数学辞海

MATHEMATICS DICTIONARY

第二卷

山西教育出版社
东南大学出版社
中国科学技术出版社

如果你有数学问题，
而不好意思发问，
欢可以来書山软件答。
一九八八年八月書祝
数学辞海成功

陳省身

学习、研究、运用、发展
数学，让中国数学
赶上国际先进水平，
促进社会主义现
代化建设

吴大任

為日本的井上先生和完
美与国家的和平
采和百合子女士
相逢的 杨振宁

長江納众水百
折不回頭碧海
能容物滔滔向
海流

數學辭海出版紀念

李國平並書

《数学辞海》总编辑委员会

顾　　问　丁石孙　冯　康　江泽涵　苏步青　李国平　吴大任　吴文俊　谷超豪
陈省身　周培源　柯　召　程民德

学术指导　万哲先　卫念祖　马希文　王　元　王寿仁　王梓坤　王绶琯　王斯雷
王湘浩　文　兰　叶彦谦　史惠顺　白正国　冯克勤　宁津生　成　平
朱照宣　伍卓群　庄圻泰　孙　琦　孙以丰　严加安　严志达　严绍宗
苏汝铿　李　未　李　迪　李邦河　李岳生　李德仁　杨东屏　杨芙清
杨桂通　吴祖基　余家荣　沈燮昌　张尧庭　张芷芬　张恭庆　张嗣瀛
陆汝钤　陆润林　陈希孺　陈梓北　陈翰馥　金福临　周伯埙　周毓麟
郑维行　赵慈庚　钟　集　姜礼尚　莫绍揆　郭　雷　郭柏灵　黄　琳
黄正中　萧树铁　梅向明　曹锡华　梁之舜　梁宗巨　越民义　韩汝琦
程其襄　谢力同　谢邦杰　路见可　蔡长年　廖山涛　潘承洞　魏庚人

名誉总编　程民德

总　　编　何思谦

总 编 委　丁尔升　干丹岩　马国选　马忠林　马星垣　王戈平　王世强　王戍堂
王怀安　王国俊　王建磐　王恩平　王耀东　仇桂生　文志英　方锦暄
方嘉琳　邓必鑫　邓永录　邓宗琦　古四毛　左执中　叶大卫　田德恒
史树中　史济怀　冯汉桥　冯志伟　曲世江　吕德正　朱元森　朱梧槚
任南衡　任福尧　庄亚栋　刘　策　刘永清　刘秀芳　刘卓军　刘绍学
刘彦佩　刘家壮　刘瑞挺　刘增贤　刘儒英　米道生　许以超　许永华
苏维宜　杜瑞芝　李　士　李兆华　李克正　李国伟　李承恕　李荫藩
李培业　李培信　杨　路　杨光俊　杨安洲　杨劲根　杨林生　杨春宏
杨重骏　杨家荣　杨家新　杨焕萍　吴从炘　吴振德　吴崇试　岑嘉评
邱　森　邱曙熙　何连法　何伯和　何育赞　何思谦　何崇佑　佟文廷
余澍祥　应制夷　汪　林　沈一兵　沈米成　沈复兴　宋增民　张友余
张文修　张永奎　张伟江　张孝达　张志新　张忠辅　张景中　张奠宙
陆文端　陆洪文　陆善镇　陈文嵘　陈兰荪　陈庆益　陈志华　陈志杰
陈秀东　陈希孺　陈重穆　陈哲卿　陈家鼎　陈藻平　武际可　苗东升
茆诗松　范先令　林　伟　林正炎　林夏水　易照华　於宗俦　郑应平
郑祖庥　郑崇友　孟吉翔　胡作玄　胡毓达　胡炳生　钟义信　侯晋川
施武杰　洪钟德　秦化淑　徐安士　徐利治　徐源富　高琪仁　郭　雷
郭大钧　郭光灿　郭聿琦　郭思乐　唐志远　剡俊华　容尔谦　黄文灶
黄启昌　萧　玲　萧奚安　梅荣照　曹之江　常心怡　常学将　梁友栋
梁世熙　梁贯成　彭立中　董士海　董克诚　蒋星耀　程　侃　程福长
曾一平　谢文泉　谢克昌　谢庭藩　谢鸿政　裘光明　裘宗沪　裘焯明
虞言林　路见可　颜　实　颜基义　潘一民　潘养廉　霍　伟　戴执中

（以上署名均以姓名首字笔画为序）

《数学辞海》第二卷编辑委员会

主　　编	刘绍学	朱元森					
副 主 编	刘彦佩	许永华	吴振德	岑嘉评	佟文廷	沈一兵	陆洪文
	郑崇友	施武杰	戴执中				
编　　委	干丹岩	王戈平	王新民	方嘉琳	牛风文	朱　烈	朱元森
	刘木兰	刘绍学	刘旺金	刘彦佩	许永华	李白飞	李厚源
	李慧陵	李培信	李德琅	杨　路	吴振德	岑嘉评	邱　森
	何伯和	佟文廷	沈一兵	张志让	张英伯	张贤科	陆洪文
	陈志杰	陈维桓	郑崇友	施武杰	徐永华	郭聿琦	董克诚
	董荣森	程福长	裘焯明	樊　恽	颜基义	潘养廉	戴执中
执行编委	朱元森	刘绍学	刘彦佩	沈一兵	郑崇友		

《数学辞海》第二卷各分支学科编辑委员会

组　合　学	主　编	刘彦佩					
	副主编	徐永华	颜基义				
	编　委	田　丰	朱　烈	刘彦佩	刘桂真	孙　革	张镇华
		洪　渊	徐永华	颜基义			
线性与多重线性代数	主　编	佟文廷					
	副主编	逄明贤					
	编　委	李时吉	吴　俊	佟文廷	张福振	武同锁	逄明贤
群及其推广	主　编	施武杰					
	副主编	李慧陵	岑嘉评	郭聿琦			
	编　委	王　杰	王晓峰	王建磐	叶家琛	李尚志	李慧陵
		岑嘉评	张广祥	张志让	陈承东	郑恒武	施武杰
		郭聿琦	章　亮	樊　恽			
李群与李代数	主　编	邱　森					
	编　委	冯绪宁	许以超	邱　森			
环与代数	主　编	朱元森					
	副主编	牛风文	李白飞	张英伯			
	编　委	王志玺	牛风文	朱元森	李白飞	吴泉水	张子龙
		张英伯	陈家鼐	陈培慈	陈操宇	周　梦	周柏荣
		郑玉美	蔡传仁				
模与同调代数	主　编	程福长					
	编　委	邓培民	易　忠	程福长			
序　与　格	主　编	董克诚	董荣森				
	副主编	朱作桐	高　亭				

	编　委	卢景波　朱作桐　陈昭木　高　亭　董克诚　董荣森 蒲义书　雷天德
范畴论与代数K理论	主　编	刘木兰
	副主编	佟文廷
	编　委	王芳贵　刘木兰　佟文廷　陈焕艮　秦厚荣
域论与伽罗瓦理论	主　编	戴执中
	副主编	朱元森
	编　委	朱元森　张人智　周永新　曾广兴　戴执中
数论	主　编	陆洪文
	副主编	张贤科　张明尧
	编　委	于秀源　李德琅　张贤科　张明尧　陆洪文　赵春来 裘焯明
代数几何	主　编	陈志杰
	编　委	李克正　杨劲根　陈志杰
微分几何学	主　编	沈一兵
	副主编	王新民　陈维桓　潘养廉
	编　委	王新民　东瑜昕　许洪伟　李安民　沈一兵　沈纯理 陈维桓　孟道骥　蔡开仁　潘养廉　欧阳崇珍
凸集几何与距离几何	主　编	杨　路
	编　委	马传渔　左铨如　杨　路
一般拓扑学	主　编	王戈平
	编　委	干丹岩　王戈平　方嘉琳　陈立中　贺　伟　阎长明
代数拓扑学与流形拓扑学	主　编	吴振德
	副主编	刘旺金　李厚源　何伯和
	编　委	干丹岩　史存海　刘旺金　李厚源　吴振德　何伯和 郑崇友　崔宏斌　樊　磊
奇点理论与突变理论	主　编	李培信
	副主编	郭卫中
	编　委	孙伟志　李培信　张国滨　郭卫中
数学符号表	主　编	王怀安
	副主编	杨德平　阎崇正
	编　委	王怀安　刘宝康　杨子胥　杨德平　郝拉娣　段　方 阎崇正

（以上署名均以姓氏笔画为序）

序

当我们向着日益临近的21世纪走去的时候，一部巨著——《数学辞海》将要面世了。这是我国200余所高等院校、科研机构，数以千计的数学家、数学工作者共同劳动的结晶，是一件影响深远的大事。

还是在本世纪同上一世纪交接的1900年，希尔伯特就以23个数学问题作为送旧迎新的礼物，高瞻远瞩地指引着20世纪数学发展的若干重要进程。如今，20世纪的帷幕行将落下，我们惊喜地看到，在这百年间，数学已经发生了多么巨大的变化！人们对数学的认识更深刻了，数学的分支更多了，数学的广度和深度，都远远超出了本世纪初的预料。异军突起的新科学和新技术，诸如计算机科学、航天技术、生命工程、数字通信以及新能源的开发、新材料的应用等，无不需要数学，社会科学和人文科学的经济、教育、语言、考古等领域，也开始与数学结下不解之缘。所有这些学科在向数学索取的同时，也都在某一方面推动和改变着数学。数学已经发展成为内涵广泛的数学科学。数学是大自然的语言，又是人类社会生活中各种关系的高度概括。数学在现实世界中获取模型，扩大了自己的外延，同时展现了新的内涵、新的抽象。如果说古希腊和古代中国的数学只是涓涓细流，那么，今天之数学已经汇成了波流浸灌的长江大河。

一个人可以学贯中西，但无法懂得现代数学的方方面面，而社会变革的进程和新技术的浪潮却迫使人们学习和应用更多的数学。解决这个矛盾的办法之一，自然是编纂一部大型的数学工具书。《数学辞海》正是在这样的时代需求背景之下应运而生的。有了这种巨大的推动力量，它才能克服种种艰难曲折，从第一页稿纸，发展成为我们所见到的这部别具一格的鸿篇巨制。

为什么这本书能使作者们激动，愿意竭诚为之构筑，又能吸引读者，使之企足而待呢？这是由于数学自身的地位和价值，它在实践中的巨大作用和自身的美。

数学首先是人们生活和生产的工具。马克思非常赞同康德的这样一句话："一门科学，只有当它成功地应用数学时，才算达到了完善的地步。"事实上，数学被使用的程度，往往反映了一个国家、一个民族的科学进步和经济发展水平。很难设想，在一个低技术的国家，会产生高深的数学，而高技术的社会形态，必有与之相适应的数学水平。毫无疑问，在科学技术飞速发展的当今世界，对数学的需求将与日俱增。

其次，数学又是一种文化形态。古往今来，人们在数学这块沃土上耕耘，收获了许多硕果。这些美好的硕果，本身就是一首首动人的诗篇，闪耀着智慧的光芒。一般人都会欣赏艺术，然而，当一个人只要具有基础的数学知识，同样可以对一道经典的数学名题和某个优美的解法叹为观止。人们还概括了大量实际模型的抽象数学，通过形式推演，以得出

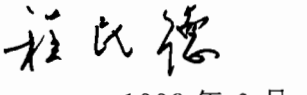
系统的理论，再应用到更广泛的总体上去。数学的这种以简驭繁的本领决定于它的高度概括性。正是由于概括，数学形成了包含各个学科的优美结构。数学的发展推动了自然结构观的发展，它有力地带动了其他学科，大大加速了人类文明史的进程。

数学的作用，还在于它有着独特的培育人的功能。数学是每个人必须学习的基础学科。从小学到中学，数学的学时最多，除了因为数学是一切科学的基础和工具之外，更因为数学有着独特的思维教育和智力开发的作用。数学的高度抽象、遵从逻辑规则和不断创新的特征，集中而突出地表现了人类思维的概括性、逻辑性和探索性。所以，学习数学对人才的培养是一种基本的思维训练，被称为“思想的体操”。

为了全面地反映古今中外的数学成果、体现数学的多种功能，本书既兼顾传统数学和现代数学，又兼顾抽象的基础数学和具体的应用数学。考虑到广大数学教育工作者的需求，本书还将初等数学和高等数学相对地进行了划分，并按习惯将某些分支学科集中列卷，此外还编纂了包含数学史与数学教育等分支学科的专卷，也系统地介绍了中国的古算。这样编纂的《数学辞海》将会充分地显示数学的工具意义、文化意义和教育意义。愿这部国人自编的《数学辞海》既能为国家经济建设服务，又能在民族文化建设中起到应有的作用。

《数学辞海》是改革开放的产物，又将为改革开放服务。人们或许没有想到，这部巨著竟出自民办的编写组织。编纂者来自大江南北、长城内外、海峡两岸，在历时 10 余年间，数百所大专院校、科研机构的千余名专家学者日夜辛劳、自愿奉献，在《数学辞海》中编织着自己的理想和愿望。社会各界积极赞助，有识之士慷慨捐赠，海外同胞亦纷纷来电来函表示支持，用他们的心意渲染着文化建设的宏图。在这个民办写作团体中，人们互相信任、互相支持、互相勉励，充满了成就事业的认同感、紧迫感。这一写作经验也清楚地说明：在共同的愿望下，民办科研也是一条坦途。这是《数学辞海》编写过程中给我们的一个十分有益的启示。

像一切事物一样，《数学辞海》还不会达到绝对完善的境界。相反，这部反映浩如烟海的数学知识，动员了如此巨大力量而编纂的大型著作，首次面世时，一定会有许多不足之处，例如整体结构、条目收集、词义诠释、词类归属等，都还会有需要进一步推敲、商榷的地方。数学是极为严谨的科学，《数学辞海》必将在众多专家的严谨尺度之下，逐版改进。我们今天为之高兴的是，将来可能成为传世之作的《数学辞海》已有了良好的雏形，我们准备将它作为迎接新世纪的礼物，奉献给关心它、需要它的广大读者。



1998 年 6 月

凡　例

一、编　排

1. 全书包括数学科学的100余个分支学科或专题项目，按照从初等数学到高等数学，从古典数学到现代数学，从理论数学到应用数学的原则，将整个数学科学划分为6卷编辑出版(参见《数学辞海》六卷本内容划分方案)。

2. 各卷正文均按数学知识的结构体系编排，同一分支学科(或同一专题项目)的条目相对集中，一般按知识本身的结构、层次、逻辑等关系确定其先后顺序，而数学史部分，如数学家、数学名著、数学期刊、数学团体等，则分别按其出生、出版、创刊、成立的年代先后顺序编排。

3. 各卷目录标题分为三级：一级标题为一个分支学科或一个知识门类。一级标题之下，则按知识构成设若干个二级标题。例如，第一卷中的“数学分析”为一级标题，下设六个二级标题——“实数理论”、“变量与函数”、“极限理论”、“微分学”、“积分学”和“无穷级数”；又如，第六卷中的“中国数学史”为一级标题，下设四个二级标题——“中国古代数学史”、“中国古代数学著作”、“中国古算名词术语”和“中国数学家”。三级标题为具体条目名称。

4. 同一卷中不同分支学科之间的内容有重复时，其知识主题一般地只在一处设条目；不同卷中的学科内容有重复时，其知识主题在各相关部分均设条目，但在释文内容上各有侧重。

二、条　目

1. 条目的标题一般为一个词，如“圆”、“群”、“环”、“函数”、“矩阵”、“向量”、“方程”等，也有的是一个词组，如“勾股定理”、“常微分方程的通解”、“哥德巴赫猜想”、“希尔伯特第6问题”等。

2. 条目设立的条件：1) 独立的知识主题或已形成的固定概念；2) 能够应用准确的、人们习惯和易于理解的词标引；3) 便于读者快速查阅。

3. 条目的分类：条目按其释文的长短分为五类：特长条目(3000字左右)、长条目(1000—3000字)、中条目(300—1000字)、短条目(300字以内)和参见条目。

4. 本书所收的数学名词术语，力求与“全国自然科学名词审定委员会”公布的《数学名词》(科学出版社，1993)保持一致。外国人名的中文译名，力求与《中国大百科全书·数学卷》和梁宗巨主编的《数学家传略词典》(山东教育出版社，1989)中的译名保持一致。未出现在上述著作中的外国人名的中文译名，则采用数学界的约定译名或用习惯译法译出的译名。

三、释　文

1. 本书条目的释文，以文字叙述为主，并采用规范化的现代汉语，力求科学、准确、简明、通俗，杜绝教材式语言和口语，释文开头不再重复条目的标题。

2. 释文开头一般要求破题，然后给出严格的数学定义，并尽量阐明该条目内容的历史沿革及其在本分支学科或知识门类中的地位、作用、发展趋势等，以增强释文的科学性和可读性。

3. 一词多义的释文，用①…②…③…分项叙述，某个条目的释文需由其他条目释文补充说明的，采

用“参见”的方式，被参见的条目标题需加引号，条目标题前加“参见”字样，并置于圆括号之内。

4. 对常见的异名同义词，只给出一种条目标题的释文，其余异名条目亦列入正文，但不再写释文，给出释文的条目标题加引号，条目标题前加“即”字样。例如：矢量(vector)即“向量”；全纯函数(holomorphic function)即“解析函数”；正则函数(regular function)即“解析函数”。

5. 每一个条目标题后，一般在圆括号内标注有对应的英文。凡外国人名(日本人除外)在条目的释文中第一次出现时，在其中文译名后的圆括号内标注有相应的外文原名的姓和名的首字母，并用逗号隔开。例如，欧几里得(Euclid)、牛顿(Newton,I.)、高斯(Gauss,C.F.)。同一外国人名在条目的释文中第二次出现时，不再标注外文。在日本人名、中国人名、中国古代数学史、中国古代数学著作、中国古算名词术语等条目标题后，一般在圆括号内标注汉语拼音。

6. 如果条目乙的基本定义已经完全包括在条目甲的释文之中，那么条目乙只作为“参见条目”保留，所参见的条目标题需加引号，并在条目标题前加“见”字样，而释文不再重复。例如，在条目“线性变换”的释文中，已给出“单位变换”、“恒等变换”和“零变换”的定义，则上述三个条目就作为“参见条目”予以保留，并分别表示为：单位变换(unit transformation)见“线性变换”；恒等变换(identity transformation)见“线性变换”；零变换(null transformation)见“线性变换”。

四、索　引

1. 本书每一卷正文之后，均附有三种索引，即条目笔画索引、条目音序索引和条目西文索引。索引中条目标题后面的数字，表示该条目在正文中的页码。

2. 在条目笔画索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按 一(横)、丨(竖)、丿(撇)、丶(点)、乛(折)五种笔形顺序排列，其中，㇒(提)归为一(横)，亅(竖钩)归为丨(竖)，㇏(捺)归为丶(点)，各种笔形带钩或曲折的笔画(除竖钩“亅”外)归为乛(折)。第一字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 在条目音序索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

4. 在条目笔画索引和条目音序索引中，凡第一字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在两种索引的最后。西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画或音序排列。

5. 在条目西文索引中，按条目标题的起首西文字母顺序排列；条目标题的西文缩写，按一个词排列。凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。没有西文译名的条目，未收进条目西文索引。

6. 在各卷索引之后，还附有本卷涉及到的中外人名译名对照表，以供读者查阅。

目　录

序 …… 1—2

凡例 …… 1—2

《数学辞海》六卷本内容划分方案 …… 1—1

第二卷条目目录 …… 1—89

正文 …… 1—736

数学符号表 …… 737—783

条目笔画索引 …… 784—832

条目音序索引 …… 833—881

条目西文索引 …… 882—957

中外人名译名对照表 …… 958—967

后记 …… 968

《数学辞海》六卷本内容划分方案

第一卷

数学
算术
初等代数
平面几何
平面三角
立体几何
球面几何
平面解析几何
空间解析几何
初等数论
高等代数
高等几何
数学分析
集合论
形式逻辑
布尔代数
概率论与统计学初步
数学符号表

第二卷

数学
组合学
线性与多重线性代数
群及其推广
李群与李代数
环与代数
模与同调代数
序与格
范畴论与代数 K 理论
域论与伽罗瓦理论
数论
代数几何
微分几何学
凸集几何与距离几何
一般拓扑学
代数拓扑学与流形拓扑学
奇点理论与突变理论
数学符号表

第三卷

数学
实变函数论
复变函数论
多复变函数论
测度论
泛函分析
变分法
函数逼近论
调和分析
流形上的分析
位势论
凸分析
非标准分析
小波分析
分形几何
常微分方程
偏微分方程
积分方程
动力系统
特殊函数
数学符号表

第四卷

数学
数学基础
数理逻辑
计算数学
概率论
随机过程
统计学
经济数学
生物数学
数学物理与理论物理
模糊数学
数学符号表

第五卷

数学
运筹学
系统理论
控制理论
通信与信息理论
画法几何与工程图学
计算机科学
数理语言学
力学
天文学
测绘学
数学符号表

第六卷

数学
中国数学史
外国数学史
数学符号史
数学团体与研究机构
数学竞赛与数学奖
数学期刊
数学教育
数学哲学
数学名题与猜想
珠算
数学发展史年表

第二卷条目目录

说明：该目录由本卷所属各分支学科或专题项目的全部条目(包括给出释文的条目及其参见条目)组成，按知识结构顺序编排，即按条目在正文中出现的先后顺序排列.

数学 …… 1
抽象代数 …… 5
近世代数 …… 7
拓扑学 …… 8

组　合　学

组合学…… 10
组合数学…… 11
组合论…… 11
离散数学…… 11

经典组合学

经典组合学…… 11
组合分析…… 11
特定安排…… 11
计数问题…… 11
加法法则…… 12
乘法法则…… 12
相等法则…… 12
殊途计数法则…… 12
排列…… 12
置换…… 12
可重排列…… 12
多重集…… 12
多重排列…… 12
多项式系数…… 12
组合…… 12
可重组合…… 12
组合恒等式…… 13
杨辉三角形…… 13
帕斯卡三角形…… 13
生成函数…… 13
母函数…… 13
发生函数…… 13
普通生成函数…… 13
普通生成数列…… 13
数列的卷积…… 13
指数生成数列…… 13
计数生成函数…… 13
计数式…… 13
计数函数…… 14
计数多项式…… 14
指数型生成函数…… 14
重排…… 14
错排…… 14
更列…… 14
相遇问题…… 14
相遇…… 14
邮票排列问题…… 14
天平问题…… 14
交错排列…… 14
连贯…… 14
圆排列…… 15
单绕向圆排列…… 15
双绕向圆排列…… 15
圆排列问题…… 15
手镯问题…… 15
项链问题…… 15
夫妻问题…… 16
夫妻数…… 16
形式幂级数…… 16
柯西代数…… 16
阶乘函数…… 16
升阶乘函数…… 16
降阶乘函数…… 17
布利萨德算法…… 17
哑运算…… 17
贝尔多项式…… 17
二项多项式序列…… 17

正规化多项式序列…… 17
差分法…… 17
差分表…… 17
差分三角形…… 17
牛顿差分公式…… 17
斯特林数…… 17
第一类斯特林数…… 18
第二类斯特林数…… 18
连带斯特林数…… 18
拉氏数…… 18
零的差分…… 19
差分算子…… 19
移位算子…… 19
贝尔数…… 19
伯努利数…… 19
吕卡数…… 19
高斯系数…… 19
高斯二项式系数…… 19
伽罗瓦数…… 19
容斥原理…… 19
逐步淘汰原理…… 20
交叉分类原理…… 20
广容斥原理…… 20
反演…… 20
序列反演…… 20
级数反演…… 21
反演公式…… 21
二项式反演…… 21
斯特林反演…… 21
伯努利反演…… 21
拉氏反演…… 21
高斯反演…… 21
高而德-徐反演公式 …… 21
默比乌斯反演公式…… 21
默比乌斯函数…… 21
分配问题…… 21
罗杰斯-拉马努金恒等式 …… 21
戈登恒等式…… 22
雅可比三重积恒等式…… 22
欧拉五边形数定理…… 22
阿贝尔恒等式…… 22
常系数线性齐次递归关系…… 22
斐波那契数…… 22
分拆…… 22
有序分拆…… 23
无序分拆…… 23
卡塔朗数…… 23
置换的型…… 23
凯莱公式…… 23
置换群的循环指标…… 23
轨道…… 23
伯恩赛德引理…… 23
函数式样…… 23
函数轨道…… 24
波利亚定理…… 24
德布莱英定理…… 24
权函数…… 24
积和式…… 24
正展式…… 24
行和积…… 24
k 积和式 …… 24
上-积和式 …… 25
全-积和式 …… 25
范·德·瓦尔登猜想…… 25
双随机矩阵…… 25
限位排列…… 25
限位排列的关联矩阵…… 25
关联矩阵…… 26
限位排列的$(0,x)$关联矩阵 …… 26
限位排列的$(t,1)$关联矩阵 …… 26
车问题…… 26
棋阵…… 26
车多项式…… 26
矩形棋盘…… 26
互补棋盘…… 26
梯形棋盘…… 26
三角形棋盘…… 26
象问题…… 26
西蒙-纽科姆问题 …… 27
存在性定理…… 27
抽屉原则…… 27
鸽笼原则…… 27
鞋盒原则…… 27
拉姆齐定理…… 27
拉姆齐数…… 27
广义拉姆齐数…… 27
拉姆齐数$r(F_1,F_2)$ …… 27
霍尔定理…… 28
相异代表系…… 28
婚姻问题…… 28
舞会问题…… 28
工作安排问题…… 28
广义相异代表系…… 28
公共代表系…… 28
棋盘完全覆盖问题…… 28
独立代表系…… 28

行和向量…… 29
列和向量…… 29
矩阵类 $\mathscr{U}(R,S)$ …… 29
规范类 $\mathscr{U}(R,S)$ …… 29
极大矩阵…… 29
向量优超…… 29
交换…… 29
恒 1 …… 29
项秩…… 29
迹…… 29
线秩…… 29
柯尼希定理…… 30
α 宽度 …… 30
德布莱英序列…… 30
完全循环…… 30
德布莱英图…… 30
(0,1)序列 …… 30
组合算法…… 30
组合最优化问题…… 30
关联代数…… 30
关联函数…… 31
递归关系…… 31
特征方程…… 31
河内塔问题…… 31
集合分拆…… 31
分拆的型…… 31
有序分拆…… 31
完全分拆…… 31
菲勒图…… 31
共轭菲勒图…… 32
共轭分拆…… 32
自共轭菲勒图…… 32
自共轭分拆…… 32
窦菲方…… 32
标准表…… 32
杨氏表…… 32
雅可比恒等式…… 32
欧拉恒等式…… 32
2 进分拆 …… 33
平面分拆…… 33
反射原则…… 33

组 合 设 计

组合设计…… 33
平衡不完全区组设计…… 34
区组设计…… 34
重复区组…… 34
简单设计…… 34
正则设计…… 34
平衡设计…… 34
相遇数…… 34
不完全区组设计…… 34
关联矩阵…… 34
费希尔不等式…… 35
推广的费希尔不等式…… 35
补设计…… 35
对称平衡不完全区组设计…… 35
对称设计…… 35
布鲁克-赖瑟-乔拉定理 …… 35
导出设计…… 35
剩余设计…… 35
拟剩余设计…… 35
康纳-霍尔定理 …… 35
BIBD 设计的存在性猜测 …… 35
柯克曼女生问题…… 36
可分解平衡不完全区组设计…… 36
柯克曼三元系…… 36
准可分解设计…… 36
仿射可分解设计…… 36
α 可分解设计 …… 36
设计的同构…… 36
设计的全自同构群…… 36
设计的自同构群…… 37
混差法…… 37
对称重差法…… 37
设计的计数…… 37
成对平衡设计…… 37
PBD 闭集 …… 37
PBD 闭集的纤维 …… 37
PBD 闭集的生成集 …… 37
PBD 闭集方法 …… 38
可分组设计…… 38
威尔森基本构作法…… 38
输入设计…… 38
不完全可分组设计…… 38
PBD 的子设计 …… 38
不完全成对平衡设计…… 38
净集…… 39
(r,λ)设计 …… 39
正交(r,λ)设计 …… 39
准可分解可分组设计…… 39
k 支架 …… 39
拉丁方…… 39
拉丁矩…… 39
对称拉丁方…… 39

对角拉丁方…… 39
尤登方…… 39
尤登设计…… 40
塔斯康方…… 40
意大利方…… 40
佛罗伦萨方…… 40
梵蒂冈方…… 40
行完备拉丁方…… 40
列完备拉丁方…… 40
完备拉丁方…… 40
拟群…… 40
幂等拟群…… 40
幂等拟群大集…… 40
高尔夫设计…… 40
幂等对称拉丁方…… 40
幂等对称拉丁方大集…… 40
36 名军官问题 …… 40
正交拉丁方…… 41
正交侣…… 41
欧拉猜想…… 41
正交拉丁方完备组…… 41
共轭正交拉丁方…… 41
自正交拉丁方…… 41
可分解配偶回避的混合双打循环赛…… 42
正交对角拉丁方…… 42
划分不完全拉丁方…… 42
带洞拉丁方…… 42
正交阵列…… 42
不完全正交拉丁方…… 42
直交阵列…… 42
正交表…… 43
横截设计…… 43
幻方…… 43
纵横图…… 43
魔方…… 43
幻和…… 43
泛对角线幻方…… 43
幻积…… 43
加乘幻方…… 43
九宫图…… 43
有限几何…… 43
有限射影空间…… 43
超平面…… 44
有限仿射空间…… 44
有限射影平面…… 44
法诺平面…… 44
有限仿射平面…… 44
卵形…… 44
巴尔子平面…… 44
子平面…… 44
阻碍集…… 44
网…… 44
n 弧 …… 45
德扎格平面…… 45
德扎格定理…… 45
非德扎格平面…… 45
默比乌斯平面…… 45
逆几何…… 45
圆几何…… 45
辛几何…… 45
交错矩阵…… 45
全迷向子空间…… 45
非迷向子空间…… 45
正交几何…… 45
对称矩阵…… 46
酉几何…… 46
埃米尔特矩阵…… 46
罗姆方…… 46
正交 1 因子分解…… 46
1 因子分解 …… 46
正交对称拉丁方…… 46
正交施泰纳三元系…… 47
平衡罗姆方…… 47
有序罗姆方…… 47
完全平衡豪韦尔旋转…… 47
完美罗姆方…… 47
完美 1 因子分解…… 47
标准罗姆方…… 47
斜罗姆方…… 47
t 维罗姆方 …… 47
罗姆立方…… 47
罗姆子方…… 47
豪韦尔设计…… 47
柯克曼方…… 48
双可分解 BIBD 设计 …… 48
差集…… 48
群差集…… 48
阿贝尔差集…… 48
霍尔猜想…… 48
平面差集…… 48
循环差集…… 48
循环设计…… 48
差集的刻画…… 48
霍尔多项式…… 49
乘子…… 49
乘数…… 49

右乘子…… 49
数值乘子…… 49
乘子定理…… 49
乘子猜想…… 49
额外乘子…… 49
辛格定理…… 49
分圆类…… 50
分圆数…… 50
广义分圆数…… 50
梅农差集…… 50
差集的收缩…… 50
可分差集…… 50
强乘子…… 50
循环加集…… 50
差族…… 50
补差集…… 51
采克勒斯差集…… 51
阿达马矩阵…… 51
阿达马矩阵猜测…… 51
阿达马设计…… 51
正规阿达马矩阵…… 51
反型阿达马矩阵…… 51
阿达马矩阵睦偶…… 52
对称 C 矩阵 …… 52
威廉森型矩阵…… 52
鲍默特-霍尔表 …… 52
T 矩阵…… 52
正交设计…… 52
称重矩阵…… 52
复阿达马矩阵…… 52
反型复 H 矩阵 …… 53
复 H 矩阵睦偶 …… 53
广义阿达马矩阵…… 53
阿达马等价…… 53
t 设计 …… 53
施泰纳系…… 53
马修设计…… 53
比例向量法…… 53
t 比例向量 …… 54
设计的扩充…… 54
设计的收缩…… 54
t 设计大集 …… 54
LD 设计 …… 54
西尔维斯特问题…… 54
循环 t 设计 …… 55
简单 t 设计 …… 55
不可约 t 设计 …… 55
可约 t 设计 …… 55
道因-威尔森定理 …… 55
覆盖设计…… 55
覆盖数…… 55
填充设计…… 55
填充数…… 55
G 设计…… 55
图设计…… 56
G 区组…… 56
平衡 G 设计 …… 56
带洞 G 设计 …… 56
带洞图设计…… 56
完全门德尔森设计…… 56
门德尔森设计…… 56
可分解 PMD …… 56
准可分解 PMD …… 57
施泰纳 k 圈系统…… 57
门德尔森三元系…… 57
嵌套…… 57
着色设计…… 57
部分平衡不完全区组设计…… 57
结合方案…… 58
玻色-梅斯纳代数 …… 58
可分组设计…… 58
三角形设计…… 58
拉丁方型设计…… 58
L_i 型设计 …… 58
循环型设计…… 58
汉明结合方案…… 59
超立方体结合方案…… 59
约翰生结合方案…… 59
三角形结合方案…… 59
度量方案…… 59
距离正则图…… 59
强正则图…… 59
张图…… 59
三角形图…… 59
码…… 59
分组码…… 59
平凡码…… 59
伪随机码…… 59
汉明距离…… 59
极小距离…… 60
极小重量…… 60
辛格尔顿界…… 60
汉明界…… 60
球填充界…… 60
支撑集…… 60
完全码…… 60

汉明码…… 60
戈莱码…… 60
极大距离可分码…… 60
MDS 码 …… 60
线性码…… 60
群码…… 60
循环码…… 60
S 独立集 …… 61
BCH 码 …… 61
生成矩阵…… 61
生成多项式…… 61
等价码…… 61
对偶码…… 61
重量计数子…… 61
麦克威廉斯定理…… 61
双偶自对偶码…… 61
极值双偶自对偶码…… 62
阿斯莫斯-马特森定理 …… 62
阿达马码…… 62
设计的码…… 62
移位寄存器序列…… 62
移存器序列…… 63
密码…… 63
明文…… 64
密文…… 64
移位密码…… 64
代换密码…… 64
密钥…… 64
密码体制…… 64
凯撒密码…… 64
维吉利亚密码…… 64
伪随机码…… 64
单钥体制…… 64
公钥体制…… 64

组 合 序

二元关系…… 64
关系集…… 64
子关系集…… 64
自反的二元关系…… 64
非自反的二元关系…… 64
对称的二元关系…… 64
反对称的二元关系…… 64
可传递的二元关系…… 64
负传递的二元关系…… 64
完备的二元关系…… 64
等价关系…… 64
等价类…… 64
划分…… 64
包容关系…… 64
精细关系…… 65
复合关系…… 65
拟序…… 65
拟序集…… 65
偏序集…… 65
偏序…… 65
序关系…… 65
偏序集的阶…… 65
有限偏序集…… 65
局部有限偏序集…… 65
偏序集的长度…… 65
偏序集的宽度…… 65
覆盖…… 65
哈塞图…… 65
偏序集的链…… 65
偏序集的极大链…… 65
偏序集的反链…… 65
偏序集的区间…… 65
偏序集的极大元…… 65
偏序集的极小元…… 66
偏序集的最大元…… 66
偏序集的最小元…… 66
偏序集的元素高度…… 66
基元…… 66
基点…… 66
偏序集的秩…… 66
有秩偏序集…… 66
分层偏序集…… 66
若尔当-戴德金链条件 …… 66
保序映射…… 66
偏序集的同构映射…… 66
同构偏序集…… 66
狄尔沃斯定理…… 66
局部有限偏序集上的默比乌斯反演公式…… 67
偏序集的运算…… 67
偏序集的基和…… 67
偏序集的直积…… 67
偏序集的基积…… 67
偏序集的字典序积…… 67
偏序集的基幂…… 67
偏序集的对偶…… 67
偏序集的逆…… 67
偏序集的闭算子…… 67
偏序集的平集…… 68
偏序集的嵌入算子…… 68

格…… 68
结运算…… 68
交运算…… 68
链格…… 68
布尔格…… 68
除数格…… 68
向量空间格…… 68
划分格…… 68
子格…… 68
模格…… 68
半格…… 69
模元素…… 69
模元素对…… 69
模对称格…… 69
传递区间…… 69
投影区间…… 69
次模格…… 69
半模格…… 69
补格…… 69
相对补格…… 69
局部补格…… 69
补元…… 69
分配格…… 69
格的理想…… 69
格的主理想…… 70
理想格…… 70
结-理想 …… 70
交-理想 …… 70
不可约元素…… 70
结-不可约 …… 70
交-不可约 …… 70
几何格…… 70
基元格…… 70
平集格…… 70
完备格…… 70
独立系统…… 70
独立集…… 70
拟阵…… 70
相关集…… 71
拟阵的基…… 71
拟阵的圈…… 71
拟阵的独立性公理…… 71
拟阵交换性质…… 71
矩阵拟阵…… 71
向量拟阵…… 71
二元拟阵…… 71
对偶拟阵…… 71
正交拟阵…… 71
匹配拟阵…… 71
圈拟阵…… 71
多边形拟阵…… 71
图拟阵…… 71
上图拟阵…… 71
欧拉拟阵…… 71
键拟阵…… 71
偶拟阵…… 72
旋拟阵…… 72
拟阵的基公理…… 72
拟阵的基…… 72
基交换公理…… 72
中间基公理…… 72
拟阵的圈公理…… 72
消去公理…… 72
拟阵的秩…… 72
拟阵的秩公理…… 72
拟阵的闭包算子…… 72
闭包交换公理…… 73
拟阵的平集…… 73
拟阵的超平面…… 73
拟阵的闭集…… 73
拟阵的闭包公理…… 73
拟阵的平集公理…… 73
拟阵的闭集公理…… 73
拟阵的超平面公理…… 73
拟阵的相关性公理…… 73
拟阵的开集公理…… 73
仿射拟阵…… 74
截元…… 74
偏截元…… 74
截元拟阵…… 74
截元表示…… 74
霍尔定理…… 74
拉都定理…… 74
划分拟阵…… 74
可表示拟阵…… 74
可坐标化拟阵…… 75
拟阵的表示…… 75
拟阵的表示矩阵…… 75
单模拟阵…… 75
全单模矩阵…… 75
正则拟阵…… 75
单形拟阵…… 75
拟阵多面体…… 75
次模函数…… 76
多面体拟阵…… 76
法诺拟阵…… 76

拟阵的删除运算…… 76
均匀拟阵…… 76
拟阵的限约运算…… 76
拟阵的收缩运算…… 76
子拟阵…… 76
拟阵的次形…… 76
拟阵的自环…… 76
单点割集…… 76
拟阵的并…… 76
拟阵的交…… 77
拟阵的直和…… 77
拟阵的贪婪算法…… 77
组合几何…… 77
简单拟阵…… 77
划分几何…… 77
接合函数…… 78
关联函数…… 78
接合代数…… 78
默比乌斯函数…… 78
默比乌斯不变量…… 78
塔特-格罗腾迪克不变量 …… 78
拟阵特征多项式…… 78
语集…… 79
可行词…… 79
简单语集…… 79
正常语集…… 79
序阵…… 79
搜索序阵…… 79
剥脱序阵…… 79
耳型分解序阵…… 79
多面体拟阵的序阵…… 79
偏序集序阵…… 80
时间表序阵…… 80
序阵的秩函数…… 80

图与超图

图论…… 80
图…… 81
平凡图…… 81
孤立图…… 81
准图…… 81
带重图…… 81
带环图…… 81
简单图…… 81
完全图…… 81
有限图…… 81
无限图…… 81
标定图…… 81
赋权图…… 81
图的同构…… 81
自同构…… 82
1 同构 …… 82
2 同构 …… 82
割点分裂的运算…… 82
旋转运算…… 82
图的同态…… 82
图的自同态…… 82
初等同态…… 82
n 阶完全同态 …… 82
子图…… 82
真子图…… 82
支撑子图…… 82
节点导出子图…… 82
边导出子图…… 82
极大子图…… 82
最大子图…… 82
次形…… 82
收缩…… 82
去边…… 82
图的同胚…… 82
细分…… 82
边细分…… 82
部图…… 82
二部图…… 82
三部图…… 82
k 部图 …… 82
完全 k 部图…… 82
次…… 82
悬挂点…… 83
悬挂边…… 83
邻域…… 83
闭邻域…… 83
出次…… 83
入次…… 83
路…… 83
图的迹…… 83
径…… 83
边不交…… 83
点不交…… 83
有向迹…… 83
有向路…… 83
圈…… 83
迂…… 83
游…… 83

l 圈 …… 83
图的周长 …… 83
围长 …… 83
上圈 …… 83
正则图 …… 83
边正则图 …… 83
强正则图 …… 83
不变量 …… 83
团数 …… 84
交数 …… 84
遗传性 …… 84
坚韧性 …… 84
可迁性 …… 84
距离 …… 84
图的直径 …… 84
离心度 …… 84
图的半径 …… 84
图的中心 …… 84
周点 …… 84
测地线 …… 84
图的运算 …… 84
补图 …… 84
交邻图 …… 84
边图 …… 85
区间图 …… 85
树路图 …… 85
圆图 …… 85
盒图 …… 85
团图 …… 85
块图 …… 85
块-割点图 …… 85
幂图 …… 85
图的因子 …… 85
图的对集 …… 85
完满对集 …… 85
交错路 …… 85
素图 …… 85
复合图 …… 85
树 …… 85
森 …… 85
树多项式 …… 85
树图 …… 85
根点树 …… 85
平面树 …… 85
有向树 …… 85
内向树 …… 86
外向树 …… 86
树形图 …… 86
深探树 …… 86
广探树 …… 86
棕图 …… 86
无回路图 …… 86
平面图 …… 86
外平面图 …… 86
极大平面图 …… 86
有向图 …… 86
基础图 …… 87
对称有向图 …… 87
本原有向图 …… 87
单侧有向图 …… 87
功能有向图 …… 87
竞赛图 …… 87
凝聚 …… 87
连通片 …… 87
块 …… 87
割点 …… 87
连通度 …… 87
连通度函数 …… 87
门杰定理 …… 87
$H_{m,n}$图 …… 88
模 H 连通 …… 88
圈连通 …… 88
k 临界图 …… 88
哈密顿圈问题 …… 88
哈密顿圈 …… 88
哈密顿图 …… 88
亚哈密顿图 …… 88
泛圈图 …… 88
闭包 …… 88
奥尔型条件 …… 89
闭包运算 …… 89
泛连通图 …… 89
哈密顿路图 …… 89
制约圈 …… 89
支配圈 …… 89
哥尼斯堡七桥问题 …… 89
一笔画问题 …… 89
欧拉图 …… 89
欧拉游 …… 89
欧拉径 …… 89
偶图 …… 89
欧拉有向图 …… 89
BEST 定理 …… 89
制约集 …… 90
制约数 …… 90
外固数 …… 90

制约划分…… 90
制约划分数…… 90
独立制约集…… 90
独立制约数…… 90
全制约集…… 90
最小全制约集…… 90
全制约数…… 90
全制约划分数…… 90
连通制约集…… 90
连通制约数…… 90
连通制约划分数…… 90
无赘集…… 90
极大无赘集…… 90
覆盖…… 90
覆盖集…… 90
最小覆盖集…… 90
覆盖数…… 90
覆盖临界图…… 90
边覆盖…… 90
最小边覆盖…… 90
边覆盖数…… 90
可约二部图…… 90
独立集…… 91
稳固集…… 91
独立临界图…… 91
最大独立集…… 91
内固数…… 91
边独立集…… 91
最大边独立集…… 91
边独立数…… 91
点核…… 91
边核…… 91
临界边…… 91
边临界图…… 91
临界点…… 91
点临界图…… 91
C 对集…… 91
(a,b)因子 …… 91
正则因子…… 91
奇因子…… 91
偶因子…… 91
f 因子…… 91
f 反因子…… 91
星因子…… 91
(g,f)奇偶因子 …… 92
(I,Z)因子 …… 92
C_l 因子 …… 92
树-因子 …… 92
团-因子 …… 92
因子临界图…… 92
荫度…… 92
因子覆盖图…… 92
半正则 1 因子分解…… 92
完满 1 因子分解…… 92
同构因子分解…… 92
有理图…… 92
正常着色…… 92
色组…… 93
色数…… 93
全着色猜想…… 93
k 可着色图 …… 93
色临界图…… 93
惟一 k 可着色图…… 93
哈约斯猜想…… 93
维津定理…… 93
哈德威格猜想…… 93
四色猜想…… 93
五色定理…… 93
泰特猜想…… 94
塔特图…… 94
完美图…… 94
完美图猜想…… 94
全三角图…… 94
洞…… 94
反洞…… 94
团划分…… 94
团划分数…… 94
极图…… 94
图兰图…… 94
次色数…… 94
反极图问题…… 94
$T_{m,n}$定理 …… 95
退化极图问题…… 95
超饱和图…… 95
稳定性定理…… 95
渐近构造定理…… 95
拉姆齐扰动…… 95
色扰动定理…… 95
拉姆齐数…… 95
拉姆齐图…… 95
舒尔定理…… 95
舒尔数…… 95
可平面图…… 95
库拉托夫斯基图…… 95
库拉托夫斯基定理…… 96
平面对偶图…… 96

几何对偶…… 96
代数对偶…… 96
惠特尼定理…… 96
欧拉公式(图论)…… 96
柏拉图图…… 96
正则平面图…… 96
平面图码…… 96
欧拉码…… 97
平面等价…… 97
旋…… 97
桥…… 97
平面浸入…… 97
吴-刘定理 …… 98
树浸入…… 98
确向浸入…… 98
确向术…… 98
深探…… 98
广探…… 98
迷宫法…… 98
平面性辅助图…… 98
平面性算法…… 98
平面嵌入…… 98
直线嵌入…… 99
凸嵌入…… 99
纵横嵌入…… 99
网格嵌入…… 99
最小折数嵌入…… 99
最小面积嵌入…… 99
厚度…… 99
偏度…… 99
纵横度…… 99
糙度…… 99
拓扑图…… 99
欧拉示性数…… 99
地图…… 99
对偶地图…… 99
三角剖分…… 99
单面地图…… 99
最大亏格…… 99
最小亏格 …… 100
上嵌入 …… 100
下嵌入 …… 100
引线问题 …… 100
曲线交叉问题 …… 100
希伍德猜想 …… 100
地图着色定理 …… 100
地图着色 …… 100
地图色数 …… 101
带根地图 …… 101
简单地图 …… 101
无环地图 …… 101
树地图 …… 101
单圈地图 …… 101
欧拉地图 …… 101
二部地图 …… 101
三角地图 …… 101
地图计数 …… 101
地图计数函数 …… 101
地图计数方程 …… 101
色和 …… 101
色和函数 …… 101
色和方程 …… 101
色平均 …… 101
范色和 …… 102
范色和函数 …… 102
范色和方程 …… 102
点空间 …… 102
边空间 …… 102
循环空间 …… 102
上循环空间 …… 102
双循环空间 …… 102
同调 …… 102
上同调 …… 102
循环矩阵 …… 102
循环图 …… 102
邻接矩阵 …… 102
关联矩阵 …… 103
圈矩阵 …… 103
上圈矩阵 …… 103
距离矩阵 …… 103
迂回矩阵 …… 103
圈基 …… 103
基本圈 …… 103
圈秩 …… 103
上圈基 …… 103
双圈基 …… 103
双树 …… 103
双圈秩 …… 103
哈达玛积 …… 103
基本积 …… 103
宾纳-柯西定理 …… 103
矩阵-树定理 …… 103
变元矩阵-树定理 …… 103
特征多项式 …… 103
同谱图 …… 104
邻接代数 …… 104

秩多项式 …… 104
塔特多项式 …… 104
范色多项式 …… 104
琼斯多项式 …… 104
稳定核子群 …… 104
正规图表示 …… 104
色多项式 …… 104
瑞德猜想 …… 104
权函数 …… 104
友谊定理 …… 104
相似点 …… 104
相似边 …… 105
对称边 …… 105
点对称图 …… 105
可迁图 …… 105
回转图 …… 105
均匀图 …… 105
对称图 …… 105
高度对称图 …… 105
群的色图 …… 105
群图 …… 105
图的自同构群 …… 105
节点群 …… 105
幺图 …… 105
图的自同态半群 …… 105
边群 …… 105
构形 …… 105
构形群 …… 106
图形计数级数 …… 106
图的计数 …… 106
n 笼 …… 106
乌拉姆猜想 …… 106
奇图 …… 106
群-陪集图 …… 106
拟可分图 …… 106
覆盖图 …… 106
α 置换图 …… 107
网络 …… 107
系统图 …… 107
纵变量 …… 107
横变量 …… 107
关联公设 …… 107
回路公设 …… 107
状态变量法 …… 107
状态变量集 …… 107
柯特斯图 …… 107
状态转移图 …… 107
网络流 …… 107
流量 …… 108
最大流 …… 108
流图 …… 108
柯特斯增益公式 …… 108
信号流图 …… 108
圈增益 …… 109
增益运算 …… 109
图增益 …… 109
马森定理 …… 109
割 …… 109
最小割 …… 109
最大流最小割定理 …… 109
特征树 …… 109
图上作业法 …… 109
可行流 …… 109
环流 …… 110
势差 …… 110
键 …… 110
优美标号 …… 110
优美图 …… 110
调和标号 …… 110
调和图 …… 110
优雅标号 …… 110
优雅图 …… 111
幻标号 …… 111
幻图 …… 111
最优线性排列 …… 111
图的价格 …… 111
带宽标号 …… 111
带宽 …… 111
折叠标号 …… 111
折叠数 …… 111
模糊图 …… 111
随机图 …… 111
原始图 …… 111
随机可迹图 …… 111
随机哈密顿图 …… 111
增性质 …… 111
凸性质 …… 111
阀函数 …… 111
阀分布函数 …… 111
阀函数对 …… 111
可达阀分布函数 …… 112
概率收敛性 …… 112
超图 …… 112
简单超图 …… 112
施佩纳族 …… 112
均匀超图 …… 112

部分超图 …… 112
子超图 …… 112
连通超图 …… 112
次 …… 112
星 …… 112
完全超图 …… 112
线性超图 …… 112
交族 …… 112
交超图 …… 113
爱尔特希-柯-拉多定理 …… 113
边色数 …… 113
遗传闭包 …… 113
遗传超图 …… 113
施瓦他猜想 …… 113
色数 …… 113
强色数 …… 113
完美超图 …… 113
团 …… 113
截段 …… 113
保形超图 …… 113
克鲁斯卡尔-卡妥那定理 …… 113
黑利性质 …… 113
区间超图 …… 114
孙子性质 …… 114
k 黑利性质 …… 114
横截集 …… 114
横截数 …… 114
横截超图 …… 114
横截临界超图 …… 114
链 …… 114
平衡超图 …… 114
全平衡超图 …… 114
均等 q 染色 …… 114
单模超图 …… 114
匹配 …… 114
匹配数 …… 114
覆盖 …… 114
正规超图 …… 114
代表图 …… 114
树形超图 …… 114
上树形超图 …… 114
s 匹配 …… 114
门杰超图 …… 115
整极超图 …… 115
单纯分解 …… 115
树-分解 …… 115
树宽 …… 115
图的素分解 …… 115
素图 …… 115
极大素子图 …… 115
图的素因子 …… 115
单形 …… 115
门杰数 …… 116
凸性 …… 116
极小凸的 …… 116
凸包 …… 116
闭性 …… 116
简单邻域 …… 116
单调极限 …… 116
明蒂定理 …… 116
单纯剖分 …… 116
施佩纳引理 …… 116
难以捉摸的 …… 116
单调性质 …… 117
格雷图 …… 117
格林伯图 …… 117
福克曼图 …… 117
最小 3 正则幺图 …… 117
格罗蒋茨图 …… 117
拼方 …… 117
完美正方形 …… 118
完美矩阵 …… 118
完美三角形 …… 118
托马森图 …… 118
格让保图 …… 118
施瓦他图 …… 118
格林伍德-格利森图 …… 118
塔特猜想 …… 119
霍尔顿图 …… 119
麦雷迪斯图 …… 119
考柯西特图 …… 119
佩特森图 …… 119

组合多面形与最优化

凸多面体 …… 119
凸包 …… 119
凸组合 …… 119
凸多面锥 …… 119
凸多面形 …… 119
外尔-闵科夫斯基定理 …… 120
凸多面形的法式描述 …… 120
凸多面形的典式描述 …… 120
凸多面形的刚性约束 …… 120
凸多面形的约束矩阵 …… 120
凸多面形的基 …… 120

凸多面形的可行基 …… 120
极点 …… 120
凸多面形分解定理 …… 120
法尔卡斯-闵科夫斯基-外尔定理 …… 120
凸多面体的支撑超平面 …… 120
凸多面体的面 …… 120
凸多面体的分离超平面 …… 120
退化多面体 …… 120
仿射包 …… 120
仿射组合 …… 120
多面体的 f 向量 …… 120
f 等价多面体 …… 120
欧拉-庞加莱公式 …… 120
单纯多面体 …… 120
单纯形 …… 120
仿射独立 …… 121
r 单纯多面体 …… 121
简单多面体 …… 121
s 简单多面体 …… 121
(r,s)型多面体 …… 121
循环多面体 …… 121
k 邻多面体 …… 121
对偶多面体 …… 121
多面体的运算 …… 121
多面体之和 …… 121
多面体之积 …… 121
多面体之极 …… 121
多面体投影像 …… 121
金字塔 …… 121
单态序列 …… 121
线性规划 …… 121
基础可行解 …… 122
基础最优解 …… 122
基本定理 …… 122
单纯形方法 …… 122
对偶规划 …… 122
对偶定理 …… 123
松弛互补性条件 …… 123
对偶单纯形方法 …… 123
原始-对偶方法 …… 123
卡马卡方法 …… 123
哈奇扬方法 …… 124
椭球法 …… 124
整数线性规划 …… 124
整点 …… 124
整格 …… 124
割平面方法 …… 124
多面形的整点凸包 …… 125
整多面形 …… 125
分支定界法 …… 125
全单位模性 …… 125
全对偶整数性 …… 125
交锁多面形 …… 125
反交锁多面形 …… 125
多面体的图 …… 125
d 多面形图 …… 126
多面形序列 …… 126
多面体的 k 构架 …… 126
多面体的面复形 …… 126
组合等价多面体 …… 126
标记多面体 …… 126
抽象多面体 …… 126
多面体的直径 …… 126
巴林斯基定理 …… 126
施泰尼茨定理 …… 126
多面体半拟阵 …… 126
多面体的谱 …… 126
多面形半群 …… 126
有限生成的整向量半群 …… 126
组合(最)优化 …… 126
算法复杂性 …… 127
算法 …… 127
计算复杂性 …… 127
时间复杂性 …… 127
空间复杂性 …… 127
问题复杂性 …… 127
多项式算法 …… 127
有效算法 …… 127
好算法 …… 127
判定问题 …… 127
P 问题 …… 127
NP 问题 …… 128
NP 完全问题 …… 128
多项式等价 …… 128
贪婪算法 …… 128
近似算法 …… 128
概率算法 …… 128
启发式算法 …… 129
满足问题 …… 129
独立系统问题 …… 129
最大独立集 …… 129
最大权独立集 …… 129
拟阵问题 …… 129
2 拟阵交问题 …… 129
分支问题 …… 129
最大团问题 …… 129

旅行售货员问题 …… 130
指派问题 …… 130
梵塔问题 …… 130
最短路问题 …… 130
最优树问题 …… 130
最优连结问题 …… 130
克鲁斯卡尔算法 …… 130
摆渡问题 …… 130
最小树形图问题 …… 130
施泰纳最小树问题 …… 130
网络流问题 …… 131
最大流问题 …… 131
b匹配问题 …… 131
最优匹配问题 …… 131
中国邮路问题 …… 131
背包问题 …… 131
排序问题 …… 131
工件作业 …… 131
流水作业 …… 131
日程表问题 …… 131
调度问题 …… 131
项目日程表 …… 131
装配线平衡 …… 131
装填问题 …… 131
装箱问题 …… 132
覆盖问题 …… 132
划分问题 …… 132
选址问题 …… 132
麦场设置问题 …… 132
称量问题 …… 132
布局问题 …… 132
定位问题 …… 132
布线问题 …… 132
纵横布局 …… 132
装填多面体 …… 132
覆盖多面体 …… 132
划分多面体 …… 132
匹配多面体 …… 132
整多面体 …… 132
多面体拟阵 …… 132
拟阵多面体 …… 133
局整多面体 …… 133
拟整多面体 …… 133
松划分多面体 …… 133
最简选址多面体 …… 133
最简选址问题 …… 133
连通整多面体 …… 133
中位多面体 …… 133
置换多面体 …… 133
偶置换多面体 …… 134
分配多面体 …… 134
指派多面体 …… 134
安排多面体 …… 134
运输多面体 …… 134
非退化运输多面体 …… 135
退化运输多面体 …… 135
中心运输多面体 …… 135
等价运输多面体 …… 135
对称运输多面体 …… 135
k退化运输多面体 …… 135
(L,P)退化运输多面体 …… 135
运输多面体(L,P)正则偶 …… 135
转向运输多面体 …… 135
限额运输多面体 …… 135
运输多面体的谱 …… 135
正则限额运输多面体 …… 136
$(k-t)$限额运输多面体 …… 136
α限额运输多面体 …… 136
广义运输多面体 …… 136
广义运输问题 …… 136
双随机多面体 …… 136
对称置换多面体 …… 136
伯克霍夫定理 …… 136
哈密顿圈多面体 …… 136
有向哈密顿多面体 …… 136

线性与多重线性代数

线 性 代 数

线性代数 …… 137
n元向量 …… 137
n维向量 …… 137
线性空间 …… 137
向量空间 …… 137
向量 …… 137
零向量 …… 137
基域 …… 138

第二卷条目目录

实线性空间 …… 138
复线性空间 …… 138
纯量乘法 …… 138
数量乘法 …… 138
n 元向量空间 …… 138
线性组合 …… 138
线性表示 …… 138
线性表出 …… 138
等价向量组 …… 138
线性相关 …… 138
线性无关 …… 138
替换定理 …… 138
线性空间的维数 …… 138
n 维线性空间 …… 138
零维线性空间 …… 138
有限维线性空间 …… 138
无限维线性空间 …… 138
线性空间的基 …… 138
向量的坐标 …… 139
基底 …… 139
坐标变换公式 …… 139
过渡矩阵 …… 139
极大线性无关组 …… 139
向量子集的秩 …… 139
线性子空间 …… 139
平凡子空间 …… 139
真子空间 …… 139
生成子空间 …… 139
生成集 …… 139
生成系 …… 139
子空间的和 …… 139
子空间的交 …… 139
补子空间 …… 139
余子空间 …… 139
独立于一组基的子空间 …… 139
具有性质 Q 的子空间 …… 140
子空间的直和 …… 140
子空间的直接和 …… 140
维数公式 …… 140
商空间 …… 140
余维数 …… 140
卡氏积空间 …… 140
线性映射 …… 140
线性同态 …… 140
线性算子 …… 141
零映射 …… 141
线性空间的同构映射 …… 141
同构的线性空间 …… 141
线性函数 …… 141
线性映射的值域 …… 141
像空间 …… 141
线性映射的核 …… 141
线性映射的秩 …… 141
线性映射的零度 …… 141
对偶空间 …… 141
对偶基 …… 141
对偶原理 …… 141
对偶映射 …… 141
转置映射 …… 141
逆步映射 …… 141
线性变换 …… 141
恒等变换 …… 141
单位变换 …… 141
零变换 …… 141
可逆变换 …… 141
逆变换 …… 141
全线性变换代数 …… 141
幂幺变换 …… 141
幂等变换 …… 141
幂零变换 …… 141
幂单变换 …… 142
对合变换 …… 142
射影变换 …… 142
非奇异线性变换 …… 142
非退化线性变换 …… 142
奇异线性变换 …… 142
满秩线性变换 …… 142
正则线性变换 …… 142
域上的矩阵 …… 142
n 阶方阵 …… 142
n 阶单位方阵 …… 142
零矩阵 …… 142
转置矩阵 …… 142
对称矩阵 …… 142
反对称矩阵 …… 142
域上矩阵的秩 …… 142
满秩矩阵 …… 142
非异矩阵 …… 142
域上矩阵的运算 …… 142
n 阶全阵环 …… 143
域上矩阵的逆矩阵 …… 143
可逆矩阵 …… 143
域上矩阵的行列式 …… 143
域上的线性方程组 …… 143
齐次线性方程组 …… 143

系数矩阵 …… 143
增广矩阵 …… 143
克莱姆法则 …… 143
基础解系 …… 143
解空间 …… 144
域上矩阵的特征多项式 …… 144
域上矩阵的特征方程 …… 144
域上矩阵的特征根 …… 144
域上矩阵的特征向量 …… 144
哈密顿-凯莱定理 …… 144
线性变换的矩阵 …… 144
半线性映射 …… 144
半线性变换 …… 144
不变子空间 …… 144
稳定子空间 …… 144
导出线性变换 …… 144
矩阵的标准型 …… 145
若尔当标准型 …… 145
广义标准型 …… 145
循环子空间 …… 145
循环基 …… 145
循环空间 …… 145
循环变换 …… 145
特征子空间 …… 145
广义特征子空间 …… 145
根子空间 …… 145
不可约线性变换 …… 145
不可分解线性变换 …… 145
σ不可约空间 …… 145
完全可约线性变换 …… 145
可分解线性变换 …… 145
σ可分解空间 …… 145
准素分支空间 …… 145
主幂等元素 …… 145
双线性映射 …… 145
对称双线性映射 …… 146
反对称双线性映射 …… 146
双线性函数 …… 146
双线性函数的矩阵 …… 146
双线性函数的秩 …… 146
满秩双线性函数 …… 146
非退化双线性函数 …… 146
对称双线性函数 …… 146
反对称双线性函数 …… 146
线性空间上的二次函数 …… 146
线性空间上的二次型 …… 146
二次函数相伴的双线性函数 …… 146
半双线性函数 …… 146
内积 …… 146
纯量积 …… 146
左正交 …… 146
右正交 …… 146
半双线性函数的秩 …… 146
半双线性函数的矩阵 …… 147
非退化半双线性函数 …… 147
满秩半双线性函数 …… 147
埃尔米特函数 …… 147
反埃尔米特函数 …… 147
埃尔米特度量空间 …… 147
反埃尔米特度量空间 …… 147
非退化对称双线性度量空间 …… 147
非退化反对称双线性度量空间 …… 147
满秩对称双线性度量空间 …… 147
满秩反对称双线性度量空间 …… 147
格拉姆矩阵 …… 147
度量矩阵 …… 147
标准正交基 …… 147
埃尔米特空间 …… 147
正交补(空间) …… 147
迷向子空间 …… 147
迷向向量 …… 147
全迷向子空间 …… 147
共轭变换 …… 147
转置变换 …… 147
正规变换 …… 147
自共轭变换 …… 148
反自共轭变换 …… 148
埃尔米特变换 …… 148
反埃尔米特变换 …… 148
对称变换 …… 148
反对称变换 …… 148
酉空间 …… 148
复欧几里得空间 …… 148
辛空间 …… 148
欧几里得空间 …… 148
欧氏空间 …… 148
正定变换 …… 148
正定埃尔米特变换 …… 148
非负埃尔米特变换 …… 148
半正定对称变换 …… 148
非负对称变换 …… 148
正定对称变换 …… 148
半正定变换 …… 148
非负变换 …… 148
半正定平方根 …… 148
极分解 …… 148

等度量变换 …… 149
酉变换 …… 149
正交变换 …… 149
正常正交变换 …… 149
旋转 …… 149
辛变换 …… 149
向量的射影 …… 149
射影定理 …… 149
半单变换 …… 149
镜像变换 …… 149
凯莱变换 …… 149
位似变换 …… 149
仿射空间 …… 149
差空间 …… 150
仿射变换 …… 150
仿射坐标系 …… 150
坐标系的原点 …… 150
仿射坐标 …… 150
仿射坐标变换公式 …… 150
向量的长度 …… 150
单位向量 …… 150
向量间的距离 …… 150
向量的范数 …… 150
赋范空间 …… 150
柯西-布雅科夫斯基不等式 …… 150
施瓦兹不等式 …… 150
向量的夹角 …… 150
三角不等式 …… 150
托勒密不等式 …… 150
贝塞尔不等式 …… 150
施密特正交化 …… 151
洛仑茨变换 …… 151
广义洛仑茨变换 …… 151
双线性型 …… 151
多重线性型 …… 151
双线性型的秩 …… 151
非退化双线性型 …… 151
满秩双线性型 …… 151
等价双线性型 …… 151
非退化线性代换 …… 151
相合双线性型 …… 151
对称双线性型 …… 151
反对称双线性型 …… 151
埃尔米特双线性型 …… 151
二次型 …… 152
二次型的矩阵 …… 152
二次型的秩 …… 152
极型 …… 152
二次型相伴的双线性型 …… 152
二次型的标准形 …… 152
等价的二次型 …… 152
二次型的规范形 …… 152
实二次型 …… 152
惯性律 …… 152
正惯性指数 …… 152
负惯性指数 …… 152
符号差 …… 152
约化二次型 …… 152
同类实二次型 …… 152
复二次型 …… 153
定型 …… 153
正定二次型 …… 153
负定二次型 …… 153
半正定二次型 …… 153
半负定二次型 …… 153
不定型 …… 153
有限域上的二次型 …… 153
p 进域上的二次型 …… 153
闵科夫斯基-哈塞特征标 …… 153
二次型的直和 …… 153
维特定理 …… 153
二次型的指数 …… 153
核型 …… 153
维特分解 …… 153
同型二次型 …… 153
埃尔米特二次型 …… 153
正定埃尔米特二次型 …… 154
负定埃尔米特二次型 …… 154
化二次型为标准形的方法 …… 154
主轴问题 …… 154
甘凯连夫型 …… 154
甘凯连夫矩阵 …… 154
盖尔什果林圆盘定理 …… 154
卡西尼卵形域包含定理 …… 155
奥斯乔夫斯基包含定理 …… 155
对角占优矩阵 …… 155
优对角阵 …… 155
不可约对角占优矩阵 …… 155
严格对角占优矩阵 …… 155
有非零元素链对角占优矩阵 …… 155
下半严格对角占优矩阵 …… 155
广义严格对角占优矩阵 …… 156
共轭对角占优矩阵 …… 156
共轭严格对角占优矩阵 …… 156
弱不可约对角占优矩阵 …… 156
弱不可约严格对角占优矩阵 …… 156

块对角占优矩阵 …… 156
块严格对角占优矩阵 …… 157
块不可约对角占优矩阵 …… 157
广义对角占优矩阵 …… 157
稳定矩阵 …… 157
李亚普诺夫稳定矩阵 …… 157
正稳定矩阵 …… 157
李亚普诺夫正对角稳定矩阵 …… 157
VL 稳定阵 …… 157
对角稳定阵 …… 157
强稳定矩阵 …… 157
D 稳定矩阵 …… 157
矩阵张量积的圆盘定理 …… 158
矩阵张量积的不可约性 …… 158
矩阵张量积的特征值分布 …… 158
非齐次特征值 …… 158
块复合矩阵的块特征值 …… 158
矩阵的数值域 …… 159
矩阵的数值半径 …… 159
k 数值域 …… 159
谱矩阵 …… 160
径向矩阵 …… 160
非负矩阵 …… 160
正矩阵 …… 160
非负不可约矩阵的谱 …… 160
非负矩阵的谱半径 …… 160
本原矩阵 …… 161
素矩阵 …… 161
循环矩阵 …… 161
循环指数 …… 161
本原指标 …… 161
本原指数 …… 161
(0,1)矩阵的谱半径 …… 162
积和式 …… 162
固定式 …… 162
随机阵 …… 162
双随机阵 …… 162
非负矩阵的优势比 …… 162
对称非负矩阵 …… 162
幂正阵的谱 …… 163
M 矩阵 …… 163
非奇异 M 矩阵 …… 163
Z 矩阵 …… 163
M 矩阵的表征 …… 163
不可约 M 矩阵 …… 163
M 矩阵的谱 …… 163
斯蒂尔杰斯矩阵 …… 164
逆正阵 …… 164
矩阵的正则裂分 …… 164
准 M 矩阵 …… 164
一般 M 矩阵 …… 164
奇异 M 矩阵 …… 164
不可约准 M 矩阵 …… 164
具有性质 C 的准 M 矩阵 …… 164
逆 M 矩阵 …… 165
H 矩阵 …… 165
比较阵 …… 165
P 矩阵 …… 165
P 矩阵的谱 …… 165
完全正矩阵 …… 165
完全非负矩阵 …… 165
N_0 矩阵 …… 165
N_0 矩阵的谱 …… 166
逆 N_0 矩阵 …… 166
F_0 矩阵 …… 166
矩阵多项式函数 …… 166
矩阵幂级数 …… 166
广义逆矩阵 …… 166
矩阵的{1}逆 …… 167
矩阵的{1,2}逆 …… 167
矩阵的{1,3}逆 …… 167
矩阵的{1,4}逆 …… 167
分块矩阵的广义逆 …… 167
矩阵的德雷津逆 …… 168
矩阵的群逆 …… 168

多重线性代数

多重线性代数 …… 168
序列集合记号 …… 168
多重线性映射 …… 168
m 重线性映射 …… 169
双线性映射 …… 169
m 重线性函数 …… 169
双线性函数 …… 169
多重线性函数 …… 169
多重线性开拓 …… 169
因子化泛性质 …… 169
张映射 …… 169
张量空间 …… 169
张量积空间 …… 169
向量空间的张量积 …… 169
可合张量 …… 170
可合元素 …… 170
张量 …… 170
可分解元素 …… 170

第二卷条目目录

可分解张量 …… 170
不可合张量 …… 170
不可合元素 …… 170
不可分解元素 …… 170
不可分解张量 …… 170
张量空间的基 …… 170
张量坐标 …… 170
张量分量 …… 170
惟一因子化性质 …… 170
泛性质 …… 170
诱导内积 …… 170
矩阵的克罗内克积 …… 170
矩阵的张量积 …… 171
诱导线性映射 …… 171
线性映射的张量积 …… 171
线性算子的张量积 …… 171
混合张量 …… 172
共变张量 …… 172
反变张量 …… 172
张量收缩 …… 172
收缩映射 …… 172
置换算子 …… 172
对称多重线性映射 …… 172
对称映射 …… 172
反对称多重线性映射 …… 172
反对称映射 …… 173
交错多重线性映射 …… 173
完全对称多重线性映射 …… 173
对称化算子 …… 173
对称化子 …… 173
张量对称类 …… 173
可合对称张量 …… 173
可合对称元素 …… 173
对称(多重线性映射)因子化性质 …… 173
稳定子子群 …… 173
轨道代表集 …… 173
轨道 …… 174
轨道子空间 …… 174
张量对称类的指标 …… 174
张量对称类上的诱导算子 …… 174
反对称张量空间 …… 174
格拉斯曼空间 …… 174
向量的外积 …… 174
普吕克坐标 …… 174
复合矩阵 …… 175
合成矩阵 …… 175
西尔维斯特-弗兰克定理 …… 175
复合矩阵的导数矩阵 …… 175
完全对称张量空间 …… 175
广义矩阵函数 …… 175
固定式 …… 175
积和式 …… 175
行列式函数 …… 176
广义矩阵函数的柯西-比内定理 …… 176
向量空间上的张量代数 …… 176
张量代数的泛性质 …… 176
外代数 …… 176
格拉斯曼代数 …… 176
外代数的泛性质 …… 177
克利福德代数 …… 177
克利福德代数的泛性质 …… 177
张量积的泛性质 …… 177
直和的张量积 …… 177
对偶空间(关于双线性函数) …… 177
零空间 …… 177
非退化双线性映射 …… 177
对偶基(关于双线性函数) …… 177
对偶映射 …… 178
内积空间 …… 178
反线性变换 …… 178
反变换 …… 178
普法夫多项式 …… 178
合成代数 …… 178
单位张量 …… 178
结构映射 …… 178
分次向量空间 …… 179
分次群 …… 179
正分次向量空间 …… 179
庞加莱级数 …… 179
准有限分次向量空间 …… 179
庞加莱多项式 …… 179
代数上的导数 …… 179
代数上的反导数 …… 179
对合 …… 179
微分空间 …… 179
微分算子 …… 179
同调空间 …… 179
诱导同态 …… 179
混合张量代数 …… 180
混合张量 …… 180
反变张量 …… 180
共变张量 …… 180
张量映射 …… 180
度量张量 …… 180
交错子 …… 180
反对称部分 …… 180

完全对称化子 …… 180
对称张量 …… 180
对称化子 …… 180
对称部分 …… 180
反对称算子 …… 180
对角映射 …… 181
(p,q)型的反对称映射 …… 181
线性变换的框积 …… 181
代数的标准张量积 …… 181
代数的张量积 …… 181
中翻算子 …… 181
混合外代数 …… 181
合成积 …… 181
算子 $i(a)$ …… 181
对角子代数 …… 182
庞加莱同构 …… 182
交积 …… 182
交代数 …… 182
外积 …… 182
反张量积 …… 182
对称算子 …… 182
伴随映射 …… 182
自伴算子 …… 182
反自伴算子 …… 182
同构 D_E …… 183
伴随张量 …… 183
经典伴随变换 …… 183
对称幂 …… 183
对称代数 …… 183
对称代数的泛性质 …… 184
对称函数代数 …… 184
对合 S_E …… 184
反向代数 …… 184
克利福德代数的标准元素 …… 184
正交表示 …… 184
表示 …… 184
正正交表示 …… 184
负正交表示 …… 184
对合 W_E …… 184
挠伴随表示 …… 184
克利福德群 …… 184

群 及 其 推 广

群论 …… 185

群论基础

乘法 …… 185
乘(法)群 …… 185
结合律 …… 185
群的单位元 …… 185
逆元 …… 185
阿贝尔群 …… 185
交换群 …… 185
加法群 …… 185
加群 …… 186
整数加法群 …… 186
整数加群 …… 186
有理数加法群 …… 186
实数加法群 …… 186
复数加法群 …… 186
模 n 的剩余类加群 …… 186
域的乘法群 …… 186
线性变换群 …… 186
二面体群 …… 186
群的阶 …… 186
有限群 …… 186
无限群 …… 186
子群 …… 186
真子群 …… 186
平凡子群 …… 186
非平凡子群 …… 186
生成子群 …… 186
生成元 …… 186
有限生成群 …… 186
极大子群 …… 186
极小子群 …… 186
弗拉梯尼子群 …… 186
元素的阶 …… 187
无限阶 …… 187
m 阶元 …… 187
p 元素 …… 187
p' 元素 …… 187
有限群的方次数 …… 187
循环群 …… 187
有限循环群 …… 187
无限循环群 …… 187
共轭 …… 187
共轭子群 …… 187
共轭元 …… 187
共轭类 …… 187

正规化子 …… 187
中心化子 …… 187
中心 …… 187
类方程 …… 187
陪集 …… 187
傍系 …… 187
左(右)陪集 …… 187
重陪集 …… 187
双陪集 …… 187
子群的指数 …… 187
拉格朗日定理 …… 187
正规子群 …… 188
不变子群 …… 188
平凡正规子群 …… 188
拟正规子群 …… 188
单群 …… 188
极大正规子群 …… 188
极小正规子群 …… 188
极大正规 p 子群 …… 188
极大正规 p' 子群 …… 188
商群 …… 188
因子群 …… 188
差群 …… 188
正规闭包 …… 188
群的子集的核 …… 188
核 …… 188
群的同态 …… 188
同构映射 …… 188
群的自同态 …… 188
群的自同构 …… 188
群的阶方程 …… 188
n 阶交换群的阶方程 …… 189
正整数 n 的拟阶方程 …… 189
群的单同态 …… 189
群的单射同态 …… 189
群的单一同态 …… 189
群的满同态 …… 189
群的满射同态 …… 189
群的映上同态 …… 189
群的同态像 …… 189
群的同态核 …… 189
同态基本定理 …… 189
自然同态 …… 189
标准同态 …… 189
典范同态 …… 190
第一同构定理 …… 190
第二同构定理 …… 190
第三同构定理 …… 190
自同构群 …… 190
内自同构 …… 190
内自同构群 …… 190
外自同构 …… 190
外自同构群 …… 190
特征子群 …… 190
全不变子群 …… 190
反同态 …… 190
反同构 …… 190
反自同态 …… 190
反自同构 …… 190
完全群 …… 190
完满群 …… 190
凯莱定理 …… 190
字 …… 190
空字 …… 191
自由群的秩 …… 191
等价的字 …… 191
自由群 …… 191
定义关系 …… 191
克莱因四元群 …… 191
哈密顿群 …… 191
四元数群 …… 191
戴德金群 …… 191
广义四元数群 …… 191
正则轨道 …… 191
稳定子群 …… 191
稳定化子 …… 191
算子群 …… 191
带算群 …… 191
Ω 群 …… 191
算子集 …… 191
容许子群 …… 191
算子同态 …… 191
算子同构 …… 192
Ω 同态 …… 192
容许同态 …… 192
Ω 同构 …… 192
容许同构 …… 192
查森浩斯引理 …… 192
左(右)正则表示 …… 192
全形 …… 192
子群积 …… 192
子集积 …… 192
群的直积 …… 192
群的外直积 …… 192
群的内直积 …… 192
群的直和 …… 192

群的直因子 …… 192
不可分解群 …… 192
完全可约群 …… 192
不变量 …… 192
不变型 …… 192
阿贝尔群的基 …… 192
初等阿贝尔群 …… 192
克鲁尔-施密特定理 …… 192
半直积 …… 193
正规积 …… 193
内半直积 …… 193
中心积 …… 193
群的 Ω 列 …… 193
群列的长 …… 193
正规 Ω 列 …… 193
正规列 …… 193
次正规列 …… 193
序列子群 …… 193
升序子群 …… 193
降序子群 …… 193
合成列 …… 193
主列 …… 193
主因子 …… 193
合成因子 …… 193
若尔当-霍尔德定理 …… 193
换位子 …… 194
换位子群 …… 194
导群 …… 194
导出列 …… 194
导出长 …… 194
亚阿贝尔群 …… 194
亚循环群 …… 194
三子群引理 …… 194
转移 …… 194
群的扩张 …… 194
群扩张的因子集 …… 194
等价扩张 …… 194
可裂扩张 …… 194
补子群 …… 195
群的中心扩张 …… 195
有限群的圈积 …… 195
有限群的织积 …… 195
有限群论 …… 195
西洛定理 …… 195
西洛 p 子群 …… 195
霍尔 π 子群 …… 195
霍尔子群 …… 195
p 幂零群 …… 195
正规 p 补 …… 195
伯恩赛德正规 p 补定理 …… 195
弗拉梯尼推理 …… 195
有限单群 …… 196
拟单群 …… 196
覆盖群 …… 196
群的分支 …… 196
半单群 …… 196
群的层 …… 196
群的基座 …… 196
局部子群 …… 196
p 局部子群 …… 196
舒尔乘子 …… 196
二次同调群 …… 196
可解群 …… 196
群的 n 次方群 …… 196
n 次方闭群 …… 197
强 n 次方闭群 …… 197
舒尔-查森浩斯定理 …… 197
费特-汤普森奇阶定理 …… 197
伯恩赛德 p^aq^b 定理 …… 197
霍尔可解性准则 …… 197
西洛系 …… 197
西洛基底 …… 198
上中心列 …… 198
下中心列 …… 198
超中心 …… 198
幂零群 …… 198
幂零类 …… 198
幂零剩余 …… 198
p 群 …… 198
有限 p 群的深度 …… 198
正规深度 …… 198
特征深度 …… 198
伯恩赛德基定理 …… 198
特殊 p 群 …… 198
超特殊 p 群 …… 198
正规化子条件 …… 198
有限 p 群的李环 …… 198
正则 p 群 …… 198
伯恩赛德问题 …… 199
费廷子群 …… 199
有限可解群的幂零长 …… 199
有限群的上 p 列 …… 199
p 可解群 …… 199
p 可解群的 p 长 …… 199
p 费廷子群 …… 199
π 闭群 …… 199

π 齐性群 …… 199
弗罗贝尼乌斯准则 …… 199
系正规化子 …… 199
卡特子群 …… 199
有限可解群的秩 …… 199
有限可解群的算术秩 …… 199
超可解群 …… 199
内 Σ 群 …… 199
外 Σ 群 …… 200
极小非 Σ 群 …… 200
戴德金律 …… 200
西洛塔 …… 200
群系 …… 200
饱和群系 …… 200
局部群系 …… 200
局部化定理 …… 200
费廷类 …… 200
$\mathscr{F}$ 内射子 …… 201
$\mathscr{F}$ 投射子 …… 201
$\mathscr{F}$ 根基 …… 201
$\mathscr{F}$ 剩余 …… 201

置 换 群

置换群 …… 201
置换群论 …… 201
置换 …… 201
恒等置换 …… 201
置换的轮换分解 …… 201
轮换 …… 202
轮换的长度 …… 202
置换的乘积 …… 202
偶置换 …… 202
对换 …… 202
奇置换 …… 202
对称群 …… 202
交错群 …… 202
轨道 …… 202
传递群 …… 202
不变区 …… 202
置换群的不动点 …… 202
置换的不动点 …… 202
置换的次数 …… 202
置换群的次数 …… 202
最小次数 …… 202
稳定子群 …… 202
点不变稳定子群 …… 203
集不变稳定子群 …… 203
半正则群 …… 203
正则群 …… 203
置换同构 …… 203
置换表示 …… 203
表示的次数 …… 203
表示的核 …… 203
忠实表示 …… 203
弗罗贝尼乌斯群 …… 203
弗罗贝尼乌斯核 …… 204
弗罗贝尼乌斯补 …… 204
区 …… 204
完全区系 …… 204
非平凡完全区系 …… 204
平凡完全区系 …… 204
本原群 …… 204
非本原群 …… 204
多重传递群 …… 204
双传递群 …… 204
多重本原群 …… 204
精确 k 重传递群 …… 204
马蒂厄群 …… 205
传递群的秩 …… 205
次轨道 …… 205
传递扩张 …… 205

典 型 群

典型群 …… 205
一般线性群 …… 206
全线性群 …… 206
射影一般线性群 …… 206
特殊线性群 …… 206
幺模群 …… 206
平延 …… 206
射影特殊线性群 …… 206
线性分式群 …… 206
辛群 …… 206
辛变换 …… 206
射影辛群 …… 206
正交群 …… 206
正交变换 …… 207
洛伦茨群 …… 207
酉群 …… 207
酉变换 …… 207
射影酉群 …… 207
迹形式 …… 207
维特指数 …… 207
全迷向子空间 …… 207

全奇异子空间 …… 207
二次型的维特指数 …… 207
特殊酉群 …… 207
酉平延 …… 207
辛平延 …… 207
酉平延群 …… 207
射影特殊酉群 …… 207
射影酉平延群 …… 207
二次型的亏数 …… 207
无亏数的二次型 …… 207
对称 …… 207
正交平延 …… 208
特殊正交群 …… 208
旋转群 …… 208
迪克森不变量 …… 208
正交群的换位子群 …… 208
李型单群 …… 208
谢瓦莱群 …… 208
扭群 …… 208
图自同构 …… 209
域自同构 …… 209
铃木群 …… 209
雷群 …… 209

群表示论

群表示论 …… 209
表示空间 …… 209
群的线性表示 …… 209
表示的维数 …… 209
矩阵表示 …… 209
F 表示 …… 209
等价表示 …… 209
舒尔引理 …… 209
整表示 …… 209
酉表示 …… 209
群的忠实表示 …… 210
忠实特征标 …… 210
群的不可约表示 …… 210
群的可约表示 …… 210
不可约特征标 …… 210
子表示 …… 210
商表示 …… 210
不可约成分 …… 210
绝对不可约表示 …… 210
完全可约表示 …… 210
特征标 …… 210
复特征标 …… 210
主特征标 …… 210
单位表示 …… 210
恒等表示 …… 210
特征标表 …… 210
正交关系 …… 210
类函数的内积 …… 210
群表示的马施克定理 …… 210
中心特征标 …… 211
群的正则表示 …… 211
左(右)正则模 …… 211
正则特征标 …… 211
群的诱导表示 …… 211
表示模 …… 211
诱导模 …… 211
诱导特征标 …… 211
广义特征标 …… 211
广义特征标环 …… 211
特征标刻画定理 …… 211
初等子群 …… 211
弗罗贝尼乌斯互反律 …… 211
克里福德理论 …… 211
克里福德定理 …… 211
麦凯分解 …… 212
单项表示 …… 212
单项矩阵 …… 212
M 群 …… 212
群的分裂域 …… 212
布劳尔分裂域定理 …… 212
射影表示 …… 212
因子团 …… 212
惯性群 …… 212
舒尔指数 …… 212
模表示论 …… 212
常表示 …… 213
模表示 …… 213
块论 …… 213
块 …… 213
块理想 …… 213
群的块 …… 213
亏群 …… 213
迹映射 …… 213
亏数 …… 213
主不可分解模 …… 213
布劳尔特征标 …… 213
模特征标 …… 213
常特征标 …… 213
嘉当矩阵 …… 213
嘉当不变量 …… 213

分解矩阵 …… 213
分解数 …… 213
相对投射模 …… 213
顶 …… 214
源 …… 214
格林对应 …… 214
格林环 …… 214
复格林环 …… 214
赫克代数 …… 214

代 数 群

代数群 …… 214
连通代数群 …… 215
闭子群 …… 215
仿射代数群 …… 215
线性代数群 …… 215
代数群同态 …… 215
代数群同构 …… 215
代数群的特征标 …… 215
代数群的特征标群 …… 215
代数群的作用 …… 215
齐性空间 …… 215
有理表示 …… 215
代数群的正则表示 …… 215
代数群的左正则表示 …… 215
代数群的右正则表示 …… 215
代数群中的若尔当分解 …… 215
半单元 …… 215
幂幺元 …… 215
环面 …… 215
嘉当子群 …… 215
外尔群 …… 215
幂幺群 …… 215
博雷尔子群 …… 215
抛物子群 …… 216
列维分解 …… 216
权 …… 216
权空间 …… 216
权向量 …… 216
权的重数 …… 216
形式特征标 …… 216
代数群的李代数 …… 216
伴随表示 …… 216
根系 …… 216
幂幺根基 …… 216
简约代数群 …… 216
代数群的根基 …… 216
半单代数群 …… 216
代数群的秩 …… 216
半单代数群的分类 …… 216
伴随型半单代数群 …… 217
普遍型半单代数群 …… 217
单连通半单代数群 …… 217
半单代数群的基本群 …… 217
弗罗贝尼乌斯同态 …… 217
有限李型群 …… 217
蒂茨系统 …… 217
蒂茨系统的秩 …… 217
布鲁哈分解 …… 217
共轭定理 …… 217
稠密定理 …… 217
李-科尔琴定理 …… 217
博雷尔不动点定理 …… 217
半单线性代数群不可约有理表示的分类 …… 217

无 限 群

无限群论 …… 218
挠群 …… 218
周期群 …… 218
无扭群 …… 218
混合群 …… 218
周期子群 …… 218
群的广义序列 …… 218
正规列 …… 218
次正规列 …… 219
升列 …… 219
降列 …… 219
群的序列子群 …… 219
升序列子群 …… 219
降序列子群 …… 219
群的圈积 …… 219
圈积的基群 …… 219
群的笛卡儿积 …… 219
群的非限制性直积 …… 219
群的直积 …… 219
群的自由积 …… 219
群的次笛卡儿积 …… 219
剩余 $\mathscr{X}$ 群 …… 219
局部 $\mathscr{X}$ 群 …… 219
任意群的西洛 p 子群 …… 219
群的有限性条件 …… 220
群的链条件 …… 220
$\mathscr{F}$ 子群的升链条件 …… 220
$\mathscr{F}$ 子群的极大条件 …… 220

$\mathscr{F}$ 子群的降链条件 …… 220
$\mathscr{F}$ 子群的极小条件 …… 220
拟循环 p 群 …… 220
p^∞型的普吕费尔群 …… 220
切尔尼科夫群 …… 220
有限生成群 …… 220
有限呈示群 …… 220
群的秩 …… 220
普吕费尔秩 …… 220
马尔采夫秩 …… 221
阿贝尔子群秩 …… 221
FN 群 …… 221
局部有限群 …… 221
霍尔-库拉蒂拉卡-卡尔嘉波洛夫定理 …… 221
FC 群 …… 221
BFC 群 …… 221
CF 群 …… 221
FO 群 …… 221
具有有限层的群 …… 221
无限阿贝尔群 …… 221
无限交换群 …… 221
阿贝尔群的 p 准素分支 …… 221
可除阿贝尔群 …… 221
既约阿贝尔群 …… 222
阿贝尔群元素的 p 高度 …… 222
纯子群 …… 222
准素阿贝尔群 …… 222
库里科夫判定法 …… 222
基子群 …… 222
厄尔姆定理 …… 222
既约准素阿贝尔群的型 …… 222
厄尔姆因子列 …… 222
无扭阿贝尔群 …… 222
无扭阿贝尔群元素的型 …… 223
自由阿贝尔群 …… 223
庞特里亚金判定法 …… 223
混合阿贝尔群 …… 223
广义幂零群 …… 223
局部幂零群 …… 223
希尔施-普洛特金定理 …… 223
希尔施-普洛特金根 …… 223
满足正规化子条件的群 …… 223
超限上中心群 …… 223
中心升列 …… 223
格鲁恩伯格群 …… 223
贝尔群 …… 224
费廷群 …… 224
Z 群 …… 224
$\overline{\mathrm{Z}}$ 群 …… 224
$\overline{\overline{\mathrm{Z}}}$ 群 …… 224
超限下中心群 …… 224
剩余幂零群 …… 224
剩余中心群 …… 224
恩格尔群 …… 224
贝尔幂零群 …… 224
广义可解群 …… 224
局部可解群 …… 224
SN 群 …… 224
超限阿贝尔群 …… 224
亚阿贝尔群 …… 224
剩余可解群 …… 224
根群 …… 224
群的根群根 …… 224
剩余交换群 …… 224

组合群论

组合群论 …… 225
群的呈示 …… 225
群的定义关系子 …… 225
群的定义关系式 …… 225
有限呈示群 …… 225
群的凯莱图 …… 225
冯坎彭图形 …… 225
蒂茨变换 …… 225
群的 HNN 扩张 …… 226
基群 …… 226
相伴子群 …… 226
稳定字 …… 226
带融合的自由积 …… 226
小消去理论 …… 226
小消去条件 …… 226
小消去群 …… 226
第二同伦群 …… 226
图像 …… 226
球化图 …… 226
球化图像 …… 226
第二同伦模 …… 226
非球化呈示 …… 226
群作用于图 …… 226
群图 …… 226
群图的基本群 …… 227
第一同伦群 …… 227
霍普范群 …… 227
三角群 …… 227
马可夫性质 …… 227

希格曼定理 …… 227
群簇 …… 227
双曲群 …… 227
可梳群 …… 227
自动机群 …… 227
呈示的邓函数 …… 227

计算群论

计算群论 …… 228
群论算法的计算复杂度 …… 228
多项式时间算法 …… 228
随机群论算法 …… 228
概率算法 …… 228
陪集表 …… 228
部分陪集表 …… 229
陪集计数 …… 229
托德-考克斯特算法 …… 229
陪集重合现象 …… 229
赖德迈斯特-施赖埃尔算法 …… 229
施赖埃尔生成元 …… 229
置换群的基 …… 229
基的长度 …… 229
强生成集 …… 229
施赖埃尔-西姆斯算法 …… 229
施赖埃尔-托德-考克斯特-西姆斯算法 …… 229
AG 生成序列 …… 229
低指数算法 …… 230
群论算法软件包 …… 230

半　群

半群 …… 230
环的乘半群 …… 230
幺半群 …… 230
带零半群 …… 230
半群的零元 …… 230
半群的同态 …… 230
半群的满同态 …… 230
半群的同态像 …… 230
半群的单同态 …… 230
半群的同构 …… 230
同构半群 …… 230
子半群 …… 230
半群理想 …… 231
半群的左(右)理想 …… 231
完全素理想 …… 231
半群的完全半素理想 …… 231
伯克霍夫定理 …… 231
半群的拟理想 …… 231
(m,n)理想 …… 231
双-理想 …… 231
单演半群 …… 231
半群上同余 …… 231
商半群 …… 231
半群的同态基本定理 …… 231
里斯同余 …… 231
里斯商半群 …… 231
主同余 …… 231
理想扩张 …… 231
诣零半群 …… 231
理想诣零扩张 …… 232
句法同余 …… 232
完满同余 …… 232
右平移 …… 232
左平移 …… 232
内右(左)平移 …… 232
平移壳 …… 232
格林关系 …… 232
格林引理 …… 232
格林定理 …… 232
蛋箱图 …… 232
舒曾贝格群 …… 232
关系半群 …… 232
全关系半群 …… 232
变换半群 …… 232
全变换半群 …… 233
扩张的右正则表示 …… 233
部分一一变换半群 …… 233
全部分一一变换半群 …… 233
部分变换半群 …… 233
全部分变换半群 …… 233
贝尔-列维半群 …… 233
有限半群 …… 233
带 …… 233
半格 …… 233
交换带 …… 233
矩形带 …… 233
带关于矩形带的半格分解 …… 233
矩形带的平移壳 …… 233
彼特里奇定理 …… 233
正则半群 …… 233
半群的逆元 …… 234
莱里蒙引理 …… 234
纯整半群 …… 234
逆半群 …… 234
对称逆半群 …… 234

最大幂等元分离同余 …… 234
基本正则半群 …… 234
基本纯整半群 …… 234
基本逆半群 …… 234
E 析取正则半群 …… 234
矩形群 …… 234
完全正则半群 …… 234
双循环半群 …… 234
完全正则元 …… 235
克利福德半群 …… 235
克利福德定理 …… 235
瓦格涅-普雷斯顿表示 …… 235
莱里蒙表示 …… 235
穆恩半群 …… 235
穆恩表示 …… 235
霍尔半群 …… 235
同余对 …… 235
逆半群上同余的第一特征 …… 235
核正规系 …… 235
逆半群上同余的第二特征 …… 236
双序集理论 …… 236
夹心集 …… 236
相对纯整半群 …… 236
正则半群的逆断面 …… 236
相对逆半群 …… 236
拟正则半群 …… 236
毕竟正则半群 …… 236
幂正则半群 …… 236
半群的霍尔定理 …… 236
完全拟正则半群 …… 236
半群的伯恩赛德问题 …… 236
半群的半直积 …… 237
簇 …… 237
伪簇 …… 237
左 S 系 …… 237
右 S 系 …… 237
双系 …… 237
富足半群 …… 237
主右投射半群 …… 237
主左投射半群 …… 237
单半群 …… 237
左(右)单半群 …… 237
零-单半群 …… 237
主因子定理 …… 237
零半群 …… 237
阿基米德半群 …… 237
左(右)阿基米德半群 …… 237
t 阿基米德半群 …… 237
完全单半群 …… 237
满足极小条件的半群 …… 237
半群的本原幂等元 …… 238
完全零-单半群 …… 238
里斯矩阵半群 …… 238
夹心阵 …… 238
布让特半群 …… 238
布若克-莱里扩张 …… 238
自由半群 …… 238
自由幺半群 …… 238
代数码 …… 238
字母表 …… 239
自动机 …… 239
可识别语言 …… 239
正则语言 …… 239
析取语言 …… 239
稠密语言 …… 239
克林恩定理 …… 239
有理语言族 …… 239
泵引理 …… 239
一致稠密语言 …… 239
埃伦托伊希特-罗曾贝格猜测 …… 239
前缀码 …… 239
后缀码 …… 239
双缀码 …… 239
佩林-舒曾贝格猜测 …… 239
交换等价字 …… 240
交换等价码 …… 240
极大 $\mathscr{X}$ 码 …… 240
完全码 …… 240
薄码 …… 240
码的完全化 …… 240
有界延迟码 …… 240
延迟界 …… 240
有界延迟码的完全化 …… 240
拓扑半群 …… 240
拓扑半群的素理想 …… 240
拓扑半素理想 …… 240
群理想 …… 240
伙 …… 240
团伙 …… 240
丝线 …… 240
I 半群 …… 241
拓扑半群的里斯商 …… 241
拓扑半群的核 …… 241
里斯-苏士凯维奇定理 …… 241
波肃剪贴 …… 241
单-参数半群 …… 241

麦斯脱-希尔兹定理 …… 241
既约半群 …… 241
李半群 …… 241
一维半群 …… 241
紧致零-单半群的结构 …… 241
概率测度半群 …… 241

李群与李代数

李群与李代数 …… 242

李 代 数

李代数 …… 242
换位运算 …… 242
方括号运算 …… 242
有限维李代数 …… 242
无限维李代数 …… 242
李代数的子代数 …… 242
李代数的理想 …… 242
理想子代数 …… 242
李代数的商代数 …… 242
构造常数 …… 242
线性李代数 …… 243
一般线性李代数 …… 243
矩阵李代数 …… 243
幂零李代数 …… 243
交换李代数 …… 243
可解李代数 …… 243
集合中心化子 …… 243
李代数的中心 …… 243
集合正规化子 …… 243
李代数的根基 …… 243
半单李代数 …… 243
单李代数 …… 243
李代数的伴随表示 …… 243
基灵型 …… 243
李代数的同态 …… 243
李代数的同构映射 …… 244
李代数的同构 …… 244
李代数的内自同构 …… 244
内自同构群 …… 244
外自同构 …… 244
嘉当子代数 …… 244
李代数的根 …… 244
根子空间分解 …… 244
根系 …… 244
李代数的秩 …… 244
单根系 …… 244
正根系 …… 244
负根系 …… 244
单根 …… 244
邓金图 …… 244
考克斯特图 …… 244
外尔群 …… 244
外尔基 …… 245
谢瓦莱基 …… 245
复单李代数 …… 245
紧李代数 …… 245
复李代数的实形式 …… 245
半对合 …… 245
实半单李代数的嘉当分解 …… 245
博雷尔子代数 …… 246
抛物子代数 …… 246
李代数的线性表示 …… 246
李代数的表示空间 …… 246
李代数的有限维表示 …… 246
李代数的无限维表示 …… 246
李代数的酉表示 …… 246
李代数的等价表示 …… 246
李代数的矩阵表示 …… 246
李代数的子表示 …… 246
李代数的商表示 …… 246
李代数模 …… 246
李代数的不可约表示 …… 247
李代数的可约表示 …… 247
李代数的完全可约表示 …… 247
约化李代数 …… 247
不变对称双线性函数 …… 247
权系 …… 247
权 …… 247
表示的克罗内克乘积 …… 247
整权 …… 247
通用包络代数 …… 247
模李代数 …… 247
素特征李代数 …… 248
特征 p 李代数 …… 248
局限李代数 …… 248

拓 扑 群

拓扑群 …… 248
连续同态 …… 248

拓扑子群 …… 248
拓扑商群 …… 248
拓扑群的积 …… 248
拓扑同构 …… 248
齐性空间 …… 248
单位元开拓扑基 …… 248
开基 …… 248
紧群 …… 248
局部紧群 …… 248
豪斯多夫群 …… 248
哈尔测度 …… 248
哈尔积分 …… 249
对偶群 …… 249
对偶定理 …… 249
庞特里亚金定理 …… 249
紧开拓扑 …… 249
普兰切热尔定理 …… 249
拓扑群的表示 …… 249
拓扑群表示的维数 …… 249
拓扑群的酉表示 …… 249
循环表示 …… 249
循环向量 …… 249
表示的矩阵系数 …… 249
表示的特征标 …… 249
舒尔正交性定理 …… 249
彼得-外尔定理 …… 249

李　群

李群 …… 250
李群维数 …… 250
李群李代数 …… 250
左平移 …… 250
右平移 …… 250
左(右)不变向量场 …… 250
李的基本定理 …… 250
局部李群 …… 250
李子群 …… 250
正规李子群 …… 250
闭子群 …… 250
单参数子群 …… 250
指数映射 …… 251
李子群的李子代数 …… 251
李群的商群 …… 251
李群的同态 …… 251
李群的同构 …… 251
通用覆盖群 …… 251
李群的覆盖群 …… 252
覆盖映射 …… 252
庞加莱群 …… 252
李群的分类 …… 252
线性李群 …… 252
一般线性群 …… 252
矩阵李群 …… 252
李群的线性表示 …… 252
李群的表示空间 …… 252
李群的实表示 …… 252
李群的复表示 …… 252
表示的不变子空间 …… 252
李群的酉表示 …… 252
李群的等价表示 …… 252
李群的不可约表示 …… 252
李群的完全可约表示 …… 252
李群的子表示 …… 252
李群的矩阵表示 …… 252
李变换群 …… 252
无穷小变换 …… 253
李群的自同构群 …… 253
李群的内自同构群 …… 253
幂零李群 …… 253
可解李群 …… 253
半单李群 …… 253
单李群 …… 253
紧李群 …… 253
紧李群的极大环面 …… 253
嘉当子群 …… 253
不变测度 …… 253
毛瑞尔-嘉当形式 …… 254
线性紧李群的不变内积 …… 254
紧李群表示的特征 …… 254

卡茨-穆迪代数

卡茨-穆迪代数 …… 254
矩阵 A 的实现 …… 254
矩阵 A 关联的李代数 $\mathfrak{g}(A)$ …… 254
$\mathfrak{g}(A)$的根基 …… 254
$\mathfrak{g}(A)$的余根基 …… 254
$\mathfrak{g}(A)$的嘉当矩阵 …… 254
$\mathfrak{g}(A)$的嘉当子代数 …… 254
$\mathfrak{g}(A)$的谢瓦莱生成元 …… 254
卡茨-穆迪代数 $\mathfrak{g}(A)$ …… 254
广义嘉当矩阵 …… 255
卡茨-穆迪代数的根 …… 255
卡茨-穆迪代数的根空间 …… 255
卡茨-穆迪代数的根的重数 …… 255

卡茨-穆迪代数的正根 …… 255
卡茨-穆迪代数的负根 …… 255
卡茨-穆迪代数的根系 …… 255
$\mathfrak{g}(A)$的S型分次 …… 255
$\mathfrak{g}(A)$的主分次 …… 255
$\mathfrak{g}(A)$的不变对称双线性型$(\cdot\,|\,\cdot)$ …… 255
卡茨-穆迪代数的标准型 …… 255
广义卡西默算子 …… 255
$\mathfrak{g}(A)$模的限制模 …… 256
卡茨-穆迪代数的定义关系 …… 256
$\mathfrak{g}(A)$的外尔群 …… 256
$\mathfrak{g}(A)$的紧对合 …… 256
$\mathfrak{g}(A)$的紧形式 …… 256
广义嘉当矩阵的分类 …… 256
有限型卡茨-穆迪代数 …… 256
仿射型卡茨-穆迪代数 …… 256
不定型卡茨-穆迪代数 …… 256
邓金图 …… 256
无扭仿射李代数 …… 257
扭仿射李代数 …… 257
双曲型卡茨-穆迪代数 …… 257
双曲型广义嘉当矩阵 …… 258
卡茨-穆迪代数的实根 …… 258
卡茨-穆迪代数的虚根 …… 258
正规化标准型 …… 258
考克斯特数 …… 258
对偶考克斯特数 …… 258
典型中心元 …… 258
标量元素 …… 258
平移群 …… 258
仿射李代数的第一实现定理 …… 258
仿射李代数的第二实现定理 …… 258
$\mathfrak{g}(A)$的$\mathfrak{h}$可对角化模 …… 259
权空间 …… 259
权重数 …… 259
$\mathfrak{g}(A)$的可积模 …… 259
范畴$\mathcal{O}$ …… 259
最高权模 …… 259
最高权向量 …… 259
最高权 …… 259
费马模 …… 259
不可约最高权模 …… 259
标准模 …… 259
不可约最高权模的水平 …… 259
整权 …… 259
权格 …… 259
支配整权 …… 259
正则支配整权 …… 259
完全可约性定理 …… 259
基本权 …… 259
基本模 …… 260
极大权 …… 260
形式特征标 …… 260
外尔-卡茨特征标公式 …… 260
分母恒等式 …… 260
特征标函数 …… 260
重数公式 …… 260
函数$b_\lambda^\Lambda,\theta_\lambda,c_\lambda^\Lambda$ …… 260
弦函数 …… 260
基本表示 …… 260
基本表示的主实现 …… 260
顶点算子 …… 260

环 与 代 数

环 论

环论 …… 261
结合环 …… 261
交换环 …… 261
环的单位元 …… 261
环的零元 …… 261
子环 …… 261
数环 …… 261
整数环 …… 261
有理数环 …… 261
实数环 …… 261
复数环 …… 261
函数环 …… 261
实连续函数环 …… 262
可微函数环 …… 262
全矩阵环 …… 262
矩阵环 …… 262
多项式环 …… 262
自同态环 …… 262
形式幂级数环 …… 262
单变量形式幂级数域 …… 262
收敛幂级数环 …… 262
模m的剩余类环 …… 262
模p的剩余类域 …… 263
反环 …… 263
逆环 …… 263

零因子 …… 263
零除元 …… 263
正则元 …… 263
零化子 …… 263
左(右)零化子 …… 263
整区 …… 263
整环 …… 263
环的单位群 …… 263
逆元 …… 263
可逆元 …… 263
单位 …… 263
除环 …… 263
体 …… 263
斜域 …… 263
商域 …… 263
分式域 …… 263
嘉当-布饶尔-华罗庚定理 …… 263
环的特征(数) …… 263
n 无挠环 …… 263
环的理想 …… 263
单侧理想 …… 263
极大理想 …… 264
极大左(右)理想 …… 264
极小理想 …… 264
极小左(右)理想 …… 264
子集生成的理想 …… 264
主理想 …… 264
主理想环 …… 264
商环 …… 264
剩余类环 …… 264
幂零理想 …… 264
幂零环(代数) …… 264
幂零指数 …… 264
诣零理想 …… 264
诣零子环 …… 264
幂零元 …… 264
素理想 …… 264
完全素理想 …… 264
素环 …… 264
环的秩 …… 265
幂等元 …… 265
正交幂等元 …… 265
主幂等元 …… 265
本原幂等元 …… 265
环的块 …… 265
块幂等元 …… 265
环的同态 …… 265
环的同态像 …… 265
环的同态核 …… 265
环的单同态 …… 265
环的满同态 …… 265
环的自同态 …… 265
环的同构 …… 265
环的自同构 …… 265
环的反(逆)同构 …… 265
环的自同构群 …… 265
环的同态基本定理 …… 265
第一同构定理 …… 265
环的同构定理 …… 265
特征理想 …… 266
环的半同态 …… 266
环的半同构 …… 266
环的对合 …… 266
全直和 …… 266
直积 …… 266
直和 …… 266
外直和 …… 266
内直和 …… 266
亚直和 …… 266
亚直积 …… 266
亚直既约环 …… 266
环的心 …… 267
中心化扩张 …… 267
Lib 扩张 …… 267
环的正规扩张 …… 267
雅各布森环 …… 267
希尔伯特环 …… 267
布朗-麦柯环 …… 267
单环 …… 267
弱单环 …… 267
单纯环 …… 267
零乘环 …… 267
单代数 …… 267
弱单代数 …… 267
环的降链条件 …… 267
环的极小条件 …… 267
左(右)阿廷环 …… 267
阿廷环的幂零根 …… 267
阿廷环的古典根 …… 267
半单阿廷环 …… 267
半单环 …… 268
半极小条件 …… 268
核环 …… 268
环的升链条件 …… 268
环的极大条件 …… 268
左(右)诺特环 …… 268

第二卷条目目录

阿廷-里斯性质 …… 268
强 AR 性质 …… 268
弱 AR 性质 …… 268
科恩环 …… 268
半极大条件 …… 268
左分母集 …… 268
右分母集 …… 269
左(右)分式环 …… 269
左(右)商环 …… 269
左(右)全分式环 …… 269
左(右)次环 …… 269
奥尔环 …… 269
奥尔条件 …… 269
哥尔迪环 …… 269
哥尔迪定理 …… 269
稠密左(右)理想 …… 269
极大商环 …… 269
环的表示 …… 269
环的忠实表示 …… 269
环的既约表示 …… 270
本原环 …… 270
右本原环 …… 270
左本原环 …… 270
既约环 …… 270
舒尔引理 …… 270
n 重可迁环 …… 270
n 重传递环 …… 270
n 重可迁集 …… 270
稠密环 …… 270
稠密线性变换环 …… 270
雅各布森-谢瓦莱稠密定理 …… 270
模右(左)理想 …… 270
本原理想 …… 270
左本原理想 …… 270
弱本原环 …… 270
临界可缩模 …… 271
右(左)弱本原环 …… 271
环的基座 …… 271
右(左)基层 …… 271
基座的齐次分量 …… 271
半线性变换 …… 271
$\mathscr{K}_n$ 重可迁环 …… 271
$\mathscr{K}_n$ 重传递环 …… 271
几乎零矩阵环 …… 271
规范本原环 …… 271
对应基 …… 271
$\{E_i\}_{i\in I}$ 幂等元 …… 271
ν 规范本原环 …… 271
对偶模 …… 271
ν 基座 …… 272
有 ν 基座的本原环的结构定理 …… 272
p 环 …… 272
提升幂等元 …… 272
提升环 …… 272
局部环 …… 272
半局部环 …… 272
完全环 …… 272
半完全环 …… 272
环的基环 …… 273
基本环 …… 273
基本幂等元 …… 273
半准素环 …… 273
准素环 …… 273
完全准素环 …… 273
戴德金有限环 …… 273
完全戴德金有限环 …… 273
右(左)双环 …… 273
右(左)准素理想 …… 273
双环 …… 273
I 环 …… 273
Ⅱ正则环 …… 273
双正则环 …… 273
双正则理想 …… 273
双正则元 …… 273
冯·诺伊曼正则环 …… 273
遗传幂等环 …… 274
弱正则环 …… 274
强正则环 …… 274
SBI 环 …… 274
算术环 …… 274
一致环 …… 274
n-fir 环 …… 274
n 自由理想环 …… 274
序列环 …… 274
单列模 …… 274
左(右)序列环 …… 274
单列环 …… 274
广义单列环 …… 274
凝聚环 …… 274
α 稳定凝聚环 …… 275
遗传环 …… 275
左(右)遗传环 …… 275
半遗传环 …… 275
次遗传环 …… 275
普吕费尔环 …… 275

PP 环 …… 275
自内射环 …… 275
完全对偶环 …… 275
对偶环 …… 275
自对偶环 …… 275
线性紧致模 …… 275
拟弗罗贝尼乌斯环 …… 276
QF 环 …… 276
弗罗贝尼乌斯环 …… 276
QF - 1 环(代数) …… 276
QF - 2 环(代数) …… 276
QF - 3 环(代数) …… 276
伪弗罗贝尼乌斯环 …… 276
PF 环 …… 276
局部可分解环 …… 276
准素可分解环 …… 276
B 环 …… 276
基座环 …… 276
QI 环 …… 276
FP 内射环 …… 276
PS 环 …… 277
V 环 …… 277
余半单环 …… 277
余诺特环 …… 277
余阿廷环 …… 277
投射替换环 …… 277
替换环 …… 277
可替换模 …… 277
Σ - C 环(σ - C 环) …… 277
σ 循环环 …… 277
正合环 …… 277
良好环 …… 278
有限模型环 …… 278
有限有限模型环 …… 278
有限表示型环 …… 278
有限有界生成环 …… 278
半完全模 …… 278
完全模 …… 278
局部模 …… 278
赋值环 …… 278
贝祖环 …… 278
极大赋值环 …… 278
几乎极大赋值环 …… 278
Γ 环 …… 278
Γ 子环 …… 279
Γ 理想 …… 279
Γ 剩余类环 …… 279
Γ 同态 …… 279
Γ 同构 …… 279
素 Γ 环 …… 279
Γ 素理想 …… 279
Γ 素根 …… 279
m - Γ 系 …… 279
半素 Γ 环 …… 279
Γ 半素理想 …… 279
$R\Gamma$ 模 …… 279
既约 $R\Gamma$ 模 …… 279
忠实 $R\Gamma$ 模 …… 279
本原 Γ 环 …… 279
Γ 本原理想 …… 279
半本原 Γ 环 …… 279
雅各布森半单 Γ 环 …… 280
弱 Γ_N 环 …… 280
Γ_N 环 …… 280
Γ 代数 …… 280

根 论

一般根论 …… 280
根性质 …… 280
$\mathscr{R}$ 理想 …… 280
根 …… 280
$\mathscr{R}$ 根环 …… 280
根类 …… 280
$\mathscr{R}$ 半单环 …… 280
半单类 …… 280
高根 …… 281
低根 …… 281
遗传根 …… 281
超幂零根 …… 281
弱特殊类 …… 281
特殊类 …… 281
特殊根 …… 281
反单根 …… 281
亚直既约环的心 …… 281
带幂等心的亚直既约环 …… 281
反单环 …… 281
亚幂等根 …… 281
补根 …… 282
对偶根 …… 282
补根的对偶对 …… 282
一般模类 …… 282
忠实模类 …… 282
根性质的模表示 …… 282
素模 …… 282
特殊模类 …… 282

遗传类 …… 282
同态闭 …… 282
扩张闭 …… 282
本质扩张闭 …… 282
强 $\mathscr{R}$ 半单环 …… 282
强半单性 …… 283
强根 …… 283
正规根 …… 283
交根 …… 283
并根 …… 283
预根 …… 283
预根环 …… 283
遗传预根 …… 283
完全预根 …… 283
拟根 …… 283
零伪根 …… 283
零因子理想 …… 284
正则根 …… 284
冯·诺伊曼正则根 …… 284
克德根 …… 284
诣零根 …… 284
克德半单环 …… 284
近似诣零根 …… 284
近似诣零理想 …… 284
局部幂零环 …… 284
半幂零环 …… 284
局部幂零理想 …… 284
林文茨基根 …… 284
局部幂零根 …… 284
林文茨基半单环 …… 284
超限幂零 …… 284
T 幂零 …… 284
m 序列 …… 284
m 系 …… 284
强幂零元 …… 284
贝尔根 …… 284
贝尔半单环 …… 285
半素理想 …… 285
半素环 …… 285
右拟正则理想 …… 285
右拟正则右理想 …… 285
右(左)拟正则元 …… 285
右(左)拟逆元 …… 285
雅各布森根 …… 285
雅各布森根环 …… 285
半本原环 …… 285
J 半单环 …… 285
雅各布森半单环 …… 285
g 正则元 …… 285
g 正则理想 …… 285
布朗-麦柯模 …… 285
布朗-麦柯根 …… 285
布朗-麦柯根环 …… 285
布朗-麦柯半单环 …… 285

群　　环

群环 …… 286
群代数 …… 286
半群环 …… 286
支集子群 …… 286
截断映射 …… 286
左(右)截断 …… 286
迹映射 …… 286
群代数马施克定理 …… 286
增广理想 …… 286
增广映射 …… 287
增广理想的滤子 …… 287
N 序列 …… 287
N_p 序列 …… 287
N_0 序列 …… 287
维子群 …… 287
大子集 …… 287
群的子集指数 …… 287
群代数半单性定理 …… 287
正规化基 …… 288
自由正规扩张 …… 288
R 投射 …… 288
优扩张 …… 288
控制子 …… 288
控制子群 …… 288
F 完全群 …… 288
$\Delta(G)$ …… 288
$\Delta^+(G)$ …… 288
$\Delta^p(G)$ …… 288
局部有限指数的子群 …… 288
$\Lambda(G)$ …… 288
$\Lambda^+(G)$ …… 289
N^* 根 …… 289
正规化单位 …… 289
正规化单位群 …… 289
正规化群基 …… 289
多重中心理想 …… 289
多重中心环 …… 289
p 中心 …… 289
p 中心子群 …… 289

超 $\mathscr{X}$ 群 …… 289
超中心环 …… 289
殆中心化子 …… 289
零化子自由理想 …… 289
多重 $\mathscr{X}$ 群 …… 290
多重无限循环群 …… 290
多重循环群 …… 290
多重有限群 …… 290
代数闭群 …… 290
惟一乘积群 …… 290
u.p.群 …… 290
双惟一乘积群 …… 290
t.u.p.群 …… 290
诱导模 …… 290
H 投射 …… 290
H 内射 …… 290
群作用 …… 290
G 代数系 …… 291
忠实作用 …… 291
G 不变 …… 291
G 平稳 …… 291
G 不变理想 …… 291
不动环 …… 291
分次单位群 …… 291
因子集 …… 291
因子集的同余 …… 291
相伴因子集 …… 291
交叉系 …… 291
挠函数 …… 292
等价交叉系 …… 292
交叉积 …… 292
基环 …… 292
等价交叉积 …… 292
斜群环 …… 292
挠群环 …… 292
对角等价 …… 293
单项式空间 …… 293
半线性单项式表示 …… 293
半线性变换群 …… 293
投射交叉表示 …… 293
交叉表示 …… 293
投射表示 …… 293
投射等价 …… 293
Γ 正则元 …… 293
挠正则元 …… 293
理想集的强置换 …… 293
G 半素环 …… 294
G 素环 …… 294
马廷达商环 …… 294

分 次 环

分次环论 …… 294
分次环 …… 294
强分次环 …… 295
弱分次环 …… 295
克利福德系 …… 295
反分次环 …… 295
分次代数 …… 295
分次模 …… 295
强分次模 …… 295
分次子模 …… 295
分次理想 …… 295
非退化分次 …… 295
忠实分次 …… 295
1 零基座 …… 295
分次模范畴 …… 295
平移 …… 295
(弱)整除 …… 295
弱同构 …… 295
(弱)不变分次模 …… 295
分次同态群 …… 295
分次自同态环 …… 296
分次投射模 …… 296
分次内射模 …… 296
分次自由模 …… 296
分次阿廷环 …… 296
分次诺特环 …… 296
阿廷分次环 …… 296
分次半素(素)环 …… 296
分次半素(素)理想 …… 296
分次幂零(左)理想 …… 296
分次素根 …… 296
分次半单(单)模 …… 296
雅各布森分次根 …… 296
分次哥尔迪环 …… 297
分次哥尔迪维数 …… 297
满单函子 …… 297
上诱导函子 …… 297
稳定克利福德定理 …… 297
碎积 …… 297
冲积 …… 297
正分次环 …… 297
正则分次环 …… 297
负分次环 …… 297
滤子化环 …… 297

I-adic 滤子 …… 298
滤子化模 …… 298
滤子 …… 298
穷举滤子 …… 298
离散滤子 …… 298
分离滤子 …… 298
滤子化 R 模范畴 R-filt …… 298
p 次同态 …… 298
完全滤子化模 …… 298
完全滤子 …… 298
相伴分次 …… 298
扎里斯基中心环 …… 298
GZ 环 …… 298
ZG 环 …… 298

微分算子环

微分算子环 …… 298
奥尔扩张 …… 299
带算子环 …… 299
Σ 环 …… 299
算子子环 …… 299
环的导子 …… 299
环的微分 …… 299
内导子 …… 299
内微分 …… 299
微分环 …… 299
微分子环 …… 299
微分扩环 …… 299
u 微分环 …… 299
微分理想 …… 299
Δ 理想 …… 299
外尔代数 …… 299
代数簇上微分算子环 …… 300
全律模 …… 300
形式幂级数系数微分算子环 …… 300
解析系数微分算子环 …… 300
解析系数微分算子层 …… 300
流形上微分算子层 …… 300
代数 $\mathscr{D}$ 模层 …… 300
微局部微分算子环 …… 301
微局部微分算子层 …… 301
微局部微分算子的芽环 …… 301
伯恩斯坦-佐腾多项式 …… 301
D 模 …… 301
D 模层 …… 301
黎曼-希尔伯特对应 …… 301
全截面 …… 301
伯恩施坦滤子 …… 301
良滤子 …… 302
Σ 滤子 …… 302
伯恩施坦维数 …… 302
全律 D 模 …… 302
伯恩斯坦类 D 模 …… 302
次全律 D 模 …… 302
D 模的特征理想 …… 302
D 模层的特征簇 …… 302
全律 D 模层 …… 302

拟　　环

拟环 …… 302
准环 …… 303
阿贝尔拟环 …… 303
交换拟环 …… 303
分配拟环 …… 303
零对称拟环 …… 303
恒定拟环 …… 303
常拟环 …… 303
分配生成拟环 …… 303
拟环的皮尔斯分解 …… 303
抽象仿射拟环 …… 303
N 群 …… 303
拟环的理想 …… 303
N 群的理想 …… 303
半拟环 …… 303
拟环的素理想 …… 303
拟环的半素理想 …… 303
完全半素理想 …… 303
复合环 …… 303
TRI 算子代数 …… 304
不变子拟环 …… 304
忠实 N 群 …… 304
完全可约拟环 …… 304
亚直既约拟环 …… 304
拟代数 …… 304
拟环的模左理想 …… 304
ν 模左理想 …… 304
拟环的雅各布森根 …… 304
ν 根 …… 304
拟环的诣零根 …… 304
拟环的素根 …… 304
局部拟环 …… 304
拟域 …… 304
扎森豪斯判别准则 …… 305
迪克森拟域 …… 305

平面拟环 …… 305
正规拟域 …… 305
相容拟环 …… 305
相容 N 群 …… 305
驯顺拟环 …… 305
驯顺 N 群 …… 305
多项式拟环 …… 305
多项式函数拟环 …… 305
单演 N 群 …… 305
强单演 N 群 …… 305
ν 型 N 群 …… 305
本原拟环 …… 306
ν 本原拟环 …… 306

半 环

半环 …… 306
半环的同余 …… 306
浸润理想 …… 306
浸润子半环 …… 306
半环的强(弱)直和 …… 306
有效半环 …… 306
半环的雅各布森根 …… 306
半单半环 …… 307
完全单半环 …… 307
0 半单半环的结构定理 …… 307
除半环 …… 307
格林关系 …… 307
加法幂等除半环 …… 307
同余自由交换半环 …… 307
半环上的半模 …… 307
投射半模 …… 308
内射半模 …… 308
全序半环 …… 308
格半环 …… 308
半域 …… 308
闭半环 …… 308
完全半环 …… 308
交换半环上的代数 …… 308
$K+$代数 …… 309
完全交换半环上的完全代数 …… 309
完全 K 代数 …… 309
交换半环上的线性方程组 …… 309
形式幂级数 …… 309

结 合 代 数

结合代数 …… 309
R 代数 …… 310
代数的代数 …… 310
结构常数 …… 310
可除代数 …… 310
皮尔斯分解 …… 310
代数张量积 …… 310
纯量扩张 …… 310
模的张量代数 …… 310
模的对称代数 …… 311
模的对称幂 …… 311
外代数 …… 311
代数的根 …… 311
代数的中山正引理 …… 311
本原代数 …… 311
半本原代数 …… 311
外尔本原代数 …… 311
代数模 …… 311
代数的表示 …… 311
代数忠实表示 …… 312
代数表示空间 …… 312
代数表示的次数 …… 312
代数的矩阵表示 …… 312
代数正则表示 …… 312
等价表示 …… 312
代数的既约表示 …… 312
包络环 …… 312
简包络环 …… 312
形心 …… 312
中心单代数 …… 312
正规单代数 …… 312
中心代数 …… 312
(广义)四元数代数 …… 312
哈密顿四元数代数 …… 312
四元数可除代数 …… 313
克利福德代数 …… 313
相似中心单代数 …… 313
等价中心单代数 …… 313
布饶尔群 …… 313
代数类群 …… 313
诺特-斯科朗定理 …… 313
代数的分裂域 …… 313
代数的严格极大子域 …… 313
代数的子域 …… 313
代数的次数 …… 313
舒尔指数 …… 314
循环代数 …… 314
包络代数 …… 314
分离代数 …… 314
可分代数 …… 314

布尔巴基定理 …… 314
代数的韦德伯恩-阿廷结构定理 …… 314
阿兹玛亚代数 …… 314
东屋五郎代数 …… 314
阿廷代数 …… 314
诺特代数 …… 314
简约代数 …… 314
基代数 …… 315
局部代数 …… 315
拟弗罗贝尼乌斯代数 …… 315
QF 代数 …… 315
弗罗贝尼乌斯代数 …… 315
单列代数 …… 315
主理想代数 …… 315
半链模 …… 315
链模 …… 315
广义单列代数 …… 315
遗传代数 …… 315
局部有限代数 …… 315
局部幂零代数 …… 315
库洛什问题 …… 315
可裂因子系 …… 316
因子系 …… 316
广义(内)导子 …… 316
代数模的分裂扩张 …… 316
韦德伯恩-马尔采夫定理 …… 316
代数的迹函数 …… 316
非退化迹函数 …… 316
次理想 …… 316
次理想链 …… 316
哈密顿代数 …… 316
左(右)H 代数 …… 316
拟遗传代数 …… 316
遗传理想 …… 316
PI 代数 …… 316
代数的多项式恒等式 …… 317
自由代数 …… 317
自由环 …… 317
Ω 上自由环 …… 317
n 次标准多项式 …… 317
多项式的容度 …… 317
非平凡多项式恒等式 …… 317
多项式的高度 …… 317
多重线性等价 …… 317
t 正规多项式 …… 317
交错多项式 …… 318
正规多项式 …… 318
中心多项式 …… 318
卡佩利多项式 …… 318
t 本原多项式 …… 318
稳定多项式恒等式 …… 318
$*$(对合)稳定恒等式 …… 318
PI 类(数) …… 318
闭本原代数 …… 318
本原 PI 代数的结构定理 …… 318
卡普兰斯基定理 …… 318
可容代数 …… 318
A_n 环 …… 319
泛矩阵代数 $\Lambda_n\{y\}$ …… 319
泛矩阵 …… 319
泛矩阵环 …… 319
代数的 T 理想 …… 319
相对自由代数 …… 319
恒等可容同态 …… 319
W 环 …… 319
W 同态 …… 319
广义恒等式 …… 319
广义恒等式集 …… 319

代数表示论

代数表示论 …… 319
几乎可裂序列 …… 319
奥斯兰德-里廷序列 …… 320
AR 序列 …… 320
不可约映射 …… 320
稳定模范畴 …… 320
AR 变换 …… 320
箭图的表示范畴 …… 320
嘉当矩阵 …… 320
有限型箭图表示范畴 …… 321
驯顺型箭图表示范畴 …… 321
路代数 …… 321
偏序集的表示 …… 321
全空间 …… 321
代数的箭图 …… 321
加布里埃尔定理 …… 321
代数的奥斯兰德-里廷箭图 …… 321
稳定 AR 箭图 …… 322
德洛兹德定理 …… 322
驯顺表示型 …… 322
野表示型 …… 322
乘法基定理 …… 322
倾斜模 …… 322
倾斜代数 …… 322
重复代数 …… 322

有限表示型自入射代数 …… 322
覆盖函子 …… 322
代数的平凡扩张 …… 322

交换环与交换代数

交换代数 …… 323
因子 …… 323
整除 …… 323
相伴 …… 323
真因子 …… 323
既约元 …… 323
素元 …… 323
最大公因子 …… 323
公因子 …… 323
单一分解环 …… 323
高斯环 …… 323
主理想整环 …… 323
主理想环 …… 323
欧氏环 …… 323
高斯整数环 …… 324
本原多项式 …… 324
高斯引理 …… 324
乘闭子集 …… 324
分式环 …… 324
商环 …… 324
局部化 …… 324
分式域 …… 324
商域 …… 324
环关于素理想的局部化 …… 324
局部性质 …… 324
饱和集 …… 324
全分式环 …… 325
adic 拓扑 …… 325
柯西序列 …… 325
零序列 …… 325
完备化 …… 325
扎里斯基环 …… 325
p-adic 整数环 …… 325
p-adic 整数 …… 325
理想论 …… 325
理想的扩张 …… 325
理想的收缩 …… 325
素谱 …… 325
极大谱 …… 325
理想的根 …… 325
根理想 …… 326
小根 …… 326
大根 …… 326
克鲁尔维数 …… 326
理想的高 …… 326
理想的维数 …… 326
准素理想 …… 326
准素整环 …… 326
相伴素理想 …… 326
P 准素理想 …… 326
准素环 …… 326
理想的因子 …… 326
理想的倍 …… 326
理想的最大公因子 …… 326
理想的互素 …… 326
中国剩余定理 …… 326
理想的最低公倍 …… 326
不可约理想 …… 327
可约理想 …… 327
理想的准素分解式 …… 327
可分解理想 …… 327
理想的极小准素分解式 …… 327
孤立素理想 …… 327
嵌入素理想 …… 327
孤立准素分支 …… 327
嵌入准素分支 …… 327
克鲁尔环 …… 327
普吕费尔整环 …… 327
孤立集 …… 327
符号幂 …… 327
克鲁尔交定理 …… 327
主理想定理 …… 328
交的惟一分解定理 …… 328
乘积的惟一分解定理 …… 328
希尔伯特基定理 …… 328
半局部(交换)环 …… 328
拟半局部环 …… 328
局部(交换)环 …… 328
拟局部环 …… 328
正则参数系 …… 328
参数系 …… 328
正则局部环 …… 328
代数集 …… 328
可约代数集 …… 329
代数簇 …… 329
希尔伯特零点定理 …… 329
整元素 …… 329
整相关方程 …… 329
整闭包 …… 329
整闭 …… 329

整(性)扩张 …… 329
前导子理想 …… 329
整闭整环 …… 329
正规环 …… 329
戴德金整环 …… 329
分式理想 …… 329
整理想 …… 329
主分式理想 …… 329
可逆理想 …… 329
逆理想 …… 329
容许理想理论 …… 330
全分式理想群 …… 330
主分式理想群 …… 330
理想类群 …… 330
理想类 …… 330
拟相等 …… 330
拟因子 …… 330
拟整除 …… 330
群定理 …… 330

非结合环与非结合代数

非结合环与非结合代数 …… 330
非结合环 …… 331
非结合代数 …… 331
非结合代数的导出列 …… 331
可解代数 …… 331
可解理想 …… 331
幂零非结合代数 …… 331
非结合代数的幂零理想 …… 331
非结合代数的中心 …… 331
非结合代数的核心 …… 331
非结合代数的根 …… 331
非结合代数的形心 …… 331
结合子 …… 331
对合 …… 331
赋范代数 …… 332
恒等式的线性化 …… 332
中心非结合代数 …… 332
幂结合代数 …… 332
严格幂结合代数 …… 332
单的非结合代数 …… 332
导子代数 …… 332
导子 …… 332
可离的非结合代数 …… 332
非结合代数的结合乘代数 …… 332
非结合代数的同态基本定理 …… 332
自由非结合代数 …… 333
迹形式 …… 333
不变对称双线性形式 …… 333
合痕 …… 333
非结合代数的特征理想 …… 333
穆方恒等式 …… 333
可变通律 …… 333
可变通代数 …… 333
波节代数 …… 333
二次型代数 …… 333
交错代数 …… 333
交错代数的真幂零元 …… 333
可离交错代数 …… 333
凯莱-迪克森代数 …… 333
凯莱(数)代数 …… 334
凯莱-迪克森过程 …… 334
交错双模 …… 334
半单交错代数 …… 334
单交错代数 …… 334
交错代数的皮尔斯分解 …… 334
交错代数对正交幂等元组的分解 …… 334
若尔当代数 …… 335
对称双线性形式的若尔当代数 …… 335
自由若尔当代数 …… 335
特殊若尔当代数 …… 335
例外若尔当代数 …… 335
半单若尔当代数 …… 335
非交换若尔当代数 …… 335
有限维中心单若尔当代数的次数 …… 335
若尔当双模 …… 335
若尔当代数中的幂等元 …… 336
绝对本原幂等元 …… 336
若尔当代数的皮尔斯分解 …… 336
对称元若尔当代数 …… 336
既约若尔当代数 …… 336
若尔当环 …… 336
李环 …… 336
李同态 …… 336
若尔当同态 …… 336
3 李同态 …… 336
导子李环 …… 336

霍普夫代数

霍普夫代数 …… 337
余代数 …… 337
余代数同态 …… 337
西格马记号 …… 337
子余代数 …… 337

不可约余代数 …… 337
双边余理想 …… 337
右(左)余理想 …… 338
商余代数 …… 338
右余模 …… 338
子余模 …… 338
余模同态 …… 338
对偶代数 …… 338
对偶余代数 …… 338
有理 C^* 模 …… 338
余代数的余交换性 …… 338
余代数张量积 …… 338
余自由余代数 …… 339
单余代数 …… 339
点余代数 …… 339
余代数的余根 …… 339
余半单余代数 …… 339
双代数 …… 339
子双代数 …… 339
商双代数 …… 339
双代数同态 …… 339
双理想 …… 339
似群元素 …… 339
本原元素 …… 339
左(右)积分 …… 339
卷积 …… 339
霍普夫代数 …… 339
子霍普夫代数 …… 339
对极 …… 339
霍普夫理想 …… 339
霍普夫代数同态 …… 339
商霍普夫代数 …… 339
对偶双代数 …… 340
对偶霍普夫代数 …… 340
双代数模 …… 340
霍普夫模 …… 340
量射 …… 340
作用 …… 340
模代数 …… 340
弱作用 …… 340
广义交叉积 …… 340
广义碎积 …… 340
挠积 …… 341
余作用 …… 341
弱余作用 …… 341
几乎余交换霍普夫代数 …… 341
拟三角霍普夫代数 …… 341
三角霍普夫代数 …… 341
辫子霍普夫代数 …… 341
余拟三角霍普夫代数 …… 341
余辫子霍普夫代数 …… 341
几乎交换霍普夫代数 …… 341
右双代数扩张 …… 341
右霍普夫扩张 …… 341
右双代数伽罗瓦扩张 …… 341
右霍普夫-伽罗瓦扩张 …… 341

模与同调代数

模　论

模论 …… 342
模 …… 342
算子区 …… 342
带算子区的模 …… 342
酉模 …… 342
幺模 …… 342
子模 …… 342
零模 …… 342
平凡子模 …… 342
非平凡子模 …… 342
真子模 …… 342
极大子模 …… 342
极小子模 …… 342
本质子模 …… 342
大子模 …… 342
模的本质扩张 …… 343
多余子模 …… 343
小子模 …… 343
循环模 …… 343
阶理想 …… 343
忠实模 …… 343
模的零化子 …… 343
商模 …… 343
分式模 …… 343
挠模 …… 343
挠元 …… 343
挠子模 …… 343
无挠模 …… 343
模同态 …… 343
零同态 …… 343
自然同态 …… 343

自同态环 …… 344
模同构 …… 344
稳定同构 …… 344
准同构 …… 344
模同态的余像 …… 344
模同态的余核 …… 344
模同态基本定理 …… 344
本质单同态 …… 344
多余满同态 …… 344
双模 …… 344
双同态 …… 344
模的生成系 …… 344
可数生成模 …… 344
有限生成模 …… 344
自由模 …… 344
自由模的秩 …… 345
自由模的维数 …… 345
余有限生成模 …… 345
模的极小条件 …… 345
模的极大条件 …… 345
诺特模 …… 345
模的升链条件 …… 345
阿廷模 …… 345
模的降链条件 …… 345
模的合成列 …… 345
合成列的长度 …… 345
具有合成列的模 …… 345
若尔当-赫尔德定理 …… 345
余半单模 …… 346
余半单环 …… 346
模的迹 …… 346
模的余迹 …… 346
纯子模 …… 346
冯·诺伊曼正则模 …… 346
冯·诺伊曼正则环 …… 346
特征模 …… 346
可补模 …… 346
可补环 …… 346
子模的补 …… 346
余忠实模 …… 346
一致模 …… 346
一致子模 …… 346
余一致模 …… 347
本原模 …… 347
模的哥尔迪维数 …… 347
模的一致维数 …… 347
凝聚模 …… 347
凝聚环 …… 347
平衡双模 …… 347
忠实平衡双模 …… 347
相似的模 …… 347
模的补足直和项 …… 347
模的直和项 …… 347
模的极大直和项 …… 347
A 同态的典范分解 …… 347
拉回模 …… 347
对偶模 …… 348
模的双对偶 …… 348
稳定子模 …… 348
全不变子模 …… 348
奇异子模 …… 348
非奇异模 …… 348
非奇异环 …… 348
模的正向系 …… 348
正向集 …… 348
模的正向极限 …… 348
模的反向系 …… 348
模的反向极限 …… 348
有限表现模 …… 348
有限相关模 …… 348
凝聚环 …… 348
局部表现模 …… 348
局部投射模 …… 349
单列模 …… 349
序列环 …… 349
模的直积 …… 349
标准满射 …… 349
模的直和 …… 349
标准单射 …… 349
模的内直和 …… 349
模的外直和 …… 349
模的直和因子 …… 349
单模 …… 349
不可约模 …… 349
半单模 …… 350
完全可约模 …… 350
模的(贾柯勃逊)根 …… 350
模的基座 …… 350
克鲁尔-施密特定理 …… 350
主不可分解模 …… 350
准素子模 …… 350
模的准素分解 …… 350
模正合列 …… 350
五引理(模论) …… 350
模的短正序列 …… 350
模的左正合列 …… 350

模的右正合列 …… 351
分裂正合列 …… 351
全忠实函子 …… 351
忠实函子 …… 351
Hom 函子 …… 351
投射模 …… 351
投射模的秩 …… 351
稳定自由模 …… 351
完全模 …… 351
半完全模 …… 351
拟投射模 …… 352
模的投射覆盖 …… 352
内射模 …… 352
贝尔准则 …… 352
可除模 …… 352
拟内射模 …… 352
模的内射包 …… 352
拟内射包 …… 352
极小拟内射扩张 …… 352
模的张量积 …… 352
双加映射 …… 353
平衡映射 …… 353
张量积函子 …… 353
平坦模 …… 353
相伴定理 …… 353
模范畴 …… 353
模范畴等价 …… 353
森田纪一相似环 …… 353
模的迹理想 …… 353
生成子(模) …… 353
余生成子(模) …… 353
投射生成子 …… 354
森田纪一六元组 …… 354
森田纪一定理Ⅰ …… 354
森田纪一定理Ⅱ …… 354
森田纪一定理Ⅲ …… 354
模范畴对偶性 …… 354
对偶函子 …… 354
对偶范畴 …… 354
U 对偶函子 …… 354
U 对偶映射 …… 354
二重对偶映射 …… 354
二重对偶模 …… 354
U 自反模 …… 355
赋值映射 …… 355
U 半自反模 …… 355
U 非挠模 …… 355
森田纪一对偶 …… 355
森田纪一对偶定理 …… 355

同调代数

上复形 …… 355
上链 …… 355
上边缘同态 …… 355
上边缘算子 …… 355
边缘同态 …… 355
边缘算子 …… 355
复形 …… 355
上复形的平移 …… 355
上复形映射 …… 355
上链变换 …… 355
复形映射 …… 355
复形的平移 …… 355
链变换 …… 355
上同调模 …… 356
同调模 …… 356
上链 …… 356
上循环 …… 356
上边缘 …… 356
上同调类 …… 356
链 …… 356
循环 …… 356
边缘 …… 356
同调类 …… 356
上同调函子 …… 356
上复形范畴 …… 356
复形范畴 …… 356
同调函子 …… 356
右复形 …… 356
左复形 …… 356
复形的短正合列 …… 356
上复形的短正合列 …… 356
同调正合列定理 …… 356
上同调正合列定理 …… 356
长正合同调列 …… 356
长正合上同调列 …… 356
连结同态 …… 356
链同伦 …… 357
模上的左复形 …… 357
模上的右复形 …… 357
增广同态 …… 357
模上的零调左复形 …… 357
模上的零调右复形 …… 357
投射分解 …… 357
内射分解 …… 357

自由分解 …… 357
有限自由分解 …… 357
右导出函子 …… 357
左导出函子 …… 357
导出函子的长正合列 …… 357
函子 Ext …… 358
长正合 Ext 列 …… 358
函子 Tor …… 358
长正合 Tor 列 …… 358
模的投射维数 …… 358
模的同调维数 …… 359
环的整体维数 …… 359
模的内射维数 …… 359
模的平坦维数 …… 359
模的弱同调维数 …… 359
环的弱整体维数 …… 359
环的弱维数 …… 359
第一换环定理 …… 359
第二换环定理 …… 359
第三换环定理 …… 359
希尔伯特合冲定理 …… 359
诺特环的同调维数 …… 359
G 模 …… 360
平凡 G 模 …… 360
群的第 n 个上同调群 …… 360
群的第 n 个同调群 …… 360
上同调群 H^0 …… 360
同调群 H_0 …… 360
Z 的标准齐次 G 自由分解 …… 360
Z 的标准非齐次 G 自由分解 …… 360
交叉同态 …… 361
导映射 …… 361
主交叉同态 …… 361
主导映射 …… 361
上同调群 H^1 …… 361
同调群 H_1 …… 361
上同调群 H^2 …… 361
格鲁恩伯格分解 …… 361
霍普夫公式 …… 361
分次模 …… 361
分次模映射 …… 362
分次子模 …… 362
分次商模 …… 362
双分次模 …… 362
$[m,n]$次的分次模映射 …… 362
正合偶 …… 362
谱序列 …… 362
谱序列的极限项 …… 362
滤子(同调代数) …… 362
有界滤子 …… 362
谱序列的收敛 …… 362
双复形 …… 363
二重复形 …… 363
上双复形 …… 363
双复形的全复形 …… 363
上双复形的全复形 …… 363
复形张量积 …… 363
三复形 …… 363
三复形的全复形 …… 363
孔乃特定理 …… 363
孔乃特公式 …… 363
泛系数定理 …… 363

序　与　格

序　论

序 …… 364
偏序集 …… 364
半序集 …… 364
部分序集 …… 364
序集 …… 364
偏序关系 …… 364
偏序 …… 364
半序 …… 364
拟序 …… 364
准序 …… 364
拟序集 …… 364
准序集 …… 364
子偏序集 …… 364
偏序的扩张 …… 364
对偶偏序集 …… 364
泛界 …… 364
最小元 …… 364
最大元 …… 364
有界偏序集 …… 365
偏序集的对偶原理 …… 365
偏序集的直积 …… 365
有界偏序集的中心 …… 365
有界偏序集的中心元 …… 365
覆盖 …… 365
示图 …… 365

哈塞示图 …… 365
偏序集的阶 …… 365
有限偏序集 …… 365
极大链 …… 365
链的长 …… 365
偏序集的长 …… 365
广 …… 365
有限广 …… 365
维函数 …… 365
高函数 …… 365
原子 …… 365
对偶原子 …… 365
分次偏序集 …… 365
半模偏序集 …… 365
模偏序集 …… 366
上界 …… 366
下界 …… 366
有界集 …… 366
上确界 …… 366
下确界 …… 366
有向集 …… 366
定向集 …… 366
极大元 …… 366
极小元 …… 366
可比元 …… 366
非序偏序集 …… 366
全序集 …… 366
线性序集 …… 366
链 …… 366
全序 …… 366
线性序 …… 366
反链 …… 366
佐恩引理 …… 366
良序集 …… 366
保序映射 …… 366
反序映射 …… 366
偏序集的同构 …… 366
对偶同构 …… 366
偏序集的反同构 …… 366
伽罗瓦联络 …… 366
偏序集的升链条件 …… 366
偏序集的降链条件 …… 366

格 论

格 …… 367
子格 …… 367
区间 …… 367
极大子格 …… 367
弗拉梯尼子格 …… 367
凸子格 …… 367
凸子集 …… 367
格的直积 …… 367
偏格 …… 367
相对子格 …… 367
半格 …… 367
并半格 …… 367
交半格 …… 367
宽 …… 367
格的并既约元 …… 368
格的交既约元 …… 368
格的双重既约元 …… 368
格的理想 …… 368
格的幻 …… 368
格的并理想 …… 368
对偶理想 …… 368
格的滤子 …… 368
对偶幻 …… 368
格的主理想 …… 368
格的主幻 …… 368
理想格 …… 368
幻格 …… 368
格的素理想 …… 368
格的素幻 …… 368
格的素对偶理想 …… 368
格的素对偶幻 …… 368
格的极小素理想 …… 368
格的极小素幻 …… 368
格的极大素理想 …… 368
格的极大素幻 …… 368
合同关系 …… 368
平凡合同关系 …… 368
合同格 …… 368
主合同关系 …… 369
商格 …… 369
因子格 …… 369
单格 …… 369
本原集 …… 369
结构格 …… 369
子群格 …… 369
五边形格 …… 369
菱形格 …… 369
分配格 …… 369
分配恒等式 …… 369
格的分配元 …… 369
对偶分配元 …… 370

格的分配理想 …… 370
格的标准元 …… 370
格的对偶标准元 …… 370
格的标准理想 …… 370
格的中立元 …… 370
格的中立理想 …… 370
集环 …… 370
集格 …… 370
集域 …… 370
模格 …… 370
戴德金格 …… 370
模恒等式 …… 370
转置原理 …… 370
模律 …… 370
剪切恒等式 …… 370
投射性 …… 370
格的商 …… 370
透视性 …… 370
弱投射性 …… 371
弱透视性 …… 371
弱模格 …… 371
有补格 …… 371
补元 …… 371
有补模格 …… 371
有补模格的嵌入定理 …… 371
相对有补格 …… 371
分段有补格 …… 371
布尔格 …… 371
平凡布尔格 …… 371
布尔代数 …… 371
广义布尔格 …… 371
广义布尔代数 …… 372
布尔环 …… 372
纽曼代数 …… 372
伪补格 …… 372
伪补元 …… 372
布劳威尔格 …… 372
相对伪补元 …… 372
斯通格 …… 372
正交格 …… 372
正交模格 …… 372
备格 …… 372
完备格 …… 372
定点定理 …… 372
条件备格 …… 372
条件完全格 …… 373
代数格 …… 373
紧致生成格 …… 373
格的紧致元 …… 373
交连续格 …… 373
σ格 …… 373
σ子格 …… 373
σ理想 …… 373
σ幻 …… 373
波莱尔代数 …… 373
波莱尔格 …… 373
波莱尔子代数 …… 373
σ域 …… 373
σ环 …… 373
格的备化 …… 373
分划 …… 373
对偶分划 …… 373
容 …… 373
空容 …… 373
格的独立集 …… 373
模对 …… 373
对偶模对 …… 374
M对称模对 …… 374
半模格 …… 374
上半模格 …… 374
下半模格 …… 374
直叵分格 …… 374
直可分格 …… 374
透视元 …… 374
透视轴 …… 374
几何格 …… 374
点格 …… 374
原子并格 …… 374
原子并矩阵胚格 …… 374
原子联格 …… 374
模几何格 …… 374
格上的赋值 …… 374
保序赋值 …… 374
正赋值 …… 374
度量格 …… 374
伪补度量格 …… 374
拟度量格 …… 374
分类格 …… 374
集合的分类 …… 375
集合的块 …… 375
格同态 …… 375
交同态 …… 375
并同态 …… 375
格嵌入 …… 375
格同构 …… 375
{0,1}格同态 …… 375

格的正规自同构 …… 375
正规自同构的轴 …… 375
格的表示 …… 375
格的等式类 …… 375
格多项式 …… 375
格的平凡等式类 …… 375
自由格 …… 375
格的自由积 …… 375
自由 $\mathscr{K}$ 积 …… 376
自由 $\mathscr{K}$-{0,1}积 …… 376
自由 $\mathscr{K}$-{0,1}分配积 …… 376
完全自由生成格 …… 376

格幺半群

偏序群胚 …… 376
偏序广群 …… 376
M 偏序集 …… 376
交换偏序群胚 …… 376
偏序半群 …… 376
理想元 …… 376
子幂等元 …… 376
偏序幺半群 …… 376
格序群胚 …… 376
l 广群 …… 376
m 格 …… 376
乘法半格 …… 376
m 半格 …… 376
剩余格 …… 376
剩余格序幺半群 …… 376
剩余格序半群 …… 376
格序半群 …… 376
格半群 …… 376
l 半群 …… 376
格序幺半群 …… 376
格幺半群 …… 376
l 幺半群 …… 377
可除幺半群 …… 377
备格序幺半群 …… 377
cl 幺半群 …… 377
备格序群胚 …… 377
备格序半群 …… 377
诺特格序幺半群 …… 377
格序幺半群的准素元素 …… 377
戴德金格序幺半群 …… 377
整格序群胚 …… 377
整偏序群胚 …… 377
整格序群胚的素元 …… 377
整格序群胚的极大元 …… 377
整格序群胚的不可分解元 …… 377
逆半群的自然序 …… 377
非负序半群 …… 377
非正序半群 …… 377
阿基米德序半群 …… 377
严格正格序半群 …… 377
严格正元 …… 377
格序半群中的阿基米德等价 …… 377
实格序子幺半群 …… 377
分配格序半群 …… 378
阶格序半群 …… 378
诣零格序半群 …… 378
格序半群的正理想 …… 378
格序半群的正幻 …… 378
格序半群的正元素 …… 378

格序群

偏序群 …… 378
半序群 …… 378
偏序群的正元 …… 378
偏序群的负元 …… 378
正锥 …… 378
负锥 …… 378
偏序群的序 …… 378
偏序群的字典式积 …… 378
偏序群的直积 …… 378
逐点序 …… 378
偏序群的直和 …… 378
格序群 …… 378
格群 …… 379
l 群 …… 379
全序群 …… 379
线性序群 …… 379
O 群 …… 379
有向群 …… 379
离散格序群 …… 379
备格序群 …… 379
备格群 …… 379
完备格群 …… 379
σ 备格序群 …… 379
赋范格序群 …… 379
赋范向量格 …… 379
格序群中的不相交元素 …… 379
格序群中的互斥元 …… 379
正部 …… 379
负部 …… 379

第二卷条目目录

元素的绝对值(格序群中) …… 379
强单位 …… 379
弱单位 …… 379
凸 l 子群 …… 379
l 子群 …… 379
l 同态 …… 379
单 l 同态 …… 380
满 l 同态 …… 380
l 同构 …… 380
l 理想 …… 380
l 幻 …… 380
平凡 l 理想 …… 380
平凡 l 幻 …… 380
主 l 理想 …… 380
主 l 幻 …… 380
独立 l 理想 …… 380
独立 l 幻 …… 380
闭凸 l 子群 …… 380
极子群 …… 380
格序群中的极 …… 380
格序群的主极子群 …… 380
闭 l 理想 …… 380
闭 l 幻 …… 380
主凸 l 子群 …… 380
格序群的生成 l 子群 …… 380
格序群的正则子群 …… 380
元素的值 …… 381
正则子群的覆盖 …… 381
素子群 …… 381
可投射格序群 …… 381
强可投射格序群 …… 381
半可投射格序群 …… 381
哈密顿格序群 …… 381
特殊值格序群 …… 381
本质值 …… 381
有限值格序群 …… 381
格序置换群 …… 381
l 置换群 …… 381
自由格序群 …… 381
阿基米德格序群 …… 381
阿氏格群 …… 381
交换格序群 …… 381
整闭偏序群 …… 381
可表示格序群 …… 382
正规值格序群 …… 382
正规值子群 …… 382
格序群簇 …… 382
格序群的本质扩张 …… 382
格序群的大 l 子群 …… 382
侧完备格序群 …… 382
直交完备格序群 …… 382
格序群的直交完备化 …… 382
本质闭包 …… 382
本质闭格序群 …… 382
格序群的戴德金完备化 …… 382
格序群的 l 张量积 …… 382
l 双线性映射 …… 383
全序群的绝对凸子群 …… 383
相关凸子群 …… 383
阿基米德等价 …… 383
a 等价 …… 383
阿基米德扩张 …… 383
a 扩张 …… 383
完全格同态 …… 383
康莱德根 …… 383
根系 …… 383
可迁 l 置换群 …… 383
可迁格序置换群 …… 383
格群的圈积 …… 383
格群的大圈积 …… 383
格群的小圈积 …… 383
l 群的挠类 …… 383
l 群的挠根 …… 383
l 群的遗传类 …… 383
l 群的无挠类 …… 384
l 群的子商 …… 384
l 群的极挠类 …… 384
格序群的根类 …… 384
病态 l 置换群 …… 384
格群在全序集上的作用 …… 384
惰子群 …… 384
格序群的忠实作用 …… 384
格序群的表示 …… 384
格序群的忠实表示 …… 384
齐次链 …… 384
齐次全序集 …… 384
格序置换群的 $O(l)$ 同态 …… 384
凸同余 …… 384
稳定子群 …… 384
无向群 …… 384
块 …… 384
稳定子群的长轨道 …… 385
可迁群的本原作用 …… 385
可离性质 …… 385
同余覆盖 …… 385
本原分量 …… 385

凝聚格序置换群 …… 385
弱 2 可迁 …… 385
弱本原 l 置换群 …… 385
肥块 …… 385
扩张块 …… 385
自然块 …… 385
序(格序)置换群的有界元 …… 385
序(格序)置换群的上有界元 …… 385
序(格序)置换群的下有界元 …… 385
自然同余 …… 385
齐次自然同余 …… 385
本原序(格序)置换群 …… 385
自然偏同余 …… 385
值 …… 386
格序单群 …… 386
l 单群 …… 386
l 群的生成子 …… 386
l 群的相关子群 …… 386
l 群的表示 …… 386
有限相关 l 群 …… 386
基本元素 …… 386
基本子群 …… 386
η_a 群 …… 386
η_a 集 …… 386
可容许集 …… 386
正则集 …… 386
序稠格序群 …… 386
格序群的自由积 …… 386
偏序群的自由扩张 …… 386
自由格序群的秩 …… 386
自由生成格 …… 386
稠凸格序子群 …… 387
格序群的分配根 …… 387
伪格序群 …… 387
伪 l 群 …… 387
格序群的根 …… 387
序群的序正合列 …… 387
序群的字典式正合列 …… 387
Z 子群 …… 387
可裂子群 …… 387
右序群 …… 387
正则格序置换群 …… 387
斯葵木哥格群 …… 387

格 序 环

格序环 …… 387
格环 …… 387
l 环 …… 387
偏序环 …… 387
偏序环的序 …… 387
偏序环的正锥 …… 388
矩阵格序环 …… 388
单格序环 …… 388
格序环的 l 理想 …… 388
格序环的 l 幻 …… 388
格序环的素根 …… 388
素 l 理想 …… 388
素 l 幻 …… 388
半素 l 理想 …… 388
素 l 环 …… 388
P 根 …… 388
格序环的 L 根 …… 388
格序环的 l 根 …… 388
格序环的上 l 根 …… 388
l 表示 …… 388
自同态偏序环 …… 388
p 表示 …… 388
忠实的 p 表示 …… 388
阿基米德格序环 …… 388
阿氏格环 …… 388
分配格序环 …… 388
d 环 …… 388
正则格序环 …… 388
平方阿基米德环 …… 388
平方阿氏环 …… 389
备格序环 …… 389
σ 备格序环 …… 389
f 环 …… 389
格序环的函数环 …… 389
左(右)f 环 …… 389
格序环的 f 理想 …… 389
格序环的 f 幻 …… 389
超单位 …… 389
超模极大 l 理想 …… 389
超模极大 l 幻 …… 389
超模半单 f 环 …… 389
几乎 f 环 …… 389
D 整环 …… 389
(* *)环 …… 389
凸格序环 …… 389
内射 f 环 …… 389
左内射环 …… 390
右内射环 …… 390
侧完备 f 环 …… 390
f 环的遗传类 …… 390

同态封闭类 …… 390
f 环的根类 …… 390
半单类 …… 390
$\mathscr{T}$ 根 …… 390
格序代数 …… 390
特殊子类 …… 390

格　模

偏序模 …… 390
偏序模的序 …… 390
全序模 …… 390
孤立模 …… 390
孤立序 …… 390
格序模 …… 390
格模 …… 390
右格序模 …… 390
左格序模 …… 390
l 模 …… 390
l 零化子 …… 390
右 l 零化子 …… 390
左 l 零化子 …… 390
凸 l 子模 …… 390
素子模 …… 391
分配格模 …… 391
f 模 …… 391
右 f 模 …… 391
左 f 模 …… 391
无挠 f 模 …… 391
自可裂 f 模 …… 391
自由 f 模 …… 391
投射 f 模 …… 391
l 收缩 …… 392
$\aleph_a$-l 内射 f 模 …… 392
D_f 模 …… 392
p 自同态 …… 392
有限值 f 模 …… 392
元素的 R 值 …… 392
元素的 R 特殊值 …… 392
矢量格 …… 392
向量格 …… 392
偏序矢量空间 …… 392
备矢量格 …… 392
σ 备矢量格 …… 392
向量格的素理想 …… 392
向量格的素幻 …… 392
阿基米德向量格 …… 392
赋范向量格 …… 392
巴拿赫格 …… 392
l 空间 …… 392
正理想 …… 392
正幻 …… 392
素正理想 …… 392
Γ 序 K 模 …… 392
凸 f 模 …… 392
左凸 f 环 …… 393

双 B 代 数

双 B 代数 …… 393
BCK 代数 …… 393
BCI 代数 …… 393
p 半单 BCI 代数 …… 393
BCI 代数的 BCK 部分 …… 393
BCI 代数的 p 半单部分 …… 393
结合 BCI 代数 …… 393
优 BCI 代数 …… 393
有界 BCI 代数 …… 393
可换 BCK 代数 …… 393
可换 BCI 代数 …… 394
BCI 代数的分支 …… 394
局部有界 BCI 代数 …… 394
拟可换 BCI 代数 …… 394
正关联 BCK 代数 …… 394
正关联 BCI 代数 …… 394
多重正关联 BCK 代数 …… 394
n 级正关联 BCK 代数 …… 394
关联 BCK 代数 …… 394
关联 BCI 代数 …… 394
纯 BCI 代数 …… 394
多重关联 BCK 代数 …… 394
n 级关联 BCK 代数 …… 394
正规 BCK 代数 …… 394
左(右)稳定子 …… 395
拟结合 BCI 代数 …… 395
可分解 BCI 代数 …… 395
完全 BCI 代数 …… 395
局部完全 BCI 代数 …… 395
具有条件(s)的 BCI 代数 …… 395
具有条件(s)的 BCK 代数 …… 395
正则 BCI 代数 …… 395
拟左(右)交错 BCI 代数 …… 395
拟交错 BCK 代数 …… 395
广义拟左交错 BCI 代数 …… 395

BCI 代数的直和 …… 395
BCI 代数的次直和项 …… 396
BCI 代数的次直和 …… 396
半单 BCI 代数 …… 396
J 半单 BCI 代数 …… 396
BCK 代数的原子 …… 396
原子生成的 BCK 代数 …… 396
BCI 代数的元素的周期 …… 396
BCI 代数的理想 …… 396
BCI 代数的幻 …… 396
BCI 代数的闭理想 …… 396
正关联理想 …… 396
正关联幻 …… 396
BCI 代数的关联理想 …… 396
BCI 代数的可换理想 …… 396
广义结合理想 …… 396
广义结合幻 …… 396
BCI 代数的结合理想 …… 396
多重正关联理想 …… 396
多重正关联幻 …… 397
n 级正关联理想 …… 397
多重关联理想 …… 397
多重关联幻 …… 397
k 级关联理想 …… 397
自反理想 …… 397
自反幻 …… 397
自反 BCK 代数 …… 397
BCI 代数的对偶理想 …… 397
BCI 代数的对偶幻 …… 397
BCI 代数的 p 超幂零理想 …… 397
BCI 代数的 p 超幂零幻 …… 397
BCI 代数的商代数 …… 397
BCI 范畴 …… 397
自由 BCI 代数 …… 397
自由 BCK 代数 …… 397

泛 代 数

泛代数 …… 398
有限元运算 …… 398
型 …… 398
n 元运算 …… 398
零元运算 …… 398
无限元运算 …… 398
部分运算 …… 398
自由泛代数 …… 398
自由生成元集 …… 398
合同关系 …… 398
有向系统 …… 398
有向偏序集 …… 398
闭包系统 …… 398
代数闭包系统 …… 398
子代数格 …… 398
合同关系格 …… 398
泛代数的子代数 …… 399
多项式泛代数 …… 399
无关(泛代数中的) …… 399
相关(泛代数中的) …… 399
簇(泛代数中的) …… 399
方程类 …… 399
本原类 …… 399
函数完备代数 …… 399
原代数 …… 399
单泛代数 …… 399
合同关系可换代数 …… 399
合同关系可换簇 …… 399
马尔茨夫类 …… 399
合同关系分配代数 …… 399
合同关系模代数 …… 399
算术簇 …… 399
马尔茨夫条件 …… 400
马尔茨夫项 …… 400
泛代数的中心 …… 400
全不变合同关系 …… 400
判别簇 …… 400
判别函数 …… 400
判别项 …… 400
开关函数 …… 400
开关项 …… 400
优多项式 …… 400
优项 …… 400
2/3 小项 …… 400
主合同关系 …… 400
泛代数的自由积 …… 400
平凡簇 …… 400
平凡代数 …… 400
极小簇 …… 400
方程完全簇 …… 400
极大合同关系 …… 400

范畴论与代数 K 理论

范 畴 论

范畴论 …… 401
范畴 …… 401
态射 …… 401
恒等态射 …… 401
对象 …… 401
小范畴 …… 401
对偶范畴 …… 401
反向范畴 …… 402
逆范畴 …… 402
离散范畴 …… 402
有限范畴 …… 402
加性范畴 …… 402
加法范畴 …… 402
预加性范畴 …… 402
预加法范畴 …… 402
阿贝尔范畴 …… 402
子范畴 …… 402
全子范畴 …… 402
塞尔子范畴 …… 402
局部小范畴 …… 402
良效范畴 …… 403
商范畴(对关系的) …… 403
具体范畴 …… 403
始对象 …… 403
终对象 …… 403
零对象 …… 403
子对象 …… 403
商对象 …… 403
自由对象 …… 403
投射对象 …… 403
内射对象 …… 403
单态射 …… 403
满态射 …… 404
双态射 …… 404
单位态射 …… 404
可逆态射 …… 404
态射的核 …… 404
态射的上核 …… 404
态射的像 …… 404
带像范畴 …… 404
态射的上像 …… 404
零态射 …… 404
等价态射 …… 405
同构态射 …… 405
逆态射 …… 405
等价对象 …… 405
对偶原则(范畴) …… 405
阿贝尔范畴中的正合列 …… 405
短正合列 …… 405
范畴论中的 3 引理 …… 405
短 5 引理 …… 405
范畴中的可换图 …… 405
格罗腾迪克范畴 …… 405
商范畴(对子范畴的) …… 405
标准函子 …… 406
截面函子 …… 406
局部化子范畴 …… 406
局部化函子 …… 406
子对象的交 …… 406
子对象的和 …… 406
子对象的并 …… 406
范畴生成子 …… 406
范畴上生成子 …… 406
函子 …… 406
共变函子 …… 407
协变函子 …… 407
反变函子 …… 407
逆变函子 …… 407
恒等函子 …… 407
单位函子 …… 407
遗忘函子 …… 407
忘却函子 …… 407
基础函子 …… 407
全函子 …… 407
反变全函子 …… 407
包含函子 …… 407
忠实函子 …… 407
信守函子 …… 407
反变忠实函子 …… 407
嵌入函子 …… 407
函子泛元素 …… 407
可表示函子 …… 407
对偶函子 …… 407
表示函子 …… 407
常函子 …… 407

对角函子 …… 408
二元函子 …… 408
积范畴 …… 408
全忠实函子 …… 408
加性函子 …… 408
函子的自然变换 …… 408
函子的自然等价 …… 408
等价范畴 …… 408
同构范畴 …… 408
伴随函子(对) …… 408
相伴函子(对) …… 408
左伴随函子 …… 408
右伴随函子 …… 408
范畴论的 Hom 函子 …… 408
共变态射函子 …… 409
第一表示函子 …… 409
范畴论的反变 Hom 函子 …… 409
反变态射函子 …… 409
第二表示函子 …… 409
正合函子 …… 409
正合反变函子 …… 409
正合二元函子 …… 409
积(范畴论) …… 409
直积(范畴论) …… 409
上积(范畴论) …… 409
直和(范畴论) …… 410
和(范畴论) …… 410
拉回 …… 410
对象的纤维积 …… 410
带纤维积范畴 …… 410
推出 …… 410
对象的纤维和 …… 410
带纤维和范畴 …… 410
正向极限 …… 410
极限 …… 410
正向系 …… 410
反向极限 …… 410
反向系 …… 410
逆向极限 …… 410
上极限 …… 410

