序

过去十年中，由于理论和实验工作者之间广泛的相互影响，地震学已成熟为一门定量的科学。若干专门杂志以几千页的研究论文记载了这一进展，然而，这种论述无法系统地阐明这门科学的主要概念。鉴于许多研究生都需要一本这个学科的教科书，况且现在已被一些地震学家几乎作为常规来使用的地震图分析方法，还没有向在地震学外围领域工作的科学家和工程师广大读者给予适当介绍，所以，我们这里试图统一论述目前用来解释实际资料的那些地震学方法。

我们逐步发展地震波在实际地球模型中传播的理论，研究专门的破裂及破裂传播的理论作为地震的模式，并且以地震仪以及资料的分析和反演的实际描述，来补充这些理论课题。

这部书分为两卷。第一卷系统地发展了在介质的性质只随深度变化的经典地球模型中，地震波传播的理论。它以测震学的一章结束。这一卷是用来作地震学高年级学生的基础课教科书的。第二卷概述过去十年间在地震学的主要前沿领域取得的进展。它包括一系列的专门课题，涉及到资料分析和反演、在横向（以及随深度）变化的介质中波动传播定量化的成功方法、以及与发生破裂的断层面附近的运动有关的运动学和动力学问题。第二卷可用作关于构造物理学、地震力学、地球物理反演问题和地球物理资料处理的研究生课程的教科书。

许多人给了我们帮助。Armando Cisternas 为制订本书的最初计划做了工作，我们最后采纳的一系列课题中的一部分，是他建议的。Frank Press 的鼓励是使这个计划得以开始的一个主要因素。关于反演问题的第十二章，来自本书作者之一与 Theodore

R. Madden 在麻省理工学院所教的一门课程。我们感谢他同我们进行了许多有益的讨论。我们的学生们的博士论文，使我们了解了许多东西，并且任我们随意选用。我们吸取了几百人的明确想法和结果，这些人中有许多是我们的同事。我们希望他们的贡献在本书中得到正确反映。在此，我们表示衷心感谢。

我们还要感谢看过本书手稿并提出意见的诸位，我们从中得到建议、关怀和鼓励。

在准备这部书的四年中，大约十五位秘书为我们打过字。拉蒙特-多尔蒂观象台的 Linda Murphy 肩负了主要担子，帮我们在遵守期限方面保住信誉。还要感谢我们的稿件编辑 Dick Johnson 在原稿的清稿过程中表现的耐心和技巧。

我们感谢 Alfred P. Sloam 基金会和 John Simon Guggenheim 纪念基金会的支持。如果没有下列几个提供资金的单位在多年中支持我们的研究计划，这部书也写不出来。这些单位是：美国地质调查局和能源部；空军科学研究办公室监督下的高级研究计划署；国家科学基金会。

安艺敬一(K. Aki)

P. G. 理查兹(P. G. Richards)

1979 年 6 月

丁浩 收藏
2010.04.09
武汉大学

目　录

序

第一章　引言 …… (1)

建议进一步阅读的文献 …… (7)

第二章　动力弹性学的基本定理 …… (9)

2.1　问题的建立 …… (11)
2.2　应力-应变关系和应变能函数 …… (20)
2.3　唯一性定理和互易性定理 …… (25)
2.4　把 Green 函数引入弹性动力学 …… (28)
2.5　表示定理 …… (30)
2.6　一般正交曲线坐标中的应变-位移关系和位移-应力关系 …… (34)

建议进一步阅读的文献 …… (38)
问题 …… (38)

第三章　震源的表示 …… (41)

3.1　内表面的表示定理；等效于牵引力间断和位移间断的体力 …… (42)
3.2　隐埋断层上滑动的简单例子 …… (47)
3.3　内表面Σ上位移间断的一般分析 …… (55)
3.4　体积源；理论的轮廓和某些简单例子 …… (63)

建议进一步阅读的文献 …… (66)
问题 …… (67)

第四章　点位错源产生的弹性波 …… (69)
4.1　问题的提出：势的引进 …… (69)
4.1.1　Lamé 定理 …… (75)
4.2　均匀、各向同性、无限介质中弹性动力学 Green 函数的解 …… (77)
4.2.1　远场 P 波的性质 …… (81)
4.2.2　远场 S 波的性质 …… (82)
4.2.3　近场项的性质 …… (83)
4.3　无限、均匀介质中的双力偶解 …… (85)
4.4　点源发出的远场 P 波和 S 波的射线理论 …… (93)
4.4.1　与速度场 $c(x)$ 相联系的走时函数 $T(x)$ 的性质 …… (100)
4.4.2　射线坐标 …… (104)
4.4.3　球对称介质中 P 波的几何解 …… (106)
4.4.4　球对称介质中 S 波的几何解 SV 和 SH 分量的引入 …… (109)
4.4.5　一般非均匀介质中的几何射线解 …… (110)
4.5　球对称介质中任意取向的点剪切位错的远场体波辐射图案 …… (116)
4.5.1　利用远台体波观测求地震断层面空间取向和滑动方向的方法 …… (118)
4.5.2　均匀介质中双力偶的任意空间取向 …… (123)
4.5.3　把辐射图案改写为适于球对称介质情况 …… (127)
建议进一步阅读的文献 …… (131)
问题 …… (131)
第五章　均匀介质中的平面波及其在平界面上的反射和透射 …… (135)
5.1　弹性介质中平面波的基本性质 …… (137)
5.1.1　平面波的势 …… (140)
5.1.2　分离变量；稳态平面波 …… (143)

5.2 反射系数、转换系数、透射系数的基本公式 …… (146)
5.2.1 边界条件 …… (146)
5.2.2 平面 P 波和 SV 波在自由面上的反射 …… (148)
5.2.3 SH 波的反射和透射 …… (157)
5.2.4 P-SV 在固体-固体分界面上的反射与透射 …… (158)
5.2.5 能通量 …… (164)
5.2.6 关于两种相似半空间之间反射和透射系数的一种有用近似 …… (166)
5.2.7 平面波的反射和透射系数与频率无关 …… (168)
5.3 非均匀波，相移和界面波 …… (169)
5.4 分析均匀介质中平面波的矩阵方法 …… (178)
5.5 衰减介质中的波传播：平面波基本理论 …… (184)
5.5.1 衰减介质中物质频散的必然性 …… (187)
5.5.2 衰减介质中物质频散的某些假设值 …… (189)
5.6 各向异性弹性介质中的波传播：平面波的基本理论 …… (203)
建议进一步阅读的文献 …… (207)
问题 …… (208)
第六章 球面波的反射和折射；Lamb 问题 …… (213)
6.1 作为平面波和柱面波叠加的球面波 …… (214)
6.2 球面波在平界面的反射，声波 …… (220)
6.3 弹性半空间中的球面波，Rayleigh 极点 …… (237)
6.4 对于线源的 Cagniard-De Hoop 方法 …… (247)
6.5 对于点源的 Cagniard-De Hoop 方法 …… (267)
6.6 主要结果的概括及不同方法的比较 …… (279)
建议进一步阅读的文献 …… (283)
问题 …… (284)
第七章 竖向非均匀介质中的面波 …… (286)
7.1 面波的基本性质 …… (286)

7.2 位移-应力向量的本征值问题 …… (295)
7.2.1 数值积分 …… (298)
7.2.2 传播矩阵方法 …… (301)
7.3 Love 波和 Rayleigh 波的变分原理 …… (316)
7.3.1 Love 波 …… (316)
7.3.2 Rayleigh 波 …… (319)
7.3.3 Rayleigh-Ritz 法 …… (322)
7.3.4 面波的衰减 …… (323)
7.4 竖向非均匀介质中 Green 函数的面波项 …… (329)
7.4.1 二维情况 …… (329)
7.4.2 三维情况 …… (335)
7.5 由具有任意地震矩的点源产生的 Love 波和 Rayleigh 波 …… (349)
7.6 漏能振型 …… (354)
7.6.1 风琴管振型 …… (366)
7.6.2 相速度和衰减 …… (368)
建议进一步阅读的文献 …… (370)
问题 …… (371)

第八章 地球的自由振荡 …… (375)

8.1 均匀液体球的自由振荡 …… (376)
8.2 点源激发的自由振荡 …… (386)
8.3 球形地球上的面波 …… (396)
8.4 自重地球的自由振荡 …… (404)
8.5 地球自转引起简正振型的分裂 …… (418)
建议进一步阅读的文献 …… (424)
问题 …… (424)

第九章 在性质与深度有关的介质中的体波 …… (426)

9.1 多平面层介质中的 Cagniard 方法，广义射

线的分析 …… (430)
9.2 多平面层介质的反射率法 …… (436)
9.3 地震学中经典的射线理论 …… (451)
9.4 有转折点且其速度剖面随深度平稳变化的介质中波的传播 …… (458)
9.5 存在间断面的地球模型中的体波问题 …… (481)
9.6 不同方法之间的对比 …… (516)
建议进一步阅读的文献 …… (528)
问题 …… (529)
第十章 测震学原理 …… (535)
10.1 基本仪器 …… (535)
10.1.1 摆式地震计 …… (536)
10.1.2 稳定的长周期摆 …… (539)
10.1.3 水平加速度的测量 …… (542)
10.1.4 应变和转动的测量 …… (545)
10.2 地震信号的频率和动态范围 …… (548)
10.2.1 周期为20秒左右的面波 …… (551)
10.2.2 $5^\circ<\Delta<110^\circ$的 P波 …… (553)
10.2.3 面波和 P波振幅谱密度的范围 …… (553)
10.2.4 短震中距的微震波 …… (555)
10.2.5 环境地震噪声 …… (556)
10.2.6 自由振荡振幅 …… (557)
10.2.7 地球固体潮的振幅，Chandler晃动，板块转动和月震 …… (557)
10.2.8 震中区的地震运动 …… (558)
10.2.9 应变阶跃 …… (560)
10.3 信号检测 …… (560)
10.3.1 地震计摆的 Brown运动 …… (561)
10.3.2 电磁速度传感器 …… (564)
10.3.3 标准观测站地震仪的响应特性 …… (568)

10.3.4 长周期的高灵敏度 …… (573)
10.3.5 地震传感器的非线性 …… (577)
建议进一步阅读的文献 …… (582)
问题 …… (583)
附录 1 与波有关的术语 …… (585)
附录 2 震级的定义 …… (596)
参考文献 …… (598)

第一章　引　　言

地震学是以地震图的资料为基础的一门科学。地震图是地球的机械振动的记录。这些振动可以用爆破人为地产生，也可以由地震和火山喷发等天然原因产生。地震和火山喷发这两种自然现象，若干世纪以来一直强烈吸引着人类的注意，甚至在今天仍引起恐惧和神秘的感觉以及智力上的好奇。

在过去许多年中，主要是由于取得稳步改善的资料，使地震学得到了巨大进展。这个进展过程中的主要阶段，都是由在数学物理方面受过良好基础训练的科学家们开创的。每一代地震学家都做了旨在得到定量结果的工作，计算上的障碍先是被机械的手摇计算机、而现今又被数字微处理技术的进步所克服。在过去二十年中，计算机已变得足以有效地处理地震图中包含的大部分信息。所以，现代地震学的定量图象，包括高质量数据、详细的震源机制模型以及地球内部结构模型之间深刻的相互影响。

现代地震学应用于结构工程，以帮助设计抗震建筑。还应用于矿产勘探以及探测石油和天然气。其它应用则起因于范围广泛的一些政治、经济和社会问题，这些问题同核爆炸（将它们与天然地震相区分）以及同帮助大动力装置和大坝避开不安全地点从而减少危险有关。最近，地震学的一些进展，使准确的地震预报成为可以预见的目标。地震学家们从事这方面的课题是受到很大压力的，由以下事实就可以看到：中华人民共和国有24万以上的人死于1976年7月28日的地震；1976年2月4日危地马拉地震造成的经济损失，相当于这个国家的年国民生产总值；即便相对来说较小的1971年2月9日加利福尼亚圣费尔南多地震所造成的损失，估计大概也在五亿五千万美元以上。诸如这些情

形，使准确的地震预报变得如此重要，以致于地震学的主题本身，似乎要在未来的十年中发生相当大的变化和发展，正如它在本世纪六十年代为了美苏之间监督禁止核试验条约的需要而发展一样。（第一个全球标准化地震仪台网以及若干大孔径台阵，就是当初为改善使用地震学方法检测和识别地下核试验的能力而建立的。）本章末尾的阅读文献，包括现代地震技术广泛应用的书籍和论文。

地震学处于一系列地球科学的一个极端位置。首先，它只同地球的力学性质和动力学有关。其次，它提供一种手段，使对地球内部的研究能进行到最大的深度，并且具有高于任何其他地球物理分支所能达到的分辨力和精度。它所以能达到这种高分辨力和精度，是因为在穿过地球内部结构而被调制之后所能观测到的各种波中，地震波的波长最短。同其他地球物理观测量如地热流、静位移、应变、重力、或者电磁现象等等相比，地震波受到的波形畸变最小，振幅衰减也最小。

地震学的第三个独有特点是，它给予我们的只是地球内部现状的知识。由于它着重于现在的构造活动，所以，地震学相当直接地吸引着社会的关注。

象其他地球物理学方法一样，地震学方法可应用于极大的尺度范围。这些范围可以按照震源（人工的和天然的两种）大小和地震台网大小进行分类。地震研究中所用到的爆炸量，其大小的范围从小于一克到大于一百万吨(倍数为 10^{12})。天然地震的范围甚至更大，从最小的可检测的微震，到象 1960 年 5 月 22 日智利地震那样的大地震，用等效点源强度(地震矩)来算，它们可以相差大约 10^{18}倍。地震台网的线度，从工程地基测量所需用的几十米，直到全球地震观测台阵所用的一万公里，相差 10^6 倍。

地震图的解释以通常的科学方式取得了进展。从一个初步猜想开始，然后用新资料检验它的推论，使这个猜想得到支持或修正。通过人为地将震源效应和介质效应分开，来简化解释地震图

问题。在历史上，对于震源的认识和对于地球介质的认识，是以反复深化的方式发展起来的。例如，在一个阶段，对震源可能比对介质了解得多些，此时假定震源为已知，新资料就用来改进对于介质的认识。在下一个阶段，新资料又同已改进的对于介质的认识综合起来，修改我们对于震源的认识。

象在所有其它地球物理学分支中一样，地震学中的震源效应和介质效应是紧紧连结在一起的。震源中和介质中的双重谬误，可以产生一种同观测相一致的结果。这就需要深入理解物理本质，以免受表面一致的诱惑。这种双重谬误的一段趣闻，是关于鉴别P和S波的。在地震学早期，一个有争论的问题是，地方震的主要运动，究竟是由纵波还是由横波造成的。主要运动被叫做S震相，因为它是第二个到达波(secondary arrival)。在它前面有个较小的P震相，所以叫做P震相，是因为它是最先的即第一个到达波(primary arrival)。1906年，日本的地震学创始人大森房吉(F. Omori)，利用当时世界上最好的地方台网记录到的一次地震的地震图，研究了这个问题。利用他自己关于S和P的到时差同震中距离的关系式，还利用在几个台上的相对到时，他定出震中是在本州海岸以南大约500公里。然后他发现S震相的质点运动主要是在南北方向——即S震相显然是纵偏振。如果那时他坚持S震相应当是剪切波，质点运动垂直于波传播方向，那么，他就能够正确地把地震的震源深度放在本州之下大约500公里，来消除这个矛盾。可是不然，他错误地得出结论说，S震相不是剪切波。这个错误同当时关于震源和地震波的主导思想实际上是谐调的。那时，地壳均衡的概念已众所周知地被用来解释重力观测，没有谁去设想震源会深到当时被认为地球的柔软部分中去。关于S震相的这个结论，同认为震中区的主要运动由纵波所引起的所谓Mallet学说也是谐调的。Robert Mallet根据对地震破坏的结构进行的最早的科学的现场研究，得出了这个学说。他在1857年那波利地震的震中区，考察了这些结构。他也是第一个在野外

用爆破测定地震波速度的人。

在 1906 年大家就已知道固体中存在纵波和横波。自 1660 年发现 Hooke 定律之后，弹性理论的主要进展是由 Navier 在1821年关于一般平衡方程和振动方程的研究、以及 Fresnel 所做的解释给出的，这个解释认为，光是由通过以太传播的横偏振波构成的。在这个解释之前，一般认为只有纵波能在无限的连续体内传播。此后取得弹性波传播理论进展的学者是 Cauchy（他在 1822 年前发展了六个独立应力分量和六个独立应变分量的概念）和 Poisson(他使用了 Newton 物体内分子间作用力的概念，从而假定，一对分子间的力正比于离开它们平衡间隔的距离)。Poisson 发现了两种类型的、我们现在称之为 P 和 S 的波，并且对于他的限定模型得出结论说，P 波速率是 S 波速率的 $\sqrt{3}$ 倍。比较坚实的理论基础是 Green 奠定的。他引进一个应变能函数。对于任意非各向同性体，这个函数具有 21 个独立系数。对于各向同性体，系数减少为两个。

Love 在其经典教科书（1892 年出版，1944 年重印）的引言中，极好地概述了弹性理论发展的历史。另一方面，Dewey 和 Byerly(1969)很好地描述了观测地震学的早期历史。

在弹性体自由表面传播的 Rayleigh 波的解释（Rayleigh，1887)，是紧接着地震波的第一张记录而出现的。Lamb(1904)对于掩埋在均匀半空间中的点脉冲源，做出了第一张理论地震图。在半空间表面上所得到的地震图，是由相应于 P，S 和 Rayleigh 波的三个相继脉冲构成的，同观测记录相比，这是太简单了。

当十九世纪八十年代的早期记到第一张地震图时，地震学家们感到困惑的是，为什么振动持续了这么久。我们将看到，Rayleigh 波能够发生频散（即不同频率的波，以不同的速率传播)，并且这是长时间持续振动的一个原因。但是，在 P 和 S 波到达之后与面波（例如 Rayleigh 波)到达之前，也有振动。Jeffreys (1931) 审查并否定了许多解释之后，得出的结论是，“能存在下来的唯一

意见是，这些振动是由最初的脉冲在表面各层内的反射引起的。”当 1969 年从月球得到第一张月震图时，地震学家们再次为振动持续时间的极长所困惑。所做的解释似乎仍然是由于不均匀性造成的波的散射。

Lamb 方法对地球中实际地震和爆破的应用，一直拖延到大约 1960 年。这时，由于 Hugo Benioff，Maurice Ewing，Frank Press 和其他人的努力，高质量的长周期地震波资料已可使用。长周期波平均掉了地球的短波长非均匀性，于是，地球的表现就如同它是一个等效的均匀体。震源过程在长周期部分也比较简单。因此，Lamb 问题的极为简单的模型，在解释长周期地震图中可以具有实际用途。

本书中考虑的地球模型是非常简单的。在大多数情况下，介质是均匀的，或只在一个方向上不均匀，例如分层的半空间或球体，其中物质的性质只沿竖向或径向变化。

地震学中的模型，是一个将观测资料通过模型参数与地球内部建立关系的数学框架。例如，若将一个均匀、无限、各向同性的弹性体作为地球模型来解释地震图，那么，从这样的解释可以得到的参数，最多也不过是 Lamé 常数 λ 和 μ，以及恒定的密度 ρ。另一方面，当模型为竖向不均匀时，则我们可以确定作为深度函数的 $\lambda(z)$，$\mu(z)$和 $\rho(z)$。当然，三维非均匀的和任意各向异性的介质，是最需要的模型，但计算起来费的力气太大了，所以很不实际。此外，它含有的参数，比我们从现有的资料所能希望阐明的参数要多。迄今为止，最多见的模型是一个竖向不均匀的半空间或球体。本书的中心放在这种模型中的面波（第七章）、自由振荡（第八章）和体波（第九章）。

为了使读者对这几章有所准备，我们从基本的和有实际用途的原理［例如互易定理和表示定理（第二章）］开始，这些定理可以应用于一般的弹性动力学问题。在第三章，我们求出集中内震源的表达式，并以此为出发点，发展地球中地震运动的理论。震源

机制比较专门的方面，放在后面的第十四章和第十五章。

对于一个地震震源最有用的表示方法就是跨越一个内表面两边的位移间断，这叫做位错模式。我们还要考虑转换的应变被规定在一个体积内的体源。

在第四章给出均匀介质中点位错源引起的地震运动的完整描述。利用固定在几何射线路径上的曲线坐标，把分析扩大到平稳变化的介质。这一章提供由体波确定地震断层面解的基础，还有一些其他的内容。

平面波的性质，例如在平界面上的反射和透射、相移、非均匀的波（很快消失的）、衰减、以及物理频散，在第五章详尽地讨论。在第六章，我们要解 Lamb 问题，其中点源产生的球面波同一个平面相互作用。由于这种相互作用，产生了三种类型的波：从界面直接反射的或穿过界面的波；沿着界面从源传向接收点的波（首波）；振幅随着离分界面的距离呈指数减小的 Rayleigh 型或 Stoneley 型的波。我们利用 Cagniard 方法和 Fourier 变换方法研究这些波，以便为第七章至第九章打下基础。第七章至第九章给出计算竖向非均匀结构中地震图的实际方法。

关于竖向非均匀介质的这三章的编排顺序（面波、自由振荡、体波），反映了地震图的波动理论分析的历史发展以及分析的困难程度。基阶的 Love 波和 Rayleigh 波是最早用实际地球模型和地震的参数来定量理解其全部记录的波。体波的分析比较困难，部分原因是我们不能在波的路径上任意需要的位置上建立地震台，而只能建在其终点上。自由振荡的完全分析也比面波困难，但此时的困难是，处理包含几百个振型的长记录时，工作量很大。对于这三章中描述的一维非均匀地球模型，计算地震图的方法现已完全建立。

我们在第一卷中的最后一个问题是如何取得地震数据。在第十章，我们叙述了地震仪的原理，同时还描述了对于很大变化范围的频率、震源、震源—接收点距离的地震讯号和噪声，以便有

助于筹划一个给定实验的测试设备。最后这一章，对于任何具有某些经典物理知识（摆的性质和基础电路理论）的人，都是可以理解的。

第一卷是想作为现代地震学基本原理的独立著述。第二卷的五章涉及到种种专门问题，它们以第一卷为基础，包括现在用于资料分析的主要方法、反演理论、三维非均匀结构中的波传播、以及震源的运动学和动力学。

建议进一步阅读的文献

地震工程

Lomnitz, C., and E. Rosenblucth (editors). *Seismic Risk and Engineering Decisions*. Amsterdam:Elsevier, 1976.

Newmark, N. M., and E. Rosenbluth. *Fundamentals of Earthquake Engineering*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.

地震勘探

Dix, C. H. *Seismic Prospecting for Oil*. New York: Harper & Row, 1952.

Grant, F. S., and G. F. West. *Interpretation Theory in Applied Geophysics*. New York: McGraw-Hill, 1965.

Telford, W. M., L. P.Geldart, R. E. Sheriff, and D. A. Keys. *Applied Geophysics*. Cambridge Univ. Press, 1976.

用地震方法检测和识别核爆破

Bolt, B. A. *Nuclear Explosions and Earthquakes: The Parted Veil*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1976.

Dahlman, O., and H. Israelson. *Monitoring Underground Nuclear Explosions*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Co., 1977.

Rodean, H. C. *Nuclear-Explosion Seismology*. Washington, D. C.: U. S. Atomic Energy Comm., 1971.

Thirlaway, H. I. S. Forensic scismology, *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 14, 297-310, 1973.

地震预报

Panel on Earthquake Prediction of the Committee of Seismology. *Predicting Earthquakes: A Scientific and Technical Evaluation-with Implications for Society* Washington, D. C.: National Academy of Sciences 1976.

Panel on the Public Policy Implications of Earthquake Prediction. *Earthquake Prediction and Public Policy*. Washington, D. C.: National Academy of Sciences, 1975.

Press, F. Earthquake prediction. *Scientific American*. May 1975.

Rikitake, T. *Earthquake Prediction*. Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Co., 1976.

White, G. F., and J. E. Haas. *Assessment of Research on Natural Hazards*. Cambridge: MIT Press, 1975.

第二章　动力弹性学的基本定理

研究地球中地震运动的分析框架，至少必须包括下面三部分：震源的描述；运动一旦在某处发生便能传播出去的运动方程；把震源描述结合到为运动方程找出的特定解中去的理论。如果充分利用我们关于地震运动的各种设想而能使理论简化（尽管当这些设想不能成立时，这样一种理论可能把使用者引入歧途），那将是有益的。例如，有一个设想是，两组很小的运动可以叠加而相互没有非线性干涉。另一个设想是，某种物理源引起的地震运动，应当由该源和波传播介质的联合性质唯一地确定。这些和许多其他一般被地震学家们假定为正确的设想，都是关于具有线性应力-应变关系弹性介质的经典连续介质力学中无穷小运动性质的；这个理论几乎为整个这部教科书提供数学的框架。

地震学主要是一门观测科学，所以，解释地震图的能力是前进的基础。由于这个原因，需要知道关于在一部分介质运动中的哪些信息，就足以唯一地确定在另一部分介质中的可被观测到的运动。作为一个实际例子，我们常常需要知道如何表征震源（爆破或天然断层运动）和如何考虑地球自由表面上的边界条件，以便确定在一系列接收器的地方所造成的运动。幸好，对于弹性介质，这个问题有确定的解，因为给定的源条件（用体力）和边界条件，可以很容易地写成这样的形式以使得所产生运动只有一种。在给出问题的提法（即建立记法；定义位移、应变、引力、体力和应力；以及阐明对运动的限制）之后，我们要证明唯一性和互易性两个基本定理。互易性同 Green 函数一起，被用来获得以体力和边界条件来表示的介质中任一点运动的公式。这个表示方法在弹性动力学中是相当新的，这要归功于 Knopoff (1956) 和 De

Hoop(1958)，但在复数理论、势论和均匀介质的标量波动方程理论中也有许多熟知的类似情况。

用一般的正交曲线坐标系来表示弹性运动方程，常常是很有用的，这是因为，在许多情况下，(弯曲的)坐标面正是要在它上面惯常给定某种边界条件的面。利用一般正交系中位移、应力和应变的物理分量，我们给出位移-应力关系式和应变-位移关系式的推导。

初看来，本章似乎主要包括一些形式结果，即为了证明后面各章评述的特定解题方法的合理性，而必须马上建立的一些论证。但是，希望培养一种能力，能按自己的愿望去解决应用地震学问题的读者，将立刻面对着的问题是如何"建立"问题，也就是如何把震源的物理描述——以及计算在近处和（或）远处接收点产生的运动的一般问题——变为特定的数学问题。在大部分情况下，建立这类问题的能力，将取决于对通过方程 (2.41)—(2.43) 和 (3.1)—(3.3)以各种形式给出的表示定理的掌握。在后面的各章中，我们将经常提到这些方程。

补充 2.1

表示定理实例

1. 如果$f(z)$是复变量 z 的一个解析函数，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z},$$

其中回路积分沿包围 z 点的任意路径 C 进行 (在 C 内不许有 f 的奇点)。这个公式就是函数 f 的一个表示，它使我们只要知道 f 在 C 本身上的值，便能够求出 C 内任意处的 f。

2. 如果 $\phi(x, y, z)$满足 Poisson 方程 $\nabla^2\phi=-4\pi\rho$，则

$$\phi(x)=\int\int_V\int\frac{\rho(\zeta)dV(\zeta)}{|x-\zeta|},$$

其中 V 是包括所有对 ϕ 有贡献的密度分布 ρ 的体积。这也是 ϕ 的一个表示，但它不含有 ϕ 本身的值。

弹性动力学的表示定理，包含上面两种表示类型，并且还要体现对时间的依赖关系。

2.1 问题的建立

在描述连续介质中的运动和运动力学时，有两种不同的方法被广泛采用，这就是 Lagrange 描述法和 Euler 描述法。前者着重研究由其在某参考时间的初始位置所规定的特定质点的情况，后者着重研究无论哪一个质点所占据的特定空间位置。对于地震学中的大多数应用来说，线性弹性理论用 Lagrange 描述法来开展，在概念上比较简明，所以，它是我们几乎一直要采用的框架。最后，地震图是地球特定部分（即地震仪在设置期间所紧靠着的质点）运动的记录，所以，它直接是 Lagrange 运动的记录。

在本章我们将以笛卡尔坐标系(x_1, x_2, x_3)为工具，并且这里的所有张量都是笛卡尔张量。我们将位移这个词看作空间和时间的函数，并写作$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$，它表示一质点在时间 t 相对于它在某个参考时间 t_0 所占据位置 $\boldsymbol{x}$ 的矢量距离。既然 $\boldsymbol{x}$ 不随时间改变，于是，质点速度是 $\partial \boldsymbol{u}/\partial t$，而质点加速度是 $\partial^2 \boldsymbol{u}/\partial t^2$。

不管介质是固体的还是液体的，弹性的还是非弹性的，我们都用应变张量来分析它的变形。如果最初在位置 $\boldsymbol{x}$ 的质点移到位置 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$，则关系式 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$就用来描述位移场。为了审查最初在 $\boldsymbol{x}$ 附近的那部分介质的变形，我们需要知道最初在 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ 的质点的新位置。这个新位置是 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})$。任何变形都可能改变线元 $\delta\boldsymbol{x}$ 两端点间的相对位置。如果该变化为 $\delta\boldsymbol{u}$，则 $\delta\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{u}$ 是新的矢量线元。将其端点间的差写出来，我们得到

$$\delta\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}).$$

既然$|\delta\boldsymbol{x}|$为任意小，所以可把 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x})$ 展开为 $\boldsymbol{u}+(\delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ 再加上可忽略的$|\delta\boldsymbol{x}|^2$项。于是，$\delta\boldsymbol{u}$ 通过下式而同 $\boldsymbol{u}$ 的梯度和初始线元 $\delta\boldsymbol{x}$ 有关，

$$\delta\boldsymbol{u}=(\delta\boldsymbol{x}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \text{ 或 } \delta u_i=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\delta x_j. \tag{2.1}$$

补充2.2

记法

我们将用黑体字(如 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\tau}$)表示矢量和张量场，而用脚标(如 u_i, τ_{kl})表示矢量和张量在直角坐标系中的分量。Jeffreys 1965 年的书，和 Jeffreys 与 Jeffreys 1972 的书的第 3 章，是关于笛卡尔张量性质的有用参考资料。

对于单位矢量(除去 ν, 1, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$)，使用表示声调的符号(如 $\hat{\boldsymbol{x}}$)，标量乘积写作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，矢量乘积写作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。

上面加点表示时间微商(如 $\dot{\boldsymbol{u}}=\partial\boldsymbol{u}/\partial t$, $\ddot{\boldsymbol{u}}=\partial^2\boldsymbol{u}/\partial t^2$)，脚标之间的逗号表示空间微商(如 $u_{i,j}=\partial u_i/\partial x_j$)。

本书完全遵守用重复脚标表示求和的约定，(如 $a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$)，还经常使用 Kronecker 符号 δ_{ij} 和具有分量 e_{ijk} 的轮换张量，

$$\delta_{ij}=0 \quad \text{当 } i\neq j,$$
$$\delta_{ij}=1 \quad \text{当 } i=j,$$
$$\delta_{ijk}=0 \quad \text{当 } i,\ j,\ k \text{ 中任两个相等},$$

此外，

$$e_{123}=e_{312}=e_{231}=-e_{213}=-e_{321}=-e_{132}=1.$$

这些符号的最重要性质是

$$a_i=\delta_{ij}a_j,$$
$$e_{ijk}a_jb_k=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i,$$

并且它们有以下的关系：

$$e_{ijk}e_{ilm}=\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}.$$

只有当 $e_{ijk}t_{jk}=0$ 时，二阶张量 t 才是对称的。

但是，若确定 $\boldsymbol{x}$ 附近的真实变形，并非张量 $u_{i,j}$ 的所有 9 个独立的分量都是需要的，因为一部分运动仅仅是由 $\boldsymbol{x}$ 附近的无穷小刚体转动产生的。所以，根据恒等式

$$(u_{i,j}-u_{j,i})\delta x_j=e_{ijk}e_{ilm}u_{l,m}\delta x_k,$$

方程 (2.1)可写为

$$\delta u_i=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\,\delta x_j+\frac{1}{2}(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}\times\delta\boldsymbol{x})_i, \qquad (2.2)$$

刚体转动的量为$\frac{1}{2}\mathrm{curl}\,\boldsymbol{u}$。

若$|u_{i,j}|\ll 1$，就能够把(2.2)式中的最后一项解释为刚体转动。如果位移梯度不是这个不等式意义下的"无穷小"，那我们就将不得不分析有限转动对$\delta\boldsymbol{u}$的贡献——这要困难得多，因为有限的转动既不能交换，也不能表示为矢量。

利用无穷小应变张量，按照定义它的分量为

$$e_{ij}\equiv\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}). \qquad (2.3)$$

这时，在任一线元δx_i上真实变形的效应，是将其端点的相对位置改变了$e_{ij}\delta x_j$。转动不影响线元的长度，而新长度是

$$\begin{aligned}
&|\delta\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{u}|\\
&=(\delta\boldsymbol{x}\cdot\delta\boldsymbol{x}+2\,\delta\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{u})^{\frac{1}{2}} && (\text{略去 }\delta\boldsymbol{u}\cdot\delta\boldsymbol{u})\\
&=(\delta x_i\delta x_i+2\,e_{ij}\delta x_i\delta x_j)^{\frac{1}{2}} && \left(\begin{array}{l}\text{这是根据(2.2)，并利用}\\(\mathrm{curl}\boldsymbol{u}\times\delta\boldsymbol{x})\cdot\delta\boldsymbol{x}=0\end{array}\right)\\
&=|\delta\boldsymbol{x}|(1+e_{ij}\nu_i\nu_j),
\end{aligned}$$

其中ν是单位矢量$\delta\boldsymbol{x}/|\delta\boldsymbol{x}|$。于是，初始时在$\nu$方向的线元伸长应变是$e_{ij}\nu_i\nu_j$。

为了分析连续体内相邻质点间相互作用的内力，我们使用牵引力和应力张量概念。牵引力是个矢量，是作用于连续体内部某个面的单位面积上的力，数值上等于该面(单位面积)一边的质点作用于另一边质点的接触力。对于内部面上的一给定点，考虑作用于面上无穷小面积δS上的无穷小力$\delta\boldsymbol{F}$，并取当$\delta S\to 0$时$\delta\boldsymbol{F}/\delta S$的极限，我们把它定义为牵引力（参看图2.1)。关于面S的单位法线$\boldsymbol{n}$，我们采用惯例，即$\delta\boldsymbol{F}$具有从$\boldsymbol{n}$所指一边物质作用于$\boldsymbol{n}$所由伸出一边物质的力的方向；这个牵引力表示为$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$。所以，在液体中，压力是$-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$。对于固体，剪切力可以穿过内部面而起作用，所以，$\boldsymbol{T}$不一定平行于$\boldsymbol{n}$。此外，牵引力的大小

当●力为$+\vec{n}\cdot\vec{T}(\vec{n})$时，为张力，即拉力。
当力为$-\vec{n}\cdot\vec{T}(\vec{n})$时，为压力。

和方向依赖于承受接触力的面元 δS 的空间取向（但液体中某点的压力在所有方向上都一样）。为了理解某点的牵引力对空间取向的依赖关系，可考虑在房子外表面上的一点 P，如图 2.2 所示。对于在 P 点的墙面上的面积元，牵引力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}_1)$ 为零（忽略大气压和风）；但对于在 P 点的墙内水平面积元，牵引力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}_2)$ 可以很大。

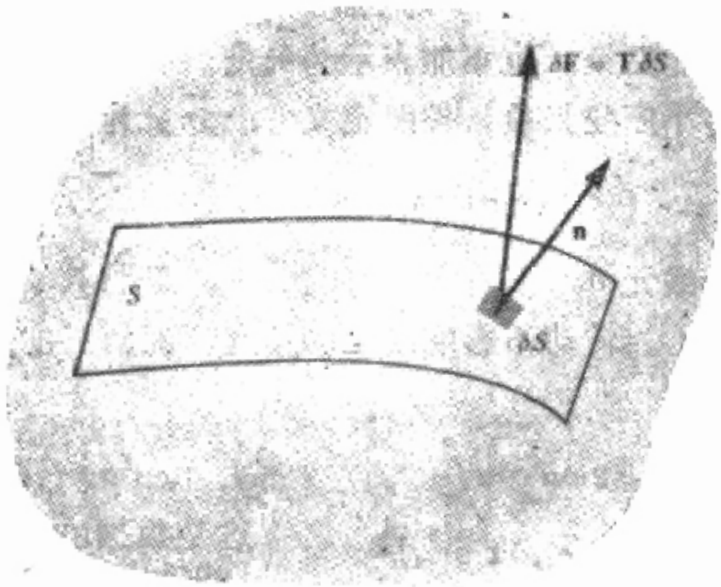


图 2.1

通过以 $\boldsymbol{n}$ 为法线的内部面 S 而作用于某点的牵引力 $\boldsymbol{T}$ 的定义。对于液体介质，压力应为 $-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}$

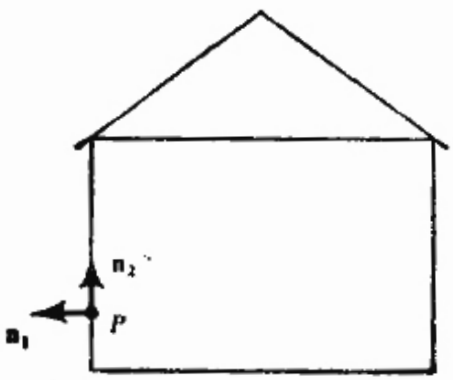


图 2.2

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}_1)\neq\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}_2)$

作用于固体或液体介质内质点上的力，不仅有相邻质点间的接触力，而且还有（i）不相邻质点间的力和（ii）由外部施加于介质本身的物理过程所产生的力。地球内质点间相互作用的引力，可以作为（i）类的例子。类型（ii）可用当一块磁铁在含铁介质外边移动时，它作用在掩藏于内部的铁质点的力来说明。我们把这些非接触力叫做体力，并用记号 $f(x,t)$ 表示作用于在某个参考时间处在初始位置 x 的单位体积质点的体力。考虑在 $x=\xi$ 和 $t=\tau$ 作用于特定质点的脉冲力，常常是很有用的。（如果这个力是在 x_n 轴方向，则 $f_i(x,t)$ 比例于三维的 Dirac 函数 $\delta(x-\xi)$，它规定着脉冲的空间位置；比例于一维的 Dirac 函数 $\delta(t-\tau)$，它规定着脉冲的时间；而且比例于 Kronecker 函数 δ_{in}，它表示方向性，即当 $i\neq n$ 时，$f_i=0$。因此，体力分布由下式给定：）

$$f_i(x,t)=A\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\delta_{in}, \tag{2.4}$$

其中 A 是给定脉冲强度的常数。注意 f_i，$\delta(x-\xi)$ 和 $\delta(t-\tau)$ 的量纲分别是单位体积的力，1/单位体积和 1/单位时间。Kronecker 函数是无量纲的，所以 A 就有着一个脉冲的正确物理量纲（力×时间）。）

现在我们可以讨论作用在具有表面 S 的整个体积 V 的加速度、体力和牵引力的约束条件了（图2.3）。V 的质点的动量变化率等于作用在这些质点的力。我们得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}dV=\iiint_V \boldsymbol{f}dV+\iint_S \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})dS. \tag{2.5}$$

这个关系是建立在 Lrgrange 描述基础上的，V 和 S 随质点一起移动。因为质点的质量 ρdV 不随时间改变，所以左边可写为 $\iiint_V \rho\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2}\right)dV$。

(2.5) 的第一个用途是得到函数关系 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ 的明确形式和引进应力张量。设介质内某一质点 P 的加速度、体力和牵引力，



图 2.3
以 S 为表面、体积为 V 的连续介质

都是非奇异的。用一小体积ΔV 包围这个质点。我们来考虑随着 ΔV 收缩至P，(2.5) 中三项的相对大小。体积分将具有 ΔV 的量级，而面积分具有在 ΔV 的表面所取的量级$\iint_S dS$。一般说，这个积分的量级为 $(\Delta V)^{2/3}$，比ΔV 趋于零要慢些。用$\iint dS$ 除 (2.5)，于是有

$$\frac{\left|\iint \boldsymbol{T} dS\right|}{\iint dS} = O(\Delta V^{1/3}) \to 0, \quad \text{当} \Delta V \to 0. \tag{2.6}$$

现在假定ΔV 是一圆盘，其相反两个面朝外的法线为 $\boldsymbol{n}$ 和$-\boldsymbol{n}$（见图 2.4），边缘的面积可以忽略。这时，方程 (2.6) 意味着下列结果：

$$\boldsymbol{T}(-\boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}). \tag{2.7}$$

然后，假定ΔV 是一个小四面体，它的三个面在坐标面内（见图 2.5），第四个面向外的法线为 $\boldsymbol{n}$。这时，方程 (2.6) 意味着，当 $\Delta V \to 0$ 时，有

$$\frac{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})ABC + \boldsymbol{T}(-\hat{x}_1)OBC + \boldsymbol{T}(-\hat{x}_2)OCA + \boldsymbol{T}(-\hat{x}^3)OAB}{ABC + OBC + OCA + OAB} \to 0, \tag{2.8}$$

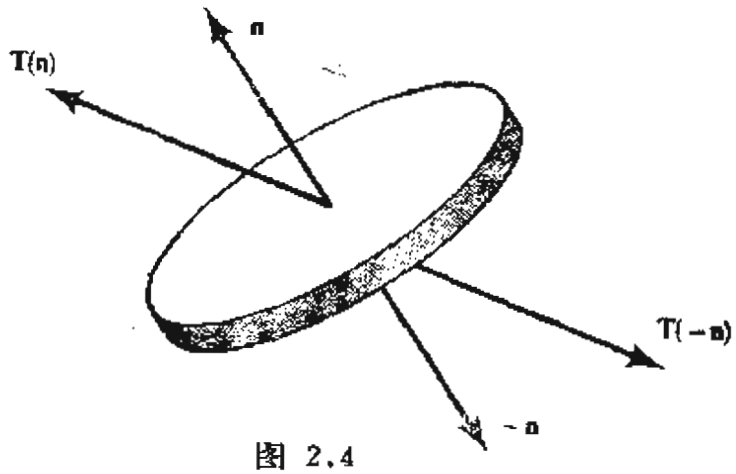


图 2.4
受有应力的介质内小圆盘

在这里 ABC 等符号代表三角形的面积。可以从几何上证明，n 的分量由 $(n_1,n_2,n_3)=(OBC,OCA,OAB)/ABC$ 给出。因此，(2.7) 和 (2.8) 给出

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})=\boldsymbol{T}(\hat{\boldsymbol{x}}_j)n_j, \tag{2.9}$$

这个牵引力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间的一个特殊而重要的关系式，是用作用于坐标面上的三个牵引力表示的。(2.7) 和 (2.9) 的性质对静态介质是无关紧要的，但我们已证明，即使在加速过程中，它们也是正确的。

应力张量是通过定义 9 个量

$$\tau_{kl}=T_l(\hat{\boldsymbol{x}}_k)$$

引进的，τ_{kl}是垂直于 k 轴的平面上的牵引力的 l 分量，它是由 x_k较大一边的物质作用于 x_k较小一边的物质而产生的。所以，

$$T_i=\tau_{ji}n_j, \tag{2.10}$$

(2.5) 的第二个用途是求一般质点的运动方程。应用(2.10)和Gauss散度定理，得

$$\iint_S T_i\,dS-\iint_S \tau_{ji}n_j\,dS=\iiint_V \tau_{ji,j}\,dV, \tag{2.11}$$

我们知道，对一般体积有

$$\iiint_V(\rho\ddot{u}_i-f_i-\tau_{ji,j})\,dV=0. \tag{2.12}$$

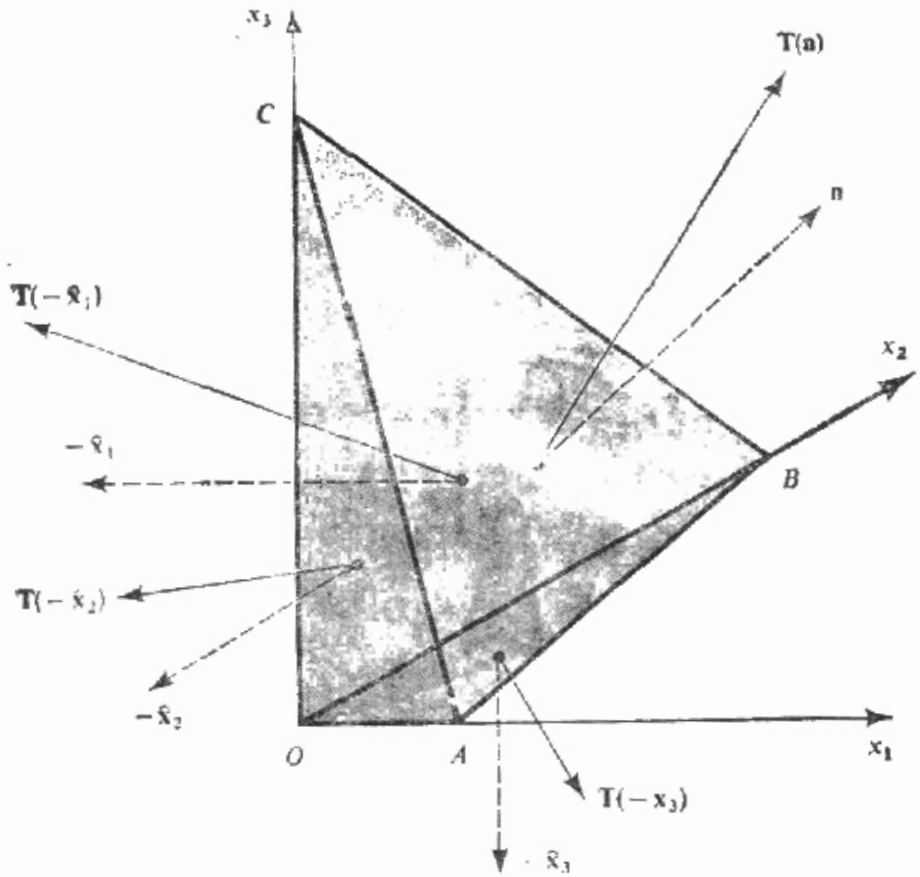


图 2.5

小四面体 $OABC$ 的三个平面在坐标面内，向外的法线为 $-\hat{x}_j(j=1,2,3)$，第四个面的法线为 n

这个被积函数必须在任何连续处都为零，否则，就会找到一个体积 V 违反 (2.12)，因此，

$$\rho\ddot{u}=f_i+\tau_{ji,j}, \tag{2.13}$$

这是我们的第一种形式的运动方程。

对运动力学的另一个约束是，使相对于坐标原点的角动量的变化率等于作用在 V 内质点上的力矩。于是

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \boldsymbol{X}\times\rho\dot{\boldsymbol{u}}\,dV=\iiint_V \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{f}dV+\iint_S \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{T}dS, \tag{2.14}$$

其中 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$。由于 $\partial\boldsymbol{x}/\partial t$，$\dot{\boldsymbol{u}}\times\dot{\boldsymbol{u}}$ 以及 $\partial(\rho dV)/\partial t$ 都是零，故左边为 $\iiint_V \boldsymbol{X}\times\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\,dV$。利用在补充 2.3 中发展的 (2.13) 的

严格解释，有

补充 2.3

Euler 还是 Lagrange?

仔细审查一下 Gauss 定理在 (2.11) 中的应用，就看到我们的 Lagrange 方法不适于 (2.11) 至 (2.13) 中的空间微分。一般说，在时间 t，构成 S 的那些质点已经移开了它们在参考时间 t_0 的位置，使得

$$\int_S\int \tau_{,i}n_i dS=\int_V\int\int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}}\tau_{,i}dV,$$

其中 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$，对 V 中的点在时间 t 必须进行的空间微分运算是 $\frac{\partial}{\partial X_i}$。因此，对于有限运动，连续体中的精确运动方程用我们的记号是

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i=f_i+\frac{\partial}{\partial X_j}\tau_{ji}. \qquad ((2.13)\text{的严格形式})$$

而 Euler 方法则把场变量直接作为 $\boldsymbol{X}$ 和 t 的函数进行讨论（取 $\boldsymbol{u}$ 为在 $\boldsymbol{X}$ 和 t 的质点，离开其在 t_0 时的位置 $\boldsymbol{x}$ 的位移），τ_{ji} 应是在 $(\boldsymbol{X},t)$ 的应力分量。这样做有个优点，使人能用独立变量进行演算，这些独立变量对解释运动方程的右边是很自然的。但它也有缺点，即在表示质点特性的变化率时，很繁。例如，在 $(\boldsymbol{X},t)$ 的质点速度 V 很难用位移场 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t)$ 来表示：设想在时间 δt 内走过的距离是

$$\boldsymbol{V}\delta t=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V}\delta t,\ t+\delta t)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X},t),$$

因而

$$U_i=\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)_{x\text{固定}}+U_j\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right)_{t\text{固定}},$$

这是个求解 $\boldsymbol{V}$ 的隐式方程（$\boldsymbol{V}$ 的分量出现在方程的两边），一旦质点速度求出，则在 $(\boldsymbol{X},t)$ 处的加速度由导数 $\partial\boldsymbol{V}/\partial t+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$ 所决定。

在地震学中，Lagrange 方法和 Euler 方法间的区别，很少需要去考虑，因为位移、应变、加速度和应力的空间起伏的波长远远大于质点位移的幅度。在此情况下，究竟是在固定位置上（Euler 方法）还是对于特定质点（Lagrange 方法）来求空间梯度，并无实际差别。我们愿意着重于 Lagrange 方法，部分原因是，这样做使质点速度和

质点位移间的关系简单一些，$V=\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$。在流体力学中，将质点位移作为场变量兴趣不大，所以 Euler 方法比较有用。

最后要说明，“Euler 方法”和“Lagrange 方法”都是由 Leonhard Euler 发展起来的。

$$\iiint_V e_{ijk}X_j\frac{\partial}{\partial X_l}\tau_{lk}dV=\iiint_V e_{ijk}X_j(\rho i j_k-f_k)dV$$

$$=\iint_S e_{ijk}X_jT_kdS \qquad (据(2.14))$$

$$=\iint_S e_{ijk}X_j\tau_{lk}n_ldS. \qquad (据(2.10))$$

将散度定理应用于这个面积分，并利用 $\partial X_j/\partial X_l=\delta_{jl}$，我们得到，对任何体积 V 都有

$$\iiint_V e_{ijk}\tau_{jk}dV=0,$$

这意味着处处有 $e_{ijk}\tau_{jk}=0$，因此，应力张量是对称的，

$$\tau_{kj}=\tau_{jk}. \qquad (2.15)$$

用这个基本结果，我们可把牵引力分量的公式最后表述为

$$T_i=\tau_{ij}n_j, \qquad (2.16)$$

而运动方程为

$$\rho\ddot{u}_i=f_i+\tau_{ij,j}. \qquad (2.17)$$

这里的空间微商应当对于 X_j 进行，但（如在补充 2.3 中所讨论的）对于 X_j 的微商，在地震学中通常是足够的，所以，以后我们就这样假定。

2.2 应力-应变关系和应变能函数

如果一种介质具有自然状态（应变和应力都为零），并且当取消施加的力时，它将恢复到这种状态，我们就说它是弹性的。在加载影响下，应力和应变一起变化，而它们之间的关系——本构

关系，是介质的一个重要特征。下面我们用热力学论据证明这一关系的存在。这个关系本身，是可以用实验测定的，三百多年前Robert Hooke的“弹性物体”测量，曾导致他得出应力正比于应变的结论。他关于这个问题的提法有点含混不清，因为牵引力和张量的现代概念那时还不存在。在十九世纪初期，Augustin Cauchy第一个发展了我们现代关于牵引力的许多概念，显然他理解许多今天用张量比较容易表达的结果。直到本世纪，张量才普遍应用。Hooke定律的现代推广是，应力张量的每个分量是应变张量的所有分量的线性组合，即存在常数 c_{ijkl}，使得有

$$\tau_{ij}=c_{ijpq}e_{pq}. \tag{2.18}$$

遵从本构关系（2.18）的物体，叫做线性弹性体。量 C_{ijkl} 是四阶张量的分量，并有对称性：

$$c_{jipq}=c_{ijpq} \quad (\text{因为 } \tau_{ji}=\tau_{ij}), \tag{2.19}$$

$$c_{ijqp}=c_{ijpq} \quad (\text{因为 } e_{qp}=e_{pq}). \tag{2.20}$$

根据热力学论据，$c_{pqij}=c_{ijpq}$ 也是正确的，我们现在来证明。

设想一弹性体具有以 S 为表面的体积 V。热力学第一定律说，物体具有的内能可以随物体的变形而改变，能量平衡为

做机械功的速率＋加热的速率＝(运动能＋内能）增加的速率. (2.21)

让我们把每一项都分开来进行分析。

(1) 机械功的速率由下式给出：

$$\iiint_V \boldsymbol{f}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,dV+\iint_S \boldsymbol{T}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\,dS$$

$$=\iiint_V [f_i\dot{u}_i+(\tau_{ij}\dot{u}_i)_{,j}]dV$$

[据 (2.16) 和Gauss 散度定理]

$$=\iiint_V (\rho\dot{u}_i\ddot{u}_i+\tau_{ij}\dot{u}_{i,j})dV \quad [\text{据}(2.17)]$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{1}{2}\rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV + \iiint_V \tau_{ij}\dot{e}_{ij}dV$$

（根据 τ_{ij} 和 e_{ij} 对称）. (2.22)

(2) 令 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},t)$ 为热流，于是 $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}$ 是沿 $\boldsymbol{n}$ 方向通过垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的面积元的热传导（每单位面积）速率。令每单位体积的热量输入为 $\mathscr{Q}=\mathscr{Q}(\boldsymbol{x},t)$，这时，加热的速率由下式给出

$$-\iint_S \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}dS=\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \mathscr{Q}dV, \tag{2.23}$$

并且显然 $\dot{\mathscr{Q}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{h}$。

(3) 运动能增加的速率由下式给出：

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{1}{2}\rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV. \tag{2.24}$$

(4) 令 $\mathscr{U}$ 为每单位体积的内能。根据 (2.21) 至 (2.24)，我们得到

$$\dot{\mathscr{U}}=-h_{i,i}+\tau_{ij}\dot{e}_{ij},$$

或

$$\dot{\mathscr{U}}=\dot{\mathscr{Q}}+\tau_{ij}\dot{e}_{ij}. \tag{2.25}$$

如果 $\mathscr{U}$，$\mathscr{Q}$ 和 e_{ij} 是作为偏离于热力学平衡态的小扰动而测量的，则 (2.25) 等效于

$$\begin{aligned} d\mathscr{U} &= d\mathscr{Q}+\tau_{ij}de_{ij} \\ &= \mathscr{T}d\mathscr{S}+\tau_{ij}de_{ij} \text{（对可逆过程）}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

其中 $\mathscr{S}$ 是单位体积的熵，$\mathscr{T}$ 是绝对温度。方程 (2.26) 意味着，熵和应变分量是用以完全而唯一地确定内能的状态变量。特别是，内能不依赖于应变随时间变化的历史。

有时利用应变分量的函数 $\mathscr{W}$，是有益的。在这种情况下，应力为

$$\tau_{ij}=\frac{\partial \mathscr{W}}{\partial e_{ij}}. \tag{2.27}$$

具有这种性质的函数，叫做应变能函数。根据 (2.26)，可写出形式结果

$$\tau_{ij}=\left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial e_{ij}}\right)_{\mathscr{S}}. \tag{2.28}$$

等式 $\tau_{ij}=(\partial \mathscr{F}/\partial e_{ij})_{\mathscr{S}}$ 也是正确的，其中 $\mathscr{F}=\mathscr{U}-\mathscr{T}\mathscr{S}$ 是单位体积的自由能（$d\mathscr{F}=-\mathscr{S}d\mathscr{T}+\tau_{ij}de_{ij}$）。如果变形过程发生得很慢，可以作为恒温过程，就象在某些构造过程中那样，则由自由能的变化形成 τ_{ij} 是很自然的。这时可以选取 $\mathscr{W}=\mathscr{F}$。

但是，如果变形过程是个绝热过程，使得 $h=0$ 和 $\dot{\mathscr{Q}}=0$，则伴随有应变变化的实际 $\mathscr{U}$ 变化，发生在恒熵下，这样我们就可以选取 $\mathscr{W}=\mathscr{U}$，并应用（2.28）。这通常是地震学中对于所有大于几毫米的波长的情形，因为这时岩石热扩散的时间常数（距离^2/扩散系数）比地震波的周期（波长/速度）长得多。若不另外加以说明，我们总是假定绝热条件，以使应变能函数的存在得到保证。

把应变能函数的性质同 Hooke 定律结合起来，我们求得

$$\frac{\partial \mathscr{W}}{\partial e_{ij}}=\tau_{ij}=c_{ijpq}e_{pq}, \tag{2.29}$$

它意味着

$$c_{pqij}=c_{ijpq} \qquad \left(据\frac{\partial^2 \mathscr{W}}{\partial e_{ij}\partial e_{pq}}=\frac{\partial^2 \mathscr{W}}{\partial e_{pq}\partial e_{ij}}\right). \tag{2.30}$$

由于 $\mathscr{W}$ 的所有一次微商都是应变分量的（一阶）齐次方程，并且可以把自然状态的 $\mathscr{W}$ 取为零，所以，$\mathscr{W}$ 本身一定是下列形式的（二阶）齐次方程

$$\mathscr{W}=d_{ijpq}e_{ij}e_{pq}. \tag{2.31}$$

这个二次方程同 $\frac{1}{2}(d_{ijpq}+d_{pqij})e_{ij}e_{pq}$ 是一样的，但是给出 τ_{ij} 的（2.31）的微商表明，$(d_{ijpq}+d_{pqij})=c_{ijpq}$，因此，严格讲，应变能函数为

$$\mathscr{W}=\frac{1}{2}c_{ijkl}e_{ij}e_{kl}=\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}. \tag{2.32}$$

在绝热和恒温条件下，除自然状态（此时$\mathscr{W}=0$）外，应变能函数是正的，因而$\frac{1}{2}c_{ijkl}e_{ij}e_{kl}$是个正的有界二次式（由于我们假定自然状态是稳定的，所以$\mathscr{W}\geqslant 0$）。

c_{ijkl}与应变无关，这就是它们被叫做"弹性常数"的原因，但事实上它们是地球中位置的函数。地震学中所用的弹性理论，在很大程度上讨论的是非均匀介质，尤其是各向同性的球对称介质。一般说，(2.19)、(2.20) 和 (2.30)的对称性，把独立分量c_{ijkl}的数目由 81 个减少到 21 个。在各向同性介质情况下，因为$\mathbf{c}$必定是各向同性的，所以，情形大大简化。可以证明 (Jeffreys and Jeffreys, 1972)，具有像$\mathbf{c}$这样对称性的最一般各向同性四阶张量有下列形式：

$$c_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}). \tag{2.33}$$

它只包含两个叫做 Lamé 常数的独立常数 λ 和 μ。

须注意，我们在本节所得的结果，是限定在偏离于应变和应力都为零的参考态的小扰动的情况。在地球内部，自身重力造成的压力高达一百万巴左右。即使假定地球物质处于零应变和零应力状态，由于这个压力产生的应变不是小量，所以，本节的结果也不能直接应用于地震学。使用这个参考态时，必须用应力-应变为非线性关系的有限应变理论进行研究。另外一个办法就是选取地震前的静态平衡形状为参考态，这是地震学中常用的做法。按照定义，参考态是零应变态，但现在初始应力不是零，并且用应变和应力增量之间的线性关系来研究地震运动。所以，应力在零应变时为$\boldsymbol{\sigma}^0$，在非零应变时为$\boldsymbol{\sigma}^0+\boldsymbol{\tau}$，其中$\tau_{ij}=c_{ijkl}e_{kl}$，$\sigma^0_{ij}$可以具有与分量$c_{ijkl}$相同的数量级(约一百万巴)。

现在，我们继续忽略初始应力$\boldsymbol{\sigma}^0$的影响。这个简化的正确性在第八章进行证明，在那里正确地考虑了初始应力并简要评述了需要修正的理论问题（见补充 8.5）。为定量表示自身重力的效应，在第八章我们将采用 Euler 方法。

2.3 唯一性定理和互易性定理

很自然，我们要转入唯一性讨论(对于以 V 为体积、以 S 为表面的物体内位移场 u) 和关于可以引起运动的方法的某些一般说明。由于位移在体积 V 内必须满足(2.17)，所以施加的体力将引起位移场，正如施加在表面 S 上的牵引力将引起位移场一样。我们要证明，给定 V 内的体力和整个 S 上的牵引力，便足以唯一地确定将在 V 内由给定的初始条件所发展起来的位移场。另一种方法来给定 S 对位移的影响是给定 (S 上) 位移本身而不是牵引力的边界条件。例如，S 可以是刚性的。首先，S 上的牵引力和 S 上的位移，看来似乎是 V 内位移场的两种独立的性质，其实不然。为了直观地理解 2.3 节至 2.5 节，重要的是能够理解，S 上的牵引力决定 S 上的位移，反之亦然。

唯一性定理

在时间 t_0 之后，以 S 为表面的体积 V 内的位移 $u=u(x,t)$，由 V 内 t_0 时质点的初始位移和速度值，以及所有 $t\geqslant t_0$ 时的 (i)施加于整个 V 上的体力 f 和热 Q；(ii)S 的任一部分 S_1 上的牵引力 T 和(iii)S的其余部分 $S_2=S-S_1$ 上的位移 (S_1或 S_2 都可以是整个 S)的数值，唯一地确定。

证明

设 u_1 和 u_2 是满足同样初始条件、并由同样 (i)—(iii)的值引起的 u 的任意解，则 $U=u_1-u_2$ 是有零初始条件，由零体力、零供热、S_1 上零牵引力和 S_2 上 $U=0$ 所引起的位移。剩下的就是证明，对于 $t>t_0$，在整个体积 V 内，有 $U=0$。

