第 一 章

土的弹塑性应力-应变模型理论

导 言

土是最古老的工程材料，可是设计现代最新式的大建筑物，如一两百米高或更高的土坝和各种建筑在土基上的大型核电站、火电站、冶金工厂、石化工厂等等，都依旧离不了要和土打交道。虽然土力学成为一门技术科学已有50多年的历史，但是对于土的工程特性的研究，过去只注意了它的抗剪强度，而对于土的弹塑性应力-应变特性的认识则是非常肤浅的。其它如对于土的流变性和动力特性方面的研究，也是不够普遍和深入的。

在六十年代之前，人们通常只做一些三轴或直接剪力试验去测定土的抗剪强度指标，作为土坡和地基稳定分析或挡土墙土压力估算的依据。另外，就是用单向固结仪去测定土的变形模量，作为估算地基沉降的依据。在计算理论方面，稳定分析和土压力计算用的是为纯粹塑性材料建立的经典塑性理论，沉降分析用的是为纯粹弹性材料建立的经典弹性理论。这种完全漠视土的应力-应变关系的弹塑性特点，而将它高度简单化，并且在不同的场合，分别把土当作简单的塑性体或简单的弹性体来处理的办法，是不能令人满意的。这种情况过去之所以延续了几十年，主要的原因是由于计算技术的限制。自从六十年代大型电子计算机问世和计算技术高速度发展之后，束缚学者们手脚的镣铐被打碎了。现在已可能把土的复杂的弹塑性应力-应变关系，纳入到土工建筑物与地基的变形与稳定计算中去了。这样也就间接促进了对土的弹塑性应力-应变特性的研究。目前在计算机和计算技术先进的国家，拖后腿的已不是计算技术，而是对土的弹塑性应力-应变特性的认识了。对于土力学这门技术科学来讲，它是经历了一场革命，而且这场革命现在还在深化中。

为了实现四个现代化和促进国民经济的大发展，我国在最近的将来需要解决一系列土工课题。象高土坝的裂缝防止问题和抗震问题，重型厂房如核电站、化工厂的地基沉降问题等，就是比较突出的例子。这些课题，都需要我们对土的弹塑性应力-应变特性有充分的了解，才能提出比较正确和合理的解答方案。

国外在六十年代才开始重视土的弹塑性应力-应变特性的研究，国内对此项研究还很不普遍。本章的目的除了综合介绍这方面的主要研究成果外，着重说明如何根据有限的试验资料，运用增量弹塑性理论，去建立代表土的弹塑性应力-应变关系的数学模型。因为有了这种模型，就有可能利用电子计算机和现有的计算技术，去做比较正确和更能反映实际情况的土坝、地基或其它土工建筑物的变形与稳定分析，来满足实现四个现代化的需要了。

本章将首先介绍一般土力学学者们在研究这个问题时常用的应力和应变符号、一些专

用名词及其定义，以及常用的应力-应变试验方法和实测成果的表达方式。然后详细介绍建立数学模型需用的增量弹塑性理论。最后介绍几种弹性和塑性应力-应变数学模型，以供参考。本文没有讨论到时间与动力荷载对应力-应变关系的影响。

第一节 应力与应变[1、2、3、4]

一、应　　力

土体中任何一点处的应力状态可以根据所选用的笛卡儿座标，用σ_x，σ_y，σ_z，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，$\tau_{zx}=\tau_{xz}$六个独立应力分量表示。也可用1，2，3代替x，y，z，或用张量σ_{ij}，i，$j=1$，2，3来表示。也可用三个主应力σ_1，σ_2，σ_3来表示。因此，表示土体内一点处的应力状态，可以采取下面任何一种方式，即（见附录1）：

$$\sigma_{ij},\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,\quad \begin{vmatrix}\sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13}\\ \sigma_{21}\sigma_{22}\sigma_{23}\\ \sigma_{31}\sigma_{32}\sigma_{33}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\sigma_x\ \tau_{xy}\ \tau_{xz}\\ \tau_{yx}\ \sigma_y\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\ \tau_{zy}\ \sigma_z\end{vmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{Bmatrix}. \tag{1-1}$$

可以证明，三个主应力σ_1，σ_2，σ_3是下面一个三次方程的根，即

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0 \tag{1-2}$$

其中I_1，I_2，I_3称**应力不变量**。

$$I_1=\sigma_{ii}=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 \tag{1-3}$$

$$I_2=\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}-\sigma_{12}^2-\sigma_{23}^2-\sigma_{31}^2$$
$$=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1 \tag{1-4}$$

$$I_3=\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}+2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}-\sigma_{11}\sigma_{23}^2-\sigma_{22}\sigma_{31}^2-\sigma_{33}\sigma_{12}^2$$
$$=\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \tag{1-5}$$

令**主应力的平均值**σ为

$$\sigma=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) \tag{1-6}$$

令 $s_{11}=\sigma_{11}-\sigma$，$s_{22}=\sigma_{22}-\sigma$，$s_{33}=\sigma_{33}-\sigma$

$$s_{12}=\sigma_{12},\ s_{23}=\sigma_{23},\ s_{31}=\sigma_{31} \tag{1-7}$$

或写成张量形式

$$s_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma \tag{1-8}$$

其中 $$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如 } i=j\\ 0 & \text{如 } i\neq j\end{cases}$$

δ_{ij}叫做克朗纳克尔δ（Kronecker delta），s_{ij}即称为**偏差应力**。

再令 $$s_1=\sigma_1-\sigma,\ s_2=\sigma_2-\sigma,\ s_3=\sigma_3-\sigma \tag{1-9}$$

并称它们为**偏差主应力**。

和偏差应力相应的**偏差应力不变量**为：

$$J_1=s_{11}+s_{22}+s_{33}=s_{ii}=0 \tag{1-10}$$

$$J_2=\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}=\frac{1}{2}[s_{11}^2+s_{22}^2+s_{33}^2+2(s_{12}^2+s_{23}^2+s_{31}^2)]$$

$$=-(s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1)=\frac{1}{2}(s_1^2+s_2^2+s_3^2)$$

$$=\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2] \tag{1-11}$$

$$J_3=\frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki}=s_{11}s_{22}s_{33}-s_{11}s_{23}^2-s_{22}s_{31}^2-s_{33}s_{12}^2$$

$$+2s_{12}s_{23}s_{31}$$

$$=s_1s_2s_3=\frac{1}{3}(s_1^3+s_2^3+s_3^3)$$

$$=\frac{1}{27}(2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)(2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2) \tag{1-12}$$

如用σ_1，σ_2，σ_3作为笛卡儿座标的三轴，就可以得到一个**主应力空间**。任何一种主应力状态σ_1，σ_2，σ_3，都可用图1-1中某一点P来表示。图1-1中的OS轴与σ_1，σ_2，σ_3，三个轴的倾向都相等，即等于

$$\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=54.8^\circ$$

这根OS轴称为**空间对角线**。在此轴上各点$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$。与此轴相垂直的平面，称为**八面体平面**或**π平面**。凡是在同一π平面上的点，其$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$值都是相等的，例如图1-1中$P$点与在空间对角线上的$Q$点同在一个$\pi$平面上，其主应力之和是相等的。可以证明：

$$\overline{OQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{I_1}{\sqrt{3}}$$

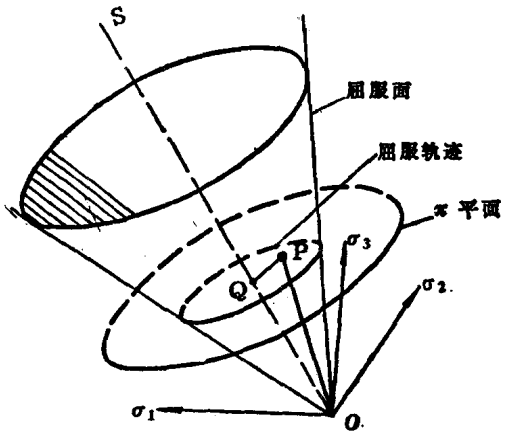


图 1-1　主应力空间

$$\overline{PQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{2}(J_2)^{\frac{1}{2}}$$

我们将采用p，q两个新应力不变量，并将

$$p=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{I_1}{3} \tag{1-13}$$

称为**八面体法向应力**。将

$$q=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$$

$$=\sqrt{3J_2} \qquad (1\text{-}14)$$

称为**八面体剪应力**。假定图1-2代表经过Q及P两点的π平面，QR与σ_3轴垂直。可以证明，如$\angle RQP=\theta$，则：

$$(\pm 1)\sqrt{3}\tan\theta=\overline{\mu}=\frac{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2},\quad \theta=\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{(J_2)^{3/2}}\right) \qquad (1\text{-}15)$$

$\overline{\mu}$称劳台（Lode）应力参数。p，q，$\overline{\mu}$或θ是应力的三个独立不变量，可以取代σ_1，σ_2，σ_3或I_1，I_2，I_3或I_1，J_2，J_3，以表示应力状态。