代数 K 理论

代数 K 理论 …… 410
格罗腾迪克群 …… 411
G_0 群 …… 411
IBN 环 …… 411
不变基数环 …… 411
稳定同构 …… 411
格罗腾迪克环 …… 411
准自由模 …… 411
稳定自由模 …… 411
K_0 函子 …… 411
矩阵环 $R^{n\times n}$ 的格罗腾迪克群 …… 411
约化群 …… 411
怀特海群 …… 412
矩阵环 $R^{n\times n}$ 的怀特海群 …… 412
特殊怀特海群 …… 412
特殊 K_1 群 …… 412
特殊线性群 …… 412
GE 环 …… 412
GE_n 环 …… 412
准 GE 环 …… 412
迪厄多内行列式 …… 412
D_n 环 …… 412
迪厄多内环 …… 413
D 环 …… 413
K_1 函子 …… 413
施坦贝格群 ST(R) …… 413
施坦贝格关系 …… 413
施坦贝格符号 …… 413
K_2 群 …… 413
泛中心扩张 …… 413
中心扩张 …… 413
K_2 函子 …… 413
K_i 函子与直和的交换性 …… 413
连通环 …… 413
局部秩 …… 413
常数秩 …… 414
交换环的皮卡群 …… 414
可逆模 …… 414
Pic函子 …… 414
H_0 函子 …… 414
行列式映射 …… 414
整环的皮卡群 …… 414
交换环的类群 …… 414
理想类群 …… 415
类数 …… 415
戴德金环的 K_0 群 …… 415
带积范畴 …… 415
积函子 …… 415
带积合成范畴 …… 415
回路范畴 …… 415
笛卡儿正方图 …… 415
麦耶-卫托里列 …… 415

纤维范畴 …… 416
共尾函子 …… 416
双环 …… 416
同余子群问题 …… 416
同余子群 …… 416
切除引理 …… 416
K_2,K_1,K_0 群的正合列 …… 416
群 $SK_1(R,A)$ …… 416
K_2 群中的记号 $\{u,v\}$ …… 417
群同态 $K_1(R)\otimes K_1(R)\simeq K_2(R)$ …… 417
群同态 $K_0(R)\otimes K_1(R)\simeq K_1(R)$ …… 417
n 阶施坦贝格群中的记号 $W_{ij}(u)$ …… 417
n 阶施坦贝格群 …… 417
n 阶施坦贝格群中的记号 $h_{ij}(u)$ …… 417
n 阶施坦贝格群的子群 W_n …… 417
W_n 的正规子群 H_n …… 417
W_n 的子群 C_n …… 417
施坦贝格群的子群 $W(R)$ …… 417
施坦贝格群的子群 $H(R)$ …… 417
施坦贝格群的子群 $C(R)$ …… 417
施坦贝格群的子群 $T(R)$ …… 417
除环的 K_2 群 …… 418
域的 K_2 群 …… 418
一些半局部环的 K_2 群 …… 418
施坦贝格群中的单项元 …… 418
施坦贝格群中的对角元 …… 418
施坦贝格群中的记号 $H_{ij}(a,b)$ …… 418
K_2 群中的记号 $\langle a,b\rangle$ …… 418
施坦贝格群的子群 $H(R,I)$ …… 418
施坦贝格群的子群 $S(R,I)$ …… 418
施坦贝格群的正规子群 $ST(R,I)$ …… 418
施坦贝格群的子群 $T(R,I)$ …… 418
施坦贝格群的子群 $H(R,I)$ …… 419
施坦贝格群的子群 $C(R,I)$ …… 419
$K_2(R)$ 的子群 $C(R,I)$ …… 419
环 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ 的 K_2 群 …… 419
有理数域上的二进施坦贝格符号 …… 419
实数域上的施坦贝格符号 …… 419
整数环的 K_2 群 …… 419
H 理想 …… 419
H 环 …… 419
施坦贝格群中的记号 $C_i(u,v)$ …… 419
K_2 群中的记号 $d(\alpha,\beta)$ …… 420
K_2 群中的记号 $e(u,v)$ …… 420
施坦贝格群的子群 U_R …… 420
H 环 K_2 群的短正合列 …… 420
交换 H 环的 K_2 群 …… 420
有理数域上的施坦贝格符号 $(\ ,\ )_P$ …… 420
有理数域的 K_2 群 …… 420
域的 K_2 群元素不可数条件 …… 420
有理数域上施坦贝格符号的表示 …… 420
希尔伯特符号 $((\ ,\ ))_p$ …… 421
二次互逆律 …… 421
戴德金环上的 q 互逆律 …… 421
戴德金环上的美尼克记号 $\left[\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right]$ …… 421
域上有理函数域的 K_2 群正合列 …… 421
高阶 K 群 …… 421

域论与伽罗瓦理论

域与伽罗瓦理论 …… 422

域的扩张

域 …… 422
子域 …… 422
素域 …… 422
域的特征(数) …… 422
弗罗贝尼乌斯映射 …… 422
弗罗贝尼乌斯自同构 …… 422
域的扩张 …… 422
基域 …… 423
扩域 …… 423
中间域 …… 423
有限生成扩张 …… 423
代数函数域 …… 423
单扩张域 …… 423
本原扩域 …… 423
域扩张的合成 …… 423
代数元 …… 423
超越元 …… 423
最小多项式 …… 423
n 次代数元 …… 423
代数扩张 …… 423
超越扩张 …… 423
超越扩域 …… 423
扩张次数 …… 423
有限扩张(域) …… 423
无限扩张(域) …… 423
二次扩张 …… 423
二次闭包 …… 423

二次闭域 …… 423
代数闭包 …… 423
域的代数闭包 …… 424
代数闭域 …… 424
线性相关的同态映射 …… 424
扩域间的同态 …… 424
线性无关的同态映射 …… 424
戴德金无关性定理 …… 424
扩域的自同构 …… 424
扩域间的同构 …… 424
扩域的自同构群 …… 424
共轭映射 …… 424
共轭域 …… 424
共轭元 …… 424
多项式分裂域 …… 424
根域 …… 424
正规扩张 …… 424
正规闭包 …… 424
可分多项式 …… 424
不可分多项式 …… 424
多项式的不可分次数 …… 425
多项式的不可分指数 …… 425
多项式的约化次数 …… 425
纯不可分多项式 …… 425
纯不可分元 …… 425
纯不可分指数 …… 425
纯不可分闭包 …… 425
域上的代数相关集 …… 425
域上的代数无关集 …… 425
超越集 …… 425
域的代数无关性 …… 425
超越基 …… 425
极大超越集 …… 425
超越次数 …… 425
纯超越扩张 …… 425
纯超越扩域 …… 425
单超越扩张 …… 425
有理函数域 …… 425
域上的有理函数 …… 426
吕洛特定理 …… 426
吕洛特元素 …… 426
域的线性分离性 …… 426
可分扩张 …… 426
代数扩域的可分元 …… 426
可分超越基 …… 426
可分生成扩张 …… 426
可分闭包 …… 426
正则扩张 …… 426
准素扩张 …… 426
施泰尼茨域塔 …… 426
完备域 …… 426
完全域 …… 426
完备子域 …… 426
完备闭包 …… 426
导子 …… 426
导子的拓展 …… 427
纯不可分扩张 …… 427
域扩张的可分次数 …… 427
域扩张的不可分次数 …… 427
扩域的怀尔不可分次数 …… 427
纯不可分扩张的指数 …… 427
纯不可分扩张的高度 …… 427
(纯不可分扩张的)正规元 …… 427
(纯不可分扩张的)正规序列 …… 427
(纯不可分扩张的)正规生成列 …… 427
相对 p 基 …… 427
相对 p 相关 …… 427
相对 p 无关 …… 427
域扩张的不完备次数 …… 428
相对完备 …… 428
p 无关 …… 428
p 基 …… 428
域的不完备次数 …… 428
ω 不完备的 …… 428
分离相对 p 基 …… 428
相对分离扩张 …… 428
可靠扩张 …… 428
模扩张 …… 428
模完备域 …… 428
模闭包 …… 428
例外扩张 …… 428
本原元素定理 …… 428
本原元素 …… 428
域多项式 …… 428
域判别式 …… 428
拓扑域 …… 428
形式幂级数域 …… 428
域上的形式幂级数 …… 429
有限域 …… 429
伽罗瓦域 …… 429
希尔伯特不可约性定理 …… 429
希尔伯特集 …… 429
希尔伯特域 …… 429
经典希尔伯特域 …… 429
可分希尔伯特集 …… 429
可分希尔伯特域 …… 429

C_i 域 …… 429
C_0 域 …… 429
曾-兰定理 …… 429
拟代数闭域 …… 429
曾定理 …… 429
谢瓦莱定理 …… 429

伽罗瓦理论

伽罗瓦理论 …… 429
伽罗瓦扩张 …… 430
群的固定域 …… 430
戴德金-阿廷定理 …… 430
伽罗瓦群 …… 430
绝对伽罗瓦群 …… 430
多项式的伽罗瓦群 …… 430
伽罗瓦预解式 …… 430
伽罗瓦闭包 …… 430
正规基定理 …… 431
正规基元 …… 431
循环扩张 …… 431
循环扩域 …… 431
可解扩域 …… 431
伽罗瓦对应 …… 431
有限伽罗瓦理论基本定理 …… 431
根式扩域 …… 431
根塔 …… 431
根塔的根次数 …… 431
平方根塔 …… 431
二元群扩张塔 …… 431
方程的根式解 …… 431
伽罗瓦准则 …… 432
单群扩张塔 …… 432
素阶群扩张塔 …… 432
鲁菲尼-阿贝尔定理 …… 432
库默尔扩张 …… 432
伽罗瓦群的指数 …… 432
库默尔域 …… 432
阿贝尔扩张 …… 432
阿贝尔扩域 …… 432
多重阿贝尔扩张 …… 432
范(域论) …… 432
迹(域论) …… 433
希尔伯特定理 90 …… 433
克鲁尔拓扑 …… 433
无限伽罗瓦理论基本定理 …… 433
分圆多项式 …… 433
分圆域扩张 …… 433
分圆扩域 …… 433
圆的 n 分域 …… 433
三次方程的不可约情况 …… 433
希腊几何三大问题 …… 434
林德曼-外尔斯特拉斯定理 …… 434
尺规作圆的判别准则 …… 434
用尺规做正多边形问题 …… 434

序　域

序域 …… 434
序 …… 435
可序域 …… 435
正锥 …… 435
全正元 …… 435
实域 …… 435
形式实域 …… 435
亚正锥 …… 435
弱亚正锥 …… 435
亚序 …… 435
弱亚序 …… 435
亚序域 …… 435
序同构 …… 435
序扩张 …… 435
代数序扩张 …… 435
实闭域 …… 435
塔尔斯基原则 …… 436
序域的实(代数)闭包 …… 436
阿廷-施赖埃尔定理 …… 436
极大序域 …… 436
阿廷定理 …… 436
半正定多项式 …… 436
希尔伯特第 17 问题 …… 436
(弱)希尔伯特性质 …… 436
斐斯特定理 …… 436
实赋值 …… 436
实位 …… 436
与序相容的赋值 …… 436
与亚序相容的赋值 …… 437
与序相容的位 …… 437
与亚序相容的位 …… 437
序域的哈恩赋值 …… 437
阿基米德类 …… 437
阿基米德序 …… 437
阿基米德序域 …… 437
非阿基米德序 …… 437
非阿基米德序域 …… 437
子域上的阿基米德序域 …… 437

实位拓展定理 …… 437
有理位存在的兰定理 …… 437
阿廷-兰同态定理 …… 437
兰嵌入定理 …… 437
序空间 …… 438
哈里逊拓扑 …… 438
亚序域的序空间 …… 438
稳定指数 …… 438
亚序域稳定指数 …… 438
亚序的链长 …… 438
扇锥 …… 438
浅显扇锥 …… 438
刚性元素 …… 438
刚性域 …… 438
序闭包 …… 438
全实扩张 …… 438
实全纯环 …… 439
高层序 …… 439
恰好层序 …… 439
高层亚序 …… 439
高层序的忠实扩张 …… 439
高层序扩张 …… 439
高层序域的实闭包 …… 439
半序 …… 439
规范半序 …… 439
帕施正锥 …… 439
帕施亚序 …… 439
二次半序 …… 440
帕施域 …… 440
SAP 域 …… 440
有强逼近性质的(亚序)域 …… 440
SAP 亚序域 …… 440
SAP 亚序 …… 440
ED 域 …… 440
有效对角化域 …… 440
欧几里得域 …… 440
遗传欧氏域 …… 440
欧几里得闭包 …… 440
毕达哥拉斯域 …… 440
毕达哥拉斯闭包 …… 440
n 毕达哥拉斯域 …… 440
遗传毕达哥拉斯域 …… 441
超毕达哥拉斯域 …… 441
超(严格)毕达哥拉斯域 …… 441
相对遗传毕达哥拉斯域 …… 441

赋 值 论

赋值论 …… 441
绝对值 …… 441
非阿基米德绝对值 …… 441
一阶赋值 …… 441
阿基米德绝对值 …… 441
等价绝对值 …… 442
浅显绝对值 …… 442
φ收敛序列 …… 442
φ基本序列 …… 442
φ柯西序列 …… 442
赋值的完全域 …… 442
有序群 …… 442
带有零元素(∞)的有序乘(加)群 …… 442
孤立子群 …… 442
凸子群 …… 442
序群的分段 …… 442
序群的阶 …… 442
阿基米德序群 …… 442
域的赋值 …… 442
值群 …… 443
浅显赋值 …… 443
加法赋值 …… 443
克鲁尔赋值 …… 443
赋值环 …… 443
浅显赋值环 …… 443
赋值域 …… 443
等价赋值 …… 443
互为独立的赋值环 …… 443
赋值的独立性 …… 443
不可比较的赋值环 …… 443
不可比较的赋值 …… 443
可比较的赋值 …… 443
可比较的赋值环 …… 443
赋值φ的赋值环 …… 443
赋值φ的理想 …… 443
赋值φ的剩余域 …… 443
赋值环的剩余域 …… 443
赋值环在子环上的中心 …… 443
赋值的分解 …… 443
合成赋值 …… 443
赋值环的阶 …… 443
有限阶赋值环 …… 443
一阶赋值环 …… 443
赋值的阶 …… 443
一阶离散赋值 …… 443
亨泽尔赋值 …… 444
亨泽尔赋值环 …… 444
亨泽尔条件 …… 444
亨泽尔域 …… 444

亨泽尔赋值域 …… 444
亨泽尔扩张 …… 444
赋值域扩张 …… 444
相对完全域 …… 444
亨泽尔化 …… 444
n 亨泽尔赋值 …… 444
反亨泽尔赋值 …… 444
n 反亨泽尔赋值 …… 444
牛顿多边形 …… 444
非分歧扩张 …… 444
分歧指数 …… 445
剩余次数 …… 445
紧接扩张 …… 445
基本不等式 …… 445
无亏损赋值环 …… 445
全无亏损赋值环 …… 445
无亏损赋值 …… 445
全无亏损赋值 …… 445
驯分歧扩张 …… 445
全分歧扩张 …… 445
可许亨泽尔扩张 …… 445
K 可许扩张 …… 445
初始指数 …… 445
分解群 …… 445
分解域 …… 446
惯性群 …… 446
惯性域 …… 446
分歧群 …… 446
分歧域 …… 446
饱和赋值 …… 446
n 饱和赋值 …… 446
多重完全域 …… 446
正规赋值 …… 446
逼近定理 …… 446
绝对值的完全化域 …… 446
奥斯特洛夫斯基完全域定理 …… 446
伪收敛序列 …… 447
伪柯西序列 …… 447
伪极限 …… 447
奥斯特洛夫斯基网列 …… 447
有理数域上的 p 进赋值 …… 447
p 进数 …… 447
p 进(数)域 …… 447
有理数域上的奥斯特洛夫斯基定理 …… 447
域上有理函数域的 β 进赋值 …… 447
位 …… 447
浅显位 …… 447
位的理想 …… 447
位的剩余域 …… 447
位的赋值环 …… 447
正规位 …… 447
位拓展定理 …… 447

数　论

数论 …… 448

代数数论

代数数论 …… 449
代数数域 …… 450
数域 …… 451
实嵌入 …… 451
复嵌入 …… 451
代数数域的整数环 …… 451
单位 …… 451
代数数 …… 451
代数数的次数 …… 451
超越数 …… 451
最小多项式 …… 451
代数数的长度 …… 451
多项式的长度 …… 451
多项式的高 …… 451
代数数的高 …… 451
代数数的模 …… 451
代数数的分母 …… 452
代数整数 …… 452
整数 …… 452
整元素 …… 452
代数整数环 …… 452
整基 …… 452
相对整基 …… 452
基 …… 452
绝对整基 …… 452
整基的判别式 …… 453
赋值 …… 453
等价赋值 …… 453
非阿基米德赋值 …… 453
离散赋值 …… 453
素元素 …… 453
局部一致化参数 …… 453
p-adic 数 …… 453
指数赋值 …… 453

赋值环 …… 453
素理想 …… 453
单位群 …… 454
剩余类域 …… 454
剩余类映射 …… 454
素除子 …… 454
主除子 …… 454
整体域 …… 454
希尔伯特符号 …… 454
克罗内克符号 …… 454
二次数域 …… 454
范数 …… 454
欧几里得域 …… 454
二元二次型 …… 455
二元二次型与二次数域理想的对应 …… 455
族 …… 455
种 …… 455
主类 …… 455
主族 …… 455
逆类 …… 455
分圆域 …… 455
本原单位根 …… 456
分圆多项式 …… 456
本原因式 …… 456
本原因子 …… 456
局部域 …… 456
亨泽尔引理 …… 456
奥斯特洛夫斯基定理 …… 457
逼近定理 …… 457
赋值的延拓 …… 457
分歧 …… 457
分歧指数 …… 457
剩余类次数 …… 457
非分歧扩张 …… 457
戴德金环 …… 458
剩余类环 …… 458
普通算术域 …… 458
除子类数 …… 458
覆盖环 …… 458
理想的范 …… 458
分式理想 …… 459
理想 …… 459
除子 …… 459
除子群 …… 459
差积 …… 459
判别式 …… 459
局部判别式 …… 459
绝对判别式 …… 459
顺分歧 …… 460
野分歧 …… 460
分解群 …… 460
分解域 …… 460
素理想分解 …… 460
素分解 …… 460
库默尔定理 …… 460
希尔伯特分歧理论 …… 460
分解群 …… 460
分解域 …… 460
惯性群 …… 460
惯性域 …… 461
分歧群 …… 461
分歧域 …… 461
理想类群 …… 461
单位定理 …… 461
基本单位 …… 461
闵科夫斯基上限 …… 461
闵科夫斯基定理 …… 461
数域的特征群 …… 461
数域的 ζ 函数 …… 461
类数公式 …… 462
阿代尔环 …… 462
伊代尔群 …… 462
主伊代尔群 …… 462
导子 …… 462
克罗内克-韦伯定理 …… 463
阿廷映射 …… 463
阿廷符号 …… 463
类域论 …… 463
局部类域论 …… 463
希尔伯特类域 …… 463
最大非分歧阿贝尔扩张 …… 463
类域的构作 …… 463
克罗内克青春之梦 …… 464
种域 …… 464
复乘法 …… 464
代数函数域 …… 464
分圆函数域 …… 464
弗罗贝尼乌斯自同构 …… 464
射线理想类群 …… 464
射线理想类数 …… 464
万有范指数不等式 …… 464
素理想密度 …… 464
分裂定理 …… 465
分歧定理 …… 465
同构定理 …… 465
主理想定理 …… 465

类域塔问题 …… 465
p 类域 …… 465
费马最后定理 …… 465
椭圆曲线 …… 467
椭圆曲线的约化 …… 467
椭圆曲线的 L 级数 …… 468
谷山丰-志村五郎猜想 …… 468
BSD 猜想 …… 468

解析数论

解析数论 …… 469
欧拉恒等式 …… 470
哥德巴赫猜想 …… 470
哥德巴赫问题 …… 471
三素数定理 …… 471
哥德巴赫数 …… 471
非哥德巴赫数 …… 471
哥德巴赫例外集 …… 471
圆法 …… 471
哈代-李特尔伍德方法 …… 472
弗莱分割 …… 472
基本区间 …… 472
优弧 …… 472
余区间 …… 472
劣弧 …… 472
三角和方法 …… 472
指数和方法 …… 473
有理三角和 …… 473
外尔三角和 …… 473
素变数三角和 …… 473
维诺格拉多夫中值定理 …… 473
彼龙公式 …… 473
大筛法 …… 474
阶的估计方法 …… 475
优势函数 …… 476
强函数 …… 476
平均阶 …… 476
精确阶 …… 476
均值估计 …… 476
正规阶 …… 476
渐近级数 …… 476
渐近展开 …… 477
渐近级数性质 …… 477
阿贝尔求和公式 …… 477
分部求和法 …… 477
拉普拉斯方法 …… 477
欧拉求和公式 …… 477
欧拉-马克劳林公式 …… 478
驻点法 …… 478
阿贝尔定理 …… 479
小 o 或大 O 的陶贝尔定理 …… 479
弱型陶贝尔定理 …… 480
孪生素数 …… 480
相邻素数差 …… 480
几何数论 …… 480
格点问题 …… 481
整点问题 …… 481
圆内整点问题 …… 481
高斯圆问题 …… 481
广义圆内整点问题 …… 481
球内的整点问题 …… 481
除数问题 …… 482
狄利克雷除数问题 …… 482
广义除数问题 …… 482
齐次问题 …… 482
他利问题 …… 482
等幂和问题 …… 482
无 k 方因子整数 …… 482
华林问题 …… 483
欧拉猜想 …… 484
黎曼 ζ 函数 …… 484
黎曼猜想 …… 484
黎曼 ζ 函数的零点 …… 485
黎曼 ζ 函数的无零点区域 …… 485
群的特征 …… 485
群的主特征 …… 486
特征群 …… 486
群的共轭特征 …… 486
狄利克雷特征 …… 486
狄利克雷主特征 …… 486
主特征 …… 486
原特征 …… 486
简化模 …… 486
非原特征 …… 486
前导子 …… 486
导出特征 …… 486
特征和 …… 486
高斯和 …… 487
拉马努金和 …… 487
波利亚-维诺格拉多夫不等式 …… 487
大筛法型特征和估计 …… 487
狄利克雷 L 函数 …… 487
狄利克雷级数 …… 487
狄利克雷级数的收敛横坐标 …… 488
狄利克雷级数的收敛半平面 …… 488

狄利克雷 L 函数的函数方程 …… 488
狄利克雷 L 函数的零点 …… 488
广义黎曼猜想 …… 489
L 函数的无零点区域 …… 489
零点密度 …… 489
零点密度定理 …… 490
算术级数的素数定理 …… 490
伯努利多项式 …… 490
伯努利数 …… 490
母函数 …… 490
生成函数 …… 491
发生函数 …… 491
整数分拆 …… 491
无限制分拆函数 …… 492
戴德金和 …… 492
卡他兰数 …… 492
斯特林数 …… 492
有特殊素因子的整数 …… 492
狄克曼函数 …… 493

超越数论与丢番图逼近

超越数 …… 493
二重对数函数 …… 493
一致分布 …… 493
外尔原理 …… 494
$\{a^x\}$的分布问题 …… 494
不定不等式 …… 494
图埃定理 …… 494
刘维尔定理 …… 495
罗思定理 …… 495
贝克方法 …… 495
莱默问题 …… 496
类数问题 …… 496
西格尔引理 …… 496
马勒测度 …… 496
刘维尔数 …… 496
超越数的分类 …… 497
马勒分类 …… 497
柯凯斯曼分类 …… 497
概率数论 …… 497
计算数论 …… 497

模　形　式

迷向群 …… 497
稳定群 …… 497
基本区域 …… 497
模变换 …… 498
模变换群 …… 498
双曲变换 …… 498
抛物变换 …… 498
椭圆变换 …… 498
模群 …… 498
椭圆模群 …… 498
全模群 …… 498
尖点 …… 498
主同余子群 …… 498
同余子群 …… 498
级 …… 498
自守函数 …… 499
自守形式 …… 499
自守因子 …… 499
权 …… 499
模形式论 …… 499
尖点形式 …… 500
艾森斯坦级数 …… 500
庞加莱级数 …… 500
彼得松内积 …… 500
赫克理论 …… 500
赫克环 …… 501
赫克算子 …… 501
旧形式 …… 501
新形式 …… 501
判别式模形式 $\Delta(z)$ …… 501
拉马努金函数 …… 501
拉马努金-彼得松猜想 …… 501
模不变量 …… 502
模函数 …… 502
克洛斯特曼和 …… 502
基问题 …… 502
θ 级数 …… 502
θ 函数 …… 502
西格尔上半空间 …… 502
庞加莱上半平面 …… 502
n 次西格尔模群 …… 502
西格尔模形式 …… 502
西格尔算子 …… 503
奇异形式 …… 503
奇异权 …… 503
傅里叶-雅可比展开 …… 503
希尔伯特模形式 …… 503
希尔伯特模群 …… 503
迹公式 …… 503
塞尔贝格迹公式 …… 503
艾希勒-塞尔贝格迹公式 …… 503
朗兰兹纲领 …… 503

代 数 几 何

代数几何 …… 504
双有理分类 …… 504
算术几何 …… 504
算术代数几何 …… 504
环空间 …… 504
环空间的结构层 …… 504
局部环空间 …… 504
仿射概形 …… 505
环的谱 …… 505
概形 …… 505
仿射开覆盖 …… 505
局部诺特概形 …… 505
连通概形 …… 505
不可约概形 …… 505
S 概形 …… 505
齐次谱 …… 505
既约概形 …… 505
子概形 …… 505
开子概形 …… 506
闭子概形 …… 506
开浸入 …… 506
闭浸入 …… 506
浸入 …… 506
诺特概形 …… 506
正规概形 …… 506
正则概形 …… 506
光滑概形 …… 506
群概形 …… 506
分离态射 …… 506
有限型态射 …… 506
有限态射 …… 506
仿射态射 …… 506
仿射 S 概形 …… 506
射影态射 …… 506
射影 S 概形 …… 506
拟射影态射 …… 506
拟射影 S 概形 …… 506
正常态射 …… 506
绝对闭态射 …… 507
平坦态射 …… 507
平坦 S 概形 …… 507
忠实平坦态射 …… 507
光滑态射 …… 507
光滑 S 概形 …… 507
不分歧态射 …… 507
平展态射 …… 507
代数簇 …… 507
射影簇 …… 507
拟射影簇 …… 507
仿射簇 …… 507
完备簇 …… 507
代数空间 …… 507
平展覆盖 …… 507
射影空间 …… 507
扎里斯基拓扑 …… 508
算术亏格 …… 508
几何亏格 …… 508
不规则性 …… 508
欧拉-庞加莱特征标 …… 508
小平维数 …… 508
一般型代数簇 …… 508
典范环 …… 508
皮卡群 …… 508
皮卡簇 …… 508
拟凝聚层 …… 508
凝聚层 …… 508
可逆层 …… 509
甚丰层 …… 509
丰富层 …… 509
半丰富层 …… 509
切层 …… 509
法层 …… 509
余法层 …… 509
除子 …… 509
韦伊除子 …… 509
有效除子 …… 509
素除子 …… 509
主除子 …… 509
除子类群 …… 509
卡蒂埃除子 …… 509
线性等价除子 …… 509
半正除子 …… 509
典范除子 …… 510
例外除子 …… 510
线性系 …… 510
完全线性系 …… 510
一般点 …… 510
奇点 …… 510

奇点解消 …… 510
有理奇点 …… 510
黎曼-罗赫定理 …… 510
扎里斯基定理 …… 510
贝祖定理 …… 510
贝尔蒂尼定理 …… 510
周炜良定理 …… 511
塞尔对偶 …… 511
相伴公式 …… 511
有理映射 …… 511
有理映射的定义域 …… 511
有理映射的像 …… 511
双有理映射 …… 511
双有理等价代数簇 …… 511
双有理同构代数簇 …… 511
韦罗内塞映射 …… 511
有理正规曲线 …… 511
克雷蒙纳变换 …… 511
克雷蒙纳群 …… 511
二次变换 …… 511
塞格雷嵌入 …… 511
塞格雷簇 …… 511
独异变换 …… 511
爆发 …… 512
完全交 …… 512
局部完全交 …… 512
广拓扑 …… 512
拓扑斯 …… 512
平展上同调 …… 512
结晶上同调 …… 512
周环 …… 512
周炜良坐标 …… 513
相交理论 …… 513
莫德尔猜想 …… 513
沙法列维奇猜想 …… 513
好约化 …… 513
韦伊猜想 …… 513
代数曲线 …… 513
对偶曲线 …… 514
拐点 …… 514
通常拐点 …… 514
普吕克公式 …… 514
尖点 …… 514
赫尔维茨公式 …… 514
克利福德定理 …… 514
特殊除子 …… 514
外尔斯特拉斯点 …… 514
代数对应 …… 514
有理曲线 …… 514
椭圆曲线 …… 514
超椭圆曲线 …… 515
典范曲线 …… 515
雅可比簇 …… 515
肖特基问题 …… 515
托莱里定理 …… 515
代数曲线的参量空间 …… 515
代数曲线的自同构群 …… 515
代数曲面 …… 515
极小曲面 …… 516
极小模型 …… 516
卡斯泰尔诺沃定理 …… 516
有理曲面 …… 516
韦罗内塞曲面 …… 516
直纹面 …… 516
几何直纹面 …… 516
双有理直纹面 …… 516
$K3$ 曲面 …… 516
恩里奎斯曲面 …… 516
椭圆曲面 …… 516
超椭圆曲面 …… 516
双椭圆曲面 …… 517
希尔伯特模曲面 …… 517
一般型代数曲面 …… 517
诺特不等式 …… 517
宫冈-丘成桐不等式 …… 517
曲面地理学 …… 517
正指数曲面 …… 517
算术曲面 …… 517
高维代数簇 …… 517
Q 卡蒂埃除子 …… 517
典范奇点 …… 518
末端奇点 …… 518
整合态射 …… 518
端射线 …… 518
皮卡数 …… 518
锥定理 …… 518
无基点定理 …… 518
不消失定理 …… 518
有理性定理 …… 518
收缩定理 …… 518
典范模型 …… 518
极小模型 …… 518
饭高纤维化 …… 518
数值小平维数 …… 519
法诺簇 …… 519
德尔佩佐曲面 …… 519

饭高猜想 …… 519
$C_{n,m}$猜想 …… 519
翻转猜想 …… 519
良性猜想 …… 519
阿贝尔簇 …… 519
复环面 …… 519
θ函数 …… 519
同源 …… 519
极化 …… 519
主极化 …… 519
极化阿贝尔簇 …… 519
主极化阿贝尔簇 …… 519
周期矩阵 …… 519
黎曼关系式 …… 520
黎曼周期不等式 …… 520
阿贝尔定理 …… 520
雅可比反演问题 …… 520
阿贝尔簇的对偶 …… 520
卡蒂埃对偶 …… 520
弗罗贝尼乌斯态射 …… 520
莫德尔-韦伊定理 …… 520
塔特群 …… 520
塔特猜想 …… 520
塔特模 …… 520
阿贝尔S概形 …… 520
皮卡概形 …… 521
庞加莱丛 …… 521
皮卡簇 …… 521
内隆-塞维里群 …… 521
希尔伯特概形 …… 521
阿尔班尼斯簇 …… 521
格拉斯曼簇 …… 521
格拉斯曼空间 …… 521
普吕克坐标 …… 521
周炜良簇 …… 521
舒伯特簇 …… 521
舒伯特空间 …… 522
旗簇 …… 522
旗空间 …… 522
旗 …… 522
典范旗 …… 522
有理簇 …… 522
单有理簇 …… 522
吕罗特问题 …… 522
单直纹簇 …… 522
参量空间 …… 522
参量概形 …… 522
精细参量空间 …… 522
精细参量概形 …… 522
粗糙参量空间 …… 522
粗糙参量概形 …… 522
实代数集 …… 522
实簇 …… 523
半代数集 …… 523
实理想 …… 523
理想的实根 …… 523
实谱 …… 523
点定理 …… 523
实零点定理 …… 523
非负点定理 …… 523
正点定理 …… 523
半代数点定理 …… 523

微 分 几 何 学

微分几何学 …… 524
微分几何 …… 525

R^3中的曲线和曲面

向量函数 …… 525
导向量 …… 525
空间曲线 …… 525
曲线的参数方程 …… 525
C^k阶曲线 …… 525
C^∞阶曲线 …… 525
光滑曲线 …… 525
正则曲线 …… 525
正则参数方程 …… 526
正则参数 …… 526
曲线的弧长 …… 526
自然参数 …… 526
切向量 …… 526
单位切向量 …… 526
主法向量 …… 526
从法向量 …… 526
副法向量 …… 526
密切平面 …… 526
从法线 …… 526
法平面 …… 526
从切平面 …… 526
弗雷内标架 …… 526

基本三棱形 …… 526
弗雷内公式 …… 526
经典曲线论的基本公式 …… 527
曲率 …… 527
曲率向量 …… 527
曲率半径 …… 527
挠率 …… 527
密切圆 …… 527
曲率圆 …… 527
曲率中心 …… 527
曲线在一点邻近的形状 …… 527
曲线论的基本定理 …… 527
平面曲线 …… 527
相对曲率 …… 528
平面曲线的基本定理 …… 528
平面曲线的自然方程 …… 528
渐伸线 …… 528
渐缩线 …… 528
螺线 …… 528
定倾曲线 …… 528
圆柱螺线 …… 528
圆锥螺线 …… 528
贝特朗曲线 …… 528
侣线 …… 528
平面曲线族的包络 …… 528
平面曲线族的特征点 …… 528
闭曲线的全曲率 …… 529
相对全曲率 …… 529
切线旋转指标定理 …… 529
等周不等式 …… 529
凸闭曲线 …… 529
凸曲线 …… 529
卵形线 …… 529
四顶点定理 …… 529
舒尔定理 …… 529
施瓦茨定理 …… 530
柯西-克罗夫顿公式 …… 530
球面曲线的克罗夫顿公式 …… 530
芬格尔定理 …… 530
法里-米尔诺定理 …… 530
扭结曲线 …… 530
闭曲线的全挠率 …… 530
曲面 …… 531
简单曲面 …… 531
曲面的参数方程 …… 531
坐标曲线 …… 531
坐标网 …… 531
曲面的正则点 …… 531
曲面的奇点 …… 531
曲纹坐标 …… 531
正则曲面 …… 531
C^k 阶曲面 …… 531
切平面 …… 531
法向量 …… 531
曲面的第一基本形式 …… 531
曲面的第一类基本量 …… 532
面积元 …… 532
等距对应 …… 532
等距等价 …… 532
等距变换 …… 532
等距不变量 …… 532
曲面的内蕴几何学 …… 532
保角对应 …… 532
保角映射 …… 532
共形映射 …… 532
球极投影 …… 532
等温坐标系 …… 533
等温参数 …… 533
曲面的第二基本形式 …… 533
曲面的第二类基本量 …… 533
法曲率 …… 533
法截线 …… 533
法截面 …… 533
迪潘标线 …… 533
曲面的椭圆点 …… 533
曲面的双曲点 …… 534
曲面的抛物点 …… 534
脐点 …… 534
平点 …… 534
圆点 …… 534
渐近曲线 …… 534
渐近方向 …… 534
主曲率 …… 534
曲率线 …… 534
主方向 …… 534
高斯曲率 …… 534
总曲率 …… 534
平均曲率 …… 534
中曲率 …… 534
曲面在一点邻近的形状 …… 534
高斯映射 …… 534
曲面的球面表示 …… 535
曲面的第三基本形式 …… 535
曲面的第三类基本量 …… 535
曲面的基本公式 …… 535
曲面的外恩加滕公式 …… 535

联络系数 …… 535
曲面的高斯公式 …… 535
外恩加滕变换 …… 535
梅斯尼埃定理 …… 535
罗德里克公式 …… 535
罗德里克定理 …… 535
高斯-科达齐方程 …… 535
曲面的基本方程 …… 535
曲面的结构方程 …… 535
高斯绝妙定理 …… 535
曲面论的基本定理 …… 535
测地曲率 …… 536
刘维尔公式 …… 536
测地线 …… 536
短程线 …… 536
指数映射 …… 536
法坐标系 …… 536
测地坐标系 …… 536
测地平行线 …… 536
测地极坐标系 …… 536
测地挠率 …… 536
曲面上向量的平行移动 …… 536
常高斯曲率的曲面 …… 537
伪球面 …… 537
常平均曲率曲面 …… 537
德洛内定理 …… 537
极小曲面 …… 537
极小曲面的外尔斯特拉斯公式 …… 537
旋转曲面 …… 538
直纹面 …… 538
可展曲面 …… 538
悬链面 …… 538
正螺面 …… 538
外恩加滕曲面 …… 538
共焦二次曲面 …… 538
迪潘定理 …… 538
舍尔克曲面 …… 539
平移曲面 …… 539
恩内佩尔曲面 …… 539
曲面的定向 …… 539
定向曲面 …… 539
曲面族的包络 …… 539
曲面族的包络面 …… 539
曲面的特征线 …… 539
脊线 …… 539
高斯-博内公式 …… 539
向量场奇点的指标 …… 539
可微向量场 …… 540
向量场的奇点 …… 540
向量场的孤立奇点 …… 540
庞加莱定理 …… 540
球面的刚性 …… 540
卵形面 …… 540
凸曲面 …… 540
科恩-福森定理 …… 540
闵科夫斯基问题的惟一性 …… 540
克里斯托费尔问题的惟一性 …… 540
完备曲面 …… 541
测地完备曲面 …… 541
完备的负曲率曲面 …… 541
完备的平坦曲面 …… 541
极小曲面的伯恩施坦定理 …… 541
霍普夫猜想 …… 541
全平均曲率 …… 541
威尔莫猜想 …… 542
绝对全曲率 …… 542
直线汇 …… 542
柱形线汇 …… 542
线汇的射线 …… 542
线汇的平均参数 …… 542
线汇的主参数 …… 542
线汇的全参数 …… 542
椭圆射线 …… 542
双曲射线 …… 542
抛物射线 …… 542
迷向线汇 …… 542
线汇的可展曲面 …… 542
焦曲面 …… 543
射线的焦点 …… 543
双叶焦曲面 …… 543
线汇的中点曲面 …… 543
焦平面 …… 543
极小线汇 …… 543
法线汇 …… 543
平行曲面 …… 543
W 线汇 …… 543
伪球线汇 …… 543
白克龙变换 …… 543

微分流形与黎曼几何

黎曼几何 …… 543
向量场 …… 544
C^r 向量场 …… 544
自然标架场 …… 544
李括号 …… 544

泊松括号 …… 544
单参数变换群 …… 544
局部单参数变换群 …… 545
诱导向量场 …… 545
无穷小生成元 …… 545
李导数 …… 545
分布 …… 545
对合分布 …… 545
积分流形 …… 545
极大积分流形 …… 546
弗罗贝尼乌斯定理 …… 546
叶状结构 …… 546
叶片 …… 546
张量场 …… 546
外微分形式 …… 546
p 形式 …… 546
外微分形式空间 …… 547
外微分 …… 547
形式与向量场的内乘 …… 547
闭形式 …… 547
恰当形式 …… 547
德·拉姆上同调群 …… 547
德·拉姆上同调空间 …… 547
德·拉姆定理 …… 547
单位分解 …… 547
形式的积分 …… 548
体积元 …… 548
斯托克斯定理 …… 548
黎曼度量 …… 548
黎曼流形的弧长元素 …… 549
黎曼流形 …… 549
黎曼流形的基本张量 …… 549
等距映射 …… 549
等距浸入 …… 549
等距变换群 …… 549
共形映射 …… 549
共形等价 …… 549
共形变换 …… 549
基灵向量场 …… 549
无穷小等距变换 …… 549
基灵方程 …… 549
仿射联络 …… 549
联络 …… 550
线性联络 …… 550
协变微商 …… 550
仿射联络空间 …… 550
联络系数 …… 550
共变导数 …… 550
黎曼联络 …… 550
列维-齐维塔联络 …… 550
挠率张量 …… 550
曲率张量 …… 551
共形曲率张量 …… 551
比安基恒等式 …… 551
协变微分 …… 551
共度微分 …… 552
绝对微分 …… 552
里奇恒等式 …… 552
平行移动 …… 552
测地线 …… 552
指数映射 …… 552
法坐标系 …… 552
高斯引理 …… 553
里奇张量 …… 553
克里斯托费尔符号 …… 553
第一类克里斯托费尔符号 …… 553
第二类克里斯托费尔符号 …… 553
曲率算子 …… 553
截面曲率 …… 553
黎曼曲率 …… 553
里奇曲率 …… 553
数量曲率 …… 553
幺正标架场 …… 554
幺正余标架场 …… 554
联络形式 …… 554
挠率形式 …… 554
曲率形式 …… 554
结构方程 …… 554
标架丛 …… 555
高斯-博内定理 …… 555
欧拉示性式 …… 555
常曲率空间 …… 555
舒尔定理 …… 555
爱因斯坦空间 …… 555
局部共形平坦流形 …… 555
黎曼流形的度量空间结构 …… 555
完备黎曼流形 …… 556
霍普夫-雷诺定理 …… 556
共轭点 …… 556
共轭点轨迹 …… 556
共轭点重数 …… 556
共轭点的阶 …… 556
割点 …… 556
割迹 …… 557
单射半径 …… 557
雅可比向量场 …… 557

弧长第一变分公式 …… 557
变分向量场 …… 557
弧长第二变分公式 …… 557
指标形式 …… 558
基本指标引理 …… 558
球面定理 …… 558
博内-迈尔斯定理 …… 558
嘉当-阿达马定理 …… 558
洛赫比较定理 …… 558
托波诺戈夫比较定理 …… 559
黑塞形式 …… 559
黑塞比较定理 …… 559
拉普拉斯比较定理 …… 559
体积比较定理 …… 559
最大直径定理 …… 560
嘉当-阿姆勃罗斯-希克斯定理 …… 560
最小直径定理 …… 560
欣奇定理 …… 561
德·拉姆分解定理 …… 561
齐格-格罗莫尔分裂定理 …… 561
全凸集 …… 561
怀特海凸邻域定理 …… 561
布斯曼函数 …… 561
测地射线 …… 561
黎曼流形上的变换群 …… 561
可微变换群 …… 562
等距变换群 …… 562
共形变换群 …… 562
射影变换群 …… 562
拉普拉斯算子 …… 562
拉普拉斯-贝尔脱拉米算子 …… 562
拉普拉斯特征值问题 …… 562
黎曼流形的谱 …… 562
特征值的重数 …… 562
霍奇定理 …… 562
黎曼流形的贝蒂数 …… 563
结点状区域 …… 563
结点 …… 563
外尔渐近公式 …… 563
余面积公式 …… 563
极大-极小原理 …… 563
第一特征值的下界估计 …… 563
极小子流形的特征值 …… 564
博赫纳技巧 …… 564
庞加莱不等式 …… 564
索伯列夫不等式 …… 564
索伯列夫常数 …… 564
齐格等周不等式 …… 564
齐格常数 …… 565
等周常数 …… 565
几何等周不等式 …… 565
列维-格罗莫夫等周不等式 …… 565
特征值比较定理 …… 565
伯热等径不等式 …… 565
热核 …… 565
热算子 …… 566
(齐次)热方程 …… 566
非齐次热方程 …… 566
热方程的基本解 …… 566
热核比较定理 …… 566

黎曼对称空间

黎曼对称空间 …… 566
局部黎曼对称空间 …… 567
中心对称 …… 567
黎曼流形的对称中心 …… 567
李变换群 …… 567
迷向子群 …… 567
迷向线性表示 …… 567
轨道 …… 567
齐性空间 …… 567
齐性流形 …… 567
齐性黎曼空间 …… 567
齐性黎曼流形 …… 567
线性迷向群 …… 567
对合自同构 …… 567
对合自同构的特征子群 …… 567
黎曼对称对 …… 568
对称对 …… 568
正交对称李代数 …… 568
对合自同构的特征子代数 …… 568
对称李代数 …… 568
有效正交对称李代数 …… 568
正交对称李代数的型 …… 568
欧几里得型对称李代数 …… 568
紧型对称李代数 …… 568
非紧型对称李代数 …… 568
正交对称李代数的分解 …… 568
截面曲率 …… 568
紧型黎曼对称空间 …… 568
非紧致黎曼对称空间 …… 569
环面 …… 569
欧氏型黎曼对称空间 …… 569
实李代数的复结构 …… 569
对偶 …… 569

不可约黎曼对称空间 …… 569
半单型黎曼对称空间 …… 570
不可约正交对称李代数 …… 570
第二类紧型不可约黎曼对称空间 …… 570
对称空间的全测地子流形 …… 570
秩 …… 570
两点齐性空间 …… 570
黎曼对称空间的分解定理 …… 570
不可约黎曼对称空间的分类 …… 570
齐性复流形 …… 572
复齐性空间 …… 572
齐性有界域 …… 572
埃尔米特对称空间 …… 572
紧型埃米尔特对称空间 …… 572
非紧型埃米尔特对称空间 …… 572
半单型埃米尔特对称空间 …… 572
不可约埃米尔特对称空间 …… 572
埃尔米特对称空间的分解定理 …… 572
不可约埃尔米特对称空间的分类 …… 572
格拉斯曼流形 …… 572
复格拉斯曼流形 …… 573
有界对称域 …… 574
哈瑞斯-祥德拉实现 …… 574

复几何与辛几何

复几何 …… 574
辛几何 …… 574
殆复结构 …… 574
殆复流形 …… 574
可积性条件 …… 574
复流形 …… 574
(p,q)型外微分形式 …… 575
(p,q)型外形式 …… 575
全纯形式 …… 575
多尔别脱上同调群 …… 575
全纯映射 …… 575
埃尔米特度量 …… 575
克勒形式 …… 575
基本 2 形式 …… 575
克勒度量 …… 575
克勒流形 …… 575
全纯截曲率 …… 575
双全纯截曲率 …… 575
克勒-爱因斯坦度量 …… 575
克勒-爱因斯坦流形 …… 575
伯格曼度量 …… 575
复射影空间 …… 576
霍普夫纤维化 …… 576
复空间形式 …… 576
博赫纳-克勒流形 …… 576
博赫纳曲率张量 …… 576
复二次超曲面 …… 576
复环面 …… 576
卡拉比猜想 …… 576
阿贝尔流形 …… 577
全纯子流形 …… 577
克勒子流形 …… 577
全实子流形 …… 577
反不变子流形 …… 577
CR 子流形 …… 577
辛空间 …… 577
辛形式 …… 577
辛群 …… 577
辛复结构 …… 577
辛流形 …… 577
辛结构 …… 577
辛坐标 …… 577
辛向量场 …… 577
哈密顿向量场 …… 577
辛子空间 …… 577
辛子流形 …… 577
拉格朗日子空间 …… 577
拉格朗日子流形 …… 578
史告天-尼琴赫司括号 …… 578
泊松流形 …… 578
泊松结构 …… 578

子流形几何

子流形几何 …… 578
等距浸入 …… 578
黎曼子流形 …… 578
第二基本形式 …… 578
平均曲率向量 …… 578
法联络 …… 578
高斯方程 …… 579
科达齐方程 …… 579
里奇方程 …… 579
等距嵌入问题 …… 579
纳什嵌入定理 …… 579
全测地子流形 …… 579
全脐点子流形 …… 579
伪脐点子流形 …… 579
黎曼淹没 …… 580
垂直向量 …… 580

水平向量 …… 580
向量的水平提升 …… 580
外恩加滕变换 …… 580
形状算子 …… 580
主曲率 …… 580
李普希茨-基灵曲率 …… 580
高斯-克罗内克曲率 …… 580
全绝对曲率 …… 580
高斯映射 …… 580
格拉斯曼流形 …… 580
高斯球面映射 …… 580
子流形的管状邻域 …… 580
等参超曲面 …… 581
等参函数 …… 581
等参子流形 …… 581
迪潘超曲面 …… 581
紧贴浸入 …… 581
绷紧浸入 …… 581
欧氏距离函数 …… 581
体积第一变分 …… 581
体积第二变分 …… 581
稳定极小子流形 …… 582
极小子流形 …… 582
极小曲面 …… 582
极小超曲面 …… 582
克利福德极小超曲面 …… 582
高桥定理 …… 582
凡罗尼斯曲面 …… 582
西蒙斯不等式 …… 582
极小子流形的指标 …… 583
极小子流形的零化数 …… 583
极小子流形的雅可比场 …… 583
极小子流形的莫尔斯指标定理 …… 583
极小子流形的内蕴刚性 …… 583
极小子流形的外在刚性 …… 583
极小曲面方程 …… 584
常平均曲率曲面 …… 584
具平行平均曲率的子流形 …… 584
具常数量曲率的子流形 …… 584
有限型子流形 …… 584
正质量猜想 …… 584
迷向子流形 …… 585
常迷向子流形 …… 585

调和映射与杨-米尔斯场

调和映射 …… 585
能量泛函 …… 585
能量密度 …… 586
映射的第二基本形式 …… 586
映射的张力场 …… 586
第一变分公式 …… 586
第二变分公式 …… 586
稳定调和映射 …… 586
应力-能量张量 …… 586
向量丛值的外微分形式 …… 586
外微分算子 …… 587
外微分 …… 587
余微分算子 …… 587
余微分 …… 587
霍奇-拉普拉斯算子 …… 587
调和形式 …… 587
魏春扑克公式 …… 587
复合公式 …… 587
全测地映射 …… 588
能量极小映射 …… 588
极小切映射 …… 588
乌伦贝格-舍恩定理 …… 588
部分正则性定理 …… 588
主纤维丛上的联络 …… 588
联络的规范变换 …… 588
和乐群 …… 588
完整群 …… 588
联络的齐次和乐群 …… 588
杨-米尔斯规范理论 …… 588
杨-米尔斯作用量 …… 589
杨-米尔斯泛函 …… 589
杨-米尔斯方程 …… 589
杨-米尔斯联络 …… 589
杨-米尔斯场 …… 589
杨-米尔斯势 …… 589
自对偶联络 …… 589
反自对偶联络 …… 589
瞬子 …… 589
自对偶联络的模空间 …… 589
陈-西蒙斯规范理论 …… 589

其他类型的几何结构

芬斯勒流形 …… 589
芬斯勒度量函数 …… 590
芬斯勒度量 …… 590
芬斯勒空间 …… 590
芬斯勒度量张量 …… 590
嘉当联络 …… 590

贝尔瓦尔德联络 …… 590
道路 …… 590
道路空间 …… 591
芬斯勒空间的挠率 …… 591
芬斯勒空间的曲率 …… 591
仿射微分几何 …… 591
布拉施克度量 …… 591
非退化超曲面 …… 591
仿射法线 …… 591
仿射法向量场 …… 591
富比尼-皮克形式 …… 591
仿射主曲率 …… 592
仿射外恩加滕变换 …… 592
仿射平均曲率 …… 592
仿射微分几何基本定理 …… 592
仿射球面 …… 592
伪仿射球面 …… 593
真仿射球面 …… 593
抛物型仿射球面 …… 593
椭圆型仿射球面 …… 593
双曲型仿射球面 …… 593
蒙日-安培方程 …… 593
仿射极大曲面 …… 593
切触流形 …… 593
殆切触流形 …… 593
殆切触结构 …… 593
殆切触黎曼流形 …… 593
佐佐木流形 …… 593
正规切触黎曼流形 …… 593
正规仿切触黎曼流形 …… 593
P 佐佐木流形 …… 594
SP 佐佐木流形 …… 594
殆仿切触流形 …… 594
带系数 k 的正规仿切触黎曼流形 …… 594
带有系数 k 的 P 佐佐木流形 …… 594
EP 佐佐木流形 …… 594
LP 佐佐木流形 …… 594
积分几何 …… 594
不变密度 …… 595
点密度 …… 595
直线密度 …… 595
运动密度 …… 595
陈省身条件 …… 595
弦幂积分 …… 595
布拉施克运动学基本公式 …… 596
哈德威格条件 …… 596
均质积分 …… 596
平均截面测度 …… 596
克罗夫顿公式 …… 596
陈省身公式 …… 596
桑塔洛公式 …… 597
射影微分几何 …… 597
渐近曲线 …… 597
主切曲线 …… 597
曲面的基本方程 …… 597
富比尼坐标 …… 597
射影法线 …… 597
维尔清斯基型基本方程 …… 597
渐近密切二次曲面 …… 597
主密切二次曲面 …… 598
渐近直纹面 …… 598
李二次曲面 …… 598
达布二次曲面束 …… 598
规范直线 …… 598
第一类规范直线 …… 598
第二类规范直线 …… 598
规范线束 …… 598
规范点 …… 598
格林第一棱线 …… 598
格林第二棱线 …… 598
维尔清斯基第一准线 …… 598
维尔清斯基第二准线 …… 598
规范切线 …… 598
嘉当规范标架 …… 598
德穆林四边形 …… 599
德穆林四面体 …… 599
德穆林变换 …… 599
伴随二次曲面 …… 599
伴随二次曲线 …… 599
穆塔儿二次曲面 …… 599
穆塔儿二次曲面束 …… 599
穆塔儿对应 …… 599
射影线素 …… 599
富比尼线素 …… 599
射影变形 …… 599
射影变形的曲面 …… 599
共轭网 …… 599
射影极小曲面 …… 599

凸集几何与距离几何

凸集几何

凸集几何 …… 600
凸集 …… 601
凸子集 …… 601
紧凸集 …… 601
紧致集 …… 601
星形集 …… 601
闵科夫斯基加法 …… 601
凸集的施泰纳对称 …… 601
凸集的配极 …… 602
凸锥 …… 602
凸集的判定准则 …… 602
凸包络 …… 602
凸包 …… 602
凸胞腔 …… 602
凸闭包络 …… 602
凸集的维数 …… 602
凸集的拓扑 …… 602
海因-巴拿赫定理 …… 602
分离定理 …… 603
宽度 …… 603
常宽度凸集 …… 603
最大宽度 …… 603
最小宽度 …… 603
金定理 …… 603
凸集的顶点 …… 603
凸集的暴露点 …… 603
严格凸集 …… 603
凸集的端点 …… 603
赫利定理 …… 603
规范 …… 604
距离函数 …… 604
支撑函数 …… 604
布鲁诺-闵科夫斯基定理 …… 604
勒夫纳-伯哈雷特函数 …… 604
凸多面体 …… 604
多胞形 …… 604
标准多胞形 …… 604
d 维立方体 …… 604
d 维余方体 …… 604
d 维实心单形 …… 604
对偶 …… 604
多面体结构定理 …… 604
k 维面 …… 605
多胞形的体积 …… 605
球的体积 …… 605
多胞形的面积 …… 605
多胞形的二面角 …… 605
施泰纳-闵科夫斯基公式 …… 606
正多胞形 …… 606
多胞形的旗 …… 606
正多胞形的外接球面 …… 606
正多胞形的中心 …… 606
正多胞形的星形集 …… 606
正多胞形的符号 …… 606
正多胞形的基本关系式 …… 606
正多胞形的分类 …… 607
紧凸集的体积 …… 607
紧凸集的直径 …… 607
紧凸集的面积 …… 607
等周不等式 …… 607
亏差 …… 607
二维凸图形 …… 608
有界凸图形 …… 608
无界凸图形 …… 608
凸线 …… 608
零维凸图形 …… 608
一维凸图形 …… 608
凸图形的宽度 …… 608
支撑线 …… 608
支撑点 …… 608
凸多边形 …… 608
凸图形的外切多边形 …… 608
凸图形的内接多边形 …… 608
凸图形的周长 …… 608
正多边形 …… 608
等宽曲线 …… 608
恒宽卵形 …… 608
凸体 …… 608
三维凸图形 …… 609
有界凸体 …… 609
无界凸体 …… 609
支撑面 …… 609

距离几何

距离几何 …… 609
半度量空间 …… 610

度量空间 …… 610
度量凸 …… 610
度量外凸 …… 610
局部度量外凸 …… 610
凯莱-门杰行列式 …… 610
平方距离阵 …… 611
凯莱-门杰矩阵 …… 611
度量方程 …… 611
西尔维斯特-布卢门塔尔行列式 …… 611
西尔维斯特-布卢门塔尔矩阵 …… 611
合同嵌入 …… 611
保距嵌入 …… 611
欧几里得四点性质 …… 611
欧几里得弱四点性质 …… 612
门杰嵌入条件 …… 612
非欧几里得嵌入 …… 612
度量和 …… 612
度量加 …… 612
度量平均 …… 612
度量变换 …… 612
G 空间 …… 613
抽象距离空间 …… 613
抽象距离 …… 613
距离空间 …… 613
距离矩阵 …… 613
分子构形 …… 613
次特征值 …… 614
次特征向量 …… 614
伪对称集 …… 614
惯量椭球面 …… 614
惯性矩 …… 614
杨-张不等式 …… 614

一 般 拓 扑 学

一般拓扑学 …… 615
点集拓扑学 …… 616
度量空间 …… 616
距离空间 …… 616
度量 …… 616
距离 …… 616
伪度量 …… 616
伪度量空间 …… 616
拟度量 …… 616
拟度量空间 …… 616
开球 …… 616
ε 开球 …… 616
ε 闭球 …… 616
ε 邻域 …… 616
基本邻域系 …… 616
直径 …… 616
有界集 …… 616
有界度量 …… 616
完备度量空间 …… 616
柯西序列 …… 616
基本序列 …… 616
等距映射 …… 616
完备化空间 …… 617
完备化定理 …… 617
闭球套定理 …… 617
完全有界度量空间 …… 617
ε 网 …… 617
完全有界集 …… 617
拓扑 …… 617
粗于关系 …… 617
细于关系 …… 617
不可比较拓扑 …… 617
拓扑空间 …… 617
开集 …… 617
$\mathscr{T}$ 开集 …… 617
开集系 …… 617
内点 …… 617
内部 …… 617
开核 …… 617
内部算子 …… 617
开核算子 …… 617
内部算子公理 …… 617
邻域 …… 617
开邻域 …… 618
邻域系 …… 618
邻域公理 …… 618
聚点 …… 618
完备集 …… 618
自密集 …… 618
导集 …… 618
α 阶导集 …… 618
第一阶导集 …… 618
核 …… 618
接触点 …… 618
闭包 …… 618
凝点 …… 618
康托尔-本迪克逊定理 …… 618
完全聚点 …… 618

第二卷条目目录

闭集 …… 618
闭集系 …… 618
闭包公理 …… 618
闭包算子 …… 618
外点 …… 618
外部 …… 618
边界点 …… 618
边界 …… 619
孤立点 …… 619
离散集 …… 619
孤点集 …… 619
子空间 …… 619
相对拓扑 …… 619
相对开集 …… 619
相对闭集 …… 619
遗传性质 …… 619
基 …… 619
拓扑空间的权 …… 619
可数基 …… 619
子基 …… 619
邻域基 …… 619
局部基 …… 619
邻域系的子基 …… 619
局部子基 …… 619
正规基 …… 619
正则正规基 …… 619
离散拓扑 …… 619
离散拓扑空间 …… 620
离散空间 …… 620
有限离散拓扑 …… 620
可数离散拓扑 …… 620
不可数离散拓扑 …… 620
平凡拓扑 …… 620
平凡拓扑空间 …… 620
平凡空间 …… 620
序拓扑 …… 620
通常拓扑 …… 620
有限补拓扑 …… 620
可数补拓扑 …… 620
有限余拓扑 …… 620
特殊点拓扑 …… 620
有限特殊点拓扑 …… 620
可数特殊点拓扑 …… 620
不可数特殊点拓扑 …… 620
例外点拓扑 …… 620
有限例外点拓扑 …… 620
可数例外点拓扑 …… 620
不可数例外点拓扑 …… 620
紧补拓扑 …… 620
紧补空间 …… 621
稠密集 …… 621
稠密 …… 621
边缘集 …… 621
无处稠密集 …… 621
可分空间 …… 621
半开集 …… 621
半内部 …… 621
半闭集 …… 621
半闭包 …… 621
正则开集 …… 621
正则闭集 …… 621
第一可数空间 …… 621
第一可数性公理 …… 621
第二可数空间 …… 621
第二可数性公理 …… 621
第一类型集 …… 621
第一范畴集 …… 621
第二类型集 …… 621
第二范畴集 …… 621
贝尔空间 …… 621
贝尔类型定理 …… 622
贝尔范畴定理 …… 622
可数密度空间 …… 622
F_σ 集 …… 622
G_δ 集 …… 622
波莱尔集 …… 622
苏斯林空间 …… 622
T_0 空间 …… 622
T_0 公理 …… 622
柯尔莫哥洛夫空间 …… 622
T_1 空间 …… 622
T_1 公理 …… 622
弗雷歇空间 …… 622
T_2 空间 …… 622
T_2 公理 …… 622
豪斯多夫空间 …… 622
乌雷松空间 …… 622
半正则空间 …… 623
$T_{2\frac{1}{2}}$空间 …… 623
$T_{2\frac{1}{2}}$公理 …… 623
完全豪斯多夫空间 …… 623
T_3 空间 …… 623
T_3 公理 …… 623
正则空间 …… 623
$T_{3\frac{1}{2}}$空间 …… 623

$T_{3\frac{1}{2}}$公理 …… 623
完全正则空间 …… 623
吉洪诺夫空间 …… 623
T_4 空间 …… 623
正规空间 …… 623
T_4 公理 …… 623
T_5 空间 …… 623
T_5 公理 …… 623
完全正规空间 …… 623
遗传正规空间 …… 623
T_6 空间 …… 623
T_6 公理 …… 624
完备正规空间 …… 624
乌雷松引理 …… 624
蒂茨扩张定理 …… 624
连通空间 …… 624
连通子集 …… 624
隔离集 …… 624
连通分支 …… 624
道路连通分支 …… 624
局部连通空间 …… 624
道路 …… 624
闭路 …… 624
道路连通空间 …… 624
道路连通子集 …… 624
局部道路连通空间 …… 624
遗传不连通空间 …… 625
完全不连通空间 …… 625
积空间 …… 625
积拓扑 …… 625
箱拓扑 …… 625
乘积不变性 …… 625
可积性 …… 625
有限可积性 …… 625
可数可积性 …… 625
商空间 …… 625
商拓扑 …… 625
和空间 …… 625
分解空间 …… 625
上半连续分解空间 …… 625
定向集 …… 626
共尾子集 …… 626
等终子集 …… 626
网 …… 626
定向点集 …… 626
子网 …… 626
网的极限点 …… 626
穆尔-史密斯收敛 …… 626
网的收敛 …… 626
网的聚点 …… 626
超网 …… 626
序列空间 …… 626
弗雷歇空间 …… 626
滤子 …… 626
弱于关系 …… 627
强于关系 …… 627
滤子基 …… 627
滤子基的生成滤子 …… 627
等价的滤子基 …… 627
滤子子基 …… 627
极大滤子 …… 627
超滤子 …… 627
邻域滤子 …… 627
滤子的极限 …… 627
滤子的聚点 …… 627
主超滤子 …… 627
非主超滤子 …… 627
覆盖 …… 627
开覆盖 …… 627
闭覆盖 …… 627
子覆盖 …… 627
有限覆盖 …… 627
可数覆盖 …… 627
林德勒夫空间 …… 627
有限交性质 …… 627
既约覆盖 …… 627
紧空间 …… 627
紧集 …… 628
吉洪诺夫定理 …… 628
半紧空间 …… 628
可数紧空间 …… 628
序列紧空间 …… 628
子集紧空间 …… 628
弱可数紧空间 …… 628
列紧空间 …… 628
伪紧空间 …… 628
实幂紧空间 …… 628
H 闭空间 …… 628
r 闭空间 …… 628
σ 紧空间 …… 629
局部紧空间 …… 629
佩亚诺曲线 …… 629
希尔伯特方体 …… 629
贝尔度量 …… 629
贝尔度量空间 …… 629

嵌入 …… 629
万有空间 …… 629
邵剑夫锐直线 …… 629
右半开区间拓扑 …… 629
康托尔集 …… 629
康托尔完备集 …… 629
广义康托尔集 …… 629
二进紧空间 …… 630
开序数空间 …… 630
闭序数空间 …… 630
吉洪诺夫板 …… 630
穆尔半平面 …… 630
乃米茨基切圆盘空间 …… 630
加细 …… 630
加细映射 …… 630
一一加细 …… 630
重心加细 …… 630
星加细 …… 630
正规开覆盖 …… 630
全体正规空间 …… 630
勒贝格数 …… 630
勒贝格覆盖定理 …… 630
点可数族 …… 631
点有限族 …… 631
局部有限族 …… 631
σ局部有限族 …… 631
星有限族 …… 631
离散族 …… 631
σ离散族 …… 631
族正规空间 …… 631
保闭族 …… 631
σ保闭族 …… 631
θ可加细空间 …… 631
次亚紧空间 …… 631
亚紧空间 …… 631
点式仿紧空间 …… 631
弱仿紧空间 …… 631
可数亚紧空间 …… 631
仿紧空间 …… 631
强仿紧空间 …… 631
星有限空间 …… 632
S空间 …… 632
可数仿紧空间 …… 632
σ仿紧空间 …… 632
次仿紧空间 …… 632
可度量化空间 …… 632
乌雷松度量化定理 …… 632
宾-长田-斯米尔诺夫度量化定理 …… 632
穆尔空间 …… 632
可展空间 …… 632
展开列 …… 632
穆尔度量化定理 …… 632
强展开列 …… 633
亚历山德罗夫-乌雷松度量化定理 …… 633
宾度量化定理 …… 633
阿尔汉盖路斯基度量化定理 …… 633
正则基 …… 633
点正则基 …… 633
宾-永见度量化定理 …… 633
可对称度量化空间 …… 633
对称度量 …… 633
可半度量化空间 …… 633
紧化 …… 633
T_2紧化 …… 633
单点紧化 …… 633
亚历山德罗夫紧化 …… 633
极大紧化 …… 633
斯通-切赫紧化 …… 634
瓦勒曼紧化 …… 634
玉野定理 …… 634
切赫完备空间 …… 634
可数型空间 …… 634
一致结构 …… 634
一致空间 …… 634
一致拓扑 …… 634
一致结构的基 …… 634
一致结构的子基 …… 635
一致覆盖族 …… 635
一致覆盖族的子基 …… 635
一致覆盖族的基 …… 635
一致覆盖 …… 635
分离的一致覆盖族 …… 635
分离的一致空间 …… 635
由度量诱导的一致结构 …… 635
一致空间的子空间 …… 635
一致连续映射 …… 635
一致同构 …… 635
一致等价 …… 635
一致不变性 …… 635
拟一致结构 …… 635
拟一致空间 …… 636
拟一致拓扑 …… 636
拟一致结构基 …… 636
拟一致结构的子基 …… 636
拟一致连续映射 …… 636
积一致结构 …… 636

积一致空间 …… 636
柯西滤子 …… 636
柯西网 …… 636
完备一致空间 …… 636
一致空间的完备化 …… 636
全有界一致空间 …… 636
准紧一致空间 …… 636
由伪度量族诱导的一致结构 …… 636
格集 …… 637
由伪度量族生成的格集 …… 637
邻近 …… 637
δ 空间 …… 637
邻近空间 …… 637
δ 邻域 …… 637
强包含关系 …… 637
由邻近诱导的拓扑 …… 637
δ 拓扑 …… 637
邻近连续映射 …… 637
邻近同构映射 …… 637
邻近同构空间 …… 637
邻近不变性 …… 637
δ 映射 …… 637
δ 同胚 …… 637
δ 不变性 …… 637
由度量诱导的邻近 …… 637
由一致结构诱导的邻近 …… 637
δ 一致覆盖 …… 638
由邻近诱导的一致结构 …… 638
δ 紧化 …… 638
斯米尔诺夫紧化 …… 638
边缘紧空间 …… 638
π 基 …… 638
极大 π 基 …… 638
π 紧化 …… 638
由 π 基诱导的邻近空间 …… 638
近性边缘紧空间 …… 638
δ 滤子 …… 638
极大 δ 滤子 …… 638
点型空间 …… 638
点型子集 …… 638
连续映射 …… 638
开映射 …… 638
闭映射 …… 638
同胚 …… 639
同胚映射 …… 639
拓扑变换 …… 639
拓扑等价 …… 639
粘接引理 …… 639
诱导拓扑 …… 639
商拓扑 …… 639
零集 …… 639
函数闭集 …… 639
函数开集 …… 639
补零集 …… 639
弱连续映射 …… 639
次弱连续映射 …… 639
概连续映射 …… 639
概开映射 …… 639
近乎连续映射 …… 639
图像连续映射 …… 640
半连续映射 …… 640
拟连续映射 …… 640
微连续映射 …… 640
θ 开集 …… 640
θ 连续映射 …… 640
C 连续映射 …… 640
α 集 …… 640
α 连续映射 …… 640
弱 α 连续映射 …… 640
半连通映射 …… 640
保通映射 …… 640
单调映射 …… 640
连通映射 …… 640
边缘连续映射 …… 640
完全映射 …… 640
完备映射 …… 641
紧映射 …… 641
拟完全映射 …… 641
胶垫加细 …… 641
商映射 …… 641
遗传商映射 …… 641
遗传商空间 …… 641
双商映射 …… 641
映射空间 …… 641
函数空间 …… 641
点态收敛拓扑 …… 641
点开拓扑 …… 641
紧开拓扑 …… 641
分离函数族 …… 641
联合连续拓扑 …… 641
一致收敛拓扑 …… 642
一致收敛的一致结构 …… 642
紧收敛拓扑 …… 642
在紧集上一致收敛的一致结构 …… 642
等度连续函数族 …… 642
齐连续函数族 …… 642

第二卷条目目录

一致收敛的映射网 …… 642
收敛集列 …… 642
拟收敛集列 …… 642
点可数型空间 …… 642
拟点可数型空间 …… 642
完全紧化 …… 642
q 空间 …… 643
外延基 …… 643
外权 …… 643
p 空间 …… 643
p 构造 …… 643
严格 p 空间 …… 643
严格 p 构造 …… 643
M 空间 …… 643
可数深度空间 …… 643
k 空间 …… 643
k 闭集 …… 643
遗传 k 空间 …… 643
k 先导 …… 643
k 射影 …… 644
k 映射 …… 644
k 网络 …… 644
紧覆盖映射 …… 644
$\aleph_0$ 空间 …… 644
τ 映射 …… 644
r 空间 …… 644
r 点 …… 644
蝶空间 …… 644
蝶邻域 …… 644
M_1 空间 …… 644
M_2 空间 …… 644
拟基 …… 644
可层化空间 …… 644
半可层化空间 …… 644
M_3 空间 …… 644
单调正规空间 …… 644
σ 空间 …… 645
Σ 空间 …… 645
强 Σ 空间 …… 645
Σ 网络 …… 645
强 Σ 网络 …… 645
森田纪一空间 …… 645
P 空间 …… 645
权 …… 645
伪基 …… 645
ψ 基 …… 645
伪权 …… 645
ψ 权 …… 645
网络 …… 645
网络权 …… 646
稠密度 …… 646
遗传稠密度 …… 646
胞腔度 …… 646
苏斯林数 …… 646
苏斯林性质 …… 646
苏斯林空间 …… 646
林德勒夫数 …… 646
遗传林德勒夫数 …… 646
特征 …… 646
伪特征 …… 646
紧密度 …… 646
展形 …… 646
阶数 …… 646
维数论 …… 646
维数 …… 647
覆盖维数 …… 647
集族的阶 …… 647
切赫-勒贝格维数 …… 647
大归纳维数 …… 647
布劳威尔-切赫维数 …… 647
小归纳维数 …… 647
门杰-乌雷松维数 …… 647
维数基本定理 …… 647
集族膨胀 …… 647
覆盖收缩 …… 647
覆盖的开收缩 …… 647
覆盖的闭收缩 …… 648
子空间维数定理 …… 648
维数重合定理 …… 648
卡切托夫-森田纪一定理 …… 648
维数加法定理 …… 648
维数的可数和定理 …… 648
维数的局部有限和定理 …… 648
维数直积定理 …… 648
维数第一分解定理 …… 648
维数第二分解定理 …… 648
维数扩大定理 …… 648
紧化维数 …… 649
超空间 …… 649
超空间上拓扑 …… 649
超空间下拓扑 …… 649
超空间的有限拓扑 …… 649
指数拓扑 …… 649
豪斯多夫度量 …… 649
维他内映射 …… 649

维他内连续统 …… 649
维他内性质 …… 649
逆极限 …… 649
逆系 …… 649
逆极限中的基本开集 …… 649
逆极限中的基本开覆盖 …… 650
有向构造 …… 650
单调 p 空间 …… 650
集值映射 …… 650
多值映射 …… 650
集值映射的大像 …… 650
集值映射的小像 …… 650
集值映射的大原像 …… 650
集值映射的小原像 …… 650
集值映射的诱导映射 …… 650
集值映射的图像 …… 650
点闭映射 …… 650
点逆闭映射 …… 650
点紧映射 …… 650
点逆紧映射 …… 650
点连通映射 …… 650
开集值映射 …… 651
闭集值映射 …… 651
连续集值映射 …… 651
上半连续集值映射 …… 651
下半连续集值映射 …… 651
集网的极限 …… 651
集网的等终极限 …… 651
集网的聚点 …… 651
集网的共尾极限 …… 651
集网的极限集 …… 651
收敛集网 …… 651
等终连续的集值映射 …… 651
共尾连续的集值映射 …… 651
完全集值映射 …… 651
Y 完全集值映射 …… 651
X 完全集值映射 …… 651
拟连续集值映射 …… 651
上半拟连续集值映射 …… 651
下半拟连续集值映射 …… 651
概连续集值映射 …… 651
几乎连续集值映射 …… 652
概上半连续集值映射 …… 652
概下半连续集值映射 …… 652
弱连续集值映射 …… 652
弱上半连续集值映射 …… 652
弱下半连续集值映射 …… 652
θ 连续集值映射 …… 652
θ 上半连续集值映射 …… 652
θ 下半连续集值映射 …… 652
集值映射空间 …… 652
集值点态收敛拓扑 …… 652
集值点开拓扑 …… 652
集值上半点态收敛拓扑 …… 652
集值下半点态收敛拓扑 …… 652
集值紧开拓扑 …… 652
集值上半紧开拓扑 …… 653
集值下半紧开拓扑 …… 653
集值闭开拓扑 …… 653
集值族状连续族 …… 653
集值图像拓扑 …… 653
集值拟图像拓扑 …… 653
集值次图像拓扑 …… 653
σ 拓扑 …… 653
集值一致收敛拓扑 …… 653
集值等度连续族 …… 653
集值映射的不动点 …… 653
集值压缩映射 …… 654
集值李普希茨映射 …… 654
集值非扩展映射 …… 654
集值扩展映射 …… 654
殆不动点 …… 654
连续选择 …… 654
选择函数 …… 654
连续扩张 …… 654
连续格 …… 654
方向小于关系 …… 655
紧元 …… 655
完全分配格 …… 655
交连续格 …… 655
完全赫廷代数 …… 655
定向完全偏序集 …… 655
连续偏序集 …… 655
连续语义域 …… 655
斯科特拓扑 …… 655
斯科特开集 …… 655
斯科特闭集 …… 655
斯科特连续函数 …… 655
连续格范畴 …… 656
劳森拓扑 …… 656
下拓扑 …… 656
劳森连续函数 …… 656
下极限拓扑 …… 656
区间拓扑 …… 656
上拓扑 …… 656
索伯空间 …… 656

既约闭集 …… 656
稠点 …… 656
斯通空间 …… 656
凝聚空间 …… 656
凝聚映射 …… 656
斯通空间范畴 …… 656
布尔代数范畴 …… 657
布尔代数的斯通表示定理 …… 657
特殊化序 …… 657
亚历山德罗夫拓扑 …… 657
饱和集 …… 657
饱和化 …… 657
入射空间 …… 657
谢尔品斯基空间 …… 657
收缩核 …… 657
单调收敛空间 …… 657
序拓扑空间 …… 657
单调正规的序拓扑空间 …… 657

代数拓扑学与流形拓扑学

代数拓扑学 …… 658
组合拓扑学 …… 658
流形拓扑学 …… 658

代数拓扑学

同伦映射 …… 659
同伦 …… 659
伦移 …… 659
合痕 …… 659
零伦映射 …… 659
相对于某子集的同伦 …… 659
同伦等价空间 …… 659
同伦逆 …… 659
同伦型 …… 659
可缩空间 …… 659
同伦型不变性质 …… 659
闭路 …… 659
环道 …… 659
道路 …… 659
闭路同伦类 …… 659
闭路类 …… 659
基本群 …… 659
一维同伦群 …… 660
范卡彭定理 …… 660
单连通空间 …… 660
同伦群 …… 660
收缩核 …… 660
收缩映射 …… 661
保核收缩 …… 661
邻域收缩核 …… 661
形变收缩核 …… 661
形变收缩 …… 661
强形变收缩核 …… 661
轨道空间 …… 661
拓扑变换群 …… 661
覆叠空间 …… 661
覆盖空间 …… 661
道路提升定理 …… 661
闭路同伦提升定理 …… 661
映射提升定理 …… 661
覆叠空间分类定理 …… 661
泛覆叠空间 …… 662
万有覆叠空间 …… 662
覆叠变换群 …… 662
正则覆叠空间 …… 662
悬垂同态 …… 662
球面的同伦群 …… 662
p 素分支 …… 662
奇 p 素分支 …… 662
塞尔同构 …… 662
霍普夫映射 …… 662
稳定同伦群 …… 663
H 空间 …… 663
同伦单位元 …… 663
H 群 …… 663
群式空间 …… 663
H 同态 …… 663
H 群同态 …… 663
H 余群 …… 663
相对同伦 …… 664
正合同伦序列 …… 664
空间偶的正合同伦序列 …… 664
弱同伦等价 …… 664
n 阶等价 …… 664
艾伦伯格-麦克莱恩空间 …… 664
三联组的正合同伦序列 …… 664
空间三联组 …… 665
n 连通空间偶 …… 665
n 连通空间 …… 665
同伦提升问题 …… 665
纤维映射 …… 665

同伦扩张问题 …… 665
同伦扩张性质 …… 665
余纤维映射 …… 665
同伦切除定理 …… 665
怀特海定理 …… 665
胞腔逼近定理 …… 665
几何无关点组 …… 665
占有最广位置点组 …… 666
单形 …… 666
开单形 …… 666
标准单形 …… 666
单纯复形 …… 666
几何单纯复形 …… 666
复形的维数 …… 666
复形的 r 维骨架 …… 666
闭包复形 …… 666
边缘复形 …… 666
复形的多面体 …… 666
复形的基础空间 …… 666
单纯剖分 …… 666
三角剖分 …… 666
复形偶 …… 666
多面体偶 …… 666
子复形 …… 666
子多面体 …… 666
可剖分空间 …… 666
弯曲多面体 …… 666
剖分 …… 667
弯曲单形 …… 667
弯曲复形 …… 667
球面的剖分 …… 667
四面形剖分 …… 667
八面形剖分 …… 667
同构复形 …… 667
抽象复形 …… 667
抽象单形 …… 667
抽象复形的维数 …… 667
抽象复形的几何实现 …… 667
几何实现定理 …… 667
有向单形 …… 667
无向单形 …… 668
链群 …… 668
q 维链 …… 668
边缘算子 …… 668
边缘同态 …… 668
闭链群 …… 668
q 维闭链 …… 668
边缘链群 …… 668
q 维边缘链 …… 668
单纯同调群 …… 668
同调 …… 668
同调类 …… 668
单纯复形的连通性 …… 668
复形的连通分支 …… 669
零维同调群的结构 …… 669
n 维射影空间 …… 669
克莱因瓶 …… 669
环面 …… 669
默比乌斯带 …… 669
锥形 …… 669
假流形 …… 669
闭假流形 …… 670
定向性 …… 670
带边缘假流形 …… 670
整系数同调群的结构 …… 670
整同调群 …… 670
贝蒂数 …… 670
挠系数 …… 670
复形的关联矩阵 …… 670
欧拉示性数 …… 670
欧拉-庞加莱公式 …… 671
欧拉多面体定理 …… 671
任意系数(单纯)同调群 …… 671
模 p 同调群 …… 671
模 2 同调群 …… 671
有理同调群 …… 671
链映射 …… 671
链同伦 …… 671
单纯映射 …… 672
单纯链映射 …… 672
承载单形 …… 672
单纯逼近 …… 672
星形性质 …… 672
开星形 …… 672
复形的重分 …… 672
重心重分 …… 672
重分链映射 …… 673
重分同态 …… 673
标准链映射 …… 673
标准同态 …… 673
连续映射的诱导同态 …… 673
单纯同调群的重分不变性 …… 673
单纯同调群的拓扑不变性 …… 673
单纯同调群的同伦型不变性 …… 674
环绕复形 …… 674
局部同调群 …… 674

上同调群 …… 674
下同调群 …… 674
相对单纯同调群 …… 674
相对上同调群 …… 675
相对下同调群 …… 675
单纯同调序列 …… 675
下同调序列 …… 675
上同调序列 …… 675
同调联系同态 …… 675
闭曲面 …… 675
2 维闭流形 …… 675
能定向闭曲面 …… 675
不能定向闭曲面 …… 675
闭曲面的同胚分类 …… 675
布劳威尔度 …… 676
拓扑度 …… 676
映射度 …… 676
对径映射 …… 676
保径映射 …… 676
博苏克-乌拉姆定理 …… 676
布劳威尔不动点定理 …… 676
弱同调群 …… 676
弱同调 …… 676
莱夫谢茨数 …… 676
自同态的迹数 …… 677
莱夫谢茨不动点定理 …… 677
奇异同调 …… 677
奇异单形 …… 677
奇异复形 …… 677
奇异链 …… 677
奇异链群 …… 677
奇异边缘链群 …… 677
奇异同调群 …… 677
链复形 …… 677
链复形的边缘算子 …… 678
链复形的 q 维链群 …… 678
链复形的 q 维闭链群 …… 678
链复形的 q 维边缘链群 …… 678
链复形的 q 维同调群 …… 678
相对奇异同调群 …… 678
空间偶的奇异同调群 …… 678
迈尔-菲托里斯序列 …… 678
相对迈尔-菲托里斯序列 …… 678
切除对 …… 678
同调公理 …… 678
广义同调理论 …… 679
胞腔复形 …… 679
胞腔剖分 …… 679
n 维胞腔 …… 679
示性映射 …… 679
CW 复形 …… 679
CW 复形的同调 …… 679
同调泛系数定理 …… 680
艾伦伯格-齐贝尔定理 …… 680
克奈定理 …… 680
上同调公理 …… 680
艾伦伯格-斯廷罗德公理 …… 680
奇异上同调 …… 680
奇异上同调群 …… 681
CW 复形的上同调 …… 681
上积 …… 681
上同调环 …… 681
上同调泛系数定理 …… 681
上同调叉积 …… 681
同调流形 …… 682
相对同调流形 …… 682
庞加莱对偶 …… 682
切赫上同调 …… 682
切赫上同调群 …… 682
切赫同调群 …… 682
上同调运算 …… 682
斯廷罗德代数 …… 682
斯廷罗德平方 …… 683
鲍克斯坦同态 …… 683
对角映射 …… 683
简化幂 …… 683
拓扑空间的楔和 …… 683
拓扑空间的碎积 …… 683
角锥 …… 683
悬垂 …… 683
弗勒登塔尔悬垂定理 …… 684
悬垂映射 …… 684
上同调运算的悬垂 …… 684
闭路空间 …… 684
广义同调 …… 684
非简化广义同调论 …… 684
简化广义同调论 …… 685
WHE 公理 …… 685
广义上同调 …… 685
非简化广义上同调论 …… 685
简化广义上同调论 …… 685
谱 …… 685
子谱 …… 686
有限谱 …… 686
可数谱 …… 686
共尾谱 …… 686

谱的同伦 …… 686
韦琪公理 …… 686
实现定理 …… 686
迈尔-菲托里斯公理 …… 687
博特周期定理 …… 687
酉群的稳定同伦群 …… 687
正交群的稳定同伦群 …… 687
辛群的稳定同伦群 …… 687
拓扑 K 理论 …… 687
有结构群的纤维丛 …… 687
坐标丛 …… 689
等价坐标丛 …… 689
全空间 …… 689
底空间 …… 689
射影 …… 689
纤维 …… 689
结构群 …… 689
坐标邻域 …… 689
坐标函数 …… 689
丛映射 …… 689
等价丛映射 …… 689
主丛 …… 689
平凡丛 …… 689
线丛 …… 689
切丛 …… 689
余切丛 …… 689
典型线丛 …… 689
诱导丛 …… 689
分类空间 …… 689
泛丛 …… 690
示性映射 …… 690
史梯福流形 …… 690
格拉斯曼流形 …… 690
正交群的泛丛 …… 690
酉群的泛丛 …… 691
复史梯福流形 …… 691
复格拉斯曼流形 …… 691
辛群的泛丛 …… 691
共轭四元数 …… 691
四元数史梯福流形 …… 691
四元数格拉斯曼流形 …… 691
相伴丛 …… 691
射影空间的上同调环 …… 691
塹代数 …… 692
奇欣序列 …… 692
示性类 …… 692
史梯福-惠特尼类 …… 692
向量丛的截面 …… 692
子向量丛的正交补 …… 693
史梯福-惠特尼类的性质 …… 693
史梯福-惠特尼数 …… 693
吴类 …… 694
吴公式 …… 694
陈类 …… 694
陈类的性质 …… 694
庞特里亚金类 …… 694
不动点理论 …… 695

几何拓扑学

几何拓扑学 …… 695
哥尼斯堡七桥问题 …… 696
一笔画问题 …… 696
流形 …… 696
拓扑流形 …… 696
无边流形 …… 696
带边流形 …… 696
闭流形 …… 696
开流形 …… 696
长直线 …… 696
拓扑流形的定向 …… 696
可定向流形 …… 697
不可定向流形 …… 697
保向环道 …… 697
逆向环道 …… 697
庞加莱猜想 …… 697
广义庞加莱猜想 …… 697
分片线性结构 …… 697
分片线性映射 …… 697
相容单纯剖分 …… 697
组合流形 …… 697
野生空间 …… 697
病态空间 …… 698
曲面的德恩扭 …… 698
里可里西定理 …… 698
3 维流形的海嘎特分解 …… 698
完全嵌入子流形 …… 699
n 柄体 …… 699
3 维流形的海嘎特图 …… 699
透镜空间 …… 699
p,q 型透镜空间 …… 699
广义透镜空间 …… 699
连通和 …… 699
n 维流形的连通和 …… 700
素分解的存在惟一性定理 …… 700
环道定理 …… 700

球面定理 …… 700
射影平面定理 …… 700
3维流形的基本群 …… 700
不可压缩曲面 …… 700
2维流形的几何 …… 700
局部齐性度量 …… 701
3维齐性黎曼流形 …… 701
克莱因模型 …… 701
2阶射影特殊线性群 …… 701
左不变度量 …… 701
海森堡群 …… 701
3维流形的几何 …… 701
赛费特纤维空间 …… 702
赛费特流形 …… 702
正则纤维 …… 702
奇异纤维 …… 702
伴随赛费特曲面 …… 702
扭结 …… 702
环绕 …… 703
等价扭结 …… 703
等价环绕 …… 703
扭结型 …… 703
环绕型 …… 703
合痕型 …… 703
不打结扭结 …… 703
打结扭结 …… 703
温良扭结 …… 703
野生扭结 …… 703
扭结群 …… 703
维丁格尔表示 …… 703
亚历山大多项式 …… 703
商模的表现矩阵 …… 704
赛费特曲面 …… 704
扭结的亏格 …… 705
辫 …… 705
辫群 …… 705
完全辫群 …… 705
古典辫群 …… 705
等价辫子 …… 705
高维扭结 …… 705
闭曲面上的相交形式 …… 705
对称双线性形式 …… 706
等价对称双线性形式 …… 706
4维流形上的相交形式 …… 706
怀特海定理 …… 707
拓扑4维流形的弗里德曼定理 …… 707
4维可微流形的唐纳森定理 …… 707
罗赫林定理 …… 707
罗赫林不变量 …… 707
怪 R^4 …… 707
4维流形的奇点 …… 708
可解奇点 …… 708
库因定理 …… 708
戈卜夫定理 …… 708
若尔当曲线定理 …… 708
若尔当-布劳威尔分离定理 …… 709
松夫里斯定理 …… 709
区域不变性定理 …… 709
维数不变性定理 …… 709

微分拓扑学

微分拓扑学 …… 709
卡 …… 709
局部坐标系 …… 709
局部坐标 …… 709
图册 …… 709
微分流形 …… 709
卡变换 …… 710
坐标变换 …… 710
光滑图册 …… 710
极大图册 …… 710
微分构造 …… 710
光滑流形 …… 710
可微映射 …… 710
映射的局部表示 …… 710
光滑映射 …… 710
微分同胚 …… 710
带边流形 …… 710
光滑带边流形 …… 710
流形的边界 …… 710
子流形 …… 711
可微映射的秩 …… 711
流形的浸入 …… 711
浸入映射 …… 711
浸入子流形 …… 711
惠特尼浸入定理 …… 711
流形的淹没 …… 711
淹没映射 …… 711
映射的正则点 …… 711
正则值 …… 712
映射的临界点 …… 712
临界值 …… 712
流形的嵌入 …… 712

嵌入映射 …… 712
C^r 嵌入 …… 712
惠特尼嵌入定理 …… 712
流形的乘积 …… 712
射影空间的微分结构 …… 712
史梯福流形的微分结构 …… 712
标架流形 …… 712
格拉斯曼流形的微分结构 …… 712
切空间 …… 713
切向量 …… 713
映射在一点处的微分 …… 713
在一点处的切映射 …… 713
流形的切丛 …… 713
丛射影 …… 714
丛的纤维 …… 714
切映射 …… 714
平凡切丛 …… 714
可平行化的流形 …… 714
流形上的向量场 …… 714
光滑向量场 …… 714
向量丛 …… 714
可微图册 …… 714
可微向量丛 …… 714
平凡向量丛 …… 714
向量丛的子丛 …… 714
向量丛的限制 …… 715
向量丛映射 …… 715
向量丛态射 …… 715
向量丛等价 …… 715
向量丛同构 …… 715
向量丛同态 …… 715
向量丛的同伦性质 …… 715
诱导向量丛 …… 715
向量丛的回退 …… 715
诱导丛的泛性质 …… 715
向量丛的惠特尼和 …… 715
向量丛的直和 …… 716
积丛 …… 716
商向量丛 …… 716
流形的法丛 …… 716
泛向量丛 …… 716
格拉斯曼丛 …… 716
向量丛的定向 …… 716
有向向量丛 …… 716
微分流形的定向 …… 716
向量丛的黎曼度量 …… 716
正交向量丛 …… 717
黎曼流形 …… 717
单位分解 …… 717
纤维丛 …… 717
丛空间 …… 717
覆叠映射 …… 717
纤维映射 …… 717
纤维空间 …… 717
映射的覆叠同伦性质 …… 717
子流形的管状邻域 …… 717
$C^r(M,N)$上的弱拓扑 …… 717
$C^r(M,N)$上的紧开拓扑 …… 718
$C^r(M,N)$上的强拓扑 …… 718
$C^r(M,N)$上的惠特尼拓扑 …… 718
逼近定理 …… 718
微分流形上的零测集 …… 718
富比尼定理 …… 718
萨德定理 …… 718
布朗定理 …… 718
横截性 …… 718
子流形的横截性 …… 719
托姆横截性定理 …… 719
嵌入的合痕 …… 719
合痕的痕迹 …… 719
微拓合痕 …… 719
齐性引理 …… 719
可微映射的映射度 …… 719
模 2 映射度 …… 719
霍普夫定理 …… 719
相交数 …… 719
模 2 相交数 …… 720
欧拉数 …… 720
流形的欧拉特征 …… 720
莫尔斯函数 …… 720
非退化临界点 …… 720
临界点的指数 …… 720
莫尔斯引理 …… 720
黎泊定理 …… 720
莫尔斯不等式 …… 720
流形的协边 …… 720
协边类 …… 721
协边群 …… 721

有向协边 …… 721
流形上的动力系统 …… 721
流形上的流 …… 721
动力系统的积分曲线 …… 721
一维流形的微分同胚分类 …… 721
紧致曲面的微分同胚分类 …… 721
默比乌斯数 …… 721

奇点理论与突变理论

奇点理论

奇点理论 …… 722
可微映射的秩 …… 722
可微映射的正常点 …… 722
可微映射的奇点 …… 722
可微函数的临界点 …… 722
可微函数的非退化临界点 …… 723
映射芽 …… 723
等价映射 …… 723
函数芽 …… 723
k 阶导网 …… 723
k 阶等价 …… 723
k 阶导网空间 …… 723
导网丛 …… 723
k 阶导网的源 …… 723
k 阶导网的目标 …… 723
源映射 …… 723
目标映射 …… 723
k 阶导网映射 …… 723
可微函数芽环 …… 723
可微函数芽代数 …… 724
可微函数芽环的极大理想 …… 724
惠特尼 C^∞ 拓扑 …… 724
惠特尼 C^k 拓扑 …… 724
导网的充分性 …… 724
C^r 实现 …… 724
C^s 充分性 …… 724
v 充分性 …… 724
映射芽的接触等价 …… 724
C^∞ 接触等价 …… 725
C^r 接触等价 …… 725
C^0 接触等价 …… 725
拓扑接触等价 …… 725
可微映射芽的无穷小稳定性 …… 725
可微映射的无穷小稳定性 …… 725
沿映射 f 的向量场 …… 725
可微映射的稳定性 …… 725
C^∞ 稳定性 …… 726
拓扑稳定性 …… 726
映射芽的右-左等价 …… 726
C^∞ 右-左等价 …… 726
C^r 右-左等价 …… 726
映射芽的右等价 …… 726
映射芽的拓扑右等价 …… 726
映射芽的左等价 …… 726
映射芽的拓扑左等价 …… 726
光滑映射在一点的稳定性 …… 726
光滑映射在一点的拓扑稳定性 …… 727
解析映射在一点的解析稳定性 …… 727
阿诺尔德定理 …… 727
映射芽的有限决定性 …… 727
映射芽的 k 决定性 …… 727
映射芽的无限决定性 …… 727
奇点分类 …… 727
Σ^i 分类 …… 728
Σ^i 型奇点 …… 728
一阶奇点集 …… 728
高阶奇点的托姆定义 …… 728
高阶奇点的波特曼定义 …… 728
雅可比扩张 …… 729
临界雅可比扩张 …… 729
波特曼符号 …… 729
玛尔格朗日预备定理 …… 729
外尔斯特拉斯预备定理 …… 730
外尔斯特拉斯除法定理 …… 730
玛瑟除法定理 …… 730
广义玛尔格朗日预备定理 …… 730
映射芽的决定性 …… 730
映射芽的逼近 …… 730

突变理论

突变理论 …… 730

突变数学模型 …… 731
内部空间 …… 731
内部变量 …… 731
状态空间 …… 731
状态变量 …… 731
外部空间 …… 731
外部变量 …… 731
控制空间 …… 731
控制变量 …… 731
外参数 …… 731
静模型 …… 731
代谢模型 …… 731
齐曼突变机械 …… 731
控制平面 …… 732
控制点 …… 732
状态曲面 …… 732
余维数 …… 732
有限余维数 …… 733
无限余维数 …… 733
局部函数 …… 733
结构稳定性 …… 733
托姆分类定理 …… 733
奇点 …… 734
开折 …… 734
r 开折 …… 734
开折的维数 …… 734
射式 …… 734
诱导开折 …… 734
定常开折 …… 734
通用开折 …… 734
万有开折 …… 734
基本突变 …… 734
突变约定 …… 734
麦克斯韦约定 …… 735
完全延迟约定 …… 735
基本突变的几何图形 …… 735
突变流形 …… 735
平衡曲面 …… 735
突变映射 …… 735
分歧集 …… 735
突变点 …… 735
突变集 …… 735
折叠型突变 …… 735
燕尾型突变 …… 735
尖点型突变 …… 736
椭圆脐点型突变 …… 736
双曲脐点型突变 …… 736
蝴蝶型突变 …… 736
抛物脐点型突变 …… 736
非基本突变 …… 736

数　　学

数学(mathematics)　数学一词来自希腊文 μαθηματιχη',其字根 μα'θημα 意义为知识、科学,它非常恰当地反映这个领域的广泛性与普遍性.从历史上看,数学常常用其某个侧面来表示:中国古代用算学来强调其计算技术方面,而西方多用几何学一词代表数学,以显示欧几里得(Euclid)的《几何原本》传统,而实际上,其中也包括数论和量论的内容.随着时间的流逝,数学的内容不断地扩大,在17—18世纪直至19世纪,被包括在数学领域内的许多学科和分支已经独立出去,而在各学科的边界又不断创造和衍生出一系列新的学科,这些新学科现在已融合而成面向21世纪的庞大的数学科学领域,它是一个具有内在统一性的科学技术群.以下从四个方面进行论述:

1.数学的对象和特点.数学中最原始的对象是数与形.自然数已经是相当抽象的概念,它不仅要从一个苹果、一间房子、一堆沙土中抽象出数1来,而且还要由数1得出更一般数的概念.有了自然数的概念还会遇到基数和序数的矛盾.至于记数法和位值制都是中国对人类文明的伟大创造,这种伟大创造绝不仅仅是对自然界的认识和对哲学思辨的产物,它真正体现数学的成就.数学另一个原始对象是形,它更为直观,甚至长期以来人们也把它当成自然科学的对象,尽管柏拉图(Plato)早就说过,三角形属于理念的世界.当然现在数学的空间远远超出现实的空间,数学中的"形"也不限于人们感官能摸得着、看得见的东西,它是更抽象的概念,如高维空间、无穷集合、群、拓扑等是任何其他学科都不研究的对象.数学作为一门模式科学,应该归入更广泛的符号和形式科学类.这一类似乎应该介于哲学类与具体科学,即自然科学与社会科学之间.它的姊妹学科包括一般符号学、语言学、逻辑学、方法学以及还未成型的一般系统学.有意思的是,有些数学家也认为"数学是一种语言"、"数学可还原为逻辑"、"数学是一种普遍方法"等,这些说法尽管有些偏颇,但毕竟触到数学与自然科学的本质差别以及数学与符号科学的亲缘关系.数学的本质特征是:

1)数学是一种普遍语言.这种观点可以追溯到莱布尼茨(Leibniz,G.W.),他首先提出科学与哲学的两大目标,其中第一个就是找出一种普遍文字,首先是一种符号及变元表示的符号语言.正如吉布斯(Gibbs,J.W.)所说的"数学是一种语言".吉布斯不仅是19世纪最伟大的统计热力学大师之一,而且也是向量分析的开创者及传播者.在19世纪90年代,英国著名的杂志《自然》上掀起的一场大辩论中,向量最终取代四元数而成为物理学普遍使用的概念.19世纪和20世纪之交,向量分析成为数学、物理学的有效工具,更确切地说,成为描述各种现象的语言.数学概念的产生及其符号化反映了数学的进步,算术运算的符号化及向符号代数过渡,几何学的代数化,微分、积分运算的符号化,函数的符号及行列式、矩阵、向量、张量等概念的符号化,复数的表示,算子演算以及符号逻辑等都是数学的重要进展.在这个意义下数学对象是一个符号集合.单纯的符号集合,正如裸的集合一样,没有结构,没有什么可说的,没有什么意思,而只有它具有形式结构(语法学),有一定的解释(模型——语义学),有一定变换、生成、操作、运用方式(语用学),它才能变得丰富多彩起来.数学作为一种普遍语言有自己的特点,比起纯逻辑语言来有内涵的丰富性,而比起通常语言来有外延的确定性.数学不仅是一种语言,它还是一种精密语言.正因为如此,它常被称为精密科学.数学之所以精密,不单是因为其数量表示,还在于它越来越深入那些以前所无法表示的或非实在的概念,如瞬时速度、加速度、位势、熵、谱等.对于许多直观概念,也只有在数学上才能得到很好处理,如连续性、对称性、随机性乃至信息控制、策略、对策、决策等.数学还明确了一些对立的范畴,如有穷与无穷、连续与离散、局部与整体、确定与偶然等.还有重要的元概念:如结构、构造、存在、模型、等价等.这些语言越来越深入到科学乃至日常生活之中,使论述确切及精密.许多常用概念也只有在数学上得到澄清才算有深刻的认识.

2)数学是一种普遍方法.从古到今,对许多问题求出解答的过程中,人们或多或少产生一种方法的意识.而这种方法概念,又以数学中的算法概念为摹本.在这个意义下,数学充分显示其作为操作技术的特性.虽然精确的算法概念一直到20世纪30年代才有确切定义,但模糊的概念很早就有,而且也是数学追寻的主要目标之一.中国的数值运算及方程求解、欧几里得辗转相除法以及印度、阿拉伯的一些算法,都使人认识到算法是一种有限的指令,可以机械地运行,从而对一类问题得出确定的解答.许多几何作图问题以及求积问题也要求发现广义的"算法"来求解问题.笛卡儿(Descartes,R.)把算法推向普遍方法论的高度,他十分明确地考虑造出普遍方法

来解决科学问题，特别是数学问题，对此他称为普遍数学. 正是这种对方法的普遍考虑使他发明代数方法研究几何问题，从而创立解析几何学. 波利亚(Polya，G.)把笛卡儿的方案总结如下：

任意问题

$\xrightarrow{①}$数学问题

$\xrightarrow{②}$代数问题

$\xrightarrow{③}$解方程组 $\begin{cases} P_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0, \\ P_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0 \end{cases}$

$\xrightarrow{④}$解方程 $P(x)=0$，

其中第③，④步无非是数学，第②步并没有一般方法，第①步则困难更大. 莱布尼茨也把找出能求解任何数学问题的普遍算法列为他第二大目标. 笛卡儿在几何方面实现这个目标，而莱布尼茨则在逻辑上制定一个方案. 数学作为一种普遍方法，总是不断跨越已有的领域，深入到未知的世界中去，并且不断创造新的数学对象. 17—18 世纪，无穷及无穷小进入数学，把代数运算规则向无穷领域推广，这就导致数学分析的形式，并且构成方法上的大飞跃. 19 世纪由实分析向复分析过渡，再次加大分析方法的威力.

3) 数学是一种普遍思想原则. 数学发展过程中由于不断一般化、不断抽象化造成自己的普遍思想原则. 对称性原则、不变性原则、守恒律三者统一是 1918 年诺特(Noether，(A.)E.)首先提出的，而群论方法在量子力学、原子-分子结构、核结构、基本粒子理论中的适用性也是外尔(Weyl，C. H. H.)首先得出的. 群论方法至今仍广泛应用在科学的各方面，而不仅仅是上述领域及固体物理. 数学中另一个重要原则是极值原则或变分原理，最早除了哲学的思辨之外，首先提出的是费马(Fermat，P. de)，这些原则也是其后许多物理理论的基础，如哈密顿原理.

4) 数学是一种理性思维框架. 20 世纪之前，科学的支柱主要是理论和实验(包括观察和测量)，数学和计算包括在理论当中. 实际上，17 世纪的科学革命推动近代科学的产生，完全依赖于理性与经验的结合. 它们的哲学根源是笛卡儿的唯理主义与培根(Bacon，R.)的经验主义，他们也是近代哲学之父. 确切地讲，笛卡儿把认识论置于本体论之上，把哲学从神学的奴仆地位解放出来，成功地实行思想的解放，直接推动近代科学的产生，其中，理论概念、数学工具与观察实验结合在一起是牛顿(Newton，I.)科学革命的催生婆. 牛顿成就其伟业不仅在于他提出正确的理论概念(特别是力)，而且在于他提供了数学工具(微积分)及分析框架，尽管当时还是用欧几里得的几何系统. 其后科学的重大进步，理论概念及数学表述和计算的结合仍是不可缺少的一环. 第二次世界大战以后，计算机的发展与计算技术的进步使得科学计算与理论和实验鼎足而三，并列为科学的三大支柱. 近年来，由于数学的发展，从数学出发的理论越来越多地成为科学理论形成的始作俑者. 这特别表现在 1974 年，纤维丛理论成为规范场理论的标准表述. 其后越来越多的前沿数学领域进入物理学及其他科学领域，形成新兴理论框架，实际上数学已成为科学发展第四根支柱. 对于生命科学、心理科学、社会科学，这种现象早已不是新事物. 数理经济学以及对策论是这方面的最典型的例子.

2. 数学的分科及其主要问题. 数学不是一般意义上的自然科学或社会科学，它的对象及研究目标不像这些学科那样明确和集中. 从古到今，数学中所包含的对象、学科及分支变化多端. 中世纪除了算术及几何学之外，天文学及乐理也是数学的分支. 到 17 世纪，木工、石工、建筑、火器、占星术等都是数学的内容. 从那时起，静力学、动力学、光学、地图绘制法等仍然被看成大数学的一部分，尽管它们早已成为独立学科. 数学内容的庞杂也可以说是数学的一大特征了. 除此之外，许多基础的数学学科，它们的内容也有很大的改变，甚至于面目全非了. 经典代数学主要研究代数方程的求解，而经过几次变化，现代代数学主要研究代数结构. 这样一来，数学的统一尽管多次被提起，但是总难以概括全部数学. 因此，时至今日，数学仍然是具有多样性对象也具有多种目标的学科，尽管它们之间有着千丝万缕的联系. 人们把数学归结为相互关联的六大范畴，其中前三个可以说是数学的技术方面，后三个可以说是数学的理论方面.

1) 操作技术. 大部分最早的数学问题属于解决“如何”的技术问题. 最初的问题包括计数、计算、测量、作图等方面，后来逐步形成特殊的及一般的数学问题. 在解决这些问题的过程中，形成了算法以及操作步骤的概念. 在计算过程中，形成了算术，特别是解数值代数方程的算法. 到近代，这推动符号代数学、求解代数方程的技术以及把这些技术推广到无穷算法以及代数综合方法的代数方法，从而形成无穷小演算及解析几何学. 其后各个数学分支也提出相应的算法问题，例如拓扑学中计算同调群、同伦群等. 从这个意义上讲，数学在本来意义上是一种计算技术，或更广一点讲是操作技术. 而研究这种技术的目标就是发明算法或解题的步骤，以求得问题的解决. 应该说，这是一种富有创造性的研究工作. 以计算为例，就是由精确计算到近似解析计算到数值计算到计算机软件，它一直是数学研究的重要内容. 除计算之外，还有测量、绘图、统计、运筹等操作，以及相应的和衍生的各种问题. 例如古典几何有许多几何作图问题，特别是用圆规、直尺的几何三大问题，

以及更一般的作图方法.为了解决这些问题,还要发明许多技术,如各种投影技术,它们至少在过去都属于大数学范围之内.在数学分析的范围内,级数求和、渐近展开、积分变换等都是高级的计算技术.

2)技术理论.对数学操作的对象,应该有些认识,其中包括表示问题、操作规则与规律问题、可计算性问题、无穷级数收敛与发散问题、收敛速度问题、方程可解性问题、逼近的程度及可能性问题、作图的可能性问题,特别是方法的评价问题等.这样就形成与操作技术有关但又高一层次的学科,如数值分析、误差理论、函数逼近论、丢番图逼近理论、可解性及稳定性理论等.

3)操作对象理论.它的目标不是指向对象本身,而是指向技术,指向求解的方法.例如丢番图方程论、代数方程论、代数方程组理论、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论等.它们涉及的不是单个方程,而是一类的对象,因此首要问题是分类问题.然后再对每一类研究解的数目、解的性质、根与系数的关系、某类解的存在性问题等,微分方程的定性理论也属于这一范畴.

以上三大范畴是解决"如何"的技术问题,而以下三大范畴才是解决"什么"的理论问题.

4)对象理论.理论是对确切定义的对象的性质、关系、刻画、分类等的研究.典型的数学理论有数论、函数论、算子论以及各种几何对象理论、过程理论等.以数论为例,重要的分支按对象分有整数论、代数数论、超越数论等.按方法分有初等数论、解析数论、概率数论等.按问题的性质分有型的算术理论、几何数论等,也包括数论中的丢番图方程理论.函数论与算子论一开始也是表示问题,特别是无穷级数及无穷乘积表示,然后是积分表示等,其次涉及值分布等可以说是计数问题,另外还有刻画及分类问题.几何图形有许多性质与关系方面的问题,如度量性质以及相交、属于等关系,也有刻画及分类问题.

5)结构理论.结构理论与对象理论之间并没有一条不可逾越的鸿沟,这样划分是因为结构理论必须建立在集合的基础之上.按照布尔巴基学派的观点,原始的结构可以划为三大类,研究它们各自的结构就形成结构数学的主要分支:① 代数结构:主要是群、环、域、模,它们分别构成群论、环论、域论、模论;② 序结构:主要是格,它们构成格论;③ 拓扑结构:主要是拓扑空间,它们构成一般拓扑学的研究对象.这些抽象的研究对象有两个来源:一是从过去研究的具体对象抽象化,特别是公理化而成,如群、域以及拓扑空间这些抽象结构衍生出来.新结构的产生有如下的几种途径:① 增减公理;② 复合结构;③ 多重结构;④ 混合结构.研究这些抽象对象的目标是搞清楚它们的结构并加以分类.所谓结构,就是元素(或它们的集合)和元素之间的关系.结构数学的主要问题大致可分为互相关联的四类问题:① 刻画问题;② 分类问题;③ 结构问题;④ 实现问题.

6)元理论.元数学理论是对数学本身进行反思的产物,长期属于哲学的范畴.它讨论数学概念、数学理论的合理性以及数学方法的合法性问题.19世纪末之前,对于数是什么以及非欧几何问题,特别是数学分析的严格性的争论均属于这个范畴.19世纪末,集合论的建立,现代公理方法的提出,符号逻辑的形成,以及关于数学基础问题的论战,最终导致作为一门数学分支的数理逻辑的形成.由于哥德尔(Gödel,K.)的工作,数理逻辑成为包括模型论、公理集合论、递归论和证明论(原始的和狭义的元数学)四大分支的数学领域,其后分别形成构造性数学和计算复杂性理论等新兴学科.除了以集合论为基础的现代数学之外,范畴论也成为一门元理论,在数学中有着有效的应用.

3.数学的发展和演化.数学的内容及范围随时间不同而不同,因此有言:"数学无非就是它的历史."数学史大致可如下分期:前史时期;古代及中世纪时期(从公元前4世纪到16世纪末);近代前期(17—18世纪);近代后期(19世纪);现代时期(20世纪).每一个时期的特点简要分析如下:

1)前史时期.前史时期的数学主要是民族数学或文化数学,在各种文化的发展过程中,各民族都或多或少掌握一些简单的数学技术,包括计数、计算、测量、土木建筑、绘图等,基本上属于实用技术.这些知识是零散的,而且反映出较大的文化差异.另外,也出现了神秘的占星术、数秘术、占卜术等,其中有个别涉及数学的内容,如二进制等.各种建筑上的对称图案以及正多面体的列举包含群的观念的萌芽.

2)古代及中世纪时期.数学经过长时期的发展之后,正式成为一门学科,其主要标志是:① 建立数的表示及计算方法;② 对于一些问题有较系统的方法.这使数学技术部分初步形成.而欧几里得《几何原本》的问世,则使理论数学有了一个原型.各国数学发展状况有所不同,古代数学的主要领域是算术与几何,希腊具有初等的数论及量论以及一些基本的几何问题及数论问题.这些问题对以后的数学发展有很大的影响,但不一定很重要,比较重要的数学是计算,特别是解方程.中国、印度、阿拉伯的数学,偏重于计算及实际问题的解决.

3)近代前期.近代数学诞生的标志是符号化的普遍算法的建立以及无穷进入数学.它一下子使建立在几何及算术上的算法登上了一个新台阶,不仅使它的应用范围大大扩大,成为发展科学技术的有力工具,而且也向理论提出一系列问题.这就导致

19 世纪操作理论、操作对象理论、对象理论的产生，出现数学多样化和理论化的时代. 17 世纪符号代数、解析几何学及微积分的建立，虽然大大扩大了数学技术库，但是并没有改变数学主要是一门实用的计算及操作技术的状态. 数学作为一门计算技术进步惊人，特别是微积分的完成，解决了许多天文、力学及物理学的问题. 微积分本身只不过是一种更有效的演算方法，即所谓无穷小演算. 接着是常微分方程及数学物理方程的出现，以及变分法的诞生，使数学工具更为有效.

4) 近代后期. 19 世纪数学是近代数学的成熟时期，也是数学真正作为自为的理论科学产生的时期，但是伴随操作理论(如最小二乘法及误差理论、级数求和理论、函数逼近理论及丢番图逼近理论)、操作对象理论(如代数方程理论、常微分方程理论)，数学技术本身也大有提高，特别是傅里叶展开、积分变换，尤其是复分析的建立. 19 世纪的数学可以说是数学对象化与多样化时期，一方面把数学由主要是操作技术转变为理论的时期，另一方面也为 20 世纪现代数学奠定了基础. 这样，数学对象理论真正形成，数学成为一种自为的科学而不再仅是自然科学或技术的语言和工具了.

5) 现代时期. 20 世纪的数学是从 19 世纪数学多样性时期趋于统一的时期，其统一的基础是集合论. 一方面集合论之上产生了结构数学的庞大领域，另一方面集合论的基础问题产生了元数学. 数学新对象的形成，产生结构的多样性，导致理论的多样性，并且 19 世纪末以前的四大范畴的数学仍有新的发展，加上新的应用数学、计算数学等领域，数学日趋专门化、多样化. 但意想不到的是，从 20 世纪 70 年代起，各个领域之间新关系不断发现，新一轮的统一性正在形成之中. 当代数学前沿的大多数学科是 20 世纪上半叶形成的，其中主要是抽象代数学(包括群论、环及代数理论、域论、格论、整体李群理论、代数群论、同调代数以及各种衍生结构)、一般拓扑学、测度和积分理论、泛函分析(包括线性拓扑空间理论、算子代数理论等)、组合及代数拓扑学、整体微分几何、多复变函数论、动力系统理论、随机过程理论等. 对于 19 世纪开创的新领域——代数数论、代数几何学、黎曼几何学和局部李群理论，也在结构数学的框架中获得重大突破，成为当代数学的前沿.

20 世纪后期形成的一些领域，如微分拓扑学、大范围分析、K 理论、非交换几何等，也可在其中看到其萌芽. 除了纯粹数学领域的扩大与深化之外，20 世纪的应用数学和计算数学的面貌也发生了根本的改变. 一方面数学应用的范围已从 20 世纪之前的经典力学、天文学与测地学以及数学物理等领域扩展到几乎所有自然科学、工程技术、社会科学、人文科学的分支，并越来越起着举足轻重的作用；另一方面，一批新的应用数学领域产生出来，成为具有相对独立的分支，构成大数学科学的组成部分. 它们一方面与实际问题有密切的关系，另一方面它们也形成独立的数学研究方向，其中最典型的是 19 世纪末 20 世纪初形成的数理统计，它们同应用概率一起在近半个世纪已经成为与经典数学平起平坐的学科领域. 另外一个数学领域——组合数学几乎与数学的历史一样悠久，但只是近半个多世纪才逐步成熟及独立. 第二次世界大战之后，一些新的应用数学领域独立出来，特别是运筹学诸分支，后来纳入管理科学的学科群中. 与工程技术密切相关的系统科学、控制理论与自动化科学、信息科学也得到空前的发展.

20 世纪科学技术史中头等重要的事件是电子计算机的诞生. 它对整个社会的冲击是怎么估计也不过分的. 从计算机的设计制造到大规模应用，处处离不开数学，同时也开辟了新的数学领域. 它们可以归纳成两大部分：一是计算机科学，它指未来计算机的发展；一是计算数学，它指计算机在科学计算和工程技术中的大规模计算. 计算机的不断普及和改进对数学也造成不可忽视的影响. 它给数学家提出一系列算法问题，并形成一套行之有效的算法，如单纯形方法及其种种改进，有限元方法及其衍生算法等，对算法的分析，如收敛速度、误差传播及稳定性等问题形成数值分析分支. 近年来，计算机由数值运算过渡到符号运算，形成计算机代数重要分支，特别是吴文俊的机械化数学纲领在机器证明方面是一大突破.

4. 数学的社会功能. 数学是最古老的科学部门，它的诞生和发展反映人类文明的进步. 数学从一开始就与社会实践活动密切相关，从计数、土地丈量、器物制造、产品分配，一直到商业贸易、宗教活动等都向数学提出问题，并要求逐步解决和方法逐渐进步，最后形成相对定型的数学方法和学科. 从此，各种社会活动与数学的应用密不可分. 随着社会的进步，特别是近代科学技术的进步和新兴产业日新月异，数学也越来越成为科学技术发展的基础. 从 17 世纪到 19 世纪，数学与力学、天文学、物理学、大地测量学、航海术就密不可分，互相促进地平行发展着. 对于机械工程、建筑工程设计、电机工程等技术领域的发展，数学也起着决定性的作用. 20 世纪数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更加令人信服地确立了数学作为整个科学技术的基础地位. 数学物理、数学化学、生物数学、数理经济学、数理地质学、数理语言学、数值天气预报、数学考古等一系列边缘学科的出现，表明数学的应用已突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透. 随着科学数值化趋势的增长，数学在提高全民素质，培养适应现代化需

要的各级人才方面还具有特殊的教育功能. 数学科学,已成为推进人类文明的不可缺少的重要因素,数学正越来越直接地为人类生活与物质生产做出更大的贡献. 数学应用具有以下特点:

1) 纯粹数学几乎所有的分支都获得应用. 在20世纪60年代,像拓扑学这样的抽象数学分支离实际应用似乎还很遥远,而今拓扑学(特别是扭结理论)已成为生物学中了解 *DNA* 结构的有效工具. 在物理学中,拓扑不变量正在成为物理的量,正如一些群的不变量是物理的量一样. 数论也曾被认为是最纯粹、最缺乏应用的数学分支,但如今数论方法在计算机科学、密码技术、卫星信号传输、p 进量子场论等许多方面发挥着重要的有时甚至是关键的作用,并通过与数值分析相结合开辟着更广的应用途径. 事实上,仅就在理论物理中的应用而言,涉及的数学除了经典的分支与方法(如数学物理方程、傅氏分析、无穷维空间论、群论、概率统计等),还包括了微分拓扑、微分几何、大范围分析、代数几何、李群与李代数、算子代数、代数数论、非交换数学、非线性数学、计算数学等,几乎覆盖了核心数学的整个领域.

2) 几乎所有的科技领域都在应用数学,并越来越多地应用更高深的数学. 数学在力学、物理学中的应用是经受了历史考验的,而当今数学的应用则早已突破这一传统的范围,正在向包括从粒子物理到生命科学,从航空技术到地质勘探在内的一切科技领域进军. 除了自然科学,经济学及过去认为不适用数学的社会学、历史学等社会科学领域,数学方法也都在崭露头角. 随机分析应用于金融决策而引起的经济学理论的进展,提供了特别令人鼓舞的例证. 与以往时代不同的是,数学在向外渗透过程中越来越多地与其他领域相结合而形成交叉学科. 与数学有关的词大量出现在各门学科之前后,如"数学的"、"数理的"、"计量的"、"统计的"、"计算的"以及"……数学"、"……统计学"等. 学科成熟的社会标志是学会、协会的建立,期刊与连续出版物的问世,以及课程的设置,专业会议的召开等. 例如,《数学化学杂志》于20世纪80年代创刊,《数理经济学杂志》于20世纪70年代创刊,生物数学的期刊出现更早. 次一级的学科如"数学分类学"的著作早在20世纪80年代就问世了. 值得注意的是纯粹数学中的一些前沿与其他科学的许多前沿领域的快速结合,这反映了科技领域中数学渗透的空前深度. 可以这样说,没有这些前沿数学就没有当代理论物理学的一些前沿领域,如超弦理论、超引力理论等. 事实上,仅仅像弦理论这样的物理学热门分支所用到的数学,就涉及微分拓扑学、代数几何学、微分几何、群论与无穷维代数、复分析与黎曼曲面的模理论等. 凝聚态物理中分类晶体结构中的"缺陷"以及液晶理论,都用到某些齐性空间中同伦群的计算,而这即使对代数拓扑学家来说也是极难的问题. 数理经济学中一般均衡理论的建立、发展,也用到了微分拓扑学的基本定理与彻底的公理化方法. 经济学家德布鲁因(de, Bruijn, N. G.)这方面的工作获得了诺贝尔奖.

3) 数学在生产技术中的应用变得日趋直接. 以往数学工具直接用于生产技术的例子虽有发生,但数学与生产技术的关系基本上是间接的. 常常是先应用于其他科学,再由这些科学提供技术进步的基础. 近半个世纪来,数学科学与生产技术的相互作用方式正在悄悄地改变,数学提供的工具直接影响和推动技术进步的频率正在加大,并在许多情况下产生巨大的经济效益. 例如,以计算流体力学为基础的数值模拟已成为飞行器设计的有效工具,类似的数值模拟方法正被应用于许多技术部门以替代耗资巨大的试验;以调和分析为基础发展起来的小波分析直接应用于通信与石油勘探等广泛的技术领域,这在20年前是不能想象的;现代医学扫描技术(*CT* 扫描、核磁共振成像等)主要也是建立在拉东积分理论的基础之上,这方面的例子举不胜举. 此外,现代大规模生产的管理决策、产品质量控制也密切依赖于数学中的线性规划算法(单纯形法与新兴的内点法)及统计方法. 近年来,以数学建模为核心的工业数学成为一个蓬勃发展的应用数学领域也绝不是偶然的,产业部门的工程技术人员与数学工作者携手合作,解决影响甚至决定生产过程的形形色色的数学问题,反之,许多挑战性问题也刺激纯数学的发展.

4) 数学在学科发展中的份额及力度越来越大. 一些著名的数学家认为,数学是一种关键的、普遍适用的、赋予人以能力的技术. 从某种意义上来讲,"高技术本质上是一种数学技术". 对此,一般人还只在科学计算的层面来理解. 而实际上,数学方法是不同于理论方法及计算方法的第四个普遍适用的方法和技术. 这种情况从20世纪70年代以来已初露端倪,在21世纪将成为科学研究的重要组成部分,而且也许是最富创造性的部分,这特别表现在形成概念及理论框架方面. 实际上,当前的动力系统的研究(分叉、吸引子)、孤立子、混沌等已成为许多领域的通用语言及工具,而更艰深的数学将在未来更为普及.

执　笔　胡作玄
审　阅　吴文俊　程民德　徐利治

抽象代数(abstract algebra)　亦称近世代数. 研究各种代数系的结构及其性质的分支学科. 它是在初等代数基础上经过数系概念的推广,与实施代数运算范围的扩大,从18世纪末萌芽到20世纪30年代,逐步形成现代数学的主要分支之一.

抽象代数是研究以任意对象作为元素的集合，赋予元素间的若干合成法则——即对集合中任意元素 a,b 有集合中惟一的元素 c 与之对应——称为运算，并且这些运算满足于特定的一些条件——称为公理. 随着集合所赋予的运算及其所满足的公理体系的不同而形成各种不同的代数系，如群、环、域、格、模(包括向量空间)、代数等.

代数系的起源较早，在挪威数学家阿贝尔(Abel, N. H.)证明五次以上方程不能用根式求解的进程中就孕育着群的概念；1830 年，年仅 19 岁的伽罗瓦(Galois, E.)彻底解决了代数方程的根式求解问题，从而引进数域的扩张、置换群、可解群等概念；后来，凯莱(Cayley, A.)在 1854 年的文章中给出有限抽象群；戴德金(Dedekind, J. W. R.)于 1858 年在代数数域中又引入有限交换群和有限群；克莱因(Klein, C. F.)于 1872 年建立了埃尔朗根纲领，这些都是抽象群产生的主要源泉. 然而抽象群的公理系统直到 1882 年凯莱与韦伯(Weber, H.)在 Math. Annalen 的同一期分别给出有限群的公理定义，1893 年韦伯又给出无限抽象群的定义. 由于李(Lie, M. S.)对连续群和弗罗贝尼乌斯(Frobenius, F. G.)对群表示的系统研究，对群论发展产生了深刻的影响. 同时，李在研究偏微分方程组解的分类时引入李代数的概念，然而，它的发展却是 19 世纪末和 20 世纪初，由基灵(Killing, W. K. J.)、外尔(Weyl, (C. H.)H.)和嘉当(Cartan, É. (-J.))等人的卓越工作才建立了系统理论.

域这个名词虽是戴德金较早引入的，但域的公理系统却是迪克森(Dickson, L. E.)与亨廷顿(Huntington, E. V.)于 19 世纪初才独立给出. 而域的系统发展是从 1910 年，施泰尼茨(Steinitz, E.)的著名论文“域的代数理论”开始的. 同期，布尔(Boole, G.)研究人的思维规律，于 1854 年出版《思维规律的研究》，建立了逻辑代数，即布尔代数. 但格论是在 1933～1938 年，经伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)、坎托罗维奇(Канторович. П. В.)、奥尔(Ore, O.)等人的工作才确立了在代数学中的地位. 另一方面，1843 年，哈密顿(Hamilton, W. R.)引进四元数并奠定了向量代数和向量分析的基础，而四元数系又构成实数域上有限维可除代数. 凯莱与西尔维斯特(Sylvester, J. J.)一起建立了代数型的理论，奠定了代数不变量的矩阵理论. 凯莱又是矩阵代数的创始人，他建立了八元数与非结合代数，同时，克利福德(Clifford, W. K.)将八元数(复四元数)及外代数推广到一般克利福德代数，并将其成功地应用于非欧几里得空间中运动的研究.

19 世纪和 20 世纪之交，库默尔(Kummer, E. E.)引入对代数数论有重要影响的理想数概念，他于 1844 年指出整环未必有惟一分解性质. 戴德金将库默尔理想数推广并引出现代理想的概念，建立了代数数域的理论和代数整数环上理想的惟一分解定理. 特别是 1894 年，嘉当(Cartan, E. J.)关于复单李代数的完全分类以及 1907 年，韦德伯恩(Wedderburn, J. H. M.)发展了嘉当关于实数域和复数域上线性结合代数的结构定理，从而创立了一般域上结合代数的结构定理，极大地发展了抽象代数的理论. 在此期间，群以及与其紧密相关的不变量概念在分析、几何、力学和理论物理中都发挥了重大影响，而这些学科的发展反过来又促进了代数的发展. 如诺特(Noether, M.)研究代数簇在双有理变换下的不变性质和关于曲面的著名定理，便导致多项式环理想理论的建立. 因此，深入研究代数的相关概念，以及从各种具体对象抽象出共同特性来进行公理化的研究，就导致抽象代数的进一步演变，促进了相对独立的学科，如群、域、线性代数、代数数论、环论等向纵深和综合两方面发展. 德国代数学派在这方面起了领导作用，戴德金、希尔伯特(Hilbert, D.)和韦伯以及施泰尼茨等对代数学抽象公理化的研究有很大贡献，其中突出的成就是布饶尔(Brauer, R. (D.))、哈塞(Hasse, H.)、诺特(Noether, A. E.)、阿尔贝特(Albert, A. A.)关于有限维结合代数的理论，它阐明了有理数域上单代数都是其中心 F 上的循环代数. 特别是诺特于 1920 年引入左(右)模的概念，并研究了模在有限群表示论中的作用，以及模与代数结构理论之间的联系，使模成为数学的重要工具，从而又推动了环论的发展. 1921 年，她写的“整环的理想理论”建立了交换诺特环理论，证明了准素分解定理，成为交换代数的里程碑. 1926 年，她又给出戴德金环的公理刻画，因此，诺特是抽象代数的奠基人之一. 她和阿廷(Artin, E.)以及他们的学生(包括中国数学家曾炯之)为中心，在 20 世纪 20—30 年代，对域论、类域论、代数的理想理论到阿廷环的推广取得辉煌成就. 其中，阿廷在 1927 年将代数结构定理推广到极小条件环上，就是著名的韦德伯恩-阿廷定理，成为环论发展的一个新里程碑；同时，克鲁尔(Krull, W.)创立了局部环的理想理论，范·德·瓦尔登(Van der Waerden, B. L.)等人发展并简化了单纯代数的结构和环的理想理论. 20 世纪 30 年代初，范·德·瓦尔登的《近世代数学》综合总结了从伽罗瓦起 100 年来抽象代数各方面的工作，是抽象代数的一个里程碑. 由于抽象代数的理论和方法已渗透到数学的各个学科和其他领域(如理论物理、晶体学)，这就反过来推动抽象代数在深度和广度上更加迅速发展，范·德·瓦尔登的书只能是现代数学工作者的基础了. 抽象代数的各分支学科之间，以及与其他学科之间的相互渗透，不仅促进这些学科

的进一步发展，也促进了新学科的形成. 比如，同期，范·德·瓦尔登与扎里斯基(Zariski, O.)首先将交换代数的方法引进代数几何；在20世纪40年代，韦伊(Weil, A.)又用抽象代数的方法建立了一般域上代数几何的理论. 又如，域上多重线性代数的概念和理论推广到交换环上形成环上多重线性代数.

从20世纪40年代初开始，抽象代数进入一个新的阶段. 1945年，雅各布森(Jacobson, N.)引入根及本原环的理论，成为环论发展的新阶段. 另一方面，作为线性代数推广的模论得到进一步发展并产生深刻影响. 在20世纪20—30年代出现了以生成元及其定义关系所定义的无限群，经霍尔(Hall, P.)、马尔采夫(Мальцев, А. И.)等人的精彩工作，到20世纪40年代已形成独立体系. 1962年，费特(Feit, W.)与汤普森(Thompson, J. G.)关于奇数阶群必为可解群的定理，是对有限单群分类的重大突破. 从伽罗瓦引入置换群，其后证明 $A_n(n\geqslant 5)$ 是单群到1981年有限单群分类的完全解决，经历了约150年之久. 同期，李代数也得到深入发展，不仅推广到一般域，而且无限维李代数从20世纪60年代崛起，作为复单李代数推广的卡茨-穆迪代数就是卡茨(Kac, V.)与穆迪(Moody, R.)于1968年彼此独立建立的. 它与理论物理有密切关系. 而李群的深入发展派生出代数群，即群是代数闭域上仿射簇. 代数群及其表示理论与多重线性代数、交换环论、代数几何、李代数等都有十分密切的联系，近年来已成为抽象代数的活跃分支.

在抽象代数中同态和同构起主要作用，它不考虑代数系的特殊结构，而是用统一方法去研究，这种作为各代数结构的比较性研究，首先是把群论、环论和格论中一些共同的概念和平行的结果推广到代数系上去，这就产生了泛代数，20世纪30年代末提出的伯克霍夫定理，是它独立发展的起点. 泛代数(不限于二元运算)是以各种不同的代数系之间的共性为主要研究对象的学科，它对模型论、自动机理论和程序语言的语义学都有应用.

将同一种代数以及它们之间的同态映射合起来考虑，就会发现这与数学其他分支研究的对象以及对象间的联系(如拓扑空间及连续映射，集合及映射，环及同态等)有许多本质上的共性. 1945年，由艾仑伯格(Eilenberg, S.)、麦克莱恩(Maclane, S.)通过研究对偶空间的自然变换建立的范畴论，正好讨论了这些共性. 范畴是比集合更高层次的公共语言，这种语言和它的理论已渗透到代数几何(由格罗腾迪克(Grothendieck, A.)和迪厄多内(Dieudonné, J.)于1960年引入)和代数的以及数学的许多分支(如戈德门特(Godement, R.)，埃雷斯曼(Ehresmann, C.)于1958年分别引入拓扑学和微分几何)，并在其中起着重要作用.

由美国和欧洲数学家在20世纪40年代，几乎同时彼此独立发展起来同调代数，它是以代数拓扑为背景，以模为主要研究对象的学科，通过两类重要的函子$\otimes$与Hom及由它们导出的函子Tor，Ext得出刻画环的许多深刻结果. 由于代数拓扑中赫维茨(Hurewicz, W.)问题的解决，导致1945年艾伦伯格和麦克莱恩定义了群的(系数在任意域上)上同调群. 同时，赫希施尔德(Hochschild, G.)引进了结合代数的上同调群，谢瓦莱(Chevalley, C.)等人又发展了李代数的上同调群. 同调代数在数论、群论、代数拓扑、代数几何中都有重要作用. 当考虑李群或者作为它的推广的H空间的同调以及上同调时，就得到霍普夫代数. 它的研究是由霍普夫(Hopf, H.)于1941年开始的，博雷尔(Borel, A.)于1953年推广其基本结构定理. 霍普夫代数的理论是代数拓扑的常用工具，它在物理学中的模型是量子群.

20世纪60年代起蓬勃发展的代数K理论，它同拓扑K理论一样是源于格罗腾迪克于1957年的广义黎曼-罗赫定理的工作. 人们企图推广线性代数中某些部分如维数理论到环的模上而发展成为由环范畴到阿贝尔范畴的一系列函子，代数K理论就是研究这些函子(如$K_0, K_1, K_2, \cdots$等)的理论，它不仅对刻画环的性质起重要作用，而且在代数几何等其他学科中也有着值得重视的作用. 用模、范畴、同调代数的语言和理论来刻画和研究环，从而使环论的发展推向更新的阶段.

应该指出，20世纪50年代，塞尔(Serre, J. P.)把代数簇理论建立在层的概念上，并建立了凝聚层的上同调，这为格罗腾迪克建立概型理论奠定了基础，从而使代数几何的研究进入一个新阶段. 概型理论也为代数数论提供了新的理论和方法. 代数几何与数学许多分支密切相关，互相促进. 如代数几何中的超越方法与偏微分方程、微分方程、微分几何、拓扑学紧密相关，代数几何在控制论与现代粒子物理中也有广泛应用.

抽象代数学的这些理论发展的同时，由于电子技术的发展和电子计算机的广泛应用，抽象代数学的一些成果和方法可直接应用到工程技术中，如代数编码学、语言代数学、代数自动机理论等新的应用代数学的领域相继产生和发展. 同时它又是离散数学的重要组成部分，并对组合数学的突起和蓬勃发展产生重大影响. 这些新的应用推动了近代应用代数学的形成、发展与完善.

近世代数(Modern Algebra)　即"抽象代数".

撰　稿　朱元森

审　阅　许永华　刘绍学　佟文廷　戴执中

拓扑学(topology)　现代数学的重要的分支学科.它研究几何形体在连续形变,精确地说,双方一一而且双方连续的变换(称为同胚)之下保持不变的性质.理解的广泛些,它是研究数学中连续性现象的学科.

拓扑学萌芽很早,但直到19世纪末才开始从不同的方面正式形成学科.20世纪末,拓扑学已发展为现代数学的一个庞大的学科,包括作为现代数学的基础的拓扑空间理论为核心内容的一般拓扑学,运用抽象代数的概念和方法为工具的代数拓扑学,进而派生出以流形为主要对象的微分拓扑学以及几何拓扑学等方面.拓扑学可简称为拓扑,但拓扑一词还可作为拓扑空间中的拓扑结构理解.

拓扑学最初被称为形势几何学(geometria situs),这是莱布尼茨(Leibniz,G. W.)于1679年提出的,他预见到现在所称的组合拓扑学.最早为人所知的拓扑学定理可能是所谓的欧拉公式.欧拉(Euler,L.)于1750年发表了任何闭的凸多面体的顶点数v,棱数e和面数f有关系$v-e+f=2$.用现代说法,它是一个拓扑不变量,称为欧拉示性数.据史学家考证,笛卡儿(Descartes,R.)在1639年就知道它,并且莱布尼茨通过笛卡儿未发表的手稿于1675年得知这一结果.另一著名的结果是哥尼斯堡七桥问题的解决,欧拉在1736年将问题表成能否一笔画一个给定的图,并给出了一般性的解答.德国数学家高斯(Gauss,C. F.)于1827年得到曲面上曲率的积分与欧拉示性数的关系,他于1823年在电动力学中用线积分定义了空间中两条封闭曲线的环绕数.利斯廷(Listing,J. B.)于1848年第一次采用了拓扑学一词,其实他认为宁愿用形势几何,只是已被别人采作他用.黎曼(Riemann,B.)于1851年定义了黎曼面,引进了连通性和亏格,实际上解决了可定向闭曲面的分类问题,给拓扑学的建立以巨大的推动.1858年,默比乌斯(Möbius,A. F.)和利斯廷独立地发现了单侧的曲面,现被更确切地称为不可定向曲面.默比乌斯于1863年恰当地指出形势几何学的定义.贝蒂(Betti,E.)于1870年定义了高维的连通性.若尔当(Jordan,C.)于1887年提出曲线定理,但证明是错的,直到1905年才得证.

拓扑学正式成为一门独立的学科是庞加莱(Poincaré,H.)实现的.他于1892年发表了题为"论形势分析"的短文,然后于1895年发表了题为"形势分析"的120页的长文,介绍它的概念,其中有同调、贝蒂数、相交、基本群,甚至隐含着上同调;建立了对偶定理和欧拉-庞加莱公式.随后直到1904年,他连续发表了五篇补充,为改进前述长文中的缺点创立了剖分方法,定义了挠系数,开始探讨三维流形的拓扑分类,构造出基本群不平凡而一维贝蒂数平凡的三维流形,并提出了著名的至今尚未解决的庞加莱猜想:基本群平凡的三维闭流形同胚于三维球面.这几篇文章奠定了组合拓扑学的基础,其思想之丰富,观念之深刻,影响之深远,一言难尽,但不够严密或缺乏证明,后来的进展正是从此入手,将这门学科建立在严格的逻辑上而发展为后来的组合拓扑学、代数拓扑学,进而发展出微分拓扑学等学科和分支.

拓扑学的另一个渊源是分析学的严密化.实数的严格理论以及傅里叶级数惟一性的讨论推动着德国数学家康托尔(Cantor,G.)从1872年起系统地展开了欧氏空间中点集的研究,得出极限点、导集等概念,进而得到开集、闭集、稠密性和连通性等概念,并从欧氏空间的点集发展为一般的集合论以及超限基数和序数的理论.这一革命性的进展结合19世纪另一由非欧几何引起的革命性的进展——数学公理化的潮流,产生了抽象空间的研究.弗雷歇(Fréchet,M. R.)于1906年定义了度量空间,豪斯多夫(Hausdorff,F.)于1914年出版了《集论大纲》,用开邻域定义了一般的拓扑空间,标志着用公理化方法研究连续性的一般拓扑学的产生.随后,对拓扑空间的基本性质如分离性、紧致性、连通性和维数等开展了系统研究,至20世纪30年代中期后,开展了关于一致性和仿紧性的研究,到20世纪50年代初,度量化问题获得基本解决,此时,一般拓扑学已发展成熟,并且其基本理论已成为现代数学的共同基础.

组合拓扑学在1910—1912年间受到布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)的决定性的推动,他引进了单纯逼近方法,以证明欧氏空间维数不变性,区域不变性,若尔当曲线定理在高维的推广,闭球体上连续映射不动点的存在性,向量场奇点的存在性,并定义了映射度和紧度量空间维数概念.有理由认为庞加莱与布劳威尔共同创建了组合拓扑学,更精确地说,庞加莱确定了组合拓扑学的对象,包括引进了一批基本定义,罗列了一批有待严格证明的重要"定理",而布劳威尔则设计了决定性的方法——单纯逼近,获得上述一批自己的定理.后人运用它得以证明庞加莱的"定理".例如,亚历山大(Alexander,J. W.)于1915年运用单纯逼近完成贝蒂数和挠系数是拓扑不变性的证明.这样一来,组合拓扑学在概念精确和论证严密两方面都达到了应有标准.

公理化代数学的奠基人之一的诺特(Nöther,A. E.)于1926年在一篇论文中首次提出用群来表示同调论.这影响到霍普夫(Hopf,H.)和维托利斯(Vietoris,L.),他们立即采用,从此同调的研究便以同调群、同调模以及同调环等为对象.组合拓扑学实现了代数化而成为代数拓扑学,抽象代数学成了拓扑学的基本哲学武器.20世纪30年代的重要成就有:德拉姆定理,霍普夫三维球面到二维球面的非

零伦映射，上同调群及上同调乘积的定义，高维同伦群的定义. 20 世纪 40 年代得到同调论的公理化，建立了同调代数学，并且发明了谱序列和建立了束论，使 20 世纪 50 年代以后的代数拓扑学突飞猛进. 其间微分拓扑学的协边理论和受到代数学、代数几何学和微分拓扑学影响而产生的 K 理论都是广义的同调论. 并已从理论上弄清了，同调论（包括广义的在内）本质上是同伦论的一部分.

还应强调的一个交叉发展是对紧度量空间或更一般的空间，先后由亚历山大罗夫（Александров，П. С.）、维托利斯和切赫（Čech，E.）引进了同调概念，现时称为奇异同调及上同调和切赫同调及上同调等，这标志着组合拓扑学或代数拓扑学与一般拓扑学的交汇和融合.

微分拓扑学是研究微分流形和微分映射的拓扑学. 微分流形是一个拓扑流形，其上带有一个分析学结构称为光滑结构. 庞加莱建立组合拓扑学时的几何对象其实是微分流形，不过他关注的是拓扑性质而忽略了光滑结构. 直到 20 世纪 30 年代，微分流形的研究才系统展开. 凯恩斯（Cairns，S. S.）证明了微分流形均可剖分为组合流形，惠特尼（Whitney，H.）开始研究微分流形在欧氏空间中的嵌入和浸入，沙爱福（Seifert，H. R. I.）和惠特尼先后引进了纤维丛，惠特尼和施蒂费尔（Stiefel，E. L.）同时独立地引进示性类，而使微分流形的拓扑学的研究与同调论和同伦论结合起来，成为代数拓扑学的一个重要部分而得以发展. 20 世纪 40 年代，庞特里亚金（Понтрягин，Л.）和陈省身定义了新的示性类，吴文俊和托姆（Thom，R.）对示性类理论做了深入研究. 20 世纪 50 年代初，托姆在协边理论上突破，使困难的微分拓扑学问题化为同伦论的问题而得以解决. 1956 年，米尔诺（Milnor，J. W.）发现七维球面上除通常的光滑结构外还有另外的光滑结构，称为怪异结构，而轰动世界. 其后凯伐勒（Kervaire，M.）构作出不能赋予任何光滑结构的组合流形. 这些成果说明拓扑流形、组合流形和微分流形三种范畴之间有原则区别. 从此微分拓扑学成为一个独立的拓扑学分支. 20 世纪 60 年代初期，斯梅尔（Smale，S.）运用莫尔斯理论证明了五维以上的广义庞加莱猜想，米尔诺发展了换球术技术，并首先应用于球面上光滑结构数目的计算，后被许多人推广应用于三种范畴的流形问题，到 20 世纪 70 年代初，已获得极大的成效. 此时，流形拓扑学的研究已成为拓扑学的主流.

在流形的研究中，人们最初从低维的几何对象着手. 其中零维和一维的流形分类是平凡的，二维流形即曲面，其分类从 19 世纪黎曼起到 20 世纪初完成. 从庞加莱时代到 20 世纪早期便主攻三维流形分类，同时还研究三维空间中的扭结，虽有重要进展但很缓慢. 人们自然认为流形拓扑学研究所遇到的困难会随着流形的维数的增高而越来越大. 然而，半个多世纪来的流形拓扑学历史表明事情正好相反，最困难的维数是三维和四维. 之所以如此，是因为流形拓扑学的基本技术要用到一个被称为惠特尼技巧（Whitney trick）的重要引理，它在四维以下不再成立. 20 世纪 70 年代，低维拓扑学，即三维与四维的流形拓扑学，开始有重要突破. 瑟斯顿（Thurston，W. P.）于 20 世纪 70 年代末，对三维流形分类运用双曲几何学而取得明显进展. 在四维拓扑学方面，1982 年春，弗里得曼（Fredman，M.）运用凯森（Casson，A.）环柄得到了单连通闭拓扑四维流形的拓扑分类，其中包括证明了四维广义庞加莱猜想；紧接着，唐纳森（Donaldson，S. K.）于 1982 年秋发现，四维单连通闭微分流形的性质很特殊. 从这两人的结果立刻推论出四维欧氏空间 R^4 上除通常的光滑结构外，还有怪异的光滑结构，而四维以外的欧氏空间上光滑结构是惟一的. 进而又发现 R^4 上有不可数多个互不微分同胚的怪异结构. 这个惊人的结果发人深思. 低维拓扑学由于其方法的特点，有时被称为几何拓扑学. 还应注意，唐纳森定理是运用了理论物理学中的规范论而证明的，20 世纪 90 年代，这个理论进一步被塞伯格（Seiberg，N.）和维滕（Witten，E.）发展，而使四维拓扑学进一步深入.

拓扑学现已逐步渗透到现代数学的几乎所有的分支，并可应用到物理、化学、生物以及经济学等学科. 虽然拓扑学的结论本质上是定性的，但理论上往往极为重要. 例如，不动点定理被推广到分析学中而成为某些类方程解的存在性的判据. 直接在其他学科的应用可举核酸双螺旋的识别用到扭结理论，晶体和液晶的“缺陷”分类用到某些齐性空间同伦群的计算，集成电路布线应用示嵌理论等. 目前这个渗透到其他学科的过程还在加速和加深，使 20 世纪数学面貌发生巨大变化. 因此早已有人断言，“20 世纪将作为拓扑学的世纪而载入数学史册”[法国数学家迪厄多内（Dieudonné，J.）].

撰　稿　干丹岩
审　阅　姜伯驹

组　合　学

组合学(combinatorics)　亦称组合数学，数学的一个分支.它所研究的是数(shǔ)的技巧.虽然数(shǔ)数始于以结计数的远古时代，由于那时人的智力的发展尚处于低级阶段，谈不上有什么技巧.随着人们对于数的了解和研究，在形成与数密切相关的数学分支的过程中，如数论、代数、函数论以至泛函的形成与发展，逐步地从数的多样性发现数(shǔ)的多样性，产生了各种数(shǔ)数的技巧.同时，在人们对于形有了深入的了解和研究的基础上，在形成与形密切相关的各种数学分支的过程中，如几何学、拓扑学以至范畴论的形成与发展，逐步地从形的多样性也发现了数(shǔ)形的多样性，产生了各种数(shǔ)形的技巧.近代的集合论、数理逻辑等反映了潜在的数与形之间的结合.而现代的代数拓扑和代数几何等则将数与形密切地联系在一起了.这些，对于以数(shǔ)的技巧为中心课题的近代组合学的形成与发展都产生了而且还将会继续产生深刻的影响.

由此观之，组合学与其他数学分支有着必然的密切联系.它的一些研究内容与方法来自各个分支也应用于各个分支.当然，组合学与其他数学分支一样也有其独特的研究问题与方法，它源于人们对于客观世界中存在的数与形及其关系的发现和认识.例如，中国古代的《易经》中用十个天干和十二个地支以六十为周期来记载月和年，以及在洛书河图中关于幻方的记载，是人们至今所了解的最早发现的组合问题.于11和12世纪间，贾宪就发现了二项式系数，杨辉将它整理记载在他的《续古抉奇法》一书中.这就是中国通常称的杨辉三角.事实上，于12世纪印度的婆什迦罗第二(Bhāskara，Ⅱ)也发现了这种组合数.13世纪波斯的哲学家曾讲授过此类三角.而在西方，帕斯卡(Pascal，B.)发现这个三角形是在17世纪中期.这个三角形在其他数学分支的应用也是屡见不鲜的.同时，帕斯卡和费马(Fermat，P. de)均发现了许多与概率论有关的经典组合学的结果.因此，西方人认为组合学开始于17世纪.组合学一词是德国数学家莱布尼茨(Leibniz，G. W.)在数学的意义下首次应用.也许，在那时他已经预感到了其将来的蓬勃发展.然而只有到了18世纪欧拉(Euler，L.)所处时代，组合学才可以说开始了作为一门科学的发展，因为那时，他解决了哥尼斯堡七桥问题，发现了多面体(首先是凸多面体，即平面图的情形)的顶点数、边数和面数之间的简单关系.现在已被人们称为欧拉公式.甚至，当今人们所称的哈密顿圈的首创者也应该是欧拉.这些不但使欧拉成为组合学的一个重要组成部分——图论而且也成为占据现代数学舞台中心的拓扑学发展的先驱.同时，他对导致当今组合学中的另一个重要组成部分——组合设计中的拉丁方的研究所提出的猜想，人们称为欧拉猜想，直到1959年才得到完全的解决.于19世纪初，高斯(Gauss，C. F.)提出的组合系数，今称高斯系数，在经典组合学中也占有重要地位.同时，他还研究过平面上的闭曲线的相交问题，由此所提出的猜想称为高斯猜想，它直到20世纪才得到解决.这个问题不仅贡献于拓扑学，而且也贡献于组合学中图论的发展.同在19世纪，由布尔(Boole，G.)发现且被当今人们称为布尔代数的分支已经成为组合学中序理论的基石.当然，在这一时期，人们还研究其他许多组合问题，它们中的大多数是娱乐性的.

20世纪初期，庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)联系多面体问题发展了组合学的概念与方法，导致了近代拓扑学从组合拓扑学到代数拓扑学的发展.于20世纪的中、后期，组合学发展之迅速也许是人们意想不到的.首先，于1920年费希尔(Fisher，R. A.)和耶茨(Yates，F.)发展了实验设计的统计理论，其结果导致后来的信息论，特别是编码理论的形成与发展.于1939年，坎托罗维奇(Канторович，Л. В.)发现了线性规划问题并提出解乘数法.于1947年丹齐克(Dantzig，G. B.)给出了一般的线性规划模型和理论，他所创立的单纯形方法奠定了这一理论的基础，阐明了其解集的组合结构.直到今天它仍然是应用得最广泛的数学方法之一.这些又导致以网络流为代表的运筹学中的一系列问题的形成与发展.开拓了人们目前称为组合最优化的一个组合学的新分支.在20世纪50年代，中国也发现并解决了一类称为运输问题的线性规划的图上作业法，它与一般的网络流理论确有异曲同工之妙.在此基础上又出现了国际上通称的中国邮递员问题.

另一方面，自1940年以来，生于英国的塔特(Tutte，W. T.)在解决拼方问题中取得了一系列有关图论的结果，这些不仅开辟了现今图论发展的许多新研究领域，而且对于20世纪30年代，惠特尼(Whitney，H.)提出的拟阵论以及人们称之为组合几何的发展都起到了核心的推动作用.应该特别提到的是在这一时期，随着电子技术和计算机科学的发展愈来愈显示出组合学的潜在力量.同时，也为组合学的发展提出了许多新的研究课题.例如，以大规模和超大规模集成电路设计为中心的计算机辅助设

计提出了层出不穷的问题. 其中一些问题的研究与发展正在形成一种新的几何，目前人们称之为组合计算几何. 关于算法复杂性的研究，自 1961 年库克(Cook，S. A.)提出 NP 完全性理论以来，已经将这一思想渗透到组合学的各个分支以至数学和计算机科学中的一些分支.

近 20 年来，用组合学中的方法已经解决了一些即使在整个数学领域也是具有挑战性的难题. 例如，范·德·瓦尔登(Van der Waerden，B. L.)于 1926 年提出的关于双随机矩阵积和式猜想的证明；希伍德(Heawood，P. J.)于 1890 年提出的曲面地图着色猜想的解决；著名的四色定理的计算机验证和扭结问题的新组合不变量发现等. 在数学中已经或正在形成着诸如组合拓扑、组合几何、组合数论、组合矩阵论、组合群论等与组合学密切相关的交叉学科. 此外，组合学也正在渗透到其他自然科学以及社会科学的各个方面，例如，物理学、力学、化学、生物学、遗传学、心理学以及经济学、管理学甚至政治学等.

根据组合学研究与发展的现状，它可以分为如下五个分支：经典组合学、组合设计、组合序、图与超图和组合多面形与最优化. 由于组合学所涉及的范围触及到几乎所有数学分支，也许和数学本身一样不大可能建立一种统一的理论. 然而，如何在上述的五个分支的基础上建立一些统一的理论，或者从组合学中独立出来形成数学的一些新分支将是对 21 世纪数学家们提出的一个新的挑战.

在中国当代的数学家中，较早地在组合学中的不同方面作出过贡献的有华罗庚、吴文俊、柯召、万哲先、张里千和陆家羲等. 其中，万哲先和他领导的研究组在有限几何方面的系统工作不仅对于组合设计而且对于图的对称性的研究都有影响. 陆家羲的有关不交斯坦纳三元系大集的一系列的文章不仅解决了组合设计方面的一个难题，而且他所创立的方法对于其后的研究者也产生了和正产生着积极的作用.

组合数学(combinatorial mathematics) 即“组合学”.

组合论(combinatorial theory) 组合学的一部分，它主要包括经典组合学与组合设计.

离散数学(discrete mathematics) 现代数学的一个分支. 凡是以不连续(即离散)现象为研究对象的数学都属于离散数学. 它的内容主要包括：组合数学、算法的理论与分析、编码理论、数理逻辑中的命题逻辑、谓词逻辑、集合代数、模糊集论；代数中的有限群论、环论、域论、格论和布尔代数、有限几何；微分方程中的计算理论；以及离散型概率等. 离散数学的建立和形成与计算机科学的发展是密切相关的. 随着现代科学技术的发展，特别是计算机的广泛应用，离散数学越来越受到重视，而且发展很快.

撰 稿 刘彦佩
审 阅 徐利治 颜基义

经典组合学

经典组合学(classic combinatorics) 亦称组合分析. 组合学中的经典部分. 它与许多数学分支在内容上有交叉，目前还难以在一个统一的数学理论的范畴内进行表述和研究. 大体上说，经典组合学是研究将某种离散对象按某个确定的约束条件进行安排的问题. 一个符合确定的约束条件的安排称为一个特定安排. 经典组合学的内容可分为三大部分：

1. 计数，包括生成函数(也称母函数)、反演理论和有限差分计算.

2. 序理论，包括有限偏序集和格，以及霍尔定理和拉姆齐定理等存在性定理.

3. 布局，包括正交拉丁方、区组设计、正交表、阿达马矩阵、差集等.

经典组合学常讨论以下三个问题，即特定安排的存在性问题、特定安排的计数问题和寻求在某个优化准则下的最优解.

经典组合学也是数学的一个古老的分支. 约在公元前 2200 年，中国就有所谓洛书河图，即一种“用整数 1，2，3，4，5，6，7，8，9，排成的 3×3 方阵，使得每行每列以及两条对角线中的各数之和都是同一个数”的特定安排. 传说洛书是画在神龟背上的. 若用整数表出，则为著名的“农神”幻方

$$\begin{bmatrix}4 & 9 & 2\\3 & 5 & 7\\8 & 1 & 6\end{bmatrix}.$$

于 11 和 12 世纪间，宋人贾宪发现了二项式系数之后，被杨辉记载到他的著作中，并且得到了较广泛的应用. 这就是所谓杨辉三角. 在 12 世纪，印度的婆什迦罗第二(Bhāskara，Ⅱ)也发现了这个组合数. 于 19 世纪，德国数学家高斯(Gauss，C. F.)又发现了另一种重要的组合数，这就是所谓高斯系数. 在现代，组合的方法已在计算机科学、运输、信息处理、工业计划、电气工程、试验设计、抽样、编码、遗传学、政治科学、考古学和其他领域被广泛地应用，并取得了巨大的进展.

组合分析(combinatorial analysis) 即“经典组合学”.

特定安排(specified arrangement) 见“经典组合学”.

计数问题(problem of enumeration) 组合学中的一个基本问题. 把某种离散对象按某个特定的

约束条件进行安排，确定合乎这种约束条件的安排的数目. 在组合学中，常用的计数工具有：生成函数、容斥原理、默比乌斯反演定理和波利亚定理等.

加法法则(rule of sums)　计数理论的基本法则之一. 若$\{A_i|i=1,2,\cdots,n\}$是两两不相交的有限集的有限族，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|.$$

换句话说，若计数的对象可以分为互不相交的n类情形，每类的对象都是有限数时，则对象的总个数等于每类对象的个数之和. 这里及以后，对任一有限集A，$|A|$表示A中元素的个数.

乘法法则(rule of products)　计数理论的基本法则之一. 若$\{A_i|i=1,2,\cdots,n\}$是有限集的有限族，则笛卡儿积$\prod_{i=1}^{n}A_i$的计数

$$\left|\prod_{i=1}^{n}A_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|.$$

换句话说，若完成一事件要依次经过n个步骤，且在完成前$i-1$个步骤的情况下，完成第i个步骤有n_i种方法，则完成该事件的方法共有$n_1n_2\cdots n_n$种.

相等法则(rule of equality)　计数理论的基本法则之一. 若N和R都是有限集，而且它们之间有一种一一映射关系，则$|N|=|R|$. 换句话说，若两个有限集有一一对应关系，则它们每个所含元素的个数相等.

殊途计数法则(rule of counting in two ways)　计数理论的基本法则之一. 若$G(V_1\cup V_2,E)$是一有限二部图，设无边的二顶点集为V_1和V_2，以$\gamma(v)$表与顶点v关联的边数，则

$$\sum_{v\in V_1}\gamma(v)=\sum_{v\in V_2}\gamma(v).$$

换句话说，用不同方法计数同一对象，计数的结果相等.

排列(permutation)　亦称置换，一类基本组合数. 从有限集中有序地选出若干个元，称为排列. 从n元选出$r(\leqslant n)$元的排列数为

$$P_r^n=n(n-1)\cdots(n-r+1).$$

若$r=n$，则全排列数等于$n!$. 排列数P_r^n受$n\geqslant r\geqslant 1$的限制. 为了解决问题的需要，可以加以扩充. 定义：若$n\geqslant r=0$，$P_r^n=1$；若$0\leqslant n<r$，$P_r^n=0$.

置换(permutation)　即“排列”.

可重排列(permutation with repetition)　一类组合数. 从非空集合$X=\{1,2,\cdots,n\}$中，每次取出r个元素，元素允许重复且按一定顺序排成一列，这种排列称为集合X的一个r可重排列. 集合X的r可重排列的总数为n^r.

多重集(multiset)　允许有相同元的有限集. 多重集S常记为$S=\{i^{k_i}|i=1,2,\cdots,n\}$，$k_i$表示元$i$的个数，称为元$i$的重数. 多重集$S$的排列数为

$$\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}.$$

多重集S的排列称为集$[1,n]$的$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$排列，或多重排列，其中$[1,n]=\{1,2,\cdots,n\}$.

多重排列(mulli-permutation)　见“多重集”.

多项式系数(multinomial coefficient)　一类组合数. 多项式$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$的展开式中，项$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$的系数. 记为

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_m}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!},$$

这里$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$. 多项式系数的组合意义如下：将n个可分辨的球，分放到m个不同的盒子T_1，T_2，…，T_m中，在T_1中放n_1个，在T_2中放n_2个，…，在T_m中放n_m个，而$n_1+n_2+\cdots+n_m=n$，若在同一盒子中不计球的次序，则共有

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_m}$$

种放法. 另外，多重集$\{x^{n_i}|i=1,2,\cdots,m\}$的全排列数等于

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_m},$$

其中

$$\sum_{i=1}^{m}n_i=n.$$

组合(combination)　组合学的基本概念. 从有限集中不计次序地选出若干元称为组合. 从n元选出$r(r\leqslant n)$元的组合数为

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

组合数$\binom{n}{r}$对参数n,r有取值的限制条件$n\geqslant r\geqslant 1$. 为了解决问题的需要，可以加以扩充. 定义：若$r=0$，$\binom{n}{r}=1$；若$0\leqslant n<r$，或$r<0\leqslant n$，$\binom{n}{r}=0$；若$n<0$且$r>0$，

$$\binom{n}{r}=(-1)^r\binom{|n|+r-1}{r};$$

若$n<0$，且$r<0$，

$$\binom{n}{r}=(-1)^{n+r}\binom{|r|-1}{|n|-1}.$$

可重组合(combination with repetition)　一类组合. 从非空集合$X=\{1,2,\cdots,n\}$中，每次取出r个元素，允许元素重复，且不计顺序. 这种组合称为集合X的一个r可重组合. 集合X的r可重组合的总数为

$$\binom{n+r-1}{r}.$$

组合恒等式(combinatorial identity)　表示二项式系数之间关系的恒等式. 下面为一些常见的组合恒等式:

1. $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\cdots+\binom{k-1}{k-1}=\binom{n}{k}$.
2. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$.
3. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$.
4. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots$
   $=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$.
5. $1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$.
6. $\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}$.
7. $\binom{n}{r}=\binom{n-m}{0}\binom{m}{r}+\binom{n-m}{1}\binom{m}{r-1}$
   $+\binom{n-m}{2}\binom{m}{r-2}+\cdots+\binom{n-m}{r}\binom{m}{0}$.

杨辉三角形(Yang Hui triangle)　亦称帕斯卡三角形. 指特定的数表. 把$(a+b)^n$的展开式中$a^{n-r}b^r$项的系数$\binom{n}{r}$排列成下表

n \ r	0	1	2	3	4	5	…
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

根据

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1},$$

每个系数是上一行同列及其左列相继的两系数的和. 这个表称为杨辉三角形. 杨辉在《详解九章算法》(约13世纪)中指出,这个三角形出自《释镇算书》,贾宪(约1200年)曾用过它,比帕斯卡(Pascal,B.)早了300多年.

帕斯卡三角形(Pascal triangle)　即"杨辉三角形".

生成函数(generating function)　亦称母函数、发生函数、计数函数. 一类形式幂级数. 它在组合数学中用以解决计数问题. 生成函数方法的系统描述,最早见于拉普拉斯(Laplace,P.-S.)1812年的名著《概率解析理论》. 普通生成函数和指数型生成函数是两种常用的生成函数. 记数列$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$为$\{a_n\}$. 数列$\{a_n\}$的普通生成函数(有时简称生成函数)定义为形式幂级数:

$$G\{a_n\}\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

数列$\{a_n\}$称为$G\{a_n\}$的普通生成数列. 这里,变量x一般取自实数域或复数域,x也可看做是一种形式变元,此时形式幂级数可按通常方式定义加法、乘法、形式微积分等运算,从而将形式幂级数看成元素,其全体做成一个交换环,在其中不涉及收敛性等问题. 两个形式幂级数$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$和$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots$相等,当且仅当$a_k=b_k,k=0,1,2,\cdots$普通生成函数有下列运算法则:

1. $G\{a_k\}+G\{b_k\}=G\{a_k+b_k\}$.
2. $G\{a_k\}\cdot G\{b_k\}=G\{c_k\}$,这里
   $c_k\equiv a_0b_k+a_1b_{k-1}+\cdots+a_{k-1}b_1+a_kb_0$,

称为数列$\{a_k\}$和$\{b_k\}$的卷积. 数列$\{a_n\}$的指数型生成函数定义为形式幂级数

$$\mathrm{Ge}\{a_n\}\equiv a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n!}x^n+\cdots,$$

数列$\{a_n\}$称为$\mathrm{Ge}\{a_n\}$的指数生成数列(参见"指数型生成函数").

母函数(generating function)　即"生成函数".

发生函数(generating function)　即"生成函数".

普通生成函数(ordinary generating function)　见"生成函数".

普通生成数列(ordinary generating sequence)　见"生成函数".

数列的卷积(evolution of sequences)　见"生成函数".

指数生成数列(exponential generating sequence)　见"生成函数".

计数生成函数(enumerating generating function)　亦称计数式或计数函数. 一类非负整系数未定元带非负整数幂的级数. 若关于参数n(非负整数)计数的结果是a_n,则形式幂级数$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$称为依参数$n$展开的计数生成函数. 计数生成函数就是计数结果所成数列$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$的普通生成函数. 若计数生成函数是有限项的,则其计数式就称为计数多项式(参见"邮票排列问题"和"天平问题").

计数式(enumerator)　即"计数生成函数".

计数函数(enumerating function)　见“计数生成函数”.

计数多项式(enumerating polynomial)　见“计数生成函数”.

指数型生成函数(exponential generating function)　一类计数函数. 记数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$ 为 $\{a_n\}$. 数列$\{a_n\}$的指数型生成函数为幂级数

$$\mathrm{Ge}\{a_n\}\equiv a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n!}x^n+\cdots$$

(参见“生成函数”). 当利用生成函数的项的系数来计算与排列有关的数列时,利用指数型生成函数更加有利. 例如,$b_k=P(n,k)$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$,表示从 n 个不同元素中取 k 个不同元素的排列数,即 $P(n,k)=n!/(n-k)!$,那么

$$\mathrm{Ge}\{b_k\}=P(n,0)+P(n,1)x+P(n,2)\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{P(n,n)x^n}{n!}=(1+x)^n.$$

重排(derangement)　亦称错排或更列. 一类特殊的排列. 若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,满足 $a_i\neq i(i=1,2,\cdots,n)$,则称这样的排列为$(1,2,\cdots,n)$的一个重排. 用 D_n 表示$(1,2,\cdots,n)$的重排的个数,它满足下列递归关系:$D_{n+1}=n(D_n+D_{n-1})$,并有初值 $D_1=0,D_2=1$,一般表达式为

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

D_n 有指数型生成函数

$$\sum_{n\geqslant 0}D_n\frac{t^n}{n!}=\mathrm{e}^{-t}(1-t)^{-1}.$$

前 10 个 D_n 的值如下表:

n	0	1	2	3	4	5
D_n	1	0	1	2	9	44

6	7	8	9	10
265	1854	14833	133496	1334961

错排(derangement)　即“重排”.

