$$(\Delta\overset{(m-k)}{q_j})^{(k-s)}=0\quad(\Delta t)^{(m-s)}=0 \tag{1.5.18}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,m;s=1,2,\cdots,m;s\leqslant k)$$

由(1.5.17)式和(1.5.18)式可得

$$\Delta\overset{(m)}{q_j}=\delta\overset{(m)}{q_j} \tag{1.5.19}$$

$$\Delta \overset{(m)}{q_j} - (\Delta q_j)^{(m)} = - \dot{q}_j (\Delta t)^{(m)} \tag{1.5.20}$$

假设在 m 次运动空间中的无穷小变换群的空间生成函数为 $F_j(t, q, \dot{q})$，时间生成函数为 $f(t, q, \dot{q})$，即

$$(\Delta q_j)^{(m)} = \varepsilon F_j(t, q, \dot{q}) \tag{1.5.21}$$

$$(\Delta t)^{(m)} = \varepsilon f(t, q, \dot{q}) \tag{1.5.22}$$

其中 ε 为一个无穷小参数。

将式(1.5.21),(1.5.22)代入式(1.5.20),并考虑到式(1.5.19),可得

$$\delta \overset{(m)}{q_j} = \varepsilon [F_j(t, q, \dot{q}) - \dot{q}_j f(t, q, \dot{q})] \tag{1.5.23}$$

为了研究新型变分原理在无穷小变换群作用下的不变性问题,利用(1.5.11)式,则由(1.5.9)式变成为

$$\delta I = - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} [\frac{1}{m} \frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_j}} - \frac{m+1}{m} \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j](F_j - \dot{q}_j f) dt \tag{1.5.24}$$

$$= - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} (\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j)(F_j - \dot{q}_j f) dt$$

由于 $Q_j = - \dfrac{\partial V}{\partial q_j}$ 为有势力,定义 Lagrange 函数 $L = T - V$，则由(1.5.24)式有

$$\delta I = - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \{\frac{\partial L}{\partial t} f + \frac{\partial L}{\partial q_j} F_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{F}_j + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j) \dot{f} - \frac{d}{dt} [\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} F_j + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j) f]\} dt \tag{1.5.25}$$

引入规范函数 $P = P(t, q, \dot{q})$，则有

$$\delta I = - \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \{\frac{\partial L}{\partial t} f + \frac{\partial L}{\partial q_j} F_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{F}_j + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j) \dot{f} - \dot{P} - \frac{d}{dt} [\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} F_j + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j) f - P]\} dt \tag{1.5.26}$$

若无穷小变换群使泛函 I 保持不变,则由(1.5.26)式可知,若

无穷小变换的生成函数满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q_j}F_j+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{F}_j+(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j)\dot{f}-\dot{P}=0 \quad (1.5.27)$$

则有动力学守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}F_j+(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j)f-P=\text{const.} \quad (1.5.28)$$

其实,满足式(1.5.27)的生成函数 $f(t,q,\dot{q}),F(t,q,\dot{q})$ 将使泛函(1.5.6)式在 m 次运动空间中保持不变,即 $\delta I=0$。

第二章　Noether 对称性理论的推广

本章讨论非保守系统、非完整系统、连续介质系统、奇异系统和 Birkhoff 系统在 Noether 意义下的对称性质及其运动守恒量。对于非保守系统和非完整系统，经典的 Hamilton 原理遇上了一些困难，因此，我们应用 m 次运动空间的新型变分原理来研究这些力学系统的对称性与不变量。

第一节　非保守力学系统的 Noether 定理

非保守力学系统的运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j \quad (j=1,\cdots,n) \tag{2.1.1}$$

其中 Q_j 为广义力，它既包含了保守力，也含有非保守力。若取相应于保守力部分的势函数为 $V(t,q)$，而非保守广义力记为 Q'_j，则(2.1.1)式可写为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=Q'_j \tag{2.1.2}$$

对于这样的力学系统，一般不能写成泛函的变分等于零的 Hamilton 原理的形式，从而也就不能讨论作用量在无穷小变换群作用下的不变性质。

上一章曾给出了在 m 次运动空间中的新型变分原理，并讨论了它的优越性，实际上，新型变分原理的最佳之处在于对非保守力学系统和下一节中将要讨论的非完整力学系统均适用，而不必加上其它的限制条件。

假设力学系统的非保守力 Q'_j 为

$$Q'_j=Q'_j(t,q,\cdots,\overset{(m-l)}{q}) \quad \begin{pmatrix} j=1,\cdots,n \\ l=1,\cdots,m \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

我们在 m 次运动空间中定义一个广义势函数 $\overset{(m)}{V}$，

$$\overset{(m)}{V} = -Q'_j \overset{(m)}{q_j} \tag{2.1.4}$$

则有

$$Q'_j = -\frac{\partial \overset{(m)}{V}}{\partial \overset{(m)}{q_j}} \tag{2.1.5}$$

于是，对非保守力学系统我们有，对于受有非保守力((2.1.3)式)的力学系统，只要系统所受的约束为理想、完整约束，则在 m 次运动空间中，力学系统的真实运动将使泛函

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (\overset{(m)}{T} + m\overset{(m)}{T_0} - \overset{(m)}{V})dt \tag{2.1.6}$$

取驻值，其中 m 为不等于1的自然数，$\overset{(m)}{T_0} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \overset{(m+1)}{q_j}$，$\overset{(m)}{V}$ 如(2.1.4)式。

因为

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta \overset{(m)}{T} + m\delta \overset{(m)}{T_0} - \delta \overset{(m)}{V})dt \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} [\frac{1}{m} \frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_j}} - \frac{m+1}{m} \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \overset{(m)}{V}}{\partial \overset{(m)}{q_j}}] \delta q_j dt\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

利用(2.1.5)式有

$$\delta I = -\int_{t_0}^{t_1} [\frac{1}{m} \frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_j}} - \frac{m+1}{m} \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q'_j] \delta q_j dt \tag{2.1.8}$$

考虑到非保守力学系统的运动方程(2.1.2)式，由(2.1.8)式知 $\delta I = 0$。

由此可见，对于非保守力学系统，在构筑了一个广义势函数(2.1.4)式之后，力学系统的真实运动就可表达为一个泛函的驻值问题，我们从而可用泛函在无穷小变换下的不变性来研究非保守

力学系统的对称性质及其运动守恒量问题。

考虑在 m 次运动空间中的无穷小变换群的空间生成函数为 $F_j(t,q,\dot{q})$ 、时间生成函数为 $f(t,q,\dot{q})$ ，即

$$(\Delta q_j)^{(m)} = \varepsilon F_j(t,q,\dot{q}) \tag{2.1.9}$$

$$(\Delta t)^{(m)} = \varepsilon f(t,q,\dot{q}) \tag{2.1.10}$$

则有

$$\delta \overset{(m)}{q}_j = \varepsilon[F_j(t,q,\dot{q}) - \dot{q}_j f(t,q,\dot{q})] \tag{2.1.11}$$

因此，在无穷小变换作用下泛函的改变量(2.1.8)式可写为

$$\begin{aligned}\delta I &= -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}[\frac{1}{m}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q}_j} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_j} - Q'_j](F_j - \dot{q}_j f)dt \\ &= -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q'_j)(F_j - \dot{q}_j f)dt \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

将(2.1.12)式略加整理有

$$\begin{aligned}\delta I = \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\{&Q'_j(F_j - \dot{q}_j f) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}(F_j - \dot{q}_j f)] \\ &+ \frac{\partial T}{\partial q_j}(F_j - \dot{q}_j f) + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}(\ddot{F}_j - \ddot{q}_j f - \dot{q}_j \dot{f})\}dt\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

引入规范函数 $\varepsilon P(t,q,\dot{q})$ ，则

$$\begin{aligned}\delta I = \varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\{&Q'_j(F_j - \dot{q}_j f) + \frac{\partial T}{\partial q_j}F_j + (T - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j)\dot{f} \\ &+ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{F}_j + \frac{\partial T}{\partial t}f - P(t,q,\dot{q}) \\ &- \frac{d}{dt}[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}F_j + (T - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j)f - P(t,q,\dot{q})]\}dt\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

因此，考虑泛函在无穷小变换群作用下的不变性(即 $\delta I = 0$)时，若有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial q_j}F_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{F}_j + (T - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j)\dot{f} + \frac{\partial T}{\partial t}f + Q'_j(F_j - \dot{q}_j f) \\ &- P(t,q,\dot{q}) = 0\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

则力学系统有守恒量

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}F_j + (T - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j)f - P(t,q,\dot{q}) = \text{const.} \quad (2.1.16)$$

(2.1.15)式为空间生成函数与时间生成函数应当满足的条件,在此条件下,非保守力学系统的泛函(2.1.6)式将保持不变,且存在守恒量(2.1.16)式。进一步,由(2.1.15)式有

$$\frac{\partial T}{\partial t}f + \frac{\partial T}{\partial q_j}F_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}[\frac{\partial F_j}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial F_j}{\partial t} - \dot{q}_j\frac{\partial f}{\partial t} - \dot{q}_j\dot{q}_s\frac{\partial f}{\partial q_s}]$$
$$+ T[\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial f}{\partial q_s}] + \ddot{q}_s\{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}[\frac{\partial F_j}{\partial \dot{q}_s} - \dot{q}_j\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_s}] + L\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_s}$$
$$- \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_s}\} + Q'_j(F_j - \dot{q}_j f) - \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial q_j}\dot{q}_j = 0 \quad (2.1.17)$$

由于生成函数不含 $\ddot{q}$,故可得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}[\frac{\partial F_j}{\partial q_s} - \dot{q}_j\frac{\partial f}{\partial q_s}] + T\cdot\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_s} = 0 \quad (2.1.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}f + \frac{\partial T}{\partial q_j}F_j + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}[\frac{\partial F_j}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial F_j}{\partial t} - \dot{q}_j\frac{\partial f}{\partial t} - \dot{q}_j\dot{q}_s\frac{\partial f}{\partial q_s}]$$
$$+ T(\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}_s\frac{\partial f}{\partial q_s}) + Q'_j(F_j - \dot{q}_j f) - \frac{\partial P}{\partial t} - \dot{q}_s\frac{\partial P}{\partial q_s} = 0 \quad (2.1.19)$$

方程(2.1.18),(2.1.19)式称为 Killing 方程。

为说明以上结论的应用,我们考虑经典的 Emden 方程

$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x^5 = 0 \quad (2.1.20)$$

此方程曾在第一章第三节中加以研究。(2.1.20)式所对应的力学系统的动能 $T = \frac{1}{2}\dot{x}^2$,势能 $V = \frac{1}{6}x^6$,非保守广义力 $Q' = -\frac{2}{t}\dot{x}$,由(2.1.18),(2.1.19)式有

$$\dot{x}(\frac{\partial F}{\partial x} - \dot{x}\frac{\partial f}{\partial x}) + (\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{x^6}{6})\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (2.1.21)$$

$$- x^5F + \dot{x}(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t} - \dot{x}\frac{\partial f}{\partial t} - \dot{x}^2\frac{\partial f}{\partial x}) + (\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{6}x^6)(\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$+\dot{x}\frac{\partial f}{\partial x})-\frac{2}{t}\dot{x}(F-\dot{x}f)-\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial P}{\partial x}\dot{x}=0 \qquad (2.1.22)$$

由(2.1.21)式合并 $\dot{x}^0,\dot{x}^1,\dot{x}^2$ 等项可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \qquad (2.1.23)$$

$$-\frac{1}{6}x^6\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial P}{\partial \dot{x}}=0 \qquad (2.1.24)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}=0 \qquad (2.1.25)$$

所以 $f=f(t,x)$,$F=F(t,x)$,$P=P(t,x)$,代入(2.1.22)式合并 $\dot{x}^0,\dot{x}^1,\dot{x}^2$ 等项得

$$-x^5F-\frac{x^6}{6}\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial P}{\partial t}=0 \qquad (2.1.26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{1}{6}x^6\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{2}{t}F-\frac{\partial P}{\partial x}=0 \qquad (2.1.27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{2}{t}f=0 \qquad (2.1.28)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}=0 \qquad (2.1.29)$$

由(2.1.29)式解得 $f=f(t)$,代入(2.1.28)式得

$$F=x(\frac{1}{2}\frac{df}{dt}-\frac{2}{t}f) \qquad (2.1.30)$$

代入(2.1.27)式得

$$P=\frac{1}{2}x^2(\frac{1}{2}\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{6}{t^2}f-\frac{3}{t}\frac{df}{dt}) \qquad (2.1.31)$$

由(2.1.26),(2.1.31)式可知 $P=0$,故可求得

$$\frac{1}{3}\frac{df}{dt}-\frac{1}{t}f=0 \qquad (2.1.32)$$

求解(2.1.32)式得

$$f=ct^3 \qquad F=-\frac{1}{2}cxt^2 \qquad (2.1.33)$$

将(2.1.33)式代入(2.1.16)式则可得到 Emden 方程的首次积分为

$$x\dot{x}t^2 + \frac{x^6}{3}t^3 + \dot{x}^2t^3 = \text{const.} \tag{2.1.34}$$

这一结论同(1.3.20)式完全相同。在上一章中，我们是通过构造一个 Lagrange 函数后，利用完整保守力学系统的 Noether 定理得到的这一守恒量。在这里，我们利用非保守力学系统的 Noether 定理给出的这一结论，更为实用，因为并不是所有的非保守力作用的情形都可找到一个 Lagrange 函数来描述整个力学系统的性质。

第二节　非完整力学系统的 Noether 定理

非完整力学系统由于受到非完整约束的作用，其动力学方程的积分一般十分困难，甚至系统的运动微分方程都不可积，在此情形下，某些系统运动守恒量的存在对于了解系统的力学性质就更为重要。在这一节中，我们专门讨论非完整力学系统的对称性质与运动不变量问题。

一个力学系统所受的约束按约束方程中是否包含有广义坐标的导数而可将其分为运动约束与几何约束，若运动约束不可以积分为基本变量的有限形式，则称此约束为非完整约束；可积分为有限形式的运动约束及几何约束称为完整约束。

设力学系统的广义坐标为 $q_j(j = 1,2,\cdots,n)$，一阶非完整约束方程一般写为

$$f_l(t,q_j,\dot{q}_j) = 0 \quad \begin{pmatrix} j = 1,2,\cdots,n \\ l = 1,2,\cdots,s \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

它的特殊情形

$$a_{lj}\dot{q}_j + a_{l0} = 0 \quad \begin{pmatrix} l = 1,2,\cdots,s \\ j = 1,2,\cdots,n \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

称为线性非完整约束，其中 a_{lj},a_{l0} 为 t,q_j 的函数。

当力学系统受有非完整约束时，称之为非完整力学系统。非完整力学系统在本世纪内得到了较完整的研究，无论是它的运动微分方程、基本原理还是运动微分方程的积分方法，有关问题的详

细介绍请参看梅凤翔的著作[123,124]。应当注意，由于非完整约束的作用，上一章中介绍的完整保守力学系统的有关理论都需要重新加以考虑，Hamilton 最小作用量原理对此不再适用，甚至连变分与微分的交换关系都引起争议。在本书中，我们按照 Hölder 观点，承认变分与微分运算次序可以交换。

对于受有 s 个非完整约束的力学系统，其虚位移应受有限制，根据线性非完整约束虚位移限制条件的相容性，原苏联学者 Четаев 提出了一阶非线性非完整约束对虚位移的限制为

$$\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j = 0 \quad (l = 1,\cdots,s) \tag{2.2.3}$$

考虑以上特点，我们可以得到非完整力学系统的运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j + \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_j} \quad (j = 1,\cdots,n) \tag{2.2.4}$$

(2.2.4)式也称为 Routh 方程，式中 λ_l 为 Lagrange 待定乘子，L 为系统的 Lagrange 函数，Q_j 为非保守部分的广义力。

例 1 长为 l 的刚性杆连结着质量为 m 的两个质点，在水平面上运动。运动过程中，杆的中点速度只能沿着杆的方向，求质心的运动。

取质心坐标为 x，y，杆与 x 轴的夹角为 θ，由于运动过程中杆中点的速度只能沿着杆的方向，因此应有

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \mathrm{tg}\theta \tag{2.2.5}$$

即

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0 \tag{2.2.6}$$

这是一个线性非完整约束。系统的动能

$$T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{2.2.7}$$

势能 $V = 0$，广义力 $Q_j = 0$。将(2.2.6)，(2.2.7)式代入 Routh 方程(2.2.4)式，得

$$2m\ddot{x} - \lambda\sin\theta = 0 \tag{2.2.8a}$$

$$2m\ddot{y} + \lambda\cos\theta = 0 \tag{2.2.8b}$$

$$\frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta} = 0 \tag{2.2.8c}$$

由(2.2.8c)式得 $\dot{\theta} = \omega = \text{const.}$，$\theta = \omega t + \theta_0$，设 $t = 0$ 时 $\theta = 0$，则 $\theta = \omega t$，$\theta_0 = 0$，代入(2.2.8a)，(2.2.8b)式得

$$2m\ddot{x} - \lambda sin\omega t = 0 \tag{2.2.9a}$$

$$2m\ddot{y} + \lambda cos\omega t = 0 \tag{2.2.9b}$$

从而有

$$\frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} = -tg\omega t \tag{2.2.10}$$

根据约束方程(2.2.6)式，有

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = tg\omega t \tag{2.2.11}$$

联合(2.2.10)，(2.2.11)式，得

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 0$$

即

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = C^2 = \text{const.} \tag{2.2.12}$$

设初始速度为 v_0，且初始时 $x = 0, y = 0$，经过计算可得

$$x = \frac{v_0}{\omega} sin\omega t \tag{2.2.13a}$$

$$y = \frac{v_0}{\omega}(1 - cos\omega t) \tag{2.2.13b}$$

$$\lambda = 2mv_0\omega \tag{2.2.13c}$$

结合(2.2.12)式和 $\omega = const$，因此该非完整力学系统的机械能是守恒的。由此可见，即使是非完整力学系统，也可能存在运动守恒量。

业已指出，*Hamilton* 最小作用量原理既不适用于非保守系统，也不能适用于非完整系统，下面我们可以证明，m 次运动空间

中的新型变分原理可以通过 *Lagrange* 乘子法嵌入非完整约束，进而仍表示为一个泛函的驻值问题。

在 m 次运动空间中非完整约束的约束方程一般地可以写为

$$f_l(t,q_j,\cdots,\overset{(m)}{q_j}) = 0 \quad \begin{pmatrix} l = 1,2,\cdots,s \\ j = 1,2,\cdots,n \end{pmatrix} \tag{2.2.14}$$

在零次运动空间中，对受有(2.2.14)式约束的动力系统，其位形是可达的，但在 m 次运动空间中，其位形总是不可达的。这与完整约束在零次运动空间中位形不可达是相似的。

可以证明，在 m 次运动空间中，(2.2.14)式对虚位移的限制应满足

$$\frac{\partial f_l}{\partial \overset{(m)}{q_j}} \delta \overset{(m)}{q_j} = 0 \quad (l = 1,2,\cdots,s) \tag{2.2.15}$$

且有以下定理。

定理 在 m 次运动空间中，对于受有式(2.2.14)形式的 s 个非完整约束的力学系统，其真实的运动状态将使得泛函

$$\Lambda = \int_{t_0}^{t_1} (\overset{(m)}{T} + m \overset{(m)}{T_0} - \overset{(m)}{V} - \lambda_l f_l) dt \tag{2.2.16}$$

取驻值，其中 $\lambda_l = \lambda_l(t,q)$ 为 Lagrange 待定乘子，m 为不等于 1 的自然数。

对于受有(2.2.14)式约束的力学系统，其运动微分方程为

$$\frac{1}{m} \frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_j}} - \frac{m+1}{m} \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j + \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \overset{(m)}{q_j}} = 0 \tag{2.2.17}$$

对泛函 Λ 在 m 次运动空间中变分可得

$$\begin{aligned} \delta\Lambda &= \int_{t_0}^{t_1} (\delta \overset{(m)}{T} + m\delta \overset{(m)}{T_0} - \delta \overset{(m)}{V} - \lambda_l \delta f_l) dt \\ &= -\int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{m} \frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_j}} - \frac{m+1}{m} \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j + \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \overset{(m)}{q_j}}) \delta \overset{(m)}{q_j} dt \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

将(2.2.17)式代入(2.2.18)式知 $\delta\Lambda = 0$，因而证明了上述定理。

从我们关于新型变分原理及其推广到非保守系统、非完整系统的结论可见，新型变分原理比 Hamilton 最小作用量原理的应用范围更加广泛，Hamilton 原理是理想完整保守力学系统的基本原理，而新型积分变分原理是一般的非完整非保守力学系统的基本原理。

将(2.1.11)式代入(2.2.18)式可得

$$\begin{aligned}\delta\Lambda &= -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{m}\frac{\partial \overset{(m)}{T}}{\partial \overset{(m)}{q_j}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j + \lambda_l\frac{\partial \overset{(m)}{f_l}}{\partial \overset{(m)}{q_j}}\right]\cdot\left[F_j - \dot{q}_j f\right]dt \\ &= -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j + \lambda_l\frac{\partial \overset{(m)}{f_l}}{\partial \overset{(m)}{q_j}}\right)(F_j - \dot{q}_j f)dt\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

根据(2.2.11)和(2.2.15)式有

$$\frac{\partial \overset{(m)}{f_l}}{\partial \overset{(m)}{q_j}}\left[F_j(t,q,\dot{q}) - \dot{q}_j f(t,q,\dot{q})\right] = 0 \tag{2.2.20}$$

因此，(2.2.19)式可变换为

$$\begin{aligned}\delta\Lambda = -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\Big\{&Q_j(F_j - \dot{q}_j f) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}(F_j - \dot{q}_j f)\right] + \frac{\partial T}{\partial q_j}(F_j - \dot{q}_j f) \\ &+ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}(\dot{F}_j - \ddot{q}_j f - \dot{q}_j \dot{f})\Big\}dt\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

把广义力 Q_j 中的有势力和非有势力区分开来，有势力的势函数记为 $V(t,q)$，非有势力记为 Q'_j，并定义系统的 Lagrange 函数 $L = T - V$，则(2.2.21)式可写为

$$\begin{aligned}\delta\Lambda = -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\Big\{&Q'_j(F_j - \dot{q}_j f) + \frac{\partial L}{\partial q_j}F_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{F}_j + \frac{\partial L}{\partial t}f \\ &- \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}F_j + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)f - P(t,q,\dot{q})\right] \\ &+ \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)\dot{f} - \dot{P}(t,q,\dot{q})\Big\}dt\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

其中 $P(t,q,\dot{q})$ 称为规范函数。

如果无穷小变换群的生成函数除满足(2.2.20)式以外，还满足

$$Q'_j(F_j - \dot{q}_j f) + \frac{\partial L}{\partial t} f + \frac{\partial L}{\partial q_j} F_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{F}_j + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j) \dot{f} - P(t,q,\dot{q}) = 0 \qquad (2.2.23)$$

则根据无穷小变换群作用下泛函(2.2.16)式的不变性，有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} F_j + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j) f - P(t,q,\dot{q}) = \text{const.} \qquad (2.2.24)$$

因此综合起来，可得下述定理。

定理 对于受有 s 个 m 阶非完整约束((2.2.14)式)的力学系统，若 m 次运动空间中无穷小变换的空间和时间的生成函数 F_j，f 及规范函数满足方程

$$\frac{\partial f_{(m)}}{\partial q_j}(F_j - \dot{q}_j f) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_j} F_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{F}_j + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j) \dot{f} + Q'_j(F_j - \dot{q}_j f) - \dot{P}(t,q,\dot{q}) = 0$$

则该力学系统存在运动守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} F_j + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j) f - P(t,q,\dot{q}) = \text{const.}$$

根据上述定理我们可得这样一个结论：与高阶非完整约束系统的守恒律相应的无穷小变换使得新型变分原理的泛函(2.2.16)式具有不变性，生成函数 F_j，f 及规范函数 P 不仅要满足广义 Killing 方程(2.2.23)式，还应当满足约束条件(2.2.20)式。

从(2.2.20)式可知，$\frac{\partial f_{(m)}}{\partial q_j}$ 中只含有广义速度、广义坐标和时间 t 的话，则较易找到满足该式的时间与空间的生成函数 F_j，f，从而通过验证(2.2.23)式后，即可求得该力学系统的运动守恒量

(2.2.24)式。

例2 假设系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{2.2.25}$$

且受有一高阶非完整约束

$$\dot{x}\overset{(m)}{x} + \dot{y}\overset{(m)}{y} - \dot{z}\overset{(m)}{z} = 0 \tag{2.2.26}$$

令 $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$，选择生成函数

$$f = 0$$
$$F_1 = \frac{1}{\dot{q}_1} \quad F_2 = \frac{1}{\dot{q}_2} \quad F_3 = \frac{2}{\dot{q}_3} \tag{2.2.27}$$

则可验证(2.2.20)式成立，并由(2.2.23)式可求得规范函数

$$P = -m\ln\dot{x}\dot{y}\dot{z}^2 \tag{2.2.28}$$

代入(2.2.24)式可得该力学系统的守恒律

$$\dot{x}\dot{y}\dot{z}^2 = \text{const.} \tag{2.2.29}$$

例3 设力学系统的 Lagrange 函数如(2.2.25)式，它受有高阶非完整约束

$$\dot{x}^n\overset{(m)}{x} + \dot{y}^n\overset{(m)}{y} - \dot{z}^n\overset{(m)}{z} = 0 \quad (n \neq 1, m > 1) \tag{2.2.30}$$

同例2，选择广义坐标后，如选择生成函数为

$$f = 0$$
$$F_1 = \frac{1}{\dot{q}_1^n} \quad F_2 = \frac{1}{\dot{q}_2^n} \quad F_3 = \frac{2}{\dot{q}_3^n} \tag{2.2.31}$$

可验证这组生成函数满足(2.2.20)式，根据(2.2.23)式可求得

$$P = \frac{nm}{n-1}\left(\frac{1}{\dot{x}^{n-1}} + \frac{1}{\dot{y}^{n-1}} + \frac{2}{\dot{z}^{n-1}}\right) \tag{2.2.32}$$

因此，根据非完整力学系统的广义 Noether 定理可得该系统的运动守恒量为

$$\frac{1}{\dot{x}^{n-1}} + \frac{1}{\dot{y}^{n-1}} + \frac{2}{\dot{z}^{n-1}} = \text{const.} \tag{2.2.33}$$

从上面两个例子可以看出，高阶非完整约束系统同样存在守恒量。

下面我们再来研究一下 Appell-Hamel 模型的守恒量。

Appell-Hamel 模型的非完整约束可表示为

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = 0 \tag{2.2.34}$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{2.2.35}$$

该系统在以下四种无穷小变换下将分别得到四个独立的守恒量。

1. 设生成函数为

$$\begin{aligned} &f = 1 \\ &F_x = 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = 0 \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

其规范函数 $P=\text{const.}$ 故系统存在能量积分

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \text{const.} \tag{2.2.37}$$

应当注意，(2.2.37)式也可由生成函数

$$\begin{aligned} &f = 0 \\ &F_x = \frac{\dot{x}}{n} \quad F_y = \frac{\dot{y}}{n} \quad F_z = \frac{\dot{z}}{n} \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

导致，其中 n 为不等于 0 的自然数。

2. 设生成函数

$$\begin{aligned} &f = 0 \\ &F_x = -\frac{1}{n\dot{y}} \quad F_y = \frac{\dot{x}}{n\dot{y}^2} \quad F_z = 0 \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

此时求得规范函数

$$P = \frac{m\dot{x}}{n\dot{y}} \tag{2.2.40}$$

故存在守恒量

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \text{const.}$$

3. 设生成函数

$$\begin{aligned} &f = 0 \\ &F_x = 0 \quad F_y = \dot{z} \quad F_z = \dot{y} \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

此时规范函数为

$$P = m\dot{y}\ddot{z} - mgy \tag{2.2.42}$$

故有守恒量

$$\dot{y}\ddot{z} - gy = \text{const.} \tag{2.2.43}$$

4. 设生成函数

$$f = 0$$
$$F_x = \dot{y} \quad F_y = 0 \quad F_z = \dot{x} \tag{2.2.44}$$

则规范函数为

$$P = m\dot{x}\ddot{y} - mgx \tag{2.2.45}$$

因而有守恒量

$$\dot{x}\ddot{y} - gx = \text{const.} \tag{2.2.46}$$

由此可见，具有二个自由度的 Appell-Hamel 模型，存在四个独立的守恒量。

在 Appell-Hamel 问题中，系统存在四个独立的运动守恒量，这是否就是系统的全部独立的守恒量呢？下面我们来讨论这一问题。

设力学系统有 n 个广义坐标 $q_j(j = 1, \cdots, n)$，而 $I_1(t, q, \dot{q})$，$I_2(t, q, \dot{q}), \cdots, I_h(t, q, \dot{q})$ 为该力学系统的 h 个首次积分，若

$$\text{rank}\left(\frac{\partial I_u}{\partial a_r}\right) = h \tag{2.2.47}$$

其中 $a_r = (q, \dot{q})$，则称此 h 个首次积分是独立的。

在 Appell-Hamel 问题中，由于

$$\left(\frac{\partial I_u}{\partial a_r}\right) = \begin{Bmatrix} g & 0 & 0 & \dot{y} & 0 & \dot{x} \\ 0 & g & 0 & 0 & \dot{z} & \dot{y} \\ 0 & 0 & g & \dot{x} & \dot{y} & \dot{x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -l & 0 \end{Bmatrix} \tag{2.2.48}$$

故有 $\text{rank}\left(\frac{\partial I_u}{\partial a_r}\right) = 4$，因而是独立的。

定理 对于受有 s 个一阶非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\dot{q}_{\varepsilon+\beta}(t,q_i,\dot{q}_\sigma)$$
$$(i=1,\cdots,n;\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\beta=1,2,\cdots,s;\varepsilon=n-s) \tag{2.2.49}$$

的非保守力学系统。1°.若力学系统是非自治的,则该力学系统存在的守恒量不超过 $2n-s$ 个。2°.若系统是非自治的,则该力学系统独立的运动守恒量的数目不超过 $2n-s-1$ 个。

注:非完整非保守系统是自治的是指其运动微分方程与约束方程中均不显含时间 t ,否则为非自治的。

证明 对于受有 s 个一阶非完整约束((2.2.49)式)的力学系统,Maggi 型运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma \tag{2.2.50}$$

其中 $\widetilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+Q_{\varepsilon+\beta}\dfrac{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}{\partial\dot{q}_\sigma}$, T 为系统的动能, Q_i 为系统的广义力。

将方程(2.2.50)写成显式并解耦归一,考虑约束方程(2.2.49)式,则可得

$$\ddot{q}_\sigma=\varphi_\sigma(t,q_i,\dot{q}_\sigma) \tag{2.2.51}$$

令 $q_{n+1}=t,\dot{q}_\sigma=p_\sigma$,则(2.2.49),(2.2.51)式的等价方程组为

$$\begin{cases}\dot{q}_\sigma=p_\sigma & i=1,2,\cdots,n+1\\ \dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\dot{q}_{\varepsilon+\beta}(q_i,p_\sigma) & \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon\\ \dot{q}_{n+1}=1 & \beta=1,2,\cdots,g\\ \dot{p}_\sigma=\varphi_\sigma(t,q_i,\dot{q}_\sigma) & \varepsilon=n-s\end{cases} \tag{2.2.52}$$

写成向量形式则有

$$\dot{x}=f(x) \tag{2.2.52}'$$

其中向量 $x=(q_1,q_2,\cdots,q_n,p_1,p_2,\cdots,p_\varepsilon)$ 共有 $2n-s+1$ 个分量。若系统是自治的,由于所有运动方程和约束方程均不显含时间 t ,故可除去 $q_{n+1}=t$,因而(2.2.52)′中 x 共有 $2n-s$ 个分量。

设力学系统为非自治系统，$I_j = I_j(x)$ 是力学系统的 $2n-s+1$ 个运动守恒量，则可得

$$\frac{\partial I_j}{\partial x_i} f^i(x) = 0 \quad (i,j = 1,2,\cdots,2n-s+1) \tag{2.2.53}$$

由于 $f(x)$ 不为零，故有

$$\det\left(\frac{\partial I_j}{\partial x^i}\right) = 0 \tag{2.2.54}$$

因此，按定义该系统的 $2n-s+1$ 个运动守恒量不可能是独立的，因而有结论：对于非完整非保守力学系统独立守恒量不超过 $2n-s$ 个。

对于自治的非完整非保守系统，同理可证其独立的运动守恒量不超过 $2n-s-1$ 个。

实际上，对于自治的一阶非完整约束系统，若有 $2n-s-1$ 个独立守恒量，则其余守恒量可由此 $2n-s-1$ 个函数表示；对于非自治的一阶完整约束系统，若有 $2n-s$ 个独立的守恒量，则其余的守恒量可由此 $2n-s$ 个函数表示。

对于受有 s 个二阶非完整约束

$$\ddot{q}_{\epsilon+\beta} = q\,\ddot{q}_{\epsilon+\beta}(t, q_j, \dot{q}_j, q\,\ddot{q}_\sigma)$$
$$(j = 1,\cdots,n, \sigma = 1,\cdots,\epsilon; \beta = 1,\cdots,s; n-s = \epsilon) \tag{2.2.55}$$

的力学系统，1°.若力学系统是自治的，则独立的守恒量的数目不超过 $2n-1$ 个；2°.若力学系统是非自治系统，则独立的守恒量的数目不超过 $2n$ 个。

第三节　连续介质力学系统的 Noether 定理

1918 年，Noether 概括了经典力学研究中潜在的对称性与力学系统的守恒律之间的对应关系，得到了著名的 Noether 定理。70 年代以后，在连续介质力学中寻求力学系统的对称性与守恒律

的工作开始引起注意。1972 年，Knowles 和 Sternberg 提出了弹性体的一组守恒律，指出了断裂力学中由 Rice 提出的 J 积分其本质是弹性体的一个守恒量。1976 年，Fletcher 给出了线弹性动力学的 6 个守恒量，并研究了这组守恒量的完全性。1979 年，李灏等也进一步研究了连续介质力学中的守恒量。

众所周知，工程中绝大多数力学系统都是非保守系统。典型的弹性体的衰减振动、材料的断裂过程都是不可逆的能量耗散过程，因而是非保守问题。前面我们业已指出，用变分原理处理这类问题时可用新型变分原理。

我们首先就弹塑性问题给出相应的新型变分原理。

假设弹性体密度 $\rho=\text{const.}$，力边界为 S_1，几何边界为 S_2，$S=S_1+S_2$，u_λ 为位移，p_λ 为体力，$\bar{F}_\lambda$ 为边界面力，T 为系统动能

$$T=\int_V \frac{1}{2}\rho\dot{u}_\lambda\dot{u}_\lambda dV \tag{2.3.1}$$

U 为应变能

$$U=\int_V A(u_\lambda)dV \tag{2.3.2}$$

其中 $A(u_\lambda)$ 为应变能密度，V 为弹性体的体积。物质的本构关系为

$$\frac{\partial A}{\partial e_{\lambda\mu}}=\sigma_{\lambda\mu} \tag{2.3.3}$$

其中 $e_{\lambda\mu}$ 为应变，$\sigma_{\lambda\mu}$ 为应力。

假设两个广义位势函数

$$\Phi=p_\lambda \overset{(m)}{u}_\lambda \tag{2.3.4}$$

$$\Psi=\bar{F}_\lambda \overset{(m)}{u}_\lambda \tag{2.3.5}$$

根据应变能函数的定义

$$dA=\sigma_{\lambda\mu}de_{\lambda\mu} \tag{2.3.6}$$

可以证明

$$\delta \overset{(m)}{A}=\sigma_{\lambda\mu}\delta \overset{(m)}{e}_{\lambda\mu} \tag{2.3.7}$$

其中 m 表示对 t 求 m 次导数。m 次运动空间中的 Stokes 公式为

$$\int_V \sigma_{ij,j}\overset{(m)}{\delta u_i}dV = \int_{S_1+S_2}\sigma_{ij}n_j\overset{(m)}{\delta u_i}dS - \int_V \sigma_{ij}\overset{(m)}{\delta u_{i,j}}dV \quad (2.3.8)$$

其中 $\sigma_{ij,j}$，$u_{i,j}$ 表示 σ_{ij}，u_i 对 j 指标求偏导数。

假设求导数与求积分可交换顺序，则我们有弹性理论的新型变分原理，即在 m 次运动空间中，所有满足几何边界条件的可能位移中，小变形弹性系统的真实状态将使泛函

$$I = \int_{t_0}^{t_1}[\overset{(m)}{T} + m\overset{(m)}{T_0} - \overset{(m)}{U} - \int_V \Phi dV - \int_{S_1}\Psi dS]dt \quad (2.3.9)$$

取驻值，其中 $\overset{(m)}{T_0} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{u}_\lambda}\overset{(m)}{u_\lambda}$，$m \neq 1$。

其实，由于弹性动力学的基本方程为

$$\sigma_{ij,j} + p_i = \rho\ddot{u}_i \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \quad (2.3.10)$$

$$\sigma_{ij}n_j - \bar{F}_i = 0 \quad (\text{在 } S_1 \text{ 上}) \quad (2.3.11)$$

而

$$\begin{aligned}\delta I &= \int_{t_0}^{t_1}[\delta\overset{(m)}{T} + m\delta\overset{(m)}{T_0} - \delta\overset{(m)}{U} - \delta\int_V \Phi dS - \delta\int_{S_1}\Psi dS]dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\{\int_V[\rho\ddot{u}_\lambda\overset{(m)}{\delta u_\lambda} - p_\lambda\overset{(m)}{\delta u_\lambda} - \overset{(m)}{\delta A}]dV \\ &\qquad - \int_{S_1}\bar{F}_\lambda\cdot\overset{(m)}{\delta u_\lambda}dS\}dt \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

考虑变形的几何条件及(2.3.7)，(2.3.8)，(2.3.10)，(2.3.11)式可得

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}[\overset{(m)}{T} + m\overset{(m)}{T_0} - \overset{(m)}{U} - \int_V \Phi dV - \int_{S_1}\Psi dS]dt = 0 \quad (2.3.13)$$

类似地，我们可以给出刚塑性材料的新型变分原理，即在 m 次运动空间中，所有满足几何边界条件的可能位移中，刚塑性材料的真实运动状态将使泛函

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [\overset{(m)}{T} + m\overset{(m)}{T_0} - \overset{(m)}{U} - \int_V \Phi dV - \int_{S_1} \Psi dS] dt \quad (2.3.14)$$

取驻值，其中 $\overset{(m)}{U} = \int_V \sigma_{ij} \overset{(m)}{e_{ij}} dV$，$m \neq 1$。

新型变分原理在弹塑性力学中的具体应用可参看文献[132, 133, 175]。

为了更一般地研究连续介质力学系统，我们讨论场问题中的新型变分原理。

设 V 是 Euclid 空间中的单连通域，t 为时间，x^k 为空间坐标基($k=1,2,3$)，$\Phi_\alpha(x_k, t)$为描述系统的状态变量($\alpha = 1,2,\cdots, n$)。定义

$$\begin{aligned} L = L[&x^k, t, \Phi_\alpha(x^k,t), \partial_\mu \Phi_\alpha(x^k,t); \dot{\Phi}_\alpha(x^k,t), \\ &\partial_\mu \dot{\Phi}_\alpha(x^k,t); \cdots\cdots; \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha}(x^k,t), \partial_\mu \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha}(x^k,t); \\ &\overset{(m+1)}{\Phi_\alpha}(x^k,t), \partial_\mu \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha}(x^k,t)] \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

其中 $\partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}$，$\overset{(m+1)}{\Phi_\alpha} = \dfrac{d}{dt}\overset{(m)}{\Phi_\alpha}$，定义如下形式的泛函

$$J[\{\Phi_\alpha(x^k,t)\}](L) \triangleq \int_{t_0}^{t_1}\int_V L dV dt \quad (2.3.16)$$

在第一章中，我们给出了 m 次运动空间的概念，在场问题中我们称之为 m 次运动场，且定义变分规则为

$$\left.\begin{aligned} &\delta\Phi_\alpha = \delta\dot{\Phi}_\alpha = \cdots = \delta\overset{(m-1)}{\Phi_\alpha} = 0 \\ &\delta\partial_\mu\Phi_\alpha = \delta\partial_\mu\dot{\Phi}_\alpha = \cdots = \delta\partial_\mu\overset{(m-1)}{\Phi_\alpha} = 0 \\ &\delta\overset{(m)}{\Phi_\alpha} \neq 0 \quad \delta\overset{(m)}{\dot{\Phi}_\alpha} \neq 0 \quad \delta\partial_\mu\overset{(m)}{\Phi_\alpha} \neq 0 \quad \delta\partial_\mu\overset{(m+1)}{\Phi_\alpha} \neq 0 \\ &\delta t = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2.3.17)$$

称这种变分为同时同态变分。

经典变分学中考虑高阶导数泛函的驻值性质时实质上是在位形空间中进行的，在这里，我们换一个角度而从 m 次运动场中考

虑泛函(2.3.16)式的驻值。

对泛函 J 进行变分，则可得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1}\int_V [\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{\Phi_\alpha}}\delta \overset{(m)}{\Phi_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha}}\delta \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overset{(m)}{\Phi_\alpha})}\delta(\delta_\mu \overset{(m)}{\Phi_\alpha}) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha})}\delta(\partial_\mu \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha})]dVdt \tag{2.3.18}$$

在 m 次运动场中，变分 δ 与偏导数 ∂_μ 以及对时间的全导数满足下列交换关系：

$$\delta(\partial_\mu \overset{(m)}{\Phi_\alpha}) = \partial_\mu(\delta \overset{(m)}{\Phi_\alpha}) \tag{2.3.19}$$

$$\delta(\frac{d}{dt}\overset{(m)}{\Phi_\alpha}) = \frac{d}{dt}(\delta \overset{(m)}{\Phi_\alpha}) \tag{2.3.20}$$

又由于

$$\int_V f\cdot\delta(\partial_\mu \overset{(m)}{\Phi_\alpha})dV = \int_{\partial V} f\cdot\delta \overset{(m)}{\Phi_\alpha} n^\mu dS - \int_V \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\delta \overset{(m)}{\Phi_\alpha} dV \tag{2.3.21}$$

其中 ∂V 为单连通域 V 的边界，n^μ 为单位法向量分量。

将(2.3.19)，(2.3.21)式代入(2.3.18)式得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1}\int_V [\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{\Phi_\alpha}}\delta \overset{(m)}{\Phi_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overset{(m)}{\Phi_\alpha})})\delta \overset{(m)}{\Phi_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha}}\delta \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha})})\delta \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha}]dVdt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial V}[\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overset{(m)}{\Phi_\alpha})}n^\mu\delta \overset{(m)}{\Phi_\alpha} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha})}n^\mu\delta \overset{(m+1)}{\Phi_\alpha}]dSdt \tag{2.3.22}$$

考虑在 V 的边界 ∂V 上有

$$\delta \overset{(m)}{\Phi_\alpha}|_{\partial V} = 0 \tag{2.3.23}$$

将(2.3.20),(2.3.23)式代入(2.3.22)式中则可得

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1}\int_V \{(\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{\Phi}_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \overset{(m+1)}{\Phi}_\alpha})\delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha - [\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overset{(m)}{\Phi}_\alpha)}) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overset{(m+1)}{\Phi}_\alpha)}))]\delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha\} dVdt \tag{2.3.24}$$

因而泛函 J 在 m 次运动场中取驻值的条件为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{\Phi}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{\Phi}_\alpha} - \frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overset{(m+1)}{\Phi}_\alpha)})] - \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \overset{(m)}{\Phi}_\alpha)}) = 0 \tag{2.3.25}$$

(2.3.25)式可以称为广义 Euler-Lagrange 方程。

由于新型变分原理用于处理非保守系统不存在原则困难,因此,上述结果也可用于非保守的连续介质力学问题,此时

$$L = \overset{(m)}{T} + m\overset{(m)}{T}_0 - \overset{(m)}{V} \tag{2.3.26}$$

其中 T 为动能, $\overset{(m)}{V} = -Q_\alpha \overset{(m)}{\Phi}_\alpha$, $\overset{(m)}{T}_0 = \frac{\partial T}{\partial \Phi_{\alpha,t}}\overset{(m+1)}{\Phi}_\alpha$, $m \neq 1$。

为研究分布参数力学系统的对称性质与运动守恒量之间的关系,我们需要给出 m 次运动场中的非同时同态变分。非同时同态变分记为 Δ。

定义 δ 与 Δ 分别为

$$\delta\Phi_\alpha = \bar{\Phi}_\alpha(x^\tau, t) - \Phi_\alpha(x^\upsilon, t) \tag{2.3.27}$$

$$\begin{cases} \Delta\Phi_\alpha = \bar{\Phi}_\alpha(\bar{x}^\upsilon, \bar{t}) - \Phi_\alpha(x^\upsilon, t) \\ \bar{x}^\upsilon = x^\upsilon + \Delta x^\upsilon \\ \bar{t} = t + \Delta t \end{cases} \tag{2.3.28}$$

$$\Delta\Phi_\alpha = \delta\Phi_\alpha + \Phi_{\alpha,t}\cdot\Delta t + \Phi_{\alpha,\upsilon}\cdot\Delta x^\upsilon \tag{2.3.29}$$

其中 $\Phi_{\alpha,t}$, $\Phi_{\alpha,\upsilon}$ 分别表示状态变量 $\Phi_{\alpha,\upsilon}$ 对 t, x^υ 求偏导数。

由(2.3.29)式有

$$\Delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha = \delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha + \overset{(m)}{\Phi}_{\alpha,t} \cdot \Delta t + \overset{(m)}{\Phi}_{\alpha,v} \cdot \Delta x^v$$

$$(\Delta\Phi_\alpha)^{(m)} = (\delta\Phi_\alpha)^{(m)} + (\Phi_{\alpha,t} \cdot \Delta t)^{(m)} + (\Phi_{\alpha,v} \cdot \Delta x^v)^{(m)} \tag{2.3.30}$$

其中(m)表示状态变量对时间求 m 阶导数。

规定

$$\begin{cases} (\Delta \overset{(m-k)}{\Phi}_\alpha)^{(k)} \neq 0 & (\Delta \overset{(m-k)}{\Phi}_\alpha)^{k-s} = 0 \\ (\Delta x^v)^{(m)} \neq 0 & (\Delta x^v)^{(m-k)} = 0 \\ (\Delta t)^m \neq 0 & (\Delta t)^{(m-k)} = 0 \end{cases} \tag{2.3.31}$$

$$(k = 1.2.\cdots, m; s = 1,2,\cdots, m; s \leqslant k)$$

考虑变分与微分可交换则可得

$$\Delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha - (\Delta\Phi_\alpha)^{(m)} = -\Phi_{\alpha,t} \cdot (\Delta t)^{(m)} - \Phi_{\alpha,v}(\Delta x^v)^{(m)} \tag{2.3.32}$$

$$\Delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha = \delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha \tag{2.3.33}$$

因此,我们有

$$\delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha = (\Delta\Phi_\alpha)^{(m)} - \Phi_{\alpha,t}(\Delta t)^{(m)} - \Phi_{\alpha,v}(\Delta x^v)^{(m)} \tag{2.3.34}$$

为了研究分布参数系统的 Noether 守恒量的一般情形,我们假设时间坐标基、空间坐标基以及系统状态变量的无穷小变换的生成函数分别为 f, h^v, F_α, 即

$$(\Delta\Phi)^{(m)} = \varepsilon F_\alpha(t, x^v; \Phi_\alpha; \Phi_{\alpha,t}; \Phi_{\alpha,v}) \tag{2.3.35}$$

$$(\Delta x^v)^{(m)} = \varepsilon h^v(t, x^v; \Phi_\alpha; \Phi_{\alpha,t}; \Phi_{\alpha,v}) \tag{2.3.36}$$

$$(\Delta t)^{(m)} = \varepsilon f(t, x^v, \Phi_\alpha; \Phi_{\alpha,t}; \Phi_{\alpha,v}) \tag{2.3.37}$$

其中 ε 为无穷小参数。

将(2.3.35)~(2.3.37)式代入(2.3.34)式则可得

$$\delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha = \varepsilon[F_\alpha - \Phi_{\alpha,v}h^v - \Phi_{\alpha,t}f] \tag{2.3.38}$$

将(2.3.26)式代入(2.3.24)式后可得

$$\delta J = -\int_{t_0}^{t_1}\int_V (\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \Phi_{\alpha,t}} - \frac{\partial T}{\partial \Phi_\alpha} - Q_\alpha) \cdot \delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha dt dV \tag{2.3.39}$$

