计算透射波 $\hat{S}\hat{S}\exp[i\omega(px+\eta_2 z-t)]$ 的入射角和出射角时，必须小心。为此，我们必须利用(5.94)和对于每个单一平面波所确定的(5.95)中的角 θ。一般说要注意，入射角和出射角将不是 j_1 和 j_2，因为这些角只在(5.97)中有意义，我们是选用 p（而不是比如说 j_1）作为独立变量。

检验将表明，(5.98) 中的系数 $\hat{S}\hat{S}$ 直接依赖于复数的体波速度 β_1和 β_2（或 μ_1和 μ_2）以及 p。我们早先对衰减的描述，限制在一维均匀波。令人满意的是，我们对于这些简单波所引入的复弹性常数，都是求二维平面波时所需要的，即使后者可能是非均匀波。因此，衰减介质界面的反射系数、转换系数和透射系数，可仅仅用替换复弹性常数而由弹性介质的类似结果[如(5.32)]得到，只要我们小心地解释象"入射角"和"出射角"这些概念。

5.6 各向异性弹性介质中的波传播：平面波的基本理论

均匀各向异性介质中的稳态平面波将以慢度 $\boldsymbol{s}$ 传播，假定位移 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{U}\exp[-i\omega(t-\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x})]$ 满足 $\rho\ddot{u}_i=c_{ijkl}u_{k,lj}$。$\boldsymbol{U}$ 是给出质点运动方向的固定的偏振向量，它是个常数。对于需要满足的波动方程，我们要求行列式为零，即

$$\det|\rho\delta_{ik}-c_{ijkl}s_j s_l|=0. \tag{5.99}$$

在各向同性介质中，(5.99)简化为对慢度分量的三个分离的二阶方程，对应于 P 波和两种 S 波[见(4.36)—(4.39) 和(5.2)]。但对一般的各向异性情况，不可能直接用 ρ 和 c 的分量来解析地求解 s 或 $|s|$。

一个有用的辅助物用来得到波阵面慢度形象的就是慢度面 S。用笛卡尔轴 (s_1, s_2, s_3) 表示慢度空间中的点，则 S 由满足(5.99)的点组成。对于各向同性介质，(4.40)指明 S 由三个同心球组成，一个的半径是 $[\rho/(\lambda+2\mu)]^{\frac{1}{2}}$，另两个重合，半径是

$[\rho/\mu]^{\frac{1}{2}}$。但在较普遍的情况下，S有三个分离的且非球形的叶片。

由慢度面能够构成另一个三叶的面$W(t)$，以表示与点源相联系的波阵面的位置（在给定的时间t）。显然，W与满足$t=s\cdot x$的解(x_1,x_2,x_3)有关。这里的问题是，对于波阵面上的每个x，在慢度面上将有一个不同的s。我们定义W为s在慢度面上变化时平面$t=s\cdot x$的包络。Musgrave(1970)描述了S上的s点与W上的相应x点之间的几何关系。S在s的法线平行于x。据此，可以制定W的图形（因为x现为已知，$|x|$由$t=s\cdot x$确定）。相反的关系也成立，而且从地震学观点看，也许这是更重要的，这个关系是：W在x的法线平行于s。波阵面的最简单的可以观测的量，大概是它前进的方向（它自身的法线），这由s给定。然而，正如Vlaar(1968)所描述的，作为能量输送方向的射线方向，一般不沿s，而沿慢度面在s的法线。计算各向异性非均匀介质中波阵面

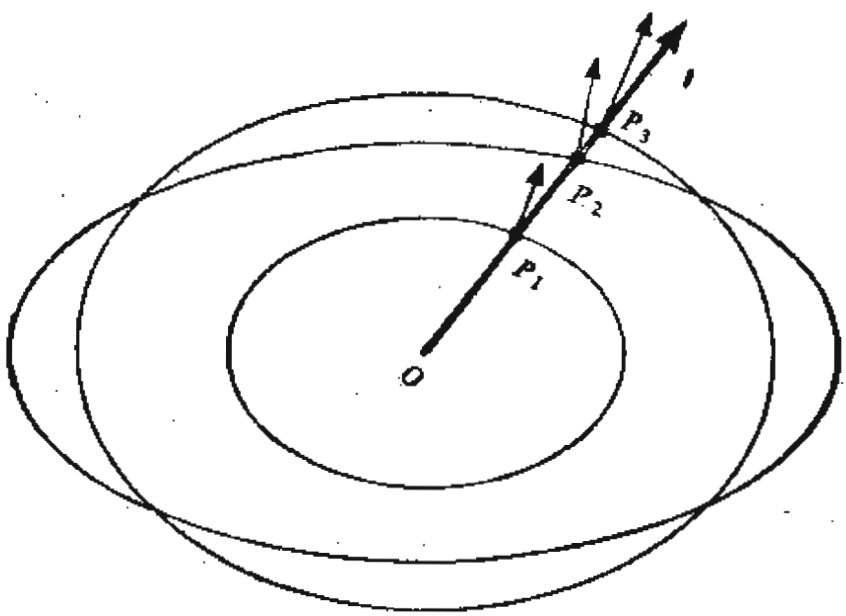


图 5.16

有三个叶片的慢度面S。在l方向有三个可能的慢度，其量值为OP_1，OP_2和OP_3。S在P_1，P_2，P_3的法线，给出三个慢度中各个的能量传播（射线）方向

几何扩散的一般方法，是由 Červený(1972)给出的。

对于给定的单位慢度方向 $\boldsymbol{l}$，有三个不同的数值 $|s|$，使 $\boldsymbol{s}=|s|\boldsymbol{l}$ 位于慢度面上（见图5.16）。它们对应于三个不同的体波，其慢度的数值由解本征值问题

$$\det[\boldsymbol{M}-(\rho/|s|^2)\boldsymbol{I}]=0 \qquad (5.100)$$

来求得，式中 $M_{ip}=c_{ijpq}l_jl_q$，而 $I_{ip}=\delta_{ip}$。$\boldsymbol{M}$ 是对称的，而 $M_{ip}U_p=(\rho/|s|^2)U_i$，所以偏振 $\boldsymbol{U}$ 的三个本征向量互相正交。

为准备分析均匀半空间的水平分界面，我们以前取 x_2 方向，使得 $\boldsymbol{s}=(p,o,s_3)$。对于同 x_3 轴垂直的分界面，Snell 定律简化为，对于在分界面上耦合的所有平面波，有 $s_1=p$，$s_2=0$，而 s_3 对每个波是不同的。同样的方法在各向异性介质中是有帮助的，图5.18表示出在两个半空间水平分界面的任一边平面波的 s_3 分量的构造

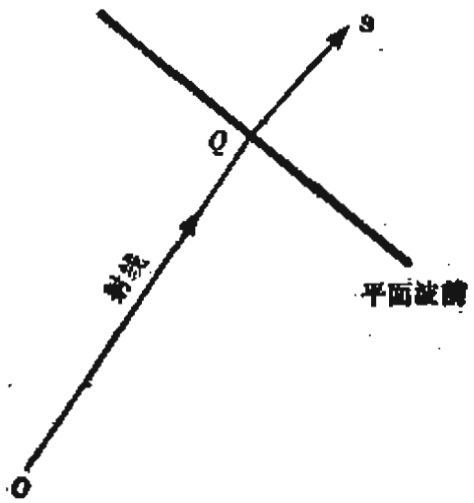


图 5.17

对于平面波阵面，射线方向（由能通量给定）一般说既不垂直于波阵面，也不必位于弧矢平面内

图。图 5.18 中描绘出的包含所有耦合慢度向量的平面，叫做弧矢平面。它同时还是入射面，如果它改变，则可以转动 (x_1, x_2) 轴，以保持 $s_2=0$。这样做的代价是，$\boldsymbol{c}$ 的笛卡尔分量必须被变换到新坐标系。

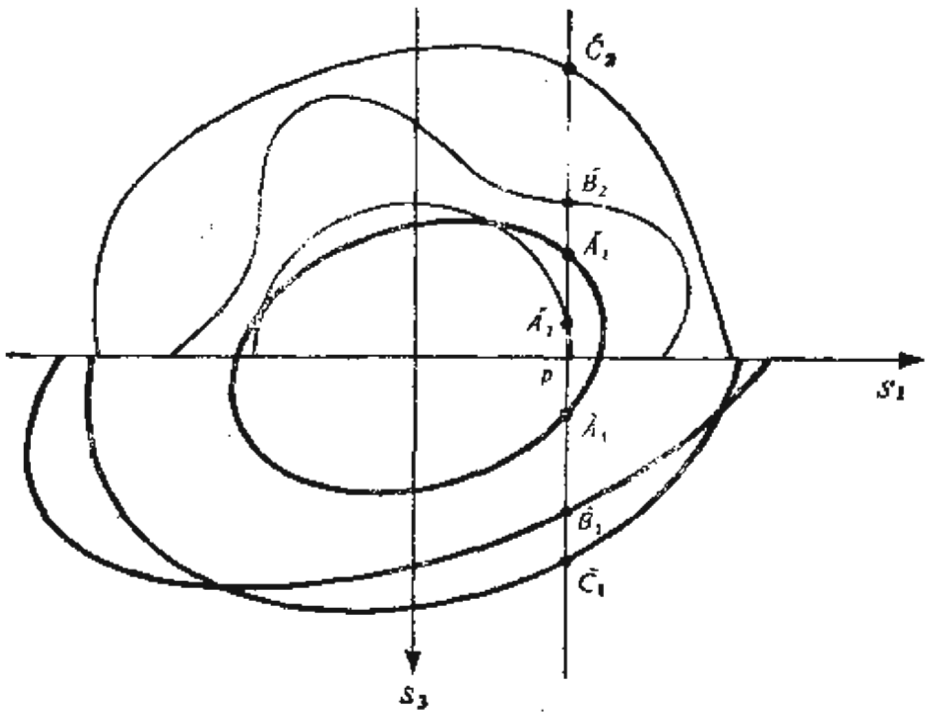


图 5.18

对于在两个各向异性半空间的水平分界面上散射的每个平面波，计算向量慢度的图解法。粗曲线是有三个叶片的慢度面在下部介质的部分，入射波（向上传播）的慢度坐标由$\bar{A}_1$给出。六个散射波都有同一水平慢度p。正的s_3值代表下部介质中的下行波，而负值（在中等粗的曲线上，它们是慢度面在上部介质中的部分）代表透射波。如果p大到足以使一部分或全部s_3值是虚数，则相应的平面波随深度呈指数增大或减小

定量地表示分界面反射和透射性质的一个好方法，是以$d\boldsymbol{f}/dz=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$形式展开运动方程（在分界面的任一边），式中

$$\boldsymbol{f}\exp[i\omega(px-t)]=(u_x,u_y,u_z\tau_{zx},\tau_{yz},\tau_{zz})^T. \qquad (5.101)$$

$\boldsymbol{A}$是个6×6矩阵，它的六个本征值是六个$i\omega s_3$的值。这里的根s_3用图解表示（对于给定的p和给定的半空间）于图 5.18。我们作一个矩阵$\boldsymbol{E}$和一个相位矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{E}$的各列是$\boldsymbol{A}$的本征向量，而$\boldsymbol{\Lambda}$是对角的，对于六个不同的s_3有六个表值$\exp(i\omega s_3 z)$。适当整理$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{\Lambda}$的各列的顺序，每个均匀介质中的一般平面波解由$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{w}$给出，这里$\boldsymbol{w}$是个常数 6 维向量。5.4 节的方法现在可用

来求作为 p 和弧矢平面空间取向的函数的三十六个不同的反射、透射系数。(一般说，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 依赖于这个空间取向。)Keith和Crampin (1977) 给出了某些数值例子。

若干特殊类型的各向异性，在地震学中具有某种重要意义。对各向同性的最简单偏离是它的弹性张量(c) 在与一特定方向 x_3 垂直的所有方向上是各向同性的。这样一种介质，常被叫做横向各向同性的，并用五个独立常数来表征。竹内和斋藤 (Takeuchi and Saito, 1972) 把异常方向 x_3 取作竖直向，广泛分析了横向各向同性物质中 $df/dz = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$ 的系数矩阵。在此情况下，与各向同性介质之间只存在极小的差别。SH 与准 P 和准 SV 解耦，而后者常被写成 ${}_qP$ 和 ${}_qSV$。相对于竖直轴的对称性，意味着波动解不依赖于弧矢平面的空间取向。这个重要简化，对于任何其它类型的各向异性，都是不可能的。

在各向异性微弱而其它方面都完全一般的情况下，Backus (1965) 指出，在特定平面内传播的体波的速度，对该平面内的传播方向有个简单依赖关系。例如，在 (x_1, x_2) 平面内以慢度 $(\cos\phi, \sin\phi, 0)$ 传播的 ${}_qP$ 波，有近似由

$$\rho a^2 = A + B\cos 2\phi + C\sin 2\phi + D\cos 4\phi + E\sin 4\phi \quad (5.102)$$

给出的相速度 $a(\phi)$。Backus 关于 $a = a(\phi)$ 这个形式的发现，受到 Hess (1964) 从发表的资料所得到的结果的促进，这个结果是，沿海底莫霍界面下边折射的 P 波，有百分之几的速度各向异性。反过来，特殊形式 (5.102)又鼓励人们试图 (例如 Crampin and Bamford, 1977) 用五个其它弹性参数 (系数 A, B, C, D, E，它们自身是c分量的线性组合) 来反演 a 的观测。

建议进一步阅读的文献

Coddington, E. A., and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations* (Chap. 6). New York: McGraw-Hill,

1955.
Gantmacher, F. R. *The Theory of Matrices* (2 vols.). New York: Chelsea Publishing Co., 1959.
Kraut, E. A. Advances in the theory of anisotropic elastic wave propagation. *Reviews of Geophysics*, **1**, 401-448, 1963.
Liu, H. -P., D. L. Anderson, and H. Kanamori. Velocity dispersion due to anelasticity; implications for seismology and mantle composition. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* **47**, 41-58, 1976.
Randall, M. J. Attenuative dispersion and frequency shifts of the earth' s free oscillations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **12**, 1-4, 1976.
White, J.E. *Seismic Waves*. New York: McGraw-Hill, 1965.
Zener, C. *Elasticity and Anelasticity of Metals*. University of Chicago Press, 1948.

问　题

5.1 如果一个固体半空间的表面不受牵引力，我们知道，可以存在位移表面波（Rayleigh 波）。如果表面是刚性的，试证明不能有相应的牵引力表面波。（提示：求一行列式，对于合适的 p 值，它不为零。）

5.2 为什么在两个均匀半空间的边界上，不能有界面 SH 波？

5.3 对于固体半空间 $z>0$（见图 5.5 和表 5.1），当在 $z=0$ 的边界条件由(a) $u_z=0$ 和 $\tau_{zz}=0$，及由(b) $u_x=0$ 和 $\tau_{xz}=0$ 给定时，求 P-SV 散射矩阵。[可以从方程（5.33）开始做，以简化代数运算。]

如果 P 波和 SV 波能量的组合，是向表面 $z=0$ 传播，试证明，通过由边界条件(a)导出的反射与相应于(b)的反射相加，所有向下的反射都相抵消。（Smith 于1974、1975 指出，这是一个在用有限元和有限差分法做数值计算时，消掉

不希望要的网格边界反射的有用方法。）

5.4 a）扼要证明非均匀P波（5.50）和非均匀SV波（5.51），每个都有顺进椭圆质点运动。

b）根据（5.50）—(5.54)，证明 Rayleigh 波在自由面（$z=0$）上的质点位移向量比例于向量

$$\left(\frac{2i}{c_R}\sqrt{\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}},0,\ \frac{2}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right).$$

c)然后证明自由面的质点运动是逆进椭圆。

d)以简要论据说明，在充分大的深度上质点运动又成为顺进椭圆。

5.5 试证明，正是 Rayleigh 波的水平（而不是竖直）分量，随深度的增大而变化时通过零值，如图 5.11 所示。

5.6 因为地震仪常常设于（或非常接近于）不受牵引力的地球表面，所以有意义的是求得从下面入射的P，SV或SH平面波造成的半空间自由表面总位移。利用表 5.1 和图 5.5 的符号，证明当P波（振幅$\acute{P}$）从下面入射时，表面上的这个总位移是

$$\frac{\acute{P}\left[\frac{4\alpha p}{\beta^2}\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta},0,\frac{-2\alpha}{\beta^2}\frac{\cos i}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)\right]\exp[i\omega(px-t)]}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}},$$

当SV波(振幅$\acute{S}$)从下面入射时，总位移是

$$\frac{\acute{S}\left[\frac{2}{\beta}\frac{\cos j}{\beta}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right),0,\frac{4p}{\beta}\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right]\exp[i\omega(px-t)]}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}.$$

[在$1/\alpha<p<1/\beta$范围内，最后这个公式可用来以正虚数$\frac{\cos i}{\alpha}=i\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}}$给出当$SV$波以超临界角$j>j_c=$

$\arcsin\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$入射时地面位移的相移。]

对于 SH 入射，试证明自由面的质点运动简单地等于入射波质点运动的二倍。

5.7 给定（5.60）所定义的$\boldsymbol{f}$的形式后，证明对P-SV波的确有$\partial \boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$，假定$\boldsymbol{A}$有（5.60)所给的形式。证明当$\rho$，$\lambda$和$\mu$是$z$的函数时，$\boldsymbol{A}$仍有此形式，但一般说，这时（5.61）不给出（5.56）的解。

5.8 设有P波势$\phi=A\exp[i\omega(px+\xi z-t)]$。对于均匀介质，它满足$\alpha^2\nabla^2\phi=\ddot{\phi}$，假定$\xi=(\alpha^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$。证明由这种势得出的$u_x$，$u_z$，$\tau_{xx}$，$\tau_{zz}$，实质上构成为（5.65）所给$\boldsymbol{F}$ $E\Lambda$的第一列。（差别只是由于这个下行P波的归一化不同。）

对于 SV势 $B\exp[i\omega(px+\eta z-t)]$（这里$\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$），$P$势$C\exp[i\omega(px-\xi z-t)]$，和$SV$势$D\exp[i\omega(px-\eta z-t)]$，重复进行上述讨论。[这里的要点在于，(5.65)中F的不同的列是下行的和上行的P和SV波，其中明确地给出每个波的位移和应力分量。]

证明用势描述的这四种波等效于波系统$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$，其中

$$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}\frac{i\omega A}{\alpha}\\ -\frac{i\omega B}{\beta}\\ \frac{i\omega C}{\alpha}\\ \frac{i\omega D}{\beta}\end{bmatrix}.$$

5.9 证明Q一般是ω的偶函数（即$Q(-\omega)=Q(\omega)$），因而如果没有频散，则（5.68)描述的衰减脉冲相对于$t=x/c$总是对称的。

5.10 求下列情况下的近似式（5.77)：

a) $\alpha(\omega)=\dfrac{\alpha_0\omega}{1+\alpha_2\omega^2}$,

b) $\alpha(\omega)=\alpha_0\omega\{H(\omega-\omega_l)-H(\omega-\omega_h)\}$

(ω_l和ω_h是低截频和高截频，H是Heaviside 阶梯函数)；推导 (5.77) 时可利用$0<\omega_l<\omega<\omega_h$。上述两衰减函数的Hilbert 变换将是需要的。注意规则$\alpha(-\omega)=\alpha(\omega)$；上面的规定是对于$\omega>0$的。这时相应的$\mathscr{H}[\alpha(\omega)]$，对a)为

$$\frac{\alpha_0}{\pi}\frac{\omega}{1+\alpha_2\omega^2}\ln\left(\frac{1}{\alpha_2\omega^2}\right),$$

对b)为

$$\frac{\alpha_0\omega}{\pi}\ln\left(\frac{\omega_h^2-\omega^2}{\omega_l^2-\omega^2}\right).$$

5.11 Azimi等(1968)和Strick(1970)审查过s刚刚小于 1 时的衰减定律$\alpha(\omega)=\alpha_0|\omega|^s$。这给出在观测频率上$\alpha(\omega)$与$\omega$的实际上的线性关系。根据补充 5.8 中的关系式(13)和Hilbert 变换$\mathscr{H}[\mathrm{sgn}\omega|\omega|^{s-1}]=|\omega|^{s-1}\tan\frac{s\pi}{2}$，试证明

$$\frac{1}{c(\omega)}=\frac{1}{c_\infty}+\frac{\alpha(\omega)}{|\omega|}\tan\frac{s\pi}{2}.$$

对于上述实际为线性的衰减定律，$\alpha(\omega)/|\omega|$必然实际是常数。利用上面的最后方程，证明在地震频率范围内不同频率分量间的相对频散可能变化很小，因而难于检测，虽然对于只刚刚比 1 小的s的绝对频散(相对于相速度c_∞) 可能很大。(这个奇异结果是由于Hilbert 变换积分收敛缓慢。在兆赫和更高频率上的振幅谱，控制着在地震频率上的相位滞后。这是难以置信的，并且可以避免，因为比较合理的衰减定律具有不同的高频变化过程。)

5.12 如果$Q^{-1}\ll 1$和 (5.96) 按二项式定理展开，我们发现，衰减的平面S波的相速度一般是$\left(\dfrac{\mathrm{Re}\{\mu\}}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{Q^2}\text{级的项}\right)$。

这是否违反5.5节的一个重要结论——即衰因介质中的衰减对速度的影响引入一项$1/Q$级的修正？

5.13 一种衰减介质，若其全部损耗都局限于剪切，而纯压缩中没有损耗，则可表征为复刚性系数，但体积模量是纯实数。证明这种介质P波的Q与S波的Q之比是$3\alpha^2/4\beta^2$，其中α和β是两种波的速度（假定$Q\gg1$）。

5.14 对于诸如$|t-T|\ll T$的时间t，证明可以认为Heaviside函数$H(t-T)$有Hilbert变换$\left(-\frac{1}{\pi}\right)\ln\left|\frac{t-T}{T}\right|$。

第六章　球面波的反射和折射；Lamb 问题

作为一般规则可以说，解释地震资料所需的基本理论分为两类：研究在现实地球模型中传播的波的逐渐近似，或者在高度理想介质中传播的波的严格形式。因此，第一类包括几何射线理论（第四章），而第二类包括我们在第五章中关于平面波和均匀半空间的所有工作。随着我们发展了比较精致的方法，在下述意义上这两类逐渐合併：我们想要相当精确地计算在比较现实的地球模型中传播的波。

本章主要致力于上面提到的第二类理论的发展，因为我们将从事在只由两个均匀半空间组成的介质中，从点源辐射出的波的计算。在 1904 年，Horace Lamb 给出了一个这种问题的精确解，其中的源是垂直施加于固体半空间自由表面上一点的脉冲。但是，由于他的文章包含的内容远不止此，所以，“Lamb 问题”一词，现在用来指比较一般的有一个分界面的源和介质的几何关系，其中的主要兴趣在于精确计算（在时间域）由脉冲线源或点源发射出的波。

我们通过把点源发射出的球面波表示为平面波的叠加（Weyl 积分）和作为柱面波的叠加（Sommerfeld 积分）来引入这个课题。当球面波与两个不同半空间的平界面相交时，产生的波系统自然可分为三大类：（i）从界面直接反射或透过界面的波；（ii）从源点向接收点传播的波，它所经过的路径中有以体波速度（首波）沿界面的折射；（iii）Rayleigh 或者 Stoneley 型的波，其振幅随离界面的距离呈指数减小。这些结果由巧妙处理复射线参数平面内的积分路径而得出。给出三大类波动的一般轮廓以后，利用频率

域，我们以 Cagniard 和 De Hoop 的工作为基础，发展精确的求解方法。这些方法使用时间的 Laplace 变换，但最后结果在时间域内表述。基本划分为三个不同的波类型仍是明显的，漏能模式（另一类界面波）的贡献很小。

在开始我们必须强调，解 Lamb 问题的最好方法，是用 Laplace 变换和 Cagniard 反演方法。这时复射线参数平面内的积分路径，讨论起来比较简单；而求时间域中脉冲形状的 Laplace 变换的实际反演做起来省力。在 6.4 节和 6.5 节中给出这些方法的比较完整的描述。但我们用 Fourier 变换来引入这个题材。这部分地得感谢关于这个课题的大量文献，包括 Ewing 等 (1957)，Brekhovskikh(1960)，Červený 和 Ravindra(1971) 的书以及几百篇文章。但结合 Lamb 问题发展 Fourier 变换方法的主要理由，是为第九章打基础。第九章给出计算真实结构中地震图的实际方法。我们将在那里看到，分层介质的反射率法和掠入射问题的强效解法，是以用 Fourier 变换进行数值计算，而不是以 Laplace 变换的分析反演为基础的。

6.1 作为平面波和柱面波叠加的球面波

考虑一个非齐次波动方程，其点源在原点，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-c^2\nabla^2\phi=4\pi c^2\delta(\boldsymbol{x})\exp(-i\omega t), \tag{6.1}$$

由(4.4) 得到这个方程的解（在无限均匀空间中）为

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{c}-t\right)\right], \tag{6.2}$$

式中 $R=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$。

求解方程(6.1)，还可以通过确认 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ 与时间的关系为稳态振动 $\exp(-i\omega t)$，然后再用 Fourier 变换方法推导与空间的关系。我们得到

$$\phi(k,t)=[4\pi c^2/(k^2c^2-\omega^2)]\exp(-i\omega t),$$

式中 $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$。于是，根据(6.2)和 $\phi(k,t)$ 的三重逆变换，有

$$\frac{1}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{c}-t\right)\right]=\frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi^2}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik\cdot x)}{k^2-\frac{\omega_2}{c^2}}$$

$$\times dk_x\,dk_y\,dk_z. \qquad (6.3)$$

(6.3) 的左边是以速率 c 自源点向外传播的球面波。其振幅只是径向距离的函数，且无方向变化。(6.3)的右边有权函数$\left[2\pi^2\times\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2\right]^{-1}$和在整个$k_x$，$k_y$,$k_z$区间上的平面波$\exp[i(k\cdot x-\omega t)]$的叠加。因而看起来我们已经完成用平面波的叠加表示球面波的任务。但是，仔细看看(6.3) 中的平面波就发现，它们有从 0 到∞的任意速度(ω/k)，所以它们还不具有在介质中有给定速度 c 的平面波的形式。

为了求 Weyl 积分，我们必须对于波数分量中的一个进行积分；我们取 k_z，因此，剩下的积分是对于水平向波数的。

如果我们把 k_z 扩展到复数，并应用留数理论，则 (6.3)中对 k_z 的积分很简单。对于给定的 k_x 和 k_y，被积函数在 $k_z=\pm[(\omega^2/c^2)-k_x^2-k_y^2]^{\frac{1}{2}}$有极点，唯一的困难是(对一定范围的 k_x 和 k_y 值)这些极点位于实 k_z 轴上，与积分路径冲突（参看图 6.1 a)。为方便起见，我们用使 $1/c$ 为复数的办法，引入一个小衰减。如我们在第五章[方程(5.87),(5.88)]已看到的，这样做的适当方法，是把$1/c$看作一个参考值加一个小复数修正的和，该复数有正的虚部。所以，$\mathrm{Im}\{1/c\}=e$, $e>0$(对于 $\omega>0$)。直接结果是把极点的位置变到第一和第三象限(见图 6.1 b)，消除了与积分路径的冲突。

我们定义第一象限中极点的位置为

$$k_z=i\gamma=+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

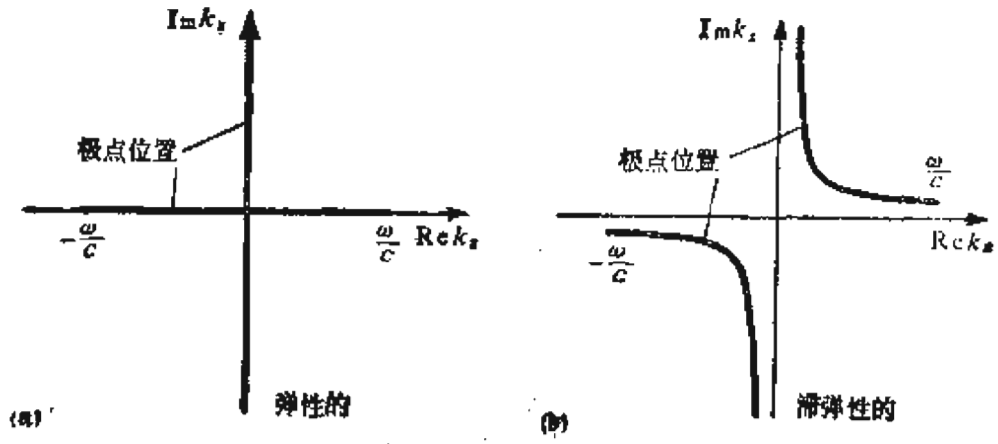


图 6.1

对于不同的实 k_x，k_y 值和固定的 $\omega>0$，复 k_z 平面内极点的位置。
(a) 弹性介质，(b) 衰减介质

这时另一个极点(第三象限)的位置是

$$k_z=-i\gamma=-\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

在两种情况下，我们发现 Re{γ}是正的，Im{γ}是负的。

求留数值现在很简单。对于 $z>0$，如果积分 (6.3) 沿上半平面中足够大的半圆进行(参看图 6.2 a)，则因子 $\exp(ik_z z)$抑制 (6.3) 中的被积函数。把这个半圆同沿实轴的积分路径加起来，我们有绕着第一象限中 $k_z=i\gamma$ 的极点沿正方向前进的闭合回路，于是有

$$\phi=2\pi i\times\text{留数}=\frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\exp(ik_x x+ik_y y-\gamma z)}{\gamma}\times dk_x\,dk_y.$$

对于 $z<0$，我们加下半平面中足够大的半圆，以得到沿负方向(即顺时针)的闭合回路，它包括第三象限中 $k_z=-i\gamma$ 的极点：

$$\phi=-2\pi i\times\text{留数}=\frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int\frac{\exp(ik_x x+ik_y y+\gamma z)}{\gamma}\times dk_x dk_y.$$

把这些结果概括起来，我们得到 Weyl 积分

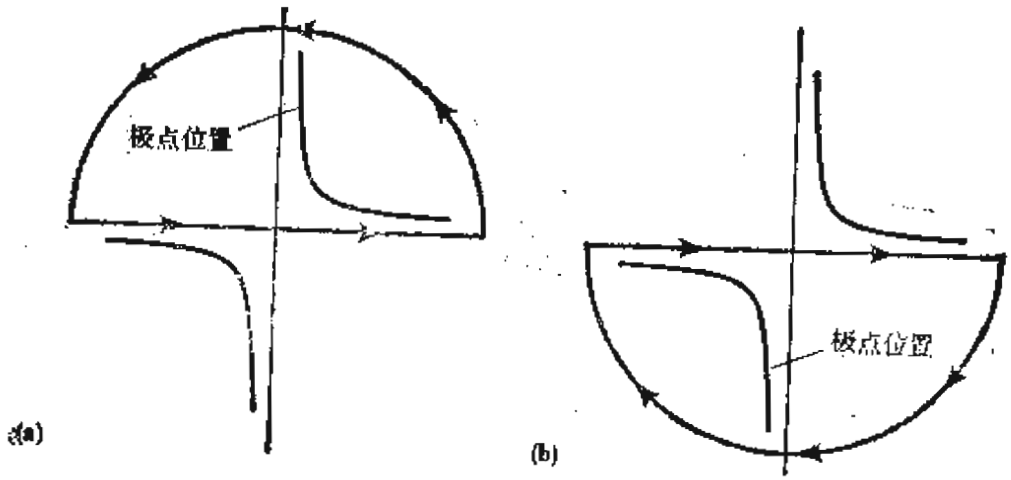


图 6.2

关于求 Weyl 积分的复 k_z 平面内的积分路径。(a) 当 $z>0$ 时的路径，(b) $z<0$

$$\frac{1}{R}\exp\left(i\omega\frac{R}{c}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik_x x-ik_y y-\gamma|z|)}{\gamma}dk_x\,dk_y, \tag{6.4}$$

式中 $\gamma=(k_x^2+k_y^2-\omega^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$，$\gamma$ 符号的选择是使 $\mathrm{Re}\gamma>0$。在零衰减的极限情况下，它变为 $\mathrm{Re}\gamma\geqslant 0$。

在上式中，被积函数中的平面波满足具有速度 c 的波动方程，所以球面波确实被表示为这种平面波的叠加。注意，对 (k_x, k_y) 积分的某些部分，平面波是非均匀的。这发生在 $\omega^2/c^2<k_x^2+k_y^2$，因而 γ 变为正实数，而相应的非均匀波平行于 xy 平面传播，在 z 方向振幅变化最快。

如前面已提到过的，别的波数分量也可代替 k_z 而被用于积分。如果我们用 k_x，我们就会发现非均匀波平行于 yz 平面传播，同样代表球面波。我们之所以选择用波数的深度分量进行计算，是因为结果 (6.4)很适于分析水平面上的边条件。

为得到 Sommerfeld 积分，我们改变积分变量 (k_x, k_y) 为 (k_r, ϕ')：

$$k_x = k_r\cos\phi', \quad k_y = k_r\sin\phi'. \tag{6.5}$$

因此，$i\gamma = (\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}} = (\omega^2/c^2 - k_r^2)^2$，而面积元 $dk_x dk_y$ 被代之以 $dk_r(k_r d\phi')$，整个水平的波数平面($-\infty < k_x < \infty$; $-\infty < k_y < \infty$)被 $0 \leqslant k_r < \infty$，$0 \leqslant \phi' < 2\pi$ 所覆盖。积分 (6.4) 变为

$$\frac{1}{R}\exp\left(i\omega\frac{R}{c}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dk_r \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{k_r}{\gamma}\exp[ik_r r\cos(\phi - \phi') - \gamma|z|], \tag{6.6}$$

这里我们引入了(r, ϕ)作为关于(x, y)的极坐标 $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$。我们常把 r 叫做水平变程，或简称变程，ϕ 是柱极或球极的方位坐标。因为 z 是向下测量的，所以从上面看水平面时，ϕ 是顺时针增大的。

(6.6)中对ϕ'的积分可明确地给出，利用关系式 $2\pi J_0(k_r r) = \int_0^{2\pi}\exp(ik_r r\cos\Phi)d\Phi$ 以便求出Sommerfeld 积分

$$\frac{1}{R}\exp\left(i\omega\frac{R}{c}\right) = \int_0^\infty \frac{k_r J_0(k_r r)\exp(-\gamma|z|)}{\gamma} dk_r, \tag{6.7}$$

式中 $i\gamma = (\omega^2/c^2 - k_r^2)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{Re}\{\gamma\} > 0$。这里的被积函数是新种类的基波——柱面波（对于竖直轴为对称），其中以分离的因子依赖于 r 和 z。

补充 6.1

Weyl 积分和 Sommerfeld 积分的基本意义

具有特定边界条件的波动方程的解的总体是个向量空间，而对于各种坐标系，都可建立一向量基，来构成这个空间。Weyl 积分以平面波为基，将它们加起来给出点源的解。Sommerfeld 积分，是使用柱面波的类似结果。常常我们把基向量看成适合于特定坐标系的本征向量或本征函数。平面波和柱面波被看成与用分离变量法解波动方程的研究有关的本征函数[例如，参看第五章方程(5.9)和(5.10)]。

这些观念在后面各章的下列情况中一再重复出现：当本征函数可

以是向量位移的面波振型时，当源可能有复杂的辐射图案时，当坐标系可以包含以地球心为原点的球极时，以及当本征函数的离散和比我们此处所用的对水平向波数的积分更为合适的时候。

求适合于特定源的本征函数的特殊积分(或求和)问题，就是求展开式中每个(适当归一化的)本征函数的系数。这个系数是特定本征函数被激发程度的有用量度。

所有这些源的展开式(诚如 Weyl 积分，以及第七和第八章中描写的对面波和简正振型的较复杂展开式)的一个共同性质是，被积函数(或求和中的每一项)可以分解为在源点求值的竖向本征函数、在接收点求值的竖向本征函数、以及依赖于源点和接收点的水平向距离的传递波函数。(就我们这里的情况来说，例如(6.4)和(6.9)，在源点和接收点的竖向本征函数，是沿正方向运行的波，所以只出现与竖向距离成正比的不同相位。)描述积分中不同项的独立变量，实质上是水平慢度，这个变量的函数规定着被积函数的权因子。

在第五章我们看到，选取垂直于传播方向的 y 轴，然后通过 $k_x=\omega\sin i/c=\omega p$ [例如方程(5.16)] 使 k_x 与射线参数一致，这样来分析平面波是很方便的。但是现在，如同(6.6)中对 ϕ' 的积分所直接表明的，由点源发出的平面波系统，包含所有可能的水平传播方向。水平向波数与射线参数的关系因而变为

$$k_x=\omega\sin i\cos\phi'/c=\omega p\cos\phi',$$
$$k_y=\omega\sin i\sin\phi'/c=\omega p\sin\phi'.$$

与(6.5)对比，我们看到

$$k_r=\omega p. \tag{6.8}$$

因此，根据(6.7)，我们能够把球面波表示为对所有射线参数积分的形式

$$\frac{1}{R}\exp\left(i\omega\frac{R}{c}\right)=i\omega\int_0^\infty\frac{p}{\xi}J_0(\omega pr)\exp(i\omega\xi|z|)\,dp. \tag{6.9}$$

这里我们取 $i\gamma=\omega(c^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}=\omega\xi$。再回顾一下，$\mathrm{Re}\{\gamma\}>0$。

所以有

$$\xi=(c^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}，且必须选\ \mathrm{Im}\{\xi\}>0\ 的一支，\quad (6.10)$$

对于理想弹性介质，它变为 $\mathrm{Im}\{\gamma\}\geqslant 0$。用这个平方根的规定，(6.9) 中的竖向波函数可以很容易与第五章的公式一致：它是 $\exp[i\omega(c^{-1}\cos i)|z|]$，如果 $1/c<p$，则其中的 $(c^{-1}\cos i)=(c^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}=\xi$ 是正虚数。注意，ξ 是竖向慢度，$i\gamma$ 是相应的竖向波数，但 p 是水平向慢度。对于 S 波，我们将用 η 作为竖向慢度，$i\nu$ 作为竖向波数。因此，$\xi^2+p^2=1/\alpha^2$，$\eta^2+p^2=1/\beta^2$。因为本章主要讨论体波和无频散面波，故用慢度 p，ξ，η 进行计算实际上是合适的。所以，我们在这里将始终用(6.9)而不是(6.7)进行计算。对于第七章描述的面波，当强频散能存在且竖向慢度为虚数时，我们将转回到利用 k_r，γ，ν 这些变量。

6.2 球面波在平界面上的反射：声波

在本节和下一节，我们将审查当弯曲波阵面入射于两种不同介质间分界面时的基本现象。对于这方面的最初工作，我们将使用固定频率上的波，因为地震学中的许多观测都能从物理上解释为这种波的综合（Fourier 逆变换）。在较后的工作中，为得到时间域中的精确波动解，我们将转到用 Laplace 变换发展较为方便的方法。

我们要解的第一个问题（见图 6.3），是关于在由沿 $z=0$ 接触的两种不同均匀半无限流体组成的物体中的声波。源点位于介质 1 中(密度 ρ_1，速度 α_1)的深度 $z_0<0$ 处，我们还要考虑介质 1 中的观测点$(x,\ y,\ z)$。源点—接收点距离给定为

$$R=[x^2+y^2+(z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}},$$

我们将假定，声源产生下列形式的压力波：

$$P=P^{\lambda}=A\frac{1}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{\alpha_1}-t\right)\right],$$

A 为常数。

利用 6.1 节的结果，我们将把 $P^{入}$ 表示为柱面波的叠加。然后我们应用第五章的理论，求反射和透射的平面波，它们必然也是叠加的。所以

$$P^{入}=\frac{A}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{\alpha_1}-t\right)\right]$$

$$=i\omega\exp(-i\omega t)\int_0^{\infty}\frac{Ap}{\xi_1}J_0(\omega pr)\exp(i\omega\xi_1|z-z_0|)dp, \tag{6.11}$$

式中 $\xi_1=\alpha_1^{-1}\cos i_1=(\alpha_1^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，当 $\frac{1}{\alpha_1}<p$ 时为正虚数。若把这里的被积函数看成对平面波的方位积分［与方程(6.6)比较］，自然就要试用反射场和透射场的解

$$P^{反}=i\omega\exp(-i\omega t)\int_0^{\infty}\frac{Bp}{\xi_1}J_0(\omega pr)\exp[-i\omega\xi_1(z+z_0)]dp$$

$$当 z<0, \tag{6.12}$$

和

$$P^{透}=i\omega\exp(-i\omega t)\int_0^{\infty}\frac{Cp}{\xi_1}J_0(\omega pr)\exp(-i\omega\xi_1 z_0+i\omega\xi_2 z)dp$$

$$当 z>0. \tag{6.13}$$

使压力和竖向位移在 $z=0$ 连续的条件是 $A+B=C$ 和 $\frac{\xi_1}{\rho_1}(A-B)=\frac{\xi_2}{\rho_2}C$，这两个方程决定平面波反射系数和透射系数：

$$\frac{B}{A}=-\frac{\rho_1\xi_2-\rho_2\xi_1}{\rho_1\xi_2+\rho_2\xi_1}=-\frac{\rho_1\frac{\cos i_2}{\alpha_2}-\rho_2\frac{\cos i_1}{\alpha_1}}{\rho_1\frac{\cos i_2}{\alpha_2}+\rho_2\frac{\cos i_1}{\alpha_1}} \tag{6.14}$$

和

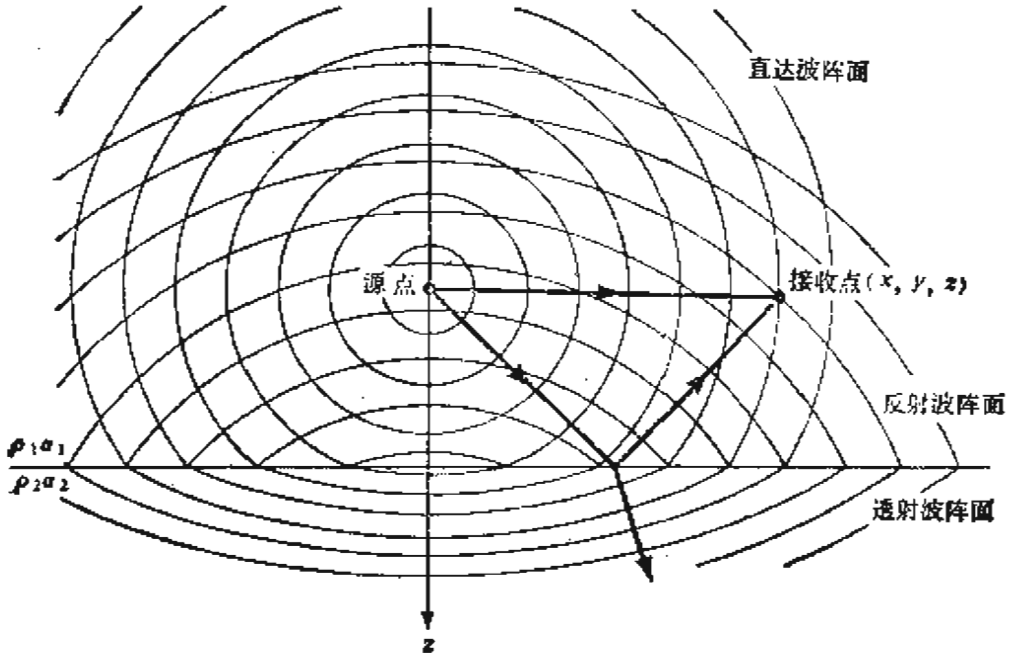


图 6.3

密度为 ρ_1，速度为 α_1 的流体半空间 $z<0$ 中，源点和接收点的示意图。另一个流体半空间(ρ_2，α_2)占据 $z>0$，压力和竖向位移在分界面上连续。由于波阵面系统很复杂，所以通常只用射线

$$\frac{C}{A}=\frac{2\rho_2\xi_1}{\rho_1\xi_2+\rho_2\xi_1}=\frac{2\rho_2\dfrac{\cos i_1}{\alpha_1}}{\rho_1\dfrac{\cos i_2}{\alpha_2}+\rho_2\dfrac{\cos i_1}{\alpha_1}}.$$

还要注意到，当 $1/\alpha_2<p$ 时，$\alpha_2^{-1}\cos i_2=\xi_2=(\alpha_2^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$ 为正虚数，以保证(6.13)随深度呈指数减小。

在本节的下余部分，我们将求反射波(6.12)的近似值，用的是标准鞍点积分法，并从 $\alpha_1>\alpha_2$ 的情况开始。

第一步是利用 Hankel 函数 $H_0^{(1)}$ 代替 J_0 写出 (6.12)。因 $J_0(x)=\frac{1}{2}[H_0^{(1)}(x)+H_0^{(2)}(x)]$ 和 $H_0^{(2)}(x)=-H_0^{(1)}(-x)$，所以得到

$$P^{反}=\frac{i\omega}{2}\exp(-i\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Bp}{\xi_1}H_0^{(1)}(\omega pr)\exp[-i\omega\xi_1$$

$$\times (z+z_0)]dp \tag{6.15}$$

(利用 B 是 p 的偶函数)。

第二，假定变程 r 是波长的许多倍，使得 pr 很大，因而能用 $H_0^{(1)}(\omega pr)$ 的渐近展开式取近似值

$$H_0^{(1)}(\omega pr)=\left(\frac{2}{\pi\omega pr}\right)^{1/2}\exp[i(\omega pr-\pi/4)]$$

$$\times\left[1-\frac{i}{8\,\omega pr}+O\left(\frac{1}{\omega^2p^2r^2}\right)\right]. \tag{6.16}$$

[对于零附近的 p 值，上面的展开式是不精确的。但后面我们将使积分路径变形，以避开 $p=0$。变形后由(6.16)代换是比较正确的。]近似结果现在为

$$P^{反}=\left(\frac{\omega}{2\,\pi r}\right)^{1/2}\exp[-i(\omega t-\pi/4)]$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Bp^{1/2}}{\xi_1}\exp[i\omega(pr-\xi_1z-\xi_1z_0)]dp, \tag{6.17}$$

其中略去了被积函数中 $1/\omega$ 级的项，而包含 ξ_1 和 ξ_2 的 $B=B(p)$ 由(6.14)给定。

补充 6.2

确定复 p 平面中 $(\alpha^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}=\xi$ 的分支切割以使在整个平面上 $\mathrm{Im}\xi\geqslant 0$

我们希望把 ξ 表示为 p 的单值解析函数，而平方根符号的两重性要求我们用两个 p 平面(Riemann 叶)完全地描述 ξ。说到顶叶和底叶时，是按照 $\mathrm{Im}\xi>0$ 和 $\mathrm{Im}\xi<0$，它们沿由 $\mathrm{Im}\xi=0$ 所确定的线(分支切割)相连接。显然，割线含有 $\xi=0$ 的点(分支点)，它们是 $p=\pm 1/\alpha$。我们需要了解，如何以 ξ 在整个路径上随 p 平滑变化的方式，做成绕分支点的闭合路径。

由于分支切割取决于 $\mathrm{Im}\xi=0$，所以 $\alpha^{-2}-p^2$ 在割线本身上为非负的实数，因而有

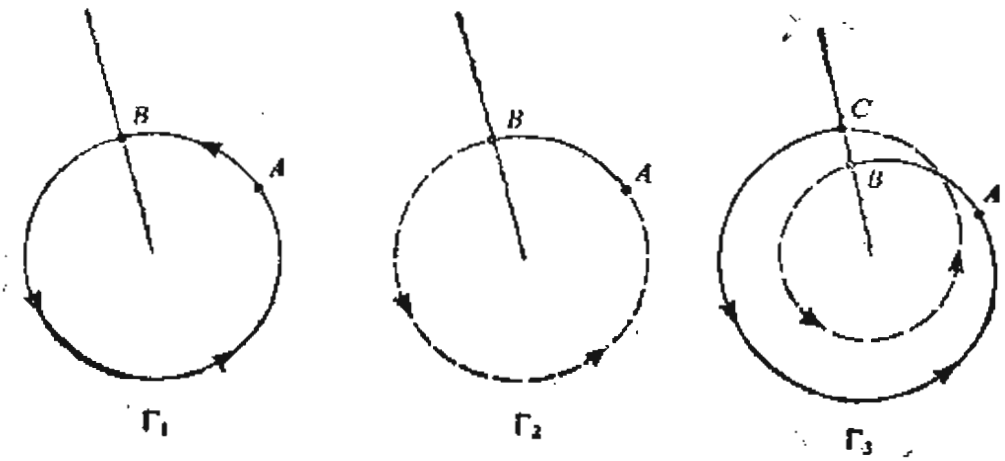
$$1/\alpha^2-(\mathrm{Re}p)^2+(\mathrm{Im}p)^2-2\,i(\mathrm{Re}p)(\mathrm{Im}p)\geqslant 0. \tag{1}$$

但由于 $\mathrm{Im}(1/a^2)$是很小的正数，所以，要求(1)的左边为实数，这意味着，在完全弹性的极限情况下，

$$(\mathrm{Re}p)(\mathrm{Im}p)=e,\quad e>0,\quad e\to 0.$$

因此，分支切割位于第一和第三象限内的双曲线上。由(1)得出的进一步限制是，$(\mathrm{Im}p)^2\geqslant(\mathrm{Re}p)^2-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a^2}\right)$，分支切割的极限位置示于图 6.4。

为看清如何导出分支切割，以及如何从通常认为双值的函数 $\xi=\xi(p)$中，做成单值解析函数，现考虑下列三个圆：



从 A 点开始，闭合圆 Γ_1 完全是在同一叶上画出的，ξ 是单值的，但在 B 点通过分支切割时甚至不是连续的。对于圆 Γ_2，ξ 在 B 是解析的，要求 Γ_2 进到不同的叶（虚线）；但这时 Γ_2 不使 ξ 回到与最初在 A 相同的值。最后，Γ_3 表示绕分支点两次的路径，ξ 在全路程上的变化是解析的，并回到它在 A 的初始值。

在补充 6.2 中描述了对于 ξ_1 和 ξ_2 的分支切割位置，而 $P^{反}$ 的割线表示于图 6.4。我们现在的目的是将积分路径变形，以使仅仅一个有限范围的 p 值的贡献是有意义的，然后估算积分本身。为此，我们利用鞍点分析的标准方法，来求在足够大频率上有效的 $P^{反}$ 的近似值。

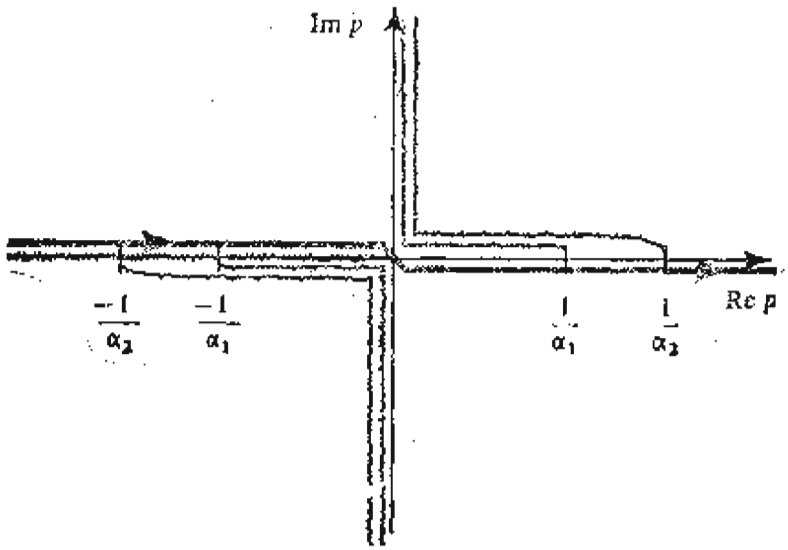


图 6.4

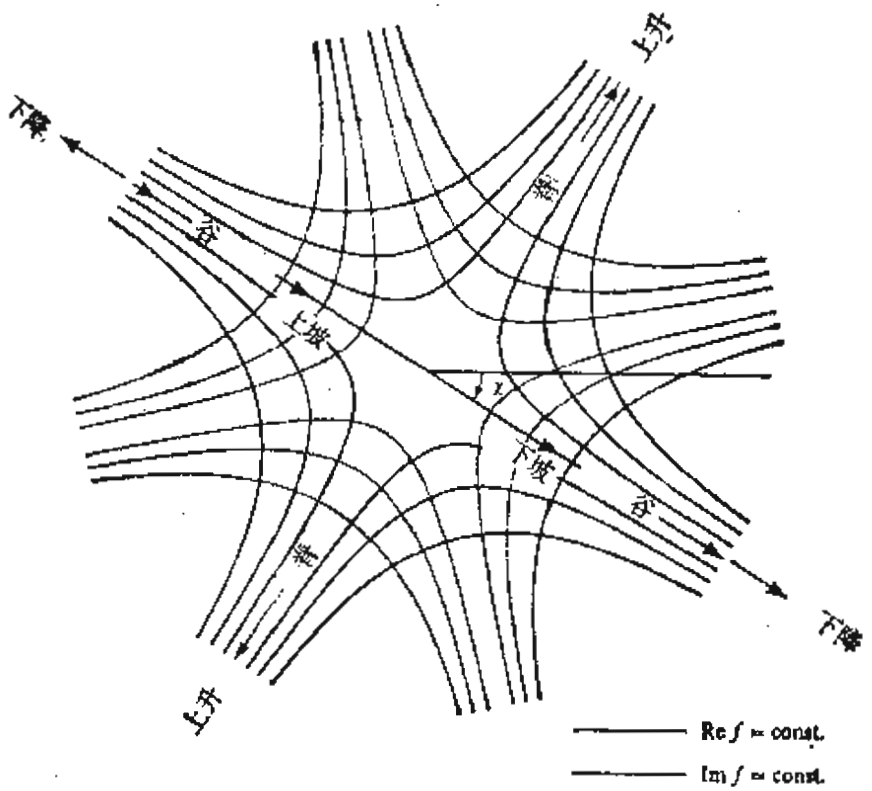
复 p 平面中 ξ_1，ξ_2 和 $p^{\frac{1}{2}}$ 的分支切割。这些割线由 $\mathrm{Im}\,\xi_1=0$，$\mathrm{Im}\,\xi_2=0$；以及 $\mathrm{Re}\,p^{\frac{1}{2}}=0$ 给定（这是(6.16)所假定的割线。事实上这直接就是一条 $H_0^{(1)}(\omega pr)$ 的分支切割）。P反(见（6.17)) 的积分路径，位于三条割线稍上一点的负实轴上和位于两条割线稍下一点的正实轴上

补充 6.3

用最速下降法估算 $I(x)=\int_c F(\xi)\exp[xf(\xi)]\,d\xi$

我们假定读者对此方法有些了解(例如，参看 Jeffreys and Jeffreys，1972)。这里的目的是说一下表示符号和某些应用。首先，假定 $f(\xi)$ 在 $\xi=\xi_0$ 有一鞍点。此处 f 是解析的。$\mathrm{Re}\,f=$常数的回路与 $\mathrm{Im}\,f=$常数的回路互相正交。在 ξ_0 附近，这些回路是双曲线，如下图所示。(χ 角大约是$-32°$，实际上，它总是在 $-\pi/2\leqslant\chi\leqslant\pi/2$ 范围内。)

名称"谷"和"脊"，以及上升和下降的方向，描述在 ξ_0 附近由 $\mathrm{Re}\,f$ 给定高度的表面形状。$I(x)$ 的被积函数（在大小上）主要受控于 $\exp(x\mathrm{Re}\,f)$；因此，既然假定 x 为大正数，所以"谷"和"脊"自然应用于该被积函数。取积分路径沿着一谷向上，在脊的最低点穿过脊，再沿着对面的谷向下，这样常可使对估算 $I(x)$ 有意义的积分范围达到最小。回路如何变形(以便从谷到谷时穿过鞍点)的细节，将依赖于被积



函数的奇点和分支切割，并依赖于C的终点。我们将假定C被变形为如上面所说的上坡和下坡路径，该路径与正的实ζ轴构成角χ（$-\pi<\chi<\pi$）。做出$f(\zeta)$对ζ_0的 Taylor 级数展开，很容易证明$f''(\zeta_0)e^{2i\chi}$是负实数。忽略掉$f(\zeta)$展开式之中的$O[(\zeta-\zeta_0)^3]$项，发现鞍点对$I(x)$的贡献渐近为

$$\left|\frac{2\pi}{xf''(\zeta_0)}\right|^{\frac{1}{2}}F(\zeta_0)e^{i\chi}\exp[xf(\zeta_0)] \quad \text{当} x\to\infty. \tag{1}$$

但是这个公式在地震学中意义不大，因为我们将发现，它只不过给出用几何射线理论也能得到的答案。比较重要的是，在鞍点上取数值积分而不必对$f(\zeta)$用粗略的近似方法。常常我们要追随 Ref的"谷"到离鞍点本身很远的距离以外(例如，参看图 6.6)，在此情况下，谷的趋势不在鞍点与脊的趋势正交。

采用补充 6.3 中的符号，使$x=\omega$，$\zeta=p$，我们看到

$$f(p)=i(pr+\xi_1|z+z_0|) \quad (z<0,\ z_0<0),$$

$$f'(p)=i(r-p|z+z_0|/\xi_1),\qquad (6.18)$$
$$f''(p)=-i|z+z_0|/(\alpha_1^2\xi_1^3),$$

它指明一个鞍点 $p=p_s$，使得有 $r\xi_1=p_s|z+z_0|$。

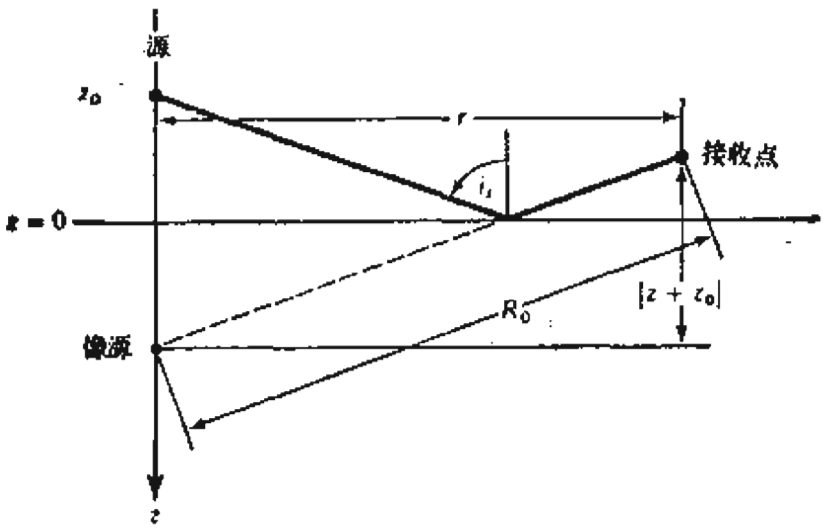


图 6.5

源点和接收点间界面反射射线的几何示意图。它有特殊射线参数 $p_s=\alpha_1^{-1}\sin i_s$。$R_0$是像源（在 $z=-z_0$）与接收点间的距离。注意三角关系 $r=R_0p_s\alpha_1$，$pr+\alpha_1^{-1}\cos i_s|z+z_0|=R_0/\alpha_1$，和 $r\cos i_s=|z+z_0|\sin i_s$

用一个角表示，$p_s=\alpha_1^{-1}\sin i_s$，这时 $\xi_1=\alpha_1^{-1}\cos i_s$，于是 $r\cos i_s=|z+z_0|\sin i_s$。根据图 6.5，现在很明显，鞍点恰好出现在给出源点和接收点间反射射线的 p 值上。通过采用补充 6.3 中的近似式 (1)，少量的代数和几何运算给出渐近结果

$$p^{反}\sim\frac{B(p_s)}{R_0}\exp\left[i\omega\left(\frac{R_0}{\alpha_1}-t\right)\right]\qquad 当\ \omega\to\infty\quad (6.19)$$

只须 (6.17) 中实的积分路径能够变形到 $p=p_s$ 上的最速下降路径，而无须获取由被积函数的奇点或分支切割造成的任何更多的贡献。[6] 鞍点本身位于两条分支切割上，因此，乍一看似乎不可能利用最速下降路径。的确，如果该路径只限定在 $\mathrm{Im}\xi_1\geqslant 0$，$\mathrm{Im}\xi_2\geqslant 0$ 的 Riemann 叶上，它是不可能的。但是，利用（在第一象限）$\mathrm{Im}\xi_1<0, \mathrm{Im}\xi_2<0$ 的叶，得到如图 6.6 所示的路径 Γ，它具有下

列性质：

i) 量 $i(pr-\xi_1 z-\xi_1 z_0)$ 是个解析函数，在鞍点取值为 iR_0/α_1；

ii) 在 Γ 上，$i(pr-\xi_1 z-\xi_1 z_0)-iR_0/\alpha_1$ 处处为负实数；

iii) Γ 的渐近线为图 6.6 所示的直线，与负实轴和正实轴构成角 i_{s_0}。

对于作为实数 X 的函数的 P，这三个性质来自 $i(pr-\xi_1 z-\xi_1 z_0)=-X^2+iR_0/\alpha_1$ 的解。后面（在图 6.12 c 的图注中，以及对于同 Cagniard 理论相联系的有关路径）我们将给出这些解的更多细节。这里剩下的问题是，当 $\alpha_1>\alpha_2$，不难从 (6.17) 的实轴路径变到图 6.6 的路径 Γ。在第一和第二象限，需要把弧 C_1 和 C_2 连接起来，但在它们上面，被积函数呈指数消失。如果要避免被积函数的间断，在 B 点，Γ 必须离开 Riemann 顶叶。在到达鞍顶时，Γ 重新出现在顶叶，在这里对于路径的其余部分，它保持不变。在证明了分支切割和奇点不做贡献之后，再回过头来讨论渐近解 (6.19)。

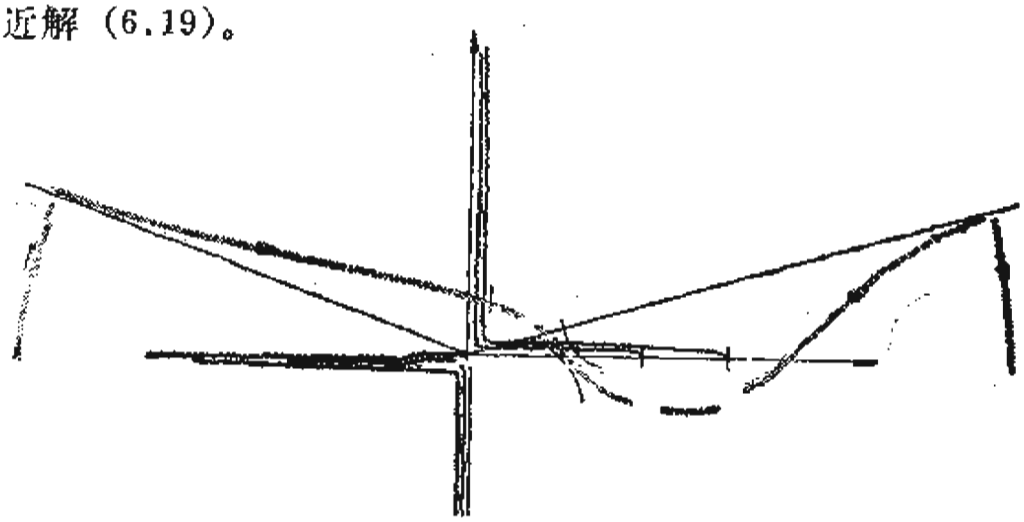


图 6.6

当 $\alpha_1>\alpha_2$ 时，为得到 P 反(见(6.17))，复射线参数平面中的最速下降路径 Γ。利用 $\omega f(p)-\omega f(p_0)$ 是负实数，因而 $\exp[\omega f(p)]$ 离开鞍点呈指数衰减的规则，我们已对其全部长度指出精确路径。在鞍点本身附近，脊和谷为补充 6.3 中对 $\chi=-\pi/4$ 所示。虚线路径是在 Riemann 下叶上，对于它，$\mathrm{Im}\,\xi_1$ 和 $\mathrm{Im}\,\xi_1$ 是负的

我们首先注意到，反射波的几何扩散因子应当恰恰是 $1/R_0$，其走时应当是 R_0/α_1。根据几何射线理论，这时的期望值应当是 $P^{反}\sim A(1/R_0)\exp[i\omega(R_0/\alpha_1-t)]$ 乘以代表界面上反射/入射压力比值的一个因子。我们已在第五章得到关于平面波的这种比值，但这里的入射波有球形波阵面。然而，如果曲率半径足够大，只要 $B=B(p)$ 是在射线参数值 p_s（相应于实际反射角 i_s）上求值，则(6.14)所给的平面波反射系数 $B/4$ 将是适用的。我们现在用几何射线理论和平面波反射系数给予解(6.19)以物理解释。这是令人满意的。我们将发现，当我们的理论方法推进到处理甚至更实际的地球模型时，这些解释仍将有效。但是，如果这就是用复射线参数平面中的积分所能够达到的全部目的，这种努力就不很值得了。经过(6.19)的推导，我们看到已做了若干不同的近似，开始是忽略 (6.16) 中的高阶项，继之在补充 6.3 中用 $f(p_s)+(p-p_s)^2f''(p_s)$ 来近似 $f(p)$。这个最后的近似是特别差的，因为它只在鞍点附近有效，却被用于整个 p 平面。就像在第九章将看到的，定量地震学的现代方法常常在做(6.16)近似时，只保留第一项并对整个复 p 平面鉴别最速下降路径 Γ，但这时处理 Γ 附近合适路径上的积分，是用数值方法，精确地求 $f(p)$ 的值。

保留推导(6.19)时所用近似式的附加项，对于 $\alpha_1>\alpha_2$，可形式上表示为

$$P^{反}=\frac{B(p_s)}{R_0}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{i}{\omega}\right)^n\right]\exp\left[i\omega\left(\frac{R_0}{\alpha_1}-t\right)\right], \tag{6.20}$$