更列(derangement)　即“重排”.

相遇问题(problem of encounter)　一类组合问题. 给定一个 n 元置换

$$\varphi=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix},$$

若 $\varphi(i)=a_i=i$,则称置换 φ 在 i 处有一次相遇. 求 n 次置换中恰有 k 次相遇的置换的总数 $P_n(k)$的问题就是相遇问题. 求 $P_n(k)$可归结为求重排数 D_n 的问题. 实际上

$$P_n(0)=D_n,\quad P_n(k)=\binom{n}{k}=D_{n-k}.$$

相遇(encounter)　见“相遇问题”.

邮票排列问题(problem of stamp permutation)　一类确定某种排列数的问题. 寄信需邮票 n 分,今用面值为 a_1 分,a_2 分,$\cdots$,a_k 分$(a_1<a_2<\cdots a_k\leqslant n)$的 k 种邮票各若干枚,依任意方式依次贴在信封右上角,其面值总和恰为 n 分,不同的排列方式为不同贴法,求有多少种邮票贴法?这就是邮票排列问题. 其计数多项式为$(x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_k})^n$. 若用 p 枚邮票依此粘贴,其值总和为 n 分,则贴法数等于$(x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_k})^p$ 展开式中 x^n 的系数. 因此,邮票贴法总数 A_n 的计数生成函数是

$$G\{A_n\}=1+\sum_{p=1}^{\infty}(x^{a_1}+x^{a_2}+\cdots+x^{a_k})^p=\frac{1}{1-x^{a_1}-x^{a_2}-\cdots-x^{a_k}},$$

这里规定 $A_0=1$. A_n 等于 $G\{A_n\}$中 x^n 的系数. 满足递归关系:$A_n=A_{n-a_1}+A_{n-a_2}+\cdots+A_{n-a_k}$,这里规定 $A_i=0,i<0$.

天平问题(scales problem)　一个趣味组合计数问题. 设有重量分别为 a_1 克,a_2 克,$\cdots$,a_k 克的 k 个砝码,$a_i(i=1,2,\cdots,k)$均为整数. 今要在天平上衡量重为 n 克的重物,问有多少种不同衡重方法?若规定砝码只能加在天平一端,则不同方式总数 A_n 的计数生成函数是

$$G\{A_n\}=(1+x^{a_1})(1+x^{a_2})\cdots(1+x^{a_k});$$

若规定砝码可加在天平两端,则不同方式总数 B_n 的计数生成函数

$$G\{B_n\}=(x^{-a_1}+1+x^{a_1})\times(x^{-a_2}+1+x^{a_2})\cdots(x^{-a_k}+1+x^{a_k}).$$

例如 $a_1=1$ 克,$a_2=3$ 克,$a_3=4$ 克,$a_4=6$ 克,则 $n=6$ 克的不同方式 B_6 有 4 种,这里砝码放法〈天平左端,天平右端〉是:〈n,6〉,〈$n+1$,$3+4$〉,〈$n+1+3$,$4+6$〉和〈$n+4$,$1+3+6$〉,其中 n 表示重 6 克的物体.

交错排列(alternative permutation)　多重集的一种全排列. 多重集 $M=\{a_i^{n_i}\mid i=1,2,\cdots,r\}$的相邻元相异的全排列称为交错排列. M 的交错排列数等于

$$f(n_1,n_2,\cdots,n_r)=\sum_{\substack{1\leqslant t_i\leqslant n_i\\1\leqslant i\leqslant r}}\prod_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{n_i-t_i}\binom{n_i-1}{t_i-1}\frac{(t_1+t_2+\cdots+t_r)!}{t_1!t_2!\cdots t_r!}.$$

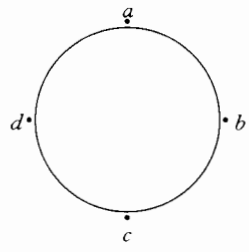
连贯(continuation)　多重集的一种全排列. 若 π 是多重集 $M=\{a_i^{n_i}\mid i=1,2,\cdots,r\}$的一个全排列,把 π 按元的同异分段,使得同一段内的元相同,而相邻段内的元相异,则每段称为一个连贯. M 的恰有 m 个连贯的全排列数为

$$F(n_1,n_2,\cdots,n_r)$$
$$=\sum\prod_{1\leqslant i\leqslant r}\binom{n_i-1}{m_i-1}f(m_1,m_2,\cdots,m_r),$$

其中求和跑遍满足条件 $m_1+m_2+\cdots+m_r=m$，$1\leqslant m_i\leqslant n_i$，$1\leqslant i\leqslant r$ 的所有 $(m_1,m_2,\cdots,m_r)$，

$$f(m_1,m_2,\cdots,m_r)$$
$$=\sum_{\substack{1\leqslant t_i\leqslant m_i\\1\leqslant i\leqslant r}}\prod_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{m_i-t_i}\binom{m_i-1}{t_i-1}\frac{(t_1+t_2+\cdots+t_r)!}{t_1!t_2!\cdots t_r!}.$$

圆排列(circular permutation)　一类重要的排列. 把若干元排列在圆周上，就构成了一个圆排列. 这里并不指定圆周上哪一个位置上的元处于首位，因此圆排列与线排列不同. 有两种不同的圆排列. 第一种称为单绕向圆排列：对圆周上元的排列顺序，顺时针与反时针视为不同. 典型问题为手镯问题. 例如圆排列依顺时针绕向有 $abcd$，$bcda$，$cdab$，$dabc$，这四种(线)排列都表示同一个单绕向圆排列；但依反时针绕向有 $adcb$，$dcba$，$cbad$，$badc$，则表示与前者相异的一个单绕向圆排列. 用群的观点说，这是在循环群作用下保持不变的圆排列. 第二种称为双绕向圆排列：对圆周上元的排列顺序，顺时针与反时针视为相同. 典型问题为项链问题. 如上例中八种(线)排列都表示同一个双绕向圆排列. 用群的观点说，这是在两面体群作用下保持不变的圆排列. 求给定约束条件下所有不同圆排列的个数，称为圆排列问题. 其基本形式有两种：



1. 求从 r 种相异元中可重复地任取 n 个元所组成的圆排列数.

2. 求从 r 种相异元中任取 n 个元，满足下述条件的圆排列数：第 i 种元恰有 $b_i(i=1,2,\cdots,r)$ 个且

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=n.$$

一般地可用反演公式或伯恩赛德引理来求解圆排列问题(参见“手镯问题”和“项链问题”).

单绕向圆排列(circular permutation with one direction)　见“圆排列”.

双绕向圆排列(circular permutation with two directions)　见“圆排列”.

圆排列问题(problem of circular permutation)　见“圆排列”.

手镯问题(problem of bracelet)　一种圆排列问题. 用 r 种不同颜色的珠子穿成手镯，求所有不同的手镯数. 这个问题称为手镯问题. 手镯问题应解释为第一种单绕向圆排列. 穿手镯的珠子可以从 r 种颜色中允许重复任取 n 个，也可以限定第 i 种颜色取 $b_i(i=1,2,\cdots,r)$ 个，

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=n,$$

从而构成两类不同问题(参见“圆排列”). 两类手镯问题的解如下：

1. r 种颜色珠子中允许重复任取 n 个所成不同的手镯数

$$N(n,r)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}r^{(k,n)},$$

式中 (k,n) 为 k,n 的最大公约数.

2. 限定第 i 种颜色珠子取 b_i $(i=1,2,\cdots,r)$ 个，

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=n,$$

所成不同的手镯数

$$N(n;b_1,b_2,\cdots,b_r)=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{B}\frac{\left[\frac{(x,B)n}{B}\right]!}{\prod\limits_{i=1}^{r}\left[\frac{(x,B)b_i}{B}\right]!},$$

式中 B 为 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 的最大公约数.

项链问题(problem of necklace)　一种圆排列问题. 用 r 种不同颜色的珠子穿成项链，求所有不同的项链数. 这个问题称为项链问题. 项链问题应解释为第二种双绕向圆排列. 项链的珠子可以从 r 种颜色中允许重复任取 n 个，亦可以限定第 i 种颜色取 $b_i(i=1,2,\cdots,r)$ 个，

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=n,$$

从而构成两类不同问题(参见“圆排列”). 两类项链问题的解如下：

1. r 种颜色珠子中允许重复任取 n 个所成不同的项链数

$$M(2n+1,r)=\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{k=1}^{2n+1}r^{(k,2n+1)}+\frac{1}{2}r^{n+1},$$

$$M(2n,r)=\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}r^{(k,2n)}+\frac{1}{4}r^{n}(r+1),$$

这里 (k,x) 表示 k,x 的最大公约数.

2. 限定第 i 种颜色珠子取 b_i 个，$i=1,2,\cdots,r$，

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=n,$$

所成不同的项链数，可分下列各种情形计算：若

$$\sum_{i=1}^{r}b_i=2n+1,$$

则当 b_i 中只有一例如 b_1 奇数，项链数

$$M(2n+1;b_1,b_2,\cdots,b_r)$$
$$=\frac{1}{2}N(2n+1;b_1,b_2,\cdots,b_r)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{n!}{\left(\frac{b_1-1}{2}\right)!\left(\frac{b_2}{2}\right)!\cdots\left(\frac{b_r}{2}\right)!},$$

当 b_i 中奇数多于一个时，

$$M(2n+1;b_1,b_2,\cdots,b_r)=\frac{1}{2}N(2n+1;b_1,b_2,\cdots,b_r).$$

若 $\sum_{i=1}^{r}b_i=2n$，则当 b_i 全为偶数时，项链数

$$M(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)=\frac{1}{2}N(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)+\frac{1}{2}\frac{n!}{\left(\frac{b_1}{2}\right)!\left(\frac{b_2}{2}\right)!\cdots\left(\frac{b_r}{2}\right)!};$$

当 b_i 中恰有两奇数，例如 b_1,b_2 为奇数，则

$$M(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)=\frac{1}{2}N(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)+\frac{1}{2}\frac{(n-1)!}{\left(\frac{b_1-1}{2}\right)\left(\frac{b_2-1}{2}\right)!\left(\frac{b_3}{2}\right)!\cdots\left(\frac{b_r}{2}\right)!};$$

当 b_i 中奇数多于两个时，

$$M(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)=\frac{1}{2}N(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r).$$

以上式中的 $N(2n+1;b_1,b_2,\cdots,b_r)$ 和 $N(2n;b_1,b_2,\cdots,b_r)$ 为第二类手镯数(参见“手镯问题”).

夫妻问题(problem of mate)　一种圆排列问题. 吕卡(Lucas, F.-É.-A.)于 1891 年提出的一个趣味组合问题. 有 n 个丈夫和他们的妻子围坐在一张圆桌旁，要使男女依次交错入坐，且使没有一个妻子坐在她的丈夫旁边，求这样的入坐方法总数 $T(n)$. 这就是夫妻问题. 不妨让妇女先入坐，共有 $2n!$ 种方式，然后丈夫再入坐. 设妇女已入坐并按环形顺序给以 $1,2,\cdots,n$ 的编号. 把第 i 号妇女的丈夫编号为第 i 号，把第 i 号妇女和第 $i+1$ 号妇女间的位置称为第 i 号位置($i<n$)，第 n 号和第 1 号妇女间的位置称为第 n 号位置. 现假定男子也已入坐，坐在第 i 号位置的丈夫的编号为 a_i，按要求 $a_i\neq i$ 和 $i+1$(当 $i\leqslant n-1$ 时)，$a_n\neq n$ 和 1. 即要求排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 使得表

$$\begin{array}{cccccc}1, & 2, & 3, & \cdots, & n-1, & n\\ 2, & 3, & 4, & \cdots, & n, & 1\\ a_1, & a_2, & a_3, & \cdots, & a_{n-1} & a_n\end{array}$$

中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 与同列中前两行之数无一相重. 记这样的排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的总数为 U_n，U_n 称为夫妻数，

$$U_n=n!-\frac{2n}{2n-1}\binom{2n-1}{1}(n-1)!+\frac{2n}{2n-2}\binom{2n-2}{2}(n-2)!-\cdots+(-1)^n\frac{2n}{n}\binom{n}{n}0!,$$

$n\geqslant 2$，从而 $T(n)=2n!\,U_n$. 易知，$U_2=0,U_3=1,U_4=2,U_5=13,U_6=80,U_7=579$.

夫妻数(mate number)　见“夫妻问题”.

形式幂级数(formal power series)　一种不考虑收敛性的级数. 对于数列 $\{a_n\mid n=0,1,2,\cdots\}$，取级数

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

与它相联系. $G(x)$ 中的 x 是一个符号或不定元，因为不考虑收敛性，故称 $G(x)$ 为形式幂级数. 对于所有形式幂级数的集，定义加法和乘法. 若

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\quad C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

则

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,a_n=b_n+c_n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$A(x)$ 为 $B(x)$ 与 $C(x)$ 之和；又

$$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n,p_n=b_nc_0+b_{n-1}c_1+\cdots+b_0c_n\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$P(x)$ 为 $B(x)$ 与 $C(x)$ 之积. 具有这样的加法与乘法的所有形式幂级数之集成为环. 它的代数称为柯西代数.

柯西代数(Cauchy algebra)　见“形式幂级数”.

阶乘函数(factorial function)　一类特殊的函数. 函数 $[x]^n=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$ $(n\geqslant 1,[x]^0=1)$ 称为升阶乘函数；函数 $[x]_n=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ $(n\geqslant 1,[x]_0=1)$ 称为降阶乘函数，这里 $x\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}$，特别地，记 $[n]_n=n!$. 升、降阶乘函数统称阶乘函数. 幂函数 x^n，以及升、降阶乘函数 $[x]^n$ 和 $[x]_n$ 是组合学中三个基本的计数函数. 升阶乘函数 $[x]^n$ 的组合学意义：将 n 个可分辨的球，分放到 x 个有序盒子中，每个盒子可放入的球数不限，其放法总数等于 $[x]^n$. 降阶乘函数 $[x]_n$ 的组合学意义：集合 $S=\{1,2,\cdots,x\}$ 的 n 元排列的个数等于 $[x]_n$. 三基本计数函数之间的关系如下：若 $[x]_n=S_1(n,0)+S_1(n,1)x+S_1(n,2)x^2+\cdots+S_1(n,n)x^n$，则系数 $S_1(n,k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 为第一类斯特林数；反之，若 $x^n=S_2(n,0)+S_2(n,1)[x]_1+S_2(n,2)[x]_2+\cdots+S_2(n,n)[x]_n$，则系数 $S_2(n,k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 为第二类斯特林数；若 $[x]^n=L'(n,0)+L'(n,1)[x]_1+L'(n,2)[x]_2+\cdots+L'(n,n)[x]_n$，则系数 $L'(n,k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 为带符号的拉氏数. 升阶乘函数 $[x]^n$ 和降阶乘函数 $[x]_n$ 在组合分析、有限差分中的地位与幂级数 x^n 在数学分析中的地位具有同样的重要性.

升阶乘函数(increase factorial function)　见

“阶乘函数”.

降阶乘函数(decrease factorial function) 见“阶乘函数”.

布利萨德算法(Blissard's calculus) 亦称哑运算. 一种特殊的符号演算法. 它是英国数学家布利萨德(Blissard, J.)创造的. 设数列$\{a_k\},\{b_k\},\{c_k\}(k=0,1,2\cdots)$的指数型生成函数分别为

$$A(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_kx^k}{k!},$$

$$B(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_kx^k}{k!},$$

$$C(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_kx^k}{k!}.$$

若$a_k=a^k,b_k=b^k,c_k=c^k$,则$A(x)=e^{ax},B(x)=e^{bx},C(x)=e^{cx}$. 按此算出结果后,再将相应指数移到下标位置,可以得出问题的真实答案. 例如,将该算法用于指数型生成函数之积,若$A(x)B(x)=C(x)$,$A(x)=e^{ax},a_k=a^k,B(x)=e^{bx},b_k=b^k;C(x)=e^{cx},c_k=c^k$,则$e^{cx}=C(x)=A(x)B(x)=e^{ax}\cdot e^{bx}=e^{(a+b)x}$,从而$c_k=(a+b)^k$,由此得出

$$c_k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a_{k-i}b_i.$$

哑运算(umbral calculus) 即“布利萨德算法”.

贝尔多项式(Bell's polynomial) 一种组合多项式. 即形如

$$Y_n(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}\left(\frac{y_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{y_2}{2!}\right)^{k_2}\cdots\left(\frac{y_n}{n!}\right)^{k_n}$$

的多项式,其中的和式是对$k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n$的所有解$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$求的. 前几个贝尔多项式如下:

$$Y_1(y_1)=y_1,Y_2(y_1,y_2)=y_2+y_1^2,$$

$$Y_3(y_1,y_2,y_3)=y_3+3y_2y_1+y_1^3,$$

$$Y_4(y_1,y_2,y_3,y_4)=y_4+4y_3y_1+3y_2^2+6y_2y_1^2+y_1^4.$$

复合函数的高阶导数可通过贝尔多项式表出. 设$A(t)=f(g(t))$,令

$$D_t=\frac{d}{dt},\ A_n=D_t^nA(t),\ [D_u^nf(u)]_{u=g(t)}=f_n,$$

则

$$A_n=Y_n(fg_1,fg_2,\cdots,fg_k),$$

$$f^k\equiv f_k\ (k=1,2,\cdots,n).$$

二项多项式序列(binomial polynomial sequence) 一类具有特定性质的多项式序列. 即使得$p_0(x)=1$的多项式序列$\{p_n(x)\mid n\in\mathbf{N}\}$. 它有性质

$$p_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(x)p_{n-k}(y),$$

其中$x,y\in\mathbf{R}$,即实变量. 例如,$\{x^n\},\{[x]_n\},\{[x]^n\}$都是二项多项式序列(参见“阶乘函数”).

正规化多项式序列(normalized polynomial sequence) 一种满足一定条件的多项式序列. 若一个多项式序列$\{p_n(x)\mid n\in\mathbf{N}\}$满足:$p_0(x)=1,p_n(0)=0,\forall\ n\geqslant 1$,则称它是正规化的. 任何二项多项式序列都是正规化多项式序列. 但逆命题不成立.

差分法(calculus of differences) 一种运算方法. 设x是在域D中变动的实变数,y是定义在D上的x的函数. 给出$y(0),y(1),\cdots,y(n),\cdots$都是有限值,定义$\Delta y(n)=y(n+1)-y(n)$为$y$的一阶差分;一阶差分的一阶差分为二阶差分,即$\Delta^2y(n)=\Delta y(n+1)-\Delta y(n)$,于是可以得到$k$阶差分$\Delta^ky(n)=\Delta(\Delta^{k-1}y(n))=\Delta^{k-1}y(n+1)-\Delta^{k-1}y(n)$. 把各阶差分列成下表:

$$y(0),y(1),y(2),y(3),\cdots\cdots,y(n),\cdots\cdots$$

$$\Delta y(0),\Delta y(1),\Delta y(2),\cdots\cdots,\Delta y(n-1),\cdots\cdots$$

$$\Delta^2y(0),\Delta^2y(1),\cdots\cdots,\Delta^2y(n-2);\cdots\cdots$$

$$\Delta^3y(0),\cdots\cdots,\Delta^3y(n-3),\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^ny(0)\cdots$$

这个表称为差分表. 特别是$y(0)$至$y(n)$以及$\Delta^ny(0)$之间的项,构成了差分三角形. 关于差分三角形有牛顿公式

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^ky(0)$$

以及

$$\Delta^ny(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}y(n-k).$$

差分法在组合数学、函数逼近、应用数学等许多方面都有应用.

差分表(table of differences) 见“差分法”.

差分三角形(triangle of differences) 见“差分法”.

牛顿差分公式(Newton formula of differences) 见“差分法”.

斯特林数(Stirling number) 一类组合数. 两类基底函数$\{[x]_n\}$和$\{x^n\}$互相变换的系数. 设

$$[x]_n=\sum_{k\geqslant 0}S_1(n,k)x^k,$$

$$x^n=\sum_{k\geqslant 0}S_2(n,k)[x]_k,$$

这里约定

$$S_1(0,0)=S_2(0,0)=1,$$

$$S_1(n,k)=S_2(n,k)=0,$$

其中$0<k\leqslant n$. 这两个展开式中的系数$S_1(n,k)$和$S_2(n,k)$分别称为第一类和第二类斯特林数,统称斯特林数. 它们满足:

1. 递归关系

$S_1(n+1,k)=S_1(n,k-1)-nS_1(n,k)$;

$S_2(n+1,k)=S_2(n,k-1)+kS_2(n,k)$.

2. 指数型发生函数

$$\frac{[\log(1+t)]^k}{k!}=\sum_{n=k}^{\infty}S_1(n,k)\frac{t^n}{n!};$$

$$\frac{(e^t-1)^k}{k!}=\sum_{n=k}^{\infty}S_2(n,k)\frac{t^n}{n!}.$$

3. 正交关系

$$\sum_{k=j}^{n}S_1(n,k)S_2(k,j)=\delta_{nj},$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克符号.

4. 第二类斯特林数可表示为零的高阶差分. 即, $S_2(n,k)=(1/k!)\Delta^k 0^n$(参见"零的差分").

因为阶乘函数 $[x]_n$ 在组合分析和有限差分法中的地位,与幂级数 x^n 在数学分析中的地位具有同等的重要性,所以斯特林数在组合学和统计计算等方面有着广泛的应用.

前几个斯特林数的数值表如下:

$S_1(n,k)$ $k=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	1								
1	0	1							
2	0	−1	1						
3	0	2	−3	1					
4	0	−6	11	−6	1				
5	0	24	−50	35	−10	1			
6	0	−120	274	−225	85	−15	1		
7	0	720	−1764	1624	−735	175	−21	1	
8	0	−5040	13068	−13132	6769	−1960	322	−28	1

$S_2(n,k)$ $k=$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n=0$	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

第一类斯特林数(Stirling number of the first kind)　见"斯特林数".

第二类斯特林数(Stirling number of the second kind)　见"斯特林数".

连带斯特林数(associated Stirling number)　一类组合数. 第一类连带斯特林数 $d(n,k)$ 的组合意义是特殊的 n 元置换,它具有 k 个不相交循环,且其中没有一个是单元循环,这样的置换的个数是 $d(n,k)$. 关于 $d(n,k)$,有递归关系

$d(n+1,k)=nd(n,k)+nd(n-1,k-1)$.

第一类连带斯特林数 $d(n,k)$ 的值如下表:

n \ k	0	1	2	3
0	1			
1	0	0		
2	0	1		
3	0	2		
4	0	6	3	
5	0	24	20	
6	0	120	130	15
7	0	720	924	210

第二类连带斯特林数为 $b(n,k)$. 它也满足递归关系

$b(n+1,k)=kb(n,k)+nb(n-1,k-1)$.

第二类连带斯特林数 $b(n,k)$ 的值如下表:

n \ k	0	1	2	3
0	1			
1	0	0		
2	0	1		
3	0	1		
4	0	1	3	
5	0	1	10	
6	0	1	25	15
7	0	1	56	105

第一、二类连带斯特林数统称连带斯特林数.

拉氏数(Lah number)　一类组合数. 由恒等式

$$(x)_n=\sum_{k=0}^{n}L(n,k)[x]_k$$

或

$$(x)_n=\sum_{k=0}^{n}L(n,k)(-x)_k$$

定义的拉氏数 $L(n,k)$ 称为带符号的拉氏数

$$L(n,k)=(-1)^n\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}n\quad(k\geqslant 0).$$

由恒等式

$$(x)^n=\sum_{k=0}^{n}L'(n,k)(x)_k$$

定义的拉氏数 $L'(n,k)$ 称为不带符号的拉氏数

$$L'(n,k)=\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}\quad(k\geqslant 1).$$

带符号、不带符号的两种拉氏数 $L(n,k)$ 和 $L'(n,n)$ 统称拉氏数.

零的差分(difference of zero) 函数的一种特殊运算. 函数 $y(x)=x^r$,在差分表上 0^r 的各阶差分 $\Delta^m 0^r$ 都是零的差分. 于是有

$$\Delta^m 0^r = \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^r,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{j=1}^{k}\binom{n+1}{j+1}\Delta^j 0^k.$$

差分算子(difference operator) 一种算子. 对任一实函数$f(x)$,若记

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x),$$

则称 Δ 为差分算子.

移位算子(translation operator) 一种算子. 对任一个实函数 $f(x)$,若记 $Ef(x)=f(x+1)$,则称 E 为移位算子. 若对$f(x)$构造差分表,则 E 表示向右移动一位. E 与 Δ 的关系是 $E^k=(\Delta+1)^k$.

贝尔数(Bell number) 一类组合数. 若

$$Y_n=S_2(n,1)+S_2(n,2)+\cdots+S_2(n,n),$$

式中 $S_2(n,k)$为第二类斯特林数,则 Y_n 称为贝尔数. 贝尔数 Y_n 的组合学解释是:n 元集合 S 的不同分划的个数. 贝尔数满足递归关系

$$Y_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_k,$$

这里规定 $Y_0=1$. 贝尔数的指数型生成函数为

$$e^{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n}{n!}x^n.$$

展开后得

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}i^n.$$

前几个贝尔数值如下表:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Y_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140

伯努利数(Bernoulli numbers) 一类组合数. 在 18 世纪,由瑞士数学家约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann I) 所引入. 伯努利数记为 B_n,它由指数型发生函数

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}$$

来定义. B_n 可由第二类斯特林数 $S_2(n,k)$表出

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!}{k+1}S_2(n,k),$$

因此也有

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Delta^k 0^n}{k+1}.$$

B_n 满足下列递归关系:

$$B_n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j \quad (n\geqslant 2).$$

当 $r>1$ 时,$B_{2r+1}=0$. 前 20 个伯努利数如下表:

n	0	1	2	4	6	8	10
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$

12	14	16	18	20
$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$	$-\frac{3617}{510}$	$\frac{43867}{798}$	$-\frac{174611}{330}$

吕卡数(Lucas number) 一类组合数. 由

$$F_1^*=1,\ F_2^*=3,\ F_n^*=F_{n-1}^*+F_{n-2}^*$$

所确定的数列$\{F_n^* \mid n=1,2,3,\cdots\}$的每个数 F_n^* 都称为吕卡数. 前几个吕卡数是 $F_1^*=1,F_2^*=3,F_3^*=4,F_4^*=7,F_5^*=11,F_6^*=18$ 等.

高斯系数(Gaussian coefficient) 一类组合数. 即形如

$$\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q)}$$

的数,记为$\binom{n}{k}_q$,其中 q 为任一复数. 高斯系数有一系列与二项式系数相仿的等式. 如

$$\binom{n}{k}_q=\binom{n}{n-k}_q \text{ 及 } \binom{n}{k}_q=\binom{n-1}{k-1}_q+q^k\binom{n-1}{k}_q.$$

从而,高斯系数也称为高斯二项式系数. $\binom{n}{k}_q$ 的组合学解释是:当 $q=p^s$(p 为素数,s 为正整数)时,$\binom{n}{k}_q$ 表示有限域 GF(q)上 n 维向量空间的 k 维子空间的个数.

高斯二项式系数(Gauss binomial coefficient) 见"高斯系数".

伽罗瓦数(Galois number) 一类组合数. 伽罗瓦数定义为

$$G_{n,q} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q,$$

式中$\binom{n}{k}_q$ 为高斯系数,$G_{n,q}$称为伽罗瓦数. 其组合学解释是:$G_{n,q}$等于有限域 GF(q)上的 n 维向量空间的子空间的个数.

容斥原理(principle of inclusion and exclusion) 亦称逐步淘汰原理、交叉分类原理等. 它是组合学中常用的一个计数工具. 设有 n 元集 S,对每个元 $a\in S$,指定惟一的权 $w(a)$,$w(a)\in F$,F 是包括有理数

在内的给定环. 设有 n 个属性的集

$$P=\{a_i \mid i=1,2,\cdots,n\},$$

S 的每个元与 P 的一个确定子集相结合. 以 $\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}\}$ 表 P 的一个 r 元子集，而且 $w(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r})$ 表示 S 中同时具有每个属性 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}$ 的所有元的权之和，记

$$w(r)=\sum w(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}),$$

即 S 中那些同时具有 r 个属性的元的权之和. 所谓容斥原理就是 S 中同时恰具有 P 中的 m 个属性的所有元的权之和

$$E(m)=\sum_{i=0}^{n-m}(-1)^i\binom{m+i}{m}w(m+i).$$

特别地，若 S 的每个元的权 $w(a)=1$，以 $N(a_1a_2\cdots a_r)$ 表示同时具有特性 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的元数，$N(a_1'a_2'a_3'\cdots)$ 表示不具有 $a_1,a_2,\cdots$ 属性的元数，则 $N(a_1'a_2'a_3'\cdots)=N-N(a_1)-N(a_2)-N(a_3)-\cdots+N(a_1a_2)+N(a_1a_3)+N(a_2a_3)+\cdots-N(a_1a_2a_3)-\cdots$，所以，这个公式也称为逐步淘汰原理或交叉分类原理.

逐步淘汰原理(principle of inclusion and excursion)　即“容斥原理”.

交叉分类原理(principle of inclusion and excursion)　即“容斥原理”.

广容斥原理(generalized principle of inclusion and exclusion)　容斥原理的推广. 若 S 是一个非空有限集，定义权函数 $w:S\to F$，F 是包含有理数的环，$P=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是 m 个属性之集，$\bigcup_{i=1}^{n}P_i$ 是 P 的一个分划，$|P_i|=m_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 对任意 n 个非负整数 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ $(r_i\leqslant m_i, i=1,2,\cdots,n)$，以 $w(r_1,r_2,\cdots,r_n)$ 表示 S 中恰具有 P_i 中的某 $r_i(i=1,2,\cdots,n)$ 个属性的所有元的权之和，$w_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$ 表示 S 中具有第 i 组属性集 P_i 的 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$ 个属性的所有元的权之和，则广容斥原理为 S 中恰具有第 i 组属性集 P_i 的 $r_i(i=1,2,\cdots,n)$ 个属性的所有元的权之和为

$$w(r_1,r_2,\cdots,r_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k_i=r_i}^{m_i}(-1)^{\sum_{j=1}^{n}(k_j-r_j)}\prod_{j=1}^{n}\binom{k_j}{r_j}w_{k_1,k_2,\cdots,k_n}.$$

这个公式是魏万迪于 1980 年得到的.

反演(inversion)　排列中的一个二元关系. 设 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_k$ 是由自然数构成的一无重复元的排列. 对于序列中的某一对元素 (σ_i,σ_j)，若 $i<j$ 有 $\sigma_i>\sigma_j$，则称它为 σ 上的一个反序. n 个元素恰有 r 个反序的排列数等于

$$\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q)}{(1-q)^n}$$

的展开式中 q^r 的系数.

序列反演(inversion of sequences)　亦称级数反演. 一对序列或级数可以相互表示的互反关系. 联系这种互反关系的公式称为反演公式. 其一般形式如下：对于序列 $\{f(n)\mid n\in\mathbf{N}\}$ 和 $\{g(n)\mid n\in\mathbf{N}\}$，其中 N 为非负整数集合，若下列两式

$$g(n)=\sum_{r=0}^{n}c_{n,r}f(r)\quad(n\in\mathbf{N}),\tag{1}$$

$$f(n)=\sum_{r=0}^{n}d_{n,r}g(r)\quad(n\in\mathbf{N})\tag{2}$$

中有一式成立，则另一式也成立，这样的(1)，(2)两式称为反演公式，也称(1)与(2)为一对互反公式. 它等价于相应的系数矩阵 $C=(c_{ij})$ 和 $D=(d_{ij})$ 互逆. 因此，只要构造出两个互逆的三角矩阵，就可写出相应的反演公式. 例如，设 $\{p_n(x)\}$ 和 $\{q_n(x)\}$ 为两多项式序列，其中 $p_k(x)$ 与 $q_k(x)$ 为 k 次多项式. 若对于 $n\in\mathbf{N}$ 满足：

$$q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}p_k(x),$$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}q_k(x),$$

则有互反公式

$$\begin{cases}a_n=\sum_k a_{n,k}b_k,\\ b_n=\sum_k b_{n,k}a_k.\end{cases}$$

选择不同的多项式 $p_n(x)$ 和 $q_n(x)$，就得到各种各样的反演公式. 以下为几对常见的反演公式：

1. 二项式反演公式

$$\begin{cases}a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k,\\ b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k.\end{cases}$$

2. 斯特林反演公式

$$\begin{cases}a_n=\sum_{k=0}^{n}S_1(n,k)b_k,\\ b_n=\sum_{k=0}^{n}S_2(n,k)a_k,\end{cases}$$

其中 $S_1(n,k)$ 和 $S_2(n,k)$ 分别为第一类和第二类斯特林数.

3. 伯努利反演公式

$$\begin{cases}a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k+1)^{-1}b_n,\\ b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}a_k,\end{cases}$$

其中，B_i 为伯努利数.

4. 拉氏反演公式

$$\begin{cases} a_k = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)b_k, \\ b_n = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)a_k, \end{cases}$$

其中 $L(n,k)$ 为拉氏数.

5. 高斯二项式系数反演公式

$$\begin{cases} a_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q b_k, \\ b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q a_k, \end{cases}$$

其中 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ 为高斯二项式系数.

还有更一般的高而德-徐反演公式(参见“高而德-徐反演”)等.

级数反演(inversion of series) 即“序列反演”.

反演公式(inversion formula) 见“序列反演”.

二项式反演(binomial inversion) 见“序列反演”.

斯特林反演(Stirling inversion) 见“序列反演”.

伯努利反演(Bernoulli inversion) 见“序列反演”.

拉氏反演(Lah inversion) 见“序列反演”.

高斯反演(Gauss inversion) 见“序列反演”.

高而德-徐反演公式(Gould-Hsu's inversion formula) 一类序列反演公式. 该公式于 1965 年发现,而于 1973 年由高而德(Gould, H. W.)和徐利治合作发表. 若 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 是两个任意数列,使得

$$\psi(x,n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i x) \neq 0,$$

其中 x,n 为非负整数,而 $\psi(x,0)=1$,则有一对互反公式

$$\begin{cases} f_n = \sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \psi(k,n) g_k, \\ g_n = \sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (a_{k+1} + kb_{k+1}) \psi(n,k+1)^{-1} f_k. \end{cases}$$

这对互反公式还有相应的旋转形式

$$\begin{cases} f_n = \sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} \psi(n,k) g_k, \\ g_n = \sum_k (-1)^k \begin{bmatrix} k \\ n \end{bmatrix} (a_{n+1} + nb_{n+1}) \psi(k,n+1)^{-1} f_k, \end{cases}$$

此处假定序列 $\{g_n\}$ 或 $\{f_n\}$ 中至多只有有限多项不为零,从而不存在发散性问题. 特别地,若分别选取:

$$\psi(k,n) = n! \begin{pmatrix} a+bk \\ n \end{pmatrix},$$

$$\psi(k,n) = n! \begin{pmatrix} a+n+bk \\ n \end{pmatrix},$$

$$\psi(k,n) = (a+bk)^n,$$

则可分别获得高而德型和阿贝尔型的互反公式,它们都包含二项式反演公式与拉氏反演公式为简单特例. 上述的一般互反公式可用以推证许多著名的组合恒等式,并可用于构造广义的牛顿型插值公式.

默比乌斯反演公式(Möbius inversion formula) 一种序列反演公式. 它是德国数学家默比乌斯(Möbius, A. F.)提出的,最早出现在初等数论的研究中. 设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 是定义在自然数集 N 上的两个函数,反演公式

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

称为(经典的)默比乌斯反演公式. 这里,记号“$\Leftrightarrow$”表示左右两式可以互推. 函数 $\mu(n)$ 是默比乌斯在 1832 年研究素数分布时首次引入的,后称它为(经典的)默比乌斯函数. 默比乌斯函数 $\mu(n)$ 定义如下:若 $n>1$, $n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$, $e_i \in \mathbf{N}$, $i=1,2,\cdots,r$,其中 $p_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为 n 的不同素因子,则

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n=1), \\ 0 & (e_i>1), \\ (-1)^r & (e_1=e_2=\cdots=e_r=1). \end{cases}$$

$\mu(n)$ 有如下性质

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & (n=1), \\ 0 & (n>1). \end{cases}$$

默比乌斯函数(Möbius function) 见“默比乌斯反演公式”.

分配问题(distribution problem) 一类组合问题. 将 n 件物分到 r 个盒子里,求不同的分配方法数,就构成了分配问题. 所求方法数就是分配数. 对于物和盒子给定不同的规定条件,可以构成不同的分配问题. 基本条件是:

1. 物可辨(相异)或不可辨(相同).
2. 盒子可辨或不可辨.
3. 分到盒子里的物是有序的或无序的.
4. 允许有空盒,或不许有空盒.

物和盒子都是不可辨分配也称为分拆.

罗杰斯-拉马努金恒等式(Rogers-Ramanujan identity) 一类组合恒等式. 当 $|q|<1$ 时,下列一对恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{5n+1})^{-1}(1-q^{5n+4})^{-1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1-q^{5n+2})^{-1}(1-q^{5n+3})^{-1}.$$

分别称为第一和第二罗杰斯-拉马努金恒等式. 其组合学意义分别如下：正整数 n 的分拆为任两部分至少相差 2 的分拆方法数，等于将 n 分拆为部分形如 $5m\pm1$ 的形式的分拆方法数；正整数 n 的分拆为任意两部分至少相差 2 并且每部分都大于 1 的分拆方法数，等于将 n 分拆为两部分形如 $5m\pm2$ 形式的分拆方法数.

戈登恒等式(Gordon's identity)　一类组合恒等式. 当 $1\leqslant i\leqslant k, k\geqslant 2, |q|<1$ 时

$$\sum_{n_1,n_2,\cdots,n_{k-1}>0}\frac{q^{N_1^2+N_2^2+\cdots+N_{k-1}^2+N_i+N_{i+1}+\cdots N_{k-1}}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}}=\prod_{n\neq 0,\pm i(\mathrm{mod}2k+1)}(1-q^n)^{-1},$$

其中

$$N_j=\sum_{i=j}^{k-1}n_i,$$

$$(q)_n=(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n),$$

这就是戈登恒等式. 其组合意义如下：若 $B_{k,i}(n)$ 表示正整数 n 的形如下列形式

$$(b_1,b_2,\cdots,b_s),\ b_j-b_{j+k-1}\geqslant 2,$$

且至多有 $i-1$ 个 b_j 等于 1 的分拆方法数，$A_{k,i}(n)$ 表示将 n 分拆为每部分形如 $\neq 0,\pm i\ (\mathrm{mod}\,2k+1)$ 的分拆方法数，则 $A_{k,i}(n)=B_{k,i}(n)\ (n=1,2,\cdots)$

雅可比三重积恒等式(Jacobi's triple product identity)　一类组合恒等式. 当 $z\neq 0, |q|<1$ 时，

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}z^nq^{n^2}=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n})(1+zq^{2n+1})(1+z^{-1}q^{2n+1}),$$

称为雅可比三重恒等式.

欧拉五边形数定理(Euler's pentagonal number theorem)　一类关于组合恒等式的定理. 当 $|q|<1$ 时，

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^mq^{\frac{m}{2}(3m-1)}(1+q^m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^mq^{\frac{1}{2}m(3m-1)}.$$

它称为欧拉五边形数定理.

阿贝尔恒等式(Abel identity)　一类组合恒等式. 对所有的实数 x,y,z，等式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x(x-kz)^{k-1}(y+kz)^{n-k}$$

称为阿贝尔恒等式.

常系数线性齐次递归关系(linear homogeneous recurrence relation with constant coefficients)　一种重要的递归关系. 数列 $\{a_n|n=0,1,2,\cdots\}$ 满足如下的递归关系 (R)：

$$a_n=C_1a_{n-1}+C_2a_{n-2}+\cdots+C_pa_{n-p}\ (n\geqslant p),$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_p$ 都是常数，且 $C_p\neq 0$. 方程

$$x^p-C_1x^{p-1}-C_2x^{p-2}-\cdots-C_p=0$$

称为 (R) 的特征方程；它的根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 称为 (R) 的特征根. (R) 的通解可分为下列两种情形：

1. 当特征根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 是 p 个不同根时，(R) 的通解是：$a_n=\lambda_1\alpha_1^n+\lambda_2\alpha_2^n+\cdots+\lambda_p\alpha_p^n$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 为任意常数.

2. 当特征根出现重根时，即，特征根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$，其中 α_i 为 $u_i\ (i=1,2,\cdots,q)$ 重根，且 $u_1+u_2+\cdots+u_q=p$，从而 $\alpha_1^n, n\alpha_1^n, n^2\alpha_1^n,\cdots,n^{u_1-1}\alpha_1^n$；$\alpha_2^n, n\alpha_2^n, n^2\alpha_2^n,\cdots,n^{u_2-1}\alpha_2^n;\cdots;\alpha_q^n, n\alpha_q^n, n^2\alpha_q^n,\cdots,n^{u_q-1}\alpha_q^n$ 是 (R) 的 p 个解，此时 (R) 的通解是：

$$\begin{aligned}a_n=&(\lambda_1^{(1)}\alpha_1^n+\lambda_2^{(1)}n\alpha_1^n+\lambda_3^{(1)}n^2\alpha_1^n+\cdots+\lambda_{u_1}^{(1)}n^{u_1-1}\alpha_1^n)\\&+(\lambda_1^{(2)}\alpha_2^n+\lambda_2^{(2)}n\alpha_2^n+\lambda_3^{(2)}n^2\alpha_2^n+\cdots\\&+\lambda_{u_2}^{(2)}n^{u_2-1}\alpha_2^n)+\cdots+(\lambda_1^{(q)}\alpha_q^n+\lambda_2^{(q)}n\alpha_q^n\\&+\lambda_3^{(q)}n^2\alpha_q^n+\cdots+\lambda_{u_q}^{(q)}n^{u_q-1}\alpha_q^n),\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i^{(j)}(i=1,2,\cdots,u;j=1,2,\cdots,q)$ 为 p 个任意常数. 给出 $a_0,a_1,\cdots,a_{p-1}$ 的一组初值，通解中 p 个常数完全确定.

斐波那契数(Fibonacci number)　一类组合数. 13 世纪，意大利数学家利奥纳特(Leonard)(他以斐波那契(Fibonacci, L.)这个名字闻名于世)在他 1202 年出版的《算盘书》中，提出了有趣的兔子问题：开始雌雄一对兔子，而每一对兔子过一个月将生产一对小兔子，问过 n 个月后共有多少对兔子？以 F_n 表示第 $n-1$ 个月中的兔子对数，称 F_n 为第 n 个斐波那契数，简称 F 数. 斐波那契数列 $F_0,F_1,F_2,\cdots,F_n,\cdots$ 满足下列递归关系 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n, n\geqslant 0$，和初始条件 $F_0=F_1=1$. 由此可得

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

F_n 的另一种二项式系数表示式为

$$F_n=\sum_k\binom{n-k}{k}.$$

F 数的组合学意义如下：F_n 等于集合 $S_{n-1}=\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中不含两个相继整数的子集的个数. 斐波那契数列的头一些项为：1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,…. 斐波那契数列在最优搜索等问题中有重要的应用.

分拆(partition)　一类组合变换. 将正整数 n 表示为若干个正整数之和，即 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k, n_i>0\ (1\leqslant i\leqslant k)$. 若上述 n 的表示式是一个有序和，则称这样的分拆为 n 的一个有序分拆；反之，若上述 n 的表示式是无序的，则称这样的分拆为 n 的一个无序分拆，或简称分拆. 这里每个 n_i 称为分拆的部分，k 称为分拆的部分数. 正整数的分拆问题是数论和组合论的重要内容，它主要讨论在各种限制条件

下正整数 n 的不同分拆个数及其性质. 例如，以 $p_k(n)$ 表示 n 分为 k 部分的分拆数，$p(n)$ 表示所有可能的分拆数，即 $p(n)=p_1(n)+p_2(n)+\cdots+p_n(n)$. $p_k(n)$ 有下列递归关系：

$$p_k(n)=p_k(n-k)+p_{k-1}(n-k)+\cdots+p_1(n-k),$$

这里 $p_k(k)=p_1(n)=1$；当 $n<k$ 时，$p_k(n)=0$. $p(n)$ 有下列递归关系：

$$\begin{aligned}p(n)&=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)\\&\quad-p(n-7)+\cdots+(-1)^{k-1}p\left(n-\frac{3k^2-k}{2}\right)\\&\quad+(-1)^{k-1}p\left(n-\frac{3k^2+k}{2}\right)+\cdots,\end{aligned}$$

这里约定 $p(0)=1$. 利用上述递归关系可以分别计算 $p_k(n)$ 和 $p(n)$ 的值.

有序分拆(partition with order)　见“分拆”.

无序分拆(partiton without order)　见“分拆”.

卡塔朗数(Catalan number)　一个组合数. 一些组合计数问题可以归结为解下列形式的递归关系：$u_n=u_1u_{n-1}+u_2u_{n-2}+\cdots+u_{n-1}u_1$，$n\geqslant 2$，且 $u_1=1$. 它的解为

$$u_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\quad(n=1,2,\cdots),$$

u_n 称为卡塔朗数. 它的生成函数是

$$G\{u_n\}=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}.$$

解下列这类问题都能得到卡塔朗数：

1. 把一个凸 $n+1$ 边形用 $n-2$ 条对角线将它分成互不重叠的三角形，这种分法的总数为 u_n.

2. 用 n 条互不相交的弦连结圆周上 $2n$ 个点的不同方式总数为 u_{n+1}.

3. 有 n 个端点(根点除外)的 3 阶平面植树的个数为 u_n.

4. n 个元 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不改变顺序组成连乘积，可以用 $n-1$ 个括号表示相乘的过程，所有不同过程的个数是 u_n.

5. 坐标平面上由 $O(0,0)$ 至点 $U(2n,0)$ 的路径，每段由格点 (i,j) 至 $(i+1,j+1)$ 或 $(i+1,j-1)$，所有在上半平面内且允许经过 x 轴上的点、而不许越过 x 轴的路径数等于 u_{n+1}.

6. 由 $O(0,0)$ 至 $U(2n,0)$ 的路径，但不允许中间经过 x 轴上的点，共有 u_n 条.

卡塔朗数的前几项如下：

$$u_1=1,\ u_2=1,\ u_3=2,\ u_4=5,\ u_5=14,$$
$$u_6=42,\ u_7=132,\ u_8=429,$$
$$u_9=1430,\ u_{10}=4862.$$

置换的型(type of permutation)　对置换结构特征的描述. 任何一个 n 次置换 α 必可分解为不相交循环之积. 若不区别循环间的顺序，也不区别每个循环以哪个元列为首位，则 α 的这种分解是惟一的. 设 α 分解为 λ_1 个 1 元循环，λ_2 个 2 元循环，…，λ_n 个 n 元循环之积，则有 $\lambda_1+2\cdot\lambda_2+\cdots+n\cdot\lambda_n=n$，并称 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 为置换 α 的型. n 次对称群 S_n 中，型 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 的置换的个数为

$$h(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n}i^{\lambda_i}\cdot\lambda_i!},$$

它称为凯莱公式.

凯莱公式(Cayley formula)　见“置换的型”.

置换群的循环指标(cyclic index of permutation group)　表示群的结构. 设 G 为 n 阶置换群，$\alpha\in G$，α 的型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$，$1\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2+\cdots+n\cdot\lambda_n=n$. 群 G 的循环指标定义为

$$Z(G;s_1,s_2,\cdots,s_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G}s_1^{\lambda_1}s_2^{\lambda_2}\cdots s_n^{\lambda_n}.$$

若 G 中的型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 的置换共有 $C(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 个，则

$$\begin{aligned}&Z(G;s_1,s_2\cdots,s_n)\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{(\Lambda)}C(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)s_1^{\lambda_1}s_2^{\lambda_2}\cdots s_n^{\lambda_n},\end{aligned}$$

式中 (Λ) 表示置换的型 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$，其中 $\sum$ 对于所有不同的型求和，即对于 $\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=n$ 的所有非负整数解求和.

轨道(orbit)　一个集合在某置换群作用下的分类. 设对象集 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 被 n 阶置换群 A 作用，若对于元 $i,j\in X$，有 $\alpha\in A$，使 $\alpha(i)=j$，则 i,j 是等价的，记为 $i\sim j$. $\sim$ 为一等价关系. 在此等价关系下，X 可分解为若干等价类之并. 这里的等价类就称为 X 被 A 作用所分出的轨道. 伯恩赛德引理断言：轨道数

$$N(A)=\frac{1}{|A|}\sum_{\alpha\in A}\lambda_1(\alpha),$$

式中 $\lambda_1(\alpha)$ 是 α 分解为不相交循环之积中 1 元循环的个数，即当置换 α 的型是 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$ 时，$\lambda_1(\alpha)=\lambda_1$.

伯恩赛德引理(Burnside's lemma)　见“轨道”.

函数式样(pattern of function)　亦称函数轨道. 映像的一种等价类. 用函数表示对象和函数的集在置换群作用下分为等价类，这是波利亚计数理论的主要特点. 设有限集 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 和有限或可数集 Y，Y 至少有 2 元，一置换群 A 作用于 X. 对于对象集 $Y^X=\{f\mid f:X\to Y\}$，定义幂群 $E^A=\{(\alpha,1)\mid\alpha\in A,1\in E\}$(1 为恒等群 E 中的恒等置换)对 f 的作用：$(\alpha,1)f(x)=f(\alpha x)$，$\forall\ x\in X$. 由此可确定 f 在 $(\alpha,1)$ 作用下的像 f'. 若有 $(\alpha,1)f=f'$，$\alpha\in A$，则 $f\sim f'$，$\sim$ 为一等价关系. 函数集 Y^X 在此等价关系下，

可分解为若干等价类，Y^X 为这些等价类之并. 波利亚定理断言：若 Y 为有限集，$|Y|=m$，且 n 阶置换群 A 的循环指标为 $Z(A;s_1,s_2,\cdots,s_n)$，则 Y^X 在幂群 E^A 下的等价类的个数为

$$Z(A;\underbrace{m,m,\cdots,m}_{n\text{个}}).$$

波利亚定理可以推广到不等权的情形. 仍设 Y 为可数集，至少包含 2 元. 定义权函数 $w:Y\to R$，$R\subseteq \mathbf{N}_0$，$\mathbf{N}_0$ 为非负整数集，且对于每个 $k\in R$，Y 中 k 的原像数，记为 c_k，是有限的. 记

$$c(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,$$

$c(x)$ 为图形计数级数，即 Y 依权数展开的生成函数. 定义函数 $f\in Y^X$ 的权为

$$w(f)=\sum_{x\in X}w(f(x)),$$

若 $f\sim f'$，则必有 $w(f)=w(f')$，即，凡属于同一式样 F 的函数有相等的权. 因此，可定义式样的权 $w(F)=w(f)$，$f\in F$. 记

$$C(x)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k,$$

式中 C_k 是权为 k 的式样的个数. 于是，波利亚定理指出 $C(x)=Z(A;c(x),c(x^2),\cdots,c(x^n))$.

函数轨道(orbit of function)　即“函数式样”.

波利亚定理(Polya's theorem)　见“函数式样”.

德布莱英定理(de Bruijn's theorem)　波利亚定理的推广. 若两置换群 A 和 B 分别作用于两有限集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 和 $Y=\{y_1,y_2,\cdots y_m\}$，则可定义幂群 $B^A=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha\in A,\beta\in B\}$ 对函数集 $Y^X=\{f\mid f:X\to Y\}$ 的作用为 $(\alpha,\beta)f(x)=\beta(f(\alpha x))$. 若有 $(\alpha,\beta)f=f'$，则称 f,f' 是等价的，记为 $f\sim f'$. $\sim$ 为一等价关系. 于是，Y^X 被分为若干等价类之并，这些等价类称为函数式样或函数轨道. 德布莱英定理断言：函数式样的个数等于

$$\frac{1}{|B|}\sum_{\beta\in B}Z(A;c_1(\beta),c_2(\beta),\cdots,c_n(\beta)),$$

式中群 A 的循环指标为

$$Z(A;s_1,s_2,\cdots,s_n),\quad c_k(\beta)=\sum_{s\mid k}s\lambda_s,$$

其中 β 的型为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots m^{\lambda_m}$. 哈拉里(F. Harary)推广了德布莱英定理. 设 Y 为可数集，Y 至少含 2 元. 定义权函数 $w:Y\to R$，$R\subset\mathbf{N}_0$，$\mathbf{N}_0$ 为非负整数集；又定义函数 f 的权

$$w(f)=\sum_{x\in X}w(f(x)).$$

设 $k\in R$，Y 的子集 $Y_k=\{y\mid y\in Y,w(y)=k\}$，且 $|Y_k|$ 是有限的，$|Y_k|=C_k$. 若 $B(Y_i)=\{\beta(y)\mid\beta\in B,y\in Y_i\}$，则函数集 Y^X 被幂群 B^A 作用所分出的各个式样中的函数有等权的充分必要条件是 $B(Y_i)=Y_i$，$i\in R$. 若条件 $B(Y_i)=Y_i$，满足 $i\in R$，则可定义式样 F 的权为 $w(F)=w(f)$，其中 $f\in F$. 记 $\beta=\prod_{i\in R}\beta_i$，式中 $\beta_i(y)=\beta(y)$，这里 $y\in Y_i$. 若权为 k 的式样为 C_k 个，则式样依权展开的生成函数为

$$C(x)=\sum_kC_kx^k.$$

于是

$$C(x)=\frac{1}{|B|}\sum_{\beta\in B}Z(A;c_1(\beta,x),c_2(\beta,x),\cdots,c_n(\beta,x)),$$

式中 $Z(A;s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 为 A 的循环指标，

$$c_k(\beta,x)=\sum_i\Big(\sum_{s\mid k}s\lambda_s(\beta_i)\Big)x^{ki},$$

β_i 的型为 $1^{\lambda_1(\beta_i)}2^{\lambda_2(\beta_i)}\cdots m^{\lambda_m(\beta_i)}$.

权函数(weight function)　见“函数式样”和“德布莱英定理”.

积和式(permanent)　亦称正展式. 方阵的一种值. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n(m\leqslant n)$ 矩阵 $(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$，$A$ 的 m 个两两不在同行同列上的元素之积，称为 A 的一个对角线积，A 的全体对角线积之和 $\sum a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}$ 称为矩阵 A 的积和式，记为 $\mathrm{per}(A)$，式中 $\sum$ 遍取 $1,2,\cdots,m$ 的所有 m 排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_m)$. 例如，记 n 阶单位矩阵为 I_n，n 阶全 1 矩阵为 J_n，那么 $\mathrm{per}(J_n)=n!$，$\mathrm{per}(J_n-I_n)=D_n$，$D_n$ 是 n 元的重排数. 一般地计算一个 $m\times n$ 矩阵的积和式是困难的. 对于 $m\times n$ 矩阵 A 的积和式有下列计算公式

$$\begin{aligned}&\mathrm{per}(A)\\&=\sum S(A_{n-m})-\binom{n-m+1}{1}\sum S(A_{n-m+1})\\&\quad+\binom{n-m+2}{2}\sum S(A_{n-m+2})-\cdots\\&\quad+(-1)^{m-1}\binom{n-1}{m-1}\sum S(A_{n-1}),\end{aligned}$$

其中 A_r 表示矩阵 A 中 r 个列的各元素用数 0 代换后得到的一个矩阵；$S(A_r)$ 表示矩阵 A_r 中各行的行和之积，称为 A_r 的行和积；$\sum S(A_r)$ 是对所有的矩阵 A_r 求和.

正展式(permanent)　即“积和式”.

行和积(product of row sums)　见“积和式”.

k 积和式(k-permanent)　矩阵积和式的自然推广. 对任意 $m\times n$ 矩阵 $B=(b_{ij})$，称

$$\mathrm{per}_kB=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\ j_1\cdots j_k\in P_k^n}}b_{i_1j_1},b_{i_2j_2},\cdots,b_{i_kj_k}\quad(k\geqslant1)$$

为矩阵 B 的 k 积和式，这里，P_k^n 为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 k 元子集排列的全体. 约定，$\mathrm{per}_0B=1$. 当 k

$>\min(m,n)$时，$\mathrm{per}_k B=0$. 设 $b=\min(m,n)$，当 $k=b$ 时，B 的 b 积和式称为矩阵 B 的上-积和式，记为 $\mathrm{per}_{上} B=\mathrm{per}_b B$. 设 $B_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}$ 表示由矩阵 B 的第 i_1，$i_2,\cdots,i_k$ 行依原顺序安排而成的 $k\times n$ 矩阵，由矩阵积和式定义：

$$\mathrm{per}_k B=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}\mathrm{per}(B_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}).$$

定义矩阵 $B=(b_{ij})$ 的行和积

$$\sigma(B)=\prod_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}b_{ij};$$

记

$$\sigma_l^{(k)}(B)=\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\\ 1\leqslant j_1<\cdots<j_l\leqslant n}}\sigma(B_{(i_1,i_2,\cdots,i_k;j_1,j_2,\cdots,j_l)}),$$

这里 $(B_{(i_1,i_2,\cdots,i_k;j_1,j_2,\cdots,j_k)})$ 表示矩阵 $B_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}$ 中删去第 $j_1,j_2,\cdots,j_l$ 列后所得的 $k\times(n-l)$ 矩阵. 那么，矩阵的 k 积和式可利用矩阵的行和积来计算，即

$$\mathrm{per}_k B=\sum_{0\leqslant j\leqslant k-1}(-1)^j\binom{n-k+j}{j}\sigma_{n-k+j}^{(k)}(B).$$

本计算式仅在理论研究中和对一些特殊矩阵的计算有用，至今尚未找到一个简单有效的 k 积和式算法. 由于 $\mathrm{per}_k B=\mathrm{per}_k B^T$，这里 B^T 为 B 的转置矩阵，因此对矩阵的 k 积和式言，行和列的地位平等.

上-积和式(upper-permanent)　见“k 积和式”.

全-积和式(complete-permanent)　k 积和式的拓广. 研究车问题的有用工具. 设 $B=(b_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，称 B 的一切 k 积和式之和为矩阵 B 的全-积和式，记为 $\mathrm{per}_{全} B$. 即

$$\mathrm{per}_{全} B=\sum_{k\geqslant 0}\mathrm{per}_k B,$$

约定 $\mathrm{per}_0 B=1$. 矩阵 B 的全-积和式有下列性质：

1. $\mathrm{per}_{全} B=\mathrm{per}_{全} B^T$，式中 B^T 为 B 的转置矩阵.

2. $\mathrm{per}_{全} B_1=\mathrm{per}_{全} B$，式中 B_1 是由 B 经行交换或列交换后所得的矩阵.

3. 若 B 是准对角形矩阵

$$\begin{pmatrix}C_1 & & & 0\\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_s\end{pmatrix},$$

其中 C_i 是 $m_i\times n_i$ 矩阵，$i=1,2,\cdots,s$，则

$$\mathrm{per}_{全} B=\prod_{1\leqslant i\leqslant s}\mathrm{per}_{全} C_i.$$

4. 若将 B 中元素 b_{pq} 换为零而其余元素不变所得到的 $m\times n$ 矩阵记为 B_{pq}，从 B 中删去第 p 行和第 q 列后所得的 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵记为 $B_{(p,q)}$，则

$$\mathrm{per}_{全} B=b_{pq}\mathrm{per}_{全} B_{(p,q)}+\mathrm{per}_{全} B_{pq}.$$

范·德·瓦尔登猜想(Van der Waerden conjecture)　关于双随机矩阵积和式下界的一个估计. 若一个 $n\times n$ 矩阵 A 的每个分量都是非负的，而且每个行和与每个列和都等于 1，则称 A 是一个双随机矩阵. 设 A 为一个双随机矩阵，范·德·瓦尔登猜想是 $\mathrm{per}\,A\geqslant n!/n^n$，并且等号成立当且仅当 A 的每个元素均为 $1/n$. 此猜想于 1980 年被苏联学者埃果里切夫(Егорычев, Г. П.)所证实，其证明采用了其他数学家的一系列结果.

双随机矩阵(two-stochastic matrix)　见“范·德·瓦尔登猜想”.

限位排列(forbidden permutation)　相遇问题的自然推广. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的 m 个给定的子集，若 S 的一个 m 元排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 满足条件 $a_i\in A_i(1\leqslant i\leqslant m)$，则称 m 元排列 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 是一个 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列. $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列总数 $N_0=N_0(m,n)$，简称限位排列数. 设 $B=(b_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，记

$$\sigma(B)=\prod_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}b_{ij},$$

表示 B 的各行的行和之积，简称 B 的行和积，$B_{i_1i_2\cdots i_k}$ 表示由矩阵中第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行依原顺序组成的 $k\times n$ 矩阵，记

$$\sigma_k(B)=\sum_{i_1\cdots i_k}\sigma(B_{i_1\cdots i_k}),$$

式中求和对 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的全体 k 元子集进行，于是 $N_0(m,n)=\mathrm{per}\,A$

$$=\sum_{0\leqslant j\leqslant m-1}(-1)^j\binom{n-m+j}{j}\sigma_{n-m+j}(A),$$

这里 A 为 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集族 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 对 S 的关联矩阵.

限位排列的关联矩阵(incidence matrix of forbidden permutation)　一个表征限位排列的 $(0,1)$ 矩阵. 通过对限位排列的关联矩阵积和式的计算，可求出限位排列数. 若矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足条件：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (j\in A_i),\\ 0 & (j\notin A_i)\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n),$$

则它称为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 对其子集族 $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 的关联矩阵，也称为 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列的关联矩阵. 若 A 是 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列的关联矩阵，则 $(0,x)$ 矩阵 xA 称为此 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列的 $(0,x)$ 关联矩阵，这里 $xA=Ax=(a_{ij}x)$，而

$$a_{ij}x=\begin{cases}x & (j\in A_i),\\ 0 & (j\notin A_i)\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n);$$

又称 $A'=(a'_{ij})$ 为此 $(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 限位排列的 $(t,1)$ 关联矩阵，这里

$$a'_{ij}=\begin{cases}1 & (j\in A_i),\\ t & (j\notin A_i)\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n).$$

限位排列问题的研究可化为其相应的关联矩阵的研究. $m\times n$ 的 $(0,1)$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 的补矩阵 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$ 是指满足条件

$$\bar{a}_{ij}=\begin{cases}0 & (a_{ij}=1),\\ 1 & (a_{ij}=0)\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant n)$$

的 $m\times n$ 的(0,1)矩阵. 矩阵 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$ 也称为$(A_1,A_2,\cdots,A_m)$限位排列的关联矩阵 A 的补,与 $\bar{A}$ 相应的限位排列问题,称为原限位排列问题的补问题. 一个限位排列问题的补问题与一个车问题相对应.

关联矩阵(incidence matrix)　见"限位排列的关联矩阵".

限位排列的$(0,x)$**关联矩阵**($(0,x)$-incidence matrix of forbidden permutation)　见"限位排列的关联矩阵".

限位排列的$(t,1)$**关联矩阵**($(t,1)$-incidence matrix of forbidden permutation)　见"限位排列的关联矩阵".

车问题(problem of rook)　一类棋盘上的组合问题. 设 B 是一个由 m 行 n 列的方格组成的广义棋盘,B 上有一些禁用格,其余均为可用格. 车问题是:将 k 只象棋棋子车按下列规则分布在棋盘 B 上,使得:

1. 每个车放在一个可用格上;

2. 任意两个车不在同一行或同一列上;

问不同的分布数是多少?

一个与给定的棋盘 B 相联系的 $m\times n$ (0,1)矩阵 $\bar{A}(\bar{a}_{ij})$ 称为是一个棋阵,这里,当 B 的位于第 i 行、j 列的方格为禁用格时,$\bar{a}_{ij}=1$;而当 B 的位于第 i 行、j 列的方格为可用格时,$\bar{a}_{ij}=0$. 若 $A_i=\{j\mid\bar{a}_{ij}=0,1\leqslant j\leqslant n\}$,$i=1,2,\cdots,m$,则$\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的子集族. $\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$的关联矩阵就是一个$(A_1,A_2,\cdots,A_m)$限位排列的关联矩阵. m 个车在与棋阵 $\bar{A}(\bar{a}_{ij})$相应的棋盘 B 上的布阵数,等于$(A_1,A_2,\cdots,A_m)$限位排列总数 $N_0(m,n)=\operatorname{per}A$. 研究车问题的主要工具是车多项式.

棋阵(chess matrix)　见"车问题".

车多项式(rook polynomial)　研究棋阵问题的主要工具. x 的多项式

$$R(x,\bar{A})=\sum_k r_k(\bar{A})x^k\ (k\geqslant 0)$$

称为以矩阵 $\bar{A}=(\bar{a}_{ij})$ 为棋阵的车多项式,这里,$r_k(\bar{A})$表示 k 只车分布到与棋阵 $\bar{A}$ 相应的棋盘 B 上的不同的分布数,约定 $r_0=1$. 当 k 大于棋盘 B 上的可用格个数时,$r_k(\bar{A})=0$. 于是,$R(x,\bar{A})$是一个 x 的多项式. 若在棋阵 $\bar{A}$ 中任选一个可用格 a,把该可用格换为禁用格而其他格不变所得的棋阵记为 $\bar{A}_e$,把该可用格所在行和列都删去所得出的一个$(m-1)\times(n-1)$棋阵记为 $\bar{A}_a$,则 $R(x,\bar{A})$按棋阵 $\bar{A}$ 之可用格 a 的展开式是

$$R(x,\bar{A})=xR(x,\bar{A}_a)+R(x,\bar{A}_e).$$

反复利用对可用格的展开式,可将 $R(x,\bar{A})$的计算归纳为一些已知的或易算的车多项式的计算.

矩形棋盘(rectangular chessboard)　一类组合构形. 一个由 $m\times n$ 个方格排成的 m 行 n 列的矩形. 若以 $R_{m,n}(x)$表示 $m\times n$ 矩形棋盘的车多项式,则

$$R_{m,n}(x)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(n)_k x^k,$$

其中$(n)_k=n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

互补棋盘(complementary chessboards)　一类组合构形. 即从一个棋盘中去掉它的一个子棋盘所得者的棋盘. 设 C 是任一棋盘,A 是 C 的子棋盘,从 C 中去掉属于 A 的格子所得剩余的棋盘 B,称 B 为 A 关于 C 的补棋盘,A 和 B 是关于 C 的互补棋盘. 若 C 是 $m\times n$ 矩形棋盘,A,B 的车多项式分别是 $Q(x),R(x)$,并以 $R_{m,n}(x)$表示 $m\times n$ 矩形棋盘 C 的车多项式,则

$$Q(x)=R(-xf)R_{m,n}(x),$$
$$f^kR_{m,n}(x)\equiv R_{m-k,n-k}(x).$$

梯形棋盘(trapezoidal chessboard)　一类组合构形. 在一个矩形棋盘上,由上而下地去掉每行右端的一些格子,使得每行的格子数不多于下一行的格子数所得到的. 以 $T(p,q,a)$表行数为 q,第一行有 p 个格子,且从第 2 行起,每行格子数比上一行多 a 个的梯形棋盘,其车多项式记为 $T(p,q,a;x)$,则

$$T(p,1,a;x)=1+px,$$
$$T(p,2,a;x)=1+(2p+a)x+p(p+a-1)x^2,$$
$$T(p,q,a;x)=T(p+a,q-1,a;x)+pxT(p+a-1,q-1,a;x).$$

三角形棋盘(triangular chessboard)　一类梯形棋盘. 梯形棋盘 $T(p,q,a)$当 $p=a=1$ 时的情形. 其车多项式记为 $T_q(x)$,$S_2(n,k)$表示第二类斯特林数,则

$$T_q(x)=\sum_{k=0}^{q}S_2(q+1,q+1-k)x^k.$$

象问题(problem of bishops)　一类棋盘上的组合问题. 所谓象问题指的是把 n 个象(国际象棋的一种棋子,它的走法是对角线方向),放在 $n\times n$ 棋盘的格子上,使得它们彼此不能攻击,求不同的放置方法数 $b(n,k)$. 棋盘上任两相邻格子必一黑一白,所以,黑格的像不能走进白格,反之亦一样,因此,一个 $n\times n$ 棋盘可以看做分别由黑格和白格组成的彼此分离的两个棋盘. 把黑格盘或白格盘转动 45°,于是象问题就变成了车问题. $b(n,k)$的生成函数,即象多项式 $P_n(x)$应等于黑格盘与白格盘的两个车多项式之积. 分别以 $B_n(x)$与$w_n(x)$表 $n\times n$ 棋盘所分出的黑格盘与白格盘的车多项式,则有

$$P_n(x)=\sum_{k\geqslant 0}b(n,k)x^k,$$

$$P_n(x) = B_n(x)w_n(x),$$
$$B_{2n}(x) = w_{2n}(x) = T^{n-1}(T+x)^n,$$
$$B_{2n+1}(x) = T^{n-1}(T+x)^{n+1},$$
$$w_{2n+1}(x) = T^n(T+x)^n,$$
$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S_2(n+1, n+1-k)x^k,$$

式中 $T^k \equiv T_k(x)$，$S_2(n+1, n+1-k)$ 是第二类斯特林数.

西蒙-纽科姆问题（Simon-Newcomb's problem） 确定某种排列数的一个问题. 设 π 是多重集 $S=\{i^{k_i} \mid i=1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列，把 π 分段，使得段数最少且每段中数字呈非降顺序，这样的每一段称为 π 的一个上升段. 所谓西蒙-纽科姆问题就是求 S 的恰有 r 个上升段的排列数 $N(1^{k_1}, 2^{k_2}, \cdots, n^{k_n}; r)$. 若以 $S_2(n,k)$ 表第二类斯特林数，则 $N(1^{k_1}, 2^{k_2}, \cdots, n^{k_n}; r)$ 等于 $(A)_1^{k_1}(A)_2^{k_2}\cdots(A)_n^{k_n}$ 的展开式中 x^r 的系数，其中的 $(A)_i = A(A+1-x)(A+2-2x)\cdots(A+k-1-(k-1)x)$，$A^i \equiv A_i(x)$，$n=1,2,\cdots$，且

$$A_i(x) = x\sum_{k=0}^{i-1} S_2(i, i-k)(i-k)!(x-1)^k.$$

存在性定理（existence theorem） 一类定性描述. 要把某种离散对象按某个确定的约束条件进行安排，如果这种特定的安排是否存在还不确定，就需要首先讨论这种特定安排的存在性问题. 在经典组合数学中，霍尔定理、拉姆齐定理和狄尔沃斯定理是三个主要的存在性定理.

抽屉原则（drawer principle） 亦称鸽笼原则或鞋盒原则. 确定一些组合对象的存在性的基本定理. 抽屉原则的简单形式是：若把 $n+1$ 件东西分到 n 个抽屉中，则至少有一个抽屉里有至少 2 件东西. 抽屉原则的一般形式是：设 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 是正整数，若把 $q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$ 件东西放入 n 个抽屉里，则或者第一个抽屉里含有 q_1 件东西，或者第二个抽屉里含有 q_2 件东西，…，或者第 n 个抽屉里含有 q_n 件东西，以上情形必有一种成立. 抽屉原则的简单形式是取 $q_1=q_2=\cdots=q_n=2$ 时之特例.

鸽笼原则（pigeonhole rule） 即“抽屉原则”.

鞋盒原则（shoesbox rule） 即“抽屉原则”.

拉姆齐定理（Ramsey theorem） 一个组合数的存在性定理. 抽屉原则的深刻而重要的推广. 它是英国逻辑学家拉姆齐（Ramsey, F. P.）于 1930 年首先发现的. 拉姆齐定理断言：若整数 $p \geqslant r, q \geqslant r$，$r$ 为正整数，则必存在一个最小正整数 N，记为 $N(p,q;r)$，使得对于每一个正整数 $n \geqslant N(p,q;r)$，下列性质成立：设集合 S 有 n 个元素，若把 S 的全体 r 元子集任意划分为两个类 X 和 Y，则或者存在一个 S 的 p 元子集，它的所有的 r 元子集全在 X 中，或者存在一个 S 的 q 元子集，它的所有 r 元子集全在 Y 中. 数 $N(p,q;r)$ 称为拉姆齐数. 拉姆齐数 $N(p,q,;r)$ 有下列性质：

$$N(p,q;r) = N(q,p;r),$$
$$N(p,r;r) = p, N(p,q;1) = p+q-1.$$

拉姆齐定理的一般形式为：若 $q_1, q_2, \cdots, q_n, t$ 都是正整数，且 $q_1 \geqslant t, q_2 \geqslant t, \cdots, q_n \geqslant t$，则存在一个最小正整数 N，记为 $N(q_1, q_2, \cdots, q_n; t)$，它只依赖于参数 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 和 t，并具有下列性质：若 $m \geqslant N(q_1, q_2, \cdots, q_n; t)$ 且 S 是 m 个元素的集合，把 S 的所有 t 元子集任意分拆成 n 类，则或者有一个 q_1 元的类其全部 t 元子集都属于分拆的第一类，或者有一个 q_2 元的类其全部 t 元子集都属于分拆的第二类，…，或者有一个 q_n 元的类其全部 t 元子集都属于分拆的第 n 类，必有一种情形成立. 数 $N(q_1, q_2, \cdots, q_n; t)$ 称为拉姆齐数. 当 $t=1$ 时，拉姆齐定理即为（一般形式的）抽屉原则，此时，拉姆齐数

$$N(q_1, q_2, \cdots, q_n; 1) = q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1.$$

在 $n>2$ 的情形，目前得到的主要结果是 $N(3,3,3;2)=17$，$N(3,3,3,3;2)=65$；在 $t=2$ 和 $n=2$ 时，目前已知的拉姆齐数 $N(p,q;2)$ 如下：

$N(p,q;2)$ q \ p	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18					

拉姆齐数（Ramsey numbers） 见“拉姆齐定理”.

广义拉姆齐数（generalized Ramsey numbers） 一类组合数. 给出正整数 $l_i, k_i, i=1,2,\cdots,n$ 与 r，满足条件 $l_i \geqslant r \geqslant k_i > 0, i=1,2,\cdots,n$，存在一正整数

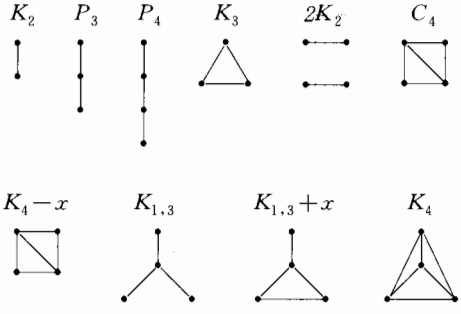
$$N(l_1, k_1; l_2, k_2; \cdots; l_n, k_n; r) = N,$$

它满足下面条件，而且取最小值：若 S 是 $m(\geqslant N)$ 个点的集，将 S 任意分为 n 个 r 元子集，则对于某个 i，$1 \leqslant i \leqslant n$，存在 S 的一个 l_i 元子集，它的每个 k_i 元子集属于上述第 i 个 r 元子集. 若 $n=2$，则有 $N(r, k_1; l, k_2; r) = N(l, k_1; r, k_2; r) = l$，$N(l_1, k_1; l_2, k_2; r) \leqslant N(N(l_1-1, k_1; l_2, k_2; r), k_1-1; N(l_1, k_1; l_2-1, k_2; r), k_2-1; r-1)+1$. 若 $k_1+k_2=r+1$，则有 $N(l_1, k_1; l_2, k_2; r) = l_1+l_2-k_1-k_2+1$. 称 $N(l_1, k_1; l_2, k_2; \cdots l_n, k_n; r)$ 为广义拉姆齐数.

拉姆齐数 $r(F_1, F_2)$（Ramsey number $r(F_1, F_2)$） 一类组合数. 关于两个图 F_1 与 F_2 的拉姆齐数 $r(F_1, F_2)$ 是一个最小正整数 p，它使完全图 K_p 的边任意染红色或绿色时，必有一个绿 F_1 或一个红 F_2. 以下各种图所构成的拉姆齐数如下表（$r(F_1, F_2)$

$=r(F_2,F_1)$)

	K_2	P_3	$2K_2$	K_3	P_4	$K_{1,3}$	C_4	$K_{1,3}+x$	K_4-x	K_4
K_2	2	3	4	3	4	4	4	4	4	4
P_3		3	4	5	4	5	4	5	5	7
$2K_2$			5	5	5	5	5	5	5	6
K_3				6	7	7	7	7	7	9
P_4					5	5	5	7	7	10
$K_{1,3}$						6	6	7	7	10
C_4							6	7	7	10
$K_{1,3}+x$								7	7	10
K_4-x									10	11
K_4										18



霍尔定理(Hall theorem)　一个存在性定理. 设给定了 p 个非空集合 $S_1,S_2,\cdots,S_p$,不要求它们是相异集合,若 $T=(a_1,a_2,\cdots,a_p)$是一个 p 元组,p 个元都相异,其中 $a_i\in S_i,i=1,2,\cdots,p$,则称 T 是集族 $\mathscr{F}=\{S_1,S_2,\cdots,S_P\}$的一个相异代表系(组),简称 SDR. 霍尔(Hall,P.)于 1935 年给出了 SDR 存在的充分必要条件(霍尔定理):集族 $\mathscr{F}=\{S_1,S_2,\cdots,S_p\}$有 SDR 的充分必要条件是,对任一整数 $k,1\leqslant k\leqslant p$,以及对$\{1,2,\cdots,p\}$的任一 k 元子集$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$,并集 $S_{i_1}\cup S_{i_2}\cup\cdots\cup S_{i_k}$至少含有 k 个元素.

相异代表系(system of distinct representatives)见"霍尔定理".

婚姻问题(problem of marriage)　亦称舞会问题或工作安排问题. 一类组合问题. 设有 n 个男子和 n 个女子,每个男子与 n 个女子中的若干个互相认识,问这些男子和女子能否结成 n 对夫妇,使每对夫妇都是已经相互认识的.

舞会问题(problem of dance)　即"婚姻问题".

工作安排问题(problem of assignment)　即"婚姻问题".

广义相异代表系(generalized system of distinct representatives)　相异代表系的推广. 若给出有限集 S 的 n 个非空子集 $T_1,T_2,\cdots,T_n$,无需不相交,且满足下列三个条件,则$(V_1,V_2,\cdots,V_n)$称为广义相异代表系,记为$(m_1,m_2,\cdots,m_n)$-SDR:

1. $V_i\subseteq T_i,i=1,2,\cdots,n$.

2. $|V_i|=m_i,i=1,2,\cdots,n$.

3. $V_i\cap V_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots n,i\neq j$.

若 $m_1=m_2=\cdots=m_n$,则此广义代表系称为 m 元组 SDR. 对于子集族 $T_1,T_2,\cdots,T_n$,存在$(m_1,m_2,\cdots,m_n)$SDR 的充分必要条件是对每一组正整数 k,$i_1,i_2,\cdots,i_k$,满足 $1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,条件

$$|T_{i_1}\cup T_{i_2}\cup\cdots\cup T_{i_k}|\geqslant\sum_{j=1}^{k}m_{i_j}$$

成立.

公共代表系(system of common representatives)　代表系的一种. 设 T 集有两个分拆:

$T=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m,T=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_m$,

其中 A_i,B_j 都不是空集$(i,j=1,2,\cdots,m)$. 若有 T 的一个 m 子集 E 满足:$A_i\cap E\neq\varnothing,B_j\cap E\neq\varnothing(i,j=1,2,\cdots,m)$,则这 $2m$ 个非空交集都是 1 集,这样的 E 称为上面两个分拆的公共代表系,简称 SCR. 上述两个分拆有 SCR 的充分必要条件是:对任一整数 $k,1\leqslant k\leqslant m$,以及对$\{1,2,\cdots,m\}$的任一 k 子集$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$,并集 $A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\cdots\cup A_{i_k}$至多包含 m 个子集 $B_1,B_2,\cdots,B_m$ 中的 k 个.

棋盘完全覆盖问题(problem of perfect cover of chessboard)　一类组合问题. 一个 8×8 国际象棋棋盘,$m\times n$ 广义棋盘,以及任意形式的残破棋盘都可以被骨牌覆盖. 棋盘的一个完全覆盖是若干骨牌安排到棋盘上,使:

1. 每块骨牌覆盖棋盘上相邻两格.

2. 棋盘上每一格都被骨牌覆盖.

3. 没有两块骨牌同时覆盖一格.

独立代表系(system of independent representatives)　代表系的一种. 设有集 S,S 上的一个独立关系是一个关系序列 $I_1,I_2,\cdots$,其中 $I_n\subset S^n$(S^n 是 n 个 S 的笛卡儿积,因而 I_n 是 S 上的 n 重关系),使以下特性成立:

1. $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in I_m\Rightarrow(x_1,x_2,\cdots,x_{m-1})\in I_{m-1}$.

2. $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in I_m\Rightarrow(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\cdots,x_{\pi(m)})\in I_m$,$\pi$ 是$\{1,2,\cdots,m\}$的每个置换.

3. $(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in I_m,(y_1,y_2,\cdots,y_{m+1})\in I_{m+1}\Rightarrow\exists_{y\in\{y_1,y_2,\cdots,y_{m+1}\}}[(x_1,x_2,\cdots,x_m,y)\in I_{m+1}]$.

4. $(x,x)\notin I_2,\forall\ x\in S$.

若 $\xi=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in I_m$,则序列 ξ 是独立的,否则就是不独立的. 若$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$是集 S 的子集的序列,$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in I_n$,且 $x_k\in A_k,k=1,2,$

$\cdots,n$，则$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$的独立代表系，简写为SIR. 若有集S的子集序列$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，对每个$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，任何k个A_i的并集包含$x_1,x_2,\cdots,x_k$，使$(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in I_k$，则称$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$是具有$H$特性的. 若$S$的子集序列具有$H$特性，则必存在$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$的一个SIR.

行和向量(row sum vector)　由一个(0,1)矩阵衍生的一个向量. 设A为一$m\times n$的(0,1)矩阵，A的第i行的n个元素的和$r_i(i=1,2,\cdots,m)$称为行和. 向量$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$称为A的行和向量. 当$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_m$时，$R$称为单调行和向量.

列和向量(column sum vector)　由一个(0,1)矩阵衍生的一个向量. 设A为一$m\times n$的(0,1)矩阵，A的第j列的m个元素的和$s_j(j=1,2,\cdots,n)$称为列和. 向量$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$称为A的列和向量. 当$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n$时，称$S$为单调列和向量.

矩阵类$\mathscr{U}(R,S)$(matrix class $\mathscr{U}(R,S)$)　一类(0,1)矩阵. 由所有那些行和向量R，列和向量S的$m\times n$的(0,1)矩阵构成的类记为$\mathscr{U}(R,S)$. 设$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$，$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，若有$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_m>0$，$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n>0$，则称非零类$\mathscr{U}(R,S)$为规范类$\mathscr{U}(R,S)$.

规范类$\mathscr{U}(R,S)$(normal class $\mathscr{U}(R,S)$)　见“矩阵类$\mathscr{U}(R,S)$”.

极大矩阵(maximal matrix)　具有某种极大性的一个(0,1)矩阵. 设$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$，令$\delta_i=(1,1,\cdots,1,0,0,\cdots,0)$，其前$r_i(i=1,2,\cdots,m)$个分量都是1，后$n-r_i$个分量都是零. 矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_m\end{bmatrix}$$

称为具有行和向量R的极大矩阵. $\overline{A}$的列和向量$\overline{S}=(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\cdots,\bar{s}_n)$是单调的，而且

$$\sum_{i=1}^{m}r_i=\sum_{j=1}^{n}\bar{s}_j,$$

类$\mathscr{U}(R,\overline{S})$只含$\overline{A}$一个矩阵.

向量优超(majority of vectors)　向量间的一种序关系. 设$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$和$S^*=(s_1^*,s_2^*,\cdots,s_n^*)$是分量为非负整数的两个向量，若对下标适当重新编号之后，能使以下关系成立：

$$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n,\ s_1^*\geqslant s_2^*\geqslant\cdots\geqslant s_n^*,$$

$$s_1+s_2+\cdots+s_i\leqslant s_1^*+s_2^*+\cdots+s_i^*\quad(i=1,2,\cdots,n-1),$$

$$s_1+s_2+\cdots+s_n=s_1^*+s_2^*+\cdots+s_n^*,$$

则称S被S^*所优超，记为$S\prec S^*$. 给定行和向量$R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$与列和向量$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，其分量都是非负整数，若$\overline{A}$是行和向量为R的极大矩阵，它的列和向量是$\overline{S}$，则矩阵类$\mathscr{U}(R,S)$非空的充分必要条件是$S\prec\overline{S}$.

交换(interchange)　矩阵的一种变换. 对于$m\times n$的(0,1)矩阵A，把A的2×2子矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{换为}\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

或者把A_2换为A_1，其余分量不变，这样的矩阵变换称为交换. 交换使矩阵的行和向量与列和向量都保持不变. 若A与A'都属于类$\mathscr{U}(R,S)$，则必可通过有限次交换把A变换成A'.

恒1(invariant 1)　矩阵的一类特殊元. 若A是规范类$\mathscr{U}(R,S)$中的任一矩阵，A在(e,f)位置上的元素$a_{ef}=1$，而且对A进行任何交换都不能使a_{ef}变为0，则称a_{ef}是一个恒1. 此时，$\mathscr{U}$中的任一矩阵在(e,f)位置的元素都是1，所以，$\mathscr{U}$的所有矩阵或者全都没有恒1，或者都有恒1，于是，可以称$\mathscr{U}$没有或有恒1. 规范类$\mathscr{U}$有恒1的充分必要条件是，$\mathscr{U}$中每个矩阵A都可以表为

$$A=\begin{pmatrix}J&**&0\end{pmatrix},$$

其中，J是全1矩阵，0是零矩阵.

项秩(term rank)　矩阵的一个指标. 设A是$m\times n$的(0,1)矩阵，A中两两不在同一线(矩阵的一行或一列都称为矩阵的一条线)上的1的最大个数称为A的项秩. A的项秩等于A在任意行与列的排列下的迹的最大值. 另外，A的项秩也等于A的具有非零积和式的子方阵的最大阶数，同时又等于A的能包含A中所有的元素1的线的最小个数. 若$\underline{\rho}$与$\overline{\rho}$是规范类$\mathscr{U}(R,S)$中矩阵的最小项秩与最大项秩，则对于满足$\underline{\rho}\leqslant\rho\leqslant\overline{\rho}$的$\rho$，$\mathscr{U}$中必存在矩阵$A_\rho$，其项秩恰等于$\rho$.

迹(trace)　矩阵的一个量. 一个矩阵的主对角线上的元素之和. 若有$m\times n$矩阵类$\mathscr{U}(R,S)$，$R=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$，$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，$r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_m>0$，$s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_n>0$，即$\mathscr{U}(R,S)$是规范类，$\mathscr{U}$中矩阵的最小迹记为$\underline{\sigma}$，最大迹记为$\overline{\sigma}$，则有

$$\underline{\sigma}=\max_{i,j}\{\min(i,j)-t_{ij}\}\quad(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n);$$

与

$$\overline{\sigma}=\min_{i,j}\{t_{ij}+\max(i,j)\}\quad(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n),$$

且

$$t_{ij}=ij+(r_{i+1}+r_{i+2}+\cdots+r_m)-(s_1+s_2+\cdots+s_j)\quad(i=0,1,\cdots,m;j=0,1,\cdots,n).$$

线秩(line rank)　矩阵的一个指标. 设A是(0,1)矩阵，A的行与列统称为线. 包含A的全部1的

最小线数称为 A 的线秩. 柯尼希定理断言：矩阵的线秩等于项秩. 另外，矩阵的线秩等于该矩阵的具有非零积和式的子方阵的最大阶数，亦等于矩阵经行或列的置换，具有全 1 主对角线的子方阵的最大阶数.

柯尼希定理(König theorem)　见“线秩”.

α 宽度(α-width)　矩阵的一个指标. 设 A 属于 $m\times n$ 规范类 $\mathscr{U}(R,S)$，α 满足 $1\leqslant\alpha<r_m$，$\alpha\in\mathbf{N}$. 设 E 是 A 的 $m\times\varepsilon$ 子矩阵，而且 E 的每个行和不小于 α，使这样的 E 存在的最小正数 ε 称为 A 的 α 宽度，记为 $\varepsilon(\alpha)$.

德布莱英序列(de Bruijn sequence)　亦称完全循环. 一类特殊的组合序列. 一个循环是一个依圆周顺序的序列 $a_1a_2\cdots a_r$，即 a_1 在 a_r 之后，且 $a_2\cdots a_ra_1$，$\cdots$，$a_ra_1\cdots a_{r-1}$ 都是与 $a_1a_2\cdots a_r$ 相同的循环. 设 n 是正整数，$N=2^n$，一个由数码 0 和 1 组成的循环 $a_1a_2\cdots a_N$，即 $a_i\in\{0,1\}$，$i=1,2,\cdots,N$，若子序列 $a_ia_{i+1}\cdots a_{i+n-1}$ ($i=1,2,\cdots,N$)就是所有可能的 N 个由数码 0 和 1 组成的有序序列 $b_1b_2\cdots b_n$，则称该循环是一个完全循环或德布莱英序列. 例如 $n=1$ 时，循环 01；$n=2$ 时，循环 0011，$n=3$ 时，循环 00010111 和 00011101 均为德布莱英序列.

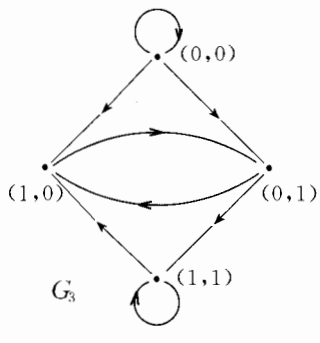
关于德布莱英序列的主要问题是：对任意正整数 n，长为 $N=2^n$ 的德布莱英序列是否存在？若存在，有多少个？德布莱英定理断言：对每个正整数 n，恰存在

$$2^{2^{n-1}-n}$$

个长为 $N=2^n$ 的完全循环. 事实上，每个长为 $N=2^n$ 的德布莱英序列恰与德布莱英图 G_n 中的一条完全回路相对应(参见“德布莱英图”).

完全循环(perfect cycle)　见“德布莱英序列”.

德布莱英图(de Bruijn graph)　一种重要的图，是由(0,1)序列衍生的图. 由数码 0 和 1 组成的序列 $(c_1,c_2,\cdots,c_r)$ 称为一个(0,1)序列，r 称为该序列的长. 长为 $n-1$ 的(0,1)序列共计 2^{n-1} 个. 设每个这样的(0,1)序列 $(c_1,c_2,\cdots,c_{n-1})$ 与一个顶点 p_i 相对应，这里 $1\leqslant i\leqslant 2^{n-1}$. 设每个长为 n 的(0,1)序列 $(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1},b_n)$ 与一个起点为 $(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})$、终点为 $(b_2,b_3,\cdots,b_n)$ 的有向弧相对应. 称具有顶点集 $\{p_i:i=1,2,\cdots,2^{n-1}\}$ 和上述对应有向弧集的有向图为一个德布莱英图，记为 G_n. 图示为 G_3. G_n 为有向连通图，且每个顶点处恰有两条入弧和两条出弧. 通过给定有向图中每一有向弧恰一次的回路，称为该图的一条有向完全回路. G_n 中的有向完全回路与长为 $N=2^n$ 的德布莱英序列一一对应. 德布莱英(de Bruijn, N. G.)证明：G_n 恰有



$$2^{2^{n-1}-n}$$

条有向完全回路.

(0,1)序列((0,1)-sequence)　见“德布莱英图”.

组合算法(combinatorial algorithm)　组合学的一个研究分支. 一些组合问题需用电子计算机解决，当研究如何进行计算时，就需要研究算法. 组合算法是一类不同于代数计算的方法. 为使这种算法能够有效地进行，对于每种组合算法，必须研究其组合结构和在此基础上讨论其时间的复杂性和空间的复杂性问题，即对算法所需的时间和存储单元与输入数据量的关系作出估计.

组合最优化问题(combinatorial optimization problem)　一类在离散状态下求极值的问题. 把某种离散对象按某个确定的约束条件进行安排，当已知合乎这种约束条件的特定安排存在时，寻求这种特定安排在某个优化准则下的极大解或极小解的问题. 组合最优化的理论基础含线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、拟阵论和网络分析等. 组合最优化技术提供了一个快速寻求极大解或极小解的方法.

关联代数(incidence algebra)　一种反映集合中元之间关系的代数. 设 P 是一局部有限偏序集，K 为一域，其特征数为 0. 定义

$$A_k(P)=\{f:P^2\to K,x\lneq y\Rightarrow f(x,y)=0\}.$$

对于函数 f 的集 $A_K(P)$，定义加法、数乘和卷积如下：对于 $f,g\in A_k(P)$，$r\in K$，

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y),$$
$$rf(x,y)=r\cdot f(x,y),$$
$$f*g(x,y)=\sum_{x\leqslant z\leqslant y}f(x,z)g(z,y).$$

$A_k(P)$ 及其加法、数乘与卷积构成 K 上 P 的关联代数. P 的关联代数的单位元是克洛内克的 δ 函数，而且关于卷积是可结合的. $f\in A_k(P)$ 是可逆的充分必要条件是，对于 $\forall\ x\in P$，$f(x,x)\neq 0$. 若此条件满足，则 f 的逆元 f^{-1} 为：

$$f^{-1}(x,x)=\frac{1}{f(x,x)},$$

$$f^{-1}(x,y)=\frac{1}{f(y,y)}\Big(-\sum_{x\leqslant z\leqslant y}f^{-1}(x,z)f(z,y)\Big).$$

$A_K(P)$ 的每个元 f 都称为 K 上 P 的关联函数. 重要的关联函数有：

1. δ 函数，$\delta(x,y)=1$，当 $x=y$，$\delta(x,y)=0$，当 $x\neq y$.

2. ζ 函数，$\zeta(x,y)=1$，当 $x\leqslant y$，否则 $\zeta(x,y)=0$.

3. λ 函数，$\lambda(x,y)=1$，当 $x=y$，或 $x<y$，即此时 x 被 y 覆盖，否则 $\lambda(x,y)=0$.

4. 链函数，$\eta=\zeta-\delta$.

5. 覆盖函数，$\kappa=\lambda-\delta$.

6. 默比乌斯函数，$\mu=\zeta^{-1}$.

7. 长度函数，$\rho(x,y)=[x,y]$的长度.

关联函数(incidence function) 见“关联代数”.

递归关系(recurrence relation) 序列的项之间的一种关系. 指序列的任一项均被其前若干项所确定的那种关系. 对于数列$\{a_n|n=0,1,2,\cdots\}$，若当 $n\geqslant 0$ 时，恒有关系式

$$a_{n+k}=F(a_{n+k-1},\cdots,a_n),$$

这里 k 为正整数，F 为元 $a_{n+k-1},\cdots,a_n$ 的代数函数，且 a_n 必在式中出现，则 $a_{n+k}=F(a_{n+k-1},\cdots,a_n)$称为数列$\{a_n|n=0,1,2,\cdots\}$的一个递归关系. 若给定此递归关系，且给出 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$的一组初值，则数列$\{a_n|n=0,1,2,\cdots\}$完全确定. 例如，递归关系 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 及初值 $a_0=a_1=1$ 完全确定数列 1,1,2,3,5,8,…，称为斐波那契数列. 使用计算机，根据给定递归关系和初值计算相应的数列的项很方便. 因此，递归关系是研究数列的一个有力工具.

特征方程(characteristic equation) 见“常系数线性齐次递归关系”.

河内塔问题(puzzle of Hanoi towers) 一个古老的组合学问题. 有三个竹桩分别记为 A,B,C. 把 n 个大小不等的圆盘依其半径大小，从下而上套在竹桩 A 上，最大的在底下，成一圆盘“塔”. 设每次只允许取一个圆盘从一个竹桩转移到另一个上，而且任何时间不允许大圆盘在较小圆盘上方. 在此移动规则下，若要求把 A 上的 n 个圆盘转移到 C 上，问最少要移动多少次. 这就是河内塔问题. 若 S_n 为转移 n 个圆盘所需的最少移动次数，则有递归关系：$S_n=2S_{n-1}+1$，初值是 $S_1=1$，由此解得 $S_n=2^n-1$.

集合分拆(partition of a set) 集合元素的一种分类. 设 m 元集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$. 若 S 的子集 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 满足下列条件：

1. $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 均非空，即

$$S_i\neq\varnothing\ (i=1,2,\cdots,k);$$

2. 各 $S_i(i=1,2,\cdots,k)$间互不相交，即

$$S_i\cap S_j=\varnothing\ (i\neq j;i,j=1,2,\cdots,k);$$

3. $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 之并为 S，即 $\bigcup_{i=1}^{k}S_i=S$；

则称子集族 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 构成集合 S 的一个分拆，记为分拆$(S_1,S_2,\cdots,S_k)$. 每个子集 S_i 都称为这一分拆的部分. m 元集合 S 的具有 k 个部分的所有分拆的总数为第二类斯特林数 $S_2(m,k)$.

分拆的型(type of partitions) 分拆的一种表示. 设 m 元集合 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$的一个分拆$(S_1,S_2,\cdots,S_k)$，它的 k 个部分是由 λ_1 个一元子集，λ_2 个二元子集，…，λ_n 个 n 元子集所组成，这里，$1\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2+\cdots+n\cdot\lambda_n=m,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=k$，则称这个分拆是 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$型的. m 元集合 S 的具有 k 个部分的 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$型所有分拆总数是

$$\frac{m!}{(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(n!)^{\lambda_n}\cdot(\lambda_1!)(\lambda_2!)\cdots(\lambda_n!)}.$$

有序分拆(ordered partition) 分拆的一种有序表示. 对于给定的正整数 $k(\leqslant n)$，n 的有序和表示 $n_1+n_2+\cdots+n_k$，称为 n 的一个有序 k 分拆，这里 n_i $(1\leqslant i\leqslant k)$为正整数. n_i 称为有序分拆的第 i 个部分数，k 称为有序分拆的部分个数. n 的有序 k 分拆数

$$\bar{p}_k(n)=\binom{n-1}{k-1}.$$

求 $\bar{p}_k(n)$的问题相当于下列问题之一：

1. 在一水平直线上有 n 个不同点，设正整数 $k\leqslant n$，今用 $k-1$ 条竖线以任意方式插入这 n 个点间的 $k-1$ 个间隙中，求竖线插入方式的总数. 这里竖线的插入方式与 n 的有序 k 分拆一一对应.

2. 求将 n 个不可分辨的球放入 k 个不同的盒子，且第 $i(1\leqslant i\leqslant k)$个盒子装入 n_i 个球的放法总数. 对于给定的正整数 k，分拆数的生成函数为

$$G\{\bar{p}_k(n)\}=\left(\frac{x}{1-x}\right)^k.$$

完全分拆(perfect partition) 整数的一种分拆. 若 $n\in\mathbf{N}$ 的一个分拆

$$n=\sum_{r=1}^{s}k_ri_r\quad(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s),$$

$i_r,k_r\in\mathbf{N}$ $(r=1,2,\cdots,s)$，具有特性：对于任一正整数 $m<n$，都有且只有一个形如

$$m=\sum_{r=1}^{t}k_{j_r}l_{j_r}\quad(1\leqslant j_1<\cdots<j_t\leqslant s),$$

$k_{j_r}\geqslant l_{j_r}\geqslant 1,r=1,2,\cdots,t$ 的分拆，则此分拆称为完全分拆. 正整数 n 的完全分拆

$$1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}\cdots(q_1q_2\cdots q_{k-2})^{q_{k-1}}$$

(即分拆有 q_1-1 个 1，q_2-1 个 q_1，q_3-1 个 q_1q_2，…，q_{k-1}个 $q_1q_2\cdots q_{k-2}$)与 $n+1$ 的有序因子分解 $n+1=q_1q_2\cdots q_k(q_r\geqslant 2,r=1,2,\cdots,k)$之间可以建立一一对应关系，因而二者的个数相同.

菲勒图(Ferrer's diagram) 整数分拆的一种图表示. 菲勒图是研究分拆的有力工具. 正整数 n 的一个 k 分拆

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k,\quad n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 1,$$

可以用菲勒图来表示. 菲勒图用方格构成，自上而下

依次排列 k 行，左边对齐，第 i 行($1\leqslant i\leqslant k$)有 n_i 个方格. 这样的一个菲勒图有时记为

$$J(n)=\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant n_i\}.$$

于是 n 的分拆与其菲勒图一一对应. 把一个菲勒图的各行改为各列，但其相对位置不变，这样得到的菲勒图，称为原菲勒图的共轭菲勒图. 与共轭菲勒图对应的分拆，称为原分拆的共轭分拆. 一个与其共轭菲勒图相同的菲勒图称为自共轭菲勒图. 与自共轭菲勒图对应的分拆，称为自共轭分拆. 例如，利用菲勒图可得：

1. n 的 k 分拆数等于 n 的最大部分数为 k 的分拆数.

2. n 的自共轭分拆的个数等于 n 分成各部分数都不相等且均为奇数的分拆数.

3. n 分成各部分数互不相等的分拆的个数等于 n 分成各部分数都是奇数的分拆数.

共轭菲勒图(conjugate Ferrer's diagram)　见“菲勒图”.

共轭分拆(conjugate partition)　见“菲勒图”.

自共轭菲勒图(self-conjugate Ferrer's diagram)　见“菲勒图”.

自共轭分拆(self-conjugate partition)　见“菲勒图”.

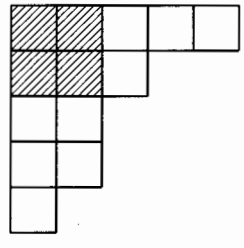
窦菲方(Durfee square)　分拆中的一类局部结构. 对于正整数 n 的一个分拆

$$n=\sum_{i=1}^{k}n_i\quad(n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 1),$$

若

$$s=\max_{n_i\geqslant i}\{i\},$$

则在此分拆的菲勒图的左上角中有一个含有 s^2 个方格所成的正方形，此正方形称为此分拆的窦菲方，s 为窦菲方的边长. 如图 $13=5+3+2+2+1$，左上角阴影部分为其窦菲方，边长 $s=2$. 一个菲勒图除了它的窦菲方之外，可能有右边和下边两尾巴，右边是某个数 l 的不多于 s 个部分的分拆的菲勒图，下边是某个数 m 的每个部分不大于 s 的分拆的菲勒图.



标准表(standard tableau)　一类由正整数组成的表，它具有一些属性. 设正整数 n 的一个 k 分拆

$$J:\ n=\sum_{i=1}^{k}n_i\quad(n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 1),$$

其对应的菲勒图为

$$J(n)=\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant n_i\}.$$

定义函数 $f:J(n)\to\mathbf{N}$，$\mathbf{N}$ 为自然数集，$f(i,j)=n_{ij}$，使得$\forall\ i$，有 $j\leqslant j'\Rightarrow n_{ij}\leqslant n_{ij'}$，以及$\forall\ j$，有 $i\leqslant i'\Rightarrow n_{ij}\leqslant n_{i'j}$，换言之，给 n 的一个分拆的菲勒图的每个方格填入一个正整数，使得每行自左至右递增，同时每列自上至下亦递增，则此正整数 n_{ij} 的阵列称为具有基数 n 和格局 J 的一个杨氏表. 它是由杨(Young, A.)于 19 世纪末引进的. 若杨氏表的所有数 n_{ij} 相异，且恰取遍 $1,2,\cdots,n$，则称为标准表. 若以 $e(J)$ 表示具有基数 n 和格局 J 的所有标准表数，则

$$e(J)=\frac{n!}{\prod\limits_{i,j}h_{ij}},$$

式中 h_{ij} 为标准表中方格 (i,j) 的钩长. 所谓钩长是指方格 (i,j) 右面同行和下面同列且包含自己在内的格子数. 式中分母是所有方格的钩长之积. 例如基数 $n=7$，格局 $J:3+2+2$ 的菲勒图(下表所示)，在每个方格中填入该方格的钩长，由上面公式可得相应标准表数

$$e(J)=\frac{7!}{1^2\cdot 2^2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=21.$$

5	4	1
3	2	
2	1	

杨氏表(Young tableau)　见“标准表”.

雅可比恒等式(Jacobi identity)　椭圆函数理论中的一个著名恒等式. 若 $|x|<1$，则

$$\prod_{i=1}^{\infty}\{(1-x^{2n})(1+x^{2n-1}z^2)(1+x^{2n-1}z^{-2})\}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})=\sum_{-\infty}^{\infty}x^{n^2}z^{2n}.$$

这就是雅可比恒等式. 雅可比恒等式的一些特殊情形，在分拆理论中有应用. 若把式中的 x 换为 $x^{3/2}$，z^2 换为 $-x^{1/2}$，则得欧拉恒等式

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n x^{\frac{1}{2}n(3n+1)}.$$

欧拉恒等式(Euler identity)　一类组合恒等式. 即

$$\varphi(t)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(t^{\frac{1}{2}(3k^2-k)}+t^{\frac{1}{2}(3k^2+k)}).$$

若 n 的全部分拆数为 $p(n)$，$p(n)$ 的生成函数为 $p(t)$，则

$$p(t)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-t^i)^{-1}=\frac{1}{\varphi(t)}.$$

为求 $p(t)$的展式，欧拉(Euler,L.)先求得 $\varphi(t)$的展式. $\varphi(t)$的前若干项如下式所示：

$$\varphi(t)=1-t-t^2+t^5+t^7-t^{12}-t^{15}+t^{22}+t^{26}-t^{35}-t^{40}+\cdots.$$

由此可通过待定系数法求得 $p(t)$的前若干项：

$$p(t)=1+t+2t^2+3t^3+5t^4+7t^5+11t^6+15t^7+22t^8+\cdots.$$

2 **进分拆**(binary partition)　数的一类分拆. 即正整数 n 的特殊分拆，使每个分部量都是 2 的幂. 以 $b(n)$表 n 的 2 进分拆数，则 $b(n)$的生成函数为

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)x^n=\prod_{n=0}^{\infty}(1-x^{2^n})^{-1}.$$

平面分拆(plane partition)　数的一类分拆. 设正整数

$$n=\sum_{i,j\geqslant 0}n_{ij}$$

使 $i\leqslant i'$，$j\leqslant j'$时，$n_{ij}\geqslant n_{i'j'}$，且 n_{ij}都是非负整数，称为 n 的一个平面分拆. 换言之，n 的各分部按行列排列，使同行中分部量不增，同列中也一样. 若至多 k 行，至多 r 列，第 i 行首列的分部量为 $n_i(i=1,2,\cdots,k)$的平面分拆数的生成函数记为 $\pi_r(n_1,n_2,\cdots,n_k;x)$，则

$$\pi_{r+1}(n_1,n_2,\cdots,n_k;x)=x^{n_1+n_2+\cdots+n_k}\times\sum_{m_k=0}^{n_k}\sum_{m_{k-1}=m_k}^{n_{k-1}}\cdots\sum_{m_1=m_2}^{n_1}\pi_r(m_1,m_2,\cdots,m_k;x),$$

$$\pi_1(n_1,n_2,\cdots,n_k;x)=x^{n_1+n_2+\cdots+n_k}.$$

反射原则(principle of reflection)　一类求特定组合数的方法. 坐标平面上由整点 $A(a,\alpha)$至 $B(b,\beta)(b>a\geqslant 0,\alpha>0,\beta>0,b-a\equiv\beta+\alpha(\mathrm{mod}\,2),b-a\geqslant\beta+\alpha)$的经过 x 轴上的点的不同路径(每段由整点(i,j)到$(i+1,j+1)$或$(i+1,j-1)$)数等于由 A 的关于 x 轴的对称点 $A'(a,-\alpha)$至 B 的不同路径数，该数等于

$$\frac{(b-a)!}{\left(\frac{b-a}{2}-\frac{\beta+\alpha}{2}\right)!\left(\frac{b-a}{2}+\frac{\beta+\alpha}{2}\right)!}.$$

特殊情形：由点 $O(0,0)$至点 $U(2n,0)$的在 x 轴的上半平面而中间不经过 x 轴上的点的路径数为

$$u_n=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!};$$

允许经过 x 轴上的点，而不越过 x 轴的路径数为

$$u_{n+1}=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!},$$

并且，u_n 和 u_{n+1}都是卡塔朗数.

撰　稿　于洪全　孙　革　钟　集　徐永华　徐利治
审　稿　沈　灏　蔡茂诚

组 合 设 计

组合设计(combinatorial design)　组合学的主要分支之一. 200 多年前，欧拉(Euler,L.)所讨论的拉丁方及正交拉丁方是组合设计的较早例子. 更早的例子可追溯到中国古代的幻方(即纵横图). 著名的柯克曼女生问题所涉及的可分解平衡不完全区组设计是又一个例子. 这些早期的例子往往以智力游戏的原始形态出现. 由于生产技术的需要，以及诸如试验设计与纠错码这样一些相近学科的发展，为组合设计理论的发展提供了强大的推动力. 近 20 多年来，这一分支正处于迅速成长时期，不仅积累了大量的材料，而且逐步形成了以平衡不完全区组设计为主线，将各种类型的组合设计加以统一处理的理论体系. 1985 年以来，以设计理论或组合设计为题的专著已有多本. 它与码和密码的联系也正在受到越来越多的关注，一份新的国际性杂志《设计、码和密码》(Designs,Codes and Cryptography)已于 1991 年创刊. 设有限集 X 含 v 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_v$，称这些元素为点或处理. 设 $B_1,B_2,\cdots,B_b$ 是 X 的 b 个子集，称这些子集为区组，这一族子集记为 $\mathscr{B}$，并称对子$(X,\mathscr{B})$为一个区组设计. 若每个区组的大小为 k，每个点在 r 个区组中出现，并且每两个相异点恰同时出现在 λ 个区组中，则称这样的区组设计为平衡不完全区组设计. 这一概念由玻色(Bose,R. C.)于 1939 年提出. 20 世纪 60 年代，哈拿匿(Hanani,H.)解决了当 k 值较小时，这一类设计的存在性问题. 至 20 世纪 70 年代，威尔森(Wilson,R. M.)提出了 PBD 闭集的概念并解决了对一般 k 值以及 v 充分大时这一类设计的存在性. 至于 v 充分大这一条件的确切描述已于 1996 年由常彦勋给出.

在设计理论的发展过程中，平衡不完全区组设计受到了几种不同方式的推广. 若放弃区组有统一的大小 k，而允许区组大小在一个正整数集合 K 中取值，则得到的设计称为成对平衡设计. 这一类设计对解决关于正交拉丁方的欧拉猜想以及对威尔森的工作起过重要的作用. 在此基础上形成的 PBD 闭集方法有着统一处理各种不同类型设计存在性问题的作用. 另一方面，若不是要求两个相异点而是任一个 t 元子集恰同时出现在 λ 个区组中，则这样的设计称为 t 设计. 若在区组内部引进点之间的邻接关系，即把区组看成一个图，则得到又一种推广，称为图设计或 G 设计. 若点与点之间有不同的结合关系，有第 i 种结合关系的两点恰在 λ_i 个区组中同时出现，则这样的推广就是部分平衡不完全区组设计. 除了这些形式的推广外，还有一些组合设计与平衡不完全区组设计有着各种各样的联系. 例如，正交拉丁方在具

体应用 PBD 闭集方法时起着重要的作用，而正交拉丁方的存在性也依赖于成对平衡设计的概念和方法. 又如，阿达马矩阵与一类特殊的对称平衡不完全区组设计等价，而罗姆方则等价于一类双可分解的平衡不完全区组设计.

组合设计理论主要讨论各种类型的组合设计的性质、存在性、构造方法及相互关系等问题. 设计的构造方法基本上可分为两类，即直接构造及递推构造. 利用有限几何构造设计以及利用有限群构造设计是主要的直接构造方法. 差集及混差法就是利用有限群构造设计的方法.

由于一些重要的码类常常与某种类型的组合设计有关，有些密码问题的理论分析也涉及某些组合设计，所以设计与码、设计与密码的相互联系近年来受到了特别的关注. 将设计的关联矩阵在某个 q 元域上张成的子空间称为设计的码. 这样就有可能通过研究码来研究设计. 关于 6 阶正交拉丁方不存在性的一个简洁证明以及 10 阶射影平面的不存在性证明是这种研究途径的两个成功的例证.

作为组合学的一个分支，设计问题的研究时常要用到组合计数理论中的结果以及图论中的一些概念，并且，还需要有限群、有限域、有限域上的向量空间及射影空间等代数的和几何的概念和结果作为工具. 随着计算机应用的进一步普及以及信息科学的进一步发展，离散数学的重要性将越来越多地被人们所认识. 组合设计乃至组合学作为离散数学的重要组成部分将有着光明的发展前景.

平衡不完全区组设计(balanced incomplete block design)　一类重要的区组设计. 若 X 为 v 元点集，$\mathscr{B}$ 为 X 的一些 k 元子集组成的族(这些 k 元子集称为区组)，使得 X 中的任意点对 $\{x,y\}$ 恰好出现在 λ 个区组中，则称区组设计 $(X,\mathscr{B})$ 为一个平衡不完全区组设计. 当这个区组设计中区组个数为 b，每个点恰在 r 个区组中出现时，记为 (v,b,r,k,λ)-BIBD. 因为这 5 个参数适合以下关系式：$bk=vr$，$\lambda(v-1)=r(k-1)$ 及 $b\geqslant v$，从而 $r>k$. 这样由 3 个参数即可确定全部参数，所以这个设计也记为 (v,k,λ)-BIBD. 一个 $(v,3,1)$-BIBD 也称为施泰纳三元系. (v,k,λ)-BIBD 存在的必要条件可表为 $\lambda(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,k-1)$ 和 $\lambda v(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,k(k-1))$. 对于 $k=3,4$ 和 5，哈拿匿(Hanani, H.)证明了除 $(15,5,2)$-BIBD 不存在外，参数满足以上必要条件的 (v,k,λ)-BIBD 总是存在的. 当 $6\leqslant k\leqslant 9$ 时，BIBD 设计的存在性已有部分结果，但尚未完全解决. 对于上述必要条件，威尔森(Wilson, R. M.)于 1975 年证明了渐近存在定理，即，对于任意给定的 k 和 λ，存在某个与 k,λ 有关的常数 $M(k,\lambda)$，使得当 $v\geqslant M(k,\lambda)$ 时，这个必要条件也是充分的. 他的证明基于算术级数中素数个数无限的狄利克雷定理，并没有具体指明 $M(k,\lambda)$ 有多大. 如何从 k 和 λ 明确给出 $M(k,\lambda)$，已由常彦勋于 1996 年得到解答. 虽然 BIBD 设计的存在性尚未解决，但当 $r\leqslant 41$ 时关于 BIBD 设计的存在性、计数及可分解性结果，已有现成的表可以查用，其中 $r\leqslant 10$ 的未知设计为 $(46,69,9,6,1)$-BIBD 和 $(51,85,10,6,1)$-BIBD.

平衡不完全区组设计来源于统计学中称为试验设计法的一个分支，并用于工农业及技术科学实验的安排. 此外，平衡不完全区组设计在编码理论的研究中也有重要的应用.

区组设计(block design)　组合设计研究的主要对象之一. 设有限集 X 含 v 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_v$，这些元素称为点或处理. $B_1,B_2,\cdots,B_b$ 是 X 的 b 个子集(其中可能有相同者)，这些子集称为区组，将这些区组组成的子集族记为 $\mathscr{B}$. 称对子 $(X,\mathscr{B})$ 为一个区组设计. 这样定义的区组设计并不包含多少信息，为在理论研究和实际应用中得到有意义的对象，需要对区组设计加强条件. 当 $(X,\mathscr{B})$ 中有两个区组相同时，称它们为重复区组，无重复区组的设计称为简单设计. 在一个区组设计中，若每个点恰在 r 个区组中出现，且每个区组恰包含 k 个点，则称该区组设计为正则设计，称 r 为重复数，k 为区组大小. 当区组设计中任意两个不同的点恰好同时出现在 λ 个区组中时，称该区组设计为平衡设计，且称 λ 为设计的相遇数. 区组 B 与 X 相同时称 B 为完全区组. 若区组设计中至少有一个区组不是完全区组，则称之为不完全区组设计. 当 $\mathscr{B}$ 中有一部分区组形成集 X 的一个划分时，称这部分区组为一个平行类. 若 $\mathscr{B}$ 可以划分为若干个平行类，则称该区组设计是可分解的. 组合设计的基本问题之一是研究各种区组设计存在的充分必要条件.

重复区组(repeated block)　见“区组设计”.

简单设计(simple block design)　见“区组设计”.

正则设计(regular block design)　见“区组设计”.

平衡设计(balanced block design)　见“区组设计”.

相遇数(index)　见“区组设计”.

不完全区组设计(incomplete block design)　见“区组设计”.

关联矩阵(incidence matrix)　研究区组设计的一种工具. 若 v 元集 X 上的区组设计 $(X,\mathscr{B})$ 的区组为 $\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$，则这个设计的关联矩阵是一个元素为 0 或 1 与 X 和 $\mathscr{B}$ 有关的 $b\times v$ 的 $(0,1)$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，其中对 $x_j\in X$，

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (x_j\in B_i),\\ 0 & (x_j\notin B_i)\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant b;1\leqslant j\leqslant v).$$

对于具有某些特定性质的区组设计，它的关联矩阵也相应地具有一些特定的性质. 例如，$b\times v$ 的(0，1) 矩阵 A 为一个(v,b,r,k,λ)-BIBD 的关联矩阵的充分必要条件是 $A^TA=(r-\lambda)I_v+\lambda J_v$ 和 $AW_v=kW_v$，其中 I_v 为 v 阶单位阵，J_v 是元素全为 1 的 v 阶方阵，W_v 是元素全为 1 的 $v\times 1$ 矩阵.

费希尔不等式(Fisher's inequality)　反映设计存在的一种条件. 指(v,b,r,k,λ)-BIBD 存在时，参数 b 与 v 必须满足的不等式：$b\geqslant v$. 该不等式由费希尔(Fisher，R. A.)于 1940 年发现. 后来雷·乔德里(Ray-Chaudhuri，D. K.)和威尔森(Wilson，R. M.)将这个不等式推广到 t 设计的情形. 他们证明：若 $2s$-(v,k,λ)设计存在，且 $v\geqslant k+s$，则

$$b\geqslant\binom{v}{s};$$

若$(2s+1)$-(v,k,λ)设计存在，且 $v\geqslant k+s+1$，则

$$b\geqslant 2\binom{v-1}{s}.$$

以上不等式称为推广的费希尔不等式.

推广的费希尔不等式(extended Fisher's ineguality)　见“费希尔不等式”.

补设计(complementary design)　由一个区组设计派生的另一个区组设计. 若一个区组设计$(X,\mathscr{B})$的区组为 $B_1,B_2,\cdots,B_b$，对每个区组 B_i，做 $B_i'=X\backslash B_i$，把这样得到的所有 B_i' 作为区组族 $\mathscr{B}'$，则称$(X,\mathscr{B}')$为区组设计$(X,\mathscr{B})$的补设计. 一个(v,b,r,k,λ)-BIBD 的补设计是一个$(v,b,b-r,v-k,b-2r+\lambda)$-BIBD. 若区组设计$(X,\mathscr{B})$的关联矩阵为 A，则其补设计的关联矩阵 $\overline{A}=J_{b\times v}-A$，这里 $J_{b\times v}$是元素全为 1 的 $b\times v$ 矩阵.

对称平衡不完全区组设计(symmetric balanced incomplete block design)　简称对称设计. 一种特殊类型的平衡不完全区组设计. 即当 $b=v$ 或 $r=k$ 时的 BIBD 设计，记为(v,k,λ)-SBIBD. 对称设计的参数除了应满足 BIBD 设计的参数条件外，还需满足布鲁克-赖瑟-乔拉定理. 从一个(v,k,λ)差集可以得到一个(v,k,λ)-SBIBD，而一个有限射影平面就是一个 $\lambda=1$ 的对称设计. $\lambda=2$ 的对称设计称为双平面. 人们猜测对大于 1 的固定 λ，只存在有限多个对称设计. 双平面情形可用来测试这一猜想. 除 $k=2,3,4,5,6,9,11,13$ 外，目前尚不知道是否存在其他 k 值的双平面. 某些对称设计可用来构作阿达马矩阵，另一些可用来构作双偶自对偶码.

对称设计(symmetric design)　见“对称平衡不完全区组设计”.

布鲁克-赖瑟-乔拉定理(Bruck-Ryser-Chowla theorem)　反映对称设计存在的必要条件的一个事实. 若(v,k,λ)-SBIBD 存在，记 $n=k-\lambda$，则当 v 为偶数时，n 为平方数；当 v 为奇数时，不定方程

$$z^2=nx^2+(-1)^{\frac{v-1}{2}}\lambda y^2$$

有不全为零的整数解 x,y,z. 利用这个定理可以确定某些对称设计的不存在性. 例如，因为 22 是偶数，而 $n=5$ 不是平方数，所以(22，7，2)-SBIBD 不存在. 另外，这个定理给出的条件并不是充分的. 例如，最近证明了 10 阶射影平面不存在，即(111，11，1)-SBIBD 不存在.

导出设计(derived design)　一种重要的设计. 指由对称设计导出的平衡不完全区组设计. 具体构作方法如下：若一个(v,k,λ)-SBIBD 的区组为 $B_1,B_2,\cdots,B_v$，取定其中一个区组 B_j，对其余区组 B_i，记 $B_i'=B_i\cap B_j$，且 $\mathscr{B}_j'=\{B_i'\mid 1\leqslant i\leqslant v,i\neq j\}$，则$(B_j,\mathscr{B}_j')$是一个$(k,v-1,k-1,\lambda,\lambda-1)$-BIBD. 称这个设计为原对称设计的一个导出设计.

剩余设计(residual design)　一种由对称设计导出的平衡不完全区组设计. 具体的构作方法如下：设$(X,\mathscr{B})$是一个(v,k,λ)-SBIBD，取定一个区组 B_0，对其余的区组 B，记 $B'=B\backslash B_0$，且 $\mathscr{B}'=\{B'\mid B\in\mathscr{B}\backslash\{B_0\}\}$，这样得到的一个区组设计$(X\backslash B_0,\mathscr{B}')$是一个$(v-k,v-1,k,k-\lambda,\lambda)$-BIBD，称为$(X,\mathscr{B})$的剩余设计. 当一个 BIBD 设计的参数为$(v-k,v-1,k,k-\lambda,\lambda)$时，称为拟剩余设计. 若一个拟剩余设计是某个对称设计的剩余设计，则称该拟剩余设计是可嵌入的. 利用康纳-霍尔定理可以证明某些 BIBD 设计不存在.

拟剩余设计(quasi-residual design)　见“剩余设计”.

康纳-霍尔定理(Connor-Hall theorem)　关于拟剩余设计的嵌入定理. 该定理断言：$\lambda=2$ 的拟剩余设计都是剩余设计，即都是可嵌入的. 关于可嵌入的情况，除了 $\lambda=2$ 外，因 $\lambda=1$ 时的拟剩余设计是仿射平面，从而也是可嵌入的. 对 $\lambda\geqslant 3$，目前仅知道关于 k 的渐近结果. 对于任意给定的 λ，存在关于 λ 的函数 $f(\lambda)$，使得 $k>f(\lambda)$时的拟剩余设计总是可嵌入的. 但是，也有例子说明：并非所有的拟剩余设计都是可嵌入的. 利用嵌入定理可以证明某些 BIBD 设计的不存在性. 例如，若(15，21，7，5，2)-BIBD 存在，则必为某个(22，7，2)-SBIBD 的剩余设计，但由布鲁克-赖瑟-乔拉定理知(22，7，2)-SBIBD 不存在，从而(15，21，7，5，2)-BIBD 也不存在.

BIBD **设计的存在性猜测**(existence conjecture of BIBD)　一种对设计存在条件的推测. 对于给定的 k 和 λ，存在常数 $M(k,\lambda)$，使得 $v\geqslant M(k,\lambda)$时，(v,k,λ)-BIBD 存在的充分必要条件为 $\lambda(v-1)\equiv 0$

$(\mathrm{mod}\, k-1)$和 $\lambda v(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\, k(k-1))$. 这一猜测已由威尔森(Wilson, R. M.)于 1975 年证实.

柯克曼女生问题(Kirkman's school girl problem)　一个组合设计问题. 由柯克曼(Kirkman, T. P.)于 1850 年提出. 某教员打算安排班上的 15 名女生散步,散步时 3 名女生成一组,共五组. 问能否在一周内每天安排一次散步,使得每两名女生在这周内恰有一次分在同一组内散步? 下面是该问题的一个解:

{1,2,5}　{3,14,15}　{4,6,12}　{7,8,11}　{9,10,13};
{1,3,9}　{2,8,15}　{4,11,13}　{5,12,14}　{6,7,10};
{1,4,15}　{2,9,11}　{3,10,12}　{5,7,13}　{6,8,14};
{1,6,11}　{2,7,12}　{3,8,13}　{4,9,14}　{5,10,15};
{1,8,10}　{2,13,14}　{3,4,7}　{5,6,9}　{11,12,15};
{1,7,14}　{2,4,10}　{3,5,11}　{6,13,15}　{8,9,12};
{1,12,13}　{2,3,6}　{4,5,8}　{7,9,15}　{10,11,14}.

其中每一行表示一次散步的分组. 柯克曼女生问题后来发展为一般的可分解 BIBD 设计的存在性问题(参见"可分解平衡不完全区组设计").

可分解平衡不完全区组设计(resolvable balanced incomplete block design)　一类特殊的 BIBD 设计,缩写为 RBIBD. 即其区组全体可以划分为一些平行类(参见"区组设计")的 BIBD 设计. 一个参数为 (v,k,λ) 的可分解 BIBD 设计记为 (v,k,λ)-RBIBD. 一个 $(v,3,1)$-RBIBD 也称为柯克曼三元系. 它的存在性直到 1971 年才由雷·乔德里(Ray-Chaudhuri, D. K.)和威尔森(Wilson, R. M.)彻底解决. 他们证明:$(v,3,1)$-RBIBD 存在的充分必要条件为 $v\equiv 3(\mathrm{mod}\, 6)$. 接着他们与哈拿匿(Hanani, H.)一起证明:$(v,4,1)$-RBIBD 存在的充分必要条件为 $v\equiv 4(\mathrm{mod}\, 12)$. 与此同时,前两位作者还猜测 $v\equiv 5\ (\mathrm{mod}\, 20)$ 是 $(v,5,1)$-RBIBD 存在的充分必要条件. 目前除 5 个可能例外的 v 值(最小为 45,最大为 645),这个猜测已被证实. 与 BIBD 设计相类似,可分解 BIBD 设计的存在性也已有了渐近结果,雷·乔德里和威尔森证明了 $\lambda=1$ 的情形,中国的陆家羲把 λ 推广为一般的情形. 他们证明:对给定的正整数 k 和 λ,除有限多个正整数 v 外,(v,k,λ)-RBIBD 存在的充分必要条件是 $v\equiv 0(\mathrm{mod}\, k)$ 和 $\lambda(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\, k-1)$. 这里的"有限多个正整数 v"并没有明确给出究竟有多少,这是有待进一步解决的问题. 关于 RBIBD,玻色(Bose, R. C.)于 1942 年证明了不等式:$b\geqslant v+r-1$. 当等号成立时,称该设计为仿射的,记为 ARBIBD(参见"仿射可分解设计").

柯克曼三元系(Kirkman's triple system)　见"可分解平衡不完全区组设计".

准可分解设计(almost resolvable design)　可分解平衡不完全区组设计的一种变体. 设 $(X,\mathscr{B})$ 是一个 $(v,k,k-1)$-BIBD,$v\equiv 1(\mathrm{mod}\, k)$,若区组族 $\mathscr{B}$ 有一个划分 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\cdots,\mathscr{B}_v$,使得对每个 $\mathscr{B}_i$,存在点 x,使 $\mathscr{B}_i$ 是 $X\backslash\{x\}$ 的划分,则称这个 BIBD 设计为准可分解设计. 当 $k=3,4$ 时,准可分解设计的存在性已经解决,只要 $v\equiv 1(\mathrm{mod}\, k)$,总存在准可分解的 $(v,k,k-1)$-BIBD. 关于 $k=5$ 的准可分解设计的存在性,目前仅剩有限个 v 值尚未确定.

仿射可分解设计(affine resolvable block design)　一类特殊的可分解区组设计. 当一个可分解区组设计中任意两个不在同一个平行类中的区组都恰好有 m 个公共点时,称这个区组设计是仿射可分解设计. 仿射可分解设计必定是一个可分解 BIBD 设计. 玻色(Bose, R. C.)证明:当且仅当一个可分解 BIBD 设计的参数满足 $b=v+r-1$ 时是仿射可分解的. 金勃莱(Kimberley, M. E.)于 1971 年证明:一个 3 设计是仿射可分解的充分必要条件是它是一个扩充阿达马 2 设计,且当 $t\geqslant 4$ 时,没有仿射可分解的 t 设计. 从仿射可分解的 BIBD 设计可以得到一类对称设计. 沃利斯(Wallis, W. D.)证明:若存在仿射可分解 (v,b,r,k,λ)-BIBD,则存在 (v',k',λ')-SBIBD,其中 $v'=(r+1)v, k'=kr, \lambda'=k\lambda$. 仿射可分解设计后来被推广为仿射 α 可分解设计. 一个 α 可分解设计的区组族按定义分成组 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\cdots,\mathscr{B}_t$ 后(参见"α 可分解设计"),若同一组中的任两个区组有 q_1 个公共点,不同组中的任两个区组有 q_2 个公共点,则称为仿射 α 可分解设计.

α 可分解设计(α-resolvable block design)　可分解设计的一种推广. 设 $(X,\mathscr{B})$ 是一个区组设计,若区组族 $\mathscr{B}$ 可以划分为一些组 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\cdots,\mathscr{B}_t$,使得 X 中的每个点在任一 $\mathscr{B}_i$ 中恰好出现 α 次,则称这个设计为 α 可分解设计. α 可分解的名称来源于图论中的 α 因子分解. 当 $\alpha=1$ 时,就是通常的可分解设计. 一个 α 可分解的 (v,k,λ)-BIBD 也记为 α-$\mathrm{RB}_\lambda(v,k)$. 一个 α-$\mathrm{RB}_\lambda(v,k)$ 存在的必要条件是 $\lambda(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\, \alpha(k-1))$, $\lambda v(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\, k(k-1))$ 及 $\alpha v\equiv 0(\mathrm{mod}\, k)$. 对于 $k=3$,已经证明当 $v\geqslant 3$ 且 $v\neq 6$ 时上述必要条件也是充分条件. 对 $k=4$,也已经有了部分结果.

设计的同构(isomorphism of designs)　同类型区组设计间的一种关系. 设 $(X,\mathscr{B})$ 与 $(X',\mathscr{B}')$ 是两个 (v,k,λ)-BIBD,若存在 X 到 X' 的一一映射,把 $\mathscr{B}$ 中每个区组映为 $\mathscr{B}'$ 中的区组,并使之成为 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}'$ 的一一映射,则称这两个区组设计是同构的. 当 $X=X'$, $\mathscr{B}=\mathscr{B}'$ 时,这样的同构称为自同构. 设计 $(X,\mathscr{B})$ 的全体自同构组成一个群,称为设计的全自同构群. 这个群的任一子群都称为该设计的自同构群.

设计的全自同构群(total automorphism group

of design) 见“设计的同构”.

设计的自同构群(automorphism group of design) 见“设计的同构”.

混差法(method of mixed differences) 亦称对称重差法. 构造 BIBD 设计的一种直接方法,它是由玻色(Bose,R. C.)在 1939 年提出的. 该方法用于构造有自同构群 G(参见“设计的同构”)的 BIBD 设计 $(X,\mathscr{B})$. 在 G 的作用下,X 的元被分为一些元素轨道,$\mathscr{B}$ 亦被分为一些区组轨道. 由每个区组轨道中各选出一个区组构成的区组系(B)被称为 $\mathscr{B}$ 的基. 构造$(X,\mathscr{B})$的关键是 G 的选取和(B)的确定. 为此需在(B)的每个区组 B 中分别计算同一元素轨道中元之间的纯差及不同元素轨道中元之间的混差,依据 G 中使 B 固定不变的子群的阶数求出诸纯差及混差产生的次数,要求这些次数都等于(v,k,λ)-BIBD 中的参数 λ.

对称重差法(method of symmetrically repeated differences) 即“混差法”.

设计的计数(enumeration of designs) 设计的个数问题之一. 指两两不同的同类组合设计的个数计值. 通常把同构的 BIBD 设计看成相同的设计,关于 BIBD 设计的计数一般是指互不同构的(v,k,λ)-BIBD 的个数. 若个数为零,则说明这类设计并不存在. 所以,设计的存在性问题可以看做计数问题的一个特殊情形. 由于目前很多类型设计的存在性问题尚未解决,所以设计计数方面的研究成果还不多. 当 $r\leqslant 41$ 时,BIBD 设计的计数结果有表可查,很多情形只有个数值的下界,少数情形才有确切的值. 例如,已知柯克曼女生问题的解是惟一的,而对于(15,3,1)-BIBD,共有 80 个互不同构的设计. 若在同类型的组合设计中可以规定一种等价关系,将相互等价的设计看做是相同的,则不同设计的个数就是等价类的个数. 例如,在拉丁方的计数中就有这种情形.

成对平衡设计(pairwise balanced design) 平衡不完全区组设计的一种推广. 设 X 为 v 元集,$\mathscr{B}$ 是 X 的某些子集(称为区组)的族,$\mathscr{B}$ 中区组的大小(数)均在某个正整数集合 K 中,若 X 的任意两个元素恰含于 $\mathscr{B}$ 的 λ 个区组中,则将二元组$(X,\mathscr{B})$称为成对平衡设计,记为(v,K,λ)-PBD. 当区组大小都相同时,这种特殊的成对平衡设计就是平衡不完全区组设计.

成对平衡设计的概念和方法曾对正交拉丁方及平衡不完全区组设计的存在性和构造方法的研究起过重要的作用. 例如,玻色(Bose,R. C.)等关于欧拉猜想的反证,哈拿匿(Hanani,H.)关于区组大小为 3,4,5 的平衡不完全区组设计存在的充分必要条件,以及哈拿匿等关于区组大小为 3,4 的可分解平衡不完全区组设计存在的充分必要条件等. 在这些重要的工作中,成对平衡设计作为研究组合设计的一般工具也得到了发展. 威尔森(Wilson,R. M.)于 20 世纪 70 年代引入了 PBD 闭集的概念,在此基础上形成的 PBD 闭集方法不仅简化了一些经典结果的证明,也为统一处理新提出的各种组合设计的存在性问题提供了有效的途径. 若

$$\alpha(K)=\gcd\{k-1\mid k\in K\},$$

$$\beta(K)=\gcd\{k(k-1)\mid k\in K\},$$

其中 gcd 表示最大公约数,则(v,K,λ)-PBD 存在的必要条件可表为:

$$\lambda(v-1)\equiv(\mathrm{mod}\,\alpha(K)),$$

$$\lambda v(v-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\beta(K)).$$

在解决 BIBD 设计的存在性猜测的同时,威尔森也证明了上述必要条件是渐近充分的. 即,对给定的 K 与 λ,存在常数 $c(K,\lambda)$,当 $v\geqslant c(K,\lambda)$时,(v,K,λ)-PBD 存在的必要条件也是充分的. 但是,并没有指明这里的 $c(K,\lambda)$有多大.

PBD 闭集(PBD closed set) 一种特殊类型的正整数集合. 以 $\mathscr{P}(X)$记集合 X 的子集全体,若有 $\mathscr{P}(X)$到自身的一个映射 $\sigma:A\to\sigma(A)$,使对 $\mathscr{P}(X)$中任意子集 A 和 B 有:$A\subseteq\sigma(A)$,$\sigma(\sigma(A))=\sigma(A)$,$A\subseteq B$ 蕴含着 $\sigma(A)\subseteq\sigma(B)$,则称映射 σ 是一个闭包运算. 能使 $\sigma(A)=A$ 的子集 A 称为该闭包运算的一个闭集. 若 $B(K)=\{v\mid$存在$(v,K,1)$-PBD$\}$,则映射 $K\to B(K)$是一个闭包运算,相应的闭集称为 PBD 闭集. 例如,$H_a=\{r\geqslant 1\mid r\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,a)\}$,$H_a^a=\{r\geqslant 1\mid r\equiv 1(\mathrm{mod}\,a)\}$,$R_k=\{r\geqslant 1\mid$存在$(r(k-1)+1,k,1)$-BIBD$\}$都是 PBD 闭集.

PBD 闭集的纤维(fibres of PBD closed set) 一种剩余类. 设 K 为 PBD 闭集,记 $\beta(K)=\gcd\{k(k-1)\mid k\in K\}$. 若模 $\beta(K)$的某个剩余类 $\bar{f}$ 至少含 K 中的一个元 k,即 $k\equiv f(\mathrm{mod}\,\beta(K))$,则称剩余类 $\bar{f}$ 是 PBD 闭集 K 的一条纤维. 若存在常数 $M=M(f)$,使

$$\{v\geqslant M\mid v\equiv f(\mathrm{mod}\beta(K))\}\subseteq K,$$

则称纤维 $\bar{f}$ 是完备的. 若 K 的每一条纤维都是完备的,则称 PBD 闭集 K 关于周期 $\beta(K)$是最终周期的. 威尔森(Wilson,R. M.)证明了以下有用结果:PBD 闭集的每一条纤维都是完备的. 换句话说,每一个 PBD 闭集 K 关于周期 $\beta(K)$是最终周期的.

PBD 闭集的生成集(generating set of PBD closed set) 一种有限生成子集. 设 K_0 为 PBD 闭集 K 的子集,若 $B(K_0)=K$,则称 K_0 是 PBD 闭集 K 的生成集. 已知任意 PBD 闭集均有有限的生成集. 在具体应用 PBD 闭集的方法时,需要寻找尽可能小的生成集. 若 PBD 闭集 K 的某个元 x 不属于 $B(K\backslash\{x\})$,则称 x 是基本的. 若以 E_K 记 PBD 闭集

K 的全体基本元的集合，则 E_K 是 K 的最小生成集，称为该 PBD 闭集的基. 少数 PBD 闭集的基已经确定. 例如，H_3 及 H_4 的基分别为{3,4,5}及{4,5,8,9,12}，H_3^3 及 H_4^4 的基分别为{4,7,10,19}及{5,9,13,17,29,33}. 这些生成集对于确定平衡不完全区组设计及可分解平衡不完全区组设计存在的充分必要条件有重要作用.

PBD **闭集方法**(method of PBD closed set)　处理某些组合设计存在性的一种方法，适用于具有 PBD 闭性质的设计. 设某种设计由它的某个参数 r 确定，且存在一个 $(v,K,1)$-PBD，若对 K 中每一个数 k，所有 $r=k$ 的相应设计的存在性能保证 $r=v$ 的设计的存在性，则称这种设计具有 PBD 闭的性质. 对具有 PBD 闭性质的设计而言，要证明当 r 属于某个 PBD 闭集时设计均存在，只需证明当 r 属于该闭集的某个(有限)生成集(或基)时设计均存在即可. 例如，施泰纳三元系这种组合设计关于它的重复数 r 具有 PBD 闭的性质. 为了证明当 r 属于闭集 H_3 时相应三元系都存在，只需证明当 r 属于 H_3 的基{3,4,6}时相应三元系存在即可.

根据直接构造方法，由此即得到施泰纳三元系存在的充分必要条件为 $r\equiv 0,1 \pmod 3$，即 $v\equiv 1,3 \pmod 6$. 这种方法的好处在于：将本来应对无穷多个 r 值证明设计的存在性归结为只需对生成集中有限多个 r 值证明设计的存在性，这常常使问题变得易于处理；同时，对一种设计所计算的 PBD 闭集的有限生成集往往也适用于另一种设计. 由于许多种组合设计具有 PBD 闭性质，所以这种方法在一定程度上起着统一处理不同设计存在性问题的作用.

可分组设计(group divisible design)　成对平衡设计的一种推广，常用于 PBD 的递推构造. 设 X 为 v 元集，$\mathscr{G}$ 是 X 的某些子集，它们划分 X 且称为组，$\mathscr{A}$ 是 X 的某些子集(称为区组)的族. 若 X 中属于同一个组的任意两个元不同时含于任何区组，而属于不同组的任意两个元恰同时含于 λ 个区组，则称 $(X,\mathscr{G},\mathscr{A})$ 为一个可分组设计. 若组的大小均在集 M 中，而区组大小均在集 K 中，则记该可分组设计为 GDD$[K,\lambda,M;v]$. 若 $\mathscr{G}$ 中有 t_i 个大小 m_i 的组，$1\leqslant i\leqslant s$，则称 $m_1^{t_1}m_2^{t_2}\cdots m_s^{t_s}$ 为组的型. 一个型为 1^v 的 GDD$[K,\lambda,\{1\};v]$ 就是一个 (v,K,λ)-PBD. 关于可分组设计存在性的系统结果仅限于 $K=\{k\}$ 且型为 m^u 的情形. 可分组设计 GDD$[\{k\},\lambda,\{m\},um]$ 存在的必要条件是：$u\geqslant k$，$\lambda(u-1)m\equiv 0 \pmod{(k-1)}$，$\lambda u(u-1)m^2\equiv 0 \pmod{k(k-1)}$. 当 $k=3,4$ 时，除两个例外情形外，以上必要条件也是充分条件，这两个情形是 GDD$[\{4\},1,\{2\};8]$ 及 GDD$[\{4\},1,\{6\};24]$，它们都不可能存在.

威尔森基本构作法(Wilson's fundamental construction)　由若干已知可分组设计构作新的可分组设计的方法. 设 $(X,\mathscr{G},\mathscr{A})$ 是一个可分组设计 GDD$[K,\lambda,M;v]$(称为基本的 GDD). 若有权函数 $w:x\to Z^+\cup\{0\}$，使对 $\mathscr{A}$ 中每一个区组 A，均存在可分组设计

$$\mathrm{GDD}\Big[K,\mu,\{w(x)\mid x\in A\};\sum_{x\in A}w(x)\Big]$$

(称为输入设计)，则存在一个可分组设计

$$\mathrm{GDD}\Big[K,\lambda\mu,\Big\{\sum_{x\in G}w(x)\mid G\in\mathscr{G}\Big\};\sum_{x\in X}w(x)\Big].$$

该方法由威尔森(Wilson, R. M.)提出，是构造可分组设计的一个基本方法，由此得名.

输入设计(input design)　见“威尔森基本构作法”.

不完全可分组设计(incomplete group divisible design)　可分组设计的一种推广. 是用于可分组设计的递推构造. 设 X 为 v 元集，Y 为 X 的某个子集，$\mathscr{G}$ 是一族 X 的子集，它们划分 X 且称为组，$\mathscr{A}$ 是 X 的某些子集(称为区组)的族. 若当 X 中的两个元属于同一个组或同时属于 Y 时，它们不含于任何区组，否则它们恰含于 λ 个区组，则称 $(X,Y,\mathscr{G},\mathscr{A})$ 为一个不完全可分组设计，简记为 IGDD. 称 $\{(|G|,|G\cap Y|)\mid G\in\mathscr{G}\}$ 为该 IGDD 的型，这里重复的数对按重数计算. 例如，在一个 GDD$[\{3\},1,\{2\};6]$ 中去掉一个区组 A，则得到一个型为 $(2,1)^3$ 的 IGDD，其中 $Y=A$.

PBD **的子设计**(subdesign of PBD)　一种组合构形. 指含于 PBD 中的 PBD. 设 $(Y,\mathscr{B})$ 为 (u,K,λ)-PBD，$(X,\mathscr{A})$ 为 (v,K,λ)-PBD. 若 $Y\subseteq X$ 且 $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$，则称 $(Y,\mathscr{B})$ 是 $(X,\mathscr{A})$ 的一个子设计. 有了 PBD 的子设计概念后，可以用打碎 GDD 的组的方法构作新的 PBD. 设 $(X,\mathscr{G},\mathscr{A})$ 为 GDD$[K,\lambda,M;v]$，若对 $\mathscr{G}$ 中每一个组 G，存在 $(|G|+d,K,\lambda)$-PBD $(G\cup D,\mathscr{B}_G)$ 含子设计 (d,K,λ)-PBD$(D,\mathscr{C})$，则

$$(X\cup D,\mathscr{A}\cup(\bigcup_{G\in\mathscr{G}}(\mathscr{B}_G\backslash\mathscr{C}))\cup\mathscr{C})$$

是一个 $(v+d,K,\lambda)$-PBD. 该 PBD 还含子设计 $(|G|+d,K,\lambda)$-PBD 和 (d,K,λ)-PBD.

不完全成对平衡设计(incomplete pairwise balanced design)　带子设计的 PBD 的推广. 设 X 为 v 元集，Y 为 X 的 w 元子集，$\mathscr{A}$ 是 X 的某些子集(称为区组)的族，$\mathscr{A}$ 中区组的大小均在某个正整数集合 K 中. 若当 X 中的任意两个元均属于 Y 时它们不含于任何区组，否则它们恰含于 λ 个区组，则称 $(X,Y,\mathscr{A})$ 为一个不完全成对平衡设计，记为 $(v,w;K,\lambda)$-IPBD. 若集 Y 上存在一个 (w,K,λ)-PBD$(Y,\mathscr{B})$，则 $(X,\mathscr{A}\cup\mathscr{B})$ 是一个带子设计的 PBD. 但是，集 Y 上未必存在这样的子设计，所以，IPBD 的概念

比带子设计的 PBD 更为一般. 在 PBD 的递推构造中有时需要比 IPBD 更一般的概念. 设 X 为 v 元集，Y_1 与 Y_2 分别为 X 的 ω_1 及 ω_2 元子集，$|Y_1 \cap Y_2| = \omega_3$，$\mathscr{A}$ 是 X 的某些子集(称为区组)的族，$\mathscr{A}$ 中区组的大小均在某个正整数集合 K 中. 若当 X 中的任意两个元均属于 Y_1 或均属于 Y_2 时它们不含于任何区组，否则它们恰含于 λ 个区组，则称 $(X, Y_1, Y_2, \mathscr{A})$ 为一个格子不完全成对平衡设计，记为

$$(v; w_1, w_2, w_3; k, \lambda)\text{-}\diamondsuit\text{-IPBD}.$$

净集(clear set)　成对平衡设计中某些特殊的区组. 将 (v, K, λ)-PBD 中大小为 k_i 的区组全体称为第 i 个等区组分量. 若若干个等区组分量的所有区组之间两两不相交，则称这些区组构成一个净集. 若前 r 个等区组分量形成一个净集，则记该设计为 $(v, \{(k_1, \cdots, k_r), \cdots, k_m\}, \lambda)$-PBD. 利用净集的概念，可以得到正交拉丁方的以下构作方法：若存在

$$(v, \{(k_1, \cdots, k_r), \cdots, k_m\}, 1)\text{-PBD},$$

则

$$N(v) \geqslant \min\{N(k_1), \cdots, N(k_r), N(k_{r+1}) - 1, \cdots, N(k_m) - 1\}.$$

这一构作方法在欧拉猜想的反证中起过重要的作用.

(r, λ)设计((r, λ)-design)　一类特殊的成对平衡设计. 若一个 (v, K, λ)-PBD 中每个元恰含于 r 个区组，则称之为 (r, λ) 设计. 在一个 (r, λ) 设计 $(X, \mathscr{A})$ 中，若 $\mathscr{A}$ 可以划分为一些平行类 $R_1, R_2, \cdots, R_r$，则称 $R = \{R_1, R_2, \cdots, R_r\}$ 是设计的一个分解. 若还有一个分解 $R' = \{R_1', R_2', \cdots, R_r'\}$，使任一个 R_i 与任一个 R_j' 至多有一个公共的区组，则称该设计是正交的 (r, λ) 设计. 正交的 (r, λ) 设计在讨论罗姆方等其他组合设计时有用.

正交(r, λ)设计(orthogonal (r, λ)-design)　见“(r, λ)设计”.

准可分解可分组设计(almost resolvable group divisible design)　一类特殊的可分组设计. 设 $(X, \mathscr{G}, \mathscr{A})$ 是具有型 m^n 的可分组设计 GDD$[\{k\}, 1, \{m\}; mn]$. 对任一个组 $G \in \mathscr{G}$，若 $\mathscr{A}$ 中某些区组的族 P 划分集 $X \backslash G$，则称 P 是一个带洞 G 的准平行类. 若 $\mathscr{A}$ 可划成一些准平行类，则称该可分组设计是准可分解的可分组设计，记为 k 支架. k 支架的概念是在研究可分解平衡不完全区组设计的存在性问题中形成的，对其他类型的可分解设计也有用. 关于 k 支架的存在性，史汀生(Stinson, D. R.)于 1987 年证明：型为 m^n 的 3 支架存在的充分必要条件为 $n \geqslant 4$，$m \equiv 0 \pmod 2$ 且 $m(n-1) \equiv 0 \pmod 3$.

k 支架(k-fame)　见“准分解可分组设计”.

拉丁方(Latin square)　一类重要的组合设计. 若 v 元集 X 上的一个 v 阶方阵的每一行和每一列都是 X 的一个无重复元的排列，则称该方阵为一个拉丁方. 若把两个 v 阶拉丁方叠合在一起时，第一个拉丁方的每一元与第二个拉丁方的每一元恰相遇一次，则称这两个拉丁方正交.

在各种类型组合设计的递推构造中，经常用到拉丁方的结果. 例如，哈拿匿(Hanani, H.)及威尔森(Wilson, R. M.)关于平衡不完全区组设计的存在性理论，沃利斯(Wallis, W. D.)及马林(Mullin, R. C.)关于罗姆方的存在性，以及陆家羲关于施泰纳三元系大集的工作等. 拉丁方这一类设计不仅在组合设计的理论中有其基本的重要性，而且在试验设计及纠错编码等方面也有应用.

自从 1782 年，欧拉(Euler, L.)提出“不存在 $4t+2$ 阶的正交拉丁方”这一猜想以来(其中 $t=1$ 的情形以“36 名军官问题”这一通俗的提法为人们所熟知)，拉丁方的研究经历了漫长和富有成果的发展过程. 到 1974 年，出现了丹内斯(Dénes, J.)和基特韦尔(Keedwell, A. D.)以《拉丁方及其应用》为题的专著. 该书广泛收罗了到 1974 年为止的丰富文献并且总结了已有的方法和结果，列出了 73 个有待解决的问题. 以后的近 20 年时间内，其中约 20 个问题已完全解决，并至少有 10 个问题得到部分解决. 这两位作者于 1990 年又写了以《拉丁方：理论和应用方面的新进展》为题的专著，作为前书的续篇，在一定程度上反映了拉丁方这一专题的研究现状和动态.

拉丁矩(Latin rectangle)　拉丁方的推广. 设 X 为 n 元集，A 为 X 上的 $r \times s$ 阵列，若同行和同列都没有重复的元素，则称 A 为 X 上的一个 $r \times s$ 拉丁矩. 特别地，当 $r = s = n$ 时，便得到一个 n 阶拉丁方. 若集 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上的 n 阶拉丁方 $A = (a_{ij})$ 满足 $a_{ii} = i$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则称该拉丁方是幂等的. 若 A 满足 $a_{ij} = a_{ji}$，$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$，则称之为对称拉丁方. 若一个 n 阶拉丁方的 n 个位置分布在不同行及不同列且含不同的元素，则称这 n 个位置构成该拉丁方的一个截态. 若一个拉丁方的主对角线(位置 (i, i)，$1 \leqslant i \leqslant n$)及反对角线(位置 $(i, n+1-i)$，$1 \leqslant i \leqslant n$)均为截态，则称之为对角拉丁方.

对称拉丁方(symmetric Latin square)　见“拉丁矩”.

对角拉丁方(diagonal Latin square)　见“拉丁矩”.

尤登方(Youden square)　亦称尤登设计. 一类特殊的拉丁矩. 是尤登(Youden, W. J.)于 1937 年引入的. 若以一个 $k \times v$ 拉丁矩的 v 个列作为 v 个区组可以得到一个 (v, k, λ)-SBIBD，则称这样的拉丁矩是一个 $k \times v$ 尤登方. 将一个已知 (v, k, λ)-SBIBD 的区组作为列，适当安排同列中元素的次序，总可使

同一行上没有相同的元素，从而得到一个 $k\times v$ 尤登设计. 设 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 是 v 元集 X 上的两个 $k\times v$ 尤登设计，若 X 的每个二元子集在叠合 A 与 B 时所得的 kv 个 $\{a_{ij},b_{ij}\}(1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant v)$ 中恰出现一次，则称这两个尤登设计是 2 级平衡的. 这时必有 $k=(v-1)/2$. 若 t 个尤登设计中每两个都是 2 级平衡的，则称它们是 t 级平衡的. 已知当 $4t+3$ 为质数幂时，恒存在 $4t+2$ 级平衡的 $(2t+1)\times(4t+3)$ 尤登设计.

尤登设计(Youden design) 见“尤登方”.

塔斯康方(Tuscan square) 一类与拉丁方有关的组合设计. 若 n 元集 X 上的 n 阶方阵的每行都含 X 的全部元，则称该方阵为 n 阶的意大利方. 对指定的正整数 $k<n$ 及每个正整数 $m\leqslant k$，若在一个意大利方中同行且相距为 m 的两个元素构成的有序对各不相同，则称该方阵为 n 阶塔斯康 k 方. 塔斯康 1 方简称塔斯康方. 塔斯康 $n-1$ 方称为佛罗伦萨方. 若一个佛罗伦萨方还是拉丁方，则称之为梵蒂冈方. 塔斯康方的概念来源于图的分解问题. 已知 n 阶塔斯康方存在的充分必要条件为 $n\neq 3,5$. 目前尚不知道是否存在奇数阶的佛罗伦萨方.

意大利方(Roman square) 见“塔斯康方”.

佛罗伦萨方(Florence square) 见“塔斯康方”.

梵蒂冈方(Vatican square) 见“塔斯康方”.

行完备拉丁方(row complete Latin square) 一类特殊的拉丁方. 若 n 元集 X 的任意相异元的有序偶在 X 上的某个 n 阶拉丁方的行中作为相邻元素的有序偶至少出现一次，则称该拉丁方是行完备拉丁方. 若一个拉丁方的转置是行完备拉丁方，则称之为列完备拉丁方. 既是行完备又是列完备的拉丁方称为完备拉丁方. 行完备拉丁方的概念是在拉丁方试验设计中为了消除两种因素相继作用时产生的影响而提出的. 已知偶数阶的完备拉丁方都存在. 若一个 n 阶群的元可排成序列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使 a_1，$a_1a_2,a_1a_2a_3,\cdots,a_1a_2\cdots a_n$ 各不相同，则称该群是可序列化的. 当存在 n 阶可序列化的群时，也存在 n 阶的完备拉丁方.

列完备拉丁方(column complete Latin square) 见“行完备拉丁方”.

完备拉丁方(complete Latin square) 见“行完备拉丁方”.

拟群(quasigroup) 一种代数系统. 设集 Q 上有一个二元运算称为乘法，记为“$\circ$”. 若对 Q 中任意元 a,b，方程 $a\circ x=b$ 及 $x\circ a=b$ 在 Q 中都恰有一个解 x，则称 $(Q,\circ)$ 为一个拟群. 当 Q 为有限集时，Q 中元素个数称为拟群的阶. 在 n 阶拟群 $(Q,\circ)$ 的乘法表中，第 a 行第 b 列的元素为 $a\circ b$，若记 $L=(m_{ab})$，$m_{ab}=a\circ b$，则由乘法表所得的阵列 L 是一个 n 阶拉丁方. 反之，由一个 n 阶拉丁方作为乘法表所得的二元运算形成集 Q 上的一个拟群. 若对拟群 $(Q,\circ)$ 中的每个元 x 恒有 $x\circ x=x$，则称该拟群是幂等的. 若集 Q 上有 $n-2$ 个 n 阶幂等拟群，使对 Q 中任意两个相异元 a,b，集 Q 上 $n-2$ 个值 $a\circ b$ 取遍 $Q\backslash\{a,b\}$，则称这 $n-2$ 个拟群构成一个幂等拟群大集. 已知当 $n\geqslant 3$ 且 $n\neq 6$ 时，n 阶幂等拟群大集总存在，而 6 阶幂等拟群大集则不可能存在.

幂等拟群(idempotent quasigroup) 见“拟群”.

幂等拟群大集(large set of idempotent quasigroups) 见“拟群”.

高尔夫设计(golf design) 一种循环赛的赛程安排. 设有 $2n+1$ 个高尔夫球俱乐部各派一个队进行 $2n-1$ 场循环赛. 在每一场循环赛中将比赛 $n(2n+1)$ 局，使每两个队正好在一局中对抗. 这 $n(2n+1)$ 局比赛将分成 $2n+1$ 轮，每轮比赛由 n 局组成. 要求每个俱乐部作为主人组织一轮比赛，而不参加该轮的比赛. 若能安排 $2n-1$ 场这样的循环赛，使每两个队在其余 $2n-1$ 个俱乐部恰好各比赛一局，则称这种赛程安排为一个高尔夫设计. 对于一场循环赛而言，可以如下对应于一个幂等对称拉丁方：当第 i 队与第 j 队在第 k 个俱乐部进行一局比赛时，设一个 $2n+1$ 阶方阵中 (i,j) 及 (j,i) 位置的元素均为 k，同时 (i,i) 位置的元素为 i. 由于在一个俱乐部进行的 n 局比赛中每个客队只参加一局比赛，所以方阵中同行及同列的元素互不相同，因此是一个幂等对称拉丁方. 反之，从一个幂等对称拉丁方可以得到一场循环赛的相应安排. 于是一个高尔夫设计相应于 $n-2$ 个 $2n+1$ 阶幂等对称拉丁方，使当 $i\neq j$ 时每一位置 (i,j) 上的 $n-2$ 个元素取尽

$$\{1,2,\cdots,2n+1\}\backslash\{i,j\}.$$

这样的一组拉丁方称为幂等对称拉丁方大集.

高尔夫设计的概念由鲁宾孙(Robinson, D. F.)于 1981 年提出. 他不仅指出了与幂等对称拉丁方大集的等价性，还指出了问题对 5 个俱乐部是无解的，而对 7 个俱乐部是有解的. 沃利斯(Wallis, W. D.)于 1983 年找到了对 17 个俱乐部的解，并指出由施泰纳三元系大集可导出高尔夫设计的存在性. 由此得出，只要 $2n+1\equiv 1,3 \pmod 6$，高尔夫设计总是存在的.

幂等对称拉丁方(idempotent symmetric Latin square) 见“高尔夫设计”.

幂等对称拉丁方大集(large set of symmetric idempotent Latin squares) 见“高尔夫设计”.

36 **名军官问题**(problem of 36 officers) 一个著名的组合设计问题. 由欧拉(Euler, L.)于 1779 年

提出. 该问题是:设有 36 名军官,来自 6 个不同的团队且每个团队 6 名,他们分属于 6 种不同的军阶且每种军阶 6 名,问能否将这 36 名军官排成 6 行 6 列的方阵,使每一行每一列上的 6 名军官来自不同的团队且属于不同的军阶? 按正交拉丁方(参见"正交拉丁方")的术语,问题实际是问:是否存在一对 6 阶的正交拉丁方?欧拉断言不存在 6 阶正交拉丁方. 塔里(Tarry,G.)于 1900 年用穷举法证明了欧拉断言的正确性,后来史汀生(Stinson,D. R.)于 1984 年利用设计与码之间的关系给出了一个简洁的证明.

正交拉丁方(orthogonal Latin squares) 一类组合构形. 设 A 与 B 是 v 元集 X 上的两个拉丁方,若把它们叠合在一起时,第一个拉丁方的每一元与第二个拉丁方的每一元恰相遇一次,则称它们是一对正交拉丁方. 称 A 是 B 的正交侣. 若 X 上 t 个 v 阶拉丁方中每两个都正交,则称它们是相互正交拉丁方,记为 tMOLS(v). 若以 $N(v)$ 表示 v 阶相互正交拉丁方的最大个数,则有 $N(v)\leqslant v-1$. 关于 $N(v)$ 的估值是组合设计的一个重要课题. 除 $N(6)=1$ 以及对质数幂 q 有 $N(q)=q-1$ 外,$N(v)$ 的确切值均属未知. 但是,当 $n\to\infty$ 时有 $N(n)\to\infty$. 细致地说,当 n 充分大时有

$$N(n)\geqslant n^{\frac{1}{14.8}}.$$

另外,已经得出:存在一对 v 阶正交拉丁方的充分必要条件是 $v\neq 2,6$.

正交侣(orthogonal mate) 见"正交拉丁方".

欧拉猜想(Euler's conjecture) 关于正交拉丁方的一个重要猜想. 欧拉(Euler,L.)于 1782 年提出的如下猜想:不存在 $4t+2$ 阶的正交拉丁方. 当 $v\neq 4t+2$ 时,v 阶正交拉丁方总存在. 例如,当 $v=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2},\cdots,p_s^{\alpha_s}$ 是 v 分解为相异质数幂的分解式时,有

$$N(v)\geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant s}\{p_i^{\alpha_i}-1\}.$$

当 $v\neq 4t+2$ 时,由此可得 $N(v)\geqslant 2$. 对 $v=4t+2$,欧拉注意到 $N(2)=1$ 且断言 $N(6)=1$,于是导致了上述猜想. 欧拉关于 $N(6)=1$ 的断言是正确的(参见"36 名军官问题"),但当 $v=4t+2>6$ 时结论是否定的. 第一个反例是一对 22 阶的正交拉丁方,由玻色(Bose,R. C.)等人于 1959 年给出,接着玻色等人于 1960 年给出了完整的结论. 朱烈于 1977 年对该结论给出了一个简洁的证明.

正交拉丁方完备组(complete set of MOLS) 一组特殊的正交拉丁方. 指 $v-1$ 个相互正交的 v 阶拉丁方. 若 $X=\mathrm{GF}(q)=\{a_0=0,a_1,\cdots,a_{q-1}\}$,$q$ 为大于 2 的质数幂,$A_k=(a_{ij}^k)$,$a_{ij}^k=a_ka_i+a_j$,$1\leqslant k\leqslant q-1$,则拉丁方 $A_1,A_2,\cdots,A_{q-1}$ 构成 q 阶正交拉丁方完备组. 尚不知道是否有非质数幂阶的正交拉丁方完备组存在. 由于 n 阶正交拉丁方完备组的存在性等价于 v 阶有限射影平面的存在性,所以,也等价于 $(n^2+n+1,n+1,1)$-SBIBD 的存在性. 可利用布鲁克-赖瑟-乔拉定理判别某些阶数的正交拉丁方完备组不存在. 例如,当 n 的平方因数以外部分包含模 4 余 3 的质因数时,不存在 n 阶正交拉丁方完备组. 另外,因为 10 阶射影平面不存在,所以 10 阶正交拉丁方完备组也不存在. 这是除布鲁克-赖瑟-乔拉定理外,目前能判定正交拉丁方完备组不存在的惟一阶数.

共轭正交拉丁方(conjugate orthogonal Latin squares) 一类特殊的拉丁方. 若 $(Q,\odot)$ 为一拟群,则在集 Q 上可定义 5 个新的二元运算 $\odot(i,j,k)$ 如下:当 $a\odot b=c$ 时,$a\odot(1,3,2)c=b$,$b\odot(2,1,3)a=c$,$b\odot(2,3,1)c=a$,$c\odot(3,1,2)a=b$,$c\odot(3,2,1)b=a$,由此得 5 个拟群 $(Q,\odot(i,j,k))$,称为拟群 $(Q,\odot)$ 的 (i,j,k) 共轭拟群. 若拟群 $(Q,\odot)$ 的乘法表所定义的拉丁方为 L,则其 (i,j,k) 共轭拟群的乘法表所定义的拉丁方称为 L 的 (i,j,k) 共轭拉丁方. 若拉丁方 L 与它的 (i,j,k) 共轭拉丁方正交,则称 L 为 (i,j,k) 共轭正交拉丁方,简记为 (i,j,k)-COLS(v),其中 v 为阶数. 一个 $(2,1,3)$ 共轭正交拉丁方通常称为自正交拉丁方. $(3,2,1)$-COLS(v) 的存在性等价于 $(1,3,2)$-COLS(v) 的存在性,$(3,1,2)$-COLS(v) 与 $(2,3,1)$-COLS(v) 也是同时存在或同时不存在的. 共轭正交拉丁方的存在性问题已经解决. 当且仅当 $v\neq 2,3,6$ 时,存在 $(2,1,3)$-COLS(v). 当且仅当 $v\neq 2,6$ 时,存在 $(3,1,2)$-COLS(v) 及 $(3,2,1)$-COLS(v).