将(2.3.39)式中的 $\delta \overset{(m)}{\Phi}_\alpha$ 用(2.3.38)式代替则有

$$\delta J = -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_V \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \Phi_{\alpha,t}} - \frac{\partial T}{\partial \Phi_\alpha} - Q_\alpha\right) \times (F_\alpha - \Phi_{\alpha,t}f - \Phi_{\alpha,\nu}h^\nu)dVdt \tag{2.3.40}$$

下面,我们分两种情形来讨论守恒量。

1. 广义力 Q_α 中有势力部分的势函数为 $U(\Phi_\alpha)$,非有势力部分的广义力为 Q'_α。

在这种情形下,令 $L = T - U$ 为系统的 Lagrange 密度,则(2.3.40)式可以写为

$$\begin{aligned}
\delta J &= -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_V \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}} - \frac{\partial L}{\partial \Phi_\alpha} - Q'_\alpha\right)(F_\alpha - \Phi_{\alpha,t}f - \Phi_{\alpha,\nu}h^\nu)dVdt \\
&= -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_V \Big\{\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}(F_\alpha - \Phi_{\alpha,t}f - \Phi_{\alpha,\nu}h^\nu)\Big] \\
&\quad - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}(F_\alpha - \dot{\Phi}_{\alpha,t}f - \Phi_{\alpha,t}\dot{f} - \dot{\Phi}_{\alpha,\nu}h^\nu - \Phi_{\alpha,\nu}\dot{h}^\nu) \\
&\quad - \Big(\frac{\partial L}{\partial \Phi_\alpha} + Q'_\alpha\Big)(F_\alpha - \Phi_{\alpha,t}f - \Phi_{\alpha,t}f - \Phi_{\alpha,\nu}h^\nu)\Big\}dVdt \\
&= -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_V \Big\{\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}F_\alpha + Lf - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}(\Phi_{\alpha,t}f + \Phi_{\alpha,\nu}h^\nu)\Big] \\
&\quad - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}[\dot{F}_\alpha - \Phi_{\alpha,t}\dot{f} - \dot{\Phi}_{\alpha,\nu}h^\nu - \Phi_{\alpha,\nu}\dot{h}^\nu] - L\dot{f} \\
&\quad - \frac{\partial L}{\partial t}f - Q'_\alpha(F_\alpha - \Phi_{\alpha,t}f - \Phi_{\alpha,\nu}h^\nu) - \frac{\partial L}{\partial \Phi_\alpha}(F_\alpha - \Phi_{\alpha,\nu}h^\nu)\Big\}dVdt
\end{aligned} \tag{2.3.41}$$

若引入规范函数 $\varepsilon P(t, x^\nu; \Phi_\alpha; \Phi_{\alpha,t}; \Phi_{\alpha,\nu})$,则

$$\begin{aligned}
\delta J &= -\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_V \Big\{\frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}F_\alpha + Lf - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}(\Phi_{\alpha,t}f + \Phi_{\alpha,\nu}h^\nu) - P\Big] \\
&\quad - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}(\dot{F}_\alpha - \Phi_{\alpha,t}\dot{f} - \dot{\Phi}_{\alpha,\nu}h^\nu - \Phi_{\alpha,\nu}\dot{h}^\nu) - \frac{\partial L}{\partial t}f - L\dot{f}
\end{aligned}$$

$$- Q'_{\alpha}(F_{\alpha} - \Phi_{\alpha,t}f - \Phi_{\alpha,\beta}h^{\beta}) - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha}}(F_{\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta}h^{\beta}) + P\Big\}dVdt \tag{2.3.42}$$

故对于分布参数的力学系统，若无穷小变换群满足

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}(\dot{F}_{\alpha} - \Phi_{\alpha,t}\dot{f} - \Phi_{\alpha,\beta}\dot{h}^{\beta} - \Phi_{\alpha,\beta}\dot{h}^{\beta}) + \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha}}(F_{\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta}h^{\beta}$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial t}f + L\dot{f} + Q'_{\alpha}(F_{\alpha} - \Phi_{\alpha,t}f - \Phi_{\alpha,\beta}h^{\beta}) - \dot{P} = 0 \tag{2.3.43}$$

则该分布参数的力学系统存在以下形式的 Noether 守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}F_{\alpha} + Lf - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}(\Phi_{\alpha,t}f + \Phi_{\alpha,\beta}h^{\beta}) - P = \text{const.} \tag{2.3.44}$$

这就是我们讨论的第一种情形的结论。

我们知道，在连续介质力学中，广义力 Q_{α} 中有势力部分的势能经常是 $U = U(\Phi_{\alpha};\Phi_{\alpha,\beta})$，因此，我们专门讨论这一问题。

2. 广义力中有势力部分的势能 $U = U(\Phi_{\alpha},\Phi_{\alpha,\beta})$，非有势广义力为 Q''_{α}。

当有势力部分的势能 $U = U(\Phi_{\alpha},\Phi_{\alpha,\beta})$ 时，有势的广义力 Q''_{α} 为

$$Q''_{\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial \Phi_{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial U}{\partial \Phi_{\alpha,\beta}}\right) \tag{2.3.45}$$

如果我们将时、空坐标视为四维时空空间中的坐标轴，在此空间中所占区域为 D，同样地定义 Lagrange 函数 $L = T - U$，则(2.3.40)式可以写为

$$\delta J = -\varepsilon\int_{D}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,\beta}}\right)_{,\beta} - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha}} - Q''_{\alpha}\right](F_{\alpha} - \Phi_{\alpha,\eta}h^{\eta})dD$$

$$= -\varepsilon\int_{D}\Big\{\left[\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,\beta}}(F_{\alpha} - \Phi_{\alpha,\eta}h^{\eta})\right]_{,\beta} - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,\beta}}(F_{\alpha} - \Phi_{\alpha,\eta}h^{\eta})_{,\beta}$$

$$- \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha}}(F_{\alpha} - \Phi_{\alpha,\eta}h^{\eta}) - Q''_{\alpha}(F_{\alpha} - \Phi_{\alpha,\eta}h^{\eta})\Big\}dD$$

$$= -\varepsilon\int_{D}\Big\{\left[Lh^{\eta}\delta^{\beta}_{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,\beta}}(F_{\alpha} - \Phi_{\alpha,\eta}h^{\eta})\right]_{,\beta}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,\upsilon}}(F_\alpha-\Phi_{\alpha,\eta}h^\eta)_{,\upsilon}-\frac{\partial L}{\partial \Phi_\alpha}(F_\alpha-\Phi_{\alpha,\eta}h^\upsilon)$$

$$-Q^{''}{}_\alpha(F_\alpha-\Phi_{\alpha,\eta}h^\eta)-(Lh^\eta)\delta^\upsilon_\eta)_{,\upsilon}\Big\}dD \tag{2.3.46}$$

其中 δ^υ_η 为 Kronecker 记号。若引入规范函数 $P^\upsilon(x^\upsilon;\Phi_\alpha;\Phi_{\alpha,\upsilon})$，则(2.3.46)式为

$$\delta J=-\varepsilon\int_D\{Lh^\eta\delta^\upsilon_\eta+\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,\upsilon}}(F_\alpha-\Phi_{\alpha,\eta}h^\eta)-P^\upsilon_{,\upsilon}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,\upsilon}}(F_\alpha-\Phi_{\alpha,\eta}h^\eta)-\frac{\partial L}{\partial \Phi_\alpha}(F_\alpha-\Phi_{\alpha,\eta}h^\eta)$$

$$-Q^{''}{}_\alpha(F_\alpha-\Phi_{\alpha,\eta}h^\eta)-(Lh^\eta\delta^\upsilon_\eta)_{,\upsilon}-P^\upsilon_{,\upsilon}\}dD \tag{2.3.47}$$

因此，对于分布参数的非保守力学系统而言，若无穷小变换群满足

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,\upsilon}}(F_\alpha-\Phi_{\alpha,\eta}h^\eta)+\frac{\partial L}{\partial \Phi_\alpha}(F_\alpha-\Phi_{\alpha,\eta}h^\eta)+Q^{''}{}_\alpha(F_\alpha-\Phi_{\alpha,\eta}h^\eta)$$

$$+(Lh^\eta\delta^\upsilon_\eta)_{,\upsilon}-P^\upsilon_{,\upsilon}=0 \tag{2.3.48}$$

则该系统存在以下形式的 Noether 守恒量

$$[(L\delta^\upsilon_\eta-\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,\upsilon}}\Phi_{\alpha,\eta})h^\eta+\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,\upsilon}}F_\alpha-P^\upsilon]_{,\upsilon}=0 \tag{2.3.49}$$

从上面的讨论可以知道，如果分布参数的力学系统存在 Noether 守恒量(2.3.44)或(2.3.49)式，则变换的生成函数及规范函数相应地应当满足(2.3.43)或(2.3.48)式。(2.3.43)或(2.3.48)式即当有势力在两种情形下存在 Noether 守恒量的条件。将(2.3.43)式展开后整理可得

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}\cdot\frac{\partial F_\alpha}{\partial \Phi_{\alpha,t}}+(L-\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}\Phi_{\alpha,t})\frac{\partial F}{\partial \Phi_{\alpha,t}}-\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}\Phi_{\alpha,\upsilon}\frac{\partial h^\upsilon}{\partial \Phi_{\alpha,t}}$$

$$-\frac{\partial P}{\partial \Phi_{\alpha,t}}=0 \tag{2.3.50}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}(\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial F_\alpha}{\partial \Phi_\alpha}\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial F_\alpha}{\partial \Phi_{\alpha,\upsilon}}\cdot\frac{\partial \Phi_{\alpha,\upsilon}}{\partial t})+\frac{\partial L}{\partial \Phi_\alpha}F_\alpha$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,t}}[\Phi_{\alpha,t}\cdot\frac{\partial f}{\partial t}+\Phi_{\alpha,t}\frac{\partial f}{\partial \Phi_\alpha}\cdot\Phi_{\alpha,t}+\Phi_{\alpha,t}\frac{\partial f}{\partial \Phi_{\alpha,\upsilon}}\cdot\frac{\partial \Phi_{\alpha,\upsilon}}{\partial t}$$

$$+\Phi_{\alpha,\upsilon}h^{\upsilon}+\Phi_{\alpha,\upsilon}\frac{\partial h^{\upsilon}}{\partial t}+\Phi_{\alpha,\upsilon}\frac{\partial h^{\upsilon}}{\partial\Phi_{\alpha}}\Phi_{\alpha,\upsilon}+\Phi_{\alpha,\upsilon}\frac{\partial h^{\upsilon}}{\partial\Phi_{\alpha,\upsilon}}\frac{\partial\Phi_{\alpha,\upsilon}}{\partial t})$$
$$-\frac{\partial L}{\partial\Phi_{\alpha}}\Phi_{\alpha,\upsilon}h^{\upsilon}+\frac{\partial L}{\partial t}f+L\frac{\partial f}{\partial t}+L\frac{\partial f}{\partial\Phi_{\alpha}}\Phi_{\alpha,t}+Q''_{\alpha}F_{\alpha}$$
$$-\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial P}{\partial\Phi_{\alpha}}\Phi_{\alpha,t}-\frac{\partial P}{\partial\Phi_{\alpha,t}}\frac{\partial\Phi_{\alpha,\upsilon}}{\partial t}=0 \qquad (2.3.51)$$

此即存在(2.3.44)的 Noether 守恒量的条件——广义 Killing 方程。

同样地,(2.3.48)式也可以写成类似的形式。

在断裂力学中,为了判断裂纹的情况,提出了一个 J 积分。业已证明,J 积分实质上是力学系统对应于空间坐标无穷小平移变换下的不变性。下面,我们利用以上所得到的结论来加以讨论。

考虑无穷小变换群对应的生成函数

$$f=0 \qquad h^{\eta}=\delta^{\upsilon}_{\eta} \qquad F_{\alpha}=0 \qquad (2.3.52)$$

对于保守的力学系统,由于 $Q''_{\alpha}=0$,因此(2.3.48)式为

$$\frac{\partial L}{\partial\Phi_{\alpha,\upsilon}}(\Phi_{\alpha,\eta}h^{\eta})_{,\upsilon}+\frac{\partial L}{\partial\Phi_{\alpha}}\Phi_{\alpha,\eta}h^{\eta}-(Lh^{\eta}\delta^{\upsilon}_{\eta})_{,\upsilon}+P^{r}_{,\upsilon}=0 \qquad (2.3.53)$$

假设系统的 Lagrange 密度函数不显含 x^{r},则

$$(Lh^{\eta}\delta^{\upsilon}_{\eta})_{,\upsilon}=\frac{\partial L}{\partial\Phi_{\alpha}}\Phi_{\alpha,\eta}\delta^{\upsilon}_{\eta}\delta^{\alpha}_{\upsilon}+\frac{\partial L}{\partial\Phi_{\alpha,\upsilon}}\Phi_{\alpha,\upsilon\eta}\delta^{\upsilon}_{\eta}\delta^{\alpha}_{\upsilon} \qquad (2.3.54)$$

其中 $\Phi_{\alpha,\upsilon\eta}=\dfrac{\partial}{\partial x^{\eta}}\Phi_{\alpha,\upsilon}$。

将(2.3.54)代入(2.3.53)式可得

$$P^{\upsilon}_{,\upsilon}=0 \qquad (2.3.55)$$

因此,$P^{r}=$const. 恒满足(2.3.55)式,将此结果代入(2.3.49)式,有

$$[(L\delta^{\upsilon}_{\eta}-\frac{\partial L}{\partial\Phi_{\alpha,\upsilon}}\Phi_{\alpha,\eta})h^{\eta}]_{,\upsilon}=0 \qquad (2.3.56)$$

考虑(2.3.52)式,(2.3.56)式可写为

$$[L\delta_v^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,v}}\Phi_{\alpha,\beta}\delta_\eta^\alpha]_{,v} = 0 \qquad (2.3.57)$$

应用 Gauss 公式,将(2.3.57)式写成有限形式,则有

$$\int_{\partial V}(L\delta_v^\alpha \eta_v - \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\alpha,v}}\Phi_{\alpha,\beta}\delta_\eta^\alpha n_v)dS = 0 \qquad (2.3.58)$$

假设状态变量为 $\Phi_\alpha = u_\alpha$(u_α 为位移),在静力学问题中有

$$\int_{\partial V}(Un_\alpha - \frac{\partial U}{\partial u_{\alpha,v}}n_v \cdot u_{\alpha,\alpha})dS = 0 \qquad (2.3.59)$$

令 $T_\alpha = \frac{\partial U}{\partial u_{\alpha,v}}\eta_v$,则有

$$\int_{\partial V}(U \cdot n_\alpha - T_\alpha \cdot u_{\alpha,\alpha})dS = 0 \qquad (2.3.60)$$

此即 Knowles 和 Sternberg 的一组结论。Rice 的 J 积分为(2.3.60)式的特例。

从上面的讨论可以知道,要寻求不同问题中的 Noether 守恒量,关键在于求解满足广义 Killing 方程组的无穷小变换的生成函数及规范函数,即完全求解广义 Killing 方程组(2.3.43)或(2.3.48)式。这样的一个结论对于断裂力学问题有着非常重要的意义。如果有了 Noether 守恒量及相应的无穷小变换,就可以为断裂力学提供新的断裂判据,也可以更深刻地认识断裂过程中的一些本质东西。

连续介质力学的对称性与运动守恒量理论对于计算力学等也有非常积极的作用,对于一个具体的问题,如果有该问题的首次积分存在,则其相对应的计算处理可以大为改观。

第四节　奇异力学系统的 Noether 定理

考虑有限自由度的完整保守力学系统。设系统的 Lagrange 函数为 $L = L(t,q,\dot{q})$,引入 Hess 矩阵

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n) \qquad (2.4.1)$$

由此可得系统的 Euler-Lagrange 方程为

$$H_{ij}\ddot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} = \alpha_i(t, q, \dot{q}) \qquad (2.4.2)$$

当且仅当 Hess 矩阵(2.4.1)式为非退化矩阵时，即满足

$$\det | H_{ij} | \neq 0 \qquad (2.4.3)$$

时，才能从(2.4.2)式中解得

$$\ddot{q}_j = \alpha_j(t, q, \dot{q}) \qquad (2.4.4)$$

Hess 矩阵为非退化矩阵时，称对应的力学系统为非奇异系统(或正规系统)；当 Hess 矩阵的行列式等于零时，对应的力学系统称为奇异系统。

对于非奇异力学系统，利用 Legendre 变换和广义动量定义

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \cdots, n) \qquad (2.4.5)$$

从而可得 $\dot{q}_i$ 是 t, q, p 的函数，并将 Lagrange 描述转化为 Hamilton 描述；对于奇异力学系统，在将 Lagrange 描述转化为 Hamilton 描述时，由于系统的 Euler-Lagrange 方程不能给出所有的 $\ddot{q}$ 作为 t，$q, \dot{q}$ 的函数，因而不能完全消去所有的 $\dot{q}_i$。

设奇异系统的 Hess 矩阵的秩为 $R(< n)$，则由(2.4.2)式知，存在 $n - R$ 个线性无关的特征矢量 $\xi_\alpha^i(q, \dot{q})$

$$\xi_\alpha^i(q, \dot{q}) H_{ij}(q, \dot{q}) = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, n - R; j = 1, \cdots, n) \qquad (2.4.6)$$

为简化起见，所有显含时间的依赖性省略不写。由(2.4.2)，(2.4.6)两式可得 $n - R$ 个关系式

$$\xi_\alpha^i(q, \dot{q}) \alpha_i(q, \dot{q}) = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, n - R) \qquad (2.4.7)$$

这些关系式不含 $\ddot{q}$，称为 Lagrange 意义下的约束，它们来源于系统的运动方程，限制了 $q_i, \dot{q}_i$ 初值的选取。

由于 Hess 矩阵的秩为 R，从(2.4.2)式可解出 R 个 $\ddot{q}_k$：

$$\ddot{q}_k = f_k(q_1, \cdots, q_R; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_R; q_{R+1}, \cdots, q_n; \dot{q}_{R+1}, \cdots \dot{q}_n)$$

$$(k = 1,\cdots,R) \tag{2.4.8}$$

这 R 个二阶微分方程组中包含有 $n-R$ 个任意独立的函数 q_{R+1}，$\cdots,q_n$，当它们被指定后，而且给定了 $q_1(t),\cdots,q_R(t)$ 及 $\dot{q}_1(t)$，$\cdots,\dot{q}_R(t)$ 的初值后，方程组(2.4.8)的解才能确定下来。这里我们首先遇到了约束动力学的一个普遍特征，即动力学方程中出现了任意函数，初值条件不能给出问题的唯一解。任意函数的不同选取，导致方程不同的解。

在(2.4.7)式的 $n-R$ 个关系中，假设有 r 个是独立的，r_1 个是彼此依赖的，r_2 个是恒成立的($r_1+r_2+r=n-R$)，并称 r 个关系

$$C_p(q,\dot{q}) = 0 \quad (0 \leqslant p \leqslant r \leqslant n-R) \tag{2.4.9}$$

为 Lagrange 约束。

H_{ij} 的秩是在 $q,\dot{q}$ 之间无约束时确定的，计入(2.4.9)式后，H_{ij} 的秩将为 R'，R' 可能小于 R。若 $R'=R$，则不能得到进一步的自洽性条件。如果 $R'<R$，则 H_{ij} 的零特征矢量的数目将增至 $n-R'>n-R$，将这些零特征矢量与 Euler-Lagrange 方程结合，得到(2.4.9)类型的关系式。它们中有 $r' \leqslant n-R'$ 个是独立的，计入这些约束，当 $r'>r$ 时，Hess 矩阵 H_{ij} 的秩 R'' 可能低于 R'，如果 $R''<R'$，将上述步骤重复，直至 H_{ij} 的秩不再改变为止。将约束分为两类

A 型约束(仅依赖于 q)：$A_a(q)=0$

B 型约束(依赖于 $q,\dot{q}$)：$B_\beta(q,\dot{q})=0$

A 型约束对时间的导数为零，有

$$\dot{A}_a(q) = a_{a\lambda}A_\lambda + b_{a\beta}B_\beta = 0 \tag{2.4.10}$$

根据约束条件，上式可以自动成立，或者是上式导致新的约束。若新的约束是 A 型约束，将其对时间求导，这个程序直至由于约束条件本身所有 A 型约束对时间的导数等于零为止。若新的约束是 B 型约束或得到一些含 $\ddot{q}_i$ 的关系式，再重复对 B 型约束求时间导

数，直至不产生新的约束为止；将含 $\ddot{q}_i$ 的关系式与已有关系式合起来，经过代数运算可能再产生新的 A 型约束和新的 B 型约束，从而 Hess 矩阵的秩可进一步确定，如果 H_{ij} 的秩还变化，则再重复上述步骤，有限次后最终可得

$$\bar{H}_{ri}(q,\dot{q})\,\ddot{q}_i = a_r(q,\dot{q}) \quad (r = 1,\cdots,k) \tag{2.4.11}$$

$$\bar{A}_\alpha(q) = 0 \quad (\alpha = 1,\cdots,k') \tag{2.4.12}$$

$$\bar{B}_\beta(q,\dot{q}) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,k'') \tag{2.4.13}$$

此 A 型约束和 B 型约束对时间的导数自动为零。

以上我们简单介绍了奇异 Lagrange 系统和 Lagrange 约束，下面我们讨论一些变换性质。

考虑无穷小变换

$$\begin{cases} \delta q_i(t) = \varepsilon\omega_\alpha(t)\phi_i^\alpha(q_i,\dot{q}_i) \\ \delta\dot{q}_i(t) = \dfrac{d}{dt}(\delta q_i(t)) \end{cases} \tag{2.4.14}$$

其中 ε 为无穷小参数，$\omega_\alpha(t)$ $(\alpha = 1,2,\cdots,r < n)$ 为任意函数，ϕ_i^α 为 $q_i,\dot{q}_i$ 的给定函数。若在(2.4.14)式的变换下，系统的 Lagrange 量 L 改变一个时间全微分项，即

$$\delta L = \varepsilon\frac{d}{dt}[\omega_\alpha(t)F_\alpha(q,\dot{q})] \tag{2.4.15}$$

其中 F_α 为 $q,\dot{q}$ 的函数。由作用量的变分，得

$$\delta I = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})dt = \int_{t_1}^{t_2}[\frac{\delta I}{\delta q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}(p_i\delta q_i)]dt$$

$$= \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}[\omega_\alpha(t)F_\alpha(q,\dot{q})]dt \tag{2.4.16}$$

其中 $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$ 为正则动量，而

$$\frac{\delta I}{\delta q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}) \tag{2.4.17}$$

因此，方程(2.4.16)又可写成

$$\int_{t_1}^{t_2}\omega_\alpha(t)\frac{\delta I}{\delta q_i}\phi_i^\alpha(q,\dot{q})dt$$
$$=[\omega_\alpha(t)[F_\alpha(q,\dot{q})-p_i\phi_i^\alpha(q,\dot{q})]]_{t_1}^{t_2} \quad (2.4.18)$$

由于 $\omega_\alpha(t)$的任意性,因而有

$$p_i\phi_i^\alpha(q,\dot{q})-F_\alpha(q,\dot{q})=0 \quad (2.4.19)$$

$$\frac{\delta I}{\delta q_i}\phi_i^\alpha(q,\dot{q})=0 \quad (2.4.20)$$

这是一类特殊形式的 Noether 不变量。

变换(2.4.14)式是一种定域变换,对于定域变换不变的系统,一定是奇异 Lagrange 系统,它有特殊形式的 Noether 不变量(2.4.19),(2.4.20)式。

下面,我们研究奇异系统的 Hamilton 描述。

设奇异系统的 Hess 矩阵 H_{ij} 的秩为 R,系统的 Lagrange 函数 L 不显含时间 t。按隐函数存在定理,由广义动量 p_i 的定义式

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\quad(i=1,2,\cdots,n) \quad (2.4.21)$$

不能将所有的 $\dot{q}_i$ 解为 q,p 的函数,由于 $R<n$,则从(2.4.21)式中可解出 R 个 $\dot{q}_i$,p_α 和剩下的 $\dot{q}_\rho$ 的函数

$$\dot{q}_\sigma=f_\sigma(q_i,p_\alpha,\dot{q}_\rho)\quad\left\{\begin{matrix}\alpha=1,2,\cdots,R\\ \sigma=1,2,\cdots,R\\ \rho=R+1,\cdots,n\end{matrix}\right\} \quad (2.4.22)$$

将(2.4.22)式代入(2.4.21)式,得

$$p_i=\tilde{g}_i(q,\dot{q}_\sigma,\dot{q}_\rho)=\tilde{g}_i(q,f_\alpha(q,p_\alpha,\dot{q}),\dot{q}_\rho)$$
$$=g_i(q,p_\alpha,\dot{q}_\rho) \quad (2.4.23)$$

因此,$g_\alpha=p_\alpha$,而其他 $n-R$ 个 g 将不再依赖于 $\dot{q}_\sigma$,否则,将能解出更多的 $\dot{q}$。这样我们就得到坐标与动量之间的 $m'=n-R$ 个约束关系式:

$$p_\alpha=g_\alpha(q,p_\alpha)\quad(\alpha=1,2,\cdots,m'=n-R) \quad (2.4.24)$$

或者记为

$$\phi_a^0(q,p) = p_a - g_a(q,p_a) = 0 \qquad (2.4.25)$$

这组约束方程来源于广义动量的定义，称为初级约束。在得到初级约束的过程中并没有利用系统的运动方程，这一点同 Lagrange 约束是不同的。

系统的 Hamilton 量为

$$H_c = p_i\dot{q}_i - L \qquad (2.4.26)$$

于是

$$\begin{aligned}\delta H_c &= p_i\delta\dot{q}_i + \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i \\ &= \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i \end{aligned} \qquad (2.4.27)$$

其中我们已用了(2.4.21)式，由(2.4.27)式可见 H_c 的变分中只含有 q 和 p 的变分，而不含广义速度 $\dot{q}$ 的变分。此外，由(2.4.26)式，$\frac{\partial H_c}{\partial \dot{q}_i}=0$，这表明无论是正规系统或奇异系统，Hamilton 函数 H_c 可表示为 q,p 的函数，而与速度无关。另一方面，又有

$$\delta H_c = \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\delta p_i \qquad (2.4.28)$$

合并(2.4.27)，(2.4.28)两式，得

$$(\dot{q}_i - \frac{\partial H^C}{\partial p_i})\delta p_i - (\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial H_c}{\partial q_i})\delta q_i = 0 \qquad (2.4.29)$$

利用 Euler-Lagrange 方程，有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = \dot{p}_i \qquad (2.4.30)$$

将(2.4.30)式代入(2.4.29)式，则得

$$(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i})\delta p_i - (\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i})\delta q_i = 0 \qquad (2.4.31)$$

对于奇异系统，变量 q,p 之间存在约束条件(2.4.25)式，从而

$$\delta\phi_a^0 = \frac{\partial\phi_a^0}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i = 0 \qquad (2.4.32)$$

引入 Lagrange 乘子 $\lambda_a(t)$，由(2.4.31),(2.4.32)式得约束 Hamilton 系统的正则方程为

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_a \dfrac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i} & (2.4.33a) \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_a \dfrac{\partial \phi_a^0}{\partial q_i} & (2.4.33b) \\ \phi_a^0(q,p) = 0 & (2.4.33c) \end{cases}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n;\alpha = 1,2,\cdots,n-R)$$

利用 Poisson 括号

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{2.4.34}$$

其中 F,G 为 q,p 的函数，可将(2.4.33)式写为

$$\dot{q}_i = \{q_i,H_T\} \tag{2.4.35a}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i,H_T\} \tag{2.4.35b}$$

其中 $H_T = H_c + \lambda_a\phi_a^0$，称为总 Hamilton 量。在计算上式的 Poisson 括号时要注意，由于有约束条件(2.4.33c)式，必须在算完 Poisson 括号之后才能用这些约束，否则将导致错误的结果。

约束 Hamilton 系统的正则方程也可写为另一种形式。

对于奇异系统，取 n 个 q_i，R 个 p_a 和 $n-R$ 个 $\dot{q}_\rho$ 作为坐标，则

$$\begin{aligned} H_c(q,p_a,\dot{q}_\rho) &= p_i\dot{q}_i - L(q,\dot{q}) \\ &= p_a\dot{q}_a + p_\sigma\dot{q}_\sigma - L(q,\dot{q}) \\ &= g_a(q,p_a)\dot{q}_a + p_\sigma f_\sigma - L(q,\dot{q}) \end{aligned} \tag{2.4.36}$$

其中利用了(2.4.22),(2.4.24)式。由广义动量的定义式(2.4.21)，有 $\dfrac{\partial H_c}{\partial \dot{q}_\rho} = 0$，而

$$\frac{\partial H_c}{\partial p_\sigma} = \dot{q}_\sigma + \frac{\partial g_a}{\partial p_\sigma}\dot{q}_a \tag{2.4.37a}$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial g_a}{\partial q_i}\dot{q}_a \tag{2.4.37b}$$

不失一般性，设 σ,a 的取值为 1 至 R，ρ 和 a 的取值为 $R+1$ 至 n，由(2.4.22)和(2.4.37a)式，得

$$\begin{aligned}\dot{q}_\sigma &= f_\sigma(q,p_a,\dot{q}_\rho) = f_\sigma(q,p_a,\dot{q}_a)\\ &= \frac{\partial H_c}{\partial p_\sigma} - \dot{q}_a\frac{\partial g_a}{\partial p_\sigma}\end{aligned} \tag{2.4.38}$$

根据 Euler-Lagrange 方程，$\dot{p}_i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$，则(2.4.37)式又可写为

$$\dot{q}_\sigma = \frac{\partial H_c}{\partial p_\sigma} - \dot{q}_a\frac{\partial g_a}{\partial p_\sigma} \tag{2.4.39a}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \dot{q}_a\frac{\partial g_a}{\partial q_i} \tag{2.4.39b}$$

在这一组约束 Hamilton 系统的正则方程中，$\dot{q}_a(t)$ 相应于从动量定义式中未能解出的那些 $\dot{q}_a(t)$。

接下来我们讨论约束 Hamilton 系统在相空间中的对称性质。

考虑系统在相空间中有限李群 G_r 下的变换性质，其无穷小变换为

$$\begin{cases} t \to t' = t + \Delta t = t + \varepsilon_\sigma\tau_\sigma(t,q,p)\\ q_i(t) \to q_i'(t') = q_i(t) + \Delta q_i(t) = q_i(t) + \varepsilon_\sigma\xi_{i\sigma}(t,q,p)\\ p_i(t) \to p_i'(t') = p_i(t) + \Delta p_i(t) = p_i(t) + \varepsilon_\sigma\eta_{i\sigma}(t,q,p)\end{cases} \tag{2.4.40}$$

其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma=1,2,\cdots,r)$ 为无穷小参量，$\tau(t,q,p)$，$\xi_{i\sigma}(t,q,p)$ 和 $\eta_{i\sigma}(t,q,p)$ 为变换(2.4.40)式的生成函数。假设在(2.4.40)式变换下，系统的正则作用量

$$I_p = \int_{t_1}^{t_2} L_p dt = \int_{t_1}^{t_2}[p_i\dot{q}_i - H_c(t,q,p)]dt \tag{2.4.41}$$

的变分为

$$\begin{aligned}\Delta I_p &= \int_{t_1}^{t_2} L'_p(t',q',p')dt' - \int_{t_1}^{t_2} L_p(t,q,p)dt\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\Omega(t,q,p)dt\end{aligned} \tag{2.4.42}$$

其中 $\Omega = \epsilon_a \Omega_a$，因而有

$$\int_{t_1}^{t_2}[\delta p_i(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i}) + \delta q_i(-\dot{p}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i})]dt + \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}[p_i\delta q_i + (p_i\dot{q}_i - H_c)\Delta t]dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d\Omega}{dt}dt \tag{2.4.43}$$

其中

$$\delta q_i = \Delta q_i - \dot{q}_i\Delta t \quad \delta p_i = \Delta p_i - \dot{p}_i\Delta t \tag{2.4.44}$$

假设在(2.4.40)式变换下，约束方程(2.4.25)式的变更为

$$\Delta\phi_a^0 = \frac{\partial\phi_a^0}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\Delta p_i = K_a \tag{2.4.45}$$

由(2.4.44)式和(2.4.45)式，有

$$\delta\phi_a^0 = \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial q_i}\delta q_i = F_a \tag{2.4.46}$$

其中

$$F_a = K_a - \frac{\partial\phi_a^0}{\partial t}\Delta t - \frac{\partial\phi_a^0}{\partial q_i}\dot{q}_i\Delta t - \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\dot{p}_i\Delta t \tag{2.4.47}$$

用 *Lagrange* 乘子 $\lambda_a(t)$ 乘(2.4.46)式并求和，在$[t_1, t_2]$上积分后与(2.4.43)式相减，得

$$\int_{t_1}^{t_2}[\delta p_i(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}) - \delta q_i(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_a\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q_i})]dt + \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}[p_i\delta q_i + (p_i\dot{q}_i - H_c)\Delta t - \Omega]dt = -\int_{t_1}^{t_2}\lambda_a F_a dt \tag{2.4.48}$$

沿着约束 *Hamilton* 系统运动的轨线，由运动方程(2.4.35)式，得

$$\frac{d}{dt}[p_i\delta q_i + (p_i\dot{q}_i - H_c)\Delta t - \Omega] = -\lambda_a F_a \tag{2.4.49}$$

或

$$\frac{d}{dt}[p_i(\Delta q_i - \dot{q}_i\Delta t) + (p_i\dot{q}_i - H_c)\Delta t - \Omega]$$
$$= \frac{d}{dt}(p_i\Delta q_i - H_c\Delta t - \Omega) = -\lambda_\alpha F_\alpha \tag{2.4.50}$$

如果约束方程(2.4.25)式在(2.4.40)式所确定的等时变分下不变,即 $\delta\phi_a^0=0$,则由(2.4.46)式和(2.4.50)式,有

$$\frac{d}{dt}(p_i\Delta q_i - H_c\Delta t - \Omega) = 0 \tag{2.4.51}$$

由李群 G_r 的参数 ε_σ 的独立性,上式又可写为

$$p_i\xi_{i\sigma} - H_c\tau_\sigma - \Omega_\sigma = \text{const.} \quad (\sigma = 1,\cdots,r) \tag{2.4.52}$$

这样我们就得到约束 *Hamilton* 系统在**相空间中的** *Noether* **定理**:如果在(2.4.40)式变换下,系统的正则作用量的变分适合(2.4.42)式,且约束方程(2.4.25)式在(2.4.40)式所确定的等时变分下不变,则该约束 *Hamiltom* 系统在相空间中必存在 r 个不变量(2.4.52)式。

考虑一个特殊情况。假设系统的正则 Lagrange 量 L_p 和约束 ϕ_a^0 中均不显含时间 t,则在时间的平移下,$t' = t + \Delta t$,我们有 $\Delta L_p = 0, \Delta\phi_a^0 = 0$,于是由约束的自洽性条件,有

$$\delta\phi_a^0 = \frac{\partial\phi_a^0}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i$$
$$= -\left(\frac{\partial\phi_a^0}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\phi_a^0}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)\Delta t$$
$$= -\frac{d\phi_a^0}{dt}\Delta t = 0 \tag{2.4.53}$$

按约束 Hamilton 系统在相空间中的 Noether 定理,我们得系统的广义能量(Hamilton 量)守恒。这个结果与 Lagrange 描述下的结果是一致的。反过来,如果我们要求此约束 Hamilton 系统的广义能量守恒(为与 Lagrange 描述下的结果一致),那么,约束 $\phi_a^0 = 0$ 在时间平移变换下必有 $\delta\phi_a^0 = 0$,从而约束 ϕ_a^0 随时间变化应是稳

定的。这就是约束的自洽性条件。由此可见，为使 Lagrange 描述与 Hamilton 描述的结果相同，约束就必须满足自洽性条件。

如何寻求变换(2.4.40)式中的生成函数 $\tau_\sigma, \xi_{i\sigma}, \eta_{i\sigma}$，使在由它们生成的变换(2.4.40)式的变换下，系统的正则 Hamilton 作用量的变分适合(2.4.42)式，并且约束方程(2.4.25)式在该变换的等时变分下不变，即

$$\frac{\partial \phi_a^0}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}\delta p_i = 0 \tag{2.4.54}$$

设 $\tau_\sigma, \xi_{i\sigma}, \eta_{i\sigma}$ 均为 t, q_i, p_i 的函数，将(2.4.40)式代入(2.4.45)式，比较该等式两端的各次幂的系数，注意到参数 $\epsilon_\sigma(\sigma = 1,2,\cdots,r)$ 的独立性，得

$$\begin{aligned} &p_i\frac{\partial \xi_{i\sigma}}{\partial t} + p_i\frac{\partial H_c}{\partial p_j}\frac{\partial \xi_{i\sigma}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_c}{\partial t}\tau_\sigma - \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\xi_{i\sigma} \\ &\quad - H_c\frac{\partial \tau_\sigma}{\partial t} - H_c\frac{\partial H_c}{\partial p_j}\frac{\partial \tau_\sigma}{\partial q_j} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_\sigma}{\partial q_j}\frac{\partial H_c}{\partial p_j} \end{aligned} \tag{2.4.55}$$

$$p_i\frac{\partial \xi_{i\sigma}}{\partial p_j} - H_c\frac{\partial \tau_\sigma}{\partial p_j} = \frac{\partial \Omega_\sigma}{\partial p_j} \tag{2.4.56}$$

$$(i,j = 1,2,\cdots,n;\sigma = 1,2,\cdots,r)$$

将(2.4.40)式确定的等时变分 $\delta q_i, \delta p_i$ 代入(2.4.54)式，由 ϵ_σ 的独立性，得

$$\frac{\partial \phi_a^0}{\partial p_i}(\eta_{i\sigma} - \dot{p}_i\tau_\sigma) + \frac{\partial \phi_a^0}{\partial q_i}(\xi_{i\sigma} - \dot{q}_i\tau_\sigma) = 0 \tag{2.4.57}$$

(2.4.55)，(2.4.56)和(2.4.57)三式为确定生成函数 $\tau_\sigma, \xi_{i\sigma}$ 和 $\eta_{i\sigma}$ 的偏微分方程组，在 H_c, Ω_σ 和 ϕ_a^0 给定后，一旦求出了此方程组的解 $\tau_\sigma, \xi_{i\sigma}$ 和 $\eta_{i\sigma}$，由它们生成的变换(2.4.25)式，一定导致不变量(2.4.52)式。偏微分方程组(2.4.55)，(2.4.56)和(2.4.57)式称为奇异(Lagrange 量)系统正则形式的广义 Killing 方程，由这个广义 Killing 方程组的解，能够得到奇异系统正则形式的不变量。

第五节　Birkhoff 系统的 Noether 定理

在前面我们讨论了一般力学系统的 Lagrange 体系与 Hamilton 体系下的 Noether 定理，还介绍了奇异力学系统的 Noether 定理。在本节中，我们介绍 Birkhoff 系统的 Noether 定理。

形为

$$\sum_{\upsilon=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon}\right)\dot{a}^\upsilon-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0 \qquad (2.5.1)$$

的方程称为 Birkhoff 方程。$\omega_{\mu\upsilon}=\dfrac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu}-\dfrac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon}$ 是非奇异的。能够表示为方程(2.5.1)式的系统称为 Birkhoff 系统。

若取

$$a^\mu=\begin{cases}q_\mu & (\mu=1,\cdots,n)\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,\cdots,2n)\end{cases} \qquad (2.5.2a)$$

$$R_\upsilon=\begin{cases}p_\upsilon & (\upsilon=1,\cdots,n)\\ 0 & (\upsilon=n+1,\cdots,2n)\end{cases} \qquad (2.5.2b)$$

$$B(t,a)=H(t,q,p) \qquad (2.5.2c)$$

则由(2.5.1)式可得到 Hamilton 正则方程

$$\begin{cases}\dot{q}_i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\end{cases}\quad(i=1,\cdots,n) \qquad (2.5.3)$$

因此，Hamilton 力学系统是一种特殊的 Birkhoff 系统。

比方程(2.5.1)更为一般的形式是

$$\sum_{\upsilon=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon}\right)\dot{a}^\upsilon-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=-\Lambda_\mu\quad(\mu=1,\cdots,2n) \qquad (2.5.4)$$

我们称之为广义 Birkhoff 方程。

对于 Birkhoff 系统，构造作用量

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu da^\mu - Bdt \right) \tag{2.5.5}$$

称为 Pfaff 作用量，其中 $R_\mu(t,a)$，$B(t,a)$ 称为 Birkhoff 函数。

变换

$$\begin{aligned} \bar{t} &= f_0(t, a^\mu, \varepsilon_\alpha) \\ \bar{a}^\mu &= f_\mu(t, a^\mu, \varepsilon_\alpha) \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, \cdots, 2n \\ \alpha = 1, \cdots, r \end{pmatrix} \tag{2.5.6}$$

构成一般形式的 r − 参数有限变换群 G_r，其中 ε_α 为独立参数。

当 ε_α 为无限小参数时

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \Delta t = t + \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha \tau^\alpha(t,a) \\ \bar{a}^\mu &= a^\mu + \Delta a^\mu = a^\mu + \sum_{\alpha=1}^{r} \varepsilon_\alpha \xi_\mu^\alpha(t,a) \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

为无穷小变换群 G_r。

Pfaff 作用量(2.5.5)式在无穷小变换群 G_r 作用下的改变量

$$\begin{aligned} \Delta A = & \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left[\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu(\bar{t}, \bar{a}) d\bar{a}^\mu - B(\bar{t}, \bar{a}) d\bar{t} \right] \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu(t,a) da^\mu - B(t,a) dt \right] \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

由于

$$d\bar{t} = dt\left[1 + \frac{d}{dt}(\Delta t)\right] \quad d\bar{a}^\mu = da^\mu + d(\Delta a^\mu) \tag{2.5.9}$$

因而 ΔA 关于 ε 的线性主部为

$$\begin{aligned} \Delta A = & \int_{t_1}^{t_2} \Bigg\{ \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu(t + \Delta t, a + \Delta a)\left[\dot{a}^\mu + \frac{d}{dt}(\Delta a^\mu)\right] \\ & - B(t + \Delta t, a + \Delta a)\left[1 + \frac{d}{dt}(\Delta t)\right] \\ & - \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu(t,a)\dot{a}^\mu + B(t,a) \Bigg\} dt \\ = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{a}^\mu - B \right) \frac{d}{dt}(\Delta t) + \left(\sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t} \right) \Delta t \right. \end{aligned}$$

$$+\sum_{\mu=1}^{2n}\left(\sum_{\upsilon=1}^{2n}\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu}\dot{a}^\upsilon-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\Delta a^\mu+\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\Delta\dot{a}^\mu\Big\}dt \tag{2.5.10}$$

考虑关系式

$$\begin{cases}\Delta a^\mu=\delta a^\mu+\dot{a}^\mu\Delta t\\ \Delta\dot{a}^\mu=\delta\dot{a}^\mu+\ddot{a}^\mu\Delta t\\ \delta\dot{a}^\mu=\dfrac{d}{dt}\delta a^\mu\end{cases} \tag{2.5.11}$$

则有

$$\begin{aligned}\Delta A&=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\frac{d}{dt}\Big[\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\dot{a}^\mu-B\Big)\Delta t+\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\delta a^\mu\Big]\\&\quad+\sum_{\mu=1}^{2n}\Big[\sum_{\upsilon=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon}\Big)\dot{a}^\upsilon-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\Big]\delta a^\mu\Big\}dt\\&=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\Big\{\frac{d}{dt}\Big[\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\tau^\alpha\Big]\\&\quad+\sum_{\mu=1}^{2n}\Big[\sum_{\upsilon=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon}\Big)\dot{a}^\upsilon-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\Big]\bar{\xi}_\mu^\alpha\Big\}dt\end{aligned} \tag{2.5.12}$$

其中 $\bar{\xi}_\mu^\alpha=\xi_\mu^\alpha-\dot{a}^\mu\tau^\alpha$。

若在无穷小变换群(2.5.7)式作用下，Pfaff 作用量(2.5.5)式改变量为

$$\Delta A=0 \tag{2.5.13}$$

则称变换(2.5.7)式为对称变换。此时，由于

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{\alpha=1}^{r}\varepsilon_\alpha\Big\{\frac{d}{dt}\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\tau^\alpha\Big)+\sum_{\mu=1}^{2n}\Big(\sum_{\upsilon=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon}\Big)\dot{a}^\upsilon-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\Big]\cdot\bar{\xi}_\mu^\alpha\Big\}dt=0 \tag{2.5.14}$$

考虑到 Birkhoff 方程及 $[t_1,t_2]$ 的任意性，由 ε_α 的独立性可得

$$\frac{d}{dt}\Big(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\tau^\alpha\Big)=0 \tag{2.5.15}$$

因而对应了守恒量

$$\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\tau^\alpha = C^\alpha \quad (\alpha = 1,\cdots,r) \tag{2.5.16}$$

而对应于(2.5.16)式的坐标变换的生成函数应当满足如下 r 个方程

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\tau^\alpha\right) + \sum_{\mu=1}^{2n}\left[\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right]\xi_\mu^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1,\cdots,r) \tag{2.5.17}$$

若在无穷小变换(2.5.7)式作用下,Pfaff 作用量的改变为

$$\Delta A = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\Delta\lambda)dt \tag{2.5.18}$$

其中 $\lambda = \lambda(a,t)$ 为任意可微函数,则变换(2.5.7)式称为准对称变换。或者若变换(2.5.7)式满足

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \dot{a}^\mu - B\right)\frac{d}{dt}(\Delta t) + \left(\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\Delta t \\ &+ \sum_{\mu=1}^{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{2n}\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\Delta a^\mu + \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \Delta\dot{a}^\mu \\ &= -\frac{d}{dt}(\Delta\lambda)\end{aligned} \tag{2.5.19}$$

或

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\tau^\alpha\right) + \sum_{\mu=1}^{2n}\left[\sum_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right]\xi_\mu^\alpha = -\frac{d}{dt}(\lambda^\alpha) \quad (\alpha = 1,\cdots,r) \tag{2.5.20}$$

其中 $\Delta\lambda = \sum_{\alpha=1}^{r}\epsilon_\alpha\lambda^\alpha$,则对应的变换(2.5.7)式为准对称变换,且此时 Birkhoff 系统存在 r 个独立的不变量

$$\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\tau^\alpha + \lambda^\alpha = C^\alpha \quad (\alpha = 1,\cdots,r) \tag{2.5.21}$$

若在无穷小变换(2.5.7)式作用下,Pfaff 作用量的改变量为

$$\Delta A = -\int_{t_1}^{t_2}[\frac{d}{dt}(\Delta\lambda) + \sum_{\mu=1}^{2n}\Lambda_\mu\delta a^\mu]dt \tag{2.5.22}$$

其中 $\lambda = \lambda(t,a)$, $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu(t,a)$ 为任意可微函数，则变换(2.5.7)式为广义准对称变换。

等价地，若变换(2.5.7)式满足

$$\begin{aligned}&(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\dot{a}^\mu - B)\frac{d}{dt}(\Delta t) + (\sum_{\mu=1}^{2n}\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t} - \sum_{\mu=1}^{2n}\Lambda_\mu\dot{a}^\mu)\Delta t\\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{2n}(\sum_{\upsilon=1}^{2n}\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu}\dot{a}^\upsilon - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \Lambda_\mu)\Delta a^\mu + \sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\Delta\dot{a}^\mu\\ &\quad = -\frac{d}{dt}(\Delta\lambda)\end{aligned} \tag{2.5.23}$$

或者

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha - B\tau^\alpha) + \sum_{\mu=1}^{2n}[\sum_{\upsilon=1}^{2n}(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon})\dot{a}^\upsilon\\ &\quad - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \Lambda_\mu]\xi_\mu^\alpha = -\frac{d}{dt}(\lambda^\alpha)\end{aligned} \tag{2.5.24}$$

则对应的变换(2.5.7)式为广义准对称变换，且此时，Birkhoff 系统存在 r 个独立的不变量

$$\sum_{\mu=1}^{2n}R_\mu\xi_\mu^\alpha - B\tau^\alpha + \lambda^\alpha = C^\alpha \quad (\alpha = 1,\cdots,r) \tag{2.5.25}$$

若将方程(2.5.24)展开，并令含 $\dot{a}^\mu$ 及不含 $\dot{a}^\mu$ 的项的系数分别为零，则得到

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\lambda^\alpha}{\partial a^\upsilon} + \sum_{\mu=1}^{2n}(R_\mu\frac{\partial\xi_\mu^\alpha}{\partial a^\upsilon} + \frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu}\xi_\mu^\alpha) + \frac{\partial R_\upsilon}{\partial t}\tau^\alpha\\ &\quad - B\frac{\partial\tau^\alpha}{\partial a^\upsilon} - \Lambda_\upsilon\tau^\alpha = 0 \quad (\upsilon = 1,\cdots,2n)\end{aligned} \tag{2.5.26}$$

$$-\frac{\partial\lambda^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t}\tau^\alpha + B\frac{\partial\tau^\alpha}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2n}[-R_\mu\frac{\partial\xi_\mu^\alpha}{\partial t} + (\frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \Lambda_\mu)\xi_\mu^\alpha] = 0 \tag{2.5.27}$$

