数学辞海

MATHEMATICS DICTIONARY

第六卷

山西教育出版社
东南大学出版社
中国科学技术出版社

山西省人民政府资助出版

如果你有數學問題，
而不好意思麻煩
如可以來書山我得解答。
一九八八年八月書祝
數學論海成功
陳省身

学习、研究、运用、发展
数学，让中国数学
赶上国际先进水平，
促进社会主义现
代化建设

吴大任

為日和前進步和完
美与国家和衆
采和百倍昌明繁
榮前途的 楊公六七

長江納众水百
折不回頭碧海
能容物滔滔向
海流

數學辭海出版紀念

李國平並書

《数学辞海》总编辑委员会

顾　　问　丁石孙　冯　康　江泽涵　苏步青　李国平　吴大任　吴文俊　谷超豪
陈省身　周培源　柯　召　程民德

学术指导　万哲先　卫念祖　马希文　王　元　王寿仁　王梓坤　王绶琯　王斯雷
王湘浩　文　兰　叶彦谦　史惠顺　白正国　冯克勤　宁津生　成　平
朱照宣　伍卓群　庄圻泰　孙　琦　孙以丰　严加安　严志达　严绍宗
苏汝铿　李　未　李　迪　李邦河　李岳生　李德仁　杨东屏　杨芙清
杨桂通　吴祖基　余家荣　沈燮昌　张尧庭　张芷芬　张恭庆　张嗣瀛
陆汝钤　陆润林　陈希孺　陈梓北　陈翰馥　金福临　周伯埙　周毓麟
郑维行　赵慈庚　钟　集　姜礼尚　莫绍揆　郭　雷　郭柏灵　黄　琳
黄正中　萧树铁　梅向明　曹锡华　梁之舜　梁宗巨　越民义　韩汝琦
程其襄　谢力同　谢邦杰　路见可　蔡长年　廖山涛　潘承洞　魏庚人

名誉总编　程民德

总　　编　何思谦

总 编 委　丁尔升　干丹岩　马国选　马忠林　马星垣　王戈平　王世强　王戍堂
王怀安　王国俊　王建磐　王恩平　王耀东　仇桂生　文志英　方锦暄
方嘉琳　邓必鑫　邓永录　邓宗琦　古四毛　左执中　叶大卫　田德恒
史树中　史济怀　冯汉桥　冯志伟　曲世江　吕德正　朱元森　朱梧槚
任南衡　任福尧　庄亚栋　刘　策　刘永清　刘秀芳　刘卓军　刘绍学
刘彦佩　刘家壮　刘瑞挺　刘增贤　刘儒英　米道生　许以超　许永华
苏维宜　杜瑞芝　李　士　李兆华　李克正　李国伟　李承恕　李荫藩
李培业　李培信　杨　路　杨光俊　杨安洲　杨劲根　杨林生　杨春宏
杨重骏　杨家荣　杨家新　杨焕萍　吴从炘　吴振德　吴崇试　岑嘉评
邱　森　邱曙熙　何连法　何伯和　何育赞　何思谦　何崇佑　佟文廷
余澍祥　应制夷　汪　林　沈一兵　沈米成　沈复兴　宋增民　张友余
张文修　张永奎　张伟江　张孝达　张志新　张忠辅　张景中　张奠宙
陆文端　陆洪文　陆善镇　陈文嵘　陈兰荪　陈庆益　陈志华　陈志杰
陈秀东　陈希孺　陈重穆　陈哲卿　陈家鼎　陈藻平　武际可　苗东升
茆诗松　范先令　林　伟　林正炎　林夏水　易照华　於宗俦　郑应平
郑祖庥　郑崇友　孟吉翔　胡作玄　胡毓达　胡炳生　钟义信　侯晋川
施武杰　洪钟德　秦化淑　徐安士　徐利治　徐源富　高琪仁　郭　雷
郭大钧　郭光灿　郭聿琦　郭思乐　唐志远　剡俊华　容尔谦　黄文灶
黄启昌　萧　玲　萧奚安　梅荣照　曹之江　常心怡　常学将　梁友栋
梁世熙　梁贯成　彭立中　董士海　董克诚　蒋星耀　程　侃　程福长
曾一平　谢文泉　谢克昌　谢庭藩　谢鸿政　裘光明　裘宗沪　裘焯明
虞言林　路见可　颜　实　颜基义　潘一民　潘养廉　霍　伟　戴执中

（以上署名均以姓名首字笔画为序）

《数学辞海》第六卷编辑委员会

主　　编	胡作玄	梅荣照						
副 主 编	丁尔升	邓宗琦	任南衡	杜瑞芝	李兆华	张友余	张奠宙	林夏水
	郭思乐							
编　　委	丁尔升	马国选	马忠林	王　前	王卫国	王青建	王荣彬	王翠满
	邓明立	邓宗琦	申克端	卢冀翔	叶景梅	冯守训	曲世江	朱学志
	朱家生	任南衡	孙宏安	苏式冬	杜瑞芝	李兆华	李培业	杨春宏
	张友余	张孝达	张奠宙	邵明湖	林夏水	欧阳绵	周光壁	胡作玄
	胡炳生	贺贤孝	侯在惠	郭世荣	郭刘龙	郭思乐	郭熙汉	黄继鲁
	梅荣照	龚宝和	蔡　伟	颜秉海	薛茂芳	冀建中		
执行编委	丁尔升	马国选	李兆华	胡作玄	胡炳生			

《数学辞海》第六卷各分支学科编辑委员会

中国数学史	主　编	李兆华						
	副主编	朱家生	郭熙汉					
	编　委	马国选	朱家生	李兆华	吴裕宾	张柏平	徐泽林	郭世荣
		郭熙汉						
外国数学史	主　编	杜瑞芝						
	副主编	马国选	王青建	邓明立	邵明湖			
	编　委	马国选	王青建	王晓硕	邓明立	田钦谟	刘贤俊	齐治平
		杜瑞芝	杨淑辉	邵明湖	夏艳清			
数学符号史	主　编	孙宏安						
	编　委	王幼军	孙宏安	程小红				
数学团体与	主　编	杨春宏						
研究机构	副主编	马国选	郭刘龙					
	编　委	马国选	王寿民	石素霞	刘增印	杨春宏	张惠英	郭刘龙
		高志良	蔡丹英					
数学竞赛与	主　编	马国选						
数　学　奖	编　委	马国选	王翠满	叶景梅	刘培杰			
数学期刊	主　编	张友余						
	副主编	欧阳绵						
	编　委	王慧娟	石生民	张友余	张延伦	陆吉林	欧阳绵	党亚茹
数学教育	主　编	丁尔升						
	副主编	马忠林	张孝达	郭思乐				
	编　委	丁尔升	马忠林	王鸿钧	刘凤璞	孙瑞清	张孝达	陆克毅
		周光壁	郭思乐	梁贯成	颜秉海			

数学哲学	主　编	林夏水						
	副主编	王　前	卢翼翔	冀建中				
	编　委	王　前	邓明立	卢翼翔	吴学谋	张祖贵	林夏水	徐炎章
		郭小林	郭刘龙	梁　芳	谢文泉	冀建中		
数学名题与猜想	主　编	贺贤孝						
	副主编	赵秀元	侯在惠	蒋海凤				
	编　委	王　瑾	王寿民	刘　莉	刘广智	杨仁同	杨春宏	赵秀元
		侯在惠	贺贤孝	倪焕泉	景　敏	蒋海凤	潘万富	
珠　算	主　编	李培业						
	副主编	申克端	黄继鲁	龚宝和				
	编　委	王　彤	王龄九	申克端	朱世浩	李培业	姚克贤	郭启庶
		黄继鲁	龚宝和	景滨杰				
数学发展史年表	主　编	胡炳生						
	编　委	王　庚	冯守训	周焕山	胡炳生			

（以上署名均以姓名首字笔画为序）

序

当我们向着日益临近的21世纪走去的时候，一部巨著——《数学辞海》将要面世了。这是我国200余所高等院校、科研机构，数以千计的数学家、数学工作者共同劳动的结晶，是一件影响深远的大事。

还是在本世纪同上一世纪交接的1900年，希尔伯特就以23个数学问题作为送旧迎新的礼物，高瞻远瞩地指引着20世纪数学发展的若干重要进程。如今，20世纪的帷幕行将落下，我们惊喜地看到，在这百年间，数学已经发生了多么巨大的变化！人们对数学的认识更深刻了，数学的分支更多了，数学的广度和深度，都远远超出了本世纪初的预料。异军突起的新科学和新技术，诸如计算机科学、航天技术、生命工程、数字通信以及新能源的开发、新材料的应用等，无不需要数学，社会科学和人文科学的经济、教育、语言、考古等领域，也开始与数学结下不解之缘。所有这些学科在向数学索取的同时，也都在某一方面推动和改变着数学。数学已经发展成为内涵广泛的数学科学。数学是大自然的语言，又是人类社会生活中各种关系的高度概括。数学在现实世界中获取模型，扩大了自己的外延，同时展现了新的内涵、新的抽象。如果说古希腊和古代中国的数学只是涓涓细流，那么，今天之数学已经汇成了波流浸灌的长江大河。

一个人可以学贯中西，但无法懂得现代数学的方方面面，而社会变革的进程和新技术的浪潮却迫使人们学习和应用更多的数学。解决这个矛盾的办法之一，自然是编纂一部大型的数学工具书。《数学辞海》正是在这样的时代需求背景之下应运而生的。有了这种巨大的推动力量，它才能克服种种艰难曲折，从第一页稿纸，发展成为我们所见到的这部别具一格的鸿篇巨制。

为什么这本书能使作者们激动，愿意竭诚为之构筑，又能吸引读者，使之企足而待呢？这是由于数学自身的地位和价值，它在实践中的巨大作用和自身的美。

数学首先是人们生活和生产的工具。马克思非常赞同康德的这样一句话："一门科学，只有当它成功地应用数学时，才算达到了完善的地步。"事实上，数学被使用的程度，往往反映了一个国家、一个民族的科学进步和经济发展水平。很难设想，在一个低技术的国家，会产生高深的数学，而高技术的社会形态，必有与之相适应的数学水平。毫无疑问，在科学技术飞速发展的当今世界，对数学的需求将与日俱增。

其次，数学又是一种文化形态。古往今来，人们在数学这块沃土上耕耘，收获了许多硕果。这些美好的硕果，本身就是一首首动人的诗篇，闪耀着智慧的光芒。一般人都会欣赏艺术，然而，当一个人只要具有基础的数学知识，同样可以对一道经典的数学名题和某个优美的解法叹为观止。人们还概括了大量实际模型的抽象数学，通过形式推演，以得出

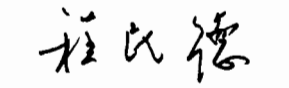
系统的理论，再应用到更广泛的总体上去。数学的这种以简驭繁的本领决定于它的高度概括性。正是由于概括，数学形成了包含各个学科的优美结构。数学的发展推动了自然结构观的发展，它有力地带动了其他学科，大大加速了人类文明史的进程。

数学的作用，还在于它有着独特的培育人的功能。数学是每个人必须学习的基础学科。从小学到中学，数学的学时最多，除了因为数学是一切科学的基础和工具之外，更因为数学有着独特的思维教育和智力开发的作用。数学的高度抽象、遵从逻辑规则和不断创新的特征，集中而突出地表现了人类思维的概括性、逻辑性和探索性。所以，学习数学对人才的培养是一种基本的思维训练，被称为“思想的体操”。

为了全面地反映古今中外的数学成果、体现数学的多种功能，本书既兼顾传统数学和现代数学，又兼顾抽象的基础数学和具体的应用数学。考虑到广大数学教育工作者的需求，本书还将初等数学和高等数学相对地进行了划分，并按习惯将某些分支学科集中列卷，此外还编纂了包含数学史与数学教育等分支学科的专卷，也系统地介绍了中国的古算。这样编纂的《数学辞海》将会充分地显示数学的工具意义、文化意义和教育意义。愿这部国人自编的《数学辞海》既能为国家经济建设服务，又能在民族文化建设中起到应有的作用。

《数学辞海》是改革开放的产物，又将为改革开放服务。人们或许没有想到，这部巨著竟出自民办的编写组织。编纂者来自大江南北、长城内外、海峡两岸，在历时 10 余年间，数百所大专院校、科研机构的千余名专家学者日夜辛劳、自愿奉献，在《数学辞海》中编织着自己的理想和愿望。社会各界积极赞助，有识之士慷慨捐赠，海外同胞亦纷纷来电来函表示支持，用他们的心意渲染着文化建设的宏图。在这个民办写作团体中，人们互相信任、互相支持、互相勉励，充满了成就事业的认同感、紧迫感。这一写作经验也清楚地说明：在共同的愿望下，民办科研也是一条坦途。这是《数学辞海》编写过程中给我们的一个十分有益的启示。

像一切事物一样，《数学辞海》还不会达到绝对完善的境界。相反，这部反映浩如烟海的数学知识，动员了如此巨大力量而编纂的大型著作，首次面世时，一定会有许多不足之处，例如整体结构、条目收集、词义诠释、词类归属等，都还会有需要进一步推敲、商榷的地方。数学是极为严谨的科学，《数学辞海》必将在众多专家的严谨尺度之下，逐版改进。我们今天为之高兴的是，将来可能成为传世之作的《数学辞海》已有了良好的雏形，我们准备将它作为迎接新世纪的礼物，奉献给关心它、需要它的广大读者。



1998 年 6 月

凡　例

一、编　排

1. 全书包括数学科学的100余个分支学科或专题项目，按照从初等数学到高等数学，从古典数学到现代数学，从理论数学到应用数学的原则，将整个数学科学划分为6卷编辑出版(参见《数学辞海》六卷本内容划分方案)。

2. 各卷正文均按数学知识的结构体系编排，同一分支学科(或同一专题项目)的条目相对集中，一般按知识本身的结构、层次、逻辑等关系确定其先后顺序，而数学史部分，如数学家、数学名著、数学期刊、数学团体等，则分别按其出生、出版、创刊、成立的年代先后顺序编排。

3. 各卷目录标题分为三级：一级标题为一个分支学科或一个知识门类。一级标题之下，则按知识构成设若干个二级标题。例如，第一卷中的“数学分析”为一级标题，下设六个二级标题——“实数理论”、“变量与函数”、“极限理论”、“微分学”、“积分学”和“无穷级数”；又如，第六卷中的“中国数学史”为一级标题，下设四个二级标题——“中国古代数学史”、“中国古代数学著作”、“中国古算名词术语”和“中国数学家”。三级标题为具体条目名称。

4. 同一卷中不同分支学科之间的内容有重复时，其知识主题一般地只在一处设条目；不同卷中的学科内容有重复时，其知识主题在各相关部分均设条目，但在释文内容上各有侧重。

二、条　目

1. 条目的标题一般为一个词，如“圆”、“群”、“环”、“函数”、“矩阵”、“向量”、“方程”等，也有的是一个词组，如“勾股定理”、“常微分方程的通解”、“哥德巴赫猜想”、“希尔伯特第6问题”等。

2. 条目设立的条件：1) 独立的知识主题或已形成的固定概念；2) 能够应用准确的、人们习惯和易于理解的词标引；3) 便于读者快速查阅。

3. 条目的分类：条目按其释文的长短分为五类：特长条目(3000字左右)、长条目(1000—3000字)、中条目(300—1000字)、短条目(300字以内)和参见条目。

4. 本书所收的数学名词术语，力求与“全国自然科学名词审定委员会”公布的《数学名词》(科学出版社，1993)保持一致。外国人名的中文译名，力求与《中国大百科全书·数学卷》和梁宗巨主编的《数学家传略词典》(山东教育出版社，1989)中的译名保持一致。未出现在上述著作中的外国人名的中文译名，则采用数学界的约定译名或用习惯译法译出的译名。

三、释　文

1. 本书条目的释文，以文字叙述为主，并采用规范化的现代汉语，力求科学、准确、简明、通俗，杜绝教材式语言和口语，释文开头不再重复条目的标题。

2. 释文开头一般要求破题，然后给出严格的数学定义，并尽量阐明该条目内容的历史沿革及其在本分支学科或知识门类中的地位、作用、发展趋势等，以增强释文的科学性和可读性。

3. 一词多义的释文，用①…②…③…分项叙述，某个条目的释文需由其他条目释文补充说明的，采

用“参见”的方式，被参见的条目标题需加引号，条目标题前加“参见”字样，并置于圆括号之内。

4. 对常见的异名同义词，只给出一种条目标题的释文，其余异名条目亦列入正文，但不再写释文，给出释文的条目标题加引号，条目标题前加“即”字样。例如：矢量(vector)即“向量”；全纯函数(holomorphic function)即“解析函数”；正则函数(regular function)即“解析函数”。

5. 每一个条目标题后，一般在圆括号内标注有对应的英文。凡外国人名(日本人除外)在条目的释文中第一次出现时，在其中文译名后的圆括号内标注有相应的外文原名的姓和名的首字母，并用逗号隔开。例如，欧几里得(Euclid)、牛顿(Newton,I.)、高斯(Gauss,C.F.)。同一外国人名在条目的释文中第二次出现时，不再标注外文。在日本人名、中国人名、中国古代数学史、中国古代数学著作、中国古算名词术语等条目标题后，一般在圆括号内标注汉语拼音。

6. 如果条目乙的基本定义已经完全包括在条目甲的释文之中，那么条目乙只作为“参见条目”保留，所参见的条目标题需加引号，并在条目标题前加“见”字样，而释文不再重复。例如，在条目“线性变换”的释文中，已给出“单位变换”、“恒等变换”和“零变换”的定义，则上述三个条目就作为“参见条目”予以保留，并分别表示为：单位变换(unit transformation)见“线性变换”；恒等变换(identity transformation)见“线性变换”；零变换(null transformation)见“线性变换”。

四、索　引

1. 本书每一卷正文之后，均附有三种索引，即条目笔画索引、条目音序索引和条目西文索引。索引中条目标题后面的数字，表示该条目在正文中的页码。

2. 在条目笔画索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按 一(横)、丨(竖)、丿(撇)、丶(点)、 乛(折)五种笔形顺序排列，其中，㇀(提)归为一(横)，亅(竖钩)归为丨(竖)，乀(捺)归为丶(点)，各种笔形带钩或曲折的笔画(除竖钩“亅”外)归为 乛(折)。第一字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 在条目音序索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

4. 在条目笔画索引和条目音序索引中，凡第一字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在两种索引的最后。西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画或音序排列。

5. 在条目西文索引中，按条目标题的起首西文字母顺序排列；条目标题的西文缩写，按一个词排列。凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。没有西文译名的条目，未收进条目西文索引。

6. 在各卷索引之后，还附有本卷涉及到的中外人名译名对照表，以供读者查阅。

目　录

序 …… 1—2

凡例 …… 1—2

《数学辞海》六卷本内容划分方案 …… 1—1

第六卷条目目录 …… 1—39

正文 …… 1—695

数学发展史年表 …… 696—754

条目笔画索引 …… 755—777

条目音序索引 …… 778—800

条目西文索引 …… 801—836

中外人名译名对照表 …… 837—865

后记 …… 866

《数学辞海》六卷本内容划分方案

第一卷

数学
算术
初等代数
平面几何
平面三角
立体几何
球面几何
平面解析几何
空间解析几何
初等数论
高等代数
高等几何
数学分析
集合论
形式逻辑
布尔代数
概率论与统计学初步
数学符号表

第二卷

数学
组合学
线性与多重线性代数
群及其推广
李群与李代数
环与代数
模与同调代数
序与格
范畴论与代数 K 理论
域论与伽罗瓦理论
数论
代数几何
微分几何学
凸集几何与距离几何
一般拓扑学
代数拓扑学与流形拓扑学
奇点理论与突变理论
数学符号表

第三卷

数学
实变函数论
复变函数论
多复变函数论
测度论
泛函分析
变分法
函数逼近论
调和分析
流形上的分析
位势论
凸分析
非标准分析
小波分析
分形几何
常微分方程
偏微分方程
积分方程
动力系统
特殊函数
数学符号表

第四卷

数学
数学基础
数理逻辑
计算数学
概率论
随机过程
统计学
经济数学
生物数学
数学物理与理论物理
模糊数学
数学符号表

第五卷

数学
运筹学
系统理论
控制理论
通信与信息理论
画法几何与工程图学
计算机科学
数理语言学
力学
天文学
测绘学
数学符号表

第六卷

数学
中国数学史
外国数学史
数学符号史
数学团体与研究机构
数学竞赛与数学奖
数学期刊
数学教育
数学哲学
数学名题与猜想
珠算
数学发展史年表

第六卷条目目录

说明：该目录由本卷所属各分支学科或专题项目的全部条目（包括给出释文的条目及其参见条目）组成，按知识结构顺序编排，即按条目在正文中出现的先后顺序排列.

数学 …… 1
数学史 …… 5

中 国 数 学 史

中国古代数学史

中国数学史 …… 8
中国传统数学的萌芽 …… 8
中国传统数学体系的形成与发展 …… 9
中国传统数学的繁荣 …… 12
中国传统数学的低落 …… 14
中西数学的合流 …… 15

中国古代数学著作

算数书 …… 20
算经十书 …… 20
周髀算经 …… 20
九章算术 …… 21
海岛算经 …… 21
孙子算经 …… 21
张丘建算经 …… 21
缀术 …… 22
五曹算经 …… 22
五经算术 …… 22
数术记遗 …… 22
缉古算经 …… 22
夏侯阳算经 …… 22
谢察微算经 …… 22
敦煌算书 …… 23
黄帝九章算法细草 …… 23
算学源流 …… 23
数书九章 …… 23
测圆海镜 …… 23
益古演段 …… 24
详解九章算法 …… 24
日用算法 …… 24
杨辉算法 …… 24
乘除通变本末 …… 24
田亩比类乘除捷法 …… 24
续古摘奇算法 …… 24
革象新书 …… 24
算学启蒙 …… 25
四元玉鉴 …… 25
丁巨算法 …… 25
算法全能集 …… 25
详明算法 …… 26
通原算法 …… 26
透帘细草 …… 26
锦囊启源 …… 26
永乐大典算书 …… 26
诸家算法及序记 …… 26
九章算法比类大全 …… 26
算学宝鉴 …… 26
勾股算术 …… 27
测圆海镜分类释术 …… 27
弧矢算术 …… 27
测圆算术 …… 27
神道大编历宗算会 …… 27
盘珠算法 …… 27
数学通轨 …… 27
一鸿算法 …… 27
算学新说 …… 27
算法统宗 …… 28
算法纂要 …… 28
算法指南 …… 28
嘉量算经 …… 28
测量法义 …… 28
测量异同 …… 28
勾股义 …… 28

同文算指…… 28
欧罗巴西镜录…… 29
圜解…… 29
算海说详…… 29
数度衍…… 29
梅勿庵历算全书…… 29
方程论…… 29
勾股举隅…… 30
方圆幂积…… 30
几何补编…… 30
平三角举要…… 30
弧三角举要…… 30
环中黍尺…… 30
堑堵测量…… 31
算义探奥…… 31
少广补遗…… 31
数理精蕴…… 31
增删算法统宗…… 31
梅氏丛书辑要…… 31
赤水遗珍…… 32
视学…… 32
割圆密率捷法…… 32
九章算术细草图说…… 32
海岛算经细草图说…… 32
缉古算经考注…… 33
勾股形内容三事和较…… 33
里堂学算记…… 33
加减乘除释…… 33
天元一释…… 33
开方通释…… 33
衡斋算学…… 33
参两算经…… 34
李氏遗书…… 34
勾股算术细草…… 34
开方说…… 34
少广正负术…… 34
求一算术…… 34
缉古算经细草…… 34
艺游录…… 35
重差图说…… 35
四元玉鉴细草…… 35
四元玉鉴细草…… 35
观我生室汇稿…… 35
勾股容三事拾遗…… 35
演元九式…… 35
台锥演积…… 35
三角和较算例…… 35
弧矢算术补…… 35
校正算学启蒙…… 35
董方立算书…… 35
斜弧三边求角补术…… 36
堆垛求积术…… 36
割圆连比例术图解…… 36
象数一原…… 36
下学庵算术三种…… 36
勾股六术…… 36
三角和较术…… 36
开诸乘方捷术…… 36
务民义斋算学…… 36
测圆密率…… 36
造各表简法…… 37
截球解义…… 37
弧三角拾遗…… 37
求表捷术…… 37
对数简法…… 37
外切密率…… 37
假数测圆…… 37
四元玉鉴细草…… 37
则古昔斋算学…… 37
方圆阐幽…… 37
弧矢启秘…… 37
对数探源…… 37
垛积比类…… 37
四元解…… 38
级数回求…… 38
对数尖锥变法释…… 38
天算或问…… 38
考数根法…… 38
九容图表…… 38
夏氏算书遗稿…… 38
洞方术图解…… 38
致曲…… 38
百鸡术衍…… 38
求一术通解…… 38
算牖…… 39
行素轩算稿…… 39
开方别术…… 39
学算笔谈…… 39

中国古算名词术语

算术…… 39
九数…… 39
筹…… 39
筹算…… 39
九九…… 40

规…… 40
矩…… 40
端…… 40
表…… 40
正算…… 40
负算…… 40
方田…… 40
粟米…… 40
衰分…… 40
少广…… 41
商功…… 41
均输…… 41
盈不足…… 41
方程…… 41
勾股…… 41
率…… 41
幂…… 41
面…… 41
实…… 41
法…… 41
棋…… 41
合分…… 42
减分…… 42
乘分…… 42
约分…… 42
等数…… 42
更相减损…… 42
课分…… 42
平分…… 42
经分…… 42
通分内子…… 42
重有分…… 42
今有术…… 42
重今有术…… 42
返衰…… 43
齐同术…… 43
其率术…… 43
反其率术…… 43
通其率术…… 43
圭田…… 43
邪田…… 43
箕田…… 44
圆田…… 44
弧田…… 44
弦图…… 44
出入相补…… 44
立方…… 44
堑堵…… 44
阳马…… 44
鳖臑…… 45
堑(城、垣、堤、沟、渠)…… 45
方亭…… 45
方锥…… 45
刍甍…… 45
刍童…… 45
方堡堵…… 45
圆堡堵…… 45
圆亭…… 45
圆锥…… 45
羡除…… 46
开方术…… 46
开立方术…… 46
开立圆术…… 46
方程术…… 46
正负术…… 47
和较术…… 47
割圆术…… 47
阳马术…… 48
徽率…… 48
牟合方盖…… 48
重差术…… 48
开带从平方…… 48
开带从立方…… 48
河图…… 48
洛书…… 48
九宫…… 48
太一算…… 49
两仪算…… 49
成数算…… 49
九宫算…… 49
三才算…… 49
古珠算…… 49
一掌金…… 49
八卦算…… 49
龟算…… 49
五行算…… 49
把头算…… 49
了知算…… 49
运筹算…… 49
十等数…… 49
密率…… 49
祖率…… 50
三等数…… 50
孙子定理…… 50
中国剩余定理…… 50
百鸡术…… 50

约率…… 50
祖暅原理…… 50
上元积年…… 50
调日法…… 50
演纪术…… 51
隙积术…… 51
会圆术…… 51
三角垛…… 51
果子垛…… 51
刍童垛…… 51
增成…… 52
细草…… 52
演段…… 52
开方作法本源图…… 52
开诸乘方…… 52
立成释锁开方法…… 52
增乘开方法…… 52
正负开方术…… 53
纵横图…… 53
求一…… 53
大衍总数术…… 53
大衍求一术…… 54
互乘相消法…… 54
三斜求积术…… 54
天元一…… 54
天元术…… 55
圆城图式…… 55
九容…… 55
勾股容方…… 55
勾股容圆…… 55
身外加法…… 56
身外减法…… 56
重因…… 56
损乘…… 56
隅…… 56
立成…… 56
比类…… 56
四元术…… 57
招差术…… 57
之分开方法…… 57
岚峰垛…… 57
方箭…… 57
圆箭…… 57
暗码子…… 57
纳皮尔算筹…… 58
写算…… 58
杜氏三术…… 58
数根…… 58
流法…… 58
斤两法…… 58
割圆连比例…… 58
借根方…… 59
比例规…… 59
六宗…… 59
尖锥术…… 59
李善兰恒等式…… 59
视学…… 59
代开法…… 59
合数术…… 59
积较术…… 59

中国数学家

周　公…… 59
商　高…… 60
陈　子…… 60
墨　翟…… 60
庄　子…… 60
张　苍…… 60
毛　亨…… 60
许　商…… 61
杜　忠…… 61
尹　咸…… 61
耿寿昌…… 61
刘　歆…… 61
张　衡…… 61
马　续…… 61
刘　洪…… 61
郑　玄…… 62
蔡　邕…… 62
王　粲…… 62
徐　岳…… 62
陈　炽…… 62
王　蕃…… 62
陆　绩…… 62
周　群…… 62
阚　泽…… 62
赵　爽…… 62
刘　徽…… 63
孙　子…… 63
赵　歜…… 63
何承天…… 64
高　允…… 64
成公兴…… 64
殷　绍…… 64
皮延宗…… 64

张丘建…… 64
祖冲之…… 64
祖 暅…… 65
张 缵…… 65
刘孝孙…… 65
夏侯阳…… 65
元延明…… 65
苏 绰…… 65
庾曼倩…… 65
甄 鸾…… 66
董 泉…… 66
信都芳…… 66
刘 焯…… 66
刘 炫…… 66
张去斤…… 67
张 峻…… 67
宋泉之…… 67
杨 淑…… 67
刘 祐…… 67
王孝通…… 67
李淳风…… 67
南宫说…… 68
瞿昙悉达…… 68
张 遂…… 68
韩 延…… 68
刘 晏…… 68
曹士芳…… 69
边 冈…… 69
龙受益…… 69
徐 昂…… 69
陈从运…… 69
江 本…… 69
黄栖岩…… 69
宋延美…… 69
夏 翰…… 69
程 柔…… 69
薛崇誉…… 69
任弘济…… 69
杨 锴…… 69
徐仁美…… 69
李绍谷…… 69
楚 衍…… 69
贾 宪…… 69
王 洙…… 70
沈 立…… 70
韩公廉…… 70
苏 颂…… 70
沈 括…… 70
谢察微…… 71
张 祚…… 71
刘 益…… 71
赵知微…… 71
鲍澣之…… 71
刘汝锴…… 71
石信道…… 71
中山子…… 71
杨云翼…… 71
秦九韶…… 71
杨 辉…… 72
李 冶…… 73
元 裕…… 74
郭 荣…… 74
郭守敬…… 74
王 恂…… 74
赵友钦…… 75
沙克什…… 75
刘大鉴…… 75
朱世杰…… 75
何平子…… 76
刘 谨…… 76
祖 颐…… 76
贾 亨…… 76
布顿·仁钦珠巴…… 76
陈尚德…… 76
安止斋…… 76
丁 巨…… 76
严 恭…… 76
郭伯玉…… 76
刘仕隆…… 76
夏源泽…… 76
吴 敬…… 76
金来朋…… 77
许 荣…… 77
杨 廉…… 77
余 进…… 77
顾应祥…… 77
唐顺之…… 77
陈邦称…… 77
王文素…… 77
马 杰…… 77
郑高升…… 77
张 爵…… 77
陈必智…… 77
林 高…… 77
周述学…… 77
杨 溥…… 77

第六卷条目目录

徐心鲁…… 78
柯尚迁…… 78
程大位…… 78
余　楷…… 78
邢云路…… 78
朱元浚…… 78
朱载堉…… 78
徐光启…… 78
李之藻…… 79
王应选…… 79
王　征…… 79
李笃培…… 79
孙元化…… 79
陈尽谟…… 79
李天经…… 79
毛　晋…… 79
黄龙吟…… 80
薛凤祚…… 80
王锡阐…… 80
方中通…… 80
杨定三…… 80
梅文鼎…… 80
李子金…… 80
杨作枚…… 81
杜知耕…… 81
毛乾乾…… 81
陈厚耀…… 81
陈　讦…… 81
毛宗旦…… 81
陈世仁…… 81
年希尧…… 81
江　永…… 81
梅彀成…… 81
庄亨阳…… 82
明安图…… 82
何国宗…… 82
李　潢…… 82
王元启…… 82
戴　震…… 82
孔继涵…… 83
孔广森…… 83
张敦仁…… 83
牟　庭…… 83
安清翘…… 83
焦　循…… 83
阮　元…… 83
王贞仪…… 83
朱　鸿…… 83
汪　莱…… 84
李　锐…… 84
时曰淳…… 84
陈　杰…… 85
骆腾凤…… 85
戴敦元…… 85
冯　澄…… 85
罗士琳…… 85
刘　衡…… 85
朱骏声…… 85
许桂林…… 85
沈钦裴…… 85
黎应南…… 86
项名达…… 86
董祐诚…… 86
顾观光…… 86
徐有壬…… 86
戴　煦…… 86
陈　旸…… 86
冯桂芬…… 86
丁取忠…… 87
李善兰…… 87
汪曰桢…… 87
徐　寿…… 87
邹伯奇…… 88
左　潜…… 88
夏鸾翔…… 88
吴嘉善…… 88
华蘅芳…… 88
劳乃宣…… 89
陈志坚…… 89
曾纪鸿…… 89
黄宗宪…… 89
华世芳…… 89
江　衡…… 89
刘　铎…… 89
冯祖荀…… 89
余子夷…… 90
胡敦复…… 90
姜立夫…… 90
胡明复…… 90
李　俨…… 90
钱宝琮…… 91
曾昭安…… 91
熊庆来…… 91
陈建功…… 91
何　鲁…… 92
杨武之…… 92

华印椿…… 92
沈百英…… 93
曾炯之…… 93
傅种孙…… 93
孙光远…… 93
王福春…… 93
余介石…… 94
江泽涵…… 94
苏步青…… 94
朱公谨…… 94
周绍濂…… 95
吴大任…… 95
庄圻泰…… 95
刘书琴…… 95
华罗庚…… 96
柯 召…… 96
李国平…… 96
许宝騄…… 97
吴新谋…… 97
蒲保明…… 97
陈省身…… 98
李华宗…… 98
周炜良…… 98
胡世华…… 99
闵嗣鹤…… 99
樊 畿…… 99
段学复 …… 100
王湘浩 …… 100
林家翘 …… 100
程民德 …… 101
严敦杰 …… 101
严志达 …… 101
莫绍揆 …… 102
王宪钟 …… 102
关肇直 …… 102
吴文俊 …… 103
廖山涛 …… 103
冯 康 …… 103
曹锡华 …… 104
徐利治 …… 104
余家荣 …… 104
王 浩 …… 104
吴光磊 …… 105
陈国才 …… 105
秦元勋 …… 105
叶彦谦 …… 106
周毓麟 …… 106
谢邦杰 …… 106
谷超豪 …… 106
万哲先 …… 107
陆启铿 …… 107
丁石孙 …… 107
胡和生 …… 108
王梓坤 …… 108
丁夏畦 …… 108
龚 昇 …… 109
王 元 …… 109
夏道行 …… 109
宋 健 …… 110
陈景润 …… 110
石钟慈 …… 110
潘承洞 …… 111
陆家羲 …… 111
陆汝钤 …… 111
林 群 …… 111
张景中 …… 112
张恭庆 …… 112
陈翰馥 …… 112
张广厚 …… 112
姜伯驹 …… 113
钟家庆 …… 113
李大潜 …… 113
杨 乐 …… 113
刘应明 …… 114
冯克勤 …… 114
严加安 …… 114
林节玄 …… 115
李邦河 …… 115
洪家兴 …… 115
萧荫堂 …… 115
忻元龙 …… 115
丁伟岳 …… 115
文 兰 …… 116
马志明 …… 116
张圣蓉 …… 116
丘成桐 …… 116
萧 刚 …… 117
田 刚 …… 117

外 国 数 学 史

外国古代数学史

古代埃及数学 …… 118
古希腊数学 …… 118
美索不达米亚的数学 …… 120
巴比伦数学 …… 121
印度数学 …… 121
中美洲的数学 …… 122
阿拉伯数学 …… 123
罗马和欧洲中世纪的数学 …… 124
拜占庭数学 …… 125
文艺复兴时期的数学 …… 126
日本数学 …… 127

外国近现代数学史

17 世纪的数学 …… 128
18 世纪的数学 …… 130
19 世纪的数学 …… 132
20 世纪的数学 …… 137

外国数学名著

莱因德纸草书 …… 141
几何原本 …… 142
已知条件 …… 143
数沙者 …… 143
论球和圆柱 …… 143
抛物弓形求积 …… 144
论劈锥曲面体与回转椭圆体 …… 144
圆锥曲线论 …… 145
度量论 …… 145
算术入门 …… 145
天文学大成 …… 146
算术 …… 147
数学汇编 …… 148
阿耶波多历数书 …… 148
婆罗摩笈多历算书 …… 149
代数学 …… 149
天文系统极致 …… 149
算法之书 …… 150
论完全四边形 …… 150
论各种三角形 …… 151
算术、几何、比及比例全书 …… 151
大术 …… 152
数量概论 …… 152
砺智石 …… 153
代数学 …… 153
论十进 …… 154
分析术入门 …… 154
奇妙的对数表的描述 …… 155
测量酒桶的新立体几何 …… 155
不可分量几何学 …… 156
平面与立体轨迹引论 …… 156
求极大值与极小值的方法 …… 157
几何学 …… 157
圆锥曲线论稿 …… 158
圆锥曲线论 …… 158
无穷算术 …… 159
几何学讲义 …… 159
运用无穷多项方程的分析学 …… 160
流数法与无穷级数 …… 160
自然哲学的数学原理 …… 161
广义算术 …… 161
一种求极大、极小值与切线的新方法 …… 162
发微算法 …… 162
机会论 …… 162
猜度术 …… 163
正的和反的增量方法 …… 163
分析学家 …… 164
流数通论 …… 164
寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧 …… 165
无穷分析引论 …… 165
代数学引论 …… 166
数学史 …… 167
分析力学 …… 167
解析函数论 …… 167
几何学基础 …… 168
画法几何学 …… 168
天体力学 …… 169
概率的分析理论 …… 169
算术研究 …… 170
关于曲面的一般研究 …… 170
纯粹分析的证明 …… 171
分析教程 …… 172
关于定积分理论的报告 …… 172
热的分析理论 …… 173
论图形的射影性质 …… 173

高于四次的一般方程的代数求解之不可能性的证明 …… 174
数学分析在电磁理论中的应用 …… 175
椭圆函数论新基础 …… 175
代数通论 …… 176
论方程的根式可解性条件 …… 176
绝对空间的科学 …… 177
几何图形相互依赖性的系统发展 …… 177
具有完善的平行线理论的新几何学原理 …… 178
线性扩张论 …… 178
位置几何学 …… 179
形式逻辑 …… 179
单复变函数的一般理论基础 …… 180
关于用三角级数表示函数的可能性 …… 180
关于几何基础的假设 …… 181
四元数讲义 …… 182
思维法则的研究 …… 182
数论讲义 …… 183
置换与代数方程 …… 183
连续性与无理数 …… 184
对于近代几何学研究的比较评述 …… 184
论变换群 …… 184
概念语言 …… 185
微分方程所定义的积分曲线 …… 186
天体力学新方法 …… 186
位置分析 …… 187
函数论论文集 …… 187
算术原理新方法 …… 188
连分式研究 …… 188
关于超限数理论的基础 …… 189
几何基础 …… 190
数学问题 …… 190

外国数学学派

伊奥尼亚学派 …… 191
毕达哥拉斯学派 …… 192
诡辩学派 …… 192
智人学派 …… 192
埃利亚学派 …… 192
原子论学派 …… 193
雅典学派 …… 193
柏拉图学派 …… 193
亚里士多德学派 …… 193
亚历山大里亚学派 …… 193
格丁根学派 …… 193
柏林学派 …… 194
彼得堡学派 …… 194
意大利代数几何学派 …… 194
法国函数论学派 …… 195
直觉主义学派 …… 195
逻辑主义学派 …… 195
形式主义学派 …… 195
普林斯顿学派 …… 196
莫斯科学派 …… 196
函数论学派 …… 196
拓扑学派 …… 196
剑桥分析学派 …… 196
波兰学派 …… 197
华沙学派 …… 197
利沃夫学派 …… 197
布尔巴基学派 …… 197

外国数学家

阿默士 …… 197
索 伦 …… 197
泰勒斯 …… 198
安纳西曼德 …… 198
安纳西门尼斯 …… 198
毕达哥拉斯 …… 198
安纳萨戈拉斯 …… 199
西拉克斯 …… 199
芝诺(埃利亚的) …… 199
安蒂丰 …… 199
希帕索斯 …… 200
伊诺皮迪斯 …… 200
西奥多罗斯(昔兰尼的) …… 200
德谟克利特 …… 200
希波克拉底 …… 200
布里松 …… 201
柏拉图 …… 201
泰特托斯 …… 201
菲洛劳斯 …… 202
欧多克索斯 …… 202
希皮亚斯 …… 202
克森诺克拉底 …… 202
亚里士多德 …… 203
勒俄达马斯 …… 203
西马里达斯 …… 203
勒 俄 …… 203
阿尔希塔斯 …… 203
阿里斯托赛诺斯 …… 204
赛奥法拉斯托斯 …… 204
卡利普斯 …… 204
菲利波斯 …… 204

修迪奥斯 …… 204
阿里斯泰奥斯 …… 204
狄诺斯特拉托斯 …… 204
门奈赫莫斯 …… 205
欧德莫斯 …… 205
斯皮尤西波斯 …… 205
欧几里得 …… 205
阿拉托斯 …… 206
阿利斯塔克 …… 206
奥托利科斯 …… 206
阿基米德 …… 206
埃拉托塞尼 …… 207
阿波罗尼奥斯 …… 207
珀尔修斯 …… 207
尼科米迪斯 …… 208
科　农 …… 208
多西修斯 …… 208
狄俄尼索多罗 …… 208
希帕霍斯 …… 208
芝诺多罗斯 …… 209
许普西克勒斯 …… 209
狄俄克利斯 …… 209
芝诺(西顿的) …… 209
波西佐尼奥斯 …… 209
西奥多修斯(比提尼亚的) …… 209
盖米诺斯 …… 210
索西琴尼 …… 210
海　伦 …… 210
尼科马霍斯 …… 210
门纳劳斯 …… 211
托勒密 …… 211
赛翁(士麦那的) …… 211
马利纳斯 …… 212
丢番图 …… 212
伊安布利霍斯 …… 212
安纳托留斯 …… 212
斯波拉斯 …… 213
帕普斯 …… 213
赛翁(亚历山大的) …… 213
许帕提娅 …… 213
普罗克洛斯 …… 214
大马士革乌斯 …… 214
阿耶波多第一 …… 214
博伊西斯 …… 214
瓦拉哈米希拉 …… 214
婆罗摩笈多 …… 214
辛普利休斯 …… 215
比　德 …… 215
阿纳尼亚 …… 215
阿尔昆 …… 215
花拉子米 …… 215
利　奥 …… 216
塔比伊本库拉 …… 216
艾布卡米勒 …… 216
巴塔尼 …… 216
法拉比 …… 216
施里德哈勒 …… 216
班努·穆萨 …… 217
马哈维拉 …… 217
乌格利迪西 …… 217
阿布·瓦法 …… 217
热尔贝 …… 217
伊本尤努斯 …… 217
伊本·海塞姆 …… 217
凯拉吉 …… 217
古　希 …… 218
吉　里 …… 218
比鲁尼 …… 218
阿维森纳 …… 218
赫尔曼 …… 218
奥马·海亚姆 …… 218
婆什迦罗 …… 218
杰拉德 …… 219
阿德拉德(巴思的) …… 219
内莫拉里乌斯 …… 219
斐波那契 …… 219
格罗塞特斯特 …… 220
贾比·伊本·艾夫拉赫 …… 220
哈济尼 …… 220
罗伯特 …… 220
艾伯塔斯 …… 220
纳西尔丁 …… 220
培　根 …… 221
彼　得 …… 221
布雷德沃丁 …… 221
坎帕努斯 …… 221
奥雷姆 …… 221
布拉休斯 …… 221
乌鲁伯格 …… 221
阿尔贝蒂 …… 221
盖拉萨迪 …… 221
波伊巴赫 …… 222
卡西 …… 222
雷格蒙塔努斯 …… 222
许　凯 …… 222
帕乔利 …… 222

达·芬奇 …… 223
维德曼 …… 223
科贝尔 …… 223
维尔纳 …… 223
迪 勒 …… 223
哥白尼 …… 223
汤斯托尔 …… 224
奥尔特加 …… 224
施蒂费尔 …… 224
格拉马托伊斯 …… 224
里 斯 …… 224
毛罗利科 …… 224
阿皮安努斯 …… 224
塔尔塔利亚 …… 225
尼拉坎塔 …… 225
鲁多尔夫 …… 225
安德烈斯 …… 225
卡泰纳 …… 225
卡尔达诺 …… 225
努涅斯 …… 225
巴罗齐 …… 226
海马弗里叙斯 …… 226
科曼迪诺 …… 226
雷科德 …… 226
莱因霍尔德 …… 226
墨卡托 …… 226
雷蒂库斯 …… 226
拉米斯 …… 227
佩尔蒂埃 …… 227
拉罗什 …… 227
迪格斯 …… 227
费拉里 …… 227
邦贝利 …… 227
福卡德尔 …… 227
里斯内 …… 227
迪 伊 …… 228
内安德尔 …… 228
帕特里齐 …… 228
埃雷拉 …… 228
达西波迪斯 …… 228
贝内代蒂 …… 228
坎宁安 …… 228
阿皮安 …… 228
杜迪特 …… 228
波尔塔 …… 229
丹 蒂 …… 229
克拉维乌斯 …… 229
普雷托里乌斯 …… 229
巴罗齐 …… 229
卡文迪什 …… 229
韦 达 …… 229
柯 伦 …… 230
艾 伦 …… 230
梅蒂斯 …… 230
蒙 特 …… 230
迪格斯 …… 230
阿吉隆 …… 230
第 谷 …… 230
拜亥艾丁 …… 230
斯蒂文 …… 231
萨维尔 …… 231
乌尔苏斯 …… 231
纳皮尔 …… 231
奥 托 …… 231
拉万纳 …… 232
马斯特林 …… 232
比利亚尔潘多 …… 232
瓦莱里奥 …… 232
比尔吉 …… 232
卡塔尔迪 …… 232
利玛窦 …… 232
巴尔迪 …… 233
德格罗特 …… 233
克里斯特曼 …… 233
维蒂赫 …… 233
马吉尼 …… 233
哈里奥特 …… 233
贝德韦尔 …… 233
芬 克 …… 233
布里格斯 …… 234
皮蒂斯楚斯 …… 234
兰斯贝尔热 …… 234
罗 门 …… 234
赖 特 …… 234
拜 尔 …… 234
伽利略 …… 235
盖塔尔迪 …… 235
哈特曼 …… 235
凯克尔曼 …… 235
布 劳 …… 235
开普勒 …… 235
戈克伦纽斯 …… 236
奥特雷德 …… 236
卡斯泰利 …… 236
古尔丁 …… 236
罗 特 …… 236

斯内尔 …… 236
昂里翁 …… 237
韦尔内 …… 237
福尔哈贝 …… 237
冈　特 …… 237
巴　歇 …… 237
胡　德 …… 237
安德森 …… 237
迪歇纳 …… 237
博勒斯 …… 237
圣樊尚 …… 237
米多尔热 …… 238
施文泰尔 …… 238
布罗泽克 …… 238
特　纳 …… 238
卡贝奥 …… 238
祖　基 …… 238
容吉乌斯 …… 238
贝克曼 …… 238
布拉默 …… 238
霍布斯 …… 238
帕斯卡 …… 238
梅　森 …… 239
卡彭特 …… 239
诺伍德 …… 239
勒雷雄 …… 239
德扎格 …… 239
席卡德 …… 239
温盖特 …… 239
吉拉尔 …… 240
布尔丹 …… 240
博格朗 …… 240
马尔齐 …… 240
笛卡儿 …… 240
拉法耶 …… 240
盖利布兰德 …… 241
卡瓦列里 …… 241
阿尔迪 …… 241
珀　蒂 …… 241
格里戈尔 …… 241
比林斯利 …… 241
布　伦 …… 241
埃里冈 …… 241
福斯特 …… 242
勒唐纳 …… 242
拉卢韦 …… 242
比　奥 …… 242
卡尔卡维 …… 242
胡尔西乌斯 …… 242
西尔毛斯 …… 242
弗拉克 …… 242
邦　德 …… 242
博　纳 …… 242
费　马 …… 242
罗贝瓦尔 …… 243
法布里 …… 243
托里切利 …… 243
佩　尔 …… 243
阿尔诺 …… 243
塔　凯 …… 244
沃利斯 …… 244
布龙克尔 …… 244
维维亚尼 …… 244
佩　蒂 …… 244
帕斯卡 …… 244
安杰利 …… 245
维　特 …… 245
许　德 …… 245
惠更斯 …… 245
巴　罗 …… 245
德拉曼 …… 246
科汉斯基 …… 246
雷　恩 …… 246
卡　雷 …… 246
胡　克 …… 246
巴雷姆 …… 246
格雷戈里 …… 246
关孝和 …… 247
牛　顿 …… 247
莱布尼茨 …… 247
切　瓦 …… 247
罗　尔 …… 248
纽文泰特 …… 248
瓦里尼翁 …… 248
雅各布第一·伯努利 …… 248
格雷戈里 …… 248
罗必塔 …… 248
帕　朗 …… 248
约翰第一·伯努利 …… 249
棣莫弗 …… 249
萨凯里 …… 249
惠斯顿 …… 249
马格尼茨基 …… 249
黎卡提 …… 249
赫尔曼 …… 250
沃尔夫 …… 250

梅 钦 …… 250
科 茨 …… 250
法尼亚诺 …… 250
雷奥米尔 …… 250
波伦尼 …… 250
尼科尔 …… 250
泰 勒 …… 251
西姆森 …… 251
克劳斯贝格 …… 251
哥德巴赫 …… 251
斯特灵 …… 251
布 盖 …… 251
马克劳林 …… 251
丹尼尔第一·伯努利 …… 252
贝叶斯 …… 252
克莱姆 …… 252
欧 拉 …… 252
布 丰 …… 252
辛普森 …… 253
柯尼希 …… 253
克莱罗 …… 253
拉卡伊 …… 253
达朗贝尔 …… 253
阿涅西 …… 254
兰 登 …… 254
克斯特纳 …… 254
科捷利尼科夫 …… 254
蒙蒂克拉 …… 254
朗 伯 …… 254
贝 祖 …… 254
马尔法蒂 …… 255
安岛直円 …… 255
拉朗德 …… 255
卡斯滕 …… 255
华 林 …… 255
范德蒙德 …… 255
拉格朗日 …… 255
克吕格尔 …… 256
兴登堡 …… 256
孔多塞 …… 256
韦塞尔 …… 256
蒙 日 …… 256
会田安明 …… 257
坦索达蒙当 …… 257
拉普拉斯 …… 257
马斯凯罗尼 …… 257
勒让德 …… 257
卡 诺 …… 257
斯尼亚代茨基 …… 258
阿博加斯特 …… 258
克拉姆 …… 258
古里耶夫 …… 258
奥西波夫斯基 …… 258
鲁菲尼 …… 258
加尼埃 …… 259
傅里叶 …… 259
华莱士 …… 259
阿歇特 …… 259
巴特尔斯 …… 259
热尔岗 …… 259
鲍迪奇 …… 259
伍德豪斯 …… 260
比 奥 …… 260
朗克雷 …… 260
安 培 …… 260
热尔曼 …… 260
巴 洛 …… 260
高 斯 …… 260
克雷尔 …… 261
利特罗夫 …… 261
泊 松 …… 261
布 雷 …… 261
波尔查诺 …… 261
布里昂雄 …… 262
贝塞耳 …… 262
霍 纳 …… 262
比 内 …… 262
弗雷内尔 …… 262
柯 西 …… 262
默比乌斯 …… 263
皮科克 …… 263
赫谢尔 …… 263
欧 姆 …… 263
罗巴切夫斯基 …… 263
巴贝吉 …… 264
霍普金斯 …… 264
格 林 …… 264
沙 勒 …… 264
当德兰 …… 264
霍尔姆博 …… 264
里夏尔 …… 264
拉 梅 …… 264
凯特勒 …… 265
布拉什曼 …… 265
施泰纳 …… 265
冯·施陶特 …… 265

博比利埃 …… 265
薛　克 …… 265
费尔巴哈 …… 265
拉　比 …… 265
普吕克 …… 265
艾　里 …… 266
库尔诺 …… 266
奥斯特罗格拉茨基 …… 266
普拉托 …… 266
阿贝尔 …… 266
波尔约 …… 267
布利萨德 …… 267
斯图姆 …… 267
贝拉维蒂斯 …… 267
多普勒 …… 267
韦吕勒 …… 267
雅可比 …… 267
布尼亚科夫斯基 …… 268
狄利克雷 …… 268
哈密顿 …… 268
柯克曼 …… 268
德·摩根 …… 269
利斯廷 …… 269
比奥灵 …… 269
刘维尔 …… 269
皮尔斯 …… 269
格拉斯曼 …… 269
库默尔 …… 270
勒威耶 …… 270
黑　塞 …… 270
伽罗瓦 …… 270
尚克斯 …… 270
洛　朗 …… 270
施勒夫利 …… 270
卡塔朗 …… 270
旺策尔 …… 271
西尔维斯特 …… 271
索莫夫 …… 271
外尔斯特拉斯 …… 271
布　尔 …… 271
伟烈亚力 …… 272
德洛内 …… 272
博尔夏特 …… 272
阿龙霍尔德 …… 272
斯托克斯 …… 272
布　凯 …… 272
博　内 …… 272
托德亨特 …… 272
海　涅 …… 273
邦孔帕尼 …… 273
切比雪夫 …… 273
凯　莱 …… 273
亥姆霍兹 …… 273
贝特朗 …… 273
埃尔米特 …… 274
施勒米尔希 …… 274
贝　蒂 …… 274
阿姆斯勒 …… 274
克罗内克 …… 274
基尔霍夫 …… 274
布廖斯基 …… 274
巴尔默 …… 275
巴塔利尼 …… 275
温洛克 …… 275
黎　曼 …… 275
史密斯 …… 275
维　纳 …… 275
彼得松 …… 275
康托尔 …… 275
克里斯托费尔 …… 276
克雷莫纳 …… 276
泰　特 …… 276
麦克斯韦 …… 276
戴德金 …… 276
道奇森 …… 276
诺伊曼 …… 276
利普希茨 …… 277
叙洛夫 …… 277
克莱布什 …… 277
富克斯 …… 277
拉盖尔 …… 277
维　恩 …… 277
纽科姆 …… 277
斯特凡 …… 277
马蒂厄 …… 277
贝尔特拉米 …… 278
卡索拉蒂 …… 278
外恩加滕 …… 278
巴赫曼 …… 278
科尔金 …… 278
哥尔丹 …… 278
布加耶夫 …… 278
莱克西斯 …… 279
若尔当 …… 279
希　尔 …… 279
吉布斯 …… 279