在 $t\geqslant t_0$ 时，对 V，S_1 和 S_2 所做机械功的速率显然为零(见(2.22))。(2.22) 的第三个等式可以从 t_0 积分到 t，初始条件为零，并利用应变能函数(U 涉及绝热变化)，于是有

$$\iiint_V \frac{1}{2}\rho \dot{U}_i \dot{U}_i dV + \iiint_V \frac{1}{2} c_{ijkl} U_{i,j} U_{k,l} dV = 0 .$$

运动能和应变能都是正的有限值，所以，对于 $t \geqslant t_0$ 有 $\dot{U}_i = 0$，但在 $t = t_0$ 时有 $U_i = 0$，故对于 $t \geqslant t_0$ 的整个体积 V 有 $U_i = 0$。

补充 2.4

"齐次的"一词的用法，它对方程和边界条件的应用

弹性位移方程是 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$，其中 $\boldsymbol{L}$ 是对于 $\boldsymbol{u}$ 的分量的矢量微分算子：

$$(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}))_i \equiv \rho \ddot{u}_i - (c_{ijkl} u_{k,l})_{,j} .$$

如果体力不存在，则 $\boldsymbol{u}$ 的方程 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}) = 0$ 叫做齐次的。表面 S 上的齐次边界条件是指，或是位移，或是牵引力，在表面的每一点上都是零。

这个术语使人联想起，线性代数中，含有 n 个未知数的一组 n 个方程的形式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$，也叫做齐次的。这里 $\boldsymbol{x}$ 是列向量，$\boldsymbol{A}$ 是 $n \times n$ 矩阵。大家知道，非平凡解($\boldsymbol{x} \neq 0$)可以存在，但仅仅是当 $\boldsymbol{A}$ 有特殊性质时(即零行列式)。相应的动力弹性学结果是，运动可以在不受体力、并在 V 表面具有齐次边条件的有限弹性体 V 内发生。这就是物体的自由振荡或简正振型，它们只能发生在一定频率上。详见第八章。

互易性定理

我们来叙述并证明弹性体 V 中位移的一对解之间的几个一般关系。

假定 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ 是这些位移场中的一个，并且 $\boldsymbol{u}$ 是由体力 $\boldsymbol{f}$ 和 S 上的边界条件以及 $t = 0$ 时的初始条件所造成的。令 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ 是由体力 $\boldsymbol{g}$ 和一般来说与 $\boldsymbol{u}$ 的条件不同的边界条件和初始条件(在 $t = 0$)造成的另一个位移场。为区分这两种情况下垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的表面上的牵引力，我们用符号 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{n})$ 表示相应于位移 $\boldsymbol{u}$ 的牵引力，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ 表示相应于位移 $\boldsymbol{v}$ 的牵引力。

首先要写出的 u 和 v 之间的互易关系是

$$\iiint_V (f-\rho\ddot{u})\cdot v\,dV+\iint_S T(u,n)\cdot v\,dS$$

$$=\iiint_V (g-\rho\ddot{v})\cdot u\,dV+\iint_S T(v,n)\cdot u\,dS. \qquad (2.34)$$

这个结果是 Betti 给出的。它可以很容易证明。将(2.17)和(2.16)代入，然后应用散度定理，把左边变为 $\iiint_V c_{ijkl}v_{i,j}u_{k,l}dV$，同样，把右边变为 $\iiint_V c_{ijkl}u_{i,j}v_{k,l}dV$，根据对称性 $c_{ijkl}=c_{klij}$，(2.34)成立。

注意，Betti 定理不涉及 u 或 v 的初始条件。而且，即使 u，$\ddot{u}$，$T(u,n)$和 f 是在 t_1 时赋值，而 v，$\ddot{v}$，$T(v,n)$和 g 是在 t_2 时赋值，它仍然是对的。如果我们选取 $t_1=t$ 和 $t_2=\tau-t$，并且在时间范围 0 至 τ 上对(2.34)进行积分，则加速度项变为只依赖于初值和终值的项，因为

$$\int_0^\tau \rho\{\ddot{u}(t)\cdot v(\tau-t)-u(t)\cdot\ddot{v}(\tau-t)\}dt$$

$$=\rho\int_0^\tau \frac{\partial}{\partial t}\{\dot{u}(t)\cdot v(\tau-t)+u(t)\cdot\dot{v}(\tau-t)\}dt$$

$$=\rho\{\dot{u}(\tau)\cdot v(0)-\dot{u}(0)\cdot v(\tau)+u(\tau)\cdot\dot{v}(0)-u(0)\cdot\dot{v}(\tau).$$

如果在某个时间 τ_0 之前，u 和 v 在整个 V 内处处为零(因而对于 $\tau\leqslant\tau_0$，也有 $\dot{u}=\dot{v}=0$)，那么，褶积

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho[\ddot{u}(t)v(\tau-t)-u(t)\ddot{v}(\tau-t)]dt$$

为零。对于其过去为静止的位移场，我们就由 Betti 定理推出一个重要结果，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\iiint_V\{u(x,t)\cdot g(x,\tau-t)-v(x,\tau-t)\cdot f(x,t)dV$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dt\iint_{S}\{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau-t)\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),\boldsymbol{n})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tau-t),\boldsymbol{n})\}dS. \tag{2.35}$$

补充 2.5

对比

重新整理 Betti 关系式(2.34)，给出

$$\iiint_{V}[v_i(c_{ijkl}u_{k,l})_{,j}-u_i(c_{ijkl}v_{k,l})_{,j}]dV$$

$$=\iint_{S}[v_iT_i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{n})-u_iT_i(\boldsymbol{v},\boldsymbol{n})]ds,$$

这是弹性波动方程中二次空间微商的向量定理，它类似于对于标量和 Laplace 算符的 Green 定理

$$\iiint_{V}(\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi)\,dV=\iint_{S}(\psi\frac{\partial\phi}{\partial\eta}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial\eta})dS.$$

Green 定理是研究象 $\nabla^2\phi=-4\pi\rho$ 这类非齐次方程的工具。我们将利用 Betti 定理研究弹性波动方程，其中的非齐次性是体力项。

在 Dirichlet 问题(S 上的势为零)与具有刚性边界的弹性问题之间，以及 Neumann 问题(S上的$\frac{\partial\phi}{\partial n}$为零) 与无牵引力的边界之间，有许多更进一步的类似处。

2.4 把 Green 函数引入弹性动力学

本章和下一章的主要目的是，逐步给出典型地出现于地震学中的位移表示式。这种表示式就是用引起运动的量来表示(在空间和时间的一般点上)位移的公式，并且(在唯一性定理中)我们已经看到，这些量是体力和施加于所讨论弹性体表面的牵引力或位移。对于地震断裂，震源的复杂性在于，它展布在有限的断层面(或有限的体积)和有限的时间上，并且一般说来，它引起的(在震源处)运动有着变化的方向和强度。我们将发现，表示定理其实只不过

是一种记帐的方法，用这种方法，实际震源模型引起的位移，是由最简单的震源所产生的位移综合而成的，这个震源就是精确地集中在一定的空间和时间上的单一方向单位脉冲。

这种简单源引起的位移场，是弹性动力学的 Green 函数。如果单位脉冲施加于 $x=\xi$，$t=\tau$ 和 n 方向（见 (2.4)，取 $A=$ 具有脉冲量纲的单位常数），则我们用 $G_{in}(x,t;\xi,\tau)$ 表示在一般点 (x,t) 的位移的第 i 个分量。显然，这个 Green 函数是张量（我们将始终用笛卡尔张量进行演算，因此不去区分张量与并矢），它依赖于接收点和源点的坐标，并在整个 V 内满足

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_{in}=\delta_{in}\delta(x-\xi)\,\delta(t-\tau)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_l}G_{kn}\right). \tag{2.36}$$

我们将一律采用下列初始条件，即对于 $t\leqslant\tau$ 和 $x\fallingdotseq\xi$ 时，$G(x,t;\xi,\tau)$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}G(x,t;\xi,\tau)$ 为零。要唯一地规定 G，还得说明 S 上的边界条件。在不同的应用中，我们将利用各种不同的边界条件。

如果边界条件不依赖于时间（例如 S 总是刚性的），则时间原点可以任意移动。由(2.36) 我们看到，G 只通过组合 $t-\tau$ 而依赖于 t 和 τ。所以

$$G(x,t;\xi,\tau)=G(x,t-\tau;\xi,0)=G(x,-\tau;\xi,-t), \tag{2.37}$$

这是对于源点和接收点时间的互易关系。

如果 G 满足 S 上的齐次边界条件，则 (2.35) 可用来得到对于源点和接收点位置的重要互易关系。取 f 为在 $x=\xi_1$ 和 $t=\tau_1$ 施加于 m 方向的单位脉冲，g 为在 $x=\xi_2$ 和 $t=\tau_2$ 施加于 n 方向的单位脉冲，则 $u_i=G_{im}(x,t;\xi_1,\tau_1)$，$v_i=G_{in}(x,t;\xi_2,\tau_2)$，于是，(2.35)直接给出

$$G_{nm}(\xi_2,\tau+\tau_2;\xi_1,\tau_1)=G_{mn}(\xi_1,\tau-\tau_1;\xi_2,-\tau_2). \tag{2.38}$$

选取 $\tau_1=\tau_2=0$，它变为

$$G_{nm}(\xi_2,\tau;\xi_1,0)=G_{mn}(\xi_1,\tau;\xi_2,0), \tag{2.39}$$

这规定着一个纯粹空间的互易性。取 (2.38) 中的 $\tau=0$，就得到

$$G_{nm}(\xi_2,\tau_2;\xi_1,\tau_1)=G_{mn}(\xi_1,-\tau_1;\xi_2,-\tau_2), \tag{2.40}$$

这规定着一个空间-时间互易性。

弹性动力学 Green 函数的实际计算，本身可以是个很复杂的问题。我们将在第四章对于最简单的弹性体（均匀、无限、各向同性），以及对于非均匀介质中源点和接收点相距很远的情况，处理这个问题。

2.5 表示定理

如果把 Betti 定理的积分形式(2.35)，以 Green 函数应用于一个位移场，则另一个位移场的表示式就可以得到。

特别是，假定我们的兴趣是求由 V 内的体力 f 和 S 上的边界条件共同引起的位移 u 的表达式。将体力 $g_i(x,t)=\delta_{in}\delta(x-\xi)\delta(t)$ 代入(2.35)，这个体力的相应解是 $v_i(x,t)=G_{in}(x,t;\xi,0)$，于是得出

$$\begin{aligned}u_n(\xi,\tau)=&\int_{-\infty}^{\infty}dt\iiint_V f_i(x,t)G_{in}(x,\tau-t;\xi,0)\,dV\\&+\int_{-\infty}^{\infty}dt\iint_S\{G_{in}(x,\tau-t;\xi,0)T_i(u(x,t),n)\\&-u_i(x,t)c_{ijkl}n_jG_{kn,l}(x,\tau-t;\xi,0)\}\,dS.\end{aligned}$$

在给出该式的物理解释之前，将 x 和 ξ 以及 t 和 τ 的符号进行互换是有帮助的。这允许将 (x,t) 看做是需要求位移值的一般位置和时间，而这个位移值可看作是以 ξ 为变数的体积分和面积分与时间的褶积。结果是：

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V f_i(\xi,\tau)G_{in}(\xi,t-\tau;x,0)\,dV(\xi)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_S\{G_{in}(\xi,t-\tau;x,0)T_i(u(\xi,\tau),n)$$
$$-u_i(\xi,\tau)c_{ijkl}(\xi)n_jG_{kn,l}(\xi,t-\tau;x'0)\}dS(\xi).$$
(2.41)

这是我们的第一个表示定理。它阐述了在某点的位移 u，是由于体力 f 在整个 V 内的贡献，加上牵引力 $T(u,n)$ 和位移 u 本身在 S 上的贡献。但是，这三个贡献中的每一个进行加权的方法是不能令人满意的，因为每一个都含有源点在 x 而观测点在 ξ 的 Green 函数（注意（2.41）的最后一项包含对 ξ_i 的微商）。我们要 x 作为观测点，使得在此处得到的总位移，可看作每个体元和面元的贡献在 x 处所引起的位移的和(积分)。这就必须要援引 G 的互易性定理，但这将要求关于 Green 函数本身的另外条件，因为方程 $G_{in}(\xi,\ t-\tau;\ x,\ 0)=G_{ni}(x,\ t-\tau;\ \xi,\ 0)$只当 G 满足 S 上的齐次边界条件时才证明过，但是，(2.41)对于由 $\xi=x$ 和 $t=\tau$ 处沿 n 方向的脉冲力引起的任意 Green 函数都成立。

我们来考查两种不同的情况。第一种，假定 Green 函数以 S 作为刚性边界来确定。我们把该函数写为 $G^{刚性}$，对于 S 上的 ξ 有 $G_{in}^{刚性}(\xi,\ t-\tau;\ x,\ 0)=0$。于是（2.41）变为

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V f_i(\xi,\ \tau)G_{ni}^{刚性}(x,t-\tau;\xi,0)\,dV$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_S u_i(\xi,\tau)c_{ijkl}n_j\frac{\partial}{\partial\xi_l}G_{nk}^{刚性}(x,t$$
$$-\tau;\xi,0)\,dS.$$
(2.42)

另一种，我们可用 $G^{无}$ 作为 Green 函数，它使 S 上 ξ 处的牵引力 $c_{ijkl}n_j\frac{\partial}{\partial\xi_l}G_{kn}^{无}(\xi,t-\tau;x,0)$为零，于是得

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V f_i(\xi,\tau)G^{无}_{ni}(x,t-\tau;\xi,0)dV$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_S G^{无}_{ni}(x,t-\tau;\xi,0)T_i(u(\xi,\tau),n)dS。$$

(2.43)

式(2.41)—(2.43)都是表示定理的不同形式，每个有其特殊用途。把它们放在一起看，似乎含有矛盾，就是，到底 $u(x,t)$ 依赖于 S 上的位移（见(2.42)），还是依赖于牵引力(见(2.43))？还是两者都依赖？然而，既然牵引力和位移不能在弹性体表面上独立地规定出来，所以并无矛盾。

本章中，对其上面的牵引力（或位移）值有明确要求的表面，被取作体积 V 的外表面。取此面包括两个相邻的内表面作为一个掩埋断层的相对两面，常常是有用的。这时，可将表示定理写成特殊形式，使得能分析由掩埋断层的活动所产生的地震。这个问题是震源理论的核心，将在下章讨论。

到目前为止，我们只考虑了笛卡尔坐标系。实际上，常常要求地震学家根据特定问题的几何形状利用不同的坐标系，使位移、应力和应变的分量之间的关系简化。我们这样做是因为常常发现某边界条件一定适用于选取某一曲线坐标为常数的表面。在许多教科书中，对于一般正交系，推导了矢量运算梯度、散度、旋度和 ∇^2，但是为分析弹性中所要求的矢量运算，需要更多的东西。

补充 2.6

正交曲线坐标的一般性质

设在矢量位置 x 的某点由三个参数 c^1、c^2 和 c^3 来规定，即 x（在某个笛卡尔坐标系中）的三个分量的每一个都是 c^r 的标量函数，

$$x_i=x_i(c^1,\ c^2,\ c^3)\qquad(i=1,\ 2,\ 3).$$

我们假定这些函数 x_i 有连续微商，并存在反函数

$$c^p=c^p(x_1,\ x_2,\ x_3)\qquad(p=1,\ 2,\ 3).$$

或 $$c^p=c^p(x),$$

使得对于每个 p，都可把方程 $c^p=$常数看作一个坐标面，并且在这三个面的各交线上，c^1，c^2，c^3 中只有一个是变化的。我们用上标代表做为一般曲线坐标的量。

令 n^p 为坐标面 $c^p=$常数的单位法线，假定 x 和 $x+dx$ 都位于该面上。则有 $c^p(x)=c^p(x+dx)$，因此，利用 $c^p(x+dx)$的 Taylor 展开，有 $dx\cdot\nabla c^p=0$。因为 dx 是该面内的任一线元，所以 ∇c^p 是 $c^p=$常数的法线，从而 ∇c^p 一定平行于 n^p。

令矢量 ∇c^p 的长度为 $1/h^p$（一个标量因子），则

$$n^p=h^p\nabla c^p. \tag{1}$$

（我们对于上标不再采用求和惯例，但对于脚标仍照例，因为它们同最初的笛卡尔坐标系有关。）

假定 c^1，c^2，c^3 组成一右手正交坐标系，即

$$n^p n^q=\delta^{pq} \qquad \text{(Kronecker } \delta \text{ 函数)} \tag{2}$$

和

$$n^3=n^1\times n^2.$$

用 n_i^p 表示 n^p 的第 i 个分量，我们现在可以得到一个重要的 n^p 和 $\partial x/\partial c^p$ 之间的关系如下：

$$n^p=n_i^p\hat{x}_i=n_i^p\frac{\partial x}{\partial x_i}=\sum_q n_i^p\frac{\partial x}{\partial c^q}\frac{\partial c^q}{\partial x_i} \qquad \text{(链规则)}$$

$$=\sum_q n_i^p\frac{n_i^q}{h^q}\frac{\partial x}{\partial c^q} \qquad \text{(根据(1))}$$

$$=\sum_q\frac{\delta^{pq}}{h^q}\frac{\partial x}{\partial c^q}, \qquad \text{(根据(2))}$$

因此有

$$n^p=\frac{1}{h^p}\frac{\partial x}{\partial c^p}. \tag{3}$$

位置的微小变化 dx 同每个坐标 c^1，c^2，c^3 的微小变化的关系为 $dx=\sum_p(\partial x/\partial c^p)dc^p$，此变量的大小由下式给出：

$$(dS)^2=dx\cdot dx=\sum_p\frac{\partial x}{\partial c^p}dc^p\cdot\sum_q\frac{\partial x}{\partial c^q}dc^q$$

$$=(h^1dc^1)^2+(h^2dc^2)^2+(h^3dc^3)^2 \quad \text{(据(3)和(2))}. \tag{4}$$

此结果导致实际求标量函数的一个最快方法：与沿 n^1 的增量 dc^1 有关

的 Euclid 距离为 h^1dc^1；对于 h^2 和 h^3，也类同。

在 2.6 节，我们需要以未经求微分的法线表示 $\partial n^p/\partial c^q$ 类型微商的公式。根据(2)和(3)，必须满足的方程为

$$n^p\frac{\partial n^q}{\partial c^r}+n^q\frac{\partial n^r}{\partial c^r}=0 \quad (18\text{ 个不同的标量方程}) \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial c^q}(h^p n^p)=\frac{\partial}{\partial c^q}(h^q n^q) \quad (3\text{ 个非平凡矢量方程}).$$

上面是对于 27 个未知标量 $\partial n^p/\partial c^q$ 的 27 个不同的标量方程，因此，正好足以确定解答。这个解的矢量形式为

$$\frac{\partial n^p}{\partial c^q}=\frac{n^q}{h^p}\frac{\partial h^q}{\partial c^p}-\delta^{pq}\left[\frac{n^1}{h^1}\frac{\partial h^p}{\partial c^1}+\frac{n^2}{h^2}\frac{\partial h^p}{\partial c^2}+\frac{n^3}{h^3}\frac{\partial h^p}{\partial c^3}\right], \tag{6}$$

将它直接代回(5)式，便可证明。

2.6 一般正交曲线坐标中的应变-位移关系和位移-应力关系

继续用补充 2.6 中发展的符号，我们首先要求出应变分量 e^{pq} 和位移分量 u^r 之间的关系，这个关系是通常笛卡尔结果 $e_{ij}=\frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)$ 的推广。所谓 e^{pq}，我们仅仅是指与经过旋转的笛卡尔轴有关的笛卡尔二阶张量 $\boldsymbol{e}$ 的分量，笛卡尔轴（在有关点上）是沿 $\boldsymbol{n}^1$，$\boldsymbol{n}^2$，$\boldsymbol{n}^3$ 方向确定的。因此，我们强调的是应变的物理分量，而不是一般的张量分量（它们甚至可能不具有应变的量纲）。我们的问题是利用也沿 $\boldsymbol{n}^1$，$\boldsymbol{n}^2$，$\boldsymbol{n}^3$ 分解的位移的物理分量的微商（对 c^1，c^2，c^3 取微商）来表示 e^{pq}：出现的困难是由于(a)标度函数 h^1，h^2，h^3 的空间变化和(b)方向 $\boldsymbol{n}^1$，$\boldsymbol{n}^2$，$\boldsymbol{n}^3$ 的空间变化造成的。

旋转后沿 $\boldsymbol{n}^p$ 的笛卡尔轴，相对于笛卡尔轴 x_1，x_2，x_3（它们在任一点都指向同样的固定方向）的方向余弦是 (n_1^p, n_2^p, n_3^p)。因此，由笛卡尔矢量和张量的分量的基本变换性质，有

$$u^p=n_i^p u_i, \qquad \text{(对重复脚标求和)} \tag{2.44}$$

$$e^{pq}=n_i^p n_j^q e_{ij}$$

$$=\frac{1}{h^p h^q}\frac{\partial x_i}{\partial c^p}\frac{\partial x_j}{\partial c^q}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

（根据补充 2.6 中的(3)；对上标不求和）

$$=\frac{1}{2\,h^p h^q}\left(\frac{\partial x_i}{\partial c^p}\frac{\partial u_i}{\partial c^q}+\frac{\partial x_i}{\partial c^q}\frac{\partial u_i}{\partial c^p}\right)$$

（前一行中链规则的逆运算）

$$=\frac{1}{2\,h^q}\left[\frac{\partial}{\partial c^q}\left(\frac{u_i}{h^p}\frac{\partial x_i}{\partial c^p}\right)-u_i\frac{\partial}{\partial C^q}\left(\frac{1}{h^p}\frac{\partial x_i}{\partial c^p}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2\,h^p}\left[\frac{\partial}{\partial c^p}\left(\frac{u_i}{h^q}\frac{\partial x_i}{\partial c^q}\right)-u_i\frac{\partial}{\partial c^p}\left(\frac{1}{h^q}\frac{\partial x_i}{\partial c^q}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\,h^q}\frac{\partial u^p}{\partial c^q}+\frac{1}{2\,h^p}\frac{\partial u^q}{\partial c^p}-\frac{1}{2}u_i\left[\frac{1}{h^q}\frac{\partial u_i^p}{\partial c^q}+\frac{1}{h_p}\frac{\partial u_i^q}{\partial c^p}\right]$$

（重复利用补充 2.6 中的(3)和(2.44)）

$$=\frac{1}{2\,h^q}\frac{\partial u^p}{\partial c^q}+\frac{1}{2\,h^p}\frac{\partial u^q}{\partial C^p}-2\,\boldsymbol{u}\cdot\left[\frac{1}{h^q}\frac{\partial \boldsymbol{n}^p}{\partial c^q}+\frac{1}{h^p}\frac{\partial \boldsymbol{n}^q}{\partial c^p}\right].$$

以此形式，我们可利用补充 2.6 中的最后方程，求得

$$e^{pq}=\frac{1}{2}\left[\frac{h^p}{h^q}\frac{\partial}{\partial e^q}\left(\frac{u^p}{h^p}\right)+\frac{h^q}{h^p}\frac{\partial}{\partial e^p}\left(\frac{u^q}{h^q}\right)\right]+\frac{\delta^{pq}}{h^q}\left[\frac{u^1}{h^1}\frac{\partial h^p}{\partial c^1}\right.$$

$$\left.+\frac{u^2}{h^2}\frac{\partial h^p}{\partial c^2}+\frac{u^3}{h^3}\frac{\partial h^p}{\partial c^3}\right],\qquad(2.45)$$

其中所有以笛卡尔坐标系（x_1，x_2，x_3）为参考系的量，最后都消去了。对于非对角线分量（$p\neq q$），只有第一个方括号是需要的，但对典型的对角线分量，(2.45)就简化为：

$$e^{11}=\frac{1}{h^1}\frac{\partial u^1}{\partial c^1}+\frac{u^2}{h^1h^2}\frac{\partial h^1}{\partial c^2}+\frac{u^3}{h^3h^1}\frac{\partial h^1}{\partial c^3}.\qquad(2.46)$$

为得到关于 u 和 τ 的一般正交分量的位移-应力关系，我们采取类似于在 2.1 节给出的对固定的笛卡尔方向推导 $\rho\ddot{u}_i=\tau_{ij,j}$ 的步骤。主要困难在于解释作用于以 V 为体积的 S 表面上的牵引力积分 $\iint_S T\,dS$。以 ν 作为 dS 上向外法线，

$$T_i(\boldsymbol{\nu})dS = \tau_{ij}\nu_j dS$$

$$= \sum_{p,q} \tau^{pq} n_i^p n_j^q \nu_j dS \quad \text{（变换到旋转后的笛卡尔坐标系中的分量）}$$

$$= \sum_{p,q} \tau^{pq} n_i^p \nu^q dS,$$

其中 ν^q 是 dS 的法线沿 n^q 的分量。

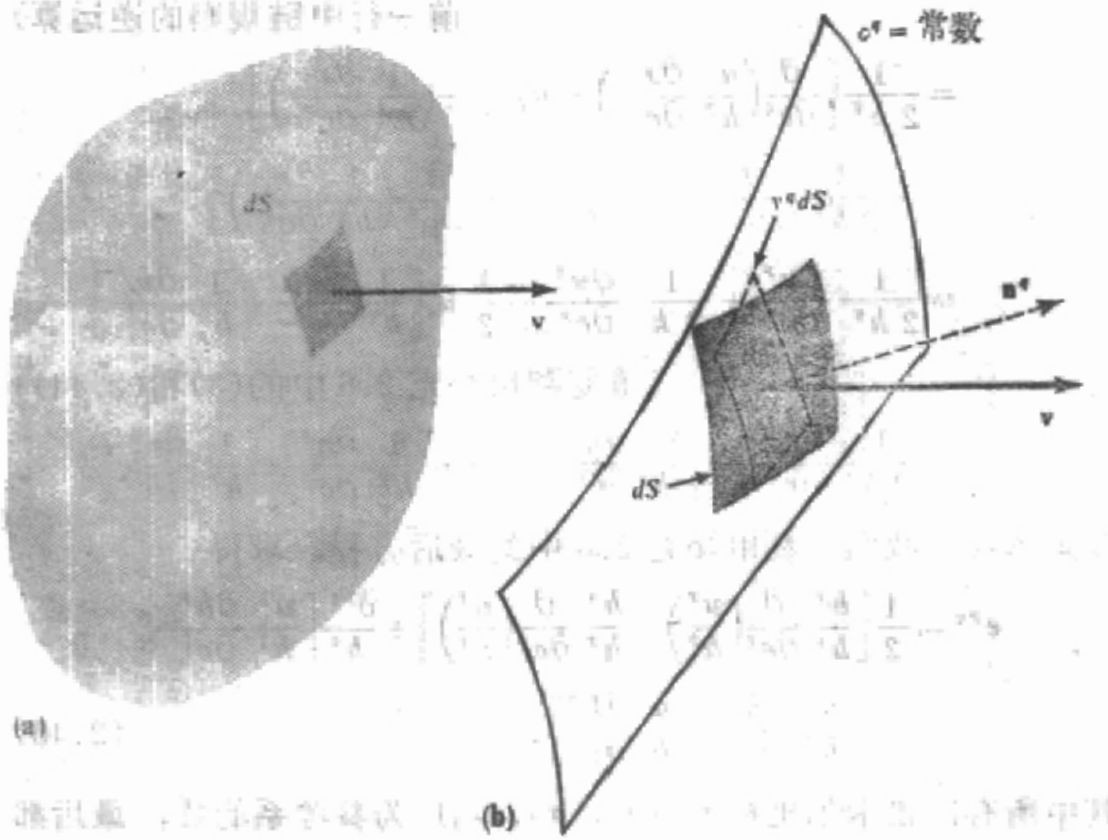


图 2.6 dS 在面 c^q = 常数上的投影

在坐标面上形成的面积为 $\nu^q dS$。(a) dS 是 V 的表面的一部分。(b) 虚线轮廓是 dS 在坐标面 c^q = 常数上的投影

现在 $\nu^q dS$ 是 dS 在面 c^q = 常数上的投影，因此 $\nu^1 dS = h^2 h^3 \times dc^2 dc^3$；同样也可写出 $\nu^2 dS$ 和 $\nu^3 dS$。于是

$$\iint_S T_i dS = \sum_p \int\int [\tau^{p1} n_i^p h^2 h^3 dc^2 dc^3 + \tau^{p2} n_i^p h^3 h^1 dc^3 dc^1 + \nu^{p3} n_i^p h^1 h^2 dc^1 dc^2]$$

$$= \sum_p \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial c^1} (\tau^{p1} n_i^p h^2 h^3) + \frac{\partial}{\partial c^2} (\tau^{p2} n_i^p h^3 h^1) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial c^3} (\tau^{p3} n_i^p h^1 h^2) \right] dc^1 dc^2 dc^3.$$

而物理体元 dV 是 $h^1 h^2 h^3 dc^1 dc^2 dc^3$，因而，根据类似于在 2.1 节所给的证明步骤，我们这里得到

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \quad \boldsymbol{f} + \frac{1}{h^1 h^2 h^3} \sum_{p,q} \frac{\partial}{\partial c^q} \left(\tau^{pq} n^p \frac{h^1 h^2 h^3}{h^q} \right). \tag{2.47}$$

微商 $\partial n^p / \partial c^q$ 仍是需要的（见补充 2.6 中的(6)），将 (2.47) 沿方向 n^1 分解，求得

$$\rho \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} = f^1 + \frac{1}{h^1 h^2 h^3} \left[\frac{\partial}{\partial c^1} (\tau^{11} h^2 h^3) + \frac{\partial}{\partial c^2} (\tau^{12} h^3 h^1) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial c^3} (\tau^{31} h^1 h^2) \right] + \frac{\tau^{12}}{h^1 h^2} \frac{\partial h^1}{\partial c^2} + \frac{\tau^{31}}{h^3 h^1} \frac{\partial h^1}{\partial c^3}$$

$$- \frac{\tau^{22}}{h^1 h^2} \frac{\partial h^2}{\partial c^1} - \frac{\tau^{33}}{h^3 h^1} \frac{\partial h^3}{\partial c^1}. \tag{2.48}$$

变更 (2.48) 中的上标，可以得到对于 $\rho \ddot{u}^2$ 和 $\rho \ddot{u}^3$ 的类似结果。

应力-应变关系 $\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl}$，在各向同性介质中变为

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2 \mu e_{ij}. \tag{2.49}$$

这里我们已经用了 (2.33)：λ 和 μ (一般说)是位置的函数，$e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ 是体应变。方程 (2.49) 是利用方向固定的笛卡尔坐标系中的分量来表示的，但对于一般正交坐标系中的物理分量，相应的结果具有同样的形式。它是

$$\tau^{pq} = \lambda \delta^{pq} \sum_r e^{rr} + 2 \mu e^{pq}, \tag{2.50}$$

因为各向同性介质意味着 $c^{pqrs} = c_{pqrs}$，并且我们可以再利用 (2.33)。(2.49)和(2.50)形式上的唯一差别是，我们对脚标应用求和规定，但对上标求和并没有用。

(2.46)、(2.48)和(2.50)常应用于球坐标(r, θ, ϕ)，该坐标中的标度函数 h^1，h^2，h^3 分别变为 1，r，$r \sin\theta$；在柱坐标

(r, ϕ, z) 中，标度函数为 1，r，1。在第四章我们将利用与非均匀各向同性介质中的点源发射出的波阵面和射线相联系的正交曲线坐标。我们对上标的规定对于推导 (2.45)—(2.50) 很方便，但在应用中，上标常常用直接指出有关坐标的脚标来代替。因此，如果 (c^1, c^2, c^3) 是球坐标，就把 e^{11} 写作 e_{rr}，把 u^3 写作 u_ϕ，把 n^2 写作 $\hat{\theta}$。

建议进一步阅读的文献

Achenbach, J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Amsterdam: North-Holland, 1973.

Fung, Y. C. *Foundations of Solid Mechanics*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1965.

Jeffreys, H. *Cartesian Tensors*. Cambridge University Press, 1965.

Love. A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, New York: Dover Publications, 1944.

Malvern, L. E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1969.

问　　题

2.1　如果在固定应变下温度升高，物体中的应力将如何？应力遵守 Hooke 定律(2.18)呢，还是必须以某种方式修改？(请记住，式(2.18)在地震学中通常应用于绝热加载情况。)

2.2　我们已经证明，如何唯一地给出一个弹性体的位移场 $u(x, t)$(例如通过施加体力和牵引力)。试证明，一旦 $u(x, t)$ 处处为已知，体力和牵引力便被唯一地给定。("用构图法"来证明是非常快速而简单的。)

2.3　如果应力依赖于应变速率(如对于某一粘滞介质)，关系式

(2.21)—(2.25)改变吗?

2.4 试求作用于以 n 为法线的面元上的位移场 u 所引起的牵引力为下述形式:

$$T(u,\ n)=\lambda(\nabla\cdot u)\,n+\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial n}+n\times(\nabla\times u)\right),$$

这里 $\frac{\partial u}{\partial n}=(n\cdot\nabla)u$.

2.5 前一个问题中的牵引力 T, 在下列意义上是位置 x 的函数, 即 $T=T(u(x),\ n)$.

a) 修改我们对(2.7)的推导来证明, 在下列意义上牵引力是位置的连续函数, 即

当 $\delta x\to 0$ 时, $T(x;\delta x)-T(x)\to 0$, 假定 δx 取为平行于方向 n, n 规定着需要求牵引力值的面元的空间取向。

b) 设想一本书放在一个平桌面上。牵引力是桌面上位置的连续函数, 对吗?

c) 请核查你对 a) 和 b) 的答案并不矛盾。

d) 试证明 τ_{yx}, τ_{xx}, τ_{xz} 在任何介质中都是 z 的连续函数, 但 τ_{xz} 在 x 或 y 方向上不必连续; τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{xy} 在 z 方向上不必连续。

2.6 对于流体中压力为 P 的某点, 应力张量是各向同性的, 并且具有分量 $\tau_{ij}=-P\delta_{ij}$。为强调固体中可能的应力与流体中存在的应力之间的差别, 用 $\tau_{ij}-\frac{1}{3}\tau_{kk}\delta_{ij}+\tau'_{ij}$ 定义差应力, 用 $e_{ij}=\frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}+e'_{ij}$ 定义差应变是方便的。然后试证明, 各向同性弹性介质中的应变能 $\mathscr{U}$ 由下式给出:

$$\mathscr{U}=\frac{1}{2}\left[\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)e_{ii}e_{kk}+2\mu e'_{ij}e'_{ij}\right].$$

试证明 e_{ii} 是单位体积的体积变化(即体应变)。因此, $\mathscr{U}$ 可

看作膨胀能$\frac{1}{2}\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)e_{ii}e_{kk}$与剪切应变能$\mu e'_{ij}e'_{ij}$之和。为什么$\lambda+\frac{2}{3}\mu$(常叫做体积模量，用$\kappa$表示)和$\mu$必为正数？把$\kappa$叫做可压缩性或不可压缩性是合乎道理的吗？

第三章　震源的表示

风、海浪、气流冲击、火箭发射以及大气层爆破——甚至人在地震仪附近散步，都产生地震波。但是，这些都是固体地球外部震源的例子，它们通常可以在施加于地面的随时间变化的牵引力的简单范畴内进行分析。对于许多实际效果来说，其他一些震源也是外部的，包括火山喷发、打眼爆破和剥落(地下爆炸抛起的表层的自由降落)。对于内部震源，如地震和地下爆炸，分析的方式是比较难于发展的，因为支配弹性运动的方程(2.17)—(2.18)不能在全部固体地球中成立。本章就是关于内部源的，并且我们将把它们区分为两个不同的类型：断裂源和体积源。

断裂源是一个同内部的一个面相联系的事件，例如破裂面两侧的相对滑动。体积源是同内部的体积相联系的事件，例如体源区的突然(爆发式)膨胀。我们将看到，两种震源类型的统一处理是可能的，其共同环节是内部面上可以发生位移间断(对于断裂源)或应变间断(对于体积源)的概念。

内部震源的数学处理，经典上是沿两个不同的方向进行的：第一，用施加于包含震源的某介质元上的体力；第二，用位移或应变的某种间断(如跨越发生破裂的断层面或跨越体积源的表面的间断)。第二个方法通常可以被结合到第一个里面去。我们先从对于断层面上的简单剪切，详细地导出等效体力，以表明根本上不同的力系可严格等效于同样的位移间断。以后，按照 Burridge 和 Knopoff(1964)的方法，逐步展开断裂源的一般理论。最后，给出体源理论的轮廓。

地震图上记录到的运动，是传播效应和震源效应二者的结果。所以要对于震源机制较好地理解的一个主要原因，就是为了

把传播效应分离出来，因为它们带有关于地球内部结构的信息。最近，震源机制的研究还被用来描述构造板块运动的途径及理解板块如何被驱动。为了根据附近断层的性质和区域应力分布的地质资料和地球物理资料以预测工程地点的地震危险性，现在正大力发展震源理论。

3.1 内表面的表示定理；等效于牵引力间断和位移间断的体力

如果选取 S 包含体积 V 内的两个相邻的面，则在第二章得到的表示定理，能够在震源理论中非常有帮助。这方面的推动力来自 H. F. Reid 的工作，他于1906年旧金山地震前后，对圣安德烈斯断层的研究，导致普遍承认地震运动是由活动断层的瞬时滑动所辐射的地震波引起的。我们将在 3.2 和 3.3 节比较详细地讨论这个震源机制，而在第十五章讨论它所包含的动力学过程(和其它震源机制)。现在的问题很简单，就是证明掩埋断层上的滑动过程以及由它辐射的地震波，如何能自然地用我们的表示定理进行分析。

为了应用(2.41)—(2.43)，我们将取 V 的表面包括一个外表面 S(见图3.1)和两个相邻的内表面 Σ^+ 与 Σ^-，这两个内表面是断层的相对两面。如果在 Σ 上发生滑动，则位移场在这里是间断的，运动方程在 S 内部不再得到满足。但是，它在 $S+\Sigma^++\Sigma^-$ 的“内部”是得到满足的，所以，对此我们能应用前面的表示结果。

表面 S 不再具有直接意义(它可以是地球的表面)，我们将假定 u 和 G 都满足 S 上的齐次边条件。这时有

$$u_n(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V f_p(\eta,\ \tau)G_{np}(x,\ t-\tau;\ \eta,0)dV(\eta)$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_{\Sigma}\{[u_i(\xi\tau)c_{ijpq}\nu_j\partial G_{np}(x,\ t-\tau;\ \xi,\ 0)/\partial\xi_q]$$



图 3.1

具有体积 V、外表面 S 和内表面Σ(模拟掩埋断层)的有限弹性体。跨越Σ时可出现间断，即在Σ^-一边的位移可以不同于Σ^+一边的位移。Σ的法线为ν(从Σ^-指向Σ^+)，对于Σ上的ξ，位移间断用$[\mathbf{u}(\xi, \tau)]$表示，方括号指的是差$\mathbf{u}(\xi, \tau)|_{\Sigma^+} - \mathbf{u}(\xi, \tau)|_{\Sigma^-}$。一般说，对于牵引力，可构成类似的差(由于外部加于Σ的力)，但对于瞬时破裂，牵引力必定是连续的，故$[\mathbf{T}(\mathbf{u}, \nu)]=0$

$$-[G_{np}(\boldsymbol{x}, t-\tau; \xi, 0)T_p(\boldsymbol{u}(\xi, \tau), \nu)]\}d\Sigma. \quad (3.1)$$

这个公式用η作为V内的一般位置，ξ作为Σ上的一般位置。方括号用来表示在Σ^+和Σ^-上的值之差(见图 3.1 的说明)。

到现在为止，对Σ上的边界条件没做任何假定。虽然$\boldsymbol{u}$的选取必须同横跨破裂断层面上位移和牵引力的实际性质相符，但$\boldsymbol{G}$却可以以任何有用的方式来选择。所以，对于$\boldsymbol{u}$，断层上的滑动导致$[\boldsymbol{u}]$的非零值，但牵引力的连续(参看(2.7)的证明和问题2.5)意味着$[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \nu)]=0$。建立$\boldsymbol{G}$在$\Sigma$上的确定性质的最简单和最通用的方法是，取$\Sigma$为一个假想面，当穿过该面时，$\boldsymbol{G}$及其微商是连续的，使得$\boldsymbol{G}$即使在$\Sigma$上也满足运动方程(2.36)。这是最容易对体积$V$进行计算的 Green 函数，并且(当对于$\boldsymbol{u}$不存在体力时)它给出表示式

$$u_n(\boldsymbol{x}, t) = \int d\tau \iint_{\Sigma} [u_i(\xi, \tau)]c_{ijpq}\nu_j \partial G_{np}(\boldsymbol{x}, t - \tau; \xi, 0)/\partial \xi_q d\Sigma. \quad (3.2)$$

毫不奇怪，断层上的位移足以确定各处的位移；由唯一性定理可以预料到(3.2)的这个特征。然而，乍一看很奇怪，传自震源的波的 Green 函数并不需要Σ上的边界条件。可以料想，断层上

发生的运动所产生的波，它们自身被断层面以某种方式衍射。虽然这个相互影响使确定滑动函数$[u(\xi, \tau)]$变得复杂，但它并不参予确定(3.2)中所用的Green函数，并且许多地震学家已经用这个公式来计算由某个假定的滑动函数模式所产生的运动。我们将在第十四章描述这类积分。

等效体力

我们刚描述过的地震模型并不直接包括任何体力，尽管表示式(3.2)给出的(x, t)处的位移，是对有贡献的Green函数的积分，而每个Green函数都是由一个体力建立的。所以，必定在某个意义上，活动断层面可被看作体力的面分布。

为了确定这个等效体力，我们从(3.1)出发，并仍假定Σ对G是透明的。关于跨越Σ的$[u]$和$[T(u, n)]$，不做任何假定(以便牵引力源也是允许的)，我们得到

$$u_n(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V f_p(\eta, \tau)G_{np}(x, t-\tau; \eta, 0)dV(\eta)$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_\Sigma\{[u_i(\xi, \tau)]c_{ijpq}\nu_j G_{npq}(x, t-\tau; \xi, 0)$$
$$-[T_p(u(\xi, \tau), \nu)]G_{np}(x, t-\tau; \xi, 0)\}d\Sigma(\xi). \quad (3.3)$$

Σ上的间断可通过使用$\delta(\eta-\xi)$而被局限于V内。例如，$[T]d\Sigma(\xi)$具有力的量纲，它的体力分布(即力/单位体积)是$[T]\delta(\eta-\xi)d\Sigma$，在$V$内随$\eta$而变化。因此，牵引力间断对位移的贡献为

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V\left\{-\iint_\Sigma[T_p(u(\xi, \tau), \nu)]\delta(\eta-\xi)d\Sigma\right\}$$
$$\times G_{np}(x, t-\tau; \eta, 0)dV.$$

由于这个表达式恰恰具有体力贡献的形式(参看(3.3)右边第一项)，所以，Σ上牵引力间断的等效体力由$f^{[T]}$给出：

$$f^{[T]}(\eta, \tau)=-\iint_\Sigma[T(u(\xi, \tau), \nu)]\delta(\eta-\xi)d\Sigma(\xi). \quad (3.4)$$

位移间断比较难于解释，因为位移同力的关系不像牵引力那么简单。我们用 δ 函数的微商 $\partial\delta(\eta-\xi)/\partial\eta_q$ 来限制Σ上的点处于 V 内。这个函数具有下列性质：

$$\frac{\partial}{\partial\xi_q}G_{np}(x,\ t-\tau;\ \xi,\ 0)=-\iiint_V\frac{\partial}{\partial\eta_q}\delta(\eta-\xi)G_{np}\times(x,\ t-\tau;\ \eta,0)dV(\eta),$$

使得(3.3)中的位移间断在位置 x 和时间 t 对位移的贡献为

$$\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V\left\{-\iint_\Sigma[u_i(\xi,\ \tau)]\,c_{ijpq}\nu_j\frac{\partial}{\partial\eta_q}\delta(\eta-\xi)\,d\Sigma\right\}\times G_{np}(x,\ t-\tau;\ \eta,\ 0)dV.$$

从这个表达式可以辨认出Σ上的位移间断的等效体力 $f^{[u]}$ 为

$$f_p^{[u]}(\eta,\ \tau)=-\iint_\Sigma[u_i(\xi,\ \tau)]\,c_{ijpq}\nu_j\frac{\partial}{\partial\eta_q}\delta(\eta-\xi)d\Sigma. \tag{3.5}$$

虽然这个积分包含有27项(对 i，j，q 求和)，对于每个 p它们都不一样，但我们将看到一个重要例子，其中只有两项和三项不为零。等效体力(3.4)和(3.5)适用于一般的非均匀各向异性介质，并且它们显然只在断层面本身上依赖于弹性介质的性质。

补充 3.1

关于震源区内有效滑动和有效弹性常数的用法

我们用"断层面"和"断层表面"这些词，标以Σ符号，作为没有厚度的数学实体。然而在世界上的许多地方，地学家们可以直接到达断层地区，并且在那里常发现被挤碎和变形的岩石的地带，也许有几米厚，因而地质学家常称之为"断层泥"和"断层带"。那么，我们所说等效体力只依赖断层面上的弹性常数，指的是什么意思？

断层带的厚度几乎总是远远小于可检测的地震辐射的波长，所以，正是跨越整个断层带的位移变化，才是表现出来的位移间断，产生的波向震源区以外传播。因此，在几乎所有实际情况中，方程(3.2)，(3.3)和(3.5)的弹性常数，都是适于断层带附近强的(未蚀变)岩石的常数。

由于发生在体积V内的断裂是个内部过程，所以，总的动量和总的角动量必然守恒。于是$f^{[u]}$造成的总力和$f^{[u]}$相对于任一固定点的总力矩必然为零。因此，对于所有的τ，有

$$\iiint_V f^{[u]}(\eta, \tau)dV(\eta)=0, \tag{3.6}$$

而对于所有的τ和任一固定的η_0，有

$$\iiint_V (\eta-\eta_0)\times f^{[u]}(\eta, \tau)dV(\eta)=0. \tag{3.7}$$

为了证明(3.6)，请注意它左边的p分量是$-\iint_\Sigma [u_i]\, c_{ijpq}\nu_j \times\left\{\iiint_V \frac{\partial}{\partial\eta_q}\delta(\eta-\xi)dV\right\}d\Sigma(\xi)$。这里的体积分是$\iint_S \delta(\eta-\xi)n_q \times dS(\eta)$，它等于零，因为$S$上的$\eta$永远不能等于$\xi$($S$和$\Sigma$没有共同的点)。

要证明(3.7)，把左边的m分量写为

$$\iiint_V e_{mnp}(\eta_n-\eta_{0n})f_p^{[u]}dV$$

$$=-\iint_\Sigma c_{ijpq}\nu_j[u_i]\left\{\iiint_V e_{mnp}(\eta_n-\eta_{0n})\frac{\partial}{\partial\eta_q}\delta(\eta-\zeta)dV\right\}d\Sigma$$

(根据(3.5))

$$=+\iint_\Sigma e_{mqp}c_{ijpq}\nu_j[u_i]d\Sigma$$

$$\left(\text{利用}\frac{\partial}{\partial\eta_q}(\eta_n-\eta_{0n})=\delta_{nq}\right)$$

$=0$ (利用对称性$c_{ijpq}=c_{ijqp}$).

作为等效于场间断的体力的一个简单例子，我们考虑沿特定方向作用于一点的体力的情况(例如(2.4)所给的对于一个 Green 函数的体力)。这可以改换而看作应力分量的间断。为得到等效值，取x_3为深度方向，考虑在时间$\tau=0$作用于$(0,0,h)$的强度

为 F 并保持稳定的竖向点力。这时

$$\boldsymbol{f}(\eta,\tau)=(0,0,F)\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3-h)H(\tau). \tag{3.8}$$

这也可看作平面 $\xi_3=h$ 的一点上牵引力的间断，有

$$[T(\xi,\tau)]^{\xi=(\xi_1,\xi_2,h^+)}_{\xi=(\xi_1,\xi_2,h^-)}=-(0,0,F)\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)H(\tau), \tag{3.9}$$

即 τ_{13}，τ_{23} 是连续的，τ_{33} 有跃变。(3.8)和(3.9)的等效值可直接应用(3.4)得到证明。

地震学中体力等效的最重要例子，是在剪切断裂中找到的，下面我们稍详细地讨论这个问题。

3.2 隐埋断层上滑动的简单例子

断层滑动产生的地震波，同断层上其力矩互相抵消的某种力的分布所产生的地震波一样。这个分布(对于给定的断层滑动)不是唯一的，但在各向同性介质中，它总是可被取为双力偶的面分布。从关于究竟用单力偶还是双力偶来模拟地震这一问题的长期

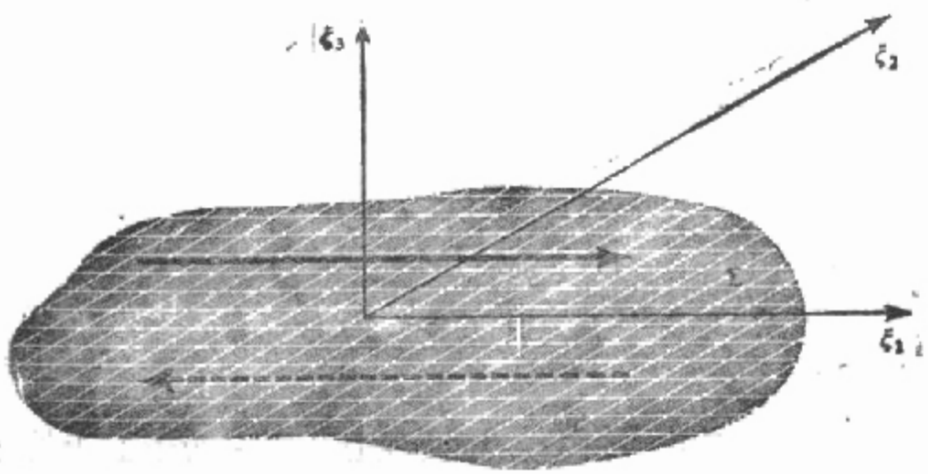


图 3.2

各向同性介质中的断层面位于 $\xi_3=0$ 平面内。假定在 Σ 上沿 ξ_1 方向发生滑动，如粗箭头所示。在 Σ^+ 一边(即 $\xi_3=0^+$)的运动沿 ξ_1 增大的方向，而 Σ^- 一边的运动沿 ξ_1 减小的方向

争论中所用的论据来看，这个结论是有讽刺意味的。赞成单力偶理论的人们，认定地震是由断层上的滑动引起的，但他们直觉地以为这等效于单力偶(由相应于断层两边相对运动的两个力组成)。在弹性动力学中，直觉的办法常常是危险的。另一方面，赞成双力偶理论的一些人认为，地震必是在预先存在的剪切应力作用下的体积崩溃。近年来，断层理论(现已认为等效于双力偶)从非常靠近震源处得到的越来越多的资料，得到有力支持，也从在远距离观测到的辐射图案获得了支持。

如图 3.2 所示，我们取断层 Σ 位于 $\xi_3=0$ 平面内，使$[u]$没有 ξ_3 方向的分量(这是我们曾称之为"断层滑动"的情况；即 $[u]$ 平行于 Σ)。令 ξ_1 为滑动方向，则$[u_2]=[u_3]=0$ 和 $\nu_1=\nu_2=0$。根据(3.5)，这时的等效体力简化为

$$f_p(\eta,\tau)=-\iint_{\Sigma}[u_1(\xi,\tau)]c_{13pq}\frac{\partial}{\partial\eta_q}\delta(\eta-\xi)d\xi_1d\xi_2.$$

在各向同性(虽然仍可能不均匀)介质中，我们可由(2.33)求得，除$c_{1313}=c_{1331}=\mu$ 外，全部 c_{13pq} 为零。因此，

$$\begin{aligned}
f_1(\eta,\tau)&=-\iint_{\Sigma}\mu(\xi)[u_1(\xi,\tau)]\delta(\eta_1-\xi_1)\delta(\eta_2\\
&\qquad-\xi_2)\frac{\partial}{\partial\eta_3}\delta(\eta_3)d\xi_1d\xi_2,\\
f_2(\eta,\tau)&=0,\qquad\qquad(3.10)\\
f_3(\eta,\tau)&=-\iint_{\Sigma}\mu[u_1]\frac{\partial}{\partial\eta_1}\delta(\eta_1-\xi_1)\delta(\eta_2\\
&\qquad-\xi_2)\delta(\eta_3)d\xi_1d\xi_2.
\end{aligned}$$

首先让我们看看 f_1，我们将发现它代表分布于Σ上的单力偶系(力沿土η_1方向，臂沿 η_3方向，力矩沿 η_2方向)。上述积分给出

$$f_1(\eta,\tau)=-\mu(\eta)[u_1(\eta,\tau)]\frac{\partial}{\partial\eta_3}\delta(\eta_3).\qquad(3.11)$$

如图 3.3 所示，这个分量可看作分布在平面 $\eta_3=0^+$ 上的点力和分布在平面 $\eta_3=0^-$ 上的反向力。

由 f_1 造成的合力为零[参看(3.6)的讨论]，但这个力分量的合力矩却不为零。相对于 η_2 轴的总力矩为

$$\iiint_V \eta_3 f_1 dV = -\iiint_V \eta_3 \mu[u_1] \frac{\partial}{\partial \eta_3}\delta(\eta_3) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3$$

$$= \iint_\Sigma \mu[u_1(\xi,\tau)] d\Sigma.$$

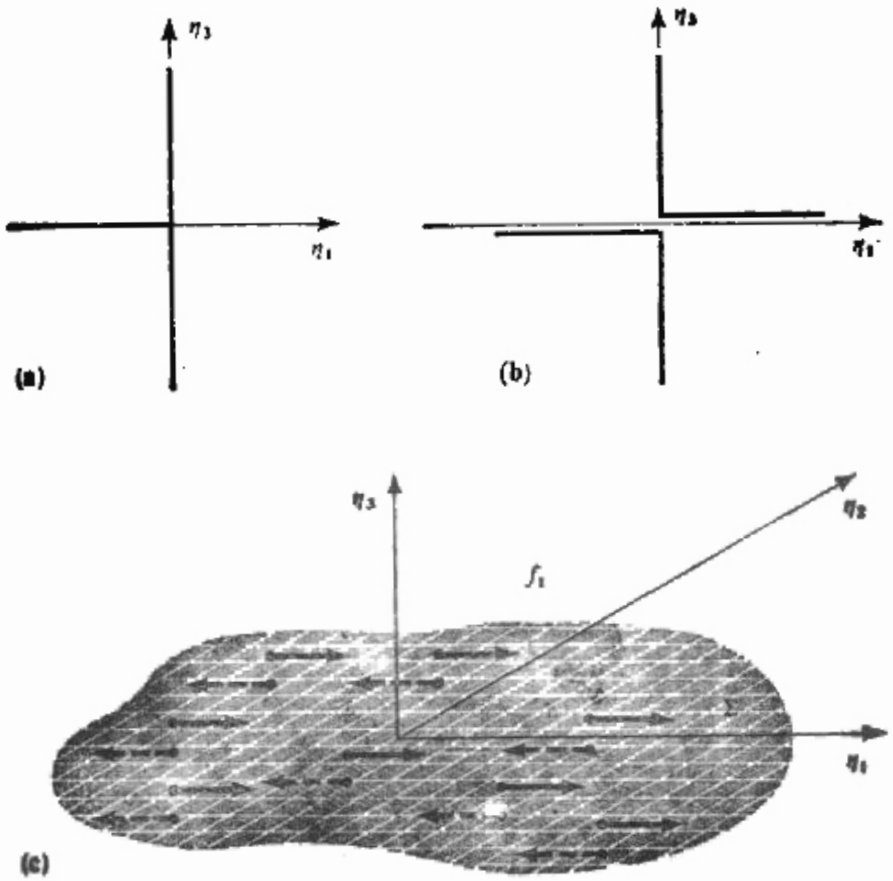


图 3.3

等效于图 3.2 所示类型断层滑动的体力之第一分量 f_1 的解释图。(a) 箭头$(-\delta(\eta_3),0,0)$是按 η_3 画的（即箭头在 $-\eta_1$ 方向作用于 $\eta_3=0$）。(b)微商$\left(-\frac{\partial}{\partial \eta_3}\delta(\eta_3),0,0\right)$是按 η_3 画的。体力$(f_1,0,0)$与此量成正比[见式(3.11)]。(c) 粗箭头表示 f_1 在 Σ 的 Σ^+ 一边和 Σ^- 一边(虚箭头)的分布。这个体力分量显然是在图 3.2 所示运动的任何体力模型中所期望的

如果在Σ上对滑动取平均，以求得量

$$\bar{u}(\tau)\equiv\frac{\iint_{\Sigma}[u_1(\xi,\tau)]d\Sigma}{A},$$

其中$A\equiv\iint_{\Sigma}d\Sigma$是断层面的面积，如果断层区是均匀的（从而$\mu$为常数），则由$f_1(\xi,\tau)$造成的相对于$\eta_2$轴的合力矩，简单地等于$\mu\bar{u}A$，它沿$\eta_2$增大的方向。

(3.10)中所给的等效体力还包括f_3，我们将发现它代表单力系。把对η_1的微商提至积分以外，得到

$$f_3(\eta,\tau)=-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\{\mu[u_1(\eta,\tau)]\}\delta(\eta_3). \tag{3.12}$$

虽然这个分量本身在Σ的每一点上不是我们曾表明f_1是力偶那种意义上的力偶，但是横跨Σ的f_3的总分布的确有着净力矩。图3.4表明在Σ的不同点上f_3如何能反向。相对于η_2轴的合力矩为

$$\begin{aligned}\iiint_V e_{213}\eta_1 f_3 dV &= \iiint_V \eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_1}\{\mu[u_1]\}\delta(\eta_3)d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3\\ &=\iint_{\Sigma}\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}\{\mu[u_1]\}d\xi_1 d\xi_2\\ &=-\iint_{\Sigma}\mu[u_1]d\xi_1 d\xi_2.\end{aligned}$$

（最后这个等式是利用规定沿其周边有$[u]=0$的断层表面Σ，由分部积分得到。）在均匀的震源区内，f_3造成的合力矩是$-\mu\bar{u}A$，这与f_1的合力矩大小相等、方向相反。我们以(3.7)的较一般形式得到了这个结果，但在这里已看出，出现两个互相抵消的贡献。

现已证明，断层滑动等效于单力f_1的分布加上单力f_3的分布，后者的净效应为反力偶。然而，如同丸山在1963年对于一

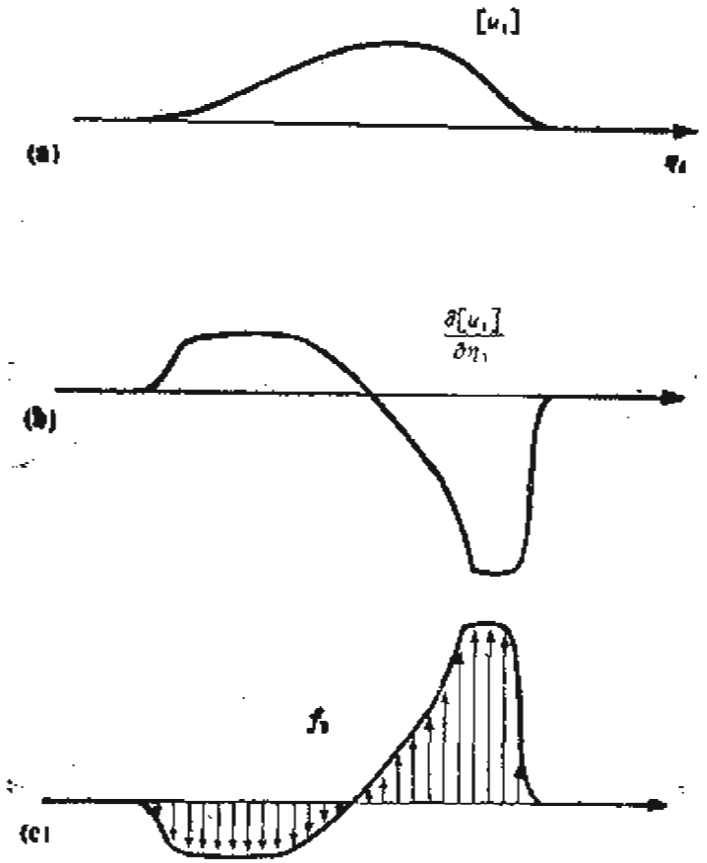


图 3.4

与断层滑动$[u_1]$等效的体力之第三分量f_3的解释图。(a) 假想的滑动$[u_1]$在固定的η_2和τ上随η_1的变化。(b) 相应的微商$\frac{\partial}{\partial\eta_1}[u_1]$。(c) 单力$f_3$随变化的$\eta_1$的分布(见方程(3.12))。这个分布将清楚地给出具有η_2方向力矩的净力偶

个有限断层所首先证明的，经典的等效于断层滑动的力，是Σ上的双力偶分布。事实是，对于一个给定的断层滑动，力等效不是唯一的。看清这一点的直接方法以及为求得双力偶密度以及单力偶(或单力)密度，是对于图 3.2 所描述的断层滑动写出表示式(3.2)。结果是

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_{\Sigma}\mu[u_1]\left\{\frac{\partial G_{n1}}{\partial\xi_3}+\frac{\partial G_{n3}}{\partial\xi_1}\right\}d\Sigma. \qquad (3.13)$$

