震运动提供了一个完整的基础。因此，ScS 资料（偏振为 SH）中所包含的关于地球的信息，可以预期它类似于和 ScS 具有同样的水平相速度值的环型振型中包含的信息，即在 ScS 线的左边。右边的振型具有较低的视速度，且相应于地幔中的 SH 波，它不能十分陡峭地传播以达到地核。对球型振型，图 8.9 就更加复杂，因为它等效于包括 Rayleigh 波和 Stoneley 波在内的 P-SV 现象。

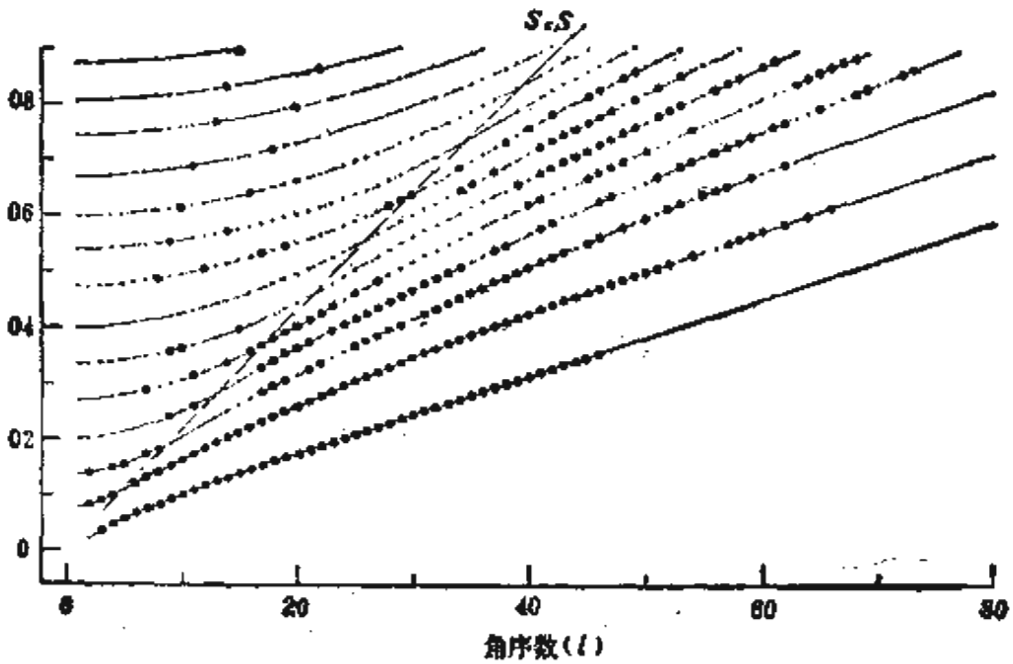


图 8.8

对 $0\leqslant n\leqslant 13$ 的不同分支的环型振型 $_n\omega_l$。圆点代表观测的振型，Gilbert 和 Dziewonski 反演了这些振型以得到地球结构（引自 Gilbert and Dziewonski, 1975）

对于周期大于80秒的简正振型，有这样多能正确地识别出来，利用一个地震的某些特殊的模型（即其矩变化率张量）来看看合成的理论地震图是否和实际观测的相一致，即在时间域作对比而不是在频率域对比，则按（8.37）将所有振型求和的可能性就提高了。佐藤等（Sato *et al*, 1962）首先将一些简正振型相加计算了地震图。Landisman 等（1970），给出了此领域早期工作的概述，他还

将简正振型求和法（即一个特殊体波的振幅）的不同特征和地震资料中的一些相应的特征作了对比。在时间域中最初的对比工作——由简正振型求和所得的整个波列（包括体波）与观测的地震图对比——是 Luh 和 Dziewonski(1975) 对1970年哥伦比亚的深震所作的。对这个地震，用先前测定的矩变化率张量和一特殊的地球模型，这些作者在 100—1000 秒周期范围之间通过叠加一千多个振型计算了75个地震图。他们的结果如图8.10中所示。穿过记录剖面图的各直线表示 Rayleigh 波R_1，R_2 等。在这些周期上，即使对如此的深震(深度测定为 651 公里)这类波也是显著的。体波各震相也是显著的，其中通过地幔的 P 波和 S 波具有多次相，例如 $PSPSPS$，它是在地球表面反射时发生的 P 和 S 之间的转换。我们刚才给出的例子标成 PS_3，图上还标出了几个 PS_n。由理

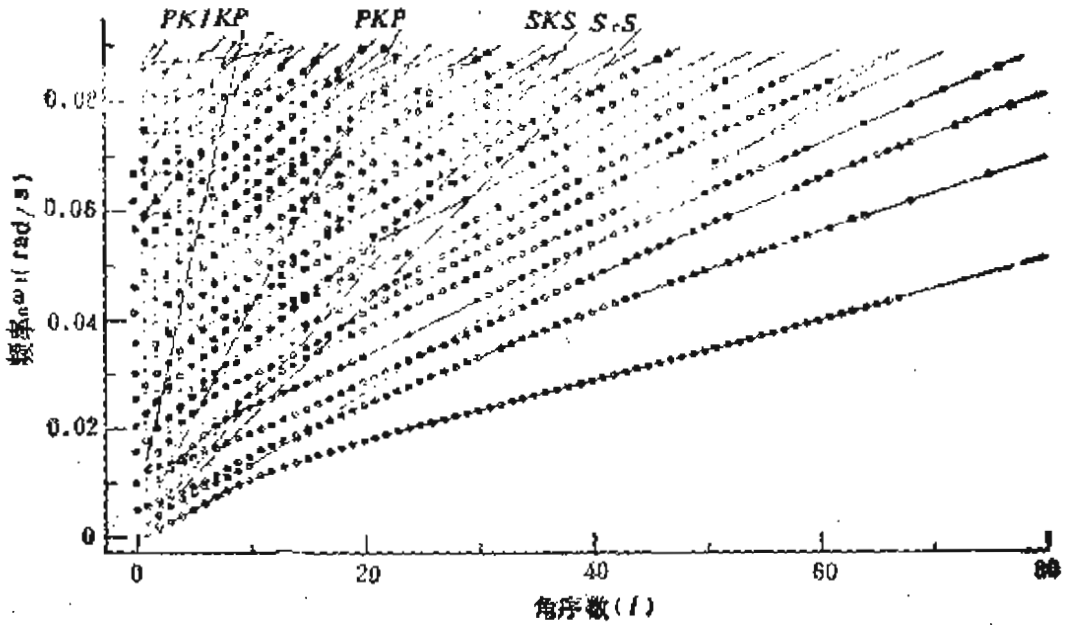


图 8.9

不同分支 n 的球型振型 $_n\omega_l$ 对 l 作图。只有当它们位于相应的相速度线的左边时，这些振型才对应于标出的体波震相。小圆点代表其能量小于压缩波能量的二分之一的振型。大圆点代表观测的振型，Gilbert 和 Dziewonski 反演了这个振型，以求得地球结构(引自 Gilbert and Dziewonski, 1975)

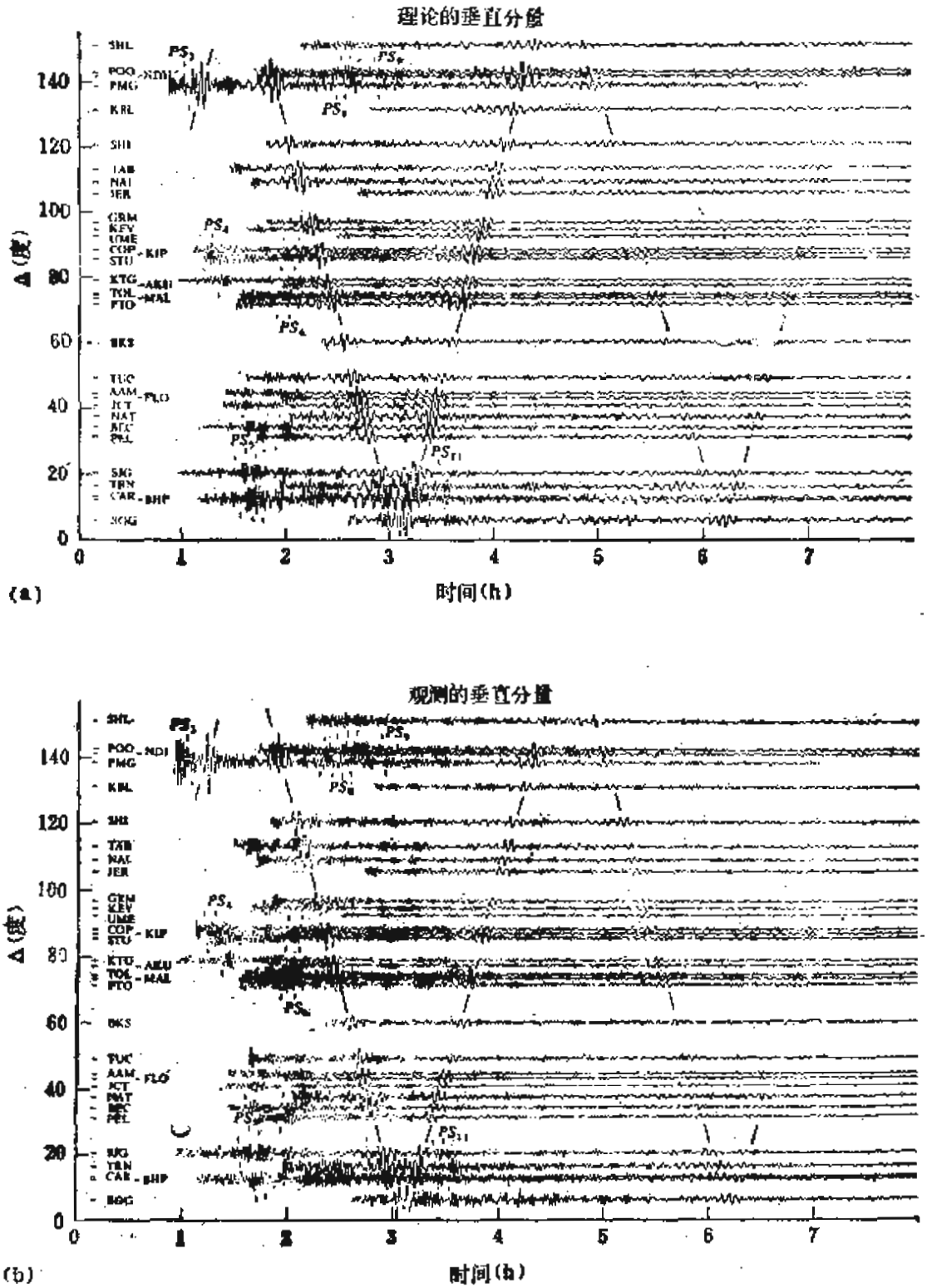


图 8.10

1970 年 7 月31日哥伦比亚深震的垂直分量。(a) 34 个世界标准台网台站的理论曲线，每一地震图都画在其准确的震中距 △处(此最示法称为记录剖面图)。通过(8.37)并用周期范围为100—1000 秒的诸振型及 Gilbert 与 Dziewouski(1975)的震源模型和 1066 A 地球模型进行了计算。(b)对和(a) 同样的台站及同样的地震所观测到的垂直地面运动(这些地震图已进行了仪器响应校正，并对计算 (a) 所用的同样的频率范围进行了滤波)(引自 Luh and Dziewonski, 1975)

论曲线剖面图模拟了观测资料的一般特征，但有些地方不一致。Luh 和 Dziewonski 提出，这一不协调是由于假定了矩变化率张量和(或者)Q 模型所造成的。显然，解释地震图的这种方法具有很大的潜力。在实践时，主要的困难是充分地计算和储存大量短周期简正振型(周期低至 5 秒左右)，这些短周期的简正振型是观测到的，但在"长周期"的世界标准台网的地震记录上不能各别地识别出来。对环型振型，已知一种变换(补充9.9)，可从地球的球面几何问题变换成平面-成层问题。在此情况下，已编写了高效率的程序，使对低至 1 秒左右周期的各种振型进行计算成为可能(Nakanishi *et al.*, 1977; Mantovani *et al.*, 1977)。对各种球型振型，已使用了 Rayleigh-Ritz 方法，它使对低至45秒左右的周期的所有振型进行计算成为可能(Buland and Gilbert, 1976, 1980)。甚至在更短的周期时，对每一振型已发展了精确的渐近理论(Woodhouse, 1978)。因此，(8.37)可用来做出一些类似于图 8.10 a, b 所表示的那样的对比，但资料未经彻底的滤波处理。

补充8.5

初始应力的考虑

地球内部的应力可达到兆巴的量级。由于 Hooke 定律中的弹性常数也是这个量级，因而，在地球中可能出现量级为 1 的应变，甚至在应力和应变均为零这一参考状态的简单情况下，使得现在的地球的情况可从这一状态出发用线性应力-应变理论而求得。事实上，我们没有理由去假定存在这样一个参考状态；即便是有，对研究地震波来说，它也并非是一个合适的参考，因为对于有限的应变，波的传播理论是非线性的。可是，用作参考的初始状态，其中应力可能很大但应变为零，我们来研究一微小应力增量的理论。

在地震学中，将刚好在地震之前的地球状态取为初始状态，这是很自然的。因为初始应力显然为各向同性的(对作用在沉积物质上的重力场，在任意给定的深度上都是适当的)，其结果是，迄今为止我

们已得到的所有公式实际上并未引进复杂性，其中全部忽略了初始应力场。对具有高初始应力的地球模型，必须检验基于经典弹性理论的各公式是否需要修正，这一工作主要由 Dahlen(1972，1973,1976a，1977)完成。

研究一般初始应力的某些复杂性在于如下事实，在一物质质点上的应力增量由两部分组成：一部分取决于局部应变，从第二章给出的理论我们是熟悉的；另一部分取决于局部旋转，其作用是转动了初始应力场。因此，一般情况下总应力依赖于 $e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ 和 $\omega_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}-u_{j,i})$。为描述应力场和应变场，Dahlen(1973) 主张用 Lagrange 方法。此外，为了把这些边界条件（诸如断层形成的描述）符合初始情况，第二章中使用的 Cauchy 应力张量是不适宜的。按 Cauchy 应力的定义，牵引力所作用的一些面积单元(在大小和取向上)是处于变形状态。Dahlen(1972，1973)建议用初始状态下的各面元来描述其随后的牵引力。假定在初始状态下，以 x 为中心的一物质面元，其大小为 $dS(x)$，其取向为 $n(x)$。其后的某时间 t，原来在 x 处的质点移至 $X=x+u$ 且物质面元的大小为 $dS(X,t)$、取向为 $n(X,t)$。Cauchy 应力张量 σ^c 具有笛卡尔坐标分量，所以作用于物质单元的牵引力的第 j 个分量为 $n_i(X,t)\sigma^c_{ij}(X,t)\,dS(X,t)$。用等于 $n_i(x)\sigma^{PK}_{ij}(x,t)dS(x)$ 的牵引力来定义 Piola-Kirchhoff 应力张量的笛卡尔分量。这个张量可定量表示变形表面中每单位原来面积上的牵引力和时间的关系。初始应力 σ^0，Piola-kirchhoff 应力张量的增量 $\tilde{\tau}$ 和 Cauchy 应力张量的增量 τ 由下式给出：

$$\sigma^{PK}=\sigma^0+\tilde{\tau}\qquad\qquad \sigma^C=\sigma^0+\tau. \tag{1}$$

Dahlen (1972) 和 Malvern(1969)指出，Piola-kirchhoff 应力张量是不对称的。这些应力张量增量之间的关系为(对初始应力及其后应变的一级近似)

$$\tilde{\tau}_{ij}=\tau_{ij}+\sigma^0_{il}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-\sigma^0_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

对一各向同性的初始应力 $\sigma^0_{ij}=-P_0\delta_{ij}$，上式可简化为

$$\tilde{\tau}_{ij}=\tau_{ij}-P_0\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+P_0\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

对一自转的、自重的、弹性的地球模型，且对处于各向同性的初始受力状态下的应力和应变，Dahlen (1972) 认为，等效于一剪切位错(我们曾在第二章和第三章中得到)的体力仍是一个双力偶分布，如果初始状态也有剪切应力，则等效于剪应力的体力由双力偶加上附加项构成，其量级为[(初始剪应力)÷(原地弹性常数)]。这些附加项很小，因为岩石一般地支持不住大于一千巴或二千巴的剪应力。对 x_3 平面中的剪切断层运动，Dahlen(1976a) 还得到了 Cauchy 应力张量增量的连续性$[\tau_{31}]=[\tau_{32}]=[\tau_{33}]=0$，并且由于穿过 Σ 的断层运动，通过介质的应变能的变化仍有如下公式(见补充3.4)：

$$\Delta E=-\frac{1}{2}\int_{\Sigma}[u_i(x,\ \infty)](\sigma^0_{ij}+\sigma^1_{ij})\nu_j dS. \qquad (2)$$

对于在 Σ 上摩擦作的功和形成新断层面所需作的功的公式，由于各向同性的初始应力的存在，这些公式也是不变的。即使日长和重力场都可发生变化，Dahlen(1977)指出，公式(2) 仍表示预先受力的地球模型中断层运动的能量（即为自转能、重力能及内部剪切应变能变化之和，尽管此和式中各单项在大小上比(2) 式右半部可大四个量级)。

8.5 地球自转引起简正振型的分裂

我们在 8.4 节讨论过的地球模型，其最不好的特点是它们并不转动而且是球对称的。这里我们考虑自转的影响，直至第十三章以前暂缓讨论横向的不均匀性。

地球的周日自转可预期会对简正振型产生定量的影响，它大体可用无量纲的比(简正振型周期)/(24小时)来表示。显然，对低阶的基频振型，这影响可达百分之几，并且是可观测到的。1960年智利地震的观测资料确实表明了像 ${}_0S_2$ 这样的振型的确没有一个单个的频谱峰，而至少是由54.7和53.1分钟周期的两条线组成的(Benioff *et al.*, 1966)。这影响被认为在数学上和Zeeman效应(氢原子在磁场中简并能级的分裂)相似。以前我们发现，对

每一 l 存在 $2l+1$ 个振型，即 $-l \leqslant m \leqslant l$，这些振型具有相同的本征频率和径向本征函数。但自转消除了这种简并，我们将单个的本征频率 ${}_n\omega_l$，代之以多重谱线 ${}_n\omega_l^m (-l \leqslant m \leqslant l)$，每一条都有一个不同的径向本征函数。在给出有关理论之前，注意到地球自转影响简正振型观测的某些实际问题是有益的。

首先，存在测定一给定振型的时间 Q 的问题。在一时间序列中，测量一给定频率成分的衰减率，其标准方法是计算频谱并在其半功率点上测量频谱峰的宽度。因此，对一时间函数 $f(t)=H(t)[e^{-\omega_0 t/2Q}\cos\omega_0 t]$，接近 ω_0 的振幅谱为

$$|f'(\omega)| \sim \frac{1}{2}\left[(\omega-\omega_0)^2+\left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2\right]^{-1/2}. \qquad (8.66)$$

当 $\omega=\omega_0 \pm \omega_0/2Q$ 时，振幅从其峰值按因子 $1/\sqrt{2}$ 下降，相应的功率谱 $|f(\omega)|^2$ 以因子 1/2 下降。在其半功率点测量峰的宽度 $\Delta\omega$，从而得出 $Q^{-1}=\Delta\omega/\omega_0$。显然，如果频谱峰在给定的多重谱线重叠部分之内，则求 Q 的标准方法将不能用。因此，不能分解出单个的振型，而且(8.66)在 ω_0 附近是一不充分的频谱模型。Alsop 等 (1961 b) 找到的另一种测量 Q 值的一般方法仍然可用。他们的方法是解释这些频谱的相对振幅，这些频谱是沿原来地震图仔细选择时间窗(相等的长度)来确定的，每一个窗求出一个频谱。

由于自转而使多重谱线分离，与此相关的第二个问题是它将由于地球偏离球对称而引起多重谱线的分离变得模糊不清。Dahlen(1968，1969)提出，如果用对简正振型的分离效应研究地球的横向不均匀性，则对一级近似和二级近似两种情况其自转效应必须消除。

根据这些初步的陈述，现在我们给出自转分离的一级扰动理论。

考虑一振荡的环型振型，它得自(8.59)，并满足

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}. \tag{8.67}$$

此式描述了离开非自转平衡状态的一微小运动。在此状态下可标出一固定的惯性坐标系。但地球有周日自转，所以必须修正(8.67)，使 u 描述偏离自转平衡态的一些微小运动。为作到这一点，我们用一个以恒定角速度 $\Omega=\Omega\hat{z}$ 转动的坐标系，其中 Ω 每24小时(实际上是每恒星日)为 2π，$\hat{z}$ 为沿地球自转轴方向的单位向量。在这个非惯性系统中，质点的速度为 $\partial u/\partial t+\Omega\times u$，质点的加速度为 $\partial^2 u/\partial t^2+2\,\Omega\times\partial u/\partial t+\Omega\times(\Omega\times u)$。由于 Ω 很小(相对于简正振型的频率)，我们将忽略量级为 Ω^2 的项，于是(8.67)变成

$$\rho_0\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}+2\,\rho_0\,\boldsymbol{\Omega}\times\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=\boldsymbol{X}, \tag{8.68}$$

其中 $X_i=[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})]_{,j}$.

我们将假定，没有 Coriolis 加速度 $2\,\Omega\times\partial u/\partial t$ 的(8.68)式有一简并本征值

$$\omega_0={}_n\omega_l. \tag{8.69}$$

我们要研究的(8.68)式的解 u 具有受 ${}_nW_l(r)T_l^m(\Delta,\phi)$ 支配的空间函数关系和从(8.69)的轻微扰动得到的本征频率 $\omega={}_n\omega_l^m$。可证明(Backus 和 Gilbert，1961)，当 Ω 很小时，u 是 Ω 的解析函数，所以我们可用如下的幂级数形式表示：

$$\frac{\omega}{\omega_0}=1+\sigma_1\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)+\sigma_2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2+\cdots,$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}_1\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)+\cdots, \tag{8.70}$$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0+\boldsymbol{X}_1\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)+\cdots,$$

其中 ω 是(8.68)的本征值(即 $u\propto\exp(-i\omega t)$)。将 $\Omega=\Omega\hat{z}$ 和(8.70)代入(8.68)并使 (Ω/ω_0) 的幂次相等，我们得到

$$-\rho_0\omega_0^2\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{X}_0 \tag{8.71}$$

$$-\rho_0\omega_0^2\boldsymbol{u}_1-2\rho_0\omega_0^2[\sigma_1\boldsymbol{u}_0+i\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{u}_0]=\boldsymbol{X}_1. \tag{8.72}$$

现在我们的目的是求得一级扰动 σ_1。显然，$\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_0$ 一定是线性无关的，因此如有必要重新定义 $\boldsymbol{u}_0$，我们可假定 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_0$ 是正交的。Pekeris 等(1961)也证明 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_0$ 是正交的，因此，从(8.72)得到

$$\int\rho_0[\sigma_1\boldsymbol{u}_0^*\cdot\boldsymbol{u}_0+i\boldsymbol{u}_0^*\cdot(\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{u}_0)]dV=0.$$

这是一个 σ_1 的方程，可以改写成[用(8.35)]

$$\sigma_1=-i\hat{\boldsymbol{z}}\int\rho_0\boldsymbol{u}_0\times\boldsymbol{u}_0^*dV. \tag{8.73}$$

由于 $\boldsymbol{u}_0={}_0W_l(r)T_l^m(\Delta,\varphi)\exp(-i_n\omega_l t)$，(8.73)中的积分给出

$$\sigma_1=\frac{-m}{l(l+1)} \tag{8.74}$$

从地球物理学的观点，这一结果有些令人失望，因为它告诉我们环型振型的一级分离和地球结构是无关的。从方程(8.70)得到，扰动的本征频率为

$${}_n\omega_l^m={}_n\omega_l-\frac{m}{l(l+1)}\Omega\quad\text{当}-l\leqslant m\leqslant l\text{时}, \tag{8.75}$$

简并已去掉。

值得注意的是，对球型振型，方程(8.73)仍然是成立的，其中 $\boldsymbol{u}_0=[{}_nU_l\boldsymbol{R}_l^m+{}_nV_l\boldsymbol{S}_l^m]\exp(-i_n\omega_l t)$，并已对(8.34)进行了归一化。$\sigma_1$ 可以求出，这就得到

$${}_n\omega_l^m={}_n\omega_l-m\Omega\,{}_n\beta_l, \tag{8.76}$$

其中

$${}_n\beta_l=\int_0^{r_\oplus}\frac{\rho_0({}_nV_l)^2}{l(l+1)}r^2dV+2\int_0^{r_\oplus}\frac{\rho_0({}_nU_l)({}_nV_l)}{[l(l+1)]^{1/2}}r^2dV.$$

${}_n\beta_l(\Omega/{}_n\omega_l)$ 的值已由 Dahlen (1968) 算出，并且对振型 ${}_1S_1$ 和 ${}_0S_2$ 其值为最大，约达到 0.015。

也许自转分离理论的主要用处在于依据分离多重谱线中相近的空间分量来模拟一部分所观测到的频谱峰，因而能设计一资料

分析方法来估算 Q。Stein 和 Geller(1978)提倡在时间域中地面运动的合成法——即在和给定的(n,l)有关的多重谱线$-l \leqslant m \leqslant l$之内，求得每一振型的激发。他们将多重谱线中各种振型相加，并将这合成地震图与实际资料进行了对比（合成地震图和实际资料两者都通过窄带滤波以分出有意义的多重谱线。)图 8.11 给出了一个实例，这是 1960 年智利大地震之后观测的 ${}_0S_2$，150 小时的记录长度表明在多重谱线内不同振型间的干涉。

在这一段中我们仅概述了自转分裂的最简单的情况。Dahlen 和 Smith(1975)已给出了一种推广的处理方法，表明对自转的地球其简正振型不再是正交的。当地球模型的一部分是流体时（例如外核），这就开辟了理论问题的一个崭新领域，甚至没有自转的复杂性，这是因为具有很长周期的一组简正振型是可能存在的。它们可以有好几小时的周期，称作低谐(Pekeris and Accad, 1972)。

有很多影响作用在地球上，其时间尺度比 ${}_0S_2$ 的周期还长。可希望能给出形变的准静态分析，但很遗憾，由于流体地核的存在，这一点并不简单。Longman(1963)曾指出，方程(8.63)在 $\mu \to 0$ 和 $\omega \to 0$ 的极限情况下变得相互不一致，而且很多作者都曾提出解决此佯谬的办法（Crossloy 和 Gubbins, 1975)。在简正振型和地球自转的情况下，Chandler 晃动的理论由于 Longman 佯谬而复杂化了。Smith(1977) 曾避开了准静态分析，并指出了对一自转的地球（具有流体地核但无海洋）其动态方程为什么如一简正振型一样确有 Chandler 晃动。对一具有稳定成层液核的地球模型，他算出的周期为 405.19 恒星日，观测的周期是 434.14±1.02 恒星日 (Currie, 1974)。但 Dahlen 指出，对于 Smith 那样的地球模型，全世界海洋的作用将使 Chandler 晃动周期增加，并使观测的和预测的 Chandler 周期之间具有良好的一致性。

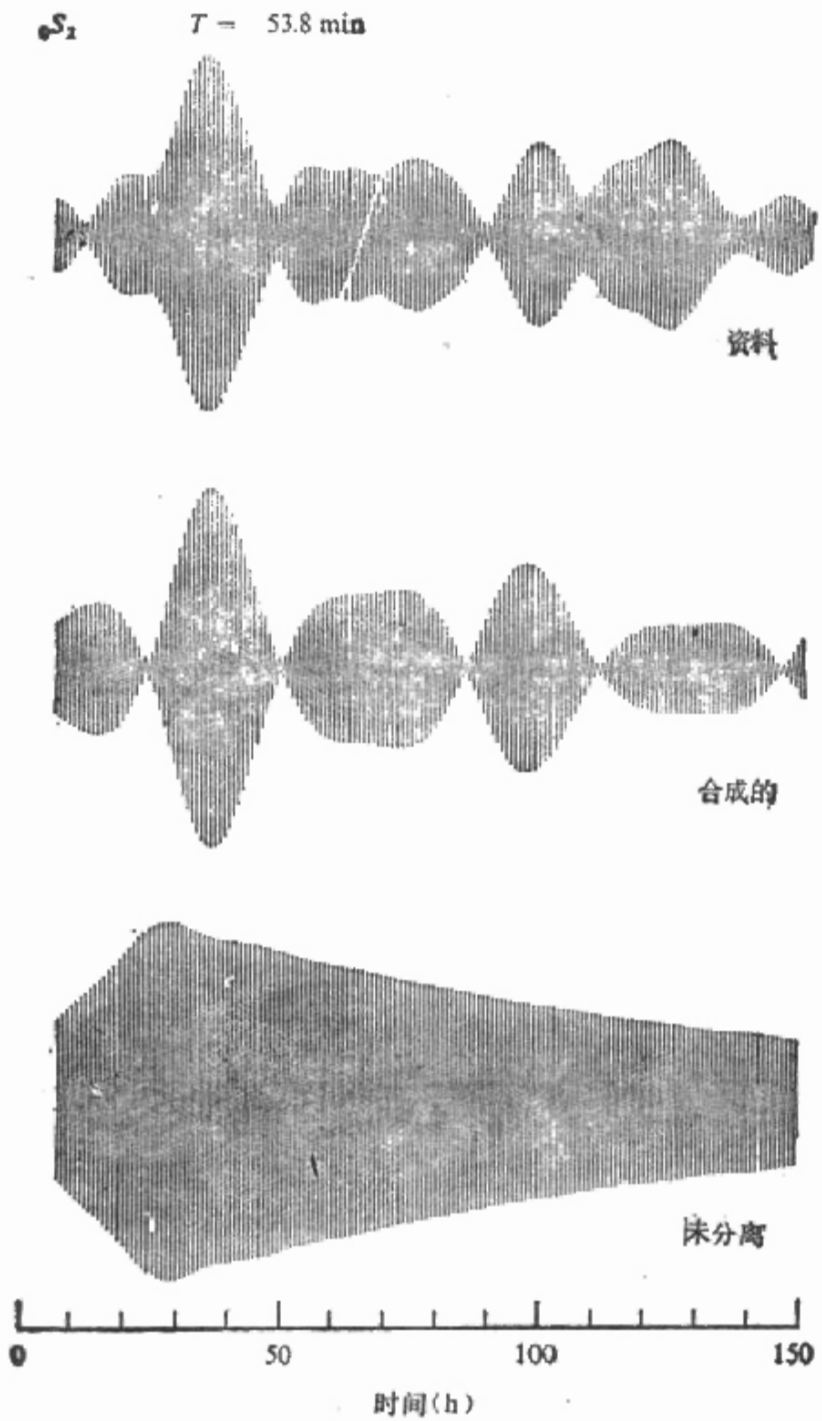


图 8.11

在时间域中 $_eS_2$ 的观测曲线和该记录的合成曲线的对比，合成曲线是用考虑到自转分离效应和不考虑自转分离效应两种方法合成的(引自Stein and Gilbert, 1977)

建议进一步阅读的文献

Biot, M. A. *Mechanics of Incremental Deformations*, New York:Wiley, 1965.

Brune, J. N., and F. Gilbert. Torsional overtone dispersion from correlations of S waves to SS waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*. **64**, 313-320, 1974.

Gilbert, F., and A. M. Dziewonski. An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra. *Philosophical Transactions of the Royal Society* (Lond.), A **278**, 187-269, 1975.

Love, A. E. H. *Some Problems of Geodynamics*. New York: Dover Publications, 1967.

Rayleigh, Baron. *Theory of Sound*(Chap. 5). New York:Dover Publications, 1945.

Satô, Y., T. Usami, and M. Landisman. Theoretical seismograms of spheroidal type on the surface of a gravitating elastic sphere—II. Case of Gutenberg-Bullen A′ earth models. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo Univ.*, **45**, 601-624, 1967.

Takeuchi, H., and M. Saito. Seismic surface waves. In B.A. Bolt (editor), *Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations*(Methods in Computational Physics, Vol.11). New York: Academic Press, 1972.

问　题

8.1　对一均匀的弹性固体球的扭动振荡，给出简正振型理论并且求出两个最大周期。对由一单个的水平力激发的${}_0T_2$，一般来说，最适宜的深度是什么？由垂直轴上有矩力偶激发

的情况又如何呢？

8.2 证明扭动振型的时间的 Q 是和半径 r 处体波的 $Q_\beta(r)$ 有关

$$Q^{-1}=\int_0^{r_\oplus}\frac{\beta}{\omega}\left[\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right]Q_\beta^{-1}(r)\,dr,$$

这里的偏微分由(8.65)给出。

8.3 如下的论点错误在那里？地球的周日自转不是由外力激发的，因而是地球的一个自由振荡。它必然是相应于 $l=1$ 的扭动振荡。对一球对称的地球可得出，自转可能对任何其它振型（环型的和球型的）没有影响，因为在这样模型中的各振型毫无相互作用。

8.4 一大地震之后，在给定的台站上，设有相继到达的 G 波，G_1，G_2，$\cdots$，G_n（见附录 1）。考虑到极相移，由 G_n 和 G_m 的 Fourier 变换，推导在大圆上测定相速度的公式。

如果 n 和 m 相差一个偶数，这个公式不包括震源效应所造成的初始相位。不然的话，就需要知道在相反的辐射方位上初始相位之间的差。对一点源(7.148)，关于相反方位上的初始相位，有什么简单的办法能使后一情况下的公式得以简化？

利用（7.149），对地幔中的 Rayleigh 波可考虑同样的问题。

第九章　在性质与深度有关的介质中的体波

利用地震波研究地球内部结构，历史上唯一最成功的方法是应用射线理论公式（4.4节）去解释短周期体波。事实上，对不同的接收位置x和不同的震源位置ξ，恰是根据走时函数$T(x, \xi)$的观测，Beno Gutenberg于1913年准确地估算出了核-幔边界的深度为2900公里。地壳厚度的准确估算是Mohorovičić于1909年开始的，而1936年Inge Lehmann才辨明内核的存在。1939年前，Gutenberg和Harold Jeffreys在运用射线理论方面分别地进行了努力，都曾导出了整个地球的速度模型，其相互的差别仅为百分之几。在800—2800公里深度范围内，Gutenberg和Jeffreys的模型中，其P波速度之差小于1％，在Jeffreys模型和Gilbert与Dziewonski（1975）的近代模型1066 B之间的差也小于1％。然而，Gutenberg和Jeffreys用射线理论所得到的这些早期结果，对解决地球内很大深度处物质的组成及状态等很多问题是不够用的。例如，在上地幔中有两个深度范围（约为400公里和650公里），其中的速度梯度（$d\alpha/dz$）异常地大。这原因似乎可能是组成成分的变化，也可能是同一矿物不同相之间的转变（或可能为两者），并且一般而言，这一困难的任何满意的解答将在很大程度上取决于地震学家能否准确估算$d\alpha/dz$和$d\beta/dz$随深度的变化。类似地，为了了解在地球液核中的发电机的能源问题，重要的是要知道是否有一些速度梯度值，能够阻止对流或加速对流。

结果是，地震学最经典的方面之一仍是一个活跃的研究领域：即推断地球内部结构，但现在强调的是比较细的结构，诸如对限

定的深度范围内的速度梯度变化和计算穿过像Moho界面那样的已知间断面时其性质的突变。

这里，体波起一种重要的作用，由于它们相当短的周期和在地震图上从时间上把它们与其它波分离开的可能性，使它们有可能用于研究地球内部的局部区域。人们早已认识到这个事实，但问题主要是要找到一个方法，以对处理走时资料的经典方法给予明显的改进。在第十一章中，我们叙述用地震台阵直接测量慢度（即在台阵之内当 x 变化时，测 $T(x,\xi)$ 的梯度）的能力，在第十二章中，我们指出为什么这是一个重要的改进，因为在反演计算中正是这个慢度才是所需要的。此外，由于 T 通常是多值函数，根据测量它们的不同慢度，台阵可以帮助辨认后至波。然而，大部分改进仍是基于测定到时和研究 4.4 节中的射线理论。

Julian 和 Anderson(1968)，Wesson(1970)，Shimshoni 和 Ben-Menahem(1970)及 Chapman(1971) 总结了将射线理论用于体波初至振幅的各种尝试。这些文章表明，几何扩散函数(在第四章中标记为 $\mathscr{R}(x,\xi)$)可能是速度梯度的一个极为敏感的函数，对反演地球结构来说这是所希望的特性。然而，正是在该阶段才能清楚地认识应用经典射线理论去解释资料时的局限性。问题是理论本身此时不能成立，因为在体波资料中可以看到各种各样和频率有关的效应不能用射线理论来定量表示。在“影区”见到了体波(按Snell 定律不能穿入此区)；由于频率和振幅有关，在焦散面的附近也见到有体波［此为一弱聚焦面，在其上 $\mathscr{R}(x,\xi)=0$］，当然，用几何扩散函数不可能预测出这种奇异性；还看到在震源和接收点之间很多种射线都有相似的到时，所以观测到了复杂的干涉效应；在这个情况下，仍见到体波。为弄清楚这些观测资料所需要的波动理论基本上是在第六章中为解决 Lamb 问题所用方法的推广，再加上在第七章中为处理成层介质中的波曾叙述过的系统方法。事实上，为有效地研究体波我们将区分成三种颇为不同

的理论方法。目前，虽然计算的方法本质上是不同的，但现在每一理论却都用了同样的途径——即在一些具有给定震源的一定的地球模型中去计算合成地震图，然后在理论和观测之间作比较。因为利用资料中的整个波形来判断地球和震源的特定模型是否成功，比起仅利用射线理论的走时曲线和初动方向，合成地震图是一较为重要的进展。

我们将叙述的第一种理论方法是 Cagniard 方法（6.5 节）的推广，实践中常常用来处理由很多（可能有几百）均匀平面层组成的介质。如 Helmberger (1968)指出的，这里的关键是在复射线参量平面中求 Cagniard 路径的数值方法［而不是犹如（6.91）给出的简单的双曲线计算］。第二种理论方法是 Fuchs (1968, 1970, 1971)首创的，通常称为"反射率法"，目的也是在于计算由很多均匀层组成的介质中的波。以 Haskell 在地震学中发展的矩阵法为基础(见第七章)，Fuchs 方法包含了对有限范围内的实射线参量的数值积分，随后是对频率进行 Fourier 反变换以求得这合成地震图。

当然，地球不是由均匀平面层叠置而成的；因而，应用上述两个方法去解释地震图时，必须注意到两个重要的结果。其一是，由 Volterra 给出的法则（见 Gilbert 和 Backus, 1966），对密度和波速在空间上连续变化的介质中，其波系确实可通过求解很多均匀部分组成的不连续介质中的波加以研究。事实上，求不连续介质中（在极限的情况下，可令均匀区的数目趋于无限，用此方法以给出连续介质的密度和波速）的波解，而这个解确实趋向于连续介质中的波解。在实践中，对 ρ, α, β 仅仅和深度有关(即仅和笛卡尔坐标中的 z 有关）的介质，则容许以大量均匀平面层来模拟一个连续剖面。尽管 Chapman (1976 a) 已推广了 Cagniard 方法，使对连续变化的 $\rho(z), \alpha(z), \beta(z)$能直接得到解，但上述方法仍被广泛采用。

将 Cagniard 和 Fuchs 方法应用于地震学中所需要的第二个

结果包含着要考虑地球的球状几何条件（贯穿本章，我们将仅考虑这样的介质，其中 ρ, α, β 在球极坐标系中为 r 的函数或者为深度 z 的函数，z 或属直角坐标系或属具有对称垂直轴的柱坐标系。）于是，问题是如何把球对称介质中（即径向不均匀性）提出的波传播问题转换到平面叠层介质中的问题，对后者，前两个求解方法是直接可用的。用这种"地球展平变换"，Andrianova 等(1967)及 Biswas 与 Knopoff (1970)曾指出，对 SH 波，从平面介质中的相应解求得球形介质中精确的波动解答是可能的。很遗憾，Chapman(1973) 指出，对 P-SV 问题的精确转换似乎是不可能的，毫无疑问，目前用于 P-SV 问题的"地球展平变换"仅仅是近似的。

我们将叙述的第三种求解方法要求地球模型应由径向不均匀层组成。地震运动（在地球的不同位置，作为时间的函数）被划分成在不同的时间窗内到达的信号，每一信号在本质上相应于某个特定类型的体波射线路径。代替几何射线理论，可对所要讨论的信号用一种更精确的解，这就是对频率和射线参量求积分。在这一般的步骤中，对完成双重积分已提出了几种不同的方法。可先作频率积分或可先作射线参量积分。射线参量积分可对实数求得或者可对复数求得。很多学者推动了这一基础理论的发展。Scholte(1956)曾作了重要贡献，他利用了已经完全确定了的、在球面几何中对部分波的展开求和的方法，并较详细地说明了在频率域中对特定的地震射线如何确定其解。此解包含一个(实际上)以射线参量为变量的在复平面上的积分，Phinney 和 Alexander (1966)，Phinney 和 Cathles(1969) 曾对此作出了重要贡献。他们指出这个积分可以很容易地用数值法得到。采取对射线参量的复数积分的方法，随后对频率求实数积分，我们将给出和地球的固体及液核相互作用的几种地震波的一些实际应用。Chapman (1978 a,b)曾描述了几种可供选择的方法。通常很有效的一种方法首先要求对实频率求积分（在很多情况下，这在解析上而不是

在数值上是可能的)，随后是对射线参量积分的一个相当简单的反演。

因为地球是这样一个复杂的介质（甚至当假定为球对称时)，实际上，在我们叙述的不同求解方法中的每一种，都必须取其近似。因此，幸而存在着几种方法，因为似乎任意一种方法的精度(并且更重要的是地球物理的结论可由其应用中得出)仅仅可通过和其它方法的比较而确定。实际上,这些比较仅在最近才开始做，尽管结果并不满意，似乎这些不同的方法在应用上有其独特的但又互相重叠的范围。

9.1 多平面层介质中的 Caniard 方法：广义射线的分析

这一节是 6.5 节的自然推广，在 6.5 节中我们曾指出如何计算来自两个半空间内界面上的广义反射。假定读者较熟悉(6.91)的推导及(6.92)—(6.95) 中详述的步骤。我们按照 Helmberger (1968)的方法，他描述了如何去计算如图 9.1 所示的广义的一次反射。Helmberger 最初用这个方法来解释白令海面以下在 d_1 深度处引爆 TNT 炸药时，由于压力的点源而得到的水下地震检波器的记录。接收点在 d_2 深度处，其主要目的是用 Moho 界面的首波和反射波来解释 r 的范围约为 30—70 公里处的响应。因此，需要推广此理论去处理地壳的可能分层。

取 z_0 为海洋-大气的交界面，层 1 为海洋本身，用层 1 中的入射压力场表示震源：

$$P^{\lambda}(r,z,t)=\frac{R_s}{[r^2+(z-z_0-d_1)^2]^{1/2}}\times P_0\left(t-\frac{[r^2+(z-z_0-d_1)^2]^{1/2}}{a_1}\right). \tag{9.1}$$

就是说，在离震源的标准(固定的)距离 R_s 处，初始压力脉冲的

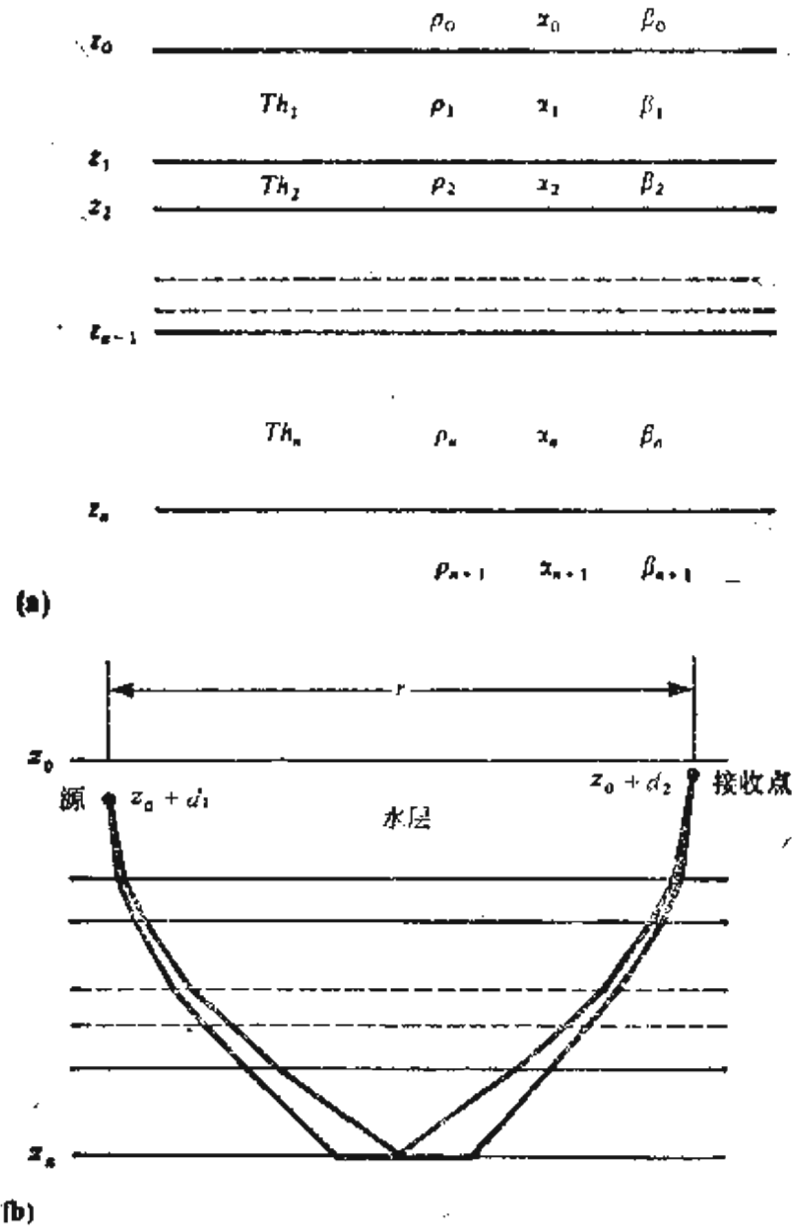


图 9.1

(a) 均匀叠层中密度（ρ）和两个波速（α，β）的符号。层 n 和层 $n+1$ 之间的边界在深度z_n处，第 n 层的厚度为 $Th_n=z_n-z_{n-1}$。(b) 和第 n 层边界相关的两个主要有贡献的广义 P 波反射的射线图解；源和接收点均在层 1 中。我们假定了 $\alpha_{n+1}>\alpha_n$，所以首波(包括在第 $n+1$ 层顶部的水平传播)和广角反射波可能同时存在，如所示。因为广义反射仅和一个内界面有关，故称之为一次反射。图中未表示波型的转换(从 P 到 SV)，实际上对一 P 波源往往确实如此，在接收点上总的 P 波响应，由对每一内界面上的这种一次反射之和完全精确地给出（即忽略多次内反射和从 P 到 SV 及 SV 回到 P 的转换）

形状为 $P_0(t-R_s/a_1)$。按第六章中对压力源的分析，对图 9.1 b 表示的广义 P 波一次反射，我们可立即写出其 Laplace 变换。即有

$$P(r,z,s)=\frac{2s}{\pi}R_s P_0(s)\mathrm{Im}\int_0^{i\infty}\frac{p}{\xi_1}\times K_0(spr)[\text{积}(p)]\exp\{-s[\text{和}(p)]\}dp, \quad (9.2)$$

其中 K_0 是修正的 Bessel 函数，

$$\text{积}(p)=(\hat{P}\grave{P})_1\cdot(\hat{P}\grave{P})_2\cdots(\hat{P}\grave{P})_{n-1}\cdot(\hat{P}\grave{P})_n\cdot(\acute{P}\hat{P})_{n-1}\cdots(\acute{P}\hat{P})_2\cdot(\acute{P}\hat{P})_1, \quad (9.3)$$

$$\text{和}(p)=(Th_1-d_1)\xi_1+Th_2\xi_2+\cdots+Th_n\xi_n+Th_n\xi_n+\cdots+Th_2\xi_2+(Th_1-d_2)\xi_1 \quad (9.4)$$

这里，$\xi_i=(a_i^{-2}-p^2)^{1/2}$ 具有按 $\mathrm{Re}\,\xi_i\geqslant 0$ 选择的分支切割，同时，$(\hat{P}\grave{P})_{n-1}$(等)是第 $n-1$ 个边界上的透射系数。(9.3)中的乘积包含有平面波的透射系数和反射系数，看一下图 9.1 b，顺着穿过内界面的广义射线，很容易写出它们来。(虽然物理变量是压力，但在此情况下我们使用了位移系数，因为源和接收点在同一层中，并且压力系数将会给出同样的乘积。)类似地，(9.4) 中的和是顺

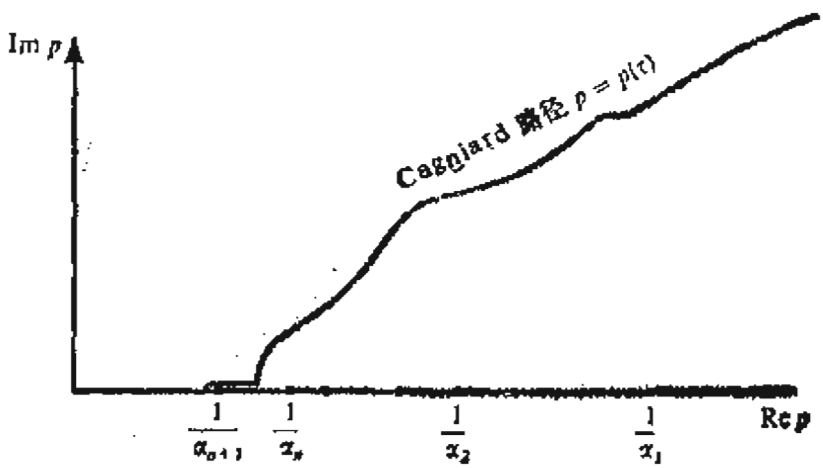


图 9.2

复 p 平面的第一象限，在实轴上示出了很多支点（具有向右延伸的切割），同时示出了求解 (9.5) 的 Cagniard 路径(即对图 9.1 中的广义射线)。在 $p=1/\alpha_{n+1}$ 附近首波的作用发生，在Cagniard路径偏离实 p 轴的附近，反射出现

着广义射线累积的垂直相位延迟。

对(9.2)的反演，其 Cagniard 路径现在是 $p=p(\tau)$，它是下面方程的解：

$$\tau=p(r)+\text{和}(p), \tag{9.5}$$

其中 τ 是正实数。虽然这一步必须从数值上完成，但这个解很容易求得，它有很多如图 6.15 中所描述的广义反射的特性。在如图 9.2 的多层情况下，假定 P 波速度 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n+1}$ 随深度而增加，且 r 足够大以致来自 $n+1$ 层中的首波确实存在，则我们可证明这个解。

如果源脉冲 $P_0(t)$ 在距离 R_s 处为单位阶梯函数，则广义一次反射在时间域中的响应准确地为

$$\frac{2}{\pi}R_s\mathrm{Im}\int_0^{\xi_1}\frac{p\left(\frac{dp}{d\tau}\right)\text{积}(p)\,d\tau}{(t-\tau)^{1/2}(t-\tau+2pr)^{1/2}} \tag{9.6}$$

[和(6.92)对比]。实际上，以 $(2pr)^{1/2}$ 替换这个分母中的 $(t-\tau+2pr)^{1/2}$ 是合适的，于是此阶梯函数的响应(9.6)变成

$$\frac{2}{\pi}\psi(t)*\frac{1}{t^{1/2}}\quad\text{其中}\psi(t)=R_s\mathrm{Im}\left\{\frac{p^{1/2}}{\xi_1}\frac{dp}{d\tau}\frac{\text{积}(p)}{(2\tau)^{1/2}}\right\}. \tag{9.7}$$

在把这个响应和实际资料对比之前，当然，完成与实际震源脉冲 $P_0(t)$ 和仪器响应 $I(t)$ 的褶积并且对近源及近接收点的反射做一些修正是必要的。这些效应合在一起概括为传递函数 $T(t)$：

$$T(t)=P_0(t)*I(t)*\left[\delta(t)-\delta\left(t-\frac{2d_1}{\alpha_1}\right)-\delta\left(t-\frac{2d_2}{\alpha_1}\right)+\delta\left(t-\frac{2d_1}{\alpha_1}-\frac{2d_2}{\alpha_1}\right)\right]. \tag{9.8}$$

在选定三个附加的 δ 函数以表示在表面上的反射之后，其它一些假设如图 9.3 中所述。图 9.4 表示 Helmberger(1968) 方法，在此法中他用 $T(t)$ 的各分量展开了 $T(t)$。于是得到合成响应为

$$T(t)*\frac{d}{dt}[\text{(9.6)给出的阶梯函数响应}]$$

$$=\frac{dT}{dt} * \frac{2}{\pi}\psi(t) * \frac{1}{t^{1/2}}. \tag{9.9}$$

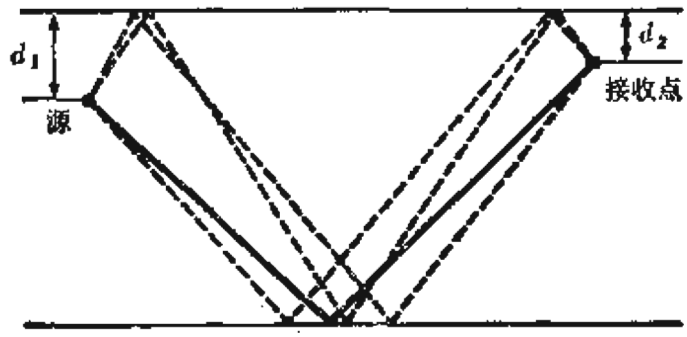


图 9.3

对接近地表的源和接收点，表面反射的效应是在原来射线上再加上三个额外的广义射线，如图 9.1 b 所示。因此，对震源附近的反射，引进了时间延迟 $2d_1/a_1$（海洋声速要比 a_{n+1} 低得多，以致对 Moho 折射，海洋中的射线路径是近于垂直的）。由于 $d_1 \ll Th_1$ 和 $d_1 \ll r$，这个时间延迟是仅有的重要效应（除了反射时符号变化以外），此射线的余下部分实质上和原来的广义射线一样

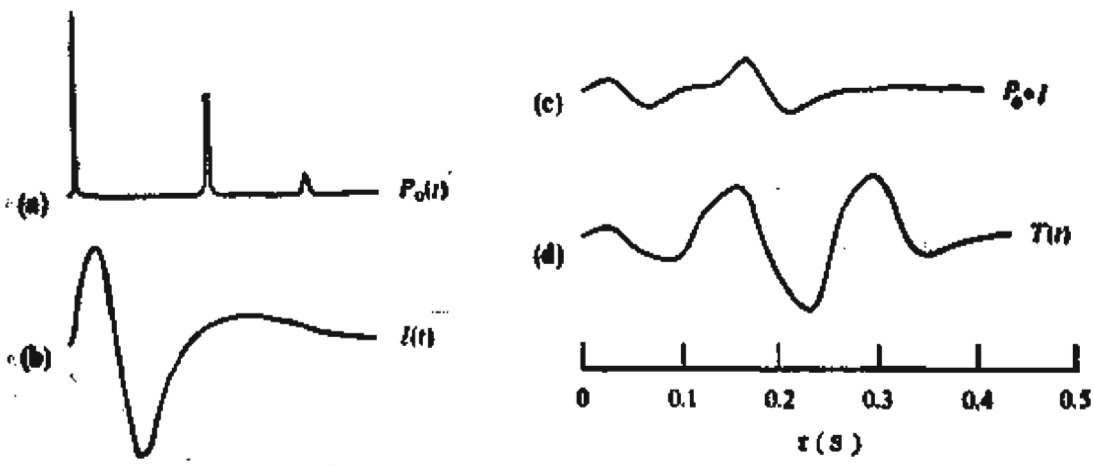


图 9.4 传递函数的结构

(a) 在 160 英尺深度处引爆 TNT 炸药时，其典型的源函数 $P_0(t)$。一振荡的气泡是造成后一个脉冲的原因。(b) 这仪器（水中地震检波器加上记录系统）的函数是一 δ 函数的压力波通过接收点时记录的响应。(c) 为(a)和(b)的褶积。(d) 对描述在震源附近和接收点附近的反射作典型褶积之后，其传递函数本身[引自 Helmberger (1968)的图 6]

记住这里已考虑过的在 z_n 处内界面上仅有广义的 P 波一次反

射。对图 9.5 所示的海洋地壳模型有几个一次反射，我们认为这是由于在 19 公里的Moho界面以上的另外四个内界面造成的。然而，这些很容易地可用(9.7)中定义的适当的 ψ 函数的求和算得，每一个都有不同的 Cagniard 路径。然后再进行（9.9）中所示的两次褶积。结果如图 9.6 所示，对白令海阿达克（Adak）北约 500 公里处进行的折射实验，Helmberger (1968)比较了合成的和观测的波形。此图确实表明了在合成的和观测的脉冲形状之间有相当好的一致性，虽然在相对振幅上仍然有些不一致，这可能是由于震源校正的误差造成的。Cagniard 路径的细节以及对首波和反射波的波形展开式，已在问题 9.1 和 9.2 中叙述。

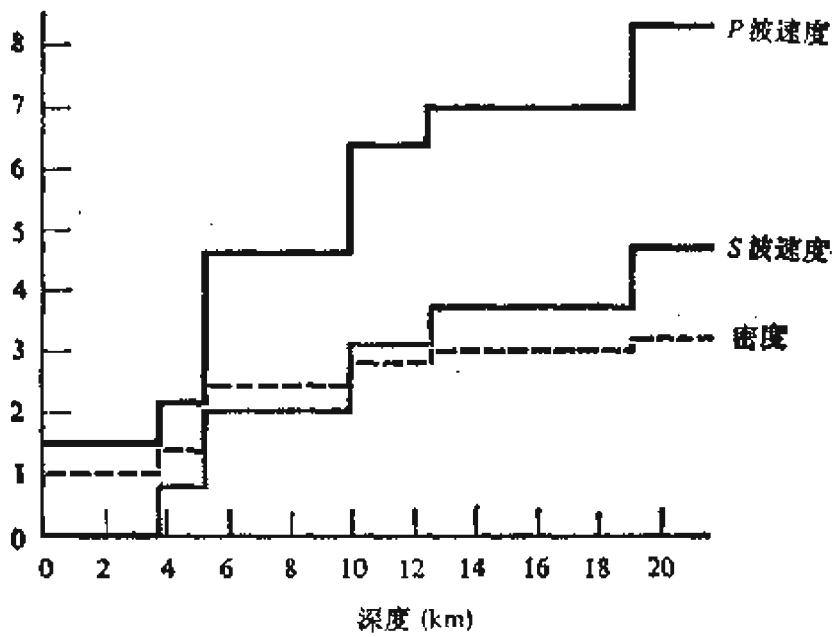


图 9.5

在北阿留申盆地之下的海洋地壳模型。Moho 界面在 19 公里深处，水层 3.75 公里[引自Helmberger(1968)的图 10]

既然每一个广义射线的贡献可以算出，这就使得几百个广义射线贡献之和也可以算出。因而，大量有意义的地球物理问题可以在这样推广 Cagniard 理论的基础上进行分析。Mellman 和 Helmberger (1974) 曾证明薄的高速层如何引起高频波的衰减；

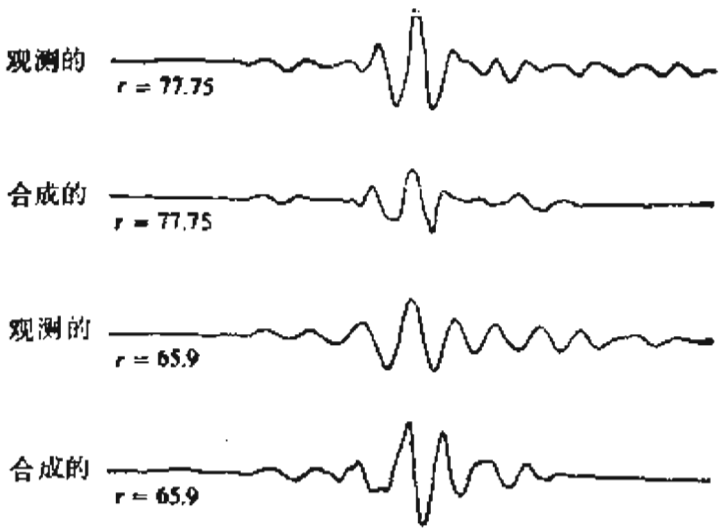


图 9.6

从北阿留申盆地之下的 Moho 界面得到的首波和广角反射波的观测的和合成的水声检波器记录的对比。反射相当强。合成记录是由图 9.5 中的模型按广义 P 波一次反射算出的。观测值以因子 $10^{\frac{1}{2}}$ 衰减，而合成的波形以因子 2 减小[引自 Helmberger(1968)的图 11]

Vered和Ben-Menahem(1974)及Langston 和 Helmberger(1975)曾说明如何分析剪切位错源；Helmberger 和 Malone(1975)对比了合成的 SH 波和观测的 SH 波，以表明地壳分层如何可使地方震的波形发生严重失真；Spudich和Helmberger(1979)曾考察了所预期的海底沉积结构，发现了漏能模式的实际效应很像我们在第六章中对半空间所描述的 $\bar{P}$ 波。

当然，通常我们必须考虑的广义射线的数目是相当大的。这将发生于结构具有较大的速度梯度时，以及合成图需要很长的时间计算时。由于这些问题的重要性，现在我们转向另一计算方法，此法中保留了所有的多次反射。

9.2 多平面层介质的反射率法

在第六章和第七章中，我们曾说明了如何得到两次变换的解作为(k,z,ω)的函数，其中 k 是水平波数。为计算反变换以给出

其解为(r,z,ω)的函数，这几章中着重于在复k平面内（或p平面，$k=\omega p$)的计算。Fuchs方法是通过数值计算求此反变换的，他先对实k值积分，然后再对实ω值求积分，以得到所需要的为(r,z,t)函数的解。例如，在描述Love波的激发中(7.4节)，我们得到了一个多次变换求解公式。这可用已知的在均匀叠层中SH波传播的形式来算得。在一系列不同频率上完成对实数k的积分，然后，用$\left(\frac{1}{\pi}\right)\mathrm{Re}\int_0^s s(r,z,\omega)\exp(-i\omega t)d\omega$的离散形式以求得合成地震图。

实现上述程序的困难是由于相应于面波振型的多次变换解中的极点所引起的。这些极点落在实k轴上，因而也是在积分路径上。似乎这个困难可以通过将每一层的速度加上一个小的复数部分而消除，考虑到非弹性(见(5.88))，它将使这些面波的极点从正实k轴上移到k平面的第一象限中。然而，Fuchs方法主要是用于体波的研究中，以得到其中有点源激发的均匀平面叠层在自由表面上的响应。如果我们的兴趣限于体波，那么对k的积分可以局限于没有面波极点的实k轴的一部分上。现在我们讨论这一数值方法的一个特例，它叫做反射率法。

参照图9.7，假定深度h处一点源所产生的波在接收点看来表现为从深度z_m和z_n之间某些构造反射的。例如，在地球内，这可能是一个高的速度梯度区，它可用很多薄均匀层来模拟。

用运动-应力向量法，我们已看到震源在$z=h$处是以$f(k,z,\omega)$的不连续性来处理的，这里f的分量是位移和牵引力的多次变换的分量。如果源与方位(ϕ)有关系，我们就可看到从ϕ到m的变换是必要的，每一m的分量可解出，且$f(k,\varphi,z,\omega)$包含着对m的求和。然而，在实际中仅有几项是必要的（对双力偶源，$-2\leqslant m\leqslant 2$)。对一般取向的剪切位错，f的不连续性已由Hudson(1969)叙述过。

如果震源是位于一无限均匀的并和层s具有同样弹性参量的

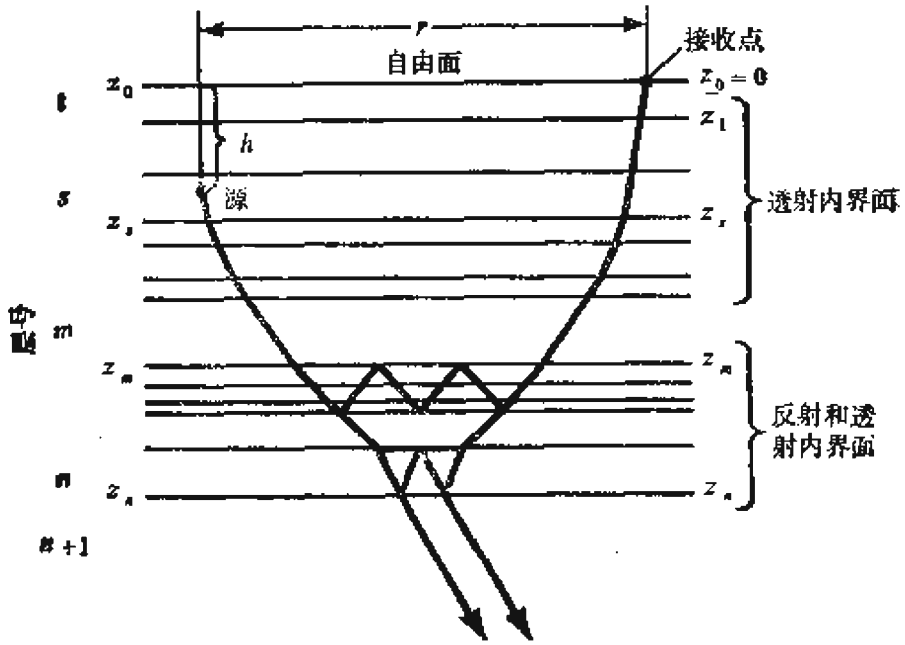


图 9.7

反射率法。深度 h 处一点源位于层 s 中。对深度在 z_m 和 z_n 间的介质，体波和构造相互作用，求在自由表面上 r 范围内合成体波的位移。由于在这两个深度之间利用了传播矩阵，保留了感兴趣的构造中产生的所有的多次反射，例如，在层 n 中示出的 P 首波和 S 波。正文中只描述了这些波，即离源向下为 P 波并向上至接收点仍为 P 波，源以上构造的影响在概念上很容易包括进去