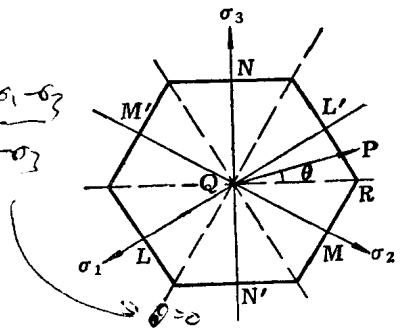


图 1-2　π平面

另外一点值得提出的是，如果将任何一个以不变量I_1，I_2，I_3或I_1，J_2，J_3为独立变量的函数

$$F(I_1,\ J_2,\ J_3)=0 \qquad (1\text{-}16)$$

描绘在主应力（σ_1，σ_2，σ_3）空间，就可得到一个面。这个面与任何一个π平面相交，就将形成一根闭合曲线Γ。由于σ_1，σ_2，σ_3在这个函数中是可以互换的，因此这根曲线Γ必然与图中的LL'，MM'，NN'三轴对称。因此只要知Γ曲线的$\frac{1}{6}$分段如$L'N$的形式，Γ线的全部形式就确定了（见附录2）。

二、应变与应变增量

与应力分量σ_x，σ_y，σ_z，τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}相对应的应变分量为ε_x，ε_y，ε_z，$\frac{1}{2}\gamma_{xy}$，$\frac{1}{2}\gamma_{yz}$，$\frac{1}{2}\gamma_{zx}$。与应力张量σ_{ij}相对应的应变张量为ε_{ij}。与主应力σ_1，σ_2，σ_3相对应的主应变为ε_1，ε_2，ε_3。因为在本文中经常采用应变增量（例如$\delta\varepsilon_{ij}$）作为讨论基础，故本节公式将写成应变增量形式（只要将式中的δ符号除去就成为应变公式了）。与表示应力状态相类似，表示应变状态也可以采取下列四种不同形式，即：

$$\delta\varepsilon_{ij};\ \begin{vmatrix}\delta\varepsilon_{11} & \delta\varepsilon_{12} & \delta\varepsilon_{13}\\ \delta\varepsilon_{21} & \delta\varepsilon_{22} & \delta\varepsilon_{23}\\ \delta\varepsilon_{31} & \delta\varepsilon_{32} & \delta\varepsilon_{33}\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}\delta\varepsilon_x & \frac{1}{2}\delta\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\delta\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\delta\gamma_{yx} & \delta\varepsilon_y & \frac{1}{2}\delta\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\delta\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\delta\gamma_{zy} & \delta\varepsilon_z\end{vmatrix};\ \begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_1\\ \delta\varepsilon_2\\ \delta\varepsilon_3\end{Bmatrix} \qquad (1\text{-}17)$$

体积应变增量$\delta\varepsilon_v$的定义为：

$$\delta\varepsilon_v=\delta\varepsilon_{ii}=\delta\varepsilon_{11}+\delta\varepsilon_{22}+\delta\varepsilon_{33}=\delta\varepsilon_1+\delta\varepsilon_2+\delta\varepsilon_3 \qquad (1\text{-}18)$$

偏差应变增量张量δe_{ij}为：

$$\delta e_{ij}=\delta\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\left(\frac{\delta\varepsilon_v}{3}\right) \tag{1-19}$$

即

$$\left.\begin{aligned}
&\delta e_{11}=\delta\varepsilon_{11}-\frac{\delta\varepsilon_v}{3}, \quad && \delta e_{22}=\delta\varepsilon_{22}-\frac{\delta\varepsilon_v}{3}\\
&\delta e_{33}=\delta\varepsilon_{33}-\frac{\delta\varepsilon_v}{3}, && \delta e_{12}=\delta\varepsilon_{12},\\
&\delta e_{23}=\delta\varepsilon_{23}, && \delta e_{31}=\delta\varepsilon_{31}
\end{aligned}\right\} \tag{1-20}$$

与八面体法向应力p相对应的应变为体积应变ε_v，即：

$$\delta\varepsilon_v=\delta\varepsilon_{ii}=\delta\varepsilon_1+\delta\varepsilon_2+\delta\varepsilon_3$$

与八面体剪应力q相对应的应变为八面体剪应变$\bar{\varepsilon}$，即：

$$\begin{aligned}
\delta\bar{\varepsilon}&=\left(\frac{2}{3}\delta e_{ij}\,\delta e_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\delta\varepsilon_1-\delta\varepsilon_2)^2+(\delta\varepsilon_2-\delta\varepsilon_3)^2+(\delta\varepsilon_3-\delta\varepsilon_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{1-21}$$

与劳台应力参数$\bar{\mu}$相对应的劳台应变参数$\bar{\upsilon}$为

$$\bar{\upsilon}=\frac{2\delta\varepsilon_3-\delta\varepsilon_1-\delta\varepsilon_2}{\delta\varepsilon_1-\delta\varepsilon_2} \tag{1-22}$$

第二节　应力-应变试验与试验曲线

一、常用的试验方法

所谓应力-应变关系指的是应力张量σ_{ij}与应变张量ε_{ij}之间的关系，也就是指应力的六个独立分量与应变的六个独立分量之间的关系。由于能施加复合应力的试验设备的设计、制造和使用都很困难，因此，试验条件受到了很大的限制。目前国内在土工试验方面经常使用的只有直剪仪、单向固结仪和常规三轴压缩（$\sigma_2=\sigma_3$）试验仪。国外也只有极少数的研究机关有真三轴压缩$\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$试验仪、平面应变试验仪、空心圆柱试验仪，使用也不很普遍。因此，当前的研究方法是通过少量简单的试验，求取在比较简单的应力状态下的应力-应变关系试验曲线，然后利用一些理论，即增量弹塑性理论，把这些试验结果推广应用到复杂的复合应力组合状态上去，即求取应力-应变的普遍关系。这种应力-应变关系现在通称为本构关系，它的数学表达式，就是本章的所谓“模型”。

利用常规三轴压缩（$\sigma_2=\sigma_3$）试验仪最常进行的试验分下列几种：

（一）各向等压固结试验，即$p=\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$的排水压缩试验。试验求得的应力-应变关系曲线，即孔隙比e与静水力p间的e-p关系曲线，或把它化成ε_v-p曲线，如图1-3a所示。如用e及ln$p$座标画，则可得图1-3b的直线：

$$e=e_{a0}-\lambda\ln p \tag{1-23}$$

卸荷及重复加荷曲线，亦即回弹曲线，可用下式表示：

$$e=e_{\kappa}-\kappa\ln p \tag{1-24}$$

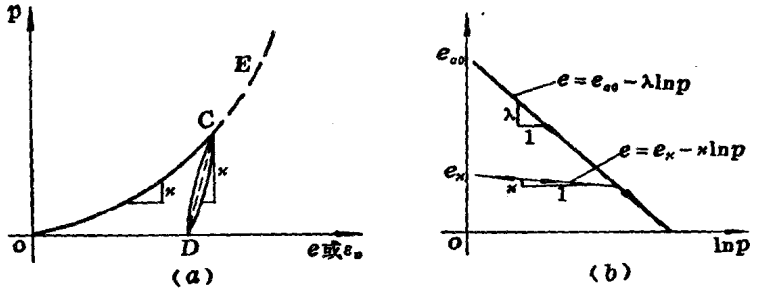


图 1-3　土的压缩曲线

（二）σ_r不变的三轴压缩排水试验。即试验时径向压力$\sigma_r=\sigma_2=\sigma_3$不变，增加轴向压力$\sigma_z$（$=\sigma_1$），直至破坏。然后再另取一土样，采用一新的$\sigma_r$值，再作同样试验，如此可得一组应力-应变曲线。

（三）减小σ_r值，加大σ_z值，但$3p=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=\sigma_z+2\sigma_r$值维持不变的一组试验。

二、试　验　曲　线

从上述（二）、（三）两种三轴试验，根据不同的土可以得到两类不同的应力-应变关系曲线。现详述如下。

正常固结粘土和松砂及中密砂所得的试验曲线，如图1-4所示。加荷曲线是双曲线型的[5]，可用下式表示：

$$q=\frac{\varepsilon_a}{a+b\varepsilon_a} \qquad (1\text{-}25)$$

a与b为两个试验常数。

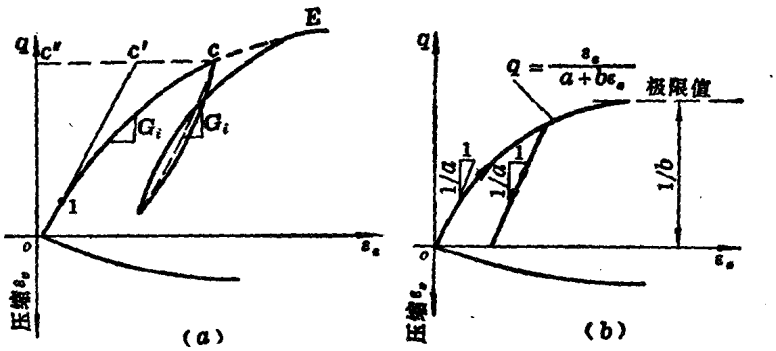


图 1-4　正常固结粘土的q-ε_a曲线

$q=\sigma_1-\sigma_3$＝偏差应力或剪应力，ε_a＝轴向应变。加荷时体积发生收缩。卸荷和重复加荷曲线或回弹曲线的坡度，与加荷曲线的起始坡度相等。应变从开始起即可分为可回复的弹性应变与代表永久变形的塑性应变两部分。这种类型的曲线称为加工硬化曲线。