这里大括号中的第一项$\frac{\partial}{\partial\xi_3}G_{n1}(x,t-\tau;\xi,0)$是当$\varepsilon\to 0$时

$$\frac{(G_{n1}(x,t-\tau;\xi+e\xi_3,0)-G_{n1}(x,t-\tau;\xi-e\xi_3,0))}{2e}$$

的极限(取 ξ_i 为 ξ_i 方向的单位向量)。这是图 3.5 a 所示的单力偶分布。(3.13)的第二项包含

$$\frac{G_{n3}(x,t-\tau;\xi+e\xi_1,0)-G_{n3}(x,t-\tau;\xi-e\hat{\xi}_1,0)}{2e}$$

的极限，它是图 3.5 b 所示的单力偶分布。这两个系统构成双力偶分布。我们必定要问，为什么前面导出的一套等效体力(3.10)是由一个单力偶加一个单力组成的。如果(3.13)用分部求积分，给出

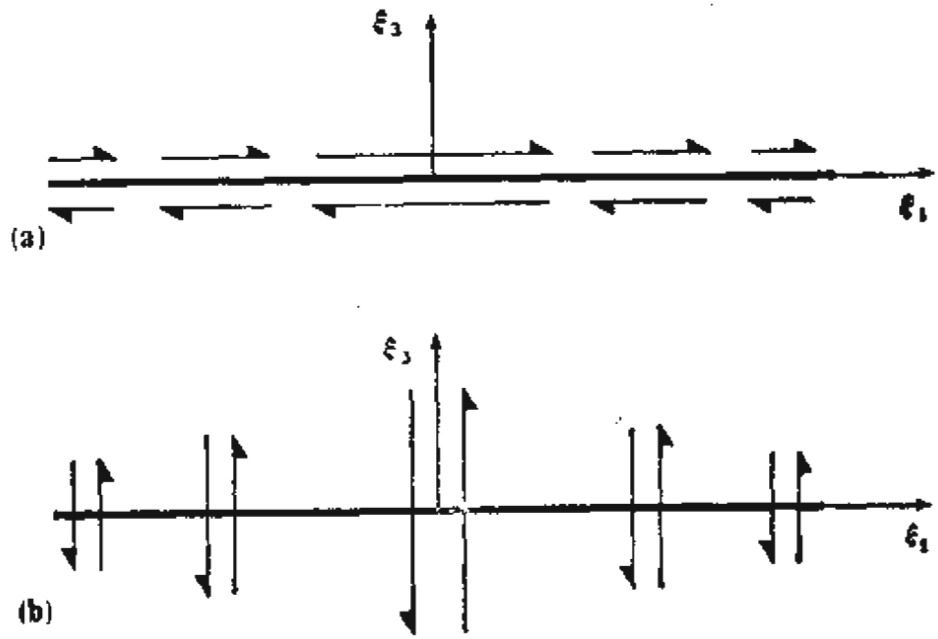


图 3.5

合在一起(在辐射同样的波的意义上)等效于断层滑动的两个单力偶分布。注意，既没有净力偶也没有净力作用在断层面($\xi_3=0$)的任何面积元上

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_{\Sigma}\mu\left([u_1]\frac{\partial G_{n1}}{\partial\xi_1}-\left[\frac{\partial u_1}{\partial\xi_1}\right]G_{n3}\right)d\Sigma,\tag{3.14}$$

就可看到答案。这个力系由图 3.6 说明；显然它与我们最初得到

的示于图 3.3 和图 3.4 的力系相同。由和断层面位移(图 3.2) 方

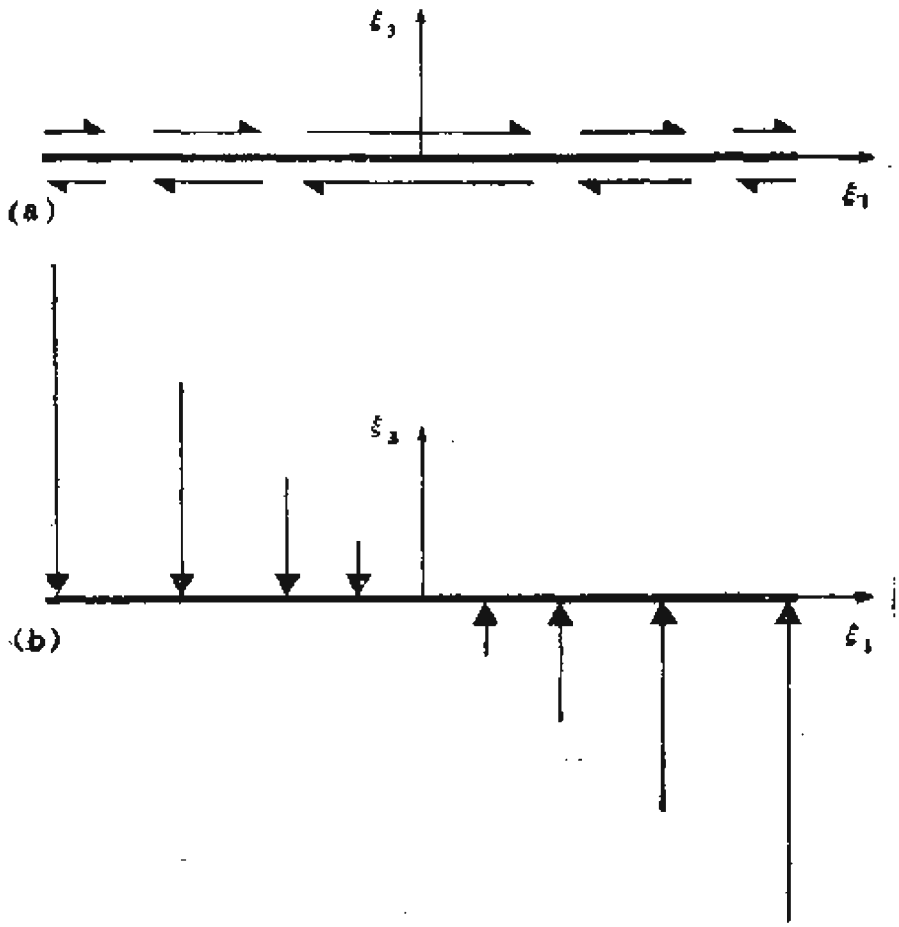


图 3.6

等效于断层滑动的另一力系(同图 3.5 比较)。(a)和(b)组成一个单力偶加单力的系统，对于整个断层面，它们的总力偶和总力为零。但在个别的面积元上，作用有力偶和力

向相同的力组成的单力偶(图 3.3，3.5 a，3.6 a 中的 f_1) 总是存在的。但是要与断层滑动的完全等效，还有单力(图 3.4 和图 3.6 b 中的 f_3)，或单力偶(图 3.5 b)，或者是这两种极端情形的适当线性组合。对于Σ上给定的面积元 $d\Sigma$，这些力系在物理上是完全不同的：根据表示式(3.13)的被积函数，似乎没有力或力矩作用于 $d\Sigma$；但根据(3.14)，则的确有力和力矩作用于 $d\Sigma$，尽管我们前面已证明，f_1 和 f_3 的积分在整个Σ上给出的净力和净力矩为零。

我们已详细阐明了这些结果，因为它们表明力的等效对研究断层滑动动力学的用处是有限的。辐射地震波的是整个断层面，我们不能根据(3.13)或(3.14)估价个别的断层面积元对辐射所做的实际贡献。这在物理上是可以理解的，因为个别的断层面积元并不同断层的其它部分隔离开来进行动力运动。等效力(通常取作双力偶分布)的主要用途只是在滑动函数[$u(\xi,\tau)$]已被确定(或被推测)之后。这时它们的重要性在于使得能够用加权的 Green 函数来计算辐射。

在离破裂断层非常远处，被观测到的常常只有其波长比作为波源的断层Σ的线度大得多的波。(高频分量即使在震源——参看第十五章——也是比较弱的，并在传播中衰减较快。)在此情况下，Σ作为一个点源在起作用，而滑动被限定为用集中的分布$\bar{u}A\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)H(\tau)$代替[$u(\xi_1,\xi_2,\tau)$]。这时，$f_3$以及$f_1$变为单力偶，而等效于断层滑动的双力偶是

$$\begin{aligned} f_1(\eta,\tau) &= -M_0\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\frac{\partial}{\partial\eta_3}\delta(\eta_3)H(\tau) \\ f_2 &= 0 \qquad\qquad (3.15) \\ f_3(\eta,\tau) &= -M_0\frac{\partial}{\partial\eta_1}\delta(\eta_1)\delta(\eta_2)\delta(\eta_3)H(\tau), \end{aligned}$$

式中

$$M_0=\mu\bar{u}A=\mu\times\text{平均滑动}\times\text{断层面积}. \qquad (3.16)$$

我们把M_0叫做地震矩。它也许是我们可用来测定断层滑动引起的地震的强度的最基本参数。M_0的测定值从大约10^{30}达因·厘米(1960年智利地震，1964年阿拉斯加地震)，直到微震的大约10^{12}达因·厘米，和实验室中加载岩石样品微破裂的10^5达因·厘米。即使对于地球物理学，二十五个数量级也是单一物理变量所跨越的罕见的大变程。关于滑动的有效点源，第一个得到双力偶等价的人是 Vvedenskaya(1956)。地震矩的第一次估算，是安艺(1966)用全球标准地震台网记录到的长周期 Love 波，对

1964 年新潟地震做出的。

我们已定义 M_0 是一个常数，但对某些目的来说，把地震矩看作由 $\mu\bar{u}(t)A$ 给出的时间函数是有用的，其中 $\bar{u}(t)$ 是在时间 t 的平均值。在这些情况下，(3.15)中的 $M_0H(\tau)$ 用 $M_0(\tau)$ 代替，并且我们说"上升时间"(见第十四章中的术语)不为零。

注意，在鉴别同点源双力偶 (3.15) 相联系的断层面时，存在着一个基本的模棱两可的问题。我们进行的讨论，是用断层面垂直于 x_3 方向，而滑动平行于 x_1 方向。如果断层面改为垂直于 x_1 方向，而滑动平行于 x_3 方向，并具有相同的力矩，则等效的体力仍是 (3.15)。于是，在从滑动的有效点源产生的地震辐射中，可以不存在能使我们区分断层面及其辅助面（即与断层和滑动方向都垂直的平面）的信息。

3.3 内表面 Σ 上位移间断的一般分析

在本节我们要引进地震矩张量 **M**。这是一个依赖于震源强度和断层空间取向的量，并且它表征着从波长比 Σ 的线度大得多的观测波所能了解到的所有震源信息。在此情况下，震源在效果上是一个带有辐射图案的点源，对给定的地震，常常可以在实践中用长周期远震资料，求地震矩张量的值。实际上，地震学家们用的矩张量被限制于仅由力偶给定的等效体力源。这种源包括地质断层（剪切）和爆炸（膨胀），其 **M** 为二阶张量。对于力的高于一次的微分，源可用高阶矩张量来表征。

对于有限大的源，我们将引进地震矩密度张量 **m**，它常可看作 $d\mathbf{M}/d\Sigma$，或者对于体源看作 $d\mathbf{M}/dV$。

这一节在两方面把 3.2 节推广。第一是所取坐标轴的方向与震源的方向性无关（这个推广是重要的，因为滑动的方向和断层面的空间取向通常预先不知道，而必须根据辐射的地震波进行推断）。第二是允许垂直于断层面的位移分量有间断，因而视膨胀

或压缩是允许发生的。

我们对位移间断进行一般分析的出发点是式(3.2)，但现在用褶积符号 *，所以有

$$u_n(x,t)=\iint_{\Sigma}[u_i]\nu_j c_{ijpq} * \frac{\partial}{\partial\xi_q}G_{np}d\Sigma, \tag{3.17}$$

如果 X_0 是沿 p 方向作用于 ξ 的力的幅度并具有一般时间变化，则褶积 $X_0 * G_{np}$ 给出 ξ 处的变化点力引起的 (x, t) 处位移的 n 分量。更普遍地说，如果作用于 ξ 的力是 $F(\xi,\tau)$，则我们可以对 p 求和，并对 (x, t) 处位移的 n 分量写出 $F_p * G_{np}$。象在(3.17)中一样，也有一个 G_{np} 对震源坐标 ξ_q 的微商。这样一个微商，我们在 3.2 节见到过，可以在物理上看作等效于在 ξ 点的 Σ 上有一单力偶（力臂沿 ξ_q 方向）。

对于力的三个分量和三个可能的力臂方向，有 9 个广义力偶，如图 3.7 所示。因此，对应于一个无穷小面元 $d\Sigma(\xi)$ 的等效面力，可表示为 9 个力偶的组合。一般说，我们需要力和臂在相同方向的“力偶”（图 3.7 中 (1,1)，(2,2)，(3,3) 的情况），有时把这些叫做向量偶极子。

由于(3.17)中的 $[u_i]\nu_j c_{ijpq} * \frac{\partial}{\partial\xi_q}G_{np}$ 是 ξ 处的力偶引起的 x 处的场，所以 $[u_i]\nu_j c_{ijpq}$ 是 (p, q) 力偶的强度。$[u_i]\nu_j c_{ijpq}$ 的量纲是单位面积的矩，这是合理的，因为 ξ 的贡献必须是面密度，以无穷小面积元 $d\Sigma$ 加权就给出矩。我们定义

$$m_{pq}\equiv[u_i]\nu_j c_{ijpq} \tag{3.18}$$

为矩密度张量 m 的分量。用这个依赖于时间的对称张量，对于 Σ 上的一般位移间断 $[u(\xi,\tau)]$ 引起的 x 处的位移，表示定理是

$$u_n(x,t)=\iint_{\Sigma}m_{pq} * G_{np,q}d\Sigma. \tag{3.19}$$

当对 Green 函数有了更多了解（在第四章）以后，我们将发现，

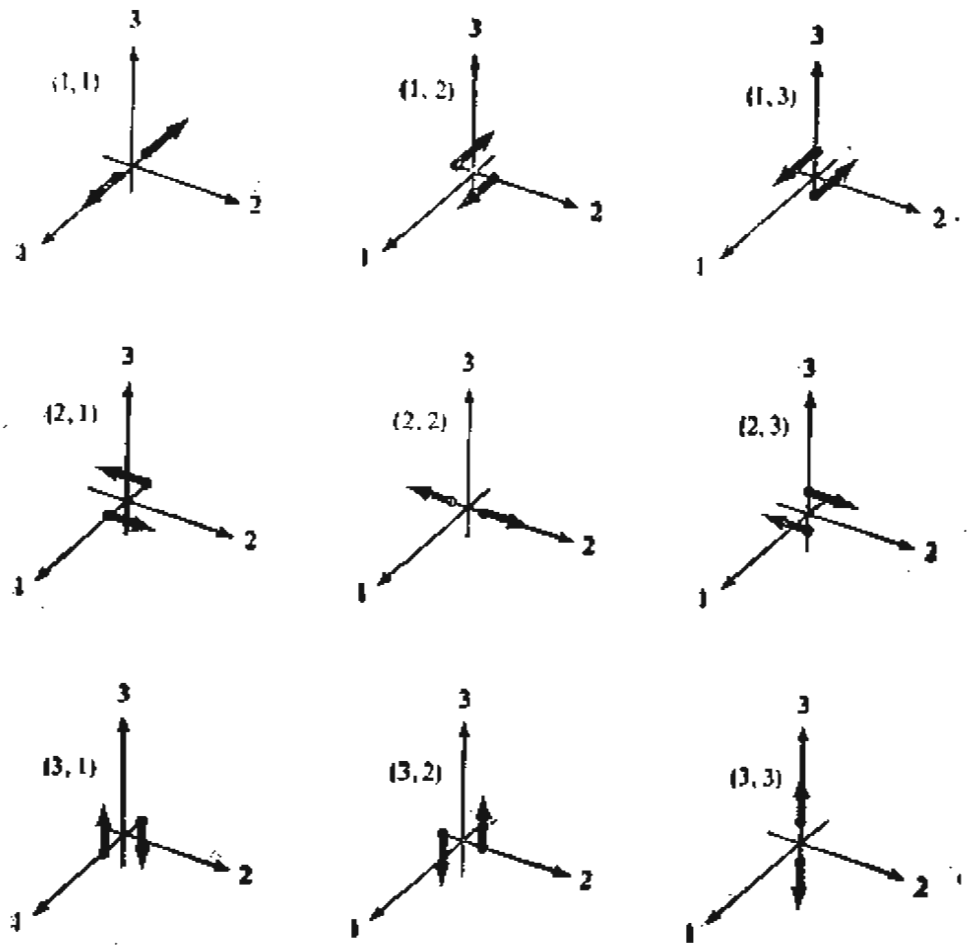


图 3.7

对于各向异性介质中一般取向的位移间断，为得到等效力所需要的9个可能力偶

(3.19)中的被积函数对时间的依赖关系十分简单，因为，如果 x 到 ξ 的距离是波长的许多倍，则与 G 的褶积所给出的 (x,t) 处的场，依赖于 ξ 处在"推迟时间"，即 t 减去 ξ 与 x 之间的某个传播时间，所发生的情况。

对于各向同性体，根据(2.33)和(3.18)有

$$m_{pq}=\lambda\nu_k[u_k(\xi,\tau)]\delta_{pq}+\mu(\nu_p[u_q(\xi,\tau)]+\nu_q[u_p(\xi,\tau)]). \tag{3.20}$$

此外，如果位移间断（或滑动）在 ξ 处平行于Σ，则标量积 $\nu[u]=0$，而

$$m_{pq}=\mu(v_p[u_q]+v_q[u_p]). \tag{3.21}$$

在Σ位于平面$\xi_3=0$内、滑动只沿ξ_1方向的情况下，我们有3.2节考虑过的震源模型，对此，矩密度张量为

$$\mathbf{m}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu[u_1(\xi,\tau)] \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu[u_1(\xi,\tau)] & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

它是现已熟悉的双力偶.

在$\xi_3=0$平面内出现张裂缝的情况下，只有滑动分量$[u_3]$不为零，据(3.20)我们求得

$$\mathbf{m}=\begin{pmatrix} \lambda[u_3(\xi,\tau) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda[u_3(\xi,\tau)] & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+2\mu)[u_3(\xi,\tau)] \end{pmatrix}.$$

所以，一个张裂缝等效于三个向量偶极子的叠加，其大小之比为$1:1:(\lambda+2\mu)/\lambda$(见图3.8)。

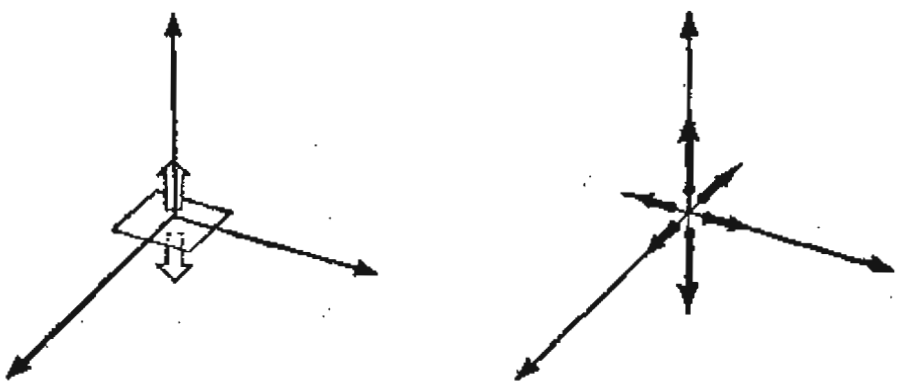


图 3.8

各向同性介质中等效于张裂缝的体力

上述结果是对有限大的断层面Σ推导的，但是事实上，地震学家所有的资料只适用于这种周期，即整个Σ实际上可看成是个点源。对于这些波，不同面元$d\Sigma$的贡献都近似是同位相的，而整个面Σ可以当作处于一点（比如说Σ的中心）的力偶系，其矩张量等于Σ上矩密度的积分。因此，对于一个有效点源，

$$u_n(x,t)=M_{pq}*G_{np,q}, \tag{3.22}$$

式中矩张量的分量为

$$M_{pq}=\iint_{\Sigma} m_{pq}d\Sigma=\iint_{\Sigma}[u_i]\nu_j c_{ijpq}d\Sigma,$$

即

$$m_{pq}=\frac{dM_{pq}}{d\Sigma}. \tag{3.23}$$

(3.22)是本章最重要的方程之一。在本书的后面，我们将估算 Green 函数和它所包含的不同的波。例如，在第四章我们将对 G 使用射线理论，并用由给定的 M 激发的体波 (式(4.91)) 来解释(3.22)。在第七章，我们将求出 M 激发的面波(式(7.147)—(7.150))，在第八章将求出整个地球的简正振型(8.37)。

用地震矩 M_0，并选用 3.2 节中给的坐标轴，滑动的有效点源的矩张量是

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & M_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ M_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.24}$$

式 (3.23) 证明 m 的名称"矩张量密度"是正确的。在有限源情况下，我们现在可把式 (3.19) 解释为点源的面分布，每个点源有矩张量 $\mathbf{m}\,d\Sigma$。

我们以 Brune (1968) 提出的关于构造板块运动的"地震矩"的有趣用法来结束本节。这种运动常常导致一种区域地震活动性，其中许多不同的地震共同占有同一断层面（虽然任何一个地震只包含在整个断层面积的一部分上的滑动)。如果 M_0^i 是一系列 N 个地震中第 i 个地震的地震矩，则根据 M_0^i 的定义，整个系列造成的总位移是

$$\Delta U=\frac{\sum_{i=1}^{N} M_0^i}{\mu S}, \tag{3.25}$$

式中 S 是在这个系列中受破坏的总面积。ΔU 是在全 S 上取平均，

(3.25)右边所有的项都是可估算的。如果地震系列包括给定时期 ΔT 内的所有重要的地震，并且如果 ΔT 内的地震活动代表着较长时间尺度的板块边缘活动，则 $\Delta U/\Delta T$ 可看作是板块的相对速度的一个估计，它可仅由地震资料获得，这时板块可看作是缓慢运动的刚体。

补充 3.2

"矩"这个词在震源理论中的用法

在转动力学中，对于力偶只要指出它的大小和单一方向，一般就足够了。这时力偶的大小是个标量，叫做矩。但是，在我们的位移间断和等效体力的研究中，"力偶"这个词常意味着比在刚体转动力学中要多的方向性质。对于我们，"力偶"含有力和杠杆臂二者的方向。其结果，"矩"这个量就从标量一跃而为张量。

数学物理中的二阶笛卡尔张量，通常是将一个物理向量同另一个物理向量联系在一起的量[例如式（2.16）中的应力张量，是由面积元的矢量取向得到牵引力的手段；而惯性张量 $\boldsymbol{I}$，通过 $h_i=I_{ij}\omega_j$，可由角速度 ω 给出角动量 h]。但是，在震源理论中，矩张量是输入信号而不是滤波器，它是用三阶张量进行运算，以给出矢量位移（参看(3.19)和(3.22)）。

补充 3.3

等效体力和地震矩张量

对于 Σ 上的一般位移间断，根据(3.5)，有

$$f_p=-\frac{\partial}{\partial\eta_q}\{[u_i]\nu_j c_{ijpq}\delta(\Sigma)\},$$

式中我们用 $\delta(\Sigma)$ 表示在 Σ 以外为零的一维空间的Dirac δ 函数。因此，若 Σ 位于平面 $\xi_3=0$ 内，则对于 Σ 上的点 $(\eta_1,\ \eta_2)$，有 $\delta(\Sigma)=\delta(\eta_3)$。

必须强调 f 是单位体积的力，并且它是唯一的。（一旦 $[u_i]$ 在 Σ 上给定，则 u 在各处都是确定的，且 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{L}(u)$，其中 $\boldsymbol{L}$ 在补充 2.4 中给出。）仅仅当寻求等效面力时，才出现 3.2 节中所说的含混的情况。因此，上面的 f_p 公式并不给出力偶和偶极子的分布。只是在位移表示式

$\int\int_V\int G_{np}\{f_p\}dV$用分部积分积出和$\eta_q$积分被完成而给出 (3.17)

之后，才出现这样一种分布，这时 (3.17) 可用等效面力来解释。这些都是不唯一的(见(3.13)和(3.14))，但力偶和矢量偶极子的面分布总是可能的。

我们以$M_{pq}=\int\int_S[u_i]\nu_s c_{ispq}d\Sigma$的形式引入了地震矩张量，但从上面的体力公式很容易证明

$$M_{pq}=\int\int_V\int f_p\eta_q dV(\eta).$$

这个结果可用来推广M的定义，因为它可用于任何体力分布，不仅用于同位移间断等效的体力。用这个定义，体力f相对于i轴的矩（在普通转动力学意义上）是$\int\int_V\int\varepsilon_{ijk}\eta_j f_k dV=\varepsilon_{ijk}M_{kj}$，当矩张量是对称的（例如，在(3.23)中），它就等于零。

补充 3.4

地震断裂释放的应变能

在有初始静态应力场σ^0的介质内，我们假定位移间断在内界面Σ上发展。这导致相对于初态而测定的位移场$u(x,\ t)$，从u我们可以确定附加的依赖时间的应变和附加应力τ。这时总应力为$\sigma=\sigma^0+\tau$，而所有运动都停下来以后的新静态应力场是σ^1。如果定义ΔE为整个介质从其初始静态至终静态的应变能变化，则可证明

$$\Delta E=-\frac{1}{2}\int_S[u_i](\sigma^0_{ij}+\sigma^1_{ij})\nu_j d\Sigma, \qquad (1)$$

其中$[u]$是最后的断错。(参看图 3.1 关于[ ]和ν的定义。)式(1)是大家知道的 Volterra关系式(Steketee, 1958; Savage, 1969a)。

这个结果(我们在下面推导它) 可以用断层面上的牵引力所做的功来简单地重新陈述。根据(1) 我们可以说，整个介质的应变能降落$-\Delta E$，是通过假想牵引力的准静态生长得到的正量，牵引力同断错在$0\leqslant U\leqslant[u]$范围内成线性关系(对于牵引力T和位移U的每个分量)：

$$T=T^0+(T^1-T^0)\frac{U}{[u]}. \tag{2}$$

从0到$[u]$进行积分得到在$\sum$上做的总功，就给出(1)。

关于ΔE同平均应力之间的这个关系，有几点现在需要指出。

释放的能$-\Delta E$，供给在两个面$\sum^+$和$\sum^-$上由于互相磨过去实际所做的功，加上在产生破裂过程中所做的功。我们在第十五章讨论这两种功。此外，$-\Delta E$还供给由震源辐射出的地震波能E_s。很自然，我们可定义比值$E_s/(-\Delta E)$作为地震效率η，这时

$$E_s=-\eta\Delta E=\frac{1}{2}\eta\int_{\sum}[u_i](\sigma_{ij}^1+\sigma_{ij}^0)\nu_j d\sum. \tag{3}$$

如果两个静态牵引力的平均值在$\sum$上的变化并不大，则对于图 3.2 中所示的剪切滑动型，我们看到 (3) 可以用矩$M_0=\mu\int_{\sum}[u_i]d\sum$来表示。它给出

$$E_s=\eta M_0\frac{\bar{\sigma}}{\mu}, \tag{4}$$

其中$\bar{\sigma}=\frac{1}{2}(\sigma_{12}^0+\sigma_{12}^1)$。

根据可以估计的E_s，M_0和μ，便可能由(4) 估算乘积$\eta\bar{\sigma}$。Wyss和Brune(1968, 1977)叫这个乘积为视应力。

由于(3.17) 中的滑动函数$[u(\xi,\ t)]$决定着整个介质中的全部位移(因而也决定着应变和应力的增量)，所以它也决定着应力降$\sigma^0-\sigma^1$。但是，没有办法能够仅仅根据辐射场$u(x,t)$的观测来计算有关震源区的绝对应力水平。用另外一种说法，利用(1)，可以得到以下的结论。如果在具有不同初应力的两个不同断裂事件中，在$\sum$上出现相同的滑动函数$[u(\xi,\ t)]$，则这两个事件的全部地震位移将是相同的；但两个事件释放的应变能可以是大不相同的。

剩下的就是要证明我们的主要结果 (1)。这是个有很大普遍性的公式，正确的推导，事实上可通过我们在(2) 中描述的准静态变形来得到。我们现在将对于一个特殊的情况，即内部应变能u是由一个应变能函数$\mathscr{W}$（参看2.2节）所确定，给出一个明确的证明。此外，我们假定存在一个可以达到的零应力和零应变参考状态。在即将断裂之前的初应力和初应变是σ_{ij}^0和e_{ij}^0，u就是从这个状态测量的。

将（2.32）应用于总应力和总应变，我们得到

$$\mathscr{W}=\frac{1}{2}(\sigma^0_{ij}+\tau_{ij})(e^0_{ij}+u_{i,j}) \quad \text{（利用}\sigma_{ij}\text{的对称性）}$$

$$=\mathscr{W}^0+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+\frac{1}{2}c_{ijkl}u_{k,l}e^0_{ij}$$

$$=\mathscr{W}^0+\frac{1}{2}\sigma_{ij}u_{i,j}+\frac{1}{2}\sigma^0_{kl}u_{k,l} \quad \text{（利用(2.30)）}.$$

在新静态中内能的增加是

$$\Delta E=\int_V(\mathscr{W}^1-\mathscr{W}^0)dV=\frac{1}{2}\int_V(\sigma^1_{ij}+\sigma^0_{ij})u_{i,j}dV, \qquad (5)$$

其中V是包括$\sum$的整个弹性体积（见图3.1）。因为σ^0_{ij}和σ^1_{ij}是静态应力场，所以(2.17) 意味着$\sigma^0_{ij,j}=\sigma^1_{ij,j}=0$（我们假定不存在体力）。由(5)我们得到

$$\Delta E=\frac{1}{2}\int_V\{(\sigma^0_{ij}+\sigma^1_{ij})u_i\}_{,j}dV,$$

对此我们可应用Gauss散度定理，V是$S+\sum^+ +\sum^-$的内部。如果S是刚性表面，或者像地球表面那样，是个自由面，则这就给出(1)。

3.4 体积源：理论的轮廓和某些简单例子

为了导出由地下爆破或快速相变产生的地震波的方程，有必要引进体积源的概念。我们将用引入到震源体的转换（或无应力）应变（transformational strain）来描述这种源，并将导出有关的地震矩张量的性质。

让我们用一组 Eshelby(1957)所描述过的假想的切割、变形和焊接操作来说明这个概念。第一，将震源物质沿其表面 $\sum$ 切割，并把震源体（“包体”）从它周围物质（“母体”）移开。在这一步，我们假定被移开的物质，在其表面$\sum$上施加着和切割前母体所施加的同样大小的牵引力，因而保持其原来形状不变。第二，我们令震源物质经受转换应变Δe_{rs}。这意思是说，发生Δe_{rs}但不改变包体内的应力，因而叫做“无应力的应变”。正是这个应

变表示着震源的特征。可以用无应力的应变来描述的过程，包括相变、热膨胀和某些塑性变形。无应力应变是个静力学概念。第三，在外表面施加牵引力以使震源体恢复其原来形状：这将在整个包体内产生附加应力场 $-c_{pqrs}\Delta e_{rs}=-\Delta\tau_{pq}$，而作用在它表面 $\sum$ 上的附加牵引力是 $-c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q$，其中 ν_q 是 $\sum$ 上的向外的法线。由于 $\Delta\tau_{pq}$ 是静态场，故 $\Delta\tau_{pq,q}=0$。母体中的应力仍不变，由加于内表面 $\sum$ 上的牵引力使其保持原值，这个牵引力与包体被切掉以前加于母体的牵引力相等。第四，把包体放回到它的孔穴（完全是原来的形状），并沿切口把物质焊接好。现在 $\sum^-$ 上的牵引力比 $\sum^+$ 上的量大 $-c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q$，导致（沿 ν 方向）牵引力间断量 $+c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q$。这个牵引力是由在震源外部施加的面力造成的，它作用在包体上以维持其正确形状。第五，解除 $\sum^-$ 上施加的面力。因为穿过 $\sum$ 时牵引力实际是连续的，故它等于施加的视牵引力间断 $-(c_{pqrs}\Delta e_{rs})\nu_q$。全部过程在母体中产生的弹性场，是由穿过 $\sum$ 的视牵引力间断造成的。

上述步骤可以推广到地震波产生的动力学情况，因为，在任一给定的时间，都能对于无应变的物质，定义一个转换应变 Δe_{rs}。在每个时刻，$\Delta\tau_{pq,q}=0$ 仍然正确。牵引力间断产生的地震位移由 (3.3) 给出。把 $[T_p]=-(c_{pqrs}\Delta e_{rs})\nu_q$ 代入 (3.3)，得到

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iint_{\Sigma}c_{pqrs}\Delta e_{rs}\nu_q G_{np}(x,t-\tau;\xi,0)\,d\sum(\xi),\tag{3.26}$$

若被积函数及其对 ξ 的微商是连续的，就可以应用 Gauss 定理，求得

$$u_n(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_{V}\frac{\partial}{\partial\xi_q}\{c_{pqrs}\Delta e_{rs}G_{np}(x,t-\tau;\xi,0)\}\,dV(\xi),\tag{3.27}$$

（这里的 V 仅仅指包体即震源体的体积。）利用 $\partial(c_{pqrs}\Delta e_{rs})/\partial\xi_q=\Delta\tau_{pq,q}=0$，可以改写 (3.27)，得到

$$u_n(x,t)=\iiint_V c_{pqrs}\Delta e_{rs}*\frac{\partial G_{np}}{\partial \xi_q}dV. \tag{3.28}$$

比较一下这个体积分与（3.17）中的面积分，自然就引进下列矩密度张量：

$$\frac{dM_{pq}}{dV}=c_{pqrs}\Delta e_{rs}, \tag{3.29}$$

其量纲是单位体积中的矩（请与(3.23)比较）。所以

$$u_n(x,t)=\iiint_V \frac{dM_{pq}}{dV}*\frac{\partial G_{np}}{\partial \xi_q}dV. \tag{3.30}$$

注意，$\Delta\tau_{pq}=\frac{dM_{pq}}{dV}$不是应力降（震源区中初平衡态应力与终平衡态应力之差）；从它的定义看，这是很清楚的。应力降不局限于震源体内，但是$\Delta\tau_{pq}$在震源体以外为零。Backus 和 Mulcahy (1976) 把$\Delta\tau_{pq}$叫做“应力过剩（Stress glut)”。

对于长周期波，整个V实际是个点源，所以V可看作位于某点，比如V的中心的力偶系，其矩张量等于矩密度在V上的积分。因此，对于有效点源，(3.22) 是适用的，其矩张量分量为

$$M_{pq}=\iiint_V c_{pqrs}\Delta e_{rs}dV. \tag{3.31}$$

例：若在具有非零的转换应变分量（比如$\Delta e_{13}=\Delta e_{31}$）、体积为$V$的均匀各向同性体内，发生一剪切崩溃，则矩张量为

$$\mathbf{M}=2\mu V\begin{pmatrix}0 & 0 & \Delta e_{13}\\ 0 & 0 & 0\\ \Delta e_{31} & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

地震辐射与等效于断层滑动的点源相同，只是地震矩M_0由$2\mu\Delta e_{13}V$给定。对于板内地震带中的一组地震，累积应变可能比(3.25) 所给的累积滑动更有意义。Kostrov(1974) 提出对一给定体积内有相同震源机制的一组地震的矩求和，求得到该体积内的总应变。根据 (3.32)，可估计总应变ΔE_{13}为

$$\Delta E_{13}=\frac{\sum_{i=1}^{N} M_0^i}{2\,\mu V}, \tag{3.33}$$

其中M_0^i是第i个地震的矩。

最后，考虑一个经受转换膨胀的半径为a的球体。此情况下无应力应变的分量为$\Delta e_{12}=\Delta e_{13}=\Delta e_{23}=0$，而$\Delta e_{11}=\Delta e_{22}=\Delta e_{33}=\frac{1}{3}\Delta\theta$，其中$\Delta\theta$是体积的相对变化。对于均匀各向同性体，根据(3.31)，有

$$\mathbf{M}=\frac{4\pi}{3}a^3\begin{pmatrix}\Delta P & 0 & 0\\ 0 & \Delta P & 0\\ 0 & 0 & \Delta P\end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

式中$\Delta P=\left(\lambda+\frac{2}{3}\mu\right)\Delta\theta$。所以，一个具有转换体积膨胀的球形源，等效于如图3.7所示的三个互相垂直的偶极子。在上面方程中，不要把ΔP同半径为a的球面上的压力跃变（参看问题3.5）弄混淆。

建议进一步阅读的文献

Backus, G., and M. Mulcahy. Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources-I. Continuous displacements. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **46**, 341-361, 1976.

Backus, G., and M. Mulcahy. Moment tensors and other phenomenological descriptions of seismic sources-II. Discontinuous displacements. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **47**, 301-329, 1976.

Burride, R., and L. Knopoff. Body force equivalents for seismic dislocations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **54**, 1875-1888, 1964.

Eshelby, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsodal inclusion and related problems. *Proceedings of the Royal Society*, **A241**, 376-396, 1957.

Kostrov, B. V. The theory of the focus for tectonic earthquakes. *Izvestia, Physics of the Solid Earth*, 258-267, April 1970.

Kostrov, B. V., Seismic moment and energy of earthquakes and seismic flow of rock. *Izvestia, Physics of the Solid Earth*, 13-21, January 1974.

Maruyama, T. On force equivalents of dynamic elastic dislocations with reference to the earthquake mechanism. *Bulletin of the Earthquake Research Institute, Tokyo University*, **41**, 467-486, 1963.

Nyland, E. Body force equivalents as sources of anelastic processes. *Canadian J. Earth Sci.*, **8**, 1184-1189, 1971.

Press, F., and C. Archambeau. Release of tectonic strain by underground nuclear explosions. *Journal of Geophysical Research*, **67**, 337-342, 1962.

Savage, J. C. Steketee's paradox, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **59**, 381, 1969.

Steketee, J. A. Some geophysical applications of the theory of dislocations. *Canadian Journal of Physics*, **36**, 1168-1198, 1958.

问　　题

3.1 方程（3.25）和（3.33）都写作标量方程，是因为在它们的推导中已假定，给定区域（S上或V内）中的地震都有相同取向的矩张量。

对于系列中的地震（在S上或V内）有任意取向的矩张量的情况，试将（3.25）推广为矢量方程，将（3.33）推广为张量方程。[但是，对于（3.35），继续假定每个地震的位移

间断是剪切，S是平面。]

3.2 在（3.2）的推导中，我们假定弹性常数穿过Σ时是连续的，以及G_{np}和$\frac{\partial}{\partial\xi_q}G_{np}$是连续的。如果它们穿过$\Sigma$时不连续，试把（3.2）中被积函数的一部分解释为牵引力，并证明，虽然$\partial G_{np}/\partial\xi_q$可能穿过表面时不连续，但式（3.2）仍有效。（注意：为确定G，假定Σ是个焊接面。）

3.3 我们已说过，依赖于时间的地震矩，由$M_0(t)=\mu\bar{u}(t)A$给出。这里的$\bar{u}(t)$是在时间t已破裂开的面积$A(t)$上取平均，还是在所考虑的地震期间最终破裂开的面积$A(\infty)$上取平均？

3.4 证明与ξ处具有矩张量M_{pq}的点源等效的体力由下式给出：

$$f_p(x,t)=-M_{pq}(t)\frac{\partial}{\partial x_q}\delta(x-\xi).$$

3.5 考虑均匀各向同性体内一个半径为a的球形空腔。当在空腔表面作用着均匀压力跃变ΔP时，将产生只沿径向有位移分量的球对称波。试证明与此震源等效的点源的矩张量有类似于（3.34）的形式，只是系数4/3换成$(\lambda+2\mu)/\mu$。（利用以下关系：径向位移$u(r,t)=-\frac{\partial}{\partial r}\left[\Psi\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\Big/ r\right]$满足运动方程，其中$r$是到空腔中心的距离，$\alpha$是压缩波的速度。）

第四章　点位错源产生的弹性波

从现在开始，我们将在下面的六章中，发展地震波传播的基本特征。在第二和第三章我们看到，地震运动可以用在空间和时间区域上的积分来表示，震源就在该区域中。这个积分[如(3.2)]是在 2.4 节引进的某 Green 函数的位移场的综合。本章所要讨论的是 Green 函数自身的性质，并将导出由一般随时间变化强度的、作用于介质一特定点的单向力，在均匀、各向同性、无限介质中产生的位移的特殊公式(4.23)。这个公式是用弹性位移势的方法得到的。并且 P 波和 S 波可以辨别。

在许多问题中，作用于一点的体力，对于从地震观测到的位移来说，是个合适的源模型。但是，对于断层滑动来说，点体力本身是双力偶[见(3.15)]，而不是单力偶。我们要得出双力偶的位移场，并讨论它在离源点大距离（即“远场”）和小距离（即“近场”）上的辐射图案。

为使这些精确解适于实际应用，需要有方法来估计地球中系统的不均匀性对地震波的聚焦和散焦作用。经典射线理论可用来获得这个问题在远场的近似解，本章的末尾是双力偶产生的振幅和辐射图案(P 和 S)的某些一般结果，该双力偶模拟在具有特定走向和倾角的断层面上沿特定方向的滑动。

4.1　问题的提出：势的引进

我们面临的第一个重要问题是，设在一定点 O 有一随时间而变化强度的单向体力作用于一均匀、无界、各向同性弹性介质中，求解由该力产生的位移 $\mathbf{u}(\boldsymbol{x},t)$。不失其普遍性，我们取 O 为笛卡尔

坐标原点，x_1轴为体力的方向。待解的 u 方程是(据(2.17)、(2.18)、(2.3)和(2.33))

$$\rho\ddot{u}_i = f_i + (\lambda+\mu)u_{,ji} + \mu u_{i,jj}$$

或
$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{f} + (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \mu\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}), \tag{4.1}$$

其中体力 $\boldsymbol{f}$ 由 $f_i = x_0(t)\delta(x)\delta_{i1}$ 给定，并具有零初始条件（对于 $x\neq 0$，有 $\dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},0)=0$；$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0)=0$）。

使用前几章的符号，这个位移场的分量为

$$u_n(\boldsymbol{x},t) = x_0 * G_{n1},$$

这个问题由于源点和接收点的方向性细节(在 O 点的 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 和在 $\boldsymbol{x}$ 点的 $\boldsymbol{u}$) 而复杂化。那么，什么是类似的标量问题（但又没有这种恼人的复杂性)？利用标量问题我们可以着手研究在三维中波由点源向外传播的一般性质。为避免在源点处的方向性，该标量问题必定是球对称的。这就自然地提出了这样的问题：求 $g=g(\boldsymbol{x},t)$，使得

$$\ddot{g} = \delta(\boldsymbol{x})\delta(t) + c^2\nabla^2 g, \tag{4.2}$$

其初始条件为零。

方程(4.2)的解是

$$g(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2}\,\frac{\delta(t-|\boldsymbol{x}|/c)}{|\boldsymbol{x}|}. \tag{4.3}$$

在补充4.1中证明了的这个意料不到的简单结果，它对于三维波的性质是很有启发性的。我们将用它来形成一系列对弹性动力学问题越来越有用的 Green函数。(4.3)是本书给出的第一个明确的波动解，在以后的使用中，应记住三个主要性质。第一，答案是两个因子的乘积，其中一个因子(δ 函数)的空间起伏很迅速，另一个因子(距离的倒数)的空间起伏却比较慢，至少在离开震源处是如此。一般说，应当有个依赖于从震源至 $\boldsymbol{x}$ 的方向的辐射图案因子，但是，由于球对称性，这个因子在此情况下是个常数。第二，在任何给定的 $|\boldsymbol{x}|$ 处，迅速变化的函数只依赖于相对于"到时"的时间，此处运动开始的到时为 $|\boldsymbol{x}|/c$。显然，c 是波传播的速

度。第三，在任何固定的接收点，波在时间上的变化，同(4.2)中非齐次项的时间变化一样。本来，这只在下述情况下才是对的，即源点处的空间奇异性为 $\delta(x)$(而不是，比如说，偶极子)。但弹性动力学问题(4.1)恰恰就是这样一种情况，所以此处我们也发现。质点位移往往以所加体力中相同的脉冲形状占优势。同(4.2)和(4.3)有关的一个性质是，波[在现在情况下形状为 $\delta(t-\frac{|x|}{c})$]传播过去以后，在给定的接收点上，g 变为零。

补充 4.1

证明

$$g(x,t)=\frac{1}{4\pi c^2|x|}\delta(t-\frac{|x|}{c})$$

是具有零初始条件的 $\ddot{g}=\delta(x)\delta(t)+c^2\nabla^2 g$ 的解。

根据对称性，该解在空间上可以只依赖于到源点的距离 $r=|x|$，因此我们来寻找函数形式 $g=g(r,t)$。将 ∇^2 表示为球极坐标中的微分算符，则有

$$\nabla^2 g=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial g}{\partial r})=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rg),$$

所以，在除 $r=0$ 的任何地方，rg 都满足一维波动方程 $(rg)''=r\ddot{g}/c^2$(此处的"′"表示 $\partial/\partial r$)，并且它有众所周知的一般解 $rg=f(t-r/c)+h(t+r/c)$。我们知道 $h=0$，因为待求的解是向外传播的，所以，留待证明的是 $f(\tau)=\delta(\tau)/4\pi c^2$，即当在时间区间上进行积分时，$4\pi c^2 f(\tau)$ 具有同 $\delta(\tau)$ 一样的性质。

要得到这个所要求的结果，我们可以研究以下的函数：

$$F(r,e_1,e_2)\equiv 4\pi c^2\int_{r/c-e_1}^{r/c+e_2} g(r,t)dt=\frac{4\pi c^2}{r}\int_{-e_1}^{e_2} f(\tau)d\tau.$$

用 ∇^2 对 F 进行运算，我们必须将积分限和被积函数对 r 进行微分，得到

$$\nabla^2 F=4\pi c\Big[2g'(r,t)+\frac{2}{r}g(r,t)+\frac{\dot{g}}{c}(r,t)\Big]_{t=r/c-1}^{t=r/c+e_2}+4\pi c^2$$

$$\int_{r/c-\varepsilon_1}^{r/c+\varepsilon_2}\nabla^2 g(r,t)dt.$$

代入 $c^2\nabla^2 g=\ddot{g}-\delta(x)\delta(t)$，可以进行上述 $\ddot{g}$ 的积分，以便给出上面方括号中包含 $\dot{g}/c$ 的另一项。这时所有这些项都消失，因为 $rg=f(t-r/c)$意味着 $g'=-g/r-\dot{g}/c$，这就只剩下

$$\nabla^2 F=-4\pi\delta(x)\int_{\frac{r}{c}-\varepsilon_2}^{\frac{r}{c}+\varepsilon_2}\delta(t)dt.$$

当右边对任何体积 V 进行积分时，不管原点是否在 V 里面，它都给出同 $-4\pi\delta(x)\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\delta(t)dt$的体积分一样的结果。利用 $\nabla^2(\frac{1}{r})=-4\pi\delta(x)$，有

$$F'(r,\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\frac{1}{r}\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\delta(t)dt.$$

(F 不包括附加的调和函数，因为这种函数或者在 $r=0$ 处加进另外的奇异性，或者违反 $r\to\infty$时 $F\to 0$ 的性质。)由 F 的定义中所给的第二个等式，可以看到，对于所有的$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$都有 $4\pi c^2\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}f(\tau)d\tau=\int_{-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\delta(t)dt$，所以，$f(\tau)$是所求的$\delta$函数。

在这个阶段，可以提出和解决下面三个问题（始终假定零初始条件）：

i) 如果 $\ddot{g}_1=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)+c^2\nabla^2 g_1$，

则

$$g_1(x,t)=\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\delta\left(t-\tau-\frac{|x-\xi|}{c}\right)}{|x-\xi|}.$$

ii) 如果 $\ddot{g}_2=\delta(x-\xi)f(t)+c^2\nabla^2 g_2$，则由 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$，我们用上面的 g_1 得到

$$g_2(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g_1(x,t)d\tau=\frac{1}{4\pi c^2}\frac{f\left(t-\frac{|x-\xi|}{c}\right)}{|x-\xi|}. \tag{4.4}$$

以后将求类似于(4.4)形式的解，但那是对于非均匀介质中的波传播。然而，这些将只是近似值，只在离点源很远的距离上才是精确的(参看图 4.1)。

iii) 如果源是在体积 V 和时间中延伸的，如，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=\frac{\Phi(x,t)}{\rho}+a^2\nabla^2\phi. \tag{4.5}$$

(为将来的需要，我们现在用 ϕ 而不用 g_3)，这时

$$\phi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\iiint_V\phi(\xi,\tau)\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)dV(\xi).$$

根据叠加，(4.5)的解为

$$\phi(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2\rho}\iiint_V\frac{\phi\left(\xi,t-\frac{|x-\xi|}{a}\right)}{|x-\xi|}dV, \tag{4.6}$$

它有个重要性质，即(x,t)处的场只在所谓推迟时间 $t-\frac{|x-\xi|}{a}$ 才对于体元 dV(在 ξ 处)的源作用感觉到。按照这个理解，应当再次强调，考虑到所解的方程(4.5)，解(4.6)是非常简单的。这个方程是含有四个变量(三个空间的，一个时间的)的二阶偏微分

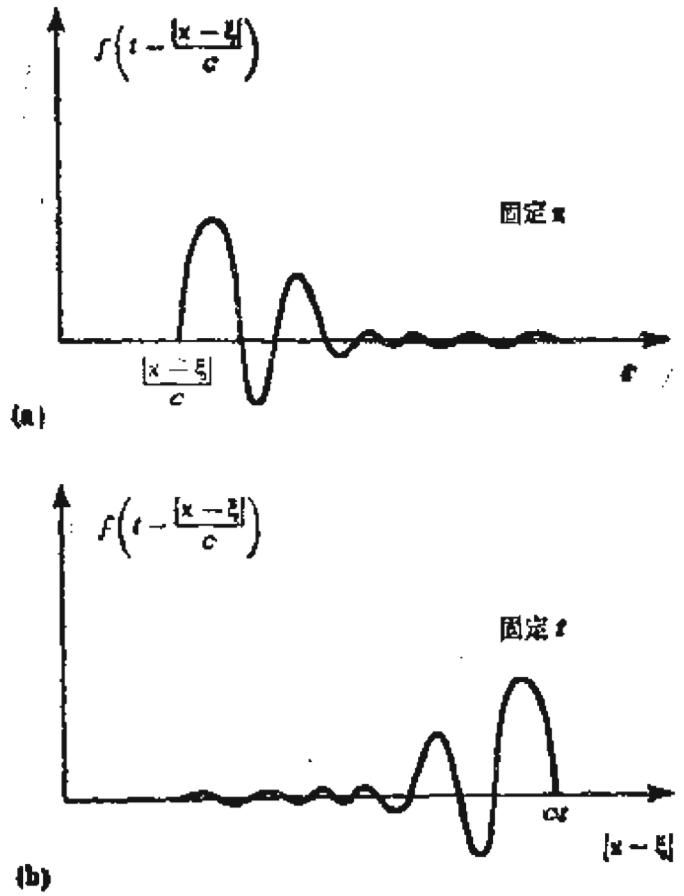


图 4.1

在其最简单形式中，波是个传播量，它是空间坐标和时间的仅仅某个特殊线性组合的函数。(a) 对某些目的，我们所感兴趣的是在离位于 ξ 的源固定距离 $|x-\xi|$ 处的波作为时间的函数。这就是地震图的情况。(b) 对另一些目的，所感兴趣的是在固定的时间，波作为位置的函数。这是照片上的情况。

方程，并有一个一般非齐次项。

方程

$$\nabla^2\phi=-\frac{\Phi(x)}{\alpha^2\rho}. \tag{4.7}$$

是(4.5)的特例，叫做 Poisson 方程，它与时间无关。由(4.6)看到，它有不依赖时间的解

$$\phi(x)=\frac{1}{4\pi a^2\rho}\iiint_V\frac{\Phi(\xi)}{|x-\xi|}dV. \tag{4.8}$$

现在摆在我们面前的问题是，寻找一种方法，把弹性动力学方程(4.1)分解为(4.5)型的可解方程。下面要阐述一个能达到这种分解的方法 (Lamé 定理)，并在补充 4.2 中给出实际上是相当灵巧的结果的某些前景。

4.1.1 Lamé 定理

如果位移场 $u=u(x,t)$满足

$$\rho\ddot{u}=f+(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot u)-\mu\nabla\times(\nabla\times u),\quad(\text{即 }4.1)$$

并且，如果体力以及 $\dot{u}$ 和 u 的初值用 Helmholtz 势由

$$f=\nabla\phi+\nabla\times\psi;\ \dot{u}(x,0)=\nabla A+\nabla\times B;$$
$$u(x,0)=\nabla C+\nabla\times D \tag{4.9}$$

来表示，其中

$$\nabla\cdot\psi=\nabla\cdot B=\nabla\cdot D=0, \tag{4.10}$$

于是就有 u 的势 ϕ 和 ψ，它们具有所有下列四个性质：

i) $u=\nabla\phi+\nabla\times\psi$, (4.11)

ii) $\nabla\cdot\psi=0$, (4.12)

iii) $\ddot{\phi}=\frac{\phi}{\rho}+a^2\nabla^2\phi\quad\left(\text{其中}a^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)$, (即 4.5)

iv) $\ddot{\psi}=\frac{\psi}{\rho}+\beta^2\nabla^2\psi\quad\left(\text{其中}\beta^2=\frac{\mu}{\rho}\right)$ (4.13)

($\nabla\phi$和$\nabla\times\psi$ 分别叫做 u 的 P 波和 S 波分量)。

其证明包括用积分来建立 ϕ 和 ψ：

$$\phi(x,t)=\rho^{-1}\int_0^t(t-\tau)\{\phi(x,\tau)+(\lambda+2\mu)\nabla\cdot u(x,\tau)\}d\tau$$
$$+tA+C, \tag{4.14}$$

$$\psi(x,t)=\rho^{-1}\int_0^t(t-\tau)\{\psi(x,\tau)-\mu\nabla\times u(x,\tau)\}d\tau+tB+D, \tag{4.15}$$

并证明 ϕ 和 ψ 的这些定义确实满足所有性质 i) 至 iv)。性质 i) 和 ii) 很易证明。为得到 iii)，由(4.14)可注意到，iii) 的左边是 $\{\Phi+(\lambda+2\mu)\nabla\cdot\boldsymbol{u}\}/\rho$。这恰恰等于 iii) 的右边，因为根据 i) 有 $\nabla^2\phi=\nabla\cdot\boldsymbol{u}$。最后一个性质 iv)，用同样的方式反复使用向量恒等式

$$\nabla^2\boldsymbol{V}\equiv\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{V}),$$
$$\nabla\times(\nabla\Phi)\equiv 0,$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{V})\equiv 0$$

而得出。

补充 4.2

关于势

矢量场 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})$ 的 Helmholtz 势，是这样的场 X，$\boldsymbol{Y}$，其关系为 $\boldsymbol{Z}=\nabla X+\nabla\times\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{Y}$ 满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{Y}=0$。为建立 X 和 $\boldsymbol{Y}$（$\boldsymbol{Z}$ 已给定），只须解矢量 Poisson 方程 $\nabla^2\boldsymbol{W}=\boldsymbol{Z}$，因为这时恒等式 $\nabla^2\boldsymbol{W}\equiv\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{W})-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{W})$ 表明，我们可以选择势 $X=\nabla\cdot\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{Y}=\nabla\times\boldsymbol{W}$。矢量 Poisson 方程的解是(4.8)和(4.7)的简单推广，在这里给出

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x})=-\int\int\int_{V}\frac{\boldsymbol{Z}(\xi)}{4\pi|\boldsymbol{x}-\xi|}\,dV(\xi).$$

那么，为什么我们不把弹性势 ϕ 和 ψ 定义为 $\boldsymbol{u}$ 的 Helmholtz 势呢？理由是，(4.11)和(4.12)代入弹性波方程(4.1)后，给出 ϕ 和 ψ 的三阶偏微分方程，它必须用 $\nabla\cdot(\ \ )$ 和 $\nabla\times(\ \ )$ 进行运算，才能给出分离的势方程，这时它满足四阶波动方程

$$\nabla^2\{\rho\ddot{\phi}-\Phi-(\lambda+2\mu)\nabla^2\phi\}=0,$$
$$\nabla^2\{\rho\ddot{\psi}-\psi-\mu\nabla^2\psi\}=0.$$

Lamé 定理给出的结果好得多，使我们需要寻找的势只需满足二阶波动方程。

最后，有两个显著的事实，Lamé 定理被猜想出来并使用了 100 年，但没有人给出一个证明；该定理甚至对于静态场 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 也仍然是对的，但在此情况下，ϕ 和 ψ 仍然是 $\boldsymbol{x}$ 和 t 二者的函数，并且它们仍满足波动方程。但组合 $\nabla\phi+\nabla\times\psi$ 对时间的依赖已彼此抵消。

我们既已求得标量波动方程的解，并已看到如何把弹性波方程变为较简单的势方程，现在可以回到本章的主题上来了。

4.2 均匀、各向同性、无限介质中弹性动力学 Green 函数的解

要记住，我们是想求解满足含有体力 $\boldsymbol{f}$ 的弹性波方程 (4.1) 的位移 $\boldsymbol{u}$ $(\boldsymbol{x}, t)$，该体力是沿 x_1 方向(即$\hat{x}_1$) 作用于原点的 $X_0(t)$。

第一步是求体力势 Φ 和 $\boldsymbol{\psi}$，使得

$$X_0(t)\delta(\boldsymbol{x})\hat{x}_1=\nabla\Phi+\nabla\times\boldsymbol{\psi}$$

和

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0. \tag{4.16}$$

这是个在补充 4.2 中所解的那种类型的问题，因为在每一固定时刻，Φ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 都是 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$的 Helmholtz 势。首先建立

$$\boldsymbol{W}=-\frac{X_0(t)}{4\pi}\iiint_V(1,\ 0,0)\frac{\delta(\boldsymbol{\xi})dV}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}=-\frac{X_0(t)}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\hat{x}_1,$$

它给出

$$\Phi(\boldsymbol{x},\ t)=\nabla\cdot\boldsymbol{W}=-\frac{X_0(t)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|},$$

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x},\ t)=-\nabla\times\boldsymbol{W}=\frac{X_0(t)}{4\pi}\left(0,\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|},-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right). \tag{4.17}$$

乍一看有点奇怪，在空间上集中的体力 (比例于 $\delta(\boldsymbol{x})$)，却有在源区以外不为零的势(4.17)。这在弹性力学中常常遇到，它表现出势方法的人为性。

求位移的第二步，是解 Lamé 势 ϕ 和 ψ 的波动方程。由(4.5)、(4.13)和(4.17)，我们得到

$$\ddot{\phi}=-\frac{X_0(t)}{4\pi\rho}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{|x|}+a^2\nabla^2\phi \tag{4.18}$$

和
$$\ddot{\psi}=\frac{X_0(t)}{4\pi\rho}\left(0,\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{|x|},-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{|x|}\right)+\beta^2\nabla^2\psi. \tag{4.19}$$

将(4.18)同(4.5)和(4.6)作对比，得到它的解为

$$\Phi(x,\ t)=-\frac{1}{(4\pi a)^2\rho}\iiint_V\frac{X_0\left(t-\frac{|x-\xi|}{a}\right)}{|x-\xi|}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{|\xi|}dV(\xi). \tag{4.20}$$

幸好，通过以 x 为心的一系列的同心球壳来完成在体积 V 上的积分，可使这个积分简化。如果 $a\tau$ 是某一球壳 S 的半径，因而 $|x-\xi|=a\tau$，壳的厚度为 $a\,d\tau$，则有

$$\phi(x,\ t)=-\frac{1}{(4\pi a)^2\rho}\int_0^\infty\frac{X_0(t-\tau)}{\tau}\left(\iint_S\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{|\xi|}dS\right)d\tau.$$

在补充 4.3 中指出，在 S 上的积分是 x 和 τ 的简单显函数，并有

$$\phi(x,\ t)=-\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{|x|}\right)\int_0^{|x|/a}\tau X_0(t-\tau)d\tau. \tag{4.21}$$

同理，对于矢量 Lamé 势，得到

$$\psi(x,\ t)=\frac{1}{4\pi\rho}\left(0,\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{|x|},-\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{|x|}\right)\int_0^{|x|/\beta}\cdot\times\tau X_0(t-\tau)d\tau. \tag{4.22}$$

补充 4.3

表面积分的求值

我们定义

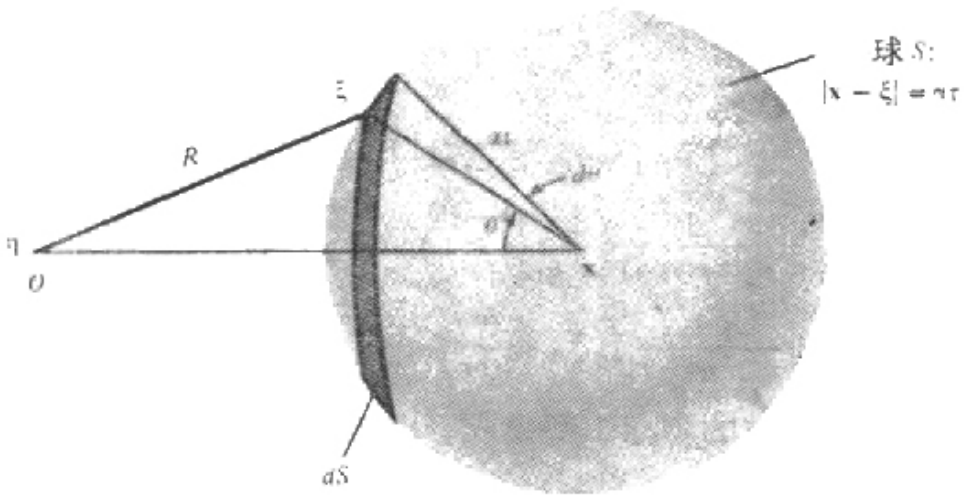
$$h(x,\tau)=\iint_{|x-\xi|=a\tau}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{1}{|\xi|}dS(\xi),$$