我们称方程(2.5.26)，(2.5.27)式为广义 Killing 方程。求解这组

方程得到生成函数 $\xi_\mu^\alpha, \tau^\alpha$ 及规范函数 λ^α 后，即可得对称变换和相应的首次积分。这就是 Birkhoff 系统的 Noether 定理。

下面，我们讨论 Birkhoff 系统的 Noether 逆定理。

假设广义 Birkhoff 系统(2.5.4)式有 r 个彼此独立的第一积分

$$I^\alpha(t,a) = C^\alpha \quad (\alpha = 1,\cdots,r) \tag{2.5.28}$$

因此有

$$\frac{dI^\alpha}{dt} = 0 \tag{2.5.29}$$

将方程(2.5.4)式两端乘以 $\tilde{\xi}_\mu^\alpha$ 并对 μ 求和，再将结果与(2.5.29)式相加，则得

$$\frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{2n} \frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu + \sum_{\mu=1}^{2n}\Big[\sum_{\upsilon=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon}\Big)\dot{a}^\upsilon - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \Lambda_\mu\Big]\tilde{\xi}_\mu^\alpha = 0 \tag{2.5.30}$$

由(2.5.30)式中 $\dot{a}^\upsilon$ 的系数为零得到

$$\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\upsilon} + \sum_{\mu=1}^{2n}\Big(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon}\Big)\xi_\mu^\alpha = 0 \quad (\upsilon = 1,\cdots,2n) \tag{2.5.31}$$

因 $(\omega_{\mu\upsilon})$ 是非奇异的，因而由(2.5.31)式可以解出 ξ_μ^α，有

$$\xi_\mu^\alpha = \sum_{\upsilon=1}^{2n}\tilde{\omega}_{\mu\upsilon}\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\upsilon} \quad (\mu = 1,\cdots,2n) \tag{2.5.32}$$

其中

$$\sum_{\upsilon=1}^{2n}\tilde{\omega}_{\mu\upsilon}\omega_{\upsilon\rho} = \delta_{\mu\rho} \tag{2.5.33}$$

令

$$I^\alpha = \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu\xi_\mu^\alpha - B\tau^\alpha + \lambda^\alpha \tag{2.5.34}$$

由此解得

$$\tau^\alpha = -\frac{1}{B}\Big(I^\alpha - \sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu\xi_\mu^\alpha - \lambda^\alpha\Big) \tag{2.5.35}$$

这样，在已知积分 I^α 时，由(2.5.32)，(2.5.35)式可确定无穷小变换(2.5.7)式。将(2.5.34)式代入(2.5.30)式，整理得

$$\frac{d}{dt}[\sum_{\mu=1}^{2n} R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\tau^\alpha] + \sum_{\mu=1}^{2n}[\sum_{\upsilon=1}^{2n}(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\upsilon})\dot{a}^\upsilon - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} + \Lambda_\mu]\xi_\mu^\alpha = -\frac{d}{dt}(\lambda^\alpha) \tag{2.5.36}$$

因而知它是广义准对称性。因此，有以下结论：若已知广义 Birkhoff 系统的 r 个独立的第一积分式(2.5.28)式，则由(2.5.7)，(2.5.32)，(2.5.35)式确定的无穷小变换必是系统的广义准对称变换。这就是 Birkhoff 系统的 Noether 逆定理。

下面我们来看两个例子。

例 1 设系统的位形由两个广义坐标 q_1, q_2 来确定，系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad V = \text{const.} \tag{2.5.37}$$

所受的非完整约束为

$$f = \dot{q}_1 + bt\dot{q}_2 - bq_2 + t = 0 \tag{2.5.38}$$

其中 b 为常数。试研究这个非完整力学系统的对称性与不变量的关系。

与非完整系统(2.5.37)，(2.5.38)式相应的完整系统方程为

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\dfrac{1}{1+b^2t^2} \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{1}{1+b^2t^2} \end{cases} \tag{2.5.39}$$

令

$$\begin{cases} a^1 = q_1 \\ a^2 = q_2 \\ a^3 = \dot{q}_1 + \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt \\ a^4 = \dot{q}_2 + \dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2) \end{cases} \tag{2.5.40}$$

则方程(4.5.39)可表示为

$$\dot{a}^{\upsilon} = \sigma^{\upsilon} \quad (\upsilon = 1,2,3,4) \tag{2.5.41}$$

其中

$$\begin{aligned}
\sigma^1 &= a^3 - \frac{1}{b}\operatorname{arctg} bt \\
\sigma^2 &= a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2) \\
\sigma^3 &= 0 \\
\sigma^4 &= 0
\end{aligned} \tag{2.5.42}$$

方程(2.5.42)式可表示 Birkhoff 形式,其 Birkhoff 函数为

$$R_1 = a^3 \quad R_2 = a^4 \quad R_3 = 0 \quad R_4 = 0$$

$$B = \frac{1}{2}[a^3 - \frac{1}{b}\operatorname{arctg} bt]^2 + \frac{1}{2}[a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2)]^2 \tag{2.5.43}$$

现取生成函数和规范函数为

$$\begin{cases} \tau = 0 \\ \xi_1 = 0 \quad \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \tag{2.5.44}$$

则有

$$\begin{cases} \Delta t = 0 \qquad (\Delta t)^{\cdot} = 0 \\ \Delta a^1 = \varepsilon \qquad \Delta a^2 = \Delta a^3 = \Delta a^4 = 0 \\ \Delta \dot{a}^{\mu} = 0 \end{cases} \tag{2.5.45}$$

可验证(2.5.44)式为对称变换,且有不变量

$$a^3 = C_1 \tag{2.5.46}$$

类似地,取

$$\tau = 0 \quad \xi_2 = 1 \quad \xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \quad \lambda = 0 \tag{2.5.47}$$

则有不变量

$$a^1 = C_2 \tag{2.5.48}$$

若取生成函数和规范函数为

$$\tau = 0 \quad \xi_1 = -t \quad \xi_2 = 0$$
$$\xi_3 = -1 \quad \xi_4 = 0 \tag{2.5.49}$$
$$\lambda = a^1 + \frac{1}{b}\int \text{arctg}\, btdt$$

则变换是准对称的，相应的不变量为

$$a^1 - a^3 t + \frac{1}{b}\int \text{arctg} btdt = C_3 \tag{2.5.50}$$

类似地，取

$$\tau = 0 \quad \xi_1 = 0 \quad \xi_2 = -t \quad \xi_3 = 0$$
$$\xi_4 = -1 \quad \lambda = a^2 + \frac{1}{2b}\int \ln(1 + b^2 t^2)dt \tag{2.5.51}$$

则有不变量

$$a^2 - a^4 t + \frac{1}{2b}\int \ln(1 + b^2 t^2)dt = C_4 \tag{2.5.52}$$

这样，相应完整系统(2.5.41)式有 4 个首次积分，但对非完整系统来说，这 4 个积分常数 $C_\alpha(\alpha = 1, \cdots, 4)$ 不全是任意的，而受到非完整约束(2.5.38)式的限制，有

$$C_1 - bC_4 = 0 \tag{2.5.53}$$

若替代(2.5.40)式，令

$$a^1 = q_1 \quad a^2 = q_2 \quad a^3 = \dot{q}_1 \quad a^4 = \dot{q}_2 \tag{2.5.54}$$

Birkhoff 函数取为

$$R_1 = a^3 \quad R_2 = a^4 \quad R_3 = R_4 = 0$$
$$B = \frac{1}{2}[(a^3)^2 + (a^4)^2] \tag{2.5.55}$$

则方程(2.5.39)可部分地表为 Birkhoff 形式，有

$$\sum_{\nu=1}^{4}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = -\Lambda_\mu \tag{2.5.56}$$

其中

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{1+b^2t^2} \qquad \Lambda_2 = -\frac{bt}{1+b^2t^2}$$
$$\Lambda_3 = \Lambda_4 = 0 \tag{2.5.57}$$

取变换的生成函数为

$$\xi_1 = 1 \quad \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \quad \tau = 0 \tag{2.5.58}$$

则广义 Killing 方程给出

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a^v} = 0 \qquad -\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \Lambda_1\xi_1 - \Lambda_2\xi_2 = 0 \tag{2.5.59}$$

积分之,得

$$\lambda = \frac{1}{b}\operatorname{arctg} bt \tag{2.5.60}$$

因而有首次积分

$$a^3 + \frac{1}{b}\operatorname{arctg} bt = C_1 \tag{2.5.61}$$

例 2　设已知问题的首次积分

$$I = a^3 = C_1 \tag{2.5.62}$$

求相应的对称变换。Birkhoff 方程的形式为

$$\begin{cases} -\dot{a}^3 = 0 \\ -\dot{a}^4 = 0 \\ \dot{a}^1 - a^3 + \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt = 0 \\ \dot{a}_2 - a^4 + \dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2) = 0 \end{cases} \tag{2.5.63}$$

利用(2.5.31)式,容易求得

$$\xi_1 = 1 \quad \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \tag{2.5.64}$$

关系(2.5.35)式给出

$$\tau = -\frac{1}{B}(a^3 - a^3\xi_1 - \lambda) \tag{2.5.65}$$

现取 $\lambda=0$,则由(2.5.65)式得

$$\tau = 0 \tag{2.5.66}$$

于是生成函数为

$$\tau = 0 \qquad \xi_1 = 1 \qquad \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \tag{2.5.67}$$

这就是(2.5.44)式。因而有对称变换

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{a}^1 = a^1 + \varepsilon \\ \bar{a}^2 = a^2 \\ \bar{a}^3 = a^3 \\ \bar{a}^4 = a^4 \end{cases} \tag{2.5.68}$$

第三章　Lie 对称性理论

前面两章讨论的 Noether 型对称性主要是基于力学系统作用积分的不变性，实际上还存在着其它探讨力学系统的对称性的方法，如直接研究运动微分方程在无穷小变换群作用下的不变性，它来源于瑞士数学家 Sophus Lie 的工作。在本章中我们将详细地介绍有关内容。在下面的讨论中，我们假定所有的微分方程都是非奇异的。

第一节　一阶常微分方程的不变性

按照历史的顺序，Lie 对称性首先出自对常微分方程的不变性的研究，实际上，对于离散力学系统，其运动微分方程就是一组常微分方程。

一、一阶常微分方程

对于一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx} - f(x,y) = 0 \tag{3.1.1}$$

寻求(3.1.1)式的对称性即寻求方程共形不变所对应的独立或非独立变量的变换集。

取

$$\bar{x} = \bar{x}(x,y) \quad \bar{y} = \bar{y}(x,y) \tag{3.1.2}$$

若

$$\frac{d\bar{y}}{dx} - f(\bar{x},\bar{y}) = G(x,y)[\frac{dy}{dx} - f(x,y)] = 0 \tag{3.1.3}$$

则称方程(3.1.3)式相对于(3.1.1)式共形不变，其中 $G(x,y)$ 为共形因子。

一个微分方程的对称性的等价定义是使微分方程的解在变换作用下得到一个新的解的变换。因此，对称性研究的重要性在于建立了通过一个解求得另一个解的一种理论。

对称性有很多类型，如

1. 离散对称性

$$\frac{dy}{dx} = y \quad 在\begin{cases} x \to \bar{x} = x \\ y \to \bar{y} = -y \end{cases} 下是对称的。$$

2. 周期对称性

$$\frac{dy}{dx} = F(x)y$$

(其中 $F(x) = F(x+T)$) 在$\begin{cases} x \to \bar{x} = x + T \\ y \to \bar{y} = y \end{cases}$下是对称的。

3. 连续对称性

$$\frac{dy}{dx} = y \quad 在\begin{cases} x \to \bar{x} = x \\ y \to \bar{y} = \alpha y \end{cases} 下是对称的。$$

还有其它更为复杂的对称性，在此我们不再一一讨论。

我们定义一个点变换的对称性

$$x \to \bar{x} = \bar{x}(x,y) \quad y \to \bar{y} = \bar{y}(x,y) \tag{3.1.4}$$

如果使微分方程的一个解变为另一个解的变换具有如下形式：

$$\begin{cases} x \to \bar{x} = \bar{x}(x,y,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2},\cdots) \\ y \to \bar{y} = \bar{y}(x,y,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2},\cdots) \end{cases} \tag{3.1.5}$$

则称该变换为局部可微的对称性(非点变换的)。

下面，我们来求解

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{3.1.6}$$

的点变换对称性。

利用(3.1.4)式，则有共形不变的条件是

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} - \bar{y} = G(x,y)\left(\frac{dy}{dx} - y\right) = 0 \qquad (3.1.7)$$

据此,由满足(3.1.6)式的一个解利用(3.1.4)式可以给出另外的一个解。

考虑(3.1.7)式左边有

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} - \bar{y} = \frac{(\partial\bar{y}/\partial x)dx + (\partial\bar{y}/\partial y)dy}{(\partial\bar{x}/\partial x)dx + (\partial\bar{x}/\partial x)dy} - \bar{y}(x,y)$$

假设

$$(\text{ⅰ})\bar{y} = \bar{y}(y) \quad (\text{ⅱ})\bar{x} = \bar{x}(x)$$

则有

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} - \bar{y} = \frac{(d\bar{y}/dy)dy}{(d\bar{x}/dx)dx} - \bar{y}(y)$$

若取 $\bar{y} = G(y)y$,进一步假设

$$(\text{ⅲ})\ \frac{(dG/dy)y + G(y)}{(d\bar{x}/dx)} = G(y)$$

由此可得 $\frac{d\bar{x}}{dx} = a$(a 为一个常数),故有

$$\bar{x} = ax + b$$

因此,(ⅲ)变为

$$ydG/dy + (1-a)G(y) = 0 \qquad (3.1.8)$$

它的通解为

$$G(y) = cy^{a-1}$$

故可求得点变换

$$x \to \bar{x} = ax + b \quad y \to \bar{y} = cy^a$$

是方程(3.1.6)式的一个对称性。

针对求解(3.1.6)式的对称性来看,存在下面三个问题:1.在计算过程中附加了三个限制条件,由此可致使我们不能求得更多的对称性;2.上述三个假设对于更复杂的一阶微分方程甚至不可能直接给出;3.关于共形因子 G 的微分方程有可能比原来的方程更为复杂。Lie 的基本思想有助于我们解决这一问题。

假设点变换(3.1.4)式为一个单参数变换:

$$\bar{x} = \bar{x}(x,y;\alpha) \quad \bar{y} = \bar{y}(x,y;\alpha) \tag{3.1.9}$$

且在恒等变换的邻域内关于 α 是解析的，若取

$$\bar{x}(x,y;\alpha_0) = x \qquad \bar{y}(x,y;\alpha_0) = y \tag{3.1.10}$$

且 $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$，则有

$$\begin{aligned}\bar{x}(x,y;\alpha) &= \bar{x}(x,y;\alpha_0+\varepsilon)\\ &= x + \varepsilon \frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \alpha^2}\Big|_{\alpha=\alpha_0} + \cdots\\ \bar{y}(x,y;\alpha) &= \bar{y}(x,y;\alpha_0+\varepsilon)\\ &= y + \varepsilon \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \alpha^2}\Big|_{\alpha=\alpha_0} + \cdots\end{aligned}$$

定义

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = \xi(x,y) \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = \eta(x,y) \tag{3.1.11}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial \alpha^2}\Big|_{\alpha=\alpha_0} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = \xi\frac{\partial \xi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \xi}{\partial y}\\ \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \alpha^2}\Big|_{\alpha=\alpha_0} &= \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} = \xi\frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial y}\end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + \varepsilon\xi(x,y) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left(\xi\frac{\partial \xi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \cdots\\ \bar{y} &= y + \varepsilon\eta(x,y) + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left(\xi\frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \cdots\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

假设 ε 为小量，将式(3.1.12)代入到(3.1.1)式中，由(3.1.3)式可得

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} - f(\bar{x},\bar{y}) &= \frac{(\partial \bar{y}/\partial x)dx + (\partial \bar{y}/\partial y)dy}{(\partial \bar{x}/\partial x)dx + (\partial \bar{x}/\partial y)dy} - f(x+\varepsilon\xi, y+\varepsilon\eta)\\ &= \frac{dy + \varepsilon\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)dy\right]}{dx + \varepsilon\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)dy\right]} - f(x,y)\\ &\quad - \varepsilon\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

$$= [\frac{dy}{dx} + \varepsilon(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{dy}{dx})]$$
$$\times [1 - \varepsilon(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{dy}{dx})] - f(x,y)$$
$$- \varepsilon(\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}) = 0$$

略去 ε 的高阶项,则有

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} - f(\bar{x},\bar{y}) = \frac{dy}{dx} - f(x,y) + \varepsilon[\frac{\partial \eta}{\partial x} + (\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x})\frac{dy}{dx}$$
$$- \frac{\partial \xi}{\partial y}(\frac{dy}{dx})^2 - \xi \frac{\partial f}{\partial x} - \eta \frac{\partial f}{\partial y}] = 0 \quad (3.1.13)$$

(3.1.13)式也可以表达成标准的形式。设 $G(x,y)$ 在 α_0 邻域内可以 Taylor 展开,若定义

$$G(x,y;\alpha_0) = 1$$

则有

$$G(x,y;\alpha) = 1 + \frac{\partial G}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0}$$

因此

$$(\frac{dy}{dx} - f(x,y))\frac{\partial G}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0}$$
$$= \frac{\partial \eta}{\partial x} + (\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x})\frac{dy}{dx} - \frac{\partial \xi}{\partial y}(\frac{dy}{dx})^2 - \xi \frac{\partial f}{\partial x} - \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

综合以上内容,有如下定理。

定理 $\bar{x} = x + \varepsilon\xi(x,y), \bar{y} = y + \varepsilon\eta(x,y)$ 唯一定义方程(3.1.1)式的一个对称变换的充分必要条件是满足

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + (\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x})f - \frac{\partial \xi}{\partial y}f^2 - \xi \frac{\partial f}{\partial x} - \eta \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (3.1.14)$$

另外我们还有如下结论:

1. 若无穷小变换为

$$x \to \bar{x} = x + \varepsilon\xi(x,y) \quad y \to \bar{y} = y + \varepsilon\eta(x,y) \quad (3.1.15)$$

则关于一阶导数的无穷小变换为

$$\frac{dy}{dx} \to \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{dy}{dx} + \varepsilon\left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \tag{3.1.16}$$

也称之为一阶扩展。

2. 有两种构造和定义有限变换的方法，其一是由(3.1.12)式；其二是由(3.1.11)式，即求解所谓的特征方程

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = d\alpha \tag{3.1.17}$$

例 1 $x \to \bar{x} = x + \varepsilon x$，$y \to \bar{y} = y + \varepsilon \sin y$，则 $\frac{dx}{x} = d\alpha$，$\frac{dy}{\sin y} = d\alpha$，因而有

$$\ln x = \alpha + Q \quad \ln \mathrm{tg} y = \alpha + P$$

其中 Q, P 是积分函数，当 $\alpha = 0$ 时，由它们应当得到恒等变换，因此

$$\ln x = \alpha + \ln \bar{x} \quad \ln \mathrm{tg} y = \alpha + \ln \mathrm{tg} \bar{y}$$

由此可得有限变换

$$x \to \bar{x} = e^{-\alpha} x \quad y \to \bar{y} = \mathrm{tg}^{-1}(e^{-\alpha}\,\mathrm{tg} y)$$

例 2 Bernoulli 方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + x\sin x}{x^3} y^3 - (\sin x) y$$

容易验证 $y = x$ 是它的一个解，且

$$x \to \bar{x} = x \quad y \to \bar{y} = y + \varepsilon y^3 e^{-2\cos x}$$

是满足(3.1.14)式的，其特征方程为

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{y^3 e^{-2\cos x}} = d\sigma$$

积分之可得有限变换为

$$x \to \bar{x} = x \quad y \to \bar{y} = y/(1 - 2\sigma y^2 e^{-2\cos x})^{1/2}$$

且新的解族为

$$y_{\mathrm{New}} = x/(1 - 2\sigma x^2 e^{-2\cos x})^{1/2}$$

3. 由于一阶偏微分方程(3.1.14)式中包含了两个未知函数 ξ,η,因而我们推断有无穷多无穷小变换将使得一阶常微分方程共形不变。这也回答了一些问题。第一,对于 $\frac{dy}{dx}-y=0$ 有比假设后得到的对称性更多的对称性;第二,方程(3.1.14)没有一般的求解方法,必须给出针对这一问题的专门的求解方法。

4. 可以证明,导致一阶常微分方程共形不变的无穷小变换可以描述为一个群;若处理的为点变换,则上述结论对高阶常微分方程也是正确的。

5. 一旦方程(3.1.14)可以解得,则对应于方程(3.1.1)的积分因子为

$$I = 1/(\eta - f\xi) \tag{3.1.18}$$

若已知二个不同的积分因子 $I_1 \neq I_2$,则有

$$I_1/I_2 = \text{const.}$$

方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + (\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x})f - \frac{\partial \xi}{\partial y}f^2 - \xi\frac{\partial f}{\partial x} - \eta\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

是对于一阶常微分方程的对称性研究的关键问题,因为一旦知道了 ξ,η,我们就确定了积分因子或可通过一已知解构造新的解。可以验证

$$\xi = \xi(x,y) \quad \eta = f\xi(x,y) \tag{3.1.19}$$

是(3.1.14)式的解,但不存在积分因子。

正如前面已经指出的那样,由于(3.1.14)式的超定性,不可能给出它的一般解,但由于(3.1.14)式关于 ξ,η 的线性性质,则有若 ξ_1,η_1 和 ξ_2,η_2 是(3.1.14)式的解,就有 $\xi_1+\xi_2,\eta_1+\eta_2$ 也是它的一个解,由此可以推断一阶常微分方程具有对称性的无穷参数群。另一方面,我们能够去考虑逆问题:已知 η 和 ξ,利用特征方法求解(3.1.14)式得到 f。

例 3 设 $\eta=0,\xi=y$,由(3.1.14)式得

$$f^2 + y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

求解可得

$$f = y/(x + \Psi(y))$$

这意味着

$$\frac{dy}{dx} = y/(x + \Psi(y))$$

具有 $\eta = 0, \xi = y$ 的对称性。

现在回到方程(3.1.14)上来。

ⅰ)$\xi = 0, \eta \neq 0$,则由(3.1.14)式得

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + f\frac{\partial \eta}{\partial y} = \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

根据特征方法,有

$$\frac{dx}{ds} = 1 \Rightarrow x = s + \text{const.}$$

$$\frac{dy}{ds} = f(x,y) \Rightarrow \frac{dy}{ds} = f(s,y)$$

$$\frac{d\eta}{ds} = \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

ⅱ) $\xi = 0, \eta = \eta(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$,代入方程(3.1.14)式,直接计算可得

$$\eta = \exp\left(A + \int \frac{df}{(f_x/f_y) + f}\right) \qquad \xi = 0$$

其中 $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$。

ⅲ)$\xi = \xi(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$, $\eta = 0$, 代入(3.1.14)式可得

$$\xi = \exp\left(B - \int \frac{df}{(f_y/f_x)f^2 + f}\right) \qquad \eta = 0$$

综合ⅱ),ⅲ),由于(3.1.14)式的线性性质,我们可以得到方程(3.1.14)式的特解

$$\eta = \exp\left(A + \int \frac{df}{(f_x/f_y) + f}\right) \tag{3.1.20}$$

$$\xi = \exp\left(B - \int \frac{df}{(f_y/f_x)f^2 + f}\right)$$

若 f_x/f_y 是 f 的任意函数但 $f_x/f_y \neq f$，我们则可由(3.1.20)式积分出 η, ξ 的显式。

例 4 讨论方程

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)^n$$

即 $f(x,y) = (x + y)^n$，则 $\frac{f_x}{f_y} = 1$，由(3.1.20)式可知

$$\eta = \exp\left(A + \int \frac{df}{1 + f}\right) = e^A[f + 1] = e^A[(x,y)^n + 1]$$

若假设 $\xi \equiv 0$，则由(3.1.18)式得积分为

$$I = e^{-A}/[(x + y)^n + 1]$$

我们专门讨论方程

$$f_x - \varphi(f)f_y = 0 \tag{3.1.21}$$

由特征方法，有

$$f = F(y + \varphi(f)x) \tag{3.1.22}$$

其中 F, φ 是任意函数。若 F 是可逆的，则

$$F^{-1}(f) = y + \varphi(f)x \tag{3.1.23}$$

定义 $g = F^{-1}(f)$，则有 $f = F(g)$，且

$$g = y + [\varphi \circ F](g)x$$

取 $\varphi \circ F = \Psi$，则有

$$g = y + \Psi(g)x$$

由此可见，一旦 g 已知，利用 F 就可以求得 f。

例 5 设 Ψ 是恒等函数，则有代数方程

$$g = y + gx \Rightarrow g = y/(1 - x)$$

再取 F 为恒等函数，则 $f = y/(1 - x)$，对应的微分方程为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 - x} \Rightarrow \frac{f_x}{f_y} = y/(1 - x) = f$$

且积分因子为

$$I = e^{-A}/\exp(\int \frac{df}{2f}) = e^{-A}(\frac{1-x}{y})^{1/2}$$

(Ⅳ)假若 $f(x,y)$ 是 x,y 的多项式，则可设 $\xi = 0$，η 也是 x,y 的多项式，其系数可由(3.1.14)式确定。

第二节　二阶常微分方程的不变性

现在我们讨论二阶常微分方程的不变性问题。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y') \tag{3.2.1}$$

考虑局部可微的对称性

$$\begin{aligned} x \to \bar{x} &= \bar{x}(x,y,\frac{dy}{dx}) = x + \varepsilon\xi(x,y,\frac{dy}{dx}) \\ y \to \bar{y} &= \bar{y}(x,y,\frac{dy}{dx}) = y + \varepsilon\eta(x,y,\frac{dy}{dx}), \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

而一阶扩展为

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{(\partial\bar{y}/\partial x)dx + (\partial\bar{y}/\partial y)dy + (\partial\bar{y}/\partial y')dy'}{(\partial\bar{x}/\partial x)dx + (\partial\bar{x}/\partial y)dy + (\partial\bar{x}/\partial y')dy'}$$

忽略 ε 的高阶项后可得

$$\begin{aligned} \bar{y}' = y' + \varepsilon(&\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}y' + \frac{\partial\eta}{\partial y'}f - \frac{\partial\xi}{\partial x}y' \\ &- \frac{\partial\xi}{\partial y}(y')^2 - \frac{\partial\xi}{\partial y'}y'f) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

对于(3.2.1)式，可以化为二个一阶常微分方程组

$$v - y' = 0 \quad v' - f(x,y,v) = 0 \tag{3.2.4}$$

为求(3.2.4)式的对称性

$$\left.\begin{aligned} x \to \bar{x} &= x + \varepsilon\xi(x,y,v) \\ y \to \bar{y} &= y + \varepsilon\eta(x,y,v) \\ v \to \bar{v} &= v + \varepsilon\omega(x,y,v) \end{aligned}\right\} \tag{3.2.5}$$

其中

$$\omega = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}v + \frac{\partial \eta}{\partial v}f - \frac{\partial \xi}{\partial x}v - \frac{\partial \xi}{\partial y}v^2 - \frac{\partial \xi}{\partial v}vf \tag{3.2.6}$$

v 的一阶扩展

$$\bar{v}' = \frac{(\partial \bar{v}/\partial x)dx + (\partial \bar{v}/\partial y)dy + (\partial \bar{v}/\partial v)dv}{(\partial \bar{x}/\partial x)dx + (\partial \bar{x}/\partial y)dy + (\partial \bar{x}/\partial v)dv}$$

忽略 ε 的高阶小量

$$\bar{v}' = v' + \varepsilon\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}v + \frac{\partial \omega}{\partial v}f - \frac{\partial \xi}{\partial x}f - \frac{\partial \xi}{\partial y}fv - \frac{\partial \xi}{\partial v}f^2\right) \tag{3.2.7}$$

取

$$\chi_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}v + \frac{\partial \omega}{\partial v}f - \frac{\partial \xi}{\partial x}f - \frac{\partial \xi}{\partial y}vf - \frac{\partial \xi}{\partial v}f^2$$

由(3.2.4)式中第二式可得

$$\begin{aligned}\bar{v}' - f(\bar{x},\bar{y},\bar{v}) &= v' + \varepsilon\chi_1 - f(x,y,v) \\ &\quad - \varepsilon\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \omega\frac{\partial f}{\partial v}\right) \\ &= v' - f(x,y,v) + \varepsilon\left(\chi_1 - \xi\frac{\partial f}{\partial x} - \eta\frac{\partial f}{\partial y} - \omega\frac{\partial f}{\partial v}\right)\end{aligned}$$

由于 $v' - f(x,y,v) = 0$,因而有

$$\chi_1 - \xi\frac{\partial f}{\partial x} - \eta\frac{\partial f}{\partial y} - \omega\frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

因而可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y}v + \frac{\partial \omega}{\partial v}f - \frac{\partial \xi}{\partial x}f - \frac{\partial \xi}{\partial y}vf - \frac{\partial \xi}{\partial v}f^2 \\ &\quad - \xi\frac{\partial f}{\partial x} - \eta\frac{\partial f}{\partial y} - \omega\frac{\partial f}{\partial v} = 0\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

联立(3.2.6),(3.2.8)两式,可得一包含两个未知函数 ξ,η 和三个独立变量 (x,y,v) 的二阶偏微分方程:

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - \xi\frac{\partial f}{\partial x} - \eta\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ &\quad + v\left[2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\ \partial y} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 3\frac{\partial \xi}{\partial y}f - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial v}\right]\end{aligned}$$

$$+ v^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\ \partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}\right) - \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}v^3$$
$$+ v\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial y\ \partial v}f + \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial v\ \partial x}f - \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}f^2 - \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$+ 2\frac{\partial^2\eta}{\partial v\ \partial x}f + \frac{\partial^2\eta}{\partial v^2}f^2 + \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial\xi}{\partial v}f^2$$
$$- v^2\left(2\frac{\partial^2\xi}{\partial v\ \partial y}f + \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \tag{3.2.9}$$

(3.2.9)式也是超定的,因而有无穷多参数的对称性,而当 $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ 时构成一个群,此时

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + v\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right) + v^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\right)$$
$$- \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}v^3 + f\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - 2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - 3\frac{\partial\xi}{\partial y}vf - \xi\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$- \eta\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} - \left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial v}v + \frac{\partial\xi}{\partial y}v^2\frac{\partial f}{\partial v} = 0 \tag{3.2.10}$$

具有最大点对称性的微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow f(x,y,v) = 0 \tag{3.2.11}$$

由(3.2.10)式有

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = 0 \qquad 2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\ \partial y} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\ \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = 0 \tag{3.2.12}$$

因而通解为

$$\begin{aligned}\xi(x,y) &= a_1xy + a_2y + c_1x^2 + b_1x + b_2\\ \eta(x,y) &= c_1xy + c_2x + a_1y^2 + d_1y + d_2\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

为一个 8 参数群。

关于二阶常微分方程的点变换对称性的结论有助于寻求它的局部可微的对称性。对于(3.2.11)式,可以假定

$$\xi(x,y,v) = a_1(v)xy + a_2(v)y + c_1(v)x^2 + b_1(v)x + b_2(v)$$
$$\eta(x,y,v) = c_1(v)xy + c_2(v)x + a_1(v)y^2 + d_1(v)y + d_2(v) \tag{3.2.14}$$

为方程(3.2.9)式的解，而(3.2.14)式是局部可微的。

现在回头讨论一阶常微分方程，寻求

$$y' = x + y \tag{3.2.15}$$

的更多对称性。

按照式(3.1.20)可得 2 参数群

$$\xi = B\frac{x+y+1}{x+y} \qquad \eta = A(x+y+1) \tag{3.2.16}$$

将(3.2.15)式对 x 再求导一次，可得一个二阶常微分方程

$$y'' = 1 + y' \tag{3.2.17}$$

由(3.2.10)式可以解得它的点变换对称性，它们组成一个 8 参数群：

$$\left.\begin{aligned}\xi &= (E + Fe^{-x})y + Be^{-x} + Ex + Fxe^{-x} + Ce^{x} + G\\ \eta &= Ey^2 + (Ce^{x} - Fe^{-x} + 2Ex + A)y\\ &\quad + D_1e^{x} + D_2 + Cxe^{x} - Be^{-x} - Fxe^{-x} + Ex^2 + Ax\end{aligned}\right\} \tag{3.2.18}$$

将(3.2.18)式代入(3.1.14)式，取 $f = x + y$，则可得(3.2.15)式的新的 6 参数群：

$$\left.\begin{aligned}\xi &= (E + Be^{-x})y + Be^{-x} + Ex + Bxe^{-x} + Ce^{x} + G\\ \eta &= Ey^2 + (Ce^{x} - Be^{-x} + 2Ex + A)y\\ &\quad + De^{x} + (A - G) + Cxe^{x} - Be^{-x} - Bxe^{-x} + Ex^2 + Ax\end{aligned}\right\} \tag{3.2.19}$$

上述过程给出了寻求一阶常微分方程的点变换对称性的新方法。

借助于特征方程

$$\frac{dx}{\xi(x,y,y')} = \frac{dy}{\eta(x,y,y')} = \frac{dy'}{\omega(x,y,y')} = d\sigma \tag{3.2.20}$$

可以得到无穷小或有限变换，由此可根据常微分方程的一个已知解构造一个新的解，不仅如此，更重要的，它可以帮助我们将一个二阶常微分方程约化为一个一阶常微分方程。

定理 若二阶常微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

在变换

$$x \to \bar{x} = x + \varepsilon\xi(x, y, y')$$
$$y \to \bar{y} = y + \varepsilon\eta(x, y, y')$$
$$y' \to \bar{y}' = y' + \varepsilon\omega(x, y, y')$$

下是共形不变的，则积分特征方程式(3.2.20)可得两个守恒量 $u(x, y, y')$ 和 $z(x, y, y')$。

上述定理是相似分析的基础。

假设 u 是 z 的函数，则适当处理后，二阶常微分方程可约化为一阶常微分方程

$$\frac{du}{dz} = F(u, z) \tag{3.2.21}$$

这一结论也可以推广到更高阶的常微分方程，使其约化为一阶的常微分方程，它还可以推广到偏微分方程，以成功地减少变量的数目。要注意，我们定义的对称性一旦存在，它也对应了守恒量，这一思想来源于 Noether。

例 6 讨论二阶常微分方程

$$y'' = 0 \tag{3.2.22}$$

的对称性与不变量。

按照(3.2.14)式取一特别的局部可微的对称性

$$\xi = xy' \qquad \eta = 0 \tag{3.2.23}$$

由(3.2.6)式可得 $\omega = -(y')^2$，因而特征方程为

$$\frac{dx}{xy'} = \frac{dy}{0} = \frac{dy'}{-(y')^2} \tag{3.2.24}$$

因而有一个平凡不变量

$$u(x,y,y') = y \tag{3.2.25}$$

又由于

$$\frac{dx}{xy'} = \frac{dy'}{-(y')^2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy'}{y'}$$

所以

$$d\ln x = -d\ln y' + d\ln z(u) \qquad \ln xy' = \ln z(u)$$

从而

$$z(u) = xy' \tag{3.2.26}$$

为第二个不变量。将 $y' = \frac{z(u)}{x}$ 代入方程后有

$$y'' = -\frac{z(u)}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 0$$

而 $\frac{du}{dx} = y' = \frac{z(u)}{x}$，因而当 $\frac{x^2}{z(u)} \neq 0$ 时有

$$y'' = -\frac{z(u)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\frac{dz}{du}z(u) = 0$$

于是可得一个一阶微分方程

$$\frac{dz}{du} - 1 = 0 \tag{3.2.27}$$

它的通解为

$$z(u) = u - B \tag{3.2.28}$$

其中 B 是一个常数。

由于 $z(u) = xy'$，且 $u = y$，因而有

$$y' = (y - B)/x$$

于是可得原方程的通解

$$y = Ax + B \tag{3.2.29}$$

其中 A, B 均为常数。

例 7 讨论 Thomas-Fermi 方程

$$y'' - y^{3/2}/x^{1/2} = 0 \tag{3.2.30}$$

的对称性与不变量。

考虑 Thomas-Fermi 方程的点变换对称性。将 $f(x,y,v) =$

$y^{3/2}/x^{1/2}$ 代入(3.2.10)式则得

$$\eta_{xx}+v(2\eta_{xy}-\xi_{xx})+v^2(\eta_{yy}-2\xi_{xy}-v^2\xi_{yy}+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}(\eta_y-2\xi_x)-3vx^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\xi_y+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}\xi-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\eta=0 \tag{3.2.31}$$

按 v 的不同幂次进行整理,则由(3.2.31)式可得 4 个偏微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\xi_{yy}=0\\&\eta_{yy}-2\xi_{xy}=0\\&2\eta_{xy}-\xi_{xx}-3x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\xi_y=0\\&\eta_{xx}+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}(\eta_y-2\xi_x)+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}\xi-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\eta=0\end{aligned}\right\} \tag{3.2.32}$$

直接求解(3.2.32)式可得

$$\xi(x)=-\frac{1}{3}kx\qquad \eta(y)=ky \tag{3.2.33}$$

因此,方程(3.2.30)式的无穷小点变换对称性为

$$x\to\bar{x}=x-\varepsilon\frac{k}{3}x\qquad y\to\bar{y}=y+\varepsilon ky \tag{3.2.34}$$

其中 k 为任常实数。无穷小变换群(3.2.34)式是一个单参数 Lie 群,它的有限变换为

$$\bar{x}=e^{-\frac{k\sigma}{3}}\qquad \bar{y}=ye^{k\sigma} \tag{3.2.35}$$

对应的特征方程

$$\frac{dx}{-\frac{1}{3}x}=\frac{dy}{y}=\frac{dy'}{\frac{4}{3}y'}=d\sigma \tag{3.2.36}$$

对应的守恒量为

$$u=yx^3\qquad z(u)=x^4y' \tag{3.2.37}$$

由(3.2.37)式解得 $y'=z(u)/x^4$,代入方程式(3.2.30)可得关于 $z(u)$ 的一阶常微分方程:

$$\frac{dz}{du}=\frac{4z(u)+u^{\frac{3}{2}}}{z(u)+3u} \tag{3.2.38}$$

(3.2.30)式的一个特别解可由(3.2.38)式解得，由于(3.2.38)式的奇点是

$$u_s = 144 \qquad z_s = -432 \tag{3.2.39}$$

故(3.2.30)式的奇异解为

$$y_s(x) = \frac{144}{x^3} \tag{3.2.40}$$

第三节　完整保守力学系统的 Lie 对称性

对于绝大多数用微分方程描述的实际问题都具有对称性，但我们不一定能够寻求出来，这一方面是由于求解对称性是一项相当艰难的工作，另一方面是怎么样刻划描述对称性。对力学系统而言，1918 年 Noether 揭示出力学系统的对称性与不变量之间存在对应关系，她是考虑在时空无穷小单参数变换群作用下 Hamilton 作用泛函的不变性时得到这种关系的。1980 年前后，Lutzky，Prince 和 Eliezer 曾先后举出一系列的例子说明不变量所对应的对称性不一定是 Noether 型的，这给经典 Noether 理论带来了较大的冲击，从而促使人们从不同的角度去重新认识对称性，进而提出一系列新的对称性概念。1979 年，Lutzky 把上世纪末数学家 Sophus Lie 研究微分方程的不变性的扩展群方法(即本章前两节所述内容)引入力学领域加以研究，提出了使力学系统的运动微分方程不变的 Lie 对称性概念，随后 Lie 对称性方法发展迅速。在这一节中，我们将介绍完整保守力学系统的 Lie 对称性方法。

对于具有 n 自由度的完整保守力学系统，其运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) \tag{3.3.1}$$

其中 q_j 为广义坐标，L 为系统的 Lagrange 函数。方程(3.3.1)式也可规范为标准形式

$$\ddot{q}_j = a_j(t,q,\dot{q}) \tag{3.3.2}$$

考虑单参数无穷小变换

$$t \to \bar{t} = t + \varepsilon\tau(t,q,\dot{q}) \tag{3.3.3}$$
$$q_j \to \bar{q}_j = q_j + \varepsilon\xi_j(t,q,\dot{q})$$

则有一阶扩展

$$\frac{d\bar{q}_j}{d\bar{t}} = \frac{dq_j}{dt} + \varepsilon(\dot{\xi}_j - \dot{q}_j\dot{\tau}) \tag{3.3.4}$$

其二阶扩展为

$$\frac{d^2\bar{q}_j}{d\bar{t}^2} = \frac{d^2q_j}{dt^2} + \varepsilon(\ddot{\xi}_j - 2\ddot{q}_j\dot{\tau} - \dot{q}_j\ddot{\tau}) \tag{3.3.5}$$

Lie 对称性考虑(3.3.2)式在(3.3.3)式变换作用下共形不变,即要求

$$\frac{d^2\bar{q}_j}{d\bar{t}^2} - \alpha_j(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}}) = G_j(t,q,\dot{q})[\frac{d^2q_j}{dt^2} - \alpha_j(t,q,\dot{q})] \tag{3.3.6}$$

(3.3.6)式左边

$$\begin{aligned}\frac{d^2\bar{q}_j}{d\bar{t}^2} - \alpha_j(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}}) &= \frac{d^2q_j}{dt^2} + \varepsilon(\ddot{\xi}_j - 2\ddot{q}_j\dot{\tau} - \dot{q}_j\ddot{\tau}) \\ &\quad - \{\alpha_j(t,q,\dot{q}) + \varepsilon[\frac{\partial\alpha_j}{\partial t}\tau + \frac{\partial\alpha_j}{\partial q_j}\xi_i + (\dot{\xi}_i - \dot{q}_i\dot{\tau})\frac{\partial\alpha_j}{\partial\dot{q}_i}]\} \\ &= \frac{d^2q_j}{dt^2} - \alpha_j(t,q,\dot{q}) + \varepsilon[\ddot{\xi}_j - 2\ddot{q}_j\dot{\tau} - \dot{q}_j\ddot{\tau} - E(\alpha_j)]\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

其中 E 为向量场

$$E = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi_j\frac{\partial}{\partial q_j} + (\dot{\xi}_j - \dot{q}_j\dot{\tau})\frac{\partial}{\partial\dot{q}_j} \tag{3.3.8}$$

因此,(3.3.2)式在(3.3.3)式作用下共形不变的充分必要条件是(3.3.7)式中 ε 项系数为零,考虑到(3.3.2)式,即有

$$\ddot{\xi}_j - \dot{q}_j\ddot{\tau} - 2\dot{\tau}\alpha_j = E(\alpha_j) \tag{3.3.9}$$

(3.3.9)式为 Lie 对称性所应满足的条件。

对于满足(3.3.9)式的 ξ_j,τ,若存在满足

$$E(L) + \dot{\tau}L = \dot{f} \tag{3.3.10}$$

的函数 f，则有对应于 Lie 对称性的不变量

$$I = (\tau\dot{q}_j - \xi_j)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \tau L + f \tag{3.3.11}$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \dot{f} - [L\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\xi_j - \tau\dot{q}_j)]^{\cdot} \\ &= E(L) + \dot{\tau}L - [\dot{L}\tau + L\dot{\tau} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\xi_j - \tau\dot{q}_j) \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\dot{\xi}_j - \dot{\tau}\dot{q}_j - \tau\ddot{q}_j)] \\ &= E(L) - \tau\dot{L} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\xi_j - \tau\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\ddot{\xi}_j - \dot{\tau}\dot{q}_j - \tau\ddot{q}_j) \\ &= [\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}](\xi_j - \dot{q}_j\tau) = 0\end{aligned}$$

因此，(3.3.11)式的确为力学系统相应于 Lie 对称性的守恒量。

例 8 单自由度简谐振动。运动微分方程为

$$\ddot{q} + q = 0 \tag{3.3.12}$$

此时 $\alpha_1 = -q$，因此，(3.3.9)式变为

$$\ddot{\xi} + \xi - \dot{q}\ddot{\tau} + 2q\dot{\tau} = 0 \tag{3.3.13}$$

考虑 Lie 对称性为点变换：$\xi = \xi(t,q), \tau = \tau(t,q)$，代入(3.3.13)式可得

$$\begin{aligned}&\xi_{tt} + 2\xi_{tq}\dot{q} + \xi_{qq}\dot{q}^2 - \xi_q q + \xi - \dot{q}\tau_{tt} \\ &\quad - 2\tau_{tq}\dot{q}^2 - 2\tau_{qq}\dot{q}^3 + 2q\tau_{tt} + 3q\dot{q}\tau_q = 0\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

按 $\dot{q}^0, \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3$ 的系数为零，可得如下 4 个偏微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{qq} = 0 \\ &\xi_{qq} - 2\tau_{tq} = 0 \\ &2\xi_{tq} - \tau_{tt} + 3\tau_q q = 0 \\ &\xi_{tt} - \xi_q q + 2q\tau_{tt} + \xi = 0\end{aligned}\right\} \tag{3.3.15}$$

由(3.3.15)式可以解得

$$\begin{aligned}\tau &= (G\sin 2t + H\cos 2t) + C\\ \xi &= (G\cos 2t - H\sin 2t) + E\cos t + F\sin t\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

将(3.3.16)式代入(3.3.10)式,则可求得

$$f = -2(G\sin 2t + H\cos 2t)q^2 + (F\cos t - E\sin t)2q \tag{3.3.17}$$

利用(3.3.11)式可得如下5个运动守恒量

$$C_1 = (\dot{q}^2 - q^2)\sin 2t - 2q\dot{q}\cos 2t \tag{3.3.18a}$$

$$C_2 = (\dot{q}^2 - q^2)\cos 2t + 2q\dot{q}\sin 2t \tag{3.3.18b}$$

$$C_3 = -2\dot{q}\cos t - 2q\sin t \tag{3.3.18c}$$

$$C_4 = -2\dot{q}\sin t + 2q\cos t \tag{3.3.18d}$$

$$C_5 = \dot{q}^2 + q^2 \tag{3.3.18e}$$

由于二阶常微分方程最多存在两个独立的首次积分,不仿取 C_3, C_4,则可计算得

$$C_1 = \frac{1}{2}C_3C_4 \tag{3.3.19a}$$

$$C_2 = \frac{1}{4}(C_3^2 - C_4^2) \tag{3.3.19b}$$

$$C_5 = \frac{1}{4}(C_3^2 + C_4^2) \tag{3.3.19c}$$

并且根据 C_3,C_4,我们有

$$q = \frac{1}{2}C_4\cos t - \frac{1}{2}C_3\sin t \tag{3.3.20}$$

此即简谐振动的解。

应当注意,(3.3.16),(3.3.17)式是在点变换的假设下求得的,对于局部可微变换同样是可能的。可以验证

$$\tau = q\dot{q} \qquad \xi = -q^3 \tag{3.3.21a}$$

$$\tau = \dot{q}\sin t \qquad \xi = -q^2\sin t \tag{3.3.21b}$$

$$\tau = \dot{q}\cos t \qquad \xi = -q^2\cos t \tag{3.3.21c}$$

$$\tau = 0 \qquad \xi = q \tag{3.3.21d}$$

$$\tau = 0 \qquad \xi = \sin t \tag{3.3.21e}$$

$$\tau = 0 \qquad \xi = \cos t \tag{3.3.21f}$$

$$\tau = 0 \qquad \xi = -\dot{q} \tag{3.3.21g}$$

均满足 Lie 对称性条件(3.3.13)式,但只有在(3.3.21g)式下,存在 $f = 2q^2$ 满足(3.3.10)式,此时对应的守恒量为

$$I = 2(\dot{q}^2 + q^2) \tag{3.3.22}$$

即(3.3.18e)式为系统的总机械能。

第四节　两自由度力学系统的 Lie 对称性

在这一节中,我们利用上一节的结果讨论两自由度完整保守力学系统的 Lie 对称性。

考虑两自由度力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x,y) \tag{3.4.1}$$

则力学系统相应的运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\partial L}{\partial x} = a_1(x,y) \\ \ddot{y} &= \frac{\partial L}{\partial y} = a_2(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{3.4.2}$$

考虑无穷小单参数变换为

$$\left.\begin{aligned} x \to \bar{x} &= x + \varepsilon\xi_1(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) \\ y \to \bar{y} &= y + \varepsilon\xi_2(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) \\ t \to \bar{t} &= t + \varepsilon\tau(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) \end{aligned}\right\} \tag{3.4.3}$$