超固结粘土和密实砂所得的试验曲线，如图1-5所示，加荷曲线是有驼峰的曲线[6]，可用下式表示：

$$q=\frac{\varepsilon_a(a+c\varepsilon_a)}{(a+b\varepsilon_a)^2} \qquad (1\text{-}26)$$

式中 a、b、c——试验常数。

加荷时体积最初略收缩以后，即大量膨胀。剪力或偏差应力q，超过峰值后即急剧下降，曲线的坡度变成负值，直至剪力落至一极限值，这代表土的剩余强度。这种应力-应变曲线类型，称为**加工软化**类型曲线。

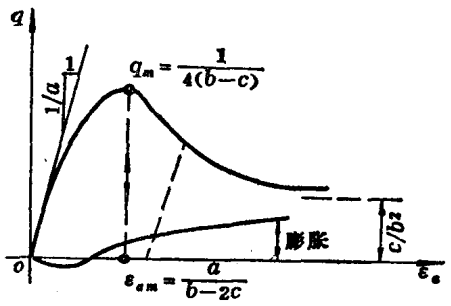


图 1-5 超固结粘土的q-ε_a曲线

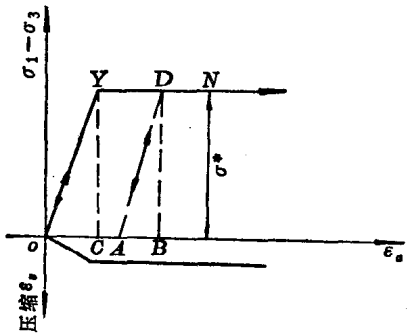


图 1-6 理想材料的应力-应变曲线

在经典的弹性理论和塑性理论中，对于材料的应力-应变关系曲线，通常假定如图1-6所示。OY代表弹性阶段的应力-应变关系，这种关系是线性的。图中的Y点称屈服点，与此点相应的应力σ^*，称为屈服应力。过了Y点后，应力-应变关系是一根水平线YN，这根水平线代表塑性阶段。在这阶段，应力不能增大，而变形却渐增，并且从到达Y点时起所产生的变形，都是不可回复的永久变形或塑性变形。如果应力降低，则卸荷曲线（如DA）的坡度将和OY线的坡度相等；重复加荷也将沿着这根曲线回到原处。在塑性阶段，材料的体积将不变，即泊桑比等于$\frac{1}{2}$。这一切现象和图1-4图1-5的两种弹塑性材料，即加工硬化与加工软化材料相比，差别是非常大的，因此，不能仅靠经典的弹塑性理论来准确解决土的应力-应变关系问题。

土不是一种各向同性材料，不但应力水平影响它的性能，其受力过程亦即所谓**应力路线**，也影响它的应力-应变关系。因此，要选择一种数学模型来全面地、正确地反映这些复杂关系的所有特点，是非常困难的。并且即使找到了这种模型，也将因为它太复杂难于在各种土工建筑和地基性能的分析研究中去应用。因此，研究的方向应该针对特殊的土料、特殊的工程对象和问题的特点，去找简单而能说明最主要问题的数学模型。要做到这一点是非常不容易的。下面介绍的增量弹塑性理论，将为我们根据少量在简单应力状态下获得的试验资料，去选择适当的能代表土的应力-应变特性主要特点的数学模型，提供一些理论基础。

三、特种试验方法

前面只提到了几种最普通的土工试验。利用常规三轴仪还可进行伸长试验，即$\sigma_1=\sigma_2>\sigma_3$试验；以及$\sigma_2$不变、$\sigma_r$逐步改小的试验；各种不排水试验。另外，也可以用直剪仪、

单向固结仪、扭转试验仪、平面应变试验仪（$\varepsilon_2=0$）、真三轴试验仪（$\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$）等进行试验。这些资料，可以直接作为建立数学模型的依据，也可以用来验证或修正根据常规三轴试验结果选定的数学模型的可靠性。土的应力-应变关系是非常复杂的，常规的三轴压缩（$\sigma_2=\sigma_3$）试验，不能充分反映土的应力-应变特性。因此，建立一些真三轴试验仪、平面应变试验仪、扭转试验仪等等新试验设备是必要的。另外，还有一些重要问题，如主应力轴转向、流变、各向异性等影响，都需要深入研究。

土的强度和破坏条件，可以通过前述几种常规试验来测定。过去土力学工作者对这方面积累的经验较多，因此，本章对此未加详细讨论。

第三节 增量弹塑性理论

一、弹性增量理论[7、25]

对于各向同性的纯弹性材料，通常可以通过简单拉伸或简单压缩试验决定其两个独立的弹性常数，即弹性模量E与泊桑比ν

$$\sigma_x=E\varepsilon_x \tag{1-27}$$

$$\varepsilon_y=\varepsilon_z=(-)\nu\varepsilon_x \tag{1-28}$$

式（1-27）所代表的简单拉伸（或压缩）的应力-应变关系式，称为虎克定律。

根据式（1-27）所代表的简单试验结果，引伸到复合应力状态下的应力-应变关系去，主要是应用广义的虎克定律。这就是：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)]\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}[\sigma_y-\nu(\sigma_z+\sigma_x)]\\ \varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)]\end{aligned}\right\} \tag{1-29}$$

$$\nu_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy},\quad \nu_{yz}=\frac{1}{G}\tau_{yz},\quad \nu_{zx}=\frac{1}{G}\tau_{zx}$$

式中 G——**剪切模量**：

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1-30}$$

在弹性理论中还有一个常用的弹性常数，即**弹性体积模量**K：

$$K=\frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{1-31a}$$

在静水压力$p=\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z$作用下，应力$p$与体积应变$\varepsilon_v$之间存在着这样的关系，即：

$$p=K\varepsilon_v \tag{1-31b}$$

在研究某些土力学问题时，用K和G两个弹性常数替代E和ν，有时感到方便些。同时，K和G两值，也都可通过适当试验直接测定。E和ν值，也可利用下列公式，从K、G值反算：

$$E=\frac{9KG}{3K+G} \tag{1-32}$$

$$\nu=\frac{3K-2G}{2(3K+G)} \tag{1-33}$$

因为土的应力-应变关系不是线性的，即E和ν都不是常数，故通常假定广义虎克定律可以适用于应力增量与应变增量间，即：

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon_x&=\frac{1}{E}[\delta\sigma_x-\nu(\delta\sigma_y+\delta\sigma_z)]\\ \delta\varepsilon_y&=\frac{1}{E}[\delta\sigma_y-\nu(\delta\sigma_x+\delta\sigma_z)]\\ \delta\varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\delta\sigma_z-\nu(\delta\sigma_x+\delta\sigma_y)]\end{aligned}\right\} \tag{1-34}$$

$$\delta\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\delta\tau_{xy},\quad \delta\gamma_{yz}=\frac{1}{G}\delta\tau_{yz},\quad \delta\gamma_{zx}=\frac{1}{G}\delta\tau_{zx}$$

将上述写成关系式：

$$\begin{Bmatrix}\delta\sigma_x\\ \delta\sigma_y\\ \delta\sigma_z\\ \delta\tau_{xy}\\ \delta\tau_{yz}\\ \delta\tau_{zx}\end{Bmatrix}=[D]\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_x\\ \delta\varepsilon_y\\ \delta\varepsilon_z\\ \delta\gamma_{xy}\\ \delta\gamma_{yz}\\ \delta\gamma_{zx}\end{Bmatrix} \tag{1-35}$$

其中$[D]$称为弹性矩阵

$$[D]=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & \text{对} & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & \text{称} & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\end{bmatrix} \tag{1-36a}$$

或

$$[D]=\begin{bmatrix}K+\frac{4}{3}G & & & & & \\ K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & & \text{对} & \text{称} & \\ K-\frac{2}{3}G & K-\frac{2}{3}G & K+\frac{4}{3}G & & & \\ 0 & 0 & 0 & G & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G\end{bmatrix} \tag{1-36b}$$

或将应力-应变关系写成张量公式：

$$\delta\sigma_{ij}=D_{ijkl}\delta\varepsilon_{ij} \qquad (1\text{-}37)$$

D_{ijkl}称为**弹性张量**

利用式（1-35）、（1-36）以及有限单元法的增量法所作的土工建筑物和地基的应力与变形分析，称为**非线性弹性分析**。把这种分析方法用于土料的最大缺点，是不能适当地考虑土的剪胀性和应力路线等影响。十多年来，这种方法曾广泛地用于土坝、填挖方、闸基等工程分析，但其结果的可靠程度，还难于肯定。

二、塑性增量理论[1、21]