并来证明

当 $\tau>|x|/a$ 时，有 $h(x,\ \tau)=0$，

但当 $\tau<|x|/a$ 时，有 $h(x,\tau)=4\pi a^2\tau^2\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{1}{|x|}$。

i) 注意这个结果的物理意义：假定在 S 上有均一的面密度，则 $|\xi|^{-1}dS$ 比例于 dS 在 O 的重力势，而 $\partial|\xi|^{-1}/\partial\xi_i$ 是力在 $\hat{x}_i$ 方向的分量。求出球壳在 O 产生的总势，然后再求微分以获得沿 $\hat{x}_i$ 总力的分量，便得到所希望的结果。在球壳内，势为常数；在球壳外，可以把所有质量都放在中心点即 x 处来求势。



ii) 详细证明：假定 O 在 η，我们能够依变化的 η 进行微分，然后取 $\eta=0$。再取 $r=|x-\eta|$，$R=|\xi-\eta|$ 及 θ 为 $x-\eta$ 与 $x-\xi$ 之间的夹角，则

$$h=-\frac{\partial}{\partial\eta_i}\int_S\int\frac{dS}{R}\quad(\text{因为对于}S\text{上所有的}\xi,\eta\text{都是固定的}).$$

现在选取 $dS=2\pi a^2\tau^2\sin\theta d\theta$，故

$$\int_S\int\frac{dS}{R}=2\pi a^2\tau^2\int_0^\pi\frac{\sin\theta d\theta}{R}.$$

但是，$R^2=r^2+a^2\tau^2-2ra\tau\cos\theta$，所以，$2RdR=2ra\tau\sin\theta\,d\theta$，故

$$\int_S\int\frac{dS}{R}=\frac{2\pi d\tau}{r}\int_{R(\theta=\pi)}^{R(\theta=0)}dR=\frac{2\pi a\tau}{r}\int_{|a\tau-r|}^{a\tau+r}dR$$

$$=\begin{cases}4\pi a\tau & \text{当 } O\text{在 } S\text{ 内}\left(\tau>\dfrac{r}{a}\right),\\ \dfrac{4\pi a^2\tau^2}{r} & \text{当 } O\text{在 } S\text{ 外}\left(\tau<\dfrac{r}{a}\right).\end{cases}$$

因此，如果 O 在 S 以内，则有

$$h=-\frac{\partial}{\partial\eta_1}4\pi\alpha\tau=0\quad\left(\tau>\frac{r}{\alpha}\right).$$

如果O在S以外，则有

$$h=-\frac{\partial}{\partial\eta_1}\frac{4\pi\alpha^2\tau^2}{r}=4\pi\alpha^2\tau^2\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{r}\quad\left(\tau<\frac{r}{\alpha}\right).$$

第三步，也即最后一步，对于出沿 x_1 方向作用于原点的体力 $X_0(t)$所引起的位移求 Green 函数，是根据(4.21)和(4.22)作出 $\nabla\phi+\nabla\times\psi$。利用 $r=|x|$，给出

$$\begin{aligned}u_i(x,\ t)=&\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_1}\frac{1}{r}\right)\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau\\&+\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2 r}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)X_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\\&+\frac{1}{4\pi\rho\beta^2 r}\left(\delta_{i1}-\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)X_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right).\end{aligned}$$

如果把整个公式中的脚标 1 都换成 j，则结果与沿 x_j 方向的点力产生的位移相对应。

利用矢量 x 的方向余弦 $\gamma_i=x_i/r=\partial r/\partial x_i$，可以写出

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{r}=\frac{3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij}}{r^3}.$$

于是，对于在原点上沿 x_j 方向的点力 $X_0(t)$，有

$$\begin{aligned}u_i(x,t)&=X_0*G_{ij}\quad\text{(以第三章的符号表示)}\\&=\frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau\\&\quad+\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_i\gamma_j\frac{1}{r}X_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\\&\quad-\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\frac{1}{r}X_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right).\end{aligned}\tag{4.23}$$

这就是我们要求的公式；它的等效形式首先是 Stokes 于 1849 年给出的。它是弹性波辐射中最重要的解之一。下面我们讨论它的主要性质。

Green 函数中各项的相对大小，依赖于源点至接收点的距离

r。因此，对于X_0在比$r/\beta-r/\alpha$短的时间内不为零的源，（例如对于 Green 函数本身的脉冲源），$r^{-3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$的行为与$r^{-2}$相似。但(4.23)中的其他项的行为则与$r^{-1}$相似，因此当$r\to\infty$时，其他项(比$r^{-2}$)占优势。所以，含有$r^{-1}X_0(t-r/\alpha)$和$r^{-1}X_0(t-r/\beta)$的项叫做远场项。既然当$r\to 0$时，$r^{-2}$比$r^{-1}$占优势，所以，含有$r^{-3}\int\tau X_0(t-\tau)d\tau$的项叫做近场项。地球物理学中使用的几乎所有地震资料，都取得于远场（即(4.23)中远场项占优势的距离）。但是，有些重要的例外，如断裂造成的最终静态断错，就是一种近场效应。地震工程中使用的地震资料，有时是在近场取得的。但当比较仔细地考虑近场在何处截止，以及远场在何处开始的问题时，则显然远场项也能大到足以引起工程结构的破坏(参看问题 4.1)。

4.2.1 远场 P 波的性质

这里我们引入远场P波，对于(4.23)，它的位移u^P由下式给出：

$$u_i^P(x,t)=\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\gamma_i\gamma_j\frac{1}{r}X_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right). \tag{4.24}$$

这时，沿着离开震源的给定方向γ，这个波

i) 随r^{-1}衰减；

ii) 有依赖于时空组合$t-\frac{r}{\alpha}$的波形，因而以速率α传播(记住$\alpha^2=(\lambda+2\mu)/\rho$)。（如果选择$X_0(t)$将开始不为零的时间为$t=0$，则$r/\alpha$为$P$波在$r$处的到时。）；

iii) 波形正比于在推迟时间施加的力；

iv) x处位移u^P的方向平行于离开震源的方向γ。这是由$u^P\times\gamma=0$得到的，而这个关系很容易根据(4.24)来证明。所以，远场P波是纵向的(有时叫做径向的)，它的质点运动方向同波传播方向相同。

4.2.2 远场 S 波的性质

(4.23)中远场 S 波的位移 u^S 由下式给出：

$$u_i^S(x,\ t)=\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\delta_{ij}-\gamma_i\gamma_j)\frac{1}{r}X_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \tag{4.25}$$

可以回顾一下，γ 是由源点指向接收点的单位矢量。沿给定的方向 γ，这个波

i) 随 r^{-1} 衰减；

ii) x 处的到时为 r/β，传播速率为 β；

iii) 位移波形正比于在推迟时间施加的力；

iv) x处位移 u^S 的方向垂直于离开震源的方向 γ。（根据(4.25)很容易证明 $u^S\cdot\gamma=0$。）所以，远场 S 波是横波，它的质点运动方向与波传播方向正交。

图 4.2 中给出 u^P 和 u^S 的辐射图案。

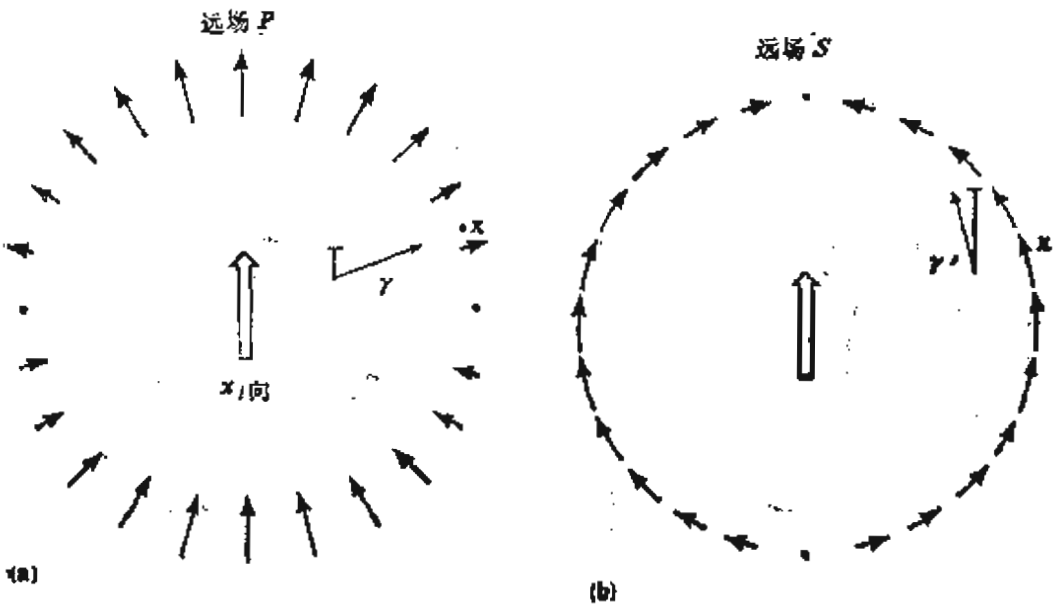


图 4.2

对于无限、均匀、各向同性介质内沿 x_i 方向的点力 $\hat{i}$ 在远场的 P 和 S 辐射图案。P 和 S 的方向由每种波的性质 iv)给出(见正文)，S 波横向的特殊选择是由所要求的轴对称性决定的。(a) u^P 的大小由 $u^P\cdot\gamma\propto\gamma_i$ 给定，这里 γ_i 是力方向与 u^P 方向之间夹角的余弦。(b) u^S 的大小由 $u^S\cdot\gamma'\propto\gamma'_i$ 给定，γ'_i 是力方向与 u^S 方向之间夹角的余弦

4.2.3 近场项的性质

我们定义(4.23)中的近场位移 u^N 为

$$u_i^N(x,\ t)=\frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\frac{1}{r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau. \tag{4.26}$$

在导出这个近场分量(见前面)时，我们看到，有来自 P 波势 ϕ 的梯度和 S 波势 ψ 的旋度两方面的贡献，在这个意义上，u^N 是由 P 波和 S 波两种运动组成的。它既不是无旋的(即旋度为零)，也不是无散的(即散度为零)，这表明，把弹性位移场分解成它的 P 波和 S 波分量，并不总是有成效的。进一步讲，u^N 有纵的和横的两种运动，因为纵分量是

$$u^N\cdot\gamma=\gamma_i\frac{1}{2\pi\rho r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau,$$

而横分量是

$$u^N\cdot\gamma'=-\gamma_i'\frac{1}{4\pi\rho r^3}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$$

(关于 γ 和 γ' 的定义，参看图4.2)。

虽然对于近场位移不可能找出与对于远场所得到的 i) —iv) 相对应的简单性质，但我们能鉴别出位移 u^N 在固定接收点的到时和持续时间。如果 $t=0$ 被选定为 $X_0(t)$ 首先变为非零值的时间，则我们假定，对于所有时间 $t>T$，$X_0(t)$ 重又恢复到零。图 4.3 a 表示出一个这种函数，图 4.3 b 表示出 $X_0(t-\tau)$。由(4.26)得知，u^N 是这样一种运动，它在 P 波的到时(r/α)到达 x，并一直作用到时间 $r/\beta+T$。于是，它的持续时间为$(r/\beta-r/\alpha)+T$。如果 $X_0(t)$ 一直不能永久地恢复到零(即如果 T 是无限的)，则近场项将无限期地存在。

X_0*G 的若干进一步性质，在章后问题中给出。在第二章和第三章已看到，在地震学中，对于双力偶而不是单力偶震源，以 $G_{np,q}$ 形式研究 Green 函数比较合适。我们现在来详细说明它与位移场

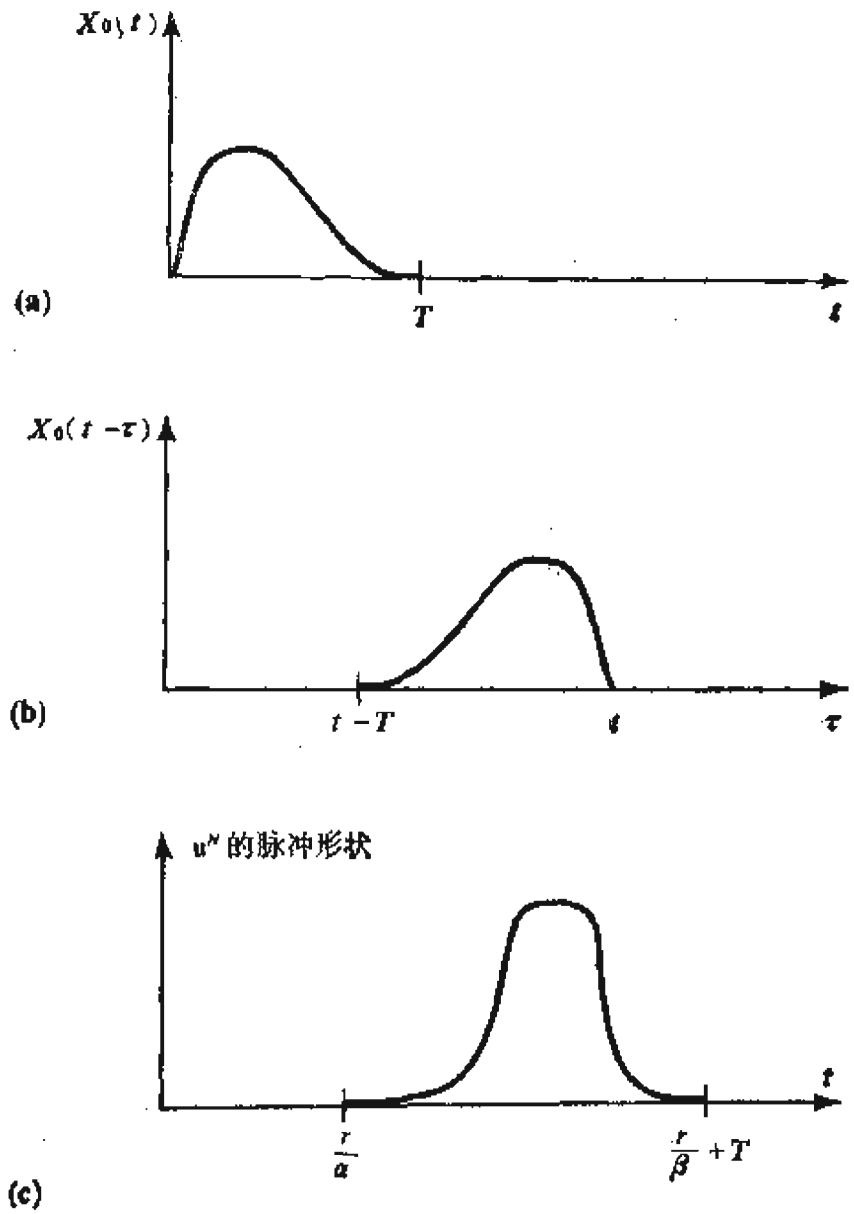


图 4.3

近场运动 u^N 的"到时"和"持续时间"的图解。(a) 体力时间函数，只对于 0 至 T 间的 t，它不为零。(b) 对于固定的 t，$X_0(t-\tau)$ 随 τ 而变化。只当 t 处于 r/α 和 $(r/\beta+T)$ 之间时，这个函数才对于 r/α 至 r/β 间隔中的 τ 不为零。(c) $\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$ 随时间的变化。在很大的距离上，$r/\alpha \gg T$，u^N 的积分中的 $X_0(t-\tau)$ 实际上是个 δ 函数，而 u^N 只在 r/α 和 r/β 之间有非零值，其高度正比于时间。但是，在这种距离上的 u^N，与远场项比较，通常是可忽略不计的

有比较直接关系的一些特殊性质。

4.3 无限、均匀介质中的双力偶解

本节描述求波动的一系列解答中的又一步，这个系列在补充4.1中，以点源所发出的球对称的标量波开始。我们已看到，怎样综合矢量波和二阶张量场 G_{ij}。现在想研究三阶张量场 $G_{np,q}$，以便了解由位移间断(见(3.17)，或者对于点源，见(3.22))所产生的波的辐射图案(在近场和远场两种情况)。我们只好坦白地承认，对于某些读者，这可能给出一个令人生畏的前景。因此，一开始我们就在此申明，对于具有矩张量 $\boldsymbol{M}$ 的点源所产生的位移，我们将以非常简明的公式(4.32)—(4.33)来结尾，相应于点剪切位错的情况，并且对于它，我们将得到远场辐射图案；事实上该图案已在成千上万的地震中观测到。既然这个双力偶源具有如此实际的意义，也许可以认为，应当把我们的分析局限于特殊的组合 $M_0 * \left(\frac{\partial G_{n1}}{\partial \xi_3}\right) + M_0 * \left(\frac{\partial G_{n3}}{\partial \xi_1}\right)$ 上(见(3.22)和(3.24))。然而，只要花很少的力气，利用求和惯例，就将使我们能用 $M_{pq} * G_{np,q}$ 中全部九个力偶进行计算。

我们的主要结果将是：远场位移仍随 r^{-1} 衰减，并正比于源处的质点速度；在远场和近场位移之间，发现有一些异常相似处；在整个介质中，由逐渐达于最终固定断错的位移位错所产生的最后静态位移，随 r^{-2} 衰减。

我们从应用 Stokes 的解(4.23)出发，求得体力分布 $f(x,t) = F(t)\delta(x-\xi)$ 即作用于 ξ 的力 $F(t)$ 产生的位移的 n 分量。该位移在 (x, t) 为

$$F_p * G_{np} = \frac{1}{4\pi\rho}(3\gamma_n\gamma_p - \delta_{np})\frac{1}{r^3}\int_{r/a}^{r/\beta} \tau F_p(t-\tau)\,d\tau + \frac{1}{4\pi\rho a^2}\gamma_n\gamma_p\frac{1}{r}F_p\left(t-\frac{r}{a}\right)$$

$$-\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}(\gamma_n\gamma_p-\delta_{np})\frac{1}{r}F_p\left(t-\frac{r}{\beta}\right), \qquad (4.27)$$

其中 $r=|x-\xi|$ 是源点至接收点的距离，方向余弦 $\gamma_i=(x_i-\xi_i)/r$ 是相对于 ξ 处的源点。(4.27) 有同 (4.23)一样的形式，但现在出现了对 p 的求和，因为一般说，F 不是沿一特定的坐标方向。

为得到图 3.7 所示类型的九个力偶的总效果，可以求 $F(t)$ 作用于 $\xi+\Delta l_q$(此处 Δl_q 是沿 ξ_q 方向的一个小距离)时 (4.27)的值，然后减去 $F(t)$作用于 ξ 时(4.27)的值。这个差给出矩为 $|\Delta l_q||F|$的力偶在 x 产生的位移场，并且对于 Δl_q 的一阶量，它是直接由微分运算 $\Delta l_q\left(\frac{\partial}{\partial\xi_q}\right)$给出的。(此处注意，这是个无量纲运算：结果仍是位移。)最后一步是使乘积 $\Delta l_q F_p(t)$ 与矩张量分量 $M_{pq}(t)$相等，其中 $\Delta l_q\to 0$ 而 $F_p\to\infty$，使乘积保持为有限。上述步骤表示为下式：

$$M_{pq}*G_{np,q}=\lim_{\left(\substack{\Delta l_q\to 0\\ F_p\to\infty\\ \Delta l_q F_p=M_{pq}}\right)}\Delta l_q F_p*\frac{\partial}{\partial\xi_q}G_{np}. \qquad (4.28)$$

这里要注意，对 p 和 q 两者都要求和。(4.28)的运算应用于(4.27)是十分直接了当的，这时要利用两个规则：

$$\frac{\partial r}{\partial\xi_q}=-\gamma_q 和\frac{\partial\gamma_i}{\partial\xi_q}=\frac{\gamma_i\gamma_q-\delta_{iq}}{r},$$

所得结果就是具有下列第 n 个分量的位移场[参看(3.22)]

$$M_{pq}*G_{np,q}=\left(\frac{15\gamma_n\gamma_p\gamma_q-3\gamma_n\delta_{pq}-3\gamma_p\delta_{nq}-3\gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho}\right)$$

$$\frac{1}{r^4}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau M_{pq}(t-\tau)\,d\tau$$

$$+\left(\frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_q-\gamma_n\delta_{pq}-\gamma_p\delta_{nq}-\gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho\alpha^2}\right)\frac{1}{r^2}M_{pq}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)$$

$$-\left(\frac{6\gamma_n\gamma_p\gamma_q-\gamma_n\delta_{pq}-\gamma_p\delta_{nq}-2\gamma_q\delta_{np}}{4\pi\rho\beta^2}\right)\frac{1}{r^2}M_{pq}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)$$

$$+\frac{\gamma_n\gamma_p\gamma_q}{4\pi\rho\alpha^3 r}\frac{1}{r}\dot{M}_{pq}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)$$

$$-\left(\frac{\gamma_n\gamma_p-\delta_{np}}{4\pi\rho\beta^3}\right)\gamma_q\frac{1}{r}\dot{M}_{pq}\left(t-\frac{r}{\beta}\right). \qquad (4.29)$$

此位错的位移近场项比例于 $r^{-4}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau M_{pq}(t-\tau)d\tau$，而远场项比例于 $r^{-1}\dot{M}_{pq}(t-r/\alpha)$（$P$ 波）或者 $r^{-1}\dot{M}_{pq}(t-r/\beta)$（$S$ 波）。回顾第三章[式(3.22)]，$M_{pq}*G_{np,q}$ 是断层面上的位移间断在 x 处产生的位移的第 n 个分量，而断层面的线度远小于在观测点所关心的波长，所以，矩张量 $\boldsymbol{M}$ 的分量比例于断层面上的平均质点位移。于是，据以给出远场位移脉冲形状的 $\dot{M}_{pq}(t-r/\alpha)$ 和 $\dot{M}_{pq}(t-r/\beta)$ 比例于源的质点速度在断层面上的平均值。

出现在(4.29)中的，是些比例于 $r^{-2}M_{pq}(t-r/\alpha)$ 和 $r^{-2}M_{pq}(t-r/\beta)$ 的项。由于在小 r 和大 r 处，它们的渐近性质介于近场位移和远场位移的渐近性质之间，所以，很自然地可把它们叫做中间场项。但这是个有点使人误解的名称，因为并不存在这些项占优势的中间距离范围。实际上看到的是，它们在远场很小，在有明显的近场位移的距离上，它们的重要性（常常）与近场位移相当。

由给出任意矩张量 $\boldsymbol{M}$ 所产生的辐射的(4.29)的普遍性，我们将常常专注于 $\boldsymbol{M}$ 有零迹亦即 $M_{kk}=0$ 的情况。用不产生体积变化的三个向量偶极子可以得到这种情况。但我们常常更关心由位移间断引起的零迹 $\boldsymbol{M}$。由(3.23)和(3.20)看到，平均位移间断 $\bar{u}$ 平行于断层面：$\bar{u}\cdot\nu=0$，此处 ν 是断层面的法线，对于面积为 A 的断层，有 $M_{pq}=\mu(\bar{u}_p\nu_q+\bar{u}_q\nu_p)A$，这时

$\mu(\bar{u}_p\nu_q+\bar{u}_q\nu_p)A*G_{np,q}$

$$=\left(\frac{30\gamma_n\gamma_p\gamma_q\nu_q-6\nu_n\gamma_p-6\delta_{np}\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho r^4}\right)\mu A\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau\bar{u}_p(t-\tau)d\tau$$

$$+\left(\frac{12\gamma_n\gamma_p\gamma_q\nu_q-2\nu_n\gamma_p-2\delta_{np}\gamma_q\nu_q}{4\pi\rho\alpha^2 r^2}\right)\mu A\bar{u}_p\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)$$

$$\left(12\,\gamma_n\gamma_p\gamma_q\gamma_s - 3\,\nu_n\gamma_p - 3\,\delta_{np}\gamma_q\nu_s \right)_{,t} \Delta\,\vec{w}\,\left(t - \frac{r}{} \right)$$

我们寻求把 x 处的位移向量（它的第 n 个笛卡尔分量在(4.30)中给出）表示为沿三个方向 $\hat{r}$，$\hat{\theta}$，$\hat{\phi}$ 的向量的和。幸好，(4.30)是仅由三种向量组成的，即 $\gamma_n\gamma_p\bar{u}_p\gamma_q\nu_q$，$\nu_n\gamma_p\bar{u}_p$ 和 $\delta_{np}\bar{u}_p\gamma_q\nu_q$。这三种向量分别为

$$\left.\begin{array}{ll} 2\gamma_n\gamma_p\bar{u}_p\gamma_q\nu_q & \text{是 } \hat{r}\sin 2\theta\cos\phi\bar{u} \text{ 的第 } n \text{ 分量，} \\ 2\nu_n\gamma_p\bar{u}_p & \text{是 } \hat{r}\sin 2\theta\cos\phi\,\bar{u} - \hat{\theta}\,2\sin^2\theta\cos\phi\,\bar{u} \text{ 的第 } n \text{ 分量，} \\ 2\bar{u}_n\gamma_q\nu_q & \text{是 } \hat{r}\sin 2\theta\cos\phi\,\bar{u} + \hat{\theta}\,2\cos^2\theta\cos\phi\,\bar{u} - \hat{\phi}\,2\cos\theta\sin\phi\,\bar{u} \text{ 的第 } n \text{ 分量。} \end{array}\right\} \quad (4.31)$$

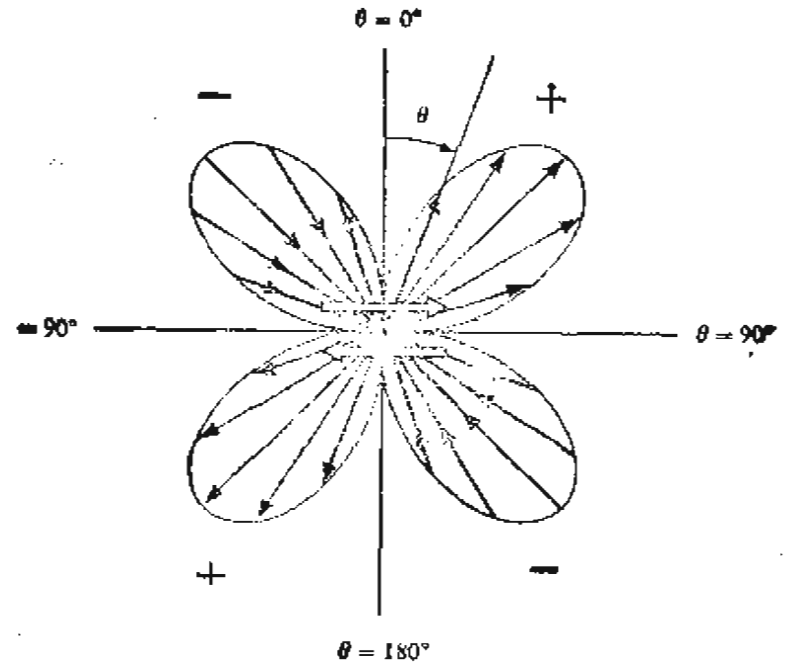
（这些结果是由旋转变换 $\hat{r}=\gamma=(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)$，$\hat{\theta}=(\cos\theta\cos\phi,\ \cos\theta\sin\phi,\ -\sin\theta)$ 和 $\hat{\phi}=(-\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0)$ 得出的。）

确定了(4.31)中的向量分量，现在就能利用依赖时间的地震矩 $M_0(t)=\mu\bar{u}(t)A$，以简洁的矢量形式，写出我们的位移场 $u_n=M_{pq}*G_{np,q}$。我们得到

$$\begin{aligned} u(x,\ t)=&\frac{1}{4\pi\rho}A^N\frac{1}{r^4}\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau M_0(t-\tau)d\tau \\ &+\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}A^{IP}\frac{1}{r^2}M_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)+\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}A^{IS}\frac{1}{r^2}M_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right) \\ &+\frac{1}{4\pi\rho\alpha^3}A^{FP}\frac{1}{r}\dot{M}_0\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)+\frac{1}{4\pi\rho\beta^3}A^{FS}\frac{1}{r}\dot{M}_0\left(t-\frac{r}{\beta}\right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

其中，近场，中间场的 P 和 S，以及远场的 P 和 S 的辐射图案分别为

$$\begin{aligned} A^N &= 9\sin2\theta\cos\phi\hat{r}-6(\cos2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi}) \\ A^{IP} &= 4\sin2\theta\cos\phi\hat{r}-2(\cos2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi}) \\ A^{IS} &= -3\sin2\theta\cos\phi\hat{r}+3(\cos2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi}) \\ A^{FP} &= \sin2\theta\cos\phi\hat{r} \\ A^{FS} &= \cos2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi}). \end{aligned} \quad (4.33)$$



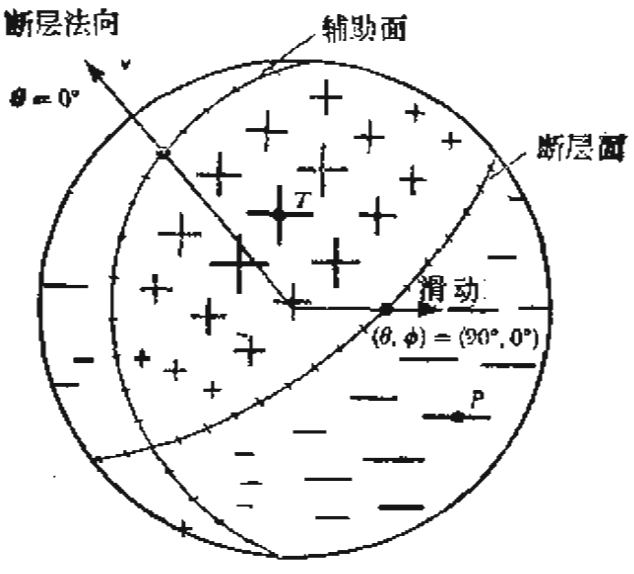
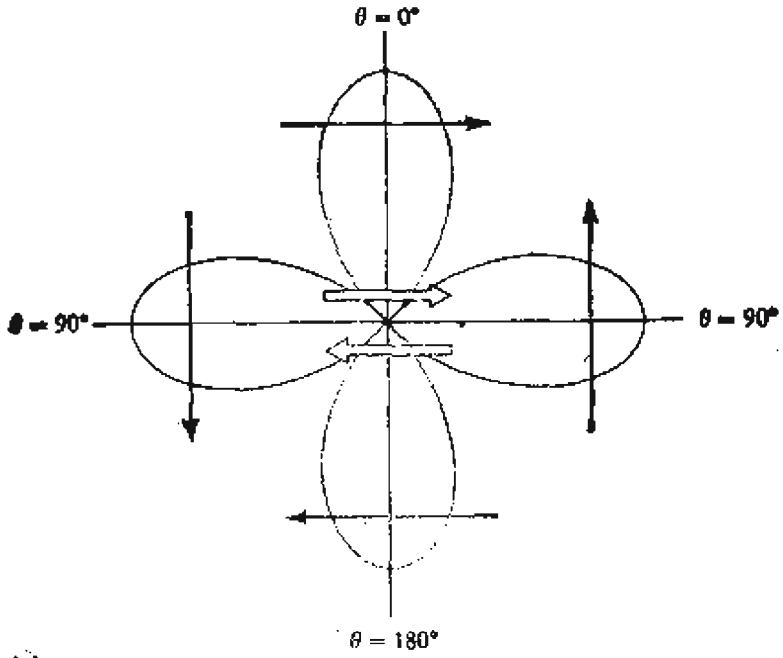
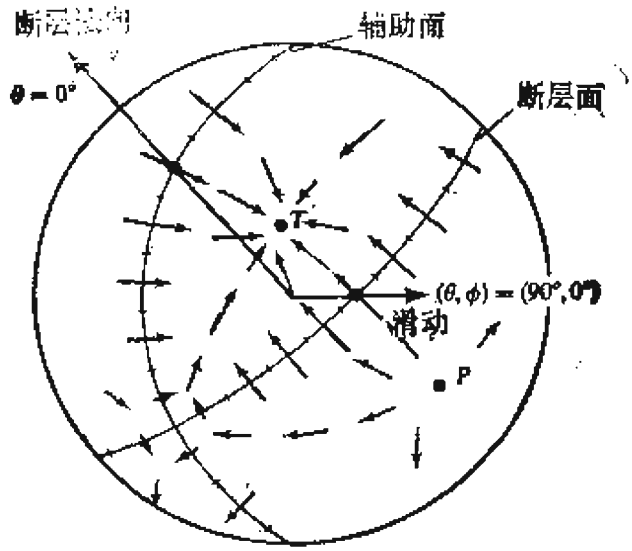


图 4.5

双力偶产生的径向位移的辐射图案，即 $\sin 2\theta \cos\phi\hat{r}$。（a）花瓣是点沿轨迹，点至原点的距离与 $\sin 2\theta$ 成正比。这个图对应于一个固定方位的平面，在中心的一对箭头代表剪切位错。注意方向向里和向外的相间象限。按照远场 P 波位移的规定，正号代表向外的位移（如果 $M_0(t-r/\alpha)$ 是正的），负号代表向里的位移。（b）辐射图案在以原点为中心的球面上的图示。各种大小的正负号，代表向里或向外的运动（随 θ 和 ϕ）的变化。断层面和辅助面是节线（在它上面 $\sin 2\theta \cos\phi = 0$）。用的是等面积投影（见图 4.17）。用 P 点标出压应力主轴，T 点标出张应力主轴



(a)



(b)

图 4.6

双力偶产生的位移横向分量的辐射图案，即$\cos 2\theta \cos\phi\hat{\theta} - \cos\theta \sin\phi\hat{\phi}$。(a) 在平面$\{\phi=0,\ \phi=\pi\}$上的四花瓣图案。中间一对箭头表示剪切位错的方向，画在每个花瓣上的箭头表示与该花瓣相关的质点位移方向。如果应用于远场S波位移，则假定$M_0(t-r/\beta)$是正的。(b) 在两个面$\theta=\frac{1}{2}\pi$和$\{\phi=0,\ \phi=\pi\}$附近，$\hat{\phi}$分量不为零，因而

(a) 的用途有限。该图是在以震源为中心的整个球面上辐射图案的概况，球面上的箭头（具有变化的大小和方向）表示横向运动（随θ和ϕ）的变化。用的是球极平面（等角）投影（见图 4.16）。不存在节线（它上面的运动为零）但却出现节点。注意，在$(\theta,\ \phi)=(45,\ 0)$的横向运动节点上，纵向运动的辐射图案为极大值（见图 4.5 b）。但横向运动的极大值（例如在$\theta=0$）则出现在纵向运动的节线上

这些辐射图案清楚地表现出正比于 $\sin 2\theta\cos\phi\hat{r}$ 的径向分量和正比于 $(\cos 2\theta\cos\phi\hat{\theta} - \cos\theta\sin\phi\hat{\phi})$ 的横向分量。(4.33) 给出的重要性质是，为得到由剪切位错（双力偶）辐射的位移场的所有不同项的完整图象，这些是所需要的仅有的两个辐射图案。图 4.5 表示出径向分量的大小在不同方向 (θ, ϕ) 变化的情况，图 4.6 则表示出横向分量的大小和方向如何变化。在远场 P 波中只出现径向分量，而在远场 S 波中只出现横向分量。然而，中间场位移的 P 和 S，都包含径向的和横向的两种分量，如同近场位移的情况一样。

我们在 (4.32) 和 (4.33) 中求得并在图 4.5 和图 4.6 中表示出的、对 (θ, ϕ) 的意外简单的依赖关系，不禁使人要问，在推导上是否可以用一个更直接的方法。确实是这种情况，矢量面谐波（参看第八章）提供了必要的分析工具，并且从一开始就证实对 (θ, ϕ) 的简单依赖关系。但是，这个较高级方法的有关代数处理，与我们已选用的笛卡尔分析同样地麻烦（照我们的看法）。

在 4.4 节，将对于非均匀介质，如地球，推导远场位移的性质。在 4.5 节，将重新审查辐射图案 (4.33)，以说明它们如何在实际中被用来根据地震资料求断层面空间取向和滑动方向。在结束本节的时候，我们由 (4.32) 求出强度为 M_0 的剪切位错的最终静态位移场。这牵涉到取 $\dot{M}_0(t-\tau)$，$M_0(t-\tau)$ 和 $\int_{\tau/\alpha}^{\tau/\beta}\tau M_0(t-\tau)d\tau$ 当 $t\to\infty$ 时的极限，假定地震矩本身有一个最终的常数值 $M_0(\infty)$。结果是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\infty) &= \frac{M_0(\infty)}{4\pi\rho r^2}\left[\boldsymbol{A}^N\left(\frac{1}{2\beta^2}-\frac{1}{2\alpha^2}\right)+\frac{\boldsymbol{A}^{IP}}{\alpha^2}+\frac{\boldsymbol{A}^{IS}}{\beta^2}\right]\\ &= \frac{M_0(\infty)}{4\pi\rho r^2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\sin 2\theta\cos\phi\hat{r}\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{\alpha^2}(\cos 2\theta\cos\phi\hat{\theta}-\cos\theta\sin\phi\hat{\phi})\right],\end{aligned}\tag{4.34}$$

它[沿任意给定的方向 (θ, ϕ)]随 r^{-2} 衰减。

4.4 点源发出的远场 P 波和 S 波的射线理论

有关弹性波传播理论的书和文章，大部分都是关于均匀介质的。地震工作者常常要求很好地掌握这种简单介质中波的性质以及可得到的精确解（参看第五章和第六章）。但是，地震图的实际分析还要求很好地掌握在非均匀介质中传播的波的近似解。地球不仅有两侧弹性性质不连续的物质边界，而且它还包含有一些巨大的区域，其中体积模量、刚性系数和密度都系统而连续地变化。因此，P 波和 S 波两者的速度，从地幔顶部到底部都增加大约一倍，这足以使我们前面已描述过的辐射图案畸变到不能辨认，除非消掉非均匀性的影响。在本节和下节，我们将指出如何消除畸变，并说明体波的振幅如何由于聚焦和散焦的效应而大大改变，就如同光线在折射率变化的介质中传播时所表现的那样。我们将要得到的近似解，叫做几何射线解，它为大量地震体波的常规解释提供基础，必要时也能为比较高级的方法提供指导。

射线理论也许最好看做是可证明的直觉观念同近似解的集成。因此，体波以当地的传播速率沿着 Snell 定律确定的“射线路径”传播，它的振幅则以射线自震源（作为“波阵面”）到达接收点的几何扩散所确定。这些说法我们都将证明，但在建立试用形式解的最初阶段，直觉的作用很大。

我们的途径是，推广已得到的 P 波和 S 波远场解的形式，并利用一坐标系自然地描述各向同性非均匀介质中的点源产生的波阵面扩散。对于球对称介质，建立在射线基础上的正交坐标具有下列性质，P 波以及 S 波的两个不同分量（叫做 SV 和 SH）是分离开的。这三种不同的运动，平行于三个不同的坐标方向。

波阵面是物理上有意义的某个有关变量（例如质点的加速

度）的传播间断。在这点上，用"间断"这个词指"变量或者它的一个导数的间断。"因此，图 4.7a 所示的斜坡，在 $t=T$ 实际是连续的，但这个函数对于描述波阵面附近的行为时是个可取的量，因为这个斜坡有不连续的（即间断的）导数。在必要的地方，把一个 $(n-1)$ 次导数在 $t=T$ 处不连续（但所有低阶导数都连续）的函数，叫做在 $t=T$ 有 n 阶间断。重新查看 Green 函数解（4.23）将表明，体力 $X_0(t)$（在时间上的）的间断，导致在远场项中出现传播间断，它的阶与在体力中出现的阶相同：作用于 $r=0$ 的 $X_0(t)$ 导致大 r 处不连续的脉冲形状 $X_0(t-r/\alpha)$ 和 $X_0(t-r/\beta)$。（在源点必须有某一阶的不连续，否则，$X_0(t)$ 及其所有导数在所有时间均为零，从而没有波产生。）在近场项中也有个传播间断 $\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$，但它不太严重。例如，如果 $X_0(t)\propto H(t)$（Heaviside 阶梯函数，它有一阶间断），则传播的位移阶梯被辐射至远场，但近场项借有 2 阶间断，因为 $\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau H(t-\tau)d\tau$ 在 $t=r/\alpha$ 和 $t=r/\beta$ 是连续的，但它的一次导数在这里是不连续的（见图 4.8）。

最强的间断由我们称之为远场项的部分来传播，这个事实具有根本的重要性。事实上，最好用它作为这些项的特征性质，因为一般用的"远场"和"近场"两个词会引起误解。在任意固定的距离 r，不管大还是小，辐射波在充分接近 r/α 和 r/β 的时间上的行为，都将由在这些时间到达的最强的间断（最强的波阵面）占优势，而一般说，这是在远场项中含有的。在足够大的 r，因而就有两个理由使远场项占优势：间断的强度，随距离的微弱衰减。但是，在固定的小 r，远场项是否将占优势，要看其间断的强度比 r^{-1} 奇异性的减弱大还是小。

幸而，借助于频率域，可以找出大为简单的方法来比较我们称之为远场和近场的位移。在整个这部书中，我们将用下面的记

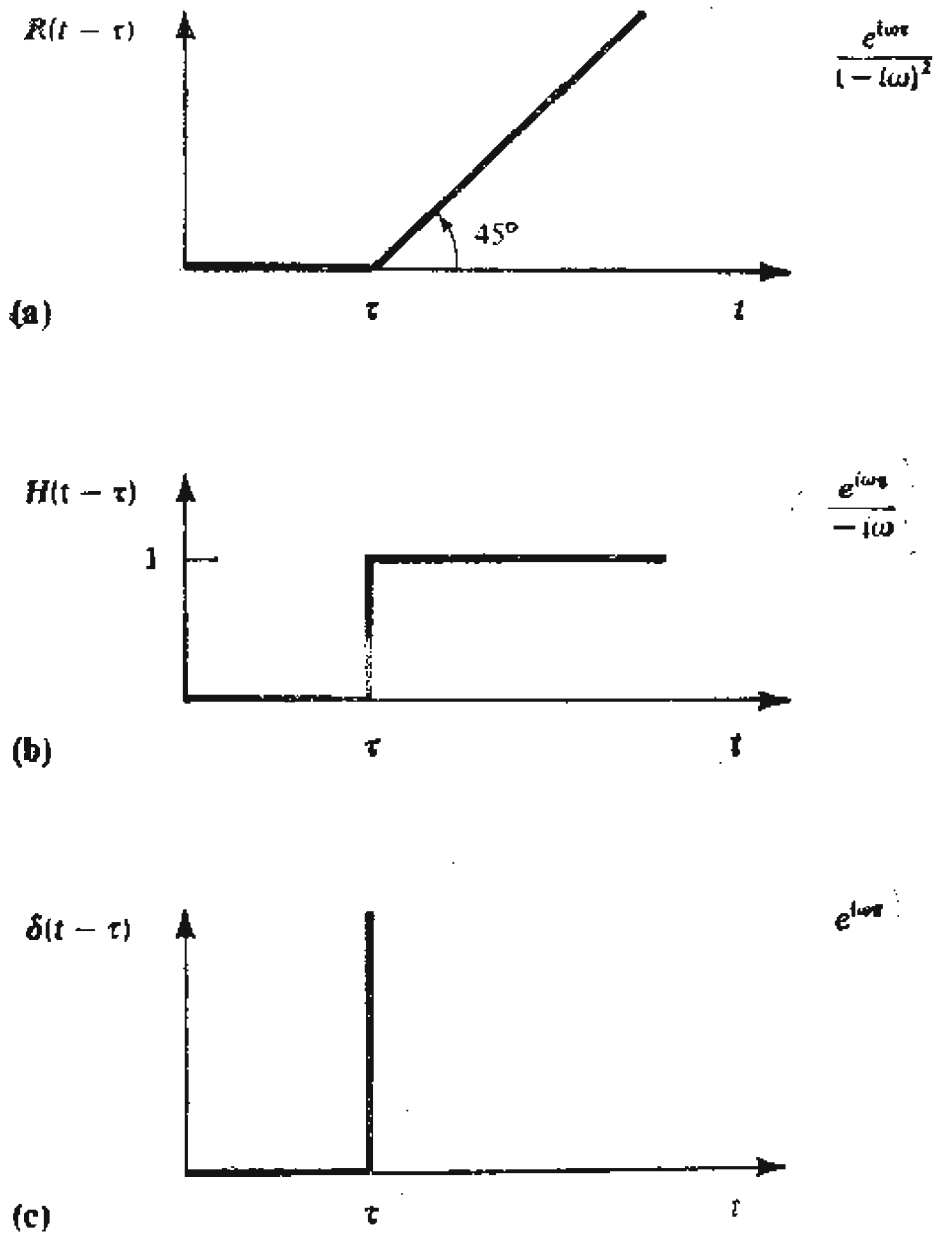


图 4.7

一组不连续函数和它们的有关高频频谱的公式。斜坡值由 $R(t)=tH(t)$ 给定

号和约定：

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt,$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$$

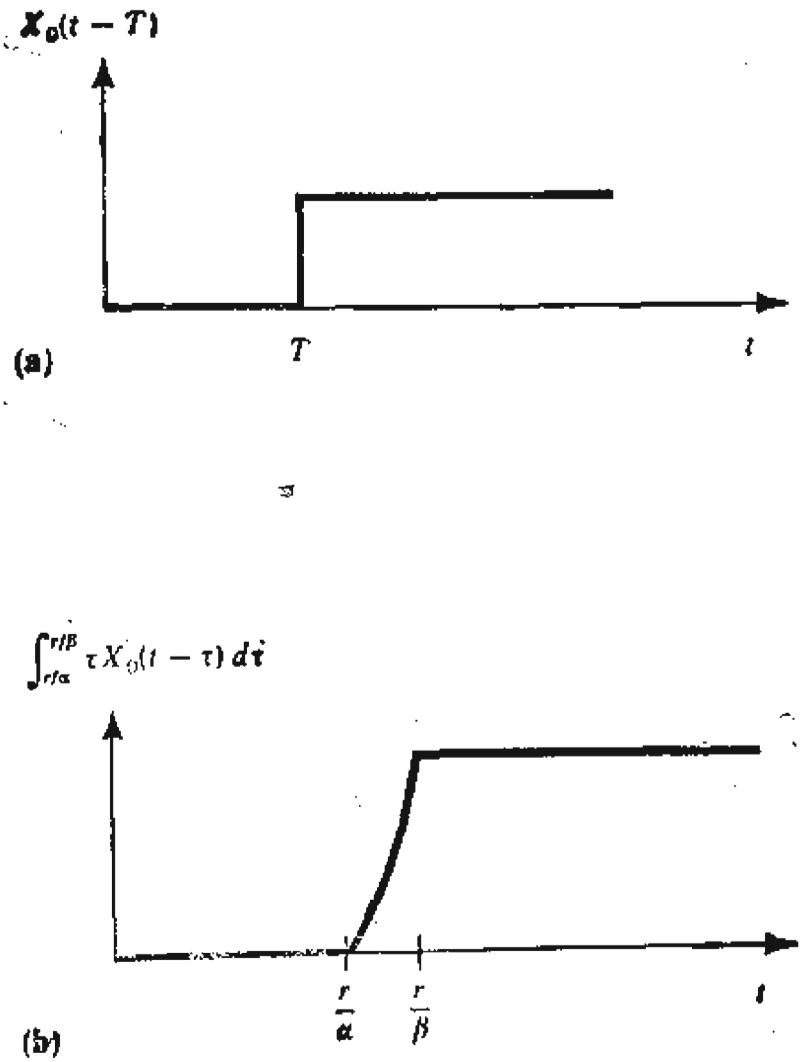


图 4.8

对于以 $X_0(t)\propto H(t)$ 得到的 Green 函数，远场和近场位移脉冲形状的对比。(a) 远场：时间 $t=T$ 是 $t=r/\alpha$ 或 r/β。(b) 近场：在时间 r/α 和 r/β 之间，位移按抛物线增大，但在这两种波阵面上，质点速度都是不连续的

来进行时间和频率函数的 Fourier 变换，根据问题的前后关系来决定究竟在时间域还是在频率域求 f。(关于我们选择这个约定的理由，参看补充 5.2。) 这时 $X_0(t-r/\alpha)$ 变换为 $e^{i\omega r/\alpha}X_0(\omega)$，而 $\int_{r/\alpha}^{r/\beta}\tau X_0(t-\tau)d\tau$ 可以看作是 $X_0(t)$ 同下列形状的函数的褶积：



因此，这个褶积变换为乘积

$$X_0(\omega)\int_{r/\alpha}^{r/\beta} te^{\pm i\omega t}dt = \left[-\left(\frac{r}{x}-\frac{1}{i\omega}\right)\frac{e^{\pm i\omega r/\alpha}}{i\omega}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{r}{\beta}-\frac{1}{i\omega}\right)\frac{e^{\pm i\omega r/\beta}}{i\omega}\right]X_0(\omega),$$

由 (4.23) 我们得到 $X_0 * G_{ij}$ 的 Fourier 变换为

$$\frac{X_0(\omega)e^{\pm i\omega r/\alpha}}{4\pi\rho\alpha^2 r}\left[\gamma_i\gamma_j+(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\left(-\frac{\alpha}{i\omega r}\right)\right.$$
$$\left.+(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\left(-\frac{\alpha}{i\omega r}\right)^2\right]$$
$$-\frac{X_0(\omega)e^{\pm i\omega r/\beta}}{4\pi\rho\beta^2 r}\left[(\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})+(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\left(-\frac{\beta}{i\omega r}\right)\right.$$
$$\left.+(3\gamma_i\gamma_j-\delta_{ij})\left(-\frac{\beta}{i\omega r}\right)^2\right]. \qquad (4.35)$$

(4.35)中方括号内的无量纲项，给出不同远场和近场位移的相对大小。这里重要的是无量纲比值 $\omega r/\alpha$ 和 $\omega r/\beta$，并且注意到

$\frac{\omega r}{\alpha}=2\pi\times$(对于频率为 ω 的 P 波，源与接收点之间的波长数目)，

$\frac{\omega r}{\beta}=2\pi\times$(对于频率为 ω 的 S 波，源与接收点之间的波长数目)。

利用这个解释，我们至少能得到 Green 函数的不同项在何处占优势的清晰图象。简单说，远场是“到源点的距离大于几个波长的所有位置”，而近场是“到源点的距离为一个波长的一小部分之内的所有位置”。在近距离和中间距离上，必须估计(4.35)中每一项的相对大小，也许得到的结论是没有占优势的单一项（参看问题 4.1)。

我们上面关于可在时间域中传播的间断的讨论，可以形式地转化为高频频谱的性质。如果 $g(t)$在原点有一单位跃变，则频谱 $g(\omega)$就有一项，它随 $\omega\to\infty$ 的渐近行为是 $(-i\omega)^{-1}$（参看 Bracewell，1965）。对该结果反复进行积分，并应用移位定理：

$$g(t-T)\longrightarrow g(\omega)e^{i\omega T},$$

我们得到下列结果：如果 $f(t)$在 $t=T$ 有第 n 阶间断，使得

$$\frac{\partial^{n-1}f(t)}{\partial t^{n-1}}\Big|_{t=T^-}^{t=T^+}=A\ (A\text{为常数}),$$

则随 $\omega\longrightarrow\infty$时，Fourier 变换 $f(\omega)$渐近于 $A(-i\omega)^{-n}e^{i\omega T}$。这就使我们能够看到，(4.35)中的不同项如何与时间域中的不同项直接相联系，但它可以是一个使人误解的结果，因为只在比能观测到的频率高得多的频率上，$f(\omega)$的行为才能够类似于 $A(-i\omega)^{-n}\times e^{\pm i\omega T}$。换另一种说法就是，物理变量 $f(\omega)$在高频上的观测趋势，不能作为它所代表的任一波阵面的性质的标志，因为后者可能要求观测千赫或兆赫的频率；而这些频率通常在地震学中是不用的。即使在地震频率上，我们也能根据（4.35）中所示不同的频率依赖关系，来分离近场和远场，虽然抽象的量“波阵面”和“间断强度”可能是无法观测的。

我们比较详细地给出这些结果，是因为关于射线理论的正式文章都倾向于着重分析间断的各种阶次，但我们在地震学中不能采用这种方法。我们宁可采取一个不太严格的方法，但是要把假定说清楚，其中假设导数 $\dot{X}_0(t-r/\alpha)$比$(\alpha/r)X_0(t-r/\alpha)$ 占优势，因为在远场体波所通常观测到的高频上$\left(\text{即}\frac{\omega r}{\alpha}\gg 1\right)$，就是这种情况。

研究体波位移的纵分量和两个横分量的精巧方法就是建立一个曲线坐标系，使这三个分量或沿着一个坐标轴，或位于一个坐标平面内。假定位于 ξ 的点源，在选为起点的时间 $t=0$ 开始起作用。在均匀介质中，波阵面作为不断扩张的球面由震源向外辐射，

球面的半径为 αt(对于 P 波)和 βt(对于 S 波)，在时间 r/α 和 r/β 到达一般位置 x，此处 $r=|x-\xi|$。我们把它推广到非均匀介质，办法是引入 $T(x,\ \xi)$ 作为波阵面由 ξ 到达 x 所需的走时，它依赖于位置。如果对于问题中的特定震源，能够有多于一个的波阵面，例如，若纵波和横波都存在，那就将需要多于一个的走时函数。然而，引用 $T(x)$ 常常就足够了，根据题意可以指明关心的是哪个波阵面和哪个点源。

因此，我们的第一个初解(即解的尝试形式)为

$$u(x,\ t)=U(t-T)f(x), \tag{4.36}$$

我们要把它作为波动方程 $\rho\ddot{u}_i=\tau_{ij,j}$(除去源奇异点 $x=\xi$ 外，处处适用)的近似解进行考查。对于一般各向异性非均匀介质，应力-位移关系是 $\tau_{ij}=c_{ijkl}(x)u_{k,l}(x,\ t)$，直接代入，给出

$$\rho\ddot{U}_i f=[c_{ijkl}(U_k f)_{,l}]_{,j}. \tag{4.37}$$

在波阵面附近，我们假定 U 的起伏比 f 或 c_{ijkl} 快得多，逐次微商 $\dot{U}$ 和 $\ddot{U}$ 的涨落仍比较快。方程(4.37)含有 U 对时间和空间的两种微商，但因 U 只与时空组合$(t-T(x))$有关系，使得能有下列关系：

$$U_{k,ij}=\ddot{U}_k\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_j}-\dot{U}_k\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial x_j},$$

从而(4.37)中的各二次导数可归拢为

$$\left(\rho\delta_{ik}-c_{ijkl}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_l}\right)\ddot{U}_k f=E_i(Uf), \tag{4.38}$$

这里的 E 仅仅包含(i)U 的一阶微商，(ii)U 本身，和(iii)弹性常数与振幅函数 $f(x)$以及它们的梯度。因此，E 一定比 $\ddot{U}$ 小得多，于是我们得出结论，$\ddot{U}_k f$ 的系数矩阵一定是退化矩阵：

$$\det\left|\rho\delta_{ik}-c_{ijkl}\frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_l}\right|=0. \tag{4.39}$$

既然它给出函数 $T(x)$ 的约束条件，所以这个方程决定着弹性介质中可能的波阵面。

在非均匀各向同性介质中，c_{ijkl}的特有形式[见(2.33)]使得能把(4.39)分解成因子形式：

$$\left(\nabla T\cdot\nabla T-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right)\left(\nabla T\cdot\nabla T-\frac{\rho}{\mu}\right)^2=0. \tag{4.40}$$

即T满足程函方程(eikoal equation)

$$(\nabla T)^2=\frac{1}{c^2}, \tag{4.41}$$

其中c是局部P波速度$\sqrt{\dfrac{\lambda(x)+2\mu(x)}{\rho(x)}}=\alpha$，或局部$S$波速度

$\sqrt{\dfrac{\mu(x)}{\rho(x)}}=\beta$。

T满足具有速度c的程函方程，一个由之可引入射线的方程，下面我们发展由此得到的结果。

4.4.1 与速度场$c(x)$相联系的走时函数$T(x)$的性质

假定波阵面S由$t=T(x)$给定，并且S到达点$x+dx$比到达点x晚时间dt，则$t+dt=T(x+dx)$，因而$dt=\nabla T\cdot dx$。如果V是波阵面沿dx方向前进的速度，则有$V=dx/dt$和$\nabla T\cdot V=1$。所以

$$V^2\geqslant\frac{1}{(\nabla T)^2}=c^2 \quad [\text{利用(4.41)}],$$

仅当矢量V与∇T平行，即dx垂直于S时，才为等式。因此，c是S在与它自身正交方向(垂直)上的速度。

对于给定的波阵面S，我们引入射线作为随波阵面传播的S的法线。如果一条射线利用$x=x(\xi)$形式的参数来表示，其中ξ沿射线单调变化，则$dx/d\xi=g(x)\nabla T$是该射线的方程，其中与平行矢量有关的标量函数g，由特别选取的ξ来决定。

例如，选取

$$\frac{dx}{d\xi}=c^2\nabla T=(c\nabla T)c \tag{4.42}$$

并注意到 $c\nabla T$ 是 S 的单位法线，c 是 S 垂直于自身的速度，则 ζ 可解释为沿射线的走时。由于 S 以特定的射线 R 为法线而传播，所以，S 与 R 的交点将出现在不同的 T 值。为审查该 T 与公式(4.42)的 ζ 之间的关系，我们注意到

$$\frac{dT}{d\zeta}=\nabla T\cdot\frac{d\boldsymbol{x}}{d\zeta}=\nabla T\cdot(c^2\nabla T)=1,$$

所以，T 和 ζ 沿射线方向严格地以同样方式增大。因此，射线自身可以用 T 表示为参数，而 T 的物理意义是沿射线的走时。在用射线路径方程进行计算时，有时用沿射线由某参考点测得的距离 s 作为参数比较方便。于是有

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}=c\nabla T \tag{4.43}$$

(因为 $d\boldsymbol{x}/ds$ 与 ∇T 平行，而(4.43)左边是单位向量)。

这些射线本身是固定的空间曲线，所以，为考查它们的几何性质，我们常常需要消去公式(4.43)中的时间量 T，得到只含有 $c(\boldsymbol{x})$ 的方程 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)$。进行这种消除(利用程函方程)需要有若干步，一步一步地得到

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\nabla T=\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\cdot\nabla\right)\nabla T=(c\nabla T\cdot\nabla)\nabla T$$

$$=\frac{1}{2}c\nabla[(\nabla T)^2]=\frac{1}{2}c\nabla\left(\frac{1}{c^2}\right)=-\frac{1}{c^2}\nabla c.$$

因此，只有空间坐标的射线微分方程为

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\right)=\nabla\left(\frac{1}{c}\right). \tag{4.44}$$

在均匀区域内，它简化为 $d^2\boldsymbol{x}/ds^2=0$，其一般解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}s+\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为常数)是一条直线。

在 c 只依赖于深度 z(在笛卡尔坐标系内)的介质中，量

$$\hat{\boldsymbol{z}}\times\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}\equiv\boldsymbol{Q} \tag{4.45 a}$$

沿射线为常数，因为

$$\frac{dQ}{ds}=\hat{z}\times\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c}\frac{dx}{ds}\right)=\hat{z}\times\nabla\left(\frac{1}{c}\right)=0$$

$\left[\hat{z}\text{与}\nabla\left(\frac{1}{c}\right)\text{平行}\right]$。于是，射线被限制在平行于 z 轴的平面内，并且 $\sin i(z)/c(z)\equiv p$ 沿一条射线为常数，其中 i 是 z 增大的方向与射线间的夹角(见图 4.9 a)。这是 Snell 定律，p 叫做射线参数。

在球对称介质中 $c=c(r)$，量

$$r\times\frac{1}{c}\frac{dr}{ds}\equiv Q \qquad (4.45\text{ b})$$

沿射线为常数。(这里利用 $r=(r,\ \theta,\ \phi)$ 和以对称中心为原点的球极坐标。)这个结果再次用到(4.44)，因为

$$\frac{dQ}{ds}=\frac{dr}{ds}\times\frac{1}{c}\frac{dr}{ds}+r\times\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{c}\frac{dr}{ds}\right)=0+r\times\nabla\left(\frac{1}{c}\right)=0.$$

射线位于竖直面内，并且现在的量 $\frac{r\sin i(r)}{c(r)}\equiv p$(仍叫射线参数)沿一条射线路径为常数（见图 4.9 b)。这是球对称介质的 Snell 定律。在后面各章时常用到量 p，往往把它作为变量来处理，离开点源的不同射线对应着不同的 p 值。注意，p 在随深度而变化的介质(4.45 a)中的物理量纲，与在球对称介质(4.45 b)中的量纲不同。

在转到研究辐射的质点位移振幅之前，有个更普遍的射线性质需要提出。这个结果叫做 Fermat 原理，即，对于射线上的两点 A 和 B，射线本身是这样一个路径，沿着它在速度场 $c(x)$ 中从 A 到 B 的走时是个稳定值。我们可以用射线方程 $\frac{dx}{d\xi}=g(x)\nabla T=g(\xi)\nabla T$ 中 ξ 的进一步性质证明它(请回忆，我们已经对走时和距离利用过 ξ)。量 $g(\xi)$ 和 ξ 被程函方程(4.41)所约束，这意味着

$$\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\xi}=\left(\frac{g}{c}\right)^2.$$