汉克尔 …… 279
塞乌滕 …… 279
佩特森 …… 280
罗 赫 …… 280
施图姆 …… 280
科尔尼 …… 280
吕 卡 …… 280
韦 伯 …… 280
达 布 …… 280
李 …… 280
施瓦兹 …… 281
帕 施 …… 281
玻耳兹曼 …… 281
诺 特 …… 281
阿尔方 …… 281
汪格林 …… 281
康托尔 …… 282
克利福德 …… 282
布罗卡尔 …… 282
达尔文 …… 282
里博库尔 …… 282
米塔-列夫勒 …… 282
茹科夫斯基 …… 282
阿尔泽拉 …… 283
佐洛塔廖夫 …… 283
祖特尔 …… 283
唐内里 …… 283
舒伯特 …… 283
内 托 …… 283
布龙斯 …… 283
格莱舍 …… 284
弗雷格 …… 284
格根鲍尔 …… 284
索 宁 …… 284
克莱因 …… 284
伍德沃德 …… 284
弗罗贝尼乌斯 …… 284
博贝宁 …… 284
克尼格 …… 285
柯瓦列夫斯卡娅 …… 285
亥维赛 …… 285
迪克斯坦 …… 285
哈纳克 …… 285
林德曼 …… 285
伯恩赛德 …… 285
恩内斯特勒姆 …… 286
克韦多 …… 286
里 奇 …… 286
平凯莱 …… 286
瓦西里耶夫 …… 286
洛伦茨 …… 286
埃曼努尔 …… 286
皮尔斯 …… 286
庞加莱 …… 287
尤埃尔 …… 287
阿佩尔 …… 287
马尔可夫 …… 287
皮 卡 …… 287
龙 格 …… 287
迈 尔 …… 288
斯蒂尔杰斯 …… 288
皮尔逊 …… 288
博尔查 …… 288
李亚普诺夫 …… 288
柯尼希 …… 288
古尔萨 …… 288
约翰逊 …… 289
佩亚诺 …… 289
范 因 …… 289
安贝尔 …… 289
卡约里 …… 289
切萨罗 …… 289
沙图诺夫斯基 …… 289
胡尔维茨 …… 289
赫尔德 …… 289
沃尔泰拉 …… 290
莫 利 …… 290
怀特海 …… 290
本迪克松 …… 290
布拉利-福尔蒂 …… 290
科 尔 …… 290
希 思 …… 290
恩格尔 …… 291
亨泽尔 …… 291
希尔伯特 …… 291
克内泽尔 …… 291
施图迪 …… 291
奥卡涅 …… 291
卡利埃 …… 292
里夏尔 …… 292
菲尔兹 …… 292
克雷洛夫 …… 292
塞格雷 …… 292
格拉韦 …… 292
班勒卫 …… 293
斯捷克洛夫 …… 293

第六卷条目目录

奥斯古德 …… 293
屈尔沙克 …… 293
闵科夫斯基 …… 293
韦西奥 …… 293
科捷利尼科夫 …… 294
阿达马 …… 294
博尔托洛蒂 …… 294
弗雷德霍姆 …… 294
瓦莱·普桑 …… 294
陶　伯 …… 294
布　朗 …… 294
韦埃克 …… 295
博　歇 …… 295
沃罗诺伊 …… 295
博尔德希维兹 …… 295
豪斯多夫 …… 295
佐默费尔德 …… 295
卡　甘 …… 296
恰普雷金 …… 296
嘉　当 …… 296
富特温勒 …… 296
叶戈洛夫 …… 297
费　尔 …… 297
林德勒夫 …… 297
法　诺 …… 297
波莱尔 …… 297
尤　尔 …… 297
加廖尔金 …… 297
施泰尼茨 …… 298
策梅罗 …… 298
罗　素 …… 298
布利克弗尔特 …… 298
列维-齐维塔 …… 298
卡拉西奥多里 …… 298
库利奇 …… 299
施瓦茨席尔德 …… 299
惠特克 …… 299
普勒梅利 …… 299
贝　尔 …… 299
迪克森 …… 299
丘普罗夫 …… 299
哈托格斯 …… 300
维莱特纳 …… 300
布拉米奇 …… 300
高木贞治 …… 300
勒贝格 …… 300
菲舍尔 …… 300
维塔利 …… 300
阿奇博尔德 …… 301
施密特 …… 301
科瓦莱夫斯基 …… 301
蒙泰尔 …… 301
布利斯 …… 301
戈塞特 …… 301
威尔辛斯基 …… 301
哈　代 …… 302
兰　道 …… 302
哈梅尔 …… 302
伯恩施坦 …… 302
格罗斯曼 …… 303
利赫滕斯坦 …… 303
弗雷歇 …… 303
克拉索夫斯基 …… 303
武卡谢维奇 …… 303
富比尼 …… 303
塞维里 …… 303
卡迈克尔 …… 304
哈　恩 …… 304
里　斯 …… 304
费耶尔 …… 304
洛特卡 …… 304
伯恩斯坦 …… 305
佩　龙 …… 305
维布伦 …… 305
布劳威尔 …… 305
托尔曼 …… 305
卡　门 …… 306
特普利茨 …… 306
斯内德克 …… 306
巴纳赫维奇 …… 306
韦德伯恩 …… 306
谢尔品斯基 …… 306
诺　特 …… 306
克赖希克 …… 307
贝特曼 …… 307
贝　尔 …… 307
米泽斯 …… 307
凯恩斯 …… 308
黑林格 …… 308
卢　津 …… 308
当儒瓦 …… 308
伯克霍夫 …… 308
黑　利 …… 308
莱夫谢茨 …… 309
戈卢别夫 …… 309
普朗谢雷尔 …… 309

托内里 …… 309
李特尔伍德 …… 309
施派泽尔 …… 310
特恩布尔 …… 310
布 伦 …… 310
哈 尔 …… 310
外 尔 …… 310
沃 森 …… 311
泰 勒 …… 311
莱 维 …… 311
比伯巴赫 …… 311
施坦因豪斯 …… 312
玻 尔 …… 312
埃文斯 …… 312
斯米尔诺夫 …… 312
安德森 …… 313
薛定谔 …… 313
斯托伊洛夫 …… 313
黑 克 …… 313
戈 多 …… 313
波伊亚 …… 313
拉马努金 …… 314
贝尔奈斯 …… 314
桑索内 …… 314
库 朗 …… 314
莫德尔 …… 314
查普曼 …… 315
亚尼谢夫斯基 …… 315
杰克逊 …… 315
弗里德曼 …… 315
亚历山大 …… 315
马祖尔克维奇 …… 316
普劳德曼 …… 316
维特根斯坦 …… 316
哈姆布格尔 …… 316
斯捷潘诺夫 …… 316
别列赞斯卡娅 …… 316
希 尔 …… 316
费希尔 …… 316
杰龙涅 …… 317
贝西科维奇 …… 317
普里瓦洛夫 …… 317
穆斯赫利什维利 …… 317
弗伦克尔 …… 317
别尔纳斯基 …… 318
卡纳普 …… 318
维诺格拉多夫 …… 318
施米特 …… 318
巴拿赫 …… 318
莫尔斯 …… 319
拉德马赫尔 …… 319
卡莱曼 …… 319
威尔科克逊 …… 319
朱利亚 …… 319
勒夫纳 …… 319
切 赫 …… 319
马哈拉诺比斯 …… 320
默纳汉 …… 320
里 特 …… 320
阿南达-劳 …… 320
克拉默 …… 320
奥斯特洛夫斯基 …… 321
赖德迈斯特 …… 321
布洛赫 …… 321
内 曼 …… 321
芬斯勒 …… 322
切博塔廖夫 …… 322
希 尔 …… 322
辛 钦 …… 322
斯特罗伊克 …… 322
苏斯林 …… 322
霍普夫 …… 323
维 纳 …… 323
塞 戈 …… 323
弗里施 …… 324
拉 多 …… 324
皮尔逊 …… 324
沃尔什 …… 325
霍特林 …… 325
奈望林纳 …… 325
威尔森 …… 325
库 克 …… 326
库拉托夫斯基 …… 326
亚历山德罗夫 …… 326
怀尔德 …… 326
西格尔 …… 327
阿克曼 …… 327
纽 曼 …… 327
波斯特 …… 327
哈特里 …… 327
特里科米 …… 328
道格拉斯 …… 328
皮特曼 …… 328
萨克斯 …… 328
乌雷松 …… 328
阿 廷 …… 328

第六卷条目目录

海　丁 …… 328
哈　塞 …… 329
贝恩克 …… 329
托马斯 …… 329
曼德尔勃罗伊 …… 329
扎里斯基 …… 329
诺伊格鲍尔 …… 329
蒂奇马什 …… 330
博赫纳 …… 330
克鲁尔 …… 330
柳斯捷尔尼克 …… 330
绍德尔 …… 331
伯格曼 …… 331
科林伍德 …… 331
伯基尔 …… 331
霍夫曼 …… 331
克洛斯特曼 …… 331
赞格蒙 …… 332
彼得罗夫斯基 …… 332
布饶尔 …… 332
科　钦 …… 332
安德罗诺夫 …… 333
玻　色 …… 333
诺维科夫 …… 333
弗里德里希斯 …… 333
拉　斯 …… 333
塔尔斯基 …… 334
霍普夫 …… 334
扎兰凯维奇 …… 334
狄喇克 …… 334
法瓦尔 …… 335
瓦尔德 …… 335
列别杰夫 …… 335
威格纳 …… 335
格勒奇 …… 336
范·德·瓦尔登 …… 336
拉姆齐 …… 336
温特纳 …… 336
柯尔莫哥洛夫 …… 336
奥尔利兹 …… 337
丘　奇 …… 337
霍　奇 …… 337
马　勒 …… 337
莫尔斯 …… 338
斯　通 …… 338
伯恩鲍姆 …… 338
冯·诺伊曼 …… 339
布雷洛 …… 339
怀伯恩 …… 339
霍　尔 …… 339
麦克沙恩 …… 340
赫维茨 …… 340
嘉　当 …… 340
卢　伊 …… 340
怀特海 …… 341
施尼雷尔曼 …… 341
博　灵 …… 341
莱　默 …… 341
斯托克 …… 341
尼科利斯基 …… 342
博苏克 …… 342
布斯曼 …… 342
阿尔贝特 …… 342
施佩纳 …… 342
弗勒登塔尔 …… 343
莫伊西尔 …… 343
戈卢津 …… 343
哥德尔 …… 343
韦　伊 …… 343
佐　恩 …… 344
德福内梯 …… 344
威尔克斯 …… 344
布　伦 …… 345
迪厄多内 …… 345
尤什克维奇 …… 345
费　勒 …… 345
贝肯巴克 …… 346
陶斯基-托德 …… 346
盖尔丰德 …… 346
吉洪诺夫 …… 346
博　耶 …… 347
勒　雷 …… 347
邓福德 …… 347
马格努斯 …… 347
考克斯特 …… 347
惠特尼 …… 348
克列因 …… 348
谢　菲 …… 348
阿尔福斯 …… 348
韦　夸 …… 349
法捷耶夫 …… 349
洛　奇 …… 349
莫　利 …… 349
达文波特 …… 349
埃尔布朗 …… 350
马尔库舍维奇 …… 350

巴格曼 …… 350
佩克利斯 …… 350
庞特里亚金 …… 350
索伯列夫 …… 351
沃尔德 …… 351
克 林 …… 351
谢瓦莱 …… 352
麦克莱恩 …… 352
乌拉姆 …… 352
科克伦 …… 353
博戈柳博夫 …… 353
蒙哥马利 …… 353
北川敏男 …… 353
根 岑 …… 354
马尔采夫 …… 354
杜 布 …… 354
沃尔弗维茨 …… 354
雅各布森 …… 355
斯廷罗德 …… 355
约 翰 …… 355
科拉茨 …… 355
图 兰 …… 355
库普曼斯 …… 356
切萨里 …… 356
里希特迈耶 …… 356
汉 森 …… 357
吉文斯 …… 357
巴特莱特 …… 357
伯克霍夫 …… 357
克尔德什 …… 358
博戈柳博夫 …… 358
马 丁 …… 358
格涅坚科 …… 358
坎托罗维奇 …… 358
哈特利 …… 358
斯潘塞 …… 359
图 灵 …… 359
亚历山德罗夫 …… 359
博 斯 …… 359
丹尼尔斯 …… 360
沃利斯 …… 360
赖斯纳 …… 360
爱尔特希 …… 360
菲利普斯 …… 361
瑟凯福尔维-纳吉 …… 361
盖尔范德 …… 361
戈德斯坦 …… 361
艾伦伯格 …… 362
莫斯托夫斯基 …… 362
伯 斯 …… 362
霍夫丁 …… 362
卡 茨 …… 363
宾 …… 363
加德纳 …… 363
丹齐克 …… 363
林尼克 …… 364
利什内罗维奇 …… 364
怀特曼 …… 364
图 基 …… 364
施瓦尔茨 …… 365
兰 金 …… 365
狄克逊 …… 365
巴尔·希勒尔 …… 365
哈尔莫斯 …… 365
科尔钦 …… 366
仙 农 …… 366
弗勒利希 …… 366
西 蒙 …… 367
莫斯特勒 …… 367
芬 尼 …… 367
希洛夫 …… 368
卡普兰斯基 …… 368
赛尔伯格 …… 368
罗森菲尔德 …… 368
岩沢健吉 …… 368
萨维奇 …… 368
莱 曼 …… 369
希格曼 …… 369
卡里尔 …… 369
费因曼 …… 369
里 斯 …… 370
安德森 …… 370
怀特海 …… 370
鲁宾孙 …… 370
萨马尔斯基 …… 371
波戈列洛夫 …… 371
所罗门 …… 371
布莱克韦尔 …… 371
博克斯 …… 372
施梅特雷尔 …… 372
鲁宾孙 …… 372
休伊特 …… 372
巴切勒 …… 372
斯 坦 …… 373
费德雷尔 …… 373
贝尔曼 …… 373

考尔德伦 …… 373
拉　奥 …… 374
罗杰斯 …… 374
扎　德 …… 374
雷　尼 …… 375
鲁　丁 …… 375
阿　鲁 …… 375
阿米苏 …… 376
琼　斯 …… 376
萨普利斯 …… 376
卡斯尔斯 …… 376
卡拉比 …… 377
博雷尔 …… 377
沙法列维奇 …… 377
莫斯托 …… 377
凯　勒 …… 378
格卢什科夫 …… 378
博　特 …… 378
托　姆 …… 379
基　弗 …… 379
辛　格 …… 379
邓　肯 …… 379
卡　林 …… 380
考克斯 …… 380
齐　曼 …… 380
尼伦伯格 …… 381
塔　特 …… 381
科　尔 …… 381
博尔强斯基 …… 381
盖　林 …… 381
克鲁斯卡尔 …… 382
罗　特 …… 382
巴布斯卡 …… 382
拉克斯 …… 382
奥斯兰德 …… 383
布雷默曼 …… 383
塞　尔 …… 383
兰 …… 384
布劳德 …… 384
麦卡锡 …… 384
赫尔加森 …… 385
希策布鲁赫 …… 385
迪乔吉 …… 385
莱昂斯 …… 385
卡莱松 …… 386
格罗腾迪克 …… 386
科斯坦特 …… 386
纳　什 …… 386
莫　泽 …… 387
戴维斯 …… 387
阿蒂亚 …… 387
戈莫里 …… 388
格林鲍姆 …… 388
普罗霍罗夫 …… 388
皮亚捷茨基-沙皮罗 …… 389
赫　茨 …… 389
特里夫斯 …… 389
卡尔曼 …… 389
斯梅尔 …… 390
蒂　茨 …… 390
费　特 …… 390
亚当斯 …… 391
默　里 …… 391
施　坦 …… 391
赫尔曼德尔 …… 391
米尔诺 …… 392
德格罗特 …… 392
雷　吉 …… 392
彭罗斯 …… 393
布　朗 …… 393
伯　奇 …… 393
广中平祐 …… 393
纳尔逊 …… 394
利　布 …… 394
德布兰奇 …… 394
巴　斯 …… 394
汤普森 …… 394
米尔纳 …… 395
格利姆 …… 395
科　恩 …… 395
奥斯特伦 …… 395
卡　帕 …… 396
西　纳 …… 396
鲍威尔 …… 396
沃　尔 …… 397
朗兰兹 …… 397
马　宁 …… 397
韦　茨 …… 397
芒福德 …… 398
阿诺尔德 …… 398
珀西瓦尔 …… 398
莫伊舍佐恩 …… 398
贾　菲 …… 399
康　威 …… 399
拉特纳 …… 399
克努特 …… 399

诺维科夫 …… 400
伯恩特 …… 400
瓦拉德汉 …… 400
帕利斯 …… 400
奎 伦 …… 400
邦别里 …… 401
沙利文 …… 401
贝 里 …… 401
斯特鲁克 …… 401
穆 迪 …… 401
马斯登 …… 402
卡 森 …… 402
卡 茨 …… 402
哥罗莫夫 …… 402
德利涅 …… 403
弗拉斯卡 …… 403
艾泽曼 …… 403
麦克达夫 …… 403
福内斯 …… 403
瑟斯顿 …… 403
马尔库利斯 …… 403
拉兹科维奇 …… 404
戈德菲尔德 …… 404
孔 涅 …… 404
舍恩菲尔德 …… 404
塔尔杨 …… 404
马 尼 …… 405
瓦林特 …… 405
费弗曼 …… 405
格罗斯 …… 405
弗里德曼 …… 406
扎盖尔 …… 406
卡特林 …… 406
怀尔斯 …… 406
陶布斯 …… 407
法尔廷斯 …… 407
多布奇斯 …… 407
贝 尔 …… 407
巴雷特 …… 408
鲁 宾 …… 408
唐纳森 …… 408

数 学 符 号 史

数学符号 …… 409
加号 …… 409
减号 …… 410
乘号 …… 410
除号 …… 410
等号 …… 410
大于号 …… 410
小于号 …… 411
远小于号 …… 411
远大于号 …… 411
括号 …… 411
归并符号 …… 411
分数符号 …… 411
小数符号 …… 412
零号 …… 412
负数记号 …… 413
虚数符号 …… 413
指数符号 …… 413
方根符号 …… 413
对数符号 …… 414
代数方程符号 …… 414
函数符号 …… 415
初等几何符号 …… 415
角度符号 …… 415
三角函数符号 …… 415
符号 π …… 416
符号 e …… 416
阶乘符号 …… 416
绝对值符号 …… 416
排列、组合符号 …… 416
“因果”符号 …… 417
双曲函数符号 …… 417
极限符号 …… 417
微分符号 …… 417
导数符号 …… 417
偏微分符号 …… 417
偏导数符号 …… 418
积分符号 …… 418
符号 $\frac{0}{0}$ …… 418
向量符号 …… 418
全称符号 …… 418
存在符号 …… 419
析取符号 …… 419
合取符号 …… 419
否定符号 …… 419
蕴涵符号 …… 420
等价符号 …… 420

数学团体与研究机构

数学团体与研究机构 …… 421

国际性数学学术团体

国际统计学会 …… 421
国际数学家大会 …… 422
国际数学教育委员会 …… 422
数理统计学会 …… 423
符号逻辑协会 …… 423
国际生物统计学会 …… 423
国际数学联盟 …… 424
国际模拟数学和计算机协会 …… 424
国际自动控制联合会 …… 425
国际运筹学联合会 …… 425
伯努利数理统计与概率学会 …… 425
国际数学学习研究小组 …… 425
国际数理生物学会 …… 425
国际数理地质协会 …… 425
数学规划学会 …… 426
东南亚数学会 …… 426
国际数学物理协会 …… 426
国际统计计算协会 …… 426
澳大利西亚组合数学会 …… 426
亚太运筹学会 …… 426
泛华统计协会 …… 427
欧洲工业数学联合会 …… 427
国际线性代数学会 …… 427
欧洲数学会 …… 427

中国数学学术团体

中国数学会 …… 428
中国现场统计研究会 …… 429
中国统计学会 …… 429
中国珠算协会 …… 429
香港数学会 …… 430
中国系统工程学会 …… 430
中国运筹学会 …… 431
中国优选法统筹法与经济数学研究会 …… 431
中国工业与应用数学学会 …… 431

外国数学学术团体

伦敦皇家学会 …… 431
汉堡数学会 …… 432
皇家统计学会(英) …… 432
美国统计协会 …… 432
捷克斯洛伐克数学家和物理学家联合会 …… 432
莫斯科数学会 …… 433
伦敦数学会 …… 433
法国数学会 …… 433
日本数学会 …… 433
爱丁堡数学会 …… 434
美国数学会 …… 434
德国数学会 …… 434
印度数学会 …… 434
美国数学协会 …… 435
日本数学教育学会 …… 435
波兰数学会 …… 435
全国数学教师理事会(美) …… 435
意大利数学联盟 …… 436
加拿大数学会 …… 436
计算机协会(美) …… 436
运筹学会(英) …… 436
工业数学会(美) …… 437
美国工业与应用数学会 …… 437
美国运筹学会 …… 437
加拿大运筹学会 …… 437
数学科学联合委员会(美) …… 437
电气电子工程师学会(美) …… 438
数学及其应用学会(英) …… 438
女数学家协会(美) …… 439
意大利应用与工业数学会 …… 439

中国数学研究机构

中国数学研究机构 …… 439
中央研究院数学研究所 …… 440
中国科学院数学研究所 …… 440
复旦大学数学研究所 …… 440
北京大学数学研究所 …… 441
吉林大学数学研究所 …… 441
四川大学数学研究所 …… 441
中国科学院应用数学研究所 …… 442
中国科学院系统科学研究所 …… 442
武汉大学数学研究所 …… 443
浙江大学应用数学研究所 …… 443
南开数学研究所 …… 443
南京大学数学研究所 …… 443
北京师范大学数学与数学教育研究所 …… 444
中国科学院数学与系统科学研究院 …… 444

外国数学研究机构

斯捷克洛夫数学研究所 …… 444
亨利·庞加莱研究所 …… 445
普林斯顿高等研究院 …… 445
库朗数学科学研究所 …… 446
高等科学研究所 …… 446
苏黎世联邦高等工业学院数学研究所 …… 446
伯克利数学科学研究所 …… 447
麦克斯·普朗克数学研究所 …… 447
明尼苏达大学数学及其应用研究所 …… 447
菲尔兹数学科学研究所 …… 447
牛顿数学科学研究所 …… 448

数学竞赛与数学奖

数 学 竞 赛

数学竞赛 …… 449
东欧的数学竞赛 …… 449
俄国的数学竞赛 …… 449
美国的数学竞赛 …… 449
中国的数学竞赛 …… 450
国际数学奥林匹克 …… 454

数 学 奖

数学奖 …… 456
皇家学会科普利奖章 …… 456
科学大奖 …… 456
彭赛列特奖 …… 456
弗朗科尔奖 …… 456
诺贝尔奖 …… 456
罗巴切夫斯基奖 …… 457
贝尔特奖 …… 458
西尔维斯特奖章 …… 458
拉格朗日奖 …… 458
法兰西斯·德鲁茨奖 …… 458
赫克托纪念章与奖 …… 458
博歇纪念奖 …… 458
菲尔兹奖章 …… 458
查文尼特奖 …… 460
科尔代数奖　科尔数论奖 …… 460
卡蒂奖章 …… 460
莱尔奖章 …… 460
特博尔特奖 …… 460
贝里克奖 …… 460
巴拿赫奖 …… 461
雅克·德鲁茨奖 …… 461
西蒙·斯托伊洛夫奖 …… 461
格奥尔基·拉泽尔奖 …… 461
比克·曼诺纪念奖 …… 461
国家自然科学奖 …… 461
巴尔扎恩奖 …… 461
德·东德奖 …… 461
藤原奖 …… 461
国家科学奖章 …… 462
海涅曼数学物理奖 …… 462
杰出数学服务奖 …… 462
维布伦几何奖 …… 462
拉马努金奖章 …… 462
庞加莱金质奖章 …… 462
费希尔奖 …… 462
范·德·波尔金质奖章 …… 462
威尔克斯纪念奖章 …… 462
卡塔兰奖 …… 462
福特奖 …… 462
图灵奖 …… 462
布劳威尔奖章 …… 462
维纳应用数学奖 …… 462
伯克霍夫应用数学奖 …… 462
萨勒姆奖 …… 463
波利亚奖 …… 463
彻里学生奖 …… 463
谢尔·蒂博尔纪念奖章 …… 463
冯·卡曼奖 …… 463
斯蒂尔奖 …… 463
全国科学院应用数学与数值分析奖 …… 467
洪堡奖 …… 467
弥永昌吉奖 …… 467
高级怀特海奖 …… 467
法国电气公司安培奖 …… 467
波利亚奖 …… 467
沃特曼奖 …… 467
沃尔夫奖 …… 467
费萨尔国王国际科学奖 …… 469
爱尔特希奖 …… 469
工业与应用数学会数值分析与科学计算奖 … 469

富尔克森离散数学奖 …… 469
丹齐克奖 …… 469
嘉当奖 …… 469
克雷福德奖 …… 469
澳大利亚数学会奖章 …… 470
奈望林纳奖 …… 470
莱文松奖 …… 470
工程师数值方法促进组和应用与工业数学会帕斯卡尔奖 …… 470
京都奖 …… 470
德·摩根奖章 …… 470
巴黎联合保险公司科学奖 …… 470
日本奖 …… 470
陈省身数学奖 …… 470
奥斯特洛夫斯基奖 …… 471
波利亚奖 …… 471
美国全国科学院数学奖 …… 471
钟家庆数学奖 …… 471
伯格曼奖 …… 471
费马数学研究奖 …… 471
华罗庚数学奖 …… 471
苏步青数学教育奖 …… 472
拉东奖章 …… 472
施奈德奖 …… 472
科学研究奖 …… 472
冯·诺伊曼讲座 …… 472
内勒应用数学奖 …… 472
晨兴数学奖 …… 472

数 学 期 刊

数学期刊 …… 473

中国数学期刊

中国数学期刊 …… 473
科学(上海) …… 475
数学通讯(武汉) …… 475
数学学报(北京) …… 475
数学通报(北京) …… 475
科学通报(北京) …… 476
中国科学·A辑(中文版)(北京) …… 476
中国科学·A辑(英文版)(北京) …… 476
数学研究(厦门) …… 476
高等数学研究(西安) …… 476
中学数学研究(广州) …… 477
数学进展(北京) …… 477
数学教学(上海) …… 477
福建中学数学(福州) …… 477
科学通报(英文版)(北京) …… 477
数学的实践与认识(北京) …… 478
中学数学教学参考(西安) …… 478
中央研究院数学研究所集刊(英文版)(台北) …… 478
中国数学杂志(英文版)(台北) …… 478
东吴数理学报(英文版)(台北) …… 478
数学传播(台北) …… 478
应用数学学报(北京) …… 478
中学教研(数学)(金华) …… 479
计算数学(北京) …… 479
中学数学教学(合肥) …… 479
中学数学月刊(苏州) …… 479
中学数学(武汉) …… 479
中学数学教学研究动态(上海) …… 479
高等学校计算数学学报(中文版)(南京) …… 480
数学教学通讯(重庆) …… 480
上海中学数学(上海) …… 480
数值计算与计算机应用(北京) …… 480
数学译林(北京) …… 480
应用数学与力学(重庆) …… 481
数学年刊·A辑(上海) …… 481
数学年刊·B辑(英文版)(上海) …… 481
数学圈(新竹) …… 481
中学数学研究(南昌) …… 481
湖南数学通讯(长沙) …… 481
系统工程理论与实践(北京) …… 482
数学研究与评论(大连) …… 482
数学物理学报(中文版)(武汉) …… 482
系统科学与数学(北京) …… 482
数学杂志(武汉) …… 482
中学数学杂志(曲阜) …… 482
数理科学(英文版)(成都) …… 483
中学生数学(北京) …… 483
中学生数理化(高中版)(郑州) …… 483
数学物理学报(英文版)(武汉) …… 483
中等数学(天津) …… 483
数理统计与管理(北京) …… 483
数学教学研究(兰州) …… 484
运筹学杂志(上海) …… 484
计算数学(外文版)(北京、荷兰) …… 484
中国数学会通讯(北京) …… 484
系统工程(长沙) …… 484
中学生数理化(初中版)(郑州) …… 484
控制理论与应用(广州) …… 485
南京大学学报数学半年刊(南京) …… 485
工程数学学报(西安) …… 485

应用数学学报(英文版)(北京) …… 485
工科数学(合肥) …… 485
逼近论及其应用(英文版)(南京) …… 485
初中生数学学习(南京) …… 486
经济数学(长沙) …… 486
数学教师(郑州) …… 486
数学学报·新辑(英文版)(北京) …… 486
纯粹数学与应用数学(西安) …… 486
微分方程年刊(英文版)(福州) …… 486
应用概率统计(上海) …… 487
东北数学(英文版)(长春) …… 487
计算数学通讯(北京) …… 487
生物数学学报(合肥) …… 487
数学季刊(开封) …… 487
系统工程学报(天津) …… 487
九章数学杂志(台北) …… 488
数理统计与应用概率(北京) …… 488
高等学校应用数学学报·A辑(杭州) …… 488
应用数学与计算数学学报(上海) …… 488
中国数学文摘(北京) …… 488
模糊系统与数学(长沙) …… 489
偏微分方程(英文版)(郑州) …… 489
应用数学(武汉) …… 489
中国数值数学及其应用杂志(英文版)
(北京、美国)…… 489
系统科学与数学(英文版)(北京) …… 489
中学数学教与学(高中版)(扬州) …… 489
运筹与管理(合肥) …… 490
高等学校计算数学学报(英文版)(南京) …… 490
数学教育学报(天津) …… 490
高等学校应用数学学报·B辑(英文版)
(杭州) …… 490
非线性动力学学报(英文版)(长沙) …… 490
代数集刊(英文版)(北京) …… 490
初中数学教与学(扬州) …… 491
北京数学(英文版)(北京) …… 491
非线性科学与数值模拟通讯(英文版)
(北京) …… 491
组合年刊(英文版)(天津) …… 491

外国数学期刊

外国数学期刊 …… 491
皇家学会哲学汇刊·A辑·数学与物理学
(英) …… 492
纯粹与应用数学杂志(德) …… 492
爱丁堡皇家学会会报·A辑·数学(英) …… 492
法国科学院报告·辑1·数学(法) …… 492
爱尔兰皇家学会会报·A辑·数学与
物理学(爱尔兰) …… 492
纯粹与应用数学杂志(法) …… 492
剑桥哲学会数学会报(英) …… 492
理论与应用数学纪事(意) …… 492
皇家学会会报·A辑·数学与物理学
(英) …… 492
美国国家科学院院报(美) …… 493
高等师范学校科学纪事(法) …… 493
伦敦数学会会报(英) …… 493
数学汇编(俄) …… 493
数学纪事(德) …… 493
数学通报(法) …… 493
比萨高等师范学校校刊·物理与数学
(意) …… 493
捷克数学杂志(捷) …… 493
法国数学会通报·附·纪要(法) …… 493
波希米亚数学杂志(捷) …… 493
美国数学杂志(美) …… 493
数学学报(瑞典) …… 493
爱丁堡数学会会报(英) …… 494
数学纪事(美) …… 494
巴勒摩数学会报告(意) …… 494
德国数学家联合会年报(德) …… 494
专业数学杂志(法) …… 494
数学月刊(奥) …… 494
美国数学会通报(新辑)(美) …… 494
美国数学月刊(美) …… 494
数学杂志(英) …… 494
数学教学(瑞士) …… 494
美国数学会汇刊(美) …… 494
数学教师(美) …… 494
加尔各答数学会通报(印) …… 495
东北数学杂志(日) …… 495
数学杂志(德) …… 495
日本数学教育学会志·附·数学教育学
论究(日) …… 495
伊比利亚美洲数学杂志(西) …… 495
基础数学(波) …… 495
理论数学学报(匈) …… 495
应用数学研究(美) …… 495
应用数学和力学杂志(德) …… 495
汉堡大学数学讨论会论文集(德) …… 495
芬兰奥布学院学报·B辑·数学与
物理学(芬兰) …… 495
意大利数学联合会通报(意) …… 495
日本数学杂志(新辑)(日) …… 495
数学杂志(美) …… 495

伦敦数学会志(英) …… 495
瑞士数学通讯(瑞士) …… 496
数学研究(波) …… 496
统计学纪事(美) …… 496
数学季刊(英) …… 496
帕多瓦大学数学研究报告(意) …… 496
数学文摘(德) …… 496
俄罗斯科学院报告(俄) …… 496
印度科学院院报·数学科学(印) …… 496
数学论文集(荷) …… 496
数学教学(俄) …… 496
杜克数学杂志(美) …… 496
符号逻辑杂志(美) …… 496
算术学报(波) …… 497
葡萄牙数学杂志(葡) …… 497
应用数学与力学(俄) …… 497
数学成就(俄) …… 497
阿根廷数学联合会会志(阿) …… 497
俄罗斯科学院通报·数学辑(俄) …… 497
张量(新辑)(日) …… 497
数学研究(荷) …… 497
数理生物学通报(英) …… 497
数学评论(美) …… 497
芬兰科学院纪事·A辑·第一部分·数学·附·数学学位论文(芬兰) …… 498
计算数学(美) …… 498
应用数学季刊(美) …… 498
墨西哥数学会通报(墨) …… 498
生物统计学(美) …… 498
莫斯科大学通报·第一辑·数学与力学(俄) …… 498
圣彼得堡大学通报·数学、力学和天文学辑(俄) …… 498
莫斯科大学通报·第15辑·计算数学与控制论(俄) …… 498
数学(日) …… 498
斯堪的纳维亚理工学报·数学与计算机科学部分(芬兰) …… 499
国际数学通讯(奥) …… 499
理论与应用数学通讯(美) …… 499
日本数学(日) …… 499
统计数理研究所纪事(日) …… 499
数学通讯(德) …… 499
数学文献(瑞士) …… 499
数学(波) …… 499
数学论丛(波) …… 499
数学汇刊(西) …… 499
日本数学会志(日) …… 499
工大数学杂志(日) …… 499
傅里叶研究院纪事(法) …… 499
数学丛刊(瑞典) …… 499
比利时数学会通报(比) …… 500
数学研究(罗) …… 500
数学汇刊(匈) …… 500
加拿大数学杂志(加) …… 500
乌克兰数学杂志(乌) …… 500
美国数学会会报(美) …… 500
工业数学(美) …… 500
运筹学会杂志(英) …… 500
国际运筹学文摘(英) …… 500
名古屋数学杂志(日) …… 500
京都大学数学杂志(日) …… 500
德国保险数学会杂志(德) …… 500
匈牙利数学学报(匈) …… 500
应用数学与物理学杂志(瑞士) …… 500
太平洋数学杂志(美) …… 501
日本科学技术联盟统计应用研究报告(日) …… 501
数理逻辑文献(德) …… 501
以色列数学杂志(以) …… 501
数学分析学报(以) …… 501
斯洛伐克数学(斯洛伐克) …… 501
密歇根数学杂志(美) …… 501
印第安纳大学数学杂志(美) …… 501
运筹学(美) …… 501
格拉斯哥数学杂志(英) …… 501
立教大学数学杂志(日) …… 501
数学汇刊(荷) …… 501
数学研究(意) …… 501
工业与应用数学会·应用数学杂志(美) …… 502
横滨数学杂志(日) …… 502
统计数理(日) …… 502
北欧数学杂志(挪) …… 502
斯堪的纳维亚数学(丹麦) …… 502
波兰科学院通报·数学(波) …… 502
文摘杂志综合本·数学(俄) …… 502
美国数学会通告(美) …… 502
算术教师(美) …… 502
数学(英) …… 502
应试数学(日) …… 502
波兰数学纪事(波) …… 502
数学教室(日) …… 502
数理逻辑与数学基础杂志(德) …… 502
数学教学(德) …… 503
数学教学(英) …… 503
运筹学(日) …… 503

应用数学(捷) …… 503
罗马尼亚纯粹数学与应用数学杂志(罗) …… 503
概率论及其应用(俄) …… 503
伊利诺斯数学杂志(美) …… 503
信息与计算(美) …… 503
大学考生数学(日) …… 503
日本运筹学会论文志(日) …… 503
运筹学杂志(德) …… 503
理论力学与分析文献(德) …… 503
法国自动化、信息与运筹学·数学模型与数值分析(法) …… 503
法国自动化、信息与运筹学·运筹学(法)…… 503
高等学校通报·数学辑(俄) …… 504
函数方程(日) …… 504
拓扑学与范畴微分几何学杂志(法) …… 504
印度数学杂志(印) …… 504
运筹学研究中心手册(比) …… 504
加拿大数学通报(加) …… 504
工业与应用数学会综论(美) …… 504
技术统计(美) …… 504
数学史研究(日) …… 504
数学实践(德) …… 504
数值数学(德) …… 504
数学丛刊(法) …… 504
系统模拟中的数学与计算机(荷) …… 504
澳大利亚数学会志·A辑(澳) …… 505
澳大利亚数学会志·B辑(澳) …… 505
塔吉克科学院通报·数理、化学与地质学部分(塔) …… 505
圣母大学形式逻辑杂志(美) …… 505
数学分析与应用杂志(美) …… 505
数学物理杂志(美) …… 505
西伯利亚数学杂志(俄) …… 505
计算机科学与计算数学(丹麦) …… 505
立陶宛数学文集(立陶宛) …… 505
计算数学与数学物理杂志(俄) …… 505
工业与应用数学会·控制与最优化杂志(美) …… 505
拓扑学(英) …… 506
数学讨论(日) …… 506
概率论及相关领域杂志(德) …… 506
代数和逻辑(俄) …… 506
斐波那契季刊(美) …… 506
运筹学与管理科学(美) …… 506
数理科学(日) …… 506
中学数学(德) …… 506
纯粹与应用数学(印) …… 506
信息系统与运筹学(加) …… 506
数学哲学(美) …… 506
代数学杂志(美) …… 506
工业与应用数学会·数值分析杂志(美) …… 506
应用概率论杂志(英) …… 506
运筹学·印度运筹学会志(印) …… 507
计算(意) …… 507
数学通报(南斯拉夫) …… 507
数学哲学(加) …… 507
数学进展(美) …… 507
微分方程杂志(美) …… 507
数学及其应用学会通报(英) …… 507
数学及其应用学会·应用数学杂志(英) …… 507
京都大学数理解析研究所纪要(日) …… 507
数学物理通讯(德) …… 507
亨利·庞加莱研究所纪事·概率论与统计学(法) …… 507
微分方程(白俄罗斯) …… 507
组合理论杂志·A辑(美) …… 507
组合理论杂志·B辑(美) …… 508
拓扑学会议录(美) …… 508
计算物理杂志(美) …… 508
数学创作(德) …… 508
数学系统理论(德) …… 508
计算(奥) …… 508
数学通报(南斯拉夫) …… 508
亚美尼亚科学院通报·数学辑(亚美尼亚)…… 508
泛函分析杂志(美) …… 508
微分几何学杂志(美) …… 508
最优化理论与应用杂志(美) …… 508
计算机与系统科学杂志(美) …… 508
物理与数学杂志(印) …… 508
数学进展(印) …… 508
数学教育·A辑与B辑(印) …… 509
工程数学杂志(荷) …… 509
数学札记(俄) …… 509
泛函分析及其应用(俄) …… 509
线性代数及其应用(美) …… 509
逼近论杂志(美) …… 509
工业与应用数学会新闻(美) …… 509
信息科学(美) …… 509
数学世界(英) …… 509
国际计算机数学杂志(英) …… 509
基础数学(日) …… 509
数学教育研究(荷) …… 509
数学方程(瑞士) …… 509
加拿大数学会札记(加) …… 510
近期数学出版物(美) …… 510

数论杂志(美) …… 510
伦敦数学会通报(英) …… 510
应用概率进展(英) …… 510
国际工程数值方法杂志(英) …… 510
数学论集(德) …… 510
数学与人文科学(法) …… 510
印度数学协会通报(印) …… 510
理论与应用逻辑纪事(荷) …… 510
澳大利亚数学会通报(澳) …… 510
数学教育研究杂志(美) …… 510
学院数学杂志(美) …… 510
半群论坛(美) …… 510
工业与应用数学会·数学分析杂志(美) …… 511
国际科学与技术中的数学教育杂志(英) …… 511
结构知识杂志(英) …… 511
最优化(英) …… 511
统计学(英) …… 511
印度理论与应用数学杂志(印) …… 511
数学物理报告(波) …… 511
洛基山数学杂志(美) …… 511
多元分析杂志(美) …… 511
网络(美) …… 511
统计计算与模拟杂志(英) …… 511
学校数学(英) …… 511
适用分析(英) …… 511
数学社会学杂志(英) …… 511
计算机与结构(英) …… 512
数学与数据处理学会通讯(德) …… 512
巴西数学会通报·特辑(德) …… 512
信息学报(德) …… 512
纯粹代数与应用代数杂志(荷) …… 512
拓扑学及其应用(荷) …… 512
离散数学(荷) …… 512
数学规划(荷) …… 512
泛代数杂志(瑞士) …… 512
几何学杂志(瑞士) …… 512
匈牙利数学学报(匈) …… 512
数理统计学会通报(美) …… 512
工业与应用数学会·计算杂志(美) …… 512
国际并行程序设计杂志(美) …… 513
北海道数学杂志(日) …… 513
新算术研究(日) …… 513
国际对策论杂志(德) …… 513
几何学报(荷) …… 513
应用数学(加) …… 513
概率论纪事(美) …… 513
线性与多重线性代数(英) …… 513
数学教学法(德) …… 513
星杂志(法) …… 513
随机过程及其应用(荷) …… 513
数学史(美) …… 513
代数通讯(美) …… 513
今日运筹学与管理科学(美) …… 514
应用统计杂志(英) …… 514
随机过程与随机过程报告(英) …… 514
计算机和数学及其应用(英) …… 514
应用数学与最优化(德) …… 514
澳大利亚数学会杂志(澳) …… 514
应用数学与计算(美) …… 514
计算机协会数学软件汇刊(美) …… 514
计算与应用数学杂志(荷) …… 514
理论计算机科学(荷) …… 514
数学分析(匈) …… 514
数学难题(加) …… 514
应用数学札记(加) …… 514
休斯敦数学杂志(美) …… 515
偏微分方程通讯(美) …… 515
运筹学数学(美) …… 515
应用数学模型(美) …… 515
数学科学(英) …… 515
应用数学模型(英) …… 515
筑波数学杂志(日) …… 515
数据分析手册(法) …… 515
组合学、信息与系统科学杂志(印) …… 515
组合学(加) …… 515
图论杂志(美) …… 515
非线性分析·理论、方法与应用(英) …… 515
数学教学法杂志(德) …… 515
东南亚数学通报(新) …… 515
统计规划与统计推断杂志(荷) …… 515
欧洲运筹学杂志(荷) …… 516
国际数学与数理科学杂志(美) …… 516
东京数学杂志(日) …… 516
数学情报员(德) …… 516
数学教学法文献(德) …… 516
加尔各答数学会新闻通报(印) …… 516
模糊集与系统(荷) …… 516
积分方程与算子理论(瑞士) …… 516
数学成果(瑞士) …… 516
数值函数分析与最优化(美) …… 516
算子理论杂志(罗) …… 516
计算机学会·程序语言与系统汇刊(美) …… 516
应用科学中的数学方法(英) …… 516
运筹学概览(德) …… 517

印度数学学会志(印) …… 517
离散应用数学(荷) …… 517
加拿大科学院数学报告(加) …… 517
算法杂志(美) …… 517
美国数学会会议论文摘要(美) …… 517
大学本科数学及其应用项目杂志(美) …… 517
工业与应用数学会·科学与统计计算杂志(美) …… 517
工业与应用数学会·矩阵分析与应用杂志(美) …… 517
应用数学进展(美) …… 517
时间序列分析杂志(英) …… 517
欧洲组合学杂志(英) …… 517
数学与计算机模型(英) …… 518
最优控制应用与方法(英) …… 518
数学教学实践(德) …… 518
信息与最优化科学杂志(印) …… 518
信息与决策技术(荷) …… 518
美国数学与管理科学杂志(美) …… 518
计算数学引文索引(美) …… 518
遍历理论与动态系统(英) …… 518
数学及其应用学会·数值分析杂志(英) …… 518
分析(德) …… 518
数学社会科学(荷) …… 518
运筹学快报(荷) …… 518
计算机程序设计科学(荷) …… 519
组合学(匈) …… 519
数学及其应用报告(意) …… 519
数学行为杂志(美) …… 519
应用数学与计算数学(美) …… 519
数学报告(英) …… 519
数学教学及其应用(英) …… 519
复变数(英) …… 519
分析及其应用杂志(德) …… 519
统计学与概率论通讯(荷) …… 519
随机分析与应用(美) …… 519
数学进展汇报(德) …… 519
统计学与决策(德) …… 519
新一代计算(德) …… 519
今日数学(印) …… 519
全局分析与几何学纪事(荷) …… 519
应用数学学报(荷) …… 520
代数学、群与几何(美) …… 520
系统分析、模型建立与模拟(英) …… 520
数学及其应用学会·数学控制与信息杂志(英) …… 520
日本工业与应用数学杂志(日) …… 520
亨利·庞加莱研究所纪事·非线性分析(法) …… 520
亚太运筹学杂志(新) …… 520
几何与物理杂志(荷) …… 520
序:有序集理论杂志(荷) …… 520
并行计算(荷) …… 520
运筹学纪事(瑞士) …… 520
几何学与物理学杂志(意) …… 520
偏微分方程数值方法(美) …… 521
复杂性杂志(美) …… 521
微计算机数学(英) …… 521
工程数值法通讯(英) …… 521
应用随机模型与数据分析(英) …… 521
动态系统评论(英) …… 521
逆问题(英) …… 521
构造逼近论(德) …… 521
图形与组合学(德) …… 521
应用数值数学(荷) …… 521
分析与设计用有限元法(荷) …… 521
统计科学(美) …… 522
离散与计算几何学(美) …… 522
算法(美) …… 522
数学及其应用学会·商业与工业数学应用杂志(英) …… 522
计算统计学(德) …… 522
分布计算(德) …… 522
俄罗斯数值分析与数学建模杂志(荷) …… 522
排队系统(瑞士) …… 522
组合数学与组合计算杂志(加) …… 522
国际近似推理杂志(美) …… 522
应用数学与随机分析杂志(美) …… 522
K 理论(荷) …… 522
美国数学会杂志(美) …… 522
工业与应用数学会·离散数学杂志(美) …… 523
理论概率杂志(美) …… 523
非线性(英) …… 523
应用数学快报(英) …… 523
统计与计算的新趋向(德) …… 523
渐近分析(荷) …… 523
日本模糊学会杂志(日) …… 523
数学论坛(德) …… 523
离散数学(俄) …… 523
数学模拟(俄) …… 523
随机结构与算法(美) …… 523
混沌、孤立子与分形(英) …… 523
欧洲应用数学杂志(英) …… 523
工程、通信与计算适用代数(德) …… 523

国际数学杂志(新) …… 524
非线性动力学(荷) …… 524
数学与人工智能纪事(瑞士) …… 524
澳大利亚组合学杂志(澳) …… 524
数学系统、估计与控制杂志(美)…… 524
混沌·多学科非线性科学杂志(美) …… 524
大学生数学学习中的问题、方法与论点(美) …… 524
应用概率纪事(美) …… 524
几何分析杂志(美) …… 524
代数几何杂志(美) …… 524
计算数学与建模(美) …… 524
工业与应用数学会·最优化杂志(美) …… 524
Mathematica 系统杂志·附·软盘补充资料(美) …… 524
应用数理(日) …… 524
非线性科学杂志·附·今日非线性科学(德) …… 525
今日非线性科学(德) …… 525
国际代数与计算杂志(新) …… 525
数值线性代数与应用杂志(新) …… 525
国际应用科学与工程中的分歧和混沌杂志(新) …… 525
应用科学中的数学模型与方法(新) …… 525
计算几何学(荷) …… 525
设计、编码与密码学(荷)…… 525
微分几何及其应用(荷) …… 525
全局优化杂志(荷) …… 525
数值算法(瑞士) …… 525
工业数学评述(奥) …… 525
数学技术杂志(美) …… 526
计算与图解统计学杂志(美) …… 526
随机与积分几何(美) …… 526
Nova 代数与几何杂志(美)…… 526
国际数学与统计科学杂志(美) …… 526
随机与计算动力学(美) …… 526
随机最优化与设计(美) …… 526
计算理论与计算数学进展(美) …… 526
组合学、概率论与计算(英)…… 526
非参量统计学(英) …… 526
医学研究中的统计方法(英) …… 526
最优化方法与软件(英) …… 526
纽结理论及其有关分支杂志(新) …… 526
国际图论杂志(印) …… 526
代数组合学杂志(荷) …… 526
随机算子与随机方程(荷) …… 526
位势分析(荷) …… 526
计算优化及其应用(荷) …… 526
数学模型与科学计算(美) …… 527
组合设计杂志(美) …… 527
应用与计算调和分析(美) …… 527
模糊数学杂志(美) …… 527
数学模型与计算实验(美) …… 527
复杂性(英) …… 527
积分变换与特殊函数(英) …… 527
变分法与偏微分方程(德) …… 527
非线性世界(德) …… 527
非线性辑要(德) …… 527
分形·自然复几何多学科杂志(新) …… 527
远东数学科学杂志(印) …… 527
集值分析(荷) …… 527
反问题与不适定问题杂志(荷) …… 527
东西方数值数学杂志(荷) …… 527
应用范畴结构(荷) …… 527
计算数学进展(瑞士) …… 527
傅里叶分析与应用杂志(美) …… 528
数值线性代数及其应用(英) …… 528
国际运筹学学报(英) …… 528
非线性微分方程应用(瑞士) …… 528
非线性分析中的拓扑方法(波) …… 528
差分方程与应用杂志(英) …… 528
多值逻辑(英) …… 528
蒙特卡罗法及其应用(荷) …… 528

数 学 教 育

数学教育学 …… 529

数学课程论

数学课程论 …… 529
数学的特征 …… 529
数学的抽象性 …… 529
数学的精确性 …… 529
数学的普适性 …… 530
数学的社会功能 …… 530
数学的工具价值 …… 530
数学的文化价值 …… 530
数学的智力价值 …… 530

集合思想 …… 530
关系思想 …… 531
函数思想 …… 531
运算 …… 531
方程思想 …… 531
极限思想 …… 531
同构思想 …… 531
数学思想的教育 …… 531
数学语言 …… 531
变元 …… 531
经验材料的数学组织化方法 …… 532
观察法 …… 532
实验法 …… 532
比较法 …… 532
抽象 …… 532
概括 …… 532
分析 …… 532
综合 …… 533
归纳 …… 533
演绎 …… 533
类比法 …… 533
数学材料的逻辑组织化方法 …… 533
数学模型方法 …… 533
概念 …… 533
数学概念 …… 533
数学概念的外延 …… 534
数学概念的内涵 …… 534
数学概念的表词 …… 534
内涵和外延的反变关系 …… 534
数学概念的种类 …… 534
原始概念 …… 534
不定义概念 …… 534
定义的概念 …… 534
单独概念 …… 534
普遍概念 …… 534
集合概念 …… 534
非集合概念 …… 534
对象概念 …… 534
关系概念 …… 534
概念的定义 …… 534
定义的模式 …… 535
定义的规则 …… 535
概念的划分 …… 535
概念的分类 …… 536
划分的规则 …… 536
分类的类型 …… 536
概念外延间的关系 …… 536
概念间的同构关系 …… 536
判断 …… 537
命题 …… 537
数学命题 …… 537
数学命题的构成方法 …… 537
逻辑联结词 …… 538
条件命题 …… 538
判定命题逻辑等价的方法 …… 538
四种命题之间的关系 …… 538
判定条件命题逻辑等价的方法 …… 538
逆否命题的制作 …… 539
逆命题的制作 …… 539
否命题的制作 …… 539
分断式命题 …… 539
浩伯定律 …… 539
充分必要条件 …… 540
充分条件 …… 540
必要条件 …… 540
推理 …… 540
演绎推理 …… 540
演绎法 …… 541
关系推理方法 …… 541
假言推理 …… 541
选言推理 …… 542
联言推理 …… 543
德·摩根定律 …… 543
逻辑方阵 …… 543
换质法 …… 544
换位法 …… 544
换质位法 …… 544
三段论 …… 545
三段论规则 …… 545
证明 …… 546
直接证法 …… 546
间接证法 …… 546
对偶法 …… 546
反证法 …… 546
穷举归谬法 …… 547
穷举法 …… 547
同一法 …… 547
数学归纳法 …… 547
倒推归纳法 …… 547
数学公理化方法 …… 547
集合方法 …… 547
分类讨论方法 …… 548
关系方法 …… 548
恒等变换法 …… 548
因式分解法 …… 548
配方法 …… 548