塑性增量理论假定土的应变分为可回复的弹性应变ε_{ij}^{e}和造成永久变形的塑性应变ε_{ij}^{p}两部分。这两部分的总和就是总应变ε_{ij}，即：

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{e}+\varepsilon_{ij}^{p} \qquad (1\text{-}38)$$

弹性应变增量$\delta\varepsilon_{ij}^{e}$可用式（1-35）和（1-36）计算，其中$E$和$\nu$应该采用卸荷与重新加荷应力-应变曲线部分的$E$、$\nu$值。

塑性应变增量$\delta\varepsilon_{ij}^{p}$，可以根据本章所介绍的塑性应变增量理论去计算。这个理论包括三个部分：（一）关于屈服面理论(Theory of yield surface)；（二）关于流动规则理论（Theory of flow rule)；（三）关于加工硬化（或软化）定律理论（Theory of strain-hardening law）。现分别叙述之。此外，本节之（四），将推导一个可用于弹塑性应力应变分析的**弹塑性模量矩阵**$[D]_{ep}$，这个矩阵实际上代表弹塑性材料的最普遍的应力-应变关系。

（一）屈服面与破坏面

通过种种不同应力组合的材料强度试验，可以求得材料的破坏条件。对于各向同性材料，这种破坏条件可以写成三个应力不变量I_1，I_2，I_3或I_1，J_2，J_3的函数，例如

$$f^{*}(I_1,J_2,J_3)=k_f \qquad (1\text{-}39)$$

或

$$f^{*}(\sigma_{ij},k_f)=0$$

式中 k_f——经验常数。

如果将这个条件画在以主应力σ_1、σ_2、σ_3为三个座标轴的主应力空间，就可以得到一个面，这个面称为破坏面。

对于金属材料，最古老和通用的破坏条件是特莱斯卡（Tresca）条件和密色斯（von Mises）条件。特莱斯卡条件是，如$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$，则：

$$f^{*}=\sigma_1-\sigma_3=k_f \qquad (1\text{-}40)$$

k_f是一个试验常数，写成不变量函数为：

$$4J_2^3-27J_3^2-36k_f^2J_2^2+96k_f^4J_2-64k_f^6=0 \qquad (1\text{-}41)$$

如将这个条件画在主应力空间，就形成一个六边形的柱，柱的轴与空间对角线重合。这个柱的面就是特莱斯卡破坏面。

密色斯条件是：

$$J_2=k_f^2 \qquad (1\text{-}42)$$

或
$$f^*=(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=6k_f^2 \tag{1-43}$$

它所代表的破坏面是一个以空间对角线为轴的圆桶的面。

如果把式（1-40）和（1-42）中的常数k_f写成$I_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$的函数，就得到所谓广义的特莱斯卡与密色斯条件。人们因为土的破坏条件与主应力之和I_1有很大关系，因此，想这样修改特莱斯卡与密色斯条件，以便用到土上去。但是根据研究结果，土的破坏条件还是用通用的摩尔-库伦（Mohr-Coulomb）条件比较合适。

摩尔-库伦条件为[8]：

$$\left.\begin{aligned}\tau&=c+\sigma_n\tan\phi\\ \text{或}\quad \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}&=c\cos\phi+\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\sin\phi\end{aligned}\right\} \tag{1-44}$$

式中 c——凝聚力；

ϕ——内摩擦角；

σ_n——剪切面上的法向应力。

式（1-44）可写成：

$$\frac{1}{3}I_1\sin\phi+\left(\cos\alpha-\frac{\sin\alpha\sin\phi}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{J_2}-c\cos\phi=0 \tag{1-45}$$

式中
$$\alpha=\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right) \tag{1-46}$$

因为式（1-45）不便使用，故特洛克-普拉格（Drucker-Prager）建议采用下列运用较方便的公式，以代式（1-45），即：

$$f^*=\beta I_1+\sqrt{J_2}=k_f \tag{1-47}$$

式中
$$\beta=\frac{\sqrt{3}\sin\phi}{3\sqrt{3+\sin^2\phi}} \tag{1-48}$$

$$k_f=\frac{\sqrt{3}c\cos\phi}{\sqrt{3+\sin^2\phi}} \tag{1-49}$$

上面所述的广义特莱斯卡条件所代表的破坏面，是一个六边形锥体；广义密色斯条件所代表的破坏面，是一个圆锥；摩尔-库伦条件所代表的，是一个不等角的六边形锥体；特洛克-普拉格条件代表的，是摩尔-库伦六边形锥体的内切圆锥。上述这些锥体的主轴，都是与空间对角线重合的。如果将这些锥体与八面体的π平面相交的曲线画出来，则所得图形将如图1-7所示。

对于理想简单塑性材料，当应力的组合，使材料达到屈服状态时，就可以认为是破坏了。因此屈服条件和破坏条件是相同的，屈服面也是与破坏面重合的，并且同是一个固定的面。

对于加工硬化材料，屈服应力是随着荷载的提高与变形的增大而提高的。因此，屈服面不同于材料的破坏面，它不是

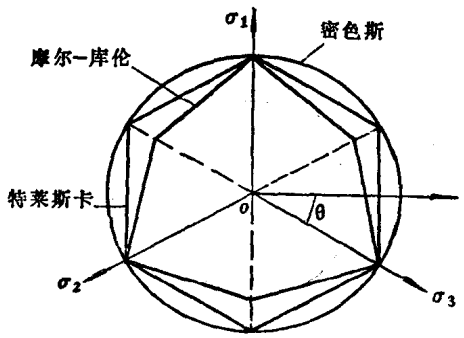


图 1-7 各种破坏条件

一种固定的面。当某种材料中的应力状态处于某一个屈服面上时，如果因加荷使它发生了超越这个屈服面的应力变化，就会在材料中同时引起新的弹性与塑性应变。塑性应变的变化，将促成一个新的屈服面的产生。如果荷载所引起的应力变化只是发生在屈服面所包围的范围内，那就只产生弹性应变，原来的屈服面也将依旧保持不变。加荷可以使屈服面膨胀、移动或改变形式。这些大小、位置和形式的改变，取决于材料的应力历史（亦即应力路线）与应力水平。屈服面的这些变化，称为加工硬化（或软化）。如果相继的屈服面只是大小不同，则这种硬化就称为**等向硬化**（Isotropic hardening）。如果相继的屈服面大小及形式不变，只是位置发生移动而不转动，则这种硬化就称**运动硬化**（Kinematic hardening）。

屈服面的一种普遍数学表达式为：

$$f(I_1,\ J_2,\ J_3,\ H)=0$$

或

$$f(\sigma_{ij},\ H)=0 \qquad (1\text{-}50)$$

其中H代表**硬化参数**（Hardening parameter），H可以是塑性能W_p，即：

$$H=W_p=\int \sigma_{ij}\delta\varepsilon^p_{ij}$$

也可以是某种塑性应变量，这将在下文详述。对于屈服面的形式，有人假定它们与材料的破坏面相似。前已述及，土料的破坏面是一种锥体，因此，他们就设想当加工硬化时，锥体的直径就逐渐加大，并以破坏面为其极限（图1-8）。由于这种假定导致与事实不符的结果，因此对屈服面的形式，学者们常根据不同土料的不同试验结果，作种种不同的假定。对于不同形式屈服面的假定，用这门学科的现代化术语来说，就是采取不同模型。目前最常用的模型是**帽子模型**（Cap model）。这种模型是假定代表破坏面的锥体不变，但在锥上加一帽子，这个逐步向外扩展的帽子，代表加工硬化的屈服面（图1-9）。帽子模型的一个优点是，可以照顾到材料在静水压力作用下能产生塑性体积应变这一事实，而锥体模型则不能。例如，模型也可以采取这样的形式：一个戴帽的柱在代表破坏面的锥体内不断膨胀。总之，哪一种模型最合适，取决于根据模型计算所得的结果与测验结果的比较。

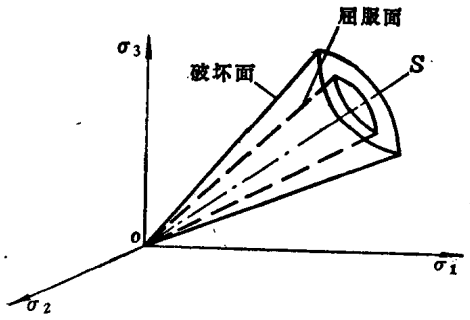


图 1-8 无帽模型

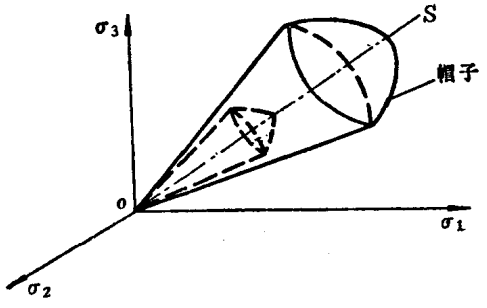


图 1-9 帽子模型

在研究土的应力-应变关系时，通常采用$\sigma_2=\sigma_3$的常规三轴压缩仪。利用这种试验资料来探讨土的应力-应变关系，等于忽视了中间主应力的影响，也等于假定劳台系数θ没有影响，屈服面可以用画在八面体应力$p-q$平面上的屈服轨迹来替代。这种屈服轨迹的数