当 $\omega\to\infty$，其中常数 a_1，a_2，$\cdots$ 依赖于源点—接收点几何关系。在时间域这个结果变为，当 $t\to R_0/\alpha_1$，

$$P^{反}=\frac{B(p_s)}{R_0}\left\{\delta\left(t-\frac{R_0}{\alpha_1}\right)+H\left(t-\frac{R_0}{\alpha_1}\right)\left[a_1+a_2\left(t-\frac{R_0}{\alpha_1}\right)+a_3\left(t-\frac{R^0}{\alpha_1}\right)^2+\cdots\right]\right\}, \tag{6.21}$$

因此，在时间域中反射波比入射波的尾部长 $\left[P^{入}=\left(\frac{A}{R}\right)\delta\ (t-R/\alpha_1) \right]$。等效式(6.20)和(6.21)是波阵面展开式。如同我们在第四章指出过的(采用(4.78))，它们在地震学中的应用是有限的，虽然第一项能够具有给出波阵面本身性质的意义。

为继续分析两个不同半空间中的声波，下面讨论 $\alpha_1<\alpha_2$ 的情况，它允许首波存在。方程(6.17)仍有效，而且分支切割与我们在图 6.4 中得到的一样，只不过现在 $1/\alpha_1$ 是在 $1/\alpha_2$ 的右边。像以前一样，有一个必定位于 0 与 $1/\alpha_1$ 之间的鞍点 $p_s=\alpha_1^{-1}\sin i_s$，但现在有可能 p_s 位于 $1/\alpha_2$ 的右边。在图 6.7 中定义了临界角 $i_c=\sin^{-1}(\alpha_1/\alpha_2)$，并辨别出相应于 $p_s=\alpha_1^{-1}\sin i_s<1/\alpha_2$ 和 $p_s=\alpha_1^{-1}\sin i_s>1/\alpha_2$ 的空间区域。

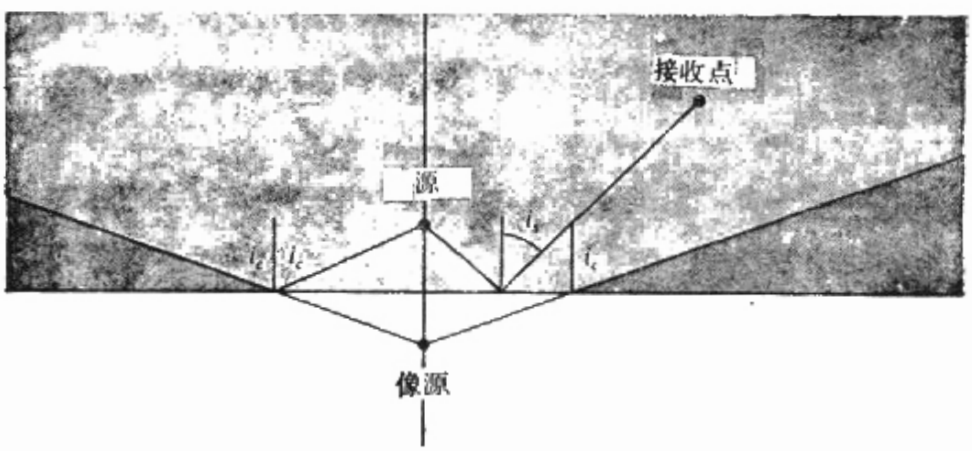


图 6.7

对于浅灰色区域中的接收点，反射射线的入射角 $i_s<i_c$，如图所示。我们定义 $i_c=\sin^{-1}(\alpha_1/\alpha_2)$，因此，根据 Snell 定律，以这个角入射的射线，在下半空间以 $i_s=\pi/2$ 出射，即沿水平方向。所以，下部介质中具有该射线参数的平面波，应该是不均匀的波。正是在深灰色区域中的接收点，才可以观测到首波

首先，考虑接收点在图 6.7 的浅灰色区域即 $p_s<1/\alpha_2$ 的情况。这时的反射波 $P^{反}$，可用与我们以前所求得的完全一样类型的最速下降路径 Γ 来详细进行分析。该路径表示于图 6.8，并且

它仍必须呈现在第一象限中 $\mathrm{Im}\,\xi_1<0$，$\mathrm{Im}\,\xi_2<0$ 的叶上，前面关于几何射线解(6.19)的讨论不变。

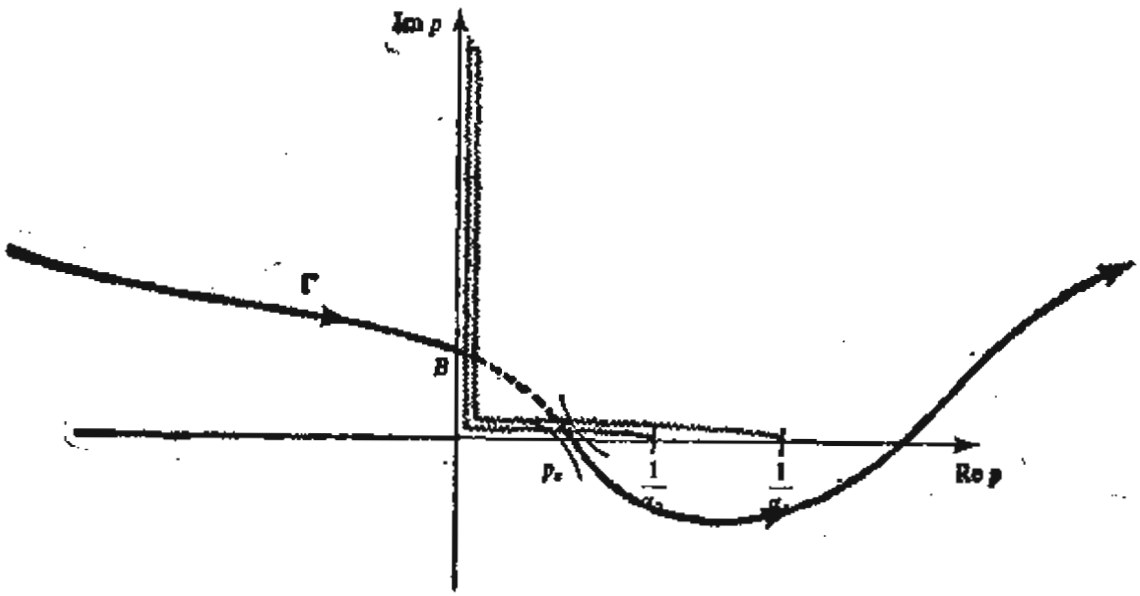


图 6.8

为求 $P_{反}$(见(6.17))，复射线参数平面中的最速下降路径 Γ，这时 $\alpha_1<\alpha_2$，但 $p_*<1/\alpha_2$。该路径与图 6.6 中的类似

其次，考虑接收点在图 6.7 的深灰色区域即 $p_*>1/\alpha_2$ 的情况。虽然 p_* 仍是 $i(pr-\xi_1 z-\xi_1 z_0)$的一个鞍点，但现在的问题是，第一象限中的路径谷位于 $\mathrm{Im}\,\xi_1<0$，$\mathrm{Im}\,\xi_2>0$ 的叶上。由该叶，如何能绕过分支切割并从一叶跨到另一叶，而另一叶上的路径是在 $\mathrm{Im}\,\xi_1>0$，$\mathrm{Im}\,\xi_2>0$ 叶上的第二象限中开始（这是要求的）？图 6.9 详细表示出一个解。

在考虑这个复杂的积分路径时，必须记住，被积函数是以指数递减的小数，因而对于除在实轴附近以外的所有点，是可忽略不计的。在鞍点上的积分，再次给出近似为

$$\frac{B(p_*)}{R_0}\exp\left[\,i\omega\left(\frac{R_0}{\alpha_1}-t\right)\right] \tag{6.22}$$

的一项，虽然现在的反射系数有一个相移，它是下部介质中不均

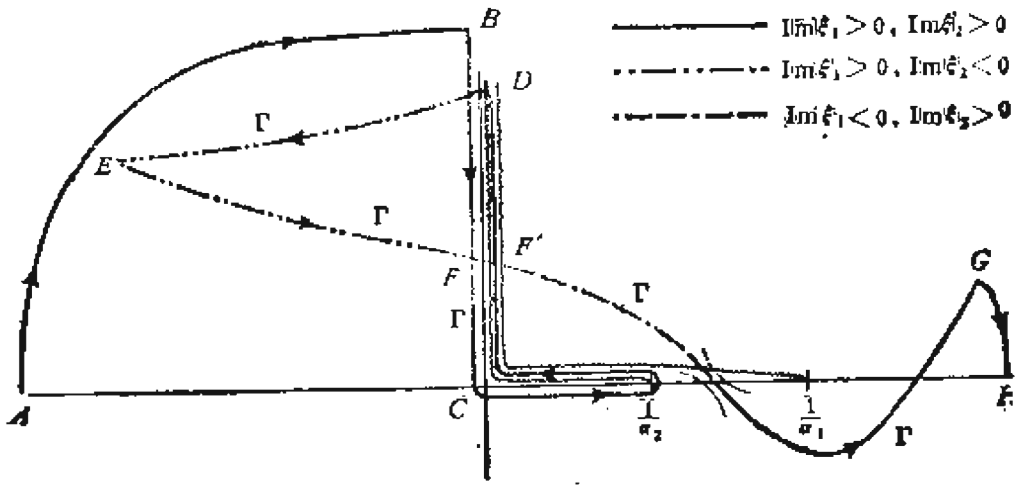


图 6.9

为求p反(见(6.17)),复射线参数平面中的积分路径 Γ,这时 $\alpha_1<\alpha_2$,但 $p_*>1/\alpha_2$。注意，如右上方所示，需要三个 Riemann 叶。从 A 点开始，弧 AB 没贡献。关于 BC，C 到 $1/\alpha_2$,并绕割线 $\mathrm{Im}\,\xi_2=0$，路径停在到 D 的顶叶，D是某个在上方足够远、能给出可忽略的被积函数的点。在 D穿过割线时，路径必须下降到 $\mathrm{Im}\,\xi_1>0$，$\mathrm{Im}\,\xi_2<0$，以便保持被积函数是解析的。从 E 到鞍点并一直到 G，正是最速下降路径；在 F，路径穿至 $\mathrm{Im}\,\xi_1<0$，$\mathrm{Im}\,\xi_2>0$，并在鞍点穿回至顶叶。大弧 GH 没贡献

匀的波所产生的，与 $1/\alpha_2<p_*$ 有联系。由于可从图 6.7 看出的理由，所以(6.22)近似给出的波在地震学中叫做广角反射（注意 $i_*>i_c$）。由于 $B(p_*)$ 中的相移，反射脉冲形状以 5.3 节和补充 5.6 中所描述的方式发生畸变。

图 6.9 中路径 Γ 的另一贡献来自绕 ξ_2 的分支切割的积分。在这条割线稍下一点的正实轴上，ξ_2 是正实数，等于 $\alpha_2^{-1}\cos i_2$，在割线稍上方，$\xi_2=-\alpha_2^{-1}\cos i_2$。于是，根据(6.17)和(6.14)，这个贡献为

$$A\left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2}\exp[-i(\omega t-\pi/4)]\left(\int_{i\infty}^{0}+\int_{0}^{1/\alpha_2}\right)$$

$$\times\left[\frac{-\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}{+\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}\frac{+\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}{-\rho_1\alpha_1\cos i_2+\rho_2\alpha_2\cos i_1}\right]$$

$$\times \frac{\alpha_1 p^{1/2}}{\cos i_1}\exp[\omega f(p)]dp, \tag{6.23}$$

式中指数函数 $f(p)$在(6.18)中给定。在 $p=0$ 和 $p=1/\alpha_2$ 之间，$f(p)$是虚线，所以(6.23)中的被积函数有迅速的振荡。主要贡献来自满足 $\mathrm{Im}\{f'(p)\}$为最小值的 p 值，而由(6.18)看到，这个最小值恰恰出现在 $p=1/\alpha_2$ 处。事实上，只有分支切割的右端部有相当的贡献，因而，要得到分支切割积分(6.23)的近似解，我们利用展开式

$$f(p)=f\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)+\left(p-\frac{1}{\alpha_2}\right)f'\left(\frac{1}{\alpha_2}\right),$$

求 $\cos i_1$ 和 $p^{\frac{1}{2}}$在 $p=1/\alpha_2$ 的值，并取 $\cos i_2=(2\alpha_2)^{\frac{1}{2}}(1/\alpha_2-p)^{\frac{1}{2}}$。根据 (6.18) 和图 6.10 中的三角学关系，求得 $f(1/\alpha_2)=it_k$，其中 $t_k=|z+z_0|/(\alpha_1\cos i_0)+\dfrac{L}{\alpha_2}$是首波的到时，且有$f'(1/\alpha_2)=iL$。(6.23)的近似解变为

$$-A\left(\frac{\omega}{\pi r}\right)^{1/2}\frac{\exp[i\omega(t_k-t)]e^{i\pi/4}4\rho_1\alpha_1^2}{(1-\alpha_1^2/\alpha_2^2)\rho_2\alpha_2}\int_0^{1/\alpha_2}\left(\frac{1}{\alpha_2}-p\right)^{1/2}$$

$$\times\exp\left[i\omega L\left(p-\frac{1}{\alpha_2}\right)\right]dp. \tag{6.24}$$

令 $(p-1/\alpha_2)=iy^2$ 并利用 $\int_0^\infty y^2e^{-\alpha y^2}dy=\dfrac{1}{4}\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{3/2}}$，最后得到近似解

$$\frac{i}{\omega}A\frac{z\rho_1\alpha_1^2}{\rho_2\alpha_2(1-\alpha_1^2/\alpha_2^2)r^{1/2}L^{3/2}}\exp[i\omega(t_k-t)]\quad \text{当}\omega\to\infty. \tag{6.25}$$

把整个分支切割积分(6.23)看作首波，是基于我们刚刚已得到的近似结果。我们再次强调，数值方法(无须对被积函数做近似)给出了更精确的结果。

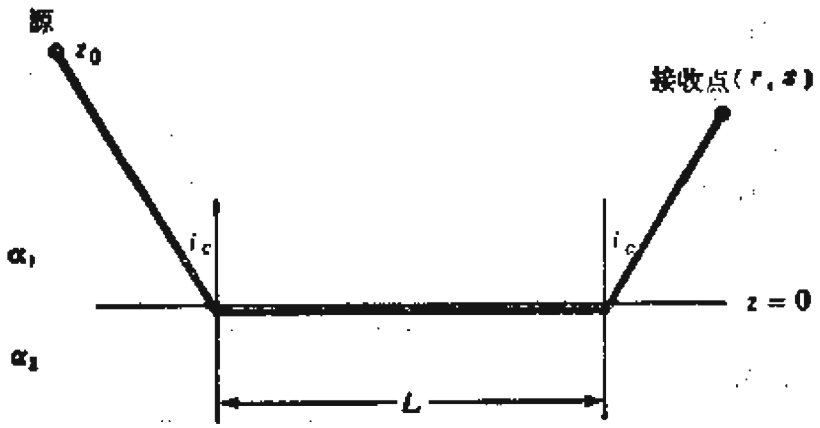


图 6.10

首波走时 t_h 与上部介质中的一段长度 $|z_0|\sec i_c$，下部介质中（水平向传播）的一段长度 L，再加上上部介质中的一段长度 $|z|\sec i_c$ 相对应。因此

$$t_h=(\alpha_1^{-1}\sec i_c)|z+z_0|+L/\alpha_2,$$

可以证明它等于 $r/\alpha_2+(\alpha_1^{-1}\cos i_c)|z+z_0|$。距离 L 显然是

$$r-|z+z_0|\tan i_c$$

补充 6.4

首波的显著特征

(i) 振幅随距离的衰减为 $r^{\frac{-1}{2}}L^{\frac{-3}{2}}$，当 $r\gg|z+z_0|$ 时，将近似为 r^{-2}，所以，这个衰减比球面波 P 入或广角反射强烈得多。

(ii) 因子 i/ω 对应于时间域内的积分，使波形比较平滑，与 P 入的波形相比，其出射起始程度较高而尾部较长。

(iii) 在首波正式能存在的临界距离附近，L 很小（见图 6.10），随 $L\to 0$，即随着从上面 $i_1\to i_c$，我们的近似公式（6.25）就不能成立。关于反射公式（6.20），可证明相应的缺点为，随着由下面 $i_1\to i_c$ 有 $a_1\to\infty$，因此我们的渐近公式在临界距离上完全失效。可以发展另外的渐近公式并专门应用于临界范围 $i_1\sim i_c$(Brekhovskikh，1960，第 22 节)，但对实际用途来说，迫切的是发展可用于所有距离范围的数值方法。

首波在地震文献中还被叫做"锥形波"或"侧面波"，它们的传播路径，是首先由 Mohorovičić 在研究 1909 年一次欧洲地震的某些波的到时认出的。我们现在称为 P_n 的这些波是沿地幔顶部折射的。它们

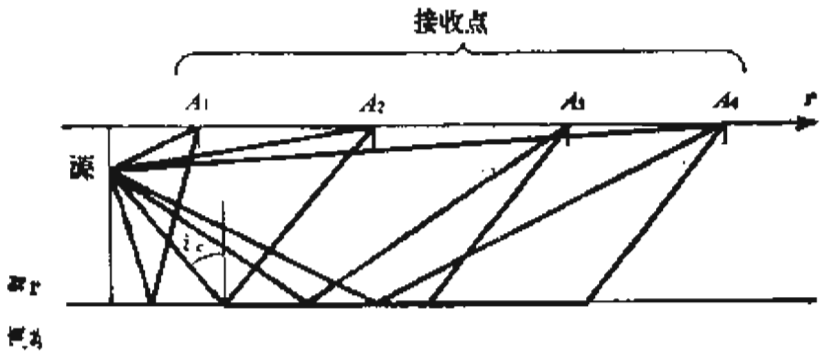

接收点
A_1
A_2
A_3
A_4
x
滨

图 A

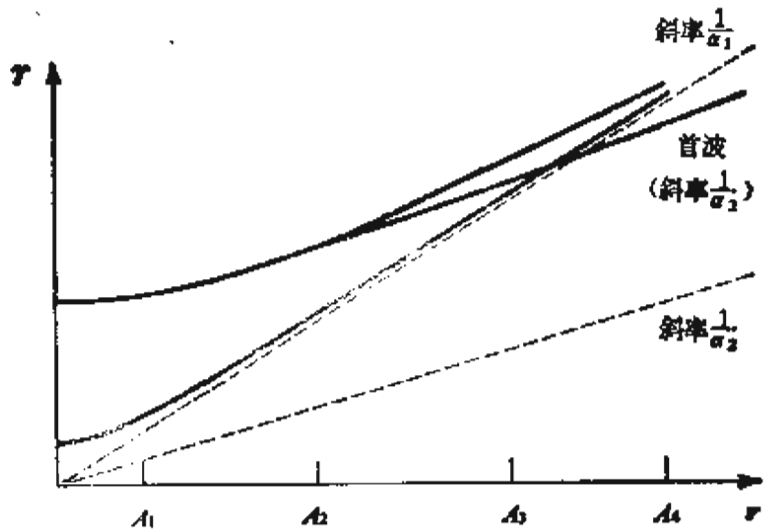

斜率$\frac{1}{\alpha_1}$
T
首波
(斜率$\frac{1}{\alpha_2}$)
斜率$\frac{1}{\alpha_2}$
A_1
A_2
A_3
A_4
x

图 B

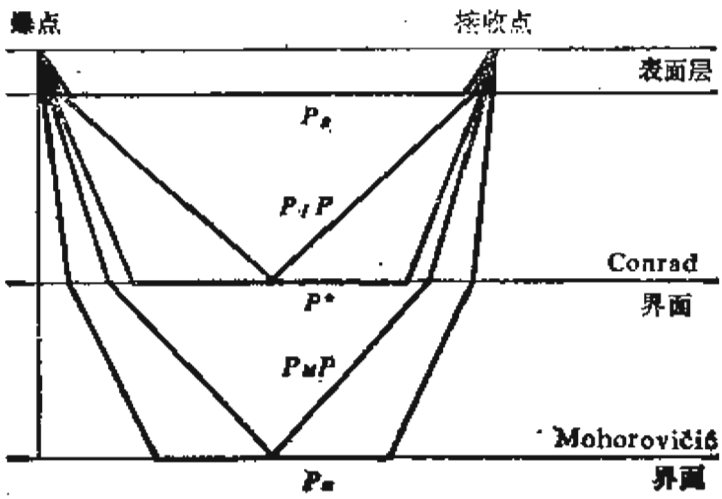

爆点
接收点
表面层
P_g
P_1P
Conrad
界面
P^*
P_mP
Mohorovičić
界面
P_n

图 C

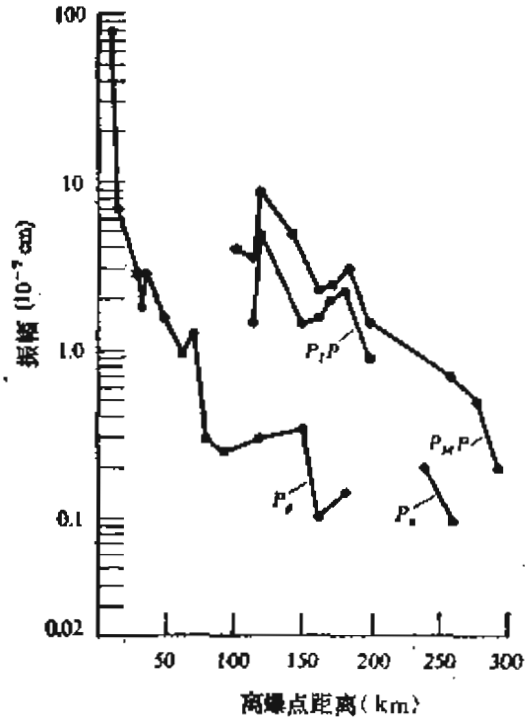


图 D

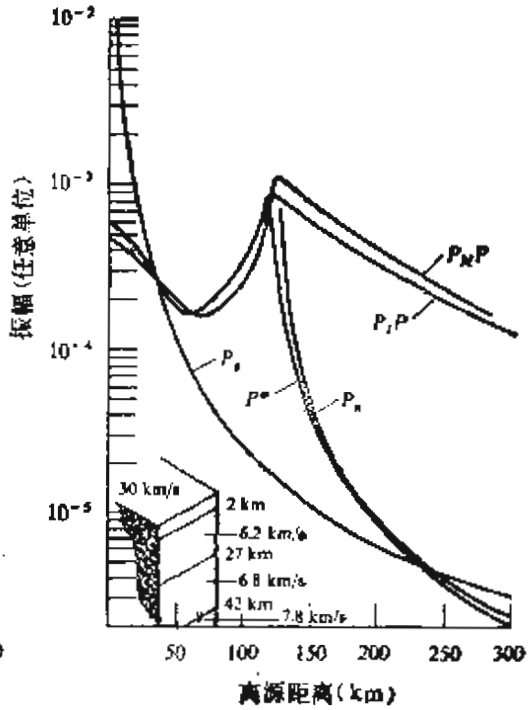


图 E

的到时与水平向距离成线性关系，同反射波或直达波的走时曲线不一样，如图 A 和 B 所示。在足够大的距离上，首波是第一个到达波（参看接收点 A_4），但这优点按照上面第(i)点中所说的，被振幅的衰减抵消了。Jeffreys(1926)首先提出首波作为可识别的震相的理论。Berry 和 West(1966)推广了我们在 6.2 节所用的方法，并用来解释以前美国地质调查局在科罗拉多高原记录到的 P_g，P_n，P^*，P_1P，P_MP 波。图 C 给出这些波的传播路径，P_g，P^* 和 P_n 是首波，P_1P 和 P_MP 是反射波。图D中给出观测值，并且一般来说，同对于图E所示由一种特殊地球模型计算出的振幅相符。[这里的图D和E，引自 Berry and West (1966)。]首波的振幅小，使它们难于检测，除非它们比所有反射波到得早。主要分歧在于反射波，它们的观测值比计算值小得多。Berry 和 West 把这个效应归因于 Conrad 界面和 Moho 界面的粗糙性。

6.3 弹性半空间中的球面波：Rayleigh 极点

在 5.2 节我们看到，自由面能导致 P 和 S 平面波非常强的相互作用。例如，对于入射 P 波，在某些入射角上，反射系统完全由 S 波组成(参看图 5.6)。由于球面波现在被看作平面波的积分，所以可以预期，关于发自半空间中点源的弹性波的详细讨论，将要求细心研究 P 和 S 在界面上的耦合。

这个问题是 Lamb(1904)首先解出的，而后许多作者重新进行了审查。我们这里将仿照 Lapwood (1949)，把弹性波场分解为若干分量波，每一个具有简单的物理解释。(但是，本节关心的是点源，而 Lapwood 的工作是针对线源。)尤其是，我们将研究 Rayleigh 波的发生，该波在自由面上远观测点的地震图上，是占优势的部分。后面我们将用 Cagniard-De Hoop 方法解这个问题，给出总波场的精确解。

我们假定体波速度为 α 和 β，密度为 ρ 的均匀各向同性弹性体占据半空间 $z>0$。点源位于 $z=h$，$(x^2+y^2)=r^2=0$。我们将通过 P-SV 问题(参看补充 6.5)进行计算，为简便起见，假定它相对于过源点的竖直线为轴对称。在这个意义上，该问题是二维的，解只依赖于 (r, z)。我们将利用笛卡尔坐标 (x, y, z) 和柱坐标 (r, ϕ, z)，它们有相同深度方向。因此，位移表示为

$$u=\nabla\phi+\nabla\times\nabla\times(0, 0, \psi),$$

其中 P 波势 ϕ 满足

$$\ddot{\phi}=\frac{\Phi}{\rho}+\alpha^2\nabla^2\phi, \tag{6.26}$$

SV 波势 ψ 满足

$$\ddot{\psi}=\frac{\Psi}{\rho}+\beta^2\nabla^2\psi,$$

而 Φ 和 Ψ 是体力 f 的势：

$$f=\rho\ddot{u}-(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot u)+\mu\nabla\times(\nabla\times u)$$
$$=\nabla\Phi+\nabla\times\nabla\times(0,\ 0,\ \Psi). \tag{6.27}$$

补充 6.5

物质间断为水平向的分段均匀介质中 P-SV 运动和 SH 运动的独立性

分段均匀介质由不同区域组成，每个区域是均匀的。我们在第五章已经看到，两种均匀介质间水平的平面分界面，导致 P 和 SV 平面波的耦合，而 SH 独立传播。这里，我们推广这个结果。

从 Lamé 定理(4.1 节)开始，我们注意到波动方程

$$\ddot{\phi}=\Phi/\rho+\alpha^2\nabla^2\phi,\ \ddot{\psi}=\Psi/\rho+\beta^2\nabla^2\psi \tag{1}$$

可以用同位移 u 和体力 f 有关的、由下式表示的势来满足：

$$u=\nabla\phi+\nabla\times\psi,\ f=\nabla\Phi+\nabla\times\Psi,$$

其中

$$\nabla\cdot\psi=0,\ \nabla\cdot\Psi=0.$$

波动方程(1)等效于三个标量方程

$$\ddot{\phi}=\Phi/\rho+\alpha^2\nabla^2\phi,$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(\nabla\times\psi)_z=\frac{1}{\rho}(\nabla\times\Psi)_z+\beta^2\nabla^2[(\nabla\times\psi)_z], \tag{2}$$
$$\ddot{\psi}_z=\Psi_z/\rho+\beta^2\nabla^2\psi_z.$$

在没有体力的情况下，根据(2)，显然任一运动都可分解为三种运动；即每种运动中，三个函数 ϕ，$(\nabla\times\psi)_z$，ψ_z 中的两个处处为零。

(i) 第一种运动有 $(\nabla\times\psi)_z$ 和 ψ_z 为零，显然是 P 波。它们的特征是 $\nabla\cdot u$ 不为零，但 $\nabla\times u=0$。

(ii) 第二种运动含有 $\phi=0$，$\psi_z=0$。既然也是 $\nabla\cdot\psi=0$，故我们得知 $\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}=0$。这是满足 $\psi_x=\frac{\partial M}{\partial y}$，$\psi_y=-\frac{\partial M}{\partial x}$，即 $\psi=\nabla\times(0,0,M)$ 的某个函数 M 存在的条件。事实上，惯常把 M 写作标量 ψ。这时

$$u=\nabla\times\nabla\times(0,0,\psi)=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x},\ \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y},\ -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right).$$

对于这些运动，$\nabla\cdot u=0$ 和 $(\nabla\times u)_z=0$，因此 SV 属于这个范畴。

(iii) 第三种运动含有 $\phi=0$，$(\nabla\times\psi)_z=0$。这时 $\nabla\cdot u=0$ 和 $u_z=0$，所以这里的位移同(ii)中的 ψ 相像：存在一个函数 χ，使 $u=\nabla\times(0,0,\chi)$。此运动显然与 SH 相像，其特征为$(\nabla\times u)_z\neq 0$，$u_z=0$，$\nabla\cdot u=0$。

与此类似，(2) 中三种体力的每一种可用一标量势描写，而 $f=\nabla\Phi+\nabla\times\nabla\times(0,0,\Psi)+\nabla\times(0,0,X)$，其 P，SV，SH 波动方程分别为

$$\ddot{\phi}=\Phi/\rho+\alpha^2\nabla^2\phi,\quad \ddot{\psi}=\Psi/\rho+\beta^2\nabla^2\psi,\quad \ddot{\chi}=X/\rho+\beta^2\nabla^2\chi. \tag{3}$$

对于水平的物质间断面，关于 u 分量连续性的三个标量条件可以在水平方向取微商。三个条件这时等效于

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y},\quad \frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y},\quad u_z$$

的连续，即

$$(\nabla\times u)_z,\quad \nabla\cdot u-\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad u_z \tag{4}$$

的连续。

与此类似，牵引力的连续意味着

$$\mu\frac{\partial}{\partial z}[(\nabla\times u)_z],\quad \mu\left[\frac{\partial}{\partial z}\nabla\cdot u-2\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\nabla^2 u_z\right],\lambda\nabla\cdot u+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z} \tag{5}$$

的连续。

对于 SH 波，因为$(\nabla\times u)_z\neq 0$，但 $u_z=0$ 和 $\nabla\cdot u=0$，所以，(4)和(5)中六个连续条件的四个，自然地得到满足，而 u_z 和 $\nabla\cdot u$ 同边界面相互作用之后保持为零，从而SH 波保持为 SH。

同样，对于$(\nabla\times u)=0$ 但 u_z 和 $\nabla\cdot u$ 不为零的入射波，不存在在界面上同 SH 的耦合。然而，u_z 与 $\nabla\cdot u$ 的耦合意味着 P 与 SV 是耦合的。

在密度和 Lamé 常数依赖于深度的介质中，也存在 SH 与 $P+SV$ 运动的解耦，P 与 SV 的耦合直接表现在波动方程中，它不分离为(2)的形式。相反，我们得到两个方程，每个方程都含有 ϕ 和$(\nabla\times\psi)_z$。

我们来考虑图 6.11 所示的 P 波点源。(该图还描写简单的 SV 点源。比较切合地震学的点源在下章用柱坐标描述。SV 的线源在 6.4 节描述。)因此我们这里取

$$\Phi = A\,4\pi\rho\alpha^2\delta(\chi)\delta(y)\delta(z-h)\exp(-i\omega t);\quad \Psi = 0. \tag{6.28}$$

经过势的波动方程(6.26)，这个源产生球面波

$$\phi^{\lambda}(x,\ t) = A\frac{1}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{\alpha}-t\right)\right]\text{以及 } R=[x^2+y^2+(z-h)]^{1/2}, \tag{6.29}$$

这时它是在自由面 $z=0$ 上的入射。总势为

$$\phi = Ai\omega\ \exp(-i\omega t)\int_0^{\infty}\frac{p}{\xi}J_0(\omega p r)\exp[i\omega\xi|z-h|]dp$$

(入射波)

$$+Ai\omega\exp(-i\omega t)\int_0^{\infty}\acute{P}\grave{P}\ \frac{p}{\xi}J_0(\omega p r)\exp[i\omega\xi(z+h)]dp$$

(广义 $\acute{P}\grave{P}$ 反射)，(6.30)

$$\psi = Ai\omega\ \exp(-i\omega t)\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{i\omega p}\frac{\beta}{\alpha}\acute{P}\grave{S}\right)\frac{p}{\xi}J_0(\omega p r)$$

$$\exp\times[i\omega(\xi h+\eta z)]dp \qquad (\text{广义 }\acute{P}\grave{S}\text{ 反射})\ (6.31)$$

(参看补充 6.6)，其中 $\acute{P}\grave{P}$ 和 $\acute{P}\grave{S}$ 是第五章对自由面所描述的依赖于 p 的系数[见方程(5.26)和(5.27)]。

我们集中注意(6.30)中的广义 $\acute{P}\grave{P}$ 反射，说明随变程 r 的增大，它如何分离成为三种不同类型的 P 波。

第一，为得到广义 $\acute{P}\grave{P}$ 反射，我们把 J_0 分离为当 $\omega\to\infty$ 时它的行波分量：

$$\frac{Ai\omega}{2}\exp(-i\omega t)\int_{-\infty}^{\infty}\acute{P}\grave{P}\ \frac{p}{\xi}H_0^{(1)}(\omega p r)\exp[i\omega\xi(z+h)]dp$$

$$\sim A\left(\frac{\omega}{2\pi r}\right)^{1/2}e^{-i(\omega t-\pi/4)}\int_{-\infty}^{\infty}\acute{P}\grave{P}\ \frac{p^{1/2}}{\xi}\exp[i\omega(pr+\xi z+\xi h)]dp \tag{6.32}$$

[请与(6.15)和(6.17)的推导对比]。要记住 $\mathrm{Im}\,\xi\geqslant 0$，$\mathrm{Im}\,\eta\geqslant 0$.

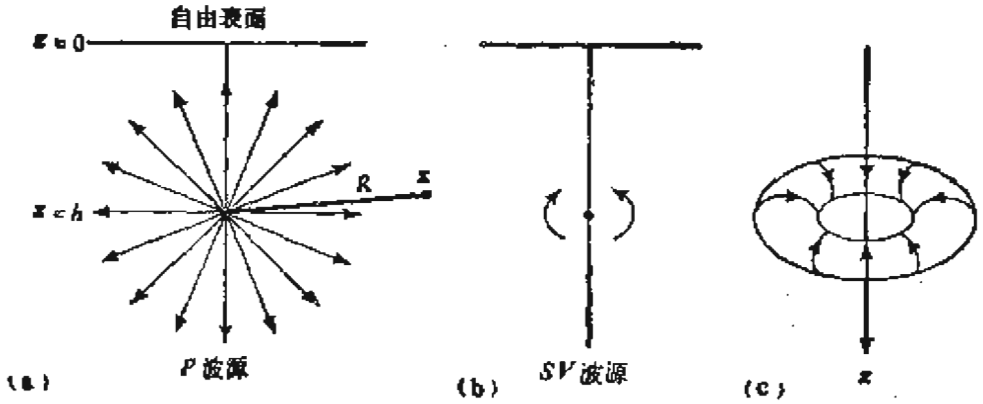


图 6.11

弹性半空间中深度 h 处的两种不同点源。(a) P 波源，它产生球面波 $\phi_{入}=\frac{A}{R}\exp i\omega\left(\frac{R}{\alpha}-t\right)$，其中 R 是源点至接收点的直线距离。该源是个简单的爆炸模型。(b) SV 波源，产生 $\psi_{入}=\frac{A}{R}\exp i\omega\left(\frac{R}{\beta}-t\right)$。(c) 为使这个 SV 波源形象化，考虑一个小环(环形室)，它的轴为竖直向，并且在轴对称的运动中，环的质点"打滚"，如箭头所示，使质点运动局限于竖直平面内。显然，这是一种环辐射 SV 波，并可证明，在环趋于一个点的极限情况下，这种源确有如前面所给球对称的 $\psi_{入}$

第二，我们审查(6.32)中指数的分支切割和最速下降路径。在 Riemann 顶叶 ($\mathrm{Im}\,\xi\geqslant 0$，$\mathrm{Im}\,\eta\geqslant 0$)上，如图 6.12 所示，在 $p=\alpha^{-1}\sin i_s$ 有鞍点而在 $p=1/c_R$ 有极点 (c_R 是 Rayleigh 波速度，$\acute{P}\grave{P}$ 的分母为零)。如果将图 6.12 c 的最速下降路径 Γ 与图 6.12 b 的奇点进行对比，就会看到，倘若反射角很小，则存在奇点造成的小干扰。这正是图 6.12 d 中的情况，只有鞍点的贡献是重要的。但是，如果 i_s 变得很大(即如果 $r\gg z+h$)，则发生强烈干扰，如图 6.12 e 所示，产生三种可鉴别的贡献。(i) 由 Γ_α，主要贡献仍来自鞍点，并可解释为如图 6.12 a 所示的表面 P 反射；(ii) 由 Γ_β，主要贡献来自支点 $p=1/\beta$ 附近。这个传播路径的波可鉴定为，从源到自由面向上减弱的非均匀 P 波，然后作为 SV 波沿自由面水平向传播，以从自由面到接收点向下减

弱的非均匀P波结束。这叫做表面S波。最后，(iii) 由Γ_R，得到 Rayleigh 波的P波分量，其振幅由 (6.32) 被积函数的留数简单给定。因为当 $p\to 1/c_R$ 时，

$$\dot{P}\dot{P}\sim-\left(\frac{1}{p-1/c_R}\right)\frac{8(c_R^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}(c_R^{-2}-\beta^{-2})^{1/2}}{c_R^2R'(1/c_R)},$$

其中 $R(p)=4p^2\xi\eta+(1/\beta^2-2p^2)^2$，$R'=dR/dp$，我们由(6.32)求得，当 $\omega\to\infty$ 时，Rayleigh 波具有的P波分量为

$$\phi_R\sim-8A\left(\frac{2\pi\omega}{rc_R}\right)^{1/2}\frac{e^{i\pi/4}\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}}{c_R^2R'(1/c_R)}$$

$$\times\exp\left[i\omega\left(\frac{r}{c_R}-t\right)\right]\exp\left[-\omega\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}(z+h)\right].$$

(6.33)

看一看何时最速下降路径 Γ (图 6.12 c) 仍处于 Rayleigh 极点以下，从而估计得不到这个留数的距离。粗略地讲，这个情况出现在

$$\frac{1}{\alpha\sin i_s}>\frac{1}{c_R},$$

也即等效于

$$\tan i_s=\frac{r}{z+h}<\frac{c_R}{(\alpha^2-c_R^2)^{1/2}}. \qquad (6.34)$$

不等式(6.34)是首先由中野得到的，并解释为 Rayleigh 波尚未形成所对应的那个距离。如果

$$\frac{r}{z+h}\gg\frac{c_R}{(\alpha^2-c_R^2)^{1/2}}\sim0.6,$$

则极点的贡献完全脱离于分支切割和最速下降路径，(6.33)将是有意义的。

补充 6.6

关于柱坐标

公式(6.30)和(6.31)，可以用笛卡尔坐标中的平面波理论，Weyl积分(6.4)，随后转换到柱坐标来得到，类似于我们推导(6.9)那样。但是，快得多的是Lamb(1904)采用彻底使用柱面几何的方法。

势的齐次波动方程的轴对称解，关于 ϕ，是

$$J_0(\omega pr)\exp(\pm i\omega\xi z-i\omega t),$$

关于 χ，是

$$J_0(\omega pr)\exp(\pm i\omega\eta z-i\omega t),$$

其中 $\xi=(\alpha^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，$\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$。假定入射的上行 P 波及其反射用总场来表示：

$$\phi=J_0(\omega pr)[Ae^{-i\omega\xi z}+Be^{i\omega\xi z}]\exp(-i\omega t),$$

$$\psi=J_0(\omega pr)Ce^{i\omega\eta z}\exp(-i\omega t).$$

则由 $u=\nabla\phi+\nabla\times\nabla\times(0,0,\psi)$ 和 $dJ_0(x)/dx=-J_1(x)$，我们得到

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}=-\omega pJ_1(\omega pr)[Ae^{-i\omega\xi z}+Be^{i\omega\xi z}+i\omega\eta Ce^{i\omega\eta z}]$$

$$\times\exp(-i\omega t),$$

$$u_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=J_0(\omega pr)[-i\omega\xi Ae^{-i\omega\xi z}+i\omega\xi Be^{i\omega\xi z}$$

$$+\omega^2p^2Ce^{i\omega\eta z}]\exp(-i\omega t).$$

根据 2.6 节，利用轴对称性，在 $z=0$ 有

$$\tau_{zr}=2\mu e_{zr}=\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

$$=i\omega^2J_1(\omega pr)[2\rho\beta^2p\xi(A-B)$$

$$+\rho(1-2\beta^2p^2)(-i\omega pC)]\exp(-i\omega t), \tag{1}$$

$$\tau_{zz}=\lambda\,\mathrm{div}\,u+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{\lambda\omega^2}{\alpha^2}\phi+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$=-\omega^2J_0(\omega pr)[\rho(1-2\beta^2p^2)(A+B)$$

$$+2\rho\beta^2p\eta(-i\omega pC)]\exp(-i\omega t). \tag{2}$$

使上面的(1)和(2)等于零(自由面边界条件)，我们发现方程与研究平面波时得到的方程的差别，只在于用 $-i\omega pC$ 代替(5.22)和(5.23)中的 C。于是有

$$B=A\acute{P}\grave{P}\text{ 和 }C=\frac{A}{i\omega p}\frac{\beta}{a}\acute{P}\grave{S}. \tag{3}$$

此处 $\acute{P}\grave{P}$ 和 $\acute{P}\acute{S}$ 是 (5.26) 和(5.27) 所给关于位移的反射系数和转换系数。根据关于入射波的 Sommerfeld 积分，和根据反射的叠加，立即得到公式(6.30)和(6.31)。

我们可以用类似的方法分析 SV 波(6.31)，推广 $\acute{P}\grave{S}$ 并求由入射球面 P 波反射出的普通下行 S 波。在足够大的变程上，还存在一个具有水平向慢度 $1/\beta$ 的波，它作为非均匀 P 波离开源，向上减弱，然后作为 S 波水平地传向接收点。这叫做次生 S 波。Rayleigh 极点仍存在，当 $\omega\to\infty$ 时，留数给出

$$\psi_R\sim 4A\left(\frac{2\pi\omega}{rc_R}\right)^{1/2}e^{i\pi/4}\left(\frac{c_R}{\omega}\right)\frac{\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{2}{c_R^2}\right)}{c_R R'(1/c_R)}$$
$$\times\exp\left[\,i\omega\left(\frac{r}{c_R}-t\right)\right]\exp\left[\,-\omega\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{1/2}h-\omega\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}z\,\right]. \tag{6.35}$$

相应的位移可由下式计算：

$$u=u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z},\quad w=u_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right).$$

(虽然现在指的是径向分量而不是笛卡尔水平分量，但我们仍用把水平位移写作 u 的惯例。)这时，表面 ($z=0$) 上的 Rayleigh 波位移是

$$u_R\sim -2iQe^{i\pi/4}\left[\frac{2}{c_R}\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}\right]\exp\left[\,i\omega\left(\frac{r}{c_R}-t\right)\right]$$
$$\times\exp\left[\,-\omega\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{1/2}h\,\right],$$
$$w_R\sim -2Qe^{i\pi/4}\left[\frac{2}{c_R^2}-\frac{1}{\beta^2}\right]\exp\left[\,i\omega\left(\frac{r}{c_R}-t\right)\right]$$
$$\times\exp\left[\,-\omega\left(\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{a^2}\right)^{1/2}h\,\right], \tag{6.36}$$

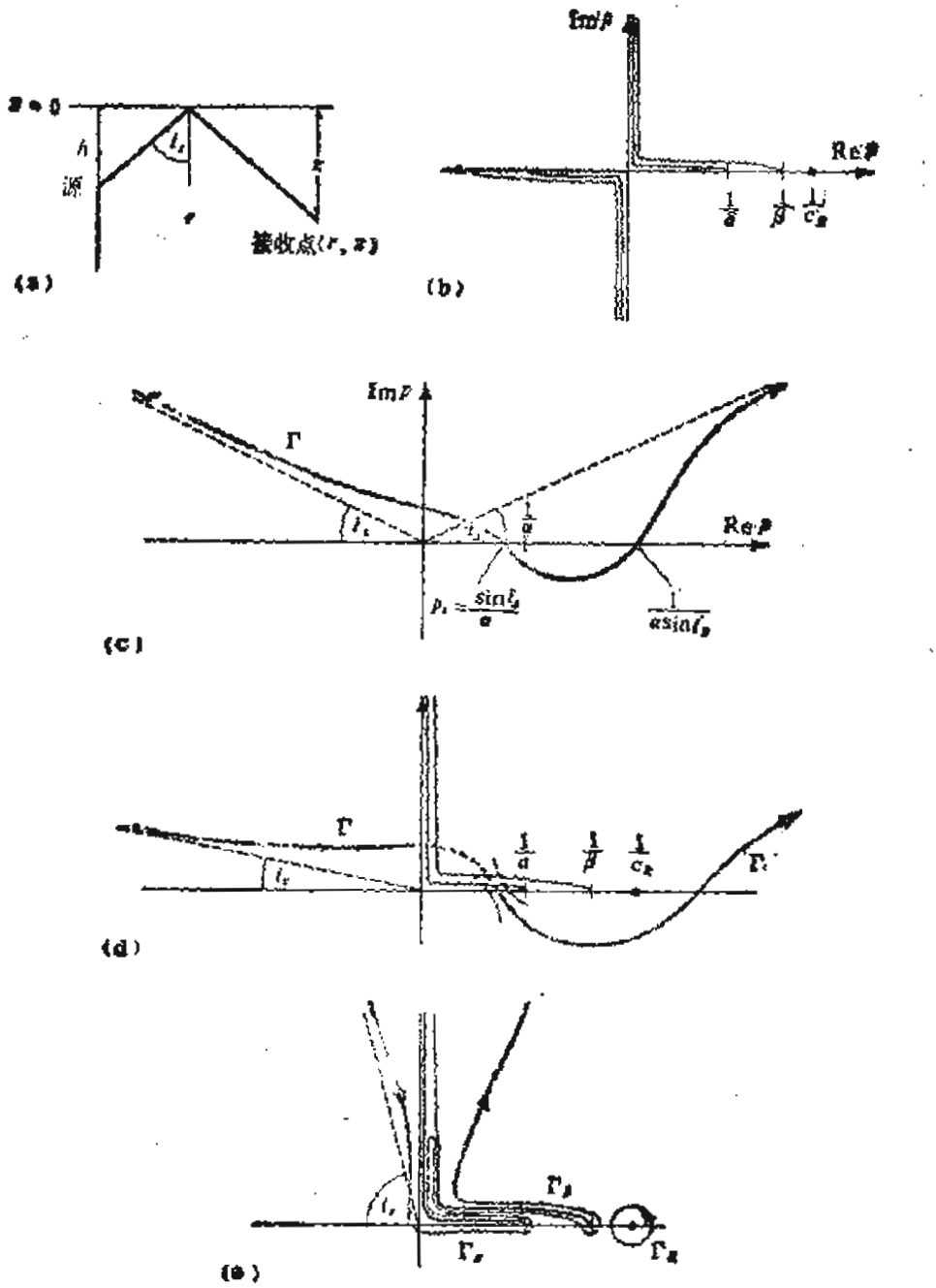


图 6.12

对于弹性半空间中的点源，解释广义反射的略图。(a) 源点—接收点的几何关系和规定反射角 i_s 的反射 P 波。(b) 复 p 平面中 ξ 和 η 的分支切割，以及在 $p=1/C_R$ 的极点。(注：对于衰减介质，正实轴上的分支切割和极点移入第一象限。) (c) (6.32)中指数的最速下降路径 Γ，这个路径是 $pr+\xi z+\xi h=\dfrac{R_0}{\alpha}+$正虚量$=\dfrac{R_0}{\alpha}+i\chi^2$。可以解出 p，在 Γ 上得到 $R_0^2p=(i\chi^2+R_0/\alpha)^{1/2}\pm(\chi^4-2i\chi^2R_0/\alpha)^{1/2}(z+h)$，同实轴交于 $p=p_s=\alpha^{-1}\sin i_s$ 和 $p=1/(\alpha\sin i_s)$。(d) 对于小 i_s，可取最速下降路径(在第一象限中 $\mathrm{Im}\,\xi<0$，$\mathrm{Im}\,\eta<0$ 时上进行，如图 6.8 所示)。(e) 对于大 i_s，积分路径（全部在 Riem[illegible]面上）可想像为两个分支切割积分 Γ_α 和 Γ_β 的和，再加上求 Rayleigh 极点留数[illegible]路 Γ_R

其中

$$Q=A\left(\frac{2\pi\omega}{rc_R}\right)^{1/2}\frac{\omega}{\beta^2R'(1/c_R)}.$$

虽然在 $p=1/c_R$ 的极点是半空间问题的突出特征，但我们在下一节将看到，在不同 Riemann 叶上出现的 Rayleigh 函数的零值，也能有重要意义。

在分析入射于平界面的球面波时，我们现在已看到两个现象，即首波和 Rayleigh 波。当入射的波阵面是平面时，它们是不出现的。对这些现象求值的渐近式，使我们能迅速估算它们的许多性质，但现在我们转到对 Lamb 问题可做得很精确的另一种方法。

补充 6.7

由埋藏点源产生的 Rayleigh 波的突出特征

(i) 随距离衰减的性质类似于 $r^{-\frac{1}{2}}$，与体波(r^{-1})和首波(r^{-2})相比，Rayleigh 波必定在足够大的变程上支配地面运动。注意，柱面的 Rayleigh 波(6.36)中水平向和竖直向运动间的比值，恰恰就是问题 5.4 b 中对于平面的 Rayleigh 波所求的比值。

(ii) 相位滞后由 $\omega r/c_R$ 给定，与深度无关，因此走时曲线是直线。

(iii) 振幅是 h 和 ω 的指数减小的函数：

$$\exp[-\omega(c_R^{-2}-\alpha^{-2})^{1/2}h]\sim\exp[-(0.9)^{1/2}\omega h/\beta].$$

对于 S 波源，它变为

$$\exp[-\omega(c_R^{-2}-\beta^{-2})^{1/2}h]\sim\exp[-(0.2)^{1/2}\omega h/\beta].$$

(iv) 质点运动是逆进椭圆（w 相对于 u 有相移 $-\pi/2$，因而相位超前 $+\pi/2$，见补充 5.5），而椭率与自由 Rayleigh 波的相同。

(v) 根据上面的(ii)和(iii)，相位谱的斜率是变程而不是深度的函数，振幅谱的形状是深度而不是变程的函数。因此，振幅和相位无关。这是我们一般称做简正振型的公共特征，在第七章，对于分层介质比较详细地研究了简正振型。当然，这种无关性违反因果关系（见补充 5.8），所以，谈论 Rayleigh 波或个别简正振型的“初动”，是没有意义的。

6.4 对于线源的 Cagniard-De Hoop 方法

直到现在，本章已考虑过的震源对时间的依赖关系是 $\exp(-i\omega t)$，并且一直在寻找一种用 $\tilde{r}(\omega)\exp(-i\omega t)$ 形式表示响应(即在接收点求值的某个物理变量)的方法。写成输入—输出形式

$$\exp(-i\omega t)\rightarrow\text{弹性介质}\rightarrow\tilde{r}(\omega)\exp(-i\omega t).$$

在许多意义上，目的是求输入 $\delta(t)$ 的响应 $r(t)$。这时

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\omega t)d\omega\rightarrow\text{弹性介质}$$

$$\longrightarrow\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{r}(\omega)\exp(-i\omega t)d\omega=r(t),$$

我们看到，$r(t)$ 是 $\tilde{r}(\omega)$ 的 Fourier 逆变换。物理上的因果关系，要求 $t<0$ 时 $r(t)=0$，注意，到现在为止，我们主要是对于实的正 ω 来考虑 $r(t)$ 的 Fourier 变换的细节。知道了 $r(t)$，就可以用褶积表示出任意输入 $x(t)$ 的响应：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau\rightarrow\text{弹性介质}$$

$$\longrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)r(\tau)d\tau. \qquad (6.37)$$

(积分可限制在正 τ，因为 τ 是有因的。)

利用 Cagniard 方法，我们现在来求输入 e^{st} $(-\infty<t<\infty)$ 的响应 $\bar{r}(s)e^{st}$，这里的 s 是正实数：

$$e^{st}\rightarrow\text{弹性介质}\rightarrow\bar{r}(s)e^{st}.$$

这时根据(6.37)，$\bar{r}(s)e^{st}=\int_0^{\infty}r(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$，因而 $\bar{r}(s)$ 恰恰是 $r(t)$ 的 Laplace 变换：

$$\bar{r}(s)=\int_0^{\infty}r(t)e^{-st}dt \quad (s\text{ 是正实数}) \qquad (6.38)$$

假定 $\bar{r}(s)$的解可以求出，利用 Cagniard 方法，是要处理 $\bar{r}(s)$的表达式，直到它成为(6.38)的形式，这时被积函数 $r(t)$就被看作脉冲响应。(De Hoop 的贡献是简化了处理方法。应当提一下，Cagniard 把他的方法归功于 Carson，Smirnov 和 Sobolev，Pekeris，Sauter，Garvin 以及 Gilbert，也对这个方法有所发展。)一旦知道了脉冲响应，问题就算是解决了，因为任意输入的响应都可用褶积求得。

然而，用上述步骤由 $\bar{r}(s)$唯一地确定脉冲响应 $r(t)$，而 $\bar{r}(s)$只对正实数 s 为已知，这一点是不明白的。毕竟(6.38)的逆变换是

$$r(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\bar{r}(s)e^{st}ds$$

[其中积分路线位于 $\bar{r}(s)$ 的所有奇点的右边]，这要求对于复数 s 来分析 $\bar{r}(s)$。幸而，Cagniard(1962，第三章)已证明，当 $r(t)$在可微和有界的相当少的限制下，从以 (6.38) 形式写出的 $\bar{r}(s)$的被积函数所得出的 $r(t)$，的确唯一地确定所要求的脉冲响应。这叫做 Lerch 引理(或定理)，其证明很复杂、很冗长，此处略去。

显然，$\bar{r}(s)$可由在 6.1—6.3 节的 $\tilde{r}(\omega)$ 表达式中，形式上替换 $\omega=is$ 来得到。但是，当源是 $\delta(t)$时，直接由输出的 Laplace 变换推导 $\bar{r}(s)$是方便的。例如，在涉及垂直于笛卡尔 y 方向传播的二维问题中，我们谋求 $r=r(x,z,t)$的函数形式。用输入 $\delta(t)$，我们将发现，取 x 上的 Fourier 变换和 t 上的 Laplace 变换是比较方便的，从而得到双重变换 $\tilde{\bar{r}}=\tilde{\bar{r}}(k_x,z,s)$的代数表达式。这时的 Fourier 逆变换是

$$\bar{r}(x,z,s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\bar{r}}(k_x,z,s)\exp(ik_xx)dk_x.$$

既然这里的 k_x 是波数的水平分量，所以我们取出因子 is，并把

$k_x/is=p$ 作为射线参数。于是

$$\bar{r}(x,\ z,\ s)=-\frac{is}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\bar{r}}(isp,\ z,\ s)e^{-spx}dp. \qquad (6.39)$$

把这里的 p 看作积分的哑变量，剩下的就是把(6.39)处理成(6.38)中的积分形式。得到的被积函数使 $r(x,\ z,\ t)$ 立刻被认出。

注意，s 在(6.38)中只出现在一处，它是作为指数因子出现的。(6.39)的处理常常导致下列形式

$$\bar{r}=s^n\int_0^{\infty}g(t)e^{-st}dt, \qquad (6.40)$$

在此情况下，脉冲响应可由

$$r(t)=\frac{d^n}{dt^n}g(t)$$

计算，或者，把积分过 n 次的 δ 函数作为输入，直接把响应看作 $g(t)$。

在本节的下余部分，我们将对弹性半空间中 SH 波的线源，和对 P-SV 波的线源，研究上述方法。我们将求出可用代数表达式精确给出的介质响应。在下节把该方法推广到点源情况，并以 Cagniard-De Hoop 方法与 6.1—6.3 节讨论的 Fourier 变换方法的某种全面对比，来结束本章。

我们从简单的 SH 问题开始。利用笛卡尔坐标 $(x,\ y,\ z)$，假定半无限弹性介质中的线源沿 y 轴，并由沿 y 方向脉冲式作用的体力构成。因此体力为

$$\boldsymbol{f}=(0,\ A\delta(x)\delta(z)\delta(t),\ 0),$$

其中 A 为常数，其量纲是单位长度上的冲力。该源只激发 y 分量的位移，所以位移 $\boldsymbol{u}$ 是 $(0,\ v(x,\ z,\ t),\ 0)$。v 的方程是

$$\rho\ddot{v}=A\delta(x)\delta(z)\delta(t)+\mu\nabla^2 v, \qquad (6.41)$$

对于 $t<0$，v 和 $\dot{v}$ 二者都为零。

为了求解 v，最简单的方法是取补充 4.1 的点源解，并对 y 轴上的所有源求积分：

$$v(x,\ z,\ t)=\frac{1}{4\pi\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{\rho R_3}\delta\left(t-\frac{R_3}{\beta}\right)dy,$$

式中 $R_3=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$。因为 $dy/R_3=dR_3/y$ 以及 R_3 是 y 的偶函数，所以

$$v(x,\ z,\ t)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\int_R^{\infty}\frac{1}{y}\delta\left(t-\frac{R}{\beta}\right)dR_3$$

$$=\begin{cases}0 & \text{对 } t<\dfrac{R}{\beta},\\[2ex] \dfrac{A}{2\pi\rho\beta^2}\dfrac{1}{\left(t^2-\dfrac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} & \text{对 } t>\dfrac{R}{\beta},\end{cases}\qquad(6.42)$$

式中 $R=(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$是二维问题的距离函数。

现在让我们用 Cagniard-De Hoop 方法再推导(6.42)。

取定双重变换

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik_x x)dx\int_0^{\infty}e^{-st}dt,$$

我们得到

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}v(k_x,\ z,\ s)=\frac{-A}{\rho\beta^2}\delta(z)+n^2v(k_x,\ z,\ s),$$

$$\text{式中 } n^2=k_x^2+\frac{s^2}{\beta^2}.\qquad(6.43)$$

于是，除 $z=0$ 外，处处有$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=n^2v$，其解为

$$v(k_x,\ z,\ s)=ae^{nz}+be^{-nz}$$

(用 $n>0$ 规定根的选择)，a 和 b 是常数。分别考虑两个区域 $z\gtrless 0$，并要求 $z\to\pm\infty$时 v 有界，则我们看到当 $z>0$ 时 $a=0$，$z<0$ 时 $b=0$。但(6.43)意味着 v 穿过 $z=0$ 时连续，而$\frac{\partial v}{\partial z}$有一个降 $A/\rho\beta^2$ 量的阶跃。于是有 $v\propto e^{-n|z|}$，知道了$\frac{\partial v}{\partial z}$阶跃的大小以后，最后得到

$$v(k_x,\ z,\ s)=\frac{A}{2\rho\beta^2 n}e^{-n|z|}. \qquad (6.44)$$

[或者，我们]也可以通过变换(6.43)中对 z 的依赖关系并利用 k_x 平面中的极点，就像我们推导 Weyl 积分(6.4)时做过的那样，来得到(6.44)。]

我们寻找的解的 Laplace 变换现在是

$$v(x,\ z,\ s)=\frac{A}{4\pi\rho\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(ik_x x-n|z|)}{n}dk_x \qquad (6.45)$$

其 $\mathrm{Re}\ n=\mathrm{Re}\left(k_x^2+\frac{s^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}}>0$，由以前的 $n>0$ 推广到可讨论复数值。在(6.45)中看到，k_x 是个虚构的积分变量，将它改写为 $k_x=isp$，则

$$v(x,\ z,\ s)=\frac{A}{4\pi\rho\beta^2}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{-ie^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}dp \qquad (6.46)$$

其中 $\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{Re}\eta>0$.