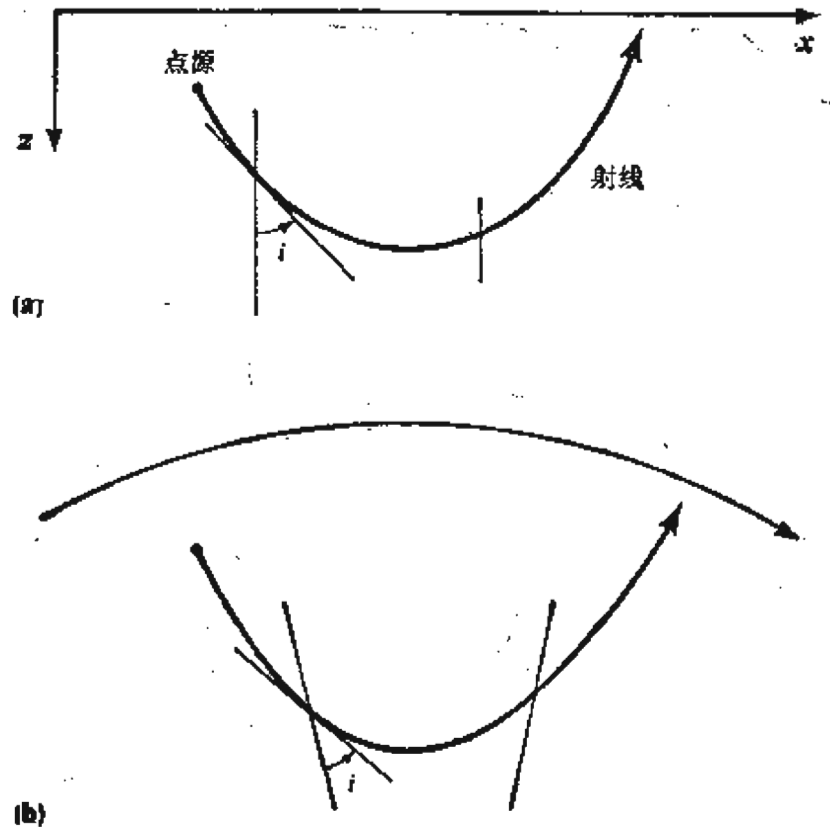


图 4.9

(a) 在速度只随深度变化的介质中的射线路径；$\sin i(z)/c(z)$ 是常数；射线被限制在竖直面内。(b) 在速度只随到对称中心的距离 r 变化的球对称介质中的射线路径；$r\sin i(r)/c(r)$ 是常数，射线处于竖直面内。估算出的在源点的角度 i 叫做离源角 (take-off angle)

给定 ξ，然后我们求

$$g = c\left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.46}$$

一般情况下 $\frac{d}{ds}=\left(\frac{c}{g}\right)\frac{d}{d\xi}$，因此，由(4.44)，我们有对于任意选定的 ξ 的射线方程

$$\frac{c}{g}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{g}\frac{dx}{d\xi}\right]=\nabla\left(\frac{1}{c}\right).$$

可以认为这个形式与变分计算的 Euler 方程相同，由(4.46)

首先消去ε，得到

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{c(x)}\frac{\frac{dx}{d\xi}}{\left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\xi}\right)^{1/2}}\right]=\left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\xi}\right)^{1/2}\nabla\left(\frac{1}{c}\right).$$

可依次将它写为三个标量方程($i=1$，2，3)：

$$\frac{d}{d\xi}\left\{\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial x_i}{\partial\xi}\right)}\left[\frac{1}{c(x)}\left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\xi}\right)^{1/2}\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{c(x)}\left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\xi}\right)^{1/2}\right].$$

这些就是我们所找的 Euler 方程，因为它们告诉我们，对于一条射线路径，走时是稳定的。也就是说，

$$T(B,A)=\int_A^B\frac{|dx|}{c(x)}=\int_A^B\frac{1}{c(x)}\left(\frac{dx}{d\xi}\cdot\frac{dx}{d\xi}\right)^{1/2}d\xi \quad (4.47)$$

是这样一个积分，如果而且只要$x=x(\xi)$是一条射线路径，则对于连接A和B的所有可能路径来说，这个积分是稳定的。

4.4.2 射线坐标

波阵面与同它相联系的射线正交，并且我们已经证明，沿一条射线上的点如何用T值给以参量化。现在引入(c^2，c^3)作为波阵面本身内的某个坐标系（或者等效地说，确认与点源相联系的射线构成一个二参量族），这时，射线在速度场$c(x)$(c等于α或β)中到达的每个点，用射线坐标系(T，c^2，c^3)的值来描述。我们的曲线坐标记号是在补充 2.6 中引入的。T方向（它沿射线）在每个点都与c^2和c^3方向正交，但在一般非均匀介质中，选择坐标系，使c^2和c^3方向始终正交是不可能的。幸而，球对称介质的特殊情形，却允许选择正交的c^2和c^3，使我们能直接应用在第二章发展的关于一般正交系的结果。这里须注意，标量因子$h_\varphi=h^1=c$，因为沿射线的距离增量ds是$c\,dT$。

在均匀介质中，我们知道远场P波是纵的，S波是横的。对于一般非均匀介质，同样也是对的，这可以从方程(4.38)与∇T

的矢量乘积和标量乘积看到。在各向同性介质中，这些乘积结果是

$$[\rho-\mu\nabla T\cdot\nabla T]\ddot{\boldsymbol{U}}\times\nabla T=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{U})\times\nabla T \tag{4.48}$$

和

$$[\rho-(\lambda+2\mu)\nabla T\cdot\nabla T]\ddot{\boldsymbol{U}}\times\nabla T=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{U})\times\nabla T. \tag{4.49}$$

回顾一下，$|\boldsymbol{E}|$具有$|\boldsymbol{U}|$的量级，已经使用初解$u(x,\ t)=f(x)\times\boldsymbol{U}(t-T(x))$，以及量级为$|\ddot{\boldsymbol{U}}|$的项比量级为$|\dot{\boldsymbol{U}}|$的项大得多，所以有

$$\ddot{\boldsymbol{U}}\times\nabla T=0\ 和(\nabla T)^2=\frac{\rho}{\lambda+2\mu}=\frac{1}{\alpha(x)^2} \tag{4.50}$$

或者

$$\ddot{\boldsymbol{U}}\times\nabla T=0和(\nabla T)^2=\frac{\rho}{\mu}=\frac{1}{\beta(x)^2}. \tag{4.51}$$

射线方向由∇T给定，所以(4.50)描述沿着由局部P波速度决定的射线传播的纵波，(4.51)描述沿着由局部S波速度决定的射线传播的横波。

我们的下一个目标是，求P和S波在均匀介质中沿射线传播时的振幅变化。根据结果(4.50)和(4.51)，我们将假定：

i) 如果(T,c^2,c^3)由P波速度$\alpha(x)$来定义，则运动方程近似解中的u^1(沿∇T方向的u分量)占优势，即u^2和u^3两个横分量可忽略不计。这是纵波解，其初解为

$$u(x,t)=f^1(x)(U^1(t-T(x)),0,0). \tag{4.52}$$

ii) 如果(T,c^2,c^3)由S波速度$\beta(x)$来定义，则位移u^2和u^3占优势。这是横波解，其初解为

$$\begin{aligned}u(x,t)=&f^2(x)(0,U^2(t-T(x)),0)\\&+f^3(x)(0,0,U^3(t-T(x)).\end{aligned} \tag{4.53}$$

我们先来考查球对称介质的特殊情况，这是地球结构的很好的近似。对这种情况，c^2和c^3被选作正交坐标p和ϕ，如图4.10所示。我们将看到，可以很快得到(4.52)和(4.53)的振幅函数

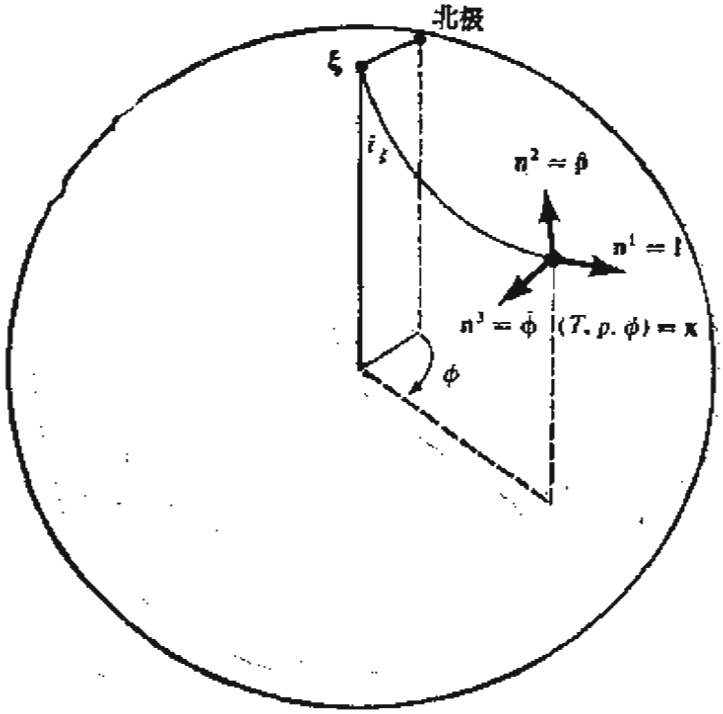


图 4.10

关于球对称介质的一般正交射线坐标。取 $(c^1,\ c^2,\ c^3)=(T,\ p,\ \phi)$，其中 p 是射线参数 $r\sin i\ (r)/c(r)$（它沿给定的射线为常数），ϕ 是地理方位角，T 是波阵面沿射线路径从 ξ 至 x 的走时。因此，$(c^2,c^3)=(p,\phi)$ 规定着离开震源的特定射线，而 T 规定着该射线上的特定点。在 x 的有关法线是 n^1（沿射线），n^2（在竖直面内的横向）和 n^3（水平面内的横向）。我们将常常用符号 $\hat{l}$，$\hat{p}$，$\hat{\phi}$ 表示它们各自的单位法线。

c^2 的另一可能选择是常被叫做离源角的 i_ξ：在此情况下，i_ξ 和 ϕ 应当是以震源为中心的球极坐标系中的角，取 $i_\xi=0$ 的方向为由震源向下，$\phi=0$ 的方向为由震源向北。取 $i_\xi=0$ 为竖直向下的理由是，这时 ϕ 具有相对震源的方位的普通地理定义，从北开始顺时针测量 ϕ，需要一个右手坐标系

f^1, f^2 和 f^3，并且可以鉴别 S 波的两个独立分量。

4.4.3 球对称介质中 P 波的几何解

现在，$u^1(x,t)$ 满足的精确方程是

$$\rho\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}=\frac{1}{ah^2h^3}\left[\frac{\partial}{\partial T}\ (h^2h^3\tau^{11})+\frac{\partial}{\partial c^2}(h^3a\tau^{12})\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial c^3}(ah^2\tau^{31})\Big]+\frac{\tau^{12}}{ah^2}\frac{\partial a}{\partial c^2}+\frac{\tau^{31}}{h^3a}\frac{\partial a}{ac^3}-\frac{\tau^{22}}{ah^2}\frac{\partial h^2}{\partial T}$$

$$-\frac{\tau^{33}}{h^2a}\frac{\partial h^3}{\partial T} \tag{4.54}$$

[参看(2.48)和图 4.10]，源点 $x=\xi$ 除外。然而，由应变-位移公式((2.45)和(2.46))以及我们的假定：

iii) 垂直于波阵面的波函数微商比平行于波阵面的微商大得多，于是，该坐标系中的大多数应变分量可忽略不计。这时应力-应变关系式(2.50)给出 τ^{12}，τ^{13}，τ^{22}，τ^{33}实际等于零，但是

$$\tau^{11}=\frac{\lambda+2\mu}{a}\frac{\partial u^1}{\partial T},$$

所以(4.54)简化为近似形式

$$\rho\frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2}=\frac{1}{ah^2h^3}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(h^2h^3\frac{\lambda+2\mu}{a}\frac{\partial u^1}{\partial T}\right)\right].$$

对于相同量级的近似（即保留 $\ddot{u}^1$ 和 $\dot{u}^1$），它是

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\rho ah^2h^3)^{1/2}u^1]=\frac{\partial}{\partial T^2}[(\rho ah^2h^3)^{1/2}u^1], \tag{4.55}$$

这仅仅是波沿 T 变化的方向传播的一维的波动方程。$(\rho ah^2h^3)^{1/2}u^1$的一般解，是 $t-T$ 的函数加上 $t+T$ 的函数。因而，沿 T 增大方向的纵运动的 P 波解是

$$u^p(x,t)=(u^1,0,0)$$

$$=\left(\frac{1}{\rho ah^2h^3}\right)^{1/2}\mathscr{F}^p(c^2,c^3)(U^1(t-T(x),0,0). \tag{4.56}$$

此式右边的因子具有若干性质，在 4.1 节（公式(4.3)后面）对于从均匀介质中的点源向外扩散的波的基本解，已经指出过这些性质。量 $(h^2h^3)^{-1/2}$ 描述几何扩散造成的波衰减（见图 4.11)；因子 $\mathscr{F}^p(c^2,c^3)$描述由震源向不同方向 (c^2,c^3) 发射的 P 波的辐射图案，我们可以料想到，给出纵向位移脉冲形状的函数 $U^1[t-T(x)]$，一定与作用在震源的体力的时间函数有关。

(4.56)中最有含义的因子是$(h^2h^3)^{-1/2}$，在图 4.11 中我们把

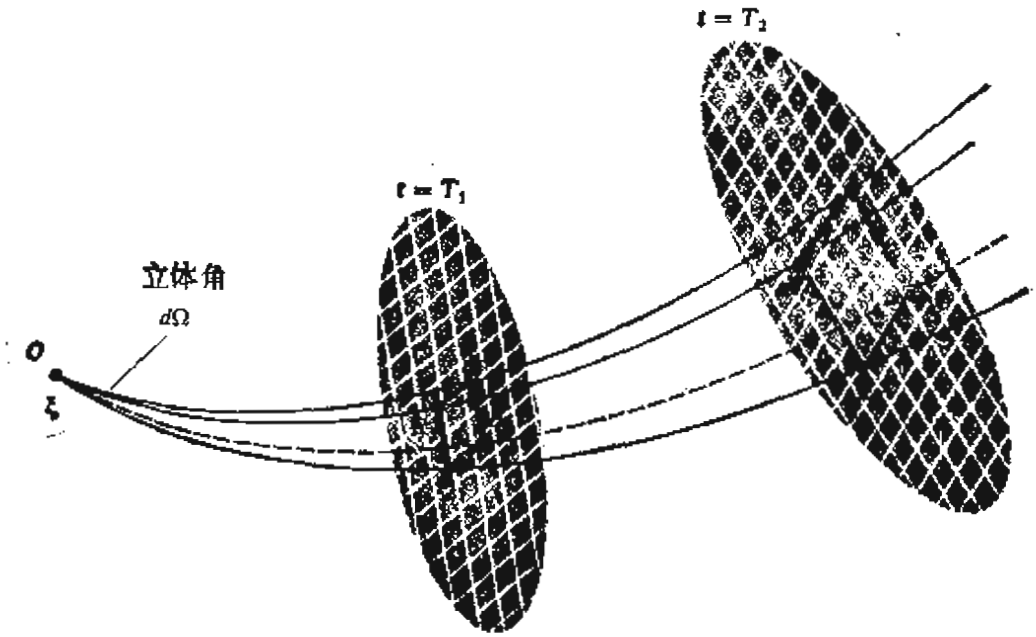


图 4.11

四条射线的几何扩散。设 OP_1P_2是一般正交系 (T,c^2c^3) 中坐标为 (c^2,c^3)的射线，T_1 和 T_2给出同一波阵面在相继时间 $t=T_1$和$t=T_2$ 的位置。设OQ_1Q_2,OR_1R_2,OS_1S_2 的坐标分别为(c^2,c^3+dc^3),(c^2+dc^2,c^3+dc^3)，(c^2+dc^2,c^3)，该线束在O的立体角为 $d\Omega$。这时 $P_1Q_1R_1S_1$的面积是 $h^2h^3dc^2dc^3$，其中，(h^2h^3)是在 $T=T_1$求值，而 $P_2Q_2R_2S_2$的面积 $h^2h^3dc^2dc^3$，其中，h^2h^3 是在 $T=T_2$求值。在这个意义上，h^2h^3 正比于由点源发射出的射线束的横截面面积。

如果坐标 c^2和 c^3不正交(一般非均匀介质就是这种情况)，则面积$P_1Q_1R_1S_1$和 $P_2Q_2R_2S_2$都不是矩形，而由$|(\partial x/\partial c^2)\times(\partial x/\partial c^3)|$ dc^2dc^3给出。这些面积在任意给定的波阵面上仍正比于 $d\Omega$，我们用射线管在x的横截面面积等于$\mathscr{R}^2(x,\xi)d\Omega$，来定义几何扩散函数$\mathscr{R}$ (x,ξ)

它与几何扩散相联系，在均匀介质中，它简单地等于 $1/|x-\xi|$。非均匀介质中的几何扩散因子具有重要的实际意义，因为它描述着射线的聚焦和散焦。所以我们引入以下特殊描述的新函数 $\mathscr{R}^P$ (x,ξ)：在立体角 $d\Omega$ 内由震源ξ向外扩散的P波射线束，在与 x 相重合的波阵面上，有面积 $[\mathscr{R}^P(x,\xi)]^2d\Omega$。如果射线是直线，则 $\mathscr{R}^P(x,\xi)=|x-\xi|$，但在比较一般的如图 4.11 所示弯曲射线的情况下，x沿特定射线管变化，$\mathscr{R}^P(x,\xi)\propto(h^2h^3)^{1/2}$。这里的

比例常数，可以只依赖于 ξ 和在 ξ 由 (c^2,c^3) 规定的射线方向。因为它仅仅是个标量因子，所以它可并入 $\mathscr{F}^P$ 和 U^1，以给出 P 波位移的几何射线解

$$u^P(x,t)=\left(\frac{1}{\rho(x)\alpha(x)}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathscr{R}^P(x,\xi)}\mathscr{F}^P(c^2,c^3)(U^1(t-T^P(x,\xi)),0,0), \tag{4.57}$$

这里也用上标表示走时，$T^P(x,\xi)=\int_\xi^x |ds|/\alpha$，积分(见(4.47))沿射线进行。在 4.5 节，我们将对任意取向的点剪切位错，直接求 $\mathscr{F}^P(c^2,c^3)$ 和 $U^1(t)$ 的值。

4.4.4 球对称介质中 S 波的几何解：SV 和 SH 分量的引入

图 4.10 中的射线坐标，其走时 T 由剪切波速度 $\beta(x)=\beta(r)$ 所定义，也适用于分析横向运动 $u=(0,\ u^2,\ u^3)$。利用前面的假定(ii)和(iii)，以及 2.6 节的应力-应变和应变-位移公式，我们发现，除剪切应力

$$\tau^{12}=\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial u^2}{\partial T},\quad \tau^{31}=\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial u^3}{\partial T}$$

外，所有应力分量都可忽略不计。这两个剪切应力可代入 $\ddot{u}^2$ 和 $\ddot{u}^3$ 的方程（见(2.48)），并利用类似于推导(4.55)的步骤，于是得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\rho\beta h^2 h^3)^{1/2}u^2]=\frac{\partial^2}{\partial T^2}[(\rho\beta h^2 h^3)^{1/2}u^2], \tag{4.58}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[(\rho\beta h^2 h^3)^{1/2}u^3]=\frac{\partial^2}{\partial T^2}[(\rho\beta h^2 h^3)^{1/2}u^3]. \tag{4.59}$$

这些又是已知其一般解的一维波动方程；方程 (4.58) 和 (4.59) 还告诉我们，u^2 和 u^3 独立地传播。参考图 4.10，我们看到，u^3 是在 x 处的水平向运动，因此把它叫做 SH 分量。u^2 运动也沿射线的横向，但是是在竖直面内，因此把它叫做 SV 分量。注意，SV 分量并非必须在竖直方向。

球对称介质中 S 波的几何解，现在可以写为

$$\boldsymbol{u}^{SV}(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x})}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathscr{R}^{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}\mathscr{F}^{SV}(p,\phi)$$
$$\times(0,U^{2}(t-T^{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\zeta})),0) \tag{4.60}$$

和

$$\boldsymbol{u}^{SH}(\boldsymbol{x},t)=\left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x})}\right)^{1/2}\frac{1}{\mathscr{R}^{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})}\mathscr{F}^{SH}(p,\phi)$$
$$\times(0,0,U^{3}(t-T^{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}))). \tag{4.61}$$

虽然辐射图案 $\mathscr{F}^{SV}$ 和 $\mathscr{F}^{SH}$ 可以不同，但 S 波的两种分量具有一样的几何扩散因子 $\mathscr{R}^{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$，和一样的走时函数 T^{S}。一般说，脉冲形状 U^{2} 和 U^{3} 可能是不同的，虽然我们将在下节看到，对于由点剪切位错发出的远场 S 波，它们是一样的。SV 和 SH 运动的相对大小，叫做 S 波的偏振，它沿给定的射线不发生改变；在解释体波地震图时，这是个非常重要的性质。

4.4.5 一般非均匀介质中的几何射线解

现代地震学的精度明显地指出下述事实，即地球的内部结构不是十分球对称的。因此，表面源的体波走时曲线（时间随地面上距离而变化的图）表现出不同地区的系统差别。在比如 Julian 和 Sengupta(1973)做的研究中，约达 0.2 秒(总走时达到几分钟)的显著差别，被用来研究由于地幔深部的不均匀性所造成的偏离。对称性的一部分偏离是由于地球的扁率，但其校正现已了解得很清楚(Bullen，1937；Dziewonski and Gilbert，1976)。更引人兴趣的是由大规模横向变化的结构引起的效应，例如岩石层的下沉板块、地幔涌流、大陆边缘、以及形形色色的地壳不均匀性。关于体波，有些效应可利用在斜的（即不水平的）界面上的反射和折射来解释，但是，我们现在关心的是对于变化平滑的，即不存在结构间断的介质的射线理论。

如果放弃球对称假设，则主要困难是，一条给定的射线不再限制在一个平面内。在最坏的情况下，它可以绕圈，就像一个弄弯了的瓶钻。出人意外的是，对于球对称介质已经得到的结果

(4.57)，(4.60)，(4.61)，只需要很小的修改，就可以适用于一般情况。事实上，P波的几何射线解（4.57）在一般各向同性介质中不变。关于S波，位移振幅仍然象$1/[(\rho\beta)^{1/2}\mathscr{R}^S(x,\xi)]$那样变化[参看(4.60)，(4.61)]，并且仍然是偏振沿射线路径不变的情形。因为不再可能求得在每个波阵面上都正交的坐标（c^2，c^3），所以我们刚叙述过的结果，需要不同的和更为复杂的证明方法。

对于P波，可以试一下初解

$$u^P(x,t)=f(x)U(t-T(x))a\nabla T, \tag{4.62}$$

这是由(4.50)得到启示的。这里的$a\nabla T$是质点纵运动方向上的单位向量。我们把(4.62)代入非均匀各向同性介质的一般位移方程中，由(2.17)，(2.49)和(2.3)得到

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x_j}[\lambda\delta_{ij}u_{k,k}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})], \tag{4.63}$$

因为$(\nabla T)^2=\frac{1}{a^2}$，所以$\ddot{U}$阶的项都消失，如果要求$\dot{U}$阶的项也都为零，就得到$P$波振幅$f(x)$的方程。取与$\nabla T$的标量乘积（参看(4.49)），进行下列形式的某种处理后就得到结果

$$(\lambda+2\mu)[2\nabla T\nabla(af)+2a^3fT_{,k}T_{,ik}T_{,i}+af\nabla^2T]$$
$$+af\nabla(\lambda+2\mu)\nabla T=0. \tag{4.64}$$

这些项中的大多数，可直接变换到对于沿射线的距离S的空间微商，因为$a\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial S}$。例如，

$$T_{,k}T_{,ik}T_{,i}=\frac{\partial T}{\partial x_i}a\frac{1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}=\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right)$$
$$=\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{a^2}\right).$$

几何扩散效应在(4.64)中用∇^2T表示。它是∇T的散度，利用在$T\pm\frac{1}{2}\delta T$，$c^2\pm\frac{1}{2}\delta c^2$，$c^3\pm\frac{1}{2}\delta c^3$有棱角的体积元，我们看到，

只对于具有面积 $\mathscr{R}^2(x,\xi)\,d\Omega$ 的侧面，∇T 向体外的通量才不为零。(参看图 4.11 及其说明。) 根据散度的基本定义(每单位体积的通量)，得出

$$\nabla^2 T=\frac{1}{\mathscr{R}^2(x,\xi)\,d\Omega\,\alpha\delta T}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mathscr{R}^2(x,\xi)\,d\Omega}{\alpha}\right)\delta T$$

$$=\frac{1}{\mathscr{R}^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mathscr{R}^2}{\alpha}\right), \tag{4.65}$$

而(4.64)简化为

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s}+\frac{1}{2\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s}+\frac{1}{\mathscr{R}}\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial s}=0. \tag{4.66}$$

对此进行积分，给出 $f(x)\propto 1/[(\rho(x)\alpha(x))^{1/2}\mathscr{R}(x,\xi)]$，比例常数依赖于特定的射线，即依赖于$(c^2,c^3)$。所以，初解(4.62)导致与我们在 (4.57) 对球对称介质所得到的完全相同的 P 波几何解。

对于 S 波，我们由(4.51)知道，质点位移一般说仍沿射线的横向，但现在有个现象不能根据研究均匀或球对称介质的经验给以定量表示。这个现象就是，随着波阵面的传播，质点运动方向可以绕射线旋转。

我们给出关于 S 波的初解是

$$u^s(x,t)=f(x)U(t-T(x))v(x), \tag{4.67}$$

式中 $f(x)$是振幅，$U(t)$ 是脉冲形状，单位向量 v 是质点运动方向，即 $v\cdot\nabla T=0$。进而把初解代入位移方程 (4.63)，但这次是构成同 ∇T 的向量乘积。依照 $(\nabla T)^2=1/\beta^2$的性质，最大的 $\ddot{U}$ 项消失，要求 $\dot{U}$ 项为零，则得到

$$\mu[2(\nabla f\times\nabla T)v\times\nabla T+2f((\nabla T\times\nabla)v)\times\nabla T$$
$$+f(\nabla^2 T)v\times\nabla T]+f(\nabla\mu\times\nabla T)v\times\nabla T=0, \tag{4.68}$$

利用 $\beta\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial s}$可以将求导变为对沿射线距离 s 进行求导，还可以利用 $\nabla^2 T=\left(\frac{1}{\mathscr{R}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)\left(\frac{\mathscr{R}^2}{\beta}\right)$，其中 $\mathscr{R}$ 是 S 波的几何

扩散因子[参看(4.65)]，则(4.68)变为

$$\left(\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s}+\frac{1}{2\beta}\frac{\partial \beta}{\partial s}+\frac{1}{\mathscr{R}}\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial s}\right)(\boldsymbol{v}\times\nabla T)$$
$$+\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s}\times\nabla T\right)=0. \tag{4.69}$$

但是，这里的两个矢量$\boldsymbol{v}\times\nabla T$和$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s}\times\nabla T$是正交的。(这是由$\nabla T$，$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{v}\times\nabla T$的互相正交得到的；根据$0=\frac{\partial}{\partial s}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})=2\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s}$，所以$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s}$位于$\nabla T$同$\boldsymbol{v}\times\nabla T$构成的平面内。)因此，振幅函数$f$由

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s}+\frac{1}{2\beta}\frac{\partial \beta}{\partial s}+\frac{1}{\mathscr{R}}\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial s}=0 \tag{4.70}$$

来约束，并且还有

$$\partial \boldsymbol{v}/\partial s\times\nabla T=0, \tag{4.71}$$

这意味着$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial s}$一定沿纵向$\nabla T$。

由(4.70)看到，$f(\boldsymbol{x})\propto 1/[(\rho(\boldsymbol{x})\beta(\boldsymbol{x}))^{1/2}\mathscr{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})]$，这个振幅恰恰具有对于球对称介质中的$SV$和$SH$两个分量所发现的性质[参看(4.60)和(4.61)]。

根据(4.71)，我们可以证明，即使在一般非均匀介质中，S波在射线的不同点上保持相同的偏振。此效应可以用与射线上每点相联系的内在单位向量系统来分析。它们是单位切线$\boldsymbol{l}=\beta\nabla T$，单位法线$\boldsymbol{n}=(d\boldsymbol{l}/ds)/|d\boldsymbol{l}/ds|$和单位副法线$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{n}$。射线的局部曲率$\kappa(s)$是方向改变趋势的量度，并简单地等于$|d\boldsymbol{l}/ds|$。注意这个垂直于$\boldsymbol{l}$的方向变化同$\boldsymbol{n}$的关系为

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{ds}=\kappa(s)\boldsymbol{n}. \tag{4.72}$$

对射线上的每一点，向量$\boldsymbol{l}$和$\boldsymbol{n}$决定着一个平面，叫做密切面（参看图4.12），在射线被局限于一个面内的情况下（例如在球对称的地球中的射线），该面与射线平面一致。在比较一般的

情况下，密切面（它垂直于 b）沿射线而改变方向，微商 db/ds 给出射线"扭转"出密切面的趋势的量度。

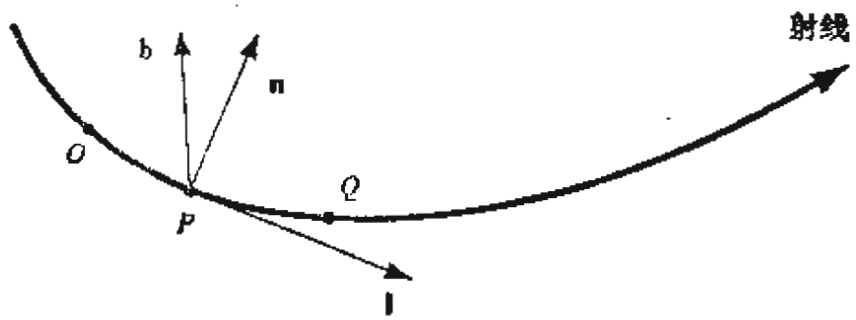


图 4.12

在 P 点上三个互相正交的单位向量系统，它们是一个扭转射线所固有的几何性质：l 沿着射线；n 垂直于射线并位于射线正在其中改变方向（dl/ds）的平面内。（这是密切面，其定义是 O 和 Q 趋近于 P 时，包含弯曲射线上 O，P，Q 点的极限平面。）单位副法线 b 的取法是使（l，n，b）符合右手定则。如果射线并不扭转，只是在一平面内弯曲，则 b 垂直于该平面

写出 $db/ds=c_1l+c_2n+c_3b$，很容易证明，因为 b 的长度不变，有 $c_3=0$，根据 b 和 n 的定义，有 $c_1=0$。所以，db/ds 是在 n 方向上，射线的局部扭转或第二曲率 T，定义为

$$db/ds=-Tn. \tag{4.73}$$

这个方程意味着，(n,b) 轴按右手方式以每单位距离转 T 的速率绕射线旋转。

因为 $n=b\times l$，所以

$$dn/ds=-kl+Tb. \tag{4.74}$$

方程(4.72)—(4.74) 叫做 Frénet 公式。我们现在转到研究横运动在传播中如何改变方向的问题。

假定在沿射线的距离 s 处，S 波运动的横向 ν 与该处法线构成角 γ，

$$\nu=\cos\gamma\, n+\sin\gamma\, b. \tag{4.75}$$

由(4.73)与(4.74)，则有

$$\frac{\partial v}{\partial s}=-\kappa\cos\gamma-\left(\frac{d\gamma}{ds}+T\right)(\sin\gamma\boldsymbol{n}-\cos\gamma\boldsymbol{b}).$$

(4.76)

但我们已从(4.71)得出结论，$\partial v/\partial s$ 沿着 ∇T 即沿 $\boldsymbol{l}$ 的方向，因此，(4.76)意味着

$$\frac{d\gamma}{ds}=-T. \tag{4.77}$$

这说明，相对于$(\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$方向的 S 波运动 u^S 绕射线旋转的速率，与这些轴本身旋转的速率正好一样，都等于T[见(4.73)]，但方向相反。由于这种相互抵消，才可以说 S 波保持其偏振。实际上，S 波速率的空间梯度确实经常变化（在竖直和水平两个方向上），以致需要用三维射线追踪来分析由特定点源来的走时和辐射图案。[这牵涉到射线轨迹空间方程(4.44)的数值解。但是，由于上面描述过的两个相互抵消的效应(4.73)和(4.77)，也许在平滑变化的结构中传播时，偏振（现在表示为SH/SV 比值）真的没有什么改变。这个问题还没有研究透彻。]

这些结果总括了射线理论的现状。在第五章，我们将把这些结果同射线管中的能量守恒联系起来；在第九章，将发展球对称介质中射线的进一步性质（发现对于 $\mathscr{R}(x,\xi)=0$ 的焦散区和对于阴影区，本节的结果必须进行修改）；在第十三章，将说明如何用三维射线追踪，解释地球中横向变化结构的影响。

本节的方法已被 V. M. Babich, J. B. Keller 以及他们的同事，利用象

$$u(x,\omega)=\exp(i\omega T)\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)(i\omega)^{-n} \tag{4.78}$$

这样的尝试解，向前大大推进了一步。

可以求出 A_n 间的递推公式，这就有可能在无穷级数中，算出所要求的任意多的项(Karal and Keller, 1959)。我们前面的工作是对于 A_0 的，它在足够高的频率上占优势。有时 A_1 是有用

的（例如，若存在物质边界，并且源点与接收点间的几何关系允许有首波，则它们占优势的影响就包括在 A_1 内）。在比较一般的情况下可以说，如果只有 A_0 还不够，则必须取级数（4.78）中更多的项（这是不实际的），或用一个不同形式的尝试解。[在时间域，（4.78）中的 A_n 对于正比于 $(t-T(x))^{n-1}$ 的项加权，于是此解离开波阵面而就垮掉了；参看 Okal and Mechler, 1973]。

4.5 球对称介质中任意取向的点剪切位错的远场体波辐射图案

这个课题的透彻理解，在发现和测量许多岩石层板块的运动中，已经起了重要的作用（Sykes, 1967, Isacks, Oliver and Sykes, 1968）。对于一个给定的地震，一旦确认了这种辐射图案，并得到了它的空间取向，它便给出有关引起该地震发生的应力状态的信息。

我们在 4.3 节已经描述了震源坐标中的辐射图案（参看图 4.5b 和图 4.6b）。对于 P 波，有两个节面。它们正交，其中一个是断层面。但是，在弄清发震断层的空间取向和该断层上的滑动方向之后，这个震源坐标系才能利用。断层的空间取向由走向和倾角决定，然后用倾伏角（rake）或俯角（plunge）来规定滑动方向（图 4.13）。一个断层有两个表面，图中的这一个是下盘，另一个叫做上盘。用滑动 $\bar{u}$ 作为上盘相对于下盘的运动方向。倾伏角 λ 是走向同滑动之间的夹角：$-\pi<\lambda\leqslant\pi$。如果倾角 δ 既不是零，也不是 $\pi/2$，并且 λ 是在 $(0,\pi)$ 区间内，则断层叫做逆断层或冲断层。但如果 λ 是在 $(-\pi,0)$ 区间内，则断层叫做正断层。

有些作者不用倾伏角（它在断层面内进行测量），而用在竖直面内进行测量的俯角。测出由水平方向往下到 $\bar{u}$ 方向的俯角之后，我们看出，俯角的正弦等于 $-\sin\lambda\sin\delta$。

对于走向滑动断层，$\delta=\frac{\pi}{2}$，并且 $\lambda=0$ 或 π，这时上盘和下盘的选取是任意的，走向有两个可能的选择。但有益的是建立一个约定，使得只由 λ 值就可立即辨别右旋和左旋走滑断层（右旋断层是站在一盘上的观测者看到另一盘的运动是向右的）。我们的约定是，在两个可能的走向中采用一个，并把右边的一盘（观测者沿着走向看）标为上盘。这决定着断层的两个表面中，哪一个被用来确定 λ，显然 $\lambda=0$ 是左旋走滑断层，而 $\lambda=\pi$ 是右旋的。

对于倾滑断层，$\delta=\frac{\pi}{2}$，但 $\lambda=\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{\pi}{2}$。走向也是两义的。我们把下降的一盘作为下盘，走向的选取仍是使上盘在右边。所以，倾滑断层总是 $\lambda=\frac{\pi}{2}$。

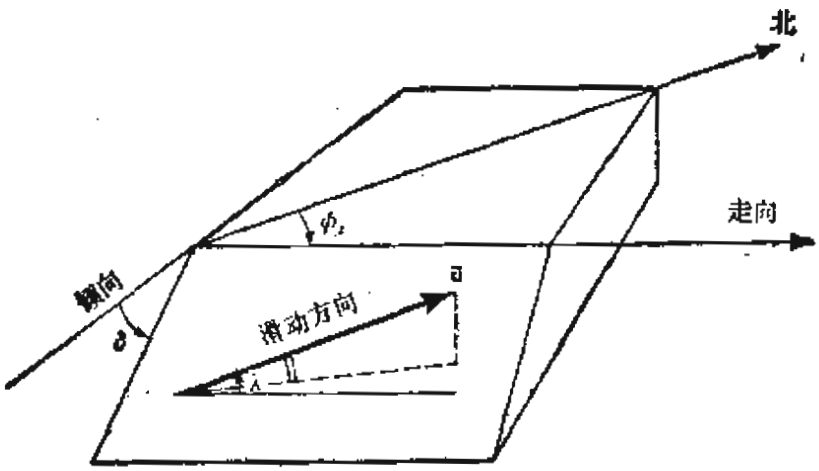


图 4.13

断层的空间取向参数（走向 ϕ_s，倾角 δ）和滑动方向的定义。ϕ_s 的测量是从北开始顺时针转动，断层向走向的右边下倾：$0\leqslant\phi_s<2\pi$。

δ 的测量是从水平方向往下：$0\leqslant\delta\leqslant\frac{\pi}{2}$

在本节，我们引入震源球（见图 4.14）作为在其上描述辐射图案的面，并指明如何根据仑球的远场体波观测得到节面。然后我们通过导出专门公式，增强这个描述方法，把 P，SV 和 SH

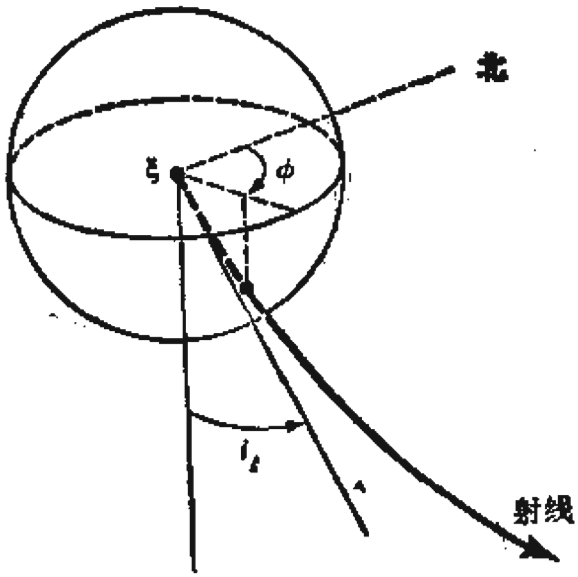


图 4.14

地震点源的震源球，是以震源为中心并有任意小的半径的球。它是展示辐射图案的方便工具，因为（分布在地球表面的）地震仪记录到的信息，可以变换到震源球上去；这涉及到由接收点向震源往回追踪射线，并且看看它在何处与震源球相交。也就是说，现在用以震源为中心的球极坐标系中所用的射线角坐标(i_z，ϕ)，可以指定震源球上的一个点。($i_z=0$ 是竖直向下；ϕ 是自北转动的方位。震源球的半径这时无关紧要，通常取单位长度)。例如，图 4.5 b 和图 4.6 b 的辐射图案，就是在震源球上表示的图案。

因为震源球位于源的近场内，所以，画在震源球上的远场辐射图案能否直接表示实际发生在震源区的位移这一点是不明显的。但是，对于在与平均质点速度相同方向上有最终错距的剪切位错，不出现这种混乱。这是由于，远场辐射图案（在（4.32）和（4.33）中的 A'' 和 A''' 项）这时与在到震源的所有距离上（尤其是在震源球上）的静位移辐射图案（4.34）相同

波的辐射图案作为一般走向，倾角和倾伏角的函数，和作为从震源至接收点的射线参数 p 和方位 ϕ 的函数。为了精确估计地震矩 M_0(根据体波)，这些公式是需要的。

4.5.1 利用远台体波观测求地震断层面空间取向和滑动方向的方法

对于体波，剪切位错的辐射图案的特征是象限分布（见图 4.5)。研究这个效应，最普通的是用 P 波位移初动。对于一个给

定的接收点，纵向质点运动是指向或背离震源；地震仪接收到的初至波常常提供地动位移记录中最明白和最易解释的部分。用图4.14中定义的震源球，可以很方便地了解辐射图案。因此，对于一个给定的在 x 的 P 波观测，我们把射线追踪回到在 ξ 的震源，把在 x 得到的信息变换到震源球上的相应点［即坐标为（i_ξ, ϕ）的点］。

为了说明这种绘图方法能造成的畸变，在图 4.15 中表示出，

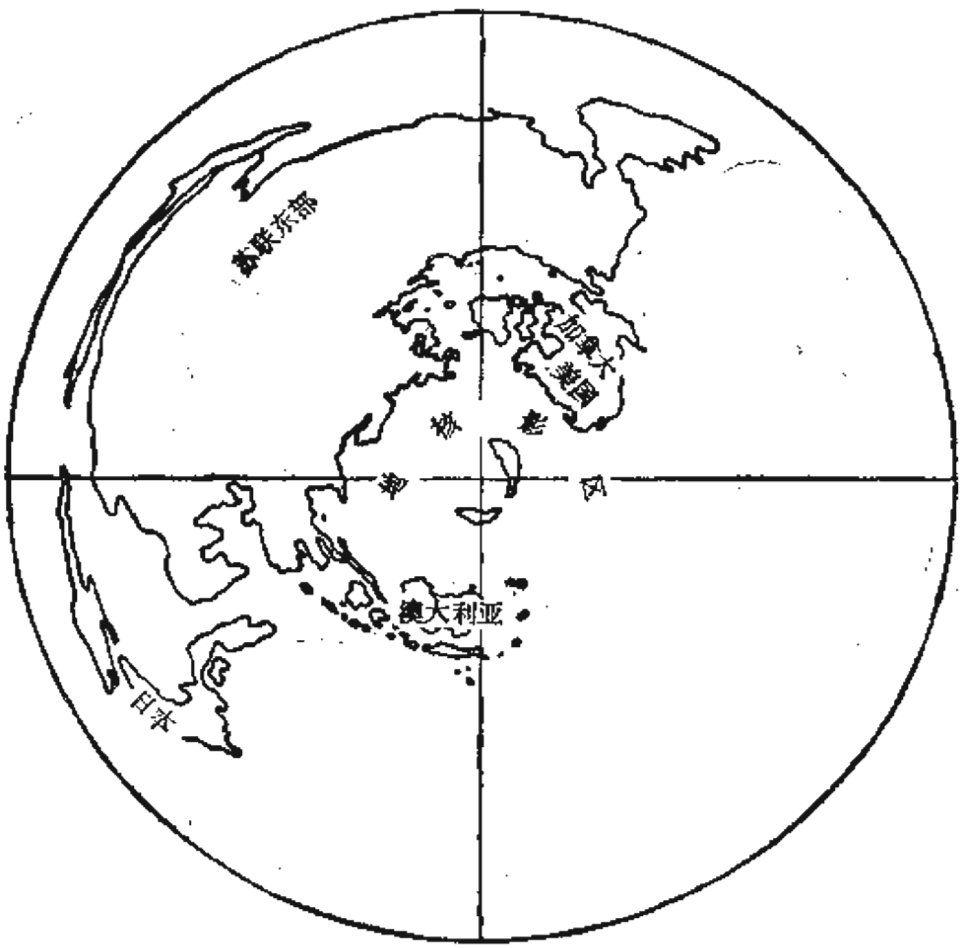


图 4.15

在等面积投影中，对于库页岛下的一点（43°26′N，142°03′E，深度 42 公里）所绘的震源球。为地震学的目的，苏联东部能够比所有其它大陆地区的总和提供更多的信息。太平洋中缺少大陆覆盖，使得很难得到断层面解（引自 Davies and Mckenzie, *Geophysical Journal*, v. 18, p. 60, 1969）

在以库页岛（北太平洋的一部分）下 42 公里的某一点为中心的震源球下半球上，P 波射线绘出的主要大陆的轮廓。由于 P 波速度在整个地幔中随深度增加（在为得到这个图所用的地球模型中），在把地球表面绘制到震源球上时，发生很大的面积畸变。

注意，为了在平面上（如书页上）表现出震源球，需要另外的画法。最常用的是球极平面投影（见图4.16）和天顶等面积投影（有时叫做 Schmidt-Lambert 等面积投影，见图 4.17）。

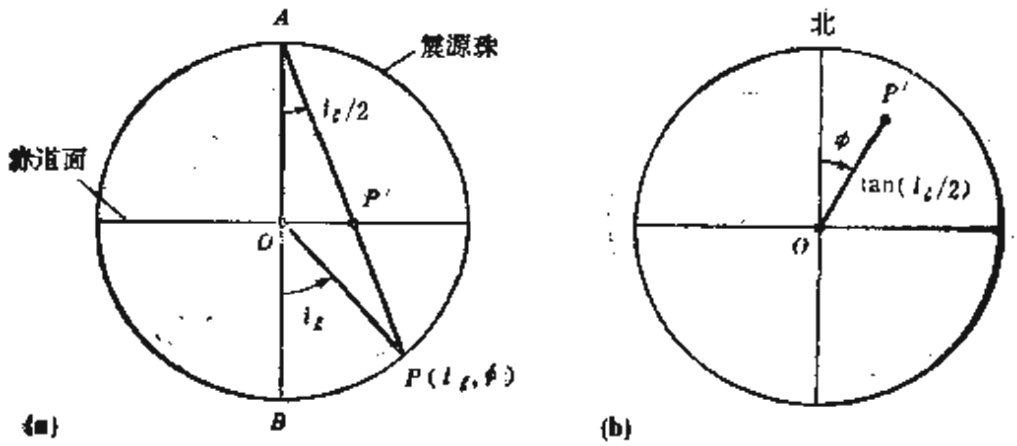


图 4.16

震源球的球极平面投影把 P 点画到震源球赤道面上的 P' 点。(a) 这里表示出的是通过震源球中心和 P 点的竖直面。(b) 在(a)的顶端看到的水平面平视图。这是个投影平面，P' 至 O 点的距离是 $\tan\frac{i_t}{2}$。该图给出的只是震源球下半球的投影，但从 B 而不是从 A 作投影，震源球的上半球也能在单位圆之内绘出。

因为这种投影保持角度不变，在位置 P' 的所有方向上，比例尺在局部是一样的。然而，在 P 的这个比例尺比例于 $\sec^2\frac{i_t}{2}$；所以在 P 的面元变到在 P' 的面元时乘以比例因子 $\sec^4\frac{i_t}{2}$ 这非常不便，因为它对于震源球上不靠近 A 和 B 的点给出的面积，放大得很多。出现在(b)中的这个效应，主要是与向下走的射线有关的面积，相对受到压缩。

球极平面投影的使用与 Wulff 网相联系。该网提供在(b)中画出各个可能的曲线的模板，这些曲线在(a)中代表震源球与任意空间取向的断层面的交线

由P波初动求断层面解的过程，包括(a)在震源球上标明与有资料的P波射线相应的特定位置，用不同符号注明压缩到达波和膨胀到达波，(b)用两个互相垂直的大圆弧分割震源球，使每个象限具有皆为压缩或皆为膨胀的波。图4.18中给出一个例子。

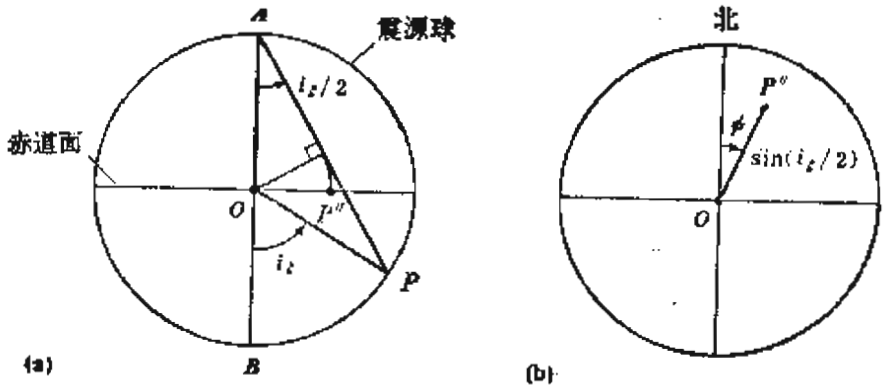


图 4.17

震源球的天顶等面积投影把P点画到P'点。方位角ϕ不变（这是所有天顶投影的性质），但距离是$OP'=\sin\frac{i_t}{2}$。(a)过震源球中心和P点的竖直面。(b)在(a)的顶端看到的水平面平视图。如果把在P的面积元画到在P'的面积元，则它的新面积为

$$\sin\frac{i_t}{2}d\phi\left[\sin\frac{1}{2}\left(i_t+di_t\right)-\sin\frac{i_t}{2}\right]=\frac{1}{4}\sin i_t\,di_t\,d\phi,$$

即以常因子$\frac{1}{4}$减小。整个震源球（面积4π）画为一个单位圆（面积π），但习惯上把上半球$\left(\text{从}B\text{做投影，即利用}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i_t}{2}\right)\right)$同下半球分开画，以避免上半球的很大畸变，否则这种畸变就会发生。此外，需要有一套模板在(b)中画出可能的断层面位置。等角度投影和等面积投影间的差别，在图4.5b和图4.6b中是很明显的，这两个图以不同方法表示出断层面和辅助面（对同一个震源机制）

有两个要点需要注意。第一是，在选择两个节面中哪一个是断层面时，不能确定。在3.2节，从双力偶体力等效中(3.15)两个分量的对称性，早已预料到这个困难。对于图4.18所示的地震，看到的地面破坏的走向，同两节面之一的走向只差8°，

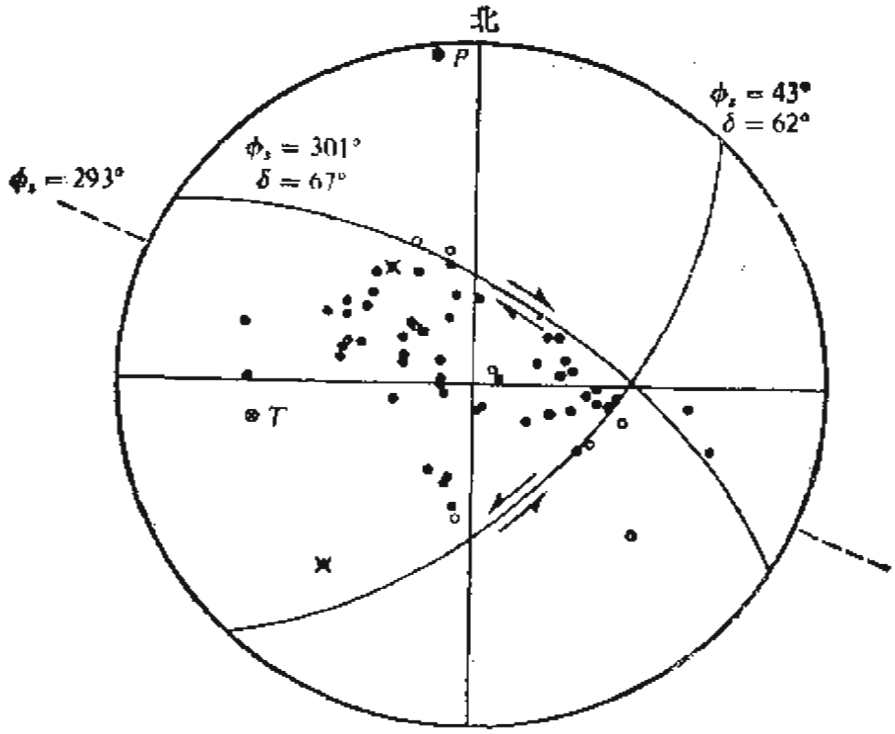


图 4.18

Mckenzie 得到的 1966 年 8 月 19 日土耳其东部地震的 P 波初动。该图为震源球下半球的等面积投影。实心圆代表压缩波，空心圆代表膨胀波；十指靠近节面的台站。ϕ_s 和 δ 是节面的走向和倾角，箭头指示运动方向。虚线表示伴随地震的主要右旋地表破裂的走向（引自 Mckenzie, *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 59, p. 593, 1969）

因此，可以放心地选择 $\phi_s = 301°$，$\delta = 67°$。第二是，所谓压应力轴，位于膨胀波象限的中心，而张应力轴则位于压缩波象限的中心。这些是矩张量的主轴，如果断层面是最大剪切面，则它们也是主应力轴。但是，一个给定地震的断层面，是由往回追溯到地质时期的构造过程造成的。不是最大剪切应力面，而常常是断层面在一次给定的地震中重新活动。在这些方面，Mckenzie(1969)指出，关于最大压应力方向的唯一限制是，它处于震源球的膨胀波象限内。

S 波辐射图案的利用，要比 P 波花费大得多的力气，因为在每个接收台站上，必须使用多于一个的仪器，才能得到偏振；并

且必须校正在地球自由表面的观测效应。图 4.19 的例子中表示出主要特征：质点运动从压应力轴散发，在张应力轴收敛；并且与 P 波节线垂直。

一旦确定出走向，倾角和倾伏角，就能够建立图 4.5 和图 4.6 中用的球极（震源）坐标系，来详细分析辐射图案中的振幅变化。但是利用 i_ξ 和 ϕ（图 4.10 和图 4.14），我们已经有了在源点的球极角度系。而且，这些是要用的天然的源坐标，因为我们知道把它们也作为 SV 和 SH 波的射线坐标时的性质（见 4.4 节）。因此，我们的下一个目标是，求出作为 i_ξ 和 ϕ 的函数，并且也作为一般走向，倾角和倾伏角的函数的 P，SV 和 SH 的辐射图案。

为达到这个目标，可分为两个不同的阶段。第一，对于均匀介质中的源，鉴别远场 P，SV 和 SH 问题。第二，使这个结果适合于象地球这样的球对称介质情况。

4.5.2 均匀介质中双力偶的任意空间取向

根据（4.30）中对于相应剪切位错的张量 M_{pq} 的有效点源所给的位移笛卡尔分量，我们可以证明向量形式的远场 P 波为

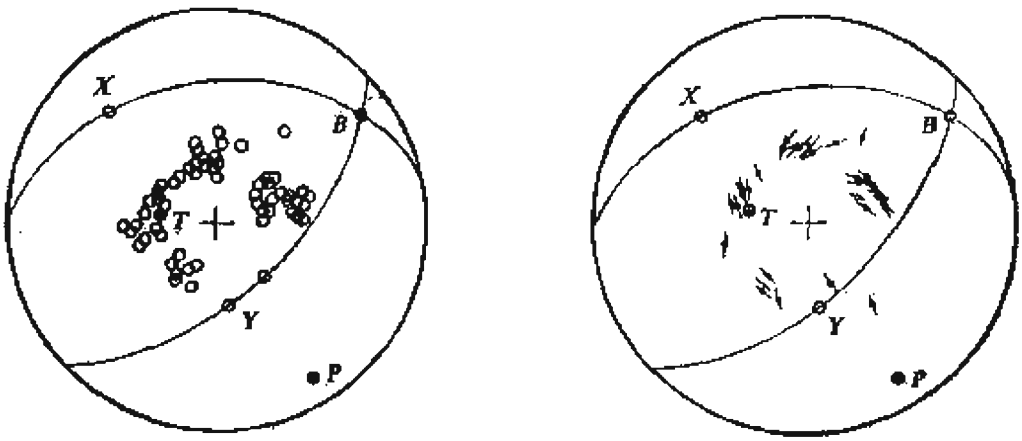
$$\boldsymbol{u}^P(\boldsymbol{x},t)=\frac{2(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}})\mu A\boldsymbol{\gamma}}{4\pi\rho\alpha^3 r}. \tag{4.79}$$

这里 $\boldsymbol{\gamma}$ 是从 ξ 处的源点到 $\boldsymbol{x}$ 处的接收点的纵方向；$\boldsymbol{\nu}$ 是断层法线；$\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}$ 是源点的质点速度在断层面面积 A 上取平均并在推迟时间 $t-r/\alpha$ 求出的值；r 是距离 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$。远场 S 波的相应结果为

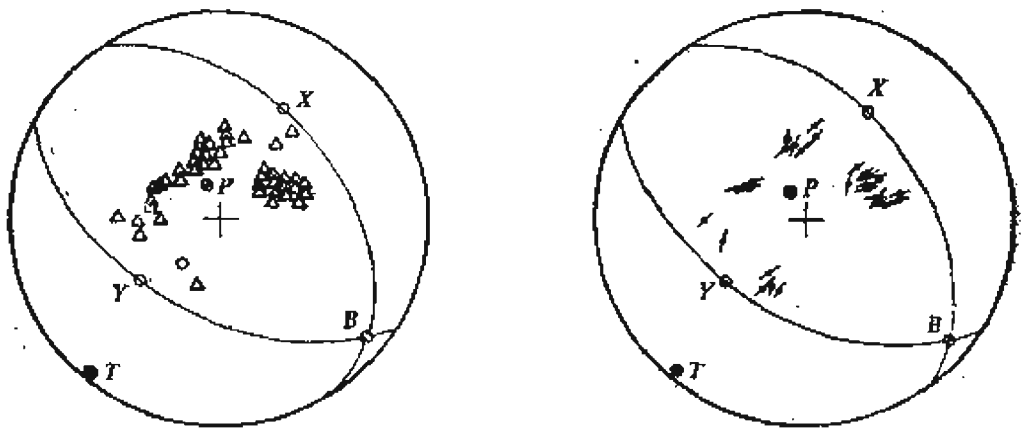
$$\boldsymbol{u}^S(\boldsymbol{x},t)=\frac{[(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu})\,\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}+(\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}})\boldsymbol{\nu}-2(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}})\boldsymbol{\gamma}]\mu A}{4\pi\rho\beta^3 r}, \tag{4.80}$$

其中 $\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}$ 在 $t-r/\beta$ 求值。

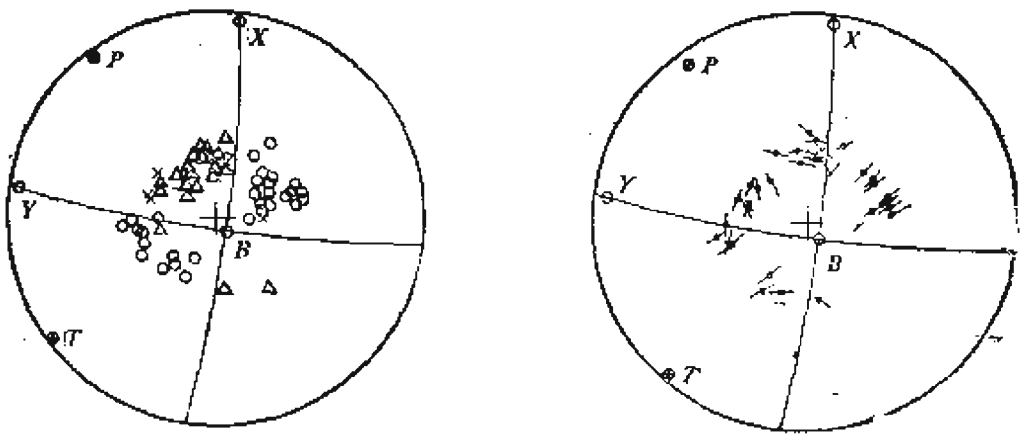
因为 $\boldsymbol{\gamma}$ 是在源点沿射线指向 $\boldsymbol{x}$ 的单位向量，所以，求 P 波辐射图案的问题，简单地变为用走向 ϕ_S，倾角 δ，离源角 i_ξ 和源点—接收点方位 ϕ 来表示 $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}$。$SV$ 和 SH 的辐射图案



1966年 5月15日 14时46分06秒



1966年 6月 2日 03时27分53秒



1966年 7月 4日 18时33分36秒

图 4.19

用等面积投影表示出的单个震源机制图解。在P波图解（每对图中的左图）中，三角代表膨胀波初动，圆代表压缩波，叉代表出现在节面附近的P波。（这些波是由它们的出射特性鉴定的。）符号P，T，B是矩张量的轴，X和Y是节面的极（引自 Stauder,1968）

稍微复杂些，因为在（4.80）中分解为 SV 和 SH 并不是一看就清楚的。显然，这个公式确实指出 u^S 是横运动，因为 $u^S \cdot \gamma = 0$。于是（分别）沿图 4.10 中 $\hat{p}$ 和 $\hat{\phi}$ 方向的 SV 和 SH 由

$$u^{SV}(x,t) = (u^S \cdot \hat{p})\hat{p} = \frac{[(\gamma \cdot \nu)(\dot{\bar{u}} \cdot \hat{p}) + (\gamma \cdot \dot{\bar{u}})(\nu \cdot \hat{p})]\mu A \hat{p}}{4\pi\rho\beta^3 r} \tag{4.81}$$

和

$$u^{SH}(x,t) = (u^S \cdot \hat{\phi})\hat{\phi} = \frac{[(\gamma \cdot \nu)(\dot{\bar{u}} \cdot \hat{\phi}) + (\gamma \cdot \dot{\bar{u}})(\nu \cdot \hat{\phi})]\mu A \hat{\phi}}{4\pi\rho\beta^3 r} \tag{4.82}$$