则运动微分方程式(3.4.2)在无穷小变换(3.4.3)式作用下共形不变的条件为

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 - \dot{x}\ddot{\tau} - 2\dot{\tau}a_1 &= E(a_1) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{y}\ddot{\tau} - 2\dot{\tau}a_2 &= E(a_2) \end{aligned}\right\} \tag{3.4.4}$$

其中 E 为向量场

$$E = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial y} + (\dot{\xi}_1 - \dot{\tau}\dot{x}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + (\dot{\xi}_2 - \dot{\tau}\dot{y}) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \tag{3.4.5}$$

一般情形下，(3.4.4)式形成了一组关于 τ, ξ_1, ξ_2 耦合的非线性方程组，为了求解(3.4.4)式，我们可以假设 τ, ξ_1, ξ_2 具有特定的形式。很明显，$\tau = \text{const.}, \xi_1 = \xi_2 = 0$ 是满足(3.4.4)式的，它也实际上对应着 Hamilton 函数 H 是一个运动常数。为了确定其它的非平凡对称性，我们可假定 τ, ξ_1, ξ_2 是关于 $\dot{x}, \dot{y}$ 的多项式，特别地，我们假设

$$\left.\begin{aligned} \tau &= a_1 + a_2\dot{x} + a_3\dot{y} \\ \xi_1 &= b_1 + b_2\dot{x} + b_3\dot{y} \\ \xi_2 &= c_1 + c_2\dot{x} + c_3\dot{y} \end{aligned}\right\} \tag{3.4.6}$$

其中 $a_i, b_i, c_i (i = 1,2,3)$ 均是 t, x, y 的函数。将(3.4.6)式代入(3.4.4)式，将 $\dot{x}^m\dot{y}^n$ ($m, n = 1,2,3,4$)项前的系数令为零，则我们可以得到下面这一组超定的偏微分方程组。

$$a_{2xx} = 0 \tag{3.4.7a}$$

$$2a_{2xy} + a_{3xx} = 0 \tag{3.4.7b}$$

$$a_{2yy} + 2a_{3xy} = 0 \tag{3.4.7c}$$

$$a_{3yy} = 0 \tag{3.4.7d}$$

$$b_{2xx} - (a_{1xx} + 2a_{3xt}) = 0 \tag{3.4.8a}$$

$$2b_{2xy} + b_{3xx} - 2(a_{1xy} + 2a_{2xt} + a_{3xt}) = 0 \tag{3.4.8b}$$

$$b_{2yy} + 2b_{3xy} - (a_{1yy} + 2a_{3yt}) = 0 \tag{3.4.8c}$$

$$b_{3yy} = 0 \tag{3.4.8d}$$

$$\begin{aligned} &b_{1xx} + 2b_{2xt} - (2a_{1xt} + a_2a_{1x} + 5a_1a_{2x} + a_3a_{2x} \\ &\quad - a_{2t} + 2a_2a_{3x} + a_2a_{2y}) = 0 \end{aligned} \tag{3.4.8e}$$

$$\begin{aligned} &2(b_{1xy} + b_{2yt} + b_{3xt}) - (2a_{1yt} + a_2a_{1y} + 4a_1a_{2y} + a_3a_{2y} \\ &\quad + a_{3tt} + 3a_2a_{3y} + 3a_1a_{3x} = 0 \end{aligned} \tag{3.4.8f}$$

$$b_{1yy} + 2b_{3yt} - 2a_1a_{3y} = 0 \tag{3.4.8g}$$

$$2b_{1xt} + b_2a_{1x} + 3a_1b_{2x} + b_3a_{2x} + b_{2tt} + 2a_2b_{3x} + a_2b_{2y} - (a_{1tt} + 4a_1a_{2t} + a_2a_{1y} + 2a_2a_{3t} + 3a_1a_{1x}) - (b_2a_{1x} + c_2a_{1y}) = 0 \tag{3.4.8h}$$

$$2b_{1yt} + b_2a_{1y} + 2a_1b_{2y} + b_3a_{2y} + b_{3tt} + 3a_2b_{3y} + a_1b_{3x} - 2a_1(a_{1y} + a_{3t}) - (b_3a_{1x} + c_3a_{1y}) = 0 \tag{3.4.8i}$$

$$b_{1tt} + 2a_1t_{2t} + 2a_2b_{3t} + a_1b_{1x} + a_2b_{1y} - 2a_1(a_{1t} + a_1a_2 + a_2a_3) - (b_1a_{1x} + c_1a_{1y}) = 0 \tag{3.4.8j}$$

$$c_{2xx} = 0 \tag{3.4.9a}$$

$$c_{2yy} + 2c_{3xy} - 2(a_{1xy} + a_{2yt} + a_{3xt}) = 0 \tag{3.4.9b}$$

$$2c_{2xy} + c_{3xx} - (a_{1xx} + 2a_{2xt}) = 0 \tag{3.4.9c}$$

$$c_{3yy} - (a_{1yy} + 2a_{3yt}) = 0 \tag{3.4.9d}$$

$$c_{1xx} + 2c_{2xt} - 2a_2a_{2x} = 0 \tag{3.4.9e}$$

$$2(c_{1xy} + c_{2yt} + c_{3xt}) - (2a_{1xt} + a_2a_{1x} + 3a_1a_{2x} + a_3a_{2x} + a_{2tt} + 4a_2a_{3x} + 3a_2a_{2y}) = 0 \tag{3.4.9f}$$

$$c_{1yy} + 2c_{3yt} - (2a_{1yt} + a_2a_{1y} + 2a_1a_{2y} + a_2a_{2y} + a_{3tt} + 5a_2a_{3y} + a_1a_{3x}) = 0 \tag{3.4.9g}$$

$$2c_{1xt} + c_2a_{1x} + 3a_1c_{2x} + c_3a_{2x} + c_{2tt} + 2a_2c_{3x} + a_2c_{2y} - 2a_2(a_{1x} + a_{2t}) - (b_2a_{2x} + c_2a_{2y}) = 0 \tag{3.4.9h}$$

$$2c_{1yt} + c_2a_{1y} + 2a_1c_{2y} + c_3a_{2y} + c_{3tt} + 3a_2c_{3y} + a_1c_{3x} - (a_{1tt} + 2a_1a_{2t} + 4a_2a_{3t} + a_1a_{1x} + 3a_2a_{1y}) - (b_3a_{2x} + c_3a_{2y}) = 0 \tag{3.4.9i}$$

$$c_{1tt} + 2a_1c_{2t} + 2a_1c_{3t} + a_1c_{1x} + a_2c_{1y} - 2a_2(a_{1t} + a_1a_2 + a_2a_3) - (b_1a_{2x} + c_1a_{2y}) = 0 \tag{3.4.9j}$$

上列诸式中下标字母表示偏导数。

为了求解方程组(3.4.7)～(3.4.9)式,我们考虑一个特定的力学系统:著名的 Hénon-Heiles 系统。它的 Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2) - (Dx^2y - \frac{1}{3}Cy^3) \tag{3.4.10}$$

系统的运动微分方程为

$$\ddot{x} = -Ax - 2Dxy \qquad \ddot{y} = -By - Dx^2 - Cy^2 \tag{3.4.11}$$

其中 A,B,C,D 为参数。从(3.4.7)式有

$$a_2 = a_{20}y^2 + a_{21}xy + a_{22}x + a_{23}y + a_{24} \tag{3.4.12}$$

$$a_3 = -a_{21}x^2 - a_{20}xy + a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \tag{3.4.13}$$

其中 a_{ij} 是 t 的待定函数。

从(3.4.8j)和(3.4.9a)式,考虑到(3.4.11)式,我们可以求得

$$b_1 = -\frac{2}{3}Db_{10}(a_{32} - a_{20}x)xy^3 + b_{11}y^2 + b_{12}y + b_{13} \tag{3.4.14}$$

$$c_1 = -\frac{1}{6}Dc_{10}(a_{21}y + a_{22})x^4 + c_{11}x^3 + c_{12}x^2 + c_{13}x + c_{14} \tag{3.4.15}$$

其中 b_{1i} 是 t,x 的函数,c_{1i} 是 t,y 的函数。进一步可以得到

$$b_3 = b_{30}y + b_{31}$$

$$c_2 = c_{20}x + c_{21}$$

其中 b_{3i} 是 t,x 的函数,c_{2i} 是 t,y 的函数。

将(3.4.12)~(3.4.15)式代入方程(3.4.8),(3.4.9)式可得

$$-4Db_{10}(a_{32} - a_{20}x)xy + 2b_{11} + 2\dot{b}_{30} + 2(A + 2Dy)(a_{32} - a_{20})x = 0 \tag{3.4.16a}$$

$$-2Dc_{10}(a_{21}y + a_{22})x^2 + 6c_{11}x + 2c_{12} + 2\dot{c}_{20} + 2(By + Dx^2 - Cy^2)(a_{21}y + a_{22}) = 0 \tag{3.4.16b}$$

令(3.4.16)式中 x,y 的各次幂前的系数等于零,则可得

$$\left.\begin{aligned} &a_{20} = a_{32} \qquad a_{21} = -a_{22} \\ &b_{10} = \text{const.} \qquad b_{11} = -\dot{b}_{30} \\ &c_{11} = 0 \qquad c_{10} = \text{const.} \qquad c_{12} = -\dot{c}_{20} \end{aligned}\right\} \tag{3.4.17}$$

连续做以上过程,我们发现仅在以下几种情形下($C = D = 0$ 除外)相容性条件才成立。

1. $A = B \qquad C = -D$ (3.4.18a)

此时可求得

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \qquad b_1 = b_2 = c_1 = c_3 = 0$$
$$b_3 = \text{const.} \qquad c_2 = \text{const.} \tag{3.4.18b}$$

2. A, B 任意，$C = -6D$ (3.4.19a)

此时可求得

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = a_2 = a_3 = 0 \qquad b_1 = c_1 = c_3 = 0 \\ &b_2 = 2(4A - B) - 8Dy \\ &b_3 = 4Dx \qquad c_2 = 4Dx \end{aligned}\right\} \tag{3.4.19b}$$

重复以上的步骤，假设

$$\tau = \sum_{i,j=0}^{3} a_{ij}\dot{x}^i\dot{y}^j \qquad \xi_1 = \sum_{i,j=0}^{3} b_{ij}\dot{x}^i\dot{y}^j$$
$$\xi_2 = \sum_{i,j=0}^{3} c_{ij}\dot{x}^i\dot{y}^j \qquad (i + j \leqslant 3) \tag{3.4.20}$$

其中 a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} 是 t, x, y 的函数，在附加系数满足 $16A = B$ 和 $C = -16D$ 时，相容性条件成立。

3. $16A = B \qquad C = -16D$ (3.4.21)

此时求得

$$a_{ij} = 0 \qquad (i, j = 0,1,2,3) \tag{3.4.22a}$$

$$\left.\begin{aligned} &b_{00} = 0 \qquad b_{10} = 2(A + 2Dy)x^2 \\ &b_{01} = -\frac{4}{3}Dx^3 \qquad b_{30} = 4 \\ &c_{10} = -\frac{4}{3}Dx^3 \end{aligned}\right\} \tag{3.4.22b}$$

其余系数均为零。

对应于以上三种情况，我们可以求得相应的守恒量。

$$I_1 = \dot{x}\dot{y} + Axy + \frac{1}{3}Dx^3 + Dxy \tag{3.4.23a}$$

$$I_2 = -4(y\dot{x} - x\dot{y})\dot{x} + 4Ax^2y + x^4 + 4x^2y^2 + (4A - B)(\dot{x}^2 + Ax^2) \tag{3.4.23b}$$

$$I_3 = \dot{x}^4 + 2(A + 2Dy)x^2\dot{x}^2 - \frac{4}{3}Dx^3\dot{x}\dot{y} + A^2x^4$$
$$- \frac{4}{3}D(A + Dy)x^4y - \frac{2}{9}D^2x^6 \qquad (3.4.23c)$$

下面我们再给出一个双耦合四次非简谐振子问题的 Lie 对称性分析的结果。

设系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (Ax^2 + By^2 + \alpha x^4 + \beta y^4 + \delta x^2y^2) \qquad (3.4.24)$$

其运动微分方程为

$$\ddot{x} = -2Ax - 4\alpha x^3 - 2\delta xy^2 \qquad (3.4.25a)$$

$$\ddot{y} = -2By - 4\beta y^3 - 2\delta x^2y \qquad (3.4.25b)$$

其中 $A, B, \delta, \alpha, \beta$ 均为参数。

1. 当 A, B 任意，$\alpha = \beta, \delta = 2\alpha$ 时，求得相应对称性为

$$\left.\begin{aligned} \tau &= 0 \\ \xi_1 &= 2y(\dot{x}y - x\dot{y}) + \frac{2}{\alpha}(B - A)\dot{x} \\ \xi_2 &= 2x(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.26)$$

此时不变量为

$$I_1 = (x\dot{y} - \dot{x}y)^2 + \frac{2}{\alpha}(B - A)$$
$$\times (\frac{1}{2}\dot{x}^2 + Ax^2 + \alpha x^4 + \alpha x^2y^2) \qquad (3.4.27)$$

2. 当 $A = B, \alpha = \beta, \delta = 6\alpha$ 时，对称性为

$$\begin{aligned} \tau &= 0 \\ \xi_1 &= k\dot{x} \qquad \xi_2 = k\dot{y} \end{aligned} \qquad (3.4.28)$$

此时的不变量为

$$I_2 = \dot{x}\dot{y} + 2Axy + 4\alpha xy(x^2 + y^2) \qquad (3.4.29)$$

3. 当 $A = 4B, \alpha = 16\beta, \delta = 12\beta$ 时，对称性为

$$\tau = 0$$

$$\xi_1 = x\dot{y} \qquad \xi_2 = y\dot{x} - 2x\dot{y}$$

此时的不变量为

$$I_3 = -x\dot{y}^2 + y\dot{x}\dot{y} + 2(B + 4\beta x^2 + 2\beta y^2)xy^2 \quad (3.4.30)$$

4. 当 $A = 4B, \alpha = 8\beta, \delta = 6\beta$ 时，对称性为

$$\tau = 0$$

$$\xi_1 = 8\beta(y\dot{x} - 2x\dot{y})y^3$$

$$\xi_2 = 4\dot{y}^3 + 8(B + \beta y^2 + 6\beta x^2)y^2\dot{y} - 16\beta xy^3\dot{x} \quad (3.4.31)$$

此时对应的不变量为

$$\begin{aligned} I_4 = {} & \dot{y}^4 + 4(B + 6\beta x^2 + \beta y^2)y^2\dot{y}^2 - 16\beta xy^3\dot{x}\dot{y} \\ & + 4\beta y^4\dot{x}^2 + 4B(B + 4\beta x^2 + 2\beta y^2)y^4 \\ & + 4\beta^2(2x^2 + y^2)^2y^4 \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

第五节　完整非保守力学系统的 Lie 对称性

非保守力学系统与保守力学系统进行对照，主要在于它的非保守广义力的影响，在 Lie 对称性的研究中，无穷小变换使运动微分方程的共形不变的条件并不会由此而产生很大的变化，主要的影响是什么呢？

设非保守力学系统保守部分的 Lagrange 函数为 L，非保守广义力为 Q_i，则系统的 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, \cdots, n) \quad (3.5.1)$$

其中 q_i 为力学系统的广义坐标。

考虑无穷小单参数变换为

$$\begin{aligned} & t \to \bar{t} = t + \varepsilon\tau(t, q, \dot{q}) \\ & q_i \to \bar{q}_i = q_i + \varepsilon\xi_i(t, q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

定义向量场

$$E = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi_i\frac{\partial}{\partial q_i} + (\dot{\xi}_i - \dot{\tau}\dot{q}_i)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \tag{3.5.3}$$

而方程(3.5.1)式经解耦归一后可化为

$$\ddot{q}_i = a_i(t, q, \dot{q}) \tag{3.5.4}$$

可仿照上节推导,方程式(3.5.4)在变换式(3.5.2)的作用下保持不变的充要条件为

$$\ddot{\xi}_i - \dot{q}_i\ddot{\tau} - 2\dot{\tau}a_i = E(a_i) \tag{3.5.5}$$

满足(3.5.5)式的生成函数 ξ_i, τ 所生成的向量场

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi_i\frac{\partial}{\partial q_i} \tag{3.5.6}$$

称之为 Lie 对称向量场。

对于非保守的力学系统,我们可以证明如下定理:

定理 对于满足(3.5.5)式的生成函数 ξ_i, τ,若存在 f 满足

$$E(L) + \dot{\tau}L + Q_i(\xi_i - \tau\dot{q}_i) = \dot{f} \tag{3.5.7}$$

则该力学系统存在以下形式的不变量

$$\Phi = f - [L\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i - \tau\dot{q}_i)] \tag{3.5.8}$$

证明 将(3.5.8)式对时间 t 求导得

$$\begin{aligned}\dot{\Phi} &= \dot{f} - [L\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i - \dot{q}_i\tau)]^{\cdot} \\ &= E(L) + \dot{\tau}L + Q_i(\xi_i - \dot{q}_i\tau) \\ &\quad - [\dot{\tau}L + L\dot{\tau} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})(\xi_i - \dot{q}_i\tau) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{\xi}_i - \ddot{q}_i\tau - \dot{q}_i\dot{\tau})] \\ &= E(L) - \tau\dot{L} + [Q_i - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})](\xi_i - \dot{q}_i\tau) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\dot{\xi}_i - \ddot{q}_i\tau - \dot{q}_i\dot{\tau}) \\ &= [Q_i + \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}](\xi_i - \dot{q}_i\tau) \equiv 0\end{aligned}$$

故 Φ 的确为运动的首次积分。

对应于保守力学系统的 Lie 对称性及守恒量的研究已有了大量成熟的工作,在 80 年代中后期并有了用 REDUCE 系统编制的

软件包完成确定各种力学系统的 Lie 对称性的工作，这些工作都在经过简单修改后应用于非保守力学系统的 Lie 对称性及守恒量的研究。

例 9 考虑非保守力学系统

$$\ddot{q} = \dot{q}^3 \tag{3.5.9}$$

的 Lie 对称性与不变量。

运动微分方程(3.5.9)式在无穷小变换的生成函数 $\xi = \xi(t, q), \tau = \tau(t, q)$ 的点变换下的不变性条件为

$$\xi_{tt} + \dot{q}(2\xi_{tq} - \tau_{tt}) + \dot{q}^2(\xi_{qq} - 2\tau_{tq}) - \dot{q}^3\tau_{qq} + (\xi_q - 2\tau_t - 3\dot{q}\tau_q)\dot{q}^3 = 3[\xi_t - \dot{q}(\xi_q - \tau_t) - \dot{q}^2\tau_q]\dot{q}^2 \tag{3.5.10}$$

按 $\dot{q}$ 的各次幂系数为零，则有

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{qq} + 2\xi_q - \tau_t = 0 \\ &3\xi_t - \xi_{qq} + 2\tau_{tq} = 0 \\ &\tau_{tt} - 2\xi_{tq} = 0 \\ &\xi_{tt} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.5.11}$$

求解(3.5.11)式可得

$$\tau = c_1 + c_2 q + c_3 q^2 + c_4 q^3 + c_5 t + c_6 tq + c_7(q^4 - 4t^2) \tag{3.5.12}$$

对应的空间生成函数

$$\xi = -\frac{1}{6}(6c_4 + 24c_7 + 3c_6)t + \frac{1}{2}(c_5 - 2c_3 - 20c_7)q - \frac{1}{4}(c_6 + 6c_4)q^2 + c_8 \tag{3.5.13}$$

进一步可以确定不存在产生守恒量的 f。

例 10 假设力学系统的 Lagrange 函数 $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$，非保守广义力 $Q = \dot{q}$，此时力学系统的运动微分方程为

$$\ddot{q} = \dot{q} \tag{3.5.14}$$

试分析该力学系统的 Lie 对称性与不变量。

方程式(3.5.14)在点变换式(3.5.2)作用下保持不变的充要条件是

$$\xi_{tt} + (2\xi_{tq} - \tau_{tt})\dot{q} + (\xi_{qq} - 2\tau_{tq})\dot{q}^2 - \tau_{qq}\dot{q}^3 + (\xi_q - 2\tau_t - 3\dot{q}\tau_q)\dot{q} = \xi_t + \dot{q}(\xi_q - \tau_t) - \dot{q}^2\tau_q \tag{3.5.15}$$

按 $\dot{q}$ 的各次幂的系数为零,有

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{tt} = \xi_t \\ &2\xi_{tq} - \tau_{tt} + \xi_q - 2\tau_t = \xi_q - \tau_t \\ &\xi_{qq} - 2\tau_{tq} - 3\tau_q = -\tau_q \\ &\tau_{qq} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.5.16}$$

求解方程组(3.5.16)可得

$$\left.\begin{aligned} &\tau = c_6 + c_7 e^t - 2c_1c_3 + e^t \\ &\xi = c_1 e^t(c_3 q + c_4) + g(q) \end{aligned}\right. \tag{3.5.17}$$

代入(3.5.7)式后最终解得存在守恒量的空间与时间的生成函数为

$$\left.\begin{aligned} &\tau = c_6 \\ &\xi = c_6 q + c_8 \end{aligned}\right. \tag{3.5.18}$$

相应的规范函数为

$$f = \frac{1}{2}c_6 q^2 + c_8 q \tag{3.5.19}$$

而力学系统的守恒量为

$$\Phi = \frac{c_6}{2}q^2 + c_8 q - \left[\frac{c_6}{2}\dot{q}^2 + \dot{q}(c_6 q + c_8 - c_6\dot{q})\right] \tag{3.5.20}$$

若分别取 c_6 任意、$c_8 = 0$;或 c_8 任意、$c_6 = 0$,则得二个独立的守恒量

$$\Phi_1 = \dot{q} - q \tag{3.5.21}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - q\dot{q} - \frac{1}{2}q^2 \tag{3.5.22}$$

第六节　连续介质力学系统的 Lie 对称性

连续介质力学系统的控制方程为一组偏微分方程，研究它们的 Lie 对称性问题一般说来更为复杂。在这里，我们以正交异性板的小挠度静力问题为例加以讨论。偏微分方程为

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + A\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + B\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \tag{3.6.1}$$

式中 A，B 为常数。(3.6.1)式是正交异性平面应力板的控制方程和对应于正交异性弯板控制方程的齐次方程，同时，按照 Pipes-Pagano 模型，也为复合材料叠层板每一层的控制方程。

考虑单参数变换群

$$\begin{cases} \bar{x}_i = f_i(x,u;a) = x_i + a\xi_i(x,u) + O(a^2) \\ \qquad (i = 1,2; x_1 = x, x_2 = y) \\ \bar{u} = g(x,u;a) = u + a\bar{\eta}(x,u) + O(a^2) \end{cases} \tag{3.6.2}$$

(3.6.2)式对应的无穷小生成子为

$$U = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \bar{\eta}\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.6.3}$$

其 k 阶扩展为

$$U^{(k)} = U + \sum_{l=1}^{k} \zeta_{i_1 \cdots i_l} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_l}} \tag{3.6.4}$$

(3.6.4)式中系数的逆推式为

$$\begin{cases} \zeta_i = D_i(\bar{\eta}) - u_s D_i(\xi_s) \\ \zeta_{i_1 \cdots i_l} = D_{i_l}(\zeta_{i_1 \cdots i_{l-1}}) - (u_{i_1 \cdots i_l s} D_{i_l}(\xi_s)) \\ D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} + u_i \dfrac{\partial}{\partial u} \end{cases} \tag{3.6.5}$$

因(3.6.5)式为 4 阶偏微分方程，其 Lie 对称性条件为

$$U^{(4)}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + A\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + B\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) = 0 \tag{3.6.6}$$

即得

$$\bar{\eta}_{xxxx} + A\bar{\eta}_{xxyy} + B\bar{\eta}_{yyyy} = 0 \tag{3.6.7}$$

对于线性微分方程，Lie变换群(3.6.2)式中第二式可换成

$$\bar{u} = u + u\bar{\eta}(x)\alpha + O(\alpha^2) \tag{3.6.8}$$

这样更换不会影响结果的正确性，但却可使运算大为简化。进一步分离(3.6.6)式中各阶导数的系数，令其均为零，便得到方程(3.6.1)式 Lie 对称性的确定方程组：

$$\begin{cases}
A\xi_{1y} + 2\xi_{2x} = 0 \\
\xi_{1x} - \xi_{2y} = 0 \\
2B\xi_{1y} + A\xi_{2x} = 0 \\
\xi_{1y} + \xi_{2x} = 0 \\
4\eta_x - A\xi_{1yy} - 6\xi_{1xx} = 0 \\
(2\eta_y - (\xi_{2yy} + 4\xi_{1xy}))A - 6\xi_{2xx} = 0 \\
4B\eta_y - 6B\xi_{2yy} - A\xi_{2xx} = 0 \\
A\eta_{yy} + 6\eta_{xx} - 2A\xi_{1xyy} - 4\xi_{1xxx} = 0 \\
4A\eta_{xy} - 4B\xi_{1yyy} - A(2\xi_{2xyy} + 2\xi_{1xxy}) - 4\xi_{2xxx} = 0 \\
6B\eta_{yy} + A\eta_{xx} - 4B\xi_{2yyy} - 2A\xi_{2xxy} = 0 \\
4\eta_{xxx} + 2A\eta_{xyy} - B\xi_{1yyyy} - A\xi_{1xxyy} - \xi_{1xxxx} = 0 \\
4B\eta_{yyy} + 2A\eta_{xxy} - B\xi_{2yyyy} - A\xi_{2xxyy} - \xi_{2xxxx} = 0 \\
B\eta_{yyyy} + \eta_{xxxx} + A\eta_{xxyy} = 0
\end{cases} \tag{3.6.9}$$

联立求解(3.6.9)式，可以分别得出两种情况的无穷小生成子系数：

1)非退化情况 ($\xi_{1y} = \xi_{2x} = 0, A^2 \neq 4B$)

$$\xi_1 = k_0 x + k_1 \qquad \xi_2 = k_0 y + k_2 \qquad \bar{\eta} = k_3 u \tag{3.6.10}$$

式中 k_i ($i = 0, \cdots, 3$)均为常系数。

2)退化情况($\xi_{1y} \neq 0, \xi_{2x} \neq 0, A^2 = 4B$)

退化情况又可分为两类:

(i) $A = 2, B = 1$

此时原方程(3.6.1)式退化为双调和方程

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \qquad (3.6.11)$$

同时,由(3.6.9)式可得

$$\xi_{1x} = \xi_{2y} \qquad \xi_{1y} = -\xi_{2x} \qquad (3.6.12)$$

因(3.6.12)式为 Cauchy-Riemann 方程组,因而知道(3.6.11)式具有无穷多 Lie 对称群。

(ii) $A \neq 2, \quad B \neq 1$

此时 $A = \pm 2\sqrt{B}$ 。一般各向异性材料特性不会存在 $A = -2\sqrt{B}$ 的情况,故应舍去,将 $A = 2\sqrt{B}$ 代入原方程式(3.6.1),得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sqrt{B}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{B}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (3.6.13)$$

只要将 y 坐标加以减缩,譬如 $y_1 = y/B^{\frac{1}{4}}$,显而易见,方程(3.6.13)式仍退化为双调和方程。因此,今后将着重讨论非退化情况。由(3.6.10)式可知,其中总共 4 个 Lie 对称群元素。将它们加以组合后得到 20 个 Lie 群,其中群 $\mathscr{X}_3(k_3 \neq 0, k_0 = k_1 = k_2 = 0)$ 的特征方程为

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{du}{k_3 u} \qquad (3.6.14)$$

显然,由(3.6.14)式难以确定相似自变量和相似因变量,而其它群的相似变量却可以确定,从而得到降维方程。这 19 个群可归并成 4 族结果。

1) $k_0 \neq 0, \qquad k_3 = 0$

表 1

	$\mathscr{X}_{012}$	$\mathscr{X}_{01}$	$\mathscr{X}_{02}$	$\mathscr{X}_{0}$
P	$\frac{y+c_2}{x+c_1}$	$\frac{y}{x+c_1}$	$\frac{y+c_2}{x}$	$\frac{y}{x}$
F	$F(P)$	$F(P)$	$F(P)$	$F(P)$
u	$F(\frac{y+c_2}{x+c_1})$	$F(\frac{y}{x+c_1})$	$F(\frac{y+c_2}{x})$	$F(\frac{y}{x})$

表 1 中 P,F 分别为降维方程的相似自变量和相似因变量，而 u 表示原方程(3.6.1)式的解。其中常数

$$c_{ij}=\frac{k_i}{k_j}\quad c_k=\frac{k_k}{k_0} \tag{3.6.15}$$

表中 4 个群具有完全相同的降维方程，如

$$(P^4+AP^2+B)\frac{d^4F}{dP^4}+(12P^4+6AP)\frac{d^3F}{dP^3}$$
$$+(36P^2+6A)\frac{d^2F}{dP^2}+24P\frac{dF}{dP}=0 \tag{3.6.16}$$

2) $k_0\neq 0, k_3\neq 0$

此族包含表 2 两种类型。

表 2

	$\mathscr{X}_{0123}$	$\mathscr{X}_{013}$	$\mathscr{X}_{023}$	$\mathscr{X}_{03}$
P	$\frac{y+c_2}{x_{c_1}}$	$\frac{y}{x+c_1}$	$\frac{y+c_2}{x}$	$\frac{y}{x}$
F	$F(P)$	$F(P)$	$F(P)$	$F(P)$
$u_2^{(1)}$	$(x+c_1)^{c_3}\times F_2^{(1)}(P)$	$(x+c_1)^{c_3}\times F_2^{(1)}(P)$	$x^{c_3}F_2^{(1)}(P)$	$x^{c_3}F_2^{(1)}(P)$
$u_2^{(2)}$	$(y+c_2)^{c_3}\times F_2^{(2)}(P)$	$y^{c_3}F_2^{(2)}(P)$	$(y+c_2)^{c_3}\times F_2^{(2)}(P)$	$y^{c_3}F_2^{(2)}(P)$

第一种类型的降维方程为

$$(P^4+AP^2+B)\frac{d^4F}{dP^4}+(12P^3-4c_3P^3-2Ac_3P+6AP)\frac{d^3F}{dP^3}$$

$$+(36P^2-30c_3P^2+6c_3^2P^2+Ac_3^2-5Ac_3+6A)\frac{d^2F}{dP^2}$$

$$+(24P-44c_3P+24c_3^2P-4c_3^2P)\frac{dF}{dP}$$

$$+(c_3^4-6c_3^3+11c_3^2-6c_3)F=0 \qquad (3.6.17)$$

第二种类型的降维方程为

$$(P^8+AP^6+BP^4)\frac{d^4F}{dP^4}+(12P^3+2Ac_3P^5+6AP^5$$

$$+4Bc_3P^3)\frac{d^3F}{dP^3}+(36P^6+Ac_3^2P^4+7Ac_3P^4+6AP^4$$

$$+6Bc_3^2P^2-6Bc_3P^2)\frac{d^2F}{dP^2}+(24P^5+2Ac_3^2P^3$$

$$+2Ac_3P^3+4Bc_3^2P-12Bc_3^2P+8Bc_3P)\frac{dF}{dP}+(Bc_3^4$$

$$-6Bc_3^3+11Bc_3^2-6Bc_3)F=0 \qquad (3.6.18)$$

3) $k_0=0, k_3=0$

表 3

	$\mathscr{X}_{12}$	$\mathscr{X}_1$	$\mathscr{X}_2$
P	$y-c_{21}x$	y	x
F	$F(P)$	$F(P)$	$F(P)$
u	$F(y-c_{21}x)$	$F(y)$	$F(x)$

它们的降维方程为

$$\frac{d^4F}{dP^4}=0 \qquad (3.6.19)$$

4) $k_0=0, k_3\neq 0$

表 4

	$\mathscr{X}_{123}^{(1)}$	$\mathscr{X}_{123}^{(2)}$	$\mathscr{X}_{13}$	$\mathscr{X}_{23}$
P	$y-c_{31}x$	$y-c_{21}x$	y	x
F	$F(P)$	$F(P)$	$F(P)$	$F(P)$
u	$e^{c_{31}z}F(P)$	$e^{c_{21}z}F(P)$	$e^{c_{31}z}F(P)$	$e^{c_{32}y}F(P)$

本族共有 4 个降维方程

$\mathscr{X}_{123}^{(1)}$:

$$(c_{21}^4 + Ac_{21}^2 + B)\frac{d^4F}{dP^4} - (4c_{31}^3c_{21} + 2Ac_{21}c_{31})\frac{d^3F}{dP^3} + (6c_{21}^2c_{31}^2 + Ac_{31}^2)\frac{d^2F}{dP^2} - 4c_{21}c_{31}^3\frac{dF}{dP} + c_{31}^4F = 0 \tag{3.6.20}$$

$\mathscr{X}_{123}^{(2)}$:

$$(c_{21}^4 + Ac_{21}^2 + B)\frac{d^4F}{dP^4} + (2Ac_{21}^2c_{32} + 2Bc_{32})\frac{d^3F}{dP^3} + (Ac_{21}^2c_{32}^2 + 6Bc_{32}^2)\frac{d^2F}{dP^2} + 4BC^3\frac{dF}{dP} + Bc_{32}^4F = 0 \tag{3.6.21}$$

$$\mathscr{X}_{13}: B\frac{d^4F}{dP^4} + Ac_{31}^2\frac{d^2F}{dP^2} + c_{31}^4F = 0 \tag{3.6.22}$$

$$\mathscr{X}_{23}: \frac{d^4F}{dP^4} + Ac_{32}^2\frac{d^2F}{dP^2} + Bc_{32}^4F = 0 \tag{3.6.23}$$

通过积分(3.6.16)式,得

$$F_1(P) = \frac{G_1}{2}\ln\left(\frac{P^2 + R_1}{P^2 + R_2}\right) + \frac{G_2}{\sqrt{R_1}}\operatorname{arctg}\left(\frac{P}{\sqrt{R_1}}\right) - \frac{G_3}{\sqrt{R_2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{P}{\sqrt{R_2}}\right) + G_4 \tag{3.6.24}$$

式中

$$R_{1,2} = \frac{A}{2} \pm \left(\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.6.25}$$

G_i 为积分常数。

积分方程(3.6.17)式,得

$$F_2(P) = \frac{G_1}{2}\ln\left(\frac{P^2 + R_1}{P^2 + R_2}\right) + \frac{G_2}{\sqrt{R_1}}\operatorname{arctg}\left(\frac{P}{\sqrt{R_1}}\right) - \frac{G_3}{\sqrt{R_2}}$$

$$\times \operatorname{arctg}\left(\frac{P}{\sqrt{R_2}}\right)+\int\left(\frac{\int\left(\int\left(\int(\quad)_A dP\right)dP\right)dP}{P^4+(R_1+R_2)P^2+R_1R_2}\right)dP+G_4 \tag{3.6.26}$$

式中

$$\begin{aligned}(\quad)_A=&(4c_3P^3+2(R_1+R_2)c_3P)\frac{d^3F_2}{dP^3}\\&+(30c_3P^2-6c_3^2P^2-(R_1+R_2)c_3^2+5(R_1+R_2)c_3)\\&\times\frac{d^2F_2}{dP^2}+(44c_3P-24c_3^2P+4c_3^3P)\frac{dF_2}{dP}\\&-(c_3^4-6c_3^3+11c_3^2-6c_3)F_2\end{aligned} \tag{3.6.27}$$

显然，只要 c_3 确定，(3.6.26)式总可近似或精确地求解，如选 $c_3=0$，则(3.6.26)式的解为

$$\begin{aligned}F_2(P)=&\frac{G_1}{2}P\ln\left(\frac{P^2+R_1}{P^2+R_2}\right)+\left(G_1\sqrt{R_1}+\frac{G_2}{\sqrt{R_1}}P\right)\\&\times\operatorname{arctg}\left(\frac{P}{\sqrt{R_1}}\right)-\left(G_1\sqrt{R_2}+\frac{G_2}{\sqrt{R_2}}\right)\operatorname{arctg}\left(\frac{P}{\sqrt{R_2}}\right)\\&+\frac{G_2}{2}\ln\left(\frac{1+P^2/R_1}{1+P^2/R_2}\right)+G_3P+G_4\end{aligned} \tag{3.6.28}$$

可以证明

$$u_2(P)=(x+c_1)^{c_3}F_2^{(1)}(P)=(y+c_2)^{c_3}F_2^{(2)}(P) \tag{3.6.29}$$

式中 $F_2^{(1)}(P)$，$F_2^{(2)}(P)$ 分别为方程(3.6.17)，(3.6.18)的解，因而不必再求解方程(3.6.18)式，因为它可直接从方程(3.6.17)的解导出来。

积分方程(3.6.19)，得

$$F_3(P)=G_1P^3+G_2P^2+G_3P+G_4 \tag{3.6.30}$$

积分方程(3.6.20)～(3.6.23)诸式，由于它们都为常系数常微分方程，且它们解显然应为相同类型的函数，故只取其一进行分析即可。取方程(3.6.23)式加以讨论，得

$$F_4(P) = G_1 e^{N_1 P} + G_2 e^{N_2 P} + G_3 e^{N_3 P} + G_4 e^{N_4 P} \tag{3.6.31}$$

式中

$$\begin{cases} N_{1,2} = \pm \dfrac{c_{32}}{\sqrt{2}} \left(\dfrac{(A^2 - 4B)^{\frac{1}{2}}}{B} - \dfrac{A}{B} \right)^{1/2} \\ N_{3,4} = \pm \dfrac{c_{32}}{\sqrt{2}} \left(- \dfrac{(A^2 - 4B)^{\frac{1}{2}}}{B} - \dfrac{A}{B} \right)^{1/2} \end{cases} \tag{3.6.32}$$

第四章　Lagrange 对称性理论

Noether 对称性描述的是力学系统的作用量在无穷小变换的作用下保持不变的性质，Lie 对称性讨论的是力学系统的运动微分方程在无穷小变换的作用下保持形式不变的性质。通过前面几章的讨论，我们发现，Noether 对称性和 Lie 对称性都可以产生守恒量。这些结论有益于我们对力学系统本质特征的认识。

无论是 Noether 对称性还是 Lie 对称性，仔细分析一下不难发现，它们都是将力学系统运动微分方程的积分曲线映射为积分曲线。这自然产生一个问题：是否只要能将力学系统的积分曲线映射为积分曲线就可以求得力学系统的守恒量呢？

1966 年，Currie 和 Saletan 曾研究了单自由度力学系统的等价 Lagrange 函数问题，并指出在此情形下存在守恒量；1981 年，Hojman 和 Harleston 将此结果推广到了一般的多自由度系统，并发现了一些新的结果；类似问题 Lutzky 等也进行过研究，他把这种性质称之为非 Noether 对称性，在本书中，我们称之为 Lagrange 对称性。

第一节　单自由度完整保守力学系统的 Lagrange 对称性

在这一节中，我们首先讨论单自由度的完整保守力学系统的 Lagrange 对称性。所谓 Lagrange 对称性，是指力学系统的运动微分方程的解集在变换下的不变性；或者说对应于某一个 Lagrange 函数的运动微分方程的每一个解都满足从另一个 Lagrange 函数得到的运动微分方程。

假设对于某一单自由度的完整保守力学系统存在两个 Lagrange 函数 $L(t,q,\dot{q})$ 和 $\overline{L}(t,q,\dot{q})$，若存在 Lagrange 对称性，

则有

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q} = f(t,q,\dot{q})\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) \tag{4.1.1}$$

其中

$$f = \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial q^2} \Big/ \frac{\partial^2 L}{\partial q^2} \quad (0 \neq f \neq \infty) \tag{4.1.2}$$

Currie 和 Saletan 曾经证明了 $f(t,q,\dot{q})$ 是一个运动常数，并且给出了对任意一个相应于 Lagrange 函数 $L(t,q,\dot{q})$ 的守恒量，都可由此给出一个 Lagrange 函数 $\bar{L}(t,q,\dot{q})$。这一结论在此我们不予证明。我们来看一个单自由度的简谐振子问题，通常情况下，按 $L = T - V$ 确定的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2 \tag{4.1.3}$$

相应的 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \ddot{x} + x = 0 \tag{4.1.4}$$

实际上，(4.1.4)式的解也可以由另外的 Lagrange 函数导出，也就是说，该力学系统存在 Lagrange 对称性。如取

$$\bar{L} = \frac{1}{2}x\dot{x}^2\cos t - \frac{1}{6}\dot{x}^3\sin t - \frac{1}{3}x^3\cos t \tag{4.1.5}$$

虽说它已不是通常意义下的动能减势能的 Lagrange 函数了，但由于它对应的 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial x} = (x\cos t - \dot{x}\sin t)(\ddot{x} + x) = 0 \tag{4.1.6}$$

比较(4.1.4)，(4.1.6)两式可以发现，它们两者具有同解，并且(4.1.1)式中 f 为

$$f(t,x,\dot{x}) = x\cos t - \dot{x}\sin t \tag{4.1.7}$$

很容易验证 $\dot{f} = 0$，即 $f = x\cos t - \dot{x}\sin t$ 为单自由度简谐振子的一个守恒量。而该守恒量在上一章讨论简谐振子力学系统的 Lie 对称性时也曾经得到((3.3.18d)式)。

实际上，运动微分方程(4.1.4)，(4.1.6)式的解具有相同的形式

$$x = A\sin(t + \alpha) \tag{4.1.8}$$

其中 A，α 均为常数。

第二节　多自由度完整保守力学系统的 Lagrange 对称性

在这一节中，我们考虑具有 n 个自由度的完整保守力学系统的 Lagrange 对称性。假设力学系统的 Lagrange 函数为 $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)(i = 1, \cdots, n)$，并要求

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) = \det(W_{ij}) \neq 0 \tag{4.2.1}$$

即考虑非奇异的力学系统。

定义算子

$$L_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = W_{rs}\ddot{q}_s + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_s} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} \tag{4.2.2}$$

对于 Lagrange 函数 $\overline{L} = \overline{L}(t, q_i, \dot{q}_i)$ $(\det \overline{W} \neq 0)$，类似于(4.2.2)式定义 $\overline{L}_s$，称 $\overline{L}$ 从属于 L 的充分必要条件是指

$$\{L_r = 0\} \Rightarrow \{\overline{L}_s = 0\} \tag{4.2.3}$$

可以证明若 $\overline{L}$ 从属于 L，则一定有 L 从属于 $\overline{L}$，且有

$$\overline{L}_r = \Lambda_r^s(t, q, \dot{q})L_s \tag{4.2.4}$$

其中 $\det\Lambda \neq 0$，而且 Λ 的所有整数幂的迹都是对应力学系统的守恒量。这一结论给出了 Lagrange 对称性与守恒量之间的关系。

对于 Lagrange 函数 $L(t, q_i, \dot{q}_i)$ 和 $\overline{L}(t, q_i, \dot{q}_i)$ 相应的运动微分方程为

$$W_{rs}\ddot{q}_s + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s - \frac{\partial L}{\partial q_r} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial t} = 0 \tag{4.2.5}$$

$$\overline{W}_{rs}\ddot{q}_s + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_r} + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial q_r \partial t} = 0 \tag{4.2.6}$$

假设 U 和 $\overline{U}$ 分别是 W 和 $\overline{W}$ 的逆矩阵，根据(4.2.6)式有

$$\ddot{q}_s = \overline{U}^{sp}\left(\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_p} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial t}\right) \tag{4.2.7}$$

由于我们研究 Lagrange 对称性，因而(4.2.5)式隐含了(4.2.6)式，因此，我们将(4.2.7)式代入(4.2.5)式，则有

$$W_{rs}\overline{U}^{sp}\left(\frac{\partial \overline{L}}{\partial q_p} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial t}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} \tag{4.2.8}$$

且 L_r 可以写为

$$\begin{aligned} L_r &= {}_{rs}\overline{U}^{sp}\left(\overline{W}_{pt}\ddot{q}_t + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_p} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial t}\right) \\ &= W_{rs}\overline{U}^{sp}\overline{L}_p \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

即

$$\overline{L}_p = \Lambda_p{}^r L_r \tag{4.2.10}$$

其中

$$\Lambda_p^r = \overline{W}_{ps}(t, q, \dot{q})U^{sr}(t, q, \dot{q}) \tag{4.2.11}$$

且 $\det\Lambda \neq 0$，即有

$$(\{L_r = 0\} \Rightarrow \{\overline{L}_s = 0\}) \Rightarrow (\{L_r = 0\} \Leftrightarrow \{\overline{L}_s = 0\}) \tag{4.2.12}$$

根据(4.2.11)式，方程式(4.2.8)可以写为

$$\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial t} + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_s} = \Lambda_s{}^r\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial L}{\partial q_r} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t}\right) \tag{4.2.13}$$

将(4.2.13)两边同时对 $\dot{q}_u$ 求偏导数，则有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_s \partial q_t}\dot{q}_t + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial q_u} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial q_s} + \frac{\partial^3 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_s \partial t} \\ &= \frac{\partial \Lambda_r^s}{\partial \dot{q}_u}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial L}{\partial q_r} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t}\right) \\ &+ \Lambda_s{}^r\left(\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_u \partial q_t}\dot{q}_t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_u} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u \partial q_r} + \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_u \partial t}\right) \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

根据(4.2.11)式有

$$\Lambda_r{}^s W_{st} = \overline{W}_{rt} \tag{4.2.15}$$

将(4.2.15)式两边对 $\dot{q}_u$ 求导,整理即得

$$\frac{\partial \Lambda_r{}^s}{\partial \dot{q}_u} W_{st} = \frac{\partial^3 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_t \partial \dot{q}_u} - \Lambda_r{}^s \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_t \partial \dot{q}_u}$$

$$= \frac{\partial \overline{W}_{ru}}{\partial \dot{q}_t} - \Lambda_r{}^s \frac{\partial W_{us}}{\partial \dot{q}_t} = \frac{\partial \Lambda_r{}^s}{\partial \dot{q}_t} W_{rs} \tag{4.2.16}$$

进一步,将(4.2.15)式先对 q_t 求偏导,再在两边同乘 $\dot{q}_t$,则有

$$\Lambda_s{}^r \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_u \partial q_t} \dot{q}_t - \frac{\partial^3 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_s \partial q_t} \dot{q}_t = - \frac{\partial \Lambda_s{}^r}{\partial q_t} \dot{q}_t \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_u} \tag{4.2.17}$$

将方程

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_t} \dot{q}_t - \frac{\partial L}{\partial q_r} = - W_{rt} \ddot{q}_t \tag{4.2.18}$$

及(4.2.17)式代入(4.2.14)式,则有

$$\frac{\partial^3 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_s \partial t} + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial q_u} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial q_s} = - \frac{\partial \Lambda_r{}^s}{\partial \dot{q}_u} W_{rt} \ddot{q}_t$$

$$- \frac{\partial \Lambda_s{}^r}{\partial q_t} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_u} \dot{q}_t + \Lambda_s{}^r \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_u} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u \partial q_r} + \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_u \partial t} \right) \tag{4.2.19}$$

利用(4.2.16)式,则(4.2.19)式可以写为

$$\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial q_u} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial q_s} = - \frac{d \Lambda_s{}^r}{dt} W_{ru}$$

$$+ \Lambda_s{}^r \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_u} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u \partial q_r} \right) \tag{4.2.20}$$

定义两个矩阵 $T = \{T_{ru}\}$, $\overline{T} = \{\overline{T}_{ru}\}$ 为

$$T_{ru} = \frac{\partial^2 L}{\partial q_u \partial \dot{q}_r} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u \partial q_r} \tag{4.2.21}$$

$$\overline{T}_{ru} = \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_r \partial q_u} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial q_r} \tag{4.2.22}$$

将上两式代入(4.2.20)式,我们就可得到一个矩阵微分方程式

$$\dot{\Lambda} = - \overline{T} U + \Lambda T U \tag{4.2.23}$$

根据定义，T，$\overline{T}$ 都是反对称矩阵，U，$\overline{W}$ 及 $\Lambda = \overline{W}U$ 都是对称矩阵，因此，直接求解(4.2.23)式可得

$$(\mathrm{tr}(\Lambda)^m)^{\cdot} = 0 \quad (m \text{ 为正整数}) \tag{4.2.24}$$

因此，$\mathrm{tr}(\Lambda)^m$ 都是常数。对于一个 $n \times n$ 矩阵 Λ，当 $k \geqslant n+1$ 时，$\mathrm{tr}(\Lambda)^k$ 都能用 $\mathrm{tr}(\Lambda)^i (i = 1, \cdots, n)$ 代数表示，因此，由(4.2.24)式得到的常数 $\mathrm{tr}(\Lambda)^m$ 并不一定都是函数独立的，甚至可能 Λ 的前 n 阶幂的迹都不会函数独立。