自正交拉丁方(self-orthogonal Latin square) 一类特殊的拉丁方. 指与自身的转置相正交的拉丁方. 亦即 $(2,1,3)$ 共轭正交拉丁方. v 阶自正交拉丁方存在的充分必要条件是 $v\neq 2,3,6$. 自正交拉丁方可用来安排一种特殊形式的网球赛,即所谓配偶回避的混合双打循环赛. 设 n 对夫妇进行一场混合双打循环赛,要求:

1. 配偶不出现在同一局比赛中,不论是作为伴对还是作为抗对.

2. 性别相同的两个参赛者将作为抗对恰在一局中相遇.

3. 每一对非配偶的异性参赛者将作为伴对在一局比赛中相遇,且作为抗对在又一局比赛中相遇.

这类安排对应于一个拉丁方 $A=(a_{ij})$. 设第 i 对夫妇为 i 先生及 i 太太. 当 i 先生与 j 先生在某一局中相遇时,与 i 先生搭档者设为 a_{ij} 太太,与 j 先生搭档者设为 a_{ji} 太太. 于是,由上述安排得到的幂等拉丁方是自正交的. 反之,由一个幂等自正交拉丁方可得到相应的循环赛安排. 这样,配偶回避的混合双打循环赛安排等价于一个幂等自正交拉丁方. 而后

者的存在性又等价于自正交拉丁方的存在性.

可分解配偶回避的混合双打循环赛(resolvable spouse-avoiding mixed doubles round-robin)　一种特定的循环赛.相应于一种自正交拉丁方.在配偶回避的混合双打循环赛(参见"自正交拉丁方")中,若 $n(n-1)/2$ 局比赛能划分为若干轮,使得当 n 为偶数时,每一参赛者在每一轮中参加一局比赛;而当 n 为奇数时,每一轮中有一对夫妇不参加比赛,而其余参赛者在该轮中参加一局比赛,则称这样的循环赛为可分解配偶回避的混合双打循环赛.这类循环赛安排等价于一个幂等自正交拉丁方带有一个对称的正交侣.该正交侣对应于轮的划分.当 n 为偶数时,共有 $n-1$ 个轮,当 i 先生与 j 先生在第 k 轮相遇时,设 $c_{ij}=k$ 且 $c_{ii}=n$,由此得主对角线元全相等的对称拉丁方.当 n 为奇数时,共有 n 个轮,同样规定 c_{ij} 且 $c_{ii}=i$,由此得幂等对称拉丁方.除 27 个可能例外的阶数,上述类型的自正交拉丁方及对称正交侣总是存在的.

正交对角拉丁方(orthogonal diagonal Latin squares)　一类特殊的正交拉丁方.若一个 v 阶拉丁方的主对角线(位置(i,i),$1\leqslant i\leqslant v$)与反对角线(位置$(i,v+1-i)$,$1\leqslant i\leqslant v$)均为截态,则称之为对角拉丁方.两个正交的 v 阶对角拉丁方记为 ODLS(v).正交对角拉丁方曾用于构作幻方.而 ODLS(v)存在的充分必要条件是 $v\neq 2,3,6$.这是经许多作者的努力,由沃利斯(Wallis,W. D.)等人于 1990 年最后完成的.

划分不完全拉丁方(partitioned incomplete latin square)　亦称带洞拉丁方.一类不完全的拉丁方.设 $P=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 是集 S 的一个划分($n\geqslant 2$),且用 S 中的元标记一个 $|S|\times|S|$ 的表 L 的行与列,若:

1. L 中一个位置若不是空着则含 S 的一个元;

2. 以 $S_i\times S_i$ ($1\leqslant i\leqslant n$)标记的子表是空的(称这些子表为洞);

3. 当 $s\in S_i$ 时,在行 s(或列)出现的元恰为

$$\frac{S}{S_i};$$

则称 L 是一个划分不完全拉丁方,记为 PILS.设 L 与 M 是两个 PILS 且有相同的划分,若两者叠合时能产生

$$\frac{S^2}{\bigcup_{i=1}^{n}S_i^2}$$

中的每一个序对,则称它们是正交的 PILS,记为 OPILS.当 $h\geqslant 2$ 时,有 n 个大小 h 的洞的 OPILS 存在的充分必要条件为 $n\geqslant 4$.

带洞拉丁方(Latin square with hole)　即"划分不完全拉丁方".

正交阵列(orthogonal array)　一类组合设计.设 A 是 v 元集 X 上的 $v\times k$ 矩阵,若对任意 $d(2\leqslant d\leqslant k)$ 列所构成的子矩阵,X 上的每一个 d 元排列作为子矩阵的行各出现 λ 次,则称 A 为大小 N,约束数 k,水平数 v,强度 d 和指数 λ 的正交阵列.在试验设计中称正交表,记为 OA(N,k,v,d).由定义有 $N=\lambda v^d$.强度 2 的正交阵列记为 OA($v,k;\lambda$),当 $\lambda=1$ 时简记为 OA(v,k).OA($v,k;\lambda$)的存在性等价于横截设计 $TD_\lambda[k;v]$ 的存在性.OA(v,k)的存在性则等价于 $k-2$ 个 v 阶相互正交拉丁方的存在性.

不完全正交拉丁方(incomplete orthogonal Latin squares)　正交拉丁方的变体.设两个正交的 v 阶拉丁方的右下角各有一个 n 阶的子拉丁方,

5	6	3	4	1	2
2	1	6	5	3	4
6	5	1	2	4	3
4	3	5	6	2	1
1	4	2	3		
3	2	4	1		

1	2	5	6	3	4
6	5	1	2	4	3
4	3	6	5	1	2
5	6	4	3	2	1
2	4	3	1		
3	1	2	4		

这两个子拉丁方必定正交,将它们抹去后得到的两个不完全拉丁方称为不完全正交拉丁方,记为 IA(v,n).若 v 阶拉丁方及 n 阶子拉丁方分别基于集 X 及其子集 Y,则两个不完全正交拉丁方的叠合恰产生 $X^2\backslash Y^2$ 中的序对.当 $n=2,6$ 时,虽然不存在 n 阶正交的子拉丁方,但是也可由此定义 IA(v,n).例如,上表所示是一个 IA(6,2).值得一提的是,派克(Parker,E. T.)于 1959 年第一个构作的 10 阶正交拉丁方是一个 IA(10,3).IA(v,n)存在的充分必要条件是 $v\geqslant 3n$ 且 $(v,n)\neq(6,1)$.若有 t 个不完全拉丁方,每两个构成一个 IA(v,n),则称之为 t 个不完全相互正交拉丁方,记为 $IA_t(v,n)$.在组合设计的递推构造中,$IA_t(v,n)$ 常被用到.

直交阵列(perpendicular array)　一类组合设计.设 A 是 v 元集 X 上 $N\times k$ 矩阵,若对任意 $d(2\leqslant$

$d\leqslant k$)列所构成的子矩阵，X 上的第一个 d 元集作为子矩阵的行各出现 λ 次，则称 A 为大小 N，约束数 k，水平数 v，强度 d 和指数 λ 的直交阵列，记为 PA(N,k,v,d). 由定义有

$$N=\lambda\binom{v}{d}.$$

强度 2 及指数 1 的直交阵列记为 PA(v,k). PA(v,k)存在的必要条件为 $v\geqslant k$. 当 $k>2$ 时，v 还必须为奇数. 除PA(39,5)的存在性尚不清楚外，当 $k\leqslant 5$ 时，上述必要条件也是充分条件.

正交表(perpendicular array)　见“正交阵列”.

横截设计(transversal design)　一类特殊的可分组设计. 即组的大小全相等且组的个数与区组大小相同的可分组设计. 设组的大小为 n 且区组大小为 k，属于不同组的两个元恰含于 λ 个区组，这样的横截设计记为 $\mathrm{TD}_\lambda[k;n]$. 当 $\lambda=1$ 时，记为 TD[$k;n$]. 由于 TD[$k;n$]的存在性等价于 $k-2$ 个 n 阶互相正交拉丁方的存在性，横截设计的递推构造方法为正交拉丁方的构造提供了有力的工具. 横截设计在其他类型的组合设计的构造中也很有用.

幻方(magic square)　亦称纵横图或魔方. 一类特殊的整数方阵. 一个 n 阶幻方是 n^2 个数 $1,2,\cdots,n^2$ 排成的 n 阶方阵，使每一行元素的和、每一列元素的和、主对角线元素的和，以及反对角线元素的和均为常数. 该常数为 $n(n^2+1)/2$，称为幻和. n 阶幻方存在的充分必要条件是 $n\geqslant 3$. 它有许多种证法. 利用正交对角拉丁方的存在性也是一种证法. 若还要求 n 阶幻方中每一泛对角线(位置 $(i,i+k)$，$1\leqslant i\leqslant n$ 或位置

$$(i,n+1-(i+k))\ (1\leqslant i\leqslant n),$$

这里 $0\leqslant k\leqslant n-1$，且加法按模 n 简化)上元素的和都等于幻和，则称这种幻方为泛对角线幻方. n 阶泛对角线幻方存在的充分必要条件是 $n=2m+3$ 及 $n=4m,m\geqslant 1$. 另一类幻方还要求每一行、每一列、主对角线及反对角线上 n 个元素的积均为常数(称为幻积)，这样的幻方称为 n 阶加乘幻方. 加乘幻方的已知结果很少.

幻方的最早研究始于中国古代，下图中的 3 阶幻方在古代称为九宫图.《数术记遗》一书中对此有如下记载：“九宫者，二、四为肩，六、八为足，左三右七，戴九履一，五居中央”.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

三阶幻方

纵横图(magic square)　即“幻方”.

魔方(magic square)　即“幻方”.

幻和(magic sum)　见“幻方”.

泛对角线幻方(pandiagonal magic square)　见“幻方”.

幻积(magic product)　见“幻方”.

加乘幻方(magic square for addition and multiplication)　见“幻方”.

九宫图(Jiu Gong Tu)　见“幻方”.

有限几何(finite geometry)　含有限个点的几何结构. 在组合设计理论中，所涉及的几何结构是指一类特别的关联系统. 这种系统中有两类不定义的元素，分别称为点和线，以及点线之间的关联关系 $P\in L$，读作点 P 在线 L 上，或者说 L 包含 P. 对这样的关联系统加上不同类型的限制，即规定不同的公理，便得到各种类型的有限几何结构.

最重要的一类几何是射影几何. 从一条线上含 $q+1$ 个点的 n 维射影空间可以导出一类平衡不完全区组设计 (v,k,λ)-BIBD，其中

$$v=\frac{q^{n+1}-1}{q-1},\ k=\frac{q^n-1}{q-1},\ \lambda=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}.$$

对 $n=2$ 的射影平面情形，得到的还是对称设计

$$(q^2+q+1,q+1,1)\text{-SBIBD}.$$

由于这种对称设计的存在性等价于 q 阶正交拉丁方完备组的存在性，并且还等价于一类横截设计的存在性，因此，可以把有限几何看成是得到各种组合设计的重要途径之一.

若关联系统只要求任意两不同的点恰被一条线同时包含，则称这样的几何结构为线空间. 从设计的观点看，这就是指数为 1 的成对平衡设计. 这反映出区组设计理论有其几何方面的渊源. 设 $V_n(F_q)$ 是有限域 F_q 上的 n 维向量空间. 在某种典型群(一般线性群、辛群、酉群和正交群)的作用下，$V_n(F_q)$ 中的子空间分成一些可迁集. 若把某些子空间取作“点”，另一些子空间取作“线”，并且适当规定点在线上的含义，则可以得到由各种典型群几何导出的部分平衡不完全区组设计. 中国的万哲先等人在这方面做过比较系统的研究.

有限射影空间(finite projective space)　一类组合构形. 满足以下公理的有限点集上的关联系统：1. 对两相异点，有且仅有一条线含这两个点. 2. 若 A,B,C 是不共线的三点，D 是含 A,B 的线上异于 A 的点，E 是含 A,C 的线上异于 A 的点，则含 D,E 的线与含 B,C 的线含一个公共点 F. 3. 每条线至少含三个相异点.

若射影空间的某个子集在含一条线上的两个点时必含这条线上所有的点，则称该子集为子空间. 将点称为零维子空间，线称为 1 维子空间，由此可归纳

地定义子空间的维数. 若子空间 X_{n-1} 的维数为 $n-1$，P 是射影空间中不属于 X_{n-1} 的一点，将含 P 及 X_{n-1} 中任一点的所有线上的点的全体记为 X_n，则 X_n 是子空间，其维数定义为 n. 在 n 维射影空间中，2 维子空间称为平面，$n-1$ 维子空间称为超平面. 若某条线上含 $q+1$ 个点，则每条线上都含 $q+1$ 个点，此时称射影空间是 q 阶的. q 阶 n 维射影空间记为 PG(n,q). 将 q 元有限域上 $n+1$ 维向量空间中的一维子空间取作“点”，2 维子空间取作“线”，便得到 n 维射影空间 PG(n,q) 的一个例子. 这样的“点”可用一个 $n+1$ 维的非零向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$ 表示，当 λ 为有限域中非零元时，向量 $\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$ 将表示同一个“点”. 称 $(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})$ 为射影空间中点的齐次坐标. PG(n,q) 中共有

$$v=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

个点，一个超平面含 $k=(q^n-1)/(q-1)$ 个点. 若将一个 PG(n,q) 中所有超平面取作区组，则得到一个 (v,k,λ)-BIBD，其中

$$\lambda=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}.$$

当 $n\geqslant 3$ 时，PG(n,q) 在同构的意义下是惟一的. 但是，当 $n=2$ 时，存在不同类型的射影平面.

超平面(hyperplane)　见“有限射影空间”.

有限仿射空间(finite affine)　一类组合构形. 它由 q 阶 n 维射影空间 PG(n,q) 中去掉一个超平面而得到，记为 EG(n,q). 该仿射空间中一条线上含 q 个点，共有 q^n 个点. 任一 k 维子空间含 q^k 个点. 以 EG(n,q) 中的全部 k 维子空间作为区组，可以得到一个 (q^n,q^k,λ)-BIBD，其中

$$\lambda=\frac{(q^n-q)\cdots(q^n-q^{k-1})}{(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})}.$$

有限射影平面(finite projective plane)　一类组合构形. 指二维有限射影空间. 也可用以下三条较为简单的公理定义射影平面：

1. 对两相异点，有且仅有一条线含这两个点.

2. 任两相异线有且仅有一个公共点.

3. 存在四个点，其中没有三个点在同一条线上.

若射影平面的一条线上含 $q+1$ 个点，则每条线都含 $q+1$ 个点，称 q 为射影平面的阶. q 阶射影平面记为 PG$(2,q)$. PG$(2,q)$ 中共有 q^2+q+1 个点. 将一个 q 阶射影平面中的线作为区组可得到一个

$$(q^2+q+1,q+1,q)\text{-SBIBD},$$

反之亦然. 一个 2 阶射影平面 PG$(2,2)$ 称为法诺平面. 存在德扎格平面，V-W 平面等不同类型的射影平面.

法诺平面(Fano plane)　见“有限射影平面”.

有限仿射平面(finite affine plane)　一类组合构形. 它是从有限射影平面 PG$(2,q)$ 中去掉一条线，由余下的点和线构成的，记为 EG$(2,q)$，q 为仿射平面的阶数. EG$(2,q)$ 有 q^2 个点，q^2+q 条线，每条线上有 q 个点. q^2+q 条线可分为 $q+1$ 组，每组的 q 条线两两不相交，构成平行线组. 若把线取作区组，则由 EG$(2,q)$ 可得一个仿射可分解的 $(q^2,q,1)$-BIBD.

卵形(oval)　射影平面或仿射平面中的一类特殊点集. 设 S 是 PG$(2,n)$ 或 EG$(2,n)$ 中的一个 $n+1$ 元点集，若任一条线与 S 至多有两个交点，则称 S 是一个卵形. 在利用有限域 GF(n) 得到的 PG$(2,n)$ 及 EG$(2,n)$ 中总存在 $n+1$ 个点的卵形. 当 n 为偶数时，一个 PG$(2,n)$ 的卵形中还可增加一点 θ，使任一条线与 $S\cup\{\theta\}$ 至多有两个交点，这时也称 $S\cup\{\theta\}$ 为卵形. 从一个卵形中去掉 t 个点，$0\leqslant t\leqslant n+1$，则相应的 $(n^2+n+1,n+1,1)$-SBIBD 变为

$$(n^2+n+1-t,\{n+1,n,n-1\},1)\text{-PBD},$$

而相应的 $(n^2,n,1)$-BIBD 变为

$$(n^2-t,\{n,n-1,n-2\},1)\text{-PBD}.$$

巴尔子平面(Baer subplane)　射影平面中的一类特殊点集. 设 S 是射影平面 PG$(2,q)$ 中的点集，将 PG$(2,q)$ 中任一条线与 S 的交定义为 S 中的线，若 S 连同这些线构成一个射影平面，则称之为 PG$(2,q)$ 的子平面. 若子平面的阶数为 $\sqrt{q}$，则称之为巴尔子平面. 若 PG$(2,n^2)$ 中有巴尔子平面 PG$(2,n)S$，则在相应的 $(n^4+n^2+1,n^2+1,1)$-SBIBD 中除去 S 中的点，便得到一个可分组设计

$$\text{GDD}[\{n^2\},1,\{n^2-n\};n^4-n].$$

由此可得

$$(n^4-n+1,\{n^2,n^2-n+1\},1)\text{-PBD}.$$

当 n 为质数幂时，有这样的巴尔子平面，因而相应的设计也存在.

子平面(subplane)　见“巴尔子平面”.

阻碍集(blocking set)　有限射影平面中的一类特殊子集. 若 q 阶射影平面中的子集 K 不包含任一条线，但与每一条线均相交，则称 K 为阻碍集. 若 K 为 PG$(2,q)$ 中阻碍集，则 $|K|\geqslant 1+\sqrt{q}+q$. 当 K 是一个贝尔子平面时等号成立. 阻碍集可用于区组设计的构作. 例如，PG$(2,q^2)$ 可划分为 q^2-q+1 个巴尔子平面，若 X 是其中 t 个的并集，则 X 是一个阻碍集，且与每一条线或交 t 个点或交 $t+q$ 个点. 由此可得 X 上的一个成对平衡设计

$$(t(q^2+q+1),\{t,t+q\},1)\text{-PBD}.$$

网(net)　一类特殊的关联系统. 若有 n^2 个点及 nk 个子集(称为线)，使得：

1. 每条线恰含 n 个点；

2. 两条线与第三条线均不相交时，这两条线也

不相交；

3. 存在 k 个平等类，每个类由 n 条两两不相交的线组成；

4. 任意两条相交的线恰有一个交点；

则称这样的关联系统为一个 n 阶的 k 网. 一个 n 阶仿射平面是一个 n 阶的 $n+1$ 网. 一个 n 阶的 k 网等价于 $k-2$ 个相互正交的 n 阶拉丁方. 将一个拉丁方中的 n^2 个位置看做 n^2 个点，拉丁方中的一个元素出现在不同行不同列的 n 个位置，它们组成一条线，于是从一个拉丁方得到 n 条线组成的平行类. n 个行及 n 个列组成两个平行类，连同从 $k-2$ 个拉丁方得到的 $k-2$ 个平行类构成一个 n 阶的 k 网. 反之，从两个平行类构作行及列，则从其他的 $k-2$ 个平行类可得到 $k-2$ 个相互正交的 n 阶拉丁方. 若将 n 阶 k 网中的线取作“点”，而将点取作线（即含该点的线的集合），“点”在“线”上是指相应的线含该点，则这样得到的 n 阶 k 网的对偶结构是一个横截设计 TD$[k;n]$.

n 弧（n-arc） 射影空间中的一类点集. 若在 $k-1$ 维射影空间 PG$(k-1,q)$ 的 n 元点集 S 中没有 k 个点能含于一个超平面 PG$(k-2,q)$，其中 $n\geqslant k\geqslant 3$，则称集 S 是一个 n 弧. 从一个 n 弧可以得到一个正交表 OA(q^k,n,q,k)，也可以导出一类纠错码，即极大距离可分码. 对给定的 k 和 q，找具有最大 n 值的 n 弧是一个有意义的问题，目前尚未解决. 这个问题的另一提法是，在给定的 GF(q) 上的 k 维向量空间中，找最大可能个数的向量，使其中任意 k 个向量形成该空间的基. 射影平面中的卵形就是具最大 n 值的 n 弧. 当 q 为奇数时，是一个 $(q+1)$ 弧；当 q 为偶数时，是一个 $(q+2)$ 弧.

德扎格平面（Desargues plane） 一类射影平面. 能使德扎格定理成立的射影平面. 德扎格定理断言：若 $O,A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2$ 是相异点，且 OA_1A_2，OB_1B_2，OC_1C_2 是相异线，线 A_1B_1 与 A_2B_2 交于点 C_3，线 A_1C_1 与 A_2C_2 交于点 B_3，线 B_1C_1 与 B_2C_2 交于点 A_3，则点 A_3,B_3,C_3 落在同一条线上. 以有限域上 3 维向量作为齐次坐标所得到的射影平面是德扎格平面. 并非所有的射影平面都是德扎格平面，不能使德扎格定理成立的射影平面称为非德扎格平面.

德扎格定理（Desargues theorem） 见“德扎格平面”.

非德扎格平面（non-Desargues plane） 见“德扎格平面”.

默比乌斯平面（Möbius plane） 亦称逆几何或圆几何. 一类组合构形. 设 X 为有限点集，其上有一族子集（称为圆），若满足以下三条性质，则称之为默比乌斯平面：

1. X 的任意三个相异点恰含于一个圆.

2. 若 P,Q 是 X 中两个点，y 是一个圆，使 $P\in y$，而 $Q\notin y$，则恰有一个圆含 P,Q 且与圆 y 仅有一个公共点 P.

3. X 中有四点不含于同一个圆.

一个有限默比乌斯平面就是一个 3-$(n^2+1,n+1,1)$ 设计. 从圆几何中去掉任何一点 θ，将含该点的圆去掉该点后称为线，于是得到 $X-\{\theta\}$ 上的一个仿射平面. 因此，圆几何是仿射平面的一个扩充.

逆几何（inverse geometry） 即“默比乌斯平面”.

圆几何（circle geometry） 即“默比乌斯平面”.

辛几何（symplectic geometry） 研究一种有限维向量空间的几何. 即关于非退化交错双线性型 B 的有限维向量空间的研究. 这里的交错双线性型是指对任意向量 x 均有 $B(x,x)=0$ 的双线性型 B. 对取定的一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，交错双线性型 B 的矩阵 $K=(B(e_i,e_j))$ 满足 $K'=-K$ 且主对角线上的元素都是 0，这样的矩阵称为交错矩阵. 交错矩阵的秩必为偶数，该偶数的一半称为该交错矩阵的指数. 若 P 是 $V_n(F_q)$ 的 m 维子空间，代表该子空间的秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵也用 P 表示，则 PKP' 是 m 阶交错矩阵，其指数也称为 P 的指数. 若 $PKP'=0$，则称 P 为 m 维全迷向子空间；若 PKP' 是非奇异的，则称 P 为 m 维非迷向子空间. 利用辛几何中不同类型的子空间，可以构作结合方案及 PBIBD 设计. 例如，当 $n\geqslant 4$ 时取有限域 F_q 上 n 维辛几何中 1 维子空间的全体作为处理的集合. 两个 1 维子空间，若生成一个 2 维全迷向子空间，则称它们间有第一种结合关系；若生成一个 2 维非迷向子空间，则称它们有第二种结合关系，这样便得到一个结合方案. 利用该结合方案可构作 PBIBD 设计，只需取指数为 s 的 m 维子空间的全体作为区组的集合，且将关联关系取作子空间之间的包含关系.

交错矩阵（alternate matrix） 见“辛几何”.

全迷向子空间（totally isotropic subspace） 见“辛几何”.

非迷向子空间（non-isotropic subspace） 见“辛几何”.

正交几何（orthogonal geometry） 一种向量空间的几何，即关于非退化对称双线性型的向量空间的研究. 这里的对称双线性型 B 是指对任意向量 x，y 有 $B(x,y)=B(y,x)$ 的双线性型. 对有限维空间中取定的一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，当基域的特征不为 2 时，对称双线性型 B 的矩阵 $S=(B(e_i,e_j))$ 满足 $S'=S$，即为对称矩阵. 设 P 是 $V_n(F_q)$ 的 m 维子空间，代表该子空间的一个秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵也用 P 表示. 当 q 为奇数且 S 为非奇异对称矩阵时，若

$PSP'=0$，则称 P 为全迷向子空间；若 PSP' 非奇异，则称 P 为非迷向子空间. 利用正交几何中不同类型的子空间，可以构作结合方案及 PBIBD 设计. 例如，当 $n\geqslant 4$ 时取奇数特征有限域上 n 维正交几何中 1 维迷向子空间的全体作为处理的集合，两个 1 维迷向子空间，若生成一个 2 维全迷向子空间，则规定它们有第一种结合关系，否则它们有第二种结合关系，这样便得到一个结合方案. 利用该结合方案可构作 PBIBD 设计，比如取 m 维作迷向子空间作为区组，并规定关联关系由子空间之间的包含关系决定.

对称矩阵(symmetric matrix)　见“正交几何”.

酉几何(unitary geometry)　一种向量空间的几何. 即关于非退化埃尔米特型 H 的有限维向量空间的研究. 设基域为含 q^2 个元的有限域 F_{q^2}，其中有一个 2 阶自同构 $a\to\bar{a}=a^q$，它的固定子域为 F_q. 对任意向量 x,y,z 及 F_{q^2} 中任意元 a,b，这里的埃尔米特型由以下两式定义：

$$H(ax+by,z)=aH(x,z)+bH(y,z),$$

$$H(y,z)=\overline{H(x,y)}.$$

对取定的一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，埃尔米特型 H 的矩阵 $H=(H(e_i,e_j))$ 满足 $\overline{H'}=H$，即为埃尔米特矩阵. 设 P 是 $V_n(F_{q^2})$ 的 m 维子空间，代表子空间 P 的秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵仍用 P 表示. 设 H 是非奇异埃尔米特矩阵，若 $PH\overline{P'}=0$，则称 P 为全迷向子空间；若 $PH\overline{P'}$ 非奇异，则称 P 为非迷向子空间. 利用酉空间中不同类型的子空间，可以构作 PBIBD 设计及 BIBD 设计. 例如，取有限域 F_{q^2} 上 3 维酉几何中 1 维迷向子空间的全体作为处理的集合，并取其中 2 维非迷向子空间的全体作为区组的集合，规定关联关系为子空间之间的包含关系，于是，由此得到一个 $(q^3+1,q+1,1)$-BIBD.

埃米尔特矩阵(Hermitian matrix)　见“酉几何”.

罗姆方(Room square)　一类特殊的组合设计. 将一个 $2n$ 元集的所有 2 元子集放在一个 $2n-1$ 阶的方阵中，使其中每个位置或者空着，或者放一个 2 元子集，并使这 $2n$ 个元在每一行各出现一次，且在每一列各出现一次. 称这样的方阵为 $2n-1$ 阶的罗姆方. 罗姆方最早出现在 1850 年柯克曼女生问题的论文中，利用下图的 7 阶罗姆方可以作出 15 女生问题的一个解. 一个解由 7 个平行类构成，每个平行类由一个行得到，将该行上每个 2 元子集连同它的列标号构成一个三元组，共得四个三元组，连同该行三个空格的列标号构成的三元组，形成 15 元集上的一个平行类.

a	b	c	d	e	f	g
			35	17	$\infty 2$	46
	26	$\infty 4$			15	37
	13	57	$\infty 6$	24		
47		16		$\infty 3$		25
$\infty 5$		23	14		67	
12	$\infty 7$			56	34	
36	45		27			$\infty 1$

豪韦尔(Howell, E. C.)于 1897 年发现桥牌比赛安排问题也涉及到这一类方阵. 罗姆(Room, T. G.)不知这些情况，于 1955 年提出这一类方阵的存在性问题，后来这类方阵便称为罗姆方. $2n-1$ 阶罗姆方存在的充分必要条件为 $2n-1\neq 3,5$. 主要由沃利斯(Wallis, W. D.)及马林(Mullin, R. C.)解决. 在存在性的研究中还发现了与别的组合结构的等价性，例如正交对称拉丁方，正交 1 因子分解等. 罗姆方也与正交施泰纳三元系密切相关. 在推广罗姆方的过程中，还引出了双可分解 BIBD 设计的概念，成为目前感兴趣的研究课题.

正交1因子分解(orthogonal 1-factorization)一类组合对象. 与罗姆方等价. 一个完全图 K_{2n} 的某些边的集合，若含每个顶点恰一次，则称这些边构成一个 1 因子. 若 K_{2n} 的边集可以划分成一些 1 因子，则称这样的划分为一个 1 因子分解. K_{2n} 的 1 因子分解实际上是一个 $(2n,2,1)$-RBIBD. 若从 K_{2n} 的两个 1 因子分解中各任取一个 1 因子，它们至多只有一条边公共，则称这两个 1 因子分解为正交 1 因子分解. 一个 $2n-1$ 阶的罗姆方的行构成 K_{2n} 的一个 1 因子分解，列也构成一个 1 因子分解，并且它们是正交 1 因子分解. 反之，若有两个 1 因子分解为正交 1 因子分解，则将 1 因子分别编号，并将第一个分解中第 i 个 1 因子与第二个分解中第 j 个 1 因子的交(空集成作为边的元素对)放在一个 $2n-1$ 阶方阵的 (i,j) 位置，这样便得到一个 $2n-1$ 阶罗姆方.

1 因子分解(1-factorization)　见“正交 1 因子分解”.

正交对称拉丁方(orthogonal-symmetric Latin square)　一类组合对象. 与罗姆方等价. 设 $L=(l_{ij})$ 及 $M=(m_{ij})$ 是两个 n 阶的幂等对称拉丁方，若当 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时，所有的序对 (l_{ij},m_{ij}) 两两相异，则称 L 与 M 构成正交对称拉丁方. 值得注意的是正交对称拉丁方不同于通常的正交拉丁方. 若 t 个 n 阶幂等对称拉丁方中每两个构成正交对称拉丁方，则称它们是两两正交对称拉丁方. n 阶正交对称拉丁方等价于 n 阶罗姆方，而 t 个 n 阶两两正交对称拉丁方

等价于一个 n 阶 t 维罗姆方. 当存在 t 个 n 阶两两正交对称拉丁方时，有 $t\leqslant n-2$，一个未解决的猜测断言：$t\leqslant(n-1)/2$.

正交施泰纳三元系(orthogonal Steiner triple system) 一类组合对象. 与罗姆方有关的对象. 设 $(X,\mathscr{A})$ 及 $(X,\mathscr{B})$ 是两个施泰纳三元系，若 $\mathscr{A}\cap\mathscr{B}=\varnothing$ 且当 $\mathscr{A}$ 含 $\{u,v,w\}$ 与 $\{x,y,w\}$，$\mathscr{B}$ 含 $\{u,v,s\}$ 与 $\{x,y,t\}$ 时，必有 $s\neq t$，则称它们为正交施泰纳三元系. 由 $|X|=n$ 时正交施泰纳三元系的存在性可以导出 n 阶罗姆方的存在性.

平衡罗姆方(balanced Room square) 一类特殊的罗姆方. 若将一个罗姆方的每个 2 元子集 $\{x,y\}$ 用有序对 (x,y) 或 (y,x) 代替，则所得的方阵称为有序罗姆方. 设有一个 $2n-1$ 阶有序罗姆方，将每一行中出现在第一个坐标的元组成一个区组，出现在第二个坐标的元也组成一个区组，若这样的 $2(2n-1)$ 个区组构成一个

$$(2n,2(2n-1),2n-1,n,n-1)\text{-BIBD},$$

则称该有序罗姆方为平衡罗姆方. 一个 $2n-1$ 阶平衡罗姆方 BRS$(2n-1)$ 的存在性等价于一个完全平衡豪韦尔旋转 CBHR$(2n)$ 的存在性(参见“完全平衡豪韦尔旋转”). 已有各种构造BRS$(2n-1)$ 的方法，例如，当 q 为模 4 余 3 的质数幂时，存在BRS$(q+1)$ 及 BRS$(2q+2)$.

有序罗姆方(ordered Room square) 见“平衡罗姆方”.

完全平衡豪韦尔旋转(complete balanced Howell rotation) 单打桥牌循环赛的一种赛程安排. 设有 $2n$ 个队参加桥牌单打循环赛，若两个参赛者在一盘比赛中安排在同一方向(南北向或东西向)，则称他们在这盘中对阵. 若赛程安排满足以下条件，则称之为完全平衡豪韦尔旋转，记为 CBHR$(2n)$，这些条件是：

1. 在每一轮中每一盘至多由两个队打，一队一个方向.

2. 比赛过程中每一队与别的队恰好打一次.

3. 在每一轮中每个队恰打一盘.

4. 在每一盘中每个队恰打一次.

5. 每个队与别的队对阵的次数一样多.

若将一平衡罗姆方的行作为盘次，且以列作为轮次，则当 (i,j) 位置有元素对 (a,b) 时，将 a 队与 b 队安排在第 j 轮第 i 盘打，并且 a 队取南北向而 b 队取东西向. 罗姆方的条件保证了上述条件 1,2,3,4，而平衡罗姆方的 BIBD 条件保证了条件 5，因此由平衡罗姆方可得到完全平衡豪韦尔旋转的赛程安排. 反之，也可由完全平衡豪韦尔旋转得到一个平衡罗姆方.

完美罗姆方(perfect Room square) 一类特殊的罗姆方. 若完全图 K_{2n} 的某个 1 因子分解中每两个 1 因子的并是一个长 $2n$ 的圈，则称这样的分解为完美 1 因子分解. 若一个罗姆方的行 1 因子分解与列 1 因子分解(参见“正交 1 因子分解”)都是完美 1 因子分解，则称这样的罗姆方为完美罗姆方.

完美1 因子分解(perfect 1-factorization) 见“完美罗姆方”.

标准罗姆方(standardized Room square) 特殊形式的罗姆方. 设 n 阶罗姆方的元素集合为 $\{\infty,1,2,\cdots,n\}$，若主对角线上元素对依次为 $\{\infty,1\}$，$\{\infty,2\},\cdots,\{\infty,n\}$，则称之为标准罗姆方. 任一个罗姆方都可经交换两行、交换两列这样的变换变为标准罗姆方.

斜罗姆方(skew Room square) 一类特殊的罗姆方. 在一个标准罗姆方中，若关于主对角线对称的每两个位置中恰有一个是空的，则称之为斜罗姆方. n 阶斜罗姆方存在的充分必要条件是 n 为不等于 3 和 5 的奇正整数. 从 n 阶斜罗姆方的存在性可以导出 $2n+1$ 阶和 $2n-1$ 阶罗姆方的存在性，还可导出一个 $(n,4,6)$-BIBD 的存在性.

t 维罗姆方(t-dimensional Room square) 罗姆方的高维推广. 设 n 阶 t 维方阵中每个位置或者放一个元素的无序对或者空着，若它的每一个 2 维投影是一个 n 阶罗姆方，则称之为 n 阶 t 维罗姆方. n 阶 t 维罗姆方的存在性等价于 t 个 n 阶两两正交对称拉丁方的存在性. 当 $t=3$ 时，称 t 维罗姆方为罗姆立方. n 阶罗姆立方存在的充分必要条件与 n 阶罗姆方存在的充分必要条件一样，即，n 是不等于 3 和 5 的奇正整数.

罗姆立方(Room cube) 见“t 维罗姆方”.

罗姆子方(Room subsquare) 特殊的罗姆方，即含于某罗姆方中的罗姆方. 若一个 r 阶罗姆方的某 s 行及某 s 列的交叉位置上的 s 阶方阵也构成某个 $s+1$ 元集上的 s 阶罗姆方，则称该 s 阶罗姆方是 r 阶罗姆方的罗姆子方. 在解决罗姆方的存在性问题时，罗姆子方曾用于递推构造的方法. 因此，罗姆子方的存在性也有不少研究. 一个必要条件是 $r\geqslant 3s+2$. 由于 5 阶罗姆方不存在，$(r,s)=(5,1)$ 是不可能的情形. 史汀生(Stinson, D. R.)于 1981 年猜测：当 r,s 为正奇数，$r\geqslant 3s+2$ 且 $(r,s)\neq(5,1)$ 时，总存在一个 r 阶罗姆方含一个 s 阶的罗姆子方(或者 s 阶的空子方，特别地，当 $s=3,5$ 时).

豪韦尔设计(Howell design) 罗姆方的一种推广. 设 S 为 $2n$ 元集，F 是一个 s 阶方阵，若 F 中每个位置上或者放一个 S 的 2 元子集或者空着，使得 S 的每个元在 F 的每一行及每一列均出现一次，并且 S 的每个 2 元子集在 F 中至多出现一次，则称 F 是一个豪韦尔设计，记为 $H(s,2n)$. 当豪韦尔

$H(s,2n)$存在时，必有 $s+1\leqslant 2n\leqslant 2s$. 一个极端的情形：$H(2n-1,2n)$ 就是一个 $2n-1$ 阶的罗姆方. $H(s,2n)$的存在性已经解决，除了 4 个例外情形$(s,2n)=(2,4),(3,4),(5,6),(5,8)$外，必要条件 $s+1\leqslant 2n\leqslant 2s$ 也是充分条件.

柯克曼方(Kirkman square)　罗姆方的一种推广. 若 V 为 v 元集，F 为一个方阵，其每个位置或者放一个 V 的 k 元子集或者空着，使得 V 的每个元在每行每列恰出现 μ 次，并且所有这些 k 元子集构成一个(v,k,λ)-BIBD，则称 F 为一个柯克曼方，记为 $\mathrm{KS}_k(v;\mu,\lambda)$. 一个柯克曼方 $\mathrm{KS}_2(v;1,1)$就是一个 $v-1$ 阶罗姆方. 当 $\mu=1$ 时，$\mathrm{KS}_k(v;1,\lambda)$等价于一个双可分解$(v,k,\lambda)$-BIBD. $\mathrm{KS}_2(v;\mu,\lambda)$存在的充分必要条件是：

1. μ 整除 $\lambda(v-1)$.

2. μv 为偶数.

3. $2\lambda>\mu^2$.

4. $v(2\lambda-\mu^2)\geqslant 2\lambda$.

5. $(v,\lambda)\neq(4,1),(6,1)$.

两个例外情形来自 3 阶及 5 阶罗姆方的不存在性. 对于 $k\geqslant 3$ 的柯克曼方目前所知甚少.

双可分解BIBD设计(doubly resolvable BIBD design)　一类特殊的 BIBD 设计. 若一个(v,k,λ)-BIBD 的区组有两种方式划分成区组的平行类 $R_1,R_2,\cdots,R_r$ 及 $R'_1,R'_2,\cdots,R'_r$ 使得当 $i\neq j$ 时，总有 $|R_i\cap R'_j|\leqslant 1$，则称这样的 BIBD 设计是双可分解的. 一个 $2n-1$ 阶罗姆方等价于一个双可分解的 $(2n,2,1)$-BIBD. 若将一个双可分解的 BIBD 设计的区组放入一个 r 阶方阵，在(i,j)位置放 R_i 与 R'_j 的交(或为一个区组或为空集)，则得到罗姆方的一种推广，称为柯克曼方. 由于双可分解性要求很强，关于其存在性的结果不多.

差集(difference set)　亦称群差集. 一类组合构形. 来源于对区组设计的自同构的研究. 设 G 为 v 阶乘法群，单位元为 e，若对 G 的 $k(0<k<v)$元子集 D，形如 $xy^{-1}(x,y\in D)$的元中含 G 的每个非单位元恰 λ 次，则称 D 为一个(v,k,λ)差集. 记 $n=k-\lambda$，称之为差集 D 的阶. 当 G 为阿贝尔群(即可换群)或循环群时，分别称 D 为阿贝尔差集或循环差集. 对于 G 中的元 g，记 $Dg=\{dg\mid d\in D\}$，称 Dg 为 D 关于 g 的平移. D 的所有平移的集合记为 $\mathrm{dev}D$，即 $\mathrm{dev}D=\{Dg\mid g\in G\}$. 当 D 为一个(v,k,λ)差集时，$(G,\mathrm{dev}D)$是一个(v,k,λ)-SBIBD. 因此，可以用差集来构作对称设计，并且，差集的参数 v,k,λ 也必须满足布鲁克-赖瑟-乔拉定理的条件. 当 D 为(v,k,λ)差集时，D 的补集 $G\backslash D$ 为$(v,v-k,v-2k+\lambda)$差集，因此，研究差集时可设 $k\leqslant v/2$.

关于差集的存在性. 当 $\lambda=1$ 时，有无穷多个差集存在. 对于 $\lambda\geqslant 2$，有这样的霍尔猜想：当 $\lambda\geqslant 2$ 时，只存在有限多个(v,k,λ)阿贝尔差集. 这个猜想至今没有证实. 由于这个猜想，在差集的研究中，证明一些不存在性定理就成为重要的问题.

群差集(group difference set)　即“差集”.

阿贝尔差集(Abelian difference set)　见“差集”.

霍尔猜想(Hall's conjecture)　见“差集”.

平面差集(planar difference set)　一类组合构形. 即$(v,k,1)$差集. 若平面差集的阶为 n，则 $n=k-1$，因此，平面差集为$(n^2+n+1,n+1,1)$差集. n 阶平面差集的存在性等价于具有恰可迁自同构群的 n 阶射影平面的存在性. 阶为质数幂的循环平面差集均已作出. 但是，当 n 不是质数幂时，一个这样的平面差集都没有发现. 究竟有没有非质数幂阶的平面差集，这是至今未解决的一个问题.

循环差集(cyclic difference set)　一类特殊差集，即循环群中的差集. 例如，若循环加群 $\mathbf{Z}_{15}$的元素记为$\{0,1,\cdots,14\}$，则 $D=\{0,1,2,4,5,8,10\}$是一个$(15,7,3)$循环差集. 循环差集和循环对称设计之间有着一一对应关系：当且仅当 D 是循环群 G 中的(v,k,λ)差集时，$(G,\mathrm{dev}D)$是一个循环的(v,k,λ)-SBIBD.

循环设计(cyclic design)　一类特殊的对称设计. 设$(X,\mathscr{B})$是一个(v,k,λ)-SBIBD，若存在该设计的一个自同构 α(参见“设计的同构”)，使 $X=\{x,\alpha(x),\alpha^2(x),\cdots,\alpha^{v-1}(x)\}$，$\mathscr{B}=\{B,\alpha(B),\alpha^2(B),\cdots,\alpha^{v-1}(B)\}$，则称这个对称设计是循环设计. 例如，若取 $X=\{0,1,2,\cdots,14\}$，$B=\{0,1,2,4,5,8,10\}$，$\alpha(x)\equiv x+1(\mathrm{mod}\,15)$，$\mathscr{B}=\{B,\alpha(B),\cdots,\alpha^{14}(B)\}$，则$(X,\mathscr{B})$是一个参数为$(15,7,3)$的循环设计. 循环设计与循环差集之间有着一一对应的关系.

差集的刻画(description of difference set)　对差集的一种表征. 按定义差集是群中的特殊子集，为讨论问题方便起见，考虑阿贝尔群 G 的群环 $\mathbf{Z}G$，其中 $\mathbf{Z}$ 为整数环，则 G 中的差集 D 可用群环中元

$$T(D)=\sum_{d\in D}d$$

来刻画. 若 α 为 G 的自同构，记

$$T(D^\alpha)=\sum_{d\in D}d^\alpha,$$

则 G 的 k 元子集 D 为(v,k,λ)差集的充分必要条件为 $T(D)T(D^{-1})=n+\lambda S$，式中 $n=k-\lambda$，

$$S=\sum_{g\in G}g.$$

循环差集还可由霍尔多项式(参见“霍尔多项式”)及循环序列来刻画. 以 $0,1,\cdots,v-1$ 记循环加群 $\mathbf{Z}_v$ 中元，定义一个序列 $a_0,a_1,\cdots,a_{v-1}$，使得 i 属于循环差集 D 时 $a_i=1$，否则 $a_i=0$，则称该序列是循环差集

D 的特征序列. 一个长为 v 的(0,1)序列 $a_0,a_1,\cdots,a_{v-1}$ 是一个 (v,k,λ) 循环差集的特征序列的充分必要条件是和式

$$\sum_{i=0}^{v-1}a_ia_{i+j}$$

只取两个值,当 $j\equiv 0(\mathrm{mod}\,v)$ 时值为 k,而对别的 j 均取值 λ,和式中下标 $i+j$ 按模 v 简化. 循环差集的特征序列刻画法便于差集在数字通信理论中的应用.

霍尔多项式(Hall's polynomial) 对循环差集的一种刻画. 当 G 为 v 阶循环群时,群环 $\mathbf{Z}G$ 与多项式环 $\mathbf{Z}[x]/(x^v-1)$ 同构. 若 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$ 为 G 的一个差集,则 D 的群环刻画 $T(D)$ 对应于 $\mathbf{Z}[x]/(x^v-1)$ 中的元 $\theta(x)=x^{d_1}+x^{d_2}+\cdots+x^{d_k}$. 称 $\theta(x)$ 为 D 的霍尔多项式. D 为 v 阶循环群中 (v,k,λ) 差集的充分必要条件是霍尔多项式适合

$$\theta(x)\theta(x^{-1})\equiv n+\lambda T(x)\ (\mathrm{mod}\ x^v-1),$$

式中 $T(x)=1+x+\cdots+x^{v-1}$, $n=k-\lambda$.

乘子(multiplier) 亦称乘数. 一类特殊的自同构. 设 D 为群 G 的一个 (v,k,λ) 差集,G 的运算以加法记,α 为 G 的一个自同构. 若存在 $a,b\in G$,使 $D^\alpha=a+D+b$,则称 α 为 D 的乘子. 当 a 为零元时,称 α 为右乘子. 当 G 为阿贝尔群时,若存在整数 m,使 α 为映射 $x\to mx$,则称 α 为一个数值乘子,有时也称 m 为数值乘子. 例如,$\{1,3,9,5,4\}$ 是 $\mathbf{Z}_{11}$ 中的(11,5,2)差集,$m=3$ 是它的一个数值乘子. D 的所有乘子成为一个群,而所有右乘子为这个群的子群. 当 G 是阿贝尔群时,所有的乘子为右乘子;当 G 是循环群时,所有的乘子为数值乘子. 当 D 为阿贝尔差集时,D 的一个乘子必固定 D 的某个平移. 利用这个性质及乘子定理可以构造某些差集及证明某些差集的不存在性(参见"乘子定理").

乘数(multiplier) 即"乘子".

右乘子(right multiplier) 见"乘子".

数值乘子(numerical multiplier) 见"乘子".

乘子定理(multiplier theorem) 用来判别差集乘子存在性的定理. 乘子定理有多种形式,以下的乘子定理也称为第二乘子定理. 设 D 是 v 阶阿贝尔群 G 的 (v,k,λ) 差集,m 是 $n=k-\lambda$ 的一个与 v 互素的因子,且 $m>\lambda$. 若整数 t 与 v 互素,使得对 m 的每个素因子 p 存在相应的非负整数 f,适合 $t\equiv p^f(\mathrm{mod}\,v^*)$,其中 v^* 为 G 的指数,即使 $x^e=1$ 对 G 中一切 x 成立的最小正整数 e,则 G 的自同构 $x\to x^t$ 是 D 的数值乘子. 该定理由曼(Mann,H. B.)于1965年得到. 当 G 为循环群且 $\lambda=1$ 时的较早形式由霍尔(Hall M. Jr.)得到. 由于阿贝尔差集 D 的乘子必固定 D 的某个平移,所以,可由乘子定理作出一些差集或证明某些参数的差集不存在. 例如,可做(11,5,2)循环差集如下:设这样的差集存在,则 3 是 D 的一个数值乘子,不妨设 3 固定 D,则 D 必为循环群 Z_{11} 的元素在自同构 $x\to 3x$ 作用下的某些轨道的并. 而 Z_{11} 的元素轨道为 $\{0\}$,$\{1,3,9,5,4\}$ 及 $\{2,6,7,10,8\}$. 于是,两个轨道均是 $\mathbf{Z}_{11}$ 中的(11,5,2)差集. 又例如,若存在循环(31,10,3)差集 D,则 7 应是 D 的乘子,不妨设 7 固定 D. 但是,在自同构 $x\to 7x$ 作用下 $\mathbf{Z}_{31}$ 分成 3 个元素轨道,长度分别为 1,15 及 15,这说明 D 不存在. 在第二乘子定理中取 m 为素数 p,可得到定理的特例(称为第一乘子定理):设 D 是一个 (v,k,λ) 阿贝尔差集,p 为素数,$p\mid n$,$p\nmid v$,若 $p>\lambda$,则 p 是 D 的一个乘子. 这个定理的证明依赖于条件 $p>\lambda$,但事实上对每一个已知的阿贝尔差集,只要素数 p 是 n 的因子且不整除 v,则一定是差集的乘子. 因此,人们猜想第一乘子定理中去掉条件 $p>\lambda$ 后结论仍成立. 这个猜想称为乘子猜想.

乘子定理说明,n 的因数是乘子的重要来源. 但这并不是惟一的来源. 例如,11 是(21,5,1)循环差集 $D=\{3,6,7,12,14\}$ 的数值乘子,而 11 并不是 $n=4$ 的因子. 当一个数值乘子不是 n 的因子时,称为额外乘子. 已知某些数不可能成为差集的额外乘子. 例如,2 不可能是阿贝尔差集的额外乘子,$v-1$ 不可能是任何 (v,k,λ) 循环差集的额外乘子.

乘子猜想(multiplier conjecture) 见"乘子定理".

额外乘子(extraneous multiplier) 见"乘子定理".

辛格定理(theorem of Singer) 关于一类循环差集的存在性定理. 若 q 为素数幂,则存在

$$\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1},\frac{q^n-1}{q-1},\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\right)$$

循环差集. 该定理由辛格(Singer,J.)于1938年利用有限射影几何证得. 将有限域 $\mathrm{GF}(q)$ 上的 $n+1$ 维非零向量 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ 取作 n 维射影几何的点,当 b 为 $\mathrm{GF}(q)$ 中非零元时,把 bx 与 x 看做相同的点. 这些点的集合记为 $\mathrm{PG}(n,q)$. 若 ξ 为扩域 $\mathrm{GF}(q^{n+1})$ 中的原根,则 ξ^i 与 ξ^j 表示 $\mathrm{PG}(n,q)$ 中相同点的充分必要条件为 $i\equiv j(\mathrm{mod}\,v)$,这里

$$v=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

于是,$\mathrm{PG}(n,q)$ 中的所有点可表为 $\xi^0,\xi^1,\cdots,\xi^{v-1}$. 设 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是 $\mathrm{GF}(q)$ 上 n 个线性无关的 $n+1$ 维向量,把一切向量 $b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_ny_n$(式中 $b_i\in\mathrm{GF}(q)$)所对应的点的集合称为一个超平面,其中的点可表为 $\{\xi^{d_1},\xi^{d_2},\cdots,\xi^{d_k}\}$,这里

$$k=\frac{(q^n-1)}{(q-1)}.$$

辛格证明:$\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$ 是循环群 Z_v 中的 (v,k,λ)

差集，其中，$\lambda=(q^{n-1}-1)/(q-1)$.

分圆类(cyclotomic class)　一种等价类. 设 q 为奇素数幂，w 为有限域 GF(q)的一个原根. 若 e 为 $q-1$ 的因子，$q-1=ef$，$\varepsilon=w^e$，则 $H^e=\{1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{f-1}\}$ 是 GF(q)的乘法子群. 将子群 H^e 的陪集 $H_a^e=H^ew^a$ 称为分圆类，这里 a 取 $0,1,\cdots,e-1$.

分圆数(cyclotomic number)　构造差集的工具之一. 设 $q=ef+1$ 为奇质数幂，取定原根 ω 后可得分圆类 H_a^e，$a=0,1,\cdots,e-1$(参见“分圆类”). 对取定的 i,j，方程 $x+1=y$ 的使 $x\in H_i^e$，$y\in H_j^e$ 的解 (x,y) 的个数，称为 e 阶分圆数，记为 $(i,j)_e$. 事实上，分圆数 $(i,j)_e$ 也就是方程 $w^{es+i}+1=w^{et+j}$ 的解 (s,t) 的个数，这里 $0\leqslant s,t\leqslant f-1$. 通过对分圆数的计算可以构造一些差集. 例如，$H_0^e$ 构成 GF(q)加法群中 $(q,f,(f-1)/e)$ 差集的充分必要条件为

$$(i,0)_e=\frac{f-1}{e}\ (i=0,1,\cdots,e-1),$$

且 $2\nmid f$；而 $H_0^e\cup\{0\}$ 构成 $(q,f+1,(f+1)/e)$ 差集的充分必要条件为

$$1+(0,0)_e=(i,0)_e=(f+1)/e\ \left(i=1,2,\cdots,\frac{e-2}{2}\right),$$

且 $2\nmid f$. 因此，当素数幂 $q\equiv3(\mathrm{mod}\,4)$ 时，H_0^2 是

$$\left(q,\frac{q-1}{2},\frac{q-3}{4}\right)$$

差集，称为二次剩余差集；当 $q=1+4y^2\equiv5(\mathrm{mod}\,8)$ 时，$H_0^4\cup\{0\}$ 是 $(q,3+y^2,(3+y^2)/4)$ 差集.

广义分圆数(generalized cyclotomic number)　分圆数的推广. 设 v 是两个相异奇质数的积，g 为这两个质数 p 和 q 的公共原根. 以 m 记 $p-1$ 与 $q-1$ 的最大公因数，若 $d=(p-1)(q-1)/m$，则可取整数 h 使 $\{g^sh^i\mid0\leqslant s\leqslant d-1,0\leqslant i\leqslant m-1\}$ 成为模 v 的一个既约剩余系. 若记 $E_i=\{g^sh^i\mid0\leqslant s\leqslant d-1\}$，$0\leqslant i\leqslant m-1$，则方程 $x+1\equiv y(\mathrm{mod}\,v)$，$x\in E_i$，$y\in E_j$ 的解 (x,y) 的个数，即为方程 $g^sh^i+1\equiv g^th^j(\mathrm{mod}\,v)$，$0\leqslant s,t\leqslant d-1$ 解 (s,t) 的个数. 称该数为广义分圆数，记为 $(i,j)_m$. 利用广义分圆数证得：若 p,q 为两个孪生质数，即 $q=p+2$，则存在

$$\left(pq,\frac{pq-1}{2},\frac{pq-3}{4}\right)$$

循环差集.

梅农差集(Menon difference set)　一类特殊参数的差集. 梅农(Menon, P. K.)于 1962 年证明：若一个 (v,k,λ) 差集中 $v=4n$，这里 $n=k-\lambda$，则这个差集的参数一定具有形式 $(4m^2,2m^2\pm m,m^2\pm m)$. 后来把有这种参数的差集称为梅农差集. 当 $m=2^r3^s$ 时，梅农差集均存在. 但是，当 m 为其他形式的正整数时，尚未发现相应的梅农差集. 人们猜测梅农差集中的 m 只能取 2^r3^s 的形式，其中 r,s 为非负整数. 梅农差集可以用来构造阿达马矩阵. 首先，由梅农差集可以得到一个 $(4m^2,2m^2\pm m,m^2\pm m)$-SBIBD；然后，将该对称设计的关联矩阵中的数 0 换作 -1，就得一个 $4m^2$ 阶的阿达马矩阵. 所得的矩阵还是正则阿达马矩阵，即每行含相同个数的 -1.

差集的收缩(contraction of difference set)　作用在差集上的一种运算. 若 D 为群 G 中的差集，H 为 G 的正规子群，在同态 $G\to G\backslash H$ 下 D 的像记为 $\overline{D}$，则称 $\overline{D}$ 为 D 的收缩. 若与 $|G/H|$ 互素的某个整数 t 是 $\overline{D}$ 的一个乘子，则称 t 为 D 的 G/H 乘子. 例如，$D=\{0,1,2,4,5,8,10\}$ 为 Z_{15} 中的(15,7,3)循环差集，若取 $H=\{0,3,6,9,12\}$，则 $\overline{D}=G/H$，这时与 3 互素的整数都是 D 的 G/H 乘子. 当 H 仅含 G 的单位元时，G/H 乘子就是通常的数值乘子，因此，G/H 乘子是一般数值乘子的推广. 对 G/H 乘子也有类似于乘子定理的存在性定理，从而也可用来构造差集或否定某些差集的存在性.

可分差集(divisible difference set)　差集的一种推广. 若 G 为 mn 阶群，具有 n 阶正规子群 N，D 为 G 的 k 元子集，使对任意 $g\in G/N$ 恰有 λ_2 种方式表 g 为 $d_1d_2^{-1}$ 的形式，其中 $d_1,d_2\in D$，而对 N 中任意非单位元，恰有 λ_1 种这样的表示方式，则称 D 为可分差集，记为 $(m,n,k,\lambda_1,\lambda_2)$-DDS. 特别地，当 $\lambda_1=0$ 时，称 D 为相对差集. 当 $\lambda_1=\lambda_2$ 或 $n=1$ 时，即为通常的差集. 由可分差集 D 可得到 G 上的对称可分组设计，其区组族为 $\mathrm{dev}D=\{Dg\mid g\in G\}$. 这是一类具两个结合类的部分平衡不完全区组设计. 若有整数 t，$(t,mn)=1$，使 $D^t=\{d^t\mid d\in D\}=Dg$ 对某个 $g\in G$ 成立，则称 t 为 D 的乘子. 当 $D^t=D$ 时，称 t 为 D 的强乘子.

强乘子(strong multiplier)　见“可分差集”.

循环加集(cyclic addition set)　循环差集的一种推广. 设 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$ 为 v 阶循环群 $\mathbf{Z}_v$ 的 k 元子集，g 为小于 v 的一个正整数. 若对 $\mathbf{Z}_v$ 中任一非零元 s，方程 $x+gy=s$ 在 $D\times D$ 中的解 (x,y) 的个数都是 λ，则称 D 是一个 (v,k,λ,g) 循环加集. 当 $g=-1$ 时，$(v,k,\lambda,-1)$ 循环加集就是通常的 (v,k,λ) 循环差集. 若 $\theta(x)$ 为 D 的霍尔多项式(参见“霍尔多项式”)，则 D 是 (v,k,λ,g) 循环加集的充分必要条件为

$$\theta(x)\theta(x^g)\equiv\beta+\lambda T(x)\ (\mathrm{mod}\ x^v-1),$$

式中 $T(x)=1+x+\cdots+x^{v-1}$. 当 $1<k<v-1$ 时，(v,k,λ,g) 循环加集的参数满足 $\beta=k^2-\lambda v$，$0\leqslant\beta+\lambda\leqslant k$，$0<\lambda<k$ 及 $|\beta|<k$. 对于循环加集，也可以定义乘子，并且有类似于循环差集的乘子定理.

差族(difference family)　组合设计的一种工具. 用于构作 BIBD 设计或 PBD. 设 $B_1,B_2,\cdots,B_s$ 是

v 阶群 G 的子集，运算以加法表示，$B_i=\{b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_{k_i}}\}$，$K=\{k_i\mid 1\leqslant i\leqslant s\}$，若 G 中每个非零元在所有的差 $b_{i_j}-b_{i_l}(1\leqslant i\leqslant s)$ 中恰出现 λ 次，则称 $\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_s\}$ 是一个 (v,K,λ) 差族. 若

$$\mathrm{dev}B_i=\{B_i+g\mid g\in G\},\mathrm{dev}\mathscr{B}=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}\mathrm{dev}B_i,$$

则 $(G,\mathrm{dev}\mathscr{B})$ 是一个 (v,K,λ)-PBD. 当 $K=\{k\}$ 时得 (v,K,λ)-BIBD. 对差族也可定义乘子，但没有相应的乘子定理. 分圆数理论可用于讨论差族的存在性，但目前尚没有系统的结果. 当 G 为阿贝尔群时，一个 (v,K,λ) 差族有时也称为补差集，记为 s-$(v;k_1,k_2,\cdots,k_s;\lambda)$ 补差集.

$$4\text{-}\left(v;k_1,k_2,k_3,k_4;\sum_{i=1}^{4}k_i-v\right)$$

补差集和 2-$(2v;k_1,k_2;k_1+k_2-v)$ 补差集可用来构作 $4v$ 阶的阿达马矩阵. 若 $\{D_1,D_2\}$ 为一个 2-$(2m+1;m,m;m-1)$ 补差集，且满足条件：$x\in D_1$ 就有 $x^{-1}\notin D_1$，则称 $\{D_1,D_2\}$ 为采克勒斯差集. 从一个采克勒斯差集可得到一个 $4(m+1)$ 阶反型阿达马矩阵. 当 $2m+1$ 满足以下条件之一时存在采克勒斯差集：$4m+3$ 为素数幂；$2m+1\equiv 5(\mathrm{mod}\,8)$ 且 $2m+1$ 为素数幂；$m=4n$，$2m+1=p^t$，p 为素数，$p\equiv 5(\mathrm{mod}\,8)$ 且 $t\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$.

补差集(complementary difference set)　见“差族”.

采克勒斯差集(Szekeres difference set)　见“差族”.

阿达马矩阵(Hadamard matrix)　一类特殊矩阵，其元素取 ± 1，与一类 BIBD 设计等价. 若元素为 1 或 -1 的 n 阶矩阵 H 适合等式 $HH^T=nI$，其中 I 为单位矩阵，则称 H 为 n 阶阿达马矩阵，简称 H 矩阵. 由于阿达马(Hadamard, J. (-S.))曾证明 n 阶实数方阵 A 的行列式适合不等式 $|\det A|\leqslant n^{n/2}$，而阿达马矩阵是使其中等号成立的 n 阶实矩阵，这就是阿达马矩阵这一名称的来由.

因为 n 阶 H 矩阵存在时，n 只可能为 1，2 或 4 的倍数，所以，1 阶和 2 阶 H 矩阵是存在的，但当 $n>2$ 时是否总存在 $n=4t$ 阶的 H 矩阵还是一个未解决的突出问题. 人们猜测这样的矩阵总存在，称为阿达马矩阵猜测. 一个 $4t$ 阶 H 矩阵的存在性等价于一个 $(4t-1,2t-1,t-1)$-SBIBD 的存在性. 利用有限域，佩利(Paley, R. E. A. C.)直接构作了 $q+1$ 阶的 H 矩阵，其中 q 为模 4 余 3 的质数幂. 有许多递推构作 H 矩阵的方法. 例如，若 $A=(a_{ij})$，B 分别是 m 阶及 n 阶 H 矩阵，则 (i,j) 位置为 $a_{ij}B$ 的分块矩阵 $A\otimes B$ 是一个 mn 阶的 H 矩阵. 利用其他特殊类型的矩阵，例如，威廉森型矩阵、鲍默特-霍尔表、对称 C 矩阵等，也可递推构作 H 矩阵. 还有一些递推构作方法需要特殊类型的 H 矩阵，例如，反型 H 矩阵、对称 H 矩阵，以及 H 矩阵睦偶等. 利用补差集也可构作 H 矩阵.

H 矩阵在数字通信中可用于构造纠错码，人类从宇宙空间发回的第一张行星照片曾采用了 32 阶的 H 矩阵以提高清晰程度(参见“阿达马码”). H 矩阵在模式识别中用于构造有限沃尔什变换. H 矩阵与一类对称 BIBD 设计及二水平正交阵列的等价性提供了它在统计应用方面的重要性. 阿达马矩阵有各种推广，例如，复阿达马矩阵、正交设计等.

阿达马矩阵猜测(Hadamard matrix conjecture)　见“阿达马矩阵”.

阿达马设计(Hadamard design)　一类特殊参数的对称设计. 即 $(4t-1,2t-1,t-1)$-SBIBD. 当 $4t$ 阶 H 矩阵存在时，经交换两行、交换两列、某行乘以 -1、某列乘以 -1 这些变换的连续施行后，得到的仍然是 H 矩阵，因而总存在首行首列元素全为 1 的 $4t$ 阶 H 矩阵. 若将划去首行首列后得到的子矩阵记为 A，则将 A 中 -1 换作 0 得到的矩阵作为关联矩阵，可以得到一个 $(4t-1,2t-1,t-1)$-SBIBD. 反之，若存在一个 $(4t-1,2t-1,t-1)$-SBIBD，则将其关联矩阵中的 0 换作 -1，并且在上面及左边加上元素全为 1 的行及列，便得到一个 $4t$ 阶 H 矩阵. 因此，$(4t-1,2t-1,t-1)$-SBIBD 的存在性等价于 $4t$ 阶 H 矩阵的存在性，这就是将这类设计称为阿达马设计的来由.

正规阿达马矩阵(regular Hadamard matrix)　一类特殊的阿达码矩阵. 其行和为常数. 这类矩阵每行所含 1 的个数都相同. 当 $4n$ 阶正规阿达马矩阵存在时，n 必为完全平方数. 将 $4u^2$ 阶正规 H 矩阵中的 -1 换作 0，便得到一个 $(4u^2,2u^2\pm u,u^2\pm u)$-SBIBD 的关联矩阵；反之将 $(4u^2\ 2u^2\pm u,u^2\pm u)$-SBIBD 的关联矩阵中的 0 换成 -1，便得到一个 $4u^2$ 阶的正规 H 矩阵. 因此，正规 H 矩阵的存在性与又一类对称设计的存在性等价. 若存在 $u-2$ 个相互正交 $2u$ 阶拉丁方，则存在 $4u^2$ 阶正规 H 矩阵. 当 n 阶 H 矩阵存在时，也存在 n^2 阶正规 H 矩阵. 并且当 m 阶及 n 阶正规 H 矩阵都存在时，必存在 mn 阶正规 H 矩阵.

反型阿达马矩阵(skew Hadamard matrix)　一类特殊阿达马矩阵. 若一个阿达马矩阵与单位矩阵的差是反对称矩阵，则称这个阿达马矩阵为反型的. 这一概念是为了递推构造 H 矩阵而提出的. 如果存在 n 阶反型 H 矩阵，则存在 $n(n-1)$ 阶 H 矩阵. 从 n 阶反型 H 矩阵及 $n+4$ 阶对称 H 矩阵可得到 $n(n+3)$ 阶 H 矩阵. 已有一些直接的和递推的构造反型 H 矩阵的方法. 例如，利用一类特殊的差族，即采克勒斯差集的存在性可得到相应阶数的反型 H 矩阵. 由

一个 m 阶反型 H 矩阵及一对 n 阶 H 矩阵睦偶可以得到一个 mn 阶反型 H 矩阵(参见"阿达马矩阵睦偶").

阿达马矩阵睦偶(amicable Hadamard matrix) 特殊的阿达马矩阵对. 设 M 是一个反型 H 矩阵, N 是一个同阶的对称 H 矩阵,若它们适合等式 $MN^T=NM^T$,则称它们是一对阿达马矩阵睦偶. H 矩阵睦偶可用于反型 H 矩阵的递推构造. 当 q 为模 4 余 3 的质数幂时,存在 $q+1$ 阶 H 矩阵睦偶. 当 m 阶及 n 阶 H 矩阵睦偶都存在时,也存在 mn 阶 H 矩阵睦偶.

对称C 矩阵(symmetric conference matrix) 与阿达马矩阵有关的一类矩阵. 若元素为 ±1 的 n 阶对称矩阵 C 的对角线元均为 1 且适合等式

$$(C-I)^2=(n-1)I,$$

则称 C 为对称 C 矩阵. 这类矩阵在研究会议电话系统时遇到,因而得名. 这类矩阵可用于 H 矩阵的递推构造. 若存在 m 阶($m>1$)H 矩阵且存在 n 阶对称 C 矩阵,则存在 mn 阶 H 矩阵. 一个对称 C 矩阵的阶数模 4 必余 2. 当 q 为模 4 余 1 的质数幂时,存在 $q+1$ 阶的对称 C 矩阵. 由 n 阶反型 H 矩阵可得到 $(n-1)^2+1$ 阶对称 C 矩阵. 由 n 阶对称 C 矩阵可得到 $(n-1)^k+1$ 阶对称 C 矩阵,其中 k 为任意正整数. 此外,已知 $n=226$ 时对称 C 矩阵存在,而 $n=46$ 是一个未解决的最小的阶.

威廉森型矩阵(Williamson matrix) 一组特殊的矩阵,其元素为 ±1. 元素为 ±1 的 4 个 m 阶矩阵 A,B,C,D,若满足

$$AA^T+BB^T+CC^T+DD^T=4mI,$$

且对其中的任两个矩阵 M,N 均有 $MN^T=NM^T$,则称它们为威廉森型矩阵. 这类矩阵是因为递推构造 H 矩阵的需要而提出的. 若存在 m 阶威廉森型矩阵且存在 t 阶鲍默特-霍尔表,则存在 $4mt$ 阶 H 矩阵. 当 q 为模 4 余 1 的质数幂时,存在 $(q+1)/2$ 阶及 $q(q+1)/2$ 阶的威廉森型矩阵. 对于阶数不大于 29 的奇数及其他较小的阶数,存在威廉森型矩阵.

鲍默特-霍尔表(Baumert-Hall array) 阿达马矩阵的推广,因递推构造阿达马矩阵而提出. 若元素为未定元 $\pm A,\pm B,\pm C,\pm D$ 的 $4t$ 阶矩阵的每一行及每一列含每个未定元 X(包括 $-X$)各 t 次,并且把 A,B,C,D 看做可换环中元素时每两行都是正交的,则称该矩阵为 t 阶鲍默特-霍尔表,记为 $BH[4t]$. 若存在 t 阶的鲍默特-霍尔表 $BH[4t]$,且存在 m 阶的威廉森型矩阵,则存在 $4mt$ 阶的 H 矩阵. 该 H 矩阵可将 $BH[4t]$中的未定元 A,B,C,D 换作 4 个威廉森型矩阵而得到. 若取 $A=B=C=D=1$,则从一个 $BH[4t]$得到一个 $4t$ 阶的 H 矩阵. 当 $t=1+2^a10^b26^c$,a,b,c 为非负整数时,存在 $BH[4t]$. 当 t 为不大于 33 的奇数或其他一些奇数时,也存在 $BH[4t]$. 以下是 $BH[4]$的一个例子:

$$BH[4]=\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & -B \\ -D & -C & B & A \end{bmatrix}.$$

T 矩阵(T-matrix) 一类特殊的矩阵,可用于构作鲍默特-霍尔表. 若 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$为加法可换群,$X\subseteq G$,$M=(m_{ij})$,当 $g_j-g_i\in X$ 时 $m_{ij}=1$,否则 $m_{ij}=0$,则称 M 是关于 X 的 I 型关联矩阵. 若 X 可划分为 $X=X_1\cup X_2$,使 $g_j-g_i\in X_1$ 时 $m_{ij}=1$,$g_i-g_j\in X_2$ 时 $m_{ij}=-1$,$g_j-g_i\notin X$ 时 $m_{ij}=0$,则称 M 为 I 型(0,1,−1)矩阵. 若 M_1,M_2,M_3,M_4 是 n 阶可换群 G 上的 4 个(0,1,−1)矩阵,使对 n^2 个位置的每一个恰有一个 M_i 在此位置上元素不为零,且

$$M_1M_1^T+M_2M_2^T+M_3M_3^T+M_4M_4^T=nI_n,$$

其中 I_n 为单位矩阵,则称这 4 个矩阵为 T 矩阵. 若存在 t 阶 T 矩阵,则存在 t 阶鲍默特-霍尔表 $BH[4t]$. 许多已知的 $BH[4t]$是从 T 矩阵得到的.

正交设计(orthogonal design) 鲍默特-霍尔表的推广. 设 X 是元素为 $0,\pm x_1,\cdots,\pm x_l$ 的 n 阶矩阵,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_l$ 看做某个可换环中的元素. 若存在正整数 $s_1,s_2,\cdots,s_l$ 使

$$XX^T=(s_1x_1^2+s_2x_2^2+\cdots+s_lx_l^2)I_n,$$

则称 X 是型为$(s_1,s_2,\cdots,x_l)$的 n 阶正交设计. 型为 (t,t,t,t)的 $4t$ 阶正交设计就是鲍默特-霍尔表 $BH[4t]$. 利用正交设计的概念,沃利斯(Wallis, J. S.)于 1976 年证明:对任意给定的正整数 q,只要整数 $s\geqslant[2\log_2(q-3)]$,则存在 2^sq 阶阿达马矩阵. 关于 H 矩阵存在性问题的最一般结果,多年来未有大的推进.

称重矩阵(weighing matrix) 阿达马矩阵的推广. 若 W 是元素为 $0,\pm1$ 的 n 阶矩阵,且使 $WW^T=kI_n$,则称 W 为 n 阶称重矩阵. $k=n$ 的称重矩阵就是 n 阶阿达马矩阵. $k=n-1$ 的对称称重矩阵就是 n 阶对称 C 矩阵. 人们猜测:对每个正整数 t 及每个 $k=0,1,\cdots,4t$,存在 $4t$ 阶称重矩阵. 当 $k=4t$ 时,这就是阿达马矩阵猜测. 若将 v 阶称重矩阵中的 -1 换作 1,得到的是某个(v,k,λ)-SBIBD 的关联矩阵,则称这样的称重矩阵为平衡称重矩阵. 这类矩阵的讨论有助于发现新的 BIBD 设计.

复阿达马矩阵(complex Hadamard matrix) 阿达马矩阵的推广. 设 n 阶复矩阵 C 的元素为 ±1 或 $\pm i$,若 $CC^*=nI_n$,则称 C 为复阿达马矩阵,这里 C^* 是 C 的厄米特共轭矩阵,即 $C^*=\overline{C}^T$. 当 C 为实矩阵时,便得到 n 阶 H 矩阵. 当 n 阶复 H 矩阵存在时,n 必为 1 或偶数. 人们猜测:偶数阶复 H 矩阵都存

在;但是,这个猜测尚未解决.因为,当 n 阶复 H 矩阵存在时可推出 $2n$ 阶 H 矩阵存在,所以,上述猜测包含了阿达马猜测.更一般地,当 n 阶复 H 矩阵及 m 阶 H 矩阵都存在时,必存在 mn 阶 H 矩阵.

若复 H 矩阵 C 适合 $(C-I)^*=-(C-I)$,则称 C 是反型复 H 矩阵.若 $I+N$ 是对称 C 矩阵,则 $I+\mathrm{i}N$ 是反型复 H 矩阵.若 M 是反型复 H 矩阵且 N 是同阶的复 H 矩阵,使 $N^*=N$ 且 $MN^*=NM^*$,则称 M,N 为复 H 矩阵睦偶.反型 H 矩阵和 H 矩阵睦偶的许多递推构造方法可以推广到复 H 矩阵的情形.

反型复H矩阵(skew complex Hadamarde matrix) 见"复阿达马矩阵".

复H矩阵睦偶(amicable complex Hadamard matrices) 见"复阿达马矩阵".

广义阿达马矩阵(generalized Hadamard matrix) 阿达马矩阵的推广.设 $H=H(p,n)$ 是元素为 p 次复单位根的 n 阶矩阵,若满足 $HH^*=nI_n$,则称 H 为广义阿达马矩阵.$H(2,n)$ 即为通常的 n 阶 H 矩阵,而 $H(4,n)$ 就是 n 阶复 H 矩阵.由一个 H 矩阵 $H(2,n)$ 及任意正整数 p 可以得到一个广义阿达马矩阵 $H(2p,n)$.当 p 为质数时,存在 $H(p,2^mp^k)$,其中 m 为非负整数,且 $m\leqslant k$.

阿达马等价(Hadamard equivalence) 阿达马矩阵间的一类等价关系.若两个阿达马矩阵可经一系列交换两行、交换两列、一行乘(-1)、一列乘(-1)的变换从一个变为另一个,则称这两个阿达马矩阵为阿达马等价.阿达马等价是一个等价关系,n 阶阿达马矩阵的全体可以划分成一些等价类,该类数记为 $h(n)$.同一类中所有阿达马矩阵的共同性质称为阿达马等价不变量.当阶数较小时借助于不变量,已找出数 $h(n)$ 及每个类中的代表.例如,当 $n\leqslant 12$ 时 $h(n)=1$,而 $h(16)=5,h(20)=3,h(24)=60$.

t 设计(t-design) 平衡不完全区组设计的一种推广.设 $(X,\mathscr{B})$ 为一正则设计(参见"区组设计"),其中 $|X|=v$,区组大小为 k.若 X 的任一 t 元子集恰含于 $\mathscr{B}$ 的 λ 个区组之中,则称 $(X,\mathscr{B})$ 为 t-(v,k,λ) 设计,简称 t 设计.一个 2-(v,k,λ) 设计就是 (v,k,λ)-BIBD.没有重复区组的 t 设计称为简单 t 设计.$\lambda=1$ 的 t-(v,k,λ) 设计称为施泰纳系,记为 $S(t,k,v)$,从而 t 设计有时也记为 $S_\lambda(t,k,v)$.一个 t-(v,k,λ) 设计也是一个 s-(v,k,λ_s) 设计,式中

$$\lambda_s=\lambda\binom{v-s}{t-s}\Big/\binom{k-s}{t-s}\quad(s=0,1,\cdots,t-1).$$

这提供了 t 设计参数 t,v,k,λ 应满足的必要条件:

$$\lambda(v-s)(v-s-1)\cdots(v-t+1)\equiv 0(\mathrm{mod}(k-s)(k-s-1)\cdots(k-t+1)).$$

这些参数还必须满足推广的费希尔不等式.若 $(X,\mathscr{B})$ 是一个 t-(v,k,λ) 设计,并且 $|\mathscr{B}|=b$,则当 $t=2s$ 且 $v\geqslant k+s$ 时,

$$b\geqslant\binom{v}{s};$$

当 $t=2s+1$ 且 $v\geqslant k+s+1$ 时,

$$b\geqslant 2\binom{v-1}{s}.$$

若 X 的每个 k 元子集在 $\mathscr{B}$ 中出现相同次数,则称 t 设计 $(X,\mathscr{B})$ 是平凡的.例如,v 元集 X 的全体 k 元子集构成一个平凡的 t 设计.泰尔林克(Teirlink, L.)证明:对所有 t 都存在非平凡的简单 t 设计.威尔森(Wilson, R. W.)指出:当 λ 充分大时,上述关于 t-(v,k,λ) 设计存在的必要条件也是充分的.哈拿匿(Hanani, H.)得到了 3-$(v,4,\lambda)$ 设计存在性的完整结果:3-$(v,4,\lambda)$ 设计存在的充分必要条件是

$$\lambda(v-2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,2),$$
$$\lambda(v-1)(v-2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$$

且 $\lambda v(v-1)(v-2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,8)$.对其他参数情形,目前很少有完整结果.

施泰纳系(Steiner system) 一类组合构形.即 $\lambda=1$ 的 t 设计,记为 $S(t,k,v)$.一个 $S(2,3,v)$ 称为施泰纳三元系,记为 STS(v).一个 $S(3,4,v)$ 称为施泰纳四元系,记为 SQS(v).STS(v) 存在的充分必要条件是 $v\equiv 1,3(\mathrm{mod}\,6)$.哈拿匿(Hanani, H.)于 1960 年证明:SQS(v) 存在的充分必要条件是 $v\equiv 2,4(\mathrm{mod}\,6)$.当 $t=4$ 或 5 时,目前仅知一些零星的施泰纳系,其中一些与马修群有关(参见"马修设计").当 $t\geqslant 6$ 时,目前尚不清楚是否有这样的施泰纳系存在.

马修设计(Mathieu design) 与马修群有关的几个施泰纳系.若 G 是 v 元集 X 上的一个 t 可迁置换群,Δ 是 X 的一个 k 元子集,G 将 X 的全体 k 元子集划分成一些区组轨道,则含 Δ 的区组轨道形成一个 t-(v,k,λ) 设计.若以 G_Δ 记 Δ 的集稳定子群,则轨道大小为 $|G|/|G_\Delta|$,由此可计算参数 λ.已知两个 5 可迁的马修群 M_{12} 及 M_{24},两个 4 可迁的马修群 M_{11} 及 M_{23},与之有关的还有一个 3 可迁的马修群 M_{22}.适当选取区组轨道,可以从这些 t 可迁群得到一些施泰纳系 $S(5,8,24),S(5,6,12),S(4,7,23),S(4,5,11)$,以及 $S(3,6,22)$.称这几个设计为马修设计.这些设计在同构意义下还是惟一的.

比例向量法(method of ratio vector) 构作 t 设计的一种方法.设 X 为 v 元集,G 为 X 上的一个置换群.若 X 的 t 元子集全体 $\binom{X}{t}$ 在 G 作用下划分成 m 个可迁类 $T_1,T_2,\cdots,T_m$,则称

$$(|T_1|:|T_2|:\cdots:|T_m|)$$

为 G 在 X 上的 t 比例向量.若 B 为 X 的某个 k 元子集 $(t<k<v-1)$,记

$$u_i = |\{S \in T_i \mid S \subset B\}|,$$

则称$(u_1 : u_2 : \cdots : u_m)$为 B 的 t 比例向量. 阿尔托(Alltop, W. O.)说明了如果 G 在 X 上的 t 比例向量与 B 的 t 比例向量相同,则$(X, \mathscr{B})$是一个 t-(v, k, λ)设计,式中 $\mathscr{B}$ 是 G 作用下$\binom{X}{k}$中含 B 的可迁类,而

$$\lambda = \frac{u_i|\mathscr{B}|}{|T_i|} \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

这一方法也可推广到若干个可迁类的并. 设 $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2, \cdots, \mathscr{B}_n$ 为 G 作用下$\binom{X}{k}$的不同可迁类,它们的代表元分别为 $B_1, B_2, \cdots, B_n$. 若 B_j 的集稳定子群为 G_{B_j},记 $u_{ij} = |\{S \in T_i \mid S \subset B_j\}|$,

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{ij}}{|G_{B_j}|},$$

则称$(u_1 : u_2 : \cdots : u_m)$为$\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$的 t 比例向量. 当 G 在 X 上的 t 比例向量与$\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$的 t 比例向量相同时,

$$(X, \bigcup_{j=1}^{n} \mathscr{B}_j)$$

是一个 t-(v, k, λ)设计,式中

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{ij}|\mathscr{B}_j|}{|T_i|} \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

t 比例向量(t-ratio vector)　见"比例向量法".

设计的扩充(extension of designs)　构作 t 设计的一种方法. 若$(X, \mathscr{B})$为一 t-(v, k, λ)设计,取定 X 中某个元 x,记 $\mathscr{D} = \{B \backslash \{x\} \mid B \in \mathscr{B}, x \in B\}$,则$(X \backslash \{x\}, \mathscr{D})$是一个$(t-1)$-$(v-1, k-1, \lambda)$设计,称该$(t-1)$设计是原 t 设计的一个收缩. 反之,若存在某个 t 设计使得它的一个收缩同构于某个给定的$(t-1)$设计,则称该 t 设计是给定$(t-1)$设计的一个扩充,并称给定的$(t-1)$设计是可扩充的. 若一个有 b 个区组的 t-(v, k, λ)设计可扩充,则必有 $b(v+1) \equiv 0 \pmod{k+1}$. 阿尔托(Alltop, W. O.)于 1975 年证明:当 t 为偶数时,任一个 t-$(2k+1, k, \lambda)$设计可扩充成一个$(t+1)$-$(2k+2, k+1, \lambda)$设计.

设计的收缩(contraction of design)　见"设计的扩充".

t 设计大集(large set of t-designs)　一类组合构形. 指子集族的一种划分. 为避免一些平凡情形, t-(v, k, λ)设计的大集只对极小的 λ 定义. 当 t-(v, k, λ)设计存在时,其参数满足

$$\lambda\binom{v-s}{t-s} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\binom{k-s}{t-s}\right),$$

$s = 0, 1, \cdots, t-1$. 设 λ^* 是使上述同余式成立的最小正整数 λ,若 v 元集 X 的全体 k 元子集$\binom{X}{k}$可以划分为互不相交的 t-(v, k, λ^*)设计的并,则称这样的划分为 t-(v, k, λ^*)设计的大集. 大集中含

$$\binom{v-t}{k-t} \Big/ \lambda^*$$

个不相交的设计.

最简单的 t 设计大集是施泰纳三元系大集,其存在问题已最后解决. 除不存在 STS(7)的大集外,当 $v \equiv 1, 3 \pmod 6$时 STS(v)的大集都存在. STS(v)的大集记为 LSTS(v),共含 $v-2$ 个不相交STS(v). 凯莱(Cayley, A.)于 1850 年指出:只可能有两个不相交的 STS(7),因而,不存在 LSTS(7). 柯克曼(Kirkman, T. P.)于 1850 年指出:LSTS(15)存在. 在随后的 100 多年中,虽有多人研究而无大的进展. 泰尔林克(Teirlink, L.)于 1973 年证明:LSTS(v)的存在蕴含着 LSTS($3v$)的存在性,从而,得到 LSTS(3^m)的存在性. 随后,罗萨(Rosa, A.)于 1975 年证明:当 LSTS(v)存在时,必存在 LSTS($2v+1$). 此外,还知道一些 v 值较小时的 LSTS(v). 中国的陆家羲于 1983－1984 年连续发表的 6 篇论文,使该问题接近了最后解决. 陆家羲为此引进了一类辅助设计,称为 LD 设计(参见"LD 设计"). 后来,泰尔林克证明了 LD 设计的 PBD 闭的性质,从而对陆遗留的 6 个 v 值也证明了 LSTS(v)的存在性. 对其他参数的 t 设计大集尚缺少一般结果,只对较小的 v 值有大集存在或不存在的参数表,但未知者甚多,其中参数最小的未知大集为 2-(12, 4, 3)设计的大集. 很久以来就有人研究一种特殊的 LSTS(v),即其中每一个 STS(v)都是可分解的. 虽然 LSTS(v)的存在性已彻底解决,但这一类大集问题的结果很少(参见"西尔维斯特问题").

LD 设计(LD design)　一类辅助设计. 在解决施泰纳三元系大集问题中由中国的陆家羲引入. 设 X 为 n 元集,$\mathscr{L}^1$ 与 $\mathscr{L}^2$ 分别为 X 上的正交表 OA(n, 4)(参见"正交表"),对每个 $x \in X$,$\mathscr{L}_x$ 是 $X \backslash \{x\}$ 上的正交表 OA($n-1$, 3). 若存在 $c \in X$,使对任一 $x \in X$ 有 $(x, x, x, c) \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^2$,且对任一 $(u, v, w) \in X^3$,或存在 $x \in X$ 使 $(u, v, w) \in \mathscr{L}_x$,或存在 $t \in X$ 及 $j \in \{1, 2\}$使 $(u, v, w, t) \in \mathscr{L}^j$,则称$\{\mathscr{L}^1, \mathscr{L}^2\} \cup \{\mathscr{L}_x \mid x \in X\}$为 LD 设计,记为 LD($n$). 这类设计对施泰纳三元系大集问题有重要作用,对别的组合设计的存在性问题也有用. LD(n)的存在性已基本解决,除十几个 n 值外 LD(n)都是存在的.

西尔维斯特问题(Sylvester's problem)　一类组合构形. 即柯克曼三元系的大集问题. 在凯莱(Cayley, A.)于 1850 年发表的一篇论文中曾提到西尔维斯特(Sylvester, J. J.)的一个问题,即要求柯克曼 15 女生问题所述的一周散步连续安排 13 周,使得每周都满足柯克曼问题的要求,且在第 13 周结束时每三个女生恰有一次分在同一组. 这实际上要

求一个 LSTS(15)使其中每一个三元系都是柯克曼三元系. 西尔维斯特问题的一般提法是:找一个 LSTS(v),使每一个三元系都是柯克曼三元系,即求柯克曼三元系KTS(v)的大集,记为 LKTS(v). 目前只知道LKTS($3^n m$)的存在性,其中 $m\in\{1,5,11,17,25,35,43\}$而 n 为任意正整数.

循环t 设计(cyclic t-design) 一类特殊的 t 设计. 若在一个 t 设计$(X,\mathscr{B})$中,$X=\{0,1,\cdots,v-1\}$,且当$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\in\mathscr{B}$ 时也有$\{a_1+1,a_2+1,\cdots,a_k+1\}\in\mathscr{B}$,这里的加法按模 v 进行,则称$(X,\mathscr{B})$为循环 t 设计. 循环 2-(v,k,λ)设计也记为 CB$[k,\lambda;v]$. 目前已完全弄清楚 CB$[3,\lambda;v]$存在的参数条件,但对别的循环 t 设计的存在性还缺少完整结果. 当 $v\equiv\lambda\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$或$(v,\lambda)=(9,1),(9,2)$时不存在 CB$[3,\lambda;v]$;除此之外,只要 $\lambda(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$且 $\lambda v(v-1)\equiv(\mathrm{mod}\,6)$,就一定存在 CB$[3,\lambda;v]$.

简单t 设计(simple t-design) 一种 t 设计. 指没有重复区组的 t 设计. 若将 v 元集的所有 k 元子集取作区组,则得到的平凡 t 设计有最大可能的 λ 值

$$\lambda_{\max}=\binom{v-t}{k-t}.$$

λ 值再增大就必然出现重复区组,当$(X,\mathscr{B})$是一个简单 t-(v,k,λ)设计时,

$$\left(X,\binom{X}{k}\backslash\mathscr{B}\right)$$

是一个简单 t-$(v,k,\lambda_{\max}-\lambda)$设计,而且将每个区组 B 的补集 $X\backslash B$ 取作区组可得又一个简单

$$t\text{-}\left(v,v-k,\lambda\binom{v-t}{t}\Big/\binom{k}{t}\right)$$

设计. 因此,实际上只需考虑 $\lambda\leqslant\lambda_{\max}/2$ 及 $k\leqslant v/2$ 的简单 t 设计. 当 $v\leqslant 30$ 时已有这样的参数表,但其中未知者甚多. 当 $t=2,k=3$ 时,简单 2-$(v,3,\lambda)$设计的存在性已由德洪(Dehon,M.)于 1983 年解决.

不可约t 设计(indecomposable t-design) 一种特殊的 t 设计. 设$(X,\mathscr{B})$是一个 t-(v,k,λ)设计,若存在 $\mathscr{D}\subseteq\mathscr{B}$,使$(X,\mathscr{D})$是一个 t-(v,k,μ)设计,其中 $1\leqslant\mu<\lambda$,则称原设计是可约 t 设计,否则称为不可约 t 设计. 关于不可约 t-(v,k,λ)设计的已有结果仅限于 $t=2,3\leqslant k\leqslant 5$ 及某些 λ.

可约t 设计(decomposable t-design) 见“不可约 t 设计”.

道因-威尔森定理(Doyen-Wilson theorem)关于设计之间的关系的定理. 论述施泰纳三元系包含子施泰纳三元系的问题. 若$(X,\mathscr{A})$和$(Y,\mathscr{B})$为两个 BIBD 设计,且 $X\supset Y$,$\mathscr{A}\supset\mathscr{B}$,则称$(Y,\mathscr{B})$是$(X,\mathscr{A})$的子设计,或称$(Y,\mathscr{B})$可嵌入于$(X,\mathscr{A})$. 道因-威尔森定理断言:存在$(v,3,1)$-BIBD 含有$(u,3,1)$-BIBD 作为子设计的充分必要条件是 $v\geqslant 2u+1$ 且 $v,u\equiv 1,3,(\mathrm{mod}\,6)$. 后来,斯特恩(Stern,G.)将这些结果推广到一般$(v,3,\lambda)$-BIBD 的嵌入. 目前关于$(v,4,\lambda)$-BIBD 的嵌入问题也已得到了完全的解决. 在另一些组合设计中也有类似的子设计存在问题. 例如,可分解 BIBD 设计、正交拉丁方、罗姆方等.

覆盖设计(covering design) t 设计的一种推广. 设 X 为 v 元集,$\mathscr{B}$ 为 X 的某些 k 元子集的族,若 X 的任一 t 元子集至少包含在 $\mathscr{B}$ 的 λ 个成员(区组)中,则称$(X,\mathscr{B})$为 t-(v,k,λ)覆盖设计. t-(v,k,λ)设计也是一个覆盖设计.

对给定的参数 t,v,k,λ,使 t-(v,k,λ)覆盖设计存在的最小区组数称为覆盖数,记为 $C_\lambda(v,k,t)$. 有关系式 $C_\lambda(v,k,t)\geqslant B_\lambda(v,k,t)$,其中

$$B_\lambda(v,k,t)=\left\lceil\frac{v}{k}\left\lceil\frac{v-1}{k-1}\left\lceil\cdots\left\lceil\frac{v-t+1}{k-t+1}\lambda\right\rceil\cdots\right\rceil\right\rceil\right\rceil,$$

这里$\lceil x\rceil$表示不小于 x 的最小整数. 哈拿匿(Hanani,H.)证明:对每一正整数 λ 及 $v\geqslant 3$ 有 $C_\lambda(v,3,2)=B_\lambda(v,3,2)+\varepsilon$,其中,当 $\lambda(v-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$且 $v\equiv\lambda\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$时 $\varepsilon=1$,否则 $\varepsilon=0$. 米尔斯(Mills,W. H.)等人对每一正整数 λ 及 $v\geqslant 4$ 给出了覆盖数 $C_\lambda(v,4,2)$的确切值. 当 $t\geqslant 3$ 时,$C_1(v,4,3)=B_1(v,4,3)$,其中 $v\not\equiv 7(\mathrm{mod}\,12)$.

覆盖数(covering number) 见“覆盖设计”.

填充设计(packing design) t 设计的一种推广. 设 X 为 v 元集,$\mathscr{B}$ 为 X 的某些 k 元子集的族,若 X 的任一 t 元子集至多包含在 $\mathscr{B}$ 的 λ 个成员(区组)中,则称$(X,\mathscr{B})$为 t-(v,k,λ)填充设计. t-(v,k,λ)设计也是一个填充设计. 对给定的参数 t,v,k,λ,使 t-(v,k,λ)填充设计存在的最大区组数称为填充数,记为 $D_\lambda(v,k,t)$. 有关系式 $D_\lambda(v,k,t)\leqslant J_\lambda(v,k,t)$,其中

$$J_\lambda(v,k,t)=\left\lfloor\frac{v}{k}\left\lfloor\frac{v-1}{k-1}\left\lfloor\cdots\left\lfloor\frac{v-t+1}{k-t+1}\lambda\right\rfloor\cdots\right\rfloor\right\rfloor\right\rfloor,$$

这里 $\lfloor x\rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数. 填充设计对编码理论有重要的应用. 事实上,填充数 $D_1(v,k,2)$就是字长 v,极小距离为 $2(k-1)$且码字重量均为 k 的二元码的最大码字个数. 当 $t=2$ 及 $k=3,4$ 时,填充数 $D_\lambda(v,k,t)$的确切值已经得到.

填充数(packing number) 见“填充设计”.

G 设计(G-design) 平衡不完全区组设计的一种推广. 设 G 是有 k 个顶点且无孤立点的简单无向图,λK_n 是 n 个顶点的 λ 重完全无向图,重边看做不同的边,若该完全图能分解成若干个无公共边的子图,每一个都与 G 同构,则称这样的分解为一个图

设计，记为$(n,k,\lambda)G$设计. 当$G=K_k$时，一个$(n,k,\lambda)G$设计就是一个(n,k,λ)-BIBD. 图设计可以看成BIBD设计的区组中引入点之间的某种邻接关系后的推广. 这些同构子图称为G区组. 当G为有向图时，将λK_n改为λ重完全有向图λK_n^*，可类似定义$(n,k,\lambda)G$设计. 当G为无向图且$(n,k,\lambda)G$设计存在时，$\lambda n(n-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,2e)$且$\lambda(n-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,d)$，式中$e$是图$G$的边数而$d$是$G$的所有顶点度数的最大公因数. 当$G$为有向图且$(n,k,\lambda)G$设计存在时，$\lambda n(n-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,e)$，$\lambda(n-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,d^+)$且

$$\lambda(n-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ d^-),$$

式中的e是图G中弧的条数，而d^+与d^-分别是所有顶点的出度数的最大公因数及入度数的最大公因数.

黑尔(Hell,P.)和罗萨(Rosa,A.)于1972年首先引入了图设计这一概念，并研究了$(n,k,\lambda)P_k$设计的存在性，这里P_k表示k个顶点$k-1$条边的路. 由于图G的变化千姿百态，G设计的存在性研究面广量大. 已有结果大多是关于路和圈这些简单而规则的图G的，只有当k较小时才考察所有可能的图G，而完整的结果仅限于$k=3,4$的情形. 图设计的直接构造方法是玻色(Bose,R. C.)的对称重差法的变形，而递推构造方法则主要利用多部完全图的分解. 与BIBD设计的情形类似，也有可分解性问题以及平衡图设计问题.

图设计(graph design)　见“G设计”.

G区组(G-block)　见“G设计”.

平衡G设计(balanced G-design)　一类特殊的G设计. 若在一个G设计中每个顶点在G区组中出现的次数都相同，则称该图设计是平衡G设计. 当G为正则无向图(即顶点的度数均相同的图)或强正则有向图(即每个顶点的出度数和入度数为同一个常数的图)时，G设计总是平衡的. 平衡G设计的参数除必须满足一般G设计的必要条件外，还必须满足进一步的条件：当G为无向图时，应有

$$\lambda k(n-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,2e);$$

当G为有向图时，应有

$$\lambda k(n-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ e).$$

当G为k个顶点$k-1$条边的路或星形图时，平衡$(n,k,\lambda)G$设计存在的必要条件也是充分条件. 当$3\leqslant k\leqslant 5$且G为无向图时，平衡$(n,k,\lambda)G$设计的存在性也已得到完全解决.

带洞G设计(G-design with holes)　亦称带洞图设计. 用于递推构作G设计的一类辅助设计. 设$\lambda K_{n_1,n_2,\cdots,n_h}$是$\lambda$重$h$部无向完全图，顶点集$X$划分为互不相交的$X_1,X_2,\cdots,X_h$，使

$$|X_i|=n_i,\quad \sum_{i=1}^{h}n_i=n.$$

设G为k个顶点且无孤立点的无向简单图. 若该多部完全图能分解成若干个无公共边的子图，每一个都与G同构，则称这样的分解为一个带洞$(n,k,\lambda)G$设计，称$(n_1,n_2,\cdots,n_h)$为其型. 这样的G设计可以看做λK_n的通常G设计中带有一些洞$X_1,X_2,\cdots,X_h$，当$G=K_k$时这些洞实际上是可分组设计的组. 若每个顶点在G区组中出现的次数相同，则称这种带洞图设计是平衡的. 利用带洞图设计可以递推地构造图设计. 若存在型为$(n_1,n_2,\cdots,n_h)$的带洞$(n,k,\lambda)G$设计，且对每$i(1\leqslant i\leqslant h)$存在$(n_i+\varepsilon,k,\lambda)G$设计，其中$\varepsilon=0$或1，则存在$(n+\varepsilon,k,\lambda)G$设计. 特别地，若存在型为$(l,l,\cdots,l)$的平衡带洞$(hl,k,\lambda)G$设计，且存在平衡的$(l+\varepsilon,k,\lambda)G$设计，其中$\varepsilon=0$或1，则存在平衡的$(hl+\varepsilon,k,\lambda)G$设计. 对于有向图情形，也可类似定义带洞图设计概念，并且，有相应的递推构造图设计的方法.

带洞图设计(graph design with holes)　即“带洞G设计”.

完全门德尔森设计(perfect Mendelsohn design)　一种特殊类型的图设计. 以$\vec{C}_k$记k个顶点k条弧的有向圈，称$(n,k,\lambda)\vec{C}_k$设计为门德尔森设计，简记为(n,k,λ)-MD. 若对每一个$r(1\leqslant r\leqslant k-1)$以及对任意两个相异顶点$x$和$y$，某个$(n,k,\lambda)$-MD中恰有$\lambda$个$G$区组含$x$及$y$，使每一个这样的有向圈中从$x$到$y$的有向距离为$r$，则称该MD为完全门德尔森设计，记为$(n,k,\lambda)$-PMD. 若忽略掉$G$区组中顶点之间的邻接关系而将$G$区组看做顶点集的一个子集，则从一个$(n,k,\lambda)$-PMD可以得到一个$(n,k,\lambda(k-1))$-BIBD. 另一方面，从每一点开始按$G$区组的有向圈方向写下所有$k$个顶点作为正交表的一行，这样可得$\lambda n(n-1)$个行，再添上$\lambda$个形如$xx\cdots x$行，这里$x$取遍$n$个顶点，于是，可得一个正交表OA$(\lambda n^2,k,n,2)$. 特别地，当$(n,k,1)$-PMD存在时，也存在OA$(n,k)$，这等价于$k-2$个$n$阶相互正交拉丁方的存在性. 因此，(6,5,1)-PMD与(6,6,1)-PMD都不存在. 门德尔森(Mendelsohn,N. S.)证明：$(n,3,\lambda)$-PMD存在的充分必要条件是

$$\lambda n(n-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\text{且}(n,\lambda)\neq(6,1).$$

他还首先研究了$(n,4,1)$-PMD，指出这样的设计等价于满足拟群恒等式$yx\cdot xy=x$的一个n阶幂等拟群. 目前，当$k=4,5$时，(n,k,λ)-PMD的存在性已基本解决.

门德尔森设计(Mendelsohn design)　见“完全门德尔森设计”.

可分解PMD (resolvable PMD)　一类图设计. 若一个图设计的G区组全体可以划分为一些G区组子集，使每个这样的子集含每个顶点恰一次，则称该图设计是可分解的. 当可分解的$(n,k,\lambda)G$设计存

在时，必有 $n\equiv 0(\mathrm{mod}k)$. 对于 $n\equiv 1(\mathrm{mod}k)$的$(n,k,\lambda)G$ 设计，若它的 G 区组全体可以划分为一些 G 区组子集，使对每个这样的子集存在一个顶点，除这顶点以外的每个顶点在该子集中恰出现一次，则称这样的图设计是准可分解的. 可分解的和准可分解的PMD 统称可分解 PMD，记为 RPMD. 关于(n,k,λ)-RPMD 的存在性，目前比较完整的结果仅限于 $k=3$.

准可分解PMD (guasi-resolvable PMD)　见“可分解 PMD”.

施泰纳k 圈系统(Steiner k-cycle system)　一类特殊的图设计. 以 C_k 表示 k 个顶点 k 条边的圈无向图，若对任意 $r(1\leqslant r<k/2)$以及任意两个相异顶点，在某个$(n,k,1)C_k$ 设计中恰有一个圈含这两个顶点且使它们在该圈中的距离为 r，则称该图设计为施泰纳 k 圈系统，记为 SCS(n,k). 一个 SCS$(n,3)$即为通常的 STS(n)，而一个 SCS$(n,4)$就是一般的$(n,4,1)C_4$ 设计.

当 k 为奇数时，若忽略掉 SCS(n,k)的 G 区组中顶点之间的邻接关系而将 G 区组看做顶点集的一个子集，则从一个 SCS(n,k)可以得到一个

$$(n,k,(k-1)/2)\text{-BIBD}.$$

由于(15,5,2)-BIBD 不存在，所以 SCS(15,5)也不存在. 除这一例外，SCS$(n,5)$存在的必要条件 $n\equiv 1,5(\mathrm{mod}\,10)$也是充分条件. 史汀生(Stinson, D. R.)与泰尔林克(Teirlink, L.)指出：当 k 为奇数时，SCS(n,k)可用于一类密码问题中的加密方案. 但当 $k>5$ 时，SCS(n,k)的已知结果甚少. 当 k 为奇数时，若存在一个 SCS(n,k)，则将每个圈 C_k 按两个方向定向得两个 $\vec{C}_k$，所有这些有向圈构成一个$(n,k,1)$-PMD. 由此得 SCS(n,k)与正交拉丁方的关系(参见“完全门德尔森设计”).

门德尔森三元系(Mendelsohn triple system)　一类组合构形. 即$(n,3,1)\vec{C}_3$ 设计. 若 G 含三个顶点 x,y,z，且含三条弧$(x,y),(y,z),(x,z)$，则称 G 为可迁三元组，而称$(n,3,1)G$ 设计为可迁三元系. 这两种三元系分别记为 MTS(n)及 TTS(n). 它们存在的必要条件为 $n\equiv 0,1(\mathrm{mod}\,3)$，除 MTS(6)不存在外，这个必要条件也是充分条件. 与 STS(n)的情形类似，对MTS(n)及 TTS(n)也讨论大集的问题. 若 $T(X)$是 n 元集 X 的全部可迁三元组的集，则

$$|T(X)|=n(n-1)(n-2).$$

一个 TTS(n)含 $n(n-1)/3$ 个可迁三元组. 若 $T(X)$可以划分为 $3(n-2)$个子集，使每个子集中的 $n(n-1)/3$ 个可迁三元组正好是一个 TTS(n)的全部可迁三元组，则称 $T(X)$的这个划分为TTS(n)的一个大集，记为 LTTS(n). 已经证明 LTTS(n)存在的充分必要条件为 $n\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\,3)$，$n\geqslant 3$，这由林德纳(Lindner, C. C.)等人于 1983 年开始研究，且由中国的康庆德等人最后完成. 关于MTS(n)的大集已有不少结果，但尚未最终解决.

嵌套(nesting)　由已知图设计构造新的图设计的一种方法. 以 C_k 表 k 个顶点 k 条边的无向圈，以 S_{k+1}表 $k+1$ 个顶点 k 条边的星形图. 若对一个$(n,k,1)C_k$ 设计存在一个映射 f，将每个圈 B 映为不在 B 中的某个顶点 $f(B)$，并且使所有的星形图 $K_{k+1}-B(K_{k+1})$的顶点集 $V(B)\cup\{f(B)\}$，它形成一个$(n,k+1,1)S_{k+1}$设计，则称映射 f 是一个嵌套. 当$(n,k,1)C_k$ 设计有嵌套映射时，称该设计是可嵌套的. 若用 W_{k+1}表示 $k+1$ 个顶点 $2k$ 条边的轮形无向图，则从一个可嵌套的$(n,k,1)C_k$ 设计可得到一个$(n,k+1,2)W_{k+1}$设计. 一个$(n,k,1)C_k$ 设计可嵌套的必要条件是 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2k)$. 史汀生(Stinson, D. R.)于 1985 年证明：当 $k=3$ 时，这一必要条件也是充分条件. 史汀生等人还证明：对每个整数 $k\geqslant 3$，除了至多 13 个可能例外的 n 值，这个必要条件也是充分条件.

着色设计(coloured design)　一种特殊类型的图设计. 设对 K_k 用 c 种颜色 $C_1,C_2,\cdots,C_c$ 将边着色，着色 C_i 的边有 n_i 条，着色后的图记为 G. 以 g 记所有 n_i 的最大公因数，

$$\lambda=\binom{k}{2}\Big/g.$$

将 λK_n 中连结任意两个顶点的 λ 条边中的 n_i/g 条着色 C_i，所得的图记为 $\mathscr{C}\circ K_n$. 若 $\mathscr{C}\circ K_n$ 可以分解为若干子图，使每个子图都与 G 同构(连同着色)，则称这样的分解是一个着色设计. 当 $c=1$ 时，一个着色$(n,k,1)G$ 设计就是一个$(n,k,1)$-BIBD. 当 $k=4,c=2$ 并使着色 C_1 的边形成长为 3 的圈，着色 C_2 的边形成一个星形图，则一个着色设计中长为 3 的圈形成一个STS(n)，而第二种颜色的星形图形成该 STS(n)的一个嵌套(参见“嵌套”). 当 $k=4$，且$\{a,b,c,d\}$上 K_4 的边$\{a,b\},\{c,d\}$着色 C_1，$\{a,c\},\{b,d\}$着色 C_2，而$\{a,d\},\{b,c\}$着色 C_3，利用相应的着色设计的 G 区组定义顶点集上的一个幂等拟群，使

$$a\circ b=c,b\circ a=d,c\circ d=a,d\circ c=b,$$

则该幂等拟群必满足拟群恒等式 $xy\circ yx=x$(参见“拟群”). 从着色设计还可得到别的类型的组合设计，因此，着色设计在一定程度上起着统一不同类型的设计的作用. 对 $k=4$ 及各种可能的着色情况，着色设计的存在性已基本解决.

部分平衡不完全区组设计(partially balanced incomplete block design)　平衡不完全区组设计的一种推广. 简记为 PBIBD. 它是基于结合方案的概念，最早由玻色(Bose, R. C.)及内尔(Nair, K. R.)于 1939 年提出. 若 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_v\}$为一 v 元集，且

$(S\times S)\backslash\{(s,s)\mid s\in S\}$可表为 m 个两两不相交的非空子集 $R_1,R_2,\cdots,R_m$ 的并，则称 R_i 为结合关系. 若诸关系 R_i 满足：

1. 每一关系 R_i 是对称的，即当$(x,y)\in R_i$ 时必有$(y,x)\in R_i$.

2. 对 S 中的每个元 x，与 x 有第 i 种结合关系的元 y 的个数，即$|\{y\in S\mid(x,y)\in R_i\}|$只依赖于 i，与 x 的具体选择无关，此数记为 n_i.

3. 设 x,y 有第 i 种结合关系，则与 x 有第 j 种结合关系且与 y 有第 k 种结合关系的元 z 的个数 p^i_{jk}只依赖于数 i,j,k，而与 x,y 的具体选择无关，

则称集 S 连同诸关系 R_i 为一个具有 m 个结合类(或关系)的结合方案. 诸数 $v,n_i,p^i_{jk}(1\leqslant i,j,k\leqslant m)$ 称为该结合方案的参数. 基集 S 的元称为处理.

设 v 元集 S 上有 m 个结合关系 $R_i(1\leqslant i\leqslant m)$的结合方案，且 S 上的一个区组设计有 b 个区组，若每个区组大小为 k，S 中任一元恰在 r 个区组中出现，并且任意两个有第 i 种结合关系的元恰同时出现在 λ_i 个区组之中，则称该区组设计是一个具有 m 个结合类的 PBIBD 设计. 诸数 $b,v,r,k,\lambda_i,n_i,p^i_{jk}(1\leqslant i,j,k\leqslant m)$称为 PBIBD 设计的参数. 当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m\equiv\lambda$ 时，PBIBD 设计就是一个(v,k,λ)-PBIBD. 在试验设计中，PBIBD 设计被用来安排试验的方案，其中有两个结合类且参数较小的 PBIBD 设计最为有用，它们的存在性及构造已有表可查. 结合方案与一类结合的交换代数有关，称为结合方案的玻色-梅斯纳代数. 最重要的一类结合方案与编码理论有关，称为汉明结合方案. 另一类结合方案与强正则图关系密切，称为度量方案. 此外还有三角形结合方案等其他类型的结合方案. 按结合方案的类型，具有两个结合类的 PBIBD 设计可分为可分组 PBIBD 设计、三角形设计、拉丁方型设计等. 利用有限域上向量空间以及利用多种有限几何(辛几何、酉几何、正交几何等)构造结合方案和相应 PBIBD 设计在中国有比较活跃的研究，它起源于班成的工作，而万哲先等人则做了较为系统的研究(参见“有限几何”).

结合方案(association scheme)　一集合的一类划分. 设 v 元集 S 上的结合方案有结合关系 $R_1,R_2,\cdots,R_m$(参见“部分平衡不完全区组设计”). 若定义矩阵 D_i 使得当 S 中第 s 及第 t 个元有第 i 种结合关系时 D_i 的第 s 行 t 列元为 1，否则为 0，则称 D_i 为结合矩阵. 每个结合矩阵必为对称矩阵，

$$I+\sum_{i=1}^{m}D_i=J,$$

这里 I 为单位阵，J 是元素全为 1 的矩阵. 记 $D_0=I$，还有

$$D_jD_k=\sum_{i=0}^{m}p^i_{jk}D_i=D_kD_j,$$

其中 $p^0_{jk}=n_j\delta_{jk}$，$p^i_{j0}=\delta_{ij}=p^i_{0j}$. $D_0,D_1,\cdots,D_m$ 是实数域上的 $m+1$ 个线性无关的 v 阶矩阵，它们张成 v 阶矩阵代数的 $m+1$ 维子代数，这个代数是结合且交换的，称为该结合方案的玻色-梅斯纳代数.

玻色-梅斯纳代数(Bose-Mesner algebra)　见“结合方案”和“部分平衡不完全区组设计”.

可分组设计(group divisible design)　一类设计. 指有两个结合类的 PBIBD 设计. 设基集 S 由互不相交的大小均为 n 的 h 个子集组成，每个子集称为一个组. 若两个点属于同一个组，则称为有第一种结合关系，否则，称为有第二种结合关系. 相应的 PBIBD 设计称为可分组 PBIBD 设计. 当 $\lambda_1=0$ 时，便得到通常的可分组设计 GDD$[\{k\},\lambda_2,\{n\};nh]$. 依参数情形，可以把可分组 PBIBD 设计分为三类：当 $r-\lambda_1=0$ 时，称为奇异的；当 $r-\lambda_1>0$ 且 $rk-v\lambda_2=0$ 时，称为半正规的；当 $r-\lambda_1>0$ 且 $rk-v\lambda_2>0$ 时，称为正规的.

三角形设计(triangular design)　一类 PBIBD 设计. 它有两个结合类. 设 $v=n(n-1)/2$，$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$，将 S 中的 v 个元以某种次序放在一个 n 阶方阵的右上角，左下角则放相应元素使该方阵为对称方阵，对角线位置则空着. 当 S 中的两个元 x_i 与 x_j 出现在方阵中的同一行或同一列时，称它们有第一种结合关系；否则，称它们有第二种结合关系. 这样便得到 S 上有两个结合类的结合方案，称为三角形结合方案. 集 S 中相应的 PBIBD 设计称为三角形设计. 三角形结合方案的参数由 n 确定：当 $n\neq8$ 时，三角形结合方案是在同构意义下由参数惟一确定的；当 $n=8$ 时，则不惟一.

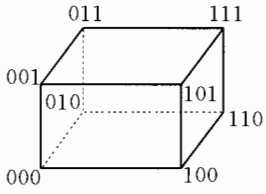
拉丁方型设计(Latin square type design)　一类具有两个结合类的 PBIBD 设计. 设有 $i-2$ 个相互正交的 n 阶拉丁方，以 S 记方阵中 n^2 个位置，若两个位置落在同一行或同一列，或者在某个拉丁方中这两个位置上的元素相同，则称它们有第一种结合关系；否则，称它们有第二种结合关系. 这样得到集 S 上有两个结合类的结合方案，称为拉丁方型结合方案. S 上相应的 PBIBD 设计称为拉丁方型设计，简称 L_i 型设计.

L_i 型设计(L_i type design)　见“拉丁方型设计”.

循环型设计(cyclic design)　一类具有两个结合类的 PBIBD 设计. 以 $\mathbf{Z}_v$ 记模 v 整数加群，元素为 $0,1,\cdots,v-1$. 设 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 是 $\mathbf{Z}_v$ 中两两相异的非零元，以 ΔD 记 $n(n-1)$个差 d_i-d_j 的全体$(i,j=1,2,\cdots,n,i\neq j)$，$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$. 如果 D 中每个元在 ΔD 中恰出现 α 次，而 $\mathbf{Z}_v\backslash(D\cup\{0\})$中每个元在 ΔD 中恰出现 β 次，并且如果对每个 $d_i\in D$ 均有

$-d_i \in D$，则可由集合 D 规定结合方案：当 Z_v 中两个元的差在 D 中时称为有第一种结合关系，否则有第二种结合关系. 这样的结合方案称为循环型结合方案，相应的 PBIBD 设计称为循环型 PBIBD 设计.

汉明结合方案(Hamming association scheme) 亦称超立方体结合方案. 一类度量方案. 设 $H(n,q)$ 是一个 q 元集合上的有 n 个分量的有序组的全体. 若两个有序组恰好在 i 个位置上的分量不同，则称它们的汉明距离为 i，将 $H(m,q)$ 取作处理的集合，两个有序组的汉明距离为 i 时称它们有第 i 种结合关系，便得到具 q^n 个处理及 n 个结合类的结合方案，称为汉明结合方案. 例如，当 $n=3$ 且 $q=2$ 时，汉明方案可用右面的立方体表示. 立方体的 8 个顶点表示方案的 8 个处理. 从顶点 x 到顶点 y 若至少需经过 i 条边，则表示处理 x 与处理 y 有第 i 种结合关系. 汉明结合方案中的一个子集称为一个码，因此汉明结合方案在编码理论中有重要的应用.



超立方体结合方案(hypercube association scheme) 即“汉明结合方案”.

约翰生结合方案(Johnson association scheme) 亦称三角形结合方案. 一类度量方案. 设 $k \leqslant v/2$，以 $J(v,k)$ 记某个 v 元集的 k 元子集的全体. 若当两个 k 元子集的交为 $k-i$ 元子集时，规定它们有第 i 种结合关系，则 $J(v,k)$ 是有 $\binom{v}{k}$ 个处理及 k 个结合类的结合方案，称为约翰生结合方案. 当 $k=2$ 时，约翰生结合方案即为三角形设计中的结合方案. 约翰生结合方案在编码理论中也有重要应用，例如，每一个等重量码都可看做某个约翰生结合方案中的子集.

三角形结合方案(triangular association scheme) 即“约翰生结合方案”.

度量方案(metric scheme) 一类结合方案. 它由距离正则图定义. 若 Γ 为直径 d 的距离正则图，规定两个顶点的距离为 i 时它们有第 i 种结合关系，则在 Γ 的顶点集合上有一个 d 个结合类的结合方案，称为度量方案. 许多最重要的结合方案都是度量方案. 例如，具两个结合类的结合方案一定是度量方案. 汉明结合方案与约翰生结合方案也都是度量方案. 但是，并非所有的结合方案都是度量方案.

距离正则图(distance-regular graph) 一类与结合方案有关的图. 设 Γ 是一个连通图，有 v 个顶点，无环边及重边. Γ 中两顶点间的距离是连结这两点的最短路所含的边数. Γ 中任意两个顶点之间距离的最大值称为 Γ 的直径. 若对 Γ 中距离为 k 的任意两个顶点 x,y，与 x 的距离为 i 且与 y 的距离为 j 的顶点 z 的个数是一个常数 C_{ijk}，与 x,y 的选择无关，则称 Γ 为距离正则图. 直径为 2 的距离正则图称为强正则图.

强正则图(strongly distance-regular graph) 见“距离正则图”.

张图(Chang graphs) 一种重要的图组，由张里千于 1960 年发现，它是与三角形图 $T(8)$ 具有相同参数但互不同构的三个强正则图. 三角形设计中所出现的结合方案是一个约翰生结合方案 $J(n,2)$，因而是一个度量方案(参见“度量方案”)，相应的距离正则图是强正则图，记为 $T(n)$，称为三角形图. 张里千于 1959 年、霍夫曼(Hoffman, A. J.)于 1960 年证明：若 Γ 为与三角形图 $T(n)$ 有相同参数的强正则图，则当 $n>8$ 时，Γ 与 $T(n)$ 同构. 当 $n=4,5,6,7$ 时，上述结论也成立. 张里千指出：当 $n=8$ 时，除 $T(8)$ 外，恰有三个与 $T(8)$ 有相同参数但不同构的强正则图，通常记为 $T'(8)$，$T''(8)$ 及 $T'''(8)$，它们被称为张图，名称由此而来.

三角形图(triangular graph) 见“张图”.

码(code) 组合设计的一个重要概念. 它是为达到信息传递的可靠性和安全性等目的而对信息所做的某种变换. 在无线电通信中需要有克服天电干扰的措施，特别在宇航通信中更为突出，纠错码主要用于抗干扰的要求. 另一方面，在军事、外交及商业方面，要求信息传递过程中的保密性，这类码就是密码. 分组码是一类重要的纠错码. 设 Q 为 q 元集，$Q^n=Q\times Q\times\cdots\times Q$ 为笛卡儿积集合. Q^n 的一个非空真子集 C 称为一个 q 元分组码，简称码. 当 $|C|=1$ 时，称这个码是平凡的. 称 Q 为字母表，而称 Q^n 的元为字或向量，称 C 的元为码字，n 为字长. 当 $|C|=M$ 时，称 C 为 q 元 (n,M) 码. 伪随机码则用于密码. 在经典密码体制中加密密钥同时又是解密密钥，因而称为单钥体制. 在现代的公开密钥体制中则每个通信者拥有两个密钥，其中加密密钥是公开的，只需将解密密钥严格保密. 虽然人类在通信中采用种种明码和密码的历史相当久远，但编码理论可以认为是在电子技术飞速发展以后，针对当代数字通信和数字存储等的具体需要，于 20 世纪 50 年代发展成为一门面目全新的应用数学，目前已有丰富的内容. 随着近 20 年来组合设计理论的迅猛发展，码与设计、密码与设计之间的相互联系已经受到特别的关注. 以促进和发展这种相互联系为宗旨的一份新的国际性杂志《设计、码与密码》已于 1991 年问世.

分组码(block code) 见“码”.

平凡码(trivial code) 见“码”.

伪随机码(pseudo random code) 见“码”.

汉明距离(Hamming distance) 为刻画纠错码的纠错能力所需要的一种度量. 设 $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,$

$x_n)$，$\underline{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$是两个字，以$d(\underline{x},\underline{y})$记相异分量的个数，即集合$\{i\mid 1\leqslant i\leqslant n, x_i\neq y_i\}$的基数，称这个数为字$\underline{x}$与字$\underline{y}$的汉明距离，简称距离. 在一个非平凡码$C$中，任两个码字间距离的最小值称为码$C$的极小距离. 码$C$的极小距离是衡量它的检错能力和纠错能力的一个数. 例如，一个极小距离为$2e+1$的码用于数字通信时，即可检查出含于接收信息中的$2e$个差错又能纠正e个差错. 当$\underline{0}=(0,0,\cdots,0)\in C$时，称$d(\underline{x},\underline{0})$为码字$\underline{x}$的重量，记为$w(\underline{x})$. 码$C$中所有非零码字的重量中的最小者称为码$C$的极小重量.

极小距离(minimum distance)　见“汉明距离”.

极小重量(minimum weight)　见“汉明距离”.

辛格尔顿界(Singleton bound)　码字的一个度量. 它是当码字长度及极小距离给定时码字个数的一个上界. 通常称极小距离为d的q元(n,M)码为q元(n,M,d)码，使(n,M,d)码存在的最大M值记为$A(n,d)$. 辛格尔顿界指出：$A(n,d)\leqslant q^{n+1-d}$. 关于$A(n,d)$的研究是组合编码论中的一个基本问题. 关于$A(n,d)$的确切值目前所知甚少，大量的工作限于确定它的上、下界.

汉明界(Hamming bound)　亦称球填充界. 码字的一个度量. 它是码字个数的一个上界. 对Q^n中的字$\underline{x}$，以$B_r(\underline{x})$表示Q^n中与$\underline{x}$的距离不超过r的所有字的集合，称为以$\underline{x}$为中心r为半径的球. 球$B_r(\underline{x})$中所含字的个数与$\underline{x}$的取法无关，记为$V_q(n,r)$. 事实上

$$V_q(n,r)=\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}(q-1)^i.$$

当$\underline{c}$取遍一个$(n,M,2e+1)$码的所有码字时，M个球$B_e(\underline{c})$两两不相交，因此，有$MV_q(n,e)\leqslant q^n$. 于是，当$d=2e+1$时，对M的最大值$A(n,d)$有汉明界：$A(n,d)\leqslant q^n/V_q(n,e)$. 例如，当$q=2,n=13,d=5$时，因$V_2(13,2)=1+13+78=92$，从而有

$$A(13,5)\leqslant\frac{2^{13}}{92}=89.$$

球填充界(sphere packing bound)　即“汉明界”.

支撑集(support)　码字的一个度量刻画. 它是讨论码与设计关系时常用到的一个概念. 设$0\in Q$，$\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$Q^n$中的一个字. $\underline{x}$中非零分量所对应的下标的集合，即$\{i\mid 1\leqslant i\leqslant n, x_i\neq 0\}$，称为$\underline{x}$的支撑集. 因此，字长$n$的码字的支撑集是集合$\{1,2,\cdots,n\}$的一个子集，它的基数就是该码字的重量. 这样就有可能用码C中重量为w的码字来构造t-(n,w,λ)设计(参见“完全码”、“极值双偶自对偶码”和“阿斯莫斯-马特森定理”).

完全码(perfect code)　一类特殊的码. 设C是一个q元$(n,2e+1)$码，若每一个字恰与C中一个码字的距离$\leqslant e$，则称C为完全码. C是完全码时，以码字为中心e为半径的球无重叠地填满了集合Q^n，于是$|C|V_q(n,e)=q^n$. 从而完全码是达到汉明界的q元$(n,2e+1)$码. 当q为质数幂时非平凡的完全码只能为q元$(n=(q^m-1)/(q-1),q^{n-m},3)$码、二元$(23,2^{12},7)$码，及三元$(11,3^6,5)$码. 存在这些参数的完全码，分别称为汉明码、二元戈莱码，及三元戈莱码. 若C为二元$(n,2e+1)$完全码，且$\underline{0}=(0,0,\cdots,0)\in C$，则已知$C$在重量为$2e+1$的码字的支撑集的全体构成集$\{1,2,\cdots,n\}$上的一个施泰纳系$S(e+1,2e+1,n)$. 例如，由二元$(23,2^{12},7)$戈莱码可以得到一个施泰纳系$S(4,7,23)$.

汉明码(Hamming code)　见“完全码”.

戈莱码(Golay code)　见“完全码”.

极大距离可分码(maximum distance separable code)　亦称MDS码. 达到辛格尔顿界的码. 若$M=q^{n+1-d}$，则称q元(n,M,d)码为极大距离可分码. 当$n-d+1=2$时，q元(n,q^2,d)MDS码的存在性等价于$n-2$个q阶相互正交拉丁方的存在性. 当C为$[n,k,d]$线性码时(参见“线性码”)，C为MDS码的充分必要条件为$d=n-k+1$. MDS线性码有许多有趣的性质. 例如，MDS线性码的对偶码也是MDS码. 一个$[n,k,d]$线性码是MDS码的充分必要条件为生成矩阵中任意k列均线性无关. 此外，若在射影几何PG$(k-1,q)$中存在n个点的集合S使其中没有k个点位于同一个超平面内，则存在一个$[n,k,d]$MDS码.

MDS码(MDS code)　即“极大距离可分码”.

线性码(linear code)　一类重要的码. 为便于编码与译码，人们希望码C具有一定的代数结构. 取字母表Q为q元有限域$\mathscr{F}_q$，称n维向量空间$\mathscr{F}_q^n$中的子空间C为q元线性码. 若C的维数为k，则称为q元$[n,k]$线性码. 当C的极小距离为d时，亦称为q元$[n,k,d]$线性码. 由于$\mathscr{F}_2^n$的加法群的子群一定是子空间，所以有时也把二元线性码称为群码.

群码(group code)　见“线性码”.

循环码(cyclic code)　一类特殊的线性码. 设C为q元$[n,k]$线性码，若$(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$是C中的码字时它的循环移位$(a_{n-1},a_0,a_1,\cdots,a_{n-2})$也是$C$中的码字，则称$C$为循环码. 向量空间$\mathscr{F}_q^n$与剩余类环$\mathscr{F}_q[x]/(x^n-1)$之间存在一个向量空间的同构对应. 在这个同构对应下，q元$[n,k]$循环码C惟一确定了$\mathscr{F}_q[x]/(x^n-1)$中的一个理想，每一个码字$\underline{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$惟一地对应于一个多项式$a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，而码字$(a_{n-1},a_0,\cdots,a_{n-2})$对应于多项式$xa(x)(\mathrm{mod}\,x^n-1)$. 于是，$q$元$[n,k]$

循环码可看做 $\mathscr{F}_q[x]/(x^n-1)$ 中的一个理想. 设 $f(x)$ 为码字，E 是含 n 次本原单位根的 $\mathscr{F}_q$ 的扩域，若 $S=\{s\in E\mid f(s)=0\}$，称 S 为码字 $f(x)$ 的根集. 利用根集可以估计码字 $f(x)$ 的重量，从而提供了计算循环码的极小重量的途径. 归纳地定义 E 的某个子集族(这些子集称为 S 独立集)：

1. $\varnothing\in\mathscr{I}$.

2. 若 $A\subseteq S$，且 $A\in\mathscr{I}$ 而 $b\notin S$，则 $A\cup\{b\}\in\mathscr{I}$.

3. 若 $A\in\mathscr{I}$ 且 $C\in E\backslash\{0\}$，则 $CA\in\mathscr{I}$.

范·林特(van Lint, J. H.)及威尔森(Wilson, R. W.)于 1986 年指出：若 S 是码字 $f(x)$ 的根集，A 为 S 独立集，则 $f(x)$ 的重量不小于 $|A|$.

S 独立集(S-independent set)　见“循环码”.

BCH 码(BCH code)　一类特殊的循环码. 设 E 为 $\mathscr{F}_q$ 上多项式 x^n-1 的分裂域，β 是 E 中的 n 次本原单位根. 若 q 元 $[n,k]$ 循环码 C 的每一个码字在 E 中有根 $\beta^a,\beta^{a+1},\cdots,\beta^{a+\delta-2}$，则称 C 为 BCH 码，称 δ 为它的设计距离. 设计距离为 δ 的 BCH 码由首 1 多项式 $g(x)$ 的倍式组成，其中 $g(x)$ 是 $\beta^a,\beta^{a+1},\cdots,\beta^{a+\delta-2}$ 的极小多项式的最小公倍式，该码的极小距离 $d\geqslant\delta$. 这类码分别由玻色(Bose, R. C.)、雷·乔德里(Ray-Chaudhuri, D. K.)于 1960 年及霍昆格姆(Hocquenghem, A.)于 1959 年独立地发现，因此称为 BCH 码.

生成矩阵(generator matrix)　线性码的一种表示. q 元 $[n,k]$ 线性码 C 的一个生成矩阵是有限域 $\mathscr{F}_q$ 上的一个 $k\times n$ 矩阵，其行向量构成子空间 C 的一组基. 设 C 与 C' 是两个 q 元线性码，G 与 G' 分别为生成矩阵，若存在置换 P 使 $G=G'P$，则称 C 与 C' 为等价码. 在等价意义下，每个 q 元 $[n,k]$ 码有一个形为 $[I_k\ A]$ 的生成矩阵，这里 I_k 是 k 阶单位矩阵，A 是一个 $k\times(n-k)$ 阵. 当 $[n,k]$ 码 C 有生成矩阵 $[I_k\ A]$ 时，其对偶码 $C^\perp$ 有生成矩阵 $[-A^T\ I_{n-k}]$. 由于 $\mathscr{F}_q[x]/(x^n-1)$ 是主理想环，所以每个 q 元 $[n,k]$ 循环码 C 由 C 中次数最低的首 1 多项式 $g(x)$ 的倍式组成，称 $g(x)$ 是该循环码的生成多项式. 由此可得循环码 C 的一个生成矩阵

$$G=\begin{bmatrix} g(x)\\ xg(x)\\ \vdots\\ x^{k-1}g(x)\end{bmatrix}.$$

线性码的生成矩阵是研究线性码的编码与译码的一个重要工具.

生成多项式(generator polynomial)　见“生成矩阵”.

等价码(equivalent code)　见“生成矩阵”.

对偶码(dual code)　研究线性码的一种工具. 是从一个码派生出的另一个码. 在 $\mathscr{F}_q^n$ 中定义两个向量 $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $\underline{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的内积为 $\underline{x}\cdot\underline{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$. 当 $\underline{x}\cdot\underline{y}=0$ 时，称 $\underline{x}$ 与 $\underline{y}$ 正交. 与 $\mathscr{F}_q^n$ 中线性码 C 的每一个码字正交的向量 $\underline{y}$ 的集合，称为 C 的对偶码，记为 $C^\perp$. 当 C 为 $[n,k]$ 线性码时，$C^\perp$ 为 $[n,n-k]$ 线性码. 当 C 为循环码时，$C^\perp$ 也是循环码. 当 C 为 MDS 码时，$C^\perp$ 也是 MDS 码. 因此，对偶码这一概念有助于线性码性质的研究. 麦克威廉斯(MacWilliams, F. J.)揭示了线性码与它的对偶码的重量计数子之间的联系，从而有助于计算线性码的重量计数子.

重量计数子(weight enumerator)　对码的一种度量刻画. 它是码的重量分布的生成多项式. 设 q 元 $[n,k]$ 线性码 C 中重量为 i 的码字有 A_i 个，$i=0,1,\cdots,n$，则称数列 $(A_0,A_1,\cdots,A_n)$ 为码 C 的重量分布，而称多项式 $A(z)=A_0+A_1z+\cdots+A_nz^n$ 为码 C 的重量计数子. 当 C 的极小重量为 w 时，A_wz^w 就是 $A(z)$ 中除常数项外次数最低的项，因此从 C 的重量计数子可以得到它的极小重量. 对于线性码而言，极小重量与极小距离相等，因而对判别码的检错能力与纠错能力十分重要. 对此，麦克威廉斯定理提供了一个有效的方法.

麦克威廉斯定理(MacWilliams theorem)　关于编码理论中的一个重要结论. 它给出了线性码 C 与它的对偶码 $C^\perp$ 的重量计数子之间的相互联系. 该定理断言：若 $A(z)$ 是 q 元 $[n,k]$ 线性码 C 的重量计数子，$B(z)$ 是对偶码 $C^\perp$ 的重量计数子，则

$$B(z)=q^{-k}[1+(q-1)z]^nA\left(\frac{1-z}{1+(q-1)z}\right).$$

这个定理由麦克威廉斯(MacWilliams, F. J.)于 1962 年得到. 范·林特(van Lint, J. H.)于 1971 年利用特征标理论给出了该定理的一个简洁证明. 若 $C^\perp$ 的重量计数子已知，则该定理给出了关于 $n+1$ 个未知数 $A_0,A_1,\cdots,A_n$ 的 $n+1$ 个方程的线性方程组，从而可解方程组求得线性码 C 的重量计数子.

双偶自对偶码(doubly-even self-dual code)　一类特殊的线性码. 若线性码 C 的对偶码 $C^\perp$ 与 C 相同，即 $C^\perp=C$，则称 C 为自对偶码. $[n,k]$ 线性码的生成矩阵 G 必定满足等式 $GG^T=0$，且 $k=n/2$. 若一个自对偶码 C 的每个码字的重量均为 4 的倍数，则称 C 为双偶自对偶码. 若存在 q 元 $[n,n/2]$ 双偶自对偶码，则 q 只能为 2，n 必为 8 的倍数，并且其极小重量 d 必满足不等式

$$d\leqslant 4\left\lfloor\frac{n}{24}\right\rfloor+4.$$

例如，若以 I_4 表 4 阶单位阵，B 表示对角线元为 0 而其余元为 1 的 4 阶方阵，则以 $[I_4B]$ 为生成矩阵的二元 $[8,4]$ 线性码是一个双偶自对偶码，该码称为扩充的二元汉明码.

极值双偶自对偶码(extremal doubly-even self-dual code)　一类特殊的双偶自对偶码. 字长 n 的双偶自对偶码的极小距离 d 满足不等式

$$d \leqslant 4\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4.$$

若某个双偶自偶码能使等号成立,即

$$d = 4\left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + 4,$$

则称该码为极值双偶自对偶码. 只可能存在有限多个极值双偶自对偶码,但它们的存在性尚未完全确定. 这类码与设计有如下关系:当字长 n 的极值双偶自对偶码存在时,具有极小重量的码字的支撑集全体构成 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的 t 设计,其中 $t=5-2i$,而 $n \equiv 8i \pmod{24}$ $(i=0,1,2)$.

阿斯莫斯-马特森定理(Assmus-Mattson theorem)　由线性码构造 t 设计的一个定理. 该定理适用于极小重量比较大而其对偶码的重量分布中非零项较少的线性码. 若 C 为 q 元 $[n,k,d]$ 线性码. 若存在整数 $t(0<t<d)$,使得对偶码 $C^{\perp}$ 中至多有 $d-t$ 个非零重量 ω 适合 $1 \leqslant \omega \leqslant n-t$,则 C 中重量 d 的码字的支撑集全体构成集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个 t 设计. 当 $q=2$ 时,C 中任一重量 τ 的码字的支撑集全体构成 t 设计. 下面以扩充戈莱码为例说明这一定理的应用. 设 U 为一个 11 阶方阵,其 $(i,i+1)$ 位置为 1,其余的元素为 0. 记

$$A = I+U+U^3+U^4+U^5+U^9,$$

其中 I 为单位阵. 以 E 及 Φ 分别记元素全为 1 及全为 0 的行向量. 若

$$G = \begin{bmatrix} E^T & I & \Phi^T & A \\ 0 & \Phi & 1 & E \end{bmatrix},$$

则以 G 为生成矩阵的二元 $[24,12]$ 线性码称为扩充戈莱码. 这是一个双偶自对偶码,其重量计数子为

$$A(z) = 1+759z^8+2576z^{12}+759z^{16}+z^{24}.$$

由阿斯莫斯-马特森定理得到:重量 8 的码字构成一个施泰纳系 $S(5,8,24)$;而重量 12 及 16 的码字分别构成 5-(24,12,48)设计及 5-(24,16,78)设计.

阿达马码(Hadamard code)　一种重要的码. 它是从阿达马矩阵产生的二元码. 设 H_n 是一个 n 阶阿达马矩阵,用 0 代替 H_n 与 $-H_n$ 中的元素 -1,这样可得 $2n$ 个行,它们都是 $\mathscr{F}_2^n$ 中的元. 由于阿达马矩阵的任意两行在一半位置上的元素相异,这 $2n$ 个向量便构成了一个二元 $(n,2n,n/2)$ 码,称为阿达马码. 字长为 32 的阿达马码曾被 1969 年美国发射的航海者号(Mariner)宇宙飞船实际采用,得到了人类从宇宙空间发回的第一张行星照片. 从火星及水星等行星拍摄到的每一张黑白照片分成 600 行 600 列,共由 36 万个点组成. 每个点(即一小方格)的明暗程度分为 64 个等级,由 6 维的二元向量来表示. 经过编码后每个 6 维向量变为字长为 32 的阿达马码中的某个码字,然后发回地面. 即使在宇宙空间中因各种干扰使字长为 32 的码字发生畸变,但只要发生差错的位置不超过 $[(n/2-1)/2]=7$ 个,地面上收到畸变的码字后仍能正确译出原来的 6 维二元向量. 1977 年发射的旅行者号(Voyager)则采用别的码发回了彩色的照片.

设计的码(code of a design)　由区组设计得到的一类线性码. 设 $(X,\mathscr{B})$ 为一区组设计,其中 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_v\}$,$\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$. 定义 $v\times b$ 矩阵 $D=(d_{ij})$,由 $x_i \in B_j$ 时,$d_{ij}=1$,否则 $d_{ij}=0$. 由 D 的行向量张成的 $\mathscr{F}_q^b$ 中的子空间称为该设计的码. 设计 $(X,\mathscr{B})$ 所具有的性质反映为它的码具有相应的性质,因而有可能通过研究码的性质来研究原设计. 关于 10 阶射影平面的不存在性的证明以及 6 阶正交拉丁方不存在性的简洁证明是这种研究途径的成功例证. 设 C 是某个 (r,λ) 设计在域 $\mathscr{F}_q$ 上的码,其中 $q=p^t$,p 为质数. 当 $p \mid r-\lambda$ 时,若 $p \mid r$,则有 $C \subset C^{\perp}$;否则,若 $p \nmid r$,则有 $\dim(C \cap C^{\perp}) = \dim C - 1$. 若 10 阶射影平面存在,则相应的对称设计(111,11,1)-SBIBDD 是一个 (r,λ) 设计. 若取 $q=p=2$,则可推得 $\dim C = 56$,$\dim C^{\perp} = 55$ 且 $C^{\perp} \subset C$. 若 $\underline{x} \in C$,则其重量 $\omega(\underline{x}) \equiv 0,3 \pmod 4$. 由此,$C$ 的重量计数子

$$A(z) = \sum_{t=0}^{27} A_{4t} z^{4t} + \sum_{t=0}^{27} A_{4t+3} z^{4t+3},$$

且 $C^{\perp}$ 的重量计数子为

$$B(z) = \sum_{t=0}^{27} A_{4t} z^{4t}.$$

利用麦克威廉斯定理可得,C 的重量计数子由 A_{12},A_{15},A_{16} 完全确定. 至 1985 年,已有 $A_{12}=A_{15}=A_{16}=0$,从而可得 $A_{19}=24675$. 设 10 阶射影平面的关联矩阵的行相应于线而列相应于点. 于是,一个重量为 19 的码字将对应于 19 个点组成的集合 V. 平面上任一条线与 V 的交点个数只能为 1,3 或 5. 在 111 条线中恰有 6 条线能与 V 有 5 个交点,称之为重线. V 与 6 条重线共有 66 种不同的关联结构,每一个结构是原关联矩阵的一个 6 行 19 列的子矩阵. 兰姆(Lam,C. W. H.)等用理论方法证明了 21 种子矩阵不能扩充成 111 阶的关联矩阵,对其余 45 种情形利用计算机证明了同样的结论. 从而得到,不存在 10 阶射影平面的结论.

移位寄存器序列(shift register sequence)　一类重要的码. 它是数字通信中利用反馈移位寄存器产生的一种伪随机码. 由初始状态 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 依反馈逻辑函数 $x_{n+1}=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 产生的二元序列 $x_1,\cdots,x_n,x_{n+1},\cdots$,称为移位寄存器序列,简称移存器序列. 这里 f 是 $\mathscr{F}_2^n$ 到 $\mathscr{F}_2$ 的一个映射,它所产

生的状态转移图是二元域上德布莱英-古德图的一个部分图. 当 f 的多项式表示是 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性齐次式时,相应的移存器序列称为线性的,否则称为非线性的. 当状态转移图是两两不相交的圈的并时,相应的 f 及序列称为非奇的. 移存器序列中最简单的两种是由 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1$ 及 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1+x_1$ 所产生的,分别称为纯轮换移存器及补轮换移存器. 它们都是非奇的,其状态转移图中圈的总数分别是

$$\frac{1}{n}\sum_{d\mid n}\varphi(d)2^{\frac{n}{d}}\text{及}\ \frac{1}{2n}\sum_{d\mid m}\varphi(d)2^{\frac{n}{d}},$$

其中 m 为 n 的最大奇因子. 这两种移存器在移存器序列理论中占重要地位. n 级线性移存器序列中周期最长(等于 2^n-1)的一种称为 m 序列,它共有 $\varphi(2^n-1)/n$ 个,恰与 $\mathscr{F}_2$ 上全部 n 次本原多项式一一对应. 由于它具有很好的伪随机性,已得到充分研究和广泛应用. n 级移存器中周期最长(等于 2^n)的一种称为 M 序列,它是非线性的,非奇的. 它共有

$$2^{2^{n-1}-n}$$

个,恰与 n 级德布莱英-古德图的全部欧拉游一一对应. 由于它具有巨大的数量和较好的伪随机性,已受到保密通信界的普遍重视. 移存器序列是一类有着广泛应用的伪随机码,不但在保密通信中起加密的作用,在连续波雷达中可用作测距信号,在遥控系统中可用作遥控信号,在多址通信中可用作地址信号,在数字通信中可用作群同步信号,此外还可用作噪声源等.

移存器序列(register sequence) 见"移位寄存器序列".

密码(cryptography) 密码理论的基本概念. 它是数字通信中为保证信息的保密性及真实性而对信息所做的变换. 这里的信息表现为某个 q 元字母表集合上的序列,原始的信息称为明文,经加密变换后得到的序列称为密文. 若按照某种规则重新安排明文中元素的次序而得出密文,则这样的变换称为移位密码. 若字母表到自身有一个一一对应,将明文中每个元素用其对应的元素替代而得到密文,则这样的变换称为代换密码. 例如,设明文为

THESE ARE EXAMPLES,

将其写成 4 行 4 列的方阵,然后按一个 4 阶幻方

THES	16	3	2	13
EARE	5	10	11	8
EXAM	9	6	7	12
PLES	4	15	14	1

中元素顺序来改变明文中字母的次序,得到的密文为 SEHPEXAEEARMSELT,这是一个移位密码. 若将 $A,B,\cdots,Z$ 依次恒同于循环群 $\mathbf{Z}_{26}$ 中的元 0,1,…,25,将代换密码中的对应取作

$$f:\mathbf{Z}_{26}\to\mathbf{Z}_{26},\quad a\to a+3,$$

则相应的密码称为凯撒密码. 以下是加密过程:

明文	T	H	E	S	E	A	R	E	E	X	A	M	P	L	E	S	
a	19	7	4	18	4	0	17	4	4	23	0	12	15	11	4	18	
$a+3$	22	10	7	21	7	3	20	7	7	0	3	15	18	14	7	21	
密文	W	K	H	V	H	D	U	H	H	A	D	P	S	O	H	V	

在这两个例中,4 阶幻方及数 3 起着重要作用,称为密钥. 而移位密码及代换密码这种加密方式称为密码体制. 在密码通信中密码体制与密钥是两个基本要素.

凯撒密码是很容易破译的,稍稍的改进则有维吉利亚密码. 例如,以 BED 为密钥时对明文中第 1,4,7,…个字母做变换 $a\to a+1$,第 2,5,8,…,个字母做变换 $a\to a+4$,第 3,6,9,…个字母做变换 $a\to a+3$. 但因密钥长度只为 3,仍然是容易破译的. 若将密钥长度增加,则安全性也随之增大. 若密钥长度足够长并且其中字母有随机性,则这样的密码是难以破译的,称为一次一密. 在实践中,明文长度有一个限度设为 N,取密钥长度也为 N. 以 $\underline{m}=m_1m_2\cdots m_N$ 表明文,$\underline{k}=k_1k_2\cdots k_N$ 表密钥,这里 $m_i,k_i\in\mathbf{Z}_{26}$,则密文为 $\underline{c}=c_1c_2\cdots c_N$,其中 $c_i=m_i+k_i$. 这种密码曾用于华盛顿与莫斯科之间的热线联系. 它虽然安全,但密钥的管理比较麻烦. 通信双方必须持有相同的密钥本,一个密钥只用一次,因此密钥的消耗量较大. 一个变通的办法是双方用电子式的密码机产生随机数序列,用作密钥,这里的随机数序列实际是按一定规律生成而具有随机特征的序列,称为伪随机序列. 但用来产生伪随机序列的密钥仍需双方约定且严格保密,这种密码体制称为伪随机码.

以上这些经典的密码体制的共同特点是一方的加密密钥与另一方的解密密钥是同一个密钥,因而统称为单钥体制. 其主要缺点是密钥管理和分配上的困难. 针对这一缺点,1976 年,迪费(Diffie,W.)与海尔曼(Hellman,M. E.)提出了公开密钥的密码体制,称为公钥体制. 在这种体制中,参加通信的每一方有一个加密密钥 E 及一个解密密钥 D. 满足以下条件:

1. $D(E(M))=M=E(D(M))$.

2. E 和 D 应是易于计算的.

3. E 可以公开而 D 必须由通信者自己严格保密.

如果通信者 A 要将明文 P 发送给通信者 B,A 先查得 E_B,计算出密文 $C=E_B(P)$,并发送给 B,B 再解密得明文 $P=D_B(C)=D_B(E_B(P))$. 第三者即使得到了 C 和 E_B,因 D_B 由 B 自己严格保密,仍不

能发现明文 P. 这一体制还可发送签了名的信息，因而对银行界用计算机系统转移款项特别有用. 公钥体制已有下列两项：利用质数性质的 RSA 体制；利用超递增序列的背色体制. 这些体制的安全性的讨论是很复杂而又至关重要的问题，目前还在进一步研究之中. 另外，利用组合设计来构造加密方案以及讨论密码的理论安全性近年来也受到了重视.

明文(plaintext) 见“密码”.

密文(eiphext) 见“密码”.

移位密码(shift cryptography) 见“密码”.

代换密码(transformation cryptography) 见“密码”.

密钥(key) 见“密码”.

密码体制(cryptosystem) 见“密码”.

凯撒密码(Caesar cryptography) 见“密码”.

维吉利亚密码(Vigenère cryptography) 见“密码”.

伪随机码(pseudo random code) 见“密码”.

单钥体制(simple key cryptosystem) 见“密码”.

公钥体制(public key cryptosystem) 见“密码”.

撰 稿 朱 烈 康庆德
审 阅 刘璋温 常彦勋

组 合 序

二元关系(binary relation) 一个基本的数学概念. 指集合 X 中元素与元素之间的特定联系，记为 R. 关系 R 可视作笛卡儿积集 $X\times X$ 的子集. 当 X 的元素 x,y 具有关系 R 时，记为 xRy 或 $(x,y)\in R$；否则，记为 $x\bar{R}y$ 或 $(x,y)\notin R$. 二元关系里，往往涉及元素 x,y 的次序，因此，当有 xRy 时，不一定有 yRx. 数集上的相等关系、不大于关系、严格小于关系、自然数之间的整除关系、集合之间的包容关系、划分之间的精细关系等均为二元关系. 若对于 X 的任意元素 x，均有 xRx，则称 R 为自反的；否则，R 称为非自反的. 若对于 X 的任意元素，当有 xRy 时，必有 yRx，则称 R 为对称的；否则，称 R 为非对称的. 若由 xRy 和 yRx，能推出 x,y 为同一元素，则称 R 为反对称的. 若对于 X 的任意元素 x,y 和 z，当有 xRy 及 yRz 时，必有 xRz，则称 R 为可传递的.

欧几里得公理断言：若两个量均等于第三个量，则这两个量相等. 因此，传递关系是它的推广. 若对于 X 的任意元素 x,y，当有 xRy 时，就有元素 z 使得有 xRz 或者有 zRy，则称 R 为负传递的. 例如，X 为圆周上有限多个点的集，R 为两点间的相邻关系. 若对于 X 的任意元素 x,y，均有 xRy 或者有 yRx，则称 R 为完备的. 集合 X 连同其上的二元关系 R 构成的二元组 (X,R)，称为关系集. 若在 X 的子集 S 上仍保留关系 R，则 (S,R) 为 (X,R) 的子关系集.

关系集(relative set) 见“二元关系”.

子关系集(sub-relative set) 见“二元关系”.

自反的二元关系(reflective binary relation) 见“二元关系”.

非自反的二元关系(irreflective binary relation) 见“二元关系”.

对称的二元关系(symmetric binary relation) 见“二元关系”.

反对称的二元关系(anti-symmetric binary relation) 见“二元关系”.

可传递的二元关系(transitive binary relation) 见“二元关系”.

负传递的二元关系(negatively transitive binary relation) 见“二元关系”.

完备的二元关系(complete binary relation) 见“二元关系”.

等价关系(equivalence relation) 一种最重要的二元关系. 它是集合 X 上具有自反性、对称性和传递性的二元关系. 例如数的相等关系 R_1、数的不小于或不大于关系 R_2、自然数的同余关系 R_3、平面三角形的相似关系 R_4、图的顶点的连通关系 R_5 等均为等价关系. 集合 X 上的等价关系 R 把 X 划分为若干类 $X_1,X_2,\cdots,X_k$：X 的元素 x,y 属于同一类，当且仅当 x 和 y 有关系 R，即有 xRy. 称 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 为等价关系 R 产生的等价类. 例如：R_1 产生的等价类即为数集 X 的元素；对于 R_2，等价类为数集 X 本身，即只一个等价类；R_3 产生的等价类为同余类. 集合 X 上的等价关系 R 产生的等价类 $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 构成 X 的一个划分：

1. $X_1,X_2,\cdots,X_k$ 的并集 $\bigcup_{i=1}^{k}X_i=X$.

2. 对于任意的不相同的 i,j，$X_i\cap X_j=\varnothing$.

反之，集合 X 的一个划分，亦决定了 X 上的一个等价关系. 在划分之间引入精细关系，导致以划分为基础的一类特殊序集.

等价类(equivalence class) 见“等价关系”.

划分(partition) 见“等价关系”.

包容关系(inclusion) 集合之间元素的从属关系. 称集合 B 包容 A，记为 $A\subseteq B$，当且仅当 A 的元素必为 B 的元素. 包容关系构成组合理论的基本序关系. 因为它本身可以构造出典型的组合形态如布尔代数 $\mathscr{B}(2^E,\subseteq)$. 同时借助于它可以刻画更为复杂的关系. 设 f 和 g 均为从集合 N 到集合 M 的映射，若只关心 N 中有多少元素，而不理会是哪些元

素映入到它们的像域时，则其像域 $g^{-1}(b)$ 可表示为

$$\mathrm{im}(f)=\{b^{|f^{-1}(b)|}\mid b\in M\},$$

$$\mathrm{im}(g)=\{b^{|g^{-1}(b)|}\mid b\in M\}.$$

这样在映射 f,g 之间建立包容关系：$f\subseteq g$ 当且仅当对 M 的所有元素 b 均有 $|f^{-1}(b)|\leqslant|g^{-1}(b)|$.

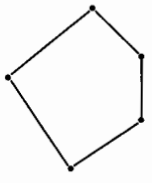
精细关系(refinement)　一种基本序关系. 它是划分之间的一种序关系. 称集合 N 的划分 π 精细于划分 σ，当且仅当对于 N 的任意元素 a,b，若 a 和 b 同属于 π 的一个划分块，则它们亦必属于 σ 的同一划分块. 精细关系是自反的、传递的，但一般不是反对称的.

复合关系(composition of binary relations)　一种重要的二元关系. 它是由集合 X 上两个二元关系 R 和 S 构造出的二元关系，记为 RS. 对于 X 的任意元素 x,y 有关系 RS，即 $xRSy$，当且仅当集合 X 中有元素 z，使得 x 和 z 有关系 R，即 xRz，且 z 和 y 有关系 S，即 zSy. 例如 X 为自然数集，xRy 为 $x<y$，xSy 为 $x\mid y$，即 x 能整除 y，当 $x=2,y=4$ 时，有 $xRSy$.

拟序(quasi-order)　一种特殊的二元关系. 它是集合上具有自反性及可传递性的二元关系. 如 a 为一固定复数，对于任意复数 x,y，有 xR_1y 当且仅当 $|x-a|\geqslant|y-a|$. 又如对于有向图 G 的任意两个节点 u,v，有 uR_2v 当且仅当 $u=v$ 或者从 u 出发有一条有向路能够连结 u 与 v. 集合 X 连同拟序 R 组成的二元组 (X,R) 称为拟序集.

拟序集(quasi-order set)　见“拟序”.

偏序集(partially set, poset)　特定的集. 它是一类主要的序关系集. 具体地说，集合 E 连同其上的偏序 R 构成的关系集 (E,R)，一般记为 $P=(E,\leqslant)$. 所谓偏序(或序关系)是一类具有自反性、反对称性和传递性的二元关系. 例如，数之间的不大于关系，自然数之间的整除关系，集合之间的包容关系等. 把集合 E 的基数称为偏序集 P 的阶. 阶为有限值的偏序集称为有限偏序集. 而在 P 上，对于任意元素 x,y，区间 $[x,y]$ 均为有限偏序集时，称 P 为局部有限偏序集. 这两类偏序集是组合理论中的主要研究对象. 偏序集上所有链的长度的最小上界，或上确界，称为偏序集的长度，记为 $l(P)$. 偏序集中最大反链包含的元素数目，称为偏序集的宽度，记 $w(p)$. 对于以右图为哈塞图的偏序集 P，有 $l(P)=3$，$w(P)=2$. 偏序集的子关系集仍为偏序集，而且必有全序集作为其子关系集.



偏序(partial order)　见“偏序集”.

序关系(order)　见“偏序集”.

偏序集的阶(order of poset)　见“偏序集”.

有限偏序集(finite poset)　见“偏序集”.

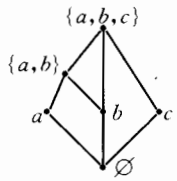
局部有限偏序集(locally finite poset)　见“偏序集”.

偏序集的长度(length of poset)　见“偏序集”.

偏序集的宽度(width of poset)　见“偏序集”.

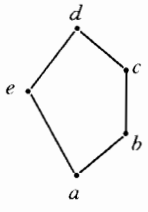
覆盖(cover)　偏序集中元素之间的直接序关系. 具体地，对于偏序集中的元素 x,y，y 覆盖 x，当且仅当 $x\leqslant y$，且不存在其他元素 z 使得 $x\leqslant z$ 及 $z\leqslant y$. 覆盖亦可等价地叙述为：区间 $[x,y]$ 仅含元素 x 和 y. 对于有限偏序集 $P=(E,\leqslant)$，其全部序关系可由覆盖关系确定.

哈塞图(Hasse diagram)　一类特殊的图. 它是与偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 一一对应的图. 图的顶点对应于 E 的元素，且仅当 y 覆盖 x(即 $x\leqslant y$ 但不存在 $z\neq x,y$ 使得 $x\leqslant z$ 和 $z\leqslant y$)时，顶点 x 位于顶点 y 的下方，并用一条直线连结 x,y. 例如，若 $E=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$，$\leqslant$ 为包含关系，则有如右的哈塞图. 它为偏序集提供了直观表象.



偏序集的链(chain of poset)　一类组合构形. 具体地说，链是偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 上满足如下条件的 E 的子集 C：C 中任意两个元素 x,y 均有序关系，换言之，有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$. 对偶地，若 E 的子集 A 中的任意两个元素 x,y 均无序关系，换言之，A 中的元素均互不可比，此时称 A 为偏序集 P 的反链.

设有 P 的链 C，若没有 C 以外的元素 x，使得把 x 添加入 C 之后仍为 P 的链，则称 C 为 P 的极大链. 例如，右图所示的 P 中，$C_1=\{a,b,c,d\}$，$C_2=\{a,e,d\}$ 均为 P 的极大链，但 $C_3=\{a,b,c\}$ 不是极大链. 当链 C 由 n 个元素构成时，$C=\{e_0,e_1,e_2,\cdots,e_{n-1}\}$，称其链长 $l(c)=n-1$.



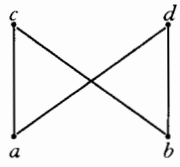
偏序集的极大链(maximal chain of poset)　见“偏序集的链”.

偏序集的反链(antichain of a poset)　见“偏序集的链”.

偏序集的区间(interval of poset)　一类组合构形. 偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 上，元素 x,y 决定的集合 $\{z\in E\mid x\leqslant z$ 且 $z\leqslant y\}$ 称为一个区间，并记为 $[x,y]$. 当 x,y 有序关系时，$[x,y]$ 非空，而当 x,y 无序关系时，$[x,y]$ 为空集. 当 y 覆盖 x 时，$[x,y]=\{x,y\}$.

偏序集的极大元(maximal element of a poset)　偏序集上的一种特殊元素. 偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 的子集 S 中的元素 a，若在 S 中不存在其他元素 x，使得 $a\leqslant x$，则称 a 为 S 上的极大元. 对称地，若在 S 中不

存在其他元素 x，使得 $x\leqslant a$，称 a 为 S 上的极小元. 若取 $S=E$，则分别称 a 为偏序集 P 的极大元，a 为偏序集 P 的极小元. 当 P 为有限偏序集时，其极大元和极小元总是存在的. 若对于 P 的所有元素 x，均有 $x\leqslant a$，则称 a 为 P 的最大元. 对称地，若对于 P 的所有元素 x，均有 $a\leqslant x$，则称 a 为 P 的最小元. 一般分别以 1 和 0 记 P 的最大元和最小元. 偏序集并不总有最大元和最小元. 若它是有限全序集，则它总有最大元和最小元. P 的最大(小)元必为 P 的极大(小)元，但反之不然. 上图所示的偏序集，c,d 为 P 的极大元，但不是最大元. a,b 为 P 的极小元，但不是最小元.

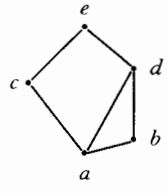


偏序集的极小元(minimal element of a poset) 见“偏序集的极大元”.

偏序集的最大元(greatest element of poset) 见“偏序集的极大元”.

偏序集的最小元(least element of poset) 见“偏序集的极大元”.

偏序集的元素高度(height of an element on poset) 一类组合不变量. 指刻画元素 x 在一个具有最小元的有限偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 里相对位置的整数值，记为 $h(x)$. 从最小元到 x 之间所有链的链长的最小上界称为元素 x 的高度. 设 P 如下图所示，a 为最小元，e 为最大元，有 $h(a)=0,h(b)=1,h(c)=1,h(d)=2,h(e)=3$. 当 P 有最大元时，则称最大元的高度 $h(1)$ 为 P 的高度，记为 $h(P)$. 偏序集 P 中，高度为 1 的元素称为 P 的基元或基点. 在几何格中，基元的作用类似于向量空间里的基向量.



基元(atom point) 见“偏序集的元素高度”.

基点(atom point) 见“偏序集的元素高度”.

偏序集的秩(rank of poset) 一类组合不变量. 它是偏序集上满足下述条件的非负整值函数 r：

1. P 有最小元 0，且 $r(0)=0$.

2. 若 y 覆盖 x，则 $r(y)=r(x)+1$.

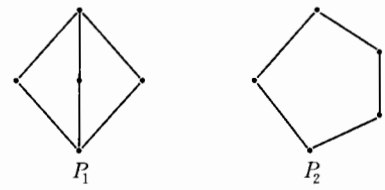
可定义秩的偏序集称为有秩偏序集. 在刻画偏序集的结构性质时，秩的作用是本质的. 例如有秩偏序集必为有最小元的分层偏序集.

有秩偏序集(ranked poset) 见“偏序集的秩”.

分层偏序集(graded poset) 一种组合构形. 若偏序集 $P=(X,\leqslant)$ 上有定义在 X 上的整值函数 g，它满足：

1. 对于 X 的元素 $x\neq y$，若 $x\leqslant y$，则 $g(x)<g(y)$；

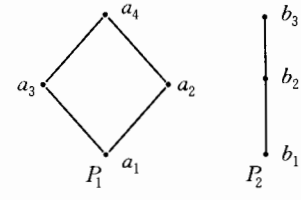
2. 若 y 覆盖 x，则 $g(y)=g(x)+1$；



则称 P 可由 g 分层，或称 P 为分层偏序集. 分层偏序集具有良好的结构特性，其中一个重要的不变量为若尔当-戴德金链条件：若 P 上两元素之间有极大链存在，则这些极大链具有相同长度. 特别地，偏序集 P 的极大链的长度均相同. 如上图所示，P_1 为分层偏序集，但 P_2 不是.

若尔当-戴德金链条件(Jordan-Dedekind condition on chains) 见“分层偏序集”.

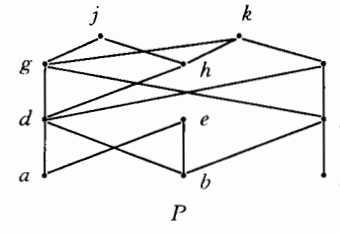
保序映射(order-preserving mapping) 一类带特殊性质的映射. 从偏序集 $P_1=(E_1,R_1)$ 到偏序集 $P_2=(E_2,R_2)$ 的映射 θ，若满足如下条件：对于 E_1 的任意元素 x,y，由 xR_1y 得出 $\theta(x)R_2\theta(y)$，则称 θ 是一个保序映射. 设 P_1,P_2 如图所示，若 $\theta(a_1)=b_1,\theta(a_2)=\theta(a_3)=b_2,\theta(a_4)=b_3$，则 θ 为保序映射.



偏序集的同构映射(isomorphism of posets) 一类特殊的保序映射. 它确定二偏序集间的同构. 若有从偏序集 $P_1=(E_1,R_1)$ 到偏序集 $P_2=(E_2,R_2)$ 的双射 θ，满足条件：θ 为保序映射；对于 E_1 任意元素 x,y，由 $\theta(x)R_2\theta(y)$ 得到 xR_1y，则称 θ 是从 P_1 到 P_2 的同构映射. 此时，称 P_1 和 P_2 为同构偏序集，记为 $P_1\cong P_2$.

同构偏序集(isomorphic poset) 见“偏序集的同构映射”.

狄尔沃斯定理(Dilworth's theorem) 关于偏序集的极大极小的定理. 该定理断言：对于任意有限偏序集，其最大反链中元素的数目必等于最小链划分中链的数目. 对于如右图所示的偏序集 P，$A=\{e,g,h,i\}$ 为一最大反链. $Q=\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$ 为最小链划分. 其中，$c_1=\{a,d,g,j\},c_2=\{b,e\},c_3=\{h,k\},c_4=\{c,f,i\}$. 有 $|A|=|Q|=4$. 此定理的对偶形式亦真，它断言：对于任意有限偏序集，其最长链中元素的数目必等于其最小反链划分中反链的数目. 由偏序集 P 按如下方式产生的图 G 称为偏序集的可比图：G 的节点集由 P



的元素组成，而 e 为 G 中的边，仅当 e 的两端点在 P 中是可比较的. 有限全序集的可比图为完全图.