我们已经把 s 分离到(6.46)被积函数中的仅只一个位置上；现在继续处理，把(6.46)整理成为 Laplace 变换的形式。为此，我们把$\left(\frac{1}{\eta}\right)e^{-s(px+\eta|z|)}$的实部和虚部分别写为 $E(p)$和 $O(p)$，注意，当 p 是虚数时，E是偶函数，而O是奇函数。于是

$$\int_{-i\infty}^{i\infty}-i(E+iO)dp=-2i\int_0^{i\infty}Edp$$

$$=2\,\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}(E+iO)dp\right\},$$

从而有

$$v(x,\ z,\ s)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}\frac{e^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}dp\right\}. \qquad (6.47)$$

Titchmarsh(1939) 给出一个与我们从(6.46)推导 (6.47) 相类似的结果，并把它叫做“反射原理”。η 的分支切割现在由 $\mathrm{Re}\eta\geqslant 0$ 决定，示于图 6.13。(分析 Fourier 变换时，注意我们是选择

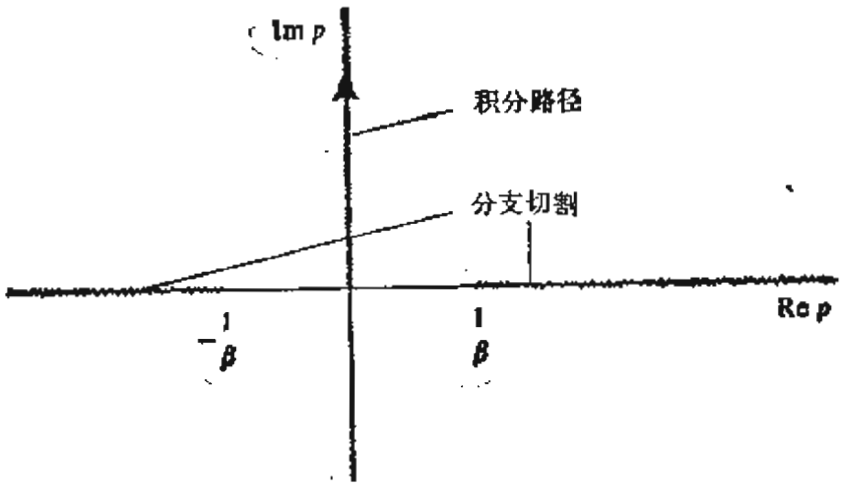


图 6.13
对于 Laplace 变换(6.47)，复 p 平面中的分支切割和积分路径

$\mathrm{Im}\eta \geqslant 0$，它的分支切割就复杂得多，包括实 p 轴和虚 p 轴部分。)

我们的下一步是研究复 p 平面中的路径 C，对此，量 $px+\eta|z|$ 是实数。事实上，我们将把它标为 t，使 (6.47) 中的指数变为 e^{-st}，然后用

$$t = px + \eta|z| \tag{6.48}$$

作为一个独立的积分变量。我们把由 $p=p(t)$ 给定的路径 C 叫做 Cagniard 路径，并且现在开始来看一看，怎样用从零到无穷大增加的 t 实数值把它参量化。

求解(6.48)中仅仅作为 t 的函数的 p，需求解二次方程，它的一个根是

$$p = \begin{cases} \dfrac{xt - |z|\left(\dfrac{R^2}{\beta^2} - t^2\right)^{1/2}}{R^2} & \text{对 } t < \dfrac{R}{\beta}, \\ \dfrac{xt + i|z|\left(t^2 - \dfrac{R^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}{R^2} & \text{对 } t > \dfrac{R}{\beta}. \end{cases} \tag{6.49}$$

在图 6.14 中，对于不同的实值 t，我们表示出由(6.49)在复 p 平面中给定的路径 $p=p(t)$。我们已取的是 $x>0$。如果 $x<0$，那

么镜像可用于 C。

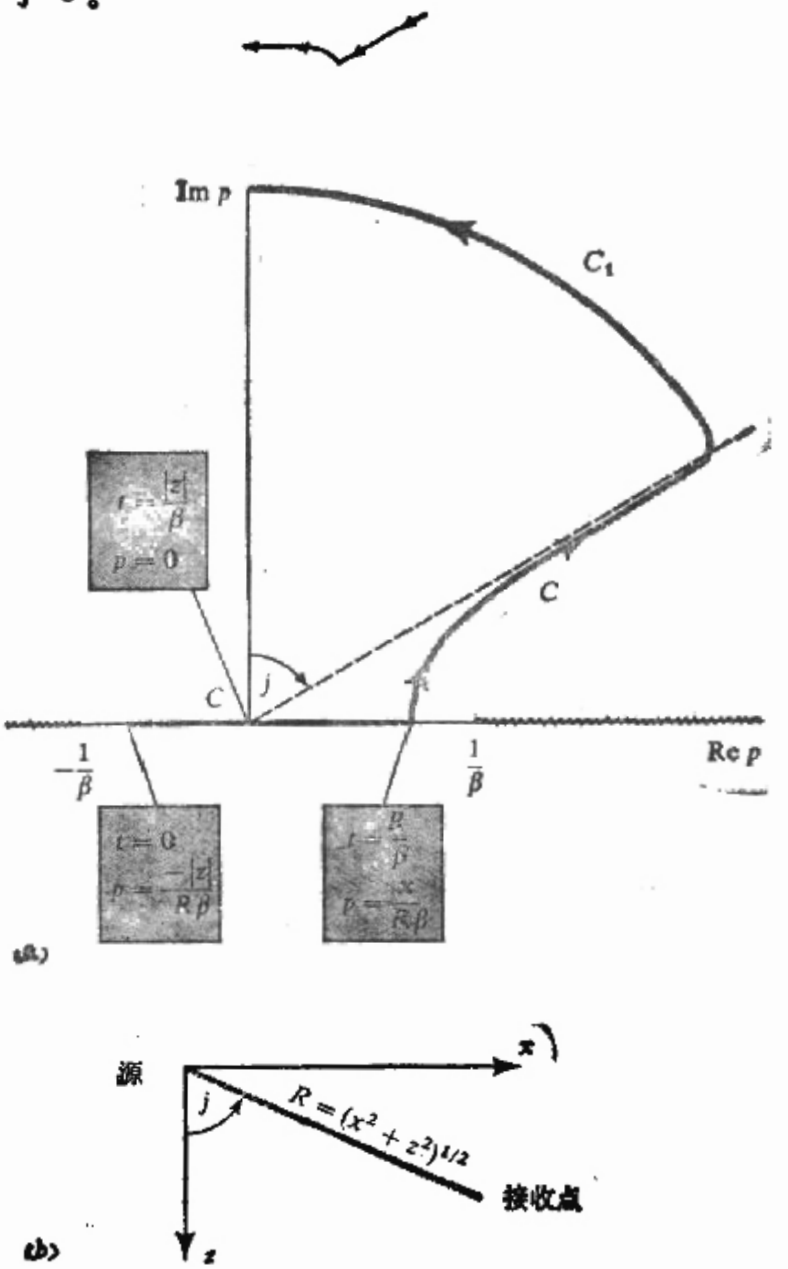


图 6.14

(a) 在复 p 平面中表示出由(6.49)给定的 Cagniard 路径 C，从负实 p 轴上的 $t=0$ 开始，在 $t=R/\beta$ 转而成为双曲线的一支，继而在第一象限沿一条其渐近线同正虚 p 轴构成角 $j=\arctan\frac{x}{|z|}$ 的路径。注意，在实 p 轴上，C 不能位于分支切割上。还表示出第一象限中连接虚 p 轴和 C 的大圆弧的一部分。(b) 角 j 定义为射线从源到接收点的入射角

处理(6.47)的下一步是，看一看沿正虚 p 轴的积分能否代之以取沿 Cagniard 路径，在它上面 t 从零增大到无穷。事实上，沿着 C 在 $t=0$ 和 $t=R/\beta$ 之间的部分，该被积函数没有贡献，因为 p 和(6.47)中的被积函数都是纯实数。第一象限中的大弧 C_1 也没贡献(参看补充 6.8)。既然在 C 和正虚 p 轴之间不存在奇点，所以我们得到

$$v(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_C\frac{e^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}dp\right\}. \qquad (6.50)$$

现在剩下的只是转而用 t 作为积分变量。根据(6.48)和(6.49)，可以证明，对于 $t>R/\beta$，在 C 上有

$$\frac{dp}{dt}=\frac{i\eta}{(t^2-R^2/\beta^2)^{\frac{1}{2}}},$$

它最后给出

$$v(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\int_{R/\beta}^{\infty}\frac{e^{-st}}{(t^2-R^2/\beta^2)^{1/2}}dt, \qquad (6.51)$$

补充 6.8

Jordan 引理

我们来证明，当大弧 C_1(图 6.14 中所示)的半径趋于∞时，

$$\int_{C_1}\frac{e^{-s(px+\eta|z|)}}{\eta}dp\to 0.$$

在 C_1 上，对于某个大 L 有 $p=Le^{i\theta}$，并且 $0\leqslant\pi/2-j\leqslant\theta\leqslant\pi/2$。这时 $\eta\sim ip$(因为 $\mathrm{Re}\,\eta>0$)和 $\eta\sim L\sin\theta-iL\cos\theta$，因而

$$\left|\int_{C_1}\right|\leqslant\int_{\pi/2-j}^{\pi/2}2\exp[-s(L\cos\theta x+L\sin\theta|z|)]d\theta \qquad (1)$$

(假定 L 足够大)，插进"2"以保证≤的正确)。如果 x 和 z 都不为零，则这里的指数总是趋于零的小数。若 x 为零，则 $j=0$，而 Cagniard 路径恰恰就是虚轴，于是就没有需要证明的了。但如果 $z=0$，则 $j=\pi/2$，而我们必须检验，即使(1)的被积函数当 $\theta\to\pi/2$ 时不趋于零，但(1)的积分对于大 L 仍趋于零。我们利用不等式，当 $0<\theta<\pi/2$，有 $1-2\theta/\pi<\cos\theta$。根据(1)，利用 $|z|=0$，当 $L\to\infty$，

$$\left|\int_{\sigma_1}\right| \leqslant \int_0^{\pi/2} 2e^{-sL(1-2\theta/\pi)x}\,d\theta = \frac{\pi}{sL_x}(1-e^{-sL_x}) \to 0.$$

一般说，当 $L\to\infty$ 时 $\int_\Gamma e^{-\lambda p}f(p)dp\to 0$ 是对的，其中 λ 是正实数，Γ 是半圆 $p=Le^{-i\theta}(-\pi/2<\theta<\pi/2)$，在 Γ 上当 $|p|\to\infty$ 时 $|f(p)|\to 0$，这个一般结果是 Jordan 引理，常常用于当 λ 是负虚数，并以 Γ 作为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 的上半圆时。

由(6.51)我们看出

$$v(x,z,t)=\frac{A}{2\pi\rho\beta^2}\frac{H(t-R/\beta)}{(t^2-R^2/\beta^2)^{1/2}} \qquad (即6.42)$$

这就是我们重新推导 δ 函数响应的结果。注意，脉冲形状(6.42)有我们所期望的到时 $t=R/\beta$。在 $t=R/\beta$ 有一个 v 的奇点，但它可积，所以不难用体力 f 的响应与一般时间函数的褶积来得到。

下面我们审查一个可出现首波的简单 SH 问题。假定由 $f=(0,\ A\delta(x)\delta(z-z_0)\delta(t),\ 0)$ 给定的线源，作用于 $z<0$ 的半空间内，这时 $z_0<0$，并且该半空间沿 $z=0$，与 $z>0$ 的另一个半空间密接。密度和横波速度在上半空间为 ρ_1 和 β_1，在下半空间为 ρ_2 和 β_2(参看图 6.15)。取双重变换 $(x,\ t)\to(k_x,\ s)$，根据(6.44)，显然上部介质中的入射波为

$$v^{\wedge}(k_x,z,s)=\frac{A}{2\rho_1\beta_1^2 s\eta_1}\exp(-s\eta_1|z-z_0|), \qquad (6.52)$$

其中 $\eta_1=(1/\beta_1^2-p^2)^{\frac{1}{2}}$。$v$ 和 $\tau_{yz}=\mu\partial v/\partial z$ 在 $z=0$ 上的连续，决定着反射和透射系数 $\grave{S}\acute{S}$ 和 $\grave{S}\grave{S}$。根据(5.32)，它们是

$$\grave{S}\acute{S}=\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2},\quad \grave{S}\grave{S}=\frac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}.$$

因此，总场为

$$\text{当}\quad z<0,\ v(k_x,z,s)=\frac{A}{2\mu_1 s\eta_1}\{\exp(-s\eta_1|z-z_0|)+\grave{S}\acute{S}\exp[+s\eta_1(z+z_0)]\}, \qquad (6.53)$$

当 $z>0$，$v(k_x,z,s)=\dfrac{A}{2\mu_1 s\eta_1}\hat{S}\hat{S}\exp[-s(\eta_2 z+\eta_1 z_0)]$，

(6.54)

这些是进行 Cagniard-De Hoop 反演所需要的代数表示式。我们已经审查过(6.53)中的第一项，现在来审查第二项 $v^{反}$，它给出上部介质中的广义反射响应。采用曾导致(6.47)的那些步骤，我们得到

$$v^{反}(x,z,s)=\frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}\frac{1}{\eta_1}\left(\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right)\right.$$
$$\left.\times\exp[-s(px+\eta_1|z+z_0|)]dp\right\},\qquad(6.55)$$

它包括用 Re $\eta_1\geqslant 0$，Re $\eta_2\geqslant 0$ 所定义的分支。

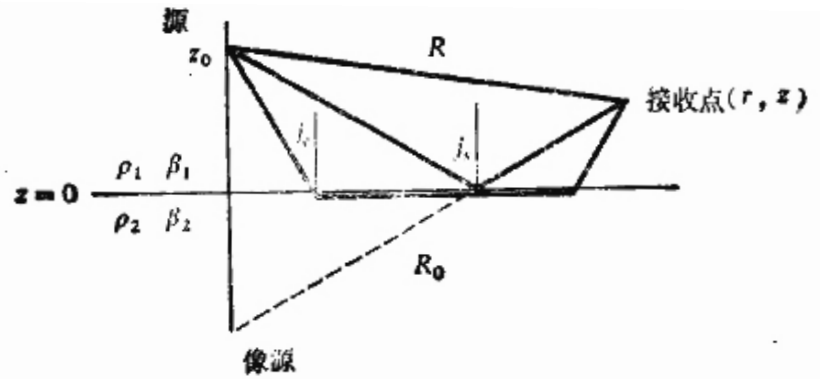
对于反射，Cagniard 路径 C 是

$$t=px+\eta_1|z+z_0|\qquad(6.56)$$

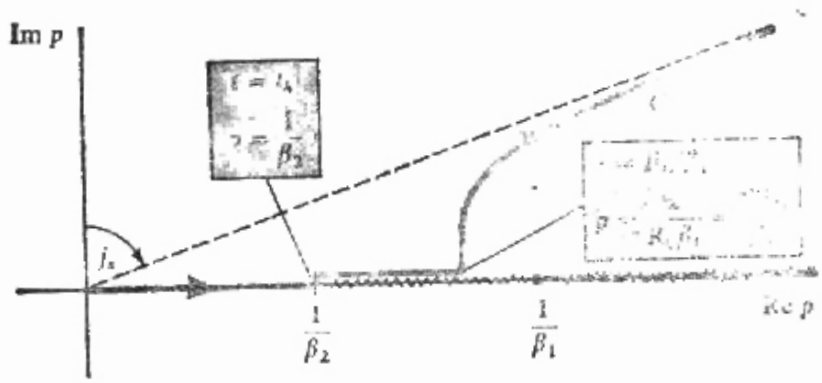
的一个解 $p=p(t)$，即

$$p=\begin{cases}\dfrac{xt-|z+z_0|\left(\dfrac{R_0^2}{\beta_1^2}-t^2\right)^{1/2}}{R_0^2} & t\leqslant\dfrac{R_0}{\beta_1},\qquad(6.56\,a)\\[2ex]\dfrac{xt+i|z+z_0|\left(t^2-\dfrac{R_0^2}{\beta_1^2}\right)^{1/2}}{R_0^2} & t\geqslant\dfrac{R_0}{\beta_1},\qquad(6.56\,b)\end{cases}$$

式中 $R_0=[x^2+(z+z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$ 是接收点与镜象源点间的距离(参看图 6.15 a)。把这个 Cagniard 路径和关于(6.55)的积分的最速下降路径比较一下，是很有趣的。为找出这后一个路径，我们采用补充 6.3 中的术语，使 $x=s$，$\zeta=p$，$f=-(px+\eta_1|z+z_0|)$。鞍点 $p=p_s$ 必定满足 $f'(p_s)=0$，即 $x\cos j_s=|z+z_0|\sin j_s$，这里的 $p_s=\beta_1^{-1}\sin j_s$，所以，p_s 正是源点与接收点之间反射射线的参数，j_s 是在上部介质中的入射角(参看图 6.15 a)。注意，某些与 6.2 节很相似之处开始出现[见(6.18)]。在那节，我们分析了 P 波问题，用 Fourier 变换并考虑了一个点源。而这里，我们也



(a)



(b)

图 6.15

(a)由两个沿 $z=0$ 密接的半空间组成的介质中，位于 $x=0$，$z=z_0<0$ 的 SH 线源的参数。$R_0=[x^2+(z+z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$ 是从下部介质中的镜象源点至接收点的距离。我们假定 $\beta_2>\beta_1$，临界角 $j_0=\sin\beta_1/\beta_2$。广角反射的入射角为 j_s，并且 $j_s>j_0$。(b) 当接收点在临界距离以外，因而 $j_s>j_0$ 并且能发生首波时，用来估算广义反射(6.55)的复射线参数平面的特征

求出本质上同样的鞍点位置。现在的差别是，最速下降路径垂直于实 p 轴，即 $\chi=\pi/2$(参看补充 6.3)；可是，我们以前得到的是 $\chi=-\pi/4$。事实上，在 Cagniard 路径处于实轴上(6.56 a)的地方，它是处于被积函数的一个“脊”上，此脊随着 t 增至 R_0/β_1 而降到在 $p_s=x/(R_0\beta_1)=\beta_1^{-1}\sin j_s$ 的鞍点。在那里 Cagniard 路径转过 $\pi/2$ 并追踪被积函数的一条“谷”，这是通常的当 t 从

R_0/β_1 增大时的最速下降路径(6.56 b)。

若接收点位于满足 $x/R_0<\beta_1/\beta_2$ 的某位置，则 Cagniard 路径从实 p 轴离开的点，位于来自 $p=1/\beta_1$ 和 $p=1/\beta_2$ 的分支切割的左边。(不等式意味着 x 小于首波开始能被观测到的临界距离)。分支切割的干扰没有发生，并且由于在 C 上 (对于 $t>R_0/\beta_1$)

$$\frac{dp}{dt}=i\eta_1\left(t^2-\frac{R_0^2}{\beta_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

所以

$$v^{反}(x,z,t)=\frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right\}\frac{H(t-R_0/\beta_1)}{(t^2-R_0^2/\beta_1^2)^{1/2}}. \quad (6.57)$$

[因为这时 $p(t)$是实数，见(6.56 a)，而被积函数 (6.55) 的虚部为零，所以，当 $t<R_0/\beta_1$，没贡献。]这个代数式(6.57)是精确的，对于 $t>R_0/\beta_1$，它的求值是首先用 (6.56 b) 得到 Cagniard 路径上的相应点，然后求出 $\eta_i=(\beta_i^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$ $(i=1,\ 2)$，最后代入(6.57)。

如果接收点是在临界距离以外，使 $1>x/R_0>\beta_1/\beta_2$，则 Cagniard 路径在 $1/\beta_2$ 与 $1/\beta_1$ 间的某点 $p=p_s$ 离开实 p 轴，如图 6.15 b 所示。从正虚 p 轴向 Cagniard 路径的变形象以前一样进行，但现在位于实 p 轴部分的路径可以有贡献。这就是首波的贡献，它出现在(6.55)沿 Cagniard 路径对 $1/\beta_2$ 与 $1/\beta_1$ sin j_s 间实 p 值的计算；这时 η_2 是纯虚数，所以被积函数有非零的虚部。相应的时间值由(6.56)求出：

$$在\ p=\frac{1}{\beta_2},\ t=t_h=\frac{x}{\beta_2}+|z+z_0|(\beta_1^{-2}-\beta_2^{-2})^{\frac{1}{2}}$$

t_h 是首波从$(0,\ z_0)$到$(x,\ z)$的时间；

$$在\ p=\beta_1^{-1}\ \sin\ j_s,\ t=R_0/\beta_1$$

是广角反射的到时。在时间 t_h 和 R_0/β_1 之间，η_2是负的纯虚量。于是，广义反射的精确式是

$$v^{反}(x,z,t)=\frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Im}\left\{\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right\}$$
$$\times\frac{H(t-t_k)-H(t-R_0/\beta_1)}{(R_0^2/\beta_1^2-t^2)^{1/2}}+\frac{A}{2\pi\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right\}$$
$$\times\frac{H(t-R_0/\beta_1)}{(t^2-R_0^2/\beta_1^2)^{1/2}}. \tag{6.58}$$

这里的最后一项，给出广角反射在时间 $t>R_0/\beta_1$ 的形状。但是，因为下部介质中的有关波是非均匀的$\left(p>\frac{1}{\beta_2}\right)$，所以有个相移。正如我们在补充 5.6 和在 6.2 节所表明的，广角反射的脉冲形状是入射脉冲形状及其 Hilbert 变换的线性和。后者包含 $t<R_0/\beta_1$ 时发生的，即来自(6.58)右边第一项的运动，它常被叫做首波项。在这个意义上，可以说广角反射是“从首波的尾巴中出现的”。但是请注意，无论何时，只要关于每种贡献的近似(渐近)理论一旦不能用[例如(6.25)，若接收点在临界距离附近，使 L 很小]，则把首波同反射的贡献分离开的企图，就将无用。虽然这是术语的失效，但(6.58)继续给出“首波”加“反射”的精确总效应。

关于二维问题的精确脉冲响应，我们在本节要考虑的最后问题，是半空间中 P-SV 波的线源，该半空间取作 $z>0$ 区域，自由面在 $z=0$。我们紧紧地仿照 Chapman(1972) 的作法，得到的结果有许多同上面 6.3 节类似之点。引进一个新概念，“漏能模式”，它和位于 Riemann 叶 {Re $\xi<0$; Re $\eta>0$} 上的 Rayleigh 函数的零值相联系。

我们来考虑只在 x 和 z 方向有位移的 P-SV 运动。这时，根据 5.1 节所给的论证，用经由

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi+\nabla\times(0,\psi,0)=(\partial\phi/\partial x-\partial\psi/\partial z,0,\partial\phi/\partial z+\partial\psi/\partial x) \tag{6.59}$$

而与位移相联系的标量势 ϕ 和 ψ 进行计算就足够了。该运动的源是体力 $\boldsymbol{f}$，它(不失普遍性) 由 $\boldsymbol{f}=\nabla\Phi+\nabla\times(0,\Psi,0)$ 给定。根据 Lamé 定理，这些势满足

$$\ddot{\phi}=\alpha^2\nabla^2\phi+\Phi/\rho \text{ 和 } \ddot{\psi}=\beta^2\nabla^2\psi+\Psi/\rho, \tag{6.60}$$

而为了给定在深度 h 处的线源，我们取

$$\Phi(x,z,t)=L_0(t)\delta(x)\delta(z-h) \quad (P \text{ 波源})$$
$$\Psi(x,z,t)=M_0(t)\delta(x)\delta(z-h) \quad (SV \text{ 波源}) \tag{6.61}$$

这两个源中的每一个，都产生在自由面入射的波，进行变换 $(x,t)\to(k_x, s)$ 之后，通过与(6.52)的对比，我们看到入射波具有势

$$\phi^{\wedge}(k_x,z,s)=\frac{L_0(s)}{2\rho\alpha^2 s\xi}e^{-s\xi|z-h|},$$
$$\psi^{\wedge}(k_x,z,s)=\frac{M_0(s)e^{-s\eta|z-h|}}{2\rho\beta^2 s\eta}. \tag{6.62}$$

象通常一样，我们这里用了 $\xi=(\alpha^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，$\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，并选择根 $\mathrm{Re}\ \xi>0$，$\mathrm{Re}\ \eta>0$ 来满足辐射条件。当波(6.62)到达自由面时，它们将产生 P 和 S 反射，它们的振幅取决于在 $z=0$ 上边界条件 $\tau_{zz}=\tau_{xz}=0$。变换到 (k_x,z,s) 域，我们就实质上把计算反射简化为一个平面波理论问题，使得总势恰恰为

$$\phi(k_x,z,s)=\frac{L_0(s)}{2\rho\alpha^2 s\xi}\{\exp(-s\xi|z-h|)+\acute{P}\grave{P}$$
$$\times\exp[-s\xi(z+h)]\}+\frac{M_0(s)}{2\rho\beta^2 s\eta}\frac{\alpha\acute{S}\grave{P}}{\beta}\exp[-s(\xi z+\eta h)],$$
$$\psi(k_x,z,s)=\frac{-L_0(s)}{2\rho\alpha^2 s\xi}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\acute{P}\grave{S}\exp[-s(\eta z+\xi\eta)]$$
$$+\frac{M_0(s)}{2\rho\beta^2 s\eta}\{\exp(-s\eta|z-h|)-\acute{S}\grave{S}\exp[-s\eta(z+h)]\}, \tag{6.63}$$

其中的反射系数和转换系数(见(5.26)—(5.27)；(5.30)—(5.31))为

$$\acute{P}\grave{P}=\frac{4p^2\xi\eta-(\beta^{-2}-2p^2)^2}{R(p)},\quad \acute{S}\grave{P}=\frac{4\beta p\eta(\beta^{-2}-2p^2)/\alpha}{R(p)},$$
$$\acute{P}\grave{S}=\frac{4\alpha p\xi(\beta^{-2}-2p^2)/\beta}{R(p)},\quad \acute{S}\grave{S}=\frac{-4p^2\xi\eta+(\beta^{-2}-2p^2)^2}{R(p)}, \tag{6.64}$$

而

$$R(p)=4\,p^2\xi\eta+(\beta^{-2}-2\,p^2)^2 \tag{6.65}$$

是 Rayleigh 函数。

补充 6.9

关于多重变换解(6.63)的写法

阻碍立即写出(6.63)式的唯一困难，与我们的符号约定以及反射系数和转换系数归一化的细节有关。从第五章开始，我们采用了写这些位移振幅比系数的约定，正号代表运动沿 x 增大的方向（见图 5.5)。因为(6.63)是关于势的，所以分别对 $\acute{P}\grave{S}$ 和 $\acute{S}\grave{S}$ 引进了负号，对 $\acute{S}\grave{P}$ 和 $\acute{P}\grave{S}$ 引进了因子 α/β 和 β/α。

实际上，并不把势反演回时间域，然后用(6.59)求位移分量。相反，求出变换的与(6.63)等效的位移分量，直接把它们反演到时间域。利用 $\boldsymbol{u}=(u,0,w)$ 并认识到算符 $\partial/\partial x$ 变为在变换域中乘以 $(-sp)$，于是根据(6.59)，对于 $0\leqslant z\leqslant h$，有

$$\begin{pmatrix}u(k_x,z,s)\\ w(k_x,z,s)\end{pmatrix}=\frac{L_0(s)}{2\,\rho\alpha^2\xi}\left[\begin{pmatrix}-p\\ \xi\end{pmatrix}\exp\left[s\,\xi(z-h)\right]+\right.$$

$$\left.+\acute{P}\grave{P}\begin{pmatrix}-p\\ -\xi\end{pmatrix}\exp\left[-s\,\xi(z+h)\right]\right]+\frac{M_0(s)}{2\,\rho\beta^2\eta}\frac{\alpha}{\beta}\acute{S}\grave{P}\begin{pmatrix}-p\\ -\xi\end{pmatrix}$$

$$\exp[-s(\xi z+\eta h)]+\frac{L_0(s)}{2\,\rho\alpha^2\xi}\frac{\beta}{\alpha}\acute{P}\grave{S}\begin{pmatrix}-\eta\\ p\end{pmatrix}\exp[-s(\eta z+\xi h)]$$

$$+\frac{M_0(s)}{2\,\rho\beta^2\eta}\left[\begin{pmatrix}-\eta\\ -p\end{pmatrix}\exp[s\eta(z-h)]+\acute{S}\grave{S}\begin{pmatrix}-\eta\\ p\end{pmatrix}\exp\left[-s\eta(z+h)\right]\right]. \tag{1}$$

既然向量

$$\begin{pmatrix}-p\\ \xi\end{pmatrix}\quad\text{和}\quad\begin{pmatrix}-\eta\\ -p\end{pmatrix}$$

分别有振幅 $1/\alpha$ 和 $1/\beta$，所以在 $\acute{S}\grave{P}$ 前面放个因子 α/β（在 $\acute{P}\grave{S}$ 前面放因子 β/α），以使转换系数保持其作为位移振幅比的标准定义。

在本节的余下部分，为了建立某些一般的方法并得到特殊的结果，我们仅仅讨论只把一种波反演到时间域。((6.63) 指出总

共有六种波，其中两种是入射波，没有什么意义。）我们选择在 $M_0(t)=M_0H(t)$（即固定 M_0 高度的阶跃，其 Laplace 变换为 M_0/s）情况下，计算广义 $\acute{S}\grave{S}$ 反射。根据补充 6.9 中(1)式的最后一项，此波的水平位移分量是 u_{ss}，这里

$$u_{ss}(k_x,z,s)=\frac{-M_0}{2\rho\beta^2 s}\acute{S}\grave{S}\exp[-s\eta(z+h)]. \quad (6.66)$$

因为 $\acute{S}\grave{S}$ 是 p 的偶函数，所以 k_x 的逆变换可写作

$$u_{ss}(x,z,s)=\frac{-M_0}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{i\infty}\acute{S}\grave{S}(p)\exp[-spx - s\eta(z+h)]dp\right\} \quad (6.67)$$

（请回顾 $k_x=isp$）。用 $t=px+\eta(z+h)$ 来定义 Cagniard 路径，即

$$p(t)=\begin{cases}\dfrac{xt-(z+h)\left(\frac{R_0^2}{\beta^2}-t^2\right)^{1/2}}{R_0^2} & t\leqslant\dfrac{R_0}{\beta},\\[2ex] \dfrac{xt+i(z+h)\left(t^2-\frac{R_0^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}{R_0^2} & \dfrac{R_0}{\beta}\leqslant t,\end{cases} \quad (6.68)$$

其中 $R_0=[x^2+(z+h)^2]^{\frac{1}{2}}$ 是接收点与镜象源点间的距离，我们得到

$$u_{ss}(x,z,s)=\frac{-M_0}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\int_0^{\infty}\acute{S}\grave{S}(p)e^{-st}\frac{dp}{dt}dt\right\},$$

因而时间域中的精确解为

$$u_{ss}(x,z,t)=\frac{-M_0}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\acute{S}\grave{S}(p)\frac{dp}{dt}\right\}$$

$$=\frac{M_0}{2\pi\rho\beta^2}\mathrm{Im}\left\{\frac{4p^2\xi\eta-(\beta^{-2}-2p^2)^2dp}{4p^2\xi\eta+(\beta^{-2}-2p^2)^2dt}\right\}\Bigg|_{p=p(t)} \quad (6.69)$$

在此式中，

$$\frac{dp}{dt}=\begin{cases}\dfrac{\eta}{\left(\dfrac{R_0^2}{\beta^2}-t^2\right)^{1/2}} & 0<t<\dfrac{R_0}{\beta},\\[2ex] \dfrac{i\eta}{\left(t^2-\dfrac{R_0^2}{\beta^2}\right)^{1/2}} & \dfrac{R_0}{\beta}<t,\end{cases}$$

所以，(6.69) 中一个可积的奇点，是在反射波的射线到时，即 $t=R_0/\beta$。

虽然精确解(6.69)简单，但仍值得花时间进一步讨论，因为识别与复 p 平面相联系的各种特征（参看图 6.16 b）以及由这些特征控制的波的近似性质，需要有深刻的认识。例如，接收点(如果它离源点足够远)上的第一个到达波是首波，其射线参数是 $1/\alpha$，而到时为 $t_h=x/\alpha+(z+h)(\beta^{-2}-\alpha^{-2})^{\frac{1}{2}}$。它的脉冲形状取决于(6.69)在 $t=t_h$，$p=1/\alpha$ 附近的计算，对于这些值，Cagniard 路径位于在 $p=1/\alpha$ 开始的分支切割上。另一个重要的到达波，是与(6.67)的鞍点相联系的反射。它在Cagniard 路径上发生于 $t=R_0/\beta$，并具有与我们在(6.57)和 (6.58) 中所研究的相类似的性质。出现的两个新现象是由(6.67)中被积函数的极点，即Rayleigh 函数

$$R(p)=4\,p^2\xi\eta+(\beta^{-2}-2\,p^2)^2$$

的零值造成的。

由 5.3 节知道，$R(p)$在$\{\mathrm{Re}\,\xi\geqslant 0;\ \mathrm{Re}\,\eta\geqslant 0\}$叶上$p=\pm 1/\beta$附近的 $p=\pm 1/C_R$ 有零值，这儿的 ξ 和 η 实际为纯虚数。$R(p)$ 在$\{\mathrm{Re}\,\xi<0;\ \mathrm{Re}\,\eta\geqslant 0\}$叶上的 $p=\pm 1/\alpha$ 附近也有零值。这个叶在下述意义上常被叫做“被禁的”或者“非物理的”，就是在该叶某点上求值的被积函数随 $z\to\infty$ 将趋于无穷，这违反辐射条件。但是我们将发现，在禁用叶上 $R(p)$的零值上，$\hat{S}\,\hat{S}$ 的极也能对地震图做出可鉴别的贡献。

我们先来估计在 $p=1/C_R$ 上Rayleigh 极的效应。随着源点至接收点距离的增大，角 j_*增大（图 6.16 a），而Cagniard 路径

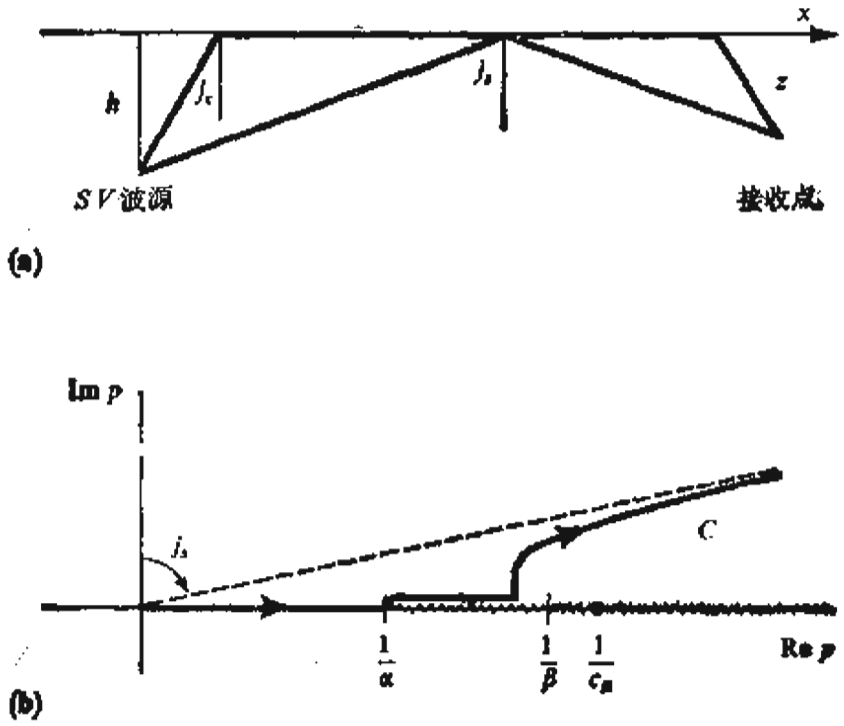


图 6.16

对于隐埋在均匀半空间中的线源的广义ss反射。(a)$j_s>j_c$情况下的源点—接收点几何关系，表示出反射和首波两种路径。(b) 复p平面，Cagniard 路径处于 Riemann 叶$\{\mathrm{Re}\xi>0;\ \mathrm{Re}\eta>0\}$上。在$p=1/C_R$的 Rayleigh 极，现在位于两条分支切割上

渐近线变得靠近实 p 轴（图 6.16 b）。因此，Cagniard 路径本身在靠近 Rayleigh 极处通过。如果画出 $p=1/C_R$ 附近的 $\hat{S}\hat{S}(p)$ 等值线，如图 6.17 所示，则显而易见，在极附近的大 $\hat{S}\hat{S}(p)$ 值，将导致可辨认的 Rayleigh 波，只要 Cagniard 路径距 $p=1/C_R$ 足够近。为估计何时 Rayleigh 脉冲发育良好，我们可以看看在真"到时" x/C_R 处，是否Cagniard路径比能影响(6.69)中 u_{ss}的 $\hat{S}\hat{S}$ 和 dp/dt 的次一个最近特征更靠近 Rayleigh 极。因为这个次一个最近特征是 $p=1/\beta$ 的支点，所以显然，如果

$$\left| p\left(\frac{x}{c_R}\right)-\frac{1}{c_R}\right|<\frac{1}{c_R}-\frac{1}{\beta}, \tag{6.70}$$

则可能 Rayleigh 波很发育。在上述不等式中，我们可由 (6.68) 求出 p 在时间 x/c_R 的值，并得到一个完全等价的几何关系

$$\tan j_s > \left(\frac{2c_R}{\beta - c_R}\right)^{1/2} \tag{6.71}$$

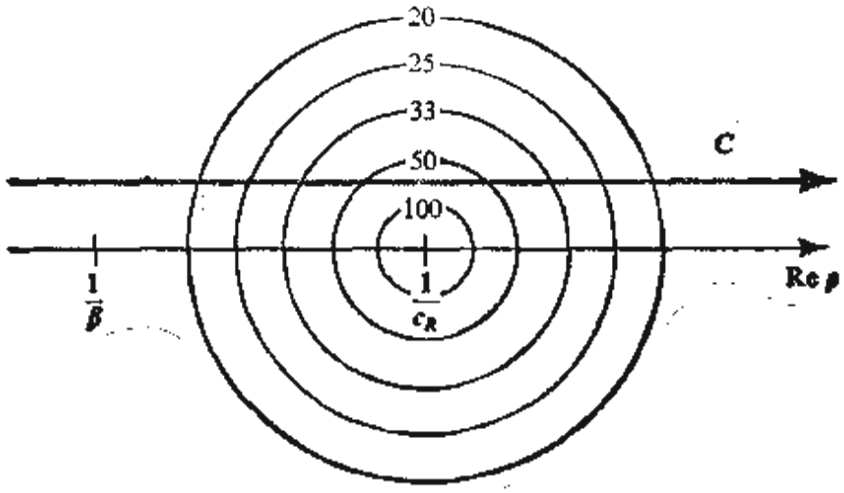


图 6.17

对于 Rayleigh 极附近的值，将$ss(p)$的大小在复 p 平面上画出等值线。这时$\dot{S}\dot{S}(p) \propto (p - 1/c_R)^{-1}$，所以等值线实质上是一组以极点为圆心的同心圆。所标出的数字是比值$1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}\cdots$ 这适合于半径的等增量。对于大 j_s 值(见图 6.16 a，b)，Cagniard路径C表明切穿靠近极点的等值线；由(6.69)所给的相联系的u_{SS}值，在这些时间上显然将很大。这些值构成 Rayleigh 波脉冲形状(即其横波分量。广义$\dot{S}\dot{P}$还有一部分贡献给出P波分量)

实际上，这个结果看来比我们对P波源所展示的中野不等式(6.34)更好（那个不等式的符号是反的，因为它指明的是Rayleigh 波不发育的范围)。由于对许多岩石 $c_R \sim 0.92\beta$，所以，从(6.71) 得到的结论是，要使 Rayleigh 波发育，变程必须至少比源点加接收点深度大五倍。

Gilbert和 Laster(1972)把在 $p = 1/c_R$ 的极，标为$\bar{S}$极，把相联系的Rayleigh 波标为$\bar{S}$脉冲。采取这种标记法是因为，一般说，Rayleigh 波是与附近的同自由面发生相互作用的S波波阵面相联系的衍射现象。与此类似，存在一个与 $R(p)$ 的下述极相联系的效应，这些极通常位于 $p = 1/\alpha$ 附近，只对大于大约 0.4

的Poisson比值才从这个支为移开。Gilbert 和 Laster 称之为 $\bar{P}$ 极的这些极，不在物理的 Riemann 叶上。引入Phinney(1961)的记号，我们指定物理叶{Re$\xi>0$; Re$\eta>0$}为(++)叶，与此类似，其它三个叶为(+−)，(−+)和(−−)。Rayleigh 极($\bar{S}$)在(++)叶上，$\bar{P}$ 极在(−+)叶上。

可以合理地认为，位于非物理叶上的 $\hat{S}\hat{S}$ 的极，不能影响(6.69)中的广义反射 u_{ss}，因为 Cagniard 路径完全在(++)叶上。图 6.18 所示是在一个 $\bar{P}$ 极附近的一组 $\hat{S}\hat{S}$ 等值线。因为我们关心的是(++)叶的第一象限（这是我们的 Cagniard 路径所在的区域）中的 $\hat{S}\hat{S}$ 值，所以，正是这一叶，在图 6.18 的第一象限被画出了等值线。$\hat{S}\hat{S}$ 进入第四象限(即穿过 $1/\alpha<p$ 的实 p 值)时的解析延拓，则要求它进入不同的 Riemann 叶，即(−+)叶的第四象限，并且在这个区域有一个 $\hat{S}\hat{S}$ 的极。所画出的极实际上是在适合于 Poisson比大约为 0.4 的位置，要点是与此极相联系的等值线不在物理叶上出现。对于足够大变程上的接收点，使 Cagniard路径位于或接近于实 p 轴，图 6.18 中用实线画的这些等值线在求(6.69)的值时将被穿过，结果将是相当宽的脉冲形状。这就是Gilbert, Laster, Bachus和Schell(1962)详细描述过的 $\bar{P}$ 脉冲。它出现在射线参数位于 $1/\alpha$ 和 $1/\beta$ 之间时，它在地震图上的位置，是在首波和广角反射波之间。图 6.19 a表示出一个例子。

当 Poisson 比值从 0.4 向 0.263 左右减小时，$\bar{P}$ 极迁移到实轴上刚刚在 $p=1/\alpha$ 左边一点的地方(但仍在(−+)叶上)。随着 Poisson 比从 0.263 向零进一步减小，$\bar{P}$极保持在实 p 轴上，一个极实际上趋于在 $p=1/\alpha$ 的支点本身（参看问题 6.3)。在产生首波的 Cagniard 路径的那个点附近，极点（也在 $p=1/\alpha$，但是在(++)叶上）的存在，具有使到达的首波相对其通常形状发生畸变的效应。在图 6.19 b 中，对于通常 Poisson 比的值(0.25)，我们给出一个 u_{ss} 的例子，而在图 6.19 c 中，我们对于非常低的 Poisson比(0.1)，给出理论地震图。

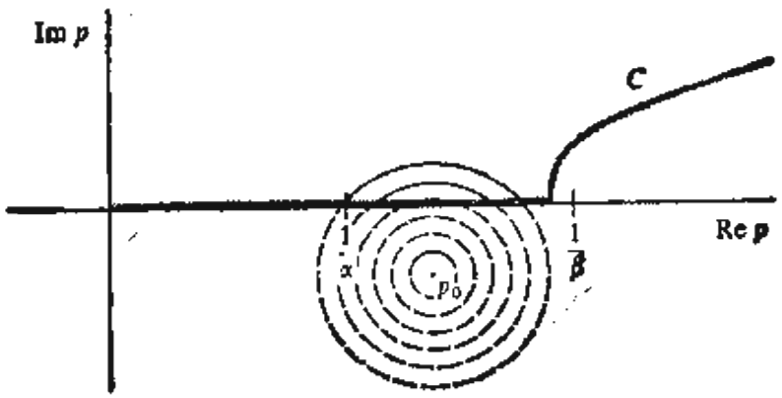


图 6.18

在"非物理的"Riemann叶上 $\bar{P}$ 极 $p=p_0$ 附近，表示 $\hat{S}\hat{S}(p)$ 大小的等值线。这是 $(-+)$ 叶，且 $R(p_0)=0$，这里仍有 $R(p)=4p^2\xi\eta+(\beta^{-1}2p^2)^2$。虽然靠近 p_0 的等值线是全部位于 $(-+)$ 叶第四象限中的同心圆，但半径较大的等值线必定跑到从 $p=\frac{1}{\alpha}$ 向右跑的分支切割上去。这些等值线这时将扩展到物理的 Riemann 叶的第一象限。因为这是使 $\hat{S}\hat{S}(p)$ 穿过分支切割时保持为解析的方法(见补充 6.2)。在 $(-+)$ 叶上，等值线画成虚线，等值线扩展到 $(++)$ 叶上时画成实线。注意，对于 $1/\alpha$ 与 $1/\beta$ 之间的线段，Cagniard 路径位于实 p 轴上

$\bar{P}$ 脉冲是漏能横式的一个简单例子。形容词"漏能"是恰当的，因为，对于受到 $\bar{P}$ 极影响的这部分 Cagniard 路径，η 或是纯实数，或对于反射波刚刚到达后的时间，只有一个小虚部。这意味着能量作为 SV 运动离开自由面向下辐射。对于 $\bar{S}$ 不发生这样一种辐射漏能，因为对于 $\bar{S}$，ξ 和 η 二者都是虚数。在第七章我们要进一步考虑漏能模式。

6.5 对于点源的Cagniard-De Hoop 方法

上面已经看到，Cagniard-De Hoop 分析二维问题(线源)的引人注目的特征就是，精确的代数解是可能的。对于三维问题，

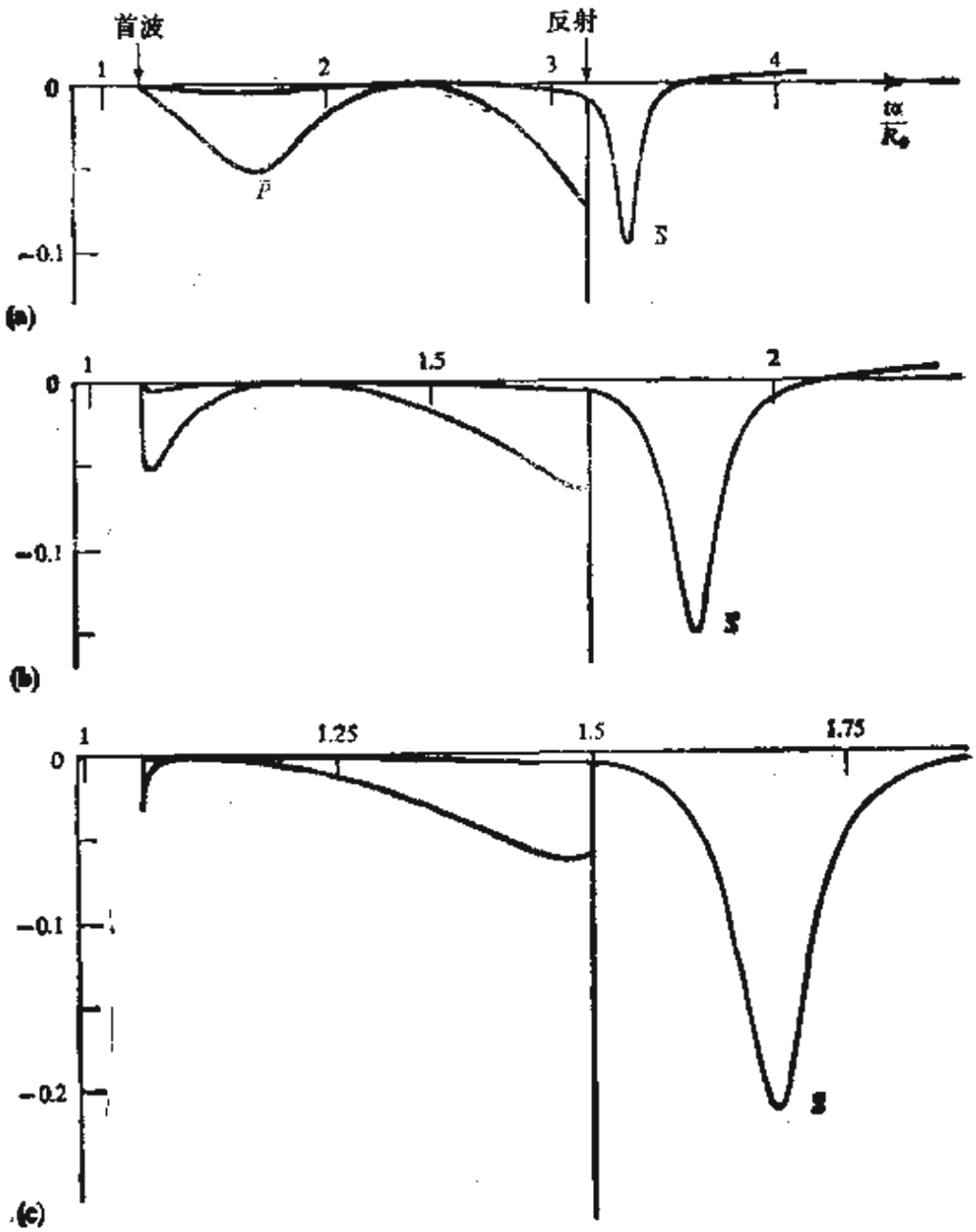


图 6.19

对于三个不同的 Poisson 比，(6.69) 所给广义$\acute{S}\grave{S}$反射的水平分量表示为时间的函数。我们用无量纲的时间 $t\alpha/R_0$，这里的 R_0 是接收点与镜像源点间的距离：$(h,x,z)=(1.20,\ 0.1)$单位。因为首波在其路径的大部分上以 P 波速度传播，所以它在刚刚 $t\alpha/R_0=1$之后到达。时间标度的选取，是使首波和反射波的时间相匹配。为阐明首波和反射波到达之间的脉冲形状细节，还对这一部分地震图使用增大十倍的振幅标度(用灰色表示)。(a)Poisson比等于 4/9。有一个离开实 p 轴的如图 6.18 所示类型的$\bar{P}$极，导致首波到时与广角反射之间的$\bar{P}$ 波。(b)Poisson 比等于 1/4。首波和广角反射波是清楚分开的脉冲。(c) Poisson 比等于 1/10。一个$\bar{P}$极在实 p 轴上，靠近支点$p=1/\alpha$，尽管不在(++)叶上。其主要效应是影响首波的形状，这里是给出一个脉冲形到达波。虽然在反射波到时上有奇点，但这部分脉冲下的面积是很小的

我们这里将看到，在时间域的精确解通常不能表述为代数表示式，而是单一的有限积分。最近在地震学中，这些积分的运算是通过Cagniard路径本身的有限元进行的。但对于许多有实际意义的三维问题，可以求出解的适当近似形式[参看(6.94)、(6.95)]，其中的积分很容易计算，因为它们是褶积。

我们还是从简单的SH问题开始，用两种坐标，即笛卡尔坐标(x,y,z)和有关的柱坐标(r,ϕ,z)。假定无限弹性介质中的点源是位于原点的点扭力矩，使体力为

$$f=\nabla\times(0,0,X), \tag{6.72}$$

其中体力势X为轴对称，于是$X=X(r,z,t)$与ϕ无关。该源只激发位移u的方位分量，这个分量与ϕ无关。所以，在柱坐标中

$$u=\nabla\times(0,0,\chi)=(0,-\partial\chi/\partial r,0), \tag{6.73}$$

而运动方程简化为

$$\rho\ddot{\chi}=X+\mu\nabla^2\chi. \tag{6.74}$$

对于在原点的点源，用阶梯状时间函数，有

$$X=N_0H(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z)=N_0H(t)\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z) \tag{6.75}$$

N_0为一常数，并根据(4.4)，显然SH势χ的解精确地等于

$$\chi(x,y,z,t)=\frac{N_0}{4\pi\rho\beta^2}\frac{H(t-R/\beta)}{R}, \tag{6.76}$$

其中用到$R=|x|$。

现在让我们用三维问题的Cagniard-De Hoop方法再次推导这个结果。

我们从取三重变换

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik_xx)dx\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ik_yy)dy\int_{c}^{\infty}\exp(-st)dt$$

入手，对(6.74)和(6.75)进行运算，

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\chi(k_x,k_y,z,s)=-\frac{N_0}{\rho\beta^2s}\delta(z)+n^2\chi(k_x,k_y,z,s),$$

式中$n^2=k_x^2+k_y^2+s^2/\beta^2$。与(6.43)和(6.44)比较后，得到

$$\chi(k_x,k_y,z,s)=\frac{N_0}{2\rho\beta^2 sn}e^{-n|z|}, \qquad (6.77)$$

选取 $\mathrm{Re}\,n>0$。

我们想得到的解的 Laplace 变换，由(6.77) 的两个 Fourier 逆变换给出：

$$\chi(x,s)=\frac{N_0}{8\pi^2\rho\beta^2 s}\int_{-\infty}^{\infty}dk_x \times\int_{-\infty}^{\infty}dk_y\,\frac{\exp(ik_x x+ik_y y-n|z|)}{n}, \qquad (6.78)$$

而我们的目的是，把这个公式重新整理为前向 Laplace 变换的形式，根据它，可把被积函数看作时间域中的 χ。

为此，我们用新变量(w,q) 研究(k_x,k_y) 平面，它们的定义是

$$k_x=s(w\cos\phi-q\sin\phi),\quad k_y=s(w\sin\phi+q\cos\phi) \qquad (6.79)$$

这是 De Hoop 变换(De Hoop,1960)，它包括方位坐标 ϕ，并且实际上由整个水平向波数平面的旋转和伸长构成。因为 $x=r\cos\phi$，$y=r\sin\phi$，而面积元 $dk_x dk_y$ 现在用 s^2dwdq 代替，我们由(6.78)得到

$$\chi(x,s)=\frac{N_0}{8\pi^2\rho\beta^2}\int_{-\infty}^{\infty}dw\int_{-\infty}^{\infty}dq\,\frac{\exp(iswr-s\eta|z|)}{\eta}, \qquad (6.80)$$

式中 $\eta=(\beta^{-2}+q^2+w^2)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{Re}\,\eta>0$。

把解(6.80)逆变换到时间域的一个标准方法，是把 q 积分转换到 w 积分的前向 Laplace 变换。这个方法在应用力学文献中常被采用，并被用于在我们第十五章所引用的解(参看方程(15.30)和(15.31)，其中取消了 q 和 w 的附加因子 $\frac{1}{\alpha}$，以使这些变量无量纲)。得到的解 $\chi(x,t)$ 是在 w 值的有限范围内的积分。

对(6.80)进行逆变换的另一方法，是利用同线源问题的相似性。为把(6.80)的被积函数变为与二维情况[例如，参看(6.46)]

相类似的形式，我们用 $p=-iw$ 改变 w 变量，给出

$$\chi(x,s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\int_0^\infty dq \times \mathrm{Im}\left[\int_0^{i\infty}\frac{\exp[-s(pr+\eta|z|)]}{\eta}dp\right], \tag{6.81}$$

式中 $\eta=(\beta^{-2}+q^2-p^2)^{\frac{1}{2}}$。[为从(6.80)得到(6.81)，我们用了积分限的一半和 q 的偶数性质；以及被积函数的实部和虚部对 w 的偶数性和奇数性。]

(6.47)与(6.81)被积函数间的相似，现在是很明显的。这里请注意，水平变量是 r 而不是 x，并且在 η 的定义中用 $\frac{1}{\beta^2}+q^2$ 代替 $\frac{1}{\beta^2}$。以前我们得出

$$\mathrm{Im}\left[\int_0^{i\infty}\frac{\exp[-s(px+\eta|z|)]}{\eta}dp\right]\quad(\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{1/2})$$

是

$$\frac{H\left(t-\frac{(x^2+z^2)^{1/2}}{\beta}\right)}{\left(t^2-\frac{x^2+z^2}{\beta^2}\right)^{1/2}}$$

的 Laplace 变换，这使我们现在能把(6.81)写为

$$\chi(x,s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\int_0^\infty dq \times\int_0^\infty\frac{H[t-R(\beta^{-2}+q^2)^{1/2}]}{[t^2-R^2(\beta^{-2}+q^2)]^{1/2}}e^{-st}dt. \tag{6.82}$$

这里我们用 $R=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=(r^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ 作为三维距离函数。剩下的只是交换(6.82)中的积分顺序，给出

$$\chi(x,s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\int_0^\infty dte^{-st}\left\{H\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\times\int_0^{(t^2/R^2-1/\beta^2)^{1/2}}\frac{dq}{[t^2-R^2(\beta^{-2}+q^2)]^{1/2}}\right\} \tag{6.83}$$

(参看图 6.20 的说明)，这时我们可以清楚地看出，所要求的解是

$$\chi(x,t)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}H\left(t-\frac{R}{\beta}\right)\times\int_0^{(t^2/R^2-1/\beta^2)^{1/2}}\frac{dq}{[t^2-R^2(\beta^{-2}+q^2)]^{1/2}}\qquad(6.84)$$

这实质上是 De Hoop(1960)的方法，我们列出关于 (6.84) 的下述评注；

i) 解具有点源问题的典型形式，这种问题的精确解是个单一的有限积分。

ii) 在我们的特殊情况下，(6.84)中的积分很容易用解析法求值。代入 $q=(t^2/R^2-1/\beta^2)^{\frac{1}{2}}\sin\theta$ 立即给出积分等于 $\pi/(2R)$，重新得到解(6.76)。

iii) 回到(6.83)，我们得出 $\chi(x,s)=(N_0e^{-sR/\beta})/(4\pi\rho\beta^2SR)$。对于一般的时间函数 $N_0(t)$，而不是我们直到现在一直假定的阶梯函数，有

$$\chi(x,s)=\frac{N_0(s)}{4\pi\rho\beta^2R}e^{-sR/\beta}\text{ 和 }\chi(x,t)=\frac{N_0(t-R/\beta)}{4\pi\rho\beta^2R}.$$

根据(6.73)，物理位移是

$$u_t=-\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{N_0(t-R/\beta)}{4\pi\rho\beta^2R}\right].$$

iv) 当存在分界面以及伴随的首波和界面波时，上述方法的变化只在于(6.82)的 t 积分比较复杂（仍可根据前面相应的二维问题的研究把它写出来）。

虽然上述解法是一种精彩和成功的方法，但它没有充分利用射线参数和复射线参数平面中积分的性质，这在 6.4 节中启发了我们的直觉。因此，现代对点源求解 Lamb 问题的方法，常常采用 Strick(1959)首创、而后由 Helmberger(1968)以及 Gilbert 和 Helmberger(1972)加以充实的方法，其中复射线参数平面仍起核

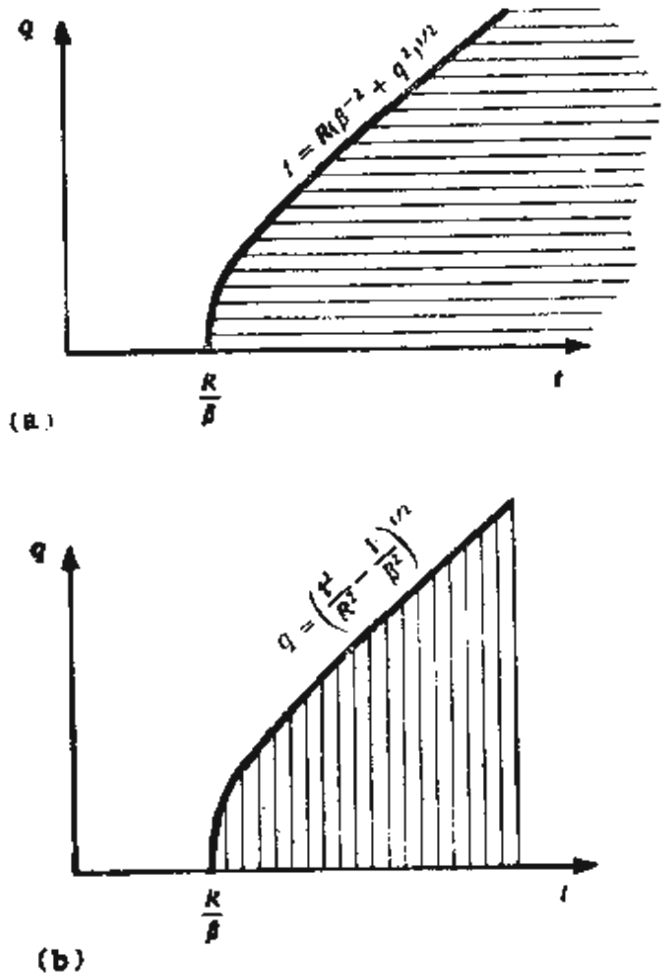


图 6.20

说明 t–q 平面中等效积分的示意图。(a) 先在固定的 q 进行 t 积分，如同在(6.82)中那样，以下限作为 q 的函数。(b) 先在固定的 t 进行 q 积分，如同在(6.83)中那样，以上限作为 t 的函数

心作用。这些方法要求熟悉 Hankel 变换以及有关的修正 Bessel 函数的结果，这在补充 6.10 中将予以详述。作为说明，我们还回到(6.74)—(6.75)问题，这次是用双重变换 $\int_0^\infty rI_0(\lambda r)dr \int_0^\infty e^{-st}dt$进行运算，以求解

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\chi(\lambda,z,s)=\frac{-N_0}{2\pi\rho\beta^2 s}\delta(z)+\left(\frac{s^2}{\beta^2}-\lambda^2\right)\chi(\lambda,z,s).$$

因此，双重变换的解是(比较(6.44)和(6.43))

$$\chi(\lambda,z,s)=\frac{N_0}{4\pi\rho\beta^2 s^2\eta}e^{-s\eta|z|} \tag{6.85}$$

式中 $\eta=\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{\lambda^2}{s^2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\mathrm{Re}\eta>0$。利用$\lambda=sp$(我们已经以某种形式做过多次因子化)和逆变换(补充 6.10 的方程(4))，我们看到

$$\chi(r,z,s)=\frac{N_0}{4\pi^2\rho\beta^2 i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{p}{\eta}K_0(spr)e^{-s\eta|z|}\,dp, \tag{6.86}$$

式中 $\eta=(\beta^{-2}-p^2)^{\frac{1}{2}}$，而 s,r,η 都是正实数。

补充 6.10

相对于竖直轴对称的函数的水平向变换

设有一个函数 $f=f(x,y)$，其中的变量实际上只依赖于 $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=r$，这时

$$f(k_x,k_y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)\exp[-i(k_x x+k_y y)]dxdy.$$

现在引入 k_r 和 ϕ'，就象我们在(6.5)中为展开 Sommerfeld 积分所做过的那样。采用曾导致(6.7)的方法，我们现在得到

$$f(k_x,k_y)=2\pi\int_0^{\infty}r\,f(r)J_0(k_r r)dr,$$

这仅仅是 k_r 的、而不是 ϕ'的函数。方便的是利用 $f(r)=f(x,y)$，而不是 $f(k_r)=f(k_x,k_y)/2\pi$。这时，由上面的和类似的逆变换处理，我们得到

$$\left.\begin{aligned}f(k_r)&=\int_0^{\infty}rf(r)J_0(k_r r)dr\\ f(r)&=\int_0^{\infty}k_r f(k_r)J_0(k_r r)dk_r\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这是零阶 Hankel 变换对。用归纳法，得到 n 阶 Hankel 变换对：

$$\left.\begin{aligned}f^{(n)}(k_r)&=\int_0^{\infty}rf(r)J_n(k_r r)dr\\ f(r)&=\int_0^{\infty}k_r f^{(n)}(k_r)J_n(k_r r)dk_r\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(当必须强调变换中所用 Bessel 函数的阶时，使用上标(n)。)

在任一特定波动问题中选用的 Hankel 变换的阶，是要使在讨论

的波动方程中，对变量 r 进行的运算简化成变换域中的标量乘积。例如，(6.74)中的微商可写成

$$\rho\ddot{\chi}=X+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\chi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right].$$

这里利用零阶 Hankel 变换是合适的，因为

$$\int_0^\infty r\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\partial\chi}{\partial r}\right)\right]J_0(k_r r)dr=-k_r^2\chi(k_r,z,t).$$

(这个等式是进行两次分部积分，然后利用 J_0 满足的微分方程得到的。)但是，$\mu_\phi=-\partial x/\partial x$ 满足的波动方程是

$$\rho\ddot{u}_\phi=f_\phi+\mu(\nabla^2\boldsymbol{u})_\phi=f_\phi+\mu\left(\nabla^2u_\phi-\frac{u_\phi}{r^2}\right). \tag{3}$$

而这里附加的最后一项表明，零阶 Hankel 变换可能是不会成功的。倒是一阶变换把(3)中所有对 r 的运算都简化成 k_r 域中的标量乘积。对于点源在 $r=0$ 的 P-SV 问题，零阶变换的利用适合于 u_z 和 τ_{zz}；一阶变换适合于 u_r 和 τ_{rz}。根据在波数-频率域中处理波动的"补充" 6.6，这些结果是显而易见的。

在用 Cagniard-De Hoop 方法求解二维问题时，我们早先用了水平向波数和射线参数间的关系 $k_x=isp$ [参看 (6.39)]。对于点源问题，这个关系显然变为 $k_r=isp$[请与 Fourier 时间变换的 (6.8)比较]，因此，对于纯虚 k_r 值，审查(2)将是重要的。我们若用 $k_r=i\lambda$ 这时(2)可写为

$$\left.\begin{aligned}f^{(n)}(\lambda)&=\int_0^{i\infty}rf(r)I_n(\lambda r)dr,\\ f(r)&=\frac{1}{\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\lambda f^{(n)}(\lambda)K_n(\lambda r)d\lambda,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

这里的 I_n 和 K_n 是修正 Bessel 函数。变换对(4)与(2)的关系，同 Laplace 变换与 Fourier 变换的关系相同。

注意到 $K_0(\xi^*)=[K_0(\xi)]^*$，我们可以看到(6.86)给出

$$\chi(x,s)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\operatorname{Im}\left\{\int_0^{i\infty}\frac{p}{\eta}K_0(spr)e^{-s\eta|z|}dp\right\} \tag{6.87}$$

考虑到对于大自变量的渐近结果

$$K_0(spr)=\left(\frac{\pi}{2spr}\right)^{1/2}e^{-spr}\left(1+O\left(\frac{1}{spr}\right)\right), \tag{6.88}$$

所以(6.87)与线源公式(6.47)十分相似。两个被积函数都涉及到复射线参数平面，但现在 τ 代替 x 作为水平变量。我们定义

$$\tau = p\tau + \eta|z|,$$

然后对第一象限中的 Cagniard 路径 $p=p(\tau)$ 求解(参看图 6.21)。把(6.87)中的积分路径变形到 Cagniard 路径，给出

$$\chi(x,s) = \frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\mathrm{Im}\int_{p(\tau)}\frac{p}{\eta}K_0(spr)e^{-s\eta|z|}dp, \quad (6.89)$$

最后，我们能够反演到时间域。

根据数学用表，我们知道 $K_0(s\sigma_1)$ 是

$$H(t-\sigma_1)(t^2-\sigma_1^2)^{-1/2}$$

的 Laplace 变换，因而 $K_0(s\sigma_1)e^{-s\sigma_2}$ 是

$$H(t-\sigma_1-\sigma_2)[(t-\sigma_2)^2-\sigma_1^2]^{-1/2}$$

的 Laplace 变换。所以，(6.89)意味着

$$\chi(x,t) = \frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\mathrm{Im}\int_{p(\tau)}\frac{p}{\eta}\frac{H(t-pr-\eta|z|)}{[(t-\eta|z|)^2-p^2r^2]^{1/2}}dp. \quad (6.90)$$

对这个积分的贡献只来自值 $R/\beta<\tau<t$(在下限被积函数开始有虚部，上限是阶梯函数所需要的截止值)，所以

$$\chi(x,t) = \frac{N_0}{2\pi^2\rho\beta^2}\mathrm{Im}\int_{R/\beta}^{t}\frac{p}{\eta}\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}(t-\tau+2p\tau)^{1/2}}\frac{dp}{d\tau}d\tau, \quad (6.91)$$

其中

$$p=p(\tau) = \frac{\tau\tau+i|z|(\tau^2-R^2/\beta^2)^{1/2}}{R^2},$$

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{i\eta}{(\tau^2-R^2/\beta^2)^{1/2}}\text{以及 }\eta=\left(\frac{1}{\beta^2}-p^2\right)^{1/2}\text{且 }\mathrm{Re}\eta>0$$

虽然(6.91)中的积分不是明显地有虚部$\frac{\pi}{2R}$，但是在考虑了上下两极限处的可积奇点以后进行数字求解，这个积分是简单

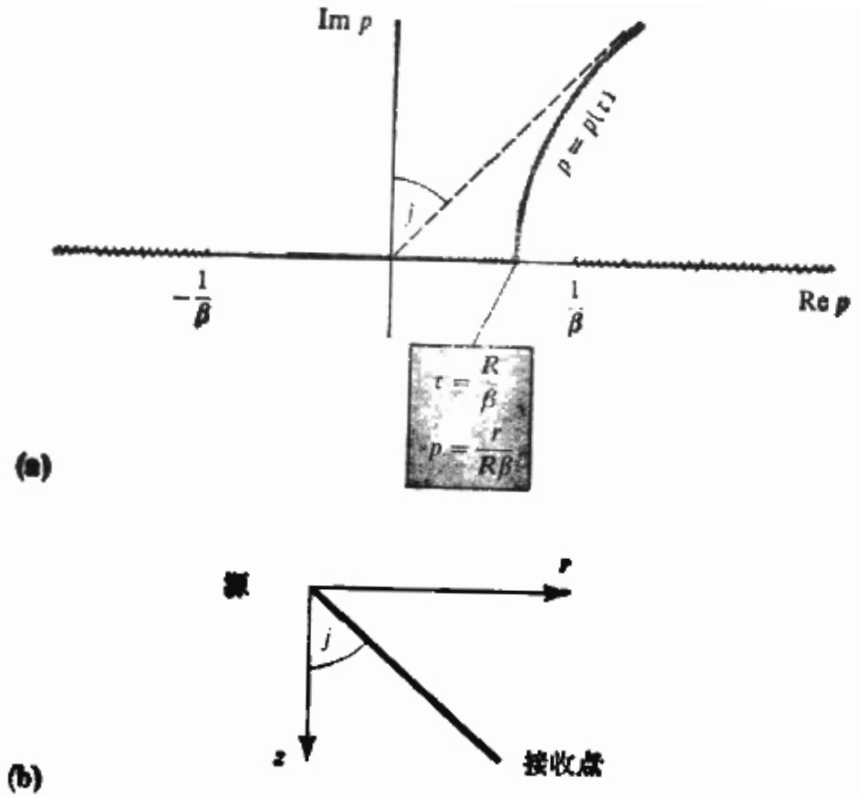


图 6.21
复射线参数平面和求(6.89)—(6.91)值的特征. 请注意与图 6.14 相似

的。

一旦掌握了(6.91)的推导，实际 Cagniard-De Hoop 应用的几乎所有特征相对来说都很简单。因此，假定两个半空间沿 $z=0$ 密接，如同图 6.15 所示，SH 波的点源作用于上部介质中的 $z_0<0$。上部介质中的 SH 势正是入射波

$$\chi^{\lambda}(x,t)=\frac{N_0}{4\pi\rho_1\beta_1^2}\frac{H(t-R/\beta_1)}{R},$$

其中利用了 $R=[r^2+(z-z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$[见(6.76)]以及广义的反射势。根据同线源问题的类似性和(6.91)，反射精确地等于

$$\chi^{\text{反}}(x,t)=\frac{N_0}{2\pi^2\rho_1\beta_1^2}\operatorname{Im}\int_0^t\frac{p}{\eta_1}\left[\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right]$$

$$\frac{1}{(t-\tau)^{1/2}(t-\tau+2\,pr)^{1/2}}\frac{dp}{d\tau}d\tau, \qquad (6.92)$$