整个空间中，则对源以下求得下行波的运动-应力向量将是不难的。由于我们的兴趣在于反射构造以上区域中传播的 P 波振型，我们将仅仅考虑 P-SV 问题。前面有 $\boldsymbol{f}=\hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{w}$，其中 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(z)$ 是对每一层中定义的层矩阵[见(5.65)]，$\boldsymbol{w}$ 是对 $\boldsymbol{F}$ 的列加权的向量。一般情况下在每一层中 $\boldsymbol{w}$ 的四个分量是常数，并分别给出层中下行的 P、下行的 SV、上行的 P、上行的 SV 各波的振幅。有源的层不同于所有其它的层，其它层中 $\boldsymbol{w}_s$ 取两个值，一个值适合于 $z<h$(有附加的离开源的上行波)，另一个值适合于 $z>h$（有附加的下行波）。从(5.65)得到，对离源下行的 P 波，其运动-应力向量仅仅由矩阵 $\boldsymbol{E}$ 的第一列乘以相位因子 $\exp[i\omega\xi_s(z-h)]$，再乘以和 h 处 f 的不连续性有关的标量 $P^\wedge$ 给出。我们需从问题

的传播部分入手的正是这个向量 $\boldsymbol{f}^{\wedge P}$，

$$\boldsymbol{f}^{\wedge P}=\boldsymbol{f}^{\wedge P}(k,m,z,\omega)=P^{\wedge}\begin{pmatrix} a_s P \\ a_s \xi_s \\ 2i\omega\rho_s a_s \beta_s^2 p\xi_s \\ i\omega\rho_s a_s(1-2\beta_s^2 p^2) \end{pmatrix} \times \exp[i\omega\xi_s(z-h)]. \tag{9.10}$$

标量 $P^{\wedge}$ 包括了震源谱和任意的方位效应。因为我们的主要兴趣是位移，我们将不继续写出运动-应力向量的最后两个分量。

将这个波附加到层 m 底部的下行 P 波上，我们将这下行波乘以透射系数和垂直相位因子，对我们感兴趣的在 z_m 和 z_n 之间叠层上入射的运动，得到

$$\begin{pmatrix} a_m p \\ a_m \xi_m \end{pmatrix}\left(\prod_{j=s}^{m-1}\hat{P}\hat{P}_j\right)\exp\left[i\omega\left(\sum_{j=s+1}^{m}\xi_j T h_j\right)\right] \times P^{\wedge}\exp[i\omega\xi_s(z_s-h)].$$

对这个叠层，令 P-P 反射系数以 $\{\hat{P}\hat{P}\}_n^m$ 表示，并对转换的（$P\to S$）和透射的震相给以类似的符号。为求得这个系数，我们来研究对均匀层中已知的（见补充 9.1）传播矩阵 $P(z_m,z_n)$。记住如下性质：

$$\boldsymbol{f}(z_m)=\boldsymbol{P}(z_m,z_n)\boldsymbol{f}(z_n), \tag{9.11}$$

我们以下式代换：

$$\boldsymbol{f}(z_m)=\boldsymbol{E}_m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \{\hat{P}\hat{P}\}_n^m \\ \{\hat{P}\hat{S}\}_n^m \end{pmatrix} \quad 和 \quad \boldsymbol{f}(z_n)=\boldsymbol{E}_{n+1}\begin{pmatrix} \{\hat{P}\hat{P}\}_n^m \\ \{\hat{P}\hat{S}\}_n^m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

相位的参考值，在这里对反射系数取为 z_m，对透射系数取为 z_n，这就是(9.12)中出现的矩阵 $\boldsymbol{E}$［因为 $\boldsymbol{E}_m=\boldsymbol{F}_m(z_m)$ 以及 $\boldsymbol{E}_{n+1}=\boldsymbol{F}_{n+1}(z_n)$，得自(5.65)］。(9.12) 中第一个方程包含了我们的假设，即仅在叠层上入射的波是下行的 P 波，同时(9.12)的第二个

方程表明在 z_n 以下的半空间中没有上行波。由于将运动-应力向量的这些形式代进(9.11)，就给出了含四个未知数的四个标量方程，我们即可解出有意义的特定的未知数，如$\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m$。Červený (1974)和Kind(1976)已给出了详细的讨论(也见补充 9.6)。在层 m 底部的上行 P 波为

$$\begin{pmatrix} a_m p \\ -a_m \xi_m \end{pmatrix}\left(\prod_{j=s}^{m-1} \grave{P}\grave{P}_j\right)\exp\left[\, i\omega\left(\sum_{j=s+1}^{m} \xi_j T h_j\right)\right]$$

$$\times P^{\wedge}\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m \exp[i\omega\xi_s(z_s-h)].$$

随后，将这个运动作为 P 波附加到自由表面上，得到

$$\begin{pmatrix} a_1 p \\ -a_1 \xi_1 \end{pmatrix}(\text{积})\times\exp[i\omega(\text{和})]\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m P^{\wedge}, \tag{9.13}$$

其中

$$\begin{aligned} \text{积} &= \left(\prod_{j=s}^{m-1}\grave{P}\grave{P}_j\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m-1}\acute{P}\acute{P}_j\right), \\ \text{和} &= \left(\sum_{j=s+1}^{m}\xi_j T h_j\right)+\left(\sum_{j=1}^{m}\xi_j T h_j\right)+\xi_s(z_s-h). \end{aligned} \tag{9.14}$$

必须修正自由表面对位移(9.13)的影响，这个修正是将$z=0$处向下反射的 P 波和 S 波与上来的 P 波相加。在问题 5.6 中给出了这个修正，最后，我们可阐明在接收点处运动应力向量的位移分量。它们是

$$\begin{pmatrix} u_r(k,m,0,\omega) \\ u_z(k,m,0,\omega) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4\,a_1\beta_1^2 p\xi_1\eta_1 \\ -2a_1\xi_1(1-2\beta_1^2 p^2) \end{pmatrix}$$

$$\times\frac{\text{积}\times\exp[i\omega\,\text{和}]\times\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m\times P^{\wedge}}{(1-2\,\beta_1^2 p^2)^2+4\,\beta_1^4 p^2\xi_1\eta_1}. \tag{9.15}$$

补充 9.1

SH 和 *P-SV* 问题的传播矩阵

我们在Love 波和Rayleigh 波的章节中引入了传播矩阵(7.2 节)。我们注意到，质点运动随深度而衰减，因而，处理 $e^{\pm\gamma z}$ 和 $e^{\pm\nu z}$ 是方便的，其中（对大部分）γ 和 ν 是实数。此外，对 *P-SV*，在位移和牵引力的垂直分量和水平分量之间可清楚地辨认出 $\pi/2$ 的相移（见(7.25)-(7.27)），所以，r_1，r_2，r_3，r_4 是实数。虽然对体波这最后的方程也是正确的，但符号 γ，ν 是不便的，这是因为 γ 和 ν 变成了负的虚数。还要注意（对均匀波），在位移分量之间或在牵引力分量之间没有相移，所以 r_1，r_2，r_3，r_4 不可能都是实数。简而言之，最好是处理 5.4 节导出的（对平面波）运动应力向量以及处理慢度 p，ξ，η，而不是处理水平波数 k 和衰减常数 γ 与 ν。

对远场的 *SH* 波，在柱坐标（r，φ，z）中我们用下式

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(k,m,z,\omega)=\boldsymbol{f}(\omega p,m,z,\omega)=\begin{pmatrix}u_\phi(\omega p,m,z,\omega)\\ \tau_{\phi z}(\omega p,m,z,\omega)\end{pmatrix}. \tag{1a}$$

基本的水平波函数是 $e^{im\varphi}d[J_m(kr)]/dr$。因为它忽略了垂直于 φ 方向运动的水平分量，所以这个表示式是近似式。一精确的方法是建立在位移 $\boldsymbol{u}=U(k,m,z,\omega)\ \boldsymbol{T}_k^m(r,\varphi)$ 和牵引力 $=T(k,m,z,\omega)\ \boldsymbol{T}_k^m(r,\varphi)$ 的基础上的，其中 $\boldsymbol{T}_k^m$ 是（7.117）中定义的面谐向量。对近场和长时间都有效的精确表达式，我们取

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}U(\omega p,m,z,\omega)\\ T(\omega p,m,z,\omega)\end{pmatrix}. \tag{1b}$$

在(1a)或(1b)中，有关的方程 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}$ 已在 5.4 节中叙述过，层矩阵 $\boldsymbol{F}$ 及其逆矩阵已在(5.63)—(5.64) 中明确给出。若 z 和 z_0 是在同一(均匀的)层中，传播因子为

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\boldsymbol{F}(z)\boldsymbol{F}^{-1}(z_0)=$$

$$\begin{pmatrix}\cos[\omega\eta(z-z_0)] & -\dfrac{1}{\omega\mu\eta}\sin[\omega\eta(z-z_0)]\\ \omega\mu\eta\sin[\omega\eta(z-z_0)] & \cos[\omega\eta(z-z_0)]\end{pmatrix}, \tag{2}$$

如果这些深度是在由均匀紧密连接层组成的结构内的不同层中，则可

用(7.44)。

对远场的 P-SV，我们用 u_r，u_z，$u_{r,z}$，$u_{z,z}$ 作为 f 的分量。因而 F 可由(5.65)求得，其逆矩阵可由(5.67)求得。于是，传播因子（当 z 和 z_0 在同一均匀层内时）为

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=$$

$$\begin{pmatrix}
2\beta^2p^2C_\xi+(1-2\beta^2p^2)C_\eta & \frac{ip}{\xi}(1-2\beta^2p^2)S_\xi-2i\beta^2p\eta S_\eta \\
2i\beta^2p\xi S_\xi-\frac{ip}{\eta}(1-2\beta^2p^2)S_\eta & (1-2\beta^2p^2)C_\xi+2\beta^2p^2C_\eta \\
-4\omega\rho\beta^4p^2\xi\,S_\xi-\frac{\omega\rho}{\eta}(1-2\beta^2p^2)^2S_\eta & 2i\omega\rho\beta^2p(1-2\beta^2p^2)[C_\xi-C_\eta] \\
2i\omega\rho\beta^2p(1-2\beta^2p^2)[C_\xi-C_\eta] & -\frac{\omega\rho}{\xi}(1-2\beta^2p^2)^2S_\xi-4\omega\rho\beta^4p^2\eta\,S_\eta \\
\frac{p^2}{\omega\rho\xi}S_\xi+\frac{\eta}{\omega\rho}S_\eta & -\frac{ip}{\omega\rho}[C_\xi-C_\eta] \\
-\frac{ip}{\omega\rho}[C_\xi-C_\eta] & \frac{\xi}{\omega\rho}S_\xi+\frac{p^2}{\omega\rho\eta}S_\eta \\
2\beta^2p^2C_\xi+(1-2\beta^2p^2)C_\eta & 2i\beta^2p\xi S_\xi-\frac{ip}{\eta}(1-2\beta^2p^2)S_\eta \\
\frac{ip}{\xi}(1-2\beta^2p^2)S_\xi-2i\beta^2p\eta S_\eta & (1-2\beta^2p^2)C_\xi+2\beta^2p^2C_\eta
\end{pmatrix}, \qquad (3)$$

这里将 1 列和 2 列写在 3 列和 4 列的上面。$C_\xi=\cos[\omega\xi\,(z-z_0)]$，$C_\eta=\cos[\omega\eta(z-z_0)]$，$S_\xi=\sin[\omega\xi(z-z_0)]$，$S_\eta=\sin[\omega\eta(z-z_0)]$。

注意，这里(3)中的实数和虚数项有纵横交错的排列形式。这些矩阵之积有同样的形式，所以，如果 p 是实数，只要用实变量就很容易设计出传播因子［如(7.44)］所需要的计算程序。列在(2)和(3)内的某些项为 $O(\omega)$，而另一些项为 $O(\omega^{-1})$。这个频率的依赖关系可通过对质点速度和牵引力的处理而消除（而不是质点位移和牵引力）。

这就是多次变换的解，它是对 m（一般而言 $P^\wedge$ 和 m 有关）的求和以及对 k 和 ω 求积分。因此，从(7.131)的计算，我们得到在频率域中的解为

$$u(r,\phi,0,\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}k[u_r(k,m,0,\omega)S_k^m - iu_z(k,m,0,\omega)R_k^m]dk.$$

对体波的 k 值，由于源和接收点之间具有一定的水平距离，所以 S_k^m 的 $\hat{\phi}$ 分量(见(7.117))是可忽略的，因此，(9.15)可通过下式求积分：

$$u(r,\phi,0,\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\omega^2 p\left[u_r\frac{d}{d(\omega pr)}J_m(\omega pr)\hat{r} + iu_z J_m(\omega pr)\hat{z}\right]e^{im\phi}dp, \qquad (9.16)$$

随后对 ω 求积分再还原为 $u(r,\phi,0,t)$。

实际上，在 (9.16) 中仅用了有限范围的 p 值，Fuchs 和 Müller (1971) 建议取 $0\leqslant p\leqslant 1/a_{max}$，其中 a_{max} 是反射区以上的层内最快的 P 波速度。由此得到，和总是正的，这就避免了反射区上部的非均匀波。

反射范围本身仅以 $\{\hat{P}\hat{P}\}_n^m$ 出现在计算中，我们将立刻看到一个简单例子，以说明在 z_m 到 z_n 的范围内所有的多次反射的射线都自然而然地被考虑了。当然，首先我们展示一段合成地震图，这是对一特定的地壳结构，其表面有爆破源，通过反射率法而得到的。其结构如图 9.8 a 所示，Fuchs 和Müller(1971)已得到了如图 9.8 c 所示的合成图，用以反映低速通道的下边界和这个通道以下的各层。这个解释由图 9.8 b 的折合走时曲线给出。(如果 t 相对 r 作图而不是相对折合时间 $t-r/6$作图，则垂直刻度将分布于大约 26 秒，而不是如所示的 6 秒，并且可能失掉到时之间的细节。)因为由走时曲线可得到射线参量，即优势波将以此射线参量到达接收点，所以这个曲线也导出积分(9.16)所需要的 p 值范围。事实上，它是走时曲线的斜率 [见问题 9.2(i)]。由于这个斜率范围大约从 1/8.15 到 1/6，因此在图 9.8 c 积分中用的 p 值

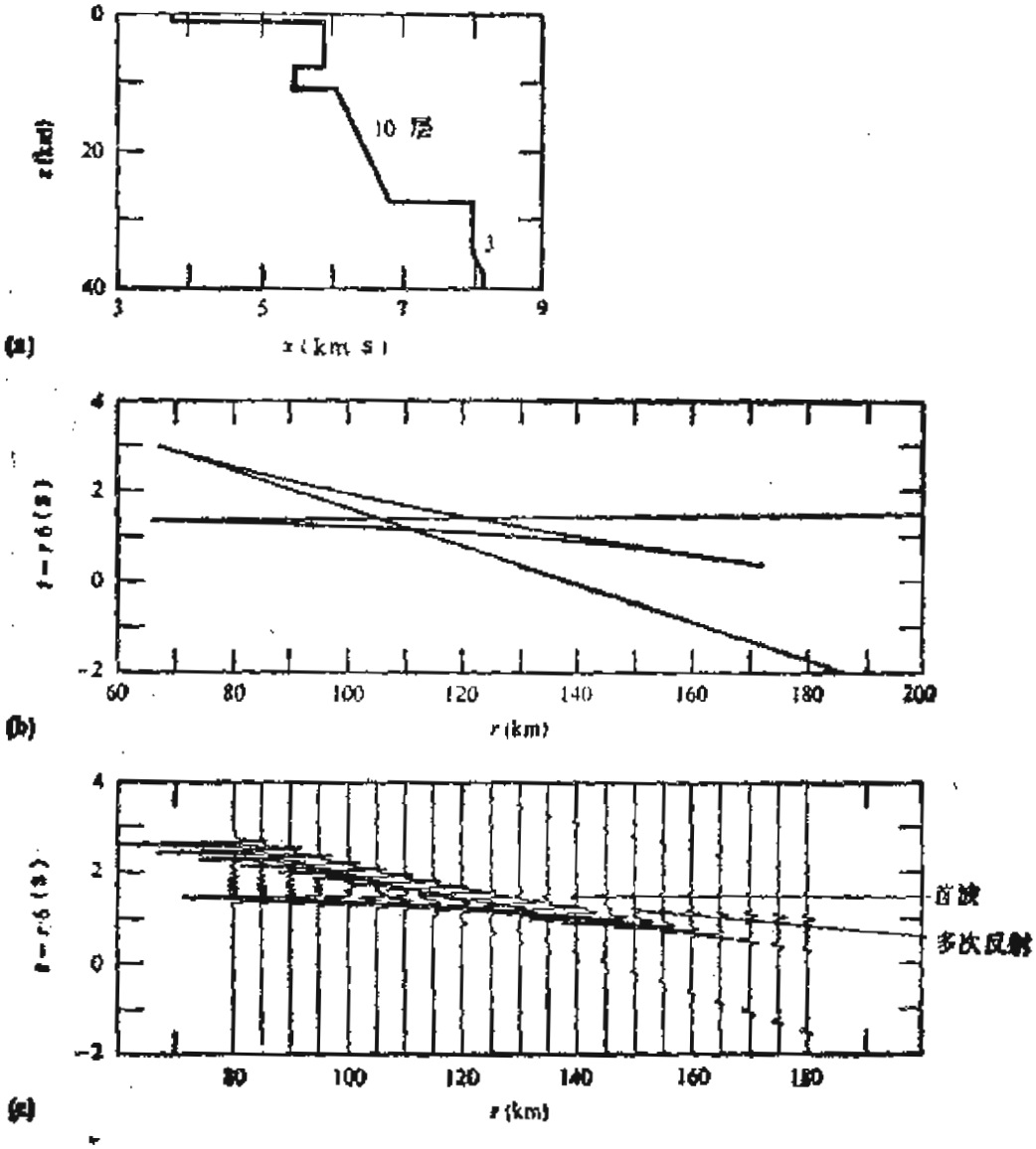


图 9.8

反射率法的应用。(a) 地壳结构的一个模型。仅给出了 P 波速度。下地壳中（下至深度为 27 公里的 Moho 界面）的线性增加，事实上是以 10 个均匀层模拟的，Moho 界面以下一个薄的线性区是以 3 个层模拟的。(b) 对 (a) 中 P 波的折合走时曲线，其慢度小于 1/6 秒/公里。(c) 相应于 (b) 的合成地震图（位移的垂直分量），它是通过反射率法得到的。最优势的波是在最下部地壳中在速度梯度范围内改变了一次方向的波以及在 Moho 界面上广角反射的波。$_1P_n$ 是很小的，但在 120 公里以外它最早到达，如果地壳结构是准确的，在地球中将易于识别它。在 150—180 公里的范围内，在折合走时 1 秒之内，可看到明显的多重性，可识别为这些波在最下部地壳中改变了两次方向，并从低速带下面反射一次。恰好来自低速带下边界以下的“首波”，在超过大约 140 公里时是很弱的，因为有正的速度梯度。所有波中到达最晚的是慢度为 1/8.15 （像主要的首波，P_n）的一个震相。这是将 (9.18) 中的积分截成对 p 的有限区间的结果 [5]自 Fuchs and Müller(1971)中的图 7]

范围是 $1/8.15 \leqslant p \leqslant 1/6$。计算中最费时间的部分是对不同的 p 值和 ω 值计算其 $\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m$。然而，这个步骤仅需作一次，因为此项与 r 无关。Kind(1976)已给出了一个最快程序。

用一不同的时间尺度，在图 9.9 中较细地表示出了脉冲的形状。还给出了反射率法和在 9.1 节中所描述的 Cagniard 方法的对比，其中某些不一致性是明显的。大概对随后的 Cagniard 反演，如果有足够多的广义射线可供选择，这些不一致性可能消除。Fuchs 和 Müller (1971) 发现，对图中(a)，(b)，(c) 的各个部分，其计算时间之比为 20 比 5 比 1，所以，反射法比仅保留和叠层中每一边界一次相互作用的方法要长得多。

为结束关于反射率法的叙述，让我们证实这样一个事实，像 $\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m$ 这样的项包含了在 z_m 和 z_n 之间所有的多次反射。尽管一般情况下这证明将十分冗长，但主要思路可从 SH 波的一个简单例子看出。

在图 9.10 中，我们给出了在两个半空间之间的一单层。SH 的运动应力向量为(见补充 9.1)

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} u_\phi(k,z,\omega) \\ \tau_{\phi z}(k,z,\omega) \end{pmatrix},$$

对这个 SH 问题，相应于(9.12)的方程为

$$\boldsymbol{f}(z_1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega\mu_1\eta_1 & -i\omega\mu_1\eta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \{\grave{S}\acute{S}\}_1^1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(z_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega\mu_3\eta_3 & -i\omega\mu_3\eta_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \{\grave{S}\grave{S}\}_1^1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

将这些代入 $\boldsymbol{f}(z_1)=\boldsymbol{P}(z_1,z_2)\boldsymbol{f}(z_2)$ 并利用 SH 的传播矩阵（补充 9.1，方程(2)），我们得到对于 $\{\grave{S}\acute{S}\}_1^1$ 和 $\{\grave{S}\grave{S}\}_1^1$ 两个未知数的两个方程。反射解为

$$\{\grave{S}\acute{S}\}_1^1=\frac{\left(C-\dfrac{i\mu_3\eta_3 S}{\mu_2\eta_2}\right)-\left(\dfrac{\mu_3\eta_3}{\mu_1\eta_1}C-\dfrac{i\mu_2\eta_2 S}{\mu_1\eta_1}\right)}{\left(C-\dfrac{i\mu_3\eta_3 S}{\mu_2\eta_2}\right)+\left(\dfrac{\mu_3\eta_3}{\mu_1\eta_1}C-\dfrac{i\mu_2\eta_2 S}{\mu_1\eta_1}\right)}, \qquad (9.17)$$

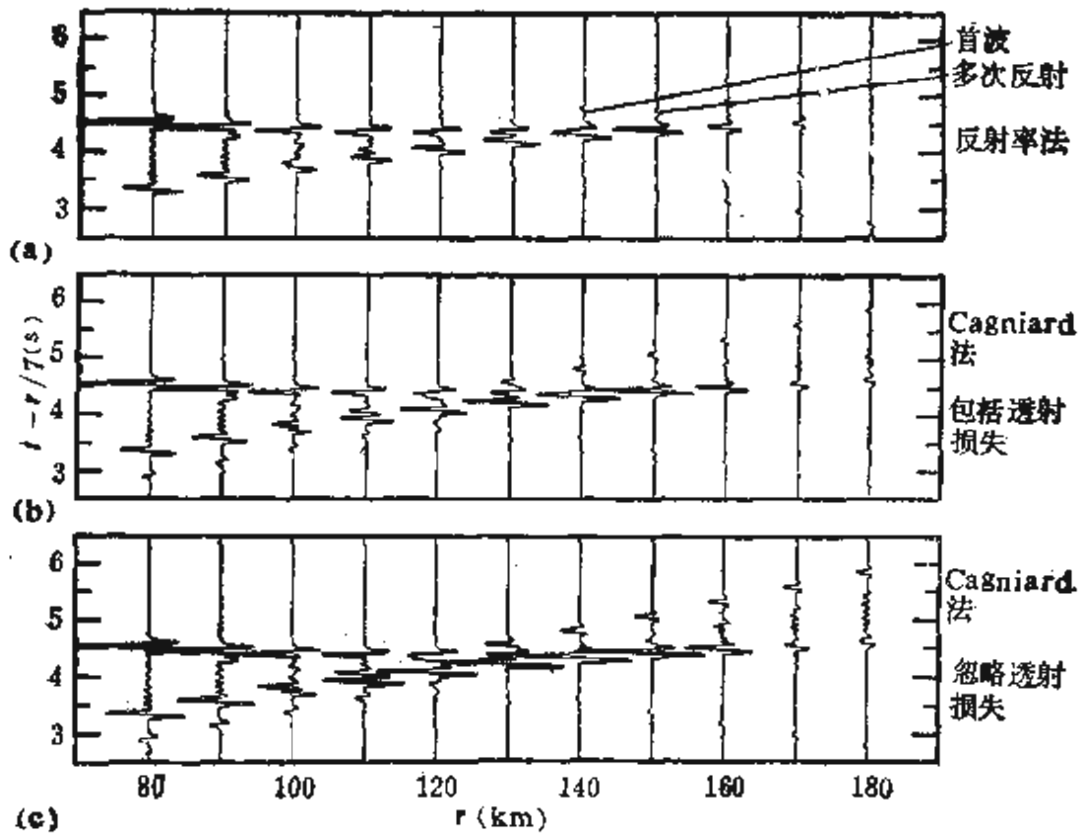


图 9.9

对9.8a中给定的地壳结构，反射法和 Cagniard 方法之间的对比。(a) 从图9.8c选出的地震图以详细地表示出由反射率法得到的脉冲形状。这里的折合走时用 1/7 秒/公里的慢度。(b) 在叠层中对每个一次作用都利用(9.9)式，并重复 (a) 的计算。(c) 重复 (b) 中的计算，并使所有（向下至每一个反射的内界面和由此界面向上）的透射因子等于 1。即(9.2)和(9.3)中的乘积项仅以 $\dot{P}\dot{P}$ 来近似。在 (b) 和 (c) 中的计算还包括上部地壳的反射，它在 (a) 中被忽略了，用这个可解释 120 公里以外较早时间的脉冲形状的某些差别。在 (a) 和 (b) 间其它的一些差别也是明显的，特别是在 100 公里和 110 公里处、在折合时间 4 秒附近。地震图的这一部分主要是受俭在低速带以下的地壳结构所控制。在这个区域中速度随深度增加引起了多次反射，这在 (b) 中首波忽略，但在 (a) 中自然而然地保留着。在大距离处，如 140—180 公里，在 (a) 中标出的首波和多次反射波和 (b) 中计算所得的振幅是十分不同的（也见图9.8c）[引自 Fuchs and Müller(1971)中的图 8]

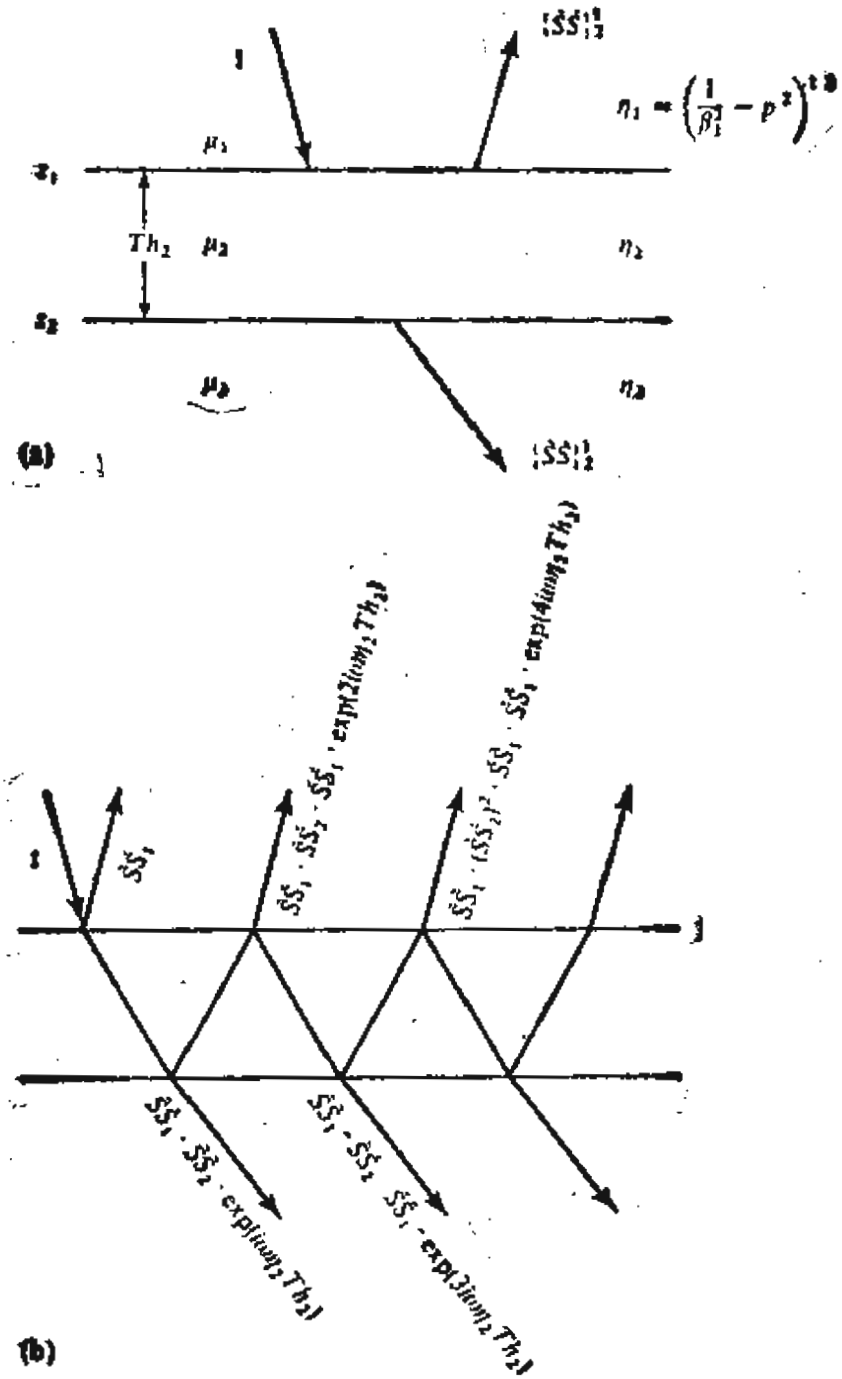


图 9.10

广义 SH 射线的无限族，它相当于通过传播矩阵对两个边界之间的一个单层所得到的反射和(或)透射。(a) 该层的参量。全反射包含于$\{\dot{S}\dot{S}\}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$之内。(b) 广义射线族，在正文中表明相当于(a)。

其中 $C=\cos(\omega\eta_2 Th_2)$，$S=\sin(\omega\eta_2 Th_2)$。

图 9.10 b 所示的是多次反射系，这可能从对问题的因果关系来预测。即，从层的顶部可预计有一反射 $\grave{S}\acute{S}_1$，随后是从层的底部产生波的一次反射 $\grave{S}\grave{S}_1\cdot\grave{S}\acute{S}_2\cdot\acute{S}\acute{S}_1 e^{2i\omega\eta_1 Th_2}$，等等。考虑到垂直传播的相位因子，整个的反射将给出如下：

$$\{\grave{S}\acute{S}\}_2^1=\grave{S}\acute{S}_1+\grave{S}\grave{S}_1\left[\sum_{i=1}^{\infty}(\grave{S}\acute{S}_2 e^{2i\omega\eta_2 Th_2})^i(\acute{S}\grave{S}_1)^{i-1}\right]\acute{S}\acute{S}_1 \tag{9.18}$$

$$=\grave{S}\acute{S}_1+\frac{\grave{S}\grave{S}_1\cdot\grave{S}\acute{S}_2\cdot\acute{S}\acute{S}_1\cdot e^{2i\omega\eta_2 Th_2}}{1-\grave{S}\acute{S}_2\cdot\acute{S}\grave{S}_1\cdot e^{2i\omega\eta_2 Th_2}}. \tag{9.19}$$

这是关键的一步，一无限几何级数已由一个简单而精确的和表达式所代替。(9.18) 中的每一项相应于一特定的射线，并且多次反射的整个无限族显然包括在(9.19)中。为计算(9.19)，对每个反射和(或)透射我们可用(5.32)，求得

$$\{\grave{S}\acute{S}\}_2^1=\left(\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right)$$

$$+\frac{\dfrac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\dfrac{\mu_2\eta_2-\mu_3\eta_3}{\mu_2\eta_2+\mu_3\eta_3}\dfrac{2\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}e^{2i\omega\eta_2 Th_2}}{1-\dfrac{\mu_2\eta_2-\mu_3\eta_3}{\mu_2\eta_2+\mu_3\eta_3}\dfrac{\mu_2\eta_2-\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}e^{2i\omega\eta_2 Th_2}},$$

此式可精确地简化成(9.17)（进行一些代数运算之后）。这样，我们就证明，对双内界面由传播因子导出的反射可写成无穷广义射线的族。

如果存在两个以上的内界面，由于 P 和 SV 之间转换的复杂性，很清楚，包括无数射线的广义射线系在传播因子导出的反射中可能是存在的，例如在 $\{\grave{P}\acute{P}\}_n^m$ 中。Spencer (1960, 1965)指出了研究广义射线的主要优点，即无穷级数中的每一项和频率或 Laplace 变换的变量 s 有一非常简单的关系。例如，在 (9.18)中我们注意到 $\omega\eta_2=\omega(1/\beta_2^2-p^2)^{1/2}=is(1/\beta_2^2-p^2)^{1/2}$，并且 s 仅

仅通过指数函数写进每一个广义射线中。因此，Cagniard 方法可以用来求得每一个广义射线的贡献（在时间域中）。(9.15) 和 (9.17) 中和 ω 的关系是更加复杂的。Cagniard 方法不能直接用于整个多次反射系的求和中。而 Hron (1971, 1972) 指出了如何才能求得广义射线的亚族，以使其所有的射线均可用同样的 Cagniard 路径，并且为算出包含在精确（即导出的传播因子）解之内的广义射线，Cisternas 等 (1973) 给出了系统的方法。

Fuchs 和他的同事们在地壳研究中发展了反射率法。Orcutt 等(1976)应用这个方法研究了东太平洋隆起的结构。利用一个和球形地球模型 (9.6 节) 具有同样走时的展平地球模型，Müller (1973)曾用反射率法去解释穿过地核的长周期体波，并且 Müller 和 Kind(1976)已分析了全球的长周期体波的地震图。

在一均匀叠层中，关于波传播的描述，至此已为我们引入了两个不同的计算步骤。然而，不管采用的是 Cagniard 方法（对很多广义射线）还是 Fuchs 方法（用其双重积分），对深入认识在结构中传播的波，有一个技巧，一次又一次地被证明是有效的，即判明在弹性介质中特定的波与复射线参量平面中一定的波函数性质的关系的能力。例如，我们已考察了鞍点、分支切割和 p 平面中的极点并且已得到它们和射线路径、首波及面波的关系。对一均匀叠层，在 p 平面中分析特定的广义射线是相当简单的。这主要是因为一特定射线可传播的水平距离，往往总是射线参量的恒增函数（见问题 9.2）。然而，在本章的余下部分，我们将考察如下介质中的一些波，在此介质中每一层内，其地震波速和密度可以是连续变化的。首先，可导致这样一个现象，射线在一给定的层内完全转向。图 9.11 中给出了一个例子。其次，我们将发现，一特定射线（在非均匀叠层中传播）可达到的水平距离更经常地是射线参量的恒减函数。这距离也可随 p 而增加，并且（对一给定的距离 Δ）可存在两种类型的射线（即，$d\Delta/dp$ 小于零和大于零）。

在 9.4 节中，这些复杂性使我们要求几种至今在分析均匀层中的波时并不需要的数学方法。然而，在复射线参量平面中波函数的性质仍是最重要的。为这部分材料作准备，我们复习一些基本的射线理论。

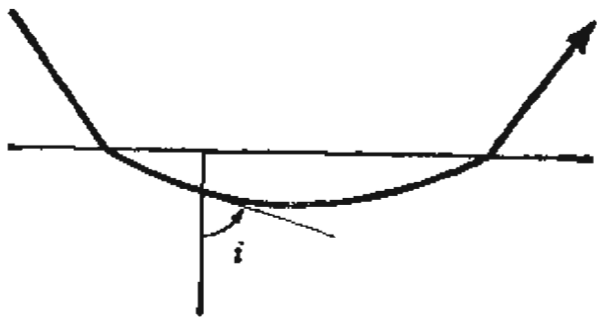


图 9.11

所示的射线在非均匀层内转向。在某一点若射线水平行走，则此点即为所说的转折点。沿射线应用Snell定律$\sin i/u=p$（常数）。对一转折点，由于$i=90°$，如果z是转折点的深度，则将能满足方程$1/v(z)=p$

至此，我们强调的是平面成层介质，其中射线参量 p 是 $\sin i/\alpha$（i 和速度 α 两者均和深度有关）。通常要求将走时和距离表示成 p 的函数（见问题 9.2）。对 p 波其结果为

$$\text{时间}(p)=\int\frac{dz}{\alpha(z)\cos i(z)}=\int(1-p^2\alpha^2)^{-1/2}\frac{dz}{\alpha}=\int\frac{dz}{\alpha^2\xi}\ ,\tag{9.20}$$

$$\text{距离}(p)=\int\tan i\ dz=\int\frac{p}{\xi}dz,$$

其中

$$\xi=\xi(p,z)=\left(\frac{1}{\alpha^2(z)}-p^2\right)^{1/2}=\frac{\cos i}{\alpha}$$

并且在射线穿过的深度范围上进行积分。下一节将主要叙述球形成层介质，其中射线参量 p 是 $(r\sin i)/\alpha$，对这样的介质，地震学中的射线理论应用得最为广泛。

9.3 地震学中经典的射线理论

从一点源辐射到远场的高频波，在第四章中我们已得到了其位移的射线理论解。沿射线路径的几何扩散和走时等重要概念，Christian Huygens 和 Pierrer de Fermat 大约在三百年前就已很好地弄清楚了。我们的兴趣是在横向均匀的介质中，当接收点位置变化时射线的特殊性质。例如，对一观测到的特定的体波，如果画出走时 T 随距离的变化，我们怎样才能说波是从地球中某个内部不连续面上反射来的？或者我们如何才能找到有一低速带的证据？

从图 9.12 开始，我们来看看在一上地幔模型中，由于表面震源而出现的 S 波射线。显然，在一给定的接收点可到达好几条射线，并且对一定的距离范围此走时函数（图 9.12c）是多值的。然而，沿走时曲线的每一点其斜率是单值的，其值从 A 到 B，B 到 C 等都递减。这就提出了一个有用的独立变量。从图 5.2 得到，这个斜率 $dT/d\Delta$ 是斜向传播波的水平慢度，它也就是射线参量 p。（水平距离的无量纲单位是 Δ 而以长度为单位时是 $r\Delta$。）

现在要考虑距离函数如何依赖于 p。从图 9.12c 清楚地看出，对分支 BC，距离和斜率同时减小，但沿 AB 和 CD，当斜率减小时距离却是增加的。这在图 9.13 中明显地表示出了，并且点 B 和 C 附有一些特殊意义。注意，在这些点上 $d\Delta/dp$ 的符号改变了，而 $d\Delta/dp$ 却仍可能保持连续，以使在 C 点或在 B 和 C 点 $d\Delta/dp=0$。由于几何扩散函数 $\mathscr{R}^{-1}$ 比例于 $(d\Delta/dp)^{-\frac{1}{2}}$（见问题 4.3），所以射线理论可预测位移的奇异幅度。这是一个焦散现象，并且图 9.12 中给出了 14° 距离处的一个实例。此焦散线是射线系的包络，对如图 9.12 的震源和地球模型，三维包络是一曲面，它与地表相交为一圆。当然此处射线理论的预测是

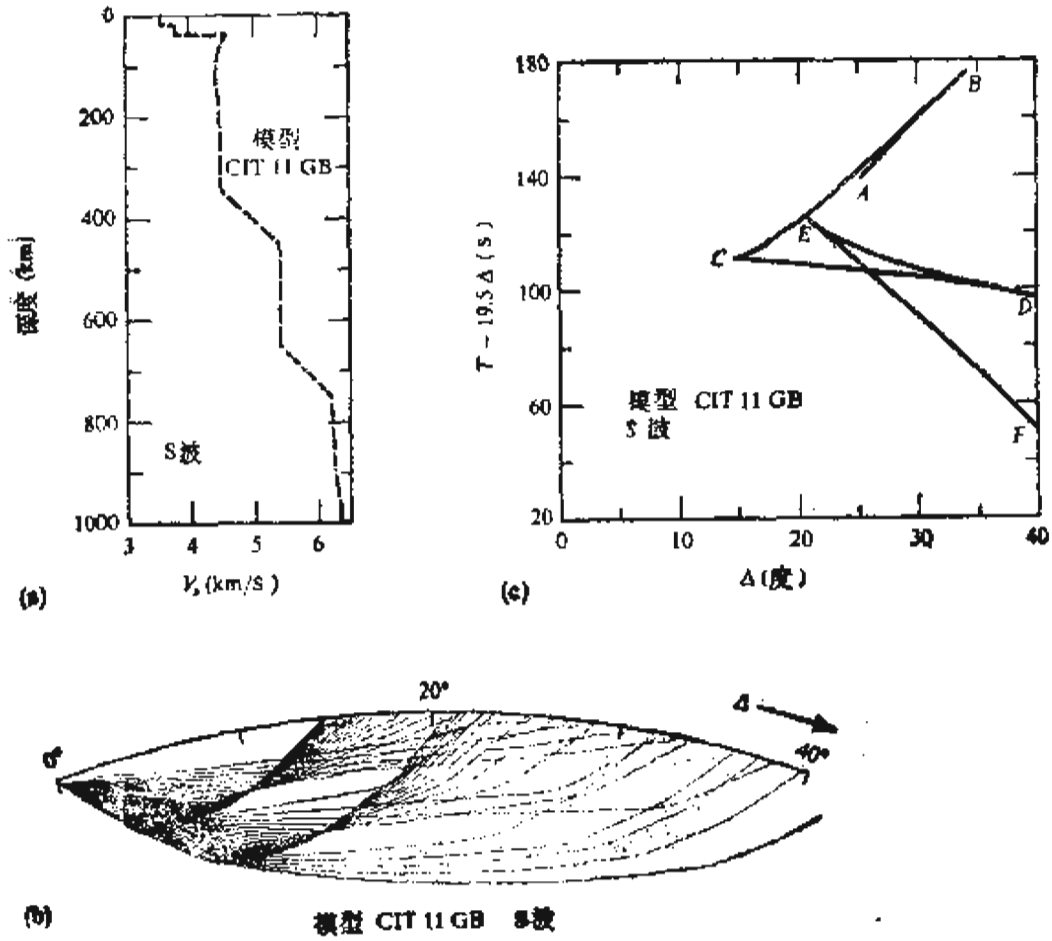


图 9.12

(a) 取自模型 CIT11GB 的上地幔S波速度。(b) 对表面上一点源，离源角从 28°起以0.5°增量增至 50° 时所算得的 S 波射线。注意，地球内源和接收点之间的距离是以地心对着的角来量度的。(c) 相应的折合走时曲线。点 C 是在(b) 中当 Δ近于 14° 时射线的强烈聚焦，而且振幅将是很大的。线AB，BC 和 CD一起构成一个三重量，两个三重量中的每一个都在地球模型中附有一个较大的速度增加(随深度)。(引自 Julian and Anderson, 1968)

不正确的，在焦散线附近其幅度可能很大（如图 9.12b 中射线的聚焦所示），而在有限频率时不具奇异性。

事实上，振幅对量 $d\Delta/dp$ 的灵敏性（用射线理论计算）造成计算上的一些困难。现在的问题是地球模型一般地是由给定的在

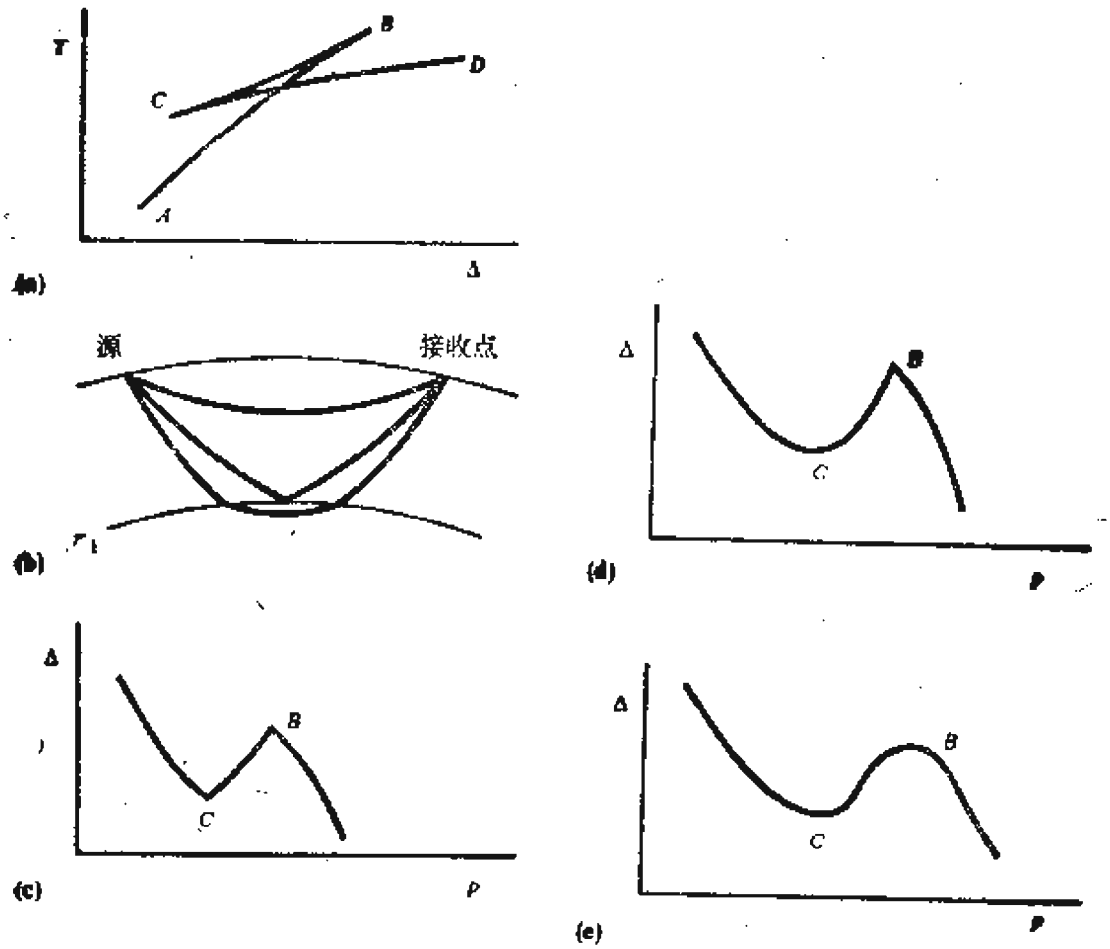


图 9.13

当速度随深度增加时，T，Δ 和 p 的特性。（a）典型三重量的符号。（b）示出了三条射线，它们都有同样的 Δ。速度是假定随深度增加的，并在 r_1 处速度随深度还发生了异常的增加。这里最上面的射线可称为直达射线（分支 AB）；然后是类似反射的射线（分支 BC）；最后是类似首波的射线（分支 CD）。穿过 r_1 时速度剖面连续性的程度决定了当它们到达 r_1 时射线实际上改变了方向或是有较高的曲率。（c）对穿过 r_1 速度不连续增加时的 $\Delta(p)$。注意，在 B 和 C 处 $d\Delta/dp$ 是不连续的，并且可能都不小。（由射线理论，量 $(d\Delta/dp)^{-1/2}$ 是波的幅度的一个控制因子。）（d）对一连续的速度剖面，其中穿过 r_1 速度梯度不连续时的 $\Delta(p)$。在 C 处有 $d\Delta/dp=0$，这给出一焦散点。（e）当速度和速度梯度两者均为连续时的 $\Delta(p)$。B 和 C 两者均为焦散点

几个不同半径处的密度 ρ 及 P 波和 S 波的速度(α和β)所规定的。而对这些不连续值之间不同的内插方法往往可导致完全不同的几何扩散值。Chapman(1971)对速度内插提出了一个三次样条函数方法，由于速度对深度的二次求导随深度是连续的，如果 $(d\Delta/dp)$是连续的，则这个连续性的程度正是所需要的。对速度随深度增加的不同类型而言，Bullen(1960) 给出了 $d\Delta/dp$ 的特性如何改变的一些实例，如图 9.13 所示。焦散效应在地震波中被广泛地观测到，在 9.4 节中叙述了波动理论的计算方法。

如果我们知道射线的长度元 ds 和半径的变化 dr 的关系为 $\cos i ds = dr$，其中 i 是该处的垂线和射线方向之间的夹角，我们就很容易导出走时 T 和距离 Δ 作为 p 的函数的公式。因此，当 P 波速度 $\alpha = \alpha(r)$时，

$$T(p) = \int \frac{ds}{\alpha} = \int \frac{dr}{\alpha(r)\cos i(r)} = \int \left(1 - \frac{p^2\alpha^2}{r^2}\right)^{-1/2} \frac{dr}{\alpha} = \int \frac{dr}{\alpha^2 \xi},$$

$$\Delta(p) = \int \sin i \frac{ds}{r} = \int \frac{p\alpha}{r^2}\left(1 - \frac{p^2\alpha^2}{r^2}\right)^{-1/2} dr = \int \frac{p\,dr}{r^2\xi}, \tag{9.21}$$

这里，对垂向的慢度，我们已用了 $p = (r\sin i)/\alpha$(得自(4.45b))，和 $\xi = \xi(r) = (1/\alpha^2 - p^2/r^2)^{1/2} = \cos i/\alpha$。积分是在射线通过的区域内那部分半径上进行的，因而往往发生这样的情况，即转折点作为积分限之一而出现。用 r_p 作为相应于射线参量 p 的转折点半径，可得到 $p = r_p/\alpha(r_p)$，因此(9.21)中的被积函数可具有奇异性。

由 T 和 Δ 所建立的一个量 τ，它在转折点上无奇异的被积函数，

$$\tau = \tau(p) \equiv T - p\Delta = \int \frac{\cos i}{\alpha} dr = \int \xi\, dr. \tag{9.22}$$

我们将发现 $\tau(p)$具有极大的用途。它出现在反演理论 (Johnson and Gilbert 1972; Bessonova et al., 1976)和波传播理论中。甚

至在射线理论中，由于关系

$$\frac{d\tau}{dp}=-\Delta(p), \tag{9.23}$$

$\tau(p)$ 也有很值得注意的性质（通过对 $\int\xi d\tau$ 的微分运算以及和(9.21)中的Δ进行对比可证明上式）。由此得出 τ 是 p 的单调减函数，它不像 $\Delta(p)$，所以对阐明走时曲线的三重性，它甚至是一个比 $\Delta(p)$ 更好的函数。[前面，在明确地写成褶积 $f*g=\int_0^t f(\tau)\times g(t-\tau)d\tau$ 中，我们常常用符号 τ 表示其求和的时间。因此，对一具有点源的问题，很自然要求出 Cagniard 路径作为 $\tau=pr+$ 和 (p) 的解 $p=p(\tau)$ [见(9.5)]。然而，这里的和 (p) 实际上是刚刚在(9.22)中定义过的那个新变量 $\tau(p)$。这个事实是问题9.2(b)的推论。为避免混乱，用不同的符号来表示沿 Cagniard 路径的时间是必要的，在一些问题中 τ 是专供对垂向慢度求积分之用的。]

在图 9.12 和图 9.13 中我们已看到，三重性是和随深度而增加的速度有关的。如果速度随深度迅速地减低(即 $d\alpha/dr$ 是正的并足够大)，则走时曲线表现出另外一些特有的性质。这就是图 9.14 表明的影区现象。在低速带内有一深度范围，在此范围内无转折点存在。如果在射线的底部出现转折点，那是由于沿射线当半径减小时角 i (在射线和竖直线之间)是一递增函数造成的。由于随着 r 的减小 i 决不可能增加到转折点的值(90°)，因而当低速带内的速度梯度达到使 $di/dr>0$ 的任何时候，即产生影区。由于 $(r\sin i)/\alpha$ 是常数，我们得到

$$r\frac{di}{dr}=-[1-\zeta(r)]\tan i, \tag{9.24}$$

这里 ζ 是归一化的速度梯度 $(r/\alpha)(d\alpha/dr)$。$di/dr>0$ 是产生影区的条件，进而可转化成 $\zeta(r)>1$，或者 $d\alpha/dr>\alpha/r$。对比图 9.14c 和图 9.14d，注意，相应于一给定的 p 值，Δ 值有两个或

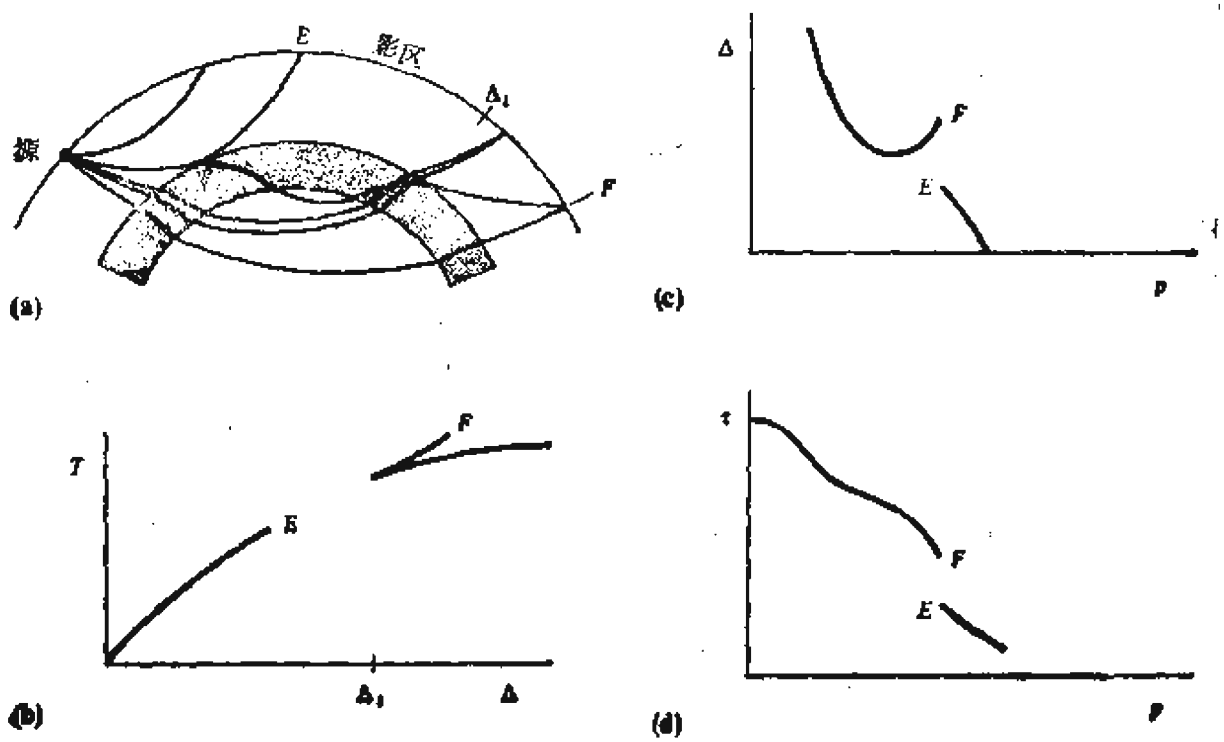


图 9.14

当速度随深度而减低时，T，Δ 和 p 的性质。(a) 一低速带（其中 $da/dr > a/r$ 且无转折点）以阴影表示，在地表观测到一影区，在此影区内接收不到射线。(b) 走时曲线。对出射在 E 点的射线，低速带的上边界即为其转折点。点 F 与 E 有同样的射线参量，但却位于穿过低速带的射线上。当射线参量由其在点 F 的值稍稍减小时，距离 Δ 也减小，直到在 Δ_1 处达到焦散为止。(c) $\Delta=\Delta(p)$ 的值。这些表明此影区的另一边界实际是焦散的。(d) 对射线参量只有极微小差别的射线，低速带的上边界和下边界是转折点。因而，转折点的半径是 p 的不连续函数。若在 $\tau(p)=T-p\Delta$ 和梯度 $d\tau/dp=-\Delta(p)$ 时，也是不连续的

一个或没有，而 $T-p\Delta$ 则几乎在任何地方都刚好只有一个值。

在结束射线理论的简要评述时，需有几点说明以扩充我们第四章中有关脉冲形状的公式。回顾我们曾得到[如(4.57)]对 ξ 处的点源其 x 处的振幅受因子 $1/\mathscr{R}(x,\xi)$ 所控制。然而，沿射线从 ξ 到 x 传播的过程中，有几个效应可导致在远场接收到的波其频率和相位超前无关。这可引起脉冲形状的失真，这在地震资料中经常能够见到。一个实例是波以相当大的入射角入射到地球内的

一个间断面上，从而激发了一个非均匀波。如第五章所提到的，合成的相移导致入射的脉冲形状的变化，这可通过 Hilbert 变换算出。另一实例是，ξ 和 x 间的射线虽然是稳定的，但不是极小时间路径。在地震学中最重要的射线为：直达的 P 波和 S 波，它们离源向下，并当 $d^2T/d\Delta^2>0$ 时在走时曲线的一支上被接收到；PP 和 SS；以及 $SKKS$。因而 SS 有一极小极大时间路径（见图 9.15），这是因为相对于和震源及接收点处于同一平面内地表

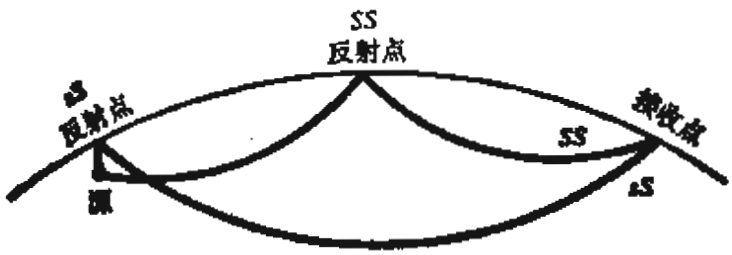


图 9.15

S 波离源向下，在源和接收点之间的地球表面上的一次反射称为 SS，而 sS 是离源向上并且在震源附近反射

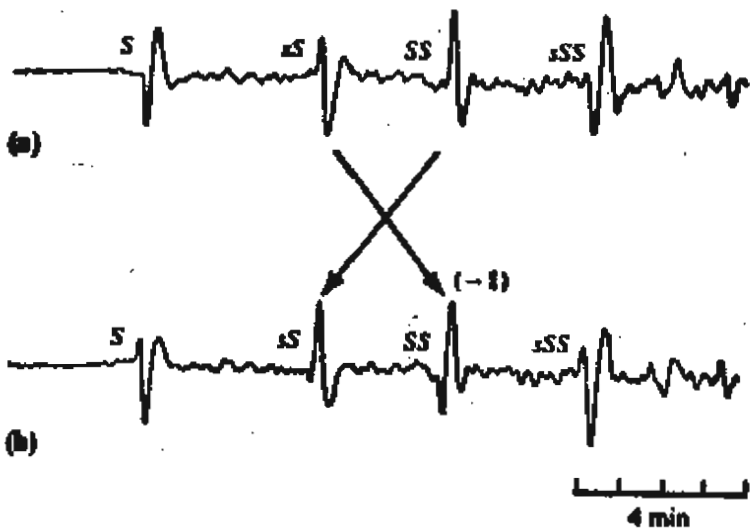


图 9.16

(a) 1960 年 10 月 8 日日本海下面一深震(608 公里)的东西向原始记录图（取向是对 SH 波）。在 PAL 台上的记录，$\Delta=96.3°$。(b) 是(a)的 Hilbert 变换。为方便，四个主要震相仍以原来的名字标记。一个箭头指示(a)中的 SS 和(b)中所示的 sS 的 Hilbert 变换有同样的形状。第二个箭头指示(a)中的 sS（极性反向以后）和(b)中所示的 SS 的 Hilbert 变换有同样的形状（引自 Choy and Richards, 1975）

的一些点，“回跳点”的扰动实际上都将减小走时，而垂直于此方向的扰动将增加走时。另一方面，sS 是一真正的极小时间路径，同时 Choy 和 Richards(1975)给出了 SS 的观测资料，它实际上完全是sS 的Hilbert 变换(见图 9.16)。

在如上的评述中，虽然我们曾强调了球对称介质，但所有的概念和公式与平面成层介质是相似的。当改进地球展平的近似式以应用 Cagniard 方法和 Fuchs 方法研究地球中的远震波时，我们要求的正是这一点。

9.4 有转折点且其速度剖面随深度平稳变化的介质中波的传播

当一射线从地球内的某点源离源向下时，仅在从某内间断面向上反射回来以后，或仅仅在穿过转折点使“下行”逐渐改变成“上行”之后，才可能在地表的接收点上再一次观测到这个射线。在前一节中，在射线理论的内容中，我们已讲到了转折点，但我们现在的目的是对非均匀介质、在与频率有关的波动理论中来理解转折点。重要的是要避免用大量的层数来人为地去模拟非均匀性。

在均匀介质中，弹性波理论的关键组成部分包括 Lamé 原理、平面波分析、Sommerfeld 积分、和通过在复射线参量平面中的计算来求这些积分的方法。这些组成部分中的每一部分在本节中均被推广了，并且我们将发现 WKBJ 理论具有很大的实用性(补充 9.3 中已评述过)。事实上，在 WKBJ 近似式是准确的情况下，我们对体波的计算将把用于解 Lamb 问题的方法和经典射线理论结合在一起。但在这些近似是不准确的情况下（此情况是，如果一转折点所在的深度接近于地球内某一间断面时）则明显地出现了一个新的组成部分。

在均匀弹性介质的研究中，我们发现，将势函数的研究转移

到以运动-应力向量为基础的方法是合适的。在非均匀介质中，类似的修改也是方便的，这是因为势函数所展示的标量波解的性质其形式上最简单，可是，运动-应力向量方法能够更易于作到必要的物理量分类记录。由势函数出发，我们在补充 9.2 中得到球对称介质中的位移 u 可写成三个向量项之和：

$$u=\rho^{-1/2}[\nabla P+\nabla\times\nabla\times(rV,0,0)]+\mu^{-1/2}\nabla\times(rH,0,0). \tag{9.25 a}$$

这里，右边的三个向量分别为位移的 P 分量、SV 分量和 SH 分量，具有标量势函数 P，V，H 且满足(在频率域中)解耦波动方程

$$\begin{aligned}\nabla^2P+\frac{\omega^2}{\alpha^2}P&=0,\\ \nabla^2V+\frac{\omega^2}{\beta^2}V&=0,\\ \nabla^2H+\frac{\omega^2}{\beta^2}H&=0.\end{aligned} \tag{9.25 b}$$

在(9.25 a)和(9.25 b)中的 ρ，μ，α 和 β，在球极坐标系(γ,Δ,ϕ)中仅为半径 r 的函数。因此，每一个波动方程都具有 Helmholtz 方程的形式，且具有径向变化的波数。

补充 9.2

球对称介质中 P，SV 和 SH 波的标量势

现在我们利用球坐标$(r,\ \Delta,\ \phi)$，其中 $r=0$ 是介质的对称中心，方向 $\Delta=0$ 被取为位于某点源上。位移 $u=(u_r,\ u_\Delta,\ u_\phi)$ 的二次波动方程可从加速度和应力 (2.47)、应力和应变 (2.50) 以及应变和位移 (2.45)等关系式中得到。这方程为

$$\begin{aligned}\rho\omega^2u=&-(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot u+\mu\nabla\times\nabla\times u-\lambda'(\nabla\cdot u,0,0)\\ &-2\mu'\frac{\partial u}{\partial r}+\mu'(0,\mathrm{curl}_\phi u,\ -\mathrm{curl}_\Delta u)-f.\end{aligned} \tag{1}$$

这里及以后，一撇代表径向微分，$\mathrm{curl}_\alpha u$ 为 $\nabla\times u(\alpha=r,\Delta,\phi)$的 α 坐标。这里我们将考虑自由解，即取体力 f 等于 0。

推导 u 的势函数是按照 4.1 节中所用过的大体相同的方法。[对此问题更详细的说明已由 Richards(1974)给出。]因此，通过给定的势函数专门公式，我们试图将(1)直接转为所需要的表达式。

专门公式为

$$P=\frac{-(\lambda+2\mu)}{\rho^{1/2}\omega^2}\left[\nabla\cdot u+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{2\mu'}{\mu}-\frac{\rho'}{\rho}\right)u_r\right],$$

$$S=\frac{\mu}{\rho^{1/2}\omega^2}\left[\nabla\times u+\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\rho'}{\rho}-\frac{2\mu'}{\lambda+2\mu}\right)(0,-u_\phi,u_\Delta)\right]. \tag{2}$$

在以 $\rho\omega^2$ 去除(1)之后，这运动方程可写成如下形式：

$$u=\rho^{-1/2}(\nabla P+\nabla\times S)+\text{量级为}|u|/\omega\text{ 的项}. \tag{3}$$

对我们所要研究的体波，最后一项是可以忽略的。它们典型地具有 $(\beta'/\omega)|u|$ 的量级，在具有相当高的剪切速度梯度(每公里为 0.005 公里/秒)地球模型的上地幔中，对 20 秒的波，$(\beta'/\omega)|u|$ 约为 $|u|$ 的 2%。

现在将定义(2)引入波动方程，代替(3)中的 u。用此法可求得

$$\nabla^2P+\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}P=\text{量级为}\frac{|u|}{\omega}\text{的项},$$

$$\nabla^2S+\frac{\rho\omega^2}{\mu}S=\text{量级为}\frac{|u|}{\omega}\text{的项}. \tag{4}$$

但在(4)中左边的每项均为 $\omega|u|$ 的量级，所以对大多数目的来说，右边的项可忽略，就频率而言它们小两个量级。

剩下的只需要分别对 SV 和 SH 求标量势函数。这必须作 Beltrami 算子 B 的反演，其中

$$Bf=\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial}{\partial\Delta}\left(\sin\Delta\frac{\partial f}{\partial\Delta}\right)+\frac{1}{\sin^2\Delta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}.$$

注意，B 包含了存在于 Laplace 算子中的水平微商，所以，对任意的面谐函数 Y_l^m，$BY_l^m=-l(l+1)Y_l^m$。Backus(1958)讨论了 B 的逆 B^{-1}，如果 $g=g(r,\Delta,\phi)$ 可表示成和 $g=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}g_l^m(r)Y_l^m$，进而由 $Bf=g$ 得到 $f=B^{-1}g=-\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[l(l+1)]^{-1}g_l^mY_l^m$。

SV 势函数

对球形运动，curl$_r u=0$，则从(2)得到两个式子 $S_r=0$ 和 $\nabla\cdot S=$

0。因此，$\partial(\sin\Delta S_\Delta)/\partial\Delta+\partial S_\phi/\partial\phi=0$，它是函数$V$存在的条件，$S_\Delta=(1/\sin\Delta)\partial V/\partial\phi$，$S_\phi=-\partial V/\partial\Delta$。由此，对$SV$波有

$$S=\nabla\times(rV,0,0). \tag{5}$$

为构成V，我们建立$\mathrm{cur}|_r S$并注意$-r\,\mathrm{cur}|_r S=BV$，我们已求得了如何去反演的算子。Richards给出

$$\nabla^2V+\frac{\rho\omega^2}{\mu}V=\text{量级为}\frac{|u|}{\omega^2}\text{的项。} \tag{6}$$

*SH*势函数

对圆环运动，$u_r=0$并$\nabla\cdot u=0$。因而，我们可按上述对S所讨论的同样步骤，通过$H_s=-B^{-1}(r\,\mathrm{cur}|_r u)$导出势函数$H_s$。为得到$SH$势函数的波动方程的典型形式，考虑$H=\mu^{1/2}H_s$是方便的。由此，对$SH$波有

$$u=\mu^{-1/2}\nabla\times(rH,0,0),$$

和

$$\nabla^2H+\frac{\rho\omega^2}{\mu}H=\text{量级为}\frac{|u|}{\omega}\text{的项。} \tag{7}$$