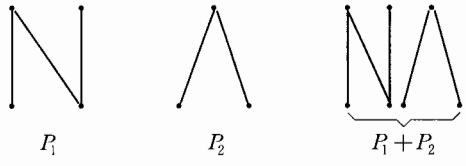
局部有限偏序集上的默比乌斯反演公式(Möbius inversion formula on a locally finite poset) 一类函数反演公式. 设 P 为局部有限偏序集，$f(x)$，$g(x)$为定义在 P 上的实值函数，在 P 中存在一个元 a，使得当 $x<a$ 时 $f(x)=0$，则对每个 $x\in P$，反演公式

$$f(x)=\sum_{y\leqslant x}g(y) \text{ 与 } g(x)=\sum_{y\leqslant x}f(y)\mu(y,x)$$

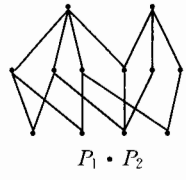
是等价的.

偏序集的运算(operations on posets) 由已知偏序集按一定规则导出新偏序集的过程. 偏序集的运算有以下几种：

1. 由两个偏序集 $P_1=(X,R)$ 和 $P_2=(Y,S)$ 导出的新偏序集 $P=(X\cup Y,R\cup S)$，称为 P_1，P_2 的基和或直和，记为 P_1+P_2，其中 $X\cup Y$ 为 X，Y 的并集，对于 $X\cup Y$ 的任意元素 x，y，有 $x(R\cup S)y$，当且仅当有 xRy 或有 xSy. 如上图给出基和的图像. 关于基和，有性质：$A+B\cong B+A$；$A+(B+C)\cong(A+B)+C$；若 $A+B\cong A+C$ 则 $B\cong C$ 等.



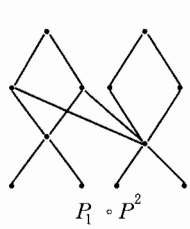
2. 由 P_1，P_2 导出新偏序集 $P=(X\times Y,R\cap S)$，称为 P_1，P_2 的直积，或基积，记为 $P_1\cdot P_2$. 其中，$X\times Y$ 为 X，Y 的笛卡儿积集. 对于其中任意元素 (x,y) 和 (x',y') 有 $(x,y)(R\cap S)(x',y')$ 当且仅当有 xRx' 和 ySy'. $P_1\cdot P_2$ 如上图所示. 关于直积，有性质：



$$A\cdot B\cong B\cdot A;$$
$$A\cdot(B\cdot C)\cong(A\cdot B)\cdot C;$$
$$A\cdot(B+C)\cong A\cdot B+A\cdot C;$$
$$(B+C)\cdot A\cong B\cdot A+C\cdot A.$$

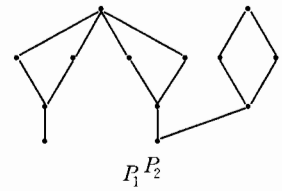
3. 由 P_1，P_2 导出的新偏序集 $P=(X\times Y,T)$，称为 P_1，P_2 的字典序积，记为 $P_1\circ P_2$. 其中，(x,y) $T(x',y')$ 当且仅当或者 $x\neq x'$ 且有 xRx'，或者 $x=x'$ 且有 ySy'. $P_1\circ P_2$ 如下图所示.

4. 由 P_1，P_2 产生的新偏序集 $P=(Z,V)$，称为关于 P_1，P_2 的基幂，记为 $P_1^{P_2}$. 其中 Z 的元素为从集 Y 到集 X 的映射 f，且满足条件：若有 ySy'，则有 $f(y)Rf(y')$；而对于 Z 中的任意映射 f，g，有 fVg，当且仅当对 Y 的所有元素 y，均有 $f(y)Rg(y)$. $P_1^{P_2}$，如下图所示. 关于基幂，有性质：



$$A^{B+C}\cong A^B\cdot A^C,$$
$$(A^B)^C\cong A^{B\cdot C},$$
$$(A\cdot B)^C\cong A^C\cdot B^C.$$

5. 由偏序集 $P=(X,R)$ 导出的新偏序集 $P=(X,R^*)$，称为 P 的对偶或 P 的逆，对于 X 的任意元素 x，y，有 xR^*y，当且仅当有 yRx. 关于对偶，有性质：



$$(A+B)^*\cong A^*+B^*,$$
$$(A\cdot B)^*\cong A^*\cdot B^*,$$
$$(A^B)^*\cong(A^*)^{B^*},$$
$$(A^*)^*\cong A.$$

偏序集的基和(cardinal sum of posets) 见“偏序集的运算”.

偏序集的直积(direct product of posets) 见“偏序集的运算”.

偏序集的基积(cardinal product of posets) 见“偏序集的运算”.

偏序集的字典序积(lexicographic product of posets) 见“偏序集的运算”.

偏序集的基幂(cardinal power of posets) 见“偏序集的运算”.

偏序集的对偶(dual of poset) 见“偏序集的运算”.

偏序集的逆(converse of poset) 见“偏序集的运算”.

偏序集的闭算子(closure operator on poset) 偏序集的一种变换. 它是关于偏序集 $P=(E,\leqslant)$，满足如下条件的从集族 2^E 到其自身的映射 σ：

1. 对于 E 的任意子集 S 及任意元素 e，若 S 包含 e，则 $\sigma(S)$ 包容集合 $\{a\in E\mid a\leqslant e\}$.

2. 对于 E 的任意子集 S，T，若 $\sigma(T)$ 包容 S，则亦包容 $\sigma(S)$.

例如，P 上子集 S 产生集合 $\{e\in E\mid$ 有元素 $s\in S$ 使得 $e\leqslant s\}$. 这一对应关系称为闭算子. E 的子集 S，当有 $\sigma(S)=S$ 时，称 S 为偏序集 P 的平集. 它们除具有闭集的通常性质(如有限个平集的交集仍为平集等)外，还具有如下特殊性质：若记 $\overline{F}=\{e\in E\mid$ 有 $f\in F$ 使得 $e\leqslant f\}$，则对于 P 的任意闭算子 σ 有 $F\subseteq\overline{F}\subseteq\sigma(F)$；换言之，在集合包容关系的意义下，算子 $F\to\overline{F}$ 为最小闭算子. 从偏序集过渡到如格之类的代数结构时，平集是必不可少的中介. 特别地，把如下闭算子称为偏序集的嵌入算子：对于 E 的任意元

素 x,$\sigma(\{x\})=\{e\in E\mid e\leqslant x\}$,记后者为$(x]$. 因此算子 σ 在元素 x 和集合$(x]$之间建立了对应关系. 当由 P 的闭集构成的格 $L=\{S\subseteq E\mid\sigma(S)=S\}$为一完备格时,此算子就能把偏序集 P 嵌入到格 L 之中.

偏序集的平集(flat of poset) 见"偏序集的闭算子".

偏序集的嵌入算子(embedding operator on poset) 见"偏序集的闭算子".

格(lattice) 一类代数结构. 它是建立在偏序集 $P=(E,\leqslant)$之上的. 由 E 的任意元素 x,y 构造的如下两个集合 $N_1(x,y)=\{z\in E\mid x\leqslant z$ 且 $y\leqslant z\}$及 $N_2(x,y)=\{z\in E\mid z\leqslant x$ 且 $z\leqslant y\}$. 它们作为 P 的子集均仍为偏序集,一般不一定有最小元或最大元. 若对 P 的任意元素 $x,y,N_1(x,y)$均有最小元,$N_2(x,y)$均有最大元,则称 P 为格,并记为 L. 在格 L 上,把$N_1(x,y)$和其最小元的对应关系视为一类二元运算,称为 x 和 y 的交,记为 $x\wedge y$. 对称地,把 $N_2(x,y)$和 其最大元的对应关系视为 x 和 y 的结,记为 $x\vee y$. 它们是格上最基本的运算. 这两类运算满足:

1. 同一律 $x\vee x=x,x\wedge x=x$.

2. 交换律 $x\vee y=y\vee x;x\wedge y=y\wedge x$.

3. 结合律 $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$,

$$x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z.$$

4. 吸收律 $x\wedge(x\vee y)=x\vee(x\wedge y)=x$,

其中 x,y 和 z 均为 E 的任意元素. 因此格又可视为满足上述四条规律的代数结构 $L=(E,\vee,\wedge)$.

虽然格的理论建立较晚,大约在 20 世纪 30 年代左右,但是很快就在解决序集问题和组合问题及代数问题中迅速发展,成为有关研究的有效理论基础. 格理论伴随拟阵理论的发展就是一个明显的例证. 与一般具有序特征的代数结构不同的是,格中元素的序特征不是外在的,而是内在的. 这是由于它们的序关系完全可以等价地由格的内在运算来刻画:$x\leqslant y$ 当且仅当 $x\vee y=y$ 或者 $x\leqslant y$ 当且仅当 $x\wedge y=x$. 这也反映了格的交运算与结运算的对称性. 有一些重要的格的例子. 例如,$B=(2^E,\subseteq)$是格,这里 2^E 为 E 的所有子集的构成的集族,而$|E|=n$,其上的结运算 $x\vee y$ 为集 x 和集 y 的并集,交运算 $x\wedge y$ 为集 x 和集 y 的交集. 又如,若自然数 n 的所有正整除数组成集合为 E,E 的元素 x,y 有序关系 xRy 当且仅当 x 能整除 y,则偏序集 $P=(E,R)$为格,$x\vee y$ 为 x 和 y 的最小公倍数,$x\wedge y$ 为 x 和 y 的最大公约数.

结运算(join operation) 见"格".

交运算(meet operation) 见"格".

链格(chain lattice) 一种基本的格,它是与数集$\{0,1,2,\cdots,n\}$同构的格,记为 $\mathscr{C}(n)$. 其元素 i,可有秩 $r(i)=i$. 因此,可把区间$[a,b]$的秩定义 $r(b)-r(a)=k$. 链格是格的基本类型,其他格有的可以用链格刻画. 如布尔格 B_n 可视为 n 个二元链格 $\mathscr{C}(1)$的连乘积 $\mathscr{C}(1)^n$,换言之,B_n 和 $\mathscr{C}(1)^n$ 同构. 链格是平凡分配格. 而且,链格的每个子格都是分配格.

布尔格(Boolean lattice) 一种特殊的格. 它是与布尔代数 $B=(2^E;\cup,\cap)$同构的格. 布尔格的结运算和交运算分别对应于布尔代数的并运算和交运算. 布尔格为分配格、模格、几何格、补格. 当$|E|=n$时,记布尔格为 B_n.

除数格(divisor lattice) 一种特殊的格. 在以正整数组成的集 $\mathbf{N}$ 上,以整除性为序关系建立的格. 对于 $\mathbf{N}$ 的任意元素 n,m,有序关系 mRn 当且仅当 m 能整除 n. 这个格上的结运算 $m\vee n$ 为 m 和 n 的最小公倍数;交运算 $m\wedge n$ 为 m 和 n 的最大公约数. 除数格为分配格. 其上的区间,可以表示为若干链格之积. 如区间$[1,360]$同构于 $\mathscr{C}(3)\times\mathscr{C}(2)\times\mathscr{C}(1)$,这是因为有分解式 $360=2^3\cdot3^2\cdot5^1$,其中,$\mathscr{C}(i)$为具有 $i+1$ 个元素的链格,$i=1,2,3$.

向量空间格(vector space lattice) 组合理论中常用的一种格. 它是在可除环 K 上的 n 维向量空间 V 的所有子空间,连同包容关系构成的格,记为 $\mathscr{L}(V)$. 当 n 和 K 确定之后,也就在同构的意义上确定了 $\mathscr{L}(V)$,因此亦记此格为$\mathscr{L}(n,K)$. 此类格是不可分解的、可补的模格. 在组合理论中,常取 K 为有限域 $\mathrm{GF}(q)$.

划分格(partition lattice) 一种特殊的格. 它是集合 E 上的划分连同精细关系构成的格. E 上的一个划分 π 惟一地确定了 E 中元素之间的一个等价关系,记为(π). $a(\pi)b$ 当且仅当 a,b 同属 π 的一个划分块. 划分格的交运算为 $a(\pi\wedge\sigma)b$,当且仅当 $a(\pi)b$且 $a(\sigma)b$;结运算为 $a(\pi\vee\sigma)b$,当且仅当有元素 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 使得 $a=c_1,b=c_k$,并对所有 $1\leqslant i\leqslant k$ 有 $c_i(\pi)c_{i+1}$或$c_i(\sigma)c_{i+1}$. 例如,若 $E=\{1,2,\cdots,11\}$,$\pi=(1,2)(3,4,5)(6,7,8)(9,10,11)$,$\sigma=(1,3,4)(2,5)(6,7,11)(8)(9,10)$,则有

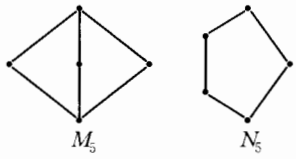
$$\pi\vee\sigma=(1,2,3,4,5)(6,7,8,9,10),$$

$$\pi\wedge\sigma=(1)(2)(3,4)(5)(6,7)(8)(9,10)(11).$$

子格(sublattice) 一种组合构形. 格 $L=(E;\vee,\wedge)$的子集 N 连同原有的结运算 $\vee$ 和交运算 $\wedge$ 构成的格. 例如,L 上的区间$[x,y]$为一子格.

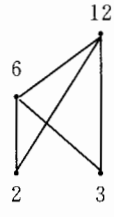
模格(modular lattice) 一种组合构形. 它是满足如下条件的格:对于格的任意元素 x,y 和 z,若 $x\leqslant z$,则 $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z$. 因此,模格是把满足分配律的要求仅局限在可比较元素之间,从而模格可视为分配格的推广,一个格是分配格,则必为模格. 下图里,M_5,N_5 均不是分配格,但 M_5 是模格,而 N_5 不是模格. 在模格 L 上,映射 φ_a 把 x 映照为 $x\wedge a$;映射 ψ_b 则把 y 映照为 $y\vee b$,这里 a 和 b 均为 L 的

固定的元素. 于是 φ_a 和 ψ_b 为区间 $[b,a\vee b]$ 和 $[a\wedge b,a]$ 之间互逆的同构映射，因而这两个区间是同构的. 模格的这一基本性质，亦可作为模格的另一等价定义. 在模格上，把形如 $I_1=[a\wedge b,a]$，$I_2=[b,a\vee b]$ 的区间称为传递区间. 若在两区间 $[x,y]$ 和 $[x',y']$ 之间存在一组区间 $I_1,I_2,\cdots,I_k$，使得相邻两个区间都是传递区间，而且 $I_1=[x,y]$，$I_k=[x',y']$，则称 $[x,y]$ 和 $[x',y']$ 中一个为另一个的投影区间. 模格的投影区间均是同构的. 这种结构上的均匀性是模格的主要特性.



模格也可由模元素来定义：格 L 为模格，当且仅当 L 的所有元素均为模元素. 若 L 的元素 a 满足：对于 L 的任意元素 x,y，由 $x\leqslant y$ 得到 $x\wedge(a\vee y)=(x\wedge a)\vee y$，则称 a 为模元素. 此外，格 L 上的一对元素 a 和 b，若对于 L 的所有元素 z 它们满足：若 $b\geqslant z$，则有 $b\wedge(a\vee z)=(b\wedge a)\vee z$，此时称 a,b 为模元素对. 由定义知，在模元素对 a 和 b 之间是有序关系的. 这就是说，当 a 和 b 为模元素对时，b 和 a 不一定为模元素对. 因此，一般把模元素对 a 和 b 记为二元序对 $(a,b)_M$，或 aMb. 模格亦可由模元素对刻画：格 L 为模格，当且仅当 L 的每对元素均为模元素对. 关于模元素对的序关系为对称的格，即若 a 和 b 为模元素对，则 b 和 a 也为模元素对，相应的格称为模对称格.

半格(semilattice)　格的推广. 它是只关联到格的结运算和交运算二者之一的一类代数结构. 对于格 $L=(X;\vee,\wedge)$ 而言，只关联到结运算的半格，称为结-半格，记为 $L'=(X;\vee)$. 对称地，称 $L''=(X;\wedge)$ 为交-半格. 例如，$X=\{2,3,6,12\}$，结运算 $\vee$ 为求两数的最小公倍数，则 $(X;\vee)$ 不是格，但为半格，即结-半格，其哈塞图如图所示.



模元素(modular element)　见“模格”.

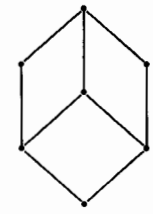
模元素对(modular element pair)　见“模格”.

模对称格(modular-symmetric lattice)　见“模格”.

传递区间(transfer interval)　见“模格”.

投影区间(projective interval)　见“模格”.

次模格(sub-modular lattice)　亦称半模格. 一种组合构形. 它是满足下面的条件 1 的一类格. 条件 1：对于格的任意元素 a,b，若 b 覆盖 $a\wedge b$，则有 $a\vee b$ 覆盖 a. 条件 1 刻画了一种局部对称性，一般弱于格的模对称性. 当格的长度有限时，这两种对称性才等价. 与模格比较，次模格广泛得多. 人们在 20 世纪 70 年代才获得证明，次模格不能再如同模格那样可以由某类特殊子格来刻画. 但是次模格为分层格，因而满足若尔当-戴德金链条件. 因此，次模格可以借助于格的高度函数来判定：当格 L 的长度有限时，它为次模格当且仅当对于 L 的任意元素 a,b 均有



$$h(a\vee b)+h(a\wedge b)\leqslant h(a)+h(b),$$

这里 h 为元素的高度函数. 而且，当 L 为长度有限的半模格时，元素 a 和 b 为模元素对，当且仅当

$$h(a\vee b)+(h(a\wedge b)=h(a)+h(b).$$

半模格通过它的一个子类——几何格，与组合系统建立起密切的联系. 上图是一次模格但不是模格.

半模格(semi-modular lattice)　即“次模格”.

补格(complement lattice)　一类特殊的格. 它是所有元素均有其补元存在的格，亦称此格是可补的. 例如，布尔格 B_n 是可补的. 这里，所谓 a 为 b 的补元，或 b 为 a 的补元是指格 L 中元素 a 和 b 满足条件：$a\vee b=1$ 和 $a\wedge b=0$，其中 1 和 0 分别为格 L 的最大元和最小元. 此时，亦称元素 a 和 b 是互补的. 当把可补性仅仅限于格 L 的所有区间时，称此格为相对补格，亦称为局部补格.

相对补格(relatively complemented lattice)　见“补格”.

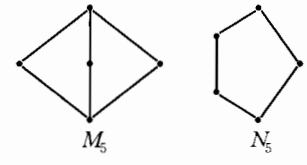
局部补格(locally complemented lattice)　见“补格”.

补元(complemented element)　见“补格”.

分配格(distributive lattice)　一种组合构形. 它是满足下述条件的格：对于格的任意元素 x,y 和 z，均有 $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$. 由于格中结运算和交运算的对称性，上述条件等价于

$$x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z).$$

当 L 为分配格时，交运算对于结运算满足分配律，而且反之亦真. 布尔格、除数格、理想格、链等均为分配格. 分配格可以表示理想格. 右图中 M_5 和 N_5 均不是分配格，因此，凡以 M_5,N_5 为子格的格均不是分配格.



格的理想(ideal of a lattice)　一种组合构形，是偏序集中一类特殊的子集. 偏序集 $P=(X,\leqslant)$ 的非空子集 I，且满足条件：若 $b\in I$ 且 $x\leqslant b$ 则 $x\in I$. 特别地，当 P 为格 L 时，称 I 为格 L 的理想. 对于 P 的子集 A，集合 $\{x\in X\mid A$ 中有元素 a 使得 $x\leqslant a\}$ 称为由 A 产生的理想. 特别地，当 A 只含单个元素 a 时，A 产生的理想称为主理想. 格 L 的理想一般不一定是主理想. 但是，当格 L 的长度有限时，则每一理想均为主理想. 对于已知格 L，其上所有理想连同

集合间的包容关系构成一个格，称这个新的格为理想格. 在理想格中，主理想格最为重要，因为它不但是 L 的子格，而且与格 L 同构. 这样，对格的研究就归结为对主理想格的研究. 从映射观点看，理想本质上是一类闭映射. 把格 L 的理想与 L 的结运算和交运算联系起来. 对于理想 I，若 a,b 均为 I 的元素，且 $a\vee b$ 仍为 I 的元素，则称 I 为结-理想. 对称地，有交-理想.

格的主理想(principle ideal of a lattice) 见“格的理想”.

理想格(lattice of ideals) 见“格的理想”.

结-理想(join-ideal) 见“格的理想”.

交-理想(meet-ideal) 见“格的理想”.

不可约元素(irreducible element) 一类特殊的元素. 是格中的一类非最小元素. 格 L 非最小元素 a，若满足当 $a=b\vee c$ 时必有 $a=b$ 或 $a=c$，则称 a 为结-不可约元素. 简言之，此类元素不可能表示为其他二元素之结. 对称地有交-不可约元素，它不可能表示为其他二元素之交. 结-不可约元素和交-不可约元素统称为不可约元素. 当格 L 为单链 C 时，其所有元素均为不可约元素.

结-不可约(join-irreducible) 见“不可约元素”.

交-不可约(meet-irreducible) 见“不可约元素”.

几何格(geometric lattice) 一种组合构形. 它是满足下述条件 1 的有限半模格. 条件 1：格的每个元素均可表示为基元的结运算. 而满足条件 1 的格，亦称为基元格或点格. 简言之，几何格既是半模格，又是基元格. 在几何格里，可按不同秩的平集相应地引入基本的几何概念. 例如，把秩为 1 的平集称为点，秩为 2 的平集称为线，秩为 3 的平集称为面等. 而当空集 $\varnothing$ 的闭集 $\overline{\varnothing}$ 非空时，其中的元素称为自环. 当元素 a 和 b 与闭集 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$(闭集的定义见“拟阵的闭包算子”)相同时，则称 a 和 b 为相互平行元素.

几何格和组合几何的关联极为密切. 设 A 为几何格 L 的基元集，A 的子集 X 为某组合几何 $G_L(A)$ 的平集，当且仅当 L 有元素 x，使得 $X=\{a\in A\mid a\leqslant x\}$. 而组合几何 $G_L(A)$ 的秩函数可以由格 L 的高度函数 h 来定义：$r(X)=h(\vee X)$，这里

$$\vee X=a_{i_1}\vee a_{i_2}\vee\cdots\vee a_{i_k},X=\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\}.$$

因此，组合几何的有关概念均可以等价地用几何格的语言表述. 例如，几何格基元素 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是独立的，当且仅当 $h(x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n)=n$. 另一方面，组合几何 G 的所有平集组成的格 $L(G)$ 为几何格，其基元是 G 中秩为 1 的平集. 因此，几何格是组合几何的基本理论工具. 几何格的每个区间 $[a,b]$ 仍是几何格，且几何格在直积下仍为几何格. 在几何格中，基元的等远性为等价关系.

基元格(atomic lattice) 见“几何格”.

平集格(lattice of flats) 一种组合构形. 在偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 上所有平集构成的格 L，其序关系为集合包容关系. 在平集格 L 中，交运算为 $S\wedge T=S\cap T$，而结运算为 $S\vee T=\cap\{A\in L\mid S\cup T\subseteq A\}$，即 L 中包容 S 和 T 之并集的所有集合的交集.

完备格(complete lattice) 一种组合构形. 满足下述条件的格称为完备格：它的任意一个非空子集均有最大元和最小元. 例如，链格为完备格.

独立系统(independence system) 一种组合构形. 设有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{I}$，若还满足条件：

1. 空集为 $\mathscr{I}$ 中的元素；

2. $\mathscr{I}$ 中元素 J 的子集 I 仍为 $\mathscr{I}$ 的元素；

则称 $\mathscr{I}$ 为独立系统，且其元素称为独立集. 从序观点看，独立系统是集合包容关系这类序关系决定的一个下降链集族. 例如，若 $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 为平面上的 4 点，且 e_1,e_2 和 e_3 在一条直线上，e_4 不在此直线上，则 E 的子集 I 为独立集，当且仅当 I 中的点为线性独立集. 由于独立系统所满足的条件不可能带来明显的优越性，所以它并不构成主要的组合系统，而是作为其他组合系统如拟阵等的一个前置基础.

独立集(independence set) 见“独立系统”.

拟阵(matroid) 一种组合构形. 设二元系统 $M=(E,\mathscr{I})$ 满足下述条件：

1. 空集 $\varnothing$ 为集族 $\mathscr{I}$ 的元素.

2. 若集合 J 为 $\mathscr{I}$ 的元素，则 J 的任意子集 I 亦为 $\mathscr{I}$ 的元素.

3. 若 I 和 J 均为 $\mathscr{I}$ 的元素，且集合 I 中元素的数目少于 J 中元素的数目，则在差集 $J-I$ 中有元素 e，使得集合 $I\cup\{e\}$ 为 $\mathscr{I}$ 的元素.

这里 E 为有限集，$\mathscr{I}$ 为 E 的某些子集组成的集族. 条件 1 和 2 为定义独立系统的条件，拟阵就定义为满足条件 3 的独立系统. 对于拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$，称 $\mathscr{I}$ 中的元素为独立. 称不属于 $\mathscr{I}$ 的 E 的子集为相关集. 拟阵的极大独立集称为拟阵的基；而拟阵的极小相关集称为拟阵的圈，这二类互为对称的集合在拟阵中占重要位置. 对于 E 的元素 e_1,e_2，若 $\{e_1\}$，$\{e_2\}$ 均为独立集，但 $\{e_2,e_2\}$ 为相关集，称 e_1,e_2 为拟阵的平行元素. 条件 3 是独立集之间的交换性质，它类似于线性空间中线性独立向量组之间的交换性质. 对于拟阵而言，条件 3 是本质的，称为拟阵交换性质. 不同类型的交换性质往往导致不同类型的组合系统. 条件 1,2,3 以独立的形式出现，因此称为拟阵的独立性公理. 拟阵有多达数十种形式迥异但本质等价的公理系统. 这是拟阵独有的特点.

当惠特尼(Whitney,H.)于1935年奠定了拟阵的基本理论之后,拟阵在理论和应用方面均获得了迅速的发展.图论,尤其是平面图及其对偶的研究是刺激拟阵发展的一个重要方面.当一个平面图以不同的形式嵌入到一个平面上时,其对偶图往往并不同构.但是它们却具有许多共同性质,并体现在不同对偶图中那些不构成圈的边所组成的子集之上.而用拟阵的语言来说,就是在拟阵的独立集上.因此,在这个意义上,可把拟阵视为图论的推广.在另一个方面上,由于有限几何格本质上就是拟阵,拟阵和格论的结合,一方面拟阵得益于格论在理论上的帮助,另一方面拟阵也刺激了格论的研究.拟阵研究发展的第三个重要方向是拟阵和组合优化的结合.建立在拟阵上的组合优化问题不仅本身就代表相当广泛的实际问题,而且更主要的是,此类问题的突出的优越性使得这类问题成为组合优化问题中较为容易的一类问题.它们带来的启示,为其他组合优化问题开拓了理论上的视野.作为拟阵的例子,取 A 为域 F 上的 $m\times n$ 矩阵,A 的 n 个列向量组成集合 E,E 中所有线性独立向量组构成拟阵的独立集族 $\mathscr{I}$.又如,取 E 为图 $G=(V,E)$ 中的边集 E,拟阵的独立集为 E 的不含圈的子集.若 E 本身就是有限阶的矩阵的集合,独立性视为线性无关,则这种拟阵被称为矩阵拟阵.特别地,当 E 为有限维的向量的集合时,被称为向量拟阵.若向量拟阵中,其向量均为二元有限域上的,则称它为二元拟阵.

相关集(dependent set)　见"拟阵".

拟阵的基(base of a matroid)　见"拟阵".

拟阵的圈(circuit of a matroid)　见"拟阵".

拟阵的独立性公理(independence axioms of matroid)　见"拟阵".

拟阵交换性质(exchange-property of matroid)　见"拟阵".

矩阵拟阵(matrix matroid)　见"拟阵".

向量拟阵(vector matroid)　见"拟阵".

二元拟阵(binary matroid)　见"拟阵".

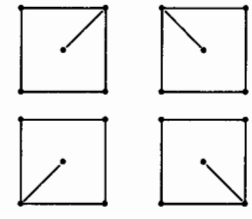
对偶拟阵(dual matroid)　亦称正交拟阵.一种组合构形.它是由拟阵 M 导出的拟阵 M^*.当拟阵 M 以基集族 $\mathscr{B}$ 表示时,$M=(E,\mathscr{B})$,则 $M^*=(E,\mathscr{B}^*)$,其中 $\mathscr{B}^*=\{E-B;B\in\mathscr{B}\}$.因此,当 B 为拟阵 M 的基时,$E-B$ 就是对偶拟阵的基.对于拟阵而言,其对偶拟阵总存在,而且 $M^{**}=(M^*)^*=M$.如此完整的对称性是拟阵特有的重要性质.这一点,在将拟阵应用到组合优化的理论时更为明显.

正交拟阵(orthogonal matroid)　即"对偶拟阵".

匹配拟阵(matching matroid)　一类特殊的拟阵.它是建立在图 $G=(V,E)$ 上的拟阵.节点集 V 的子集 A 为此拟阵的独立集,当且仅当图 G 有匹配覆盖 A.例如,当 G 为三角形时,若其顶点为 a,b,c,则相应的匹配拟阵的独立集为 $\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$.

圈拟阵(circuit matroid)　亦称多边形拟阵.一类特殊的拟阵.它是建立在图 $G=(V,E)$ 上的一类拟阵 $M(G)$,其独立集为不含圈的边集 E 的子集.因此,圈拟阵的直观形象十分鲜明.由于不同构的图会有相同的圈拟阵,对圈拟阵的研究并不能取代图的研究,它只能看做图的一种延伸.对于圈拟阵 $M(G)$,其圈正是图 G 的圈,所以圈拟阵亦称多边形拟阵.图 G 的上圈是 E 的子集 A,将 A 从 G 中移去以后会增加 G 的连通分支的数目.正如 G 的圈构成 $M(G)$ 的圈一样,以 G 的上圈为圈,对应地得到 G 上的另一类拟阵,称为上圈拟阵,上圈拟阵亦称键拟阵.圈拟阵和上圈拟阵互为对偶,且在任何域上均可表示.记上圈拟阵为 $M^*(G)$.

由于圈拟阵和上圈拟阵具有明显的图的特征,所以借助于同构的概念,可将它们延伸到其他一般拟阵.拟阵 $M_1=(E_1,\mathscr{I}_1)$,$M_2=(E_2,\mathscr{I}_2)$ 同构,当且仅当在 E_1 和 E_2 之间有双射 φ,并保持独立性.对于拟阵 M,若有图 G 存在,使得 M 与 G 的圈拟阵同构,则称 M 是可图的或称 M 为图拟阵.对应地,若 M 与 G 的上圈拟阵同构,则称 M 是可上图的,或称 M 为上图拟阵.例如,完全图 K_5,完全二部图 $K_{3,3}$ 的圈拟阵 $M(K_5)$ 和 $M(K_{3,3})$ 是可图的,但不是可上图的.更一般地,G 为平面图,当且仅当它的圈拟阵 $M(G)$ 是可上图的.因此,拟阵的可图性,本质上刻画了图的平面性.



特别地,当 G 为欧拉图时,它的边集能划分为圈.而在欧拉图上建立的圈拟阵,称为欧拉拟阵.更一般地,对于建立在集合 E 上的拟阵 M,若 E 可以表示为 M 的互不重叠的圈的并集,则称 M 为欧拉拟阵.若 M 的所有圈,其中元素的个数均为偶数时,则称 M 为偶拟阵.二元拟阵为欧拉拟阵当且仅当其对偶是二元拟阵.作为一个既不是图拟阵也不是上图拟阵的例子,它就是旋拟阵.此拟阵由轮图 $W_{n+1}=K_1+C_n$ 产生,它的圈对应为 C_n 添加一条幅.例如,对于 W_5,其圈如上图.

多边形拟阵(polyhedral matroid)　即"圈拟阵".

图拟阵(graphic matroid)　见"圈拟阵".

上图拟阵(cographic matroid)　见"圈拟阵".

欧拉拟阵(Euler matroid)　见"圈拟阵".

键拟阵(bond matroid)　见"圈拟阵".

偶拟阵(even matroid)　见“圈拟阵”.

旋拟阵(whirl matroid)　见“圈拟阵”.

拟阵的基公理(basis axiom of matroid)　刻画拟阵的一种法则. 有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{B}$ 满足如下条件：

1. $\mathscr{B}$ 非空.

2. $\mathscr{B}$ 中的元素之间均不具有集合的包容关系.

3. B_1, B_2 为 $\mathscr{B}$ 中的元素，且 $e_1 \in B_1$，则在 B_2 中有元素 e_2，使得 $(B_1-\{e_1\})\cup\{e_2\}$ 为 $\mathscr{B}$ 中的元素.

这几个条件即为基公理，由它决定的集族 $\mathscr{B}$，其元素即为拟阵的基. 因此，基公理是刻画拟阵的又一等价形式. 条件 2 表明 $\mathscr{B}$ 是一条反链，而条件 3 称为基交换公理，它和线性空间理论中的基交换定理是一致的. 基交换公理可以等价叙述为如下的中间基公理：对于 E 的任意子集 X, Y，且 $X\subseteq Y$，若在 $\mathscr{B}$ 中有元素 B_1, B_2，使得 $X\subseteq B_1, B_2\subseteq Y$，则在 $\mathscr{B}$ 中有元素 B_3 存在，使得 $X\subseteq B_3\subseteq Y$.

拟阵的基(bases of matroid)　见“拟阵的基公理”.

基交换公理(basis exchange axiom)　见“拟阵的基公理”.

中间基公理(middle basis axiom)　见“拟阵的基公理”.

拟阵的圈公理(circuit axiom of matroid)　刻画拟阵的一种法则. 有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{C}$ 满足如下条件：

1. 空集 $\varnothing$ 不是 $\mathscr{C}$ 中的元素.

2. $\mathscr{C}$ 中的所有元素之间均不具有集合的包容关系.

3. 对于 $\mathscr{C}$ 中任意元素 C_1, C_2，以及 E 中任意元素 e，在 $\mathscr{C}$ 中存在 C_3 使得 $C_3\subseteq(C_1\cup C_2)-\{e\}$.

这几个条件即为圈公理，并称 3 为圈消去公理. 对于 E 的子集 C，它为拟阵 $M(E,\mathscr{I})$ 的圈，当且仅当它为 $\mathscr{C}$ 的元素，而 $\mathscr{C}$ 由圈公理决定. 因此，拟阵圈公理是拟阵的一个等价形式.

消去公理(circuit eliminate axiom)　见“拟阵的圈公理”.

拟阵的秩(rank of matroid)　刻画拟阵的一个函数. 设 r 是定义在有限集 E 的子集族上的函数：

$$r(A)=\max\{|I|\,|\,I\subseteq A \text{ 且 } I\in\mathscr{I}\},$$

这里 $|I|$ 表示集合 I 中元素的数目，$\mathscr{I}$ 为拟阵的独立集族 $A\subset E$. 这就是拟阵的秩. 从序观点看，拟阵的秩函数与集合之间的包容关系保持同序性：对于 E 的任意子集 X, Y，若 $X\subseteq Y$，则 $r(X)\leqslant r(Y)$. 拟阵秩函数最重要的性质是它的半模性：对于 E 的任意子集 X, Y，有

$$r(X\cup Y)+r(X\cap Y)\leqslant r(X)+r(Y).$$

表明了拟阵和半模格的本质关联，这对于拟阵的处理带来明显的优越性. 与其他组合系统不相同之处，从秩函数观点看，是单一秩增性. 对于 E 的任意子集 X 和任意元素 e，有 $r(X\cup\{e\})=r(X)$ 或 $r(X)+1$.

拟阵的秩公理(rank axiom of matroid)　刻画拟阵的一种法则. 它是定义在有限集 E 的子集族上的函数 r 所满足的条件：

1. 对于 E 的任意子集 X，有 $r(X)\leqslant|X|$.

2. 对于 E 的任意子集 X, Y，若 $X\subseteq Y$，则

$$r(X)\leqslant r(Y).$$

3. 对于 E 的任意子集 X, Y，有

$$r(X\cup Y)+r(X\cap Y)\leqslant r(X)+r(Y).$$

r 为拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$ 的秩函数，当且仅当 r 满足上述秩公理. 而秩函数决定之后，可由它来决定拟阵的独立集：E 的子集 I 为独立集，当且仅当 $r(I)=|I|$. 因此，拟阵的秩公理是拟阵的等价形式. 若将条件 1，2 换成条件 1′，2′：

1′. $r(\varphi)=0$.

2′. 对于 E 的任意子集 X 和任意元素 e，有

$$r(X\cup\{e\})=r(X) \text{ 或 } r(X)+1,$$

则秩公理可以等价地改换为条件 1′，2′ 和 3.

拟阵的闭包算子(closure operator of matroid)　一类特殊的映射. 指从有限集 E 的所有子集构成的集族 2^E 到其自身的映射，这里 E 由拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$ 给定. 拟阵的闭包算子 σ 要满足下述闭映射的条件：

1. 对于 E 的任意子集 X，有 $X\subseteq\sigma(X)$.

2. 对于 E 的任意子集 X, Y，若 $X\subseteq Y$，则

$$\sigma(X)\subseteq\sigma(Y).$$

3. 对于 E 的任意子集 X，$\sigma(\sigma(X))=\sigma(X)$.

此外，σ 还要满足闭包交换公理：对于 E 的任意子集 X 及任意元素 e_1, e_2，若 $e_1\in\sigma(X\cup\{e_2\})-\sigma(X)$，则 $e_2\in\sigma(X\cup\{e_1\})-\sigma(X)$. 此交换公理具有良好的对称性，对于拟阵而言，它是本质的. 对于矩阵拟阵，向量集的线性包为闭包算子. 对于由图 $G=(V,E)$ 建立的图拟阵，边集 E 的子集 A，定义 $e\in\sigma(A)$ 当且仅当 e 的两端点可由 A 的一条路连结，此时 σ 为该图拟阵上的一个闭包算子. 由拟阵闭包算子 σ 决定闭集，它是满足下述条件的 E 的子集 A：$\sigma(A)=A$，亦称为拟阵的平集. 拟阵的平集具有一般平集所共有的性质，例如，平集族对于集合交运算是封闭的. 此外，还具有特殊的单一秩增性：若 F 为拟阵的平集，且 F 不包含元素 e，则

$$r(F\cup\{e\})=r(F)+1,$$

这里 r 为拟阵的秩函数.

以拟阵 M 的所有平集为元素构成格 $L(M)$，其序关系为集合包容关系，则此格是几何格. 拟阵 M 正是借助于 $L(M)$ 过渡到格理论，例如：$L(M)$ 的基

元为 M 的秩为 1 的平集；拟阵 M 的秩函数作用在 M 的平集上时，给出格 $L(M)$ 的高度函数等. 设有拟阵的极大平集 H，若 $H\neq E$，则称 H 为拟阵的超平面. 换言之，拟阵的超平面 H 满足 $r(H)=r(E)-1$. 拟阵的超平面除具有通常的性质(例如，超平面之间的不可比性等)外，还具有如下特有性质：对于拟阵的两个不相同的超平面 H_1,H_2 以及 E 的任意元素 e，有超平面 H 存在，它包容 $(H_1\cap H_2)\cup\{e\}$. 类似于一般的作法：把闭集的补集定义为开集，对于拟阵而言，则把平集的补集称为拟阵的开集. 换言之，E 的子集 O 为拟阵的开集，当且仅当有拟阵的平集 F，使得 $O=E-F$.

闭包交换公理(closure exchange axiom)　见“拟阵的闭包算子”.

拟阵的平集(flat of matroid)　见“拟阵的闭包算子”.

拟阵的超平面(hyperplane of matroid)　见“拟阵的闭包算子”.

拟阵的闭集(closed set of matroid)　见“拟阵的闭包算子”.

拟阵的闭包公理(closure axiom of matroid)　刻画拟阵的一种法则. 具体地说，从有限集 E 的所有子集构成的集族 2^E 到其自身的映射 σ，满足如下称之为为闭包公理的条件：

1. 对于 E 的任意子集 X，有 $X\subseteq\sigma(X)$.

2. 对于 E 的任意子集 X,Y，若 $X\subseteq Y$，则
$$\sigma(X)\subseteq\sigma(Y).$$

3. 对于 E 的任意子集 X，有 $\sigma(\sigma(X))=\sigma(X)$.

4. 对于 E 的任意子集 X 以及任意元素 e_1,e_2，若 $e_1\in\sigma(X\cup\{e_2\})-\sigma(X)$，则有
$$e_2\in\sigma(X\cup\{e_1\})-\sigma(X).$$

简言之，拟阵的闭包公理给出满足闭包交换公理的闭包算子的存在性. 映射 σ 为拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$ 的闭包算子，当且仅当 σ 满足上述闭包算子公理. 当闭包算子 σ 给定之后，相应的拟阵也就惟一决定，这是因为：E 的子集 I 为独立集，当且仅当对于 I 的任意元素 e，均有 $\sigma(I-\{e\})$不包含 e. 因此，拟阵的闭包公理为拟阵的等价形式.

拟阵的平集公理(flat axiom of matroid)　亦称拟阵的闭集公理. 刻画拟阵的一种法则. 它是有限集 E 的某些子集组成的集族 $\mathscr{F}$，满足如下称之为平集公理的条件：

1. 集合 E 为 $\mathscr{F}$ 的元素.

2. 对于 $\mathscr{F}$ 的任意元素 F_1,F_2，其交集 $F_1\cap F_2$，仍为 $\mathscr{F}$ 的元素.

3. 记 $\mathscr{F}$ 的全部元素为 $F_1,F_2,\cdots,F_k$，它们均包容集 F，且对于任意 $1\leqslant i\leqslant k$，在 F 和 F_i 之间不存在其他平集，则 $F_1-F,F_2-F,\cdots,F_k-F$ 为 $E-F$ 的一个划分.

其中条件 3 对于拟阵而言是本质的，这就是说，对于不是拟阵的其他组合系统的平集，一般并不满足条件 3. 上述公理决定的 $\mathscr{F}$ 惟一地决定了拟阵的平集. 而平集决定后，可由其上的高度函数惟一地决定拟阵的秩函数. 因此，拟阵的平集公理为拟阵定义的等价形式.

拟阵的闭集公理(closed set axiom of matroid)　即“拟阵的平集公理”.

拟阵的超平面公理(hyperplane axiom of matroid)　刻画拟阵的一种法则. 即有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{H}$，满足如下称之为超平面公理的条件：

1. 集合 E 不是 $\mathscr{H}$ 的元素.

2. 对于 $\mathscr{H}$ 的任意两个不相同的元素 H_1,H_2，它们均不可比，即 $H_1\not\subseteq H_2$ 且 $H_2\not\subseteq H_1$.

3. 对于 $\mathscr{H}$ 的任意两个不相同的元素 H_1,H_2，以及 E 的任意元素 e，在 $\mathscr{H}$ 中存在元素 H，使得
$$(H_1\cap H_2)\cup\{e\}\subseteq H.$$

此公理决定的 $\mathscr{H}$ 惟一决定了拟阵的超平面. 换言之，E 的真子集 H 为拟阵的超平面，当且仅当 $H\in\mathscr{H}$. 当 $\mathscr{H}$ 决定以后，可由其元素的交集决定出拟阵的平集. 因此，拟阵的超平面公理为拟阵的等价形式.

拟阵的相关性公理(dependent axiom of matroid)　刻画拟阵的一种法则. 有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{D}$，满足如下称之为相关性公理的条件：

1. 空集$\varnothing$不是 $\mathscr{D}$ 的元素.

2. 若 E 的子集 D_1 包容 $\mathscr{D}$ 的某一元素 D，则 D_1 亦为 $\mathscr{D}$ 的元素.

3. 对于 $\mathscr{D}$ 的任意二元素 D_1,D_2，或者 $D_1\cap D_2$ 为 $\mathscr{D}$ 的元素，或者对于 E 的任意元素 e，使得 $(D_1\cup D_2)-\{e\}$为 $\mathscr{D}$ 的元素.

上述公理确定的集族 $\mathscr{D}$，完全确定了拟阵的相关集. 换言之，E 的子集 D 为拟阵的相关集，当且仅当 $D\in\mathscr{D}$. 因此，拟阵的相关性公理为拟阵的等价定义. 拟阵相关性公理和拟阵独立性公理，二者之间呈现着对应. 例如关于它们的第 2 条公理，一个是集合扩充构成 $\mathscr{D}$ 中一条上升的链，另一个是集合元素减少构成 $\mathscr{I}$ 中一条下降的链.

拟阵的开集公理(open set axioms of matroid)　刻画拟阵的一种法则. 有限集 E 的某些子集构成的集族 $\mathscr{O}$，满足如下称之为开集公理的条件：

1. 空集合$\varnothing$为 $\mathscr{O}$ 的元素.

2. 对于 $\mathscr{O}$ 中任意两元素 O_1,O_2，其并集 $O_1\cup O_2$，仍为 $\mathscr{O}$ 的元素.

3. 对于 $\mathcal{O}$ 中的任意元素 O_1, O_2 以及 $O_1 \cap O_2$ 中任意元素 e，在 $\mathcal{O}$ 中有元素 O 使得

$$(O_1 \cup O_2) - \{e\} \supseteq O \supseteq (O_1 \cup O_2) - (O_1 \cap O_2).$$

将开集公理与平集公理比较，可见二者之间有良好的对应. 拟阵的开集公理为拟阵的等价形式.

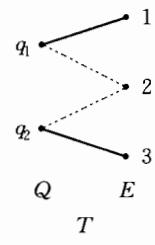
仿射拟阵(affine matroid)　一种组合构形. 它是与矩阵拟阵类似的拟阵 $M(E)$，不同的是，这里的 E 是仿射空间 A 中的有限点构成的集合，而且在 A 中没有真子仿射空间可以包含 E. 仿射拟阵 $M(E)$ 的独立集依次为单点集、两点构成的线段、三点构成的三角形、四点构成的四面体、多点组成的单纯形. 其单纯形上秩函数之值为构成单纯形的点数. 仿射拟阵的平集，是有关点集的仿射包与 E 的交集. 而它的基则是张成 E 的单纯形.

截元(transverse)　一种组合构形. 它是与有限集 E 的给定子集族有特定关系的 E 的一个子集. 对于有限集 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的特定子集 $T=\{e_{j_1}, e_{j_2}, \cdots, e_{j_t}\}$，称这样的 T 为 Q 的偏截元或相异代表集. 若它满足：

1. T 中的元素均不相同.

2. 对于由 E 的子集 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 构成的集族 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$，若从指标 $j_1, j_2, \cdots, j_t$ 出发，可以得到一组互不相同的指标 $i_1, i_2, \cdots, i_t$，并使得 $e_{j_k} \in q_{i_k}$，对所有的 k $(1 \leqslant k \leqslant t)$ 均成立.

在这里允许 $1 \leqslant t \leqslant n$. 而当 $t=m$ 时，称 T 为 Q 的截元. 例如，若 $E=\{1,2,3\}, q_1=\{1,2\}, q_2=\{2,3\}, Q=\{q_1, q_2\}$，则 $T_1=\{1\}, T_2=\{2\}, T_3=\{3\}$ 均为 Q 的偏截元，而 $T_4=\{1,3\}, T_5=\{2,3\}, T_6=\{1,2\}$ 均为 Q 的截元. 从组合论观点看，截元相应于二部图上的匹配，或者说一种对应关系. 它把集族归约为一个更容易处理的集合. 容易看到，当 T 为 Q 的偏截元时，T 的子集仍为 Q 的偏截元. 这种序关系类似于拟阵中独立集的相应性质.



因此，把以偏截元为其独立集的拟阵，称为截元拟阵. 对于截元拟阵，其对偶拟阵一般不再是截元拟阵. 但是，截元拟阵和匹配拟阵本质上是一回事，因为：一个拟阵是匹配拟阵，当且仅当它是截元拟阵. 这同时表明截元拟阵在组合论中的重要性.

当在拟阵 $M=(E, \mathcal{I})$ 和截元拟阵 M_T 之间有一一对应关系时，换言之，对于拟阵 M，有 $|E|=n$，此时以 E 的子集 $q_1, q_2, \cdots, q_m$ 构成的集族 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$，使得独立集族 $\mathcal{I}$ 与 Q 的偏截元集族一一对应，则称 Q 为拟阵 M 的截元表示. 例如，$E=\{a,b,c,d,e\}$，独立集为元素个数不超过 3 的 E 的所有子集. 若 $q_1=\{a,b,c\}, q_2=\{a,b,d\}, q_3=\{a,b,e\}$，则 $Q=\{q_1, q_2, q_3\}$ 为此拟阵的截元表示. 拟阵的截元表示并不惟一，例如，除 Q 以外，$\mathcal{E}=\{E,E,E\}$ 也是该拟阵的截元表示. 一般地，若 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_m\}$ 是拟阵的截元表示，则满足 $q_i \subseteq T_i \subseteq E$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 的 $\mathcal{T}=\{T_1, T_2, \cdots, T_m\}$ 也是拟阵的截元表示. 借助于截元表示，可以判定已知拟阵和截元拟阵的关系. 若 $M(E)$ 是秩为 k 的拟阵，$M'(E)$ 为一截元拟阵，且其截元表示为 $Q=\{q_1, q_2, \cdots, q_k\}$，则 $M(E)$ 的每一独立集亦为 $M'(E)$ 的独立集，当且仅当对于 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的任意子集 I，均有

$$r(\bigcap_{i \in I}(E-q_i)) \leqslant k-|I|,$$

这里 r 为拟阵的秩函数.

偏截元(partially transverse)　见“截元”.

截元拟阵(transverse matroid)　见“截元”.

截元表示(transverse presentation)　见“截元”.

霍尔定理(Hall's theorem)　刻画集族的截元存在性的原理. 令 $\mathcal{A}$ 为有限集 E 的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 组成的集族，则 $\mathcal{A}$ 有截元存在当且仅当对于指标集 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的任意子集 J，均有

$$|\bigcup_{i \in J} A_i| \geqslant |J|.$$

拉都定理(Rado's theorem)　刻画拟阵的截元存在性的原理. 若 r 为拟阵 $M(E)$ 的秩函数，E 的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 构成的集族 $\mathcal{A}$ 有截元存在且为拟阵 $M(E)$ 的独立集，当且仅当对于指标集 $\{1,2,\cdots,m\}$ 的任意子集 J 均有

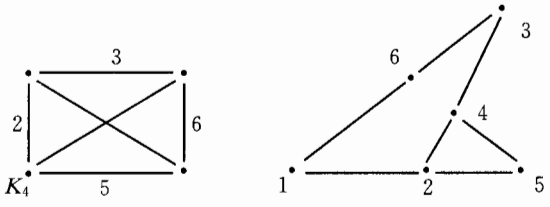
$$r(\bigcup_{i \in J} A_i) \geqslant |J|.$$

划分拟阵(partition matroid)　一种组合构形. 它是由在有限集 $E=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 上的划分 π 导出的拟阵 M. 若划分 π 把 E 分割为划分块 $B_1, B_2, \cdots, B_m$，并相应地设定非负整数 $d_1, d_2, \cdots, d_m$，则 E 的子集 I 为划分拟阵的独立集，当且仅当对于 $i=1,2,\cdots,m$，均有 $|I \cap B_i| \leqslant d_i$. 例如对于有向图 $G=(V, A)$，A 的子集 I 为这样一类集合：I 中没有两条边同指向一个节点，以这样的 I 为独立集可得一划分拟阵. 相应地，J 为 A 的这样一类集合：J 中没有两条边始于同一节点，以这样的 J 为独立集可得另一划分拟阵.

可表示拟阵(representable matroid)　亦称可坐标化拟阵. 一种组合构形. 它是与有限域 $GF(q)$ 上的矩阵拟阵 $M(A)$ 有一一对应关系的拟阵 $M(E)$. 称 $M(A)$ 为拟阵 $M(E)$ 的表示，矩阵 A 为拟阵的表示矩阵. 例如，在完全图 K_4 上的图拟阵 $M(K_4)$ 在二元域 $GF(2)$ 上是可表示的；但是，均匀拟阵 $U_{2,4}$ 在二元域 $GF(2)$ 上却是不可表示的，尽管它在其他域上是可表示的(见下图和下表). 可表示拟阵的对偶拟阵、子拟阵亦均为可表示的. 这是可表示拟阵的优越

性所在.

1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1



特别地，把能够在二元域 GF(2)上表示的拟阵称为二元拟阵. 均匀拟阵 $U_{2,3}$为二元拟阵. 因为对于三元素集 $E=\{a,b,c\}$，其任意真子集都是 $U_{2,3}$的独立集，而 E 为相关集. 相应的表示向量为 $\alpha(a)=(1,0),\alpha(b)=(0,1),\alpha(c)=(1,1)$. 均匀拟阵 $U_{2,4}$却不是二元拟阵. 二元拟阵包含了单模拟阵和图拟阵等重要拟阵. 在拟阵的表示理论中，二元拟阵是研究较早的一类.

可坐标化拟阵(coordinatizable matroid)　即“可表示拟阵”.

拟阵的表示(representation of matroid)　见“可表示拟阵”.

拟阵的表示矩阵(representative matrix of matroid)　见“可表示拟阵”.

单模拟阵(unimodular matroid)　亦称正则拟阵. 一类特殊的可表示的拟阵. 指在任何域上均可表示的拟阵. 单模拟阵亦可等价地由其表示矩阵定义. 设 $m\times n$ 矩阵 A 为拟阵$M(E)$在域 F 上的表示矩阵，$m<n$，且 A 的元素均取整数值. 若对于任意 k $(1\leqslant k\leqslant m)$，$A$ 的每个 $k\times k$ 子阵的行列式等于 0 或 ±1，则称矩阵 A 为全单模的. 拟阵 $M(E)$为单模拟阵，当且仅当$M(E)$有全单模的表示矩阵. 此外，单模拟阵亦可用其子结构刻画：$M(E)$为单模拟阵，当且仅当它没有与均匀拟阵 $U_{2,4}$、法诺拟阵 F_7 及其对偶 F_7^* 同构的子拟阵. 系数矩阵为全单模矩阵的线性规划关联许多组合优化问题，它们的优越性在于有多项式算法求其最优解.

全单模矩阵(total unimodular matrix)　见“单模拟阵”.

正则拟阵(regular matroid)　即“单模拟阵”.

单形拟阵(simplicial matroid)　一类特殊的拟阵. 它是以独立单形为独立集的拟阵. 当单形为 k 单形时，记单形拟阵为 S_k^A，这里 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，以 k 单形构成的集合$\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$的独立性是由$\partial(X_1,),\partial(X_2),\cdots,\partial(X_m)$的线性独立性来确定的，其中 ∂ 为边缘算子，满足：

$$\partial(\varnothing)=0,\partial(\{a_i\})=0,$$

$$\partial(\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\})=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\{a_{i_1}\cdots\hat{a}_{i_j}\cdots a_{i_k}\},$$

这里 $\hat{a}_{i_j}$表示把元素 a_{i_j}从该集合中删除掉. 因此若 X 为 k 单形，则 $\partial(X)$为$(k-1)$单形. 单形拟阵 S_k^A 是可表示拟阵，其表示矩阵记为 $s(n,k)=(s_{p,q})$，为

$$\binom{n}{k-1}\times\binom{n}{k}$$

矩阵. 其产生方法为，先把$(k-1)$单形按字典序排列，并以 p 表示其中之一，再把 k 单形亦按字典序排列，以 q 表示其中之一. 当 q 不包含 p 时令 $s_{p,q}=0$，当 q 包含 p 时，差集 $q-p$ 只含一个元素，则 $s_{p,q}$的值按此元素 a_{i_j}的下标 j 确定为$(-1)^{j-1}$. 例如，$s(4,3)$为如下矩阵：

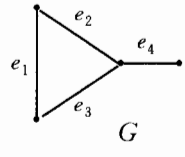
$$S(4,3)=\begin{array}{c}\begin{matrix}\{1,2,3\} & \{1,2,4\} & \{1,3,4\} & \{2,3,4\}\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&-1&-1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}\begin{matrix}\{1,2\}\\\{1,3\}\\\{1,4\}\\\{2,3\}\\\{2,4\}\\\{3,4\}\end{matrix}$$

因此，$\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\}$是独立的，且为单形拟阵 S_3^4 的基. 但是，$\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\}\}$是相关的.

拟阵多面体(matroid polyhedron)　一种组合构形. 它是由拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$的所有独立集的关联向量生成的多面体 P. 记 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，独立集 I 的关联向量 $v(I)=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，当 I 包含元素 e_i 时，$v_i=1$，否则 $v_i=0$. 拟阵多面体的优越性在于，它可以借助拟阵的秩函数 r 而表示为约束不等式的形式 $I(E,r)$：对于 E 的任意子集 F，有

$$\sum_{e\in F}x_e\leqslant r(F),$$

且对于 E 的任意元素 e，有 $x_e\geqslant 0$. 拟阵多面体 P 的顶点均为整值点. 这样建立在拟阵上的优化问题就可以归结为不考虑其解是否取整数值的一般线性规划问题，从而为拟阵上的优化问题开辟了一个新的领域. 例如，下图 G 上的图拟阵 $M(G)$，其多面体由下述不等式决定：



G

$$x_{e_1}\leqslant 1,x_{e_2}\leqslant 1,x_{e_3}\leqslant 1,x_{e_4}\leqslant 1,$$

$$x_{e_1}+x_{e_4}\leqslant 2,$$

$$x_{e_2}+x_{e_4}\leqslant 2,$$
$$x_{e_3}+x_{e_4}\leqslant 2,$$
$$x_{e_1}+x_{e_2}+x_{e_3}\leqslant 2,$$
$$x_{e_1}+x_{e_2}+x_{e_4}\leqslant 3,$$
$$x_{e_1}+x_{e_3}+x_{e_4}\leqslant 3,$$
$$x_{e_2}+x_{e_3}+x_{e_4}\leqslant 3,$$
$$x_{e_1}+x_{e_2}+x_{e_3}+x_{e_4}\leqslant 3,$$
$$x_{e_1}\geqslant 0,\ x_{e_2}\geqslant 0,\ x_{e_3}\geqslant 0,\ x_{e_4}\geqslant 0.$$

在以约束不等式表示的拟阵多面体里，若以 G 的满足下述条件的一般整值次模函数 f 取代拟阵的秩函数：

1. $f(\varnothing)=0$；

2. 对于 E 的任意子集 A,B，若 $A\subseteq B$ 则
$$f(A)\leqslant f(B);$$

3. 对于 E 的任意子集 A 和 B，有
$$f(A\cup B)+f(A\cap B)\leqslant f(A)+f(B);$$

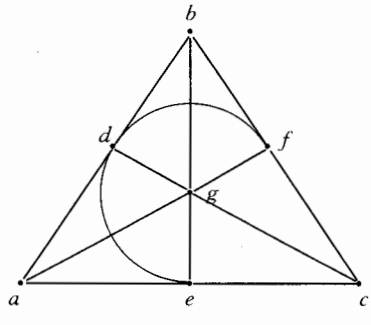
则不等式组 $I(E,f)$ 决定的多面体，其顶点仍对应于某个拟阵的独立集. 由 $I(E,f)$ 决定的拟阵称为多面体拟阵.

次模函数(submodular function)　见“拟阵多面体”.

多面体拟阵(polymatroid)　见“拟阵多面体”.

法诺拟阵(Fano matroid)　一种特殊的拟阵. 即二元拟阵 F_7，仅含有 7 个元素，其表示矩阵为

$$\begin{array}{c} a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f\ \ g \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$



而其在投影平面上的图像中，三个点位于同一条直线或同一条曲线上时，此三点构成 F_7 的相关集；否则为基. F_7 不是单模拟阵，因此，以 F_7 为其子拟阵的拟阵也不是单模拟阵.

拟阵的删除运算(deletion on matroid)　一种变化拟阵的规则. 在拟阵 $M(E)$ 上，由 E 去除元素 e 后产生新拟阵 $M'=M_e(E')$ 的运算. $E'=E-\{e\}$ 的子集 I 为 M' 的独立集，当且仅当 I 为原拟阵 M 的独立集. 更一般地，设 T 为 E 的真子集，由 T 导出的新拟阵 $M(T)$，T 的子集为其独立集，当且仅当 T 为原拟阵的独立集. 这时把这一过程称为拟阵 M 对于 T 的限约运算. 并把经限约运算得到的新拟阵称为拟阵 M 的子拟阵. 与删除运算对称的有拟阵的收缩运算，它产生的新拟阵 $M''=M_e(E')$，E' 的子集 I 为 M'' 的独立集，当且仅当 $I\cup\{e\}$ 为原拟阵 M 的独立集. 删除运算和收缩运算互为对偶，且可交换，

$$(M')^*=(M^*)'',\quad (M'')^*=(M^*)',$$

其中用“$*$”表示对偶. 把拟阵 M 经过若干次删除运算和收缩运算之后得到的新拟阵称为拟阵 M 的次形. 子拟阵和次形的结构特征，有时可刻画原拟阵的性质. 例如，图拟阵 $M(G)$ 为上图拟阵，当且仅当 $M(G)$ 不含次形 $M(K_5)$ 和 $M(K_{3,3})$. 它是图论中的库拉托夫斯基定理对应的拟阵形式.

均匀拟阵(uniform matroid)　一种特殊的拟阵. 它是只以有限集 E 的子集 I 中包含元素的数目多少决定其独立性的拟阵 $U_{k,n}$，其中 $n=|E|$，E 的子集 B 为拟阵的基，当且仅当 B 由 k 个元素组成. 类似地，C 为拟阵的圈，当且仅当 C 为 $k+1$ 个元素组成. H 为拟阵的超平面，当且仅当 H 由 $k-1$ 个元素组成. 例如，$U_{2,3}$ 中的 E 视为欧氏空间里一条直线上的 3 点，每一个单点构成 $U_{2,3}$ 的超平面，每两点构成该拟阵的一个基，而全部三个点是它的惟一的圈.

拟阵的限约运算(restriction on matroid)　见“拟阵的删除运算”.

拟阵的收缩运算(contraction on matroid)　见“拟阵的删除运算”.

子拟阵(submatroid)　见“拟阵的删除运算”.

拟阵的次形(minor on matroid)　见“拟阵的删除运算”.

拟阵的自环(loop of matroid)　一种组合构形. 指拟阵中不构成独立集的单个元素集. 当拟阵为图拟阵 $M(G)$ 时，拟阵的自环和图 G 的自环是一致的. 拟阵的自环可等价地描述为：

1. 空集 $\varnothing$ 的闭包 $\overline{\varnothing}$ 中的元素.

2. $r(\{e\})=0$，r 为拟阵的秩函数.

3. 若包含 e 的集合 A 为拟阵 M 的支撑集，则 $A-\{e\}$ 亦为 M 的支撑集.

4. e 不在拟阵的任一基之中等.

与拟阵自环对应的有拟阵的单点割集：当 e 为对偶拟阵 M^* 的自环时，称 e 为拟阵 M 的单点割集.

单点割集(isthmus of matroid)　见“拟阵的自环”.

拟阵的并(union of matroids)　产生新拟阵的运算. 它是 E 上的两个拟阵 $M_1(E)$ 和 $M_2(E)$ 按如下方式产生新拟阵 $\widetilde{M}=(M_1\vee M_2)(E)$ 的一种二元运算：$I_1\cup I_2$ 为 $\widetilde{M}$ 的独立集，当且仅当 I_1 为 M_1 的独

立集或 I_2 为 M_2 的独立集. 其秩函数 $\tilde{r}$ 亦由 M_1, M_2 的秩函数 r_1, r_2 给出：

$$\tilde{r}(A)=\min_{H\subseteq A}\{r_1(H)+r_2(H)+|A-H|\}$$
$$=\max_{H\subseteq A}\{r_1(H)+r_2(A-H)\}.$$

对称地，有拟阵的交，可以对偶地表示为

$$M_1\wedge M_2=(M_1^*\vee M_2^*)^*.$$

拟阵的交(intersection of matroids)　见“拟阵的并”.

拟阵的直和(direct sum of matroids)　拟阵的一种运算. 由拟阵 $M_1=M_1(E_1)$ 和 $M_2=M_2(E_2)$ 产生新拟阵 $M=M_1\oplus M_2$ 的二元运算，这里 E_1, E_2 满足 $E_1\cap E_2=\varnothing$. $E_1\cup E_2$ 的子集 B 为 M 的基，当且仅当 B 可表示为 M_1 的基 B_1 和 M_2 的基 B_2 的并集. M 的秩函数 r 由 M_1, M_2 的秩函数 r_1 和 r_2 给出：对于 $E_1\cup E_2$ 的任意子集 A，

$$r(A)=r_1(A\cap E_1)+r_2(A\cap E_2).$$

拟阵的贪婪算法(matroid greedy algorithm)　一种解决极值问题的算法. 具体地说，给出建立在拟阵 $M(E,\mathscr{I})$ 上的极值问题

$$\max_{I\in\mathscr{I}}\sum_{e\in I}w(e)$$

最优解的一类直接算法，其中 $w(e)\geqslant 0, e\in E$ 为定义在 E 上的权. 此算法的结论是，字典序最大的独立集是此问题的最优解. 换言之，把 E 中的元素按权从大到小排列，先取第一个元素，然后按序依次扩充独立集直到不能扩充为止，这样得到的独立集为问题的最优解. 具体的算法可写为：

1. $w(e_1)\geqslant w(e_2)\geqslant\cdots\geqslant w(e_n)$.
2. $B\leftarrow\varnothing$.
3. $i\leftarrow 1$.
4. IF $B\cup\{e_i\}\in\mathscr{I}$ THEN $B\leftarrow B\cup\{e_i\}$.
5. $i\leftarrow i+1$.
6. IF $i\leqslant n$ THEN GOTO 4.
7. STOP.

贪婪算法能够奏效，这对拟阵而言是本质的. 拟阵的独立性公理等价于下述条件：

1. 空集 $\varnothing$ 为 $\mathscr{I}$ 的元素.
2. $\mathscr{I}$ 的元素 J 的任意子集 I 仍为 $\mathscr{I}$ 的元素.
3. 对于 E 上的任意权 $w(e)\geqslant 0, e\in E$，均有独立集 I 使得

$$\sum_{e\in I}w(e)$$

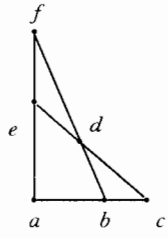
达到最大.

组合几何(combinatorial geometry)　一种组合构形. 它是既不含自环也不含平行元素的拟阵 $M(E)$. 这样的拟阵亦称简单拟阵. 从 $M(E)$ 上的闭包算子看，组合几何为满足下述条件的拟阵：

1. 空集 $\varnothing$ 的闭包 $\overline{\varnothing}=\varnothing$.
2. 对于 E 的任意元素 e，有 $\bar{e}=e$.

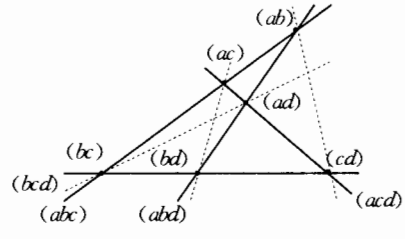
组合几何的点、线、面等分别为秩为 1,2,3 的平集，上点、上线、上面则分别为上秩为 1,2,3 的平集. 特别地，上点又称为组合几何的超平面. 组合几何关切的点、线、面这些基本要素的关系是由集合包容关系导出的序关系，一种特殊的关联关系，例如，一个点是否在一条线中，一条线是否在一个面中等. 其背景在具体意义上可以差别极大，既可以是集合划分之间的精细关系，也可以是连通图上边集构成的圈的关系. 当组合几何的维数较低时，可以把其点、线、面等要素之间的关联关系一一对应于投影空间上点集的线性相关性，从而使得组合几何具有明显的直观性.

考虑在投影平面 S 上的点 a,b,c,d,e,f 组成的点集 E，其中 $\{a,e,f\},\{a,b,c\},\{b,d,f\},\{c,d,e\}$ 共线如右图所示. S 中平集的秩为决定该平集的最少点数. 因此，此组合几何 $G(E)$ 的平集可由 S 上的平集 F 与 E 的交集 $F\cap E$ 给出，$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},\{f\}$ 为第一类平集，$\{a,b,c\},\{c,d,e\},\{b,d,f\},\{a,e,f\},\{a,d\},\{c,f\},\{b,e\}$ 为第二类平集. 它们的秩由满足 $F\cap A=A$ 的投影空间上的平集 F 的秩给出. 因此，第一类平集的秩为 1，这样它们是 $G(E)$ 中的点；而第二类平集的秩为 2，它们为 $G(E)$ 中的线，尽管平集 $\{a,d\},\{b,e\},\{e,f\}$ 中并没有联线，这是组合几何与投影几何的不尽相同之处.



简单拟阵(simplicial matroid)　见“组合几何”.

划分几何(partition geometry)　一类组合几何. 它是由有限集 E 上的划分导出的组合几何. 设 $|E|=n$，划分 π 包含有 k 个划分块，记 π 的秩 $r(\pi)=n-k$. 因此，划分 π 为划分几何的一个点，当且仅当 π 的最大划分块惟一且仅含两个元素. 例如，$n=4$，$\pi_1=(ab)(c)(d)$，$\pi_2=(a)(bc)(d)$ 均为点. 此时，简记 $\pi_1=(ab)$，$\pi_2=(bc)$. 而划分 π 为线，既可为 $\pi_3=(abc)(d)$，也可为 $\pi_4=(ab)(cd)$ 等. 在划分几何中，点与线的共线关系由划分之间的精细关系决定. 例如，π_1,π_2 均为 π_3 的精细划分，所以，π_1 和 π_2 这两点均在线 π_3 之上. 其他如图所示. E 的元素可由划分 π 建立等价关系 (π)，$a(\pi)b$ 当且仅当 a,b 同属 π 的一个划分块. 对于任意划分 a 和 π 均可建立格的



结运算和交运算. $a(\pi\vee\sigma)b$ 当且仅当有元素 $u_0=a$, $u_1,u_2,\cdots,u_t=b$,使得对所有的 $0\leqslant i\leqslant t$ 有 $u_i(\pi)u_{i+1}$ 或 $u_i(\sigma)u_{i+1}$; $a(\pi\wedge\sigma)b$ 当且仅当 $a(\pi)b$ 且 $a(\sigma)b$. 从而,由划分几何导致格.

接合函数(incidence function)　亦称关联函数. 一类映射. 即从局部有限偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 的笛卡儿积集 $P\times P$,到数域 F 上且满足如下条件的映射 f:当 E 的任意元素 x,y 没有序关系,即 $x\not\leqslant y$ 时,$f(x,y)=0$. 从组合几何观点看,x,y 没有序关系也就是没有接合关系. 例如,δ 函数 $\delta(x,y)$ 仅当 $x=y$ 时其值为 1,其他情形均为 0;ζ 函数 $\zeta(x,y)$ 仅当 $x\leqslant y$ 时其值为 1,而其他情形均为 0. 若 $\mathscr{A}_F(p)$ 为如上所有接合函数组成的集合,并在其上定义接合函数的加法运算、数乘运算以及卷积运算:

$$(f+g)(x,y)=f(x,y)+g(x,y);$$
$$(rf)(x,y)=rf(x,y),r\in F;$$
$$(f*g)(x,y)=\sum_{x\leqslant z\leqslant y}f(x,z)g(z,y),$$

则称 $\mathscr{A}_F(P)$ 为 P 的接合代数. 而且它关于偏序集 P 是惟一的,不仅如此,当不同的偏序集 P_1,P_2 产生的接合代数 $\mathscr{A}_F(P_1)$ 和 $\mathscr{A}_F(P_2)$ 同构时,偏序集 P_1 和 P_2 亦同构.

关联函数(incident function)　即"接合函数".

接合代数(incidence algebra)　见"接合函数".

默比乌斯函数(Möbius function)　一类结合函数. 即从有限偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 的笛卡儿积集 $P\times P$ 映到整数集 $\mathbf{Z}$ 上且满足如下条件的映射 μ:

1. 若 $x\not\leqslant y$ 则 $\mu(x,y)=0$.

2. $\sum_{x\leqslant z\leqslant y}\mu(x,z)=\delta(x,y)$,

这里 $\delta(x,y)$ 的值仅当 $x=y$ 时为 1,其他均为 0. 条件 1 和 2 分别对应于 x 和 y 之间无接合关系及有接合关系. 且条件 2 等价于 $\mu(x,x)=1$ 和

$$\mu(x,y)=-\sum_{x\leqslant z<y}\mu(x,z).$$

因此,$\mu(x,y)$ 的值可以从 $y=x$ 出发,依次递推地求出. 这表明 $\mu(x,y)$ 仅与区间 $[x,y]$ 有关,而与 P 的其他部分无关. 特别地,当 y 覆盖 x 时,$\mu(x,y)=-1$. 这样偏序集 P 的结构可表现为函数 $\mu(x,y)$ 的简洁数字值. 条件 2 还可代之以其对称形式:

$$\sum_{x\leqslant z\leqslant y}\mu(z,y)=\delta(x,y).$$

对于 P 上的函数 f 和 g,若 g 为 f 的和函数:

$$g(x)=\sum_{y\geqslant x}f(y),$$

则可借助于 μ 而把 f 表示出来

$$f(x)=\sum_{y\geqslant x}\mu(x,y)f(y).$$

从形式上看,若把 g 对应于积分,则 μ 对应于积分逆公式中的导数. 若 μ^* 为 P 的对偶偏序集 P^* 上的默比乌斯函数,则 $\mu^*(x,y)=\mu(y,x)$. 此外,对于偏序集 P 和 Q 的笛卡儿积集 $P\times Q$ 上的默比乌斯函数,有 $\mu_{P\times Q}((x,y),(u,v))=\mu_P(x,u)\mu_Q(y,v)$.

默比乌斯不变量(Möbius invariant)　一种度量. 指默比乌斯函数在拟阵 $M(E)$ 上的不变量,记为 $\mu(L)=\mu_L(0,1)$,这里 L 为 M 的平集构成的格,0 和 1 分别为 L 上的最小元和最大元,$\mu_L(x,y)$ 为格 L 上的默比乌斯函数. 对于 L 上的区间 $[u,v]$,其上的默比乌斯不变量为 $\mu_L(u,v)$. 这样可以把偏序集上的默比乌斯函数扩充到拟阵 $M(E)$ 上:当 X,F 均为 L 的元素时,取 $\mu_M(X,F)=\mu_L(X,F)$;当 F 为 L 的元素,而 X 不是 L 的元素时,取 $\mu_M(X,F)=0$;当 F 不是 L 的元素时,$\mu_M(X,F)$ 无定义;当 F 为 L 的元素,W 为 E 的子集时,

$$\mu_M(W,F)=\sum_{\substack{W\subseteq X\subseteq F\\ \overline{X}=F}}(-1)^{|X-W|},$$

其中,$\overline{X}$ 为 X 的闭包. 对于均匀拟阵 $U_{k,n}$,其默比乌斯不变量

$$\mu(U_{k,n})=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{r+1}\binom{n}{r}\quad(0<k\leqslant n).$$

而对于布尔代数 $B_n=U_{n,n}$,$\mu(B_n)=(-1)^n$.

拟阵上的默比乌斯不变量 $\mu(M)$ 具有类似于图的不变量的如下性质:

1. 当 E 的元素 e 不是拟阵的单点割集时,则

$$\mu(M)=\mu(M-e)-\mu\left(\frac{M}{e}\right),$$

这里 $M-e$,$M\backslash e$ 分别为关于 e 的删除和收缩.

2. 若 M 为 M_1,M_2 的直接和,即 $M=M_1\oplus M_2$,则 $\mu(M)=\mu(M_1)\mu(M_2)$.

塔特-格罗腾迪克不变量(Tutte-Grothendieck invariant)　一种度量. 指拟阵 M 上的且满足如下条件的不变量 f:

1. 当拟阵 M_1,M_2 同构时,$f(M_1)=f(M_2)$.

2. 若 M 为 M_1,M_2 的直接和,即 $M=M_1\oplus M_2$,则 $f(M)=f(M_1)f(M_2)$.

3. 当 M 的元素 e 不是自环,或单点割集时,

$$f(M)=f(M-e)+f\left(\frac{M}{e}\right),$$

这里 $M-e$ 和 $M\backslash e$ 分别为 M 关于 e 的删除和收缩.

例如,拟阵 M 的秩母函数为此类不变量:

$$R(M;u,v)=\sum_{X\subseteq E}u^{r(M)-r(X)}v^{|X|-r(X)}.$$

拟阵特征多项式(characteristic polynomial of matroid)　一类组合不变量. 拟阵 M 上的如下多项式:

$$P(M;\lambda)=\sum_{F\in L}\mu_M(\varnothing,F)\cdot\lambda^{r(M)-r(F)}.$$

这里 L 为 M 之平集组成的格,μ_M 为拟阵 M 上的默比乌斯函数. 当 $\lambda=0$ 时,$P(M,0)=\mu(M)$,即默比乌

斯不变量.关于拟阵的直接和、删除运算和收缩运算,拟阵特征多项式具有类似于默比乌斯不变量的性质.均匀拟阵 $U_{k,n}$ 和布尔代数 B_n 的特征多项式分别为:

$$P(U_{k,n};\lambda)$$
$$=(-1)^{k-1}(\lambda-1)\sum_{j=0}^{k-1}(-\lambda)^j\binom{n-1}{k-1-j},$$
$$P(B_n;\lambda)=(\lambda-1)^n.$$

语集(language) 一类组合构形.二元系统 $L=(A,\mathscr{L})$,其中 A 为由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有限集,$\mathscr{L}$ 为若干词组成.所谓词是以 A 的若干元素组成的序串,如 $\alpha=a_1a_2\cdots a_k$.$\mathscr{L}$ 中的词称为语集 L 的可行词,并约定空集∅为可行词.对于 L 的每一可行词 $\alpha=a_1a_2\cdots a_k$,做集合 $\tilde{\alpha}=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$.这样的 $\tilde{\alpha}$ 构成集族 $\tilde{\mathscr{L}}$,记为 $\mathscr{F}$.于是,语集 $L=(A,\mathscr{L})$ 导致组合系统 $\tilde{L}=(A,\mathscr{F})$.反之,亦可由组合系统,例如,拟阵 $M=(E,\mathscr{I})$ 按如下方式构造语集:A 为拟阵 M 的独立集,E 的元素组成的序串 $\alpha=a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为语集 L 的可行词,当且仅当 α 的字母均不相同,而且对于 $i=1,2,\cdots,k$,对称差

$$A\triangle\{a_1\}\triangle\{a_2\}\triangle\cdots\triangle\{a_i\}$$

均为 M 的独立集.因此,语集这种有序系统亦可视作组合系统.

语集的性质一般由词的遗传性质和词的替换性质刻画.换言之,可行词的哪一部分称为因子——仍为可行词.而交换性质通常有如下的三条规定:

1. $a_1a_2\cdots a_k$ 为可行词,对于 A 的元素 a,$aa_1\cdots a_k$ 却不是可行词,则有 a_i 存在使得 $aa_1\cdots\hat{a}_i\cdots a_k$ 为可行词,这里 $\hat{a}_i$ 表示将 a_i 从词中消去.

2. 对于可行词 α,β,若 α 的长度小于 β 的长度,记为 $l(\alpha)<l(\beta)$,则在 β 中有子词 β' 存在,使得 $l(\beta')\geqslant l(\beta)-l(\alpha)$,且 $\alpha\beta$ 为可行词.

3. 对于可行词 α,β,若 $l(\alpha)<l(\beta)$,则在 β 中有 a 使得 αa 为可行词.

称词的元素均不相同的语集为简单语集;而词中相邻的元素均不相同的语集,称为正常语集.

从形式上,可以在语集上引入组合系统的一些基本概念.称 L 的极大可行词为 L 的基词.而在 $\tilde{L}$ 上对于任意子集 X,定义秩函数

$$r(X)=\max\{|I|:I\subseteq X\text{ 且 }I\in\mathscr{F}\}.$$

但是,它们能起多大作用,只能视具体情况而定.

可行词(feasible word) 见"语集".

简单语集(simple language) 见"语集".

正常语集(normal language) 见"语集".

序阵(greedoid) 一种带一定条件的语集.它是满足下述条件的一类简单语集 $G=(E,\mathscr{L})$:

1. 空集∅为可行词.

2. 将可行词 α 任意分解为因子 β 和 γ,$\alpha=\beta\gamma$,则 β 为可行词.

3. 对于任意可行词 α,β,若 α 中元素数目多于 β,即 $|\alpha|>|\beta|$,则在 α 中有元素 e,将其拼接到 β 之后,βe 仍为可行词.

条件 2 是序阵 G 满足的遗传性质,而条件 3 刻画了替换性质.序阵 G 对应的组合系统记为 $\tilde{G}=(E,\tilde{\mathscr{L}})$,其中 $\tilde{\mathscr{L}}=\{\tilde{\alpha}=\{a_1,\cdots,a_k\}\mid\alpha=a_1\cdots a_k\in\mathscr{L}\}$.此时,条件 2 与 3 的无序形式分别为:

2′. 若 $A\in\tilde{\mathscr{L}}$,则有 $e\in A$,使得 $A-\{e\}\in\tilde{\mathscr{L}}$.

3′. 若 $A,B\in\tilde{\mathscr{L}}$,且 $|A|=|B|+1$,则有 $e\in A-B$,使得 $B\cup\{e\}\in\tilde{\mathscr{L}}$.

反之,若组合系统 $M=(F,\mathscr{F})$ 满足 1 和 3,则有惟一的序阵 $G=(E,\mathscr{L})$,使得 $\tilde{\mathscr{L}}=\mathscr{F}$.

因此,在两种意义上序阵是拟阵的推广.其一是从无序情形推广到有序情形;其二是若把它们都视为无序情形的组合系统,则序阵对应的遗传条件已大大减弱.对拟阵而言,独立集的所有子集均仍为独立集.对序阵而言,只要求一个次级子集仍为可行集.这样,拟阵的许多良好性质,对于序阵而言均不复存在了.例如,序阵一般不具有对偶结构;序阵的秩函数不再是次模函数,也不具有单一秩增性;序阵对应的多面体不再具有对偶全整性;贪婪算法对序阵不能奏效等.然而,序阵在一定程度上刻画了某些组合问题.例如搜索序阵.设 r 为有向图 $G=(V,A)$ 上的特定节点,A 的子集 S 为其可行词,当且仅当 S 为以 r 为根的森林.它的基词相应于 G 的以 r 为始点的搜索.而当 G 为无向图时,设可行词为包含 r 的连通子图,这样得到的序阵称为线搜索序阵.再如剥脱序阵.对于图上的已知的树 T,当 T 删除掉节点集 X 之后仍保持连通,称此余留部分 $T-X$ 为序阵的可行词对应地亦可从边集产生剥脱序阵:对于边集的子集 X,当 $T-X$ 仍保持连通时,称其为序阵的可行词.对弦图实施剥脱,则可获得弦图的剥脱序阵.又如耳型分解序阵.e_0 为 2 连通图 $G=(V,E)$ 上的特定边,$E-\{e_0\}$ 的子集 X 为可行词,当且仅当 $X\cup\{e_0\}$ 连通,且 $X\cup\{e_0\}$ 每个不可分离块均为单一边组成,否则这块必包含 e_0.

搜索序阵(searching greedoid) 见"拟序".

剥脱序阵(deleting greedoid) 见"拟序".

耳型分解序阵(ear decomposing greedoid) 见"拟序".

多面体拟阵的序阵(polymatroid greedoid) 一种组合构形.它是由多面体拟阵 (E,f) 派生的序阵 $G=(E,\mathscr{L}_f)$,这里 f 为符合要求的次模函数.序串 $a_1a_2\cdots a_k$ 为序阵 G 的可行词,当且仅当对于任意的 $i=1,2,\cdots,k$,均有 $f(a_1,a_2,\cdots,a_i)=i$.例如,在偏序集 $P=(E,\leqslant)$ 上,对于 E 的任意子集 X,设

$f(X)$表示由 X 产生的理想$I(X)$包含元素的个数. 此时(E,f)为一多面体拟阵. 于是,可由(E,f)派生序阵,记为 $G=(E,\mathscr{F})$,$X\in\mathscr{F}$ 当且仅当 X 为 P 上的一个理想. 称 $G=(E,\mathscr{F})$为偏序集序阵,或时间表序阵.

偏序集序阵(poset greedoid)　见"多面体拟阵的序阵".

时间表序阵(scheduling greedoid)　见"多面体拟阵的序阵".

序阵的秩函数(rank function of greedoid)　一类组合不变量. 设 $\tilde{L}=(E,\mathscr{F})$为组合形式序阵,对于 E 的子集 X,其秩函数为 $r(X)=\max\{|A||A\subseteq X$ 且 $A\in\mathscr{F}\}$,并满足:

1. $r(\varnothing)=0$.
2. 对于 E 的任意子集 X,$r(X)\leqslant|X|$.
3. 对于 E 的任意子集 X,Y,若 $X\subseteq Y$,则
$$r(X)\leqslant r(Y).$$
4. 若 $r(X)=r(X\cup\{e_1\})=r(X\cup\{e_2\})$,则
$$r(X)=r(X\cup\{e_1\}\cup\{e_2\}).$$

在这里,本质的条件 4 表明序阵的秩函数不是次模函数. 与拟阵类似,一个序阵由上述四个条件决定的秩函数惟一确定.

撰　稿　颜基义
审　阅　丁　仁　马仲蕃

图与超图

图论(graph theory)　组合学的一个分支. 它所研究的是一个集合连同其上的一个二元关系所形成的模型,称之为图. 历史上最早以这种抽象的图的模型研究问题的是欧拉(Euler,L.),他于 1736 年,以这种抽象的模型解决了哥尼斯堡七桥问题,并且发现了一个图存在欧拉环游的条件. 此外,欧拉对图论的贡献还有:第一次引进了哈密顿圈;注意到多面体的顶点数、棱数和面数之间存在一个简单的关系. 他所解决的骑士在棋盘上的旅行路线问题就是讨论哈密顿圈的存在. 这些足以使他成为图论之鼻祖. 可惜的是在中国文化发展的浩瀚文献中除了几何图形之外竟至今还没有发现在 20 世纪之前有关这种抽象的图的蛛丝马迹.

图论的早期发展多起因于数学游戏. 欧拉之后半个世纪,高斯(Gauss,C. F.)提出棋盘上的 8 后问题,实际上相当在一图上求一个最大独立集. 他还研究过平面上的闭曲线的相交问题. 第一次引出一个序列的交图并且提出仅用交图之结构性质即可确定一个序列是否对应于一个平面闭曲线交点形成的序列的一个猜想. 19 世纪中叶,在利斯廷(Listing,J. B.)的文章中出现了迷宫的游戏. 其后,塔里(Tarry,G.)所提供的方法实际上就是人们今天所说的深探法和追踪法. 英国数学家柯克曼(Kirkman,T. P.)以他解决的 15 女生问题而著称. 实际上,这个问题可以转化为确定一个图的色数的问题. 1852 年,格思里(Guthrie,F.)提出四色问题. 40 年后,希伍德(Heawood,P. J.)又提出一般的地图着色问题. 1880 年泰特(Tait,P. G.)就注意到了 3 正则图的 1 因子分解. 1891 年,佩特森(Petersen,J.)证明了 3 正则图存在一个 1 因子,从而,真正开始了图的对集、因子以及因子分解的理性发展. 直到 1947 年,塔特(Tutte,W. T.)才建立了图的因子分解理论的成熟基础.

另一方面,从 19 世纪中叶起,首先是德国物理学家基尔霍夫(Kirchhoff,G. R.)从电网络的研究中发现图中的圈可以用基本圈表示,并且得到了基本圈的数目与图的节点数和边数的线性关系. 接着,凯莱(Cayley,A.)第一次使引进树,并且研究了各种树的计数,他在这方面的工作一直影响到 1935 年波利亚(Polya,G.)关于一般图的计数理论的建立,可惜的是,凯莱关于树的计数的成果开始并未在他的故乡英国引起注意,却很快在德国产生了影响. 由于那时布朗(Brown,A. C.)引进了原子的图形表示,所以这就使得树的计数可以直接应用到确定同分异构的碳水化合物的工作,这就是化学中应用图论的开端. 1878 年,西尔维斯特(Sylvester,J. J.)在他的学术文章中第一次用现代意义下"图"这个术语.

20 世纪初,开始跨入平面图的理论. 虽然,若尔当(Jordan,M. E. C.)首先意识到平面上不自交的闭曲线将平面分划为内、外部两个区域,但是,直到 1905 年,才由维布伦(Veblen,O.)给出第一个正确的证明. 20 世纪 30 年代初,库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)发表了第一篇判定一个图是否为可平面图的文章. 其后不久,惠特尼(Whitney,H.)的一系列有关图论的理论结果大部分是对于可平面图的,特别是他提出代数对偶的概念解决了判定图的平面性问题. 接着,麦克莱恩(MacLane,S.)、吴文俊、塔特等都曾相继在这方面建立了他们各自的理论. 在 20 世纪初,伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)第一次引进图的色多项式的概念并对此做了系统的研究,开辟了图论中一个重要新课题. 近半个世纪之后,塔特发展到范色多项式并且揭示了它与图的内在结构性质的关系,而这种关系在其后 20 余年琼斯(Jones,V. F. R.)发现的在 3 维空间中扭结的新的拓扑不变量——琼斯多项式中竟得到再现.

然而,不管怎样,塔特等人于 1940 年所发表的关于拼方的文章,创立了电网络上的一种数学理论,

解决了纯数学的一个难题，打开了现代图论研究的序幕. 这篇文章不仅解决了拚方的问题，而且引出了一系列重要的图论问题，例如，图的连通性、定向、对称性以及还用到了平面性与对偶性等，这些至今在图论的研究中仍很活跃. 尤其是他们所揭示的方法还深刻地影响到网络流的理论、曲面嵌入的理论，并促进了集以及因子分解的理论、着色理论，以至拟阵论与组合几何的形成与发展.

图论在近半个世纪以来的发展是空前的. 除上面提及的一些重要方面外，还出现了极图理论、随机图论、代数图论、拓扑图论等新的分支. 同时，也出现了各种统一性的理论研究，如超图、拟阵以至于组合几何，其发展更是日新月异. 图论还广泛而且愈来愈深入地渗透和应用到其他科学中去. 除原来在物理学和化学中的应用又得到广泛和深入的发展之外，还深入到了生物学和生物工程以及经济和社会科学的各领域. 尤其值得注意的是，随着电子技术和现代计算机的发展，提出了层出不穷的新的数学问题，其中，很多问题与图论有密切的关系，对于它们的深入研究将会形成新的理论分支. 例如，算法及其复杂性的理论和组合计算几何的出现与发展等，就是直接的产物. 在图论近 50 年来的成果中，四色问题的计算机验证、希伍德地图着色问题的解决以及塔特多项式的出现等，也是对整个数学领域的重要贡献.

关于中国在图论方面近 30 年来的发展，可参见颜基义等人在《中国自然科学年鉴》1989 年卷的数学进展专栏中发表的文章.

撰　稿　刘彦佩
审　阅　徐利治　颜基义

图(graph)　图论的研究对象. 一个图是一个集合上的一种二元关系. 这个集合的元素称为图的节点，若两节点之间有这种确定的二元关系，则称有一条边连这两个节点. 一个图的节点的数目称为这个图的阶；图的边的数目称为它的度. 在文献中，总是将一般的图记为 $G=(V,E)$，其中，$V=V(G)$ 和 $E=E(G)$ 分别表示 G 的节点集和边集.

若有一条边连一个图的某两个节点，则称这两个节点相邻，并称这两个节点为这条边的端点. 若某一节点是某一条边的端点，则称这个节点和这条边关联. 若两条边和同一节点关联，则称这两条边相邻，两个端点是同一个节点的边称为环. 若某条边的两个端点不是同一个节点，且只有一条边连这两个节点，则称这条边为杆.

只有一个节点而没有边的图称为平凡图；没有边的图称为孤立图. 以某两节点为端点的边可能不止一条，这时称连这两个节点的边为重边. 既可以有环，也可以有重边的图称为准图；没有环而可能有重边的图称为带重图；没有重边而可能有环的图称为带环图；既没有重边也没有环的图称为简单图. 若一个图的阶是有限的，则称这个图为有限图，否则称这个图为无限图. 每两个节点都相邻的简单图称为完全图. 若一个 n 阶图的节点用 $1,2,\cdots,n$ 来代表，则称它为标定图. 若在图的每一条边上赋以一个实数或者对于每个节点赋以一个实数，则称它为赋权图.

平凡图(trivial graph)　见“图”.

孤立图(isolated graph)　见“图”.

准图(pseudo graph)　见“图”.

带重图(multi-graph)　见“图”.

带环图(graph with loops)　见“图”.

简单图(simple graph)　见“图”.

完全图(complete graph)　见“图”.

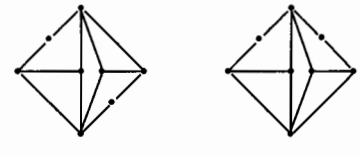
有限图(finite graph)　见“图”.

无限图(infinite graph)　见“图”.

标定图(labeled graph)　见“图”.

赋权图(weighted graph)　见“图”.

图的同构(isomorphism of graphs)　从抽象代数移植过来的术语. 若图 G 的节点集和图 H 的节点集之间存在一个一一对应关系，使得 G 的任意两个相邻节点所对应的 H 的两个节点也相邻，反之亦然，则称图 G 和图 H 是同构的，记为 $G\cong H$ 或 $G=H$. 这个一一对应关系称为 G 和 H 之间的一个同构. 一个图的自同构是指这个图与它自身之间的一个同构. 一个有割点的图的一次割点分裂是指该图的如下的运算：将这个图的一个割点分裂为两个节点，并将关联于此割点的诸边分为两部分，使它们分别与分割后的两节点关联，原来的连通分支变为两个连通分支. 若连通图 G 经若干次割点分裂后所得的图与连通图 H 经若干次割点分裂后所得的图同构，则称 G 与 H 是 1 同构的. 所有阶数相同的树都是 1 同构的，两个 2 连通图是 1 同构的当且仅当它们是同构的. 一个图的旋转运算是指如下的图的运算：这个图有一 2 点割集 $\{x,y\}$，将 x,y 各分裂为两个节点，使 x,y 所在的连通分支变为两个分支，再把其中一个连通分支的与 x,y 相应的两节点交换标记，然后再与另外一分支的同标记的 x,y 点分别粘合，使这两个分支又合为一个连通分支. 若 2 连通图 G 经若干次割点分裂的运算和若干次旋转运算后所得的图与 2 连通图 H 经若干次割点分裂的运算和若干次旋转运算后所得图同构，则称 G 与 H 是



2 同构的. 例如下述两图是 2 同构，但不是 1 同构的.

自同构(automorphism) 见“同构”.

1 同构(1-isomorphism) 见“同构”.

2 同构(2-isomorphism) 见“同构”.

割点分裂的运算(operation of cut point splitting) 见“同构”.

旋转运算(rotation operation) 见“同构”.

图的同态(homomorphism of graphs) 从抽象代数移植过来的一个术语. 若存在由图 G 的节点集到图 H 的节点集内的一个映射 φ，使得 G 的任意两个相邻节点所对应的 H 的两个节点也相邻，则称 φ 为从 G 到 H 中的一个同态. 若 H' 是 H 的这样一个子图，使得 $V(H')$ 是 $V(G)$ 在 φ 下的像，并且对于 H' 的任何一条边 (u',v') 都存在 G 的一条边 (u,v)，有 $(u',v')=(\varphi u,\varphi v)$，则称 H' 为 G 在 H 中的同态像，记为 $H'=\varphi G$. 特别地，若 $H'=H$，即 $H=\varphi G$，则称 φ 为 G 到 H 上的一个同态. 若 H 是 G 的子图，则称 φ 为 G 的一个自同态. 若 φ 把 G 的两个不相邻的节点映射到同一节点，而使别的节点保持不变，则称 φ 为 G 的初等同态. 若 G 在 φ 下的同态像是一个 n 阶完全图，则称这个同态是一个 n 阶完全同态.

图的自同态(endomorphism of a graphs) 见“图的同态”.

初等同态(elementary homomorphism) 见“图的同态”.

n 阶完全同态(n-complete homomorphism) 见“图的同态”.

子图(subgraph) 图论的基本概念之一. 指节点集和边集分别是某一图的节点集的子集和边集的子集的图. 若这个节点子集或边子集是真子集，则称这个子图为真子图. 若图 G 的每一个节点也是它的子图 H 的节点，则称 H 是 G 的支撑子图. 设 S 是 $V(G)$ 的子集，以 S 为节点集，以 G 的所有那些两端点都在 S 内的边组成边集，所得到的 G 的子图称为 S 在 G 中的导出子图，或更确切地，节点导出子图. 设 B 是 $E(G)$ 的子集，由 G 的所有与 B 内至少有一条边关联的节点组成节点集，以 B 为边集，所得到的 G 的子图称为 B 在 G 中的边导出子图. 对于某种性质 P，若一个图的具有 P 的子图不是任何具有 P 的子图的真子图，则称它为具有 P 的极大子图. 在所有极大子图中，边数最多的那个称为最大子图.

真子图(proper subgraph) 见“子图”.

支撑子图(spanning subgraph) 见“子图”.

节点导出子图(vertex-induced subgraph) 见“子图”.

边导出子图(edge-induced subgraph) 见“子图”.

极大子图(maximal subgraph) 见“子图”.

最大子图(maximum subgraph) 见“子图”.

次形(minor) 一类特殊的图. 它是在一个图上通过一次或多次去掉边和(或)收缩边为一个节点的运算所得的图. 从图 G 的节点集 $V(G)$ 到图 H 的节点集 $V(H)$ 上的映射 φ，称 φ 为初等收缩. 若存在 G 的两个节点 u 和 v，使得：

1. G 中只有这两个节点 u 和 v 在 φ 下的像相同.

2. G 的任意两个不恰为 u 和 v 的节点在 G 上相邻，当且仅当 φu 和 φv 在 H 上相邻.

3. 对于 G 上任意一个不同于 u 和 v 的节点 w，φu 和 φw 在 H 上相邻，当且仅当 u 和 w 或 v 和 w 在 G 上相邻.

若从 $V(G)$ 到 $V(H)$ 上的映射是有限个初等收缩的合成，则称这个映射为一个收缩. 收缩是在图上做一系列收缩边为一个节点的运算. 相仿地，称从图中去掉一边的运算为初等去边，所谓去边是指在图上做一系列的初等去边运算.

收缩(contraction) 见“子形”.

去边(deletion of edges) 见“子形”.

图的同胚(homeomorphism of graphs) 两个图之间的一种关系. 若某两个图都能从同一个图经细分后得到，则称它们同胚. 所谓边细分是指从一个非空图依如下方式得到另一个图：去掉这个图上的一条边，添上一个新节点，并让这个新节点与被去掉的那条边的两端点分别有一条边相连. 所谓细分就是从一个非空图经一系列边细分所得到一个新图.

细分(subdivision) 见“图的同胚”.

边细分(edge subdivision) 见“图的同胚”.

部图(partite graph) 一类特殊的图. 即一个图的节点集可分成若干个子集，使得每一条边的两端点不在同一子集内. 若一个图的节点集能分成 k 个两两不交的非空子集，使得这个图的每一条边的两端点不在同一个子集内，则称这个图为 k 部图. 若 $k=2$，则称这种 k 部图为二部图；若 $k=3$，则称这种 k 部图为三部图. 若在一个 k 部图中，任一节点与其他部的所有节点都相邻，则称它为完全 k 部图.

二部图(bipartite graph) 见“部图”.

三部图(tripartite graph) 见“部图”.

k 部图(k-partite graph) 见“部图”.

完全k 部图(complete k-partite graph) 见“部图”.

次(degree, valency) 亦称度或价. 与节点有关的一个不变量. 一个图上某节点的次是指与这节点关联的边的数目. 注意，若一条边是环，则它在关联节点的次中数两次. 图上次为 1 的节点称为悬挂点；与悬挂点关联的边称为悬挂边. 一个图上某一节

点的邻域是指与这个节点相邻的所有节点组成的集合；这个节点的闭邻域是指由它和它的所有相邻节点所组成的集合. 一个有向图上某一节点的出次是指从这个节点指向它的相邻点的所有边的数目；它的入次是指从它的相邻点指向它的所有边的数目.

悬挂点(articulate vertex)　见“次”.

悬挂边(articulate edge)　见“次”.

邻域(neighborhood)　见“次”.

闭邻域(closed neighborhood)　见“次”.

出次(out-degree)　见“次”.

入次(in-degree)　见“次”.

路(path)　图论的基本概念之一. 指一个图上的边序列. 若用 $v_0,v_1,\cdots,v_r$ 表示一个图上的 $r+1$ 个节点，而 $v_iv_{i+1}(0\leqslant i\leqslant r-1)$ 表示以 v_i 和 v_{i+1} 为端点的边，则称边序列 $v_0v_1,\cdots,v_{r-1}v_r$ 为这个图上的一条迹，并称 v_0 和 v_r 分别为这条迹的始节点和终节点. 若所有这些边两两不同，则称这条迹为径. 若所有这些节点都不相同，则称这条径为路. 并称这条路的长度为 r. 若图上任意两节点均有路连结，则称该图连通. 若一个图上的两条路没有公共边，则称这两条路为边不交；若一个图上的两条路没有公共节点，则称这两条路为点不交. 若 $v_0,v_2,\cdots,v_r$ 是一个有向图上的节点，$v_iv_{i+1}(0\leqslant i\leqslant r-1)$ 是从 v_i 指向 v_{i+1} 的有向边(也称为弧)，则称边序列 $v_0v_1,\cdots,v_{r-1}v_r$ 是一条有向迹；若这些有向边两两互不相同，则称这条有向迹为有向径；若 $v_0,v_1,v_2,\cdots,v_r$ 是两两互不相同的节点，则称这条有向径为有向路.

图的迹(walk on a graph)　见“路”.

径(trail)　见“路”.

边不交(edge-disjoint)　见“路”.

点不交(vertex-disjoint)　见“路”.

有向迹(diwalk)　见“路”.

有向路(dipath)　见“路”.

圈(circuit)　图论的基本概念之一. 指没有重复节点的闭径. 始节点和终节点是同一节点的迹称为闭迹，或迂；始节点和终节点是同一节点的径称为闭径或游. 含有 l 条边的圈称为 l 圈. 这里 l 称为这个圈的长度. 一个图上最长的圈的长度称为这个图的周长，最短的圈的长度称为这个图的围长. 设 S 是图 $G=(V,E)$ 的节点子集，记 $\overline{S}=V-S$ 为 V 中除 S 中节点外的节点子集. 若 S 和 $\overline{S}$ 在 G 上的导出子图是连通的，则边的子集 $(S,\overline{S})=\{(u,v)\in E\mid u\in s, v\in\overline{S}\}$ 称为 G 的一个上圈. 任何一个上圈没有一个真子集也是上圈. 在一个上圈中所含边的数目称为它的宽度. 宽度为 l 的上圈称为 l 上圈.

迂(closed walk)　见“圈”.

游(closed trail)　见“圈”.

l 圈(l-circuit)　见“圈”.

图的周长(circumference of a graph)　见“圈”.

围长(girth)　见“圈”.

上圈(cocircuit)　见“圈”.

正则图(regular graph)　一类特殊的图. 指所有节点的次都相同的图. 节点的次为 k 的正则图称为 k 正则图. 一个图上某一条边的次是指这个图上与这条边有公共端点的边的数目. 所有边的次都相同的图称为边正则图. 对于一个图，若存在正整数 k,λ,μ，使得下列条件成立，则称该图为强正则图：

1. G 是 k 正则图.

2. 对于图上任意两个不同节点 v 和 w，若 v 和 w 相邻，则 G 上与 v 和 w 都相邻的节点的数目是 λ，否则，G 上与 v 和 w 都相邻的节点的数目是 μ.

3. 正则图是指所有节点的次都是 3 的图. 每个连通片不是圈就是二阶完全图，即由一条杆组成的图，称为一个半正则图.

边正则图(edge regular graph)　见“正则图”.

强正则图(strongly regular graph)　见“正则图”.

不变量(invariant)　图论的基本概念之一. 指图的特征数，它们在组合同构的意义下保持不变. 一个图的极大完全子图称为这个图的团. 一个图的团数是指这个图上阶最大的团的阶. 一个图 G 在某一曲面 S 上的一个描画是指 G 的不同节点到 S 上不同点，G 的边到 S 上的不同弧的一个映射，使得满足条件：

1. 在 S 上相应 G 的边的弧没有内点相应 G 的节点.

2. 任何一条边 vw 在 S 上的映射的像是以 v 和 w 对应的两个点为端点的弧.

若图还满足下列三个条件，则称其为一个好的描画：

1) G 的任意两条有公共端点的边在 S 上映射的像无公共内点(即不相交).

2) G 的任意两条边在 S 上的映射的像至多有一个交点.

3) G 的任意三条边在 S 上的映射的像不会交于同一内点.

一个图在平面上的一个好的描画的两条弧的交叉的点称为一个交叉，而一个图的交数就是指这个图的所有在平面上好的描画中，使得其交叉的数目最少的描画中交叉的数目.

设有一个图的某性质，若这个图的每个子图都有这个性质，则称该性质为传递的. 设有一个图的自同构群，若对于该图上任意两个不同的节点，存在一个自同构映射把其中一个节点映射到另一个节点，则称该自同构群为可迁的. 对于图 H，以 $k(H)$ 表示该图的连通片的数目. 对于一个图 G，若从 $k(G-S)$

>1 能导出 $|S|\geqslant t\times k(G-S)$ 对 G 的任何一个节点集 S 成立，这里 $G-S$ 表示从图 G 上去掉 S 中每一节点后所得到的图，则称图 G 为 t 坚韧的. 若 G 不是完全图，则称使 G 为 t 坚韧的最大 t 值为 G 的坚韧度. 上面所述的团数、交数、遗传性、可迁性和坚韧度等都是图的不变量. 当然，除此以外图还有很多其他的不变量，例如：距离、复杂度、荫度、连通度、亏格、厚度、交数、色多项式、范色多项式等.

团数(clique number)　见“不变量”.

交数(crossing number)　见“不变量”.

遗传性(hereditary)　见“不变量”.

坚韧性(toughness)　见“不变量”.

可迁性(transitivity)　见“不变量”.

距离(distance)　图论的基本概念之一. 指一个图上连两个节点的边数最少的路(即最短路)的边数. 常用 $d_G(x,y)$ 表示图 G 上节点 x 和 y 之间的距离. 一个图上距离最长的两节点的距离称为这个图的直径. 一个连通图的某节点的离心度是指这个图上所有别的节点与这个节点的距离中的最大值. 一个连通图的半径是指所有节点的离心度中的最小值. 一个图的中心是指由所有离心度与图的半径相等的节点组成的集合. 图的周点是指其离心度与图的直径相等的节点. 一个图上连两个节点的最短的路也称为该图的一条测地线.

图的直径(diameter a graph)　见“距离”.

离心度(eccentricity)　见“距离”.

图的半径(radius a graph)　见“距离”.

图的中心(center a graph)　见“距离”.

周点(peripheral point)　见“距离”.

测地线(geodesic)　见“距离”.

图的运算(operation)　由已知图产生出其他图的方法. 设 V_1 和 E_1 分别为图 G_1 的节点集和边集，V_2 和 E_2 分别为图 G_2 的节点集和边集. 图 G_1 与 G_2 的并，用 $G_1\cup G_2$ 表示，是指节点集为 $V_1\cup V_2$，边集为 $E_1\cup E_2$ 的图. 图 G_1 与 G_2 的交是指节点集为 $V_1\cap V_2$，边集为 $E_1\cap E_2$ 的图. 图 G_1 与图 G_2 的联是指节点集为 $V_1\cup V_2$，边集为 $E_1\cup E_2\cup J(V_1,V_2)$ 的图，这里 $J(V_1,V_2)$ 表示由所有一端在 V_1 中另一端在 V_2 中的节点对作为边组成的集合. 图 G_1 与 G_2 的积，也称笛卡儿积，用 $G_1\times G_2$ 表示，是指这样的图：它的节点集为 $\{(x,y)\}\,|\,x\in V_1,y\in V_2\}$，$(x_1,y_1)$ 与 (x_2,y_2) 相邻当且仅当 $x_1=x_2$ 且 y_1 与 y_2 在 G_2 上相邻，或 $y_1=y_2$ 且 x_1 与 x_2 在 G_1 上相邻. 图 G_1 与 G_2 的合成，或字典式积，是指这样的图：节点集为 $\{x,y)\,|\,x\in V_1,y\in V_2\}$，两节点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 有一条边相连，当且仅当 x_1 与 x_2 在 G_1 上相邻，或 $x_1=x_2$，且 y_1 与 y_2 在 G_2 上相邻，这个合成图常记为 $G_1[G_2]$.

一个图 G 的补图是指这样的一个图：节点集为 G 的节点集，两个节点有一条边相连，当且仅当这两个节点在 G 上不相邻，G 的补图常记为 G^c 或 $\overline{G}$. 一个图，若它的补图与它自身同构，则称为自补图. 设 H 是 G 的子图，从 G 中去掉所有 H 的边所得的图称为 H 关于 G 的相对补图. 图 G_1 与 G_2 的结合，记为 $G_1\otimes G_2$，是指这样的图：节点集是 $\{(x,y)\,|\,x\in V_1,y\in V_2\}$，$(x_1,y_1)$ 与 (x_2,y_2) 有一条边相连，当且仅当 x_1 与 x_2 在 G_1 上相邻和 y_1 与 y_2 与 G_2 上相邻. 设 G_1 的阶为 k，$G_{2,1},\cdots,G_{2,k}$ 是 k 个与 G_2 同构的图，把图 G_1 的第 $i(1\leqslant i\leqslant k)$ 个节点与图 $G_{2,i}$ 上每一个节点相连，这样所得的图称为 G_1 对于 G_2 的冠，常记为 $G_1\circ G_2$.

补图(complement graph)　见“图的运算”.

交邻图(intersection graph)　一类特殊的图. 它是由一个子集族产生的图. 设 $\mathscr{F}=\{S_1,S_2,\cdots,S_p\}$ 是由一个有限集 S 的 p 个不同的非空子集 $S_1,S_2,\cdots,S_p$ 组成的族. 以 $\mathscr{F}$ 为节点集，节点 S_i 和 S_j 有边相连当 $S_i\cap S_j\neq\varnothing$ $(i\neq j)$，这样所得的图称为 $\mathscr{F}$ 的交邻图，常记为 $\Omega(\mathscr{F})$. 以数轴上的一些区间作为节点，两节点有一条边相连当且仅当它们所对应的区间的交非空，这样所得的图称为区间图. 区间图还有两种有意义的推广. 一种叫盒图：节点集为 n 维立方体的集合，两节点相邻当且仅当它们对应的两个立方体相交. 另一种叫树路图：节点集为一树上的一些路组成的集合，两节点相邻当且仅当它们对应的两条路有公共部分(包括有公共端点). 若将节点代表平面上一个圆的不包括二端点的弦，两节点相邻当且仅当它们相应的弦有一个公共点，称这样的图为圆图.

一个图 G 的边图是指由 G 这样得到的图：节点集为 G 的边集，两节点有一条边相连当且仅当它们所对应的边在 G 中相邻. 常用 $L(G)$ 表示 G 的边图. 图 $L(G)$ 的边图称为 G 的 2 叠边图，常记为 $L^2(G)$. 类似地，G 的 k 叠边图就是指 G 的 $(k-1)$ 叠边图的边图，常记为 $L^k(G)$. 一个图 G 的团图是指这样的图：以 G 的每个团作为节点，两节点有一条边相连当且仅当它们所对应的团有公共节点. G 的团图常记为 $\mathrm{cl}(G)$. $\mathrm{cl}(G)$ 也称为 G 的 1 叠团图. G 的 $(k-1)$ 叠团图的团图称为 G 的 k 叠团图，常记为 $\mathrm{cl}^k(G)$，$k\geqslant 2$. 一个图 G 的块图是指这样的图：以 G 的每个块作为节点，两节点有一条边相连当且仅当它们所对应的块有公共节点. G 的块图常记为 $B(G)$. 一个图 G 的割点图是指这样的图：以 G 的每一个割点作为节点，两节点有一条边相连当且仅当它们所对应的割点在同一块中. G 的割点图常记为 $C(G)$. 一个图 G 的块-割点图是指这样的图：以 G 的所有块和所有割点组成的集合为节点集，两节点有一条边相连，当

且仅当它们对应于一个块和一个割点，并且这个块含这个割点. G 的块-割点图常记为BC(G). 一个图 G 的 k 幂图($k\geqslant 1$)是指这样的图：以 G 的节点集为节点集，两节点有一条边相连，当且仅当它们对应于 G 的节点在 G 上的距离最多为 k. G 的 k 幂图常记为 G^k. 当然，G 的 1 幂图就是 G 本身.

上面所列的图中，区间图、边图、团图、块图、盒图、圆图和树路图均是交邻图；但是，割点图、块-割点图和幂图皆非交邻图.

边图(edge graph)　见“交邻图”.

区间图(interval graph)　见“交邻图”.

树路图(tree path graph)　见“交邻图”.

圆图(circle graph)　见“交邻图”.

盒图(boxing graph)　见“交邻图”.

团图(clique graph)　见“交邻图”.

块图(block graph)　见“交邻图”.

块-割点图(block-cutvertex graph)　见“交邻图”.

幂图(power graph)　见“交邻图”.

图的因子(factor of a graph)　图论的基本概念之一. 指图的一个支撑子图. 若一个图可以表示为若干个边不交的某些因子的并，则这个图对这些因子可进行因子分解. 图的这种表示称为图的因子分解. 一个图的 k 正则支撑子图称为它的 k 因子. 若一个图可以分解成若干个 k 因子的并，则称这种分解是这个图的 k 因子分解.

设有一个图的边集的一个子集，若其中的边都不是环，且互不相邻，则称该子集为这个图的一个对集. 一个图的边数最多的对集称为它的一个最大对集. 一个图的完满对集是指这样的对集：该图的每一个节点与这个对集中的一条边关联. 事实上，完满对集就是 1 因子. 设 M 是图 G 的一个对集，若 G 的一条路的每对相邻的边中都恰有一条是 M 中的边，则称这条路为 M 交错路. 若一个图只要表示成另外两个图的积，则这两图中必有一个为平凡图，这个图就称为素图. 不是素图的图称为复合图. 若一个图 G 可以惟一地表示成若干个非平凡素图的积 $G=G_1\times\cdots\times G_k$，则称 $G_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 是 G 的素因子. 若两个图没有相同的素因子，则称这两个图为互素图. 若一个图 G 的支撑子图的每一个节点在这生成子图上的次均不大于 2，则这个支撑子图称为 G 的线性子图.

图的对集(matching of a graph)　见“图的因子”.

完满对集(perfect matching)　见“图的因子”.

交错路(alternative path)　见“图的因子”.

素图(prime graph)　见“图的因子”.

复合图(compound graph)　见“图的因子”.

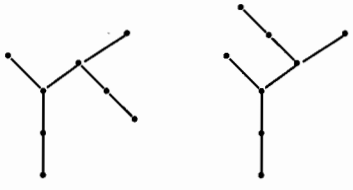
树(tree)　一类特殊的图. 没有圈的连通图称为树. 若 T 是图 G 的一支撑子图，且是树，则称 T 的对于 G 的补图 $\overline{T}$ 为上树，而称 T 为 G 的支撑树. G 的上树 $\overline{T}$ 的每一条边都称为 T 的弦. 每一条弦与 T 恰形成一个圈，称这种圈为基本圈. G 的支撑树 T 的每一条边称为 T 的权. 每一条权与 $\overline{T}$ 恰形成一个上圈，称之为基本上圈. 没有圈的图称为森或林. 自然，连通的森就是树. 以一个连通图 G 的各个支撑树的所有边的积为项，G 的树多项式(一个形式多项式)就是所有这些项的和，常记为 $P(T(G))$. 凯莱公式是计算带号完全图的不同带号树的数目的公式：n 阶带号完全图 K_n 的不同带号支撑树的数目为 n^{n-2}. 一个带号图中不同的带号支撑树的数目称为这个图的复杂度. 设 T 是一个树，v 是 T 上的一个节点. T 上以 v 为悬挂点的边数最多的子树的阶称为 T 上 v 的点权. 以 v 为悬挂点的 T 的极大子树，即这样的子树，它不是任何其他子树的真子树，称它为 v 处的枝. 可见，v 的点权就是以 v 为悬挂点的最大子树的阶数，或者说 v 处含边数最多的枝的阶. 连通图 G 的树图是从 G 派生出的一个图：G 的每一支撑树作为一个节点，两个节点有一条边相连，当且仅当它们所对应的支撑树各有一条边不是另一个树的边.

森(forest)　见“树”.

树多项式(tree polynomial)　见“树”.

树图(tree graph)　见“树”.

根点树(rooted vertex tree)　一类特殊的树. 它是带有一个被指定的节点 r 的树. 这个被指定的节点称为根节点. 根节点的次为 1 的根树称为植树. 一个树的平面嵌入称为平面树. 当然，任何一个树都可以嵌入到平面上. 但是，嵌入的方式一般不惟一. 例如，在下图中所示的是同一个树的两个不同的平面树.



平面树(plane vertex tree)　见“根点树”.

有向树(directed tree)　一类特殊的树. 它是每条边给予一确定的方向的树. 一个有向树，若有一个节点，存在由此节点到达任何别的节点的有向路，则称这个节点为源或根，称这个树为出树或外向树. 入树定义为这样的有向树：有一个节点，从任何一个节点出发都有树上的一个有向路达到这个节点. 这个节点称为这个入树的汇，也可以称为根. 出树和入树统称为树形图.

一个图 G 上的一个支撑树 T，若可以将它的边定向而成为一个外向树，使得所有对 T 的上树的边都存在一种定向得到一个有向基本圈，则称这个树

为深探树. G 的具有这种性质的定向的有向图称为它的棕图. 事实上，深探树可以用如下的方式得到：任选 G 的一个节点作为始节点标号为 0，达到它的一个邻节点. 每达到一个节点，若它的相邻节点均已标号，则沿达到此节点的边退回它的另一端点；否则，沿一条边达到一个未标号的节点，标此节点为最大标号加 1，并将此边记录下来；直到所有节点均已标号，这样，所有记录下来的边就是一个深探树. 这就是深探之由来. 若将树边定向为由小标号到大标号和上树边为从大标号到小标号，则可得一个棕图. 任取 G 的一个未注销的已标号节点(开始时，任取 G 的一节点并假定该点的标号为 1)，从最大标号加 1 起，按自然顺序标号该节点的所有未标号邻节点，并记下该节点与这些节点之间的所有边，然后将该节点注销. 重复这样的过程，直到所有的节点都被注销为止，最终记录下来的边形成一棵树. 这样，所有记录下来的边也形成一个树，称它为广探树. 一个有向图，若其中没有有向圈，则称为无回路图. 如上所述，深探树和广探树均为外向树. 若在图中它们的上树边均定向为由小标号到大标号，则所得的有向图均为无回路图.

内向树(in-tree)　见“有向树”.

外向树(out-tree)　见“有向树”.

树形图(arborescence)　见“有向树”.

深探树(depth-first tree)　见“有向树”.

广探树(breadth-first tree)　见“有向树”.

棕图(palm graph)　见“有向树”.

无回路图(acyclic grahp)　见“有向树”.

平面图(plane graph)　一类重要的图. 指任何一个图在平面上的一个嵌入. 即图的这样一种在平面上的表示：它的不同节点可用平面上不同的点表示，它的边用平面上连相应其二端点的两点的一条曲线或直线段表示，使得除两端点外与代表图的其他部分不再有公共点. 若把平面图上的点从平面上去掉，则在平面上剩下的点集为若干无公共点的连通开集的并，这些开集称为这个平面图的面. 平面图的节点常称为顶点. 与一个面关联的边的集合称为这个面的边界. 一个面的边界上边的数目(割边在边界上数两次)称为这个面的次. 包含无限远点的面称为无限面，其他的面为有限面. 一个平面图，若它的所有顶点全在无限面的边界上，则称它为外平面图. 设有一个平面图，若在它上不能再添加一条边使所得的图仍是平面图，则称该平面图为极大平面图. 设有一个平面图 G，若它的每一面的边界的次均为 3，则称 G 为平面三角割分图. 事实上，任何极大平面图都是平面三角割分. 若一个平面图的每条边都是直线段，则称为直线表示. 若一个直线表示的每个面均为凸多边形，则称为凸表示.

外平面图(outerplanar graph)　见“平面图”.

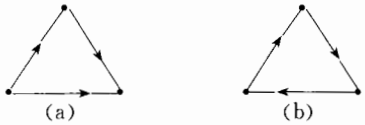
极大平面图(maximal planar graph)　见“平面图”.

有向图(directed graph，digraph)　一类重要的图. 它是对每一条边都规定一个方向的图. 确切地说，一个有向图 D，就是一个集合的二元组 $D=(V(D),A(D))$，其中 $V(D)$ 是一个非空的有限集，其元素称为节点，$A(D)$ 是由 $V(D)$ 的元素的一些有序对构成的集合. 称 $A(D)$ 的元素为 D 的弧. 与弧关联的两个节点也称为它的端点，并规定弧的方向为从始端指向终端. 在一个有向图中，它的一个节点的出次就是离开这个节点的关联边的数目；入次就是指向这个节点的关联边的数目. 一个节点的次就是它的出次与入次的和. 若把一个有向图的每一条弧代之以无向的连结相同端点的边，则称所得图为该有向图的基础图或母图. 若把一个有向图的每一条弧代之以连结相同端点的相反方向的弧，则称所得有向图为原有向图的逆向图. 若在一个有向图上，每一条弧都有一条与它方向相反且端点相同的弧，则称这个有向图为对称有向图. 若存在一个整数 k，一个有向图的邻接矩阵的 k 次幂中的元素都为正数，则称这个有向图为本原有向图. 对于有向图有一些与方向有关的对偶概念，如出次和入次、出树和入树等. 若一个与方向有关的命题成立，将其中的概念换为其对偶概念，则所得命题也一定成立. 这就是方向对偶原则.

一个有向图 D 的基础图的一条路的所有边所对应的 D 中的弧的导出子图称为 D 的半路. 一个半路，若它的所有弧方向相同则称它为有向路. 类似地，D 的基础图的一个圈上所有边所对应的 D 中的弧的导出子图称为 D 的半圈. 一个半圈，若它的所有弧的方向相同，则称它为有向圈. 设有一个有向图，若对于其上任何两节点 u 和 v，存在从 u 到 v 或从 v 到 u 的有向路，则称该有向图为单向连通的. 设有一个有向图，若对于其上任何两节点 u 和 v，既存在从 u 到 v 的有向路，也存在从 v 到 u 的有向路，则称该有向图为双向连通或强连通的. 设有一个有向图，若对于其上任何两个节点，存在一条半路连这两个节点，则称该有向图为弱连通的. 设有一个单向连通有向图，若不是强连通的，则称为严格单侧有向图. 单向连通的有向图也称单侧有向图. 设有一个弱连通有向图，若不是单向连通的，则称为严格弱有向图. 设有有向图 D 的一个节点子集 S，若 S 是符合下列条件的极小集：S 中节点两两互不相邻，且 D 的每一节点或在 S 中，或存在一条弧从 S 中一节点指向它，则称 S 为 D 的 1 基，也称为核. 设有有向图 D 的一个节点子集 S，若 S 是符合如下条件的极小集：D 的每一个节点或在 S 中，或存在一条弧从 S

中一节点指向这一节点，则称 S 为 D 的点基. 一个有向图的点基是一个 1 基，当且仅当它在基础图中是独立的.

若一个有向图上每一节点的出次均为 1，则称它为功能有向图. 若一个有向图的每一节点的入次均为 1，则称它为逆功能有向图. 设 D 是一有向图，D 的弧有向图，常记为 $L(D)$，是指这样的有向图：以 D 的所有弧组成的集合作为节点集，两节点 u 和 v 有一条弧从 u 指向 v，若 u 所对应的 D 中的弧的终端与 v 所对应的 D 中的弧的始端是同一个节点. 一个有向图的一个子图称为它的强片，若它是这个有向图的一个极大强连通子图. 一个有向图的凝聚，是指一个这样的有向图 D^*：以 D 的强片作为节点，两节点 u_1 和 u_2 有一条弧从 u_1 指向 u_2，若 u_1 所代表的强片上有一节点与 u_2 所代表的强片上一节点相邻，并且前面一个节点指向后一个节点. 所谓竞赛图，是指基础图为完全图的有向图. 三个节点的竞赛图有如下两种：图(a)所示的称为可迁三元组；图(b)所示的称为循环三元组.



基础图(underlying graph)　见“有向图”.

对称有向图(symmetric digraph)　见“有向图”.

本原有向图(primitive digraph)　见“有向图”.

单侧有向图(unilateral digraph)　见“有向图”.

功能有向图(functional digraph)　见“有向图”.

竞赛图(tournament)　见“有向图”.

凝聚(condensation)　见“有向图”.

连通片(component)　亦称连通分支或分图. 一类重要的图. 极大连通子图. 若对于一个图上任何两个节点，存在一条路连这两个节点，则称该图为连通的. 设有一个图的一节点，若从这个图上去掉这个节点以及与它关联的所有边后所得的图的连通片的数目比原图的连通片多，则称该结点为该图的一个割点. 没有割点的连通图称为块. 类似地，一个图的一条边称为它的割边，若从这图上去掉这条边后所得到的图的连通片比原图的连通片多. 一个连通图的一个节点子集 S 称为它的一个节点分离子集，若从这个图上去掉 S 中所有节点，以及与 S 中节点关联的所有边后所得到的图不再是连通图. 有 l 个节点的节点分离子集称为 l 点分离集. 当 $l=2$ 时，称为分离节点对. 设 H 是图 G 的子图，$G-E(H)$ 表示从图 G 上去掉 H 的所有边后所得到图. 图 H 在 G 上的一个断片是指 $G-E(H)$ 的这样一个子图：对于这个图上的任何两条边 e 和 f，存在 $G-E(H)$ 上的一条迹 W，其始边和终边分别为 e 和 f，使得除端点可能外，其他节点均不在 H 上. 一个图的原子是指将这个图的每个不相邻的分离节点对添上一边后所得图的极大 3 连通子图. 即，图中这样的 3 连通子图，它不是此图的任何 3 连通子图的真子图. 一个图的 k 连通片是指将这个图的每个 $(k-1)$ 点分离集中任何两个不相邻的节点都连上边后所得图的极大 k 连通子图.

块(block)　见“连通片”.

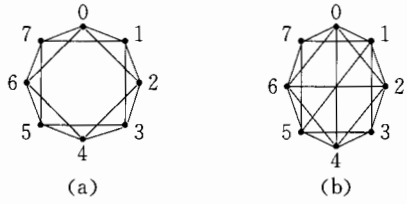
割点(cut-vertex)　见“连通片”.

连通度(connectivity)　图的一类组合不变量. 它是节点连通度的简称. 一个图 G 的节点连通度是指这样一个最小整数 $k(G)$：G 上存在 k 个节点，从 G 上去掉所有这些节点以及和它们关联的所有边后，所得的图不再是连通图或者是平凡图. G 的节点连通度常记为 $k(G)$. 连通度不小于 k 的图称为 k 连通图. 一个连通图的边分离子集是指该图的这样一个边子集：从这个图上去掉这个边子集的所有边后，所得的图不再是连通的图. 不可分离图也就是指节点不可分离图，即没有割点的连通图，或者说是 2 连通图. 边不可分离图就是指没有割边的连通图. 图的边连通度就是指这样一个最小整数 $k_l(G)$：从这个图上去掉某 $k_l(G)$ 条边后所得的图不再是连通图. 常用 $k_e(G)$ 表示图 G 的边连通度. 边连通度不小于 k 的图称为 k 边连通图. 一个图上两个不相邻的节点 x 和 y 的局部连通度是指这样一个最小整数 k，从图上去掉某 k 个节点后，所得的图上不存在连 x 和 y 的路. x 和 y 的局部连通度记为 $k(x,y)$. 一个图 G 的连通度对是指这样一个自然数有序对 (a,b)：G 上存在 a 个节点和 b 条边，从 G 上去掉所有这些节点和边之后所得的图不再是连通图；而且，G 上不存在 $a-1$ 个节点和 b 条边，或 a 个节点和 $b-1$ 条边具有这一性质. 对于任意整数 a：$0\leqslant a\leqslant k(G)$，存在惟一一个连通度对 (a,b_a). 定义函数 $f(a)=b_a$. $0\leqslant a\leqslant k(G)$，称 f 是 G 的连通度函数.

连通度函数(connectivity function)　见“连通度”.

门杰定理(Menger's theorem)　关于图的连通性的一个定理. 门杰定理断言：若 X 和 Y 是图 G 的两个不交的节点子集，k 是一个正整数，则 G 上存在 k 条分别以 X 和 Y 中的节点为端点而且两两除端点外互不交的路，当且仅当每一个 XY 分离点集包含至少 k 个节点. 上述的 XY 分离点集指 G 的这样一个节点子集，若从 G 上去掉该子集的所有节点，所得到的图不存在连 X 中节点与 Y 中节点的路. 这个定理是门杰(Menger, K.)于 1927 年首先发现的，

于是，由此而得名.



$H_{m,n}$图($H_{m,n}$- graph)　一种特殊图. 它有 n 个顶点，是 m 连通的且恰有$[mn/2]$条边. 由于这种图是惟一确定的，所以称它为 $H_{m,n}$图. 其中，$[x]$表示 x 的上整数，即不小于 x 的最小整数. 事实上，$H_{m,n}$是 n 阶 m 连通的含边数最小的图. 在图例中，(a) 所示的为 $H_{4,8}$；(b)所示的为 $H_{5,8}$.

模H连通(modulo H connected)　图论的一个基本概念. 指一个图关于其子图 H 的一种连通性. 设 H 是图 G 的子图，所有那些既与 G 中不属于 H 的边关联，又与 H 中的边关联的节点称为 G 关于 H 的触点. 若从 G 中去掉 H 的所有边和 H 的所有不是触点的节点后，所得的图是连通的，则称 G 是模 H 连通. 当 H 是 G 中的一个圈 C 时，也称为模 C 连通. 所谓 G 的模 C 片是 G 的这样的极大子图：任何两边都存在这个子图中的一条除端点可能外，其他节点都不是触点的路连结它们. 一个连通图，若不能用去掉少于 n 条边的办法将它分离为两个连通片，使得每个连通片都含有一个圈，则称它为 n 圈连通图.

圈连通(circuit connected)　见“模 H 连通”.

k临界图(k-critical graph)　一类特殊的图. 指关于连通度的节点临界图. 若对于图 G 上任一节点 v，都有 $k(G-v)<k(G)$，则称 G 是关于连通度的节点 k 临界图，或者点 k 板小图. 若对于图 G 上任一边 e，都有 $k-(G-e)<k(G)$，称 G 为 k 极小图，或者边 k 极小图.

哈密顿圈问题(Hamilton circuit problem)　图论中著名的难题之一. 设有一个图，若其上存在一个圈，这个圈包含该图上的每一节点，则称该圈为哈密顿圈，这个图称为哈密顿图. 哈密顿圈问题可叙述为：什么样的图为哈密顿图，或者说判断一个图是哈密顿图的行之有效的充分必要条件是什么. 目前这一问题尚未解决. 关于哈密顿圈的研究，最早是欧拉(Euler, L.)研究骑士(相当于中国象棋中的马)从棋盘上的某一位置出发，走遍所有可能的位置且每个位置只通过一次后，回到原来的位置. 而哈密顿(Hamilton, W. R.)研究环游世界的游戏是在欧拉之后近一个世纪，然而却由此开始引起人们对于这个问题的注意. 实际上，哈密顿的游戏就是，在一个正十二面体上，从一个顶点开始沿着棱走遍所有的十二个顶点回到原地，使得每一顶点只通过一次. 就是在十二面体相应的图上求一个哈密顿圈. 若一个图上存在一条路，这条路包含该图上的所有节点，则称该图为可迹图，称这样的路为哈密顿路. 若对于一个图上的每一节点，存在一个以该节点为始点的哈密顿路，则称该图为齐次可迹图. 一个图被称为哈密顿连通图，若对于这图上任何两节点，存在一条哈密顿路连结这两节点. 称一个图为亚哈密顿图，若从这图上去掉无论哪一节点，所得的图都是哈密顿图. 称一个图为亚可迹图，若从这图上去掉无论哪一节点，所得的图都是可迹图.

哈密顿圈(Hamiltonian circuit(cycle))　见“哈密顿圈问题”.

哈密顿图(Hamiltonian graph)　见“哈密顿圈问题”.

亚哈密顿图(hypohamiltonian graph)　见“哈密顿圈问题”.

泛圈图(pancyclic graph)　一个特殊的哈密顿图. 具体地说，若在一个 n 阶图 G 上存在长度分别为 $3,4,\cdots,n$ 的圈，则称该图为泛圈图. 若对于 G 上任何一节点 v，在 G 中都存在长度分别为 $3,4,\cdots,n$ 的圈通过 v，则称 G 为点泛圈图. 若对于图 G 上任何一条边 e，在 G 上都存在长度分别为 $3,4,\cdots,n$ 的圈通过 e，则称 G 为边泛圈图. 设 G 是一个二部图，因为在 G 中没有奇长圈，所以不会是泛圈的. 若在 G 上存在长度为 $4,\cdots,n-2,n$(n 偶数)的圈，则称它是泛偶圈的. 类似地，定义点泛偶图和边泛偶圈.

闭包(closure)　图论的一个基本概念. 指由一个图所派生出的另一个图. 具体地说，一个图 G 的闭包 H 是指符合下列条件包含边最少的图：G 是 H 的支撑子图；对于 H 上任何两不相邻节点 v 和 w，都有 $\rho_H(v)+\rho_H(w)<n$，这里 n 表示 H 的阶，$\rho_H(v)$ 和 $\rho_H(w)$分别表示图 H 上节点 v 和 w 的次. 所谓闭包运算，就是如下从图 G 得到它的闭包的递归过程：连通图 G 上任何一对不相邻且满足 $\rho_G(u)+\rho_G(v)\geqslant n$ 的节点 u 和 v 连一边，这里 $\rho_G(u)$和 $\rho_G(v)$分别表示 u,v 在 G 上的次，而 n 表示 G 的阶；对所得的图仍进行这种运算，直到得到这样的图 H，对于任何一对不相邻节点 u 和 v 均有 $\rho_H(u)+\rho_H(v)<n$ 成立. 奥尔(Ore, O.)于 1961 年证明：若一个连通的简单图 G，对于任何两个不相邻的节点，它们的次之和不小于 G 的阶，则 G 必为哈密顿图. 称节点次之和特别是两个节点次之和所满足的条件为奥尔型条件. 所谓一个图 G 的 k 闭包，是指符合下列条件且包含边最少的图 H：G 是 H 的支撑子图；对于 H 上任何两不相邻节点 v 和 u，都有 $\rho_H(v)+\rho_H(u)<k$，$0<k\leqslant 2n-4$. 于是，n 阶图的闭包就是 n 闭包. 这种与闭包运算类似的求一个图的 k 闭包的过程称为 k 闭包运算. 设 P 是 n 阶图上的某种性质. 在一

个 n 阶图 G 上的两个不相邻的节点 u,v，它们次之和 $\rho_G(u)+\rho_G(v)\geqslant k$. 若 $G+(u,v)$（即在 G 上加一条新边所得的图）具有性质 P 可以导出 G 本身也具有性质 P，则称 P 是 k 稳定的. 若 P 是 k 稳定，则从一个图的 k 闭包具有性质 P 可以导出它本身也有性质 P. 具有哈密顿圈的性质是 n 稳定的.

奥尔型条件(Ore type condition)　见“闭包”.

闭包运算(closure operation)　见“闭包”.

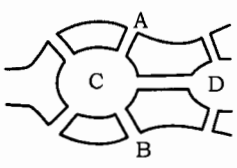
泛连通图(panconnected graph)　一个特殊的哈密顿连通图. 具体地说，若对于一个阶为 n 的图 G 上任意一对节点 u 和 v，G 上存在连结 u 和 v 的长度分别为 $d=d(u,v),d+1,\cdots,n-1$ 的路，这里 $d(u,v)$ 表示节点 u 和 v 的距离，则称 G 是泛连通图.

哈密顿路图(Hamiltonian path graph)　一类特殊的图. 指由一个哈密顿图派生出的一个图. 图 G 的哈密顿路图记为 $H(G)$，它是这样一个图：它的节点集与 G 的节点集相同，两个节点相邻，当且仅当有一条哈密顿路连结它们. 进而，$H(G)$ 的哈密顿路图记为 $H^2(G)$. $H^{k-1}(G)$ 的哈密顿路图记为 $H^k(G)$，$k\geqslant 2$，称为 G 的 k 迭哈密顿路图. 若存在某个 $k,k\geqslant 1$，G 与 $H^k(G)$ 同构，则称 G 为自哈密顿路图.

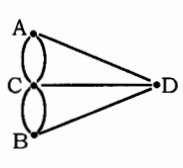
制约圈(dominating circuit)　亦称支配圈. 图上一种特殊的圈. 若图 G 的不在圈 C 上的每条边都与 C 上的某条边相邻，则称 C 为 G 的制约圈. 若一个制约圈 C 的长度为 λ，则称它为制约 λ 圈.

支配圈(dominating circuit)　即“制约圈”.

哥尼斯堡七桥问题(Konigsberg bridge problem)　18 世纪提出的一个著名的图论问题. 实际上是寻找欧拉游（参见“欧拉图”）的问题. 哥尼斯堡（即加里宁格勒）有一条带有两个岛的分叉河流，有七座桥连通河两岸与岛，以及岛与陆地. 在附图(a)中，阴影部分表示陆地、岛或桥. 问题是想要知道从一个区域出发，经过每座桥恰好一次，再回到原出发区域的旅行路线是否存在. 当时，人们多次试图找出这样的路线，但都没有成功. 这就是所谓的哥尼斯堡七桥问题. 后来，欧拉(Euler,L.)首先证明了这样的路线不存在. 他所用的方法是将陆地和岛 A,B,C,D 各用一个点代替. 两个点用一条线连结，若这两个点所代表的两片陆地或岛间有一座桥，则得到如附图(b)所示的图，从而把原来的问题化为在这个抽象的图上求一个欧拉游的问题. 由此，欧拉通过证明一个一般的定理导出其上欧拉游的不存在，给原问题以一个否定的回答. 这一结果欧拉于 1735 年在科学院的会议上宣讲，于 1736 年正式发表. 这就是历史上图论的第一篇文章.



(a)



(b)

一笔画问题(unicursal problem)　一个重要的图论问题. 指确定一个图是否存在一条欧拉径（参见“欧拉图”）的问题. 即判断一个图，其上是否存在一条径，这条径包含该图的每一条边恰好一次. 通俗地说，就是判断一个图，能否一笔画出一条径，通过该图的每一条边恰好一次. 若要求这个径的起点与终点一致，则它就成了判定一个图是否存在一个欧拉游的问题.

欧拉图(Eulerian graph)　一种特殊的连通图. 若图 G 的每一条边都在 G 的同一条径上，则称这条径为 G 的欧拉径. 若一个欧拉径的始点与终点相同，则称它为欧拉游. 有欧拉游的图称为欧拉图. 欧拉(Euler,L.)证明：一个连通图为欧拉图，当且仅当这图上每一节点的次均为偶数. 因为上述概念均为欧拉所首先发现，故均冠以他的名字. 所有节点的次均为偶数的图也称为偶图. 这样，连通的偶图是欧拉图.

欧拉游(Eulerian tour)　见“欧拉图”.

欧拉径(Eulerian trail)　见“欧拉图”.

偶图(even graph)　见“欧拉图”.

欧拉有向图(Eulerian digraph)　一种特殊的强连通有向图. 若一个有向图 D 上存在一条有向闭径 C，使得 D 的每一条弧都在 C 上，则称 D 为欧拉有向图. 这种闭径被称为有向欧拉游.

BEST **定理**(BEST-theorem)　一个重要的图论问题. 指有向图上的有向欧拉游的一个计数定理. 设 D 是一个有向图. 这个定理断言：在 D 上有向欧拉游的数目为

$$c\prod_{i=1}^{n}(\rho_i-1)!,$$

其中，ρ_i 表示 D 的第 i 个节点 v_i 的出次，n 表示 D 的阶，$c=\det M_{k,k}(D)$. $M_{k,k}(D)$ 是矩阵 $M(D)$ 去掉第 k 行和第 k 列后所得到的矩阵；$M(D)=(m_{i,j})$ 是这样一个 n 行 n 列矩阵：当 $i\neq j$ 时，$m_{i,j}=-a_{i,j}$，$a_{i,j}$ 表示 D 中从节点 v_i 指向 v_j 的弧的数目，当 $i=j$ 时，$m_{i,j}=\rho_i$. $M(D)$ 有下列性质：对于 $k_1\neq k_2$，$1\leqslant k_1<k_2\leqslant n$，有 $\det(M_{k_1,k_1}(D))=\det(M_{k_2,k_2}(D))$. 因此，可以用任何一个 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 确定 c. BEST 中的字母 B,E,S,T 分别代表德布莱英(de Bruijn,N. G.)、爱伦法斯特(van. Aardenne-Ehrenfest,T.)、史密斯(Smith,C. A. B.)和塔特(Tutte,W. T.)四人. 前两人于 1951 年发表了这一定理的一般形式，后两人于 1941 年给出这一定理的当 D 的母图为 4 正则的特

殊情形.

制约集(dominating set) 图论的一个重要概念.指一个图的特殊节点子集.设 A 是图 G 的一个节点子集,若 G 的任何不在 A 中的节点都与 A 中的节点相邻,则称 A 为 G 的一个制约集.图 G 的最小制约集的基数称为 G 的制约数,也称外固数.

制约数(domination number) 见"制约集".

外固数(external stability) 见"制约集".

制约划分(dominating partition) 图论的一个重要概念.指图的节点集的一种划分.具体地说,一个图 G 的制约划分,就是把 G 的节点集分为若干个互不相交的子集,每一个子集都是 G 的制约集.在 G 的所有制约划分中,划分出的子集最多的那一个划分的子集的数目称为 G 的制约划分数.

制约划分数(domatic partition number) 见"制约划分".

独立制约集(independent dominating set) 图论的一个重要概念.指图的一种节点子集.具体地说,一个图的既是独立集又是制约集的节点子集,称为该图的独立制约集.图的最小独立制约集的基数称为它的独立制约数.若图 G 的节点集可以划分为若干个两两不交的独立制约集,则称 G 可独立制约划分.

独立制约数(independent dominating number) 见"独立制约集".

全制约集(total dominating set) 图的一种特殊的制约集.具体地说,设有图 G 的一个节点子集 A,若对于 G 上任一节点 u,A 中存在与 u 相邻的节点,则称 A 为 G 的一个全制约集.事实上,只有含孤立点的图上才不存在全制约集.含节点数最少的全制约集称为最小全制约集.不含孤立点的图的最小全制约集中的节点数称为全制约数.设有不含孤立点的图的节点集的一个划分,若这一划分的每一个节点子集都是 G 的全制约集,则称该划分为一个全制约划分.全制约划分数就是指在 G 的所有全制约划分中,划分所得的节点子集最多的那一个划分的子集数目.

最小全制约集(minimum total dominating set) 见"全制约集".

全制约数(total dominating number) 见"全制约集".

全制约划分数(total dominating partition number) 见"全制约集".

连通制约集(connected dominating set) 图的一种特殊制约集.具体地说,若 A 是图 G 的制约集,且 A 在 G 中的导出子图是连通的,则称 A 是 G 的连通制约集.G 的节点数最少的连通制约集的节点数称为 G 的连通制约数.图 G 的节点集若可以划分为若干个两两不相交的连通制约集,则在 G 的所有这样的划分中,基数最大的划分的基数称为 G 的连通制约划分数.

连通制约数(connected dominating number) 见"连通制约集".

连通制约划分数(connected dominating number) 见"连通制约集".

无赘集(irredundant set) 图论的一个重要概念.指图的节点集的一种子集.设 S 是图 G 的一个节点子集,若对于任何 $w\in S$,都有

$$N[w]\not\subset\bigcup_{v\in S-\{w\}}N[v],$$

则称 S 为 G 的无赘集.这里 $N[v]$ 表示节点 v 在 G 中的闭邻域.不是别的无赘集的真子集的无赘集称为极大无赘集.

极大无赘集(maximal irredundant set) 见"无赘集".

覆盖(covering) 数学的一个重要概念.这里指一类节点子集.具体地说,图的一个节点子集使该图的每一条边都与这个子集中一个节点关联,称这样的节点子集为覆盖集,也称点覆盖集,简称覆盖.图 G 的最小覆盖,也称最小点覆盖,是指在图的所有覆盖中,节点数最少的覆盖.G 的最小覆盖的节点数称为 G 的覆盖数,或点覆盖数,常记为 $\beta(G)$.一个图称为覆盖临界图,或点覆盖临界图,若从这图上去掉任何一条边后,所得的图的覆盖数都小于原图的覆盖数.设有一个最小覆盖 M,若对于它的任何一个子集 M',与 M' 中节点相邻的不在 M 中的节点的数目总不比 M' 的节点数少,则称 M 为一个外部最小覆盖或外最小点覆盖.不是任何一图都有外最小覆盖.事实上,一个图有外最小覆盖当且仅当它有一个点核,或边核.

覆盖集(covering set) 见"覆盖".

最小覆盖集(minimum covering) 见"覆盖".

覆盖数(covering number) 见"覆盖".

覆盖临界图(covering-critical graph) 见"覆盖".

边覆盖(edge covering) 一类覆盖.指一类边子集.具体地说,图的一个边子集,使该图上每一节点都与这个边子集中的一条边关联.只有含孤立点的图没有边覆盖.边覆盖也称为边覆盖集.图 G 的最小边覆盖就是指边数最少的覆盖.图 G 的最小边覆盖的边数称为 G 的边覆盖数,常记为 $\beta'(G)$.

最小边覆盖(minimun edge covering) 见"边覆盖".

边覆盖数(edge covering number) 见"边覆盖".

可约二部图(reducible bipartite graph) 一类

二部图. 设 $V_1 \cup V_2$ 是二部图 G 的节点集，V_1, V_2 分别是 G 的独立集，若 G 上只存在一个最小点覆盖 M，且 $M \cap V_1 = \varnothing$ 或 $M \cap V_2 = \varnothing$，则称 G 为半不可约二部图. 若 G 上存在恰好两个最小点覆盖 M_1 和 M_2，且 $M_1 \cap V_1 = \varnothing$ 和 $M_2 \cap V_2 = \varnothing$，则称 G 是不可约二部图. 既不是半不可约二部图，也不是不可约二部图的二部图称为可约二部图.

独立集(independent set)　图论的一个重要概念. 由一个图的两两互不相邻的一些节点组成的集合称为该图的一个独立集. 一个图的独立集也称为稳固集. 图 G 的含节点最多的独立集称为最大独立集. G 的最大独立集的节点数称为 G 的独立数或内固数，常记为 $\alpha(G)$. 图 G 被称为 α 临界图，或独立临界图，若从 G 上去掉任何一条边后所得的图的独立数都大于 $\alpha(G)$.

稳固集(stable set)　见“独立集”.

独立临界图(α-critical graph)　见“独立集”.

最大独立集(maximum independent set)　见“独立集”.

内固数(internal stability)　见“独立集”.

边独立集(edge independent set)　图论的一个重要概念. 由一个图的两两互不相邻且不是环的一些边组成的集合称为该图的一个边独立集. 图的最大边独立集，就是指图的含边数最多的边独立集. 一个图 G 的边独立数，就是指 G 的最大边独立集的边数，常记为 $\alpha'(G)$.

最大边独立集(maximum edge independent set)　见“边独立集”.

边独立数(edge independent number)　见“边独立集”.

点核(vertex core)　图论的一个重要概念. 指图的一个子图. 由图 G 的基数与 G 的边覆盖数相等的所有独立集的并所产生的节点导出子图，称为 G 的点核. 并非所有的图都存在点核. 由 G 的基数与 G 的点覆盖数相等的所有边独立集的并所产生的边导出子图，称为 G 的边核. 同样，并非所有的图都有边核. 但已证明：一个图有点核当且仅当它有边核；且它们都与存在外最小覆盖等价.

边核(edge core)　见“点核”.

临界边(critical edge)　图论的基本概念之一. 临界边是这样的边：从一个图上去掉它之后，能使所得图的点覆盖数减小. 设 e 是 G 上一条边，若点覆盖数 $\beta(G-e) < \beta(G)$，则称 e 是 G 的关于点覆盖的临界边，简称临界边. 若 G 的每一条边都是关于点覆盖的临界边，则称 G 为关于点覆盖的边临界图.

边临界图(edge critical graph)　见“临界边”.

临界点(critical vertex)　图论的基本概念之一. 与临界边相对应. 临界点是这样的节点：从一个图上去掉它后，能使所得的图的(点)覆盖数减小. 设 v 是 G 的一个节点，若 $\beta(G-v) < \beta(G)$，则称 v 为 G 的一个关于(点)覆盖的临界点. 若 G 的每一个节点都是它的关于(点)覆盖的临界点，则称 G 为关于(点)覆盖的点临界图.

点临界图(vertex criticcal graph)　见“临界点”.

***C* 对集**(*C*-matching)　图的一种子图. 对于一个有 n 个节点的图 G，给定一个 n 维向量 $C = \{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$(其分量都是非负整数)和 G 的无孤立节点的子图 H，若使得 $\rho_H(v_i) \leqslant h_i, i = 1, 2 \cdots, n$，则称 H 为 G 的一个 C 对集，这里 v_i 表示 G 上第 i 个节点，而 $\rho_H(v_i)$ 表示 v_i 在 H 上的次. 对于任何非负整数 $a, b, 0 \leqslant a < b$，图的一个 (a,b) 对集就是它的这样一个边导出子图 H，使得 $a \leqslant \rho_H(v_i) \leqslant b, i = 1, 2 \cdots, n$. 若 $a > 0$，则 (a,b) 对集就是一个 (a,b) 因子.

(a,b) 因子((a,b)-factor)　图的一种支撑子图. 设 a, b 是非负整数，$0 < a \leqslant b$. 设有 G 的支撑子图 H，若对 G 上任一节点 v，均有 $a \leqslant \rho_H(v) \leqslant b$，则称 H 为 (a,b) 因子. 这里 $\rho_H(v)$ 表示节点 v 在 H 上的次. (k,k) 因子就是 k 因子. 所有的 k 因子($k = 1, 2, \cdots$)统称为正则因子. 每一个节点的次均为奇数的因子称为奇因子. 每个节点的次均为偶数的因子称为偶因子. 设 $F_1, \cdots, F_m$ 都是 G 的一些 (a,b) 因子，若

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{m} E(F_i),$$

$$E(F_i) \cap E(F_j) = \varnothing \quad (i \neq j),$$

则称 $\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$ 为 G 的一个 (a,b) 因子分解. 这里 $E(X)$ 表示 $X(=G, F_i, i = 1, 2, \cdots, m)$ 的边集. 若 G 有一个 (a,b) 因子分解，则称 G 可 (a,b) 因子分解.

正则因子(regular factor)　见“(a,b) 因子”.

奇因子(odd factor)　见“(a,b) 因子”.

偶因子(even factor)　见“(a,b) 因子”.

***f* 因子**(*f*-factor)　图的一类特殊因子. 对于一个图 G，定义 $f: V(G) \to \mathbf{Z}_+$，$\mathbf{Z}_+$ 表示非负整数集. 若 G 的一个支撑子图 F 满足：对 G 的任一节点 v，$\rho_F(v) = f(v)$ 成立，则称 F 为 G 的一个 f 因子. 若 G 的子图 F 满足：对于 G 的任一节点 v，均有 $\rho_F(v) \neq f(v)$，则称 F 为 G 的一个 f 反因子. 称二部图 $K_{1,j} (j \geqslant 1)$ 为一个星. 若 G 的子图 F 是一个星 $K_{1,j}$，且满足 $f(v) \geqslant j \geqslant 1$，这里 v 是 F 的中心点，即 $\rho_F(v) = j$，则称 F 为一个 f 星形. G 的一个子图被称为 f 星因子，若这个子图的每一连通片是一个 f 星形. 若 $f(v) = n$，对 G 的任一节点成立，则称 G 的 f 星因子为 $\{K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n}\}$ 因子. 统称所有 $\{K_{1,1}, K_{1,2}, \cdots, K_{1,n}\}$ 因子为星因子.

***f* 反因子**(*f*-antifactor)　见“f 因子”.

星因子(star factor)　见“f 因子”.

(g,f)奇偶因子((g,f)-parity factor)　图的一类特殊因子. 设 g,f 是定义在图 G 的点集上的两个非负整数值函数,且 $g(v)\leqslant f(v)$, $g(v)\equiv f(v)\pmod 2$ 对 G 上任一节点 v 成立. 设有 G 的支撑子图 F,若 F 满足:对于 G 上任一节点 v,均有

$$\rho_F(v)\in\{g(v),g(v)+2,\cdots,f(v)\},$$

则称 F 为一个 (g,f) 奇偶因子. 若 $g(v)=1$ 对 G 上任一节点 v 成立,则称 G 的 (g,f) 奇偶因子为 $(1,f)$ 奇因子.

$(I,\mathbf{Z})$因子($(I,\mathbf{Z})$-factor)　图的一类特殊的因子. 设 I 是非负整数集 $\mathbf{Z}_+$ 的一个子集,若 G 的一个支撑子图 H 满足条件:对 G 上任一节点 v,都有 $\rho_H(v)\in I$,则称 H 为 G 的 $(I,\mathbf{Z})$ 因子,这里 $\rho_H(v)$ 表示 v 在 H 上的次. 若 $I=\{1,3,\cdots,2n-1\}$,则称 G 的 $(I,\mathbf{Z})$ 因子为 $\{1,3,\cdots,2n-1\}$ 因子.

C_l 因子(C_l-factor)　图的一类特殊因子. 图 G 的一个支撑子图 H,H 的每个连通片都是长度为 l 的圈. 若 H 的每一连通片都是长度为 l 的路,则称 H 为 P_l 因子. 若 H 的每一连通片均与完全图 K_l 同构,则称 H 为 G 的 K_l 因子. 更一般地,对于任给两个图 H 和 L,若 G 的连通片不与 H 同构就与 L 同构,则称 G 为一个 (H,L) 因子. 若 H 的连通片与一族树中的某个树同构,则称 H 为 G 的一个树-因子. 若 H 的每个连通片与 G 的一个团同构,则称 H 为 G 的团-因子.

树-因子(tree-factor)　见"C_l 因子".

团-因子(clique-factor)　见"C_l 因子".

因子临界图(factor critical graph)　一类具有特殊性质的图. 若从 G 中任意去掉一个节点和与这节点关联的边,在所得的图中总有一个 1 因子,则称 G 为因子临界图,或更确切地说,1 因子临界图. 凡因子临界图必只能有奇数个节点,从而不可能有 1 因子. 若一个图 G 有一个 1 因子,但任意去掉两个相邻的节点及它们的关联边之后所的图仍有 1 因子,则称 G 为 1 临界图. 若图 G 有 1 因子,而且任意去掉两个不同的节点之后所的图仍有 1 因子,则称 G 为 2 临界图. 凡 2 临界图必为 1 临界图,但反之则不然.

荫度(arboricity)　图论中的一个不变量. 设 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ 是 G 的支撑子图,且都是森. 若

$$E(G)=\bigcup_{i=1}^{m}E(H_i),\quad E(H_i)\cap E(H_j)=\varnothing,$$

则称 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 为 G 的一个森分解. 在 G 的所有森分解中,含森最少的森分解中森的数目,称为 G 的荫度. 若 H_i 是线性森,即其每一连通片是一条路,则在 G 的所有线性森分解中,含森最少的分解中的线性森的数目,称为 G 的线性荫度. 图 G 的点-荫度定义为符合如下条件的最小整数 k:G 的节点可分成 k 个不交的子集,每一个节点子集的导出子图都是森. 图 G 的线性点-荫度定义为符合下列条件的最小整数 k:G 的节点集可分成 k 个不交的子集,每一个节点子集的导出子图是一个线性森.

因子覆盖图(factor covered graph)　一类特殊的图. 指每一条边都在同一种因子之中的图. 若图中的每一条边都包含在某个 1 因子之中,则称 G 为 1 因子覆盖图. G 的节点 v 称为完全覆盖点,若 v 的每条与之关联的边均有 G 的一个 1 因子包含它.

半正则 1 因子分解(semiregular 1-factorization)　图的一种因子分解. 指完全图 K_{2n} 的一种 1 因子分解. 设 $\mathscr{F}=\{F_i\mid 1\leqslant i\leqslant 2n-1\}$ 是图 K_{2n} 的一个 1 因子分解,若对于 $\mathscr{F}$ 中任意四个不同的 1 因子 F_i,F_j,F_k,F_m,$F_k\cup F_m$ 和 $F_i\cup F_j$ 中各种长度的圈的数目都对应相等,则称这个 1 因子分解是半正则的. K_{2n} 的一个 1 因子分解 $\mathscr{F}$ 称为是完满的,若对于 $\mathscr{F}$ 中任意两个不同的 1 因子 F_i 和 F_j,$F_i\cup F_j$ 都是 K_{2n} 的一个哈密顿圈.

完满 1 因子分解(perfect 1-factorization)　见"半正则 1 因子分解".

同构因子分解(isomorphic factorization)　图的一种特殊的因子分解. 图 G 的边集 $E(G)$ 的一个划分 $\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$ 称为 G 的一个同构因子分解,若对于任意 i,j:$1\leqslant i<j\leqslant m$,$E_i$ 与 E_j 在 G 上的导出子图同构. 图 G 可分解为 t 个同构因子的一个必要条件是 t 可整除 G 的边数. 这个条件称为 G 关于 t 的可分性条件. 称图 G 是有理图,若对任意整数 t,G 关于 t 的可分条件也是 G 可同构因子分解的充分条件. 已经证明:完全图和完全等分多部图(即,将完全图的节点用基数相同的独立集代替使得任一节点与其他部的所有节点都相邻)等都是有理的. 当然,不是任何图都是有理的.

有理图(rational graph)　见"同构因子分解".

正常着色(proper coloring)　一种组合方法. 指对一个集合中元素的一种着色方法. 设有一个集合 A,在 A 的元素间有一种二元关系 R. 若将 A 中的元素着以颜色使得 A 中任何两个满足 R 的元素均带不同的颜色,则这种着色方法为 A 对于 R 的正常着色. 若 A 为一个图 G 的节点集,这二元关系 R 就是相邻,则称这种着色为 G 的点正常着色,通常简称正常着色或着色. 若一种着色中所用颜色的数目为 k,则称这种正常着色为 k 点正常着色. 若取 A 为图 G 的边集,R 为边之间的相邻,则这种正常着色称为 G 的边正常着色,常简称边着色. 若图 G 的一种边正常着色共用 k 种不同的颜色,则称它为 G 的 k 边正常着色. 对于一个图的某种点正常着色,着相同色的节点所组成的集合称为一个色组. 对于一平面图或曲面上的地图的面集,面的相邻关系的正

常着色，通常简称面着色. 若一个面正常着色中共用 k 种颜色，则称它为 k 面正常着色，也称为 k 面着色. 所谓全正常着色，就是对于一个图的节点集和边集的并在相邻(当两元素同为节点或同为边时)或关联(当一个元素为节点另一个为边时)关系下的正常着色. 全正常着色常简称全着色.

色组(color class)　见“正常着色”.

色数(chromatic number)　一类组合数. 指图的所有同类型的正常着色，用的颜色的数目最少的那种正常着色所用颜色数目. 一个图 G 的点正常着色的色数称为点色数或简称色数. 常用 $\chi(G)$ 表示图 G 的色数. 图 G 的边色数是指 G 的边正常着色的色数. G 的边色数常记为 $\chi'(G)$. 平面图 G 的面色数就是 G 的面正常着色的色数，常记为 $\chi^*(G)$. 图 G 的全色数就是 G 的正常全着色的色数. 常记为 $\chi_T(G)$. 全着色猜想就是：对任意简单图 G，$\chi_T(G)\leqslant\Delta(G)+2$，$\Delta(G)$ 表示 G 中节点的最大次. 已经证明：对于任何 n 阶图 G，当 $\Delta(G)\leqslant 4$ 或 $\Delta(G)\geqslant n-5$ 时，全着色猜想成立. 图 G 的 n 色数指如下着色的最少色数：用若干种色，对图 G 的节点着色，使得 G 上每条长度为 n 的路上没有两个节点着同一色. G 的 n 色数常记为 $\chi^n(G)$. 类似地，定义 n 边色数和 n 全色数. 一个图 G 完全着色是指 G 的这样一种点正常着色，使得对于这一种着色的任何两色，都存在 G 的一边，它的两个端点恰着此两色. 图 G 的完全着色数，就是指在 G 的所有完全着色中，所用颜色数目最少的那一种完全着色的颜色数. 若图 G 本身不是完全图，则将它的不相邻的两节点等同为一个节点；若所得到的图仍不是完全图，则继续做这种运算，直到所得的图为完全图. 一个图，通过这种运算将它变为完全图所需要的最小运算次数称为 G 的消色数. 换言之，G 的消色数就是将 G 变换到完全图所需要做的初等同态的最小次数.

全着色猜想(total coloring conjecture)　见“色数”.

k 可着色图(k-colorable graph)　一类特殊的图. 存在 k 点正常着色的图，称为 k 正常可着色的图. 类似地，存在 k 边正常着色的图，称为 k 边可着色图.

色临界图(color critical graph)　亦称点着色临界图. 一类与色数有关的极图. 图 G 为色临界图是指：若对于 G 上任一节点 v，有 $\chi(G-v)<\chi(G)$，其中，$\chi(X)$ 表示图 $X(X=G-v$ 或 $G)$ 的色数. 称图 G 为边色临界图，若对 G 的任一边 x，图 $G-x$ 的边着色数

$$\chi'(G-x)<\chi'(G),$$

其中，$\chi'(X)$ 表示图 $X(=G$ 或 $G-x)$ 的边色数.

惟一 k 可着色图(uniquely k-colorable graph)　一种特殊的 k 可着色图. 图 G 的一个 k 正常着色的所有色组构成 G 的节点集 V 的一个划分. 若 G 的所有正常 k 着色(k 固定)都导致 V 的同样的划分，则称 G 是惟一 k 可着色图. 设图 G 的边色数为 k，若 G 的任意两个 k 边正常着色，都导出其边集的相同划分，则称 G 为惟一 k 边着色图.

哈约斯猜想(Hajos' conjecture)　图论的一个猜想. 指关于图的着色的一个著名猜想：若图 G 为 k 色图，则 G 包含 k 阶完全图 K_k 的一个剖分图. 这是哈约斯(Hajos, G.)于 1961 年提出的. 所谓一个图的基本剖分，就是从这图上去掉一条边(设以 u,v 为端点)，添上一个新节点 w，并添上两条边 (w,u) 和 (w,v)(分别以 w,u 为端点和以 w,v 为端点的边). G 的一系列基本剖分构成 G 的一个剖分. 换句话说，哈约斯猜想：若图 G 的色数为 k，$k\geqslant 1$，则 G 有一个子图与 K_k 同胚. 这个猜想对 $k\leqslant 4$ 成立；对 $k\geqslant 7$ 卡弗林(Caflin, P. A.)1974 年已举出反例；目前仅剩下 $k=5,6$ 尚未解决.

维津定理(Vizing theorem)　关于图的边着色的一个定理. 若 G 是简单图，则 $\Delta\leqslant\chi'(G)\leqslant\Delta+1$，其中，$\Delta$ 表示 G 上次最大的节点的次，$\chi'(G)$ 表示边色数. 这个定理是维津(Vizing, V. G.)于 1964 年发表的. 由此可以将简单图分为二类：对任意简单图 G，若 $\chi'(G)=\Delta$，则称 G 为第 1 类图；否则，称 G 为第 2 类图.

哈德威格猜想(Hadwiger's conjecture)　关于图的着色的一个著名猜想：若 G 是着色数为 k 的图，则 G 可收缩为 K_k，即有 k 个节点的完全图. 由于这个猜想是哈德威格(Hadwiger, H.)于 1943 年首次提出的，从而得名. 已经证明：当 $k=4$ 时，这个猜想成立；$k=5$ 时，它与四色猜想等价. 因此，它比四色猜想更难.