其中 $p(\tau)$由(6.56)给定，但现在当然用 r 代替 x，用 τ 代替 t。(6.92)中的积分向下延伸到零，以便获得在 $\beta_2>\beta_1$ 情况下的可能首波。

在推导(6.92)时我们没有做近似，但对于许多实际用途，可以做重要的近似，使花在计算上的力气大大减少而又基本不牺牲精度。因此，假定在整个积分区间上$|pr|\gg t-\tau$，这时我们可以做以下近似：

$$(t-\tau+2\,pr)^{1/2}\sim(2\,pr)^{1/2}, \qquad (6.93)$$

并把(6.91)和(6.92)看作一个时间函数同$1/t^{\frac{1}{2}}$的褶积。就是说，如果对于(6.92)我们希望计算整个间隔 $0\leqslant t\leqslant T$ 的 $\chi^{反}$，我们首先计算 $0\leqslant t\leqslant T$ 中的函数

$$\psi(t)=\frac{1}{2\,\pi^2\rho_1\beta_1^2}\mathrm{Im}\left\{\frac{p(t)}{\eta_1}\left[\frac{\mu_1\eta_1-\mu_2\eta_2}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2}\right]\right.$$
$$\left.\frac{1}{(2\,pr)^{1/2}}\frac{dp}{dt}\right\}. \qquad (6.94)$$

则

$$\chi(x,t)=N_0\int_0^t\frac{\psi(\tau)}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau=N_0\psi(t)*\frac{1}{t^{1/2}}, \qquad (6.95)$$

而 $0\leqslant t\leqslant T$ 的理论地震图可以用仅仅一个褶积运算做出来——这在许多计算机上处理起来都是非常简单有效而迅速的。相比之下，精确结果(6.92)则要求，对所描述时间序列中的每个单一点，都得有不同的数字积分。

注意，(6.93)的近似对大距离是好的，但即使这样，对于足够长的时间也失效。它等效于用$[\pi/(2\,spr)]^{\frac{1}{2}}e^{-spr}$ 代替(6.87)中的 $K_0(spr)$，因而这个近似与我们在 6.2 节(6.17)中对于在频率域讨论的点源问题所做的近似是一样的。更多的项可以用对 K_0 的展开来保存，它们等效于通过二项式展开

$$\frac{1}{(2\,pr)^{1/2}}\left[1-\frac{t-\tau}{4\,pr}+\frac{3}{32}\left(\frac{t-\tau}{pr}\right)^2+\cdots\right]$$

而取$(t-\tau+2\,pr)^{-\frac{1}{2}}$的近似。只要$|2\,pr|>t-\tau$，就可以预期这些更多的项会改善精度，虽然不值得花这种力气。由于它们只通过$(t-\tau)^n$类型的因子而依赖于t，所以它们也给出简单的褶积(Helmberger and Harkrider, 1978)。

解(6.91)和(6.93)是针对力作为时间的阶梯函数情况的。其它的时间函数显然可以由褶积得到，但有一个时间函数从效果上"消除掉"褶积(6.95)。例如，假定

$$X(r,z,t)=N_0(t)\frac{\delta(r)}{2\,\pi r}\delta(z)\ 且\ N_0(t)=\frac{\mathrm{H}(t)}{\pi t^{1/2}}.$$

这时它是证明

$$\chi(x,t)=\frac{d\Psi}{dt}*\frac{1}{t^{1/2}}*\frac{1}{\pi t^{1/2}}=\Psi(t)$$

的一个基本褶积练习，在这个意义上，我们实际上可以得到(6.94)所给地震图的一个有用代数表达式。

近似式(6.93)和导出的褶积(6.95)，目前是现代地震学中非常重要的一部分。在第九章考虑多层效应时，我们将看到这一点。

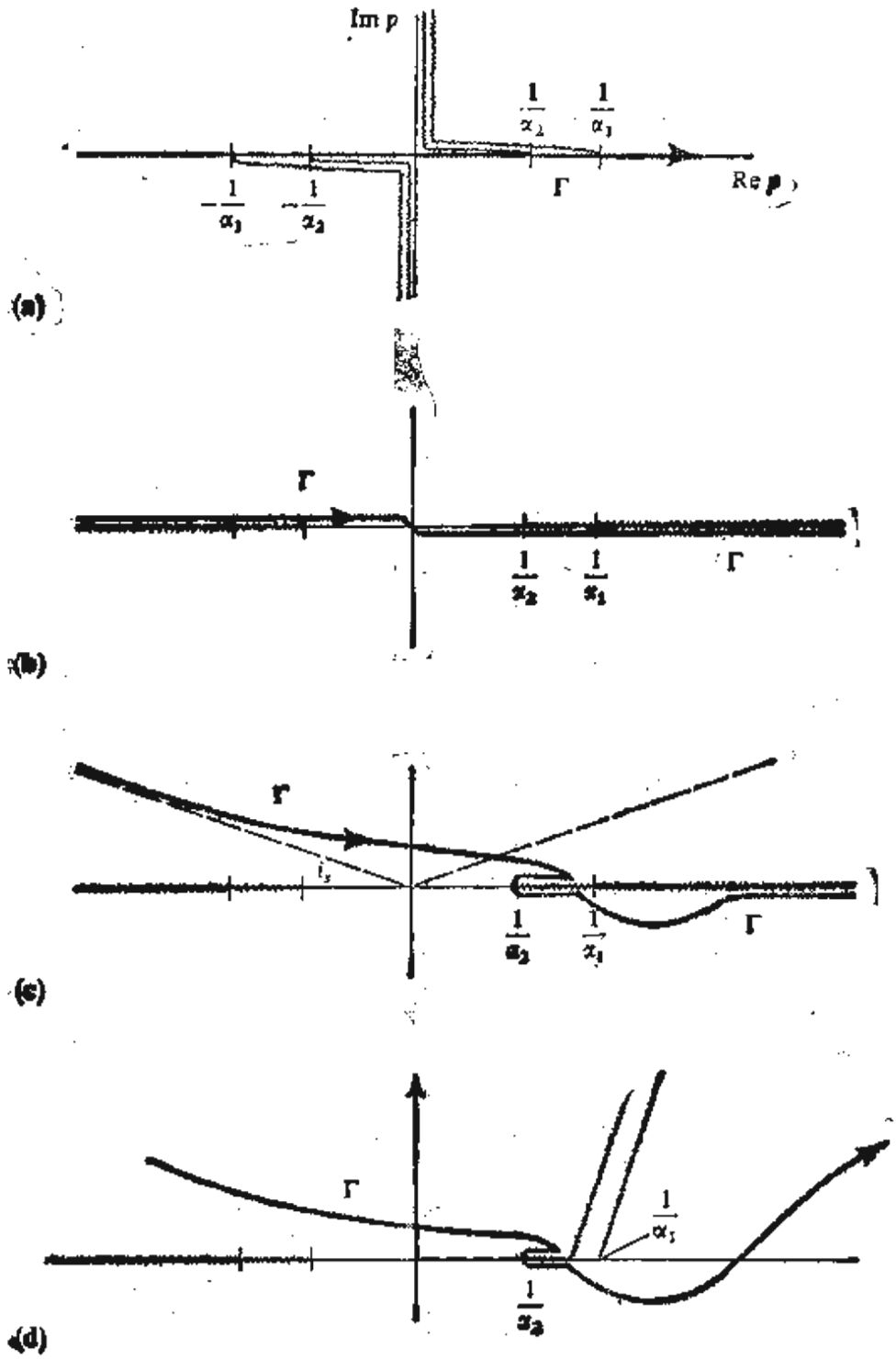
6.6 主要结果的概括及不同方法的比较

我们已描述了两种求解与平界面相互作用的球面波问题的方法。第一种方法(6.1—6.3节)利用时间依赖关系的Fourier变换，并导致位移、压力等等作为频率的函数的解。第二种方法(6.4—6.5节)利用Laplace变换，但(应归功于Cagniard, De Hoop以及其他人的处理技巧)导致直接在时间域里的解。在本节我们列出两种方法间的某些相似点和不同点，并讨论它们的长处与短处，以便于使用者决定哪种方法对于某一特定的应用来说更好些。

首先，我们列出相似点。Fourier 方法和 Cagniard 方法都需要在复射线参数平面中进行积分：物理问题中的射线路径对应于所考虑的被积函数中的鞍点；首波对应于分支切割；界面波（例如 Rayleigh 波，Stoneley 波）对应于极点；漏能模式（例如 $\hat{P}$）对应于 Riemann 叶上除满足辐射条件以外的极点。

其次，有若干表面上的差别。例如，(i)为了通过 Fourier 方法得到时间域中的结果，需要数值逆变换。但实际上，Cagniard 解必须与源函数以及与仪器响应进行褶积，而这些运算，实质上等效于数值的 Fourier 变换。(ii)Cagniard 方法的特点是精确，而在发展 Fourier 方法的早期，我们对某些 Hankel 函数作了一个近似[参看(6.15)—(6.17)]。实际上，在 Cagniard 方法中常常作相同的近似(6.93)。(iii)在 Cagniard 方法中选用分支切割，以使$\{\mathrm{Re}\xi\geqslant 0;\ \mathrm{Re}\eta\geqslant 0\}$，并发现有可能把积分路径保持在同一物理 Riemann 叶上，而不必穿过分支切割。但是，我们发展了具有用$\{\mathrm{Im}\xi\geqslant 0;\ \mathrm{Im}\eta\geqslant 0\}$固定住的分支切割的 Fourier 理论，在这种情况下，我们看到必须发展复杂的其一些线段在非物理叶上的积分路径(例如图 6.9)。许多作者采用这个方法(例如，Lapwood，1949；Berry cmd West，1966)，并且漏能模式效应的正确讨论可以变得非常复杂。幸好，在 Fourier 方法中，分支切割的选取是非常灵活的，事实上可以选积分路径正好靠近最速下降路径而还仍在同一 Riemann 叶上。主要约束，即辐射条件，要求只对于原来积分路径上的 p 值，当$|z|\to\infty$时，被积函数[如(6.32)]趋于零。所以，在(6.32)中，我们只对实 p 轴上的 p 值，才真地要求$\mathrm{Im}\xi\geqslant 0$，无须利用在整个平面上满足 $\mathrm{Im}\xi\geqslant 0$ 的分支切割。图 6.22 表示出分支切割的某些不同选择，这使得能够选取对于 Fourier 方法的数值应用比较有成效的积分路径。

最后，我们指出两种方法间的一些差别，以便说明每种方法对于某种情况的适用性。例如，(i)Cagniard 路径必须对于每条广义射线都精确求出，但 Fourier 方法中的积分路径只需近似地


Im p
Re p
Γ
(a)
(b)
(c)
(d)

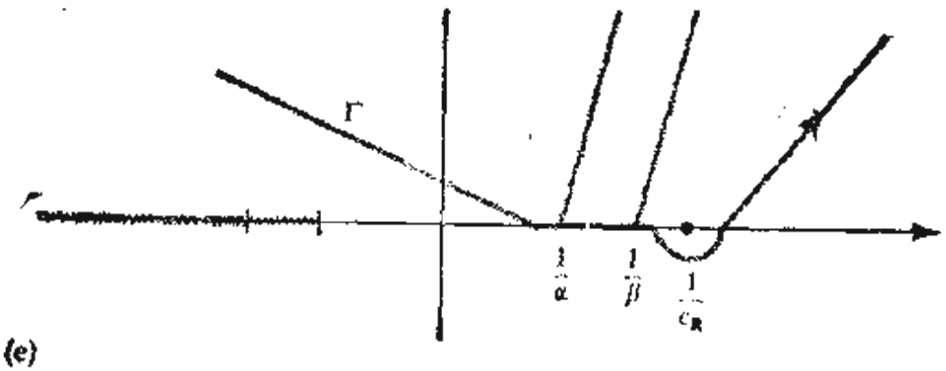


图 6.22

复 p 平面中各种各样的分支切割和积分路径，它表明了选取的灵活性。(a)—(d)是和 6.2 节中在两个液体半空间组成的介质中对压力点源所解得的问题有关的。(a)分支切割的选择要使整个平面上 $\mathrm{Im}\xi_1>0$，$\mathrm{Im}\xi_2>0$。Γ 位于实轴上，恰在第三象限的切割之上和在第一象限的切割之下。请和图 6.4 对比。(b)对同样的问题，我们已将分支切割变成 $\mathrm{Re}\xi_1>0$，$\mathrm{Re}\xi_2>0$。因为相对于(a)中的 Γ 是不变的同时 Γ 上任一点的积分值[即(6.17)]也是不变的，所以解不变，(c) Γ 从(b)所示的位置变到位于最速下降路径上，在此情况下首波可能出现。尽管仍存在着最速下降路径在 $P=1/(\alpha_1\sin i_1)$ 和切割相遇的问题，但现在围绕切割的路径比起图 6.9 所示的则简单得多，因而接在切割之下画出 Γ。(d) 对于如这里所示的那些切割，保持 Γ 处处在最速下降路径上(除在 $p=1/\alpha_2$ 的分支点周围)是不困难的。可见，这些切割是可能的，请注意，Γ 被从实轴上变形之前，这些切割能够被从(a) 中所示的位置移开。在 Γ 随后变形到这里所示的路径上时，在第一象限所示这些切割的左边，$\mathrm{Im}\xi_1$ 和 $\mathrm{Im}\xi_2$ 确实变成负的。这是容许的，因为在这一段 Γ 和 $\mathrm{Im}\xi_1$ 与 $\mathrm{Im}\xi_2$ 为正的路径(表示成断续线)之间没有奇点出现。(e) 对一固定半空间问题也就是对估算广义的 $\hat{P}\hat{P}$ 反射(为对比请看图 6.2)时，此图示出其 p 平面。分支切割向上进入第一象限，便于计算的路径 Γ 是由直线段和围绕 $p=1/C_R$ 的一个半圆组成。这种类型的分支切割具有类似于第九章中考虑了地球的球形几何条件而合成理论地震图时所得之各极点连线的性质。

跟随最速下降路径：如我们将在第九章看到的，两三条直线段常常就足够了。当对于大量震源深度或震源至接收点距离，需要理论地震图时，两种方法之间的这个差别特别重要。这时，在 Fourier 方法中，只改变一个因子(例如 $e^{i\omega p r}$，来考虑不同的变程)，

同一个积分路径就可以使用好几次，来做出不同的地震图。我们描述过的各种 Cagniard 路径，通过求解二次方程已全部得到，但实际上，待解的方程常常是高阶的。例如，$\acute{S}\grave{P}$ 反射式(6.63)需要求解 $t=px+\eta z+\xi h$，它是 p 的二次方程。幸而，如 Helmberger(1968)所指出的，即使对于多层介质，也不难确定数值解。(ii)Cagniard 方法的成功，依赖于所求的解的 Laplace 变换的一定性质，即它可以写成 s 乘以 $\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$ 形式的因子[见(6.40)]。很遗憾，这个性质很容易遭到破坏。例如，若引进衰减，则如我们在第五章所看到的，体波速度变为频率的函数。响应的 Laplace 变换采取 $\int_0^\infty g(s,t)e^{-st}dt$ 形式，不可能分解出因子 g，以直接识别时间域的解。对于其弹性性质随深度连续变化但偶尔有间断面的介质，如同我们将在第九章看到的，出现同样的困难。

总之，对于求解具有点源或线源的 Lamb 问题，Cagniard-De Hoop 解有巨大的优点，这是显然的。直接得到脉冲响应而花在计算上的力气最小。Fourier 方法也有长处，在直接研究不同频率分量的行为时，给出某种补充的认识，在 Lamb 问题以外的应用中，比 Cagniard 方法灵活。

建议进一步阅读的文献

Brekhovskikh, L. M. *Waves in Layered Media*. New York: Academic Press, 1960.

Červený, V., and R. Ravindra. *Theory of Seismic Head Waves*. University of Toronto Press, 1971.

Chapman, C. H. Lamb's problem and comments on the paper On leaking modes' by Usha Gupta. *Pure and Applied Geophysics*, **94**, 233-247, 1972.

de Hoop, A. T. Modification of Cagniard's method for

solving seismic pulse problems. *Applied Science Research*, **B8**, 349-356, 1960.

Gilbert, F., and L. Knopoff. The directivity problem for a buried line source. *Geophysics*, **26**, 626-634, 1961.

Johnson, L. R. Green's function for Lamb's problem. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **37**, 99-131, 1974.

Lamb, H. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A203**, 1-42, 1904.

Lapwood, E. R. The disturbance due to a line source in a semi-infinite elastic medium. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A242**, 63-100, 1949.

Pekeris, C. L. The seismic buried pulse. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. **41**, 629-639, 1955.

问　题

6.1 当首波可以在解(6.92)中出现时，其到时为t_1，试证明(6.93)等效于要求

$$r/\beta_2 \gg t-t_1.$$

当$\beta_2<\beta_1$，试证明解(6.92)中的(6.93)等效于要求

$$\frac{r^2}{R_0\beta_1} \gg t-\frac{R_0}{\beta_1}.$$

上述关于褶积解(6.95)的应用的限制，也许乍一看使得(6.95)似乎不过是个波阵面近似(例如(6.21))。事实上，(6.95)比波阵面要有力得多。试扼要证明，通过考虑临界距离附近的地震图表达式，确系如此。在这个距离上，首波和广角反射叠加。

6.2 试用类似于第三章(3.8)的等效体力来证明，求(6.44)时所

用的 $\partial u/\partial z$ 的间断，在物理上是由应力的间断造成的。

6.3 试证明图 5.6 中 $\acute{P}\grave{P}$ 和 $\acute{S}\grave{S}$ 的过零交点，正好出现在使非物理 Riemann 叶上的 Rayleigh 函数为零的 p 值上。[图 5.6 中 $p=1/\alpha$ 附近的那个最右边的过零交点，可以影响在图 6.18 中求值的、在表达式(6.69)中包含的首波震相]。

6.4 试给出具有线源的经典 Lamb 问题的代数解。也就是，当一线源沿 y 轴作用于弹性半空间的表面，使得在自由表面 $z=0$ 上的原点($x=0$，$t=0$)存在一个向下作用的脉冲 I(每单位长度上)时，给出表面位移。试求 Rayleigh 波形状的简单近似。

6.5 在用势方法建立 P-SV 问题时看到，一般说 SV 位移用 $\nabla\times\nabla\times(0,0,\Psi)$ 表示。参看补充 6.5。试将此与在 5.1节得到的结论相一致，在那里是用 $\nabla\times(0,\Psi,0)$表示平面波的 SV 位移。[利用这些波的综合，在具有与 y 坐标无关的场的所有问题中，$\nabla\times(0,\Psi,0)$ 都适合于 SV。]

6.6 在图 6.9 中，沿总路径 Γ(如图中所示)的积分结果，同利用路径 $A\to B\to C\to$(绕 $1/\alpha_2$)$\to F'\to$(鞍)$\to G\to H$ 有什么差别吗？(即略去 $F'\to D\to E\to F'$。)

6.7 试证明在(6.69)中得到的、并在图 6.19 中给予说明的运动 u_{zz}，随 $t\to\infty$而发散至无穷大。证明(不必展开全部代数运算的细节)这个行为被由质点运动的 P 波分量(广义的 $\acute{S}\grave{P}$)得到的类似发散表达式所抵消掉。

第七章　竖向非均匀介质中的面波

面波是沿平行于地球表面的方向传播的波。它们的振幅在深度上的分布是稳定的，不随水平位置而改变（除了用一个总的因子来描述其水平方向的扩展以外）。因此，面波的几何扩散效应比体波的小得多，体波的能量在沿水平方向以及向下至地球内部的竖直方向均有扩展。事实上，在世界标准地震台网（WWSSN）中长周期地震仪的地震图上，面波往往是记录的主要部分，而且地震谱的长周期部分中许多可靠的信息是由面波得到的。周期为10到200秒的长周期面波，对地球结构和震源机制的研究一直是宝贵的信息来源。它们的相速度、群速度和衰减特性对描绘地球上不同地区的地壳和上地幔结构是有用的。它们的震源谱和辐射图案对测定远震的地震矩、震源机制和震源深度是不可少的。对于识别地震和地下爆破，它们也提供了决定性的资料。

本章的主要目的是描述以自由表面为边界的竖向非均匀介质中面波的基本性质并导出任意点源的面波振幅谱和相位谱的公式。在最后一节中，为完善最常用的方法，我们将把整个波动场表示成各个简正振型与漏能模式之和。

7.1　面波的基本性质

令 z 轴垂直，向下取为正方向。前述竖向非均匀介质则处于 $z>0$ 的下半空间。如5.1节和5.2节所见，空间坐标与时间的关系可由分离变量法表示的那些波是值得考虑的。从最简单的问题入手，我们将考虑在笛卡尔坐标中，频率为 ω，沿 x 增加的水

平方向传播的面波：

$$u(x,y,z,t)=Z(z)\exp[i(kx-\omega t)]. \qquad (7.1)$$

这个方程的全部重要结果是，在波动方程和边界条件中仅保留了对 z 求导数，并且求解这样一个一维问题是相当简单的。

补充 7.1

初始假定

当我们开始讨论面波时，应当注意到在这第一个方程 (7.1) 上附有双重意义。在正文中，这个基本的波是以具有固定的水平波数（为简化，我们将用 k 表示，而前几章中曾用 k_x 或 k_r 表示）的稳态波而引入。这给出了关于波的一个清楚的物理图象，显然，

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,z,t)=-i\omega u(x,z,t),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,z,t)=iku(x,z,t).$$

然而，地震学中的面波实际上是这些基本的波的合成。在这个意义上，我们把位移场作为 (k,z,ω) 的函数是恰当的，此位移场是不可分离的面波 $u(x,t)$ 的双重 Fourier 变换（对 x 和 t）。由于这个原因，$\partial u(x,t)/\partial t$ 和 $\partial u(x,t)/\partial x$ 的双重变换分别为 $-i\omega u(k,z,\omega)$ 和 $+iku(k,z,\omega)$。用两种虽不相同但却有关的方法，则我们可把偏导数（对 x 和 t）化为标量乘法。

事实上，现在的问题是在三个一般条件下求解 (7.1)。这些波必须满足 $z=0$ 处的自由表面条件，即牵引力为 0。在 $z=\infty$ 的另一边界处，其振幅必须为 0，因为在无穷远处没有能量供应。当然，除此以外它们还必须满足运动方程。在这些约束条件下，(7.1) 形式的有意义的解不能对任一频率 ω 和任一波数 k 存在。然而，对一给定的 ω，若 k 取一稳定值，比如 $k_n(\omega)$，有意义的解则可能存在。这是一个本征值的问题，因为可能常常会遇到，对某一给定的 ω，有不止一个 k 值将保持面波 (7.1) 成立，所以我们标以脚标 n。这里 $k_n(\omega)$ 是一个本征值，且相应的解

$u_n(z)$是一本征函数。因此，对一给定的频率 ω，面波(如果存在的话) 则由波数 $k_0(\omega)$，$k_1(\omega)$，$k_2(\omega)\cdots$单值地确定。换句话说，对一给定的频率，相速度 $c_n=\omega/k_n$ 是不变的。和 z 的相关性也是与水平位置无关的。

为说明这些概念，我们首先来考察在一均匀半空间上置一均匀层时平面 Love 波的最简单情况（图 7.1)。将层和半空间的刚性记作 μ_1，μ_2，其密度分别记作 ρ_1，ρ_2，则位移 (v) 的 y 分量满足波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\mu_1}{\rho_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{在层内 } 0<z<H$$

和

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\mu^2}{\rho_2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad \text{在半空间内 } z>H.$$

用(7.1)形式的尝试解，我们得到

$$v=[\hat{S}_1 e^{-\nu_1 z}+\hat{S}_1 e^{\nu_1 z}]\exp[i(kx-\omega t)] \quad 0\leqslant z\leqslant H$$

和

$$v=[\hat{S}_2 e^{-\nu_2 z}+\hat{S}_2 e^{\nu_2 z}]\exp[i(kx-\omega t)] \quad H\leqslant z, \qquad (7.2)$$

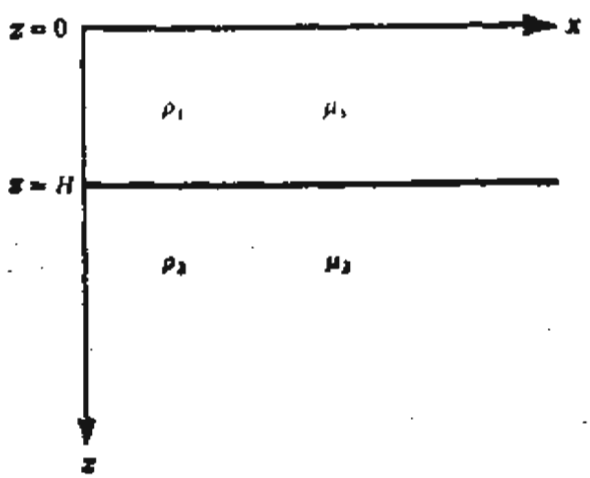


图 7.1
在一均匀半空间上置一均匀层，在这种最简单的介质情况中可产生 Love 波

其中

$$\nu_i=(k^2-\omega^2/\beta_i^2)^{1/2},\ \mathrm{Re}\nu_i\geqslant 0 \text{ 和 } \beta_i=(\mu_i/\rho_i)^{1/2},$$

这里 $i=1$ 和 2。于是 $\mathrm{Im}\,\nu_i\leqslant 0$[参考(6.4)中 γ 的性质]。$\hat{S}_1$, $\acute{S}_1$, $\hat{S}_2$ 和 $\acute{S}_2$ 是些目前还不知道的常数。

我们假定层内的速度 β_1 低于半空间中的速度 β_2。从 $z\to\infty$ 的边界条件，我们知道（如果波是均匀的，即如果 ν_2 是负虚数）不可能有上来的波。所以 $\acute{S}_2=0$，另外，如果 ν_2 是正实数，也正是这个波必须为零，以免其随深度而指数上升。（对 ν_1 和 ν_2，其根的符号给出了垂直波数 $i\nu_1$ 和 $i\nu_2$ 的性质，它有实部和虚部且或为正或为零。）如在 $z=0$ 处，$\partial v/\partial z=0$，由于自由表面条件必须满足，则 $\hat{S}_1=\acute{S}_1$。于是我们只剩下两个未知数 $\hat{S}_1$ 和 $\hat{S}_2$，它们必须满足穿过 $z=H$ 时位移和牵引力连续所必需的下列方程：

$$\begin{aligned}2\,\hat{S}_1\cos(i\nu_1H)&=\hat{S}_2e^{-\nu_2H}\\ 2\,i\mu_1\nu_1\hat{S}_1\sin(i\nu_1H)&=\mu_2\nu_2\hat{S}_2e^{-\nu_2H}\end{aligned}\qquad(7.3)$$

或

$$\frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1}=\frac{2\cos(i\nu_1H)}{e^{-\nu_2H}}=\frac{2\,i\mu_1\nu_1\sin(i\nu_1H)}{\mu_2\nu_2e^{-\nu_2H}}.\qquad(7.4)$$

这给出了本征值 k_n 为 $F(k)=0$ 的解，这里

$$F(k)\equiv\tan(i\nu_1H)-\frac{\mu_2\nu_2}{i\mu_1\nu_1},\qquad(7.5)$$

或相速度 $c_n=\omega/k_n$ 为下式的解：

$$\tan\omega H\left(\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{c^2}\right)^{1/2}=\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{\beta_2^2}\right)^{1/2}}{\left(\dfrac{1}{\beta_1^2}-\dfrac{1}{c^2}\right)^{1/2}}.\qquad(7.6)$$

将(7.4)，$\hat{S}_1=\hat{S}_1$ 和 $\acute{S}_2=0$ 代入(7.2)得到相应的本征函数 v_n：

$$v_n(x,z,t)=2\,\hat{S}_1\cos\left[\omega\left(\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{c_n^2}\right)^{1/2}z\right]$$

$$\times \exp[i(k_n x-\omega t)] \qquad \text{对 } 0\leqslant z\leqslant H$$

$$=2\hat{S}_1\cos\left[\omega\left(\frac{1}{\beta_2}-\frac{1}{c_n^2}\right)^{1/2}H\right]\exp\left[-\omega\left(\frac{1}{c_n^2}-\frac{1}{\beta_2^2}\right)^{1/2}(z-H)\right]$$

$$\times \exp[i(k_n x-\omega t)] \qquad \text{对 } H\leqslant z, \qquad (7.7)$$

这表明在层内为一正弦振动，而在半空间中是指数衰减的。

方程 (7.6) 可用图解以给出关于相速度的一个大致的概念。图 7.2 给出，方程(7.6)的右边以虚线表示，左边则以实线表示，两者均为 $(H/\beta_1)(1-\beta_1^2/c^2)^{1/2}$ 的函数。两种线的交点给出方程(7.6)的根。由此图显见，c 的实根限定在 β_1 和 β_2(我们假定 $\beta_1<\beta_2$)之间。我们求得，对一给定的频率 ω，仅有有限个实根。当 $\omega=0$ 时，仅有一个实根，这根是相应于正切曲线最左边一支的基频振型上的一个点。如果 ω 增加，标为 $n=1$ 的正切曲线便从右边进入此范围。当 π/ω 等于 $(H/\beta_1)(1-\beta_1^2/\beta_2^2)^{1/2}$时，此曲线便进入。如果我们进一步增大 ω，更多的正切曲线将从右边进入此范围内。当 ω 等于 ω_{cn} 时，即

$$\omega_{cn}=\frac{n\pi\beta_1}{H}\Big/\left(1-\frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}\right)^{1/2}, \qquad (7.8)$$

则第 n 支曲线便进入此范围内，此频率 ω_{cn} 称为第 n 阶高阶振型的截止频率，因为如图 7.3 所示，n 阶振型仅当 $\omega>\omega_{cn}$ 时才存在。例如，在大陆的典型地壳-地幔结构的情况下，取 $H=35$ 公里，$\beta_1=3.5$ 公里/秒和 $\beta_2=4.5$ 公里/秒时，第一高阶振型的截止频率为 0.08 赫，或者说具有 13 秒的周期。

因此，在 $\omega=\omega_{cn}$ 时，n 阶高阶振型才出现，且频率高于 ω_{cn} 时此振型才存在。在截止频率处，所有的振型都有同样的 $c=\beta_2$ 的相速度。对所有的振型，当 $\omega\to\infty$ 时相速度接近于 β_1。因而，我们可以画出相速度曲线图，如图 7.3 所示。现在显然，对一给定的频率 ω，仅有有限个振型。一旦相速度确定，则相应于每一个振型的本征函数可由(7.7)求得。

不同振型的相对激发取决于震源深度和震源性质。例如，一

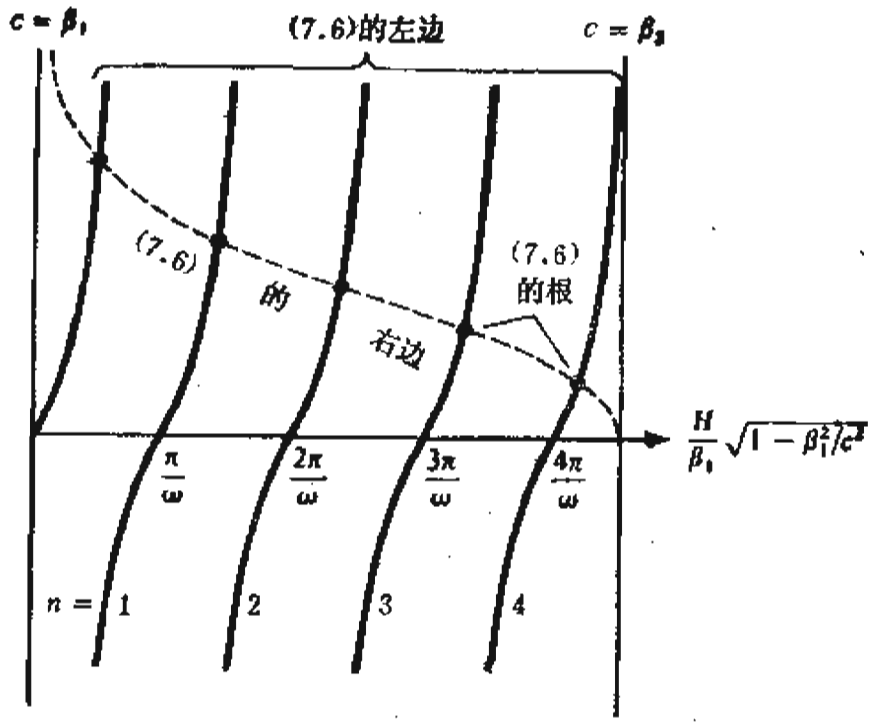


图 7.2

在半空间上置一单层，Love 波频散情况下方程(7.6)的图解

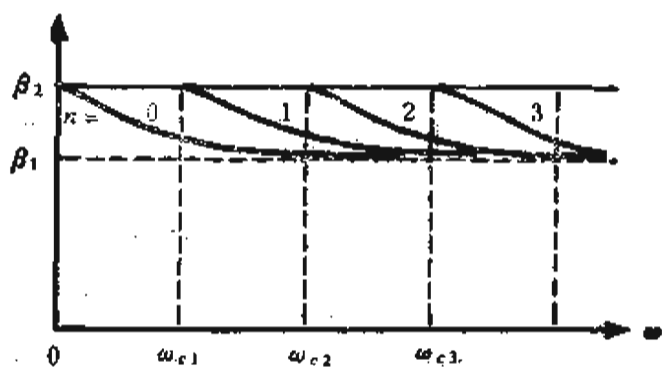


图 7.3

基频振型和紧邻的三个高阶振型其相速度随频率变化的示意图

一般而言，对浅源地震的长周期波，基频振型是占优势的，此基频振型我们记作 $n=0$。将不同振型分开的方法之一是在远距离处记录，因为不同振型的波以不同的群速度传播，在远处它们是在不同的时间分别到达的。对一给定的频率 ω，其群速度就是围绕

频率 ω 的波包之包络被传送的速度。波包的峰、谷和零点是以相速度传播的，相速度一般是不同于群速度的。由于群速度是依附于波包的概念，波包具有连续谱而不是离散的线谱，其最好的解释是在一给定频率 ω_0 周围的有限频带上，通过对单个振型(具有单位振幅和零初始相位）的解求积分来构成瞬时波形。利用余弦变换得到

$$f_0(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_0-\frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega_0+\frac{1}{2}\Delta\omega}\cos[\omega t-k_n(\omega)x]\,d\omega. \qquad (7.9)$$

当 $\Delta\omega$ 很小时，我们可用 Taylor 级数展开 $k_n(\omega)$，

$$k_n(\omega)=k_n(\omega_0)+\left(\frac{dk_n}{d\omega}\right)_0(\omega-\omega_0)+\cdots. \qquad (7.10)$$

忽略$(\omega-\omega_0)$的高次项，将(7.10)代入(7.9)，得到

$$f_0(x,t)\sim\frac{\Delta\omega}{\pi}\frac{\sin Y}{Y}\cos[\omega_0 t-k_n(\omega_0)x], \qquad (7.11)$$

其中

$$Y=\frac{\Delta\omega}{2}\left[t-\left(\frac{dk_n}{d\omega}\right)_0 x\right].$$

上述波形是受包络 $\sin Y/Y$ 调制的、频率为 ω_0 的正弦振动。此包络在 $Y=0$ 或 $x=\left(\frac{d\omega}{dk_n}\right)_0 t$ 处有峰值。因此，我们知道，这个包络是以群速度$\left(\frac{d\omega}{dk_n}\right)_0$传播的，并且相位（余弦函数的峰、谷和零点）是以相速度 $\omega_0/k_n(\omega_0)$传播的。

由一单个振型组成的具有给定的谱密度 $|F(\omega)|$ 和初始相位 $\phi(\omega)$的波包可表示成

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|\exp[-i\omega t+ik_n x+i\phi(\omega)]d\omega. \qquad (7.12)$$

这个积分可以这样计算，即把 ω 轴分成一些宽度为 $\Delta\omega_i$ 的连续段，然后对如(7.11)的近似解求和。从问题 7.8 可以得到对所有

段 $d|F(\omega)|/d\omega$ 的影响将如何考虑。

当面波无频散时，如半空间中的 Rayleigh 波，波形不随传播而改变，因为若 c_n 无频散，则

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int F(\omega)\exp[-i\omega(t-x/c_n)]d\omega$$
$$=f(t-x/c_n). \tag{7.13}$$

当面波有强烈频散时，则可用稳相法近似估计此波形。类似于最速下降法，用稳相法求积分也利用了在其鞍点附近被积函数的特性。在最速下降法中，积分路径取相位恒定而其绝对值最急速变化的路径。在稳相法中其路径取沿 ω 的实轴，沿此路径相位 $(-\omega t+k_n x)$ 变化最快。于是，当 x 或 t 很大时，则被积函数很快地振荡，并对积分有自相抵消的效应。仅仅在鞍点上或鞍点附近，相位变化较慢，并对积分有明显的贡献。鞍点或稳相点由下式给出：

$$\frac{d}{d\omega}(-\omega t+k_n x)=0$$

或

$$\frac{x}{t}=\frac{d\omega}{dk_n}. \tag{7.14}$$

对一给定的距离 x 在时间 t 时，这个方程确定了预期占优势的频率 $\omega_s=\omega_s(x,t)$，且 ω_s 显然是群速度等于 x/t 时的频率。

在稳相点附近将相位展开成一个 Taylor 级数，并忽略那些量级高于 $(\omega-\omega_s)^2$ 的项，我们得到

$$-\omega t+k_n x\sim-\omega_s t+k_n(\omega_s)x+\frac{x}{2}\frac{d^2k_n}{d\omega^2}(\omega-\omega_s)^2. \tag{7.15}$$

当 x 较大时，ω 对 ω_s 的微小偏离都将使被积函数发生快速振荡，且导至自相抵消的效应。因而积分限将被扩展并超出 Taylor 展开的界限。这样，我们得到

$$f(x,t)=\frac{1}{2\pi}\exp[-i\omega_s t+ik_n(\omega_s)x]\,|F(\omega_s)|$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{x}{2}\,i\,\frac{d^2k_n}{d\omega^2}(\omega-\omega_s)^2\right]d\omega. \qquad (7.16)$$

由积分表给出

$$\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{1}{2}a\omega^2\right)d\omega=\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{1}{2}a\omega^2\right)d\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}, \qquad (7.17)$$

我们得到

$$f(x,t)=\frac{|F(\omega_s)|}{2\pi}\left\{\frac{2\pi}{x\left|\frac{d^2k_n}{d\omega^2}\right|}\right\}^{1/2}\exp\left[-i\omega_s t\right.$$

$$\left.+ik_n(\omega_s)x\pm i\frac{\pi}{4}\right], \qquad (7.18)$$

其中±分别相应于 $d^2k_n/d\omega^2\gtrless 0$。当 x 和 t 给定，ω_s 可由(7.14)解得。当相速度 $c_n=\omega/k_n$ 和群速度 $U_n=d\omega/dk_n$ 和 $dU_n^{-1}/d\omega$ 已知时，前述公式即给出频散面波的波形。相位信号移动 $\pi/4$(时间移动周期的 1/8)，意味着当群速度随周期增大时有一个延迟。具有此频散性质的波其形象化的 Fourier 分析(如图 7.4 所示)给出了 $f(x,t)$ 相对于 Fourier 分量的视相位延迟的直观的解释(Brune *et al*, 1960)。

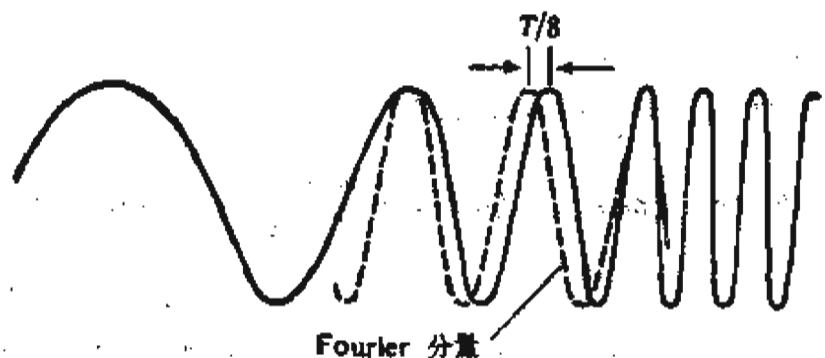


图 7.4

在一有频散的波列中，周期为 T 的波峰和相应的Fourier分量波峰之间的不重合性(差 $T/8$)

若群速度对所考虑的频率是稳定的，(7.18)的分母变为零，则公式不再是有效的。在相位的 Taylor 展开式中包括高阶项在内，用 Airy 函数给出了一个结果（见 Savage，1969 b）。由于这一原因，和群速度极大值与极小值有关的到时，称为 Airy 震相。因为群速度的变化很慢并且该震相的整个持续时间很短，所以可对(7.12)直接进行数值积分。Airy 震相的测定也是很容易做的。

测定面波的相速度和群速度的各种方法将在第十一章中叙述。

7.2 位移-应力向量的本征值问题

现在让我们考虑竖向非均匀的、各向同性的弹性介质中的面波，这介质充满 $z>0$ 的半空间中，介质中的弹性常数 $\lambda(z)$，$\mu(z)$和密度 $\rho(z)$都是 z 的任意函数。本节将探讨在 x 方向传播的水平面波。随后将表明和由一个点扩展的柱面波一样，它们也具有同样的随 z 的变化关系。

在某些方面本节重复了前面 5.4 节讨论过的体波内容。然而，这里的符号大多适用于面波，其中在各种位移分量和应力分量间的 $\pi/2$ 相移可清楚地辨别出来。此外，由于频散，频率和水平波数 k 的关系这里是比较复杂的，所以留下 k 作为一个明显的符号并且不分解成 ω 乘以水平慢度。

对 Love 波，我们对运动方程(2.13)求出下列形式的解：

$$\begin{aligned} u &= 0, \\ v &= l_1(k,\omega,z)\exp[i(kx-\omega t)], \\ w &= 0 \end{aligned} \tag{7.19}$$

和前述位移有关的应力分量为

$$\tau_{xx}=\tau_{yy}=\tau_{zz}=\tau_{xz}=0,$$

$$\tau_{yz}=\mu\frac{dl_1}{dz}\exp[i(kx-\omega t)], \tag{7.20}$$

$$\tau_{xy}=ik\mu l_1\exp[i(kx-\omega t)].$$

如果我们将(7.19)和(7.20)代入(2.13)，我们得到对 $l_1(k, z, \omega)$的运动方程：

$$-\omega\rho(z)l_1=\frac{d}{dz}\left[\mu(z)\frac{dl_1}{dz}\right]-k^2\mu(z)l_1. \tag{7.21}$$

如上一节所述，这个 Love 波就是运动方程的一个解，并处处满足无源条件(无体力)。在 $z=0$ 的自由表面，牵引力还需为零并且在无限远处无源存在。除了这些条件外，位移和牵引力在弹性常数有突变式间断的任一内界面上必须是连续的，否则位移和牵引力的不连续性将相当于一个地震源(3.1 节)。由于介质只在穿过水平平面时才产生不连续性，所以对 Love 波要求应力分量 τ_{yz} 是连续的。这里我们将导出一个新的函数以描述 τ_{yz} 和 z 的关系：

$$\tau_{yz}=l_2(k, z, \omega)\exp[i(kx-\omega t)]. \tag{7.22}$$

于是(7.20)和(7.21)可改写成一组一阶常微分方程

$$\frac{dl_1}{dz}=\frac{l_2}{\mu(z)},$$

$$\frac{dl_2}{dz}=(k^2\mu(z)-\omega^2\rho(z))l_1, \tag{7.23}$$

或写成矩阵形式

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \mu(z)^{-1}\\ k^2\mu(z)-\omega^2\rho(z) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}. \tag{7.24}$$

我们将称(l_1, l_2)为 Love 波的运动-应力向量，并注意(补充 7 1)，对沿 y 方向上一般的 SH 质点运动，它也是(u_y, τ_{yz})对(x, t)的双重变换。

Rayleigh 波的运动-应力向量可用类似的方式得到。我们从

如下的位移形式开始：

$$\begin{aligned} u&=r_1(k,\ z,\ \omega)\exp[i(kx-\omega t)],\\ v&=0,\\ w&=ir_2(k,\ z,\ \omega)\exp[i(kx-\omega t)] \end{aligned} \tag{7.25}$$

（对正实数 r_1 和 r_2，上面的 u，w 的组合表示前进运动）。相应的应力分量由下式给出：

$$\begin{aligned} \tau_{yz}&=\tau_{xy}=0,\\ \tau_{xx}&=i\left[\lambda\frac{dr_2}{dz}+k(\lambda+2\mu)r_1\right]\exp[i(kx-\omega t)],\\ \tau_{yy}&=i\left(\lambda\frac{dr_2}{dz}+k\lambda r_1\right)\exp[i(kx-\omega t)],\\ \tau_{zz}&=i\left[(\lambda+2\mu)\frac{dr_2}{dz}+k\lambda r_1\right]\exp[i(kx-\omega t)],\\ \tau_{xz}&=\mu\left(\frac{dr_1}{dz}-kr_2\right)\exp[i(kx-\omega t)]. \end{aligned} \tag{7.26}$$

应力分量 τ_{zz} 和 τ_{xz} 对 z 是连续的。我们可将它写成

$$\begin{aligned} \tau_{zz}&=r_3(k,\ z,\ \omega)\exp[i(kx-\omega t)],\\ \tau_{xz}&=ir_4(k,\ z,\ \omega)\exp[i(kx-\omega t)]. \end{aligned} \tag{7.27}$$

于是从(7.26)和(2.13)可得到运动应力向量 $(r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4)$ 的微分方程为

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & \mu^{-1}(z) & 0\\ -k\lambda(z)[\lambda(z)+2\mu(z)]^{-1} & 0 & 0 & [\lambda(z)+2\mu(z)]^{-1}\\ k^2\zeta(z)-\omega^2\rho(z) & 0 & 0 & k\lambda(z)[\lambda(z)+2\mu(z)]^{-1}\\ 0 & -\omega^2\rho(z) & -k & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4 \end{pmatrix}, \tag{7.28}$$

其中 $\zeta(z)=4\mu(z)[\lambda(z)+\mu(z)]/[\lambda(z)+2\mu(z)]$。(7.24) 和

(7.28)中的矩阵看起来很简单，实质上和5.4节中由均匀介质得到的相同。虽然 $\lambda(z)$，$\mu(z)$和 $\rho(z)$是 z 的函数，可它们显然不包含介质参量的空间梯度。

面波的边界条件——即在 $z=0$ 的自由表面上牵引力为0，在无限远处无运动——要求：

$$\begin{aligned} &\text{当 } z\to\infty\text{时}\quad r_1,\ r_2\text{ 和 } l_1\to 0,\\ &\text{在自由表面}(z=z_0)\quad r_3=r_4=l_2=0. \end{aligned} \tag{7.29}$$

对一给定的 ω，在(7.29)的条件下，仅对一定的 $k=k_n(\omega)$值，(7.24)或(7.28)的非零解才存在。和7.1节中讨论的半空间上置一单层的Love波形式完全相同，$\omega/k_n(\omega)$ 给出了相速度并且(7.24)或(7.28)的相应解给出了 z 和该振型的依赖关系。

有很多方法可解这类本征值和本征向量的问题。我们将从数值积分法和传播矩阵法入手。用Thomson-Haskell法可得到明确的解，此法为传播矩阵法应用于半空间上叠置一均匀层时的特殊情况。

7.2.1 数值积分

运动-应力向量的本征值问题可以用Runge-Kutta的数值方法直接积分(7.24)和(7.28)解出。当和矩阵法比较时，竹内和斋藤(Takeuchi and Saito, 1972)认为数值法模拟地球较容易，因矩阵法中地球是以均匀的成层模型来近似的。

为说明如何用数值积分法去解本征值问题，首先我们假定在一较大的深度 Z_n 处位移有定值(即刚性边界条件)。在Love波的情况中，我们从 $Z=Z_n$ 向上开始求方程(7.24)的积分，其初始值为 $l_1(Z_n)=0$ 和 $l_2(Z_n)=1$。对给定的 ω，我们必须选择 k 的一个尝试值。

如果 k 是本征值，在 $z=z_0$ 处，积分的结果应给出 $l_2=0$。重复这过程以修正 k，直至 $l_2(z_0)$变为0为止。在Rayleigh波的情况下，用两组不同的初始值来积分方程(7.28)：第一组为 $r_1=$

$r_2=r_4=0$ 和 $r_3=1$；第二组为 $r_1=r_2=r_3=0$ 和 $r_4=1$。将第一组和第二组的解分别写成 $r^{(1)}$和 $r^{(2)}$，则(7.28)的通解可表示成

$$r=Ar^{(1)}+Br^{(2)} \tag{7.30}$$

如果 r 是一本征向量，它的应力分量 $r_3(z_0)$和 $r_4(z_0)$ 必须为0，即

$$\begin{aligned} &Ar_3^{(1)}(z_0)+Br_3^{(2)}(z_0)=0,\\ &Ar_4^{(1)}(z_0)+Br_4^{(2)}(z_0)=0. \end{aligned} \tag{7.31}$$

补充 7.2

Runge-Kutta 方法

让我们考虑用数值法来求解一阶常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y). \tag{1}$$

对 dy/dx 用前向差分公式(补充 13.2)，相应于(1)的有限差分方程可写成

$$\begin{aligned} &y_{i+1}=y_i+(x_{i+1}-x_i)f_i,\\ &f_i=f(x_i,\ y_i). \end{aligned} \tag{2}$$

如果初值 y_0 已知，重复应用(2)可求得 y_i。这是Euler 的方法，并且(2)具有 h^2 量级的截断误差，这里$h=x_{i+1}-x_i$。另一方面，所设计的第 n 次的 Runge-Kutta 方法给出了 h^{n+1} 量级的截断误差。我们首先用下式来定义在 xy 平面上的一个位置$(\bar{x},\bar{y})$

$$\begin{aligned} &\bar{x}=x_i+\alpha h\\ &\bar{y}=y_i+\beta h. \end{aligned} \tag{3}$$

我们要这样确定 α 和 β，使

$$\Delta\bar{y}_i=f(\bar{x},\ \bar{y})h \tag{4}$$

和增量

$$\Delta y_i=y_i'h+y_i''\frac{h^2}{2}+\cdots+\frac{d^ny_i}{dx^n}\frac{h^n}{n!}$$

相等，这里的撇号表示对 x 求导数，且是在 x_i 处求此导数值。

如果能求得具有这样性质的 α 和 β，则方程可用(4)向前推进一

步，能以同样精度求出解来，这犹如在开始的一步时，y 的直至第 n 阶导数都是知道的(在此情况下，n 阶 Taylor 级数也是知道的)。

例如，若 $n=2$，则可确定 α 和 β 以使

$$\Delta y_i = y_i' h + y_i'' \frac{1}{2} h^2 = \Delta \bar{y}_i. \tag{5}$$

围绕(x_i, y_i)展开(4)，我们有

$$\Delta \bar{y}_i = f(x_i+\alpha h, y_i+\beta h)\cdot h \sim \left[f_i + \alpha h\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \beta h\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_i\right] h. \tag{6}$$

另一方面，由于

$$y'' = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

我们得到

$$y_i' h + y_i'' \frac{1}{2} h^2 = f_i h + \frac{1}{2} h^2 \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_i f_i\right]. \tag{7}$$

如果我们选择 $\alpha = \frac{1}{2}$ 和 $\beta = f_i/2$，或

$$\bar{x} = x_i + \frac{1}{2}h, \quad \bar{y} = y_i + \frac{1}{2} h f_i, \tag{8}$$

将(6)和(7)代入(5)，我们发现(5)式将得到满足。

因此，在二次 Runge-Kutta 方法中，解由下式给出，

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta \bar{y}_i, \\ \Delta \bar{y}_i &= h f(\bar{x}, \bar{y}) = h f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2} h f_i\right). \end{aligned} \tag{9}$$

在联立方程的情况下，

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), \tag{10}$$

二次 Runge-Kutta 方法的解由下式给出：

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta \bar{y}_i, \\ z_{i+1} &= z_i + \Delta \bar{z}_i, \\ \Delta \bar{y}_i &= h f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2} h f_i, z_i + \frac{1}{2} h g_i\right), \\ \Delta \bar{z}_i &= h g\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2} h f_i, z_i + \frac{1}{2} h g_i\right). \end{aligned} \tag{11}$$

因此，仅当

$$\begin{vmatrix} r_3^{(1)}(z_0) & r_3^{(2)}(z_0) \\ r_4^{(1)}(z_0) & r_4^{(2)}(z_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{7.32}$$

时，有意义的解(7.30)才是可能的。连续尝试和修正，直到(7.32)成立即求得了本征值。一旦得到了本征值，A/B 可从(7.31)确定，进而本征向量由(7.30)确定。

下部的边条件比刚性更好的近似是把地球中 z_n 以下换成为均匀的半空间。均匀半空间中的解，包括随深度呈指数衰减的解，是众所周知的。对 Love 波我们用如下的初始值：

$$\begin{aligned} l_1(z_n) &= \exp(-\nu_{n+1}z_n), \\ l_2(z_n) &= \mu_{n+1}\frac{dl_1}{dz} = -\nu_{n+1}\mu_{n+1}\exp(-\nu_{n+1}z_n), \end{aligned} \tag{7.33}$$

其中 $\nu_{n+1}=(k^2-\omega^2/\beta^2_{n+1})^{1/2}$，并取其 $\mathrm{Re}\,\nu_{n+1}\geqslant 0$(因此 $\mathrm{Im}\,\nu_{n+1}\leqslant 0$)。脚标 $n+1$ 适用于半空间的参数。对 Rayleigh 波，所需的两组初始值，可用如下的势函数进行计算：

第一组

$$\phi=\exp(-\nu_{n+1}z),\quad \psi=0, \tag{7.34}$$

第二组

$$\phi=0,\quad \psi=\exp(-\nu_{n+1}z), \tag{7.35}$$

其中 $\nu_{n+1}=(k^2-\omega^2/\alpha^2_{n+1})^{1/2}$ 和 $\nu_{n+1}=(k^2-\omega^2/\beta^2_{n+1})^{1/2}$。半空间中相应的运动-应力向量 $r^{(1)}(z)$ 和 $r^{(2)}(z)$ 可将(7.34)和(7.35)代入(6.59)，然后用(7.25)和(7.26)计算出来。完成两组初值 $r^{(1)}(z)$ 和 $r^{(2)}(z_n)$ 的数值积分，并将结果对 k 值迭代，直至满足(7.32)为止，以求得本征值。对较小的 ω/k，两组初始值在数值上变得没有差别。在这种情况下，两个解的和及差可用作初值。

7.2.2 传播矩阵方法

由 Thomson(1950)提出并由 Haskell(1953) 修正的矩阵法，

由于大型计算机的出现而广泛用于面波分析。在他们的方法中将向非均匀介质以叠置于均匀半空间上的均匀层来代替，如图 7.5 所示。Gilbert 和 Backus(1966)将传播矩阵法引入地震学中，而 Thomson-Haskell 法只是传播矩阵法的一个特例。

对运动-应力向量，我们首先将微分方程 (7.24)和(7.28) 推广到矩阵形式。

$$\frac{d\boldsymbol{f}(z)}{dz}=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{f}(z), \tag{7.36}$$

这里 $\boldsymbol{f}(z)$是一个 $n\times 1$ 列的向量，$\boldsymbol{A}(z)$是一个 $n\times n$ 的矩阵；对 Love 波 $n=2$，对 Rayleigh 波 $n=4$。

这传播矩阵(有时称为矩阵子)定义为

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\boldsymbol{I}+\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{A}(\xi_1)\,d\xi_1$$
$$+\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{A}(\xi_1)\int_{z_0}^{\xi_1}(\boldsymbol{A}(\xi_2)d\xi_2 d\xi_1+\cdots, \tag{7.37}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵。显然 $\boldsymbol{P}(z,z_0)$满足微分方程(7.36)：

$$\frac{d}{dz}\boldsymbol{P}(z,z_0)=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{P}(z,z_0). \tag{7.38}$$

另外，根据(7.37)，$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\boldsymbol{I}$。由于其中右半边满足微分方程(7.36)并在 $z=z_0$ 处确实给出 $\boldsymbol{f}(z_0)$，因此我们得到传播矩阵最重要的特性，即

$$\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z_0). \tag{7.39}$$

因此，通过计算 z_0 处的向量，则$\boldsymbol{P}(z,z_0)$可给出 z 处的运动-应力向量。

注意下式则可发现 $\boldsymbol{P}(z,z_0)$ 的一个有意义的特性

$$\boldsymbol{f}(z_2)=\boldsymbol{P}(z_2,z_1)\boldsymbol{f}(z_1)$$
$$=\boldsymbol{P}(z_2,z_1)\boldsymbol{P}(z_1,z_0)\boldsymbol{f}(z_0).$$

选择 $z_2=z_0$ 并对任意 $\boldsymbol{f}(z_0)$应用上面的链式法则，由此可得

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{P}(z_0,z_1)\boldsymbol{P}(z_1,z_0), \tag{7.40}$$

所以 $\boldsymbol{P}(z_1,z_0)$的逆式是 $\boldsymbol{P}(z_0,z_1)$。

如 Thomson 和 Haskell 所假定的那样，在给定的层中若 $\boldsymbol{A}(z)$ 是和 z 无关的常数，则传播矩阵可取成简单的形式。根据(7.37)，

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\boldsymbol{I}+(z-z_0)\,\boldsymbol{A}+\frac{1}{2}(z-z_0)^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}+\cdots$$

$$=\exp[(z-z_0)\boldsymbol{A}]. \tag{7.41}$$

对一个具有不同本征值$\lambda_k(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$的方矩阵$\boldsymbol{A}$，矩阵$\boldsymbol{A}$的函数可按Sylvester公式展开(例如，Hildebrand，1952)。

$$F(\boldsymbol{A})=\sum_{k=1}^{n}F(\lambda_k)\frac{\prod_{r\neq k}(\boldsymbol{A}-\lambda_r\boldsymbol{I})}{\prod_{r\neq k}(\lambda_k-\lambda_r)}. \tag{7.42}$$

正是这个关系式，规定了(7.41)最后一部分的意义。对Love波，从(7.24)我们得到

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & \mu^{-1}\\ k^2\mu-\omega^2\rho & 0\end{pmatrix}.$$

为求得本征值，我们令

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-\lambda & \mu^{-1}\\ k^2\mu-\omega^2\rho & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

并得到 $\lambda=\pm(k^2-\omega^2/\beta^2)^{1/2}=\pm\nu$。将这些结果代入(7.42)，我们得到

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\exp[(z-z_0)\boldsymbol{A}]$$

$$=\begin{pmatrix}\cosh\nu(z-z_0) & (\nu\mu)^{-1}\sinh\nu(z-z_0)\\ \nu\mu\sinh\nu(z-z_0) & \cosh\nu(z-z_0)\end{pmatrix}. \tag{7.43}$$

当 z 和 z_0 两者均在同一层内时，通过 $\boldsymbol{I}(z_0)$ 的计算，这个矩阵可给出运动-应力向量 $\boldsymbol{I}(z)$。对如图 7.5 所示的成层介质，当 $z_k>z>z_{k-1}$ 时，传播矩阵 $\boldsymbol{P}(z,z_0)$ 可由下式求出：

$\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{P}(z,z_{k-1})\boldsymbol{P}(z_{k-1},z_{k-2})\cdots\boldsymbol{P}(z_1,z_0)\boldsymbol{f}(z_0)=\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z_0)$，

因此

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)=\exp[(z-z_{k-1})\boldsymbol{A}_k]\prod_{l=1}^{k-1}\exp[(z_l-z_{l-1})\boldsymbol{A}_l]. \tag{7.44}$$

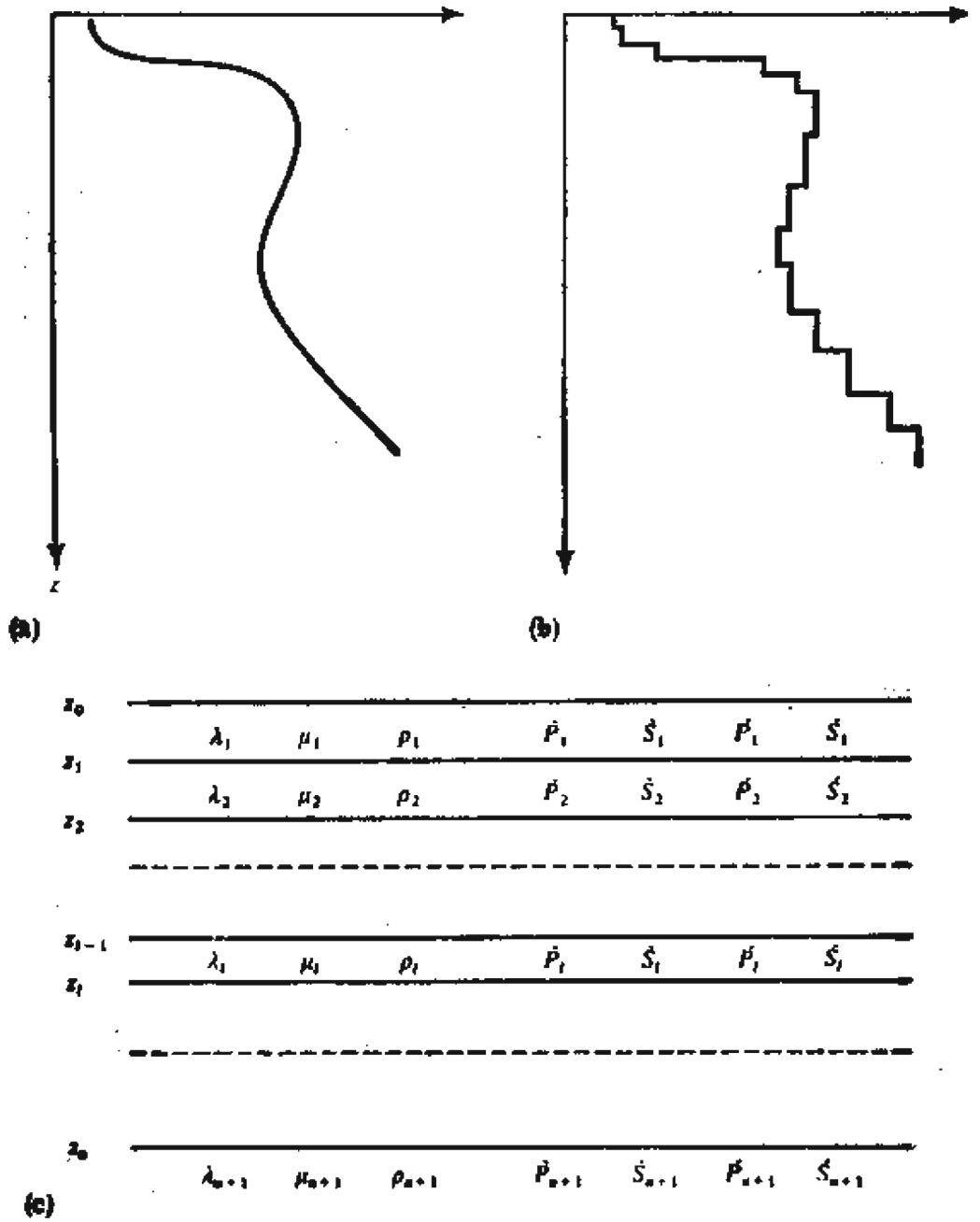


图 7.5

(a) 参数(ρ, λ, μ, α 或 β 之一)随深度的连续变化。(b) 近似于(a)的分段常数。这可看成一些连接在一起的均匀板的叠置。(c) 弹性常数、分层、上行波和下行波的编号系统

类似地，Rayleigh 波的层矩阵，可以将 (7.28) 中给出的 $\boldsymbol{A}$ 代入到 (7.41) 中而得到。在此情况下，$\boldsymbol{A}$ 的本征值为 $\pm\gamma=\pm(k^2-\omega^2/\alpha^2)^{1/2}$ 和 $\pm\nu=\pm(k^2-\omega^2/\beta^2)^{1/2}$。$\boldsymbol{P}(z,z_0)$ 的元素则给出如下(z 和 z_0 在同一层)：

$$
\begin{aligned}
P_{11}&=P_{33}=1+\frac{2\mu}{\omega^2\rho}\Big[2k^2\sinh^2\frac{\gamma(z-z_0)}{2}\\
&\qquad-(k^2+\nu^2)\sinh^2\frac{\nu(z-z_0)}{2}\Big],\\
P_{12}&=-P_{43}=\frac{k\mu}{\omega^2\rho}\Big[(k^2+\nu^2)\frac{\sinh\gamma(z-z_0)}{\gamma}\\
&\qquad-2\nu\sinh\nu(z-z_0)\Big],\\
P_{13}&=\frac{1}{\omega^2\rho}\Big[k^2\frac{\sinh\gamma(z-z_0)}{\gamma}\nu\sinh\nu(z-z_0)\Big],\\
P_{14}&=-P_{23}=\frac{2k}{\omega^2\rho}\Big[\sinh^2\frac{\gamma(z-z_0)}{2}-\sinh^2\frac{\nu(z-z_0)}{2}\Big],\\
P_{21}&=-P_{34}=\frac{k\mu}{\omega^2\rho}\Big[(k^2+\nu^2)\frac{\sinh\nu(z-z_0)}{\nu}\\
&\qquad-2\gamma\sinh\gamma(z-z_0)\Big],\\
P_{22}&=P_{44}=1+\frac{2\mu}{\omega^2\rho}\Big[2k^2\sinh^2\frac{\nu(z-z_0)}{2}\\
&\qquad-(k^2+\nu^2)\sinh^2\frac{\gamma(z-z_0)}{2}\Big],\\
P_{24}&=\frac{1}{\omega^2\rho}\Big[k^2\frac{\sinh\nu(z-z_0)}{\nu}-\gamma\sinh\gamma(z-z_0)\Big],\\
P_{31}&=\frac{\mu^2}{\omega^2\rho}\Big[4k^2\gamma\sinh\gamma(z-z_0)-(k^2+\nu^2)^2\frac{\sinh\nu(z-z_0)}{\nu}\Big],\\
P_{32}&=-P_{41}=2\mu^2(k^2+\nu^2)P_{14},\\
P_{42}&=\frac{\mu^2}{\omega^2\rho}\Big[4k^2\nu\sinh\nu(z-z_0)-(k^2+\nu^2)^2\frac{\sinh\gamma(z-z_0)}{\gamma}\Big].
\end{aligned}
\tag{7.45}
$$