根据上述结果有：Λ 的所有不变量或者特征值都是力学系统的运动常数。

在有些问题中，$\det\Lambda \neq 0$ 在不失去 Lagrange 对称性下有可能加以削弱。我们来讨论这一问题。

对于 Lagrange 函数 $\overline{L}(t, q, \dot{q})$，$\rho L(t, q, \dot{q})(\rho \neq 0)$，为区分两者的差异，我们引入 l

$$l = \overline{L}(t, q, \dot{q}) - \rho L(t, q, \dot{q}) \tag{4.2.25}$$

且有 $l_r = \overline{L}_r - \rho L_r$，由于 $\overline{L}_r = \Lambda_r^s L_s$，因而有

$$l_r = (\Lambda_r^s - \rho\delta_r^s)L_s = \Omega_r^s L_s \tag{4.2.26}$$

其中 δ_r^s 为 Kronecker 记号，而

$$\Omega = \Lambda - \rho I \tag{4.2.27}$$

对于 $\det\Lambda \neq 0$，并不一定有 $\det\Omega \neq 0$。因此，虽说 $\{L_s = 0\}$ 意味着 $\{l_r = 0\}$，但一般而言 $\{l_r = 0\}$ 并不意味着 $\{L_s = 0\}$。例如，假若 L 能写成

$$L = L(t, q_i, \dot{q}_i) = L_1(t, q_a, \dot{q}_a) + L_2(t, q_b, \dot{q}_b) \tag{4.2.28}$$

其中 L_1, L_2 所含的变量不相同。取 $l_1 = \lambda_1 L_1$，$l_2 = \lambda_2 L_2$ $(-\rho \neq \lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2 \neq -\rho)$，而

$$\overline{L}_1 = \rho L + \lambda_1 L_1 \qquad \overline{L}_2 = \rho L + \lambda_2 L_2 \tag{4.2.29}$$

则有

$$\begin{aligned} &\{L_r = 0\} \Rightarrow \{l_{1a} = 0\} \\ &\{L_r = 0\} \Rightarrow \{l_{2b} = 0\} \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

但反之不然，即

$$\begin{aligned}\{l_{1a}=0\} &\not\Rightarrow \{L_r=0\}\\ \{l_{2b}=0\} &\not\Rightarrow \{L_r=0\}\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

一个明显的例子为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \tag{4.2.32}$$

$$l_1=\frac{1}{2}\lambda_1(\dot{x}^2-x^2)\quad l_2=\frac{1}{2}\lambda_2(\dot{y}^2-y^2) \tag{4.2.33}$$

$$\bar{L}_2=\frac{1}{2}[(\dot{x}^2-\dot{y}^2)-(x^2-y^2)]$$

$$(\rho=1,2;\lambda_1=0,2;\lambda_2=2) \tag{4.2.34}$$

对一些运动微分方程有 $\det\Lambda=0$ 时，仍可能有 Lagrange 对称性。尽管 $\det W\neq 0$，也可能有 $\det\overline{W}=0$，这时不能给出 $\bar{L}_r=0$ 的解，也不包含在 $L_s=0$ 的解中。

第三节　多自由度完整保守力学系统的 Lagrange 对称性：几个实例

例 1　考虑二自由度简谐振动系统。系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \tag{4.3.1}$$

相应的运动微分方程为

$$L_i=\ddot{q}_i+q_i=0\quad(i=1,2) \tag{4.3.2}$$

根据(4.2.26)式，将包含加速度的取为一项，其余部分取为另一项，即

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\dot{q}_r\partial\dot{q}_t}=\Omega_{rt} \tag{4.3.3a}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial\dot{q}_r\partial q_t}\dot{q}_t+\frac{\partial^2 l}{\partial\dot{q}_r\partial t}-\frac{\partial l}{\partial q_r}=\Omega_{rs}q_s \tag{4.3.3b}$$

因为 Ω 和 Ω^2 的迹是常数，且 Ω 是对称矩阵，根据(4.3.3a)式取

$$\Omega = \begin{pmatrix} E & C \\ C & E \end{pmatrix} \tag{4.3.4}$$

其中 $E = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2)$ 为该力学系统的机械能，C 是由(4.3.3)式确定的含有 $q_i, \dot{q}_i$ 的运动常数。

对于(4.3.4)式，我们有

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} = E \tag{4.3.5a}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_2} = E \tag{4.3.5b}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} = C \tag{4.3.5c}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_1 \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_1 \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_1 \partial t} - \frac{\partial l}{\partial q_1} = Eq_1 + Cq_2 \tag{4.3.5d}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_2 \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_2 \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_2 \partial t} - \frac{\partial l}{\partial q_2} = Cq_1 + Eq_2 \tag{4.3.5e}$$

由此可以解得

$$c = \dot{q}_1\dot{q}_2 + q_1q_2 \tag{4.3.6}$$

$$l = \frac{1}{24}(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4) + \frac{1}{4}\dot{q}_1^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{3}{4}q_1^2q_2^2 - \frac{1}{8}(q_1^4 + q_2^4) \tag{4.3.7}$$

因而可得对于 l 的运动微分方程

$$l_1 = E(\ddot{q}_1 + q_1) + C(\ddot{q}_2 + q_2) = 0 \tag{4.3.8a}$$

$$l_2 = C(\ddot{q}_1 + q_1) + E(\ddot{q}_2 + q_2) = 0 \tag{4.3.8b}$$

或

$$l_r = \Omega_{rs}L_s = 0 \qquad (r, s = 1,2) \tag{4.3.9}$$

对于矩阵 Ω，有

$$\det\Omega = (E^2 - C^2) = (E - C)(E + C) \quad (4.3.10)$$

可以证明 $\det\Omega \geqslant 0$。

定义两个向量 u_1, u_2 为

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{q}_i, q_i) \quad (i = 1,2) \quad (4.3.11)$$

则有

$$\begin{aligned} E &= u_1^2 + u_2^2 \\ C &= 2u_1 \cdot u_2 \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

因此有

$$\begin{aligned} \det\Omega &= (E - C)(E + C) \\ &= (u_1 - u_2)^2(u_1 + u_2)^2 \geqslant 0 \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

对此例我们考虑下面情形：

$$\det\Omega = 0 \quad (4.3.14)$$

因为 $\det\Omega = 0$ 意味着 $u_1 = -u_2$ 和/或 $u_1 = u_2$，此为方程组(4.3.2)式的特解。若 $u_1 = u_2$，则 $E = C$，Ω 的秩为 $1(E \neq 0)$，方程组(4.3.8)式约化为

$$(\dot{q}_1^2 + q_1^2)(\ddot{q}_1 + q_1) = 0 \quad (4.3.15)$$

因此，我们有两个方程，他们的解都包含在方程(4.3.8)式中。若 $u_1 = -u_2$，则 $E = -C$，$\mathrm{rank}\Omega = 1(E \neq 0)$，也有上述类似结论。若 $u_1 = u_2$ 且 $u_1 = -u_2$，则 $q_i = \dot{q}_i = 0$，此时振子为静止的。因此，当我们削弱 $\det\Omega \neq 0$ 的条件时，也可能存在 Lagrange 对称性。

再来考虑(4.2.25)式，有

$$\bar{L} = \rho L + l \quad (\rho > 0) \quad (4.3.16)$$

对应于 $\bar{L}$ 的运动微分方程为

$$\begin{bmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E + \rho & C \\ C & E + \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.17)$$

这里

$$\Lambda = \begin{pmatrix} E+\rho & C \\ C & E+\rho \end{pmatrix} \tag{4.3.18}$$

因此有

$$\det\Lambda = (E^2 - C^2) + 2\rho E + \rho^2 > 0 \tag{4.3.19}$$

因为 Λ 可逆,因而在 L,$\bar{L}$ 之间有 Lagrange 对称性。

对于 Lagrange 函数(4.3.7)式,按

$$p_1 = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_1} \qquad p_2 = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_2} \tag{4.3.20}$$

确定广义动量,则有 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} h = {} & \frac{1}{8}(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4 + q_1^4 + q_2^4) + \frac{3}{4}(q_1^2 q_2^2 + \dot{q}_1^2 \dot{q}_2^2) \\ & + \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + T_1 + T_2) \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(S_1 - S_2 + T_1 - T_2) \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

而

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \{3(p_1+p_2) + [(q_1+q_2)^6 + 9(p_1+p_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \\ S_2 &= \{3(p_1-p_2) + [(q_1-q_2)^6 + 9(p_1-p_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \\ T_1 &= \{3(p_1+p_2) - [(q_1+q_2)^6 + 9(p_1+p_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \\ T_2 &= \{3(p_1-p_2) - [(q_1-q_2)^6 + 9(p_1-p_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \tag{4.3.23}$$

例 2 对于例 1,若选择

$$\Omega = \begin{pmatrix} C & E \\ E & C \end{pmatrix} \tag{4.3.24}$$

则方程(4.3.5)式变为

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} = C \tag{4.3.25a}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_2} = C \tag{4.3.25b}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_2} = E \tag{4.3.25c}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_1 \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_1 \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_1 \partial t} - \frac{\partial l}{\partial q_1} = Cq_1 + Eq_2 \tag{4.3.25d}$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_2 \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_2 \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 l}{\partial \dot{q}_2 \partial t} - \frac{\partial l}{\partial q_2} = Eq_1 + Cq_2 \tag{4.3.25e}$$

求解(4.3.25)式可得

$$l = \frac{1}{6}\dot{q}_1\dot{q}_2(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}\dot{q}_1\dot{q}_2(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}q_1q_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}q_1q_2(q_1^2 + q_2^2) \tag{4.3.26}$$

由此而得的运动微分方程为

$$\begin{aligned} l_1 &= C(\ddot{q}_1 + q_1) + E(\ddot{q}_2 + q_2) = 0 \\ l_2 &= E(\ddot{q}_1 + q_2) + C(\ddot{q}_2 + q_2) = 0 \end{aligned} \tag{4.3.27}$$

对应于广义动量

$$p_1 = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_1} \qquad p_2 = \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_2}$$

有 Hamilton 函数为

$$h = \frac{1}{2}(q_1q_2 + \dot{q}_1\dot{q}_2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + q_1^2 + q_2^2) \tag{4.3.28}$$

其中

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + T_1 + T_2) \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(S_1 - S_2 + T_1 - T_2) \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

而

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \{3(p_1+p_2)+[(q_1+q_2)^6+9(p_1+p_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \\ S_2 &= \{-3(p_1-p_2)+[(q_1-q_2)^6+9(p_1-p_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \\ T_1 &= \{3(p_1+p_2)-[(q_1+q_2)^6+9(p_1+p_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \\ T_2 &= \{-3(p_1-p_2)-[(q_1+q_2)^6+9(p_1+p_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \end{aligned}\right\} \tag{4.3.30}$$

例 3 考虑 3 自由度简谐振动系统。系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2+q_3^2) \tag{4.3.31}$$

此时相应的运动微分方程

$$L_i = \ddot{q}_i + q_i = 0 \quad (i=1,2,3) \tag{4.3.32}$$

我们依然按上面二例的方法来求解，类似于(4.3.7)式得到

$$\begin{aligned} l = {} & \frac{1}{24}(\dot{q}_1^4+\dot{q}_2^4+\dot{q}_3^4)+\frac{1}{4}(\dot{q}_1^2\dot{q}_2^2+\dot{q}_1^2\dot{q}_3^2+\dot{q}_2^2\dot{q}_3^2) \\ & +\frac{1}{4}(q_1^2+q_2^2+q_3^2)(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2) \\ & +q_1q_2\dot{q}_1\dot{q}_3+q_1q_3\dot{q}_1\dot{q}_3+q_2q_3\dot{q}_2\dot{q}_3 \\ & -\frac{3}{4}(q_1^2q_2^2+q_1^2q_3^2+q_2^2q_3^2)-\frac{1}{8}(q_1^4+q_2^4+q_3^4) \end{aligned} \tag{4.3.33}$$

相对应的运动微分方程为

$$l_1 = E(\ddot{q}_1+q_1)+C_{12}(\ddot{q}_2+q_2)+C_{13}(\ddot{q}_3+q_3)=0 \tag{4.3.34a}$$

$$l_2 = C_{21}(\ddot{q}_1+q_1)+E(\ddot{q}_2+q_2)+C_{23}(\ddot{q}_3+q_3)=0 \tag{4.3.34b}$$

$$l_3 = C_{31}(\ddot{q}_1+q_1)+C_{22}(\ddot{q}_2+q_2)+E(\ddot{q}_3+q_3)=0 \tag{4.3.34c}$$

或写为

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & E & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.35}$$

其中 $E = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$ 为系统的总机械能，C_{ij} 是如下形式的常数

$$C_{ij} = q_i q_j + \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{4.3.36}$$

在此情形下

$$\Omega = \begin{vmatrix} E & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & E & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & E \end{vmatrix} \tag{4.3.37}$$

类似于例 1 定义向量 u_i，若 $E=0$，则 $u_i=0(i=1,2,3)$，此时振子静止。下面讨论中取 $E>0$，此时 Ω 的行列式的值为

$$\det\Omega = E^3 \begin{vmatrix} 1 & 2u_1 \cdot u_2/E & 2u_1u_3/E \\ 2u_2u_1/E & 1 & 2u_2u_3/E \\ 2u_3u_1/E & 2u_3u_2/E & 1 \end{vmatrix} \tag{4.3.38}$$

利用不等式

$$\begin{aligned} &(u_i - u_j)^2 + u_k^2 \geqslant 0 \\ &-(u_i + u_j)^2 - u_k^2 \leqslant 0 \end{aligned} \tag{4.3.39}$$

其中 $i \neq j \neq k$，$i,j,k = 1,2,3$，容易验证，$-1 \leqslant 2u_iu_j/E \leqslant 1$，因而可以定义一个单位向量 v_i 满足

$$\begin{aligned} &v_i \cdot v_i = 1 \\ &v_i \cdot v_j = 2u_i \cdot u_j/E \end{aligned} \quad (i,j = 1,2,3) \tag{4.3.40}$$

因此有

$$\det\Omega = E^3 \begin{vmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 \\ v_3 \cdot v_1 & v_3 \cdot v_2 & v_3 \cdot v_3 \end{vmatrix} \tag{4.3.41}$$

考虑到向量的运算法则，有

$$\det\Omega = E^3[\boldsymbol{\nu}_1 \times \boldsymbol{\nu}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}_3]^2 \tag{4.3.42}$$

由于 $E>0$，因此有 $\det\Omega \geqslant 0$。

利用 $\bar{L} = \rho L + l \quad (\rho>0)$ 有

$$\Lambda = \begin{vmatrix} E+\rho & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & E+\rho & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & E+\rho \end{vmatrix} \tag{4.3.43}$$

由此可得

$$\det\Lambda = \det\Omega + (3E^2 - C_{12}^2 - C_{13}^2 - C_{23}^2)\rho + 3E\rho^2 + \rho^3 > 0 \tag{4.3.44}$$

这时因为 $E^2 \geqslant C_{ij}^2$。由于 Λ 可逆，因此 L 与 $\bar{L}$ 有 Lagrange 对称性。

第四节　多自由度完整非保守力学系统的 Lagrange 对称性

设 L 是多自由度完整非保守力学系统中保守部分的 Lagrange 函数，Q_i 是非保守广义力，$W_{ij} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ 是非奇异矩阵，在某一变换下导致相同解集的 Lagrange 函数为 $\bar{L}$，非保守项为 $\bar{Q}_i$，$\bar{W}_{ij} = \dfrac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ 是非奇异矩阵。令

$$L_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - Q_r$$

$$= W_{rs}\ddot{q}_s + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 L}{\partial q_r\ \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - Q_r \tag{4.4.1}$$

$$\bar{L}_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - Q_r$$

$$= \bar{W}_{rs}\ddot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial q_r\ \partial t} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_r} - \bar{Q}_r \tag{4.4.2}$$

又设 $\bar{W}_{rs}\bar{U}^{sp} = I$，$I$ 为单位矩阵，由 Euler-Lagrange 方程则有

$$\ddot{q}_s = \overline{U}^{sp}\left(\overline{Q}_p + \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_p} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial t}\right) \quad (4.4.3)$$

将(4.4.3)式代入(4.4.1)式可得

$$W_{rs}\overline{U}^{sp}\left(\overline{Q}_p + \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_p} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial t}\right)$$
$$= Q_r + \frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_s}\dot{q}_s \quad (4.4.4)$$

因而有

$$L_r = W_{rs}\ddot{q}_s - W_{rs}\overline{U}^{sp}\left(\overline{Q}_p + \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_p} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{q}_p} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial t}\right)$$
$$= W_{rs}\overline{U}^{sp}\left(\overline{W}_{pt}\ddot{q}_t + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_p \partial t} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_p} - \overline{Q}_r\right)$$

于是

$$L_r = W_{rs}\overline{U}^{sp}\overline{L}_p \quad (4.4.5)$$

令 $\overline{W}_{rs}U^{sp} = \Lambda_r{}^p$，因此，(4.4.5)式可写为

$$\overline{L}_p = \Lambda_p{}^r L_r \quad (4.4.6)$$

由于 $\Lambda_r{}^s W_{st} = \overline{W}_{rt}$，将其对 $\dot{q}_u$ 求偏导数，整理即得

$$\frac{\partial \Lambda_r{}^s}{\partial \dot{q}_u}W_{st} = \frac{\partial^3 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_t} - \Lambda_r{}^s \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_t}$$
$$= \frac{\partial \overline{W}_{ru}}{\partial \dot{q}_t} - \Lambda_r{}^s \frac{\partial W_{us}}{\partial \dot{q}_t} = \frac{\partial \Lambda_r{}^s}{\partial \dot{q}_t}W_{su} \quad (4.4.7)$$

将 $\Lambda_r{}^s W_{st} = \overline{W}_{rt}$ 对 q_t 求偏导数后再同时乘以 $\dot{q}_t$ 后可得

$$\Lambda_s{}^r \frac{\partial W_{st}}{\partial q_t}\dot{q}_t - \frac{\partial \overline{W}_{rt}}{\partial q_t}\dot{q}_t = -\frac{\partial \Lambda_r{}^s}{\partial q_t}W_{st}\dot{q}_t \quad (4.4.8)$$

现在，根据(4.4.4)式有

$$\frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial q_t}\dot{q}_t + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial t} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial q_s} - \overline{Q}_s$$
$$= \Lambda_s{}^r\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial q_t}\dot{q}_t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s\right) \quad (4.4.9)$$

将(4.4.9)式两边对 $\dot{q}_u$ 求偏导数可得

$$\frac{\partial^3 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_s \partial q_t}\dot{q}_t + \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial \dot{q}_s \partial q_u} + \frac{\partial^3 \overline{L}}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_s \partial t} - \frac{\partial^2 \overline{L}}{\partial q_s \partial \dot{q}_u} - \frac{\partial \overline{Q}_s}{\partial \dot{q}_u}$$

$$= \frac{\partial \Lambda_s{}^r}{\partial \dot{q}_u}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_t}\dot{q}_t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - Q_r\right)$$
$$+ \Lambda_r{}^s\left(\frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_s \partial q_t}\dot{q}_t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_u} + \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_r \partial t}\right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_u} - \frac{\partial Q_r}{\partial \dot{q}_u}\right) \qquad (4.4.10)$$

由(4.4.1)式和 Euler-Lagrange 方程有

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_t \partial \dot{q}_r}\dot{q}_t + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_r} - Q_r = - W_{rt}\ddot{q}_t \qquad (4.4.11)$$

将(4.4.7),(4.4.8),(4.4.11)式代入(4.4.10)式并整理可得

$$\frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \dot{q}_s \partial q_u} - \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial q_s \partial \dot{q}_u} + \frac{\partial \bar{W}_{us}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{Q}_s}{\partial \dot{q}_u}$$
$$= - \frac{d\Lambda_s{}^r}{dt}W_{ru} + \Lambda_s{}^r\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_u} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_u} + \frac{\partial W_{ur}}{\partial t} - \frac{\partial Q_r}{\partial \dot{q}_u}\right)$$
$$(4.4.12)$$

引入两个矩阵

$$T_{ru} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_u} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_u} \qquad (4.4.13)$$

$$\bar{T}_{ru} = \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \dot{q}_r \partial q_u} - \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial q_r \partial \dot{q}_u} \qquad (4.4.14)$$

可证 $T_{ru} = - T_{ur}$, $\bar{T}_{ur} = - \bar{T}_{ru}$,因此,当系统的非保守广义力为 Q_i, $\bar{Q}_i$ 满足

$$\frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial \dot{q}_u} = \Lambda_s{}^r \frac{\partial Q_r}{\partial \dot{q}_u} \qquad (4.4.15)$$

时,由(4.4.12)式可得一矩阵微分方程

$$\dot{\Lambda} = - \bar{T}U + \Lambda T U \qquad (4.4.16)$$

根据(4.4.13),(4.4.14)式及 U 的定义可知 T, $\bar{T}$ 为反对称矩阵,U 为对称矩阵,Λ 为对称矩阵,因而可得

$$(\mathrm{tr}(\Lambda)^m)^{\cdot} = 0 \quad (m \text{ 为正整数}) \qquad (4.4.17)$$

即有

$$\mathrm{tr}(\Lambda)^m = \mathrm{const.} \quad (m \text{ 为正整数}) \qquad (4.4.18)$$

因此有一系列的不变量存在，它们是 A 的各次幂的迹。

根据以上讨论，我们可以得到结论：对于完整的非保守力学系统，如果存在两个 Lagrange 函数 $L(t,q,\dot{q}),\overline{L}(t,q,\dot{q})$ 导致力学系统相同的运动方程，且非保守广义力满足 $\frac{\partial \overline{Q}_s}{\partial \dot{q}_u}=A_s{}^r\frac{\partial Q_r}{\partial \dot{q}_u}$，则由 $A=\{A_s^r\}$ 的各次幂的迹所确定的量都是力学系统的运动守恒量。

这一结论揭示了非保守力学系统运动微分方程的解集的不变性同样可以导致力学系统存在守恒量。

第五章　对称性与不变量的几何理论

任何力学现象都是在空间中发生的。经典力学的传统作法是选用 Euclid 空间，即在此空间中建立力学系统的数学模型并由此而达到研究力学系统的目的。如果要求力学系统的许多基本性质用与坐标选取无关的形式来表达，那我们就能更清楚地理解这些性质。显然，在 Euclid 空间中建立的传统数学模型不满足这一要求。此外，随着科学技术的发展，人们的研究表明，力学系统的位形空间和相空间不一定是 Euclid 空间，但都是微分流形。因此，在微分流形的基础上发展起来了分析力学的几何理论。

近些年来，国际上十分重视利用现代微分几何理论研究力学系统的对称性与不变量理论，我们称之为对称性与不变量的几何理论。利用现代微分几何理论来描述力学系统的对称性与不变量，不仅从数学观点上提供了更为严格、简洁、优美的表达方式，而且可以使我们更好地了解力学系统的物理内容。在下面的内容中我们将发现，如果不使用这一现代工具，有一些概念是很难提出并进而揭示力学系统新的对称性与不变量的关系。

在本章中我们将采用以下记号。$M, N, \cdots\cdots$：有限维微分流形；TM：微分流形 M 的切丛，$F \in C^\infty(M)$：流形 M 上的 C^∞ 实值函数；$X \in \mathfrak{X}(M)$：流形 M 上的 C^∞ 矢量场；$\alpha \in \Omega^p(M)$：流形 M 上的 p 形式；i_x：内积；$\wedge$：外积；L_x：Lie 导数；d：外微分；$\otimes$：直积。

第一节　经典 Noether 理论的几何描述

首先，我们简单介绍一些现代微分几何理论的基础知识。

设 M 是一个 n 维微分流形，加上一个时间轴 R 后可得到一丛 $R \times TM$，此丛上的自然坐标集为 $(t, q_i, \dot{q}_i)$。在此局部坐标下，向

量场 X 局部表示为

$$X = h\frac{\partial}{\partial t} + f^i\frac{\partial}{\partial q_i} + g^i\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \tag{5.1.1}$$

而 1- 形式 α 可表示为

$$\alpha = \upsilon dt + \lambda_i dq_i + \mu_i d\dot{q}_i \tag{5.1.2}$$

其中 $h, f^i, g^i, \upsilon, \lambda_i, \mu_i$ 都是 $R \times TM$ 上的 C^∞ 实值函数。X, α 的对为

$$\alpha(X) = \langle X, \alpha \rangle = h\upsilon + f^i\lambda_i + g^i\mu_i \tag{5.1.3}$$

矢量场的分量局部地确定一组一阶微分方程，它的解曲线称之为给定矢量场的积分曲线，它们局部地定义了流形上的单参数映射族。为了在 $R \times TM$ 上描述关于 q 的二阶微分方程

$$\ddot{q}_i = \Lambda_i(t, q, \dot{q}_i) \tag{5.1.4}$$

则对应给出矢量场 Γ，

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i} + \Lambda_i\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \tag{5.1.5}$$

形如(5.1.5)式的矢量场的积分曲线是基于流形 M 上的曲线的提升。在一般情况下，若 $t \in I \subset R$，则映射 $t \to q_i(t)$ 是 M 上一条曲线的局部表示，而 $R \times TM$ 上的提升由映射

$$t \to (t, q_i(t), \dot{q}_i(t)) \tag{5.1.6}$$

所确定，其中 $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$。其实，切于一提升曲线的 $\dfrac{\partial}{\partial t}$ 的分量并不一定是 1。

为了使得 $R \times TM$ 上的矢量场的积分曲线为提升曲线，其充分必要条件为

$$\langle X, dq_i - \dot{q}_i dt \rangle = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n) \tag{5.1.7}$$

下面给出 Lie 导数的定义与运算法则。

设 f 是一个函数，X 是一个矢量场，它们相应于矢量场 Y 的 Lie 导数为

$$L_Y f = Y(f) \tag{5.1.8}$$

$$L_Y X = [Y, X] = YX - XY \tag{5.1.9}$$

Y 与一个 p 形式 ω 的内积为一个 $(p-1)$ 形式，记为 $i_Y\omega$，即

$$i_Y\omega(X_1,\cdots,X_{p-1}) = \omega(Y,X_1,\cdots,X_{p-1}) \tag{5.1.10}$$

若矢量场 Y 满足

$$i_Y\omega = 0 \qquad i_Y d\omega = 0 \tag{5.1.11}$$

则称之为 p 形式 ω 的特征矢量场。

Lie 导数的运算性质有：

1) $L_X(\omega+\theta) = L_X\omega + L_X\theta$ (5.1.12)

2) $L_X(\omega \wedge \theta) = L_X\omega \wedge \theta + \omega \wedge L_X\theta$ (5.1.13)

3) $L_X f = X(f)$ (5.1.14)

4) $L_X df = dL_X f$ (5.1.15)

5) $L_X\alpha = i_X d\alpha + d i_X\alpha$ (5.1.16)

6) $L_X \circ d\alpha = d \circ L_X\alpha \quad L_X \circ i = i \circ L_X$ (5.1.17)

7) $[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]} \quad [L_X, L_Y] = L_{[X,Y]}$ (5.1.18)

8) $L_{X+Y} = L_X + L_Y \qquad L_{\lambda X} = \lambda L_X$ (5.1.19)

9) $i_{fX}\alpha = f i_X\alpha$ (5.1.20)

通常称满足 $d\omega = 0$ 的微分形式 ω 为闭形式，若 $\omega = d\alpha$，则称 ω 为恰当形式。任何恰当形式都是闭形式，即 $d^2 = 0$；而闭形式只有在流形具有足够好的拓扑性质时，才是恰当形式，但在一个尽可能小的局域内，每一个闭形式都是一个恰当形式，即

$$d\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = d\alpha \tag{5.1.21}$$

此即通常所称的 Poincaré 引理。

对于完整保守的力学系统，其位形空间 $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 为一实 n 维微分流形，记为 M。设 L 为 $R \times TM$ 上满足 Hess 矩阵 $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ 的余秩为零的条件的 Lagrange 函数，定义一个 1-形式

$$\theta = L dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(dq_i - \dot{q}_i dt) \tag{5.1.22}$$

称之为 Cartan 形式，则

$$d\theta = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}(dq_j - \dot{q}_j dt) \wedge (dq_i - \dot{q}_i dt) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}(d\dot{q}_i - \Lambda_i dt) \wedge (d\dot{q}_j - \Lambda_j dt) \tag{5.1.23}$$

其中 Λ_i 由下式确定，

$$\Lambda_i = (\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j})^{-1}(-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_j}) \tag{5.1.24}$$

对于非奇异的 Lagrange 函数 L，由于 $d\theta$ 的秩为 $2n$，因此 $d\theta$ 的特征矢量场的空间维数为 1，并且对应于 Lagrange 函数 L，特征矢量场 Γ 满足

$$i_\Gamma d\theta = 0 \tag{5.1.25}$$

$$\langle \Gamma, dt \rangle = 1 \tag{5.1.26}$$

利用(5.1.23)式，则(5.1.25)，(5.1.26)式等价于

$$\langle \Gamma, dq_i - \dot{q}_i dt \rangle = 0 \tag{5.1.27}$$

$$\langle \Gamma, d\dot{q}_i - \Lambda_i dt \rangle = 0 \tag{5.1.28}$$

因此，由(5.1.26)，(5.1.27)，(5.1.28)式可知 Γ 的确是(5.1.5)式的形式。

设 Y 是 $R \times TM$ 上的一个任意矢量场，其局部表示为

$$Y = \tau(t, q, \dot{q})\frac{\partial}{\partial t} + \xi_i(t, q, \dot{q})\frac{\partial}{\partial q_i} + \eta_i(t, q, \dot{q})\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \tag{5.1.29}$$

则有

$$i_Y d\theta = (\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i})(\xi_j - \dot{q}_j \tau)(dq_i - \dot{q}_i dt) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}(\eta_i - \Lambda_i \tau)(dq_j - \dot{q}_j dt) - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}(\xi_j - \dot{q}_j \tau)(d\dot{q}_i - \Lambda_i dt) \tag{5.1.30}$$

下面，我们来讨论对称性的有关问题。

在一般情况下，称一个矢量场 Y 是某一张量场的对称性是指

该张量场在 Y 的流作用下是不变。因此，Y 是另一个矢量场 X 的对称性的充分必要条件是

$$L_Y X = [Y, X] = 0 \tag{5.1.31}$$

Y 是 2- 形式 $d\theta$ 的一个对称性的充分必要条件是

$$L_Y d\theta = 0 \tag{5.1.32}$$

当我们研究由矢量场 Γ 确定的微分方程组时，(5.1.31)式关于对称性的限制条件太强。的确，我们最感兴趣的是 Y 的流应当映射 Γ 的积分曲线为积分曲线，因此，微分方程组不需要严格不变，可以允许沿积分曲线改变参数。因此，(5.1.31)式可以用

$$L_Y \Gamma = [Y, \Gamma] = g\Gamma \tag{5.1.33}$$

来代替，其中 $g \in C^\infty(M)$。

由(5.1.33)式确定的矢量场 Y 称之为 Γ 的动力学对称性。如果 Y, Γ 分别由(5.1.29)，(5.1.5)两式确定，则

$$L_Y \Gamma = [Y, \Gamma] = (\eta_i - \Gamma(\xi_i)) \frac{\partial}{\partial q_i} + (Y(\Lambda_i) - \Gamma(\eta_i)) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \Gamma(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \tag{5.1.34}$$

因此，Y 是 Γ 的动力学对称性的充分必要条件为

$$\eta_i = \Gamma(\xi_i) - \dot{q}_i \Gamma(\tau) \tag{5.1.35}$$

$$\Gamma(\eta_i) - \Lambda_i \Gamma(\tau) - Y(\Lambda_i) = 0 \tag{5.1.36}$$

对于一个 Lagrange 系统 L，若矢量场 Y 满足

$$L_Y d\theta = 0 \tag{5.1.37}$$

则称 Y 为 Γ 的一个 Noether 对称性。

根据 Poincaré 引理，由(5.1.37)式可知存在一个 $f \in C^\infty(M)$，使得

$$L_Y \theta = df \tag{5.1.38}$$

其中 f 称之为规范函数。由(5.1.16)式有

$$L_Y d\theta = d i_Y d\theta + i_Y dd\theta = d i_Y d\theta = 0 \tag{5.1.39}$$

因而有

$$i_Y d\theta = dG \tag{5.1.40}$$

同样由(5.1.16)式有

$$L_\Gamma\theta = i_\Gamma d\theta + d i_\Gamma\theta = df \tag{5.1.41}$$

将(5.1.38),(5.1.40)式代入(5.1.41)式则得

$$dG = df - d i_\Gamma\theta \tag{5.1.42}$$

即

$$G = f - i_\Gamma\theta = f - [L\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i - \dot{q}_i\tau)] \tag{5.1.43}$$

此即对应于 Noether 对称性的守恒量。它表明:若矢量场是一个 Noether 对称性,则一定对应了一个守恒量 G。这就是著名的 Noether 定理,它揭示了力学系统的运动守恒量与矢量场之间的关系,即任何一个守恒量均可通过一个矢量场来生成。

由于(5.1.38)式是规范函数 f 应当满足的条件,因此它对应于生成函数的 Killing 方程。把(5.1.38)式写成显式将导致偏微分方程组:

$$L\frac{\partial\tau}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\frac{\partial\xi_j}{\partial q_i} - \dot{q}_j\frac{\partial\tau}{\partial q_i}) = \frac{\partial f}{\partial q_i} \tag{5.1.44}$$

$$L\frac{\partial\tau}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\frac{\partial\xi_j}{\partial q_i} - \dot{q}_j\frac{\partial\tau}{\partial q_i}) + \xi_j\frac{\partial^2 L}{\partial q_j\partial \dot{q}_i} + \eta_j\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j\partial \dot{q}_i} + \tau\frac{\partial^2 L}{\partial t\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \tag{5.1.45}$$

$$L\frac{\partial\tau}{\partial t} + \tau\frac{\partial L}{\partial t} + \xi_j\frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\frac{\partial\xi_j}{\partial t} - \dot{q}_j\frac{\partial\tau}{\partial t}) - \dot{q}_i(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial q_j}\xi_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j}\eta_j + \frac{\partial^2 L}{\partial t\partial \dot{q}_i}\tau) = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{5.1.46}$$

此即广义 Killing 方程。

Noether 逆定理的现代微分几何描述为:设 G 是动力学系统 Γ 的一个运动常数,则对应于 G 的 Noether 对称性由以下关系确定:

$$\xi_i - \dot{q}_i\tau = -(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j})^{-1}\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_j} \tag{5.1.47}$$

$$\eta_i = \Gamma(\xi_i) - \dot{q}_i\Gamma(\tau) = \Gamma(\xi_i - \dot{q}_i\tau) + \Lambda_i\tau \tag{5.1.48}$$

例　考虑平面 Kepler 问题。系统的 Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{\mu}{r} \tag{5.1.49}$$

其中 $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$。考虑运动常量

$$G_1 = q_1\dot{q}_2^2 - q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \mu\frac{q_1}{r} \tag{5.1.50}$$

由(5.1.47),(5.1.48)两式有

$$\begin{aligned} \xi_1 - \dot{q}_1\tau &= q_2\dot{q}_2 \\ \xi_2 - \dot{q}_2\tau &= q_2\dot{q}_1 - 2q_1\dot{q}_2 \end{aligned} \tag{5.1.51}$$

取 $\tau = q_1$,则得 Noether 对称性为

$$\begin{aligned} \xi_1 &= q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2 \\ \xi_2 &= q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 \end{aligned} \tag{5.1.52}$$

而 η_1, η_2 可由(5.1.35)式很容易确定。

类似地,对于

$$G_2 = q_2\dot{q}_1^2 - q_1\dot{q}_1q_2 - \mu\frac{q_2}{r} \tag{5.1.53}$$

有 Noether 对称性为

$$\begin{aligned} \tau &= q_2 \\ \xi_1 &= q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1 \\ \xi_2 &= q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2 \end{aligned} \tag{5.1.54}$$

η_i 由(5.1.35)式确定。

从上面的讨论我们发现,利用现代微分几何理论描述力学系统的对称性与不变量,其描述方式与结论更为简洁。

第二节　广义 Noether 理论的几何描述

在第二章中,我们讨论了经典 Noether 理论对非保守、非完整系统的推广,这些结论都可以用现代微分几何理论来加以描述。

一、完整非保守力学系统 Noether 理论的几何描述

假设完整非保守力学系统中保守部分的 Lagrange 函数为 L，非保守广义力为 $Q_i(t,q_i,\dot{q}_i)$，则系统的运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{5.2.1}$$

对应于力学系统位形空间的 n 维微分流形记为 M，则力学系统的非保守性质可用 TM 上的一个半基 1-形式 $\tilde{\mu}$ 来表示，它局部地表示为

$$\tilde{\mu}=Q_i dq_i \tag{5.2.2}$$

对非保守力学系统，我们引入一个 $R\times TM$ 上的 2-形式 α，

$$\alpha=d\theta+\tilde{\mu}\wedge dt \tag{5.2.3}$$

其中 $d\theta$ 由(5.1.23)式确定。

由于 1-形式集

$$\{dt,dq_i-\dot{q}_i dt,d\dot{q}_i-\Lambda_i dt\} \tag{5.2.4}$$

形成了 $R\times TM$ 上所有 1-形式的基，因此，对于 $F\subset C^\infty(R\times TM)$ 有

$$dF=\Gamma(F)dt+\frac{\partial F}{\partial q_i}(dq_i-\dot{q}_i dt)+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}(d\dot{q}_i-\Lambda_i dt) \tag{5.2.5}$$

其中 Γ 为 $R\times TM$ 上的矢量场

$$\Gamma=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\Lambda_i\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \tag{5.2.6}$$

而 Λ_i 满足

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j}\Lambda_j+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i \tag{5.2.7}$$

在(5.2.4)式上，α 局部表示为

$$\alpha=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial q_j}(dq_j-\dot{q}_j dt)\wedge(dq_i-\dot{q}_i dt)+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j}(d\dot{q}_i-\Lambda_i dt)\wedge(dq_j-\dot{q}_j dt) \tag{5.2.8}$$

进一步取$\mu = \tilde{\mu} \wedge dt$,则 μ 的局部表示为

$$\mu = Q_i(dq_i - \dot{q}_i dt) \wedge dt \tag{5.2.9}$$

对于非保守力学系统,考虑满足

$$d(i_Y\alpha) = 0 \tag{5.2.10}$$

的矢量场 Y 的集合为 V。可以验证,Y 为 Γ 的动力学对称性。将(5.2.3)式代入(5.2.10)式可得 Y 为满足(5.2.10)式的动力学对称性的充分必要条件是

$$L_Y\alpha = i_Y d\mu \tag{5.2.11}$$

因而有

$$L_Y(d\theta + \mu) = i_Y d\mu$$

所以

$$\begin{aligned} L_Y d\theta &= i_Y d\mu - L_Y\mu \\ &= i_Y d\mu - (i_Y d\mu + d i_Y\mu) \end{aligned}$$

即

$$L_Y d\theta = - d i_Y\mu \tag{5.2.12}$$

利用 Poincaré 引理,有

$$L_Y\theta = - i_Y\mu + df \tag{5.2.13}$$

其中 f 称为规范函数。

由于

$$L_Y\theta = i_Y d\theta + d i_Y\theta \tag{5.2.14}$$

将(5.2.14)式代入(5.2.13)式则可得

$$i_Y d\theta = - i_Y\mu + d(f - i_Y\theta) \tag{5.2.15}$$

因而有

$$i_Y\alpha = d(f - i_Y\theta) \tag{5.2.16}$$

由此可见,满足(5.2.10)式的动力学对称性对应于一个不变量

$$G = f - i_Y\theta = f - [L\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i - \dot{q}_i\tau)] \tag{5.2.17}$$

(5.2.12)式对应了系统的 Killing 方程。将

$$Y = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$$

代入(5.2.12)式可得偏微分方程组

$$L\frac{\partial\tau}{\partial\dot{q}_i}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{\partial\xi_j}{\partial q_i}-\dot{q}_j\frac{\partial\tau}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial f}{\partial q_i} \tag{5.2.18}$$

$$L\frac{\partial\tau}{\partial q_i}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{\partial\xi_j}{\partial q_i}-\dot{q}_j\frac{\partial\tau}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial q_j}\xi_j+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\eta_j+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial t}-Q_i\tau=\frac{\partial f}{\partial q_i} \tag{5.2.19}$$

$$L\frac{\partial\tau}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\left(\frac{\partial\xi_j}{\partial t}-\dot{q}_j\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\tau+\frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i-\dot{q}_i\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial q_j}\xi_j+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\eta_j+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial t}\tau\right)+Q_i\xi_i=\frac{\partial f}{\partial t} \tag{5.2.20}$$

为进一步搞清以上方程的结构，在

$$[Y,\Gamma]=-\Gamma(\tau)\frac{\partial}{\partial t}+(\eta_i-\Gamma(\xi_i))\frac{\partial}{\partial q_i}+(Y(\Lambda_i)-\Gamma(\eta_i))\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i} \tag{5.2.21}$$

中，由于

$$\begin{aligned} &i_\Gamma\alpha=0\\ &\langle\Gamma,dt\rangle=1\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

因而有

$$i_{[Y,\Gamma]}\alpha=L_Y i_\Gamma\alpha-i_\Gamma L_Y\alpha=-i_\Gamma L_Y\alpha \tag{5.2.23}$$

考虑(5.2.11)式，则(5.2.23)式变为

$$i_{[Y,\Gamma]}\alpha=-i_\Gamma i_Y d\mu \tag{5.2.24}$$

将其表示为基(5.2.4)式的形式，则可求得 $d\dot{q}_i-\Lambda_i dt$ 前的系数

$$\eta_i=\Gamma(\xi_i)-\dot{q}_i\Gamma(\tau)+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right)^{-1}\frac{\partial Q_k}{\partial\dot{q}_j}(\xi_k-\dot{q}_k\tau) \tag{5.2.25}$$

下面我们来看一例。

例 1　考虑一个两自由度力学系统

$$\ddot{q}_1 + kq_1 + 2\mu\dot{q}_1 - pq_2 = 0$$
$$\ddot{q}_2 + kq_2 + 2\mu\dot{q}_2 + pq_1 = 0$$

其中 k,μ,p 均为常数。取系统保守部分的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}k(q_1^2 + q_2^2)$$

相应的非保守广义力为

$$Q_1 = -2\mu\dot{q}_1 + pq_2$$
$$Q_2 = -2\mu\dot{q}_2 - pq_1$$

可解得

$$\tau = 0$$
$$\xi_1 = e^{2\mu t}(\dot{q}_2 + \mu q_2)$$
$$\xi_2 = e^{2\mu t}(\dot{q}_1 + \mu q_1)$$
$$f = e^{2\mu t}[-kq_1q_2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}p(q_2^2 - q_1^2)]$$

而相应地可计算

$$\eta_1 = -e^{2\mu t}(\mu\dot{q}_2 + kq_2 + pq_1)$$
$$\eta_2 = -e^{2\mu t}(\mu\dot{q}_1 + kq_1 - pq_2)$$

因此,力学系统具有守恒律

$$G = -e^{2\mu t}[\dot{q}_1\dot{q}_2 + \mu(q_2\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2) + kq_1q_2 + \frac{1}{2}p(q_1^2 - q_2^2)] \tag{5.2.26}$$

二、非完整力学系统 Noether 理论的几何描述

上面讨论了完整非保守力学系统问题,当力学系统受到非完整约束时,利用现代微分几何理论描述具有一定的困难,目前仍有很多问题有待进一步深入研究,在这里我们仅作简单介绍。

设 $\mu(R,M)$ 是由可微曲线 $\gamma:R \to M$ 构成的空间,在 $R \times \mu(R,M)$ 上引入一个等价关系:(t,γ) 与 (t',γ') 等价的充分必要条件是

$$t = t' \qquad \gamma(t) = \gamma'(t'), \cdots, \frac{d^r\gamma(t)}{dt^r} = \frac{d^r\gamma'(t')}{dt'^r} \tag{5.2.27}$$

并记作$(t,\gamma) \sim (t',\gamma')$。

空间 $R \times \mu(R,M)$ 关于以上等价关系"$\sim$"的商空间 $J^r(R,M) = R \times \mu(R,M)/\sim$ 称为 r- 射流形，$j^r(\gamma): R \to J^r(R,M)$ 称为 γ 的 r 阶延伸。

对于一阶非完整约束，只需要用到 1- 射流形 $J^1(R,M)$。由于 $J^1(R,M)$ 与 $R \times TM$ 同胚，$J^1(R,M)$ 便是系统的状态时间空间。

设 $dt, \omega^1, \cdots, \omega^n$ 是 $R \times M$ 上线性无关的 1- 形式，即 $\{dt, \omega^i\}$ 构成 $\mathscr{X}^*(R \times M)$ 的一个基，则

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}C^i_{kl}\omega^k \wedge \omega^l - C^i_{\alpha l}dt \wedge \omega^l \tag{5.2.28}$$

其中 $C^i_{kl}, C^i_{\alpha l} \in F^\infty(R \times M)$，且有

$$C^i_{kl} = -C^i_{lk} \tag{5.2.29}$$

设 $\gamma: R \to M$ 是可微曲线，$j^1(\gamma)$ 是其 1 阶延伸，$X_{j^1(\gamma)} = j^1(\gamma)^* \frac{d}{dt} \in \mathscr{X}(J^1(R,M))$ 是 $j^1(\gamma)$ 的切矢量场。引进 $\eta^1, \cdots, \eta^n \in F^\infty(J^1(R,M))$，它们由下式定义

$$j^1(\gamma)^* \eta^i = \omega^i(X_{j^1(\gamma)}) \tag{5.2.30}$$

则 $\{dt, \omega^i, d\eta^i\}$ 构成 $\mathscr{X}^*(J^1(R,M))$ 的一组基，称之为 Poincaré 基。取 $\mathscr{X}(J^1(R,M))$ 上 $\{dt, \omega^i, \eta^i\}$ 的对偶基为 $\{\frac{\partial}{\partial t}, X^i, \frac{\partial}{\partial \eta^i}\}$，称之为 $\mathscr{X}(J^1(R,M))$ 的 Poincaré 基。由对偶性及(5.2.28)式，有

$$[X^i, X^j] = C^*_{ij}X^k \quad [\frac{\partial}{\partial t}, X^i] = C^*_{oi}X^k \tag{5.2.31}$$

$J^1(R,M)$ 上的 1- 形式 θ^i

$$\theta^i = \omega^i - \eta^i dt \tag{5.2.32}$$

称为接触形式，它们满足接触条件

$$j^1(\gamma)^* \theta^i = 0$$

在微分流形 M 上的一个 $\cdots$ 阶非完整 Lagrange 力学系统由

$(L,\mu,\mathscr{P})$ 唯一地给出，其中 $L \in F^\infty(J^1(R\times M))$ 是系统的 Lagrange 函数，μ 是力形式，它是 $J^1(R\times M)$ 上的一个 1-形式，$\mu = Q_i\theta^i, Q_i \in F^\infty(J^1(R\times M))$；$\mathscr{P}\in \mathscr{X}^*(J^1(R\times M))$ 是一个 r 维非完整 Pfaff 约束组，$r < n$。

一阶非完整非保守力学系统记作 $(M,L,\mu,\mathscr{P})$。

对于 $F \in F^\infty(J^1(R\times M))$，关于 F 的 Cartan 1-形式定义为

$$\theta(F) = Fdt + \frac{\partial F}{\partial \eta^i}\theta^i \tag{5.2.33}$$

它是 $J^1(R,M)$ 上满足

$$\theta(F) - Fdt \in \mathscr{L} = \mathrm{span}\{\theta^i\} \tag{5.2.34}$$

和

$$d\theta(F) \in \mathscr{X}^*(J^1(R,M)) \wedge \mathscr{L} \tag{5.2.35}$$

的唯一的 1-形式。

对于 $f^\alpha \in F^\infty(J^1(R,M))(\alpha = 1,\cdots,r)$ 相互独立，即满足

$$df^1 \wedge \cdots \wedge df^r \neq 0 \tag{5.2.36}$$

则有

$$\theta(f^1) \wedge \cdots \wedge \theta(f^r) \neq 0 \tag{5.2.37}$$

若在系统 $(M,L,\mu,\mathscr{P})$ 的轨线 $\gamma: R \to M$ 上，有

$$j^1(\gamma)^* f^\alpha = 0 \tag{5.2.38}$$

且 f^α 相互独立，则称 f^α 是系统 $(M,L,\mu,\mathscr{P})$ 的一阶约束组。

设 $\mathscr{U} = (M,L,\mu,\mathscr{P})$，如果有

$$\mathscr{P} = \mathrm{span}\{\theta(f^\alpha) \mid \alpha = 1,\cdots,r\} \tag{5.2.39}$$