学表达式为：

$$f(p,\ q,\ H)=0 \tag{1-51}$$

式中

$$p=\frac{1}{3}(\sigma_1+2\sigma_3) \tag{1-52}$$

$$q=\sigma_1-\sigma_3 \tag{1-53}$$

同样，破坏条件也可以写成：

$$f^*(p,\ q)=k_f \tag{1-54}$$

利用式（1-51）和（1-54），并将它们画在$p-q$平面图上，那末，破坏条件或屈服条件就都可以用一根线来表示。这种线可称为**屈服轨迹或破坏线**。

例如，特莱斯卡与密色斯条件，可用图1-10中水平线①表示，广义特莱斯卡与密色斯条件，可用斜线②表示。摩尔-库伦与特洛克-普拉格条件，可用斜线③表示。图中那些虚线，可以用来表示加工硬化过程中的屈服轨迹。图1-11中那些象椭圆形的曲线，代表帽子模型中那些屈服轨迹。

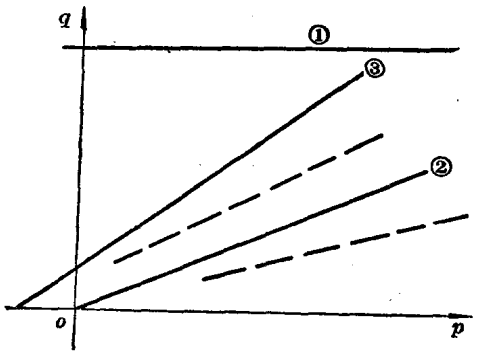


图 1-10　无帽屈服线

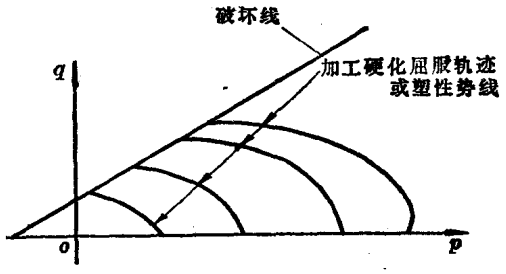


图 1-11　带帽子的屈服线

屈服轨迹的函数f，可以用下列方法探求。从常规三轴压缩试验所得的一组曲线上，可以选取一些适当的点。根据试验资料，可以估算各点相应的H值（例如W_p值）。将各点绘在平面上，每点旁标出该点的H值，如图1-12。连接相等的H值各点，就能得到：

$$f(p,\ q,\ H_i)=0$$

$$i=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots$$

各屈服轨迹，如图1-12所示。

通过上述说明可见，在屈服条件中所选的硬化参数H，如果不是等于W_p，而是等于其它塑性变形量，也就是说如果硬化规律假定不同，则所得的f函数也将不同。这说明屈服面、屈服轨迹或屈服条件，是随所选用的硬化规律而异的，它们并没有一定的形式。

过去有些学者，为了使理论结果与实

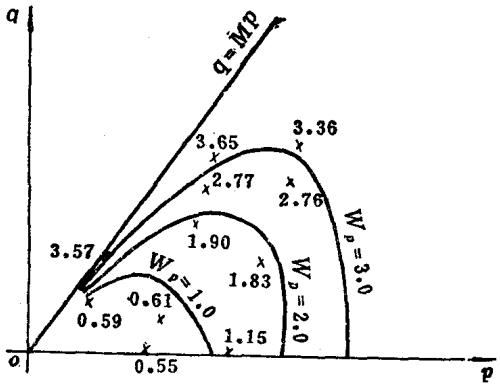


图 1-12　屈服轨迹

测结果相符合，曾假定通过应力空间中任何一点M的屈服面可以有两个，即：

$$\left.\begin{aligned} f_1(\sigma_{ij},\ H_1)&=0\\ \text{及}\qquad f_2(\sigma_{ij},\ H_2)&=0\end{aligned}\right\} \tag{1-55}$$

M点就在这两个屈服面相交的一根脊线上。同样，在$p-q$平面上（图1-13）通过M点就有两道屈服轨迹①与②，它们的数学表达式为：

$$\left.\begin{aligned} f_1(p,\ q,\ H_1)&=0\\ f_2(p,\ q,\ H_2)&=0\end{aligned}\right\} \tag{1-56}$$

这两道轨迹相交于M点，使M点成为一个角点，如图1-13所示。过去象罗斯柯与布尔兰特（Roscoe与Burland）[16]，普里伏斯特与贺格（Prevost与Hoeg）[6]及赖特(Lade)[28]等人，都曾作过此种尝试。

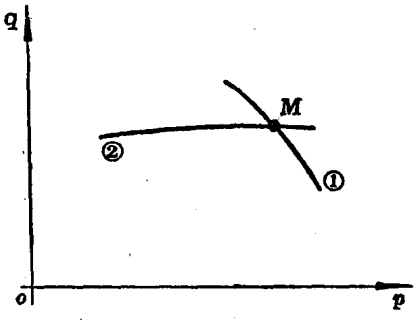


图 1-13　两个屈服面相交的脊线

（二）流动规则

流动规则也称正交定律，是确定塑性应变增量各分量间的相互关系，也即塑性应变增量方向的一条规定。它假定经过应力空间中任何一点M，必有一塑性势面

$$g(I_1,\ J_2,\ J_3,\ H)=0$$

或

$$g(\sigma_{ij},\ H)=0 \tag{1-57}$$

这个面在$p-q$平面上将成为一根塑性势线

$$g(p,\ q,\ H)=0 \tag{1-58}$$

流动规则规定，上述任意点M处的塑性应变增量与该点处的应力存在着下列正交关系，即：

$$\delta\varepsilon^p_{ij}=d\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} \tag{1-59}$$

如果采用p、q以代σ_{ij}，则上述正交关系可写成（见附录3）：

$$\left.\begin{aligned} \delta\varepsilon^p_v&=d\lambda\frac{\partial g}{\partial p}\\ \delta\bar{\varepsilon}^p&=d\lambda\frac{\partial g}{\partial q}\end{aligned}\right\} \tag{1-60}$$

其中$d\lambda$是一个确定塑性应变增量大小的函数，将在下节讨论其意义和确定方法。

塑性体积应变增量：

$$\delta\varepsilon^p_v=\delta\varepsilon^p_{ii} \tag{1-61}$$

塑性剪切应变增量：

$$\delta\bar{\varepsilon}^p=\left(\frac{2}{3}\delta e^p_{ij}\delta e^p_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1-62}$$

$$\delta e^p_{ij}=\delta\varepsilon^p_{ij}-\delta_{ij}\left(\frac{\delta\varepsilon^p_v}{3}\right)$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

在应力空间任何一点M处的塑性势，也可假定包含两个部分，即：

$$\left.\begin{aligned} &g_1(\sigma_{ij},\ H_1)=0\text{及}g_2(\sigma_{ij},\ H_2)=0 \\ \text{或}\quad &g_1(p,\ q,\ H_1)=0\text{及}g_2(p,\ q,\ H_2)=0 \end{aligned}\right\} \tag{1-63}$$

这样，M就成为一个角点了。在这点处的塑性应变增量为：

$$\left.\begin{aligned} \delta\varepsilon^p_{ij}&=d\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial\sigma_{ij}}+d\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial\sigma_{ij}} \\ \text{或}\quad \delta\varepsilon^p_v&=d\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial p}+d\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial p} \\ \delta\bar{\varepsilon}^p&=d\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial q}+d\lambda_2\frac{\partial g_2}{\partial q} \end{aligned}\right\} \tag{1-64}$$

M点处的塑性应变增量的方向将界乎g_1面的法线与g_2面的法线之间，如图1-14所示。

塑性势面g，也可以从常规三轴试验结果来探求。找出试验曲线上任何一点$M(p,\ q)$处的塑性应变增量方向后，可以在$p-q$平面图上（图1-15）M点处画一箭头，代表此方向。在此图上，可假定ε^p_v轴与$\bar{\varepsilon}^p$轴分别与p轴和q轴重合。经过这些小箭头，可以试画出连接它们的一组流线来，如图1-15虚线所示。与这组流线相垂直的一组实线，就是塑性势线。

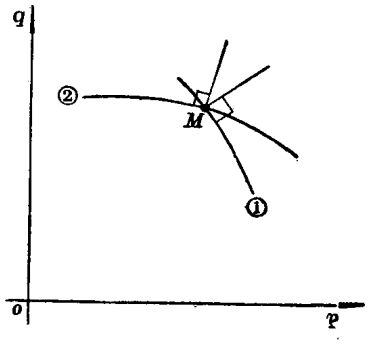


图 1-14　脊线上的塑性应变增量的方向

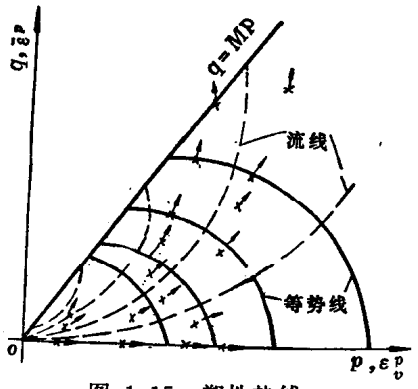


图 1-15　塑性势线

如果这组塑性势线与上节的屈服轨迹相重合，即如果$g=f$，则这个流动规则就称为相适应的流动规则。如果$g\neq f$，则称为不相适应的流动规则。

由于屈服条件f这个函数是随着硬化参数H的选择不同而异的，因此，如果H选择适当，就有可能使$f=g$。倘能做到这点，也就使流动规则变为相适应的流动规则，并且也就可将f唯一地确定了。