方程(7.43)、(7.44) 和 (7.45) 给出了 Thomson-Haskell 方法中

的传播矩阵。

传播矩阵也可用来求解具有右源项的系统：

$$\frac{d\boldsymbol{f}(z)}{dz}=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{f}(z)+\boldsymbol{g}(z), \tag{7.46}$$

其中 $\boldsymbol{g}(z)$是已知的 z 的 $n\times 1$ 矩阵函数。上式的解为

$$\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{P}(z,z_0)\left[\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{P}^{-1}(\xi,z_0)\boldsymbol{g}(\xi)d\xi+\boldsymbol{f}(z_0)\right]. \tag{7.47}$$

为证实这个结果，我们用(7.38)可得

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{f}}{dz}&=\frac{d\boldsymbol{P}}{dz}\left[\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{P}^{-1}(\xi,z_0)\boldsymbol{g}(\xi)d\xi+\boldsymbol{f}(z_0)\right]+\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{P}^{-1}(z,z_0)\boldsymbol{g}(z)\\&=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{P}^{-1}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z)+\boldsymbol{g}(z)\\&=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{f}(z)+\boldsymbol{g}(z).\end{aligned}$$

因此(7.47)满足(7.46)。因为，由(7.40)得

$$\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{P}^{-1}(\xi,z_0)=\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{P}(z_0,\xi)=\boldsymbol{P}(z,\xi),$$

解(7.47)可简化成

$$\boldsymbol{f}(z)=\int_{z_0}^{z}\boldsymbol{P}(z,\xi)\boldsymbol{g}(\xi)d\xi+\boldsymbol{P}(z,z_0)\boldsymbol{f}(z_0). \tag{7.48}$$

现在让我们来讨论在应用Thomson-Haskell方法中所遇到的一些实际问题。由于辐射条件是被用以消除来自无限远处的波，而不是直接用以约束运动应力向量，我们需要把运动应力向量和基底半空间中上行波和下行波的存在(或不存在)联系起来。当然，对足够大的 k，这些波型变得随深度分别为指数增长或指数衰减。从(5.62)和(5.63)，以垂直波数 $i\nu$ 取代 $\omega\eta$，对均匀体中的 SH 波，其关系式为

$$\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{-\nu z} & e^{\nu z}\\-\nu\mu e^{-\nu z} & \nu\mu e^{\nu z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{S}\\\acute{S}\end{pmatrix} \tag{7.49}$$

或 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{W}$，其中 $\nu=(k^2-\omega^2/\beta^2)^{1/2}$ 和 $\beta=(\mu/\rho)^{1/2}$。$\hat{S}$ 和 $\acute{S}$ 分别为给出其下行波和上行波位移振幅的常数。对(7.49)其逆关系式为

$$\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}\hat{S}\\\acute{S}\end{pmatrix}=1/(2\nu\mu)\begin{pmatrix}\nu\mu e^{\nu z} & -e^{-\nu z}\\\nu\mu e^{-\nu z} & e^{-\nu z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1\\l_2\end{pmatrix} \tag{7.50}$$

或 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{I}$。

将此关系应用于 $z=z_0$ 处的运动-应力向量，则在半空间中上行波和下行波的振幅可用 $z=z_0$ 处的运动-应力向量来表示：

$$\boldsymbol{w}_{n+1}=\boldsymbol{F}_{n+1}^{-1}\boldsymbol{P}(z_n,z_0)\boldsymbol{I}(z_0)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{I}(z_0). \tag{7.51}$$

根据辐射条件和(或)边界条件，得到 $\hat{S}_{n+1}=0$ 和 $l_2(z_0)=0$，所以我们得到

$$\begin{pmatrix}\hat{S}_{n+1}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_1(z_0)\\0\end{pmatrix}. \tag{7.52}$$

补充 7.3

关于回避使用势函数

对成层介质中波的传播，和 Haskell(1953，1960，1962)法相反，本章中对 P，SV 和 SH 波，我们已最低限度地使用势函数。虽然，在均匀各向同性介质内的弹性理论中，势函数确实可以弄清楚某些阶段，但事实上对讨论 $\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}(z)\boldsymbol{f}$ 的解，矩阵法更为有效。势函数是没有直接意义的，在施加边界条件时使用也是不便的，但是，$\boldsymbol{f}$ 是由质点运动分量和应力分量组成的，这些量正是我们希望直接解得的量。

读者可注意，在第五章中讨论过的一次反射系数是用势函数得到的，但我们很快即转向直接研究位移。在第六章中又提到势函数是由于我们未曾将波动方程变为 $\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$ 的形式，所以，它们的标量波动方程显得比包含有 P 和 S 运动在内的向量方程要简单。然而，在补充 6.9 中我们确曾对 P-SV 波讨论过其运动-应力向量 $\boldsymbol{f}$ 的前两项表值；并确曾推导出 $\boldsymbol{f}$ 等于可能的基本波之和，即 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$(用本章的符号)。

令 $\boldsymbol{w}$ 的适当的分量为 0，很容易施加辐射条件。

所有这些并不是否认，理解弹性波的势函数和对它们求解是地震学家学习过程的一个重要组成部分。在以后的几章中我们将偶然地使用势函数，但绝大部分我们将强调去理解 $\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{P}(z,z_0)\,\boldsymbol{f}(z_0)$ 和 $\boldsymbol{f}(z)=\boldsymbol{F}(z)\boldsymbol{w}$。在问题 5.8 中引入了势函数和层矩阵 $\boldsymbol{F}$ 之间的关系。

对一有意义的解 I，从上述方程可知，B_{21} 必须为 0。因此，本征值由下式确定：

$$B_{21}=0. \tag{7.53}$$

对一给定的 ω，为求此方程的根，我们从 k 的尝试值开始。若已知 ω 和 k，根据矩阵乘积(7.51)，用给出的层的参数，可计算 B_{21} 的值。于是，稍微改变 k 而引起 B_{21} 的变化是可控制的。用外推法和内插法可很快地定出 B_{21} 发生零交点时的 k 值。一旦找到本征值，即可通过(7.44)算出本征函数。

上述方法很容易推广于 Rayleigh 波，只须寻求运动-应力向量(r_1,r_2,r_3,r_4)和$(\grave{P},\grave{S},\acute{P},\acute{S})$之间的关系，后者是描述在每层中，四种可能的波各有多少的数值。正如在 5.4 节中，将 $\boldsymbol{F}$ 分解成一个由 $\boldsymbol{A}$ 的本征向量构成的矩阵乘以一个含有垂直相位因子的对角矩阵(见(5.65))，我们得到了 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}$ 去解 $\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$，这里我们也同样得到

$$\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}\begin{pmatrix} \grave{P}\\ \grave{S}\\ \acute{P}\\ \acute{S} \end{pmatrix}. \tag{7.54}$$

此矩阵 $\boldsymbol{F}$ 分解为

$$\boldsymbol{F}=\omega^{-1}\times\begin{pmatrix} \alpha k & \beta\nu & \alpha k & \beta\nu\\ \alpha\gamma & \beta k & -\alpha\gamma & -\beta k\\ -2\alpha\mu k\gamma & -\beta\mu(k^2+\nu^2) & 2\alpha\mu k\gamma & \beta\mu(k^2+\nu^2)\\ -\alpha\mu(k^2+\nu^2) & -2\beta\mu k\nu & -\alpha\mu(k^2+\nu^2) & -2\beta\mu k\nu \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} e^{-\gamma z} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{-\nu z} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{\gamma z} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{\nu z} \end{pmatrix}. \tag{7.55}$$

对(7.28)中出现的系数矩阵的本征向量，我们可自由选择任意适当的正则化形式。对(7.54)和(7.55)的特殊形式，我们以两种要求作指导：第一点，包含在 Fw 中的四个分量波，对那些均匀的波(即当 γ 和 ν 是负虚数)，确实有由(P,S,P,S)给出的位移振幅。第二点要求是，对面波(当 γ 和 ν 是正实数)，F 的表值全部是实数。

补充 7.4

固体层和液体层的混合

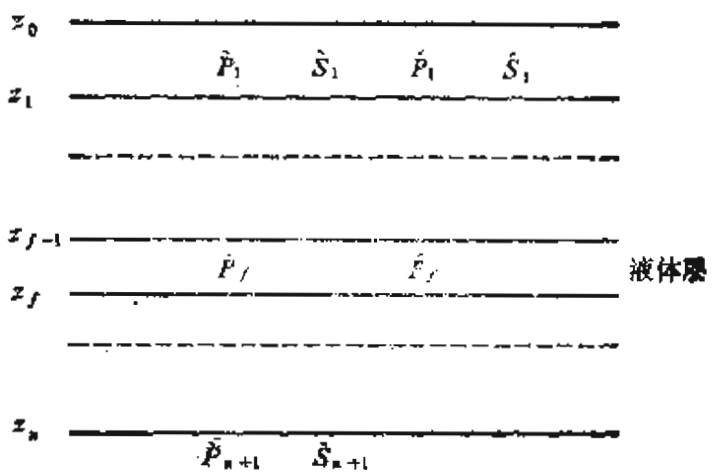
地震学中的液体层可能是，(i) 位于顶部，如海洋结构；(ii) 固体层间的夹层，如海面被冰覆盖或具有岩浆透镜体的火山地区或(iii)位于底部，如在地幔下边的地核。这里我们将考虑一种粘滞系数为0的理想液体，在液-固的交界面处其剪应力必须为0，但容许有水平位移的不连续性(见5.2节)。

在Love波的情况下，液-固界面成为一个自由面并且液体层与真空相似。

在Rayleigh波的情况下，剪应力为零，但正应力和正位移不为零，而且穿过液-固界面时必须是连续的。因此，液体层的层矩阵 F 成为奇异的并且它的逆矩阵是不存在的。我们需要找到一种计算方法，处理时犹如其逆矩阵是存在的。

在固体的成层半空间中，考虑在其深度 $z_j>z>z_{j-1}$ 处有一液体夹层，如图所示。层中只有压缩波存在。为确定穿过此混合层介质的运动-应力向量，我们将从自由面 $z=z_0$ 入手。利用正文中(见问题7.3)给定的层矩阵 F，在 $z=z_{j-1}$ 处的运动-应力向量 $r(z)$ 可用 $r(z_0)$ 表示。由于牵引力为零，在 z_0 处 $r_3=r_4=0$，$r(z_{j-1})$ 被完全确定为两个未知量 $r_1(z_0)$ 和 $r_2(z_0)$ 间的线性组合。另一方面，$z=z_{j-1}$ 是液-固的交界面并且剪切牵引力 $r_3(z_{j-1})$ 为零。这采用了 $r_1(z_0)$ 和 $r_2(z_0)$ 间的线性关系。利用这个关系可从表示式 $r(z_{j-1})$ 中消掉 $r_1(z_0)$，现在此 $r(z_{j-1})$ 可仅由一个未知的 $r_2(z_0)$ 完全确定。因而，$r_2(z_j)$ 和 $r_4(z_j)$ 可由 $r_3(z_{j-1})$ 和 $r_4(z_{j-1})$ 通过上行的和下行的压缩波 P_j 和 $\hat{P}_j$ 来确定。在 $z=z_j$ 处，$r_3(z_j)$ 已知为零，所以，未知的 $r(z_j)$ 的分量仅是 $r_1(z_j)$。因此，在 z_j 以下的运动-应力向量可表示成两个未知量

$r_1(z_f)$和$r_2(z_f)$的线性组合。由此得出，在半空间中波的辐射条件导出一个类似(7.58)的方程，其中$r_1(z_0)$换以$r_1(z_f)$。



当一液体层置于一固体介质之上时，$r(z_0)$的未知分量开始时只有$r_1(z_0)$，因而采用的步骤和前述叠置的固体层被消除的情况是相同的。在液体半空间的情况下，使$r_2(z_n)$变为零将取代使$\hat{S}_{n+1}$变为零的条件。

对(7.55)中F的每一个矩阵因子，可写出其具体的逆矩阵

$$F^{-1}=\begin{pmatrix} e^{\nu z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\nu z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\nu z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\nu z} \end{pmatrix} \times \frac{\beta}{2\alpha\mu\gamma\nu\omega}$$

$$\times \begin{pmatrix} 2\beta\mu k\gamma\nu & -\beta\mu\nu(k^2+\nu^2) & -\beta k\nu & \beta\gamma\nu \\ -\alpha\mu\gamma(k^2+\nu^2) & 2\alpha\mu k\gamma\nu & \alpha\gamma\nu & -\alpha k\gamma \\ 2\beta\mu k\gamma\nu & \beta\mu\nu(k^2+\nu^2) & \beta k\nu & \beta\gamma\nu \\ -\alpha\mu\gamma(k^2+\nu^2) & -2\alpha\mu k\gamma\nu & -\alpha\gamma\nu & -\alpha k\gamma \end{pmatrix}. \tag{7.56}$$

ω, F, F^{-1}的每一个都和层有关，并且我们可使在最下面的半空间中不同类型波的振幅和在自由面上的运动-应力向量相关：

$$\boldsymbol{w}_{n+1}=\boldsymbol{F}_{n+1}^{-1}\boldsymbol{P}(z_n,z_0)\boldsymbol{r}(z_0)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{r}(z_0). \tag{7.57}$$

相当于我们处理 Love 波时的(7.51)—(7.52)，这里我们得到

$$\begin{pmatrix}\hat{P}_{n+1}\\ \hat{S}_{n+1}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}&B_{13}&B_{14}\\ B_{21}&B_{22}&B_{23}&B_{24}\\ B_{31}&B_{32}&B_{33}&B_{34}\\ B_{41}&B_{42}&B_{43}&B_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1(z_0)\\ r_2(z_0)\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{7.58}$$

因此本征值由下式给出：

$$\begin{vmatrix}B_{31}&B_{32}\\ B_{41}&B_{42}\end{vmatrix}=0. \tag{7.59}$$

对一给定的 ω，为求此行列式的根，我们仍从尝试值 k 入手，并迭代 k 值直至(7.59)成立。对一尝试值 k，在计算(7.59)左边的子行列式时，如果面波的波长 λ 变得比某一极限值短，则引起一个数值问题。按照 Schwab 和 Knopoff(1970)的结果，在计算中若用 16 位 10 进制数字，这极限近似为

$$H/\lambda=3\times10^{(14.3-\sigma)/12.4}, \tag{7.60}$$

这里 H 是均匀半空间的深度，σ 是以有效数字给出的相速度中所要求的精度。对 Love 波，此极限不存在。而对 Rayleigh 波所以存在的原因是由于层矩阵(7.55)中出现有如下矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}_i(z)$：

$$\boldsymbol{\Lambda}_1(z)=\begin{pmatrix}\exp(-\gamma_i z)&0&0&0\\ 0&\exp(-\nu_i z)&0&0\\ 0&0&\exp(\nu_i z)&0\\ 0&0&0&\exp(\nu_i z)\end{pmatrix} \tag{7.61}$$

当 H/λ 很大时，则 $\boldsymbol{\Lambda}_i$ 的对角元素将很大。在 $\boldsymbol{\Lambda}_i$ 之前乘以 $\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{\Lambda}_i$ 之后乘以 $\boldsymbol{R}$，将矩阵的乘积归并成 $\boldsymbol{B}$，我们写成

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Lambda}_i\boldsymbol{R}. \tag{7.62}$$

相应于(7.59)的 $\boldsymbol{B}$ 的子行列式，它将包含如下的项：

$$\exp(2\gamma_i z)(l_{33}r_{31}l_{43}r_{32}-l_{43}r_{31}l_{33}r_{32}),$$

此项恒为零，但在计算过程中此项将得到为两个大数之间的差，

如果 $\exp(\gamma_i z)$ 较大，则会引起有效数字的损失。这个问题曾被 Dunkin(1965)指出而且被他和 Knopoff(1964b)用 Laplace 子式的展开所修正。它也可用层简化法(Schwab 和 Knopoff，1970)来修正，在此法中，对越短周期的波在越浅的深度处，介质的下部将以均匀半空间代替。然而，在深部波导的情况下，层简化法应当避免使用，并且此方法只能用于某些深度，在这些深度以下所有的层仅含有非均匀的 P 波和 SV 波。另一方法是对得自解 $r^{(1)}$ 和 $r^{(2)}$[见(7.30)]的二次子式用传播矩阵法。这六个子式为

$$R_1=r_1^{(1)}r_2^{(2)}-r_2^{(1)}r_1^{(2)},\quad R_2=r_1^{(1)}r_3^{(2)}-r_3^{(1)}r_1^{(2)},$$
$$R_3=r_1^{(1)}r_4^{(2)}-r_4^{(1)}r_1^{(2)},\quad R_4=r_2^{(1)}r_3^{(2)}-r_3^{(1)}r_2^{(2)},$$
$$R_5=r_2^{(1)}r_4^{(2)}-r_4^{(1)}r_2^{(2)},\quad R_6=r_3^{(1)}r_4^{(2)}-r_4^{(1)}r_3^{(2)}.$$

竹内和斋藤(Takeuchi and Saito，1972)证明 $\boldsymbol{f}=(R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6)^T$ 满足 $d\boldsymbol{f}/dz=\boldsymbol{c}\boldsymbol{f}$ 型的方程，这个方程的解前已说明。然而，这时，频散关系(7.32)简化为要求 $\boldsymbol{f}$ 的一个标量分量(即 R_6)在自由面 $z=z_0$ 处变为零。

补充 7.5

Gutenberg 地球模型中的面波

作为一个例子，在图 A 到 E 中我们给出 Gutenberg 经典地球模型中大陆结构的 Love 波和 Rayleigh 波的相速度 c，群速度 U 和本征函数。在 24 个均匀层叠置而成的模型中，其中每一层的层底深度、密度、压缩波和剪切波的速度均列在下表中。

大陆结构的 Gutenberg 分层模型

层号	层底深度 (km)	密度 (g/cm³)	v_p (km/s)	v_s (km/s)
1	19	2.74	6.14	3.55
2	38	3.00	6.58	3.80
3	50	3.32	8.20	4.65
4	60	3.34	8.17	4.62
5	70	3.35	8.14	4.57

6	80	3.36	8.10	4.51
7	90	3.37	8.07	4.46
8	100	3.38	8.02	4.41
9	125	3.39	7.93	4.37
10	150	3.41	7.85	4.35
11	175	3.43	7.89	4.36
12	200	3.46	7.98	4.38
13	225	3.48	8.10	4.42
14	250	3.50	8.21	4.46
15	300	3.53	8.38	4.54
16	350	3.58	8.62	4.68
17	400	3.62	8.87	4.85
18	450	3.69	9.15	5.04
19	500	3.82	9.45	5.21
20	600	4.01	9.88	5.45
21	700	4.21	10.30	5.76
22	800	4.40	10.71	6.03
23	900	4.56	11.10	6.23
24	1000	4.63	11.35	6.32

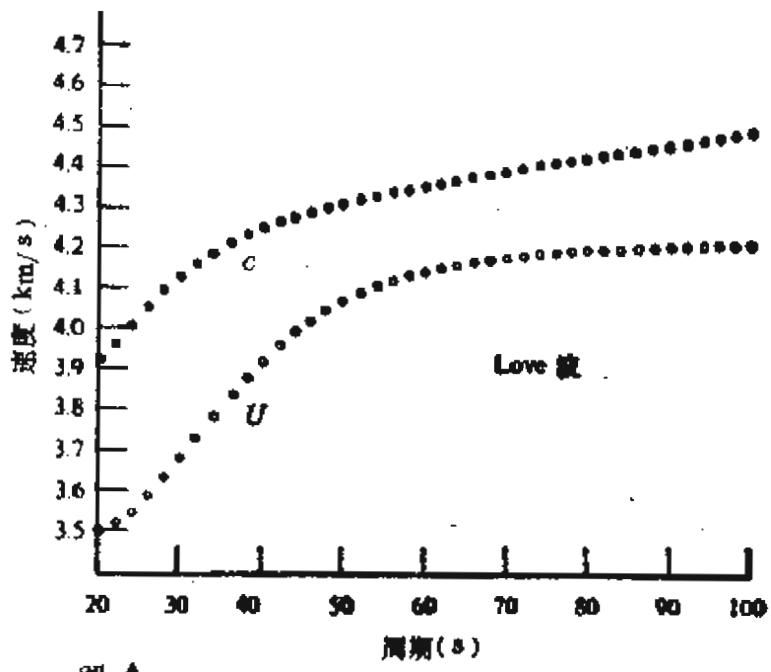


图 A

Gutenberg 地球模型基频振型 Love 波的相速度和群速度

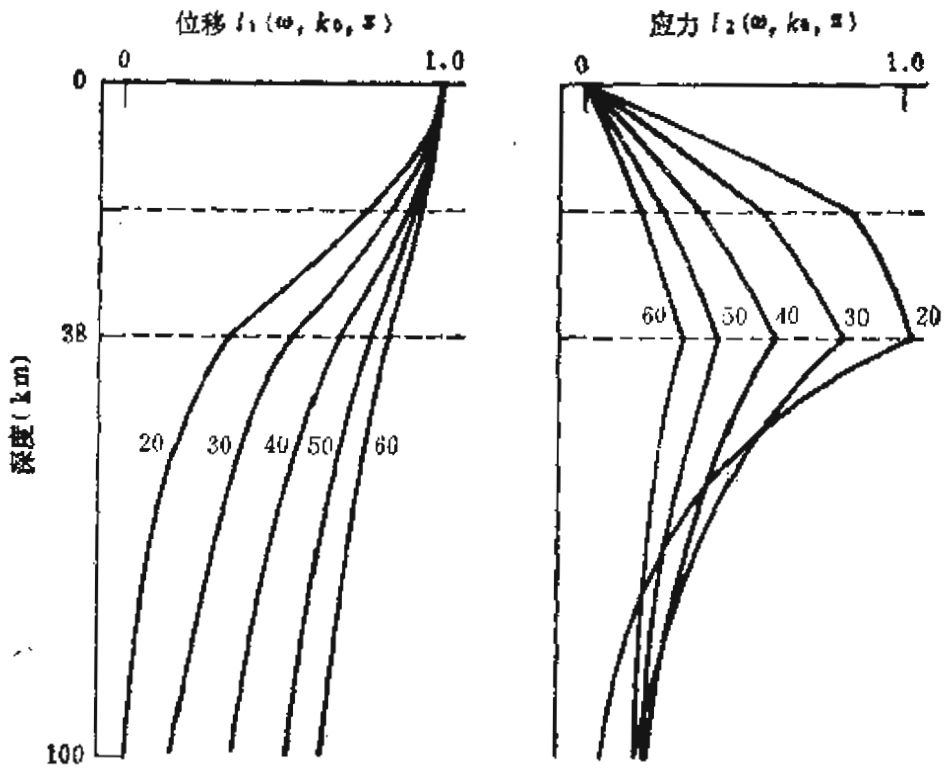


图 B

不同周期下基频振型 Love 波的本征函数。振幅归一化为 $z=0$ 处的位移

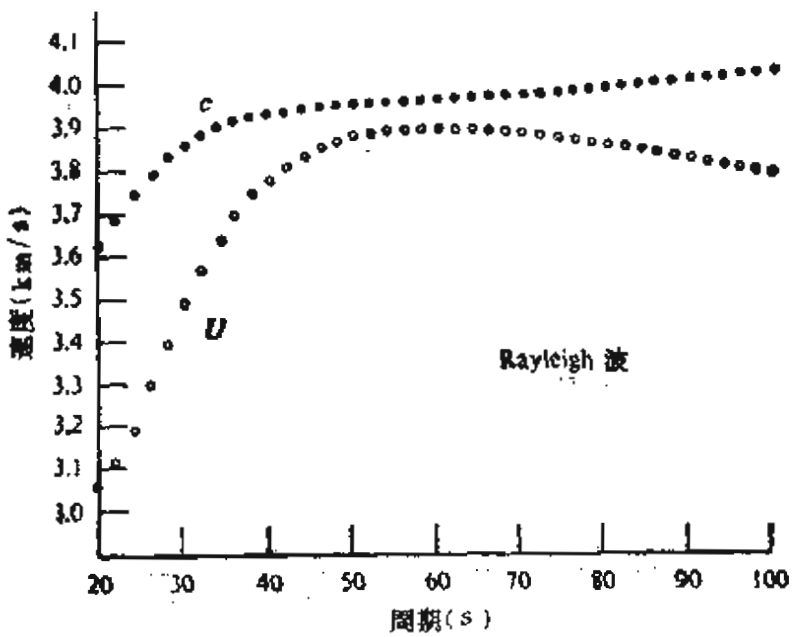


图 C

Gutenberg 地球模型中基频振型 Rayleigh 波的相速度和群速度

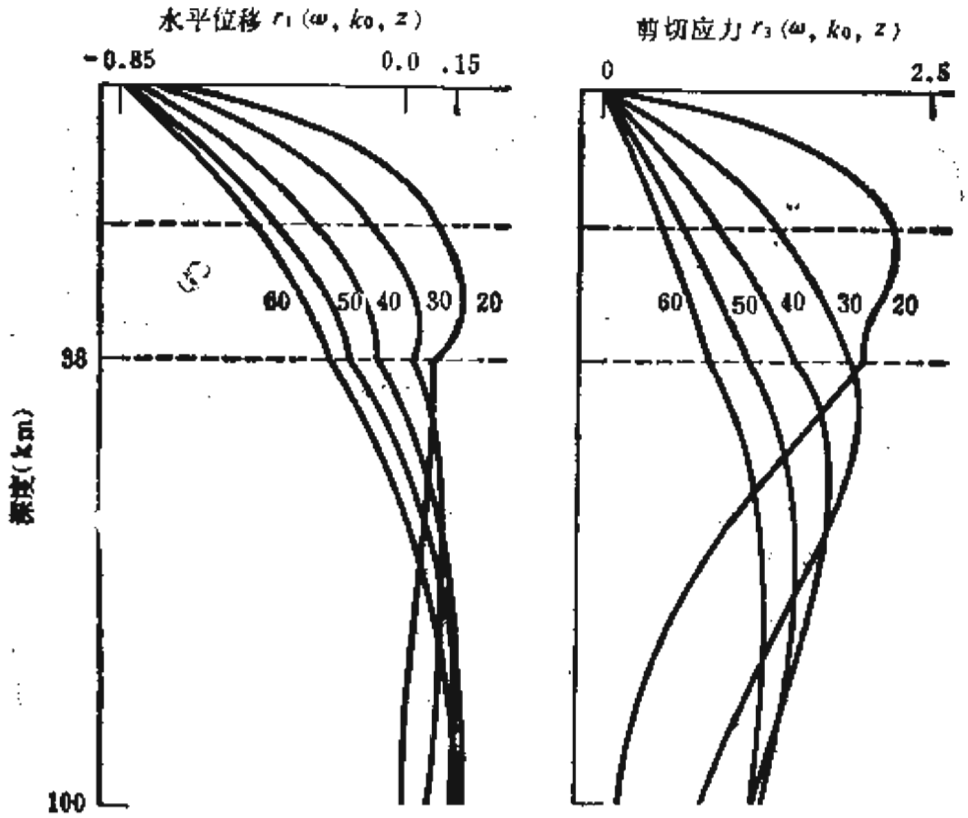


图 D

不同周期下基频振型 Rayleigh 波的水平本征函数，振幅归一化为 $z=0$ 处的垂直位移 r_2

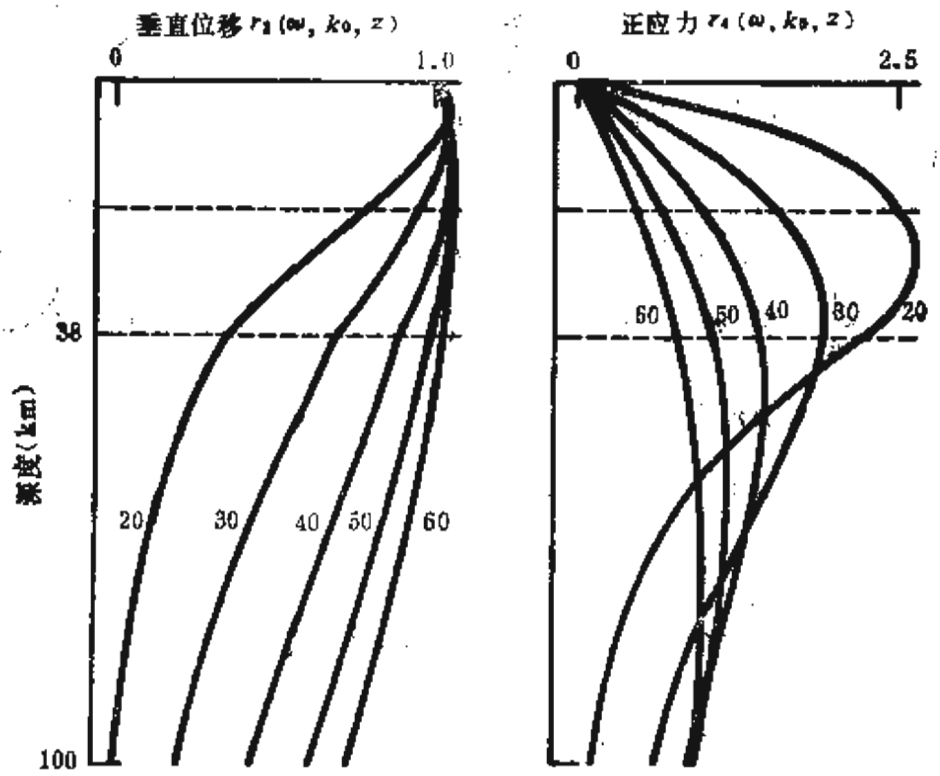


图 E

不同周期下基频振型 Rayleigh 波的垂直本征函数。振幅仍归一化为 $z=0$ 处的垂直位移 r_2

7.3 Love 波和 Rayleigh 波的变分原理

这里表明，前面讨论过的本征值-本征函数问题可以用 Rayleigh-Ritz 方法求解。我们也将用变分方法求得几个重要公式，以计算群速度、衰减以及分别对各介质参量求相速度的偏微商。

对各向同性、竖向不均匀的介质中的 Love 波和 Rayleigh 波，我们从 Lagrange 密度 L 入手。对一线弹性体，Lagrange 密度是动能减去弹性应变能(2.32)。对一各向同性体，

$$L=\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i-\left[\frac{1}{2}\lambda(e_{kk})^2+\mu e_{ij}e_{ij}\right]. \tag{7.63}$$

对 (7.19) 给出的平面 Love 波，由于 $e_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$，我们有

$$\langle L\rangle=\frac{1}{4}\rho\omega^2 l_1^2-\frac{1}{4}\mu\left[k^2l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right]. \tag{7.64}$$

这里的括号〈 〉代表一平均过程，所以，在 (7.63) 中出现的象 $\cos^2(kx-\omega t)$和 $\sin^2(kx-\omega t)$ 的项，在(7.64) 的微分中已被$\frac{1}{2}$所取代。

对(7.25)给出的平面 Rayleigh 波，

$$\langle L\rangle=\frac{1}{4}\rho\omega^2(r_1^2-r_2^2)-\frac{1}{4}\left[\lambda\left(kr_1+\frac{dr_2}{dz}\right)^2+\mu\left(\frac{dr_1}{dz}-kr_2\right)^2+2\mu k^2r_1^2+2\mu\left(\frac{dr_2}{dz}\right)^2\right]. \tag{7.65}$$

7.3.1 Love 波

对这些面波我们定义其能量积分为

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty \rho l_1^2dz,\quad I_2=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu l_1^2dz,$$
$$I_3=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2dz, \tag{7.66}$$

当无体力且无表面牵引力时，根据 Hamilton 原理，若对实际运动 l_1 有扰动时，$\langle L\rangle$的积分一定是稳定的。为证实这一点，我们来考察$\langle L\rangle$的积分中的扰动，它刚好是下式的一半：

$$\begin{aligned}&\omega^2\delta I_1-k^2\delta I_2-\delta I_3\\&=\omega^2\int_0^\infty \rho l_1\delta l_1 dz-\int_0^\infty \mu\frac{dl_1}{dz}\frac{d\delta l_1}{dz}dz-k^2\int_0^\infty \mu l_1\delta l_1 dz\\&=\int_0^\infty\left\{\omega^2\rho l_1-k^2\mu l_1+\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{dl_1}{dz}\right)\right\}\delta l_1 dz-\mu\frac{dl_1}{dz}\delta l_1\Big|_0^\infty.\end{aligned}$$

如果(i)运动方程是(7.21)，(ii) 在 $z=0$ 处，自由表面条件 $dl_1/dz=0$，(iii)在 $z=\infty$处，δl_1 变为零和(iv)l_1 及 $\mu\frac{dl_1}{dz}$的连续性（分部积分所要求的）完全被满足，我们的确得到

$$\omega^2\delta I_1-k^2\delta I_2-\delta I_3=0. \tag{7.67}$$

能全部满足这四个条件的 l_1 就是一个本征函数。因此，我们已证明，对于围绕本征函数 l_1 的扰动，$\omega^2I_1-k^2I_2-I_3$ 是稳定的。而且，将运动方程 (7.21) 乘以 l_1 并对 z 从 0 到∞求积分，我们可证明 Lagrange 积分 $\omega^2I_1-k^2I^2-I_3$ 在其稳定点为零，

$$\begin{aligned}0&=\int_0^\infty\left\{\omega^2\rho l_1^2-k^2\mu l_1^2+l_1\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{dl_1}{dz}\right)\right\}dz\\&=2\,\omega^2I_1-2\,k^2I_2-2\,I_3+l_1\,\mu\frac{dl_1}{dz}\Big|_0^\infty,\end{aligned} \tag{7.68}$$

当 l_1 是一个本征函数时，在 $z=\infty$处 $l_1=0$，在 $z=0$ 处 $dl_1/dz=0$，所以 (7.68) 的最后一项变为零。因而，对一个本征函数有

$$\omega^2I_1=k^2I_2+I_3. \tag{7.69}$$

换言之，在一个简正振型中包含的全部弹性能等于全部动能。

两个关系式 $\omega^2\delta I_1=k^2\delta I_2+\delta I_3$ 和 $\omega^2I_1=k^2I_2+I_3$，有三个特别重要的应用。每一应用中，扰动不同的量，变分方法的巧妙性及有效性可用完全由同一来源产生的三个不同结果来很好地说明。

首先，我们将假定在数值方法中试图估算这真实的本征函数

$l_1(z)$时，已产生了误差并且事实上得到的是 $l_1+\delta l_1$。由此，在(7.66) 中利用 $l_1+\delta l_1$，在数值上我们得到的是 $I_1+\delta I_1$，$I_2+\delta I_2$，和 $I_3+\delta I_3$。然而，补充的两个关系式 (7.67) 和 (7.69) 告诉我们，ω^2 通过下式和 k^2 发生关系：

$$k^2=\frac{\omega^2(I_1+\delta I_1)-(I_3+\delta I_3)}{I_2+\delta I_2}.$$

用它可准确地确定 k^2，并且其意义是 l_1 的一级误差并不导致其本征值的一级误差。

其次，我们可得到一个有用的群速度 U 的公式但不需要进行数值微商。我们假定 $l_1(k,\ \omega)$和 $l_1+\delta l_1=l_1(k+\delta k,\ \omega+\delta\omega)$两者都是本征函数。用这个 $l_1+\delta l_1$ 去估算能量积分，则由 (7.69) 可得出

$$(\omega+\delta\omega)^2(I_1+\delta I_1)=(k+\delta k)^2(I_2+\delta I_2)+(I_3+\delta I_3).$$

减去(7.69)，取一级近似，我们得到

$$\omega^2\delta I_1+2\,\omega\delta\omega I_1=k^2\delta I_2+2\,k\delta k I_2+\delta I_3.$$

因而，用此 $l_1+\delta l_1$，确构成了 (7.67) 中可用于对 l_1 的扰动。因此，$2\,\omega\delta\omega I_1=2\,k\delta k I_2$，和

$$U=\frac{\delta\omega}{\delta k}=\frac{k}{\omega}\frac{I_2}{I_1}=\frac{I_2}{cI_1}. \tag{7.70}$$

这是用积分给出的群速度，它在数值上比用微分给出的更稳定。

第三，当结构中的刚度 μ 和密度 ρ 受一微小扰动时，我们将估算相速度和群速度的变化，这些速度将上升(在固定的频率上)。假定 $l_1(k,\ \omega)$，是结构$(\rho(z),\ \mu(z))$中的本征函数。我们将其写成 $l_1=l_1(\rho,\ \mu,\ k,\ \omega)$ 并考虑有一扰动 $l_1+\delta l_1=l_1(\rho+\delta\rho,\ \mu+\delta\mu,\ k+\delta k,\ \omega)$，则它也是一本征函数，但是它的结构稍有不同。应用 (7.69) 于这新的本征函数，得到

$$\omega^2\int_0^\infty(\rho+\delta\rho)(l_1+\delta l_1)^2dz=(k+\delta k)^2\int_0^\infty(\mu+\delta\mu)(l_1+\delta l_1)^2dz+\int_0^\infty(\mu+\delta\mu)\left[\frac{d}{dz}(l_1+\delta l_1)\right]^2dz,$$

从原来的本征函数减去(7.69)，则得到(取一级近似)

$$\omega^2\int_0^\infty(l_1^2\delta\rho+2\rho l_1\delta l_1)dz$$

$$=k^2\int_0^\infty(l_1^2\delta\mu+2\mu l_1\delta l_1)dz+2k\delta k\int_0^\infty\mu l_1^2dz$$

$$+\int_0^\infty\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\delta\mu dz+\int_0^\infty 2\mu\frac{dl_1}{dz}\frac{d\delta l_1}{dz}dz.$$

但根据 (7.67) 我们可消去这里的所有包含 δl_1 以及 $d(\delta l_1)/dz$ 项的积分。我们还剩下 δk 和对 $\delta\rho$ 及 $\delta\mu$ 的积分之间的关系。剩下的是求 δc 和 δk 的关系，最后结果是

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=-\frac{\delta k}{k}$$

$$=\frac{\int_0^\infty\left[k^2l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right]\delta\mu dz-\int_0^\infty\omega^2l_1^2\delta\rho dz}{2k^2\int_0^\infty\mu l_1^2dz}. \quad (7.71)$$

这个公式说明在相速度的百分比变化 $\delta c/c$ 和模型参量中的扰动二者之间的线性关系，并且在相速度资料反演中它起了重要作用，如第十二章中所讨论的。对 $(\delta\mu/\mu)$ 其权函数或核函数是和应变能密度成比例的，对 $(\delta\rho/\rho)$，则和动能密度成比例，这说明在能量密度较大的深度处，μ 和 ρ 的扰动更加强烈地影响相速度。

由于刚性和密度的微小扰动，在固定频率上群速度的变化从(7.70)得到为

$$\frac{dU}{U}=\frac{\delta I_2}{I_2}-\frac{\delta c}{c}-\frac{\delta I_1}{I_1}, \quad (7.72)$$

而在此情况下，δl_1 必须在找到 δI_1 和 δI_2 之前计算出，因为包括 δl_1 和 $d(dl_1)/dz$ 的积分不能以类似于 (7.71) 的方式消去。

7.3.2 Rayleigh 波

用 (7.65) 给出的 Lagrange 密度，则 Rayleigh 波的 Hamilton 原理可写成

$$\omega^2\delta I_1-k^2\delta I_2-k\delta I_3-\delta I_4=0, \tag{7.73}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1&=\frac{1}{2}\int_0^\infty \rho(r_1^2+r_2^2)dz,\\
I_2&=\frac{1}{2}\int_0^\infty [(\lambda+2\mu)r_1^2+\mu r_2^2]dz,\\
I_3&=\int_0^\infty\left(\lambda r_1\frac{dr_2}{dz}-\mu r_2\frac{dr_1}{dz}\right)dz,\\
I_4&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{dr_2}{dz}\right)^2+\mu\left(\frac{dr_1}{dz}\right)^2\right]dz.
\end{aligned} \tag{7.74}$$

它可表明 (7.73) 等价于运动方程(7.28)，边界条件 (7.29) 和 r_1，r_2，r_3 及 r_4 的连续性。由于满足这些条件的 r_1，r_2 是 Rayleigh 波的本征函数，(7.33) 表明，对本征函数的扰动，积分 $\omega^2I_1-k^2I_2-kI_3-I_4$ 是稳定的。如同对 Love 波是正确的一样，我们发现这个积分在稳定点变为零：

$$\omega^2I_1-k^2I_2-kI_3-I_4=0. \tag{7.75}$$

因此，这个方程可检验用前面讨论过的方法所算出的本征值和本征函数。

对 (7.75) 式中的 k 和 ω 加一扰动，对群速度我们得到的公式为

$$I_1\delta(\omega^2)=I_2\delta(k^2)+I_3\delta k$$

或

$$U=\frac{\delta\omega}{\delta k}=\frac{I_2+\dfrac{I_3}{2k}}{cI_1}, \tag{7.76}$$

其中 c 是相速度。

由于 λ，μ 和 ρ 有一微小扰动，相速度的变化也可从(7.75)得到。对一给定的 ω 再用 (7.73)，我们得到

$$\delta k(2kI_2+I_3)=\frac{1}{2}\int_0^\infty \omega^2(r_1^2+r_2^2)\delta\rho dz$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left(kr_1+\frac{dr_2}{dz}\right)^2\delta\lambda dz$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left[2k^2r_1^2+2\left(\frac{dr_2}{dz}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(kr_2-\frac{dr_1}{dz}\right)^2\right]\delta\mu dz \qquad (7.77)$$

相速度相应的分数变化可写成

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=-\frac{\delta k}{k}$$
$$=\frac{1}{4k^2UcI_1}\left\{\int_0^\infty\left(kr_1+\frac{dr_2}{dz}\right)^2\delta\lambda dz\right.$$
$$+\int_0^\infty\left[2k^2r_1^2+2\left(\frac{dr_2}{dz}\right)^2\right.$$
$$\left.\left.+\left(kr_2-\frac{dr_1}{dz}\right)^2\right]\delta\mu dz-\int_0^\infty\omega^2(r_1^2\right.$$
$$\left.+r_2^2)\delta\rho dz\right\}, \qquad (7.78)$$

补充 7.6

相速度的"偏微商"

由于结构中有一微小扰动 $\delta\rho$ 和 $\delta\mu$，Love 波相速度的微小变化自然地可写成如下形式：

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=\int_0^\infty\frac{\rho}{c}\left[\frac{\partial c}{\partial\rho}\right]_{\omega,\mu}\frac{\delta\rho}{\rho}dz+\int_0^\infty\frac{\mu}{c}\left[\frac{\partial c}{\partial\mu}\right]_{\omega,\rho}\frac{\delta\mu}{\mu}dz. \qquad (1)$$

这里方括号中出现的符号，已知为在一特定深度上相速度对密度（或刚性）的偏微商。和 (7.71) 比较，我们得到

$$\frac{\rho}{c}\left[\frac{\partial c}{\partial\rho}\right]_{\omega,\mu}=-\frac{\rho\omega^2l_1^2}{2k^2\int_0^\infty\mu l_1^2dz} \qquad (2)$$

和

$$\frac{\mu}{c}\left[\frac{\partial c}{\partial \mu}\right]_{\omega,\rho}=\frac{\mu\left\{k^2 l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right\}}{2k^2\int_0^\infty \mu l_1^2 dz}. \tag{3}$$

这里的符号易于使人误会，如（2）和（3）的左半部呈现为无量纲的。按右半部，显然其单位事实上是长度的倒数［从（1）可直接得到］。

Dorman 和 Ewing（1962）以及 Brune 和 Dorman（1963）首先进行了相速度偏微商的计算，对两种略有不同的结构，他们简单地得到了相速度，于是取其数值差。对 Love 波和 Rayleigh 波两者的变分方法是由 Jeffreys（1961）提出的。Rodi 等（1975)给出了求群速度的实际方案。

其中用（7.76）简化右边的分母。$\delta\rho/\rho$ 的权函数还是动能，对 $\delta\lambda$ 则权函数比例于膨胀应变能。用 $\delta\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)$和 $\delta\mu$ 改写（7.78）式，我们可得权函数比例于膨胀应变能和剪切应变能(见问题 2.6)。

7.3.3 Rayleigh-Ritz 法

象在（7.67）和（7.73）中给出的对 Love 波和 Rayleigh 波的变分原理，被用在 Rayleigh-Ritz 方法中以求得本征值和本征函数。在这个方法中，我们用基本函数 $\phi_i(z)$ 的线性组合来逼近这本征函数，对基本函数的选择，通常是使其满足 $z=0$ 和 $z=\infty$ 处的边界条件：

$$l_1(z)=\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(z). \tag{7.79}$$

如果我们将此式代入（7.66）中的能量积分，则得到

$$I_1=\mathbf{c}^T\mathbf{A}_1\mathbf{c},\quad I_2=\mathbf{c}^T\mathbf{A}_2\mathbf{c},\quad I_3=\mathbf{c}^T\mathbf{A}_3\mathbf{c}, \tag{7.80}$$

其中 $\mathbf{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$，矩阵 $\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$ 和 $\mathbf{A}_3$ 具有如下元素：

$$A_{1,ij}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \rho\phi_i\phi_j dz,$$

$$A_{2ij}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu\phi_i\phi_j dz, \tag{7.81}$$

$$A_{3ij}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \mu\frac{d\phi_i}{dz}\frac{d\phi_j}{dz}dz.$$

令积分对 $c_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的导数等于零，由此得到了使 Lagrange 积分 $\omega^2 I_1-k^2 I_2-I_3$ 成为极小的系数向量 $\mathbf{c}$。其结果由下式给出

$$(\omega^2 A_1-k^2 A_2-A_3)\mathbf{c}=0. \tag{7.82}$$

此方程明确表示了 $\mathbf{c}$ 的本征值-本征向量问题。有意义的解 $\mathbf{c}$ 仅当 k 为本征值时存在并对一给定的 ω 满足

$$|\omega^2 A_1-k^2 A_2-A_3|=0. \tag{7.83}$$

一旦本征值被确定，相应的本征向量可由求解（7.82）得到。

由于这个本征值相对于本征函数的任意扰动而言都是稳定的，由求解（7.82）确定的近似的本征向量可用来通过(7.69)求得更精确的本征值。

竹内和小林（Takeuchi and Kobayashi, 1959）用指数衰减函数作为基本函数并在刚性随深度线性增加的半空间中测定了 Love 波的频散。他们得到了实质上和佐藤（sato, 1959）的数值积分法同样的结果：前者用手动计算机，后者用 IBM 650 计算机，二者所用的时间大致相同，由此证明了 Rayleigh-Ritz 法的效能。最近，Wiggins（1976 b）用了立方多项式，其基本函数如图 7.6 所示。它们的值和导数，在端点是 1 或是 0，对于为满足规定的边界条件而构成的一个尝试本征函数，这一点是很方便的。Wiggins 得出结论，用这些基本函数的 Rayleigh-Ritz 法和最有效的矩阵法不相上下。类似的方法也被 Buland 和 Gilbert (1976) 所采用。

7.3.4 面波的衰减

在第五章中，我们引进了空间的 $Q(\omega)$ 来描述平面体波随传播距离的衰减，并讨论了和频散有关的问题；我们已知对弹性

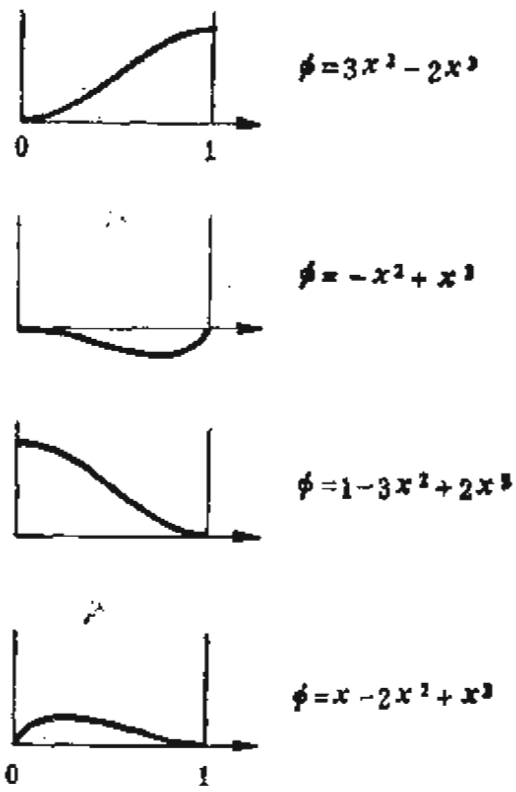


图 7.6

由 Rayleigh-Ritz 法求本征函数时，Wiggins 所用的基本函数。介质中可能出现很多非均匀层；这里画出的是用于每一层的四个归一化函数（$x=0$ 和 $x=1$ 相应于层边界）。四个函数中的每一个都表明 ϕ 和 $d\phi/dx$ 在 $x=0$ 和 1 处为 0 或为 1

介质，传播因子 $\exp[i(kx-\omega t)]=\exp[i\omega(x/c-t)]$ 可用

$$\exp[i(Kx-\omega t)]=\exp\left[\frac{(-\omega x)}{2\,c(\omega)Q(\omega)}\right]$$

$$\times\exp\left\{i\omega\left[\frac{x}{c(\omega)}-t\right]\right\}$$

代替。当一弹性波问题的解用 $c=c_e$ 给出时，则相应的非弹性的解可由下面的法则替换 c_e 给出：

$$\frac{1}{c_e}\to\frac{1}{c(\omega)}\left(1+\frac{i}{2Q(\omega)}\right). \qquad (即5.87)$$

特别是，若 Q 实际上是常数，我们得到的频散是对数的并由下式给出：

$$\frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)}=1+\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right).$$

对一具有高 Q 值的有耗散的介质，可认为法则（5.87）将对速度 c_e 引进一微小扰动（Anderson and Archambeau, 1964; Anderson *et al.*, 1965)。在固定频率上引起的变化 δc 将有实部和虚部两种成分：

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=\left(\frac{c}{c_e}-1\right)-\frac{i}{2\,Q^{\text{空间}}}. \tag{7.84}$$

首先让我们考虑由于在每一深度处 S 波速度的扰动而引起 Love 波相速度的变化。因 $\delta\mu/\mu$ 和 $\delta\rho/\rho$ 而引起的相速度的分数变化 $\delta c/c$ 已由（7.71）给出。

由于

$$\delta\beta/\beta=\frac{1}{2}(\delta\mu/\mu-\delta\rho/\rho),$$

忽略密度扰动，从（7.71）我们得到

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=\frac{\int_0^\infty\left[k^2l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right]2\,\mu\frac{\delta\beta}{\beta}dz}{2\,k^2\int_0^\infty\mu l_1^2dz}. \tag{7.85}$$

用公式（7.84）替换上述方程中的 $\delta\beta/\beta$，我们得到 $\delta c/c$，含有实部和虚部两部分。其实部将导致由于非弹性引起的 Love 波的物质频散，还有由于介质的竖向不均匀性引起的几何频散。其虚部将导致 Love 波振幅的衰减，按（7.84）我们用下式来定义 Love 波的空间的 Q_L：

$$\text{空间的 } Q_L^{-1}=-2\,\mathrm{Im}(\delta c/c)\omega. \tag{7.86}$$

将 $\mathrm{Im}(\delta\beta/\beta)=-1/(2\,Q_L)$ 代入（7.85）中，我们得到

$$\text{空间 } Q_L^{-1}=\frac{\int_0^\infty\left[k^2l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right]\mu Q_\beta^{-1}dz}{k^2\int_0^\infty\mu l_1^2dz} \tag{7.87}$$

此公式表明，对包含有权函数和特殊模式的应变能密度成比例的剪切波，Love 波的 Q_L^{-1} 可表示为 Q_β^{-1} 的积分。

对 Rayleigh 波，λ 和 μ 的扰动被 α 和 β 的扰动所取代，考虑到（7.78）中的项 $\delta(\lambda+2\mu)/\lambda+2\mu=2\delta\alpha/\alpha+\delta\rho/\rho$，我们得到

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_\omega=\frac{1}{4k^2UcI_1}\left\{\int_0^\infty\left(kr_1+\frac{dr_2}{dz}\right)^2\times(\lambda+2\mu)2\left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)dz+\int_0^\infty\left[\left(kr_2-\frac{dr_1}{dz}\right)^2-4kr_1\frac{dr_2}{dz}\right]2\mu\left(\frac{\delta\beta}{\beta}\right)dz\right\}. \quad (7.88)$$

用类似(7.86)的方式定义 Rayleigh 波的空间 Q_R，令 $\mathrm{Im}(\delta\alpha/\alpha)=-1/(2Q_\alpha)$，从（7.88）我们得到

$$\text{空间的 } Q_R^{-1}=\frac{1}{4k^2UcI_1}\left\{\int_0^\infty\left(kr_1+\frac{dr_2}{dz}\right)^2+(\lambda+2\mu)2\,Q_\alpha^{-1}dz+\int_0^\infty\left[\left(kr_2-\frac{dr_1}{dz}\right)^2-4kr_1\frac{dr_2}{dz}\right]\times 2\mu Q_\beta^{-1}dz\right\}. \quad (7.89)$$

另外，Rayleigh 波的 Q_R^{-1} 可表示成具有适当权函数的 P 波和 S 波的 Q^{-1} 的积分。

至此，我们已经研究了空间 Q 可定义成随传播距离的衰减（补充 5.7）。测定传播的波，这个定义是合适的。然而，在几种地震测量的情况下直接观测到的是时间的 Q。最重要的情况是整个地球的一个特定的自由振荡的衰减。在此情况下，和 ω 固定的传播波实验相反，k 是不变的。由于模型参量的扰动引起相速度的变化，在固定 ω 和固定 k 的各实验之间是不同的。所以，相位函数被

$$\exp[i(kx-\Omega t)]=\exp\left[-\frac{\omega t}{2Q(\omega)}\right]\exp[ik(x-ct)]$$

代替。现在弹性速度 c_0 的替换是通过如下法则做出的。

$$c_e \to c\left(1-\frac{i}{2\,Q^{\text{时间}}}\right);$$

即

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_k=\left(\frac{c}{c_e}-1\right)-\frac{i}{2\,Q^{\text{时间}}}. \tag{7.90}$$

对这被扰动的介质，由于$(\omega,\ k+\delta k)$和$(\omega+\delta\omega,\ k)$两者是一对本征值，则在 $\omega-k$ 图中，两点连线的斜率将给出这一被扰动介质的群速度U：

$$U=\frac{\omega-(\omega+\delta\omega)}{(k+\delta k)-k}=-\frac{\delta\omega}{\delta k}. \tag{7.91}$$

但在一种情况下，我们有 $k+\delta k=K=k(1+i/2\,Q^{\text{空间}})$，而在另一情况下，我们有 $\omega+\delta\omega=\Omega=\omega(1-i/2\,Q^{\text{时间}})$。由此，我们求得了$-\delta\omega/\delta k$并得到一般法则

$$\text{时间的 } Q^{-1}=\frac{U}{c}\times\text{空间的 } Q^{-1}. \tag{7.92}$$

补充 7.7

各向异性的一些效应

在具有竖向不均匀性的各向异性介质中，面波传播的一般理论，就概念而言，是7.2节给出的传播矩阵法的推广。位移-应力向量[见(5.101)]现在其长度为6，一般地我们不能说Love波和Rayleigh波是独立的面波族。相反地，面波有一个统一的族，在稍有各向异性的介质中，它可以分解成准Love运动和准Rayleigh运动。

如果各向异性较弱，则面波的相速度 c 通过下式表明它和传播方位的方向 ϕ 有关：

$$c(\omega,\ \phi)=A(\omega)+B(\omega)\cos 2\phi+C(\omega)\sin 2\phi+E(\omega)\cos 4\phi+F(\omega)\sin 4\phi \tag{1}$$

(Smith and Dahlen, 1973)。这个公式是近似的，它类似于体波的结果(5.102)。Forsyth(1975)已将(1)应用于太平洋中的面波资料，但他并没有把 4ϕ 项算入，因为实际上(就目前的资料)它的影响很小。

对于均匀层叠置结合而成的各向异性的半空间，Crampin (1970,

1971，1975，1977）已对面波频散作了详细的讨论。因为各向异性的晶体(例如橄榄石)有某些优势排列，其最初的固化是在如洋中脊的扩张中心附近，如果各向异性出现在地球上，那么通过各向异性的水平面就象一个对称的平面。取 x_3 为深度方向，Love(1944)证明，当一个或三个脚标为 3 时，只有当 $c_{ijk3}=0$ 时，才有相对于水平面的对称性。Crampin(1975)描述了这类各向异性的面波质点运动的特性。称之为倾斜的Rayleigh运动，它是由包括垂直和水平两个轴在内的椭圆形质点运动所组成的，而椭圆面对径向平面是倾斜的(见 5.6 节)。因此，质点运动有一个分量横截波传播的慢度方向。水平分量是同相的，但是与垂直分量相位相差 $\pm\frac{\pi}{2}$。在挪威地震仪台阵中，对横穿欧亚的面波，Crampin 和 King(1977)描述了这种质点运动的几组观测值。

这两类 Q 首先由 Brune(1962)在面波的研究中加以区分。当我们对比用驻波实验和用行波实验测定频散波的 Q 时，上述公式是重要的。对非频散波 $c=U$，则两个 Q 之间无差别。

如果我们用稳相近似式（7.18）测定频散波的衰减，则方程(7.92)很容易理解。对给定的 x 和 t，由 $x/t=U(\omega)$ 给出的频率 ω 在记录中占优势。由于具有频率 ω 的波，在 $t=x/U(\omega)$ 的整个时间区间内，在介质中已存在，则它必须按如下因子衰减：

$$\exp\left[\frac{-\omega t}{2\,\text{时间的}\,Q(\omega)}\right]=\exp\left[\frac{-\omega x}{2U(\omega)\text{时间的}Q(\omega)}\right]. \tag{7.93}$$

因为，按定义，这个因子等于

$$\exp\left[\frac{-\omega x}{2\,c(\omega)\text{空间的}\,Q(\omega)}\right],$$

所以我们即得到(7.92)。

7.4 竖向非均匀介质中 Green 函数的面波项

在这一节中，我们将得到面波的一个简洁的解，这个面波是在竖向非均匀介质中，由和时间的关系为 $e^{-i\omega t}$ 的地下点力所产生的。首先，我们对柱坐标(r, φ, z)中的运动方程给出一般解，我们将用前几节导出的运动-应力向量和一组作为 r，φ 函数的向量来描述水平向的传播。等效于一个点源的应力间断就展开为在水平方向上变化的向量函数的级数。于是我们得到一个具有所规定的间断的解，它在自由表面和无限深度处也满足边界条件。Haskell(1964)，Harkrider(1964)，Ben-Menahem 等 (1970)和 Hudson(1969)都曾使用过这个方法。将变分原理应用于在 k 平面极点处算出的留数，从而得到一简洁结果。Keilis-Borok 和 Yanovskaya (1962)、Harkrider 和 Anderson (1966)，Vlaar (1966)及斋藤(Saito，1967)等都研究了这最后的一步。

首先，我们用 Herrera(1964)的互易定理来描述处理二维情况的一个简单方法，遗憾的是不能应用于三维情况。然后，我们将按斋藤(Saito，1967)方法去求三维的解。

7.4.1 二维情况

首先让我们用互易定理 (2.35) 来寻找 Love 波和 Rayleigh 波本征函数的正交关系。忽略体力并将 $v(x,t)$和 $u(x,t)$的 Fourier 变换写成 $v(x,\omega)$ 和 $u(x,\omega)$，则 (2.35) 的变换可改写成

$$0=\int\int_{\Sigma}\{v(x,\omega)\cdot T(u(x,\omega),n)-u(x,\omega)\cdot T(v(x,\omega),n)\}dS. \tag{7.94}$$

[注意：(2.35)的褶积在这里已变成了变换之乘积。]对一给定的无体力的介质，这个方程将适用于运动方程的任意一对解 u 和 v。我们取在 x 方向传播的 Love 波的两个不同的振型为 u 和 v，并

定义 S 为一表面，其各个角位于(a,o)，(b,o)，(a,D)和(b,D)且包围阴影板，如图 7.7 所示。

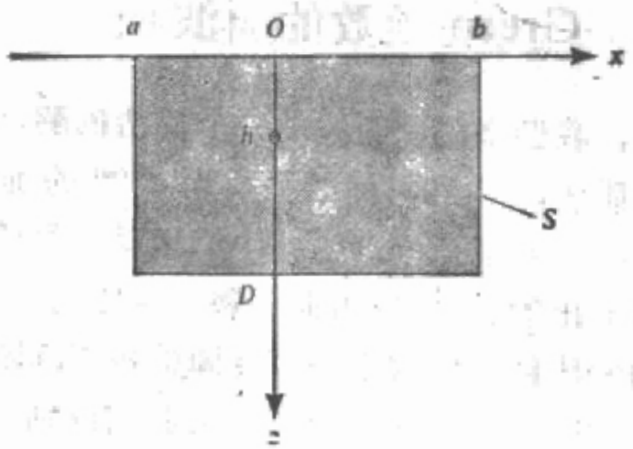


图 7.7
对包围此阴影板的表面 S，求(7.94)的积分

对 Love 波，在自由面 $z=0$ 处牵引力 T 为 0，在 $z=\infty$处运动为 0。沿竖直面的位移和牵引力分量对第一个解为

$$u_y=l_1(\omega,k_n,z)\exp(ik_nx),$$

$$T_y=\mu\frac{\partial u_y}{\partial x}=ik_n\mu l_1\exp(ik_nx); \tag{7.95}$$

对第二个解为

$$v_y=l_1(\omega,k_m,z)\exp(ik_mx), \tag{7.96}$$

$$T_y=ik_m\mu l_1\exp(ik_mx).$$

其它分量对积分(7.94)无贡献。将(7.95)和(7.96)代入(7.94)，当 $D\to\infty$时，我们得到

$$\int_0^\infty i(k_n-k_m)\mu(z)l_1(\omega,k_m,z)l_1(\omega,k_n,z)dz$$
$$\times\exp[i(k_n+k_m)a]$$
$$=\int_0^\infty i(k_n-k_m)\mu(z)l_1(\omega,k_m,z)l_1(\omega,k_n,z)dz$$
$$\times\exp[i(k_n+k_m)b],$$

这个等式适用于任意的 a 和 b，其条件是当且仅当

$$\int_0^\infty \mu(z) l_1(\omega, k_m, z) l_1(\omega, k_n, z) dz = 0 \quad \text{对 } k_n \neq k_m. \tag{7.97}$$

对固定的频率 ω，当刚性分布 $\mu(z)$为一权函数时，则 Love 波不同振型的本征函数是相互正交的。

对 Rayleigh 波，类似地，我们取 n 阶振型为 u，则沿竖直面的位移分量和牵引力分量为

$$\begin{aligned}
u_x &= r_1(\omega, k_n, z)\exp(ik_n x), \\
u_z &= ir_2(\omega, k_n, z)\exp(ik_n x), \\
\tau_{xx} &= iT_1(\omega, k_n, z)\exp(ik_n x) \\
&= i\left\{\lambda\frac{dr_2}{dz} + (\lambda + 2\mu)k_n r_1\right\}\exp(ik_n x), \\
\tau_{xz} &= T_2(\omega, k_n, z)\exp(ik_n x) \\
&= \left(\mu\frac{dr_1}{dz} - \mu k_n r_2\right)\exp(ik_n x).
\end{aligned} \tag{7.98}$$

用 k_m 代替 k_n 可得到 u 的各分量。于是 Rayleigh 波的正交关系为

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty \{r_i(\omega, k_n, z)T_i(\omega, k_m, z) \\
&- r_i(\omega, k_m, z)T_i(\omega, k_n, z)\}dz = 0
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \Big\{(\lambda + 2\mu)(k_m - k_n)r_1(\omega, k_n, z)r_1(\omega, k_m, z) \\
&- \mu(k_m - k_n)r_2(\omega, k_n, z)r_2(\omega, k_m, z) \\
&+ \lambda\Big[r_1(\omega, k_n, z)\frac{dr_2(\omega, k_m, z)}{dz} \\
&- r_1(\omega, k_m, z)\frac{dr_2(\omega, k_n, z)}{dz}\Big] \\
&+ \mu\Big[r_2(\omega, k_n, z)\frac{dr_1(\omega, k_m, z)}{dz} \\
&- r_2(\omega, k_m, z)\frac{dr_1(\omega, k_n, z)}{dz}\Big]\Big\}dz = 0.
\end{aligned} \tag{7.99}$$

处理这些正交关系，我们将再用互易定理进而去求 Green 函数的面波项。对 Love 波和 Rayleigh 波，我们分别使用了如(7.95)和(7.98)对 u 所确定的同样的解，但对 v，我们使用了二维 Green 函数 $\mathbf{G}_k \exp(-i\omega t)$，即对位于 $x=0$，$z=h$ 处具有时间关系为 $\exp(-i\omega t)$的线力的响应。此线平行于 y 轴(即 x_2 轴)，且力作用在 x_k 方向上(即 x 或 y 或 z)，所以

$$-\rho\omega^2 G_{ik}(x,z;0,h;\omega)=\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ij}(\mathbf{G}_k)+\delta_{ik}\delta(x)\delta(z-h). \tag{7.100}$$