待定系数法 …… 548
几何变换方法 …… 548
关系-映射-反演的方法 …… 549
极限方法 …… 549
统计方法 …… 549
近似方法 …… 549
变换方法 …… 550
几何作图方法 …… 550
数学基础论 …… 550
逻辑主义 …… 551
直觉主义 …… 551
形式公理主义 …… 551
数学课程 …… 551
作为科学的数学 …… 551
作为教学科目的数学 …… 551
数学教学计划 …… 552
数学教学大纲 …… 552
数学课程标准 …… 552
数学教学对象 …… 552
数学课程特性 …… 552
数学课程发展 …… 553
数学课程发展的动力 …… 553
行为主义方案 …… 553
“新数”方案 …… 553
结构主义方案 …… 554
形成法方案 …… 554
整体化教学方案 …… 554
混合数学 …… 554
大众数学 …… 554
数学课程的类型 …… 555
以学科为中心的数学课程 …… 555
以儿童为中心的数学课程 …… 555
以问题为中心的数学课程 …… 555
分科的数学课程 …… 555
统一的数学课程 …… 555
区分的数学课程 …… 556
必修与选修的数学课程 …… 556
数学教材 …… 556
数学教科书 …… 556
数学教学参考书 …… 556
数学课外习题集 …… 556
数学教学挂图 …… 556
数学通用教材 …… 556
数学教材的弹性 …… 557
数学教材的体系 …… 557
数学教材的编写 …… 557
数学教材的审定 …… 557

数学教学论

数学教学论 …… 557
数学教学过程 …… 557
数学活动的教学 …… 558
数学结论的教学 …… 558
数学教学目的 …… 558
数学知识教育 …… 558
数学双基教学 …… 558
技能 …… 558
数学文化教育 …… 559
数学思维教育 …… 559
数学概念的教学 …… 559
数学命题的教学 …… 559
数学能力的培养 …… 559
数学教学中的思想教育 …… 559
能力 …… 559
数学能力 …… 560
数学能力测定 …… 560
数学能力结构 …… 560
数学观察能力 …… 560
数学记忆能力 …… 560
分析能力 …… 561
综合能力 …… 561
概括能力 …… 561
抽象能力 …… 561
判断能力 …… 561
推理能力 …… 561
运算能力 …… 561
逻辑思维能力 …… 562
空间想象能力 …… 562
解决问题能力 …… 562
数学观念 …… 562
推理意识 …… 562
抽象意识 …… 562
整体意识 …… 563
化归意识 …… 563
数学教学原则体系 …… 563
数学教学论原则 …… 563
数学教学的整体性原则 …… 563
教学与发展相结合的原则 …… 563
教师的主导作用和学生的主体地位相统一的原则 …… 563
理论联系实际的原则 …… 564
抽象与具体相结合的原则 …… 564
严谨性与量力性相结合的原则 …… 564
数学教学工作 …… 564

备课 …… 564
课堂教学 …… 564
数学课外活动 …… 564
数学教学方法 …… 564
启发式教学法 …… 565
讲解法 …… 565
谈话法 …… 565
练习法 …… 565
发现法 …… 565
研究法 …… 566
自学辅导法 …… 566
程序教学法 …… 566
指导作业法 …… 566
知识结构单元教学法 …… 566
问题教学法 …… 566
尝试指导及信息回授法 …… 566
“读读、议议、讲讲、练练”法 …… 566
阅读指导法 …… 567
计算机辅助教学 …… 567
计算机管理教学 …… 567
数学教学研究 …… 567
课堂教学评价 …… 567
数学教师的素质 …… 567

数学学习论

数学学习论 …… 568
学习 …… 568
桑代克的学习理论 …… 568
行为主义的试误说 …… 568
关于学习的 S-R 理论 …… 568
斯金纳的学习理论 …… 568
格式塔派的学习理论 …… 568
认知派的顿悟说 …… 569
关于学习的 S-S 理论 …… 569
布鲁纳的认知结构论 …… 569
学习分类 …… 569
加涅的学习分类 …… 569
布鲁姆的学习分类 …… 569
学习动机 …… 569
学习习惯 …… 570
学习方法 …… 570
学生心理的个别差异 …… 570
学生性格的差异 …… 570
学生兴趣的差异 …… 570
学生能力的差异 …… 571
学生智力的差异 …… 571
数学知识的学习 …… 571
数学能力的形成 …… 571
数学概念的学习 …… 571
数学定理、公式、法则的学习 …… 572
数学思维 …… 572
数学思维成分 …… 572
形象思维 …… 572
逻辑思维 …… 573
直觉思维 …… 573
数学思维分类 …… 573
感知动作思维 …… 573
具体形象思维 …… 573
抽象逻辑思维 …… 573
辩证思维 …… 574
上升性思维 …… 574
发现性思维 …… 574
创造性思维 …… 574
求同思维 …… 574
集中思维 …… 574
求异思维 …… 574
发散思维 …… 574
灵感思维 …… 574
数学思维的品质 …… 574
数学思维的灵活性 …… 574
数学思维的独创性 …… 575
数学思维的深刻性 …… 575
数学思维的目的性 …… 575
数学思维的合理性 …… 575
数学思维的开阔性 …… 575
数学思维的主动性 …… 575
数学思维的论证性 …… 576
数学思维的志向水平 …… 576
数学学习意向 …… 576
数学学习动机 …… 576
数学美 …… 576
数学思维的简单性原则 …… 576
问题情境 …… 576
思维的数学水平 …… 576
良好的数学知识结构 …… 576
数学知识的基本结构 …… 576
数学学习的认识结构 …… 576
数学学习的认知结构 …… 576
数学知识的逻辑意义 …… 576
数学知识的潜在意义 …… 576
数学知识的心理意义 …… 577
思维的策略水平 …… 577
升格策略 …… 577
降格策略 …… 577
递归方法 …… 577

缩格策略 …… 577
公理化方法 …… 577
更格策略 …… 577
数学变换方法 …… 577
分格策略 …… 577
数学策略的本质 …… 577
数学思维的联系水平 …… 577
瞬时记忆 …… 577
短时记忆 …… 577
长时记忆 …… 577
数学思维的图论分析 …… 577
连通问题 …… 577
最小点基问题 …… 578

数学教育的研究方法

数学教育的研究方法 …… 578
理论的研究方法 …… 578
历史的研究方法 …… 578
实证的研究方法 …… 578
实验的研究方法 …… 578
教育评价 …… 578

数学教育史

数学教育史 …… 578
中国数学教育史 …… 578
先秦的数学教育 …… 579
汉代到南北朝的数学教育 …… 579
隋唐的数学教育 …… 579
宋元的数学教育 …… 580
明清的数学教育 …… 580
清末的数学教育 …… 580
民国时期的数学教育 …… 581
新中国的数学教育 …… 581
世界数学教育史 …… 583
古代埃及、巴比伦的数学教育 …… 583
古代希腊、罗马的数学教育 …… 583
古代印度和阿拉伯的数学教育 …… 584
文艺复兴时期欧洲的数学教育 …… 584
17、18 世纪欧洲的数学教育 …… 585
19 世纪欧洲的数学教育 …… 585
19 世纪美国的数学教育 …… 586
贝利运动 …… 586
国际数学课程调查会 …… 587
新数学运动 …… 587
欧洲的现代数学教育改革 …… 588
苏联的数学教育现代化 …… 589
日本的数学教育现代化 …… 590
美国的数学教育 …… 590
英国的数学教育 …… 591
法国的数学教育 …… 592
德国的数学教育 …… 592

数 学 哲 学

数学哲学 …… 594
数学本体论 …… 596
数学认识论 …… 597
数学方法论 …… 597
毕达哥拉斯的数学哲学 …… 598
柏拉图的数学哲学 …… 598
亚里士多德的数学哲学 …… 599
博伊西斯的数学哲学 …… 599
培根的数学哲学 …… 600
笛卡儿的数学哲学 …… 600
莱布尼茨的数学哲学 …… 601
康德的数学哲学 …… 601
弗雷格的数学哲学 …… 602
逻辑主义学派的数学哲学 …… 603
罗素的数学哲学 …… 603
直觉主义学派的数学哲学 …… 603
布劳威尔的数学哲学 …… 604
希尔伯特的数学哲学 …… 604
形式主义学派的数学哲学 …… 604
现代数学柏拉图主义 …… 605
数学经验主义 …… 605
拉卡托斯的数学哲学思想 …… 605
数学约定主义 …… 606
庞加莱的数学哲学思想 …… 606
数学实用主义 …… 607
数学实在论 …… 607
阿达马的数学哲学观点 …… 607
波利亚的数学哲学观点 …… 607
皮亚杰的数学哲学观点 …… 608
数学对象 …… 608
数学存在 …… 608
数学模型 …… 609
数学实验 …… 609
数学抽象 …… 610
数学经验 …… 610
数学真理 …… 610

数学直觉 …… 611
数学美 …… 611
数学中的经验性方法 …… 612
数学中的逻辑方法 …… 612
数学中的创造性思维方法 …… 612
科学的数学化 …… 613
数学文化 …… 614
中国古代数学哲学 …… 615
中国现代数学哲学 …… 616

数学名题与猜想

数学名题与猜想 …… 618
勾股定理 …… 618
化圆为方问题 …… 618
倍立方问题 …… 618
三等分角问题 …… 619
欧几里得第五公设 …… 619
欧几里得素数定理 …… 620
完全数问题 …… 620
阿基米德公理 …… 621
阿基米德群牛问题 …… 621
圆周率问题 …… 622
阿波罗尼奥斯问题 …… 625
孙子问题 …… 625
丢番图问题 …… 626
百鸡问题 …… 626
祖暅原理 …… 627
斐波那契兔子问题 …… 627
卡尔达诺公式 …… 627
代数基本定理 …… 628
最速降线问题 …… 629
费马大定理 …… 629
费马数问题 …… 631
梅森猜想 …… 631
合理分配赌注问题 …… 632
三体问题 …… 632
等周问题 …… 632
蜂房问题 …… 633
算术-几何平均不等式 …… 634
布丰投针问题 …… 634
哥尼斯堡七桥问题 …… 635
欧拉常数问题 …… 635
哥德巴赫猜想 …… 636
欧拉多边形剖分问题 …… 636
双心多边形问题 …… 637
欧拉对费马猜想的猜想 …… 637
华林问题 …… 637
欧拉多项式问题 …… 638
欧拉 36 军官问题 …… 638
拉丁方问题 …… 639
马斯凯罗尼圆规问题 …… 639
伪素数问题 …… 640
素数计数问题 …… 640
果园问题 …… 641
施泰纳直尺问题 …… 642
莱默斯问题 …… 642
柯克曼女生问题 …… 643
格点问题 …… 644
四色定理 …… 644
克罗内克青春之梦 …… 645
克罗内克定理 …… 645
孪生素数猜想 …… 645
黎曼猜想 …… 646
高斯类数问题 …… 647
圆周等分问题 …… 647
连续统假设 …… 648
硬币问题 …… 649
马尔可夫数问题 …… 649
西尔维斯特问题 …… 650
伯恩赛德问题 …… 650
希尔伯特数学问题 …… 650
希尔伯特第 16 问题 …… 652
罗素悖论 …… 652
庞加莱猜想 …… 653
选择公理 …… 653
林德勒夫猜想 …… 654
海伦三角形问题 …… 654
卢津猜想 …… 655
比伯巴赫猜想 …… 655
莫德尔猜想 …… 656
哈代-李特尔伍德问题 …… 656
亲和数猜想 …… 656
素数 R_n 问题 …… 657
爱尔特希多边形问题 …… 657
爱尔特希点集问题 …… 658
有关欧拉函数的问题 …… 658
邮票问题 …… 659
二次函数的素数值问题 …… 660
整数集划分问题 …… 661
韦伊猜想 …… 662
素数等差数列问题 …… 662

素数间隔问题 …… 663
埃及分数问题 …… 663
林尼克常数问题 …… 665
$3x+1$ 问题 …… 665
循环不等式猜想 …… 666
照明问题 …… 666
帕克问题 …… 666

珠　　算

珠算 …… 668

算　　盘

算珠 …… 668
算盘 …… 668
五珠算盘 …… 668
六珠算盘 …… 668
七珠算盘 …… 669
盲人算盘 …… 669
毛算盘 …… 669
弹簧算盘 …… 669
折叠算盘 …… 669
合页算盘 …… 669
磁铁大算盘 …… 669
改良算盘 …… 669
定位算盘 …… 669
框 …… 669
边 …… 669
梁 …… 669
标位星 …… 669
定位点 …… 669
档 …… 669
清盘器 …… 669

珠算基本概念

上珠 …… 669
下珠 …… 669
顶珠 …… 669
底珠 …… 669
内珠 …… 669
梁珠 …… 670
外珠 …… 670
框珠 …… 670
漂珠 …… 670
漂子 …… 670
悬珠 …… 670
档位 …… 670
档次 …… 670
定位 …… 670
铜档 …… 670
本档 …… 670
本位 …… 670
挨档 …… 670
挨位 …… 670
挨身 …… 670
前档 …… 670
前位 …… 670
上位 …… 670
后档 …… 670
后位 …… 670
下位 …… 670
隔档 …… 670
隔位 …… 670
进档 …… 670
进位 …… 670
退档 …… 670
退位 …… 670
空档 …… 670
错档 …… 670
串档 …… 670
错位 …… 670
空盘 …… 670
改盘 …… 670
复盘 …… 670
还原 …… 670
清盘 …… 670
握笔 …… 670
拨珠法 …… 670
指法 …… 670
拨珠一次 …… 670
拨珠量 …… 671
二指法 …… 671
三指法 …… 671
双手拨珠 …… 671

拨入 …… 671
拨进 …… 671
拨去 …… 671
拨退 …… 671
唱拨 …… 671
念拨 …… 671
练拨 …… 671
带珠 …… 671
带子 …… 672
零位 …… 672
首位 …… 672
最高位 …… 672
布数 …… 672
置数 …… 672
实数 …… 672
实 …… 672
法数 …… 672
法 …… 672
实头 …… 672
法头 …… 672
乘次 …… 672
除次 …… 672
首数 …… 672
尾数 …… 672
齐头 …… 672
同头 …… 672
凑五数 …… 672
凑数 …… 672
替数 …… 672
小五数 …… 672
超五数 …… 672
变形数 …… 672
补数 …… 672
原数 …… 672
齐数 …… 672
强数 …… 672
剩数 …… 672
填数 …… 672
提 …… 673
双上 …… 673
拧 …… 673
扭 …… 673
顺拧 …… 673
逆拧 …… 673
扭进 …… 673
扭退 …… 673
冲 …… 673
挤 …… 673
合 …… 673
双合 …… 673
托 …… 673
进 …… 673
还 …… 673
借 …… 673
改作 …… 673
添作 …… 673
认数 …… 673
拨珠记数法 …… 673
数据 …… 673
盘式 …… 673
珠盘式 …… 673
实盘 …… 673
起算 …… 673
珠算技术 …… 673
珠算速算法 …… 673
珠算简捷算法 …… 673
口诀 …… 673

珠算加减法

珠算加法 …… 674
珠算加法口诀 …… 674
珠算减法 …… 674
珠算减法口诀 …… 674
直接加 …… 674
直接减 …… 674
凑五加 …… 674
破五减 …… 674
直接进位加 …… 674
进十加 …… 674
直接退位减 …… 674
退十减 …… 674
破五进位加 …… 675
退位凑五减 …… 675
满五退位减 …… 675
连进 …… 675
连退 …… 675
先十法 …… 675
后十法 …… 675

倒减法 …… 675
穿梭加减法 …… 675
虚借 …… 675
分节拨珠法 …… 675
筹算加减法 …… 675
表册算 …… 675
一目双行加法 …… 675
一目三行加法 …… 675
空档减数法 …… 676
递位迭加 …… 676
上法 …… 676
退法 …… 676
单档练习 …… 676
全盘练习 …… 676
三盘清 …… 676
三盘成 …… 676
三回头 …… 676
七盘清 …… 676
七盘成 …… 676
九盘清 …… 676
九盘成 …… 676
打百子 …… 676
练指 625 …… 676
广积万斤粮 …… 676
练指 185 …… 676
节日图 …… 676
百子图 …… 676
二郎担山 …… 677
九民兵列队 …… 677
凤凰双展翅 …… 677
八仙庆寿 …… 677

珠算乘法

珠算乘法 …… 677
前乘法 …… 677
后乘法 …… 677
空盘前乘法 …… 677
空盘后乘法 …… 677
九九 …… 678
置数前乘法 …… 678
滚乘法 …… 678
留头乘 …… 678
穿心乘 …… 678
破头乘 …… 678
隔位乘 …… 679
掉尾乘 …… 679
迭皮乘 …… 679
减一前乘法 …… 679
补数乘法 …… 679
撞十数乘法 …… 680
定身乘法 …… 680
省一乘法 …… 680
齐头尾补乘法 …… 680
倍数表乘法 …… 680
列表乘法 …… 680
随数乘法 …… 680
退加乘法 …… 680
损乘 …… 680
折半 …… 680
凑整乘法 …… 680
双补加减乘法 …… 680
因法 …… 681
首位挨乘法 …… 681
凑倍乘法 …… 681
得数妙 …… 681
九位同数 …… 681
筹算乘法 …… 682
凤凰展翅 …… 682
孔雀开屏 …… 682
鲜花盛开 …… 682
永相聚 …… 682

珠算除法

珠算除法 …… 682
归 …… 682
单归 …… 682
归除 …… 682
九归 …… 682
小九归 …… 683
退商口诀 …… 683
商除法 …… 683
金蝉脱壳 …… 683
凑倍除法 …… 684
大扒皮 …… 684
累减除法 …… 684
商归法 …… 684
挨位商除法 …… 684
小扒皮 …… 684

撞归 …… 684
群商法 …… 684
反序除法 …… 684
定身除法 …… 684
省一除法 …… 685
补数除法 …… 685
过大商除法 …… 685
一除得众商 …… 686
商除中的截尾法 …… 686
飞归 …… 686
增成 …… 687
筹算除法 …… 687
勇挑重担 …… 687
狮子滚绣球 …… 687

珠算定位法

公式定位法 …… 687
统一定位法 …… 688
头定法 …… 688
盘上定位法 …… 688
法首定位法 …… 688
悬空定位法 …… 688
掌中定位法 …… 688
袖中锦定位法 …… 689
移档定位法 …… 689

珠算开方

商除开平方 …… 689
归除开平方 …… 690
招差开平方 …… 690
折半开平方 …… 690
商除开立方 …… 691
归除开立方 …… 691
招差开立方 …… 692

珠算教育与三算教学

珠算教育 …… 692
职业珠算教育 …… 693
业余珠算教育 …… 693
小学珠算教育 …… 693
三算结合教学 …… 693
三算结合教学的基本方法 …… 694
三算结合教学的特点 …… 694
珠算式心算 …… 695
珠算技术等级鉴定 …… 695
珠算技术比赛种类 …… 695

数　　学

数学(mathematics)　数学一词来自希腊文μαθηματιχη',其字根 μα'θημα 意义为知识、科学,它非常恰当地反映这个领域的广泛性与普遍性.从历史上看,数学常常用其某个侧面来表示:中国古代用算学来强调其计算技术方面,而西方多用几何学一词代表数学,以显示欧几里得(Euclid)的《几何原本》传统.而实际上,其中也包括数论和量论的内容.随着时间的流逝,数学的内容不断地扩大,在17—18世纪直至19世纪,被包括在数学领域内的许多学科和分支已经独立出去,而在各学科的边界又不断创造和衍生出一系列新的学科,这些新学科现在已融合而成面向21世纪的庞大的数学科学领域,它是一个具有内在统一性的科学技术群.以下从四个方面进行论述:

1.数学的对象和特点.数学中最原始的对象是数与形.自然数已经是相当抽象的概念,它不仅要从一个苹果、一间房子、一堆沙土中抽象出数1来,而且还要由数1得出更一般数的概念.有了自然数的概念还会遇到基数和序数的矛盾.至于记数法和位值制都是中国对人类文明的伟大创造,这种伟大创造绝不仅仅是对自然界的认识和对哲学思辨的产物,它真正体现数学的成就.数学另一个原始对象是形,它更为直观,甚至长期以来人们也把它当成自然科学的对象,尽管柏拉图(Plato)早就说过,三角形属于理念的世界.当然现在数学的空间远远超出现实的空间,数学中的"形"也不限于人们感官能摸得着、看得见的东西,它是更抽象的概念,如高维空间、无穷集合、群、拓扑等是任何其他学科都不研究的对象.数学作为一门模式科学,应该归入更广泛的符号和形式科学类.这一类似乎应该介于哲学类与具体科学,即自然科学与社会科学之间.它的姊妹学科包括一般符号学、语言学、逻辑学、方法学以及还未成型的一般系统学.有意思的是,有些数学家也认为"数学是一种语言"、"数学可还原为逻辑"、"数学是一种普遍方法"等,这些说法尽管有些偏颇,但毕竟触到数学与自然科学的本质差别以及数学与符号科学的亲缘关系.数学的本质特征是:

1)数学是一种普遍语言.这种观点可以追溯到莱布尼茨(Leibniz,G.W.),他首先提出科学与哲学的两大目标,其中第一个就是找出一种普遍文字,首先是一种符号及变元表示的符号语言.正如吉布斯(Gibbs,J.W.)所说的"数学是一种语言".吉布斯不仅是19世纪最伟大的统计热力学大师之一,而且也是向量分析的开创者及传播者.在19世纪90年代,英国著名的杂志《自然》上掀起的一场大辩论中,向量最终取代四元数而成为物理学普遍使用的概念.19世纪和20世纪之交,向量分析成为数学、物理学的有效工具,更确切地说,成为描述各种现象的语言.数学概念的产生及其符号化反映了数学的进步,算术运算的符号化及向符号代数过渡,几何学的代数化,微分、积分运算的符号化,函数的符号及行列式、矩阵、向量、张量等概念的符号化,复数的表示,算子演算以及符号逻辑等都是数学的重要进展.在这个意义下数学对象是一个符号集合.单纯的符号集合,正如裸的集合一样,没有结构,没有什么可说的,没有什么意思,而只有它具有形式结构(语法学),有一定的解释(模型——语义学),有一定变换、生成、操作、运用方式(语用学),它才能变得丰富多彩起来.数学作为一种普遍语言有自己的特点,比起纯逻辑语言来有内涵的丰富性,而比起通常语言来有外延的确定性.数学不仅是一种语言,它还是一种精密语言.正因为如此,它常被称为精密科学.数学之所以精密,不单是因为其数量表示,还在于它越来越深入那些以前所无法表示的或非实在的概念,如瞬时速度、加速度、位势、熵、谱等.对于许多直观概念,也只有在数学上才能得到很好处理,如连续性、对称性、随机性乃至信息控制、策略、对策、决策等.数学还明确了一些对立的范畴,如有穷与无穷、连续与离散、局部与整体、确定与偶然等.还有重要的元概念:如结构、构造、存在、模型、等价等.这些语言越来越深入到科学乃至日常生活之中,使论述确切及精密.许多常用概念也只有在数学上得到澄清才算有深刻的认识.

2)数学是一种普遍方法.从古到今,对许多问题求出解答的过程中,人们或多或少产生一种方法的意识.而这种方法概念,又以数学中的算法概念为摹本.在这个意义下,数学充分显示其作为操作技术的特性.虽然精确的算法概念一直到20世纪30年代才有确切定义,但模糊的概念很早就有,而且也是数学追寻的主要目标之一.中国的数值运算及方程求解、欧几里得辗转相除法以及印度、阿拉伯的一些算法,都使人认识到算法是一种有限的指令,可以机械地运行,从而对一类问题得出确定的解答.许多几何作图问题以及求积问题也要求发现广义的"算法"来求解问题.笛卡儿(Descartes,R.)把算法推向普遍方法论的高度,他十分明确地考虑造出普遍方法

来解决科学问题，特别是数学问题，对此他称为普遍数学. 正是这种对方法的普遍考虑使他发明代数方法研究几何问题，从而创立解析几何学. 波利亚(Polya，G.)把笛卡儿的方案总结如下：

任意问题

$\xrightarrow{①}$数学问题

$\xrightarrow{②}$代数问题

$\xrightarrow{③}$解方程组 $\begin{cases} P_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0, \\ P_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0 \end{cases}$

$\xrightarrow{④}$ 解方程 $P(x) = 0$，

其中第③，④步无非是数学，第②步并没有一般方法，第①步则困难更大. 莱布尼茨也把找出能求解任何数学问题的普遍算法列为他第二大目标. 笛卡儿在几何方面实现这个目标，而莱布尼茨则在逻辑上制定一个方案. 数学作为一种普遍方法，总是不断跨越已有的领域，深入到未知的世界中去，并且不断创造新的数学对象. 17—18 世纪，无穷及无穷小进入数学，把代数运算规则向无穷领域推广，这就导致数学分析的形式，并且构成方法上的大飞跃. 19 世纪由实分析向复分析过渡，再次加大分析方法的威力.

3) 数学是一种普遍思想原则. 数学发展过程中由于不断一般化、不断抽象化造成自己的普遍思想原则. 对称性原则、不变性原则、守恒律三者统一是 1918 年诺特(Noether，(A.)E.)首先提出的，而群论方法在量子力学、原子-分子结构、核结构、基本粒子理论中的适用性也是外尔(Weyl，C. H. H.)首先得出的. 群论方法至今仍广泛应用在科学的各方面，而不仅仅是上述领域及固体物理. 数学中另一个重要原则是极值原则或变分原理，最早除了哲学的思辨之外，首先提出的是费马(Fermat，P. de)，这些原则也是其后许多物理理论的基础，如哈密顿原理.

4) 数学是一种理性思维框架. 20 世纪之前，科学的支柱主要是理论和实验(包括观察和测量)，数学和计算包括在理论当中. 实际上，17 世纪的科学革命推动近代科学的产生，完全依赖于理性与经验的结合. 它们的哲学根源是笛卡儿的唯理主义与培根(Bacon，R.)的经验主义，他们也是近代哲学之父. 确切地讲，笛卡儿把认识论置于本体论之上，把哲学从神学的奴仆地位解放出来，成功地实行思想的解放，直接推动近代科学的产生，其中，理论概念、数学工具与观察实验结合在一起是牛顿(Newton，I.)科学革命的催生婆. 牛顿成就其伟业不仅在于他提出正确的理论概念(特别是力)，而且在于他提供了数学工具(微积分)及分析框架，尽管当时还是用欧几里得的几何系统. 其后科学的重大进步，理论概念及数学表述和计算的结合仍是不可缺少的一环. 第二次世界大战以后，计算机的发展与计算技术的进步使得科学计算与理论和实验鼎足而三，并列为科学的三大支柱. 近年来，由于数学的发展，从数学出发的理论越来越多地成为科学理论形成的始作俑者. 这特别表现在 1974 年，纤维丛理论成为规范场理论的标准表述. 其后越来越多的前沿数学领域进入物理学及其他科学领域，形成新兴理论框架，实际上数学已成为科学发展第四根支柱. 对于生命科学、心理科学、社会科学，这种现象早已不是新事物. 数理经济学以及对策论是这方面的最典型的例子.

2. 数学的分科及其主要问题. 数学不是一般意义上的自然科学或社会科学，它的对象及研究目标不像这些学科那样明确和集中. 从古到今，数学中所包含的对象、学科及分支变化多端. 中世纪除了算术及几何学之外，天文学及乐理也是数学的分支. 到 17 世纪，木工、石工、建筑、火器、占星术等都是数学的内容. 从那时起，静力学、动力学、光学、地图绘制法等仍然被看成大数学的一部分，尽管它们早已成为独立学科. 数学内容的庞杂也可以说是数学的一大特征了. 除此之外，许多基础的数学学科，它们的内容也有很大的改变，甚至于面目全非了. 经典代数学主要研究代数方程的求解，而经过几次变化，现代代数学主要研究代数结构. 这样一来，数学的统一尽管多次被提起，但是总难以概括全部数学. 因此，时至今日，数学仍然是具有多样性对象也具有多种目标的学科，尽管它们之间有着千丝万缕的联系. 人们把数学归结为相互关联的六大范畴，其中前三个可以说是数学的技术方面，后三个可以说是数学的理论方面.

1) 操作技术. 大部分最早的数学问题属于解决“如何”的技术问题. 最初的问题包括计数、计算、测量、作图等方面，后来逐步形成特殊的及一般的数学问题. 在解决这些问题的过程中，形成了算法以及操作步骤的概念. 在计算过程中，形成了算术，特别是解数值代数方程的算法. 到近代，这推动符号代数学、求解代数方程的技术以及把这些技术推广到无穷算法以及代数综合方法的代数方法，从而形成无穷小演算及解析几何学. 其后各个数学分支也提出相应的算法问题，例如拓扑学中计算同调群、同伦群等. 从这个意义上讲，数学在本来意义上是一种计算技术，或更广一点讲是操作技术. 而研究这种技术的目标就是发明算法或解题的步骤，以求得问题的解决. 应该说，这是一种富有创造性的研究工作. 以计算为例，就是由精确计算到近似解析计算到数值计算到计算机软件，它一直是数学研究的重要内容. 除计算之外，还有测量、绘图、统计、运筹等操作，以及相应的和衍生的各种问题. 例如古典几何有许多几何作图问题，特别是用圆规、直尺的几何三大问题，

以及更一般的作图方法.为了解决这些问题,还要发明许多技术,如各种投影技术,它们至少在过去都属于大数学范围之内.在数学分析的范围内,级数求和、渐近展开、积分变换等都是高级的计算技术.

2)技术理论.对数学操作的对象,应该有些认识,其中包括表示问题、操作规则与规律问题、可计算性问题、无穷级数收敛与发散问题、收敛速度问题、方程可解性问题、逼近的程度及可能性问题、作图的可能性问题,特别是方法的评价问题等.这样就形成与操作技术有关但又高一层次的学科,如数值分析、误差理论、函数逼近论、丢番图逼近理论、可解性及稳定性理论等.

3)操作对象理论.它的目标不是指向对象本身,而是指向技术,指向求解的方法.例如丢番图方程论、代数方程论、代数方程组理论、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论等.它们涉及的不是单个方程,而是一类的对象,因此首要问题是分类问题.然后再对每一类研究解的数目、解的性质、根与系数的关系、某类解的存在性问题等,微分方程的定性理论也属于这一范畴.

以上三大范畴是解决"如何"的技术问题,而以下三大范畴才是解决"什么"的理论问题.

4)对象理论.理论是对确切定义的对象的性质、关系、刻画、分类等的研究.典型的数学理论有数论、函数论、算子论以及各种几何对象理论、过程理论等.以数论为例,重要的分支按对象分有整数论、代数数论、超越数论等.按方法分有初等数论、解析数论、概率数论等.按问题的性质分有型的算术理论、几何数论等,也包括数论中的丢番图方程理论.函数论与算子论一开始也是表示问题,特别是无穷级数及无穷乘积表示,然后是积分表示等,其次涉及值分布等可以说是计数问题,另外还有刻画及分类问题.几何图形有许多性质与关系方面的问题,如度量性质以及相交、属于等关系,也有刻画及分类问题.

5)结构理论.结构理论与对象理论之间并没有一条不可逾越的鸿沟,这样划分是因为结构理论必须建立在集合的基础之上.按照布尔巴基学派的观点,原始的结构可以划为三大类,研究它们各自的结构就形成结构数学的主要分支:① 代数结构:主要是群、环、域、模,它们分别构成群论、环论、域论、模论;② 序结构:主要是格,它们构成格论;③ 拓扑结构:主要是拓扑空间,它们构成一般拓扑学的研究对象.这些抽象的研究对象有两个来源:一是从过去研究的具体对象抽象化,特别是公理化而成,如群、域以及拓扑空间这些抽象结构衍生出来.新结构的产生有如下的几种途径:① 增减公理;② 复合结构;③ 多重结构;④ 混合结构.研究这些抽象对象的目标是搞清楚它们的结构并加以分类.所谓结构,就是元素(或它们的集合)和元素之间的关系.结构数学的主要问题大致可分为互相关联的四类问题:① 刻画问题;② 分类问题;③ 结构问题;④ 实现问题.

6)元理论.元数学理论是对数学本身进行反思的产物,长期属于哲学的范畴.它讨论数学概念、数学理论的合理性以及数学方法的合法性问题.19世纪末之前,对于数是什么以及非欧几何问题,特别是数学分析的严格性的争论均属于这个范畴.19世纪末,集合论的建立,现代公理方法的提出,符号逻辑的形成,以及关于数学基础问题的论战,最终导致作为一门数学分支的数理逻辑的形成.由于哥德尔(Gödel,K.)的工作,数理逻辑成为包括模型论、公理集合论、递归论和证明论(原始的和狭义的元数学)四大分支的数学领域,其后分别形成构造性数学和计算复杂性理论等新兴学科.除了以集合论为基础的现代数学之外,范畴论也成为一门元理论,在数学中有着有效的应用.

3.数学的发展和演化.数学的内容及范围随时间不同而不同,因此有言:"数学无非就是它的历史."数学史大致可如下分期:前史时期;古代及中世纪时期(从公元前4世纪到16世纪末);近代前期(17—18世纪);近代后期(19世纪);现代时期(20世纪).每一个时期的特点简要分析如下:

1)前史时期.前史时期的数学主要是民族数学或文化数学,在各种文化的发展过程中,各民族都或多或少掌握一些简单的数学技术,包括计数、计算、测量、土木建筑、绘图等,基本上属于实用技术.这些知识是零散的,而且反映出较大的文化差异.另外,也出现了神秘的占星术、数秘术、占卜术等,其中有个别涉及数学的内容,如二进制等.各种建筑上的对称图案以及正多面体的列举包含群的观念的萌芽.

2)古代及中世纪时期.数学经过长时期的发展之后,正式成为一门学科,其主要标志是:① 建立数的表示及计算方法;② 对于一些问题有较系统的方法.这使数学技术部分初步形成.而欧几里得《几何原本》的问世,则使理论数学有了一个原型.各国数学发展状况有所不同,古代数学的主要领域是算术与几何,希腊具有初等的数论及量论以及一些基本的几何问题及数论问题.这些问题对以后的数学发展有很大的影响,但不一定很重要,比较重要的数学是计算,特别是解方程.中国、印度、阿拉伯的数学,偏重于计算及实际问题的解决.

3)近代前期.近代数学诞生的标志是符号化的普遍算法的建立以及无穷进入数学.它一下子使建立在几何及算术上的算法登上了一个新台阶,不仅使它的应用范围大大扩大,成为发展科学技术的有力工具,而且也向理论提出一系列问题.这就导致

19 世纪操作理论、操作对象理论、对象理论的产生，出现数学多样化和理论化的时代. 17 世纪符号代数、解析几何学及微积分的建立，虽然大大扩大了数学技术库，但是并没有改变数学主要是一门实用的计算及操作技术的状态. 数学作为一门计算技术进步惊人，特别是微积分的完成，解决了许多天文、力学及物理学的问题. 微积分本身只不过是一种更有效的演算方法，即所谓无穷小演算. 接着是常微分方程及数学物理方程的出现，以及变分法的诞生，使数学工具更为有效.

4）近代后期. 19 世纪数学是近代数学的成熟时期，也是数学真正作为自为的理论科学产生的时期，但是伴随操作理论（如最小二乘法及误差理论、级数求和理论、函数逼近理论及丢番图逼近理论）、操作对象理论（如代数方程理论、常微分方程理论），数学技术本身也大有提高，特别是傅里叶展开、积分变换，尤其是复分析的建立. 19 世纪的数学可以说是数学对象化与多样化时期，一方面把数学由主要是操作技术转变为理论的时期，另一方面也为 20 世纪现代数学奠定了基础. 这样，数学对象理论真正形成，数学成为一种自为的科学而不再仅是自然科学或技术的语言和工具了.

5）现代时期. 20 世纪的数学是从 19 世纪数学多样性时期趋于统一的时期，其统一的基础是集合论. 一方面集合论之上产生了结构数学的庞大领域，另一方面集合论的基础问题产生了元数学. 数学新对象的形成，产生结构的多样性，导致理论的多样性，并且 19 世纪末以前的四大范畴的数学仍有新的发展，加上新的应用数学、计算数学等领域，数学日趋专门化、多样化. 但意想不到的是，从 20 世纪 70 年代起，各个领域之间新关系不断发现，新一轮的统一性正在形成之中. 当代数学前沿的大多数学科是 20 世纪上半叶形成的，其中主要是抽象代数学（包括群论、环及代数理论、域论、格论、整体李群理论、代数群论、同调代数以及各种衍生结构）、一般拓扑学、测度和积分理论、泛函分析（包括线性拓扑空间理论、算子代数理论等）、组合及代数拓扑学、整体微分几何、多复变函数论、动力系统理论、随机过程理论等. 对于 19 世纪开创的新领域——代数数论、代数几何学、黎曼几何学和局部李群理论，也在结构数学的框架中获得重大突破，成为当代数学的前沿.

20 世纪后期形成的一些领域，如微分拓扑学、大范围分析、K 理论、非交换几何等，也可在其中看到其萌芽. 除了纯粹数学领域的扩大与深化之外，20 世纪的应用数学和计算数学的面貌也发生了根本的改变. 一方面数学应用的范围已从 20 世纪之前的经典力学、天文学与测地学以及数学物理等领域扩展到几乎所有自然科学、工程技术、社会科学、人文科学的分支，并越来越起着举足轻重的作用；另一方面，一批新的应用数学领域产生出来，成为具有相对独立的分支，构成大数学科学的组成部分. 它们一方面与实际问题有密切的关系，另一方面它们也形成独立的数学研究方向，其中最典型的是 19 世纪末 20 世纪初形成的数理统计，它们同应用概率一起在近半个世纪已经成为与经典数学平起平坐的学科领域. 另外一个数学领域——组合数学几乎与数学的历史一样悠久，但只是近半个多世纪才逐步成熟及独立. 第二次世界大战之后，一些新的应用数学领域独立出来，特别是运筹学诸分支，后来纳入管理科学的学科群中. 与工程技术密切相关的系统科学、控制理论与自动化科学、信息科学也得到空前的发展.

20 世纪科学技术史中头等重要的事件是电子计算机的诞生. 它对整个社会的冲击是怎么估计也不过分的. 从计算机的设计制造到大规模应用，处处离不开数学，同时也开辟了新的数学领域. 它们可以归纳成两大部分：一是计算机科学，它指未来计算机的发展；一是计算数学，它指计算机在科学计算和工程技术中的大规模计算. 计算机的不断普及和改进对数学也造成不可忽视的影响. 它给数学家提出一系列算法问题，并形成一套行之有效的算法，如单纯形方法及其种种改进，有限元方法及其衍生算法等，对算法的分析，如收敛速度、误差传播及稳定性等问题形成数值分析分支. 近年来，计算机由数值运算过渡到符号运算，形成计算机代数重要分支，特别是吴文俊的机械化数学纲领在机器证明方面是一大突破.

4. 数学的社会功能. 数学是最古老的科学部门，它的诞生和发展反映人类文明的进步. 数学从一开始就与社会实践活动密切相关，从计数、土地丈量、器物制造、产品分配，一直到商业贸易、宗教活动等都向数学提出问题，并要求逐步解决和方法逐渐进步，最后形成相对定型的数学方法和学科. 从此，各种社会活动与数学的应用密不可分. 随着社会的进步，特别是近代科学技术的进步和新兴产业日新月异，数学也越来越成为科学技术发展的基础. 从 17 世纪到 19 世纪，数学与力学、天文学、物理学、大地测量学、航海术就密不可分，互相促进地平行发展着. 对于机械工程、建筑工程设计、电机工程等技术领域的发展，数学也起着决定性的作用. 20 世纪数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更加令人信服地确立了数学作为整个科学技术的基础地位. 数学物理、数学化学、生物数学、数理经济学、数理地质学、数理语言学、数值天气预报、数学考古等一系列边缘学科的出现，表明数学的应用已突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 随着科学数值化趋势的增长，数学在提高全民素质，培养适应现代化需

要的各级人才方面还具有特殊的教育功能. 数学科学,已成为推进人类文明的不可缺少的重要因素,数学正越来越直接地为人类生活与物质生产做出更大的贡献. 数学应用具有以下特点:

1) 纯粹数学几乎所有的分支都获得应用. 在20世纪60年代,像拓扑学这样的抽象数学分支离实际应用似乎还很遥远,而今拓扑学(特别是扭结理论)已成为生物学中了解 *DNA* 结构的有效工具. 在物理学中,拓扑不变量正在成为物理的量,正如一些群的不变量是物理的量一样. 数论也曾被认为是最纯粹、最缺乏应用的数学分支,但如今数论方法在计算机科学、密码技术、卫星信号传输、p 进量子场论等许多方面发挥着重要的有时甚至是关键的作用,并通过与数值分析相结合开辟着更广的应用途径. 事实上,仅就在理论物理中的应用而言,涉及的数学除了经典的分支与方法(如数学物理方程、傅氏分析、无穷维空间论、群论、概率统计等),还包括了微分拓扑、微分几何、大范围分析、代数几何、李群与李代数、算子代数、代数数论、非交换数学、非线性数学、计算数学等,几乎覆盖了核心数学的整个领域.

2) 几乎所有的科技领域都在应用数学,并越来越多地应用更高深的数学. 数学在力学、物理学中的应用是经受了历史考验的,而当今数学的应用则早已突破这一传统的范围,正在向包括从粒子物理到生命科学,从航空技术到地质勘探在内的一切科技领域进军. 除了自然科学,经济学及过去认为不适用数学的社会学、历史学等社会科学领域,数学方法也都在崭露头角. 随机分析应用于金融决策而引起的经济学理论的进展,提供了特别令人鼓舞的例证. 与以往时代不同的是,数学在向外渗透过程中越来越多地与其他领域相结合而形成交叉学科. 与数学有关的词大量出现在各门学科之前后,如"数学的"、"数理的"、"计量的"、"统计的"、"计算的"以及"……数学"、"……统计学"等. 学科成熟的社会标志是学会、协会的建立,期刊与连续出版物的问世,以及课程的设置,专业会议的召开等. 例如,《数学化学杂志》于20世纪80年代创刊,《数理经济学杂志》于20世纪70年代创刊,生物数学的期刊出现更早. 次一级的学科如"数学分类学"的著作早在20世纪80年代就问世了. 值得注意的是纯粹数学中的一些前沿与其他科学的许多前沿领域的快速结合,这反映了科技领域中数学渗透的空前深度. 可以这样说,没有这些前沿数学就没有当代理论物理学的一些前沿领域,如超弦理论、超引力理论等. 事实上,仅仅像弦理论这样的物理学热门分支所用到的数学,就涉及微分拓扑学、代数几何学、微分几何、群论与无穷维代数、复分析与黎曼曲面的模理论等. 凝聚态物理中分类晶体结构中的"缺陷"以及液晶理论,都用到某些齐性空间中同伦群的计算,而这即使对代数拓扑学家来说也是极难的问题. 数理经济学中一般均衡理论的建立、发展,也用到了微分拓扑学的基本定理与彻底的公理化方法. 经济学家德布鲁因(de,Bruijn,N. G.)这方面的工作获得了诺贝尔奖.

3) 数学在生产技术中的应用变得日趋直接. 以往数学工具直接用于生产技术的例子虽有发生,但数学与生产技术的关系基本上是间接的. 常常是先应用于其他科学,再由这些科学提供技术进步的基础. 近半个世纪来,数学科学与生产技术的相互作用方式正在悄悄地改变,数学提供的工具直接影响和推动技术进步的频率正在加大,并在许多情况下产生巨大的经济效益. 例如,以计算流体力学为基础的数值模拟已成为飞行器设计的有效工具,类似的数值模拟方法正被应用于许多技术部门以替代耗资巨大的试验;以调和分析为基础发展起来的小波分析直接应用于通信与石油勘探等广泛的技术领域,这在20年前是不能想象的;现代医学扫描技术(*CT* 扫描、核磁共振成像等)主要也是建立在拉东积分理论的基础之上,这方面的例子举不胜举. 此外,现代大规模生产的管理决策、产品质量控制也密切依赖于数学中的线性规划算法(单纯形法与新兴的内点法)及统计方法. 近年来,以数学建模为核心的工业数学成为一个蓬勃发展的应用数学领域也绝不是偶然的,产业部门的工程技术人员与数学工作者携手合作,解决影响甚至决定生产过程的形形色色的数学问题,反之,许多挑战性问题也刺激纯数学的发展.

4) 数学在学科发展中的份额及力度越来越大. 一些著名的数学家认为,数学是一种关键的、普遍适用的、赋予人以能力的技术. 从某种意义上来讲,"高技术本质上是一种数学技术". 对此,一般人还只在科学计算的层面来理解. 而实际上,数学方法是不同于理论方法及计算方法的第四个普遍适用的方法和技术. 这种情况从20世纪70年代以来已初露端倪,在21世纪将成为科学研究的重要组成部分,而且也许是最富创造性的部分,这特别表现在形成概念及理论框架方面. 实际上,当前的动力系统的研究(分叉、吸引子)、孤立子、混沌等已成为许多领域的通用语言及工具,而更艰深的数学将在未来更为普及.

执　笔　胡作玄
审　阅　吴文俊　程民德　徐利治

数学史 (history of mathematics)　数学的一个分支,是研究数学的产生、发展及其规律的学科. 数学史既不同于数学、自然科学,也不同于一般的历史科学,而是数学、自然科学和历史科学之间的一个交叉学科. 因此,数学史也是自然科学史的一个重要

分支.

数学史研究所使用的方法和所有的自然科学史一样,主要是历史科学的方法,在这一点上,它与通常的数学研究方法不同.它研究的对象是数学发展的历史,因此它与通常历史科学研究的对象又不相同.其研究的基本内容主要有以下三个方面:

1.研究数学发生和发展本身的特点,揭示数学发展的内在规律.

2.研究自然科学和社会因素(包括政治、经济和哲学思潮等)对数学发展的制约性,即促使数学发展的外在原因.

3.研究数学对自然科学和社会的反作用,预示数学未来的发展.

具体地说,它所研究的内容包括:总的学科发展史——数学史通史;数学各分支的分科史(包括细小分支的历史);不同国家、民族、地域的数学史及其比较;不同时期的断代数学史;数学家传记;数学概念、数学思想、数学方法产生和发展的历史;数学发展与其他科学、社会现象之间的关系;数学教育史;数学史文献学以及数学史研究的方法论问题等.数学史和数学研究的各个分支,和社会史与文化史的各个方面都有着密切的联系,这表明数学史具有多学科交叉与综合性强的性质.

人们研究数学的历史,由来甚早.古希腊的欧德莫斯(Eudemus,(R))写过一部几何学史和一部算术史,几何学史叙述了欧几里得(Euclid)之前的几何学状况,可惜均未能流传下来,只是在5世纪普罗克洛斯(Proclus)对欧几里得《几何原本》第一卷的注文中保留有《几何学史》一部分资料.7,8世纪以来,大量的希腊和印度数学著作在伊斯兰世界广泛流传和研究,12世纪时,这些著作的阿拉伯文译本和阿拉伯人自己写的数学书籍传入西欧.对这些著作的翻译既是当时的数学研究,也是对古典数学著作的整理和保存.此外,历代的一些传记作品和数学著作中,也都曾讲述到一些数学家的生平以及有关数学史的其他材料.

近代西欧各国的数学史研究,是从18世纪,由法国的蒙蒂克拉(Montucla,J. É.)、德国的克斯特纳(Kaestner,A. G.)等人同时开始,而以蒙蒂克拉1758年出版的《数学史》(1799—1802年又经拉朗德(Lalande,J. J. Le. F. de)增补)为代表.从19世纪末叶起,研究数学史的人开始增多,断代史和分科史的研究也逐步展开.到20世纪20—30年代,数学史才逐渐形成一门独立的学科.其主要标志是从大量的史料汇集,单纯的记述逐步走向理论化,建立起比较完整的体系.19世纪末叶以后的数学史研究可以分为下述几个方面:

1.通史研究.代表作可以举出德国的康托尔(Cantor,M. B.)的《数学史讲义》(4卷,1880—1908)以及英国的博尔(Ball,W. W. R.)《数学史概述》(1888、第4版1908)、美国的史密斯(Smith,D. E.)的《数学史》(2卷,1923—1925)、意大利的洛里亚(Loria,G.)的《数学史导论》(3卷,1929～1933)等人的著作.法国的布尔巴基学派也写了一部数学史收入《数学原理》丛书之中.以尤什克维奇(Юшкевич,А. П.)为代表的前苏联学者和以弥永昌吉、伊东俊太郎为代表的日本学者也都有多卷本数学通史出版.1972年,美国的克莱因(Kline,M.)所著《古今数学思想》一书,被认为是20世纪70年代以来的一部佳作.

2.古埃及和巴比伦数学史.把巴比伦楔形文字泥板算书和古埃及纸草书译成现代文字是很艰难的工作.查斯(Chace,A. B.)和阿奇博尔德(Archibald,R. C.)等人都译过纸草书,而诺伊格鲍尔(Neugebauer,O.)锲而不舍数十年对楔形文字泥板算书的研究则更为有名.他所著的《楔形文字数学史料诠释》(1935、1937)、《楔形文字数学书》(与萨克斯(Saks,S.)合著,1945)都是这方面的权威性著作,他的专著《古代的精密科学》(1951)一书,汇集了半个世纪以来关于古埃及和巴比伦数学史研究成果.范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B. L.)的《科学的觉醒》(1950,1954)一书,则又加进古希腊数学史,成为古代世界数学史的权威性著作之一.

3.古希腊数学史.人们对古希腊数学史的研究远比近代数学史更为透彻.许多古希腊数学家的著作被译成现代文字,在这方面作出重要贡献的有海伯格(Heiberg,I. L.)、胡尔奇(Hultsch)、洛里亚、希思(Heath,T. L.)等人.海伯格整理出版了希腊文本的《阿基米德全集》(3卷)和《欧几里得全集》(8卷,前5卷就是《几何原本》,被认为是近代最标准的范本).希腊数学史的代表作还有洛里亚的《古希腊的精密科学》(1914)和希思的《希腊数学史》(1921),后者还将海伯格的希腊文《几何原本》译成英文,名为《欧几里得几何原本13卷》(1908年初版,1915年再版,1956年新版),这是现代《几何原本》标准的英译评注本,书中的注文可以看作是两千多年来研究《原本》的历史总结.从20世纪30年代起,著名的代数学家范·德·瓦尔登在古希腊数学史方面也作出突出成绩.20世纪60年代以来,匈牙利的萨博(Szabo,A.)的工作则更为突出,他从哲学史出发论述了欧几里得公理体系的起源.

4.中世纪数学史.由于语言学家和历史学家对中世纪数学不感兴趣,所以长期以来几乎没有人研究过它们.直到19世纪下半叶才有人开始对中世纪数学史进行系统研究.最初的研究者由于资料的缺乏,认为中世纪数学带有纯实用性质,中世纪的科学

家们的惟一贡献只是在保存和向欧洲传播希腊和部分印度的数学遗产.到了20世纪初,学者们则发现了大量资料,证明中世纪科学家数学著作的独创性,它们在许多方面为欧洲的数学科学奠定了基础.前苏联数学史家尤什克维奇对中世纪数学史的研究作出了重要的贡献,他的专著《中世纪数学史》(1961)概括了当时所能得到的关于中世纪数学史的完部资料.

5.近代史和分科史研究.德国数学家克莱因(Klein,(C.)F.)著的《19世纪数学发展史讲义》(1926—1927)一书,是断代体近现代数学史研究的开始,它成书于20世纪,但其中所反映的对数学的看法却大都是19世纪的.前苏联数学家柯尔莫哥罗夫(Колмогоров, A. H.)和数学史家尤什克维奇主编的《19世纪的数学》(3卷,1978－1987),1978年,法国数学家迪厄多内(Dieudonné,J.)所写的《1700—1900数学史概论》是比较好的断代史著作.不过总的看来,断代体数学史专著并不多,但却有一些著名的论文,如德国数学家外尔(Weyl,(C. H.)H.)的《半个世纪的数学》等.对数学各分支的历史,从微积分学、代数学、几何学、数论、概率论,直到极限概念、积分概念、流形概念、希尔伯特23个数学问题的历史等,有多种专著出现,而且不乏名家手笔.许多著名数学家参与数学史,特别是近现代数学史和数学思想史的研究,使数学本身的创造与数学史创造有效地融合为一个有机整体,可能是基于庞加莱(Poinearé,(J.-)H.)的如下信念,即:"如果我们想要预见数学的将来,适当的途径是研究这门科学的历史和现状".

6.历代数学家的传记以及他们的《全集》、《选集》的整理和出版.这是数学史研究的大量工作之一.由吉利斯皮(Gillispie,Ch. C.)主编的于1980年完成的16卷本《科学家传记辞典》中,拥有从古到今的950多位世界数学家的极其宝贵的传记史料.此外,还有多种《数学经典论著选读》出现,辑录了历代数学家成名之作的珍贵片断.以出版数学黄皮书及高质量数学专著而闻名的德国施普林格出版社,自1964年以来陆续出版了几十位著名数学家的著作集(全集或选集),是极有价值的工作.