（三）加工硬化规律

加工硬化规律是决定一个给定的应力增量引起的塑性应变增量的一条准则。在流动规则中，$d\lambda$这个因素可以假定为：

$$d\lambda=\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}=(-)\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial H}dH \tag{1-65}$$

式中　f——屈服条件函数；

A——硬化参数H的函数。

不同的学者曾建议用不同的硬化规律来计算A的数值。常用的硬化规律有下列几种：

1.W_p硬化规律假定[1、19、28]

$$H=W_p$$

其中塑性能

$$W_p=\int \sigma_{ij}\delta\varepsilon^p_{ij}$$

因

$$\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}=(-)\frac{\partial f}{\partial H}\delta H$$

故从流动规则得：

$$\delta\varepsilon^p_{ij}=\frac{(-)1}{A}\ \frac{\partial f}{\partial W_p}\delta W_p\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}$$

左右各乘σ_{ij}，得：

$$\sigma_{ij}\delta\varepsilon^p_{ij}=\frac{-1}{A}\ \frac{\partial f}{\partial W_p}\ \delta W_p\sigma_{ij}\ \frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}$$

因

$$dW_p=\sigma_{ij}\delta\varepsilon^p_{ij}$$

$$\therefore A=(-1)\frac{\partial f}{\partial W_p}\sigma_{ij}\ \frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (1\text{-}66)$$

如果g为n阶齐次函数，则根据欧拉齐次函数定理：

$$\sigma_{ij}\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}=ng$$

$$\therefore A=(-)ng\ \frac{\partial f}{\partial W_p} \qquad (1\text{-}67)$$

2.ε^p硬化规律假定

$$H=\varepsilon^p$$

其中

$$\varepsilon^p=\int\delta\varepsilon^p=\int\sqrt{\delta\varepsilon^p_{ij}\cdot\delta\varepsilon^p_{ij}} \qquad (1\text{-}68)$$

利用上节同样推导方法可求得：

$$A=(-)\frac{\partial f}{\partial\varepsilon^p}\sqrt{\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}\ \frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}} \qquad (1\text{-}69)$$

3.ε^p_{ij}硬化规律假定

$$H=H(\varepsilon^p_{ij})$$

$$Ad\lambda=\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}=(-)\frac{\partial f}{\partial H}\delta H \qquad (1\text{-}70a)$$

$$\delta H=\frac{\partial H}{\partial\varepsilon^p_{ij}}\delta\varepsilon^p_{ij}=\frac{\partial H}{\partial\varepsilon^p_{ij}}\cdot d\lambda\ \frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (1\text{-}70b)$$

将式（1-70b）代入式（1-70a）可得：

$$A=(-1)\frac{\partial f}{\partial H}\cdot\frac{\partial H}{\partial\sigma_{ij}}\cdot\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (1\text{-}70c)$$

4.（ε^p_v，$\bar{\varepsilon}^p$）硬化规律假定[6]

$$H=H(\varepsilon^p_v,\ \bar{\varepsilon}^p)$$

利用第一节方法可推得：

$$A=(-1)\frac{\partial f}{\partial H}\left[\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_v^p}\ \frac{\partial g}{\partial p}+\frac{\partial H}{\partial \bar{\varepsilon}^p}\ \frac{\partial g}{\partial q}\right] \qquad (1\text{-}71)$$

（四）弹塑性模量矩阵$[D]_{ep}$[30]

总应变增量$\{\delta\varepsilon\}$是弹性应变增量$\{\delta\varepsilon^e\}$与塑性应变增量$\{\delta\varepsilon^p\}$之和，即：

$$\{\delta\varepsilon\}=\{\delta\varepsilon^e\}+\{\delta\varepsilon^p\} \qquad (1\text{-}72)$$

故
$$\{\delta\varepsilon\}=[D]^{-1}\{\delta\sigma\}+d\lambda\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}$$

或
$$[D]\{\delta\varepsilon\}=\{\delta\sigma\}+d\lambda[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\} \qquad (1\text{-}72a)$$

因
$$\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\{\delta\sigma\}=(-1)\frac{\partial f}{\partial H}dH$$

又
$$Ad\lambda=(-1)\frac{\partial f}{\partial H}dH$$

$$\therefore\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T\{\delta\sigma\}-Ad\lambda=0 \qquad (1\text{-}72b)$$

解式（1-72a和b）两联立方程的$d\lambda$及$\{\delta\sigma\}$可得：

$$\{\delta\sigma\}=[D]_{ep}\{\delta\varepsilon\}$$

或
$$\begin{Bmatrix}\delta\sigma_x\\ \delta\sigma_y\\ \delta\sigma_z\\ \delta\tau_{xy}\\ \delta\tau_{yz}\\ \delta\tau_{zx}\end{Bmatrix}=[D]_{ep}\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_x\\ \delta\varepsilon_y\\ \delta\varepsilon_z\\ \delta\gamma_{xy}\\ \delta\gamma_{yz}\\ \delta\gamma_{zx}\end{Bmatrix} \qquad (1\text{-}73)$$

其中弹塑性模量矩阵$[D]_{ep}$为（附录4）：

$$[D]_{ep}=[D]-\frac{[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]}{A+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}} \qquad (1\text{-}74)$$

这个方程经演算可写成：

$$[D]_{ep}=[D]-\frac{G[X]}{\frac{A}{G}+\Phi} \qquad (1\text{-}75)$$

令G＝弹性剪切模量；

K＝弹性体积模量；

则：
$$\left.\begin{aligned}\alpha&=K/G+4/3\\ \beta&=K/G-2/3\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}76)$$

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha\frac{\partial g}{\partial \sigma_x}+\beta\frac{\partial g}{\partial \sigma_y}+\beta\frac{\partial g}{\partial \sigma_z}\\
\alpha_2 &= \beta\frac{\partial g}{\partial \sigma_x}+\alpha\frac{\partial g}{\partial \sigma_y}+\beta\frac{\partial g}{\partial \sigma_z}\\
\alpha_3 &= \beta\frac{\partial g}{\partial \sigma_x}+\beta\frac{\partial g}{\partial \sigma_y}+\alpha\frac{\partial g}{\partial \sigma_z}\\
\alpha_4 &= \frac{\partial g}{\partial \tau_{xy}}\\
\alpha_5 &= \frac{\partial g}{\partial \tau_{yz}}\\
\alpha_6 &= \frac{\partial g}{\partial \tau_{zx}}
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}77)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}+\beta\frac{\partial f}{\partial \sigma_y}+\beta\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}\\
\lambda_2 &= \beta\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}+\alpha\frac{\partial f}{\partial \sigma_y}+\beta\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}\\
\lambda_3 &= \beta\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}+\beta\frac{\partial f}{\partial \sigma_y}+\alpha\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}\\
\lambda_4 &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}\\
\lambda_5 &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\\
\lambda_6 &= \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}}
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}78)
$$

即可得：

1．三向情况

三向情况的弹塑性应力-应变关系，即式（1-75）中的$[D]$、Φ和$[X]$分别为：

$$
[D]=G\begin{bmatrix}
\alpha & & & & & \\
\beta & \alpha & & \text{对} & & \\
\beta & \beta & \alpha & & & \text{称} \\
0 & 0 & 0 & 1 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} \qquad (1\text{-}79)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi &= \alpha_1\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial \sigma_y}+\alpha_3\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}+\alpha_4\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}\\
&\quad +\alpha_5\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}+\alpha_6\frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}}
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}80)
$$

或

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi &= \lambda_1\frac{\partial g}{\partial \sigma_x}+\lambda_2\frac{\partial g}{\partial \sigma_y}+\lambda_3\frac{\partial g}{\partial \sigma_z}+\lambda_4\frac{\partial g}{\partial \tau_{xy}}\\
&\quad +\lambda_5\frac{\partial g}{\partial \tau_{yz}}+\lambda_6\frac{\partial g}{\partial \tau_{zx}}
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}80)
$$

$$[X]=\begin{bmatrix}\alpha_1\lambda_1 & \alpha_1\lambda_2 & \alpha_1\lambda_3 & \alpha_1\lambda_4 & \alpha_1\lambda_5 & \alpha_1\lambda_6\\ \alpha_2\lambda_1 & \alpha_2\lambda_2 & \alpha_2\lambda_3 & \alpha_2\lambda_4 & \alpha_2\lambda_5 & \alpha_2\lambda_6\\ \alpha_3\lambda_1 & \alpha_3\lambda_2 & \alpha_3\lambda_3 & \alpha_3\lambda_4 & \alpha_3\lambda_5 & \alpha_3\lambda_6\\ \alpha_4\lambda_1 & \alpha_4\lambda_2 & \alpha_4\lambda_3 & \alpha_4\lambda_4 & \alpha_4\lambda_5 & \alpha_4\lambda_6\\ \alpha_5\lambda_1 & \alpha_5\lambda_2 & \alpha_5\lambda_3 & \alpha_5\lambda_4 & \alpha_5\lambda_5 & \alpha_5\lambda_6\\ \alpha_6\lambda_1 & \alpha_6\lambda_2 & \alpha_6\lambda_3 & \alpha_6\lambda_4 & \alpha_6\lambda_5 & \alpha_6\lambda_6\end{bmatrix} \tag{1-81}$$