忽略(3)—(7)中较小的项，得到方程(9.25 a)和(9.25 b)。(在非均匀介质中所有的这些项均为零。)

其次，假定将点源引入介质中。首先我们得到该点源的表达式，其作用类似于均匀介质中波的Sommerfeld积分。所考虑的最简单的源是对$P(r,\omega)$的波动方程中引入的δ函数：

$$\nabla^2P+\frac{\omega^2}{\alpha^2(r)}P=K_s\delta(r-r_s), \tag{9.26}$$

这里源位于r_s处且K_s是一常数(下标s始终指被源确定的常数)。

在一无限均匀介质中，(9.26)的解为

$$P(r,\omega)=\frac{K_s\exp(i\omega|r-r_s|/\alpha_s)}{4\pi|r-r_s|}, \tag{9.27}$$

用Hankel球函数和Legendre多项式，由上式可得到一个熟悉的部分波展开式(对$r>r_s$)：

$$P(r,\omega)=-\frac{iK_s\omega}{4\pi\alpha_s}\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)h_l^{(1)}(\omega r/\alpha_s)[h_l^{(1)}(\omega r_s/\alpha_s)$$

$$+h_l^{(2)}(\omega r_s/\alpha_s)]P_l(\cos\Delta), \qquad (9.28)$$

这里 α_s 是(常数)整个过程的 P 波速度。

在非均匀介质的研究中，如果我们要求得进展，最后的展开式必须推广。幸而，分离变量法表明，水平波函数仍是 Legendre 多项式，同时所有的困难均限于垂直的（现在是径向的）波函数中。因此，我们将试验用如下形式的离散解的和来求解(9.26)：

$$P(r,\omega)=\sum_{l=0}^{\infty}a(r,\ l)P_l(\cos\Delta). \qquad (9.29)$$

其次，$a(r,\ l)=\left(l+\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}P(r,\omega)P_l(\cos\Delta)\sin\Delta d\Delta$，同时将(9.29)代入波动方程，就得到

$$\frac{d^2}{dr^2}[ra(r,l)]+\left[\frac{\omega^2}{\alpha^2(r)}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]ra(r,l)$$

$$=K_s\delta(r-r_s)\frac{(2l+1)}{4\pi r}. \qquad (9.30)$$

按照 Seckler 和 Keller(1959)及 Friedman(1951)的文章，我们导出了和(9.30)有关的齐次方程的三个特解。令 $f_1(r)$ 为 $a(r,l)$ 的解，这解在中心点 $r=0$ 处是规则的。当 r 值很大时，波动方程大致变为 $d^2a/dr^2=-\omega^2a/\alpha^2$。当 α 为常数时，从解 $e^{\pm i\omega r/\alpha}$ 类推，我们预期波动方程有两个独立的解可供选择，一个的相位随 r 增加，另一个的相位随 r 减小。分别将这些解标记为 $g_l^{(1)}(r)$ 和 $g_l^{(2)}(r)$。联系到因子 $\exp(-i\omega t)$，$g^{(1)}$ 是向外去的波，而 $g^{(2)}$ 是向内去的波，不考虑归一化，可完全定义这三个解，我们采用

$$a(r,l)=\begin{cases}c_1g_l^{(1)}(r) & r_s\leqslant r\\ c_2f_l(r) & 0\leqslant r\leqslant r_s.\end{cases} \qquad (9.31)$$

(9.30)中包含有两点，即当 r 一直增加到 r_s 时，$a(r,\ l)$ 的连续性及 $d[a(r,l)]/dr$ 中的高度为 $K_s(2l+1)/4\pi r_s^2$ 的阶跃，注意到这两者则可确定常数 c_1 和 c_2。由此可得

$$c_1=-\frac{K_s(2l+1)}{4\pi r_s^2}\frac{f_l(r_s)}{W(r_s)},\quad c_2=-\frac{K_s(2l+1)}{4\pi r_s^2}\frac{g_l^{(1)}(r_s)}{W(r_s)},\tag{9.32}$$

其中 $W(r)=g_l^{(1)}(r)df_l/dr-f_l^{(r)}dg_l^{(1)}/dr$ 是 $g_l^{(1)}$ 和 f_l 的 Wronski 行列式。幸而，我们可以证明 $W(r)$ 是与 $1/r^2$ 成比例的，因为 $g_l^{(1)}$ 和 f_l 所满足的波动方程可用来求方程 $d(r^2W)/dr=0$。这比例常数取决于波函数的归一化，现在我们求助于 WKBJ 理论。从补充 9.3(方程 11)，当 ω 较大时得到

$$rg_l^{(2)}(r)\sim\frac{K^{(1)}_{(2)}}{\left[\dfrac{1}{a^2(r)}-\left(\dfrac{l+\dfrac{1}{2}}{\omega r}\right)^2\right]^{1/4}}$$

$$\times\exp\left\{\pm i\omega\int_{r_p}^{r}\left[\frac{1}{a^2(r')}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r'}\right)^2\right]^{1/2}dr'\right\},\tag{9.33}$$

其中 $K^{(1)}$ 和 $K^{(2)}$ 是常数，r_p 是被积函数为零时的半径。

定义

$$p\equiv\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega},\ \text{我们得到}\ p=\frac{r_p}{a(r_p)}.\tag{9.34}$$

因为球面几何中的射线参量为 $(r\cdot\sin i)/a$，由此可得 r_p 的物理解释，即 r_p 为沿射线参量为 p 的射线到转折点处的半径。

补充 9.3

WKBJ 理论

这里我们讨论求如下二次方程的近似解

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\omega^2s^2\phi=0,\tag{1}$$

式中 ω 较大且是正的，而 $s=s(x)$ 使 s^2 成为 x 的单调增函数。我们将要描述的方法具有很大的通用性，因为往往可用前述的 ω 和 s^2 的特性将任意的二次线性齐次方程变换成(1)。很多作者都重新发现了此方法（包括 Wentzel, Kramers, Brillouin 和 Jeffreys 等都因而得名)。当然其主要概念还可追溯到 Green 和 Liouville，且 Ra yleigh (1912)也曾用过这个概念。

我们将假定，在 $x=x_p$ 时，s^2 为零（称为转折点），所以 $s^2\lesseqgtr 0$ 取决于 $x\lesseqgtr x_p$。从(1)得到，解 $\phi=\phi(x)$ 的曲率具有与 s 相反或相同的符号，这也取决于 $x\lesseqgtr x_p$。仅此事实就可推断出此解的主要特性，即在转折点之上它是振荡的，而在其下面是指数形式的。

这里 $s(x)$是常数，解是 $\phi=e^{\pm i\omega sx}$，这样我们就可假定一尝试形式 $\phi=e^{i\omega\tau(x)}$。按(1)则有

$$i\omega\tau''-\omega^2(\tau')^2+\omega^2s^2=0,$$

其中的撇号代表 d/dx。作为一级近似，这里我们忽略了 $\omega\tau''$，这就给出 $\tau'\sim\pm s(x)$和 $\tau(x)\sim\pm\int s(x)dx$。这将给出 $\tau''\sim\pm s'$，所以 τ 的二级近似满足 $(\tau')^2=s^2\pm is'/\omega$，即 $\tau'=\pm s+is'/2s\omega$，故 $\tau(x)=\pm\int s(x)dx+(i/2\omega)\ln s$。$\phi$ 的相应解为

$$\phi(x)\sim\frac{A}{s^{1/2}(x)}\exp\left(i\omega\int_{x_p}^{x}sdx\right)+\frac{B}{s^{1/2}(x)}\exp\left(-i\omega\int_{x_p}^{x}sdx\right)\quad(2)$$

(A和B为常数)。如果$|s'/\omega|\ll|s^2|$，这是有效的。因为很粗略地有 $\omega s\times$波长$=2\pi$，所以有效性条件相当于$|s'\times$波长$|\ll 2\pi|s|$，并且在一个波长内 $s(x)$的变化必须比 s 本身小很多。显然，在 $x=x_p$ 附近，(2)将不能成立，因其中 s 为零。

注意，在指数范围内，$x<x_p$，s 是虚数，所以对通解的适宜标记为

$$(\phi x)\sim\frac{C}{(-s^2)^{1/4}}\exp\left[\omega\int_{x}^{x_p}(-s^2)^{1/2}dx\right]$$

$$+\frac{D}{(-s^2)^{1/4}}\exp\left[-\omega\int_{x}^{x_p}(-s^2)^{1/2}dx\right].\qquad(3)$$

如果C是非零的，则在 x_p 以下，解中有一指数增长的成分，且在此范围内该成分将占优势。其次，我们的兴趣将集中在 x_p 下面的解$\phi(x)$

上，对此解，WKBJ 近似式(3)有 $C=0$。给定一 D 值，在 x 的整个范围内，这个特解由(1)确定，对转折点以上的范围，我们试图找到如形式(2)的渐近表达式。我们不能简单地将(3)式向上运用到转折点，在转折点处使它等于(2)，然后再连续向上，因为这些公式中没有一个在转折点附近是成立的［它们在那里有奇异性，故在实际解 $\phi(x)$ 中不存在］。我们论及的是指数衰减解与在(2)中求和的两个传播解的"连接"，而 Rayleigh(1912)提出的方法是应用 Airy 函数。

我们注意到 $\mathrm{Ai}(-y)$ 是 $dw/dy+yw=0$ 的解，这是我们的方程(1)的一个特例。如下的结果是已知的(Abramowitz and Stegun, 1964, 公式 10.4.59—60)，

$$\mathrm{Ai}(-y)\sim\pi^{-1/2}y^{-1/4}\cos\left[\frac{2}{3}y^{3/2}-\pi/4\right] \quad \text{当 } y\to\infty,$$

$$\mathrm{Ai}(-y)\sim\frac{1}{2}\pi^{-1/2}(-y)^{-1/4}\exp\left[-\frac{2}{3}(-y)^{3/2}\right] \quad \text{当 } y\to-\infty. \tag{4}$$

因此，$\mathrm{Ai}(-y)$ 是一特解，它在转折点以下呈指数衰减形式。

在 $x=x_p$ 附近，我们用 $s^2=\lambda(x-x_p)$ 逼近 $s^2(x)$，其中在 $x=x_p$ 处 $\lambda=ds^2/dx$。当 ω 很大且 x 刚好在 x_p 之下时，(3)中的衰减解为

$$\frac{D}{\lambda^{1/4}(x_p-x)^{1/4}}\exp\left[-\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x_p-x)^{3/2}\right].$$

和(4)中第二个式子对比，则有

$$2D\pi^{1/2}(\omega/\lambda)^{1/6}\,\mathrm{Ai}(-\omega^{2/3}\lambda^{1/3}(x-x_p)). \tag{5}$$

但现在我们可用(4)中第一个式子去探求在转折点以上这个解的性质如何。它必然象下式：

$$\frac{2D}{\lambda^{1/4}(x-x_p)^{1/4}}\cos\left[\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x-x_p)^{3/2}-\pi/4\right]. \tag{6}$$

然而，在这个范围内，它由(2)给定为

$$\frac{1}{\lambda^{1/4}(x-x_p)^{1/4}}\left\{A\exp\left[i\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x-x_p)^{3/2}\right]\right.$$
$$\left.+B\exp\left[-i\frac{2}{3}\omega\lambda^{1/2}(x-x_p)^{3/2}\right]\right\}. \tag{7}$$

比较(6)和(7)，我们得到

$$A=De^{-i\pi/4},\quad B=De^{+i\pi/4}, \tag{8}$$

最后我们得到了对于在转折点以下是衰减的解，在转折点以上的渐近

性质。

实际上，我们希望可以应用这个方法的方程为

$$\frac{d^2}{dr^2}(ra)+\left(\frac{\omega^2}{a^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)ra=0. \quad (9)(\text{参见}(9.30))$$

在 $r=0$ 处有一奇异点，我们通过 $r=r_0e^{x/x_0}$ 来处理 x 以消掉此奇异性；r_0 和 x_0 都是常数。$r^{1/2}a(r,l)=\varphi$ 满足

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{r_0^2}{x_0^2}e^{2x/x_0}\left[\frac{\omega^2}{a^2}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{r_0e^{x/x_0}}\right)^2\right]\phi=0,$$

此式形式如(1)。类似于 $\omega\int_{x_1}^{x}s\,dx$ 的项现变成

$$\omega\int_{r_1}^{r}\left[\frac{1}{a^2}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r}\right)^2\right]^{1/2}dr',$$

并且在 $r<r_1$ 的范围内，$a(r,l)$ 的指数衰减解由下式近似给出：

$$ra(r,l)=r^{1/2}\phi\sim\frac{D}{\left[\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r}\right)^2-\frac{1}{a^2}\right]^{1/4}}$$

$$\times\exp\left\{-\omega\int_{r}^{r_1}\left[\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r'}\right)^2-\frac{1}{a^2}\right]^{1/2}dr'\right\} \qquad (10)$$

在转折点以上($r>r_1$)，下式给出了同样的解，

$$ra(r,l)=r^{1/2}\phi\sim\frac{D}{\left[\frac{1}{a^2}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r}\right)^2\right]^{1/4}}$$

$$\times\left[\exp\left(i\omega\tau-\frac{\pi}{4}\right)+\exp\left(-i\omega\tau+\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

其中

$$\tau=\int_{r_1}^{r}\left[\frac{1}{a^2}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega r'}\right)^2\right]^{1/2}dr'. \qquad (11)$$

在应用数学中使用的几个特殊函数广泛地利用了近似式，它们是

(2)和(3)的特例。对 Airy 函数的例子已经在(4)中给出。其它还包括球面 Hankel 函数 $h_l^{(1)}(\omega r/\alpha)$和 $h_l^{(2)}(\omega r/\alpha)$(其中 α 为常数)以及Legendre 函数 $P_l(\cos\Delta)$。球面 Hankel 函数满足(9)(如 α 是常数)，同时相应的 WKBJ 公式(10)(此时已知为对 $h_l^{(1)}+h_l^{(2)}$的 Debye 近似式)具有归一化的形式 $D=\alpha^{1/2}/\omega$。既然如此，由于 α 是常数，则(11)中的 r 可积分成

$$\left[\frac{r^2}{\alpha^2}-\left(\frac{l+\frac{1}{2}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}+\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)}{\omega}\arcsin\left[\frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\omega r}\right].$$

当 $r<r_1$ 时，(10)近似为球面的 Bessel 函数 $J_l(\omega r/\alpha)$，且有 $D=\alpha^{1/2}/2\omega$。

Legendre 方程的 WKBJ 近似式为

$$P_l(\cos\Delta)\sim\left(\frac{1}{2\pi l\sin\Delta}\right)^{1/2}\left\{\exp\left[-i\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta+\frac{i\pi}{4}\right]\right.$$
$$\left.+\exp\left[+i\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta-\frac{i\pi}{4}\right]\right\},\qquad(12)$$

在此情况下，转折点(在此处(12)式不成立)出现在 $\sin\Delta=0$ 处，即$\Delta=0$ 和 $\Delta=\pi$ 处。注意，(12)式是一驻波，它比例于 $\cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta-\pi/4\right]$，尽管它被写成行波分量的形式[参照(9.39)]。

对 $g_l^{(j)}$ 的归一化是在和球面 Hankel 函数的 Debye 近似式对比之后作出的(见补充 9.3 中的讨论)。如果介质是均匀的且有恒定速度 α_s，实际上我们若假定 $g_l^{(j)}$ 等于 $h_l^{(j)}(\omega r/\alpha_s)$，这是合适的。现在来确定 $K^{(1)}$ 和 $K^{(2)}$，在 $r/\alpha(r)>p$ 的范围内(即在参量为 p 的射线最深的穿透深度以上)有

$$g_l^{(1)}_{(2)}(r)\sim e^{\mp i\pi/4}\frac{\alpha_s^{1/2}}{\omega r}\cdot\frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha^2(r)}-\frac{p^2}{r^2}\right]^{1/4}}$$

$$\times\exp\left\{\pm i\omega\int_{r_p}^{r}\left[\frac{1}{\alpha^2(r')}-\frac{p^2}{(r')^2}\right]^{1/2}dr'\right\}.$$

更进一步抓住射线理论这个环节，我们将 $(1/\alpha^2-p^2/\alpha^2)^{1/2}$ 看作 $\alpha^{-1}\cos i$，它是 P 波的垂直慢度，前曾标记为 ξ，因而有

$$g_l^{(2)}(r)\sim\frac{e^{\mp i\pi/4}\alpha_s^{1/2}}{\omega r\xi^{1/2}(r)}\exp\left[\pm i\omega\int_{r_s}^{r}\xi(r')dr'\right]. \quad (9.35)$$

类似地，由 WKBJ 理论，在 $r/\alpha(r)<p$ 的范围内(即 $r<r_s$)，我们有

$$f_l(r)\sim\frac{\alpha_s^{\frac{1}{2}}}{2\omega r\left[\frac{p^2}{r^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right]^{1/4}}\exp\left\{-\omega\int_r^{r_s}\left[\frac{p^2}{(r')^2}-\frac{1}{\alpha^2(r')}\right]^{1/2}dr'\right\}. \quad (9.36)$$

所以，$f_l(r)$在转折点以下随深度呈指数衰减。(9.36) 所指的归一化是在均匀介质中使 $f_l(r)=j_l(\omega r/\alpha_s)$(球面 Bessel 函数)。

三个函数 f_l，$g_l^{(1)}$，$g_l^{(2)}$是整个半径范围内的解，重要的是要求得并且弄清楚它们之间的连接公式。根据补充 9.3，我们发现这关系式和对球面 Bessel 函数和球面 Hankel函数的关系相同，即连接公式有如下的简单形式：

$$f_l(r)=\frac{1}{2}[g_l^{(1)}(r)+g_l^{(2)}(r)]. \quad (9.37)$$

其物理意义是在转折点以下振幅是衰减的。但在转折点以上，有一个下行分量和上行分量组成的驻波，正如射线先向下到达转折点，然后再向上。在转折点以下，$g_l^{(1)}$和 $g_l^{(2)}$ 中每一个都将随深度渐渐变为指数形式。

根据前述的归一化，现在来计算 Wronski 行列式是可能的。我们精确地得到 $W(r)=-i\alpha_s/(\omega r^2)$。因此，根据 (9.29)，(9.31)，(9.32)和(9.37)，我们最后得到

$$P(r,\omega)=\frac{iK_s(\omega)}{4\pi\alpha_s}\sum_{l=0}^{\infty}\left(l+\frac{1}{2}\right)g_l^{(1)}(r_>)[g_l^{(1)}(r_<)+g_l^{(2)}(r_<)]P_l(\cos\Delta), \quad (9.38)$$

其中 $r_>=(r,r_s)$中较大的；$r_<=(r,r_s)$中较小的。

通常将 Legendre 函数分离成其行波分量是很有用的，即

$$P_l = Q_l^{(1)} + Q_l^{(2)},$$

其中

$$Q_l^{(1)}(\cos\Delta) \sim \frac{\exp\left\{\mp i\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta - \pi/4\right]\right\}}{(2\pi l \sin\Delta)^{1/2}} \qquad (9.39)$$

这是对较大的 l（若 l 不在负整数附近且 Δ 不在 0 或 180°附近）。回顾对笛卡尔坐标，水平波函数是 $e^{i\omega px}$，其中 p 是水平慢度或射线参量。类似地，按(9.39)，我们可将 $\left(l+\frac{1}{2}\right)/\omega$ 看成球面几何中的射线参量，如在(9.34)中已表示出的那样。

解(9.38)在概念上类似于 Sommerfeld 积分，其意义表示来自一简单点源的波怎样才能展开成适宜于某坐标系的垂直的与水平的波函数，而在此坐标中边界条件又很容易分析。然而，虽然分波展开式(9.38)是一收敛级数，但直到 l 大到足以使 $g_l^{(1)}(r_<) + g_l^{(2)}(r_>)$ 呈指数衰减以前，级数的各单项不能显著减小。这就要求 l 大于 $\omega r_< + a(r_<)$。由于 $r_<$ 通常是几千公里并且 $a(r_<)$ 约为 10 公里/秒，所以为研究短周期（1 或 2 秒）体波，不得不对(9.38)中的几千项求和。这种数字计算上的困难是通过将对 l 的求和变换成积分（Watson 变换或 Poisson 变换）而有效地避免了，然后在(复)平面中[illegible]得适当的迴线之后，直接完成这一积分是很简单的。这适当的迴线的严格演算是不容易的（Nussenzveig, 1965; Ansell, 1978），因为 (9.38) 实质上是四个不同类型的波之和。其中每一个都是 $g_l^{(j)}(r_<)Q_l^{(k)}$ 这种类型，其 $j=1$ 或 2，$k=1$ 或 2，且可根据从 $r_<$ 到 $r_>$ 是向下离开或向上离开以及初至是向源或离源来辨别它们的类型。但如果级数（9.38）分成四个级数，其中每一个级数相应于一个波型，则每一级数都是发散的。为避免这种发散性需要进行十分复杂的计算，在补充 9.4 中我们给出一个最重要情况下的实例，如图 9.17 中所说明的，且其中

有一个转折点。

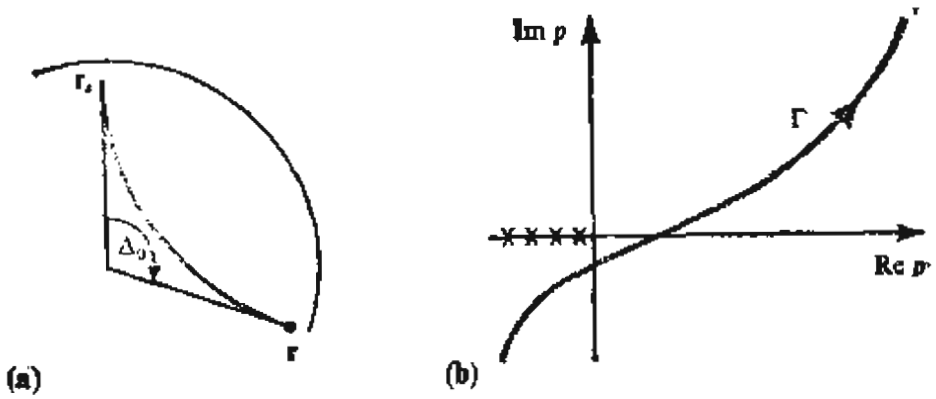


图 9.17

(a)从源到接收点，离源向下射线的参量。出现一个转折点。(b)有关的积分路径 Γ。见方程(9.40)(引自 Richards, 1973)

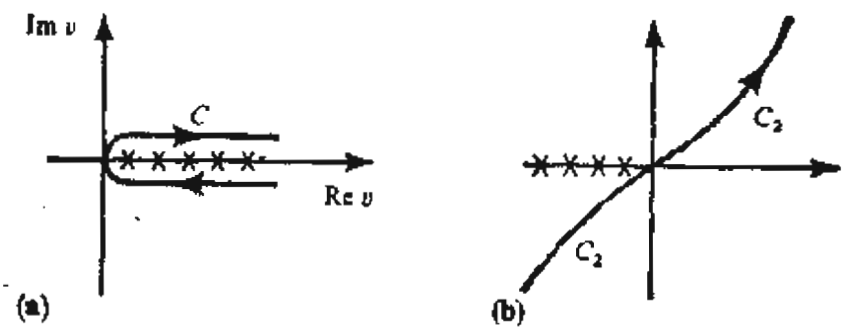
补充 9.4

Watson 变换的应用实例

这是一个将求和变换为积分的方法。利用在 $\nu=\frac{1}{2},1\frac{1}{2},2\frac{1}{2},\cdots$ 处 $\sin\nu\pi$ 的极点，此变换为

$$\sum_{l=0}^{\infty} f\left(l+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\int_{C} f(\nu)e^{-i\nu\pi}\sec\nu\pi d\nu, \tag{1}$$

其中 C 取为绕正的实 ν 轴，如图所示。



(a) Watson 变换的路径。极点都出现在沿实轴上，对正 ν，极点在 $\nu=l+\frac{1}{2}$ 处，$l=0,1,2,\cdots$。(b) 积分 $Q^{(2)}_{\nu,-\frac{1}{2}}$ 在原点映射之后，对具有一个转折点的直达射线 C 的变形

在射线从源 r_s 处到接收点 r 处其间只有一个转折点的情况下，我们将应用(1)到分波展开式(9.38)中。该图形表示在图 9.17 a 中，利用 $P_\nu(\cos\Delta)=e^{i\nu\pi}P_\nu(-\cos\Delta)$ 我们得到

$$P(r,\omega)=-\frac{K_s\omega}{4\pi a_s}\int_C \nu g^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(r)f_{\nu-\frac{1}{2}}(r_s)\,P_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\Delta)\sec\nu\pi d\nu.$$

为将这个被积函数和积分路径变换成更有利的形式，必须利用垂直波函数和水平波函数的很多特殊性质，以避免在计算的中间步骤中出现发散积分。因而从 Nusseuzveig(1965)得出，C 可被变形使之越过第四象限及第一和第三象限的一部分，成为路径 C_1，它对原点是对称的(见图)。在这一阶段，被积函数在正实 ν 轴上有极点。写出

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(-\cos\Delta)\sec\nu\pi=[-e^{-i\nu\pi}Q^{(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)+e^{i\nu\pi}Q^{(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)]\sec\nu\pi$$

被积分 C_1 分离成两项。在包含 $Q^{(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}$ 的积分中以 $-\nu$ 代替 ν，并用 $g^{(1)}_{-\nu-\frac{1}{2}}(r_s)e^{-i\nu\pi}=g^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(r_s)$ 和

$$f_{-\nu-\frac{1}{2}}(r_s)=f_{\nu-\frac{1}{2}}(r_s)e^{-i\nu\pi}+i\sin\nu\pi\, g^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(r_s),$$

我们则得到

$$P(r,\omega)=-\frac{iK_s\omega}{4\pi a_s}\int_{C_2}\nu g^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(r)g^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(r_s)\,Q^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)\,d\nu. \qquad (2)$$

注意：(i) 这里最后的积分刚好和分波展开式(9.38)中出现的四个行波项之一相一致；(ii)(2)中的因子 $Q^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)$ 仅在负实轴上有极点，所以现在可在任何方便的地方使 C_2 穿过正实 ν 轴发生变形。(iii)如果在 r_s 和 r 之间没有转折点出现，即如果射线处处向上行走，则所预计的 (9.38) 中的行波项是 $a^{(1)}_\nu(r)g^{(1)}_\nu(r_s)Q^{(1)}_\nu(\cos\Delta)$。Ansell(1978)已给出了一个详尽的分析，指出了 Richards(1973)讨论中的发散积分。

虽然，分波展开式的严格计算是费力的，但其结果却有很大的意义，即在分波展开式中仍可识别出有物理意义的行波。使用复数积分路径的作用是双重的：消除所有无用的行波，从计算上得到余项中值得注意的积分。因此，对图 9.17 a 所示的源和接收点，补充 9.4 中的结果(2)，可精确地识别为所预期的行波。我们得到

$$P(r,\ \omega)=\frac{-iK_s\omega^3}{4\pi a_s}\int_\Gamma pg^{(1)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(r)\ g^{(1)}_{\omega p-\frac{1}{2}}\times(r_s)Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)dp,\qquad(9.40)$$

其中 p 是射线参量($\nu=l+\frac{1}{2}=\omega p$)，如图 9.17 b 所示，$\Gamma$ 被变形以穿过任意方便的点或穿过正实 p 轴上的一些点。

地球中间断面的作用，如核-幔边界，将在下节中研究。我们将发现在(9.40)的被积函数中包含有反射系数和透射系数是必要的。然而，如图 9.12 b，c 所表示的类型，在源和接收点之间的多路径效应已经包括在(9.40)中了。在我们 $g^{(1)}_\nu$ 的定义中隐含着这样的假定，恰在一个转折点 r_t 处解出的 $p=r/a(r)$，因而低速带已被除外。(WKBJ 表达式可作些修正以使该假定削弱些。)因为 T-Δ 曲线没有间断，所以走时曲线的这些分支犹如给定的一条射线，三条射线，或者一般情况下，在源和接收点之间的一些奇数条射线。

(9.40)的用途包括了垂直波函数的直接计算(用运动方程的积分)，随后选择最速下降路径附近的 Γ 路径求(9.40)的积分(Chapman and Phinney，1972)。然而，经常采用被函数的近似式，这使更加快速的计算成为可能。首先，我们将讨论 WKBJ 近似式，对和源相距 Δ_0 处的接收点，它应用于由(9.40)得到的径向位移。于是，按(9.25a)，(9.35)和(9.39)，

$$u_r(r;\Delta_0,\omega)=[\rho(r)]^{-1/2}\partial P/\partial r=\frac{K_s e^{-i\pi/4}\omega^{3/2}}{[2\pi\rho(r)\sin\Delta_0]^{1/2}}\frac{1}{4\pi r r_s}\times\int_\Gamma\left(\frac{p\xi(r)}{\xi(r_s)}\right)^{1/2}e^{i\omega J}dp,\qquad(9.41)$$

这里相位延迟的积分为

$$J=J(p)=\int_{r_s}^{r_t}\xi dr+\int_{r_t}^{r}\xi dr+p\Delta_0.$$

如(9.22)所指出的，$\int\xi dr$ 和走时及距离的积分有关，所以

$$J=T(p)-p\Delta(p)+p\Delta_0=\tau(p)+p\Delta_0, \tag{9.42}$$

其中 $T(p)$和$\Delta(p)$是参量为 p 的射线从位于 r_s 处的源到达半径r处的时间和距离。由于 $\partial J/\partial p=\Delta_0-\Delta(p)$(见(9.23))，由此得到 u_r 的被积函数在 p 值处有鞍点，以使 $\Delta(p)=\Delta_0$，即正好对此射线参量，在源和接收点之间有一条射线。在此鞍点 p_0 附近(比如说)，Taylor 级数的展开式给出

$$J(p)=T(p_0)+\frac{1}{2}(p-p_0)^2(-\partial\Delta/\partial p)。 \tag{9.43}$$

如果在 r 和 r_s 之间刚好有一实射线，则 $\partial\Delta/\partial p$ 为负的（图9.13中的 AB 分支），并且对于 Γ，确定鞍点为最速下降路径是合适的，这导致(9.41)的近似式

$$u_r(r,\ \Delta_0,\ \omega)\sim\frac{-iK_s\omega}{4\pi}\left(\frac{a_s}{\rho a}\right)^{1/2}\frac{e^{i\omega\tau}}{rr_s}\left[\frac{\cos i_s\sin\Delta_0}{p_0\cos i}\times\left(-\frac{\partial\Delta}{\partial p}\right)\right]^{-1/2}.$$

通过下式确定几何扩散：

$$a_s\mathscr{R}(r,\ r_s)=rr_s[\cos i\cos i_s\sin\Delta_0|\partial\Delta/\partial p|/p_0]^{1/2} \tag{9.44}$$

(见问题 4.3)，我们得到

$$u_r(r,\ \Delta_0,\ \omega)\sim\frac{-iK_s\omega}{4\pi(\rho a a_s)^{1/2}}\frac{e^{i\omega\tau}}{\mathscr{R}(r,\ r_s)}\cos i(r). \tag{9.45}$$

我们曾用 K_s 描述此源的强度。如果所描述的P波源用其矩张量 $M_{ij}(t)=M_0(t)\delta_{ij}$ 来代替，则体力为 $f_i(x,\ t)=-M_0(t)\partial\delta(x-r_s)/\partial x_i$。当震源区内物质性质的变化很小时，为使 K_s 和 M_0 相关，注意到向量波动方程（补充9.2，方程(1)）中主要的项变成了 $\rho\omega^2u+\nabla(\rho a^2\nabla\cdot u)=\nabla[M_0(\omega)\delta(x-r_s)]$，并由于 $u=\rho^{-\frac{1}{2}}\times\nabla P$，这给出(和(9.26)比较) $K_s=M_s(\omega)/\rho_s^{1/2}a_s^2$。因而，在时间域中我们从(9.45)得到

$$u_r(r,\ \Delta_0,\ t)\sim\frac{\cos i(r)\dot{M}_0(t-T)}{4\pi[\rho(r)\rho_s a(r)a_s^5]^{1/2}\mathscr{R}(r,\ r_s)}, \tag{9.46}$$

此式正是几何射线理论所预期的。

一个更复杂的结构如图9.18所示，这里对距离 Δ_0 有五个射线参量可解方程 $\Delta(p)=\Delta_0$。此相位积分的二阶导数交替为正和负，它给出了其取向如图 9.18 b 所表示的鞍式曲线。可选取 Γ 沿最速下降路径穿过每一个鞍点，并对第一、第三、第五鞍点给出类型如(9.45)的近似式。对第二、第四鞍点，近似式为类型(9.45)乘以$(-i)$，即具有 $\pi/2$ 的相位超前。转换到时间域，相应于偶序数鞍点的到时具有脉冲形状，它是对奇数的 Hilbert 变换。当 $\Delta_c=\Delta(p)$ 有双根时(比如说在 p_c 处)发生焦散现象，以致在 $p=p_c$ 时 $\partial\Delta/\partial p$ 也为零。图9.19描述了此情况下波函数的性质，强调之点是在推广这些程序去计算复射线参量的 T 和 Δ 之后，(9.41)用数值方法依然是很容易计算的，Richards 曾用这个方法描述了在接近240°处 $PKKP$ 中的焦散对振幅的影响。

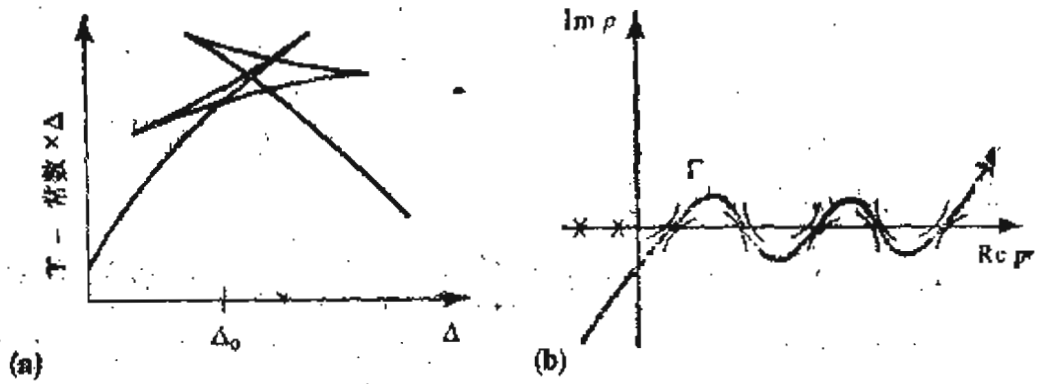


图 9.18

(a) 折合走时曲线，具有两个重叠的三重量。(b) 穿过五个鞍点的复射线参量平面中的积分路径，每一个鞍点都是满足 $\Delta(r,p)=\Delta_0$ 的一个 p 值(引自 Richards, 1973)

Chapman(1976 b)曾叙述过如(9.41)的表达式怎样才能在时间域中写成褶积之和。此结果是重要的，因为当多重到时和焦散可能存在时，它或许是导出合成地震图的最简单有效的方法。显然，此方法和 Cagniard 的方法有密切的联系，甚至当转折点存在的情况下这个方法都是有效的。我们从(9.41)开始，但却用一个各

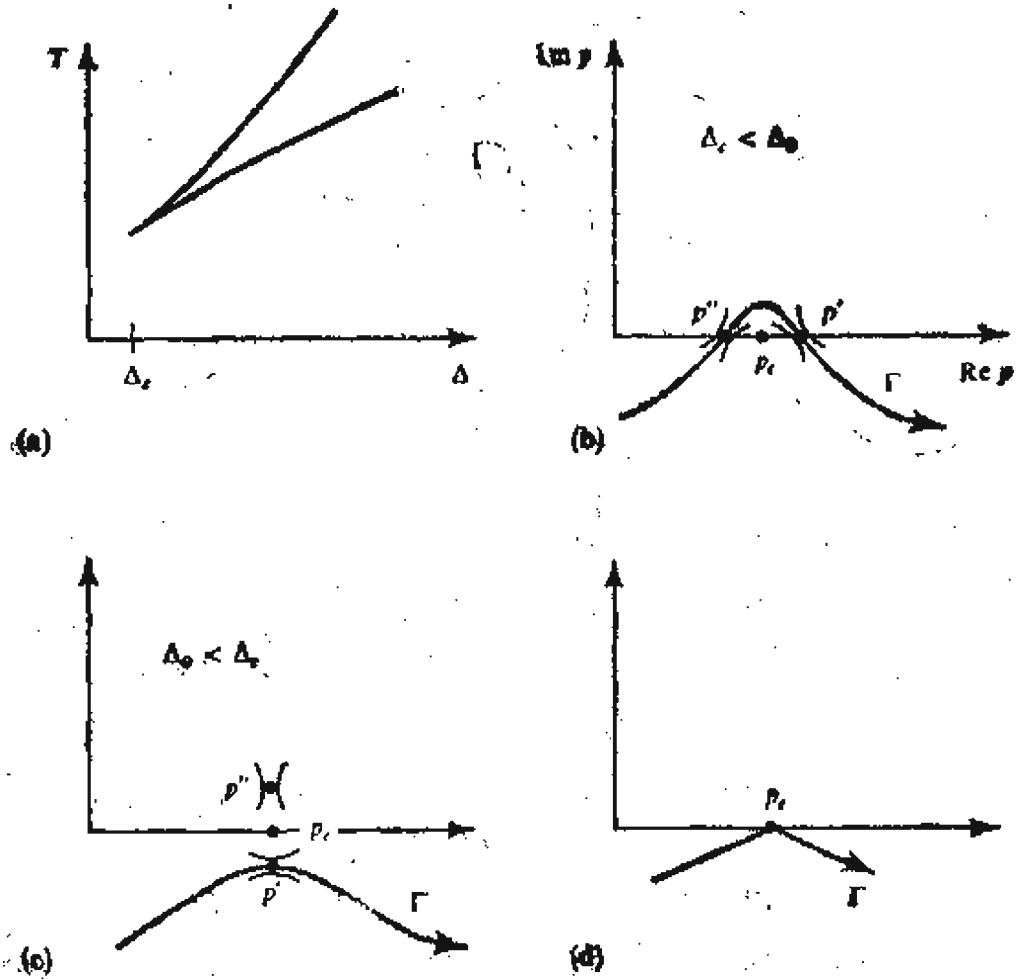


图 9.19

焦散点附近鞍点的特征。(a)在距离为 Δ_t 时，$T=T(\Delta)$的两个分支碰到一起，Δ_t 处有一焦散点。(b) 在 Δ_0 刚好大于 Δ_t 的距离时，$\Delta(p)=\Delta_0$的两个实数解是存在的，每一解在实 p 轴上给出一鞍点。当 Δ_0 移动并通过 Δ_t 时，这两个鞍点合并于 p_t，然后(c) 对 Δ_0 刚好小于 Δ_t 的距离时，$\Delta(p)=\Delta_0$ 的两个复数共轭解出现，一个平行于实 p 轴，一个在实 p 轴以下，并且视在这是最速下降路径。(d) 所示为两个直线段，在 $\Delta_0 \gtrless \Delta_t$ 的两种情况下，它们适用于(9.41)的数值计算(引自 Richards, 1937)

向同性的矩张量 $M_{ij}=M_0(\omega)\delta_{ij}$，所以

$$u_r(r,\Delta_0,\omega)=\frac{-i\omega M_0(\omega)e^{-i\omega t_0}\omega^{1/2}}{(2\pi\rho\rho_s\sin\Delta_0)^{1/2}4\pi\rho r_s\alpha_s^2}\int_\Gamma B(p)e^{i\omega J(p)}dp, \tag{9.47}$$

其中 $B(p)=\left(\frac{p\xi(r)}{\xi_s}\right)^{1/2}=p^{1/2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{p^2}{r^2}\right)^{1/4}\Big/\left(\frac{1}{\alpha_s^2}-\frac{p^2}{r_s^2}\right)^{1/4}$.

在时间域中，此式变成(见补充9.5)

$$u_r(r,\ \Delta_0,\ t)=\frac{\dfrac{dM_0}{dt}}{(2\pi\rho\rho_s\sin\Delta_0)^{1/2}4\pi r r_s\alpha_s^2}*\frac{d}{dt}\frac{H(t)}{(\pi t)^{1/2}}*\frac{1}{n}$$

$$\times\mathrm{Re}\int_0\int_\Gamma B(p)e^{i\omega(J-t)}dpd\omega. \qquad (9.48)$$

但这里时间褶积的三个函数中的最后那个是 $f(t)$，

$$f(t)=\mathrm{Re}\int_\Gamma B(p)\delta[J(p)-t]dp. \qquad (9.49)$$

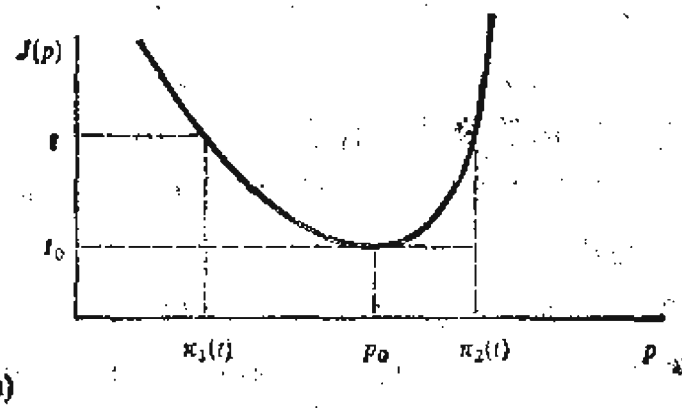
因而，仅当 $J(p)$等于 t 时的 p 值，被积函数才是起作用的。此 p 值以实数 t 为参量，且部分是和 Cagniard 路径的值相同。为了看清这一点，我们首先考虑一简单情况，在此情况下只用一个射线参量 p_0，以 r_s 和 r 之间的走时 t_0(图9.17)解出 $\Delta(p)=\Delta_0$。图9.20a中所示的量 $J(p)=T(p)-p\Delta(p)+p\Delta_0$，其斜率 $\Delta_0-\Delta(p)$在 p_0 处为零，此时 $J(p)=t_0$。对大于 t_0 的时间，方程

$$t=J(p) \qquad (9.50)$$

有两个根，Chapman(1976b)标记成 $\pi_1(t)$和 $\pi_2(t)$。事实上，方程(9.50)恰如 Cagniard 路径的一个方程。显然，我们感兴趣的仅为一个根，同时对晚于某射线到时的时间，我们注视到此根离开了实 p 轴。这里，我们将保留两个根并且使 Γ 仅保持在实 p 轴上(在 p_0 附近)，所以避免了复射线参量值。图9.20b 所示的路径 $\pi_1(t)$和 $\pi_2(t)$，仅对 $t\geqslant t_0$ 时才有实数值。注意，当 t 增加时，取其方向为沿 $\pi_1(t)$，这和第六章及 9.1 节所熟悉的方向相反。其理由是在 p_0 点 $\partial\Delta/\partial p<0$，在 p_0 附近沿 $\pi_1(t)$ 的值由下面的 Taylor 展开式给出，

$$t=t_0+\frac{1}{2}(\pi_1-p_0)^2\frac{\partial^2 J}{\partial p^2}=t_0-\frac{1}{2}(\partial\Delta/\partial p)(\pi_1-p_0)^2. \qquad (9.51)$$

一旦(9.50)的实解 $\pi_j=\pi_j(t)$是已知的，在每一个 $\pi_j(t)$附近



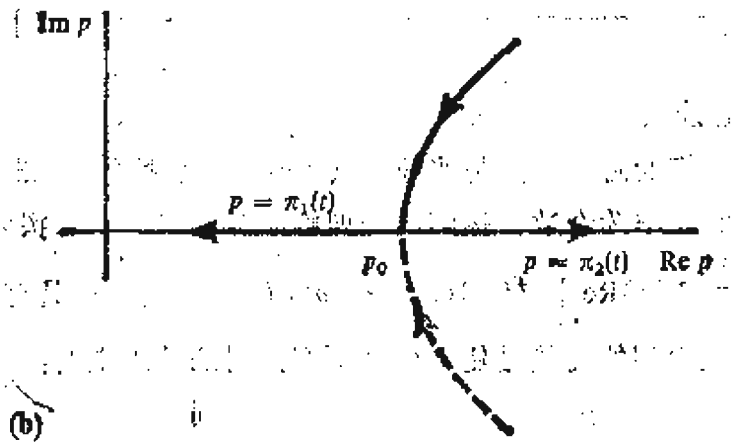


图 9.20

(a)函数 $J(p)$ 是由 $\tau(p)$(图9.14d)加一线性项 $p\Delta_0$ 得到。p_0 处的极小值相应于时间 $t_0=J(p_0)$。(b)对 $t=J(p)$，其解的路径是 $p=\pi_1(t)$，当 $t>t_0$ 时它位于实 p 轴上。

我们可以用下式逼近(9.49)中 δ 函数的宗量

$$J(p)-t\approx(p-\pi_1)\frac{\partial J}{\partial p}\Big|_{\pi_1}=(p-\pi_1)[\Delta_0-\Delta(\pi_1)]$$

事实上，这里包括的高阶项是没有用的，因为这个近似表示式本身是 WKBJ 近似表达式的结果。因此(9.48)成为

$$u_r(r,\Delta_0,t)=\frac{dM_0}{dt}\cdot\frac{2\pi\rho_0\sin\Delta_0}{(2\pi\rho_0\sin\Delta_0)^{1/2}4\pi^2\gamma^2 r r_0 a^3}\cdot\frac{dH(t)}{dt}\Big|_{t^{1/2}}$$

$$* \sum_j \frac{\beta(\pi_j)}{|\Delta_0 - \Delta(\pi_j)|}. \qquad (9.52)$$

在处理上，这个结果类似于我们先前的 Cagniard 方法导出的结果，但不需要复数运算。为确保在(9.52)中包含有几何射线理论，我们在 p_0 附近将 $\Delta_0-\Delta(\pi_j)$ 展开成 $(-\partial\Delta/\partial p)_{p0}(\pi_j-p_0)$，然后用(9.51)写成

$$\Delta_0-\Delta(\pi_j)\sim[-2\,\partial\Delta/\partial p]_{p0}^{1/2}(t-t_0)^{1/2}. \qquad (9.53)$$

从(9.52)的褶积和补充 9.5 可见，两项($j=1$，2)中的每项只贡献了几何射线近似式(9.46)的一半。

补充9.5

有用的变换对

因为我们的时间级数是实数，其 Fourier 变换的实部频率为偶数，虚部的频率为奇数。按照这一理解，我们仅对正的实频率写出公式，$f(t)=(1/\pi)\mathrm{Re}\int_0^\infty f(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega$。于是，在具有 $t^{-\frac{1}{2}}$ 和乘数 $\omega^{-\frac{1}{2}}$ 的褶积之间的连接是建立在如下变换对的基础上的：

频率	时间
$e^{i\pi/4}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{1/2}$	$\frac{H(t)}{t^{1/2}}$
$e^{-i\pi/4}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{1/2}$	$\frac{H(-t)}{(-t)^{1/2}}$
$e^{-i\pi/4}(\pi\omega)^{1/2}$	$\frac{dH(t)}{dt^{1/2}}$
$e^{i\pi/4}\ (\pi\omega)^{1/2}$	$-\frac{dH(-t)}{dt(-t)^{1/2}}$

$H(t)/t^{1/2}$ 的 Hilbert 变换是 $H(-t)/(-t)^{1/2}$，并且要记住的基本变换是

$$\frac{H(t)}{t^{1/2}} * \frac{H(t-T)}{(t-T)^{1/2}} = \pi H(t-T).$$

包含 Hilbert 变换算子和算子 d/dt 的褶积可根据互易性质这些算子和不同函数的相关性写成很多种不同的形式。因此有

$$\frac{d\psi}{dt} * \frac{H(t)}{t^{1/2}} * \frac{H(t-T)}{(t-T)^{1/2}} = \psi * \frac{d}{dt}[\pi H(t-T)] = \pi\psi(t-T),$$

和

$$\psi(t) * \left[-\frac{d}{dt}\frac{H(-t)}{(-t)^{1/2}} * \frac{H(T-t)}{(T-t)^{1/2}}\right] = \left(-\frac{d\psi}{dt}\right) * (-\pi H(t-T))$$
$$= \pi\psi(t-T).$$

要从公式(9.52)—(9.53)得到几何射线理论，我们用

$$\frac{d}{dt}\frac{H(t)}{t^{1/2}} * \frac{H(t-t_0)}{(t-t_0)^{1/2}} = \pi\delta(t-t_0).$$

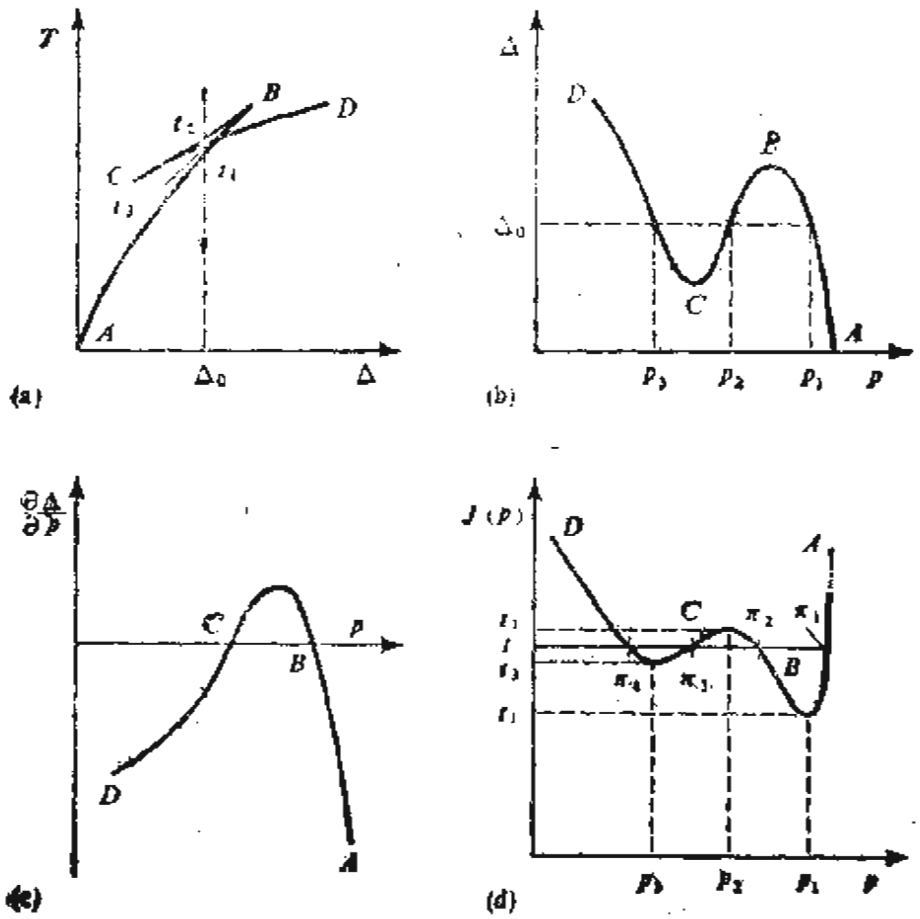


图 9.21

在B和C处有焦散的走时曲线及导出曲线。对距离Δ_0，几何射线的数值表明有三重性。(a) 具有到时t_1，t_2，t_3的走时曲线，(b) $\Delta=\Delta(p)$，对$\Delta(p)=\Delta_0$有三个解p_1，p_2，p_3。(c)$\partial\Delta/\partial p$中的零点出现在$B$和$C$处。(d)对一特定的距离$\Delta_0$，对$t=J(p)$其解$\pi_i(t)$的图解(引自 Chapman, 1976b)

(9.52)的主要优点是直接地处理了多路径和焦散。图9.21表示出一个更加复杂的走时曲线，对 $\Delta(p)=\Delta_0$ 有三个解 p_1，p_2，p_3。对 $t=J(p)$ 有四个解，而且如何应用(9.52)是相当清楚的。在 B 和 C 处的焦散是 $J=J(p)$ 中的拐点，如果 Δ_0 是一焦散点，则相应于图9.21d中的拐点是水平的。由此求得 $\Delta_0-\Delta(\pi_i)\propto(t-t_0)^{2/3}$，由(9.52)给出了很大的振幅。

有意思的是，(9.52)已由完全不同于我们曾采用的方法所得到。例如，Chapman(1976a)对大量均匀平面层研究了 Cagniard 方法，并能够得到广义一次反射(见(9.6))的表达式。他对所有的内界面求和，并当层的厚度逐渐缩小到零时取其极限值。在波阵面附近，表示式是(9.52)所给定值的 $\pi/3$ 倍（仅对平面分层适用），对有转折点的射线，该表示式意味着一个出人意外的结果，即在极限情况下，精细的分层和大量的一次反射并未给出波阵面附近的几何射线理论公式。相反，一次反射的总效应很大，约为5%。然而，第三个反射(三次反射波)，在波阵面附近其极限趋于(9.52)的 $-\pi^3/648$，并且 Chapman 从 $(2l+1)$ 次反射给出波阵面的近似式为(9.52)的 $2(-1)^l(\pi/6)^{2l+1}/(2l+1)!$。加上连续多次的反射，则确实给出一迅速收敛的级数，且收敛于(9.52)，这是因为

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi^3}{648}+\cdots=2\sin\frac{\pi}{6}=1.$$

Wiggins(1976a)用公式表示了另一方法，视 $J(p)$ 为一波阵面(或圆盘)在 Δ_0 处的到时，其慢度为 p。沿 $J(p)$ 取相等的时间增量，他得到(9.52)的离散型并称之为圆盘射线理论。Chapman (1978a)曾建议对解(9.52)其适当的名字应为 WKBJ 地震图。这名字是合适的，因为它是在空间域和(或)时间域中的一个表示式，此式等效于在射线参量域和(或)频率域中的 WKBJ 近似式。WKBJ 地震图在计算上省时间，在很多情况下，它大概是研究波形的最佳方法。我们已得到 Chapman(1978a，b) 曾称做慢度方法的一个特例，即在慢度(射线参量)域中得到其中间结果(在对

频率积分之后)。然而，在下一节中，我们将找到一些重要实例，其中 WKBJ 近似式是不准确的，所以，必须探寻(9.52)的代替式。

贯穿本节之内，我们曾假定了一个平稳变化的速度剖面。如果考虑到不连续性，就像地球的自由表面，那么必将导入有关的反射系数和透射系数。对 WKBJ 地震图，其结果表明只是有简单的平面波系数。超出 WKBJ 理论，对由几个均匀层组成的简单地球模型，其主要方法是熟知的(Scholte，1956)，因为在这些当中，垂直波函数是由球面 Hankel 函数组成的。在这些模型中已发现，所感兴趣的波路径(如 $SKKP$)可通过对总响应的表达式中分离其分波级数而进行分析。在概念上这和无限射线族定量表达式中识别一个特殊的广义射线有同样的运算(见图9.10)。Watson 变换仍是可用的，但现在，在复 p 平面中任意的路径变形都必须考虑对所感兴趣的射线路径的反射系数或透射系数中的极点。这些极点的大多数位置是通过研究球面 Hankel 函数的 WKBJ近似式的性质而确定的，因此，在更真实的地球模型中，由于间断面不同深度之间的弹性性质具有径向变化，我们仍可期望，利用广义垂直波函数 $g^{(j)}_{p\,-\frac{1}{2}}$之 WKBJ 公式(9.35)—(9.36)可确定相应的极点位置。路径变形的严格分析要求将 Watson 路径改变成象 Γ 那样的路径(图9.17)，这对真实的地球模型是一棘手的课题。然而，现在已很清楚了，在波传播中几个不同类型的问题是能够加以区分的。在下文中，我们将着重于谱方法，在频率域中已得到了其中间结果(在对复射线参量的积分之后)。

9.5 存在间断面的地球模型中的体波问题

为系统处理地球内间断面的反射和透射，以运动应力向量为基础来发展一种方法是很重要的。如果没有这种方法，则必须利用通常以势函数为基础的一种特定的方法，并且对每一种特殊的应

用都必须完成其详细的代数运算。在这一节中，我们将研究球对称介质中 P-SV 运动的运动-应力向量，所用的符号类似于我们对均匀平面层所用过的。其散射矩阵很容易写出，并且我们将用它去研究几种不同的体波。

适用的水平波函数是在第八章中叙述的向量面谐函数。我们的符号是以完全归一化面谐函数 $Y_l^m(\Delta, \phi)$ [见(8.5)] 为基础的，并且

$$\boldsymbol{R}_l^m(\Delta, \phi) = Y_l^m \hat{\boldsymbol{r}},$$

$$\boldsymbol{S}_l^m(\Delta, \phi) = \frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}}\left(\frac{\partial Y_l^m}{\partial \Delta}\hat{\boldsymbol{\Delta}} + \frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right), \quad (9.54)$$

$$\boldsymbol{T}_l^m(\Delta, \phi) = \frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}}\left(\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\Delta}} - \frac{\partial Y_l^m}{\partial \Delta}\hat{\boldsymbol{\phi}}\right).$$

由这些我们作出展开式

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(r, \Delta, \phi, \omega) = (u_r, u_\Delta, u_\phi)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[U_l^m \boldsymbol{R}_l^m + V_l^m \boldsymbol{S}_l^m + W_l^m \boldsymbol{T}_l^m\right], \quad (9.55)$$

和

$$\text{牵引力} = (\tau_{rr}, \tau_{r\Delta}, \tau_{r\phi}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[R_l^m \boldsymbol{R}_l^m + S_l^m \boldsymbol{S}_l^m + T_l^m \boldsymbol{T}_l^m\right].$$

这是我们希望求解的六个量 U_l^m, V_l^m, W_l^m, R_l^m, S_l^m, T_l^m。每一个量都是 (r, l, m, ω) 的函数，并且在这个意义上，在我们感兴趣的定义域 (r, Δ, φ, t) 中，它是一个解的三次变换。在多重变换的运动方程(2.47)—(2.50)中，仅仅保留了径向微商，并且可将它们分成两组：

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{-[l(l+1)]^{1/2}}{r} \\ \frac{\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)} & -\frac{2\lambda}{r(\lambda+2\mu)} \\ \frac{4l(l+1)\mu(\lambda+\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)} - \rho\omega^2 - \frac{\mu}{r^2} & \frac{-2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)} \\ \frac{-2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)} & -\rho\omega^2 + \frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\ -\frac{3}{r} & \frac{-\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)} \\ \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} & \frac{-4\mu}{r(\lambda+2\mu)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} \tag{9.56}$$

和

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{\mu} \\ \frac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2} - \rho\omega^2 & \frac{3}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}. \tag{9.57}$$

我们已从因变量中略去了下标 l 和上标 m。注意，尽管在方程中没有出现 m，但我们必须记住，一般而言，因为 m 和震源展开式有关，所以对 m 的依赖性还是存在的。在第八章中，我们曾把谐波数 n 和径向函数联系起来，在我们现在的方法中，没有发生谐波，因为现在我们没有去求根据 $r=0$ 时有奇异性以及 $r=r_0$ 时（地球表面）有零应力而得的特解。相反，我们将处理在（还）没有采用边界条件情况下的一组完整线性独立解。

显然，(9.56) 描述了 P-SV 运动（参照(5.60)），而(9.57)则描述了 SH 运动［参照(5.58)］，这两组方程为标准形式 $d\boldsymbol{f}/dr=\boldsymbol{A}(r)\boldsymbol{f}$。我们的下一个目标是寻求怎样能把 $\boldsymbol{f}$ 写成 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w}$，其中层矩阵 $\boldsymbol{F}$ 已被分解成描述每一层中位移分量和应力分量振幅的 $\boldsymbol{E}$，和给出下行和上行的 P 及 SV 之垂直波函数的 $\boldsymbol{\Lambda}$（对角矩阵）。产生 $\boldsymbol{F}$ 及其因子 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的最简单方法是借助于适宜球面几何的势函数（9.25 a），这是由于 $\boldsymbol{F}$ 的每一列都能够从一可识别的垂直波函数中（问题 5.8）导出来。另一方法是反演由 Chapman（1973，1974）给出的变换。最后的结果十分显著地类似于平面波理论的（5.65），对 P-SV 问题，它是

$$\boldsymbol{f}(r)=\begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w},$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \pi^{(2)}(r) & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \sigma^{(2)}(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^{(1)}(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^{(1)}(r) \end{pmatrix} \tag{9.58}$$

和

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -\frac{i\alpha\eta}{r} & -i\beta\eta & -\frac{i\alpha p}{r} & -i\beta\eta \\ -\alpha\xi & -\frac{\beta p}{r} & \alpha\xi & -\frac{\beta p}{r} \\ -2\omega\rho\alpha\beta^2\frac{p}{r}\xi & -\omega\rho\beta\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) & 2\omega\rho\alpha\beta^2\frac{p}{r}\xi & \omega\rho\beta\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) \\ i\omega\rho\alpha\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) & -2i\omega\rho\beta^2\frac{p}{r}\eta & i\omega\rho\alpha\left(1-2\beta^2\frac{p^2}{r^2}\right) & -2i\omega\rho\beta^2\frac{p}{r}\eta \end{pmatrix}. \tag{9.59}$$

波函数 $\pi^{(k)}$ 是对于 P 波的，并且通过下式和我们前述的 $g_i^{(k)}$ 有关，

$$\pi^{(k)}(r,p,\omega)\equiv\left(\frac{\rho_s}{\rho}\right)^{1/2}\frac{\alpha_s}{\alpha}\,g_i^{(k)}\sim e^{\mp i\pi/4}\left(\frac{\rho_s\alpha_s}{\rho\alpha\cos i}\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\frac{\alpha_s}{\omega r}\right)\exp\left[\pm i\omega\int_{r_p}^{r}\xi(r')dr'\right]. \tag{9.60}$$

波函数 $\sigma^{(k)}$ 是对于 SV 波的，它是由横波速度剖面 $\beta(r)$ 定义的，类似地有

$$\sigma^{(k)}(r,p,\omega)\sim e^{\mp i\pi/4}\left(\frac{\rho_s\beta_s}{\rho\beta\cos j}\right)^{1/2}\left(\frac{\beta_s}{\omega r}\right)$$
$$\times\exp\left[\pm i\omega\int_{r_p}^{r}\eta(r')dr'\right] \tag{9.61}$$

（这里的 r_p 是 S 波的转折点，其中 $\eta=(1/\beta^2-p^2/r^2)^{1/2}=\beta^{-1}\cos j$

为 0)。在(9.59)中强调的垂直慢度由下式定义：

$$\grave{\xi}\equiv\frac{1}{-i\omega\pi^{(2)}}\frac{d\pi^{(2)}}{dr},\acute{\xi}\equiv\frac{1}{i\omega\pi^{(1)}}\frac{d\pi^{(1)}}{dr},$$

$$\grave{\eta}\equiv\frac{1}{-i\omega\sigma^{(2)}}\frac{d\sigma^{(2)}}{dr},\quad\acute{\eta}\equiv\frac{1}{i\omega\sigma^{(1)}}\frac{d\sigma^{(1)}}{dr},\qquad(9.62)$$

在一次近似下，由 WKBJ 理论得到，在转折点以上，$\grave{\xi}\sim\acute{\xi}\sim\alpha^{-1}\cos i$ 和 $\grave{\eta}\sim\acute{\eta}\sim\beta^{-1}\cos j$。但在转折点以下，$\grave{\xi}\sim\acute{\xi}\sim-i(p^2/r^2-1/\alpha^2)^{1/2}$ 和 $\grave{\eta}\sim-\acute{\eta}\sim-i(p^2/r^2-1/\beta^2)^{1/2}$。撇号如 $\grave{\xi}$ 和 $\acute{\xi}$，是用以表明，$\grave{\xi}$(读作"ξ 向下")由下行波引出，而 $\acute{\xi}$(读作"ξ 向上")则由上行波引出。

$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 中，列的次序依次取成下行 P，下行 SV，上行 P，上行 SV；且其中每一种波出现的比例取决于 ω。对地球中每一非均匀层可确定这三个矩阵，但在应用的方式上常把它们和均匀层进行对比，这里有一主要的差别，简单地说这是因为现在仅需要极少的"层"。例如，对下地幔通常采用一层，其深度从约 650 公里一直向下到核幔边界。

因为(9.25 a)—(9.25 b)给出的势函数方法仅仅是近似的，必须认识到，我们给出的对 $\boldsymbol{A}$ 的公式及其波函数也只是近似的。然而，我们将能改进 WKBJ 的近似式。$\boldsymbol{E}$ 的公式(9.59)也是近似的，甚至在均匀的球面层中亦是近似的。尽管如此，对最深范围，其误差仅是 $\alpha/\omega r$ 和 $\beta/\omega r$ 的量级，在最不利的情况下是 $(\alpha/\omega r)^{2/3}$ 和 $(\beta/\omega r)^{2/3}$ 的量级，对体波频率这仍是无关紧要的。

虽然我们已研究了运动-应力向量方法，但它并未包含任何势函数方法所未给出的内容，还记得我们的目的是当碰到间断性边界条件时，求得薄记的系统方法。我们利用图 9.22 中表示的层序号，对每一内界面都可建立如(5.37)中给出的散射矩阵。作为参考，对 r_1 处的内界面，其全部 16 个 P-SV 的反射、转换、透射系数，在补充 9.6 中我们给出了一些专门的公式。

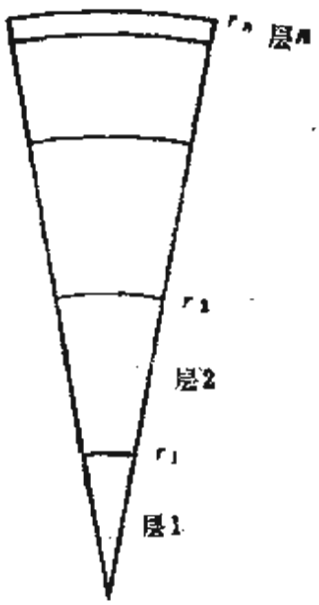


图 9.22
球面几何中层和边界的序号。由于每一层可以是非均匀的，在整个地球中，对于研究长周期体波仅需要几个层(约为 10 层)

补充 9.6

非均匀叠层的广义散射；在两个径向非均匀层间一个球形内界面的特例

我们假定，对一非均匀叠层，希望求出第M层和第$N+1$层之间所有内界面的散射。这些内界面本身位于半径r_M, r_{M+1}, r_{M+2}, ···, r_{N-1}, r_N等处，同时$(N+1)$层在r_N上面。

在第M层中，上行和下行的P-SV波系统用常向量来描述：

$$W_M=(\dot{P}_M,\ \dot{S}_M,\ \dot{P}_M,\ \dot{S}_M)^T,$$

并且在每一层中，从$f=Fw$得到

$$w_M=F_M^{-1}(r_M)f(r_M).$$

因此

$$\begin{aligned} w_N &= F_M^{-1}(r_M)F_{M+1}(r_M)w_{M+1} \qquad (1)\\ &=\{F_M^{-1}(r_M)F_{M+1}(r_M)\}\cdots\{F_N^{-1}(r_N)F_{N+1}(r_N)\}w_{N+1}\\ &=Hw_{N+1}, \end{aligned}$$

其中H是矩阵乘积。因此

$$(\dot{P}_M,\dot{S}_M,\dot{P}_M,\dot{S}_M)^T=H(\dot{P}_{N+1},\dot{S}_{N+1},\dot{P}_{N+1},\dot{S}_{N+1})^T, \qquad (2)$$

如果所有的层矩阵 $\boldsymbol{F}$ 及其逆 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 是已知的，则 $\boldsymbol{H}$ 可明确地得到。在很多应用中，在径向非均匀层内的 $\boldsymbol{F}$ 是由 (9.58)—(9.59) 给定，且其逆矩阵为

$$\boldsymbol{F}^{-1}=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} F_{33}/\alpha_s^3 & F_{43}/\alpha_s^3 & -F_{13}/\alpha_s^3 & -F_{23}/\alpha_s^3 \\ F_{34}/\beta_s^3 & F_{44}/\beta_s^3 & -F_{14}/\beta_s^3 & -F_{24}/\beta_s^3 \\ -F_{31}/\alpha_s^3 & -F_{41}/\alpha_s^3 & F_{11}/\alpha_s^3 & F_{21}/\alpha_s^3 \\ -F_{32}/\beta_s^3 & -F_{42}/\beta_s^3 & F_{12}/\beta_s^3 & F_{22}/\beta_s^3 \end{pmatrix}.$$

这里的下标 s 代表在某参考值处的性质（见(9.35)）。用 F 的元素表示的 F^{-1} 的这个公式是对 $(\pi^{(1)},\ \pi^{(2)})$ 和 $(\sigma^{(1)},\ \sigma^{(2)})$ 的 Wronski 行列式特性的结果。

我们用下式定义一散射矩阵 $\boldsymbol{S}$

$$(\hat{P}_{N+1},\hat{S}_{N+1},\hat{P}_M,\hat{S}_M)^T=\boldsymbol{S}(\hat{P}_{N+1},\hat{S}_{N+1},\hat{P}_M,\hat{S}_M)^T, \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} & \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} \\ \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} & \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} \\ \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} & \hat{P}\hat{P} & \hat{S}\hat{P} \\ \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} & \hat{P}\hat{S} & \hat{S}\hat{S} \end{pmatrix} \tag{5}$$

[与两均匀半空间之间的一内界面的 (5.34)—(5.37) 进行对比，(4) 的左半部表示散射波，$\boldsymbol{S}$ 作用于入射波。]现在，$\boldsymbol{S}$ 中的图表值指的是广义散射系数，所以，例如，$\hat{P}\hat{S}$ 代表第 $N+1$ 层中向下的 P 引起的在第 M 个非均匀层中向下透射的 SV 波的位相和振幅值。因此，$\hat{P}\hat{S}$ 包含了内界面 M 和 N 之间的叠层内所有的多次反射。为了用 H 中的各表值明确地得到 S，将 (2) 代入 (4) 中进行运算而得

$$\boldsymbol{S}=-\begin{pmatrix} H_{13} & H_{14} & -1 & 0 \\ H_{23} & H_{24} & 0 & -1 \\ H_{33} & H_{34} & 0 & 0 \\ H_{43} & H_{44} & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & -1 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{D}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -H_{44} & H_{34} \\ 0 & 0 & H_{43} & -H_{33} \\ \mathrm{D} & 0 & H_{14}H_{42}-H_{13}H_{44} & H_{13}H_{34}-H_{14}H_{33} \\ 0 & \mathrm{D} & H_{24}H_{43}-H_{23}H_{44} & H_{23}H_{34}-H_{24}H_{33} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & -1 & 0 \\ H_{41} & H_{42} & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

其中 $\mathbf{D}=H_{33}H_{44}-H_{34}H_{43}$.