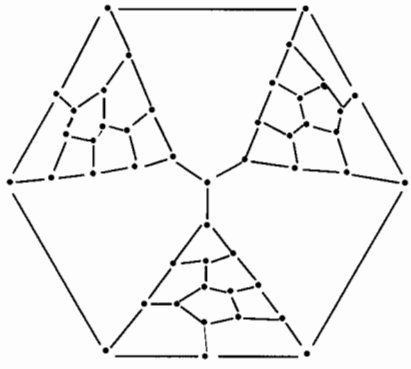
四色猜想(four-color-conjecture)　图论中的最著名猜想之一：任何平面图 G 的色数均不超过 4，即 $\chi(G)\leqslant 4$. 阿佩尔(Appell, L. P. (É.))和哈肯(Haken)于 1976 年宣称他们已借助于计算机证明了这个猜想.

四色问题最早是由格思里(Guthrie, F.)于 1852 年提出来的. 凯莱(Cayley, A.)于 1879 年在英国皇家地理学会的会刊上刊出了这个问题. 不久，肯普(Kempe, A. B.)发表了第一个“证明”. 紧接着，泰特(Tait, P. G.)也提出了一个“证明”. 前一个在 10 年后被希伍德(Heawood, P. J.)否定，同时，他用肯普的方法证明了五色定理：对于平面图 G，有 $\chi(G)\leqslant 5$. 后一个则是在一个世纪之后被塔特(Tutte, W. T.)否定. 四色定理的研究对于图论的发展已经产生并将继续产生深刻的影响.

五色定理(five-color theorem)　见“四色

猜想”.

泰特猜想(Tait's conjecture)　关于图的着色的一个著名猜想. 3 正则图的 3 边正常着色称为泰特着色. 泰特猜想:每个简单 3 正则 3 连通平面图都有泰特着色. 它与四色猜想等价. 泰特(Tait, P. G.)曾根据“每个 3 正则 3 连通平面图都是哈密顿图”的错误假设,给出了四色猜想的一个“证明”. 塔特(Tutte, W. T.)于 1946 年构造了一个 3 正则 3 连通的平面图,在这图上不存在哈密顿图. 这个图称为塔特图. 由此推翻了泰特于 1880 年给出的四色猜想的“证明”. 塔特图在下面的附图中给出.



塔特图

塔特图(Tutte graph)　见“泰特猜想”.

完美图(perfect graph)　一种特殊的简单图. 若图 G 的任意一个节点导出图 H 的色数 $\chi(H)$ 等于 H 的团数,则称 G 是 χ 完美图. 若图 G 的任意一个节点导出子图 H 的独立数 $\alpha(H)$ 等于 H 的团划分数,则称 G 是 α 完美图. 弱完美图猜想:G 是 χ 完美图的充分必要条件是 G 为 α 完美图;或等价地,完美图的补图是完美图. 由于它已获证,并称为完美图定理,这就允许不必区别 χ 完美图和 α 完美图,而统称为完美图. 强完美图猜想:G 是完美图当且仅当 G 和 G 的补图 G^C 都不含长大于 3 的奇圈作为节点导出子图. 这个猜想至今尚未得到证明.

完美图猜想(perfect graph conjecture)　见“完美图”.

全三角图(triangulated graph)　一类特殊的图. 设有一个图,若它的任何一个长度大于 3 的圈都有一个弦在它的边集中,则称该图为全三角图. 所谓一个圈的弦,就是指连结这个圈上两个不相继的节点的边. 一个图中的任何一个节点导出子图,若它是一个长度大于 3 的圈,则称它为这个图的洞. 若一个节点导出子图对于同阶完全图的补是一个圈,则称它为这个图的一个反洞. 强完美图猜想也可以叙述为:一个图若不是完美图,则它必有一个奇洞或奇反洞.

洞(hole)　见“全三角图”.

反洞(antihole)　见“全三角图”.

团划分(clique partition)　图论的基本概念之一. 指分节点集为几部分. 严格说,即把图的节点集划分为若干个子集,使每一子集的导出子图都是团. 所谓图 G 的团划分数就是指在 G 的所有团划分中,含团最少的那个团划分中团的数目. 团划分数是图的一个不变量.

团划分数(clique partition number)　见“团划分”.

极图(extremal graph)　一类特殊的图. 指阶数一定在某种意义下最大的图. 给定一个图族 $\mathscr{L}$,在所有 n 阶图中含边最多,不以 $\mathscr{L}$ 中图为其子图的图. 这个给定的图族 $\mathscr{L}$ 称为禁用图类. 关于 $\mathscr{L}$ 的全部 n 阶极图的集记为 $\mathrm{Ex}(n,\mathscr{L})$,其中每个极图边数相等,记为 $\mathrm{ex}(n,\mathscr{L})$. 例如,$T_{m,n}$ 图,即有 n 个节点,各部节点数分别为 $[n/m]$(即 n/m 的整数部分)或 $[n/m]+1$ 的完全 m 部图,就是一个极图. 其中,$\mathscr{L}$ 是 $m+1$ 阶完全图. $T_{m,n}$ 常称为图兰图. 事实上,有图兰定理:在所有不含完全图 K_n 作为子图的 m 阶图中,边数最多的图只有一个,就是 $T_{m,n-1}$. 它第一次出现在图兰(Turán, P.)1941 年发表的文章中,由此而得名.

图兰图(Turán graph)　见“极图”.

次色数(subchromatic number)　图论的基本概念之一. 指给定的禁用图类 $\mathscr{L}$ 中所有图的色数最小值与 1 的差. 禁用图类 $\mathscr{L}$ 的次色数记为 $\psi(\mathscr{L})$. 禁用图类 $\mathscr{L}$ 的分解是指有如下性质的图 M 组成的集合:设 $\mathscr{L}$ 的次色数为 p,对于 $\mathscr{L}$ 中一个图 L,M 是 L 的一个导出子图,且从 L 中去掉所有 M 的节点和它们的关联边所得的图是 $(p-1)$ 可着色的. 所谓分解定理是指如下结论:设禁用图类 $\mathscr{L}$ 的次色数为 p,$\mathscr{L}$ 的分解为 μ,则每个 n 阶极图 $G_n\in\mathrm{Ex}(n,\mathscr{L})$ 可由适当的完全 p 部图 $K_{n_1,\cdots,n_p}$ 改变 $O(\mathrm{ex}(n,\mu))$ 即 $\mathrm{ex}(n,\mu)/n$ 的常数倍条边得到. 这里

$$n_i(n/p)+O(\mathrm{ex}(n,\mu)/n),$$

$$\delta(G_n)=(1-p^{-1})n+O(\mathrm{ex}(n,\mu)/n),$$

$\delta(G_n)$ 表示 G_n 中节点的最小次.

反极图问题(inverse extremal problem)　图论的一个重要问题. 指由极图序列反求常用图类的问题. 具体地说,对于一个给定的图序列 $\{S^m\}$,反求对应于 $\{S^m\}$ 的禁用图类,使 $\{S^m\}$ 是对于它的一个极图序列的问题. 对于充分大的 m,一个禁用图类 $\mathscr{L}$ 以图兰图 $T_{m,n}$ 为极图的充分必要条件是:存在 $L\in\mathscr{L}$,以及 L 上一条边 e,使得 $\chi(L-e)=\psi(\mathscr{L})=n$,其中,$\chi$ 和 ψ 分别表示色数与次色数. 进而,若对无穷多个 n 的值 $T_{m,n}$ 是 $\mathscr{L}$ 的极图,则对充分大的 m,它是对于 $\mathscr{L}$ 的惟一的极图. 以上结论,就是所谓的

$T_{m,n}$定理.

$T_{m,n}$定理($T_{m,n}$ theorem) 见“反极图问题”.

退化极图问题(degenerate extremal problem) 图论的一个重要问题. 指关于次色数为 1 的禁用图类的极图问题. 若禁用图类 $\mathscr{L}$ 的次色数大于 1,则称关于 $\mathscr{L}$ 的极图问题为非退化极图问题.

超饱和图(supersaturated graph) 一类特殊的图. 指边数超过极图边数的图. 若一个 n 阶图 G 的边数大于$\mathrm{ex}(n,\mathscr{L})$,则称 G 为对于禁用图类 $\mathscr{L}$ 的超饱和图. 其中,$\mathrm{ex}(n,\mathscr{L})$为对于 $\mathscr{L}$ 的 n 阶极图中的边数.

稳定性定理(stability theorems) 图论的重要定理之一. 描述极图偏离程度的定理. 一般指第一稳定性定理和第二稳定性定理. 第一稳定性定理如下:设 $\mathscr{L}$ 是一禁用图类,其次色数为 p,对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_\varepsilon>0$ 和正整数 $n_\varepsilon>0$,满足条件:若 n 阶图 G_n 不含任何 $L\in\mathscr{L}$,及 $n>n_\varepsilon$,且 G_n 的边数大于$\mathrm{ex}(n,\mathscr{L})-\delta_\varepsilon n^2$,则 G_n 可由 $T_{n,p}$改变最多 εn^2 条边得到. 第二稳定性定理如下:设 $\mathscr{L}$ 是禁用图类,次色数为 p,分解为 $\mu,k>0$,$G^n\in\mathrm{Ex}(n,\mathscr{L})$,$S_1,\cdots,S_p$ 为它的最优划分,$G_i=\langle S_i\rangle$,若

$$e(G^n)\geqslant\mathrm{ex}(n,\mathscr{L})-k\cdot\mathrm{ex}(n,\mu),$$

则有下面的结论:

1. G^n 可由 XG_i 删除 $O(\mathrm{ex}(n,\mu))$条边得到.

2. $e(G_i)=O(\mathrm{ex}(n,\mu))+O(n)$,

$$|V(G_i)|=(n/p)+O(\sqrt{\mathrm{ex}(n,\mu)}).$$

3. 对任意常数 $c>0$,G_i 中满足 $a(v)\geqslant cn$ 的顶点数仅为 $O(1)$,满足 $b(v)\geqslant cn$ 的顶点数仅为

$$O(\mathrm{ex}(n,\mu)/n)+O(1).$$

4. 设 $L\in\mathscr{L}$,$|L|=r$,若 A_i 为 S_i 中满足 $b(v)\leqslant[n/2pr]$的顶点 v 的集合,则图$\langle A_i\rangle$不含 L.

以上叙述中最优划分是指失去边最少的划分. $a(v)$和$b(v)$分别表示顶点 v 处失去和增加的边数. X 表示联图的运算符号. 第二稳定性定理以极图偏离 XG_i 的程度描述了极图的稳定性.

渐近构造定理(asymptotic structure theorem) 图论的重要定理之一. 利用图兰图 $T_{n,p}$来描述极图构造的定理. 设 $\mathscr{L}$ 是一个禁用图类,次色数为 p,如果一个 n 阶图 $G_n\in\mathrm{Ex}(n,\mathscr{L})$,则 G_n 能从 $T_{n,p}$删去或添上 $o(n^2)$(即量级小于 n^2)条边得到,其中,$\mathrm{Ex}(n,\mathscr{L})$表示对于 $\mathscr{L}$ 的 n 阶极图的集合. 进而,若 $\mathscr{L}$ 是一个有限图类,则

$$\delta(G_n)/n=1-p^{-1}+o(1),$$

这里$\delta(G_n)$为 G_n 中节点的最小次.

拉姆齐扰动(Ramsey perturbation) 见“渐近构造定理”.

色扰动定理(chromatic perturbation theorem) 见“渐近构造定理”.

拉姆齐数(Ramsey number) 图论的重要函数之一. 它是一个以两个正整数作为变量的函数. 设 m 和 n 为正整数. 所谓拉姆齐数,常用 $r(m,n)$表示,是指符合一定条件的 p(图的阶数)的最小值. 任何一个 p 阶的图 G,若不含完全图 K_m 作为一个子图,则必有一个含 n 个节点的独立集. 一个(m,n)拉姆齐图是指阶为 $r(m,n)-1$,既不含 m 个节点的完全图作为子图,也不含 n 个节点的独立集的图. 设 $k_1,k_2,\cdots,k_q$ 是 q 个正整数,所谓广义拉姆齐数 $r(k_1,k_2,\cdots,k_q)$,是指符合下列条件的 p 的最小值:对于 p 阶完全图 K_p,用 q 种色$(c_1,c_2,\cdots,c_q)$对 K_p 的边任意着色,则存在某一色 c_i,所有着这一种色的边的导出子图包含 K_{k_i}作为一子图. 对于正整数 m,n,所谓边拉姆齐数 $r_1(m,n)$,就是指符合如下条件的 p 的最小值:对于任何一个 p 阶的图,其上必有 m 条边两两互不相邻,或有 n 条边以同一节点为端点. 关于 $r(m,n)$的存在性,是由拉姆齐(Ramsey,F. P.)首先给出的.

拉姆齐图(Ramsey graph) 见“拉姆齐数”.

舒尔定理(Schur's theorem) 源于数论中的一个定理. 设 r_n 表示当 $k_1=\cdots=k_n=3$ 时的广义拉姆齐数 $r(3,\cdots,3)$. 将整数集$\{1,2,\cdots,r_n\}$任意划分为 n 个子集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,

$$\bigcup_{i=1}^{n}S_i=\{1,2,\cdots,r_n\},\quad S_i\cap S_j=\varnothing\ (i\neq j),$$

则必有某个 S_i 包含 x,y 和 z,并满足 $x+y=z$. 这里不要求 x,y 和 z 互不相同. 以上结论称为舒尔定理,因为是由舒尔(Schur,I.)于 1916 年发表的. 由这个定理可知,存在一个最小的整数 s_n,使得任意划分$\{1,2,\cdots,S_n\}$为 n 个子集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$,都存在一个 S_i 包含 x,y,z,满足 $x+y=z$,这个最小数称为舒尔数.

舒尔数(Schur number) 见“舒尔定理”.

可平面图(planar graph) 一类特殊的图. 指同构于某一平面图的图. 库拉托夫斯基定理给出了可平面图的特征,其内容为:图 G 是可平面图当且仅当 G 没有同胚于完全图 K_5 和完全二部图 $K_{3,3}$的子图. 同胚于 K_5 和 $K_{3,3}$的图称为库拉托夫斯基图. 这一定理是由库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)于 1930 年证明的. 若可平面图 G 不是任何同阶其他可平面图的子图,则称 G 为极大可平面图. 极大可平面图所对应的平面图的每个面都必为三角形. 同构于外平面图的图称为外可平面图. 3 正则的可平面图称为 3 正则平面图. G 是外可平面的当且仅当 G 没有与完全图 K_4 同胚的子图.

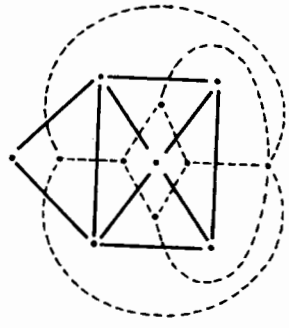
库拉托夫斯基图(Kuratowski's graphs) 见“可平面图”.

库拉托夫斯基定理(Kuratowski' theorem)　见“可平面图”.

平面对偶图(dual graph)　一类特殊的图. 指由一个平面图派生出的另一平面图. 在平面图 G 的每个面内选取一点作为顶点,对于 G 的任一条边 e,将与其相邻的两个面内的顶点用一条仅与 e 有一交点且不与图 G 的其他任何边相交的简单曲线连结,这样得到的平面图称为 G 的平面对偶图,记为 G^*. 亦称 G^* 为 G 的几何对偶. 平面对偶具有对称性,即,若 G^* 为 G 的平面对偶图,则 G 亦为 G^* 的平面对偶图. 附图中的实线和虚线分别代表互为对偶的两个平面图. 若图 G 和 G^* 的边集间可建立一个一一对应,使得任何一对对应边集 E_1 和 E_1^* 有以下关系:

$$r^*(G\backslash E_1)=r^*(G)-r(\langle E_1^*\rangle),$$

其中,$r^*(G)$ 和 r 分别为图的上秩和秩,$\langle E_1^*\rangle$ 为边集 E_1^* 在 G^* 上所导出的支撑子图,则 G^* 称为 G 的代数对偶. 代数对偶也具有对称性,即,若 G^* 为 G 的代数对偶,则 G 也为 G^* 的代数对偶. 若 G 有平面对偶,则 G 是可平面的. 反之,任何可平面的图也必有代数对偶. 这就是惠特尼定理,它是由美国数学家惠特尼(Whitney,H.)于 1933 年首先发现的. 这个定理使人们可以不必区别可平面图的几何对偶与代数对偶. 若 G 的平面对偶 G^* 与 G 本身同构,则称 G 为自对偶图.



几何对偶(geometric dual)　见“平面对偶图”.

代数对偶(algebraic dual)　见“平面对偶图”.

惠特尼定理(Whitney theorem)　见“平面对偶图”.

欧拉公式(图论)(Euler formula in graph theory)　拓扑图论的重要公式. 它联系平面图的几个拓扑不变量. 该公式为

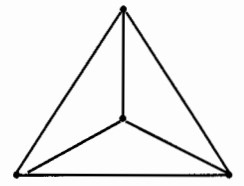
$$v-\varepsilon+\varphi=w+1,$$

其中,v 为顶点数,ε 为边数,φ 为面数,w 为连通片数. 当 $w=1$ 时,即得到连通平面图的欧拉公式

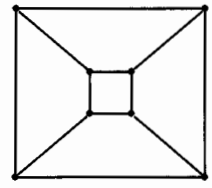
$$v-\varepsilon+\varphi=2.$$

由欧拉公式可推知一个可平面图虽然可能有不同的平面嵌入,但它的所有平面嵌入的面数都是一样的. 欧拉(Euler,L.)于 1750 年告诉哥德巴赫(Goldbach,C.),他发现了这个关系在 $w=1$ 时的情形,但未能证明. 而于 1758 年他给出了证明,但有缺陷. 勒让德(Legendre,A.-M.)于 1794 年给出了一个新的较简单的证明. 此后,柯西(Cauchy,A.-L.)将它推广到不连通的平面图的情形,即带有 w 的一般情形. 虽然如此,上述公式仍一直保持以开创者欧拉的名字命名. 对于其他曲面上的欧拉公式可参见“拓扑图”.

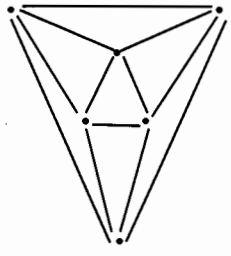
柏拉图图(Plato graphs)　一类重要的图. 正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体所相应的图的统称. 所有顶点的次都相同的平面图称为点正则平面图. 所有面的边界上含有相同的边数的平面图称为面正则平面图. 既是点正则又是面正则的平面图称为全正则平面图. 利用欧拉公式可以推出只有 5 个柏拉图图是全正则平面图. 四千年前在埃及的金字塔显示了那时人们已经开始了解多面体,两千余年前的古希腊人对数学上的这种正多面体存有特殊的兴趣. 那时的希腊人已经知道以上的 5 种正多面体. 因为柏拉图(Plato)为当时几何学的代表人物,由此而得名.



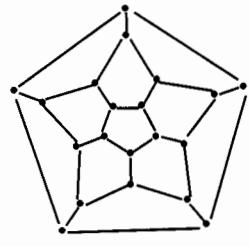
正四面体图



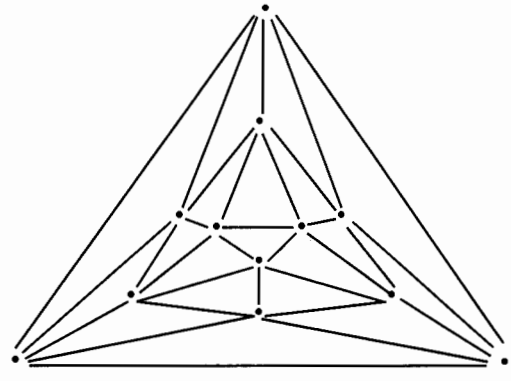
正六面体图



正八面体图



正十二面体图

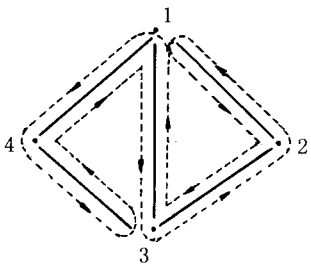


正二十面体图

正则平面图(regular planar graph)　见“柏拉图图”.

平面图码(code of a plane graph)　一种组合构形. 指表示一个平面图的一个数字(或符号)串. 由

于用数字串表示一个平面图可以有各种不同方式，从而它的码也是多种多样的. 例如，将图的顶点用 $1,2,\cdots,n$ 表示. 任选定一边和它的一个端点. 以这个端点为起点沿着这个选定的边走到另一端，并将表示此两端点的数字依次记录下来. 然后，依如下两个规则走，直到返回到起点不能继续进行为止. 规则 1：若达到的顶点第一次被记录且不是悬挂点，则在它的所有没有走过的关联边中，选沿预先规定之循环次序从达到此顶点的边超第一次遇到有一方向未走过的那一条，并沿此边达到另一端点记录下来；规则 2：若达到的顶点已经记录了一次或更多，或者为悬挂点，则沿着过来的边返回（如可能）到另一端并记录下来，（否则）进行规则 1. 这样得到的数字串中恰含 $2\varepsilon+1$ 个数字（ε 为图的边数），称它为长度. 这种码称为欧拉码，因为它相当于在将图的每边用 2 重边代替所得欧拉图上求得一个欧拉游. 附图中虚线所示的路线给出它的欧拉码：12313414321. 引进平面图的码便于建立好的算法求出平面图的自同构群，以及检查两个平面图是否同构.



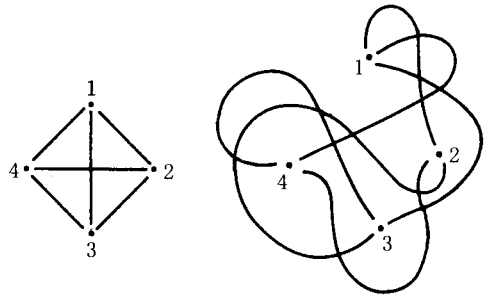
欧拉码（Eulerian code） 见“平面图码”.

平面等价（planar equivalence） 两个图间的一种等价关系. 与平面图的顶点 V 关联的所有边在 V 点沿顺时针方向构成的循环序列称为顶点 V 的旋. 两个平面图称为平面等价是指存在保持相应顶点旋的此两图之间的一个同构映射. 惠特尼（Whitney, H.）于 20 世纪 30 年代初发现了如下定理：3 连通可平面图在平面上的嵌入实质上是惟一的. 所谓实质上惟一是指它只可能有两个平面不等价的平面嵌入，而且，这两个嵌入恰互为平面镜反射的像. 这一定理也称为惟一性定理. 换言之，若将一个平面嵌入与它平面镜的像不加区别，则 3 连通可平面图的平面嵌入是惟一的.

旋（ratation） 见“平面等价”.

桥（bridge） 图论的一个重要概念. 指图在空间中嵌入的一类开子集. 若将图 G 视为在三维欧氏空间中的嵌入，则桥就是对于 G 的一个子图 H，$G-H$ 的连通片. 一般地，所谓桥是指 H 是一个圈 C 的情形. 若 B 为 G 的对于圈 C 的桥，则 $[B]-B$ 称为 B 在 C 上的触点，其中，$[B]$ 为 B 的闭包. 在 C 上 B 的两个相继的触点之间的一段曲线称为 B 的桥际. 若两桥 B_1 和 B_2，其中之一所有触点全落在另一个的某一桥际中，则称 B_1 和 B_2 是相容的；否则称为相克的. 这两个概念对于 B_1 和 B_2 是对称的. 若 G 对于 C 的桥按照相容性至多可分为两类，则 G 是可平面的. 反之，对于任何可平面图 G，任取一个圈 C，G 的桥按相容性至多可分为两类. 另外，若 G 是可平面的，则 G_1 和 G_2 是 G 的两个平面嵌入. G_1 与 G_2 平面等价当且仅当在 G 中存在一个圈 C 使 G_1 和 G_2 对于 C 的内桥与内桥和外桥与外桥之间存在一一对应. 第一位引入桥的概念的学者是塔特（Tutte, W. T.）. 不过，他当时用的是组合的语言，而不是用点集拓扑的语言. 当然，此两者实质上是等价的. 塔特基于对桥的结构分析建立了图的各种连通性的理论，使他首先发现任何 4 连通的可平面图有哈密顿圈，以及由此也可以直接地导出库拉托夫斯基定理等.

平面浸入（planar immersion） 图在平面上的一种表示. 将一个图画在平面上，用平面上的互不相同的点表示图的顶点. 两个相邻顶点间的边用连结表示这两个顶点的点之间的一条曲线表示. 但在每一个代表顶点的点的充分小的邻域中所有表示与此顶点关联的线除端点外再无别的公共点. 图的这种表示称为平面浸入. 一般而言，不能保证任何代表两条边的线无公共的内点. 附图为 K_4 的两个平面浸入 $\tilde{G}_1$ 和 $\tilde{G}_2$. 图的一个平面浸入若还满足如下的性质：存在图的一个生成树，使得代表树边的一条线不与任何代表其他边的曲线有公共内点，则称这个浸入为树浸入. 对于图 G 的任何一个生成树，存在与



$\tilde{G}_1$ $\tilde{G}_2$

其相应的树浸入. 若对于一个树浸入，可以选个节点，称为根，使得树上的边依从根出发沿树通过此边的方向，并且每条非树边都有一个定向使得它与树成的基本圈为有向圈，则称带有这种边的定向的树浸入为确向浸入. 任何一个连通图都有一个确向浸入. 若在每一个树的非悬挂点处任何两条相邻的边对，只要有一条边为发出的树边而另一条不是进入的树边，则引进一个模 2 变量. 对于任何两条不相邻的非树边 α 和 β 的两个基本圈，若它们有公共节点，则恰有两个同与它们关联的变量. 而且，一个变量相应的边对由两个树边组成，而另一个则由一条树边和一条非树边组成. 前者称为树变量，记为 $x(\alpha,\beta)$，后者称为上树变量，记为 $y(\alpha,\beta)$. 对于这个确向浸

入，任何两条不相邻的非树边 α 和 β，若它们没有奇数个公共点，则必有偶数个公共点（无公共点也视为偶数个）. 用常数 $c(\alpha,\beta)=1$ 或 0 分别表示前者或后者. 这样，对于所有可能的不相邻的非树边 α 和 β，可以建立一个方程组

$$x(\alpha,\beta)+y(\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)\ (\mathrm{mod}\,2).\quad (*)$$

进而，方程组（*）的相容性与确向浸入的选取无关. 进而，一个图是平面的当且仅当（*）是相容的. 这一结论称为吴-刘平面性判别准则或吴-刘定理. 因为它是由刘彦佩于 1978 年给出的，而它的原始证明基于吴文俊于 1955 年所得到的结果，由此而得名.

吴-刘定理（Wu-Liu theorem）　见“平面浸入”.

树浸入（tree immersion）　见“平面浸入”.

确向浸入（orientation defined immersion）　见“平面浸入”.

确向术（orientation defined method）　求图上支撑树的一种方法. 其主旨在于确定一个选边的先后的原则，使得依此原则每步之前所选出的边均形成一个树. 例如，深探. 其选边原则为：每到一节点优先选一条其另一端点不与已选出的边关联的边. 具体过程如下：首先，选择一个顶点，标它为 0，作为根. 在所有与 0 关联的边中任取一边并将它的另一端标为 1；每到一个顶点在下面的两个措施中选择一个：

1. 若这个顶点的所有未取的关联边中有一条边，它的另一个端点尚未标号，则取这条边并将它的另一端点标以在 $0,1,2,\cdots,n-1$（其中 n 为图的阶）中未用过数字的最小者.

2. 若这个顶点的关联边都用过了，或者说它的每一未取关联边的另一端均已标号，则沿着过来的边，回到它的另一端，直到不能进行为止.

这样得到的就是一棵支撑树，称为深探树、广探. 其选边原则为：每到一个节点选将与此节点关联但另一端不与已选过的边关联的边，选完再回到此节点处第一次取的边的另一端点，按此原则继续这一过程. 对于一个图的任何一个平面浸入，可以有左（右）探，即在每个节点处选择向左（右）旋第一次遇到的另一端不与任何已选的边关联的边. 事实上，左探和右探早在 1882 年由法国的特莱谋（Tremaux）发表在吕卡（Lucas，F.-É.-A.）关于数学游戏的书的第一卷中. 最简单也是最好的说法为塔里（Tarry，G.）于 1895 年提出的，即人们常称的迷宫法.

深探（depth-first search）　见“确向术”.

广探（breadth first search）　见“确向术”.

迷宫法（labyrinth method）　见“确向术”.

平面性辅助图（planarity auxiliary graph）　一类特殊的图. 它是由判定一个图的平面性而引出的另一个图. 根据这个图是否有某种性质的圈来判定原来的图是否是可平面的. 首先，用确向术（深探、左探或右探）求图 G 上的一个支撑树 T，并给出 G 的一个对于 T 的树浸入. 将 T 的边依端点出现的次序给以定向，以每一个节点（除树梢外）处的这样的边对作为新节点，在边对中必有一边为树边且方向为离开这个节点而另一边不为那条指向这个节点的树边. 对于任何一对不相邻的上树边，若它们的基本圈至少有一个公共节点，则必有两个相应新节点的边对，其中两边分别落在两个基本圈上. 从而，可以引进一条新边连此两新节点. 并且，在新边上可以赋以一个权，即，当此新边相应的边对在这个树嵌入中相交奇数个点时为 1；否则，为 0. 这样的一个由新节点和新边所得带权的新图，就称为平面性辅助图，记为 $\mathrm{Aux}(G)$. 它是刘彦佩于 1978 年首先引进的. 由 $\mathrm{Aux}(G)$ 是否有奇权的圈就可以判定 G 是否为可平面的. 一般而言，$\mathrm{Aux}(G)$ 的阶和度均不超过原图阶的一个二次函数. 以后又引进了第一类和第二类的平面性辅助图以得到线性时间的算法，$\mathrm{Aux}(G)$ 也称为第 0 类辅助图. 在第一类平面性辅助图中节点只是第 0 类节点集的一个子集，它相应于那些含有一条树边和一条上树边的边对. 这就保证了它的阶不超过原图阶的一个线性函数. 然而边的集合则必须要重新构造. 而第二类平面性辅助图的节点集与第一类的相同，但边的集合是第一类的一个子集，并且使得它的度也不超过原图阶的一个线性函数. 这就从理论上导致判定图的平面性与求平面嵌入都可以用线性时间算法实现. 平面性辅助图不仅在判定图的平面性以及进行平面嵌入时有用，而且，在确定图的不可分离连通块以及 3 连通块、列出所有不等价的平面嵌入、图的平面分解以及判定平面图的同构、图的曲面嵌入等方面均有应用.

平面性算法（planarity algorithm）　图论中的一种重要算法. 判定一个给定图是否为可平面图，并且求出它的一个平面嵌入（若是可平面图）在计算机上可以实现的方法. 第一个平面性算法是由奥斯兰德尔（Auslander，L.）和帕特尔（Parter，S. V.）于 20 世纪 60 年代初给出的. 之后，出现了有数十种之多的算法. 直到 1974 年，由候波科劳（Hopcroft，J.）和塔尔金（Tarjan，R.）建立了第一个线性时间的算法，即对很大的图这个算法所需的计算时间以图的顶点数的一个线性函数为上界.

平面嵌入（planar embedding）　图在平面上的一种表示. 若图 G 同构于平面图 P，则称 P 是图 G 的一个平面嵌入. 若 P 的每条边都是一条直线段，则称 P 是图 G 的直线嵌入. 若 P 的每个有限面都是一个凸区域，则称 P 是图 G 的凸嵌入. 若 P 的每条边都是由相继的水平线段和铅垂线段组成的折线，则称 P 是图 G 的纵横嵌入. 一条边上水平线段与铅

垂线段的交点称为一个折. 若 P 的每条边都是水平或铅垂的直线段，则称 P 是图 G 的网格嵌入. 在图 G 的所有纵横嵌入中，折的总数最小的嵌入称为图 G 的最小折数嵌入. 在图 G 的所有纵横嵌入中，所有有限面的面积和最小的嵌入称为最小面积嵌入. 纵横嵌入的理论是在超大规模集成电路(VLSI)设计中引出的. 关于最小折数以及最小面积的确定，一般是很困难的. 或者说，属于 NP 完全的问题.

直线嵌入(straight line embedding)　见“平面嵌入”.

凸嵌入(convex embedding)　见“平面嵌入”.

纵横嵌入(rectilinear embedding)　见“平面嵌入”.

网格嵌入(net embedding)　见“平面嵌入”.

最小折数嵌入(minimum bend embedding)　见“平面嵌入”.

最小面积嵌入(minimum area embedding)　见“平面嵌入”.

厚度(thickness)　图的一个组合不变量. 一个图 G 总可以分拆为若干边不相交的可平面子图之并，分拆中子图的最少个数称为 G 的厚度. 一个非可平面图 G 变为可平面图需要删除的最少边数称为 G 的偏度. 一个图 G 总可以分拆为若干边不相交的存在纵横嵌入的子图之并，分拆中所含这种子图的最少数目称为 G 的纵横度. 一个非可平面图 G 总可以分拆为若干边不相交的非可平面子图之并，分拆中所含子图的最大个数称为 G 的糙度. 对于图的一个平面浸入，其中有公共内点的边对的数目称为它的交数. 一个图的交数就是它的所有平面浸入的交数中之最小者. 确定图的厚度、偏度、纵横度、糙度以及交数都是十分困难的问题，时至今日仍未找到有效算法来确定它们.

偏度(skewness)　见“厚度”.

纵横度(rectilinear thickness)　见“厚度”.

糙度(coarseness)　见“厚度”.

拓扑图(topological graph)　图论的一个重要概念. 能够嵌入在某一拓扑空间 $\mathscr{T}$ 中的图 G 称为拓扑图. 即，图 G 的顶点为拓扑空间 $\mathscr{T}$ 中的点，边为连结其两端点的简单曲线，且任意两边除端点可能公共外无其他公共点. 若拓扑空间 $\mathscr{T}$ 为曲面 S 且 $S\backslash G$ 的每个连通片都是单连通区域，则称 G 为曲面 S 上的地图，记为 M. 用 $G(M)$ 表示由 M 的顶点和边所构成的图. 地图 M 的可定向性是由曲面 S 的可定向性确定的. 即，若 S 为可定向的，则称 M 为可定向地图；否则称 M 为不可定向的. 曲面 S 的亏格称为地图 M 的亏格. 若记 v，ε 和 φ 分别为 M 的顶点数、边数和面数，则

$$E(M)=v-\varepsilon+\varphi$$

$$=\begin{cases}2-2p & (p\text{ 为 }M\text{ 的可定向亏格});\\ 2-q & (q\text{ 为 }M\text{ 的不可定向亏格}).\end{cases}$$

事实上，这个公式是于 1812－1813 年间由吕里尔(Lhuilier, S. J.)给出的. 因为欧拉(Euler, L.)第一个注意到这类关系，这个公式仍称为欧拉公式. 其中 $E(M)$ 称为地图 M 的欧拉示性数.

对于地图 M，在其每一面的内部选取一点作为顶点；对于每条边 e，将与其关联的两面中选定的顶点用一条简单曲线 e' 连结，使得 e' 除与 e 有一个公共点外不与 M 的其他任何边有公共点. 这样得到的地图 M' 称为 M 的对偶地图. 这里的对偶性也是对称的. 即，若 M' 为 M 的对偶地图，则 M 也为 M' 的对偶地图. 若(不)可定向地图 M 对于任何亏格小于 M 的亏格的(不)可定向地图 M'，$G(M)$ 与 $G(M')$ 是不同构的，则称 M 是(不)可定向的最大地图. 因为在所有那些与 $G(M)$ 同构的地图中，这个 M 的面数最多. 若 M 是曲面 S 上的地图，且 M 的每个面都是三角形，则称 M 是 S 的一个三角剖分. 凡三角剖分都是最大地图，但反之则不然. 另一方面，若(不)可定向地图 M，对于任何亏格大于 M 的(不)可定向地图 M'，$G(M)$ 与 $G(M')$ 不同构，则称 M 为最小地图. 因为在所有与 $G(M)$ 同构的地图中以这个 M 的面数为最少. 若一个地图仅有一个面，则称它为单面地图. 凡单面地图均是最小地图，但反之则不然.

欧拉示性数(Eulerian characteristic)　见“拓扑图”.

地图(map)　见“拓扑图”.

对偶地图(dual map)　见“拓扑图”.

三角剖分(triangulation)　见“拓扑图”.

单面地图(uniface map)　见“拓扑图”.

最大亏格(maximum genus)　图的一个组合不变量. 图 G 所能嵌入而形成地图的曲面中，具有最大亏格的(不)可定向曲面的亏格称为图 G 的(不)可定向的最大亏格. 图 G 所能嵌入而形成地图的曲面中，具有最小亏格的(不)可定向曲面的亏格称为图 G 的(不)可定向最小亏格. G 的最小亏格也称为 G 的亏格. 对图 G 的任何一个在某曲面 S 上的嵌入，若 S 为不可定向的，则其最大亏格不可能超过

$$\varepsilon-v+1;$$

若 S 为可定向的，则其最大亏格不超过

$$B_1=\left[\frac{\varepsilon-v+1}{2}\right],$$

方括号表示将其内的数取整. 当 S 是可定向的，其最小亏格不可能小于

$$B_0=\left[\frac{3-3v+3}{6}\right],$$

这个方括号为将其内的数取上整，即不小于它的最小整数. 在上面式子中 v，ε 分别为 G 的顶点数和边

数. 那些使得亏格为 B_0 的嵌入称为下嵌入. 那些亏格为 B_1 的嵌入称为上嵌入. 不是任何一个图均有上嵌入或下嵌入. 事实上，只有对于不可定向的情况，已经证明任何图均有上嵌入. 图的上、下可嵌入性是人们正在研究中的问题. 特别是下嵌入性的研究远未解决.

最小亏格(minimum genus)　见"最大亏格".

上嵌入(up-embedding)　见"最大亏格".

下嵌入(down-embedding)　见"最大亏格".

引线问题(thread problem)　图论的一个重要问题. 由希尔伯特(Hilbert, D.)和科恩弗森(Cohn-Vossen, S.)于 1932 年提出. 即确定完全图的最小亏格问题. 在一个曲面上最多可选择多少个点作为顶点，并将所有这些顶点两两用简单曲线连结，使得这些曲线除端点可能公共外没有任何其他公共点(交点). 当曲面的可定向性和亏格给定之后，这个最多的顶点数与亏格之间的关系怎样？若用 α_0 和 α_N 分别表示在可定向和不可定向情况下的这个最多顶点数；p, q 分别为曲面在可定向和不可定向下的亏格，希尔伯特和科恩弗森猜想：

$$p=\left[\frac{(\alpha_O-3)(\alpha_O-4)}{12}\right];$$

$$q=\left[\frac{(\alpha_N-3)(\alpha_N-4)}{6}\right].$$

这就是引线问题. 这里，方括号表示取其内数的不小于它的最小整数. 他们还指出，这个问题的解决将导致希伍德猜想的证明. 事实上，引线问题就是确定完全图 K_n 的最小亏格(或亏格). 由此，自然引出了研究一般图的最小亏格的问题. 这是目前人们正在研究中的问题. 至今，仅对于若干图类已经知道了它们的最小亏格. 一般的情形距离解决尚远. 就算法的复杂性而言，至今人们尚未发现有效的算法.

曲线交叉问题(crossing problem)　图论的一个重要问题. 由高斯(Gauss, C. F.)于 19 世纪提出. 设 C 是一个圆，f 是由 C 到平面上的一个连续映像，记 $f(C)=Z$. 对于任何 Z 上的点 P，若存在且仅存在两个 C 上的点 P_1 和 P_2 使得

$$f(P_1)=f(P_2)=P,$$

则称 P 为 Z 的一个交叉点. 这里，所考虑的是两点相交之情形而不考虑多于两个点之相交. 而且，还规定在任何一个交叉点的小邻域中，若沿 Z 通过这个交点，则在两侧都会有 Z 的点. 换言之，不考虑相切的情形. 设 $a,b,c,\cdots$ 是 Z 的所有交叉点. 若从 Z 上任一点 P 出发沿着由 C 所确定的方向经过 Z 的所有点回到 P，并将所有交叉点依次记下来就得由符号 $a,b,c,\cdots$ 组成的一个循环序列，则这个序列只与 f 有关而与 P 的选取无关. 这个序列称为 Z 的交叉序列. 若一个循环序列中的每个字母均恰出现两次，则称它为多面形的. 任何曲线的交叉序列都是多面形的；但是，反之一般不成立. 所谓曲线交叉问题就是要求刻画一个多面形序列是某闭曲线的交叉序列. 它是由高斯于 19 世纪首先提出的. 高斯为解决这个问题，对于任何一个多面形序列引进了一个图，称为它的交叉图. 它的节点为序列中之字母，两个字母 a 和 b 相邻当且仅当在此序列的两个 a 的出现间的一段中，b 出现且仅出现一次. 高斯猜想，刻画一个多面形序列为某曲线的交叉序列可仅由其交叉图的结构性质所决定. 德恩(Dehn, M. W.)于 1936 年解决了曲线相交问题，但他不是沿着高斯猜想的思路，而是在一个多面形序列上引进一些运算将它化为另一个多面形序列. 虽然，这个新的序列交叉图的阶比原序列交叉图的阶大一倍；但是，由这个新序列交叉图的结构性质得到问题的解答较容易. 这个方法称为德恩方法. 从算法复杂性而言，德恩方法比高斯猜想要好得多. 在德恩之后 30 余年，高斯猜想才得到解决.

希伍德猜想(Heawood conjecture)　图论的一个重要猜想. 由希伍德(Heawood, P. J.)于 1890 年提出. 当时，希伍德为了解决四色问题建立了一个更为一般的命题. 记 $\chi(S)$ 为曲面 S 上的所有地图色数之上界，希伍德猜想有下面的公式：

$$\chi(S)=\left[\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24E(S)}\right]\quad(E(S)\neq 2),$$

方括号表示取整. 四色猜想恰为 $E(S)=2$ 的情形. 这里，方括号表示取其内数之上整. 因为，那时不知四色猜想是否成立，所以，在公式中排除了 $E(S)=2$ 的情形. 研究这个猜想成立与否占用了近一个世纪的时间，于 20 世纪 60 年代末才算得到了完满的解决. 结果是，除了克莱因瓶 N_2 这个仅有的例外，希伍德猜想成立. 因此，将如下已被证明的公式

$$\chi(S)=\begin{cases}\left[\frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24E(S)})\right] \\ \qquad (S\neq N_2, E(S)\neq 2), \\ 6 \qquad (S=N_2)\end{cases}$$

称为希伍德公式，或希伍德定理，或地图着色定理.

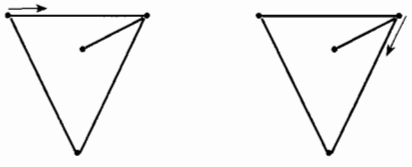
地图着色定理(map color theorem)　见"希伍德猜想".

地图着色(map coloring)　一种组合构形. 它是对于地图面集的一种分划. 分配地图的每一个面一种颜色，使得相邻的面(指有公共边界边)具有不同的颜色. 称这样一种色的分配为这个地图的一个着色，或者说，将地图的面集分划为若干个子集，使得每个子集中的任何两面均不相邻. 这样就可以将每个子集中的面用一种颜色着染使得不同子集用的颜色不同. 在地图 M 的所有着色中，使用颜色最少的着色的颜色数目称为地图 M 的色数. 地图的顶点

着色，或者说，对于与它同构的图的顶点做正常着色，就是其对偶地图的地图着色.

地图色数(chromatic number of map)　见“地图着色”.

带根地图(rooted map)　带有标记的一类地图. 选定一个顶点并给以特殊标记的地图称为点根地图. 这个带特殊标记的节点称为根节点. 若在带根地图上再选定一个与根顶点关联的边并规定这条边一个方向，则得到一个边根地图. 这条规定了方向的边称为根边. 边根地图也是点根地图，但反之不然. 进而，若在一个边根地图中，取一个与根边关联的面并规定它的边界的走向与这个根边的方向一致，则所得之地图称为带根地图. 两个带根地图不同构就是指它们之间在保持根顶点、根边和根面相应的条件下不同构. 例如：附图给出的两个有根地图是不同构；然而，若不计根，则它们确是同构的.



简单地图(simple map)　一类特殊的图. 它是由简单图嵌入到曲面上所得到的地图. 由无环图嵌入到曲面上所得到的地图称为无环地图. 由一个树嵌入到一个曲面上所得到的地图称为树地图. 由只有一个圈的图嵌入到曲面上得到的地图称为单圈地图. 由欧拉图嵌入到曲面上得到的地图称为欧拉地图. 由二部图嵌入到曲面上得到的地图称为二部地图.

无环地图(loopless map)　见“简单地图”.

树地图(tree map)　见“简单地图”.

单圈地图(unicyclic map)　见“简单地图”.

欧拉地图(Eulerian map)　见“简单地图”.

二部地图(bipartite map)　见“简单地图”.

三角地图(triangulation)　亦称三角剖分. 一类特殊的图. 它是所有面都是三角形(面边界是长度为3的圈)的地图. 若在一个三角地图所相应的图中没有重边，则称它为严格三角地图. 若一个严格三角地图不存在一个非面边界的长度为3的圈，则称它为简单三角地图. 对于一个图，是否存在一个曲面使得能够将它嵌入这个曲面上而得到一个三角地图，是目前人们正在研究并且还未解决的问题.

地图计数(enumeration of map)　求一类组合数. 具体地说，在给定可定向性和亏格之下，确定满足各种参数限制条件的不同构的地图的数目. 这就是地图计数问题，或简称地图计数. 通常，有如下三类问题：

1. 单参数问题，即在顶点数、边数或面数之一个给定的情况下，确定的不同构地图的数目.

2. 双参数问题，即在已知顶点数、边数或面数中之两个给定的情形下，确定不同构地图的数目.

3. 顶点剖分问题，即当顶点的度为 $i\geqslant 1$ 的顶点数目，对于 $i=1,2,\cdots$ 都给出了的情形下，确定不同构地图的数目.

一般地，这些问题都是相当困难的，而且难度随上述的次序递增. 即使在单参数的情况，对于凸多面体(相当于3连通的平面地图)至今仍未得到一个有效的计数公式. 对于有根地图的计数，目前主要集中在平面地图上. 对于一般的情形，也有所进展.

给定一类地图，记 $\mathscr{M}$ 为所有这类地图所组成的集合，$n_i(i\geqslant 1)$ 表示所考虑的参数. 函数

$$f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots)=\sum_{M\in\mathscr{M}}\prod_{i\geqslant 1}x_i^{n_i(M)}$$

称为 $\mathscr{M}$ 的地图计数函数. $f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots)$ 所满足的方程称为计数方程. 一般而言，要想求某类地图的计数，首先要求出它的计数方程，然后通过解这个方程来确定出计数函数. 最理想的结果是，所得的计数函数的系数为单项式，或称无和式. 然而这种表达式不一定存在或虽存在也不易求得. 次理想的结果是正和式，即将这种系数表示为正单项式和.

地图计数函数(enumerating function of map)　见“地图计数”.

地图计数方程(enumerative equation of map)　见“地图计数”.

色和(chromatic sum)　一类广义计数函数. 对于一个地图 M，记 $n_i(M)(i=1,2,\cdots)$ 为 M 的一些不变量(如顶点数、边数以及亏格等)，记 $P(M;\lambda)$ 为 M 所相应的色多项式. 函数

$$f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots;\lambda)=\sum_{M\in\mathscr{M}}P(\mathscr{M};\lambda)\prod_{i\geqslant 1}x_i^{n_i(M)}$$

称为地图集合 $\mathscr{M}$ 的色和函数. 若将色和函数 $f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots,\lambda)$ 展开为 $x_1,x_2,\cdots$ 的幂级数，则 $x_1^{n_1}$，$x_2^{n_2}$，$\cdots$ 所在的系数记为 $F_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots,\lambda)$，称为 $\mathscr{M}$ 的色和. 它是用 λ 色染 $\mathscr{M}$ 中所有满足

$$n_k(M)=n_i(i\geqslant 1)$$

的地图 M 所得着色方式的总和. 色和函数所满足的方程称为色和方程. 色和函数是塔特(Tutte, W. T.)于1973年首次引进的. 他确定出了带根平面三角地图的色和方程，并对这种方程做了一系列的研究. 确定一般色和方程以及解这种方程是很困难的.

色和函数(chromatic sum function)　见“色和”.

色和方程(chromatic sum equation)　见“色和”.

色平均(chromatic average)　一类组合数. 指在一定条件下地图着色的平均数. 在地图集合 $\mathscr{M}$

中，若参数为 $n_i(i\geqslant 1)$ 的地图数目为 $A_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots)$，色和为 $F_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots;\lambda)$，则称

$$\frac{F_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots;\lambda)}{A_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots)}$$

为地图集合 $\mathscr{M}$ 对于参数 $n_i(i\geqslant 1)$ 的色平均. 色平均问题是为了研究着色问题并受到数论中的方法的启发而提出来的. 关于确定色平均的值及确定色平均对于 λ 的渐近性质都是相当困难的问题，至今只对平面三角剖分的情形取得了一些结果.

范色和(dichromatic sum)　一类广义的计数函数. 对于一个地图 M，记 $n_i(M)(i=1,2,\cdots)$ 为 M 的一些不变量(如顶点数、边数以及亏格等)，记 $T(M;\mu,\nu)$ 为 M 所相应图的范色多项式(参见“秩多项式”)，则函数

$$f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots;\mu,\nu)=\sum_{M\in\mathscr{M}}T(M;\mu,\nu)\prod_{i\geqslant 1}x_i^{n_i(M)}$$

称为地图集合 $\mathscr{M}$ 的范色和函数. 若将范色和函数 $f_{\mathscr{M}}(x_1,x_2,\cdots;\mu,\nu)$ 展开为 $x_1,x_2,\cdots$ 的幂级数，则 $x_1^{n_1},x_2^{n_2},\cdots$ 所在项的系数记为 $F_{\mathscr{M}}(n_1,n_2,\cdots;\mu,\nu)$，称为 $\mathscr{M}$ 的范色和. 范色和函数所满足的方程称为范色和方程.

范色和函数(dichromatic sum function)　见“范色和”.

范色和方程(dichromatic sum equation)　见“范色和”.

点空间(vertex space)　一类组合构形. 指由图 $G=(V,E)$ 的顶点集 V 生成的域 F(通常取二元域)上的向量空间，记为 F^V. 由边集 E 生成的域 F 上的向量空间称为边空间，记为 F^E. F^V 中的向量称为 0 链，F^E 中的向量称为 1 链. 边缘算子是由 F^E 到 F^V 的一个线性变换，它将任一边映射为其两端点的和. 上边缘算子是由 F^V 到 F^E 的一个线性变换，它将任一顶点映射为与其关联的所有边的和. 边缘算子的像空间称为边缘空间，它的核空间称为循环空间. 上边缘算子的像空间称为上循环空间. 循环空间与上循环空间的交空间称为双循环空间. 若两个 0 链在上边缘算子作用下具有相同的像，则称它们上同调. 若两个 1 链在边缘算子作用下具有相同的像，则称它们同调.

边空间(edge space)　见“点空间”.

循环空间(cycle space)　见“点空间”.

上循环空间(cocycle space)　见“点空间”.

双循环空间(bicycle space)　见“点空间”.

同调(homology)　见“点空间”.

上同调(cohomology)　见“点空间”.

循环矩阵(circulant matrix)　满足一定规则的矩阵. 设有 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，若满足

$$a_{ij}=a_{1,j-i+1(\mathrm{mod}\,n)},$$

其中，$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$，则称其为(n 阶)循环矩阵. 若 W 为第一行是(0,1,0,…,0)的 n 阶循环矩阵，A 是第一行为$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的 n 阶循环矩阵，则

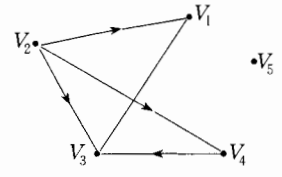
$$A=\sum_{i=1}^{n}a_iW^{i-1}.$$

邻接矩阵为循环矩阵的图称为循环图.

循环图(circulant graph)　见“循环矩阵”.

邻接矩阵(adjacency matrix)　表示图的一类矩阵. 由于图 $G=(V,E)$ 可由其节点集 V 中每两节点间邻接关系惟一决定，所以它可以用一个 $|V|\times|V|$ 的矩阵 $Z=(z_{ij})$ 表示，称 D 为 G 的邻接矩阵，其中，当 ν_i 和 ν_j 邻接时，$z_{ij}=1$；否则，$z_{ij}=0$. 图 G 的关联矩阵 $A=(a_{ij})$ 是一个 $|V|\times|E|$ 的矩阵，每个节点对应矩阵的一行，每条边对应矩阵的一列，其中，当边 e_j 与 v_i 关联时，$a_{ij}=1$；否则，$a_{ij}=0$. 从关联矩阵中去掉一行后得到的矩阵称为约化关联矩阵. 图 G 的约化关联矩阵包含 G 的全部信息.

图的圈矩阵 $B=(b_{ij})$ 是一个 $c\times|E|$ 的矩阵(c 为 G 的所有圈的数目)，每一圈对应于矩阵的一行，边对应于矩阵的列，其中，当边 e_j 在圈 C_i 内时，$b_{ij}=1$；否则，$b_{ij}=0$.



在图 G 的圈矩阵中只保留对应于一个圈基的行，所得的矩阵称为约化圈矩阵. 若此圈基恰为一个生成树的所有基本圈，则称所得的矩阵为基本圈矩阵. 图 G 的上圈矩阵 $Q=(q_{ij})$ 是一个 $k\times|E|$ 的矩阵(k 为 G 的所有上圈的数目)，每一上圈对应于矩阵的一行，边对应于矩阵的列，其中，当 e_j 在上圈 K_i 中时，$q_{ij}=1$；否则，$q_{ij}=0$.

在图 G 的上圈矩阵中只保留对应于某一上圈基的行，所得的矩阵称为约化上圈矩阵. 若此上圈基恰为一个生成树的所有基本上圈，则称所得的矩阵为基本上圈矩阵.

对于有向图 D 中任意两节点 V_i,V_j，若存在由 V_i 到 V_j 的有向路，则取 $r_{ij}=1$，d_{ij} 为由 V_i 到 V_j 的距离，d'_{ij} 为由 V_i 到 V_j 的最长路的长；若不存在由 V_i 到 V_j 的有向路，则取 $r_{ij}=0$，$d_{ij}=\infty$，$d'_{ij}=\infty$. 矩阵

$$R=(r_{ij}),\quad D=(d_{ij}),\quad D'=(d'_{ij})$$

分别称为有向图 D 的可达性矩阵、距离矩阵和迂回矩阵. 附图为一有向图及其可达性矩阵、距离矩阵及迂回矩阵. 至今还没有求迂回矩阵的有效算法.

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&1&1&0\\1&0&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

可达性矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

距离矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 2 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ 2 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

迂回矩阵

关联矩阵(incident matrix) 见“邻接矩阵”.

圈矩阵(circuit matrix) 见“邻接矩阵”.

上圈矩阵(cocircuit matrix) 见“邻接矩阵”.

距离矩阵(distance matrix) 见“邻接矩阵”.

迂回矩阵(detour matrix) 见“邻接矩阵”.

圈基(circuit basis) 图 G 的循环空间(参见“点空间”)的一组基. 循环空间的维数称为圈秩或简称上秩,记为 $\tilde{r}(G)$.

$$\tilde{r}(G) = |E| - |V| + c(G),$$

其中 $c(G)$ 为 G 的连通片数. 上循环空间的一组基称为上圈基. 上循环空间的维数称为上圈秩或简称秩,记为 $r(G)$. $r(G)=|V|-c(G)$. 若 T 为图 G 的一个支撑树,$\overline{T}$ 为相应的上树,则任何一个上树边与树恰形成一个圈,称为树 T 的一个基本圈. 相仿地,每一个树边与上树恰形成一个上圈,称为树 T 的一个基本上圈. 支撑树 T 的所有基本圈构成图 G 的一个圈基,所有基本上圈构成图 G 的一个上圈基. 双循环空间的一组基称为双圈基. 双循环空间的维数称为双圈秩. 与某一双圈基中的每一个圈恰有一条公共边的边集,称为双树.

基本圈(fundamental circuit) “见“圈基”.

圈秩(cycle rank(cyclic number)) 见“圈基”.

上圈基(cocircuit basis) 见“圈基”.

双圈基(bicycle basis) 见“圈基”.

双树(dendroid) 见“圈基”.

双圈秩(bicycle rank) 见“圈基”.

哈达玛积(Hadamard product) 矩阵的一类运算. 若 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是两个同阶矩阵. 若 $c_{ij}=a_{ij}\times b_{ij}$,则称矩阵 $C=(c_{ij})$ 为 A 和 B 的哈达玛积,或称基本积.

基本积(Hadamard product) 见“哈达玛积”.

宾纳-柯西定理(Binet-Cauchy theorem) 一个计算行列式的定理. 指按一定规则计算两矩阵之积的行列式. 若 P 和 Q 分别是 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵,$m\leqslant n$,则乘积 PQ 的行列式是 P 和 Q 的所有对应的大行列式乘积之和. 这里所谓的 P 和 Q 对应的大行列式,分别是由 P 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列和 Q 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 行组成. 即,若取 P 的大行列式为 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 列,则 Q 的对应的大行列式为 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 行. 例如,若

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} |PQ| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -24. \end{aligned}$$

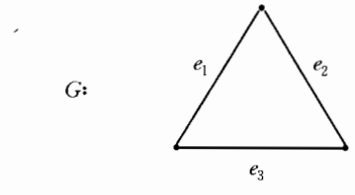
矩阵-树定理(matrix-tree theorem) 一个计数定理. 若连通图 G 的邻接矩阵为 A,将 $-A$ 的对角线 (i,i) 元素依次换为节点 V_i 的度 $d(V_i)$,所得矩阵记为 M,则 M 的每个代数余子式相等,且等于 G 的支撑树的数目. 这就是矩阵-树定理.

变元矩阵-树定理(variable matrix-tree theorem) 矩阵-树定理的推广. 若 $M=(m_{ij})$ 为对应于图 G 的形式矩阵,其元素定义为:对于 $i\neq j$,

$$m_{ij}=\begin{cases} -e_k & ((V_i,V_j)=e_k), \\ 0 & (V_i,V_j \text{ 不相邻}), \end{cases}$$

$$m_{ii}=-\sum_{n\neq i} m_{in},$$

则 M 的任何代数余子式的值是 G 的树多项式. 这称为变元矩阵-树定理. 附图为一示例. 其中,$P(T(G))$ 为圈 G 的树多项式.



$$M_x=\begin{pmatrix} -(e_1+e_2) & -e_1 & -e_2 \\ -e_1 & -(e_1+e_3) & -e_3 \\ -e_2 & -e_3 & -(e_2+e_3) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= (e_1+e_3)(e_2+e_3)-e_3e_3 = e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3 \\ &= P(T(G)). \end{aligned}$$

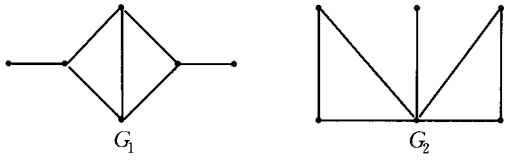
特征多项式(characteristic polynomial) 图 G 的邻接矩阵的特征多项式,记为

$$P(G;\lambda)=\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+C_2\lambda^{n-2}+\cdots+C_n,$$

其中 C_i 为邻接矩阵的 i 阶主子式之和. $C_1=0$,其余 C_i 分别有其图论含义,例如:$-C_2$ 为图 G 的边数;$-C_3$ 为图中三角形的个数的二倍等. 图 G 的特征多项式的根称为图 G 的特征值. 由于图的邻接矩阵是对称阵,所以图的特征值必为实数. 图 G 的诸特征值连同各自的重数构成图 G 的谱,记为

$$\mathrm{Spec}(G)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s\\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_s)\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_s$ 为 s 个特征值的严格减序列，$m_i(\lambda_i)(i=1,2,\cdots,s)$ 为相应的重数. 图的许多性质与它的谱有关. 谱相同的图称为同谱图. 同谱图不一定同构. 附图为两个同谱但不同构的图.



同谱图(cospectral graph) 见“特征多项式”.

邻接代数(adjacent algebra) 与图的邻接阵关联的一类代数. 以图 G 的邻接矩阵 A 的多项式(即 A 的幂的线性组合)为元素构成的代数，记为 $\mathscr{A}(G)$. 这个代数作为复向量空间，其维数是有限的，其维数的下界为图的直径 d 加 1.

秩多项式(rank polynomial) 图的一个组合不变量. 对于图 $G=(V,E)$，记

$$R(G;x,y)=\sum_{S\subseteq E}x^{r(S)}y^{s(S)},$$

其中，$r(S)$，$s(S)$分别为以 S 为边集的 G 的支撑子图的秩和上秩(参见“圈基”). 称 $R(G;x,y)$为图 G 的秩多项式. 图的秩多项式与色多项式有如下关系：

$$C(G;u)=u^{|V|}R(G;-u^{-1},-1).$$

对于图 $G=(V;E)$，记

$$T(G;x,y)=\sum_{S\subseteq E}(x-1)^{r_0-r(S)}(y-1)^{s(S)},$$

其中，$r_0=r(G)$为 G 的秩，$r(S)$，$s(S)$同上. 称 $T(G;x,y)$为塔特多项式或范色多项式. 塔特(Tutte, W. T.)于 20 世纪 60 年代发现这个多项式，并且揭示了它与图内在结构性质的关系. 琼斯(Jones, V. F. R.)于 20 世纪 80 年代发现扭结的新的拓扑不变量，人们称之为琼斯多项式. 近来，人们发现后者实质上可以从前者的思想同样导出它与扭结的内在结构性质的关系.

塔特多项式(Tutte polynomial) 见“秩多项式”.

范色多项式(dichromatic polynomial) 见“秩多项式”.

琼斯多项式(Jones polynomial) 见“秩多项式”.

稳定核子群(stabilizer subgroup) 图论中一类重要的群. 指图的自同构群的一个子群. 保持一个节点 V 不变的图 G 的所有自同构是 G 的自同构群 $\Gamma(G)$的子群. 这个子群就称为节点 V 的稳定核子群，记为 Γ_V. 若图 G 的每个节点的稳定核子群均为幺群，则称$\Gamma(G)$正规作用于 V. 对于一个有限群 Γ，若存在一个图 G，使得 Γ 同构于 $\Gamma(G)$，且 $\Gamma(G)$正规作用于 V，则称 G 为 Γ 的正规图表示.

正规图表示(normal graphic representation) 见“稳定核子群”.

色多项式(chromatic polynomial) 图的一个组合不变量. 色多项式是伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)为解决四色猜想于 1913 年提出的. 用它表示以不多于 λ 种颜色给图 G 的节点做正常着色的不同着法的数目，记为 $\pi_\lambda(G)$或 $C(G;\lambda)$或 $P_G(\lambda)$. n 个节点的无边图的色多项式为 λ^n，完全图 K_n 的色多项式为

$$\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1).$$

一般图 G 的色多项式的理论展开式为

$$C(G;\lambda)=\sum_r m_r(G)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-r+1),$$

其中 $m_r(G)$表示用 r 种颜色做节点的色剖分的正常着色数. 但是，此理论展开式不便于实际应用. 对于阶不大的图，如下的递推公式常用来求一个给定图的色多项式：

$$\pi_\lambda(G)=\pi_\lambda(G-e)-\pi_\lambda(G\cdot e),$$

其中 $G-e$ 和$G\cdot e$分别为从 G 中去掉边 e 和收缩 e 为一个节点所得的图. 但是，这个递归算法并不是一个好算法. 目前还没有求色多项式的好算法. 对于色多项式还可提出一个反问题，即找出色多项式的一些特征，依此判定一个给定的多项式是否为某个图的色多项式. 目前还不知道一个多项式为色多项式的充分必要条件. 对必要条件也仅有一些猜想，例如，瑞得(Read, R. C.)于 1968 年猜想色多项式的系数绝对值先是严格增然后严格减. 这个猜想被称为关于色多项式系数的单峰猜想或瑞得猜想. 如下定义的函数称为图 G 的权函数：

$$W(G;t,u)=u^{-|V|}\sum_{\xi\in[u]^V}\prod_{e\in E}(\hat{\xi}(e)-t),$$

其中$[u]$表示不大于 u 的自然数集合，$[u]^V$ 表示从 V 到$[u]$的映射的集合，$\hat{\xi}(e)$定义为：

$$\hat{\xi}(e)=\begin{cases}1, & \text{若存在 } e=(v_1,v_2) \text{ 使得 } \xi(v_1)\neq\xi(v_2),\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

这样，图 G 的色多项式还可用权函数表示为

$$C(G;u)=u^{|V|}W(G;0,u).$$

瑞德猜想(Read conjecture) 见“色多项式”.

权函数(weight function) 见“色多项式”.

友谊定理(friendship theorem) 图论的一个重要定理. 它是与图上节点次有关的一个命题. 若在一个集合中每两人恰有一个共同的朋友，则必有一人是每个人的朋友. 用图论的语言叙述：若图 G 的每对顶点恰有一个公共相邻节点，则必有一个节点与其他所有节点相邻.

相似点(similar vertices) 图论的一个重要概念. 指两个节点之间的关系. 对于图 G 的顶点 v_1，v_2，若存在 G 的自同构 α，使得$\alpha(v_1)=v_2$，则称 v_1 与 v_2

为一对相似点. 对于图 G 的两条边 e_1, e_2，若存在自同构 α 使得 $\alpha(e_1)=e_2$，则称 e_1 与 e_2 为一对相似边. 连结一对相似点的边称为对称边.

相似边(similar edges)　见“相似点”.

对称边(symmetric edge)　见“相似点”.

点对称图(vertex-symmetric graph)　一类特殊的图. 它是一类对称图. 若图 G 的任意一对节点都是相似点，则称 G 为点对称图，又称节点可迁图. 节点数为素数的点对称图称为回转图. 若图 G 的任意一对边都是相似边，则称 G 为边对称图，又称边可迁图. 点对称图与边对称图之间并无必然的联系. 若对图 G 的任意两个等距节点对 $\{u,v\}$ 和 $\{x,y\}$ 存在自同构 α，使得 $\alpha(u)=x, \alpha(v)=y$，则称 G 是距离可迁图；若对图 G 的任意两节点子集 V_1 和 V_2，只要 V_1 和 V_2 的导出子图同构，就必存在 G 的自同构 α，将 V_1 映射为 V_2，则称 G 为均匀图. 均匀图必为距离可迁图，且其直径至多为 2，围长至多为 5. 若对图 G 的任意两个长度为 t 且起点确定的路 P_1 与 P_2，存在一个自同构 α 将 P_1 映射到 P_2，则称 G 为 t 可迁图. 一个连通、3 正则、t 可迁图 G，若对任意两条长为 t 的路 P_1 与 P_2，恰有一个自同构 α 将 P_1 映射为 P_2，则称 G 为 t 单可迁图. 既是点对称又是边对称的图称为对称图. 比点对称图及边对称图有更高对称性的图称为高度对称图. t 可迁图及 n 笼等都是高度对称图.

可迁图(transitive graph)　见“点对称图”.

回转图(rotative graph)　见“点对称图”.

均匀图(uniform graph)　见“点对称图”.

对称图(symmetric graph)　见“点对称图”.

高度对称图(highly symmetric graph)　见“点对称图”.

群的色图(color graph of group)　一类赋权图. 设 Γ 是一有限群，对其每一非单位元的元素给定不同的标号. Γ 的色图 $D(\Gamma)$ 是一个弧标以色号的完全有向图，以 Γ 的元素为顶点，弧 (α_i,α_j) 标以元素 $\alpha_i^{-1}\alpha_j$ 的色号. 若色图中弧 (α_i,α_j) 的色号为 k，则称如图 1 所示的子图为有色无向箭头. 若将 Γ 的色图中每一条弧用相应的有色无向箭头代替，则所得的图称为 Γ 的群图. 图 2 和图 3 分别是 3 阶循环群的色图和群图.

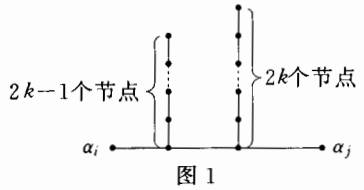


图 1

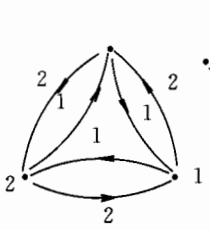


图 2

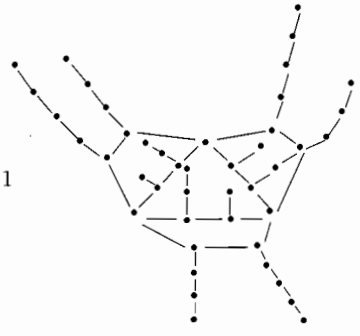


图 3

群图(graph of group)　见“群的色图”.

图的自同构群(automorphism group of a graph)　亦称节点群. 图论中一类重要的群. 它是图 G 的所有自同构形成的群. 自同构群为平凡群的图称为幺图. 柯尼希(König, D.)证明：任何一个有限抽象群同构于某个图的自同构群. 图 G 的所有自同态形成一个半群，称为图 G 的自同态半群. 任何一个有单位元的有限半群同构于某个图的自同态半群. 作用在图 G 的边集 E 上的自同构群称为 G 的边群，又称线群. 由各种图的运算得来的复合图的群用构成它的各个图的群的复合表示出来，称这种表示为复合图的群. 以下为常用的结果：

1. 补图的群：$\Gamma(\overline{G})=\Gamma(G)$.
2. 同构不交并图的群：$\Gamma(nG)=S_n[\Gamma(G)]$.
3. 不同构不交并图的群：
$$\Gamma(G_1 \cup G_2)=\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2).$$
4. 不交并图的群：
$$\Gamma(G_1+G_2)=\Gamma(G_1)+\Gamma(G_2)$$

的充分必要条件为 $\overline{G}_1$ 没有连通片同构于 $\overline{G}_2$ 的连通片.

节点群(vertex group)　见“自同构群”.

幺图(identity graph)　见“自同构群”.

图的自同态半群(endomorphism semigroup of a graph)　见“图的自同构群”.

边群(edge group)　见“图的自同构群”.

构形(configuration)　图论的一个重要概念. 它是定义在域 D，取值在域 R 上的函数. 值域 R 中的每个元素称为一个图形. 所有构形组成的集合记为 R^D. 决定 R^D 中任意两函数是否等价的一个置换群 G 称为构形群. 对于 R^D 中的两个元素 f_1, f_2，若存在一个置换 $\alpha\in G$，使得 $f_1=f_2\circ\alpha$，则称 f_1 与 f_2 是等价的. 按需要考虑的函数的特征，在 R 上定义一个向量权函数

$$w(r)=(w_1(r),\cdots,w_k(r)),$$

其中 $w_i(r)(i=1,2,\cdots,k; k$ 为需要考虑的 f 的特征个数)均为非负整数. 对于每个 $f\in R^D$，其权 $w(f)$ 记为

$$w(f)=\prod_{d\in D} x_1^{w_1(f(d))}\cdots x_k^{w_k(f(d))},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 为形式参数. 易见等价的函数有

相同的权 w. 权等于$(i_1,i_2,\cdots,i_k)$的构形的个数，记为 $h_{i_1,i_2,\cdots,i_k}$，于是 R 中的各种权的个数的描述式为

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\sum_{f\in R^D}w(f)$$
$$=\sum h_{i_1,i_2,\cdots,i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k}.$$

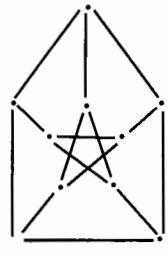
称为图形计数级数.

构形群(configuration group)　见“构形”.

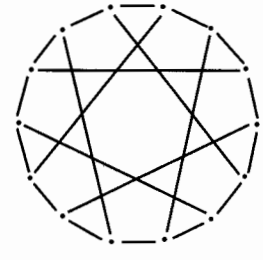
图形计数级数(enumeration series of figure)见“构形”.

图的计数(enumeration of graph)　计算一类图中不同构图的个数. 这里蕴含两个要求：不重和不漏. 这是图论中的一个重要且复杂的问题. 在推导各类图的计数级数时，波利亚公式是最重要的工具之一. 它是通过确定这类图的构形群，求出它的循环指标，以确定出图形的计数级数，从而得到这类图的个数. 目前，已解决了不少类型的图的计数问题；但是，还有大量没有解决的问题.

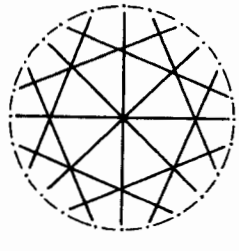
n 笼(n-cage)　一类重要的图. 它是围长等于 n 的边数最少的 3 正则图. 当 $n\geqslant 3$ 时，n 笼都是存在的. 当 $n=3,4,5,6,7,8$ 时，n 笼是惟一的. 3 笼为 K_4；4 笼为 $K_{3,3}$，5，6，7，8 笼分别如下图所示.



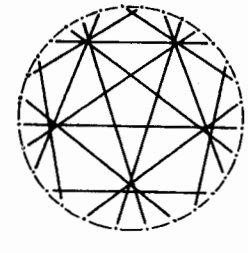
5 笼图



6 笼图



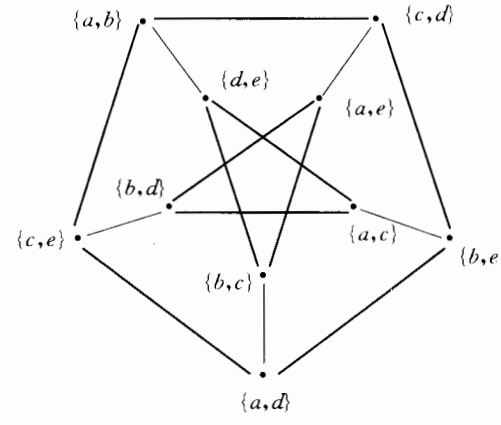
(3,7)笼 McGec 图



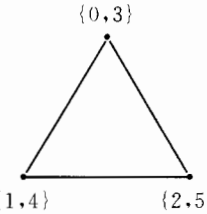
(3,8)笼 Tutte-Coxeter 图

乌拉姆猜想(Ulam's conjecture)　图论的一个重要问题. 它是判定两图是否同构的一个猜想. 设 G 和 H 是两个 $n(\geqslant 3)$阶图. 去掉 G 的每一节点及其所有的关联边得到一个删点子图，从而得到一个删点子图集$\{G_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$；同样得到 H 的一个删点子图集$\{H_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$. 若 G_i 与 $H_i(i=1,2,\cdots,n)$对应同构，则称 G 和 H 重构或亚同构. 乌拉姆猜想：若 G 与 H 重构，则 G 与 H 同构. 乌拉姆猜想被认为是图论中最困难的问题之一. 现在只是把图限制在某些特殊图类上证明了乌拉猜想成立. 例如，对于树和可平面图，乌拉姆猜想成立. 由于这个猜想是由乌拉姆(Ulam,S. M.)于 1929 年首先提出的，所以得名.

奇图(odd graph)　一类重要的图. 它是交不邻图. 设 S 为 $2k-1$ 个元素组成的集合，取 S 的所有 $k-1$ 元素的子集为节点，若这样的两子集不相交，相应的两顶点连以边，则这样构成的图称为奇图，记为 O_k. O_2 为 3 阶完全图 K_3；O_3 为皮特森图，如下图所示.



群-陪集图(group-coset graph)　一类重要的图. 它是从群派生的图. 若 H 是有限群 Γ 的子群，S 是 Γ 的子集且 $S^{-1}=S$，$S\cap H=\varnothing$，称以 Γ/H 为顶点集，以$\{(xH,yH)\mid x^{-1}y\in HSH\}$为边集的图为群-陪集图，记为$G(\Gamma/H,S)$. 例如，$\Gamma=\{0,1,2,3,4,5\}$，$H=\{0,3\}$，$S=\{1,5\}$，$\Gamma/H=\{0,3\}\cup\{1,4\}\cup\{2,5\}$. 上右图为$G(\Gamma/H,S)$.



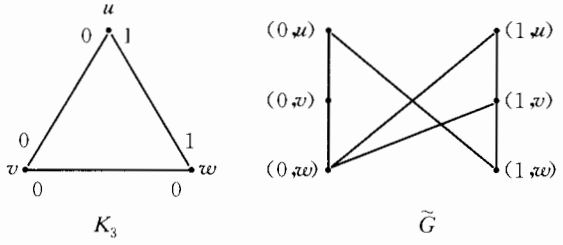
拟可分图(quasi-separable graph)　一类特殊的图. 它是具有某种可分离性的图. 若图 G 中存在一个顶点子集 K，K 的导出子图为一完全图，且去掉这个子集 K 后的图变为不连通的，则称图 G 为拟可分图. 当$|K|=0$ 或 1 时，分别为不连通图或可分图.

覆盖图(covering graph)　一类重要的图. 它是从一个图派生的图. 对图 G 的每一条边(u,v)给出两个侧$[u,v)$(即含 u 而不含 v)和$[v,u)$(即含 v 而不含 u). 记 $S(G)$为 G 的所有边的两侧组成的集合. 对于群 Γ，G 上的一个 Γ 链是从 $S(G)$到 Γ 的一个函数 φ，对 G 的所有侧$[u,v)$，满足

$$\varphi[u,v)=(\varphi[v,u))^{-1}.$$

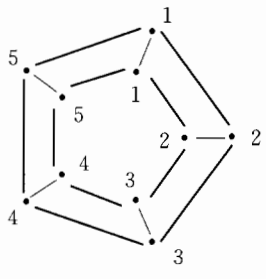
对给定的图 G 的 Γ 链 φ，G 的覆盖图 $\tilde{G}$：其顶点集为

$\Gamma\times V(G)$；两顶点$(a,v),(b,u)$相邻当且仅当$[v,u)\in S(G)$且$b=a\varphi[v,u)$. 例如，$\Gamma=\{0,1\},G=K_3$，即3阶的完全图. $\widetilde{G}$如下图所示. 在K_3中边旁之两数字给出φ的值.



K_3　　$\widetilde{G}$

α置换图(α-permutation graph)　一类重要的图. 它是对两图经运算所得的图. 若α是标定图G的节点的一个置换，则对$G_1=G$和$G_2=G$的不相交的并，再加上联结G_1的节点V_i和G_2的节点$\alpha(V_i)$的边所构成的图称为G的α置换图. 右图为C_5的一个1置换图.



网络(network)　一类特殊的图. 它是一种赋权图. 通常是有向图，且权一般为实函数. 在实际问题中，权往往是正实函数或非负实函数.

系统图(graph of system)　一类特殊的图. 它是代表一个系统的有向图. 它的每个弧代表一个元件或装置E_i，节点V_i代表n个元件的结合点，e_i的箭头方向为规定的正向. 弧上还附有两个变量，一个称为纵变量，另一个称为横变量. 它们分别相应电网络系统中的电流和电压. 这些变量还必须满足关联公设和回路公设. 系统图是研究系统的有力工具.

纵变量(travel variable)　见“系统图”.

横变量(transversal variable)　见“系统图”.

关联公设(incidence postulate)　图论的一个重要结论. 它是电网络中基尔霍夫电流定律的推广. 在系统图中，关联于任何节点的弧上的纵变量的代数和为0. 这个实事称为关联公设. 在电网络中又称基尔霍夫电流(第一)定律，因为它是德国的物理学家基尔霍夫(Kirchhoff,G. R.)首先发现的.

回路公设(circuit postulate)　图论的一个重要结论. 它是电网络中基尔霍夫电压定律的推广. 在系统图中，一个回路(即圈)上诸弧上的横变量的代数和为0. 这个事实称为回路公设. 在电网络中又称基尔霍夫电压(第二)定律. 因为它是德国物理学家基尔霍夫(Kirchhoff,G. R.)首先发现的.

状态变量法(state variable method)　用系统图解方程的一种方法. 能决定系统的将来行为的一个系统变量的极小集，称为系统的状态变量集. 由系统图的一个特征树可得到一个系统变量集及相应的微分方程组，这样求解系统的方法称为状态变量法.

状态变量集(state variable set)　见“状态变量法”.

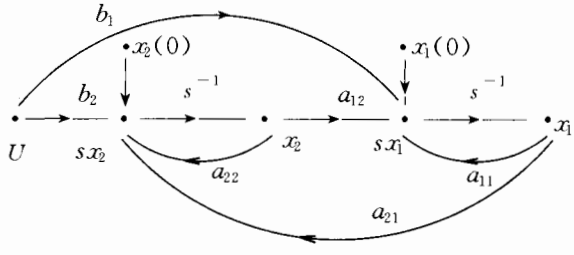
柯特斯图(Coates graph)　一种特殊的图. 它是弧带权的有向图. 如流图. 对于n阶方阵$A=(a_{ij})$，如下构造的n阶带权有向图$G(A)$称为与A关联的柯特斯图. 图$G(A)$的顶点分别标记为$1,2,\cdots,n$，若$a_{ij}\neq0$，则连一条从i到j权为a_{ij}的弧. 方阵与柯特斯图之间一一对应. 可以用柯特斯图$G(A)$解线性方程组$AX=B$.

状态转移图(state transition graph)　一种信号流图. 将状态方程做拉氏变换，并将sx_i作为独立节点作成的信号流图称为状态转移图. 下图为状态转移图的一个示例. 对应的状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1u,\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2u,\end{cases}$$

拉氏变换后得

$$\begin{cases}x_1=a_{11}s^{-1}x_1+a_{12}s^{-1}x_2+b_1s^{-1}U+s^{-1}x_1(0),\\ x_2=a_{21}s^{-1}x_1+a_{22}s^{-1}x_2+b_2s^{-1}U+s^{-1}x_2(0).\end{cases}$$

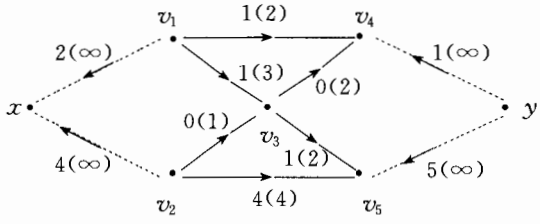


网络流(network flow)　图论的一类函数. 它是在一个边赋权的有向图上的特定的函数. 它是运输问题的一个数学模型. 一个运输网络(简称网络)N是一个赋权的有向图，弧上所赋的非负权$c(a)$表示弧a的容量，方向表示运输方向. 网络上的流是指定义在网络N的弧集上的一个实值函数f，它在任一弧a上的值满足条件$0\leqslant f(a)\leqslant c(a)$. 对于每一个顶点$v$，所有入弧的$f$值之和记为$f^-(v)$；所有出弧的$f$值之和记为$f^+(v)$. 若$f^+(v)-f^-(v)>0$，则称$v$点为发点；若$f^+(v)-f^-(v)<0$，则$v$点为收点；若$f^+(v)-f^-(v)=0$，则称$v$点为中间点. 若记节点集$V$的任意子集为$S$，其余集为$\overline{S}$，$(S,\overline{S})$表示由$S$指向$\overline{S}$的所有弧，则$f(S,\overline{S})$表示由集$S$流向$\overline{S}$的商品量，记为$f^+(S)$；$(\overline{S},S)$表示由$\overline{S}$指向$s$的所有弧，$f(\overline{S},S)$表示由$\overline{S}$流向$S$的商品量，记为$f^-(S)$. 若$X$表示所有的发点，$Y$表示所有的收点，则流函数$f$应满足条件

$$f^+(X)-f^-(X)=f^-(Y)-f^+(Y),$$

这个值称为流f的流量，记为val(f). 网络N上的任何流都可以用添加一个总发点x和一个总收点y

的办法化为只有一个收点和一个发点的新网络流.只要把总发点到原各发点都连以弧,弧上容量为∞,流函数值定为使原发点变为中间点;原各收点到总收点也连以弧,容量为∞,流函数值定为使原收点变为中间点,新网络流在原网络上的部分正好是原来的网络流.网络上所能容的最大流量的流称为最大流.求最大流是网络流要研究的重要问题.以上的处理将便于求最大流.设在每个弧 a 上,给定一个费用函数 $d(a)$ 即单位流通过 a 时所需花的费用,并要求所得的最大流使总的花费最少,这就是最小费用问题.下图为一个网络流的示例.实线为网络 N 及其上的流;边上括号中的数值为容量;括号外为流函数值;虚线为增加总收点 y 和总发点 x 后增加的弧.



流量(value of flow)　见"网络流".

最大流(maximum flow)　见"网络流".

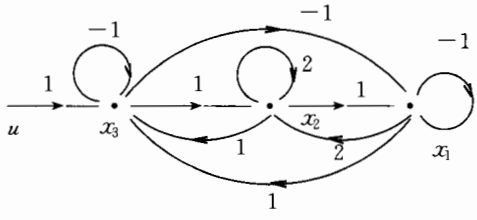
流图(flow graph)　一类特殊的图.它是边赋权的有向图.按照如下形式的系统方程作出的边赋权有向图称为流图.方程为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i u = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

流图作法:$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为节点.任选第 i 个方程与 x_k 相应,若 $a_{ij}=0$ 则无 x_j 到 x_k 的弧;若 $a_{ij}\neq 0$,则有 x_j 到 x_k 的弧且赋权 a_{ij}.若 $b_i=0$,则无 ux_k 弧;若 $b_i\neq 0$ 则有 ux_k 弧,且赋权 $-b_i$.流图是信号流图的一般化.因为选定哪个方程与 x_k 对应的方式很多,所以流图不惟一.下图为一个示例.对应方程为

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + u = 0. \end{cases}$$

选定第 i 个方程与 x_i 对应,$i=1,2,3$.



一个流图 G 的入度和出度都为 1 的极大子图称为流图的一个连结.计算一个流图 G 的增益(也用 G 表示)的公式称为柯特斯公式:

$$G = \frac{x_i}{u} = \frac{\sum_k G_k \Delta_{ck}}{\Delta_c}$$

求和遍取所有从节点 u 到节点 x_i 的向前路.G_k 是从 u 到 x_i 的第 k 条向前路的增益.

$$\Delta_c = \sum_j (-1)^{n_j} c_j,$$

c_j 是第 j 个连结的增益;n_j 是第 j 个连结中的圈的个数,求和遍取所有连结.Δ_{ck} 是不与第 k 条向前路相交的子图的 Δ_c.若第 k 条向前路不与任何子图相交,则定义 $\Delta_{ck}=1$.

柯特斯增益公式(Coates gain formula)　见"流图".

信号流图(signal flow gragh)　表示线性方程组的一种图.如下形式的系统的线性方程组

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

可以通过画出的一个赋权有向图,称为信号流图(又称马森信号流图)求解:节点为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,弧 x_jx_i 的权为 t_{ij},t_{ij} 称为增益.图 1 为方程组

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3, \\ x_2 = 2x_1 + 3x_2 + x_3, \\ x_3 = x_1 + x_2 + x_4 \end{cases}$$

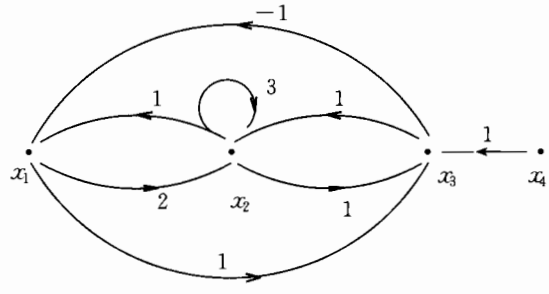


图 1

的信号流图.信号流图中一个圈上弧的增益的积称为圈增益或回路增益.正向有向路上弧增益的积称为向前路增益.信号流图上弧增益的结合运算称为增益运算.这种运算可以简化信号流图.基本运算如图 2 的(a)至(e)所示.运算方法都是由信号流图所代表的变量关系方程得来.信号流图 G 的输出节点变量 x_0 和输入节点变量 x_i 之比称为 G 的图增益,也用 G 表示.马森定理给出了图增益的计算公式:

$$G = \sum_m G_m \Delta_m / \Delta.$$

式中的求和指标遍取图中所有向前路,G_m 是第 m 条向前路的增益.Δ 是图行列式,其计算公式为

$$\Delta = 1 - \sum_i P_{i1} + \sum_j P_{j2} - \sum_k P_{k3} + \cdots,$$

式中 P_{i1} 是第 i 个圈的圈增益,求和指标遍取所有圈;P_{j2} 是第 j 对互不接触的圈增益之积,求和指标遍取所有互不接触圈对;P_{k3} 是第 k 组互不接触三圈

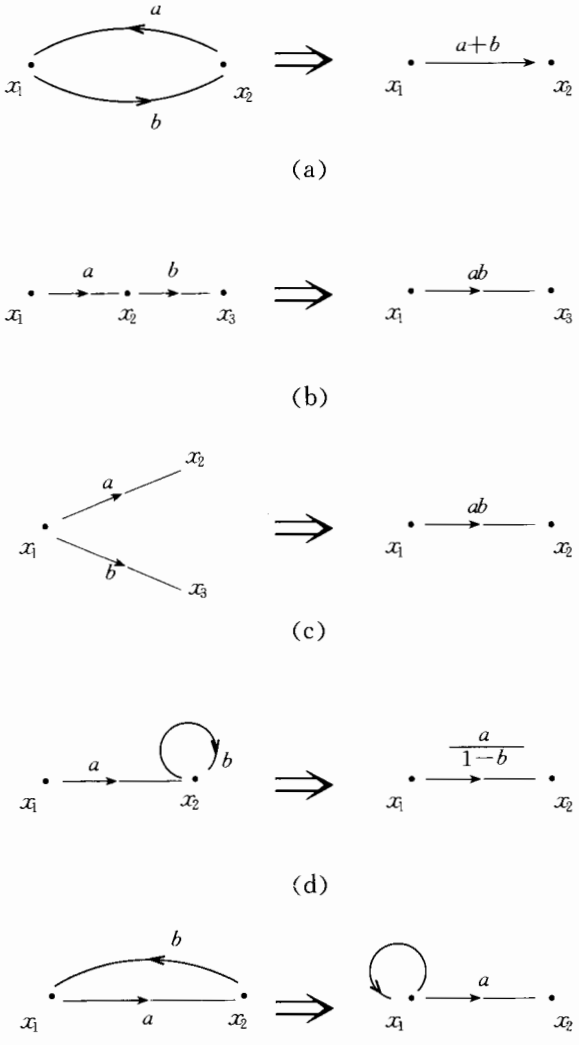


图 2

组的增益之积，求和指标遍取所有互不接触三圈组等. Δ_m 是删除第 m 条向前路的弧及此路上点关联的弧后所成子图的行列式.

圈增益(circuit gain)　见“信号流图”.

增益运算(operation of gain)　见“信号流图”.

图增益(graph gain)　见“信号流图”.

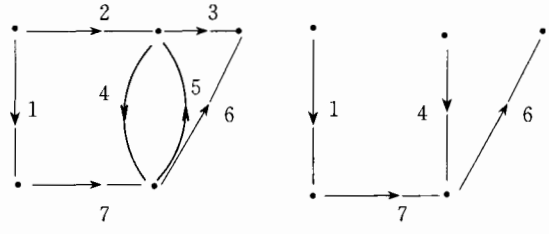
马森定理(Mason theorem)　见“信号流图”.

割(cut)　一种组合构形. 它是有向弧的集合. 在一个单发点和单收点的网络上，由含有发点的一个顶点集 S 到含有收点的顶点集 $\bar{S}$ 的有向弧集称为网络上的一个割. 割中弧的容量之和称为这个割的容量. 网络中具有最小容量的割称为网络的最小割.

最小割(minimum cut)　见“割”.

最大流最小割定理(max-flow min-cut theorem)　网络流理论的重要定理. 它是图论中的一个核心定理. 关于判定流的最大性的定理：任何网络中最大流的流量等于最小割的容量，简称为最大流最小割定理. 它描述了最大流的特征. 图论中的不少结果在适当选择网络以后，可以由这个定理推出. 例如，连通性理论中的门杰定理就是一例. 福特(Ford, L. R.)和弗克逊(Fulkerson, D. R.)于 1957 年由该定理的构造性证明而提出了求最大流的标号算法.

特征树(proper tree)　一类特殊的树. 它是电网络系统图的含有所有电容性元件和跨接驱动元件的一个支撑树. 由一个特征树可得一组状态变量，所以在状态变量法中很有用. 下图为一示例. D 的端点关系为：$x_1=e_1(t)$，$x_2=L_2y_2$，$x_3=R_3y_3$，$y_4=c_4x_4$，$y_5=e_5(t)$，$y_6=c_6x_6$，$y_7=1/R_7$. x_i 表示横变量，y_i 表示纵变量.



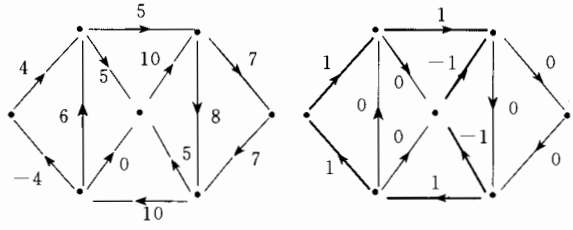
D　　D 的一个特征树

图上作业法(graphic method)　一类最小费用流问题. 它是 20 世纪 50 年代初，中国粮食调运部门的调度人员从经验中发现的一种解决运输问题的方法. 将铁道网看做一个网络. 其中，顶点就是车站. 有些顶点是发货点，简称发点；有些是收货点，简称收点. 在发点处有已知的发货量，简称发量；在收点处有已知的需求量，简称收量. 假定供求平衡，即发量总和等于收量的总和；也可假定每一段铁路都有一个容量限制. 一个可行方案就是：将所有发点上的货物通过铁道全部运往各收点，使得满足需要且使铁路上各段均不超载(即不超过容量限制)的一种安排方式. 其目的在于找到一个最优方案，使得总运输量为最小. 这里运输量以吨公里计算，即货物量乘以所通过的路程. 一个可行方案给定以后，网络上每一个圈上的每一段路，若有货物通过，则只能有两个方向. 而且，若在一段路上，两个方向都有货物通过，称为对流，则这个方案不可能是最优的. 经验表明，一个可行方案是最优的，当且仅当无对流而且在每个圈上两个方向货物所通过的路程不超过圈长之半. 20 世纪 50 年代末，中国数学工作者从理论上证明了这条经验的正确性.

可行流(feasible flow)　图论的一个重要概念. 它是满足一定条件的网络流. 对一个网络的某些点指定为发点，规定出提供能力；某些点指定为收点，规定出接收能力. 若一个流对每一发点满足总流出

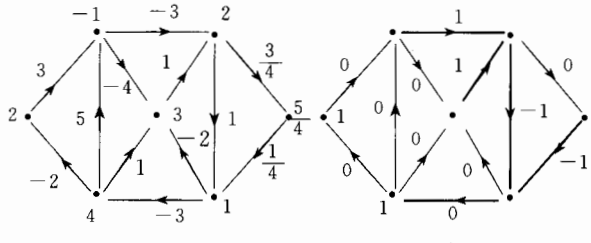
量与总流入量之差不大于提供能力，对每一收点满足总流入量与总流出量之差不小于接收能力，则称这个流为可行流. 可行流存在的充分必要条件是对所有顶点子集 S 都满足：由 S 到 $\overline{S}$ 的弧的总容量，不小于 $\overline{S}$ 中的收点总接收能力与 $\overline{S}$ 中的发点的总提供能力之差. 这个定理在图论中有许多应用.

环流(circulation)　图论中的一个函数. 它是以电网络为背景产生的一个有向图上的定义在其弧集上的实值函数. 它需要在每个顶点上满足守恒条件，即流入的和等于流出的和. 这正是电流的基尔霍夫定理. 图(a)为一个示例. 一种与有向图上的圈相对应的环流特别重要. 这里的圈是无向意义上的圈. 在指定一个圈 C 的同时规定出一个方向作为圈的正方向. 定义对应于这个圈 C 的环流 f 为：C 上与正方向一致的弧，定义 f 值为 1；C 上与正方向相反的弧，定义 f 值为 -1；不在 C 上的弧，定义 f 值为 0. 这样定义的 f 满足守恒条件，因此是个环流. 图(b)为一示例. 粗弧表示一个圈. D 上两环流的线性组合仍是 D 上的一个环流，因此所有环流构成一个线性空间.



(a)　(b)

势差(potential difference)　图论中的一个函数. 它是以电网络为主要背景产生的一个有向图上的定义在其弧集上的一个实值函数. 它是由一个定义在顶点集上的一个实函数(称为势函数)产生的. 确切地说，若 D 的顶点集 V 上定义有势函数 p，弧 a 的尾和头两点的势分别为 $p(x)$ 和 $p(y)$，则势差函数 g 在弧 a 的定义为 $p(x)-p(y)$. 图(a)为一个势函数及相应的势差函数的示例.



(a)　(b)

一种与有向图上的键相对应的势差特别重要. 设 $(X,\overline{X})$ 为一个键，定义相应的势函数 P 为：属于 X 的节点 P 值为 1；属于 $\overline{X}$ 的节点 P 值为 0. 由此势函数 P 可得势差 g. 图(b)是一个示例，其中粗弧为键. D 上两势差的线性组合仍是 D 上的一个势差，因此，D 上所有势差构成一个线性空间.

键(bond)　一种组合构形. 图中一种具有给定可分离性的边的子集. 对于图 G 的节点子集 X，若由 X 和 $\overline{X}$ 分别导出的子图都连通，则称连结 X 与 $\overline{X}$ 中节点的所有边组成的集合为图 G 的键，记为 $(X,\overline{X})$. 对于有向图，若键中的弧具有相同的方向，即起点都在 X 中或都在 $\overline{X}$ 中，则称这个键为有向键.

优美标号(graceful labeling)　图的一种标号. 指用非负整数标记图的顶点的一种方法. 用 $\{0,1,2,\cdots,q\}$ 中不同的整数标记一个图的顶点(q 为图的边数)，并以两端点标号差的绝对值标记相应的边，所得边的标号集若为 $\{1,2,\cdots,q\}$，则称这个标号为图的优美标号. 若存在 $\{0,1,2,\cdots,q\}$ 中的一个数 x，使图的任一条边的两个端点的标号一个比 x 大，一个不比 x 大，则称这个优美标号为交错标号. 若用 $\{0,1,\cdots,q+1-k\}$ 中的不同的整数标记图的顶点且所得边的标号集为 $\{k,k+1,\cdots,q+k-1\}$，则称这个标号为 k 优美标号. 1 优美标号就是如上定义的优美标号. 存在优美标号的图称为优美图. 存在 k 优美标号的图称为 k 优美图. 边-优美标号是用正整数标记图的边的一种方法. 用 $\{1,2,\cdots,q\}$ 中不同的整数标记图的边，并以所有关联边的标号的和模 p(p 为图的节点数)标记相应的顶点，若所得顶点标号集为 $\{0,1,\cdots,p-1\}$，则称这个标号为边-优美标号. 存在边-优美标号的图称为边-优美图. 集-优美标号是用集合标记图的节点的一种方法. 2^X 表示有限集 X 的所有子集组成的集合. 用 2^X 中的不同元标记图的顶点，并以两端点标号的对称差标记相应的边，若所得边的标号互不相同且边号集为 $2^X\backslash\{\varnothing\}$，则称这个标号为集-优美标号. 存在集-优美标号的图称为集-优美图. 优美标号的研究始于 20 世纪 60 年代. 研究的中心问题是哪些图是优美图. 至今尚无一般方法来判断一个图是否是优美图，仅知道很少一部分图是优美图.

优美图(graceful graph)　见“优美标号”.

调和标号(harmonious labeling)　图的一种标号. 指用有限加群中的元素标记图的节点的一种方法. 用模 q(q 为图的边数)整数加群中的不同元来标记图的节点，并用端点标号的和来标记相应的边，若所得边的标号都是模 q 互不相同的，则称这种标号为图的调和标号. 存在调和标号的图称为调和图.

调和图(harmonious graph)　见“调和标号”.

优雅标号(elegant labeling)　图的一种标号. 指标记图的节点的一种方法. 用模 $q+1$(q 为图的边数)整数加群 $\mathbf{Z}_{q+1}$ 中不同元来标记图的节点，并用两端点标号的和标记相应的边，若所得边的标号集为

$Z_{q+1}-\{0\}$，则称这个标号为优雅标号. 存在优雅标号的图称为优雅图.

优雅图(elegant graph)　见“优雅标号”.

幻标号(magic labeling)　图的一种标号. 指标记图的边的一种方法. 用 $1,2,\cdots,q$(q 为图的边数)标记图的边，使得不同的边具有不同的标号，并且，若用与节点邻接的所有边的标号的和标记节点，所有的节点具有相同的标号，则称这种标号为幻标号. 存在幻标号的图称为幻图.

幻图(magic graph)　见“幻标号”.

最优线性排列(optimal linear arrangment)　图的一种标号. 指标记图的节点的一种方法. 图的一个线性排列 π 是指用不同的正整数标记图的节点的一种方法. 用两端点标号差的绝对值来标记相应的边. 用 $f_\pi(G)$ 表示图的所有边标号的和，用 $f(G)$ 表示图的所有线性排列 π 中 $f_\pi(G)$ 的最小值. 满足 $f_\pi(G)=f(G)$ 的线性排列 π 称为最优线性排列. $f(G)$ 称为图的价格. 求图的最优线性排列是一个 NP 完全问题.

图的价格(price of graph)　见“最优线性排列”.

带宽标号(bandwidth labeling)　图的一种标号. 指决定图的带宽的一种标号方法. 图 G 的一个标号 π 是指用不同的正整数标记图的顶点的一种方法. 用两端点标号差的绝对值来标记相应的边，用 $b_\pi(G)$ 表示图 G 的边标号的最大值. 对图 G 的所有标号 π，用 $b(G)$ 表示 $b_\pi(G)$ 的最小值. 满足 $b_\pi(G)=b(G)$ 的标号 π 称为图 G 的带宽标号. $b(G)$ 称为图 G 的带宽. 确定图的带宽是一个 NP 完全问题.

带宽(bandwidth)　见“带宽标号”.

折叠标号(folding labeling)　亦称最小割线性排列. 图的一种标号. 指决定图的折叠数的一种标号方法. 图 $G=(V,E)$ 的一个标号 π 是指用不同的正整数标记图的节点的一种方法. 用 $\pi(v)$ 表示节点 v 的标号. 记 $\pi(V)=\{\pi(v)\mid V\in V\}$. 定义

$$t_\pi(G)=\underset{i\in\pi(V)}{\mathrm{Max}}\,|\{(u,v)\in E\mid\pi(u)\leqslant i\leqslant\pi(v)\}|.$$

用 $t(G)$ 表示对于所有标号 π，$t_\pi(G)$ 的最小值. 满足 $t_\pi(G)=t(G)$ 的标号称为图 G 的折叠标号. $t(G)$ 称为图 G 的折叠数.

折叠数(folding number)　见“折叠标号”.

模糊图(fuzzy graph)　一种赋权图. 对于任意一条边 e，其 w 满足 $0\leqslant w(e)\leqslant 1$. 权 $w(e)$ 称为边 e 的隶属度.

随机图(random graph)　一类重要的图. 它是伴随有不确定性的图. 按某种随机方式删去一个图 G 的某些节点或边而保留下来的图称为随机子图，又称随机图. G 称为随机图的原始图. 随机图的性质与原始图及随机删除部分节点或边的方式有关. 随机删除方式包括只删点、只删边和既删点又删边三种. 研究较多的原始图有完全图和晶形图. 若按某种删除方式得到的一类随机图看成是概率空间，则有关的图的不变量或参数就是该空间的随机变量. 从任一节点出发，按不过重复节点的原则，可随机走遍所有节点的图称为随机哈密顿图. 从任一节点出发，按不过重复边的原则，可随机走遍所有边而回到出发点的图称为随机可迹图. 若原始图为完全图，且按随机删边方式得到的任一随机图边数固定，则称这样的随机图为定边数随机图. 若原始图为完全图，每条边删除的概率相同且各边的删除相互独立，则这种随机图称为定边密度随机图.

原始图(initial graph)　见“随机图”.

随机可迹图(randomly traceable graph)　见“随机图”.

随机哈密顿图(randomly Hamiltonian graph)　见“随机图”.

增性质(increasing property)　图的一类性质. 它是关于一类局部决定全局的性质. 即图的这样的性质 π：从该图的任一生成子图具有性质 π 即可推知该图本身具有性质 π.

凸性质(convex property)　图的一类性质. 指图的这样的性质 π：若 F 为 G 的子图，G 为 H 的子图，则由 F 和 H 都具有性质 π，可推断 G 也具有性质 π.

阀函数(threshold function)　图论中的一种特殊函数. 它是对应于一定的概率度量和图的增性质的函数. 对于自然数集上的整函数 $M=M(n)$，记 $\mathscr{G}_{n,M}$ 为所有具有 $M=M(n)$ 条边的 n 阶随机图 $G_{n,M}$ 构成的集合. 对于图 G 的一个增性质 π，若 $M^*(n)$ 是满足如下条件的函数

$$P(G_{n,M}\text{ 有性质 }\pi)\xrightarrow[n\to\infty]{}\begin{cases}0 & (M(n)/M^*(n)\to 0),\\ 1 & (M(n)/M^*(n)\to\infty).\end{cases}$$

则称 $M^*(n)$ 为对于增性质 π 的阀函数.

阀分布函数(threshold distribution function)　一类依赖增性质的函数. 满足如下条件的函数 F：

$$P(G_{n,M}\text{ 有性质 }\pi)\xrightarrow[n\to\infty]{}F(x),$$

$$\text{当 } M(n)/A(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}x,$$

其中，$A(n)$ 为对于增性质 π 的阀函数和 $M(n)$ 为自然数集上的函数. 不是对 π 的任何阀函数均存在阀分布函数.

阀函数对(threshold pair)　一类依赖增性质的函数对. 函数对 $(A_1(n),A_2(n))$ 满足

$$P(G_{n,M}\text{有性质 }\pi)\xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\begin{cases}0 & ((M(n)-A_1(n))/A_2(n)\to-\infty),\\ 1 & ((M(n)-A_2(n))/A_2(n)\to\infty).\end{cases}$$

准确地说，$(A_1(n),A_2(n))$为增性质 π 的阀函数对.

可达阀分布函数(sharp-threshold distribution function)　图论中的一种特殊函数. 指关联阀函数对的函数. 若$(A_1(n),A_2(n))$为增性质 π 的阀函数对，且存在满足如下条件的函数 F：

$$P(G_{n,M}\text{有性质 }\pi)\xrightarrow[n\to\infty]{}F(x),$$

$$\text{当}(M(n)-A_1(n))/A_2(n)\to x,$$

称 $F(x)$为性质 π 的可达阀分布函数.

概率收敛性(convergence in probability)　随机图的性质. 指一种在概率意义下的收敛性. 随机图的一些性质可以看做随机变量. 对于随机变量 X_n，若对任意 $\varepsilon>0$，满足

$$P(|X_n-l|<\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

则称 X_n 依概率收敛于 l. 这种收敛性称为随机变量 X_n 的概率收敛性.

超图(hypergraph)　图的推广. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一个有限集，超图是 X 上的一个子集族 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，也记 $H=(X,\mathscr{E})$，$\mathscr{E}=\{E_j\mid 1\leqslant j\leqslant m\}$，它满足条件：

1. $E_j\neq\varnothing$　$(j=1,2,\cdots,m)$.

2. $\bigcup_{j=1}^{m}E_j=X$,

其中，X 中的元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为 H 的节点，其个数 n 称为 H 的阶，X 称为 H 的节点集. 集合 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 称为 H 的边，其个数 m 称为 H 的度，$\mathscr{E}=\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$称为 H 的边集. 若一个超图还满足条件：

3. $E_i\subset E_j\Rightarrow i=j$,

则称这个超图是简单超图或施佩纳族. 可以用一个关联矩阵 $A=(a_j^i)_{n\times m}$表示一个超图. 其中，A 的列相应于边 $E_1,E_2,\cdots,E_m$，行相应于节点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. A 的元素

$$a_j^i=\begin{cases}0 & (x_i\notin E_j),\\ 1 & (x_i\in E_j).\end{cases}$$

超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$的秩定义为

$$r(H)=\max_{1\leqslant j\leqslant m}|E_j|,$$

反秩定义为

$$s(H)=\min_{1\leqslant j\leqslant m}|E_j|.$$

若$r(H)=s(H)$，则称 H 是一个均匀超图. 对于 H 的任何一个节点子集 $S\subseteq X$，称

$$r(S)=\max_{1\leqslant j\leqslant m}|E_j\cap S|$$

为 H 的秩函数. 当 $S=X$ 时，秩函数的值就是 H 的秩. 设集合 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$，子集族 $H'=(E_j\mid j\in J)$称为由集合 J 生成的部分超图，其中，H'中节点的集合是 X 的一个非空子集. 设集合 $A\subset X$，子集族 $H_A=\{E_j\cap A\mid E_j\cap A\neq\varnothing,1\leqslant j\leqslant m\}$称为由集合 A 导出的子超图. $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$的对偶是集合 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$上的超图 $H^*=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，其中，E 中的节点 $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 分别对应 H 中的边 $E_1,E_2,\cdots,E_m$，H^*中的边 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 分别对应 X 中的节点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，且满足条件：$X_i=\{e_j\mid x_i\in E_j,1\leqslant j\leqslant m\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. $(H^*)^*=H$. 一个超图 H，若它的边集的交邻图是连通的，则称 H 是一个连通超图.

简单超图(simple hypergraph)　见“超图”.

施佩纳族(Sperner family)　见“超图”.

均匀超图(uniform hypergraph)　见“超图”.

部分超图(partial hypergraph)　见“超图”.

子超图(sub-hypergraph)　见“超图”.

连通超图(connected hypergraph)　见“超图”.

次(degree)　图上节点次的概念在超图上的推广. 对于 X 上的超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，$x\in X$，H 的以 x 为中心的星为一个由所有包含 x 的边所生成的部分超图，记为 $H(x)$. $H(x)$中边的个数称为节点 x 的次. 若一个超图本身就是它的一个星，则称它为星超图，也常简称星. 一个超图，若所有节点的次都等于 k，则称它是 k 正则的. 这是 k 正则图的推广. 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$r(1\leqslant r\leqslant n)$为一个整数，由 X 的所有含 r 个元素的子集为边构成的超图，称为 r 完全超图. 由于它还是均匀的，所以也称为 r 均匀完全超图，记为 K_n^r. r 完全超图是完全图的一个推广. 还可以把完全二部图推广到超图上. 设 $X^1,X^2,\cdots,X^r$ 是两两无公共元的集合，$|X^i|=n_i(1\leqslant i\leqslant r)$，$X=X^1\cup X^2\cup\cdots\cup X^r$，构造 X 上的一个简单超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，其中，$E_j=\{x^1,x^2,\cdots,x^r\}$，$x^1\in X^1,x^2\in X^2,\cdots,x^r\in X^r$，且 $E_j(1\leqslant j\leqslant m)$取遍所有具有上述形式的集合，即 $m=n_1n_2\cdots n_r$，称这样的超图 H 为一个 r 部完全超图，记为 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_r}^r$. 设超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，若对一切 $i,j,i\neq j$，有 $|E_i\cap E_j|\leqslant 1$，则称 H 为线性超图. 一个超图称为可分离的，若对于每个节点 x，包含 x 的所有边的交都是单个元素集$\{x\}$，即 $\bigcap_{E\in H(x)}E=\{x\}$.

星(star)　见“次”.

完全超图(complete hypergraph)　见“次”.

线性超图(linear hypergraph)　见“次”.

交族(intersecting family)　边的集合. 给定一个超图 H，称它的边的一个集合为交族，其中任意两条边的交均非空. 若 H 本身就是一个交族，则超图 H 称为交超图. 爱尔特希-柯-拉多定理：若 H 是一个阶为 n 的简单超图，H 的秩 $r(H)=r\leqslant n/2$，H 的度记为 $m(H)$，则

1. $\sum_{E\in H}\binom{n-1}{|E|-1}^{-1}\leqslant 1$.

2. $m(H)\leqslant\binom{n-1}{r-1}$.

更进一步，当 H 是 $K_n^r(r<n/2)$ 的一个星时，结论 2 中的等式成立. 这一定理首次出现在爱尔特希(Erdös, P.)、柯召和拉多(Radó, R.)于 1961 年联名发表的一篇文章中.

交超图(intersecting hypergraph) 见“交族”.

爱尔特希-柯-拉多定理(Erdös-Ko-Radó theorem) 见“交族”.

边色数(chromatic index) 图上边染色在超图上的推广. 设超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$. 对 H 中的边染色，使得任意两条交非空的边的颜色不同，满足这一条件所需要的最少的颜色数目称为边色数，常记为 $q(H)$. 设 $\Delta(H)$ 表示超图上节点的最大次. 对于一个超图来说，总有 $q(H)\geqslant\Delta(H)$. 超图 H 满足边色性是指：$q(H)=\Delta(H)$.

遗传闭包(hereditary closure) 由一个超图派生出的另一个超图. 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是集合 X 上一个简单超图，H 的遗传闭包就是指 X 上的一个这样的超图：H 的任何一条边的任何一个子集均是它的边. H 的遗传闭包常记为 $\hat{H}$. 若一个超图的遗传闭包就是它本身，则称该超图是遗传超图. 施瓦他猜想：每一个遗传超图 $\hat{H}$ 均有 $\Delta_0(\hat{H})=\Delta(\hat{H})$，其中，$\Delta_0(\hat{H})$ 和 $\Delta(\hat{H})$ 分别表示 $\hat{H}$ 中所有交族的基数的最大值和节点的最大次. 一个超图，若它具有边色性，则这个猜想自然成立. 到底什么样的超图具有边色性，目前人们还不完全知道.

遗传超图(hereditary hypergraph) 见“遗传闭包”.

施瓦他猜想(Chvatal's conjecture) 见“遗传闭包”.

色数(chromatic number) 超图的一种不变量. 超图 H 的色数 $\chi(H)$ 是指符合下列条件的 H 上节点着色所用颜色数的最小值：对 H 上每一节点着色，使得对于 H 的任一边 E_i，$|E_i|>1$，E_i 所含的全部节点不着同一颜色. 超图 H 的强色数，常记为 $\gamma(H)$，是指符合下列条件的 H 上节点着色所用颜色数的最小值：对 H 上每一节点着色，使得每两个含在同一条边中的节点着不同颜色. 一个超图 H 的强色数不可能小于它的色数，即 $\gamma(H)\geqslant\chi(H)$. 一个超图 H 称为是 γ 完美的，若 $\gamma(H_A)=r(A)$ 对于节点集 X 的任一子集 A 都成立，其中，H_A 表示由 A 导出的子超图，$r(A)$ 为 H 的秩函数.

强色数(strong chromatic number) 见“色数”.

完美超图(perfect hypergraph) 见“色数”.

团(clique) 一类组合构形. 指超图的一种特殊节点子集. 设超图 H 的秩为 h，$r\leqslant h$. H 的节点集 X 的子集 A 称为秩 r 团，若 $|A|<r$；或者 $|A|\geqslant r$ 并且 A 的每一个基数为 r 的子集都含在 H 的至少一条边中. 若 A 是秩 r 团，则它的任何子集也是秩 r 团. 若 H 是一个秩为 h 的均匀超图，则 H 的秩 h 团常称为团. 若 X 本身就是一个秩 r 团，则称 H 是 r 完全的.

截段(section) 一种特殊的超图. 指由一个超图所派生出的另一个超图. 对于给定的正整数 k，超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 的 k 截段定义为 $H_{(k)}=(X,\mathscr{E}_{(k)})$，其中，$\mathscr{E}_{(k)}=\{F\mid F\subset X,1\leqslant|F|\leqslant k;F$ 是某个 $E\in\mathscr{E}$ 的子集$\}$. H 的所有 k 截段统称为截段. H 的 2 截段 $H_{(2)}$ 相应一个图，在这个图上每个节点都有一个环. 用 $(H)_2$ 表示 $H_{(2)}$ 上去掉所有环后所得的图. 设 $\mathscr{E}=\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$. H 称为保形超图，若图 $(H)_2$ 的每一个团都是 H 的边. 设 H 是一个 r 均匀超图，并且它的边数

$$m(H)=m=\binom{a_r}{r}+\binom{a_{r-1}}{r-1}+\cdots+\binom{a_s}{s}$$
$$(a_r>a_{r-1}>\cdots>a_s\geqslant s\geqslant 1),$$

则它的 $(r-1)$ 截段的边数

$$m(H_{(r-1)})\geqslant\binom{a_r}{r-1}+\binom{a_{r-1}}{r-2}+\cdots+\binom{a_s}{s-1}.$$

这就是克鲁斯卡尔-卡妥那定理. 它是分别由克鲁斯卡尔(Kruskal, J. B.)于 1963 和卡妥那(Katona, G. O. H.)于 1964 年发现的.

保形超图(conformal hypergraph) 见“截段”.

克鲁斯卡尔-卡妥那定理(Kruskal-Katona theorem) 见“截段”.

黑利性质(Helly property) 简单超图的一种特殊性质. 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 是一个简单超图. 若对于任何 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$，从条件对任何 $i,j\in J$，$E_i\cap E_j\neq\varnothing$ 可以导出条件

$$\bigcap_{i\in J}E_i\neq\varnothing,$$

则称 H 满足黑利性质. 若 H 的节点集由一条直线上所有点组成，它的边集为这条直线中的一些区间，则称 H 为一个区间超图. 黑利(Helly, E.)的一个定理指出这种超图具有上述性质，这也就是称之为黑利性质的缘由. 若取 H 的节点集 X 为自然数的集合，边为 X 上的算数级数，则 H 上的黑利性质就是著名的中国剩余定理，或称孙子定理. 一个简单超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$，若对于任何 $J\subset\{1,2,\cdots,m\}$ 满足性质：

1. 对任何 $I\subset J$，从 $|I|\leqslant k$ 可导出 $\bigcap_{i\in I}E_i\neq\varnothing$.

2. $\bigcap_{j\in J}E_j\neq\varnothing$，

则称它有 k 黑利性质. 黑利性质就是指 2 黑利性质.

区间超图(interval hypergraph) 见"黑利性质".

孙子性质(Sun Wu property) 见"黑利性质".

k 黑利性质(k-Helly property) 见"黑利性质".

横截集(transversal set) 一种组合构形. 指超图的一种特殊节点子集. 超图 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 的节点子集 $T\subset X$ 称为一个横截集,若 $T\cap E_i\neq\varnothing$ 对任一 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 都成立. H 的横截数,是指在 H 的所有横截集中,节点数目最少的横截集的节点数. H 的横截数常记为 $\tau(H)$. H 称为横截临界超图,若 $\tau(H-E_i)<\tau(H)$ 对一切 $i(1\leqslant i\leqslant m)$ 成立. 超图 H 的横截超图是指与 H 有相同节点集的由 H 的所有极小横截集作为边的超图.

横截数(transversal number) 见"横截集".

横截超图(transversal hypergraph) 见"横截集".

横截临界超图(transversal-critical hypergraph) 见"横截集".

链(chain) 一种组合构形. 指超图上的一种特殊的节点和边的序列. 超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 的一个节点和边的序列 $(x_1,E_1,x_2,E_2,\cdots,x_q,E_q,x_{q+1})$ 称为一个链,若满足下列三个条件:

1. $x_1,x_2,\cdots,x_q$ 是 H 的互不相同的节点.

2. $E_1,E_2,\cdots,E_q$ 是 H 的互不相同的边.

3. 对于任意 $k,1\leqslant k\leqslant q$,边 E_k 包含节点 x_k 和 x_{k+1}. 其中,q 称为链的长度.

若 $q>1$ 且 $x_{q+1}=x_1$,则称这个链为一个圈. 一个超图 H 称为是平衡的,如果其上每一个奇圈 $(a_1,E_1,a_2,E_2,\cdots,a_{2p+1},E_{2p+1},a_1)$ 都有一个边 $E_i(1\leqslant i\leqslant 2p+1)$ 包含这个圈上至少 3 个节点. H 称为是全平衡的,若 H 的每一个长度不小于 3 的圈上都有一个包含这个圈上 3 个节点的边.

平衡超图(balanced hypergraph) 见"链".

全平衡超图(totally balanced hypergraph) 见"链".

均等 q 染色(equitable q-colouring) 一种组合构形. 指超图的节点集的一种特殊划分. 超图 $H=\{E_i\mid i\in I\}$ 的节点集 X 的一个 q 划分 $(S_1,S_2,\cdots,S_q)$ 称为 H 的均等 q 染色,若对于任意 $i\in I$ 和 $1\leqslant j,j'\leqslant q$,都有

$$-1\leqslant|E_i\cap S_j|-|E_i\cap S_{j'}|\leqslant 1.$$

超图 H 称为单模超图,若对于 X 的任一子集 S,子超图 H_S 有一个均等 2 染色.

单模超图(unimodular hypergraph) 见"均等 q 染色".

匹配(matching) 一种组合构形. 指超图的一种特殊边子集. 超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 的边子集 $\mathscr{E}_0\subset\mathscr{E}$ 称为 H 的一个匹配,若 $\mathscr{E}_0$ 中的所有边两两互不相交. 超图 H 的最大匹配,是指在 H 的所有匹配中,含边数最多的匹配. 最大匹配中边的数目称为匹配数. 设 $\mathscr{E}_0$ 是超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 的一个匹配,记 $\mathscr{F}=\mathscr{E}-\mathscr{E}_0$. 序列 $\sigma=(F_1,E_1,F_2,E_2,\cdots)$ 称为关于 $\mathscr{E}_0$ 的交错序列,若它具有如下三条性质:

1. F_1 是 $\mathscr{F}$ 中元素.

2. $E_i,i=1,2,\cdots$,是 $\mathscr{E}_0-\{E_1,\cdots,E_{i-1}\}$ 中元素,且 $E_i\cap(\bigcup_{j\leqslant i}F_j)\neq\varnothing$.

3. $F_{i+1}(i=1,2,\cdots)$,是 $\mathscr{F}-\{F_1,F_2,\cdots,F_i\}$ 中的元素,且 $F_{i+1}\cap(\bigcup_{j\leqslant i}F_j)=\varnothing$,$F_{i+1}\cap(\bigcup_{j\geqslant i}E_j)\neq\varnothing$.

超图 $H=(X,\mathscr{E})$ 的一个边子集 $\mathscr{E}_0$ 称为 H 的一个覆盖,若 H 的每一个节点都在 $\mathscr{E}_0$ 的某一边中(或者说,$\mathscr{E}_0$ 的边覆盖了 H 的所有节点). H 的最小覆盖是指在 H 的所有覆盖中,含边最少的覆盖. H 的覆盖数,是指 H 的最小覆盖中的边数,常记为 $\rho(H)$. 记 $\delta_x(H)$ 表示超图 H 上包含节点 x 的边的数目,

$$\delta(H)=\max_{x\in X}\delta_x(H).$$

超图 H 称为正规超图,若对于 H 的每一个部分超图 H',都有 $q(H')=\delta(H')$,其中,$q(H')$ 表示 H' 的边色数.

匹配数(matching number) 见"匹配".

覆盖(covering) 见"匹配".

正规超图(normal hypergraph) 见"匹配".

代表图(representative graph) 亦称线图. 一类特殊的超图. 指由一个超图派生出的一个图. 设 $H=(E_1,E_2,\cdots,E_m)$ 为 X 上的一个超图. H 的代表图记为 $L(H)$,定义为如下的简单图:节点集为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$,$e_i(i=1,2,\cdots,m)$ 代表超图的边 E_i,两个节点 e_i 和 e_j 相邻,当且仅当它们所对应的 H 的边 E_i 和 E_j 有公共节点,即 $E_i\cap E_j\neq\varnothing$. 事实上,一个超图的代表图就是它的对偶的 2 截段.

树形超图(arboreal hypergraph) 一种特殊超图. 超图 H 称为是树形超图,若满足下列两个条件:

1. H 具有黑利性质.

2. H 的每一个长度不小于 3 的圈上都存在 3 条边,使得它们的交非空.

上树形超图是指树形超图的对偶超图. 或者说,H 是上树形超图,若 H 满足下列两个条件:

1. H 是保形超图.

2. H 的每一个长度不小于 3 的圈上都有 3 个节点含于同一边中.

上树形超图(co-arboreal hypergraph) 见"树形超图".

s 匹配(s-matching) 匹配的推广. 设 $H=(E_1,$

$E_2,\cdots,E_m)$为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的一个超图，它的关联矩阵为 $A=(a_{ij})_{n\times m}$，n 和 m 分别为 H 的阶和度. 给定一个向量 $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)\in \mathbf{N}^n$，即 $s_i(1\leqslant i\leqslant n)$均为非负整数. H 的一个 s 匹配就是指多面体 $Q(s)$上的一个所有分量均为整数的向量 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，其中，$Q(s)=\{y\mid y\in \mathbf{R}^m, y\geqslant 0, Ay^T\leqslant s^T\}$，而 y^T 表示向量 y 的转置. 当 $s=1_n$ 时，即 $s_i=1$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，$y$ 的分量只能取 0 或 1. 也就是说，任何一个节点至多包含在一条相应 y 的分量为 1 的边中. 所有相应 1_n 匹配 y 的分量为 1 的边的集合就是 H 的一个匹配. 对应超图的每一条边 E_j 给定一个整数 $d_j\geqslant 0$，称 d_j 为边 E_j 的权. 记 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_m)$. H 上 s 匹配的最大权定义为

$$\max_{y\in Q(s)}\langle d,y\rangle$$

$$=\max\left\{\langle d,y\rangle=\sum_{j=1}^{m}d_jy_j\mid y\in Q(s)\cap \mathbf{N}^m\right\}.$$

对于向量 $d=(d_1,d_2,\cdots,d_m)\in \mathbf{N}^m$，$H$ 的一个 d 横截是指多面体 $P(d)$上的一个分量为整数的向量 $t=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，其中，$P(d)=\{t\mid t\in \mathbf{R}^n, t\geqslant 0, A^*t^T\geqslant d^T\}$，而 A^* 是 H 的对偶超图的关联矩阵. 在 H 的每一个节点 x_i 处给定一个整数 $c_i\geqslant 0$，称 c_i 为节点 x_i 的费用. 设 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$. H 的 d 横截的最小费用定义为

$$\min_{t\in P(d)}\langle c,t\rangle$$

$$=\min\left\{\langle c,t\rangle=\sum_{i=1}^{n}c_it_i\mid t\in P(d)\cap \mathbf{N}^n\right\}.$$

特别地，

$$\max_{y\in Q(1_m)}\langle 1_m,y\rangle$$

是 H 的匹配数，

$$\min_{t\in P(1_n)}\langle 1_n,t\rangle$$

是 H 的横截数. 一个超图 H，若对任何 $c\in \mathbf{N}^n$ 均有

$$\max_{y\in Q(c)}\langle 1_m,y\rangle=\min_{t\in P(1_n)}\langle c,t\rangle,$$

则称 H 为门杰超图. 任何一个平衡超图都是门杰超图；但反之不然. 一个超图 H 称为整极超图，若满足如下三个等价条件之一：

1. 多面体 $P(1_n)$上的所有极点都是整向量，即所有分量皆为整数.

2. 对任何 $c\in \mathbf{N}^n$，$\min_{t\in P(1_n)}\langle c,t\rangle$ 皆为整数.

3. 对任何 $c\in \mathbf{N}^n$，均有

$$\min_{t\in P(1_n)}\langle c,t\rangle=\min_{t\in P(1_n)}\langle c,t\rangle.$$

由于门杰超图总满足条件 3，所以它是整极的；但是，反之不然.

门杰超图(Mengerian hypergraph)　见“s 匹配”.

整极超图(paranormal hypergraph)　见“s 匹配”.

单纯分解(simplicial decomposition)　图的一种分解. 设 $G=(V,E)$是一个图，$\sigma>0$ 为一个序数，对于任何 $\lambda<\sigma$，记 B_λ 为 G 的导出子图. 一个图族 $\mathscr{F}=(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$若满足下列三个条件，则称为 G 的一个单纯分解：

1. $G=\bigcup_{\lambda<\sigma}B_\lambda$.

2. 对任何 $\mu(0<\mu<\sigma)$，$S_\mu=(\bigcup_{\lambda<\mu}B_\lambda)\cap B_\mu$ 是一个完全图，其中，两个图 $G_1=(V_1,E_1)$和 $G_2=(V_2,E_2)$的交 $G_1\cap G_2=(V_1\cap V_2,E_1\cap E_2)$(当 $G=(\varnothing,\varnothing)$时简记为$\varnothing$).

3. 对任何 $\mu(0\leqslant\lambda<\mu<\sigma)$，$S_\mu$ 既不包含 B_μ 又不包含 B_λ.

G 的一个由它的导出子图组成的图族 $\mathscr{F}=(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$，若它还满足下列条件，则称 $\mathscr{F}$ 是 G 的一个树-分解.

4. 对任何 $\mu(\mu<\sigma)$，S_μ 包含在某 $B_\lambda(\lambda<\mu)$中，和上面的条件 1(注意，不一定满足条件 2 或 3).

若 $\mathscr{F}=(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$是图 G 的一个单纯分解并且它还满足条件 4，则称之为 G 的单纯树分解. 或者说，G 的一个单纯树分解就是满足条件 2 和 3 的树-分解. 一个树分解 $(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$的宽度就是 $\sup\{|B_\lambda|-1\mid\lambda<\sigma\}$，其中，$|B_\lambda|$为 B_λ 的阶. 所谓 G 的树宽就是 G 的所有可能树分解的宽度的最小值；或者说，这样的最小整数 k 使得 G 有一个树分解，其中的每个导出子图至多是 $k+1$ 阶. G 的分解中的导出子图称为因子.

树-分解(tree-decomposition)　见“单纯分解”.

树宽(tree-width)　见“单纯分解”.

图的素分解(prime decomposition of a graph)　图的一种分解. 一个图称为对于一类分解的素图，若它没有包含至少两个子图的这样的分解. 图 G 的一个素子图，若它不是 G 的任何其他素子图的真子图，则称为极大素的，这里所说的子图全指导出子图. 若一个分解中所有的子图全是素的，则称它为素分解. 在一个分解中的素子图称为素因子. 在多数情形，所说素因子均指素分解中的因子.

素图(prime)　见“图的素分解”.

极大素子图(maximally prime subgraph)　见“图的素分解”.

图的素因子(prime factor of a graph)　见“图的素分解”.

单形(simplex)　亦称完全图. 它是从拓扑学中借用的词. 图的一种分解. 在图 G 的一个分解 $\mathscr{F}=(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$($\sigma$ 是一个序数)中，若对于任何 μ，

$$0<\mu<\sigma,(\bigcup_{\lambda<\mu}B_\lambda)\cap B_\mu$$

均为单形，则称之为触单形. 对于一个分解 $\mathscr{B}$，可用如下的递推方式定义复形：每个 $B\in\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{B}$ 上的

复形；若 H_1 和 H_2 是 $\mathscr{B}$ 上的复形并且 $H_1\cap H_2$ 是单形，则 $H_1\cup H_2$ 是 $\mathscr{B}$ 上的复形. 单纯分解就是一种特殊的复形. 它也是从拓扑学中借用的.

门杰数(Mengerian number)　图的一个不变量. 设 x,y 为图 G 的两个节点，若 G 的一个节点子集 $S,x,y\in S$，使得在图 $G-S$ 中不再有连 x 与 y 的路，则称 S 为 G 的一个 (x,y) 分离子. 若 S 是 G 上的一个 (x,y) 分离子，但它的任何一个真子集均不是 G 上的 (x,y) 分离子，则称 S 为极小 (x,y) 分离子. 含节点最少的 (x,y) 分离子称为最小 (x,y) 分离子. 最小 (x,y) 分离子中的节点数称为 (x,y) 分离数. 两条以 x,y 为端点的路，若除 x,y 以外不再有公共节点，则称之为独立的. 连 x 与 y 的两两独立的路的最大数称为 (x,y) 门杰数. (x,y) 门杰数等于 (x,y) 分离数.

凸性(convexity)　图的一种内在的属性. 若图 G 的一个导出子图是路，则称它为 G 的导出路. 若 G 的一个子图 H 包含 G 的所有端点在 H 中的导出路，则称 H 在 G 中是凸的. 若 $H\subset G$ 在 G 中是凸的，并且它不是两个凸的真子图的并，则称 H 是极小凸的. 对于 G 的任何一个节点子集 S，G 中所有包含 S 的凸子图的交称为 S 的凸包.

极小凸的(minimally convex)　见“凸的”.

凸包(convex hull)　见“凸的”.

闭性(closedness)　亦称简单闭的. 图的两个节点间的一种特殊关系. 图 G 的两个节点，若在 G 中没有任何单形可以分离它们，则这两个节点称为闭的. 对于 G 的一个节点子集 S，在 G 中所有那些与 S 中每一个节点是闭的节点的导出子图称为 S 的简单邻域.

简单邻域(simplicial neighborhood)　见“闭的”.

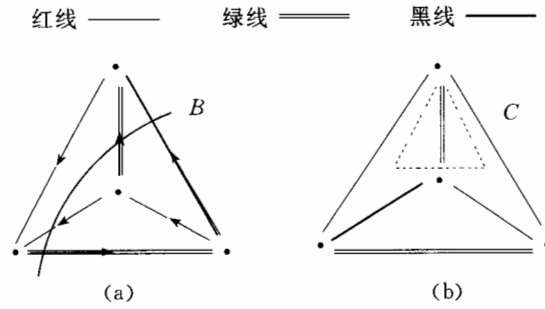
单调极限(monotone limit)　图论的一个重要概念. 指图的一种良序族. 一个图 H，它有如下性质：

1. $H=\bigcup\limits_{\lambda<\sigma}H_\lambda$.

2. 对任何 $\lambda,\mu,\lambda<\mu<\sigma$，均有 $H_\lambda\subset H_\mu$，

称 H 为图的这个良序族 $(H_\lambda)_{\lambda<\sigma}$ 的单调极限.

明蒂定理(Minty theorem)　反映图的内在基本组合结构的一个定理. 若对于有向图 D 的弧以黑、绿、红三色着色，其中一弧 a 指定着黑色，其他弧任意着色，则至少以下两情况之一必发生：或者存在一个包含 a 弧的由黑、红两色弧组成的圈 C，且 C 上的黑色弧方向相同；或者存在一个包含 a 弧由黑、绿两色弧组成的上圈 B，且 B 上黑色弧方向相同. 这就是明蒂定理. 图(a)为一示例，图中存在上圈 B，其上黑色弧同方向. 明蒂定理在最大流最小割理论中



(a)　(b)

有用. 若对于无向图的明蒂定理为：对于无向图 G 的边以黑、绿、红三色任意着色，其中只有一边指定着黑色，则至少以下两情况之一必然发生：或者有一个只有黑、红两色边组成的圈；或者有一个只有黑、绿两色边组成的上圈. 图(b)为一示例，图中存在黑、红两色的圈. 这个定理可推广到拟阵上.

单纯剖分(simplicial subdivision)　一种组合构形. 它是对于平面上三角形所做的一种三角剖分. 若在这个三角剖分中，任何两个三角形的公共部分不是点就是其中一个三角形的边，则称它为单纯剖分. 它是将一个高维单形剖分为低维单形的并的一种特别情形. 在一个单纯剖分上，若将原三角形的三个顶点分别标上 0,1 和 2，然后，将它内部的所有三角形的每个顶点标以 0,1 或 2，使得在原三角形边上的小三角形的每个顶点的标号均与此边两端之一的标号相同，则称这样的标号为正常标号. 在这种标号中，三个顶点的标号互不相同的三角形称为显三角形. 当然，原三角形本身就是一个显三角形. 施佩纳(Sperner,E.)于 1928 年证明了一个引理. 它的二维情形是说：在单纯剖分上的任何正常标号都有奇数个小显三角形. 这就是施佩纳引理. 它对于建立求一个连续映射的不动点的算法起了重要的作用.

施佩纳引理(Sperner's lemma)　见“单纯剖分”.

难以捉摸的(elusive)　图论的一个重要概念. 指描述图的性质的复杂度的一个参数. 设 P 是图的某一给定的性质. 二人博弈，一问一答. 答者心目中有一个具有性质 P 的 n 阶图. 问者只能问某对节点是否是这个图的边. 假设二者都按最优的方式进行，即答者尽量使问者猜不到有性质 P 的这个图，问者尽量获得更多的新信息以便猜中. 记 $C(P)$ 表示这个博弈结束时问的次数，称它为 P 的计算复杂度，或者称为 P 的复杂度. 于是，若

$$C(P)=\binom{n}{2},$$

则答者赢. 这时，称 P 是难以捉摸的. 若对某

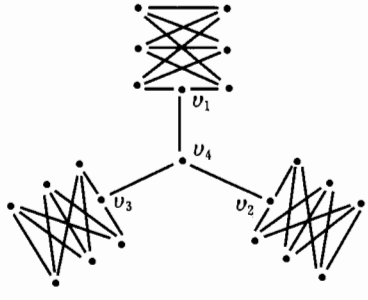
$$k<\binom{n}{2},$$

有 $C(P)\geqslant k$，则称 P 是 k 难以捉摸的. 一个性质 P，

若无任何图有性质 P 或者所有图均有性质 P，则 P 是平凡的，因为这时总有 $C(P)=0$. 若 P 是不可捉摸的，则它必为 k 不可捉摸的；但是，反之则不然. 例如，不超过 t 条边的图（$0\leqslant t\leqslant\binom{n}{2}$）、支撑树、有 t 条边的森（$0\leqslant t\leqslant\binom{n}{2}$）、$n$ 圈、连通图、2 连通图、$n\geqslant 5$ 的平面图等都是难以捉摸的.

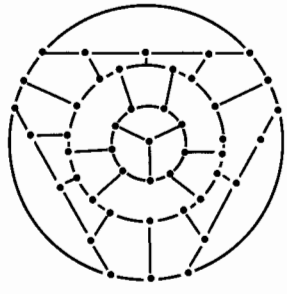
单调性质(monotone)　图的一种特殊的性质. 若由图 G 具有性质 P，即可使 G 的任何子图也具有性质 P，则称 P 是单调性质. 例如：边数不多于 k、简单图、无圈、连通度 $\kappa\leqslant k$、节点最大次 $\Delta\leqslant k$ 等都是最明显的单调性质.

格雷图(Gray graph)　一种特殊的图. 指一个有 54 个顶点（较福克曼图多）的 3 正则的边可迁但非顶点可迁的图. 它是这样构造的：三个 $K_{3,3}$ 图，每个的九条边一一对应，每一对应的三边组中加一个剖分点，如图中 v_1,v_2,v_3，然后另加一点 v_4 与此三点相连. 下面的图只画出其中一组.



格雷图的一部分

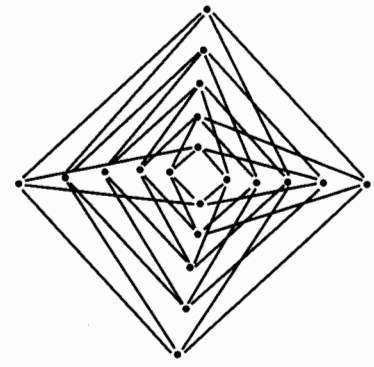
格林伯图(Grinberg graph)　一种特殊的图. 指一种 3 正则，3 连通，非哈密顿平面图（见图）.



格林伯图

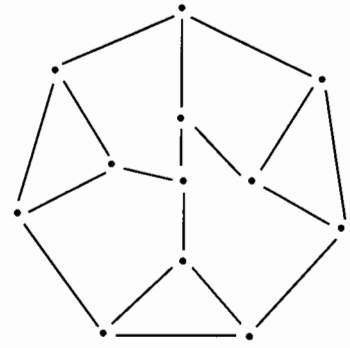
根据格林伯得到的平面图是哈密顿图的必要条件，格林伯图具有非哈密顿性. 在此以前，塔特图是非哈密顿 3 正则 3 连通平面图的惟一例子. 有了格林伯条件后，才发现了许多非哈密顿平面图.

福克曼图(Folkman graph)　一类极图. 具有最少顶点（20 个）的边可迁但非顶点可迁的正则图（见图）.



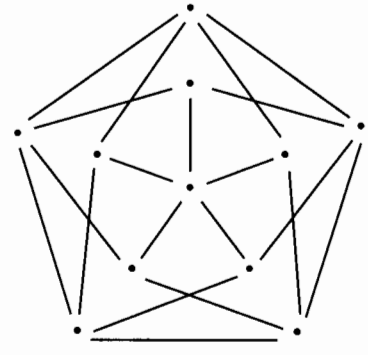
福克曼图

最小3正则幺图(minimum cubic identity graph)　一种特殊的图. 指一个 3 正则图. 它的自同构群为单位元素群（见图）.



最小3正则幺图

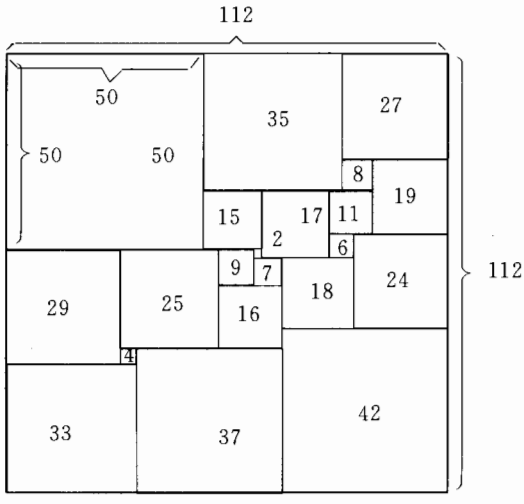
格罗蒋茨图(Grötzsch graph)　一种特殊的图. 一个 4 色临界图的例子（见图）.



格罗蒋茨图

拼方(squaring the square)　一种组合构形. 指将若干个边长互不相等的正方形拼成一个正方形. 换句话说，将一个正方形剖分为若干个小正方形使得它们的边长互不相同. 这样的正方形称为完美正方形. 找完美正方形的过程称为拼方. 鲁金（Лузин, H. H.）曾猜想没有这样的正方形. 第一个完美正方形是德国的斯普拉格（Sprague, R.）于 1939 年发现的. 同时，英国剑桥大学的四名学生布鲁克斯（Brooks, R. L.）、史密斯（Smith, C. A. B.）、斯通

(Stone, A. H.)和塔特(Tutte, W. T.)于 1940 年发现了一种基于电网络的组合理论行之有效的拼方的



阶为21的简单完美正方形

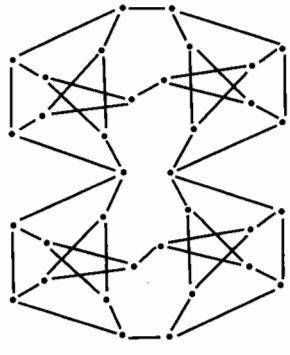
方法. 他们首先研究将长方形剖分为边长互不相等的正方形，这种长方形称为完美矩形. 进而，他们还研究了将等边三角形剖分为面积互不相等的等边三角形，称这种三角形为完美三角形. 他们的方法对图论中的连通度的理论、着色理论、网络流的理论、图的平面性与对偶性、图的曲面嵌入，以及图的对称性和定向等都产生了重要的影响. 一个完美正方形是简单的，是指它不能分割成至少两个完美矩形. 完美正方形的阶是指组成完美正方形的小正方形的数. 杜尤斯蒂因(Duijuestijn, A. J. W.)于 1978 年发现了惟一的一个阶为 21 的简单完美正方形，这是阶最小的简单完美正方形. 图给出了此完美正方形，其中的数字表示所在正方形的边长.

完美正方形(perfect square)　见“拼方”.

完美矩阵(perfect rectangle)　见“拼方”.

完美三角形(perfect triangle)　见“拼方”.

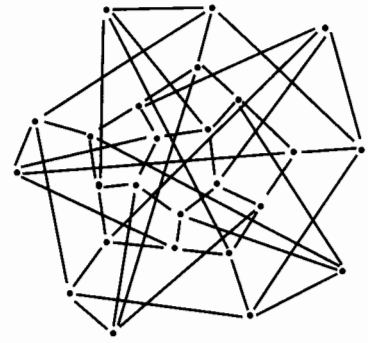
托马森图(Thomassen graph)　一个特殊的



托马森图

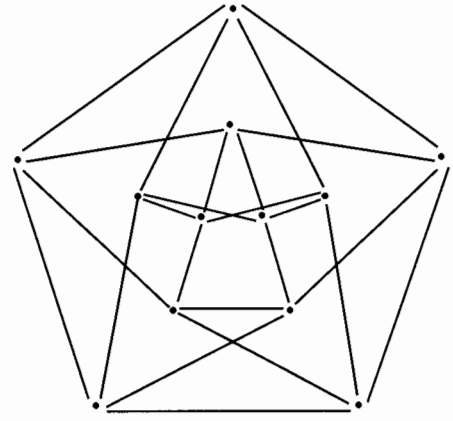
图. 它是庞加莱猜想的一个反例. 此猜想说：不存在亚可迹图；但托马森图(见图)为亚可迹图.

格让保图(Grúnbaum graph)　一类正则图. 格让保猜测：对于所有 $m>1, n>2$，均存在围长不小于 n 的 m 正则的 m 色图. $n=3$ 时，猜测成立. $m=2$ 和 3 时，笼图符合猜测. 除此之外，至今仅知道两个图符合猜测：一个是施瓦他图；另一个就是格让保图(见图).



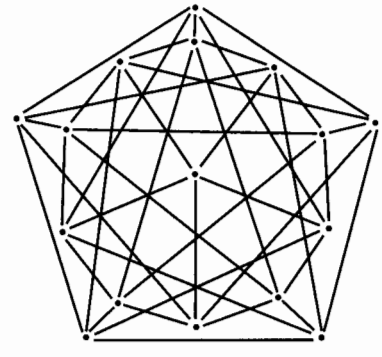
格让保图

施瓦他图(Chvatal graph)　一个特殊的图. 它是符合格让保猜测的一个图(见图).



施瓦他图

格林伍德-格利森图(Greenwood-Gleason graph)　一类特殊的图. 具体地说，在一类特殊着色

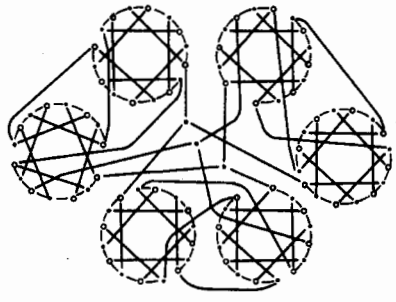


格林伍德-格利森图

中，同色边构成的子图. 由于广义拉姆齐数 $r(3,3,$

3)=17,所以 K_{16} 有不包含单色三角形的三边着色.在这种着色中,同色边子图都同构于格林伍德-格利森图(见图).

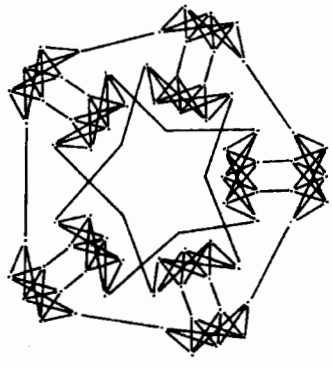
塔特猜想(Tutte's conjecture) 关于图的哈密顿性的一个猜想.自从泰特(Tait,P. G.)作出关于平面图的猜想以来,对于一个图是哈密顿图的条件一直在进行探索,有很多猜想存在反例.霍尔顿图(见图)是塔特猜想"每一个 3 正则 3 连通的偶图都是哈密顿图"的反例.



霍尔顿图

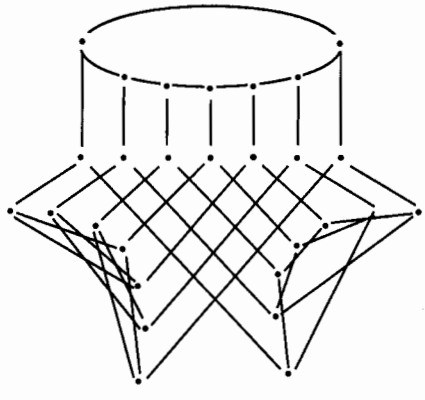
霍尔顿图(holton graph) 见"塔特猜想".

麦雷迪斯图(Meredith graph) 一特殊的图.它是猜想"每一个 4 正则 4 连通图是哈密顿图"的反例(见图).



麦雷迪斯图

考柯西特图(Coxeter graph) 一个特殊的图.



考柯西特图

它是具有高度对称性的非哈密顿图的例子,也是猜想"存在从任长为 3 的路到另外任一路的自同构"的反例(见图).

佩特森图(Petersen graph) 一个非哈密顿图.但是,对于 V 的每个非空真子集 S,均有 $C(G-S)\leqslant|S|$,其中,$C(G-S)$ 表示 $G-S$ 的分支数.事实上,这是一个亚哈密顿图.

撰 稿 刘 莹 崔显峰 曾一平 董峰明
审 阅 王建方 田 丰 冯衍全 刘桂真 张忠辅 洪 渊

组合多面形与最优化

凸多面体(polytope) 一类组合构形.指有限点集的凸包.n 维空间 E^n 中有限多个点 $x^1,x^2,\cdots,x^k$ 形成的凸包,即由 $x^1,x^2,\cdots,x^k$ 的凸组合

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i$$

组成的集合.其中,系数 α_i 满足条件 $\alpha_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,k)$,和

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = 1.$$

E^n 的子集 A 的凸包,为 A 的任意有限个点 $x^1,x^2,\cdots,x^l$ 的凸组合为元素的集合,记为 $\mathrm{conv}\,A$.当 $A=\{x^1,x^2\}$ 时,$\mathrm{conv}\,A$ 为以 x^1,x^2 为端点的线段;当 $A=\{x^1,x^2,x^3\}$ 时,$\mathrm{conv}\,A$ 为以 x^1,x^2 和 x^3 为顶点的三角形.

凸包(convex hull) 见"凸多面体".

凸组合(convex combination) 见"凸多面体".

凸多面锥(polyhedral cone) 一类组合构形.指有限多个齐次线性不等式确定的解集.由于每一个齐次不等式的解集为 E^n 中的半空间,所以从几何上看,凸多面锥为有限多个半空间的交集.

凸多面形(polyhedron) 一类组合构形.指有限多个线性不等式确定的解集.当此解集为有界时,凸多面形就是凸多面体;反之亦然.这就是外尔-闵科夫斯基定理.当凸多面形为满足线性不等式组

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i\quad(i=1,2,\cdots,m)$$

的解集时,称为凸多面形的法式描述.当凸多面形为满足线性约束

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$$
$$(i=1,2,\cdots,k,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0),$$

的解集时,称为凸多面形的典式描述.这是线性规划通常采用的描述形式.在这里,凸多面形为两部分的交集:其一为 k 个线性独立的超平面之交集;其二为 n 个半空间之交集.更一般地,当凸多面形为满足线性约束

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$，$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i$ $(i=k+1,\cdots,m)$之解集时，称为凸多面形的刚性约束. 对于凸多面形的典式描述，把决定线性方程组的系数矩阵 A 称为凸多面形的约束矩阵. 以 A 的列为向量，其 m 个线性独立向量，称为凸多面形的基. 由基所确定的多面形的点，被称为极点. 若由基求得线性方程组的解满足第二部分约束：$x_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则称此基为凸多面形的可行基. 这样的解称为基础可行解. 可行基的讨论构成线性规划及其单纯形方法的基础.

外尔-闵科夫斯基定理(Weyl-Minkowski theorem) 见“凸多面形”.

凸多面形的法式描述(normal specification of polyhedron) 见“凸多面形”.

凸多面形的典式描述(canonical specification of polyhedron) 见“凸多面形”.

凸多面形的刚性约束(rigid constraint for polyhedron) 见“凸多面形”.

凸多面形的约束矩阵(constraint matrix of polyhedron) 见“凸多面形”.

凸多面形的基(basis of polyhedron) 见“凸多面形”.

凸多面形的可行基(feasible basis of polyhedron) 见“凸多面形”.

极点(extremal point) 见“凸多面形”.

凸多面形分解定理(polyhedral decomposition theorem) 亦称法尔卡斯-闵科夫斯基-外尔定理. 反映线性不等式组解集结构的一个命题. 由非齐次联立不等式组之解集构成的凸多面形可做如下分解：$P=M+K$(“+”的意义，参见“多面体之和”)，其中 M 为凸多面体，K 为由齐次联立不等式组之解集构成的凸多面锥. 此定理把凸多面形分解为相对简单的凸多面体和凸多面锥，从而给多面形的处理带来方便. 例如，线性规划理论的基本定理是得益于此分解定理.

法尔卡斯-闵科夫斯基-外尔定理(Farkas-Minkowski-Weyl theorem) 见“凸多面形分解定理”.

凸多面体的支撑超平面(supporting hyperplane of polytope) 满足一定条件的点集. 即满足如下条件的超平面 H：凸多面体 P 与 H 的交集非空，且 P 要么包含在由 H 决定的正半闭空间 H^+ 之中，要么包含在由 H 决定的负半闭空间 H^- 之中.

凸多面体的面(face of polytope) 一类组合构形. 指凸多面体与其支撑超平面的交集. 记为 F. 若 F 的维数 $\dim F=d$，则称 F 为多面体的 d 维面. 称多面体 P 的 0 维面为 P 的顶点；称 1 维面为 P 的棱. 以棱连结的两个顶点，称为相邻顶点.

凸多面体的分离超平面(separation hyperplane of polytope) 满足一定条件的点集. 即满足如下条件的超平面 H：对于给定的凸多面体 P 和点集 W，它们分别包含在 H^+ 与 H^- 中，其中，H^+ 为 H 决定的正闭半空间，H^- 为 H 决定的负闭半空间.

退化多面体(degenerate polytope) 一类特殊的多面体. 即这样的多面体，有基础可行解且至少包含一个属于基的分量为零，或者说，由这个基础确定的极点有一个坐标值为 0.

仿射包(affine hull) 由一个点集导出的一类点集. 对于 E^n 中的子集 A，A 的仿射包，记为 Aff$A$，为 A 的任意有限多个元素 $x^1,x^2,\cdots,x^k$ 的仿射组合

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i$$

构成的集合. 一个线性组合

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i$$

称为仿射组合，若系数 α_i $(i=1,2,\cdots,k)$满足

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1.$$

当 $A=\{x^1,x^2\}$时，Aff$A$ 为通过 x^1,x^2 的直线；当 $A=\{x^1,x^2,x^3\}$时，Aff$A$ 为通过 x^1,x^2,x^3 的平面.

仿射组合(affine combination) 见“仿射包”.

多面体的 f 向量(f-vector of polytope) 一类组合不变量. 将多面体 P 的所有面按维数分类，记所得的向量 $f(P)=(f_0,f_1,f_2,\cdots,f_{d-1})$，其中，$f_i$ 为 i 维面的个数，d 为 P 的维数. 对于 3 维多面体，f 向量的分量之间有著名的欧拉公式

$$f_0-f_1+f_2=2.$$

一般地，对 d 维多面体 P，f 向量的分量满足关系：

$$\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i f_i=1+(-1)^{d-1},$$

则称为欧拉-庞加莱公式. 对于多面体 P 和 P'，若其 f 向量相等：

$$\begin{aligned}f(P)&=(f_0,f_1,\cdots,f_{d-1})\\&=(f'_0,f'_1,\cdots,f'_{d-1})=f(P'),\end{aligned}$$

则称 P 和 P' 为 f 等价多面体. 对 f 等价类的研究为探知多面体的一条途径.

f 等价多面体(f-equivalent polytope) 见“多面体的 f 向量”.

欧拉-庞加莱公式(Euler-Poincaré formula) 见“多面体的 f 向量”.

单纯多面体(simplicial polytope) 由一类多面体派生的另一类多面体. 除多面体 P 自身及空集外，P 的所有面均为单纯形的多面体.

单纯形(simplex) 一类组合构形. 指仿射独立点集的凸包. 点集$\{x^1,x^2,\cdots,x^k\}$称为仿射独立，若其中任何一点不能表示为其余点的仿射组合. $\{x^1,$

$x^2\}$,$\{x^1,x^2,x^3\}$和$\{x^1,x^2,x^3,x^4\}$构成的单纯形,分别是以x^1,x^2为端点的线段,以x^1,x^2,x^3为顶点的三角形,以x^1,x^2,x^3,x^4为顶点的四面体,其维数分别为一维、二维和三维.

仿射独立(affine independent) 见"单纯形".

r单纯多面体(r-simplicial polytope) 一类特殊的单纯多面体.所有r维面为单纯形的多面体,这里$1\leqslant r\leqslant d-1$,$d$为多面体的维数.

简单多面体(simple polytope) 一类特殊的多面体.指每个顶点均位于d个$(d-1)$维面上的d维多面体.这类多面体与单纯多面体在一定意义上互为对偶关系.

s简单多面体(s-simple polytope) 一类简单多面体.指每一个$(d-1-s)$维面均包含在$(s+1)$个$(d-1)$维面之中的d维多面体.

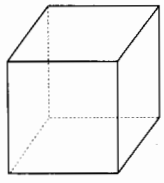
(r,s)型多面体((r,s)-type polytope) 一类多面体.指同时为r单纯多面体,又为s简单多面体的多面体.以此类型多面体为中介,在单纯多面体与简单多面体之间有如下对偶关系:一个d维单纯多面体是$(d-1,1)$型多面体;而一个d维简单多面体则是$(1,d-1)$型多面体.

循环多面体(cyclic polytope) 一类特殊单纯多面体.位于曲线$x(\tau)=(x_1(\tau),x_2(\tau),\cdots,x_d(\tau))$上的$n$个不同点生成的凸包,记为$c(d,n)$,其中,$x_i(\tau)=\tau^i$ $(i=1,2,\cdots,d)$.

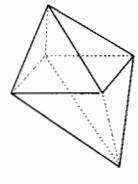
k邻多面体(k-neighbour polytope) 一类多面体.指其任意k个顶点均为某个面的顶点集的多面体.例如,d维单纯形是d邻多面体;任何一个多面体均为1邻多面体.在循环多面体和k邻多面体之间,有如下关系:循环多面体$c(d,n)$为$[d/2]$邻多面体.

对偶多面体(dual palytope) 由一个多面体派生的另一类多面体.由原多面体P按双射φ对应的多面体P^0,而建立在P和P^0所有面之间的双射φ满足如下条件:$F_1\subset F_2$,当且仅当$\varphi(F_1)\supset\varphi(F_2)$.例如:立方体$P$和正八面体$P^0$互为对偶(见下图);两个三维多面体互为对偶.在维数关系上,对于P的任一面F,有

$$\dim P=\dim P^0=\dim F+\dim\varphi(F)+1.$$



立方体



正八面体

多面体的运算(operations of polytopes) 多面体间的变换.即由两个多面体对应出一个新多面体的映射.

多面体之和(sum of polytopes) 一类多面体运算.多面体P_1和P_2之和,记为

$$P_1+P_2=\{(x^1+x^2)\in E^n\mid x^1\in P_1,x^2\in P^2\}.$$

多面形的分解定理使用的正是此类运算.

多面体之积(product of polytopes) 一类多面体运算.多面体P_1和P_2之积记为

$$P_1\otimes P_2=\{(x^1,x^2)\mid x^1\in P_1,x^2\in P_2\}.$$

多面体之极(polar of polytopes) 一类多面体运算.多面体P的极记为$P^*=\{y\in E^n\mid xy\leqslant 1,x\in P\}$.当$P$为单点元素$a$时,$P^*$为$E^n$中的半空间:$P^*=\{y\in E^n\mid ay\leqslant 1\}$;当$P$为单点元素$O$时,$P^*=E^n$;当$P$为半空间时,$P^*$为线段或射线.

多面体投影像(projective image of polytope)一类多面体运算.从E^d到E^k的投影映射

$$\tau(x)=\frac{\alpha(x)}{a^T+\beta},\quad x\in E^d,$$

其中α为从E^d到E^k的仿射映像,a是一个d维向量,β是一个实数,T表示向量的转量.对于一个集合$W\subset E^d$,若$W\cap H=\varnothing$,其中

$$H=\{x\in E^d\mid ax+\beta\neq 0\},$$

则称τ对W为可行的.若τ是一个投影映射并且对于多面体$P\subset E^d$为可行的,则称$\tau(P)$为多面体P的投影像.

金字塔(pyramid) 一类组合构形.指多面体Q的凸包,并称Q为金字塔的基.金字塔中那些不属于Q的仿射包的点,称为金字塔的顶点.

单态序列(unimodal sequence) 满足一定性质的序列.这样的序列$a_1,a_2,\cdots,a_m$,它不存在下标$1\leqslant i<j<k<l\leqslant m$使之有$a_i<a_j>a_k<a_l$.对于多面体$P$而言,取$a_i$为$i$维面的个数.曾有人猜想此序列是单态的,但后来有人证明它不是单态序列.

线性规划(linear programming) 一类带约束的极值问题.在线性不等式组或线性方程组约束下,寻求线性目标函数达到极大值或极小值的最优化问题称为线性规划.它的一般形式为

$$\max Z(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

满足

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0.\end{cases}$$

对应的矩阵形式为

$$\max Z(x)=c^Tx,\text{满足 }Ax=b,x\geqslant 0,$$

其中,$A=(a_{ij})$为$m\times n$矩阵,$x^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$b^T=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$,$c^T=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$.取A的m列

(不妨设为前 m 列)构成 m 阶方阵,记为 B,若其行列式 $|B|\neq 0$,则称 B 为线性规划的基.利用分块矩阵,记 $A=(B,D)$,其中 D 为 $m\times(n-m)$ 矩阵.此时,线性约束方程组改写为 $Bx_B+Dx_D=b$.若 $x_D=0$,则有解 $x_B=B^{-1}b$.若 $B^{-1}b\geqslant 0$,则称 $x_B=B^{-1}b, x_D=0$ 为线性规划的基础可行解.这类解在求解线性规划中起着关键性的作用.因为线性规划的基本定理指出:若线性规划有最优解,则最优解必可在基础可行解上实现.在基础可行解上实现的线性规划最优解,称为基础最优解.线性规划起源于 20 世纪 30 年代,第二次世界大战之后发展极为迅速.求解线性规划的单纯形方法与计算机具有天合之美,二者的结合使线性规划的应用非常广泛.对线性规划的理论,联系着三位科学先驱,他们是坎托罗维奇(Канторович, Л. В.)、冯·诺伊曼(von Neumann, J.)和丹齐克(Dantzig, G. B.).自 20 世纪 60 年代之后,线性规划和组合优化、图论以及计算机科学的结合和相互渗透,构成了丰富多彩、激动人心的发展图景.

基础可行解(basic feasible solution) 见"线性规划".

基础最优解(basic optimum solution) 见"线性规划".

基本定理(basic theorem) 见"线性规划".

单纯形方法(simplex method) 求解线性规划的一种算法.它的每次迭代从一个基础可行解到另一个基础可行解,并使目标值不断改进,最终达到基础最优解.设线性规划问题的矩阵形式为

$$\max Z=c^Tx,\quad \text{满足}\begin{cases}Ax\leqslant b,\\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

单纯形方法的步骤如下:

1. 在线性不等式组中加入松弛变量 y,使得 $Ax+y=b$,这里 y 为 m 维列向量,同时列出初始表

x	y	1
A	I	b
$-c^T$	0	Z

此时,若 $b\geqslant 0$,则 $x=0, y=b$ 为线性规划问题的初始可行解.相应的系数阵 $\tilde{A}=(A,I)$, $\tilde{c}^T=(-c^T,0)$, $\tilde{b}=b$.

2. (最优判定)看是否有 j 使得 $\tilde{c}_j<0$ 成立?若有,则转至第 3 步,否则,停止迭代,当前解即为问题的最优解.

3. 由 $\tilde{c}_s=\min\{\tilde{c}_j\mid\tilde{c}_j<0\}$ 决定枢轴元素列 s.

4. 在 s 列中判定是否有 i 使得 $\tilde{a}_{is}>0$ 成立?若有,则转至下一步,否则停止迭代,此时问题的可行解无界.

5. 由

$$\frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}}=\min\left\{\frac{\tilde{b}_i}{\tilde{a}_{is}}\mid\tilde{a}_{is}>0\right\}$$

决定枢轴元素行 r 和枢轴元素 $\tilde{a}_{rs}$.