7.专业性学术杂志.世界上最著名的科学史杂志是美国科学史学会主办的《爱雪斯》(季刊)和《奥赛力斯》(刊登长篇论文的不定期刊物),这两种期刊都刊登数学史的论文.早期出版的专门的数学史期刊,有德国数学史家康托尔(Cantor,M. B.)主编的《数学史杂志》(1877—1913,30卷)和意大利数学史家洛里亚主编的《数学史杂志》(1898—1922,21卷)等,而最著名的是德国恩内斯特勒姆(Eneström,G.)主编的《数学宝藏》(1884～1915,30卷);这些杂志均早已停刊.现代出版的有:《国际数学史杂志》(1974年创刊),是国际科学史协会数学史委员会的机关刊物;苏联数学史家雷布金(Рыбкин,Г. Ф.)和尤什克维奇主编的《数学史研究》(1948年创刊)以及日本数学会主编的《数学史研究》杂志等,都是国际数学史界最好的出版物.

中国虽是一个史学极其发达的国家,但数学史(包括科技史)长期以来却是一个很少涉及的领域.在漫长的封建社会里,只有一些包含在对古代科技史料记述中的数学史片段分散在各种史书中,并没有形成理论体系.比如在《汉书·律历志》和《隋书·律历志》中的"备数"条内就有对数学的作用和数学的历史的论述等.历代正史《列传》中,有时也给出了数学家的传记.正史的《经籍志》则记载有数学书目.在中国古算书的序、跋中,也常能发现数学史的内容,但都是一些零散的片断资料.对中国古代数学史进行较为系统的整理和研究,是在清代中晚期才开始进行的.主要是对古算书的整理和研究,以及编辑出版《畴人传》等.

利用现代数学概念,对中国数学史进行研究和整理,从而使中国数学史研究建立在现代科学方法之上的学科奠基人是李俨和钱宝琮.他们都是从五四运动前后起,开始搜集古算书,进行考订、整理和开展研究工作的.经过半个多世纪,李俨著有《中国算学史》(1937)、《中算史论丛》(1—5集,1954—1955)、《中国数学大纲》(1958)等;钱宝琮著有《中国算学史》(上,1932)、《中国数学史》(主编,1964)和由他校点的《算经十书》(1963)行世.在李、钱之后有严敦杰,他从1936年开始发表数学史论文,在对中国古代数学开展研究的当代学者中,他是成就卓著的一位.著名数学家吴文俊从20世纪70年代初即开始研究中国古代数学史,他的工作受到国际数学界的瞩目.

从19世纪中叶起,即有人(伟烈亚力(Wylie, A.)、赫思慎(Van He)等)用外文发表中国数学史方面的文章.20世纪初,日本人三上义夫的《中日数学之发展》,以及20世纪50年代李约瑟(Joseph, N.)在其巨著《中国科学技术史》(第三卷)中对中国数学史进行了全面的介绍.有一些中国的古典算书已经有日、英、法、俄、德等文字的译本.在英、美、日、新加坡、俄、法、比利时等国都有人直接利用中国古典文献进行中国数学史的研究,以及和其他国家及地区数学史的比较研究.目前,中国数学史在国际上引起越来越多的关注.

数学史的学术团体为建立数学史研究者之间的联系,组织数学史国际会议等均作出应有的贡献.

撰　稿　杜瑞芝　王　辉
审　阅　李　迪

中 国 数 学 史

中国古代数学史

中国数学史(history of mathematics in China)数学史的重要分支之一.主要研究对象为数学成果、计算工具、数学家、数学思想以及它们产生的背景与发生的影响,以此为中心构成了本学科丰富的内容.研究目的在于探讨数学在中国的发展规律,提供借鉴,推动后来.中国数学史的断代与分期,目前尚无统一标准.一般说来,起自上古而止于1911年,其间以17世纪为界分为前后两大阶段.17世纪之前,主要表现为以筹算为中心的中国传统数学体系与算法的确立;17世纪之后,主要表现为以笔算为中心的西方数学的传入.进一步地,又可依其自身特征分为五个发展时期:

1.中国传统数学的萌芽时期(上古—东汉初,约公元前4000—公元25年);

2.中国传统数学体系的形成与发展时期(东汉初—五代,公元25—960年);

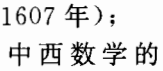
3.中国传统数学的繁荣时期(北宋—元初,公元960—1303年);

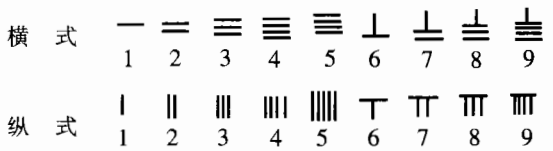
4.中国传统数学的低落时期(元初—明末,公元1303—1607年);

5.中西数学的合流时期(明末—清末,公元1607—1911年).

近年来,国内外对于本学科的研究取得了较大的进展,但仍有不少理论的和具体的问题需要进一步地探讨.

中国传统数学的萌芽(the rudiments of the traditional mathematics in China) 从上古至东汉初(约公元前4000—公元25年)为中国传统数学的萌芽时期.自新石器时代至夏、商、周,祖先对形和数已经有了较多的认识.春秋至西汉,古籍记载的数学知识逐渐增多.近年出土的西汉中期的《算数书》说明中国传统数学已经积累了丰富的知识.十进位值制的记数法和算筹的出现为此期数学的特征.

对形与数的早期认识.西安半坡遗址出土的约公元前4000年左右的各种陶器,反映出先民对立体形状已有一定的认识.陶器上的图案,诸如矩形、三角形等,则反映出对于平面图形的若干认识.陶器上刻有按三角形排列的圆点,第一层一,第二层二,直到末层八,其中的意义今已难以确知,但可反映出对于整数的认识已多于五,陶器上出现的刻画符号有|、‖等.与半坡约同时的姜寨出土的陶片中还出现了|||、一等.这些符号均与后世的筹码相类似.中国是世界上最早采用十进位值制的地区.甲骨文的数字已经构成了完整的十进制.商代甲骨文已有一至九这九个数目字,以及十、百、千、万等.表示多位数时,常用合文连同位值一同表出,如"八月辛亥允弋伐人  ",其中数字为2656. 表示二个千, 表示六个百, 表示五个十, 表示个位六.这与十进位值制的原则完全相符.古埃及亦曾采用十进制,但符号多于十个,不是位值制.算筹,又称策、算、筹、筹算、筹策、算子、枝、筵,是中国传统数学的主要计算工具.它的出现约在西周(公元前11世纪—公元前771年)、春秋战国(公元前770年—公元前221年)时期,应用已属普遍.20世纪50年代,长沙战国晚期墓有竹制算筹出土.据《逸周书》、《楚辞》、《方言》等书记载推测,早期的算筹尚无定制,树枝、竹枝、茅草之属皆可为筹.西汉(公元前204年—公元24年)时期,算筹已有定制.《汉书》律历志载:"其算法用竹,径一分,长六寸,二百七十一枚而成六觚,为一握."由《汉书》律历志、《数术记遗》、《隋书》律历志等记载来看,算筹的长度逐渐变短.从出土的战国、西汉、东汉算筹实物来看,均较时代与之相近的文献记载长度稍短.用算筹表示数字有纵横两式.



据《孙子算经》、传本《夏侯阳算经》的记载,用算筹表示多位数时,从末位到首位须遵守纵横相间的原则,用空位表示零.例如,1860867记为



数学知识的积累.大约西周末期成书的《周易》记载的阳爻(—)、阴爻(— —)以及由此所得到的四象、八卦、六十四卦,与今之有重复排列的计算结果相同.从m个不同元素中每次取n个的有重复排列为$P_m^n=m^n$.《周易》的结果是$m=2,n=2,3,6$时的特例.春秋时期,简单的算术知识已属士人的常识.《韩诗外传》卷三载,齐桓公招贤,期年而士不至,因有人以"九九薄能"受到礼遇,遂使四方之士相导而至."九九"是古代的算术代称.由此可见春秋时期算术知识普及之一斑.战国时期,墨家学派提出的一些定义和命题在中国数学史上有重要意义.《墨子》经

上、经说上、经下、经说下等四篇与数学有关. 如，“平，同高也”(高度相等)，“直，参也”(三点共线)，“圆，一中同长也”(中心到圆周各点等距)，“方，柱隅四谨也”(四个角皆为直角)等，均与今之几何学定义一致. 墨家的这些定义与命题对中国传统数学有一定影响. 1984 年，湖北江陵张家山西汉墓出土的简册本《算数书》是中国数学史上的重大发现. 据考证，该墓下葬时间在公元前 187 年至 157 年间. 简文共分六十余个小标题，其中包括“增减分”、“相乘”、“合分”、“经分”、“少广”、“方田”、“程禾”等. 从这些标题来看，其内容涉及到整数、分数四则运算、比例计算、面积计算等，其中的一些标题和题目还出现在稍后的《九章算术》中. 例如，少广条下：“广一步半步. 以一为二，半为一，同之三以为法. 即直二百卅步，亦以一为二，除如法得从步，为从百六十步.”此与《九章算术》少广章第一题内容、数据相同，惟文字叙述不同.《算数书》与《九章算术》的关系究竟如何，尚待探讨.《周髀算经》是一部论述盖天说的著作，据考证约成书于公元前 100 年左右. 该书记载了勾股定理、比较复杂的分数计算、开平方计算及“日高术”. 后者对重差术的发展有重要影响. 从该书可以看到数学已经成为天文学的不可缺少的工具.

中国传统数学体系的形成与发展(the shape and development of the system of traditional mathematics in China)　从东汉初至五代(公元 25—960 年)，中国传统数学体系逐步形成并得到发展. 经过长期的积累，至公元 1 世纪下半叶确立了中国传统数学的经典——《九章算术》. 该书的确立标志着以筹算为中心的中国传统数学体系业已形成. 其后的六七百年间，从赵爽、刘徽到李淳风，在算法、理论及应用诸方面均有不断的发展. 唐初李淳风奉敕注释十部算经，对此期的数学文献做了一次比较系统的整理. 各种筹算算法的确立为此期数学的特征.

中国传统数学体系的形成. 《九章算术》九卷，共 246 题、202 术. 内容涉及算术、平面几何、立体几何、初等代数等分支. 该书突出成就在于代数方面，特别是开平方法、开立方法、多元一次方程组解法及正负数加减法则等，均属世界数学史上遥遥领先的成果. 开平方法与开立方法的原理相同. 首先估得初商，而后每求得方根的一位数之后便作减根变换，在减根变换后的方程中略去高次项，而仅以一次项系数除常数项得方根的下一位数. 由于《九章算术》开方法以方根的每位数而不以其位值一同入算，所以在方根的每位数求得之前一步要作倍根变换. 以开立方为例，其原理可用现代符号表示如下：若

$$f(x) = x^3 - N = 0 \quad (N > 0),$$

a 为方根的第一次近似值，则方根的第二次近似值为

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

1600 年的韦达法，1690 年的 Newton - Raphson 法，其原理皆与《九章算术》法相同. 多元一次方程组解法，数学史上称之为直除法，与今之加减消元法原理相同. 相消过程中出现的正数与负数的加减运算依“正负术”进行. 此外，方程组的解法中还涉及正数与负数的相乘运算. 在欧洲数学史上，多元一次方程组解法于 1559 年由法国彪特(Buteo, J.)给出. 其时欧洲对负数尚缺乏认识，故其方法难称完善.《九章算术》以实用为标准将题目分为九类，每类之中算法相同的题目集中排列而后给出术文. 这种体例构成了中国传统数学体系的基本模式. 术文亦即算法，构成了该体系的主要部分，而作为算法基础的数学理论，则寓于算法之中. 新课题、新算法的不断出现使得该体系得到了不断的发展.

中国传统数学体系的发展. 三国时代吴国人赵爽《周髀算经》注中的“勾股圆方图注”与“日高图注”是勾股算法的重要发展. “勾股圆方图注”用出入相补原理给出勾股定理及六组勾股恒等式的严谨证明，其中包括二次方程正根的几何解法. “日高图注”

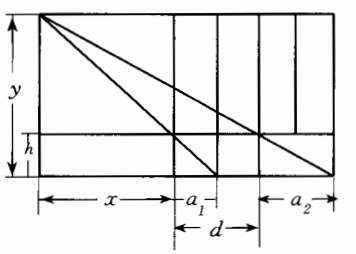


图 1

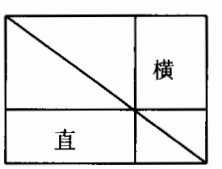


图 2

证明了“盖天说”的日高公式，如图 1. 设大地为平面，相距 d 立南、北两表各高 h，日中南影长 a_1，北影长 a_2，则日高

$$y = \frac{hd}{a_2 - a_1} + h.$$

赵爽的证明依据如下的事实：勾中容横与股中容直二积相等，即图 2 中横积与直积相等. 13 世纪的杨辉称之为勾股旁要法.《九章算术》勾股章后八题属于旁要内容. 赵氏的证明奠定了由旁要术向重差术发展的基础. 刘徽《九章算术》注(263 年)与《海岛算经》对中国传统数学体系、算法做出卓越贡献. 刘徽《九章算术》注序称：“故枝条虽分而同本干者知发其一端而已.”这种探本求源的治学态度与其注文中所体现的深刻数学观点一脉相承. 注文的贡献约分两点：

1. 对该书若干重要算法的正确性及其内在联系予以论证，使之建立在严谨的理论基础之上.

2. 给出若干富有创造性的算法，使该书内容得以丰富.

《九章算术》的方田、粟米、衰分、均输、盈不足、

方程诸章绝大多数问题是一次的，算法中涉及到一组成比例的量. 例如，分数的分子与分母，衰分章的列衰，盈不足章的人数、出钱数与盈不足数，方程每行的数值等. 对此，刘徽定义了“率”以概括这一类量. 从而，上述各类问题的算法概括为率的变换与运算. 方田章经分术刘注：“凡数相与者谓之率. 率者，自相与通. 有分则可散，分重叠则约也. 等除法实，相与率也.”根据率的“自相与通”(或称“不失本数”、“不失本率”)性质，刘徽给出“齐同”的概念. 所谓齐同是指将率作恒等变换使两个率基于同一比较标准. 例如，方田章合分术刘注：“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同. 同者，相与通同共一母也. 齐者，子与母齐. 势，不可失本数也.”盈不足章第四题刘注：“盈朒维乘两设者，欲为齐同之意.”方程术刘注：“先令右行上禾乘中行，为齐同之意. 为齐同者，谓中行上禾亦乘右行也. 从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣.”均输章第十题刘注：“凡率错互不通者皆积齐同用之. 放此，虽四五转不异也.”相通的率便可进行“相并”、“今有”、“通计”、“直减”等各种运算. 于是，散见于该书各章的分数运算、比例算法、盈不足以及方程诸算法皆统之于“率”. 该书商功章给出的各种简单几何体的体积公式未予证明. 刘徽注文给出刘徽原理、刘徽-祖暅原理，并对一些主要公式予以证明，从而使得该书中的体积算法系统化、严

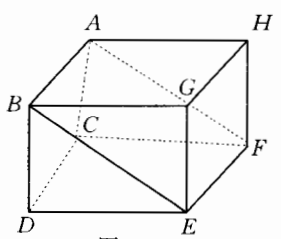


图 3

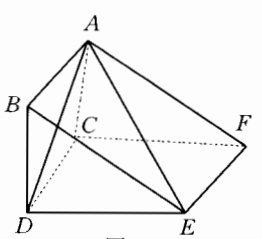


图 4

格化. 对于多面体，刘徽以长方体($V=abc$，图 3)、堑堵($V=abc/2$，图 4，$ABCDEF$)、阳马($V=abc/3$，图 4，$ACDEF$)、鳖臑($V=abc/6$，图 4，$ABDE$)为基本几何体，其他各种或分割为或等积变形为这四种求积. 对于圆柱、圆锥、圆台则作其外切正四棱柱、正四棱锥、正四棱台，由体积之比等于同一高度截面积之比——刘徽-祖暅原理得所求体积. 至此，除球体积公式，简单几何体体积公式都得到证明. 刘徽创造性算法的代表是割圆术与阳马术，建立了圆周率古典算法与体积算法的基础. 割圆术由

$$S_{2n} < S_{圆} < S_n + (S_{2n} - S_n)$$

双边逼近圆面积，从而求得 π 的近似值，其中 S_n、S_{2n} 分别是圆内接正 n 边形面积、正 $2n$ 边形面积. 刘徽设圆半径为 10(寸)，反复应用勾股定理及正多边形面积公式求得

$$S_{96} = 313\frac{584}{625},\ S_{192} = 314\frac{64}{625}.$$

由此
$$314\frac{64}{625} < S_{圆} < 314\frac{169}{625}.$$

取 $S_{圆}=314$，得 $100\pi=314$，$\pi=175/50$. 刘徽认为：“割之弥细，所失弥少. 割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣.”阳马术给出刘徽原理：“阳马居二，鳖臑居一，不易之率也.”即图 4 中

$$V_{ACDEF} : V_{ABDE} = 2 : 1.$$

刘徽以正方体分割得到的阳马与鳖臑为例，证明这一结论成立，而后推广到一般. 如图 5，$AC=CD=CF=2$(尺)，过各棱中点 O、H、R 分别作平面垂直于该棱. 于是阳马 $ACDEF$ 分割为一个正方体 $OJKNCHQR$，二个堑堵 $JKHQDP$、$NKRQFI$，二个阳马 $AOJKN$、$KQPEI$，鳖臑 $ABDE$ 分割为二个堑堵 $GBJLMK$、$JKLMDP$，二个鳖臑 $AGJK$、$KMPE$. 从阳马 $ACDEF$ 中取出一个正方体，二个堑堵，即两个棱长为 1(尺)的正方体，从鳖臑 $ABDE$ 中取出二个堑堵，即一个棱长为 1(尺)的正方体. 取出的体积之比为 2∶1. 剩余的体积仍依上述方法分割，取出的体积仍为 2∶1. 将这一过程继续进行下去，刘徽认为：“半之弥少，其余弥细. 至细曰微，微则无形. 由是言之，安取余哉.”在这一过程中，每次取出的体积属于阳马的与属于鳖臑的比始终是 2∶1. 由此，刘徽原理成立.《海岛算经》根据勾股不失本率原理(相似勾股形对应边成比例)证明了重差公式(参见图 1)

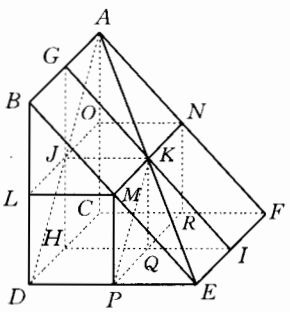


图 5

$$x = \frac{a_1 d}{a_2 - a_1},\quad y = \frac{hd}{a_2 - a_1} + h,$$

并推广到“三望”、“四望”的情形，建立了系统的重差术. 重差指表物距差 d，影长差 a_2-a_1.《孙子算经》三卷(约 400 年左右)、《张丘建算经》三卷(约 466—485 年)是《九章算术》之后较早出现的两部算经，其中某些算法有共同之处.《孙子算经》以其“物不知数”算法影响后世独深. 该题相当于求解同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3), \\ x \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5), \\ x \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 7). \end{cases}$$

算法给出 $x=70\times2+21\times3+15\times2-2\times105=23$. 此题虽较简单，但算法具有明确的构造性，给出孙子定理的最初形式. 后经秦九韶等人的发展成为一般算法.《张丘建算经》记载了丰富的等差数列算法，如

$$a_n=a_1+(n-1)d \quad (卷上第十八题),$$

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\quad\text{（卷上第二十三题），}$$

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\quad\text{（卷下第二十四题）}$$

等. 其中个别公式已见于《九章算术》刘注，而大部分属于新增. 该两书均涉及到最小公倍数的概念，并给出算法.《孙子算经》卷下第三十五题给出[3,4,5]=60.《张丘建算经》还讨论了分数的“最小公倍数”. 其卷上第十题给出

$$\left[\frac{325}{150},\frac{325}{120},\frac{325}{90}\right]=\frac{325}{(150,120,90)}=10\frac{5}{6}.$$

值得注意的是，两书关于最小公倍数的算法皆根据齐同的概念. “二色差分”及其推广——“三色差分”是该两书，特别是《张丘建算经》独到之处. 已知甲物单价 α，乙物单价 $\beta(\alpha>\beta)$，又知共钱 M 买得共物 N，求甲、乙二物各若干. 这类问题通常称为二色差分.《孙子算经》卷下第三十一题给出这类问题的算法，《张丘建算经》卷中第十八题更明确表述为

$$\text{甲物}=\frac{M-N\beta}{\alpha-\beta},\quad\text{乙物}=\frac{N\alpha-M}{\alpha-\beta}.$$

这一算法为后世常用. 百鸡问题是三色差分的最早记载. 该题相当于求解三元一次不定方程组

$$\begin{cases}x+y+z=100,\\5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100.\end{cases}$$

《张丘建算经》所给答案正确，但所载术文不完全. 这促使后世学者不断探讨，遂形成内容丰富的各色差分及其算法. 由三色差分发展过程推测，《张丘建算经》本法可能是先设一物为若干，并算出对应的值钱数，将原题转化为二色差分求解. 继刘徽之后，祖冲之将 π 的精确度提高到一个新水平. 据《隋书》卷十六载，祖冲之给出

$$3.1415926<\pi<3.1415927,$$

并化为便于算筹表示的分数

$$\pi\approx\frac{355}{113}\text{（密率）},\quad\pi\approx\frac{22}{7}\text{（约率）}.$$

这是当时世界上最精确的 π 的值. 直到 16 世纪，德国人奥托(Otto,V.)才求得密率. 在刘徽的基础上，祖暅根据“幂势既同则积不容异”这一原理成功地给出球体积算法. 刘徽在《九章算术》注文中指出球体积旧有算法误差过大. 他作正方体的两个内切圆柱使其轴线互相垂直，并称其相交部分为牟合方盖，进而指出正方体内切球体积与牟合方盖体积之比为 π 比 4，即 $V_{球}:V_{盖}=\pi:4$. 刘徽未能求出牟合方盖的体积，球体积只得付之阙疑. 祖暅取该立方体的一隅进行研究. 如图 6，立方体棱长为内切球半径 r. 祖暅指出，立方体减去它所包含的八分之一的牟合方盖，所余体积与一正方形底面边长为 r、高为 r 的倒立的阳马等积(积不容异)，即 $r^3/3$. 理由是两者在等高处

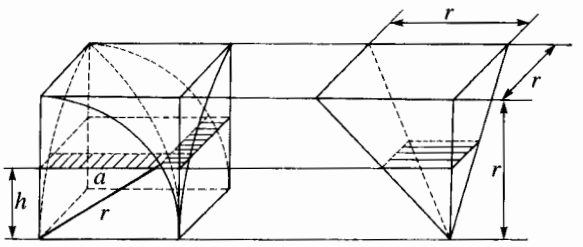


图 6

截面的比相等(幂势既同). 由此，八分之一牟合方盖的体积为 $2r^3/3$，即牟合方盖体积是 $16r^3/3$，进而由刘徽的比例式求得球体积为 $4\pi r^3/3$. 在中国数学史上，刘徽首先运用两等高几何体体积之比等于截面积之比这一原理，祖暅成功地运用这一原理给出球体积的算法. 在西方数学史上，这一原理的最初思想可以上溯到古希腊的德谟克利特(Democritus)，1635 年，由意大利卡瓦列里(Cavalieri,F. B.)明确提出. 王孝通《缉古算经》(7 世纪初)共 20 题. 主要讨论形如

$$x^3+px^2+qx=r\quad(p>0,q\geqslant 0,r>0)$$

的三次方程的建立与解法. 该书以下列句型简要地指示这类方程的解法：以 r 为实，以 q 为方法，以 p 为廉法，从，开立方除之. 据此可以推测其解法的大致步骤.《九章算术》开立方术给出以 r 为实，开立方除之的步骤. 在此基础上，只需在“实”下依次布列“方法”和“廉法”两层，并在计算中注意到与开立方计算结果相“从”，即按位相加即可. 由于当时天元术尚未出现，而主要依赖几何方法建立方程，因此该书涉及到较多的体积算法与勾股恒等式，且颇有新意. 例如第 15 题，已知勾股乘积、勾弦差，求勾股形三边. 该书给出

$$a^3+\frac{c-a}{2}a^2=\frac{(ab)^2}{2(c-a)}.$$

这一算法至清初梅彀成再次给出. 该书是中国古代第一本方程专著，它的出现标志着中国传统数学在方程建立与解法方面开始系统化. 中国传统数学经汉、唐数百年间的发展，积累了以十部算经为代表的丰富内容. 这十部算经是：《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《缉古算经》、《夏侯阳算经》以及《缀术》. 唐代国子监算学馆以李淳风注释的十部算经为主要教材. 今传本《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《张丘建算经》、《五经算术》皆有李注. 其中，《周髀算经》注释质量最好，其余四种似以帮助学生理解课文为主旨而于算理精义发挥不多. 十部算经由李淳风注释之后成为定本. 这是对前一段数学著作的一次系统整理，对后世数学的发展产生了深远的影响. 北宋元丰七年(1084 年)秘书省刊刻十部

算经时,《夏侯阳算经》、《缀术》已经失传,而以 8 世纪末唐代的一本算术书代前一种,实刻九部. 南宋鲍澣之翻刻时,又以《数术记遗》刻入,复得十部. 传本《夏侯阳算经》三卷实为唐代的一本算术书,与唐初李淳风注释本不同已如上述. 据该书内容及序言可知,作者可能是一位长期从事财会事务的人,根据多年积累的算题删繁就省括诸古法编纂而成. 书中涉及唐代中期经济史料较多且与正史记载相符. 例如,"杂令"系开元九年(721 年)制度,"赋役令"、"田令"系开元二十五年(737 年)制度,"依租变米"诸题系开元二十五年之"变造法"的反映,"公廨本钱"一题系开元十八年(730 年)至天宝八年(749 年)间制度,"两岁钱"系建中元年(780 年)制度,"垫陌五十"题与建中四年六月(783 年)至兴元二年正月(785 年)间施行的除陌法相符,故其成书不会早于 783 年. 该书记载了筹算乘除法的某些简化算法,反映出筹算乘除法三行布算向一行布算演变的趋势. 例如,乘数是 144 用"身外添四四",除数是 12 用"身外减二". 简化算法在宋代有进一步的发展,并对后来的珠算算法有重要影响.

中国传统数学的繁荣(the prosperity of the traditional mathematics in China) 从北宋初至元初(公元 960—1303 年),中国传统数学呈现繁荣发展的局面. 诸多新的算法、新的课题在不很长的一个时期内相继出现,其中不少成果在世界数学史上遥遥领先,从而使得中国传统数学成为当时世界数学的高峰. 明确的计算程序性与较高的理论抽象性为此期数学的特征.

新算法的涌现. 11 世纪中期出现的贾宪三角形是新的开方法——增乘开方法的精练概括. 原图列至五乘方(相当于二项式六次幂展开式系数),并附有如下的五句口诀:"左袤乃积数,右袤乃隅算,中藏者皆廉,以廉乘商方,命实而除之". 前三句说明横行各数的名称:左边的 1 是被开方数系数 1,右边的 1 是隅算,中间诸数是各廉. 后两句则是增乘开方法步骤的概括. 和贾宪三角形一起,还有"增乘(开)方求廉法草"说明该三角形的构成法则. 其主要内容为:"列所开方数","以隅算一自下增入前位,至首位而止". "复以隅算如前升增,递低一位求之". 以开五乘方为例,列五位,另列隅算:

1 1 1 1 1　　1(隅算)

自隅算始依次向前递加至首位止:

6 5 4 3 2　　1

如此进行,每次低一位:

6 15 10 6 3　　1
6 15 20 10 4　　1
6 15 20 15 5　　1
6 15 20 15 6

此即开五乘方各廉. 这一算法容易推广为求任意给定的正整数次开方的廉. 这一算法也是对增乘开方法基本步骤的说明. 若每次先以上商乘以加数而后与前位相加,并在最后一次与实相减即为增乘开方法. 贾宪的增乘开平方法、增乘开立方法就是这种算法. 它们与《九章算术》开方法的原理相同,仅将分项计算的程序改进为随乘随加的连续计算的程序,使得开方运算成为一种简单算法的机械重复,即反复运用"倍根——估根——减根"的算法,求出方根的每位数. 正是由于这一特点,增乘开方法出现之后不久便推广为求解一般高次方程正根的方法.

约 11 世纪末出现的刘益《议古根源》在求解高次方程方面有重要贡献. 刘益之前,中国传统数学讨论的高次方程对系数均有所限制. 例如,三次方程

$$ax^3 + bx^2 + cx = d,$$

其中 $|a| = 1, b, c, d > 0$. 刘益所讨论的方程仅限制 $d > 0$,其余各项可正可负. 刘益的正负开方术与求解一般高次方程正根的增乘开方法基本相同. 例如,刘益用益隅法与减从法求解

$$-x^2 + 60x = 864,$$

其中的减从法演算步骤基本上是"随乘随加". 又如,求解

$$-5x^4 + 52x^3 + 12x^2 = 4096$$

的演算步骤完全是"随乘随加".

秦九韶《数书九章》(1247 年)记载的正负开方术是在增乘开方法基础上产生的求解一般高次方程正根的方法. 秦九韶对方程系数的限制与刘益的论述基本相同,但所讨论的方程数量较多,难度较大,解法更加规范. 全书共有二十多个方程,其中包括一个十次方程. 秦九韶正负开方术只要自上而下依升幂排列方程各项系数并注意到初商的运算须与方程各系数相加,其余步骤均与贾宪增乘开方法相同.

1819 年的霍纳法与秦九韶法基本相同. 霍纳法没有倍根变换,又可由一次减根变换得到根的不止一位数,这与计算工具不同有关. 建立方程的一般方法——天元术出现于 13 世纪. 现有资料以李冶《测圆海镜》(1248 年)记载最早. 天元即未知数,用筹码"|",并旁注"元"字表示:|元|. 建立方程的步骤,先设所求数为"天元一",根据已知条件建立两个等值的多项式,而后"相消"得到天元式亦即方程. 例如,图 1 所示筹式表示方程

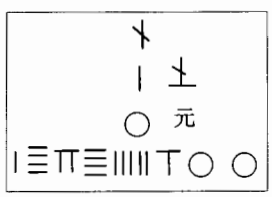


图 1

$$-x^3 - 16x^2 + 14745600 = 0.$$

天元术出现之前,建立方程主要依据几何方法,具有很大的局限性. 随着一般高次方程解法的出现,

建立方程的一般方法成为必需.天元术的出现可能受到设未知数为1这一方法的启发.《九章算术》方程章“五家共井”题刘徽注,设井深为1而后求解,《张丘建算经》可能使用过设“最小公倍数”为1的方法.这种方法的一般化可能是“立天元一”的一个来源.《数书九章》中的大衍总数术,亦即通常所说的孙子定理,是此期数学突出成就之一.这一算法通常表述为下列定理:设 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 是 k 个两两互素的正整数,$M=m_1m_2\cdots m_k=m_iM_i$,则同余式组

$$\begin{cases} x\equiv R_1(\mathrm{mod}\ m_1),\\ x\equiv R_2(\mathrm{mod}\ m_2),\\ \quad\cdots\cdots\\ x\equiv R_k(\mathrm{mod}\ m_k) \end{cases}$$

的解是

$$x\equiv\sum^{k}M_iM'_iR_i(\mathrm{mod}\,M),$$

其中

$$M_iM'_i\equiv 1(\mathrm{mod}\,m_i)\ \ (i=1,2,\cdots,k).$$

这一算法由其最初形式发展为一般形式,秦九韶的贡献有如下两点:

1.求定数法.给出的 k 个模(问数)非两两互素时,秦氏设法将其化为两两互素(定数).

2.求一术.正确地给出求 M'_i(乘率)的算法.

求一术第二点是秦氏的杰作.高斯(Gauss.C.F.)在《算术探究》(1801)中给出这一定理.朱熹、蔡元定分别在《周礼》郑玄注、司马迁《史记》律书基础上给出由三分损益法所得十二律长的十进分数值换算为九进小数值的算法.他们的算法与现代的十进小数换算为九进小数的方法原理相同.这一工作为明代朱载堉的工作奠定了基础.此期的筹算简化算法有新的发展.杨辉《算法通变本末》三卷(1274年)比较详细地介绍了这些方法,其中有加法代乘五法、减法代除四法、求一乘、求一除及归除口诀等.朱世杰《算学启蒙》三卷(1299年)记载的归除口诀三十六句与今常用者已大体相同.简化算法对珠算的产生与发展有重要影响.

新课题的涌现.纵横图(今称幻方)及其构造规律是此期数学研究的新课题之一.纵横图的出现可上溯至《周易》系辞传“天地之数”与《易纬乾凿度》“太乙九宫”这两段文字的郑玄注,宋代道家河图、洛书之说即本于此.作为数学问题提出并研究其构造规律始自杨辉《续古摘奇算法》(1275年).除河图、洛书之外,该书卷上又给出十三种纵横图:四四图、五五图、六六图、七七图、六十四图、九九图、百子图、聚五图、聚六图、聚八图、攒九图、八阵图、连环图,其中有些图给出易换术与求积术.此后,王文素《算学宝鉴》(1524年)、程大位《算法统宗》(1592年)均载此项内容,至清保其寿《增补算法浑圆图》(1880年?)又发展为在正四面体、正方体及球面上布数.这些内容现已成为组合数学研究课题.阿拉伯和西方大约从14世纪开始此项研究.会圆术及其应用是又一个新课题.所谓会圆术是指圆径、弦、矢及所对弧长的近似算法,始见于沈括《梦溪笔谈》卷十八.如图2,若

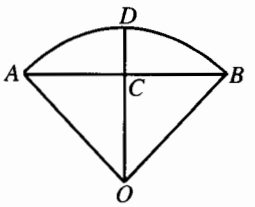


图2

$$OA=OB=\frac{d}{2}=r,$$

$$AB=l,CD=v,$$

$$\overset{\frown}{ADB}=a,$$

则

$$l=2\sqrt{r^2-(r-v)^2},$$

$$a=l+\frac{2v^2}{d}.$$

元代王恂、郭守敬编制《授时历》(1280年),运用会圆术求得球大圆的弧长.如图3,点 O 为天球中心,A 为春分点,D 为夏至点,$\overset{\frown}{ABC}$ 为赤道象限弧,$\overset{\frown}{AED}$ 为黄道象限弧,$\overset{\frown}{NEB}$ 为赤经弧,点 E 为太阳所在位置.已知 $\overset{\frown}{DC}$(黄赤大距即黄赤交角)、$\overset{\frown}{ED}$(黄道度即黄经余弧),求 $\overset{\frown}{EB}$(赤道内外度即赤纬)、$\overset{\frown}{BC}$(赤道积度即赤经余弧).《授时历》在勾股形 OGD、OKE、OFE、OMB 所在圆内运用会圆术并结合四次方程解法、相似勾股形对应边的比例式得到 $\overset{\frown}{EB}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$.这一算法与球面直角三角形的解法殊途同归.计算中用到 $EF=KL$、$EK=FL$ 符合正投影原理.梅文鼎据《授时历草》所撰《明史》历志、《堑堵测量》所载“郭太史本法”均有天球的“侧视之图”、“平视之图”,将上述球面问题转化为平面问题计算.今传各图未能尽合“长对正、宽相等、高平齐”的正投影法则当系图形摹刻失真所致.质言之,王恂等人已经掌握天球二视图的画法.

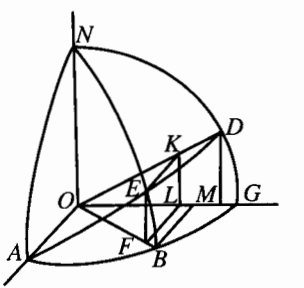
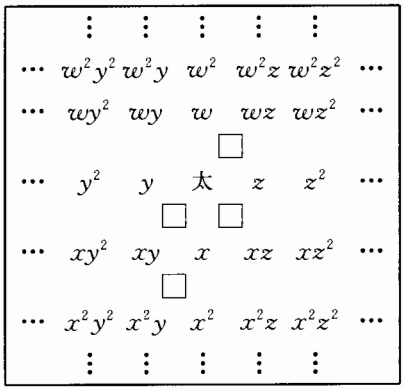


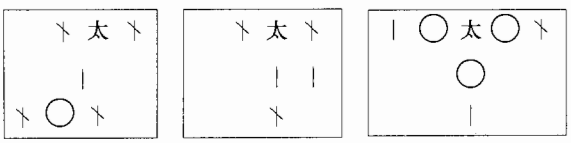
图3

朱世杰《四元玉鉴》(1303年)记载的四元术是在天元术基础上产生的一个新课题.四元术相当于四元高次方程组的表示、建立及解法.四元的名称是天、地、人、物,常数项仍称为太.若以 x、y、z、w,代

之，则四元式各项位置略如下图所示：



其中，四个空格的位置用以放置某些交叉项. 例如



表示方程组

$$\begin{cases} -xy^2 - y + xyz - x - z = 0, \\ -y + x - x^2 - z + xz = 0, \\ y^2 + x^2 - z^2 = 0. \end{cases}$$

其解法的关键是四元相消. 朱世杰将其分为“剔而消之”、“互隐通分相消”、“内外相乘相消”三步. 尽管这三步的名称各异、演算步骤不尽相同，然而其原理与现在的代入法并无不同. 西方数学关于消元法的一般论述始见于法国贝祖(Bézout, É.)《代数方程的一般理论》(1779 年). 《四元玉鉴》中的垛积术与招差术是另一新的课题. 中国传统数学将级数依其几何意义称为垛积. 垛积术包括两方面的内容：对给定的垛，由项数求和；对给定的垛，由和求项数. 垛积术的萌芽可上溯至《九章算术》商功章刍童术，刍童是长方台形的草垛，刍童术用以计算该草垛的体积，是时尚未计及草垛的草束总数. 沈括《梦溪笔谈》卷十八记载隙积术指出，以刍童体积值代替垛积总数失之于少，另行给出垛积求和公式，是为垛积术之创始. 朱世杰的贡献在于将垛积术建立在贾宪三角形基础之上，利用该三角形的规律计算垛积的和数，从而开创了以贾宪三角形为基础构造各类垛积的一般方法及其求和法. 朱世杰主要讨论两类垛积. 三角垛

$$\sum_1^n \frac{1}{p!} r(r+1)\cdots(r+p-1)$$

$$= \frac{1}{(p+1)!} n(n+1)\cdots(n+p),$$

其中 $p=1,2,3,\cdots$，分别对应贾宪三角形从左至右第 2,3,4,…斜行. 四角垛

$$\sum_1^n \frac{1}{p!} r(r+1)\cdots(r+p-2)(2r+p-2)$$

$$= \frac{1}{(p+1)!} n(n+1)\cdots(n+p-1)(2n+p-1).$$

朱世杰的招差术是垛积求和的通法. 朱氏给出三阶等差级数的和

$$f(r) = r\Delta^1 + \frac{1}{2!}(r-1)r\Delta^2 + \frac{1}{3!}(r-2)(r-1)r\Delta^3 + \frac{1}{4!}(r-3)(r-2)(r-1)r\Delta^4,$$

此即四次插值公式. 朱氏指出该公式的构造是“各差乘各积，四位并之.”依此不难写出一般的插值公式. 插值法在西方数学史上由布里格斯(Briggs, H.)《对数算术》(1624 年)引入；格雷里果(Gregory, J.)于 1670 年给出公式；牛顿(Newton, I.)在《原理》卷三(1687 年)、《微分法》(1711 年)中给出粗略的证明.

中国传统数学的低落(the lowtide of the traditional mathematics in China)　从元初至明末(公元 1303—1607 年)，中国传统数学呈现低落状态. 所谓低落状态是指以筹算为中心的算法未能达到前一时期的水平而数学发展的重点转向日用算法的普及. 这一趋势导致珠算的产生与发展. 珠算(包括算盘与算法)的产生与发展，就其本身而言，是中国传统数学向前发展的一种表现. 然而，此期数学的整体水平明显低于前一时期，则是一个显然的事实. 至于低落的原因乃是数学史界讨论中的一个问题. 诸如道学的影响、八股取士对数学发展的阻碍等都是已经指出的因素. “筹珠交替”为此期数学的特征.

传统数学的研究. 从《透帘细草》、《算法全能集》、《详明算法》、《丁巨算法》(1355 年)及《通原算法》(1372 年)等书可以看到元初至明初数学发展的一些情况. 《透帘细草》作者及年代无考，今存 71 题(知不足斋丛书本 54 题，《永乐大典》17 题). 该书中开立方题后载：“旧草冗繁，今以透帘开之.”据此，“透帘”二字当有简明之意. 玄览堂本《算法全能集》二卷，题“长沙贾亨季通类编”，与传本《详明算法》相比较，该书少“田亩纽粮”一节，多“开平方”一节，多“田亩丈量”节开平方一题，其余内容基本相同. 该书文字比较精审，板刻有元初风格. 《详明算法》二卷，今传洪武癸丑(1373 年)庐陵李氏明经堂刊本及据以排印的朝鲜铜活字本，卷首有安止斋序. 据此序称：“旧本极为详明，访求之久，不复可得”，“以所闻如旧法分上下二卷尽其说”. 卷下末称：“凡不切于初学者不及□载.”由此可知，今传本当系旧本的改编本. 又据程大位“算经源流”，《详明算法》为“元儒安止斋何平子作”，今传本无“何平子”三字. 据此，程大位所见本与今传本不同. 这两种《详明算法》的祖本可能是上述的《算法全能集》. 《丁巨算法》原本八卷，今存 89 题(知不足斋丛书本 62 题、《永乐大典》27

题).严恭《通原算法》今存 64 题(参见于《永乐大典》).上述各书主要是日常应用的计算问题,浅显易明.其中的简化算法、开平方法与开立方法的记载对研究筹算向珠算的转变有参考价值.除此之外,还有一些数学内容散见它书.如赵友钦《革象新书》卷下"勾股测天"节、"乾象周髀"节、舒天民《六艺纲目》卷下"数集纲目"节分别介绍勾股测量、割圆、《九章算术》大意,并无创新.明代中叶数学发展的情形有所好转.吴敬《九章详注比类算法大全》十卷首一卷(1450 年),王文素《新集通证古今算学宝鉴》四十一卷首一卷(1524 年)、周述学《神道大编历宗算会》十五卷(1558 年)可为此期传统数学的代表.与元初至明初算书相比较,这些著作的卷帙较大,内容广泛.不足之处是,缺乏新意,甚至对宋元时期一些难度较大的算法存在误解.例如,吴敬的著作,卷首介绍算学预备知识及各种常用算法,卷一至卷九诸卷各分为"古问"、"比类"、"诗词"三部分.其中"古问"多摘自杨辉《详解九章算法》相应各卷内容,"比类"为新收的同类题目,"诗词"为歌括体的算题及解法.卷十专列各色开方问题.该书对天元术有误解,不用增乘开方法.顾应祥《勾股算术》二卷(1533 年)、《弧矢算术》不分卷(1552 年)及《测圆算术》四卷(1553 年)是明代中叶比较重要的算书.其中,第一种论勾股定理与勾股恒等式,第二种论沈括以来的弧矢算法,第三种论李冶勾股容圆问题.顾氏虽未能正确理解天元术,而上列三书却体例分明间有心得.

珠算的产生与发展.此处所说的珠算是指与今之面貌大体相同的算盘与算法,即具备下列两个条件的珠算:比较成熟的算盘结构,可用于这种算盘的算法.珠算是数学普及、筹算简化的产物.关于珠算产生的年代,目前尚无一致的意见.依上述珠算的意义,它的产生当在宋—元初.近年发现,元至大三年(1310 年)王振鹏"乾坤一担图"绘有一个有档、有梁、有珠的算盘.这是一个确凿的算盘图.另一方面,《算学启蒙》(1299 年)中对于可用于算盘的筹算留头乘口诀、归除口诀已有详细记载,对于撞归、起一算法也有所反映.《算法全能集》、《详明算法》明载撞归、起一名词及撞归口诀(一归除外).然而,珠算取代筹算成为主要的计算工具至明代中叶方才完成.现传最早的珠算书是徐心鲁《盘珠算法》二卷(1573 年).该书介绍的珠算知识包括"隶首上诀"、"退法要诀"、"归除总诀",算例中用到撞归诀、起一诀.柯尚迁《数学通轨》(1578 年)分为"学算须知"、"归除诠要"、"九章释例"、"九章总义"四节.第一节的"九九上法语"、"九九退法语"、"习九九总念歌"、"九归总歌法语"、"撞归法语"、"还原法语"与今之珠算加减乘除及撞归、起一口诀基本相同,这是珠算口诀最早的全面记载.朱载堉在发明十二平均律的过程中用珠算进行了大量的计算并给出了一些新的算法.《算学新说》(1584 年)首载珠算归除开平方法与经过简化的珠算商除开立方法.朱氏说"平方不用商除、立方不显廉法之类,旧则繁而新则简."这说明上述两法是他的创新.《律学新说》(1584 年)、《律吕精义》(1596 年)记载了十进小数与九进小数的换算法.这一算法的基本思想如下.设有十进小数 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$,九进小数 $(0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_k)_9$.如已知十进小数求九进小数,由

$$0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=\beta_1 9^{-1}+\beta_2 9^{-2}+\cdots+\beta_k 9^{-k}$$

两边累次乘 9;如已知九进小数求十进小数,由

$$0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(\beta_1+(\beta_2+\cdots(\beta_{k-1}+\beta_k\div 9)\div 9\cdots)\div 9)\div 9$$

逐项计算 $\beta_k\div 9$,$(\beta_{k-1}+\beta_k\div 9)\div 9$,…直至除到 β_1.如此便可由已知小数求得未知小数.这一算法在算盘上进行非常简便,而其原理则与现代算法相同.这一算法是珠算史上也是中国数学史上的重要成果.程大位《算法统宗》十七卷及首一卷(1592 年)是珠算的代表作,也是中国数学史上的重要著作.该书以《九章算术》为算学正宗,以广泛的收罗统之于《九章算术》的体例,又冠以珠算知识附以难题杂法,内容详备,流传广泛.仅就珠算而言,详载加法、减法、留头乘、归除、撞归、起一等算法口诀,又载归除开平方、新增归除开立方、开三乘方、带从平方、带从立方、带从三乘方等各项算法.至此,珠算的各种口诀与算法已大体完善.该书有不少内容取自《杨辉算法》以及顾应祥《勾股算术》、《弧矢算术》等书,一些内容又为后来的《同文算指》、《数理精蕴》等书所引用.该书版本很多,至今尚无确切的统计.该书对明清数学,以及日本的和算都有较大的影响.入清以后,在改善珠算的计算速度及训练方法方面有较好的研究.直至今日,珠算在实际应用及思维训练方面仍有重要作用.

中西数学的合流(the confluence of Chinese and Western mathematics)　从明末至民国元年(公元 1607—1912 年),西方数学的传入与研究为此期中国数学的主流,传统数学的整理与研究也是此期不可忽视的一个方面.西方数学译著、编著的大量出现,在许多方面补充了中国传统数学的不足.在此基础上,中国数学家独立获得的若干重要成果则充实发展了传入的知识.乾嘉以降,中国传统数学的整理与研究成就显著.在整理的基础上作出的若干新成果已属变量数学的范围.这一事实说明,中国传统数学按其自身规律可以进入变量数学的阶段.总之,上述两方面的工作成为现代数学发展的预备.此期数学史的一个基本问题是,正确理解西方数学的传入与外国入侵的关系.这一问题涉及面很广,认识也有不断深化的必要,此处不可能给出深入的讨论.应当指出的是,传教

士的东来归根到底为资本主义的原始积累所推动，而文化侵略、教育侵略是帝国主义侵略的组成部分. 笔算数学的确立为此期数学的特征.

西方数学的第一次传入及其研究. 此次传入的数学知识主要有几何、笔算、三角与对数表. 除后者之外，大体相当于欧洲 15 世纪至 16 世纪的数学知识.

1607 年，《几何原本》前六卷译成汉文为西方数学传入中国之始. 该书译者是徐光启、利玛窦(Ricci，M.)，所据底本为德国克拉维乌斯(Clavius，C.)注释本(1574 年). 前六卷主要内容为平面几何. 各卷所论述的内容依次为：三角形、线、圆、圆内外形、比例、线面之比例.《圜容较义》(1608 年)，李之藻、利玛窦译，介绍周长或面积一定时围成的面积或体积的最大值. 该书所据底本不详，但其渊源出自古希腊帕普斯(Pappus)《数学大集》(卷五)则无疑问.《同文算指》前编二卷，通编八卷(1613 年)，李之藻、利玛窦编译，所据底本为克拉维乌斯编写的教科书《实用算术概论》(1583 年)，同时吸收杨辉《田亩比类乘除捷法》(1275 年)、程大位《算法统宗》及顾应祥《勾股算术》等书若干内容. 通编目录中凡注明补若干或俱补字样者皆为克氏原本所无. 该书是第一部介绍西方笔算的著作. 前编主要包括四则运算. 通编主要包括比例、盈不足术、一次方程组、开平方、开带从平方、开立方、开多乘方等. 该书算式用汉文数目字表示. 分数记法是分母在上分子在下.《崇祯历书》一百三十七卷(1629—1634 年)，其中数学著作主要有邓玉函(Terrenz，J.)编译《大测》二卷(1631 年)、罗雅谷(Rho，J.)编译《测量全义》十卷(1631 年).《大测》所据底本不详，主要介绍三角函数表造法、三角函数性质及用表法.《测量全义》系据玛金尼(Magini，G. A.)《平面三角》(1604 年)、《球面三角》(1609 年)、克拉维乌斯《实用几何》(1611 年)、第谷(Tycho Brahe，)《天文学》(1602 年)等书编译，其中介绍了平面三角、球面三角的部分公式、圆锥曲线以及五种正多面体的有关知识. 薛凤祚的《历学会通》包括数学著作《比例对数表》(1653 年)、《比例四线新表》及《三角算法》(1653 年). 各书系据穆尼阁(Smogolenski，J.-N.)所授撰成，其中前两种分别为对数表与三角函数对数表，是为对数传入中国之始. 后一种主要介绍球面三角知识，可补《测量全义》之不足. 尽管传入的知识并不系统，然而经过中国数学家的整理、发展却产生了较大的影响. 当时研究西方数学者不乏其人，而学兼中西成就显著者当首推梅文鼎. 按《梅氏丛书辑要》统计，梅文鼎所著算书共十三种四十卷. 其中包括笔算、筹算(中国式纳皮尔筹)、度算(比例规)、几何、平面三角、球面三角，以及少广、方程、勾股等. 梅氏著作以《几何补编》四卷(1692 年)、《环中黍尺》五卷(1700 年)、《堑堵测量》二卷(约 1703 年)堪称富有创见.《几何补编》对五种正多面体的体积、互容作了全面的研究，并给出两种半正多面体的作图法和性质. 其中以理分中末线(黄金分割)给出正十二面体、正二十面体的作图法，具有简明实用的特点. 以正二十面体为例，设正方体棱长为 l，则其正二十面体棱长为

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}l,$$

且三组相对的棱分别位于正方体三组相对侧面的中心线上.《环中黍尺》在《测量全义》卷七斜投影法之外，另创球面的正投影法，并用以证明球面三角形的余弦定理、积化和差公式以及图解球面斜三角形等，解球面斜三角形分六种情况讨论. 在精确度要求不高的情形下，其作图法具有实用价值.