将（6）中两个矩阵乘出来，可求得 S 中任一所需的表值。这里我们已给出的方法是 Červený（1974）提出的，他还说明了如何避免数值运算上的困难，即通过 H 的 2×2 子矩阵来处理 6×6 矩阵（称为delta矩阵）。对均匀层，约化成计算 5×5 矩阵的 delta 矩阵法已由 Kind（1976）详细地叙述过。

在两个非均匀层之间有一个内界面的特殊情况下，求得 S 往往是十分重要的。于是从（1）得到矩阵 H。(5.34)—(5.36) 中的方法使我们有如下定义：

$$a=\rho_2(1-2\beta_2^2p^2/r_1^2)-\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2),$$
$$b=\rho_2(1-2\beta_2^2p^2/r_1^2)+2\rho_1\beta_1^2p^2/r^2,$$
$$c=\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)+2\rho_2\beta_2^2p^2/r_1^2,$$
$$d=2(\rho_1\beta_2^2-\rho_1\beta_1^2),$$
$$E=b\grave{\xi}_1+c\acute{\xi}_2,\quad F=b\grave{\eta}_1+c\acute{\eta}_2,\quad G=a-d\grave{\xi}_1\acute{\eta}_2,$$
$$H=a-d\acute{\xi}_2\grave{\eta}_1,\quad \mathbf{D}=EF+GHp^2/r_1^2,$$

这里脚标 1 是对下层，脚标 2 是对上层。内界面本身位于 r_1 处，P-SV 系数为：

$$\grave{P}\acute{P}=-\{[(b\acute{\xi}_1-c\grave{\xi}_2)F+(a+d\grave{\xi}_2\grave{\eta}_1)Gp^2/r_1^2]/\mathbf{D}\}(\pi_2^{(2)}/\pi_2^{(1)}),$$
$$\grave{P}\acute{S}=\{(\grave{\xi}_2+\grave{\xi}_2)(ac+bd\grave{\xi}_1\grave{\eta}_1)p\alpha_2/(r_1\beta_2\mathbf{D})\}(\pi_2^{(2)}/\sigma_1^{(1)}),$$
$$\grave{P}\hat{P}=\{\rho_2(\acute{\xi}_2+\grave{\xi}_2)F\alpha_2/(\alpha_1\mathbf{D})\}(\pi_1^{(2)}/\pi_1^{(2)}),$$
$$\grave{P}\hat{S}=-\{\rho_2(\acute{\xi}_2+\grave{\xi}_2)Gp\alpha_2/(r_1\beta_1\mathbf{D})\}(\pi_2^{(2)}/\sigma_1^{(2)}),$$
$$\grave{S}\acute{P}=\{(\acute{\eta}_2+\grave{\eta}_2)(ac+bd\grave{\xi}_1\grave{\eta}_1)p\beta_2/(r_1\alpha_2\mathbf{D})\}(\sigma_2^{(2)}/\pi_1^{(1)}),$$
$$\grave{S}\hat{S}=\{[b\grave{\eta}_1-c\grave{\eta}_2)E+(a+d\grave{\xi}_1\grave{\eta}_2)Hp^2/r_1^2]/\mathbf{D}\}(\sigma_2^{(2)}/\sigma_1^{(1)}),$$
$$\grave{S}\hat{P}=\{\rho_2(\acute{\eta}_2+\grave{\eta}_2)Hp\beta_2/(r_1\alpha_1\mathbf{D})\}(\sigma_2^{(2)}/\pi_1^{(2)}),$$
$$\grave{S}\hat{S}=\{\rho_2(\acute{\eta}_2+\grave{\eta}_2)E\beta_2/(\beta_1\mathbf{D})\}(\sigma_2^{(2)}/\sigma_1^{(2)}),$$
$$\acute{P}\acute{P}=\{\rho_1(\grave{\xi}_1+\acute{\xi}_1)F\alpha_1/(\alpha_2\mathbf{D})\}(\pi_1^{(1)}/\pi_2^{(1)}),$$
$$\acute{P}\acute{S}=\{\rho_1(\grave{\xi}_1+\acute{\xi}_1)Hp\alpha_1/(r_1\beta_2\mathbf{D})\}(\pi_1^{(1)}/\sigma_2^{(1)}),$$
$$\acute{P}\grave{P}=\{[b\acute{\xi}_1-c\acute{\xi}_2)F-(a+d\acute{\xi}_1\acute{\eta}_2)Hp^2/r_1^2]/\mathbf{D}\}(\pi_1^{(1)}/\pi_1^{(2)}),$$

$$\grave{P}\hat{S}=-\{(\acute{\xi}_1+\acute{\xi}_1)(ab+cd\acute{\xi}_2\acute{\eta}_2)pa_1/(r_1\beta_1\mathrm{D})\}(\pi_1^{(1)}/\sigma_1^{(2)}),$$

$$\acute{S}\acute{P}=-\{\rho_1(\grave{\eta}_1+\acute{\eta}_1)Gp\beta_1/(r_1a_2\mathrm{D})\}(\sigma_1^{(1)}/\pi_2^{(1)}),$$

$$\acute{S}\acute{S}=\{\rho_1(\grave{\eta}_1+\acute{\eta}_1)E\beta_1/(\beta_2\mathrm{D})\}(\sigma_1^{(1)}/\sigma_2^{(1)}),$$

$$\acute{S}\grave{P}=-\{(\grave{\eta}_1+\acute{\eta}_1)(ab+cd\acute{\xi}_2\acute{\eta}_2)p\beta_1/(r_1a_1\mathrm{D})\}(\sigma_1^{(1)}/\pi_1^{(2)}),$$

$$\acute{S}\hat{S}=\{[(b\acute{\eta}_1-c\acute{\eta}_2)E-(a+d\acute{\xi}_2\acute{\eta}_1)Gp^2/r_1^2]/\mathrm{D}\}(\sigma_1^{(1)}/\sigma_1^{(2)}).$$

每一系数中最后的因子是在 r_1 处求得的波函数之比。

这里我们惯用的符号适合于(9.58)中的因变量。例如，如果

$$w_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\hat{S}\acute{P}\\\hat{S}\acute{S}\end{pmatrix}\quad\text{则}\quad w_1=\begin{pmatrix}\hat{S}\grave{P}\\\hat{S}\hat{S}\\0\\0\end{pmatrix}.$$

如果两层中的一层是流体，则 16 个系数中只有 9 个是有意义的。用求极限的方法，从这里所给出的这些值可以很容易地求得它们。例如，如果层 1 是流体核，则用 $\beta_1\to 0$，$\eta_1\to\infty$ 和 $bc-ab\,p^2/r_1^2=\rho_1\rho_2$。依此方法，将前面定义的系数 $\grave{P}\grave{P}$，$\acute{P}\grave{P}$，$\acute{P}\hat{S}$ 用于核幔边界则分别得到 $\grave{P}\grave{K}$，$\acute{K}\grave{K}$ 和 $\acute{K}\hat{S}$。

对 SH 和一个内界面的情况，其相应的结果为

$$\hat{S}\hat{S}=[(\mu_2\grave{\eta}_2-\mu_1\grave{\eta}_1)/\mathrm{D}]\sigma_2^{(2)}/\sigma_2^{(1)},$$

$$\hat{S}\grave{S}=[\mu_2(\grave{\eta}_2+\acute{\eta}_2)/\mathrm{D}]\sigma_2^{(2)}/\sigma_1^{(2)},$$

$$\acute{S}\acute{S}=[\mu_1(\acute{\eta}_1+\grave{\eta}_1)\mathrm{D}]\sigma_1^{(1)}/\sigma_2^{(1)},$$

$$\acute{S}\hat{S}=[(\mu_1\acute{\eta}_1-\mu_2\acute{\eta}_2)/\mathrm{D}]\sigma_1^{(1)}/\sigma_1^{(2)},$$

其中 $\mathrm{D}=\mu_1\grave{\eta}_1+\mu_2\acute{\eta}_2$，$\mu_1\mu_2$ 分别为界面以下和界面以上的刚性系数。

我们至终可以将我们的理论应用于某些地震体波问题了。首先，我们将研究 PcP（从核-幔边界反射的 P 波）及其连带的绕射和干涉现象。我们从 r_s 处一爆炸源 $M_{ij}=M_0(t)\delta_{ij}$ 开始，由(9.40)—(9.46)我们注意到

$$u_r^{\wedge}(r,\Delta_0,\omega)=\frac{-i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s a_s^4}\int_\Gamma \omega^2 p\pi^{(1)}(r_s)$$
$$\times[a(r)\acute{\xi}(r)\pi^{(1)}(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)\,dp. \qquad (9.63)$$

这正是从 r_s 离源向下传至 r，在 (r,Δ_0) 处的直达波，如图 9.17

所示。对现在的目的，我们假设震源和接收点的深度一直向下到核幔边界，对于 ρ 和 α 都是平稳变化的剖面。就是用这个剖面定义了波函数 $\pi^{(1)}$，同时并用来区分地核剖面和地幔剖面，对此两者标以脚标 c 和 m 是必要的。我们把(9.63)称作 $u^{\wedge}$，因为正是这种类型的入射波和核幔边界发生相互作用。注意到(9.63)中和 r 的关系完全归因于被积函数因子 $[\alpha(r)\xi(r)\pi^{(1)}(r)]$。正是这一项表现为预计的 $\boldsymbol{F}$ 中行和列的表值(在 r 处向上到达的 P 波的径向位移分量)。这说明我们用以薄记的一些新符号是适用于垂直波函数的。它还证明，在补充 9.6 中对 $\boldsymbol{F}$ 的列所得的反射系数或透射系数可直接用于(9.63)中的被积函数。

将因子 $\grave{P}\acute{P}$ 引入 (9.63)，可完全得到在核-幔边界上的广义反射

$$u_r^{P+PcP}(r,\Delta_0,\omega)=\frac{-i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\alpha_s^4}$$

$$\times\int_\Gamma \omega^2 p\pi^{(1)}(r_s)\grave{P}\acute{P}[\alpha(r)\xi(r)\pi^{(1)}(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp, \tag{9.64}$$

这里的路径 Γ 和相关的复射线参量平面的特性如图 9.23 所示。补充 9.6 中给出了 $\grave{P}\acute{P}$，地核和地幔分别取为层 1 和层 2。虽然(9.64)的精确演算是很复杂的 (Nussezveig，1965，描述了一个有关的正则问题)，但当认识并理解了这个被积函数的简单性质时，这个结果是有意义的。因此，在 P 和 PcP 均可被接收到的距离 Δ_0 处 (图 9.23 a)，被积函数有两个鞍点。对于直达 P 波的具有大于 p_s 的射线参量 p，其中 $p_s=r_{CMB}/\alpha_m(r_{CMB})$ 适用于刚好碰到核幔边界的射线。脚标 m 代表地幔的性质。如 $p>p_s$，则 $\xi_m\sim\xi_m$，并且很容易表示成 $\grave{P}\acute{P}\sim 1$。对(9.64)中的直达波 P 的鞍点恰和我们在 (9.41) 中先已研究过的相同。如 $p<p_s$，则(9.64)中被积函数的相位可从以下因子得到：

$$\pi_m^{(1)}(r_s)[\pi_m^{(2)}(r_{CMB})/\pi_m^{(1)}(r_{CMB})]\pi_m^{(1)}(r)Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0).$$

对此相位，WKBJ 理论可证明其给出 $\exp[i\omega(T-p\Delta+p\Delta_0)]$，其中的 $T(p)$和 $\Delta(p)$适合于 PcP 射线。我们前已叙述过这样的相位因子如何给出鞍点。事实上，$\partial\Delta/\partial p$ 在此情况下是正的，所给出的鞍点位置如图 9.23 c 所示。因而，在 $p<p_d$ 的范围内利用 WKBJ 理论，可证明 $\grave{P}\acute{P}$ 的振幅等于平面波的反射系数(仍是

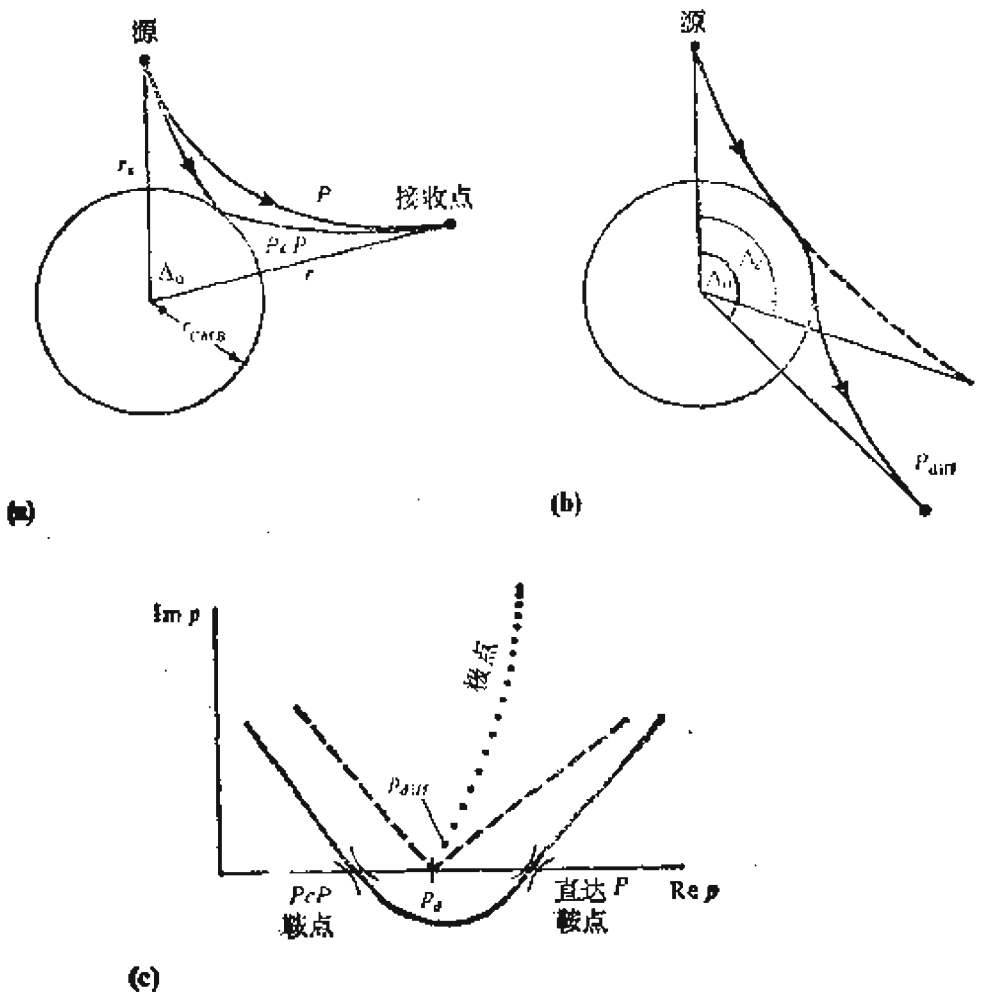


图 9.23

(a)直达波 P和 PcP 的射线。(b)超过 Δ_d 即为影区，在影区中 P波是衍射的。(c)相关的复 p 平面。对 $\Delta_0<\Delta_d$ 的距离，出现两个鞍点。从 p_d 向上成串的衍射极点总是存在的，但现代地震学强调沿迴线(虚线)求积分来计算(9.64)，而不是求鞍点的近似式或计算个别的留数。极点位置如补充 9.8 所述。注意，在 Δ_d 的任何一边上，对所取的距离 Δ_0 的范围内有一条路径是适用的。和图 6.22 e 所示的路径进行对比

p 的函数)。对这个 PcP 鞍点(补充 6.3)求积分，继续求出鞍点的近似式，我们将只对这个相位重新使用经典射线理论（即用几何扩散和平面波反射系数一起来描述核-幔边界处的散射)。

PcP 的这些初步讨论引出了一般规律中的一个特例：若在源和接收点之间存在一实射线，则应用于广义射线的积分表达式[参照(9.64)]的两个近似式（WKBJ 理论和鞍点近似式)的组合，将只给出几何射线理论。首先，对均匀介质，在(6.19)的推导中我们已得到了这一特性的结果。Seckler 和 Keller (1959) 对非均匀介质也给出了很多实例。当然，我们的兴趣是改进经典射线理论。当既不利用 WKBJ 近似式又不利用鞍点近似式时，我们将给出几个改进这个结果的实例。

回到图 9.23，我们看到，当 Δ_0 增加时，直达波 P 和 PcP 的射线向一起靠近，而在特定的距离 Δ_d 处，它们汇合起来。采用光学的术语，自然地称 Δ_d 为影区边界，因为它表示了范围 $\Delta < \Delta_0$ 的界限，在这个范围内既无直达波 P 也无 PcP 出现。如图 9.23 b 所示，在影区内到达的射线必然绕着地幔的基底蠕动。这种到达波在地震学中已广泛地被观测到，称之为衍射的 P 波（写成 $P_{衍}$)。在几何上它类似于无线电波在地球的弯曲表面上的衍射，对这一问题，Watson 最早研究过这一现在以他的名字命名的变换。在 $\Delta_0=\Delta_d$ 时，两个鞍点在 $p=p_d$ 处汇合。在影区之内，线积分(9.64)可求得，它为一串极点（补充 9.8 中所述，$\grave{P}\acute{P}$ 的分母的零点)的留数之迅速收敛的级数，这些极点从恰在 p_d 上部的第一个极点向上延伸到第一象限中。如果接收点恰好在影区之内，以致 Δ_0 比 Δ_d 大得多，则只有第一个留数是重要的。它被定位于 $P_{衍}$处，紧挨着 p_d，此时 $p_{衍}=p_d+\lambda e^{i\pi/3}\omega^{-2/3}$，这里的 λ 是和 $p_d^{1/3}$ 具有同量级的正的常数。完全在影区之内时，得到衍射波 $P_{衍}$的振幅比例于

$$\exp[-\omega^{1/3}\lambda \sin(\pi/3)(\Delta_0-\Delta_d)].$$

因此，$P_{衍}$的振幅在较高频率时衰减较快，且在较大距离上进入

影区。

(9.64)的所有这些性质已由 Scholte(1956)叙述了。Phinney 和 Cathles(1969)指出，线积分(9.64) 的数值计算有很多优点。一个合适的路径是如图 9.23 c 所示的两条虚线段；在两种不同频率上的积分结果如图 9.24 所示。

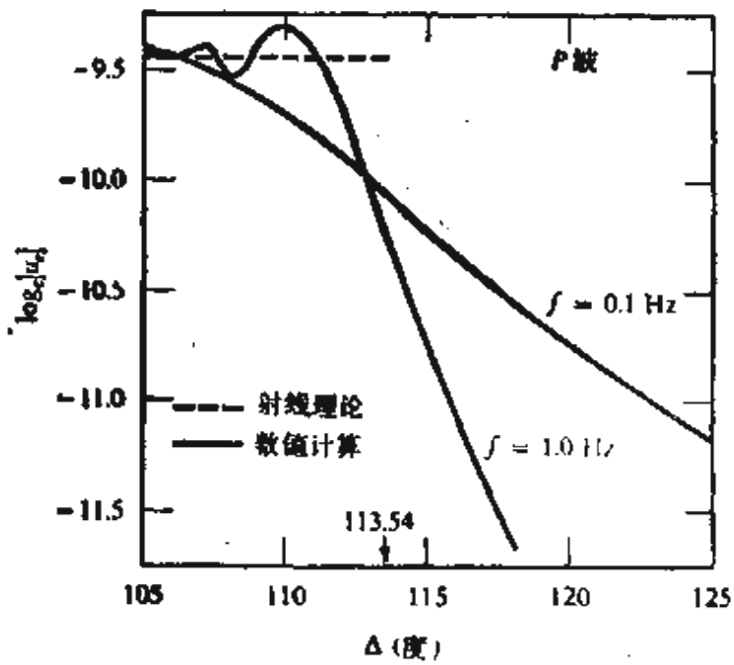


图 9.24

由一阶梯函数 $M_0(t)$的爆炸源所产生的 P 波位移振幅的垂直分量。在不同的频率上通过(9.64)进行了计算，积分的路径在前一图中给出（线段）。在这粗略的地球模式中，影区边界 Δ_s 为 113.54°。在 $\Delta_0<\Delta_s$ 时 P 和 PcP 相干涉。虚线仅给出直达 P 波的射线理论。虽然没有清晰的影区边界，在 Δ_s 附近，1 赫频率时的振幅随距离确实相当迅速的衰减。当进入影区较远时，可能观测到长周期波

在本节的余下部分，我们将叙述在复射线参量平面中沿着直线段所构成的路径进行数值积分的结果。但在理论上还需要一个新的环节。我们发现，当 p 在其径向自变量在一转折点的值附近变化时，往往需要计算类似 $\pi_m^{(l)}(\tau_{CMB}, p, \omega)$的波函数。上述的即是这种情况，例如，在图 9.23 c中的 p_s 附近，还注意到几乎 P_{diff} 中全部能量都具有这个射线参量。问题是，恰好在此转折点区域

中 WKBJ 近似式不再成立，如补充 9.3 所述。(图 9.24 中的计算是没问题的，因为“地幔”和“地核”是均匀的，所以用球面 Hankel 函数可精确地给出垂直波函数 $\pi^{(j)}$ 和 $\sigma^{(j)}$。)幸而，在很多径向非均匀的情况下，有一个 $\pi^{(j)}$ 和 $\sigma^{(j)}$ 能满足一致的渐近逼近式。在补充 9.7 中给出了简要的评述，并且在这里讲到的结果为其 Langer 近似式

$$\pi^{\binom{1}{2}}(r,p,\omega)\sim\left(\frac{\pi\rho_s\alpha_s}{2\rho\alpha}\right)^{1/2}\frac{\alpha_s e^{\mp i\pi/6}}{\omega r}\left(\frac{\omega\tau}{\alpha\xi}\right)^{1/2}H^{\binom{1}{2}}_{1/3}(\omega\tau), \tag{9.65}$$

其中 $\tau=T-p\Delta=\int_{r_s}^{r}\xi(r')dr'$ 和 $\xi=\xi(r)=1/\alpha^2(r)-p^2/r^2)^{1/2}$。相应的垂直慢度为

$$\dot{\xi}\sim\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{p^2}{r^2}\right)^{1/2}e^{-i\pi/6}\frac{H^{(2)}_{2/3}(\omega\tau)}{H^{(2)}_{1/3}(\omega\tau)}$$

和

$$\xi\sim\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{p^2}{r^2}\right)^{1/2}e^{i\pi/6}\frac{H^{(1)}_{2/3}(\omega\tau)}{H^{(1)}_{1/3}(\omega\tau)}. \tag{9.66}$$

对 $\sigma^{(j)}$，$\dot{\eta}$ 和 η 类似的表示式是建立在 $\beta(r)$ 和剪切波转折点的基础上的。

补充 9.7

垂直波函数的一致渐近逼近式

在先前对垂直波函数($g^{(1)}$, $g^{(2)}$, f, $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}$, $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$) 的讨论中，着重点是这些函数所满足的运动方程，因此，原则上我们认为它们是 r 的函数。但为计算由点源产生的波，我们往往要研究当 r 是固定时的(源点或接收点的位置或施加的某些边界条件的水平)垂直波函数和可变的 p 和 ω。

在一适当的归一化被确定之后，对较大的 ω，当 p 和 ω 改变而计算波函数时，WKBJ 近似式(9.35)—(9.36)和 (9.60) 往往是合适的。然而，这是一个非一致逼近式，它可能太粗或者造成严重错误，当 p 值接近于一个特定的 p_r 值，这个 p_r 使径向变量 r 出现一转折点。为得到一个一致逼近式，我们将再回头讲运动方程。

下面我们将研究 $g^{(1)}$和 $g^{(2)}$，并引入作为下式的向外和向内波的两个解：

$$\frac{d^2}{dr^2}[ra(r,l)]+\omega^2\left[\frac{1}{\alpha^2(r)}-\frac{l(l+1)}{\omega^2r^2}\right]ra(r,l)=0. \qquad (1)$$

先前，当 r 在 r_p 附近变化时设法求解(1)，其关键在于对 $ra(r,l)$ 项的系数求出 Taylor 级数展开式，即把这项展开成 $r-r_p$ 的幂级数。在转折点本身范围内，这导出 Airy 函数的解，此解具有和$(r-r_p)$成比例的自变量[参照补充 9.3 中方程(5)的推导]。但这又是一个非一致逼近式，因为它仅在转折点范围才起作用。

我们将利用的一致渐近解是以 Langer(1951)和 Olver(1954 a,b)的工作为基础的。实际上，这种方法利用的是从 r 和 $\alpha(r)$ 得到的一个新的深度变量，用此变量时，在包括转折点深度在内的所有深度上方程(1)接近于 Airy 方程。我们将只叙述其结果，更详细的请读者参考 Richards(1976 b)的文献。

因此，如对 WKBJ 近似式所定义的那样，从 $\tau=\tau(r,p)=\int_{r_p}^{r}\xi dr$ 着手，我们引入了新的深度变量 $\zeta=\left(\frac{3}{2}\omega\tau\right)^{2/3}$。这里假定速度剖面是半径的解析函数，所以 r_p 也是 p 的解析函数。由此得出 ξ，τ 和 ζ 是 p 的解析函数，所以 $g^{(1)}$和 $g^{(2)}$也是解析函数。如果速度剖面不是解析的（即它可能由很多 Mohorovičić 层构成，每一层中速度由 ar^b 给出，且在层中 a，b 为常数），则 r_p 不是 p 的解析函数，$g^{(1)}$和 $g^{(2)}$也都不是解析函数。即使如此，$g^{(1)}$和 $g^{(2)}$可能随着 p 有相当平稳的变化，以使在复平面中，对于我们的目的而言可将其作为解析函数来处理。

用 ζ，(1)可写成如下形式：

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}\left[r\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^{1/2}a(r,l)\right]+\zeta\left[r\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^{1/2}a(r,l)\right]$$
$$=\text{频率低两个量级的项}. \qquad (2)$$

当 ω 较大，右半边一律可忽略（即对所有的深度）。由此得到，$r(d\zeta/dr)^{1/2}a(r,l)$具有由 Airy 函数的线性组合构成的解，Airy 函数为

$$\mathrm{Ai}(-\zeta),\ \mathrm{Ai}(-e^{2i\pi/3}\zeta),\ \mathrm{Ai}(-e^{-2i\pi/3}\zeta). \qquad (3)$$

现在，对 $a(r,l)$，我们已得到所需要的一致渐近解，对每一个特解 $g^{(1)}$(向外的波)和 $g^{(2)}$(向内的波)，仅仅还需判别 (3) 的特定的线性组合。这是很容易做的，只要对比(3) 中三个函数的 WKBJ 近似式和 $g^{(1)}$与 $g^{(2)}$的 WKBJ 近似式即可。这个对比告诉我们

$$g^{(1)}_{(2)} \sim \frac{2}{\omega\tau}\left(\frac{\pi\alpha_s}{\xi}\right)^{1/2}\zeta^{1/4}\mathrm{Ai}(-e^{\pm 2i\pi/3}\zeta)e^{\mp i\pi/3}. \tag{4}$$

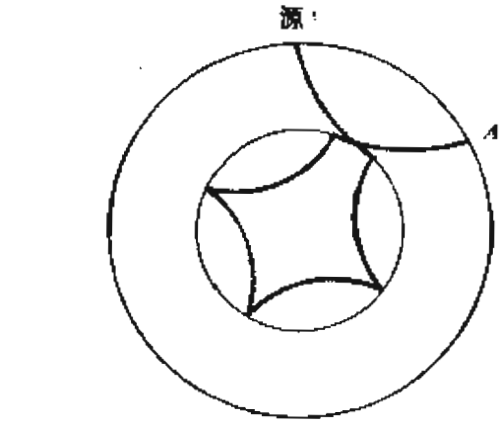
WKBJ 理论仅用于求得上述的归一化，(4) 给出了我们所需要的一致渐近逼近式。在计算上它们比 WKBJ 近似式稍有困难。两者都要求 $\tau=\tau(r,\ p)$，(4)以 Airy 函数为处理对象，而 WKBJ 近似式用的是指数形式。

在正文中引用的 Langer 近似式(9.65)是以前述的(4)，(9.60)以及使 Airy 函数和 1/3 次的 Hankel 函数相关的标准公式为基础的。在(4)和 (9.65) 中各个因子所需要的不同的分支切割是这样选定的，它们使各因子的乘积和 Langer 近似式本身都是一全函数(单值的和解析的)，对有限的 p 其边界处处都在 p 平面中。$g^{(1)}$的各零点位于这个平面中第一和第三象限中，而 $g^{(2)}$的各零点位于第二和第四象限中(见补充 9.8)。

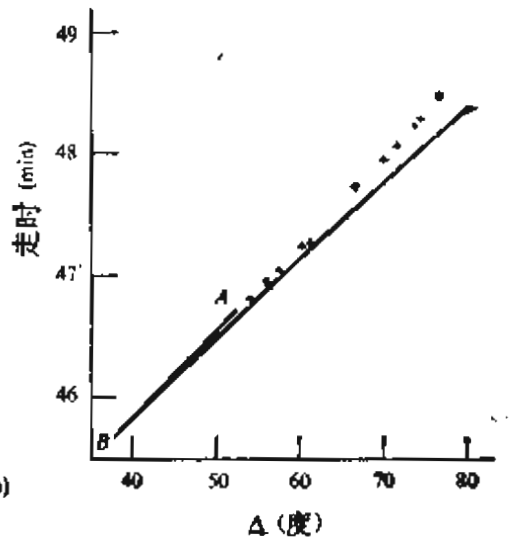
在本节余下的部分中，我们将引用地震学中体波的一些例子，其性质很容易通过类似于(9.64)在复射线参量平面中的线积分而定量地表示，但对垂直波函数却用了 Langer 近似式。

因此，现在我们来看 P 波，它已透射到地球的液核中，这正是一个最好的例子，它说明在低速介质(此时为液核)位于内界面以下的情况下，当波和一间断面相互作用时将可能发生什么情况。专门来研究 $P\ 4\ KP$ 的例子(见图 9.25 a)，它已在大的核爆破之后观测到(Adams, 1972; Buchbinder, 1972)，我们的理论允许我们写出距离 Δ_0 处的径向位移

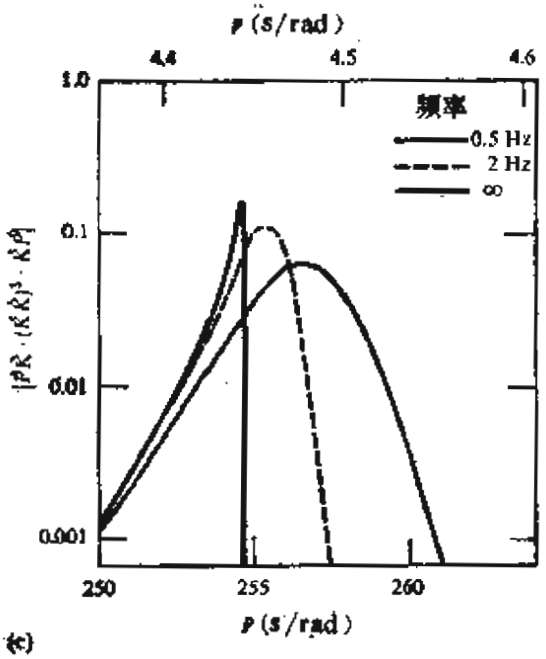
$$u_r^{P4KP}(r,\Delta_0,\omega) = \frac{-i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\alpha_s^4}$$
$$\times\int_\Gamma \omega^2 p\pi^{(1)}(r_s)\dot{P}\dot{K}(\acute{K}\grave{K})^3(\acute{K}\acute{P})$$
$$\times[\alpha(r)\xi(r)\pi^{(1)}(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)\,dp. \tag{9.67}$$


源
A

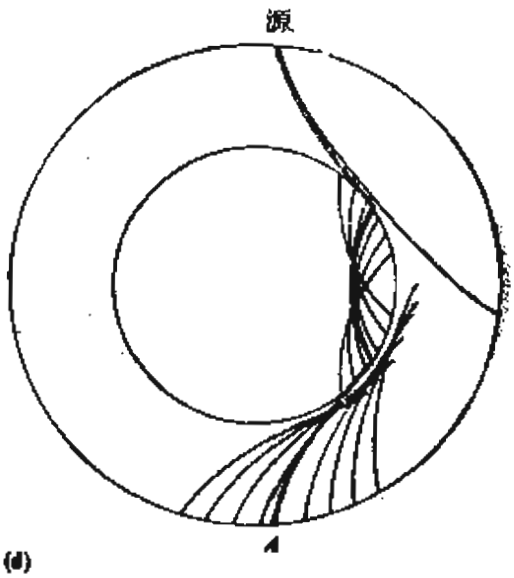
(a)


走时 (min)
49
48
47
46
A
B
40
50
60
70
80
Δ (度)

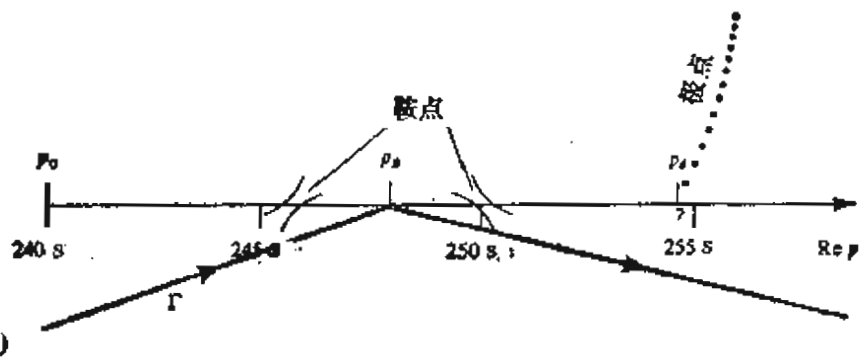
(b)


p (s/rad)
4.4
4.5
4.6
1.0
0.1
0.01
0.001
频率
0.5 Hz
2 Hz
∞
250
255
260
P (s/rad)

(c)


源
A

(d)


极点
断点
240 s
255 s
Re p
Γ

(e)

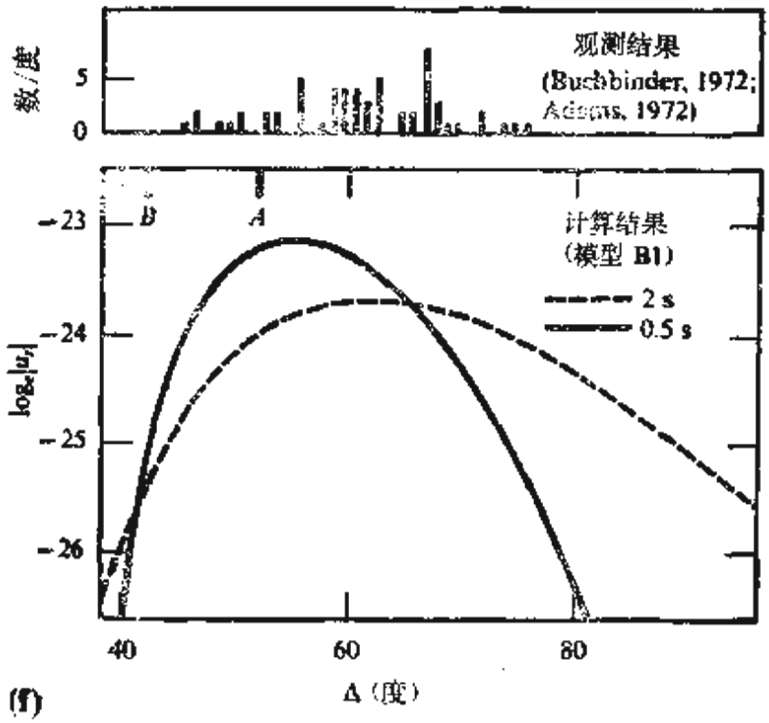


图 9.25

地幔中的 p 波在地球的核幔边界下面形成内反射，称为 $PmKP$，以整数 m 表示液核内路径的各段。(a) $P4KP$ 的射线路径。所示的射线参量刚好是地核-掠射的射线参量 p_a。对这个特殊的射线参量，$P4KP$ 在地表的出射点标成 A。根据经典的射线理论，可预期，仅当射线参量小于或等于 p_a 时才能观测到 $P4KP$。然而，情况不是这样。(b) 将 Jeffreys-Bullen 地球模型中 $P4KP$ 的走时曲线表为实线。A 处为射线参量的最大值，曲线从 A 处开始并减小到 B 处为最小值($\Delta=\Delta(p)$ 时)，此处为一个焦散点。在 $\partial\Delta/\partial p<0$ 的分支上，射线参量连续减小。对判定为新地岛地区的核爆炸，在北美洲台站上记录所观测到的一些走时，图中以十字表示。(c) 对两个有限频率，图中示出 $P4KP$ 相关的反射系数和透射系数的乘积相对于射线参量的变化。图中亦示出了当频率趋于无限时的极限情况[当 $p_a<p$ 时它为零，而当 $p<p_a$ 时它只不过是平面波系数 (5.39) 的一个乘积](引自 Richards,1973)。(d) 所画最粗的射线是地核-掠射射线，在 A 处出射。在转折点以下其能量成指数衰减。因此，对射线参量稍高于 p_a 的射线，在核-幔边界会从上向下漏能。在此边界以下能量又沿实射线传播。因此，刚好在转折点以下的高速区其作用如一隔板，当以有限的频率通过它时，一些能量可进入低速带（此时即为地核）。为清楚起见，这里我们仅表示出 PKP，但对所有的 $PmKP$，都将产生这一隧道现象。能量也可通过隧道返回到地幔。在某一距离的范围上隧道将扩散能量，并且这个范围延伸到远远超过 A 点。(e) (9.67)中的被积函数在复 p 平面中的特性。在 $P=P_a$ 任何一边上的鞍点，其行为类似于 9.19 b、c 所给出的那样。当 $p=p_0$ 时 $\hat{K}\hat{K}$ 有一零值。(f) 在两个频率上 $P4KP$ 的振幅相对距离的图，这是用 Jordan 和 Anderson(1974)的地球模型 B1 按(9.67)算得的。标出了这个模型中的 A 点和 B 点，并注意于超过 A 点产生最大振幅。观测到的典型的 $P4KP$ 具有约 1 秒的周期，上半部的图是以 Buchbind(1972)和 Anderson(1972)发表的观测值为基础的直方图。计算曲线中的最大值确出现在观测数据比较多的那些距离上

这里我们用 K 作为流体核中的 P 波，所以 $\grave{P}\grave{K}$ 是透射系数（很容易从补充 9.6 给出的广义的 $\grave{P}\grave{P}$ 中得到），$\acute{K}\grave{K}$ 是内反射，$\acute{K}\acute{P}$ 是另一个透射系数。$P4KP$ 射线理论的走时曲线表示在图 9.25 b 中，新奇的是相位的观测值（在短周期 WWSSN 仪器上是很充分的，所以对应用所期望的经典射线理论其频率成分是足够高的）仅和后一分支有关。更新奇的是这些观测值主要地是在超过这后一分支"尾端"的距离上，即在截止点 A 以外，而 A 表示几何射线向外可达到的极限点。在相应于图 9.25 b 所示两个射线到达（即走时的两个分支）处的两鞍点附近，研究 P 值处的 $\grave{P}\grave{K}\cdot(\acute{K}\grave{K})^3\cdot\acute{K}\acute{P}$ 可以很好地对此现象的解释加以理解。对于频率为 $\frac{1}{2}$ 赫、2 赫，系数的乘积画在图 9.25 c 中，并且也画出了当频率趋于无限时的极限情况。当在 254.6 秒时临界的射线参量是显然的，而超过这个值时其振幅在极限情况下为零。对刚好掠过地核的地幔射线，临界值是射线参量 p_d。然而，对有限的频率，甚而当 $p>p_d$ 时，能量可顺着这个广义射线传送。这个现象称为隧道效应（引自量子力学中的现象，量子力学中有一相似的理论），并且在图 9.25 d 中给出了进一步的描述。因为有因子 $(\acute{\xi}_m+\grave{\xi}_m)\,\pi_m^{(2)}(r_{CMB})$，所以当 p 增加并超过 p_d 时，$\grave{P}\grave{K}$ 在数值上变得很小。用(9.62)和 $\pi^{(1)}$、$\pi^{(2)}$ 的 Wronski 行列式，则这个因子的量级为 $[\pi_m^{(1)}(r_{CMB})]^{-1}$。在转折点以下，$\pi^{(1)}$ 和 $\pi^{(2)}$ 两者都以指数增加，所以我们考察的这个因子肯定是指数衰减的。在数值上，$\acute{K}\acute{P}$ 也有类似于 $[\pi_m^{(1)}(r_{CMB})]^{-1}$ 的行为。然而，$\acute{K}\grave{K}$ 是 1 的量级。刚巧，在核-幔边界的情况下在非常接近于 $p=240$ 秒时（即对 p_d 的左边）$\acute{K}\grave{K}$ 有一个零点，而当 p 增加到接近于 p_d 时，$\acute{K}\grave{K}$ 从零迅速增加。我们必须计算的正是这个反射系数的立方，$(\acute{K}\grave{K})^3$ 的迅速增加超过了 $p_d<p$ 范围上短周期部分 $\grave{P}\grave{K}\cdot\acute{K}\acute{P}$ 的衰减，这在图 9.25 c 中以断续线和浅色线给出，实际上它在隧道效应范围内有其最大值。在计算(9.67)时对 Γ 的选择可采用如图 9.25e

所示。更简单地可采用从 $p\sim240$ 秒到 $p\sim265$ 秒的实轴（因为 $\hat{K}\hat{K}$ 中的零点在左边给出了自然的锥形线，在右边为一指数的锥形线，如图 9.25 c 所示）。最后，图 9.25 f 所表示的是在不同距离处对 $P\,4\,KP$ 的线积分(9.67)的计算结果。确实，这表明，在周期范围 $\frac{1}{2}\sim2$ 秒间有最强的到达波，并且它的确位于射线理论的截止点 A 以外。这效应并不小，因为波的到达可以看得见，而从理论上却解释为在 20° 距离处（即约 2000 公里）进入“禁”区。Fuchs 和 Schulz(1976)曾指出在地壳结构中有一高速层时，对于体波此隧道效应也可能是显著的。

下面我们来研究 SKS 波和有关的多重波 $SKKS, SKKKS$ 等，并简化表示成 $SmKS$，m 为不同的整数。这些 SV 波是些极好的例子，它说明若快速介质位于某内界面以下时（在地幔基底的 S 波速度小于地核顶部的 P 波速度），当这些波和这个间断面相互作用时可能发生什么情况。Choy(1977)曾对这些震相利用了 Langer 近似式，对复数 p 也对实数 ω 求积分，给出了时间域上的合成地震图。

对 SV 波，首先我们来看一个震源，它不同于在本章内至今我们已考虑过的各向同性的 P 波源。可以得到显解的一个实用的源是这样的剪切位错，其走向为 ϕ_s，倾角为 λ，俯角为 δ 以及强度(即地震矩)为 $\mu A\bar{u}=M_0(\omega)$。对这样一个源，我们得到其辐射图案和几何扩散公式为(4.85)及(4.89)式。我们现今的目标是进而改进这个近似式，其水平分量为

$$u_{\Delta}^{SV}(r,\Delta_0,\phi,\omega)\sim\frac{\mathscr{F}^{SV}(-i\omega M_0(\omega)(-\cos j)\exp(i\omega T^S)}{4\pi[\rho_s\rho(r)\beta_s^5\beta(r)]^{1/2}\mathscr{R}^S(r,r_s)}. \tag{9.68}$$

[这里出现了因子 $-\cos j(r)$，因为(4.89)给出了在 $\hat{P}$ 方向上的振幅而我们要求的是在 Δ 增加的方向上的水平分量。] 从我们以前关于 P 波的经验，我们知道

$$\frac{i\omega}{a_s^4}\int_\Gamma \omega^2 p\pi^{(1)}(r_s)[a(r)\xi(r)\pi^{(1)}(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp$$

$$\sim\left[\frac{\rho_s}{\rho(r)a_s^5 a(r)}\right]^{1/2}\frac{\cos i}{\mathscr{R}^P(r,r_s)}\exp(i\omega T^P).$$

所以相应的 SV 的结果可写成

$$u_\Delta^{SV}(r,\Delta_0,\phi,\omega)=\frac{i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\beta_s^4}$$

$$\times\int_\Gamma \omega^2\rho\mathscr{F}^{SV}\sigma^{(1)}(r_s)[\beta(r)\eta(r)\sigma^{(1)}(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp. \tag{9.69}$$

此式代表在震源处向下行的 SV 波，而在(r,Δ_0)处被接收到为向上行的 SV 波。仅仅按照这个描述，我们可写出(9.69)中大多数被积函数因子。其余的因子仅仅给出归一化形式，对此利用经典射线理论是完全合适的。因此，(9.69)中的 $\mathscr{F}^{SV}$ 可由(4.85)给出为(p,ϕ)的函数：

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{SV}(p,\phi)\sim&[\sin\lambda\cos 2\delta\sin(\phi-\phi_s)\\&-\cos\lambda\cos\delta\cos(\phi-\phi_s)](1-2\beta_s^2p^2/r_s^2)\\&+[\cos\lambda\sin\delta\sin 2(\phi-\phi_s)\\&-\sin\lambda\sin 2\delta(1+\sin^2(\phi-\phi_s))]\frac{\beta_s^2 p}{r_s}\left(\frac{1}{\beta_s^2}-\frac{p^2}{r_s^2}\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{9.70}$$

由于 (9.70) 来源于射线理论，它仅是近似的。然而，当射线的转折点正好在震源的层位以下时，对体波它有相当高的精度，这种情况对于核震相是适合的。尽管将 (9.70) 代入 (9.69) 给出了两个不同的被积函数，$\mathscr{F}^{SV}(p,\phi)$ 沿 Γ 的那些在数值上有重要的被积函数的部分可能随着 p 如此缓慢地变化，以致实际上是一常数并可移到积分之外(也见补充 9.10)。

如果从震源辐射的波，其波长和断层破裂面的空间尺度相比是非常之大，则断层活动的有限长度可对远场的地震波产生显著的影响。这是第十四章中的课题，并且在补充 14.1 中对我们介绍的理论给予了必要的修正。

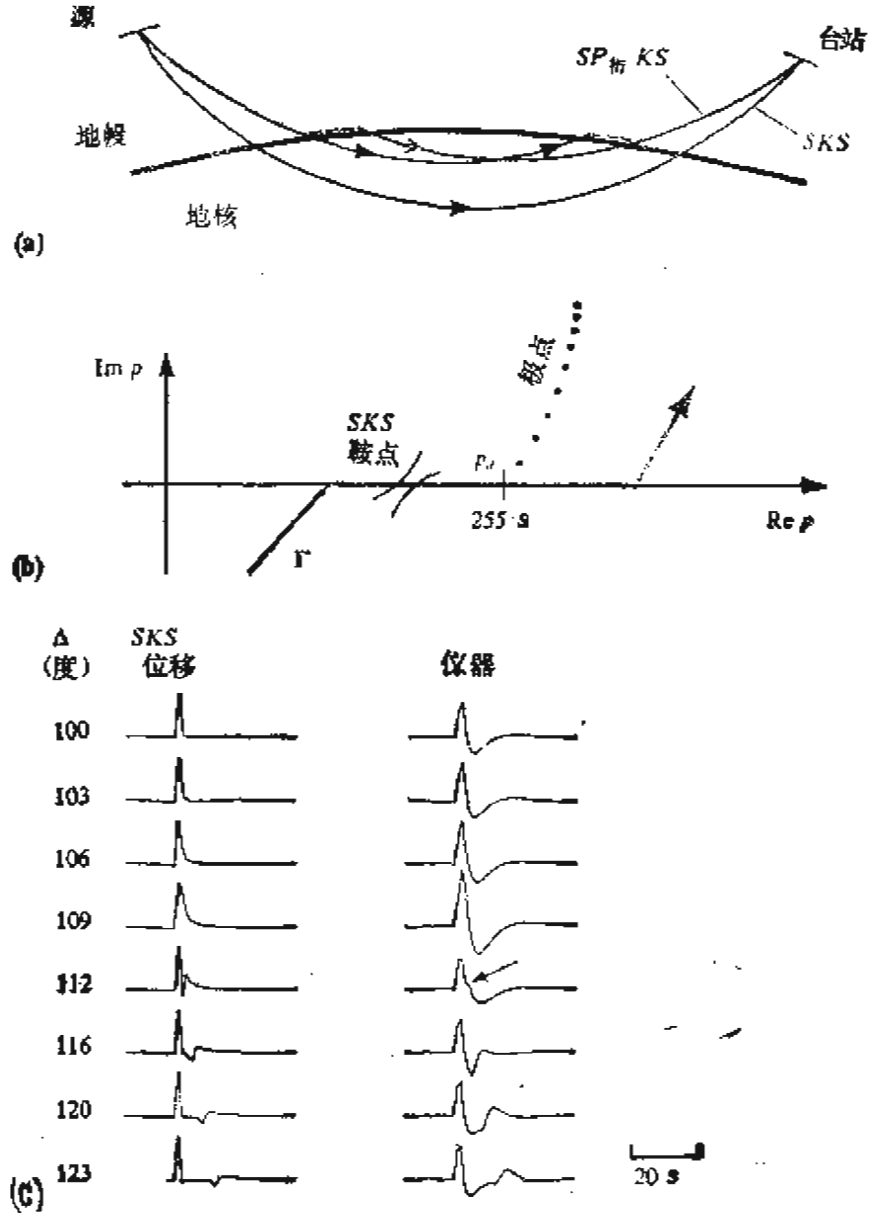


图 9.26

如果在超过100°的距离上观测到 SKS，则射线以一个慢度入射到核-幔边界上，此慢度容许入射波和在地幔基底的衍射的 P 波相耦合。我们将此震相标为 $SP_{衍}KS$，表示在（a）中。该路径上的衍射部分可在 K 支的任何一端发生。在（b）中表示的是（9.71）的积分路径，同时每逢这 SKS 的鞍点位于从 p_s 发出的诸衍射极点的左边时，$SP_{衍}KS$ 的影响将是明显的。（c）左图：在 Gilbert 和 Dziewonski（1975）的地球模型 1066 B 中，依（9.71）算出的脉冲响应。右图：在和长周期世界标准地震台网的仪器（15—100）（$T_s=15$ 秒，$T_g=100$ 秒；见 10.3.3 节）褶积后的脉冲响应。箭头表示 $SP_{衍}KS$ 的出射，这个震相的强烈影响可在超过112°时 SKS 的尾波中见到（引自 Choy，1977）

在（9.69）中我们得到了“入射波”的表达式，而 $SmKS$ 波是由此入射 P 波衍生的。因此，对于 SKS 有

$$u_{\Delta}^{SKS}(r,\Delta_0,\phi,\omega)=\frac{i\omega M_0(\omega)i\omega}{4\pi\rho_s\beta_s^4}$$

$$\times\int_{\Gamma}\omega^2 p\mathscr{T}^{SV}\sigma^{(1)}(r_s)\dot{S}\dot{K}\cdot\acute{K}\acute{S}[\beta(r)\acute{\eta}(r)\sigma^{(1)}$$

$$\times(r)]Q^{(2)}_{\omega p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp, \qquad (9.71)$$

这里的 Γ 表示在图 9.26 b 中。Choy(1977) 用 Gilbert 和 Dziewonski (1975) 的地球模型 1066 B 研究了 (9.71)。对足够大的 Δ_0，和 SKS 相对应的在实 p 轴上的鞍点可移到发源于 $p=p_s$ 的各衍射极点连线的左边。沿 Γ 求积分的效应则获自衍射极点以及鞍点的贡献。因此，(9.71) 自然而然地包含了由图 9.26 a 所描述的震相 $SP_{\text{衍}}KS$。Choy 也完成了 (9.71) 对 ω 的积分，他的一些结果表示在图 9.26 c 中。显然，当 P 沿地幔基底衍射时可能是显著的，甚至是在和长周期的世界标准地震台网 (WWSSN) 地震仪褶积之后。

补充 9.8

散射系数的极点

在补充 9.6 中得到的 16 个 P-SV 系数都有同样的因子 (1/D)，这里

$$D=(b\dot{\xi}_1+c\acute{\xi}_2)(b\dot{\eta}_1+c\acute{\eta}_2)+(a-d\dot{\xi}_1\acute{\eta}_2)(a-d\acute{\xi}_2\dot{\eta}_1)p^2/r_1^2.$$

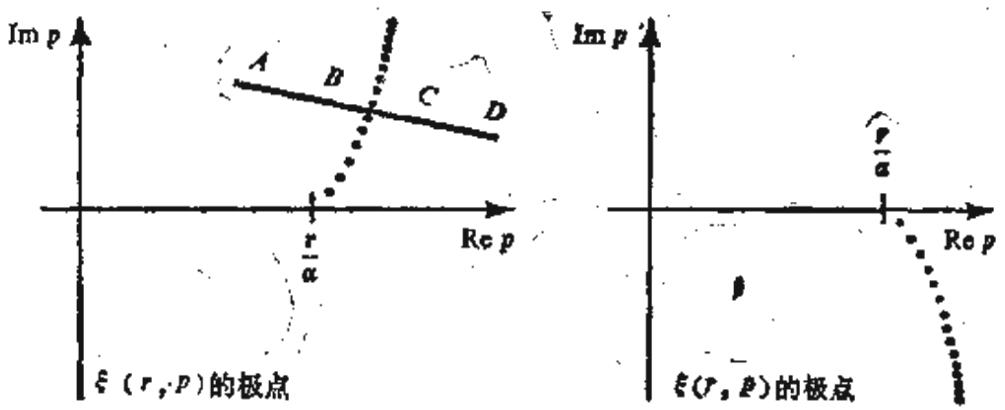
D 的零点（当 p 变化时）则为散射系数的极点，在复 p 平面中若路径 Γ 发生变形时必须给以特殊的考虑。

事实上，在实 p 轴上 D^{-1} 有 Stonely 极点，正如我们在平面波理论中所得到的一样（见 (5.55) 之后的讨论）。更重要的是，D^{-1} 具有一串极点且其性质类似于我们在求解 Lamb问题中所遇到的那些分支切割。幸好，D^{-1} 的极点串的位置大约和在 D 中出现的四个量 $\dot{\xi}_1$，$\acute{\xi}_2$，$\dot{\eta}_1$，$\acute{\eta}_2$ 的极点串的位置相同。我们对符号的选择是为了强调这四个量和均匀介质平面波理论中出现的垂直慢度 $\xi=\alpha^{-1}\cos i$ 及 $\eta=\beta^{-1}\cos j$ 的相似性。[在平面波散射系数 (5.39) 中出现的 $\alpha^{-1}\cos i$ 和 β^{-1}

$\cos j$ 是由于波函数 $e^{\pm i\omega\xi}$ 和 $e^{\pm i\omega\eta}$ 的垂直微分而来。在 (9.62) 中我们已将它推广到有转折点的波，发现必须区分下行波和上行波的垂直慢度。]

对射线参量的实数值，$\grave{\xi}$ 和 $\acute{\xi}$ 是复数共轭的。如果 $p<r/\alpha$，则应用于 (9.62) 的 WKBJ 理论给出 $\grave{\xi}\sim(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}\sim\acute{\xi}$。当 p 近似于 r/α 时，$\grave{\xi}$ 和 $\acute{\xi}$ 的 Langer 近似式 (9.66) 是必不可少的。当 $r/\alpha<p$ 时，$\pi^{(1)}$和 $\pi^{(2)}$成指数增大，但 $\pi^{(1)}+\pi^{(2)}$却是指数减小。由此得出 $\pi^{(1)}\sim-\pi^{(2)}$以及 $\grave{\xi}\sim-\acute{\xi}\sim-i(p^2/r^2-1/\alpha^2)^{1/2}$。

更一般的是，这可能表明 $\grave{\xi}$ 和 $\acute{\xi}$ 是 p 的解析函数，其奇异点的位置如前两图所示。在 r/α (r) 附近这一串极点离开实 p 轴。$\acute{\xi}$ 的这些极点是 $H_{\nu}^{(2)}(\omega r)$ 的零点[见 (9.66)]，并且它们位于因要求 $r=r(\gamma,\ p)$ 为实数而给出的线 (称为 Stokes 线) 附近。离开奇异点，则 $\acute{\xi}\sim(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}$。例如，对像下图所示的 AB 线，这个近似式可能是准确的。若当趋近于奇异点的连线时，则近似式不能用——如果 BC 位于或接近于一串极点之一则根本不能用。在穿过奇异点连线之后，则 $\acute{\xi}\sim-(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}$并且发现其符号发生了变化，该平方根给出了横切分支切割的现象。对于 $\grave{\xi}$，因为$ABCD$没有穿过奇异点的连线，则 $\acute{\xi}\sim(1/\alpha^2-p^2/r^2)^{1/2}$ 对整个路径是准确的，并且在 B 和 G 之间没有经历跳跃。

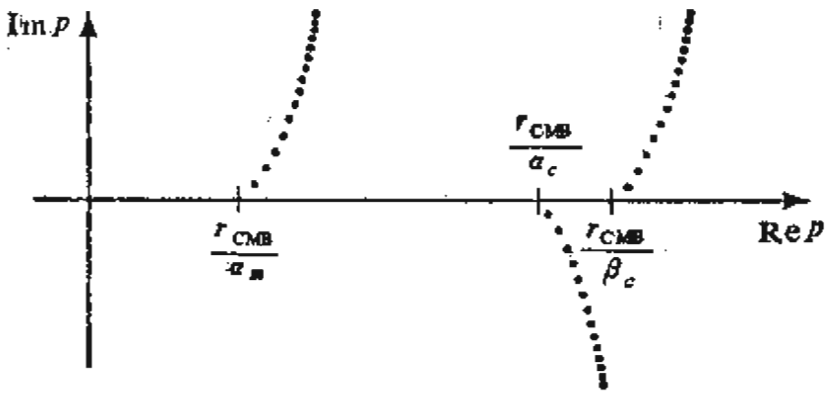


在第三象限中，也有 $\acute{\xi}$ 的极点，而在第二象限中有 $\grave{\xi}$ 的极点，它们是由于这里所示的原点 (甚而 $\grave{\xi}$ 和 $\acute{\xi}$ 在 p 中) 的映像而得到的。

和第一象限中 $\acute{\xi}$ 的极点交织在一起的是 $\acute{\xi}$ 的零点。因为 $\acute{\xi}$ 的极点

和零点两者均处于同一条广义线上，且沿此线 $\acute{\xi}$ 经历了振幅的迅速变化。因此，在第一象限中 $\acute{\xi}$ 的有理函数沿这同一条线也有极点和零点。地震学中的散射系数是几个垂直慢度的典型的有理函数，每一个都是建立在不同的速度剖面上($\grave{\xi}_1$，$\acute{\eta}_1$ 等)。

对于核-幔边界，$\alpha_m=\alpha_2>\alpha_c=\alpha_1>\beta_m=\beta_2$ 和 $\beta_1=0$。于是分母 D 变成 $b^2\grave{\xi}_c+bc\acute{\xi}_m-d(a-d\grave{\xi}_c\acute{\eta}_m)\acute{\xi}_m p^2/r^2_{CMB}$ $\mathbf{D}^{-1}$ 的极点位于 $\grave{\xi}_\alpha$、$\acute{\xi}_m$ 和 $\acute{\eta}_m$ 的极点附近，如下图所示。



和核-幔边界相联系的散射系数 $\grave{P}\grave{K}$，$\acute{K}\grave{K}$，$\grave{S}\grave{K}$ 等的极点。由于 D 是 p 的偶函数，故在第二和第三象限中也有极点，它们得自这里所示的原点的映象。

对 (9.71) 仅只引入 $(\acute{K}\grave{K})^{m-1}$ 而修改了 $SmKS(m=2,3,\cdots)$ 的表达式，以便考虑 $(m-1)$ 次的内反射。图 9.27 表示的是几个这样的射线和一个适当的积分路径。有一个问题是明显的，$S(m+1)KS$ 是在 $SmKS$ 的尾波中到达，因此，在地震图上看到的脉冲形状是由很多多次反射的迭加而构成。Choy(1977) 发现，$SKKS+SKKKS+SKKKKS+\cdots$ 的收敛性是很慢的，甚至在发生 SKS 的临界距离 ($\sim 62^\circ$) 以外几千公里的距离上亦如此。然而，它们是一个重要的多次反射系统，因为它们对液核最外部的速度是敏感的。Choy 还发现，在此区域内 1066 B 模型的速度需要适当加以修正，在图 9.28 中对于 1066 B 地球模型绘出了合成地震图与观测曲线之间的对比，但在地核最外部 200 公里内具有一绝热的速度梯度。

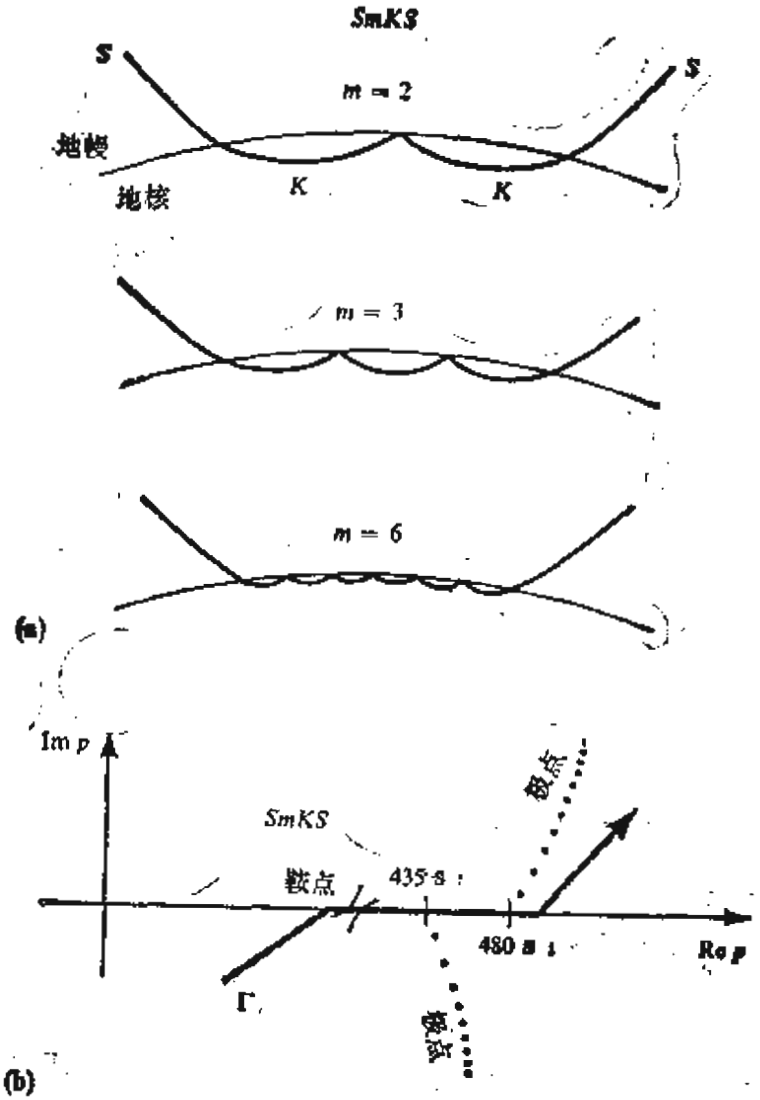


图 9.27

SKKS，*SKKKS* 等位于 *SKS* 的尾波之中。(a) 当 *K* 的支数增加时，这些多次反射的转折点愈来愈高。将因子 $(K\dot{K})^{m-1}$ 引入(9.71)中，则得到了 *SmKS* 的表达式。(b) 从 $p=435$ 秒左右向下有一极点串（和在液核顶部的 *P* 波转折点相关），同时从 $p=480$ 秒左右向上也有一极点串（地幔基底的 *S* 波转折点），此二者对所示的积分路径产生了影响