给出。（参看 Ben-Menahem 等，1965。）

为了用 $(\phi_s, \delta, \lambda, i_\xi, \phi)$ 得到所有三个辐射图案，我们引入震中的笛卡尔坐标方向 $\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$。我们的选择是 $\hat{x}$ = 北，$\hat{y}$ = 东，$\hat{z}$ = 竖直向下，如图 4.20 所示。用这三个单位向量，有

$$\begin{aligned}
&\text{滑动 } \bar{u} = \bar{u}(\cos\lambda\cos\phi_s + \cos\delta\sin\lambda\sin\phi_s)\hat{x} \\
&\qquad + \bar{u}(\cos\lambda\sin\phi_s - \cos\delta\sin\lambda\cos\phi_s)\hat{y} \\
&\qquad - \bar{u}\sin\lambda\sin\delta\,\hat{z}, \\
&\text{断层法线 } \nu = -\sin\delta\sin\phi_s\hat{x} + \sin\delta\cos\phi_s\hat{y} - \cos\delta\hat{z}, \\
&P\text{波方向 } l = \gamma = \sin i_\xi\cos\phi\hat{x} + \sin i_\xi\sin\phi\hat{y} + \cos i_\xi\hat{z}, \\
&SV\text{ 波方向 } \hat{p} = \cos i_\xi\cos\phi\hat{x} + \cos i_\xi\sin\phi\hat{y} - \sin i_\xi\hat{z}, \\
&SH\text{ 波方向 } \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}.
\end{aligned} \tag{4.83}$$

这里要注意，给出的 $l, \hat{p}, \hat{\phi}$ 同对于均匀介质给出的一样。

在辐射图案公式（4.79）、（4.81）、（4.82）中需要 6 个不同的标量乘积，由（4.83）可以很容易地得到它们。用无量纲形式，辐射图案 $\mathscr{F}^P$，$\mathscr{F}^{SV}$ 和 $\mathscr{F}^{SH}$ 由下列各式给出：

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^P &= 2(\gamma \cdot \nu)(\gamma \cdot \dot{\bar{u}})/\dot{\bar{u}} \\
&= \cos\lambda\sin\delta\sin^2 i_\xi\sin 2(\phi - \phi_s) \\
&\quad - \cos\lambda\cos\delta\sin 2 i_\xi\cos(\phi - \phi_s)
\end{aligned}$$

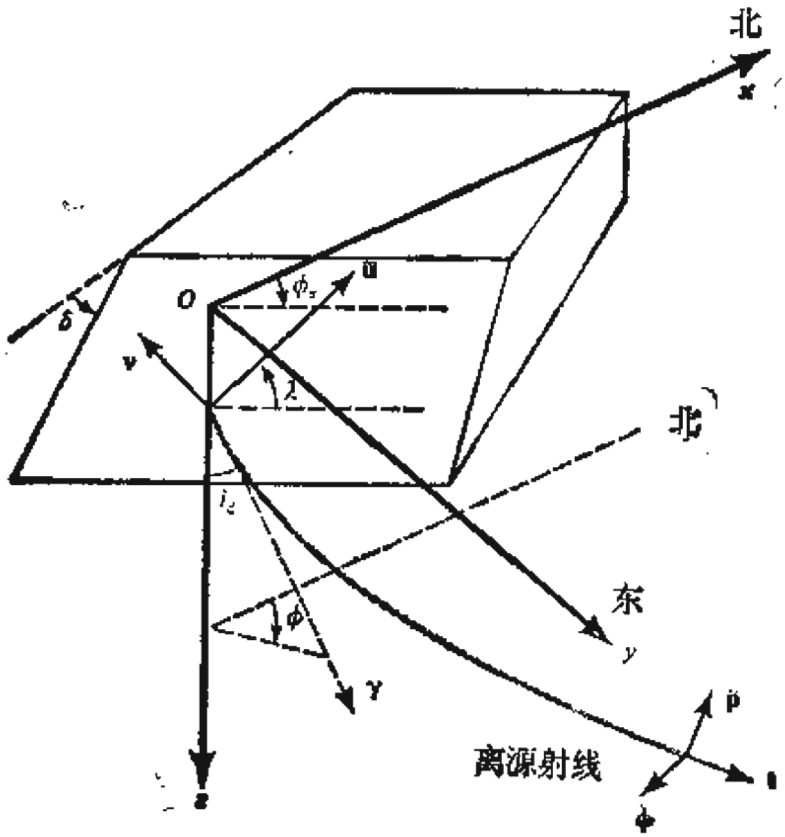


图 4.20

求 P, SV, SH 辐射图案与 $(\phi_s, \delta, \lambda, i_\xi, \phi)$ 的明确关系时所用的笛卡尔坐标 (x, y, z) 的定义。原点取在震中（震源正上方地面上的点）。该坐标系的优点是，遵从以 z 作为深度方向的惯例，自 x 轴测得的方位角 ϕ 遵从地理惯例。可以很容易地把 $\bar{u}$ 的水平分量分解为 $\bar{u}\cos\lambda$（沿走向）和 $\bar{u}\cos\delta\sin\lambda$（沿负的倾向）。在正文（4.83）中给出的分量是向北（x）和向东（y）。这是一个给出矩张量分量的天然坐标系（见补充 4.4）。离源角 i_ξ 可以用射线参数 p 替换作为射线坐标。因为 l 沿射线的纵向，所以对于均匀介质有 $l=\gamma$

$$+\sin\lambda\sin 2\delta\times(\cos^2 i_\xi-\sin^2 i_\xi\sin^2(\phi-\phi_s))$$
$$+\sin\lambda\cos 2\delta\sin 2 i_\xi\sin(\phi-\phi_s), \qquad (4.84)$$

$$\mathscr{S}^{SV}=[(\gamma\cdot v)(\dot{\bar{u}}\cdot\hat{p})+(\gamma\cdot\dot{\bar{u}})(v\cdot\hat{p})]/\dot{\bar{u}}$$
$$=\sin\lambda\cos 2\delta\cos 2 i_\xi\sin(\phi-\phi_s)$$
$$-\cos\lambda\cos\delta\cos 2 i_\xi\cos(\phi-\phi_s)$$
$$+\frac{1}{2}\cos\lambda\sin\delta\sin 2 i_\xi\sin 2(\phi-\phi_s)$$

$$-\frac{1}{2}\sin\lambda\sin 2\delta\sin 2i_\xi(1+\sin^2(\phi-\phi_s)), \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{SH}&=[(\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{v})(\dot{\vec{u}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})+(\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\vec{u}})(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})]/\dot{\vec{u}}\\&=\cos\lambda\cos\delta\cos i_\xi\sin(\phi-\phi_s)\\&\quad+\cos\lambda\sin\delta\sin i_\xi\cos 2(\phi-\phi_s)\\&\quad+\sin\lambda\cos 2\delta\cos i_\xi\cos(\phi-\phi_s)\\&\quad-\frac{1}{2}\sin\lambda\sin 2\delta\sin i_\xi\sin 2(\phi-\phi_s).\end{aligned} \quad (4.86)$$

这时，相应的远场位移为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^P(\boldsymbol{x},t)&=\frac{\mathscr{F}^P\mu A}{4\pi\rho\alpha^3 r}\dot{\vec{u}}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\boldsymbol{l},\\\boldsymbol{u}^{SV}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{\mathscr{F}^{SV}\mu A}{4\pi\rho\beta^3 r}\dot{\vec{u}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\hat{\boldsymbol{p}},\\\boldsymbol{u}^{SH}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{\mathscr{F}^{SH}\mu A}{4\pi\rho\beta^3 r}\dot{\vec{u}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}.\end{aligned} \quad (4.87)$$

4.5.3 把辐射图案改写为适于球对称介质情况

我们已经得到可以与 4.4 节导出的几何射线解(参看(4.57)、(4.60)、(4.61))相比的 P，SV 和 SH 的位移形式 (4.87)。为完成 P 波的对比，只剩下证实 r/α 是射线走时 T^P，$1/r$ 是几何扩散因子 $1/\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x},t)$，以及 $\frac{\mu}{\rho\alpha^3}$ 是因子 $\mu(\xi)/[\rho^{\frac{1}{2}}(\xi)\rho^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})\times\alpha^{\frac{5}{2}}(\xi)\alpha^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{x})]$。最后这个结果来自将 $\mu/\rho\alpha^3$ 推广到正比于 $[\rho\times(\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{x})]^{-\frac{1}{2}}$ 的项(参看(4.57))，其中比例常数可以只依赖于震源的性质。于是有

$$\boldsymbol{u}^P(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mathscr{F}^P\mu(\xi)A\,\dot{\vec{u}}\,(t-T^P)\boldsymbol{l}}{4\pi\rho^{1/2}(\xi)\rho^{1/2}(\boldsymbol{x})\alpha^{5/2}(\xi)\alpha^{1/2}(\boldsymbol{x})\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x},\xi)}, \quad (4.88)$$

同样地，有

$$\boldsymbol{u}^{SV}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mathscr{F}^{SV}\mu(\xi)A\,\dot{\vec{u}}\,(t-T^S)\hat{\boldsymbol{P}}}{4\pi\rho^{1/2}(\xi)\rho^{1/2}(\boldsymbol{x})\beta^{5/2}(\xi)\beta^{1/2}(\boldsymbol{x})\mathscr{R}^S(\boldsymbol{x},\xi)}, \quad (4.89)$$

$$u^{SH}(x,t)=\frac{\mathscr{F}^{SH}\mu(\xi)A\dot{\bar{u}}(t-T^S)\phi}{4\pi\rho^{1/2}(\xi)\rho^{1/2}(x)\beta^{5/2}(\xi)\beta^{1/2}(x)\mathscr{R}^S(x,\xi)}. \tag{4.90}$$

这里的辐射图案，与在（4.84)—(4.86）中对于均匀介质所给出的完全一样。唯一值得注意的对称性是，如果倾伏角改变180°，则 $\mathscr{F}^P$，$\mathscr{F}^{SV}$，$\mathscr{F}^{SH}$ 的符号相反。特别应注意，走向 ϕ，或离源方位 ϕ 改变180°时，不存在对称性，因此，必须仔细遵守图4.13和图4.20中给出的定义，这些角自北顺时针旋转时增大。

最后的公式（4.88)—(4.90）的主要用途，在于估算地震矩的值。由远场位移观测，在校正过辐射图案、几何扩散、以及在震源和接收点的比例因子之后，可以得到 $\mu A\dot{\bar{u}}(t-T)$。（事实上，还需要校正物质界面的透射效应、衰减和实际的仪器响应。）往往断裂的持续时间比观测体波的周期短得多，而这些周期也仍然短得足以能使用射线理论。在此情况下，震源处的平均质点位移 $\bar{u}$，实际是个阶梯函数，$M_0(t)=M_0(\infty)H(t)$，所以，观测的位移脉冲形状 $\mu(\xi)A\bar{u}$ 的频谱，在长周期上恰恰就是 $M_0(\infty)$。

补充 4.4

对于任意取向的剪切位错矩张量的笛卡尔分量

在剪切位错体波辐射图案的最后公式中，我们把矩张量的性质同Green函数的性质联合起来。如果我们想研究面波，或比较复杂的介质中的自由振荡，我们必须进一步发展波传播理论，以便求适当的Green函数的值。但矩张量不变。这里我们对于用走向 ϕ_s，倾伏角 λ，倾角 δ 和矩 M_0 描述的剪切断层，求它的笛卡尔分量。

参照取 x 方向为北的图4.20，断层滑动 $\bar{u}$ 和断层法线 ν 的笛卡尔分量已由（4.83）给出。回顾第三章，剪切位错的矩是 $\mu A\bar{u}$，其中 μ 是震源区的刚性系数（补充3.1），A 是位移间断面的平均面积。由（3.21)和(3.23）得到 $M_{pq}=\mu A(\bar{u}_p\nu_q+\bar{u}_q\nu_p)$，因此，矩张量 M

的笛卡尔分量为

$$M_{xx}=-M_0(\sin\delta\cos\lambda\sin 2\phi_s+\sin 2\delta\sin\lambda\sin^2\phi_s),$$

$$M_{xy}=M_0\left(\sin\delta\cos\lambda\cos 2\phi_s+\frac{1}{2}\sin 2\delta\sin\lambda\sin 2\phi_s\right)=M_{yx},$$

$$M_{xz}=-M_0(\cos\delta\cos\lambda\cos\phi_s+\cos 2\delta\sin\lambda\sin\phi_s)=M_{zx},\quad(1)$$

$$M_{yy}=M_0(\sin\delta\cos\lambda\sin 2\phi_s-\sin 2\delta\sin\lambda\cos^2\phi_s),$$

$$M_{yz}=-M_0(\cos\delta\cos\lambda\sin\phi_s-\cos 2\delta\sin\lambda\cos\phi_s)=M_{zy},$$

$$M_{zz}=M_0\sin 2\delta\sin\lambda.$$

这个总的结果，可以看作是四个基本矩张量的加权之和

$$\boldsymbol{M}=\cos\delta\cos\lambda\,\boldsymbol{M}^{(1)}+\sin\delta\cos\lambda\,\boldsymbol{M}^{(2)}-\cos 2\delta\sin\lambda\,\boldsymbol{M}^{(3)}$$
$$+\sin 2\delta\sin\lambda\,\boldsymbol{M}^{(4)},\qquad(2)$$

其中

$$\boldsymbol{M}^{(1)}=M_0\begin{pmatrix}0&0&-\cos\phi_s\\0&0&-\sin\phi_s\\-\cos\phi_s&-\sin\phi_s&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}^{(2)}=M_0\begin{pmatrix}-\sin 2\phi_s&\cos 2\phi_s&0\\\cos 2\phi_s&\sin 2\phi_s&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}^{(3)}=M_0\begin{pmatrix}0&0&0&\sin\phi_s\\0&0&0&-\cos\phi_s\\\sin\phi_s&-\cos\phi_s&&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}^{(4)}=M_0\begin{pmatrix}-\sin^2\phi_s&\frac{1}{2}\sin 2\phi_s&0\\\frac{1}{2}\sin 2\phi_s&-\cos^2\phi_s&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\qquad(3)$$

$\boldsymbol{M}^{(i)}(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$中的每一个都有本征值 M_0，$-M_0$ 和零，因此，每一个都是剪切位错的矩张量。事实上（根据(2)），$\boldsymbol{M}^{(1)}$由 M 在 $\delta=0$，$\lambda=0$ 情况下给定的，所以 $\boldsymbol{M}^{(1)}$适合于水平的断层面，用滑动方向规定走向。同样，$\boldsymbol{M}^{(2)}$是纯走滑断层$\left(\delta=\frac{\pi}{2},\ \lambda=0\right)$，$\boldsymbol{M}^{(3)}$是纯倾滑断层$\left(\delta=\frac{\pi}{2},\ \lambda=\frac{\pi}{2}\right)$，而$\boldsymbol{M}^{(4)}$是倾角为45°的纯逆倾滑断层$\left(\delta=\frac{\pi}{4},\ \lambda=\frac{\pi}{2}\right)$。

尽管我们的 Green 函数公式可能含有某些近似，但(2)式所示辐射场的分解是精确的。就是说，由任意取向的剪切位错辐射出的波，总是可以写成由具有同一走向的四个不同基本剪切位错辐射的波。事实上，如果不算它们具有共同走向这一要求，则只有三个基本剪切位错需要研究。用在走向 $\phi_s-\frac{\pi}{2}$ 上求得的 $\boldsymbol{M}^{(3)}$ 值代替(2)中的 $\boldsymbol{M}^{(1)}$，就看到这一点。

在上式中，我们取坐标(x, y, z)为（北，东，下）。在研究整个地球的简正振型时，比较更自然的另一种方法是基于坐标 (r,Δ,ϕ)，其中 Δ 是震中距离，ϕ 是震中经度（$\phi=0$ 是南）。这时矩张量的笛卡尔分量是 M_{rr}，$M_{r\Delta}$ 等等，这些分量以具有方向（上，南，东）的震源笛卡尔坐标系为参考系。于是，$\boldsymbol{M}$ 在两个坐标系中的分量之间的关系为

$$\begin{pmatrix} M_{rr} & M_{r\Delta} & M_{r\phi} \\ M_{\Delta r} & M_{\Delta\Delta} & M_{\Delta\phi} \\ M_{\phi r} & M_{\phi\Delta} & M_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{zz} & M_{zx} & -M_{zy} \\ M_{xz} & M_{xx} & -M_{xy} \\ -M_{yz} & -M_{yx} & M_{yy} \end{pmatrix}.$$

注意，在这个简正振型的约定中，震源—接收点方位变为 $\pi-\phi_s$。

对于一般矩张量（即具有对称性 $M_{pq}=M_{qp}$ 的九个力偶）所确定的点源，通过推广 (4.79) 和 (4.81)—(4.82)，远场体波用六个独立的 $\boldsymbol{M}$ 分量给定。利用 (4.29) 中的远场项，对于均匀介质，有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{P}(\boldsymbol{x},t) &= \left(\frac{\boldsymbol{\gamma}\cdot\dot{\boldsymbol{M}}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\boldsymbol{\gamma}}{4\pi\rho\alpha^3 r}\right)\boldsymbol{I}, \\ \boldsymbol{u}^{SV}(\boldsymbol{x},t) &= \left(\frac{\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\dot{\boldsymbol{M}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\boldsymbol{\gamma}}{4\pi\rho\beta^3 r}\right)\hat{\boldsymbol{p}}, \qquad (4.91) \\ \boldsymbol{u}^{SH}(\boldsymbol{x},t) &= \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\dot{\boldsymbol{M}}\left(t-\frac{r}{\beta}\right)\boldsymbol{\gamma}}{4\pi\rho\beta^3 r}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}, \end{aligned}$$

利用射线理论，很容易把它修改到非均匀介质的情况。第一，

(4.91)中的分母用(4.88)—(4.90)的分母代替。第二，(4.91)中与$\dot{M}$结合在一起的单位向量$\hat{\boldsymbol{p}}$和$\hat{\boldsymbol{\phi}}$，必须看作与震源处的射线横交，但在接收点的$\hat{\boldsymbol{p}}$和$\hat{\boldsymbol{\phi}}$，与鉴别辐射的质点运动中SV和SH分量的方向相适合。

建议进一步阅读的文献

Červený, V., I. A. Molotkov, and I. Pšenčík. *The Ray Method in Seimology*, Prague: Charles University Press, 1978

Courant, R., and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics* (Vol. 2, Chap. 6 for ray theory). New York: Interscience, 1952.

Kline, M., and I. W. Kay. *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*. New York: Interscience, 1966.

Love, A. E. H. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. New York: Dover Publications, 1944.

Morse, P. M., and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics* (Chap. 13 for Green's functions in elasticity), New York: McGraw-Hill, 1953.

Sternberg, E. On the integration of the equations of motion in the classical theory of elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 6, 34-50, 1960.

问　　题

4.1 画出 Green 函数 $G_{i,j}$ 本身的概略"地震图"。也就是，当 x_0 为脉冲时，画出 (4.23) 中三个不同项的相对位置和脉冲形状。然后证明，三者中每个脉冲下的面积同距离的关系，都是与 $1/r$ 成正比。脉冲下的面积，等于脉冲的 Fourier 变换当 $\omega \to 0$ 时的极限，因而由 (4.35) 与频率的关系看到，该面积是无限的。试证明 (4.35) 中的 $1/\omega^2 r^3$ 和

$1/\omega r^2$ 项事实上互相抵消，当 $\omega \to 0$ 时，与距离的关系确实是 $1/r$。

当地震仪仅仅对于比时间 $S-P$ 即 $r/\beta - r/\alpha$ 长得多的周期才灵敏时，注意 Green 函数的近端项实际是个脉冲，就象远场项一样。对于研究近场效应（诸如破裂断层附近的强地面运动），于是也得到，在震源时间函数对于比 $r/\beta - r/\alpha$ 长的时间将为非零值的意义上，所谓"远场"项和"近场"项，是同等重要的，故 (4.23) 中的第一项也具有 $1/r$ 的量级。

归纳来说，"远场"项在远场占优势，但"近场"和"远场"项，在与震源时间函数进行褶积后，它们在近场具有同等重要性。

4.2 如果固定的力 X_0 作用于无限、均匀、各向同性介质内原点的 j 方向，试由 (4.23) 证明，x 处位移 i 分量的静态解为

$$\frac{X_0}{8\pi\rho r}\left[\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)\gamma_i\gamma_j+\left(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\delta_{ij}\right].$$

（此式有时叫做 Somigliana 张量。）

4.3 为求出球对称地球中两点 ξ 与 x 间几何扩散因子 $\mathscr{R}(x,\xi)$ 的值，考虑沿相同方位以离源角 i_ξ 和 $i_\xi+\delta_{i\xi}$ 离开 ξ 的两条射线（参看图 4.9 b）。

再考虑使前两条射线的方位增加 $\delta\phi_0$ 所得到的两条射线。四条射线在 ξ 构成的立体角是 $\sin i_\xi \delta i_\xi \delta\phi_0$。证明射线管在 x 处的横截面面积是 $|x|^2 \cos i_x \sin\Delta\delta\Delta\delta\phi_0$。然后利用射线参数

$$p=\frac{|\xi|\sin i_\xi}{c(\xi)}=\frac{|x|\sin i_x}{c(x)}$$

（参看(4.45 b)），求

$$\mathscr{R}(x,\xi)c(\xi)=|x|\,|\xi|\left[\frac{\cos i_x \cos i_\xi \sin\Delta}{p}\left|\frac{\partial\Delta}{\partial p}\right|\right]^{1/2}.$$

由于右边的对称性，我们立即得到互易定理
$\mathscr{R}(x,\xi)c(\xi)=\mathscr{R}(\xi,x)c(x)$，这里只对于球对称介质给了证明。

4.4 试求远场 P 波对 $G_{ij}(x,t;\xi,0)$ 的贡献的射线理论解：

$$\frac{l_i(x)l_j(\xi)\delta(t-T(x,\xi))}{4\pi\rho^{1/2}(x)\rho^{1/2}(\xi)\alpha^{3/2}(\xi)\alpha^{1/2}(x)\mathscr{R}(x,\xi)}.$$

（利用对(4.66)、(4.57) 给出的解和 (4.23) 中的远场项。）然后应用互易性定理 (2.39) 证明，在一般非均匀各向同性介质中有

$$\mathscr{R}(x,\xi)\alpha(\xi)=\mathscr{R}(\xi,x)\alpha(x).$$

这个几何扩散互易性，是射线微分几何中的一个著名结果。直接证明是 Richards(1971)给出的。

4.5 对称二阶张量的主轴，是非对角线张量分量为零的笛卡尔坐标轴。由 (3.24) 出发，给定以滑动 $\mathbf{a}$ 和断层法线 ν 的方向为参考的矩张量，绕垂直于 $\mathbf{a}$ 和 ν 的直线把轴旋转 45°，由此证明压力轴和张力轴是矩张量的主轴。通过求主轴坐标系中向量偶极项的大小，证明断层滑动的地震矩 M_0 是矩张量 $\boldsymbol{M}$ 的不变量。

4.6 证明断层滑动的点源产生的远场 P 波振幅辐射图案，在震源球上取均方根值是 $\sqrt{\frac{4}{15}}$；对 S 波，证明相应结果是 $\sqrt{\frac{2}{5}}$。

（由(4.33)所定义的辐射图案出发。）

4.7 对于(4.31)—(4.33) 所用的描述双力偶辐射图案的球极坐标，证明 $F_i * G_{ij}$ 的远场项是

$$\frac{1}{4\pi\rho\alpha^2}\frac{\hat{r}_i\hat{r}_j}{r}F_j\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)+\frac{1}{4\pi\rho\beta^2}\frac{(\hat{\theta}_i\hat{\theta}_j+\hat{\phi}_i\hat{\phi}_j)}{r}F_j\left(t-\frac{r}{\beta}\right).$$

（对于作用在原点的力 $\boldsymbol{F}(t)$，这个式子用单位向量 $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$，$\hat{\boldsymbol{\phi}}$ 的笛卡尔分量来给出在 (r,θ,ϕ) 的位移 i 分量。）

4.8 试证明，求解非均匀介质中速度为 $c=c(\boldsymbol{x})$ 的射线路径问题，等价于求解质点在具有比例于 $1/c^2$ 的势的力场中移动时的运动。（提示：选取标量变量 σ 来定义射线的位置，σ 具有 $d\boldsymbol{x}/d\sigma=\nabla T$ 的性质。）

第五章　均匀介质中的平面波及其在平界面上的反射和透射

到现在为止，我们已经仔细地研究过均匀无限各向同性弹性介质中，各种点源产生的地震波，并已开始通过发展平滑变化的非均匀介质的几何射线理论，考虑透射问题。我们现在继续发展波的透射理论，考虑波传播介质中含有弹性性质间断的基本问题。这里只分析最简单类型的间断，其中两种均匀各向同性弹性介质在一个平界面上密接。只考虑平面波在界面入射的情况，以避开震源细节。

这类问题是 George Green(1839)首先分析的，他在同一篇经典文章中引入了应变能函数。Green 试图用弹性波解释光的反射和折射，他的工作在细节上类似于 P，SV 和 SH 平面波的现代分析。但是，对于两个半空间有完全不同的弹性常数和密度的情况，他没有完成必要的代数运算。这个推广是由 Knott(在1899年)和 Zoeppritz(在 1901 年)分别独立地用位移势得到的。

对于研究在离震源很大距离上的波，入射平面波的假定在实际上可以完全是适当的(参看图 5.1 a)。但如果反射和折射发生在震源附近(图 5.1 b)，则观测到不能直接用 Knott 的理论解释的现象。突出的例子是 1909 年 Mohorovičic 发现的 P_n 波。虽然此波是能在由两个密接的均匀半空间组成的介质中传播的那种类型的波(参看补充 6.4)，但它含有辐射球面波的点源。我们提到这一点，是为了给出 Knott 理论的重要直接应用。研究球面波的一个方法是，把它们分解为平面波的和(或积分)，然后应用 Knott 理论于每个平面波，最后把每个平面波的结果叠加起来，合成所求的结果。

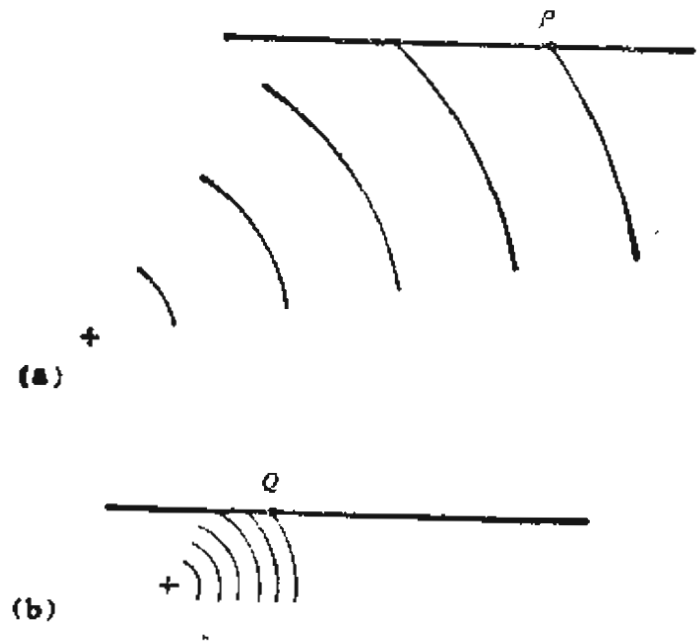


图 5.1

(a) 如果地球内某界面上的点 P 离波源足够远，则到达 P 的波阵面实际可作为平面行波来处理。(b) 如果 Q 足够接近于源，则可能不得不考虑波阵面在 Q 的曲率(见第六章)。注意，我们说"足够远"和"足够近"，是指所关心的点(P 或 Q)与源之间的波长数。因此，即使对于(b)中的源点与接收点之间的几何关系，也可以对非常高的频率应用平面波理论

在本章，我们将概述在后面许多章中所需要的平面波基本性质。在说明如何用三个标量势建立起 P，SV，SH 问题以后，我们求出反射系数、转换系数、透射系数的专门公式，并说明它们与酉散射矩阵的关系。我们描述非均匀波以及与其相联系的散射系数的相移。

传播的波引起的地球内小的质点运动，由于各种各样的消散机制，导致不可逆的波能损耗。在这个意义上，地球是不完全的弹性介质。从对于传播的波的影响这个观点看，这种衰减可以很方便地用参数 Q 来概括。接下去，本章简要地描述在象地球这样的衰减介质中，传播对脉冲形状的影响，该介质中的 Q 在观测到的地震波频率范围上，近似为常数。最后我们给出各向异性介质

中平面波传播的基本理论的轮廓。

5.1 弹性介质中平面波的基本性质

一个物理量（如质点加速度或一应力分量），将作为平面波以速度 c 沿 l 方向传播，如果

i) 在固定的时间，该量在垂直于单位向量 l 的每个平面上不随空间变化，

ii) 与该量的特定值相联系的平面，以速率 c 沿 l 方向移动。

于是，以这两个性质传播的物理量，必定有只经由组合 $t-(l\cdot x)/c$ 而依赖于空间和时间的函数关系。我们把 l/c 叫做慢度向量 s。使用慢度（而不是速度）来总结波传播的速率和方向的优点是，慢度可以按矢量相加（但速度在此情况下不一定）。因此，利用笛卡尔坐标 (x, y, z)，一个给定波的慢度，是它沿每个坐标方向的分量 s_x，s_y，s_z 的矢量和：$s=s_x\hat{x}+s_y\hat{y}+s_z\hat{z}$，而沿 n 方向的慢度简单地等于 $s\cdot n$。相反，平面波沿特定方向前进的速度，一般说，比它沿传播方向的速度快（参看图 5.2）。

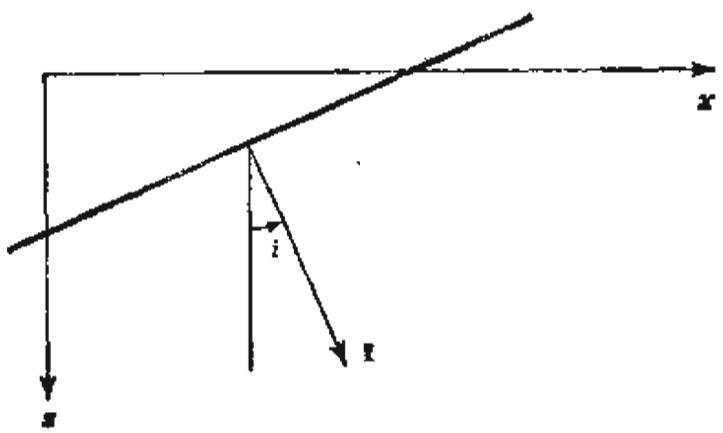


图 5.2

对于以速率 c 沿 l 方向传播的量，粗斜线标出在其上该量的值都相等的平面。按照地震学的习惯，取正 z 方向作为深度方向，并定义 x 轴是沿 l 的水平分量的方向。常常利用 z 轴与 l 方向间的夹角 i，指明波传播的方向。这时沿 x 轴传播的视速率是 $c/\sin i$。视速率在地震学中，常用布设在一部分地表的仪器来测定。其倒数是水平慢度或射线参数

补充 5.1

记法

如果只对于一个特定分量的详细性质感兴趣，则用脚标来表示向量和张量的分量的优越性就大大减弱了。在本章我们经常对于位移的三个笛卡尔分量使用记号 $u=(u, v, w)$，而坐标是 $x=(x, y, z)$。我们将看到，P 和 SV 波由于水平面的边界条件而是互相耦合的，并且 P 和 SV 平面波中的每一个都能用位移分量 $u=u(x, z, t)$，$w=w(x, z, t)$ 进行分析。SH 平面波包含有 $v=v(x, z, t)$，它们不与 P 或 SV 耦合。

当使用脚标记号仍很方便时(方程(5.1)、(5.2)、(5.5))，我们将保留它和它的明显解释，例如，

$$e_{23}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=e_{yz}。$$

把位移的一般形式 $u=u(t-s\cdot x)$ 代入均匀各向同性介质的弹性位移方程

$$\rho\ddot{u}_i=(\lambda+\mu)u_{j,ji}+\mu u_{i,jj}, \tag{5.1}$$

给出

$$[\rho\delta_{ik}-(\lambda+\mu)s_is_k-\mu s_js_j\delta_{ik}]\ddot{u}_k=0 \tag{5.2}$$

很容易区分平面波的两种基本类型。取 (5.2) 同 s 的向量乘积和标量乘积，并利用 $s^2=1/c^2$，得到

$$\left(\rho-\frac{\mu}{c^2}\right)\ddot{u}\times s=0,\left(\rho-\frac{\lambda+2\mu}{c^2}\right)\ddot{u}\cdot s=0, \tag{5.3}$$

因此，或是[$\ddot{u}\times s=0$ 和 $c^2=(\lambda+2\mu)/\rho$]，或是[$\ddot{u}\cdot s=0$ 和 $c^2=\mu/\rho$]。于是，平面波或是具有纵运动(平行于 s)和速度 $\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ 的 P 波，或是具有横运动和速度 $\sqrt{\mu/\rho}$ 的 S 波。我们这里的分析，类似于方程(4.48)—(4.51)的分析，现在所不同的地方是我们没有做近似。P 或 S 运动的纵性质或横性质，在所有频率上，对于均匀介质中的平面波，都是精确的。

为描述与弹性运动相联系的能量，我们在第二章发展过弹性

应变能密度的概念。介质的应变能，是利用它自身的形态而做功的能力，在(2.32)我们看到，应变能密度是$\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}$。对于平面波$u_i=\dot{u}_i(t-\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x})$，应变张量是$e_{ij}=-\frac{1}{2}[\dot{u}_i s_j+\dot{u}_j s_i]$，而根据各向同性介质的应力-应变关系(2.49)，很容易证明

$$\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}=\frac{1}{2}[(\lambda+\mu)(\boldsymbol{s}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})^2+\mu(\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}})(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s})]. \qquad (5.4)$$

在P波(这时$\boldsymbol{s}$平行于$\dot{\boldsymbol{u}}$，$|\boldsymbol{s}|=\alpha^{-1}$)或$S$波(这时$\boldsymbol{s}$垂直于$\dot{\boldsymbol{u}}$，$|\boldsymbol{s}|=\beta^{-1}$的情况下，由(5.4)得到

$$\frac{1}{2}\tau_{ij}e_{ij}=\frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{u}}^2, \qquad (5.5)$$

即应变能密度等于动能密度。(5.5)中的量都是实数，而且能密度只经由组合$t-\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{x}$依赖于$t$和$\boldsymbol{x}$。因此，能量传播速率同质点位移脉冲形状传播的速率没有差别：或者是P波的α，或者是S波的β。

于是，平面波的能通量[1](即垂直于传播方向的单位面积上每单位时间通过的能量)，对P波为$\rho\alpha\dot{u}^2$，对S波为$\rho\beta\dot{u}^2$。我们只对均匀介质中的平面波证明了这个结果，它是个"局部"性质，依赖于物性和仅在求通量的点上波的平面性质。因此我们可以预期，对于在物性有某种空间变化的介质中，波阵面略有弯曲的情况下，能通量仍由$\rho\dot{u}^2$乘以传播速度而近似地给出。于是，我们在第四章得到的关于位移振幅的几何射线理论的结果，就有了物理解释。所以，对于由非均匀介质中的点源向外扩散的P波，(4.57)表示(对于特定射线)$[\rho(\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{x})]^{\frac{1}{2}}\dot{u}^P$只经由几何因子$\frac{1}{\mathscr{R}^P(\boldsymbol{x},\xi)}$和走时$T^P(\boldsymbol{x},\xi)$而依赖于接收点的位置$\boldsymbol{x}$。因而能通量只受射线几何的控制。参看图5.3，能量穿过δA_1的速率等于

1) 原文中用flux rate，用flux(通量)就够了。——校者注

$\rho(x_1)\alpha(x_1)\dot{u}^2\delta A_1$。但既然 $\delta A_1 \propto [\mathscr{R}^P(x_1, \zeta)]^2$，于是由 (4.57) 得到，能量在时间 T_1 穿过 δA_1 的速率等于它在时间 T_2 穿过 δA_2 的速率，T_2-T_1 是波从 x_1 前进到 x_2 所用的时间。在这个意义上，我们由几何射线理论得知，传播的地震能量被限制在射线管内。这只是一个近似，在足够高的频率上是精确的。

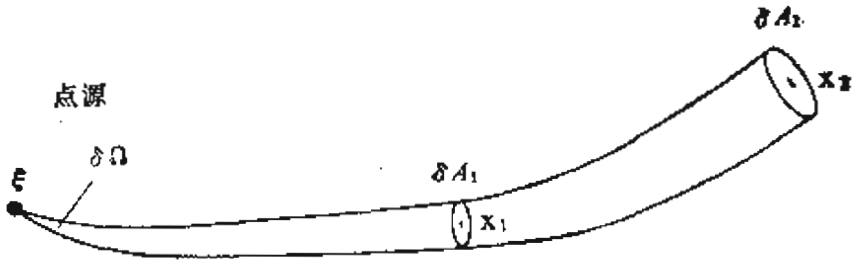


图 5.3

由 ξ 处点源发出的射线管的参数。管在 x_1 和 x_2 的横截面面积为 $\delta A_i = \delta\Omega\,\mathscr{R}^2(x_i, \xi)(i=1, 2)$，这里的 $\delta\Omega$ 是震源处的立体角。按照几何射线理论，扣除 x_1 与 x_2 间传播的时间推迟，在单位时间内穿过 δA_1 的能量与单位时间内穿过 δA_2 的能量相同

5.1.1 平面波的势

我们在第四章看到过，弹性位移的势可用于分离 P 和 S 分量。这样做比较方便，因为分离开的势的波动方程，比弹性位移的波动方程简单得多(只含有一个波速)。使用势 (ϕ 和 ψ)的优越性，似乎被下列事实所抵消，即 ϕ 和 ψ 包含四个未知函数，但我们经常关心的物理量弹性位移，是只有三个未知分量的向量。额外的未知量用额外的方程来约束，通常用 $\nabla\cdot\psi=0$。在均匀各向同性介质中，只需要三个各自相应于运动的 P，SV，SH 分量的标量势函数。

我们将在补充 6.5 中证明这个一般结果，但我们现在的兴趣在于平面波，而对于它们，两个标量 S 波势有特殊的形式。这样，S 波一般有位移 $\nabla\times\psi$。如果波是平面波，并选取图 5.2 中的笛卡尔坐标，使 x 轴沿水平慢度分量的方向，则 ψ 只依赖于 x，z 和 t。于是，根据约束条件 $\nabla\cdot\psi=0$，有

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+\frac{\partial \psi_z}{\partial z}=0. \tag{5.6}$$

如果波的偏振纯粹为 SV，则位移的 y 分量为零，则有

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial z}-\frac{\partial \psi_z}{\partial x}=0. \tag{5.7}$$

按照复变函数论，(5.6) 和 (5.7)是 Cauchy-Riemann 方程，于是 $\psi_z+i\psi_x$ 是 $x+iz$ 的解析函数。一个函数若处处是解析的和有界的，则为常数(这是 Liouville 定理)。对于平面波，$\psi_z+i\psi_x$ 肯定是有界的。此外，如果 SV 波只在限定的深度范围内由 $\nabla\times\boldsymbol{\psi}$ 给出，可以从概念上将此位移扩展到所有深度，使 $\psi_z+i\psi_x$ 处处是解析的。于是，$\psi_z+i\psi_x$ 是常数；既然只有 ψ_x 和 ψ_z 的梯度具有物理意义，所以可取此常数为零。因此，我们得到的结论是，在包含 x 轴的竖直平面内传播的最一般的 SV 平面波，可以用势 $\boldsymbol{\psi}(0,\ \psi,\ 0)$表示，相应的位移是 $\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\left(-\frac{\partial\psi}{\partial z},0,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$。矢量波动方程简化为标量形式 $\beta^2\nabla^2\psi=\ddot{\psi}$。

对于平面 SH 波，利用向量势是不合适的，因为水平位移分量本身就是一个进行计算的良好的标量函数。对于图 5.2 中选定的坐标，SH 的位移 $\boldsymbol{u}=(u,\ v,\ w)$简化为 $\boldsymbol{u}=(0,\ v,\ 0)$，而对于平面波，$v=v(x,\ z,\ t)$。剪切波的限制条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ 已得到满足，容易证明，弹性位移方程简化为 $\beta^2\nabla^2 v=\ddot{v}$。

对于 P 波，位移是 $\nabla\phi$，其中 ϕ 满足 $\alpha^2\nabla^2\phi=\ddot{\phi}$。象在图 5.2 中那样传播的平面 P 波的特殊情况，导致 y 方向的位移分量为零，和 $\phi=\phi(x,\ z,\ t)$(与 y 坐标无关)。因此，位移是$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},0,\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$。

补充 5.2

关于求解波传播问题中所用 Fourier 变换的符号约定

利用 z 随深度而增大的笛卡尔坐标系，我们将常常进行两个水平变量的 Fourier 变换，x 变换到 k_x，y 变换到k_y。我们这里对空间变换的约定是

$$f(x)\to f(k_x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ik_x x}dx,$$

对 y 的函数也类似。注意，我们通常要避免用专门符号（诸如 $\tilde{f}$，或 $\bar{f}$，或 F）来表示 f 已做过变换。只要从上下文看不清楚 f 究竟表示 $f(x)$ 还是变换过的函数，我们就将用 f 的特殊自变量写出 $f(x)$ 或 $f(k_x)$。唯一例外出现在关于资料处理的第十一章，那里的许多结果用大写字母表示变换是更为清楚的。

我们还将对时间关系进行变换，或用从 t 变到 s 的 Laplace 变换和约定

$$f(t)\to f(s)=\int_{0}^{\infty}f(t)e^{-st}dt,$$

或用从 t 变到 ω 的 Fourier 变换。尽管这些变换本质上一样，但如果变换变量采用复数值，则把它们区分开仍是有用的，因为某些分析方法用实的 ω 进行，所以 Fourier 变换是合适的，但有些方法用实的 s（即虚的 ω）进行，这时 Laplace 变换就比较方便。

关于时间关系的 Fourier 变换，我们对指数的符号约定是

$$f(t)\to f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(+i\omega t)dt.$$

注意，这不同于本补充中前面对空间 Fourier 变换所采取的约定。当然，人们希望避免使用混合的约定，但有三个好的理由，说明为什么在求解有关地震学的波传播问题中，这是合适的。

第一，它能给 Fourier 逆变换一个方便的解释。如果 $f(x,y,z,t)$ 是某个感兴趣的传播物理变量，常常能得到三重变换函数 $f(k_x,k_y,z,\omega)$。这时所要求的解是

$$f(x,y,z,t)=\frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_x\int_{-\infty}^{\infty}dk_y\int_{-\infty}^{\infty}d\omega f(k_x,k_y,z,\omega)\exp[i(k_x x+k_y y-\omega t)].$$

对于我们选择的符号约定，在正的 k_x，k_y 和 ω 情况下，这个被积函数可以解释为沿 x 和 y 增大方向传播的波。

第二，如果 $f(x,y,z,t)$ 满足 $c^2\nabla^2 f=\ddot{f}$ 型的波动方程，则 $f(k_x,k_y,z,\omega)$ 满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\left(k_x^2+k_y^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)f.$$

如果介质是均匀的（即 c 为常数），则

$$f(k_x,k_y,z,\omega)\propto e^{\pm i\omega\xi z}, \tag{1}$$

式中 $\omega\xi=\left(\frac{\omega^2}{c^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{1/2}$。式（1）中正负号的选择指示着究竟 f 是向下去的波（+）还是向上来的波（−）。但是，如果 $\frac{\omega^2}{c^2}<k_x^2+k_y^2$，我们将几乎总是发现，希望用 $\omega\xi$ 的正的虚数值进行计算，因为这时波 $e^{+i\omega\xi z}$ 恰随深度（$z\to\infty$）衰减，而波 $e^{-i\omega\xi z}$ 恰随高度（$z\to-\infty$）衰减。

第三，预想到在后面几章使用 Hankel 函数的需要，我们使用物理学家们已经几乎一致采用的约定，即第 1类 Hankel 函数代表出去的波，第 2 类 Hankel 函数代表进来的波。作为传播的（稳态）波，它们这时必须同因子 $e^{-i\omega t}$ 相联系。带有此因子的各项的积分(对ω)，构成返回到时间域的 Fourier 逆变换，因此，我们的符号约定确实符合标准的 Hankel 函数约定。

5.1.2 分离变量；稳态平面波

我们来扼要证明，在笛卡尔坐标系中用分离变量法求解波动方程

$$a^2\nabla^2\phi=\ddot{\phi}, \tag{5.8}$$

等效于对一类平面波解进行分析。

因此，我们来寻找(5.8)的$X(x)Y(y)Z(z)T(t)$形式的解，每个因子是仅仅一个变量的函数。由 (5.8)得到

$$\frac{a^2}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{a^2}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{a^2}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}, \tag{5.9}$$

意味着$\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}$是常数［为看到这一点，求（5.9）对 t 的微分］。例如

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\omega^2T=0\text{，因而}T\propto\exp(\pm i\omega t).$$

同理，对于某常数k_x，k_y，有

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0 \text{ 和 } X\propto\exp(\pm ik_xx)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0 \text{ 和 } Y\propto\exp(\pm ik_yy).$$

但是，同 z 的关系用下式来约束：

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+k_z^2Z=0$$

[即$Z\propto\exp(\pm ik_zz)$]，式中k_z由下式给定：

$$k_z^2=\frac{\omega^2}{a^2}-k_x^2-k_y^2, \tag{5.10}$$

以便使解由仅仅三个数（ω，k_x，k_y）而不是四个数来表征。

所以，分离的解具有

$$\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)]$$

形式，其中$\boldsymbol{k}=(k_x,\ k_y,\ k_z)$，$|\boldsymbol{k}|=\left|\frac{\omega}{a}\right|$。显然，这是个平面波，它与时间的关系特别简单，是在固定频率ω上的稳定振动。三个分离常数构成的向量$\boldsymbol{k}$，叫做波数向量，它等于ω乘以慢度。

将分离的解叠加，得到（5.8）的一般解，并且

$$\phi(x,y,z,t)=\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}dk_x\int_{-\infty}^{\infty}dk_y\Phi(k_x,k_y,\omega,z)$$
$$\times\exp\left\{i\left[k_xx+k_yy+\left(\frac{\omega^2}{a^2}-k_x^2-k_y^2\right)^{1/2}z-\omega t\right]\right\}. \tag{5.11}$$

这里Φ仅仅作为某个权函数而起作用，它给出为得到所要求的解ϕ而进行的叠加中用$(k_x,\ k_y,\ \omega)$表征的平面波的大小。

我们在（5.11）中得到的结果，本质上与在补充5.2中用Fourier逆变换叙述的相同。这里侧重于笛卡尔坐标，但对其它坐标系，用Fourier逆变换给出的解可以看作分离解的叠加，这一点也是对的。

平面波在地震学中直接具有重要意义，因为来自远处震源的

体波的行为在当地就象平面波。式（5.11）还指出稳态平面波的间接重要性，表明它们是合成更一般的解的基础。该合成的细节已被广泛研究，并且构成第六章以及第七章和第九章一部分的课题。既然这些细节决定着我们需要发展的平面波的性质，所以这里列出下述关于式（5.11）的评注是有益的。

i）由于对 k_x，k_y 的依赖关系，所以，把平面波作为它们的水平波数的函数，或等效地，作为它们的水平慢度的函数来进行研究，将是重要的。

ii）通过（5.11）求解波传播问题的过程的一部分，是确定适合于研究中的特定震源的函数$\Phi(k_x,k_y,\omega,z)$。按照在 $d\omega dk_x dk_y$元上的积分，Φ可看作 (ω,k_x,k_y) 空间中的密度函数。按照Fourier变换理论，它同ϕ对t,x,y的三重变换有关。按照叠加，它是激发函数，指明有多少特定的平面波被所研究的震源激发出来。

iii）研究波只在二维空间x和z中的传播，常常是有益的。在此情况下，与 y 的关系以及k_y积分在（5.11）中不存在。

iv）必须决定（5.11）的被积函数中出现的平方根的符号。还有，如果水平向波数足够大，则必须采用负数的平方根，沿 z 方向将出现指数增大或减小。我们在 5.3 节着手处理这个问题。

v）一旦（5.11）被积函数中的各因子都已得到，就需要有一个求三重积分值的方法。我们发现，许多不同方法都在使用着，并且它们往往包含一些近似。在少数情况下，被积函数能严格反演，给出ϕ的封闭形式的表达式。对于在地震学问题中研究的弹性介质，常常是必须用数值方法对被积函数的一部分求值。最富有成效的这类方法，都着重处理对水平慢度的积分。

说明了详尽分析平面波的这些理由，我们现在回到本章的主题。

5.2 反射系数、转换系数、透射系数的基本公式

我们已看到，均匀介质中 $\alpha^2\nabla^2\phi=\ddot{\phi}$ 类型方程的稳态平面波解取 $A\exp[i\omega(s\cdot x-t)]$ 形式，其中 A 是振幅，而 $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\ 0,\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$ 是沿垂直于 y 轴的方向传播的有关 P 波的位移。在本节，我们将研究沿平面 $z=0$ 接触的两个半空间之间界面的效应。如果半空间由固体，或液体，或真空组成，则有五种需要考虑的有意义的情况：固体/固体，固体/液体，固体/真空，液体/液体，液体/真空。

5.2.1 边界条件

有两类边界条件：关于位移的（常常叫做运动学边界条件）和关于牵引力或应力分量的（动力学边界条件）。

补充 5.3

运动学和动力学的区别

运动学是力学的分支，它只涉及运动而不分析引起或参加运动的力。动力学是直接涉及力系和支配运动的能量平衡的力学分支。根据这些基本定义，应用"运动学的"和"动力学的"这些词，有两个有用的约定。

第一，当只分析位移时，运动学性质是可以由程函方程(4.41)导出的性质，而动力学性质是同位移振幅有关的性质。因此，特定波阵面和射线路径的存在，是当前问题的运动学部分。作为动力学问题的一个例子，我们可以问，在离给定震源一定距离的一个接收点上所观测到的位移，某种近似是否足够。

第二，在我们对位移和有关的应力系两方面都有直接兴趣的问题中，运动学性质是位移场的性质，动力学性质则与应力有关。例如，若已知断层面两侧的相对位移是空间和时间的函数，则我们说有断层运动的运动学描述。若已知断层面上的应力(即牵引力分量)，则我们有动力学描述。作为另一个例子，人们在本节所说的意义上，把边界条件说成是运动学的或动力学的。

对于密接的两种固体，运动学条件是位移的所有三个分量在整个界面上连续。跨越固体半空间与粘滞液体半空间之间的界面，也能有位移的连续性。但是，如果液体是完全非滞性的，则可以发生平行于界面的滑动，但位移的法向分量应是连续的（除非发生成穴作用或液体运动到固体的空隙中去）。对于地震波的典型波长（公里）和周期（秒），似乎地震学中两种重要液体（海洋和地球外核）是非粘滞性的。就是说，它们的粘滞性如此低，以致它们把液体中运动粘滞拖曳，限制到离开如海底或地核-地幔界面这类固液分界面的距离只有一个波长的可忽略的零头。在这些情况下，位移的切向分量实际上可以是不连续的，边界条件所能为力的只在于法向分量。地球内部普遍存在的强大压应力，将不允许发生空穴现象（因为这将产生冲击传播，它的应力间断要比岩石强度大许多数量级）。此外，任何有效的液体向固体内的扩散，都将需要比地震波周期长得多的时间。因此，把固液分界面的运动学边界条件，只取作法向位移的连续，在地震学中，是合适的。

动力学边界条件是分界面上牵引力连续。这个结果可以沿着我们讨论图 2.4 的思路予以证明。设想一个小薄圆盘，它的两个平表面是在不同介质中，作用在这两个面上的牵引力，大小相等方向相反（参看图 2.7）。改变圆盘向外的法线中一个的方向，则圆盘每个表面上的牵引力 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$相同，因而通过分界面是连续的（参看问题2.5）。因为牵引力是向量，这似乎给出三个标量限制条件。但是，其中的一个或两个，可以自然满足，因为一个传播的平面波，不必激发牵引力的所有三个分量。注意，由于我们取分界面作为与 z 轴垂直的平面，所以，这些牵引力分量是应力张量分量$\tau_{zx},\tau_{zy},\tau_{zz}$。在与真空的分界面上，这三个应力分量都为零，这实际也是地球或海洋表面的情况，因为大气的弹性常数，比岩石的弹性常数或海水的体积模量小好几个数量级。（对于如同附录 1 描述的与空气耦合的面波，可以例外。）在 $z=0$ 上，有

$(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz}) = (0,\ 0,\ 0)$，叫做$z = 0$上的“自由面边界条件”。这是我们要详细研究的第一个反射问题。

5.2.2 平面 P 波和 SV 波在自由面上的反射

假定一平面 P 波正以沿 x 增大方向的水平慢度运行（见图 5.4）。这时利用位势 ϕ，可以给出P位移为$u = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\ 0,\ \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$，而相应的牵引力为

$$T(u, \hat{z}) = (\tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zz}) = \left(2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} 0,\ \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right). \tag{5.12}$$

为完整起见，这里顺带说一下SV和SH波的相应结果：对于 SV 波，有标量势ψ，SV位移为 $u = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z},\ 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$，牵引力为

$$(\tau_{xx}, \tau_{yz}, \tau_{zz}) = \left(\mu\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right),\ 0, 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}\right); \tag{5.13}$$

对于SH波，只需要一个位移分量，SH位移为 $u = (0,\ v,\ 0)$，牵引力为

$$(\tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{zz}) = (0, \mu \frac{\partial v}{\partial z},\ 0). \tag{5.14}$$

利用入射角i（参看图 5.4），入射P波的慢度表示为

$$S = \left(\frac{\sin i}{\alpha},\ 0,\ \frac{-\cos i}{\alpha}\right).$$

因为这个波不激发τ_{yz}分量（见(5.12)），所以也就不激发 SH 分量(见(5.14))，反射的波只是P和SV，其慢度分别为

$$\left(\frac{\sin i^*}{\alpha},\ 0,\ \frac{\cos i^*}{\alpha}\right),\ \left(\frac{\sin j}{\beta},\ 0,\ \frac{\cos j}{\beta}\right).$$

因此，总ϕ势由入射分量$\phi^{入}$和反射分量$\phi^{反}$组成

$$\phi = \phi^{入} + \phi^{反}, \tag{5.15}$$

$$\phi^{入} = A\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha} x - \frac{\cos i}{\alpha} z - t\right)\right], \tag{5.16}$$

$$\phi^{反}=B\exp\left[\ i\omega\left(\frac{\sin i^*}{\alpha}x+\frac{\cos i^*}{\alpha}z-t\right)\right]. \tag{5.17}$$

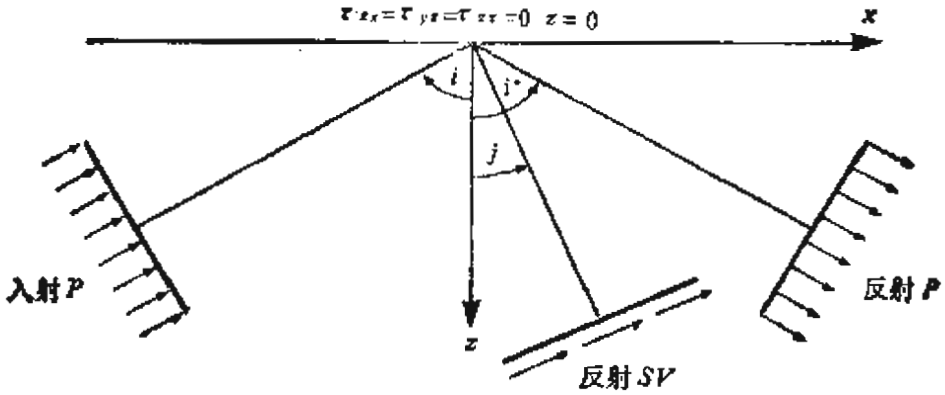


图 5.4

在固体弹性半空间自由表面入射的平面P波及其产生的反射波。一部分平面波的位置用粗线段表示，相联系的一排箭头表示质点运动方向。角i和j分别用与P和SV平面波波阵面正交的射线轨迹来定义。反射角i^*等于入射角i

每个波中的振幅A和B都是常数，总的SV波为

$$\psi=\psi^{反}, \tag{5.18}$$

式中

$$\psi^{反}=C\exp\left[\ i\omega\left(\frac{\sin j}{\beta}x+\frac{\cos j}{\beta}z-t\right)\right]. \tag{5.19}$$

现在用不着考虑运动学边界条件，因为自由面以上的位移没有意义，而固体自由面的位移是不受限制的。能够利用的动力学边界条件是，在$z=0$上$\tau_{zz}=\tau_{xz}=0$，而由方程(5.12)，(5.13)、(5.15)—(5.19)我们发现，τ_{xz}，τ_{zz}各自都是三部分之和，各都带有以下形式的因子，

$$\exp\left[\ i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}x-t\right)\right]$$

或
$$\exp\left[\ i\omega\left(\frac{\sin i^*}{\alpha}x-t\right)\right]$$

或
$$\exp\left[\ i\omega\left(\frac{\sin j}{\beta}x-t\right)\right].$$

对于所有的 x 和 t，这个边界条件在 $z=0$ 上都成立，于是控制波系水平传播的这些因子必然都一样。特别是，$i^*=i$（P 波的入射角和反射角相等）和 $(\sin i)/\alpha=(\sin j)/\beta$。所以，入射波的水平慢度在反射时保持不变，转换成 SV 时也保持不变。如果有进入上半空间的透射，那么水平向慢度分量也应保持不变，这是 Snell 定律的一种表述法。我们对速度随深度平滑变化的介质，已经证明过它（见（4.45 a））。这里我们要发展一个重要的概念，即由平面波在平面分层介质中的反射和透射所形成的整个波系，以它们共同的水平向慢度值为特征。我们将常常把这个值叫做射线参数，尽管这个名字并不很恰当，因为 $(\sin i)/\alpha=(\sin j)/\beta=p$ 是整个射线系而不仅仅是一条射线的参数。

补充 5.4

阻抗

一个介质对于一个运动的阻抗，是对质点运动的阻力的量度。特殊地说，弹性阻抗是应力与质点速度之比，因此，对于给定的应力，质点速度同阻抗成反比。

不同波动类型的阻抗，可以有相当大的变化，我们现在通过特殊例子来讨论。

第一，考虑位移为 $v=v_0\exp\left\{i\omega\left[px+\frac{\cos j}{\beta}z-t\right]\right\}$ 的 SH 波。这时，对于水平的平面（$z=$常数），切向应力为 $\tau_{yz}=i\mu\omega\frac{\cos j}{\beta}v$，切向质点速度为 $\dot{v}=-i\omega v$，于是阻抗为 $\frac{\tau_{yz}}{\dot{v}}=-\mu\frac{\cos j}{\beta}=-\rho\beta\times\cos j$。对于地壳，代表性的密度和剪切速度值分别为 $\rho=2.8$ 克/厘米^3 和 $\beta=3.5$ 公里/秒，因此，阻抗的量级为 10^6 c. g. s. 单位。所以，振幅为 100 巴（10^8 c. g. s. 单位）的应力波，对应于大约 100 厘米/秒的地面速度。但对于 SH 波，注意，随 $j\to\frac{\pi}{2}$（掠入射），阻抗 $\tau_{yz}/\dot{v}\to 0$。

第二，考虑一个声波（即流体中的 P 波），其中压力给定为 $P=$

$P_0\exp\{i\omega[px+(a^{-1}\cos i)z-t]\}$。这时，由于 $\rho\ddot{u}=-\nabla P$，所以竖向质点速度为 $-i\omega\rho\dot{u}_z=-\partial P/\partial z$，而阻抗为 $P/\dot{u}_z=\rho a/\cos i$。现在请注意，随 $i\to\frac{\pi}{2}$（掠入射），阻抗趋于无穷，这同 SH 波的变化情况形成鲜明对照。

把给出作为势 ϕ 和 ψ 的函数的物理变量的方程（5.12）和（5.13）化简，并用 p，ϕ，ψ，$\partial\phi/\partial z$ 和 $\partial\psi/\partial z$ 把它们写出来，得到

$$\text{对于 } P\begin{cases}\text{位移}\left(i\omega p\phi,\ 0,\ \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)\\ \text{牵引力}\left(2\rho\beta^2 i\omega p\dfrac{\partial\phi}{\partial z},\ 0,\right.\\ \qquad\left.-\rho(1-2\beta^2p^2)\omega^2\phi\right)\end{cases}\tag{5.20}$$

$$\text{对于 } SV\begin{cases}\text{位移}\left(-\dfrac{\partial\psi}{\partial z},\ 0,\ i\omega p\psi\right)\\ \text{牵引力}\left(\rho(1-2\beta^2p^2)\omega^2\psi,\ 0,\right.\\ \qquad\left.2\rho\beta^2 i\omega p\dfrac{\partial\psi}{\partial z}\right).\end{cases}\tag{5.21}$$

我们的直接目标是求比值 B/A 和 C/A 的公式，以给出反射波和转换波的振幅，作为入射波振幅的函数。我们可以用的两个方程是，在 $z=0$ 时：

$$\begin{cases}\tau_{xz}=2\rho\beta^2 i\omega p\left(\dfrac{\partial\phi^{入}}{\partial z}+\dfrac{\partial\phi^{反}}{\partial z}\right)+\rho(1-2\beta^2p^2)\omega^2\psi^{反}=0,\\ \tau_{zz}=-\rho(1-2\beta^2p^2)\omega^2(\phi^{入}+\phi^{反})+2\rho\beta^2 i\omega p\dfrac{\partial\psi^{反}}{\partial z}=0.\end{cases}$$

把（5.16），（5.17），（5.19）代入，它们变为

$$2\rho\beta^2 p\frac{\cos i}{a}(A-B)+\rho(1-2\beta^2p^2)C=0,\tag{5.22}$$

$$\rho(1-2\beta^2p^2)(A+B)+2\rho\beta^2p\frac{\cos j}{\beta}C=0, \qquad (5.23)$$

给出的解是

$$\frac{B}{A}=\frac{4\beta^4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}-(1-2\beta^2p^2)^2}{4\beta^4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}+(1-2\beta^2p^2)^2}, \qquad (5.24)$$

$$\frac{C}{A}=\frac{-4\beta^2p\frac{\cos i}{\alpha}(1-2\beta^2p^2)}{4\beta^4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}+(1-2\beta^2p^2)^2}. \qquad (5.25)$$