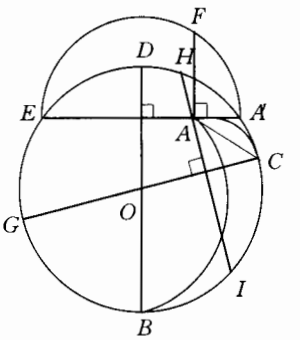


图 1

例如，已知 a、c、B，求 b. 如图 1，求解球面三角形 ABC 的 AC 边. 在圆周上任取点 B，作直径 BD. 取

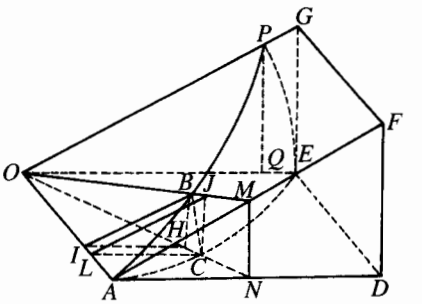


图 2

$\overset{\frown}{BC}=a$，作直径 CG. 取 $\overset{\frown}{BA'}=c$，作 $A'E\perp BD$. 以 $A'E$ 为直径作半圆，取 $\overset{\frown}{A'F}$ 等于角 B 为圆心角所对弧长. 作 $FA\perp A'E$，垂足为 A. 过 A 作 $HI\perp CG$. $\overset{\frown}{CH}=b$ 为所求.《堑堵测量》灵活运用中国传统数学的堑堵、鳖臑的性质及西方数学的平面三角知识给出赤经、黄经及赤纬间的关系，改进了《授时历》球面大圆弧长算法. 梅氏作天球的外切方正方体并用黄道所在平面斜截，又以赤道所在平面截之，取春分点、夏至点所在的部分，得如图 2 堑堵 GA. 图中，ACB 是球面直角三角形，$Rt.\triangle ADF\backsim Rt.\triangle ANM$，$Rt.\triangle LCJ\backsim Rt.\triangle ADF$，$Rt.\triangle IHB\backsim Rt.\triangle OQP$，$Rt.\triangle OAM\backsim Rt.\triangle OLJ$. 由这些相似直角三角形可得赤经、黄经、赤纬、黄赤大距间的四个关系式. 例

如，设天球半径为1，由上述第一个相似关系有

$$\frac{AD}{AF}=\frac{AN}{AM},$$

即
$$\frac{1}{\sec A}=\frac{\tan b}{\tan c},$$

或即
$$\cos A=\tan b\cot c.$$

西方数学的第二次传入及其研究. 此次传入的内容主要有代数、对数、幂级数展开式及视图画法，属于西方17世纪数学的范围. 在康熙皇帝支持下由梅彀成等编纂的《数理精蕴》五十三卷(1722年)，总结了自1690年之后传入中国的以代数和对数为主的西方数学知识，同时还包括中国传统数学的一些研究成果. 全书分为上编五卷、下编四十卷，附数学用表四种八卷. 该书有关的底本大体如下：上编卷二至卷四为“几何原本”三卷，卷五为“算法原本”一卷，系张诚(Gerbillon, J. F.)、白晋(Bouvet, J.)根据《几何原本》、阿基米德(Archimedes)《圆柱圆球书》等编写. 其最初形式为满文《几何原本》七卷，后译为汉文《几何原本》七卷附《算法原本》一卷，又整理为《几何原本》十二卷附《算法原本》二卷，是为《数理精蕴》相应部分的底本. 下编卷三十一至卷三十六介绍韦达(Viéte, F.)代数学知识，其中卷三十三高次方程正根求法出自韦达《有效的数值解法》(1600年). 附表“对数阐微”系据佩尔(Pell, J.)1—100000素因数表(1668年)翻印. “对数表”据布里格斯开创、弗拉克(Vlacq, A.)完成的1—100000的十位对数表(1628年)翻印. 该书下编卷十六“由本弧通弦求其三分之一弧通弦”的方法与下编卷三十八求对数的方法，对清代幂级数展开式研究有重要影响. 如图3，BC为本弧通弦l，$AB=AD=CD$为三分之一弧通弦$l_{1/3}$，圆半径为r. 作$AF//OD$，容易证明

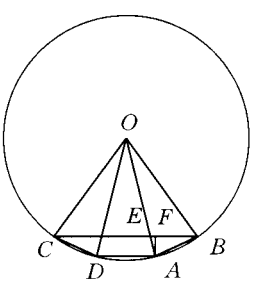


图 3

$$\triangle OAB\backsim\triangle BAE\backsim\triangle AEF,$$

$$\frac{OA}{AB}=\frac{AB}{AE}=\frac{AE}{EF},$$

$$AE=\frac{l_{1/3}^2}{r},\quad EF=\frac{l_{1/3}^3}{r^2}.$$

又
$$BC=3AB-EF,$$

故
$$l=3l_{1/3}-\frac{l_{1/3}^3}{r^2}.$$

由此可得$l_{1/3}$，其中OA、AB、AE、EF称为连比例四率，故此法又称为连比例四率法. 该书介绍三种对数求法，其中主要的一种称为递次开方法. 该法给出

$$\lg a=2^nM(\sqrt[2^n]{a}-1),$$

$M=\lg e$称为对数根. 依此，将$a>0$开平方若干次可得$\lg a$. 此外，杜德美(Jartoux, P.)传入格雷果里的$\sin x$、$\operatorname{vers} x$展开式(1667年)及牛顿(Newton, I.)的π展开式(1676年)，郎世宁(Castiglione, J.)传入的画法几何知识均为此期传入的重要内容. 在此基础上，中国数学家进行了深入的研究，推广其方法，做出许多重要的成果. 年希尧《视学》(1729年)是在传入的画法之上完成的一部画法几何著作. 该书介绍中心投影与正投影法，引入画法几何术语，所给各图亦皆精审. 其成书年代较蒙日(Monge, G.)《画法几何》(1799年)早70年. 三角函数、对数函数的幂级数展开式是18至19世纪中国数学家主要研究方向之一. 明安图《割圆密率捷法》四卷(1774年)在杜氏传入的三式之外又创六式，并以连比例四率法为基本工具一一予以推导. 上述九式可分为由弧求弦矢及由弦矢求弧两组. 记l为弦，$2a$为所对弧，明氏给出弧弦互求的两式为：

$$l=(2a)-\frac{(2a)^3}{4\cdot 3!r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot 5!r^4}-\cdots;$$

$$2a=l+\frac{1^2\cdot l^3}{4\cdot 3!r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot l^5}{4^2\cdot 5!r^4}+\cdots.$$

该书是中国第一部系统论述弦矢与弧互求的著作，对后来三角函数展开式的研究有重要影响. 董祐诚《割圆连比例术图解》三卷(1819年)论明氏九式的“立法之原”. 该书以连比例四率法与垛积术为基本工具给出弦与倍分弦互求二式，矢与倍分矢互求二式，将九式归结为四式，从而深刻地揭示了九式的由来及其相互关系. 特别是垛积术的运用使展开式各系数的推导呈现明确的规律性，这是该书精华所在. 项名达《象数一原》六卷(1843年)将董氏四式进一步精确化得下列二式：

$$l_n=\frac{n}{m}l_m+\frac{n(m^2-n^2)}{3!4m^3}\cdot\frac{l_m^3}{r^2}+\frac{n(m^2-n^2)(9m^2-n^2)}{5!4^2m^5}\cdot\frac{l_m^5}{r^4}+\cdots;$$

$$b_n=\frac{n^2}{2!m^2}(2b_m)+\frac{n^2(m^2-n^2)}{4!m^4}\cdot\frac{(2b_m)^2}{r}+\frac{n^2(m^2-n^2)(4m^2-n^2)}{6!m^6}\cdot\frac{(2b_m)^3}{r^2}+\cdots,$$

其中，$m=1$时为董氏弦矢求倍弦矢二式，$n=1$时为董氏弦矢求分弦矢二式. 该书对明氏九式的立法之原予以严谨的阐述，从而将三角函数的幂级数展开式建立在明确的极限思想之上. 此外，《象数一原》还给出椭圆求周公式

$$p=2\pi a\left(1-\frac{1^2}{2^2}e^2-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\cdots\right),$$

其中$e^2=(a^2-b^2)/a^2$. 戴煦《求表捷术》四种九卷

(1845—1852 年),鉴于《数理精蕴》递次开方求对数法及造表法之计算量浩大,创立指数为任意实数的二项式展开式、对数展开式、三角函数的对数展开式以及自然对数与常用对数的换算关系,从而把清初以来传入的对数知识提高到新的水平.戴氏的主要结果如下:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}+\cdots,$$

其中,$|x|<1$,α 为任意实数;

$$\lg(1+x)=M\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\right),$$

$$\lg\sec\alpha=M\left(\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{2\alpha^4}{4!}+\frac{16\alpha^6}{6!}+\frac{272\alpha^8}{8!}+\cdots\right),$$

其中,$|x|<1$,$0<\alpha<\pi/4$,$M=\lg e$.

戴煦引入假设对数即今之自然对数的概念及其与常用对数的关系

$$\lg(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln 10}.$$

依此,戴氏给出具有 65 个数的自然对数表框架,这是当时世界数学史上的先进成果.徐有壬《割圆八线缀术》四卷(吴嘉善述草,1862 年;左潜补草,1873 年)是明安图以来三角函数幂级数展开式研究的比较系统的总结.该书新增八线互求十二术,大小八线互求十八术.例如,切求弦式

$$r\sin\alpha=r\tan\alpha-\frac{1\cdot(r\tan\alpha)^3}{2r^2}+\frac{1\cdot 3(r\tan\alpha)^5}{2\cdot 4r^4}-\cdots.$$

又如,小切求大弦式

$$r\sin n\alpha=n(r\tan\alpha)-\frac{(n^2+2)n(r\tan\alpha)^3}{3!\ r^2}+\frac{(n^4+20n^2+24)n(r\tan\alpha)^5}{5!\ r^4}-\cdots.$$

徐有壬创立的"缀术"——一种半符号性质的幂级数表示法——使得幂级数的推导得以简化.在此期间研究幂级数比较重要的著作还有邹伯奇《乘方捷法》三卷、夏鸾翔《洞方术图解》二卷(1857 年),以及左潜《缀术释戴》(1873 年)、《缀术释明》(1873 年).

中国传统数学的整理与研究.18 至 19 世纪,在研究西方数学的同时,中国传统数学的整理与研究也获得了显著的成就.整理工作始于 1774 年.是年,戴震作为《四库全书》纂修官由《永乐大典》辑得《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》及《夏侯阳算经》等五种算书,稍后又辑得《周髀算经》、《五经算术》,另以汲古阁影宋本《张丘建算经》、《缉古算经》、明刊本《数术记遗》为底本列入《四库全书》,使汉唐间的十部算经恢复到南宋翻刻本的规模.与此同时,孔继涵得汲古阁影宋本算书七种,不足部分借用戴校本合为十书,并以戴震校订的文字为据刻为微波榭本《算经十书》.《数书九章》、《测圆海镜》与《益古演段》亦列入《四库全书》.嘉庆初年,阮元获《四元玉鉴》抄本.鲍廷博《知不足斋丛书》(1814 年)刻入由《永乐大典》辑得《透帘细草》残卷、《丁巨算法》残卷.1839 年,罗士琳获朝鲜重刊本《算学启蒙》三卷.郁松年《宜稼堂丛书》(1842 年)刻入《详解九章算法》残卷附《纂类》、《杨辉算法》.至此,宋元间重要算书大体复显于世,其中有些尚不止一种版本.随着古算书的重现,校释工作也取得显著的进展.戴震校勘由《永乐大典》辑出的《九章算术》等七种算书、李潢《九章算术细草图说》九卷及《海岛经细草图说》不分卷(1820 年)、《缉古算经考注》二卷(1832)、沈钦裴《四元玉鉴细草》三卷(抄本,1829 年)、罗士琳《四元玉鉴细草》三卷(1834 年)(抄本,1844)、戴煦《四元玉鉴细草》三卷首一卷、宋景昌《数书九章札记》四卷(1842 年)等均为此期古算书校释的杰作.整理工作推动了研究工作,其主要表现为传统算法的推陈出新.焦循《加减乘除释》八卷(1798 年)阐述中国传统数学的算法满足加法的交换律、结合律、乘法的交换律、结合律以及乘法对加法的分配律,试图从基础上说明中国传统数学算法的合理性.汪莱《衡斋算学》第二册(1798 年)、第五册(1801 年)、第七册(1805 年)论方程正根的存在性.第二册指出,已知勾股积、勾弦和,求勾股弦各若干,常有两解.例如,勾股积 210,勾弦和 49,有勾股弦 20,21,29 和 12,35,37 两解.继而第五册、第七册指出,二次、三次、四次方程分别可有二、三、四个正根,又以算例说明方程

$$x^n-px^m+q=0\ (p,q>0),$$

有正根的充分必要条件是

$$q\leqslant\left(\frac{mp}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}}\frac{(n-m)p}{n}.$$

汪氏的上述工作结束了中国传统数学解方程只求一个正根的习惯作法.此外,汪氏在组合算法、p 进制($2\leqslant p\leqslant 10$)算法等方面也获得重要成果.

李锐《开方说》三卷(黎应南补卷下,1819 年)在汪莱的基础上对方程论做了进一步的研究,其中讨论了正根个数与系数序列变号次数的关系,所得结论与笛卡儿符号律一致;又讨论了实根个数与方程次数的关系,所得结论相当于实根个数等于方程的次数或次数减去一个偶数.此外还讨论了倍根变换、负根、重根等内容.李氏的工作对中国传统数学的方程论做了理论上的充实,使之形成了比较系统的领域.《方圆阐幽》不分卷(1845 年)、《垛积比类》四卷(1859 年?)是李善兰的代表作.《方圆阐幽》在垛积术和中国传统的极限思想的基础上创立了尖锥术.李氏的尖锥有空间的和平面的两种,并且空间的可以变为平面的.平面尖锥可依给定的算法求其面积.

平面尖锥又可组成合积，依合积的面积与性质可解决与曲边形有关的问题. 用现代符号表示，李氏的平面尖锥相当于如图 4 的曲边三角形，亦即相当于幂函数

$$f(x)=\left(\frac{a}{h}\right)^p x^p.$$

李氏给出尖锥求积公式为

$$S=\frac{a^p h}{p+1},$$

相当于

$$\int_0^h\left(\frac{a}{h}\right)^p x^p\mathrm{d}x=\frac{a^p h}{p+1}.$$

利用尖锥概念及其求积公式，李氏给出

$$\pi=4-4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{9}+\cdots\right).$$

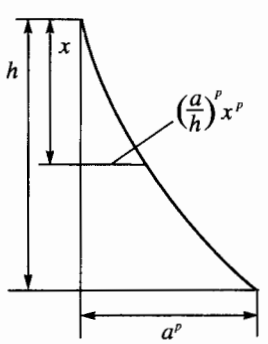


图 4

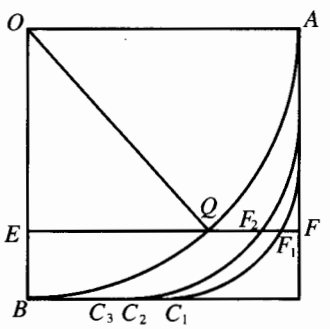


图 5

图 5是单位圆及其外切正方形的四分之一. 李氏指出，曲边三角形 ABC 为尖锥合积. 它由无穷个 $2n$ 乘 $(n=1,2,3,\cdots)$ 尖锥组成. 诸尖锥有公共高等于 1，底分别为

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2\cdot4},\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6},\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8},\cdots,$$

依尖锥面积公式可得诸尖锥合积. 由此可得四分之一单位圆面积. 此外，李氏还用尖锥术导出三角函数、反三角函数及对数函数展开式. 李氏的尖锥术与西方数学的积分法思想不同，但殊途同归.

《垛积比类》推广贾宪三角形的构成法则分别构造出乘方垛、三角自乘垛、三角变垛以及该三垛的各支垛，并给出各自的由项求和及反求公式. 例如，三角 s 变垛的求和公式为

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(p-1)!}r(r+1)\cdots(r+p-2)\cdot r^s$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1}\left[B_i^s\sum_{r=1}^{n+1}\frac{1}{(p+s-1)!}r(r+1)\cdots(r+p+s-2)\right],$$

其中，B_i^s 是三角 s 变垛各廉表(表 1)第 s 行第 i 个值. 该表的构成法则为

$$B_i^s=(s-i+p)B_{i-1}^{s-1}+iB_i^{s-1}$$

1	
1　(p−1)	$s=1$
1　1+3(p−1)　(p−1)²	$s=2$
1　4+7(p−1)　1+4(p−1)+6(p−1)²　(p−1)³	$s=3$
……	
……	

表 1

上述求和公式，当 $s=0$ 时，为三角垛求和公式. 又当 $p=2$ 时为乘方垛求和公式，表 1 变为乘方垛各廉表. 贾宪三角形作为一个特例是该书卷四的三角一变垛第一垛的支垛.《垛积比类》是垛积术总结性的著作. 该书蕴含着组合数学的一些重要成果. 时曰醇《百鸡术衍》二卷(1861 年)将百鸡问题推广为所给物数非两两互素的情形. 其解法先设一物为零，使不定问题化为确定问题，再由方程术求解. 又创减较法、加较法使得各物及其对应的值钱数皆为正整数，复由通率加减得通解. 时氏的工作第一次给出三色差分的系统算法. 黄宗宪《求一术通解》二卷(1874 年)借助素数概念给出求定数法，又在求乘率法的基础上给出求反乘率法. 在改进时曰醇减较法、加较法的过程中，黄氏给出二元一次不定方程的一般解法. 这两项工作使大衍总数术及其应用得以推广. 此期传统数学研究成果比较丰富的著作还有华蘅芳《开方别术》不分卷(1872 年)、《开方古义》二卷(1880 年)及《积较术》三卷(约 1872—1880 年间). 后者论招差术的应用，为华氏的代表作.

西方数学的第三次传入及其研究. 19 世纪下半叶，西方近代数学著作及教科书的翻译与编译之数量较前剧增. 据统计，自 1853 年至 1911 年共译自然科学著作 468 部，其中，数学 164 部，占三分之一强. 此期传入的数学知识有解析几何、微积分等，大体属于 18 世纪西方数学的范围. 数学著作的翻译，以李善兰、华蘅芳的工作为代表. 李善兰与伟烈亚力(Wylie, A.)合译的数学著作有：《几何原本》后九卷(1856 年)，所据底本似是巴罗(Barrow, I.)的英译十五卷本(1660 年)；《代微积拾级》十八卷(1859 年)，所据底本为卢米斯(Loomis, E.)，Elements of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus (1850 年)；《代数学》十三卷(1859 年)，所据底本为德·摩根(De Morgan, A.)，Elements of Algebra (1835 年). 李氏又与艾约瑟(Edkins, J.)合译《圆锥曲线说》三卷(1856 年)，所据底本不详. 华蘅芳与傅兰雅(Fryer, J.)合译的主要数学著作有：《代数术》二十五卷(1873 年)、《微积溯源》八卷(1874 年)，以上两种所据底本均为华莱士(Wallace, F.)的著作，见《大英百科全书》第 8 版，还有《三角数理》十二卷(1877 年)，所据底本为海默斯

(Hymers,J.) (1803—1887 年)A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry (1863 年);《代数难题》十六卷(1879 年),所据底本为伦德(Lund,T.) A Compan to Wood's Algebra (1878 年);《决疑数学》十卷(1880 年),所据底本为德·摩根(De Morgan,A.)An Essay on Probabilities,and on Their Application to Life Contingencies and Insurance Offices (1838 年). 教会学校编译的教科书印数较多的有:狄考文(Mateer,R. C. W.)与邹立文《形学备旨》十卷(1885 年)、《代数备旨》十三卷(1891 年)、《笔算数学》三卷(1892 年),潘慎文(Parker,A. P.)与谢洪赉《代形合参》三卷(1893 年)、《八线备旨》四卷(1894 年). 西方数学第三次传入之后,研究成果突出者当推夏鸾翔. 夏氏代表作为《致曲术》、《致曲图解》(约 1860—1861 年间,两书原为同一种之上下卷)、《万象一原》九卷(1862 年). 夏氏于 1859 年至 1861 年间"暇则细寻微积分奥窍",对二次曲线等平面曲线的弧长、围成的面积、旋转体的表面积、体积的计算有深入的研究,其中有些成果是当时尚未传入的. 例如,《致曲术》给出椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

从点$(0,b)$到点(x,y)的弧长分别绕长轴、短轴旋转的表面积为

$$2\pi b\int_0^x\sqrt{1-\frac{c^2}{a^4}x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$2\pi a\int_0^y\sqrt{1+\frac{c^2}{b^4}y^2}\,\mathrm{d}y$$

的展开式. 这些内容可补《代微积拾级》所缺.

19 世纪下半叶至 20 世纪初期,中国传统的封建教育制度逐步瓦解,而半封建半殖民地的教育制度逐渐形成. 教育发生了一系列的变化:旧式书院的改革,洋务学堂的兴办,1901 年上谕各省书院改为学堂,1903 年颁布癸卯学制,1905 年废除科举、成立学部,1906 年学部颁布"教科书审定办法",厘订留学章程等. 由于这样的变化,学习西方数学的人不断增加. 为了教学的需要,这一时期出现了不少算学课艺、详草、题解及教科书. 算学课艺是算学试题与解答汇编,如《同文馆算学课艺》四卷(1880 年)、《简易庵算稿》四卷(1899 年)等. 详草、题解之类,如《形学备旨习题解证》(1902 年)、《代数备旨全草》(1903 年)、《代微积拾级详草》(1905 年)、《笔算数学详草》(1906 年)、《八线备旨习题详草》(1906 年)等. 国人自编的微积分教材当推陈志坚的《最新详阐微积教科书》五卷(1905 年)为最早. 数学杂志亦于此时出现,最早的一种是黄庆澄的《算学报》,创于光绪二十三年(1897 年)六月,月刊,共出十二册.

1912 年 1 月. 南京临时政府颁布《普通教育暂行办法》,规定"清学部颁行之教科书一律禁用",另行编审. 20 世纪第二个十年间,中国数学家开始进入世界数学界.

1949 年之后,中国数学进入了全面发展的新阶段.

中国古代数学著作

算数书(Suànshùshū) 中国现已发现的流传至今的最古的数学著作. 这是 1984 年出土于湖北省江陵县荆州城西门外张家山 M247 号西汉早期古墓的一部竹简书,无卷数,不知撰人. 全书竹简约 200 枚,其中整简 180 余枚,其余已残断. 全部文字约 7000 字,字体为隶书,一般用墨笔写在竹黄一面,每枚竹简的字数多少不定.《算数书》不分章节,全书由 60 多个小标题和 80 多个问题组成,其小标题可分为两类:一类是算法,一类是算题. 算法的小标题如"相乘"、"合分"、"嬗(增)减分"、"分乘"、"径(经)分"、"约分"等;算题的小标题有"石衡"、"少广"、"出金"、"铜耗"、"方田"、"贾盐"、"税田"、"息钱"、"负炭"、"程禾"、"金贾(价)"等. 在算题这类小标题之下,列有结合当时生产实践的应用问题,每一应用问题都是由"问"、"答"、"术"三部分组成. 经过专家考证,认为《算数书》的成书年代不晚于公元前 186 年.

算经十书(Suànjīng shíshū) 唐代立于官学的数学教科书. 初唐国子监的明算科以 12 部算经为教科书,它们是《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《夏侯阳算经》、《缀术》、《缉古算经》、《三等数》、《数术记遗》. 贞观年间,李淳风奉召选择、注释并校订 10 部算经作为明算科的教科书(上列 12 部中除去《三等数》与《数术记遗》). 北宋元丰七年(1084)秘书省刊刻算经时,《缀术》已失传,原李淳风选定的十部算经实际只刊了九部. 南宋嘉定元年(1213)鲍澣之翻刻北宋时刻的九部算经时,又将在杭州发现的《数术记遗》刻入,共成十部算经. 现在传本《算经十书》即为南宋鲍刻本的十部算经,它们成为中算普及和研究的母本. 清乾隆年间,戴震作为《四库全书》的纂修官,辑录、校勘了《算经十书》,作为底本收入《四库全书》中;他的儿女亲家曲阜孔继涵又刻有微波榭本《算经十书》. 民国年间,商务印书馆出版了《万有文库》本《算经十书》,1963 中华书局出版了当代中算史家钱宝琮校点的《算经十书》.

周髀算经(Zhōubì suànjīng) 中国最早的天文学、算学著作. 二卷,不知撰人,约成书于公元前 100 年. 原称《周髀》,唐代将其立于学官时始用今名. 全书 7000 余字,其有关天文学方面的内容,主要是阐

述盖天说和四分历法.璇玑四游的文字证实当时已观察到北极的位移,即看到了岁差现象.其数学方面的内容涉及到分数乘除法、等差数列和圆周长求法、一次内插法的应用、对任意正数的开平方法、用分数表示奇零小数、最早引用勾股定理等.三国赵爽、北周甄鸾和唐李淳风都曾为该书作注.李淳风注始正原文求日高算法之粗疏,纠赵爽注日景新术之未当,改甄鸾释文之谬误.清代邹伯奇《周髀算经考证》、顾观光《周髀算经校勘记》为前人研究该书的精审之作.《周髀算经》最古刻本为北宋元丰七年刊本,现存最早的是南宋本及明万历赵琦美校刻本.此外还有《学津讨源》本、《秘册汇函》本、《津逮秘书》本、微波榭本及《四部丛刊》本、《四部备要》本等.

九章算术(Jiǔzhāng suànshù) 《算经十书》之一,共九卷,作者不详,约成书于西汉中期.全书共有246个应用问题,分别隶属于九章.各章的名称和主要内容如下:

1.方田.与田亩丈量有关的面积、分数问题.

2.粟米.以谷物交换为例的各类比例问题.

3.衰分.按比例分配和等差数列问题.

4.少广.由田亩计算引出的分数、开方问题.

5.商功.与土木工程有关的体积问题.

6.均输.与摊派劳役和税收有关的加权比例问题.

7.盈不足.由二次假设求解二元问题的一类特殊问题.

8.方程.线性方程组问题.

9.勾股.勾股定理及其应用.

《九章算术》在整数论、分数论、比例算法、开平方和开立方、面积和体积、盈不足算法、线性方程组解法、正负数概念及加减运算法则、勾股定理的应用等方面都取得了当时世界领先的成就,对中国古代数学的发展产生了决定性的影响.《九章算术》成书后,中国的数学家们大都以该书为学习、研究数学的重要著作,见诸史籍者就有东汉的马续、郑玄、刘洪、徐岳;三国的阚泽、陈帜、刘徽;南北朝的祖冲之父子;唐代的李淳风、李籍;北宋的贾宪,南宋的杨辉;清代的戴震、李潢等人.其中许多人为之作注,以刘徽的注释质量最高,影响最大,他以注释的形式完善了中国古代数学的理论体系.后来李淳风整理《算经十书》时,就是以刘徽的《九章算术》注释本为底本的.现在传世的《九章算术》由本文、刘徽注和李淳风注三部分组成.贾宪、杨辉、秦九韶、吴敬、程大位等人则按《九章算术》的模式从事著述.《九章算术》的体例、方法以及术语,成为近两千年中中国古代数学家所尊奉的规范,中国古代数学中的绝大多数成果都可以在《九章算术》中找到源头.该著作有十几个不同的版本传世,其中最有价值的是南宋鲍澣之刻本,现仅存前五章,藏上海图书馆,为海内外孤本.1774年,戴震从明代《永乐大典》中辑录出完整的《九章算术》,从此有了更多的版本,影响比较大的有《四库全书》本、武英殿聚珍版本、微波榭本以及李潢的《九章算术细草图说》.

海岛算经(Hǎidǎo suànjīng) 中国古代测量术的代表作.一卷,魏刘徽撰.原名《重差》,附于《九章算术》之后.唐李淳风在编辑《算经十书》时将其独立出来作为《算经十书》之一,因其首题是关于测量海岛高远的问题,故有此名.传本《海岛算经》共有9题,体例与《九章算术》相同,每题均由"问"、"答"、"术"三部分组成.第1题测海岛用重表法,第3题量方邑用连索法,第4题测深谷用累矩法,这是刘徽重差术的三个基本方法.重差即用矩尺在不同点测望物体,利用表间差距和所测景长之差推算所测物体高深远近的一种测量方法.9题中"两望"3题(第1、3、4题)、"三望"4题(第2、5、6、8题)、"四望"2题(第7、9题).该书被收入《永乐大典》和《四库全书》.唐李淳风奉敕为之作注,清李潢撰《海岛算经细草图说》一卷,清沈钦裴撰《重差图说》一卷.《海岛算经》有北宋秘书省刻本和南宋鲍澣之刻本、武英殿聚珍版本、微波榭本等.

孙子算经(Sūnzǐ - suànjīng) 约编纂于公元4、5世纪的一部普及性数学著作.三卷,作者不详.卷上叙述度量衡制度,筹算记数的纵横相间制与筹算乘除法则;卷中为筹算的分数算法与开方法,并有一些简单的面积、体积计算及衰分、盈朒等28个问题;卷下为切于民生日用的实际应用题,涉及到测望、田域、营建、贸易、仓窖、赋役、军旅等方面共计30题.卷下"妇人荡杯"、"雉兔同笼"以其独特的解法广为人知,最为著名的是卷下第26题"物不知数"(又称"孙子问题"),其解法为宋时秦九韶推广为"大衍求一术"(一次同余式组的系统解法)而著称于世.该书版本有南宋鲍澣之刻本、《四库全书》本、武英殿聚珍版本、微波榭本、《知不足斋丛书》本等.

张丘建算经(Zhāng Qiūjiàn - suànjīng) 《九章算术》之后的一部有突出成就的数学著作.三卷,张丘建撰.成书年代在公元466—485年之间(另有说法,认为更早).该书现在传本缺卷中最后若干页、卷下前二页,现存完整算题90问,涉及测量、纺织、交换、纳税、土木工程等方面.该书卷上第10、11题讲最大公约数与最小公倍数的计算;卷上第18、22、23、32题,卷中第1题,卷下第24题研究等差数列,给出了几个通项公式、求和公式;卷中还有数问类似于《九章算术》盈不足章的问题.卷下最后一题是闻名于世的"百鸡问题",属不定方程,书中给出三组正整数解.全书体例与《九章算术》相似.该书版本有南宋鲍澣之刻本、《四库全书》本、微波榭本、《知不足斋

丛书》本、《古今算学丛书》本、《万有文库》本等.

缀术(Zhuìshù) 中国唐初立于官学的《算经十书》之一.作者是祖冲之、祖暅父子.因为该书在宋代以后失传,它的内容和成书过程已不可知.只能通过史书及有关文献加以推测.《南齐书》祖冲之传和《南史》文学传都说:祖冲之"注九章,造缀述数十篇".唐初王孝通《缉古算术·表》说:"祖暅之《缀术》,时人称之精妙……"《隋书·律历志》则说:祖冲之"所著之书名为缀术,学官莫能究其深奥".依此推之,可能的情况是:祖冲之在注《九章算术》时,将研究心得写成数十篇数学短论,附缀于刘徽注文之后,称为"缀述",其中包括他对圆周率的研究成果——盈朒二数和密率等.祖冲之死后,其子祖暅对父亲数学遗稿加以整理和补订,并加进自己的研究成果,如球体积公式推导等,写成一部完整的数学著作——《缀术》.该书包括祖冲之、祖暅父子二人的数学创造,思想精深,内容深奥,以致唐朝国子监明算科规定学生要学习4年;连学官都"莫能究其深奥",因此逐渐被"废而不理".到北宋元丰七年(1084)重刻《算经十书》时,就没有见到《缀术》.

五曹算经(Wǔcáo suànjīng) 一部为地方行政官员编写的实用算术书.五卷,北周甄鸾撰.全书共有67个算术问题.第一卷田曹19问,讲田亩面积的计算;第二卷兵曹12问,讲配置军队及军需给养问题;第三卷集曹14问,主要讲各种粮食的交换;第四卷仓曹12问,解决粮食的征收和储藏问题;第五卷金曹10问,讲丝、绢、钱币等的交易互换.该书版本有南宋鲍澣之刻本、《四库全书》本、武英殿聚珍版本、《知不足斋丛书》本等.

五经算术(Wǔjīng suànshù) 《算经十书》之一.二卷,北周甄鸾撰.该书对《尚书》、《诗经》、《周易》、《左传》、《论语》、《周礼》等典籍中有关历算、音律的文字予以注释,涉及的数学内容包括大数进位制、分数的运算、开方和体积计算及等比数列问题.其版本有《四库全书》本、武英殿聚珍版本、微波榭本等.

数术记遗(Shùshù jìyí) 初唐国子监中明算科的12部教科书中的一种.一卷,题署汉徐岳撰,北周甄鸾注.关于该书作者目前尚无一致意见.该书系徐岳追记其师刘洪与天目先生的问答,并非系统的数学著作.该书正文主要内容是记载大数进位法和十四种算法名称.其十四种算法是:积算、太一算、两仪算、三才算、五行算、八卦算、九宫算、运筹算、了知算、成数算、把头算、龟算、珠算、计数.这些算法的意义目前还不清楚.因其为唐代明算科考试的"帖读"之本,故得以流传后世.该书版本有南宋鲍澣之刻本、《秘册汇函》本、《津逮秘书》本、《四库全书》本、微波榭本、《古今算学丛书》本、《万有文库》本等.

缉古算经(Jīgǔ suànjīng) 中国最早的一部论述开带从立方的数学著作.一卷,唐王孝通撰并自注.原名《缉古算术》,唐代将其立于官学时改称《缉古算经》.全书共20题,第1题为天文问题,第2至6题和第8题是土方体积问题,第7题和第9至14题为地窖和仓库容积问题,第15至20题是勾股问题.第1题以算术方法求解,其次17题归结为一元三次方程,末2题归结为"双二次"方程.一元三次方程的建立和解法(开带从立方)为讨论的重点.全书共列出三次方程28个,在每一条有关的术文之下,王孝通都加以自注,说明方程系数的来历.据此,人们可知王氏列方程的程序.该书依靠几何方法建立方程,对方程的解法则言之不详,方程的系数亦有所限制,根则限于正数且只求一解.传本《缉古算经》已残缺,前16问较为完整,后4问多有文字烂脱,清人为之述草、补图者较多.清张敦仁于嘉庆八年(1803)撰《缉古算经细草》一卷,据最后三题残文,详加计算后补足了题目、答案和术文.嘉庆十七年(1812),李潢遗稿《缉古算经考注》二卷对全书文字详加校订,勘误补缺凡七百余字.揭廷锵有《缉古算经图草》二卷,陈杰有《缉古算经细草》一卷、《图解》三卷、《音义》一卷.《缉古算经》传本有《四库全书》本、微波榭本及《知不足斋丛书》本等.

夏侯阳算经(Xià Hóuyáng - suànjīng) 原本《夏侯阳算经》是唐代立于官学的《算经十书》之一,到宋代已失传.今传本《夏侯阳算经》为北宋重刻《算经十书》时将《韩延算术》冠以《夏侯阳算经》之名编入其中,因而得以流传.《韩延算术》是唐代的一部实用算术书,分上、中、下三卷共83个问题,征引前朝各家算术和当时法令颇多.卷上六章:"明乘除法"、"辩度量衡"、"言斛法不同"、"课租庸调"、"论步数不等"、"变米数",重点叙述租庸调的计算法;卷中五章:"求地税"、"分禄料"、"计给粮"、"定脚价"、"称轻重",叙述官本利息的分配和赋税征派问题;卷下为"说诸分"章,专论奇零分法.全书给出很多乘除简捷算法.传本《夏侯阳算经》的版本主要有南宋鲍澣之刻本、《四库全书》本、微波榭本、《古今算学丛书》本等.

谢察微算经(Xiè Cháwēi - suànjīng) 原名《发蒙算经》,宋代算书.是一部内容浅显的启蒙算书.三卷,宋谢察微撰.原书已失传,但其第一卷的开头部分被收录在明初陶宗仪编纂的《说郛》中.内容共计八条:"大数"、"小数"、"度"、"量"、"衡"、"亩"、"九章名义"、"用字例义".在每条之下有若干款,每款之后有小字作注,如"小数":"分",注曰"十厘为分";"厘",注曰"十毫"等.在"用字例义"中,作者对73个数学中的术语或常用字、词给出简短的解释,有些类似定义.对一词多义者分别阐述,如"乘,法之多位

者”，又“乘，法实合变数也”；对一些容易混淆的词也作了区别，如“差，多少不同数也”，“较，相除余也”等. 明代程大位《算法统宗》中几乎一字不漏地照录了《说郛》中记载的《谢察微算经》残文，清初编辑的大型丛书《古今图书集成》第一百一十二卷算法部汇考引用了《谢察微算经》，当代中算史家李迪在所著《中国数学通史·上古到五代卷》中也将《谢察微算经》残文全部录出.

敦煌算书(Dūnhuáng suànshū)　20世纪初发现于中国甘肃敦煌莫高窟(又称千佛洞)的手写数学文献原件. 这些数学文献总计近20件，包括算书、算表、算经若干，但没有一件首尾完整，有的仅是残页，有的抄在佛经或其他文献的背面. 其内容主要是九九表和一些算题，其年代约在公元5世纪至10世纪之间. 它们是除《算数书》外的最早的数学文献原件，是了解千余年前数学的内容、形式等的一组珍贵的资料.

黄帝九章算法细草(Huángdì jiǔzhāng suànfǎ xìcǎo)　宋代算书. 九卷，宋贾宪撰，今已失传. 该书有些内容被杨辉《详解九章算法》摘录. 在《详解九章算法》的最末一卷“纂类”中录有“贾宪立成释锁平方法”、“增乘开平方法”、“贾宪立成释锁立方法”及“增乘(开立)方法”术文四则. 其中，“释锁开方”二法分别和《九章算术》开平方、开立方法接近，而所述“增乘开方法”为新法. “增乘(开立)方法”术文后有6个开立方的题目，第1题即为《九章算术》少广章第19题. 杨辉还引录了贾宪的“开方作法本源图”和“增乘方求廉法草”，此二者是“增乘开方法”原理的概括. “开方作法本源图”今通称为“贾宪三角形”或“贾宪三角”.

算学源流(Suànxué yuánliú)　中国最早的一部简明数学史纲. 不分卷，作者不详. 该书引《晋书》关于隶首作数、《汉书》备数、《周礼》保氏九数、《汉书》关于张苍定章程的记载，以及《唐书》选举志、百官志，宋崇宁(1102—1106年)国子监算学令等有关唐宋算学馆的课程设置、教员配制、教学制度、考试制度以及科举制度的规定等. 宋鲍澣之刻《数术记遗》时，将其附刻于后. 1980年，又被收入文物出版社出版的《宋刻算经六种》之中.

数书九章(Shùshū jiǔzhāng)　中国宋元时代一部有代表性意义的数学著作. 原名《数术大略》，宋秦九韶撰. 成书于1247年. 全书共十八卷81题，分为九章. 其主要内容有：

1. 大衍类. 阐述一次同余式组的一般解法，其中包括大衍总数术、大衍求一术和一次同余式组求解公式三部分. 大衍总数术处理模数非两两互素的问题，分别对模数为整数、小数、分数和十的倍数四种情形说明将其化为两两互素的方法. 大衍求一术是用辗转相除求乘率的方法，这是求解同余式组的关键. 秦九韶用文字表达的一次同余式组求解公式，现称为“中国剩余定理”或“孙子定理”.

2. 天时类. 讨论天文历法和雨雪量计算问题.

3. 田域类. 讨论田地面积问题，其中包括介绍高次方程数值解法的正负开方术.

4. 测望类. 讨论勾股、重差和其他测量问题.

5. 赋役类. 讨论田赋和户税等问题.

6. 钱谷类. 讨论征购粮食和仓储容积等，包括体积计算和复杂的比例问题.

7. 营建类. 讨论土木工程问题，有相当详细的工程计算.

8. 军旅类. 兵营布置和军需供应问题.

9. 市易类. 讨论商品交易和利息计算问题，主要是线性方程组的解法.

《数书九章》在写作体例和选用题材方面都继承了《九章算术》的传统，但在中国古算构造性和机械化的特色方面得到了更为突出的体现. 其代表成果是关于一次同余式组解法的大衍求一术和关于高次方程数值解法的正负开方术，这两项工作都走在世界前列. 此外，在线性方程组、统计数学、几何与测量等方面都有创新. 宋元时期，该书并未刊刻，仅有抄本流传. 明《永乐大典》抄录此书，题称《数学九章》，清《四库全书》中的《数书九章》即由此辑出.

测圆海镜(Cèyuán hǎijìng)　原名《测圆海镜细草》. 是中国现存最早的一部以天元术为主要内容的著作. 十二卷，元李冶撰. 该书卷首为“圆城图式”，该图以一个直角三角形及其内切圆为基础，通过若干互相平行或垂直的线段，构成16个直角三角形. 全书170个问题都与这幅图形有关. 图式之后是“总率名号”和“今问正数”，前者给出图中各勾股形名称，后者以通弦六百八十，通勾三百二十，通股六百为基数，给出各种勾股形边长之间的关系，以便验证. 卷首最后列“识别杂记”692条，逐一列举了勾股形各边及其和、较、积与圆的关系，每一条都相当于一个几何定理. 这部分内容是对中国古代勾股容圆问题的总结，这在中国古代数学著作中是绝无仅有的. 卷二至十二为170个问题，每题含“法”、“草”两部分. “法”是该类问题的一般解法，“草”是演题的具体过程. 全书构成一个演绎体系，卷一包含了解题所需要的基本理论，后面各卷问题的解法均可在此基础上以天元术为工具推导出来. 该书的主要价值还在于其借助于各种几何关系来建立高次方程，从而全面系统地介绍天元术的理论和算法. 书中的天元术分为三步：

1. “立天元一”，这相当于设立未知数.

2. 寻找两个相等的而且至少有一个含天元一的多项式或分式.

3. 建立等式，并通过相消，化成由高次幂到低次幂上下排列的标准形式.

此外，在《测圆海镜》中，常数项可正可负，而不再限制于其几何意义. 该书自成书以来，多次再版. 较为著名的版本有：1287 年的李克修再版本、明顾应祥《测圆海镜分类释术》、清《四库全书》本、《知不足斋丛书》本、同文馆集珍本和《古今算学丛书》本.

益古演段（Yìgǔ yǎnduàn） 普及天元术的著作. 元李冶撰. 三卷，作于 1259 年. 该书是在蒋周所撰《益古集》的基础上，“再为移补条段，细翻图式，使粗知十百者，便得入室啖其文”. 全书 64 题，除 4 题为一次方程外，其余皆为二次方程. 每题包括“法”、“依条段求之”、“条段图”、“义”四部分. 法，即天元术；条段，是用来表示方程各项的一段段的条形面积；依条段求之，即用人们易懂的几何方法对天元术进行解释；图，为方程各项几何关系的图解；义，即图的文字说明. 其将蒋周的演段法（旧术）与天元术（新术）并列，旨在普及新术. 此外，在化多元问题为一元问题，以及设辅助未知数等方面亦有创新. 该书自成书以来，有多种版本流传于世. 较为著名的有：1282 年初版本、明《永乐大典》本、清《四库全书》本、《知不足斋丛书》本、《白芙堂算学丛书》本和《古今算学丛书》本等.

详解九章算法（Xiángjiě jiǔzhāng suànfǎ） 宋代算书. 宋杨辉撰. 十二卷，成书于 1261 年. 包括《九章算术》本文、魏刘徽注、唐李淳风等注、北宋贾宪细草及杨辉详解共五部分. 根据杨辉自序知，该书以贾宪《黄帝九章算法细草》为底本，在对《九章算术》中的问题加以详尽解释的基础上，又另增“图”、“乘除”、“纂类”三卷. 其“图”包括互乘五段、维乘、列衰、方程并列图及开方图等，作为首卷；“乘除”、“立问一十三题，专说乘除”，包括九归等歌诀，作为次卷. 此二卷已佚. “纂类”将《九章算术》中的方法和问题分为乘除、互换、合率、分率、衰分、迭积、盈不足、方程、勾股九类，作为末卷. 书中保存了许多珍贵的数学史料，例如贾宪的“开方作法本源图”就被少广章所引用，其现在被称为“贾宪三角”. 在著作体例上，引入了“图”、“草”和“比类”等内容. “比类”系相对于“古问”而言，其中不乏作者的创造，如商功章中以方亭、方锥、堑堵、鳖臑、刍甍、刍童等立体“比类”于各种堆垛，在高阶等差数列的研究史上留下了光辉的一页. 该书成书后即刊行，明修《永乐大典》时将其分类抄入“算”字条，而“算”字条今仅存三卷，故此书现为残本.

日用算法（Rìyòng suànfǎ） 宋代实用算书. 二卷及首一卷，宋杨辉撰，原书已失传，有残文存于《永乐大典》及《诸家算法》中. 《永乐大典》卷一六三四三有“二率分身”一题；《诸家算法》有“释斤秤数”一则并九题，还有杨辉的自序：“今首以乘除加减为法，称斗尺田为问，编诗括十三首，立图草六十六问，用法必载源流，命题须负有实. 分上下卷首，少补日用之万一，亦助启蒙之观览云耳.”相比可见，原文残存无几. 《日用算法》版本不详.

杨辉算法（Yánghuī - suànfǎ） 杨辉后期三部数学著作的合称. 包括：《乘除通变本末》三卷；《田亩比类乘除捷法》二卷；《续古摘奇算法》二卷. 杨辉算法的版本有明洪武古杭勤德书堂刊本，现存中国国家图书馆的是朝鲜李朝世宗十五年复刻的洪武刊本. 其宋刻本已失传，明末毛氏汲古阁藏其影写本，清《宜稼堂丛书》本系由其转抄本校勘而成，但缺少《续古摘奇算法》卷上. 此外还有《丛书集成初编》本.

乘除通变本末（Chéngchú tōngbiàn běnmò） 原名《乘除通变算宝》，《杨辉算法》中的一种. 三卷，宋杨辉撰，成书于 1274 年. “卷上”又名《算法通变本末》，首先提出“习算纲目”，即为从九九表、乘除法开始到《九章算术》各种方法的教学计划，包括学习要点、方法、时间安排等，由浅入深，循序渐进. 接着给出有关垛积例题，并着重介绍重因、损乘等乘除捷法. “卷中”又名《乘法通变算宝》，为全书的核心，主要介绍“身外加减”、“求一”、“九归”诸术. “卷下”又名《法算取用本末》，为阐发“卷中”而作，列出一至三百的加因代乘和归减代除方法，并保存了《算法指南》、《应用算法》的宝贵资料.

田亩比类乘除捷法（Tiánmǔ bǐlèi chéngchú jiéfǎ） 《杨辉算法》中的一种. 二卷，宋杨辉撰，成书于 1275 年. 卷上列出了各种形状的田地求积公式及例题，并结合当时实际需要的问题进行比类. 卷下首先对《五曹算经》中的三个问题进行了批评，接着择取了刘益《议古根源》中的二十二个典型问题. “详注图草”，介绍刘益求二次方程正根的“益积术”和“减从术”，还引用了《议古根源》中的一个益隅四次方程用增乘开方法求其正根.

续古摘奇算法（Xùgǔ zhāiqí suànfǎ） 《杨辉算法》中的一种. 二卷，宋杨辉撰，成书于 1275 年. 卷上讨论“纵横图”，即现在所谓的幻方. 其中共列出幻方二十个. 前两个为河图、洛书，其次为四至八行幻方各两个，九至十行各一个，最后有聚五、聚六、聚八、攒九、八阵、连环等图，并给出某些幻方的构造方法. 卷下是各种算术杂题及口诀.

革象新书（Géxiàng xīnshū） 元代的一部关于天文学、数学的著作. 原本五卷三十二篇，元赵友钦撰，主要讨论天文学问题，也涉及数学和光学，有元刊本. 明代王祎将其删改，编为二卷，名为《重修革象新书》. 清代乾隆年间四库馆臣从《永乐大典》中录出原本《革象新书》，与王祎的删改本两相比照，认为二者“各有所长，不容偏废”，故将二者一道收入《四库

全书》.原本《革象新书》的第五卷最末一篇"乾象周髀"中记载了赵友钦关于圆周率的研究.赵友钦绘出了"方圆相切"图,论述了其"以方求圆"的算法原理,建立了一个迭代求弦的算法公式,以此求得圆周率的近似值 3.141592,并以此验证祖冲之的密率 355/113.

算学启蒙(Suànxué qǐméng) 元代的一部算学入门书.元朱世杰撰.三卷,成书于 1299 年.全书共 259 问,分为 20 门.内容涉及四则运算、开方、天元术以及垛积等多方面的数学内容.该书由浅入深,循序渐进,是一部很好的数学启蒙读本.卷首"算学启蒙总括"罗列全书所需要的各种乘除、开方及正负数运算的法则,度量衡制度,大小数的进位制,常数以及名词术语的定义.卷上八门 113 问,前五门概括了当时的乘除捷法,第六门和第八门都是比例问题,第七门讨论利率和税收.卷中七门 71 问,主要讨论面积与体积的计算、复比例与连比例、等差级数、比例分配和其率术与反其率术的应用等问题.卷下五门 75 问,介绍分数的四则运算,等差级数和二阶等差级数的项数和末项间的关系,盈不足问题,线性方程组的解法,天元术与开方法的应用等.该书成书后,《永乐大典》并未收入,但流传到朝鲜、日本后,多次刊刻,产生了巨大的影响.后又传回中国,并于 1839 年在扬州刊行,被多次翻刻.

四元玉鉴(Sìyián yùjiàn) 元代论述四元术和垛积术的杰作.三卷,元朱世杰撰,成书于 1303 年.全书共 288 问,分为 25 门,所有问题都与方程或方程组有关.

假令四草:简要介绍天元术、二元术、三元术、四元术的解题模式.

上卷 6 门:

1.直段求源:关于勾、股、弦的计算问题.

2.混积问元:田亩面积问题.

3.端匹互隐:有关绫、罗等纺织品的计算.

4.廪粟回求:粮食容积问题.

5.商功修筑:工程建筑问题.

6.和分索隐:已知条件为分数的问题.

中卷 10 门:

1.如意混合:把性质不同的问题混在一起以增加问题的难度.

2.方圆交错:有关方、圆的混合问题.

3.三率究圆:按圆周率 157/50 或 22/7 来进行与圆或球有关的计算.

4.明积演段:与勾股形有关的各种计算.

5.勾股测望:用勾股定理及相似勾股形求距离.

6.或问歌象:由诗歌形式给出的问题.

7.茭草形段:高阶等差数列问题.

8.箭积交参:关于方箭、圆箭的垛积问题.

9.拨换截田:截割田亩的面积问题.

10.如象招数:招差术.

下卷 8 门:

1.果垛迭藏:垛积问题.

2.锁套吞容:各种相切、相容图形面积的计算.

3.方程正负:线性方程组的问题.

4.杂范类会:各种杂题.

5.两仪合辙:二元二次方程组.

6.左右逢源:二元高次方程组.

7.三才变通:三元高次方程组.

8.四象朝元:四元高次方程组.

《四元玉鉴》的主要成就是四元术,即四元高次方程组的建立和求解方法.其用"天"、"地"、"人"、"物"四字代表四个未知数,系统地介绍了二元、三元、四元高次方程组的布列和解法.解法的关键是消元,将多元高次方程组化成一元高次方程,然后应用增成开方法来解.《四元玉鉴》中的另一杰出成就是垛积招差术.垛积即高阶等差数列求和,招差即高次内插法,在这两个方面取得了相当重要的结果,比西方同类工作要早 400 年以上.另外,该书在几何方面亦有不可忽视的贡献.《四元玉鉴》成书之时,受到社会的重视.但在明代因数学衰微而成绝学.清代中国传统数学复兴后,该书多次刊刻,流传甚广.主要有《宛委别藏》本、《白芙堂算学丛书》本等.

丁巨算法(Dīngjù-suànfǎ) 元代以四则运算为主(包括开方运算)的应用数学著作.八卷,元丁巨撰.《丁巨算法》今有残本传世,在《知不足斋丛书》中收录有 62 题,在《永乐大典》卷一六三四三到卷一六三四四中收有提纲一条和 27 题,其中提纲是列于问题前面的关于正方形与其内切圆、立方体与其内切球的有关周长、面积和体积等计算公式 8 条.现存的 89 题大量的是度量衡换算的商业问题,只有一题为三元一次方程组应用题.《丁巨算法》成书于 1355 年,全帙版本不详.《永乐大典》中收录的内容被当代中算史家李俨收入其所著的《十三、十四世纪中国民间数学》中,《知不足斋丛书》中收录的内容又被排印在《丛书集成初编》本的《丁巨算法》中.

算法全能集(Suànfǎ quánnéngjí) 元明之际流传的口诀化数学的代表作.二卷,元贾亨撰.全书共有 20 个子目 126 问,卷上开始给出"总说五项",即钱、粮、端匹、斤秤、田亩的单位制和进位制.20 个子目系"常用法二十项",包括卷上的因法、加法、乘法、减法、归法、归除、求一、商除、异乘同除、就物抽分和卷下的差分、和合差分、端疋、斤秤、堆垛、盘量仓窖、丈量田亩、修筑、约分、开平方.这 20 种算法中的每一种都有歌诀表述,每一种歌诀后都有相应的算题供读者练习算法.该书有元刊本、明初刊蝶装本及《玄览堂丛书》影印本.

详明算法(Xiángmíng suànfǎ) 元末明初流传的民间数学著作,内容、体例与贾亨《算法全能集》极为相似.二卷,元安止斋、何平子撰.全书共114问,总目27项,其中总说7项:九章各数、大小各数、九九合数、斗斛丈尺、斤秤田亩、口诀、乘除见总;卷上9项31问:因法、加法、乘法、归法、减法、归除、求一、商除、约分;卷下11项83问:异乘同除、就物抽分、差分、和合差分、端匹、斤秤、堆垛、盘量仓窖、丈量田亩、田亩纽粮、修筑.卷上、卷下的20种算法也都给出了歌诀表述.该书有明洪武癸丑明经堂刊本及李俨所藏抄本《诸家算法及序记》本.

通原算法(Tōngyuán suànfǎ) 明初的一部理论水平较高的数学著作.二卷,明严恭撰.现已无刻本流传.抄本《诸家算法》中收有1条提纲和29题,《永乐大典》收有另外35个问题,共计64题.这些问题可分为四类:一般商业换算问题、等差数列问题、古算题(包括一道一次同余式组问题)和开方问题.当代中算史家李俨所著的《十三、十四世纪中国民间数学》一书中收录了《通原算法》的残本,包括上述1条提纲和64个问题.

透帘细草(Tòulián xìcǎo) 元末明初的商业算书.不知卷数,作者不详,原本已佚.现有残本传世,在《知不足斋丛书》中收有54题,在《永乐大典》卷一六三四三至卷一六三四四中收有17题,共计71题.其算法包括四则运算和开方运算.其内容有盈不足、衰分、均输、少广、商功等一般应用问题和堆垛问题,还有一些游戏题,主要的是钱物换算的商业问题.多数问题为一问一答一法一草的形式.《永乐大典》中收入的题目被李俨收入其所著的《十三、十四世纪中国民间数学》中,《知不足斋丛书》中收录的内容又被排印在《丛书集成初编》本的《透帘细草》中.

锦囊启源(Jǐnnáng qǐyuán) 元末明初的应用算书.不知卷数,作者不详,现无刻本传世.抄本《诸家算法》中收有提纲2条和21个问题.2条提纲一是重量单位介绍,一是"斤见两歌",即斤两换算歌诀;21个问题都是浅显的商贸计算应用题,仅用乘法即可算得结果.《永乐大典》中还收有与此不同的9个问题,算法与《九章算术》中"今有术"之比率法相似.《锦囊启源》现存的2条提纲和30个问题被李俨收入其所著的《十三、十四世纪中国民间数学》中.

永乐大典算书(Yǒnglè dàdiǎn suànshū) 明《永乐大典》中,"算"字条所分类辑录的自汉迄明初的算书中的算法.《永乐大典》的编纂始于永乐元年(1403),成于永乐六年.共二二八七七卷,凡例并目录六十卷,其中"算"字条自卷一六三二九至卷一六三六四,共三十六卷.《永乐大典》在隆庆、万历后便有残缺,但算法类至清乾隆时尚无缺失,戴震在修《四库全书》时曾陆续由此辑录出许多古代数学著作.此后《永乐大典》继续散失,现在"算"字条仅存两卷,见中华书局1960年版.