当快速介质位于间断面以下时（如果速度不随深度如此快地减低，则转折点不会在下面的介质中出现），那么总是要产生象 *SmKS* 这样的多次反射级数的缓慢收敛问题。这对地球中的内

界面是很经常的情况，由多次反射共同构成的波称为相干首波(Červený and Ravinda, 1971)。在图 9.29 中给出了其射线系，且其实例多见于海洋沉积层中、成层地壳中(Hill, 1971 a, b)、甚而可能于上地幔中、当然还有核震相中。维持这些射线的介质，经典上称之为耳语廊(Whispering gallery) (Rayleigh, 1910)。如果接收点的位置取在近于临界距离上，则多次反射系的收敛性可能会是很差的。

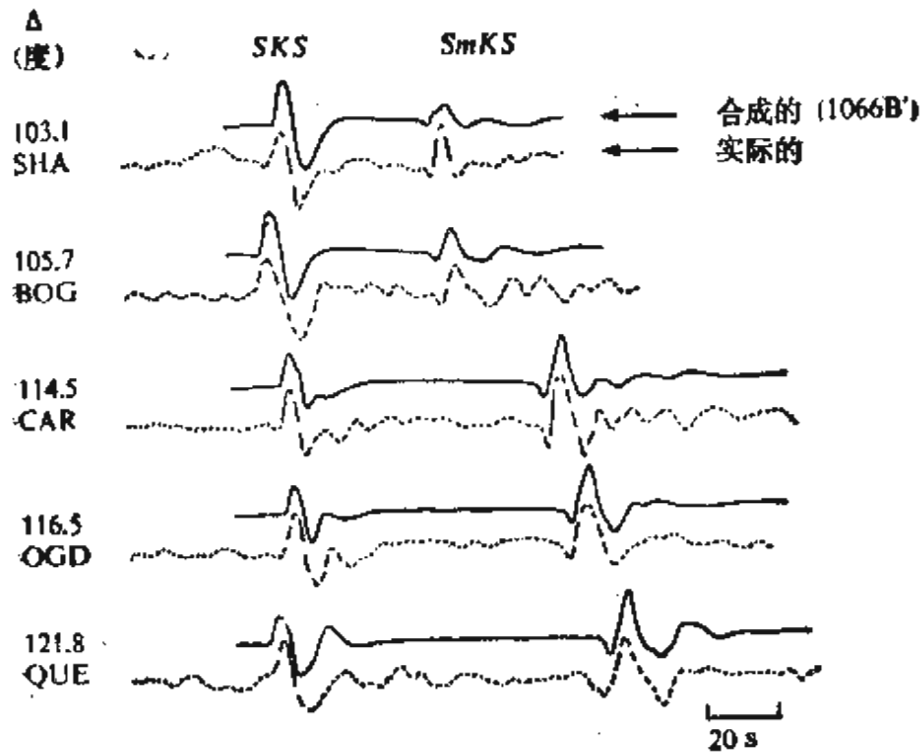


图 9.28

对 1973 年 7 月 21 日斐济深震，合成地震图（用 1066 B 模型计算，但以 Jeffreys 给出的速度代替液核最外部 200 公里处的速度加以修正）和观测地震图之间的对比。注意到 SKS 的脉冲形状随距离的变化（可能）是由于 $SP_{dif}KS$ 的原因。还注意到，对于 $SmKS$ 中相干的多次反射，在合成地震图和观测地震图之间具有令人满意的一致性。Choy 将 $m=2$ 到 $m=15$ 相加以取得这些合成地震图，并且发现有一个符合 $SmKS$ 数据要求的绝热外核（类似 Jeffreys 的核）(引自 Choy, 1977)

Cormier 和 Richards(1977)曾表明，克服困难的一个好办法

是将所有的多次反射一起考虑在内直接计算此表示式。他们研究的地球物理问题实际是这样的P波问题，P波穿过地球的外液核和内固核、并且在内核和外核的内界面上（其半径为r_1）出现相干首波。图 9.30 a 中给出了 PKP 的走时曲线，它也有 $PKiKP$ 的一条分支 CD（从 r_1 反射）；$PKIKP$ 的一条分支 DF（在 r_1 以下为一单个的透射支）；和 $PKIIKP$ 的一条分支。$PKiKP$ 中反射系数的原有符号为 $\grave{K}\acute{K}$，它和穿过 r_1 的透射符号相类似。

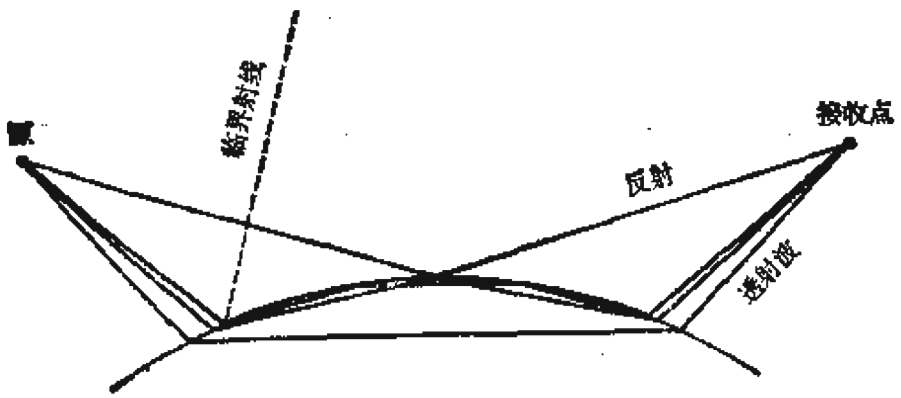


图 9.29

两介质间一内界面，快速介质在下边。对位于临界射线以外的接收点，在源和接收点之间有无穷个射线路径。由此多次反射之射线族构成的波是相干首波。图中也示出了反射射线。当接收点移向临界射线时，所有射线路径的走时将趋于共同的极限。这里我们给出了弯曲的内界面和直的射线。然而，相干首波可在非均匀介质（具有弯曲射线）之间的内界面上形成，即对图 9.27 a 所示的射线迭加而成。快速介质的最上部分在这里起波导作用，其效应类似于在一耳语廊中所得到的效应

因此，在图 9.29 中所示的整个射线族以下式描述：

$$\grave{K}\acute{K}+\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K}+\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K}+\cdots=\grave{K}\acute{K}+\frac{\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K}}{1-\acute{I}\grave{I}}. \quad (9.72)$$

这个几何级数的求和类似于我们先前叙述过的在平面波理论中的多次反射问题(9.18)—(9.19)。

对 $\grave{K}\acute{K}$，$\grave{K}\grave{I}$，$\acute{I}\acute{K}$，$\acute{I}\grave{I}$ 的每一个在推导中曾假定散射到下部介质中的能量仅仅是下行波的能量。事实上，当固层 1 上面有液层 2 时，从补充 9.6 得

$$\grave{K}\acute{K}=\frac{[\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)^2\grave{\xi}_2-\rho_2\grave{\xi}_1+4\rho_1\beta_1^4(p^2/r_1^2)\grave{\xi}_2\grave{\eta}_1\grave{\xi}_1]\pi_2^{(2)}}{[\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)^2\acute{\xi}_2+\rho_2\grave{\xi}_1+4\rho_1\beta_1^4(p^2/r_1^2)\acute{\xi}_2\grave{\eta}_1\grave{\xi}_1]\pi_2^{(1)}},\tag{9.73}$$

对固核的P波波函数，在这里仅仅通过$\grave{\xi}_1$表现出来，确实，对下行波这是合适的垂直慢度。但如图 9.29 所见到的，这个下行波($\pi_1^{(2)}$)很快就转向成为一个上行波($\pi_1^{(1)}$)，因为在内界面以下不远处即为转折点。因此，当一P波从液核向下入射时，对其下部介质的波函数代之以$\pi_1^{(1)}+\pi_1^{(2)}$是合适的，因为就是这个波函数正确地描述了贯穿整个液核的幅度。如果在固核中使用这个新的波函数，则需修正反射系数$\grave{K}\acute{K}$，且其固有符号为$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$。满足内界面上的边界条件，我们得到

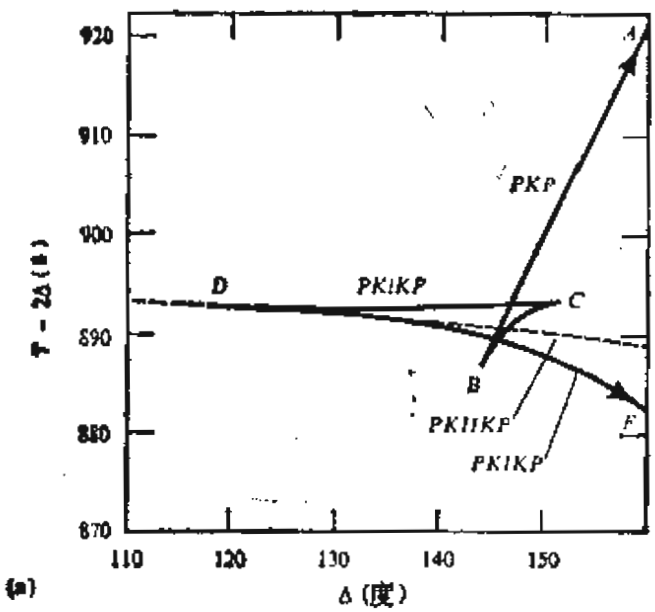
$$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$$
$$=\frac{[\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)^2\grave{\xi}_2-\rho_2\check{\xi}_1+4\rho_1\beta_1^4(p^2/r_1^2)\grave{\xi}_2\grave{\eta}_1\check{\xi}_1]\pi_2^{(2)}}{[\rho_1(1-2\beta_1^2p^2/r_1^2)^2\acute{\xi}_2+\rho_2\check{\xi}_1+4\rho_1\beta_1^4(p^2/r_1^2)\acute{\xi}_2\grave{\eta}_1\check{\xi}_1]\pi_2^{(1)}},\tag{9.74}$$

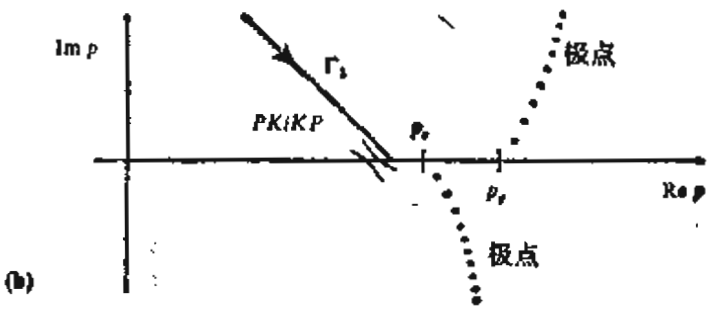
其中
$$\grave{\xi}_1=\frac{1}{-i\omega(\pi_1^{(1)}+\pi_1^{(2)})}\frac{d}{dr}(\pi_1^{(1)}+\pi_1^{(2)}).\tag{9.75}$$

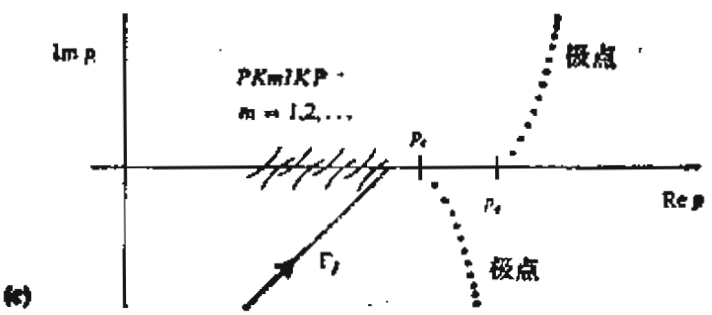
我们的这个新的反射系数$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$具有两个重要特性。第一，经某些代数运算之后，它可表成

$$\grave{K}(\check{I})\acute{K}=\grave{K}\acute{K}+\frac{\grave{K}\check{I}\cdot\acute{I}\acute{K}}{1-\acute{I}\grave{I}},\tag{9.76}$$

因而这个单个的系数解释了图 9.29 中出现的所有射线。将$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$展开成(9.72)左边的一些项，即为虹霓展开式（有时称为 Debye 展开式）之一例，如此命名是因为在虹霓理论中出现有与此类似的展开。(事实上，空气中水的折射率和地核相对地幔的折射率相似，在地震学中和虹的相似现象是$PKKP$的焦散。)当界面以下的介质比上面的慢时，作虹霓展开往往是恰当的，这是因为在下面的介质中产生的多次反射将不会相互干涉。一个例子是$PCP+PKP+PKKP+\cdots$，每一个透射波都可分开进行研究。然而，当下面的介质较快时，作这个展开则往往是不合适的。


920
910
900
890
880
870
110
120
130
140
150
Δ (度)
A
PKP
D
PKiKP
C
B
PKiiKP
PKiKP
E
(a)


Im p
Γ1
PKiKP
极点
Re p
极点
(b)


Im p
PKmiKP
m = 1,2,...
极点
Re p
Γ1
极点
(c)

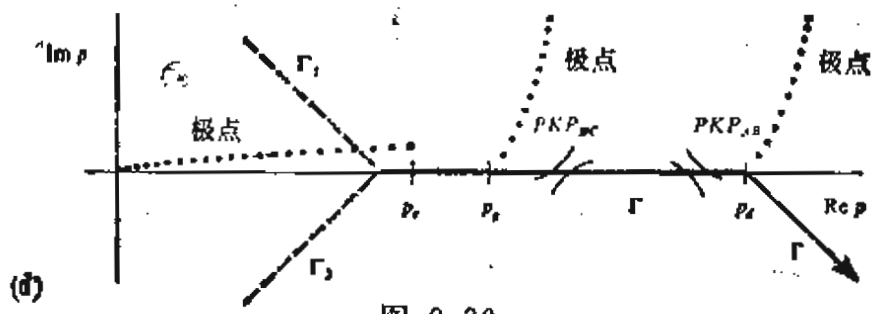

Im p
Γ1
极点
极点
极点
PKP
PKP
Re p
Γ
Γ
(d)

图 9.30

$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 第二个重要特性是关于在复 p 平面中极点的位置。以前，对于 $\grave{K}\acute{K}$，有和 $\grave{\xi}_1$ 相关的极点系，且它趋向于向下进入第四象限中(补充 9.8)。但定义 $\grave{\xi}_1$ 的新比例，刚好在实 p 轴之上，在 O 与 $r_1/\alpha_1(r_1)$ 之间有一些极点和零点串，并且正是在这里找到了 $\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 的极点。

由具有地震矩 $M_0(\omega)$ 的一个点剪切位错产生的 P 波通过内核时的表达式，现可写成

$$u_r^{PKP}(r,\Delta_0,\phi,\omega)=\frac{-i\,\omega\,M_0(\omega)i\,\omega}{4\,\pi\rho_s\alpha_s^4}$$
$$\times\int_\Gamma\omega^2 p\mathscr{F}^P\pi^{(1)}(r_s)\grave{P}\grave{K}\cdot\grave{K}(\check{I})\acute{K}\cdot\acute{K}\acute{P}$$
$$\times[\alpha(r)\grave{\xi}(r)\pi^{(1)}(r)]Q^{(2)}_{\omega P-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp. \qquad (9.77)$$

这里的辐射图案是从(4.84)得到的，$\mathscr{F}^P$ 通过下式依赖于走向 ϕ_s，倾向 δ 和倾角 λ：

$$\mathscr{F}^P=\sin\lambda\sin 2\delta+[\cos\lambda\sin\delta\sin 2(\phi-\phi_s)$$
$$-\sin\lambda\sin 2\delta(1+\sin^2(\phi-\phi_s))]\alpha_s^2p^2/r_s^2$$
$$+2[\sin\lambda\cos 2\delta\sin(\phi-\phi_s)$$
$$-\cos\lambda\cos\delta\cos(\phi-\phi_s)]\frac{\alpha_s^2p}{r_s}\left(\frac{1}{\alpha_s^2}-\frac{p^2}{r_s^2}\right)^{1/2}. \qquad (9.78)$$

称(9.77)为广义的 PKP 波是正确的，因为它说明了由于 P 波在核幔内界面上向下透射一次和向上透射一次所产生的所有的压缩波震相。对于远在内核之上有转折点的 P 波，则(9.77)中的因子 $\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 近似为 $+1$，并且内核的影响是可以忽略的。甚至它

广义的 PKP。(a) PKP 的走时曲线以及在内核和(或)外核边界上有关的反射和透射。(9.77) 中的数值积分是从描述干涉波的单项中分离出 $PKiKP$ 的贡献之后加以处理的。因此，(9.77)中的 $\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 通过(9.76)分开成两项。(b) 依(9.77)中的 $\grave{K}\acute{K}$，对路径 Γ_1 进行积分。(c) 依(9.77)中的$(\grave{K}\grave{I}\cdot\acute{I}\acute{K})/(1-\acute{I}\grave{I})$，对路径 Γ_2 进行积分。在每一情况下，都有趋向于向下进入第四象限的极点 (p_c 是临界射线参量，它相当于在固核顶部具有转折点的射线；p_s 是掠射射线的射线参量，这条射线在液核底部有转折点)。(d) 对余下的路径，两个被积函数被组合在一起成为一项，它比例于 $\grave{K}(\check{I})\acute{K}$。和 $\grave{\xi}_1$ 相关的极点已被和 $\acute{\xi}_1$ 相关的极点所取代。对 p_c 的右部，$\grave{K}(\check{I})\acute{K}$ 趋向于 $+1$，因而(9.77)定量地表示了 PKP 的 AB 和 BC 分支

还说明了在近于 142° 处 PKP 中的焦散。如图 9.30 b, c, d 所示，假若被积函数可分成两部分并沿分开的路径求积分，则当 P 值较低时，干涉首波可正确地给以定量表示。

用等价于(9.77)的表达式，Cormier 和 Richards(1977)已计算了 Dziewonski 等 (1975) 的参量化的地球模型中的 PKP。他们的结果在图 9.31 中，并和图 9.32 中的观测数据进行了对比。

显然，对越来越复杂的体波已经建立了类似(9.77)的被积函数。因为相应于 (9.58)—(9.59) 的传播矩阵可用封闭的形式写出，所以甚至对地壳和上地幔的分层影响是能够解释的。用这个方法，可能计算漏能模式以及同一时间窗内到达的其它震相。例如，我们来考虑一 SV 波，当其射线参量接近于 770 秒/弧度，并从下面入射到壳-幔内界面上时将会发生的情况。这是接近临界值的情况，此时 P 波刚好在 Moho 界面以下水平传播，到达地表一接收点的各种可能的射线如图 9.33 所示，这包含了耳语廊效应。还知道，地壳能够维持漏能模式，它叫作 PL 模式，在这个模式中，P 波能量在 Moho 界面以下随深度指数衰减但 SV 波的能量是向下辐射的。相应的基频的震相其慢度(射线参量)仅仅略高于 SP_{m} 的慢度 (见图 9.33 e)，所以这个漏能模式也可能由图 9.33 中入射的 SV 波激发。这已被 Oliver(1961)标记成剪切-耦合 PL，Chander 等(1968)以及 Poupinet 和 Wright(1972) 给出了这个震相一些最突出的例子并讨论了对此震相如何才能有效地激发。Frazer(1977)已说明怎样才能求得一个单个的被积函数来描述图 9.33 中的全部震相加上地壳中的多次反射以及剪切-耦合 PL 波，他曾对实数 p 和实数 ω 作了积分，得到了合成的记录曲线部分，如图 9.34 所给出的。从 Moho 界面所受的边界条件来讨论散射到地幔中的波，他对下行波 SV 使用了波函数 $\sigma^{(2)}$，而对 P 波使用了 $\pi^{(1)}+\pi^{(3)}$。这类似于图 9.29—9.32 中处理耳语廊现象的方法。他用 Moho 界面和表面之间的传播矩阵以及施加在自由表面上的边界条件，考虑了地壳中的混响。Frazer 可以

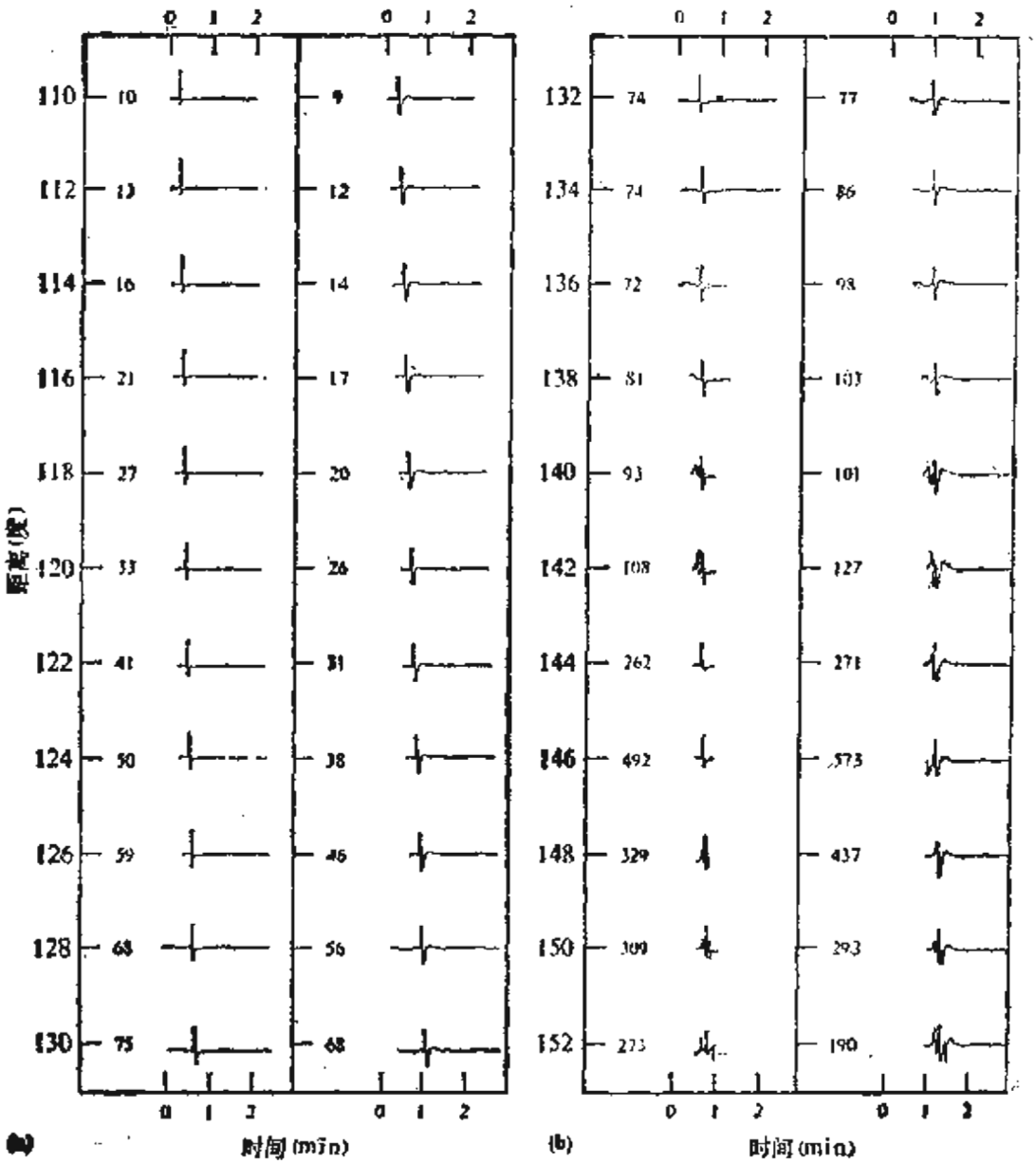


图 9.31

(a)和(b)的左图：PKP 的脉冲响应，这是对 Dziewonski 等(1975)的参量化地球模型(PEM)通过(9.77)算出的。(a)和(b)的右图：对15—100（长周期）秒的世界标准地震台网垂直向仪器的响应褶积后的脉冲响应。响应左边的数值表示随距离连续增加时其相对的振幅。注意在穿过 120°附近的临界点时波形不变。临界点的位置仅只影响振幅。先到的长周期震相在 134°—140° 中是明显的，并且在 143°处和 PKP(图 9.30 a，点 B) 的焦散有关。在 138°—152°中的复杂脉冲是如图 9.30 a 所示的全部到达波之间互相干涉的结果（引自 Cormier and Richards, 1977)

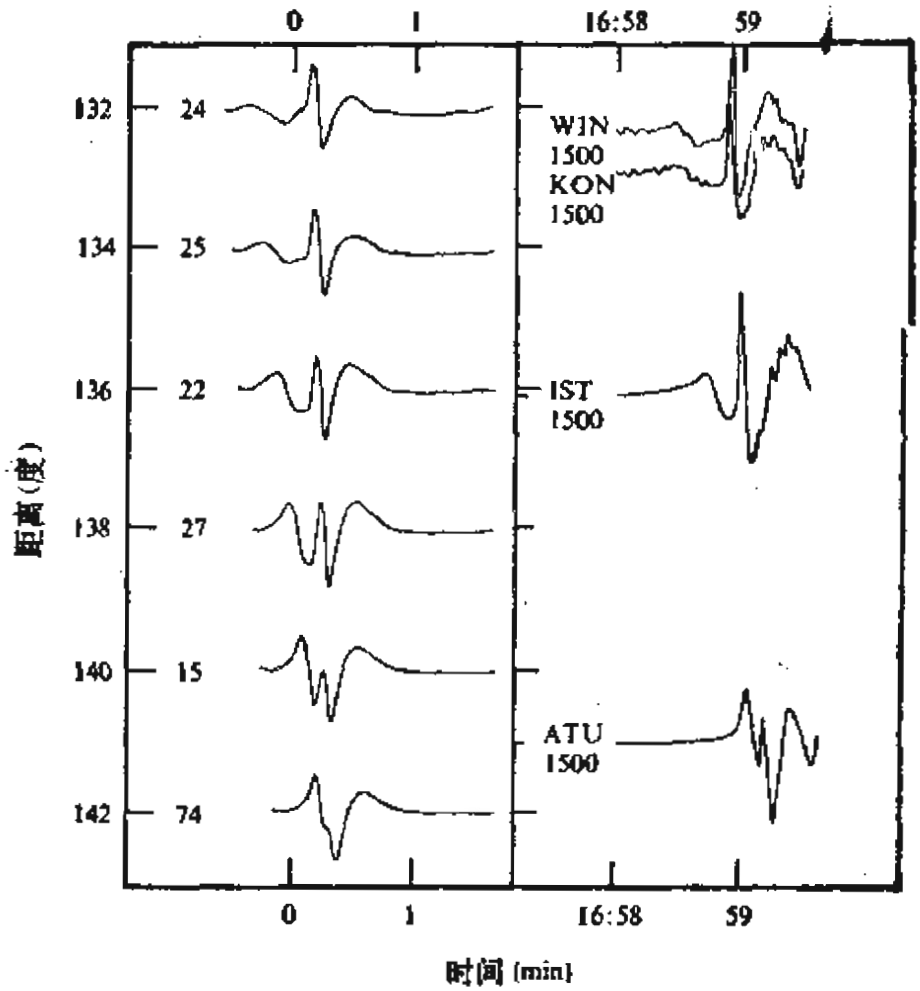


图 9.32

对 1964 年 7 月 9 日一次地震，合成地震图(左边所示) 和观测图(右边所示)之间的对比(引自 Cormier and Richards, 1977)

证明突出的剪切-耦合 PL 波要求一个取向合适的源以及地幔中接近 650 公里的深度处有一异常高的剪切速度梯度。因为在实际地震图中不包含有 SP_{dif} 震相，如同在图 9.34 中合成图那样，Frazer 推断，P 波速度在 Moho 界面以下必然随深度而减小。如果它减小得相当快 ($da/dr > a/r$)，则水平行走的射线将折射向下，图 9.33 的耳语廊是不存在的，而对在 Moho 界面以下散射的 P 波，只要 $\pi^{(2)}$就够了。

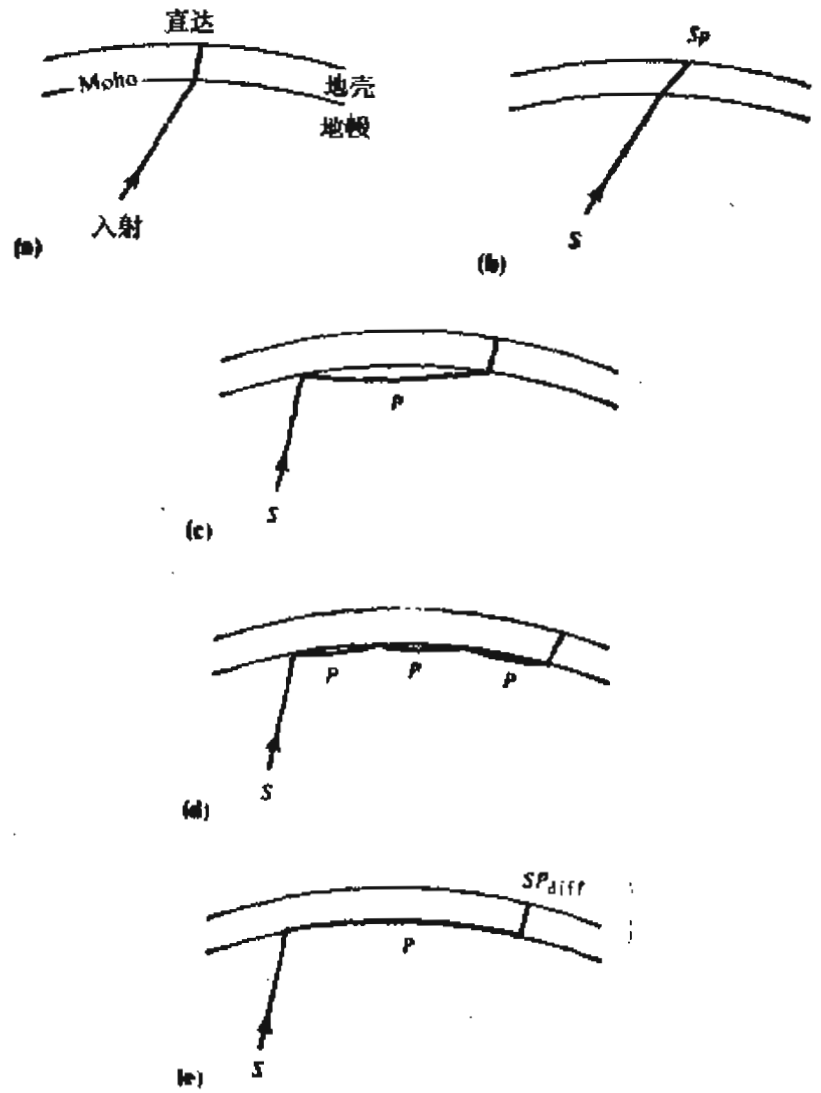


图 9.33

SV 以某一角度入射到 Moho 界面上，其射线路径接近于地幔顶部形成的沿水平向传播的 P 波路径。(a) 直达 S 波（地壳中的SV）。(b) 在地壳内以 P 传播的波，这个波的到达标以 S_p。它稍早于直达 S 波而到达，并已由 Jordan 和 Frazer (1975) 详细地描述过。(c) 包括了地幔中如 P 波那样的单支 （地壳中的路径可能为 P 或 S)。(d) 地幔中 P 波的三支。(e) 地幔中 P 的支数可无限地增加，直到极限情况（在射线参量的临界值处）射线路径成为水平的。Frazer (1977) 将地表上有关的到达波标记为 SP_{diff}。它包括了通过地壳时迭加在一起的 P 和 S 射线，并且实际上它包括了如 (c) 和 (d) 的整个射线族，形成了一个相干首波。对一给定的点源和一给定的接收点，(a)—(e) 所有的射线路径可能和地壳中的混响一起出现，尽管在一般情况下，每一特定的射线将具有略为不同的射线参量

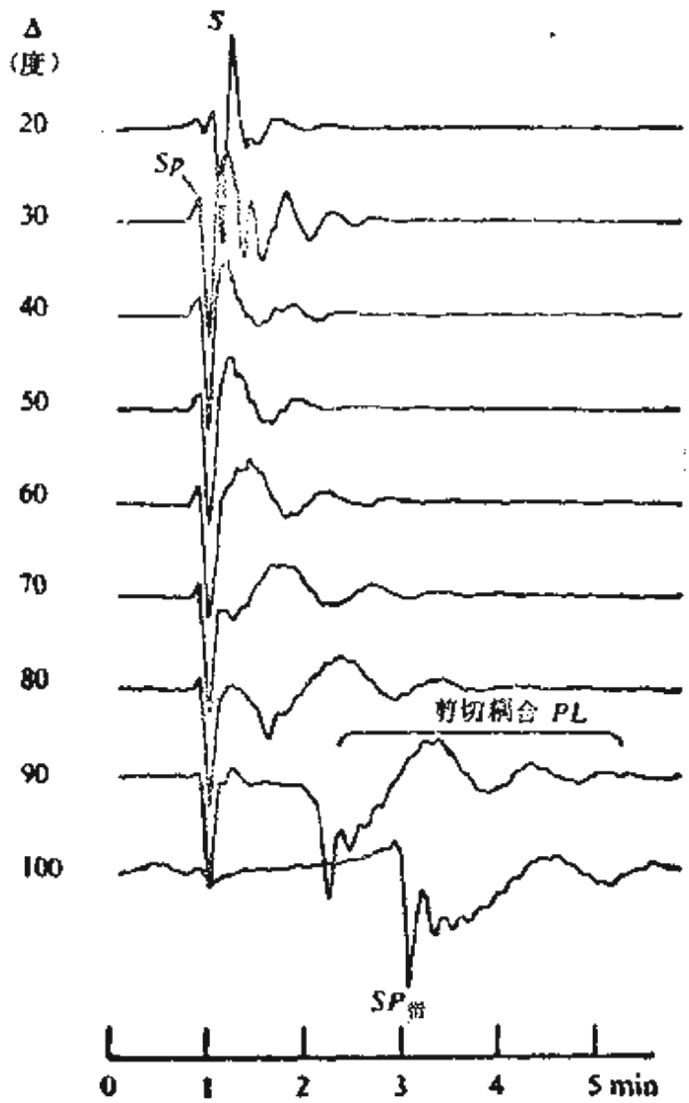


图 9.34

表示震相成分的部分记录，对地壳层上部自由表面上一接收点，这些震相组成了复杂的 SV 到达。在地幔中主要的 SV 路径上，在震源和接收点之间有一单个的转折点。将恰在 Moho 界面以下的 P 波速度取为常数，这就形成了一个很有效的耳语廊，由较大的 SP俯的到达可看到这一点。这里计算的是运动的水平分量，在不同距离 Δ 处的波形经过时移，以便将初至波对齐（引自 Frazer，1977）

9.6 不同方法之间的对比

虽然我们这里所提到的理论的不同部分若干时间以来已为人

们知悉，只是在过去的几年中，我们为求解实际结构中精确的体波脉冲形状所做的努力，已开始取得了比经典射线理论更大的成功。我们已发现将它们分成三种计算方法是方便的：(i) 对无转折点的广义射线的 Cagniard 反演，(ii) 保持全部多次反射的双重积分（对实慢度和实频率），(iii) 对非均匀介质中广义射线（可能有转折点）的双重积分（对实的或复的慢度以及对实频率）。从第三种方法我们已得到了 WKBJ 地震图，且在实际中这种解具有 Cagniard 反演的某些特性。虽然这些大概是目前地震学中正在使用的主要方法，但在某些应用上，它们可能或是被简正振型（如第八章中所述）的直接求和所代替，或是被 Alekseyev 和 Mikhaylenko (1976) 方法所代替。在后一方法中，对运动方程应用了空间水平变换，只剩下对深度和时间的偏微分方程。对很多水平波数的值，这是由有限差分图解求得的，然后计算了其反空间变换（对水平波数的数值积分）以给出合成的部分记录。

应当认识到，在竖向非均匀介质中，波的传播理论仍是一个研究领域，至今还不清楚我们所强调的这些主要方法其中哪一种对给定的问题是适宜的。因而，在每一方法中，使用者必须对如何运用一种特定方法做一些仔细地选择。本章的后一部分中，我们将简要地叙述每一方法的成功和失败以及使用者在研究过程中所必须作的选择。

首先，我们注意到 Cagniard 方法和 Fuchs 方法对平面均匀层已经有了发展。在球形地球中它们的应用需要一些预备性的讨论，这在补充 9.9 中已给出。而且两种方法的每一种，必须在如何以一成层模型来逼近给定的非均匀地球模型的方式上做出主要地选择。实际上粗糙的分层显著减少了计算的费用，但却损失了精度。要决定什么样的层厚度是适宜的，当然这取决于所要求的精确结果的频率范围。

对宽频带脉冲形状，Cagniard 方法和 WKBJ 地震图有其固有的优点，因为响应（除褶积之外）是在时间域计算的。当脉冲

振幅随时间迅速变化时，这一变化的细节用沿 Cagniard 路径在空间上相近的一些点上采样的方法很容易进行研究。

如果对很多不同的距离计算脉冲形状，则 Fuchs 方法和 Scholte 方法有一固有的优点，因为同样的积分路径可适用于很多不同的距离，而对每一距离，Cagniard 路径(和 WKBJ 地震图的等效路径）必须被重新确定。[应当认识到，所谓"Cagniard 方法"我们指的是把很多单个点的作用汇集起来的一种方法。例如，Wiggins 和 Helmberger (1974) 已给出了计算的细节。Fuchs 的反射法也由其最初的公式被扩展了。例如，Kind (1978) 修正了这方法，使其在源上部和源下部处理层内的混响成为可能。他还能使衰减、面波和漏能模式等效应结合起来。利用 (9.58) 的解和补充 9.6，推广 Fuchs 方法进而去处理非均匀层内所有的多次反射是可能的。而所谓"Scholte 方法"，大体上适用于第 9.5 节中汇总的几个方法的整个范围，它是以复射线参量和实频率的积分为基础的。这里的这个方法改进了 WKBJ 近似式，有时称之为"全波理论"。]

补充 9.9

地球展平变换和近似式

在 7.2 节和 9.2 节中我们说明了如何求得和利用运动应力向量

$$\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}$$

以求解

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/\mu(z) \\ k^2\mu(z)-\omega^2\rho(z) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

这是 SH 波的方程，求解此方程的矩阵法已高度发展了，特别是当介质是以大量均匀平面层近似时。举例来说，反射法已作出了这个近似式。

然而，我们现在的兴趣是

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{\mu} \\ \frac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2}-\omega^2\rho & -\frac{3}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

在球面几何中，此式等价于（1）。我们的兴趣还在于相应的 P-SV 方程。幸而，Andrianova 等（1967）以及 Biswas 和 Knopoff（1970）已求得了（2）的变换，它严格地给出了方程（1）。因而，反射法在球面几何中可不以近似的形式应用（不是以很多薄层代替随深度变化的 $\rho(z)$ 和 $\mu(z)$，并也不截断其积分 $\int_0^\infty dk \int_0^\infty d\omega$ 的区间）。然而，对 P-SV 问题，球波动方程和笛卡尔波动方程之间的变换不可能作得很精确，因而引入了新的近似式。

首先，我们将描述 SH 变换。为了方便，和球形介质有关的量利用下标 s，如 μ_s，ρ_s，β_s，而对展平的成层介质（即和 z 有关）中的量用下标 f。给定剖面有 μ_s，ρ_s 及序数 l，我们欲将对

$$\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}$$

的方程（2）变换成对

$$\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}$$

的方程（1）。

新的深度变量 z 由下式定义：

$$e^{-z/a}=\frac{r}{a}, \qquad (3)$$

其中 a 为任意方便的半径（通常取为整个地球的半径）。新的速度剖面由下式定义：

$$\alpha_f(z)=\frac{a}{r}\alpha_s(r), \qquad \beta_f(z)=\frac{a}{r}\beta_s(r). \qquad (4)$$

新的因变量和密度由下式定义：

$$\begin{pmatrix} u_\phi(z) \\ \tau_{\phi z}(z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a/r)W \\ -(r/a)^3T \end{pmatrix}, \quad \rho_f(z)=\left(\frac{r}{a}\right)^5\rho_s(r), \qquad (5)$$

现在可将（2）表成下式：

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} u_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/\mu_\beta \\ \dfrac{(l-1)(l+2)}{a^2}\mu_\beta-\omega^2\rho_\beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_\phi \\ \tau_{\phi z} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

显然，如果新的水平波数定义为

$$k^2=(l-1)(l+2)/a^2. \tag{7}$$

则对（1）的变换是完全的。

（3）和（4）的一个令人满意的特性是沿球形介质中射线的走时和相应的展平问题中的走时近于相等。因此，从(9.21)得

$$T_s=\int\frac{dr}{\beta_s(1-p_s^2\beta_s^2/r^2)^{1/2}}$$

$$=\int\frac{dz}{\beta_\beta\left[1-\dfrac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\beta_\beta^2}{\omega^2a^2}\right]^{1/2}}\quad\left(\text{用 } l+\frac{1}{2}=\omega p_s \text{ 和(3) 和(4)}\right). \tag{8}$$

而从(9.20)得

$$T_\beta=\int\frac{dz}{\beta_\beta\left[1-\dfrac{(l-1)(l+2)\beta_\beta^2}{\omega^2a^2}\right]^{1/2}}\quad(\text{用 } k=\omega p_\beta \text{ 和(7)}). \tag{9}$$

事实上，如果射线参量的变化很小，则（8）和（9）是相同的，因为 $\left(l+\frac{1}{2}\right)^2=l^2+1+\frac{1}{4}$ 而 $(l-1)(l+2)=l^2+l-2$。因此，变换(3)和(4)保持着波传播的运动学的性质。而变换(5)则严格地保持着在两介质中波传播的动力学性质。

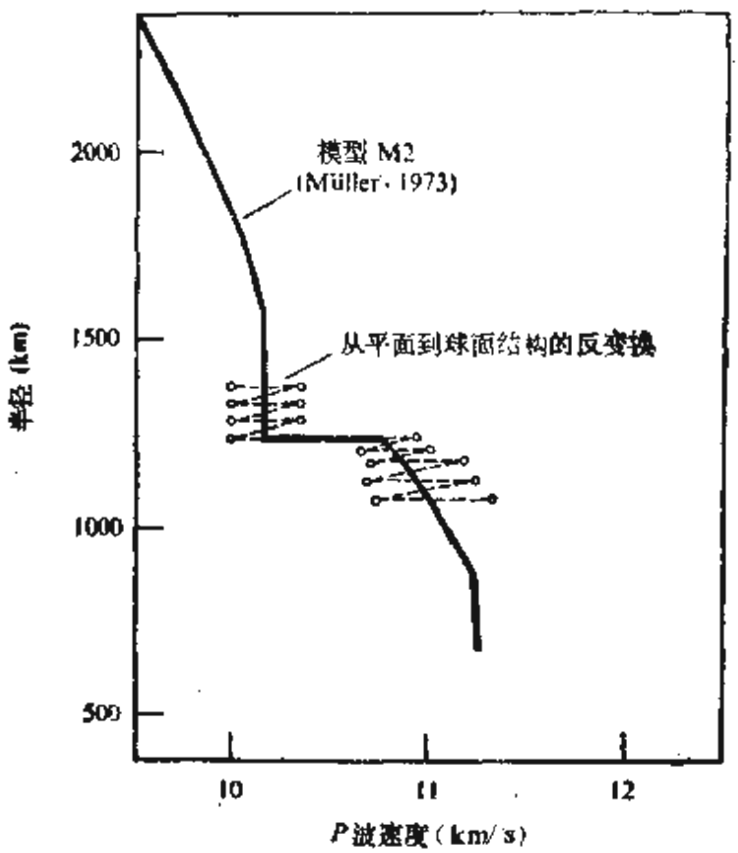
转向 P-SV 问题，我们似乎应当能将(9.56)严格地变换成(5.60)。显然，因为对 P-SV 波，它们仍保持其运动学特性，所以人们利用同样的变换(3)和(4)处理 SH。然而，Chapman(1973, 1974)已发现，对因变量和密度，要得到一个将严格保持 P-SV 的动力学特性的变换是不可能的。他描述了类似于(5)的各种变换的影响，并且，如果将得自依赖于 z 的介质的波解用来导出依赖于 r 的介质的解，Chapman 已求得由此而引起的误差的渐近性质。总之，这些误差是 ω^{-1} 的量级，有趣的是此误差和用 Langer 近似式中第一项导出的误差有同样的量级，这就是我们用（9.65）和（9.59）去求解球面波动方程

(9.56)的原因。因此，虽然 Langer 近似式没有专门地利用地球展平变换，但它引入的误差（在低频处）可能和球面几何中对 P-SV 波引进 Cagniard 方法及 Fuchs 方法中的展平误差有同样的大小。由于这些原因，对某些问题而言，球面波动方程（9.56）的数值积分可能是不可避免的。

一旦已经作了运动学变换(3) 和(4)，则 Cagniard 和 Fuchs 方法将以均匀叠层代替依赖于 z 的剖面。我们来看看下列这点是有意义的，即一旦所作的变换回复到球面几何中时这个分层将会如何表现。对 P 波剖面，我们由(4) 求得

$$\alpha_s(r)=r\alpha_z/a, \tag{10}$$

因此在每一层中 α_s 是正比于 r 的(α_z 是分段常数)。这里的图中给出了一个例子，可以看到，甚至当最初的速度剖面是均匀的时候（即接近 1500 公里半径），在已变换的介质中精细的分层仍是需要的。事实



实线给出 Müller(1973)球模型 M 2 中内核和(或) 外核边界附近的 P 波速度。虚线给出了反变换结构，它等价于平面均匀叠层(引自 Müller, 1977)

上，(10)的速度梯度是精确的，因为对这个梯度，射线和局部垂线之间的夹角是不变的。即 $di/dr=0$，从具有特定速度剖面(10)的(9.24)可以看出这一点。通过任意给定的层，射线与局部垂线将有相同的夹角。这是我们可预计的运动学特性，在均匀平面叠层中它也是对的。由此得出，沿着图内非均匀层中的射线没有转折点出现。在 Cagniard 方法和 Fuchs 方法中，由于非均匀叠层内不同射线之间的干涉，则 9.5 节中和转折点附近波函数有关的全部现象必定会出现。

如果衰减很强烈，这意味着 $Q^{-1}\gg 1$，但这些波是传播了很多个波长而衰减的，所以 Fuchs 和 Scholte 方法的原理实际没有变。被定义的速度剖面本身是复杂的[见(5.88)]。然而，Cagniard 方法和 WKBJ 地震图不容易适应由于某种原因引起的衰减，除非使用以经典射线理论为基础的专门方法。

不同的方法，在问题的处理上差别极大，被合成的波在转折点附近受到地壳结构的影响。正是这种体波似乎具有很大的地球物理意义，因为速度剖面的异常特性似乎对其射线路径的底部接近异常结构的体波影响是最强烈的。换一种说法：包含某些速度异常最大信息的波是这样一种波，它在异常附近消耗的时间最长。因此，它们将是在异常的深度处水平行走的波(即在那里有其转折点)。对这些问题，Cagniard 和 Fuchs 方法是不同的，因为前者是以广义射线为基础的(保留几百以上是不实际的)，而后者是在规定的深度范围内和规定的慢度范围内 $(dT/d\Delta)$，包含了所有的多次反射。这些方法在图 9.9 中作了对比。

按照 Scholte 方法，处理转折点的计算和窄角度的反射问题没有差别。然而，很重要的是要能够精确地计算垂直波函数。正是这个事实表现出 WKBJ 地震图对掠射的入射问题变得不准确。不管所用的是 Langer 近似式还是运动方程的数值积分，用内插速度(在地球模型中)的精确方法必然对计算的脉冲形状产生一些影响。最普通地是将地球模型中不同深度的密度值以及 P 波和 S

波的速度列成表，但是地球物理学家没有关于如何求得中间深度处这些值的一致方法。通常是用线性内插，或用规律 ar^b（在一给定的层内，a 和 b 为常数）。地球展平变换和在 Cagniard 与 Fuchs 方法中使用的均匀平面迭层一起是另一种内插形式（见补充 9.9 中的图）。直到作为地球模型之基础的不同的内插规律的影响完全定量化以前，对一个特殊的问题，要确定哪一种计算体波地震图的方法是最合适的，也许是不可能的。

补充9.10

矩张量和广义射线

对一个用二阶矩张量客观描述的地震点源，关于面波和地球的简正振型将如何激发已给出了专门的结果。这里我们给出相应的体波激发公式。

当我们根据几何射线理论得到(4.91)的辐射图案时，对求得体波的激发我们已作了初步探讨。用离源角 i_ξ（对 P 波）或 j_ξ（对 S 波）描述射线的离源方向，则对 P 波、SV 波和 SH 波其关键因子可写成为

$$(P)\quad \gamma\cdot\dot{M}\cdot\gamma=\sin^2 i_\xi[\cos^2\phi\dot{M}_{xx}+\sin 2\phi\dot{M}_{xy}+\sin^2\phi\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{zz}]+2\sin i_\xi\cos i_\xi[\cos\phi\dot{M}_{xz}+\sin\phi\dot{M}_{yz}]+[\dot{M}_{zz}], \tag{1}$$

$$(SV)\quad \hat{p}\cdot\dot{M}\cdot\gamma=\sin j_\xi\cos j_\xi[\cos^2\phi\dot{M}_{xx}+\sin 2\phi\dot{M}_{xy}+\sin^2\phi\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{zz}]+(1-2\sin^2 j_\xi)[\cos\phi\dot{M}_{xz}+\sin\phi\dot{M}_{yz}], \tag{2}$$

$$(SH)\quad \hat{\phi}\cdot\dot{M}\cdot\gamma=\sin j_\xi\left[\frac{1}{2}\sin 2\phi(\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{xx})+\cos 2\phi\dot{M}_{xy}\right]+\cos j_\xi[\cos\phi\dot{M}_{yz}-\sin\phi\dot{M}_{xz}]. \tag{3}$$

这些公式用了第四章的符号，这里将它们进行整理以表明和矩张量元素一定的组合的关系。在建立广义射线的理论时，在该理论中和特定的射线路径有关的体波的解是以对射线参量的积分给出的。表示式(1)、(2)或(3)的其中之一将成为被积函数中的一个因子。对Cagniard方法，对 9.2 节中给出的反射法，对 WKBJ 地震图以及还对(因为可能修正，下面要讲到)9.6节中叙述过的全波理论法，这一点将是正确的。这些方法的共同点是都要确定所感兴趣的射线路径究竟是离源向上还是向下。为说明广义 M 的步骤，我们将到用对 SH 的全波理论

并且着眼于 $S+ScS$ 波(在地核的影区中变成 $S_{衍}$)。因此，在频率域中我们可写成

$$u_\phi^{S+ScS}(r,\ \Delta_0,\ \phi,\ \omega)=\frac{-i\omega}{4\pi\rho_s\beta_s^4}\int_\Gamma \omega^2 p(\hat{\phi}\cdot\dot{M}\cdot\gamma)\sigma^{(1)}(r_s)\times \dot{S}\dot{S}\sigma^{(1)}(\tau)Q_\omega^{(2)}{}_{p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0)dp. \tag{4}$$

看一下(9.64)或(9.69)即能够写出这个表示式来。$\dot{S}\dot{S}$ 是 ScS 的反射系数(对 SH)，并且 Γ 是非常类似于图 9.23 c 所表示的一个路径。这里我们的兴趣是在于(4)中和震源有关的因子。为得到它和射线参量的关系，我们注意到(1)—(3)可写成

$$(P)\qquad \gamma\cdot\dot{M}\cdot\gamma=(p\alpha_s/r_s)^2[\cos^2\phi\dot{M}_{xx}+\sin 2\phi\dot{M}_{xy}+\sin^2\phi\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{zz}]+2(p\alpha_s^2/r_s)r\xi_s[\cos\phi\dot{M}_{xz}+\sin\phi\dot{M}_{yz}]+[\dot{M}_{zz}]. \tag{5}$$

$$(SV)\qquad \hat{p}\cdot\dot{M}\cdot\gamma=(p\beta_s^2/r_s)\varepsilon\eta_s[\cos^2\phi\dot{M}_{xx}+\sin 2\phi\dot{M}_{xy}+\sin^2\phi\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{zz}]+(1-2\beta_s^2p^2/r_s^2)[\cos\phi\dot{M}_{xz}+\sin\phi\dot{M}_{yz}], \tag{6}$$

$$(SH)\qquad \hat{\phi}\cdot\dot{M}\cdot\gamma=(p\beta_s/r_s)\left[\frac{1}{2}\sin 2\phi(\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{xx})+\cos 2\phi\dot{M}_{xy}\right]+\beta_s\varepsilon\eta_s[\cos\phi\dot{M}_{yz}-\sin\phi\dot{M}_{xz}]. \tag{7}$$

符号 ξ_s，η_s 代表在震源处计算的垂直慢度(例如 $\xi=\alpha^{-1}\cos i=(\alpha^{-2}-p^2/r^2)^{1/2}$)，而 ε 是+1 或−1 是根据震源处射线是向下还是向上而定。将(7)代入(4)，我们找到对于计算是方便的如下的方案。

计算并储备两个基本解，

$$SH_1(\Delta_0,\ \omega)=\int_\Gamma \sin j_\xi f(p,\ \omega)dp,$$

$$SH_2(\Delta_0,\ \omega)=\int_\Gamma \cos j_\xi f(p,\ \omega)dp, \tag{8}$$

对我们目前的问题而言，上式中的

$$f(p,\ \omega)=i\omega(4\pi\rho_s\beta_s^4)^{-1}\omega^2 p\sigma^{(1)}(r_s)\dot{S}\dot{S}\sigma^{(1)}(\tau)Q_\omega^{(2)}{}_{p-\frac{1}{2}}(\cos\Delta_0),$$

$\sin j_\xi=p\beta_s/r_s$，$\cos j_\xi=\beta_s\eta_s$。给定任意矩速率张量 $\dot{M}$，为得到记录剖面，我们可将频谱 $\left[\frac{1}{2}\sin 2\phi\,(\dot{M}_{yy}-\dot{M}_{xx})+\cos 2\phi\dot{M}_{xy}\right]$ 乘以 $SH_1(\Delta_0,\ \omega)$，并且将频谱 $[\cos\phi\dot{M}_{yz}-\sin\phi\dot{M}_{xz}]$ 乘以 $SH_2(\Delta_0,\ \omega)$，进而通过对实频率求积分而反演到时间域中。这个练习可以很快地做出。对一具有一定走向、倾向、倾角、以及对 $M_0(t)=\mu A\bar{u}$ 有一定

时间函数的剪切位错，如果我们事先确定 $\dot{M}$ 是适宜的，则我们甚而可建立一个更简单的数值程序。在此情况下，我们组成了 $\dot{M}_0(t) * SH_1(\Delta_0, t)$ 和 $\dot{M}_0(t) * SH_2(\Delta_0, t)$。在递归滤波被用来对典型和长周期地震仪产生影响之后，这两个记录剖面在下图中给出。这种方法的优点是，在一给定距离 Δ_0 上的地震图仅由下图中在那个指定距离上所示的两个地震图的线性相加而给出。此线性和中的系数是走向、倾向、倾角以及从源到接收点的方位的函数，所以很容易检验各种断层面解的影响。用 $\left[\frac{1}{2}\sin 2\phi(M_{yy}-M_{xx})+\cos 2\phi M_{xy}\right]/M_0$ 和 $[\cos\phi M_{yz}-\sin\phi M_{xz}]/M_0$ 以及如补充 4.4 中 M 的分量可详细地给出两个系数。

如果我们不考虑 SH，而是考虑一离源的 P 波，则储备三个基本类型的解是必要的：

$$P_1(\Delta_0, \omega)=\int_\Gamma \sin_2 i_\xi f(p, \omega)\,dp,$$

$$P_2(\Delta_0, \omega)=\int_\Gamma 2\sin i_\xi \cos i_\xi f(p, \omega)\,dp,$$

$$P_3(\Delta_0, \omega)=\int_\Gamma f(p, \omega)\,dp.$$

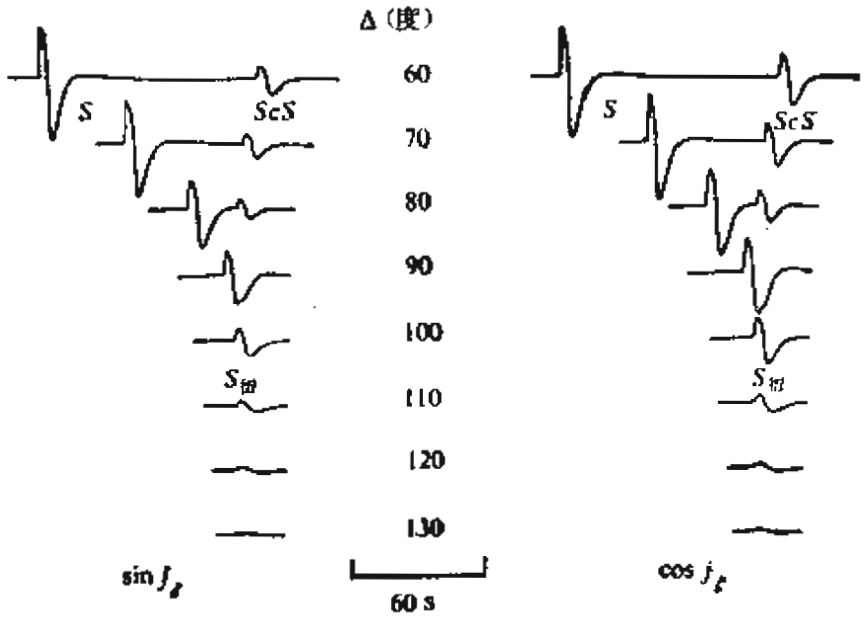
如果是一爆炸源，仅仅需要 P_3 解。对一离源的 SV 波，一般情况我们必须研究两个基本解：

$$SV_1(\Delta_0, \omega)=\int_\Gamma \sin j_\xi \cos j_\xi f(p, \omega)\,dp,$$

$$SV_2(\Delta_0, \omega)=\int_\Gamma (1-2\sin^2 j_\xi) f(p, \omega)\,dp.$$

我们刚刚给出的这个基础的讨论隐含着这样一个假定，即在震源深度 r_s 处计算垂直波函数，WKBJ 近似式是精确的。如果我们已给出了像（）的正式推导，这个假定将是很清楚的。这将要求这样的一般程序，即依据位移和牵引力分量(Hudson, 1969)的不连续性写出等价于 M 的源，并通过对频率、水平距离和方位(7.4节)的变换计算辐射波的激发。其中 r_s 处的垂直微分是必要的，在变换平面的结果将(如 WKBJ 法可用) 类似于对 P 乘以正或负的 $i\omega\xi_s$，对 S 乘以正或负的 $i\omega\eta_s$。这是因为垂直波函数具有如 $\exp(\pm i\omega\int\xi dr)$ 这样的相位因

子。因此，很明显，我们为避免(4) 的严格推导而取一主要的短切割，而且代之以 WKBJ 理论可能给出的形式写出这个表示式，只要它还有可能重新产生我们在第四章中得到的那种辐射图案。

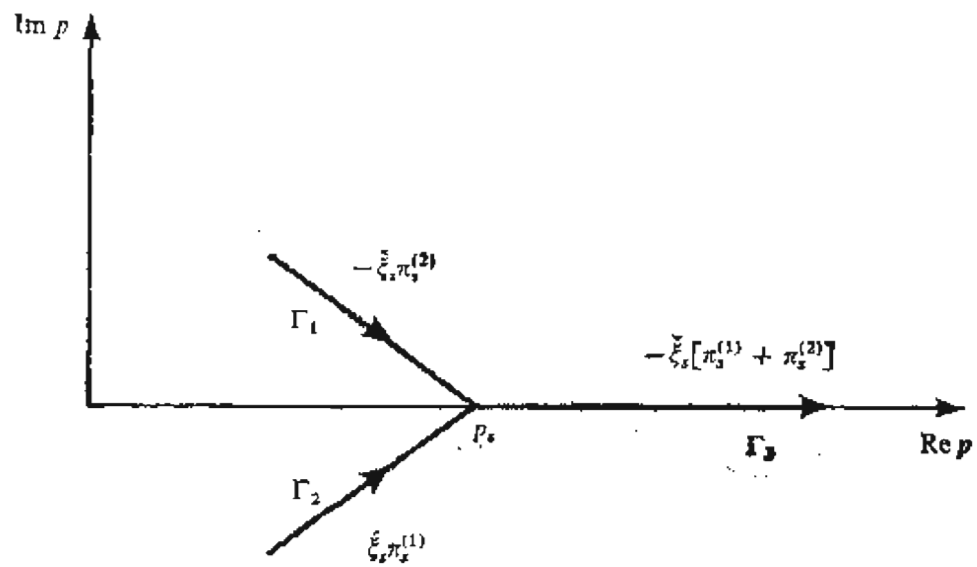


$S+ScS$ 波(偏振为 SH)的两个记录剖面。计算是对 PEM-C 地球模型(Dziewonski et al., 1975) 进行的，并对 15—100秒的长周期地震仪并且对以持续时间为 4 秒的线性斜坡函数作用的地震矩 $M_0(t)$ 进行了修正。左边的记录剖面利用了被积函数和 $\sin j_\varepsilon$ 的函数关系，右边则利用了 $\cos j_\varepsilon$ 的函数关系。请注意，与 $\cos j_\varepsilon$ 有关的 ScS/S 的振幅比比起与 $\sin j_\varepsilon$ 有关的该振幅比大。其原因是 ScS 的鞍点比起 S 的鞍点发生在低得多的射线参量处。对 $\sin j_\varepsilon$ 有一相应的效应，而 $\cos j_\varepsilon$ 对鞍点的位置相当的不敏感

对离源后陡峭地向下或向上的波，虽然 WKBJ 理论将是精确的，而对近于水平方向离源的射线，使用更精确的方法是必要的。对这样的射线同时出现了两个不同的问题。第一，在(5) —(7) 中对 $e\xi_s$(或 $e\eta_s$)的 WKBJ 近似式可能是不精确的。第二，在复 p 平面中积分路径的选择是复杂的，因为需要考虑射线离源向上和向下两者的波函数。利用如(9.66)那样的一致渐近近似式，第一个问题很容易解决。(注意，向下去的射线要求 $e\xi_s=\acute{\xi}_s$，这是因为在转折点以上 τ_s 是增加的，$\acute{\xi}_s$ 有一增加的相位，而向上去的射线要求 $e\xi_s=-\acute{\xi}_s$。对第二个

问题，其解被分解成三个不同线积分的计算，其方式和在耳语廊问题求解中所使用方式非常相似(见图9.30 b，c，d)。在临界射线参量的情况下，源的深度本身就是转折点，此射线参量为 $p_s=r_s/\alpha_s$。对复射线参量平面中这个点的左边，如图中上面所表示的，我们可通过被积函数中具有 $\xi_s=\xi_s\pi_s^{(1)}$的路径 Γ_2 来计算离源向下的波，而用 Γ_1 (具有 $\xi_s=-\xi_s\pi_s^{(2)}$)计算离源向上的波，两个被积函数在接近 p_s 的一点结合在一起了。然而，向右，在 Γ_3 上，被积函数呈指数衰减，它定量地表示出从震源深度 r_s 向上至震源层内转折点的深度所具有的能量隧道效应。从转折点的深度可进一步向上传播，但能量损失相对较小。

最后注意到，在用一力偶系统建立的体波表达式中，$\dot{M}_{ij}$ 刚好需要有五个不同分量的线性组合。[从(1)和(2)我们看到，对 P 和 SV，只需要有三个关于矩张量元素的不同组合，对 SH，两个进一步的组合在(3)中是显然的。]我们在第七章中得到的远场回波公式(7.147)—(7.150)也可以用这同样的五个关于 $\dot{M}_{ij}$ 的线性组合写出来。因而，在离源的每一方位上，对于 M 的六个独立分量，在最好的情况下可希望只得到(从远场资料)五个线性约束条件。



复射线参量平面上，离源向上的射线其路径为 Γ_1；离源向下的射线其路径为 Γ_2；对组合的被积函数其路径为 Γ_3，它定量地表示了从源深度向上的隧道效应。所涉及的每一路径都表明了对震源深度 r_s 处的波函数和广义垂直慢度

建议进一步阅读的文献

Abramovici, F. Numerical seismograms for a layered elastic solid. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **60**, 1861–1876, 1970.

Budden, K. G. *Radio Waves in the Ionosphere*. Cambridge University Press, 1961.

Bullen, K. E. *An Introduction to the Theory of Seismology* (3rd ed., Chaps. 7 and 8 for ray theory). Cambridge University Press, 1963.

Chapman, C. H., and R. A. Phinney. Diffracted seismic signals and their numerical solution. *In* B. A. Bolt (editor) *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods of Computational Physics, Vol. 12). New York: Academic Press, 1972.

Coddington, E. A., and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations* (Chap. 6 for asymptotic solutions). New York: McGraw-Hill, 1955.

Dey-Sarkar, S. K., and C. H. Chapman. A simple method for the computation of bodywave seismograms. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **68**, 1577–1593, 1978.

Felsen, L. B., and N. Marcuvitz. *Radiation and Scattering of Waves*. Engelwood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1973.

Fuchs, K. The reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. *Journal of the Physics of the Earth*, **16**, special issue, 27–41, 1968.

Fuchs, K., and G. Müller. Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison of observations. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **23**, 417–433, 1971.

Heading, J. *An Introduction to Phase Integral Methods*. London: Methuen and Co., 1962.

Helmberger, D. V., and S. D. Malone. Modeling local earthquakes as shear dislocations in a layered half space. *Journal of Geophysical Research*, **80**, 4881-4888, 1975.

Nussenzveig, H. M. High-frequency scattering by an impenetrable sphere. *Annals of Physics (New York)*, **34**, 23-95, 1965.