6. (换基迭代)以元素 $\tilde{a}_{rs}$ 为枢轴进行高斯消去法运算产生新表格,即:

1) 枢轴元素行 r

$$\tilde{a}^*_{rj}=\frac{a_{rj}}{a_{rs}}(j=1,2,\cdots,n+m),\quad \tilde{b}^*_r=\frac{\tilde{b}_r}{\tilde{a}_{rs}}.$$

2) 枢轴元素列 s

$$\tilde{a}^*_{is}=\begin{cases}1 & (i=r),\\ 0 & (i\neq r),\end{cases}\qquad \tilde{c}^*_s=0.$$

3) 其他行和列

$$\tilde{a}^*_{ij}=\tilde{a}_{ij}-\frac{\tilde{a}_{is}\tilde{a}_{rj}}{\tilde{a}_{rs}},\quad \tilde{c}^*_j=\tilde{c}_j-\frac{\tilde{c}_s\tilde{a}_{rj}}{\tilde{a}_{rs}},$$

$$\tilde{b}^*_i=\tilde{b}_i-\frac{\tilde{b}_i\tilde{a}_{is}}{\tilde{a}_{rs}},\quad Z^*=Z-\frac{\tilde{b}_r\tilde{c}_s}{\tilde{a}_{rs}},$$

转至第 2 步.

单纯形方法的单纯形含义,源于历史上丹齐克(Dantzig, G. B.)在创立此方法时,所处理的问题为 $\max Z=c^Tx$,满足

$$\left\{Ax=b,\sum_{i=1}^n x_i=1,x\geqslant 0\right\}.$$

它关联了单纯形

$$\left\{x\,\middle|\,\sum_{i=1}^n x_i=1,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\right\}.$$

对偶规划(dual programming) 一类线性规划问题.指由原线性规划问题按如下对称规律构成的新线性规划问题:若原问题(P)为 $\max Z=c^Tx$,满足 $\{Ax\leqslant b,x\geqslant 0\}$,则对称的新问题(D)为 $\min\pi=y^Tb$,满足 $\{y^TA\geqslant c,y\geqslant 0\}$,这里 y 为 m 维列向量.新问题(D)称为原线性规划的对偶规划.在原线性规划问题与对偶线性规划问题之间有着整齐的对称性,如 max 对应 min,目标系数对应约束右边常数项,"$\leqslant$"型线性约束对应"$\geqslant$"型线性约束.而且问题(D)的对偶问题即为原问题(P).在(P)的可行解 x 和(D)的可行解 y 之间的关系,由下述对偶定理表述:若 x,y 分别为(P)和(D)的可行解,则:

1. 各自对应的目标值有如下关系:$c^Tx\leqslant y^Tb$,即其中一个为另一个的界.

2. 对于任意 $1\leqslant i\leqslant m$ 和 $1\leqslant j\leqslant n$,有 $y_i.(A_i.x-b_i)=0$, $(c_j-yA._j)x_j=0$,其中,$A_i.$ 为矩阵 A 的第 i 行,$A._j$ 为矩阵 A 的第 j 列.

定理 2 中表述的关系称为 x 和 y 满足的松弛互补性条件.对偶定理的重要性在于它给出了决定线性规划问题的最优解的一个优越条件.对于(P)和

(D)的可行解 x 和 y 而言，若满足 $c^Tx=y^Tb$，则 x 和 y 同时分别为原问题(P)与对偶问题(D)的最优解. 对于一般最优化问题而言，往往不具备如此优越的判定条件.

对偶定理(duality theorem) 见“对偶规划”.

松弛互补性条件(complementary slackness condition) 见“对偶规划”.

对偶单纯形方法(dual simplex method) 原单纯形方法的一种对称变形. 对于原单纯形方法而言，在迭代过程中始终保持相应的解对原问题是可行的，并不断改善对偶问题解(即判别系数)的可行性，直至可行. 而对偶单纯形方法则是始终保持对偶问题的解的可行性，并不断改善原问题解的可行性，直至满足原问题. 若原问题(P)为 $\min Z = c^Tx$，满足 $Ax = b, x \geqslant 0$，其对偶问题(D)为 $\max\pi = y^Tb$，满足 $y^TA \leqslant c^T$. 则对偶单纯形方法为：

1. 从矩阵 A 适当地选取一个基矩阵 B，使 $y^T=c_B^TB^{-1}$ 满足问题(D)，即

$$c_B^TB^{-1}A \leqslant c^T,$$

由此 B 构造相应的单纯形方法的单纯形表，表中系数矩阵 $\tilde{A}=B^{-1}A$，常数项 $\tilde{b}=B^{-1}b$，判别系数

$$\tilde{\lambda}^T=c_B^TB^{-1}A-c^T\leqslant 0.$$

2. (最优判定) $\tilde{b}$ 中是否存在小于零的分量？若存在，转至第 3 步，否则停止迭代，当前解 $x_B=\tilde{b}$，其余分量 $x_j=0$ 为问题(P)的最优解.

3. 由 $\tilde{b}_r=\min\{\tilde{b}_i|\tilde{b}_i<0\}$ 决定枢轴元素行 r.

4. 在第 r 行中判定是否存在 $\widetilde{a_{rj}}<0$？若存在，则转至第 5 步，否则停止迭代，此时问题的可行解无界.

5. 由

$$\frac{\tilde{\lambda}_s}{\widetilde{a}_{rs}}=\min\left\{\frac{\tilde{\lambda}_j}{\widetilde{a}_{rj}}\,|\,\tilde{a}_{rj}<0\right\}$$

决定枢轴元素列 s 以及枢轴元素 $\widetilde{a}_{rs}$.

6. (换基迭代) 以 $\tilde{a}_{rs}$ 为枢轴元素做与单纯形方法相同的换基迭代，获得新单纯形表，转至第 2 步.

原始-对偶方法(primal-dual method) 求解线性规划的一种算法. 指求解线性规划的一类特殊对偶型方法. 其特殊性在于，它是以松弛互补性条件为基础去构造一个由原问题产生的限定问题，并通过求解此限定问题去改善解对原问题的可行性. 这一过程含有单纯形方法与对偶单纯形方法的思想，所以有此名. 设原问题(P)为 $\min Z=c^Tx$，满足 $\{Ax=b, x\geqslant 0\}$；其对偶问题(D)为 $\max\pi=y^Tb$，满足 $\{y^TA\leqslant c^T\}$. 已知 y 是(D)的一个可行解，即对于 $1\leqslant j\leqslant n$，均有 $y^TA_j\leqslant c_j$，A_j 为 A 的第 j 列. 其方法为：

1. 由已知 y，记 $Q=\{j|y^TA_{\cdot j}=c_j\}$，求解限定问题(RP)：

$$\min Z_R=\sum_{i=1}^{m}x_i^a,$$

满足

$$\sum_{j\in Q}a_{ij}x_j+x_i^a=b_i$$

$(i=1,2,\cdots,m)$ 及 $x_j\geqslant 0$ $(j\in Q)$，$x_j=0$ $(j\notin Q)$，$x_i^a\geqslant 0(x_i^a, i=1,2,\cdots,m$ 为人造变量).

2. (最优判定) 是否 $\min Z_R=0$？若是，停止迭代，则当前解为最优解，否则，记 $\bar{\pi}$ 为限定问题(RP)的对偶问题的最优解.

3. 检验是否存在 $\bar{\pi}^TA_{\cdot j}>0$？若不存在，则停止迭代，原问题不可行.

4. (调整指标集 Q 及对偶解 y)取

$$\theta=\frac{-(y^TA_{\cdot k}-c_k)}{\bar{\pi}^TA_{\cdot k}}=\min\left\{\frac{-(y^TA_{\cdot j}-c_j)}{\bar{\pi}^TA_{\cdot j}}\,|\,\bar{\pi}A_{\cdot j}>0\right\}$$

并以 $\tilde{y}=y+\theta\bar{\pi}$ 作为新的对偶解，转至第 1 步.

对于某些组合优化问题，如最短路问题等，相应的限定问题(RP)具有特定的简捷和直观的形式，给求解(RP)带来方便. 因此，原始-对偶方法常常加以应用.

卡马卡方法(Karmarkar method) 求解线性规划的一种算法. 哈奇扬方法之后又一个线性规划的多项式算法. 它的特点是使迭代过程的各点严格远离约束多面体的各个界面，为此，每次迭代都须借助于投影变换，把问题归结为一类典型问题，有利于目标值改善. 此方法由美籍印度学者卡马卡(Karmarkar, N.)于 1984 年给出，所以得此名. 此方法考虑如下标准形式的线性规划问题

$$\min Z=c^Tx=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i,$$

满足 $Ax=0$ 及 $e^Tx=1$ 或者

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=1.$$

这里 e 为分量全为 1 的 n 维列向量，并且已知：

1. 在上述约束条件下 $\min Z=0$.

2. $Ae=0$.

3. 对于给定精度 2^{-q}，当可行解 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\leqslant 2^{-q},\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i$$

时，即可停止迭代，并认为 x 即为所求的解.

卡马卡算法步骤如下：

1. (初始) 设 $k=0$，

$$x^0=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n}\right)^T$$

是分量均为 $1/n$ 的 n 维列向量.

2.(判定)　若

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^k \leqslant \frac{1}{n} 2^{-q} \sum_{i=1}^{n} c_i,$$

则停止迭代,最优解为 $x^k=(x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k)^T$.

3.以 x^k 的分量为对角元素,做对角阵

$$D=\operatorname{diag}\{x_1^k,x_2^k,\cdots,x_n^k\},$$

设

$$B=\begin{pmatrix} A & D \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & D \\ & e^T \end{pmatrix},$$

这里 e 为分量全为 1 的 $2n$ 维列向量.

4.(投影变换)　对 $j=1,2,\cdots,n$,设 $\bar{c}_j=x_j^k c_j$,记 $\bar{c}=(\bar{c}_1,\bar{c}_2,\cdots,\bar{c}_n)$,有 $\bar{c}=Dc$,

$$c_p=[I-B^T(BB^T)^{-1}B]\bar{c}.$$

5.设 $\tilde{c}=\dfrac{1}{\|c_P\|}c_P$.

6.设 $b=\dfrac{1}{n}e-\dfrac{\alpha}{\sqrt{n(n-1)}}\tilde{c}$,

其中 α 为满足

$$0<\alpha<\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

的常数,通常取 $\dfrac{1}{5}\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{1}{3}$.

7.令 $x^{k+1}=\dfrac{Db}{e^TDb}$,转至第 2 步.

哈奇扬方法(Khachyian method)　亦称椭球法.求解线性规划的一种算法.指一种迭代路径迥然异于单纯形方法的求解线性规划的多项式算法.它具有如下的特点:

1.它是通过包含线性规划约束条件构成的多面体的椭球搜索最优解,不同于单纯形方法是从该多面体的一个顶点迭代到相邻的一个顶点.

2.迭代过程始终保持一个椭球,每迭代一次都得到一个具有相同性质的更小的椭球,因此,人们常把这个方法称为求解线性规划的椭球方法.

3.从算法复杂性的观点看,它是多项式算法,而单纯形方法并不是多项式算法.

此方法由苏联学者哈奇扬(Хачиян, Л. Г.)于 1979 年给出,所以得此名.此方法为考虑如下特征的问题:求 x 使之满足 $Ax<b$,其中 A 为 $m\times n$ 矩阵.其方法步骤为:

1.(初始准备)　$j=0$ 记录迭代次数,t_j 为第 j 次迭代的解,初始解 $t_0=0$ 为分量全为 0 的 n 维列向量,取 $B_0=n^2 2^{2L}\cdot I$ 为 n 阶对角矩阵,其中 I 为 n 阶单位阵,$L=mn+[\log_2|P|]$ 为问题的规模,P 为矩阵 A 及向量 b 中所有非零分量的乘积,在上述数据中,可逆方阵 B 是构造椭球的关键成分,初始椭球

$$E_0=\{x\mid(x-t_0)^TB_0^{-1}(x-t_0)\leqslant 1\}.$$

2.(检验)　若 t_j 满足 $At_j<b$,则停止迭代,当前解即为所求.若 $j>K=16n(n+1)L$,则停止迭代,说明问题无解.

3.(迭代)　任选一个不满足 $At_j<b$ 的不等式,例如 $A_i.t_j\geqslant b_i$,并记 $A_i.=a$,设

$$t_{j+1}=t_j-\frac{1}{n+1}\frac{B_ja}{\sqrt{a^TB_ja}};$$

$$B_{j+1}=\frac{n^2}{n^2-1}\left[B_j-\frac{2}{n+1}\frac{(B_ja)(B_ja)^T}{a^TB_ja}\right],$$

转至第 2 步.

B_ja 为 n 维列向量,$(B_ja)\times(B_ja)^T$ 为 $n\times n$ 矩阵.虽然,哈奇扬方法是求解线性规划的多项式算法,但是其实际迭代上并不产生真实的优越性.这个方法在理论上的影响对线性规划是突破性的.其后产生了一个新方向,即考虑以约束区域的内点为途径,去搜索问题的解.这个方向把线性规划与非线性规划以及组合规划能够更紧密地结合起来.

椭球法(ellipsoid method)　即"哈奇扬方法".

整数线性规划(integer linear programming)　变量取整数值的线性规划.它的一般形式为 $\min Z=c^Tx$,满足 $Ax=b,x\geqslant 0$,且取整数值.在一般线性规划的约束条件之上,增加要求变量为整数值之后,使问题发生了深刻的变化,对理论和应用均产生影响,从而,形成了整数线性规划特有分支.在 n 维欧氏空间 E^n 中的点 x,若其所有坐标均为整数,则称此点为整点.而 E^n 中所有的整点记为 Z^n,是一个格,称此格为整格.于是,整数线性规划就是在整格上的线性规划.

整点(integral point)　见"整数线性规划".

整格(integral lattice)　见"整数线性规划".

割平面方法(cutting plane method)　求解整数线性规划的一种方法.它的特点是:

1.首先不考虑问题的整值要求,并用有利的方法,如单纯形方法求解此线性规划问题.

2.当求得的该线性规划的最优解不满足整值要求时,按一定的程序生成一个新的线性不等式,称之为割平面.

3.把此割平面添加到该线性规划的约束条件之中,它能确保不会影响该整数线性规划的最优解.

割平面方法的每一次迭代就是生成一个割平面,并解一个新的线性规划问题.设问题为 $\max Z=c^Tx$,满足 $Ax=b,x\geqslant 0$ 且为整数.其方法步骤如下:

1.用单纯形方法求解线性规划问题 $\max Z=c^Tx$,满足 $Ax=b,x\geqslant 0$,设其最优基为 B,对应的单纯形表为 $T(B)$,最优解为 x^*,若 x^* 为整点,停止迭代,x^* 为整数线性规划的最优解,否则转入下一步.

2.选取非整数的基变量 x_i^*,按如下方法生成割

平面：从单纯形表 $T(B)$ 上，x_i^* 所在的行有关系

$$x_i^* = \tilde{b}_i - \sum_{k\in K} \tilde{b}_{ik}x_k,$$

这里 $K=\{k\mid x_k$ 为非基变量$\}$，记 f_i 为 $\tilde{b}b_i$ 的分数部分，f_{ik} 为 $\tilde{b}_{ik}$ 的分数部分，s_i 为新引入的松弛变量，对应有割平面

$$-\sum_{k\in K} f_{ik}x_k + s_i = -f_i.$$

3. 把割平面添加入单纯形表 $T(B)$ 最后一行，同时对应 s_i 增加了一个单位列，转至第 1 步.

割平面方法由柯莫瑞(Gomory, R.)于 1958 年提出. 近年来用于求解难度大的组合优化问题，如旅行售货员问题等，取得成功.

多面形的整点凸包(convex hull of integral points of polyhedron)　一种组合构形. 指多面形 P 内包含的所有整点 $Z(P)$ 生成的凸包

$$\mathrm{conv}[Z(P)] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i Z_i \mid \alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \right.$$
$$\left. Z_i \in Z(P), 1 \leqslant i \leqslant k, k \geqslant 1. \right\}$$

$\mathrm{conv}[Z(P)]$ 的顶点均为整点，称此凸包为整多面形. 整多面形的优越性在于其对应的线性规划问题的最优解就可以满足整数值的要求. 因此，在考虑组合优化问题关联的线性规划问题时，鉴别其约束条件构成的多面形是否是整多面形就十分重要.

整多面形(integral polyhedron)　见“多面形的整点凸包”.

分支定界法(branch-and-bound method)　求解组合问题的一种方法. 指求解组合问题的一种精巧的隐遍数策略. 这种方法的策略性体现在：

1. 把问题的全部可行解划分为若干部分，这种划分是分层次进行的，而且划分的实施办法依问题而变化，这正是所谓的分支的含义，这种分层次的划分，构成倒置树状结构，每一分叉点由一节点表示，而处于顶部只一个节点，即问题的全部可行解.

2. 定界的含义，是在某一节点上设计的一种算法，以便可以计算出在此节点中的任一可行解的上界或下界，对于求极小值的优化问题就是求下界，否则求上界.

3. 探明的含义，在当前所处理的节点上要判断它是否探过，若已探过，则对该节点就不必再做分支处理，否则把当前处理的节点转至该节点作分支后的一个派生节点，探明过程采用深探原则，探明的类型有定界探明，把该节点上界或下界与已有的一个当前最好可行解对应目标值比较来作出探明判断，这是分支定界方法采用的主要探明方法，此外还有不存在可行解这样类型的探明，及有可行解达到该节点对应的定界时的探明.

4. 分支定界方法的成效表现为节点的探明速度，因为每探明一个节点，就免除处理它的派生节点，而探明的速度又依赖于给出定界的算法的设计，因此，定界策略的把握乃是此方法的关键，分支策略则是它的基础.

5. 当前最好的可行解随着实施过程而不断更新，即以出现的更好的解去替代当前最好可行解，取代之后，同时更换当前最好可行解对应的目标函数值，当所有节点均已探明时，停止迭代，当前最好可行解为问题的最优解.

全单位模性(total unital modularity)　组合优化问题的一种性质. 指优化问题的约束 $Ax=b, x\geqslant 0$ 具有如下性质：A 为整数矩阵且其任何一个非奇异子取值为 1 或 -1. 对于有全单位模性的优化问题，当 b 也为整数值向量时，就能确保其基础最优解为整数解. 例如，最大流问题、带权的二部图的匹配问题等组合优化问题，均具有全单位模性.

全对偶整数性(total dual integrality)　组合优化问题的一种性质. 指线性规划 $\max Z=c^Tx$，满足 $Ax=b, x\geqslant 0$ 具有如下性质：矩阵 A 及向量 b 均取整数值，而且对于任意的整数向量 c，此问题的对偶问题均具有整值最优解. 由此性质可知，约束条件 $Ax=b, x\geqslant 0$ 决定的多面形的所有顶点均为整点. 因此，对组合优化问题而言，全对偶整数性是一个重要的性质，同时它的要求是相当强的. 例如，问题是在二部图上建立匹配，此二部图上每条边都带整数权，目标是求匹配上对应的权和达到极大. 这个问题具有全对偶整数性.

交锁多面形(blocking polyhedra)　一类特殊多面形. 它满足 $Ax\geqslant b$，其中 b 的所有分量均严格大于 0，矩阵 A 的元素均非负，x 的分量均非负. 因此，它可等价地表示为 $B=\{x\in E_+^n \mid Ax\geqslant e\}$，其中 e 为分量均为 1 的向量. 从而 B 中任一向量 B_j 与 A 的任一行向量 A_i 均满足关系 $A_iB_j\geqslant 1$. 这关系刻画了 A_i 和 B_j 的非正交关系.

反交锁多面形(anti-blocking polyhedra)　一类特殊的多面形. 类似于线性规划的对偶约束，设 $B^{\Delta}=\{y\in E_+^n \mid y^TA\leqslant e\}$. 此多面形称为反交锁多面形. 在交锁多面形与反交锁多面形之间具有良好的对偶性质，而且具有全对偶整数性. 若干组合优化问题，如匹配问题、网络上最大流问题等，可归结为建立在交锁多面形上的优化问题.

多面体的图(graph of polytope)　一类重要的图. 它是由多面体派生的一类图. 此图的节点集为该多面体的顶点集，图的边集为该多面体的棱集. 一个图称为 d 多面形图，当且仅当此图与某个多面体的图同构. 从而把多面体的研究归结为图的研究，并对应地把多面体的性质表述为图的性质，如连通性、平面性等，构成了图论中一个重要分支. 对于一个 d

多面形的图，将其节点的度构成的序列，称为多面形序列. 往往需考虑具有一特定多面形序列的与 d 多面体存在性关联的充分必要条件. 对于 d 维欧氏空间 E^d 中的 d 多面体 M，k 为满足 $0\leqslant k\leqslant d$ 的整数. 由 M 的所有其维数不超过 k 的面构成的集合为一复形，将此复形称为多面体的 k 构架. 多面体的 1 构架是多面体的图. 多面体的 $(d-1)$ 构架称为多面体的面复形. 对于两个多面体 M_1 和 M_2，若它们的面复形 $F(M_1)$ 和 $F(M_2)$ 同构，则称 M_1 和 M_2 为组合等价. 借助于这个等价关系可以把多面体做组合分类. 进而，把有限集 V 的满足如下条件的子集族 ψ，称为抽象多面体或抽象复形：

1. V 中所有单元素构成的子集均在 ψ 中，并称为抽象多面体的顶点.

2. 若 F_1 和 F_2 均在 ψ 之中，则其交集 $F_1\cap F_2$ 亦在 ψ 中.

若将多面体 M 的每一个极大面都标以数字，例如，$1,2,\cdots,f_d(M)$，其中 $f_d(M)$ 为 M 中极大面的数目，则称为标记多面体.

d 多面形图(d-polyhedral graph)　见“多面体的图”.

多面形序列(polyhedral sequence)　见“多面体的图”.

多面体的 k 构架(k-skeleton of polytope)　见“多面体的图”.

多面体的面复形(face complex of polytope)　见“多面体的图”.

组合等价多面体(combinatorially equivalent polytopes)　见“多面体的图”.

标记多面体(marked polytope)　见“多面体的图”.

抽象多面体(abstract polytope)　见“多面体的图”.

多面体的直径(diameter of polytope)　多面体的一个重要指标. 指多面体的图的直径. 即多面体的图上具有如下性质的整数 k：

1. 图上任意两节点 v_1,v_2 之间的距离(连结 v_1，v_2 的最短通路上的边数)均不超过 k.

2. 存在节点 u_1,u_2，其间距离超过 $(k-1)$.

巴林斯基定理(Balinski theorem)　关于多面体的图的连通性的一个基本定理. 该定理断言：一个 d 多面体的图必定是 d 连通的. 该定理一个重要推论是：把多面体的图的一个面上的所有顶点移去之后产生的图依然是连通的.

施泰尼茨定理(Steinitz theorem)　判定一个图是不是 3 多面体的图的基本定理. 该定理断言：一个图是 3 多面体的图，当且仅当此图是平面图，而且是 3 连通的. 定理的意义在于把 3 多面体的图的研究归结为 3 连通平面图的研究，后者容易处理和判定.

多面体半拟阵(semi-matroid of polytope)　与多面体关联的一类组合构形. 一个简单多面体 M 关联的半拟阵 $(\mathscr{F},V)$，$\mathscr{F}$ 为 M 的所有极大面构成的集族，V 为 M 的顶点集. M 为简单多面体是指 M 的每一个顶点均正好关联 d 个极大面，d 为 M 的维数. 二元组 $(\mathscr{F},V)$ 满足下述半拟阵条件：

1. V 的每个顶点 v 正好关联 d 个极大面 F_1，$F_2,\cdots,F_d$，或者说，v 正好包含在 d 个极大面 F_1，$F_2,\cdots,F_d$ 之中.

2. 已知任一个由 $(d-1)$ 个极大面构成的子集，或者存在两个顶点，使得这 $(d-1)$ 极大面都与这两个顶点关联，或者不存在这样的顶点.

当两个简单多面体的半拟阵同构时，它们对应的多面体是组合等价的；而且，反之亦然.

多面体的谱(spectrum of polytopes)　一类组合量. 多面体类 $\mathscr{M}(A)$ 中两个多面体 $M(b_1)$ 和 $M(b_2)$ 之间关系的一组数值描述. 设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，其秩为 m，$\mathscr{M}(A)$ 由固定 A 确定的形如

$$M(b)=\{x\in E^n\mid Ax=b,x\geqslant 0\}$$

的多面形组成. $M(b_1)$ 和 $M(b_2)$ 的谱记为 $S(b_1,b_2)$，定义为满足如下条件的所有数值 λ 组成的集合：

1. $0<\lambda<1$.

2. $b_\lambda=\lambda b_1+(1-\lambda)b_2$.

3. $M(b_\lambda)$ 是退化的，即 b_λ 落入仅由 A 的 k 列向量张成的锥中，这里 $k\leqslant m-1$.

借助于多面体的谱，可以建立 $\mathscr{M}(A)$ 中两个多面体等价的条件：$M(b_1)$ 和 $M(b_2)$ 等价，当且仅当它们的谱 $S(b_1,b_2)=\varnothing$.

多面形半群(polyhedral semigroup)　伴随多面体的一种代数结构. 由多面形锥 $K=\{x\in E^n\mid Ax\geqslant 0\}$ 中的整点相对于加法而构成的半群 K_Z. 对由整向量组成的半群 B，若其中的每个元素均可表示为已知 $t(\geqslant 1)$ 个整向量 $q^1,q^2,\cdots,q^t$ 的正整数组合，即

$$B=\left\{x\,\middle|\,x=\sum_{j=1}^{t}Z_jq^j,Z_j\text{ 为正整数},1\leqslant j\leqslant t\right\}.$$

此时称 B 为有限生成的整向量半群. 它的优越性在于可以同时具有约束方程组形式表示以及有限生成的组合形式表示. 因此，对于多面形半群一个重要的问题是研究在什么样的条件下，它是有限生成的. 当矩阵 A 的元素为有理数时，多面形半群 K_Z 是有限生成的.

有限生成的整向量半群(finitely generated semigroup of integral vectors)　见“多面形半群”.

组合(最)优化(combinatorial optimization)　一类离散状态下的极值问题. 已知有限元素集 E，对于 E 的每个元素 e 关联着一个目标系数 $c(e)$，可视为价格、价值、权值、距离等. E 的某类特定子集组成

集族 $\mathscr{F}$，称为问题的可行解集. 问题是在 $\mathscr{F}$ 中寻求某个元素 F，使在 F 上实现目标值的极大或极小. 它可表示为

$$\min \text{或}(\max)\ \left\{\sum_{e\in F} c(e) \mid F \in \mathscr{F}\right\}.$$

简记为三元组 $(E,\mathscr{F},c)$. 因为 E 为有限集，组合优化的最优解总是存在的. 但是，对于许多组合优化的具体问题来说，$\mathscr{F}$ 中元素的数目非常巨大以至于人们不可以采用穷举比较的办法来求出最优解. 因此，组合优化的主要任务是：或者设计出特有的算法，以有效地求出该问题的最优解；或者是证明根本就不存在比穷举更好的算法. 组合优化早期研究的问题来自运筹学、工业管理、逻辑学、工程学、计算机科学以及军事应用等领域. 之后它又广泛地联系着其他众多领域，并获得成功的应用，例如生物学、化学、经济学、地质学、语言学、物理学、社会学等. 它表现出两个突出的特点：一个是它的广泛应用性；另一个是现实世界里的组合优化问题大部分都很难求解. 由于这两个特点的刺激，使得组合优化的研究和成果、发展与变化非常迅速. 典型的组合优化问题有独立系统问题、拟阵问题、支撑树问题、匹配问题、二拟阵交问题、二部图匹配或指派问题、b 匹配问题、最短路问题、网络流问题、中国邮路问题、旅行售货员问题、一般路径问题、时间表问题、选址问题、集合覆盖、集合划分、集合装箱问题、节点覆盖、节点划分、节点装箱问题、染色问题、背包问题、图的嵌入问题、布局问题等.

算法复杂性(complexity of algorithm)　对算法有效性的度量. 而算法则是由有限个规则组成的有序排列，每个规则对应于一个或多个明确的不带歧义的操作. 按要求输入有关数据之后，从输出获得所求的结果. 单纯形方法就是算法的典型例子. 算法复杂的度量，包括计算复杂性、时间复杂性、空间复杂性等. 计算复杂性描述算法从输入到输出结果，这个过程包含主要计算操作的次数所表现的数量级度量. 时间复杂性是描述算法的有效性的一个主要度量. 从输入到输出结果，时间的长短与要解决问题的规模直接有关. 此外，还由算法在实施过程中所涉及的初等操作(如加法、乘法和比较等)的总数来度量. 通常记为时间复杂性函数 f，它为问题的规模或初始输入数据量 n(一个大的自然数)的函数 $f(n)$. 空间复杂性是算法从输入到输出所涉入存储规模. 问题的复杂性是指一类组合优化问题的复杂程度的度量. 因此，它不能由此类的一个特别具体问题来度量，必须由此类问题中有效性最差的问题去度量. 其次，问题的复杂性由算法刻画：

1. 是不是存在求解此类问题的算法？

2. 若可以设计出求解此类问题的算法，这个算法的复杂性又如何？

算法(algorithm)　见“算法复杂性”.

计算复杂性(computational complexity)　见“算法复杂性”.

时间复杂性(time complexity)　见“算法复杂性”.

空间复杂性(space complexity)　见“算法复杂性”.

问题复杂性(complexity of problem)　见“算法复杂性”.

多项式算法(polynomial algorithm)　亦称有效算法或好算法. 一类计算时间不超过始数据量的一个多项式的算法. 算法满足以下的条件：存在多项式 P，使算法的时间复杂性函数 $f(n)=O(P(n))$，这里 n 为问题的输入规模. 换言之，有常量 C 及多项式 P，使 $|f(n)|\leqslant C|P(n)|$. 对算法的这种度量，具有如下特点：

1. 刻画了算法的内在性质，换言之，若算法是多项式算法，当用来求解该类问题时，对问题 P_1,P_2，虽说相应的输入规模 n_1,n_2 不同，相应的多项式 $P'(n_1),P''(n_2)$不同，但是 P' 和 P''均都是多项式，因此，不会因为面对的具体问题不同，而影响对算法这种性质的刻画.

2. 渐近性特点，也就是说，当输入规模 n 增大时，多项式算法的计算时间要比时间复杂性函数为指数函数情形少得多.

3. 在实际上，多项式算法并不肯定奏效，如 $P(n)=n^{1000}$，当 $1<n<t$ 时，$n^{1000}>2^n$，其中，$t=1000\log n$，其中 log 为以 2 为底的对数.

有效算法(efficient algorithm)　即“多项式算法”.

好算法(good algorithm)　即“多项式算法”.

判定问题(decision problem)　最简单的择取问题. 它只要求回答“是”或者“不是”. 每一个组合优化问题均可转变为判定问题. 设组合优化问题为

$$(E,\mathscr{F},C):\ \max_{F\in\mathscr{F}}\sum_{e\in F} C(e),$$

并设定数值 B 为一个下界，相应的判定问题为：是否存在可行解，其目标值至少为 B？于是，把考虑的问题均归结为简单的判定问题. 按判定问题的复杂性度量可将问题归类.

P 问题(P-problem)　具有多项式算法的判定问题. 这里 P 表示 Polynomial 一词的第一个字母. 这类问题的吸引力在于：

1. 由于多项式的加法和乘法仍为一多项式，在做替换时，仍保持问题的多项式性.

2. 相对容易地计算算法的总步数.

3. 对于此类问题，回答“是”与“不是”均具有多

项式这一性质刻画，换言之，对此类问题而言，回答“是”与“不是”是对称的.

支撑树问题、匹配问题、拟阵问题、二拟阵交问题、网络流问题、中国邮路问题、最短路问题等均属P问题.

NP **问题**(NP-problem) 具有非决定性多项式算法的判定问题. 这里NP表示Nondetermistic Polynomial两个词的第一个字母. 这类问题只对正面回答“是”时，算法具有多项式性质，而对反面回答“不是”时，未做任何论断. 更严格地说：

1. 若对判定问题的回答为“是”，则存在一个目标S，它满足：

1) 求出S的时间为$O(P'(n))$，n为问题的输入规模，P'为多项式.

2) 检验S，并得到回答“是”的时间为$O(P''(n+n'))$，n'为S的输入规模，P''为多项式.

2. 若对判定问题的回答为“不是”，则不存在目标S，也就谈不上给出它，检验它.

P问题为NP问题的一个子类，但前者在后者中占据多少分量一直是人们极感兴趣的问题，甚至考虑二者是否重合，至今还是个悬而未决的大问题. 迄今所考虑的组合优化问题均属于NP问题.

NP **完全问题**(NP-complete problem) NP问题中一个子类. 属于此类的问题满足条件：此问题为NP问题，而且此类中每一个其他问题均可经多项式转换变为这个问题. 判定问题的多项式转换是指把问题P′变为问题P″的多项式算法，而且满足对问题P′的回答为“是”，当且仅当对问题P″的回答为“是”. 这类问题的特点是：

1. 由于NP问题中的每个问题均可经由多项式转换为一个NP完全问题，所以，只要NP完全问题中的某个问题一旦具有多项式算法，则NP问题中的所有问题亦随之具有多项式算法.

2. 对于P问题等于NP问题的猜想，依赖于NP完全问题存在多项式算法，NP完全问题是NP问题中很艰难求解的一个子类.

3. 对于P问题不等于NP问题的猜想，则在NP问题中必然有一个问题，它既不是P问题，又不是NP完全问题.

NP完全问题是由库克(Cook, S. A.)于1971年给出，至今已知数以数千计的问题属于NP完全问题. 典型的有：3满足问题、整线性规划问题、独立集问题、节点覆盖问题、多处理机调度的时间表问题、哈密顿回路问题、哈密顿路径问题、团问题、3维匹配问题、0－1背包问题、划分问题、最大割问题、多种货物流问题、图染色问题等. 对于判定问题P_1和P_2，若P_1经由多项式阶的计算量转变为P_2，而且反之亦然，则称P_1和P_2为多项式等价. 因此，NP完全问题可看做一种多项式等价类.

多项式等价(polynomial equivalence) 见“NP完全问题”.

贪婪算法(greedy algorithm) 解优化问题的一种方法. 求一个组合优化问题的解用多步进行，使每一步均按局部最优的方式的算法. 当然，一般而言，用贪婪算法不能保证得到一个最优解. 不过，确有这样的组合优化问题，用贪婪算法所得的就是它的一个最优解. 例如，在一个边上带有权的图上，求一个使树上边的权的总和为最小的支撑树的问题，用贪婪算法所得到的就是最优解. 那些用贪婪方法可以得到最优解的组合优化问题到底是什么样的，现在已经弄清楚. 为此，需要利用序阵给以刻画.

近似算法(approximate algorithm) 解优化问题的一种算法. 它是一种控制在给定误差之内的，其结果虽然达不到问题的最优解，但却可以使相对误差确保在一固定水平之上的算法. 更严格地，对于组合优化问题$P=(E,\mathscr{F},C)$，算法H可以给出P的一个可行解F_H，设F^*为问题的最优解，$\varepsilon>0$为一给定常数；若对此类问题的任一具体问题，均有关系

$$\frac{|C(F_H)-C(F^*)|}{C(F^*)}\leqslant\varepsilon,$$

则称H为ε近似算法，这里$C(F_H),C(F^*)>0$，分别为算法H达到的目标值和最优目标值. 因此，若组合优化问题是求极大值，H为其ε近似算法，则有$C(F_G)/C(F^*)\geqslant 1-\varepsilon$，此时称$(1-\varepsilon)$为算法的病态情形下界. 对称于求极小值情形，

$$\frac{C(F_H)}{C(F^*)}\leqslant 1+\varepsilon,$$

称$(1+\varepsilon)$为算法病态情形上界. 近似算法的设计旨在获得更好的这类界. 例如对于独立集问题，贪婪算法是近似算法. 而对于对称旅行售货员问题，及任意$\varepsilon>0$，存在多项式ε近似算法的充分必要条件是P问题等于NP问题. 这表明当前根本不可能给出求解对称旅行售货员问题的ε近似算法.

概率算法(probabilistic algorithm) 解优化问题的一种算法. 它是按概率意义在多大程度上能够给出达到一定标准的可行解的算法. 这里说的一定标准可行解，可以是问题的最优解，但大多数是指达到病态情形上(下)界的可行解. 设$(E,\mathscr{F},C)$为一类组合优化问题，$\varepsilon>0$为给定常数，算法H不是ε近似算法，这表明，在此类问题中，存在这样的问题，H给出的可行解F_H，对应的目标值$C(F_H)$不满足不等式关系：

$$\frac{|C(F_H)-C(F^*)|}{C(F^*)}\leqslant\varepsilon.$$

但是对整类问题而言，能够按已知的概率q确保上述不等式成立. 因此概率算法是ε算法的自然延伸，

是从另一角度深入探讨算法的行为. 以对称的旅行售货员问题为例，问题的规模 $|E|=n$ 为城市的数目，对于每个 n 均假定有一个与之关联的概率分布，例如把 n 个城市视为平面上一个正方形中的 n 个点，并按均匀分布，一个一个点独立地给出；城市间的距离视为两点间的欧氏距离. 对每个具体问题 I，建立事件 $X(I)$，它可以发生或不发生. $X(I)$发生的定义为：当把算法 H 应用到 I，并得到目标值 $C_H(I)$，它满足关系

$$C_H(I)\leqslant(1+\varepsilon)C^*(I),$$

其中 $C^*(I)$为 I 的最优目标值(连结 n 个城市的最短哈密顿回路的长度)，ε 为给定正常数. 否则称事件 $X(I)$不发生，并以 q_n 记 $X(I)$不发生的概率. 若

$$\sum_{n=1}^{\infty}q_n<\infty,$$

则称 $X(I)$几乎处处发生. 这例子表明，概率算法刻画的是算法的渐近行为.

启发式算法(heuristic algorithm)　解优化问题的一种算法. 它是借助于对问题的具体分析或计算经验等方面信息的启示，能够较快地给出问题满意解的算法. 这里说的满意解，一般不是问题的最优解，而是较好的可行解. 由于众多的组合优化问题不存在用来求解的多项式算法，启发式算法的研究具有很现实的意义. 此外对于有些问题，虽然有多项式算法，但求最优解的代价过大，往往也需要求满意解. 组合优化问题中的贪婪算法是典型的启发式算法. ε 近似算法、概率算法等均是深入探究启发式算法内在行为的自然延拓.

满足问题(satisfiable problem)　一个组合优化问题. 关于布尔公式的决策问题：已知 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 为布尔变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的加法运算、求补运算及乘法运算组成的公式，每个变量 $x_j(1\leqslant j\leqslant n)$均有取值 0 或 1 的两种选择，问 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是否存在一组选择使 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 的值均为 1？这是一个 NP 完全问题，而且是最早引入的 NP 完全问题，其他许多 NP 完全问题由它做多项式转换产生出来.

独立系统问题(independence system problem)　一类组合优化问题. 指建立在独立系统上的优化问题. 设 E 为有限集，$\mathscr{I}$ 为 E 的某些子集组成的集族，若 $\mathscr{I}$ 满足下述条件，则称 $\mathscr{I}$ 为独立系统：

1. $\varnothing\in\mathscr{I}$.

2. $I\subseteq J\in\mathscr{I}$，则 $I\in\mathscr{I}$.

此时，独立系统问题为 $\max\{C(I)\mid I\in\mathscr{I}\}$，其中

$$C(I)=\sum_{e\in I}c(e).$$

上述条件 2 是“独立”性质的表征，例如，线性空间中的线性独立向量组，图上的森林以及图上的互不相邻的节点集等，均具有这个特征，因此称 $\mathscr{I}$ 中的元素为独立集. 这类问题为 NP 完全问题，当将图上的节点均视为带权 1，将 $\mathscr{I}$ 视为图上互不相邻的节点集形成的族，则在 $\mathscr{I}$ 中求一个集合使得所含的元素(即节点)数最多的问题被称为最大独立集问题. 当然，还可以将它推广到在节点上的权不一定为 1 而是任意非负数的情形. 这时，称最大权独立集问题.

最大独立集(maximum independent set)　见“独立系统问题”.

最大权独立集(maximum weight independent set)　见“独立系统问题”.

拟阵问题(matroid problem)　一类组合优化问题. 它是建立在拟阵上的优化问题. 令 E 为有限集，$\mathscr{I}$ 为 E 的某些子集构成的集族. 称$(E,\mathscr{I})$为拟阵. 若二元组$(E,\mathscr{I})$满足：

1. $(E,\mathscr{I})$为独立系统.

2. 对于 E 的任意子集 F，I_1 和 I_2 均为含在 F 中的极大独立集，I_1 和 I_2 包含的元素数相等，在其上的问题为 $\max\{C(I)\mid I\in\mathscr{I}\}$，其中

$$C(I)=\sum_{e\in I}C(e).$$

拟阵问题是典型的组合优化问题. 例如，在图 $G=(V,E)$上，若森林为独立集，则$(E,\mathscr{I})$为拟阵. 利用贪婪算法可求出拟阵问题的最优解. 因此，拟阵问题为 P 问题.

2 **拟阵交问题**(2-matroid intersection problem)　一类组合优化问题. 它是建立在两个拟阵交集系统上的优化问题. 设 $M_1=(E,\mathscr{I}_1)$，$M_2=(E,\mathscr{I}_2)$均为由共同的有限集 E 产生的拟阵，

$$\mathscr{I}_1\cap\mathscr{I}_2=\{I_1\cap I_2\mid I_1\in\mathscr{I}_1,I_2\in\mathscr{I}_2\}=\mathscr{I}$$

为其交集系统，问题是 $\max\{C(I)\mid I\in\mathscr{I}\}$，其中

$$C(I)=\sum_{e\in I}C(e).$$

这是 P 问题，已有多种的多项式算法. 然而 3 拟阵交问题就不再是 P 问题.

分支问题(branching problem)　2 拟阵交问题的特殊情形. 有向图 $G=(V,A)$，B 为 A 的子集，若满足：

1. 不含(无向)圈；

2. G 的每个节点均是 B 中最多一条弧的终点；

则称 B 为分支.

分支问题为 $\max\{C(B)\mid B$ 为支撑分支$\}$，其中

$$C(B)=\sum_{e\in B}C(e).$$

此类问题的重要性在于它与若干 NP 完全问题有密切的关系.

最大团问题(maximum clique problem)　一类组合优化问题. 设 $G=(V,E)$为一个图. 在 G 上的任何一个极大完全子图被称为团. 求 G 的阶数最大的

团的问题就称为最大团问题. 它是一类 NP 完全问题.

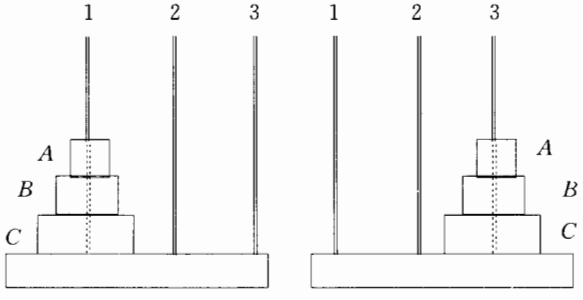
旅行售货员问题(travelling salesman problem) 一类组合优化问题. 它是在图上求最短哈密顿圈的问题. 设有图 $G=(V,E)$,从某一节点出发,依次穿过其他所有节点,最后回到出发点,使其总路程最短. 对称的含义是,对于边(i,j),从 i 到 j 的距离与从 j 到 i 的距离相等. 这是 NP 完全问题. 由于它具有广泛的应用背景,并与图内在性质又有紧密联系,使它成为重要组合优化问题之一. 当从节点 i 到此边的另一节点 j 的距离不等于从节点 j 到节点 i 的距离时,类似的问题被称为不对称的旅行售货员问题.

指派问题(assignment problem) 一类组合优化问题. 它可表示为二部图匹配的一类问题. 设有二部图 $G=(V_1,V_2;E)$,$M\subseteq E$ 满足条件:M 中任何两条边都不含有公共端点,称 M 为 G 的一个匹配. 问题为 $\max\{C(M)\mid M \text{ 为匹配}\}$,其中

$$C(M)=\sum_{e\in M}c(e).$$

指派问题是 P 问题. 求解指派问题的多项式算法有匈牙利算法. 它是组合优化问题最早的多项式算法之一.

梵塔问题(Hanoi tower problem) 一类组合优化问题. 有三个桩 1,2,3 和三个方 A,B,C,如下图左所示,三个方的尺寸不一. 这里,A 小于 B,B 小于 C. 它们已经放在桩 1 上,且大的在下小的在上. 问题是要将这三个方逐一地移到桩 3 上,使得还是大的在下小的在上,即得到下图右所示的状态. 当然,若没有桩 2,这个问题就不可能有解. 在用桩 2 时,如有两个或多于两个方也必须保持大的在下,小的在上. 试问,最少的步数为多少. 这就是梵塔问题. 还可将它推广到更多个桩和更多个方的情形.



最短路问题(shortest path problem) 一类组合优化问题. 图 $G=(V,E)$上,在两节点 v,u 之间,求一条路径 P,使

$$C(P)=\min\{C(R)\mid R \text{ 为连结 } v,u \text{ 的路}\},$$

这里

$$C(R)=\sum_{e\in R}c(e).$$

这类问题为 P 问题.

最优树问题(optimal spanning tree problem) 一类组合优化问题. 设 $G=(V,E)$是一个图,V 为节点集,E 为边集. 对任何 $e\in E$,它的权 $w(e)$为已知. 在 G 上,求一个支撑树 T 使得

$$W(T)=\sum_{e\in T}w(e)$$

为最优(即最大或最小). 这就是最优树问题. 或具体地,最大树问题或最小树问题. 求 G 上的最小支撑树有克鲁斯卡尔算法,其要旨是:首先,选取权最小的一条边;然后,对于所有未被选取的边,在那些与已选取的边不产生圈的边中取一个权最小的;如此下去,一直到不能进行为止. 从而,这样选出来的所有边构成 G 的一个支撑树,并且其上边的权之总和为最小. 它是一种典型的贪婪算法. 若将最优树问题中的支撑树改为 G 的连通的支撑子图,则这时被称为最优连结问题. 最小连结问题与最小树问题是等价的.

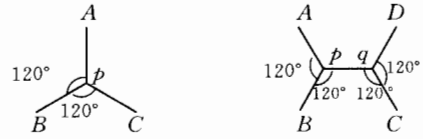
最优连结问题(optimal connector problem) 见"最优树问题".

克鲁斯卡尔算法(Kruskal algorithm) 见"最优树问题".

摆渡问题(ferry problem) 一类组合优化问题. 在一条河的一边岸上有一只狼、一只羊和一棵白菜. 已知狼吃羊和羊吃白菜. 在河中只有一条小舟且每次只能载它们三者之一. 问如何用最少的次数将它们安全摆渡到对岸?这就是所谓摆渡问题. 也可将它推广到一般的情形.

最小树形图问题(shortest arborescence problem) 一类组合优化问题. 它是最小树问题的推广. 若在最小树问题中,将这个树限定为树形图就变成了最小树形图问题.

施泰纳最小树问题(Steiner shortest tree problem) 一类组合优化问题. 在平面上有 n 个点,问在平面上需增添多少个点,使可以连这 n 个点和增加的点而得到长度最短的树. 这就是施泰纳最小



树问题. 除了只有一、两个点的不足道的情形外,最简单的情形为三、四个点. 若三个点不在一条线上,则要增添一个点 P. 如下左图中实线所示,给出了施泰纳最小树. 若四个点中没有三个点在一条直线上,则要增添两个点 p,q 而得到施泰纳最小树,如下右图实线所示. 一般情形也可以用物理上的表面张力

原理做实验而得到.但时至今日在数学上仍没有得到解答.

网络流问题(network flow problem) 一类重要的组合优化问题.设 $G=(V,A)$ 为有向图,节点 s 称为源,节点 t 称为汇;对于每条弧 $a(i,j)\in A$,均有数值 c_{ij} 称为该弧上的容量,i 为弧的起点,j 为终点.以 x_{ij} 为分量的向量 $x,(i,j)\in A$,若满足条件:

1. 对任意 $(i,j)\in A$,有 $0\leqslant x_{ij}\leqslant c_{ij}$.

2. $$\sum_{i\in\Gamma^-(j)}x_{ij}-\sum_{i\in\Gamma^+(j)}x_{ji}=\begin{cases}-v & (j=s),\\ 0 & (j\neq s,t),\\ v & (j=t),\end{cases}$$

其中 $\Gamma^-(j)$ 是以 j 为终点的弧的所有起点,$\Gamma^+(j)$ 为以 j 为起点的弧的所有终点,则称 x 为 s-t 可行流.网络流问题是求 s-t 可行流,使其值 v 尽可能地大.这类问题是 P 问题.使 v 达到最大的 s-t 流称为最大流.

最大流问题(maximum flow problem) 见"网络流问题".

b 匹配问题(b-matching problem) 匹配问题的推广.在图 $G=(V,E)$ 上,对于每个节点 v,设定正整数 b_v,作为 E 的子集 M,若满足:对每个节点 v,关联于 v 的 M 中的边数不超过 b_v,则称 M 为 b 匹配.问题是 $\max\{c(M)\mid M$ 为 b 匹配$\}$,这里

$$c(M)=\sum_{e\in M}c(e),$$

c 为边集 E 上的一个权函数.当对任何一个节点 v,均有 $b_v=1$ 时,它就是匹配问题.若 b_v 为任意的正数,则这种匹配问题被称为最优匹配问题.从算法复杂性的角度而言,b 匹配问题是一类 P 问题.

最优匹配问题(optimal matching problems) 见"b 匹配问题".

中国邮路问题(Chinese postman problem) 中国学者于 20 世纪 50 年代提出的一种典型的组合优化问题,后在国际上被称为中国邮路问题.已知图 $G=(V,E)$,对于每条边 $e\in E$,有距离 $d(e)$,从 G 的某节点出发,走过 G 的所有边(允许重复穿过),回到原出发点,使其总行程最短.这个问题是 P 问题.

背包问题(knapsack problem) 一类组合优化问题.设 U 为有限个物品的集合,每件物品 $u\in U$ 有一个尺寸 $s(u)$,自然 $s(u)$ 为正整数,而且 u 有一个价值 $v(u)$.若背包的尺寸为 B,问将 U 中的哪些物品装到背包中以求得到最大的价值?事实上,就是求 U 的一个子集 L,即求 $L\subseteq U$,且满足条件

$$\sum_{u\in L}s(u)\leqslant B,\text{ 使}\sum_{u\in L}v(u)$$

达到最大值.虽然这个问题的形式十分简单,但是,它仍为一个 NP 完全问题.因此,它的求解是十分困难的.

排序问题(sequencing problem) 亦称工件加工日程表问题.一类典型的组合优化问题.设用 m 台机器加工 n 个工件.给定了加工每个工件所用机器的次序,以及每台机器加工每个工件所需要的时间、问题是确定工件在每台机器上的加工次序以使预先选定的目标函数达到最小.这个目标函数通常是完成时间、平均完成时间、机器的空间时间等的一个非降函数.排序问题有两个类型:

1. 流水作业,这时,要求每个工作在机器上的加工次序都一样.

2. 工件作业,这时,每个工件在机器上的加工次序不必一致.

流水作业可以看做是工件作业的一种特殊情形.三台或以上机器的排序问题多为 NP 完全问题.因此是很困难的.

工件作业(jobshop) 见"排序问题".

流水作业(workshop) 见"排序问题".

日程表问题(scheduling problem) 亦称调度问题.一类组合优化问题.对于一个给定的活动计划确定各项活动的进行的时间段,使得预先选定的目标函数取最小值.这个目标函数常取为最终完成时间的一个非降函数.若要有资源的限制,还可以在保证完成时间之下使得资源的总花费为最小.日程表问题的一个典型实例就是排序问题.另外,还有项目日程表问题和装配线平衡问题.项目日程表问题,也称统筹方法.

调度问题(scheduling problem) 见"日程表问题".

项目日程表(project scheduling) 见"日程表问题".

装配线平衡(assemble-line balance) 见"日程表问题".

装填问题(packing problem) 一类典型的组合优化问题.设 $I=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 是一个有限集,$E=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$ 为 I 的子集所形成的一个集簇.若 E 的一个子族 $E'=\{E_{j_1},\cdots,E_{j_s}\}$ 使得 I 中的每个元素包含在 E' 的至多一个元素之中,则称 E' 为 I 的一个装填.求 I 的一个装填 E' 使得所含的元素数为最多就是所谓装填问题.一般地,赋 E 中每个元素以一个权,而将 E 中的元素最多改为其中元素的权和为最大.当每个元素的权均为 1 时,即这里所说的装填问题.若将 E' 中的每个元素视为一个车厢,这时的装填问题也被称为装箱问题.若 E' 使得 I 中的每个元素包含在 E' 的至少一个元素之中,则称 E' 为 I 的一个覆盖.求 I 的一个覆盖 E' 使得 E' 含 E 中的元素最小就是所谓覆盖问题.也可以将它推广到带权的情形.若 E' 使得 I 中的每个元素包含在 E' 的恰好一个元素之中,则称 E' 为 I 的一个划分.求 I 的一个划分 E' 使得 E' 中含的元素数为最少就是划分

问题. 同样可以有带权情形下之推广. 这里所述的装填问题、覆盖问题,以及划分问题均是 NP 完全问题. 因此,要想用好的算法解这些问题是不现实的.

装箱问题(bin-packing problem) 见"装填问题".

覆盖问题(covering problem) 见"装填问题".

划分问题(partitioning problem) 见"装填问题".

选址问题(location problem) 一类组合优化问题. 设用料单位的位置已经确定. 要建多少个仓库和设在哪里使得供给这些用料单位所花费的运输量为最小,其中哪些地方可以设立仓库已经给出. 这就是所谓选址问题. 若用料单位用产麦地代替,仓库用打麦场所代替,这时的选址问题就变为麦场设置问题. 在产麦地之间的道路没有圈时,且要求麦场设置在某产地,这时有简单的方法解这个问题. 一般情况,从算法的复杂性的角度而言,求选址问题的解是很困难的.

麦场设置问题(allocation problem for threshing ground) 见"选址问题".

称量问题(scale problem) 一类组合优化问题. 设有 n 个球,若已知其中有一个是坏的,且已知这个坏球比其他球轻,当然,所有好球重量都相同. 问用一个天平称最少称多少次才可以将这个坏球选出来. 若不知道坏球之轻重,最少称多少次. 若不止一个坏球如何等. 这些被称为称量问题.

布局问题(layout problem) 一类组合优化问题. 通常是就印刷电路板或集成电路,甚至超大规模集成电路而言. 仅以印刷电路板为例. 所谓布局问题主要由两个部分组成. 首先是如何将电子元器件,包括电阻、电容、半导体元集、输入输出端口,甚至它本身就是一个集成块安置在一个板面上使得满足一定的要求. 然后就是如何在这块板上印制金属导线使得满足技术上的要求. 前者被称为定位问题,后者被称为布线问题. 这两者要达到的总目标或为使占用面积最小,或是使所画导线的长度最短. 若要求导线必要按水平和垂直走向,这时称为纵横布局,则又常要使导线上的总折数最小,或者使用折数最多的导线上的折数最小等.

定位问题(placement problem) 见"布局问题".

布线问题(routing problem) 见"布局问题".

纵横布局(rectilinear layout) 见"布局问题".

装填多面体(packing polytope) 一类组合构形. 指由装填问题的可行解集的凸包所形成的多面体. 对于有限集 $I=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$,E 为 I 的所有子集所形成的簇. 并且,记 $E=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$. E 的任何一个子簇 E' 均可用向量 $x_{E'}=(x_1(E'),x_2(E'),\cdots,x_n(E'))^T$ 表示,其中 $x_j(E')=1$,当 $E_j\in E'$ 时;否则 $x_j(E')=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$. $x_{E'}$ 的向量表示中的 T 为转置,或者说 $x_{E'}$ 为一个 n 维列向量. 由于 $x_{E'}$ 的每个分量只有两个可能值,可知共有 2^n 个这种向量. 类似的理由,可知 $n=2^m$. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为一个 $m\times n$ 的矩阵,使得 $a_{ij}=1$,当 $v_i\in E_j$;否则,$a_{ij}=0$ $(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$. 即,$A$ 为 I 与 E 的关联阵. 这时,I 的装填就与不等式组

$$Ax\leqslant e\ (0\leqslant x\leqslant e) \qquad (*)$$

的整数解一一对应. 其中,$e=(1,\cdots,1)^T$,即所有分量均为 1 的那个 n 维列向量. 由此,装填多面体就是不等式组 $(*)$ 的整数解集的凸包. 相应地,覆盖多面体就是不等式组 $Ax\geqslant e$ $(0\leqslant x\leqslant e)$ 的整数解集的凸包,划分多面体就是不等式组 $Ax=e$ $(0\leqslant x\leqslant e)$ 的整数解集的凸包.

覆盖多面体(covering polytope) 见"装填多面体".

划分多面体(partitioning polytope) 见"装填多面体".

匹配多面体(matching polytope) 一类组合构形. 它是由一个图的所有对集相应的向量所形成的凸包. 设图 $G=(V,E)$,V 和 E 分别为 G 的节点集和边集. 且记 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和 $E=\{e_1,e_2,e_m\}$. 对于 E 的任何一个子集 E',它的相应向量 $x_{E'}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,其中 $x_j=1$,当 $e_j\in E'$;否则,$x_j=0$ $(1\leqslant j\leqslant n)$. 若 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ 为 G 的节点与边之间的关联阵,即 $a_{ij}=1$,当 v_i 为 e_j 的一个端点;否则,$a_{ij}=0$ $(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$,则匹配多面体由下面的不等式组的解集所确定:

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant 1 & (1\leqslant i\leqslant m),\\ x_j\geqslant 0 & (1\leqslant j\leqslant n),\\ \sum\limits_{e_j\in E(S)}x_j\leqslant\dfrac{|S|-1}{2}, & \end{cases}$$

其中,S 为 V 的子集且含有奇数个节点,$E(S)$ 为由 S 在 G 上的导出子图的边集.

整多面体(integral polytope) 一类多面体. 它的所有顶点均为整点,即其每个坐标全是整数.

多面体拟阵(polymatroid) 一类整多面体. 设 E_n^+ 为 n 维欧氏空间的那个非负象限. 在 E_n^+ 上定义一个偏序:对于 $x,y\in E_n^+$,$x\leqslant y$ 表示 $x_i\leqslant y_i$,$i=1,2,\cdots,n$. 设 $D\subseteq E_n^+$,若 $x_0\in D$ 具有这样的性质:不存在 $x\in D$,$x\neq x_0$,使得 $x\leqslant x_0$,则称 x_0 为偏序 D 上的一个极小元. 若不存在 $x\in D$,$x\neq x_0$,使得 $x\geqslant x_0$,则 x_0 为 D 上的一个极大元. 在 E_n^+ 上的一个有界多面体拟阵就是这样的一个多面体 M,它具有性质:

1. 若 $0\leqslant y\leqslant x$,$x\in M$,则 $y\in M$.

2. 对任何 $a\in E_n^+$，集合 $M_a=\{x\in M\mid x\leqslant a\}$ 的所有极大元的分量和均相同，并且，这个和称为 a 的秩.

在 E_n^+ 上所定义的秩确定一个多面体拟阵的秩函数. 在 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有子集形成的簇 2^N 上定义的函数 ρ，若对任何 $U,W\in 2^N$ 均有

$$\rho(U)+\rho(W)\geqslant\rho(U\cup W)+\rho(U\cap W),$$

则称 ρ 为次模的. 若上面的不等式是反向的，则称 ρ 为上模的. 一个多面体 $M\subset E_n^+$ 是有界多面体拟阵，当且仅当在 2^N 上存在一个非降的次模函数 $\rho(W)$，$\rho(\varnothing)=0$，使得

$$M=\left\{x\in E_n^+\,\middle|\,\sum_{i\in W}x_i\leqslant\rho(W),\text{对任何 }W\subseteq N\right\}.$$

在 E_n^+ 上的一个无界多面体拟阵就是这样的一个多面形 Q，使它具有性质：若 $y\geqslant x$，和 $x\in Q$，则 $y\in Q$；对任何 $a\in E_n^+$，在 $Q_a=\{x\in Q\mid x\geqslant a\}$ 中的每个极小元的分量和都相同. 一个多面形 $Q\subseteq E_n^+$ 是一个无界多面体拟阵，当且仅当存在 2^N 上的一个上模函数 $\rho(W)$，$\rho(\varnothing)=0$，使得

$$Q=\left\{x\in E_n^+\,\middle|\,\sum_{i\in W}x_i\geqslant\rho(W),\text{对任何 }W\subseteq N\right\}.$$

拟阵多面体(matroid polytope)　一类多面体. 它是拟阵上的优化问题所确定的多面体. 设 $U=(J,\mathscr{F})$ 为一个拟阵，其中 J 为一个有限集，$\mathscr{F}$ 为独立集族. 对于任何 $W\subseteq J$，所有那些在包含意义下的 W 的极大独立子集均有相同的基数，即所含元素的数目相同，并且称这个数为 W 的秩，记为 $r(W)$. 拟阵的秩函数 r 是次模的，即对任何 $X,Y\subseteq J$，均有

$$r(X\cup Y)+r(X\cap Y)\leqslant r(X)+r(Y).$$

多面体

$$M(r)=\left\{x\in E_n^+\,\middle|\,\sum_{i\in w}x_i\leqslant r(w),\text{对任何 }w\subseteq N\right\},$$

其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，$n=|J|$，就称为拟阵多面体.

局整多面体(locally integral polytope)　一种特殊的多面体. 它的所有整点的凸包保持原来的整点之间的相邻性不变. 设 M 为一个多面体，$G(M)$ 表示由 M 的顶点作为节点和由 M 的棱作为边所得的图. 记 $\mathrm{conv}(M_Z)$ 为 M 的所有整点的凸包. 若 $G(M)\supseteq G(\mathrm{conv}(M_Z))$，则称 M 为拟整多面体. 由方程和不等式组 $Ax=e,x\geqslant 0$ 的解集所确定的多面体被称为松划分多面体. 若将 x 的每个分量限制取值 0，1，则由这个解集确定的就是划分多面体. 凡松划分多面体均是拟整多面体. 由如下的方程和不等式组：

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\ (1\leqslant i\leqslant m),$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant y_i,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n;y_i\in\{0,1\},1\leqslant i\leqslant m$$

的解集的凸包所确定的多面体称为最简选址多面体，因为求这个多面体的一个顶点使得最小化函数

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}x_{ij}+c_iy_i)$$

的问题被称为最简选址问题. 其中，c_{ij} 和 c_i 均为已知的常数. 最简选址多面体也是拟整多面体. 一个多面体 M，若它的所有整顶点导出的 $G(M)$ 的子图是 $G(\mathrm{conv}(M_Z))$ 的一个支撑子图，则称 M 为连通整多面体. 对于给定二正整数 n 和 $k(k<n)$，由下面的方程和不等式组的解集所确定的多面体被称为中位多面体：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & (1\leqslant i\leqslant n),\\ \sum_{i=1}^{n}x_{ii}=k,\\ x_{ji}-x_{ii}\leqslant 0 & (1\leqslant i,j\leqslant n),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (1\leqslant i,j\leqslant n).\end{cases}$$

对任何 k $(1\leqslant k\leqslant n)$，中位多面体均为连通整多面体.

拟整多面体(quasi-integral polytope)　见“局整多面体”.

松划分多面体(relaxed partition polytope)　见“局整多面体”.

最简选址多面体(simplest location polytope)　见“局整多面体”.

最简选址问题(simplest location problem)　见“局整多面体”.

连通整多面体(connected integral polytope)　见“局整多面体”.

中位多面体(median polytope)　见“局整多面体”.

置换多面体(permutation polytope)　一个与置换有关的多面体. 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是一个给定的向量，且规定 $a_1>a_2>\cdots>a_n\geqslant 0$. 设 S_n 为 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的所有置换的集合. 对于每个置换 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)\in S_n$，将它与点 $a_\pi=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(x_i=a_{\pi_i},i=1,2,\cdots,n)$ 联系. 点集

$$\{a_\pi=(a_{\pi_1},a_{\pi_2},\cdots,a_{\pi_n})\mid\pi\in S_n\}$$

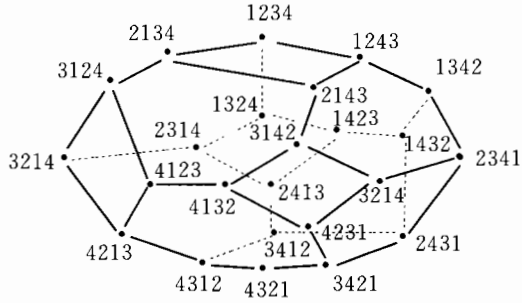
在 n 维欧氏空间 E_n 中的凸包称为置换多面体，并记它为 $M_n(a)$. 例如 $M_4(a)(a=(4,3,2,1))$ 如图所示. 若两个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 满足关系：

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

和存在两个置换 $\tau,\pi\in S_n$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\gamma}x_{\tau_i}\leqslant\sum_{i=1}^{\gamma}y_{\pi_i}$$

对于 $\gamma:1\leqslant\gamma\leqslant n-1$，则称 x 由 y 所管制. 并记为 $x\prec y$. 拉多定理指出：$x\in M_n(a)$，当且仅当 $x\prec a$. 由



此，置换多面体由如下的方程和不等式组的解集所确定：对任何 $w\subset N$，

$$\sum_{i\in w}x_i\leqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant|w|}a_i,$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}x_i=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}a_i.$$

S_n 可以划分为奇置换的集合 S^- 与偶置换的集合 S^+，即 $S_n=S^++S^-$. 集合 $\{a_\pi|\pi\in S^+\}$ 的凸包称为偶置换多面体，并用 $M_n^+(a)$ 表示. $x\in M_n^+(a)$，当且仅当 $x\in M_n(a)$，而且对于任何 $\pi\in S^-$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n}c_{\pi_i}x_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}c_ia_{n-i+1}+\frac{(a_{n-1}-a_n)}{(a_1-a_2)},$$

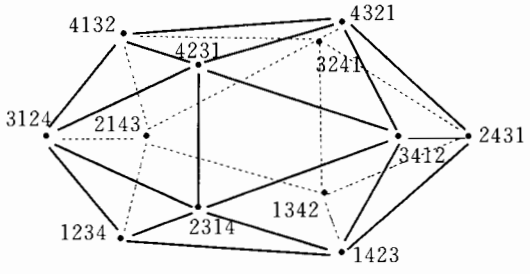
其中

$$c_1=a_1,\quad c_2=a_2,$$

$$c_i=c_{i-1}-\frac{(a_{n-1}-a_n)(a_1-a_2)}{a_{n-i+1}-a_{n-i+2}}$$

$$(i=3,4,\cdots,n).$$

例如，图给出 $M_4^+(a)$，这里 $a=(4,3,2,1)$.



偶置换多面体(even permutation polytope) 见“置换多面体”.

分配多面体(distribution polytope) 由指派问题的解集所确定的多面体. 即由如下方程和不等式组的解集所确定的多面体：

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=1 & (1\leqslant i\leqslant n),\\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_{ij}=a_j & (1\leqslant j\leqslant n),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (1\leqslant i,j\leqslant n).\end{cases}$$

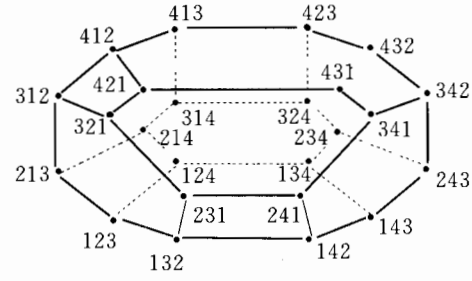
其中，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 n 维非负实向量. 若 $a_1=a_2=\cdots=a_n>0$，则这时的分配多面体就是指派多面体. 事实上，指派多面体由指派问题的可行解的集合所确定.

指派多面体(assignment polytope) 见“分配多面体”.

安排多面体(arrangement polytope) 一类组合构形. 它是置换多面体在低维空间的投影. 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，且 $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$. 一个 m 安排，$m\leqslant n$，就是从 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 中有序地选择 m 个不同的元素，记为 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_m)$，并将它联系一个向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，使得 $x_i=a_{\pi_i}$，$i=1,2,\cdots m$. N 的所有 m 安排 $\pi=(a_{\pi_1},a_{\pi_2},\cdots,a_{\pi_m})$ 在 m 维欧氏空间中的凸包称为安排多面体，用 $M_n^m(a)$ 表示. 下图给出了

$$M_4^3(a)\ (a=(4,3,2,1)).$$

$x\in M_n^m(a)$，当且仅当向量 x 由 a 所管制.



运输多面体(transportation polytope) 一种与运输问题关联的多面体. 它由如下方程和不等式组的解集所确定：对于给定两个非负向量 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$ 和 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (1\leqslant j\leqslant n),\\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (1\leqslant i\leqslant m),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n).\end{cases}$$

用 $M(a,b)$ 表示这个运输多面体，它的阶为 $m\times n$. 若 $M(a,b)$ 的一个顶点，即 mn 维空间中的一个向量恰有 $m+n-1$ 个非 0 分量，则称它为非退化的. 若一个运输多面体，它的所有顶点全是非退化，则它本身是非退化的；否则，就是退化的. 若 $a=(n,\cdots,n)\in E_m$ 和 $b=(m,\cdots,m)\in E_n$，则这时 $M(a,b)$ 被称为中心运输多面体. 设 $x=(x_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ 为 $M(a,b)$ 的一个顶点，记

$$K(a,b,x)=\{(i,j)\,|\,x_{ij}>0,1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}.$$

两个运输多面体 $M(a^0,b^0)$ 和 $M(a^1,b^1)$，$a^0,a^1\in E_m$，$b^0,b^1\in E_n$，若对于顶点 $x^0\in M(a^0,b^0)$ 和顶点 $x^1\in M(a^1,b^1)$，有

$$K(a^0,b^0,x^0)=K(a^1,b^1,x^1),$$

则此两顶点是等价的. 若对每个 $M(a^0,b^0)$ 的顶点都有 $M(a^1,b^1)$ 的一个顶点与它等价，并且对 $M(a^1,b^1)$

的一个顶点也有 $M(a^0,b^0)$的一个顶点与它等价，则 $M(a^0,b^0)$和 $M(a^1,b^1)$为等价运输多面体. 若 $a=b$，则这时的$M(a,b)$称为对称运输多面体. 对于运输多面体 $M(a,b)$，若

$$\begin{cases}\mu_{I,J}(a,b)=\sum\limits_{i\in I}a_i-\sum\limits_{j\in J}b_i,\ I\subseteq M,J\subseteq N;\\ \mathscr{A}(a,b)=\{(I,J)\mid(I,J)\in\mathscr{A}_{m\times n},\mu_{I,J}(a,b)=0\}\end{cases}$$

其中 $M=\{1,2,\cdots,m\}$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，

$$\mathscr{A}_{m\times n}=\{(I,J)\mid 1\in I\subset M,\varnothing\neq J\subset N\},$$

则两个运输多面体 $M(a^0,b^0)$和 $M(a^1,b^1)$是等价多面体当且仅当对任何$(I,J)\in\mathscr{A}_{m\times n}$，均有

$$\operatorname{sign}\mu(a^0,b^0)=\operatorname{sign}\mu(a^1,b^1),$$

其中，signμ 表示取值 μ 的符号. 对于一个运输多面体 $M(a,b)$，若$|\mathscr{A}(a,b)|=k$，则称它为 k 退化运输多面体. 一个 1 退化运输多面体使得 $\mu_{L,P}(a,b)=0$，则称它为(L,P)退化的.

非退化运输多面体(non-degenerate transportation polytope)　见“运输多面体”.

退化运输多面体(degenerate transportation polytope)　见“运输多面体”.

中心运输多面体(central transportation polytope)　见“运输多面体”.

等价运输多面体(equivalent transportation polytope)　见“运输多面体”.

对称运输多面体(symmetrical transportation polytope)　见“运输多面体”.

k 退化运输多面体(k-degenerate transportation polytope)　见“运输多面体”.

(L,P)退化运输多面体((L,P)-degenerate transportation polytope)　见“运输多面体”.

运输多面体(L,P)正则偶((L,P)-regular pair of transportation polytopes)　一对特殊的运输多面体. 设 $M(a^0,b^0)$和 $M(a^1,b^1)$是两个运输多面体. 它们的阶都是 $m\times n$. 记

$$a^\lambda=\lambda a^1+(1-\lambda)a^0,\quad b^\lambda=\lambda b^1+(1-\lambda)b^0,$$

其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$. 若存在一个 λ^* $(0<\lambda^*<1)$使得 $M(a^{\lambda^*},b^{\lambda^*})$是$(L,P)$退化的，同时，对任何 $\lambda(0<\lambda<1$且 $\lambda\neq\lambda^*)$，$M(a^\lambda,b^\lambda)$全是非退化的，则称 $M(a^0,b^0)$和 $M(a^1,b^1)$为一个(L,P)正则偶. 运输多面体 $M(a^{\lambda^*},b^{\lambda^*})$称为这个$(L,P)$正则偶的中心.

转向运输多面体(axial transportation polytope)　一种特殊的运输多面体. 对给定的 p 个向量

$$a^1=(a_1^1,a_2^1,\cdots,a_{n_1}^1),$$
$$a^2=(a_1^2,a_2^2,\cdots,a_{n_2}^2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^p=(a_1^p,a_2^p,\cdots,a_{n_p}^p),$$

如下的方程和不等式组的解集所确定的多面体称为转向运输多面体：

$$\sum_{\substack{i_1\in N_1,\cdots,i_{s-1}\in N_{s-1}\\ i_{s+1}\in N_{s+1},\cdots,i_p\in N_p}}x_{i_1,i_2\cdots i_p}=a_{i_s}^s,$$
$$1\leqslant i_s\leqslant N_s,s=1,2,\cdots,p,x_{i_1i_2\cdots i_p}\geqslant0,$$
$$i_1\in N_1,i_2\in N_2,\cdots,i_p\in N_p,$$

其中 $N_1=\{1,2,\cdots,n_1\}$，$N_2=\{1,2,\cdots,n_2\}$，$\cdots$，$N_p=\{1,2,\cdots,n_p\}$. 于是，p 指标运输多面体为 $n_1n_2\cdots n_p$ 维空间中的一个多面体. 当 $p=2$ 时，这就是通常的运输多面体.

限额运输多面体(truncated transportation poly-tope)　一类特殊的运输多面体. 它是用超平面割掉一个运输多面体中超过界限制部分而得到的多面体. 从数学表示上，一个限额运输多面体(用 $M(a,b,D)$表示)为如下方程和不等式组的解集所确定的多面体：

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i & (1\leqslant i\leqslant m),\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j & (1\leqslant j\leqslant n),\\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij} & (1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n),\end{cases}$$

其中 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$和 $D=(d_{ij})_{m\times n}$. 当 $d_{ij}\geqslant\min\{a_i,b_j\}$时，这个限额运输多面体就是运输多面体. 若一个 $m\times n$ 的限额运输多面体 $(m,n\geqslant2)$是$(m-1)(n-1)$维的，则称它为正则的. 一般情形，限额运输多面体的维数可以小于$(m-1)\cdot(n-1)$. 此数是通常运输多面体的维数. 若 $M_{k,t}(a,b)=\{(x_{ij})_{m\times n}\in M(a,b)\mid x_{ij}=0$，当 $n-t-1<j-i<k-m+1\}$，其中 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$和 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为正实向量，且 k,t 满足 $0\leqslant k,t\leqslant\min\{m,n\}-1$，则它是一多面体，并称为$(k,t)$限额运输多面体. 当 $k=t=0$ 时，它就成了运输多面体. 若一个 $m\times n$ 的(k,t)限额运输多面体 $M_{k,t}(a,b)$具有维数 $d(M_{k,t})=(m-1)(n-1)-(k(k+1)+t(t+1))/2$，则称它为正则的，其中 $m+n-k-t\geqslant3$. 若一个限额运输多面体$M(a,b,D)$使得 $D=(d_{ij})_{m\times n}$，对于$\varnothing\neq\alpha\subseteq M\times N$，满足

$$d_{ij}\begin{cases}=0 & ((i,j)\in\alpha),\\ \geqslant\min\{a_i,b_i\} & (\text{否则}),\end{cases}$$

其中 $M=\{1,2,\cdots,m\}$，$N=\{1,2,\cdots,n\}$，则称为 α 限额运输多面体.

运输多面体的谱(spectrium of transportation polytope)　带有特定性质的参数的集合. 设 $M(a^0,b^0)$和 $M(a^1,b^1)$是两个运输多面体. 且它们的阶均为 $m\times n$. 记 $a^\lambda=\lambda a^1+(1-\lambda)a^0$ 和 $b^\lambda=\lambda b^1+(1-\lambda)b^0$，其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$. 所有使得$M(a^\lambda,b^\lambda)$为退化运输多面体的 $\lambda(0<\lambda<1)$的集合称为 $M(a^0,b^0)$和 $M(a^1,b^1)$的

谱，用 $S(a^0,b^0,a^1,b^1)$ 表示. 若 $S(a^0,b^0,a^1,b^1)$ 只含有限个元素，则称它为有限的；否则，称为无限的. 谱 $S(a^0,b^0,a^1,b^1)$ 是无限的，当且仅当 $\mathscr{A}(a^0,b^0)\cap\mathscr{A}(a^1,b^1)\neq\varnothing$. 谱可以用来判定两个运输多面体是否等价. 两个运输多面体是等价的当且仅当它们的谱是一个空集. 若谱 $S(a^0,b^0,a^1,b^1)$ 是有限的而且非空，又对每个 $\lambda\in S(a^0,b^0a^1,b^1)$，$M(a^\lambda,b^\lambda)$ 都是 (I_λ,J_λ) 退化的，则称它为简单谱.

正则限额运输多面体(regularly truncated transportation polytope)　见“限额运输多面体”.

(k-t)限额运输多面体((k-t)-truncated transportation polytope)　见“限额运输多面体”.

α 限额运输多面体(α-truncated transportation polytope)　见“限额运输多面体”.

广义运输多面体(generalized transportation polytope)　运输多面体的一种推广. 令 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\geqslant 0$. 同时，还给定两个正实阵 $\alpha=(\alpha_{ij})_{m\times n}$，$\beta=(\beta_{ij})_{m\times n}$. 由如下方程和不等式组的解集所确定的多面体就是广义运输多面体：

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ij}x_{ij}=b_j & (1\leqslant j\leqslant n),\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_{ij}=a_i & (1\leqslant i\leqslant m),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n).\end{cases}$$

当 $\beta_{ij}=\alpha_{ij}=1$ $(1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n)$ 时，广义运输多面体就变成了运输多面体. 由广义运输多面体作为可行解集使得某线性函数取最大或最小的线性规划被称为广义运输问题.

广义运输问题(generalized transportation polytope)　见“广义运输多面体”.

双随机多面体(bistochastic polytope)　一种特殊的多面体. 若将一个 $n\times n$ 方阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 视为 n^2 维向量

$$a=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},\cdots,a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nm}),$$

则由所有 $n\times n$ 双随机阵在 n^2 维空间中形成的点集称为双随机多面体. 所谓双随机阵是指这样的方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，使得对任何 $1\leqslant i,j\leqslant n$，

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1.$$

若在一个双随机阵中，限制所有元素只取 0 或 1，则它就变成了一个置换阵. 若 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)$ 是 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个置换，则相应它的置换阵为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & (j=\pi_i),\\ 0 & (\text{否则}),\end{cases}\quad(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n).$$

所有 $n\times n$ 对称置换阵的凸包称为对称置换多面体. 由伯克霍夫定理，所有双随机阵在 n^2 维欧氏空间中形成一个多面体，而且它的顶点就是置换阵. 双随机多面体就是由所有置换阵在 n^2 维空间中的凸包. 同时，对称置换多面体由如下的方程和不等式组的解集所确定：对任何

$$S\in\mathscr{S}=\{S\subseteq N\mid|S|\geqslant 3,\quad|S|=1(\mathrm{mod}\,2)\},$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{i\in S}\sum\limits_{j\in S-\{i\}}x_{ij}\leqslant|S|-1,\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=1 & (j\in N),\\ x_{ij}=x_{ji} & (j\in N),\\ x_{ij}\geqslant 0 & (i,j\in N).\end{cases}$$

对称置换多面体(symmetric permutation polytope)　见“双随机多面体”.

伯克霍夫定理(Birkholf's theorem)　见“双随机多面体”.

哈密顿圈多面体(Hamiltonian circuit polytope, Hamiltonian cycle polytope)　一种特殊的多面体. 它是由哈密顿圈导出的多面体. 它的顶点相应一个图上的哈密顿圈的邻接矩阵. 因为任何一个图 G 的哈密顿多面体均为与 G 同阶的完全图 K_n(n 为 G 的阶)的哈密顿多面体的一个面，所以通常所说的哈密顿多面体均指完全图的哈密顿多面体. 这时，K_n 的哈密顿圈的集合与如下的方程和不等式组解集确定的多面体整顶点的集合之间有一个一一对应关系：

$$\begin{cases}Wx^{\mathrm{t}}=2e^{\mathrm{t}} & (0\leqslant x\leqslant e),\\ \sum\limits_{i,j\in S}x_{ij}\leqslant|S|-1 & (\text{对任何 } s\subset N),\end{cases}$$

其中，W 为 K_n 关联矩阵，$e=(1,1,\cdots,1)$ 为一个 n 维向量，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_\varepsilon)$，$\varepsilon=n(n-1)/2$，为 ε 维向量，t 表示向量的转置. 由此，哈密顿多面体就是上面方程和不等式组整数解集的凸包. 任何一个哈密顿圈均相应旅行售货员问题(参见“旅行售货员问题”)的一个可行解. 也可以说，哈密顿多面体为旅行售货员问题所有可行解的凸包. 若将 K_n 用 K_n^* 代替，即将 K_n 的每一边用两个有向边代替，在 K_n^* 上考查有向哈密顿圈，则在 K_n^* 上的所有有向哈密顿圈的邻接矩阵的凸包称为有向哈密顿多面体. 若在旅行售货员问题中，将可行解限制在有向哈密顿圈上，则这时被称为有向旅行售货员问题，或非对称旅行售货员问题. 相应地，原旅行售货员问题也称为对称旅行售货员问题. 由此，有向哈密顿多面体也可以说是非对称旅行售货员问题所有可行解的凸包.

有向哈密顿多面体(Hamiltonian directed polytopes)　见“哈密顿圈多面体”.

撰　稿　徐寅峰　陶懋颀　颜基义
审　阅　马仲蕃　刘振宏

线性与多重线性代数

线 性 代 数

线性代数(linear algebra)　代数学的一个以处理线性关系为主的分支.它的历史久远,始于解线性方程组,中国古算书《九章算术》中就讨论过方程组的解法.对线性方程组的深入研究,行列式和矩阵的产生及物理、数学分析与几何上的需要,有力地推动了线性代数的发展与形成,其中西尔维斯特(Sylvester,J. J.)、凯莱(Cayley,A.)等人在线性代数方面的工作是奠基性的.由于与几何中向量的类比,在线性代数中形成了线性空间(向量空间)的概念,线性代数中讨论的问题都可以用线性空间的观点加以讨论.因此,线性空间、线性变换以及与之有关的型与矩阵等构成了线性代数的中心内容.

线性代数的含义随着数学的发展而不断拓广.线性代数的理论与方法已渗透到数学的许多分支.线性代数对多元函数的微积分是基础性的,同时对理论物理、理论化学、计量经济与生物科学等也是不可缺少的数学工具.在工程技术等实际问题中有许多数学问题往往归结为数量间的线性关系(即用一次形式表达的关系),这些线性关系都可以用空间的观点来讨论.因此,线性代数在工程技术与国民经济的许多领域中都有着广泛的应用.

在本分支中,主要介绍一般域上线性代数的基本内容.未涉及的部分可参见第一卷《高等代数》部分.

n 元向量(n-tuple vector)　亦称 n 维向量.通常向量(矢量)的推广.设 P 为域,n 是正整数.P 中 n 个元素构成的有序组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为 P 上的 n 元向量,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为这个向量的第 i 个分量或坐标.P 上全体 n 元向量构成的集合记为 P^n.P^n 中两个 n 元向量相等是指它们的相应分量完全相同.根据讨论的需要,一个 n 元向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 也可以竖起来表示为

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

像通常向量一样,可以对 n 元向量引入加法及 P 中元素与 n 元向量的乘法.n 元向量的加法如下

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n),$$

若 $c\in P$,则它与 n 元向量的乘法如下

$$c(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ca_1,ca_2,\cdots,ca_n).$$

n 维向量(n-tuple vector)　即"n 元向量".

线性空间(linear space)　亦称向量空间.它是线性代数的中心内容和基本概念之一.设 V 是一个非空集合,P 是一个域.若:

1. 在 V 中定义了一种运算,称为加法,即对 V 中任意两个元素 α 与 β 都按某一法则对应于 V 内惟一确定的一个元素 $\alpha+\beta$,称为 α 与 β 的和.

2. 在 P 与 V 的元素间定义了一种运算,称为纯量乘法(亦称数量乘法),即对 V 中任意元素 α 和 P 中任意元素 k,都按某一法则对应 V 内惟一确定的一个元素 $k\alpha$,称为 k 与 α 的积.

3. 加法与纯量乘法满足以下条件:

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$,对任意 $\alpha,\beta\in V$.

2) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$,对任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$.

3) 存在一个元素 $0\in V$,对一切 $\alpha\in V$ 有 $\alpha+0=\alpha$,元素 0 称为 V 的零元.

4) 对任一 $\alpha\in V$,都存在 $\beta\in V$ 使 $\alpha+\beta=0$,β 称为 α 的负元素,记为 $-\alpha$.

5) 对 P 中单位元 1,有 $1\alpha=\alpha(\alpha\in V)$.

6) 对任意 $k,l\in P,\alpha\in V$ 有 $(kl)\alpha=k(l\alpha)$.

7) 对任意 $k,l\in P,\alpha\in V$ 有 $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

8) 对任意 $k\in P,\alpha,\beta\in V$ 有 $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$,则称 V 为域 P 上的一个线性空间,或向量空间.V 中元素称为向量,V 的零元称为零向量,P 称为线性空间的基域.当 P 是实数域时,V 称为实线性空间.当 P 是复数域时,V 称为复线性空间.例如,若 V 为三维几何空间中全体向量(有向线段)构成的集合,P 为实数域 R,则 V 关于向量加法(即平行四边形法则)和数与向量的乘法构成实数域 R 上的线性空间.又如,若 V 为数域 P 上全体 $m\times n$ 矩阵组成的集合 $M_{mn}(P)$,V 的加法与纯量乘法分别为矩阵的加法和数与矩阵的乘法,则 $M_{mn}(P)$ 是数域 P 上的线性空间.V 中向量就是 $m\times n$ 矩阵.再如,域 P 上所有 n 元向量 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 构成的集合 P^n 对于加法:$(a_1,a_2,\cdots,a_n)+(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$ 与纯量乘法:$\lambda(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$ 构成域 P 上的线性空间,称为域 P 上 n 元向量空间.

向量空间(vector space)　即"线性空间".

向量(vector)　见"线性空间".

零向量(zero vector)　见"线性空间".

基域(basic field)　见“线性空间”.

实线性空间(real linear space)　见“线性空间”

复线性空间(complex linear space)　见“线性空间”

纯量乘法(scalar multiplication)　见“线性空间”.

数量乘法(scalar multiplication)　见“线性空间”.

***n* 元向量空间**(vector space of n-tuple vector)　见“线性空间”.

线性组合(linear combination)　线性代数的基本概念之一. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 1)$是域 P 上线性空间 V 中的有限个向量. 若 V 中向量 α 可以表示为

$$\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s$$
$$(k_i \in P, i = 1,2,\cdots,s),$$

则称 α 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一个线性组合,亦称 α 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示或线性表出. 例如,在三维线性空间 P^3 中,向量 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$可由向量组 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(0,1,0),\alpha_3=(0,0,1)$线性表出:$\alpha=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3$. 又设$\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是域 P 上线性空间 V 中无限多个向量组成的向量组,若 V 中的向量 α 可以表示为

$$\alpha = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\alpha_\lambda \quad (a_\lambda \in P, \Lambda \text{ 为下标集}),$$

但除有限个 λ 外,$a_\lambda=0$,则称 α 为向量组$\{\alpha_\lambda\}$的线性组合,或者称 α 可由向量组$\{\alpha_\lambda\}$线性表示(出).

线性表示(linear expression)　见“线性组合”.

线性表出(linear expression)　见“线性组合”.

等价向量组(equivalent vector system)　线性代数的基本概念之一. 可互相线性表出的向量组. 若线性空间 V 的向量组 Ⅰ 中的每个向量都可由 V 中向量组 Ⅱ 线性表出,并且向量组 Ⅱ 中的每个向量也可由向量组 Ⅰ 线性表出,则称向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 等价. 等价向量组有下列性质:

1. 自反性:每一向量组都与自身等价.

2. 对称性:若向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 等价,则向量组 Ⅱ 也与 Ⅰ 等价.

3. 传递性:若向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅱ 等价,并且向量组 Ⅱ 与向量组 Ⅲ 等价,则向量组 Ⅰ 与向量组 Ⅲ 等价.

线性相关(linear dependence)　向量间的一种基本关系. 设 V 是域 P 上的线性空间,$\alpha_i\in V$ $(i=1,2,\cdots,s)$. 若存在 P 中 s 个不全为零的元素 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使等式 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 成立,则称向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关;否则,称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 换言之,若仅在 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 全为零时,才有

$$\sum_{i=1}^{s} k_i\alpha_i = 0,$$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关. 单独一个零向量是线性相关的;单独一个非零向量是线性无关的. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关的充分必要条件是其中有一向量 α_j 可由其余 $s-1$ 个向量线性表示. 对 V 中无限多个向量组成的向量组$\{\alpha_\lambda\}$,$\lambda\in\Lambda$,若$\{\alpha_i\}$中存在一些向量是线性相关,则称此向量组线性相关;若向量组$\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$中任意有限个向量的向量组线性无关,则称此向量组$\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$线性无关.

线性无关(linear independence)　见“线性相关”.

替换定理(substitution theorem)　线性代数的基本定理. 在线性空间 V 中给出两个有限向量组:

1. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$;

2. $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$.

若向量组 1 线性无关,并且向量组 1 中的每个向量 α_i 都可由向量组 2 线性表示,则 $r\leqslant s$,而且可以对向量组 2 中的向量重新排列,使得用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 替换重新排列之后的前 r 个向量后,所得的向量组与向量组 2 等价. 此即替换定理.

线性空间的维数(dimension of a linear space)　对线性空间的重要刻画. 即线性空间中线性无关向量的最大个数. 若域 P 上的线性空间 V 中存在 n 个线性无关的向量,而任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的,则称 V 是 n 维线性空间,数 n 称为它的维数,记为 $\dim V=n$. 例如,由域 P 上全体 m 阶(方)矩阵组成的集合$M_{m\times m}(P)$是域 P 上 m^2 维线性空间,也记为 $P^{m\times m}$. 只含零向量的零空间的维数规定为零. 零维与 n 维线性空间统称为有限维线性空间. 若在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量,则称 V 为无限维的. 例如,P 上全体一元多项式集合 $V=P[x]$ 是 P 上的无限维线性空间.

***n* 维线性空间**(n-dimensional linear space)　见“线性空间的维数”.

零维线性空间(zero-dimensional linear space)　见“线性空间的维数”.

有限维线性空间(finite-dimensional linear space)　见“线性空间的维数”.

无限维线性空间(infinite-dimensional linear space)　见“线性空间的维数”.

线性空间的基(basis of a linear space)　对线性空间的重要刻画. 即生成线性空间的线性无关的向量组. 域 P 上线性空间 V 中的向量组$\{\alpha_i\}_{i\in I}$称为线性空间 V 的一个基或基底. 若它满足条件:

1. $\{\alpha_i\}_{i\in I}$中任意有限个向量都线性无关.

2. V 中任一向量 α 都是$\{\alpha_i\}$中有限个向量的线性组合.

基底中所含向量个数即线性空间的维数. 向量 α 由基底线性表出的式子

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$$

中的 a_i 称为 α 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的第 i 个坐标或第 i 个分量. 全体分量 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 α 关于基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的坐标. V 中向量 α 的坐标由 α 自身与基底惟一确定. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 V 的基底的充分必要条件是 V 中每一向量可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 惟一地线性表出. 对无限维线性空间 V, 若 V 中每一向量皆可由 $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 惟一地线性表出, 则称 $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为 V 的基.

向量的坐标(coordinates of a vector) 见"线性空间的基".

基底(basis) 见"线性空间的基".

坐标变换公式(coordinate transformation formula) 解析几何中(不变原点的)坐标变换公式的推广. 设 V 是域 P 上 n 维线性空间, 且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 与 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n$ 皆是 V 的基. 于是有

$$\varepsilon'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \varepsilon_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

以 ε'_i 关于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的坐标 $(a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni})$ 为第 i 列构成的 n 阶矩阵 (a_{ij}) 称为由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n$ 的过渡矩阵. 若 $\alpha \in V$ 关于基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 与基 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n$ 的坐标分别为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n)$, 则其两坐标间的关系, 可由过渡矩阵 (a_{ij}) 表示为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

上式称为坐标变换公式.

过渡矩阵(transition matrix) 见"坐标变换公式".

极大线性无关组(maximal linearly independent system) 线性空间的基对向量集的推广. 设 V 是域 P 上的线性空间, S 是 V 的子集. 若 S 的一部分向量线性无关, 但在这部分向量中, 加上 S 的任一向量后都线性相关, 则称这部分向量是 S 的一个极大线性无关组. V 中子集的极大线性无关组不是惟一的, 例如, V 的基都是 V 的极大线性无关组. 它们所含的向量个数(基数)相同. V 的子集 S 的极大线性无关组所含向量的个数(基数), 称为 S 的秩. 只含零向量的子集的秩是零. V 的任一子集都与它的极大线性无关组等价. 特别地, 当 S 等于 V 且 V 是有限维线性空间时, S 的秩就是 V 的维数.

向量子集的秩(rank of a vector subset) 见"极大线性无关组".

线性子空间(linear subspace) 线性空间中部分向量组成的线性空间. 设 W 是域 P 上的线性空间 V 的一个非空子集合, 若对于 V 中的加法及域 P 与 V 的纯量乘法构成域 P 上的一个线性空间, 则称 W 为 V 的线性子空间, 或简称子空间. V 的非空子集 W 是子空间的充分必要条件是:

1. 子集合 W 的任意两个向量 α 与 β 之和 $\alpha+\beta$ 仍是 W 的向量.

2. 域 P 的任一数 k 与子集合 W 的任意一个向量 α 的积仍是 W 的向量.

线性空间 V 自身与单独一个零向量都是 V 的线性子空间. 这两个特殊的子空间称为 V 的平凡子空间; 除平凡子空间外的线性子空间称为 V 的真子空间.

平凡子空间(trivial subspace) 见"线性子空间".

真子空间(proper subspace) 见"线性子空间".

生成子空间(generated subspace) 一种特殊的子空间. 域 P 上线性空间 V 的任一子集 M 中向量的所有线性组合构成 V 的子空间, 称为由 M 生成的子空间, 记为 $L(M)$, 称 M 为 $L(M)$ 的生成集(系). 任一含 M 的子空间必含 $L(M)$, 即 $L(M)$ 是含 M 的最小子空间.

生成集(generating set) 见"生成子空间".

生成系(generating system) 见"生成子空间".

子空间的和(sum of subspaces) 子空间的一种运算. 设 V 是域 P 上的线性空间, $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 是 V 的子空间, 若

$$S = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s \mid \alpha_i \in V_i, i = 1, 2, \cdots, s\},$$

则 S 是 V 的子空间, 称为子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 的和, 记为 $V_1 + V_2 + \cdots + V_s$; 子空间 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 的集合交 $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_s$ 也是 V 的子空间, 称为 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 的交. 设 $\dim V = n$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的基, 若 V_1 是 V 的子空间, 则 $\dim V_1 \leqslant n$. 当 $\dim V_1 < n$, 及 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_m$ 为 V_1 的基时, 必存在 $\varepsilon'_{m+1}, \cdots, \varepsilon'_n$ 使 $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \cdots, \varepsilon'_n$ 为 V 的基. 由 $\varepsilon'_{m+1}, \cdots, \varepsilon'_n$ 生成的子空间 V_2 称为 V_1 的余子空间(或补子空间). V_1 与它的余子空间 V_2 的和 $V_1 + V_2 = V$, 它们的交 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, 此时, 又称 V 为 V_1 与 V_2 的直和.

子空间的交(intersection of subspaces) 见"子空间的和".

补子空间(complementary subspace) 见"子空间的和".

余子空间(complementary subspace) 见"子空间的和".

独立于一组基的子空间(subspace independing on a basis) 一种特殊的子空间. 设 V 是域 P 上的

$n(>0)$维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基，简记为 $B(\varepsilon)$. 若 W 是 V 的 r 维子空间，$0<r<n$，且 $\varepsilon_i\notin W$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则称 W 是 V 的独立于基 $B(\varepsilon)$ 的子空间，简称 W 是具性质 Q 的子空间. 取 $a\in P$，$a\neq 0$，若记 $W(a)=L(\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_{r-1}+\varepsilon_r,\varepsilon_r+a\varepsilon_{r+1})$，则 $W(a)$ 就是 V 的一个独立于基 $B(\varepsilon)$ 的子空间. 若 $a,b\in P$，$a\neq b$，则 $W(a)\neq W(b)$. 从而，有定理：若 P 是无限域，M_Q 是独立于基 $B(\varepsilon)$ 的所有 r 维子空间组成的集合，则 $|M_Q|=|P|$. 即集合 M_Q 与 P 的基数相等. 当性质 Q 是其他内容时，定理的结论仍然成立. 例如，Q 为下列两项：

1. $0<r<n$，W 是 V 的 r 维子空间.

2. $0<k<n$，U 是 V 的 k 维子空间，W 是 U 在 V 中的余子空间.

Q 是某种规定性，W 是 V 的具有性质 Q 的子空间，对于一般的性质 Q，猜想：$|M_Q|=|P|$，其中 P 是无限域，M_Q 是所有具有性质 Q 的子空间 W 所组成的集合.

具有性质Q的子空间(subspace with a property Q)　见“独立于一组基的子空间”.

子空间的直和(direct sum of subspaces)　亦称子空间的直接和. 子空间的一种特殊运算. 设 V_1，V_2 是线性空间 V 的两个子空间，若和空间 V_1+V_2 中每个向量 α 都能惟一地分解为形式：

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2\quad(\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2),$$

则称和 V_1+V_2 为直和，记为 $V_1\oplus V_2$. 对于线性空间 V 的两个子空间 V_1,V_2，下列命题是等价的：

1. V_1+V_2 是直和.

2. 零向量的表示法惟一，即 $\alpha_1+\alpha_2=0(\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)$，当且仅当 α_1,α_2 为零向量时成立，即零向量的表示法惟一.

3. V_1 与 V_2 的交 $V_1\cap V_2=\{0\}$.

4. $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

多个子空间的直和，可以类似地定义，并且对多个子空间的直和也有相应于上述 1—4 的等价命题，但对多个子空间，上述命题 3 需改写为

$$V_i\cap\sum_{j\neq i}V_j=0\quad(i=1,2,\cdots,s).$$

子空间的直接和(direct sum of subspaces)　即“子空间的直和”.

维数公式(dimension formula)　两子空间的维数之间的关系式. 设 V_1,V_2 是 n 维线性空间 V 的两个线性子空间，则 V_1 与 V_2 的维数满足下面的公式：子空间 V_1 与 V_2 的维数之和等于和空间 V_1+V_2 的维数与交空间 $V_1\cap V_2$ 的维数和. 即

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

特别地，当 V_1+V_2 是直和时，此公式变为

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2).$$

商空间(quotient space)　一个线性空间模一个子空间所得的线性空间. 设 V 是域 P 上的线性空间，W 是 V 的子空间，对 V 中每一元 α，定义 $\alpha+W=\{\alpha+\beta\mid\beta\in W\}$，设 $\overline{V}=\{\alpha+W\mid\alpha\in V\}$，利用 V 的加法及 P 与 V 的纯量乘法，可以在 $\overline{V}$ 内引入如下的加法及 P 与 $\overline{V}$ 的纯量乘法：

$$(\alpha+W)+(\beta+W)=(\alpha+\beta)+W,$$
$$k(\alpha+W)=k\alpha+W\quad(k\in P).$$

这样的定义是完全确定的，而且 $\overline{V}$ 关于这样定义的运算构成域 P 上的一个线性空间，称为 V 对子空间 W 的商空间，记为 V/W. 例如，若 V 是 P 上 5 维线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 是基，W 是由 α_1,α_2 生成的子空间，则 V/W 是由三个元素 $\alpha_3+W,\alpha_4+W,\alpha_5+W$ 生成的商空间，而且这三个元素正好是 V/W 的基. 一般地，若 $\dim V/W$ 有限，则称其为 W 关于 V 的余维数，记为 $\mathrm{Codim}\,W$.

余维数(codimension)　见“商空间”.

卡氏积空间(Cartesian product space)　由一些线性空间按 n 维向量的办法构作的线性空间. 若 V_i 是域 P 上的线性空间，$i=1,2,\cdots,m$，则集合

$$X=\{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\mid\alpha_i\in V_i,i=1,2,\cdots,m\}$$

对加法：$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)+(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m)$ 与纯量乘法：$\lambda(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,\cdots,\lambda\alpha_m)$，$\lambda\in P$ 构成 P 上的线性空间，称为线性空间 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的卡氏积空间，记为 $V_1\times V_2\times\cdots\times V_m$，简记为 $\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i$.

线性映射(linear mapping)　亦称同态或线性同态. 线性代数的中心内容和基本概念之一. 是同一域上两个线性空间 V 与 W 之间具有线性性质的映射，即 V 到 W 的映射 φ，若对任意 $\alpha,\beta\in V$，$k\in P$，满足条件：

1. $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$；

2. $\varphi(k\alpha)=k\varphi(\alpha)$；

则称 φ 为 V 到 W 的线性映射，或称为线性算子. 把 V 中每一元素映射成 W 中零元素的映射是线性映射，称为零映射. 若 φ 是双射，则称 φ 为 V 与 W 的线性同构，同时称 φ 为线性空间的同构映射. 建立了线性同构的两个线性空间，称为同构的线性空间. 当 $W=P$ 时，V 到 P 的线性映射也称为线性函数.

域 P 上线性空间 V 到 W 的全体线性映射的集合，记为 $\mathrm{Hom}_P(V,W)$. 在 $\mathrm{Hom}_P(V,W)$ 中可以引入加法与纯量乘法，若对任意的 $\varphi,\psi\in\mathrm{Hom}_P(V,W)$，任意 $\alpha\in V$，$k\in P$，规定：

$$\varphi+\psi:(\varphi+\psi)(\alpha)=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha),$$
$$k\varphi:(k\varphi)(\alpha)=k\varphi(\alpha),$$

则 $\mathrm{Hom}_P(V,W)$ 构成域 P 上的线性空间.

线性同态(linear mapping)　即“线性映射”.

线性算子(linear operator) 见“线性映射”.

零映射(zero mapping) 见“线性映射”.

线性空间的同构映射(isomorphism mapping of linear spaces) 见“线性映射”.

同构的线性空间(isomorphic linear spaces) 见“线性映射”.

线性函数(linear function) 见“线性映射”.

线性映射的值域(range domain of a linear mapping) 线性映射的像. 设 σ 是域 P 上线性空间 V 到 W 的一个线性映射,V 中所有元素在 σ 下的像所成的集合 $\sigma(V)$(也记为 $\mathrm{Im}\sigma$)构成 W 的线性子空间,称为 σ 的像空间,或 σ 的值域. 在线性映射 σ 下 V 中以零向量为像的全体向量组成的集合 $\sigma^{-1}(0)$(也记为 $\ker\sigma$)构成 V 的线性子空间,称为 σ 的核. 当 V 是 n 维线性空间时,值域为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的像 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 生成的子空间,其维数称为线性映射 σ 的秩;核的维数称为 σ 的零度. σ 的秩与零度的和等于 V 的维数. $\sigma(V)$ 与商空间 $V/\sigma^{-1}(0)$ 是同构的.

像空间(image space) 见“线性映射的值域”.

线性映射的核(kernel of a linear mapping) 见“线性映射的值域”.

线性映射的秩(rank of a linear mapping) 见“线性映射的值域”.

线性映射的零度(nullity of a linear mapping) 见“线性映射的值域”.

对偶空间(dual space) 一种特殊的线性空间. 即线性空间的线性函数空间. 设 V 是域 P 上的线性空间,V 的所有线性函数构成的域 P 上的线性空间,称为 V 的对偶空间,记为 V^*(即 $\mathrm{Hom}_P(V,P)$). 当 $\dim V=n$,并且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基时,由等式 $\varepsilon_i^*(\varepsilon_j)=\delta_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 所确定的 n 个线性函数 $\varepsilon_1^*,\varepsilon_2^*,\cdots,\varepsilon_n^*$ 是 V^* 的基,称为基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基. 由上知,当 $\dim V=n$ 有限时,$\dim V^*=\dim V=n$;但当 $\dim V$ 无限时,二者不再相等,即它们的基元素不再是一一对应的.

对偶基(dual basis) 见“对偶空间”.

对偶原理(principle of duality) 关于对偶空间的结论. 指有限维线性空间的二次对偶空间可对等于原空间的原理. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间,V^* 是 V 的对偶空间,V^{**} 是 V^* 的对偶空间. 对 V 中每一向量 α,设 $\alpha\to\alpha^{**}\in V^{**}$,其中 $\alpha^{**}(\beta^*)=\beta^*(\alpha)$,$\beta^*$ 是 V^* 中任意向量,这一映射是 V 与 V^{**} 的同构映射,并且 V^{**} 中的每一元素 α^{**} 由且仅由 V 中某一元素 $\alpha\in V$ 给出,因此,V^{**} 可以看成与 V 是一样的,这就是对偶原理.

对偶映射(dual mapping) 亦称转置映射. 一种特殊的线性映射. 设 φ 是域 P 上线性空间 V_1 到 V_2 的线性映射,对每个 $\alpha^*\in V_2^*$(V_2 的对偶空间)由等式 $\varphi^*(\alpha^*)=\alpha^*\varphi$ 确定的 φ^* 是 V_2^* 到 V_1^* 的线性映射,称为 φ 的对偶映射. 若 φ 是满射,则 φ^* 是单射;若 φ 是单射,则 φ^* 是满射. 当 φ 的秩有限时,φ^* 的秩与 φ 的秩相等;当 φ 是同构映射时,$(\varphi^*)^{-1}$ 称为 V_1^* 与 V_2^* 的逆步映射.

转置映射(transposed mapping) 即“对偶映射”.

逆步映射(contragradient mapping) 见“对偶映射”.

线性变换(linear transformation) 一种特殊的线性映射. 设 V 是域 P 上的线性空间,$\mathrm{Hom}_P(V,V)$ 中的元素,即 V 到 V 的线性映射,称为 V 的线性变换. 使 V 中每一元素的像仍为自身的变换,是 V 的一种线性变换,称为恒等线性变换,或单位线性变换;$\mathrm{Hom}_P(V,V)$ 中的零元,称为零变换;$\mathrm{Hom}_P(V,V)$ 中有逆变换的线性变换,称为可逆的. 若 σ 是可逆线性变换,则其逆变换亦为线性变换,称为 σ 的逆变换,记为 σ^{-1}. 取定 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 后,$\mathrm{Hom}_P(V,V)$ 的运算与结构可用矩阵作为工具来刻画.

恒等变换(identity transformation) 见“线性变换”.

单位变换(unit transformation) 见“线性变换”.

零变换(zero transformation) 见“线性变换”.

可逆变换(invertible transformation) 见“线性变换”.

逆变换(inverse transformation) 见“线性变换”.

全线性变换代数(algebra of total transformations) 线性空间上全体线性变换所成的代数. 设 V 是域 P 上的线性空间,若以映射的合成作为 $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ 的乘法,则 P 上线性空间 $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ 是 P 上的代数,称为 V 上的全线性变换代数. 设 $\sigma\in\mathrm{Hom}_P(V,V)$,若 $\sigma^2=\sigma$,则称 σ 为幂等变换,或射影变换;若 $\sigma^m=0$,则称 σ 为幂零变换;若 $\sigma^m=E$,则称 σ 为幂单变换,或幂幺变换. 特别地,当 $m=2$ 时,幂单变换 σ 亦称对合变换. 当 V 是域 P 上 n 维线性空间时,全线性变换代数 $\mathrm{Hom}_P(V,V)$ 与全阵代数 $M_n(P)$ 同构.

幂幺变换(unipotent transformation) 见“全线性变换代数”.

幂等变换(idempotent transformation) 见“全线性变换代数”.

幂零变换(nilpotent transformation) 见“全线

性变换代数”.

幂单变换(unipotent transformation) 见“全线性变换代数”.

对合变换(involution transformation) 见“全线性变换代数”.

射影变换(projective transformation) 见“全线性变换代数”.

非奇异线性变换(nonsingular linear transformation) 一类重要的线性变换. 即可逆的线性变换. 设 V 是域 P 上的线性空间,$\sigma\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$,若存在 $\lambda\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$,使 $\lambda\sigma=E$(单位线性变换),则称 σ 为非奇异线性变换;否则,称为奇异的. 当 $\dim V=n$ 时,非奇异线性变换亦称为非退化线性变换,或满秩线性变换,或正则线性变换. 在 $\dim V=n$ 的条件下,σ 是可逆的充分必要条件为 σ 是非奇异的,因此,在有限维的条件下也可以说非奇异线性变换就是可逆线性变换.

非退化线性变换(nondegenerate linear transformation) 见“非奇异线性变换”.

奇异线性变换(singular linear transformation) 见“非奇异线性变换”.

满秩线性变换(full rank linear transformation) 见“非奇异线性变换”.

正则线性变换(regular linear transformation) 见“非奇异线性变换”.

域上的矩阵(matrix over a field) 实矩阵与复矩阵概念的推广. 若 P 为一个域,$a_{ij}\in P$ $(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$,则称

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}$$

为 P 上的 m 行、n 列的矩阵,也称为 P 上的 $m\times n$ 矩阵,记为 $A\in P^{m\times n}$ 或 $A\in M_{m\times n}(P)$. 当 $m=n$ 时又称 A 为 P 上的 n 阶方阵. 若 $a_{ij}=0$ $(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$,则称 A 为 P 上的 $m\times n$ 零矩阵;若 $m=n$ 且 $a_{ii}=1$ $(i=1,2,\cdots,n,a_{ij}=0,\forall\, i\neq j)$,则称 A 为 n 阶单位方阵,常记为 I_n 或 E_n. 在矩阵 A 中,称 $(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 为 A 的第 i 个行向量,而称 $(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$($T$ 表示转置)为 A 的第 j 个列向量;若 $B=(b_{ij})_{n\times m}\in P^{n\times m}$ 满足 $b_{ij}=a_{ji}$ $(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$,则 B 称为 A 的转置矩阵,常记为 $B=A^T$ 或 $B=A'$. 若 $A=A^T$(此时一定有 $m=n$,即 A 为 n 阶方阵),则称 A 为 P 上的 n 阶对称矩阵. 在 P 的特征数 $\mathrm{ch}P\neq 2$ 时,若 $A=-A^T$(此时仍有 $m=n$),则称 A 为 P 上的 n 阶反对称矩阵,这里 $-X$ 在一般的情况下表示矩阵 $X=(x_{ij})_{m\times n}$ 的负矩阵,即 $-X=(-x_{ij})_{m\times n}$. 域 P 上的矩阵在 P 上的线性方程组理论与 P 上线性空间的线性变换理论中起着与实(复)数域上相应理论中同样的作用. 上述定义与结果都可推广到交换环上.

n 阶方阵(matrix of order n) 见“域上的矩阵”.

n 阶单位方阵(identity matrix of order n) 见“域上的矩阵”.

零矩阵(zero matrix) 见“域上的矩阵”.

转置矩阵(transposed matrix) 见“域上的矩阵”.

对称矩阵(symmetric matrix) 见“域上的矩阵”.

反对称矩阵(skew symmetric matrix) 见“域上的矩阵”.

域上矩阵的秩(rank of a matrix over fields) 数域上矩阵的秩的推广. 若 A 为域 P 上的 $m\times n$ 矩阵,m 个行向量中线性无关向量的最大数为 r_1,n 个列向量中线性无关向量的最大数为 r_2,则 $r_1=r_2$. 这个公共值称为 A 的秩,记为 $\mathrm{rank}\,A$. 由此定义知,$\mathrm{rank}\,A\leqslant\min(m,n)$;$\mathrm{rank}\,A=0$ 的充分必要条件是 $A=0$. 当 $m=n$ 时,若 $\mathrm{rank}\,A=n$,则称 A 为满秩矩阵或非异矩阵.

满秩矩阵(full rank matrix) 见“域上矩阵的秩”.

非异矩阵(nonsingular matrix) 见“域上矩阵的秩”.

域上矩阵的运算(operations of matrices over field) 数域上矩阵运算的推广. 域 P 上矩阵的运算与实(复)矩阵运算的定义相同. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}\in P^{m\times n}$,规定 $A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$(即对应元素相加(减)). 对任意的 $\lambda\in P$,规定 $\lambda A=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=A\lambda$(即以 λ 乘 A 的一切元素). 设 $C=(c_{ij})_{p\times q}\in P^{p\times q}$,仅当 $n=p$ 时定义

$$AC=\Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}a_{ik}c_{kj}\Big)_{m\times q}$$

(即以 A 的第 i 行元素分别对应地乘 C 的第 j 列元素,求和后作为 AC 的(i,j)元素). 值得注意的是:$A\neq 0,C\neq 0$ 时仍可能有 $AC=0$. 且一般地,当 $C\in P^{n\times m}$ 时 $AC=CA$ 未必成立. 但当相应的运算有定义时,矩阵的运算有下述规律:

$$A+B=B+A;$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C;$$
$$A(\lambda B_1+\mu B_2)=\lambda AB_1+\mu AB_2;$$
$$(\lambda A_1+\mu A_2)B=\lambda A_1B+\mu A_2B,$$

其中 $\lambda,\mu\in P$;$A(BC)=(AB)C$;$(AB)^T=B^TA^T$;$(A+B)^T=A^T+B^T$;$(\lambda A)^T=\lambda A^T$. $P^{n\times n}$ 对上述运算成一环(事实上还是 P 代数),称为 P 上的 n 阶

全阵环.

n 阶全阵环($n\times n$ full matrix ring)　见“域上矩阵的运算”.

域上矩阵的逆矩阵(inverse matrix of a matrix over field)　数域上逆矩阵的推广. 若 $A\in P^{n\times n}$,则 $\operatorname{rank}A=n$ 的充分必要条件是有 $X\in P^{n\times n}$ 使 $AX=XA=I_n$,此时称 X 为 A 的逆矩阵,A 又称为可逆矩阵,并记 $X=A^{-1}$,并且必有 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$. 当 $B\in P^{n\times n}$ 也有逆矩阵时,$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 特别地,若 $0\neq a\in P$,则 $(aA)^{-1}=a^{-1}A^{-1}$. $P^{n\times n}$ 中全体可逆矩阵对乘法成一群(非交换群),称为 P 上的 n 阶一般线性群,记为 $\mathrm{GL}_n(P)$. 上述定义与结果都可推广到交换环上.

可逆矩阵(invertible matrix)　见“域上矩阵的逆矩阵”.

域上矩阵的行列式(determinant of a matrix over a field)　实(复)矩阵的行列式定义的推广. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in P^{n\times n}$,定义

$$\det A=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)},$$

其中 S_n 表 n 元置换全体,

$$\varepsilon_\sigma=\begin{cases}1 & (\sigma\text{ 为偶置换}),\\ -1 & (\sigma\text{ 为奇置换}),\end{cases}$$

称 $\det A$ 为矩阵 A 的行列式,有时也记为 $|A|$. $\det A\neq 0$ 等价于 A 为可逆矩阵. 行列式有下述基本性质:

1. 将 A 的一行(列)加上另一行(列)的 a 倍,$a\in P$,新旧矩阵行列式值相等.

2. 交换 A 的两行(列)后,新旧矩阵的行列式之值差一个 (-1) 因子.

3. $\det A=\det A^T$.

4. 若 $B\in P^{n\times n}$,则 $\det(AB)=\det A\det B$.

5. 若 A 可逆,则 $\det(A^{-1})=(\det A)^{-1}$.

6. 若

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & A_3\\ 0 & A_2\end{pmatrix},$$

A_1 为方阵,则 $\det A=\det A_1\det A_2$.

域上的线性方程组(system of linear equations over a field)　数域上线性方程组的推广. 对未知量 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 与域 P,形如

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1}$$

(其中,$a_{ij},b_j\in P$,$i=1,2,\cdots,m$,$j=1,2,\cdots,n$)的方程组称为域 P 上关于 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组. $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 称为此方程组的常数项. $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 时,又称方程组(1)为齐次线性方程组. $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为此方程组的系数矩阵;$m\times(n+1)$ 矩阵

$$(A\ b)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$$

称为此方程组的增广矩阵. 若记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$,则线性方程组(1)可用矩阵乘法表为

$$AX=b\tag{1}'$$

的形式. 当 $b=\theta=(0,0,\cdots,0)^T$ 时,又称(1)为“齐次线性方程组”,或称为(1)对应的齐次线性方程组. 当且仅当 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}(A\ b)$ 时方程组(1)有解. 通常可对增广矩阵 $(A\ b)$ 做初等行变换(即将它的某一行元素乘以 P 中元素后加到另一行上,或将它的某一行元素都乘以 P 中的一个非零元,或由上两种变换复合而成的两行互换)以确定方程组(1)有解或无解,在(1)有解时,也可以由此求出(1)的一切解来. 当 $m=n$ 且 $\det A\neq 0$ 时,也可用如下的克莱姆法则表出(1)的惟一解:

$$x_j=\frac{\det\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{m,j-1} & b_n & a_{m,j+1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}}{\det A}$$

$$(j=1,2,\cdots,n).$$

齐次线性方程组(homogeneous system of linear equations)　见“域上的线性方程组”.

系数矩阵(coefficient matrix)　见“域上的线性方程组”.

增广矩阵(augmented matrix)　见“域上的线性方程组”.

克莱姆法则(Cramer's rule)　见“域上的线性方程组”.

基础解系(system of fundamental solutions)　齐次线性方程组的一种基本解. 域 P 上的齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

($a_{ij}\in P$)的解都是 P 上的 n 元向量,它们对向量运算构成 P 上的一个线性空间,称为这个齐次线性方程组的解空间. 这个线性空间的任一组基底都称为

这个齐次线性方程组的基础解系. 求齐次线性方程组的解可归结为求它的基础解系，通常可对其系数矩阵用初等行变换求出.

解空间(solution space)　见“基础解系”.

域上矩阵的特征多项式(characteristic polynomial of a matrix over fields)　实(复)矩阵特征多项式概念的推广. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in P^{n\times n}$，称

$$\varphi(\lambda)=\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$$

为 A 的特征多项式，$\varphi(\lambda)=0$ 又称为 A 的特征方程，它的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$(在域 P 的代数闭包内，未必在 P 中)称为 A 的特征根(值). 线性方程组 $(\lambda_jI_n-A)X=0$(即 $AX=\lambda_jX$)的非零解向量称为 A 对应于特征根 λ_j 的特征向量. $\varphi(\lambda)$ 的展开式必可表为 $\varphi(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n, a_j\in P$. 其中 $a_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})=-\operatorname{tr}A$($\operatorname{tr}A$ 称为 A 的迹)；$a_n=(-1)^n\det A$. 若 $f(x)=f_0x^m+f_1x^{m-1}+\cdots+f_n\in P[x]$，则 $f(A)\equiv f_0A^m+f_1A^{m-1}+\cdots+f_nI_n$ 的特征根为 $f(\lambda_j)$ $(j=1,2,\cdots,n)$. 特别地，A^k 的特征根为 λ_j^k $(j=1,2,\cdots,n)$. 当 A^{-1} 存在时，A^{-1} 的特征根必为 λ_j^{-1} $(j=1,2,\cdots,n)$. 将 A 代入其特征多项式 $\varphi_A(\lambda)$(换 λ 为 A，常数项 a_n 改为 a_nI_n)必得零矩阵，即 $\varphi_A(A)=0$. 此即哈密顿-凯莱定理.

域上矩阵的特征方程(characteristic equation of a matrix over a field)　见“域上矩阵的特征多项式”.

域上矩阵的特征根(eigenvalues of a matrix over a field)　见“域上矩阵的特征多项式”.

域上矩阵的特征向量(eigenvectors of a matrix over a field)　见“域上矩阵的特征多项式”.

哈密顿-凯莱定理(Hamilton-Cayley theorem)　见“域上矩阵的特征多项式”.

线性变换的矩阵(matrix of a linear transformation)　线性变换在一组基下对应的矩阵. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基，σ 是 V 的线性变换，若

$$\sigma(\varepsilon_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\varepsilon_j\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则以 $\sigma(\varepsilon_i)$ 的坐标为第 i 列构成的 n 阶矩阵 (a_{ij})，称为 σ 关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵，常简记为

$$\sigma\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}A,$$

并简称 A 为线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵，其秩与 σ 的秩相同. 同一线性变换关于不同基的矩阵相似. 若

$$\sigma_i\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}A_i\quad(i=1,2),$$

则有如下对应：

1. $\sigma_1+\sigma_2\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}A_1+A_2$.

2. $\sigma_1\sigma_2\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}A_1A_2$.

3. $\lambda\sigma_1\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}\lambda A_1$.

4. σ_1 可逆的充分必要条件是 A_1 可逆，且

$$\sigma_1^{-1}\xrightarrow{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n}A^{-1}.$$

5. 对 $\forall\ \alpha\in V$，若 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，则

$$\sigma_1(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}y_i\varepsilon_i,$$

其中

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=A_1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

对两个线性空间之间的线性映射，也可用类似的方法(两个线性空间各取定一组基)找出它对应的矩阵. 当这两个线性空间的维数不相等时这个矩阵不再是方阵，即行数列数不再相同. 对加法与数乘的上述对应 1 和 3 这里仍是成立的，上述对应 5 也是成立的.

半线性映射(semilinear mapping)　线性映射概念的推广. 设 V 与 V' 分别是域 P 与 P' 上的线性空间，ρ 为 P 与 P' 的同构，若 V 与 V' 的映射 φ 满足条件：

1. 对任意 $\alpha,\beta\in V$ 有 $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$；

2. 对任意 $\alpha\in V, a\in P$ 有 $\varphi(a\alpha)=a^{\rho}\varphi(\alpha)$；

则称 φ 为关于 ρ 的半线性映射，其中 a^{ρ} 表示 $\rho(a)$. 当 $V=V'$，$P=P'$ 时，φ 称为半线性变换. 当 $P=P'$ 且 ρ 是恒等同构时，φ 就是线性映射.

半线性变换(semilinear transformation)　见“半线性映射”.

不变子空间(invariant subspace)　亦称稳定子空间. 一类重要的子空间. 设 σ 是域 P 上线性空间 V 的一个线性变换，W 是 V 的子空间，若 W 在 σ 下的像空间 $\sigma(W)$ 是 W 的子集合，即对于 W 中的任一向量 ξ 在 σ 下的像 $\sigma(\xi)$ 仍是 W 的向量，则称 W 是 σ 的不变子空间，简称 σ 子空间. V 的平凡子空间，σ 的值域与核以及 σ 的特征子空间，都是 σ 的不变子空间. 若只考虑 σ 在其不变子空间 W 上的作用，则得出 W 的一个线性变换，称为 σ 在 W 上的导出线性变换(或 σ 在 W 上的限制)，记为 $\sigma|_W$. 若 V 中元素 $\xi\notin W$，则 $\sigma|_W(\xi)$ 无意义. 上述 σ 的不变子空间 W 必为 V 的直和项，即有 P 上的线性空间 U 使

$$V=W\oplus U.$$

稳定子空间(stable subspace)　即“不变子空间”.

导出线性变换(induced linear transformation)　见“不变子空间”.

矩阵的标准型(canonical form of a matrix) 矩阵的一种表达形式. 指域 P 上的 $n\times n$ 矩阵 A 在相似变换(即将 A 变成 $B=TAT^{-1}$ 的变换,其中 T 为 P 上的 $n\times n$ 可逆矩阵)下的最简形式. 设 A 是 P 上 n 维线性空间 V 上在一组取定的基底下某个线性变换 σ 的矩阵,做 V 关于 σ 的不变子空间的直和分解. 考虑 σ 在这些不变子空间上的限制,继续做这种分解,经有限步可做到不能再分解,最后可得出 V 的一个新基底使在此新基底之下,σ 对应的矩阵 B 取最简单的形式(不可再分解的分块对角形,即准对角形). B 即为 A 的标准型. 当 P 为代数闭域时,由此得出的标准型称为 A 的若尔当标准型. 当 P 为非代数闭域时,由此所得的标准型称为 A 的广义标准型. 求 A 的标准型也可以通过 A 的特征多项式做因式分解求出(参见第一卷《高等代数》相应部分).

若尔当标准型(Jordan canonical form) 见"矩阵的标准型".

广义标准型(generalized canonical form) 见"矩阵的标准型".

循环子空间(cyclic subspace) 一类特殊的子空间. 指由一个向量与一个线性变换确定的子空间. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间,σ 是 V 上的线性变换. 若 $0\neq\xi\in V$,则存在 k 使 $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$ 线性无关,但 $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k}(\xi)$ 线性相关. 由 $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$ 生成的子空间 L,称为 σ 循环子空间. $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$ 称为 L 的 σ 循环基. 特别地,当 $L=V$ 时,V 称为循环空间(关于 σ 的),记为 $V=L(\xi)_\sigma$. 而 σ 称为循环变换. V 的线性变换 σ 是循环的充分必要条件是它的最低多项式(也称最小多项式)的次数为 $n=\dim V$. 若 $V=L(\xi)_\sigma$,ξ 的最低多项式为

$$f(\lambda)=\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-\cdots-a_0,$$

则循环变换 σ 关于基 $\xi,\sigma(\xi),\cdots,\sigma^{k-1}(\xi)$ 的矩阵,恰是 $f(\lambda)$ 的相伴矩阵.

循环基(cyclic basis) 见"循环子空间".

循环空间(cyclic space) 见"循环子空间".

循环变换(cyclic transformation) 见"循环子空间".

特征子空间(characteristic subspace) 一类重要的子空间. 即对应于线性变换的一特征值的子空间. 设 V 是域 P 上的线性空间,σ 是 V 的一个线性变换,σ 的对应于特征值 λ_0 的全体特征向量与零向量所成的集合,对于 V 的加法及数量乘法构成 V 的子空间,称为 σ 的对应于特征值 λ_0 的特征子空间,记为 V_{λ_0}. 若 $L_{\lambda_0}=\{\xi\in V\mid$对某 $s>0$,$(\sigma-\lambda_0E)^s\xi=0$,$E$ 为恒等变换$\}$,则 L_{λ_0} 是 V 的子空间,称为 σ 对应于 λ_0 的广义特征子空间(或根子空间). 当 V 为 n 维线性空间,且 σ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 的全部不同的根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 皆属于 P 时,则 V 是对应于 λ_i $(i=1,2,\cdots,r)$ 的广义特征子空间的直和.

广义特征子空间(generalized characteristic subspace) 见"特征子空间".

根子空间(radical subspace) 见"特征子空间".

不可约线性变换(irreducible linear transformation) 亦称不可分解线性变换. 一种特殊的线性变换. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间,$\sigma\in\mathrm{Hom}_P(V,V)$,若除 0,$V$ 外,不存在 σ 的不变子空间,则称 σ 为不可约线性变换,而称 V 为 σ 不可约空间. σ 为不可约的充分必要条件为 σ 是循环的,并且它的最低多项式为不可约多项式的幂. 若 V 为若干个 $(\geqslant 2)$ σ 不可约子空间的直和,则称 σ 为完全可约的. σ 是完全可约的充分必要条件是它的最低多项式是不同的不可约多项式的积.

不可分解线性变换(indecomposable linear transformation) 即"不可约线性变换".

σ 不可约空间(σ-irreducible space) 见"不可约线性变换".

完全可约线性变换(completely reducible linear transformation) 见"不可约线性变换".

可分解线性变换(decomposable linear transformation) 一种特殊的线性变换. 即可用来对线性空间做直和分解的线性变换. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间,σ 是 V 的线性变换,$V_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,s,s\geqslant 2)$ 是 σ 不变子空间. 若 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$,则称 σ 是可分解变换,而称 V 为 σ 可分解空间. σ 为不可分解的充分必要条件为它是循环的,并且它的最低多项式是不可约多项式的幂.

σ 可分解空间(σ-decomposable space) 见"可分解线性变换".

准素分支空间(primary component space) 线性空间的一类直和项. 设 V 是域 P 上的线性空间,$\sigma\in\mathrm{Hom}_P(V,V)$,且 $f(\lambda)$ 是 σ 的最低多项式,其标准分解式为 $f(\lambda)=p_1(\lambda)^{r_1}p_2(\lambda)^{r_2}\cdots p_s(\lambda)^{r_s}$,若记

$$R_i=\{\xi\in V\mid p_i(\lambda)^{r_i}(\xi)=0\},$$

则

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}R_i\quad(i=1,2,\cdots,s).$$

R_i 称为 σ 的准素分支空间. 它们关于 σ 是不变的. σ 在 R_i 上的导出变换的最低多项式正是 $p_i(\lambda)^{r_i}$. 由分解

$$V=\bigoplus_{i=1}^{s}R_i$$

所决定的射影变换 E_i,称为 σ 的主幂等元素.

主幂等元素(principal idempotent element) 见"准素分支空间".

双线性映射(bilinear mapping) 线性映射的

推广. 设 V_1,V_2 与 W 都是域 P 上的线性空间，φ 是 $V_1\times V_2$ 到 W 的映射. 若对任意固定的 $\beta\in V_2$，φ 是 V_1 到 W 的线性映射，而且对任意固定的 $\alpha\in V_1$，φ 是 V_2 到 W 的线性映射，则称 φ 为双线性映射. 一般地，当给定线性空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 与 W 时，若 $V_1\times V_2\times\cdots\times V_s$ 到 W 的映射 φ 对每一变量是线性的，则称 φ 为多重线性映射. $V\times V$ 到 W 的双线性映射 φ 若满足条件：对$\forall\ \alpha,\beta\in V$，有 $\varphi(\alpha,\beta)=\varphi(\beta,\alpha)$，则称 φ 为对称双线性映射；若 φ 满足条件：对$\forall\ \alpha,\beta\in V$，有 $\varphi(\alpha,\beta)=-\varphi(\beta,\alpha)$，则称 φ 为反对称双线性映射.

对称双线性映射(symmetric bilinear mapping) 见“双线性映射”.

反对称双线性映射(anti-symmetric bilinear mapping) 见“双线性映射”.

双线性函数(bilinear function) 线性函数的推广. 设 V_1,V_2 是域 P 上的线性空间，$V_1\times V_2$ 到 P 的双线性映射 φ 称为 $V_1\times V_2$ 上的双线性函数. 特别地，当 $V_1=V_2=V$ 时，φ 称为 V 上的双线性函数. 若 V 是有限维的，φ 是 V 上的双线性函数，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基，则对$\forall\ \alpha,\beta\in V$，有

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,\quad \beta=\sum_{j=1}^{n}y_j\alpha_j$$

及
$$\varphi(\alpha,\beta)=\sum_{i,j=1}^{n}\varphi(\alpha_i,\alpha_j)x_iy_j.$$

即若以 α,β 表示定义域为 V 的变量，则域 P 上 n 维线性空间 V 上的双线性函数 $\varphi(\alpha,\beta)$ 可以表示为域 P 上变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的双线性型. 以 $\varphi(\alpha_i,\alpha_j)$ 作为 (i,j) 元素的 n 阶矩阵 $(\varphi(\alpha_i,\alpha_j)_{ij})$ 称为双线性函数 φ 关于给定基的矩阵. V 上的双线性函数 φ 关于不同基的矩阵 A,B 相互合同：$A=XBX^T$，其中 X 是原基底到新基底的过渡矩阵. φ 关于基的矩阵 (a_{ij}) 的秩亦称为 φ 的秩. 当 (a_{ij}) 非退化时，φ 亦称为非退化的或满秩的. 当 (a_{ij}) 为对称(反对称)矩阵时，φ 亦称为对称(反对称)双线性函数.

双线性函数的矩阵(matrix of a bilinear function) 见“双线性函数”.

双线性函数的秩(rank of a bilinear function) 见“双线性函数”.

满秩双线性函数(full rank bilinear function) 见“双线性函数”.

非退化双线性函数(nondegenerate bilinear function) 见“双线性函数”.

对称双线性函数(symmetric bilinear function) 一类特殊的映射. 设 V 是域 P 上的线性空间，φ 是 V 上的双线性函数，即 $V\times V$ 到 P 的双线性映射，若对任意 $\alpha,\beta\in V$，恒有 $\varphi(\alpha,\beta)=\varphi(\beta,\alpha)$，则称 φ 为对称双线性函数. 若对任意 $\alpha,\beta\in V$，恒有 $\varphi(\alpha,\beta)=-\varphi(\beta,\alpha)$，则称 φ 为反对称双线性函数. n 维线性空间 V 上的对称(反对称)双线性函数的矩阵是 n 阶对称(反对称)矩阵.

反对称双线性函数(anti-symmetric bilinear function) 见“对称双线性函数”.

线性空间上的二次函数(quadratic function over a linear space) 亦称线性空间上的二次型. 一类特殊的映射. 设 V 是域 P 上的线性空间，Q 是 V 到 P 的映射，称 Q 为 V 上的二次函数，若 Q 满足条件：

1. 对$\forall\ \alpha\in V,k\in P$，有 $Q(k\alpha)=k^2Q(\alpha)$.
2. 对$\forall\ \alpha,\beta\in V$，由
$$Q(\alpha+\beta)-Q(\alpha)-Q(\beta)=\varphi(\alpha,\beta)$$
所确定的 $V\times V$ 到 P 的映射 φ 是 V 上的对称双线性函数. 而称 φ 为与 Q 相伴的双线性函数. 当域 P 的特征$\neq 2$ 时，每个二次函数都能而且只能从与它相伴的双线性函数得出.

线性空间上的二次型(quadratic form over a linear space) 即“线性空间上的二次函数”.

二次函数相伴的双线性函数(bilinear function associated with quadratic function) 见“线性空间上的二次函数”.

半双线性函数(sesquilinear function) 双线性函数的推广. 设 P 为域，J 是 P 的自同构，域中元素 k 在 J 下的像记为 k^J，而 V_1,V_2 是域 P 上的线性空间，$V_1\times V_2$ 到 P 上的映射 φ，若满足：

1. 对任意 $k_1,k_2\in P,\alpha_1,\alpha_2\in V_1,\beta\in V_2$，有
$$\varphi(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1\varphi(\alpha_1,\beta)+k_2\varphi(\alpha_2,\beta);$$
2. 对任意 $k_1,k_2\in P,\alpha\in V_1,\beta_1,\beta_2\in V_2$，有
$$\varphi(\alpha,k_1\beta_1+k_2\beta_2)=k_1^J\varphi(\alpha,\beta_1)+k_2^J\varphi(\alpha,\beta_2);$$

则称 φ 为 $V_1\times V_2$ 上关于 J 的半双线性函数. 当 J 为恒等自同构时，半双线性函数即双线性函数. $V\times V$ 上关于 J 的半双线性函数 φ 称为 V 上的半双线性函数. V 中向量 α,β 在 V 上半双线性函数 φ 下的像 $\varphi(\alpha,\beta)$ 称为 α 与 β 的内积或纯量积. 常简记为 (α,β). 当 $(\alpha,\beta)=0$ 时，称 α 与 β 左正交，也称 β 与 α 右正交.

内积(inner product) 见“半双线性函数”.

纯量积(scalar product) 见“半双线性函数”.

左正交(left orthogonal) 见“半双线性函数”.

右正交(right orthogonal) 见“半双线性函数”.

半双线性函数的秩(rank of a sesquilinear function) 对半双线性函数的一种刻画. 指半双线性函数在一组基下矩阵的秩. 设 V 是域 P 上的线性空间，φ 是 V 上关于 J 的半双线性函数，这里 J 是 P 的自同构，当 $\dim V=n$ 且 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 V 的基底时，若记 $\varphi(e_i,e_j)=a_{ij}$，则矩阵 (a_{ij}) 称为 φ 关于基底

$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的矩阵；若 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 V 的另一基底，此二基底的过渡矩阵为 $T=(t_{ij})$，则 φ 关于基底 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的矩阵为 $(t_{ij})(a_{ij})(t_{ij}^J)'$. 半双线性函数 φ 关于基底的矩阵的秩亦称为 φ 的秩. 当 φ 的秩等于 V 的维数时，φ 称为非退化的或满秩的.

半双线性函数的矩阵(matrix of a sesquilinear function) 见“半双线性函数的秩”.

非退化半双线性函数(non-degenerate sesquilinear function) 见“半双线性函数的秩”.

满秩半双线性函数(full rank sesquilinear function) 见“半双线性函数的秩”.

埃尔米特函数(Hermitian function) 特殊的半双线性函数. 设 V 是域 P 上的线性空间，J 是 P 的自同构，φ 是 V 上的半双线性函数，若 $J=J^{-1}$ 且对每对 $\alpha_1,\alpha_2\in V$，$\varphi(\alpha_1,\alpha_2)=\varphi(\alpha_2,\alpha_1)^J$，则称 φ 为 V 上的埃尔米特函数；当 $J=J^{-1}$ 且 $\varphi(\alpha_1,\alpha_2)=-\varphi(\alpha_2,\alpha_1)^J$ 时，称 φ 为反埃尔米特函数. 特别地，当 J 为恒等自同构时，埃尔米特(反埃尔米特)函数就是对称(反对称)双线性函数. n 维线性空间 V 上的埃尔米特(反埃尔米特)函数对取定基的矩阵是埃尔米特(反埃尔米特)矩阵.

反埃尔米特函数(anti-Hermitian function) 见“埃尔米特函数”.

埃尔米特度量空间(Hermitian metric space) 一类线性空间. 指带非退化埃尔米特函数的线性空间. 设 V 是域 P 上的有限维线性空间，J 是 P 的对合自同构(即 $J=J^{-1}$)，φ 是 V 上关于 J 的埃尔米特(反埃尔米特)函数，若 φ 是非退化的，则称 V 为埃尔米特(反埃尔米特)度量空间，简称埃尔米特空间. 特别地，当 J 为恒等自同构时，称 V 为非退化对称(反对称)或满秩对称(反对称)双线性度量空间. 以上各种度量空间，简称度量空间. 在度量空间内 $\varphi(\alpha,\beta)$ 常用内积 (α,β) 表示. 对 V 中任意 m 个向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，由内积 (α_i,α_j) 为 (i,j) 元素组成的 m 阶矩阵 $((\alpha_i,\alpha_j)_{ij})$，称为关于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的格拉姆矩阵. 关于基底的格拉姆矩阵亦称度量矩阵. 若关于基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 度量矩阵为单位矩阵，则基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 称为标准正交基.

反埃尔米特度量空间(anti-Hermitian metric space) 见“埃尔米特度量空间”.

非退化对称双线性度量空间(non-degenerate symmetric bilinear metric space) 见“埃尔米特度量空间”.

非退化反对称双线性度量空间(non-degenerate antisymmetric bilinear metric space) 见“埃尔米特度量空间”.

满秩对称双线性度量空间(full rank symmetric bilinear metric space) 见“埃尔米特度量空间”.

满秩反对称双线性度量空间(full rank antisymmetric bilinear metric space) 见“埃尔米特度量空间”.

格拉姆矩阵(Gram's matrix) 见“埃尔米特度量空间”.

度量矩阵(metric matrix) 见“埃尔米特度量空间”.

标准正交基(canonical orthogonal basis) 见“埃尔米特度量空间”.

埃尔米特空间(Hermitian space) 即“埃尔米特度量空间”.

正交补(空间)(orthogonal complement) 一种子空间. 给定子空间按埃尔米特函数的正交子空间. 设 φ 是域 P 上的线性空间 V 的埃尔米特函数. 对埃尔米特函数而言，左、右正交是一致的. 因此，若 V 中向量 α,β 的内积 $(\alpha,\beta)=0$，则称 α 与 β 正交. 设 M 是 V 的子空间，若 $M^\perp=\{\alpha\in V\mid\forall\ \beta\in M,\varphi(\alpha,\beta)=0\}$，则 $M^\perp$ 是 V 的子空间，称为 M 的正交补(空间). 若 $M\cap M^\perp\neq 0$，则称子空间 M 是迷向的；此时有非零向量 $\alpha\in M$ 使 $(\alpha,\alpha)=0$，α 称为非零迷向向量. 若 $M\subseteq M^\perp$，则称 M 为全迷向子空间. 若 V 为有限维线性空间，φ 为非退化埃尔米特函数，则 $V=M\oplus M^\perp$，这时 M 与 $M^\perp$ 的维数有关系

$$\dim M^\perp=\dim V-\dim M,$$
$$\dim(M^\perp)^\perp=\dim M.$$

迷向子空间(isotropic subspace) 见“正交补(空间)”.

迷向向量(isotropic vector) 见“正交补(空间)”.

全迷向子空间(totally isotropic subspace) 见“正交补(空间)”.

共轭变换(conjugate transformation) 亦称转置变换. 一种重要的线性变换. 设 V 是域 P 上的线性空间，J 是 P 的对合自同构(即 $J=J^{-1}$)，φ 是 V 上的非退化埃尔米特(反埃尔米特)函数，σ 是 V 的线性变换. 若存在 V 的线性变换 σ^*，使对 V 中任二向量 α,β 满足条件 $\varphi(\sigma(\alpha),\beta)=\varphi(\alpha,\sigma^*(\beta))$，则称 σ^* 为 σ 的共轭变换；若 $\sigma\sigma^*=\sigma^*\sigma$，则称 σ 为正规变换；若 $\sigma=\sigma^*(-\sigma^*)$，则称 σ 为自共轭(反自共轭)变换，或埃尔米特(反埃尔米特)变换；若 J 是 P 的自同构，则 φ 为 V 上的非退化对称(反对称)双线性型. 此时 V 的自共轭(反自共轭)变换，亦称为对称(反对称)变换.

转置变换(transposed transformation) 即“共轭变换”.

正规变换(normal transformation) 见“共轭变换”.

自共轭变换(self-conjugate transformation) 见"共轭变换".

反自共轭变换(anti-selfconjugate transformation) 见"共轭变换".

埃尔米特变换(Hermite's transformation) 见"共轭变换".

反埃尔米特变换(anti-Hermite's transformation) 见"共轭变换".

对称变换(symmetric transformation) 见"共轭变换".

反对称变换(anti-symmetric transformation) 见"共轭变换".

酉空间(unitary linear space) 一种特殊的复线性空间. 指以一类埃尔米特函数作内积的复线性空间. 设 V 是复数域 C 上的线性空间,J 是 C 的(共轭)自同构:$(a+bi)^J=a-bi$. 若在 V 上定义了一个关于 J 的埃尔米特函数,并且对$\forall\ \alpha\in V$,内积$(\alpha,\alpha)\geqslant 0$ 及$(\alpha,\alpha)=0$ 当且仅当 $\alpha=0$,则称 V 为酉空间. n 维酉空间 U 中总存在标准正交基. 对 U 的任一线性变换 σ,都存在它的共轭变换 σ^*. 若以 A,B 分别表示 σ 与 σ^* 关于给定基的矩阵,则 $A=G'^{-1}\overline{B}'G'$,这里 G 是关于给定基的格拉姆矩阵,$\overline{B}'$ 是 B 的转置共轭矩阵. 对 U 的任一正规(埃尔米特)变换 σ,都存在标准正交基,使 σ 关于此基的矩阵为对角形(实对角形)矩阵.

复欧几里得空间(complex Euclidean space) 一种特殊的复线性空间. 指带非退化对称双线性函数的复线性空间. 设 V 是复数域 C 上的线性空间,若在 V 上定义了一个非退化对称双线性函数,则称 V 为复欧几里得空间,简称复欧氏空间. 对 n 维复欧氏空间 V 的每一线性变换 σ,都存在它的共轭变换 σ^*. 在 n 维复欧氏空间 V 内总存在标准正交基. 若以 A,B 分别表示它们在给定基下的矩阵,则 $B=G^{-1}A'G$,这里 G 是关于给定基的格拉姆矩阵. n 维复欧氏空间的线性变换 σ 是对称(反对称)的充分必要条件是 σ 关于标准正交基的矩阵是对称(反对称)矩阵.

辛空间(symplectic linear space) 一种特殊的复线性空间. 指带非退化反对称双线性函数的有限维复线性空间. 设 V 是复数域 C 上的 n 维线性空间,若在 V 上定义了一个非退化反对称双线性函数,则称 V 为辛空间. 在 $2n$ 维辛空间内存在这样的基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{2n}$,关于它的格拉姆矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$2n$ 维辛空间的每一线性变换 σ,都存在它的共轭变换 σ^*. 若以 A,B 分别表示 σ 与 σ^* 关于给定基的矩阵,则 $B=G^{-1}A'G$,其中 G 是关于给定基的格拉姆矩阵,A' 是 A 的转置矩阵. $2n$ 维辛空间的线性变换 σ 是对称(反对称)的充分必要条件是 σ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的矩阵 A 与 A 的转置矩阵 A' 有关系 $A'G=GA$,其中 G 是关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的格拉姆矩阵.

欧几里得空间(Euclidean space) 简称欧氏空间. 一类常用的实线性空间. 设 V 是实数域上的线性空间,φ 是 V 上的对称双线性函数. 若对$\forall\ \alpha\in V$,内积(α,α)(即$\varphi(\alpha,\alpha)$)$\geqslant 0$ 及$(\alpha,\alpha)=0$ 当且仅当 $\alpha=0$,则称 V 为欧几里得空间. 在欧氏空间内存在基底 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 使关于此基底的格拉姆矩阵为单位矩阵,即欧氏空间内必存在标准正交基.

欧氏空间(Euclidean space) 即"欧几里得空间".

正定变换(positive definite transformation) 一类特殊的线性变换. 设 V 是酉空间(欧氏空间),σ 是 V 的埃尔米特(对称)线性变换,若对 V 中任意的非零向量 α,$(\sigma(\alpha),\alpha)>0(\geqslant 0)$,则称 σ 为正定(半正定或非负)埃尔米特(对称)变换. 正定(半正定或非负)埃尔米特变换与正定(半正定或非负)对称变换统称为正定(半正定或非负)变换. 对任一半正定变换 σ,必有一半正定变换 μ,使 $\mu^2=\sigma$,μ 称为 σ 的半正定平方根. 埃尔米特(对称)变换 σ 是正定(半正定)的充分必要条件是 σ 的特征根全是正数(非负数).

正定埃尔米特变换(positive definite Hermitian transformation) 见"正定变换".

非负埃尔米特变换(non-negative Hermitian transformation) 见"正定变换".

半正定对称变换(semi-positive definite symmetric transformation) 见"正定变换".

非负对称变换(non-negative symmetric transformation) 见"正定变换".

正定对称变换(positive definite symmetric transformation) 见"正定变换".

半正定变换(semi-positive definite transformation) 见"正定变换".

非负变换(non-negative transformation) 见"正定变换".

半正定平方根(semi-positive definite square root) 见"正定变换".

极分解(polar decomposition) 线性变换的一种分解. 设 V 是酉空间,若 $\sigma\in \mathrm{Hom}_P(V,V)$,则必存在 V 的半正定变换 μ 与酉变换 δ,使 $\sigma=\mu\delta$. 若 V 是欧氏空间,则 $\sigma=\mu\delta$,其中 δ 为正交变换. 此分解称为极分解,其中的 μ 是惟一的. 若 σ 是非退化的,则 δ 亦是惟一的.

等度量变换(isometric transformation) 不变度量的线性变换. 设 V 是度量空间,σ 是 V 的线性变换,若对$\forall\ \alpha,\beta\in V$,内积$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$,则称 σ 为等度量变换. 线性变换 σ 是等度量变换的充分必要条件是 $\sigma\sigma^*=\sigma^*\sigma=E$.

酉变换(unitary transformation) 酉空间 V 的等度量变换. 对$\forall\ \alpha,\beta\in V$,满足条件$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$的线性变换 σ 称为酉变换. 对 n 维酉空间 V 的每一酉变换 σ,都存在 V 的标准正交基,使 σ 关于此基的矩阵为对角形,且对角线上元素的模为 1. 以下陈述都是线性变换 σ 为酉变换的充分必要条件:

1. 对酉空间的每一向量 α,$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$.

2. σ 关于某一组标准正交基的矩阵是酉矩阵.

3. 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基,则$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$也是标准正交基.

正交变换(orthogonal transformation) 欧氏空间的等度量变换. 设 V 为欧氏空间,对$\forall\ \alpha,\beta\in V$,满足条件$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$的线性变换 σ 称为正交变换. 对于 n 维欧氏空间,正交变换 σ 关于基的矩阵 A 的行列式$|A|=\pm1$. 当$|A|=1$ 时,σ 称为正常正交变换,亦称旋转. 对 n 维欧氏空间的每一正交变换 σ,都存在标准正交基,使 σ 关于此基的矩阵有形式

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & -1 & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & -1 & & & \\
& & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \\
& & & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \\
& & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & \cos\varphi_s & -\sin\varphi_s \\
& & & & & & & & & \sin\varphi_s & \cos\varphi_s
\end{pmatrix}.$$

以下陈述都是线性变换 σ 为正交变换的充分必要条件:

1. 对欧氏空间 V 的每一向量 α,有

$$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|.$$

2. 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是标准正交基,则$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$也是标准正交基.

3. σ 关于某一标准正交基的矩阵是正交矩阵.

正常正交变换(proper orthogonal transformation) 见"正交变换".

旋转(rotation) 见"正交变换".

辛变换(symplectic transformation) 辛空间的等度量变换. 设 V 为辛空间,对$\forall\ \alpha,\beta\in V$,满足条件$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$的线性变换 σ 称为辛变换. 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的基,G 为关于此基的格拉姆矩阵,A 为线性变换 σ 关于此基的矩阵,则 σ 为辛变换的充分必要条件是 $A'GA=G$.

向量的射影(projection of a vector) 一种特殊向量. 指向量关于线性空间直和分解的对应部分. 设 V 是域 P 上的线性空间,$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$,于是 V 中任一向量 α 有惟一的分解式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$,这里 $\alpha_i\in V_i$,向量 α_i 称为向量 α 在子空间 V_i 上的射影. 当 V 是 n 维欧氏空间时,若 $\alpha\overline{\in}V_1$,则存在 $\beta\in V_1$ 使$(\alpha-\beta)\perp V_1$. 这是通常几何空间向量射影性质的推广,称为射影定理.

射影定理(projection theorem) 见"向量的射影".

半单变换(semi-simple transformation) 一类特殊的线性变换. 设 V 是域 P 上的 n 维线性空间,$\sigma\in\mathrm{Hom}_P(V,V)$,若 σ 恰有 n 个线性无关的特征向量,则称 σ 为半单变换. 半单变换关于基的矩阵是半单矩阵. 线性变换 σ 为半单的充分必要条件是其最小多项式无重根.

镜像变换(mirror transformation) 镜面反射的推广. 设 V 是欧氏空间,对$\forall\ \alpha\in V$,若 $\sigma(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta$($\eta$ 是一给定的单位向量),则 σ 是 V 的线性变换,称为镜像变换. 当 V 是 n 维欧氏空间时,镜像变换是正交变换且其行列式为 -1. 在三维欧氏空间中镜像变换有很直观的几何意义,事实上它就是镜面反射.

凯莱变换(Cayley transformation) 一类特殊的线性变换. 所谓凯莱变换是指 n 维酉空间的酉变换与埃尔米特变换间的如下的一个一一对应:若 σ 为酉空间的埃尔米特变换,则变换 $\sigma\pm\mathrm{i}E$ 有逆变换存在(E 为单位变换),而变换 $\mu=(\sigma-\mathrm{i}E)(\sigma+\mathrm{i}E)$ 是没有特征值 1 的酉变换,并且 $\sigma=-\mathrm{i}(\mu+E)(\mu-E)^{-1}$. 反过来,若 μ 是一个酉变换且没有等于 1 的特征值,则 $\mu-E$ 有逆变换存在,而

$$\sigma=-\mathrm{i}(\mu+E)(\mu-E)^{-1}$$

是埃尔米特变换,且 μ 有形式

$$\mu=(\sigma-\mathrm{i}E)(\sigma+\mathrm{i}E)^{-1}.$$

位似变换(homothetic transformation) 相似变换的推广. 是指欧氏空间中这样的线性变换 $\sigma=k\tau$,这里 k 是实数,τ 是正交变换,当 τ 是单位变换时,就是通常的位(相)似变换. 因此,位似变换是几何学中相似变换的推广.

仿射空间(affine space) 通常三维向量空间的推广. 是这样的点集合 $A=\{P,Q,\cdots\}$,A 中的点与一个 n 维线性空间 V 中的向量满足以下的关系:

1. 对 A 中任意有序点对 P,Q,存在 V 中一个向量(称为 P,Q 的差向量),记为$\overrightarrow{PQ}$.

2. 对 A 中任意三个点 P,Q,R 有

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}.$$

3. 对每个 $P\in A$ 和每个 $\alpha\in V$,存在 $Q\in A$ 使

$$\overrightarrow{PQ}=\alpha,$$

这时也称 A 为关于 V 的 n 维仿射空间，而称 V 为差空间. 特别地，若取 $A=V$，定义 $\overrightarrow{PQ}=Q-P$，则上述三条件都是满足的. 因此，V 按此定义就是一个 n 维仿射空间.

差空间(difference space)　见“仿射空间”.

仿射变换(affine transformation)　解析几何中仿射变换的推广. 是指仿射空间 A 到 A 的满足以下条件的变换 $P\to P'$，$\forall\ P\in A$：

1. 由 $\overrightarrow{P_1Q_1}=\overrightarrow{P_2Q_2}$ 必有 $\overrightarrow{P_1'Q_1'}=\overrightarrow{P_2'Q_2'}$.

2. 由 $\sigma(\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{P'Q'}$ 所确定的 V 的变换 σ 是线性变换，这里 V 是关于 A 的差空间.

仿射坐标系(affine coordinate system)　解析几何中仿射坐标系的推广. 设 V 是实 n 维线性空间，A 是关于 V 的仿射空间，A 中一个固定点 O 与 V 的一个基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的全体 $(O,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 称为 A 的一个仿射坐标系. O 称为坐标系的原点. 于是对于 A 中每一点 P 必有

$$\overrightarrow{OP}=\sum_{i=1}^{n}a_i\varepsilon_i,$$

诸 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 P 点关于给定坐标系的仿射坐标.

坐标系的原点(origin of a coordinate system)　见“仿射坐标系”.

仿射坐标(affine coordinate)　见“仿射坐标系”.

仿射坐标变换公式(transformation formula for affine coordinates)　仿射坐标系改变时坐标的变换公式. 设 V 是实 n 维线性空间，A 是关于 V 的仿射空间，$(O,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 与 $(O',\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')$ 是 A 的两个仿射坐标系，而 (a_{ij}) 是由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$ 的过渡矩阵. 若点 P 关于坐标系 $(O,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$ 的坐标为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，关于坐标系 $(O',\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')$ 的坐标为 $(a_1',a_2',\cdots,a_n')$，而

$$OO'=\sum_{i=1}^{n}b_i\varepsilon_i,$$

则

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_j'=a_i-b_i.$$

向量的长度(length of a vector)　解析几何中向量长度的推广. 欧氏空间 V 及酉空间 U 中向量 α 的长度定义为非负实数 (α,α) 的算术根 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$，记为 $|\alpha|$，即 $|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$. 在欧氏空间或酉空间中，任一非零向量的长度是一确定的正数. 零向量的长度是零. 长度为 1 的向量，称为单位向量. 由任一非零向量 α，可得出单位向量 $\alpha/|\alpha|$，称为向量 α 的单位化. 两向量 α,β 的差 $\alpha-\beta$ 的长度 $|\alpha-\beta|$ 称为向量 α 与向量 β 间的距离.

单位向量(unit vector)　见“向量的长度”.

向量间的距离(distance between two vectors)　见“向量的长度”.

向量的范数(norm of a vector)　长度概念的推广. 设 V 为实线性空间，若对 V 的每一元素 α，有一实数 $\|\alpha\|$ 与之对应且满足以下条件：

1. $\|\alpha\|\geqslant 0$，并且 $\|\alpha\|=0$ 当且仅当 $\alpha=0$；

2. $\|k\alpha\|=|k|\,\|\alpha\|$，$k$ 为实数；

3. $\|\alpha+\beta\|\leqslant\|\alpha\|+\|\beta\|$；

则称 V 为赋范空间，并称 $\|\alpha\|$ 为向量 α 的范数.

赋范空间(normed space)　见“向量的范数”.

柯西-布雅科夫斯基不等式(Cauchy-Bunjakovski inequality)　亦称施瓦兹不等式. 两向量内积的绝对值与两向量长度之间的不等式. 欧氏空间或酉空间 V 中任意两向量 α 与 β 满足

$$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|,$$

并且等号成立的充分必要条件是 α,β 线性相关. 此即柯西-布雅科夫斯基不等式. 例如，若在实 n 元向量空间 $\mathbf{R}^n$ 内定义的内积为 $(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，这里 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则柯西-布雅科夫斯基不等式变为

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}.$$

由柯西-布雅科夫斯基不等式可以定义欧氏空间中两个非零向量 α,β 的夹角为

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\cos^{-1}\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}.$$

施瓦兹不等式(Schwarz inequality)　即“柯西-布雅科夫斯基不等式”.

向量的夹角(angle between two vectors)　见“柯西-布雅科夫斯基不等式”.

三角不等式(triangle inequality)　三角形边长关系的推广. 设 V 为酉空间或欧氏空间，对 V 中任两个向量 α,β，由柯西-布雅科夫斯基不等式可导出不等式：$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$，称为三角不等式. 三角不等式亦可表示为 $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|$. 推广此不等式可得出托勒密不等式：

$$|\alpha-\beta||\gamma|\leqslant|\beta-\gamma||\alpha|+|\gamma-\alpha||\beta|.$$

托勒密不等式(Ptolemy-inequality)　见“三角不等式”.

贝塞尔不等式(Bessel inequality)　向量长度与其在直角坐标系下坐标的关系之推广. 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维酉空间(或欧氏空间)U 的任一标准正交向量组，α 为 U 的任一向量，当 $(\alpha,\varepsilon_k)=a_k$，$k=1,2,\cdots,m$ 时，不等式

$$(\alpha,\alpha)\geqslant|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_m|^2$$

称为贝塞尔不等式.

施密特正交化(Schmildt orthogonalization) 由一组基得出标准正交基的方法. 从欧氏空间 V(或酉空间 U)的任意一组线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 出发,得出一个正交向量组$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$,并使由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k(k=1,2,\cdots,m)$生成的子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$分别等于由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k(k=1,2,\cdots,m)$生成的子空间 $L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$的方法,称为施密特正交化. 具体作法如下:设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是一个线性无关的向量组. 先取 $\beta_1=\alpha_1$;再取

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1;$$

然后取

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2;\ \cdots;$$

一般地,取

$$\beta_j=\alpha_j-\frac{(\alpha_j,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_j,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_j,\beta_{j-1})}{(\beta_{j-1},\beta_{j-1})}\beta_{j-1}\quad(j=1,2,\cdots,k).$$

这样就得到一组正交向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i$ 且满足

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k).$$

洛仑茨变换(Lorentz transformation) 四元实线性空间中的一种变换. 设 R 为实数域,R^4 内如下定义内积

$$((a_1,a_2,a_3,a_4),(b_1,b_2,b_3,b_4))=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3-a_4b_4,$$

则 R^4 是欧氏空间. 此欧氏空间的正交变换称为广义洛仑茨变换. 若广义洛仑茨变换 σ 关于基

$$\varepsilon_1=(1,0,0,0),\quad \varepsilon_2=(0,1,0,0),$$
$$\varepsilon_3=(0,0,1,0),\quad \varepsilon_4=(0,0,0,1)$$

的矩阵(a_{ij})中元素 $a_{44}\geqslant 1$,则称其为洛仑茨变换.

广义洛仑茨变换(generalized Lorentz transformation) 见"洛仑茨变换".

双线性型(bilinear form) 数域上双线性型的推广. 设 P 为域,$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1};\cdots;y_1,y_2,\cdots,y_{n_s})$是定义域为 P 的多组变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{n_1};\cdots;y_1,y_2,\cdots,y_{n_s}$的齐次多项式,若对每一组变量 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1};\cdots;y_1,y_2,\cdots,y_{n_s})$都是线性的,则称 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_{n_1};\cdots;y_1,y_2,\cdots,y_{n_s})$为多重线性型. 特别地,当 $s=2$ 时,称为双线性型. 两组个数相等的变量的双线性型 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)$有形式

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j,$$

其系数构成 n 阶矩阵(a_{ij}),称为双线性型 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)$的矩阵,其秩称为该双线性型的秩. 当双线性型的矩阵是非退化矩阵时,则称此双线性型为非退化双线性型或满秩双线性型.

多重线性型(multilinear form) 见"双线性型".

双线性型的秩(rank of a bilinear form) 见"双线性型".

非退化双线性型(nondegenerate bilinear form) 见"双线性型".

满秩双线性型(full rank bilinear form) 见"双线性型".

等价双线性型(equivalent bilinear forms) 经非退化线性变数代换可互相得到的双线性型. 若对域 P 上的双线性型

$$\varphi_1=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

施以非退化线性变数代换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}x_k'\quad(|(c_{ik})|\neq 0)$$

与

$$y_i=\sum_{s=1}^{n}d_{js}y_s'\quad(|(d_{js})|\neq 0)\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

后,得出的双线性型为

$$\varphi_2=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_i'y_j',$$

则称 φ_1 与 φ_2 等价. 它们的矩阵关系为

$$(b_{ij})=(c_{ij})'(a_{ij})(d_{ij}).$$

特别地,当$(c_{ij})=(d_{ij})$时,即非退化线性变数代换的矩阵相等时,φ_1 与 φ_2 称为相合. 它们的矩阵关系为

$$(b_{ij})=(c_{ij})'(a_{ij})(c_{ij}).$$

非退化线性代换(nondegenerate linear substitution) 见"等价双线性型".

相合双线性型(congruent bilinear forms) 见"等价双线性型".

对称双线性型(symmetric bilinear form) 系数矩阵对称的双线性型. 设

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

是域 P 上的双线性型,(a_{ij})是其矩阵,若(a_{ij})是对称(反对称)的,则称双线性型$\sum a_{ij}x_iy_j$ 是对称(反对称)双线性型.

反对称双线性型(anti-symmetric bilinear form) 见"对称双线性型".

埃尔米特双线性型(Hermitian bilinear form) 复数域上埃尔米特双线性型的推广. 若 P 为域,J 是 P 的对合自同构,域 P 上的双线性型

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j^J$$

的矩阵(a_{ij})若是埃尔米特矩阵,则称

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j^I$$

为埃尔米特双线性型. 特别地，复数域上的埃尔米特双线性型是指形如$\sum a_{ij}x_i\bar{y}_j$的双线性型，其中$a_{ij}=\bar{a}_{ji}$(a_{ji}的共轭复数).

二次型(quadratic form)　数域上二次型的推广. 域P上形如

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j$$

的二次齐式，称为域P上的二次型. 当域P的特征$\neq 2$时，域P上每个二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j$$

都可表示为

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

其中$a_{ij}=a_{ji}=(b_{ij}+b_{ji})/2(i<j)$，$a_{ii}=b_{ii}$. 由二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

所确定的n阶对称矩阵(a_{ij})称为这个二次型的矩阵. 其秩称为二次型的秩. 由二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

的矩阵(a_{ij})所确定的对称双线性型

$$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n;y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j$$

称为这个二次型的极型或相伴的双线性型. 使极型中的第二组变数$y_1,y_2,\cdots,y_n$与第一组变数$x_1,x_2,\cdots,x_n$相同，就得出原来的二次型. 二次型的理论起源于解析几何中关于有心二次曲线与二次曲面方程化为标准形方程的研究，它在数学的许多分支，以及物理、力学等方面都有广泛的应用. 注意，线性空间上的二次型在取定基后，按坐标即得这里的二次型，反之亦然. 因此，这两种形式定义的二次型实际上是一致的.

二次型的矩阵(matrix of a quadratic form)　见“二次型”.

二次型的秩(rank of a quadratic form)　见“二次型”.

极型(polar form)　见“二次型”.

二次型相伴的双线性型(associated bilinear form of a quadratic form)　见“二次型”.