利用三角恒等式以及各弹性常数间的关系，可以导出上两式的许多不同形式。例如，$1-2\beta^2p^2$ 等于 $\cos 2j$。我们已选定用 p，$\alpha^{-1}\cos i$ 和 $\beta^{-1}\cos j$ 进行计算，因为在第九章我们将表明，这时的反射系数（5.24）和（5.25）可以很容易地推广到研究竖向不均匀的介质。

我们把比值 B/A 和 C/A 叫做"反射系数"，但实际上它们只是势的振幅比。在实践中，我们通常感兴趣的是位移（而有时是能量）的振幅比。对于传播的稳态 P 波，位移振幅是 ω（势振幅）/α，同样，对于 S，位移振幅是 ω(势振幅)/β。因此，对于位移反射系数，我们仍需要当 $P\to P$ 的 B/A，当 $P\to S$ 转换时的 $\frac{C\alpha}{A\beta}$。我们还需要建立反射系数的符号约定，图 5.5 描述了我们的选择。

关于反射系数、转换系数、透射系数，已提出许许多多不同符号。幸而，需要解的问题常常造成只要求少数（一个或两个）特殊系数。在这些情况下，无须用广义符号，因为从上下文可以弄清楚，一个符号如 PP 是反射系数，不会造成关于想要何种特定的反射波与入射波组合的含糊。这正是现在具有自由面的固体半空间问题中的情况：只存在一种入射 P 波，并且只有一种 P

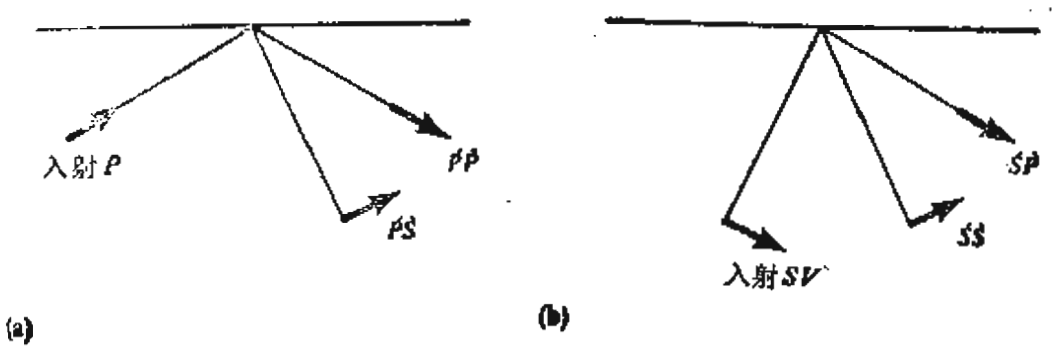


图 5.5

P 或 SV 入射于自由表面时，反射系数和转换系数的记号和符号约定。如果一个运动的向右的分量（即在传播的水平方向上），有与传播因子 $\exp[i\omega(px-t)]$ 一样的相位，则这个运动取为正的

波由它导出。然而，我们不久将讨论固体与固体的分界面，这时，P 波（和 S 波）从上面和下面都能入射。四种可能类型的 P-SV 波入射（P 或 SV，从上面或下面）中的每一种，都能产生所有四种类型的向外走的 P-SV 波，因此，仅仅这一个分界面的完全分析，就包含 16 个系数。所以，在现有问题中，采用能很容易地扩大到较复杂分界面的符号，是适宜的。我们将用 $\acute{P}\grave{P}$ 作为图 5.5 a 中的 $P\to P$ 反射系数，$\acute{P}\grave{S}$ 作为 $P\to S$ 转换系数。在图 5.5 b 中，$S\to P$ 转换由 $\acute{S}\grave{P}$ 给定，$S\to S$ 反射由 $\acute{S}\grave{S}$ 给定。这种升降符号的使用，直接指出想要的入射波→导出波的顺序，因为所有的波都从左向右运动。所以，升符（如 $\acute{P}$）表示上来的波，降符（如 $\grave{S}$）表示下去的波。把这些符号与图 5.5 的符号约定结合起来，我们在表 5.1 中列出对应于两种可能类型入射波的运动的严格向量形式。

由表 5.1 和方程 (5.24)，(5.25) 得到

$$\acute{P}\grave{P}=\frac{-\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}{+\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}},\qquad(5.26)$$

$$\acute{P}\grave{S}=\frac{4\frac{\alpha}{\beta}p\frac{\cos i}{\alpha}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}. \tag{5.27}$$

在 SV 波入射于自由面的情况下，我们可以预期到反射 P 波（$\acute{S}\grave{P}$）和反射 SV 波（$\acute{S}\grave{S}$）。根据表 5.1 中的向量位移，我们得到，在 $z=0$ 上 $\tau_{xx}=0$ 的条件简化为方程

$$-2p\alpha\beta\frac{\cos i}{\alpha}\acute{S}\grave{P}+(1-2\beta^2p^2)(1-\acute{S}\grave{S})=0, \tag{5.28}$$

和在 $z=0$ 上 $\tau_{zz}=0$ 的条件简化为

$$-(1-2\beta^2p^2)\acute{S}\grave{P}+\frac{2\beta^3p}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}(1+\acute{S}\grave{S})=0. \tag{5.29}$$

对（5.28）和（5.29）求解，我们得到

$$\acute{S}\grave{P}=\frac{4\frac{\beta}{\alpha}p\frac{\cos j}{\beta}\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}, \tag{5.30}$$

$$\acute{S}\grave{S}=\frac{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2-4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}{\left(\frac{1}{\beta^2}-2p^2\right)^2+4p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}}. \tag{5.31}$$

在这个简单的固体半空间自由面反射例子中，我们现已得到矩阵

$$\begin{pmatrix}\acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P}\\ \acute{P}\grave{S} & \acute{S}\grave{S}\end{pmatrix}$$

的每个分量的特别公式。这个矩阵概括着所有可能的反射系数，叫做散射矩阵。在图 5.6 中画出它的每个分量随慢度的变化，对于这个非常简单的分界面，发现分量的变化十分剧烈。现只表示出区间 $0\leqslant p\leqslant 1/\alpha$ 上的情况。对于 0.14 至 0.195 秒/公里区间上的慢度，请注意反射运动几乎都与入射运动的类型相反，即入射 P 几乎全部转换为反射 SV，而入射 SV 几乎全部转换为反射

表 5.1　图 5.5 所示类型的 P—SV 平面波问题中包含的向量位移的明确表达式

入射波		散射波	
类型	位移	类型	位移
上行 P	$S(\sin i,0,-\cos i)\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}x-\frac{\cos i}{\alpha}z-t\right)\right]$	下行 P	$S(\sin i,0,\cos i)\hat{P}\hat{P}\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}x+\frac{\cos i}{\alpha}z-t\right)\right]$
		下行 SV	$S(\cos j,0,-\sin j)\hat{P}\hat{S}\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin j}{\beta}x+\frac{\cos j}{\beta}z-t\right)\right]$
上行 SV	$S(\cos j,0,\sin j)\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin j}{\beta}x-\frac{\cos j}{\beta}z-t\right)\right]$	下行 P	$S(\sin i,0,\cos i)\hat{S}\hat{P}\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}x+\frac{\cos i}{\alpha}z-t\right)\right]$
		下行 SV	$S(\cos j,0,-\sin j)\hat{S}\hat{S}\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin j}{\beta}x+\frac{\cos j}{\beta}z-t\right)\right]$

说明：这里的入射波振幅 S 可用两种方法考虑：作为稳态波的位移振幅，或者，在入射波是与位移阶梯 S 相应的质点速度脉冲情况下，作为质点速度的 Fourier 变换的振幅。

对于位移振幅比，引进了带升降符号的记号。因而它也可以应用于质点速度振幅比和质点加速度振幅比（因为它们包含用同样的频率幂求标度散射波和入射波）。但是，对于势的比值，或能通量的比值，系数是不同的。在需要这些比值的地方［如补充 6.6 和方程(5.41)］，我们将保留带升降符号的位移振幅比符号，并乘以适当的标度校正。

P。在其它分界面问题（固体与液体间的分界面，等等）中，可以出现远为复杂得多的变化，地震学家们经常致力于极其详细地求这些变化的值，以便解释某项特殊资料。因此，为方便起见，我们将给出地震学中另外两种重要分界面的系数公式。很遗憾，这些公式出版上的印刷错误有长期历史（参看 Hales 和 Robert

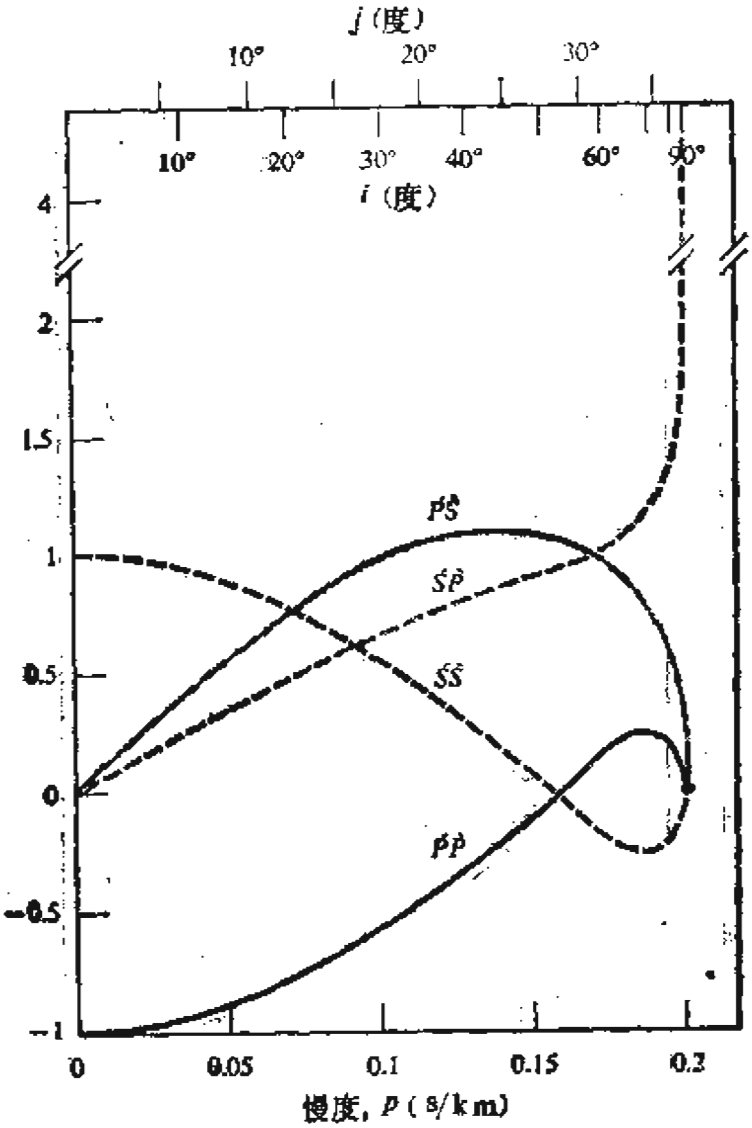


图 5.6

自由面上四种可能的 P–SV 反射系数（位移振幅比）随水平慢度 p 的变化。请参看图 5.5。在此情况下，$\alpha=5$ 公里/秒，$\beta=3$ 公里/秒，我们限定 p 位于区间 $0\leqslant p<1/\alpha$ 内，以便使入射角 i 总是实数。当 $i=90°$ 时，$\dot{S}\dot{P}$ 非常大（~4.1）

在 1974 年，或 Young 和 Braile 在 1976 年的评论)。为使读者在求特殊系数时有信心，在结束本节之前，我们将进行有益的检验，来证实已经给过的公式是正确的。

5.2.3 *SH* 波的反射和透射

应力分量 τ_{zx} 和 τ_{zy} 不是由表 5.2 中所列的位移激发的，所以，唯一能用的动力学边界条件是，穿过 $z=0$ 时 τ_{yz} 连续。位移的 y 分量也是连续的，我们由 (5.14) 得到散射矩阵

表 5.2　图 5.7 所示 *SH* 平面波问题的向量位移

入　射　波	
类　型	位　移
下行 *SH*	$(0,S,0)\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_1}{\beta}z-t\right)\right]$
上行 *SH*	$(0,S,0)\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
散　射　波	
类　型	位　移
上行 *SH*	$(0,S,0)\,\hat{S}\hat{S}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
下行 *SH*	$(0,S,0)\,\hat{S}\hat{S}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$
上行 *SH*	$(0,S,0)\,\hat{S}\hat{S}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
下行 *SH*	$(0,S,0)\,\hat{S}\hat{S}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$

$$\begin{pmatrix} \grave{S}\acute{S} & \acute{S}\acute{S} \\ \grave{S}\grave{S} & \acute{S}\grave{S} \end{pmatrix}$$

的元素是

$$\grave{S}\acute{S}=\frac{\rho_1\beta_1\cos j_1-\rho_2\beta_2\cos j_2}{\Delta},\quad \acute{S}\acute{S}=\frac{2\rho_2\beta_2\cos j_2}{\Delta},$$
$$\grave{S}\grave{S}=\frac{2\rho_1\beta_1\cos j_1}{\Delta},\qquad \acute{S}\grave{S}=-\grave{S}\acute{S}, \tag{5.32}$$

其中 $\Delta=\rho_1\beta_1\cos j_1+\rho_2\beta_2\cos j_2$.

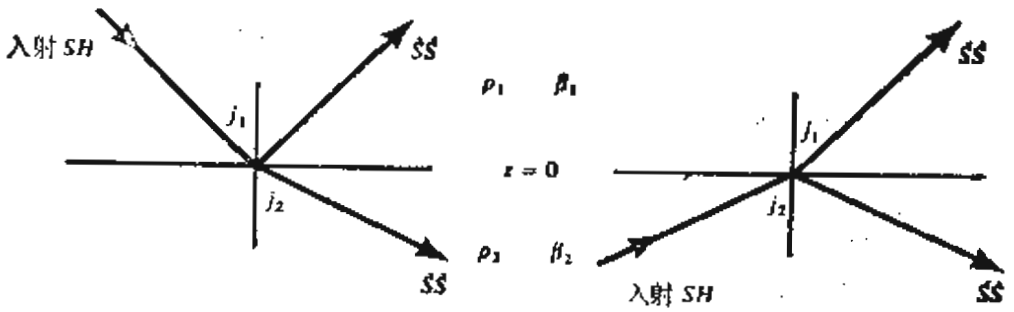


图 5.7

入射 SH 波问题中出现的四种可能的反射系数和透射系数的符号

5.2.4 *P-SV* 在固体-固体分界面上的反射与透射

散射矩阵现在是

$$\begin{pmatrix} \grave{P}\acute{P} & \grave{S}\acute{P} & \acute{P}\acute{P} & \acute{S}\acute{P} \\ \grave{P}\acute{S} & \grave{S}\acute{S} & \acute{P}\acute{S} & \acute{S}\acute{S} \\ \grave{P}\grave{P} & \grave{S}\grave{P} & \acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P} \\ \grave{P}\grave{S} & \grave{S}\grave{S} & \acute{P}\grave{S} & \acute{S}\grave{S} \end{pmatrix},$$

并且它可由位移和牵引力的 x 和 z 分量的连续性得到。此散射矩阵的每一列，代表由一种特定类型的入射波从分界面散射出去的四种波。因此，欲求出所有列的值，似乎必须建立四个方程组，每组包括四个方程，每个方程含有四个未知量。除非细心利用问题中一切可用的对称性，否则，所有 16 个系数的完全表述，可能包含大量的代数运算。用我们现在描述的、以 Nafe 的工作 (1957) 为基础的方法，使这种计算量减到最小。

我们将假定所有四种可能的入射波共同存在，如图 5.9 所示，位移振幅分别为 $\grave{P}_1$，$\grave{S}_1$，$\acute{P}_2$，$\acute{S}_2$。现在脚标是必要的，以便区分波传播的介质。假定所有的波具有同样的水平慢度，四种散射波具有位移振幅 $\acute{P}_1$，$\acute{S}_1$，$\grave{P}_2$，$\grave{S}_2$。根据 u_x，u_z，τ_{zz}，τ_{xz} 的连续性，我们得到四个方程

$$\begin{aligned}
&\sin i_1(\grave{P}_1+\acute{P}_1)+\cos j_1(\grave{S}_1+\acute{S}_1)\\
&=\sin i_2(\grave{P}_2+\acute{P}_2)+\cos j_2(\grave{S}_2+\acute{S}_2),\\
&\cos i_1(\grave{P}_1-\acute{P}_1)-\sin j_1(\grave{S}_1-\acute{S}_1)\\
&=\cos i_2(\grave{P}_2-\acute{P}_2)-\sin j_2(\grave{S}_2-\acute{S}_2),\\
&2\rho_1\beta_1^2 p\cos i_1(\grave{P}_1-\acute{P}_1)+\rho_1\beta_1(1-2\beta_1^2p^2)(\grave{S}_1-\acute{S}_1)\\
&=2\rho_2\beta_2^2 p\cos i_2(\grave{P}_2-\acute{P}_2)+\rho_2\beta_2(1-2\beta_2^2p^2)(\grave{S}_2-\acute{S}_2),\qquad(5.33)\\
&\rho_1\alpha_1(1-2\beta_1^2p^2)(\grave{P}_1+\acute{P}_1)-2\rho_1\beta_1^2 p\cos j_1(\grave{S}_1+\acute{S}_1)\\
&=\rho_2\alpha_2(1-2\beta_2^2p^2)(\grave{P}_2+\acute{P}_2)-2\rho_2\beta_2^2 p\cos j_2(\grave{S}_2+\acute{S}_2),
\end{aligned}$$

重新整理这些方程，使散射波都在左边，入射波都在右边，我们得到

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix}\acute{P}_1\\ \acute{S}_1\\ \grave{P}_2\\ \grave{S}_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{N}\begin{pmatrix}\grave{P}_1\\ \grave{S}_1\\ \acute{P}_2\\ \acute{S}_2\end{pmatrix}.\qquad(5.34)$$

其中系数矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}
-\alpha_1 p & -\cos j_1 & \alpha_2 p & \cos j_2\\
\cos i_1 & -\beta_1 p & \cos i_2 & -\beta_2 p\\
2\rho_1\beta_1^2 p\cos i_1 & \rho_1\beta_1(1-2\beta_1^2p^2) & 2\rho_2\beta_2^2 p\cos i_2 & \rho_2\beta_2(1-2\beta_2^2p^2)\\
-\rho_1\alpha_1(1-2\beta_1^2p^2) & 2\rho_1\beta_1^2 p\cos j_1 & \rho_2\alpha_2(1-2\beta_2^2p^2) & -2\rho_2\beta_2^2 p\cos j_2
\end{pmatrix},\qquad(5.35)$$

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}
\alpha_1 p & \cos j_1 & -\alpha_2 p & \cos j_2\\
\cos i_1 & -\beta_1 p & \cos i_2 & -\beta_2 p\\
2\rho_1\beta_1^2 p\cos i_1 & \rho_1\beta_1(1-2\beta_1^2p^2) & 2\rho_2\beta_2^2 p\cos i_2 & \rho_2\beta_2(1-2\beta_2^2p^2)\\
\rho_1\alpha_1(1-2\beta_1^2p^2) & -2\rho\beta_1^2 p\cos j_1 & -\rho_2\alpha_2(1-2\beta_2^2p^2) & 2\rho_2\beta_2^2 p\cos j_2
\end{pmatrix}.\qquad(5.36)$$

表 5.3　　图 5.8 所示(固体对固体)P—SV 平面波问题的向量位移

入射波		散射波	
类型	位移	类型	位移
下行 P	$S(\sin i_1, 0, \cos i_1)\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos i_1}{\alpha_1}z-t\right)\right]$	上行 P	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\grave{P}\acute{P}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\alpha_1}z-t\right)\right]$
		上行 SV	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\grave{P}\acute{S}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
		下行 P	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\grave{P}\grave{P}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos i_2}{\alpha_2}z-t\right)\right]$
		下行 SV	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\grave{P}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$
下行 SV	$S(\cos j_1, 0, -\sin j_1)\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$	上行 P	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\grave{S}\acute{P}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos i_1}{\alpha_1}z-t\right)\right]$
		上行 SV	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\grave{S}\acute{S}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
		下行 P	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\grave{S}\grave{P}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos i_2}{\alpha_2}z-t\right)\right]$
		下行 SV	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\grave{S}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$

续表

入射波		散射波	
类型	位移	类型	位移
上行P	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos i_1}{\alpha_1}z-t\right)\right]$	上行P	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\acute{P}\acute{P}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos i_1}{\alpha_1}z-t\right)\right]$
		上行SV	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\acute{P}\acute{S}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
		下行P	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\grave{P}\grave{P}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos i_2}{\alpha_2}z-t\right)\right]$
		下行SV	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\grave{P}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$
上行SV	$S(\cos j_2, 0, \sin j_2)\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$	上行P	$S(\sin i_1, 0, -\cos i_1)\acute{S}\acute{P}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos i_1}{\alpha_1}-t\right)\right]$
		上行SV	$S(\cos j_1, 0, \sin j_1)\acute{S}\acute{S}\exp\left[i\omega\left(px-\frac{\cos j_1}{\beta_1}z-t\right)\right]$
		下行P	$S(\sin i_2, 0, \cos i_2)\grave{S}\grave{P}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos i_2}{\alpha_2}z-t\right)\right]$
		下行SV	$S(\cos j_2, 0, -\sin j_2)\grave{S}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\frac{\cos j_2}{\beta_2}z-t\right)\right]$

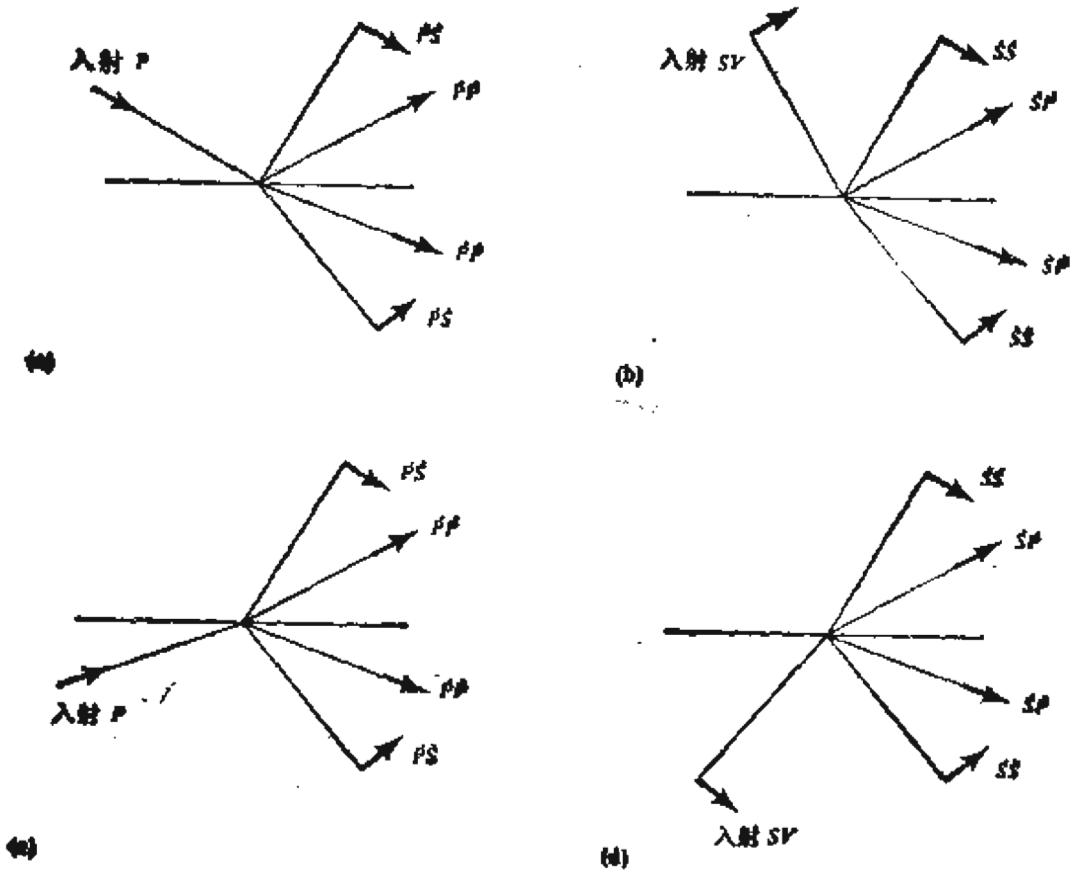


图 5.8

在两个不同固体半空间密接分界面上，P—SV 波问题中出现的 16 个可能的反射与透射的符号。短箭头表示质点运动方向

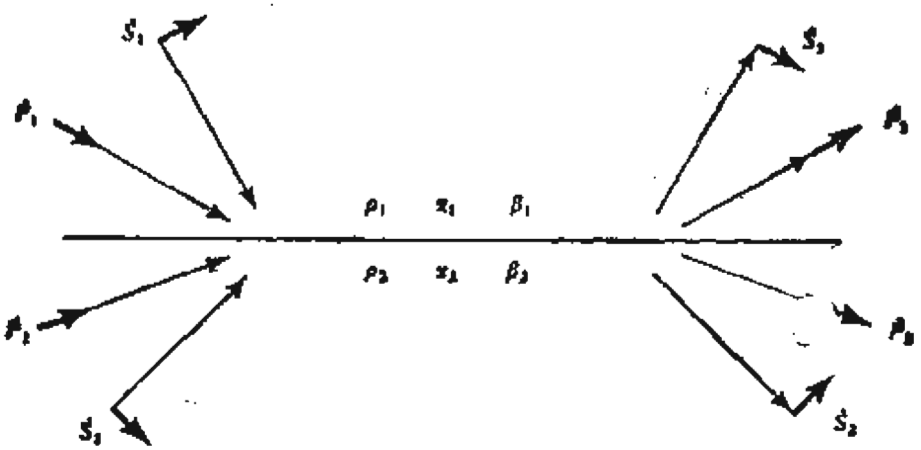


图 5.9

入射的和散射的 P—SV 平面波的完整系统，用它可迅速求得散射矩阵。短箭头表示质点运动方向，长箭头表示波传播方向

在 $\grave{P}_1=1$ 和 $\grave{S}_1=\acute{P}_2=\acute{S}_2=0$ 的情况下，散射矩阵的第一列简单地变为 $(\acute{P}_1,\ \acute{S}_1,\ \grave{P}_2,\ \grave{S}_2)^T$，即变为 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的第一列。对其它三列，有类似的结果，因此，完整的散射矩阵由下式直接给定，

$$\begin{pmatrix} \grave{P}\acute{P} & \grave{S}\acute{P} & \acute{P}\acute{P} & \acute{S}\acute{P} \\ \grave{P}\acute{S} & \grave{S}\acute{S} & \acute{P}\acute{S} & \acute{S}\acute{S} \\ \grave{P}\grave{P} & \grave{S}\grave{P} & \acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P} \\ \grave{P}\grave{S} & \grave{S}\grave{S} & \acute{P}\grave{S} & \acute{S}\grave{S} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}. \qquad (5.37)$$

幸好，$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 间的许多相似性，导致散射矩阵每个分量的极其简单的公式。详细说，这些公式反复使用下列变量，

$$a=\rho_2(1-2\beta_2^2p^2)-\rho_1(1-2\beta_1^2p^2),$$
$$b=\rho_2(1-2\beta_2^2p^2)+2\rho_1\beta_1^2p^2,$$
$$c=\rho_1(1-2\beta_1^2p^2)+2\rho_2\beta_2^2p^2,$$
$$d=2(\rho_2\beta_2^2-\rho_1\beta_1^2),$$

并且还反复使用同余弦有关的项

$$E=b\frac{\cos i_1}{\alpha_1}+c\frac{\cos i_2}{\alpha_2}, \qquad F=b\frac{\cos j_1}{\beta_1}+c\frac{\cos j_2}{\beta_2},$$
$$G=a-d\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\frac{\cos j_2}{\beta_2}, \quad H=a-d\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{\cos j_1}{\beta_1},$$
$$D=EF+GHp^2=(\det M)/(\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2). \qquad (5.38)$$

主要公式是

$$\grave{P}\acute{P}=\left[\left(b\frac{\cos i_1}{\alpha_1}-c\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\right)F - \left(a+d\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)Hp^2\right]\Big/D,$$
$$\grave{P}\acute{S}=-2\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\left(ab+cd\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)p\alpha_1/(\beta_1D),$$
$$\grave{P}\grave{P}=2\rho_1\frac{\cos i_1}{\alpha_1}F\alpha_1/(\alpha_2D),$$
$$\grave{P}\grave{S}=2\rho_1\frac{\cos i_1}{\alpha_1}Hp\alpha_1/(\beta_2D),$$

$$\grave{S}\acute{P}=-2\frac{\cos j_1}{\beta_1}\left(ab+cd\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)p\beta_1/(\alpha_1 D),$$

$$\grave{S}\acute{S}=-\left[\left(b\frac{\cos j_1}{\beta_1}-c\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)E-\left(a+d\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{\cos j_1}{\beta_1}\right)Gp^2\right]\Big/D,$$

$$\grave{S}\grave{P}=-2\rho_1\frac{\cos j_1}{\beta_1}Gp\beta_1/(\alpha_2 D),$$

$$\grave{S}\grave{S}=2\rho_1\frac{\cos j_1}{\beta_1}E\beta_1/(\beta_2 D),$$

$$\acute{P}\acute{P}=2\rho_2\frac{\cos i_2}{\alpha_2}F\alpha_2/(\alpha_1 D),$$

$$\acute{P}\acute{S}=-2\rho_2\frac{\cos i_2}{\alpha_2}Gp\alpha_2/(\beta_1 D),$$

$$\acute{P}\grave{P}=-\left[\left(b\frac{\cos i_1}{\alpha_1}-c\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\right)F+\left(a+d\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\frac{\cos j_1}{\beta_1}\right)Gp^2\right]\Big/D,$$

$$\acute{P}\grave{S}=2\frac{\cos i_2}{\alpha_2}\left(ac+bd\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\frac{\cos j_1}{\beta_1}\right)p\alpha_2/(\beta_2 D),$$

$$\acute{S}\acute{P}=2\rho_2\frac{\cos j_2}{\beta_2}Hp\beta_2/(\alpha_1 D),$$

$$\acute{S}\acute{S}=2\rho_2\frac{\cos j_2}{\beta_2}E\beta_2/(\beta_1 D),$$

$$\acute{S}\grave{P}=2\frac{\cos j_2}{\beta_2}\left(ac+bd\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\frac{\cos j_1}{\beta_1}\right)p\beta_2/(\alpha_2 D),$$

$$\acute{S}\grave{S}=\left[\left(b\frac{\cos j_1}{\beta_1}-c\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)E+\left(a+d\frac{\cos i_1}{\alpha_1}\frac{\cos j_2}{\beta_2}\right)Hp^2\right]\Big/D. \tag{5.39}$$

5.2.5 能通量

对于在均匀半空间之间的界面上入射的平面波，分界面不能

存储能量。因此，离开界面的能通量必定与入射波的相等。

对于具有振幅 S 和传播因子 $\exp[i\omega(s\cdot x-t)]$ 的稳态位移 P 波，实际的（实数的）位移振幅是 $S\cos[\omega(s\cdot x-t)]$。这时 $\rho\alpha S^2\omega^2\sin^2[\omega(s\cdot x-t)]$ 是穿过波阵面单位面积的能通量（见 5.1 节）。必须将此结果乘以 $\cos i$，才能得到波以 i 角入射的水平界面单位面积上的能通量（因为只涉及到波阵面面积的 $\cos i$）。同理，S 波的能通量是 $\rho\beta\cos j S^2\omega^2\sin^2[\omega(s\cdot x-t)]$。因为我们前面已经得到的反射系数和透射系数，是关于位移的，所以，比如说，对于图 5.8 a 所示散射波系，进来的和出去的能通量相等，给出

$$\rho_1\alpha_1\cos i_1=\rho_1\alpha_1\cos i_1(\grave{P}\acute{P})^2+\rho_1\beta_1\cos j_1(\grave{P}\acute{S})^2+\rho_2\alpha_2\cos i_2(\grave{P}\grave{P})^2+\rho_2\beta_2\cos j_2(\grave{P}\grave{S})^2 \quad (5.40)$$

方程（5.40）是对于固体同固体分界面的散射矩阵第一列的限制条件。要把它简化，可使用新的变量，即位移×(密度×传播速度×入射角的余弦)$^{\frac{1}{2}}$。用这些换算的位移（它们与能通量的平方根成正比），散射矩阵是幺正的 Hermite 矩阵。这个性质可由 Frasier（1970）给出的方程予以证明，并由 Kennett 等(1978)进行了广泛研究。

例如，与前面 $\acute{P}\grave{S}$ 相应的新反射系数是

$$\frac{\text{下行 } SV \text{ 波的位移振幅}\times(\rho_2\beta_2\cos j_2)^{\frac{1}{2}}}{\text{入射上行 } P \text{ 波位移振幅}\times(\rho_2\alpha_2\cos i_2)^{\frac{1}{2}}}$$

（参看图 5.8 c），它等于 $\acute{P}\grave{S}(\beta_2\cos j_2)^{\frac{1}{2}}/(\alpha_2\cos i_2)^{\frac{1}{2}}$。这个散射矩阵的完整形式是

$$S=\begin{pmatrix}
\grave{P}\acute{P} & \grave{S}\acute{P}\left(\frac{\alpha_1\cos i_1}{\beta_1\cos j_1}\right)^{1/2} & \acute{P}\acute{P}\left(\frac{\rho_1\alpha_1\cos i_1}{\rho_2\alpha_2\cos i_2}\right)^{1/2} & \acute{S}\acute{P}\left(\frac{\rho_1\alpha_1\cos i_1}{\rho_2\beta_2\cos j_2}\right)^{1/2} \\
\grave{P}\acute{S}\left(\frac{\beta_1\cos j_1}{\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} & \grave{S}\acute{S} & \acute{P}\acute{S}\left(\frac{\rho_1\beta_1\cos j_1}{\rho_2\alpha_2\cos i_2}\right)^{1/2} & \acute{S}\acute{S}\left(\frac{\rho_1\beta_1\cos j_1}{\rho_2\beta_2\cos j_2}\right)^{1/2} \\
\grave{P}\grave{P}\left(\frac{\rho_2\alpha_2\cos i_2}{\rho_1\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} & \grave{S}\grave{P}\left(\frac{\rho_2\alpha_2\cos i_2}{\rho_1\beta_1\cos j_1}\right)^{1/2} & \acute{P}\grave{P} & \acute{S}\grave{P}\left(\frac{\alpha_2\cos i_2}{\beta_2\cos j_2}\right)^{1/2} \\
\grave{P}\grave{S}\left(\frac{\rho_2\beta_2\cos j_2}{\rho_1\alpha_1\cos i_1}\right)^{1/2} & \grave{S}\grave{S}\left(\frac{\rho_2\beta_2\cos j_2}{\rho_1\beta_1\cos j_1}\right)^{1/2} & \acute{P}\grave{S}\left(\frac{\beta_2\cos j_2}{\alpha_2\cos i_2}\right)^{1/2} & \acute{S}\grave{S}
\end{pmatrix} \quad (5.41)$$

和

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{H}=\boldsymbol{S}^{-1}. \tag{5.42}$$

(我们用 $\boldsymbol{S}^{H}$ 表示 $\boldsymbol{S}$ 转置的复共轭。)

一旦 16 个系数 $\grave{P}\acute{P}$, $\grave{P}\acute{S}$ 等由 (5.37) 或 (5.39) 得到，便可用证实 $\boldsymbol{S}$ 满足 (5.42) 来检验它们。事实上，假定慢度慢到足以使所有角 i_1, j_1, i_2, j_2 都是实数，$\boldsymbol{S}$ 的各项 (它们的定义已给出) 也都是实数，于是 $\boldsymbol{S}$ 的转置矩阵也是 $\boldsymbol{S}$ 的逆矩阵。作为一个特殊例子，在 $(\rho_1, \alpha_1, \beta_1, \rho_2, \alpha_2, \beta_2, p)=(3, 6, 3.5, 4, 7, 4.2, 0.1)$ 情况下，我们得到

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} 0.1065 & -0.1766 & 0.9701 & -0.1277 \\ -0.1766 & -0.0807 & 0.1326 & 0.9720 \\ 0.9701 & 0.1326 & -0.0567 & 0.1950 \\ -0.1277 & 0.9720 & 0.1950 & 0.0309 \end{pmatrix}$$

并且这个特定矩阵确实具有性质 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^{T}=\boldsymbol{S}^{-1}$。

如果在计算 16 个系数时，用的参考水准是 $z_1<0$ 在上半空间，而 $z_2>0$ 在下半空间，则应得到有复数项的矩阵 $\boldsymbol{S}$。这时必须引入额外的相位因子，来说明竖向参考面的移动。在此情况下，$\boldsymbol{S}$ 的复共轭转置矩阵 (即 $\boldsymbol{S}^{H}$) 也是 $\boldsymbol{S}$ 的逆矩阵。最后我们要指出，如果在 $z_1<z<z_2$ 范围内存在某个较复杂的过渡带 (例如弹性性质的连续变化，或密接的有不同弹性常数的各均匀层构成的叠层)，但在 z_1 以上和 z_2 以下的区域中是均匀的，则对整个过渡带仍然能确定散射矩阵 $\boldsymbol{S}$，并且 $\boldsymbol{S}$ 仍是幺正的 Hermite 矩阵。这些性质是能量守恒、互易性和因果律的结果。

5.2.6 关于两种相似半空间之间反射和透射系数的一种有用近似

如果考虑的两个半空间有相似的性质，则可预料，保持相同传播方式的波的透射系数将很大 (例如 $\grave{P}\grave{P}$，其入射波和透射波的传播方式都是下行 P)，但所有其它方式的散射系数都将很小。因此，如果存在相当于 $\Delta\rho=\rho_2-\rho_1$, $\Delta\alpha=\alpha_2-\alpha_1$, $\Delta\beta=\beta_2-\beta_1$

的性质跃变，并且比值 $\Delta\rho/\rho$，$\Delta\alpha/\alpha$，$\Delta\beta/\beta$ 远远小于 1（这里的 ρ，α，β，是两个半空间的密度和速度的平均值），则可以预料，象 $\acute{P}\grave{S}$，$\grave{S}\acute{P}$ 这些量将很小，但透射 $\grave{P}\grave{P}$ 和 $\acute{S}\acute{S}$ 的量级将近于 1。我们这里将对两个固体半空间的 P-SV 问题，推导密度和速度小跃变的一级效应，因为得到的近似公式（5.44）常常是异常精确的。它们给出对于 $\Delta\rho$，$\Delta\alpha$，$\Delta\beta$ 各自贡献的进一步的理解，Chapman（1976 a）已指出，这些公式在分析非均匀介质中的波时是重要的。

我们将假定，所有角度 i_1，i_2，j_1，j_2 都是实的，并且这些角中没有一个接近 90°。于是，根据联系 i_1 与 i_2，j_1 与 j_2 的 Snell 定律，得到

$$\Delta i=i_2-i_1=\tan i(\Delta\alpha/\alpha),\quad \Delta j=j_2-j_1=\tan j(\Delta\beta/\beta) \tag{5.43}$$

（速度跃变的一级近似）。将（5.38）中规定的各项展开以后，取跃变 $\Delta\rho$，$\Delta\alpha$，$\Delta\beta$ 的一级近似，代入（5.39），得到

$$\begin{aligned}
\grave{P}\acute{P} &= \frac{1}{2}(1-4\beta^2p^2)\frac{\Delta\rho}{\rho}+\frac{1}{2\cos^2 i}\frac{\Delta\alpha}{\alpha}-4\beta^2p^2\frac{\Delta\beta}{\beta},\\
\grave{P}\acute{S} &= \frac{-p\alpha}{2\cos j}\left[\left(1-2\beta^2p^2+2\beta^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right)\frac{\Delta\rho}{\rho}\right.\\
&\quad \left.-\left(4\beta^2p^2-4\beta^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right)\frac{\Delta\beta}{\beta}\right],\\
\grave{P}\grave{P} &= 1-\frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho}+\left(\frac{1}{2\cos^2 i}-1\right)\frac{\Delta\alpha}{\alpha},\\
\grave{P}\grave{S} &= \frac{p\alpha}{2\cos j}\left[\left(1-2\beta^2p^2-2\beta^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right)\frac{\Delta\rho}{\rho}\right.\\
&\quad \left.-\left(4\beta^2p^2+4\beta^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}\right)\frac{\Delta\beta}{\beta}\right],\\
\grave{S}\acute{P} &= \frac{\cos j}{\alpha}\frac{\beta}{\cos i}\grave{P}\acute{S},\\
\grave{S}\acute{S} &= -\frac{1}{2}(1-4\beta^2p^2)\frac{\Delta\rho}{\rho}-\left(\frac{1}{2\cos^2 j}-4\beta^2p^2\right)\frac{\Delta\beta}{\beta},
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\dot{S}\dot{P} = \frac{-\cos j}{\alpha}\frac{\beta}{\cos i}\dot{P}\dot{S},$$

$$\dot{S}\dot{S} = 1-\frac{1}{2}\frac{\Delta\rho}{\rho}+\left(\frac{1}{2\cos^2 j}-1\right)\frac{\Delta\beta}{\beta}.$$

只须改变跃变 $\Delta\rho$，$\Delta\alpha$，$\Delta\beta$ 的符号，很容易从上面给出的八个系数推演出另外八个系数。

(5.44) 中 $\Delta\beta/\beta$ 的系数有比 $\Delta\rho/\rho$，$\Delta\alpha/\alpha$ 的系数大的趋向，这意味着剪切波速的扰动在散射弹性波中相对有效。如果角 i（或 j）接近 90°，近似公式 (5.44) 将不成立，因为这时只要有速度的小跃变，就将导致 i（或 j）的大变化，甚至会出现波发生全部内反射的情况。Bortfeld (1961) 以及 Richards 和 Frasier (1976) 给出了一级近似 (5.44) 的应用。Chapman (1976 a) 在一项关于性质随深度变化的介质中点源产生的波的重要研究中，已经指明如何处理 (5.44) 在 $i=90°$ 和 $j=90°$ 的奇异性。

5.2.7 平面波的反射和透射系数与频率无关

在本节中直到现在，我们只分析了频率为 ω 的稳态平面波（参看表 5.1—5.3），因此，在频率域已经得到反射系数和透射系数。但在系数公式（例如 (5.26)、(5.32)、(5.39)）中，似乎不存在同频率的关系。我们措词这样小心，使用"似乎"字眼，是因为在 5.3 节将看到，在我们已经得到的系数中，可以有一类依赖于频率的关系（包括与符号有关的相移）。然而，当入射角（指前面各 i，j，j_1，j_2，i_1，i_2）都为实数时，系数确实与频率无关。在此情况下，水平的相速度 p^{-1} 大于 P 和 S 的传播速率 α 和 β。这时的反射系数和透射系数都是实数，并且，它们与频率无关这个事实意味着，离开界面的波必有同入射波一样的脉冲形状（但有不同振幅）。这是一个非常特殊的性质，一般说，如果界面不是平面，或者如果波不是平面波，则不是这种情况。我们后面要描述的重要现象之一是，当入射波阵面是弯曲的（第六章）或

如果界面是稍微弯曲的（第九章）时，反射波或透射波的脉冲形状如何能与入射波的相区别。

5.3 非均匀波，相移和界面波

对于到现在为止我们已描述过的平面波，都意味着传播方向 l 是个其笛卡尔分量为实数的向量（平行于慢度 s）。在本节，我们将研究 l（或 s）在深度方向的分量是虚数的情况。我们将看到，这种类型的波是可能的，它们的振幅随深度呈指数增大或减小。它们是非均匀波（后面按照(5.92)将给予正式定义）的例子，并且我们将仍利用其水平慢度 p，作为研究它们的性质的独立变量。

以前，我们对于 P 波求得 $s=(\sin i/\alpha,\ 0,\ \pm\cos i/\alpha)=(p,\ 0,\pm\sqrt{1/\alpha^2-p^2})$。如果 s 的深度分量是虚数，则 $p>1/\alpha$。就是说，水平相速度 p^{-1} 小于 P 波的传播速率。我们以前称作"$\sin i$"的量仍是实数，但现在大于 1，因此，角 i 不再是实的。如果 p 甚至更大，使得 $p>1/\beta>1/\alpha$，则相联系的 S 波也是非均匀波，其慢度 s 为 $\left(p,0,\pm\sqrt{\frac{1}{\beta^2}-p^2}\right)$。以前，我们研究过相位因子为 $\exp[i\omega(s\cdot x-t)]$ 的稳态平面波，其理解是，波在空间和时间中的实际扰动，由该相位因子的实部即 $\cos\omega(s\cdot x-t)$ 给定。但现在有虚的 s_z，波的实际扰动由类似 $\exp(i\omega s_z z)\ \cos\omega(px-t)$ 的因子表示，其中实数量 $\exp(i\omega s_z z)$ 依 ωs_z 是负的还是正的虚数，而给出随深度呈指数增大还是减小。前面我们发现，满足波动方程的要求简化为要求 $s^2=1/c^2$，对于 P 波 $c=\alpha=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$，对于 S 波 $c=\beta=\sqrt{\mu/\rho}$。对于非均匀波，这个要求仍然成立，既然现在 $p=s_x>1/c$，$s^2=s_x^2+s_z^2=\frac{1}{c^2}$，所以我们看到，波动方程提供了基本理由，来说明当慢度的水平向分量充分大时，竖向分

量的慢度为虚数。

作为地震学中需要考虑非均匀波的一个例子，再次考虑图5.5 b所示平面波SV入射于自由面问题。我们在(5.30)和(5.31)中得到过转换系数$\acute{S}\grave{P}$和反射系数$\acute{S}\grave{S}$的公式，并用图5.6表示过，它们的值在区间$0\leqslant p\leqslant 1/\alpha$内是$p$的函数。若$1/\alpha<p$，情况将如何？如果$p$大到$1/\beta<p$，则甚至$SV$波也是非均匀的，并且弄不清楚"入射波"指的是什么。但在区间$1/\alpha<p<1/\beta$内，SV波却有实的入射角$j=\sin^{-1}(\beta p)$。在此区间内，我们必须把$\cos j$看作正实数，但$\cos i/\alpha=\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-p^2}$是纯虚数。由下表5.1中涉及$\acute{S}\grave{P}$的项给出$P$波位移为

$$S(\sin i,\ 0,\ \cos i)\acute{S}\grave{P}\exp\left(i\omega\frac{\cos i}{\alpha}z\right)\exp\left[i\omega\left(\frac{\sin i}{\alpha}x-t\right)\right], \tag{5.45}$$

以及由于不能使P波随深度呈指数增大，于是有

$$\frac{\cos i}{\alpha}=\pm i\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}},\ \text{依}\ \omega\gtrless 0. \tag{5.46}$$

因此，对于正的频率，我们发现(5.45)变为

$$S\left(\alpha p,\ 0,\ i\sqrt{\alpha^2p^2-1}\right)\acute{S}\grave{P}\exp\left(-\omega\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}}z\right)$$
$$\times\exp[i\omega(px-t)]. \tag{5.47}$$

只要我们把"$\cos i$"解释为(5.46)给出的虚数，则在(5.28)—(5.31)中推导$\acute{S}\grave{P}$和$\acute{S}\grave{S}$的步骤不变，于是现在系数$\acute{S}\grave{P}$和$\acute{S}\grave{S}$不再是实的。所以，当取(5.47)中向量分量的实部来获得物理位移时，我们发现存在一个相移量ϕ，对于水平分量$\phi=$相位$(\acute{S}\grave{P})$，对于竖向分量$\phi=\frac{\pi}{2}+$相位$(\acute{S}\grave{P})$。对于固定的p，所有正频率的相移相同，并且容易看出，对于所有负频率的相移则

方向相反。

虽然导出的P波(5.47)是非均匀波，但反射的S波并不随深度减小，根据表5.1，由于$\cos j$是实的并等于$\sqrt{1-\beta^2 p^2}$，故反射S波的位移是

$$S(\sqrt{1-\beta^2 p^2}, 0, -\beta p)\acute{S}\grave{S}\exp\left[i\omega\left(px+\sqrt{\frac{1}{\beta^2}-p^2}z-t\right)\right]. \tag{5.48}$$

但由于$\acute{S}\grave{S}$的相移，反射S波的脉冲形状不再与入射波的相同。根据补充5.6中的论证，反射的脉冲形状，是入射脉冲形状及其Hilbert变换的线性组合。

补充5.5

相移：相位滞后和相位超前

一个传播波的相移，是由各种机制引起的。因此，在相位因子$\exp[i\omega(s\cdot x-t)]$中，我们可以定义由传播引起的相移为$\phi(\omega)=\omega s\cdot x$。这种相移叫做相位滞后，因为它等于在滞后$s\cdot x$的时间上求基本时间变量$\exp(-i\omega t)$的值，即$\exp[-i\omega(t-s\cdot x)]$。

相移的另一个例子出现在方程(5.47)中，它表明，非均匀P波运动向下竖向分量的相位比传播方向上的水平分量大$\pi/2$。这也是相位滞后：最大向下位移比最大水平位移(沿传播方向)滞后时间$\frac{\pi}{2\omega}$。这是四分之一周期所滞后的时间，导致顺进的质点运动(参看问题5.4)。

相反，由SV波以大于$\arcsin(\beta/\alpha)$的角j在自由面入射引起的、在$\acute{S}\grave{S}$中出现的相移，是相位超前。这可由(5.31)看到，其中$\cos i$有个正的虚部，因而$\acute{S}\grave{S}$的相位是负的(见图5.10)，相应于在较早的时间上求$\exp(-i\omega t)$的值。

我们这里的全部要点是，相移的符号可以依赖于频率的符号(见(5.46))和我们在Fourier时间变换中的符号约定，但是指定"相位滞后"和"相位超前"是比较基本的，它常常更好地指明引起相移的现象的物理意义。因此，在5.5节我们将讨论衰减引起的相位滞后，而在第九章，我们将看到体波触及焦散时出现的相位超前。

补充5.6

Hilbert 变换和与频率无关的相位超前

如果函数 $f=f(t)$ 的 Fourier 分量都超前一个相位 $\pi/2$，则造成的时间域相位畸变函数是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\exp\left[-i\omega\left(t+\left|\frac{\pi}{2\omega}\right|\right)\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\omega)\right)\exp(-i\omega t)d\omega, \qquad (1)$$

其中依 $\omega\gtrless 1$ 而有 $\mathrm{sgn}(\omega)=\pm 1$。将 $f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\omega\tau}\,d\tau$ 代入(1)得到等效公式

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin[\omega(\tau-t)]d\tau, \qquad (2)$$

Titchmarsh(1926)以及 Jeffreys 和 Jeffreys(1972)把这叫做 $f(t)$ 的关联函数。对(2)中的 ω 进行积分，还发现下列形式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau, \qquad (3)$$

其中在 $\tau=t$ 的奇异性，是通过取积分的主值，即消去比 t 稍大和稍小的 τ 所做的贡献来处理。

形式(3)是 $f(t)$ 的 Hilbert 变换的通用定义，我们用符号 $\mathscr{H}[f(t)]$ 表示它。它还可以被看作褶积(用 * 表示)，因此，畸变信号的最后等效形式是

$$f(t)*\left(-\frac{1}{\pi t}\right). \qquad (4)$$

我们将一般地把(1)—(4)中的任何一个看作 $f(t)$ 的 Hilbert 变换。实际上，要计算这个变换，最初形式(1)是最直截了当的：Fourier 变换给出 $f(\omega)$，而 $\frac{\pi}{2}$ 相位超前使 $f(\omega)$ 的实部和虚部互换(产生的虚部要改变符号)。这时，Fourier 逆变换回到所要求的 $\mathscr{H}[f(t)]$。

注意

$$\mathscr{H}[f(t)]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\sin[\omega(\tau-t)]d\tau,$$

但是

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos[\omega(\tau-t)]d\tau.$$

如果对 Hilbert 变换对，即 $f(t)$ 和 $\mathscr{H}[f(t)]$，再求 Hilbert 变换，则产生的一对是 $\mathscr{H}[f(t)]$ 和 $-f(t)$。这个极性反向是两个 $\pi/2$ 相位超前的简单结果。

Arons 和 Yennie(1950)指出过，如果函数 $f(t)$ 经受一相位超前 ε，则产生的函数可由 $f(t)$ 及其 Hilbert 交换的线性组合来计算。这种相移的大量地震学实例，包括所有在诸如地球自由表面、海底、壳-幔界面、核-幔界面等不连续面上超临界反射或透射的平面波。Choy 和 Richards(1975)曾指出几个 SH 波和 SV 波地震图实例。线性组合中的常数可推导如下：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)\exp[-i\varepsilon\mathrm{sgn}(\omega)]\exp(-i\omega t)d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\omega)[\cos\varepsilon-i\mathrm{sgn}(\omega)\sin\varepsilon]\exp(-i\omega t)d\omega\\&=\cos\varepsilon f(t)+\sin\varepsilon\mathscr{H}[f(t)]。\end{aligned}\qquad(5)$$

最重要的 Hilbert 变换是 Dirac $\delta(t)$ 函数的 Hilbert 变换，它等于 $(-1/\pi t)$。一个在 $0<t<T$ 为 1 而在其它处为零的箱形函数，有 Hilbert 变换 $(-1/\pi)(\ln|t|-\ln|t-T|)$。如果 $t\ll T$，则箱形函数趋于 Heaviside 函数 $H(t)$，其 Hilbert 变换趋于 $\left(-\frac{1}{\pi}\right)\ln\left|\frac{t}{T}\right|$。

注意，经 Hilbert 变换的函数，具有同原来函数一样的 Fourier 振幅谱。

在图5.10中，我们把 $\dot{S}\dot{P}$ 和 $\dot{S}\dot{S}$ 表示为区间 $0\leqslant p\leqslant 1/\beta$ 中 p 的函数，给出振幅和相位。

作为另一个需要利用非均匀波的例子，考虑如图 5.7 和方程(5.32)所描述的 SH 波的反射和透射。如果 $1/\beta_1<p$，在上部介质中将存在非均匀波，并且，假定我们仍选取

$$\frac{\cos j_1}{\beta_1}=+i\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_1^2}}\text{(在此情况下 }\omega>0),\qquad(5.49)$$

则此波离开分界面时衰减，因为这时 $1/\beta<p$，随 $z\to-\infty$ 有

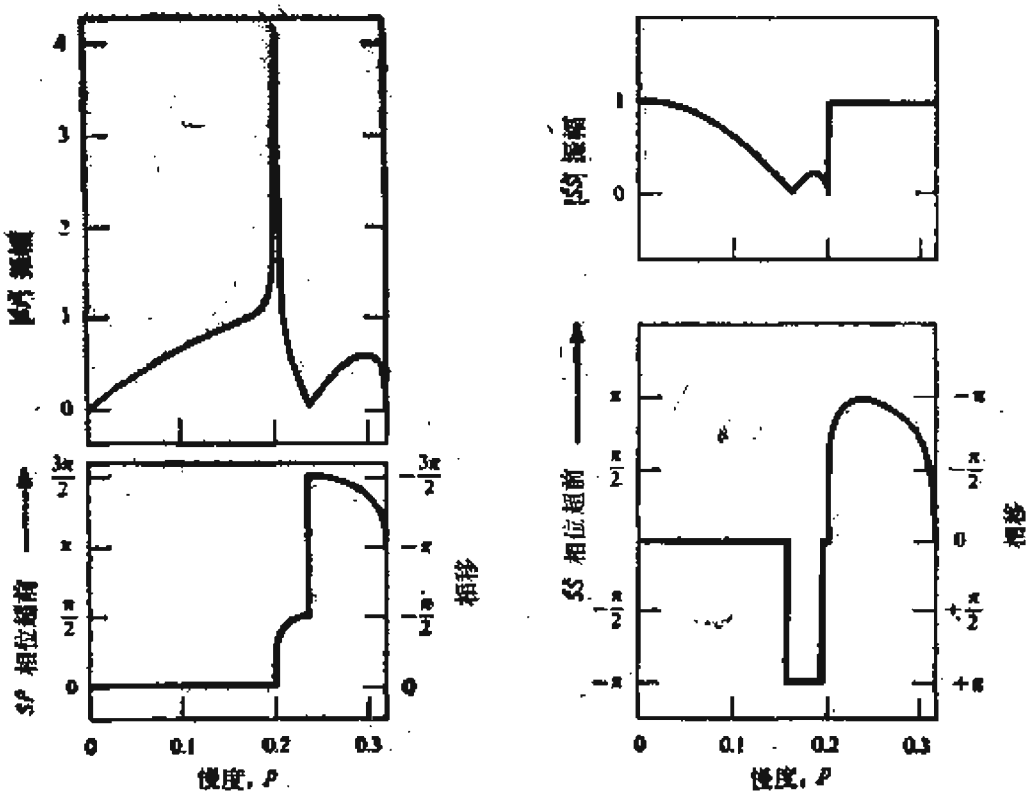


图 5.10

两个反射系数的振幅和相位，作为水平向慢度 p 的函数。这两个系数是 SV 波入射于自由面时的 $\acute{S}\grave{P}$ 和 $\acute{S}\grave{S}$，并取 $\alpha=5$ 公里/秒，$\beta=3$ 公里/秒，因此，这些系数已在图 5.6 中对区间 $0\leqslant p\leqslant 1/\alpha$ 表示过。这里我们把区间扩大到 $0\leqslant p\leqslant 1/\beta$，以使非均匀 P 波在区间 $1/\alpha<p\leqslant 1/\beta$ 存在。我们的选择侧重于相位超前而不是相移，因为前者不依赖于频率符号和不依赖于我们的 Fourier 符号约定。实际画出的相位，是由(5.30)和(5.31)确定的 $\acute{S}\grave{P}$ 和 $\acute{S}\grave{S}$ 的相位。注意，系数中的零现在与相位中的 π 跃变相联系

$\exp[-i\omega(\beta^{-1}\cos j)z]\to 0$。如果下部介质(速度 β_2)是慢介质，并且 SH 波从下向上入射，则可发生全内反射现象。对于 $1/\beta_1<p<1/\beta_2$ 区间内的慢度，入射波是普通运行的平面波，而散射波仍由表 5.2 和公式(5.32)正确给出，不过其中的 $\cos j$ 由(5.49)解释。尤其要注意 $|\acute{S}\grave{S}|=1$，但反射时有相移。[参看 Hudson(1962)对这个问题中能通量的分析。]因为对于 $0\leqslant p<1/\beta_1$ 区间内的 p，其性质如此不同，所以很自然地把 $p=1/\beta_1$ 叫做临界值，$j_2=$

$\arcsin(\beta_2/\beta_1)$叫做临界入射角。我们将把其慢度分量[top]是实数的波叫做均匀波，因此，在这个 SH 实例中，透射的波是均匀的还是非均匀的，要看 p 小于还是大于临界值。

一般说，如果由入射波在一特定分界面引起的波中，至少有一个是非均匀波，则所有与该界面相联系的反射系数和透射系数都将为复数。直到现在，我们已看到入射波为均匀波的例子。在这种情况下，至少有一种散射波必定也是均匀波；整个图象仍然是，能量向着界面传播，然后同另一半空间发生相互作用，最后从分界面传播开去。

下一个我们必须考虑的可能性是，所有同界面相互作用的平面波都是非均匀波。对于半空间自由面上的非均匀平面波 P 和 SV（图5.5，表5.1），我们考虑满足 $1/\alpha<1/\beta<p$ 的慢度。在此情况下，整个图象与我们所考虑过的非常不同，因为现在能量不再透过界面并从它散射，而是只有界面本身作为波道。对于半空间，我们不能让波无限大，因此，唯一允许的波动类型是离开界面呈指数减小；对于非均匀 P 波为（第一个因子是单位向量）

$$(\alpha p,\ 0,\ i\sqrt{\alpha^2p^2-1})\exp\left(-\omega\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}}\,z\right)\exp[i\omega(px-t)], \tag{5.50}$$

对于非均匀 SV 波为（此处要注意单位向量）

$$(i\sqrt{\beta^2p^2-1},\ 0,\ -\beta p)\exp\left(-\omega\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta^2}}\,z\right)\times\exp[i\omega(px-t)]. \tag{5.51}$$

这两种波由边界条件（在 $z=0$ 有 $\tau_{zx}=\tau_{zz}=0$）耦合，并且，正如我们对均匀波所已看到的，波的振幅比是由这些条件决定的。这时的差别在于，我们没有确认耦合系统中的入射波，因此，如果不减少边界条件的数目，需要确定的振幅比就少了一个。如果存在(5.50)和(5.51)类型的波，其大小分别由 $\hat{P}$ 和 $\hat{S}$ 给定，则有

$$2\,p\alpha\beta i\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha^2}}\hat{P}+(1-2\,\beta^2p^2)\hat{S}=0$$

(据 $z=0$ 处 $\tau_{zz}=0$) (5.52)

和

$$(1-2\,\beta^2p^2)\hat{P}-2\left(\beta^3\frac{p}{\alpha}\right)i\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta^2}}\hat{S}=0(\text{据}z=0\text{处}\tau_{xz}=0).$$

(5.53)

因为这是关于同一振幅比($\hat{S}/\hat{P}$)的两个方程，所以，系数行列式必为零，而 p 必须满足 $R(p)=0$，这里

$$R(p)\equiv\left(\frac{1}{\beta^2}-2\,p^2\right)^2-4\,p^2\left(p^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}\left(p^2-\frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2}$$

$$=\left(\frac{1}{\beta^2}-2\,p^2\right)^2+4\,p^2\frac{\cos i}{\alpha}\frac{\cos j}{\beta}. \qquad (5.54)$$