Wait, J. R. *Electromagnetic Waves in Stratified Media*. New York: MacMillan, 1962.

Wasow, W. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations* (Pure and Applied Mathematics, Vol. 14). New York: Interscience, 1965.

Wiggins, R. A., and D. V. Helmberger. Synthetic seismogram computation by expansion in generalized rays. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **37**, 73-90, 1974.

问　　题

9.1 a) 给出了如图 9.1 和 9.2 所描绘的广义射线和求解 (9.5) 的 Cagniard 路径 $p=p(\tau)$，证明，在$(n+1)$层中首波行走的距离 L 为

$$L=\left.\frac{d\tau}{dp}\right|_{p=1/\alpha_{n+1}}.$$

b) 证明，在 $p=1/\alpha_{n+1}$ 附近和在 $p=1/\alpha_{n+1}$ 的右边，对 Cagniard 路径上的一些点，

$$\xi_{n+1}=-i\left[\frac{2}{L\alpha_{n+1}}(\tau-t_n)\right]^{1/2},$$

其中 t_n 是首波到达时间，

$$t_k = \frac{r}{\alpha_{n+1}} + \text{和}\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right).$$

从(5.38)和(5.39)可证明

$$\dot{P}\dot{P}_n = \frac{A - \xi_{n+1}B}{A' - \xi_{n+1}B'},$$

其中

$$A = A(p) - bF\xi_n - a(a + d\xi_n\eta_{n+1})p^2,$$
$$B = cF - d\eta_n(a + d\xi_n\eta_{n+1})p^2,$$
$$A' = bF\xi_n + aGp^2,$$
$$B' = cF - d\eta_n Gp^2,$$

a, b, c, d, F, G 是按(5.38)采用的，下标 n 和 $n+1$ 现在分别用来表示恰在边界之上和恰在边界之下所计算的各个量。注意，对于在接近 $1/\alpha_{n+1}$ 的 Cagniard 路径上的 p, A, B, A', B' 是实数。

c) 在 $t = t_k$ 附近得到函数 $\psi(t)$(见(9.7))。于是利用

$$\frac{2}{\pi t^{1/2}} * [(t-t_k)^{1/2}H(t-t_k)] = (t-t_k)H(t-t_k)$$

(一斜坡函数)给出对一在距离 R_s 处、压力为单位阶梯函数的源，其首波的压力响应近似为

$$\left(\frac{1}{rL^3}\right)^{1/2}\frac{R_s}{\alpha_{n+1}}\left[(\dot{P}\dot{P})_1\cdots(\dot{P}\dot{P})_{n-1}\frac{AB' + A'B}{\xi_1 A'^2}(\dot{P}\dot{P})_{n-1}\cdots\right.$$
$$\left.\cdots(\dot{P}\dot{P})_1\right]_{p=1/\alpha_{n+1}} \times (t-t_k)H(t-t_k).$$

这是一个渐近的结果，当 $t \to t_k$ 时是成立的，并且这是波阵面展开式中第一项的一个例子。

这里首波的初动具有我们根据第六章所预计的典型的脉冲形状，也就是说它是从源辐射出的脉冲对时间的积分。

9.2 对成层介质中一特殊的射线路径，射线参量的两个函数对于计算和射线有关的脉冲形状往往是有用的，此两函数为时间(p)和距离(p)。我们定义时间(p)为从源到接收点沿射

线取的走时，其中接收点的位置是可变的(但具有固定的深度)，同时定义距离(p)简单地为在源和接收点之间测得的水平距离（即平面成层时的水平跨距以及球面几何中的角Δ)。因此，对图 9.1 b 中的广角反射，

$$\text{时间}(p)=\frac{Th_1-d_1}{\alpha_1\cos i_1}+\frac{2Th_2}{\alpha_2\cos i_2}+\cdots+\frac{2Th_n}{\alpha_n\cos i_n}+\frac{Th_1-d_2}{\alpha_1\cos i_1},$$

同时，

$$\text{距离}(p)=(Th_1-d_1)\tan i_1+2Th_2\tan i_2+\cdots$$
$$+2Th_n\tan i_n+(Th_1-d_2)\tan i_1.$$

a) 当接收点的位置是变化的时(在固定的深度上)，证明

$$p=\frac{d(\text{时间})}{d(\text{距离})}$$

(即射线参量为走时曲线的梯度)。

b) 证明 Cagniard 路径(9.5)由下式给出：

$$\tau=pr+\text{时间}(p)-p\,\text{距离}(p).$$

接下去我们将提出一些关于广角反射的近似计算及关于射线参量平面中有关特性的一些问题。

c) 证明 $d\tau/dp=r-\text{距离}(p)$

注意，假如这是连接源和接收点的实际射线的值（即距离$(p)=r$的解)，对射线参量 p_0，则有 $d\tau/dp=0$。

d) 证明 $d^2\tau/dp^2=-d(\text{距离}(p))/dp$，因而对平面成层介质中的一次反射而言，$d^2\tau/dp^2$ 总是负的。

e) 根据

$$\tau=t_{反}+(p-p_0)\frac{d\tau}{dp}+\frac{(p-p_0)^2}{2}\frac{d^2\tau}{dp^2}+\cdots,$$

其中 $t_{反}$ 是广角反射的射线到时，确实可看到当实 τ 一直增加到 $t_{反}$ 时，在 $p=p_0$ 处 Cagniard 路径 $p=p(\tau)$ 必须以直角离开实 p 轴。

f) 对接近 $t_{反}$ 的时间，证明

$$\frac{dp}{d\tau}\sim\frac{1}{(t_{反}-\tau)^{1/2}}\frac{1}{\left(2\frac{d}{dp}距离\right)^{1/2}}\qquad \tau<t_{反},$$

$$\sim\frac{i}{(\tau-t_{反})^{1/2}}\frac{1}{\left(2\frac{d}{dp}距离\right)^{1/2}}\qquad \tau>t_{反}.$$

g) 对 $t_{反}$ 附近的时间，在阶梯响应 $(2/\pi)\int_0^t\psi(\tau)/(t-\tau)^{1/2}d\tau$（见(9.7)）的近似计算中，用$\tau=t_{反}$（即 $p=p_0$）时它们的值代替 $\psi(\tau)$ 的所有缓慢变化的因子，并将 $t^{-1/2}$ 和仅有的快变因子 $dp/d\tau$ 进行褶积就足够了。

对 $t_{反}$ 附近的时间，从(f)得到 $1/t^{1/2}*dp/dt$ 为

$$\left(\frac{1}{2\frac{d}{dp}距离}\right)^{1/2}\left[i\pi H(t-t_{反})-\ln\left(\frac{|t-t_{反}|}{t_{反}}\right)\right].$$

用这个结果得到广角反射的阶梯函数响应为

$$R_s\left[\frac{1}{\xi_1}\left(\frac{p}{r\frac{d}{dp}距离}\right)^{1/2}(\dot{P}\grave{P}_1)\cdots(\dot{P}\grave{P})_{n-1}(\acute{P}\dot{P})_{n-1}\cdots(\acute{P}\dot{P})_1\right]_{p=p_0}$$

$$\times\left[\mathrm{Re}(\dot{P}\acute{P}_n)H(t-t_{反})-\frac{\mathrm{Im}(\dot{P}\acute{P}_n)}{\pi}\ln\left(\frac{|t-t_{反}|}{t_{反}}\right)\right].$$

（请回顾，R_s 是这样的距离，在此距离上来自源的入射波是一单位阶梯压力。假定 R_s 并非大到足以安置校正接收器于层 1 之外。）

h) 第五章中的几何射线理论已给出单位阶梯函数响应为

$\frac{R_s}{\mathscr{R}(x,\xi)}H(t-T(x,\xi))\times$引起内界面上能量损失的因子，

其中 $T(x,\xi)$ 是在 ξ 处的源和 x 处的接收点之间的走时，$\mathscr{R}(x,\xi)$ 是几何扩散函数。显然，$T(x,\xi)=t_{反}$。用问题 4.3 中的方

法证明

$$\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\xi_1\left(\frac{r}{p}\frac{d}{dp}\text{距离}\right)^{1/2}.$$

(提示：源和接收点两者均在层 1 之内.)

i) 由于广义射线的透射系数全部为实数，并且仅有 $\dot{P}\dot{P}$ 是复数，用(h)的结果和问题(5.14)的结果给出近似的阶梯函数响应的另一种推导，此响应我们曾在(g)中用 Cagniard 方法的近似式得到。

9.3 证明在传播矩阵 $\boldsymbol{P}(z_m, z_n)$ 中的表值(在均匀平面层组成的介质中，对 SH 波或对 P SV 波，z_m 和 z_n 可能被几个不同的层隔开)没有 ξ_m 与 ξ_n 或任意其它垂直慢度的分支切割。

在公式(9.16)中概括了图 9.1 b 所示的点 (r, z_0+d_2) 处总压力的 Fourier 变换的精确表达式[即具有所包含的所有的多次反射及源(9.1)]。证明仅在 p 平面内的被积函数的分支切割是和 ξ_{n+1}, η_{n+1} 及 $J_0(\omega pr)$ 有关的。[这个结果使路径变形的讨论变得相当方便。注意到由(9.2)用 Laplace 变换给出的、仅在 Moho 界面上的广义一次反射，其相应的被积函数具有相当多的分支切割。]

9.4 a) 对球对称介质中的一个深震源，证明，水平离开的射线是具有最大射线参量的射线。证明这个射线相应于走时曲线 $T=T(\Delta)$ 上的偏转，因而它对应于 $dp/d\Delta$ 的零值，所以几何扩散的一般表达式(9.44)是不能用的。

b) 在一具有深度剖面 $\alpha(r)$ 的球对称的地球模型中，考虑一点源 S 位于半径 r_s 处。假定，由 S 水平离开的射线在 p 处(半径 r，离 S 的距离为 Δ)被接收到。在此情况下，证明在 p 处的几何扩散由下式给出

$$\mathscr{R}(P, S)=r\left(\frac{\sin\Delta\cos i(r)}{\zeta(r_s)}\right)^{1/2},$$

其中 $\zeta(r)$ 是归一化的速度梯度，即 $r/\alpha(r)(d\alpha/dr)$。(提示：用

$\delta r_s/\delta i(r)$表示的话，$\mathscr{R}^2(S, P)$是什么？怎样才能从 $r_s/\alpha(r_s)=p$ 给出 $\delta r_s/\delta i(r)$？）

9.5 在 WKBJ 理论中，将 $\omega\alpha^{-1}\cos i$ 看成垂直波函数并且在从某参考深度开始所行走的垂直距离上对这个量求积分，从而给出了垂直波函数的相位。在此意义上，根据入射波 $g_n^{(2)}$ 和反射波 $g_n^{(1)}$，在值 $r>r_p$ 处解释两个波之和 $g_n^{(1)}(r)+g_n^{(2)}(r)$，并证明从转折点的"反射"发生了 $\pi/2$ 的相位超前。

9.6 在 $r>r_p$ 的深度范围内，如果 WKBJ 近似式被用于

$$P(r,\omega)=g^{(1)}_{\omega p\,-\frac{1}{2}}(r)Q^{(2)}_{\omega p\,-\frac{1}{2}}(\cos\Delta),$$

证明 p 的相位沿着 $r(\sin i)/\alpha(r)=p$ 的路径变化最快。

9.7 对于 $\boldsymbol{R}_l^0$ 和 $\boldsymbol{S}_l^0$，联系到 WKBJ 近似式，证明，用 (9.60) 和 (9.61) 近似表示的 $\pi^{(j)}$ 和 $\sigma^{(j)}$，具有穿过锥体中水平面的能通量率守恒的性质，此锥体在地球中心处具有立体角 $\sin\Delta\delta\Delta\delta\phi$。

9.8 证明，在球状地球上，在距离为 Δ 时对具有走时 T 的体波，其群速度为 Δ/T。还证明，对体波反射 ScS，当 $\Delta\to 0$ 时，群速度趋于零，但相速度 $(d\Delta/dT)$ 趋于无穷。

9.9 总的来说，在焦散点附近，地震波的典型的和频率有关的性质以及和距离有关的性质最可能是什么？

第十章　测震学原理

10.1　基本仪器

地震科学赖以建立的数据是地面运动的记录，因此我们就从论述什么是地面位移谈起。地下一个质点，在时刻 t_0，位于一个惯性参考系里的笛卡尔坐标 $x=(x,y,z)$处。在时刻 t，该质点的坐标则为同一坐标系中的 $u+x=(u+x,\ v+y,\ w+z)$。位移 $u=u(x,t)$即为地的位移。在时刻 t_0，位于地的 x 处，并对随时间变化的 u 作出响应的仪器即地震计。若该仪器能记录地面运动，则常称为地震仪。

采用一固定在惯性参考系里的传感器，便能测量地球的运动。利用从类星体来的无线电信号，并用长基线干涉测量技术测量地运动，即是一个实例。这在大地测量中正成为一种重要的方法。然而，现有的地震计和地震仪都是与地球相连的。地震波接收器与波在其中传播的物体一起运动。而且，通常报导的大部分地震运动所采用的参考系，事实上不是惯性系，而是每 24 小时稳定旋转一周的参考系。观测者在地震期间与物体一起运动，这使测震学在实验方面与物理科学的大多数其它分支完全不同。

目前采用的测量地震运动的基本方法有两种。最常用的一种是根据惯性原理，摆式地震计就是惯性传感器。另一种方法是根据一小部分地球的形变，应变计或应变地震计就是这种传感器。

看来今后根据角动量守恒进行测量的方法会得到发展。陀螺仪能测量地球上某一点的刚体转动。假设陀螺仪的高速轮悬挂于一个平衡的无摩擦的方向架系中，以致它能完全自由地围绕重心运动。若无外来的扭矩，陀螺仪的角动量方向在惯性参考系中会

保持不变，这使它能测量与地球相连的方向架系的转动。也就是说，陀螺仪的另一有用的特性——扭矩作用下的进动，可用来检测转动。这样的装置通常用于惯性导航，在地震学中应用于较为完整地描述地球运动。然而，目前其工艺上的灵敏度和稳定性尚不足以提供有用的地球物理测量结果。

10.1.1 摆式地震计

如图 10.1 所示，摆式地震计由一个通过并联的弹簧和阻尼器与地球的一点相连的重锤M构成。假设整个运动被限制在 x 方向，则用 $u(t)$表示惯性参考系中的地球运动，用 $\xi(t)$表示重锤 M 相对于地球的运动。对弹簧施加一个与伸长 $\xi-\xi_0$ 成正比的力，对阻尼器施加一个与重锤和地球之间的相对速度 $\dot{\xi}(t)$ 成正比的力。用 k 和 D 表示这些比例常数，运动方程由下式给出：

$$M\frac{d^2}{dt^2}[\xi(t)+u(t)]+D\frac{d\xi(t)}{dt}+k[\xi(t)-\xi_0]=0. \quad (10.1)$$

把相对于平衡位置 ξ_0 的位移 $\xi(t)-\xi_0$ 写作 $\xi(t)$，我们得到

$$\ddot{\xi}+2e\dot{\xi}+\omega_s^2\xi=-\ddot{u}, \quad (10.2)$$

式中 $2e=D/M$，$\omega_s^2=k/M$。

上述方程表明，用 $\xi(t)$及其时间导数(可测量的)的线性组合，能重现地球运动加速度 $\ddot{u}$。对极迅速的地球运动，(10.2) 左边的第一项占支配地位，这时 $\ddot{\xi}$ 几乎等于$-\ddot{u}$。换言之，对快速运动，由记录 $\xi(t)$重现的是地动位移$-u(t)$。对很慢的运动，第三项占支配地位，$\omega_s^2\xi$项几乎等于 $-\ddot{u}$，因而对缓慢运动，记录 $\xi(t)$重现加速度 $\ddot{u}(t)$。灵敏度正比于 T_s^2，这里 $T_s=2\pi/\omega_s$是无阻尼摆的周期，ω_s是相应的无阻尼角频率。

摆式地震计对于正弦地位移 $\exp(-i\omega t)$的响应可写成 $X(\omega)\times\exp(-i\omega t)$。$X(\omega)$ 称为频率响应，它能完整地描述摆的特性。当 $u(t)=\exp(-i\omega t)$ 和 $\xi(t)=X(\omega)\exp(-i\omega t)$时，由式(10.2)得到

$$X(\omega)=\frac{-\omega^2}{\omega^2+2ie\omega-\omega_s^2}.$$

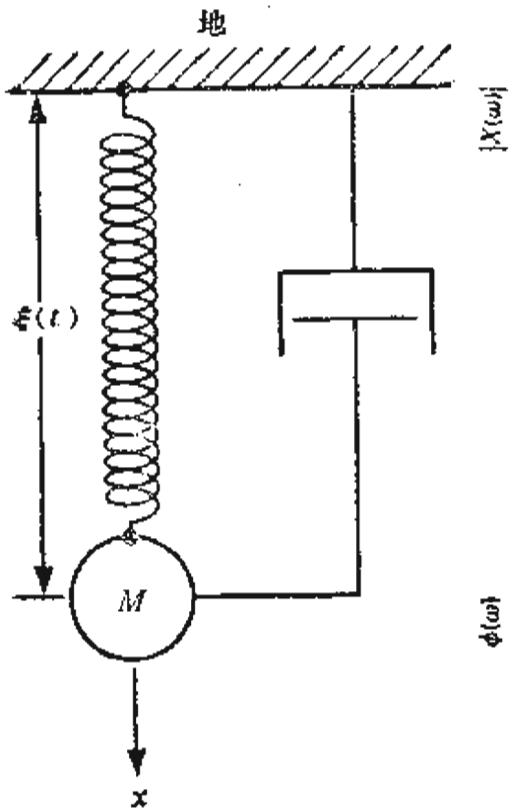


图 10.1
摆式地震仪由井壁的弹簧和阻尼器悬挂起来的重锤组成

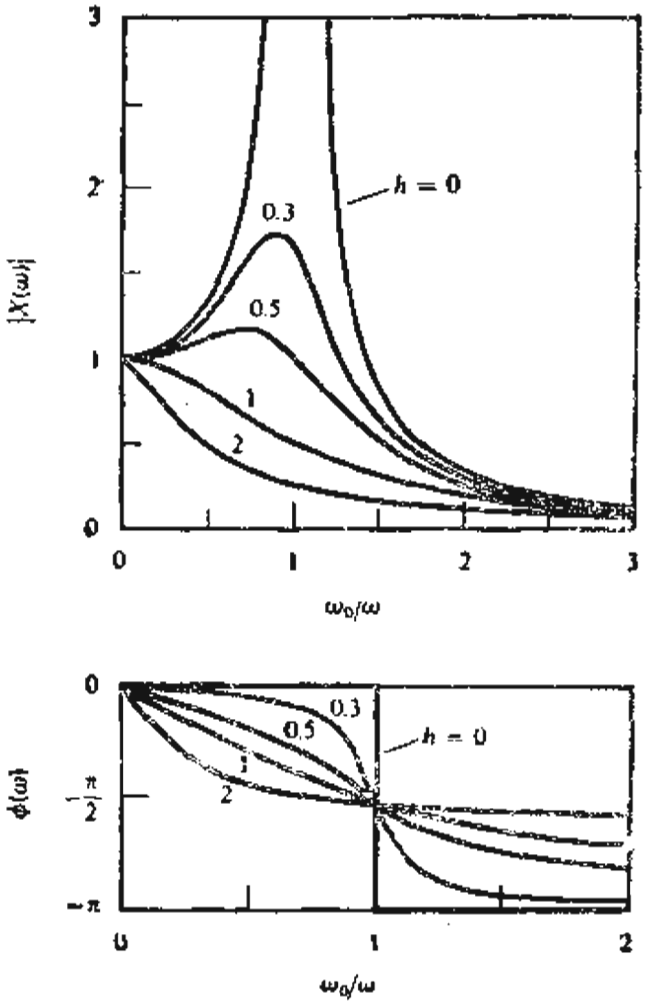


图 10.2
根据式(10.3)所得的摆式地震计的振幅响应$|X(\omega)|$和相位延迟$\phi(\omega)$

用$X(\omega)=|X(\omega)|e^{i\phi(\omega)}$，定义振幅响应为$|X(\omega)|$，相位延迟为$\phi(\omega)$，则可求出

$$|X(\omega)|=\frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\omega_s^2)^2+4\varepsilon^2\omega^2}}$$

和

$$\phi(\omega)=-\arctan\frac{2\varepsilon\omega}{\omega^2-\omega_s^2}+\pi\,. \tag{10.3}$$

若$\omega\gg\omega_s$，则$|X(\omega)|\to 1$，$\phi(\omega)\to\pi$。也就是说，这个摆真实地记录位移，但符号相反。符号的差别通常通过在记录图上适当地表示地运动的方向来消除。图 10.2 表示$|X(\omega)|$和(10.3)式中

不带 π 项的 $\phi(\omega)$。这些曲线用 $h=e/\omega_s$ 作为参数来表示；h 是阻尼常数，等于 Q 值(阻尼振荡器的品质因子)倒数的二分之一。

摆式地震计的性能，也可用其对脉冲加速度为 Dirac δ 函数即 $\ddot{u}(t)=\delta(t)$ 时的响应 $f(t)$ 加以完整的描述。由式(10.2)可知，$f(t)$ 满足

$$\ddot{f}+2\,e\dot{f}+\omega_s^2 f=-\delta(t). \tag{10.4}$$

对式(10.4)两边求 Fourier 变换，并令

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(i\omega t)\,dt=f(\omega), \tag{10.5}$$

我们有

$$f(\omega)=\frac{-1}{-\omega^2-2\,ie\omega+\omega_s^2}.$$

由于 $f(\omega)=X(\omega)/\omega^2$，频率响应可通过 Fourier 变换由脉冲响应得到，也可以反过来，由频率响应得到脉冲响应。根据(10.5)的逆变换，

$$\begin{aligned} f(t)&=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega t)\,d\omega}{\omega^2+2\,ie\omega-\omega_s^2}\\ &=\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega t)\,d\omega}{(\omega-\omega_1+ie)(\omega+\omega_1+ie)}. \end{aligned} \tag{10.6}$$

式中 $\omega_1^2=\omega_s^2-e^2$。若把 ω 扩展到复 ω 平面上，则发现，由于 $e>0$，被积函数的极点总是位于下半平面。这时，对 $t<0$，沿实轴的积分可由沿上半平面中无限半圆的积分代替。因为因子 $|\exp(-i\omega t)|=\exp(+\mathrm{Im}\{\omega t\})$，后一积分为零。因此，

$$f(t)=0,\quad t<0. \tag{10.7}$$

对 $t>0$，若 $\omega_s>e$，则极点留数的贡献给出

$$f(t)=\frac{-1}{\omega_1}e^{-et}\sin\omega_1 t, \tag{10.8}$$

而若 $\omega_s<e$，则

$$\begin{aligned} f(t)=\frac{-1}{2\sqrt{e^2-\omega_s^2}}\{&\exp[-(e-\sqrt{e^2-\omega_s^2})t]\\ &-\exp[-(e+\sqrt{e^2-\omega_s^2})\,t]\}. \end{aligned} \tag{10.9}$$

在 $\omega_s=e$ 的特定情况下，两公式都给出：

$$f(t)=-te^{-et},\quad t>0. \tag{10.10}$$

若地震计是亚阻尼的($\omega_s\gg e$)，则脉冲响应会表现出不希望有的阻尼振荡。另一方面，若是过阻尼的($\omega_s\ll e$)，则式(10.9)中的指数衰减常数之一 $e-\sqrt{e^2-\omega_s^2}$ 接近 $\frac{1}{2}(\omega_s^2/e)$，对较大阻尼，响应会延迟得较长。出于这些原因，在临界阻尼 $\omega_s=e$ 附近，可得到最理想的结果。

地震计对任意地面加速度 $\ddot{u}(t)$ 的响应 $\xi(t)$，可由这个加速度和脉冲响应 $f(t)$ 的褶积得到：

$$\xi(t)=\int_0^\infty \ddot{u}(t-\tau)f(\tau)d\tau, \tag{10.11}$$

这就是(10.2)的通解。

10.1.2 稳定的长周期摆

由于低频处摆对加速度的灵敏度正比于其固有周期的平方，因而许多年里，设计一种稳定的长周期摆，一直是测震学中最重要的问题，直至 LaCoste 在 1935 年发明了零长弹簧，才解决了这问题。理论上，LaCoste 弹簧可以稳定地达到无限长的周期。

通常，当弹簧拉伸时，所加载荷 f，通过模量 K，正比于伸长量 $l-l_0$，其中 l 是实际长度，l_0 是已知的初始长度，因此零长弹簧是张力正比于实际长度的一种弹簧。在绕零长弹簧时，必须扭转弹簧钢丝，并绕成螺线，这样，由于线圈尺寸有限，即使在无载荷时，弹簧仍有残余张力。载荷很小时，此残余张力会使弹簧长度保持不变。直至载荷增加到一定限度，弹簧圈才开始分开，其长度 l 随着载荷成正比地增加，即 $f=kl$。

检验一弹簧是否为零长弹簧的一种简便又精确的方法如下：把此弹簧垂直悬挂起来，并挂一重物，使弹簧伸长到某一新的平衡长度 l。让弹簧垂直地在该平衡位置附近振荡，并测出其周期 T。对任一遵循 Hooke 定律的弹簧，很容易就可以证明：$T=$

$2\pi[(l-l_0)/g]^{1/2}$，从这公式就可得到 $l-l_0$。若 $(l-l_0)$ 等于 l 的直接测量值，则该弹簧为零长弹簧。

图 10.3 表示如何用这种弹簧测量地面运动的垂直分量。重锤 M 固定于围绕铰接点 B 转动的杆上。零长弹簧的一端通过一根短的软金属丝连接于 A 点，另一端用同样的方法连接于杆上靠近重锤 M 的一点上。A 点沿竖直方向处于 B 点的正上方，两点都固定于地。

以无地面运动时摆的平衡为例。由于施于 M 的重力而产生的围绕 B 点的转矩，等于 $M_g h_1 \sin\phi$，其中 h_1 是杆长，ϕ 是杆与竖直方向的夹角。因为初始长度为零，所以该弹簧的转矩等于 $klh_2\sin\theta$，其中 l 是弹簧长度，k 是弹簧的弹性常数，h_2 是 A、B 间的距离，θ 是弹簧与竖直方向间的夹角。在平衡位置，两个转矩互相平衡：

$$Mgh_1\sin\phi = klh_2\sin\theta.$$

另一方面，由几何学可知：

$$l\sin\theta = h_1'\sin\phi, \qquad (10.12)$$

式中 h_1' 是杆上 B 点到弹簧连接点的距离。因此，平衡条件由下式给出：

$$Mgh_1\sin\phi = kh_1'h_2\sin\phi$$

即

$$Mgh_1 = kh_1'h_2. \qquad (10.13)$$

令人惊奇的是，此条件与 ϕ 无关。换句话说，只要长度和重锤质量选得合适，则不存在回复力，任一重锤位置都处于平衡状态。由此可见，此摆具有无限长的周期。

有很多不同于图 10.3 所示的悬挂重锤和弹簧的方式同样可以达到无限长周期。实际上，因为弹簧长度和铰接位置不精确，铰接点处存在一定的回复力，温度变化使弹簧常数 k 也变化，重力也变化……此外还有其它干扰存在，因而无限长周期是达不到的。按照加利福尼亚理工学院地震实验室 Francis Lehner 的说法，日常观测中能保持的最大周期为 80 秒。标准长周期地震仪通

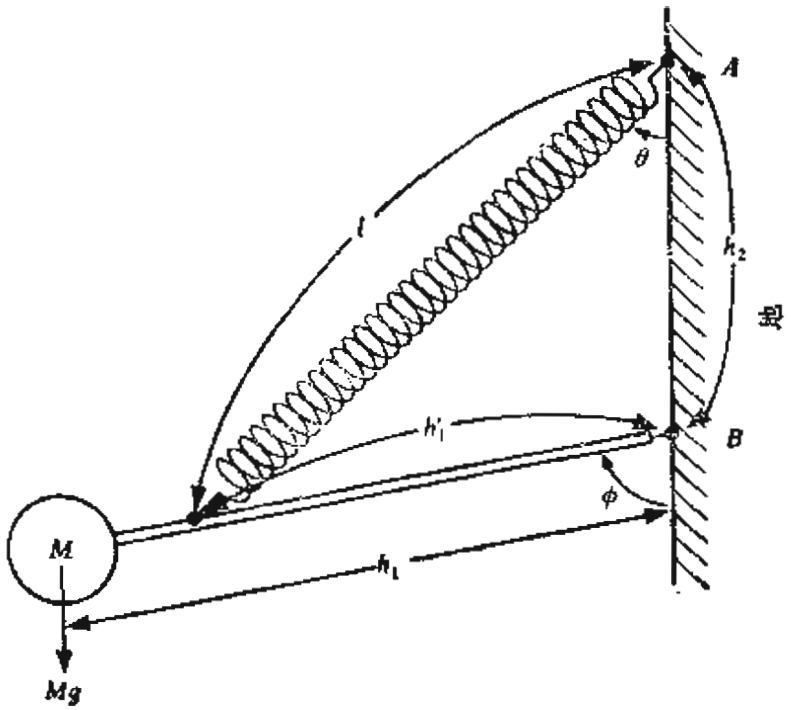


图 10.3

带有零长弹簧的垂直 (LaCoste) 摆。由于此杆还对重力变化作出响应，该仪器有时称为重力仪

常工作周期为 15—30 秒。

如上所述，摆对长周期加速度的灵敏度正比于摆周期 T_s 的平方。由(10.2)，对加速度渐变量 $-\Delta a$ 来说，我们有

$$\xi = \frac{\Delta a}{\omega_s^2} = \frac{\Delta a}{(2\pi)^2} T_s^2.$$

例如，若 $T_s \sim 60$ 秒，$\xi = \Delta a \cdot 10^2$ 厘米。当加速度变化 1 毫伽 ($= 10^{-3}$ 厘米/秒^2)时，摆重锤移动 1 毫米。

稳定的长周期摆作为水平分向地震仪，多年来已为大家所熟知。现有的标准地震仪的长周期水平摆如图 10.4 a 所示。支持重锤与杆顶部和底部的悬丝因重力作用而处于张力状态。这种悬挂方式起初是由 Zollner(1869)设计的，它消除了根据图 10.4 b 设计的其它早期水平摆在支点处的摩擦。对小振幅振荡，摆在离竖直平面 θ 角的平面上运动。该平面中重力的分量是 $g\cos\theta$，因此摆的周期是 $2\pi\sqrt{l/(g\cos\theta)}$，其中 l 是杆长。当杆接近水平方向

$(\theta \to \pi/2)$时，振荡周期接近无限大并变得不稳定。标准仪器达到的最大稳定周期约为 30 秒。

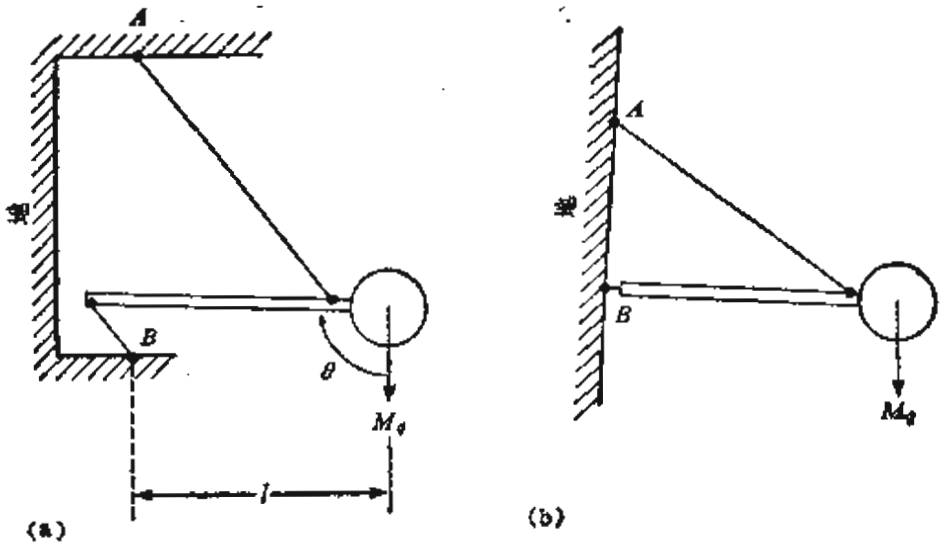


图 10.4

水平摆。(a) Zollner 悬挂。两条悬丝都保持张力状态，以避免悬挂的不稳定。(b) 常称为"花园大门"式悬挂。线段 AB 固定于地，在(a) 和(b) 中都稍偏离竖直线。事实上，在 (b) 和图 10.3 中 B 点上的支点是一钩子，以使该支点处于张力状态

10.1.3 水平加速度的测量

几乎所有摆式地震计的设计都不可能区别地面水平加速度和由于倾斜重力产生的贡献。图 10.5 用一个单摆说明这种情况。当地震计框架倾斜一个量 $\delta\psi$ 时，铰接点受到一转矩，使摆相对于框架运动。该转矩的效果与大小为 $g\sin\delta\psi$ 的水平加速度产生的效果相同。

Farrell(1969) 曾作过最初的尝试，使用陀螺把倾斜和水平加速度的作用分开，但直到现在，大多数地震学家满足于这样一个相当任意的假设，即或者是加速度，或者是倾斜，在一特定信号中居主导地位。Rodgers(1968)详细分析了水平摆(图 10.4)的响应。除了倾斜与水平加速度不能分清外，他论述了关于这种设计

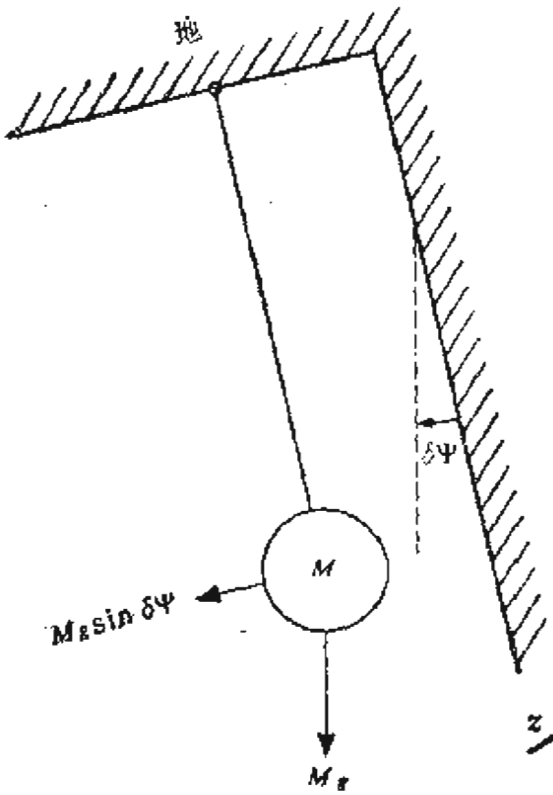


图 10.5

倾斜引起悬挂重锤的视水平加速度

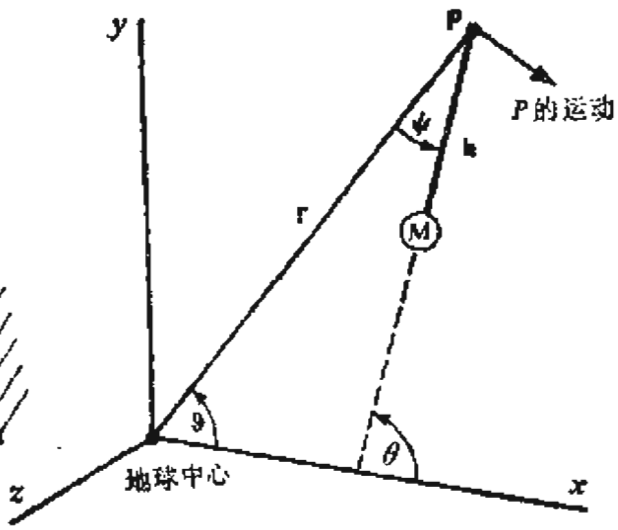


图 10.6

由指向地心的重力引起的摆的运动。这里的笛卡尔轴具有固定在惯性空间的方向

的另一个问题。虽然该仪器最初对垂直于杆的水平加速度（及其倾斜等量）很灵敏，但其响应也受沿着杆的加速度和改变角 θ 的倾斜分量的影响(见图 10.4)。Rodgers 称这些为“参数效应”，因为它们对仪器固有周期的变化起作用。

一般习惯于在重力方向平行于 z 轴的笛卡尔坐标系中考虑地震计摆的运动。实际上，重力是指向地心的。把这点考虑进去的基本结构是 Schuler 摆。它多用于惯性导航，将来可能对地震学也很重要。该结构示于图 10.6，摆铰接在 P 点，为使下面的推导简便起见，设其运动限制在 xy 平面中。摆的运动方程是

$$J_p\frac{d^2\theta}{dt^2}=M\,(\boldsymbol{h}\times\boldsymbol{g})_z-M\left(\boldsymbol{h}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)_z, \qquad (10.14)$$

式中 J_p 是摆对于 P 点的惯量矩，θ 是测出的摆偏离 x 轴的转动，

M是摆的质量；h是相对于P点的重锤位置；g是重力加速度；r是相对于地心的P点位置。

让我们以P点水平运动（即垂直于向地心的方向的运动）时摆的运动为例。这种情况下，加速度向量的分量d^2r/dt^2是$(-r\ddot{\vartheta}\sin\theta, r\ddot{\vartheta}\cos\theta, 0)$，其中$\vartheta$是$r$和$x$轴之间的夹角。其它向量的分量是$h=(-h\cos\theta, -h\sin\theta, 0)$和$g=(-g\cos\vartheta, -g\sin\vartheta, 0)$。式(10.14)现在可写为

$$J_p\frac{d^2\theta}{dt^2}=Mhg\sin(\vartheta-\theta)+Mhr\ddot{\vartheta}. \qquad (10.15)$$

由于摆偏离竖直方向的角度ψ等于$\theta-\vartheta$，因此可将上式写为

$$J_p\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}-\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right)+Mgh\sin\psi=Mhr\ddot{\vartheta} \qquad (10.16)$$

即

$$J_p\left(\frac{d^2\psi}{dt^2}\right)+Mhg\sin\psi=-(J_p-Mhr)\ddot{\vartheta}. \qquad (10.17)$$

对于小的ψ，$\sin\psi\sim\psi$，摆的周期T_0由下式给出：

$$\frac{2\pi}{T_0}=\left(\frac{Mgh}{J_p}\right)^{1/2}. \qquad (10.18)$$

当$J_p=Mhr$时，水平加速度产生的力为零。这条件等于

$$\frac{2\pi}{T_0}=\left(\frac{Mgh}{Mhr}\right)^{1/2}=\left(\frac{g}{r}\right)^{1/2}, \qquad (10.19)$$

这是长度等于地球半径的单摆的周期。相应的周期为84分钟。具有这个周期的摆称为Schuler摆。

若把Schuler摆放在飞机上，它会总指向地心，并不会受水平加速度的影响。若在Schuler摆上安装一加速度计，测量飞行时从地球上一点到另一点的水平加速度，然后相对于时间，对加速度积分两次，则可测量两点间的距离。

为惯性导航研制的仪器有更准确地描述地球运动的内在潜力，比如说区别加速度和倾斜。然而，现代设备的灵敏度尚未达到可以使它有效地运用于地球物理学。

10.1.4 应变和转动的测量

现在谈谈应变地震计（或应变计）。它以图 10.7 a 中表示的办法测量地球上临近两点间的相对位移。P_1处的运动由固定在P_1点的杆传递到 P_1'，测出 P_1' 和 P_2 的相对位置。由于需测的地运动周期实际上比杆中波的固有周期长得多，因此杆本身的应变可忽略不计，可认为该杆是刚性的。

起初，P_1 位于 x，P_2 位于 $x+\delta x$。随后，这些点依次分别发生了位移 $u(x)$和 $u(x+\delta x)$，以致 P_2 移到 $u(x)+(\delta x\cdot\nabla)u$。（我们采用的是 Lagrange 算子的运动描述法，见 2.1 节。）

P_1' 的位移是 P_1的位移加上由于旋转$\frac{1}{2}\mathrm{curl}\,u$ 产生的附加项（见式 (2.2)）。对于一级近似，该杆的长度和方向由向量 δx 给出，以致 P_2偏离P_1' 的相对位移是 $u+(\delta x\cdot\nabla)u-u-\frac{1}{2}(\mathrm{curl}\,u)\times\delta x$。该向量的第 i 个分量是

$$\delta x_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-e_{ijk}\left(\frac{1}{2}e_{jlm}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}\right)\delta x_k,$$

这可改写为 $e_{ij}\delta x_j$，其中 e_{ij}为应变张量的笛卡尔分量

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

该结果表明应变计对应变分量确实很灵敏，但对旋转并不灵敏。

事实上，被测量的不是向量 $e_{ij}\delta x_j$，而是P_2P_1 和 $P_1'P_1$ 间的标量差，因此 P_1 只需为杆提供枢点，而杆实际上可以是一根金属丝。转动不予考虑，P_2P_1 和 $P_1'P_1$ 如图 10.7 b 中那样排列成一直线。如式(2.3)所示，P_2P_1' 的长度 $|\delta x+\delta u|-|\delta x|$是 $e_{ij}\nu_i\nu_j|\delta x|$，其中 ν 是沿杆的单位向量。为了确定应变的六个分量，一般需要六个不同的应变计，每一个沿着 ν 的不同方向取向。对地球自由表面附近所作的测量，零牵引力的条件给出应力分量的

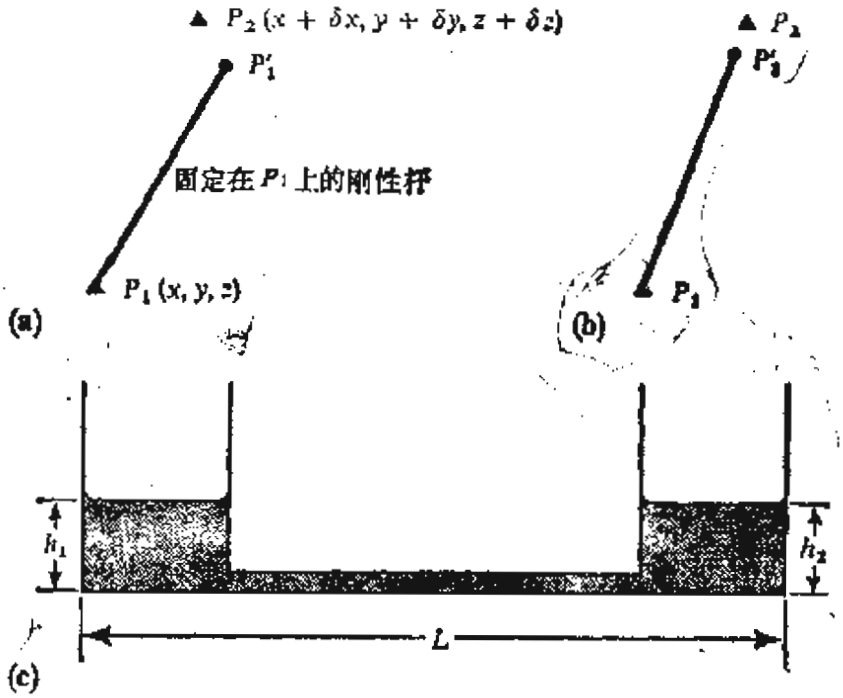


图 10.7

应变和倾斜的测量。(a) 杆 P_1P_1'固定在 P_1，并绕 P_1 旋转。(b) 杆 P_1P_1' 固定在 P_1，但 P_1, P_1', P_2 有效地共线。为达到这个目的，或使杆以 P_1 点为枢点旋转，或使 $P_1'P_2$ 的传感器为一电容检测器，后者对 P_1，P_1'，P_2排列不整齐的反应不灵敏。(c) 由一连通管连起的两个液体槽组成的倾斜仪监测流体高度 h_1和 h_2，量 $(h_2-h_1)/L$ 的时间变化解释为倾斜。见 Beavan 和 Bilham (1977) 对温度效应的讨论

三个线性的约束条件，从而使得完整地确定应变张量，只需要三个不同的应变计。各种场地影响会使(所测量的)区域应变场发生变化，使之与地球物理意义上的应变场不同。尤其还可能存在由安放仪器的洞穴 (Harrison，1976 a) 以及安放仪器地区中地形所产生的重要影响。

可以用分布在地球表面某一地区的摆式地震仪台阵计算应变和旋转，但实际上，这种性能受到了地球结构浅层不均匀性的限制(Saito，1968)。

在其质心把一重锤悬挂起来，并用弹簧和阻尼器把它和地球耦合，这样就可以做成一个转动传感器。曾尝试过用这种方法，但从未得到有用的结果。

另一种方法是采用陀螺仪。由角动量守恒定律可知，悬挂于其质心的旋转物体，在无外加转矩的情况下，将保持其旋转轴在惯性空间中固定不变。这使我们可能测量相对于一惯性系的地球运动，也就可能用陀螺仪测定 Chandler 晃动和岩石层板块的运动。然而目前一般旋转传感器的灵敏度还未达到能有效地运用于地球物理方面。

作为一种特殊情况，围绕水平轴的转动，地球物理学中称为倾斜。在转动较小的情况下，可用三个分量的向量表示，就这个意义上讲，倾斜与两个水平分量有关。上面已经谈到，目前设计倾斜仪和水平加速度仪所根据的原理，无论如何也不可能区别两种影响。正如 Melchior (1966) 详细描述的那样，摆式倾斜仪已广泛用于测量地球固体潮。除了摆，地球物理学中最通用的是用管子连接两个装满液体的水槽(图 10.7 c)，然后测量水槽的水位差。由于温度在所用液体中的空间变化可能产生干扰信号，若连接水槽的是一个敞口的充了一半液体的槽，而不是封闭的管子，则这种干扰信号会减少。Michelson 和 Gale 在 1919 年采用这种类型的倾斜仪，其水槽间有 500 英尺长，并带有干涉仪，以测量水的高度。他们用这仪器记录了固体潮引起的倾斜。

近年来流行这样的仪器：把液体密封在一块略微弯曲的水平板下，其中留一个可自由运动的气泡，这种仪器可测量较短基线(约 20 厘米)上的倾斜。对气泡位置进行连续监测，若发生倾斜，则产生正比于气泡位移的信号。这种仪器在中加利福尼亚台阵中用来监测可能与圣安德烈斯断层活动有关的地倾斜 (McHugh and Johnston, 1976)。Harrison(1976 b)描述了类似于使用密封在光学平板玻璃下气泡的仪器的工作。若发生倾斜，此平板被重新调平以保持气泡位置。Harrison 用这种反馈作为输出信号，经过三个月的观测，能测定 M_2 潮到 0.5% 左右。然而，短基线倾斜仪对非常局部的场地效应相当灵敏，而对这些效应还不可能确定其数量。若附近的岩石单元是不均匀的，则即便使其总体产生

应变也可能引起局部性的倾斜，这部分地说明了相距很近的短基线倾斜仪为什么不总是给出同样信号的原因。

10.2 地震信号的频率和动态范围

地震学所研究的大部分信号是瞬态的，即正如那些爆炸和天然地震的地震图那样，实际上它们的长度是有限的。对这样一个瞬态信号 $f(t)$，存在着 Fourier 变换 $f(\omega)$，

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(i\omega t)dt, \tag{10.20}$$

和

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\exp(-i\omega t)\frac{d\omega}{2\pi}, \tag{10.21}$$

式中 t 是时间，ω 是角频率。我们定义振幅谱密度为 $f(\omega)$ 的绝对值，并由下式定义相位延迟谱 $\phi(\omega)$：

$$f(\omega)=|f(\omega)|e^{i\phi(\omega)}. \tag{10.22}$$

（把 ϕ 叫做相位延迟的理由见补充 5.5。）由于 $f(t)$ 是实的，所以下列关系式成立：

$$\begin{aligned} f^*(\omega)&=f(-\omega),\\ |f(\omega)|&=|f(-\omega)|,\\ \phi(\omega)&=-\phi(-\omega), \end{aligned} \tag{10.23}$$

式中星号表示共轭复数。

$|f(\omega)|$ 的单位是 $f(t)$ 的单位除以频率的单位（$\omega/2\pi$）。例如，用厘米为单位表示地位移 $f(t)$，则 $|f(\omega)|$ 的单位为厘米/赫。最通用的 $\phi(\omega)$ 的单位是 1 个弧度或 1 个圆周（即 2π 弧度）。

另有三种不同的信号，其普通的 Fourier 变换不存在。一种是频率为 ω_n 的正弦振荡的叠加，如太阳、月亮的引力引起的潮汐地球应变。对这种信号，我们用下列方式确定振幅 A_n 和相位延迟 ϕ_n：

$$f(t)=\sum_n A_n \exp(-i\omega_n t+i\phi_n), \qquad (10.24)$$

式中 A_n 的物理量纲与 $f(t)$相同。

另一种信号是平稳随机过程，如大气、海洋、某些火山喷发过程、工业活动和交通引起的环境地震地噪声。这些信号既不能用(10.21)，也不能用（10.24）表达，因此必须引入功率谱密度 $P(\omega)$，这是自相关函数 $P(\tau)$的 Fourier变换，定义为

$$P(\tau)=\langle f(t)f(t+\tau)\rangle,$$

式中符号〈 〉表示对时间 t 的平均。

$$P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} P(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau. \qquad (10.25)$$

$P(\omega)$的单位是 $f(t)$的单位的平方除以频率的单位 $(\omega/2\pi)$。对以厘米量度的位移 $f(t)$，$P(\omega)$的单位是厘米^2/赫。$P(\omega)$ 并没有包含与相位有关的信息，这种类型的信号可以表达为白噪声 $w(t)$与权函数 $g(t)$的褶积(第十一章)：

$$f(t)=\int_{-\infty}^{t} w(t')g(t-t')dt', \qquad (10.26)$$

式中 $g(t)$的 Fourier 变换 $g(\omega)$与 $P(\omega)$的关系为

$$P(\omega)=g^*(\omega)g(\omega)=|g(\omega)|^2. \qquad (10.27)$$

若 $g(\omega)$的对数在上半 ω 平面中是解析的，则 $g(\omega)$的相位延迟谱可由$|g(\omega)|$来确定。

必须考虑的最后一种类型信号是非平稳、非正弦的，且在记录的有限长度外具有未知特性。我们把这种信号称为“漂移”，并把这些信号近似为在总体上依赖于时间的某些变化，可用总变化和上升时间来表征这些信号。用线性的趋势性变化对这些信号进行近似，在这种情况下，其变化率将作为参数。

当信号具有一定频率的近似正弦形式时，可根据记录测定振幅。若信号带宽已知，则可以估算出振幅或功率谱密度。同样，若已知谱密度和信号带宽，也可估算出信号振幅。

对于粗略的近似，子波振幅为其振幅谱密度与带宽的乘积。例如，对$-\omega_0<\omega<\omega_0$，$|f(\omega)|=F$(常数)；对其它 ω，$|f(\omega)|=0$，而对所有 ω，$\phi(\omega)=0$，相应的信号 $f(t)$ 被写为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0}F\exp(-i\omega t)d\omega$$

$$=2Ff_0\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t},$$

式中 $f_0=\omega_0/2\pi$。最大振幅在 $t=0$ 处，并等于 $F\cdot 2f_0$，因为在 $x=0$ 时，$x^{-1}\sin x=1$。同样，对一个带通信号，当其 $\omega_0<|\omega|<\omega_1$ 时，$|f(\omega)|=F$；对其它 ω，$|f(\omega)|=0$；而其中 $\phi(\omega)=0$，则我们得

$$f(t)=2Ff_1\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1 t}-2Ff_0\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t},$$

式中 $f_1=\omega_1/2\pi$。最大振幅发生在 $t=0$ 处，且

$$f(t)_{t=0}=F\cdot 2(f_1-f_0), \tag{10.28}$$

这又是振幅谱密度与带宽的乘积。

由对噪声定义的功率谱密度 $P(\omega)$，我们得到

$$P(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)e^{-i\omega\tau}d\omega, \tag{10.29}$$

这是 (10.25) 的逆变换。因此

$$P(\tau)\Big|_{\tau=0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)d\omega.$$

此外，根据定义，

$$P(\tau)\Big|_{\tau=0}=\langle f^2(t)\rangle.$$

因此我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P(\omega)d\omega=\langle f^2(t)\rangle. \tag{10.30}$$

例如，当 $\omega_0<|\omega|<\omega_1$ 时，$P(\omega)=P$；对其它 ω，$P(\omega)=0$，于是有

$$\langle f^2(t)\rangle = P \cdot 2(f_1 - f_0). \qquad (10.31)$$

因此，对一粗略的近似，时间域内的噪声均方振幅等于功率谱密度和带宽的乘积。

根据（10.28）和（10.31），并且已知信号的带宽，就能近似地求出振幅谱密度和振幅的关系以及功率谱密度与均方振幅的关系。

下面研究一下地震信号并考察各种观测结果所涉及的频率和动态范围。每种情况下，我们都将借助于上述四种信号中的一种来表征观测结果。

10.2.1 周期为 20 秒左右的面波

标准长周期地震仪是一种经典的机械地震仪。对远距离浅震而言，它所记录的最主要信号是周期约为 20 秒的面波。由于体波的几何扩散比面波强，因此体波振幅较小。周期小于约 10 秒或 15 秒的面波由于浅处的不均匀性而散射。面波的衰减在约 20 秒处最小，因为周期大于 25 秒的面波在进入软流层时开始失去能量。此外当周期大于 20 秒时，标准地震仪的放大倍数减小。因此，很自然，Gutenberg 和 Richter（1936）根据周期为 20 秒的面波振幅，引入震级标度 M_s。（见附录 2。）

图 10.8 表示了作为震中距函数的震级 $M_s = 3$ 的浅源地震的面波振幅。曲线是由 Richter 的表中（1958，p. 346）得到的。最灵敏的长周期地震仪可检测 $M_s \approx 3$ 的远震，这也就是在 $\Delta = 20^\circ$ 处，其振幅为 100 纳米（10^{-5} 厘米），在 $\Delta = 80^\circ$ 处，其振幅为10纳米。另一方面，最大的地震（$M_s = 8\frac{1}{2}$）在 $\Delta = 20^\circ$ 处振幅为几厘米，在 80° 处，则为几毫米。这样大的信号动态范围（10^{-6} 至 1 厘米）对地震仪器和系统提出了更高的要求（见补充 11.1）。

如 10.1 节中所描述的，有三种基本传感器能用于地震学：对加速度灵敏的惯性传感器，测量安置点下边地应变的应变计，能测量旋转的陀螺仪。给出与一个小地震，比如 $M_s \sim 3$ 的 20 秒

面波有关的加速度值 a，应变 e 和转动 θ 加以说明。对周期为 20 秒的平面 Rayleigh 波，其相速度为 3.5 公里/秒，位移振幅为 0.1 微米，我们有

$$a \sim \left(\frac{2\pi}{20}\right)^2 \cdot 10^{-5} \text{ 厘米/秒}^2 \sim 10^{-6} \text{ 伽} = 10^{-9} g,$$

$$e \sim \frac{2\pi}{3.5 \times 10^5 \times 20} \cdot 10^{-5} \sim 10^{-11},$$

$$\theta \sim e = 10^{-11} \sim 2 \times 10^{-6} \text{ 弧度·秒}.$$

巨大的爆炸，如地下核试验，也能产生 20 秒的面波，其振幅近似地正比于 TNT 炸药的当量值。坚硬岩石中一百万吨的爆炸粗略地相当于 $M_s \sim 5\frac{3}{4}$，因此最灵敏的长周期地震仪能检测几千吨的远距离爆炸（相当于 $M_s \sim 3$）。

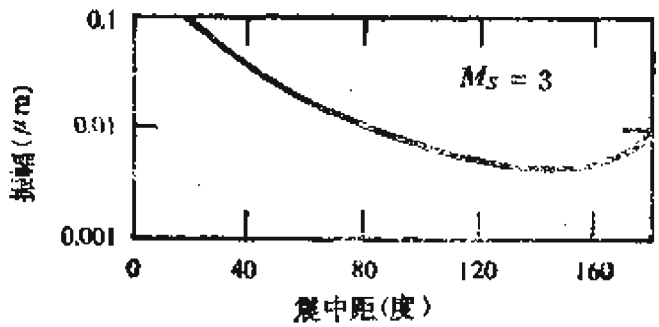


图 10.8

震级 $M_s = 3$ 的浅源地震的面波振幅与震中距的函数关系

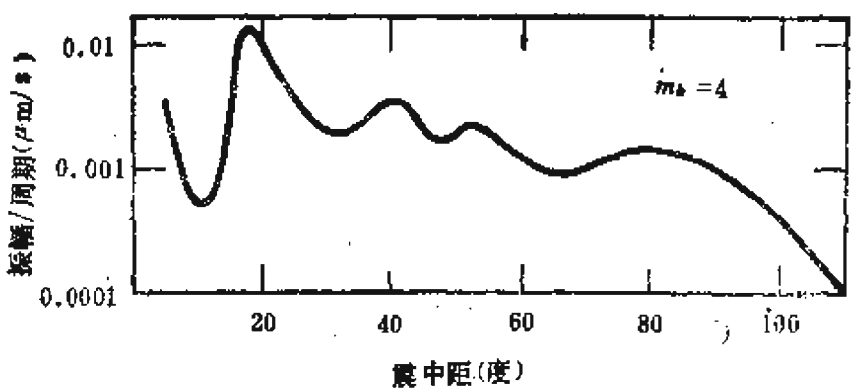


图 10.9

$m_b = 4$ 的浅源地震的 A/T 的值（A=振幅，T=周期）与震中距的函数关系

10.2.2 $5^\circ<\Delta<110^\circ$的P波

远震P波信号强度可由确定体波震级m_b的Gutenberg标定曲线（见Richter，1958，p. 688）求得。图10.9表示出作为$m_b=4$的浅源地震的震中距的函数的A/T的曲线，其中A是振幅（单位为微米），T是周期（单位为秒）。该曲线可用于求任一浅源地震的m_b，

$$m_b=\log(A/T)_{观测}-\log(A/T)_{m_b=4}+4,$$

式中$(A/T)_{观测}$是在确定的震中距处（必须已知）A/T的观测值，$(A/T)_{m_b=4}$是对该距离由图10.9所得的值。对$m_b=4$的地震，用标准地震仪记得的P波，T通常约为1秒，在$\Delta=20^\circ$处其振幅约为10纳米；而在$\Delta=90^\circ$处其振幅约为1纳米。用最灵敏的短周期地震仪可以检测这些信号。最大的地震（$m_b\sim8$）在$\Delta=20^\circ$处A/T将为1毫米/秒。对这样大的地震，T可能约为10秒，振幅则在1厘米量级。下面再看一下从10^{-7}到1厘米的大动态范围的要求。

在$T=1$秒时，1纳米位移相当于加速度$4\times10^{-10}g$，并相当于转动和应变约为10^{-12}。

10.2.3 面波和P波振幅谱密度的范围

图10.8和图10.9中，把信号振幅表示为距离的函数。图10.10则把10.2节中定义的在$\Delta=90^\circ$时面波和P波的振幅谱密度表示为频率的函数。

标有震级的实线表示最小可检测事件和最大事件的典型的谱密度。这是借助于实际地球模型（第七章）计算的理论谱，把经验数据画成图，并应用震源的相似律（第十四章，图14.14）得到的。

虚线表示通常研究的每一类型波频谱范围的大致限度。对远震而言，所研究的面波，高频限度相当于周期约为10秒。较短的波或者被后面图10.11所示的高的环境地震噪声所湮没，或者由地表附近强烈的地球横向不均匀性所散射。其效应与路径有关，

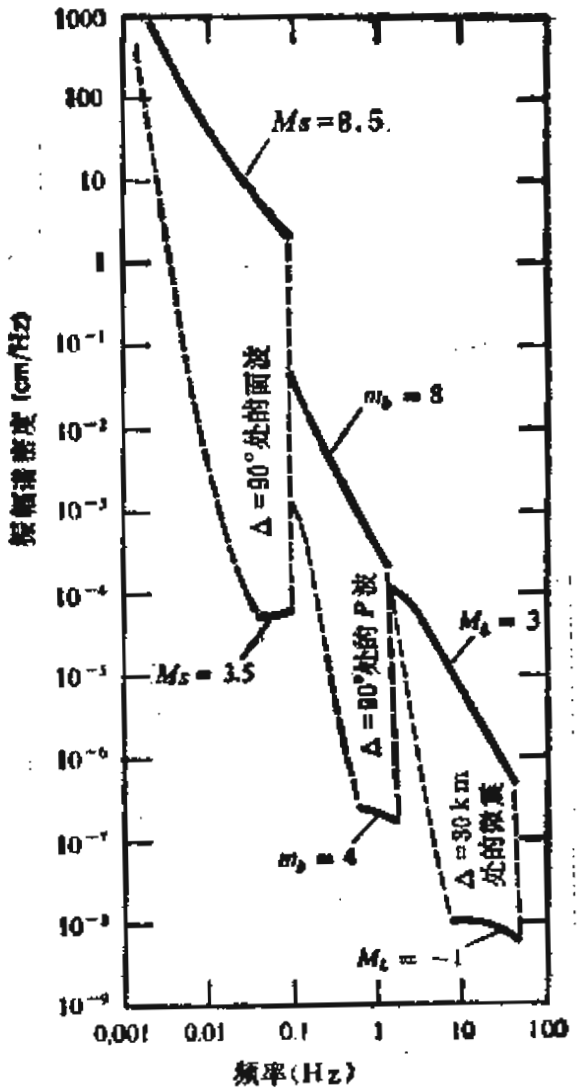


图 10.10

在震中距为 90° 时， 面波的振幅谱密度范围相应于 M_s 从 $3\frac{1}{2}$ 到 $8\frac{1}{2}$ 的范围；对在 90° 时的 P 波，则相应于 m_b 从 4 到 8；对震中距为 30 公里的微震 S 波，则相应于震级 M_L 从 -1 到 3

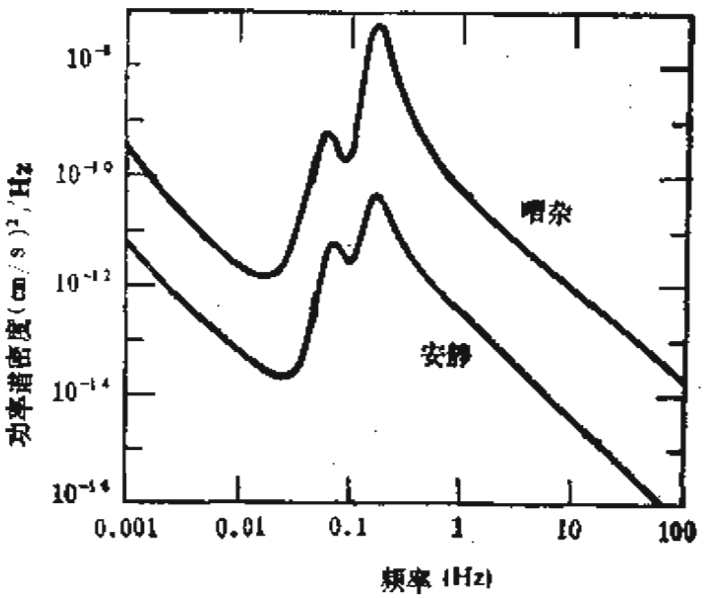


图 10.11

在坚硬基岩上典型台站的嘈杂和安静条件下环境地震噪声的功率谱

经过海洋盆地的路径消除了周期短于 15 秒左右的 Rayleigh 波，而地盾区的路径则把短周期面波传送到很长距离。低频限度则是由通常的地震仪的灵敏度决定的。

对 P 波，高频限度主要由衰减决定。小地震的低频限度由标准短周期地震仪的特性决定，因为设计这些地震仪是为了压缩下面将予以讨论的高环境噪声的频率范围。对较大地震，展宽频谱范围到较长周期是可能的。

微震信号的频谱范围在下一节中加以讨论。

10.2.4 短震中距的微震波

图 10.10 还表示了在 $\Delta\sim30$ 公里处观测到的微震的 S 波频率及动态范围。微震通常定义为 $M_L<3$ 的地震，其中 M_L 是最初对南加利福尼亚地方震定义的 Richter 震级。典型的低震级限度是 $M_L\sim-1$，这是由环境噪声决定的。在 $\Delta=30$ 公里处，$M_L\sim-1$ 的位移振幅为 10^{-7} 厘米的量级，其频率高达几十赫。然而其相应的加速度($\sim10^{-6}\ g$)大大高于远震 P 波和 S 波的阈值，使

仪器较容易记到它。相应的应变和转动为 10^{-9} 量级。

10.2.5 环境地震噪声

图 10.11 表示两种有代表性的地震噪声功率谱，这是在一远离人类活动的坚硬基岩上的一个典型台站，附近又没有大风时，分别在安静和有噪声两种条件下得到的结果。该图是采用新近的观测值，修正了 Haubrich(1967)发表的曲线后得到的。Pomeroy 等(1969)研制了高增益长周期(HGLP)地震仪，并在全球八个台站上安装了这种仪器。Savino 等(1972)使用这种仪器的记录，发现 30—40 秒间存在噪声功率的极小值，于是在周期长于约 30 秒处，必须对上述曲线作大的修正。

噪声谱的主要特性是约在 0.14 赫和 0.07 赫处有两个峰值。两个峰值都是由于海浪引起的。较小的峰值发生在观测到大部分波的主要频率处，并如 1904 年 Wiechert 最初提出的，这种波是由于海浪对海岸的作用而产生的。Longuet-Higgins 在 1950 年解释，主峰是由于持续的海浪压力产生的，而这些海浪则可能是在风暴发源地区或海岸附近沿相反方向传播的波形成的。这种机制产生了频率为海浪两倍的地震波。Hasselman(1963)证明了两种理论都定量地解释了地震波和海浪的观测结果。

安放在坚硬岩石上密封机壳里的竖直分向地震仪记录的噪声强度，与地区气象条件和覆盖层深度无关。另一方面，若仪器房很浅，则水平向长周期地震仪，如高增益长周期地震仪会受局部气象条件产生的噪声影响。然而，这种影响随深度很快衰减。若把地震仪放在 100 米深处，噪声功率水平可减少到地表的10%。Sorrells(1971)正确地预言过这种现实中存在的衰减，他使用了以地面风速强度作为平面波传播的风致压力场来模拟噪声源。

图 10.11 中的功率谱是对地面质点速度给出的，其单位是(厘米/秒)^2/赫。把这谱与图 10.10 中的信号水平范围进行比较，就可以看出面波与 P 波范围之间的间隙是由地震噪声的最大峰值引起的。峰值功率密度在频率为 0.15 赫时为 10^{-7}(厘米/秒)^2/