则称 $\mathscr{P}$ 是一阶约束组 f^α 生成的 r 维 Четаев 型 Pfaff 约束系统。

设有完整力学系统 $\mathscr{U} = (M,L,\tilde{\mu})$ 以及非完整力学系统 $\mathscr{U} = (M,L,\mu,\mathscr{P})$，如果满足

$$\tilde{\mu} \wedge dt = (\mu + \lambda_\alpha\theta(f^\alpha)) \wedge dt \tag{5.2.40}$$

则为 $\mathscr{U}$ 的约化系统。

对于完整力学系统 $\mathscr{U} = (M,L,\mu)$，动力学基本 2-形式 $\Omega(L,\mu)\in J^1(R,M)$ 为

$$\Omega(L,\mu) = d\theta(L) + \mu \wedge dt \tag{5.2.41}$$

对于非完整力学系统 $\mathscr{U}=(M,L,\mu,\mathscr{P})$，动力学基本 2-形式 $\Omega(L,\mu,\mathscr{P})\in J^1(R,M)$ 为

$$\Omega(L,\mu,\mathscr{P})-\Omega(L,\mu)=\mu(\mathscr{P})\wedge dt \tag{5.2.42}$$

设力学系统是非奇异的，即 $\operatorname{rank}\|\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\|=2n$，若矢量场 Γ 满足

$$\left.\begin{aligned} &i_\Gamma\Omega=0\\ &\langle\Gamma,dt\rangle=1\\ &i_\Gamma L_\Gamma\mathscr{P}=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.2.43}$$

则称 Γ 为 Lagrange 矢量场。

可以证明，$\Gamma\in\mathscr{X}(J^1(R,M))$ 是系统 $\mathscr{U}$ 的 Lagrange 矢量场的充分必要条件是

$$\Gamma=\frac{\partial}{\partial t}+\eta^i X^i+\Delta^i\frac{\partial}{\partial\eta^i} \tag{5.2.44}$$

其中

$$\Delta^i=L_\Gamma\eta^i \tag{5.2.45}$$

并且

$$\left.\begin{aligned} &L_\Gamma\left(\frac{\partial L}{\partial\eta^i}\right)-(C^k_{\alpha i}+C^k_{\beta i}\eta^\beta)\frac{\partial L}{\partial\eta^k}-X^i L=Q_i+\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial\eta^i}\\ &L_\Gamma f^\alpha=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.2.46}$$

(5.2.46)式称为 Lagrange-Poincaré 恒等式。

设约化系统 $\mathscr{U}=(M,L,\tilde{\mu})$ 有基本 2-形式 $\Omega(L,\tilde{\mu})$，定义

$$\mathscr{Y}=\{Y\in\mathscr{X}(J^1(R,M))\mid di_Y\Omega=0\} \tag{5.2.47}$$

则当且仅当存在 $Y\in\mathscr{Y}$，使得

$$i_Y\Omega=dG \tag{5.2.48}$$

时，$G\in F^\infty(J^1(R,M))$ 是系统 $\mathscr{U}$ 的一个首次积分。

这是因为 $G\in F^\infty(J^1(R,M))$ 是 $\mathscr{U}$ 的首次积分，当且仅当

$$L_\Gamma G=i_\Gamma dG=0 \tag{5.2.49}$$

因对 $J^1(R,M)$ 上的任何 1-形式 ω，仅当存在矢量场 $Y\in\mathscr{X}(J^1(R,M))$，使得

$$\omega = i_Y\Omega \tag{5.2.50}$$

时,才有

$$i_\Gamma\omega = 0 \tag{5.2.51}$$

因此 G 是首次积分的充分必要条件是存在 $Y \in \mathscr{Y}$,使得(5.2.48)式成立。

设 $Y \in \mathscr{Y}$,即

$$di_Y\Omega = 0 \tag{5.2.52}$$

因而有

$$L_Y\Omega = i_Y d(\tilde{\mu} \wedge dt) \tag{5.2.53}$$

展开可得

$$L_Y d\theta + d(i_Y(\tilde{\mu} \wedge dt)) = 0 \tag{5.2.54}$$

由 Poincaré 引理知,至少在局部上存在一个光滑函数 f,使得

$$L_Y\theta + i_Y(\tilde{\mu} \wedge dt) = df \tag{5.2.55}$$

设

$$Y = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i X^i + \zeta^i\frac{\partial}{\partial \eta^i} \tag{5.2.56}$$

由(5.2.55)式可得

$$L\frac{\partial\tau}{\partial\eta^j} + \frac{\partial L}{\partial\eta^j}\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial\eta^j} - \frac{\partial\tau}{\partial\eta^j}\eta^j\right) = \frac{\partial f}{\partial\eta^j} \tag{5.2.57a}$$

$$LX^i\tau + \frac{\partial L}{\partial\eta^j}(X^i\xi^j - (X^i\tau)\eta^j) + \frac{\partial^2 L}{\partial\eta^i\partial\eta^j}\zeta^j + \frac{\partial(X^jL)}{\partial\eta^j}\xi^i + \frac{\partial^2 L}{\partial t\partial\eta^j}\tau - Q_i\tau - \frac{\partial L}{\partial\eta^k}(C^k_{\alpha i}\tau + C^k_{ji}\xi^j) = X^i f \tag{5.2.57b}$$

$$L\frac{\partial\tau}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial\eta^j}\left(\frac{\partial\xi^j}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t}\eta^j\right) + \frac{\partial L}{\partial t}\tau + (X^jL)\tau + \frac{\partial L}{\partial\eta^k}C^k_{\alpha j}\xi^j + Q_i\xi^j - \eta^j\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\eta^j\partial\eta^j}\xi^j + \frac{\partial(X^jL)}{\partial\eta^j}\xi^j + \frac{\partial^2 L}{\partial t\partial\eta^j}\tau\right) = \frac{\partial f}{\partial t} \tag{5.2.57c}$$

因此,对于某个函数 $f \in F^\infty(J^1(R,M))$,若方程(5.2.57)式有解 (τ,ξ^i,ζ^i),则系统有对应于由式(5.2.56)定义的矢量场 Y 的首次积分

$$G = f - i_Y\theta = f - [L\tau + \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^i}(\xi^i - \dot{\eta}^i\tau)] \qquad (5.2.58)$$

综合以上内容我们发现，利用约化系统 $\mathscr{U}$ 求 $\mathscr{U}$ 的首次积分是一种途径，也可以用嵌入约束的方法讨论约束系统的首次积分。

利用现代微分几何理论不仅可以将已有结论用更简洁、优美的形式给出，而且可以启发我们从其它的途径研究力学系统的对称性与不变量。

第三节　力学系统的高阶 Noether 对称性

考虑如(5.1.5)式定义的 Lagrange 系统 Γ，设 Y 是 Γ 的一个动力学对称性，动力学 2-形式 $d\theta$ 与 Y 的内积为 1-形式，记为 α，则有

$$i_\Gamma d\theta = 0 \qquad (5.3.1)$$

$$[Y, \Gamma] = g\Gamma \qquad (5.3.2)$$

$$i_Y d\theta = \alpha \qquad (5.3.3)$$

可以很容易地证明

$$i_\Gamma \alpha = 0 \qquad (5.3.4)$$

$$i_Y \alpha = 0 \qquad (5.3.5)$$

$$L_\Gamma \alpha = 0 \qquad (5.3.6)$$

由(5.3.6)式可知 1-形式 α 是 Γ 的一个不变 1-形式。

若(5.3.3)式中的 α 是恰当 1-形式，则可证 Y 为 Γ 的一个 Noether 对称性。

若(5.3.3)式中的 α 不是恰当 1-形式，由于

$$L_\Gamma \alpha = i_\Gamma d\alpha + d i_\Gamma \alpha = i_\Gamma d\alpha = 0 \qquad (5.3.7)$$

而

$$[Y, \Gamma] = g\Gamma \qquad (5.3.2)'$$

$$i_Y d\alpha = \beta \qquad (5.3.3)'$$

则此处 β 具有(5.3.4)～(5.3.6)式中 α 相同的性质，因而可对 β 作同上类似的讨论，直到出现一个恰当 1-形式为止。因而可自然

地给出如下定义。

定义 若对于 Lagrange 系统 Γ,矢量场 Y 满足

$$L_Y^n d\theta = 0 \tag{5.3.8}$$

而对 $k < n$,有 $L_Y^k d\theta \neq 0$,则称 Y 为 Γ 的一个 n 阶 Noether 对称性。

对于 n 阶 Noether 对称矢量场 Y,Lagrange 系统相应的不变量为

$$G = f - L_Y^{n-1}\langle Y, \theta\rangle \tag{5.3.9}$$

其中规范函数 f 由

$$L_Y^n \theta = df \tag{5.3.10}$$

确定。

之所以有上述结论,是因为由 $L_Y^n d\theta = 0$,有

$$L_Y^{n-1} L_Y d\theta = L_Y^{n-1}(di_Y d\theta + i_Y dd\theta) = L_Y^{n-1} di_Y d\theta = 0 \tag{5.3.11}$$

所以

$$L_Y^{n-1} i_Y d\theta = dG \tag{5.3.12}$$

而由于 $L_Y^n d\theta = d(L_Y^n \theta) = 0$,根据 Poincaré 引理故有

$$L_Y^n \theta = df \tag{5.3.13}$$

$$\begin{aligned} L_Y^n \theta &= L_Y^{n-1} L_Y \theta = L_Y^{n-1}(di_Y \theta + i_Y d\theta) \\ &= L_Y^{n-1} di_Y \theta + L_Y^{n-1} i_Y d\theta \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

$$df = dL_Y^{n-1} i_Y \theta + dG \tag{5.3.15}$$

因而有

$$G = f - L_Y^{n-1} i_Y \theta = f - L_Y^{n-1}\langle Y, \theta\rangle \tag{5.3.16}$$

(5.3.10)式为对应于 n 阶 Noether 对称性应满足的条件,在经典 Noether 对称性中,它的显式即为通常的 Killing 方程。

很显然,高阶 Noether 对称性同样对应于一个首次积分。当动力学对称性是非 Noether 对称性而满足(5.3.8)式时,上面的结论提供了一种寻求力学系统的首次积分的新方法。这种方法还具有以下一个非常有趣的性质。

设 Y 是 Γ 的一个动力学对称性，且在局部域内

$$L_Y^k d\theta = \sum_{l=1}^{k-1} f_l \cdot L_Y^l d\theta \tag{5.3.17}$$

成立，其中 k 为上式成立时的最小整数，则函数 f_l 是 Γ 的首次积分。

实际上，将(5.3.17)式两边同时对 Γ 求 Lie 导数，则有

$$\begin{aligned} L_\Gamma L_Y^k d\theta &= L_\Gamma \sum_{l=0}^{k-1} f_l \cdot L_Y^l d\theta \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} [L_\Gamma(f_l) L_Y^l d\theta + f_l L_\Gamma L_Y^l d\theta] \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

而

$$\begin{aligned} L_\Gamma L_Y d\theta &= L_Y L_\Gamma d\theta + L_{[Y,\Gamma]}\alpha = L_Y L_\Gamma d\theta + g L_\Gamma d\theta \\ &= (L_Y - g) L_\Gamma d\theta = 0 \\ &\cdots\cdots \\ L_\Gamma L_Y^l d\theta &= (L_Y - g)^l L_\Gamma d\theta = 0 \end{aligned} \tag{5.3.19}$$

因而有

$$\sum_{l=0}^{k-1} \Gamma(f_l) \cdot L_Y^l d\theta = 0 \tag{5.3.20}$$

又因为各个 $L_Y^l d\theta$ 独立，故有 $\Gamma(f_l) = 0 (l = 0, \cdots, k-1)$，因而 f_l 就是力学系统的一组首次积分。

考虑线性动力学系统

$$\ddot{q} + 2A\dot{q} + Bq = 0 \tag{5.3.21}$$

其中 A, B 为 $n \times n$ 矩阵，矢量场

$$Y^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} + R_{ij}(t) q^j \frac{\partial}{\partial q^j} \tag{5.3.22}$$

为(5.3.21)式的一个动力学对称性的充分必要条件是矩阵 $R(t)$ 满足

$$\dot{R} = R\dot{A} - AR \tag{5.3.23}$$

$$R(B - A^2) = (B - A^2)R \tag{5.3.24}$$

这一结论可由 Killing 方程的性质推得。下面我们来看一个二自由度的实例。

考虑系统的运动微分方程为

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_1 + 2\lambda\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + bq_1 + cq_2 = 0 \\ &\ddot{q}_2 + 2\lambda\dot{q}_2 + bq_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.3.25}$$

系统的 Lagrange 函数为

$$L = e^{2\lambda t}[\dot{q}_1\dot{q}_2 + t\dot{q}_2^2 - bq_1q_2 - (\frac{1}{2}c + bt)q_2^2] \tag{5.3.26}$$

若 $c \neq 2\lambda$，则满足(5.3.23),(5.3.24)式的 R 为

$$R = \begin{pmatrix} \mu & \upsilon \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \tag{5.3.27}$$

利用(5.3.22)式可确定动力学对称性

$$Y = Y^{(0)} + \eta^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \tag{5.3.28}$$

其中 η^i 由(5.1.35)式确定。

直接计算可得 $i_Y d\theta = dF$ 的充分必要条件是

$$\mu = -\lambda \qquad \upsilon = -1 \tag{5.3.29}$$

相应的首次积分为

$$\begin{aligned} F = e^{2\lambda t}[&bq_1q_2 + \frac{1}{2}(c + 2bt)q_2^2 + \lambda q_1\dot{q}_2 + \lambda\dot{q}_1q_2 \\ &+ (2\lambda t + 1)q_2\dot{q}_2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 + t\dot{q}_2^2] \end{aligned} \tag{5.3.30}$$

若 Y 满足

$$L_Y i_Y d\theta = dG$$

则 Y 为二阶 Noether 对称性，此时可推得 $\mu = -\lambda$，而 υ 是任意的，相应的不变量 G 为

$$G = (\upsilon + 1)e^{2\lambda t}(\dot{q}_2^2 + 2\lambda q_2\dot{q}_2 + bq_2^2) \tag{5.3.31}$$

高阶 Noether 对称性与不变量理论提供了一种当动力学对称性不是 Noether 型的时候确定力学系统的不变量的方法。

当力学系统不能用 Lagrange 函数完全描述时，高阶 Noether

对称性与不变量的概念略加修改后仍可使用。下面我们讨论非保守力学系统的高阶 Noether 对称性与不变量。

对于非保守力学系统，定义 2-形式

$$\Omega = d\theta + Q_i dq_i \wedge dt \tag{5.3.32}$$

其中 θ 为(5.1.22)式表示的 Cartan 1-形式，Q_i 为非保守广义力。

若矢量场 $Y \in \mathcal{X}(R \times TM)$满足

$$d(L_Y^k i_Y \Omega) = 0 \tag{5.3.33}$$

而对于 $l < k$ 有$d(L_Y^l i_Y \Omega) \neq 0$，则称矢量场 Y 为Γ 的一个广义的 $k+1$ 阶 Noether 对称性。

由于 Poincaré 引理，对于满足(5.3.33)式的 $k+1$ 阶 Noether 矢量场，当 M 具有良好的拓扑性质时，若存在一光滑函数 G 满足

$$L_Y^k i_Y \Omega = dG \tag{5.3.34}$$

则 G 为动力学系统Γ 的一个不变量。

另外，由于

$$\begin{aligned}
&L_Y \Omega = i_Y d\Omega + d i_Y \Omega = i_Y d\mu + d i_Y \Omega \\
&L_Y L_Y \Omega = L_Y i_Y d\mu + L_Y d i_Y \Omega = L_Y i_Y d\mu + d(L_Y i_Y \Omega) \\
&\cdots\cdots \\
&L_Y^{k+1} \Omega = L_Y^k i_Y d\mu + d(L_Y^k i_Y \Omega)
\end{aligned} \tag{5.3.35}$$

考虑到(5.3.33)式，则有

$$L_Y^{k+1} \Omega = L_Y^k i_Y d\mu \tag{5.3.36}$$

又由于

$$L_Y^{k+1} \Omega = L_Y^{k+1}(d\theta + \mu) = L_Y^{k+1} d\theta + L_Y^k (d i_Y \mu + i_Y d\mu) \tag{5.3.37}$$

故有

$$L_Y^{k+1} d\theta = - L_Y^k d i_Y \mu \tag{5.3.38}$$

利用 Poincaré 引理，有

$$L_Y^{k+1} \theta = - L_Y^k i_Y \mu + dg \tag{5.3.39}$$

其中 $g \in C^\infty(R \times TM)$。

利用(5.3.39)式可得

$$i_Y dL_Y^k\theta + di_Y L_Y^k\theta = - L_Y^k i_Y\mu + dg \tag{5.3.40}$$

因而有

$$di_Y L_Y^k\theta = - L_Y^k i_Y\Omega + dg \tag{5.3.41}$$

将(5.3.34)式代入(5.3.41)式则得

$$di_Y L_Y^k\theta = - dG + dg \tag{5.3.42}$$

因而有 Γ 的首次积分

$$G = g - L_Y^k\langle Y,\theta\rangle \tag{5.3.43}$$

这一结论表明:对于非保守力学系统,当动力学对称性 Y 不是 Noether 对称性时,有可能按照高阶 Noether 对称性与不变量的有关结论确定它的首次积分。

由于 Noether 对称性应满足(5.1.37)式,而高阶 Noether 对称性应满足(5.3.8)式,因此可以发现,高阶 Noether 对称性是在进一步削弱 Noether 对称性的要求下的一种自然延拓。对于完整保守的力学系统,高阶 Noether 对称性可由一个(1,1)型张量转化为一个通常的 Noether 对称性。

对于广义 $k+1$ 阶 Noether 对称矢量场,给出一个(1,1)型张量 $R_Y^{(k)}$,满足

$$i_{R_Y^{(k)}(X)}d\theta = i_X(L_Y^k d\theta) \tag{5.3.44}$$

$$\langle R_Y^{(k)}(X),dt\rangle = 0 \tag{5.3.45}$$

由于

$$L_{R_Y^{(k)}(Y)}d\theta = di_{R_Y^{(k)}(Y)}d\theta = di_Y(L_Y^k d\theta)$$

所以

$$L_{R_Y^{(k)}(Y)}d\theta = L_Y^{k+1}d\theta \tag{5.3.46}$$

因此,对完整保守的力学系统,高阶 Noether 对称性可由一个 $R_Y^{(k)}(X)$ 转化为一个通常的 Noether 对称性。

对于完整非保守的力学系统,由于

$$L_Y^{k+1}d\theta = - L_Y^k di_Y\mu \tag{5.3.47}$$

代入(5.3.46)式则有

$$L_{R_Y^{(k)}(Y)}d\theta = -L_Y^k di_Y\mu \neq -di_{R^{(k)}Y(Y)}\mu \tag{5.3.48}$$

因此,对于非保守力学系统,我们无法利用由(5.3.44),(5.3.45)式定义的(1,1)型张量 $R_Y^{(k)}$,将一个高阶 Noether 对称性转化为通常意义下的 Noether 对称性。

高阶 Noether 对称性的提出给我们很大的启发:对称性作为力学系统普遍存在的一种性质可以从不同的角度描述,从数学角度上就是建立不同的定义给出不同的对称性概念。在后两节中我们将要介绍的拟对称性与伴随对称性也是如此。因此,寻求力学系统的对称性一方面应注意对称性条件的求解,另一方面我们还必须注意研究考虑问题的角度。后一方面或许更重要一些。

第四节 力学系统的拟对称性

设 M 是力学系统位形空间对应的微分流形,TM 为它的切丛,Γ 为 TM 上的一个二阶微分方程的矢量场,在局部基上可表示为

$$\Gamma = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Lambda^i(q,v)\frac{\partial}{\partial v^i} \tag{5.4.1}$$

其中 Λ^i 为 $\ddot{q}^i + \Lambda^i(q,v) = 0$ 所确定。

切丛 TM 附带了一个自然可积的几乎切结构,它由下面的内禀(1,1)型张量场 S 确定

$$S = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i \tag{5.4.2}$$

S 的主要性质为其 Nijenhuis 张量等于零(即 $S^2 = 0$),且对于一个任意的矢量场 Γ,有

$$S \circ L_\Gamma S = -L_\Gamma S \circ S = S \tag{5.4.3}$$

$$(L_\Gamma S)^2 = I \tag{5.4.4}$$

$$S(\Gamma) = v^i \frac{\partial}{\partial v^i} = \Delta \tag{5.4.5}$$

其中 I 为单位矢量场,Δ 称为扩展矢量场。

对于每一个 $\Gamma\in\mathscr{X}(TM)$,定义

$$\mathscr{X}_\Gamma^* = \{\phi \in \mathscr{X}^*(TM) \mid L_\Gamma(S(\phi)) = \phi\} \quad (5.4.6)$$

$$\mathscr{X}_\Gamma = \{X \in \mathscr{X}(TM) \mid S(L_\Gamma X) = 0\} \quad (5.4.7)$$

则 $\mathscr{X}_\Gamma^*$,X_Γ 上的 1-形式和矢量场为

$$\phi = \alpha_i dv^i + \Gamma(\alpha_i)dq^i \quad (5.4.8)$$

$$X = \mu^i \frac{\partial}{\partial q_i} + \Gamma(\mu^i)\frac{\partial}{\partial v^i} \quad (5.4.9)$$

如果对一个 1-形式 $\phi\in\mathscr{X}_\Gamma^*$,$dS(\phi)$是一个辛形式,则称 ϕ 是非奇异的。若 $\mathscr{X}_\Gamma^*$ 含有一个恰当 1-形式 ϕ,则称 Γ 定义了一个 Lagrange 矢量场。对于每一个矢量场 Y,我们可以构造一个(1,1)型张量场 R_Y,

$$R_Y = L_\Gamma S \circ L_Y S + S \circ L_{[\Gamma,Y]}S \quad (5.4.10)$$

则张量场 R_Y 具有以下性质:

$$[R_Y, S] = 0 \quad (5.4.11)$$

$$L_\Gamma R_Y \circ S = 0 \quad (5.4.12)$$

对应于 1-形式和矢量场定义投影算子 π_Γ,

$$\pi_\Gamma:\mathscr{X}^*(TM) \to \mathscr{X}_\Gamma^* \qquad \alpha \to \pi_\Gamma(\alpha) = L_\Gamma(S(\alpha)) \quad (5.4.13)$$

$$\pi_\Gamma:\mathscr{X}(TM) \to \mathscr{X}_\Gamma \qquad Y \to \pi_\Gamma(Y) = Y + S(L_\Gamma Y) \quad (5.4.14)$$

且有性质

$$R_Y = R_{\pi_\Gamma(Y)} = L_\Gamma S \circ L_{\pi_\Gamma(Y)}S \quad (5.4.15)$$

对于一般的力学系统,假设其保守部分的 Lagrange 函数为 L,非保守部分的广义力为 $Q_i(q,v)$,则 $\mathscr{X}_\Gamma^*$ 上的 1-形式为

$$\phi = dL + Q_i(q,v)dq^i \quad (5.4.16)$$

在下面的研究中,我们考虑一般的 Γ,$\mathscr{X}_\Gamma^*$ 中的元素并不一定为(5.4.16)的形式,我们只要求 ϕ 是 $\mathscr{X}_\Gamma^*$ 中的一个非奇异的 1-形式。

我们下面引入拟对称性(pseudo-symmetry)的概念。

定义 $Y\in\mathscr{X}(TM)$是 Γ 相应于 ϕ 的一个拟对称性是指 Y 满足:

$$i_{[Y,\Gamma]}dS(\phi) = i_Y d\phi \tag{5.4.17}$$

容易看出，对于 Lagrange 矢量场（$\phi = dL$），Y 的确是 Γ 的对称性。

由于

$$\begin{aligned} i_{[Y,\Gamma]}dS(\phi) &= i_Y L_\Gamma dS(\phi) - L_\Gamma i_Y dS(\phi) \\ &= i_Y d\phi - L_\Gamma i_Y dS(\phi) \end{aligned} \tag{5.4.18}$$

因此 Y 是相应于 ϕ 的拟对称性的充分必要条件是

$$L_\Gamma i_Y dS(\phi) = 0 \tag{5.4.19}$$

定义 对于矢量场 $Y \in \mathfrak{X}(TM)$，若相应于 ϕ 存在一个函数 f，且满足

$$L_Y(S(\phi)) = df \tag{5.4.20}$$

$$i_Y(\phi - d(\Delta, \phi)) = 0 \tag{5.4.21}$$

则称 Y 是一个 Noether 型拟对称性。

显然，Noether 型拟对称性还是一个拟对称性。另外，由于

$$L_Y(S(\phi)) = i_Y dS(\phi) + d i_Y S(\phi) \tag{5.4.22}$$

因此有

$$\begin{aligned} i_Y dS(\phi) &= L_Y S(\phi) - d i_Y S(\phi) \\ &= df - d i_Y S(\phi) \\ &= d[f - i_Y S(\phi)] \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

又由于 Noether 拟对称性还是一个拟对称性，因此有

$$\Gamma(f - i_Y S(\phi)) = 0 \tag{5.4.24}$$

故对应于 Noether 型拟对称矢量场 Y 存在一个不变量 F

$$F = f - i_Y S(\phi) = f - \langle Y, S(\phi) \rangle \tag{5.4.25}$$

应当注意，由(5.4.20)，(5.4.21)式所定义的矢量场并不是经典的 Noether 矢量场，但当取 $\phi = dL$ 时有 $[Y, \Gamma] = 0$，因此上述结论包括了对于 Lagrange 系统的经典 Noether 定理，而当取 $\phi = dL + Q_i dq^i$ 时，Y 不是 Γ 的 Noether 对称性，此时由以上结论可导致耗散力为 Q_i 的非保守力学系统的广义 Noether 定理。

假若 Y 是相应于 $\phi \in \mathfrak{D}_\Gamma^*$ 的一个一般的拟对称性。前面我们已经讲过由矢量场 Y 可确定一个张量场 R_Y，而 $R_Y(\phi)$ 为

$$R_Y(\phi) = (L_\Gamma S \circ L_Y S)(\phi) + S(L_{[\Gamma,Y]}(S(\phi)))$$
$$= (L_\Gamma S \circ L_Y S)(\phi) + S(i_{[\Gamma,Y]}dS(\phi) + di_{[\Gamma,Y]}S(\phi)) \tag{5.4.26}$$

利用(5.4.17)式,(5.4.26)式可写为

$$R_Y(\phi) = (L_\Gamma S \circ L_Y S)(\phi) - S(L_Y\phi) + S(dL') \tag{5.4.27}$$

其中 L' 为

$$L' = \langle Y + S([\Gamma, Y]), \phi\rangle = \langle \pi_\Gamma(Y), \phi\rangle \tag{5.4.28}$$

在(5.4.27)式两边同时作用 $L_\Gamma S$ 则有

$$(L_\Gamma S \circ R_Y)(\phi) = (L_\Gamma S \circ L_\Gamma S \circ L_Y S)(\phi) - L_\Gamma S \circ S(L_Y\phi) + L_\Gamma S \circ S(dL') \tag{5.4.29}$$

利用(5.4.3),(5.4.4)式,(5.4.29)式可写为

$$(L_\Gamma S \circ R_Y)(\phi) = L_Y S(\phi) + S(L_Y\phi) - S(dL')$$
$$= L_Y(S(\phi)) - S(dL') \tag{5.4.30}$$

当拟对称性 Y 是一个点型的对称性时,有 $R_Y = 0$,此时将(5.4.30)式两边对 Γ 求 Lie 导数可得

$$\pi_\Gamma(dL') = L_\Gamma L_Y(S(\phi))$$
$$= L_{[\Gamma,Y]}(S(\phi)) + L_Y L_\Gamma(S(\phi))$$
$$= di_{[\Gamma,Y]}S(\phi) + i_{[\Gamma,Y]}dS(\phi) + L_Y\phi$$
$$= d\langle S([\Gamma, Y]), \phi\rangle - i_Y d\phi + L_Y\phi$$
$$= dL' \tag{5.4.31}$$

因而 $dL' \in \mathfrak{X}_\Gamma^*$,故有以下定理。

定理 若矢量场 Y 是相应于 ϕ 的点型的拟对称性,则 $L' = \langle \pi_\Gamma(Y), \phi\rangle$ 是二阶系统 Γ 的一个 Lagrange 函数,且 L' 不必是非奇异的。

上述定理包括了 Lagrange 系统的一个点对称性可以产生一个新的 Lagrange 系统这一性质。

通过一些简单运算后,我们可以得到 L' 的另一种表达形式

$$L' = L_\Gamma i_Y S(\phi) \tag{5.4.32}$$

假若 Y 是一个 Noether 型的拟对称性时,有

$$L_Y S(\phi) = df \tag{5.4.33}$$

其中 f 是函数。由(5.4.33)式可得

$$S(df) = (S \circ L_Y S)(\phi) \tag{5.4.34}$$

若 Y 为投影到 M 上的矢量场，则 $S \circ L_Y S = 0$，因而在此情形下 $S(df) = 0$，这说明 f 是 M 上的一个函数，且对于 $F = f - i_Y S(\phi)$ 有 $\Gamma(F) = 0$，因此有

$$L' = L_\Gamma i_Y S(\phi) = \Gamma(f) = \dot{f} \tag{5.4.35}$$

所以在 Y 对应为点对称性时，L' 为一个关于 q^i 的函数对时间的全导数。

下面回到关系式(5.4.30)，因为 $R_Y(\phi) \in \mathscr{X}_\Gamma^*$，因而有

$$\begin{aligned}(L_\Gamma S \circ R_Y)(\phi) &= \pi_\Gamma(R_Y(\phi)) - S(L_\Gamma(R_Y(\phi))) \\ &= R_Y(\phi) - S(L_\Gamma(R_Y(\phi)))\end{aligned} \tag{5.4.36}$$

将上式两边对 Γ 求 Lie 导数，并考虑 $R_Y = 0$，则有下面的结论：若 Y 是相应于 ϕ 的拟对称矢量场，则 1-形式 $dL' - L_\Gamma(R_Y(\phi))$ 属于 $\mathscr{X}_\Gamma^*$，其中 $L' = L_\Gamma i_Y S(\phi)$。

当拟对称性不是点型对称性时，它一般不会导致 Lagrange 函数。

应当注意，在上面的讨论中，所谓的拟对称是针对 ϕ 而言的，而 ϕ 是属于 $\mathscr{X}_\Gamma^*$ 的 1-形式，对于一般的 1-形式(5.4.8)式属于 $\mathscr{X}_\Gamma^*$ 的充分必要条件是

$$\Gamma\Gamma(\alpha_j) + \Gamma\left(\alpha_k \frac{\partial \Lambda^k}{\partial \Lambda^j}\right) - \alpha_k \frac{\partial \Lambda^k}{\partial q^j} = 0 \tag{5.4.37}$$

下面我们来看一个例子。

例 考虑运动微分方程

$$\ddot{q} = -q\dot{q}^2 \tag{5.4.38}$$

所对应力学系统的拟对称性及不变量。

对于(5.4.38)式，可视其为系统的 Lagrange 函数为 $L = \frac{v^2}{2}$，

非保守广义力为 $Q = -qv^2$ 的力学系统。取 1-形式

$$\phi = dL + Qdq = vdv - qv^2dq \qquad (5.4.39)$$

则 $dS(\phi) = dv \wedge dq$，可以验证 $dS(\phi)$ 是一个辛形式。

系统(5.4.38)式的特征矢量场

$$\Gamma = v\frac{\partial}{\partial q} - qv^2\frac{\partial}{\partial v} \qquad (5.4.40)$$

故系统对应(5.4.37)式的方程为

$$\Gamma\Gamma(\lambda) - 2vq\Gamma(\lambda) + (2q^2 - 1)v^2\lambda = 0 \qquad (5.4.41)$$

可以验证 $\lambda = v^{-1}$ 满足方程(5.4.41)，此时对应的矢量场

$$Y = -v^{-1}\frac{\partial}{\partial q} + q\frac{\partial}{\partial v} \qquad (5.4.42)$$

使得

$$i_Y dS(\phi) = dG \qquad (5.4.43)$$

成立，其中 $G = \frac{1}{2}q^2 + \ln v$。

根据上面的讨论，我们发现，拟对称性不仅从理论上建立起了保守力学系统和非保守力学系统的对称性与不变量之间关系的统一描述，而且其思想方法具有很大的启发性，这大大丰富了我们关于力学系统的对称性与不变量的认识。

第五节　力学系统的伴随对称性

上一节我们讨论了矢量场在满足特定的条件后可以生成力学系统的首次积分，在这一节中，我们引入特殊类型的 1－形式，当他们的系数满足特定的关系之后，由此可导致对称性矢量场，我们称之为伴随对称性。

考虑一非自治力学系统，设位形空间的微分流形为 M，力学系统运动微分方程的规范形式为

$$\ddot{q}^i = A^i(t, q, v) \qquad (i = 1, \cdots, n) \qquad (5.5.1)$$

它的解对应于 $R \times TM$ 上的矢量场

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Lambda^i(t, q, v) \frac{\partial}{\partial v^i} \tag{5.5.2}$$

的积分曲线。

在 $R \times TM$ 上构造(1,1)型张量场

$$S = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes (dq^i - v^i dt) \tag{5.5.3}$$

则 S 具有下列性质：

$$S(\Gamma) = 0 \tag{5.5.4}$$

$$S \circ L_\Gamma S = S \qquad L_\Gamma S \circ S = -S \tag{5.5.5}$$

$$(L_\Gamma S)^2 = 1 - \Gamma \otimes dt \tag{5.5.6}$$

对于每一个矢量场 Γ，定义

$$\mathscr{X}_\Gamma = \{X \in \mathscr{X}(R \times TM) \mid S([\Gamma, X]) = 0\} \tag{5.5.7}$$

$$\mathscr{X}_\Gamma^* = \{\phi \in \mathscr{X}^*(R \times TM) \mid L_\Gamma(S(\phi)) = \phi - \langle \Gamma, \phi \rangle dt\} \tag{5.5.8}$$

则用基 $\left\{\Gamma, \frac{\partial}{\partial q^i}, \frac{\partial}{\partial v^i}\right\}$ 表示矢量场 $X \in \mathscr{X}_\Gamma$，有

$$X = \tau\Gamma + \mu^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \Gamma(\mu^i) \frac{\partial}{\partial v^i} \tag{5.5.9}$$

而一个 1-形式 $\alpha \in \mathscr{X}_\Gamma^*$ 用对偶基 $\{dt, \theta^i = dq^i - v^i dt, \phi^i = dv^i - \Lambda^i dt\}$ 表示为

$$\alpha = \alpha_i \phi^i + \Gamma(\alpha_i)\theta^i + \tau dt \tag{5.5.10}$$

我们称 $X_1, X_2 \in \mathscr{X}_\Gamma$ 是等价的是指

$$X_1 - X_2 = f\Gamma \tag{5.5.11}$$

而称 $\alpha_1 \in \mathscr{X}_\Gamma^*, \alpha_2 \in \mathscr{X}_\Gamma^*$ 是等价的是指

$$\alpha_1 \wedge dt = \alpha_2 \wedge dt \tag{5.5.12}$$

另外，我们还定义投影算子

$$\pi_\Gamma : \mathscr{X}(R \times TM) \to \mathscr{X}_\Gamma \quad X \to \pi_\Gamma(X) = X + S([\Gamma, X])$$

$$\pi_\Gamma : \mathscr{X}^*(R \times TM) \to \mathscr{X}_\Gamma^* \quad \phi \to \pi_\Gamma(\phi) = L_\Gamma(S(\phi)) + \langle \Gamma, \phi \rangle dt \tag{5.5.13}$$

前面我们已经讲过，Γ 的动力学对称性矢量场 X 应当满足 $[X,\Gamma]=h\Gamma$；而 $X\in\mathscr{X}_\Gamma$ 等价于说 $\langle L_X\Gamma,\theta^i\rangle=0$，这意味着 X 的流映 Γ 的积分曲线为流形 $R\times M$ 上的曲线提升。Γ 的所有积分曲线都是提升曲线，且动力学对称性 X 映他们到自身，因此，动力学对称性 X 一定属于 $\mathscr{X}_\Gamma$。又因为 $\langle L_{[X,\Gamma]}\Gamma,\theta^i\rangle=0$，因而 $\langle L_X\Gamma,\theta^i\rangle=0$。

若假设 $X\in\mathscr{X}_\Gamma, L_\Gamma X\in\mathscr{X}_\Gamma$，则有

$$\langle L_X\Gamma,\theta^i\rangle=0 \tag{5.5.14}$$

$$\langle L_{[\Gamma,X]}\Gamma,\theta^i\rangle=0 \tag{5.5.15}$$

而(5.5.15)式等价于

$$\langle L_\Gamma(L_X\Gamma),\theta^i\rangle=0 \tag{5.5.16}$$

因而有

$$\langle L_X\Gamma,L_\Gamma\theta^i\rangle=\langle L_X\Gamma,\theta^i\rangle=0 \tag{5.5.17}$$

这一结论表明 $L_X\Gamma=h\Gamma$，即 X 是 Γ 的动力学对称性。因而我们有：$R\times TM$ 上的矢量场 X 是 Γ 的一个动力学对称性的充分必要条件是 $X\in\mathscr{X}_\Gamma, L_\Gamma X\in\mathscr{X}_\Gamma$。

$\mathscr{X}_\Gamma^*$ 的定义关系等价地可以写为

$$i_\Gamma(dS(\phi)+\phi\wedge dt)=0 \tag{5.5.18}$$

这提醒我们，依时 Lagrange 系统可用 Cartan 2-形式的核来定义。当 $\phi=dL$ 时，上面的 2-形式就是 Cartan 2-形式 $d\theta_L$，因此，非奇异 Lagrange 系统是那样的二阶方程场 $\Gamma:\mathscr{X}_\Gamma^*$ 包含了一个 1-形式 ϕ，而 $dS(\phi)+\phi\wedge dt$ 是一个接触形式，即最大秩的闭 2-形式。对于非保守的力学系统，合适的 1-形式取为

$$\phi=dL+Q_i(t,q,v)(dq^i-v^idt) \tag{5.5.19}$$

其中 Q_i 为非保守广义力。

根据(5.5.19)式，有

$$L_\Gamma(S(\phi))-\phi=[\Gamma(\frac{\partial L}{\partial v^i})-\frac{\partial L}{\partial q^i}-Q_i]$$

$$\times (dq^i - v^i dt) - \Gamma(L)dt \tag{5.5.20}$$

由(5.5.20)式可见，$\phi \in \mathscr{Q}_\Gamma^*$，即

$$\Gamma(\frac{\partial L}{\partial v^i}) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i \tag{5.5.21}$$

对于一个1-形式ϕ，若$dS(\phi) + \phi \wedge dt$具有最大秩，则称$\phi \in \mathscr{Q}_\Gamma^*$为非退化的。对于非退化1-形式$\phi$，$dS(\phi) + \phi \wedge dt$有一维核。

假若$\phi \in \mathscr{Q}_\Gamma^*$是非退化的1-形式，且满足$d\phi \wedge dt = 0$，则$\Gamma$描述了一个局部Lagrange系统，特别地，存在一个恰当1-形式$\phi' \in \mathscr{Q}_\Gamma^*$等价于$\phi$。

为说明上述结论，取

$$\Omega = dS(\phi) + \phi \wedge dt \tag{5.5.22}$$

由于$\phi \in \mathscr{Q}_\Gamma^*$，因而有$i_\Gamma \Omega = 0$，又由于$d\phi \wedge dt = 0$，因而有$d\Omega = 0$。按Crampin等人的工作，此即满足了Helmholtz条件，因此存在Lagrange函数。对于Lagrange函数L，有

$$\phi = \phi^{(1)} + \lambda dt \tag{5.5.23}$$

其中$\langle \frac{\partial}{\partial t}, \phi^{(1)} \rangle = 0$。由此可见$d\phi \wedge dt = 0$有$d_X \phi^{(1)} = 0$，$d_X$为$TM$上关于参数$t$的外导数。因而局部地有

$$\phi^{(1)} = dL \tag{5.5.24}$$

代入

$$\phi' = \phi + (\frac{\partial L}{\partial t} - \lambda)dt \tag{5.5.25}$$

则可得$\mathscr{Q}_\Gamma^*$的非退化元素ϕ'等价于ϕ，且

$$\phi' = dL \tag{5.5.26}$$

下面，我们给出伴随对称性及由此而得的一些结果。

定义 $R \times TM$上二阶方程场Γ的伴随对称性是1-形式$\alpha \in \mathscr{Q}_\Gamma^*$的Lie导数仍属于$\mathscr{Q}_\Gamma^*$。

由于1-形式$\alpha \in \mathscr{Q}_\Gamma^*$的坐标表示为

$$\alpha = \alpha_i\phi^i + \Gamma(\alpha_i)\theta^i + \tau dt \tag{5.5.27}$$

而

$$L_\Gamma\alpha = (2\Gamma(\alpha_i) + \alpha_j \frac{\partial \Lambda^j}{\partial v^i})\phi^i + (\Gamma\Gamma(\alpha_i) + \alpha_j \frac{\partial \Lambda^j}{\partial q^i})\theta^i + \Gamma(\tau)dt \tag{5.5.28}$$

因而 $L_\Gamma\alpha \in \mathfrak{X}_\Gamma^*$ 的充分必要条件为

$$\Gamma\Gamma(\alpha_i) + \Gamma(\alpha_j \frac{\partial \Lambda^j}{\partial v^i}) - \alpha_j \frac{\partial \Lambda^j}{\partial q^i} = 0 \tag{5.5.29}$$

这是一组二阶偏微分方程。

若 $R \times TM$ 上的 1- 形式 β 满足 $i_\Gamma\beta = 0, i_\Gamma d\beta = 0$，则称 β 是 Γ- 基。

若 β 是一个 Γ- 基，则 Γ- 基形式是商空间 $R \times TM/\Gamma$ 上形式的拉回。这类形式在 Cartan 的工作中被称之为绝对积分不变量。

设 α 是一个伴随对称性，则有 $L_\Gamma\alpha \in \mathfrak{X}_\Gamma^*$，因而有

$$L_\Gamma(S(L_\Gamma\alpha)) = L_\Gamma\alpha - \langle \Gamma, L_\Gamma\alpha\rangle dt \tag{5.5.30}$$

或

$$L_\Gamma(L_\Gamma(S(\alpha)) - L_\Gamma S(\alpha)) = L_\Gamma\alpha - \langle \Gamma, L_\Gamma\alpha\rangle dt \tag{5.5.31}$$

因此有

$$L_\Gamma(L_\Gamma(S(\alpha)) = L_\Gamma(L_\Gamma(S(\alpha)) - \alpha + \langle \Gamma, \alpha\rangle dt) \tag{5.5.32}$$

由于 $L_\Gamma S(\Gamma) = 0$，取 $\beta = L_\Gamma S(\alpha)$，则有 $i_\Gamma\beta = 0$。又由于 $\alpha \in \mathfrak{X}_\Gamma^*$，有 $L_\Gamma\beta = 0$。若 α_1, α_2 都给出 β 的伴随对称性，则有 $L_\Gamma S(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$，因此，$\alpha_1, \alpha_2$ 为相同等价类。

设 β 是 Γ-基形式，取 $\alpha = L_\Gamma S(\beta)$，则有 $\langle \Gamma, \alpha\rangle = 0$，且

$$L_\Gamma(S(\alpha)) = L_\Gamma(S(\beta)) = L_\Gamma S(\beta) = \alpha$$

因而有 $\alpha \in \mathfrak{X}_\Gamma^*$。进一步有

$$\beta = L_\Gamma(S(\alpha)) - S(L_\Gamma\alpha) = \alpha - S(L_\Gamma\alpha) \tag{5.5.33}$$

由 β 的不变性可得

$$L_\Gamma(S(L_\Gamma\alpha)) = L_\Gamma\alpha \tag{5.5.34}$$

因而有

$$\langle \Gamma, L_\Gamma\alpha\rangle = 0$$

因此 $L_\Gamma\alpha\in\mathscr{X}_\Gamma^*$，因而 α 是 Γ 的一个伴随对称性。

综上所述可知，张量场 $L_\Gamma S$ 确定了伴随对称性的等价类的集与 Γ-基形式的集之间的双射。

由伴随对称性同样可以得到力学系统的首次积分和系统的 Lagrange 函数。

定理 设 α 是 Γ 的一个伴随对称性，

1. 若 α 还满足 $L_\Gamma S(\alpha) = dF, F \in C^\infty(R\times TM)$，则 F 是 Γ 的首次积分；反之，对于每一个首次积分同样对应了一类伴随对称性。

2. 若 α 还满足 $\alpha = \pi_\Gamma(dF)$，则 $\Gamma(F)$ 是系统的 Lagrange 函数；反之，若 $\Gamma(F)$ 是一个 Lagrange 函数，则 $\pi_\Gamma(dF)$ 是 Γ 的一个伴随对称性。

对于定理的第一部分，由于 β 是一个 Γ- 基形式，且 $\beta = dF$ 是恰当的，因而 F 是 Γ 的首次积分；反之，若 $\Gamma(F) = 0$，则 $\beta = dF$ 定义了一个 Γ- 基形式。

对于定理的第二部分，由于 $\alpha = \pi_\Gamma(dF)$，因而有

$$\alpha = L_\Gamma S(dF) + S(d\Gamma(F)) + \langle\Gamma, dF\rangle dt \tag{5.5.35}$$

将上式两边同时作用 $L_\Gamma S$，则有

$$L_\Gamma S(\alpha) = dF - \langle\Gamma, dF\rangle dt - S(d\Gamma(F)) \tag{5.5.36}$$

因为 α 是一个伴随对称性，于是是一个不变 1- 形式，因此有

$$0 = d\Gamma(F) - \langle\Gamma, d\Gamma(F)\rangle dt - L_\Gamma(S(d\Gamma(F))) \tag{5.5.37}$$

因而 $dF(F)\in\mathscr{X}_\Gamma^*$，并且 $\Gamma(F)$ 是一个 Lagrange 函数。

在伴随对称性里，我们讨论的是非自治力学系统，而在上一节讨论拟对称性时，我们讨论的是自治力学系统。应当注意这两节中的一些量之间的关系。例如

$$S = S_0 - \Delta \otimes dt \tag{5.5.38}$$

其中 $S_0 = \frac{\partial}{\partial v^i} \otimes dq^i, \Delta = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}$。

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_0 \tag{5.5.39}$$

下面我们来看一些情况。

若 $\phi \in \mathscr{X}_\Gamma^*$ 满足 $L_{\frac{\partial}{\partial t}}\phi = 0$，则有

$$L_\Gamma(S(\phi)) = L_{\Gamma_0}(S_0(\phi)) - L_{\Gamma_0}(\langle \Delta, \phi \rangle)dt \tag{5.5.40}$$

因而 $\mathscr{X}_\Gamma^*$ 的定义关系分化为两部分：

$$i_{\Gamma_0}(\phi - d\langle \Delta, \phi \rangle) = 0 \tag{5.5.41}$$

$$L_{\Gamma_0}(S_0(\phi)) = \phi \tag{5.5.42}$$

由此可见，虽说 ϕ 含有 dt 项，但这一项对上面条件失去意义。这就是上节中讨论的问题。

再来讨论 $X \in \mathscr{X}_\Gamma$，而满足 $L_{\frac{\partial}{\partial t}}X = 0$ 的情形。此时有

$$0 = S([\Gamma, X]) = S_0([\Gamma_0, X]) - \langle [\Gamma_0, X], dt \rangle \Delta \tag{5.5.43}$$

类似地允许 X 有 $\frac{\partial}{\partial t}$ 的项存在。

考虑点对称性，则 Γ 的动力学对称性应是 $R \times M$ 上的矢量场

$$X^{(0)} = \tau(t, q)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^i(t, q)\frac{\partial}{\partial q^i} \tag{5.5.44}$$

且满足

$$\Gamma^2(\mu^i) - \frac{\partial \Lambda^i}{\partial v^j}\Gamma(\mu^j) - \frac{\partial \Lambda^i}{\partial q^j}\mu^j = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{5.5.45}$$

其中

$$\mu^i = \xi^i - v^i\tau(t, q) \tag{5.5.46}$$

对于伴随对称性，1-形式是不变 1-形式，则应当有

$$\Gamma^2(\alpha_i) + \Gamma(\frac{\partial \Lambda^j}{\partial v^i}\alpha_j) - \alpha_j \frac{\partial \Lambda^j}{\partial q^i} = 0 \tag{5.5.47}$$