2.平面应变情况

平面应变情况的$[D]$、Φ和$[X]$，可从式（1-73）中假定$\delta\varepsilon_z=0$，$\delta\gamma_{yz}=0$，$\delta\gamma_{zx}=0$后推导得如下结果（见附录4）：

$$[D]=G\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 0\\ \beta & \alpha & 0\\ \beta & \beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1-82}$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi&=\alpha_1\frac{\partial f}{\partial\sigma_x}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial\sigma_y}+\alpha_3\frac{\partial f}{\partial\sigma_z}+\alpha_4\frac{\partial f}{\partial\tau_{xy}}\\ &=\lambda_1\frac{\partial g}{\partial\sigma_x}+\lambda_2\frac{\partial g}{\partial\sigma_y}+\lambda_3\frac{\partial g}{\partial\sigma_z}+\lambda_4\frac{\partial g}{\partial\tau_{xy}}\end{aligned}\right\} \tag{1-83}$$

$$[X]=\begin{bmatrix}\alpha_1\lambda_1 & \alpha_1\lambda_2 & \alpha_1\lambda_4\\ \alpha_2\lambda_1 & \alpha_2\lambda_2 & \alpha_2\lambda_4\\ \alpha_3\lambda_1 & \alpha_3\lambda_2 & \alpha_3\lambda_4\\ \alpha_4\lambda_1 & \alpha_4\lambda_2 & \alpha_4\lambda_4\end{bmatrix} \tag{1-84}$$

3.轴对称情况

轴对称情况的$[D]$、Φ和$[X]$，可假定$\delta\gamma_{\theta z}=\delta\gamma_{yz}=0$，$\delta\gamma_{r\theta}=\delta\gamma_{zx}=0$，然后从式（1-22）推导得如下结果（见附录4）：

$$[D]=G\begin{bmatrix}\alpha & & \text{对} & \\ \beta & \alpha & & \text{称}\\ \beta & \beta & \alpha & \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1-85}$$

$$\left.\begin{aligned}\Phi&=\alpha_1\frac{\partial f}{\partial\sigma_r}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial\sigma_\theta}+\alpha_3\frac{\partial f}{\partial\sigma_z}+\alpha_4\frac{\partial f}{\partial\tau_{rz}}\\ &=\lambda_1\frac{\partial g}{\partial\sigma_r}+\lambda_2\frac{\partial g}{\partial\sigma_\theta}+\lambda_3\frac{\partial g}{\partial\sigma_z}+\lambda_4\frac{\partial g}{\partial\tau_{rz}}\end{aligned}\right\} \tag{1-86}$$

$$[X]=\begin{bmatrix}\alpha_1\lambda_1 & \alpha_1\lambda_2 & \alpha_1\lambda_3 & \alpha_1\lambda_4\\ \alpha_2\lambda_1 & \alpha_2\lambda_2 & \alpha_2\lambda_3 & \alpha_2\lambda_4\\ \alpha_3\lambda_1 & \alpha_3\lambda_2 & \alpha_3\lambda_3 & \alpha_3\lambda_4\\ \alpha_4\lambda_1 & \alpha_4\lambda_2 & \alpha_4\lambda_3 & \alpha_4\lambda_4\end{bmatrix} \tag{1-87}$$

（五）角点的弹塑性模量矩阵$[D]_{ep}$[30]

角点的塑性应变增量包括两个部分，即：

$$\{\delta\varepsilon^p\}=d\lambda_1\left\{\frac{\partial g_1}{\partial\sigma}\right\}+d\lambda_2\left\{\frac{\partial g_2}{\partial\sigma}\right\}$$

故总应变增量为：

$$\{\delta\varepsilon\}=[D]^{-1}\{\delta\sigma\}+d\lambda_1\left\{\frac{\partial g_1}{\partial\sigma}\right\}+d\lambda_2\left\{\frac{\partial g_2}{\partial\sigma}\right\}$$

因

$$\left\{\frac{\partial f_1}{\partial g}\right\}^T\{\delta\sigma\}=(-1)\frac{\partial f_1}{\partial H_1}dH_1$$

$$\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T\{\delta\sigma\}=(-1)\frac{\partial f_2}{\partial H_2}dH_2$$

从上述三式可得：

$$\{\delta\sigma\}=[D]\{\delta\varepsilon\}-d\lambda_1[D]\left\{\frac{\partial g_1}{\partial\sigma}\right\}-d\lambda_2[D]\left\{\frac{\partial g_2}{\partial\sigma}\right\}$$

$$d\lambda_1=\frac{1}{A_1}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}^T\{\delta\sigma\}=\frac{(-1)}{A_1}\frac{\partial f_1}{\partial H_1}dH_1$$

$$d\lambda_2=\frac{1}{A_2}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}^T\{\delta\sigma\}=\frac{(-1)}{A_2}\frac{\partial f_2}{\partial H_2}dH_2$$

解这三个联立方程式中的$d\lambda_1$、$d\lambda_2$和$\{\delta\sigma\}$，最后可得：

$$\{\delta\sigma\}=[D]_{ep}\{\delta\varepsilon\}$$

式中

$$[D]_{ep}=[D]-\frac{G[X]}{B_1B_2-\Phi_{f_1g_2}\Phi_{f_2g_1}}\qquad(1\text{-}88)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}B_1&=\frac{A_1}{G}+\Phi_{f_1g_1}\\B_2&=\frac{A_2}{G}+\Phi_{f_2g_2}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}89)$$

$$[X]=B_2[X_{f_1g_1}]+B_1[X_{f_2g_2}]-\Phi_{f_1g_2}[X_{f_2g_1}]-\Phi_{f_2g_1}[X_{f_1g_2}]\qquad(1\text{-}90)$$

令

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{j1}&=\alpha\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_x}+\beta\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_y}+\beta\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_z}\\\alpha_{j2}&=\beta\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_x}+\alpha\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_y}+\beta\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_z}\\\alpha_{j3}&=\beta\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_x}+\beta\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_y}+\alpha\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_z}\\\alpha_{j4}&=\frac{\partial g_j}{\partial\tau_{xy}}\\\alpha_{j5}&=\frac{\partial g_j}{\partial\tau_{yz}}\\\alpha_{j6}&=\frac{\partial g_j}{\partial\tau_{zx}}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}91)$$

$$\lambda_{i1}=\alpha\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_x}+\beta\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_y}+\beta\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_z}$$

$$\lambda_{i2}=\beta\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_x}+\alpha\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_y}+\beta\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_z}$$

$$\lambda_{i3}=\beta\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_x}+\beta\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_y}+\alpha\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_z}$$

$$\lambda_{i4}=\frac{\partial f_i}{\partial\tau_{xy}}$$

$$\lambda_{i5}=\frac{\partial f_i}{\partial\tau_{yz}}$$

$$\lambda_{i6}=\frac{\partial f_i}{\partial\tau_{zx}} \tag{1-92}$$

可得：

1.三向情况

$$\begin{aligned}\Phi_{f_ig_j}&=\alpha_{j1}\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_x}+\alpha_{j2}\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_y}+\alpha_{j3}\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_z}\\&\quad+\alpha_{j4}\frac{\partial f_i}{\partial\tau_{xy}}+\alpha_{j5}\frac{\partial f_i}{\partial\tau_{yz}}+\alpha_{j6}\frac{\partial f_i}{\partial\tau_{zx}}\\&=\lambda_{i1}\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_x}+\lambda_{i2}\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_y}+\lambda_{i3}\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_z}\\&\quad+\lambda_{i4}\frac{\partial g_j}{\partial\tau_{xy}}+\lambda_{i5}\frac{\partial g_j}{\partial\tau_{yz}}+\lambda_{i6}\frac{\partial g_j}{\partial\tau_{zx}}\\&=\Phi_{g_jf_i}\end{aligned} \tag{1-93}$$

$$[X_{f_ig_j}]=\begin{bmatrix}\alpha_{j1}\lambda_{i1}&\alpha_{j1}\lambda_{i2}&\alpha_{j1}\lambda_{i3}&\alpha_{j1}\lambda_{i4}&\alpha_{j1}\lambda_{i5}&\alpha_{j1}\lambda_{i6}\\\alpha_{j2}\lambda_{i1}&\alpha_{j2}\lambda_{i2}&\alpha_{j2}\lambda_{i3}&\alpha_{j2}\lambda_{i4}&\alpha_{j2}\lambda_{i5}&\alpha_{j2}\lambda_{i6}\\\alpha_{j3}\lambda_{i1}&\alpha_{j3}\lambda_{i2}&\alpha_{j3}\lambda_{i3}&\alpha_{j3}\lambda_{i4}&\alpha_{j3}\lambda_{i5}&\alpha_{j3}\lambda_{i6}\\\alpha_{j4}\lambda_{i1}&\alpha_{j4}\lambda_{i2}&\alpha_{j4}\lambda_{i3}&\alpha_{j4}\lambda_{i4}&\alpha_{j4}\lambda_{i5}&\alpha_{j4}\lambda_{i6}\\\alpha_{j5}\lambda_{i1}&\alpha_{j5}\lambda_{i2}&\alpha_{j5}\lambda_{i3}&\alpha_{j5}\lambda_{i4}&\alpha_{j5}\lambda_{i5}&\alpha_{j5}\lambda_{i6}\\\alpha_{j6}\lambda_{i1}&\alpha_{j6}\lambda_{i2}&\alpha_{j6}\lambda_{i3}&\alpha_{j6}\lambda_{i4}&\alpha_{j6}\lambda_{i5}&\alpha_{j6}\lambda_{i6}\end{bmatrix} \tag{1-94}$$