赫。使带宽为此频率的一半，从(10.31)可得质点的均方速度为 1.5×10^{-8}(厘米/秒)^2。于是均方根质点速度约为 10^{-4} 厘米/秒，相应的均方根位移噪声水平约为 10^{-4} 厘米。另外，振幅为 10^{-4} 厘米、带宽为 0.075 赫的信号的振幅谱密度约为 7×10^{-4} 厘米/赫。这就说明了图 10.10 中面波范围和 P 波范围之间存在凹形间隙的原因；凹形间隙的尖端接近于(0.1 赫，10^{-3} 厘米/赫)这一点。

同样，在频率为 0.01 赫处位移噪声水平约为 10^{-5} 厘米，阈值信号的相应振幅谱密度约为 10^{-3} 厘米/赫。这解释了图 10.10 所示的面波信号范围的低频限度。

10.2.6 自由振荡振幅

地震激起的自由振荡振幅随时间而衰减。Benioff 等(1961)得到了其衰减被校正了的 1960 年智利大地震的初始振幅。此测量结果是用应变仪得到的，基阶振型球型自由振荡的起始应变振幅 ${}_0S_2$($T=54$分)，${}_0S_5$(20分)和 ${}_0S_{19}$(6 分)分别为 2×10^{-11}，8×10^{-11} 和 2×10^{-9}。

用 LaCoste-Romberg 固体潮重力仪也测出了同一地震的自由振荡。Ness 等 (1961) 所作的功率谱分析展示了振幅为 0.1—1 $\times(10^{-9}\,g)^2$/(周/小时)，带宽为 1 周/小时的一小部分的谱峰值，因此这些振荡的垂直加速度振幅为 $1/10^{-9}\,g$。

阿部(Abe，1970)给出了 1963 年 10 月 13 日千岛群岛地震($M_s=8^1/_4$，地震矩$=7.5\times10^{28}$ 达因·厘米)和 1964 年 3 月 28 日阿拉斯加大地震($M_s=8.3$，地震矩$=7.6\times10^{29}$ 达因·厘米)的初始位移振幅的估计。阿拉斯加地震的 ${}_0S_{10}$ 到 ${}_0S_{14}$ 的初始振幅约为 10^{-2} 厘米。

有一种最灵敏的加速度传感器 (Block and Moore，1970) 能检测小到 $M_s=6.5$ 的地震的高阶数自由振荡峰值。频率范围为 10—20 周/小时，这些峰值的信号水平约为 $10^{-21}g^2$/(周/小时)。

10.2.7 地球固体潮的振幅，Chandler晃动，板块转动和月震

半周日和周日的地球固体潮是低于 1 周/小时频率范围里的

最大信号。其加速度峰-峰振幅约为 $3\times10^{-7}g$，其应变振幅约为 10^{-7}。

1765 年 Euler 预言了自由章动引起的纬度变化，这以后被称为 Chandler 晃动。Chandler 是马萨诸塞州剑桥的一个商人，他发现晃动周期为 428 天，晃动的振幅约为 0.2 弧秒或 10^{-6} 弧度。

岩石层板块的最快相对转动是太平洋板块相对于南极板块的转动，其速率为 10^{-6} 度/年(Le Pichon，1968) 或者 2×10^{-8} 弧度/年。

记录到天然月震(种类 A，Latham et al.，1971)的振幅范围为 10^{-8}—10^{-7} 厘米，周期为 1 秒左右，地球的噪声谱(图 10.11)表明，这些谱在地球上不能用远震办法来检测。

10.2.8 震中区的地震运动

图 10.12 显示了由 Page 等(1975) 总结的在三个地震震级范围内，水平向地面加速度的峰值（以重力加速度为单位）与到断层滑动的最近地表痕迹的距离的函数关系。最大值为 1.25 g，是 1971 年圣费尔南多地震(震级 6.6)期间在离断层面 3 公里的岩脊上记录下来的。

图 10.13 中给出了典型的加速度谱密度的曲线，这是在离中等大小地震的断层破裂面8公里处的一个台站上得到的(Temblor 台站记录，在 1966 年 6 月 28 日加利福尼亚帕克菲尔德地震期间所作，$M_s=6.3$，$M_L=5.5$，地震矩 $=1.4\times10^{25}$ 达因·厘米)。该曲线对周期短于 1 秒的部分是从实际记录中得到的，对周期长于 1 秒的部分，是使用合适的位错模型外推得到的。

为了完整描述地震的震源机制，必须得到如图 10.13 所示那样宽的频谱范围。这个要求给地震仪器使用带来了困难。图10.13 表明，主信号的峰值加速度谱密度在 3 赫处为 100 (厘米/秒^2)/赫，这相当于加速度振幅为 0.3 g。另外，在 0.01 赫左右的频谱带宽中所包含信号的加速度振幅约为 $10^{-6}g$。问题是如何把振幅为高频信号振幅百万分之一的低频信号分离出来。因此，线性度

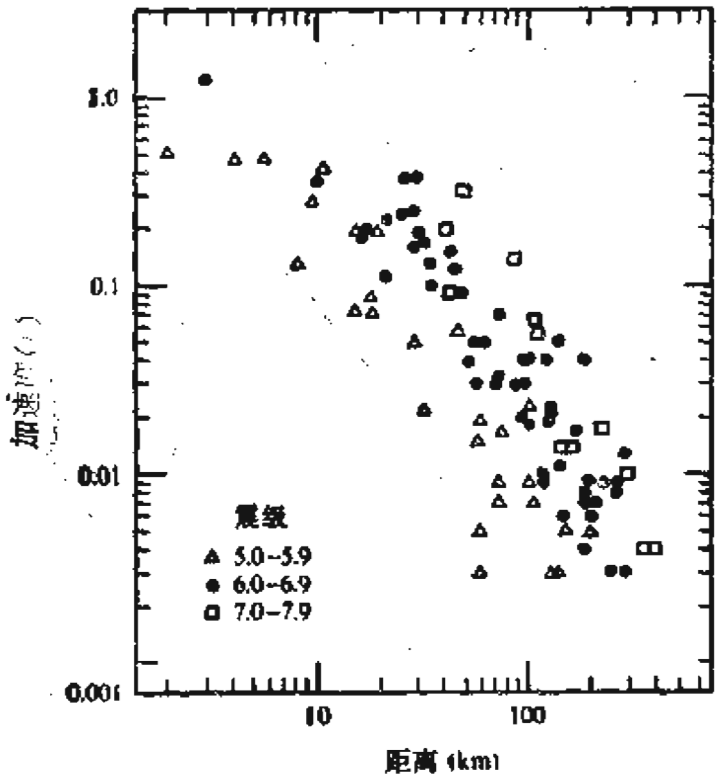


图 10.12

水平向地面加速度峰值(以重力加速度为单位)，是断层滑动的最近地表痕迹的距离的函数。不同记号用以表示不同的震级范围（引自 Page et al., 1975）

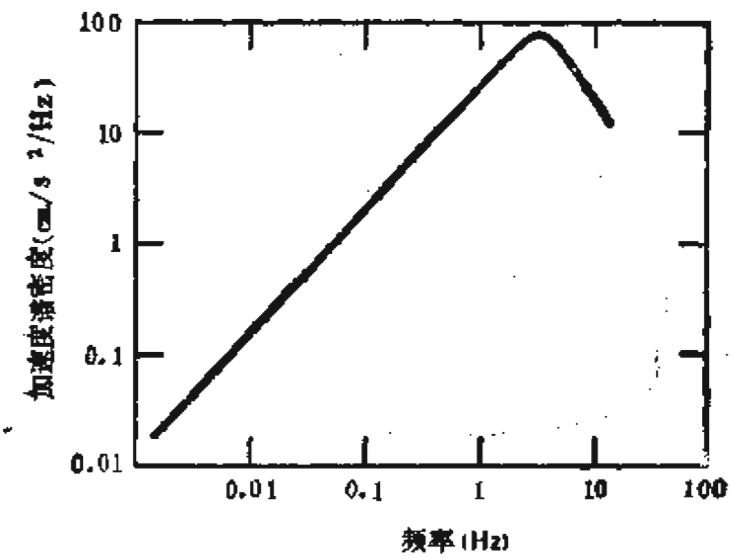


图 10.13

在中等大小地震震中区的加速度谱密度的一个实例

对宽带近场地震实验中的仪器来说，是个重要的技术要求。由于没有一个实际传感器是完全线性的，一小部分高频波将被检波，并表示为假的慢运动，掺杂到长周期信号中。

10.2.8 应变阶跃

灵敏的应变仪经常记录到远震时应变的阶跃式变化(Press, 1965)。图 10.14 表示了作为地震震级和震中距函数的应变阶跃量(Wideman and Major,1967)。这些阶跃的原因尚不清楚。有些人认为这是直接与震源有关的全球静态形变引起的，另一些人解释为仪器的滞后或解释为与应变仪连接的岩体性质的微小变化。地震波经过后，可能引起岩体连接处的小的永久性位移，雨量也与所观测的某些应变阶跃相对应。日本地壳运动观测台网(1970)观测了有关 1969 年 9 月岐阜地震的应变阶跃。与图 10.14 中所示直线不同，这些数据普遍趋向于和距离的立方成反比关系，就如对无限介质中位错所预言的一样(对方程(4.34)取微分，得到应变)。

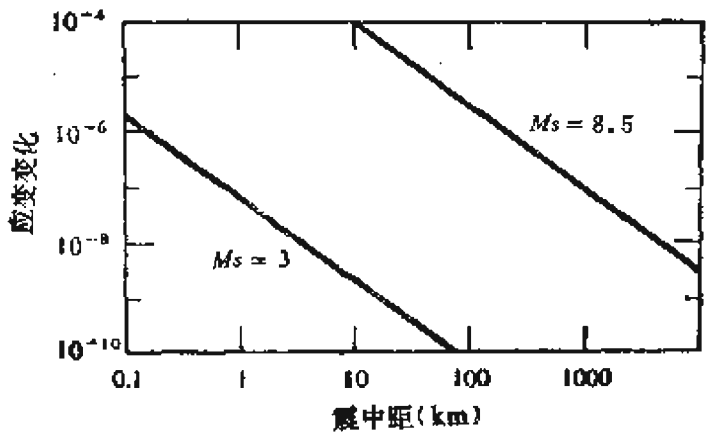


图 10.14

震级为 3 和 8.5 情况下，作为震中距的函数的应变阶跃(引自 Wideman and Major, 1967)

10.3 信号检测

既然已知道地震信号的频率和动态范围，现在再考虑一下地

震传感器的更实际问题。首先，地震计的灵敏度当然必须达到足以能检测出信号。传感器的灵敏度最主要受其耗能元件产生的热噪声的限制。

10.3.1 地震计摆的 Brown 运动

当具有一个自由度的摆(即运动限制在一个方向)，在绝对温度 T(Kelvin 温标)时，与周围空气处于热平衡状态下，此摆具有 $\frac{1}{2}kT$(k 是 Boltzman 常数)的平均动能。若它具有较多能量，则会通过加速分子运动使周围空气变热，若它能量较少，空气分子的碰撞会加速摆的运动。

重新回到图 10.1 及式(10.1)和(10.2)，空气分子碰撞所施的力 $e(t)$产生的摆的运动是下式的解：

$$M\ddot{\xi}+D\dot{\xi}+k\xi=e(t). \tag{10.32}$$

用 $e(t)$与前面(10.8)中所得的脉冲响应 $f(t)$褶积，给出解

$$\xi(t)=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t}e(t')f(t-t')dt'. \tag{10.33}$$

由于单个分子的运动是独立的，不相关的，因此 $e(t)$的自相关应有下列形式：

$$\langle e(t)e(t')\rangle=\sigma^2\delta(t-t'), \tag{10.34}$$

式中 σ^2 由摆的平均动能等于 $\frac{1}{2}kT$ 这一条件确定。从(10.33)我们有：

$$\frac{1}{2}M\langle\dot{\xi}^2(t)\rangle=\frac{1}{2M}\int_{-\infty}^{t}\dot{f}(t-t')\int_{-\infty}^{t}\langle e(t')e(t'')\rangle\dot{f}(t-t'')dt''$$

$$=\frac{\sigma^2}{2M}\int_{-\infty}^{t}[\dot{f}(t-t')]^2dt'$$

$$=\frac{\sigma^2}{2M}\int_{0}^{\infty}[\dot{f}(t)]^2dt.$$

然后，用式(10.7)和(10.8)我们有：

$$\frac{1}{2}M\langle\dot{\xi}^2(t)\rangle=\frac{\sigma^2}{2M}\frac{1}{4e}$$

$$=\frac{1}{2}kT, \tag{10.35}$$

或写成

$$\sigma^2=4MekT.$$

由于摆锤是在力 $e(t)$ 下以速度 $\dot{\xi}(t)$ 运动的，所得功率为

$$\langle\dot{\xi}(t)e(t)\rangle=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t}\langle e(t)e(t')\rangle\dot{f}(t-t')dt'$$

$$=\frac{\sigma^2}{M}\dot{f}(0)$$

$$=4ekT. \tag{10.36}$$

这表明，若 $e=0$，则没有热噪声功率。换句话说，若没有损耗的部件，能量不能流入系统，因为流出的和流入的必须平衡。只有阻尼器可以将其动能转换为热，而重锤和弹簧则不能。

为了能更直接地观察到阻尼器产生的噪声，我们将不考虑弹簧计算功率，

$$\langle\dot{\xi}(t)e(t)\rangle=\frac{\langle e(t)\,e(t)\rangle}{2eM}$$

$$=\frac{\sigma^2\delta(0)}{2eM}. \tag{10.37}$$

功率是无限的！但(10.25) 中确定的功率谱密度是有限的。由于 $\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega t)d\omega$，我们可以写出

$$\langle\dot{\xi}(t)e(t)\rangle=\frac{\sigma^2\delta(0)}{2eM}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sigma^2}{2eM}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega$$

$$=\int_0^{\infty}4kTdf, \tag{10.38}$$

式中 $f=\omega/2\pi$。换句话说，在频带宽为 Δf 时阻尼器的可用热功

率是 $4kT\Delta f$。热功率的这种形式与 ε 无关，不仅适用于机械耗能系统，也适用于电耗能系统。例如，摆系统的带宽约为 ε，根据式(10.36) 总噪声功率为 $4\varepsilon kT$，提供功率密度为 $4kT$。电阻 R 的噪声功率可用 $\langle V^2\rangle/R$ 来表示，其中 V 是电压。使该功率等于 $4kT\Delta f$，可得众所周知的 Johnson 噪声公式：

$$\langle V^2\rangle = 4RkT\Delta f. \tag{10.39}$$

现在考虑一下产生与其 Brown 运动相等的摆运动的地加速度 $a(t)$。由于加速度产生力 $Ma(t)$，因此阻尼器的可用噪声功率为：

$$M\langle \dot{\xi}(t)a(t)\rangle = \frac{M}{2\varepsilon}\langle a(t)a(t)\rangle$$
$$= 4kT\Delta f$$

或

$$\langle a^2(t)\rangle = \frac{8\varepsilon kT\Delta f}{M}. \tag{10.40}$$

这给出了等于摆的 Brown 运动的地面加速度。采用 $Q^{-1}=2\varepsilon/\omega_s$，其中 $\omega_s/2\pi$ 是无阻尼的摆周期，(10.40) 改写成：

$$\frac{\langle a^2(t)\rangle}{\Delta f} = \frac{\omega_s}{MQ}\cdot 4kT. \tag{10.41}$$

于是，加速度噪声功率密度反比于重锤质量、Q 与摆周期的乘积。

大多数地震仪被置于相应于 $Q=\frac{1}{2}$ 的临界阻尼状态。这样，

$$\frac{\langle a^2(t)\rangle}{\Delta f} = \frac{\omega_s}{M}8kT. \tag{10.42}$$

为了与图 10.11 给出的地面噪声谱相比较，我们计算等于热噪声的地面速度 v 的谱噪声。

$$\frac{\langle v^2\rangle}{\Delta f} = \frac{8\omega_s kT}{(2\pi f)^2 M}. \tag{10.43}$$

有意义的是从该图中发现，“观测的”地面噪声谱粗略地表明对于

长于 30 秒的周期和短于 3 秒的周期分别具有相同的 f^{-2} 的频率依赖关系(注意当 $\omega\to 0$ 和 $\omega\to\infty$ 时的渐近性质)。对"平稳的"曲线，具有斜率 f^{-2} 的那些部分相应于

$$\frac{8\omega_s kT}{(2\pi)^2 M}=10^{-17}(\text{厘米/秒})^2\cdot\text{赫}\qquad\text{对于长周期，}$$

$$=10^{-13}(\text{厘米/秒})^2\cdot\text{赫}\qquad\text{对于短周期．}\quad(10.44)$$

令摆周期 $T_s=2\pi/\omega_s$，$kT=4\times10^{-14}$ 尔格，则发现使临界阻尼的摆噪声低于地噪声的要求是由下式给出的：

$$MT_s>5\times10^3\text{克}\cdot\text{秒}\qquad\text{对于长周期}$$

和

$$MT_s>5\times10^{-1}\text{克}\cdot\text{秒}\qquad\text{对于短周期．}$$

标准长周期地震仪具有约 10 公斤的重锤和 15—30 秒的周期，满足了上述要求。而 Block-Moore(1970) 加速度计，装在严格控制温度的坚硬真空装置（达 10^{-7} 毫米水银柱高）内是它的 10 克的重锤太小而且 1 秒的周期又比较短，不满足上述条件。该仪器的低的热噪声是通过使摆的 Q 提高(200)，并使用电容传感和静电反馈(电子致冷) 来达到的。

然而我们注意到 Block-Moore 加速度计即使有这样高的 Q 值，其热功率密度仍稍高于平静时期的地震噪声水平。这是由 Savino 等(1972) 采用 Pomeroy 等(1969) 研制的、装有 10 公斤重锤、周期为 30 秒的摆的仪器所作的记录加以确定的。后一种仪器的低噪声是通过严格的环境控制，即把仪器系统安置在一密封的容器里来达到的。

通常使用的短周期地震计的摆周期为 0.1 到 1 秒，克服热噪声所需的重锤则只是 0.5 到 5 克。而短周期地震计常用的摆锤比这大得多。下一节将证明：这种仪器的传感装置（磁体空隙中一个活动线圈）对较大的信号功率要求较大的摆锤。

Byrne(1961) 详细讨论了摆耦合于电磁换能器，放大器以及电流计时产生的热噪声。

10.3.2 电磁速度传感器

摆相对于地震计框架的运动通常是用图 10.15 所示的电磁速度传感器测量的，与重锤相连的线圈以速度 $\dot{\xi}(t)$ 穿过磁场运动时，在线圈端点就产生电压 $V(t)$。端点间并联电阻 R。设 l 表示磁通量密度 B 的磁场内线圈导线的长度，并假设线圈移动方向，磁场的方向和线圈里电流的方向互相垂直。

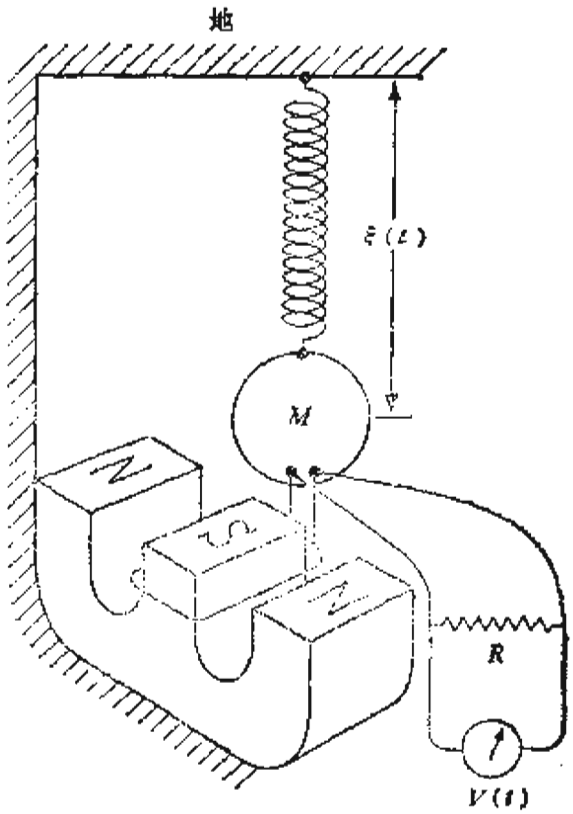


图 10.15

当与摆锤相连的一线圈穿过磁场运动时，跨过线圈端点的电压正比于摆锤与磁体间的相对速度

首先考虑一下摆锤穿过磁场移动所作的机械功。按 Biot-Savart 定律，所受力 F 为：

$$F = IlB, \qquad (10.45)$$

式中 I 是线圈里的电流。所消耗的机械功率为

$$F\dot{\xi} = IlB\dot{\xi}, \qquad (10.46)$$

此功率必定为电阻 $R + R_0$（R 是并联的，R_0 是线圈的）所消耗，因为这些是此系统中唯一的耗能元件。于是我们得到

$$VI = IlB\dot{\xi}$$

即

$$V = lB\dot{\xi}. \qquad (10.47)$$

若把 lB 写作 G，则可发现一有趣的结果：$V = G\dot{\xi}$ 和 $F = GI$。这是有关不可逆热力学的 Onsager 互易定理的特殊情况。

由此可见，

$$I = \frac{G\dot{\xi}}{R_0 + R} \qquad (10.48)$$

且

$$F=\frac{G^2\xi}{R_0+R}.$$

由于存在作用于摆锤的力 F，摆的运动方程为

$$\ddot{\xi}+\omega_s^2\xi=-\ddot{u}-\frac{G^2}{R_0+R}\frac{\dot{\xi}}{M}. \tag{10.49}$$

将(10.49) 与带阻尼器的摆的方程(10.2) 比较，可得

$$2e=\frac{G^2}{(R_0+R)\,M}. \tag{10.50}$$

一般来说，若摆的机械衰减不是零，而是 e_0，则总衰减为

$$e=e_0+\frac{G^2}{2(R_0+R)\,M}. \tag{10.51}$$

从(10.48) 可知由摆的运动 $\dot{\xi}(t)$ 在并联电阻中产生的电功率为

$$\langle VI\rangle=R\langle I^2\rangle=\frac{RG^2}{(R_0+R)^2}\langle\dot{\xi}^2(t)\rangle. \tag{10.52}$$

为使传感器的感度大，$G^2/(R_0+R)$ 必须相当大。而从 (10.51) 可发现衰减 e 变大，使摆对地运动的响应不灵敏了。为使 e 保持比较小，不得不增加 M。这就是没有电子放大器的灵敏仪器需要很大重锤质量的原因。

若忽略 e_0，当

$$\frac{e}{\omega_s}=\frac{G^2}{2(R_0+R)\,M\omega_s}=1 \tag{10.53}$$

即

$$\frac{G^2}{R_0+R}=2M\omega_s \tag{10.54}$$

时，达到临界阻尼。将(10.54) 代入(10.52)，则功率为

$$\langle VI\rangle=\frac{R}{R_0+R}\cdot 2M\omega_s\langle\dot{\xi}^2\rangle. \tag{10.55}$$

功率正比于摆质量，反比于摆的周期。为了有效地工作，线圈的内阻不能大于并联电阻很多。对摆质量为 5 公斤，周期为 1 秒的典型地震仪，(10.55) 给出

$$\langle VI\rangle\sim 5\times 10^3\times 2\pi\times\langle\dot{\xi}^2\rangle.$$

最高的地面噪声水平，如建在柔软沉积物上的城市，由交通引起的噪声水平可达$\sqrt{\langle\dot{\xi}^2\rangle}\cong10^{-2}$厘米/秒。这时，

$$\langle VI\rangle\sim1\text{ 尔格/秒}$$
$$=10^{-7}\text{ 瓦.}$$

这表明，应用由交通噪声引起的地震仪运动产生电的想法是不很实际的。

电磁传感器是在1914年由Galitzin引入地震学的。他以实验物理学的精确方法对待测震学，并终于澄清了识别远震事件的P波和S波的问题。他用电流计测量电磁传感器产生的电压。电流计是用纤细的悬丝固定于线圈的质心，将其悬挂在磁场中，通过线圈的电流会对悬丝施加一扭矩。一个镜子与线圈相连，用光记录镜子的偏转。到目前为止这仍然是观测地震学中最常用的地震仪系统之一。

正如(10.55)所示，该系统的功率灵敏度正比于摆质量。若摆质量很大，正如式(10.50)所示，用电磁的方法对其振荡施加阻尼是困难的。我们需要一个高的G值以得到高增益的地震计。1939年前，磁体质量很差，可利用的磁通量B有限，增加G的唯一方法是增加线圈长度l。Benioff(1932)的可变磁阻地震仪达到了这一点，他使用一个磁体为摆锤，该摆锤在固定于地震计框架上，在用长导线绕成的两个线圈之间运动，能对周期约为1秒的100公斤摆锤进行临界阻尼。他的地震仪提供了有关远震距离上短周期体波的有价值的数据。

Rihn(1969)给出了对质量为M，周期为T的摆进行临界阻尼所必需的磁体体积V的估算值；对铝镍钴V磁体，V(厘米^3)$=50M$(公斤)$/T$(秒)。

随着磁体质量的改进，现在已再不需要100公斤的摆锤以获得所需要的短周期灵敏度了。Willmore(1960)总结了电磁传感器的新进展，并提出，对于和电流计直接耦合的系统，摆锤为5公斤正合适。他还认为，对于长于1秒的摆周期，可采用磁体作

摆锤以使仪器总重量减到最小。

还可以用一个放大器或位移换能器以便进一步减小摆质量。摆质量为 10 克的 Block-Moore 加速度计可在 5 秒周期时探测 1 纳米的位移。Wiechert 的经典摆式地震仪不得不克服笔尖在熏烟纸上滑动产生的摩擦。Wiechert 地震仪的最大摆质量为 17 吨，放大倍数达到 10^4，这与在 5 秒周期所能探测的最小位移大于 10 纳米相对应。

10.3.3 标准观测站地震仪的响应特性

在普通观测站的地震仪，如世界标准地震台网台站上的那些地震仪，电磁换能器线圈的输出电流通过如图 10.16 所示的衰减电路送入灵敏的电流计。V_1 是换能器线圈中感应的电动势，V_2 是电流计线圈中感应的电动势。电流 I_1 和 I_2 可用两个线圈的运动来表示。

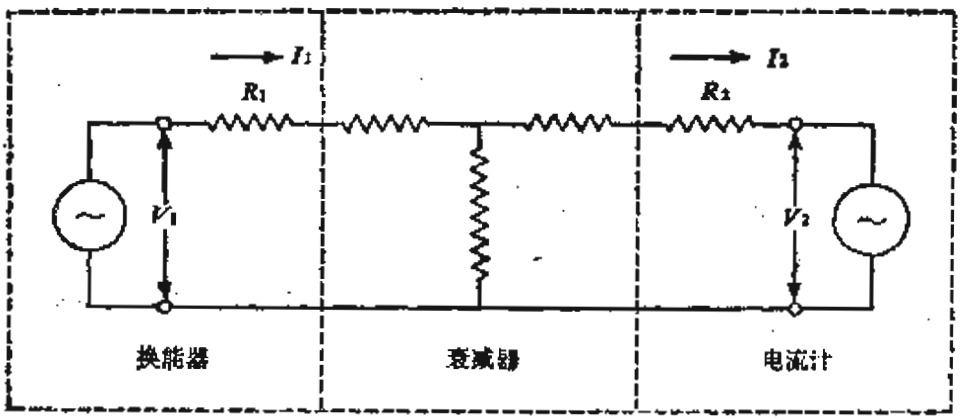


图 10.16
标准观测站地震仪的换能器—记录器电路

另一方面，线圈的运动方程包括由这些电流产生的力项。与一个给定的地运动相应的电流计偏转的完整描述，要求解一个四阶微分方程。Eaton(1957) 曾对这一问题的分析作过历史综述，这里我们将采用荻原(Hagiwara，1958) 对该解所作的简明而实际的描述。

地震计运动 ξ 受回复力 $-G_1I_1$ 的影响，其中 G_1 是地震计（线圈和磁体）的电动常数，于是地震计运动方程为

$$\ddot{\xi}+2\varepsilon_{0s}\dot{\xi}+\omega_s^2\xi=-\ddot{u}-\frac{G_1I_1}{M}, \tag{10.56}$$

式中 ε_{0s} 是地震计的机械阻尼，ω_s 是无阻尼谐振频率，u 是地面运动，M 是 (10.2) 中的运动质量。

电流计中电流 I_2 产生一个耦合力矩 G_2I_2，它将使电流计反射镜转动角 ϕ。这里，G_2 是电流计的电动常数，且

$$\ddot{\phi}+2\varepsilon_{0g}\dot{\phi}+\omega_g^2\phi=\frac{G_2I_2}{K}, \tag{10.57}$$

式中 ε_{0g} 是电流计的机械阻尼，ω_g 是其无阻尼谐振频率，K 是电流计线圈和反射镜的转动惯量。

我们可以认为电流 I_1 为两个分开的电压源所产生的电流的总和：

$$\begin{aligned}I_1=&(V_2=0\text{ 时通过 }R_1\text{ 的电流})+(V_1=0\text{ 时通过 }R_1\text{ 的电流})\\=&I_1|_{V_2=0}+I_1|_{V_1=0}.\end{aligned}\tag{10.58}$$

这里 R_1 是地震计线圈的电阻。若电流计线圈实际上受到阻止而无法运动，V_2 可能保持为零；这样的线圈称为被夹住。同样，$I_1|_{V_1=0}$ 是夹住地震计线圈引起的。由(10.48)我们有

$$I_1|_{V_1=0}=\frac{G_1}{Z_{11}}\dot{\xi},$$

这里 Z_{11} 为电流计被夹住时，V_1 与 I_1 的比。

同样，

$$I_2|_{V_1=0}=-\frac{G_2}{Z_{22}}\frac{d\phi}{dt},$$

其中 Z_{22} 为地震计被夹住时的阻抗 V_2/I_2。这个最终电流部分流过衰减器电路，部分流过地震计线圈，因此

$$I_1|_{V_1=0}=-\frac{\mu_2G_2}{Z_{22}}\frac{d\phi}{dt},$$

式中 $\mu_2=(I_1/I_2)|_{V_1=0}$ 是衰减系数。然后，由(10.58)可得出：

$$I_1=\frac{G_1}{Z_{11}}\dot{\xi}-\frac{\mu_2 G_2}{Z_{22}}\frac{d\phi}{dt}, \tag{10.59}$$

同样，

$$I_2=\frac{\mu_1 G_1}{Z_{11}}\dot{\xi}-\frac{G_2}{Z_{22}}\frac{d\phi}{dt}\quad 其中\mu_1=\left(\frac{I_2}{I}\right)_{v_2=0}. \tag{10.60}$$

将(10.59)代入地震计方程(10.56)，则可看到有个附加的阻尼项，且

$$\ddot{\xi}+2e_s\dot{\xi}+\omega_s^2\xi=-\ddot{u}+\frac{\mu_2 G_1 G_2}{Z_{22}M}\frac{d\phi}{dt}. \tag{10.61}$$

现在 e_s 是地震计的总阻尼，$e_{0s}+\frac{1}{2}G_1^2/(Z_{11}M)$(比较(10.51))。电流计对地震计运动的反应可由(10.61)的最后一项定量表示。

将(10.60)代入电流计方程(10.57)，可得到

$$\ddot{\phi}+2e_g\dot{\phi}+\omega_g^2\phi=-\frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11}K}\dot{\xi}, \tag{10.62}$$

其中 e_g 是电流计总阻尼 $e_{0g}+\frac{1}{2}G_2^2/(Z_{22}K)$。

对一给定输入 $u(t)$，可解四阶方程得到地震仪响应 $\phi(t)$。当消去(10.61)和(10.62)中的 $\dot{\xi}$ 时，该方程可解出。我们得到

$$\dddot{\phi}+2(e_s+e_g)\ddot{\phi}+[\omega_s^2+\omega_g^2+4e_se_g(1-\sigma^2)]\dot{\phi}$$
$$+2(e_s\omega_g^2+e_g\omega_s^2)\dot{\phi}+\omega_s^2\omega_g^2\phi=-\frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11}K}\dot{u}, \tag{10.63}$$

式中

$$\sigma^2=\frac{\mu_1\mu_2 G_1^2 G_2^2}{4Z_{11}Z_{22}MKe_se_g}=\frac{\mu_1\mu_1(e_s-e_{0s})(e_g-e_{0g})}{e_se_g}.$$

σ^2 是地震计和电流计间耦合程度的无量纲量量度。当衰减强时，耦合较小，且相对于机械阻尼而言，电磁阻尼较小。当摆周期与电流计周期相等时，耦合对地震仪响应的形状影响最大。根据荻原 (Hagiwara,1958)的说法，虽然这样，若取$\sigma^2<\frac{1}{4}$，则对零耦合响应的最大偏离幅度约为 20%，相位约为 15°。若忽略该耦合($\sigma^2=0$)，则在(10.61)中的反作用项$\propto(d\phi/dt)$取为零，可以很容

易地计算地震仪的响应函数。取 $u=U\exp(-i\omega t)$，(10.61)的解为 $\xi=\omega^2U\exp(-i\omega t)/[-\omega^2-2i\varepsilon_s\omega+\omega_s^2]$。由此，把它代入到(10.62)时可得到：

$$\phi=\frac{\mu_1G_1G_2(-i\omega)}{Z_{11}K[-\omega^2-2i\varepsilon_g\omega+\omega_g^2]}\frac{\omega^2U\exp(-i\omega t)}{[-\omega^2-2i\varepsilon_s\omega+\omega_s^2]}. \tag{10.64}$$

若 ω 较大，我们有

$$\phi\sim-\frac{\mu_1G_1G_2}{Z_{11}K}\left(\frac{1}{i\omega}\right)U\exp(-i\omega t). \tag{10.65}$$

若 ω 较小，我们有

$$\phi\sim\frac{\mu_1G_1G_2}{Z_{11}K}\left(\frac{\omega^3}{i\omega_g^2\omega_s^2}\right)U\exp(-i\omega t). \tag{10.66}$$

上述公式表明在频率处于 ω_s 和 ω_g 之间时，高频部分的振幅响应峰值随着频率的增加，以 ω^{-1} 的速率减小；而对较长周期部分，该峰值随着周期的增大，以 T^{-3} 的速率减小。

地震仪灵敏度的绝对值由积 $G_1G_2\mu_1/Z_{11}K$ 来确定，这是容易测定的。例如，若使一恒定电流 I_0 通过电流计线圈，偏转 ϕ 由(10.57)给出：

$$\phi=\frac{G_2}{k\omega_g^2}I_0,$$

从该式可计算 G_2/K。其它的量前面已讨论过。

应用(10.64)也能够容易地计算出相位响应。使 $\phi=|\phi|\times\exp[-i\omega t+i\varphi(\omega)]$，$\varphi(\omega)$ 表示仪器的相位延迟。这里有个小问题，即选择(10.64)的符号或相位为 π 的不确定性。这种选择取决于该仪器是怎样标定的。假定我们正在标定一竖直分向地震仪，并对摆锤施加一向下的脉冲。电流计会往某一方向偏转，这就标为"向上"，这是因为摆锤向下运动相应于向上的地运动。对一脉冲运动，地震仪会按照高频渐近特性(10.65)作出响应。若选择(10.64)—(10.66)给出的符号，响应会如一负的阶跃，因为这是

相应于当 $\omega\to\infty$ 时的$(1/i\omega)$的时间域信号。但是既然现在已把地脉冲"向上"运动时电流计的摆动方向标为"向上"，改变（10.65）的符号，则当 $\omega\to\infty$ 时，

$$\phi\sim-\frac{\mu_1 G_1 G_2}{Z_{11}K}U\frac{1}{\omega}\exp(-i\omega t+i\pi/2).$$

(10.64)和(10.66)的符号也必须颠倒。对无限频率，相位延迟是 $+\pi/2$，单调地随频率的降低而减小，在零频率处达到 $-3\pi/2$(参见补充 10.1)。

荻原的原始图中的相位值必须加上 π 加以校正，以便与地震图上标地运动方向的这种习惯方法相一致。还请注意，由于他使用了 $\exp(+i\omega t)$，从他的图中得到相位延迟。图 10.17 表示

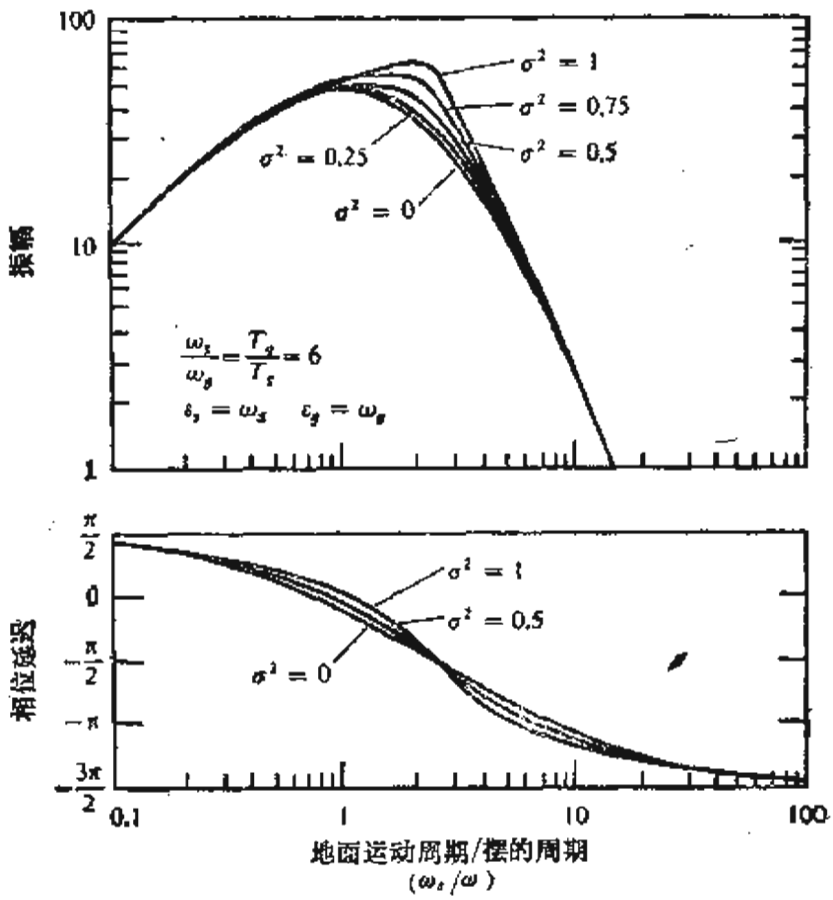


图 10.17

对各种耦合常数 σ^2 的振幅和相位延迟响应（引自 Hagiwara, 1968）

了对各种耦合常数 σ^2，在 $\omega_s/\omega_g=6$ 和 $\varepsilon_s/\omega_s=\varepsilon_g/\omega_g=1$的情况下已校正的相位延迟和振幅响应曲线，这些曲线粗略地应用于世界标准地震台网台站的长周期地震仪中。(这样的地震仪经常被称为"15—100 仪器"。这里的数字分别是地震计固有周期和电流计固有周期，两种都用秒表示。还有一种常见的是 30—100 仪器。一台典型的短周期地震仪配置为 1—0.75。)

10.3.4 长周期的高灵敏度

如(10.66)所示，标准的速度--换能器一电流计系统频率响应的衰减反比于长周期时周期的立方。通过增加摆的周期，大幅度衰减的区域可进一步延伸到更长的周期。在 10.1 节里我们已提到过 LaCoste 摆，它能在周期为几十秒时稳定工作。另一种较新的研究结果是 Benioff 的水银管倾斜仪；它利用了水银的惯性，使水银在由管子连接的两个容器间以长周期振荡。

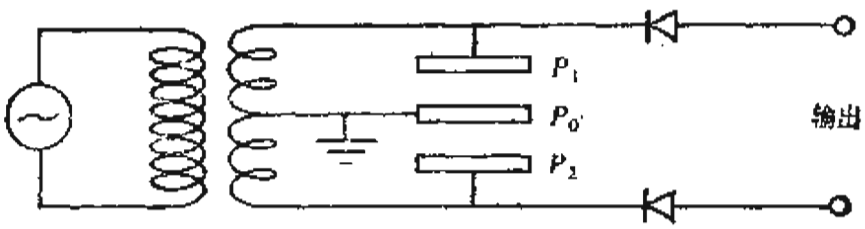


图 10.18
用于 Benioff 应变仪中的位移换能器

为提高长周期部分的灵敏度，有两种根本不同的途径：(1) 采用位移换能器代替速度换能器；(2) 采用应变传感器代替惯性传感器。两种方法都使得低频响应改善成随着周期成比例地变化。在 Benioff 的伸缩仪(1959)里，这两种改进结果被结合起来了。这种伸缩仪成功地记录了 1960 年智利大地震期间地球的自由振荡。

Benioff 使用的位移传感器由夹在固定于框架的两块板 P_1 和 P_2 间的电容板 P_0 组成，P_0 与地震计的运动部分相连接（图

10.18)。P_0 的运动方向垂直于板面。一个固定频率振荡器(在 Benioff 的仪器中频率为 5 兆赫，在 Major 等(1964)的仪器中为1.5 兆赫)在频率接近而不等于其共同的谐振频率时，驱动两个调谐并联的电感电容电路。电容板 P_0 处于 P_1 和 P_2 之间的中间位置时，输出端的平均电压为零。P_0 的运动使一电路较接近于谐振，而另一电路则不太接近谐振。所产生的电压大小的不平衡几乎正比于 P_0 的位移。输出电压和位移间的关系示于图 10.19。由于较大位移时明显的非线性，较新的位移换能器使用不同的电路。

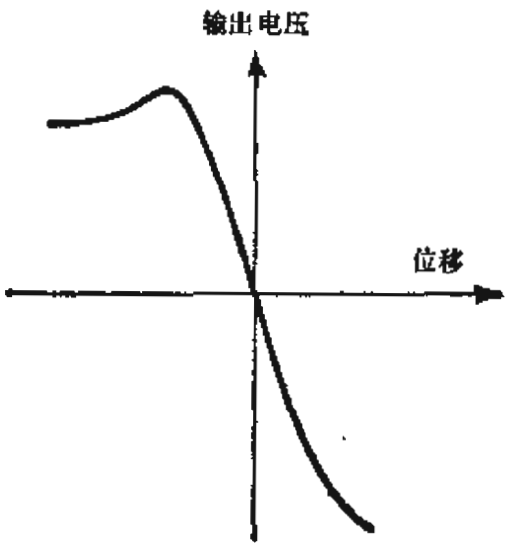


图 10.19

图 10.18 所示位移换能器的响应

图 10.20 所示的新电路工作如下：一个固定频率振荡器 [在 Block 和 Moore(1966)仪器中频率为16千赫；在 Stacey 等(1969)仪器中为 3 千赫；在 Buck 等(1971)仪器中为 500 千赫]用具有中心抽头的次级线圈变压器，为电容板 P_1 和 P_2 提供数量相等极性相反的电压。次级线圈的中心抽头接地。电容板 P_0 处于中间位置时，P_0 相对于地的电压为零。由于并联板组成的电容反比于电容板间的距离，因此 P_0 的电压正比于 P_0 相对于中间点的位移。信号频率是精确已知的，该电压可用调谐放大器很精确测定

(锁定放大器或同步检测器)。Block 和 Moore 成功地将此装置用于他们的加速仪中，而 Stacey 等和 Buck 等则成功地应用于他们的水银管倾斜仪中。

应变地震仪作为长周期波的传感器具有某些超过惯性地震仪的优点。设想一个速度为 c 在 x 方向传播的简谐波。令 x 方向的位移 u 为

$$u=U\exp[-i\omega(t-x/c)],$$

则 x 方向的伸长应变为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=i\frac{\omega}{c}U\exp[-i\omega(t-x/c)].$$

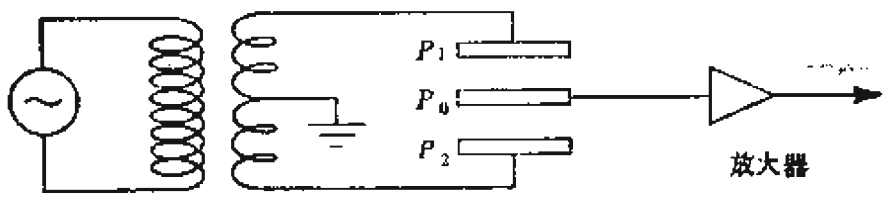


图 10.20

位移换能器。虽然这看来与图 10.18 中那个相似，但它的工作方式不同

若用位移换能器，输出电压就正比于 $\omega U/C$。另外，在周期大于摆周期时，摆相对于地震仪框架的位移，正比于 ω^2U(参见 (13.2))。也就是说，正如上面提及的，应变传感器的频率响应比摆的频率响应要好，其改进是，在长周期时，频率响应变成随周期正比增加。

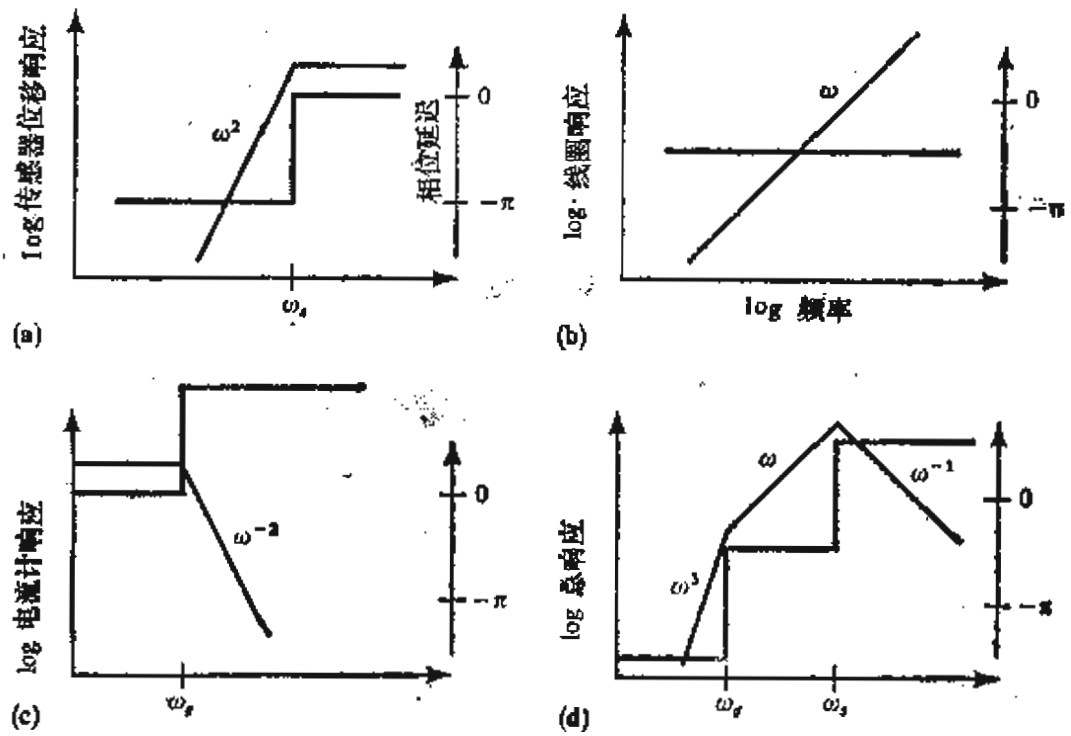
应变仪的另一优点是能记录长期的应变变化，而摆式地震仪除了对由倾斜和重力场变化产生的那些信号响应外，不能对其它零频信号响应。

但应变仪的缺点是它把地球也作为仪器的一部分。裂缝、节理、松动的岩石、水及其它具有无法预测的机械特性的脆弱物质，所有这些的存在都会引入不希望有的噪声，并使系统更加非线性，甚至不稳定。

补充 10.1
仪器响应的一般特点

我们已看到如何能把一个记录地震运动的仪器，有效地看作是由几个部分组成的。看一下每个组成部分的频率响应是有益的，若必须得出简单的结果，则可用近似理论。我们将求出不同频率的功率变化的响应，这用双对数图来表示最好。

作为基本惯性传感器的实例，我们考虑弹簧上的重锤和摆两种情况。对这些装置，输出 ξ（图 10.1）具有（10.3）给出的振幅响应 $|X(\omega)|$。$|X(\omega)|$ 正是输出和输入振幅谱的比 $|\xi(\omega)|/|u(\omega)|$ 在高频时，它趋于常数，在低频时正比于 ω^2，因而性质大致如下图中的(a)



(a) 传感器的位移响应的主要特点是：在频率高于 ω_s 时振幅不变，在低于 ω_s 时下降很快（12 分贝/倍频程）。(b) 在全频率范围中线圈响应正比于频率。(c) 电流计响应在低于其固有频率(ω_g)时是常数，在高频时迅速下降。(d) 把前三个对数(响应)曲线相加，在 $\omega_g < \omega_s$ 时，可在低频处看到极迅速的下降。若 $\omega_s < \omega_g$，总响应的形状不变。请注意，对已得的加速响应(即对地加速度的响应)进行二次微分，相当于用 ω^{-2} 乘以 (a)，于是它在低于 ω_s 时是平坦的，在较高频率处按 ω^{-2} 下降

部分所示。

下一个部件可能是线圈，对它而言，$\xi(\omega)$是输入，电流 $I(\omega)$ 是输出。从(10.48)我们看到，因为 $\ddot{\xi}(\omega)=-i\omega\xi(\omega)$，该部件的振幅响应谱正比于 ω（图中(b)部分)。

再下一部件可能是电流计，对它而言，$I(\omega)$ 是输入，反射镜角度 $\phi(\omega)$是输出，它还可能用某个与频率有关的常数相乘。我们已对假设作了简化，电流计中的电流正比于地震仪线圈中的电流，而且电流对摆的运动都没有反馈影响(耦合)。从(10.57)可知，电流计响应 $\phi(\omega)/I(\omega)$有这样的振幅：在低频处是不变的，在高频处具有 ω^{-2} 的性质(图中(c)部分)。

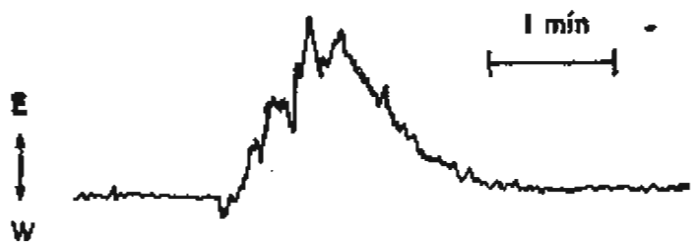
总响应是各部件的响应的乘积，当采用对数(响应)图时，就成了求和。一般可发现，对所谓“速度传感器”（即线圈），总响应如图中(d)部分所示。如惯性传感器使其位移输出（代替其速度输出）直接转换为电信号，则最后的响应仅仅是(a)部分和(c)部分的和。现代仪器中，地震仪输出(惯性传感器加上线圈)可能成为具有不同频率特性的各种电子放大器的输入，在这种情况下(a)和(b)部分的曲线必须迭加到放大器响应中去。

当 ω 经由 ω_s 增加时，惯性传感器的相位延迟谱近似为从 $-\pi$ 到 0 的阶跃。(假设地面运动的方向，如在方程 (10.3) 之后所讨论的那样，已适当标明。)对线圈，相位延迟恒为$-\pi/2$，对电流计，当 ω 由 ω_g 开始增加时，相位延迟是从 0 到 π 的阶跃。这些延迟在图中以浅色表示。

10.3.5 地震传感器的非线性

除非输入极小，任一实际系统的响应都是非线性的，地震仪亦不例外。让我们从 10.3.3 节中所描述的标准地震仪 的非线性谈起。Berckhemer 和 Schneider (1964) 在斯图加特理工学院的模拟计算机上解了 Galitzin-Wilip 地震仪（T_s，地震计摆的周期）=12 秒，T_g(电流计周期)=12 秒和 50 秒)和 Press-Ewing 地震仪 ($T_s=30$ 秒，$T_g=100$ 秒) 的四阶微分方程，从而对地位移作了仔细研究。

远距离地震的记录表示地震波通过后回到初始位置的地位移。此外，来自附近地震的波形表示残留位移，或更精确地说，表示成抛物线型增加的位移，此位移与加速度的永久性变化相对应。图 10.21 表示这样的长周期瞬态波形的典型记录。为了解释这些记录，要求一个 5 级地震在距离约为 100 公里处产生加速度的永久变化在 10^{-7} 到 $10^{-8}\,g$ 的量级。这意味着垂直分向的重力变化为 0.01—0.1 毫伽，水平分向的倾斜为 10^{-7}—10^{-8} 弧度。Press (1965) 怀疑这是仪器的滞后引起的，因为观测的倾斜比他对那样大小地震所计算的要大三到四个量级。然而 Berckhemer 和 Schneider 认为倾斜是存在的，但否定了重力变化的真实性。他们认为这是由于垂直分向地震仪的非线性产生的。



$\Delta = 164$ km　　$M = 5$

图 10.21
用标准长周期地震仪对近震作的典型记录

他们考虑的非线性是螺旋弹簧的弧形效应引起的。短矩离的强震会使地震仪强烈地振动，如图 10.22 所描绘的，可能引起弹簧振荡。假设一振荡的正弦基阶振型，在中心处其振幅为 a，弹簧长度就变为

$$l \sim l_0\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a\pi}{l_0}\right)^2\right].$$

另一方面，角 $\delta\theta$ 为

$$\delta\theta \sim \frac{a\pi}{l_0}.$$

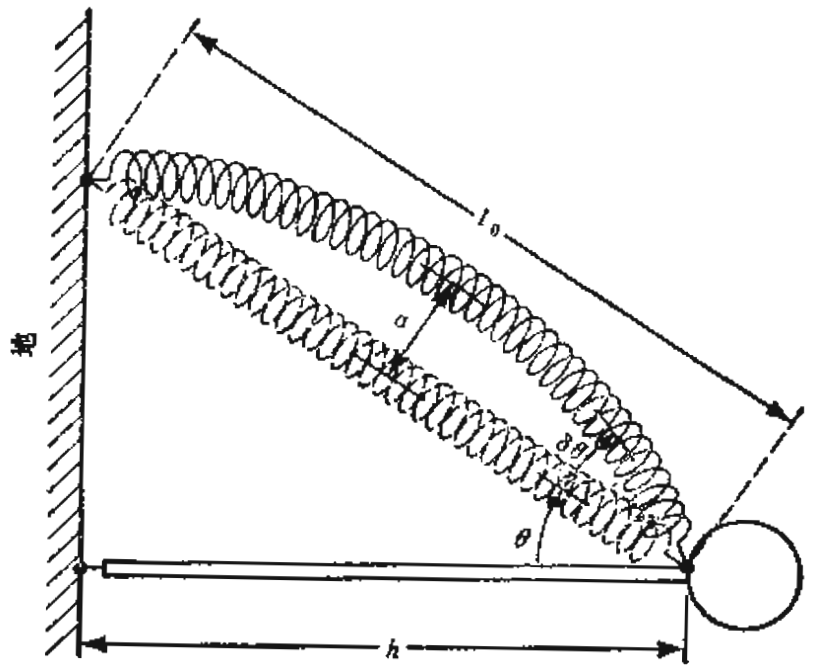


图 10.22
螺旋弹簧的弧形

弹簧所施的扭矩是

$$(T+\delta T)h\sin(\theta+\delta\theta)\sim Th\sin\theta+\delta Th\sin\theta$$
$$+Th\cos\theta\,\delta\theta-Th\sin\theta\frac{(\delta\theta)^2}{2}.$$

式中T是弹簧为保持本身处于长度l_0所施的张力，δT是由弹簧的弧形引起的T的变化。

对于零长弹簧，发现有另一种奇怪的效应。令弹簧常数为k，对零长弹簧，我们有

$$T=kl_0$$

且

$$\delta T=k\frac{l_0}{4}\left(\frac{a\pi}{l_0}\right)^2.$$

于是

$$(T+\delta T)h\sin(\theta+\delta\theta)=Th\sin\theta\left[1-\frac{1}{4}\left(\frac{a\pi}{l_0}\right)^2\right]+Th\cos\theta\delta\theta.$$

由于 $\delta\theta$ 是以弧形快速振荡的项，平均值为零，对时间取平均的弧形效应会减少弹簧的扭转，并降低摆锤位置。该效应把高频干扰转换为低频假信号。对 LaCoste 型的垂直向地震仪，该效应看来总是如重力的阶跃增加一样。

Block-Moore 加速仪优于 LaCoste 重力仪的一个特点是其摆的结构简单，这就把非线性效应减到最小。他们的摆只是与单片熔石英相连的一块黄铜板，石英的一部分拉出两根丝如图 10.23 所示。这种结构完全消除了弧形，但可能具有振荡的其它高频振型，以致可能使迭加在主要振型上的假低频信号增加。

Block 和 Moore 讨论了引起非线性度的几种可能的原因。首先，他们使用反馈迫使摆停留在一固定位置上。这消除了探测器件方面不均匀性的影响，也消除了 $\sin\theta\sim\theta$ 近似，这里 θ 为摆围绕轴点的转动角。他们接着讨论了会产生假长周期信号的扭转型(图 10.24)和摆动型(图 10.25)的交叉耦合的效果。

非线性对应变地震仪也是个严重的问题。Sacks 等 (1971) 具体设计了一种不受非线性和滞后影响的应变仪；把其中三个安放在日本的松代，并使它们靠近一个石英管应变仪。他们的仪器由一装满液体的有弹性回复力的管子组成。将其埋在井下并贴紧岩壁。采用膨胀水泥使井壁和管子密接起来。假设该管子能真实地反映井下微小的形变，直至 10^{-6} 微米。该仪器只测量膨胀应变。他们的主要观测结果是与附近地震有关的许多应变变化，由石英伸缩仪，而不是由新的应变仪记录下来。后者的灵敏度通过比较标准摆式地震仪的 P 波振幅以及 Rayleigh 波而得到检验。该结果表明由石英伸缩仪观测到的很多应变变化可能是虚假的。

目前，正在执行一个计划，在选择好的地点安装一套新的仪器，称为地震研究观测站 (SRO)，以便改善世界标准地震台网 (Peterson *et al.*, 1976)。为了减少水平向的噪声(10.2.5 节)，地震仪安放在直径 7 英寸、深约 100 米的井下。传感器的机械构型比之 Block和 Moore 的传感器要更为通用。LaCoste 摆用于垂

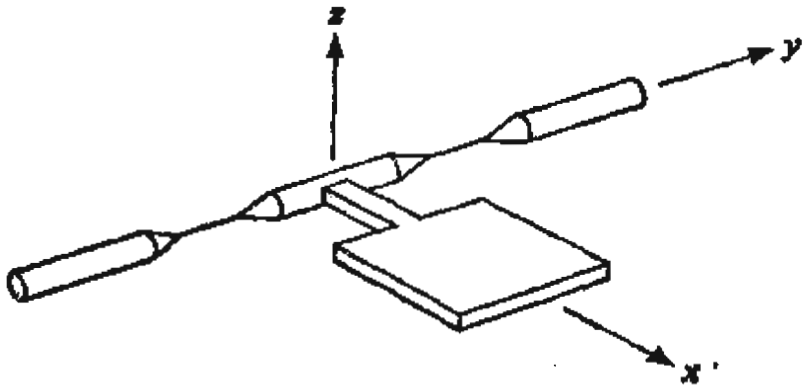


图 10.23
与一短石英杆相连的金属板。石英杆的两部分拉成丝。该板很小(~10 厘米^2)，由丝的扭力水平地支持着。在 Block-Moore 加速仪中，它起着一个垂直摆的作用(引自 Block and Moore, 1970)

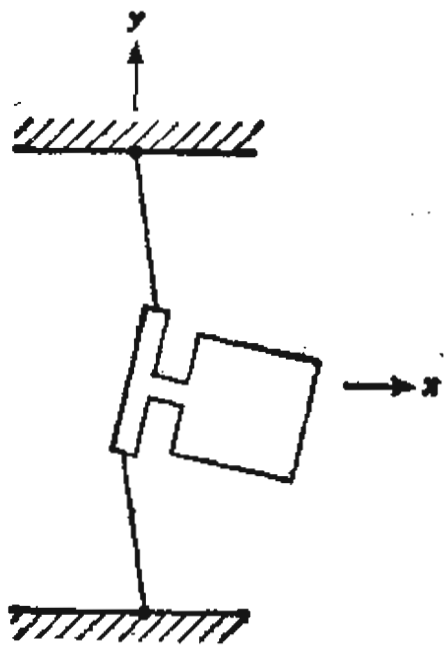


图 10.24
扭转型(引自 Block and Moore, 1970)

直分向以及水平向的"花园大门式"悬挂(图 10.4 b)。为了得到线性和稳定性，该传感器通过一电容换能器达到力平衡。传感器密封于一容器中，然后烘烤，抽空以驱走潮气和空气，避免内部对流。另一种新的计划称为 IDA（国际加速仪部署计划），由加利福尼亚大学圣迭戈分校管理，计划在世界范围设 20 个台站(Agnew *et al.*, 1976)。每个台站需有一个数字化记录的 La Coste-Romberg 重力仪，记录的动态范围为 120 分贝。信号在记录前被滤波，一道用于研究地球固体潮，将 1—30 周/小时带宽予以放大的另一道，用于研究简正振型。

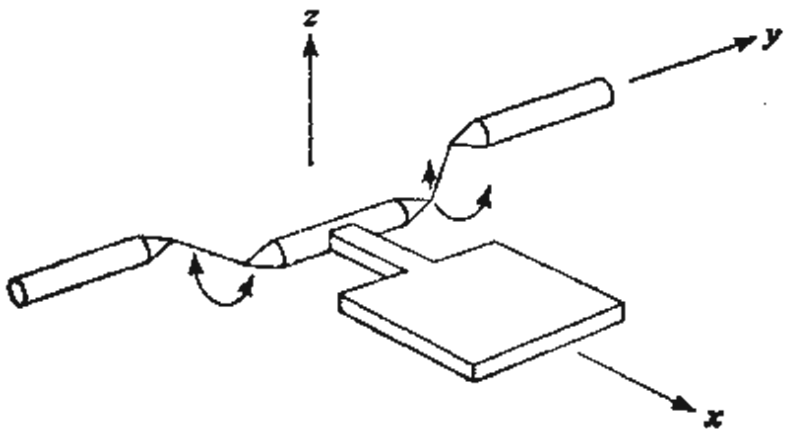


图 10.25
悬丝型(引自 Block and Moore, 1970)

建议进一步阅读的文献

Beauchamp, K. G. (editor). *Exploitation of Seismograph Networks*. Leiden, Noordhoff: International Publishing, 1975.

Berger, J. Application of laser techniques to geodesy and geophysics. *In* H. E. Landsberg (editor), *Advances in Geophysics* (Vol. 16). New York: Academic Press, 1973.

Hagiwara, T. A note on the theory of the electromagnetic

seismograph. *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, **36**, 139-164, 1958.

Kosminskaya, I. P., N. N. Ruzyrev, and A. S. Alekseyev. Explosion seismology, its past, present, and future. *Tectonophysics*, **13**, 309-323, 1972.

Murphy, A., J. Savino, J. Rynn, G. Choy, and K. McCamy. Observations of long period (10s-100s) seismic noise at several worldwide locations. *Journal of Geophysical Research*, **77**, 5042-5049, 1972.

Rodgers, P. W. The response of the horizontal pendulum seismometer to Rayleigh and Love waves, tilt, and free oscillations of the earth. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **58**, 1384-1406, 1968.

Sax, L. R. Stationarity of seismic noise. *Geophysics*, **33**, 668-674, 1968.

Shapiro, I. I., and C. A. Knight. Geophysical applications of long-baseline radio interferometry. *In* L. Mansinha, D. E. Smylie, and A. E. Beck (editors), *Earthquake Displacement Fields and the Rotation of the Earth*. New York: Springer-Verlag, 284-301, 1970.

Willmore, P. L. The detection of earth movements. *In* S. K. Runcorn (editor), *Methods and Techniques in Geophysics* (Vol. 1). New York: Interscience, 1960.