采用从(2.35)到表示定理(2.41)同样的步骤，我们得到

$$u_k(0,h)=\int_S\{G_{ik}(x,z;0,h;\omega)T_i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}) - u_i(x,z)T_i(\mathbf{G}_k,\boldsymbol{n})\}dS. \tag{7.101}$$

现在，我们再选择如图 7.7 所示的同样的积分表面 S，但这次不仅有 $D\to\infty$，而且还有 $a\to\infty$和 $b\to\infty$。由于来自线源的面波未经历几何扩散，而体波经历了，我们预期在远距离处的 Green 函数将完全由从线源向外传播的面波所组成。因此，对较大的 x，Green 函数的 y 分量由 Love 波的和给出，

$$G_{yy}(x,z;0,h;\omega)\sim\begin{cases}\sum_m b_{m2}^{+}(h)l_1(\omega,k_m,z)\exp(ik_m x) & x\gg 0\\ \sum_m b_{m2}^{-}(h)l_1(\omega,k_m,z)\exp(-ik_m x) & x\ll 0.\end{cases} \tag{7.102}$$

x 和 z 的分量是由 Rayleigh 波组成的，

$$G_{xk}(x,z;0,h;\omega)\sim\begin{cases}\sum_m a_{mk}^{+}(h)r_1(\omega,k_m,z)\exp(ik_m x) & x\gg 0\\ \sum_m a_{mk}^{-}(h)r_1(\omega,k_m,z)\exp(-ik_m x) & x\ll 0,\end{cases} \tag{7.103}$$

$$G_{zk}(x,z;0,h;\omega)\sim\begin{cases}\sum_m ia^+_{mk}(h)r_2(\omega,k_m,z)\exp(ik_mx) & x\gg 0\\ -\sum_m ia^-_{mk}(h)r_2(\omega,k_m,z)\exp(-ik_mx) & x\ll 0.\end{cases}$$

(7.103)

将(7.103)和(7.95)代入(7.101)，我们得到位移的 y 分量。

$$u_y(0,h)=\sum_m b^+_{m2}(h)\int_0^\infty i(k_n-k_m)\mu(z)l_1(\omega,k_n,z)$$
$$\times l_1(\omega,k_m,z)\exp[i(k_n+k_m)b]dz$$
$$-\sum_m b^-_{m2}(h)\int_0^\infty i(k_n+k_m)\mu(z)l_1(\omega,k_n,z)l_1(\omega,k_m,z)$$
$$\times\exp[i(k_m-k_n)a]dz.$$

用正交关系(7.97)，此式简化为

$$u_y(0,h)=l_1(\omega,k_n,h)$$
$$=-2ik_nb^-_{n2}(h)\int_0^\infty\mu(z)l_1^2(\omega,k_n,z)dz$$

或

$$b^-_{n2}(h)=\frac{l_1(\omega,k_n,h)}{-4ik_nI_2},\qquad(7.104)$$

其中 I_2 在(7.66)中已定义过。类似地，以 $u_y=l_1\exp(-ik_nx)$ 代替(7.95)，我们得到

$$b^+_{n2}(h)=b^-_{n2}(h).\qquad(7.105)$$

将(7.104)和(7.105)代入(7.102)，我们得到取向在 y 方向上的线力所产生的 Green 函数的 Love 波项，

$$G_{yy}(x,z;0,h;\omega)\sim\sum_n\frac{l_1(\omega,k_n,h)l_1(\omega,k_n,z)}{4k_nI_2}$$
$$\times\exp\left(ik_nx+i\frac{\pi}{2}\right)\quad x\gg 0,\qquad(7.106)$$

或用(7.70)

$$G_{yy}(x,z;0,h;\omega)\sim\sum_n\frac{l_1(\omega,k_n,h)l_1(\omega,k_n,z)}{4k_nc\dot{U}I_1}$$

$$\times \exp\left(ik_n x + i\frac{\pi}{2} \right) \qquad x \gg 0,$$

其中 I_1 和 I_2 在(7.66)中给出。

上述方程表明 Green 函数的 Love 波项相当简单。对每一振型，震源深度 h，接收点深度 z，传播距离 x 和以 c, U 与 I_1 表示的介质性质的影响都被分离了。一旦本征值-本征函数的问题解决了，则由线力产生的 Love 波振幅的计算就非常简单了。后面我们将指出，对同样的公式稍做修正，即可应用于点力产生的 Love 波。

类似地，将(7.103)和(7.98)代入(7.101)并应用正交关系(7.99)，可得到 Green 函数的 Rayleigh 波项。例如，令(7.101)中的脚标 $k=1$(x 方向)，我们得到

$$\begin{aligned} u_x(0,h) &= r_1(\omega, k_n, h) \\ &= -ia_{n1}^-(h) \int_0^\infty \Big\{ 2k_n [(\lambda + 2\mu) r_1^2(\omega, k_n, z) \\ &\quad + \mu r_2^2(\omega, k_n, z)] \\ &\quad + 2\Big[\lambda r_1(\omega, k_n, z) \frac{dr_2(\omega, k_n, z)}{dz} \\ &\quad - \mu r_2(\omega, k_n, z) \frac{dr_1(\omega, k_n, z)}{dz} \Big] \Big\} dz \end{aligned}$$

或

$$a_{n1}^-(h) = \frac{r_1(\omega, k_n, h)}{-i\,4\,k_n \left(I_2 + \dfrac{I_3}{2k_n} \right)} = \frac{r_1(\omega, k_n, h)}{-i\,4\,k_n c U I_1}, \quad (7.107)$$

其中 I_1, I_2, I_3 在(7.74)中给出。此外，我们还得到 $a_{n1}^+(h) = a_{n1}^-(h)$。将它们代入(7.103)，我们即得到作用于 x 方向的线力产生的 Green 函数的 Rayleigh 波项：

$$G_{xx}(x, z; 0, h; \omega) \sim \sum_n \frac{r_1(\omega, k_n, h) r_1(\omega, k_n, z)}{4 k_n c U I_1} \times$$

$$\times \exp\left(ik_n x + i\frac{\pi}{2}\right) \quad x \gg 0, \tag{7 108}$$

$$G_{xx}(x,z;0,h;\omega) \sim \sum_n \frac{r_1(\omega,k_n,h)r_2(\omega,k_n,z)}{4k_n cUI_1} \times \exp(ik_n x + i\pi) \quad x \gg 0,$$

而且，这是一个非常简单的形式，它分离了源，接收点和路径的效应。对取向在 z 方向上的线力，同样可得到其 Green 函数为

$$G_{xz}(x,z;0,h;\omega) \sim \sum_n \frac{r_2(\omega,k_n,h)r_1(\omega,k_n,z)}{4k_n cUI_1} \times \exp(ik_n x) \quad x \gg 0, \tag{7 109}$$

$$G_{zz}(x,z;0,h;\omega) \sim \sum_n \frac{r_2(\omega,k_n,h)r_2(\omega,k_n,z)}{4k_n cUI_1} \times \exp\left(ik_n x + i\frac{\pi}{2}\right) \quad x \gg 0, \tag{7.110}$$

注意，出现在 G_{xx}，G_{yy} 和 G_{zz} 中的相移都有 $\frac{1}{2}\pi$ 的相位滞后。

补充 7.8

垂直运动的符号规定

因为 x_3 或 z 轴是指向下的，这里，取向下为垂直位移的正方向。这是和习惯作法相反的。地震学家们自然地认为深度向下为正，但后来却前后矛盾地选择了地震运动的垂直分量向上为正。本书中，在我们用 (x,y,z) 或 (r,φ,z) 坐标求出结果的任何地方，其位移和深度两者，我们均取 z 轴向下为正。当然，在球极坐标中，在地球的中心点 $r=0$，作为垂向坐标的 r，自然是垂直向上为正，如我们将在第八章和第九章有关部分中所假设的。

粗略地看一下这些解的形式，其分母中含有 k_n，这表明了振幅谱和 ω^{-1} 的关系。然而，I_1（归一化的 r_1 和 r_2）以下述方式依赖于 ω，即 $k_n I_1$ 仅为 ω 的弱变化函数。见问题 7.7。

7.4.2 三维情况

对一点源其 Green 函数的自然坐标系是图 7.8 中所定义的圆柱系统 (r, φ, z)。让我们回顾到补充 6.5 并从分别代表 P, SV, SH 波的三个标量势 ϕ, ψ, χ 入手。我们证明了在一均匀体中的弹性位移可表示成

$$u = \nabla\phi + \nabla\times\nabla\times(0,0,\psi) + \nabla\times(0,0,\chi), \qquad (7.111)$$

这里的势函数满足补充 6.5 中的波动方程(3)。依分离变量法，通解可由以下基本解的叠加而得到：

$$\begin{aligned}
\phi(x,\omega) &= J_m(kr)e^{im\phi}(Ae^{-\gamma z} + Be^{\gamma z})\exp(-i\omega t),\\
\psi(x,\omega) &= J_m(kr)e^{im\phi}(Ce^{-\nu z} + De^{\nu z})\exp(-i\omega t), \qquad (7\ 112)\\
\chi(x,\omega) &= J_m(kr)e^{im\phi}(Ee^{-\nu z} + Fe^{\nu z})\exp(-i\omega t),
\end{aligned}$$

其中 $J_m(kr)$ 为 m 阶 Bessel 函数；m 为整数；A, B, C, D, E, F 是常数；$\gamma = (k^2 - \omega^2/\alpha^2)^{1/2}$, $\nu = (k^2 - \omega^2/\beta^2)^{1/2}$。[对比(7.112)和补充 6.6 中的轴对称解]。我们将发现将 r, ϕ 的关系归并为下式是有用的：

$$Y_k^m(r,\ \phi) = J_m(kr)e^{im\phi}, \qquad (7.113)$$

此式很自然地可称为基本的水平波函数，因为对势函数而言，它只表征水平传播。

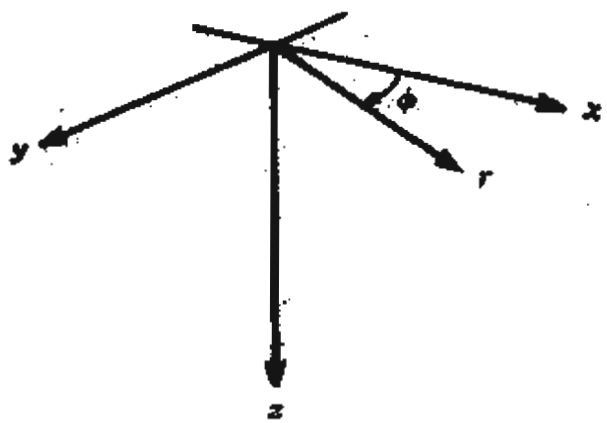


图 7.8

笛卡尔坐标和柱面极坐标的取向，通常用它来分析在一竖向非均匀介质中点源产生的波

事实上，对于我们继续使用势函数方法的一个明显障碍是我

们现在的兴趣在于竖向非均匀介质，而(7.112)的解却要求均匀性。然而，势函数可帮助我们把各种适宜于不同物理变量的水平波函数分出来，因为这方面的问题不因竖向的不均匀性而变化。然后，继续用均匀介质，通过(7.111)式，从势函数可构成(u_r, $u\phi$, u_z)。很容易得到 P 波分量或梯度 ϕ，同时对 SV 对 SH 我们有

$$\boldsymbol{u}^{SV}=\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z},\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\phi},\ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right), \tag{7.114}$$

$$\boldsymbol{u}^{SH}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial\phi},\ -\frac{\partial\chi}{\partial r},\ 0\right).$$

在 2.6 节中，对一般的正交曲线坐标，我们已得到应力-位移关系，按(2.50)和(2.45)我们可用位移分量给出作用在水平面上的牵引力：

$$\begin{aligned}\tau_{rz}&=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right),\\ \tau_{z\phi}&=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\phi}+\frac{\partial u_\phi}{\partial z}\right),\\ \tau_{zz}&=\lambda\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z},\end{aligned} \tag{7.115}$$

如果我们将势函数(7.112)代入(7.114)和(7.115)，我们即得到在深度 z 处作用于水平面上的牵引力 $\boldsymbol{T}$ 和位移 $\boldsymbol{u}$，其形式如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}=&[l_1(\omega,k,z)\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)+r_1(\omega,k,z)\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)\\ &+r_2(\omega,k,z)\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)]\exp(-i\omega t),\\ \boldsymbol{T}=&[l_2(\omega,k,z)\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)+r_3(\omega,k,z)\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)\\ &+r_4(\omega,k,z)\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)]\exp(-i\omega t).\end{aligned} \tag{7.116}$$

$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 与 r，ϕ 的关系是由下式定义的三个正交向量函数描述的：

$$\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)=\frac{1}{kr}\frac{\partial Y_k^m}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{r}}-\frac{1}{k}\frac{\partial Y_k^m}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

$$\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)=\frac{1}{k}\frac{\partial Y_k^m}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{kr}\frac{\partial Y_k^m}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}},\qquad(7.117)$$

$$\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)=-Y_k^m(r,\phi)\hat{\boldsymbol{z}},$$

其中 $\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 是 r、ϕ、z 方向上的单位向量。对于 z 的关系是由六个标量函数 l_1,l_2,r_1,r_2,r_3 和 r_4 描述的。可以证明，首先用 $\boldsymbol{f}=(l_1,l_2)^T$ 给出(7.24)，然后用 $\boldsymbol{f}=(r_1,r_2,r_3,r_4)^T$ 给出(7.28)，这些函数[从势函数(7.112)中与 z 有关的项得到的]确实满足 7.2 节中讨论过的熟知的方程 $\partial \boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$。

对于均匀介质，这个结果促使我们从公式(7.116)开始，甚至在竖向不均匀的介质中，将它代入运动方程和应力-应变关系式中。按此方法，我们可直接地获得一阶联立微分方程(7.24)和(7.28)，发现对柱状波的运动-应力向量，其与 z 的关系和平面波问题中的 z 关系完全相同。

我们刚刚给出了柱状波和平面波具有共同的 z 相关性的准确原因。如果我们取向量函数 (7.117) 中的 r 较大，则直观上此结果是合理的。首先，象在 (6.15) 中所做的那样，我们以 $[H_m^{(1)}(kr)+H_m^{(2)}(kr)]/2$ 代换 $J_m(kr)$，并用外去波的渐近展开式

$$H_m^{(1)}(kr)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\exp\left[\,i\left(kr-\frac{2m+1}{4}\pi\right)\right].$$

我们还将忽略随距离的衰减比 $1/\sqrt{r}$ 更快的项。于是向外去的波

$$\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)\sim-i\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\exp\left(ikr-i\frac{2m+1}{4}\pi+im\phi\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)\sim i\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\exp\left(ikr-i\frac{2m+1}{4}\pi+im\phi\right)\hat{\boldsymbol{r}},\qquad(7.118)$$

$$\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)\sim-\sqrt{\frac{1}{2\pi kr}}\exp\left(ikr-i\frac{2m+1}{4}\pi+im\phi\right)\hat{\boldsymbol{z}},$$

这些式子表明，在大距离处，这些波的特性局部地和适当偏振的平面 Love 波与平面 Rayleigh 波相象。而且，它们和 z 的关系可由平面波的研究中得到，同时，我们还可以用在柱状波问题中的平面波根据运动应力向量得到的所有结果。

现在让我们考虑在竖向非均匀介质中由点力 $\boldsymbol{F}\exp(-i\omega t)$ 产生的面波。取作用点为 $r=0$，$z=h$，相应的体力（每单位体积中的力）为 $\boldsymbol{F}\exp(-i\omega t)[\delta(r)/(2\pi r)]\delta(z-h)$。下面我们将取通常使用的笛卡尔坐标，它通过 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，和 (r,φ,z) 发生关系。同时注意 $\delta(r)/(2\pi r)=\delta(x)\delta(y)$（由于对水平的平面积分时，此等式的每一边均有同样的效应）。按方程 (3.4)，所施的体力等效于 $z=h$ 处水平面上牵引力的间断性，可由下式给出：

$$\boldsymbol{T}(h+0)-\boldsymbol{T}(h-0)=-\boldsymbol{F}\exp(-i\omega t)\delta(x)\delta(y). \quad (7.119)$$

补充 7.9

关于水平的波函数

在第六章和第七章中描述的平面波，其水平波函数是 e^{ikx}。它是平面波独有的特点，即这个相同的相位因子，对全部有意义的物理变量（如位移、膨胀、应变和应力）是共同的。对非笛卡尔坐标，第一个问题是，分离解甚至可能是不存在的。然而，对柱坐标和球极坐标分离解确实存在，这对地球物理中考察波的传播是十分重要的。

面临的下一个问题是这样一个事实，在例如柱坐标中，从一个物理变量到另一个物理变量，其水平波函数可能是不同的。在补充 6.6 中我们看到了一个简单的例子，对于 u_r 和 τ_{rz}，在补充 6.6 中是 J_0。为讨论一般的轴对称问题，不但有一个对 k 的依赖关系，而且还有一个对方位序数 m 的依赖关系，并且在 (7.116) 和 (7.117) 中，我们发现，处理三个不同的水平波函数是很方便的，它们每个都是向量。

对平面波的水平波函数，用 Fourier 反变换

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(k)e^{+ikx}dk \quad (1)$$

合成水平空间变量 x 的各函数是可能的。在补充 6.10 中，对水平相位

函数 J_m，我们得出了类似的结果（反 Hankell 变换）。于是，将它们和 Fourier 级数

$$f(\phi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(m)e^{im\phi}$$

$$f(m)=\int_0^{2\pi}f(\phi)e^{-im\phi}d\phi \tag{2}$$

联合起来，则求得 $(r,\ \phi)$ 的向量函数的展开式是可能的。这个展开式为

$$f(r,\phi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}[f_T(k,m)\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)+f_S(k,m)\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)$$

$$+f_R(k,m)\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)]kdk, \tag{3}$$

这里的 $\boldsymbol{T}_k^m$，$\boldsymbol{S}_k^m$，$\boldsymbol{R}_k^m$ 是 (7.117) 中给出的水平波函数，且 (3) 中的系数由下式给出：

$$\begin{aligned}f_T(k,m)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}f(r,\phi)\cdot[\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)]^*r\ dr\ d\phi,\\ f_S(k,m)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}f(r,\phi)\cdot[\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)]^*r\ dr\ d\phi,\\ f_R(k,m)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}f(r,\phi)\cdot[\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)]^*r\ dr\ d\phi.\end{aligned} \tag{4}$$

在笛卡尔坐标中，水平波函数具有一可表示为 $\delta(k-k')=\frac{1}{2\pi}\times\int_{-\infty}^{\infty}\times\exp[i(k-k')x]dx$ 的正交性。对于我们的向量函数，一个等效结果在(7.121) 中给出。

解的方法将是 (i) 将此间断性分解成它的 $(k,\ m)$ 分量 (ii) 对每一个 $(k,\ m)$ 解方程 $\partial f/\partial z=\boldsymbol{A}f$，其中 f 是和 z 有关的运动-应力向量，它在跨过 $z=h$ 处具有已知的间断性，于是 (iii) 用它的 $(k,\ m)$ 分量的叠加构成这个解为 $(r,\ \phi,\ z)$ 的函数。

我们设法求出下式中的一些系数：

$$-\boldsymbol{F}\exp(-i\omega t)\delta(x)\delta(y)=\frac{\exp(-i\omega t)}{2\pi}\sum_m\int_0^{\infty}k[f_T(k,m)\boldsymbol{T}_k^m$$

$$+f_S(k,m)\boldsymbol{S}_k^m+f_R(k,m)\boldsymbol{R}_k^m]dk. \qquad (7.120)$$

恰好 $\boldsymbol{T}_k^m$，$\boldsymbol{S}_k^m$ 和 $\boldsymbol{R}_k^m$ 是相互正交的，这三种类型的水平波函数中，每一种都以如下形式满足正交性关系（对不同的 k 和 m）：

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)\cdot[\boldsymbol{T}_{k'}^{m'}(r,\phi)]^* r\ dr\ d\phi=\frac{2\pi\delta_{mm'}\delta(k-k')}{\sqrt{kk'}}, \qquad (7.121)$$

其中 * 代表复共轭。由此得出 (7.120) 的展开式系数由下式给出

$$f_T(k,m)=-\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}[\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)]^*\cdot\boldsymbol{F}\delta(x)\delta(y)r\ dr\ d\phi, \qquad (7.122)$$

对 f_S 和 f_R 有相似的结果。

考虑到 $\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(\quad)r\ dr\ d\phi=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\quad)dxdy$ 以及如下的重要特性：

$$\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)=k^{-1}\nabla\times(0,0,Y_k^m), \qquad (7.123)$$

再利用笛卡尔坐标，则 (7.122) 中二重积分的计算就可简化。

在笛卡尔坐标中解释 (7.123)，从 (7.122) 我们得到

$$\begin{aligned}f_T(k,m)=&\\ &-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k}\left(F_x\frac{\partial Y_k^{-m}}{\partial y}-F_y\frac{\partial Y_k^{-m}}{\partial x}\right)\delta(x)\delta(y)dxdy\\ &=-F_x e^{-im\pi/2}\frac{\partial}{\partial(ky)}J_m(ky)\Big|_{y=0}\\ &+F_y\frac{\partial}{\partial(kx)}J_m(kx)\Big|_{x=0}\end{aligned} \qquad (7.124)$$

由于除 $m=\pm1$ 以外，J_m 在原点的微商为零，所以，除 $m=\pm1$ 外，有 $f_T(k,m)=0$。因而，在 $\zeta=0$ 处，$(\partial/\partial\zeta)J_{\pm1}(\zeta)=\pm\frac{1}{2}$，所以

$$f_T(k,1)=\frac{1}{2}(F_y+iF_x),$$
$$f_T(k,-1)=\frac{1}{2}(-F_y+iF_x). \tag{7.125}$$

对 $f_S(k,m)$ 有类似的计算方法，利用

$$S_k^m(r,\phi)=k^{-1}\nabla Y_k^m(r,\phi) \tag{7.126}$$

并在笛卡尔坐标中计算，则求得除 $m=\pm1$ 外，$f_S(k,m)=0$，于是有

$$f_S(k,1)=\frac{1}{2}(-F_x+iF_y),$$
$$f_S(k,-1)=\frac{1}{2}(F_x+iF_y). \tag{7.127}$$

对 $f_R(k,m)$，我们直接在柱坐标中计算：

$$f_R(k,m)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}F_z\frac{\delta(r)}{2\pi r}e^{-im\phi}J_m(kr)r\ dr\ d\phi,$$

所以除 $m=0$ 外，有 $f_R(k,m)=0$，于是有

$$f_R(k,0)=J_0(0)F_z=F_z. \tag{7.128}$$

对牵引力的不连续性，现在已得到了全部展开系数，其中仅 $m=0$ 和 $m=\pm1$ 的项才是有贡献的项。

我们的下一步是求解运动-应力向量$(l_1,\ l_2,\ \tau_1,\ \tau_2,\tau_3,\ \tau_4)$，它们在牵引力分量 l_2，τ_3，τ_4上（分别地）具有规定的不连续性 f_T，f_S，f_R。当然，我们的解必须满足运动方程和自由表面条件：

在 $z=0$ 处　　$l_2=\tau_3=\tau_4=0.$ (7.129)

它也必须满足辐射条件，这条件要求当 $z\to\infty$ 时 l_1，τ_1，τ_2 只能含有下行的波，或者，如果波数足够大，以致 $\gamma=(k^2-\omega^2/\alpha^2)^{1/2}$ 和 $\nu=(k^2-\omega^2/\beta^2)^{1/2}$ 变为实数（正的），则

当 $z\to\infty$ 时　　所有的 l_1，τ_1，$\tau_2\to0.$ (7.130)

当在 7.2 节导出面波的本征值问题时，我们曾得到运动方程的一个连续解不能满足均匀的边界条件 (7.129) 和 (7.130)，除非

对给定的 ω，k 取特定的离散值。因此，重要的是如果对此问题附加上在源的深度处牵引力的不连续性，则对 k 的任意值求得解才变成是可能的。下面我们给出这个解，请注意，一旦运动-应力向量问题被解出为（k，m，z，ω）的函数，则可能写出由点源 $F\exp(-i\omega t)$ 产生的稳态位移，其形式为

$$u(r,\phi,z,t)=$$

$$\exp(-i\omega t)\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}k[l_1(k,m,z,\omega)\boldsymbol{T}_k^m(r,\phi)$$

$$+r_1(k,m,z,\omega)\boldsymbol{S}_k^m(r,\phi)+r_2(k,m,z,\omega)\boldsymbol{R}_k^m(r,\phi)]dk. \tag{7.131}$$

首先让我们求解 $l_1(k,m,z,\omega)$，其过程概述如下：

$$l=\begin{pmatrix}l_1\\ l_2\end{pmatrix}$$

满足

$$\frac{\partial l}{\partial z}\begin{pmatrix}0 & \mu^{-1}\\ -\omega^2\rho+k^2\mu & 0\end{pmatrix}l, \tag{即7.24}$$

在 $z=0$ 处 $l_2=0$。当 $z\to\infty$ 时

或者 l 成为下行波（一均匀体波）

或者 $l\to 0$（一非均匀波） (7.132)

这取决于值 k/ω（水平慢度）。最后，

$$l\Big|_{z=h^+}-l\Big|_{z=h^-}=\begin{pmatrix}0\\ f_{rr}(k,m)\end{pmatrix}. \tag{7.133}$$

我们将构成一个不连续解 l'，它满足（7.133），进而我们构成一个连续解 l''，以使其线性组合

$$l=l'+\frac{l''}{\Delta(k)} \tag{7.134}$$

满足全部要求的条件。l' 和 l'' 两者解出了运动方程，其边界条件为

对所有的 $z>h$　$l_1'=0$ 和 $l_2'=0$，

在 $z=h-0$ 处　$l_1'=0$ 和 $l_2'=-f_x$，　(7.135)

当 $z\to\infty$　l_1''下行　或 $l_1''\to 0$，

在 $z=0$ 处　$l_2''=-\Delta(k)l_2'$.　(7.136)

很容易证明，(7.134) 给出的 l 包含有上面定义的 l' 和 l''，这 l 确实满足全部所要求的条件 (7.132) 和 (7.133)。当 $z\to\infty$时，对 (7.136) 中的 l_1'' 的辐射条件可以取两种形式，取决于水平慢度 k/ω 值。如果该值足够小，则深度较大处的 l_1'' 是一均匀的下行体波。而如果$\frac{k}{\omega}>\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1}{\beta(z)}$，则当 $z\to\infty$时，l_1'' 是趋向于零的非均匀波。函数 $\Delta(k)$ 已定义过了，所以，在非连续解 l' 中的表面剪应力如乘以 $-\Delta(k)$，则恰好等于在连续解中的这个应力。但是，如果 k 刚好是面波的本征值，则连续解 l'' 中的表面应力变为零。由此得到，当 k 为一本征值且 l'' 是一面波的本征函数时，则 $\Delta(k)$必然为零。此时不可能有下行波 (当 $z\to\infty$时)，因为 l'' 满足具有齐次边界条件和无源项的波动方程。因此，k 的本征值必须足够大，以使当 $z\to\infty$时 $l_1''\to 0$，这样才能防止由体波携带的能量向下传播而损失。

在图 7.9 中，我们更加详细地给出了如何求得 l' 和 l''。通过 (7.134) 构成 l，现在我们可用 (7.131) 合成位移为

$$u(r,\phi,z,t)$$

$$=\exp(-i\omega t)\frac{1}{2\pi}\sum_m\int_0^\infty k\left[l_1'+\frac{l_1''}{\Delta(k)}\right]T_1^m(r,\phi)\,dk. \tag{7.137}$$

我们的下一个目标是确定在此位移场中面波的贡献。回顾(7.124)，如果源是一个点力，则仅当 $m=\pm 1$ 时才是有贡献的。

(7.137) 中的被积函数，在 $\Delta=0$ 时有极点。对 Δ 而言，我们曾选择了这样一个函数，即当 k 为一本征值时，它变为零，这些极点的贡献将给出简正振型，或此情况下的 Love 波。然而，

(7.137) 也包含了所有的体波和可能出现的漏能振型的贡献。对这积分的计算将按照在 (6.11)—(6.15) 和 (6.30) 的讨论中所采取的一些步骤进行。因而，我们用$[H_m^{(1)}(kr)+H_m^{(2)}(kr)]/2$代替 $J_m(kr)$，并将 $H_m^{(2)}$对正 k 的积分转换成 $H_m^{(1)}$对负 k 的积分，所以，(7.137) 变成一个对整个实 k 轴的积分。以$\frac{1}{2}H_m^{(1)}$代替 J_m，我们将把 T_k^m 写成 $T_k^{m(1)}$，于是极点的贡献将是

$$u^{\text{LOVE}}=\exp(-i\omega t)\sum_m\sum_n ik_n\frac{l_1''(k_n,m,z,\omega)}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial k}\right)_{k=k_n}}T_{k_n}^{m(1)}(r,\phi),$$

(7.138)

其中 $k_n(n=0,1,2,\cdots)$ 是 $\Delta(k)=0$ 的正实根。(根据弱非弹性效应的论证，负实根无贡献。在负实轴上的极点向下移至第三象限中，并在上半平面中形成的一条闭合回路的外边，但在正实 k 轴上的极点向上移至第一象限中，并且其留数是可求的。在 7.6 节和 9.3 节中我们将进而讨论这些积分路径和有关的分支切割及体波。)

$(\partial\Delta/\partial k)_{k=k_n}$ 的计算，用 7.3 节的变分原理来做是很简单的。根据 (7.68)，对波动方程的连续解 l''，我们得到

$$\frac{1}{2}[l_1'l_2']_0^m=-\omega^2I_1+k^2I_2+I_3.$$

于是，从边界条件 (7.136)得到

$$\frac{1}{2}\Delta(k)(l_2'l_1'')_{z=0}=-\omega^2I_1+k^2I_2+I_3.$$

如果 k 接近本征值，则 l''接近为本征函数。因为 l''稍微偏离真实的本征函数 (见 (7.67))时，$(-\omega^2l_1+k^2l_2+l_3)$ 是稳定的，由此得到由于 k 的扰动产生 Δ 的变化可写成

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial k}\right)_{k=k_n}(l_2'l_1'')_{z=0}=4k_nI_2=4k_ncUI_1,\quad(7.139)$$

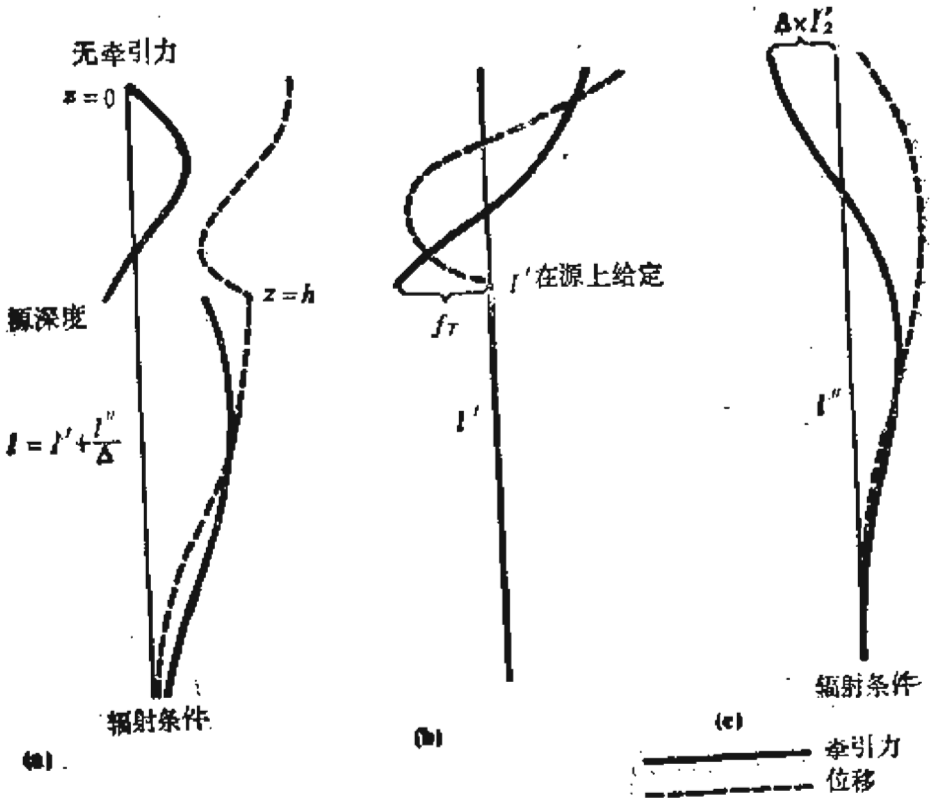


图 7.9

(a) 在 $z=h$ 处，牵引力不连续的 SH 波特性的示意图。这个波是 l，它在 $z=0$ 和 $z=h$ 处满足齐次条件。(b) 在 $z=h$ 以下，解 l' 为零。对给定的 k，在源的上部，对 $z=h$ 的 l'，取初始值 (f_T) 并对 $dl'/dz=Al'$ 向上到 0 求积分，则可得到 l'。对面波的激发，我们将发现 l' 实际上无需计算。(c) 解 l'' 是连续的，它可在较大深度处取一满足辐射条件的解，然后对运动方程向上至 $z=0$ 求积分而得到（对给定的 k）。这个解乘以（对所有深度）标量常数，这常数的选择应使表面牵引力变成 $-\Delta x$（l' 中的表面牵引力）。
注意 $l=l'+\Delta^{-1}l''$ 定义在全部选定的 k 上。对足够小的波数，能量向下辐射是可能的（体波）。然而，对足够大的波数，l（和 l''）随深度成指数衰减。如图所示的即为此情况。

其中 c 和 U 是和 ω 及 k_n 相对应的相速度与群速度（见(7.70)）。因为从运动方程给出 $\left(\frac{d}{dz}\right)(l_1'l_2''-l_1''l_2')=0$ 是很容易的，因而我们可从上述方程中消掉 $z=0$ 时的 l_2'。计算 $z=0$ 和 $z=h-0$ 时的常数 $l_1'l_2''-l_1''l_2'$，并用 (7.135) 和 (7.136)，我们得到

$$l_1''l_2'|_{z=0}=-f_T(k_n,m)l_1''|_{z=h}, \tag{7.140}$$

整理(7.138)—(7.140)，现在我们得到

$$u^{\mathrm{LOVE}}=-i\exp(-i\omega t)\sum_m\sum_n\frac{f_T(k_n,m)l_1'(h)l_1'(z)}{4\,cUI_1}T_{k_n}^{m(1)}. \tag{7.141}$$

对 m 求和很容易实现，因为除 $m=\pm1$ 外，$f_T=0$(见(7.125))。由于 (7.141) 中的 l_1' 只不过是一个特定的 Love 波振型，我们将去掉字码右上角的撇号而用 l_1，即，我们回复到对单个振型最初的标记。我们还用 (7.118) 中给出的渐近公式代替 $T_k^{m(1)}$。根据在 $r=0$ 和 $z=h$ 处施加的点力 $F\exp(-i\omega t)$ 而给出的 Love 波振型的激发，其最后结果为

$$u^{\mathrm{LOVE}}=\exp(-i\omega t)\sum_n\frac{(F_y\cos\phi-F_x\sin\phi)l_1(k_n,h,\omega)}{8\,cUI_1}$$
$$\times\sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}}[l_1(k_n,z,\omega)\hat{\boldsymbol{\phi}}]\exp\left[i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{7.142}$$

其中 $I_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty\rho[l_1(k_n,z,\omega)]^2dz$，$l_1(k_n,z,\omega)$是一连续的本征函数。

对 Rayleigh 波，按相似的步骤，最后的结果为

$$u^{\mathrm{RAYLEIGH}}=\exp(-i\omega t)$$
$$\times\sum_n\frac{F_z r_2(k_n,h,\omega)+i(F_x\cos\phi+F_y\sin\phi)r_1(k_n,h,\omega)}{8\,cUI_1}$$
$$\times\sqrt{\frac{2}{\pi k_n r}}[r_1(k_n,z,\omega)e^{-i\pi/4}\hat{\boldsymbol{r}}+r_2(k_n,z,\omega)e^{i\pi/4}\hat{\boldsymbol{z}}]\exp(ik_n r), \tag{7.143}$$

其中 $I_1=\frac{1}{2}\int_0^\infty\rho(r_1^2+r_2^2)d_z$.

Keilis-Borok 和 Yanovskaya(1962) 给出了 Love 波的简洁结果，即方程 (7.142) 和 (7.143) 中用 $1/(cUI_1)$ 表示的极点

的留数。Harkrider 和 Anderson (1966) 推测出 Rayleigh 波的相应结果并且他们用数值法给出了证明。对于一个点源激发的整个地球的自由振荡（下一章中的研究课题），斋藤 (Saito, 1967) 第一个得到了同样的简洁形式。

将 (7.106)，(7.107) 和 (7.109) 中给出的线源的解进行对比，可以看出，二维的和三维的解极为相似。当和线源相比时，点源解的相位超前 $\pi/4$，并由于有一个比例于 $\omega^{1/2}$ 的因子而包含有更高的频率。这一点很容易理解，因为线源可看成是点源的叠加或是点源在空间上的平滑。解的根本简化，即将源、介质及接收点诸因子分离开，对两种情况都适用（见补充 6.1）。

为使这些稳态位移的结果和 Green 函数中我们的标记法相一致，我们去掉 (7.142) 和 (7.143) 中的因子 $\exp(-i\omega t)$，于是可将左半部视为作用在 $\xi=(0,\ 0,\ h)$ 上的点力 $\boldsymbol{F}(\omega)$ 在频率域中产生的位移，由此得出

$$u_i(\boldsymbol{x},\omega)=F_p(\omega)G_{ip}(\boldsymbol{x};\xi;\omega). \qquad (7.144)$$

所谓 $G(\boldsymbol{x};\xi;\ \omega)$，它是 τ 固定为零时和 t 有关的 $G(\boldsymbol{x},t;\ \xi,\tau)$ 的 Fourier 变换。在第三章和第四章经常出现等价于 (7.144) 的褶积。与 (7.142) 和 (7.143) 的对比表明，可用 Green 函数中的 Love 波项和 Rayleigh 波项来描述面波的激发。具体地说，它们是

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{LOVE}}=\sum_n \frac{l_1(z)l_1(h)}{8\,cUI_1}\begin{pmatrix}\sin^2\phi & -\sin\phi\cos\phi & 0\\ -\sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\times\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[\ i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad (7.145)$$

和

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{RAYLEIGH}}=\sum_n \frac{1}{8\,cUI_1}$$

$$\times\begin{pmatrix} r_1(z)r_1(h)\cos^2\phi & r_1(z)r_1(h)\cos\phi\sin\phi \\ r_1(z)r_1(h)\sin\phi\cos\phi & r_1(z)r_1(h)\sin^2\phi \\ ir_2(z)r_1(h)\cos\phi & ir_2(z)r_1(h)\sin\phi \end{pmatrix}$$
$$\begin{matrix} -ir_1(z)r_2(h)\cos\phi \\ -ir_1(z)r_2(h)\sin\phi \\ \times r_2(z)r_2(h) \end{matrix}\Bigg)$$
$$\times\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right]. \qquad (7.146)$$

7.5 由具有任意地震矩的点源产生的 Love 波和 Rayleigh 波

如果面波被一点源激发，此点源又仅由矩张量M描述，则研究此激发的一种方法是用等效体力，正如我们在前节中所作的那样。这是斋藤（Saito，1967）的方法，现得到牵引力不连续性的(k, m)展开式（7.120），当$m=\pm 2$时，有非零项。然而，我们已经得到了 Green 函数的 Love 分量和 Rayleigh 分量，所以较快的办法是只用公式

$$u_i(x,\omega)=M_{pq}(\omega)\frac{\partial}{\partial\xi_q}G_{ip}(x;\xi;\omega),$$

在微分运算G^{LOVE}和G^{RAYLEIGH}中，我们仅保留最大的项，即包括垂直本征函数的深度微商或 exp $(ik_n r)$ 的水平微商。用$\partial\gamma/\partial\xi_1=-\cos\phi$，$\partial\gamma/\partial\xi_2=-\sin\phi$，作为例子我们得到

$$u_x^{\text{LOVE}}(x,\omega)=-\sum_n \sin\phi\frac{l_1(z)}{8cUI_1}\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\times\Big\{ik_n l_1(h)[M_{xx}\sin\phi\cos\phi-M_{yx}\cos^2\phi$$
$$+M_{xy}\sin^2\phi-M_{yy}\sin\phi\cos\phi]$$
$$-\frac{dl_1}{dz}\Big|_s[M_{xz}\sin\phi-M_{yz}\cos\phi]\Big\}. \qquad (7.147)$$

(7.147) 的推导类似于通过 (4.28) 推导 (4.29)，尽管现在我们仅保留了远场项。对 u_y^{LOVE}可得到相似的表示式并且立刻可得到 $u_z^{\text{LOVE}}=0$，所以，一向量公式可给出为

$$\boldsymbol{u}^{\text{LOVE}}(\boldsymbol{x},\omega)=\sum_n \frac{l_1(z)}{8\,cUI_1}\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right]\{\quad\}\hat{\phi}, \tag{7.148}$$

其中{ }和 (7.147) 中的括号{ }相同。

对 Rayleigh 波，我们从 (7.146) 的最后一行可得

$$\begin{aligned}u_z^{\text{RAYLEIGH}}=&\sum_n \frac{r_2(z)}{8\,cUI_1}\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(k_n r+\frac{\pi}{4}\right)\right]\\&\times\Big\{k_n r_1(h)[M_{xx}\cos^2\phi+(M_{xy}+M_{yx})\sin\phi\cos\phi\\&+M_{yy}\sin^2\phi]+i\frac{dr_1}{dz}\Big|_h[M_{xz}\cos\phi+M_{yz}\sin\phi]\\&-ik_n r_2(h)[M_{xz}\cos\phi+M_{zy}\sin\phi]+\frac{dr_2}{dz}\Big|_h M_{zz}\Big\}.\end{aligned} \tag{7.149}$$

对 Rayleigh 波运动的径向分量（水平向），得到为

$$u_r^{\text{RAYLEIGH}}=\sum_n \frac{r_1(z)}{8\,cUI_1}\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(k_n r-\frac{\pi}{4}\right)\right]\{\quad\}, \tag{7.150}$$

其中{ }和 (7.149) 中的括号{ }相同。

注意，用矩张量表示的这些面波激发的公式，不仅适用于小的位错源，而且也适用于小的体积源。为研究这一点，考虑一个具有矩密度 $m_{pq}=\partial M_{pq}/\partial V$ 的体积源。这是一个如 3.4 节中所述的每单位体积中的矩密度，我们从等价于 (3.30) 的方程入手，其位移的 x_i 分量为

$$u_i(\boldsymbol{x},\omega)=\int_V m_{pq}(\eta,\omega)\frac{\partial}{\partial\eta_q}G_{ip}(\boldsymbol{x};\eta;\omega)\,dV(\eta).$$

如果矩密度集中于 ξ 点上，若 V 中 η 变化，则

$$m_{pq}(\eta,\omega)=M_{pq}(\omega)\delta(\eta-\xi),$$

且上述表示式确实又给出了 $u_i = M_{pq} G_{ip,q}$.

作为一个例子，让我们先考虑爆炸源的情况。作为一个点源，矩张量是一个具有相等元素 $M_{xx} = M_{yy} = M_{zz} = M_0$ 的对角矩阵。在此情况下，显然是不能激发 Love 波的。Rayleigh 波在方位上是各向同性的，并且由 (7.149) 给出的垂直向位移为

$$u_z(x,\omega) = \sum_n \frac{r_2(z)}{8\,cUI_1}\left(\frac{2}{\pi k_n r}\right)^{1/2}\left(\frac{-1}{i\omega}\right)\exp\left[i\left(k_n r + \frac{\pi}{4}\right)\right] \times \left\{k_n r_1(h) + \frac{dr_2}{dz}\bigg|_h\right\}, \tag{7.151}$$

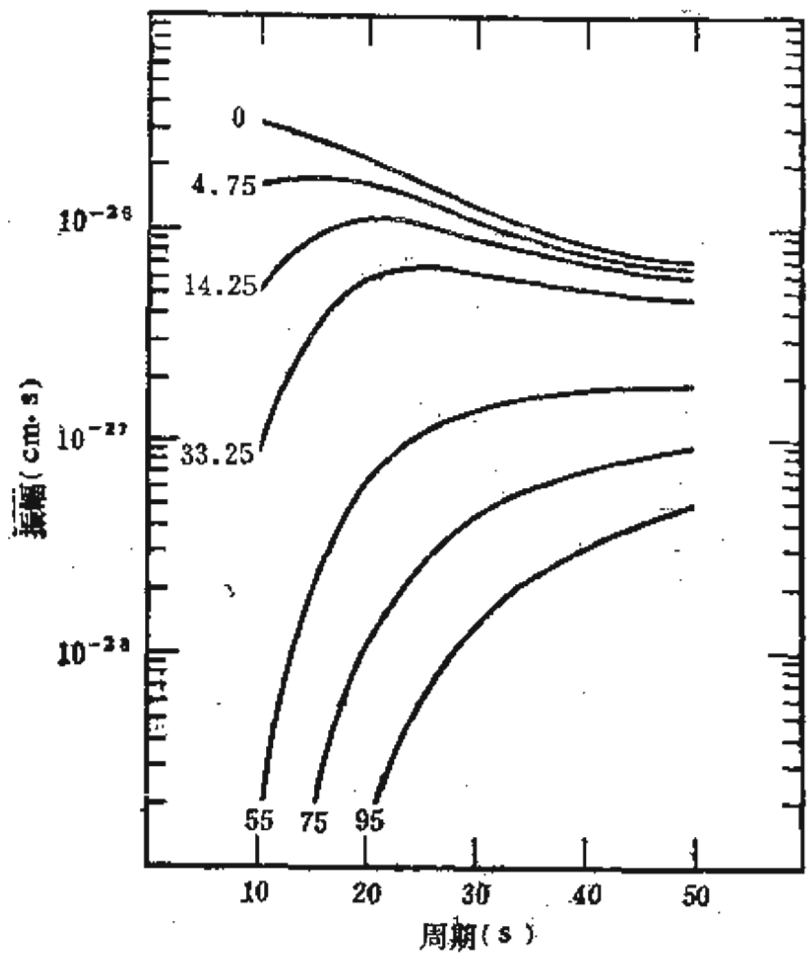


图 7.10

对具有单位地震矩（对角元素）的地下爆炸，在 Δ=2000 公里处 Rayleigh 波的振幅谱（垂直位移）。每一曲线旁的数值表示震源深度，以公里计（引自 Tsai and Aki, 1971）

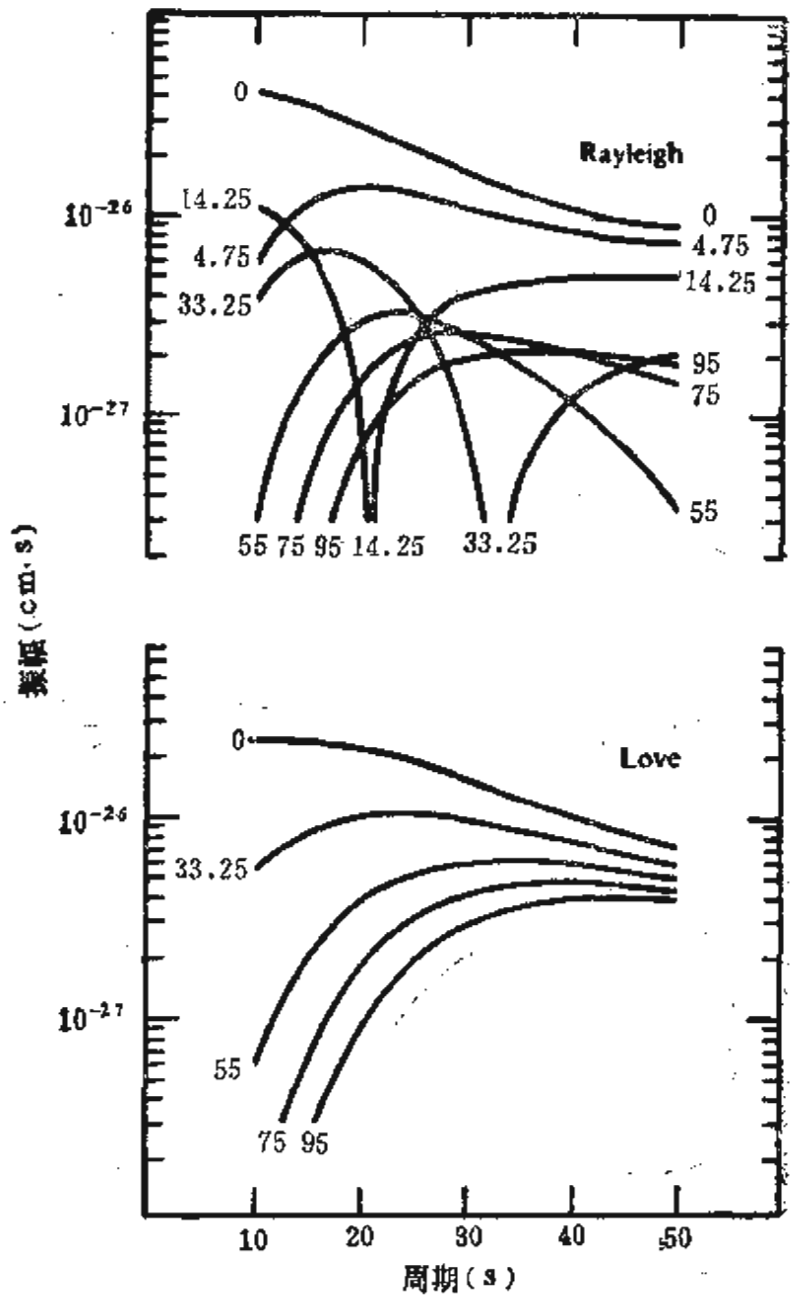


图 7.11

对具有单位阶梯函数地震矩的垂直走滑地震，在2000公里处与断层走向的夹角为 $\varphi=30°$ 时，Rayleigh 波（垂直的）和 Love 波的振幅谱。每一曲线旁的数值表示震源深度，单位为公里（引自 Tsai and Aki, 1971）

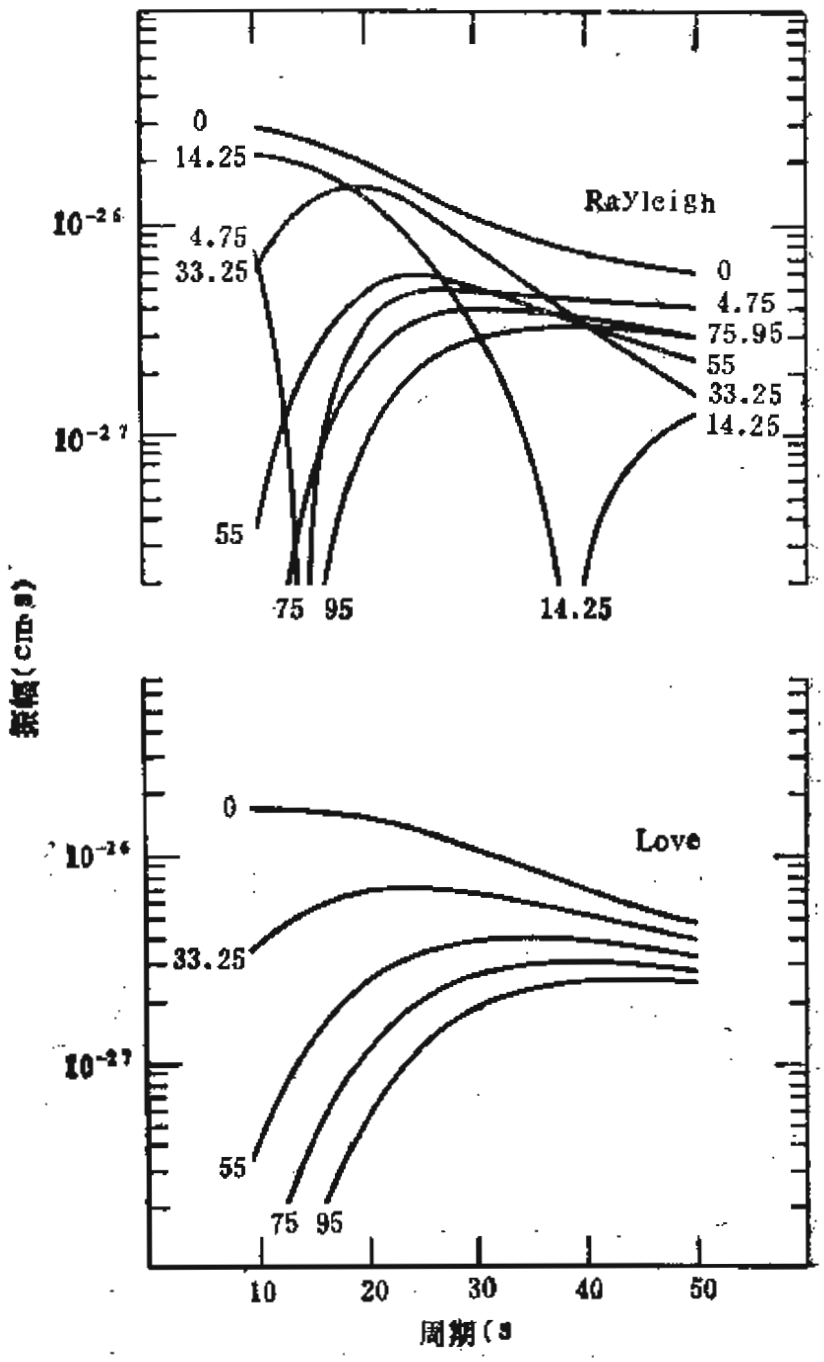


图 7.12

对倾角为 45°并有单位阶梯函数地震矩的倾滑断层，在 Δ= 2000 公里、与断层走向夹角为 30°时，Rayleigh 波和 Love 波的振幅谱，每一曲线旁的数字为震源深度，单位为公里（引自 Tsai and Aki, 1971）

这里我们已假定，$M_0(t)$ 为一具有幅度为 1 达因·厘米的阶跃，所以，$M_0(\omega)=-1/i\omega$。

用先前对 Gutenberg 的大陆地球模型（见补充 7.5）得到的相速度、群速度和本征函数，计算由不同深度的爆炸源所产生的基频 Rayleigh 波的振幅是简单的。仅取（7.151）中的第一项（即$n=0$），这里用厘米-秒单位。2000 公里震中距处的数值结果如图 7.10 所示。很清楚，爆炸源产生的 Rayleigh 波激发，随深度逐渐衰减。

另一方面，具有对称性双力偶矩张量的地震源产生的 Rayleigh 波频谱和震源机制及震源深度的关系是复杂的。在一竖直断层上，纯走滑运动的情况和沿一 45°倾角断层面的倾滑运动的情况，分别如图 7.11 和 7.12 所示。在这两种情况中，接收点均位于震中距为 2000 公里且和断层走向间的方位角为 30° 处，并且对 Rayleigh 波和 Love 波两者，假定有 1 达因·厘米的双力偶矩的阶梯状变化。在（7.148）和（7.149）中要求的M的直角坐标分量可从补充 4.4 中得到。虽然在两种情况中 Love 波频谱随震源深度都平滑地减低，但 Rayleigh 波频谱却强烈地依赖于震源机制和震源深度，这就对测定这些震源参数提供了一个有力的方法。

7.6 漏能振型

本章内，至今我们仅考虑了面波或简正振型，它们是在波数平面中极点上的留数所产生的。在等于或大于截止频率时，简正振型的解变为零，因为极点从"顶部"Riemann叶（这里垂直波数的虚部被选择为正以保证在无限深度处的辐射条件）移向下部的叶中。一完整的解要求围绕分支切割作附加积分的计算，对半空间问题如图 6.12 表示的那样。本节中我们将证明，分支切割的积分可转换成下叶中诸极点留数贡献之和。不同于简正振型，它

随时间呈指数衰减，因为能量漏到下半空间中了。它们叫做漏能振型。

我们将研究最简单的成层介质的漏能振型，即在一液体半空间上有一液体层。Pekeris (1948) 为了解释由 Ewing 和 Worzel (1948) 得到的关于海洋声学的观测数据，对此介质中波的产生和传播进行了广泛地研究。这里我们将按照 Rosenbaum (1960) 的推导，将整个波场完整地表示为简正振型和漏能振型之和。此结果对得到适合于较大时间间隔的简单的近似公式是有用的。

考虑一液体层，其厚度为 H，密度为 ρ_1，声波速度为 α_1，此层置于密度为 ρ_2，速度为 α_2 的液体半空间之上 (图 7.13)。我们将假定在层内位于深度 h 处有一球状压力源。如 6.2 节所研究的，我们将用同样的坐标，并从两个相接的液体半空间问题中同样的源表达式开始。我们将首先写出如式 (6.11) 的初始压力波

$$P^{\lambda}=\frac{A}{R}\exp\left[i\omega\left(\frac{R}{\alpha_1}-t\right)\right], \tag{7.152}$$

此处 R 是源点 Q 和接收点 P 之间的距离。我们用类似于 (6.12) 和 (6.13) 解的尝试形式，但有一附加项，此项表示在层中向两个路径传播的波，同时测定被积函数中的未知因子以满足边界条件。边界条件是 (i) 在 $z=0$ 处压力为零，(ii) 穿过 $Z=H$ 交界面的压力和垂直位移连续，(iii) 没有波来自 $z=\infty$ 处。于是 (对 $0\leqslant z\leqslant h$) 层中整个压力场可写成

$$2\exp(-i\omega t)\int_0^{\infty}J_0(kr)\,k\frac{\sinh\gamma_1 z}{\gamma_1}F_1(\omega,k)\,dk, \tag{7.153}$$

其中

$$F_1(\omega,k)=A\frac{\rho_2\gamma_1\cosh\{\gamma_1(H-h)\}+\rho_1\gamma_2\sinh\{\gamma_1(H-h)\}}{\rho_2\gamma_1\cosh(\gamma_1 H)+\rho_1\gamma_2\sinh(\gamma_1 H)} \tag{7.154}$$

这里 $\gamma_i=(k^2-\omega^2/\alpha_i^2)^{1/2}$，$\gamma_1$ 和 γ_2 的符号的选择是使 $\mathrm{Re}\,\gamma_1\geqslant 0$

和 $\mathrm{Re}\gamma_2 \geqslant 0$。便于记忆的方法是，只要辐射条件被满足，$i\gamma_2$ 有为正或为零的实部和虚部。

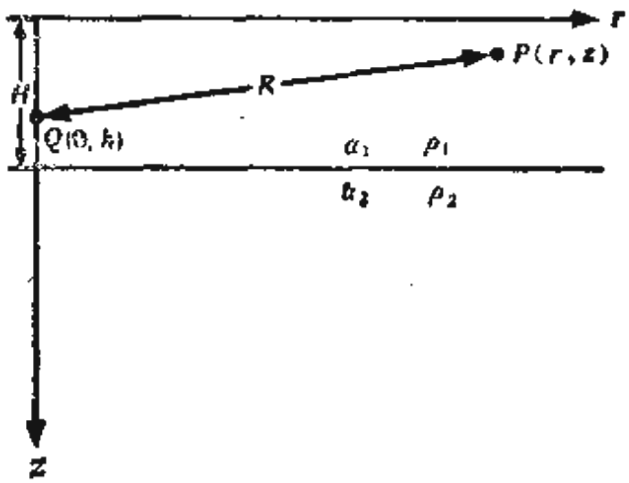


图 7.13
液体半空间上一液体层内，在Q点处一点源的参数

对截止频率以下的频率，为得到最常见的解，考虑具有连续谱的瞬时源是必要的。让我们考虑如下形式的初始压力波：

$$P^{\lambda}(t)=\frac{A\exp\left[\sigma\left(\frac{R}{\alpha_1}-t\right)\right]}{R},\quad t>\frac{R}{\alpha_1},$$

$$=0,\quad t<\frac{R}{\alpha_1}. \tag{7.155}$$

由于上述源可通过下式表示成一个 Fourier 反积分：

$$P^{\lambda}(t)=\frac{A}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{R}{\alpha_1}\right)\right]}{\sigma-i\omega}d\omega, \tag{7.156}$$

则相应的总压力场可由 (7.153) 对 ω 的积分得到

$$P^{\text{总}}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-i\omega t)}{\sigma-i\omega}d\omega\int_0^{\infty}J_0(kr)k\frac{\sinh\gamma_1 z}{\gamma_1}F_1(\omega,k)dk. \tag{7.157}$$

因为 $P^{总}(t)$是实数，它对 ω 的 Fourier 变换是复共轭的，同时我们可将（7.157）改写成

$$P^{总}(t)=\frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\frac{\exp(-i\omega t)}{\sigma-i\omega}d\omega\int_0^{\infty}J_0(kr)k\frac{\sinh\gamma_1 z}{\gamma_1}\times F_t(\omega,\ k)dk. \tag{7.158}$$

现在我们改变积分的次序并首先通过复 ω 平面中变形的积分路径对 ω 来计算积分。因为被积函数是一个 γ_1 的偶函数，所以 $\omega=\pm\alpha_1 k$ 不是一个支点，并且此问题中的分支切割仅仅是和 γ_2 有联系的分支切割。围绕$\omega=\pm\alpha_2 k$的分支切割是沿着 $\mathrm{Re}\gamma_2=0$ 进行的，它相应于$|\mathrm{Re}\omega|>\alpha_2 k$ 的实 ω 轴上那部分，如图 7.14 所示。

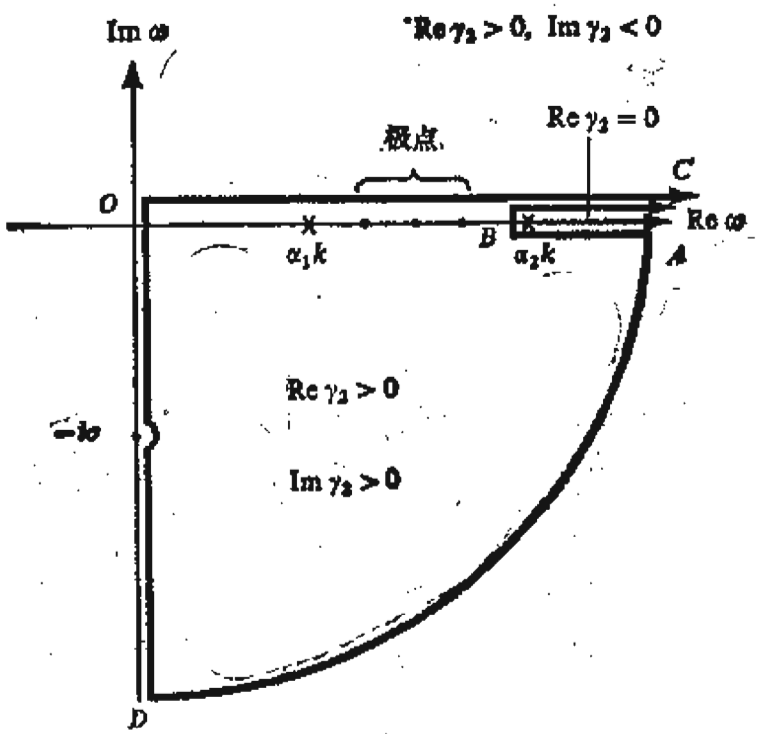


图 7.14
ω 面中的极点（圆点）和支点（叉）

由于辐射条件，我们最初的积分路径位于 $\mathrm{Re}\gamma_2>0$ 的顶叶中。下一步我们将证明，

$$f_1(\omega,\ k)\equiv\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H+\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H=0 \qquad (7.159)$$

式中仅有有限个实根存在于顶叶中。令

$$i\gamma_1H=P_1+iq_1,\ i\gamma_2H=P_2+iq_2,$$

其中 P_1，P_2，q_1，q_2 是实数，将它们代入 $f_1(\omega,\ k)$中并取其虚部，如果 (7.159) 成立，则我们得到

$$\frac{\sinh q_1\cosh q_1}{\cos^2p_1\cosh^2q_1+\sin^2p_1\sinh^2q_1}+\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{p_1p_2+q_1q_2}{p_2^2+q_2^2}=0 \qquad (7.160)$$

由于 $\gamma_1^2-\gamma_2^2=\omega^2/\alpha_2^2-\omega^2/\alpha_1^2$ 是实数，$p_1q_1=p_2q_2$。因而

$$\frac{p_1p_2+q_1q_2}{p_2^2+q_2^2}=\frac{q_1}{q_2}\frac{p_1^2+q_2^2}{p_2^2+q_2^2}.$$

把这个代入 (7.160)，我们看到，如 $q_2>0$，则 (7.160) 中的第一和第二项有相同的符号。因此，除了当 $q_1=\mathrm{Re}\gamma_1H=0$ 以外，$f_1(\omega,\ k)$ 的根在 $q_2=\mathrm{Re}\gamma_2H>0$ 的顶叶中不可能存在。而当 $\mathrm{Re}\gamma_1H=0$ 时，这些根是实数并相应的相速度 c 由下面的公式给出：

$$\tan\omega H\sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2}-\frac{1}{c^2}}=-\frac{\rho_2\sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2}-\frac{1}{c^2}}}{\rho_1\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\alpha_2^2}}}. \qquad (7.161)$$

这个方程和 Love 波的周期方程 (7.6) 相类似，但又有一个重要差别。因为右边为负号，所以零阶正切曲线不能给出一个根(见图 7.2)。因此，在一成层的声波介质中，所有的振型都有有限的截止频率。我们将取 $n=1$ 作为最大的振型 (而不是 $n=0$)。第 n 阶振型的截止频率 ω_{cn} 可令 (7.161) 中的 $c=\alpha_2$ 而给出：

$$\omega_{cn}=\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{H\sqrt{\frac{1}{\alpha_1^2}-\frac{1}{\alpha_2^2}}}. \qquad (7.162)$$