诸家算法及序记(Zhūjiā suànfǎ jíxù jì) 原名《算法杂录》.全书分算题与序记两部分.算题部分都是关于斤秤的问题.首先列出诸书所载斤秤制度及化两为斤歌诀,接着按著作抄录了诸书算题107问.序记部分抄录了自刘徽《九章算术序》到严恭《通原算法序》共15部著作的序20篇,其中鲍澣之《海岛算经序》、《日用算法序》、严恭《通原算法序》为海内孤本.中国科学院自然科学史研究所图书馆藏有该书的抄本.

九章算法比类大全(Jiǔzhāng suànfǎ bǐlèi dàquán) 亦名《九章详注比类算法大全》.明代前期的算书.十卷首一卷,明吴敬撰,成书于1450年.该书卷首为"乘除开方起例",旨在讲解算法的基本理论,列举了大数记法、小数记法、度量衡制单位、整数分数四则运算、定位、开方、差分等项,并用诗歌形式一一作了解释.卷首还提出一种以前中国数学著作中未曾出现过的"写算法":根据相乘两数的数字位数,相应地画好方格,置两乘数于方格上方和右方,选择一个方向画上每格的对角线,每两个数字相乘的积写在相应的方格里,按十位在上、个位在下的规则写,再将斜行逐次相加就得出所求乘积的各位数.卷一至卷九是1400多个应用问题的解法汇编,遵循《九章算术》体例,分属方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股九类.每卷包括古问、诗词、比类三个部分:古问多系《九章算术》内容,兼采杨辉《详解九章算法》等书内容;诗词系以歌诀表述算题;比类系算法相近的,结合当时实际应用的问题,包括商品交换、合伙经营、利息计算、就物抽分(以货物作价抵偿费用)等.卷十"各色开方",包括开平方、开立方、开高次方及开带从平方和带从立方,所用方法是"立成释锁法",而不是"增乘开方法".该书主要介绍筹算法,但也提到算盘.此书现传有明弘治元年(1488)刻本.

算学宝鉴(Suànxué bǎojiàn) 全称《新集通证古今算学宝鉴》.明代算书.四十一卷首一卷,明王文素撰.该书正文四十一卷,每卷分若干项,每项有问有诀,共203项,包括317诀,1267问.内容大致如下:卷一至卷六为算学基础知识和算法,卷七至卷十为方田,卷十一至卷十二为粟米,卷十三至卷十四为衰分,卷十五至卷十八为少广,卷十九至卷二十一为商功,卷二十二至卷二十四为均输,卷二十五为盈不足,卷二十六至卷二十七为方程,卷二十八至卷三十为勾股,卷三十一至卷四十一为开方.其内容可分为三类:

1. 对前人著作的摘录.

2. 比类,即仿照常见题目重造新题.

3. 王文素的见解和评述.

《算学宝鉴》主要介绍筹算算法，亦明确提到算盘. 其乘法、除法、开平方、开立方算式都单行横书，这一现象说明筹算和珠算的交替已趋成熟. 此书现有抄本传世，此本有明正德八年(1513)宝朝珍序和嘉靖三年(1524)王文素自序，收藏在中国国家图书馆.

勾股算术(Gōugǔ suànshù)　关于勾股形解法及应用勾股形进行测量的数学著作. 二卷，明顾应祥撰，成书于 1533 年. 书中正卷之前有“勾股论说”一篇，系统介绍了勾、股、弦三边及三边和、差间的各种关系及相互求法，给出 40 个公式，利用这些公式可以较方便地计算各种勾股问题，此篇为该书总纲. 全书共分 38 类，每类包括若干问题，共计 77 问，其中包括“方五斜七”的“方斜术”5 问. 该书有明嘉靖癸丑(1553)刊本.

测圆海镜分类释术(Cèyuán hǎijìng fēnlèi shìshù)　明代研究和注释《测圆海镜》的数学著作. 十卷，明顾应祥撰，成书于 1550 年. 李冶著《测圆海镜》的主要目的是利用天元术列出方程，而对方程解法则未详演，初学者不易理解. 顾应祥将《测圆海镜》的全部问题重加分类，厘为十卷，仍得 170 问，每问之后有释，释后有术，对问题解答的演算过程详加推导，并对其中的开方、带从开方过程一一写明，成书为《测圆海镜分类释术》. 顾氏此书便于入门时自学，但他对李冶原书中细草部分的“天元术”无法理解，因而将这一部分全部删去，可谓循枝叶而失根本. 该书有明嘉靖庚戌(1550)刊本和《四库全书》本.

弧矢算术(Húshǐ suànshù)　关于弧矢计算的第一部数学专著. 一卷，明顾应祥撰，成书于 1552 年. 正卷前有“弧矢论说”和“方圆论说”两篇短文，前者给出有关弧矢的各项定义及相互求法，还说明了弧矢和圆径的相互关系，并由此给出计算弧矢的理论依据；后者是对“方五斜七”和圆周率的讨论. 全书给出十四术，主要讨论弧、矢、弦、截弦和截积间的关系和互求问题，都要借助勾股定理，有些要归结为解方程求出结果，其中有 10 个四次方程的解法是增乘开方法. 该书有明嘉靖癸丑(1553)刊本和《四库全书》本.

测圆算术(Cèyuán suànshù)　在《测圆海镜》基础上重新编录的勾股容圆专著. 四卷，明顾应祥撰，成书于 1553 年. 主要讨论勾、股、弦之间及各勾、各股、各弦之间求容圆直径的各种问题及算法. 其对天元术一无记载，用传统的高次方程解法和算术方法求解. 该书内容在《测圆海镜分类释术》中都可找到. 有明嘉靖年刻本传世.

神道大编历宗算会(Shéndào dàbián lìzōng suànhuì)　明周述学所撰的一部数学著作. 十五卷. 大致内容如下：卷一入算，卷二子母分法，卷三勾股，卷四开方，卷五立方，卷六平圆，卷七弧矢经补上，卷八弧矢经补下，卷九分法互分，卷十总分，卷十一各分，卷十二积法，卷十三立积，卷十四隙积、算会圣贤姓氏，卷十五歌诀. 该书今传明抄本，藏于浙江省图书馆、南京图书馆.

盘珠算法(Pánzhū suànfǎ)　全称《新刻订正家传秘诀盘珠算法士民利用》，明代算书. 系现传最早的珠算书. 二卷，题署闽建徐氏心鲁订正、书林熊氏台南刊行，该刊本为两节版. 卷一上节图示珠算四则运算、大数进法、度量衡名称等；卷一下节包括“隶首上诀”(加法口诀)、“退法要诀”(减法口诀)、“归法总诀”(九归口诀)、“乘法”、“归除法诀”等. 卷二上节举例说明珠算乘法和除法的应用，卷二下节包括“算丈量田”和“算升斗数法”(日用算表). 书中所载算盘图皆为梁上一珠、梁下五珠，书中还给出迄今所知最早的珠算加法口诀和减法口诀，与今之口诀相同. 该书仅日本内阁文库藏有明万历元年(1573)原刊本.

数学通轨(Shùxué tōngguǐ)　明代珠算书. 不分卷，明柯尚迁撰，成书于 1578 年. 全书分四部分：

1. 算学须知. 含数原(数的生成和进位制及度量衡)、初定算盘图式、九九上法语(加法口诀)、九九进退图式、习数法语、习九九总念歌、九归总歌法语(九归口诀)、九归因乘法语(乘法口诀)、九归重演法语、撞归法语(撞归口诀)、还原法语(还原口诀)、因法、乘法、九九上进下退法语图式、九因九归总歌等.

2. 归除诠要. 含因乘归除义、加法、减法、金蝉法义、九归分数、九因法总数、定身除法、加法、归除法分数、乘法等.

3. 九章释例. 讨论《九章算术》的一些内容.

4. 九章总义. 为算学杂论，主要是顾应祥《测圆海镜分类释术》序及唐顺之有关数学的论述. 其中“初定算盘图式”为珠算盘图，上二珠，下五珠，中间用木制横条隔开，与现在使用的算盘相同.

《数学通轨》与《书学通轨》合成二集，附于《曲礼外集补学礼六艺附录数学通轨》之后. 原本现藏日本尊经阁文库，中国科学院自然科学史研究所图书馆藏有李俨抄本.

一鸿算法(Yìhóng suànfǎ)　全称《新刻一鸿简捷便览算法》，一部珠算的入门书. 四卷，明余楷撰. 全书主要由算题和歌诀构成，有 36 首歌诀和 108 题. 卷一主要讲珠算法及算例；卷二是田地面积计算，卷末还有开平方法；卷三内容较杂，包括少量的体积问题、开立方、测量、“方程”、垛积及一些杂题；卷四讲斤两换算，即钱物换算比率. 此书仅有刻于 1585 年的首刊本，现国内惟一藏本在安徽黄山市博物馆.

算学新说(Suànxué xīnshuō)　明代算书. 一

卷，明朱载堉撰，刻于1603年.该书具体阐述用算盘进行高位开方运算的程序，涉及的数据非常庞大.此外，在讨论十二平均律的计算时，还应用了换算、等比数列的知识.

算法统宗(Suànfǎ tǒngzōng)　全称《新编直指算法统宗》，明代算书.一部以珠算盘为计算工具的应用数学书，是珠算集大成之作.十七卷及首一卷，明程大位撰，成书于1592年.《算法统宗》以《九章算术》的体例为宗，"参会诸家之法，附以一得之愚，纂集成书".全书包括290个条目和595个应用问题，大多是从传本数学书中摘录的.该书首篇介绍"数有本源"，列举河图、洛书、八卦等.卷一至卷二介绍算学常识与珠算知识，如数学名词、算盘图式、珠算定位法、九九表、九归口诀、撞归口诀、起一还原口诀等；卷三至卷十二介绍传统算法，分方田、粟布、衰分、少广、分田截积、商功、均输、盈朒、方程、勾股等十类；卷十三至卷十六为算题汇编，介绍与上述十种算法相应的题目和解法；卷十七为杂法汇编，即不能归入前面诸卷的算法，包括写算、纵横图、三分损益法等.此书最末还载有"算经源流"，系一个书目，开列北宋元丰七年(1084)至明万历十六年(1588)间的算学书名51种，包括了这500年间大部分重要的数学著作.该书卷三所载"丈量步车"为程氏所创的一种量田工具，以竹、木制成，类似今之卷尺.卷四的"截两成斤歌"给出斤以下带两诸数相加的简便方法，这实际上是同时进行两种进位制的加法(斤以上十进，斤以下十六进).卷六的珠算归除开立方法为程氏首创.《算法统宗》出版之后曾被多次翻刻改编，版本很多，主要的有明万历壬辰(1592)宾渠旅舍初刊本(包括十七卷五集本和十七卷四集本两种)、明荣观堂、三桂堂十七卷五集翻刻本、明文茂堂十二卷本、清康熙五十五年(1716)十七卷四集翻刻本及《古今图书集成》本和1934年中华书局影印本等.

算法纂要(Suànfǎ zuǎnyào)　全称《新编直指算法纂要》，明代算书，为《算法统宗》的缩写本.四卷，明程大位撰，成书于1598年.为普及中算诸法及珠算应用，程大位将《算法统宗》"删其繁芜，揭其要领"，撰成《算法纂要》四卷.全书包括64个条目和124个问题.卷一内容与《算法统宗》卷一基本相同，稍微简略；卷二算法部分的歌诀说明悉依《算法统宗》，但题设不同；卷三系由《算法统宗》卷三编成；卷四由《算法统宗》最后一卷杂法内摘出.《算法纂要》是偏重于基本算法介绍和为解决日常计算问题而编写的.该书有明万历二十六年(1598)原刻本和崇祯九年(1636)翻刻本.

算法指南(Suànfǎ zhǐnán)　全名《新镌易明捷径算法指南》，明代算书，一部珠算启蒙读物.二卷，明黄嘘云(龙吟)撰，明万历三十二年(1604)刊行.书中所刊"珠算盘图"与《盘珠算法》相同，"九归总念"、"乘法歌诀"、"归除歌"等已与现在流行的珠算口诀完全相同.李俨藏有万历刊本.

嘉量算经(Jiāliáng suànjīng)　明代算书.三卷，明朱载堉撰.该书主要内容有三项：

1.创立十二平均律理论，并构造等比数列计算十二正律之长.

2.讨论纵黍、横黍两种律尺间的数量关系，相当于九进小数与十进小数间的换算.

3.详载珠算归除开平方法和珠算商除开立方法简法.

《嘉量算经》的版本主要有明万历间刊本及《宛委别藏》本.

测量法义(Cèliáng fǎyì)　明代算书.以《几何原本》的公理体系和演绎推理阐述西方测量术.一卷，明徐光启、利玛窦(Ricci,M.)编译.该书先介绍西方测量工具——造器"矩度"的构造和以直景、倒景布算的原理，然后以15个题目由浅入深地介绍高、深、广、远的测量方法，并给出了证明，最后还附以相似勾股形对应边成比例的算法.该书有《天学初函》本、《指海》本、《海山仙馆丛书》本、《中西算学丛书》本.

测量异同(Cèliáng yìtóng)　对《测量法义》的补充和续写之作.一卷，明徐光启撰.该书将吴敬《九章算法比类大全》勾股卷中的六个测量问题与西方的测量术进行比较，通过"对题胪列，推求同异"，以达到"会通中西"的目的.该书有《指海》本、《海山仙馆丛书》本、《中西算学丛书》本.

勾股义(Gōugǔyì)　明代算书.一卷，明徐光启撰.该书用《几何原本》、《测量法义》中的基本定理来解释或证明中国传统勾股测量法，使之趋于严格.该书有《天学初函》本、《指海》本、《海山仙馆丛书》本、《中西算学丛书》本.

同文算指(Tóngwén suànzhǐ)　明代算书.中国第一部系统介绍欧洲笔算的著作.由明李之藻和意大利传教士利玛窦(Ricci,M.)根据德国数学家克拉维乌斯(Clavius,C.)的《实用算术概论》与明程大位的《算法统宗》等书编译，包括"前编"二卷，"通编"八卷和"别编"一卷，书成于1613年.但"别编"未刊，仅有"截圆弦算"一节，以抄本传世."前编"二卷介绍笔算的定位法和整数、分数的四则运算及约分、通分，其中整数除法为15—16世纪欧洲的"帆船法"，整数的加、减法以九减法、七减法进行验算，这些方法今已不用.书中将最大公约数称为纽数，分数的记法是分数线上为分母、分数线下为分子，与欧洲笔算记法相颠倒."通编"八卷18节，是全书的中心内容，叙述了比例(包括正比、反比和复比)、比例分配、盈朒、一次方程组、数列(包括等差数列和等比数列)、开平

方、开立方、开高次方、带从开平方等算法.该编在目录中注明“补若干条”、“俱补”者,其内容采自中国传统的数学著作.此外,该编还辑入《算法统宗》、《勾股义》和《测量法义》中的一些难题.全书所有数码用汉字数字,所论内容并未超出中国传统数学范围,而笔算则是一种新的方法,对中国后来的算术影响很大.清代数学家对其非常重视,不断克服其缺点,使其渐臻完善,得以推广普及.《同文算指》被收入《四库全书》中,该书的初刊本现存故宫博物院图书馆和浙江省图书馆,其他版本还有《天学初函》本和《中西算学丛书初编》本.

欧罗巴西镜录(Ouluóbā xījìng lù) 介绍西方笔算方法的数学著作.一卷,作者不详,撰于明末清初.首先介绍四则运算法则,然后是定位法、试法、开平方、开立方乃至开高次方,内容分别来自《同文算指》和《九章算术》等书,最后两部分名为“金法”和“双法”,前者即中国古代的“今有术”及相关算法,在中世纪欧洲被称为“黄金率”或“三率法”,后者即中国古代的“盈不足术”,在西方被称为“双设法”.该书刊否不详,北京大学图书馆藏有清焦循抄本.

圜解(Huánjiě) 清初论述平面三角的数学著作.一卷,清初王锡阐撰,撰著年代不详.该书主要讨论三角八线的性质及两角和、差的正弦和余弦公式.王锡阐对两角的多种不同情形,均按照中国古代传统数学的方法和《几何原本》的理论逐一给出证明.在证明公式之前,王锡阐对所用到的数学名词和数学概念给以定义,有些与当时天算家的定义相同,有些对传统定义有所发展,有些则是引入新的概念.书中用“折”的概念取代几何学中“角”的概念,这一新概念几乎涉及到所有《几何原本》的定理.书中特别之处是对“平行线”没有给出明确的定义,并且对“圜中平行两线,得皆不为圜经,不得皆为圜经”这一定理没有给出证明.该书未见刊本,有一抄本现藏中国科学院自然科学史研究所图书馆.

算海说详(Suànhǎi suōxiáng) 清初珠算书.李长茂撰,刻于1659年.共九卷,分订六册,现于北京故宫博物院图书馆藏一孤本.第一卷为汇法章,介绍各种珠算算法,多系《算法统宗》内容,但所论较详.其中诗词亦有不同,如撞归法歌云:“归除之法要周知,数盈进上归成十.有归若是无除数,作九下将归数施.或仍无除再起一,下加归数以除之.”内介绍四种后乘法,并加以正确评论.另有“首位挨乘法”,这在珠算书中是第一次出现,是乘法的捷算法,为李长茂首创.第二卷,轨区章,为田亩计算;第三卷,勾股章,为勾股形解法;第四卷,开方章,为开平方、开立方、开四次方各法;第五卷,测贮章,为体积算法与堆垛计算;第六卷,功程章,为土方人工计算;第七卷,镜泉章,为斤两换算及利息计算;第八卷,衰分章,为比例分配计算;第九卷,匿覆章,为差分计算、盈不足和工程问题.全部内容,仍不出《算法统宗》范围,而所论较详.

数度衍(Shùdùyǎn) 清代算书.清方中通撰,成稿于1661年,刻于1687年.全书二十三卷,分订八册.卷首,数原、律衍、几何约、重学解;卷一,珠算;卷二、三,笔算;卷四,筹算;卷五,尺算;卷六至卷八,勾股章;卷九至卷十四,少广章;卷十五,方田章;卷十六,商功章;卷十七至十八,差分章;卷十九,均输章;卷二十,盈朒章;卷二十一,方程章;卷二十二,粟布章;卷二十三,九章解法.书中对清初流行的“四算”介绍较详.其弟方中履在序中说:“合四法而论其长,则珠之加减,笔之除,筹之乘,尺之比例.”正确地指出当时流传的“四算”之优点.其内容以西算为主,杂以中算.大抵集辑诸家之长,而增损润色,勒为此编.珠算内有“乘除新法”,增加五倍折中之法,为金蝉算之发展.又附其子方正珠之“正珠乘除新法”,实为今之外数乘除法.

梅勿庵历算全书(Méi WùAn Lìsuàn quánshū) 清代算书,梅文鼎著作集.在梅文鼎去世(1721)以后,魏荔彤出资、杨作枚整理、补订,于清雍正元年(1723)由兼济堂刊刻出版.全书收梅文鼎数学、天文著作30种75卷,其中包括当时已出版过单行本的《平三角举要》、《弧三角举要》、《方程论》、《少广拾遗》、《度算释例》、《笔算》、《历学疑问》等,还有此前没有成书的遗稿,经杨作枚补订、整理而成书的.全书将梅氏著作分为四类:一为“言理之书”,包括几何、三角、测量;二为“言数之书”,包括割圆八线、对数、比例等;三为“言历之书”,包括天文、历法著作;四为“言算之书”,包括中国传统的珠算、少广、方程和西方的笔算、筹算、度算、比例等.该书是收录梅文鼎科学著作最多的一部书,对于保存与传播梅文鼎数学、天文著作有重要作用.但是也存在一些不足和缺点:

1.梅氏著作并未收全,如各种数表(三角函数表、对数表等)均未收入.

2.杨作枚在对梅文鼎遗稿的整理和补订工作中,加进了自己的见解和论述(如勾股正义);遗稿中重复部分,也未删减.

所以后来梅毂成才又重新编辑《梅氏丛书辑要》.

方程论(Fāngchénglùn) 清代算书.六卷,清梅文鼎撰.这是梅文鼎的第一部数学著作.首卷“正名”,讨论了“方程”一词的涵义,并按系数符号的排列情况对线性方程组进行了分类.第二卷“极数”,则按问题的性质和解题的方法考察了“带分”、“迭脚”和“重审”三种情况.第三卷“致用”,研究实际运算中可能简化的程度.第四卷“刊误”,主要纠正前人著作

中的一些错误. 第五卷“测量”，主要介绍应用线性方程组进行天体测量实例. 第六卷“方程御杂法”，用实例说明“方程”与“粟米”、“衰分”、“均输”、“盈不足”等古典题材的关系，用以说明其“方程为数学之极致”的观点. 此外，他还提出了把传统的“九数”分别纳入“算术”与“量法”这两大分支的数学分类思想. 该书版本有李光地上谷刊本、《梅氏历算全书》本、《梅氏丛书辑要》本及《中西算学汇通》本、李安卿泉州刊本.

勾股举隅(Gōugǔ jǔyú) 清代算书. 一卷，清梅文鼎撰. 讨论勾股恒等式及勾股测量. 该书主要推导与弦和和 $c+(b+a)$、弦和较 $(b+a)-c$、弦较和 $c+(b-a)$、弦较较 $c-(b-a)$ 有关的几个恒等式：

$$[(b-a)+c][c-(b-a)]=2ab;$$

$$[(b+a)+c][(b-a)-c]=2ab;$$

$$\frac{1}{2}[(b+a)+c]^2=(c+a)(c+b);$$

$$\frac{1}{2}[(b+a)-c]^2=(c-a)(c-b)$$

及它们在勾股形诸事互求中的应用. 该书还用勾股术分析阐述了《算法统宗》勾股章中“度影量竿”、“隔水量高”两题的立法理由.《勾股举隅》只列出 13 个例题，目的在揭示解决此类问题的途径. 其版本有《梅氏历算全书》本、《梅氏丛书辑要》本、《中西算学汇通》本及 1795 年听彝堂《艺海珠尘》本.

方圆幂积(Fāngyuán mìjī) 清代算书. 一卷，清梅文鼎撰，约成书于 1710 年. 该书主要利用旋转体和重心间的关系推导球体积计算公式，其所有模型对后来徐有壬的工作很有启发. 内容包括：方中容圆和圆中容方的相应长度及面积之比，立方容球和球容立方的相应长度及面积之比，等积方、圆的相应长度比，球体与其外切圆柱体的表面积比与体积比，球冠的面积与球扇形的体积等. 其版本有《梅氏历算全书》、《梅氏丛书辑要》和《中西算学汇通》数种.

几何补编(Jǐhé bǔbiān) 清代算书. 讨论正多面体和半正多面体的计算和性质的著作. 四卷，清梅文鼎撰. 卷一“论四等面体、八等面体”，卷二“论二十等面体”，卷三“论十二等面体”，卷四“论诸体比例”. 该书主要内容有下列三点：

1. 给出正四面体、正六面体(立方体)、正八面体、正十二面体、正二十面体这五种正多面体的体积求法.

2. 提出两种半正多面体，分别称为方灯体和圆灯体. 所谓灯体是这样得到的：“凡诸体(正多面体)改为灯(体)，皆半其边，作斜线剖之.”即是取正多面体各条棱的中点，联结相邻的中点并剖去外凸部分. 由正六、八面体所得为方灯，由正十二、二十面体所得为圆灯.

3. 讨论正多面体之间及其与球体间的互容关系、多面体间的各种比例关系，书中把“理分中末线”(即黄金分割)与多面体的计算联系起来.《几何补编》的版本有：《梅氏历算全书》本、《梅氏丛书辑要》本和《中西算学汇通》本.

平三角举要(Píngsānjiǎo jǔyào) 原名《三角法举要》. 清代算书，中国第一部平面三角学教科书. 五卷，清梅文鼎撰. 卷一“测算名义”，介绍各种定义、同角三角函数间的关系、三角函数表、互为余角和补角的三角函数间的关系等. 卷二“算例”，利用例题阐述有关三角形的各种结论，其中包括正弦定理、正切定理和半角定理. 卷三“内容外切”，叙述有关三角形面积、内切圆和外接圆径、内容正方形边长等公式及相应的几何作图法. 卷四“或问”，利用勾股理论对各种三角形解法进行证明. 卷五“测量”，包括“测高”、“测远”、“测斜坡”、“测深”等不同类型的三角测量法. 这是作者借助传统勾股理论推导三角学的一种尝试. 该书被收入《梅氏历算全书》、《梅氏丛书辑要》、《西学大成》和《中西算学汇通》. 其单刻本有光绪年间的陕西求友斋刊本和成都徐树勋刊本.

弧三角举要(Húsānjiǎo jǔyào) 清代算书. 中国第一部球面三角学教科书. 五卷，清梅文鼎撰，自序于 1684 年. 卷一“弧三角体势”，介绍有关球面几何知识并对球面三角形进行分类. 卷二“正弦三角形”，使用黄道、赤道等较为人们熟悉的名词阐述了球面直角三角形的解法，并介绍更具有一般性的正弦定理. 卷三“垂弧法”，详细讨论了将一般球面三角形化为球面直角三角形的方法. 卷四“次形法”，介绍利用球面三角形边或角的对称、互余、互补等关系构造新的球面三角形进而求解的方法. 利用这种方法，梅文鼎给出了全部球面三角形的解法. 卷五“八线相当法”，排列出四类共 21 个成比例关系的三角公式，并列表说明各种公式的具体用法. 该书原刊本为李光地上谷刊本，后又被收入《梅勿庵算书五种》、《梅氏历算全书》、《梅氏丛书辑要》及《中西算学汇通》等丛书.

环中黍尺(Huánzhōng shǔchǐ) 清代算书. 一部用投影法讨论球面三角问题的著作. 五卷，清梅文鼎撰，成书于 1700 年. 梅文鼎用正投影法把球面投影到平面上，并得到三个性质：

1. 大圆上的点皆可为球极投影.

2. 纬线的实长等于以纬线投影为直径的半圆周.

3. 经线的实长等于大圆的半圆周.

这三个性质是梅氏以正投影法讨论球面三角形问题的主要依据. 利用它们，梅氏证明了球面三角的余弦定理，导出了积化和差公式，以加减代乘除，简化了计算，并用以解球面斜三角形. 梅氏主要讨论已

知三边、两边一夹角、两边一对角、两角夹一边求解余边余角的情形. 由于正投影的方法和通过正投影法将球面三角转化到平面上来研究的思想,使《环中黍尺》成为梅文鼎最重要的数学著作. 该书版本有李光地上谷刊本、《梅勿庵算书五种》本、《梅氏丛书辑要》本和《中西算学汇通》本.

堑堵测量(Qiàndǔ cèliáng) 清代算书. 一部关于球面直角三角形解法的著作. 二卷,清梅文鼎撰. 梅氏此书旨在说明两个问题:

1. 球面三角形可通过几何模型来研究.

2. 西方的球面三角学与中国传统的勾股理论相通.

《堑堵测量》以堑堵为模型推导黄经、赤经和赤纬的关系式,并解释《授时历》的弧矢割圆术,使中西两法以堑堵为媒介得以会通. 梅文鼎从球面三角形及其所在球中分离出两个立体,它们能反映该三角形的边、角关系. 梅氏称这两个立体模型为立三角仪(又叫勾股锥形)和方直仪(又叫勾股方锥形),它们即《九章算术》中出现的鳖臑和阳马,二者合成堑堵,这即是此书书名的来历.《堑堵测量》版本有李光地上谷刊本、《梅勿庵算书五种》本、《梅氏丛书辑要》本和《梅氏历算全书》本.

算义探奥(Suànyì tànào) 清代算书. 不分卷,清陈厚耀撰. 该书分为勾股法义、积求勾股法义、勾股容方容圆法义、三角形求中长法义、测量法义、割圆法义、圆求弧背法义、圆容法义、错综法义、推古历法、推授时历法、推授时历百年消长法等部分,大多为几何学内容. 其中"错综法义"最具独到见解. 该章首先给出排列组合的各种不同形式,包括无重排列、组合与可重排列、组合,并分别举例予以说明. 此书未刊,中国科学院自然科学史研究所所藏手稿本为海内孤本.

少广补遗(Shǎoguǎng bǔyí) 一本关于垛积问题的专著. 一卷,清陈世仁撰,大约成书于 1720 年. 其内容分两大部分:

1. 研究各种类型的垛积问题的算法.

2. 例题,主要是求级数的项数与最后一项的数值问题.

全书共 7 节,讨论了 12 类共 37 个垛积公式,许多为作者自己独创. 该书被收入《四库全书》,另有抄本传世,现存南京图书馆、广东中山图书馆及中国科学院自然科学史研究所图书馆等处.

数理精蕴(Shùlǐ jīngyùn) 中国第一部按学科编排的数学著作. 为康熙敕编百卷乐律历算书《律历渊源》中的第三种,由梅彀成等人汇编,历时十年,于康熙六十一年(1722)六月成书,并于雍正元年(1723)十月首次刻竣.《数理精蕴》共 53 卷,分为三部分:上编 5 卷、下编 40 卷及数学用表四种 8 卷. 上编题为"立纲明体",主要内容为"数理本源"、"几何原本"、"算法原本",提出了指导全书的基本理论;下编名为"分条致用",主要内容为算术、平面几何与平面三角、立体几何、代数,分为"首部"、"线部"、"面部"、"体部"、"末部"五部分. 首部两卷(卷一、卷二),讲度量衡制度、定位制度、整数与分数的四则运算. 线部八卷(卷三至卷十),叙述各种比例问题、盈不足术及一次方程组解法. 面部十二卷(卷十一至卷二十二),为平面几何、平面三角及开平方等问题,其中卷十六给出圆内接正十四边形和正十八边形边长求法及由本弧通弦求其三分之一弧通弦法,为造三角函数表的新增方法. 体部八卷(卷二十三至卷三十),专论立体几何. 末部十卷(卷三十一至卷四十),主要介绍西方传入的代数学知识,其中卷三十一至卷三十六为"借根方比例",借根方比例又称借根方法,所介绍的主要内容是方程的建立和解法,给出高次方程正根的一种求法,此法与中国传统数学的开方术原理相同;卷三十八介绍对数表造法,包括对数求法和造表程序,对数求法有中比例法、真数递次自乘法及递次开方法等三种. 下编最后的四种数学用表是三角函数表、素因数表、对数表及三角函数对数表.《数理精蕴》汇集了 1690 年以来传入的西方数学知识,并吸收了中国数学家的一些研究成果,对清代数学的发展产生了重要影响. 此书后被收入《四库全书》. 其版本主要有《律历渊源》本、《四库全书》本、光绪八年(1882)江宁藩署刊本、广东藩署重刊本、光绪二十二年(1896)石印小本、宣统三年(1911)上海文瑞楼石印本及《万有文库》本、《国学基本丛书》本(无表).

增删算法统宗(Zēngshān suànfǎ tǒngzōng) 清代珠算书. 明程大位原编撰,清梅彀成增删. 共十卷,成书于 1760 年. 清朝初年,古算书多失传不见,只有程氏《算法统宗》流传民间. 梅彀成因《算法统宗》"岁久板多漶漫,若不加修整,将不可读,而九章几乎息矣","因取其书,重加校勘,删其繁芜,补其缺遗,正其讹谬,增其注解",以成其书.《增删算法统宗》中删去了"河图洛书"、"孕推男女"等荒诞不经的内容及原杂法内各种方法,并改正了原书的一些错误,也吸收了一些西洋算法. 此书流传甚广,清末刻本甚多,至民国尚有各种石印本,其中以光绪三年(1877)江南制造局贾步纬校刻本最善.

梅氏丛书辑要(Méishì cóngshū jíyào) 清初著名天文学家、数学家梅文鼎的数学和天文著作选辑. 梅文鼎一生致力于中西历算的研究和传授,著述等身. 康熙六十一年(1722),魏荔彤将梅氏天、算著作编为《梅氏历算全书》,并于雍正元年(1723)于兼济堂刊行. 梅文鼎之孙梅彀成晚年时认为魏本的《梅氏历算全书》"校难编次不善,而名为全书亦非实录",故将梅文鼎著作于乾隆二十六年(1761)"另外编

次”，成为《梅氏丛书辑要》二十三种60卷，该书以先数学、后天文历法的次序排列，其中包括有数学著作十三种40卷，并附梅瑴成著作二种2卷(《赤水遗珍》1卷、《操缦卮言》1卷)．上述十三种数学著作基本按照算术、代数、平面几何、立体几何、平面三角、球面三角的顺序排列．它们是《笔算》5卷(1693)、《筹算》2卷(1678)、《度算释例》2卷(1717)、《少广拾遗》1卷(1692)、《方程论》6卷(1672)、《勾股举隅》1卷、《几何通解》1卷、《平三角举要》5卷、《方圆幂积》1卷(1710)、《几何补编》4卷(1692)、《弧三角举要》5卷(1684)、《环中黍尺》5卷(1700)、《堑堵测量》2卷，其中前三种论述笔算方法，介绍纳皮尔算筹和比例规的原理和使用，涉及很多算术知识；第四种讨论古代开方术，第五种研究线性方程组的解法，均属代数方面；第六、七种研究平面几何问题，前者主要通过几何图解法结合代数方法来解决传统的勾股相求问题，后者着重用中国传统的勾股理论来研究《几何原本》中的一些内容；第八种是中国学者自己编写的第一本平面三角学著作；第九种探讨球的体积和表面积计算；第十种研究各种正多面体的体积、作图、互求及相容问题；最后三种全属于球面三角学，对西方传入的三角公式予以证明，利用模型法、透视法及图解法等方法．《梅氏丛书辑要》的版本有乾隆二十六年(1761)承学堂刊本、同治十三年(1874)颐园刊本及上海龙文书局石印本、鸿文书局石印本等．

赤水遗珍(Chìshuǐyízhēn)　清代数学著作．梅瑴成著，附刻于《梅氏丛书辑要》(1761)之后．内容主要有以下几项：

1．测量北极出地高度简法．

2．正切定理简捷的新证法．

3．证明球面三角形半角正弦定理．

4．发现西方代数方程(借方根)与中国传统算法“天元术”的联系，认为这两种算法“名异而实同”，并举例说明了二者的一致性．这一发现对沟通中西数学是有贡献的．

此外，书中还记载了杜德美(Jartoux，P．)传入的三个级数公式(分别由牛顿(Newton，I．)和格雷果里(Gregory，J．)给出的)．由此而引发明安图等后来者对幂级数展开的研究．

视学(Shìxué)　清代算书．中国最早的一部讨论画法几何的专著．一卷，清年希尧撰．全书以图为主，附以说明，图文配合阐述中心投影和平行投影的原理及作图法．书中介绍的术语有地平线(基线)、视平线、头点(主点)、乱点(灭点)、离点(距点)等．所用作图法有量点法、灭点法、截距法等．该书初刻于雍正七年(1729)，后年希尧又“苦思力索补缀五十余图并为图说以附益之”，于雍正十三年(1735)增订再版．国内目前仅有两部再版本，一部藏于中国国家图书馆，一部藏于中国科学院自然科学史研究所图书馆．

割圆密率捷法(Gēyuán mìlǜ jiéfǎ)　清代数学家研究无穷幂级数的开篇之作．四卷，清明安图撰．明安图生前该书尚未定稿，临终前嘱托门人陈际新等人算校，后者于1774年整理成书，并有几个抄本在数学家中流传，直到1839年才正式付刻．首卷“步法”列出圆径求周(圆周率的一种级数表达式)、弧背求正弦(正弦的展开式)、弧背求正矢(正矢的展开式)、弧背求通弦、弧背求矢、通弦求弧背、正弦求弧背(反正弦展开式)、正矢求弧背(反正矢平方展开式)、矢求弧背等九个无穷级数公式．每个公式之后还有为解释和运用该公式所加的按语．其中前三个为法国传教士杜德美(Jartoux，P．)所介绍之西方成果，后六个则是明安图所创，清代有人笼统地称之为“杜氏九术”是不对的．此外，明安图还提出了利用余弧、余弦、余矢借助三角变换而简化计算的四个公式，同时也解决了余弦和反余弦的计算．卷二“用法”是各个公式在数学和天文学上的应用示例，其中有正弦、余弦等三角函数值的计算、解平面三角形和球面三角形、金星的赤经、赤纬与黄经、黄纬的计算与换算等．卷三、卷四为“图解”上、下，详细阐述各个公式的证明方法．卷三主要是运用割圆连比例法和级数回求法推算弧与弦之间的关系，卷四则是推算弧与矢之间的关系及简化计算的四个公式．在推算过程中，有些问题还提出了多种解法．该书除了1839年岑建功首刊本之外，还有罗士琳《观我生室汇稿》本、道光年间陈氏刊本和刘铎《古今算学丛书》本传世．

九章算术细草图说(Jiǔzhāng suànshù xìcǎo túshuō)　清代算书．九卷，清李潢撰．该书以孔继涵刻戴震校微波榭本《算经十书》中的《九章算术》为底本，由按、草、说、图四部分内容构成．“按”主要是校勘意见，着重校勘戴震未校的部分及孔刻本中的误刻；“草”是根据《九章算术》术文及其刘徽注列出演算程序；“说”主要是对刘徽注与李淳风注中的文字逐句阐释，亦兼及校勘；“图”即根据术文和注释补的图．这些工作大都正确反映了刘徽等人深刻的数学思想，是刘徽注之后对《九章算术》最为详尽和准确的阐述，为后世学习研究《九章算术》和刘徽注的必读书籍．此书经沈钦裴校算后于1820年由语鸿堂刊行，并被多次翻刻．

海岛算经细草图说(Hǎidǎo suànjīng xìcǎo túshuō)　清代算书．一卷，清李潢撰．附刻于《九章算术细草图说》之后．该书亦由按、图、说、草四部分内容组成，其中“按”、“图”、“说”为李潢自撰，骆腾凤校订，“草”为沈钦裴所补．“按”是李潢提出的校勘，“说”与“图”相配合，以“今有术”说明刘徽造术的理

由.

缉古算经考注(Jīgǔ suànjīng kǎozhù) 清代算书.二卷,清李潢撰.该书以《九章算术》的传统方法考注《缉古算经》,误者正之,缺者补之.刊误700余字.但稿未成李潢即去世,其弟子刘衡为之补注校订.道光十二年(1832)由李兆洛作序刊行.

勾股形内容三事和较(Gōugǔxíng nèiróng sānshì héjiào) 清代讨论勾股形内诸元素间的关系的专著.不分卷,清博启撰.勾股形内容三事指勾股形的弦上的高线、内接正方形的边长及内切圆的直径这三个元素.勾股形内容三事或三事和较任知其二,借助和、较求解勾股形的三边,是《勾股形内容三事和较》一书的主要内容.该书由八部分组成:总论(包括总图、方边中垂线合图说、圆径中垂线合图说、方边圆径合图说及三事和较全图说)、解略篇四则、等积形说八图、六十题总目、前法十、中法三十八、后法十二和绘图分数.总论中的总图给出了勾、股、弦、中垂线、内容方边、内容圆径等概念,后面的四个"图说"相当于四条基本定理,是后面"等积形说"中证明的基础."解略篇"给出勾股形及其中元素的名称,并对各事和较给出约定."等积形说"以前两部分为基础,证明了八个等式,相当于八条定理,它们是以后解题的基础.接下来的四部分则是全书六十个问题的题目和解法.在最后一部分"绘图分数"中,给出在勾六千、股八千、弦一万时的勾股形内容三事及三事和较及和较的具体数值以供参考.该书今传道光元年(1821)姚元之抄本,现藏中国国家图书馆.

里堂学算记(Lǐtáng xuésuànjì) 清代数学家焦循的数学著作集.五种十六卷.包括《释轮》二卷、《释椭》一卷、《释弧》三卷、《加减乘除释》八卷和《天元一释》二卷.《释轮》二卷讨论传入中国的第谷天文学说中的本轮、次轮的几何原理,"上篇言诸轮之异同,下篇言弧线之变化,以明立法之意".《释椭》一卷讨论传入中国的卡西尼天文学说中的几何知识.《释弧》三卷"上篇释正弧弦切之用,中篇释内外垂弧之义,下篇释次形及矢较之术".《加减乘除释》仿照刘徽注《九章算术》之意,试图对《九章算术》等书的各种传统算法予以会通和概括,它是焦循的代表作.《天元一释》是对"天元术"的阐释,辨明了《测圆海镜》中"立天元一"和《数书九章》中"立天元一"的不同,并注释了各种类型的方程及其变形的求解方法.《里堂学算记》有嘉庆四年(1799)《雕菰楼丛书》本及光绪二十二年(1896)《中西算学丛书初编》本.

加减乘除释(Jiājiǎn chéngchú shì) 《里堂学算记》之一种.八卷,清焦循撰.第一、五两卷主要论述数的加减运算规则;第二卷主要论述二项式的乘方运算;第三卷主要论述数的乘除运算规则;第四、六两卷主要论述分数的性质及其运算规则;第七卷主要论述各类比例问题;第八卷主要论述加减乘除四则运算规则.全书共列出有关运算规则93条,每一条都相当于现代数学教科书中的定理或公式.该书除被收入《雕菰楼丛书》外,还被收入《中西算学丛书初编》中.

天元一释(Tiānyuán yíshì) 《里堂学算记》之一种.二卷,清焦循撰,成书于嘉庆四年(1799).该书主要阐述宋元数学的重要成果之一"天元术".卷上首先阐述"立天元一"的几何意义,对其所用名词一一予以解释,接着根据一元高次方程各项系数符号的变化情况将方程分类,并将《测圆海镜》中的方程予以归类.此外还具体讨论了宋元数学中"天元在上,太极在下"和"天元在下,太极在上"两种记法的利弊.卷下首先辨明了《数书九章》中的"立天元一"与《测圆海镜》等著作中"天元术"的"立天元一"不同,接着重点对各种类型的方程及其变形的基本解法一一疏导、注释,最后还通过考证,否定了当时流行的"李演秦说".此书除收入《里堂学算记》外,尚有《中西算学丛书》本、《富强丛书续集》本、《测海山房中西算学丛刻初编》本及上海著易堂铅印本传世.其稿本现藏中国国家图书馆.

开方通释(Kāifāng tōngshì) 清代阐述宋元数学中的增乘方法的著作.一卷,清焦循撰.前半部分论"十二式",每一式都列出一至十次方程并以题例及算草加以说明,是全书的核心,其中前八式实际上是八类不同形式的高次方程,后四式则是增乘开方法的几个关键步骤;后半部分主要以实例说明李冶、秦九韶"开方"方法的异同,并特别阐明了"投胎"、"换骨"、"开连枝同体术"等方法.此书有光绪六年(1880)德化李氏刊本,后又被李盛铎收入《木犀轩丛书》中.

衡斋算学(Héngzhāi suànxué) 清代数学家汪莱的数学著作集.七册.《衡斋算学》第一册(1796)和第四册(1798)前半是汪莱对球面三角形的讨论.第一册系统讨论了球面三角形有解、无解的条件.对任意球面三角形,已知两边及其一对角或两角及其一对边的求解,各列出26种情形讨论.对球面直角三角形,讨论了9种有解的情形并给出具体解法.对于已知球面三角形边角六元素中任意三个,求其余元素,共有六种情形.第四册就六种情形给出有解的充分条件.汪莱对方程论的研究见于《衡斋算学》第二册(1798)、第五册(1801)和第七册(1805).在第二册中,汪莱指出形如 $x(p-x)^2=q$ 的方程可有二正根,其中 $p>0,q>0,0<x<p$.在该问题的研究中,汪莱还给出了等勾弦和两勾股形等积的充分必要条件.第五册系统讨论有实根的二次方程和三次方程正根的个数,无正根的情形不予讨论.本册按照方程系数的符号列举96条,归纳之后,共是16个方程.

凡方程有一正根者称为可知，多正根者称为不可知，有一正根或多正根者称为可知或不可知. 对最后一种情形，汪莱给出判别方法. 第七册讨论有实根的高次方程正根个数的出现规律和正根的判别条件，无实根的情形不予讨论. 本册提出了方程的分类，以举例方式显示正根出现规律，说明正根的判别条件，给出方程 $x^n-px^m+q=0$ (n,m 是正整数，$n>m$，$p>0,q>0$)有正根的充分必要条件是

$$q\leqslant\frac{n-m}{n}p\left(\frac{m}{n}p\right)^{\frac{m}{n-m}}.$$

第四册后半为《递兼数理》，在此处，汪莱将组合作为一个数学问题第一次予以严谨的论述，其中包括组合的定义、计算公式、基本性质和一个组合恒等式. 第三册(1798)和第六册(1801)讨论三角函数表造法，分别给出由本弧通弦求其五分之一弧通弦和由本弧通弦求其三分之一弧通弦的方法.《衡斋算学》的版本有二册本(六九书榭，1798 年刊于歙县)、六册续刊本(六九书榭、嘉树堂，1802 年续刊于扬州)、七册续刊本(六九书榭、嘉树堂、桂荫堂，1810 年续刊于石埭). 现在流传较多的是《衡斋算学遗书合刻》本，其有咸丰四年(1854)夏燮鄱阳县署刊本和光绪十八年(1892)汪廷栋闻梅旧塾刊本.

参两算经(Cānliǎng suàn jīng)　清代讨论 $p(2\leqslant p<10)$ 进制乘、除法的数学著作. 一卷，清汪莱撰. 全书分为“经”、“说”两部分. “经”又包括“原始”、“立纲”、“汇奇”、“列偶”、“会归”五节，其中“立纲”的目的在于强调“逢身进位”这一计数原则，“汇奇”和“列偶”则分别给出二至九进制的乘、除法则. 书中列出了二至九进制的全部乘法口诀，其所提出的“法数合乃宜”，即要求选择除数使商为整数或有限小数. 在最后部分的“参两数说”中，汪莱用实例说明了非十进制来源于实践. 该书没有单刻本，收入《衡斋遗书》卷二，有咸丰四年(1854)夏燮刻本和光绪十八年(1892)汪廷栋重刻本.

李氏遗书(Lǐshì - yíshū)　清代数学家李锐的天文、数学著作的汇编. 11 种 18 卷. 包括《召诰日名考》一卷、《三统术注》三卷、《四分术注》三卷、《乾象术注》二卷、《奉元术注》一卷、《占天术注》一卷、《日法朔余强弱考》一卷、《方程新术草》一卷、《勾股算术细草》一卷、《弧矢算术细草》一卷和《开方说》三卷，其中后四种为李锐的数学著作.《方程新术草》(1798)校释《九章算术》刘徽“方程新术”;《弧矢算术细草》(1798)和《勾股算术细草》(1806)阐发顾应祥的著作;《开方说》是关于方程论的著作，为李锐的代表作.《李氏遗书》的版本有清道光三年(1823)阮氏刊本和清光绪十六年(1890)上海醉六堂刊本.

勾股算术细草(Gōugǔ suànxshù xìcǎo)　《李氏遗书》之一种. 一卷，清李锐撰. 该书利用天元术和演段法系统总结中国传统的勾股算术，给出由勾、股、弦及其和较为条件求解勾股形的 78 种情况，并用“图”和“解”(即利用出入相补原理)对其中 25 种基本算法或公式予以证明. 该书除有《李氏遗书》本外，还有嘉庆十二年(1807)吴下单刊本和《白芙堂算学丛书》本.

开方说(Kāifāngshuō)　《李氏遗书》之一种. 三卷，清李锐撰. 卷上主要讨论高次方程正根个数与系数符号间的关系，得出实系数方程的正根个数等于其系数序列的变号个数或相差一个偶数. 这一结论与现代方程论中判定正根个数的“笛卡儿符号法则”十分相似，这是全书最突出的成果. 此外，卷上还介绍增乘开方法. 卷中引进了负根的概念，并阐述了根据增乘开方法提出的“代开法”——先求高次方程的一根再由变形方程续求其余根的一种方法. 卷下介绍了重根的概念和根与系数之间的关系，讨论了各种方程的变形，对各种方程变换如倍根变换、减根变换、反根变换等都做了解释并予以完善. 此外，还讨论了“无数”——虚根共轭的情况. 该书李锐在世时仅完成前两卷，卷下是由其弟子黎应南遵其遗嘱补成的. 有《李氏遗书》本、《白芙堂算学丛书》本和《古今算学丛书》本传世.

少广正负术(Shàoguǎng zhèngfùshù)　清代关于方程的解法和应用的数学著作. 内篇三卷、外篇三卷，清孔广森撰. 内篇三卷讲平方、立方、三乘方诸开法，仅立方就有“带从立方”、“减从立方”、“负隅立方”、“连枝隅立方”等. 外篇三卷讨论高次方程的应用，卷上包括“割圆弧矢”、“新设三角法”、“方田杂法”、“推秦氏方斜求圆算草”及“堆垛”等条目;卷中是若干勾股“难题”，涉及到勾股和较、勾股幂、勾股边幂相求、勾股容方、勾股中长、勾股不同式等方面;卷下是“斛方补问”及订正《算法统宗》求筑堤法一则. 该书版本有《戴轩所著书》本、《指海》本、《翠琅玕馆丛书》本和《古今算学丛书》本(只收内篇三卷).

求一算术(Qiúyī suànshù)　清代阐述秦九韶“求一术”的数学著作. 三卷，清张敦仁撰，成书于 1803 年. 上卷究其原，首先阐述求一术与更相减损的关系，然后通过例题将一次同余式组解法中化非互素模为互素模的步骤“依秦氏之说，略加修饰而衍之”. 中、下卷则明其法，中卷为杂法，下卷为演纪，举唐《麟德历》、《大衍历》、《宋崇天历》、《纪元历》及元《授时历》为例，推求上元积年. 这一著作除 1831 年自刻本外，还有兰陵孙氏岱南阁刊本，而以上海博古斋影印《岱南阁丛书》本流传最广.

缉古算经细草(Jīgǔ suànjīng xìcǎo)　清代算书. 三卷，清张敦仁撰，书成于 1803 年. 张敦仁在研读《缉古算经》时，见书中羡道、筑堤等二十术均有术无草，且词理隐奥，同时十六术以下脱字甚多，于是

和李锐商榷为此书演草.张氏根据《缉古算经》最后三题残存的文字,经过细致的数字计算,补足了题目、答案和术文部分,但没有校补王孝通"自注"中脱落的文字.张敦仁用天元术注解《缉古算经》,根本没有理会王孝通的"自注".该书有1803年艺学轩原刊本、《知不足斋丛书》本、《白芙堂算学丛书》本和《丛书集成初编》本等.

艺游录(Yìyóulù) 骆腾凤对古代数学著作的研究札记.二卷,清骆腾凤撰.该书共22篇,其于衰分、方程、勾股等法及《九章算术》所未载和古今算书未解决的问题,溯其源、正其误,随所见而记之,内容涉及《九章算术》、《孙子算经》、《缉古算经》、《数书九章》和《测圆海镜》等.其中《衰分补遗》篇以方程术与秦九韶大衍求一术求解《张丘建算经》中的百鸡问题,在中国数学史上首次正确地解决了这个问题.此外,该书对《缉古算经》仰观台题的研究、校勘,关于正负数的诠释,对勾股知识的总结等都有一定成就.此书与其另一本著作《开方释例》合称《骆氏算书》,刻于1815年.该书还有道光二十三年(1843)何锦校刊本和光绪十年(1884)重刊本(附《识误》一卷).

重差图说(Chóngchā túshuō) 清代解证《海岛算经》的数学著作.一卷,清沈钦裴撰.该书试图以相似勾股形的对应边成比例来说明刘徽《海岛算经》术文的正确性.给《海岛算经》的每一个问题都补以一图一说一草.每个图下面有一段文字,说明所用的相似勾股形及有关线段;"说"是对术的说明和解释,它把问题归结为用今有术来解;"草"是具体的计算过程.该书未刊,有手抄本藏中国科学院自然科学史研究所图书馆.

四元玉鉴细草(Sìyuán yùjiàn xìcǎo) 亦名《四元细草》、《四元玉鉴演草》.清代算书.不分卷,清沈钦裴撰.该书是对元朱世杰《四元玉鉴》的研究之作,其首先在卷首列出"今古开方会要之图细草",并自拟答案都是11的带从开平方至开7乘方的7个例题的增乘开方程序,然后给原书各题补以"草"或"细草",说明朱氏造术之理.尤其是对"四元消法"和"垛积术"的解释,较为切合朱氏之原意.此书未刊,有手抄本藏中国国家图书馆.

四元玉鉴细草(Sìyuán yùjiàn xìcǎo) 清代算书.二十四卷附一卷附增一卷,清罗士琳撰,成书于1843年.元朱世杰的《四元玉鉴》只有解题方法,没有详细演算,演算过程不大清楚.针对这一问题,罗士琳经过10年努力,对此书24门每一问题均给出详算,并对原书提出校改共130余处.该书流传较广,影响很大,但对朱世杰立术本意的解释没有沈钦裴编撰的《四元玉鉴细草》准确.此书版本主要有《观我生室汇稿》本、1891年成都志古堂刊本、1896年上海鸿宝斋石印本和《古今算学丛书》本、《测海山房中西算学丛刻初编》本.

观我生室汇稿(Guānwǒshēngshì huìgǎo) 清代数学家罗士琳的数学著作集.十一种九十四卷.包括《勾股容三事拾遗》三卷附例一卷、《三角和较算例》一卷、《四元玉鉴细草》二十四卷附一卷附增一卷、《演元九式》一卷、《台锥演积》一卷、《校正算学启蒙》三卷、《续畴人传》六卷、《周无专鼎铭考》一卷、《弧矢算术补》一卷.以上皆为罗氏自撰.另附有明安图的《割圆密率捷法》四卷和阮元的《畴人传》四十六卷.该集有道光年间刊本.

勾股容三事拾遗(Gōugǔróngsānshì shíyí) 《观我生室汇稿》中的一种.三卷附例一卷,清罗士琳撰,成书于1826年.该书立基本问题60个,并设备例25个,广例25个,利用天元术研究直角三角形内容方边、圆径、垂线等问题.