问　题

10.1　证明褶积(10.11)也可写成下列形式：

$$\xi(t)=\int_0^\infty u(t-\tau)\ddot{f}(\tau)d\tau.$$

10.2　证明用一弹簧垂直悬挂的摆锤的周期为 $T=2\pi[(l-l_0)/g]^{1/2}$，其中 l 为弹簧的平衡长度(处于重力负载下)，l_0 为初始长度(无张力情况下)。

10.3　由于需要知道大气干扰引起的地面运动有多大，把地震仪

埋到某一深度，该地面运动(在多数研究中是噪声)可减少多少(Sorrells，1971)，因此产生下列问题：

(a) 考虑有一个其表面在 $z=0$ 的均匀半空间，假设一移动的压力施于此表面，并以边界条件 $\tau_{zx}=\tau_{yz}=0$，$\tau_{zz}=-P\exp[i\omega(x/c-t)]$ 加以模拟。

(b) 求证半空间中 P-SV 运动由运动应力矢量 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$ 给定，其中 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 由(5.60)和(5.65)给出，

$$\boldsymbol{w}=\frac{iP}{\omega\rho\beta^2 R(p)}\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)\frac{1}{\alpha}\\ -\frac{2p\xi}{\beta}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

式中 $p=c^{-1}$，$R(p)$ 是 Rayleigh 函数 (5.51)，$\xi=(1/\alpha^2-p^2)^{1/2}$。

(c) 若 $c\ll\beta$，$\omega z c/\beta^2\ll 1$，求证位移的水平分量和垂直分量分别为

$$u_x=\frac{icP}{\omega\rho\beta^2}\left[\frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{\omega z}{c}\right]e^{-\omega z/c}\exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)\right]$$

和

$$u_z=\frac{cP}{\omega\rho\beta^2}\left[\frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\omega z}{c}\right]e^{-\omega z/c}\exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)\right].$$

10.4 怎样从同一地点的摆和应变仪输出得到面波频散？(这就是说，当 c 可根据频率和水平波数由 $c=\omega/k$ 给出时，怎样研究相速度的频率依赖关系 $c(\omega)$？)

附录 1　与波有关的术语

空气波(Air waves)

地震有时产生能听得到的声音，一次地方震听来可象遥远的雷声。仪器测量结果表明，这些声音与最初的 P 波同时到达(Hill *et al.*, 1976)。长周期（几分钟到几小时）的声-重力波是由大地震激发的，也可由火山爆发、陨星流和大气层核爆炸所激发(Harkrider, 1964)。

与空气耦合的面波(Air-coupled surface waves)

虽然空气和地的密度差别很大，但倘若相速度等于空气中的声速，则在地球表面传播的大气压扰动能增强面波。对海洋上浮冰块中的挠曲波以及地表低速层中的 Rayleigh 波，可观测到与空气的这种耦合(Press *et al.*, 1951)。著名的 1883 年喀拉喀托火山爆发后，观测到同时到达的空气波和潮汐扰动。

Airy 震相(Airy Phase)

与群速度(作为频率的函数)的极大或极小相关联的频散波列部分。稳相近似对它们不适用，但在问题 7.8 中所述的方法仍然是精确的。换言之，Airy 函数可用于波形的近似计算(Savage, 1969 b)。其实例是周期约为 15 秒的大陆 Rayleigh 波和周期为 200—250 秒的地幔 Rayleigh 波。

体波(Body waves)

在无限连续体中传播的波称为体波。与沿界面传播的面波是相对立的。

c

这个符号用于表示由地幔入射的波在核-幔边界的反射。如入射 S 波表示为 ScS。Frasier 和 Chowdury(1974) 叙述了有关 PcP 的主要研究情况。

地方震的尾波(Coda waves of a local earthquake)

地方震的地震图通常表示在体波和面波通过之后很久的某些振荡。地震图的这一部分一直到其结束叫做尾波。它们被认为是分布于地壳和上地幔的横向不均匀性引起的散射的波（Aki and Chouet，1975）。

转换波(Converted waves)

从P到S和从S到P的转换发生于非法向入射的间断面处。这些转换波有时在地震图的P波和S波到时之间表现为清楚的到达波，并且可用来确定间断面的位置。

Crary 波(Crary waves)

Crary 波是在浮冰上观测到的频率几乎不变的正弦波列。它们是水平相速度与冰中纵波速度相近的多次反射SV波。

深度震相（*pP*，*pS*，*sP*，*sS*）(Depth phases（pP，pS，sP，sS)),

符号pP用于从震源往上传播的P波，经自由面反射变为向下传播的P波，并且是在远距离上观测到的。sS，sP和pS具有类似的意义。例如，sP相应于这样的震相：它从震源上行至地表为S波，反射后，作为P波传播到记录台站。这些震相对精确测定震源深度很有用。请看图 9.15 中的sS波。

衍射*P*波(Diffracted P)

从地表震源又掠过地核的P波射线，出现在震中距约为103°处。虽然几何光学预测在超出此距离的阴影区中没有P波的直接到达，但我们在距离至少到 130°处仍继续观测到P波，尤其是长周期的P波。它们在地核边界处衍射。见图 9.23 b。

挠曲波(Flexural waves)

真空中无限板块内，其运动相对于板块中间面为反对称的简正振型。自然界中的例子是浮冰中的波。（对于短波，简正振型的周期方程简化为由于有水面略有改变的板块中挠曲波的周期方程。但对于长波，周期方程中重力项占优势，其振型接近于水中重力波的振型。）

凝结波(Frozen waves)

在大地震的震中区，墙体、堤坝以及诸如此类的建筑物有时保有波形。这些“凝结波”被认为是由于波峰处地面裂开而造成的，有时伴随着喷沙和冒水。

重力波(Gravity waves)

具有很低剪切波速的表层（如未固结的沉积层）中的简正振型，可能在长周期处受重力严重影响（Gilbert，1967）。除了由重力缩短简正振型的波长外，还可能有类似于流体层中重力波的波。在大地震的震中区观测到的具有大振幅和较长周期的所谓“可见波”被认为是重力波(Lomnitz，1970)。

地滚(Ground roll)

这是勘探地震学中的一个术语，指的是爆炸产生的面波。其特征为低速、低频和大振幅，在由高速的较强岩层上固结较差的低速沉积层组成的分层地表附近区域内可观测到，因此地滚通常由Rayleigh波组成。

导波(Guided waves)

导波由于射线在顶界面和底界面的全反射或挠曲而被限制在波导中。一个突出的例子是在SOFAR通道，即海洋内低速通道中的声波。由于对每秒几百周数量级的频率，声音在海水中的吸收系数相当小，所以穿过海洋进行传输是容易做到的。若我们把地球表面当作波导顶面，则面波，如Rayleigh波，Love波，及其高阶振型，便都是导波。与地壳或地幔中的低速通道有关的波可解释为能量在通道中集中的简正振型。凡是它们能存在的地方，导波就能传播到相当远的距离，因为它们实际上只在二维空间中传播。

***G*波(*Gn*)**(*G*-waves(*Gn*))：

这是长周期Love波的另一名称。因为地球中Love波的群速度在大约40秒到300秒的周期范围内几乎是常数（4.4公里/秒），所以其波形相当尖锐，于是他们得到这个额外的名称。它

们是以Gutenberg命名的面被简称为 G 波。G 波绕地球一周约需 $2\frac{1}{2}$ 小时。大地震后，可观测到一系列 G 波，按其到时称为 $G1$，$G2$，…，Gn。奇数指从震中向台站传播的 G 波，偶数指沿相反方向离开震中，并从震中对蹠点回到台站的 G 波。请参看问题 7.9 和图 8.5。

首波(Head waves)

首波是在半空间中观测到的，该半空间与另一具有较高速度的半空间密接，而震源位于较低速度的介质中。首波的射线路径沿着界面，低速半空间中的波阵面是扩大着的锥面的一部分。由于这一原因，首波也称为"锥形波"。首波的一个实例是其射线路径沿着地幔顶面的 P_n 波。

I*, *i

符号 I 用来表示地球内核里 P 波的那部分射线路径。例如，$PKIKP$ 指穿透内核、在整个路径上都不转换为 S 波而回到地表的 P 波。另一方面，与用 c 表示在核-幔界面上反射的方式相同，用 i 表示在内外核界面上的反射。

非均匀平面波(Inhomogeneous plane waves)

这是其振幅在与传播方向不同的方向上变化的平面波。传播速度低于正规平面波的速度。它们也称为"损耗波"。

J

符号 J 表示射线路径作为 S 波处于地球内核中的那一部分。

K

外核中的 P 波用 K 表示。例如，从地幔射入的 S 波在地核边界转换为 P 波在外核中传播，在再进入地幔时又转换回 S 波。这样的 S 波称为 SKS，正如 PP，PPP 等用来表示地表反射，KK，KKK 等用来表示从下面在核幔界面反射的地核中的 P 波。

***L*(*LQ*, *LR*)**

用符号 L 表示长周期面波。当面波类型已知时，LQ 和 LR 分别用于 Love 波和 Rayleigh 波。

漏能模式(Leaking modes)

一般说，在分层半空间的简正振型具有这样的截止频率，低于该频率时，相速度大于半空间的 P 波和 S 波速，能量作为体波通过半空间时损耗。由于这种损耗，漏能模式的振幅随距离按指数衰减。

***Lg* 波**(Lg-waves)

主要为横向运动的短周期(1—6 秒)大振幅的到达波 (Ewing *et al.*, 1957)。Lg 波沿地表以与大陆地壳上部的平均剪切速度相近的速度传播 (Herrin and Richmond, 1960)。这种波只在波的路径完全是大陆性的情况下才被观测到。进入海洋的部分甚至小到 2° 就足以消除这种波。当 Lg 波有明显的两组到达波时，它们被叫作 Lg 1 和 Lg 2。

***Li* 波**(Li-waves)

这些波与 Lg 波相似，但它们的存在不如 Lg 波那样广为人们所承认。Li 波速为 3.8 公里/秒(Lg 波速为 3.5 公里/秒)，并可能与大陆地壳的下部有关(Båth, 1954, 1957)。

纵波(Longitudinal waves)

均匀各向同性体中远场 P 波的位移和传播方向平行。因此，P 波也叫作“纵波”。

Love 波(Love waves)，

这是限制在弹性体表面附近的、具有其最大振幅的 SH 波。它们的存在首先是由 A. E. H. Love 针对一均匀层置于均匀半空间之上，而半空间中的 S 波速大于层内 S 波速这一情况导出的。一般说，在竖向不均匀介质中，它们可以存在，但在均匀半空间中，只要表面是平坦的，则它们不能存在。

M

该符号表示地震图上振幅最大的波组。

M 1 波和 M 2 波 (M 1 and M 2 waves)

M 1 和 M 2 是真空中无限平板内对称与反对称的简正振型。每组有一系列基阶和高阶振型，用 M 11, M 12,···或 M 21, M 22,···表示。也尝试过对半空间之上一层中的基阶和高阶振型的 Rayleigh 波进行同样的分类。但分层半空间的 M 1 和 M 2(有时称为妹泽波) 之间的差别并不如平板中两者间差别那么明显。

地幔 Rayleigh 波 (Mantle Rayleigh waves)

正如长周期 Love 波有另一名称 "G 波" 一样，长周期 Rayleigh 波有时也称为地幔 Rayleigh 波。

脉动(Microseisms)

这是指对任一地震实验，构成背景噪声的连续地动。频率高于 1 赫的脉动通常是由人为的原因，如交通和机器引起的，有时称为微动 (microtremor)，以便区别于天然扰动产生的长周期脉动。在典型的大陆内部台站上，脉动的卓越周期约为 6 秒。这是由海洋驻波的压力引起的，而这些驻波则可能是在风暴发源区或海岸附近沿相反方向传播的波形成的(Longuet-Higgins, 1950)。

简正振型(Normal modes)

简正振型起初定义为自由度数目有限的系统的自由振动，如由无质量弹簧所连接的有限个质点。每个振型是在称为本征频率的某一频率处的简谐振动。独立振型的数目与自由度数一样多。此系统的任意运动可表达为简正振型的迭加。有限连续体 (如地球) 的自由振动也称为简正振型。在这种情况下，有无限多个简正振型，该物体的任意运动可用它们的叠加来表示。简正振型的概念已被扩大到波导中，其中具有某一相速度的自由波可在无外力情况下存在。实例就是半空间中的 Rayleigh 波和分层半空间中的 Love 波。然而在这种情况下，不能用简正振型的迭加表达任意运动。

P*

表示通过其速度约为 6.5 公里/秒的地壳中间层折射的 P 波。

该层的上界面称为 Conrad 间断面。见补充 6.4。

P'

PKP 波的另一种符号。

P 尾波(P coda)

原生初至波后的 P 波部分。它们可能是由界面上 P 转换为 S，或层中的多次反射，或由三维不均匀性产生的散射造成的。

PdP

这种波与地表反射波 PP 相似，只是其反射发生在深度为 d 的界面上(以公里表示，如 $P_{600}P$)，而不是在地表。

P_d，P_n，P_r

$\Delta=20^\circ$ 附近 P 波的走时表现出由于低速层下的上地幔速度迅速增长产生的三重值。三个分支以 $dt/d\Delta$ 逐渐减少的顺序表示为 P_d(直达)，P_n(上地幔)和 P_r(折射)。

平板波(Plate waves)

真空中无限平板内简正振型的周期方程可分成两个。方程之一决定着相对于平板中间面为对称的运动振型，另一方程决定着反对称运动的振型。前者有时称为 M 1 波，后者有时称为 M 2 波。例如 M 11 和 M 12 分别为 M 1 的基阶振型和第一高阶振型。对很短的波，M 11 和 M 21 在平板物质组成的弹性半空间中都接近 Rayleigh 波。对与平板厚度相比比较长的波长，M 21 称为挠曲波。它们是频散的，其相速度随着波长的增加而减少到零(Satô，1951)。

PL 波(PL-waves)

在距离小于约 30°时，P 波和 S 波间的间隔中观测到长周期波列(30—50 秒)。这种波周期较长、到达较早。它被解释为壳幔波导的漏能振型(Oliver and Major，1960；Su and Dorman，1965)。

P_n

在某一临界距离(一般从 100 至 200 公里)以外，来自地壳

中震源的初至波相应于从地幔顶部折射的波。称为 P_n 的这种波相当小，运动周期长；后面是周期较短的较大较尖、在地壳中传播的波，称为 $\bar{P}$。P_n 波很久以来被解释成沿两种均匀介质——即地壳和地幔——交界面的首波(锥形波)。但所观测的振幅通常大于所预测的首波振幅，这意味着速度变化并不正好是阶梯式的，而是在过渡带上或过渡带下面有一有限的梯度。符号 P_n 近年来应用于在相当大距离（甚至可达 20°）上以水平相速度 7.8—8.3 公里/秒传播的短周期 P 波。因而 Herrin(1969)定义 P_n 为"从几度到走时函数开始显示相当大曲率的距离范围内地震能量的最初到达。"这里用 Moho 面的首波加以解释是不能令人满意的（虽然能解释水平速度和走时），因为首波必定随距离迅速衰减。用地幔顶部几十公里厚的高 Q 值层内的导波加以解释，似乎比较合理。

$\bar{P}$(P_g)

对地壳中的震源来说，短距离上（直至几百公里）的走时曲线通常由两条相交直线组成：一条是较短距离上速度约 6 公里/秒的直线；另一条是较长距离上速度约 8 公里/秒的直线。前一条是在地壳中传播、并用 $\bar{P}$ 或 Pg 来表示（g 代表花岗石层）的直达 P 波所形成的。

P 波(P waves)

压缩弹性波在地震学中称为 P 波，P 代表"最初"(primary)。均匀各向同性体中，P 波速度等于 $\sqrt{\left(k+\frac{3}{4}\mu\right)/\rho}$，式中 k，μ 和 ρ 分别表示体积模量、刚性系数和密度。与 P 波有关的质点位移通常平行于波传播的方向。因此，P 波有时称为纵波。

Rayleigh 波(Rayleigh waves)

这是面波中最基本的一种，在弹性体平坦自由表面附近具有最大振幅。对均匀体，传播速度为剪切波速度乘以 0.88 至 0.95，

这取决于 Poisson 比。竖向不均匀半空间中 Rayleigh 波的相速度和群速度与频率有关。竖向不均匀半空间中可存在高阶振型。

Rg

大陆路径所观测的短周期基阶振型 Rayleigh 波(8—12 秒)，有时表示为 Rg(Ewing *et al.*, 1957)。

S 波(S waves)

弹性剪切波在地震学中称为 S 波，S 表示"第二的"(secondary)。在均匀各向同性体中，S 波速度等于 $\sqrt{\mu/\rho}$，这里 μ 和 ρ 分别表示刚性系数和密度。与 S 波有关的质点位移通常垂直于波的传播方向，因而，S 波有时也称为横波。

$S(Sg)$

在地壳中传播的与 $\bar{P}$ 或 Pg 类似的 S 波。

Sa 波(Sa waves)

Sa 波的典型周期为 10—30 秒，沿地表测量的群速度为 4.4—4.5 公里/秒，可具有 SV 和 SH 两种运动分量。其波形一般很复杂，并且不规则地因台而异 (Brune, 1965)。

湖面波 (Seiche)

这些波是不流动的水体，如湖泊、水塘或进口很窄的海湾的表面的自由振荡，有时是由地震或海啸激起的。振荡周期从几分钟到几小时，振荡可能持续几小时到一两天。

与剪切波耦合的 PL 波 (Shear-coupled PL waves)；

这是跟随 S 波，距离可达 80°左右的长周期波列。一般认为，这是由 S 波与壳-幔波导的漏能模式耦合引起的，即 PL 波。还观测到 PL 波与 SS 波及 SSS 波的耦合 (Chander *et al.*, 1968; Poupinet and Wright, 1972)。

SH 波 (SH waves)

这是只具有水平向位移的 S 波。对竖向不均匀介质，SH 波不与 P 波相互作用，比 SV 波简单些。

S_n

符号 S_n 用来指与沿地幔顶部传播首波一样的短周期 S 波。现在这符号经常用于可在震中距大到 40° 处观测到的（走时曲线为一直线）显著短周期剪切波(Molnar and Oliver, 1969)。Stephens 和 Isacks (1977) 认为这种波在地幔顶部的波导中传播。短周期波的传播较为有效，因为长周期波的大部分能量是在较深处的低 Q 物质中，因而被滤掉。Walker 等 (1978) 提供了长距离的 S_n 实例。

Stoneley 波 (Stoneley waves)

这是其最大振幅被限制在两种弹性介质平坦界面附近的界面波。在固体与流体交界面处总可能存在，但在固体与固体交界面处，则只在两种介质的剪切波速度几乎相等的严格条件下方能存在。

表面 *P* 波 (Surface P waves)

表面 P 波的射线路径由两部分组成：一段是从震源到自由表面其水平视速度等于 P 波速度的 S 波路径；另一段是沿自由表面到接收点的 P 波路径。表面 P 波在临界距离出现，并且尽管随距离的衰减很快，仍能够比直达 S 波有更尖锐的到达。

表面反射 (*PP*, *SS*, *SP*, *PS*, *PPP*, *SSS*) (Surface reflections (PP, SS, SP, PS, PPP, SSS))

以下行方向离开震源（与以上行方向离开震源的 pP 波相反），在到达记录台站前在地表经受过一次反射的 P 波表示为 PP。在表面反射过两次的 P 波表示为 PPP。同样，PS 波是反射过一次，并在反射后由 P 波转换为 S 而到达台站的波。见图 9.15。

***SV* 波** (SV waves)

对一各向同性均匀体，与远场 S 波有关的位移被限制于垂直于传播方向的平面内。平面内的质点运动可用两个正交矢量来描述，一个矢量在水平方向，另一个矢量垂直于它。后一分量是 SV 波。SV 波在竖向非均匀介质中与 P 波相互作用。

T震相（T-phase）

T代表第三的（Tertiary）波（P和S之后），指迟到周期小于1秒的震相，是在岛屿或沿海的台站上对于其传播路径主要为海洋路径的地震观测到的。这种波以水中声速通过路径的海洋部分，可能穿过SOFAR通道（Linehan，1940；Ewing *et al*.. 1952）。

海啸或潮汐波（Tsunami，或 Tidal wave）

由海底扰动在海面形成的重力波。这种扰动可以是海底地震、海底滑坡或火山爆发产生的隆起或沉陷。

钻孔中的管状波（Tube waves in a bore hole）

在一空的柱状孔内，一种面波可以沿该孔的轴传播而将能量限制在孔附近。它显示有频散，其相速度随波长而增加。在远远小于孔半径的波长上，它接近于Rayleigh波。在约为半径三倍的波长上，相速度达到剪切波速度。超出该截止波长，它由于幅射S波而迅速衰减。在一充满流体的柱状孔内，除了在流体中传播的一系列多重反射的锥形波外，管状波在整个周期内存在而无截断。在短波长上，它接近于流体与固体间平界面的Stoneley波。对大于孔半径约10倍的波长，管状波的速度变为常数，由流体的体积模量k和固体刚性系数μ给出为$v=c(1+k/\mu)^{1/2}$，这里c是流体中的声速（Bolt，1952；White，1965）。

可见的地震波（Visible earthquake waves）

在大地震震中地区肉眼可见的长周期短波长的慢波（Lomnitz，1970）。

火山振动（Volcanic tremors）

火山活动产生的地震信号在性质上变化相当大。从类似于构造地震的振动到具有尖锐峰值谱的连续振动。连续振动被认为是火山振动、或简谐振动（Minakami 1974；Aki *et al*.，1977）。

附录 2　震级的定义

地震震级起初由 Richter（1935）定义为：其摆周期为 0.8 秒、放大倍数为 2800、阻尼因子为 0.8，置于离震中 100 公里处的标准扭力地震仪记录上，以微米量度的最大振幅的对数。该标准仪器以其设计者的姓名命名为 Wood-Anderson 地震仪后，已为人们熟知。它由与垂直金属丝相连的一个铜制小圆柱体（质量小于 1 克，其轴是垂直的）构成。金属丝处于张力下，因此回复力由张力提供。该仪器整个说来对通过圆柱体内小镜反射的光所检测的水平运动是灵敏的。为了把任意震中距上所观测的振幅化到 100 公里处预期的振幅，已作成一标定曲线。这种震级标度现在称为地方震震级 M_L。

Gutenberg 和 Richter（1936）根据远震面波提出一种震级标度。Gutenber（1945）又进一步对此进行了研究，对距离为 $15^\circ<\Delta<130^\circ$ 的浅源地震，他发现以下公式：

$$M_s=\log A+1.656\log\Delta+1.818, \qquad (A.1)$$

式中 A 是周期 20 秒的面波产生的最大地位移的水平分量（单位为微米）。

Gutenberg 公式以后提出了许多 M_s 的公式。Vaněk 等（1962）总结了这些公式，提出：

$$M_s=\log(A/T)_{max}+1.66\log\Delta+3.3, \qquad (A.2)$$

这已为 IASPEI（国际地震学和地球内部物理学协会）正式采用。式(A.2)中 $(A/T)_{max}$ 是记录图上所有波群的 A/T（振幅/周期）值的极大值。$T=20$ 秒时，式（A.2）变得几乎与(A.1)相同。

另一种重要的震级标度是根据远震体波的振幅制定的。它定义为

$$m_b=\log(A/T)+Q, \qquad (A.3)$$

式中 Q 是 Gutenberg 和 Richter（1956）为了从所观测振幅中消

除路径效应，凭观测确定的震中距和震源深度的函数（参见图10.9）。A/T 或是 P，PP 波组或是 SH 波组中的极大值，并有每个震相分别具有的 Q 的图表。Vaněk 等（1962）后来总结了 m_b 的公式，提出改进的 Q 的标定函数。

但美国地质调查局在目前日常报告中确定 m_b 的工作大大不同于 Gutenberg 和 Richter 曾进行的工作。最重要的差别在于测定时所采用的仪器特性曲线不同。Gutenberg 和 Richter 使用的是能记录大事件和较长周期 P 波（4—10 秒）的宽带仪器，而美国地质调查局目前测定时采用的是短周期全球标准地震台网仪器，它能显示周期几乎总在 1 秒左右的 P 波。而且，美国地质调查局要求（A/T）必须在记录图的最初 5 秒中被测出。但在早期工作中，极大值可在信号持续时间高达 10 秒才被观测到，以便能记到具有平缓初动的地震。

参　考　文　献

Abe, K.

1970 Determination of seismic moment and energy from the Earth's free oscillation. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 4:49–61.

Abramowitz, M., and I. A. Stegun

1964 *Handbook of Mathematical Functions.* U.S. National Bureau of Standards.

Adams, R. D.

1972 Multiple inner core reflections from a Novaya Zemlya explosion. *Bulletin of the Seismological Society of America* 62:1063–1071.

Agnew, D., J. Berger, R. Buland, W. Farrell, and F. Gilbert

1976 International deployment of accelerometers: A network for very long period seismology. *EOS, Transactions of the American Geophysical Union* 57:180–188.

Aki, K.

1966 Generation and propagation of *G* waves from the Niigata earthquake of June 16, 1964. 2. Estimation of earthquake moment, released energy, and stress-strain drop from *G* wave spectrum. *Bulletin of the Earthquake Research Institute* 44:23–88.

Aki, K., and L. B. Chouet

1975 Origin of coda waves: Source, attenuation, and scattering effects. *Journal of Geophysical Research* 80:3322–3342.

Aki, K., M. Fehler, and S. Das

1977 Source mechanism of volcanic tremor; fluid-driven crack models and their application to the 1973 Kilauea eruption. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 2:259–287.

Alekseyev, A. S., and B. G. Mikhaylenko

1976 Solution of Lamb's problem for a vertically inhomogeneous elastic halfspace. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth.* December: pp. 11–25.

Alsop, L. E., G. H. Sutton, and M. Ewing

1961a Free oscillations of the Earth observed on strain and pendulum seismographs. *Journal of Geophysical Research* 66:631–641.

1961b Measurement of *Q* for very long period free oscillations. *Journal of Geophysical Research* 66:2911–2915.

Alterman, Z., H. Jarosch, and C. L. Pekeris

1959 Oscillations of the Earth. *Proceedings of the Royal Society of London* A252:80–95.

Anderson, D. L., and C. B. Archambeau
1964 The anelasticity of the Earth. *Journal of Geophysical Research* 69:2071–2084.

Anderson, D. L., A. Ben-Menahem, and C. B. Archambeau
1965 Attenuation of seismic energy in the upper mantle. *Journal of Geophysical Research* 70:1441–1448.

Andrianova, Z. S., V. I. Keilis-Borok, A. L. Levshin, and M. G. Neiganz
1967 *Seismic Love Waves*. New York: Consultants Bureau.

Ansell, J. H.
1978 On the scattering of *SH* waves from a point source by a sphere. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 54:359–387.

Archambeau, C. B., E. A. Flinn, and D. G. Lambert
1969 Fine structure of the upper mantle. *Journal of Geophysical Research* 74: 5825–5865.

Arons, A. B., and D. R. Yennie
1950 Phase distortion of acoustic pulses obliquely reflected from a medium of higher sound velocity. *Journal of the Acoustical Society of America* 22:231–237.

Azimi, Sh. A., A. V. Kalinin, V. V. Kalinin, and B. L. Pivovarov
1968 Impulse and transient characteristics of media with linear and quadratic absorption laws. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, February: pp. 88–93.

Backus, G.
1958 A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos. *Annals of Physics* (N.Y.) 4:372–447.
1965 Possible forms of seismic anisotropy in the uppermost mantle under oceans. *Journal of Geophysical Research* 70:3429–3439.

Backus, G., and F. Gilbert
1961 The rotational splitting of the free oscillations of the earth. *Proceedings of the National Academy of Science* 47:362–371.
1967 Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 13:247–276.
1968 The resolving power of gross Earth data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 16:169–205.
1970 Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A266:123–192.

Backus, G., and M. Mulcahy
1976 Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. I. Continuous displacements. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:341–361.
1976 Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources. II. Discontinuous displacements. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 47:301–329.

Bâth M.

1954 The elastic waves *Lg* and *Rg* along Eurasiatic paths. *Arkiv Geophysik* 2:295–342.

1957 A continental channel wave guided by the intermediate layer in the crust. *Geofisica pura e applicata* 38:19–31.

Beavan, J., and R. Bilham

1977 Thermally induced errors in fluid tube tiltmeters. *Journal of Geophysical Research* 82:5699–5704.

Benioff, H.

1932 A new vertical seismograph. *Bulletin of the Seismological Society of America* 22:155–169.

1958 Long waves observed in the Kamchatka earthquake of November 4, 1952. *Journal of Geophysical Research* 63:589–593.

1959 Fused-quartz extensometer for secular, tidal, and seismic strain. *Bulletin of the Geological Society of America* 70:1019–1032.

Benioff, H., B. Gutenberg, and C. F. Richter

1954 Progress report. *Transactions of the American Geophysical Union* 35:979–987.

Benioff, H., F. Press, and S. W. Smith

1961 Excitation of the free oscillations of the Earth by earthquakes. *Journal of Geophysical Research* 66:605–620.

Ben-Menahem, A., S. W. Smith, and T.-L. Teng

1965 A procedure for source studies from spectrums of long-period seismic body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 55:203–235.

Ben-Menahem, A., M. Rosenman, and D. G. Harkrider

1970 Fast evaluation of source parameters from isolated surface-wave signals. I. Universal tables. *Bulletin of the Seismological Society of America* 60:1337–1387.

Berckhemer, H., and G. Schneider

1964 Near earthquakes recorded with long-period seismographs. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:973–985.

Berry, M. J., and G. F. West

1966 Reflected and head wave amplitudes in a medium of several layers. In *The Earth Beneath Continents* (Geophysical Monograph 10). American Geophysical Union.

Bessonova, E. N., V. M. Fishman, M. G. Shnirman, G. A. Sitnikova, and L. R. Johnson

1976 The tau method for inversion of travel times. II. Earthquake data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:87–108.

Biot, M. A.

1952 Propagation of elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid. *Journal Applied Physics* 23:997–1005.

Biswas, N. N., and L. Knopoff

1970 Exact earth-flattening calculation for Love waves. *Bulletin of the Seismo-*

logical Society of America 60:1123–1137.

Block, B., J. Dratler, and R. D. Moore
1970 Earth and normal modes from a 6.5 magnitude earthquake. *Nature* 226: 343–344.

Block, B., and R. D. Moore
1966 Measurements in the earth mode frequency range by an electrostatic sensing and feedback gravimeter. *Journal of Geophysical Research* 71:4361–4375.
1970 Tidal to seismic frequency investigations with a quartz accelerometer of new geometry. *Journal of Geophysical Research* 75:1493–1506.

Borcherdt, R. D.
1973 Energy and plane waves in linear viscoelastic media. *Journal of Geophysical Research* 78:2442–2453.
1977 Reflection and refraction of type. II. *S* waves in elastic and anelastic media. *Bulletin of the Seismological Society of America* 67:43–67.

Bortfeld, R.
1961 Approximation to the reflection and transmission coefficients of plane longitudinal and transverse waves. *Geophysical Prospecting* 9:485–502.

Bracewell, R. B.
1965 *The Fourier Transform and Its Applications.* New York: McGraw-Hill.

Brekhovskikh, L. M.
1960 *Waves in Layered Media* (Chapter 4). New York: Academic Press.

Bromwich, T. J. I'A.
1898 On the influence of gravity on elastic waves, and, in particular, on the vibrations of an elastic globe. *Proceedings of the London Mathematical Society* Vol. 30.

Brune, J. N.
1962 Attenuation of dispersed wave trains. *Bulletin of the Seismological Society of America* 52:109–112.
1965 The *Sa* phase from the Hindu Kush earthquake of July 6, 1962. *Pure and Applied Geophysics* 62:81–95.
1968 Seismic moment, seismicity, and rate of slip along major fault zones. *Journal of Geophysical Research* 73:777–784.

Brune, J. N., and J. Dorman
1963 Seismic waves and Earth structure in the Canadian Shield. *Bulletin of the Seismological Society of America* 53:167–210.

Brune, J. N., J. E. Nafe, and L. E. Alsop
1961 The polar phase shift of surface waves on a sphere. *Bulletin of the Seismological Society of America* 51:247–257.

Brune, J. N., J. E. Nafe, and J. Oliver
1960 A simplified method for the analysis and synthesis of dispersed wave trains. *Journal of Geophysical Research* 65:287–304.

Buchbinder, G. G. R.

1972 Travel times and velocities in the outer core from *PmKP*. *Earth and Planetary Science Letters* 14:161–168.

Buchen, P. W.

1971 Plane waves in linear viscoelastic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 23:531–542.

Buck, S. W., F. Press, D. Shepard, M. N. Toksöz, and H. Trantham

1971 Development of a mercury tiltmeter for seismic recording. Final Technical Report to the Advanced Research Projects Agency on Contract No. F44620-69-C-0126, Massachusetts Institute of Technology.

Buland, R. P., and F. Gilbert

1976 The theoretical basis for the rapid and accurate computation of normal mode eigenfrequencies and eigenfunctions. In *Retrieving the Seismic Moment Tensor*, Ph.D. thesis of R. P. Buland, University of California, San Diego.

1980 The rapid and accurate computation of normal mode eigenfrequencies and eigenfunctions. *Journal of Computational Physics* (in press).

Bullen, K. E.

1937 The ellipticity correction to travel-times of *P* and *S* earthquake waves. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement* 4:143–157.

1960 Notes on cusps in seismic travel-times. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 3:354–359.

Burridge, R., and L. Knopoff

1964 Body force equivalents for seismic dislocations. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:1875–1888.

Byrne, C. J.

1961 Instrument noise in seismometers. *Bulletin of the Seismological Society of America* 51:69–84.

Cagniard, L.

1962 *Reflection and Refraction of Progressive Seismic Waves*. Trans. by E. A. Flinn and C. H. Dix. New York: McGraw-Hill.

Červený, V.

1972 Seismic rays and ray intensities in inhomogeneous anisotropic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 29:1–13.

1974 Reflection and transmission coefficients for transition layers. *Studia Geophysica et Geodaetica* 18:59–68.

Červený, V., and R. Ravindra

1971 *Theory of Seismic Head Waves*. University of Toronto Press.

Chander, R., L. E. Alsop, and J. Oliver

1968 On the synthesis of shear-coupled *PL* waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:1849–1877.

Chapman, C. H.

1971 On the computation of seismic ray travel times and amplitudes. *Bulletin of*

the Seismological Society of America 61:1267–1274.

1972 Lamb's problem and comments on the paper, 'On Leaking Modes' by Usha Gupta. *Pure and Applied Geophysics* 94:233–247.

1973 The Earth flattening transformation in body wave theory. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 35:55–70.

1974 The turning point of elastodynamic waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 39:613–621.

1976a Exact and approximate generalized ray theory in vertically inhomogeneous media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:201–233.

1976b A first motion alternative to geometrical ray theory. *Geophysical Research Letters* 3:153–156.

1978a A new method for computing seismograms. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 54:481–518.

1978b Body waves in seismology. *In* J. Miklowitz and J. D. Achenbach (editors), *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*. New York: Wiley.

Chapman, C. H., and R. A. Phinney

1972 Diffracted seismic signals and their numerical solution. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods in Computational Physics, Vol. 12), New York: Academic Press.

Choy, G. L.

1977 Theoretical seismograms of core phases calculated by a frequency-dependent full wave theory, and their interpretation. *Geophysical Journal of the Royal* Astronomical Society, 51:275–311.

Choy, G. L., and Paul G. Richards

1975 Pulse distortion and Hilbert transformation in multiply reflected and refracted body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 65: 55–70.

Cisternas, A., O. Betancourt, and A. Leiva

1973 Body waves in a "real Earth." Part I. *Bulletin of the Seismological Society of America* 63:145–156.

Coddington, E. A., and N. Levinson

1955 *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill.

Cormier, V., and P. G. Richards

1977 Full-wave theory applied to a discontinuous velocity increase: The inner core boundary. *Journal of Geophysics* 43:3–31.

Crampin, S.

1970 The dispersion of surface waves in multi-layered anisotropic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 21:387–402.

1971 The propagation of surface waves in anisotropic media. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 25:71–87.

1975 Distinctive particle motion of surface waves as a diagnostic of anisotropic

layering. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 40:177–186.

1977 A review of the effects of anisotropic layering on the propagation of seismic waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 49:9–27.

Crampin, S., and D. Bamford

1977 Inversion of *P*-wave anisotropy. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 49:123–132

Crampin, S., and D. W. King

1977 Evidence for anisotropy in the upper mantle beneath Eurasia from the polarization of higher mode surface waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 49:59–85.

Crossley, D. J., and D. Gubbins

1975 Static deformation of the Earth's liquid core. *Geophysical Research Letters* 2:1–4.

Currie, R. G.

1974 Period and Q_μ of the Chandler wobble. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 38:179–185.

Dahlen, F. A.

1968 The normal modes of a rotating elliptical Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 16:329–467.

1969 The normal modes of a rotating, elliptical Earth. II. Near-resonance multiplet coupling. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18:397–436.

1972 Elastic dislocation for a self-gravitating elastic configuration with an initial static stress field. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 28:357–383.

1973 Elastic dislocation theory for a self-gravitating elastic configuration with an initial static stress field. II. Energy release. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 31:469–484.

1976a Seismic faulting in the presence of a large compressive stress. *Geophysical Research Letters* 3:245–248. (Correction, p. 506.)

1976b The passive influence of the oceans upon the rotation of the Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:363–406.

1977 The balance of energy in earthquake faulting. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 48:239–261.

Dahlen, F. A., and M. L. Smith

1975 The influence of rotation on the free oscillations of the Earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A279:583–629.

Davies, D., and D. P. McKenzie

1969 Seismic travel-time residuals and plates. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18:51–63.

Dewey, J., and P. Byerly

1969 The early history of seismometry (to 1900). *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:183–277.

Dorman, J., and M. Ewing
1962 Numerical inversion of seismic surface wave dispersion data and crust-mantle structure in the New York Pennsylvania area. *Journal of Geophysical Research* 67:5227–5241.

Dunkin, J. W.
1965 Computation of modal solutions in layered, elastic media at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America* 55:335–358.

Dziewonski, A. M., A. L. Hales, and E. R. Lapwood
1975 Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 10:12–48.

Dziewonski, A. M., and F. Gilbert
1976 The effect of small aspherical perturbations on travel-times and a re-examination of the corrections for ellipticity. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 44:7–17.

Eaton, J. P.
1957 Theory of the electromagnetic seismograph. *Bulletin of the Seismological Society of America* 74:37–75.

Eshelby, J. D.
1957 The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London* A241:376–396.

Ewing, M., W. Jardetzky, and F. Press
1957 *Elastic Waves in Layered Media.* New York: McGraw-Hill.

Ewing, M., F. Press, and J. L. Worzel
1952 Further study of the *T* phase. *Bulletin of the Seismological Society of America* 42:37–51.

Ewing M., and J. L. Worzel
1948 Long-range sound transmission. *Geological Society of America Memoir* 27.

Farrell, W. E.
1969 A gyroscopic seismometer: measurements during the Borrego earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:1239–1246.

Forsyth, D. W.
1975 The early structural evolution and anisotropy of the oceanic upper mantle. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 43:103–162.

Frasier, C. W.
1970 Discrete time solution of plane *P-SV* waves in a plane layered medium. *Geophysics* 35:197–219.

Frasier, C. W., and D. K. Chowdury
1974 Effect of scattering on *PcP/P* amplitude ratios at LASA from 40° to 84° distance. *Journal of Geophysical Research* 79:5469–5477.

Frazer, L. N.
1977 Synthesis of shear-coupled *PL.* Ph.D. Thesis, Princeton University.

Friedman, B.
1951 Propagation in a non-homogeneous atmosphere. *Communications of Pure and Applied Mathematics* 4:317–350.

Fuchs, K.
1968 The reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. *Journal of Physics of the Earth*, Special Issue, 16:27–41.
1970 On the determination of velocity depth distributions of elastic waves from the dynamic characteristics of the reflected wave field. *Zeitschrift für Geophysik* 36:531–548.
1971 The method of stationary phase applied to the reflection of spherical waves from transition zones with arbitrary depth-dependent elastic moduli and density. *Zeitschrift für Geophysik* 37:89–117.

Fuchs, K., and G. Müller
1971 Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison of observations. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 23:417–433.

Fuchs, K., and K. Schulz
1976 Tunneling of low-frequency waves through the subcrustal lithosphere. *Journal of Geophysics* 42:175–190.

Futterman, W. I.
1962 Dispersive body waves. *Journal of Geophysical Research* 67:5279–5291.

Galitzin, B.
1914 *Vorlesungen über Seismometrie*. Leipzig: Teubner.

Gantmacher, F. R.
1959 *The Theory of Matrices* (2 vols). New York: Chelsea Publishing Co.

Gerver, M., and V. Markushevitch
1966 Determination of a seismic wave velocity from the travel time curve. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 11:165–173.
1967 On the characteristic properties of travel time curves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 13:241–246.

Gilbert, F.
1967 Gravitationally perturbed elastic waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 57:783–794.
1971 Excitation of the normal modes of the Earth by earthquake sources. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 22:223–226.
1976 The representation of seismic displacements in terms of travelling waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 44:275–280.

Gilbert, F., and G. Backus
1966 Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics* 31:326–332.

Gilbert, F., and A. M. Dziewonski
1975 An application of normal mode theory to the retrieval of structural parameters and source mechanisms from seismic spectra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A278:187–269.

Gilbert, F., and D. V. Helmberger
1972 Generalized ray theory for a layered sphere. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 27:57–80.

Gilbert, F., and S. J. Laster
1962 Experimental investigation of *PL* modes in a single layer. *Bulletin of the Seismological Society of America* 52:59–66.

Gilbert, F., S. J. Laster, M. M. Backus, and R. Schell
1962 Observations of pulses on an interface. *Bulletin of the Seismological Society of America* 52:847–868.

Gladwin, M. T., and F. D. Stacey
1974 Anelastic degradation of acoustic pulses in rock. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 8:332–336.

Green, G.
1839 On the laws of reflexion and refraction of light. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 7). (Reprinted in Mathematical Papers of George Green, pp. 245–269, London, 1871.)

Gutenberg, B.
1913 Über die Konstitution des Erdinnern, erschlossen aus Erdbebenbeobachtungen. *Zeitschrift für Geophysik* 14:1217–1218.

Gutenberg, B.
1945 Amplitudes of surface waves and magnitudes of shallow earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 35:3–12.

Gutenberg, B., and C. F. Richter
1936 Magnitude and energy of earthquakes. *Science* (New Series) 83:183–185.
1956 Earthquake magnitude, intensity, energy, and acceleration. *Bulletin of the Seismological Society of America* 46:105–145.

Haddon, R. A. W.
1972 Corrugations on the mantle-core boundary or transition layers between inner and outer cores? *EOS, Transactions of the American Geophysical Union* 53:600.

Hagiwara, T.
1958 A note on the theory of the electromagnetic seismograph. *Earthquake Research Institute Bulletin of Tokyo University* 36:139–164.

Hales, A. L., and J. L. Roberts
1974 The Zoeppritz amplitude equations: More errors. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:285.

Harkrider, D. G.
1964 Theoretical and observed acoustic-gravity waves from explosive sources in the atmosphere. *Journal of Geophysical Research* 69:5295–5321.

Harkrider, D. G., and D. L. Anderson
1966 Surface wave energy from point sources in plane layered Earth models. *Journal of Geophysical Research* 71:2967–2980.

Harrison, J. C.
1976a Cavity and topographic effects in tilt and strain measurements. *Journal of Geophysical Research* 81:319–328.
1976b Tilt observations in the Poorman Mine near Boulder, Colorado. *Journal of Geophysical Research* 81:329–336.

Haskell, N. A.
1953 The dispersion of surface waves in multilayered media. *Bulletin of the Seismological Society of America* 43:17–34.
1960 Crustal reflection of plane *SH* waves. *Journal of Geophysical Research* 65:4147–4150.
1962 Crustal reflection of plane *P* and *SV* waves. *Journal of Geophysical Research* 67:4751–4767.
1964 Radiation pattern of surface waves from point sources in a multi-layered medium. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:377–394.

Hasselman, K.
1963 A statistical analysis of the generation of microseisms. *Review of Geophysics* 1:177–210.

Haubrich, R. A.
1967 Microseisms. *In* S. K. Runcorn (editor), *International Dictionary of Geophysics*. London: Pergamon Press.

Helmberger, D. V.
1968 The crust-mantle transition in the Bering Sea. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:179–214.

Helmberger, D. V., and D. A. Harkrider
1978 Modeling earthquakes with generalized ray theory. *In* J. Miklowitz and J. D. Achenbach (editors), *Modern Problems in Elastic Wave Propagation*. New York: Wiley.

Helmberger, D. V., and S. D. Malone
1975 Modelling local earthquakes as shear dislocations in a layered half space. *Journal of Geophysical Research* 80:4881–4888.

Herrera, I.
1964 A perturbation method for elastic wave propagation. 1. Non-parallel boundaries. *Journal of Geophysical Research* 69:3845–3851.

Herrin, E., and J. Richmond
1960 On the propagation of the *Lg* phase. *Bulletin of the Seismological Society of America* 50:197–210.

Hess, H.
1964 Seismic anisotropy of the uppermost mantle under oceans. *Nature* 203: 629–631.

Hildebrand, F. B.
1952 *Methods of Applied Mathematics* (2nd ed.). Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Hill, D. P.
1971a Velocity gradients and anelasticity from crustal body wave amplitudes. *Journal of Geophysical Research* 76:3309–3325.
1971b Velocity gradients in the Earth's crust from head-wave amplitudes. *American Geophysical Union Monograph*, Ed. by J. G. Heacock. 14:71–75.

Hill, D. P., F. G. Fischer, K. M. Lahr, and J. M. Coakely
1976 Earthquake sounds generated by body-wave ground motion. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:1159–1172.

Hobson, E. W.
1955 *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.* New York: Chelsea Publishing Co.

Hoop, A. T. de,
1958 Representation theorems for the displacement in an elastic solid and their applications to elastodynamic diffraction theory. D.Sc. Thesis, Technische Hogeschool, Delft.
1960 A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problems. *Applied Science Research* B8:349–356.

Hron, F.
1971 Criteria for selection of phases in synthetic seismograms for layered media. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61:765–779.
1972 Numerical methods of ray-generation in multilayered media. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods in Computational Physics, Vol. 12). New York: Academic Press.

Hudson, J. A.
1962 The total internal reflection of *SH* waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 6:509–531.
1969a A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances. I. Radiation from seismic sources. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18:233–249.
1969b A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances. II. Body waves and surface waves from an extended source. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18:353–370.

Isacks, B., J. Oliver, and L. R. Sykes
1968 Seismology and the new global tectonics. *Journal of Geophysical Research* 73:5855–5899.

Jackson, D. D., and D. L. Anderson
1970 Physical mechanisms of seismic-wave attenuation. *Review of Geophysics and Space Physics* 8:1–63.

Jeffreys, H.
1926 On compressional waves in two superposed layers. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 23:472–481.
1931 On the cause of oscillatory movement in seismograms. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement* 2:407–416.
1958 Rock creep, tidal friction and the Moon's ellipticities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 118:14–17.
1961 Small correction in the theory of surface waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 6:115–117.
1965 *Cartesian Tensors.* Cambridge University Press.

Jeffreys, H., and B. S. Jeffreys
1972 *Methods of Mathematical Physics* (3rd ed.). Cambridge University Press.

Johnson, L. E., and F. Gilbert
1972 Inversion and inference for teleseismic ray data. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Body Waves and Sources* (Methods in Computational Physics, Vol. 12). New York: Academic Press.

Jordan, T. H., and D. L. Anderson
1974 Earth structure from free oscillations and travel times. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 36:411–459.

Jordan, T. H., and L. N. Frazer
1975 Crustal and upper mantle structure from S_n phases. *Journal of Geophysical Research* 80:1504–1518.

Julian, B. R., and D. L. Anderson
1968 Travel times, apparent velocities and amplitudes of body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:339–366.

Julian, B. R., and M. K. Sengupta
1973 Seismic travel time evidence for lateral inhomogeneity in the deep mantle. *Nature* 242:443–447.

Kanamori, H.
1976 Re-examination of the Earth's free oscillations excited by the Kamchatka earthquake of November 4, 1952. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 11:216–226.
1977 The energy release in great earthquakes. *Journal of Geophysical Research* 82:2981–2987.

Karal, F. C., and J. B. Keller
1959 Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media. *Journal of the Acoustical Society of America* 31:694–705.

Keilis-Borok, V. I., and T. B. Yanovskaya
1962 Dependence of the spectrum of surface waves on the depth of the focus within the Earth's crust. *Bulletin of the Academy of Sciences, U.S.S.R., Geophysic Series* (English translation) 11:1532–1539.

Keith, C., and S. Crampin
1977 Seismic body waves in anisotropic media; reflection and refraction at a plane interface. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 49:181–208.

Kennett, B. L. N., N. J. Kerry, and J. H. Woodhouse
1978 Symmetries in the reflection and transmission of elastic waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 52:215–229.

Kind, R.
1976 Computation of reflection coefficients for layered media. *Journal of Geophysics* 42:191–200.
1978 The reflectivity method for a buried source. *Journal of Geophysics* 44:603–612.

Knopoff, L.
1956 Diffraction of elastic waves. *Journal of the Acoustical Society of America* 28:217–229.
1964 a Q. *Review of Geophysics* 2:625–660.
1964 b A matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54: 431–438.

Knott, C. G.
1899 Reflection and refraction of elastic waves with seismological applications. *Philosophical Magazine*, Series 5, 48:64–97.

Kostrov, B. V.
1974 Seismic moment and energy of earthquakes, and seismic flow of rock. *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, January, 13–21.

LaCoste, L. J. C.
1935 A simplification in the conditions for the zero-length-spring seismograph. *Bulletin of the Seismological Society of America* 25:176–179.

Lamb, H.
1904 On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A203:1–42.

Landisman, M., T. Usami, Y. Satô, and R. Massé
1970 Contributions of theoretical seismograms to the study of modes, rays, and the Earth. *Review of Geophysics and Space Physics* 8:533–589.

Langer, R. E.
1951 Asymptotic solutions of a differential equation in the theory of microwave propagation. *Communications of Pure and Applied Mathematics* 3:427–438.

Langston, C. A., and D. V. Helmberger
1975 A procedure for modelling shallow dislocation sources. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 42:117–130.

Lapwood, E. R.
1949 The disturbance to a line source in a semi-infinite elastic medium. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A242:63–100.

Latham, G., M. Ewing, J. Dorman, D. Lammlein, F. Press, N. Toksöz, G. Sutton, F. Duennebier, and Y. Nakamura
1971 Moonquakes. *Science* 174:687–692.

LePichon, X.
1968 Sea-floor spreading and continental drift. *Journal of Geophysical Research* 73:3661–3697.

Linehan, D.
1940 Earthquakes in the West Indian region. *Transactions of the American Geophysical Union* 21:229–232.

Liu, H.-P., D. L. Anderson, and H. Kanamori
1976 Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 47:41–58.

Lomnitz, C.
1956 Creep measurements in igneous rocks. *Journal of Geology* 64:473–479.
1957 Linear dissipation in solids. *Journal of Applied Physics* 28:201–205.
1970 Some observations of gravity waves in the 1960 Chile earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America* 60:669–670.

Longman, I. M.
1963 A Green's function for determining the deformation of the Earth under surface mass loads. 2. Computations and numerical results. *Journal of Geophysical Research* 68:485–496.

Longuet-Higgins, M. S.
1950 A theory of the origin of microseisms. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A243:1–35.

Love, A. E. H.
1911 *Some Problems of Geodynamics.* Cambridge University Press.
1944 *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* New York: Dover Publications. [First published by Cambridge University Press, 1892.]

Luh, P. C., and A. M. Dziewonski
1975 Theoretical seismograms for the Colombian earthquake of 1970 July 31. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 43:679–695.

McHugh, S., and M. J. S. Johnston
1976 Short-period nonseismic tilt perturbations and their relation to episodic slip. *Journal of Geophysical Research* 81:6341–6346.

McKenzie, D. P.
1969 The relation between fault plane solutions for earthquakes and the directions of the principal stresses. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:591–601.

Major, M. W., G. H. Sutton, J. E. Oliver, and P. Metsger
1964 On elastic strain of the Earth in the period range 5 seconds to 100 hours. *Bulletin of the Seismological Society of America* 54:295–346.

Malvern, L. E.
1969 *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Mantovani, E., F. Schwab, and L. Knopoff
1977 Generation of complete theoretical seismograms for *SH*-II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 48:531–536.

Maruyama, T.
1963 On the force equivalents of dynamic elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University* 41:467–486.

Mason, W. P.
1958 *Physical Acoustics and the Properties of Solids.* London: D. Van Nostrand.

Melchior, P.
1966 *The Earth Tides.* London: Pergamon Press.

Mellman, G. R., and D. V. Helmberger
1974 High-frequency attenuation by a thin high-velocity layer. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:1383–1388.

Mendiguren, J.
1973 Identification of free oscillation spectral peaks for 1970 July 31, Colombian deep shock using the excitation criterion. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 33:281–321.

Michelson, A. A., and H. G. Gale
1919 The rigidity of the Earth. *Astrophysical Journal* 50:330–345.

Minakami, T.
1974 Seismology of volcanoes in Japan. *In* L. Civetta, P. Jasparini, G. Luongo, and A. Rapolla (editors), *Physical Volcanology*. Amsterdam: Elsevier.

Molnar, P., and J. Oliver
1969 Lateral variations of attenuation in the upper mantle and discontinuities in the lithosphere. *Journal of Geophysical Research* 74:2648–2682.

Müller, G.
1973 Amplitude studies of core phases. *Journal of Geophysical Research* 78: 3469–3490.
1977 Correction. *Journal of Geophysical Research* 82:2541–2542.

Müller, G., and R. Kind
1976 Observed and computed seismogram sections for the whole Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 44:699–716.

Musgrave, M. J. P.
1970 *Crystal Acoustics*. San Francisco: Holden-Day.

Nafe, J. E.
1957 Reflection and transmission coefficients at a solid-solid interface of high velocity contrast. *Bulletin of the Seismological Society of America* 47:205–219.

Nakanishi, K., F. Schwab, and L. Knopoff
1977 Generation of complete theoretical seismograms for *SH*-I. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 48:525–530.

Ness, N. F., J. C. Harrison, and L. B. Slichter
1961 Observations of the free oscillations of the Earth. *Journal of Geophysical Research* 66:621–629.

Nowick, A. S., and B. S. Berry
1972 *Anelastic Relaxation in Crystalline Solids*. New York: Academic Press.

Nussenzveig, H. M.
1965 High-frequency scattering by an impenetrable sphere. *Annals of Physics* (N. Y.) 34:23–95.
1972 *Causality and Dispersion Relations* (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 95) R. Bellman, series editor. New York: Academic Press.

O'Connell, R. J., and B. Budiansky
1978 Measures of dissipation in viscoelastic media. *Geophysical Research Letters* 5:5–8.

Okal, E., and P. Mechler
1973 On the problem of the convergence of the eikonal expansion for synthetic seismograms. *Bulletin of the Seismological Society of America* 63:1315–1319.

Oliver, J.
1961 On the long-period character of shear waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 51:1–12.

Oliver, J., and M. Major
1960 Leaking modes and the *PL* phase. *Bulletin of the Seismological Society of America* 50:165–180.

Olver, F. W. J.
1954a The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A247:307–327.
1954b The asymptotic expansion of Bessel functions of large order. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A247:328–368.

Orcutt, J. A., B. L. N. Kennett, and L. M. Dorman
1976 Structure of the East Pacific Rise from an ocean bottom seismometer survey *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 45:305–320.

Page, R. A., J. A. Blume, and W. B. Joyner
1975 Earthquake shaking and damage to buildings. *Science* 189:601–608.

Pao, Y.-H., and R. R. Gajewski
1977 The generalized ray-theory and transient responses of layered elastic solids. *In* W. P. Mason (editor), *Physical Acoustics* (Vol. 13). New York: Academic Press.

Pekeris, C. L.
1948 Theory of propagation of explosive sound in shallow water. *Geological Society of America Memoirs* No. 27.

Pekeris, C. L., Z. Alterman, and H. Jarosch
1961 Rotational multiplets in the spectrum of the Earth. *Physics Review* 122: 1692–1700.

Pekeris, C. L., and Y. Accad
1972 Dynamics of the liquid core of the Earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A273:237–260.

Peterson, J., H. M. Butler, L. G. Holcomb, and C. R. Hutt
1976 The seismic research observatory. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:2049–2068.

Phinney, R. A.
1961 Leaking modes in the crustal wave-guide. 1. The oceanic *PL* wave. *Journal of Geophysical Research* 66:1445–1469.

Phinney, R. A., and S. Alexander
1966 *P* wave diffraction theory and the structure of the core mantle boundary. *Journal of Geophysical Research* 71:5943–5958.

Phinney, R. A., and L. M. Cathles
1969 Diffraction of *P* by the core: A study of long-period amplitudes near the edge of the shadow. *Journal of Geophysical Research* 74:1556–1574.

Pomeroy, P. W., G. Hade, J. Savino, and R. Chander
1969 Preliminary results from high-gain wide-band long-period electromagnetic seismograph systems. *Journal of Geophysical Research* 74:3295–3298.

Poupinet, G., and C. Wright
1972 The generation and propagation of shear-coupled *PL* waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 62:1699–1710.

Press, F.
1965 Displacements, strains, and tilts at teleseismic distances. *Journal of Geophysical Research* 70:2395–2412.

Press, F., A. P. Crary, J. Oliver, and S. Katz
1951 Air-coupled flexural waves in floating ice. *Transactions of the American Geophysical Union* 32:166–172.

Rayleigh, Lord
1887 On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proceedings of the London Mathematical Society* 17:4–11.
1910 The problem of the whispering gallery. *Philosophical Magazine* 20:1001–1004.
1912 On the propagation of waves through a stratified medium, with special reference to the question of reflection. *Proceedings of the Royal Society of London* A86:207–226.
1945 *The Theory of Sound* (2 vols.). New York: Dover Publications.

Richards, P. G.
1971 An elasticity theorem for heterogeneous media, with an example of body wave dispersion in the Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*. 22:453–472.
1973 Calculation of body waves, for caustics and tunnelling in core phases. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 35:243–264.
1974 Weakly coupled potentials for high-frequency elastic waves in continuously stratified media. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:1575–1588.
1976 On the adequacy of plane-wave reflection/transmission coefficients in the analysis of seismic body waves. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:701–717.

Richards, P. G., and C. W. Frasier
1976 Scattering of elastic waves from depth-dependent inhomogeneities. *Geophysics* 41:441–458.

Richter, C. F.
1935 An instrumental earthquake magnitude scale. *Bulletin of the Seismological Society of America* 25:1–32.
1958 *Elementary Seismology*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Rihn, W. J.
1969 The design of electromagnetic damping circuits. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:967–972.

Robin, L.
1957 *Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroidales* (3 vols.). Paris: Gautier-Villars.

Rodgers, P. W.
1968 The response of the horizontal pendulum seismometer to Rayleigh and Love waves, tilt and free oscillations of the Earth. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:1384–1406.

Rodi, W. L., P. Glover, T. M. C. Li, and S. S. Alexander
1975 A fast, accurate method for computing group-velocity partial derivatives for Rayleigh and Love modes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 65:1105–1114.

Rosenbaum, J. H.
1960 The long-time response of a layered elastic medium to explosive sound. *Journal of Geophysical Research* 65:1577–1613.

Sacks, I. S., S. Suyehiro, and D. W. Evertson
1971 Sacks-Evertson strainmeter, its installation in Japan and some preliminary results concerning strain steps. *Proceedings of the Japanese Academy* 47:707–712.

Saito, M.
1967 Excitation of free oscillations and surface waves by a point source in a vertically heterogeneous Earth. *Journal of Geophysical Research* 72:3689–3699.
1968 Synthesis of rotational and dilatational seismograms. *Journal of Physics of the Earth* 16:53–62.

Satō, Y.
1951 Study on surface waves. II. Velocity of surface waves propagated upon elastic plates. *Bulletin of the Earthquake Research Institute* 29:223–261.
1959 Numerical integration of the equation of motion for surface waves in a medium with arbitrary variation of material constants. *Bulletin of the Seismological Society of America* 49:57–77.

Satō, Y., T. Usami, and M. Ewing
1962 Basic study on the oscillation of a homogeneous elastic sphere. IV. *The Geophysical Magazine* 31:237–242.

Savage, J. C.
1966 Radiation from a realistic model of faulting. *Bulletin of the Seismological Society of America* 56:577–592.
1969a Steketee's paradox. *Bulletin of the Seismological Society of America* 59:381–384.
1969b A new method of analyzing the dispersion of oceanic Rayleigh waves. *Journal of Geophysical Research* 74:2608–2617.
1976 Anelastic degradation of acoustic pulses in rock—comments. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 11:284–285.

Savage, J. C., and M. E. O'Neill
1975 The relation between the Lomnitz and Futterman theories of internal friction. *Journal of Geophysical Research* 80:249–251.

Savino, J., K. McCamy, and G. Hade
1972 Structures in Earth noise beyond twenty seconds—A window for earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 62:141–176.

Scholte, J. G. J.
1947 The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplement* 5:120–126.
1956 On seismic waves in a spherical Earth. *Koninkl. Ned. Meteorol. Inst. Publ.* 65:1–55.

Schwab, F., and L. Knopoff
1970 Surface wave dispersion computations. *Bulletin of the Seismological Society of America* 60:321–344.

Seckler, B. D., and J. B. Keller
1959 Asymptotic theory of diffraction in inhomogeneous media. *Journal of the Acoustical Society of America* 31:206–216.

Shimshoni, M., and A. Ben-Menahem
1970 Computation of the divergence coefficient for seismic phases. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 21:285–294.

Smith, M. L.
1977 Wobble and nutation of the Earth. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 50:103–140.

Smith, M. L., and F. A. Dahlen
1973 The azimuthal dependence of Love and Rayleigh wave propagation in a slightly anisotropic medium. *Journal of Geophysical Research* 78:3321–3333.

Smith, W. D.
1974 A non-reflecting plane boundary for wave propagation problems. *Journal of Computational Physics* 15:492–503.
1975 The application of finite element analysis to body wave propagation problems. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 42:747–768.

Solomon, S. C.
1972 Seismic-wave attenuation and partial melting in the upper mantle of North America. *Journal of Geophysical Research* 77:1483–1502.
1973 Shear wave attenuation and melting beneath the Mid-Atlantic Ridge. *Journal of Geophysical Research* 78:6044–6059.

Sorrels, G. G.
1971 A preliminary investigation into the relationship between long-period seismic noise and local fluctuations in the atmospheric pressure field. *Geophysical Journal* 26:71–82.

Spencer, T. W.
1960 The method of generalized reflection and transmission coefficients. *Geophysics* 25:625–641.
1965 Long-time response predicted by exact elastic ray theory. *Geophysics* 30:363–368.

Spudich, P. K. P., and D. V. Helmberger
1979 Synthetic seismograms from model ocean bottoms. *Journal of Geophysical Research* 84:189–204.

Stacey, F. D., M. T. Gladwin, B. McKavanagh, A. T. Linde, and L. M. Hastie
1975 Anelastic damping of acoustic and seismic pulses. *Geophysical Surrey* 2:133–157.

Stacey, F. D., J. M. W. Rynn, E. C. Little, and C. Croskell
1969 Displacement and tilt transducers of 140 db range. *Journal of Scientific Instrumentation* (*J. Phys., E*) Series 2. 2:945–949.

Stauder, W.
1968 Mechanism of the Rat Island earthquake sequence of February 4, 1965, with relation to island arcs and sea-floor spreading. *Journal of Geophysical Research* 73:3847–3858.

Stein, S., and R. J. Geller
1978 Time domain observation and synthesis of split spheroidal and torsional free oscillations of the 1960 Chilean earthquake: Preliminary results. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 68:325–332.

Steketee, J. A.
1958 Some geophysical applications of the elasticity theory of dislocations. *Canadian Journal of Physics* 36:1168–1197.

Stephens, C., and B. L. Isacks
1977 Toward an understanding of *Sn*: Normal modes of Love waves in an oceanic structure. *Bulletin of the Seismological Society of America* 67:69–78.

Sternberg, E.
1960 On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity. *Archive for Rational Mechanics* 6:34–50.

Stoneley, R.
1924 Elastic waves at the surface of separation of two solids. *Proceedings of the Royal Society of London* A106:416–428.

Strick, E.
1959 Propagation of elastic wave motion from an impulsive source along a fluid/solid interface. II. Theoretical pressure pulse. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* A251:465–523.
1970 A predicted pedestal effect for pulse propagation in constant-*Q* solids. *Geophysics* 35:387–403.

Su, S. S., and J. Dorman
1965 The use of leaking modes in seismogram interpretation and in studies of crust-mantle structure. *Bulletin of the Seismological Society of America* 55:989–1021.

Sykes, L. R.
1967 Mechanism of earthquakes and nature of faulting on the mid-oceanic ridges. *Journal of Geophysical Research* 72:2131–2153.

Takeuchi, H., and N. Kobayashi
1959 Surface waves propagating along a free surface of a semi-infinite elastic medium of variable density and elasticity. Part I. *Journal of the Seismological Society of Japan* (Series 2) 12:115–121.

Takeuchi, H., and M. Saito
1972 Seismic surface waves. *In* B. A. Bolt (editor), *Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations* (Methods in Computational Physics, Vol. 11). New York: Academic Press.

Thomson, W. T.
1950 Transmission of elastic waves through a stratified solid. *Journal of Applied Physics* 21:89–93.

Titchmarsh, E. C.
1926 Conjugate trigonometrical integrals. *Proceedings of the London Mathematical Society* (Series 2) 24:109–130.
1939 *The Theory of Functions* (2nd ed.). Oxford University Press.

Tsai, Y. B., and K. Aki
1971 Amplitude spectra of surface waves from small earthquakes and underground nuclear explosions. *Journal of Geophysical Research* 76:3440–3452.

Vaněk, J., A. Zápotek, V. Kárnik, N. V. Kondorskaya, Yu. V. Rizmichenko, E. F. Savarensky, S. L. Solov'yov, and N. V. Shebalin
1962 Standardization of magnitude scales. *Izvestiya Akad. Nauk S.S.S.R., Ser. Geofiz.* 2:153–158.

Vered, M., and A. Ben-Menahem
1974 Application of synthetic seismograms to the study of low-magnitude earthquakes and crustal structure in the northern Red Sea region. *Bulletin of the Seismological Society of America* 64:1221–1237.

Vlaar, N. J.
1966 The field from an *SH*-point source in a continuously layered inhomogeneous medium. 1. The field in a layer of a finite depth. *Bulletin of the Seismological Society of America* 56:715–724.
1968 Ray theory for an anisotropic inhomogeneous elastic medium. *Bulletin of the Seismological Society of America* 58:2053–2072.

Vvedenskaya, A. V.
1956 The determination of displacement fields by means of dislocation theory. *Izvestiya Akad. Nauk. S.S.S.R., Ser. Geofiz.* pp. 227–284.

Walker, D. A., C. C. McCreely, G. H. Sutton, and F. K. Dunnebier
1978 Spectral analyses of high frequency P_n and S_n phases observed at great distances in the western Pacific. *Science* 199:1333–1335.

Wesson, R. L.
1970 A time integration method for computation of the intensities of seismic rays. *Bulletin of the Seismological Society of America* 60:307–316.

White, J. E.
1965 *Seismic Waves.* New York: McGraw Hill.

Wideman, C. J., and M. W. Major
1967 Strain steps associated with earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 57:1429–1444.

Wiechert, E.
1904 Ein astatische Pendel höher Empfindlichkeit zur mechanischen Registrierung von Erdbeben. *Beitr. Geophys.* 6:435–450.

Wiggins, R. A.
1976a Body wave amplitude calculations. II. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:1–10.
1976b A fast, new computational algorithm for free oscillations and surface waves. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 47:135–150.

Wiggins, R. A., and D. V. Helmberger
1974 Synthetic seismogram computation by expansion in generalized rays. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 37:73–90.

Wiggins, R. A., and M. Saito
1971 Evaluation of computational algorithms for the associated Legendre polynomials by internal analysis. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61:375–381.

Willmore, P. L.
1960 The detection of Earth movement. *In* S. K. Runcorn (editor), *Methods and Techniques in Geophysics*. New York: Interscience, pp. 230–276.

Woodhouse, J. H.
1976 On Rayleigh's principle. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 46:11–22.
1978 Asymptotic results for elastodynamic propagator matrices in plane stratified and spherically stratified Earth models. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 54:263–280.

Wyss, M., and J. N. Brune
1968 Seismic moment, stress and source dimensions for earthquakes in the California-Nevada region. *Journal of Geophysical Research* 73:4681–4694.
1971 Regional variations of source properties in Southern California estimated from the ratio of short- to long-period amplitudes. *Bulletin of the Seismological Society of America* 61:1153–1167.

Young, G. B., and L. W. Braile
1976 A computer program for the application of Zoeppritz's amplitude equations and Knott's energy equations. *Bulletin of the Seismological Society of America* 66:1881–1885.

Zener, C. M.
1948 *Elasticity and Anelasticity of Metals*. The University of Chicago Press.

Zöllner, F.
1869 Veber eine neue Methode zur Messung anziehender und abstossender Kräfte. *Ber. sächs. Akad. Wis. Math.-nat. Klasse* 21:280–284.

译 后 记

《定量地震学》的英文版于1980年出版，这部两卷本的专著受到地震学界的重视。为满足广大专业工作者的需要，我们把它翻译成中文。这是第一卷，其中第一章至第六章由李钦祖译，第七章至第九章由邹其嘉译，第十章由唐美华译，全部译稿由邹其嘉整理。姜维岐为本书的翻译出版做了许多工作。

限于译者水平，译文中一定有错误及不妥之处，恳请广大读者批评指正。