相应的截止波数为

$$k_{cn}=\frac{\omega_{cn}}{\alpha_2}. \tag{7.163}$$

对一给定的 k，仅有有限个根出现在顶叶上，它们符合 $k_{cn}\leqslant k$，如图 7.14 所示。除了在实轴上的这些极点外，由源的时间函数产生的另一极点处于负虚轴上的 $-i\sigma$ 处。

现在，让我们将初始积分路径 OC 以下述方式改变成 $ODABC$，如图 7.14 所示，即

$$\int_{OC}=\int_{OD}+\int_{DA}+\int_{ABC}-2\pi i\sum\text{各极点的留数}.$$

对一较大的 t，由于因子 $\exp(i\omega t)$，当弧的半径趋近于无限时，(7.158)中的被积函数在 DA 上变为零。另一方面，除了沿着围绕 $-i\sigma$ 的小半圆以外，沿路径 OD 被积函数是纯虚数，它仅有的贡献是在 $-i\sigma$ 处以 $2\pi i$ 乘负的二分之一留数。我们将把它写成

$$P_L=\int_{OD}=2\,e^{-\sigma t}\int_0^\infty J_0(kr)k\,\frac{\sinh\gamma_1(\sigma)z}{\gamma_1(\sigma)}F_1(-i\sigma,k)\,dk, \tag{7.164}$$

其中 $\gamma_1(\sigma)=(\sigma^2/\alpha_1^2+k^2)^{1/2}$。这表示其时间关系是与源函数一样的非振荡运动。虽然这个表示式违背声学的因果关系（运动在初至波到达之前开始），但对我们主要兴趣所在的较大的 t，它对结果并无影响。

简正振型的解是对实轴上极点的留数求和，可由下式给出：

$$\begin{aligned}P_N&=-2\pi i\sum\text{留数}\\&=4\,\mathrm{Re}\sum_n\int_{k_{cn}}^\infty J_0(kr)k\sinh(\gamma_1 z)\,\frac{\exp(-i\omega_n t)}{\omega_n+i\sigma}\\&\qquad\times F_2(\omega_n,k)\,dk,\end{aligned} \tag{7.165}$$

其中

$$F_2(\omega_n,k)=\frac{A\rho_2\sinh(\gamma_1 h)}{\sinh(\gamma_1 H)\left[\dfrac{\partial}{\partial\omega}f_1(\omega,k)\right]_{\omega=\omega_n}}. \tag{7.166}$$

这里 ω_n 是 $f_1(\omega_n,k)=0$ 的根，k_{cn} 是 (7.163) 中定义的截止

波数。采用此积分限是因为当 $k<k_n$ 时第 n 个极点在顶叶中不存在。

现在还剩下沿路径 ABC 的积分。如果在 AB 和 BC 之间被积函数是连续的，这个路径的积分当然为零。但是由于 γ_2 在穿过分支切割时有相反的符号，故此积分实际并不为零。事实上，沿 BC 的 $\mathrm{Im}\gamma_2$ 是负的，沿 AB 是正的。为说明这一点，用图 7.15 中定义的 r_1，r_2，θ_1，θ_2，我们写成

$$\alpha_2\gamma_2=-i(\omega^2-\alpha_2^2k^2)^{1/2}=-i\sqrt{r_1r_2}\left(\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right).$$

第一象限可由 $0<\theta_1+\theta_2<\pi$ 定义。因此，在顶叶中 $\mathrm{Re}\gamma_2>0$，且 $\mathrm{Im}\gamma_2$ 是负的。同样，我们可证明，$\mathrm{Im}\gamma_2$ 在 ω 面中顶叶的第四象限内是正的。（在底叶中，第一象限由 $2\pi<\theta_1+\theta_2<3\pi$ 定义。）

由于 γ_2 的符号已确定，沿 ABC 的积分可改写成

$$\begin{aligned}\int_{ABC}&=\int_{BC}-\int_{BA}\\&=\frac{4}{\pi}\,\mathrm{Im}\int_0^\infty J_0(kr)\,k\,dk\int_{\alpha_2 k}^\infty\frac{\exp(-i\omega t)}{\omega+i\sigma}\\&\qquad\times\sinh\gamma_1zF_3(\omega,\ k)\times d\omega,\end{aligned}\tag{7.167}$$

其中

$$F_3(\omega,\ k)=\frac{A\rho_1\rho_2\gamma_2\sinh\gamma_1h}{(\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H+\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H)(\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H-\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H)}.\tag{7.168}$$

为计算上述积分，我们把积分路径从 BC 变为 BC'，如图 7.16 所示。这次我们将保持 (7.167) 的被积函数为解析的。由此得出，我们被迫取第四象限中根的 $\mathrm{Re}\gamma_2<0$，即我们下降到 Riemann 下叶中。当半径趋于无限时，沿 1/4 圆周 CC' 的积分变为零。这个改变部分地利用了位于改变这路径时所掠过区域中的极点的留数来代替支线积分。因此，

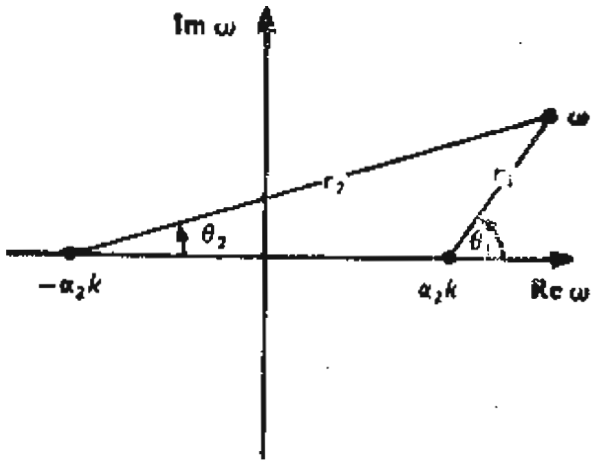


图 7.15

图 7.14 中对 γ_2 选择的根的定义。利用 $0\leqslant\theta_1<2\pi$，$-\pi<\theta_2\leqslant\pi$ 和 $\alpha_2\gamma_2=(r_1r_2)^{1/2}\exp[i(\theta_1+\theta_2-\pi)/2]$

$$\int_{ABC}=P_{B_1}+P_{B_2},$$

其中

$$P_{B_1}=\frac{4}{\pi}\operatorname{Im}\int_0^{\infty}J_0(kr)k\,dk\int_{\alpha_2 k}^{\alpha_2 k-i\infty}\frac{\exp(-i\omega t)}{\omega+i\sigma}\times\sinh\gamma_1 zF_3(\omega,\ k)\,d\omega \tag{7.169}$$

和 $P_{B_2}=-2\pi i\sum$ 留数

$$=4\operatorname{Re}\sum_n\int_0^{k_{0n}}J_0(kr)k\,dk\,\frac{\exp(-i\omega_n t)}{\omega_n+i\sigma}\times\sinh\gamma_1 zF_2(\omega_n,k)\,dk. \tag{7.170}$$

在计算留数中，注意，在下叶中遇到的 F_3 的所有极点是下式的根：

$$\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H+\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H=0,$$

即为 $f_1(\omega,\ k)=0$ 的根。从 (7.159) 的讨论中得到，如果 $\operatorname{Re}\gamma_2<0$，则 $\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H-\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H$ 不可能有复根。除积分限以外，式 (7.170) 和简正振型的解 (7.165) 相同。这些积分限的出现是由于极点仅对 $0<k<k_{0n}$ 才存在于 BC' 右边的区域中。这需有一种解释。当 k 从零增加到无穷的过程中，我们将在

ω 面中追踪极点的运动。

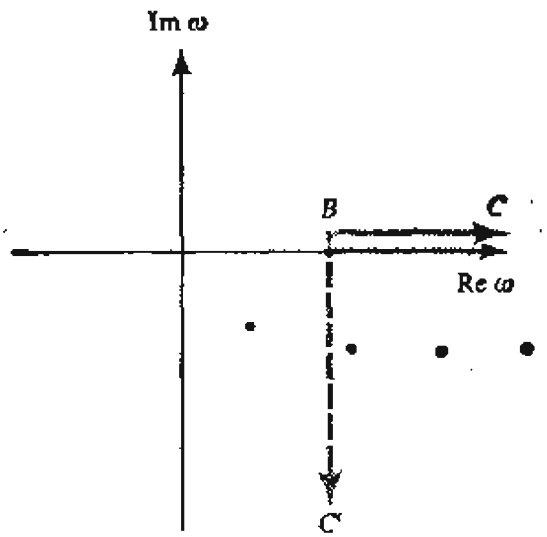


图 7.16
复 ω 面的 Riemann 下叶上 ($\mathrm{Re}\gamma_2<0$) 的极点

让我们假想 k 表示时间。在 $k=0$ 时，$i\gamma_1=\omega/\alpha_1$，$i\gamma_2=\omega/\alpha_2$，并且 $f_1(\omega, 0)=0$ 的根由下式给出：

$$\omega_n=\frac{\alpha_1\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{H}-i\frac{\alpha_1}{2H}\ln\frac{\alpha_2\rho_2-\alpha_1\rho_1}{\alpha_2\rho_2+\alpha_1\rho_1}. \qquad (7.171)$$

极点位于 ω 面的下叶中，如图 7.16 所示(我们假定 $\rho_2\alpha_2>\rho_1\alpha_1$)。在 $k=0$ 时，ω 面中的初始速度和加速度分别为

$$\frac{d\omega_n}{dk}=0,$$

$$\frac{d^2\omega_n}{dk^2}=\frac{\alpha_1^2}{\omega_n}\left[1+i\frac{\rho_1\alpha_2}{\rho_2\omega_n H}\left(1-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2}\right)\Big/\left(1-\frac{\rho_1^2\alpha_1^2}{\rho_2^2\alpha_2^2}\right)\right]. \qquad (7.172)$$

考察加速度的实部和虚部，我们得到，在图 7.17 中箭头所示的方向上极点受到加速。最低阶的极点加速最大。

另一方面，在 $k=0$ 时，积分路径 BC' 位于负虚轴上。路径

BC' 以恒定速度即高于初始阶段极点的速度向右移动。因此，BC' 随 k 的增加逐一地通过极点。在 (7.170) 中引入的积分限 k_{on} 是当 BC' 追上第 n 个极点时 k 的瞬时值。对 $k<k_{on}$，第 n 个极点是在 BC' 的右边，因而留数有贡献。在 $k=k_{on}$ 时，第 n 个极点的位置 ω_{on} 满足如下的方程：

$$\mathrm{Re}\omega_{on}=\alpha_2 k_{on}。 \tag{7.173}$$

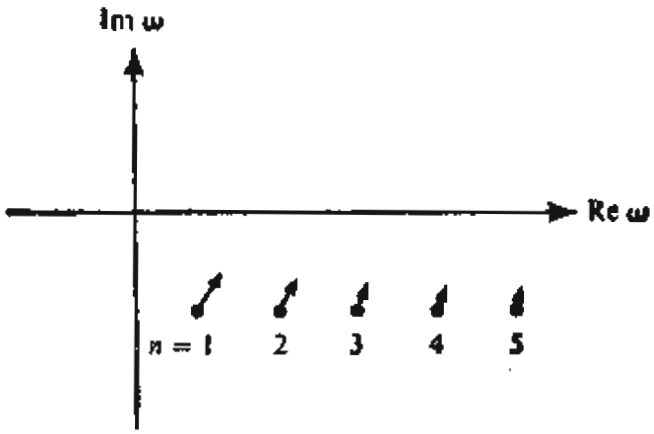


图 7.17

在Riemann 下叶中，极点的初始位置(即在 $k=0$ 时)。箭头表示极点位置"加速度"的方向和相对大小

在 BC' 通过之后，一极点转到右边并向上转至实 ω 轴。在实轴上，它碰到了来自第一象限的另一极点(双根)。于是这些根之一向左移动，另一根向右移动，两者均沿实轴移动。移向右边的根现在被加速并在 $k=k_{on}$ 时又一次被 BC' 追上，其极点在截止频率 $\omega_{cn}=\alpha_2 k_{cn}$ 处向上跳到顶叶中。此后，它随着 k 趋向于无穷而缓慢地向下达到 $\alpha_1 k$。

现在，我们必须沿着路径 BC' 计算由 (7.169) 给出的积分 P_{B1}。为此，我们将再一次改变积分的顺序并转到 k 平面中。与此同时，我们用下式将变量 ω 变成 q：

$$q=i(\omega-\alpha_2 k)。 \tag{7.174}$$

改写 (7.169)，我们得到

$$P_{B1}=\frac{4}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-qt}dq\int_0^\infty J_0(kr)k\frac{e^{-i\alpha_2 kt}}{q-\sigma+i\alpha_2 k}$$
$$\times\sinh\gamma_1 zF_s(\omega,k)dk. \qquad (7.175)$$

由于 $\gamma_2=(iq/\alpha_2)^{1/2}(2k-iq/\alpha_2)^{1/2}$，分支点位于 $k=i(q/2\alpha_2)$，如图 7.18 所示。从分支点到 $-i\infty$ 作切割。分支切割和处于下叶中初始积分路径 BC' 的这一选择(图 7.16)，给出了 γ_2 的实部和虚部的符号，如图 7.18 所指明的。

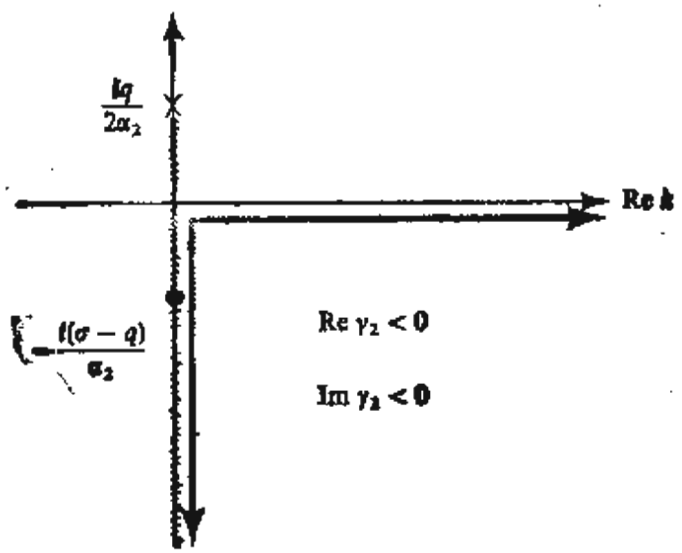


图 7.18
k 平面中的极点(圆点)和分支点(叉)

我们将积分路径从正实轴上变到负虚轴上，以使被积函数中的因子 $e^{-i\alpha_2 kt}$ 将沿着后一路径迅速衰减。用这一变化，我们得到了来自第四象限中复数极点的贡献。由于在那里 $\mathrm{Re}\gamma_2<0$，$\rho_2\gamma_1\cdot\cosh\gamma_1 H-\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1 H=0$ 不可能有复数根。因此，极点是 $\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1 H-\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1 H=0$ 的根。从而，我们得到

$$P_{B1}=P_{BL}+P_{B3}$$
$$P_{BL}=\frac{4}{\pi}\mathrm{Im}\int_0^\infty e^{-qt}dq\int_0^{-i\infty} J_0(kr)k\frac{e^{-i\alpha_2 kt}}{q-\sigma+i\alpha_2 k}$$
$$\times\sinh\gamma_1 zF_s(\omega,k)dk \qquad (7.176)$$

和

$$P_{B3}=-2\pi i\sum \text{留数}$$

$$=4\,\mathrm{Re}\sum_n\int_0^{q_{0n}} e^{-qt}J_0(k_nr)k_n\frac{\exp(-i\alpha_2k_nt)}{q-\sigma+i\alpha_2k_n}$$

$$\times\sinh\gamma_1zF_4(q,k)dq, \tag{7.177}$$

其中

$$F_4(q,k)=\frac{A\rho_2\sinh\gamma_1H}{\sinh\gamma_1H\left[\dfrac{\partial}{\partial k}(\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H+\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H)\right]_{k=k_n}}. \tag{7.178}$$

若 $\sigma<q$，则(7.176) 中对 k 的积分为零，因为极点 $i(q-\sigma)/\alpha_2$ 将不在积分路径上。所以对 q 的积分区间为 $0<q<\sigma$。若 $\sigma=0$，则 P_{BL} 变为零(即为一阶梯函数源)，它对我们并不是一个重要的项。

对 P_{B3} 的积分限 q_{0n} 需要给以说明。如前所述，对实的正 k，仅有两个 k 值，即 k_{0n} 和 k_{cn}，在这两个 k 值时 ω 的实部变成 α_2k。换言之，对实的正 k 和实的正 q，$f_1(\omega,k)$有两个根，其形式如下：

$$\omega=\alpha_2k-iq. \tag{7.179}$$

一个根相应于 k_{cn}，此时 $q=0$，而另一根相应于 k_{0n}，此时 $q=q_{0n}$。对实的正 q，在实的正 k 轴上 $f_1(\omega,k)=0$ 没有其它的根。

现在，在 $q=0$ 附近，可证明 $\mathrm{Im}(dk/dq)_{f_1=0}<0$。因而，当 q 从零开始增加时，一个极点移向第四象限中，如图 7.19 所示。由于这极点仅仅在 $q=q_{0n}$ 时再一次穿过实的 k 轴，故对 $q>q_{0n}$，极点在第四象限将不存在。依此，P_{B3} 的积分限为 $0<q<q_{0n}$。

最后，我们按下面的关系式将积分变量由 q 变成 k：

$$f_1(q,k)=\rho_2\gamma_1\cosh\gamma_1H+\rho_1\gamma_2\sinh\gamma_1H=0.$$

于是

$$\frac{dq}{dk}=-\frac{(\partial f_1/\partial k)_{q=\text{常数}}}{(\partial f_1/\partial q)_{k=\text{常数}}}=\frac{(\partial f_1/\partial k)_{q=\text{常数}}}{i(\partial f_1/\partial\omega)_{k=\text{常数}}}$$

将此式代入（7.177），我们得到

$$P_{B3}=4\,\mathrm{Re}\sum_n\int_{k_{on}}^{k_{cn}}\frac{J_0(kr)k\exp(-i\omega_n t)}{\omega_n+i\sigma}\sinh\gamma_1 zF_2(\omega_n,k)\,dk,\tag{7.180}$$

此式中的被积函数与(7.165)和(7.170)中的P_N和P_{B2}的相一致。把所有的项放在一起，最后我们得到

$$P^{总}=4\,\mathrm{Re}\sum_n\int_0^{\infty}\frac{J_0(kr)k\exp(-i\omega_n t)}{\omega_n+i\sigma}\sinh\gamma_1 zF_2(\omega_n,k)\,dk,\tag{7.181}$$

其中非振荡项P_L和P_{BL}被忽略。在k_{on}和k_{cn}之间，积分路径偏离实k轴，如图7.19所示。

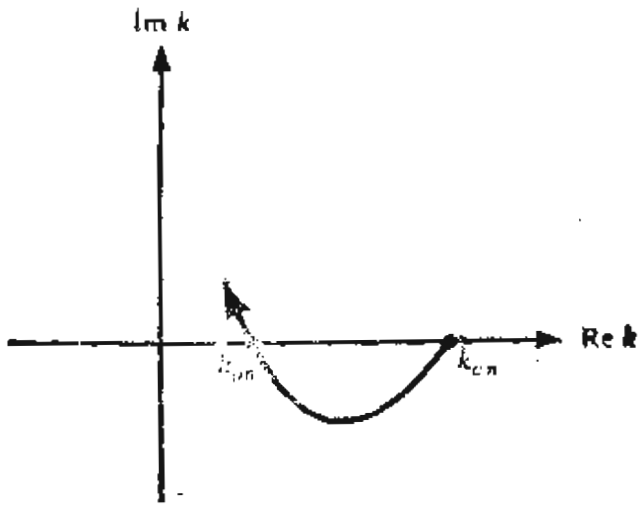


图 7.19
k平面中一极点的路径

7.6.1 风琴管振型

首先，我们考虑这样的情况，接收点放在源的上边，即$r=0$，犹如反射测量中可能遇到的情况。于是，积分(7.181)取补充6.3中考虑过的、具有指数$-i\omega_n t$的形式，并且对较大的t用最速下降法可算出此积分。因为如(7.172)所表示的，在$k=0$时$d\omega_n/dk=0$，所以在此情况中鞍点位于$k=0$处。假定主要贡献是来自$k=0$的附近，我们可将被积函数的相位因子$\exp(-i\omega_n t)$

展开成 k 的幂级数，仅保留其前两项。$k=0$ 时 ω_n 和 $d^2\omega_n/dk^2$ 的值分别由（7.171）和（7.172）给出。最速下降路径由下式给出：

$$-\frac{it}{2}\omega_n''(0)k^2=-i\frac{t}{2}k^2\left[\frac{d^2\omega_n}{dk^2}\right]_{k=0}=-x^2,$$

其中 x 是实数。依前方程，将变量由 k 变成 x，我们得到

$$P^{\blacksquare}=-4\,\mathrm{Re}\sum_n\frac{F_2(\omega_n,0)}{\omega_n(0)+i\sigma}\sin\frac{\omega_n z}{a_1}\exp(-i\omega_n(0)t)$$
$$\times\frac{2}{\omega_n''(0)t}\int_0^\infty xe^{-x^2}dx.$$

利用(7.166)和(7.171)来代替 $F_2(\omega_n,0)$ 和 $\omega_n(0)$，并且考虑到 $\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}$，上述公式可改写成

$$P^{\blacksquare}=4\,A\frac{a_1^2}{Ht}\sum_n\left|\frac{\sin(\omega_n h/a_1)\sin(\omega_n z/a_1)}{\omega_n(-i\omega_n+\sigma)\omega_n}\right|_{k=0}$$
$$\times\left(\frac{a_2\rho_2-a_1\rho_1}{a_2\rho_2+a_1\rho_1}\right)^{a_1 i/2H}\cos\left[\frac{a_1}{H}\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi t+\psi\right],\tag{7.182}$$

其中 ψ 是绝对值符号里边的相角值。

上述公式表示一个具有周期为 $4H/[(2n-1)a_1]$ 的阻尼振荡。最低阶的振型($n=1$)，其波长等于层厚度 H 的 4 倍：一个1/4波长的振荡。与其阻尼相应的时间性 Q（补充 5.7），由下式给出：

$$Q=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{\ln\left(\frac{a_2\rho_2+a_1\rho_1}{a_2\rho_2-a_1\rho_1}\right)}.\tag{7.183}$$

如果阻抗比较大，或 $a_2\rho_2\gg a_1\rho_1$，则其对数接近于 0 并且 Q 变得很大，结果将引起长时间持续回响。这种类型的回响称为风琴管

振型，因为它实质上是在垂直方向上的一维振荡。

7.6.2 相速度和衰减

让我们考虑另一情况，此时接收点远离震源，我们可以使用 Bessel 函数 $J_0(kr)$的渐近展开式。将(6.16)代入(7.181)并仅保留前边的项，我们得到

$$P^{总}\sim\frac{4}{\pi r}\mathrm{Re}\sum_n\int_{-\infty}^{\infty}(k)^{1/2}\frac{\exp\left(-i\omega_n t+ikr-i\frac{\pi}{4}\right)}{\omega_n+i\sigma}\times F_2(\omega_n,k)dk. \tag{7.184}$$

在此情况下，鞍点由下式确定：

$$\frac{d(-i\omega_n t+ikr)}{dk}=0$$

或

$$\frac{d\omega_n}{dk}=\frac{r}{t}. \tag{7.185}$$

由于 r/t 是实数，我们可知群速度 $d\omega_n/dk$ 在鞍点处也是实数。为确定鞍点的位置，必须找到这样的 $(\omega_n,\ k_n)$，使之同时满足(7.185)和 $f_1(\omega_n,\ k_n)=0$ 的(7.159)。一旦我们得到鞍点，即所说的 k_{sn} 和相应的 ω_{sn}，则最速下降路径由下式确定：

$$-i\omega_n t+ikr\sim-i\omega_{sn}t+ik_{sn}r-\frac{i}{2}\omega''_{sn}(k-k_{sn})^2t$$

$$=-i\omega_{sn}t+ik_{sn}r-x^2$$

x 是实数。沿最速下降路径完成这积分，我们得到

$$P^{总}\sim\frac{4}{\sqrt{rt}}\sum_n|Q_n|\exp(-L_n t)\cos(\mathrm{Re}\,\omega_{sn}t-\mathrm{Re}\,k_{sn}r+\psi), \tag{7.186}$$

其中 $L_n=-\mathrm{Im}\,\omega_{sn}+\mathrm{Im}\,k_{sn}r/t$,

$$Q_n=\frac{\sqrt{k_{sn}}F_2(\omega_{sn},\ k_{sn})}{(i\omega_{sn}+\sigma)\sqrt{\omega''_{sn}}},$$

同时 ϕ 是 Q_n 的相角。这些公式给出了相速度以及和每一漏能振型有关的衰减。

Rosenbaum(1960)给出了一些数值结果。例如，图 7.20 表明了在 $\alpha_2/\alpha_1=4$ 和 $\rho_2/\rho_1=2.7$ 的情况下最低振型($n=1$)中的群速度 $d\omega_n/dk=r/t$，和相速度 $\mathrm{Re}(\omega_n)/\mathrm{Re}(k_n)=c$ 之间的关系。图 7.21 表明相应的衰减因子 L。声波漏能振型，对于较高的相速度有较低的群速度，并且它的群速度总是比简正振型的要低。在刚性表面上置有一层时，其中简正振型的群速度和相速度之间的关系如图 7.20 中的虚线所示。另一方面，对一弹性体，确实存在比简正振型较早到达的漏能振型。在近距离处常常观测到在 P 波之后有一个衰减振荡的长周期运动，称为 PL 波。这一运动被 Oliver 和 Major(1960)解释为漏能振型。

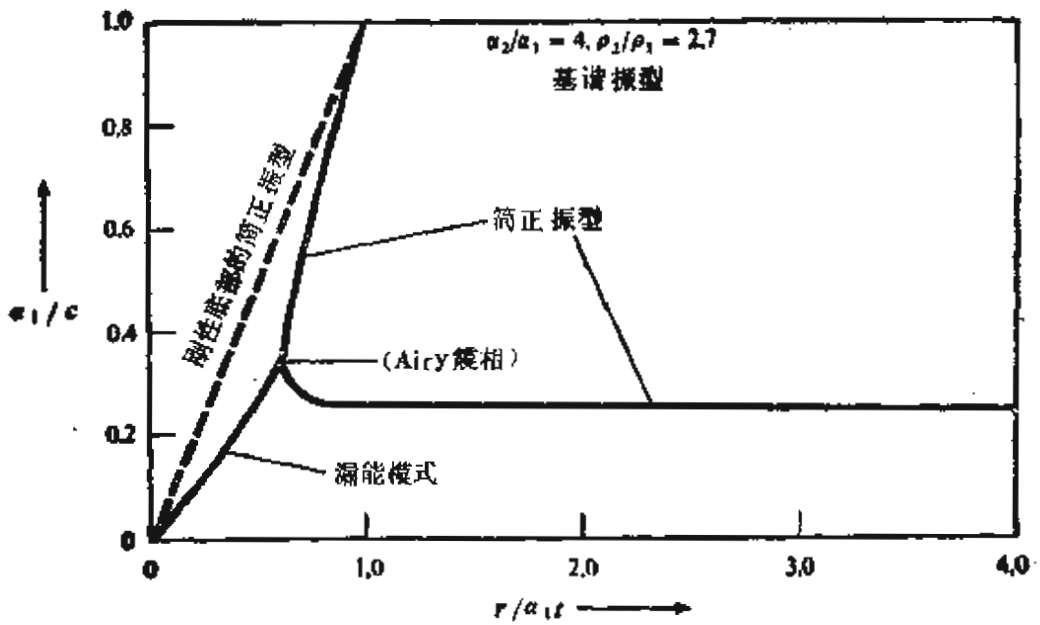


图 7.20

对基频的简正振型和漏能振型，在 $\alpha_2/\alpha_1=4$ 和 $\rho_2/\rho_1=2.7$ 的情况下群速度和相速度之间的关系。当半空间是刚性时，漏能振型中和简正振型中群速度和相速度之间的关系是相似的(引自 Rosenbaum, 1960)

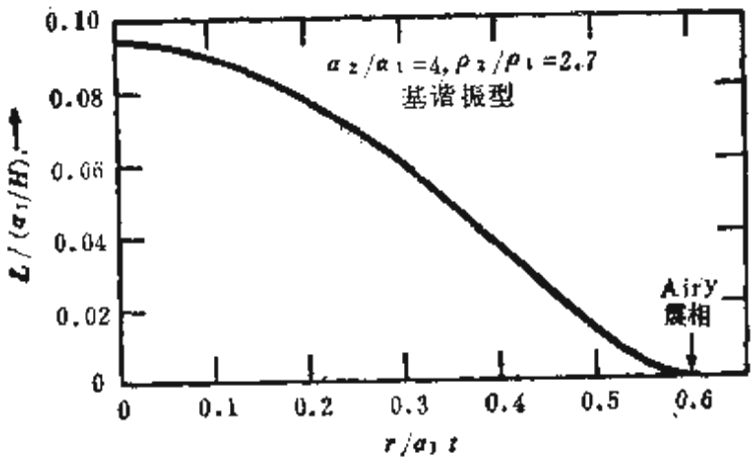


图 7.21

漏能振型的衰减因子(引自 Rosenbaum,1960)

建议进一步阅读的文献

Ewing, M., J. L. Worzel, and C. L. Pekeris. *Propagation of Sound in the Ocean.* Geological Society of America, Memoir 27, 1948.

Ewing, W. M., W. S. Jardetzky, and F. Press. *Elastic Waves in Layered Media.* New York: McGraw-Hill, 1957.

Gantmacher, F. R., *The Theory of Matrices* (2 vols.). New York: Chelsea Publishing Co., 1959.

Gilbert, F., and G. E. Backus. Propagator matrices in elastic wave and vibration problems. *Geophysics*, **31**, 326–332, 1966.

Lighthill, M. J., Group velocity. *Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications*, **1**, 1–28, 1965.

Brune, J. N., J. E. Nafe, and J. E. Oliver. A simplified method for the analysis and synthesis of dispersed wave trains. *Journal of Geophysical Research*, **65**, 287–304, 1960.

Schwab, F. A., and L. Knopoff. Fast surface wave and free mode computations. *In* B. A. Bolt (editor),

Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations (Methods in Computational Physics, Vol. 11). New York: Academic Press, 1972.

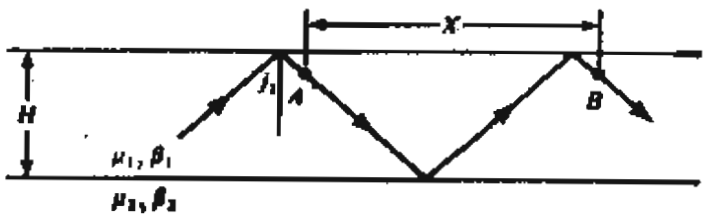
Schultz, M. H. *Spline Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1973.

Oliver, J., and M. Major. Leaking modes and the PL phase. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **50**, 165-180, 1960.

Banmford, D., S. Crampin, and others. Special edition on anisotropy. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **49**, 1-243, 1977.

问　题

7.1　这里我们介绍在半空间上一单层中 Love波的另一观点。对这类面波(具有频率 ω 和相速度 $c(\omega)$)其物理机制是，体波在表层内的超临界反射($\beta_1<\beta_2$) 产生面波。对同样深度的两点 A 和 B，在面波传播方向上两点间的距离取为 X，则 B 点的相位必然与 A 点有 $X\omega/c$ 的相移。



a) 对 A 和 B 之间的体波，证明其相移为

$$\psi=\frac{2H\omega}{\beta_1}\sec j_1-2\arctan\left[\frac{\mu_2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\beta_2^2}\right)^{1/2}}{\mu_1\left(\frac{1}{\beta_1^2}-\frac{1}{c^2}\right)^{1/2}}\right].$$

[提示：方程(5.32)在这里是有用的.]

b) 若面波存在，证明 ψ 和 $X\omega/c$ 仅差 2π 的整数倍。根据这个要求可得到频散关系式(7.6)。

c) 如果 $\beta_1>\beta_2$，为什么 Love 波不能存在？

7.2 证明，在均匀层中 SH 波的传播矩阵可由 (7.50) 的矩阵乘法(在 $Z=Z_0$ 时计算)给出，而(7.50)是由(7.49)转换而得。从(7.55)和(7.56)可得到 P-SV 波的相应结果。[Thomson 和 Haskell 最初得到的传播因子即是由此方法，而并非由(7.41)。]

7.3 以 $f(Z_l)$ 及 $f(Z_{l-1})$ 和 W_l 的关系推广上述问题的概念，并证明

$$f(z_l)=\boldsymbol{F}_l(z_l)\boldsymbol{F}_l^{-1}(z_{l-1})f(z_{l-1}).$$

因此，证明从 z_0 到 z_k 的传播因子可表示成

$$\boldsymbol{P}(z_k,\ z_0)=[\boldsymbol{F}_k(z_k)\boldsymbol{F}_k^{-1}(z_{k-1})][\boldsymbol{F}_{k-1}(z_{k-1})\boldsymbol{F}_{k-1}^{-1}(z_{k-2})]$$
$$\cdots[\boldsymbol{F}_1(z_1)\boldsymbol{F}_1^{-1}(z_0)]$$

(注意，如介质由非均匀层叠置而成，这些结果仍是真实的。如若 $\boldsymbol{F}_l(z)$ 是一矩阵，此矩阵的列即为第 l 层中 $\partial f/\partial z=\boldsymbol{A}(z)f$ 的线性独立的解。)

7.4 在 5.4 节和 7.2 节中，我们证明了 $\boldsymbol{FW}$ 可认为是解 $\partial f/\partial z=\boldsymbol{A}f$ 的所有可能的各类型波之和；$\boldsymbol{F}$ 的每一列可分别是 $\partial f/\partial z=\boldsymbol{A}f$ 的基本解；w 是一恒定矢量，它给出 $\boldsymbol{Fw}$ 中所含的每一基本解的权。考虑当 $k>\omega/\alpha$ 时(7.55)中 $\boldsymbol{F}$ 的第一列，证明(7.54) 的 $\boldsymbol{Fw}$ 中相应的波是一个非均匀 P 波，它的位移振幅是

$$\hat{P}e^{-\gamma z}[\alpha^2k^2/\omega^2-\sin^2(kx-\omega t)]^{1/2}.$$

7.5 通过重新定义原点，证明，构成 $G_{np}(0,0,h;x,y,z;\omega)$ 的一种方法是在对 $G_{np}(x,y,z;0,0,h;\omega)$ 的公式中，做变换 $(r\to r;\ \phi\to\phi+\pi;\ z\to h;\ h\to z)$。用此方法证明面波分量(7.145)和(7.146)满足互易关系

$$G_{np}(0,0,h;x,y,z;\ \omega)=G_{np}(x,y,z;\ 0,0,h;\omega).$$

7.6 证明，当波数不变时，由结构扰动 $(\delta\rho,\delta\mu)$ 产生的 Love 波

相速度的变化为

$$\left(\frac{\delta c}{c}\right)_k=\frac{\int_0^\infty\left[k^2l_1^2+\left(\frac{dl_1}{dz}\right)^2\right]\delta\mu dz-\int_0^\infty\omega^2l_1^2\delta\rho dz}{2\omega^2\int_0^\infty\rho l_1^2dz}.$$

7.7 证明，对 Poisson 比为 0.25 的半空间，其 Rayleigh波的本征函数由下式给出

$$r_1=e^{-0.8475kz}-0.5773\,e^{-0.3933kz},$$

$$r_2=0.8475\,e^{-0.8475kz}-1.4679\,e^{-0.3933kz},$$

并且能量积分 I_1 等于 $0.6205\rho/k$ (k 是水平波数，ρ 是密度)。因此，用(7.149)可得到位于深度 h 处具有任意矩张量的点源所产生的 Rayleigh 波的显式。

7.8 频散波列的波形由下式给出：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|e^{-i\omega t+i\phi(\omega)}d\omega$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty|F(\omega)|\cos[\omega t-\phi(\omega)]d\omega$$

如果群速度的延迟时间 $t_g=d\phi/d\omega$ 和 $d|F(\omega)|/d\omega$ 对离散频率 ω_i 是已知的，则上式可容易而准确地计算。证明

$$f(t)=\sum\frac{1}{\pi}\int_{\omega_i-\Delta\omega_i/2}^{\omega_i+\Delta\omega_i/2}|F(\omega)|\cos(\omega t-\phi(\omega))d\omega$$

$$\sim\sum_i\frac{\Delta\omega_i}{\pi}\left[|F(\omega_i)|\cos\omega_i(t-t_{pi})\frac{\sin\{(\Delta\omega_i/2)(t-t_{gi})\}}{(\Delta\omega_i/2)(t-t_{gi})}\right.$$

$$\left.-\frac{d|F(\omega_i)|}{d\omega}\frac{\sin\omega_i(t-t_{pi})}{t-t_{gi}}\left\{\frac{\sin[(\Delta\omega_i/2)(t-t_{gi})]}{(\Delta\omega_i/2)(t-t_{gi})}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\cos\left[\frac{\Delta\omega_i}{2}(t-t_{gi})\right]\right\}\right],$$

其中 $t_{pi}=\phi(\omega_i)/\omega_i$ 是在 ω_i 处的相位延迟时间。

7.9 由观测到的如下一些性质可确定面波的相速度做为频率的函数

a) 它们的群速度是 4.4 公里/秒，和频率无关；

b) 它们的波形随距离而变化，但每走过 8800 公里则回复到同样形状；

c) 它们的相速度随周期而增加。（在周期范围为 40—200 秒之间的长周期 Love 波大致表现有上述特性。因为频率和群速度无关，它们表现为一脉冲形式，并有时称为 G 波）。

第八章　地球的自由振荡

大地震产生的长周期面波，由于它们绕地球连续运行，在一给定的台站上可以记录到几次。在第七章中讨论过的平地球模型，对分析这些长周期面波显然是不适用的。甚而对象20秒那样的短周期，地球曲率对面波频散的影响也是不能忽略的，尤其是当上地幔中有一明显的低速层时，它可俘获大部份能量并有效地减少运行的距离。此外，频散可以如此强烈，以致绕地球运行$N+1$次的长周期面波可以和绕地球运行N次的较慢的短周期波以及和沿相反方向绕地球运行的波发生干涉。因此，为完善面波的分析，研究球形地球模型是很重要的。但本章的主要目的是要弄清楚面波和体波（和漏能模式）是一些可以用更基本的运动即地球的自由振荡来表示的现象。

因为地球是个有限体，作为整体它仅在某些一定的离散频率处才能共振。让我们先来弄清楚为什么一定如此。

前几章中，波系是以其水平波数（k）和频率（ω）来描述的。由于这些波在介质中传播时在横向上（水平方向）无限地伸展，在此情况下k是连续可变的。我们强调一种方法，在此方法中对每一ω只有某些波数$k=k_n(\omega)$（$n=1, 2, \cdots$）才是可能的。但我们也可将k看成独立变量，则发现对面波振型，只有某些本征频率$\omega=\omega_n(k)$时才是可能的（虽然对每一个n，ω连续变化）。正是频散关系的后一形式，自然地和球形地球中自由振荡的讨论相连。因为在球面几何中这会得出由于介质在横向是有限的（$0\leqslant\Delta<2\pi$，其中Δ如图8.1所示），"水平波数"被固定在某些离散数值上。事实上，我们将利用水平的角波数l来代替k，并发现l必然为零或为正整数。我们写成${}_n\omega_l$而不是${}_n\omega(l)$，对

给定的 l，我们最初的目的之一是必须得到正的本征频率 ${}_n\omega_l (n = 0, 1, 2, \cdots)$。

对一均匀的液体球，我们将从“频散关系” $\omega = {}_n\omega_l$ 的讨论开始进行这一分析——即我们须知道对基频（$n=0$）和谐频（$n>0$），ω 如何依赖于 l。我们将忽略重力，所以我们将研究的是一个不真实的但却简化了的模型，为导出在任何球模型的分析中所需要的很多波函数，这简化模型是很有用的。因此我们将描述一个点源激发的自由振荡，重点放在地球的球形对面波传播的影响上。对于周期大于 500 秒左右的波，重力效应变得很重要，我们将说明应如何考虑自重力。最后，我们将讨论由于地球自转引起的谱线分离以及（在第十三章中）由于地球结构的横向变化引起的分离。

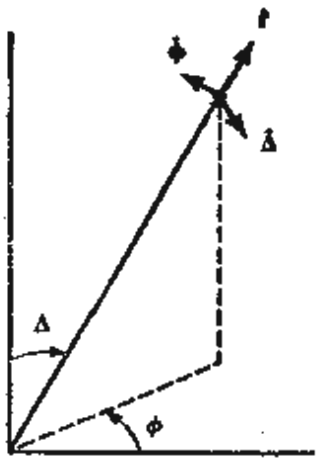


图 8.1
球极坐标 (r, Δ, ϕ) 其原点在地球的中心。$\Delta = 0$ 的线往往看成是穿过震源的，在此情况下称其为震中坐标

8.1 均匀液体球的自由振荡

所有自由振荡系统都具有地球自由振荡的一些主要特性，可能其中最简单的是“琴弦”问题的解。弦的横向运动是位置 x 和时间 t 的函数，它满足一维波动方程 $c^2\,\partial^2 y/\partial^2 x = \partial^2 y/\partial^2 t$，并在 $x=0$ 和 $x=l$ 处满足 $y(x, t)=0$。我们将假定读者比较熟悉有关的 Sturm-Liouville 理论。最重要的结果是满足上述波动方程和边界条件的任意解 $y(x, t)$ 可展开为

$$y = \sum_n a_n y_n(x, t),$$

其中 a_n 是常数，y_n 是自由振荡；$y_n = \sin({}_n\omega x/c)\cos({}_n\omega t)$ 具

有本征频率 ${}_n\omega=(n+1)\pi c/L$。

为得出球形介质中一些熟悉的特性，我们将假设有一半径为 r_0、均匀的、可压缩的液体球，其弹性性质为体积模量 k 和密度为 ρ。在此介质内没有体力，我们将考察关于平衡压力场中微小压力扰动 P 引起的自由振荡。因为应力 τ_{ij} 仅为 $-P\delta_{ij}$；故通常的运动方程（2.17）可写成

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}}=-\nabla P, \tag{8.1}$$

Hooke 定律（2.18）可简化为

$$P=-\kappa\nabla\cdot\boldsymbol{u}. \tag{8.2}$$

由于 ρ 和 κ 是常数，因而

$$c^2\nabla^2P=\partial^2P/\partial^2t^2, \tag{8.3}$$

其中 $c^2=\kappa/\rho$。

我们假定一“自由”边界条件——即在半径 r_0 的表面上有 $P(\boldsymbol{x},\ t)=0$。选择球极坐标系 (r,Δ,ϕ)，如图 8.1 所示。很自然地是要试图找到依赖于 $(r,\ \Delta,\ \varphi,\ t)$ 并可分解为四个不同因子的特解：$P=R(r)\Theta(\Delta)\Phi(\phi)T(t)$。我们在（5.8）的讨论中指出对某一常值 ω，$T=\exp(\pm i\omega t)$，为分离空间关系，我们需要用球极坐标中的 ∇^2 算子，即

$$\nabla^2P=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial P}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\Delta}\frac{\partial}{\partial\Delta}\left(\sin\Delta\frac{\partial P}{\partial\Delta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\Delta}\frac{\partial^2P}{\partial\phi^2}. \tag{8.4}$$

在补充 8.1 中我们得到

$$\Theta(\Delta)\Phi(\phi)=Y_l^m(\Delta,\phi)\equiv(-1)^m\left[\frac{2l+1(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2}\times P_l^m(\cos\Delta)e^{im\phi}, \tag{8.5}$$

其中 l 和 m 是整数，$-l\leqslant m\leqslant l$，并且 $P_l^m(\cos\Delta)$ 是连带 Legendre 函数。虽然已经分离了 Δ 和 ϕ 的关系，在一般实用中都将（8.5）式中的乘积 $\Theta\Phi$ 写成 $Y_l^m(\Delta,\ \phi)$。

补充 8.1

球函谐函数

在球面几何中，特殊函数 $\Theta(\Delta)\Phi(\varphi)$ 分离了方程 $c^2\nabla^2 P = \partial^2 P/\partial t^2$ 解的水平变化，由此可得到一系列重要的特性。这里我们将概述地球物理学中常用的某些特性的推导，因为在地球的整个球面上需要确定连续的有界函数。

尝试一个解 $P(x, t) = R(r)\Theta(\Delta)\Phi(\varphi)\exp(-i\omega t)$，我们由(8.3)和(8.4)得到

$$\frac{\sin^2\Delta}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\sin\Delta}{\Theta}\frac{d}{d\Delta}\left(\sin\Delta\frac{d\Theta}{d\Delta}\right)$$
$$+\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\sin^2\Delta = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}.$$

左半部与 ϕ 无关，因此 $(1/\Phi)(d^2\Phi/d\phi^2)$ 是一常数。求解 Φ 并注意，如果 $P(x, t)$ 是位置的单值函数，则 $\Phi(\phi)$ 一定是周期性的，且周期为 2π，于是我们得到本征函数

$$\Phi = e^{im\varphi} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \tag{1}$$

现在 R 和 Θ 对 (r, Δ) 的方程为

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\omega^2 r^2}{c^2} = \frac{m^2}{\sin^2\Delta} - \frac{1}{\sin\Delta\Theta}\frac{d}{d\Delta}\left(\sin\Delta\frac{d\Theta}{d\Delta}\right),$$

这里已使等式左半部仅和 r 有关，右半部仅和 Δ 有关。因此，若以上方程对所有的 (r, Δ) 都可满足，必须存在某个常数 K，使得

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\frac{\omega^2 r^2}{c^2} - K\right)R = 0, \tag{2}$$

和

$$\frac{d}{d\Delta}\left(\sin\Delta\frac{d\Theta}{d\Delta}\right) = \left(\frac{m^2}{\sin^2\Delta} - K\right)\sin\Delta\Theta. \tag{3}$$

我们连续分析Θ的方程，从如下情况开始：

$m = 0$ 的情况

函数 $\Phi(\varphi)$ 是常数，解 $P(x, t)$ 有轴对称性，Θ 满足 $\frac{d}{d\Delta}\left(\sin\Delta\times\frac{d\Theta}{d\Delta}\right) = -K\sin\Delta\Theta$，并且为了方便可消掉角 Δ 而用变量 $x = \cos\Delta$ 代替，因而也消掉了 Θ 方程中的三角函数项。我们得到

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+K\Theta=0, \tag{4}$$

称为 Legendre 方程。在常数 K 为一般值时，解在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 区间的端点上有奇点。这是相应于 $0\leqslant\Delta\leqslant\pi$ 的区间，也是描述地球中的位置所必须的。但是对某些 K 的特定值，存在非奇异解 Θ，它是 x 的多项式。

为证明这一点，假定存在一个如下形式的解

$$\Theta(x)=x^k\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i \qquad (b_0\neq 0). \tag{5}$$

将 (5) 代入 (4)，使 x 的每一幂次的系数为零，我们得到

$$b_0k(k-1)=0, \tag{6}$$

$$b_1(k+1)k=0, \tag{7}$$

并且通式为

$$b_{i+2}=b_i\left[\frac{(k+i)(k+i+1)-K}{(k+i+1)(k+i+2)}\right]. \tag{8}$$

由 (6) 可知，$k=0$ 或 $k=1$。不失普遍性，我们将假定 $k=0$(因为由 (7) 和 (8)，$k=1$ 意味着所有具有奇数脚标的 b_i 为零，所以只有 b_0 便可确定所有的非零的 b_i；这结果被包括在 $k=0$ 的情况中)。

由 (8) 可知，一般当 $i\to\infty$ 时，$|b_i+2/b_i|\to 1$。因此，和几何级数相比，假如 $-1<x<1$，则 (5) 是收敛的，但在 $x=\pm 1$ ($\Delta=0$ 或 π) 处情况如何呢？可以证明，Θ 的无穷级数将发散，除非由于某种原因，偶数脚标之一的 b_i 为零，且奇数脚标的 b_i 亦为零（进而所有以后的 b_i 为零，所以这无穷级数化简为多项式，此多项式对特定值 $x=\pm 1$ 显然"收敛")。考虑(8)，并令 $k=0$，我们看到只有一种情况，可以使 b_{i+2} 等于零 (若 $b_i\neq 0$)，那就是 $k=i(i+1)$。

由此，我们得到一个重要结果，为从 Θ 方程中分离出径向方程而引入的常数 K 必须是两个相邻整数的乘积。否则，Θ 方程没有在整个 $0\leqslant\Delta\leqslant\pi$ 区间中可以成立的解。

此外，如果 $K=l(l+1)$ 且 l 为偶数，则正是偶数脚标的 b_i 组成了解。由于要求 $b_i=0$，奇数脚标系列必须终止。类似地，如果 $K=l(l+1)$ 且 l 为奇数，则 $b_0=0$。在任一情况下，Θ 的解是一个 l 次的多项式。对 b_0 或 b_1 的习惯选择是按如下要求进行的：

当 $x=1$ 时　　$\Theta(x)=1$.　　(9)

此多项式结果为 Legendre 多项式。把它们写成递降幂次的和，其 l 或偶或奇，大量的计算给出下式：

$$\Theta=P_l(x)=\frac{(2l)_l}{2^l(l_l)^2}\left[x^l-\frac{l(l-1)x^{l-2}}{2(2l-1)}\right.$$
$$\left.+\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)x^{l-4}}{2\cdot4\cdot(2l-1)(2l-3)}-\cdots\right],\qquad(10)$$

最后一项截止于 x 或 1 处（乘以一常数）。Legendre 多项式的前几项为

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\ P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),$$

其通式为

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l_l}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l,$$

此即 Rodrigues 公式。

$m\neq0$ 的情况

若 m 是一个非零整数，开始我们将假定它为正的。于是由(3)中的 $x=\cos\Delta$，我们得到

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]=\frac{m^2}{1-x^2}-K\Theta.\qquad(11)$$

我们可试求类似于（5）的幂级数解。然而，这个方法会陷入困境，因为我们得到的 b_{l+2} 公式不只包括 b_l（如以前 $m=0$ 时对 Θ 所作的）而且还包括 b_{l+1}，并且此三项之间递推关系的通解是很麻烦的。为推测可以做什么，我们记得，在 $m=0$ 时在 $x=\pm1$ 附近 Θ 的特性是很重要的。考查（11）中的系数，可期望当 $m>0$ 时它们也是重要的。因此，我们转而简要地考查 $x=\pm1$ 附近的 Θ。当 $\varepsilon=x\pm1$ 且 ε 很小时，(11) 近似为

$$\varepsilon\frac{d^2\Theta}{d\varepsilon^2}+\frac{d\Theta}{d\varepsilon}-\frac{m^2\Theta}{4\varepsilon}=0,$$

此式的解为 $\Theta=\varepsilon^{m/2}$ 和 $\Theta=\varepsilon^{-m/2}$。这第二个解在 $\varepsilon=0$ 处很不规则，可以抛弃。而且，似乎在 $x=\pm1$ 处 Θ 应当有 $m/2$ 阶零点。它们两者都可通过下式分解出来：

$$\Theta(x)=(1-x^2)^{m/2}A(x),$$

并且我们希望通过 $A(x)$ 的研究来研究 Θ。

此方法是有效的，因为 A 满足常微分方程

$$(1-x^2)\frac{d^2A}{dx^2}-2(m+1)\frac{dA}{dx}+[K-m(m+1)]A=0, \quad (12)$$

并且在展式 $A(x)=x^r\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i$ 中的系数正好有一个二项递推公式。这个递推公式是

$$c_{i+2}=\frac{[(i+m)(i+m+1)-K]}{(i+1)(i+2)}c_i.$$

一般说，这个公式将产生 $A(x)$ 的两个级数解（一个是 x 的偶次幂，含有系数 c_0；另一个是奇次幂，含有系数 c_1）。如果这些级数不是截止于某一幂次 x^r 上，它们将具有 $(1-x^2)^{-m}$ 的特性。若要求 Θ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1(0\leqslant\Delta\leqslant\pi)$ 区间中无奇点，就得到 $c_{r+2}=0$，并且如 r 为偶数时，$c_1=0$，如 r 为奇数时，$c_0=0$。因而

$$(r+m)(r+m+1)=K,$$

且 K 的本征值，它再一次为（即若 $m=0$）相邻整数的乘积；$r\geqslant 0$，$m\geqslant 0$，因此，对某些整数 $l\geqslant 0$ 时，我们取 $K=l(l+1)$。由于 $r\geqslant 0$，我们也得到了 $m\leqslant l$ 这个重要结果。

注意，如果 $m>0$ 或 $m=0$，由于 K 取同样的本征值，此径向函数 $R(r)$ 不因降低轴对称的要求而改变。

我们已表明，$\Theta(x)=(1-x^2)^{m/2}A(x)$，这里的 A 现为 x 的多项式。求这个多项式的系数没有特别的困难。然而，可用一个较快的方法得到 A 的公式，因为若 Legendre 多项式 P_l[见 (4)]所满足的方程被微分 m 次，则有如下结果：

$$(1-x^2)\frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}}P_l-2(m+1)x\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P_l$$

$$+[l(l+1)-m(m+1)]\frac{d^m}{dx^m}P_l=0.$$

将此式和 $A(x)$ 所满足的方程 (12) 对比，我们看到 A 的一个解为 $A(x)=d^mP_l(x)/dx^m$。由于 $A(x)$ 是包含 x 的非负幂次的多项式，在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 中任何位置上，不存在 $A(x)$ 不连续的危险。

所以，乘积$(1-x^2)^{m/2}d^mP_l(x)/dx^m$是角函数$\Theta(x)$的解。这就是所谓的连带 Legendre 函数，$P_l^m(x)$。

含有Θ的方程（11）仅以m^2和m发生关系。因此，如$m<0$，非奇异解必须和$P_l^{|m|}(\cos\Delta)$成比例。按通常习惯，

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x), \tag{13}$$

上式中的比例常数是取其使

$$P_l^m(x)=\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\frac{d^{l+m}(x^2-1)^l}{dx^{l+m}} \tag{14}$$

适用于$-l\leqslant m\leqslant l$中所有的l，m。

一些书中已给出了P_l和P_l^m的性质（Robin，1957；Hobson，1955），并且 Wiggins 和斋藤（Saito）（1971）说明了如何进行有效的计算。汇总最重要的几个公式，得到

$$\frac{1}{(1+r^2-2r\cos\Delta)^{1/2}}=\sum_{l=0}^{\infty}r^lP_l(\cos\Delta)\quad 0<r<1, \tag{15}$$

$$(l-m+1)P_{l+1}^m(x)-(2l+1)xP_l^m(x)+(l+m)P_{l-1}^m(x)=0, \tag{16}$$

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}P_l^m(x)=(l+1)xP_l^m(x)-(l-m+1)P_{l+1}^m(x). \tag{17}$$

为了方便，可定义全归一化的面谐函数为

$$Y_l^m(\Delta,\ \phi)=(-1)^m\left[\frac{2l+1(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2}P_l^m(\cos\Delta)e^{im\phi}, \tag{18}$$

整数$l\geqslant 0$和整数m满足$-l\leqslant m\leqslant l$。因而

$$\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}[Y_l^m(\Delta,\phi)]^*Y_{l'}^{m'}(\Delta,\phi)\sin\Delta\,d\Delta=\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{19}$$

和

$$Y_l^{-m}(\Delta,\phi)=(-1)^m[Y_l^m(\Delta,\phi)]^*.$$

在点源激发的简正振型理论中，我们需要Y_l^m的值和$\Delta=0$时它的一些导数。一主要的结果是，对$m\geqslant 0$，当$\Delta\to 0$时

$$P_l^m(\cos\Delta)\to\frac{1}{2^m m!}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\Delta^m$$

下面我们必须研究径向波函数 $R=R(r)$，并且它必须满足

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0. \qquad (8.6)$$

由于这里 c 是常数，(8.6) 是一个标准方程，已知它以球面 Hankel 函数为其解。此外，因为我们感兴趣的解，在 $0\leqslant r\leqslant r_0$ 范围内的任一处对压力均无奇点，所以，(8.6) 的解必须是 $R(r)\propto j_l(\omega r/c)$，其中 j_l 是 l 阶的球面Bessel函数。因为 l 是整数，我们可利用关系式

$$j_l(x)=x^l\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\left(\frac{\sin x}{x}\right) \qquad (8.7)$$

所以，当 $l=0$，

$$rR(r)\propto\sin(\omega r/c), \qquad (8.8)$$

当 $l=2$，

$$R(r)\propto\left(\frac{3c^3}{\omega^3r^3}-\frac{c}{\omega r}\right)\sin(\omega r/c)-\frac{3c^2}{\omega^2r^2}\cos(\omega r/c). \qquad (8.9)$$

还需考虑 $r=r^0$ 处的“自由”边界条件，它要求 $R(r_0)=0$。正是这个条件给出了可允许的本征频率 ${}_n\omega_l$。因此，由 (8.8)，对 $l=0$ 我们得到 $\sin(\omega r_0/c)=0$。由此得出

$${}_n\omega_0=\frac{(n+1)\pi c}{r_0}\quad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \qquad (8.10)$$

$n=0$ 给出了基频振型，$n\geqslant1$ 构成谐频或高阶振型。$l=0$ 时的运动纯属径向振型，因为相关的 u_Δ 和 u_φ 为零。在 $r_0=6000$ 公里和 $c=5$ 公里/秒的情况下，相应于 (8.10) 的周期为 ${}_nT_0=2400/(n+1)$ 秒，基频 ${}_0T_0$ 是 40 分。若 $l=2$，$j_l(x)$的第一个零点出现在 $x\sim1.8\pi$ 处，因而 ${}_0T_2\sim22$ 分。在图 8.2 中我们给出了 $n=0$，1，2 时的本征函数 ${}_nR_0\propto j_0({}_n\omega_0r/c)$，以及 $n=0$，1，2 时的本征函数 ${}_nR_2\propto j_2({}_n\omega_2r/c)$。

均匀液体球的自由振荡的重要特性是它们的正交性，和对方位阶数 m 的简并。因此，对于在 $|x|<r_0$ 之内方程 $c^2\nabla^2p=\partial^2p/\partial t^2$ 的稳定状态[$\exp(-i\omega t)$]解的向量空间（解在 $|x|=r_0$ 处满足

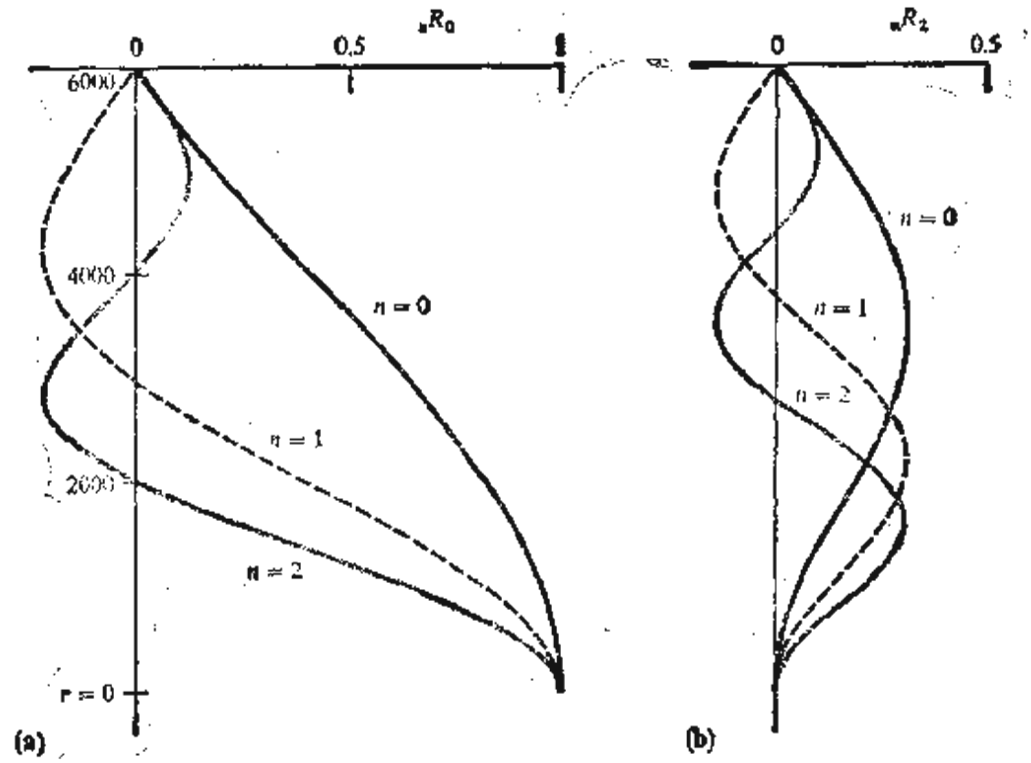


图 8.2

半径 6000 公里的液体球内，压力的本征函数 $_nR_l$ 表示成半径的函数。(a)$n=0$，1，2 时的 $_nR_0(r)$。(b)$n=0$，1，2 时的 $_nR_2(r)$

$P(x, t)=0$)，我们定义了一个内积。如果 f 和 g 是此向量空间的两个向量，我们定义

$$\{f, g\}=\iiint_{|x|\leqslant r_0}\rho f^* g\,dV. \tag{8.11}$$

还假定，f 和 g 是分别具有本征频率 ω_f 和 ω_g 的简正振型。于是由代数运算给出

$$[\omega_g^2-(\omega_f^*)^2]\{f, g\}=0.$$

这里令 $f=g$，则得到本征函数必须是实数。如 $f\neq g$ 且 $\omega_f\neq\omega_g$，也可得到在 $\{f, g\}=0$ 的意义上 f 和 g 是正交的。因此，在现在的问题中，除了 $l=l'$，$m=m'$ 和 $n=n'$ 以外，有下列关系：

$$\{j_l({}_n\omega_l r/c)Y_l^m(\Delta,\ \phi),\ j_{l'}({}_{n'}\omega_{l'} r/c)Y_{l'}^{m'}(\Delta,\ \phi)\}=0.\quad(8.12)$$

对整数 $l\geqslant 0$，$n\geqslant 0$ 的每一种选择，都有 $(2l+1)$ 个自由振荡，并共同具有同样的本征频率 ${}_n\omega_l$ 和同样的径向本征函数 $j_l({}_n\omega_l r/c)$。这种简并的引起是由于一维波动方程(8.6)和 m 无关，并且在 $-l\leqslant m\leqslant l$ 区间中的每一 m，通过压力 $={}_np_l^m(x,\ t)=j_l({}_n\omega_l r/c)Y_l^m(\Delta,\ \phi)\exp(-i{}_n\omega_l t)$ 形成了不同的简正振型。

将自由振荡的分析推广到比我们的均匀液体球远远更好的地球模型是可能的，它可仍然保持了同样的正交性和简并的特点，并且可用 (l,m,n) 给模型以同样的编号方式。对于液体模型的一个显著改进是均匀的弹性固体球。Horace Lamb 于 1882 年对此进行了充分的研究。这是一个最简单的可压缩的介质，它显示出两种独立的振型体系，即球型和环型，它们的分别完全和在展平地球模型中，P-SV 的运动不同于 SH(第七章)一样。这正如在柱面几何中我们导出了面谐波向量 (7.117)，那么现在我们也必须导出球面几何中这样的向量。我们定义

$$R_l^m(\Delta,\ \phi)=Y_l^m\hat{r},$$

$$S_l^m(\Delta,\ \phi)=\frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}}\left(\frac{\partial Y_l^m}{\partial\Delta}\hat{\Delta}+\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi}\hat{\phi}\right),\quad(8.13)$$

$$T_l^m(\Delta,\ \phi)=\frac{1}{[l(l+1)]^{1/2}}\left(\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi}\hat{\Delta}-\frac{\partial Y_l^m}{\partial\Delta}\hat{\phi}\right),$$

其中 $Y_l^m(\Delta,\ \varphi)$是(8.5)中定义的全归一化的面谐波，$\hat{r},\hat{\Delta},\hat{\varphi}$ 分别为在 r,Δ,φ 方向上的单位向量(图 8.1)。很容易看出 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{S}$，和 $\boldsymbol{T}$ 是相互垂直的，因为 $Y_l^m(\Delta,\varphi)$ 是全归一化的，所以向量函数满足以下的正交关系：

$$\int_0^\pi\sin\Delta d\Delta\int_0^{2\pi}d\phi\boldsymbol{R}_l^{m*}\cdot\boldsymbol{R}_{l'}^{m'}=\delta_{mm'}\delta_{ll'},$$

$$\int_0^\pi\sin\Delta d\Delta\int_0^{2\pi}d\phi\boldsymbol{S}_l^{m*}\cdot\boldsymbol{S}_{l'}^{m'}=\delta_{mm'}\delta_{ll'},$$

$$\int_0^\pi\sin\Delta d\Delta\int_0^{2\pi}d\phi\boldsymbol{T}_l^{m*}\cdot\boldsymbol{T}_{l'}^{m'}=\delta_{mm'}\delta_{ll'}.$$

球型的运动是一种 $\nabla\times u$ 的径向分量为零的运动，而环型的运动则同时具有 $u_r=0$ 和 $\nabla\cdot u=0$。均匀液体球显然只能维持球型运动。如果在此介质中的简正振型有一比例于 $j_l({}_n\omega_l r/c)\,Y_l^m(\Delta,\varphi)\exp(-i\omega t)$ 的压力场，那么，根据(8.1)，相应的位移场比例于

$$\left\{\left(\frac{dj_l}{dr}\right)\boldsymbol{R}_l^m(\Delta,\phi)+\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r}j_l\boldsymbol{S}_l^m(\Delta,\phi)\right\}\frac{\exp(-i_n\omega_l t)}{\rho({}_n\omega_l)^2}. \tag{8.14}$$