演元九式(Yǎnyuán jiǔshì) 《观我生室汇稿》中的一种.一卷,清罗士琳撰,成书于1827年.该书通过例题以正负开方术解释朱世杰《四元玉鉴》中天元术的"进退升降消长诸例".这是继朱世杰之后第一部研究天元术的著作.

台锥演积(Táizhuī yǎnjī) 《观我生室汇稿》中的一种.一卷,清罗士琳撰,成书于1837年.该书受朱世杰垛积和立体体积计算的启发,给出了圆锥垛和圆台垛的各种互求公式,并以密率入算重新计算了圆台、圆锥的体积,同时还首次研究了椭圆锥和椭圆台体积的计算.

三角和较算例(Sānjiǎohéjiào suànlì) 《观我生室汇稿》中的一种.一卷,清罗士琳撰,成书于1840年.该书研究三角形边角和较相求算法.全书分三部分设为三例,每例八题,每题四术,共九十六术,不涉及具体数字,故可以看作是一般性公式.其方法是借助三角形某一边上的高将其分为两个直角三角形,以天元术入算.

弧矢算术补(Húshǐ suànshù bǔ) 《观我生室汇稿》中的一种.一卷,清罗士琳撰,成书于1843年.该书在顾应祥《弧矢算术》和李锐《弧矢算术细草》原有三条公式的基础上,又增加了三条基本公式,并将原书的十三术推广为四十术,使弧矢论的初等研究基本上达到了完备的程度.

校正算学启蒙(Jiàozhèng suànxué qǐméng) 《观我生室汇稿》中的一种.三卷,清罗士琳校注.罗士琳在细草《四元玉鉴》时得知朱世杰尚有一部著作《算学启蒙》已失传,故四处搜寻,终于由汪喜孙"于琉璃厂书肆中得朝鲜重刊本,计三卷",立即为之校注,并于1839年由阮元作序在扬州重刻出版.此后《算学启蒙》在中国又重有定本.

董方立算书(Dǒngfānglì-suànshū) 清代数学家董祐诚的天文数学著作集.五种七卷.包括《割圆

连比例术图解》三卷、《椭圆求周术》一卷、《斜弧三边求角补术》一卷、《堆垛求积术》一卷、《三统术衍补》一卷等. 其主要版本有道光七年(1827)初刻本,同治八年(1869)董贻清成都刻本,光绪五年(1879)江南制造局刻本,光绪二十二年(1896)《测海山房中西算学丛刻初编》本和光绪年间《富强斋丛书》本等.

斜弧三边求角补术(Xiéhú sānbiān qiújiǎo bǔshù) 《董方立算书》之一. 一卷,清董祐诚撰. 该书讨论球面斜三角形的半角正弦和半角余弦公式. 薛凤祚《三角算法》载有半角正弦公式,但有法无解;梅毂成《赤水遗珍》曾有解证,但也未完善. 董祐诚则另作图解予以证明,并补充了半角余弦公式.

堆垛求积术(Duīduò qiújīshù) 《董方立算书》之一. 一卷,清董祐诚撰. 该书讨论垛积术中"方锥堆"和"纵方堆"的求和问题. 方锥堆取三角垛横行相邻两项的前项加后项二倍为之通项,纵方堆取三角垛相邻两垛对应项的前项加后项二倍为之通项. 由三角垛求和公式得到该两垛的求和公式.

割圆连比例术图解(Gēyuán liánbǐlìshù tújiě) 《董方立算书》之一. 三卷,清董祐诚撰. 该书讨论三角函数和反三角函数的幂级数展开式,主要结果是弧与弦矢互求的四术:即"有通弦,求通弧加倍几分之通弦";"有矢,求通弧加倍几分之矢";"有通弦,求几分通弧之一通弦";"有矢,求几分通弧之一矢". 其方法是以清梅毂成等人汇编的《数理精蕴》中介绍的连比例四率法,并运用中国传统数学中的垛积术推得前两术,又用级数回求法推得后两术. 该书版本有《董方立算书》本、《测海山房中西算学丛刻初编》本、《古今算学丛书》本.

象数一原(Xiàngshù yìyuán) 清代讨论三角函数的幂级数展开式的数学著作. 七卷,清项名达撰. 前六卷陆续写于 1837 年至 1846 年之间. 其"象"指的是一系列相似等腰三角形,"数"指的是递加数,即有理指数幂的二项式定理系数表. 二者皆通于弦矢,根据这种关系可求得相应的弦矢公式. 这就是书名的来源. 该书的主要内容是解决弦矢互求问题,即将全弧 n 等分,求出全弧通弦用 m 分弧通弦和正矢表示的幂级数展开式问题,卷一"整分起度弦矢率论"以半圆析为十八分为例,推导一分弧的各整数倍弧的弦矢公式. 卷二"半分起度弦矢率论"主要阐述 $n/2$ 倍弧的弦矢公式. 卷三、卷四"零分起度弦矢率论"阐述 $n/3$、$n/4$、$n/5$ 倍弧的弦矢公式及零分起根递加数的算法. 卷五"诸术通诠"主要用新立弦矢四术推导董祐诚和明安图的公式. 卷六"诸术明变"为弦矢公式和递加数法的各种应用. 卷七"椭圆求周图解"阐明椭圆周长公式的详细推导过程. 这些工作是西方微积分尚未传入中国之前、中国数学家在处理有关无穷和极限问题的最好结果. 最后一卷及四、六两卷中的部分内容为戴煦所补,全书均经戴煦校核. 该书首刊于光绪十四年(1888). 现有上海赵氏《高斋丛刻》本、刘铎《古今算学丛书》本(无卷七)、元和江氏刊本和中国国家图书馆所藏抄本等.

下学庵算术三种(Xiàxuéān suànshù sānzhǒng) 清代算书. 项名达的数学著作集. 三种三卷,清项名达撰,包括《勾股六术》一卷(1825)、《三角和较术》一卷(1843)、《开诸乘方捷术》(1845)一卷. 原版毁于战火,后重刻于通州. 现有光绪十三年(1887)刊本和石印缩本等.

勾股六术(Gōugǔ liùshù) 《下学庵算术三种》中的一种. 一卷,清项名达撰,成书于 1825 年,是一本讲述勾股算术的入门书. 勾股形的勾股弦及其和差共有 13 种,已知任何其中 2 种,皆可求解勾股形,计有 78 题. 该书选取 25 题,按算法相近分为六术,分别给出公式并予以图解(即证明). 这些解法有些是旧术,有些则是项名达通过比例变换给出的新解. 该书除刊入《下学庵算术三种》之外,还有道光十六年(1836)刊本、同治十一年(1872)刊本、江南制造局《算学十书》刊本、观象庐丛书本、《古今算学丛书》本和《中西算学汇通》本等.

三角和较术(Sānjiǎo héjiàoshù) 《下学庵算术三种》中的一种. 一卷,清项名达撰,成书于 1843 年. 该书包括"平三角和较术"和"弧三角和较术"两部分. 主要内容是叙述解平面与球面直角三角形和一般三角形的各种公式. 但未及给出图解,即由其学生刊刻出版. 初刻本恐已失传. 现有道光三十二年(1852)钱塘王氏校刊本、《下学庵算术三种》本和光绪二十四年(1898)江夏程氏刊本等.

开诸乘方捷术(Kāi zhūchéngfāng jiéshù) 《下学庵算术三种》中的一种. 一卷,清项名达撰,成书于 1845 年. 该书包括项名达的四个公式和戴煦的两个公式,即根据近似根与真根的不同情况,用于开高次方的无穷级数公式. 其中部分公式与现在用于开方根近似计算的逐次逼近法相合. 现有道光十七年(1837)刊本、《下学庵算术三种》本和《古今算学丛书》本等.

务民义斋算学(Wùmín yìzhāi suànxué) 徐有壬的天文数学著作集. 九种十六卷,清徐有壬撰. 包括《割圆八线缀术》四卷、《测圆密率》三卷、《截球解义》一卷、《弧三角拾遗》一卷、《造各表简法》(又名《垛积招差》)一卷、《椭圆正术》一卷、《椭圆求周术》一卷、《朔食九服里差》三卷、《表算日食三差》一卷. 前七种为数学著作,后两种为天文著作. 这部著作除有同治年间家刻本传世外,尚有《咫进斋丛书》本、《白芙堂算学丛书》本、《古今算学丛书》本、《中西算学丛书》本和《丛书集成初编》本等.

测圆密率(Cèyuán mìlǜ) 《务民义斋算学》中

的一种. 三卷，清徐有壬撰. 主要讨论三角函数及其幂级数展开式等问题. 卷一介绍求椭圆的周长、椭圆的面积和椭圆体体积等方法. 卷二首先介绍法国传教士杜德美(Jartoux, P.)传入和明安图研究的四个级数展开式，然后给出“正弦求弧背”、“正切求弧背”、“弧背求正切”三术，解决了杜德美传入的级数展开式，“能求弦矢，而不能求切割二线”的问题. 此外还讨论了一些立体的体积计算. 卷三给出了大小互求十八术.

造各表简法(Zàogèbiǎo jiǎnfǎ) 亦名《垛积招差》，《务民义斋算学》中的一种. 一卷，清徐有壬撰，成书于1859年之前. 该书给出了计算三角函数及其对数的新方法. 包括正弦、正矢、正切、八线对数和对数五种造表法，其中八线对数造表法为徐有壬独创.

截球解义(Jiéqiú jiěyí) 《务民义斋算学》中的一种. 一卷，清徐有壬撰. 该书主要解释体积(球体与圆柱体)、面积的关系. 后附《椭圆求周术》，在项名达、戴煦研究的基础上又给出一术，并“贯三术为一术”.

弧三角拾遗(Húsānjiǎo shíyí) 《务民义斋算学》中的一种. 一卷，清徐有壬撰. 该书主要讨论球面三角形问题. 除介绍纳皮尔比例式、正弦半角公式外，又给出正弦、余弦半弧公式，从而简化了对数计算.

求表捷术(Qiúbiǎo jiéshù) 清代算书. 戴煦的数学著作集. 四种九卷，清戴煦撰. 包括《对数简法》二卷、《续对数简法》一卷、《外切密率》四卷和《假数测圆》二卷. 该书有广东伍崇曜《粤雅堂丛书》刻本传世，并有《古今算学丛书》、《丛书集成》等版本.

对数简法(Duìshù jiǎnfǎ) 《求表捷术》中的一种. 二卷及续一卷，清戴煦撰，成书于1845年. 该书主要内容是关于对数函数的幂级数展开及对数表的造法. 其借助有理指数的二项式定理，得到了由开方表求对数、由自然对数求常用对数、由展开式求对数以及由三角函数的对数展开式造三角函数对数表等方法，从而推广了清梅毂成等人汇编的《数理精蕴》中所介绍的常用对数的造表法. 该书版本主要有《求表捷术》本、《中西算学书初编》本、《古今算学丛书》本及《丛书集成初编》本.

外切密率(Wàiqiē mìlǜ) 《求表捷术》中的一种. 四卷，清戴煦撰，成书于1852年. 该书论述了以前中国数学家未曾讨论过的正切、余切、正割、余割等四种三角函数的展开问题. 因切割二线出于圆外，故名《外切密率》. 其主要讨论正切、余切、正割、余割四线与弧度之间的关系，共得出9个幂级数展开式. 在推导过程中，运用多项式的长除法进行无穷级数的除法运算，并用级数反求法得出了三角函数反函数的幂级数展开式. 此外，在讨论正割函数展开式的系数时，得到与欧拉数递推式一致的结果，并实际计算出了前10个欧拉数. 该书版本有《粤雅堂丛书》本、《古今算学丛书》本、《丛书集成初编》本等.

假数测圆(Jiǎshù cèyuán) 《求表捷术》中的一种. 二卷，清戴煦撰，成书于1852年. 该书进一步阐述三角函数的对数表的造法，并给出了对数的幂级数展开式.

四元玉鉴细草(Sìyuán yùjiàn xìcǎo) 清代算书. 三卷首一卷，清戴煦撰，成书于1844年，未刊. 该书是以《四元玉鉴》何元锡刻本为底本而逐题演草，虽定稿时间较沈钦裴、罗士琳二人均晚，但此细草为戴氏独立完成. 现在台湾省新竹县的清华大学立青文库，收有王吉孚道光二十五年(1845)戴草的抄校本.

则古昔斋算学(Zégǔxīzhāi suànxué) 清代算书. 李善兰的天文、数学著作集. 清李善兰撰，共十三种二十四卷. 包括《方圆阐幽》一卷、《弧矢启秘》二卷、《对数探源》二卷、《垛积比类》四卷、《四元解》二卷、《麟德术解》三卷、《椭圆正术解》二卷、《椭圆新术》一卷、《椭圆拾遗》三卷、《火器真诀》一卷、《对数尖锥变法释》一卷、《级数回求》一卷、《天算或问》一卷. 1867年，在曾国藩的资助下，李善兰在南京刊刻出版了这一著作集，即金陵刊本. 此外，该书还有光绪八年(1882)江宁藩署刊本、同文馆聚珍本及上海积山书局石印本等.

方圆阐幽(Fāngyuán chǎnyōu) 《则古昔斋算学》中的一种. 一卷，清李善兰撰，是李善兰阐述尖锥求积术，并以单位圆面积为例说明尖锥术的应用. 该书给出十条“当知”作为尖锥术的基本原理. 前三条讲点、线、面、体之间的关系，是关于无限小几何元素的基本假设；第四条以诸乘方数说明线、面、体之间可以互变；后六条专讲尖锥，包括平、立尖锥的形状、积迭之理及面积、体积算法. 这十条“当知”虽不十分严谨，但有些已达到了积分的结果. 该书最后李氏考虑“方内函圆”的“方圆之较”，以此为例说明尖锥术原理的应用. 《方圆阐幽》的版本有《则古昔斋算学》本、《艺海珠尘》本及《丛书集成初编》本等.

弧矢启秘(Húshǐ qǐmì) 《则古昔斋算学》中的一种. 一卷，清李善兰撰，成书于1845年. 该书用尖锥术求解三角函数和反三角函数的幂级数展开式.

对数探源(Duìshù tànyuán) 《则古昔斋算学》中的一种. 一卷，清李善兰撰，成书于1845年. 该书用尖锥术求解对数幂级数展开式.

垛积比类(Duòjī bǐlèi) 《则古昔斋算学》中的一种. 四卷，自朱世杰《四元玉鉴》之后讨论高阶等差级数求和的最优秀的著作，也是李善兰的代表作. 全书每一卷，各自成章，每卷都构造了一个垛积体系. 卷一是朱世杰的三角垛及其派生的各支垛；卷二为

乘方垛及各支垛，讨论级数 $1^p+2^p+3^p+\cdots\cdots+n^p$（$p$为正整数）的求和公式；卷三为三角自乘垛和各支垛，并创立了“李善兰恒等式”；卷四讨论的三角变垛是朱世杰岚峰形垛及三角再变垛、三角三变垛的求和公式. 各卷都可分为五个部分：图、表和造表法、推导和演草、有高（层）求积术（前 n 项和公式）、有积求高（层）术（前一部分的逆问题）. 书中所有公式均由归纳而得，无演绎证明，但结果全部正确.《垛积比类》有《则古昔斋算学》本及《古今算学丛书》本.

四元解（Sìyuánjiě）《则古昔斋算学》中的一种. 二卷，清李善兰撰，成书于 1845 年. 系作者研读朱世杰《四元玉鉴》后所作. 该书首先解释列位及加减乘除相消诸法，并改定布算格式，后将《四元玉鉴》的前四个问题用其改后的格式一一补足细草，还逐节绘图，详释其术. 该书首刊于《则古昔斋算学》，后又收入刘铎的《古今算学丛书》.

级数回求（Jíshù huíqiú）《则古昔斋算学》中的一种. 一卷，清李善兰撰. 该书专门讨论如何由幂级数展开式求其反函数的幂级数.

对数尖锥变法释（Duìshù jiānzhuī biànfǎshì）《则古昔斋算学》中的一种. 一卷，清李善兰撰. 该书通过三条引理对《对数探源》中的级数式给出了证明，从而可知尖锥术与西方的级数论是相通的.

天算或问（Tiānsuàn huòwèn）《则古昔斋算学》中的一种. 一卷，清李善兰撰.

考数根法（Kǎoshù gēnfǎ）《则古昔斋算学》中的一种. 一卷，清李善兰撰，成书于 1868 年.“数根”即素数，故这是中国最早的素数论专著. 该书详尽研究了素数的判别法，给出四个定理：“屡乘求一法”、“天元求一法”、“小数回还法”和“准根分级法”，还证明了著名的费马小定理，并指出其逆不真.《考数根法》首刊于艾约瑟（Edkins, J.）所编的《中西闻见录》第二、三、四期.

九容图表（Jiǔróng túbiǎo）《则古昔斋算学》中的一种. 一卷，清李善兰撰，成书于 1876 年. 为了便于理解和掌握《测圆海镜》卷一“圆城图式”、“总率名号”、“今问正数”和“识别杂记”中的各种与图形相关的数量关系，李善兰将之表格化，成《九容图表》，附录《勾股边径比例表》，使读者一目了然. 该书原附刻于李锐《测圆海镜细草》十二卷之后，后又被刘铎收入《古今算学丛书》.

夏氏算书遗稿（Xiàshì suànshū yígǎo）清代数学家夏鸾翔的数学著作选集. 包括《少广缒凿》一卷、《洞方术图解》二卷、《致曲术》一卷和《致曲图解》一卷. 这部选集是夏鸾翔殁后，吴嘉善与邹伯奇将其遗稿编辑整理而成的.《少广缒凿》讨论高次方程的解法，就开平方、开高次方及求解一般高次方程共给出 14 术，获得了和牛顿程序等价的结果.《洞方术图解》专论造正弦、正矢表的算法问题.《致曲术》研究二次曲线，其中用无穷级数展开的方法解决椭圆积分中的问题颇有创新之处.《致曲图解》是夏氏对圆锥曲线综合研究的成果.《夏氏算书遗稿》的版本有《邹征君遗书》附刊本、《中西算学丛书初编》本和徐树勋刊《算学丛书》本等.

洞方术图解（Dòngfāngshù tújiě）《夏氏算书遗稿》中的一种. 二卷，清夏鸾翔撰. 卷一为“演术”，叙述三角函数表造法；卷二为“图解”，阐述“演术”的理论依据. 该书主要有两部分内容，一是对贾宪三角形性质的讨论，一是对三角函数表造法的改进. 夏鸾翔对贾宪三角形中的数字分为“斜、横、直、侧”四类求法，每一类求法中又给出若干种算法，得到一系列恒等式. 夏鸾翔认为用级数计算三角函数值虽简于古法，但要经过多次乘除才能得出各项数值，计算工作相当繁重. 他在《洞方术图解》中创设了一种利用招差法造正弦、正矢表的方法，只须预先计算好表中所列正弦值或正矢值的逐次差数用加减法就可造成全表，大大简化了运算.《洞方术图解》有《夏氏算书遗稿》本.

致曲（Zhìqū）中国第一部系统研究解析几何的著作. 二卷，清夏鸾翔撰. 上卷为《致曲术》，讨论了椭圆、抛物线、对数曲线、螺线等一些曲线的弧长及旋转体的表面积和二次曲线的性质. 下卷为《致曲图解》，进一步对二次曲线进行研究并附以图解，论述了圆锥曲线与母面的关系、焦点、准线、截距、切线、法线及双曲函数，其中若干结果是《代微积拾级》等书中所没有的. 该书版本有《夏氏算书遗稿》本、《古今算学丛书》本及《蛰云雷斋丛书》本，另有稿本现藏上海图书馆.

百鸡术衍（Bǎijīshù yǎn）清代研究和推广“三色差分”的数学著作. 二卷，清时曰醇撰，成书于 1861 年.“百鸡问题”是《张丘建算经》提出的一个不定方程问题，而对其解法“百鸡术”的研究，长期以来有许多成果问世. 时曰醇在前人工作的基础上深入研究，集前人之大成而有所发明. 该书共 28 题，每题的求法都列出“如方程”和“求一术”两种解法. 求一术法与骆腾凤法相同，“如方程”则是采用丁取忠设一物为零，化三色差分为二色差分之后，借用梅文鼎《方程论》卷二“化整为零法”求得一组解，然后由“约率”加减、再由“通率”加减得其正整数解的一种方法. 这一著作于 1861 年在长沙首刊，后被丁取忠收入《白芙堂算学丛书》.

求一术通解（Qiúyíshù tōngjiě）清代深入研究不定分析的数学著作. 二卷，清黄宗宪撰，成书于 1874 年前. 该书上卷以“孙子问题”和杨辉各题（模数两两互素）为例，在阐释立术道理的同时，演述了他自己的求解过程；下卷介绍应该注意的问题和可

以另立的解法.其主要贡献有：

1.对模数不两两互素情形，给出了用素因数分解求定数的方法.

2.增补求反乘率法，并给出了其方法的理论证明的基本思路.

3.将时曰醇的两个问题巧妙地化为二元一次不定方程，再归结为解同余式问题，揭示了不定方程与求一术的联系.

《求一术通解》有《白芙堂算学丛书》本、梅城知足堂《古琴古砚斋算学》家刻本和《古今算学丛书》本、《测海山房中西算学丛刻初编》本等传世.

算牖(Suànyǒu)　清代算书.四卷，清许桂林撰，刻于1811年.桂林因“算家以简为贵”，乃取《数理精蕴》等书中切于日用者，杂辑以成是书.第一卷为总纲，讲乘除法及比例，主张筹(纳皮尔筹)珠联用.他说：“盖乘除俱莫善于筹，而加减实莫善于珠……合此二善，省心省手，无以逾之.”第二卷介绍笔算、筹算.第三卷以九章分类，简要介绍一些应用问题.第四卷为杂法，介绍有“铺地锦”、“金蝉脱壳”、“尺算”及几种趣味算题.末有“珠盘考”一篇，引用了《盘珠算法》、《数术记遗》等史料.

行素轩算稿(Xíngsùxuān suàngǎo)　清代算书.华蘅芳数学著作的汇集.六种二十七卷.包括：《开方别术》一卷、《数根术解》一卷、《开方古义》二卷、《积较术》三卷、《学算笔谈》十二卷和《算草丛存》八卷.该书版本有：光绪八年(1882)梁谿华氏刊本、光绪十九年(1893)重刊本、光绪二十二年(1896)上海文瑞楼石印本等.

开方别术(Kāifāng biéshù)　《行素轩算稿》中的一种.一卷，清华蘅芳撰.副题为《数根开方术》，讨论整系数方程有理根的解法.华氏将整系数方程分为首项系数绝对值为1和不为1两类.对前一类分别求其正整根和负整根，后一类可能有分数根.华氏以倍根变换将其归结为前一类求解.华氏将素因数分解引入中国传统数学的增乘开方法而使有理根的求法大为简化.该书版本有：《行素轩算稿》本、《测海山房丛刻》本和《中西算学汇通》本.

学算笔谈(Xuésuàn bǐtán)　《行素轩算稿》中的一种.十二卷.《学算笔谈》是华蘅芳对数学诸方面的一部评论性著作，也是一部通俗浅近的教科书.前六卷于1882年完成，后又续写六卷.《学算笔谈》卷一至卷五论算术，卷六、卷七论天元术，卷八、卷九论代数，卷十、卷十一为微积分初步，卷十二为杂论.该书序言及卷一“总论算法之理”、卷十二杂论集中反映了华蘅芳对数学的看法及其数学教育的主张，这些内容至今仍有参考价值.《学算笔谈》的版本有《行素轩算稿》本、《中西算学汇通》本及陕西味经刊书处刊本等.

中国古算名词术语

算术(Suànshù)　古代数学的总称.中国古代对数学著作通称“算术”.如《杜忠算术》、《许商算术》、《九章算术》等.刘徽《九章算术》序曰：“观阴阳之割裂，总算术之根源.”《周髀算经》卷上：“陈子曰，然，此皆算术之所及.”此处所言指计算的方法.陈子曰：“算数之术，是用智矣.”说明算术就是“算数之术.”

九数(Jiǔshù)　中国古算名.《周礼·大司徒》篇称：“保氏掌谏王恶而养国子以道，乃教之六艺：一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数.”其“九数”即算学，东汉郑玄《周礼注》认为“九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要；今有重差、勾股.”后人多循此说，如刘徽《九章算术注序》称：“按周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣.”

筹(Chóu)　一种古算工具.这里指中国古代的计算工具，是用竹、木、骨或象牙等制成的小棍子或小片.亦称算策，俗称算子.《汉书·律历志》：“其算法用竹，径三分，长六寸.”6寸合13.8厘米，3分合0.69厘米.《隋书·律历志》：“其算法用竹，广二分，长三寸.”隋朝的长3寸，约合8.85厘米；广2分，约合0.95厘米.从先秦典籍中的有关记载来看，算筹可能起源于春秋战国时期，是由古代卜筮用的草演化而来的.先用于占卜，继而用于记数，最后被当作计算工具使用.

筹算(Chóusuàn)　一种古算技术.这里指中国古代利用算筹作为计算工具建立起来的计算技术.从广义上讲，筹算是指一个由一系列算法所构成的数学体系和在中国历史上延续了1500年以上的科学传统，它的核心是十进位值制和分离系数法.用算筹来表示数目有纵、横两种方式：



这是九个基数，零则以空位表示.用算筹表示多位数字，高位到低位从左到右横排，但相邻两位的筹式必须纵横相间.对此规则《孙子算经》规定“凡算之法，先识其位.一纵十横，百立千僵.千、十相望，万、百相当.”筹算的四则运算是由高位向低位进行.做加、减运算先将两数上、下对齐，和或差置于第三行中.做乘法将相乘两数分别置于上、下两行，上行最高位与下行最低位对齐，然后用上行各位数依次乘下行各位数字，乘得结果随时加到中行之中，最后中行的得

数就是二数之积. 除法的运算与此类似. 筹算的最大优点是应用分离系数法使一些数学关系的表达和有关运算得以大大地简化.

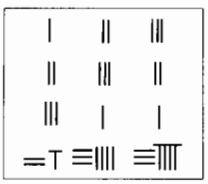


表 1

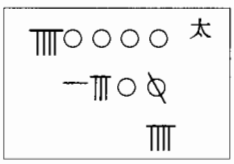


表 2

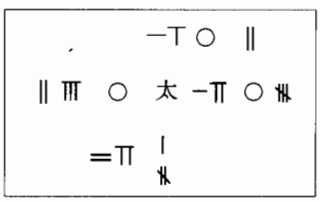


表 3

例如表 1，表示三元一次方程组：

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39, \\ 2x + 3y + z = 34, \\ x + 2y + 3z = 26. \end{cases}$$

表 2，表示一元二次方程：

$$9x^2 - 1800x + 90000 = 0.$$

表 3，表示四元三次方程：

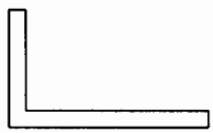
$$x - 2x^2 + 27xy + 8y^2 + 2y^3 + 17z - 3z^3 + 16w + 2wz^2 = 0.$$

中国古代数学家利用筹算解决了许多数学问题，得到了许多重要成果. 如开平方和开高次方、解高次方程、解线性方程组和高次方程组、计算圆周率、解一次同余式组、造高阶差分表等，都得益于筹算体系的采用.

九九(Jiǔjiǔ)　中国古算术语. 俗称小九九，即乘法口诀表. 现在的口诀是从“一一得一，一二得二，二二得四”起，一直到“九九八十一”止. 而在中国古代，这一口诀是倒过来记的，即从“九九八十一”到“二二得四”止，没有“一几得几”的口诀. 因为其开头的两个字为“九九”，故古人将此乘法口诀简称为“九九”. “九九”在中国的起源很早，相传早在春秋战国时代就已广为流行. 这表示在中国古代筹算的四则运算是十分普及的. 到了宋元时期，九九乘法口诀的次序已经颠倒过来，《事林广记》及朱世杰《算学启蒙》所载都是由“一一如一”至“九九八十一”，与现在四十五句的九九乘法口诀完全一致. 刘徽注《九章算术》序中所谓的“九九之术”，可能是将“九九”作为当时数学的代名词.

规(Guī)　中国古算术语. 中国古代称画圆的工具叫“规”，画方的工具叫“矩”，其源甚远. 甲骨文中“规”作手执规画圆，矩作象曲尺形. 古书中说到规矩者甚多，如《尸子》：“古者倕为规、矩、准、绳，使天下仿焉.”《墨子》：“轮匠执其规矩，以度天下之方圆.”《孟子》：“不以规矩，不能成方圆.”《荀子》：“圆者中规，方者中矩.”《周髀算经》：“数之法，出于圆方. 圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一.”

矩(Jǔ)　中国古算术语. 参见“规”条. 另古代将如右的曲折形亦称矩，如赵爽“勾股圆方图”注内的“勾实之矩”、“股实之矩”(如右图).



端(Duān)　中国古算术语. 它有两种含义：

1.《墨经》中云：“端，体之无厚而最前者也.”经说：“端，是无间也.”“端”即今几何学中之点，点是无厚的，也是无间的.

2. 端，长度单位名. 唐制：六丈为一端. 程大位《算法统宗》：“五丈为一端，今亦不一.”

表(Biǎo)　古代测量工具，即有刻度的标杆. 刘徽注《九章算术》序称：“度高者重表，测深者累矩.”意即用两个标杆即能测量不可直接度量的事物的高度. 古谓之重差术.《海岛算经》中用此法.

正算(Zhèngsuàn)　中国古算术语. 中国古代表示正数的算筹称“正算”，表示负数的算筹叫“负算”.《九章算术》刘徽注云：“今两算得失相反，要令正负以名之. 正算赤，负算黑，否则以邪正为异.”就是说表示正负数有两种方法，一种是用红色的筹表示正数，用黑色的筹表示负数；一种是“以邪正为异”.

负算(Fùsuàn)　中国古算术语. 中国古代表示负数的算筹. 在《九章算术》刘徽注文中说：以黑色筹为负，或斜放一筹表示负算(参见“正算”).

方田(Fāngtián)　中国古算术语. 它有两种含义：

1. 中国古代称正方形及矩形为方田. 李籍《九章算术音义》称：“方田者，田之正也. 诸田不等，以方为正，故曰方田.”

2.《九章算术》第一章章名，其中研究平面图形的面积问题. 附带介绍分数的运算方法.

粟米(Sùmǐ)　中国古算名. 这里指《九章算术》第二章章名. 李籍《音义》称：“粟者，禾之未舂，米者，谷实之无壳. 粟者，米之率也. 诸米不等，以粟为等，故曰粟米.”本章首列各种粮食的交换比率表，作为计算比例问题之用，首列“粟率五十，粝米三十……”故作章名. 本章主要研究比例问题.

衰分(Shuāifēn)　中国古算名. 这里指《九章算术》第三章章名. 刘徽注曰：“衰分，差分也.”“列衰，相与率也.”李籍《音义》称：“衰，差也. 以差为平分，故曰衰分.”衰，读为“崔(cui)”，即依照一定的标准

递减. 衰分，即按比率分配. 本章主要研究配分比例问题.

少广(Shàoguǎng)　中国古算名. 这里指《九章算术》第四章章名. 李籍《音义》称："广少从多，截从之多，益广之少，故曰少广."意即将一长方形或长方体改为正方形或正方体，以求其边长. 故本章为研究开平方和开立方问题.

商功(Shānggōng)　中国古算名. 这里指《九章算术》第五章章名. 李籍《音义》称："商，度也. 以度其功庸，故曰商功."商功，即各种工程中立体体积的计算.

均输(Jūnshū)　中国古算名. 这里指《九章算术》第六章章名. 在汉代推行均输律，即按人口多少、路途远近、谷物贵贱平均交纳租税或摊派徭役的制度. 本章就是关于这方面的计算，属于配分比例计算问题.

盈不足(Yíngbùzú)　中国古算名. 这里指《九章算术》第七章章名. 李籍《音义》称："盈者，满也. 不足者，虚也. 满虚相推，以求其适，故曰盈不足."刘徽注云："按盈者，谓之讬；不足者，谓之朒."故"盈不足"亦称"盈朒". 西方学者称盈不足术为双设法. 本章第1题为："今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四，问人数、物价各几何"?本章给出了这类问题的解法公式. 假如人出 a_1，盈(或不足)为 b_1，人出 a_2，盈(或不足)为 b_2，则物价可按下列统一公式计算：

$$x=\frac{|a_2b_1-a_1b_2|}{|a_1-a_2|}.$$

方程(Fāngchéng)　中国古算名. 这里指《九章算术》第八章章名. 刘徽注云："程，课程也. 群物总杂，各列有数，总言其实. 令每行为率，二物者再程，三物者三程，皆如物数程之，并列为行，故谓之方程."“方”即方形，“程”与“课”同义，本意为试验、考核，这里是计量、考核之意. “方程”，即线性方程组系数的增广矩阵. 本章主要研究线性方程组及其解法.

勾股(Gōugǔ)　中国古算名. 这里指《九章算术》第九章章名. “勾股”即直角三角形. 本章是研究直角三角形解法. 利用勾股术："勾股各自乘，并而开方除之，即弦"，以及相似直角三角形比例方法，即可解决这类问题.

率(Lǜ)　中国古代数学的一个基本概念. 刘徽在《九章算术》注中定义道："凡数相与者谓之率. 率者，自相与通. 有分则可散，分重叠则约也. 等除法实，相与率也."这里指出凡是成比例变化的一组数就称为率. “有分则可散”指此一组率，可以同乘以不为零的数，因此刘徽说："乘以散之". “分重叠则约也”，是说此一组数可以同除以不等于零的数，因此刘徽说："约以聚之". “等除法实，相与率也”，是举例说明法和实是一组率，因此可以用其约数同除之. 率的概念，可用现代数学语言叙述如下：一组相关的量 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$，若它的任意两组对应值

$$x'_1,x'_2,\cdots,x'_n$$
$$x''_1,x''_2,\cdots,x''_n$$

皆有 $x''_i=kx'_i(k\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$ 成立，则称每个 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一个率. 人们看出一组率 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个特殊的变向量，在变化过程中始终是线性相关的. 刘徽注中说："凡所谓率者，细则俱细，粗则俱粗，两数相推而已."实际就是线性相关的变向量. 对每组率，有一个“势”与它对应. 换句话说，成比例的两组率值 $(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$ 和 $(kx'_1,kx'_2,\cdots,kx'_n)$ 有相同的“势”. 对于两个率来说，其“势”可用数值刻画，(a,b) 可约为 $(1,b/a)$，b/a 可称为 (a,b) 的“势”. 但对多个率来说，其“势”就不能用数值表示. 这和有限集合的“势”就是元素的个数，无限集合的“势”只有以字母表示是类似的.

幂(Mì)　数学名. 中国古代指面积. 《九章算术》“方田”章刘徽注首先给出了幂的定义："凡广从相乘谓之幂."《九章算术》“今有积五万五千二百二十五步，问为方几何?”杨辉《田亩比类乘除捷法》："钱田积七十二步，只云面径三步，问内方几何?”此处“积”指面积.

面(Miàn)　中国古算术语. 它有两种含义：

1. 中算中称多边形的边，一般特指正方形的边.

2. 刘徽所引入的一个实数概念. 他在注《九章算术》的“开方不尽”时，他认为，对于 $x^2=N=a^2+r$，若取 $x\doteq a+r/2a$ 偏大，即 $x<a+r/2a$，若取 $x\doteq a+r/(2a+1)$ 时偏小，即 $x>a+r/(2a+1)$，而且其平方不能还原为 x^2，因而“当以面命之为不失耳”即引入一个新数“面”，亦即 $\sqrt{N}$ 作为方根. 相当于引出了无理数概念.

实(Shí)　中国古算术语. 中国古书中称被乘数、被除数为“实”，乘数、除数为“法”. “实”指实物，“法”指度量单位. “以法量实”，若“实”等于“法”，则得“1”，若“实”中除去几个“法”，所得就是“几”. 因此被除数称“实”，除数称“法”. 至于对乘法亦称“法”、“实”，则是引申而来. 开方术中对被开方数也称“实”. 高次方程的常数项亦称实.

法(Fǎ)　中国古算术语. 法即法数，指除法中的除数(参见“实”).

棋(Qí)　中国古算术语. 指基本几何体模型. 最早的文字记载见于刘徽注《九章算术》“商功”章. 在刘徽的注文中，常用的棋有四种：长方体(一般理解为立方体)、将长方体沿相对两面同方向的对角线平面所截得的两个几何体，即堑堵，以及将堑堵过其三个不相邻的顶点的平面所截得的两个几何体，分别称为阳马和鳖臑.

合分(Héfēn) 中国古算法. 指两个分数合并而求其和. "合分术"就是分数加法. 《九章算术》的"合分术"为:"母互乘子,并以为实,母相乘为法,实如法而一. 不满法者,以法命之. 其母同者,直相从之."即

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1b_2}.$$

减分(Jiǎnfēn) 中国古算法. 指由较大的分数减去较小的分数而求其差. 李淳风注《九章算术》云:"诸分子母数各不同,以少减多,欲知余几,减余为实,故曰减分."《九章算术》减分术曰:"母互乘子,以少减多,余为实,母相乘为法,实如法而一."即

$$\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1b_2}.$$

乘分(Chéngfēn) 中国古算法. 指分数相乘. 《九章算术》乘分术曰:"母相乘为法,子相乘为实,实如法而一."即

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1a_2}{b_1b_2}.$$

约分(Yuēfēn) 中国古算法. 指约去分数分子、分母的公约数,化为既约分数的算法. 最早的文字记载见于《九章算术》"方田"章:"约分术曰:可半者半之,不可半者,副置分母子之数,以少减多,更相减损,求其等也. 以等数约之."即先进行观察,如果分数的分子、分母有 2 的倍数,则可先在分子、分母中同约去 2;然后再用分子、分母中较大的减去较小的,所得的差与上一步骤中的减数比较大小,并再从较大的数中减去较小的数,如此重复进行下去,当差与减数相等即出现"等数"时,该等数即为所求分子与分母的最大公约数,只需将分子分母同除以这个数,即可将原来的分数化为最简分数. 例如《九章算术》"方田"章第 6 题:"今有九十一分之四十九,问约之的几何?"其"更相减损"的算法是:

$$r_1=91-49=42,$$
$$r_2=49-42=7,$$
$$r_3=42-7-7-7-7-7=7.$$

这时 $r_2=r_3$,故称之为等数. 将分数 49/91 的分子、分母同除以 7 即得最简分数 7/13. 关于这一方法,刘徽解释说:"其所以相减者,皆等数之重叠,故以等数约之."即分子、分母及运算过程中出现的各余数,都可以看作是等数的倍数.

等数(Děngshù) 中国古算名. 两个正整数的最大公约数,称为等数. 因为用"更相减损"方法求二正整数的最大公约数,当进行到最后一步所出现的两个余数相等时,这个等数就是最大公约数(参见"约分").

更相减损(Gēngxiāng jiǎnsǔn) 中国古算法. 即辗转相除法(参见"约分").

课分(Kèfēn) 中国古算法. 即比较分数的大小. 最早的文字记载见于《九章算术》"方田"章. 其方法是利用"减分术"求欲比较大小的两个分数的差来确定它们的大小.

平分(Píngfēn) 中国古算法. 即求几个已知分数的平均值. 最早的文字记载见于《九章算术》"方田"章. 其方法是将这些分数先利用"齐同术"通分,从而把问题转化为求这些分数的分子的平均数.

经分(Jīngfēn) 中国古算法. 即分数的除法. 最早的文字记载见于《九章算术》"方田"章:"经分术曰:以人数为法,钱数为实,实如法而一. 有分者通之;重有分者同而通之."即分数相除与整数相除的意义相同,同样可以将其看作是实与法之比. 但用此术在具体计算时操作较为复杂. 刘徽在注《九章算术》时由此概括出分数除法的具体法则:"又以法分母乘实,实分母乘法. 此谓法实俱有分. 故令分母各乘全内子,又令分母互乘上下."就是说,法与实皆为分数的除法,先将法、实皆化为假分数,然后以法的分母乘实的分子为实,以实的分母乘法的分子为法,相除即为所求. 这与现代分数除法运算法则完全一致.

通分内子(Tōngfēn nèizǐ) 中国古算法. 即化带分数为假分数方法. 最早的文字记载见于《九章算术》刘徽注. 这是"合分术"的特例,其方法是"分母乘全内子",即将整数部分乘以分母后加上分子. "内"通"纳".

重有分(Chóngyǒufēn) 中国古算名. 即繁分数. 最早的文字记载见于《九章算术》"方田"章. 刘徽注称:"此谓法实俱有分."化简重有分的方法是:以"法"的分母乘"实"的分子为"实","实"的分母乘"法"的分子为"法",可见,该方法实际上就是分数的除法(参见"经分").

今有术(Jīnyǒushù) 中国古算法. 已知四项比例式中的三项求第四项的方法. 最早的文字记载见于《九章算术》"粟米"章. "今有术曰:以所有数乘所求率为实,以所有率为法,实如法而一."即设所有率为 a,所求率为 b,所有数为 c,所求数为 d,则有比例式 $a:b=c:d$,从而有 $d=bc/a$.

重今有术(Chóug jīnyǒushù) 中国古算法. 即可以重复多次应用今有术解决的连比例问题的解法. 最早的文字记载见于《九章算术》"均输"章第十题刘徽注. 《九章算术》"均输"章第十题是这样的:"今有络丝一斤为练丝一十二两,练丝一斤为青丝一斤一十二铢. 今有青丝一斤,问本络丝几何?"该题与"粟米"章中可以用"今有术"解决的问题的不同之处在于,其给出的不是络丝与青丝的直接换算关系,二者之间的关系是通过练丝沟通的. 因此,"术曰:以练丝一十二两乘青丝一斤一十二铢为法;以练丝一斤铢数乘络丝一斤两数,又以青丝一斤乘之为实. 实如

法得一斤”. 也就是由算式

$$\frac{(24\times16\times1)\times(16\times1)\times1}{12\times(24\times16\times1+12)}$$

得出所需络丝的重量. 显然，这里两次应用了“今有术”，故刘徽注称：“是谓重今有术也”，并指出：“凡率错互不通者，皆积齐同用之. 仿此，虽四五转不异也”. 即今有术可以重复多次使用.

返衰(Fǎncuī)　中国古算法. 即反比例算法. 其算法与“衰分术”大致相同. 所不同的是列出“返衰”，即按照一定的规律递增列出分配比例的权数，这时的分配原则是“令爵高出少，以次渐多”.

齐同术(Qítóngshù)　中国古算法. 指中国古代的一种处理比率问题的方法. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章“合分术”刘徽注，用于分数的通分. 刘徽注称：“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同. 同者，相与通同，共一母也；齐者，子与母齐，势不可失本数也. 方以类聚，物以群分. 数同类者无远，数异类者无近. 远而通体者，虽异位而相从也；近而殊形者，虽同列而相违也. 然则齐同之术要矣……乘以散之，约以聚之，齐同以通之，此其算之纲纪乎.”即将求若干个分数的公分母称之为“同”；只有“同”才能进行分数的加减运算，借助于分数的基本性质使各个分数的分子发生相应的变化称之为“齐”；只有“齐”才能保证与原来的分数相等. 中国古代数学家习惯于将分子、分母看作一对率，故对于适用于分数的这种算法也可推广到若干组率的演算. 因此，刘徽又将其发展成为适用于一切与比率有关的问题，称其为“算之纲纪”：“凡率错互不通者，皆积齐同而用之”. 即从广义上讲，齐同术是将“错互不通”之率化为互通之率的一种通用方法，它不仅适用于通分和连比例运算，而且也是盈不足术和方程术的理论基础.

其率术(Qílǜshù)　中国古算法. 即按贵贱之分求商品整值单价的算法. 如出钱 576，买竹 78 个，按贵贱二率使竹之单位为整数，其率术为：

其贱率：$\left[\frac{576}{78}\right]=7$ 钱/每个；

其贵率：$\frac{576}{78}+1=8$ 钱/每个.

此算法载于《九章算术》“粟米”章，所谓“其率”，乃贵、贱二率之总称.

反其率术(Fǎnqílǜshù)　中国古算法. 即其率术的相反问题. 当钱少物多，求每钱买几物时，欲使数值为整，按贵贱区分，即为反其率术. 如出钱 620，买物 2100 个，欲使物数为整，求贵贱物数，方法为：

少率(贵)：$\left[\frac{2100}{620}\right]=3$ 个/1 钱；

多率(贱)：$\left[\frac{2100}{620}\right]+1=4$ 个/1 钱；

$\frac{2100}{620}=3\cdots$余 240；

多率钱数 240，少率钱数 620−240=380；

少物之数=3×380=1140 个；

多物之数=4×240=960 个.

此算法载于《九章算术》“粟米”章(参见“其率术”).

通其率术(Tōngqílǜshù)　中国古算法. 指古代分数近似算法. 已知实数 a 与 $b(a>b)$，求 a/b 渐近分数系列的算法方法如下：首先对 a 与 b 用辗转相除法获得系列商：$\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$，以及相应的余数系列：$\{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1},r_n=0\}$，并得到最大公约数(等数)$d=r_{n-1}=(a,b)$；再按法则：

$$\begin{cases}c_1=q_1,\\ e_1=1;\end{cases}\quad\begin{cases}c_2=q_1q_2+1,\\ e_2=q_2;\end{cases}$$

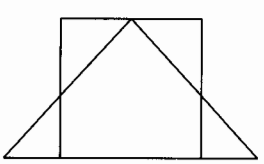
$$\begin{cases}c_i=c_{i-1}q_i+c_{i-2},\\ e_i=e_{i-1}q_i+e_{i-2}\end{cases}\quad(i>2)$$

计算，于是得到 a/b 的渐近分数系列：

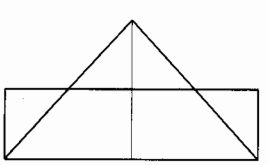
$$\left\{\frac{c_1}{e_1},\frac{c_2}{e_2},\cdots,\frac{c_n}{e_n}\right\},\text{这里}\frac{c_n}{e_n}=\frac{a/d}{b/d}.$$

当 a/b 是有理数时，n 有限；当 a/b 是无理数时，n 无限. 汉代《三统历》计算五星运动周期时有此算法，称之为“通其率”，后代数学家常以此法求实数的最佳渐近分数，并进行约分.

圭田(Guītián)　中国古算名. 即等腰三角形. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章：“圭田术曰：半广以乘正从”，也就是说，三角形的面积等于高与底边边长乘积的一半. 刘徽注称：“半广者，以盈补虚为直田也. 亦可半正从以乘广.”即如图根据“出入相补”原理、采用“以盈补虚”的方法将三角形化为与之等积的长方形，再利用“方田术”计算其面积.

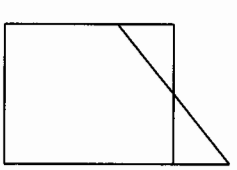


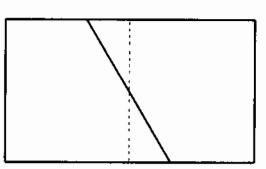
半广以乘正从



半正从以乘广

邪田(Xiétián)　中国古算名. 即直角梯形. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章：“邪田术

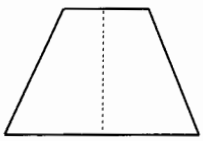




曰：并两斜而半之，以乘正从若广”，也就是说，直角梯形的面积等于两底和的一半与高的乘积. 刘徽注称：“并而半之者，以盈补虚也.”即如图同样根据“出入相补”原理，采用“以盈补虚”的方法可将直角梯形

化为与之等积的长方形，再利用“方田术”计算其面积，如图所示.

箕田(Jītián)　中国古算名. 即一般梯形. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章. 中国古代数学家将箕田的上、下底分别称为舌、踵. “箕田术曰：并踵、舌而半之，以乘正从.”也就是说，一般梯形的面积等于上、下底边边长和的一半与高的乘积. 刘徽注称：“中分箕田则为两箕田，故其术相似.”即如下图将一般梯形分解为两个直角梯形，从而转化为邪田来求.



圆田(Yuántián)　中国古算名. 即圆. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章：“圆田术曰：半周半径相乘得积步”，也就是说，圆的面积等于以圆的周长的一半为底，半径为高的长方形的面积. 这实际上是将曲线形圆化为直线形矩形来处理的. 刘徽的注文利用无限细分，以直代曲的思想对这一解法作了接近于现代微积分方法的解释. 但在计算圆的周长时，《九章算术》采用了“径一周三”，即取圆周率的值为 3 入算，这是不太精确的. 刘徽的注文正确地指出了这一缺陷，并提出了著名的“割圆术”，为精确地计算圆周率指明了方向(参见“割圆术”).

弧田(Hútián)　中国古算名. 即圆弓形. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章：“弧田术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一”，也就是说，若设弦长为 b，矢长为 h，则圆弓形的面积为

$$S=\frac{1}{2}(bh+h^2).$$

显然，这是一个近似公式，即将其看成是一个以矢、弦分别为上、下底，以矢为高的等腰梯形的面积.

弦图(Xiántú)　中国古算名. 即中国古代数学家用来证明勾股定理的一种几何图形. 公元 3 世纪，三国吴人赵爽在注《周髀算经》时，首先利用“弦图”给出了勾股定理的证明. 赵爽在附于《周髀算经》首

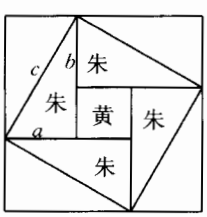


图 1

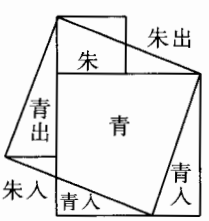
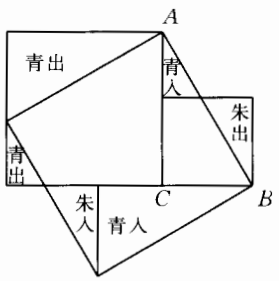


图 2

章的“勾股圆方图注”中给出了“弦图”(如图 1)，并解释说：“又可以勾股相乘为二朱实，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实，加差实，亦成弦实”. 设勾为 a，股为 b，弦为 c，则如图有朱实四为 $2ab$，中黄实(即差实)为 $(b-a)^2$，因此有弦实一方面为 $2ab+(b-a)^2$，另一方面又为 c^2，所以 $2ab+(b-a)^2=c^2$，即 $a^2+b^2=c^2$. 从而就证明了勾股定理. 实际上，由这张弦图还可以得到许多有关勾股定理的结论. 如由整个图形可知 $(a+b)^2=(b-a)^2+4ab$. 刘徽也曾利用弦图(如图 2)给出过勾股定理的证明. 他的方法是：“勾自乘为朱方，股自乘为青方. 令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂，开方除之即弦也.”即利用割补的方法将一大一小两个正方形转化成一个与它们等积的大的正方形，从而就证明了勾股定理. 利用弦图，还可以处理许多与勾股定理有关的问题(参见“勾股和较术”).

出入相补(Chūrù xiāngbǔ)　中国古算法. 指中国古代数学中一种利用几何图形推导或说明数学结论的方法. 首先是由刘徽和赵爽等人认识到其在学习与研究数学中的重要性并将其一般化的. 刘徽在注《九章算术》原序中称：“析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣.”赵爽也在注释《周髀算经》时说：“辄依经为图，诚冀颓毁重仞之墙，披露堂室之奥.”他们都利用图验法给出了许多数学结论的推导或证明. 例如，刘徽在证明勾股定理时就采用了将图形“以盈补虚”、“损广补狭”的方法，如下图.



“勾自乘为朱方，股自乘为青方. 令出入相补，各从其类. 因就其余，不移动也. 合成弦方之幂.”即如上图，图中 $\triangle ABC$ 为勾股形，以 AC 为一边的正方形——“股方”用青色标识，以 BC 为一边的正方形——“勾方”用朱色标识，然后将两块“青出”移至相应的两块“青入”处，将一块“朱出”移至“朱入”处，就合成以 AB 为一边的正方形“弦方之幂”. 这种方法推广到三维空间则被称为“棋验法”.

立方(Lìfāng)　中国古算名. 即长方体(如图 1). 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算公式为

$$V=abc,$$

其中 a、b、c 分别为其三度的长、宽、高.

堑堵(Qiàndǔ)　中国古算名. 即经过相对两棱斜剖长方体所得到的三棱柱(如图 1、图 2). 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算公式为

$$V=\frac{abc}{2},$$

其中 a、b、c 分别为其三度的长、宽、高.

阳马(Yángmǎ)　中国古算名. 即经过不相邻的三顶点斜剖堑堵所得到两侧面与底面重直的四棱锥(如图 2 中的四棱锥 $D'-ABCD$). 最早的文字记

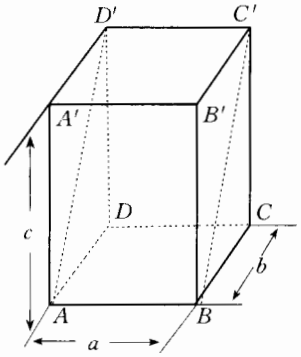


图 1

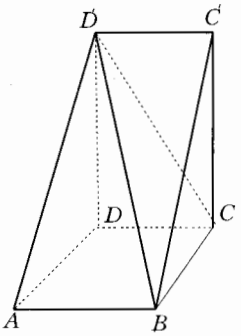


图 2

载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算公式为

$$V=\frac{abc}{3},$$

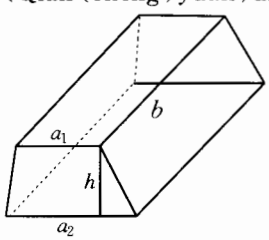
其中 a、b、c 分别为其三度的长、宽、高.

鳖臑(Biēnào) 中国古算名. 即经过不相邻的三顶点斜剖堑堵所得到的四面体(如图 2 中的三棱锥 $D'-BCC'$). 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算公式为

$$V=\frac{1}{6}abc,$$

其中 a、b、c 分别为其三度的长、宽、高.