设 ϕ 是 $\mathscr{X}_\Gamma^*$ 中的非退化元素，则 2-形式 $\Omega = dS(\phi) + \phi \wedge dt$ 的核是 Γ 复盖的一维分布，因而有一个从矢量场到 1-形式的映射，它们对于同一等价类的所有矢量场具有相同的值。一个 1-形式 β 是映射的象的充分必要条件为 $\langle \Gamma, \beta \rangle = 0$，此时 $\beta = L_\Gamma S(\alpha)$，即 γ：$\mathscr{X}(R \times TM) \to \mathscr{X}^*(R \times TM)$ 为

$$\gamma : [X] \to [\alpha] \qquad \alpha = L_\Gamma S(i_X \Omega) \tag{5.5.48}$$

而 $\gamma^{-1} : [\alpha] \to [X]$ 为 γ 的逆映射，其中 X 满足

$$i_X \Omega = L_\Gamma S(\alpha) \tag{5.5.49}$$

对于非奇异的 Lagrange 系统，映射 γ 满足

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} \mu^j = -\alpha_i \tag{5.5.50}$$

在某些情况下 L 是 v^i 的二次型，因而伴随方程的解 α_i 对应于对称条件的解 μ_i 有相同的多项式结构，因此，在点对称情形下，α_i 的解应线性依赖于 v^j。

下面我们来看几个说明性例子。

例 1 考虑著名的 Emden 方程

$$\ddot{q} = -\frac{2}{t}\dot{q} - q^5 \tag{5.5.51}$$

利用 a 表示伴随对称性 α 中 dv 前的系数，则有

$$\Gamma^2(a) + \Gamma(-\frac{2}{t}a) + 5aq^4 = 0 \tag{5.5.52}$$

容易验证，不存在只含有 t, q 的解。因而设

$$a(t, q, v) = a_1(t, q)v + a_0(t, q) \tag{5.5.53}$$

代入(5.5.52)式并按 v 的各次幂整理可得

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial q^2} = 0 \tag{5.5.54}$$

$$2\frac{\partial^2 a_1}{\partial t \partial q} + \frac{\partial^2 a_0}{\partial q^2} - \frac{8}{t}\frac{\partial a_1}{\partial q} = 0 \tag{5.5.55}$$

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 a_0}{\partial t \partial q} - \frac{6}{t}\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{12}{t^2}a_1 - 3q^5\frac{\partial a_1}{\partial q} - \frac{4}{t}\frac{\partial a_0}{\partial q} = 0 \tag{5.5.56}$$

$$\frac{\partial^2 a_0}{\partial t^2} - 2q^5\frac{\partial a_1}{\partial t} - q^5\frac{\partial a_0}{\partial q} + \frac{2}{t^2}a_0 - \frac{2}{t}\frac{\partial a_0}{\partial t} + \frac{4}{t}q^5 a_1 + 5q^4 a_0 = 0 \tag{5.5.57}$$

并求得

$$a = 2t^3 v + t^2 q \tag{5.5.58}$$

其对应的伴随对称性产生首次积分

$$F = t^3(v^2 + \frac{1}{3}q^6) + t^2 qv \tag{5.5.59}$$

例2 考虑

$$\Lambda = \frac{q}{t^2}v - \frac{1}{t}v^2 \tag{5.5.60}$$

的动力学系统，此时伴随方程的解为

$$a(t,q) = e^{q/t} \tag{5.5.61}$$

而相应的首次积分为

$$F = e^{q/t}v \tag{5.5.62}$$

例3 考虑一个三自由度的非保守力学系统，该力学系统的运动由以下三个常微分方程描述：

$$\left.\begin{aligned} \ddot{q}^1 &= -q^1\dot{q}^3 \\ \ddot{q}^2 &= -q^2\dot{q}^3 \\ \ddot{q}^3 &= q^1\dot{q}^1 + q^2\dot{q}^2 \end{aligned}\right\} \tag{5.5.63}$$

讨论其首次积分及系统的 Lagrange 函数。

对于(5.5.63)式，存在四个伴随对称性 $\alpha^{(i)}$，其中的二个与 $\alpha_i^{(i)}$ 的系数相关，对应的 Γ- 基形式 $\beta^{(i)}$ 与 dv^j 的系数相同。Γ- 基形式中的三个为

$$\left.\begin{aligned} \beta^{(1)} &= -dv^3 + q^1dq^1 + q^2dq^2 \\ \beta^{(2)} &= q^1dv^2 - q^2dv^1 + v^2dq^1 - v^1dq^2 \\ \beta^{(3)} &= v^1dv^1 + v^2dv^2 + v^3dv^3 \end{aligned}\right\} \tag{5.5.64}$$

可以验证，它们都是恰当形式，它们对应的首次积分为

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}[(q^1)^2 + (q^2)^2] - v^3 \\ F_2 &= q^1 v^2 - q^2 v^1 \\ F_3 &= \frac{1}{2}[(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2] \end{aligned}\right\} \tag{5.5.65}$$

第四个伴随对称性为

$$\alpha_j^{(4)} = q^j + tv^j \tag{5.5.66}$$

由此可见 $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$ 属于 TM，而 $\alpha^{(4)} \in R \times TM$，此时不存在 Γ- 基形式 $\beta^{(4)}$。但由 $\alpha^{(4)} = \pi_\Gamma(dF_4)$ 有

$$\alpha_j^{(4)} = \frac{\partial F_4}{\partial v^3} \tag{5.5.67}$$

因而有

$$F_4 = \frac{1}{2}t[(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2] + q^i v^i \tag{5.5.68}$$

由于 $\Gamma(F_4)$ 对应于系统的 Lagrange 函数，因而有

$$L = \frac{1}{2}[(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2] - \frac{1}{2}[(q^1)^2 + (q^2)^2]v^3 \tag{5..5.69}$$

第六章　绝热不变量理论

在前面几章中，我们讨论了目前关于对称性与不变量研究的几个主要方面：1. 研究 Hamilton 作用量在无穷小变换群作用下的不变性；2. 研究 Lagrange 运动微分方程在无穷小变换群作用下的不变性；3. 研究运动微分方程的解集的不变性；4. 研究流形上的微分形式的不变性等。

对于一般的动力学问题，不仅要研究力学系统的不变性性质，而且这种不变性对力学系统行为的影响也日益被引起重视。我们认为，对称性是力学系统的一种非常重要而又普遍的性质，小扰动作用下对称性的改变及其不变量与力学系统的可积性之间有密切的关系，有必要进行认真研究。在这一章将要讨论的绝热不变量就属于这一问题。

经典的绝热不变量(adiabatic invariant)是指在系统的某参数缓慢变化时，相对该参数的变化而改变更慢的某一物理量。adiabatic意指不管引起力学系统参数变化的原因。绝热不变量在有的文献中译为缓渐不变量和浸渐不变量。

第一节　作用—角变量

对于独立于时间的一维 Hamilton 系统，它存在一个通常的能量积分；对于独立于时间的 n 自由度力学系统，若 Hamilton-Jacobi 方程对某组坐标完全可分离，即是可积系统，则也可找到 n 个不变量。设第二类母函数 F_2 为 S，并且存在一分离解

$$S = \sum_i S_i(q_i, \alpha_i, \cdots, \alpha_n) \tag{6.1.1}$$

其中 α_i 是相应于运动的 n 个不变量的新的广义动量。如果

Hamilton 函数可以写成分离形式

$$H = \sum_i H_i\left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}, q_i\right) \tag{6.1.2}$$

则 Hamilton-Jacobi 方程可以分离为 n 个方程

$$H_i\left(\frac{\partial S_i}{\partial q_i}, q_i\right) = \alpha_i \tag{6.1.3}$$

因而可将 S_i 表示为 q_i 的函数。新的动量 α_i 于是便成为 Hamilton-Jacobi 方程的分离常数，且满足

$$\sum_i \alpha_i = H \tag{6.1.4}$$

新旧广义坐标之间应满足

$$p_s = \frac{\partial F_2}{\partial q_s} \quad Q_s = \frac{\partial F_2}{\partial P_s} \quad H^* = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{6.1.5}$$

这组关系式。新的 Hamilton 函数仅是动量 α_i 的函数，并且 Hamilton 运动方程很容易求解。

选择分离常数 α_i 作为新的动量是任意的，同样可以选择作为 α_i 的 n 个独立函数 J_i

$$J_i = J_i(\boldsymbol{\alpha}) \tag{6.1.6}$$

作为新的广义动量。由这 n 个方程反解出 α_i

$$\alpha_i = \alpha_i(\boldsymbol{J}) \tag{6.1.7}$$

将它代入(6.1.2)式；则变换到新动量 J_i 的母函数可以表示为

$$\bar{S}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{J}) = S(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{J})) \tag{6.1.8}$$

新的 Hamilton 函数为

$$\bar{H}(\boldsymbol{J}) = \sum_i \alpha_i(\boldsymbol{J}) \tag{6.1.9}$$

同样，Hamilton 方程可以被容易地解出。

设 J_i 的共轭变量为 θ_i，则由(6.1.9)式可得

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i \qquad \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0 \tag{6.1.10}$$

故

$$J_i = \text{常量} \quad \theta_i = \omega t + \delta \tag{6.1.11}$$

在运动中 θ_i 的增量

$$d\theta_i = \frac{\partial}{\partial q_i}\theta_i dq_i \tag{6.1.12}$$

利用(6.1.5)式,则(6.1.12)式可写为

$$d\theta_i = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial \bar{S}}{\partial J_i}dq_i \tag{6.1.13}$$

每经过一个周期,θ_i 增加一个单位,故

$$\oint d\theta_i = \frac{\partial}{\partial J_i}\oint \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_i}dq_i = 1 \tag{6.1.14}$$

如选择 J_i,使得每经过一个周期时,$\bar{S}$ 的增量为 J_i,则上式即可满足,即

$$J_i = \oint \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_i}dq_i = \oint d\bar{S} \tag{6.1.15}$$

由(6.1.5)式,可将(6.1.15)式写为

$$J_i = \oint p_i dq_i \tag{6.1.16}$$

因为 $\oint p_i dq_i$ 实际上是正则变换下的相对积分不变量,因而与坐标 q_j 无关,且与 Hamilton 作用量具有相同的量纲(也与动量具有相同的量纲),因此,J_i 通常被称为作用变量,其对偶变量 θ_i 称为角变量。

相对于一个完整的振动周期 T,积分 θ_i 可得

$$\Delta\theta_i = \int_t^{t+T} d\theta_i = \omega_i T \tag{6.1.17}$$

又由于(6.1.13)式,有

$$\Delta\theta_i = \frac{\partial}{\partial J_i}\oint \frac{\partial \bar{S}}{\partial q_i}dq_i = \frac{\partial}{\partial J_i}\oint p_i dq_i = 2\pi \tag{6.1.18}$$

比较(6.1.17),(6.1.18)式故有

$$\omega_i T = 2\pi \tag{6.1.19}$$

这表明常数 ω_i 恰好是振动的圆频率。因此,作用—角变量公式给我们提供了一种不需要求解运动方程而得到振动频率的简便方法。

例 1 考虑简谐振子。系统的 Hamilton 函数可写成

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \tag{6.1.20}$$

试求其作用—角变量及其运动。

解 设 E 为总能量(为一常数),则

$$p = \sqrt{2mE(1 - \frac{q^2}{a^2})} \qquad a^2 = \frac{2E}{k} \tag{6.1.21}$$

设该振子的频率为 ω_0,则

$$m(2\pi\omega_0)^2 = k \tag{6.1.22}$$

而系统的作用变量为

$$J = \oint \sqrt{2mE(1 - \frac{q^2}{a^2})}dq = \sqrt{2m\bar{E}}\pi a = \frac{E}{\omega_0} \tag{6.1.23}$$

由于

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{\partial E}{\partial J} = \omega_0$$

因此,角变量定义的频率与系统频率 ω_0 相等。若取角变量为 θ,则

$$\begin{aligned}\theta = \frac{\partial S}{\partial J} &= \frac{\partial}{\partial J}\oint \frac{\partial S}{\partial q}dq = \frac{\partial}{\partial J}\oint pdq \\ &= \int \frac{\partial}{\partial J}\sqrt{2mE(1 - \frac{q^2}{a^2})}dq = \int \frac{\partial}{\partial J}\sqrt{2m\omega J - (2\pi\omega mq)^2}dq \\ &= \frac{1}{2\pi}q \ \sin^{-1} \sqrt{\frac{2\pi^2\omega m}{J}}\end{aligned} \tag{6.1.24}$$

因而有

$$\begin{aligned}q &= \sqrt{\frac{J}{2\pi^2\omega m}}\sin 2\pi\theta = \sqrt{\frac{J}{2\pi^2 m\omega}}\sin 2\pi(\omega t + \theta_0) \\ p &= \sqrt{2\pi\upsilon J(1 - \frac{q^2}{a^2})} = \sqrt{2m\omega J}\cos 2\pi(\omega t + \theta_0)\end{aligned} \tag{6.1.25}$$

现在我们来看一看由相空间描述(q, p)到作用—角变量描述

(θ, J)的正则变换的母函数有什么特点。显然，第二类母函数 S_2 在一个运动周期的变化为

$$\Delta S_2(J) = \oint dq \frac{\partial S_2}{\partial q} = \oint p dq = 2\pi J \tag{6.1.26}$$

而母函数 S_1 为

$$S_1(\theta, q) = S_2(J, q) - \theta J \tag{6.1.27}$$

其中 $\theta = \frac{\partial S_2}{\partial J}$。$S_1$ 在一个周期内变化为

$$\Delta S_1 = \Delta S_2 - \Delta(J\theta) = \Delta S_2 - J\Delta\theta = 0 \tag{6.1.28}$$

因此，在一周期后 $S_1(\theta, q)$又返回原值，而 $S_2(\theta, q)$则增加 $2\pi J$。故 $S_1(\theta, q)$是 θ 的周期函数，而 $S_2(J, q)$则不是。

例 2 试求线性振子

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \tag{6.1.29}$$

的作用-角变量和母函数$S_1(\theta, q)$以及 $S_2(J, q)$。

解 上例中已经算出 $J = \frac{E}{\omega}$，因此，在作用—角变量描述下 Hamilton 函数为

$$H(J) = \omega J \tag{6.1.30}$$

且

$$p = \sqrt{2m\omega J - (m\omega q)^2} \tag{6.1.31}$$

相应的角变量

$$\theta = \sin^{-1}(q\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}) \tag{6.1.32}$$

因而

$$\begin{aligned} S_2(J, q) &= \int_0^q dq \sqrt{2m\omega J - (m\omega q)^2} \\ &= J\sin^{-1}(q\sqrt{\frac{m\omega}{2J}}) + \frac{1}{2} q \sqrt{(2mJ\omega - m^2\omega^2 q^2)} \end{aligned} \tag{6.1.33}$$

进而有

$$S_1(\theta, q) = \frac{1}{2} mq^2 \omega \operatorname{ctg}\theta \tag{6.1.34}$$

在 S_1 下，有

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q} = m\omega q \operatorname{ctg}\theta = \sqrt{2Jm\omega}\cos\theta \tag{6.1.35}$$

第二节　力学系统的绝热不变量

作用量变量 J 为一相对积分不变量，故在正则变换下不变。我们更可证明，如动力学系统中的一些参数(如外力场)变化率很慢时，J 也有不变性，而这种不变性与 Bohr-Sommerfeld-Wilson 理论中的量子化条件有很重要的关系。此时 J 为绝热不变量。

现考虑一长为 l 的单摆，在悬挂点将绳提起，连续而极其缓慢地将 l 缩短。在此缩短过程中，对重力及离心力所作的功为

$$dW = -(mg\,\overline{\cos\phi} + ml\,\overline{\dot{\phi}^2})dl \tag{6.2.1}$$

此处 $\cos\phi$，$\dot{\phi}$ 上的横线表示振动周期内的平均值。当振幅很小时，则有 $\cos\phi = 1 - \frac{1}{2}\phi^2$，因此

$$\begin{aligned} dW &= -mgdl + m(\frac{g}{2}\overline{\phi^2} - l\overline{\dot{\phi}})dl \\ &= -mgdl + dE \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

此处 $-mgdl$ 表示把单摆提起高 dl 所作的功，dE 表示分给振动的能量。对于一个简谐振动而言，一个周期内的平均动能等于平均势能，因而有

$$\frac{m}{2}l^2\overline{\dot{\phi}^2} = \frac{m}{2}gl\overline{\phi^2} = \frac{1}{2}E \tag{6.2.3}$$

故

$$dE = \frac{1}{l}(\frac{1}{2}E - E)dl = -\frac{E}{2l}dl \tag{6.2.4}$$

由于

$$\omega = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dl}{2l} \tag{6.2.5}$$

则有

$$\frac{dE}{E} = \frac{d\omega}{\omega} \tag{6.2.6}$$

因此$\frac{E}{\omega}$=常数,且$\frac{E}{\omega}$即为作用变量J。因此,对于简谐振动,J是一个绝热不变量。

对于非简谐振动,$\frac{E}{\omega}$不再是绝热不变量,但作用变量则仍是一绝热不变量。

现在讨论近可积 Hamilton 系统的小摄动及慢摄动在展开级数的阶数方面的差异。对于小摄动来说,Hamilton 函数具有如下普遍形式

$$H = H_0(J,t) + \varepsilon H_1(J,\theta,t) + \cdots \tag{6.2.7}$$

这里 H_0 代表了完全可积系统,ε 是小参数,代表了 H 的不可积部分的量值。对于小摄动,H_0 的导数和 H_1 的导数与 H_0 与 H_1 具有同样的阶,即

$$\left|\frac{\partial H_0}{\partial t}\right| \sim |H_0|, \left|\frac{\partial H_1}{\partial t}\right| \sim |H_1| \tag{6.2.8}$$

但对于慢摄动,假设求导产生的项要比求导前的项小一个 ε 阶。也就是说,对慢的时间变分

$$\left|\frac{\partial H_0}{\partial t}\right| \sim \varepsilon |H_0| \cdots \tag{6.2.9}$$

为了保证这种阶的差别,通常引入小参数 ε,将 Hamilton 函数写成

$$H_0 = H_0(\varepsilon t) \tag{6.2.10}$$

则有

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} = \varepsilon H_0' \tag{6.2.11}$$

其中"′"表示了对慢变时间 $\tau = \varepsilon t$ 的导数。

在本节中,我们将研究这样的 Hamilton 函数,它除了一个自由度以外,其它的自由度以及时间的变化都是缓慢的。因此

$$H = H_0(J,\varepsilon y,\varepsilon t) + \varepsilon H_1(J,\theta,\varepsilon y,\varepsilon t) + \cdots \tag{6.2.12}$$

其中 J,θ 是未扰系统的作用—角变量，$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$是其它自由度的慢变正则变量。

下面，我们讨论单自由度 Hamilton 系统在有参数缓慢变化时作用变量的变化。

考虑 Hamilton 系统

$$H = H(q,p,\tau) \tag{6.2.13}$$

其中 $\tau = \epsilon t \quad (0 \leqslant \epsilon \leqslant 1)$。

对于函数 $F(q,p,\tau)$ 若满足：对任意 $\epsilon(0<\epsilon\leqslant 1)$ 有

$$F(t) = F(q(t),p(t),\tau(t)) \tag{6.2.14}$$

在时间范围 $0<t<\varepsilon^{-1}$ 内变化很小；或者说：对任意的 $\eta>0$，可以找到一个 ϵ_0，使对任意 $\epsilon(0<\epsilon<\epsilon_0)$ 有

$$|F(t)-F(0)|<\eta \quad (0<t<\varepsilon^{-1}) \tag{6.2.15}$$

则称 F 是一个绝热不变量。

因此，绝热不变量是一个给定的、有限时间间隔内的近似常数。

假设对于固定的 τ，Hamilton 函数(6.2.13)可以通过参数地依赖于 τ 的母函数 $S_1(\theta,q,\tau)$ 的正则变换 $(q,p)\to(\theta,J)$ 变换到作用—角变量 (θ,J) 的形式。若 τ 随时间变化时，则母函数亦随时间变化，由 S_1 导出的变换 $(q,p)\to(\theta,J)$ 仍是正则的，但变量 (θ,J) 已不再是系统的作用—角变量。

新的 Hamilton 函数表示为

$$\bar{H}(\theta,J,\tau) = H(J,\tau) + \epsilon\frac{\partial S_1}{\partial \tau} \tag{6.2.16}$$

其中

$$H(J,\tau) = H(q(\theta,J,\tau),p(\theta,J,\tau),\tau) \tag{6.2.17}$$

而 Hamilton 正则方程为

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega(J,\tau)+\epsilon R_1(\theta,J,\tau)\\ \dot{J} &= -\epsilon R_2(\theta,J,\tau)\end{aligned} \tag{6.2.18}$$

其中

$$\omega(J,\tau)=\frac{\partial\overline{H}}{\partial J}(J,\tau) \tag{6.2.19}$$

$$R_1=\frac{\partial^2 S_1}{\partial\tau\partial J}\qquad R_2=\frac{\partial^2 S_1}{\partial\tau\partial\theta} \tag{6.2.20}$$

由于

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R_2 d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 S_1}{\partial\tau\partial\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}\frac{\partial S_1}{\partial\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}[S_1]\mid_{\theta=0}^{\theta=2\pi}=0 \tag{6.2.21}$$

这是因为 S_1 为 θ 的周期函数。由(6.2.21)式可知 R_2 的平均值为零。

令

$$R_3(\theta,J,\tau)=\int_0^{\theta}R_2(\theta',J,\tau)d\theta' \tag{6.2.22}$$

由(6.2.21)式可知 R_3 亦是 θ 的周期函数,因而有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)=\frac{1}{\omega}\frac{\partial R_3}{\partial\theta}\dot{\theta}+\frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)\dot{J}+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)\dot{\tau} \tag{6.2.23}$$

因此

$$R_2=\frac{d}{dt}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)-\varepsilon M(t) \tag{6.2.24}$$

其中

$$M(t)=\frac{R_1R_2}{\omega}-R_2\frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{R_3}{\omega}\right) \tag{6.2.25}$$

代入(6.2.18)式则得

$$\dot{J}=-\varepsilon\frac{d}{dt}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)+\varepsilon^2M(t) \tag{6.2.26}$$

因为 R_1,R_2,R_3 的周期性及 $\omega\neq 0$,因而有

$$|M(t)|\leqslant M_1 \tag{6.2.27}$$

且有 $\left|\frac{R_3}{\omega}\right|\leqslant M_2$,这里 M_1,M_2 是常数。而 $J(t)$ 和它的初值之差为

$$| J(t) - J_0 | \leqslant 2\varepsilon M_2 + \varepsilon^2 t M_1 \tag{6.2.28}$$

因而存在一个常数 K，使得

$$| J(t) - J_0 | < K\varepsilon \quad (0 < t < \varepsilon^{-1}) \tag{6.2.29}$$

这表明在 $(0, \varepsilon^{-1})$ 的时间区间内，$J(t)$ 无限接近于它的初值。因此，对于 Hamilton 函数(6.2.7)式来说，作用变量 J 是系统的绝热不变量。

例 1 一个质量为 m 的质点在势能

$$V(q) = U\mathrm{tg}^2\, \alpha q \tag{6.2.30}$$

场中运动。若 α 缓慢增加，试问系统的能量、振幅和频率怎样变化。

解 由于

$$J = \frac{1}{\pi}\int_{q_1}^{q_2} dq[2m(E - U\mathrm{tg}^2\alpha q)]^{\frac{1}{2}} \tag{6.2.31}$$

其中 $\mathrm{tg}^2\alpha q_2 = \dfrac{E}{U}$，$q_1 = -q_2$。由(6.2.31)式可得

$$\alpha J = [2m(E + U)]^{\frac{1}{2}} - [2mU]^{\frac{1}{2}} \tag{6.2.32}$$

由此解得 Hamiltion 函数

$$H(\theta, J) = E(J) = \alpha J[\alpha J + 2(2mU)^{\frac{1}{2}}]/2m \tag{6.2.33}$$

圆频率为

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial J} = \alpha[2(E + U)/m]^{\frac{1}{2}} \tag{6.2.34}$$

当 Hamilton 函数缓慢变化时，J 保持常量。因为 Hamilton 函数变化时，能量变化了，但以上关系式近似成立，因而有

$$E(t) \approx \alpha(t)J[\alpha(t)J + 2(2mU)^{\frac{1}{2}}]/2m \tag{6.2.35}$$

$$\omega(t) = \alpha(t)[\alpha(t)J + (2mU)^{\frac{1}{2}}]/2m \tag{6.2.36}$$

接下来讨论 Hamilton 函数(6.2.12)对应的经典绝热不变量。对零阶精度来说，不变量就是与快变自由度相应的作用变量

J。为构造具有一阶精度的绝热不变量，考虑扰动 εH_1 的影响。为此，寻求从 $J,\theta,\boldsymbol{y}$ 到 $\bar{J},\bar{\theta},\bar{\boldsymbol{y}}$ 的正则变换，以使新的 Hamilton 函数

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \varepsilon\bar{H}_1 + \cdots \tag{6.2.37}$$

独立于快变量 $\bar{\theta}$。引进近恒等变换的母函数

$$S = \bar{J}\theta + \bar{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{q} + \varepsilon S_1(\bar{J},\theta,\bar{\boldsymbol{p}},\boldsymbol{q},t) + \cdots \tag{6.2.38}$$

精确到一阶近似，则正则变换为

$$\begin{aligned} J &= \bar{J} + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}} & \theta &= \bar{\theta} - \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{J}} \\ \boldsymbol{p} &= \bar{\boldsymbol{p}} + \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\boldsymbol{q}}} & \boldsymbol{q} &= \bar{\boldsymbol{q}} - \varepsilon\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\boldsymbol{p}}} \end{aligned} \tag{6.2.39}$$

将(6.2.39)式代入 H_0，则有

$$H_0(J,\varepsilon\boldsymbol{y},\varepsilon t) = H_0(\bar{J},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t) + \varepsilon\omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}} \tag{6.2.40}$$

其中 $\omega = \dfrac{\partial H_0}{\partial\bar{J}}$ 是快变频率，且

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{J},\bar{\theta},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t) &= H(J,\theta,\varepsilon\boldsymbol{y},\varepsilon t) \\ &\quad + \varepsilon\frac{\partial S(\bar{J},\theta,\varepsilon\bar{\boldsymbol{p}},\varepsilon\boldsymbol{q},\varepsilon t)}{\partial(\varepsilon t)} \end{aligned} \tag{6.2.41}$$

因此，精确到零阶，有

$$\bar{H}_0(\bar{J},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t) = H_0(\bar{J},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t) \tag{6.2.42}$$

精确到一阶，有

$$\bar{H}_1(\bar{J},\bar{\theta},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t) = \omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}} + H_1(\bar{J},\bar{\theta},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t) \tag{6.2.43}$$

其中 $S_1 = S_1(\bar{J},\bar{\theta},\varepsilon\bar{\boldsymbol{y}},\varepsilon t)$。

为使 $\bar{H}_1$ 独立于 $\bar{\theta}$，选择 S_1 以使 H_1 的关于 $\bar{\theta}$ 的振动部分被消去。保持慢的角变量不变，定义 $\bar{\theta}$ 的平均为

$$\langle H_1\rangle_{\bar{\theta}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1 d\bar{\theta} \tag{6.2.44}$$

关于 $\bar{\theta}$ 的振动部分为

$$\{H_1\}_{\bar{\theta}} = H_1 - \langle H_1\rangle_{\bar{\theta}} \tag{6.2.45}$$

将(6.2.43)式分为平均与振动两部分，得到精确到一阶的 $\bar{H}$ 的表

达式为

$$\bar{H}(\bar{J},\epsilon\dot{y},\epsilon t)= \quad H_0+\epsilon\langle H_1\rangle_\theta \tag{6.2.46}$$

和 S_1 的方程

$$\omega\frac{\partial S_1}{\partial\bar{\theta}}=-\{H_1\}_\theta \tag{6.2.47}$$

它很容易被积分。精确到零阶，绝热不变量是 J；精确到一阶，绝热不变量是 $\bar{J}$，由(6.2.39)式可得

$$\bar{J}(J,\theta,\epsilon y,\epsilon t)=J-\epsilon\frac{\partial S_1}{\partial\theta} \tag{6.2.48}$$

因而有

$$\bar{J}=J+\frac{\epsilon\{H_1\}_\theta}{\omega} \tag{6.2.49}$$

事实上，任何 $\bar{J}$ 的函数也可以选择作为绝热不变量。

通过构造一个绝热不变量实际上是在一定的近似下将 Hamilton 系统从 n 个自由度降到 $n-1$ 个自由度。这是因为由一个变换后给出的 Hamilton 函数

$$\bar{H}=\bar{H}(\bar{J},\epsilon\bar{y},\epsilon t,\epsilon) \tag{6.2.50}$$

是独立于 $\bar{\theta}$ 的，因此 $\bar{J}$ 是常量。若系统余下的自由度中经历一个振动，这个振动相应其它自由度来说是快的，则可引入第二个小参数 ϵ_2，变换未扰系统($\epsilon_2=0$)的快变量到作用—角变量，然后去寻找第二个绝热不变量。由此下去也许可得一组绝热不变量，直至系统降至一个自由度，并且可以积分以获得最后的不变量。

以上讨论的绝热不变量理论是有限制的，因为共振也许会改变或破坏不变量。

例 2 试求慢变谐振子

$$H=\frac{1}{2}G(\tau)p^2+\frac{1}{2}F(\tau)q^2 \quad (\tau=\epsilon t) \tag{6.2.51}$$

的绝热不变量，并讨论共振对它的影响。

首先把 Hamilton 函数变换到 $H_0=H_{t0}(\epsilon=0)$ 的作用—角变量形式。取母函数 $F_1(q,\theta,\tau)$

$$F_1(q,\theta,\tau) = \frac{1}{2}Rq^2 \operatorname{ctg}\theta \tag{6.2.52}$$

其中 $R(\tau) = (F/G)^{1/2}$，则变换后的 Hamilton 函数为

$$H = \omega_0 J + \varepsilon \frac{1}{2}\frac{R'}{R}J\sin 2\theta \tag{6.2.53}$$

其中 $\omega_0(\tau) = (FG)^{1/2}$，$R'$ 表示对 τ 求导。因此系统成为(6.2.12)的形式。

精确到零阶，绝热不变量为

$$J = \frac{H_0}{\omega_0} = \text{const.} \tag{6.2.54}$$

精确到一阶，有

$$\bar{J} = J + \varepsilon JP\sin\theta = \text{const.} \tag{6.2.55}$$

其中 $P(\tau) = R'/2\omega_0 R$。这表明精确到一阶无穷小，J 有一个以快变量的频率的两倍来振动的微小的附加部分。

为验证 $\bar{J}$ 为精确到一阶的不变量，将 $\bar{J}$ 对 t 求导数，因为

$$\dot{\bar{J}} = \dot{J} + \varepsilon\dot{P}J\sin 2\theta + 2\varepsilon PJ\omega_0 \cos 2\theta + o(\varepsilon^2) \tag{6.2.56}$$

由于 Hamilton 方程

$$\dot{J} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = -\frac{\varepsilon R'}{R}J\cos 2\theta = -2\varepsilon PJ\omega_0 \cos 2\theta \tag{6.2.57}$$

因而有

$$\dot{\bar{J}} = \varepsilon\dot{P}J\sin 2\theta \tag{6.2.58}$$

根据慢摄动的阶的关系有 $\dot{P} \sim \varepsilon P$，因此 $\dot{\bar{J}}$ 是 ε^2 阶的，因而 $\bar{J}$ 是一阶不变量。

现在考虑由于振动和振子参数的慢的周期性变化的共振而引起的绝热不变量的长期变化。为此，将 $\dot{P}$ 展开为 Fourier 级数，有

$$\dot{P} = \varepsilon\sum_{n\neq 0} a_n \exp(in\omega_1\varepsilon t) \tag{6.2.58}'$$

其中 $\varepsilon\omega_1$ 是慢振动的频率，并且 $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ 和 1 同阶。将(6.2.58)′式代入

(6.2.58)式则有

$$\dot{\bar{J}} = \frac{\varepsilon^2}{2i}\bar{J}\sum_{n\neq 0} a_n \{\exp[i(n\omega_1\varepsilon t + 2\theta)] - \exp[i(n\omega_1\varepsilon t - 2\theta)]\} \quad (6.2.59)$$

这里精确到一阶无穷小用 $\bar{J}$ 代替 J。在慢振动的一个周期上积分(6.2.59)式得

$$\Delta\bar{J}/\dot{J} \sim \varepsilon^2 \quad (6.2.60)$$

当然在对 t 和对 θ 的振动频率可通约的情况下，即

$$\frac{\omega_0}{\varepsilon\omega_1} = \frac{s}{2} \quad (6.2.61)$$

其中 s 是一个具有 ε^{-1} 阶的整数，(6.2.59) 式中 $n = \pm s$ 项将是对 t 的常数，并且对慢周期的积分可得

$$\frac{\Delta\bar{J}}{\bar{J}} \sim \varepsilon^2 \mid a_s \mid \frac{2\pi\varepsilon^{-1}}{\omega_1} \quad (6.2.62)$$

即

$$\frac{\Delta\bar{J}}{\bar{J}} \sim \varepsilon \quad (6.2.63)$$

因此，若在时间 $\sim 2\pi\varepsilon^{-1}/\omega$ 共振保持，则一阶不变量被破坏。当然这并不一定表示运动不存在不变量，而只是因为不变量不具有上面这种形式。事实上，线性振子是可积的，因此不变量存在。若振子是非线性的，则不变量可能存在，也可能它的拓扑结构被改变，也可能被完全破坏。

第三节　力学系统对称性的摄动与绝热不变量(I)

在上面我们已经给出了力学系统的绝热不变量的概念及其在作用—角变量下的构造方式。根据力学系统的对称性与不变量的一般理论我们可以知道，力学系统存在的不变量往往对应于它的对称性。绝热不变量虽说是指在一定条件下近似不变的量，但与之相对应的应当存在一定的对称性，根据我们的研究，对称性的响

应有可能不受改变，也可能受到摄动。在本节及下一节中，我们将讨论对称性摄动与绝热不变量的问题。

在讨论绝热不变量时，经常讨论参数缓慢变化的问题，此时可转化为一个小摄动的问题加以研究。

假设力学系统受到小干扰力 εQ_i 的作用，其中 ε 为小参数，Q_i 为相应的广义力。为了更精确地描述绝热不变量的近似不变性质，我们首先引入高阶绝热不变量的概念。

若 $I_n(t,q,\dot{q},\varepsilon)$ 是力学系统的一个含有 ε 的最高次幂为 n 的物理量，其对时间 t 的一阶导数正比于 ε^{n-1}，则称 I_n 为力学系统的 n 阶绝热不变量。

在这里，我们根据 Noether 对称性理论来研究力学系统对称性的摄动性与绝热不变量之间的关系。

对于完整保守的力学系统，其运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \tag{6.3.1}$$

设 $\tau^0(t,q,\dot{q})$，$\xi_i^0(t,q,\dot{q})$ 分别是无穷小变换的时间和空间的生成函数，$P^0(t,q,\dot{q})$ 是相应的规范函数，若它们满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau^0+\frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i^0+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\dot{\tau}^0=\dot{P}^0 \tag{6.3.2}$$

式中 $L=T-V$ 是系统的 Lagrange 函数，则系统存在相应的 Noether 守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\xi_i^0+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\tau^0-P^0=\text{const.} \tag{6.3.3}$$

这个不变量是一个精确不变量，它揭示了未受扰力学系统的对称性与不变量之间的关系。

假设(6.3.1)式对应的完整保守力学系统受到了一个小干扰力 εQ_i 的作用，则系统的运动微分方程变为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\varepsilon Q_i \tag{6.3.4}$$

在 εQ_i 的作用下，系统原有的对称性与不变量相应地会发生改变。假设这种改变是在系统无扰动的对称变换的基础上发生的小摄动，如用 $\tau(t,q,\dot{q}),\xi_i(t,q,\dot{q})$ 表示扰动后的时间与空间对应的生成函数，则

$$\begin{aligned}\tau &= \tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \varepsilon^2\tau^2 + \cdots \\ \xi_i &= \xi_i^0 + \varepsilon\xi_i^1 + \varepsilon^2\xi_i^2 + \cdots\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

并满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau + \frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i)\dot{\tau} + \varepsilon Q_i(\xi_i - \dot{q}_i\tau) = \dot{P} \tag{6.3.6}$$

其中 P 为规范函数。若记

$$P = P^0 + \varepsilon P^1 + \varepsilon^2 P^2 + \cdots \tag{6.3.7}$$

且有

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau^k + \frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i^k + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i)\dot{\tau}^k + Q_i(\xi_i^{k-1} - \dot{q}_i\tau^{k-1}) = \dot{P}^k$$
$$(k = 0,1,2,\cdots) \tag{6.3.8}$$

式中 $k = 0$ 时，约定 $\xi_i^{-1} = \tau^{-1} = 0$。可以证明，相对于力学系统的运动微分方程(6.3.4)式而言，下式

$$\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\xi_i^k + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i)\tau^k - P^k] \tag{6.3.9}$$

是力学系统的 n 阶绝热不变量。若记(6.3.9)式为 $I_n(t,q,\dot{q},\varepsilon)$，则 $\dfrac{dI_n}{dt}$ 正比于 ε^{n+1}。

实际上，

$$\begin{aligned}\frac{dI_n}{dt} &= \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k[\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\xi_i^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i^k + \frac{d}{dt}(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i)\tau^k \\ &\qquad + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i)\dot{\tau}^k - \dot{P}^k] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k[(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i})(\xi_i^k - \dot{q}_i\tau^k) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^k \\ &\qquad + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i^k + \frac{\partial L}{\partial t}\tau^k + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i)\dot{\tau}^k - \dot{P}^k]\end{aligned}$$

考虑到(6.3.4),(6.3.8)式则有

$$\frac{dI_n}{dt} = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k [\varepsilon Q_i(\xi_i^k - \dot{q}_i\tau^k) - Q_i(\xi_i^{k-1} - \dot{q}_i\tau^k)] \quad (6.3.10)$$

将(6.3.10)式展开后正负相抵可得

$$\frac{dI_n}{dt} = \varepsilon^{n+1} Q_i(\xi_i^k - \dot{q}_i\tau^k) \quad (6.3.11)$$

因此，I_n 为该力学系统的 n 阶绝热不变量。

从(6.3.11)式可见，若 $Q_i = 0$，则 $\frac{dI_n}{dt} = 0$，因此，力学系统的精确不变量是一个特殊的绝热不变量，反之则不。

综合以上的讨论，我们有定理。

定理 对于受到小干扰力 εQ_i 作用的完整保守力学系统，若无穷小变换的生成函数 $\tau^k(t,q,\dot{q})$，$\xi_i^k(t,q,\dot{q})$ 满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau^k + \frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i^k + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i)\dot{\tau}^k + Q_i(\xi_i^{k-1} - \dot{q}_i\tau^{k-1}) = \dot{P}^k$$
$$(k = 0,1,2,\cdots)$$

其中 $P^k(t,q,\dot{q})$ 为规范函数，则

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k [\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\xi_i^k + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i)\tau^k - P^k]$$

是该力学系统的一个 n 阶绝热不变量。

应当注意，I_n 一般来说并不是绝对不变的，说它是不变的是相对于 ε 的量级而言的。上一节中讨论的零阶精度、一阶精度的不变量只是我们这里结论的特殊情形。

上面的结论可作进一步的推广。

对于受有 s 个一阶非线性非完整约束的非保守力学系统，若约束方程为

$$f_l(t,q,\dot{q}) = 0 \quad (l = 1,2,\cdots,s)$$

则系统的运动微分方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \quad (6.3.12)$$

其中 Q_i 为非保守广义力，λ_l 为 Lagrange 待定乘子。

若该力学系统有生成函数为 $\tau^0(t,q,\dot{q})$，$\xi_i^0(t,q,\dot{q})$ 的对称变换，相应的规范函数为 $P^0(t,q,\dot{q})$，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau^0+\frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i^0+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\dot{\tau}^0 + \left(Q_i+\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\right)\left(\xi_i^0-\dot{q}_i\tau^0\right)=\dot{P}^0 \tag{6.3.13}$$

则该力学系统存在形如(6.3.3)式的守恒量。

设非完整非保守力学系统受到小干扰力 $\varepsilon\bar{Q}_i$ 的作用，系统的对称性也发生了摄动(即(6.3.5)式)，若存在一组生成函数 $\tau^k(t,q,\dot{q})$，$\xi_i^k(t,q,\dot{q})$ 及规范函数 $P^k(t,q,\dot{q})$ 满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}\tau^k+\frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^k+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i^k+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\dot{\tau}^k + \left(Q_i+\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\right)\left(\xi_i^k-\dot{q}_i\tau^k\right)+\bar{Q}_i\left(\xi_i^{k-1}-\dot{q}_i\tau^{k-1}\right)=\dot{P}^k \quad (k=1,2,\cdots) \tag{6.3.14}$$

若取

$$I_n=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\xi_i^k+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\tau^k-P^k\right] \tag{6.3.15}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{dI_n}{dt}&=\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\left(\xi_i^k-\tau^k\dot{q}_i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\tau^k+\frac{\partial L}{\partial q_i}\xi_i^k\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\xi}_i^k+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)\dot{\tau}^k-\dot{P}^k\right]\\&=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\left[\left(Q_i+\varepsilon\bar{Q}_i+\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\right)\left(\xi_i^k-\tau^k\dot{q}_i\right)\right.\\&\quad-\left(Q_i+\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}\right)\left(\xi_i^k-\dot{q}_i\tau^k\right)]\\&\quad\left.-\bar{Q}_i\left(\xi_i^{k-1}-\dot{q}_i\tau^{k-1}\right)\right]\\&=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\left[\varepsilon\bar{Q}_i\left(\xi_i^k-\dot{q}_i\tau^k\right)-\bar{Q}_i\left(\xi_i^{k-1}-\dot{q}_i\tau^{k-1}\right)\right]\\&=\varepsilon^{n+1}\bar{Q}_i\left(\xi_i^n-\dot{q}_i\tau^n\right)\end{aligned} \tag{6.3.16}$$

因此，在条件(6.3.13)，(6.3.14) 式下，(6.3.15) 式是该力学系统的一个 n 阶绝热不变量。

假若讨论的一阶非线性非完整约束是 Четаев 型的，则(6.3.13)，(6.3.14)式中 $\lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i^k - \dot{q}_i\tau^k)(k = 0,1,2,\cdots)$ 应为零，这是由于生成函数应满足 Четаев 定义。

下面我们讨论定理的逆命题。

假设对于完整保守的力学系统，存在一个一阶绝热不变量

$$I_1 = G_0(t,q,\dot{q}) + \varepsilon G_1(t,q,\dot{q}) \tag{6.3.17}$$

由于其轨道应满足

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \varepsilon Q_i \tag{6.3.18}$$

因而有

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \varepsilon Q_i\right)(\xi_i - \dot{q}_i\tau) = 0 \tag{6.3.19}$$

由于

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\partial G_0}{\partial t} + \frac{\partial G_0}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G_0}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \varepsilon\left(\frac{\partial G_1}{\partial t} + \frac{\partial G_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G_1}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) \tag{6.3.20}$$

根据(6.3.11) 式，并综合考虑(6.3.19)，(6.3.20) 式，则有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial G_0}{\partial t} - \frac{\partial G_0}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G_0}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \varepsilon\left(\frac{\partial G_1}{\partial t} + \frac{\partial G_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G_1}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \varepsilon Q_i\right)(\xi_i - \dot{q}_i\tau)\\ &\quad = \varepsilon^2 Q_i(\xi_i^1 - \dot{q}_i\tau^1)\end{aligned} \tag{6.3.21}$$

其中 $\xi_i = \xi_i^0 + \varepsilon\xi_i^1 + \cdots, \tau = \tau^0 + \varepsilon\tau^1 + \cdots$。将(6.3.21)式进行整理后可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial G_0}{\partial t} + \frac{\partial G_0}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G_0}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j(\xi_i^0 - \dot{q}_i\tau^0)\\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)(\xi_i^0 - \dot{q}_i\tau^0)\end{aligned}$$

$$+\varepsilon\left[\frac{\partial G_1}{\partial t}+\frac{\partial G_1}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial G_1}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j}(\dot{\xi}_i^1-\dot{q}_i\tau^1)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)(\dot{\xi}_i^1-\dot{q}_i\tau^1)\right]=0 \qquad (6.3.22)$$

因此,若有

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j}(\dot{\xi}_j^0-\dot{q}_j\tau^0)+\frac{\partial G_0}{\partial \dot{q}_i}=0 \qquad (6.3.23)$$

令$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i\partial \dot{q}_j}=H_{ij}$,$h_{ij}=(H_{ij})^{-1}$,$H_{ij}$ 称为 Hess 矩阵,则由(6.3.23)式可以解得

$$\dot{\xi}_j^0-\dot{q}_j\tau^0=h_{ij}\frac{\partial G_0}{\partial \dot{q}_i} \qquad (6.3.24)$$

进一步假设

$$G_0=L\tau^0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(\dot{\xi}_j^0-\dot{q}_j\tau^0)+P^0 \qquad (6.3.25)$$

由(6.3.24),(6.3.25)两式可以解得无扰动部分对应的时间与空间的生成函数为

$$\begin{aligned}\tau^0&=L^{-1}\left(G_0-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}h_{ij}\frac{\partial G_0}{\partial \dot{q}_i}-P^0\right)\\ \xi_j^0&=h_{ij}\frac{\partial G_0}{\partial \dot{q}_i}+\dot{q}_jL^{-1}\left(G_0-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}h_{ij}\frac{\partial G_0}{\partial \dot{q}_i}-P^0\right)\end{aligned} \qquad (6.3.26)$$

进一步地分析可以得到小扰动作用下生成函数的摄动项的结果为

$$\begin{aligned}\tau^1&=L^{-1}\left(G_1-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}h_{ij}\frac{\partial G_1}{\partial \dot{q}_i}-P^1\right)\\ \xi_j^1&=h_{ij}\frac{\partial G_1}{\partial \dot{q}_i}+\dot{q}_jL^{-1}\left(G_1-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}h_{ij}\frac{\partial G_1}{\partial \dot{q}_i}-P^1\right)\end{aligned} \qquad (6.3.27)$$

对于非完整、非保守力学系统可以进行类似的分析。

下面,我们来讨论一个说明性的例子。

例 设慢变谐振子的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}G(\tau)\dot{q}^2-\frac{1}{2}F(\tau)q^2 \qquad (\tau=\varepsilon t) \qquad (6.3.28)$$

利用 Lagrange 方程可得

$$\ddot{q} + (FG)q = \varepsilon \frac{G'}{G}\dot{q} \tag{6.3.29}$$

取 $\omega(\tau) = (FG)^{\frac{1}{2}}$，则有

$$\ddot{q} + \omega^2(\tau)q = \varepsilon \frac{G'}{G}\dot{q} \tag{6.3.30}$$

Born 曾给出了(6.3.30)式以作用—角变量表示的零阶绝热不变量为

$$G_0 = \frac{1}{2\omega}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) \tag{6.3.31}$$

相应由(6.3.30)式的 Lagrange 函数为 $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2$，故有 $h_{11} = 1$。若取 $P^0 = 0$，则可求得相应于(6.3.31)式的时间与空间的生成函数为

$$\tau^0 = -\frac{1}{\omega} \qquad \xi_j^0 = 0 \tag{6.3.32}$$

因此，该系统的零阶绝热不变量对应于(6.3.32)式的关于时间为平移变换的对称变换。

根据本章第二节的例 2，(6.3.30)式存在一阶绝热不变量

$$I_1 = G_0(1 + \frac{\varepsilon R'}{2\omega R}\sin\theta) \tag{6.3.33}$$

其中 $R = (F/G)^{\frac{1}{2}}$，R' 为 R 对 τ 的导数，θ 为角变量，G_0 实际上为作用变量 J。因为我们以上讨论时采用的是广义坐标和广义速度，故把(6.3.33)式改写为

$$I_1 = \frac{1}{2\omega}(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2)(1 + \frac{\varepsilon R'}{2\omega R}\sin\theta) \tag{6.3.34}$$

代入(6.3.27)式可以计算出相应于一阶绝热不变量而言的无穷小空间与时间的对称变换的摄动项为(取 $P^1 = 0$)

$$\tau^1 = -\frac{R'\sin\theta}{2\omega^2 R} \qquad \xi^1 = 0 \tag{6.3.35}$$

(6.3.35)式表明，绝热不变量(6.3.33)式是在关于时间的无穷小对称变换发生小摄动后所产生的结果。

第四节　力学系统对称性的摄动与绝热不变量(Ⅱ)

在上一节中,我们在运动空间$(t,q,\dot{q})$中讨论了力学系统对称性的摄动与绝热不变量,这一节,我们讨论增广相空间中一般动力学系统在所有变量都在无穷小变换作用下的对称性与不变量之间的关系,并进而给出了对称性的摄动与绝热不变量之间的关系。