二次型的标准形(standard form of a quadratic form)　数域上二次型的标准形之推广. 若对域P上的二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

施以n个变量的线性变数代换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}y_k \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

则得出二次型

$$Q'(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_i y_j \quad (b_{ij}=b_{ji}),$$

并且$(b_{ij})=P'(a_{ij})P$. 若线性变量代换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}k y_k$$

为非退化的(即以p_{ik}为(i,k)元素的矩阵(p_{ik})是非退化的)，则称Q与Q′等价. 等价的二次型的矩阵是合同的，其秩相等. 形如

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ii}x_i^2 \quad (c_{ii}\in P;1\leqslant m\leqslant n)$$

的二次型，称为标准形. 特别地，当诸c_{ii}皆为1或-1时，称为规范形. 每个二次型必与一标准形等价.

等价的二次型(equivalent quadratic form)　见“二次型的标准形”.

二次型的规范形(canonical form of a quadratic form)　见“二次型的标准形”.

实二次型(real quadratic form)　一类特殊的二次型. 实数域R上的二次型，称为实二次型. 任一实二次型Q必与一实规范形的二次型$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$等价，其中$r$是实二次型Q的秩. 正平方项个数$p$与负平方项个数$r-p$由Q惟一确定，这一性质称为西尔维斯特惯性律. 规范形中的p称为二次型的正惯性指数，$r-p$称为二次型的负惯性指数，它们的差$p-(r-p)=2p-r$称为二次型的符号差. 两个实二次型当且仅当它的秩与符号差分别相同时等价.

惯性律(inertial law)　见“实二次型”.

正惯性指数(positive index of inertia)　见“实二次型”.

负惯性指数(negative index of inertia)　见“实二次型”.

符号差(signature)　见“实二次型”.

约化二次型(reduced quadratic form)　一类特殊的实二次型. 若实二次型Q_1与Q_2在整数环上等价，则称Q_1与Q_2同类. 设实二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'(a_{ij})X,\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

是正定的. 若对满足$1\leqslant k\leqslant n$的任意自然数k和整数$g_1,g_2,\cdots,g_n$，$(g_k,g_{k+1},\cdots,g_n)=1$，总有$Q(g_1,g_2,\cdots,g_n)\geqslant a_{kk}$，并且$a_{l,l+1}\geqslant 0(1\leqslant l\leqslant n-1)$，则称Q为约化二次型. 任意正定型的类中，至少有一个约化型.

同类实二次型(real quadratic form of same

class) 见“约化二次型”.

复二次型(complex quadratic form) 一类特殊的二次型. 复数域 C 上的二次型,称为复二次型. 任一复二次型 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$必与一复规范形的二次型 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$ 等价. 这里 r 是此二次型的秩. 两个复二次型当且仅当它们的秩相同时等价.

定型(definite form) 一种重要的实二次型. 它有广泛的应用. 若实二次型 Q 的正、负惯性指数分别为 n 与 0,则称 Q 为正定二次型. 若正、负惯性指数分别为 0 与 n,则称 Q 为负定二次型. 正定与负定二次型合称为定型. 若实二次型 Q 的正、负惯性指数分别为 $r(\leqslant n)$与 0(或分别为 0 与 $r(\leqslant n)$),则称 Q 为半正定(半负定)二次型. 半正定、半负定二次型合称半定型. 不是半定型的二次型称为不定型. 下面两个条件都是实二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定的充分必要条件:

1. 它的矩阵是正定的.

2. 若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零,则 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$.

正定二次型(positive definite quadratic form) 见“定型”.

负定二次型(negative definite quadratic form) 见“定型”.

半正定二次型(semi-positive definite quadratic form) 见“定型”.

半负定二次型(semi-negative definite quadratic form) 见“定型”.

不定型(indefinite form) 见“定型”.

有限域上的二次型(quadratic forms over a finite field) 实二次型的推广. 设 P 是有限域,P 上的两个非退化 n 元二次型 Q 与 Q′等价的充分必要条件是 Q 与 Q′的秩相等,并且它们的矩阵的行列式 Δ 与 Δ'满足条件 $\Delta(\Delta')^{-1}\in(P^*)^2$,这里 P^* 指域 P 的全体非零元构成的乘群.

p 进域上两个非退化二次型 Q 与 Q′等价的充分必要条件是由其系数矩阵的行列式 Δ 与 Δ'得出的乘积 $\Delta(\Delta')^{-1}\in(P^*)^2$,秩相等,并且其闵科夫斯基-哈塞特征标相同. p 进域上 n 元非退化二次型 Q 的特征标 $x(Q)$的定义为:设 $C(Q)$为 Q 的克里福德代数,当 n 是偶数时,记 $C^*(Q)=C(Q)$;当 n 是奇数时,记 $C^*(Q)=C^+(Q)$,且当 $C^*(Q)\cong M_s(P)$(P 上 S 阶全阵代数)时,规定 $x(Q)=1$;当 $C^*\cong M_s(P)\otimes D(P)$(张量积)时,规定 $x(Q)=-1$,这里 $D(P)$是 P 上惟一的四元数体.

p 进域上的二次型(quadratic forms over p-adic fields) 见“有限域上的二次型”.

闵科夫斯基-哈塞特征标(Minkowski-Hasse character) 见“有限域上的二次型”.

二次型的直和(direct sum of quadratic forms) 一种特殊的二次型. 无公共变元的二次型的和. 设

$$Q_1=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,\quad Q_2=\sum_{i,j=n+1}^{n+m}a_{ij}x_ix_j$$

是域 P 上的二次型,利用 Q_1 与 Q_2 构造的二次型

$$\sum_{i,j=1}^{n+m}a_{ij}x_ix_j,$$

其中 $a_{n+r,n-s}=a_{n-s,n+r}=0(r=1,2,\cdots m,s=1,2,\cdots,n-1)$,称为 Q_1 与 Q_2 的直和,记为 $Q_1\oplus Q_2$. 其矩阵是由 Q_1 的矩阵 A_1 与 Q_2 的矩阵 A_2 构成的分块矩阵

$$\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}.$$

此时,若 Q_1 与 Q_1' 等价,且 $Q_1\oplus Q_2$ 与 $Q_1'\oplus Q_2'$ 等价,则 Q_2 与 Q_2' 等价,此即是维特定理.

维特定理(Witt theorem) 见“二次型的直和”.

二次型的指数(index of a quadratic form) 二次型在等价意义下的一种指标. 域 P 上形如 $x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2r-1}x_{2r}$的二次型称为核型,记为 K_r. 任意非退化二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与 $K_r\oplus Q_0(x_{2r+1},\cdots,x_n)$等价,其中 Q_0 满足条件:若 $Q_0\neq 0$,且仅当 $x_{2r+1}=\cdots=x_n=0$ 时,有 $Q_0(x_{2r+1},\cdots,x_n)=0$,这时 K_r 与 Q_0 不计等价是惟一确定的. $K_r\oplus Q_0$称为 Q 的维特分解,r 称为 Q 的指数. 若二次型 Q 与 Q′的维特分解分别为 $Q=K_r\oplus Q_0$,$Q'=K_s\oplus Q_0'$,则当 Q_0 与 Q_0' 等价时,称 Q 与 Q′同型. 非退化二次型 Q 为核型的充分必要条件是在 P 为复数域的情形,Q 的秩 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$;在 P 为实数域的情形,$n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$,且 Q 的行列式$\in(P^*)^2$;在 P 为 p 进域的情形,$n\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$,Q 的行列式$\in(P^*)^2$,且其闵科夫斯基-哈塞特征标为 1.

核型(kernal form) 见“二次型的指数”.

维特分解(Witt decomposition) 见“二次型的指数”.

同型二次型(quadratic forms of same type) 见“二次型的指数”.

埃尔米特二次型(Hermitian quadratic form) 复数域上的二次型. 形如

$$\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\bar{x}_ix_k,\ a_{ik}=\bar{a}_{ki}$$

的复二次型称为埃尔米特二次型,其矩阵为埃尔米特矩阵. 做变量的非退化线性代换

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}y_k$$

后,所得的二次型的矩阵(b_{ij})与原矩阵(a_{ij})的关系是:$(b_{ij})=(\bar{p}_{ij})'(a_{ij})(p_{ij})$. 对埃尔米特二次型也可以和二次型一样地定义秩、等价和相伴的双线性型.

任一埃尔米特二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与形如

$$\sum_{i=1}^{p}\bar{x}_i x_i - \sum_{j=1}^{q}\overline{x_{p+j}}x_{p+j}$$

的二次型等价，其中 p 与 q 的差称为 Q 的符号差. 可以和实二次型一样地定义正定、负定、半定、不定等埃尔米特二次型. 下述条件的每一条都是埃尔米特二次型 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定的充分必要条件：

1. 当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为不全为零的复数时，

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0.$$

2. Q 的顺序主子式都 >0.

正定埃尔米特二次型(positive definite Hermitian form)　见“埃尔米特二次型”.

负定埃尔米特二次型(negative definite Hermitian form)　见“埃尔米特二次型”.

化二次型为标准形的方法(to reduce quadratic form to the standard form)　化二次型为对角形的方法. 设域 P 上的 n 元二次型为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i x_j = XAX',$$

其中 $A=(a_{ij})$，$A=A'$，且 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 化 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为标准形的方法有：

1. 配方法：

1) $a_{11}\neq 0$ 时，对 x_1 配方：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}x_i x_j,$$

其中 b_{ij} 是由前面与 x_1 有关的配方后出现的 $x_i x_j(i,j\geqslant 2)$ 项的系数和后面原有的 $x_i x_j$ 项系数合并而成. 若做非退化的 n 元线性变换

$$\begin{cases}x_1=y_1-\sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{a_{1j}}{a_{11}}y_j,\\ x_2=y_2,\\ \cdots\cdots\\ x_n=y_n,\end{cases}$$

则二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为

$$f_1(y_1,y_2,\cdots,y_n)=a_{11}y_1^2+\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}y_i y_j,$$

其中 $b_{ij}=b_{ji}$，且

$$\sum_{i,j=2}^{n}b_{ij}y_i y_j$$

是 $n-1$ 元二次型(若 $a_{11}=0$，而某个 $a_{ii}\neq 0$，则对 x_i 配方)，在某 y_2^2 的系数不为零的情况下，可依此做下去，便可将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化成标准形.

2) 若在进行 k 步后得出

$$\sum_{i=1}^{l}d_i w_i^2+\sum_{i,j=l+1}^{n}f_{ij}w_i w_j,$$

其中 $f_{ii}=0$ $(i=l+1,\cdots,n)$，$f_{rs}\neq 0(r\neq s)$，则做线性变换 $w_r=u_r+u_s$，$w_s=u_r-u_s$，$w_t=u_t(t\neq r,s)$ 后，便出现系数不为零的平方项，于是，可继续进行 1) 中所进行的步骤直至将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为标准形.

2. 初等变换法：对二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵 A 同时对行与列做同类的初等变换(相合变换)，使所得矩阵 B 为对角形，即使

$$E'_m(E'_{m-1}\cdots(E'_2(E'_1AE_1)E_2)\cdots E_{m-1})E_m=B$$

为对角形，而 E_i 是初等矩阵 $(i=1,2,\cdots,m)$，以 B 为矩阵的二次型便是二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的标准形.

主轴问题(principal axes problem)　实二次型的一个重要问题. 用 n 元正交线性代换(即其矩阵为正交矩阵)把 n 元实二次型化成标准形的问题，称为把二次型化到主轴上去的问题. 简称二次型的主轴问题. 任一 n 元实二次型，通过正交线性代换，可以化为标准形

$$\sum_{i=1}^{n}d_i x_i^2,$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是其矩阵的特征值. 具体作法是：先求出此实二次型矩阵的特征值与特征向量(必有 n 个线性无关的)，再用施密特正交化法将 n 个线性无关的特征向量法正交化，即可求出欲求的正交矩阵.

甘凯连夫型(Ганкелев form)　一类特殊且有用的二次型. 用数列 $s_0,s_1,\cdots,s_{2n-2}$ 给出的 n 元二次型：

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,k=0}^{n-1}s_{i+k}x_i x_k$$

称为甘凯连夫型. 它的矩阵

$$S=\begin{pmatrix}s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1}\\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2}\end{pmatrix}$$

称为甘凯连夫矩阵.

甘凯连夫矩阵(Ганкелев matrix)　见“甘凯连夫型”.

盖尔什果林圆盘定理(Gersgorin disk theorem)　矩阵理论中关于特征值分布的经典定理. 它在涉及到矩阵特征值计算的各个领域里有着广泛的应用价值和重要的理论意义. 经典的圆盘定理主要是指下述两个定理：

1. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则 A 的任一特征值 λ 都属于复平面上 n 个圆盘

$$G_i:|z-a_{ii}|\leqslant\Lambda_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

的并集中，即

$$\lambda\in\bigcup_{i=1}^{n}G_i.$$

2. 若 $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$D_r$ 是

$$G=\bigcup_{i=1}^{n}G_i$$

中 r 个圆盘组成的区域，且有 $D_r\cap(G\backslash D_r)=\varnothing$，则在 D_r 中恰含 A 的 r 个特征值(对角元有相同时重复计算，特征值相同时也重复计算).

圆盘定理是由盖尔什果林(ГершгоринС. А.)于1931年给出的，经过半个世纪的发展，这一理论无论从形式上，还是从内容上都有了很大的推进，其结果被迅速应用到数值计算、稳定理论等许多领域里. 下述三个结论是常用的圆盘定理之推广：

1. 卡西尼卵形域包含定理：若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 A 的任一特征值 λ 都落在 $\binom{n}{2}$ 个卡西尼卵形域

$$O_{ij}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant\Lambda_i\Lambda_j\quad(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j)$$

的并集中，式中

$$\Lambda_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

2. 奥斯乔夫斯基包含定理：若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，$p\geqslant1$，$q\geqslant1$，$p^{-1}+q^{-1}=1$，则 A 的任一特征值 λ 位于下述 n 个圆盘

$$\widetilde{G}_i:|z-a_{ii}|\leqslant R_{i,\alpha p}^{\alpha}(A)C_{i,(1-\alpha)q}^{1-\alpha}(A)\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

的并集中，式中

$$R_{i,\alpha p}(A)=\Big(\sum_{k\neq i}|a_{ik}|^{\alpha p}\Big)^{1/\alpha p},$$

$$C_{i,(1-\alpha)q}(A)=\Big(\sum_{k\neq i}|a_{ki}|^{(1-\alpha)q}\Big)^{1/(1-\alpha)q}$$

$$(1\leqslant i\leqslant n).$$

3. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$B=(b_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 满足：$b_{ij}\geqslant|a_{ij}|$，$1\leqslant i,j\leqslant n$，则 A 的任一特征值 λ 位于下述 n 个圆盘

$$\hat{G}_i:|z-a_{ii}|\leqslant\rho(B)-b_{ii}\quad(1\leqslant i\leqslant n)$$

的并集中，式中 $\rho(B)$ 表 B 之谱半径，即 B 之特征值的最大模.

卡西尼卵形域包含定理(Cassini oval inclusion theorem) 见“盖尔什果林圆盘定理”.

奥斯乔夫斯基包含定理(Ostrowski inclusion theorem) 见“盖尔什果林圆盘定理”.

对角占优矩阵(diagonally dominant matrix) 亦称优对角阵. 是一种重要的矩阵. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$. 若

$$|a_{ii}|\geqslant\Lambda_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

则称 A 为对角占优矩阵，记为 $A\in D_0$；若 $A\in D_0$ 且上式中至少有一个严格不等号成立，A 还是不可约的，则称 A 为不可约对角占优矩阵，记为 $A\in I$；若上式中 n 个式子全是严格不等式，则称 A 为严格对角占优矩阵，记为 $A\in D$. 利用矩阵之对角占优性质来估计其特征值的分布范围是一个极为实用而又具有重要理论意义的方法. 这一方法可追溯到阿达马定理，即严格对角占优矩阵是非奇异的. 时至今日，对这一方法的深入研究与探讨仍是矩阵理论的重要课题之一. 利用矩阵对角占优性质研究其特征值分布有下列更好的结果.

若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 满足 $A\in I\cup D$，则：

1. 若 $a_{ii}(1\leqslant i\leqslant n)$ 中有 p 个正数，$n-p$ 个负数，则 A 恰有 p 个特征值之实部为正，$n-p$ 个特征值之实部为负.

2. 若 $a_{ii}(1\leqslant i\leqslant n)$ 中有 p 个实部为正，$n-p$ 个实部为负，且或者 $|\mathrm{Re}a_{ii}|>\Lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$，或者 A 不可约同时 $|\mathrm{Re}a_{ii}|\geqslant\Lambda_i(1\leqslant i\leqslant n)$，

$$\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{Re}a_{ii}|>\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i,$$

则上述1之结论仍成立(这里的 $\mathrm{Re}a_{ii}$ 表示复数 a_{ii} 的实部).

优对角阵(diagonally dominant matrix) 即“对角占优矩阵”.

不可约对角占优矩阵(irreducible diagonally dominant matrix) 见“对角占优矩阵”.

严格对角占优矩阵(strongly diagonally dominant matrix) 见“对角占优矩阵”.

有非零元素链对角占优矩阵(diagonally dominant matrix with nonzeroelement chains) 不可约对角占优矩阵的推广，有更广泛的应用价值. 该矩阵类于1974年由什瓦库麦(Shivakumar, P. N.)等首先引进. 若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 满足 $A\in D_0$，且

$$J=\{i\in N\,|\,|a_{ii}|>\Lambda_i\}\neq\varnothing,\ N=\{1,2,\cdots,n\},$$

对每一个 $i\overline{\in}J$，A 都有一个非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_rj}\neq0$，使 $j\in J$，则称 A 为具有非零元素链对角占优矩阵. 由定义，不可约对角占优矩阵是特殊的具有非零元素链的对角占优阵. 纽曼(Neumann, M.)于1979年证明：在对角占优前提下，矩阵为广义严格对角占优的充分必要条件是矩阵为具有非零元素链对角占优阵.

下半严格对角占优矩阵(lower semistrictly diagonally dominant matrix) 对角占优矩阵的一个重要子类. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}\cap D_0$，若满足

$$|a_{ii}|>\sum_{k=1}^{i-1}|a_{ik}|\quad(2\leqslant i\leqslant n),$$

则称 A 为下半严格对角占优矩阵. 该矩阵由纽曼(Neumann, M.)于1979年首先引入. 纽曼证明：矩阵 A 在对角占优假设下，为广义严格对角占优阵的充分必要条件是存在一 n 阶置换阵 P，使 PAP^T 为下半严格对角占优阵. 进而，A 为具有非零元素链对角占优的充分必要条件是，存在一 n 阶置换阵 P，使 PAP^T 为下半严格对角占优阵. A 为不可约对角占优的充分必要条件是 A 不可约，且对某一 n 阶置换

阵 P，使 PAP^T 为下半严格对角占优阵.

广义严格对角占优矩阵(generalized strongly diagonally dominant matrix)　见“下半严格对角占优矩阵”.

共轭对角占优矩阵(conjugate diagonally dominant matrix)　对角占优矩阵类的推广. 这一矩阵类的引进为利用对角占优来估计矩阵特征值分布提供了新的途径. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$，记

$$T=\frac{A+A^*}{2}=(t_{ij})_{n\times n}.$$

若 T 为对角占优阵，则称 A 为共轭对角占优阵；若 T 为严格对角占优阵，则称 A 为共轭严格对角占优阵. A 的特征值之实部介于埃尔米特矩阵 T 的最大与最小特征值之间. 这样就可以利用 T 的对角占优性来估计 A 的特征值实部的界. 类似地，可利用 $S=(A-A^*)/2\mathrm{i}$ 的特征值及对角占优性来估计 A 的特征值虚部的界.

共轭严格对角占优矩阵(conjugate strongly diagonally dominant matrix)　见“共轭对角占优矩阵”.

弱不可约对角占优矩阵(weak irreducible diagonally dominant matrix)　矩阵对角占优性的新的推广. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$，若 A 的方向图 $G(A)$ 之每一顶点 v_i 都属于 $G(A)$ 的某一环路

$$\gamma:\ v_i\to v_{v_{i_1}}\to\cdots\to v_{i_s}\to v_{i_{s+1}}=v_i\quad (s\geqslant 1),$$

则称 A 为弱不可约矩阵. 下述两点等价于 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 为弱不可约矩阵：

1. 存在 n 阶置换阵 P 使 $PAP^T=(A_{ij})_{m\times m}$，$A_{ij}\in \mathbf{C}^{n_i\times n_j}$ $(1\leqslant i,j\leqslant m)$，且 A_{ii} 是 n_i 阶不可约阵，$1\leqslant i\leqslant m$，且 $\sum\limits_{i=1}^{m}n_i=n$.

2. $B=(I+|A|)^{n-1}=(b_{ij})_{n\times n}$，对每一 $1\leqslant i\leqslant n$ 皆存在 $1\leqslant j_i\leqslant n$ 使 $b_{ij_i}b_{j_ii}\neq 0$，即 $G(B)$ 的每一顶点都在长为 2 的环路中.

弱不可约阵为不可约的充分必要条件是在等价表征上述 1 中矩阵 $(A_{ij})_{m\times m}$ 为不可约阵. 又设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 为弱不可约，若 A 满足

$$\prod_{i\in\gamma}|a_{ii}|\geqslant\prod_{i\in\gamma}\Lambda_i\quad(\gamma\in S(A)),$$

其中 $S(A)$ 表 $G(A)$ 中全部环路集合，则称 A 为弱不可约弱对角占优阵，记为 $A\in WD_0$；若在上式中的不等式皆是严格的，则称 A 为弱不可约严格对角占优阵，记为 $A\in WD$；若 $A\in WD_0$ 为不可约，且上式中至少对一个环路成立严格不等式，则称 A 为弱不可约对角占优阵，记为 $A\in WI$. 弱不可约对角占优矩阵由布饶尔迪(Brualdi, R. A.)于 1982 年首先引入. 利用这类矩阵给出的新的谱包含域，推进了经典的布饶尔(Brauer, A.)、奥斯乔夫斯基(Ostrowski, A. M.)等人的著名结果，成为一个重要的阶段性成果，具有十分重要的意义与广泛的应用价值. 布饶尔迪证明：若 $A\in WD\cap WI$，则 A 非奇异. 进而对弱不可约矩阵 A，其谱的包含域是下述区域的并集

$$D_\gamma=\Big\{z\Big|\prod_{i\in\gamma}|z-a_{ii}|\leqslant\prod_{i\in\gamma}\Lambda_i\Big\}\ (\gamma\in S(A)).$$

对任意 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$，其谱的包含域是

$$\Big(\bigcup_{i\in N'}|z-a_{ii}|\leqslant\Lambda_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{\gamma\in S(A)}\prod_{i\in\gamma}|z-a_{ii}|\leqslant\prod_{i\in\gamma}\Lambda_i\Big),$$

式中 N' 表 $G(A)$ 中不在任何环路之顶点的足码集.

弱不可约严格对角占优矩阵(weakly irreducible strongly diagonally dominant matrix)　见“弱不可约对角占优矩阵”.

块对角占优矩阵(block diagonally dominant matrix)　对角占优矩阵对高阶分块矩阵的推广. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 分块为

$$A=(A_{ij})_{m\times m}\ \Big(A_{ij}\in \mathbf{C}^{n_i\times n_j},1\leqslant i,j\leqslant m,\sum_{i=1}^{m}n_i=n\Big).$$

若每一 A_{ii} 皆非奇异且满足

$$(\|A_{ii}^{-1}\|)^{-1}\geqslant\sum_{k\neq i}\|A_{ik}\|\quad(1\leqslant i\leqslant m),$$

则称 A 为块对角占优阵，记为 $A\in BD_0$；若上式中每个不等式都是严格的，则称 A 为块严格对角占优阵，记为 $A\in BD$；若 $A\in BD_0$ 且 $A=(A_{ij})_{m\times m}$ 为块不可约阵，上式中至少有一个不等式是严格的，则称 A 为块不可约对角占优阵，记为 $A\in BI$. 又，若

$$A=(A_{ij})_{m\times m}\in \mathbf{C}^{n\times n}$$

$$\Big(A_{ij}\in \mathbf{C}^{n_i\times n_j},(1\leqslant i,j\leqslant m),\sum_{i=1}^{m}n_i=n\Big),$$

则：

1. 若 $A\in BD\cup BI$，则 $\det A\neq 0$.

2. 若 $\sigma(A)$ 表 A 的谱(即特征值集合)，

$$\widetilde{G}_i=\Big\{z\Big|\inf_{\|x\|=1}\|(A_{ii}-zI_{n_i})x\|\leqslant\sum_{k\neq i}\|A_{ik}\|\Big\}\quad(1\leqslant i\leqslant m),$$

则 $\sigma(A)\subseteq\widetilde{G}=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\widetilde{G}_i$.

3. 若 $H=\bigcup\limits_{j=1}^{s}\widetilde{G}_{p_j}$，$1\leqslant p_j\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant s$，且 H 满足 $H\cap(\widetilde{G}\backslash H)=\varnothing$，则 H 恰含 A 的 $\sum\limits_{j=1}^{s}n_{p_j}$ 个特征值.

4. $\sigma(A)\subseteq\bigcup\limits_{i\neq j}\widetilde{G}_{ij}$，

$$\widetilde{G}_{ij}=\Big\{z\Big|\Big(\inf_{\|x\|=1}\|(A_{ii}-zI_{n_i})x\|\Big)\cdot\Big(\inf_{\|x\|=1}\|(A_{jj}-zI_{n_j})x\|\Big)\leqslant\Big(\sum_{k\neq i}\|A_{ik}\|\Big)\Big(\sum_{k\neq j}\|A_{jk}\|\Big)\Big\}\quad(1\leqslant i,j\leqslant m,i\neq j).$$

块对角占优矩阵是由费恩歌尔德(Feingold, D. G.)

及瓦尔加(Varga,R. S.)于1962年首先引入的,他们由此给出了相应的矩阵谱包含域及若干谱分布定理,推广了经典的圆盘定理,成为重要的阶段性成果,具有重要的理论意义与广泛的应用价值.

块严格对角占优矩阵(block strongly diagonally dominant matrix) 见"块对角占优矩阵".

块不可约对角占优矩阵(block irreducible diagonally dominant matrix) 见"块对角占优矩阵".

广义对角占优矩阵(generalized diagonally dominant matrix) 包含对角占优矩阵类在内的一个更广的矩阵类. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$,若存在一个正对角矩阵 G 使 $B=AG$ 为对角占优矩阵,则称 A 为广义对角占优矩阵,记为 $A\in GD_0$;若 B 为严格对角占优矩阵,则称 A 为广义严格对角占优矩阵,记为 $A\in GD$. 由定义,$A\in GD_0(GD)$ 当且仅当 A 正对角相似于对角占优矩阵. 因此,该矩阵类保持着对角占优矩阵类的谱性质.

广义对角占优矩阵大部分是与对角占优相关的矩阵,例如非零元素链对角占优矩阵,弱不可约对角占优矩阵等,几乎都是广义(严格)对角占优矩阵. 由于该矩阵类保持着对角占优矩阵类的重要谱性质,同时这一概念又与M矩阵有密切关系,因此,它的研究具有重要的理论意义及实际应用价值,近年来出现许多优秀成果. 费德勒(Fiedler,M.)与浦达克(Ptak,V.)于1962年给出了M矩阵的一个重要等价表征:一个Z矩阵(非对角元均非负的实矩阵)A 为M矩阵的充分必要条件是 A 为广义严格对角占优阵. 这一重要的结论使得广义严格对角占优矩阵的等价表征就成为其比较阵为M矩阵的等价表征问题.

稳定矩阵(stable matrix) 亦称李亚普诺夫稳定矩阵. 在诸多方面有重要应用价值的一类矩阵. 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$,若 A 的特征值实部皆负,则称 A 为稳定矩阵. 相应地,特征值实部皆正的复方阵称为正稳定矩阵. 关于稳定矩阵的研究近一个世纪以来十分活跃,成果也非常广泛,其中等价表征的讨论又是其主要课题. 若 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$,且 $B=(I-A)^{-1}(I+A)$,则下述各点等价于 A 为稳定矩阵:

1. B 存在,B 为稳定矩阵,且 $\rho(B)<1$.

2. B 存在,且对任意正定阵 V,矩阵方程

$$H-BHB^*=V$$

总有正定解 H.

3. B 存在,且对任意正定阵 V,级数

$$\sum_{k=0}^{\infty}B^kV(B^*)^k$$

收敛.

4. 存在正定阵 H,使得 $AH+HA^*$ 为负定阵.

5. 对任意正定阵 W,矩阵方程

$$AH+HA^*=-W$$

有正定解 H.

6. 存在正定阵 W,使得 $WAW^{-1}+W^{-1}A^*W$ 为负定阵.

7. 存在非奇异矩阵 T,使得 TAT^{-1} 的实部为负定阵.

8. 存在正定阵 P,Q 及反埃尔米特矩阵 S(即 S 满足 $S^*=-S$),使得 $A=P(S-Q)$.

李亚普诺夫(Ляпунов,A. M.)于1892年的博士论文中,开创性地提出求解非线性常微分方程的李亚普诺夫函数法,亦称直接法,建立了矩阵稳定性的概念及等价表征. 这一方法在自动控制、系统问题、微分方程、力学、经济学等科学技术的许多领域中得到广泛的应用和发展,也奠定了常微分方程稳定性理论的基础.

李亚普诺夫稳定矩阵(Liapunov stable matrix) 即"稳定矩阵".

正稳定矩阵(positive stable matrix) 见"稳定矩阵".

李亚普诺夫正对角稳定矩阵(Liapunov psitive diagonally stable matrix) 亦称VL稳定阵. 简称对角稳定阵. 一类特殊的正稳定矩阵. 设 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$,若存在一个正对角阵 D,使得 $DA+A^TD$ 为正定阵,则称 A 为对角稳定的. 下述各点等价于实方阵 A 为对角稳定阵:

1. 存在一正对角阵 D,使得对任意 $0\neq x\in \mathbf{R}^n$ 总有 $x^TADx>0$.

2. 存在一正对角阵 D,使 $D^{-1}AD$ 为正定阵.

3. A^{-1} 为对角稳定阵.

4. 对每个正对角阵 E,AE 与 EA 皆对角稳定.

5. 对每个非零半正定阵 B,BA 有一个正对角元. 在数理经济学、生态学、动力系统以及数值分析中有着重要的应用.

VL **稳定阵**(VL stable matrix) 见"李亚普诺夫正对角稳定矩阵".

对角稳定阵(diagonally stable matrix) 即"李亚普诺夫正对角稳定矩阵".

强稳定矩阵(strongly stable matrix) 一种特殊的正稳定矩阵类. 它包含着对角稳定矩阵类. 若 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$,对任意非负对角矩阵 D,总有 $A+D$ 为正定矩阵,则称 A 为强稳定矩阵. 若 A 为强稳定矩阵,则 A 的任意主子阵均为强稳定矩阵. 若 A 为强稳定矩阵,则 A 的各阶主子式皆正,即 A 为P矩阵.

D **稳定矩阵**(D-stable matrix) 一种特殊的正稳定矩阵类,且包含着对角稳定矩阵类. 若 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$,对所有正对角矩阵 D,AD 总为正稳定阵,则称 A 为D稳定矩阵. 若 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为D稳定阵,则:

1. 对每一 $0\neq x\in \mathbf{R}^n$,存在一个正对角阵 D_x,使

得 $x^TD_xAx\geqslant 0$.

2. A 的任一主子阵均为 D 稳定阵.

3. A 的任一主子式非负,即 A 为 P_0 矩阵.

矩阵张量积的圆盘定理(disk theorems of tensor product of matrices) 复方阵圆盘理论在矩阵张量积上的推广及应用.因为是由张量积的低阶矩阵的相关量来表示张量积的特征值分布,所以较之直接对张量积应用圆盘定理更方便.佟文廷于 1980 年给出了矩阵张量积圆盘定理之主要结果:设

$$A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n},\quad R_i(A)=\sum_k |a_{ik}|,$$

$$R(A)=\max_i R_i(A),\quad \Lambda_i(A)=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|,$$

$$D_i(A)=\{z\,||z-a_{ii}|\leqslant \Lambda_i(A)\}\quad (1\leqslant i\leqslant n).$$

1. 若 $A\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$B\in\mathbf{C}^{n\times n}$,则

$$\sigma(A\otimes B)\subseteq D(A\otimes B)=\{z\,||z|\leqslant R(A)R(B)\}.$$

2. $\Lambda_{ij}(A\otimes B)=|a_{ii}|\Lambda_j(B)+|b_{jj}|\Lambda_i(A)+\Lambda_i(A)\Lambda_j(B)$,若 $D_{ij}=\{z\,||z-a_{ii}b_{jj}|\leqslant\Lambda_{ij}(A\otimes B)\}$ $(1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m)$,则 $\sigma(A\otimes B)\subseteq\bigcup_{i,j}D_{ij}$.

3. 若 $O_{ij}=\{z\,||z-a_{ii}|\,|z-b_{jj}|\leqslant\Lambda_i(A)\Lambda_j(B)\}$ $(1\leqslant i\leqslant n1\leqslant j\leqslant m)$,则 $\sigma(A\otimes B)\subseteq\bigcup_{i,j}O_{ij}$.

矩阵张量积的不可约性(irreducibility of tensor product of matrices) 矩阵张量积谱分布理论的基本概念.通过做成张量积的低阶矩阵之不可约性表征张量积的不可约性是矩阵张量积不可约性的主要内容.设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$B=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times m}$,下述各条均等价于 $A\otimes B$ 不可约:

1. A,B 皆不可约,且满足存在 A 的一个长为 r_1 的非零元素闭链 $a_{fe_1}a_{e_1e_2}\cdots a_{e_{r_1-1}f}$,$B$ 的一个长为 r_2 的非零元素闭链 $b_{ts_1}a_{s_1s_2}\cdots b_{s_{r_2-1}t}$,使 $(r_1,r_2)=1$.

2. A,B 皆不可约,有互素的正整数 r_1,r_2 使 $|A|^{r_1}$ 及 $|B|^{r_2}$ 之对角元不全为零,

$$|A|=(|a_{ij}|)_{n\times n},\quad |B|=(|b_{ij}|)_{m\times m}.$$

上述结果是逄明贤、孙玉祥于 1987 年得到的.

矩阵张量积的特征值分布(eigenvalue distribution of tensor product of matrices) 估计矩阵张量积特征值分布的基本方法之一.指利用做成张量积的矩阵的对角占优性讨论张量积的特征值分布.下述两个结果是基本的:

1. 若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$b=(b_{ij})\in\mathbf{C}^{m\times m}$ 满足:

$$|a_{ii}|=\alpha_i\Lambda_i(A),\ \alpha_i>1,1\leqslant i\leqslant n,$$

$$|b_{jj}|=\beta_j\Lambda_j(B),\ \beta_j>1,1\leqslant j\leqslant m,$$

且 $\alpha=\min_i\alpha_i$,$\beta=\min_j\beta_j$ 使得 $\alpha\beta>\alpha+\beta+1$,并在 a_{ii} 中有 r_1 个正数,$n-r_1$ 个负数,在 b_{jj} 中有 r_2 个正数,$m-r_2$ 个负数,则 $A\otimes B$ 之特征值中恰有 $r_1r_2+(n-r_1)(m-r_2)$ 个实部为正;$r_1(m-r_2)+r_2(n-r_1)$ 个实部为负.

2. 若以 $\mathrm{Re}\,a_{ii}$ 代替上述 1 中的 a_{ii},以 $\mathrm{Re}\,b_{jj}$ 代替上述 1 中的 b_{jj},而满足上述 1 的全部假设条件,则上述 1 的结论仍然成立.

非齐次特征值(inhomogeneous eigenvalue) 通常特征值问题在实方阵集合里的推广.实方阵之非齐次特征值问题在约束特征值问题、微分方程稳定性问题的研究中有着广泛的应用.设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$b\in\mathbf{R}^n$,$s>0$ 为给定的实数,称同时满足 $Ax=\lambda x+b$ 及 $x^Tx=s$ 的实数 λ 及 $x\in\mathbf{R}^n$ 为 A 的非齐次特征值及相应的非齐次特征向量.于是,实数 λ 同时是 A 的非齐次特征值及特征值的充分必要条件是 b 正交于 A 的任意对应于 λ 的左特征向量.关于实方阵的非齐次特征值问题有以下几个基本结论:

1. 若 A 至少有一个实特征值 λ,且 b 不正交于 A 对应于 λ 的左特征向量,则 A 至少有两个非齐次特征值.

2. 非对称实方阵 A,若有 k 个(包括重数)非齐次特征值,则:

1) k 为偶数,$0\leqslant k\leqslant n$.

2) 若 $\sigma(A)\subset\mathbf{R}$,且 $k=2n$,则 A 的非齐次特征值以 A 的最大及最小特征值为其上界与下界.

3) 若 A 的特征值全为虚数,则 k 可能为 0.

3. 若有 $1\leqslant i_0\leqslant n$,使

$$b_{i_0}^2>s^2\sum_{j=1}^n a_{ij}^2,$$

则 A 至少有两个非齐次特征值,式中 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T\in\mathbf{R}^n$ 以及 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$.

块复合矩阵的块特征值(block eigenvalues of block compound matrices) 通常特征值问题的重要推广,具有十分重要的理论意义及广泛的应用价值.设 $P_n(C)$ 表示所有两两可换的 n 阶复方阵集合,$M_{p,q}(P_n)$ 表示所有分为 $p\times q$ 块,且每一子块都属于 $P_n(C)$ 的块复合矩阵集合,特别地,当 $p=q=m$ 时,简记为 $M_m(P_n)$.若对 $A\in M_m(P_n)$,存在 $\Lambda\in P_n(C)$ 及(列)满秩矩阵 $X\in M_{m,1}(P_n)$,使得 $AX=X\Lambda$,则称 Λ 为 A 的块特征值,X 为相应于 Λ 的块特征向量.于是,当 $n=1$ 时,块特征值问题即是通常的特征值问题,因此,研究块特征值问题具有十分重要的意义.下述关于 $A=(A_{ij})\in M_m(P_n)$ $(A_{ij}\in P_n(C)$,$1\leqslant i,j\leqslant m)$ 的块特征值问题的结论是基本的:

1. 若 $\hat{\sigma}(A)$ 为 A 的块特征值集合,$\mathrm{Det}\,A$ 表以 A_{ij} 为元素的形式行列式,则有

$$\bigcup_{\Lambda\in\hat{\sigma}(A)}\sigma(\Lambda)\subseteq\sigma(A),\quad \mathrm{Det}\,A\in P_n(C)$$

且 $\det A=\det(\mathrm{Det}\,A)$.

2. 若 A 非奇异,$\Lambda\in\hat{\sigma}(A)$,$X$ 为相应块特征向

量，则 $A^{-1}\in P_n(C)$ 是 $A^{-1}\in M_m(P_n)$ 之相应于块特征向量 X 的块特征值.

3. A 的任一块特征值 Λ 位于下述区域

$$\hat{G}_i:\left\{Z\in P_n(C)\mid \sum_{k\neq i}\|(Z-A_{ii})^{-1}A_{ik}\|\geqslant 1\right\}$$
$$(1\leqslant i\leqslant m)$$

的并集中.

4. 若每一 A_{jj} 非奇异 $(1\leqslant j\leqslant m)$，则对 A 的任一块特征值 $\Lambda\in P_n(C)$ 有

$$\|\Lambda\|\geqslant \min_j\left\{\frac{1-\sum_{k\neq j}\|A_{jj}^{-1}A_{jk}\|}{\|A_{jj}^{-1}\|}\right\}.$$

矩阵的数值域(numerical range of a matrix) 矩阵理论的重要概念. 对于矩阵特征值之估计有着尤为突出的应用价值. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$，称 $W(A)=\{x^*Ax\mid x\in\mathbf{C}^n, x^*x=1\}$ 为 A 的数值域. 由于 $\sigma(A)\subseteq W(A)$，所以，寻找矩阵数值域的包含域，特别是最小包含域，就具有十分重要的意义. 特普利茨(Toeplitz, O.)、马库斯(Marcus, M.)、约翰逊(Johnson, C. R.)等给出了有关矩阵数值域的下述基本结论：

1. $W(A)$ 是复平面内的凸集，且 $W(A)$ 为 $\sigma(A)$ 之闭凸包的充分必要条件是 A 为正规阵或 A 酉等价于 $A_1\oplus A_2$，$W(A_2)\subseteq W(A_1)$.

2. $W(A)\subset\mathbf{R}$ 的充分必要条件是 A 为埃尔米特阵.

3. $W(A)\subseteq[a,b]\times[c,d]$，式中

$$a=\min_i\lambda_i,\ b=\max_i\lambda_i,$$
$$c=\min_i\mu_i,\ d=\max_i\mu_i,$$
$$\sigma\left(\frac{(A+A^*)}{2}\right)=\{\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\}.$$
$$\sigma\left(\frac{(A-A^*)}{2\mathrm{i}}\right)=\{\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n\}.$$

4. 若 $A=A_1+\mathrm{i}A_2$，$A_1,A_2\in\mathbf{R}^{n\times n}$，则上述结论 3 中的矩形包含域又可由

$$a=\min_i\tilde{\lambda}_i,\ b=\max_i\tilde{\lambda}_i,$$
$$c=\min_i\tilde{\mu}_i,\ d=\max_i\tilde{\mu}_i,$$
$$\sigma((H(A))=\{\tilde{\lambda}_1\geqslant\tilde{\lambda}_2\geqslant\cdots\geqslant\tilde{\lambda}_n\},$$
$$\sigma(K(A))=\{\tilde{\mu}_1\geqslant\tilde{\mu}_2\geqslant\cdots\geqslant\tilde{\mu}_n\}$$

给出；式中

$$H(A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}A_1+A_1^T & A_2^T-A_2\\ A_2-A_2^T & A_1+A_1^T\end{bmatrix},$$
$$K(A)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}A_2+A_2^T & A_1^T-A_1\\ A_1^TA_1 & A_2+A_2^T\end{bmatrix}.$$

5. $W(A)=\bigcap_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\{z\mid \mathrm{Re}\,z\leqslant\lambda_1(H\theta)\}$，式中

$$\sigma(H_\theta)=\{\lambda_1(H_\theta)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(H_\theta)\},$$
$$H_\theta=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}A+(\mathrm{e}^{i\theta}A)^*)/2.$$

6. 若 $A_{xy}=\begin{bmatrix}(Ax,x) & (Ay,x)\\ (Ax,y) & (Ay,y)\end{bmatrix}$，$x\in\mathbf{R}^n$，$y\in\mathbf{R}^n$ 满足 $(x,x)=(y,y)=1$，$(x,y)=0$，则

$$W(A)=\bigcup_{\substack{\|x\|=\|y\|=1\\(x,y)=0}}W(A_{xy}).$$

7. 若 $\sigma((A_1+A_1^T)/2)=\{\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots\geqslant\alpha_n\}$，$\sigma((A_2+A_2^T)/2)=\{\beta_1\geqslant\beta_2\geqslant\cdots\geqslant\beta_n\}$，则

$$W(A)\subseteq[a_1,b_1]\times[c_1,d_1].$$

式中

$$a_1=2\alpha_n-\alpha_1-\rho((A_2-A_2^T)/2),$$
$$b_1=2\alpha_1-\alpha_n+\rho((A_2-A_2^T)/2),$$
$$c_1=2\beta_n-\beta_1-\rho((A_1-A_1^T)/2),$$
$$d_1=2\beta_1-\beta_n+\rho((A_1-A_1^T)/2).$$

矩阵的数值半径(numerical radius of a matrix) 与矩阵数值域紧密相关的重要概念. 它对于估计矩阵特征值分布有十分重要的意义. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，称

$$r(A)=\max_{z\in W(A)}|z|$$

为 A 的数值半径，式中 $W(A)$ 表 A 的数值域. 约翰逊(Johnson, C. R.)、马库斯(Marcus, M.)等给出了下述基本结论：

1. $\frac{1}{2}\|A\|\leqslant r(A)$
$$\leqslant\frac{1}{2}\max_i\left\{\sum_j|a_{ij}|+\sum_j|a_{ji}|\right\}.$$

2. $r(A_k)\leqslant r(A)\leqslant r(|A|)=\rho(\mathrm{Re}|A|)$，式中 A_k 表任一 k 阶主子阵，$\mathrm{Re}|A|=(|A|+|A|^T)/2$.

3. 当 A 为正规阵时，$r(A)=P(A)=\|A\|$.

4. 若 $A=(A_{ij})_{m\times m}$，$A_{ij}\in\mathbf{C}^{n_i\times n_j}$ $(1\leqslant i,j\leqslant m)$，且

$$\sum_{i=1}^m n_i=n,$$

则 $r(A)\leqslant r(\|(A_{ij})_{m\times m}\|)$.

***k* 数值域**(*k*-numerical range) 一般数值域的推广. 包含经典数值域在内，因此具有更广泛的应用价值. 若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\Lambda_k$ 表 $\mathbf{C}^n$ 中 k 个规格化正交的向量组集合，则称

$$W_k(A)=\left\{\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k x_j^*Ax_j\mid(x_1,\cdots,x_k)\in\Lambda_k\right\}$$

为 A 的 k 数值域. 由定义，$W_1(A)=W(A)$. 相应地，k 数值半径定义为

$$r_k(A)=\max_{Z\in W_k(A)}|Z|.$$

矩阵的 k 数值域及 k 数值半径同经典的数值域与数值半径有下述基本关系(记 $\mathrm{tr}A$ 表示 A 的迹)：

$$\left\{\frac{1}{n}\mathrm{tr}A\right\}=W_n(A)\subset\cdots\subset W_2(A)\subset W_1(A)$$
$$=W(A),$$

$$\frac{1}{n}|\mathrm{tr}A| = r_n(A) \leqslant \cdots \leqslant r_2(A) \leqslant r_1(A) = r(A).$$

谱矩阵(spectral matrix)　同矩阵的数值半径相关的重要矩阵类. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$,若 A 满足 $r(A)=\rho(A)$,则称 A 为谱矩阵,记为 $A\in S_p$. 研究谱矩阵的等价表征是具有重要意义的工作. 哥尔德贝格(Geldberg,M.)及佟文廷等给出了谱矩阵的一些重要等价表征. 下述各点等价于 $A\in S_p$:

1. 若 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 之最小多项式的次数为 p,则对某一正整数 $m\geqslant p$ 有 $r(A^m)=[r(A)]^m$.

2. 若 p 为 A 之最小多项式的次数,则对任意具有非负系数的次数 $m\geqslant p$ 之多项式

$$P_m(x)=\sum_{j=0}^{m}\alpha_j x^j,$$

总有 $P_m(r(A))=r(P_m(A))$.

径向矩阵(radial matrix)　一类特殊矩阵. 它是起源于带初始值的有界差分稳定性问题的研究中. 设 $A\in \mathbf{C}^{n\times n}$,若 A 满足 $\rho(A)=\|A\|$,则称 A 为径向矩阵. 哥尔德贝格(Geldberg,M.)、佟文廷以及浦达克(Ptak,V.)对径向矩阵给出了一系列重要结果. 下述各点等价于 A 为径向矩阵:

1. $\|A^n\|=\|A\|^n$.

2. $\rho^2(A)I-A^*A$ 为正半定矩阵.

3. $\rho(A^*A)=\rho^2(A)$.

4. $\|A^m\|=\|A\|^m, m\geqslant p$, p 为最小多项式次数.

5. 有酉阵 U 使

$$UAU^*=\begin{bmatrix}\Lambda & 0\\ 0 & B\end{bmatrix},$$

$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s)$, $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\cdots=|\lambda_5|=\rho(A)$,

$$B=\begin{bmatrix}\lambda_{s+1} & & 0\\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$\rho(A)>|\lambda_{s+1}|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$, $\sigma(A)=\{\lambda_i, 1\leqslant i\leqslant n\}$.

非负矩阵(nonnegative matrix)　一类重要矩阵. 由非负数排成的矩阵. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{R}^{n\times n}$,若满足 $a_{ij}\geqslant 0, 1\leqslant i,j\leqslant n$,则称 A 为非负矩阵. 特别地,若 $a_{ij}>0, 1\leqslant i,j\leqslant n$,则称 A 为正矩阵. 非负矩阵可分为不可约与可约两大类. 因为每个非负可约阵都可表为非负不可约矩阵序列之极限,所以只须重点讨论非负不可约矩阵的谱性质. 佩龙(Perron,O.)于 1907 年首先发现了正矩阵的谱性质,弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)于 1912 年扩大并推广佩龙结果到非负不可约矩阵上,建立了完善的理论. 非负矩阵的理论是矩阵理论的基础之一,它在数理经济、控制理论、纯性系统稳定性理论以及随机理论等许多领域有着广泛的应用.

正矩阵(positive matrix)　见"非负矩阵".

非负不可约矩阵的谱(spectrum of a nonnegative irreducible matrix)　非负矩阵理论中的基本研究对象. 同时,它的许多结果也被应用于矩阵谱理论中. 若非负矩阵 A 为不可约,则称 A 为非负不可约矩阵. 非负不可约矩阵的谱理论是由佩龙(Perron,O.)及弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)创立的,经过 80 年的发展现在已经比较完善. 下述结论是非负不可约矩阵的基本谱性质:

1. $\rho(A)>0$ 是 A 的单重特征值,随 A 的元素之增加而严格增加,且存在对应于 $\rho(A)$ 的左、右正特征向量;进而,若 A 还是本原的,则对任意 $\lambda\neq\rho(A)$, $\lambda\in\sigma(A)$ 皆有 $|\lambda|<\rho(A)$,且有

$$\lim_{k\to\infty}[\rho(A)]^{-k}A^k=(v^Tw)^{-1}(wv^T)=E(A),$$

式中 v,w 满足 $Aw=\rho(A)w$, $v^TA=\rho(A)v^T$, $w>0$, $v>0$.

2. 若 $\lambda_2(A)$ 是 A 的次大模特征值(即 $|\lambda|\leqslant|\lambda_2(A)|<\rho(A)$, $\forall\ \lambda\in\sigma(A), \lambda\neq\rho(A)$), $0<w$ 满足 $Aw=\rho(A)w$,且记

$$\tau(A)=\max_{\substack{\|x\|\leqslant 1\\ x^Tw=0}}\|x^TA\|,$$

则

$$\begin{aligned}\tau(A)\geqslant\lambda_2(A)&=\lim_{k\to\infty}[\tau(A^k)]^{\frac{1}{k}}\\ &=\inf_k[\tau(A^k)]^{\frac{1}{k}}\\ &=\rho[A(I-E(A)]\\ &=\rho[A-\rho(A)E(A)],\end{aligned}$$

并且,当 $\alpha^Tw=\rho(A))$时,

$$\lambda_2(A)=\rho(A-w\alpha^T),$$

$$\lambda_2(A)\leqslant\rho(A-w\alpha^T)\quad(\forall\ \alpha\in\mathbf{R}^n).$$

3. 若 $a=\min_i a_{ii}$, $P_{n-1}(A)$ 为 A 之所有 $n-1$ 阶主子阵之最大谱半径,则对任意 $\lambda\in\sigma(A)$ 有下述不等式

$$|\lambda-a|\leqslant\rho(A)-a,$$

$$|\lambda-\rho_{n-1}(A)|\geqslant\rho(A)-\rho_{n-1}(A),$$

等号成立的充分必要条件是 $\lambda=\rho(A)$.

非负矩阵的谱半径(spectral radius of a nonnegative matrix)　非负矩阵理论中的重要概念. 关于非负矩阵谱半径的估计是一个十分活跃的研究课题,其成果及方法已涉及到许多方向,同时在实际计算中也已得到了广泛的应用. 下述基本结论是由佩龙(Perron,O.)、弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)以及布饶尔(Brauer,A.)等人给出的. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$:

1. 若 $R(A)=\max_i\sum_k a_{ik}$, $r(A)=\min_i\sum_k a_{ik}$,则

$$r(A)\leqslant\rho(A)\leqslant R(A),$$

并且，当 A 不可约时，或同时成立等号，或同时成立不等号，进而

$$\lim_{k\to\infty}[r(A^k)]^{\frac{1}{k}}=\lim_{k\to\infty}[R(A^k)]^{\frac{1}{k}}=\rho(A).$$

2. 若

$$M_{ij}=\frac{1}{2}\{a_{ii}+a_{jj}+[(a_{ii}-a_{jj})^2+4\Lambda_i\Lambda_j]^{\frac{1}{2}}\},$$

$$M(A)=\max_{i\neq j}M_{ij},m(A)=\min_{i\neq j}M_{ij},$$

$$\Lambda_i=\sum_{k\neq i}a_{ik}\ (1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j),$$

则 $m(A)\leqslant\rho(A)\leqslant M(A)$.

3. 若 A 分块为 $A=(A_{ij})_{m\times m}$，$0\leqslant A_{ij}\in R^{n_i\times n_j}$ $(1\leqslant i,j\leqslant m)$，$\sum_{i=1}^{m}n_i=n$，又 p_{ij} 及 q_{ij} 分别表 A_{ij} 的最小与最大行和，且 $P(A)=(p_{ij})_{m\times m}$，$Q(A)=(q_{ij})_{m\times m}$，则

$$\rho(P(A))\leqslant\rho(A)\leqslant\rho(Q(A)),$$

并且，当 A 不可约时，或同时成立等号，或同时成立不等号.

4. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m\in\mathbf{R}^{k\times k}$，$(A_s)_{ij}$ 表 $A_s(i,j)$ 元 $(1\leqslant s\leqslant m,1\leqslant i,j\leqslant k)$，且记

$$(\bigwedge_{s=1}^{m}A_s)_{ij}=\min_s(A_s)_{ij},\ (\bigvee_{s=1}^{m}A_s)_{ij}=\max_s(A_s)_{ij},$$

若 A 分块为 $A=(A_{ij})_{m\times m}$，$0\leqslant A_{ij}\in\mathbf{R}^{k\times k}$ $(k=n/m)$ 为正整数，则

$$\rho(\bigwedge_{i=1}^{m}R_i(A))\leqslant\rho(A)\leqslant\rho(\bigvee_{i=1}^{m}R_i(A)),$$

式中 $R_i(A)=\sum_{k=1}^{m}A_{ik}$ $(1\leqslant i\leqslant m)$，并且，当 A 不可约时，或同时成立等号，或同时成立不等号.

5. 若 B_k 为 A 之 k 阶顺序主子阵

$$R_i=\sum_{j=k+1}^{n}a_{ij}\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

且 $b_k=(R_1,R_2,\cdots,R_k)^T$，$C_p=(a_{p1},a_{p2},\cdots,a_{pk})$，记

$$A_p=\begin{bmatrix}B_k & b_k\\ C_p & R_p\end{bmatrix}\quad(p=k+1,\cdots,n),$$

则 $\min_p\rho(A_p)\leqslant\rho(A)\leqslant\max_p\rho(A_p)$.

6. 樊壩给出了利用非负矩阵谱半径估计矩阵谱的包含域的著名公式：若 $A=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 满足 $|A|\leqslant B$，则

$$\sigma(A)\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{z\,||z-a_{ii}|\leqslant\rho(B)-b_{ii}\}.$$

本原矩阵(primitive matrix)　亦称素矩阵. 非负不可约矩阵的重要子类. 它同循环阵共同组成了非负不可约矩阵类. 若一个 n 阶非负不可约矩阵 A 的模为 $\rho(A)$ 的特征值个数为 1，则称 A 为本原矩阵. 本原阵最重要的等价表征是存在一个正整数 k 使 $A^k>0$. 罗马诺夫斯基(Romanovsky, V.)于 1936 年给出了一个用图论方法确定本原阵的方便方法：若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 不可约，S_i 表示方向图 $G(A)$ 中过顶点 u_i 之环路长 m_i 之集合，k_i 表示所有 m_i 之最大公约数，则当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=1$ 时，A 为本原阵；当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=k>1$ 时，A 为循环矩阵.

素矩阵(primitive matrix)　即“本原矩阵”.

循环矩阵(cyclic matrix)　非负不可约矩阵的另一个重要子类. 若一个 n 阶非负不可约矩阵 A 的模为 $\rho(A)$ 的特征值个数 $k>1$，则称 A 为循环指数为 k 的循环矩阵. 若 n 阶非负不可约矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n_1}+a_2\lambda^{n_2}+\cdots+a_h\lambda^{n_h}$，$a_1,a_2,\cdots,a_h\neq 0$，$n>n_1>\cdots>n_h\geqslant 0$，则 $n-n_1$，$n_1-n_2,\cdots,n_{h-1}-n_h$ 的最大公约数 $k>1$，称 k 为 A 的循环指数. 循环矩阵 A 的主要谱性质是：

1. A 的模为 $\rho(A)$ 的 k 个特征值是

$$\lambda_t=\rho(A)e^{i\theta_t},\theta_t=2\pi t/k\ (0\leqslant t\leqslant k-1).$$

2. 复平面绕原点旋转角 $2\pi/k$ 时，$\sigma(A)$ 不变.

3. 存在置换阵 P 使

$$PAP^T=\begin{bmatrix}0 & a_{12} & & & \\ & 0 & a_{23} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & a_{k\,k-1}\\ a_{k1} & & & & 0\end{bmatrix},$$

式中对角子块皆为零方阵.

循环指数(cycle index)　见“循环矩阵”.

本原指标(index of primitivity)　亦称本原指数. 本原矩阵的一个重要属性，也是非负矩阵理论中的重要概念. 设 A 为 n 阶本原矩阵，使得 $A^m>0$ 之最小正整数 k 称为 A 的本原指标，记为 $\gamma(A)$. 由定义，$\gamma(A)\leqslant(n-1)n^n$. 关于本原矩阵的本原指标的确定与估计一直是矩阵理论的重要研究课题，许多数学家提供了各种方法. 近年来在这一课题的研究中取得了较大的突破性成果，这些成果也推动了图论等学科的发展. 维郎特(Wielandt, H.)于 1950 年证明：$\gamma(A)\leqslant n^2-2n+2$. 若 s 表 n 阶本原阵方向图 $G(A)$ 中最短单环路长，则 $\gamma(A)\leqslant n+s(n-2)$. 瓦尔加(Varga, R. S.)等于 1958 年证明：对 n 阶本原阵 A，若有正整数 k，使 $A+A^2+\cdots+A^k$ 至少有 d 个正对角元，则 $\gamma(A)\leqslant n-d+k(n-1)$. 近年来郭忠、柳伯谦等给出了 $k=1$ 时等号成立的矩阵类的完全刻画. 邵嘉裕于 1986 年给出了 n 阶对称本原阵的完全刻画，指出这一指标集为 $\{1,2,\cdots,2n-2\}\backslash S$，$S$ 表示 $[n,2n]$ 中全部奇数的集合，揭示了本原指标集的短缺现象. 已有如下确定本原指标的简单方法：记 $(B)_{ij}$ 为 B 的 (i,j) 元，取

$$(B_1)_{ij}=\begin{cases}1 & (a_{ij}>0),\\ 0 & (a_{ij}=0)\end{cases}=\operatorname{sgn}(a_{ij}),$$

$(B_k)_{ij}=((\operatorname{sgn}B_1B_{k-1})_{ij})$ $(k=2,3,\cdots)$，于是使序列 $B_1,B_2,\cdots,B_k,\cdots$ 满足 $B_k>0$ 之最小足码即为 $\gamma(A)$.

本原指数(primitive index)　即“本原指标”.

(0,1)矩阵的谱半径(spectral radius of (0,1) matrices)　对(0,1)矩阵的一种刻画. (0,1)矩阵是重要的非负矩阵类,在计算机科学中有着极重要的应用. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$,若 $a_{ij}=1$ 或 $a_{ij}=0$ $(1\leqslant i,j\leqslant n)$,则称 A 为(0,1)矩阵. 又设 $S(n,e)$ 的主对角元为0,主对角元上方有 e 个1的对称(0,1)矩阵集合,$g_s(n,e)=\max\{\rho(A)\mid A\in S(n,e)\}$. 美国数学家布饶尔迪(Brualdi, R. A.)与霍夫曼(Hoffman, A. J.)证明:任给 $A\in S(n,e)$,$\rho(A)\leqslant g_s^*(n,e)$,且等式成立的充分必要条件是,有置换阵 P 使 $PAP^T\in S^*(n,e)$,其中 $S^*(n,e)$ 表 $S(n,e)$ 中满足 $a_{ij}=1(i<j)$ 且 $a_{kl}=1(k<l$ 且 $k\leqslant i,l\leqslant j)$ 的子集,

$$g_s^*(n,e)=\max\{\rho(A)\mid A\in S^*(n,e)\}.$$

积和式(permanent)　关于矩阵元素的一种展式. 若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为域 P 上的 m 行 n 列矩阵,$m\leqslant n$,则称和式

$$\operatorname{per}(A)=\sum_{\sigma\in S_m}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{m\sigma(m)}$$

为 A 的积和式,也称为 A 的固定式,它与 A 的行列式 $\det A$(当 $m=n$ 时)的展式的差别在于积和式中不必考虑 σ 的奇偶性,每项都省去形式上的符号 $\varepsilon(\sigma)=\pm 1$. 在 $m>n$ 时可类似地定义积和式. 但最常用的情形仍是 $m=n$ 的情况,尤其在组合数学中的计数问题与极值问题中是非常有用的工具.

固定式(permanent)　即"积和式".

随机阵(stochastic matrix)　一个重要的非负矩阵类. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=1\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

称 A 为(行)随机阵. 特别地,当 A 与 A^T 都是随机阵时,称 A 为双随机阵. 由定义,A 为随机阵的充分必要条件是:$e=(1,\cdots,1)^T$ 为 $\lambda(A)=1$ 的相应特征向量.

伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)于1946年证明:任意一个双随机阵都是不多于 $(n-1)^2+2$ 个置换阵的凸组合. 马库斯(Marcus, M.)进一步得出:全体 n 阶双随机阵集合是以置换阵为顶点的凸多面体. 进而,A 为双随机阵的充分必要条件是,有 k 个置换阵 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 及 k 个正数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 使

$$A=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iP_i\quad\Big(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1\Big).$$

叶戈瑞捷夫(Egoristjev, G. P.)于1980年证明了著名的范·德·瓦尔登(Van der Waerden, B. L.)猜想:若 A 为双随机阵,则 $\operatorname{per}(A)\geqslant n!/n^n$,等式成立当且仅当

$$A=J_n=\left(\frac{1}{n}\right)_{n\times n},$$

式中 $\operatorname{per}(A)$ 表 A 的积和式.

关于随机阵 A 的谱有下述基本结论:

1. $\sigma(A)\subset|z-a_{i_0i_0}||z-a_{j_0j_0}|\leqslant(1-a_{i_0i_0})(1-a_{j_0j_0})$,式中 $a_{i_0i_0}$ 及 $a_{j_0j_0}$ 分别表 A 之最小与次小对角元.

2. 对任意 $1\neq\lambda\in\sigma(A)$,有

$$|\lambda|\leqslant\min\Big\{1-\sum_k\min_i a_{ik},\sum_k\max_i(a_{ik})-1\Big\}.$$

随机阵不但在矩阵理论中占有重要的地位,而且在概率统计、经济数学等学科有着广泛的应用,它还是马尔科夫过程理论的基础.

双随机阵(bistochastic matrix)　见"随机阵".

非负矩阵的优势比(dominance ratio of a nonnegative matrix)　非负矩阵理论的重要概念之一. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$,其特征值集合为 $\sigma(A)=\{\lambda_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$,并满足 $\rho(A)=\lambda_1\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$,称 $d(A)=|\lambda_2|/|\lambda_1|=|\lambda_2|/\rho(A)$ 为 A 的优势比. 在 $A=(a_{ij})_{n\times n}>0$ 时,奥斯乔夫斯基(Ostrowski, A. M.)证明了一个优势比的重要公式

$$d(A)\leqslant\frac{M-m}{M+m},$$

式中 $M=\max_{i,j}a_{ij}$,$m=\min_{i,j}a_{ij}$. 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 不可约,则有

$$d(A)\leqslant\left[\frac{1-n\left(\frac{g}{nG}\right)^{\omega}}{1+n\left(\frac{g}{nG}\right)^{\omega}}\right]^{\frac{1}{\omega}}\leqslant\frac{1-\frac{n}{\omega}\left(\frac{g}{nG}\right)^{\omega}}{1+\frac{n}{\omega}\left(\frac{g}{nG}\right)^{\omega}},$$

式中 $G=\max_{i,j}a_{ij}$,$g=\min_{\substack{i,j\\a_{ij}>0}}a_{ij}$,$\omega=(n-1)^2+1$.

1979年已得到了更好的结果

$$d(A)\leqslant\left[\frac{1-\frac{g^{\omega}}{R^{\omega-1}G}}{1+\frac{g^{\omega}}{R^{\omega-1}G}}\right]^{\frac{1}{\omega}}<\frac{1-\frac{g^{\omega}}{\omega R^{\omega-1}G}}{1+\frac{g^{\omega}}{\omega R^{\omega-1}G}},$$

式中 $R=\min\{\max_i\sum_j a_{ij},\max_i\sum_j a_{ji}\}$.

在矩阵理论与实际计算中常需估计矩阵的最大模特征值与次大模特征值,而在诸如用幂迭代法求矩阵的最大模特征值等问题中,常需估计该矩阵的优势比,并且由最大模特征值与优势比之估计也可间接地估计次大模特征值,从而解决次大模特征值直接估计的困难. 优势比的估计是矩阵论及其应用中的一个重要问题.

对称非负矩阵(symmetric nonnegative matrix)　一个重要的非负矩阵子类. 它在逆特征值问题上有着很重要的应用. 对实数集合 $\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$,能否找到一个对称非负矩阵,使之以这 n 个实数为特征值,就是所谓对称非负矩阵的逆特征值问题. 设

$$S_n^+=\{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mid\sigma(A)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$
$$\lambda_1=\rho(A),A=A^T\geqslant 0\}.$$

费德勒(Fiedler,M.)于 1974 年证明:若 $\lambda_1\geqslant 0,\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$,且

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\geqslant 0,$$

则$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in S_n^+$.进而,若

$$S_n^{++}=\{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\mid\sigma(A)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\ \lambda_1=\rho(A),A=A^T>0\},$$

则当$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in S_n^+$时,对任意$\varepsilon>0$皆有$(\lambda_1+\varepsilon,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\in S_n^{++}$.

幂正阵的谱(spectrum of a power positive matrix) 直接应用非负矩阵谱性质估计谱的矩阵类,具有重要的实际意义及应用价值.设$A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$,若有正整数$k$使得$A^k>0$,则称$A$为具有指标$k$的幂正矩阵.对幂正矩阵$A$有下述基本谱性质:

1.A有一实特征值λ_1,使得$|\lambda_1|=\rho(A)$,且A之相应于λ_1的特征向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T>0$.又,若

$$R=\max_i\sum_j a_{ij},\quad r=\min_i\sum_j a_{ij},$$

则$r\leqslant\lambda_1\leqslant R$.

2.对A之任意异于λ_1的特征值λ恒有$|\lambda_1|>|\lambda|$,且有估计式

$$|\lambda|\leqslant\min\left\{\lambda_1-\sum_j\min_i\frac{a_{ij}x_j}{x_i},\ \left(\sum_j\max_i\frac{a_{ij}x_j}{x_i}\right)-\lambda_1\right\}.$$

M 矩阵(M-matrix) 亦称非奇异 M 矩阵.一类重要的矩阵.若$A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$,满足$a_{ij}\leqslant 0$ $(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j)$,则称$A$为 Z 矩阵.所有$n$阶 Z 矩阵的集合记为$Z^{n\times n}$.$A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$称为 M 矩阵,是指$A$的所有主子式皆正.所有$n$阶 M 矩阵之集合记为$K$.M 矩阵除等价表征外仍有许多重要的性质,主要有下述几点:

1.若$A\in K$,m是任意一个正整数,则A^{-1}与A^{-m}具有相同的零结构(n阶实方阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$与$B=(b_{ij})_{n\times n}$称为具有相同的零结构,指$a_{ij}=0$当且仅当$b_{ij}=0$),且A^{-1}与$|A|^{n-1}$具有相同的零结构.

2.若$A\in K$,$A\leqslant B\in Z^{n\times n}$,则$B\in K$且$B^{-1}\leqslant A^{-1}$.

3.若$A\in K$,则对任意正整数k,$A^k\in K$的充分必要条件是$A^m\in Z^{n\times n}$.

4.若$A\in K$,且对某一正整数m有A^m为(上)下三角阵,则A必为(上)下三角阵.

5.若$A\in K$,$B\in K$,则$A\circ B^{-1}\in K$.特别地,$A\circ A^{-1}\in K$,式中$A\circ B^{-1}$表A与B^{-1}的阿达马积,进而有$\rho((A\circ A^{-1})^{-1})\geqslant n$.

M 矩阵是由奥斯乔夫斯基(Ostrowski,A. M.)于 1937 年首先提出的一个重要矩阵类,它起源于矩阵计算中的迭代程序之收敛性的研究.这一矩阵类在矩阵之谱分析中十分重要,近年来研究者颇多,成果也十分丰富,仅 M 矩阵的等价表征就有几十种.

非奇异M 矩阵(nonsingular M-matrix) 见“M 矩阵”.

Z 矩阵(Z-matrix) 见“M 矩阵”.

M 矩阵的表征(characterizations of M-matrix) M 矩阵理论的基本内容,也一直是研究 M 矩阵的热门课题,到目前为止,比较重要的等价表征就有 50 余种之多.这些重要的等价表征涉及到 M 矩阵在自身结构、谱性质等各个方面的重要性质,这里仅列出若干具有代表性的等价表征.设$A\in Z^{n\times n}$,则下述各点等价于$A\in K$(n阶 M 矩阵的集合):

1.$A=tI-B,B\geqslant 0,t>\rho(B)$.

2.A为逆正阵,即$A^{-1}\geqslant 0$.

3.$a_{ii}>0(1\leqslant i\leqslant n)$且存在一正对角矩阵$D$,使$AD$为严格对角占优阵(即$A$为广义严格对角占优矩阵).

4.A为正稳定阵,即$\mathrm{Re}\,\lambda>0,\forall\ \lambda\in\sigma(A)$.

5.存在一个正向量$x\in\mathbf{R}^n$使得$Ax>0$.

6.有上三角阵$U\in K$及下三角阵$L\in K$使得

$$A=LU.$$

7.A的所有顺序主子式皆正.

8.$A=M-N,M^{-1}\geqslant 0,N\geqslant 0$且$\rho(M^{-1}N)<1$.

9.对每一符号差矩阵S(即对角元皆为 1 或-1的对角阵)有正向量x使$SASx>0$.

10.存在一正对角阵D使$AD=DA^T$为正定.

若$A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$,则$A\in K$当且仅当$A$的每个一阶,二阶及$n$阶主子阵是逆正阵.

不可约M 矩阵(irreducible M-matrix) M 矩阵的一个重要子类.有若干特殊的重要性质.若$A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$不可约,则$A\in K$($n$阶 M 矩阵的集合)等价于下述各点的任意一个:

1.$A^{-1}>0$.

2.存在$x>0$使得$Ax>0$.

若$A=tI-B(t>\rho(B),B\geqslant 0)$为不可约,且记$a=\max_i a_{ii}$,则对任意$\lambda\in\sigma(A)$有:

1.$|\lambda-a|\leqslant\rho(aI-A)=a+\rho(B)-t$.

2.$\lambda-(t-\rho_{n-1}(B))|\geqslant\rho(B)-\rho_{n-1}(B)$,$\rho_{n-1}(B)$表$B$之所有$n-1$阶主子阵的最大谱半径.

3.$\mu+\mathrm{i}\gamma\in\sigma(A)$当且仅当

$$\mu-|\gamma|\tan\frac{\pi}{n}\geqslant t-\rho(B).$$

M 矩阵的谱(spectrum of an M-matrix) 是 M 矩阵理论的重要内容之一.很长时间这一方面的结论只停留在 M 矩阵是正稳定的结论上.佟文廷于 1979 年推进了这一工作.若$A=(a_{ij})_{n\times n}\in K$,则有下述重要谱性质:

1. $\sigma(A)$中正特征值个数 l(t 重特征值算 t 个)满足 $1\leqslant l=n-2k$,k 为某一非负整数.

2. $\sigma(A)$中按模最小也是实部最小特征值 $\sigma=t-\rho(B)>0$,且满足$\min\limits_i\sum\limits_j a_{ij}\leqslant\sigma\leqslant\max\limits_i\sum\limits_j a_{ij}$.

3. 分别记 A^{-1}的最大与最小行和为 $R(A^{-1})$及 $r(A^{-1})$,则$(R(A^{-1}))^{-1}\leqslant\sigma\leqslant(r(A^{-1}))^{-1}$,且 $\det(A-tI)>0$ 当 $t<\sigma$ 时.

4. 若 $a_{ij}\neq0(1\leqslant i,j\leqslant n)$,则($A_{ij}$表 a_{ij}之代数余子式)

$$\frac{\det A\min\limits_{i,j}|a_{ij}|}{2\max\limits_i a_{ii}A_{ii}-\det A}\leqslant\sigma\leqslant\frac{\det A\max\limits_{i,j}|a_{ij}|}{2\min\limits_i a_{ii}A_{ii}-\det A}.$$

斯蒂尔杰斯矩阵(Stieltjes matrix)　M 矩阵的重要子类. 这一矩阵类在块迭代法收敛性的讨论中以及线性互余等问题中有着重要的应用. 设 $A\in K$ 为对称矩阵,则称 A 为斯蒂尔杰斯矩阵. 由定义,斯蒂尔杰斯矩阵必为正定阵. 若 $A\in\mathbf{Z}^{n\times n}$为斯蒂尔杰斯矩阵,且有正则裂分 $A=M-N$,$M^{-1}\geqslant0$,$N\geqslant0$,则必有

$$\rho(M^{-1}N)\leqslant\frac{\rho(N)\rho(A^{-1})}{(1+\rho(N)\rho(A^{-1}))}<1,$$

且 N 为实对称阵.

逆正阵(inverse positive matrix)　包括 M 矩阵在内的更广泛的矩阵类. $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$为逆正阵,是指 A 非奇异且 $A^{-1}\geqslant0$. 下述各点等价于 $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$为逆正阵:

1. 存在逆正阵 B 使 $B\geqslant A$ 且 $\rho(I-B^{-1}A)<1$.

2. A 为单调阵,即 $Ax\geqslant Ay$ 意味着 $x\geqslant y$.

3. 存在逆正阵 B 及 $C\in K$ 使 $B\geqslant A$ 且 $A=BC$.

4. 存在逆正阵 B_1,B_2 使 $B_1\leqslant A\leqslant B_2$.

5. A 有收敛的正则裂分,即 $A=M-N$,$M^{-1}\geqslant0$,$N\geqslant0$ 且 $\rho(M^{-1}N)<1$.

6. 对所有裂分 $A=B-C$,$B\geqslant0$,$C\geqslant0$,存在向量 $v>0$ 及 $\alpha\in[0,1]$使 $Cv=\alpha Bv$,进而,若还有 $u>0$ 使 $Cu=\beta Bu$,则必 $\beta\leqslant\alpha$.

矩阵的正则裂分(regular splitting of a matrix)　矩阵分析理论中的重要概念. 它在一般迭代法收敛性的讨论中起着重要的作用. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n}$,若有 $M,N\in\mathbf{R}^{n\times n}$,使 $A=M-N$,且 $M^{-1}\geqslant0$,$N\geqslant0$,则称 A 有正则裂分. 由定义,$A\in K$ 充分必要条件是,A 有收敛的正则裂分或 A 有收敛的弱正则裂分(即 $A=M-N$,$M^{+}\geqslant0$,$M^{-1}N\geqslant0$ 且 $\rho(\mathrm{M}^{-1}N)<1$). 下述是关于正则裂分的常用结论:

1. 若 A 有正则裂分,则 A 为逆正的充分必要条件是

$$\rho(M^{-1}N)=\frac{\rho(A^{-1}N)}{(1+\rho(A^{-1}N))}<1.$$

2. 设 $A=M_1-N_1=M_2-N_2$ 是 A 的两个正裂分,若 A 逆正且 $M_2^{-1}\leqslant M_1^{-1}(N_2\leqslant N_1)$,则

$$\rho(M_2^{-1}N_2)\leqslant\rho(M_1^{-1}N_1)<1.$$

准M 矩阵(quasi M-matrix)　亦称一般 M 矩阵或奇异 M 矩阵. 是 M 矩阵的推广. 设 $A=(a_{ij})\in\mathbf{Z}^{n\times n}$,若 A 的所有主子式皆非负,则称 A 为准 M 矩阵,记为 $A\in K_0$. 由定义,K_0 是 K 的闭包. 若 $A\in\mathbf{Z}^{n\times n}$,则下述各点等价于 $A\in K_0$:

1. $A=tI-B$,$B\geqslant0$,$t\geqslant\rho(B)$.

2. 对任意 $\varepsilon>0$,$A+\varepsilon I\in K$.

3. 对每一符号差矩阵 S,存在一个非负向量 x 使 $SASx\geqslant0$.

4. $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant0$,$\forall\ \lambda\in\sigma(A)$.

5. 对每一非零实向量 x,存在非负对角阵 D_x 使 $x^TD_xx>0$ 且 $x^TAD_xx\geqslant0$.

6. 存在一 n 阶置换阵 P 及具有非负对角元的上、下三角阵 V,L 使 $PAP^T=LV$.

7. 存在一非负阵 B 及正整数 k 使 $BA^{k+1}=A^k$.

若 $A=(a_{ij})\in K_0$ 且非零主子式最大阶数 $k=n$ 或 $k<n$ 为一奇数,则 A 有一正特征值. 记 $a=\max\limits_i a_{ii}$,$A\in K_0$,$\forall\ \lambda\in\sigma(A)$皆满足下式

$$a-\rho(aI-A)\leqslant|\lambda|\leqslant a+\rho(aI-A).$$

准 M 矩阵在实际应用上与 M 矩阵几乎同等重要. 但由于这类矩阵研究的难度较大,所以其理论同 M 矩阵理论相比尚未得到完善的发展,现有的结论也都是近二三十年研究的成果.

一般M 矩阵(usual M- matrix)　即"准 M 矩阵".

奇异M 矩阵(singular M- matrix)　即"准 M 矩阵".

不可约准M 矩阵(irreducible quasi Mmatrix)　准 M 矩阵的重要子类,具有许多特殊性质. 若 $A\in K_0$ 为不可约,则称 A 为不可约准 M 矩阵. 若 $A\in\mathbf{Z}^{n\times n}$不可约,则下述各点等价于 $A\in K_0$:

1. $a_{ii}\geqslant0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$且对某一正向量 x 有

$$Ax\geqslant0.$$

2. $a_{ii}\geqslant0(1\leqslant i\leqslant n)$ 且有一正对角阵 D 使 AD 为对角占优阵(即 A 为广义对角占优阵).

3. 对每一符号差阵 S,有 $x>0$ 使 $SASx\geqslant0$.

4. 有正对角阵 D 使 $AD+DA^T$ 为半正定阵.

不可约准 M 矩阵还具有下述基本性质:

1. $\mathrm{rank}\,A=n-1$,且具有性质 C.

2. 若 $Ax\geqslant0$ 必 $x=0$,即 A 几乎单调(参见"具有性质 C 的准 M 矩阵").

3. 有下三角 M 阵 L 及上三角准 M 阵 V 使

$$A=LV.$$

具有性质C 的准M 矩阵(quasi M-matrix with property C)　包含 M 矩阵及不可约准 M 矩阵在内

的重要准M矩阵子类，在奇异线性代数方程组迭代求解等方面有广泛的应用. $A\in K_0$ 称为具有性质 C，是指 $A=tI-B$ $(B\geqslant 0, t>0)$ 且

$$\lim_{k\to\infty}(B/t)^k$$

存在. 若 $A\in K_0$，则下述各点等价于 A 具有性质 C：

1. index $A\leqslant 1$（即 A 非奇异或

$$\text{rank } A^2=\text{rank } A).$$

2. 群逆 $A^{\#}$ 存在.

3. 有正定阵 W 使 $AW+WA^T$ 为半正定阵.

$A\in \mathbf{Z}^{n\times n}$ 满足下述条件之一时，具有性质 C：

1. A 为对称的M矩阵.

2. 存在 $x>0$ 使 $Ax\geqslant 0$.

逆M矩阵(inverse M-matrix)　非负矩阵的一个重要子类，近年来研究者颇多. 研究结果表明，该矩阵类有许多重要性质. 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 满足 $A^{-1}\in K$，则称 A 为逆M矩阵，记为 $A\in K^{-1}$. 若 $A\in K^{-1}$，则 A 有下述基本性质：

1. 有正对角阵 D，使 $AD+DA^T$ 为正定阵.

2. 对任意非负对角阵 D，有

$$A+D\in K^{-1}.$$

3. A 与 A^m 有相同零结构，$m=1,2,\cdots$.

4. 有 K^{-1} 中的上下三角阵 V, L，使 $A=LV$.

5. 对任意正整数 k，有矩阵 B 使 $B^k=A$ 且满足 $B, B^2, \cdots, B^k\in K^{-1}$.

若 $A\geqslant 0$，则 $A\in K^{-1}$ 当且仅当对每一正对角阵 D 有 $(A+D)^{-1}A\geqslant 0$；当且仅当 A 与 A^2 有相同零结构.

H矩阵(H-matrix)　包含M矩阵类在内的矩阵类，在矩阵谱分析等领域有着重要的作用. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$，称

$$\mu(A)=\begin{cases}|a_{ii}| & (i=j),\\ -|a_{ij}| & (i\neq j)\end{cases}$$

为 A 的比较阵. 若 $\mu(A)\in K$，则称 A 为H矩阵，记为 $A\in$ H. 施耐德(Schneider, H.)等给出了下述基本结论：

1. 若 $A\in$ H 且 $a_{ii}\geqslant 0 (1\leqslant i\leqslant n)$，则 A 为对角稳定的充分必要条件是 $\det A\neq 0$.

2. 若 $A\in$ H，则有上、下三角阵 V, L，使 $A=LV$ 且 $|A^{-1}|\leqslant[\mu(V)]^{-1}[\mu(L)]^{-1}\leqslant[\mu(A)]^{-1}$.

3. 若 $A=(A_{ij})_{m\times m}\in$ H，$A_{ij}\in \mathbf{C}^{k\times k}$，$1\leqslant i, j\leqslant m$，则 $(\det A_{ij})_{m\times m}\in$ H，进而，$D_A=(|\det A_{ij}|)_{m\times m}\in$ H 且 $\det[\mu(D_A)]\geqslant\det A$.

比较阵(comparison matrix)　见“H矩阵”.

P矩阵(P-matrix)　包含M矩阵类在内的重要矩阵类，在线性互余及其他许多领域都有广泛的应用. 设 $A=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$，若 A 的所有主子式皆为正(非负)，则称 A 为 $P(P_0)$ 矩阵，记为 $A\in P(P_0)$. 若 $A\in \mathbf{R}^{n\times n}$，则下述各点等价于 $A\in$ P：

1. 对每一 $0\neq x\in \mathbf{R}^n$，有正对角阵 D_x 使

$$x^TD_xAx>0.$$

2. A 的每一实特征值皆正.

3. 对每一符号差阵 S，有 $x\geqslant 0$ 使 $SASx>0$.

4. 线性互余问题 $y=Ax+q$ 有惟一解 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 满足 $x^Ty=0$，式中 $q\in \mathbf{R}^n$ 为给定的向量.

常用的P矩阵的判定条件是：若 $A+A^*$ 为正定(半正定)阵，则 $A\in P(P_0)$.

P矩阵的谱(spectrum of a P-matrix)　矩阵谱理论的一个重要内容，具有广泛的应用价值. 凯洛格(Kellogg, R. B.)于1972年首先证明：

1. $A\in$ P，$\lambda=re^{i\theta}\in\sigma(A)$ 当且仅当 $|\theta-\pi|>\pi/n$；$A\in P_0$，$0\neq\lambda=re^{i\theta}\in\sigma(A)$ 当且仅当 $|\theta-\pi|\geqslant\pi/n$.

2. n 个复数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $A\in P(P_0)$ 的谱当且仅当多项式

$$\prod_{j=1}^{n}(t+\lambda_j)=\sum_{j=0}^{n}b_it^j$$

满足 $b_j>0 (b_j\geqslant 0)$，$0\leqslant j\leqslant n$.

赫斯考维茨(Hershkowitz, D.)与比曼(Berman, A.)于1983年证明：n 个复数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $A\in P(P_0)$ 的谱，当且仅当 $\sigma_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)>0 (\geqslant 0)$ $(k=1,2,\cdots,n)$，式中 $\sigma_k(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ 表 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 之 k 元对称函数.

完全正矩阵(totally positive matrix)　一个重要的非负矩阵子类，起源于稳定性理论的研究，在弹性系统之微振动理论等方面有广泛的应用. 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$ 满足所有子式皆正(非负)，则称 A 为完全正(非负)阵，记为 $A\in TP (TN)$. 若 $A\in TP$，则下述基本结论成立：

1. $A\in$ P 且每一特征值皆为非负实数.

2. 若 $\sigma(A)=\{\lambda_1(A)\geqslant\lambda_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)\}$，$A_k$ 为 A 划去 k 行 k 列后得到的 $n-1$ 阶子阵，则 $\lambda_1(A)\geqslant\lambda_1(A_k)\geqslant\lambda_2(A)$，$\lambda_{n-1}(A_k)\geqslant\lambda_n(A)$，$1\leqslant k\leqslant n$.

3. $\det A\leqslant\det A_p\det A_{n-p}$，式中 A_p 表示 A 之 p 阶顺序主子阵，A_{n-p} 表示 A 之后 $n-p$ 阶主子阵.

完全非负矩阵(totally nonnegative matrix)　见“完全正矩阵”.

N_0矩阵(N_0-matrix)　是Z矩阵的一个重要子类，也是N矩阵的推广，具有重要的理论意义与应用价值. 设 $A=tI-B$，$B\geqslant 0$. 若 $\rho_{n-1}(B)\leqslant(<)t\rho(B)$，则称 A 为 $N_0(N)$ 矩阵，记为 $A\in N_0(N)$，式中 $\rho_{n-1}(B)$ 表 B 之所有 $n-1$ 阶主子阵之最大谱半径. 约翰逊(Johnson, G. A.)等证明了下述基本结论：

1. $M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\in N_0$，

当且仅当 $M\in Z^{n\times n}$，$\det M<0$，M 的所有真主子阵是

准 M 阵；当且仅当 M 不可约且 $M^{-1}\leqslant 0$；当且仅当 M 的所有主子式非正.

2. 若 $\det A\neq 0$，则 $D-CA^{-1}B\in N_0$.

3. 若 $A,B\in N_0$，$A\leqslant B$，$n\geqslant 2$，则

$$A^{-1}\geqslant B^{-1},\quad \det A\leqslant \det B.$$

N_0 矩阵的谱(spectrum of an N_0-matrix)　对 N_0 矩阵的重要刻画. 由于 N_0 矩阵的特殊结构，所以它具有特殊的谱性质，成为矩阵谱理论的一个重要内容. 史密斯(Smith, R. L.)等证明了下述基本结论：

1. A 的最小模特征值为一负数，记为 $n(A)$，进而有

$$\sigma(A)\subseteq\{z\mid |z-a|\leqslant a-n(A),|z|\geqslant -n(A)\},$$

式中 $a=\max\limits_i a_{ii}$，且 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in N_0$.

2. 若 $A,B\in N_0$ 且 $A\leqslant B$，则 $\rho(I-A^{-1}B)<1$，$\rho(I-BA^{-1})<1$ 且 $n(B)\geqslant n(A)$.

3. 若 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & B\\ C & D\end{bmatrix}\in N_0$，

式中 $A_{11}\in K$，则有 $n(D-CA_{11}^{-1}B)<n(A)$.

逆 N_0 矩阵(inverse N_0-matrix)　由 N_0 矩阵派生的一个重要矩阵类. 设 $A\in R^{n\times n}$ 非奇异，若 $A^{-1}\in N_0$，则称 A 为逆 N_0 矩阵，记为 $A\in N_0^{-1}$. 约翰逊(Johnson, G. A.)等给出下述基本结论：

1. 设 $A\leqslant 0$ 且 $n-1$ 阶子式皆非正，则 $A\in N_0^{-1}$ 的充分必要条件是，$\det A<0$，$\det A(i\mid j)=0$，$i+j=2k$，$i\neq j$，式中 $A(i\mid j)$ 表删去 i 行 j 列后所得 $n-1$ 阶子阵.

2. 若 $A\leqslant 0$ 满足 $A\in N_0^{-1}$，则 A 的几乎方子阵皆非正，几乎方子阵指行、列足码为 α,β，且 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$，$\beta=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\}$，$1\leqslant\alpha_1,\beta_1<\alpha_2,\beta_2<\cdots<\alpha_s,\beta_s\leqslant n$ 且 $|\alpha_r-\beta_r|\leqslant 1$，$1\leqslant r\leqslant s$ 之子阵 $A[\alpha\mid\beta]$.

3. 若 $M=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\in N_0^{-1}$

且 $\det A\neq 0$，$n\geqslant 2$，则 $A\in N_0^{-1}$.

F_0 矩阵(F_0-matrix)　由 N_0 矩阵类拓广出的新的矩阵类，具有许多与 N_0 矩阵相似的重要性质. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}=tI-B$，$B\geqslant 0$，若 A 满足 $\rho_{n-2}(B)\leqslant t<\rho_{n-1}(B)$，则称 A 为 F_0 矩阵，记为 $A\in F_0$，式中 $\rho_{n-1}(B)$，$\rho_{n-2}(B)$ 分别表 B 所有 $n-1$ 阶、$n-2$ 阶主子阵之最大谱半径. 史密斯(Smith, R. L.)等证明了下述基本结论：

1. 若 $A\in Z^{n\times n}$，则 $A\in F_0$ 当且仅当 $\det A<0$，A^{-1} 之所有阶数 $\geqslant 2$ 的主子式非正，且 A^{-1} 至少有一正对角元.

2. 若 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in F_0$，则 A 恰有一负特征值，记为 $n(A)$，又，若 $a=\max\limits_\gamma a_{ii}$，则

$$|\lambda-a|\leqslant a-n(A)\quad(\forall\,\lambda\in\sigma(A)).$$

矩阵多项式函数(matrix polynomial function)　一种基本而重要的矩阵函数. 设 $A\in C^{n\times n}$，A 的最小多项式为 $\alpha(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{a_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{a_k}$，记 $\Lambda_A=\{(\lambda_i,\alpha_i)\mid 1\leqslant i\leqslant k\}$，称多项式 $\varphi(\lambda)\in C[\lambda]$ 是在 Λ_A 上给定，系指给出 $\varphi(\lambda_i),\varphi'(\lambda_i),\cdots,\varphi^{(a_i-1)}(\lambda_i)$，$1\leqslant i\leqslant k$，记为 $\varphi(\Lambda_A)$，$C[\lambda]$ 表复数域 C 上全体 λ 之一元多项式集合. 对任意 $\varphi(\lambda)\in C[\lambda]$，若 $\varphi(\Lambda_A)=\psi(\Lambda_A)$，则定义 $\varphi(A)=\psi(A)$. 对多项式矩阵 $\varphi(A)$ 有如下结论：

1. 若 $\sigma(A)=\{\lambda_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$，则

$$\sigma(\varphi(A))=\{\varphi(\lambda_i)\mid 1\leqslant i\leqslant n\}.$$

2. 若 $A=\operatorname{diag}[A_1,A_2,\cdots,A_m]$，则

$$\varphi(A)=\operatorname{diag}[\varphi(A_1),\varphi(A_2),\cdots,\varphi(A_m)].$$

3. $\varphi(\lambda)\in C[\lambda]$ 满足 $\varphi(\Lambda_A)=0$ 的充分必要条件是 $\alpha(\lambda)\mid\varphi(\lambda)$，即 $\alpha(\lambda)$ 整除 $\varphi(\lambda)$.

矩阵幂级数(matrix power series)　用幂级数表达矩阵函数的一种常用的方法，在系统微分方程求解时经常用到. 若 $A\in C^{n\times n}$，给定一个用幂级数表达的复变量解析函数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,$$

其收敛半径为 r，则称相应的

$$f(A)=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}a_kA^k$$

为矩阵幂级数. 关于矩阵幂级数的基本结论是，若 $\rho(A)<r$，则 $f(A)$ 可以由

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kA^k$$

表示；而当 $\rho(A)>r$ 时，矩阵级数发散，不能用幂级数表示. 常用的矩阵幂级数有：

$$e^{A\tau}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k\tau^k}{k!},\sin A\tau=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}A^{2k-1}\tau^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$$\cos A\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kA^{2k}\tau^{2k}}{2k!},(I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{(\infty)}A^k$$

等.

广义逆矩阵(generalized inverse matrix)　矩阵理论中的重要概念. 设 $A\in C^{m\times n}$，若 $X\in C^{n\times m}$ 满足下述彭罗斯方程：

1. $AXA=A$；

2. $XAX=X$；

3. $AX=(AX)^*$；

4. $XA=(XA)^*$；

则称 X 为 A 的彭罗斯-穆尔逆，或 A 的 $\{1,2,3,4\}$ 逆，记为 A^+. 对 $\{1,2,3,4\}$ 的一个非空子集 λ，称 $X\in C^{n\times m}$ 是 A 的一个 λ 逆是指若 X 满足第 i 个彭罗斯方程，$\forall\,i\in\lambda$. 记 A 的所有 λ 逆的集合为 $A\{\lambda\}$，而 $A^{[\lambda]}$ 表 $A\{\lambda\}$ 中的任一元素. 对 A 的各种 λ 逆，有下述基本结论：

1. A 的各种 λ 逆皆存在，且只有惟一的{1,2,3,4}逆存在，它可表为

$$A^{+}=V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^{*},$$

式中的 U,V 使

$$U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{*}$$

为 A 的奇异值分解.

2. 若 A 具有满秩分解 $A=FG,F\in\mathbb{C}^{m\times r},G\in\mathbb{C}^{r\times n}$，$\operatorname{rank}A=r$，则 $A^{+}=G^{*}(F^{*}AG^{*})F^{*}=G^{+}F^{+}$.

3. $A^{+}=(A^{*}A)^{+}A^{*}=A^{*}(AA^{*})^{+}$.

4. 对任意 m 阶酉阵 U 及 n 阶酉阵 V 皆有

$$(UAV)^{+}=V^{*}A^{+}U^{*}.$$

广义逆矩阵是非奇异矩阵的逆的概念之推广，但它的讨论范围却包括最普通的长方形矩阵. 矩阵的广义逆理论自 1920 年由穆尔(Moore, E. H.)首次提出 $m\times n$ 阶长方形矩阵的广义逆之概念后，20 世纪 50 年代中期由彭罗斯(Penrose, R.)更加完整地建立了所谓彭罗斯方程. 此后的 30 多年里，矩阵的广义逆理论之研究得到迅速的发展. 现在已出现了多种形式与背景的矩阵广义逆，这一理论不仅在理论上更加趋于完善，而且在优化计算、系统理论等许多领域均有着广泛深入的应用. 广义逆理论大致可以分为两类：一类是基于彭罗斯方程建立起来并主要用于建立投影算子的广义逆，另一类则是考虑到矩阵谱性质而确定的各种谱广义逆.

矩阵的{1}逆({1}-inverse of a matrix) 一种重要的广义逆矩阵. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n},X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 满足彭罗斯方程 1，则称 X 为 A 之{1}逆，记为 $X\in A\{1\}$. 下述是关于{1}逆之基本结果：

1. 若 $\operatorname{rank}A=r$ 且有奇异值分解

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{*},\quad \Sigma=\operatorname{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$$

$(\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r)$ 为 A 的奇异值，$U\in\mathbb{C}^{m\times m},V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 皆为酉阵，则

$$A\{1\}=\left\{V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & K\\ L & M\end{bmatrix}U^{*}\mid\forall\ L\in\mathbb{C}^{(n-r)\times r},\right.$$
$$\left.K\in\mathbb{C}^{r\times(m-r)},M\in\mathbb{C}^{(n-r)\times(m-r)}\right\}.$$

2. {1}逆惟一的充分必要条件是

$$m=n,\quad \det A\neq 0,\quad X=A^{-1}.$$

3. $X\in A\{1\}$，当且仅当 AX 为幂等阵且 $\operatorname{Im}(AX)=\operatorname{Im}A$；当且仅当对任意 $b\in\operatorname{Im}A$ 有 $AXb=b$. 注意，由定义，$X\in A\{2\}$ 等价于 $A\in X\{1\}$.

矩阵的{1,2}逆({1,2}-inverse of a matrix) 一种重要的广义逆矩阵. 是 A 的满足彭罗斯方程 1，2 的广义逆矩阵. 由定义，$A\{1\}\cap A\{2\}\subset A\{1,2\}$，且 A 与其{1,2}逆 X 互为{1,2}逆. 对于 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 的{1,2}逆有如下基本结论：

1. 若 A 有奇异值分解

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{*},$$

则 $$A\{1,2\}=\left\{V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & \Sigma\\ L & L\Sigma K\end{bmatrix}\middle|\ L,K\text{ 任意}\right\}.$$

2. 下述结论中的任意两个蕴含另外的一个：

$X\in A\{1\}$，$X\in A\{2\}$，$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}X$.

3. $X\in A\{1,1\}$ 的充分必要条件是 AX 为幂等阵，且 $\mathbb{C}^{n}$ 可表为 $\ker A$ 及 $\operatorname{Im}X$ 之直和，充分必要条件是 $X\in A\{1\}$ 且 $\operatorname{rank}X=\operatorname{rank}A$.

矩阵的{1,3}逆({1,3}-inverse of a matrix) 一种重要的广义逆矩阵. 是 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 满足彭罗斯方程 1,3 的广义逆矩阵. 对 A 的{1,3}逆及{1,4}逆，有如下基本结论：

1. 若 A 有奇异值分解

$$A=U\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^{*},$$

则 $$A\{1,3\}=\left\{V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & 0\\ L & M\end{bmatrix}U^{*}\middle|\ L,M\text{ 任意}\right\},$$

$$A\{1,4\}=\left\{V\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & K\\ 0 & M\end{bmatrix}U^{*}\middle|\ K,M\text{ 任意}\right\}.$$

2. 若 $P_{\operatorname{Im}A}$ 为 $\operatorname{Im}A$ 上的正交投影，则 $X\in A\{1,3\}$ 的充分必要条件是 $AX=P_{\operatorname{Im}A}$，$X\in A\{1,4\}$ 的充分必要条件是 $XA=P_{\operatorname{Im}A^{*}}$.

3. 对任意给定的 $A^{[1,3]}\in A\{1,3\}$ 及 $A^{[1,4]}\in A\{1,4\}$ 有 $A\{1,3\}=\{A^{[1,3]}+(I_n-A^{[1,3]}A)Z\mid\forall\ Z\in\mathbb{C}^{n\times m}\}$ 以及 $A\{1,4\}=\{A^{[1,4]}+Y(I_m-AA^{[1,4]})\mid\forall\ Y\in\mathbb{C}^{n\times m}\}$.

矩阵的{1,4}逆({1,4}-inverse of a matrix) 见“矩阵的{1,3}逆”.

分块矩阵的广义逆(generalized inverse of a partitioned matrix) 一类重要的广义逆矩阵. 是广义逆矩阵在分块矩阵上的表征. 通常与解并行方程组、空间直流形之间相互关系等问题有密切联系，同时在相应的计算问题上往往会带来许多方便之处. 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$\operatorname{rank}A=r$ 有置换阵 $P\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 以及 $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$，使

$$A=P^{T}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}Q^{T}=P^{T}\begin{bmatrix}I_r\\ S\end{bmatrix}A_{11}[I_r\quad T]Q^{T},$$

式中 A_{11} 为 r 阶非奇异方阵，$T=A_{11}^{-1}A_{12}$，$S=A_{21}A_{11}^{-1}$. 于是有下述广义逆的表达式：

1. $X=Q\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P\in A\{1,2\}$.

2. $X=Q\begin{bmatrix}A_{11}^{-1}\\ 0\end{bmatrix}[I_r+S^{*}S]^{-1}[I_r,S^{*}]P$
$\in A\{1,2,3\}$.

3. $X=Q\begin{bmatrix}I_r\\T^*\end{bmatrix}[I_r+TT^*]^{-1}[A_{11}^{-1}\quad 0]P$
$\in A\{1,2,4\}$.

4. $A^+=Q\begin{bmatrix}I_r\\T^*\end{bmatrix}[I_r+TT^*]^{-1}A_{11}^{-1}$
$\cdot[I_r+S^*S]^{-1}[I_rS^*]P$.

矩阵的德雷津逆(Drazin-inverse of a matrix)亦称谱广义逆.一类仅适用于方阵的广义逆.这类广义逆矩阵在奇异线性常微分方程组及奇异差分方程组求解问题中有着重要的应用.除四个彭罗斯方程外,还考虑如下两个方程:

1^k. $A^kXA=A^k$,

5. $AX=XA$.

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$有 $\operatorname{ind}A=k$,满足彭罗斯方程 2 及上述 1^k,5 的 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$称为 A 的德雷津逆,记为 A^D.对 A^D 有下述基本结论:

1. 若$m(\lambda)=c\lambda^k(1-\lambda q(\lambda))$,$c\neq 0$ 为 A 的最小多项式,则 A 有惟一的德雷津逆 $A^D=A^k(q(A))^{k+1}$.

2. $\lambda\in\sigma(A)$的充分必要条件是 $\lambda^+\in\sigma(A^D)$,

$$\lambda^+=\begin{cases}\lambda^{-1} & (\lambda\neq 0),\\ 0 & (\lambda=0).\end{cases}$$

矩阵的群逆(group inverse of a matrix) 一类广义逆.德雷津逆的相关广义逆.设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$,若 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$满足彭罗斯方程 1,2,5,则称 X 为 A 之群逆,记为 $A^{\#}$.由定义,X 为 A 的群逆等价于 A 为 X 的群逆,且群逆是 A 的指数为 1 时的德雷津逆,从而是惟一的.下述结论是关于群逆的基本结果:

1. 若 $\operatorname{rank}A=r>0$,且有满秩分解 $A=FG$,则 A 有群逆当且仅当 $\operatorname{index}A\leqslant 1$;当且仅当 $\operatorname{Im}A$ 与 $\ker A$ 互补.

2. $A^{\#}=A^+$当且仅当 $AA^+=A^+A$.

3. $A^{\#}=A(q(A))^2=F(GF)^{-2}G$,$A$ 的最小多项式为 $m(\lambda)=c\lambda^k(1-\lambda q(\lambda))$.

撰 稿 孙宗明 张宝林 逄明贤
审 阅 佟文廷 武同锁

多重线性代数

多重线性代数(multilinear algebra) 代数学的一个重要分支.可以将它看做是线性代数的发展.它是伴随着微分几何、现代分析、群表示论、理论物理、量子力学等学科发展起来的,并且在这些学科中已得到重要的应用.

多重线性代数形成为一个学科还是近几十年来的事,值得提出的是 20 世纪 50 年代,布尔巴基(Bourbaki,N.)论述多重线性代数的书及 20 世纪 60 年代,葛瑞布(Greub,W.)的多重线性代数专著(第一版),特别是从 1973 年,由马库斯(Marcus,M.)和汤普森(Thompson,R. C.)创办了国际性的《线性和多重线性代数》(Linear and Multilinear Algebra)杂志以及同年马库斯出版了经典性著作《有限维多重线性代数》以来,多重线性代数的发展进入了一个活跃的新阶段,这当中以梅里斯(Merris,R.)等人研究高阶特征标的张量对称类所获得的成果最为突出.

多重线性代数研究的内容包括:多重线性映射、具有一定对称性质的多重线性映射、张量空间、张量对称类、张量代数、对称张量代数、格拉斯曼代数、外代数、克利福德代数及其表示理论等.这里的前半部分只就常用的有限维多重线性代数来叙述,对于以泛性质手段处理的无限维情形可参看葛瑞布(Greub,W. H.)于 1978 年著的《多重线性代数》(第二版).对可换环上建立在环模上的多重线性代数则可参看诺茨考特(Northcott,D. G.)于 1984 年著的《多重线性代数》.

多重线性代数这部分词条的向量空间一般是指一个特征为零的域 K 上的(向量)空间,但当关系到内积和群的任意特征标时,为了叙述简明则只在复数域 $\mathbb{C}$ 上讨论.域上的多重线性代数的主要概念与结果都可用模论(参见《模论》有关部分)的工具推广到交换环上的多重线性代数,这里不再一一提及.交换环上的多重线性代数在模论、同调代数、代数 K 理论、代数几何等学科中都有重要应用.

序列集合记号(notation of sequence sets) 以正整数为分量的有限序列集合的记号.下面是多重线性代数中常用的序列集合及记号:

$$\begin{aligned}\Gamma&=\Gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m)\\&=\{\alpha=(\alpha(1),\alpha(2),\cdots,\alpha(m))\mid 1\\&\qquad\leqslant\alpha(i)\leqslant n_i,i=1,2,\cdots,m\};\\ \Gamma_{m,n}&=\{\alpha=(\alpha(1),\alpha(2),\cdots,\alpha(m))\mid 1\leqslant\alpha(i)\\&\qquad\leqslant n,i=1,2,\cdots,m\};\\ G_{m,n}&=\{\alpha\mid\alpha\in\Gamma_{m,n},\alpha(1)\leqslant\alpha(2)\leqslant\cdots\leqslant\alpha(m)\};\\ D_{m,n}&=\{\alpha\mid\alpha\in\Gamma_{m,n},\text{当 }i\neq j\text{ 时},\alpha(i)\neq\alpha(j)\};\\ Q_{m,n}&=\{\alpha\mid\alpha\in\Gamma_{m,n},\alpha(1)<\alpha(2)<\cdots<\alpha(m)\}.\end{aligned}$$

上面这些集合的序列数目分别为:

$$|\Gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m)|=\prod_{i=1}^{m}n_i;\quad|\Gamma_{m,n}|=n^m;$$

$$|G_{m,n}|=\binom{n+m-1}{m};$$

$$|D_{m,n}|=\binom{n}{m}m!;\quad|Q_{m,n}|=\binom{n}{m}.$$

还有几个重要的序列集合为 $\Delta,\bar{\Delta},\hat{\Delta},\Omega$(参见"轨道代表集").

多重线性映射(multilinear mapping) 多重线性代数最基本的研究对象.它是线性映射概念的推

广. 设 $V_1,V_2,\cdots,V_m,W$ 是一个(特征为 0 的)域 K 上的 $m+1$ 个向量空间,若映射 $\varphi:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to W$ 对每个用作变元的向量 $v_i\in V_i$ 都是线性的,即 $\varphi(v_1,\cdots,v_i+av_i',\cdots,v_m)=\varphi(v_1,\cdots,v_i,\cdots,v_m)+a\varphi(v_1,\cdots,v_i',\cdots,v_m)$ $(a\in K,1\leqslant i\leqslant m)$,则称 φ 为 m 重线性映射(m 线性映射). 当 $m\geqslant 3$ 时,统称为多重线性映射;当 $m=2$ 时,称为双线性映射. 多重线性映射 $\varphi:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to W$ 的全体记为 $M(V_1,V_2,\cdots,V_m;W)$ 或 $L^m(V_1,V_2,\cdots,V_m;W)$,它具有加法与纯量乘法运算:

1. $(\varphi+\psi)(v_1,v_2,\cdots,v_m)=\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_m)+\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m)$.

2. $(a\varphi)(v_1,v_2,\cdots,v_m)=a\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_m)$ $(a\in K)$,

从而也构成域 K 上的向量空间. 多重线性映射 $\varphi:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to W$ 的值域记为 $\operatorname{Im}\varphi$,一般它不是个向量空间,由 $\operatorname{Im}\varphi$ 生成的 W 的子空间记为 $\langle\operatorname{Im}\varphi\rangle$. 这个子空间的维数

$$\dim\langle\operatorname{Im}\varphi\rangle\leqslant\prod_{i=1}^{m}\dim V_i.$$

当上述的 $W=K$ 时,m 重线性映射、多重线性映射、双线性映射又分别称为 m 重线性函数、多重线性函数、双线性函数.

m 重线性映射(m-linear mapping) 见"多重线性映射".

双线性映射(bilinear mapping) 见"多重线性映射".

m 重线性函数(m-linear function) 见"多重线性映射".

双线性函数(bilinear function) 见"多重线性映射".

多重线性函数(multilinear function) 一种特殊的多重线性映射. 即当映射空间 W 为域 K 时的多重线性映射. 有些作者把一般多重线性映射也称为多重线性函数.

多重线性开拓(multilinear extension) 确定多重线性映射的过程. 即要求此映射在空间 $\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i$ 的某些元素上取给定值,然后将它多重线性地开拓到整个空间上. 具体如下:若 $\{e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{in_i}\}$ 是向量空间 V_i 的基 $(i=1,2,\cdots,m)$,则存在惟一的 m 重线性映射

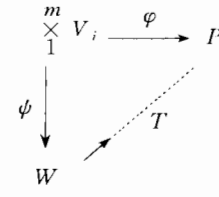
$$\varphi:\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i\to W,$$

使 φ 在下面的元素上取预先给定的值,这些元素为

$$\{e_\gamma=(e_{1\gamma(1)},e_{2\gamma(2)},\cdots,e_{m\gamma(m)})\in\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i\mid \gamma\in\Gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m)\},$$

其个数为 $\prod_{i=1}^{m}n_i$. 一般地,它比空间 $\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i$ 的维数 $(\sum_{i=1}^{m}n_i)$ 多得多,这是与确定线性映射很不相同的地方.

因子化泛性质(universal factorization property) 一种特殊的多重线性映射所具有的重要性质. 这个性质能把一般的多重线性映射转换为线性映射来研究. 即一个多重线性映射



$$\varphi:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to P$$

称为具有因子化泛性质,是指对于任意的多重线性映射

$$\psi:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to W$$

(W 也任意),总存在线性映射 $T\in L(P,W)$,使得 $\psi=T\varphi$. 这个性质常用上面的可换图来表示. 多重线性映射

$$\varphi:\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i\to P$$

具有因子化泛性质,等价于(对于有限维空间)多重线性映射 φ 满足

$$\dim\langle\operatorname{Im}\varphi\rangle=\prod_{i=1}^{m}\dim V_i.$$

张映射(spread mapping) 多重线性代数的重要概念. 具有因子化泛性质的多重线性映射. 也可等价地(对于有限维空间)定义为:设 $\otimes:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to P$ 是多重线性映射,若

$$\dim\langle\operatorname{Im}\otimes\rangle=\prod_{i=1}^{m}\dim V_i,$$

则称 $\otimes$ 是关于 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的张映射. 张映射是构成张量空间的基本要素.

张量空间(tensor space) 多重线性代数的重要概念. 定义有张映射的一种向量空间. 具体定义有多种不同的形式. 例如,可定义为:设 P 是一个向量空间,若存在张映射 $\otimes:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to P$ 使得 $\langle\operatorname{Im}\otimes\rangle=P$,则称 P 为 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的带有张映射 $\otimes$ 的张量空间;或称 P 为 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的张量积空间;或简称 P 为 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 的张量积,记为

$$P=V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_m=\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i.$$

张量空间对于多重线性代数的重要性如同向量空间对于线性代数的重要性. 张量空间的维数是

$$\dim(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i)=\dim\langle\operatorname{Im}\otimes\rangle=\prod_{i=1}^{m}\dim V_i.$$

张量积空间(tensor space) 即"张量空间".

向量空间的张量积(tensor product of vector spaces) 多重线性代数的基本运算. 有各种意义下的张量积,例如向量的张量积,矩阵的张量积等. 有些文献上把 $(P,\otimes)$ 称为张量积,其中 P 是定义有张

映射$\otimes$的张量空间，即映射$\otimes\in M(V_1,V_2,\cdots,V_m;P)$具有因子化泛性质且$\langle \mathrm{Im}\ \otimes\rangle=P$.

可合张量(decomposable tensor)　亦称可合元素. 一类特殊的张量. 张量空间

$$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i=\langle \mathrm{Im}\ \otimes\rangle$$

的元素称为张量，其中属于 Im $\otimes$的元素(即张映射$\otimes$的值)称为可合张量，又称为可分解张量或可分解元素，记为$\otimes(v_1,v_2,\cdots,v_m)=v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m=v^{\otimes}$. 可合张量$v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m$也称为$v_1,v_2,\cdots,v_m$的张量积. 可合张量有下面的重要性质：

1. 若$v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m=u_1\otimes u_2\otimes\cdots\otimes u_m$，则对任意$\psi\in M(V_1,V_2,\cdots,V_m;W)$有$\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m)=\psi(u_1,u_2,\cdots,u_m)$.

2. $v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m=0$的充要条件是有某一个$v_i=0$.

3. $v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m=u_1\otimes u_2\otimes\cdots\otimes u_m\neq 0$的充分必要条件是存在$c_i\in K$使$v_i=c_iu_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$且

$$\prod_{i=1}^{m}c_i=1.$$

可合元素(decomposable element)　即“可合张量”.

张量(tensor)　见“可合张量”.

可分解元素(decomposable element)　即“可合张量”.

可分解张量(decomposable tensor)　即“可合张量”.

不可合张量(non-decomposable tensor)　亦称不可合元素. 一类特殊的张量. 张量空间

$$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i=\langle \mathrm{Im}\ \otimes\rangle$$

中不属于 Im $\otimes$的元素称为不可合张量，也称为不可分解张量或不可分解元素. 例如，若e_1,e_2是V中线性无关的向量，则张量空间$V\otimes V$中的元素$e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_1$就是不可合张量. 而$e_1\otimes e_2+e_2\otimes e_2=(e_1+e_2)\otimes e_2$则是可合张量.

不可合元素(non-decomposable element)　即“不可合张量”.

不可分解元素(non-decomposable element)　即“不可合张量”.

不可分解张量(non-decomposable tensor)　即“不可合张量”.

张量空间的基(bases of a tensor space)　张量空间作为线性空间的基. 张量空间由可合张量生成，通常选取可合张量作为基. 若$\{e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{in_i}\}$是域$K$上向量空间$V_i$的基$(i=1,2,\cdots,m)$，对于$\gamma\in\Gamma$(即$\Gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m)$)，记可合张量$e_{1\gamma(1)}\otimes e_{2\gamma(2)}\otimes\cdots\otimes e_{m\gamma(m)}$为$e_\gamma^{\otimes}$，则称$\{e_\gamma^{\otimes}\mid\gamma\in\Gamma\}$为张量空间$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$的一组基. 对于任一张量$z\in\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$可表示为

$$z=\sum_{\gamma\in\Gamma}c_\gamma e_\gamma^{\otimes}\quad(c_\gamma\in K\mid\gamma\in\Gamma).$$

$\{c_\gamma\in K\mid\gamma\in\Gamma\}$称为张量$z$关于基$\{e_\gamma^{\otimes}\mid\gamma\in\Gamma\}$的张量坐标或张量分量.

张量坐标(coordinates of a tensor)　见“张量空间的基”.

张量分量(components of a tensor)　见“张量空间的基”.

惟一因子化性质(unique factorization property)　亦称泛性质. 刻画特殊映射本质的一种性质. 称多重线性映射

$$\varphi:\overset{m}{\underset{1}{\times}}V_i\to P$$

具有惟一因子化性质，是指对于任意的$\psi\in M(V_1,V_2,\cdots,V_m;W)$($W$任意给定)，都存在惟一的$T\in L(P,W)$使$\psi=T\varphi$. 具有因子化性质的$\varphi\in M(V_1,V_2,\cdots,V_m;P)$是惟一因子化性质当且仅当$\langle \mathrm{Im}\varphi\rangle=P$. 张量空间的张映射$\otimes$就具有惟一因子化性质，这是张量空间最为重要的性质. 于是对于任意的多重线性映射$\psi:V_1\times V_2\times\cdots\times V_m\to W$($W$也任意)，必存在惟一的线性映射

$$T\in L(\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i,W)$$

使得$\psi=T\otimes$，即

$$\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m)=T(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m)=Tv^{\otimes}.$$

泛性质(universal property)　即“惟一因子化性质”.

诱导内积(induced inner product)　多重线性代数的重要概念. 张量空间$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$上由$V_i$的内积定义的一种内积. 通常只考虑域$K$为复数域$\mathbf{C}$的情形. 若设复数域$\mathbf{C}$上的向量空间$V_i$上定义了内积$(\ ,\ )_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$，则

$$(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m,u_1\otimes u_2\otimes\cdots\otimes u_m)=\prod_{i=1}^{m}(v_i,u_i)_i$$

确定了张量空间$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$上的一个内积，称为诱导内积. 若$\{e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{in_i}\}$是内积空间$V_i$的标准正交基，则$\{e_\gamma^{\otimes}\mid\gamma\in\Gamma\}$成为张量空间$\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$关于诱导内积的标准正交基，即对于$\alpha,\beta\in\Gamma$有$(e_\alpha^{\otimes},e_\beta^{\otimes})=\delta_{\alpha\beta}$；在此标准正交基之下，对于$v,u\in\overset{m}{\underset{1}{\otimes}}V_i$，若

$$v=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma e_\gamma^{\otimes},\quad u=\sum_{\gamma\in\Gamma}b_\gamma e_\gamma^{\otimes},$$

则

$$(v,u)=\sum_{\gamma\in\Gamma}a_\gamma b_\gamma.$$

矩阵的克罗内克积(Kronecker product of ma-

trices) 亦称矩阵的张量积. 矩阵(可看做线性映射)的一种张量积. 通常可用矩阵的元素定义如下: 若 $A_i=(a_{st}^i)$ 是 k_i 行 n_i 列矩阵 $(i=1,2,\cdots,m)$, 则 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的克罗内克乘积 $A_1\otimes A_2\otimes\cdots\otimes A_m$ 定义为一个 $\prod_{i=1}^m k_i$ 行 $\prod_{i=1}^m n_i$ 列的大矩阵, 其 (α,β) 位置上的元素为

$$(\bigotimes_1^m A_i)_{\alpha,\beta}=\prod_{i=1}^m a^i_{\alpha(i)\beta(i)},$$

其中 $\alpha\in\Gamma(k_1,k_2,\cdots,k_m)$, $\beta\in\gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 都按词典次序排列. 矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 的克罗内克乘积 $\bigotimes_1^m A_i$ 具有线性映射张量积的各种性质, 当每个 A_i 都为方阵时, 则 $\bigotimes_1^m A_i$ 具有线性算子张量积的各种性质. 例如, 若

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix},$$

则

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B&a_{12}B\\a_{21}B&a_{22}B\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}&a_{11}b_{12}&a_{11}b_{13}&a_{12}b_{11}&a_{12}b_{12}&a_{12}b_{13}\\a_{11}b_{21}&a_{11}b_{22}&a_{11}b_{23}&a_{12}b_{21}&a_{12}b_{22}&a_{12}b_{23}\\a_{21}b_{11}&a_{21}b_{12}&a_{21}b_{13}&a_{22}b_{11}&a_{22}b_{12}&a_{22}b_{13}\\a_{21}b_{21}&a_{21}b_{22}&a_{21}b_{23}&a_{22}b_{21}&a_{22}b_{22}&a_{22}b_{23}\end{pmatrix}.$$

矩阵的张量积(tensor product of matrices). 即"矩阵的克罗内克积".

诱导线性映射(induced linear mapping) 张量空间之间的一种线性映射. 设 V_i,W_i 是向量空间, T_i 是 V_i 到 W_i 的线性映射, 即 $T_i\in L(V_i,W_i)$, $i=1,2,\cdots,m$. 若定义映射

$$\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_m)=T_1v_1\otimes T_2v_2\otimes\cdots\otimes T_mv_m$$
$$=(\otimes(T_1v_1,T_2v_2,\cdots,T_mv_m)),$$

则 φ 是一个 $\bigtimes_1^m V_i$ 到 $\bigotimes_1^m W_i$ 的 m 重线性映射. 因而存在惟一的

$$T\in L(\bigotimes_1^m V_i,\bigotimes_1^m W_i)$$

使 $T\otimes=\varphi$, 即

$$T(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_m)=T_1v_1\otimes T_2v_2\otimes\cdots\otimes T_mv_m.$$

这个线性映射 T 称为 $T_1,T_2,\cdots,T_m$ 的诱导线性映射并记为

$$T=T_1\otimes T_2\otimes\cdots\otimes T_m=\bigotimes_1^m T_i.$$

诱导线性映射有下列基本性质:

1. 若 $S_i\in L(W_i,U_i)$, $T_i\in L(V_i,W_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$, 则

$$(\bigotimes_1^m S_i)(\bigotimes_1^m T_i)=\bigotimes_1^m S_iT_i.$$

2. 若 $T_i\in L(V_i,W_i)$, $i=1,2,\cdots,m$, 则秩

$$\operatorname{rank}(\bigotimes_1^m T_i)=\prod_{i=1}^m\operatorname{rank}T_i.$$

3. 若 $T_i\in L(V_i,W_i)$, V_i,W_i 为内积空间, $T_i^*\in L(W_i,V_i)$ 为 T_i 的共轭映射 $(i=1,2,\cdots,m)$, 又

$$\bigotimes_1^m V_i\text{ 与 }\bigotimes_1^m W_i$$

上都定义了诱导内积, 则

$$(\bigotimes_1^m T_i)^*=\bigotimes_1^m T_i^*.$$

线性映射的张量积(tensor product of linear mappings) 线性映射的一种运算. 线性映射 T_1, $T_2,\cdots,T_m$ 的张量积通常是指诱导线性映射 $T_1\otimes T_2\otimes\cdots\otimes T_m$. 这是因为在有限维的情况下存在张映射使

$$L(\bigotimes_1^m V_i,\bigotimes_1^m W_i)$$

成为向量空间 $L(V_1,W_1),L(V_2,W_2),\cdots,L(V_m,W_m)$ 的张量积空间(在无限维的情况下, 这是不对的), 并使其中的诱导线性映射 $T_1\otimes T_2\otimes\cdots\otimes T_m$ 成为可合张量. 于是作为线性映射张量积的诱导线性映射便有可合张量的性质. 例如, $\bigotimes_1^m T_i=0$ 的充分必要条件是某 $T_i=0$; 又如

$$\bigotimes_1^m T_i=\bigotimes_1^m S_i\neq 0$$

的充分必要条件是存在 $c_i\in K$ 使 $v_i=c_iu_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 且

$$\prod_{i=1}^m c_i=1.$$

线性算子的张量积(tensor product of linear operators) 线性算子的一种运算. 当 $T_i\in L(V_i,V_i)$ 时, T_i 称为(V_i 上的)线性算子 $(i=1,2,\cdots,m)$, 这时线性映射的张量积 $\bigotimes_1^m T_i$ 也就称为线性算子的张量积. 作为线性算子张量积的 $\bigotimes_1^m T_i$, 除了有一般线性映射张量积的性质外, 还有如下的常用性质: 若 $T_i\in L(V_i,V_i)$ 的全部特征值为 λ_{ij} $(j=1,2,\cdots,n_i,n_i=\dim V_i,i=1,2,\cdots,m,n=\prod_{i=1}^m n_i)$, 则有:

1. $\bigotimes_1^m T_i$ 的全部特征值为

$$\prod_{i=1}^m\lambda_{i\gamma(i)},\quad\gamma\in\Gamma(n_1,n_2,\cdots,n_m).$$

2. $\operatorname{tr}(\bigotimes_1^m T_i)=\prod_{i=1}^m\operatorname{tr}(T_i)$.

3. $\det(\bigotimes_1^m T_i)=\prod_{i=1}^m(\det T_i)^{n/n_i}$.

4. 若每个 T_i 是: (a) 正规的, (b) 埃尔米特的, (c) 正定的, (d) 非负定的, (e) 酉的, 则 $\bigotimes_1^m T_i$ 也具有相应性质.

注意：n_i 维线性空间 V_i 上的线性算子可看做(域 K 或 C 上的)$n_i\times n_i$ 矩阵(在取定的基下)，上述概念与结果可搬到矩阵的克罗内克积(张量积)上(参见“矩阵的克罗内克积”).

混合张量(mixed tensor)　一类张量. 向量空间及其对偶空间张量积的元素. 张量空间

$$\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{p}\otimes\overbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}^{q}$$

(记为 V_q^p)中的元素称为 p 重反变 q 重共变张量；或称为(p,q)重混合张量，其中 V 是 C 上向量空间，$V^*=L(V,\mathbf{C})$是 V 的对偶空间. 混合张量也指

$$M(\overbrace{V^*,\cdots,V^*}^{p},\overbrace{V,\cdots,V}^{q};\mathbf{C})$$

中的多重线性函数. 可以定义张映射$\otimes$使

$$V_q^p=M(\overbrace{V^*,\cdots,V^*}^{p},\overbrace{V,\cdots,V}^{q};\mathbf{C}).$$

V_0^p 中的元素称为反变张量. V_q^0 中的元素称为共变张量. 这些都是微分几何、黎曼几何及物理上用得较多的概念.

共变张量(covariant tensor)　见“混合张量”.

反变张量(contravariant tensor)　见“混合张量”.

张量收缩(contraction of tensors)　一种张量运算. 把混合张量空间 V_q^p 中的张量按一定的规则收缩为 V_{q-1}^{p-1}中的张量的运算. 这个过程如下：考虑由 $\varphi_{st}(v_1,v_2,\cdots,v_p,f_1,f_2,\cdots,f_q)=f_t(v_s)v_1\otimes\cdots\otimes v_{s-1}\otimes v_{s+1}\otimes\cdots\otimes v_p\otimes f_1\otimes\cdots\otimes f_{t-1}\otimes f_{t+1}\otimes\cdots\otimes f_q$ 定义的多重线性映射

$$\varphi_{st}:\overbrace{V\times\cdots\times V}^{p}\times\overbrace{V^*\times\cdots\times V^*}^{q}\to V_{q-1}^{p-1},$$

其中 $f_i\in V^*(i=1,2,\cdots,q)$为 V 上的线性函数，由惟一因子化性质，存在惟一的线性映射 $C_{st}\in L(V_q^p,V_{q-1}^{p-1})$使 $\varphi_{st}=C_{st}\otimes$. 线性映射 C_{st}称为关于(s,t)的收缩映射. 注意收缩映射可以继续进行. 例如

$$\begin{aligned}&C_{21}^2(v_1\otimes v_2\otimes v_3\otimes f_1\otimes f_2)\\&=f_1(v_2)C_{21}(v_1\otimes v_3\otimes f_2)\\&=f_1(v_2)f_2(v_3)v_1.\end{aligned}$$

收缩映射(contraction mapping)　见“张量的收缩”.

置换算子(permutation operator)　张量空间 $\overset{m}{\otimes}V$ 的重要线性算子. 对于 $\sigma\in S_m$(m 元对称群)，若定义 m 重线性映射 $\varphi:\overset{m}{\times}V\to\overset{m}{\otimes}V$，

$$\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_m)=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(m)},$$

则存在惟一的 $T\in L(\overset{m}{\otimes}V,\overset{m}{\otimes}V)$使 $T\otimes=\varphi$，称 T 为张量空间 $\overset{m}{\otimes}V$ 上的置换算子，记为 $T=P(\sigma)$. 即有

$$P(\sigma)v^{\otimes}=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(m)}=v_{\sigma^{-1}}^{\otimes},$$

也有 $P(\sigma^{-1})v^{\otimes}=v_{\sigma}^{\otimes}$. 置换算子的常用性质有：

1. $P(\sigma\pi)=P(\sigma)P(\pi)$.

2. $P(e)=I_{\otimes V}^m$，这里 e 是 S_m 的恒等置换，$I_{\otimes V}^m$是张量空间 $\overset{m}{\otimes}V$ 的恒等算子.

3. $P(\sigma^{-1})=P(\sigma)^{-1}$.

4. $P(\sigma)$关于 $\overset{m}{\otimes}V$ 的诱导内积是酉算子，即

$$P(\sigma)^{-1}=P(\sigma)^*.$$

5. $\mathrm{tr}\,(P(\sigma))=n^{c(\sigma)}$，$n=\dim V$，$c(\sigma)$是 σ 分解为不相交的循环置换乘积中因子的个数.

对称多重线性映射(symmetric multilinear mapping)　一类具有对称性质的多重线性映射. 设 G 是 n 元对称群 S_m 的子群，χ 是群 G 的不可约特征标，若多重线性映射

$$\psi:\overset{m}{\times}V\to W$$

(V 和 W 都是复数域 C 上的向量空间)满足

$$\begin{aligned}&\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\psi(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\cdots,v_{\sigma(m)})\\&=\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m),\end{aligned}$$

则称 ψ 为关于 G 和 χ 对称的多重线性映射. 当 χ 为 G 的一阶特征标即 $\chi(e)=1$ 时，多重线性映射

$$\psi:\overset{m}{\times}V\to W$$

为关于 G 和 χ 称，当且仅当对任意 $\sigma\in G$ 和所有 $v_i\in V$ 有

$$\psi(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\chi(\sigma)\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m).$$

不涉及上述的 G 与 χ，若对任意的 $\sigma\in S_m$ 都有

$$\psi(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m),$$

则 ψ 就直接地称为 $\overset{m}{\times}V$ 到 W 的对称多重线性映射. 有时也称 ψ 为完全对称的多重线性映射，或简称对称映射.

对称映射(symmetric mapping)　见“对称多重线性映射”.

反对称多重线性映射(skew-symmetric multilinear mapping)　一类重要的多重线性映射. 关于 G 和 χ 对称的多重线性映射

$$\psi:\overset{m}{\times}V\to W,$$

当 $G=S_m$，$\chi=\varepsilon$(称号特征标，$\sigma\in S_m$ 为偶(奇)置换时 $\varepsilon(\sigma)=1(-1)$)时，称为反对称多重线性映射，简称反对称映射. 或等价地定义为：当对任意 $\sigma\in S_m$ 有

$$\psi(v_{\sigma(1)},v_{\sigma(2)},\cdots,v_{\sigma(m)})=\varepsilon(\sigma)\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m)$$

时，称 ψ 为反对称多重线性映射. 当域 K 的特征为 0 时，多重线性映射

$$\psi:\overset{m}{\times}V\to W$$

为反对称的当且仅当对任意的 $(i\neq j)$，当 $v_i=v_j(1\leqslant i,j\leqslant m)$时，有$\psi(v_1,v_2,\cdots,v_m)=0$. 在域 K 之特征非 0 时，这二者未必等价.

反对称映射(skew-symmetric mapping) 见“反对称多重线性映射”.

交错多重线性映射(alternating multilinear mapping) 一种特殊的反对称多重线性映射. 设

$$\psi: \overset{m}{\times} V \to W$$

为多重线性映射(其中 V, W 都是域 K 上的线性空间),若对任意的 $i \neq j$,当 $v_i = v_j (1 \leqslant i, j \leqslant m)$ 时,必有 $\psi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = 0$,则称 ψ 为交错多重线性映射. 由于偶(奇)置换必可分解为偶(奇)数个对换之积,利用 ψ 的多重线性性质展开 $\psi(\cdots, v_i + v_j, \cdots, v_i + v_j, \cdots)$,即知交错多重线性映射一定是反对称多重线性映射,反过来未必成立,但在 K 的特征不为 2(特别是 K 的特征为 0,例如 $K = \mathbf{C}$ 时)二者是等价的概念.

完全对称多重线性映射(completely symmetric multilinear mapping) 一类重要的多重线性映射. 关于 G 和 χ 对称的多重线性映射

$$\psi: \overset{m}{\times} V \to W,$$

当 $G = S_m, \chi \equiv 1$ 时,称为完全对称多重线性映射. 或者等价地定义为:当对任意 $\sigma \in S_m$ 有

$$\psi(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \cdots, v_{\sigma(m)}) = \psi(v_1, v_2, \cdots, v_m)$$

时,称 ψ 为完全对称多重线性映射. 有时也简称对称多重线性映射.

对称化算子(symmetrizer) 亦称对称化子. 张量空间 $\overset{m}{\otimes} V$ 上的一种投影算子. 定义为

$$T(G, \chi) = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) P(\sigma),$$

其中 χ 为群 G 的不可约特征标,$P(\sigma)$ 为 $\overset{m}{\otimes} V$ 上的置换算子. 对称化算子 $T(G, \chi)$ 对张量空间 $\overset{m}{\otimes} V$ 的分类起着重要的作用,它具有下面的性质:

1. $T(G, \chi)^2 = T(G, \chi) = T(G, \chi)^*$(表明 $T(G, \chi)$ 关于 $\overset{m}{\otimes} V$ 的诱导内积是正交投影).

2. $\sum_{\chi \in I(G)} T(G, \chi) = I_{\overset{m}{\otimes} V}$,这里 $I(G)$ 表示群 G 的全部不可约特征标集合.

3. 当 $\chi \neq \mu$ 时,$T(G, \chi) T(G, \mu) = 0$.

对称化子(symmetrizer) 即“对称化算子”.

张量对称类(symmetry class of tensors) 张量空间 $\overset{m}{\otimes} V$ 的一种子空间. 它是对称化算子 $T(G, \chi)$ 的投影子空间. 关于 G 和 χ 的张量对称类记为 $V_\chi(G) = \mathrm{Im} T(G, \chi)$. 定义了诱导内积的张量空间 $\overset{m}{\otimes} V$ 等于所有张量对称类的正交直和,即

$$\overset{m}{\otimes} V = \sum_{\chi \in I(G)} V_\chi(G),$$

且当 $\chi \neq \mu$ 时 $V_\chi(G)$ 与 $V_\mu(G)$ 中的张量是正交的. 张量对称类 $V_\chi(G)$ 的维数是

$$\dim V_\chi(G) = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) n^{c(\sigma)},$$

其中 $n = \dim V$,$c(\sigma)$ 是 σ 分解为不相交的循环置换乘积中因子的数目. 为了叙述简明,有关张量对称类的词条一般都在 $K = \mathbf{C}$ 上讨论,但在 $\chi \equiv 1$ 与 $\chi = \varepsilon$ 的情形则除外.

可合对称张量(decomposable symmetrized tensor) 亦称可合对称元素. 一类特殊的对称张量. 张量对称类 $V_\chi(G)$ 中形如 $T(G, \chi) v_1 \otimes \cdots \otimes v_m$ 的元素称为可合对称张量. 在研究一个固定的张量对称类 $V_\chi(G)$ 时,其可合对称张量常写成

$$T(G, \chi) v^{\otimes} = v_1 * \cdots * v_m = v^*.$$

张量对称类 $V_\chi(G)$ 的可合元素有如下性质:

1. 若 $v^* = u^*$,则对关于 G 和 χ 对称的任意多重线性映射

$$\psi: \overset{m}{\times} V \to W$$

都有 $\psi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = \psi(u_1, u_2, \cdots, u_m)$.

2. 若 $v_1 * \cdots * v_m = 0$,则 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 线性相关.

3. 若 $v_1 * \cdots * v_m = u_1 * \cdots * u_m \neq 0$,则

$$\langle v_1, v_2, \cdots, v_m \rangle = \langle u_1, u_2, \cdots, u_m \rangle.$$

可合对称元素(decomposable symmetric element) 即“可合对称张量”.

对称(多重线性映射)因子化性质(factorization property for symmetric multilinear mappings) 张量对称类的一种重要性质. 利用张量对称类 $V_\chi(G)$ 可把关于 G 和 χ 对称的多重线性映射转换为线性映射来研究. 即,若

$$\psi: \overset{m}{\times} V \to W$$

是关于 G 和 χ 对称的多重线性映射,则存在惟一的线性映射 $T_\chi \in L(V_\chi(G), W)$ 使 $\psi = T_\chi *$,即

$$\psi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = T_\chi v^*.$$

稳定子子群(stabilizer subgroup) m 元对称群 S_m 的一类子群. 若 G 是 S_m 的子群,$\alpha \in \Gamma_{m,n}$,则 G 的子群 $G_\alpha = \{\sigma \in G \mid \alpha\sigma = \alpha\}$ 称为 G 对 α 的稳定子子群,它是由 G 中对 α 置换后不变的那些置换组成.

轨道代表集(system of distinct representatives of orbits) 序列集合 $\Gamma_{m,n}$ 中与群 G 有关的一个子集. 对于 $\alpha \in \Gamma_{m,n}$,集合 $\Gamma_\alpha = \{\alpha\sigma \mid \sigma \in G\}$ 称为 $\Gamma_{m,n}$ 中包含 α 的 G 轨道. 把每个轨道中按字典次序排在第一的序列排出来组成的集合称为轨道代表集,记为 Δ. $\Gamma_{m,n}$ 可表示为不相交的轨道的并,即

$$\Gamma_{m,n} = \bigcup_{\alpha \in \Delta} \Gamma_\alpha.$$

轨道代表集 Δ 是研究张量对称类时用到的重要集合. 还有三个集合 $\bar{\Delta}, \Omega, \hat{\Delta}$ 也是重要集合,定义为

$$\bar{\Delta} = \left\{\alpha \in \Delta \mid \sum_{\alpha \in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0\right\},$$

$$\Omega = \left\{\alpha \in \Gamma_{m,n}, \left| \sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0 \right.\right\}.$$

$\hat{\Delta}$ 的定义见“轨道子空间”. 这些集合具有关系：

$$\bar{\Delta} = \Delta \cap \Omega,\ \Omega = \bigcup_{\alpha \in \bar{\Delta}} \Gamma_\alpha,\ G_{m,n} \subseteq \Delta,\ Q_{m,n} \subseteq \bar{\Delta}.$$

注意 $\bar{\Delta}, \Omega, \hat{\Delta}$ 都与群 G 的不可约特征标 χ 有关.

轨道(orbit)　见“轨道代表集”.

轨道子空间(orbital subspace)　张量对称类 $V_\chi(G)$ 的子空间. 设 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 为 V 的基，$\alpha \in \Gamma_{m,n}$，$V_\chi(G)$ 的子空间 $\langle e^*_{a\sigma} = T(G,\chi)e^{\otimes}_{a\sigma} \mid \sigma \in G\rangle$ 称为 $V_\chi(G)$ 对应于 α 的轨道子空间. 弗里斯(Freese, R.)首先证明了轨道子空间的维数为

$$s_\alpha = \dim\langle e^*_{a\sigma} \mid \sigma \in G\rangle = \frac{\chi(e)}{|G_\alpha|} \sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma).$$

张量对称类 $V_\chi(G)$ 可分解为轨道子空间的直和. 由 $e^*_{a\sigma} \neq 0$ 当且仅当 $\alpha \in \bar{\Delta}$，所以 $V_\chi(G)$ 可表示为

$$V_\chi(G) = \sum_{\alpha \in \bar{\Delta}} \langle e^*_{a\sigma} \mid \sigma \in G\rangle.$$

对于 $\alpha \in \bar{\Delta}$ 可以选取 s_α 个序列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s_\alpha}$，使 $\{e^*_{a_1}, e^*_{a_2}, \cdots, e^*_{a_{s_\alpha}}\}$ 组成轨道子空间 $\langle e^*_{a\sigma} \mid \sigma \in G\rangle$ 的基. 设 $\bar{\Delta}$ 按字典次序排列为 $\bar{\Delta} = \{\alpha, \beta, \gamma, \cdots\}$，对 β, γ 等也类似地分别选出 s_β 个与 s_γ 个序列，这样就组成一个重要的集合记为 $\hat{\Delta} = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{s_\alpha}; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{s_\beta}; \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{s_\gamma}; \cdots\}$. 于是，$\{e^*_\omega \mid \omega \in \hat{\Delta}\}$ 就构成张量对称类 $V_\chi(G)$ 的基.

张量对称类的指标(index of a symmetry class of tensors)　刻画对称张量类的非负整数. 张量对称类 $V_\chi(G)$ 的指标记为 $\mathrm{Ind}V_\chi(G)$，是使得只要 $\dim\langle v_1, v_2, \cdots, v_m\rangle \leqslant r$ 就有 $v_1 * , v_2 * , \cdots, * v_m = 0$ 的最大非负整数 $(1 \leqslant r \leqslant m)$. 例如，$\mathrm{Ind}V_1(S_m) = 0$. 又如当 $m \leqslant \dim V$ 时，$\mathrm{Ind}V_\varepsilon(S_m) = m - 1$.

张量对称类上的诱导算子(induced operator of a symmetry class of tensors)　张量对称类 $V_\chi(G)$ 上的一种线性算子. 若 $T \in L(V,V)$，则

$$\varphi(v_1, v_2, \cdots, v_m) = Tv_1 * Tv_2 * \cdots * Tv_m$$

定义了一个关于 G 和 χ 对称的多重线性映射，由对称因子化性质，存在惟一的线性算子，记为

$$K(T) \in L(V_\chi(G), V_\chi(G)),$$

使 $K(T)v^* = Tv_1 * Tv_2 * \cdots * Tv_m$，称 $K(T)$ 为 T 在 $V_\chi(G)$ 上的诱导算子. $K(T)$ 有如下的性质：

1. $K(T) = \overset{m}{\otimes} T|_{V_\chi(G)}$，即为 $\overset{m}{\otimes} T$ 在 $V_\chi(G)$ 上的限制.

2. $K(I_V) = I_{V_\chi(G)}$.

3. $K(ST) = K(S)K(T)$.

4. $\mathrm{rank}K(T) = |\hat{\Delta} \cap \Gamma_{m,r}|$，其中 $r = \mathrm{rank}T$.

5. 若 T 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 $K(T)$ 的特征值为

$$\prod_{i=1}^{m} \lambda_{\omega(i)},\ \omega \in \hat{\Delta}.$$

6. $\det K(T) = (\det T)^{\frac{m}{n}|\Delta|}$，其中

$$|\hat{\Delta}| = \dim V_\chi(G) = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) n^{c(\sigma)}.$$

7. $K(T)^* = K(T^*)$.

8. 若 T 分别是正规的、埃尔米特的、正定的、非负定的、酉的，则 $K(T)$ 也具有相应性质.

反对称张量空间(skew-symmetric tensor space)　亦称格拉斯曼空间. 是一个最常见的张量对称类，即当 $G = S_m$，$\chi = \varepsilon$(符号特征标)时的张量对称类. 通常写为

$$V_\varepsilon(S_m) = \overset{m}{\wedge} V \text{(或 } \wedge^m V),$$

可合元素则写为

$$T(S_m, \varepsilon)v^{\otimes} = v^{\wedge} = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m,$$

又称为 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 的外积. 反对称张量空间 $\overset{m}{\wedge} V$ 具有许多很好的性质. 例如，$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m \neq 0$ 的充分必要条件是 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 线性无关；又如

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m = au_1 \wedge \cdots \wedge u_m \neq 0$$

的充分必要条件是 $\langle v_1, v_2, \cdots, v_m\rangle = \langle u_1, u_2, \cdots, u_m\rangle$ 且维数是 m. 也有

$$\dim(\overset{m}{\wedge} V) = |Q_{m,n}| = \binom{n}{m},$$

其中 $n = \dim V$. 若 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 是 V 的基，则 $\{e^{\wedge}_\omega \mid \omega \in Q_{m,n}\}$ 是 $\overset{m}{\wedge} V$ 的基. 例如 $\overset{2}{\wedge} V$ 的基为 $\{e_1 \wedge e_2, \cdots, e_1 \wedge e_n \cdots, e_i \wedge e_j, \cdots, e_{n-1} \wedge e_n\}$(其中 $i < j$).

格拉斯曼空间(Grassmann space)　即“反对称张量空间”.

向量的外积(exterior product of vectors)　见“反对称张量空间”.

普吕克坐标(Plücker coordinates)　格拉斯曼空间 $\overset{m}{\wedge} V$ 中可合元素的坐标. 若 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 V 的基，则 $\overset{m}{\wedge} V$ 的可合元素 $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_m$ 可表示为

$$v^{\wedge} = \sum_{\omega \in Q_{m,n}} a_\omega e^{\wedge}_\omega,$$

可合元素 $v^{\wedge}$ 的坐标 $\{a_\omega \mid \omega \in Q_{m,n}\}$ 称为子空间 $\langle v_1, v_2, \cdots, v_m\rangle$ 的普吕克坐标. 存在着许多判别 $\overset{m}{\wedge} V$ 的元素为可合元素的充分必要条件，通常就是判别坐标 $\{a_\omega \mid \omega \in Q_{m,n}\}$ 为普吕克坐标的充分必要条件. 例如，若

$$z = \sum_{\omega \in Q_{m,n}} a_\omega e^{\wedge}_\omega$$

为 $\overset{m}{\wedge} V$ 的任一元素，则 z 为可合元素的充分必要条件是存在 $m \times n$ 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 使得

$$a_\omega = \det A[1, 2, \cdots, m \mid \omega]\ (\omega \in Q_{m,n}),$$

其中 $A[1,2,\cdots,m\,|\,\omega]$表示 A 的 $\omega(1),\omega(2),\cdots,\omega(m)$列子方阵.

复合矩阵(compound matrix)　亦称合成矩阵. 一种特殊的矩阵. 是以一个矩阵的子行列式为元素构成的矩阵. 若 A 是 $n\times n$ 阶复矩阵,对 $\alpha,\beta\in Q_{m,n}$,记 $C_m(A)_{\alpha,\beta}=\det A[\alpha|\beta]$,则

$$\binom{n}{m}\times\binom{n}{m}$$

阶的矩阵 $C_m(A)$称为 A 的 m 级复合矩阵. 当把 A 看做线性算子时,$C_m(A)$就是反对称张量空间 $\overset{m}{\wedge}V$ 的诱导算子 $K(A)$,其中 V 视作由 n 个分量构成的向量空间. 于是 $C_m(A)$具有诱导算子的各种性质. 例如对复矩阵 A,$C_m(A)^*=C_m(A^*)$,若 A 分别是正规的、埃尔米特的、正定的、非负定的、酉的,则 $C_m(A)$也为相应的矩阵. 特别地,有

$$C_m(AB)=C_m(A)C_m(B),$$

此即行列式的柯西-比内定理. 写为元素形式就是

$$C_m(AB)_{\alpha,\beta}=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}C_m(A)_{\alpha,\omega}C_m(B)_{\omega,\beta},$$

此即为

$$\det(AB)[\alpha|\beta]=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det A[\alpha|\omega]\det\beta[\omega|\beta].$$

合成矩阵(compound matrix)　即"复合矩阵".

西尔维斯特-弗兰克定理(Sylvester-Franke theorem)　复合矩阵的行列式定理. 若 A 是 $n\times n$ 的复矩阵,$C_m(A)$为 A 的 m 级复合矩阵,则 $C_m(A)$的行列式为

$$\det C_m(A)=(\det A)^{\binom{n-1}{m-1}},$$

这就是西尔维斯特-弗兰克定理. 它是一般诱导算子 $K(T)$的行列式

$$\det K(T)=(\det T)^{\frac{m}{n}|\hat{\Delta}|}$$

对于反对称张量空间 $\overset{m}{\wedge}V$ 时的特殊情形,这时

$$|\hat{\Delta}|=|Q_{m,n}|=\binom{n}{m}.$$

复合矩阵的导数矩阵(derivation of a compound matrix)　复合矩阵论中的重要概念与有用工具. 若 A 为 $n\times n$ 阶复矩阵,$C_m(A)$为 A 的 m 级复合矩阵,t 为复数域 $\mathbf{C}$ 上的不定元,展开式

$$C_m(I_n+tA)=I_{\binom{n}{m}}+tD_m^{(1)}(A)+\cdots+t^rD_m^{(r)}(A)+\cdots+t^mD_m^{(m)}(A),$$

则称

$$\binom{n}{m}\times\binom{n}{m}$$

阶的矩阵 $D_m^{(r)}(A)$为 $C_m(A)$的 r 阶导数矩阵. 若 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则 $D_m^{(r)}(A)$的特征值为

$$\sum_{\omega\in Q_{r,m}}\prod_{i=1}^{r}\lambda_{\alpha\omega(i)}\quad(\alpha\in Q_{m,n}).$$

特别地,一阶导数矩阵 $D_m^{(1)}(A)$的特征值为

$$\lambda_{\alpha(1)}+\lambda_{\alpha(2)}+\cdots+\lambda_{\alpha(m)}\quad(\alpha\in Q_{m,n}).$$

完全对称张量空间(completely symmetric tensor space)　一种常用的张量对称类. 当 $G=S_m$,$\chi\equiv 1$ 时,常写成 $V_1(S_m)=V^{(m)}$. 若 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是 V 的基,则 $\{e_\omega^*\,|\,\omega\in G_{m,n}\}$是 $V^{(m)}$的基. $V^{(m)}$的维数是

$$\dim V^{(m)}=|G_{m,n}|=\binom{n+m-1}{m}.$$

对于 $V^{(m)}$的可合元素有:$v_1*v_2*\cdots*v_m=0$ 的充分必要条件是某个 $v_i=0$. 又若 $v_1*v_2*\cdots*v_m=u_1*u_2*\cdots*u_m\neq 0$,则存在 $\sigma\in S_m$ 及 $d_i\neq 0$ 使得 $u_i=d_iv_{\sigma_1(i)}$ $(i=1,2,\cdots,m)$,且

$$\prod_{i=1}^{m}d_i=1.$$

另外 $V^{(m)}$可由形如 $v\otimes\cdots\otimes v$ 的张量生成,即

$$V^{(m)}=\langle v\otimes\cdots\otimes v\rangle\,|\,v\in V\rangle.$$

广义矩阵函数(generalized matrix function)　行列式与固定式的统一推广. 设 G 是 S_m 的子群,f:$G\to\mathbf{C}$ 是任一函数,$A=(a_{ij})$为$m\times m$的复矩阵,由下式定义的矩阵函数

$$d_G^f(A)=\sum_{\sigma\in G}f(\sigma)\prod_{t=1}^{m}a_{t\sigma(t)}$$

称为广义矩阵函数. 特例为

$$d_{S_m}^{\varepsilon}(A)=\det A,\quad d_{S_m}^{t}(A)=\mathrm{per}A.$$

其中

$$\mathrm{per}A=\sum_{\sigma\in S_m}\prod_{i=1}^{m}a_{i\sigma(i)},$$

称为 A 的固定式,也称为 A 的积和式. 对广义矩阵函数的研究近几年来非常活跃. 下面是当 $f=\chi$ 为群 G 的不可约特征标时的几个结论:

1. $|d_G^\chi(AB^*)|^2\leqslant d_G(AA^*)d_G^\chi(BB^*)$,其中 $A^*=\overline{A}^T$.
2. $|d_G^\chi(A)|^2\leqslant\chi(\sigma)d_G^\chi(AA^*)$.
3. 当 A 为 m 阶非负定方阵时,
$$d_G^\chi(A)\geqslant\chi(e)\det A.$$
4. 当 A,B 为 m 阶非负定方阵时,
$$d_G^\chi(A+B)\geqslant d_G^\chi(A)+d_G^\chi(B).$$
5. $\det A\leqslant\det A[1,2,\cdots,k\,|\,1,2,\cdots,k]\cdot\det A[k+1,\cdots,m\,|\,k+1,\cdots,m]$,
其中 A 为 m 阶非负定方阵.
6. $\mathrm{per}A\geqslant\mathrm{per}A[1,2,\cdots,k\,|\,1,2,\cdots,k]\cdot\mathrm{per}A[k+1,\cdots,m\,|\,k+1,\cdots,m]$,
其中 A 为 m 阶非负定方阵.

固定式(permanent)　见"广义矩阵函数".

积和式(permanent)　见"广义矩阵函数".

行列式函数(determinant function)　一种特殊的多重线性函数. n 维向量空间上的反对称 n 重线性函数. 若 K 为特征不为 2 的域, V 为 K 上的 n 维向量空间, 用常规方法定义 V 上的内积并取 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 与 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 为对偶基, 记

$$\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(f_1,x_1)(f_2,x_2)\cdots(f_n,x_n)$$
$$(\forall\ x_1,x_2,\cdots,x_n\in V),$$

则

$$\Phi(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\cdots,e_{\sigma(n)})=\begin{cases}1 & (\sigma\in S_n\text{ 为单位置换}),\\ 0 & (\text{其他情况}).\end{cases}$$

若记

$$\Delta=\sum_{\sigma\in s_n}\varepsilon_\sigma(\sigma\Phi),$$

$\varepsilon_\sigma=1$(σ 为偶置换), $\varepsilon_\sigma=-1$(σ 为奇置换), 则 Δ 为 V 上的 n 重反对称线性函数, 称为 V 上的行列式函数. 由于 $\Delta(e_1,e_2,\cdots,e_n)=1$, 所以 V 上的非零行列式函数一定存在, 并且 V 上的任何行列式函数都只有(K 中)常数因子的差别. 用行列式函数可建立与经典行列式理论等价的理论, 且可使许多经典的行列式定理得到简单的证明, 使外代数在行列式理论中得到了优美的应用.

广义矩阵函数的柯西-比内定理(Cauchy-Binet theorem for generalized matrix function)　行列式的柯西-比内定理的推广. 若 A,B 为 $n\times n$ 阶复矩阵, G 是 S_m 的子群, χ 是群 G 的不可约特征标, 则对于

$$\alpha,\beta\in\Omega=\left\{\omega\in\Gamma_{m,n}\mid\sum_{\sigma\in G_\omega}\chi(\sigma)\neq 0\right\}$$

有

$$d_G^\chi((AB)[\alpha|\beta])$$
$$=\frac{\chi(e)}{|G|}\sum_{\omega\in\Omega}d_G^\chi(A[\alpha|\omega])d_G^\chi(B[\omega|\beta]).$$

对于行列式与固定式, 可写为:

$$\det(AB)[\alpha|\beta]=\sum_{\omega\in Q_{m,n}}\det A[\alpha|\omega]\det B[\omega|\beta];$$

$$\operatorname{per}(AB)[\alpha|\beta]=\sum_{\omega\in G_{m,n}}\frac{1}{|(S_m)_\omega|}\operatorname{per}A[\alpha|\omega]$$
$$\cdot\operatorname{per}[\omega|\beta].$$

向量空间上的张量代数(tensor algebra over a vector space)　多重线性代数中最基本的代数系. 设 V 是域 K 上的向量空间, 记 p 个 V 的张量积空间为

$$T^p(V)=\overbrace{V\otimes\cdots\otimes V}^{p},$$

并规定 $T^0(V)=K$, $T^1(V)=V$. 做直和

$$T(V)=T^0(V)\oplus T^1(V)\oplus\cdots\oplus T^p(V)\oplus\cdots,$$

并在 $T(V)$ 上按如下方式定义乘法

$$(x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_m)\cdot(y_1\otimes y_2\otimes\cdots\otimes y_n)$$
$$=x_1\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_m\otimes y_1\otimes y_2\otimes\cdots\otimes y_n,$$

再用分配律定义整个 $T(V)$ 上的元素之乘法, 从而 $T(V)$ 成为域 K 上的代数(结合代数). 称 $T(V)$ 为向量空间 V 上的张量代数.

张量代数的泛性质(universal property of tensor algebras)　张量代数的特征性质. 它更能揭示张量代数的本质. 也可用来定义张量代数. 设 V 为域 K 上的向量空间. 若 U 为 K 上有单位元 1 的结合代数, $\varepsilon:V\to U$ 为线性映射, 称 (ε,U) 对(或 U)具有 V 上张量代数的泛性质, 若它们满足如下条件:

1. $\operatorname{Im}\varepsilon$ 与 1 代数地生成 U.

2. 对任意的有单位元 e 的 K 上结合代数 A 及任意的线性映射 $\eta:V\to A$, 都有代数同态 $h:U\to A$ 使 $h(1)=e$ 且 $h\varepsilon=\eta$.

上述条件 1 和 2 可改为: 对任意的有单位元 e 的结合代数 A 及任意的线性映射 $\eta:V\to A$, 都有惟一的代数同态 $h:U\to A$, 使 $h(1)=e$ 且 $h\varepsilon=\eta$. 当 V 取定后, 满足上述泛性质的代数 U 在代数同构意义下是惟一的, 因此上述的 U 必同构于用向量空间上的张量代数中的办法具体构作出的张量代数 $\otimes V$.

外代数(exterior algebra)　亦称格拉斯曼代数. 设 V 是特征不为 2 的域 K 上的向量空间, $\overset{m}{\wedge}V$ 为域 K 上的格拉斯曼空间, 并规定 $\overset{0}{\wedge}V=K$, $\overset{1}{\wedge}V=V$. 做直和 $E(V)=\overset{0}{\wedge}V\oplus\overset{1}{\wedge}V\oplus\cdots\oplus\overset{n}{\wedge}V$. 对 $x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_p\in\overset{p}{\wedge}V$, $y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_q\in\overset{q}{\wedge}v$, 定义乘法

$$(x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_p)\cdot(y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_q)$$
$$=x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_p\wedge y_1\wedge y_2\wedge\cdots\wedge y_q,$$

再用分配律定义整个 $E(V)$ 上元素的乘法, 从而 $E(V)$ 成为 K 上的代数(结合代数), 称为向量空间 V 上的外代数. 当 $\dim V=n$ 时, $\dim E(V)=2^n$. 外代数的运算满足如下规律:

1. $u\wedge v=(-1)^{pq}v\wedge u$, $\forall\ u\in\wedge^pV$, $v\in\wedge^qV$, 因此, $2\mid pq$ 时 $u\wedge v=v\wedge u$. $2\nmid pq$ 时 $u\wedge v=-v\wedge u$.

2. $u\wedge u=0$, $\forall\ u\in V$. 但是, 当 $u\notin V$ 时, 未必有 $u\wedge u=0$.

3. 若 xK 的特征为 0, 记

$$v^m=\frac{1}{m!}\underbrace{v\wedge\cdots\wedge v}_{m}\quad(\forall\ v\in E(V),k\geqslant 1),$$

称 v^m 为 v 的 m 次外乘幂, 则

$$v^m\wedge v^n=\binom{m}{m+n}v^{m+n},$$

且当 $2\mid pq$ 时,

$$(u+v)^m=\sum_{i+j=m}u^i\wedge v^j\quad(\forall\ u\in\wedge^pV,v\in\wedge^qV).$$

外代数在几何学、分析学及物理中都有重要应用.

格拉斯曼代数(Grassmann algebra)　即“外

代数".

外代数的泛性质(universal property of exterior algebras) 外代数的特征性质.它更能揭示外代数的本质,也可用来定义外代数.设 K 为特征不为 2 的域,V 为 K 上的一个向量空间,U 为 K 上有单位元 1 的结合代数,并且 $\varepsilon:V\to U$ 为使 $(\varepsilon(x))^2=0$ $(\forall\ x\in V)$ 的线性映射.若对任意的 K 上有单位元 e 的结合代数 A 以任意的使 $(\varphi(x))^2=0(\forall\ X\in V)$ 的线性映射 $\varphi:V\to A$,都有惟一的代数同态 $h:U\to A$,使 $h(1)=e$ 且 $h\varepsilon=\varphi$,则称 (U,ε) 对(或 U)具有 V 上外代数的泛性质.当 V 取定后,具有上述泛性质的 U 是惟一的(在同构意义下).因此,上述的 U 必同构于用"外代数"词条中办法具体构作的外代数 $E(V)$.

克利福德代数(Clifford algebra) 外代数的推广.设 V 是特征不为 2 的域 K 上的向量空间,Q 是 V 上的一个二次型,$T(V)$ 是 V 上的张量代数.若 I 是 $T(V)$ 中下列形式的元素生成的理想

$$x\otimes x-Q(x)\quad(x\in V),$$

则商代数 $C(V,Q)=T(V)/I$ 称为关于二次型 Q 的一个克利福德代数.当 $\dim V=n$ 时,$\dim C(V,Q)=2^n$.当 $Q=0$ 时,$C(V,Q)$ 即为 V 上的外代数.因此,克利福德代数是外代数的推广.实数域上的复数全体,四元数全体都构成克利福德代数.

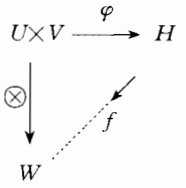
克利福德代数的泛性质(universal property of Clifford algebras) 克利福德代数的特征性质,它揭示了克利福德代数的本质,也可用来定义克利福德代数.设 V 为特征不为 2 的域 K 上的向量空间,Q 为 V 上的一个二次型,U 为 K 上一个有单位元 1 的结合代数,$\varepsilon:V\to U$ 为满足 $(\varepsilon(x))^2=Q(x)\cdot 1(\forall\ x\in V)$ 的线性映射.若 (U,ε) 满足如下条件,则称 (U,ε) 对(或 U)具有 V 上(关于 Q)的克利福特代数的泛性质:

1. Im ε 与 1 代数地生成 U.

2. 对 K 上任意的有单位元 e 的结合代数及使 $(\varphi(x))^2=Q(x)e(\forall\ x\in V)$ 的线性映射 $\varphi:V\to A$,必有代数同态 $h:U\to A$ 使 $f\varepsilon=\varphi$.

克利福德代数中具体构作的 $C(V,Q)$ 即具有如上的泛性质.上述两个条件可以等价地用下述一个条件代替:对 K 上任意的有单位元 e 的结合代数及使 $(\varphi(x))^2=Q(x)e(\forall\ x\in V)$ 的线性映射 $\varphi:V\to A$,必有惟一的代数同态 $h:U\to A$ 使 $f\varepsilon=\varphi$.对给定的 V 与 Q,满足上述泛性质的 U 在代数同构意义下是惟一的,因此必同构于 $C(V,Q)$.当 $Q=0$ 时上述的 U 即为 V 上的外代数 $\wedge V$.

张量积的泛性质(universal property of tensor products) 向量空间张量积的特征性质.是用来确定向量空间张量积到一个向量空间的线性映射存在性的常用方法之一.设 U,V 与 W 是域 K 上的向量空间,$\otimes$ 是 $U\times V$ 到 W 的一个双线性映射.若 $\otimes$ 满足下列条件,则称 $\otimes$ 具有泛性质:



1. $\otimes_1$:Im $\otimes=W$,即 $\{x\otimes y\mid x\in U,y\in V\}$ 生成 W.

2. $\otimes_2$:若 φ 是 $U\times V$ 到 K 的任意向量空间 H 的一个任意的双线性映射,则存在一个线性映射 $f:W\to H$,使得 $\varphi=f\circ\otimes$.

上述条件 2,可用图的形式陈述如图所示.若 U,V,W 与 H 是域 K 上的向量空间,$\otimes$ 是 $U\times V$ 到 W 的双线性映射,则 $\otimes$ 具有泛性质的充分必要条件是 $\otimes$ 满足:若 φ 是 $U\times V$ 到 H 的双线性映射,则存在惟一的线性映射 $f:W\to H$,使得 $\varphi=f\circ\otimes$.

直和的张量积(tensor product of direct sums) 一种特殊的张量积.向量空间直和的张量之分配律.若 E,F 为域 K 上的向量空间,

$$E=\bigoplus_{\alpha}E_\alpha,\quad F=\bigoplus_{\beta}F_\beta,$$

其中 E_α,F_β 分别是 E,F 的子空间,则

$$E\otimes F=\bigoplus_{\alpha,\beta}E_\alpha\otimes E_\beta.$$

因此,若 $\{a_\alpha\mid\alpha\in I\}$,$\{b_\beta\mid\beta\in J\}$ 分别是 E,F 的基,则 $\{a_\alpha\otimes b_\beta\mid\alpha\in I,\beta\in J\}$ 是 $E\otimes F$ 的基.若 E,F 是有限维的,则 $\dim(E\otimes F)=\dim E\cdot\dim F$.

对偶空间(关于双线性函数)(dual spaces (on bilinear function)) 线性代数中共轭空间(也称对偶空间)概念的推广.设 φ 是 $E\times F$ 到 G 的双线性映射,其中 E,F 与 G 都是域 K 上的向量空间.若

$$N_E(\varphi)=\{x\in E\mid\varphi(x,F)=0\},$$
$$N_F(\varphi)=\{y\in F\mid\varphi(E,y)=0\},$$

则 $N_E(\varphi),N_F(\varphi)$ 分别是 E,F 的子空间,称为 φ 的零空间.若 $N_E(\varphi)=0$,且 $N_F(\varphi)=0$,则称 φ 为非退化的.设 E^*,E 是域 K 上的向量空间,$\langle\ ,\ \rangle$ 是 $E^*\times E$ 的双线性函数.若 $\langle\ ,\ \rangle$ 非退化,则称 E^*,E 关于 $\langle\ ,\ \rangle$ 是(一对)对偶空间,$\langle\ ,\ \rangle$ 称为纯量积.若 $L(E)$ 是 E 的共轭空间,即 E 上的线性函数空间,则存在线性单射 $\varphi:E^*\to L(E)$,使 $\varphi(x^*)x=\langle x^*,x\rangle$.若 E 是有限维的,则 φ 是映上的,因此

$$E^*\cong L(E).$$

零空间(null space) 见"对偶空间(关于双线性函数)".

非退化双线性映射(nondegenerate bilinear mapping) 见"对偶空间(关于双线性函数)".

对偶基(关于双线性函数)(dual bases (on a bilinear function)) 欧氏空间标准正交基的推广.设 E^*,E 是域 K 上的对偶空间,$\dim E=n$,$\{e^{*\gamma}\}$,$\{e_\gamma\}$ 分别是 E^* 与 E 的基($\gamma=1,2,\cdots,n$),若 $\langle e^{*\gamma},l_\mu\rangle=$