这个 p^2 的函数，只有一个零(对正的虚"余弦")，并且这个函数是实的和正的。由于对所有弹性固体，相应的正 p 值比 $1/\beta$ 稍大(4—14%)，所以耦合的一对非均匀波 P 和 SV 沿半空间表面传播的确是可能的。这个表面波是以Rayleigh 命名的，他在1886年描述了它的性质，而(5.54)定义的 $R(p)$ 叫做 Rayleigh 函数。注意，Rayleigh 函数恰恰是 (5.26)、(5.27)、(5.30)、(5.31)中所给平面波系数的分母。Rayleigh 波在地震学中被广泛观测，作为均匀半空间的表面波，我们注意下列主要特征：(i) 它们的传播速率 c_R 比剪切波速率小百分之几，c_R 满足 $R(1/c_R)=0$；(ii) c_R 与频率无关，因而波不频散(出现这个性质的物理原因是，在均匀半空间内不存在内禀的长度尺度，虽然我们将在第七章发现，在性质随深度而变的介质中，面波必然频散)；(iii) 质点运动轨迹在自由面为逆进的椭圆(见图 5.11)(在本章的问题中发展的这个结果是值得注意的，因为对每个非均匀波的分量，P 和 SV，质点运动都是顺进椭圆)；(iv) 在与频率有关的某个深度以下，Rayleigh 波的质点运动由 SV 分量占优势，从而变为

顺进椭圆。

一旦透彻地掌握了上述 Rayleigh 波理论，便很容易推广到两个均匀半空间的界面波(P-SV)。这样一种波，是由在上部介质中向上衰减和在下部介质中向下衰减的非均匀波组成的，所以，质点运动实际被限制在分界面附近。利用表 5.3 中所列“散射”波，我们因而做下列解释(对于正的频率)：

$$\frac{\cos i_1}{\alpha_1} \to +i\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha_1^2}},\quad \frac{\cos j_1}{\beta_1} \to +i\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_1^2}},$$

$$\frac{\cos i_2}{\alpha_2} \to +i\sqrt{p^2-\frac{1}{\alpha_2^2}},\quad \frac{\cos j_2}{\beta_2} \to +i\sqrt{p^2-\frac{1}{\beta_2^2}} \qquad (5.55)$$

(试与(5.49)和(5.46)比较)，水平慢度 p 的可能值由 $D(p)=0$ 来确定，此处 D 由(5.38)定义。当然，我们只对实根感兴趣，对于实根，p 比 $(1/\alpha_1,\ 1/\beta_1,\ 1/\alpha_2,\ 1/\beta_2)$ 的最大者还大，因此，(5.55)中的所有“余弦”都是纯虚数。Scholte(1947)证明，$D(p)=0$ 总是有四个根(即两个 p^2 值，四个 p 的根)，但仅仅当比值 ρ_1/ρ_2 和 β_1/β_2 处于某区间时，它们才是实的和适当大的。这些波被命名为 Stoneley 波，Stoneley 在 1924 年发现了它们的主要性质。作为一个特殊情况，Stoneley 波在液体和固体间的分界面上总能存在。请注意，既然频率不进入 D 的定义，所以 Stoneley 波象 Rayleigh 波一样不频散(对于均匀半空间)。

在本节，我们侧重讨论均匀和非均匀波之间的差别，但是通过把这些波作为它们水平慢度的函数来研究，我们把它们的理论统一起来了。在后面的工作中，我们将把这两种类型的波都叫做“平面波”，因为若综合由定点震源产生的波系统，这两种类型都是需要的。

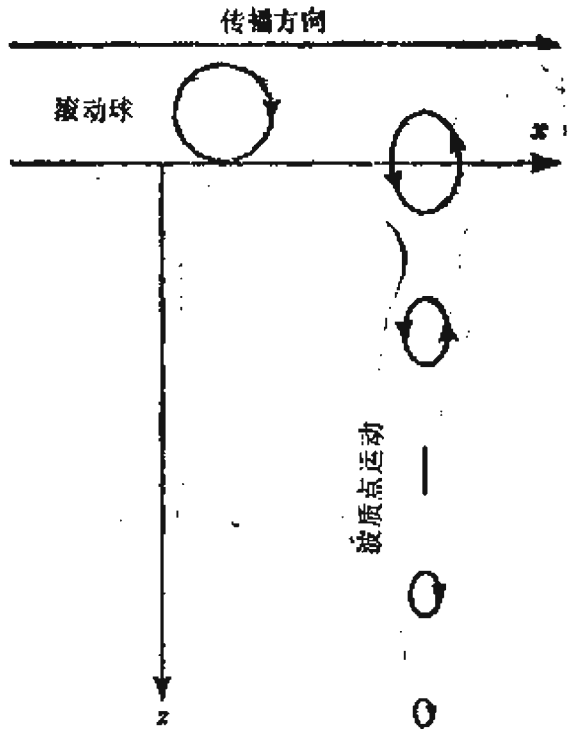


图 5.11

Rayleigh 波质点运动方向随深度的变化。关于区分顺进和逆进运动的方法，也许最好是用沿自由表面从震源向接收点滚动的球来记忆。球的滚动方向是顺进的，它是非均匀 P 和 SV 波、也是足够深处 Raylieigh 波的运动方向。但是对于 Rayleigh 波，表面上的质点运动是逆进的

5.4 分析均匀介质中平面波的矩阵方法

对于 5.3 节考虑过的所有平面波，可以用下面的方法组成运动方程和本构关系，即只需要应力和位移对深度的一级微商。这就是说，可用

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f} \tag{5.56}$$

类型的方程研究平面波，其中 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}(t)$ 是给出质点位移和应力同深度的关系的列向量。$\boldsymbol{A}$ 是常数矩阵，它的各项依赖于(均匀)介质的弹性性质，并依赖于水平向慢度 p 和 ω。

例如，表 5.2 中考虑过的 SH 波，都是分析只经由因子

$\exp[i\omega(px-t)]$而依赖于$(x,\ t)$的位移 $u_y=v=v(x,\ z,\ t)$ 的结果。运动方程是 $\rho\ddot{v}=\tau_{yz,z}+\tau_{yx,x}$，而本构关系 (2.18) 仅仅变为 $\tau_{yz}=\mu\dfrac{\partial v}{\partial z}$，$\tau_{yx}=\mu\dfrac{\partial v}{\partial x}$。于是，这类 SH 问题可以用由

$$\boldsymbol{f}(z)\exp[i\omega(px-t)]=\begin{pmatrix} v \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \tag{5.57}$$

给定的向量 $\boldsymbol{f}$ 进行讨论，而 $\boldsymbol{f}$ 同深度的关系，由求解具有系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ \omega^2(\mu p^2-\rho) & 0 \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

的标准方程(5.56)来给出。

对于压力为 P 和竖向质点位移为 u_z 的声波(见补充 5.4)，我们取

$$\boldsymbol{f}(z)\exp[i\omega(px-t)]=\begin{pmatrix} u_z \\ p \end{pmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{p^2}{\rho}-\dfrac{1}{\rho\alpha^2} \\ \rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.59}$$

对于 P-SV 波，我们取

$$\boldsymbol{f}(z)\exp[i\omega(px-t)]=\begin{pmatrix} u_x \\ u_z \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

和

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & -i\omega p & \frac{1}{\mu} & 0 \\ \frac{-i\omega p\lambda}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\ \frac{4\omega^2 p^2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}-\rho\omega^2 & 0 & 0 & \frac{-i\omega p\lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & -\rho\omega^2 & -i\omega p & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.60}$$

关于象 $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$ 这样耦合的一阶微分方程的解，有许多是熟知的（例如，参看 Coddington and Levinson, 1955; Gantmacher, 1959），我们将在第七至第九章，充分应用这个理论，以便研究非均匀介质中的波传播。但是，我们现在的讨论是关于均匀介质的，这时 $\boldsymbol{A}$ 与 z 无关。

要提到的第一个性质是，如果 $\boldsymbol{V}^\alpha$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个本征向量，而 λ^α 是相应的本征值，则(5.56)的一个解由

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{V}^\alpha \exp[\lambda^\alpha(z-z_{\text{反射}})] \tag{5.61}$$

给出(不对上标 α 求和)，其中 $z_{\text{反射}}$ 是相位的参考值。

现在令 $\boldsymbol{F}$ 为一矩阵，其各列由(5.61)型的不同解组成。若 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵，则我们可求出 n 个本征值和 n 个线性无关的本征向量($\alpha=1,2,\cdots n$)，因而 $\boldsymbol{F}$ 也是 $n\times n$ 矩阵，它的第 α 列由 $\boldsymbol{V}^\alpha\exp[{}^\alpha\lambda(z-z_{\text{反射}})]$给定。于是方程 $\partial \boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$ 的最一般解 $\boldsymbol{f}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的各列的某个线性组合，即

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{W}, \tag{5.62}$$

式中 $\boldsymbol{W}$ 是由常数组成的向量，对在解 $\boldsymbol{f}$ 中出现的 $\boldsymbol{F}$ 的各列加权。

用这类本征值和本征向量来分析平面波是一种很有效的方法，原因在于(5.61)和(5.62)的物理解释。取 SH 波的情况，这时 $\partial \boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$，其中 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 由(5.57)和(5.58)给定。$\boldsymbol{A}$ 的两个

本征值是 $\pm i\omega\sqrt{\frac{1}{\beta^2}-p^2}=\pm i\omega\beta^{-1}\cos j$，这只不过是 i 乘以向下和向上运行的 SH 波的竖向波数。量 $\beta^{-1}\cos j$ 是 S 波的竖向慢度，我们引入符号

$$\eta=\frac{\cos j}{\beta}=\left(\frac{1}{\beta^2}-p^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

与本征值 $\pm i\omega\eta$ 对应的，是本征向量

$$\begin{pmatrix}1\\ \pm i\omega\mu\eta\end{pmatrix}.$$

因此，仿照(5.61)，SH 运动的基本解或是

$$\begin{pmatrix}1\\ i\omega\mu\eta\end{pmatrix}\exp[i\omega\eta(z-z_{反射})]$$

类型，或是

$$\begin{pmatrix}1\\ -i\omega\mu\eta\end{pmatrix}\exp[-i\omega\eta(z-z_{反射})]$$

类型。显然，第一个类型给出的质点位移和剪切应力是对于下行 SH 波的，而第二个，是对于上行波的。最一般类型的平面 SH 波，是它们的线性组合，所以（在(5.62)中出现的）向量 $\boldsymbol{W}$ 的解释是，它的第一个分量给出存在于总的波系统 $\boldsymbol{f}$ 中的下行波的大小，而它的第二个分量给出上行波的大小。

请注意，矩阵 $\boldsymbol{F}$ 可以明确写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i\omega\mu\eta & -i\omega\mu\eta\end{pmatrix}\\ &\times\begin{pmatrix}\exp[i\omega\eta(z-z_{反射})] & 0\\ 0 & \exp[-i\omega\eta(z-z_{反射})]\end{pmatrix}\\ &=\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda},\end{aligned}\tag{5.63}$$

$\boldsymbol{F}$ 被分解为矩阵 $\boldsymbol{E}$ 乘以对角线矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，这里的 $\boldsymbol{E}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的本征向量组成，$\boldsymbol{\Lambda}$ 包含以 $z_{反射}$ 作参考值的竖向相位因子。$\boldsymbol{F}$ 叫做解矩

阵，或者(在常见的地震学文章里)叫做层矩阵。对于 SH 波，$\boldsymbol{F}$ 的逆矩阵是

$$\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}=\begin{pmatrix}\exp[-i\omega\eta(z-z_{反射})] & 0\\ 0 & \exp[i\omega\eta(z-z_{反射})]\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-i}{2\omega\mu\eta}\\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2\omega\mu\eta}\end{pmatrix}. \tag{5.64}$$

对于 P-SV 波，$\boldsymbol{A}$ 的本征值是 $\pm i\omega\xi$(这里的 $\xi=\alpha^{-1}\cos i$ 是 P 波的竖向慢度)和 $\pm i\omega\eta$。$\partial\boldsymbol{f}/\partial z=\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}$($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{f}$ 由 (5.60) 给定)的一般解仍是 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{F}$ 分解因子为 $\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}$，并且

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\alpha p & \beta\eta & \alpha p & \beta\eta\\ \alpha\xi & -\beta p & -\alpha\xi & \beta p\\ 2i\omega\rho\alpha\beta^2 p\xi & i\omega\rho\beta(1-2\beta^2p^2) & -2i\omega\rho\alpha\beta^2p\xi & -i\omega\rho\beta(1-2\beta^2p^2)\\ i\omega\rho\alpha(1-2\beta^2p^2) & -2i\omega\rho\beta^3p\eta & i\omega\rho\alpha(1-2\beta^2p^2) & -2i\omega\rho\beta^3p\eta\end{pmatrix}, \tag{5.65}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\exp[i\omega\xi(z-z_{反射})] & 0 & 0 & 0\\ 0 & \exp[i\omega\eta(z-z_{反射})] & 0 & 0\\ 0 & 0 & \exp[-i\omega\xi(z-z_{反射})] & 0\\ 0 & 0 & 0 & \exp[-i\omega\eta(z-z_{反射})]\end{pmatrix}.$$

请注意，$\boldsymbol{f}$ 的分量正是在密接界面上连续的那些物理量。因此，对于 P-SV 问题，我们已看到，在两个不同半空间的水平界面上(比如说 $z=0$)，$u_x, u_z, \tau_{zz}, \tau_{xz}$ 是连续的。所以，根据(5.60)，$\boldsymbol{f}$ 是连续的，尽管 $\boldsymbol{A}$ 不连续。

我们正在发展的矩阵方法，对于研究均匀叠层中传播的平面波，有重要作用。作为一个非常简单的例子，我们来给出公式(5.32)的推导，它给出 SH 波在两个半空间分界面上入射时的所有反射系数和透射系数。

在上部介质($z<0$；见图 5.7)中，我们有 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}_1(z)\boldsymbol{W}_1$，其中 $\boldsymbol{F}_1$ 由(5.63)给定，所含 ρ, β, j 是在上部介质中的值，$\boldsymbol{W}_1$ 是给出上部介质中下行波和上行波大小的向量。同样，在下部介质中

$(z>0)$中，$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}_2(z)\boldsymbol{W}_2$。由于$\boldsymbol{f}$在$z=0$连续，所以

$$\boldsymbol{F}_1(0)\boldsymbol{W}_1=\boldsymbol{F}_2(0)\boldsymbol{W}_2, \tag{5.66}$$

它给出两种介质中上行波系和下行波系间的一般关系，不管这些波系可能是什么样子。

为求解$\dot{S}\dot{S}$等，我们应用(5.66)于图5.7所示的两种情况。对于从上面入射的SH波，我们有

$$\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}1\\ \dot{S}\,\dot{S}\end{pmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}\dot{S}\dot{S}\\ 0\end{pmatrix},$$

把这些代入(5.66)，给出含有两个未知数$\dot{S}\dot{S}$和$\dot{S}\dot{S}$的两个标量方程。对于从下面入射的SH波，我们有

$$\boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}0\\ \dot{S}\,\dot{S}\end{pmatrix} \text{ 和 } \boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}\dot{S}\dot{S}\\ 1\end{pmatrix},$$

可以再把它们代入(5.66)，得到含有$\dot{S}\dot{S}$和$\dot{S}\dot{S}$的两个方程。

实际上常常要把本征向量v^a归一化，以便使相关的质点位移有单位振幅。我们上面讨论SH和P-SV波时已经这样做了。正如将在第七章和第九章看到的，这个方法之所以在计算上有吸引力，原因是矩阵$\boldsymbol{F}(z)$有可用闭合形式表述的逆矩阵$\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}$。事实上，对于$P$-$SV$波，(5.65)的矩阵$\boldsymbol{E}$有逆矩阵

$$\boldsymbol{E}^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta^2p}{\alpha} & \dfrac{1-2\beta^2p^2}{2\alpha\xi} & \dfrac{-ip}{2\omega\rho\alpha\xi} & \dfrac{-i}{2\omega\rho\alpha}\\ \dfrac{1-2\beta^2p^2}{2\beta\eta} & -\beta p & \dfrac{-i}{2\omega\rho\beta} & \dfrac{ip}{2\omega\rho\beta\eta}\\ \dfrac{\beta^2p}{\alpha} & \dfrac{-(1-2\beta^2p^2)}{2\alpha\xi} & \dfrac{ip}{2\omega\rho\alpha\xi} & \dfrac{-i}{2\omega\rho\alpha}\\ \dfrac{1-2\beta^2p^2}{2\beta\eta} & \beta p & \dfrac{i}{2\omega\rho\beta} & \dfrac{ip}{2\omega\rho\beta\eta}\end{pmatrix} \tag{5.67}$$

5.5 衰减介质中的波传播：平面波基本理论

对于迄今已描述的绝热的波传播，波动一旦由某个特定源产生，便将无限地延续下去。因此，随着波从震源区向外扩散，波动可以在空间上衰减，但是，质点运动的总能量（即动能和弹性应变能在介质中的体积分）却保持为常数。这一点由 2.2 节的讨论可以知道。和这种理想的情况相反，通常的经验是，因为波在实际物质中传播，波振幅由于各种可在宏观上归纳为"内摩擦"的过程而衰减。

只给出两个例子：传播波中产生的应变和应力，可以导致介质晶体缺陷结构的不可逆变化，以及如果相邻的物质晶粒不是弹性连接，则在介质内的晶粒边界上也能做功。这种介质叫做非弹性的，因为物质质点的形态在某种程度上依赖于所施应力的历史。内摩擦的总效应以在补充 5.7 中用各种方法（对于稍带非弹性的介质）定义的无量纲量 Q 来概括。

补充 5.7

Q 的各种定义

若一物体在应力下以频率 ω 轮回，则内摩擦(或非弹性)的无量纲量度由

$$\frac{1}{Q(\omega)}=-\frac{\Delta E}{2\pi E} \tag{1}$$

给出。其中 E 是体内积存的峰值应变能，$-\Delta E$ 是由于物质的不完全弹性而产生的每一轮回的能量损耗。

这个定义很少有直接用途，因为只在专门实验中才可能以振幅和周期都不变的应力波推动物质元。比较通常的是观测(i) 在固定波数的驻波中振幅随时间的衰减，或(ii) 在固定频率的行波中随空间的衰减。地震学中最通常的情况是一个信号的衰减，而这个信号是由一

个范围内的频率组成的。我们要做一个强有力的假定(以后必须审核)，即衰减是个线性现象，意思是，波可以分解成它的 Fourier 分量，每个分量可用(i)或(ii)进行研究，而随后的 Fourier 合成，给出衰减对实际地震信号的正确影响。

在(i)或(ii)的情况下，对于具有线性应力-应变关系的介质，波振幅 A 比例于 $E^{\frac{1}{2}}$。(例如，A 可以代表最大质点速度，或波的应力分量。我们还假定 $Q\gg1$，以使相继的峰值几乎有相同的应变能)。因此，

$$\frac{1}{Q(\omega)}=-\frac{1}{\pi}\frac{\Delta A}{A}, \tag{2}$$

由它可求衰减引起的振幅涨落。

在(i)情况下，我们问：给定初始的 $A=A_0$，而在相继的时间 $2\pi/\omega$，$4\pi/\omega$，$2n\pi/\omega$ 上 A 以系数 π/Q 缩小的 $A=A(t)$ 是什么？显然，

$$A(t)=A_0\left(1-\frac{\pi}{Q}\right)^n \qquad \left(\text{对于}t=\frac{2n\pi}{Q}\right).$$

因此，

$$A(t)=A_0\left[1-\frac{\omega t}{2Qn}\right]^n \to A_0\exp\left(-\frac{\omega t}{2Q}\right)$$

(当 n 很大，即时间很长)。 (3)

根据对指数衰减的 $A(t)$ 值的观测，我们用(3)来定义时间域的 Q 值。正是这个值用于描述地球的自由振荡(见第八章)。

我们不得不用离散的时间求上述结果(3)，因为这是以情况(i)为基础的实验的性质。但对情况(ii)，对于距离 x 的形式 $A=A(x)$ 的推导比较容易，因为特定的波峰可沿距离 dx 追踪，而 A 在空间的逐渐减小可以观测。(我们这里假定，最大衰减的方向沿 x 轴，它同时也是传播方向。)这时 $\Delta A=\frac{dA}{dx}\lambda$，其中 λ 是用 ω 和相速度 c 由 $\lambda=\frac{2\pi C}{\omega}$ 给出的波长。方程(2)变为 $\frac{dA}{dx}=-\frac{\omega}{2cQ}A$，其指数衰减的解变为

$$A(x)=A_0\exp\left[-\frac{\omega x}{2cQ}\right]. \tag{4}$$

根据对指数衰减的 $A(x)$ 值的观测，我们用(4)来定义空间域的 Q 值。

当然，几何扩散效应造成的空间衰减，也必须进行研究。在5.5节，我们将把注意力局限于均匀介质中的平面波传播，以避开这个问题。这种简单情况，还避开了物质不均一性造成的几何频散的复杂性，它涉及到经由(3)测出的Q与用(4)测出的Q之间的差别。这些附加的频散效应(它们甚至在理想弹性介质中也存在)，在第七章7.3.4节结合面波来考虑。

注意，为求衰减对一个波动解，如$e^{i(kx-\omega t)}$的影响，测量时间域的Q的实验，可看作是用复频率代替ω，测量空间域的Q的实验，可看作是用复波数代替k。在第一种情况，要求ω有虚部$\frac{-i|\omega|}{2Q^{时}}$，在第二种情况，要求$k$有虚部$\frac{i|k|}{2Q^{空}}$。

由内摩擦(有时叫做固有衰减)造成波衰减的一般课题是非常大的，这可以分三个不同方面的问题来看：

i) 作为材料科学的一个分支，研究引起衰减的基本（微观）过程。Mason(1958)，Jackson和Anderson(1970)以及Norwick和Berry(1972)评述了各种晶体缺陷、晶粒边界过程和某些热弹性过程的效应。

ii) Q同频率的关系作为各种介质的宏观现象来研究。根据地震波中Q与频率的关系的观测(Archambeau等，1969；Solomon，1972，1973)，人们可以对地球组成的可能性予以限制。Solomon曾用这个方法试图定量表示上地幔中部分熔融的程度。

iii) 许多作者发展了代替Hooke定律的宏观应力-应变关系，从而(用$\rho\ddot{u}_i=\tau_{ij,j}$)求得带有特殊$Q=Q(\omega)$值的物质的运动方程。这里要紧的是利用因果约束关系来导出衰减介质的频散现象。Lomnitz(1957)，Jeffreys(1958)，Futterman(1962)，Azimi等(1968)和Liu等(1976)的文章是关键性文章。Knopoff(1964a)和Stacey等(1975，Savage于1976年作了改正)的评述表明，在

我们理解衰减如何发生，以及它如何影响传播波的脉冲形状方面，仍有一些重要的未知领域。特别是，地震波中的内在频散有多少还了解得不精确，缺乏直接的证据支持（在补充 5.7 中引入的）线性叠加定律。

在本章的剩下部分，我们将讨论(iii)中所述的某些领域，因为地震学中观测到的脉冲形状肯定受内摩擦的影响。主要的结果是，如果在地震学观测频率的很宽范围(0.001—100赫)内，Q 实际是常数，则可通过把体波速度（α 和 β，我们迄今一直认为它们是实数并且与频率无关）看作在(5.88)中定义的、取复数值并依赖于频率的量，来研究衰减地球中的波传播。但是，如果 Q 在地震范围内随频率的变化大于百分之几，则（5.88）可能是不适用的。

5.5.1 衰减介质中物质频散的必然性

取完全弹性均匀介质中，以速率 c 沿正 x 方向传播的一平面波 $\delta(t-x/c)$。如同我们在本章前几节所已知道的，这样一个波严格保持其形状，并且所有频率分量以相同速率 c 一起传播。

现在设想这种波在 $x=0$ 进入一衰减介质。Knopoff（1964）归纳了衰减的实验结果，结论是，对于各种流体，$Q(\omega)\propto\omega^{-1}$，但在对固体中的观测频率范围内，$Q$ 近似为常数。这类 Q 与频率无关的性质，是我们在地震学中所最关心的。

脉冲的每个 Fourier 分量

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-x/c)e^{i\omega t}dt=\exp[i\omega x/c],$$

现在将衰减一个因子 $\exp[-\alpha(\omega)x]$，而由补充 5.7 的方程(4)我们看到，这个衰减速率是 $\alpha=\omega/2cQ$。

在距离 x，这时衰减波的脉冲形状 $p(x,t)$ 将是什么样？作为回答这个问题的第一个尝试，让我们假定不存在频散，因而脉冲是所有具相同速率 c 的 Fourier 分量的综合：

$$p(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\frac{-|\omega|x}{2cQ}\right]\exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c}-t\right)\right]d\omega \tag{5.68}$$

（显然，如果 $x>0$，必须用 $|\omega|$ 代替负频率衰减因子的 ω）。如果 Q 是常数，则这个积分很容易表示为

$$p(x,t)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\frac{x}{2cQ}}{\left(\frac{x}{2cQ}\right)^2+\left(\frac{x}{c}-t\right)^2}\right], \tag{5.69}$$

在固定的 x，这个脉冲随时间变化的形状示于图 5.12 中。

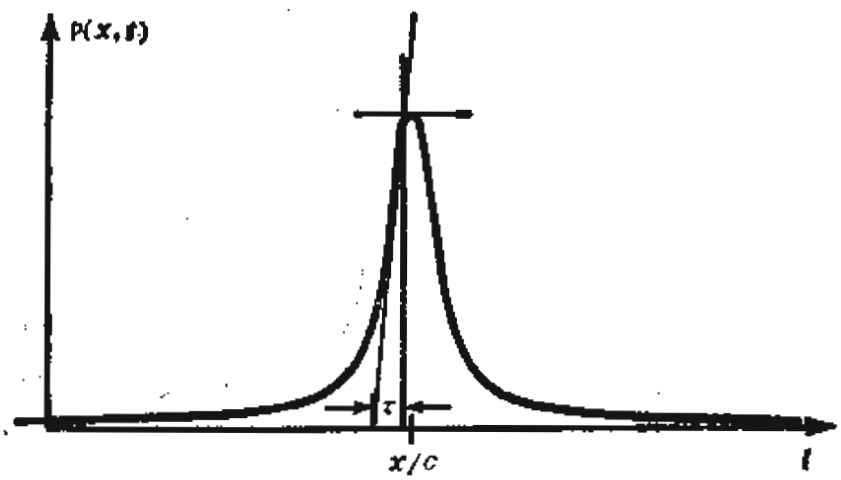


图 5.12

由（5.69）给出的在固定距离上随时间变化的脉冲形状 $p(x,t)$。由 $p(x,t)$ 在最大梯度点的切线外插所规定的上升时间 τ，可用 x,c,Q 求出，因为对这个脉冲形状，$\tau=\frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{x}{cQ}$，但实验的上升时间短得多

可惜，图 5.12 表示的这个脉冲形状，有若干不可接受的特征。它表示，甚至在 $t=0$ 之前，就有一个（很小的）到达 $x=0$ 的波，这违反我们最基本的因果概念。它表示的上升时间（参看图例）太长（Stacey 等 1975 年报道说，测得的 τ 相对于距离的增长速率仅仅是 $1/2\,cQ$，但图 5.12 和方程(5.69)意味着大约 1.5 倍

于此)，并且脉冲的对称形状也同实验不符，实验给出的是衰减时间比上升时间大得多的非对称形状。

当我们推导这个脉冲形状(5.69)所用的三个假定，即线性、常数Q和无频散，成为疑问时，自然要试图保留前两个而放松第三个。(保留线性的间接证据简单说就是，它曾导致许多细心分析的地震资料中自相一致的结果。没有比地球简正振型更清楚的了，它被几百次地震激发到可观测的水平，当精度很高时可发现，对于不同的源和不同的地震仪，其振荡周期是不变的。)虽然我们将马上丢弃常值Q的假定，但我们这里的要点之一是，我们必须允许某种频散，因为否则衰减脉冲形状的对称性是不可避免的(问题5.9)。

5.5.2 衰减介质中物质频散的某些假设值

我们给物质频散以定量表示的初步尝试，将借助于非弹性介质的波阵面概念。我们将假定，平面波$u(x, t)$沿x增大方向传播，并且波阵面在$t=0$首先到达$x=0$。因此

$$u(0, t)=0 \qquad \text{当 } t<0. \tag{5.70}$$

在$x>0$的位置上，u的每个Fourier分量分解因子为

$$u(x, \omega)=u(0, \omega)\exp(iKx),$$

式中的复波数K现在用相速度$c(\omega)$和衰减因子$a(\omega)$由

$$K=\frac{\omega}{c(\omega)}+ia(\omega) \tag{5.71}$$

给定。利用线性叠加假定，在(x, t)的波为

$$u(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(0, \omega)\exp[i(Kx-\omega t)]d\omega,$$

这等效于$u(0, t)$同

$$p(x, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp[i(Kx-\omega t)]d\omega \tag{5.72}$$

的褶积，$p(x, t)$是前面在(5.68)中描述的脉冲的衰减响应。但现在我们允许c依赖于频率，而在补充5.8中我们表明，要求

p（x，t）在到时 x/c_∞之前为零，意味着

$$\frac{\omega}{c(\omega)}=\frac{\omega}{c_\infty}+\mathscr{H}[a(\omega)], \tag{5.73}$$

这里 c_∞是 $\omega\to\infty$时 $c(\omega)$的极限，$\mathscr{H}[a(\omega)]$是衰减因子的 Hilbert 变换。

补充 5.8

有因的传播脉冲形状的振幅谱和相位谱间的关系

我们假定传播的脉冲形状 $p(x,\ t)$ 有 Fourier 分量 e^{iKx}，K的实部和虚部由

$$K=\frac{\omega}{c(\omega)}+ia\ (\omega) \tag{1}$$

给定。这时，如果

$$p\ (x,\ t)\ =0 \qquad (\text{对于 } t<x/c_\infty), \tag{2}$$

我们来证明

$$\frac{\omega}{c(\omega)}=\frac{\omega}{c_\infty}+\mathscr{H}[a(\omega)]. \tag{3}$$

第一，我们注意到（2）中描述的因果关系，完全等效于下列陈述：

$$\text{由 } F(\omega)=\exp\left[\ i\left(K-\frac{\omega}{c_\infty}\right)x\ \right]\text{定义的 } F(\omega)$$

$$\text{在上半平面（即 } \omega \text{ 的虚部}\geqslant 0\text{）是解析的。} \tag{4}$$

因为，如果（2）是正确的，则

$$F(\omega)=p(x,\ \omega)\exp(-i\omega x/c_\infty)=\int_{x/c_\infty}^{\infty} p(x,\ t)\exp[i\omega(t-x/c_\infty)]dt, \tag{5}$$

根据 Jordan 引理，它在上半平面的确是收敛积分。F及其所有微商都存在，因而得到（4）。另一方面，如果（4）是正确的，我们写出

$$p(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\exp[-i\omega(t-x/c_\infty)]d\omega, \tag{6}$$

再加上上半平面无穷远处的半圆路径（由于指数为零，如果 $t<x/c_\infty$，则它没有贡献）。这时，（6）中的被积函数在闭合回路内部处处是解析的，于是得到（2）。

第二，我们还要证明，$\log F(\omega)$ 在上半平面是解析的。为证明这一点，我们只须证明 $F(\omega)$ 没有这样的零值，使 ω 有非负的虚部。事实上，假定对于 $\mathrm{Im}\ \omega_0 \geqslant 0$ 有 $F(\omega_0)=0$，则对于某 $\lambda>0$ 以及 $f(\omega_0)\neq 0$ 的某 f，有 $F(\omega)=(\omega-\omega_0)^{\lambda}f(\omega)$。但是如果 x 增大到 $x+\Delta x$，则根据(4)，

$$(\omega-\omega_0)^{\lambda(1+\Delta x/x)}f(\omega)^{1+\Delta x/x}$$

在上半平面是解析的——这是不可能的，因为在这个形式中看到在 ω_0 处有支点。

第三，我们提一下 Cauchy 定理的特殊形式：如果 $g(z)$ 在闭合回路 C 之上和之内是解析的，则对于 C 本身上的一点 x，有

$$g(x)=\frac{1}{\pi i}P\int_c \frac{g(z)}{z-x}dz \tag{7}$$

(此处 P 指取 Cauchy 主值)。

最后，我们应用(7) 于解析函数

$$\log F(\omega)=\log|F(\omega)|+i[F(\omega)\text{的相位}]$$

$$=-a(\omega)x+i\omega\left(\frac{1}{c(\omega)}-\frac{1}{c_\infty}\right)x, \tag{8}$$

这里是用以实 ω 轴为直径包围上半复 ω 平面的无限半圆作为 c。对于实 ω 值，得到

$$\log F(\omega)=\frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log F(\xi)d\xi}{\xi-\omega} \tag{9}$$

(除非半圆弧有贡献；见下面)。由(8) 代入(9) 并分离实部和虚部，得到

$$a(\omega)=-\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\xi\left(\frac{1}{c(\xi)}-\frac{1}{c_\infty}\right)\frac{d\xi}{\xi-\omega}=-\mathscr{H}\left[\omega\left(\frac{1}{c(\omega)}-\frac{1}{c_\infty}\right)\right] \tag{10}$$

和

$$\omega\left(\frac{1}{c(\omega)}-\frac{1}{c_\infty}\right)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(\xi)d\xi}{\xi-\omega}=\mathscr{H}[a(\omega)],\quad \text{即 (3)}$$

这就是所要求的结果。电磁理论中相应于(3) 的结果叫做 Kramers-krönig关系。

可能当 $|\omega|$ 很大时，由于半圆弧的贡献（例如，见问题 5.10），$\log F(\omega)$ 不能使式(9) 成立。但是，我们可以通过把(7) 应用于函数

$\log F(\omega)/\omega$，来修改上述分析。使用同一个无限半圆，现在却导致两个半留数：在 $\zeta=0$ 和 $\zeta=\omega$，

$$\frac{\log F(\omega)}{-\omega}+\frac{\log F(\omega)}{\omega}=\frac{1}{\pi i}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log F(\zeta)}{\zeta(\zeta-\omega)}d\zeta. \tag{11}$$

[如果

$$\log F(\omega)=O(\log\omega) \quad \text{当}|\omega|\to\infty, \tag{12}$$

则大弧没有贡献。$p(x,\ t)$在波阵面 $t=\frac{x}{c_\infty}$ 的 n 阶间断，将导致 $F(\omega)=O\ (\omega^{-n})$，从而导致 (12) 和 (11)。]

由 (11) 和 (8)，得

$$\frac{1}{c(\omega)}=\frac{1}{c_\infty}+\mathscr{H}\left[\frac{\alpha(\omega)}{\omega}\right]\text{以及}\frac{\alpha(\omega)-\alpha(0)}{\omega}=-\mathscr{H}\left[\frac{1}{c(\omega)}-\frac{1}{c_\infty}\right]. \tag{13}$$

这是叫做带一个减法的频散关系的比较一般结果的一个简单例子，而 $\alpha(0)$叫做减法常数 (Nussenzveig, 1972)。

在有些情况下，可以知道函数 $f(t)$当 $t<0$ 有 $f(t)=0$，因而 $f(\omega)$在上半平面内是解析的，但关于 $f\ (\omega)$ 别无所知。(在上述特殊问题中，(4) 对频率域的函数给出特定公式。)在一般情况下，我们不能排除 $f(\omega)$有零值的可能性。

假定 $f(\omega)$在上半平面的 $\omega=\omega_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 有零值。我们经由

$$f\ (\omega)=f_0(\omega)\prod_{i=1}^{n}\frac{\omega-\omega_i}{\omega-\omega_i^*} \tag{14}$$

构成一个函数 $f_0(\omega)$。由于 $f_0(\omega)$没有零值，故其振幅和相位 $\phi_0(\omega)$的关系为

$$\phi_0(\omega)=\mathscr{H}[\log|f(\omega)|] \tag{15}$$

(用类似于上面推导 (3) 的步骤证明；请注意，f 和 f_0 有相同振幅谱)。但是，根据 (14)，$f(\omega)$的相位 $\phi(\omega)$与 $\phi_0(\omega)$有如下关系：

$$\phi(\omega)=\phi_0(\omega)-\sum_{i=1}^{n}2\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\omega_i}{\omega-\mathrm{Re}\omega_i}\right).$$

现在，给定有相同振幅谱 $|f(\omega)|$的时间域中各种可能的脉冲形状后，则与相位谱 $\phi_0(\omega)$相联系的脉冲形状，叫做最小滞后脉冲形状，因为由零值引起的群滞后

$$\frac{d}{d\omega}\{\phi(\omega)-\phi_0(\omega)\}=+2\sum_{\text{所有}\omega_i}\frac{\mathrm{Im}\,\omega_i}{\{(\mathrm{Im}\,\omega_i)^2+(\omega-\mathrm{Re}\,\omega_i)^2\}}$$

总是正的（因 $\mathrm{Im}\,\omega_i>0$）。

上面（如在方程(6)中）考虑的，是由传播一个距离 x 后的衰减所造成的特殊脉冲形状，因而是到时 x/c_∞ 以后的最小滞后脉冲形状。

在这一步似乎求 c（ω）值的问题实质上解决了。我们仅仅需要取常数 Q 衰减因子的 Hilbert 变换，然后利用（5.73）。但是，根据补充 5.7 中的方程（4），我们需要

$$\frac{\omega}{c_\infty}+\mathscr{H}[\alpha(\omega)]=2\,Q\alpha(\omega), \tag{5.74}$$

并且不存在用常数 Q 使这个关系得到满足的一对 Hilbert 变换。（如果它被满足，我们就能对（5.74）进行 Hilbert 变换。但这是不能做到的，因为对 ω/c_∞ 的变换是发散积分。）反之，我们必须允许依赖于频率的 Q 满足（5.74），但用所选择的衰减使 Q 在地震频率范围上实际是常数。Azimi 等（1968）曾采用这个方法，并且他们建议使用的 Hilbert 变换对之一是

$$\alpha(\omega)=\frac{a_0\omega}{1+a_1\omega},\quad \mathscr{H}[\alpha(\omega)]=\frac{2\,a_0\omega}{\pi(1-a_1^2\omega^2)}\ln\left(\frac{1}{a_1\omega}\right), \tag{5.75}$$

其中 a_0，a_1 是常数，ln 是自然对数。

在图 5.13 中，我们表示出由 Azimi 衰减定律（5.75）得到的脉冲形状（5.72）。请注意脉冲形状的不对称性和它相对于前面描述过的无频散脉冲形状的滞后。Stacey 等（1975）发现，Azimi 的脉冲形状的上升时间确实随距离而改变，其变化率由各种固体中的测量所确定，因此，相应于（5.75）的频散，可能是地震学中我们需要的良好近似。（5.75）后面的假定是，对于所有地震频率都有 $1\gg a_1\omega$，以便直到 ω 非常大时，衰减对 $\alpha(\omega)\propto\omega$ 规律的偏离都不明显。这时我们可忽略 $\mathscr{H}[\alpha(\omega)]$ 表达式中的 $a_1^2\omega^2$，由（5.73）看到，相速度实际上由

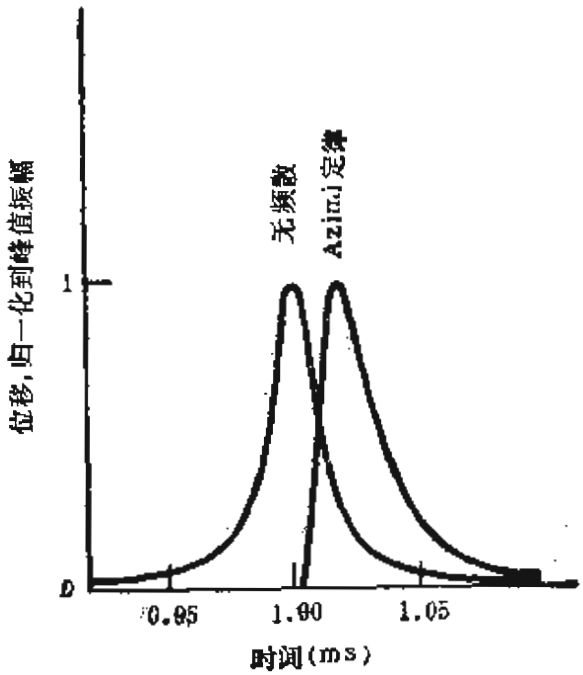


图 5.13

两种衰减的脉冲形状 $p(x, t)$ 的比较，每一种都是在固定的 $x=5$ 米处。在无频散情况下，在所有频率上，$c=5$ 公里/秒而 $Q=50$。在有频散情况下（利用 Azimi 衰减定律 (5.75)，$c(\omega)$ 和 $Q(\omega)$ 由 (5.73)—(5.75)给出），$c_\infty=5$ 公里/秒，而 $(2\alpha_0 c_\infty)^{-1}=50$（引自 Gladwin and Stacey, 1974）

$$\frac{1}{c(\omega)}=\frac{1}{c_\infty}+\frac{2\alpha_0}{\pi}\ln\left(\frac{1}{\alpha_1\omega}\right) \tag{5.76}$$

给出。根据 (5.74) 和 (5.75)，Q 有近似值 $(2\alpha_0 c_\infty)^{-1}$，使我们能够由 (5.76) 得到在两个不同地震频率 ω_1 和 ω_2 的相速度之比，

$$\frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)}=1+\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \tag{5.77}$$

这是一个重要结果，因为它看起来是当 Q 在地震频率范围上实际为常数时，对各种衰减规律的一个良好近似（参看问题 5.10）。然而，已提出特殊的衰减规律，它们确有实质上为常数的 Q，但频散不是由 (5.77) 精确给定（例如，参看 Strick, 1970，以及问题 5.11）。为了看清怎样能出现这种情况，由 (5.73) 注意

到，在频率 ω 处的相位滞后即 $x/c(\omega)$，是 x/c_∞ 加上一个量 $x\omega^{-1}\mathscr{H}[\alpha(\omega)]$。因此，在一特定频率上的相位滞后，依赖于衰减频谱在全部频率上的积分（Hilbert 变换）。如果选择当 $\omega\to 0$ 和 $\omega\to\infty$ 时 $\alpha(\omega)$ 的渐近行为，使积分收敛缓慢，则在地震频率上可以出现非常大的相位滞后。在这种情况下，对我们来说，可取的是通过回到非弹性的物理性质的讨论，把衰减因子限制在很高和很低的频率上。

假定一个阶梯函数的应力 $\sigma=\sigma_0 H(t)$，作用于初始时处于零应力和零应变状态的固体。对于线性介质，产生的应变 $\varepsilon(t)$ 可写成

$$M_U\varepsilon(t)=\sigma_0[1+\phi(t)], \tag{5.78}$$

式中 M_U 是弹性模量，$\phi(t)$ 叫做该模量的蠕变函数。（我们将把(5.78)作为标量间的关系来讨论，因为本节只关心一维的波传播。）对于各向同性弹性介质，$\phi=0$，对于横波 $M_U=\mu$，对于纵波 $M_U=\lambda+2\mu$。对于非弹性物质，有一瞬时应变 σ_0/M_U 以响应所施的应力（注意当 $t\leqslant 0$ 时 $\phi(t)=0$）。这就是我们对模量使用脚标 U 的理由：U 在下述意义上代表未弛豫，即一旦施加应力，在物质向着某个新的位形开始弛豫（经由蠕变）之前，M_U 给出应力和应变间的比例。

应力-应变关系（5.78）很容易推广到一般加载 $\sigma=\sigma(t)$ 的情况，给出

$$M_U\varepsilon(t)=\left[\sigma(t)+\int_{-\infty}^{t}\sigma(\tau)\dot{\phi}(t-\tau)\,d\tau\right],$$

这是 Boltzmann 于 1876 年指出过的。由于 $t\leqslant 0$ 时 $\dot{\phi}=0$，故上式可方便地写作褶积

$$M_U\varepsilon(t)=\sigma(t)+\sigma(t)*\dot{\phi}(t). \tag{5.79}$$

现在考虑以固定频率 ω 沿 x 方向传播的平面波产生 σ 和 ε 的情况，$\sigma=\sigma_0\exp i(Kx-\omega t)$，其复波数 K 通过（5.71）与相速度 $c(\omega)$ 和衰减因子 $\alpha(\omega)$ 有关。应力-应变关系这时变为

$$M_U\varepsilon(t)=\sigma(t)\left[1+\int_0^\infty\dot{\phi}(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau\right] \qquad (5.80)$$

(利用 $\sigma(t)\propto\exp(-i\omega t)$的特殊形式和 $t\leqslant 0$ 时 $\dot{\phi}(t)=0$)。于是应力经由复模量 $M(\omega)$比例于应变，这里

$$M(\omega)=M_U\Big/\left[1+\int_0^\infty\dot{\phi}(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau\right]. \qquad (5.81)$$

ϕ 在原点的连续性意味着，当 $\omega\to\infty$时，这里的积分趋于零，表明当 $\omega\to\infty$时 $M(\omega)\to M_U$。

由运动方程 $\rho\ddot{u}=\partial\sigma/\partial x$，我们得到 $\rho\omega^2=K^2M(\omega)$，由此得到下列关系式：

$$\frac{\omega}{c(\omega)}+i\alpha(\omega)=\omega\sqrt{\frac{\rho}{M(\omega)}}=\frac{\omega}{c_\infty}\left[1+\int_0^\infty\dot{\phi}(t)\exp(i\omega t)dt\right]^{1/2}, \qquad (5.82)$$

$$\frac{1}{Q(\omega)}=\frac{2c(\omega)\alpha(\omega)}{\omega}=-\frac{\mathrm{Im}M(\omega)}{\mathrm{Re}\,M(\omega)}=\frac{\mathrm{Im}\left\{\int_0^\infty\dot{\phi}(t)\exp(i\omega t)dt\right\}}{1+\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty\dot{\phi}\exp(i\omega t)dt\right\}}.$$

我们这里用未弛豫模量通过 $c_\infty=(M_U/\rho)^{\frac{1}{2}}$而确定一个速度 c_∞，而(5.82)现在是允许我们把各种蠕变定律变换为衰减和频散定律的形式。

Lomnitz(1956，1957) 用对数定律概括了他关于岩石蠕变的实验室观测：

$$\phi(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ q\ln(1+at) & t\geqslant 0,\end{cases}$$

其中基频 a 可高到晶格空位的振动频率（即 10^{10}赫的量级；参看 Savage and O'Neill，1975)。这时对于 $\omega\ll a$，$\dot{\phi}$ 的 Fourier 变换是

$$aq\int_0^\infty\frac{\exp(i\omega t)}{1+at}dt\sim-q\left[\gamma+\ln\left(\frac{\omega}{a}\right)-\frac{i\pi}{2}\right]e^{-i\omega/a} \qquad (5.83)$$

式中 $\gamma=0.577\cdots$是 Euler 常数。由于 $q\ll 1$，所以由(5.82) 和

(5.83)得到

$$\frac{\omega}{c(\omega)}+i\alpha(\omega)=\frac{\omega}{c_\infty}\left\{1-\frac{q}{2}\left[\gamma+\ln\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]+\frac{i\pi q}{4}\right\} \quad (5.84)$$

(正确到一级小数)。此式的虚部给出 Lomnitz 常数之一

$$q=\frac{2}{\pi Q}\frac{c_\infty}{c(\omega)}\sim\frac{2}{\pi Q},$$

由这个结果和(5.84)的实部，得到 c 同频率的关系

$$\frac{1}{c(\omega)}=\frac{1}{c_\infty}\left\{1-\frac{1}{\pi Q}\left[\gamma+\ln\left(\frac{\omega}{a}\right)\right]\right\},$$

这与前面对 Azimi 衰减定律建立的关系

$$\frac{c(\omega_1)}{c(\omega_2)}=1+\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \quad (即\ 5.77)$$

是一致的。

用两种如此不同的方法（衰减的经验形式(5.75)，和对数蠕变的实验室观测）得到了这个相同的频散定律之后，同样令人满意的是，Boltzmann 的方法也成功地给出(5.77)，如果一个蠕变函数，可由十分了解的机制所综合，以使得在地震频率范围内 Q 实际为常数（Liu 等，1976)。因此，直接由常数值 Q 的观测就为(5.77)提供了物理基础。Liu 的假设是，衰减是不同的弛豫现象叠加造成的，每个现象(如果单独起作用）应由应力-应变关系

$$\sigma+\tau_\sigma\dot{\sigma}=M_R(\varepsilon+\tau_\varepsilon\dot{\varepsilon})$$

来表示。（看来，为解释衰减而提出的许多物理机制满足这个关系，它是 Zener 于 1948 年首先详细研究的标准线性体的应力-应变定律。）这里 τ_ε 是在施加阶梯应力下，应变的特征弛豫时间；τ_σ 是相应于应变阶梯变化的应力弛豫时间。M_R 是弹性模量，注意，阶梯函数加载 $\sigma(t)=\sigma_0H(t)$ 的响应是

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0}{M_R}\left[1-\left(1-\frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}\right)e^{-t/\tau_\varepsilon}\right]. \quad (5.85)$$

将此式与(5.78) 对比，并特别考虑 $t=0$ 时的瞬时响应，我们可证实

$$M_R = M_U \frac{\tau_\sigma}{\tau_\varepsilon}$$

和

$$\phi(t) = \left(\frac{\tau_\varepsilon}{\tau_\sigma} - 1\right)(1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}). \tag{5.86}$$

M_R 叫做弛豫模量，因为(根据(5.85)) 它给出当 $t \to \infty$ 极限时应力与应变之比。为求 Q 值和频散，(5.82)中的变换

$$\int_0^\infty \dot{\phi}(t)\exp(i\omega t)\,dt$$

是需要的，而根据蠕变函数(5.86)，很容易证明

$$\frac{1}{Q} = \frac{\omega(\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2 \tau_\sigma \tau_\varepsilon}$$

和

$$[c(\omega)]^2 = \frac{M_U}{\rho}\left[1 + \left(\frac{M_U}{M_R} - 1\right)\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2}\right]^{-1}.$$

这两个量画于图 5.14。由此看到，衰减集中在频率 $(\tau_\sigma \tau_\varepsilon)^{-1/2}$ 附近，Q^{-1}的变化，对低于此中心峰值的频率，类似于 ω，而对高于它的频率，则类似于 ω^{-1}。此外，相速度 $c(\omega)$ 随频率单调增大，在 $\omega = 0$ 的下限为 $(M_R/\rho)^{\frac{1}{2}}$。

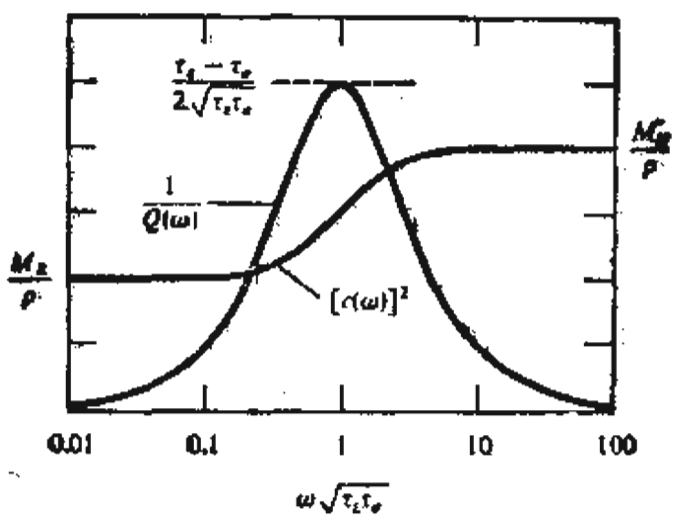


图 5.14

标准线性体(即有单一弛豫机制的物体)内，作为频率的函数的内摩擦 Q^{-1}和相速度的平方$[c(\omega)]^2$ (引自 Liu et al., 1976)

为了使在地震频率内观测到的实际为常数的Q值再现，Liu等(1976)曾用12个图5.14所示类型的都有相同弛豫模量M_R的弛豫峰值进行叠加。他们选了24个可用的非弹性参数(每种机制的τ_ε和τ_σ)，以给出图5.15所示的Q^{-1}和相速度。在0.0001—10赫的范围内，看到Q^{-1}在1%以内实际为常数，而相速度与$\ln\omega$为线性关系。在进一步的分析中，他们还考虑了用密度函数表示的弛豫的连续叠加，也发现$c(\omega)$同$\ln\omega$是类似图5.15所示的线性关系。事实上，他们能够解析地求出$c(\omega)$的梯度，并指出比值$c(\omega_1)/c(\omega_2)$有现在熟悉的值$1+(\pi Q)^{-1}\ln\frac{\omega_1}{\omega_2}$。

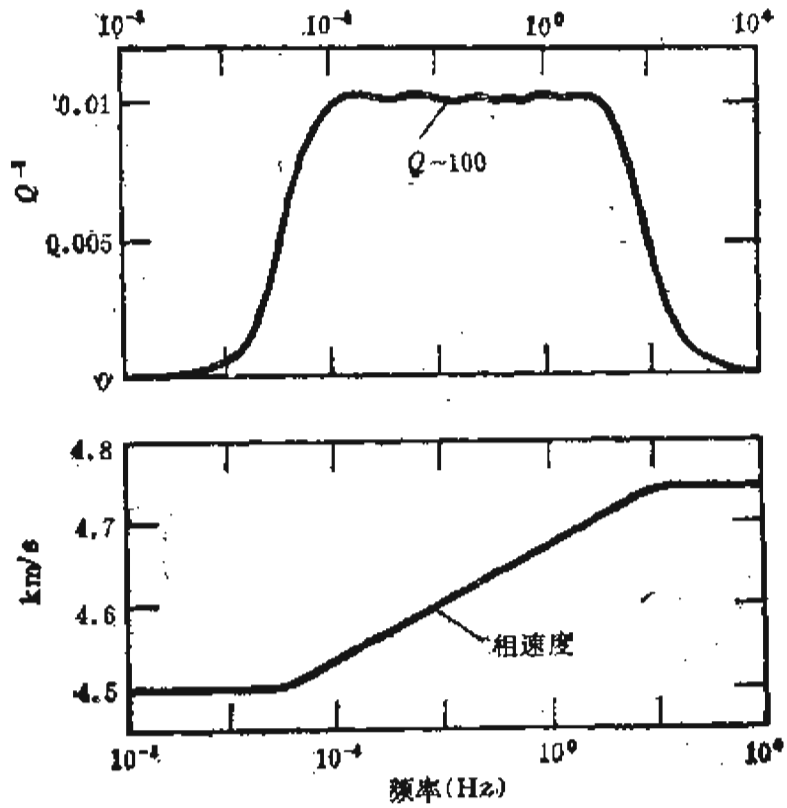


图 5.15

根据12个不同弛豫峰值的叠加，由(5.82)得到的内摩擦值（上图）和相速度(下图)（引自 Liu et al., 1976）.

现在这个对数频散用于Q值被观测为常数的物质是有足够依

据的。因而，一旦弹性介质的类似问题得到解决，如何求解非弹性介质的波传播问题就很清楚了。我们看到，弹性介质的传播因子

$$\exp[i(kx-\omega t)]=\exp[i\omega(x/c-t)]$$

被下列因子取代：

$$\exp i(Kx-\omega t)=\exp\left[\frac{(-\omega x)}{2c(\omega)Q(\omega)}\right]\exp\left[i\omega\left(\frac{x}{c(\omega)}-t\right)\right].$$

虽然 c 作为弹性解中不依赖于频率的常数而出现，$c=c_e$，但这个解将是 c_e 的解析函数。根据解析延拓，则非弹性解可通过用下列规则代替 c_e 而给定：

$$\frac{1}{c_e}\to\frac{1}{c(\omega)}\left(1+\frac{i}{2Q(\omega)}\right). \tag{5.87}$$

如果 Q 实际为常数，则我们可期望能够利用对数频散定律(5.77)。这里需要固定一个参考频率；相对于这个频率才可确认频散。我们将选择 1 赫(即 $\omega=2\pi$) 作为参考。这时，弹性速度 c_e 由下列规则取代：

$$c_e\to c_1\left[1+\frac{1}{\pi Q}\ln\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)-\frac{i}{2Q}\right] \tag{5.88}$$

(正确到 Q 的一级微量)，其中 c_1 是在频率 1 赫上的体波相速度。

在整个这一节，我们至今都假定所讨论的衰减平面波是一维波。因此，对于用 $\exp(-\alpha x)\exp i\omega[x/c(\omega)-t]$ 描述的传播波，最大衰减方向同时也是相位滞后增大的方向。对于一般情况下的平面波，这两个方向是不同的。下面我们将给出二维波传播情况下(5.87)的一个例子，说明甚至当波是衰减的时，用它们的水平慢度来分析平面波仍是富有成效的。

考虑求解方程

$$\nabla^2\psi+K^2\psi=0, \tag{5.89}$$

其中 $K^2=\omega^2\rho/\mu$ 是复数，因为剪切模量 μ 是复数。一般说，(5.89)的稳态平面波解是一个常数乘以

$$\exp(-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x})\exp[i\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t], \tag{5.90}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 是具有实笛卡尔分量的向量。$\boldsymbol{A}$ 是最大衰减的方向，$\boldsymbol{P}$ 是波传播的方向（即相位滞后增大的方向）。把（5.90）代入（5.89），给出

$$P^2-A^2=\mathrm{Re}\{K^2\}, \tag{5.91}$$

$$PA\cos\gamma=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\{K^2\}, \tag{5.92}$$

式中 P 和 A 是 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的振幅，γ 是 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 间的夹角。按照 $\gamma=0$ 或 $\gamma\neq 0$，波是均匀的或非均匀的。我们以前在关于弹性介质的5.3节中遇见过这些名称。如Buchen(1971)和Borcherdt(1973)所指出的，对于弹性介质，必须有 $A=0$ 或 $\gamma=\pi/2$。这是由(5.92)用 $\mathrm{Im}\{K^2\}=0$ 得到的。但是，对于非弹性介质，必须有 $A\neq 0$ 并且 $\gamma\neq\frac{\pi}{2}$。以前在本节我们只考虑了 $A\neq 0$ 和 $\gamma=0$，这是均匀的衰减波。但处理非弹性半空间之间分界面的影响时，必须考虑非均匀平面波，这时有 $0<\gamma<\pi/2$。

幸而，这些比较一般的平面波，仍能作为独立变量 p 的函数进行研究，因为

$$\exp[i\omega px+i(K^2-\omega^2p^2)^{1/2}z-i\omega t] \tag{5.93}$$

也是波动方程的一般平面波解。解(5.93)和(5.90)是等效的，其 y 轴垂直于 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$。$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 的笛卡尔分量是

$$\boldsymbol{P}=(\mathrm{Re}\{\omega p\},0,\mathrm{Re}\{(K^2-\omega^2p^2)^{1/2}\}),$$

$$\boldsymbol{A}=(\mathrm{Im}\{\omega p\},0,\mathrm{Im}\{(K^2-\omega^2p^2)^{1/2}\}). \tag{5.94}$$

这些表达式考虑到 p 也可能是复数。我们将看到，这是第六章—第九章中所希望的。水平慢度(物理的)是 $\mathrm{Re}\{p\}$。

Buchen(1971)和Borcherdt(1973，1977）用向量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 广泛研究了平面波的性质。各单一平面波的物理性质这时很易辨认。例如，相对于竖直方向，入射角简单地等于 θ，这里

$$\boldsymbol{P}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=p\cos\theta. \tag{5.95}$$

相速度是 ω/p，于是，根据 $K^2=\omega^2\rho/\mu$ 和 (5.91)—(5.92) 得到，这个速度精确地等于

$$\left(\frac{\mathrm{Re}\{\mu\}}{\rho}\right)^{1/2}\left(\frac{2(1+Q^{-2})}{1+(1+\sec^2\gamma Q^{-2})^{1/2}}\right)^{1/2}. \qquad (5.96)$$

注意，(5.96)根据的是这样一个 Q，即 $Q^{-1}=-\mathrm{Im}\{\mu\}/\mathrm{Re}\{\mu\}$；参看(5.82)。这可能在科学家们用过的关于 Q 的若干不同定义中是最好的一个(参看 O'Connell and Budiansky, 1978)。在补充 5.7 中，我们提到过当 $Q\gg1$ 时导出的几种性质，它们可以用作 Q 的定义。但如果把它们应用于强衰减的介质，则这些定义将互不相符。

因为现在需要用两个角（θ 和 γ）表征入射于分界面的平面波，所以对于界面上的每个波，用如 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 这些物理量表述的 Snell 定律，其形式是极其复杂的 (Borcherdt, 1977)。但使用 (5.93)表示的平面波，让 K 在界面两边取不同的（复数）值，则 Snell 定律便简化到熟知的规则，即对于由界面耦合的所有平面波，参量 p 都相同。这使我们能够非常迅速地推广以前对于弹性介质的反射系数、转换系数、透射系数所得到的全部公式，让它们能应用于非弹性情况。所以，要得到在两个非弹性半空间之间穿过的 SH 波的透射系数 $\hat{S}\hat{S}$ (见图 5.7 a)，我们首先必须用独立参数 p 解释角 j_1和 j_2：

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin j_1}{\beta_1}=p=\frac{\sin j_2}{\beta_2},\\
&\frac{\cos j_1}{\beta_1}=\left(\frac{1}{\beta_1^2}-p^2\right)^{1/2}=\eta_1, \qquad (5.97)\\
&\frac{\cos j_2}{\beta_2}=\left(\frac{1}{\beta_2^2}-p^2\right)^{1/2}=\eta_2.
\end{aligned}$$

这里的入射波比例于 $\exp[i\omega(px+\eta_1 z-t)]$，导致(5.32)的代数运算在这里给我们以

$$\hat{S}\hat{S}=\frac{2\rho_1\beta_1^2\eta_1}{\rho_1\beta_1^2\eta_1+\rho_2\beta_2^2\eta_2}=\frac{2\mu_1\eta_1}{\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2} \qquad (5.98)$$