对于完整保守的力学系统,相空间中的 Hamilton 原理为作用量泛函

$$I=\int_{t_0}^{t_1}[p_i\dot{q}_i-H(t,q,p)]dt \tag{6.4.1}$$

在运动正轨上取驻值,由此可确定运动正轨满足 Hamilton 正则方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\right\}\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{6.4.2}$$

式中 q_i 为广义坐标,p_i 为广义动量,H 为系统的 Hamilton 函数。

按照第一章第四节,考虑在增广相空间中的无穷小多参数变换为

$$\left.\begin{aligned}\bar{t}&=t+\varepsilon^k\tau^k(t,q,p)\\ \bar{q}_i&=q_i+\varepsilon^k\xi_i^k(t,q,p)\\ \bar{\dot{q}}_i&=\dot{q}_i+\varepsilon^k[\xi_i^k-\dot{q}_i\tau^k+\varphi_i^k(t,q,p)]\\ \bar{p}_i&=p_i+\varepsilon^k\eta_i^k\end{aligned}\right\} \tag{6.4.3}$$

其中 ε^k 为第 k 个小参数,$\tau^k,\xi_i^k,\varphi_i^k,\eta_i^k$ 为相应变量的生成函数。

若无穷小变换(6.4.3)式满足

$$p_i\varphi_i^k+P^k=0 \tag{6.4.4}$$

$$P^k=p_i\dot{\xi}_i^k-\frac{\partial H}{\partial t}\tau^k-\frac{\partial H}{\partial q_i}\xi_i^k-H\dot{\tau}^k \tag{6.4.5}$$

两式，则该力学系统存在形如下式的不变量

$$p_i\xi_i^k - H\tau^k - P^k = C^k \tag{6.4.6}$$

接着我们讨论非保守非完整力学系统。假设非保守非完整力学系统的保守部分的 Hamilton 函数为 H，非保守广义力为 Q_i，所受的一阶非线性非完整约束为

$$f_l(t,q,\dot{q}) = 0 \quad (l = 1,2,\cdots,s) \tag{6.4.7}$$

且为 Чеraев 型的，则该力学系统的 Hamilton 正则方程为

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i + \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} \end{aligned} \tag{6.4.8}$$

其中 λ_l 为 Lagrange 乘子。

对于上述非保守非完整系统，考虑作用量(6.4.1)式在无穷小变换群(6.4.3)式作用下的改变量，则有

$$\begin{aligned} \Delta I = \varepsilon^k \int_{t_0}^{t_1} \{ & p_i(\dot{\xi}_i^k + \varphi_i^k) + (\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i})\eta_i^k - \frac{\partial H}{\partial t}\tau^k \\ & - H\dot{\tau}^k - \frac{\partial H}{\partial q_i}\xi_i^k \} dt \end{aligned} \tag{6.4.9}$$

而非完整约束的 Чеraев 条件为

$$\frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i^k - \dot{q}_i\tau^k) = 0 \tag{6.4.10}$$

整理(6.4.9) 式可得

$$\begin{aligned} \Delta I = \varepsilon^k \int_{t_0}^{t_1} \{ & \frac{d}{dt}(P_i\xi_i^k - H\tau - P^k) + \dot{p}^k + p_i\varphi_i \\ & - (\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} - Q_i - \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i})(\xi_i^k - \dot{q}_i\tau^k) \\ & - (\lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial \dot{q}_i} + Q_i)(\xi_i^k - \dot{q}_i\tau^k) + (\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i})(\eta_i^k - \dot{q}_i\tau^k) \} dt \end{aligned} \tag{6.4.11}$$

若规范函数 P^k 满足

$$\dot{P}^k = p_i\dot{\xi}_i^k - \frac{\partial H}{\partial t}\tau^k - \frac{\partial H}{\partial q_i}\xi_i^k - H\dot{\tau}^k + Q_i(\xi_i^k - \dot{q}_i\tau^k) \quad (6.4.12)$$

且 I 在(6.4.3)式作用下保持不变,则有

$$p_i\xi_i^k - H\tau^k - P^k = C^k \quad (6.4.13)$$

此即在增广相空间中非完整非保守力学系统的精确不变量。

接下来,我们考虑力学系统在受到小扰动作用后对称性的摄动与相应的不变量问题。

假设力学系统受到小干扰力 υQ_i 的作用。υ 是一个远小于1的参数,如果 $I_n(t,q,p,\upsilon)$ 是力学系统的一个含有 υ 的最高次幂为 n 的物理量,且它对时间 t 的一阶导数正比于 υ^{n+1},则称 $I_n(t,q,p,\upsilon)$ 为该力学系统的一个 n 阶绝热不变量。

对于完整保守的力学系统,设 $\tau^{k0},\xi_i^{k0},\varphi_i^{k0}$ 分别满足(6.4.4),(6.4.5)两式,则该系统存在精确不变量

$$p_i\xi_i^{k0} - H\tau^{k0} - P^{k0} = C^{k0} \quad (6.4.14)$$

假设该完整保守力学系统受到一个小扰动 υQ_i 的作用,则该力学系统的运动正轨应满足 Hamilton 正则方程

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \upsilon Q_i\end{aligned}\right\} \quad (6.4.15)$$

(6.4.14)式虽说对未扰系统而言是精确不变量,但对扰动作用的系统而言就不是了,假设新的生成函数是在未扰动系统的对称变换生成函数的基础上的摄动,记为 $\tau^k(t,q,p),\xi_i^k(t,q,p),\varphi_i^k(t,q,p)$ 等,则应有

$$\left.\begin{aligned}\tau^k &= \tau^{k0} + \upsilon\tau^{k1} + \upsilon^2\tau^{k2} + \cdots\\ \xi_i^k &= \xi_i^{k0} + \upsilon\xi_i^{k1} + \upsilon^2\xi_i^{k2} + \cdots\\ \varphi_i^k &= \varphi_i^{k0} + \upsilon\varphi_i^{k1} + \upsilon^2\varphi_i^{k2} + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (6.4.16)$$

相应的规范函数 P 同时也发生小摄动,即

$$P^k = P^{k0} + \upsilon P^{k1} + \upsilon^2 P^{k2} + \cdots \quad (6.4.17)$$

因此，若 $\tau^{k0}, \xi^{k0}, \varphi_i^{k0}$ 满足(6.4.4)，(6.4.5) 两式后，$\tau^{km}, \xi_i^{km}, \varphi_i^{km}$ 满足

$$p_i\varphi_i^{km} + P^{km} = 0$$

$$P^{km} = p_i\dot{\xi}_i^{km} - \frac{\partial H}{\partial t}\tau^{km} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\xi_i^{km} - H\dot{\tau}^{km} + Q_i(\xi_i^{km-1} - \dot{q}_i\tau^{km-1}) \tag{6.4.18}$$

其中 $m = 1,2,\cdots$。构造

$$I_n^k(t,q,p,\upsilon) = \sum_{m=0}^{n}\upsilon^m(p_i\xi_i^{km} - H\tau^{km} - P^{km}) \tag{6.4.19}$$

则可以证明，$I_n^k(t,q,p,\upsilon)$ 是该力学系统 n 阶绝热不变量。因为

$$\begin{aligned}\frac{dI_n^k}{dt} &= \sum_{m=0}^{n}\upsilon^m(\dot{p}_i\xi_i^{km} + p_i\dot{\xi}_i^{km} - H\dot{\tau}^{km} - \dot{H}\tau^{km} - \dot{P}^{km})\\ &= \sum_{m=0}^{n}\upsilon^m[\dot{p}_i\xi_i^{km} - H\dot{\tau}^{km} - \dot{H}\tau^{km} + \frac{\partial H}{\partial t}\tau^{km}\\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial q_i}\xi_i^{km} + H\dot{\tau}^{km} - Q_i(\xi_i^{km-1} - \dot{q}_i\tau^{km-1})]\\ &= \sum_{m=0}^{n}\upsilon^m[(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} - \upsilon Q_i)(\xi_i^{km} - \dot{q}_i\tau^{km})\\ &\quad + \upsilon Q_i(\xi_i^{km} - \dot{q}_i\tau_i^{km}) - Q_i(\xi_i^{km-1} - \dot{q}_i\tau^{km-1})]\\ &= \upsilon^{n+1}Q_i(\xi_i^{km} - \dot{q}_i\tau^{km})\end{aligned} \tag{6.4.20}$$

因此，式(6.4.19)为该力学系统的绝热不变量。

应当注意，在上面的式子中，上指标 k 表示的是对应于第 k 个变换小参数的生成函数和规范函数，而 m 表示为第 m 阶的摄动项，$\xi_i^{km-1}, \tau^{km-1}$ 就表示相应于第 k 个小参数 ε^k 的 $m-1$ 阶摄动项。还有一点应注意，在上面的讨论中我们约定 $m = 0$ 时 $\xi_i^{km-1}, \tau^{km-1}$ 均为零。

对于受有一阶 Четаев 型非完整约束的力学系统，其约束方程如(6.4.7)式，则系统的 Hamilton 正则方程为

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$
$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i + \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial q_i} \tag{6.4.21}$$

如果(6.4.21)式所对应的力学系统受有小干扰力 $\upsilon\overline{Q}_i$ 的作用，而无穷小变换的生成函数 τ^{km}，ξ_i^{km}，φ_i^{km} 满足

$$\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(\xi_i^{km} - \dot{q}_i\tau^{km}) = 0 \tag{6.4.22}$$

$$p_i\varphi_i^{km} + P^{km} = 0 \tag{6.4.23}$$

$$P^{km} = p_i\xi_i^{km} - \frac{\partial H}{\partial t}\tau^{km} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\xi_i^{km} - H\tau^{km} + Q_i(\xi_i^{km} - \dot{q}_i\tau^{km}) + \overline{Q}_i(\xi_i^{km-1} - \dot{q}_i\tau^{km-1}) \tag{6.4.24}$$

同样地约定 $m = 0$ 时，ξ_i^{km-1}，τ^{km-1} 均为零，则

$$I_n^k(t,q,p,\upsilon) = \sum_{m=0}^{n}\upsilon^m(p_i\xi_i^{km} - H\tau^{km} - P^{km}) \tag{6.4.25}$$

为非完整非保守力学系统的 n 阶绝热不变量。

根据以上的讨论我们可以清楚地看出，力学系统的绝热不变量是力学系统在受到小干扰力作用时，它自身的本质特性发生微小改变的反映，并且力学系统的绝热不变量不仅仅只是作用—角变量的情形(如第二节所讨论的那样)，而且具有更加一般的性质(如(6.4.25)式的 I_n 可以不是作用变量)。

下面，我们讨论由已知的绝热不变量研究相应的对称性所发生的小摄动的问题。

根据第一章第四节的讨论，我们有如下的一些结论。

对于完整保守的力学系统，若 $G(t,q,p)$ 是该系统的一个精确不变量，则由

$$\tau = H^{-1}(p_i\xi_i - G) \tag{6.4.26}$$

$$\xi_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\tau + \frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{6.4.27}$$

$$\eta_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\tau - \frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{6.4.28}$$

$$\varphi_i = p_i^{-1}\left(-\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \tag{6.4.29}$$

确定的增广相空间中的无穷小单参数变换群使得力学系统在该空间中的 Hamilton 作用泛函保持不变。

对于非完整非保守力学系统，假设所受的一阶非线性非完整约束是属于 Четаев 型的，系统所受的非保守广义力为 Q_i，若 $G(t,q,p)$ 是该系统的一个精确不变量，则由

$$\tau = H^{-1}(p_i\xi_i - G) \tag{6.4.30}$$

$$\xi_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\tau + \frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{6.4.31}$$

$$\eta_i = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i\right)\tau - \frac{\partial G}{\partial q_i} \tag{6.4.32}$$

$$\varphi_i = p_i^{-1}\left[-\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + Q_i(\xi_i - \dot{q}_i\tau)\right] \tag{6.4.33}$$

确定的并满足

$$\frac{\partial f_l}{\partial q_i}(\xi_i - \dot{q}_i\tau) = 0 \tag{6.4.34}$$

的无穷小单参数变换群将使该系统的 Hamilton 作用量保持不变。

假设对于受有小扰动 υQ_i 作用的完整保守的力学系统存在一个一阶绝热不变量

$$I_1 = G_0(t,q,p) + \upsilon G_1(t,q,p) \tag{6.4.35}$$

由于其运动正轨应满足 Hamilton 正则方程，因而有

$$\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} - \upsilon Q_i\right)(\xi_i - \dot{q}_i\tau) + \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right)(\eta_i - \dot{p}_i\tau) = 0 \tag{6.4.36}$$

由于

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{\partial G_0}{\partial t} + \frac{\partial G_0}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G_0}{\partial p_i}\dot{p}_i + \upsilon\left(\frac{\partial G_1}{\partial t} + \frac{\partial G_1}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial G_1}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) \tag{6.4.37}$$

根据(6.4.20)式,并综合(6.4.36),(6.4.37)两式则可得

$$\frac{\partial G_0}{\partial t}+\frac{\partial G_0}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial G_0}{\partial p_i}\dot{p}_i+v\left(\frac{\partial G_1}{\partial t}+\frac{\partial G_1}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial G_1}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)$$
$$+\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}-vQ_i\right)(\xi_i-\dot{q}_i\tau)+\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)(\eta_i-\dot{p}_i\tau)$$
$$=v^2Q_i(\xi'_i-\dot{q}_i\tau') \tag{6.4.38}$$

经整理后可得

$$\frac{\partial G_0}{\partial t}+\frac{\partial G_0}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial G_0}{\partial p_i}\dot{p}_i+\dot{p}_i(\xi_i^0-\dot{q}_i\tau^0)$$
$$+\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}-vQ_i\right)(\xi_i^0-\dot{q}_i\tau^0)+\left(\dot{q}_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)(\eta_i-\dot{p}_i\tau)$$
$$+v\left(\frac{\partial G_1}{\partial t}+\frac{\partial G_1}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial G_1}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)=0 \tag{6.4.39}$$

因此,若有

$$\xi_i^0-\dot{q}_i\tau^0=-\frac{\partial G_0}{\partial p_i} \tag{6.4.40}$$

并假设

$$G_0=p_i\xi_i^0-H\tau^0-P^0 \tag{6.4.41}$$

则可解得

$$\tau^0=(p_i\dot{q}_i-H)^{-1}\left(G_0+P^0-p_i\frac{\partial G_0}{\partial p_i}\right) \tag{6.4.42}$$

$$\xi_i^0=\frac{\partial G_0}{\partial p_i}+\dot{q}_i(p_i\dot{q}_i-H)^{-1}\left(G_0+P^0-p_i\frac{\partial G_0}{\partial p_i}\right) \tag{6.4.43}$$

进一步分析可以解得

$$\tau^1=(p_i\dot{q}_i-H)^{-1}\left(G_1+P^1-p_i\frac{\partial G_1}{\partial p_i}\right) \tag{6.4.44}$$

$$\xi_i^1=\frac{\partial G_1}{\partial p_i}+\dot{q}_i(p_i\dot{q}_i-H)^{-1}\left(G_1+P^1-p_i\frac{\partial G_1}{\partial p_i}\right) \tag{6.4.45}$$

对于非保守、非完整力学系统可仿照上面进行讨论,并得到类似的结论。

力学系统受到小干扰力作用时,其绝热不变量与它的对称性

的摄动之间存在着一一对应的关系。这就是我们在这两节的讨论中所获得的主要结论。

第五节　力学系统的绝热不变量理论的应用举例

在这一节中，我们以 van der Pol 方程和 Duffing-van der Pol 方程为例说明在上节中所得结论的应用。

1. van der Pol 方程

考虑 van der Pol 方程

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \varepsilon(1 - q^2)\dot{q} \tag{6.5.1}$$

对于该系统，取干扰力 $Q = (1 - q^2)\dot{q}$，则未扰动部分的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \tag{6.5.2}$$

而系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) \tag{6.5.3}$$

且有 $p = \dot{q}, \dot{p} = -\omega^2 q$，代入(6.4.18)式则得

$$p\dot{\xi}^0 - \omega^2 q\xi^0 - H\tau^0 = \dot{P}^0 \tag{6.5.4}$$

$$p\dot{\xi}^1 - \omega^2 q\xi^1 - H\tau^1 + (1 - q^2)p(\xi^0 - p\tau^0) = \dot{P}^1 \tag{6.5.5}$$

引入 KBM 变量

$$q = a\cos\delta \qquad p = -a\omega\sin\delta \tag{6.5.6}$$

则有 $H = \frac{a^2\omega^2}{2}$，且有

$$-a\omega\sin\delta\dot{\xi}^0 - a\omega^2\cos\delta\xi^0 - \frac{a^2\omega^2}{2}\dot{\tau}^0 = \dot{P}^0 \tag{6.5.7}$$

$$-a\omega\sin\delta\dot{\xi}^1 - a\omega^2\cos\delta\xi^1 - \frac{a^2\omega^2}{2}\dot{\tau}^1 + (1 - a^2\cos^2\delta)(-a\omega\sin\delta)(\xi^0 - p\tau^0) = \dot{P}^1 \tag{6.5.8}$$

由于 $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + \omega\frac{\partial u}{\partial \delta}$，故对于(6.5.7)式有

$$-\alpha\omega\sin\delta\left(\frac{\partial\xi^0}{\partial t}+\omega\frac{\partial\xi^0}{\partial\delta}\right)-\alpha\omega^2\cos\delta\xi^0$$
$$-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}\left(\frac{\partial\tau^0}{\partial t}+\omega\frac{\partial\tau^0}{\partial\delta}\right)=\frac{\partial P^0}{\partial t}+\omega\frac{\partial P^0}{\partial\delta} \tag{6.5.9}$$

令 $\xi^0=0,P^0=0$,则可求得 $\tau^0=\tau^0(\alpha)$,代入(6.5.8)式则得

$$-\alpha\omega\sin\delta\left(\frac{\partial\xi^0}{\partial t}+\omega\frac{\partial\xi^0}{\partial\delta}\right)-\alpha\omega^2\cos\delta\xi^0$$
$$-(1-\alpha^2\cos^2\delta)\alpha^2\omega^2\sin^2\delta\tau^0-\frac{\alpha^2\omega^2}{2}\left(\frac{\partial\tau^0}{\partial t}+\omega\frac{\partial\tau^0}{\partial\delta}\right)=P^1 \tag{6.5.10}$$

令 $\xi^1=0,P^1=0$,可求得

$$\tau^1=-\frac{2\tau^0}{\omega}\left[\frac{\delta}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\delta-\alpha^2\left(\frac{\delta}{8}-\frac{1}{32}\sin 4\delta\right)\right] \tag{6.5.11}$$

取 $\tau^0=\frac{1}{\omega}$,则可得到 van der Pol 方程的一阶绝热不变量

$$I_1=\frac{H}{\omega}\left[1+\frac{\varepsilon}{8\omega}\left(4\left(\frac{H}{\omega^2}-2\right)\delta+4\sin 2\delta-\frac{H}{8\omega^2}\sin 4\delta\right)\right] \tag{6.5.12}$$

取 $\omega=1$ 后,将(6.5.12)式写成广义坐标、广义动量的形式则有

$$I_1=\frac{1}{2}(p^2+q^2)+\frac{\varepsilon}{8}\left[(p^2+q^2)(p^2+q^2-4)\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{p}{q}\right)\right.$$
$$\left.-qp(p^2-q^2+4)\right] \tag{6.5.13}$$

从(6.5.13)式可以看出,van der Pol 方程的相轨线关于 $p\to -p$,$q\to -q$ 对称,且 van der Pol 方程的绝热不变量(6.5.12)式或(6.5.13)式对应的是关于时间的无穷小变换为对称变换且受到小的摄动。

2. Duffing - van der Pol 方程

考虑 Duffing - van der Pol 方程为

$$\ddot{q}+\omega^2q+kq^3=\varepsilon(1-\dot{q}^2)q \tag{6.5.14}$$

取干扰力部分 $Q=(1-\dot{q}^2)q$,则未扰部分的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{2}\omega^2q^2-\frac{k}{4}q^4 \tag{6.5.15}$$

而 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) + \frac{k}{4}q^4 \tag{6.5.16}$$

且有 $p = \dot{q}, \dot{p} = -\omega^2 q - kq^3$，代入(6.4.18)式，则可得

$$p\dot{\xi}^0 - (\omega^2 q + kq^3)\xi^0 - [\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) + \frac{k}{4}q^4]\dot{\tau}^0 = P^0 \tag{6.5.17}$$

$$p\dot{\xi}^1 - (\omega^2 q + kq^3)\xi^1 - [\frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) + \frac{k}{4}q^4]\dot{\tau}^1 + (1 - \dot{q}^2)q(\xi^0 - \dot{q}\tau^0) = P^1 \tag{6.5.18}$$

在(6.5.17)式取 $\xi^0 = 0, P^0 = 0$，则可得 $\tau^0 = \text{const.}$ 代入(6.5.18)式，并取 $\xi^1 = 0, P^1 = 0$，则可得

$$\dot{\tau}^1 = \frac{4\tau^0 pq(1 - p^2)}{2(p^2 + \omega^2 q^2) + kq^4} \tag{6.5.19}$$

采用 KBM 变量(6.5.6)式，并令 τ^1 不显含时间，则可解得在 $k > 0$ 和 $k < 0$ 时，τ^1 具有不同的表达式，它们是：

1) $k > 0$ 时

$$\tau^1 = \sqrt{\frac{2}{k}}\frac{(1 - \alpha^2\omega^2)}{\alpha\omega}\tau^0 \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{\frac{k}{2}}\frac{\alpha}{\omega}\cos^2\delta) + \frac{\omega^2\tau_0}{k}\ln(\omega^2 + \frac{k^2\alpha^2}{2}\cos^4\delta) \tag{6.5.20}$$

2) $k < 0$ 时

$$\tau^1 = \frac{1 - \alpha^2\omega^2}{2\omega\sqrt{-k}}\tau^0 \ln\left|\frac{\omega + \sqrt{-k}\cos^2\delta}{\omega - \sqrt{-k}\cos^2\delta}\right| + \frac{\omega^2\tau^0}{k}\ln(\omega^2 + \frac{k^2\alpha^2}{2}\cos^4\delta) \tag{6.5.21}$$

因此，我们可以得到 Duffing-van der Pol 方程的一阶绝热不变量。

取 $\tau^0 = \frac{1}{\omega}$，则当 $k > 0$ 时

$$I_1 = \frac{H}{\omega}[1 + \frac{(1 - \alpha^2\omega^2)\varepsilon}{\alpha\omega}\sqrt{\frac{2}{k}}\operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{\frac{k}{2}}\frac{\alpha}{\omega}\cos^2\delta)$$

$$+\frac{\varepsilon\omega^2}{k}\ln\left(\omega^2+\frac{k^2\alpha^2}{2}\cos^4\delta\right)\Big] \tag{6.5.22}$$

而当 $k<0$ 时，有

$$I'_1=\frac{H}{\omega}\left[1+\frac{(1-\alpha^2\omega^2)\varepsilon}{2\omega\sqrt{-k}}\ln\left|\frac{\omega+\sqrt{-k}\cos^2\delta}{\omega-\sqrt{-k}\cos^2\delta}\right|\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon\omega^2}{k}\ln\left(\omega^2+\frac{k^2\alpha^2}{2}\cos^4\delta\right)\right] \tag{6.5.23}$$

由此我们可以看出，对于 Duffing-van der Pol 方程，其相平面中解的特征与非线性弹性性质密切相关，它不仅影响未扰部分的不变量 $\frac{H}{\omega}$，也影响扰动作用后的摄动项，使其在 $k>0$ 和 $k<0$ 时具有不同的拓扑结构。

参考文献

[1]R. Abraham and J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, 2nd ed., Benjamin/Cummings, New York, 1978.

[2]R. L. Anderson and S. M. Davison, A generalization of Lie's "counting" theorem for second-order ordinary differential equations, J. Math. Anal. App., 48, pp. 301－315, 1974.

[3]R. L. Anderson and N. H. Ibragimov, Lie-Bäcklund Transformations in Applications. SIAM Studies 1, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1979.

[4]V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1978.

[5]L. Y. Bahar and H. G. Kwatny, Conservation laws for dissipative systems possessing classical normal modes, J. Sound Vibrat., 102, 551－562, 1985.

[6]L. Y. Bahar and H. G. Kwatny, Generalized Lagrangian and conservation law for the damped harmonic oscillator, Am. J. Phys., 49, 1062－1065, 1981.

[7]L. Y. Bahar and H. G. Kwatny, Extension of Noether's theorem to constrained nonconservative dynamical systems, Int. J. Nonlinear Mech., 22, 125－138, 1987.

[8]L. Y. Bahar and H. G. Kwatny, Some remarks on the derivability of linear nonconservative systems from a Lagrangian, Hadronic J., 3, 1264－1280, 1980.

[9]G. W. Bluman and J. D. Cole, Similarity Methods for Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1974.

[10]O. P. Bhutani and P. Mital, On the first integral of the nonlinear shallow-membrane equation via Noether's theorem, Int. J. Engng. Sci., 23, 353－357, 1985.

[11]A. Bazzani, E. Remiddi and G. Turchetti, Variational approach for the integrals of motion for symplectic maps, J. Phys., A: Math. Gen., 24, L53－L59, 1991.

[12]J. E. Campbell, Introductory Treatise on Lie's Theory of Finite Transformation Groups, Chelsea Publishing Company, New York, 1966.

[13]E. Candotti, C. Palmieri and B. Vitale, On the inversion of Noether's theorem in the Lagrangian formalism, [] Classical field theory, Nuovo Cimento, 70A, 233－246, 1970.

[14]E. Candotti, C. Palmieri and B. Vitale, On the inversion of Noether's theorem in classical dynamical systems, Amer. J. Phys., 40, 424－429, 1972.

[15]F. Cantrijn and W. Sarlet, Symmetries and conservation laws for generalized Hamiltonian systems, Internat. J. Theor. Phys., to appear.

[16]F. Cantrijn, Vector fields generating invariants for classical dissipative systems, J.

Math. Phys. ,23,1589－1595,1982.

[17]J. F. Carinena and L. A. Ibort, Non-Noether constant of motion, J. Phys., A: Math. Gen. ,1－7,1983.

[18]J. Carinena, C. Lopez and E. Martinez, Sections along a map applied to higher-order Lagrangian mechanics, Noether's theorem, Acta. Appl. Math. ,25, 127－151, 1991.

[19]G. Caviglia, Symmetry transformation, isovectors and conservation laws, J. Math. Phys. ,27, 971－978,1986.

[20]M. Crampin, Constants of the motion in Lagrangian mechanics, Internat. J. Theor. Phys., 16, 741－754,1977.

[21]M. Crampin, G. E. Prime and G. Thompson, A geometrical version of the Helmholtz conditions in time-dependent Lagrangian dynamics. J. Phys., A: Math. Gen., 117, 1437－1447,1984.

[22]M. Crampin, Tangent bundle geometry for Lagrangian dynamics, J. Phys., A: Math. Gen. ,16, 3755－3772, 1983.

[23]T. Dass, Conservation laws and symmetries Ⅱ, Phys. Rev., 150,1251－1255,1966.

[24]E. A. Desloge and R. I. Karch, Noether's thorem in classical mechanics, Am. J. Phys., 45, 336－339,1977.

[25]Dj. S. Djukic, A procedure for finding first integrals of mechanical systems with gauge-variant Lagrangians, Internat. J. Non-linear Mech., 8, 479－488, 1973.

[26]Dj. S. Djukic, Conservation laws in classical mechanics for quasi-corrdinates, Archs. Ration. Mech. Analysis, 56, 79－98,1974.

[27]Dj. S. Djukic, Adiabatic invariants for dynamical systems with one degree of freedom, Int. J. of Nonlinear Mech., 16, 489－498,1981.

[28]Dj. S. Djukic, A new first integral corresponding to Lyapunov's function for a pendulum of variable length, Z. Angew. Math. Phys. ,25,539,1974.

[29]Dj. S. Djukic, A contribution to the generalized Noether's theorem, Arch. Mech., 26. 243,1974.

[30]Dj. S. Djuki and T. M. Atanackovic, An extremum variational principle and error estimate procedure for $q^{iv}=f(q,x)$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 92, 307－316, 1982.

[31]Dj. S. Djukic and T. M. Atanackovic, An extremum variational principle and error estimate procedure for radial flow of a viscous fluid between porous discs, Int. J. Nonlinear Mech., 22, 81－87,1987.

[32]Dj. S. Djukic and T. Sutela, Integrating factors and conservation laws for nonconservative dynamial systems, Int. J. Nonlinear Mech. ,12,257－260,1967.

[33]Dj. S. Djukic and B. D. Vujanovic, Noether's theory in classical nonconservative mechanics, Acta Mech., 23,17－27,1975.

[34]C. J. Eliezer, The symmetries and first integrals of some differential equations of dynamics, Hadronic J., 2,1067－1109,1979.

[35]J. G. Fletcher, Local conservation laws in generally covariant theories, Rev. Modern Phys., 32, 65－87,1960.

[36]F. Gonzalez-gascon, Notes on the symmetries of systems of differential equations, J. Math. Phys., 18, 1963－1967,1977.

[37]F. Gonzalez-gascon, Geometrical obtention and generalization of recent results concerning symmetries and first integrals, Lett. Nuovo Cimento, 26,385－387,1979.

[38]F. Gonzalez-gascon and F. Moreno-insertis, Symmetries, first integrals and splittability of dynamical systems, Lett. Nuovo Cimento, 21, 253－257,1978.

[39]F. Gonzalez-gascon, F. Moreno-insertis and E. Rodrnguea-camino, Geometrical foundations and results on a problem suggested in a paper by Anderson et all., Lett. Nuovo Cimento, 21, 595－599,1978.

[40]J. Goldberg. E. T. Newan and C. Rovelli, On Hamiltonian systems with first class constrains, J. Math. Phys., 32,2739－2743,1991.

[41]T. J. Gordon, On the symmetries and invariants of the harmonic oscillator, J. Phys., A: Math. Gen.,19,183－189,1986.

[42]B. D. Vujanovic, Conservation laws of dynamical systems via d'Alembert's principle, Int. J. Non-linear Mech., 13. 185－197,1978.

[43]J. Guyard, A. Nadeau, G. Baumann and M. R. Feix, Eigenvalues of the Hill equation to any order in the adiabatic limit, J. Math. Phys., 12, 488,1971.

[44]P. Havas and J. Stachel, Invariances of approximately relativistic Lagrangians and the center-of-mass theorem, J. Phys., Rev., 185, 1636－1647,1969.

[45]M. Henon and C. Heiles, The applicability of the third integral of motionsome numerical experiments, Astronom. J., 69. 73－79,1954.

[46]R. Hermann, The differential geometric structure of general mechanical systems from the Lagrangian point of view, J. Math. Phys., 23, 2077－2089,1982.

[47]E. L. Hill, Hamilton's principle and the conservation theorems of mathematical physics, Rev. Modern Phys., 23, 253－260,1951.

[48]S. Hojman, Interpretation of symmetry transformations, J. Phys., A: Math. Gen., 17, PL521－525, 1984.

[49]S. Hojman, Symmetries of Lagrangians and of their equations of motion, J. Phys., A: Math. Gen., 17,2399－2412,1984.

[50]S. Hojman, L. Nunea, A. Patino and H. Rago, Symmetries and conserved quantities

in geodesic motion, J. Math. Phys., 27,281－286,1987.

[51]S. A. Hojman and L. C. Shepley, No Lagrangian? No quantization! J. Math. Phys., 32, 142－146,1991.

[52]B. D. Vujanovic, A group-variationa procedure for finding first integrals of dynamical systems, Int. J. Non-Linear Mech., 5, 269－278,1970.

[53]N. H. Ibragimov and R. L. Anderson, Lie-Bäcklund tangent transformations, J. Math. Anal. Appl., 59, 145－162,1977.

[54]D. J. Inman and C. L. Olsen, Dynamics of symmetrizable nonconservative systems, ASME J. of Appl. Mech., 55,206－212,1988.

[55]T. M. Kalotas and B. G. Wybourne, Dynamical Noether Symmetries, J. Phys., A: Math. Gen., 15,2077－2083,1982.

[56]G. H. Katzin and J. Levine, Dynamical symmetries and constants of the motion for classical particle systems, J. Math. Phys., 15,1460－1470,1974.

[57]G. H. Katzin and J. Levine, A gauge invariant formulation of time-dependent dynamical symmetry mappings and associated constants of motion for Lagrangian particle mechanics, I, J. Math. Phys., 17, 1345－1350,1976.

[58]G. H. Katzin and J. Levine, Time-dependent dynamical symmetries and constants of motion, Ⅱ: Time-dependent harmonic oscillator, J. Math. Phys., 18, 1267－1274, 1977.

[59]G. H. Katzin and J. Levine, Characteristic functional structure of infinitesinal symmetry mapping of classical dynamical systems, I: Velocity dependent mappings of second-order differential equation, J. Math. Phys., 26.

[60]G. H. Katzin and J. Levine, Characteristic functional structure of infinitesinal symmetry mapping of classical dynamical systems, Ⅱ: Mappings of first-order differential equations, J. Math. Phys., 26,3100－3104,1985.

[61]J. A. Kobussen, Some methods of classical mechanics applied to continuous systems, Thesis, University of Technology, Eindhoven, the Netherlands, 1973.

[62]M. Kruskal, Asymptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic, J. Math. Phys., 3, 806,1962.

[63]M. Kruskal, On a systematic search for integrals of the motion, Helv. Phys. Acta., 53,183－200,1980.

[64]S. E. Jones and W. F. Ames, Similarity variables and first integrals of ordinary differential equations, Int. J. Non-Linear Mech., 2, 257－260,1967.

[65]V. M. Lakhadanov, On stabilization of potential systems, PMM 39. 53－58,1975.

[66]M. Lauster, Conservation laws in nonlinear dissipative systems, Int. J. Nonlinear Mech.,30, 915－925,1995.

[67]P. G. L. Leach, A note on the Henon-Heiles problem, J. Math. Phys., 21, 38－43, 1980.

[68]P. O. L. Leach, R. Martens and S. D. Maharaj, Self-similar solutions of the generalized Emden-Fowler equations, Int. J. Nonlinear Mech., 27, 575－582, 1992.

[69]H. R. Lewis Jr, Class of exact invariants for classical and quantum timedependent harmonic oscillators, J. Math. Phys., 9, 1976－1986, 1968.

[70]J. M. Levy-leblond, Conservation laws for gauge-invariant Lagrangians in classical mechanics, Amer. J. Phys., 39, 502－506, 1971.

[71]Z. P. Li and X. Li, Generalized Noether theorem and Poincare invariant for nonconservative nonholonomic systems, Int. J. of Theo. Phys., 29, 765－72, 1990.

[72]M. Lutzky, Symmetry groups and conserved quantities for the harmonic oscillator, J. Phys., A, 11, 249－258, 1978.

[73]M. Lutzky, Dynamical symmetries and conserved quantities, J. Phys., A, 12, 973－981, 1979.

[74]B. D. Vujanovic and S. E. Jones, Variational Methods in Nonconservative Phenomena, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[75]M. Lutzky, Noether's theorem and the time-dependent harmonic oscillator, Phys. Lett., 68A, 3, 1978.

[76]G. Marmo, E. J. Saletan and A. Simoni, A general setting for reduction of dynamical systems, J. Math. Phys., 20, 856－860, 1979.

[77]L. Martinez-alonso, On the Noether map, Lett. Math. Phys., 3, 419－424, 1979.

[78]E. Noether, Invariante variations problem, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Gottingen, Math. Phys., Kl, 235－257, 1918.

[79]P. K. H. Gragert and P. H. M. Kersten, Graded differential geometry in reduce: Supersymmetry structures of the modified KDV eguation, Acta Appl. Math., 24, 211－231, 1991.

[80]T, Nono and F. Mimura, Dynamical symmetries I, Bull Fukuoka Univ. of Education, 25, Part Ⅲ, 9－26, 1975.

[81]P. J. Olver, Application of Lie Groups to Differential Equations, Second edition, Springer, New York, 1993.

[82]C. Palmieri and B. Vitale, On the inversion of Noether's theorem in the Lagrangian formalism, Nuovo Cimento, 66A, 299－309, 1970.

[83]G. E. Prince and C. J. Eliezer, Symmetries of the time-dependent N-dimensional oscillator, J. Phys., A, 13, 815－823, 1980.

[84]G. E. Prince and C. J. Eliezer, On the Lie symmetries of the classical Kepler problem, J. Phys., A, 14, 587－596, 1981.

[85]G. E. Prince and P. G. L. Leach, The Lie theory of extended groups in Hamiltonian mechanics, Hadronic J., 3, 941－961,1980.

[86]J. R. Ray and J. L. Reid, Ermakov systems, Noethers theorem and the Sarlet-Bahar method, Letters Math. Phys., 4, 235－240,1980

[87]P. V. Ranganathan, Invariants of a certain nonlinear N－dimensional dynamical systems, Int J. Nonlinear mech., 27,43－50,1992.

[88]P. V. Ranganthan, Integrals of the Emden-Fowler equations, Int. J. Nonlinear Mech.,27,583－590,1992.

[89]J. Rosen, Noether's theorem in classical field theory, Ann. Phys., 69, 349－363, 1972.

[90]W. Sarlet, Invariance and conservation laws for Lagrangian systems with one degree of freedom, J. Math. Phys., 19, 1049－1054,1978, Addendum, J. Math. Phys., 20, 1295,1989.

[91]W. Sarlet, Class of Hamiltons with one degree-of-freedom allowing application of Kruskal's asymptotic theory in closed form, I and II, Ann. Phys., 92, 232,1975; ibid. 92, 248,1975.

[92]W. Sarlet, Exact invariants for time-dependent Hamiltonian systems with one degree-of-freedom, J. Phys., A. 11, 843,1978.

[93]W. Sarlet, Invariance and conservation laws for Lagrangian systems with one degree-of-freedom. J. Math. Phys., 19, 1049,1978.

[94]W. Sarlet, Note on equivalent, Lagrangians and symmetries, J. Phys.,A: Math. Gen., 16,L229－L233,1983.

[95]W. Sarlet and L. Y. Bahar, Quadratic integrals for linear nonconservative systems and their connection with the inverse problem of Lagrangian dynamics, Int. J. of Nonlinear Mech., 16,271－281,1981.

[96]W. Sarlet and L. Y. Bahar, A direct construction of first integrals for certain non-linear dynamical systems, Int. J. Non-linear Mech., 15, 133－146,1980.

[97]W. Sarlet and F. Cantrijn, Higher-order Noether symmetries and constants of the motion, J. Phys., A, 14, 479－492,1981.

[98]W. Sarlet and F. Cantrijn, Generalitions of Noether's theorem in classical mechanics, SIAM Rev., 23,467－494,1981.

[99]W. Sarlet, F. Cantrijn and M. Crampin, A new look at second-order equations and Lagrangian mechanics, J. Phys., A: Math. Gen., 17, 1999－2009,1984.

[100]W. Sarlet and M. Crampin, A characterization of higher-order Noether symmetries, J. Phys., A: Math. Gen., 18, L563－L565, 1985.

[101]D. J. Saunders, Jet fields, connections and second-order differentional equations, J.

Phys., A: Math. Gen., 20,3261－3270,1987.
[102]W. Sarlet, G.E. Prince, M Grampin, Adjoint symmetries for time-dependent second-order equations, J. Phys., A: Math, Gen., 23,935－1347,1990.
[103]F. Schwarz and W.H.Steeb, Symmetries and first integrals for dissipative systems, J. Phys., A: Math. Gen., 17, L819－L829,1984.
[104]J. J. Soares Neto and J. D. M. Vianna, Infinitesimal symmetry transformations of the Langevin equation, J. Phys., A: Math. Gen.,21,2487－2490,1988.
[105]D. P. Stern, Kruskal's perturbation method, J. Math. Phy., 12, 2231,1970.
[106]D. P. Stern, Classical adiabatic perturbation theory, J. Math. Phys., 12. 2231, 1971.
[107]K. R. Symon, The adiabatic invariant of the linear or nonlinear oscillator, J. Math. Phys., 11. 1320,1970.
[108]K. M. Tamizhmani and A. Annamalai, Generalized symmetries of some nonlinear finite-dimensional systems, J. Phys., A: Math. Gen., 23,2835－2845,1990.
[109]K. M. Tamizhmani and M. Lakeshmanan, Complete integratility of the Korteweg de Vries equation under perturbation ground and its solution: Lie Bäcklund symmetry approach, J. Phys., A: Math. Gen., 15,3773－3782,1983.
[110]G. Tompson, Lie and Noether symmetries and a result for Logan, J. Phys., A: Math. Gen., 19, L105－L110,1986.
[111]A. Trautman, Noether equations and conservation laws, Comm. Math. Phys., 6, 248－261,1967.
[112]B. D. Vujanovic, A group-variational procedure for finding first integrals of dynamical systems, Int. J. Non-Linear Mech., 5,269－278,1970.
[113]B. D. Vujanovic, Synge's disturbed equations as a variational problem and their first integrals, Acad. Roy. Belg., Bull. Classe Cci. 5, 692－698,1965.
[114]B. D. Vujanovic, On one variational principle for irreversible phenomena, Acta Mech., 19, 259－275,1974.
[115]B. D. Vujanovic, A variational principle for non-conservative dynamical systems, Z. angew. Math. Mech., 55. 321－331,1975.
[116]B. D. Vujanovic, On one first vector integral of planetary motion, Astro., Acta J., 15, 231－233,1970.
[117]B. D. Vujanovic, On the integration of the nonconservative Hamilton's dynamical equations, Int J. Engng. Sci., 19,1739－1747,1981.
[118]B. D. Vujanovic, Application of the Hamilton-Jacobi method to the study of rheo-linear oscillators, Acta Mech., 93,179－190,1992.
[119]B. D. Vujanovic, Application of the field-momentum method to rheonomic dynamics,

Int. J. Nonlinear Mech., 29, 515－528,1994.
[120]B. D. Vujanovic, Conservation laws and reduction to quadratures of the generalized time-dependent Duffing equation, Int. J. Nonlinear Mech., 30,83－97,1995.
[121]B. D. Vujanovic and A. M. Strauss, On some conservation laws of conservative and nonconsevative dynamic systems, Int. J. Nonlinear Mech.,121,489－499,1986.
[122]汪家译，分析动力学，北京：高等教育出版社，1958.
[123]梅凤翔，非完整系统力学基础，北京：北京工业学院出版社，1985.
[124]梅凤翔，非完整动力学研究，北京：北京工业学院出版社，1987.
[125]陈滨，分析动力学，北京：北京大学出版社，1987；台北：台湾高等教育出版社，1989.
[126]梅凤翔，刘瑞，罗勇，高等分析力学，北京：北京理工大学出版社，1991.
[127]李子平，约束系统的变换性质，物理学报，1659－1671，1981.
[128]李子平，约束系统的变换和推广的 Killing 方程，物理学报，33，814－825，1984.
[129]Li Ziping, Generalized Noether identities and application to Yang-Mills field theory, Int. J. Theor. Phys., 26, 853－860,1987.
[130]Li Ziping, Sysmmetry in a constrained Hamiltonian system with singular higher-order Lagrangian, J. Phys., A: Math. Gen., 24, 4261－4274,1991.
[131]何世本，胡嘉延，变质量经典系统的哈密顿原理和诺特定理，阜新矿业学院学报，1,63－76,1985.
[132]赵跃宇，力学的新型积分变分原理，力学学报，12,101－106,1989.
[133]Zhao Yueyu, New variational principle of mechanics and its application. 第 17 届国际理论与应用力学大会中国学者论文集锦，北京：北京大学出版社，338－350，1991.
[134]梅凤翔，非完整系统的第一积分与积分不变量，科学通报，36,815－818,1991.
[135]梅凤翔，非完整系统的第一积分与其变分方程特解的联系，力学学报，22,366－370,1991.
[136]张解放，非完整系统的非等时变分方程与积分不变量的构造，科学通报，37,661－664,1992.
[137]罗绍凯，陈书勤，非线性非完整系统相对运动动力学方程的第一积分与积分不变量，河南大学学报，22,53－57,1992.
[138]罗绍凯，变质量非完整系统相对于非惯性系的第一积分与积分不变量，应用数学和力学，15,139－146,1994.
[139]李邦河，保守力学系统的通用积分不变量，数学学报，22,511－514,1979.
[140]李子平，约束系统的 Noether 定理及 Poincare 不变量，新疆大学学报，1，1－9，1981.
[141]李子平，高阶微商场论中奇异系统正则形式的 Noether 定理和 Poincare-Cartan 积

分不变量，中国科学，A辑，9，977－986，1992.
[142]李子平，非完整奇异系统的 Poincare-Cartan 积分不变量，黄淮学刊，8，1－6，1992.
[143]刘成群，徐陶铭，非完整保守系统的积分不变量及其应用，第十六届国际理论与应用力学学术会议，丹麦，1984.
[144]刘成群，罗诗裕，非保守系统的积分不变量及其在现代物理学中的应用，应用数学和力学，6，879－885，1985.
[145]张解放，非完整非保守系统的积分不变量，黄淮学刊，6，35－39，1990.
[146]刘瑞，罗勇，邢生玉，关于完整非保守系统的基本积分变量关系，力学学报，23，617－625，1991.
[147]吴学谋，泛对称与力学——力学中的泛对称与 Noether 定理（Ⅰ），力学与实践，1，54－58，1979.
[148]吴学谋，泛对称与力学——力学中的泛对称与 Noether 定理（Ⅱ），力学与实践，2，24－28，1980.
[149]Li Ziping, The symmetry transformation of the constrained system with high-order derivatives, Acta Mathematica Scientia, 5, 379－388, 1985.
[150]李子平，相空间中的 Noether 定理及其应用，新疆大学学报，6，37－43，1989.
[151]李子平，相空间中的 Noether 恒等式及其应用，新疆大学学报，7，28－33，1990.
[152]李子平，非完整奇异系统正则形式的广义 Noether 定理及其逆定理，黄淮学刊，8，8－15，1992.
[153]李子平，Hamilton 动力系统的对称性质，北京工业大学学报，16，1－9，1990.
[154]李子平，经典和量子约束系统及其对称性质，北京工业大学出版社，1993.
[155]李子平，正则形式的 Noether 定理及其应用，科学通报，36，958，1991.
[156]李子平，非完整非保守奇异系统正则形式的 Noether 定理及其其逆定理，科学通报，37，2204－2205，1991.
[157]罗勇，赵跃宇，非线性非完整约束系统的广义 Noether 定理，北京工业学院学报，6，41－47，1986.
[158]刘瑞，非完整非保守动力学系统的守恒律，力学学报，21，75－83，1989.
[159]刘瑞，非完整保守动力学系统的 Noether 定理及其逆定理，中国科学，A辑，11，1189－1197，1990.
[160]张解放，高阶非完整非保守系统的广义 Noetehr 定理，科学通报，34，1756－1757，1989.
[161]张解放，Vacco 动力学的 Noether 理论，应用数学和力学，14，635－641，1993.
[162]赵跃宇，一般动力学系统的守恒律（Ⅰ），湘潭大学学报，11，76－80，1989.
[163]赵跃宇，一般动力学系统的守恒律（Ⅱ），黄淮学刊，6，27－34，1990.
[164]赵跃宇，一般动力学系统的守恒律（Ⅲ），湘潭大学学报，13，52－56，1991.
[165]赵跃宇，基于动力学守恒律的近似计算方法，湘潭大学学报，12，38－42，1990.

[166]赵跃宇,关于非完整非保守力学系统 Noether 守恒量的独立性,湘潭大学学报,14,39－43,1992.
[167]赵跃宇,关于力学系统的极值性与对称性,黄淮学刊,8,8－13,1992.
[168]梅凤翔,Birkhoff 系统的 Noether 理论,中国科学,A 辑,23,709－717,1993.
[169]梅凤翔,广义 Noether 定理与非完整动力学逆问题,江西科学,11,1－6,1993.
[170]赵跃宇,梅凤翔,关于力学系统的对称性与不变量,力学进展,3,360－372,1993.
[171]赵跃宇,非保守力学系统的 Lie 对称性与不变量,力学学报,26,379－384,1994.
[172]赵跃宇,梅凤翔,一般动力学系统的精确不变量与绝热不变量,力学学报 28,207－216,1996.
[173]赵跃宇,增广相空间中力学系统的对称性与不变量,黄淮学刊,12,7－14,1996.
[174]赵跃宇,力学系统对称性的摄动绝热不变量,湖南大学学报,23,45－50,1996.
[175]赵跃宇,关于力变分原理的几点注记,湘潭大学学报,8,16－23,1986.
[176]赵跃宇,许文喜,非保守力学系统的 Lagrange 对称性,中南矿冶学院学报,25,113－115,1994.
[177]赵跃宇,关于力学系统的极值性与对称性,黄淮学刊,8,8－13,1992.