从这一结果和直接从(8.13)显见，$\boldsymbol{R}_l^m$ 和 $\boldsymbol{S}_l^m$ 是用来描述和球型运动有关的向量场，而 $\boldsymbol{T}_l^m$ 则用来描述和环型运动有关的向量场。

假如我们考虑的地球模型是球对称的并且不转动，我们将发现，通过推广（8.14）中出现的径向函数来描述球型振型是可能的。但此振型仍将显示出同样的水平波函数、同样的简并和类似于(8.12)的正交性。符号 ${}_nS_l$ 常用于标记球型振型，而 ${}_nT_l$ 则用于标记环型振型。

在某种意义上，球形地球模型比展平地球模型更易于研究，因为球内的任意运动均可用简正振型的叠加来表示。在前一章中占据了较大篇幅的漏能模式，对球体是不存在的。下一节将表明，推导被点源激发的自由振荡的公式比面波的更简单。

8.2 点源激发的自由振荡

由于球是一有限体，任意扰动均可表成简正振型的叠加。根据 Gilbert (1971) 的文章，我们将追溯到 19 世纪，从 Rayleigh 和 Routh 研究过的 N 个质点系统的振动入手。

考虑 N 个质点最初处于平衡状态。然后，一组外力 $f_\alpha(t)$ 作用在第 α 个质点上 $(\alpha=1,2,\cdots,N)$，使所有的质点运动。令第 α 个质点的质量为 m_α，第 α 个质点离开平衡位置的位移为 u_α。

当位移较小时，我们可假定，质点间内力的变化为位移的线性之和。于是，运动方程可写成

$$m_\alpha \frac{d^2 u_\alpha(t)}{dt^2} + \sum_{\beta=1}^{N} c_{\alpha\beta} u_\beta(t) = f_\alpha(t) \quad t>0 (\alpha = 1, 2, \cdots, N), \tag{8.15}$$

其初始条件为

$$u_\alpha(0) = 0 \quad 和 \quad \frac{d}{dt} u_\alpha(0) = 0,$$

且 c 是对称的又是正的有限的(参考(2.32))。

当 $f_\alpha \equiv 0$ 时，系统的简正振型由(8.15)的解给出。由于每个质点有三个方程，对整个系统有 3 N 个本征频率 ω 和 $3N$ 个本征向量(简正振型)。以 ${}_i u_\alpha \exp(-i\omega_i t)$ 代表简正振型，它是在第 i 个简正振型中第 α 个质点的位移。对每一个 i，为描述此振型需要所有质点($\alpha = 1, \cdots, N$)的运动。在第 i 个简正振型中第 α 个质点的运动，可由求解下式得到：

$$-\omega_i^2 m_\alpha ({}_i u_\alpha) + \sum_\beta c_{\alpha\beta} ({}_i u_\beta) = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, N). \tag{8.16}$$

除 $i = j$ 外，在

$$\sum_\alpha m_\alpha ({}_j u_\alpha^*)({}_i u_\alpha) = 0$$

的意义上，本征向量 ${}_i u_\alpha$ 是正交的，但其振幅不能用(8.16)确定。我们选择下式使其归一化：

$$\sum_\alpha m_\alpha ({}_j u_\alpha^*)({}_i u_\alpha) = \delta_{ij}. \tag{8.17}$$

取(8.16)和 ${}_j u_\alpha^*$ 的标量积，对 α 求和，利用(8.17)，我们得到

$$\sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} ({}_j u_\alpha^*)({}_j u_\beta) = \omega_i^2 \delta_{ij}. \tag{8.18}$$

为得到(8.15)的解为简正振型的叠加，我们需要求展开式的

系数 a_i

$$u_\alpha(t)=\sum_i a_i({}_iu_\alpha)\exp(-i\omega_i t)\quad(t>0). \tag{8.19}$$

(当然，用于实 $u_\alpha(t)$ 的是这个和的实部。) 我们利用 Laplace 变换，$u_\alpha(t)\to u_\alpha(s)$，从(8.19)得到

$$u_\alpha(s)=\sum_i \frac{a_i}{s+i\omega_i}{}_iu_\alpha. \tag{8.20}$$

为求系数 a_i，我们将(8.20)代入(8.15)的 Laplace 变换：

$$m_\alpha s^2\sum_i\left(\frac{a_i}{s+i\omega_i}\right){}_iu_\alpha+\sum_\beta c_{\alpha\beta}\sum_i\left(\frac{a_i}{s+i\omega_i}\right){}_iu_\beta=f_\alpha(s). \tag{8.21}$$

根据(8.17)，(8.18)和(8.21)，很容易得到

$$\frac{a_j}{s+i\omega_j}=\frac{\sum_\alpha {}_iu_\alpha^* f_\alpha(s)}{s^2+\omega_i^2},$$

所以，从(8.20)我们得到

$$u_\alpha(s)=\sum_i\left[\frac{\sum_\beta {}_iu_\beta^* f_\beta(s)}{s^2+\omega_i^2}\right]{}_iu_\alpha, \tag{8.22}$$

此式反变换到时间域是很简单的。假定力的变化为时间的阶梯函数，$f_\alpha(t)=F_\alpha H(t)$，我们得到了 (8.22) 中的 $f_\beta(s)=s^{-1}F_\beta$，$[s(s^2+\omega_i^2)]^{-1}$的 Laplace 反变换为 $H(t)(1-\cos\omega_i t)/\omega_i^2$，所以，当 $t>0$ 我们得到

$$u_\alpha(t)=\sum_i\left(\sum_\beta {}_iu_\beta^* F_\beta\right){}_iu_\alpha\frac{1-\cos\omega_i t}{\omega_i^2}. \tag{8.23}$$

当介质有能量耗散时，利用时间的 Q(补充 5.7)，我们得到

$$u_\alpha(t)=\sum_i\left(\sum_\beta {}_iu_\beta^* F_\beta\right){}_iu_\alpha\frac{1-\exp[-(\omega_i t/2Q_i)]\cos\omega_i t}{\omega_i^2}. \tag{8.24}$$

这个解的结构有一些很有趣的特性。第一，我们注意到静态位移作为简正振型之和，很容易从(8.24)得到。事实上，(8.24)表明，每个振型的运动可认为是围绕一个新的参考值的衰减振荡，这新的参考值是在 $t=0$ 时开始引进的，如图 8.3 所示。第二，简正振型的和式(8.24)告诉我们，只从一个质点位移的观测，关于源可以知道些什么。这里假定我们知道该系统的全部简正振型。如果我们观测第 α 质点及其位移 $u_\alpha(t)$，我们可希望推断出 $i=1,2,\cdots,3N$ 的各激发系数

$$\sum_\beta {}_iu_\beta^* F_\beta .$$

(对于在第 α 个质点上有一个节点的那些振型，这是不可能的。在这些情况中，${}_iu_\alpha=0$，第 i 个振型的激发系数不可能从对于 ${}_iu^\alpha(t)$ 的了解来确定，因为那里观测不到此振型。获得激发系数的过程包括考察 $u_\alpha(t)$ 的 Fourier 谱以及测量集中于每一个 ω_i 处谱线峰值的高度。此外，对近于相同频率的两个振型，确定其激发系数也是有困难的。)有趣的是，通过仅仅观测一个质点并得到其激发系数，然后，用带有不同 α 的(8.24)去预测该系统中所有其它质点的运动，这是可能的。即使没有测定某些激发系数（注意前述理由），对所有的 α，预测 $u_\alpha(t)$ 谱的主要部分也还是可能的。

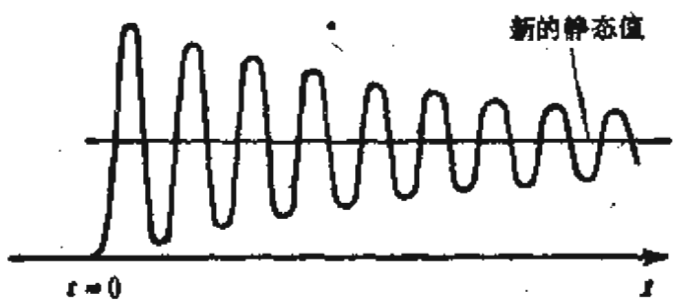


图 8.3

在 $t=0$ 时作用一阶梯函数的源，在一给定的简正振型中地面运动的记录

我们对解(8.24)已做了这些说明，因为它能很容易地被修改以应用于地球。我们考虑增加质点数以使它们是近于连续的。在极限情况下各质点的和，如$\sum_{\beta=1}^{N} {}_i u_\beta^* F_\beta$可用体积积分，例如用

$\int_v {}_i u^*(\xi) f(\xi) dV(\xi)$代替，其中$f(\xi)$现为每单位体积中的体力。我们将继续假设这体力为时间的阶梯函数。依(8.24)我们立即可得

$$u(x,t) = \sum_i \left(\int_v {}_i u^*(\xi) \cdot f(\xi) dV \right) {}_i u(x) \times \frac{1 - \exp[-(\omega_i t / 2Q_i)] \cos \omega_i t}{\omega_i^2}. \tag{8.25}$$

这里我们用 i 表示整个地球的第 i 个简正振型。即，每一个 i 相应于三个一组的整数(l,m,n)的某些值，在 8.1 节中得到的这些值，对表征各个振型是必要的。因此(8.25)的和是一无限的和，但，如 Rayleigh(1945，101 段)证明的，由于有因子 ω_i^{-2} 此和式收敛。(8.25)中的简正振型已按下式归一化(参考(8.171)：

$$\int_v \rho(\xi) {}_i u^*(\xi) {}_i u(\xi) dV = \delta_{ij}, \tag{8.26}$$

其中 $\rho(\xi)$是密度，而且是在整个地球上求体积积分。

现在我们求由一矩张量规定的点源产生的球形地球模型的振动。用先前作为练习(问题 3.4)给出的结果，体力变为

$$\int_p (\xi,t) = -M_{pq}(t) \frac{\partial}{\partial \xi_q} \delta(\xi - x_s). \tag{8.27}$$

我们将假定 M 相当于在 x_s 处的时间阶梯函数，所以体力也是阶梯函数，且(8.25)直接可用。现在，第 i 个激发系数为

$$\int_v {}_i u^*(\xi) \cdot f(\xi) dV = -M_{pq} \int_v {}_i u_p^*(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_q} \delta(\xi - x_s) dV(\xi) = {}_i u_{p,q}^*(x_s) M_{pq} = {}_i e_{pq}^*(x_s) M_{pq}, \tag{8.28}$$

其中 ${}_ie_{pq}$ 是第 i 个简正振型中 (pq) 的应变分量。为求得(8.28)中最后的等式，我们用了对称性 $M_{pq}=M_{qp}$。将(8.28)代入(8.25)，最后我们得到作用在 x_s 处的一任意点源 $MH(t)$ 的位移：

$$u(x,t)=\sum_i ({}_ie^*_{pq}(x_s)M_{pq})\,{}_iu(x)\,\frac{1-\exp(-\omega_i t/2Q_i)\cos\omega_i t}{\omega_i^2}. \tag{8.29}$$

因此，一旦地球的简正振型 ${}_iu$ 为已知，则计算地球对带有任意矩张量的点源的响应是不难的。

为得到简正振型的公式，我们必须有更具体的地球模型。这里，我们将考虑一个无自转的球对称的地球，其密度 $\rho(r)$ 以及 Lamé 常数 $\lambda(r)$ 和 $\mu(r)$，仅仅和离对称中心的距离 r 有关。对此模型，运动方程(2.47)至(2.50)，可用第七章中采用的运动应力向量法加以研究。在球极坐标中，对振型 (l,m,n) 的位移，适当的初解是

$$\begin{aligned}&[{}_nU_l(r)\boldsymbol{R}_l^m(\Delta,\phi)+{}_nV_l(r)\boldsymbol{S}_l^m(\Delta,\phi)\\&+{}_nW_l(r)\boldsymbol{T}_l^m(\Delta,\phi)]\exp(-i_n\omega_l t).\end{aligned} \tag{8.30}$$

作用在 $r=$常数的球面上有关的牵引力为

$$\begin{aligned}&[{}_nR_1(r)R_1^m(\Delta,\phi)+{}_nS_1(r)S_1^m(\Delta,\phi)\\&+{}_nT_1(r)T_1^m(\Delta,\phi)]\exp(-i_n\omega_l t).\end{aligned} \tag{8.31}$$

对径向函数，我们可将方程写成两个分离的形式：

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix}V\\U\\S\\R\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{r} & -\frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} & \frac{1}{\mu} & 0\\ \frac{\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)} & -\frac{2\lambda}{r(\lambda+2\mu)} & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu}\\ \frac{4l(l+1)\mu(\lambda+\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)}-\rho\omega^2 & -\frac{2\mu}{r^2} & -\frac{3}{r} & -\frac{\lambda[l(l+1)]^{1/2}}{r(\lambda+2\mu)}\\ \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)[l(l+1)]^{1/2}}{r^2(\lambda+2\mu)} & -\rho\omega^2+\frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{r^2(\lambda+2\mu)} & \frac{[l(l+1)]^{1/2}}{r} & \frac{-4\mu}{r(\lambda+2\mu)}\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} V \\ U \\ S \\ R \end{pmatrix} \tag{8.32}$$

和

$$\frac{d}{dr}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \frac{1}{\mu} \\ \frac{\mu(l-1)(l+2)}{r^2} - \rho\omega^2 & -\frac{3}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W \\ T \end{pmatrix}. \tag{8.33}$$

(我们已从因变量中和 ω 中将脚标 l 和 n 去掉。注意 m 不出现在矩阵方程中。)

因此，无自转的球对称的地球的振动，可分成两类振型。一类是球型振型，其水平波函数为 R_l^m 和 S_l^m，其径向波函数由(8.32)确定。另一类是环型振型或扭动振型，其水平波函数为 T_l^m，其径向波函数由(8.33)确定。对比(8.32)和(7.28)中的矩阵，可清楚地看到，球型振型包含 Rayleigh 波。对比(8.33)和(7.24)，我们看到，环型振型包含 Love 波。该对比要求，面波的水平波数 k 等同于自由振荡的 $[l(l+1)]^{1/2}/r$。在下一节中我们将给出面波和自由振荡更详细的比较。

为求简正振型，我们必须在下列边界条件下解出 (8.32) 和 (8.33)的本征值-本征向量问题，此边界条件为，解在 $r=0$ 处是规则的，在地球的表面处牵引力为零。数值方法和在第七章中描述过的 Rayleigh-Ritz 方法均可采用来解这些问题。处理 $r=0$ 处的条件，其中一种方法 (Takeuchi and Saito, 1972)是假定地球在 $r<r_1$ 时是均匀的并以 r 的幂级数求解微分方程。然后，在 $r=r_1$ 处计算幂级数，并从这些值开始向上求其数值积分。对每一整数 l 则有本征值 ${}_n\omega_l$ ($n=1, 2, \cdots$)，对每一 ${}_n\omega_l$ 则有一运动应力向量的本征函数。此外，我们注意到一种简并，即当 m 处于区间 $-l \leqslant m \leqslant l$ 时，其本征频率和径向本征函数与 m 无关。

简正振型的归一化公式(8.26)和水平波函数的归一化公式一

起将导出径向函数如下的归一化形式：

$$\int_0^{r_\oplus}\rho(r)\{[{}_nU_l(r)]^2+[{}_nV_l(r)]^2\}r^2dr=1 \qquad (8.34)$$

和

$$\int_0^{r_\oplus}\rho(r)[{}_nW_l(r)]^2r^2dr=1, \qquad (8.35)$$

其中 $r_\oplus$ 是地球的半径。

这样，关于简正振型的解已完全确定。计算点源响应的下一步骤是求应变张量以计算源点处简正振型的位移，前曾在(8.29)中要求过这一点。对球坐标$(r,\ \Delta,\ \phi)$，令 $h^r=1$，$h^\Delta=r$，$h^\phi=r\sin\Delta$，我们从(2.45)得到应变分量：

$$\begin{aligned}
e_{rr}&=\frac{\partial u_r}{\partial r},\\
e_{\Delta\Delta}&=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\Delta}{\partial\Delta}+\frac{u_r}{r},\\
e_{\phi\phi}&=\frac{1}{r\sin\Delta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{u_\Delta}{r}\cot\Delta+\frac{u_r}{r},\\
e_{\Delta\phi}&=e_{\phi\Delta}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial\Delta}-u_\phi\cos\Delta\right)+\frac{1}{r\sin\Delta}\frac{\partial u_\Delta}{\partial\phi}\right],\\
e_{\phi r}&=e_{r\phi}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r\sin\Delta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}+\frac{\partial u_\phi}{\partial r}-\frac{u_\phi}{r}\right],\\
e_{r\Delta}&=e_{\Delta r}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_\Delta}{\partial r}-\frac{u_\Delta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\Delta}\right],
\end{aligned} \qquad (8.36)$$

其中 u_r，u_Δ 和 u_ϕ 为(8.30)给出的 r，Δ，ϕ 的位移分量。

根据 Gilbert 和 Dziewonski (1975) 的工作，我们令源点位于极点($\Delta=0$)并计算简正振型的应变分量为 $\lim_{\Delta\to0}e(\Delta)$。于是我们得到，$|m|>2$ 时所有的分量为零。一球型振型的应变分量如表 8.1 所列。对环型振型其对应的结果如表 8.2 所列。出现在这些表中的常数 b_0 为$[(2l+1)/4\pi]^{1/2}$。在源的水平，$r=r_s$ 处计算应变分量并把它们代入(8.29)，则得到地球对点源的响应，此点

源具有任一矩张量，它是时间的阶梯函数。对一般的时间关系，我们可用 $M_{pq}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{M}_{pq}(\tau)H(t-\tau)d\tau$。这被积函数可解释为在 $t=\tau$ 时起作用的阶梯函数源，从(8.29)我们得到

$$u(X,\ t)=\sum_i\left[{}_ie^*_{pq}(X_s)\dot{M}_{pq}(t)\right]*{}_iu(x)\times\left(\frac{1-\exp(-\omega_it/2Q_i)\cos\omega_it}{\omega_i^2}\right). \tag{8.37}$$

表 8.1 球型振型的应变分量

	$m=0$	$m=\pm1$	$m=\pm2$
e_{rr}	$b_0\frac{dU}{dr}$	0	0
$e_{\Delta\Delta}$	$\frac{b_0}{r}\left[U-\frac{1}{2}\sqrt{l(l+1)}V\right]$	0	$\frac{b_0\sqrt{(l+2)(l-1)}}{4}\frac{V}{r}$
$e_{\phi\phi}$	$e_{\Delta\Delta}$	0	$-e_{\Delta\Delta}$
$2e_{r\Delta}$	0	$\frac{-b_0}{2}\left[\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r}lJ+\frac{dV}{dr}-\frac{V}{r}\right]$	0
$2e_{r\phi}$	0	$2ime_{r\Delta}$	0
$2e_{\Delta\phi}$	0	0	$ime_{\Delta\Delta}$

表 8.2 环型振型的应变分量

	$m=0$	$m=\pm1$	$m=\pm2$
e_{rr}	0	0	0
$e_{\Delta\Delta}$	0	0	$\frac{imb_0}{8}\sqrt{(l+1)(l-1)}\frac{W}{r}$
$e_{\phi\phi}$	0	0	$-e_{\Delta\Delta}$
$2e_{r\Delta}$	0	$\frac{imb_0}{2}\left[\frac{dW}{dr}-\frac{W}{r}\right]$	0
$2e_{r\phi}$	0	$\frac{b_0}{2}\left[\frac{dW}{dr}-\frac{W}{r}\right]$	0
$2e_{\Delta\phi}$	0	0	$\frac{-b_0\sqrt{(l+2)(l-1)}}{2}\frac{W}{r}$

这里在 $\dot{M}_{pq}$ 后边的星号代表褶积，我们写出（8.37），为的是表明点源很自然地可用其矩变化率张量 $\dot{M}(t)$来表征。

本节中，我们采用了 Gilbert(1971)及 Gilbert 和 Dziewonski (1975)在推导自由振荡激发公式中所用的简单而直接的步骤。以前，斋藤（1967）曾解决过同样的问题，他用的是类似于第七章中我们描述过的面波激发的方法，他还得到了等价于（8.29）的公式。斋藤的结果被 Mendiguren (1973) 用于设计频谱峰高分辨率的迭加技术中，如第十一章中所叙述的。图 8.4 给出对一个大

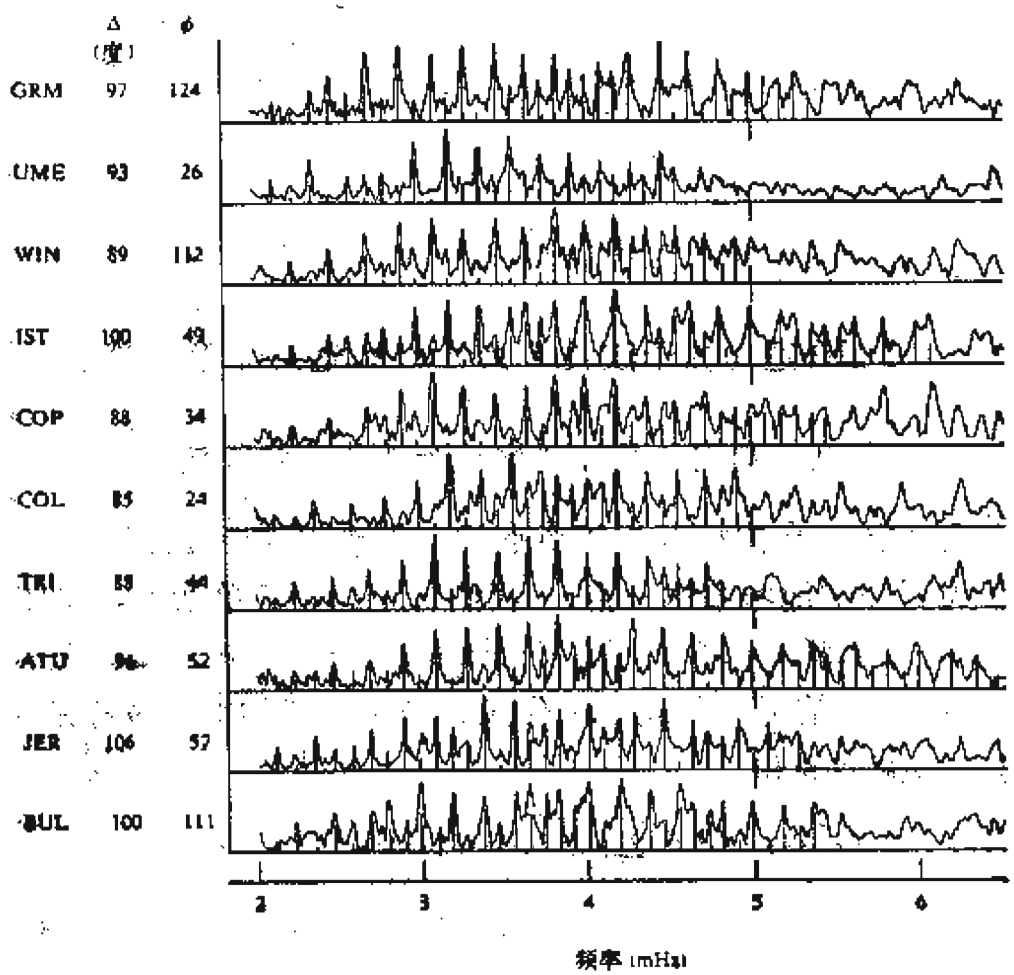


图 8.4

连续曲线表示观测的径向位移谱。竖直线为对基频球型振型的理论谱线。Δ 为震中距，φ 为从北开始顺时针的震中方位角（引自 Mendiguren, 1973）

的哥伦比亚深震，在几个世界标准台网的台站上观测到的频谱峰和计算的频谱峰之间的对比。连续曲线表示观测的径向位移谱，竖直线表示由 Mendiguren (1973)用斋藤公式并根据观测 P 波初动图象测定的震源机制而算出的理论的自由振荡幅度。

8.3 球形地球上的面波

在前节中，我们发现，倘若面波的波数 k 换以自由振荡的 $[l(l+1)]^{1/2}/r$，并当 r 趋于无穷时，自由振荡的系数矩阵(8.32)和(8.33)与面波的相近。这里对大多数实用场合，$[l(l+1)]^{1/2}-l+\frac{1}{2}$，我们可将面波的 k 看成$\left(l+\frac{1}{2}\right)/r$。(事实上，如在补充 9.3 中所表明的，仿照方程(9)，$k\longleftrightarrow\left(l+\frac{1}{2}\right)/r$ 比 $k\longleftrightarrow[l(l+1)]^{1/2}/r$ 更合适。)由于波长 λ 为 $2\pi/k$，这意味着 λ 等于 $2\pi r/\left(l+\frac{1}{2}\right)$，所以，圆周长并非严格地为波长的整数倍，多余了半波长。换言之，自由振荡相邻节点间的距离不可能处处等于半波长。为更仔细地考察这一点，我们将考虑一简单情况，即由于 $M_{rr}=M_{\Delta\Delta}=M_{\phi\phi}=M_0$，而 $M_{\Delta\phi}=M_{\phi r}=M_{r\Delta}=0$ 的爆炸点源产生球型振型的情况。将表 8.1 代入(8.29)，我们得到位移的 r 分量是球型振型的和

$$u_r(X,\ t)=\sum_n\sum_l {}_nA_l P_l(\cos\Delta)[1-\exp(-{}_n\omega_l t/2\,{}_nQ_l)\cos {}_n\omega_l t], \tag{8.38}$$

其中

$${}_nA_l=\frac{2l+1}{4\pi({}_n\omega_l)^2}\left[\frac{d}{dr}{}_nU_l+\frac{2\,{}_nU_l}{r}-\frac{(l(l+1))^{1/2}}{r}{}_nV_l\right]\Bigg|_{r=r_s}\times {}_nU_l(r), \tag{8.39}$$

同时，我们假定了 $M_0(t)$为具有幅度为 1 达因·厘米的阶跃。在(8.38)中，我们利用 $\boldsymbol{X}=(r, \Delta, \varphi)$，并将对所有振型 i 的求和写成了对基频的与谐频的 n 以及对阶数 l 的求和。仅当 $m=0$ 才是有意义的。因此，(8.38)表示驻波图象的叠加，称为带谐函数，它是由 $P_l(\cos\Delta)$测定的。由于 $P_l(\cos\Delta)$在 $0<\Delta<\pi$ 内有正好 l 个节点，所以围绕大圆有 l 周的振荡。另一方面，除近于 $\Delta=0$ 或 $\Delta=\pi$ 以外，对较大的 l，$P_l(\cos\Delta)$的渐近展开式是有效的，它是(见补充 8.3 和 9.3)

$$P_l(\cos\Delta)\sim\left(\frac{2}{l\pi\sin\Delta}\right)^{1/2}\cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\Delta-\pi/4\right]. \quad (8.40)$$

这又一次表明，除了在 $\Delta=0$ 或 $\Delta=\pi$ 附近以外，波长近似为 $2\pi r/\left(l+\frac{1}{2}\right)$。取该波的 l 周，我们得到了 $2\pi rl/\left(l+\frac{1}{2}\right)$ 而不是 $2\pi r$。这就是说，在 $\Delta=0$ 或 π 附近，相邻节点间的距离比任何别处都大，因此，视相速度在这些特殊区域内是较快的。

在测定面波相速度时，上述效应会造成，每通过极点一次，就有等于 $\pi/2$ 的视相位超前。如果这路径包含有震中或它的对蹠点时必须考虑这一点。[对进入极点及从极点出来，(8.40)中 $\pi/4$ 的相移被加倍。] 这就是现代地震学中被 Brune 等 (1961) 引进的所谓极相移，对在小弧上大弧上以及整个大圆上测定相速度，明显地存在着矛盾的结果，这一点也被 Brune 解决了。

补充 8.2

Poisson 求和公式的一例

给定一函数 $g=g(\nu)$，我们将首先证明

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}\right)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^s\int_{-\infty}^{\infty} g(\nu)e^{2\pi i\nu s}d\nu. \quad (1)$$

然后，将(1)应用于函数 $f(\nu)$中，这里当 $\nu\geqslant 0$ 时，$f=g$；$\nu<0$ 时，$f=0$，由此得到

$$\sum_{l=c}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}\right)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^s\int_c^{\infty} g(\nu)e^{2i\pi s\nu}d\nu. \qquad (2)$$

为证明(1)，用 $S(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}+x\right)$ 来定义 $S=S(x)$。因此 S 是周期性的，其周期为 1。$S(x)$ 的 Fourier 级数的展开式可写成

$$S(x)=\sum_{s=-\infty}^{\infty} S_s e^{-2i\pi sx}, \quad \text{其中 } S_s=\int_0^1 S(y)e^{2i\pi sy}dy.$$

取 $x=0$ 并代换 S_s 和 $S(y)$，我们得到

$$S(0)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\int_0^1\sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}+y\right)e^{2i\pi sy}dy,$$

同时注意 $S(0)$ 等于(1)式中的左半部。而且

$$e^{2i\pi sy}=(-1)^s e^{2i\pi s\left(l+\frac{1}{2}+y\right)},$$

因为 s，l 和 sl 是整数。因此

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}\right)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^s\int_0^1\sum_{l=-\infty}^{\infty} g\left(l+\frac{1}{2}+y\right)e^{2i\pi s\left(l+\frac{1}{2}+y\right)}dy$$

$$=\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^s\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{l+\frac{1}{2}}^{l+\frac{3}{2}} g(\nu)e^{2i\pi s\nu}d\nu,$$

此式等于(1)式的右半部。

为更定量地对比自由振荡和面波，对(8.38)中的每一谐频，我们将利用 Poisson 求和公式。从补充 8.2 中的方程 (2) 我们得到

$$u_r(X,\ t)=\sum_n\int_0^{\infty}d\nu\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^s({}_nA_{\nu-1/2})P_{\nu-1/2}$$

$$\times(\cos\Delta)C(\nu,\ t)e^{2i\pi s\nu}, \qquad (8.41)$$

其中

$$C(\nu,\ t)=H(t)[1-\cos({}_n\omega_{\nu-1/2}t)\cdot\exp(-{}_n\alpha_{\nu-1/2}t)], \qquad (8.42)$$

通过 $\alpha=\omega/2Q$，使 α 和时间的 Q 相关。

根据 Gilbert (1976)，我们利用第二类 Legendre 函数，将

(8.41)中对 s 的求和改写成以 $Q_\nu(\cos\Delta)$表示(见补充 8.3)，则

$$u_r(X,\ t)=\sum_n \int_0^\infty d\nu_n A_{\nu-1/2} \sum_{N=1}^{\infty} R_N(\nu,\Delta)C(\nu,t), \quad (8.43)$$

其中N为奇数时

$$R_N=(-1)^{(N-1)/2}\left\{P_{\nu-1/2}(\cos\Delta)\cos[(N-1)\pi\nu]\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}Q_{\nu-1/2}(\cos\Delta)\sin[(N-1)\pi\nu]\right\}, \quad (8.44)$$

N为偶数时

$$R_N=(-1)^{N/2}\left\{P_{\nu-1/2}(\cos\Delta)\cos(N\pi\nu)\right.$$

$$\left.-\left\{\frac{2}{\pi}Q_{\nu-1/2}(\cos\Delta)\sin(N\pi\nu)\right.\right. \quad (8.45)$$

从下式可得(8.41)和(8.43)的等价性

$$\begin{aligned}&R_1+R_2+R_3+R_4+\cdots\\&=P_\nu\ \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\pi\nu-\cos 2\pi\nu+\cos 4\pi\nu+\cos 4\pi\nu\\&-\cos 6\pi\nu-\cdots)+\frac{2}{\pi}\,Q_{\nu-\frac{1}{2}}(0+\sin 2\pi\nu-\sin 2\pi\nu\\&-\sin 4\pi\nu+\sin 4\pi\nu+\sin 6\pi\nu-\cdots)\\&=\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^s P_{\nu-\frac{1}{2}}e^{2i\pi\nu s}.\end{aligned}$$

补充 8.3

不同的 Legendre 函数及其渐近式

在补充 8.1 中我们研究了 Legendre 多项式 $P_\nu(\cos\Delta)$。虽然，仅在接近 $\Delta=0$ 和 $\Delta=180°$处有物理上容许的解，但研究 Legendre 方程不同的解，往往是很值得的，因为，在远离 $\Delta=0$ 和 $\Delta=180°$ 时，这些解可能局部地适宜于表示地震运动。

引用 Nussenzveig(1965)的结果，当 $0<e\leqslant\Delta\leqslant\pi-e$，$|\nu|\gg1$，

且$|\nu|e\gg1$时，有

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)=\left(\frac{2}{\pi\nu\sin\Delta}\right)^{1/2}\left[\cos\left(\nu\Delta-\frac{\pi}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\cot\Delta}{8\nu}\sin\left(\nu\Delta-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]. \tag{1}$$

这个解的特性类似于$\left(\sin\Delta\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\nu\Delta-\frac{1}{4}\pi\right)$，这指出一个线性无关的解可能存在，它的渐近特性很像$(\sin\Delta)^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\nu\Delta-\frac{\pi}{4}\right)$。因此，这些解相加及相减都可得到行波。事实上，存在 Legendre 解$Q^{(i)}(i=1,2)$，它具有如下特性：

$$Q^{(1)(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)=\frac{e^{\mp i(\nu\Delta-\pi/4)}}{(2\pi\nu\sin\Delta)^{1/2}}\left[1\pm i\frac{\cot\Delta}{8\nu}+O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right]. \tag{2}$$

对$0<e\leqslant\Delta\leqslant\pi-e$，$|\nu|\gg1$，$|\nu|e\gg1$，同时$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)$不在负整数附近时，其$Q^{(i)}_{\nu-\frac{1}{2}}$有极点。在如下和式中这些极点消失：

$$P_l=Q_l^{(1)}+Q_l^{(2)}.$$

$Q_l^{(i)}$的正式定义为

$$Q_l^{(1)(2)}=\frac{1}{2}\left(P_l\pm\frac{2i}{\pi}Q_l\right), \tag{3}$$

其中Q_l是第二类 Legendre 函数，而$Q_l^{(i)}$的主要特性是根据(2)得到的那些特性。

Legendre 方程的另外两个解，由(8.44)和(8.45)的组合给出。利用$Q^{(1)}$和$Q^{(2)}$写出这些解，对奇数N，得到

$$R_N=(-1)^{(N-1)/2}[Q^{(1)}_{\nu-1/2}(\cos\Delta)e^{-i(N-1)\pi\nu}$$
$$+Q^{(2)}_{\nu-1/2}(\cos\Delta)e^{i(N-1)\pi\nu}]$$
$$\sim(-1)^{(N-1)/2}\left(\frac{2}{\pi\nu\sin\Delta}\right)^{1/2}\cos\left\{\nu[(N-1)\pi+\Delta]-\frac{\pi}{4}\right\}, \tag{4}$$

对偶数N，

$$R_N=(-1)^{N/2}[Q^{(2)}_{\nu-1/2}(\cos\Delta)e^{-iN\pi\nu}+Q^{(1)}_{\nu-1/2}(\cos\Delta)e^{iN\pi\nu}]$$
$$\sim(-1)^{N/2}\left(\frac{2}{\pi\nu\sin\Delta}\right)^{1/2}\cos\left\{\nu[N\pi-\Delta]+\frac{\pi}{4}\right\}. \tag{5}$$

从(4)和(5)显见，每一个 R_N 是一个驻波图象。对 $P_{\nu-\frac{1}{2}}$，一个一致的渐近近似式，它甚至在 $\Delta=0$ 附近也可用，是

$$P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)=\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2}\left[J_0(\nu\Delta)+\frac{1}{8}(\Delta\cot\Delta-1)\times\frac{J_1(\nu\Delta)}{\nu\Delta}+O\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right].$$

在某些表达式中除其它波以外也包括体波和面波，识别体波和面波的工作，主要是一种熟练使用六种 Legendre 函数 P，Q，$Q^{(1)}$，$Q^{(2)}$，R_N(N 为偶数)，R_N(N 为奇数)的练习。这个问题在第九章中将重新提起，在那里我们将选用 Waston 变换法而不用 Poisson 求和法。

所以引进 R_N，因为它们是绕地球的第 N 个轨道的波的合适的水平波函数。轨道的编号如图 8.5 所示。然而，请注意，如(8.44)—(8.45)中所定义的每一个 R_N 仍然是驻波，而不是行波。这在补充 8.3 中已被证明了，这里，我们的问题在于，为了和面波进行对比，对每一个 N，我们预期应有水平的相位函数，并且在正波数的情况下它们是驻波。这是因为在第六章和第七章，对平地球模型，我们通常可得到如下的解：

$$u(X\cdot\omega)=\int_0^\infty f(k,\omega)J_0(kX)dk. \tag{8.46}$$

这里我们引进X作为水平距离(范围)；k 是水平波数，J_0是零阶 Bessel 函数。(8.46)的被积函数是一驻波，为得到行波表达式，我们用 $f(-k,\omega)=-f(k,\omega)$和

$$u(X,\omega)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(k,\omega)H_0^{(1)}(kX)dk \tag{8.47}$$

(例如见(6.15))。有趣的是对平地球模型行波函数 $H_0^{(1)}$和 $H_0^{(2)}$，在负的实波数轴上($k<0$)有分支切割，同时对球形地球，类似的波函数 $Q^{(2)}_{\nu-\frac{1}{2}}$和 $Q^{(1)}_{\nu-\frac{1}{2}}$，在负的实波数轴上($\nu<0$)有一些极点。在第九章中，我们将得到几个一串极点的进一步的例子，在很多情况下，其特性很像分支切割。

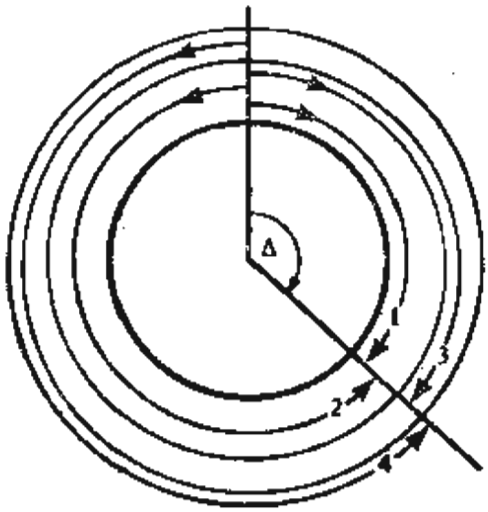


图 8.5

绕地球传播的波之轨道编号。$N=1$ 为小弧，$N=2$ 是大弧；$N\geqslant 3$ 至少包括一个大圆路径

按(8.43)，仅研究第一个到达的波，$N=1$，我们写成 $l+\frac{1}{2}=\nu=kr$，其中 $r=|x|$ 是接收点的径向位置（通常 $r=r_\oplus$ 为地球的半径）。于是

$$u_r(x,\ t)=\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2}\sum_n\int_0^\infty r\,dk_n A(k)J_0(kX)C(kr,t), \tag{8.48}$$

这里我们使用了

$$R_l(\nu,\ \Delta)=P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\Delta)\sim\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2}J_0(kX). \tag{8.49}$$

X 是水平距离 $r\Delta$，所以 $\nu\Delta=kX$；$_nA(k)=_nA_{\nu-\frac{1}{2}}$。

忽略 $C(kr,\ t)$ 中的静态位移项，我们注意到将(8.48)中的 C 代入下式：

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{i[\omega+{}_n\omega(k)]-{}_n\alpha(k)}+\frac{1}{i[\omega-{}_n\omega(k)]-{}_n\alpha(k)}\right]$$

而给出 Fourier 变换 $u_r(x,\ \omega)$。(8.48)中 $J_0(kX)$ 的系数是奇数 k，因此

$$u_r(x,\ \omega)=\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2}\sum_n\int_{-\infty}^\infty r\,dk_n A(k)H_0^{(1)}(kX)$$

$$\times \frac{1}{i[\omega - {}_n\omega(k)] - {}_n\alpha(k)}. \qquad (8.50)$$

包含 $\omega + {}_n\omega(k)$ 的另一项已消掉，因为它在复 k 平面的下半部产生一个极点，而我们的目的是在上半平面中完成一个闭合路径。为求出上述被积函数中极点的位置以及计算其留数，我们可以在值 $k_n(\omega)$ 附近得到 ${}_n\omega(k)$ 随 k 变化的 Taylor 级数，$k_n(\omega)$ 是第 n 阶面波振型的本征值。因此

$${}_n\omega(k) = \omega + (k - k_n)U_n(\omega) + \cdots$$

其中 $U_n(\omega) = d\omega/dk$ = 群速度。群速度几乎总是正的，所以 (8.50) 的极点位于复 k 平面的第一象限中，并在 $k = k_n(\omega) + i\alpha_n/U_n(\omega)$ 上。这里 α_n 是基于时间的 Q，所以，如果我们改变成基于空间的 Q 来描述衰减，则必须以 $\omega/2\,Q_n^{空} c_n = k_n/2\,Q_n^{空}$ 代替 $\alpha_n/U_n = \omega/2\,Q_n^{时}U_n$[见(7.92)]。用图 8.6 中表示的积分路径，并用对 $H_0^{(1)}$ 的远场近似，我们可从第一象限中的诸极点计算其留数(对每一个 n 有一个极点；$n = 0, 1, 2, \cdots$)。

$$u_r(x, \omega) = i\frac{\pi}{2}\left(\frac{\Delta}{\sin\Delta}\right)^{1/2}\sum_n \frac{{}_rA(k_n)}{U_n}\left(\frac{2}{\pi k_n X}\right)^{1/2}$$

$$\times \exp\left[i\left(k_n X + \frac{\pi}{4}\right)\right]\exp(-k_n X/2\,Q_n). \qquad (8.51)$$

对在 $k = k_n(\omega)$ 处求得的 ${}_nA(k)$，这里我们写成 $A(k_n)$，并且我们曾假定除对相位函数 e^{ikX} 以外，(8.50)中的诸因子在每一极点附近都是 k 的缓慢变化函数。方程(8.51)给出了面波的表达式，此面波是在球状地球上，具有单位阶梯函数的爆炸源所产生的。

对平面成层介质中的 Rayleigh 波，为比较 (8.51) 和相应的公式 (7.151)，我们必须考虑到径向本征函数和垂直向本征函数归一化中的差别。事实上，${}_rU_1(r)$ 相应于 $r_2(z)/\sqrt{2I_1}$；$r\,d({}_rU_1(r))/dr$ 相应于 $-(dr_2(z)/dz))/\sqrt{2I_1}$；以及 ${}_rU_1(r)$ 相应于 $r_1(z)/\sqrt{2I_1}$。因此，(8.51) 中的 $rA(k_n)$ 的一级近似以下式代替

$$-\frac{k_n}{2\pi\omega^2}\left[\frac{dr_2}{dz}+k_n r_1\right]\Bigg|_{\text{震的水平}}\frac{r_2(z)}{2I_1}.$$

注意到(8.51)是对向上的运动，而(7.151)是对向下的分量，由此可得，两个公式实质上是一样的。仅有的差别是空间的衰减因子和因子$(\Delta/\sin\Delta)^{1/2}$，前者已明确地包含在(8.51)中，后者说明了在球面上的方位性几何扩散和平面上的扩散是不同的。

综上，地球的球形效应可以用比例于$(\sin\Delta)^{-1/2}$的几何扩散因子加以考虑，也可在球形地球模型中对运动应力向量通过解方程(8.32)或(8.33)而得到的本征函数加以考虑。

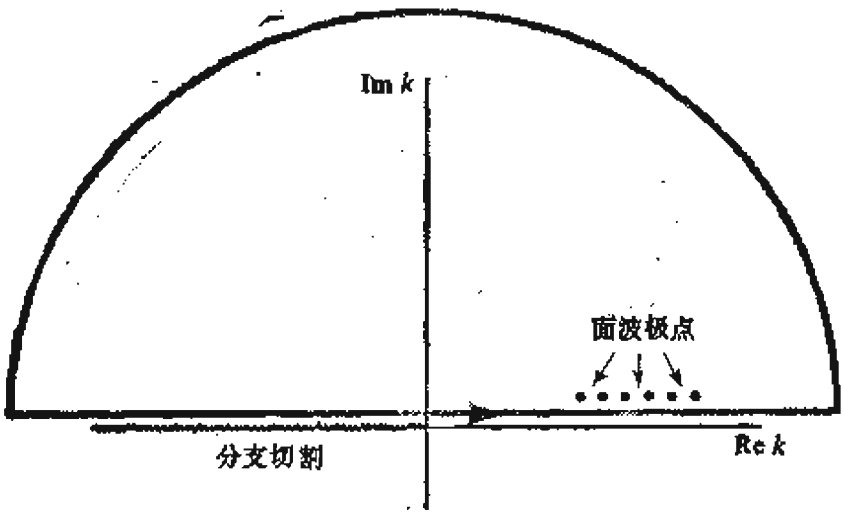


图 8.6

复波数平面的特性，用于计算以方程(8.50)表示的面波

8.4 自重地球的自由振荡

重力不能影响扭动振型的自由振荡，因为这些振型中没有位移的径向分量，且无发散，所以密度分布是不变的。但是密度扰动的确发生在球型的运动中。由于重力是一有效的体力，它随时间的变化将影响整个运动。对周期长于 500 秒的球型振型，自重是不能忽略不计的，在给出必要的理论之前，先看一看历史背景是有意义的。

按照 Lamb 于 1882 年发表的均匀弹性固体球的自由振荡理论，显而易见，具有最大周期的振型是 ${}_0S_2$。Bromwich(1898)曾从数值上研究了周期方程，并包括了不可压缩介质情况下自重的影响。他证明对一不可压缩的球，其大小和质量与地球相同，其刚性和钢一样，由于计入了自重，${}_0S_2$ 的周期从 65 分钟左右减至约 55 分钟。Love(1911) 甚至能在可压缩介质中考虑自重。他取 Poisson 比等于$\frac{1}{4}$而其它方面则和 Bromwich 的地球相同，他发现 ${}_0S_2$ 的周期几乎严格地为一小时。显然，如果这个振型可能观测到，则仪器必须在周期大大超过日常记录的地震运动的周期处有较高的灵敏度。

在四十年代和五十年代期间，观测到的地震面波的性质，在很大程度上可用叠置的紧密焊接的均匀平板中的面波理论来理解。对该类介质的理论已进行了广泛研究(Haskell, 1953; Ewing *et al.*, 1957)，特别是对此类弹性介质的频散也进行了计算。显然，设计适于超长周期的仪器是必要的，因观测到了面波频散即可用来推断地幔内较深部的地球结构。加利福尼亚理工学院的 Hogo Benioff 是仪器设计的带头人，他的石英应变地震仪曾记录到 1952 年 11 月 4 日堪察加地震，如图 8.7 所示。根据 Benioff 等人的报告 (1954)，57 分钟的振荡“可能代表地球作为一个整体的自由振荡”。很多人受到此结果的鼓舞去发展适于超长周期的、更好的地震仪，同时也进行理论和数值上的研究以预测真实地球模型的自由振荡。Alterman 等人 (1959) 发表了不同地球模型的 ${}_0S_2$ 周期的理论值，这些模型是 Bullen 和 Bullard 早年提出的。在这些模型中，无论是否包括固体内核，但所得到的周期值总是在 53.5—53.7 分钟左右。当时的仪器已经作了改进，但要从观测上证实，还必须等待一个足够大的地震。1960 年 5 月 22 日在智利发生了当代最大的地震之一（震级大于 8，这个地震大到使常规的震级标度达到了饱和，见 Kanamori, 1977)。以极

其激奋之情，三个不同的研究小组于 1960 年夏在赫尔辛基举行的 IASPEI(国际地震学和地球内部物理学协会)会议上作了报告，他们观测到了整个地球的大范围的简正振型 (Benioff *et al.*, 1961; Ness *et al.*, 1961; Alsop *et al.*, 1961 a)。显然，地震学中开创了一个全新的领域。

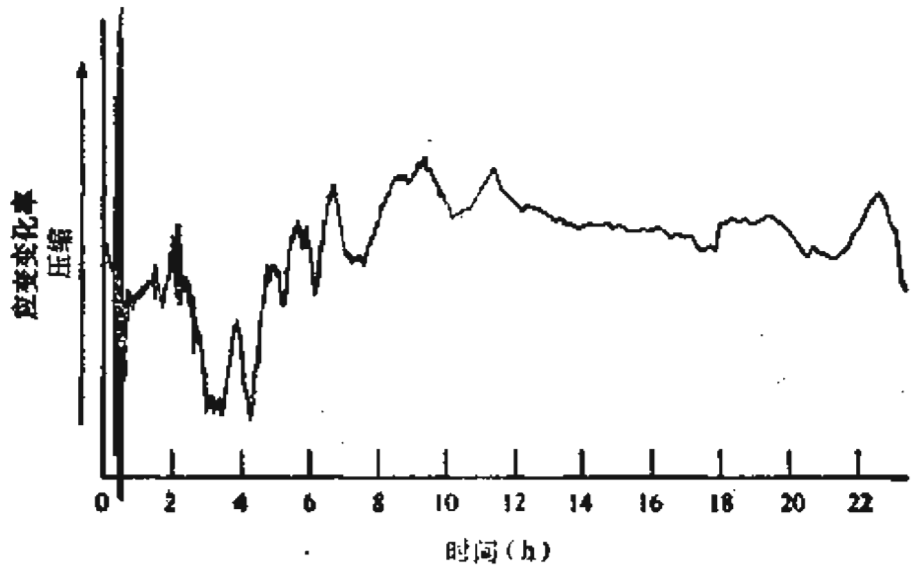


图 8.7

在加利福尼亚的帕萨迪那设置的 Benioff 应变地震仪所记录的 1952 年 11 月 4 日堪察加地震的地表图。在发震后近于 $3\frac{1}{2}$小时开始，出现有一个 4 圈的振荡或波列，原来报告的为具有 57 分的周期(引自 Benioff, 1958)

本节中我们给出一种地球模型中球型振型的理论，此模型是球对称的、非自转的、自重的、弹性的，并具有各向同性的应力-应变关系和各向同性的初始应力。

我们在第二章中讨论的弹性运动方程，大部分建立在 Lagrange 公式的基础上，在此公式中，在时间 t_0 的质点 x，假定在时间 t 移动到 $x+u=X$，并且我们将 u 作为函数 $u=u(x,t)$进行研究。很遗憾，Lagrange 公式不容易处理密度的变化以及伴随的浮动重力场的影响，所以这里我们将采用 Euler 的方法：x, X 和 u 如前所定义，但我们是把 u 和 ρ 作为(X,t)的函数来研究这些量的。

补充 8.4

是侥幸事件还是真实地面运动的唯一记录？

虽然图 8.7 给出的地震记录对简正振型的研究是个很大的促进，但六十年代初已很明显，在帕萨迪那记录到该地震的长周期自由振荡相当异常。(i) 报告的 57 分周期比对 ${}_0S_2$ 流行的估计值(~54分)要长。(ii) 部分记录中，57 分的周期占很大优势，但很难想像，其它自由振荡为什么却如此之弱。(iii) 57 分的周期仅有 4 圈左右，很难知道它们为什么会停止。因此，多年来人们认为是一些仪器的故障产生的这几圈长周期波。然而，金森(Kanamori，1976)却认为(i)周期不是 57 分，而是 54 分左右(仔细地进行 Fourier 分析后)。他还推测(ii)可能是堪察加震源区发生的某些地震之后的慢形变，其时间尺度如此之长以致 ${}_0S_2$ 可被顺利地激发；(iii) 4圈之后的停止是由于 ${}_0S_2^m$ $(-2\leqslant m\leqslant 2)$ 的不同成分的相消干涉而引起的，因为地球的自转 ${}_0S_2^m$ 的成分显然是不同的，或者确实是由于仪器故障在约七个小时后开始影响记录。

让我们来考虑一球形地球模型，在自重之下，它处于流体静平衡状态。平衡状态用其密度 $\rho_0(r)$，压力 $\rho_0(r)$和重力位 $V_0(r)$ 来描述，所有这些量都仅仅是 r 的函数。因为 V_0 是由于密度分布 ρ_0 而引起的，我们可应用 Poisson 方程

$$\nabla^2 V_0 = -4\pi\gamma\rho_0, \tag{8.52}$$

其中 γ 是重力常数(~6.670×10^{-8} 达因·厘米^2/克^2) 平衡方程是由体力和压力梯度相等而给出的，即

$$-\rho_0 g_0 \hat{r} = \rho\cdot\nabla V_0 = \nabla p_0, \tag{8.53}$$

其中 $g_0=g_0(r)$为正。它是无扰动时单位体积中的重力量值。

叠加到这个初始状态上，我们考虑一小的位移扰动 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})\times\exp(-i\omega t)$。我们将采用 Euler 法，分别用$\rho(\boldsymbol{X},t)$和 $V_0+k(\boldsymbol{X})\times\exp(-i\omega t)$来描述扰动状态中的密度和重力位。

根据质量守恒，一体积 V 中(空间固定) 质量的增加等于通过包围 V 的表面 S 的质量流入量，所以

$$\int_V \rho dV = \int_V \rho_0 dV - \int_S \rho_0 u \exp(-i\omega t)\cdot n dS, \quad (8.54)$$

其中 n 是面元 dS 上向外的单位法线。(方程(8.54)是一近似式，穿过 S 的物质密度随时间而改变。对于一级近似，我们取其为 ρ_0 是合适的，因为 u 是很小的。)用 Gauss 定理，变面积分为体积分，我们得到

$$\rho(X,t) = \rho_0 - \nabla\cdot(\rho_0 u \exp(-i\omega t)),$$

由于 ρ_0 仅是 r 的函数，我们可将上述方程改写为

$$\rho = \rho_0 - \left(u_r \frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0 \nabla\cdot u \right)\exp(i\omega t). \quad (8.55)$$

扰动状态下的重力位满足 Poisson 方程

$$\nabla^2(V_0 + K\exp(-i\omega t)) = -4\pi\gamma\rho,$$

此式和 (8.52) 及 (8.55) 可用于导出

$$\nabla^2 K = 4\pi\gamma\left(u_r \frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0 \nabla u\right). \quad (8.56)$$

为得到运动方程，我们利用笛卡尔坐标 (X_1, X_2, X_3) 并从动量矩变化率、体力（重力）和应力梯度入手：

$$-\rho\omega^2 u_i \exp(-i\omega t) = \rho[V_0 + K\exp(-i\omega t)]_{,i} + \sigma_{ij,j}. \quad (8.57)$$

[精确而言，这里左半部应包含物质的加速度 $D^2u\exp(-i\omega t)/Dt^2$。但 u 和质点速度均很小，所以对于一级近似，这加速度是 $-\omega^2 u\exp(-i\omega t)$]在扰动状态下计算了应用 $\sigma_{ij}(X,t)$。由于在时间 t 时 X 处的质点原来是在 $X = X - u\exp(-i\omega t)$ 处，X 处的应力为 $X - u\exp(-i\omega t)$ 处的初始应力加上由于在 X 质点附近区域的畸变而产生的附加效应，亦即和 u 相关的应变所产生的附加效应。对一具有 Lamé 常数 λ 和 μ 的各向同性体，我们得到

$$\sigma_{ij}(X,t) = -P_0\sigma_{ij}|_{x-u\exp(-i\omega t)} + u \text{ 产生的应力}$$

$$= -P_0(r)\delta_{ij} + \left[u_r \frac{dP_0}{dr}\delta_{ij} + \lambda\nabla\cdot u\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i})\right] \times \exp(-i\omega t). \quad (8.58)$$

将上述形式代入(8.57)并保留一级项，则得

$$-\rho_0\omega^2\boldsymbol{u}=\left(u_r\frac{d\rho_0}{dr}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right)g_0\hat{\boldsymbol{r}}+\rho_0\nabla K-\nabla(\rho_0u_rg_0)$$
$$+\left[(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}-\mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u})+\frac{d\lambda}{dr}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})\hat{\boldsymbol{r}}+2\frac{d\mu}{dr}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial r}\right.$$
$$\left.+\frac{d\mu}{dr}\hat{\boldsymbol{r}}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})\right]. \tag{8.59}$$

其中括号[]中的项，仅是一个向量，它的第 i 个笛卡尔分量由 $\{\nabla\lambda\cdot u\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\}_j$ 给出，并假定 λ 和 μ 仅和半径 r 有关。(8.59) 右半部余下的项定量地表示自重的效应。当 $\rho_0(r)$，$\lambda(r)$，和 $\mu(r)$ 为已知时，可能得到 $g_0(r)$，然后在适当的初条件及边界条件下可解出 (8.56) 和 (8.59) 中的 K 和 $\boldsymbol{u}$。注意到对环型振型，(8.59) 仍是正确的，尽管该方程中的大多数项都为零。

我们以前已发现，若将运动方程转换成 $df/dr=Af$，f 在通过系数矩阵 $A=A(r,\ \omega)$ 的间断点仍是连续的，则运动方程就很便于处理。这个结果促进了以下的讨论。

在某半径 r_d 处，当它们的介质性质 (即 ρ_0，λ 或 μ) 有不连续的突变时，而位移和牵引力分量通过 r_d 又是连续的，则重力位的扰动 K 通过 r_d 也是连续的。但是，如有一密度跃变，则 dk/dr 是不连续的。因此，我们试图寻找一个和 dk/dr 有关的连续的量。

将 (8.56) 改写成 $\nabla\cdot(\nabla K-4\pi\gamma\rho_0\boldsymbol{u})=0$，对任意具有表面 S 的体积 V，我们应用 Gauss 定理得到 $\int_s(\nabla K-4\pi\gamma\rho_0\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{n}ds=0$。选取 V 为一薄的圆盘，它的一个平面刚好在内界面 r_d 的上面，而另一个表面刚好在 r_d 的下面，则得到 $dk/dr-4\pi\gamma\rho_0u_r$ 在内界面的任一侧必须相同。因而，我们可选择这连续量 $dk/dr-4\pi\gamma\rho_0u_r$ 作为一个因变量。

对一球型振型，我们已看到，在振型 (l，m，n) 中的位移和牵引力由下式给出：

$$u_r = {}_nU_l(r)Y_l^m(\Delta,\phi), \quad u_\Delta = \frac{{}_nV_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\Delta},$$

$$u_\phi = \frac{{}_nV_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}}\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi},$$

$$\tau_{rr} = {}_nR_l(r)Y_l^m, \quad \tau_{r\Delta} = \frac{{}_nS_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\Delta},$$

$$\tau_{r\phi} = \frac{{}_nS_l(r)}{[l(l+1)]^{1/2}}\frac{1}{\sin\Delta}\frac{\partial Y_l^m}{\partial\phi}, \tag{8.60}$$

其中 $(\tau_{rr}, \tau_{r\Delta}, \tau_{r\phi})$ 是从 u 得到的牵引力。重力位也可分离成

$$K = {}_nK_l(r)Y_l^m(\Delta, \phi), \tag{8.61}$$

仿照竹内和斋藤 (Takeuchi and Saito, 1972)，我们引入

$${}_nG_l(r) = \frac{d_nK_l}{dr} - 4\pi\gamma\rho_0({}_nU_1) + \frac{l+1}{r}{}_nK_l. \tag{8.62}$$

我们已指出，在密度突变点两侧 $(dK/dr - 4\pi\gamma\rho_0 u_r)$ 和 K 是连续的，所以 ${}_nG_l$ 也是连续的。${}_nG_l$ 的另一性质是 ${}_nG_l(r_\oplus)=0$ (即在地表面)，这是从在 $r>r_\oplus$ 处 K 满足 Laplace 方程而得到的一个结果，因此，在地球的外面 ${}_nK_l(r) = {}_nK_l(r_\oplus)(r_\oplus/r)^{l+1}$。

将 (8.60)—(8.62) 代入 (8.56) 和 (8.59)，对径向函数我们得到由六个一次线性微分方程组成的方程组：

$$\frac{dU}{dr} = \frac{1}{\lambda+2\mu}\left\{R - \frac{\lambda}{r}[2U - (l(l+1))^{1/2}V]\right\},$$

$$\frac{dR}{dr} = -\omega^2\rho_0 U + \frac{2}{r}\left(\lambda\frac{dU}{dr} - R\right) + \frac{1}{r}\left[\frac{2(\lambda+\mu)}{r} - \rho_0 g_0\right]$$

$$\times[2U - (l(l+1))^{1/2}V] + \frac{(l(l+1))^{1/2}}{r}S$$

$$-\rho_0\left(G - \frac{l+1}{r}K + \frac{2g_0}{r}U\right),$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{1}{\mu}S + \frac{1}{r}[V - (l(l+1))^{1/2}U], \tag{8.63}$$

$$\frac{dS}{dr} = -\omega^2\rho_0 V - \frac{\lambda}{r}(l(l+1))^{1/2}\frac{dU}{dr} - \frac{\lambda+2\mu}{r^2}$$

$$\times[2(l(l+1))^{1/2}U-l(l+1)V]+2\frac{\mu}{r^2}[(l(l+1))^{1/2}U$$

$$-V]-\frac{3}{r}S-\frac{\rho_0}{r}(l(l+1))^{1/2}(K-g_0U),$$

$$\frac{dK}{dr}=G+4\pi\gamma\rho_0U-\frac{l+1}{r}K,$$

$$\frac{dG}{dr}=\frac{l-1}{r}(G+4\pi\gamma\rho_0U)+\frac{4\pi\gamma\rho_0}{r}[2U-(l(l+1))^{1/2}V],$$

这里我们去掉了脚标 n 和 l。方程(8.63)可以写成 $df/dr=\boldsymbol{A}f$，且 f 是连续的，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(r,\ \omega)$。$f$ 解的存在并且在 $r=0$ 处是正规的，而且 ${}_nR_l(r_\oplus)$，${}_nS_l(r_\oplus)$和 ${}_nG_l(r_\oplus)$为零，这就要求 ω 为一本征值。因为对本征值 ${}_n\omega_l$ 和本征向量 $f=({}_nV_l,\ {}_nU_l,\ {}_nS_l,\ {}_nR_l,\ {}_nK_l,\ {}_nG_l)^T$，从数值上求解(8.63)的方法和 7.2 节中对面波所提到的方法是十分类似的，我们就不再给出进一步的详细结果。对环型振型，(8.59)给出了耦合系统(8.33)，因为重力没有直接影响。

当然，7.3 节中的变分法，也适用于简正振型，只需改变某些符号。相速度的扰动（由于结构的微小变化）以本征频率的扰动来代替。例如，对一环型振型［见(8.33)和(8.35)］，

$$\left(\frac{\delta\omega}{\omega}\right)_l=\int_0^{r_\oplus}\left[\frac{\rho}{\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)_{l,\beta}\frac{\delta\rho}{\rho}+\frac{\beta}{\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)_{l,\rho}\frac{\delta\beta}{\beta}\right]dr,\quad(8.64)$$

其中

$$\left(\frac{\rho}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\rho}\right)_{l,\beta}=\frac{1}{2\omega^2 I}\left[-\omega^2\rho r^2W^2+\frac{r^2T^2}{\mu}+(l-1)(l+2)\mu W^2\right]$$

$$\left(\frac{\beta}{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial\beta}\right)_{l,\rho}=\frac{1}{\omega^2 I}\left[\frac{r^2T^2}{\mu}+(l-1)(l+2)\mu W^2\right].\quad(8.65)$$

在一横向上各向同性的地球模型中，环型振型和球型振型的偏微分已由竹内和斋藤(Takeuchi and Saito，1972)给出，Woodhouse(1976)曾说明了内边界的扰动如何影响本征频率。

现在，在一球对称的、非自转的地球模型中，我们给出了关于简正振型理论的一个十分完整的叙述。1960 年在智利地震之后，大约识别出了 40 个不同的本征频率，各研究者最初的企图很简单，只是为正确地辨别这些振荡的振型。由本征频率给出的资料与体波走时资料明显地有不同特性，由于如何建立具有给定走时曲线的地球模型是已知的，但是，如不用尝试法，如何用简正振型的本征频率来推测地球结构则是不清楚的。这个问题的重要意义在于对发展反演地球物理资料的新方法是个促进，作为一个实例，Backus 和 Gilbert（1967，1968，1970）利用简正振型资料已完成了反演理论的工作。

用现代仪器，即使对震级（M_s）为 6.5 那样较低的地震，去观测和识别简正振型都是可能的（Block *et al.*, 1970）。为了确定一个给定的地震对哪一种简正振型的激发最为有利，从(8.37)可知，关键的量是在震源处计算的振型中的应变。因此，浅震对激发基频振型（不同 l 的 ${}_0S_l$ 和 ${}_0T_l$）是有利的，而深震对观测谐频振型可能是最好的。利用两个深震的 211 个世界标准台网的台站记录图的谱，Gilbert 和 Dziewonski（1975）能够得出 812 个本征频率，其中大多数是谐频。对很多振型，计算误差低至 0.05%，一般而言小于 0.1%。对具有大于 80 秒周期的约 2000 个振型，现已观测到 1500 个并可从地震图中识别出来。对环型振型，对 n 从 0 到 13，l 从 1 到 80，图 8.8 给出了 $\omega_l<0.09$ 弧度/秒 的各个值。根据关系式 $l+\frac{1}{2}=k r$，我们可求出一给定振型的视速度，在地球表面被测定为 $\omega r_\oplus \Big/ \left(l+\frac{1}{2} \right)$（公里/秒）。已知地震体波 ScS（从核-幔边界向上反射的 S 波）具有大于某一极小值的视速度，此极小值是由刚好掠过核幔边界的 ScS 波的视速度所确定的。这个 $\omega \Big/ \left(l+\frac{1}{2} \right)$ 的极小斜率值，在图 8.8 中用直的虚线表示。这里的想法是，这些简正振型为理解地球中所有可能的地