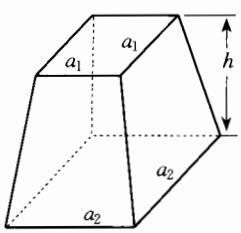
堑(城、垣、堤、沟、渠)(Qiàn(chéng, yuán, dī, gōu, qú)) 中国古算名. 即横截面为梯形的柱体(如图所示). 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算方法为:“并上、下广而半之,以高若深乘之,又以袤乘之,即积尺”,也就是



$$V=\frac{1}{2}(a_1+a_2)bh,$$

其中 a_1,a_2,b,h 如图所示.

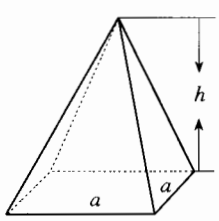
方亭(Fāngtíng) 中国古算名. 即两底面为正方形的正台体(如图). 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算方法为:“上、下方相乘,又各自乘,并之,以高乘之,三而一”,也就是



$$V=\frac{1}{3}(a_1^2+a_2^2+a_1a_2)h,$$

其中 a_1,a_2,h 如图所示.

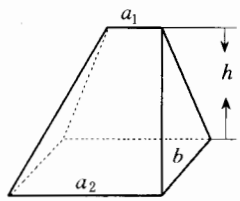
方锥(Fāngzhuī) 中国古算名. 即底面为正方形的四棱台(如图). 阳马也是方锥之一种. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法为:“下方自乘,以高乘之,三而一”,也就是



$$V=\frac{1}{3}a^2h,$$

其中 a,h 如图所示.

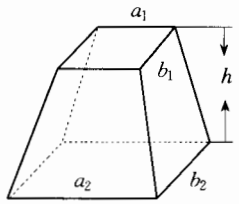
刍甍(Chúméng) 中国古算名. 指上底为一线段,下底为矩形的楔状体(如右图). 甍通蒙,刍甍原意为层脊. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法为:“倍下袤,上袤从之,以广乘之,又以高乘之,六而一”,也就是



$$V=\frac{1}{6}(2a_2+a_1)bh,$$

其中 a_1,a_2,b,h 如图所示.

刍童(Chútóng) 中国古算名. 指上下底面为矩形的四棱台(如右图). 堑(城、垣、堤、沟、渠)、方亭、方锥、刍甍皆可看作是刍童的特殊情况. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法为:“倍上袤,下袤从之,亦倍下袤,上袤从之,各以其广乘之,并,以高若深乘之,皆六而一”,也就是



$$V=\frac{1}{6}[(2a_1+a_2)b_1+(2a_2+a_1)b_2]h,$$

其中 a_1,a_2,b_1,b_2,h 如图所示.

方堡壔(Fāngbǎochóu) 中国古算名. 即直四棱柱. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法是:“方自乘,以高乘之,即积尺”,也就是 $V=a^2h$,其中 a 为正四棱柱底面边长,h 为其高.

圆堡壔(Yuánbǎochóu) 中国古算名. 即直圆柱. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法是:“周自相乘,以高乘之,十二而一”,也就是

$$V=\frac{1}{12}c^2h,$$

其中 c 为圆柱底面周长,h 为圆柱的高.

圆亭(Yuántíng) 中国古算名. 即圆台. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法是:“上下周相乘,又各自乘,并之,以高乘之,三十六而一”,也就是

$$V=\frac{1}{36}(c_1^2+c_1c_2+c_2^2)h,$$

其中 c_1,c_2 分别为圆台上、下底面的周长,h 为圆台的高.

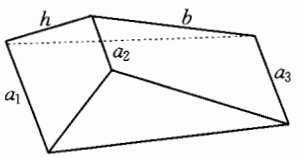
圆锥(Yuánzhuī) 中国古算名. 即今之圆锥. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积

计算方法是:“下周自乘,以高乘之,三十六而一”,也就是

$$V=\frac{1}{36}c^2h,$$

其中 c 为圆锥的底面周长,h 为其高.

羡除(Xiànchú) 中国古算名.原意为墓道;在中国古代数学中表示三面为等腰梯形,两面为直角三角形的楔状体(如图).最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法为:“并三广,以深乘之,又以袤乘之,六而一”,也就是



$$V=\frac{1}{6}(a_1+a_2+a_3)bh,$$

其中 a_1,a_2,a_3,b,h 如图所示.

开方术(Kāifāngshù) 中国古算法.即开平方的方法.见于《九章算术》“少广”章.《九章算术》“少广”章中的“开方术”特指开平方运算,其算法与现在教科书中介绍的开平方笔算方法基本相同.现以“少广”章第 12 题“今有积五万五千二百二十五步,问为方几何”为例,结合术文将这一方法介绍如下:

1.“置积为实.借一算步之,超一等.”即将被开方数 55225 称为“实”,下隔一行置一算筹于个位,称为“借算”,将“借算”向左移动,隔一位一“步”,以确定方框的最高位为 100.

2.“议所得,以一乘所借一算为法而以除.”即在百位上“议得”方根的第一位数字 2,将此数乘以“借算”得“法”:$2\times10000=20000$,以下按除法运算在“实”这一行中有 $55225-2^2\times10000=15225$.

3.“除已,倍法为定法.其复除,折法而下.复置借算步之如初.”即将“法”乘以 2 为“定法”.然后退一位成:$20000\times2\div10=4000$,按照 1 中的方法重新确定“借算”的位置,“步得”100.

4.“以复议一乘之,所得副,以加定法,以除.”即在十位上“复议”得方根的第二位数字 3,将此数乘以“借算”为“所得”:$3\times100=300$,暂置于“定法”之下称为“副”,又将“所得”加到“定法”4000 上的 4300,在“实”这一行中进行除法运算,有 $15225-3\times4300=2325$.

5.“以所得副从定法,复除下折如前.”即再把“所得”300 加到新的“定法”4300 上,得 4600.按照 3 中的方法将“定法”退一位成 460,“借算”则表示 1.

6.在个位上“议得”方根第三位数为 5,仿照 2、4 在“实”这一行中有 $2325-5\times465=0$,表示开方已尽,方根为 235(如开方不尽,还可用“命分”的方法给出其近似方根的值).

刘徽在其注文中,还利用几何图形对这一方法给出了一个直观的解释.

开立方术(Kāilìfāngshù) 中国古算法.即开立方的方法.最早的文字记载见于《九章算术》“少广”章.这一方法可以看作是开平方算法的推广,其方法是:“置积为实.借一算步之,超二等.议所得,以再乘所借一算为法,而除之.除已,三之为定法.复除,折而下.以三乘所得数置中行.复借一算置下行.步之,中超一,下超二等.复置议,以一乘中,再乘下,皆副以加定法.以定法除.除已,倍下,并中从定法.复除,折下如前.开之不尽者,亦为不可开.若积有分者,通分内子为定实.定实乃开之,讫,开其母以报除.若母不可开者,又以母再乘定实,乃开之.讫,令如母而一.”根据术文,仿照“开平方术”不难给出这段术文的解释.刘徽在其注文中也利用正方体模型的分割对这一方法给出了直观的解释.

开立圆术(Kāilìyuánshù) 中国古算法.指已知球体积,求球直径的方法.最早的文字记载见于《九章算术》“少广”章:“开立圆术曰:置积尺数,以十六乘之,九而一,所得开立方除之,即立圆径.”这一方法相当于给出球体积计算公式

$$V=\frac{9}{16}d^3$$

(其中 d 为球的直径).《九章算术》未给出该公式的由来.在刘徽注《九章算术》时,给出了两种解释:

1.由“黄金方寸重十六两,金丸径寸重九两”实测而来.

2.先由截面原理推得正方体与其内切圆柱体的体积之比为 4/3,再假定圆柱体与其内切球体的体积之比也是 4/3.进而由连比例得到.

刘徽对其第 2 种解释做了进一步的考察,指出若取 $\pi=3$,则正方体与其内切圆柱体的体积之比为 4/3,但圆柱体与其内切球体的体积之比不是 4/3,而是“牟合方盖”——两个正交的等径圆柱体的公共部分——与其内切球体的体积之比为 4/3.从而指出这一公式是错误的,并阐明了得到球体积计算公式的正确途径是求出牟合方盖的体积.祖暅考察正方体与其内容牟合方盖之间的关系,并应用以他的名字命名的截面原理,得到牟合方盖与其外接正方体的体积之比为 2/3.从而得到正确的球体的体积计算公式为

$$V=\frac{\pi}{6}d^3.$$

参见“牟合方盖”条.

方程术(Fāngchéngshù) 中国古算法.指《九章算术》中提出的一种解线性方程组的消元法.今举例如下:第八章“方程”第一题:“今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗;上禾一秉,中禾二秉,下禾三

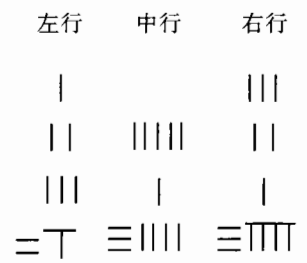
秉，实二十六斗．问上、中、下禾实一秉各几何？”依术文列出方程如下：

$$\begin{cases}3x+2y+z=39,\\2x+3y+z=34,\\x+2y+3z=26.\end{cases}$$

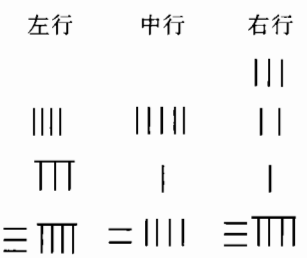


其消元过程如下：

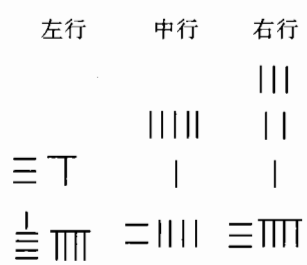
1．“以右行上禾遍乘中行而以直除”，即以右行上禾3遍乘中行各数，然后从中行中累减右行两次，得



2．“又乘其次，亦以直除”，意即以右行上禾3遍乘左行各数，然后从左行内减去右行，得



3．“然以中行中禾不尽者遍乘左行而以直除”，即以中行5遍乘左行，然后从左行内累减中行，得



4．“左方下禾不尽者，上为法，下为实，实即下禾之实．”99为下禾之实．

5．“求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实．余如中禾秉数而一，即中禾之实．”中禾之实为

$$\frac{24\times 36-99}{5}=153.$$

6．“求上禾亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实．余如上禾秉数而一，即上禾之实．”上禾之实为

$$\frac{39\times 36-99-153\times 2}{3}=333.$$

7．“实皆如法，各得一斗．”以上求得的上、中、下禾之实各为333，153，99．各除以法36，得

$$\left(9\frac{1}{4},4\frac{1}{4},2\frac{3}{4}\right),$$

为上、中、下禾一秉之实．

其中“直除法”就是两行对应数字相减，以达到消去其中一个数字的目的．刘徽的解释是“令少行减多行，反复相减，则头位必先尽”．

正负术（Zhèngfùshù） 中国古算法．指正负数的概念及其运算法则．最早的文字记载见于《九章算术》“方程”章．《九章算术》在利用对增广矩阵进行初等变换解线性方程组时，遇到了减数大于被减数而不能在正数范围内实施减法运算的情形，从而引进了正负数的概念及其运算法则．“正负术曰：同名相除，异名相益．正无入负之，负无入正之．其异名相除，同名相益．正无入正之，负无入负之．”这相当于给出以下有理数的减法与加法规则：

$\pm a-(\pm b)=\pm(a-b)$（同名相除），

$\pm a-(\mp b)=\pm(a+b)$（异名相益），

$0-(\pm a)=\mp a$（正无入负之，负无入正之）；

$\pm a+(\pm b)=\pm(a+b)$（同名相益），

$\pm a+(\mp b)=\pm(a-b)$（异名相除），

$0+(\pm a)=\pm a$（正无入正之，负无入负之）．

这里的a、b，满足$a>b>0$．元朱世杰《算学启蒙》，又增加了正负数乘除法则．

和较术（Héjiàoshù） 亦称勾股和较术．中国古算法．指中国古代勾股定理应用的一个重要组成部分．“较”在中国古代数学中是“差”的意思．在勾股形中，设其勾、股、弦分别为a、b、c，且有$a<b<c$，若已知其中任意两个，则可求第三个元素，这是勾股定理的最基本的应用．若将a、b、c中的任意两个元素作和或差，并考虑到差为正数，则有

$$a+b,\ a+c,\ b+c,\ b-a,\ c-a,\ c-b$$

六种形式，在a、b、c和这六种表达式中任取两个为条件，都可以解出这个勾股形．这种命题方式及其解法就称为和较术．这一方法的起源最早可追溯到刘徽、赵爽的时代．事实上，他们在注《九章算术》和《周髀算经》时，就已经解决了这类问题中的一部分．在明代，这一方法又得到了进一步的发展，顾应祥、唐顺之等人又将其推广到三个元素的和较问题．

割圆术（Gēyuánshù） 中国古算法．指中国古代刘徽提出的计算圆周率的方法．他是采用内接正

多边形逐渐增加边数使之与圆逐渐逼近的方法来计算圆周率. 刘徽推出的内接正 $4n$ 边形边长公式为

$$l_{4n}=\sqrt{\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l_{2n}}{2}\right)^2}\right]^2+\left[\frac{l_{2n}}{2}\right]^2}$$

(其中 r 为半径,l_{2n}为 $2n$ 边形边长);$4n$ 边形的面积公式为

$$S_{4n}=2n\cdot\frac{r\cdot l_{2n}}{2}.$$

刘徽利用上述公式,从半径为 1 尺的圆内接正六边形算起,一直算得正 96 边形的边长,从而算得 192 边形的面积为

$$S_{192}=3.14\frac{64}{625}\text{ 平方寸}.$$

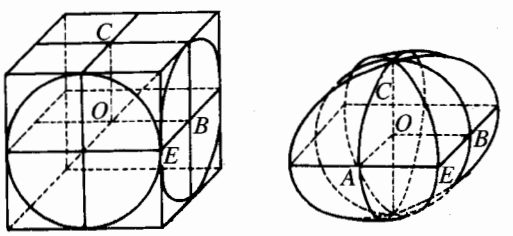
相当于求得 $\pi\approx3.14124$,并可进一步求得

$$\pi\approx3.14\frac{64}{625\times100}+\frac{36}{625\times100}=3.1416.$$

阳马术(Yángmǎshù) 中国古算法. 指斜截立方得堑堵,再斜截堑堵得一阳马、一鳖臑,则阳马体积是鳖臑体积的 2 倍,这一命题见于《九章算术》"商功"章. 刘徽采用极限的方法对这一命题进行了论证,并进一步指出"鳖臑之物,不同器用,阳马之形,或随修短广狭. 然不有鳖臑,无以审阳马之数. 不有阳马,无以知锥亭之类,功实之主也",意即阳马术是计算多面体体积之基础,实际上是中算体积理论的基础. 与希尔伯特第三问题的所谓德恩条件是等价的,故今日一般称之为刘徽原理.

徽率(Huīlǜ) 中国古算名. 指刘徽注《九章算术》中,用割圆术求得圆周率 π 的近似值 $\pi\approx3.14$. 后人称之为徽率.

牟合方盖(Bìnhé fānggài) 中国古算名. 指刘



徽在研究球体积时引入的一种立体模型. 作一立方体,先自左而右作内切圆柱,再自前而后作内切圆柱. 正立方体经过两次切割得到一个立体图形,像是上下相对的两把方伞,故名"牟合方盖",其图形如图所示.

重差术(Chóngchāshù) 中国古算法. 指中国古代的一种勾股测量方法. 该方法需要用两次表或矩重复测量,并以两个测得的数据的差进行计算,故称之为重差. 最早记载于《周髀算经》"测日高远",刘徽又作《海岛算经》阐发此算法. 方法如下:表高 h,两表距离(表间)d,前表影长 s_1,后表影长 s_2,则

$$\text{日高}=\frac{dh}{s_2-s_1}+h,$$

$$\text{日远}=\frac{s_1d}{s_2-s_1}.$$

在不使用角与三角函数概念的情况下,重差术在中国古代测量学中具有与三角法异途同归的作用.

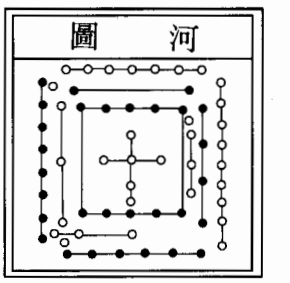
开带从平方(Kāi dàicóng píngfāng) 中国古算法. 指求形如

$$x^2+Bx=A\ (A>0,B>0)$$

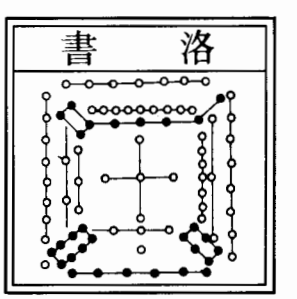
的一元二次方程的正根的一种方法,这是《九章算术》"开方术"的自然推广. 这里的 B 在《九章算术》中被称为"从法". 事实上,这一方法可以看作是从开平方法推算第二位数的步骤开始.

开带从立方(Kāi dàicóng lìfāng) 中国古算法. 指求形如 $x^3+Bx^2+Cx=A$ $(A>0,B>0,C>0)$的一元三次方程的正根的一种方法,这也是《九章算术》"开方术"的自然推广. 这里 B、C 称为"从法". 事实上,这一方法可以看作是从开立方法推算第二位数的步骤开始.

河图(Hétú) 中国古算名. 河图一词,最早见于《书经》.《书·顾命》有"天球,河图". 传云:"河图,八卦;伏羲王天下,龙马出河,遂则其文以画八卦,谓之河图".《易·系辞上》说:"河出图,洛出书,圣人则之."此时"河图"、"洛书"是指什么?尚无记载.《系辞传》说:"天数五,地数五,五位相得而各有合". 郑玄以为:天数是 1,3,5,7,9 五个奇数;地数是 2,4,6,8,10 五个偶数. 五位是五行的方位. 1,2,3,4,5 谓之"生数",各加 5,得 6,7,8,9,10 谓之"成数". 以 1,6 配水,位于北方;以 2,7 配火,位于南方;以 3,8 配木,位于东方;以 4,9 配金,位于西方;以 5,10 配土,位于中央. 宋代的理学家根据天地生成数画出"河图",如上图.



洛书(Luòshū) 中国古算名.《易·系辞》云:"河出图,洛出书,圣人则之."郑玄按《春秋纬》,以为河图有九篇,洛书有六篇. 孔安国则以为河图为八卦,洛书为九畴. 各家解释不一. 北宋儒家始以九宫数解释洛书,并画图如右图.



九宫(Jiǔgōng) 中国古算名. "九宫"最早见于

《黄帝内经·灵枢》，其中记载："立秋二，玄委西南方；秋分七，仓果西方；立冬六，新洛西北方；夏至九，上天南方冬至一，叶蛰北方；立夏四，阴洛东南立；春分三，仓门冬方；立春八，天留东北方."后甄鸾《数术记遗》注云："二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央"，则明确地指出了"九宫"中数字位置，这是世界上最古老的幻方.它的三条纵行、三条横行、两条对角线上三个数字之和都是十五.

太一算(Tàiyīsuàn)　中国古算法.见载《数术记遗》，该书称："太一之行，去来九道."注称："刻板横为九道，竖以为柱，柱上一珠，数从下始.故曰去来九道也."

两仪算(Liǎngyísuàn)　中国古算法.载于《数术记遗》，该书云："两仪算，天气下通，地禀四时."该书注云："刻板横为五道，竖以为位.一位两珠，上珠色青，下珠色黄.其青珠自上而下，至上第一刻主五，第二刻主六，第三刻主七，第四刻主八，第五刻主九.其黄珠自下而上，至下第一刻主一，第二刻主二，第三刻主三，第四刻主四，而已.故曰'天气下通，地禀四时'也."

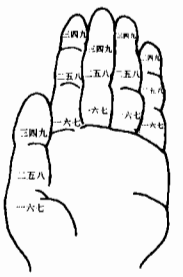
成数算(Chéngshùsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所介绍的古算具.用筹五枚，除黄筹单独表示"5"外，其玄、赤、青、白各筹皆配以黄色，每筹表示两个数字.其中1—5为生数，6—9为成数.当算筹的头指向东方、南方表示生数，指向西方、北方表示成数.用黄筹竖放着表示5.

九宫算(Jiǔgōngsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所介绍的古算具.它是以"九宫"为表示数字之用而设立的，故曰"九宫算"(参见"九宫").

三才算(Sāncáisuàn)　中国古算法.《数术记遗》中有记载.原书云："三才算，天地和同，随物变通."注云："刻板横为三道，上刻为天，中刻为地，下刻为人.竖为算位.有三珠，青珠属天，黄珠属地，白珠属人.又其三珠通行三道.若天珠在天为九，在地主六，在人主三.其地珠在天为八，在地主五，在人主二.人珠在天主七，在地主四，在人主一.故曰天地和同，随物变通.亦况三元，上元甲子一、七、四，中元甲子二、八、五，下元甲子三、九、六，随物变通也."

古珠算(Gǔzhūsuàn)　中国古算法.《数术记遗》中有记载.原书云："珠算：控带四时，经纬三才.注云："刻板为三分，其上下二分，以停游珠.中间一分，以定算位.位各五珠，上一珠与下四珠色别.其上别色之珠当五，其下四珠，珠各当一.至下四珠所领，故云控带四时，其珠游于三方之中，故云经纬三才也."

一掌金(Yìzhǎngjīn)　亦称指算.中国古算法.指古代帮助心算的一种"手算"方法.以左手五指作为五位，每指分左、中、右三直行记数，左行1,2,3和右行7,8,9都自下而上，中行4,5,6三个数自上而下.要牢记各数部位，记数时，用右手和左手相同的指尖掐在左手指记数部位上.亦称"袖里吞金"("吞金"系"囤金"之讹传)，后被改称："袖里藏金"或"袖中锦".



八卦算(Bāguàsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所介绍的古算具.原文云："针刺八方，位阙从天."八卦算"的1—8数字由八卦方位确定，用一根针指向某方，即表示一数.若表示9，则将针锋指天.八卦所在位置与《易·说卦传》所载相同.

龟算(Guīsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所记载的古算具.龟算用十二时辰的方位表示数，用一龟形板置中间，龟首指向某方位，就表示某数.亥、子、丑表示十月、十一月、十二月，此三辰不表示数.所以原文说："春夏秋成，遇冬则停."

五行算(Wǔxíngsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所记载的古算具.这是用九根有颜色的算筹表示数：1—5用单色筹分别以玄、赤、青、白、黄五种颜色表示，6—9用两色筹表示，即玄、赤、青、白各配以黄色表示.

把头算(Bǎtóusuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所记载的古算具.把头算由两根筹组成：一个长筹表示5；一个有齿的方筹，四面各刻上一、二、三、四条线，表示1—4.若表示5以上的数，就用一个有齿的和一个长筹.

了知算(Liǎozhīsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中记载的古算具.这种算法，一位为一"了"字."了"字有三曲，其内外各记1,9；2,8；3,7；4,6；其首记5.

运筹算(Yùnchóusuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所介绍的一种古算具.用五寸长的筹，其上刻上线来表示数.近顶头的一条线表示5，其余相距一寸的线各表示1—4，若倒过来，则表示6—9.将筹夹在手指间，食指三节表示个位、十位、百位；中指三节表示千位、万位、十万位等.

十等数(Shíděngshù)　中国古算名.指中国古代关于大数的10个名称.《数术记遗》称："黄帝为法，数有十等.……十等者，亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载."

密率(Mìlǜ)　中国古算名.祖冲之发现的圆周率的分数近似值 $\pi\approx355/113$，称为密率.它是相对于约率 $\pi\approx22/7$ 而言的.

祖率(Zǔlǜ) 中国古算名.即密率.因为它是祖冲之首先发现的,后人为纪念他而称祖率.

三等数(Sānděngshù) 中国古算法.指中国古代三种进位法.《数术记遗》称:"三等者,谓上、中、下也.其下数者,十十变之,若言十万曰亿,十亿曰兆,十兆曰京也.中数者,万万变之,若言万万曰亿,万万亿曰兆,万万兆曰京也.从亿至载,终于大衍.上数者,数穷则变.若言万万曰亿,亿亿曰兆,兆兆曰京也."即下等记数法皆为十进;中等记数法皆为万进;而上等记数法为乘方进.南北朝时代董泉曾撰有《三等数》一书,可惜已失传,在《孙子算经》中"大数记法"一节有所介绍.

孙子定理(Sūnzǐ - dìnglǐ) 中国剩余定理的古称.即一次同余式组求解问题.最早载于《孙子算经》:"今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问物几何?"书中解答为:"术曰:三三数之乘二,置一百四十;五五数之剩三,置六十三;七七数之剩二,置三十;并之,得二百三十三,以二百一十减之,即得."即求

$$N\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)\equiv 3(\mathrm{mod}\ 5)\equiv 2(\mathrm{mod}\ 7),$$

$$N=2\times(5\times7)\times2+3\times(3\times7)\times1+2\times(3\times5)\times1-3\times(5\times7)\times2=23.$$

这一问题在民间流传甚广,有"秦王暗点兵"、"韩信点兵"、"剪管术"、"隔墙算"、"鬼谷算"、"物不知数"等称谓,而且将其算法编成歌诀,如南宋人周密《志雅堂杂抄》中作诗曰:

"三岁孩儿七十稀,五留廿一事尤奇.
七度上元重相会,寒食清明便可知."

明代程大位《算法统宗》作歌曰:

"三人同行七十稀,五树梅花廿一枝;
七子团圆整半月,除百零五便得知."

此算题经阿拉伯数学著作传到欧洲,出现于斐波那契(Fibonacci,L.)的著作中,后来欧洲人称之为"中国剩余定理".

中国剩余定理(Zhōngguó shèngyú dìnglǐ) 即"孙子定理".

百鸡术(Bǎijīshù) 中国古典算术题.指《张丘建算经》(公元5世纪)内的一道题,称为"百鸡问题".题云:"今有鸡翁一,直钱五;鸡母一,直钱三;鸡雏三,直钱一.凡百钱,买鸡百只,问鸡翁、母、雏各几何."这是一个一次不定方程组.历代称此类问题为"百鸡术".

约率(Yuēlǜ) 中国古算名.即中国古代对圆周率的一种称谓.《隋书》称祖冲之的圆周率355/113为密率;22/7为约率.但在李淳风《九章算术》注中却将22/7称密率,因为它比之刘徽的157/50,即所谓徽率较精密.

祖暅原理(ZǔHèng yuánlǐ) 中国古算著名定理.数学史界又常称"刘祖原理".中国古代数学家刘徽曾多次运用比较截面的方法研究由曲面围成的立体体积,特别是对于球体,他首先构造了一个称为"牟合方盖"的立体.指出球的体积可以利用牟合方盖与其内切球的截面比较的方法来求积,但他自己未能正确地推导出球体积计算公式.南北朝时期的数学家祖暅根据刘徽的思路巧妙地运用截面原理推导出了正确的球体积计算公式,并第一个用明确的文字将截面原理表达出来,这就是:"缘幂势既同,则积不容异",即如果两个立体的任意等高截面的面积都相等,则它们的体积必然相等.这与意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri,F. B.)在1635年提出的一个命题完全一致.

上元积年(Shàngyuán jīnián) 中国古历算名.中国传统历法所取的一个理想历元(历法起算点)叫上元,要求此时"日月合璧,五星联珠",即日、月、五大行星处于同一位置,同时还要求此点所在年为甲子年,所在日为甲子日,且为夜半时刻.所推算的历年至上元的积年数称为上元积年.历算家推算上元积年相当于求解同余式组

$$\begin{cases} N\equiv r(\mathrm{mod}\ 60), \\ \dfrac{T}{A}N\equiv r_1(\mathrm{mod}\ 60) \\ \qquad\equiv r_2\left(\mathrm{mod}\ \dfrac{B}{A}\right) \\ \qquad\equiv r_3\left(\mathrm{mod}\ \dfrac{J}{A}\right) \\ \qquad\equiv r_2\left(\mathrm{mod}\ \dfrac{G}{A}\right) \\ \qquad\equiv r_i\left(\mathrm{mod}\ \dfrac{M_i}{A}\right), \end{cases}$$

其中$\frac{T}{A},\frac{B}{A},\frac{J}{A},\frac{G}{A},\frac{M_i}{A}$分别表示回归年、朔望月、交点月、近点月、五星周期.这一问题是中算关于同余式组求解的科学背景.

调日法(Tiáorìfǎ) 中国古历算法.由于不使用十进小数计算,早期历法中的天文数据均采用分数形式.历算家首先确定最基本的两个周期——回归年与朔望月的不足一日的畸零部分,将朔望月畸零部分化成分数$29+Y/A$日$(Y<A)$,其中A叫日法,Y叫朔余.据实测$9/17<Y/A<26/49$,为了确定十分精确的Y/A,并使A尽量地小,南北朝刘宋时期历算家何承天发明了一种分数近似法,即以

$$\frac{9m+26n}{17m+49n}$$

确定Y/A的渐近分数.它是基于下述基本性质:若实数x满足

$$\frac{a}{b}<x<\frac{c}{d},$$

则

$$\frac{ma+nc}{mb+nd}$$

是 x 的渐近分数系列，且

$$\frac{a}{b}<\frac{ma+nc}{mb+nd}<\frac{c}{d}.$$

古历家称此算法为调日法.

演纪术(Yǎnjìshù)　中国古历算法. 一种推算上元积年(参见"上元积年")的算法. 各代《律历志》所载历法均未详此算法，仅南宋秦九韶《数书九章》"治历演纪"问题有所叙述. 据所在年(甲子年)冬至时刻 t_1(日名干支及时辰数)与冬至所在 11 月之合朔时刻 t_2(日名干支及时辰数)，推演该年距上元的积年数 N(这里 $N=60n$). 若回归年长为 $T/A=365+R/A$，朔望月长为 $B/A=29+Y/A$ 日，那么推求 N 的演纪术算法如下：

1. 求气定骨 $r_1=[At_1]$或$[At_1]+1$，朔定骨 $r_2=[At_2]$或$[At_2]+1$，则闰泛骨 $W=r_1-r_2$，于是所求上元积年 N 必为下列同余式组的解：

$$\begin{cases}TN\equiv r_1(\mathrm{mod}\ 60A),\\ TN\equiv W(\mathrm{mod}\ B).\end{cases}$$

2. 用调日法求日法 A，朔余 Y，朔率 B，并求出斗分 R.

3. 用"大衍术"(实即所谓"通其率术"的分数近似(参见"通其率术"))求出等数 $d=(R,A)$、岭率 $E=A/d$ 与 $F=R/d$，以及乘率 k，使 $kF\equiv1(\mathrm{mod}\,E)$.

4. 将 N 记为 $N=60n=60pE+60Z=PL+M$，求入元岁 $M=60Z$.

由于 $TN\equiv r_1(\mathrm{mod}\ 60A)$可化为

$$nF\equiv\frac{r_1}{60d}(\mathrm{mod}\ E),$$

即　　$nF\equiv\bar{r}_1(\mathrm{mod}\ E)$；

而又因为$(\bar{r}_1,E)=1$，$kF\equiv1(\mathrm{mod}\,E)$，所以

$$k\bar{r}_1F\equiv\bar{r}_1(\mathrm{mod}\ E);$$

又因 $nF\equiv\bar{r}_1(\mathrm{mod}\,E)$，所以

$$(n-k\bar{r}_1)F\equiv0(\mathrm{mod}\ E).$$

而$(E,F)=1$，故有

$$(n-k\bar{r}_1)\equiv0(\mathrm{mod}\ E),$$

于是有 $n\equiv kr_1\equiv Z(\mathrm{mod}\,E)$ $(Z<E)$.

这样 $n=pE+E$，得

$$N=60n=60pE+60Z=PL+M.$$

5. 求岁率 $T=365A+R$，岁闰 $P=T-12B$.

6. 根据 $N=Pl+M$，求解 $TN\equiv W(\mathrm{mod}\,B)$. 由于 $TN\equiv W(\mathrm{mod}\,B)$ 等价于 $(P+12B)N\equiv W(\mathrm{mod}\,B)$，又 $N=PL+M$，所以有

$$(pPL+PM)\equiv W(\mathrm{mod}\,B).$$

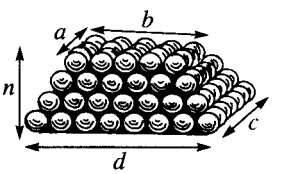
为此分别求出入闰 $Q:PM\equiv Q(\mathrm{mod}\,B)$ $(Q<B)$，元闰 $H:PL\equiv H(\mathrm{mod}\,B)$ $(H<B)$. 又因为 $(pPL+PM)\equiv W(\mathrm{mod}\,B)$，所以 $pH+Q\equiv W(\mathrm{mod}\,B)$，即 $pH\equiv(W-Q)(\mathrm{mod}\,B)$，故再求闰缩 $S=W-Q$. 当 $W<Q$ 时，闰缩 $S=W-Q+B<B$，从而

$$pH\equiv(W-Q)(\mathrm{mod}\,B)，即$$
$$pH\equiv S(\mathrm{mod}\,B).$$

7. 为了解 $pH\equiv S(\mathrm{mod}\,B)$，再用"大衍术"求等数 $m=(H,B)$、岭数 $C=B/m$ 与 $D=H/m$，以及因数 g，使 $gD\equiv1(\mathrm{mod}\,C)$，由此求 p. 因为 $pH\equiv S(\mathrm{mod}\ B)$，即 $pD\equiv S/m(\mathrm{mod}\,C)$，从而有 $p(gD)\equiv gS/m(\mathrm{mod}\,C)$，又 $gD\equiv1(\mathrm{mod}\,C)$，故 p 可从 $p\equiv gS/m(\mathrm{mod}\,C)$解出. 秦九韶要求 $p<10^8-M/L$.

8. 最后求朔积年 $V=pL=p(60E)$，上元积年 $N=V+M$.

隙积术(Xìyìshù)　中国古算法. 指北宋沈括在《梦溪笔谈》内提出的一种求长方台垛积的方法. 如图设长方台垛积顶层宽有 a 个物体，长有 b 个物体；底层宽有 c 个物体，长有 d 个物体，高有 n 层，则沈括的求积公式为



$$\begin{aligned}S&=ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)\\&\quad+\cdots+(a+\overline{n-1})(b+\overline{n-1})\\&=\frac{n}{b}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{b}(c-a).\end{aligned}$$

会圆术(Huìyuánshù)　中国古算法. 指一种计算圆弓形弧长的近似方法，为北宋时沈括提出. 沈括的《梦溪笔谈》卷 18 的"会圆术"给出的圆弓形弧长的近似公式为

$$l=a+\frac{h^2}{r},$$

其中 r 为半径，h 为矢高，a 为弦长. 沈括并未给出这一公式的推导，它很可能与《九章算术》"弧田术"有着某种密切的关系.

三角垛(Sānjiǎoduò)　中国古算法. 指南宋数学家杨辉著作中提出的一种级数求和公式

$$\begin{aligned}S&=1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

果子垛(Guǒzīduò)　中国古算名. 指南宋数学家杨辉著作中给出的级数求和公式，有两种：

1. 刍童垛，与沈括隙积术相同(参见"隙积术")；

2. 四隅垛，其公式为

$$\begin{aligned}S&=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2\\&=\frac{n}{3}(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

刍童垛(Chútóngduò)　中国古算名. 即沈括"隙积术"内所指的长方形台垛(参见"隙积术").

增成(Zēngchéng) 中国古算技巧.《梦溪笔谈》卷十八载:"算术多门,如求一,上驱、搭因、重因之类,皆不离乘除,惟增成一法稍异,其术都不用乘除,但补亏就盈而已.假如九除者,增一便是,八除者,增二便是,但一位一因之,若位数少,则颇简捷,位数多,则愈繁,不若乘除之有常."

细草(Xìcǎo) 中国古算名.中国古算书一般多给出数学问题(问)、答案(答)以及求解公式(术),而不给出求解的演算过程,而将求解过程中各个演算步骤记录下来,叫算草(或草),详细地记录算草,便是细草.清代学者在整理古典算书时,常为古算书补充细草.

演段(Yǎnduàn) 中国古算名.即演示、演算的意思.最早见于杨辉著作所录的刘益《议古根源》,后又见于李冶《益古演段》、朱世杰的《四元玉鉴》与《算学启蒙》以及程大位《算法统宗》等明代算书.杨辉对其解释为:"盖欲演算之片段也,知片段则能穷根源."清代学者李锐解释道:"所谓演者,演立天元,段者,以条段求之也."杨辉解释针对《议古源根》之演段,"演算之片段","则能穷根源",即演算法过程之片段以达到示算理之目的.李锐解释是针对李冶《益古演段》来说的,即用"条段法"(参见该条)的几何方式进行演示,以说明所布列的二次方程的系数的由来.程大位的"演段"也有演示解释之义.

开方作法本源图(Kāifāng zuòfǎ běnyuántú) 中国古算名.指正整数次幂二项式的展开式的系数表,其形状像一个等腰三角形.为北宋数学家贾宪所创,故称其为贾宪三角形,西方称之为帕斯卡三角形.《宋史·艺文志》录有贾宪《黄帝九章算法细草》九卷,书已无存,但其许多内容为100多年后的杨辉辑入自撰的《详解九章算法》之中,故又称为杨辉三角形.杨辉此书载有"开方作法本源图",并指明其"出释锁算书,贾宪用此术".图中数字排列成一个三角形,其第 n 行恰好是二项展开式:

$$(x+a)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^{n-i}a^i$$

中的各项系数 $C_n^0,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^{n-1},C_n^n$.满足

$$C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}=C_n^k\ (k=1,2,\cdots,n-1).$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 \quad 1 \\
 & & & & & \cdots\cdots & & & & &
\end{array}$$

图下注文为"左袤乃积数,右袤乃隅算,中藏者皆廉,以廉乘商方,命实以除之."前两句系指三角形最外边的两列数字分别对应各次开方之积与隅算;第三句是说中间的数字分别对应开方过程中所出现的各廉;后两句是对开方算法的概括,提示了诸廉在立成释锁法中的作用,开平方用第三层,开立方用第四层,依此类推(参见"开诸乘方").贾宪还给出了该三角形的造表法,即"增乘方求廉法"或称为"释锁求廉本源",用以说明此图与增乘开方法的关系,其中给出的构成规律相当于 $C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_n^k$,尽管贾宪三角形仅给出七层,实际上利用这种方法可以给出任意多层的贾宪三角形.另外,由于开方作法本源图蕴涵着这样的组合性质,后来又成为中国古代数学家高阶等差级数与内插法研究的重要工具.

开诸乘方(Kāizhūchéngfāng) 中国古算法.即将开平方、开立方算法推广到开更高次方,是中国古代数学家在《九章算术》"开方术"的基础之上,借助于"开方作法本源图"发展起来的一种算法,最早出现在北宋数学家贾宪等人的著作中.其原理可用现代数学语言解释如下:设 $x^n=A$,若 x 仅为一位数字,不难通过试验确定其值;若 x 具有2个有效数字,令 $x=a+b$(其中 a 的位值是 b 的10倍),则

$$\begin{aligned}
x^n&=(a+b)^n\\
&=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots\\
&\quad+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n\\
&=a^n+b(C_n^1a^{n-1}+C_n^2a^{n-2}b+\cdots\\
&\quad+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^{n-1})\\
&=A,
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
b=&(A-a^n)\div(C_n^1a^{n-1}+C_n^2a^{n-2}b+\cdots\\
&+C_n^{n-1}ab^{n-2}+C_n^nb^{n-1}).
\end{aligned}$$

在估算出 a 后作减法 $A-a^n$,然后利用上一关系就可以求出 b 来.如果 x 的有效数字多于2,求出第二位数字后又可依照同样的方法继续计算后面的有效数字.

立成释锁开方法(Lìchéng shìsuǒ kāifāngfǎ) 中国古算法.指北宋数学家贾宪提出的一种开高次方的方法."立成"即数表,"释锁"是开方或解数字方程的代名词.所谓"立成释锁"是指在求出所求方根的首位数字以后,再由"开方作法本源图"所提供的 $C_n^i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 来确定各"廉",然后"以廉乘商方"(即 $C_n^ia^{n-i}b^i$),再"命实以除之",即

$$(A-a^n)\div\sum_{i=1}^{n}C_n^ia^{n-i}b^{i-1},$$

依次求出该方根的各位数字(参见"开诸乘方").

增乘开方法(Zēngchéng kāifāngfǎ) 中国古算法.指中国古代数学中求高次方程数值解的一般方法.该方法由《九章算术》的开方术衍生而来,经过贾宪、刘益、杨辉等人的推广和传播,到13世纪被发展成为求高次方程数值解的系统方法,秦九韶、李冶、

朱世杰的著作中都有记载，其中以秦九韶的《数书九章》论述最为详细. 国外称这种方法为霍纳方法，比秦九韶迟了 500 多年.

正负开方术(Zhèngfù kāifāngshù)　中国古算法. 指中国古代的一种求一元高次方程数值解的方法. 这一方法起源于《九章算术》的开平方与开立方方法，但在《九章算术》仅限于系数是正数. 允许系数可以是负数的记载，最早见于《隋书·律历志》. 该书在介绍祖冲之的数学工作时，称“又设开差幂，开差立，兼以正负参之”. 但由于祖冲之的著作已经失传，这一论述无法确证. 关于系数可为负数的开带从平方法的明确记载，最早见于北宋刘益的《议古根源》. 该书虽已失传，但其部分内容为杨辉的《田亩比类乘除捷法》所引. 由此可知，刘益把传统的开带从平方法推广到“负方”(一次项系数为负数)和“益隅”(二次项系数为负数)两种类型，并指出，在开方的过程中，有时常数项也会由正变负(也称之为“翻法”). 该方法经贾宪、刘益、杨辉和秦九韶等人的推广和传播，发展成为一种求一元高次方程近似解的一般方法.

纵横图(Zònghéngtú)　中国古算名. 即幻方. 源于象数学的河图洛书. 作为数学问题，最早见于杨辉的《续古摘奇算法》卷上. 该书载有纵横图 20 幅，除了九宫图(这是一个三阶幻方)之外，另外 12 幅是较高阶的幻方. 它们包括：四四图(又称花十六图，四阶幻方)阳、阴两式，五五图(五阶幻方)阳、阴两式，六六图(六阶幻方)阳、阴两式，七七图(又称衍数图，七阶幻方)阳、阴两式，八八图(又称易数图，八阶幻方)阳、阴两式，九九图(九阶幻方)一式，百子图(十阶幻方)一式. 这些幻方都是由 1 至 n^2，这 n^2 个数字组成的 n 行 n 列方阵，若其每行、每列及每条对角线上的数字之和都等于

$$\frac{1}{2}n^2(n^2+1),$$

则称之为正则幻方，上述幻方除百子图外都是正则幻方. 另有河图、聚五图、聚六图、聚八图、攒九图、八阵图、连环图等，后六种都属于变形幻方，它们不一定要求每行、每列和每条对角线上的数字之和全都相等，也不一定排成方阵的形式，但要具有类似于普通幻方的某些组合性质. 杨辉对于这些幻方一一给出了构造方法，是最早从数学的角度研究幻方的数学家. 在他之后，中算家继续对此又进行了深入的研究，其中较为突出的有：南宋的丁易东，明代的程大位，清代的方中通、张潮、保其寿等人.

求一(Qiúyī)　中国古算法. 古代乘除法的一种. “求一”是把首位是 2—9 的乘数和除数，用加倍或折半的方法，使首位变为 1，对被乘数和被除数也作相应的变化，然后用定身乘除法来计算. 此法首见于南宋杨辉《乘除通变算宝》，其中求一乘歌诀：“五六七八九，倍之数不走；二三须当半，遇四两折纽. 倍、折本从法，实即反其有(倍法必折实，倍实必折法)；用加以代乘，斯数足可守”. 求一除歌诀：“五六七八九，倍之数不走；二、三须当半，遇四两折纽. 倍、折本从法，为除积相就(倍法必倍实，折法必折实)；用减以代除，定位求如旧”.

大衍总数术(Dàyǎn zǒngshùshù)　中国古算法. 指南宋数学家秦九韶在《数书九章》中所建立的一种求解一次同余式组的算法. 对于一次同余式组

$$N \equiv R_i \pmod{A_i} \quad (i=1,2,3,\cdots,n) \quad (*)$$

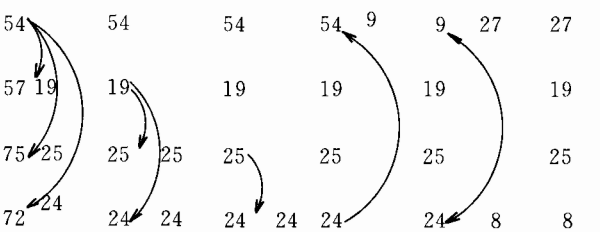
秦九韶“大衍术”解法分三个步骤：

1. 化问数 A_i 为两两互素的定数 a_i. 由于在模数 A_i 满足 $(A_i,A_j)=1(\forall\ i,j,i\neq j)$ 时，同余式组 $(*)$ 才可解. 秦九韶在不引入素因数分解概念的情况下设计了一种递次互约的机械化演算程式，把 A_i 化成满足以下条件的定数 a_i：

$$a_i \mid A_j,(a_i,a_j)=1 \quad (\forall\ i,j,i\neq j),$$

且 $\prod_{i=1}^{n} a_i=[a_1,a_2,\cdots,a_n]=[A_1,A_2,\cdots,A_n]=M.$

其演算程式是“两两连环求等，约奇弗约偶”，如问数 A_i 为 54，57，75，72，演算如下



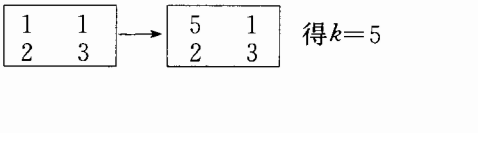
得到定数 a_i：27，19，25，8.

2. 大衍求一术. 求使

$$k_i \frac{M}{a_i} \equiv 1 \pmod{a_i} \quad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

成立的系列乘率 k_i，其中 $M/a_i=M_i$ 为衍数，M 为衍母，为求 k_i，先确定奇数 g_i，使 $M_i \equiv g_i \pmod{a_i}$ $(g_i<a_i)$. 显然 $k_i g_i \equiv 1 \pmod{a_i}$，以简化运算.

秦九韶求 k_i 的“大衍求一术”是由 a_i 与 g_i 进行辗转相除的连分数算法：“置寄右上，定居右下，天元一于左上. 先以右上除右下，所得商数与左上一相生，入左下，然后乃以右行上下，以少除多，递互除之，所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使右上来后奇一而止，乃验左上所得，以为乘率.”如求 $7k \equiv 1 \pmod{17}$，演算如下



对于一般的 $kb\equiv1(\mathrm{mod}a)$，对 a、b 使用辗转相除法，求得系列商$\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$与相应的余数系列$\{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1},r_n=1\}$，归算：

$$\begin{cases}c_1=q_1,\\ c_2=q_2c_1+1,\\ c_i=q_ic_{i-1}+c_{i-2}\quad(i=3,4,\cdots,n).\end{cases}$$

当 $n=2t$ 时，$k=c_{2t}$，布算如下：

$$\begin{array}{|cc|}\hline \text{天元 1} & \text{奇数}\quad b\\ & \text{定数}\quad a\\ \hline\end{array}\xrightarrow[c_1=q_1\times1=q_1]{\frac{a}{b}=q_1\cdots r_1}\begin{array}{|cc|}\hline 1 & b\\ c_1 & r_1\\ \hline\end{array}$$

$$\xrightarrow[c_2=q_2c_1+1]{\frac{b}{r_1}=q_2\cdots r_2}\begin{array}{|cc|}\hline c_2 & r_2\\ c_1 & r_1\\ \hline\end{array}\xrightarrow[c_3=q_3c_2+c_1]{\frac{r_1}{r_2}=q_3\cdots r_3}\begin{array}{|cc|}\hline c_2 & r_2\\ c_3 & r_3\\ \hline\end{array}$$

$$\longrightarrow\cdots\cdots\xrightarrow[c_n=q_nc_{n-1}+c_{n-2}]{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=q_n\cdots r_n}\begin{array}{|cc|}\hline c_n & r_n=1\\ c_{n-1} & r_{n-1}\\ \hline\end{array}\quad(n=2t)$$

于是 $k=c_n$. 这种“求一术”演算由古代分数近似算法的“通其率术”与“调日法”发展而来（参见“通其率术”与“调日法”）.

3. 求同余式组（$*$）的最小整数解 N.

$$N=\sum_{i=1}^{N}R_ik_iM_i-PM,$$

其中 R_i 为余数，k_iM_i 为用数，$R_ik_iM_i$ 为各总，$\sum_{i=1}^{N}R_ik_iM_i$ 为总数.

秦九韶“大衍求一术”的解法是正确的，比诸一次同余式组求解的欧拉方法，更简单易行.

秦九韶把问数分为四种类型：元数格（A_i 为整数）、小数格（A_i 中有小数）、通数格（A_i 中有分数）和复数格（A_i 皆为 10 的倍数）. 这样实际上给出了对于任意有理数模的同余式组求解的方法.

秦氏方法在明代失传，直至 19 世纪才被重新阐发. 清人黄宗宪引用西方素因数分解概念，重新改造秦氏算法程序，著《求一通解》(1874)，他有三方面的创意：

1. 用素因数分解法化问数 A_i 为定数 a_i；

2. 不用奇数 g_i 而直接用衍数 M_i 与定数 a_i，按“大衍求一术”，求乘率 k_i；

3. 秦九韶“总数术”中用数 k_iM_i 分正用与借用，完全是赘设，毫无必要，黄氏删去之.

黄宗宪又设“求反乘率”一法，即求满足 $g_ik'_i\equiv m_ik'_i\equiv-1(\mathrm{mod}\,a_i)$ 的系数 k'_i，其演算程式与秦氏“大衍求一术”大致相同，只不过程序终止的条件是 $r_{2t+1}=1$，从而归算出 $k'=c_{2t+1}=q_{2t+1}c_{2t}+c_{2t-1}$.

黄宗宪利用反乘率按下述步骤求同余式组（$*$）的解 N：

1. 将 A_i 从大到小地排列，设 $A_1>A_2>\cdots>A_n$；

2. 求解 $N\equiv R_1(\mathrm{mod}\,A_1)\equiv R_2(\mathrm{mod}\,A_2)$，将其化为同解的 $N\equiv R_1(\mathrm{mod}a_1)\equiv R_2(\mathrm{mod}a_2)$.

这里 $(a_1,a_2)=1$，$[a_1,a_2]=[A_1,A_2]=a_1a_2=P_1$. 再求满足 $R_1\equiv B(\mathrm{mod}\,a_2)$ 与 $a_1\equiv C(\mathrm{mod}\,a_2)$ 的 B 与 C，且要求 $B<a_2$，$C<a_2$. 然后再求 $B-R_2=D>0$，若 $B<R_2$，则 $D=(B+a_2)-R_2>0$. 接着由 a_2（类于定母）与 C（类于衍数）求反乘率 k'_1，使 $k'_1C\equiv-1(\mathrm{mod}\,a_2)$，得到 $Dk'_1=E$，$Ea_1=F$，$F+R_1=G$，$G\equiv S_1(\mathrm{mod}P_1)$，则 S_1 为 $N\equiv R_1(\mathrm{mod}A_1)\equiv R_2(\mathrm{mod}\,A_2)$的解.

3. 作迭代，求解

$$N\equiv S_1(\mathrm{mod}\,P_1)\equiv R_3(\mathrm{mod}\,A_3).$$

重复第 2 步，解出 $S_2\equiv G_1(\mathrm{mod}\,P_2)$，其中 $P_2=[P_1,A_3]$，继续迭代演算，$S_k\to R_1$，$P_k\to A_1$，$R_{k+2}\to R_2$，$A_{k+2}\to A_2$（$k=1,2,\cdots,n-2$），而 $S_k\equiv G_{k-1}(\mathrm{mod}\,P_k)$，$P_k=[P_{k-1},A_{k+1}]$. 最后得到同余式组（$*$）的解：$N\equiv S_{n-1}(\mathrm{mod}P_{n-1})$.

黄宗宪这种新法是合理的，与欧拉解法同理.

大衍求一术（Dàyǎn qíuyíshù） 中国古算法. 指南宋数学家秦九韶解一次同余式组中求乘率的算法，详见“大衍总数术”.

互乘相消法（Hùchéng xiāngxiāofǎ） 中国古算法. 指中国古代解线性方程组的一种方法. 这是由南宋数学家秦九韶在《九章算术》“方程术”的“遍乘直除法”的基础上加以改进所提出的.

三斜求积术（Sānxié qiújīshù） 中国古算法. 即已知一般三角形的三条边长求其面积的方法. 这一问题的研究在中国最早出现在南宋数学家秦九韶的著作《数书九章》中. 该书卷五第 2 题是为了解决大面积的沙田地亩测量而提出的：“问沙田一段，有三斜. 其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里. 里法三百步，欲知为田几何？”其术文是：“以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余，半之. 自乘于上. 以小斜幂乘大斜幂，减上，余，四约之为实. 开平方，得积.”若记大斜为 a，小斜为 b，中斜为 c，则这段术文相当于给出了三角形的面积公式为

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}.$$

《数书九章》没有对这一公式给出推导过程. 在国外，古希腊数学家海伦（Heron，(A)）也曾提出过用三边表示三角形面积的公式：

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

可以证明，这两个公式是等价的.

天元一（Tiānyuányī） 中国古算术语. 它有两种含义：

1. 公元 11 到 13 世纪，中国古代数学家创造的根据已知条件列方程的方法，称为“天元术”. “天元”