2.平面应变情况

$$\begin{aligned}\Phi_{f_ig_j}&=\alpha_{j1}\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_x}+\alpha_{j2}\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_y}+\alpha_{j3}\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_z}+\alpha_{j4}\frac{\partial f_i}{\partial\tau_{xy}}\\&=\lambda_{i1}\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_x}+\lambda_{i2}\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_y}+\lambda_{i3}\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_z}+\lambda_{i4}\frac{\partial g_j}{\partial\tau_{xy}}\\&=\Phi_{g_jf_i}\end{aligned} \tag{1-95}$$

$$[X_{f_ig_j}]=\begin{bmatrix}\alpha_{j1}\lambda_{i1}&\alpha_{j1}\lambda_{i2}&\alpha_{j1}\lambda_{i4}\\\alpha_{j2}\lambda_{i1}&\alpha_{j2}\lambda_{i2}&\alpha_{j2}\lambda_{i4}\\\alpha_{j3}\lambda_{i1}&\alpha_{j3}\lambda_{i2}&\alpha_{j3}\lambda_{i4}\\\alpha_{j4}\lambda_{i1}&\alpha_{j4}\lambda_{i2}&\alpha_{j4}\lambda_{i4}\end{bmatrix} \tag{1-96}$$

3.轴对称情况

$$\begin{aligned}\Phi_{f_ig_j}&=\alpha_{j1}\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_r}+\alpha_{j2}\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_\theta}+\alpha_{j3}\frac{\partial f_i}{\partial\sigma_z}+\alpha_{j4}\frac{\partial f_i}{\partial\tau_{rz}}\\&=\lambda_{i1}\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_r}+\lambda_{i2}\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_\theta}+\lambda_{i3}\frac{\partial g_j}{\partial\sigma_z}+\lambda_{i4}\frac{\partial g_j}{\partial\tau_{rz}}\\&=\Phi_{g_jf_i}\end{aligned} \tag{1-97}$$

$$[X_{f_i g_i}]=\begin{bmatrix} \alpha_{j1}\lambda_{i1} & \alpha_{j1}\lambda_{i2} & \alpha_{j1}\lambda_{i3} & \alpha_{j1}\lambda_{i4} \\ \alpha_{j2}\lambda_{i1} & \alpha_{j2}\lambda_{i2} & \alpha_{j2}\lambda_{i3} & \alpha_{j2}\lambda_{i4} \\ \alpha_{j3}\lambda_{i1} & \alpha_{j3}\lambda_{i2} & \alpha_{j3}\lambda_{i3} & \alpha_{j3}\lambda_{i4} \\ \alpha_{j4}\lambda_{i1} & \alpha_{j4}\lambda_{i2} & \alpha_{j4}\lambda_{i3} & \alpha_{j4}\lambda_{i4} \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}98)$$

（六）关于弹塑性模量矩阵$[D]_{ep}$测定方法的建议

弹塑性模量矩阵$[D]_{ep}$包括四个待定的函数，即$[D]$，f，g，A或H。为了确定这些未知函数，需要进行土的两类常规试验：1．各向等压固结试验；2．$\sigma_2=\sigma_3=$常数的三轴压缩试验。建议利用图1-12所介绍的作图法，选用不同的硬化规律或硬化参数H，绘出不同的屈服轨迹组图，如图1-18a～1-18d所示。从这些图可见，如硬化规律或H值假定不同，得到的屈服轨迹或屈服函数f也将不同，并且差别可以很大。为了保证边值问题的解的唯一性，我们必需从中找出一个准确的硬化规律H和屈服函数f来。

根据试验资料，我们可以在不作任何补充假定的情况下，画出土样的等势线或g函数图，如图1-15或图1-19所示。作图的方法，可参照关于前面图1-15的说明。通过试算，可以找到一种硬化规律或一个硬化参数H，选用了它，就能使屈服轨迹和塑性势线重合，亦即使屈服函数$f(p,q,H)=0$，等于塑性势函数$g(p,q,H)=0$，或$f=g$。这样确定的H和$f=g$函数，才是唯一的，同时也是满足正交定律的。

将如此求得的H与$f=g$函数代入式（1-71），就可求得A值。

弹性模量矩阵$[D]$，包括K、G两个弹性常数，它们可以从试验曲线的卸荷与重加荷曲线段去求取。

下述中密砂实验成果，将用以说明上述理论。试验用的承德砂，其性质指标为：

平均粒径	$d_{50}=0.18$毫米
不均匀系数	$d_{60}/d_{10}=2.8$
颗粒比重	$G_s=2.63$
最大孔隙比	$e_{max}=0.80$
最小孔隙比	$e_{min}=0.40$

试样相对密度$D_r=64\%$，试样干容重控制在$\gamma=1.70\pm0.01$克/立方厘米范围内。

从各向等压固结试验得到的ε_v-ln$p$曲线，见图1-16。三轴压缩试验时，σ_3值相应为

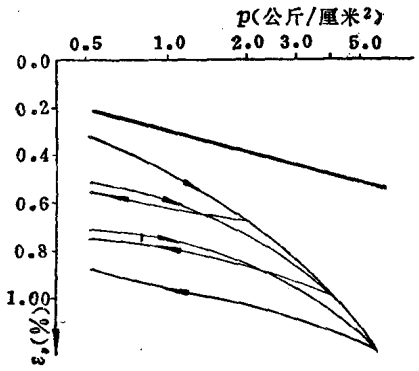


图 1-16 ε_v-ln$p$曲线

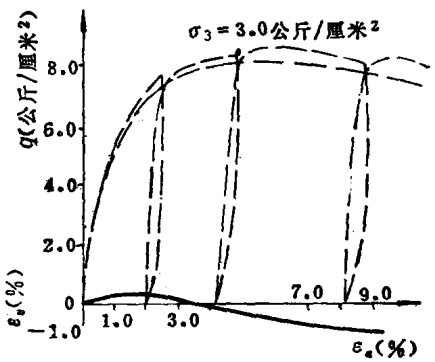


图 1-17 q-ε_a和ε_v-ε_a曲线

1.0，3.0，5.0公斤/平方厘米，$\sigma_3=3.0$公斤/平方厘米时的（$\sigma_1-\sigma_3$）$-\varepsilon_a$和$\varepsilon_v-\varepsilon_a$试验曲线，见图1-17，其中$\varepsilon_a$表示总的轴向应变。

试验所得的总应变，用下述方法分离弹性和塑性应变。对轴向应变ε_a，将卸载前与完全卸载后的应变差作为弹性应变ε_a^e，全部应变扣除弹性应变后即为塑性应变ε_a^p。另外，假定纯剪切不引起弹性体积应变，其弹性体积应变的变化$\Delta\varepsilon_v^e$，完全是由于静水压力增量$\Delta p=\frac{1}{3}(\Delta\sigma_1+2\Delta\sigma_3)$引起的，可从各向等压固结试验的$\varepsilon_v$-lg$p$曲线的卸荷和再加荷曲线段选取，用$\varepsilon_v^p=\varepsilon_v-\varepsilon_v^e$公式，计算塑性体积应变$\varepsilon_v^p$。再利用$\bar{\varepsilon}^p=\varepsilon_a^p-\frac{1}{3}\varepsilon_v^p$，可以确定塑性八面体剪切应变分量$\bar{\varepsilon}^p$。

从σ_3=常数的试验曲线上任意点$M(p,q)$所确定的ε_v^p和$\bar{\varepsilon}^p$值，可以绘出相应于$H=\bar{\varepsilon}^p$，$H=\varepsilon_v^p$，$H=W_p$，$H=\varepsilon^p=\int\sqrt{\delta\varepsilon_{ij}^p\delta\varepsilon_{ij}^p}$等不同的加工硬化规律的屈服轨迹$f$的等值线图，如图1-18$a$～1-18$d$所示。从这些图可以看出，这样的屈服轨迹，彼此间是根本不同的。

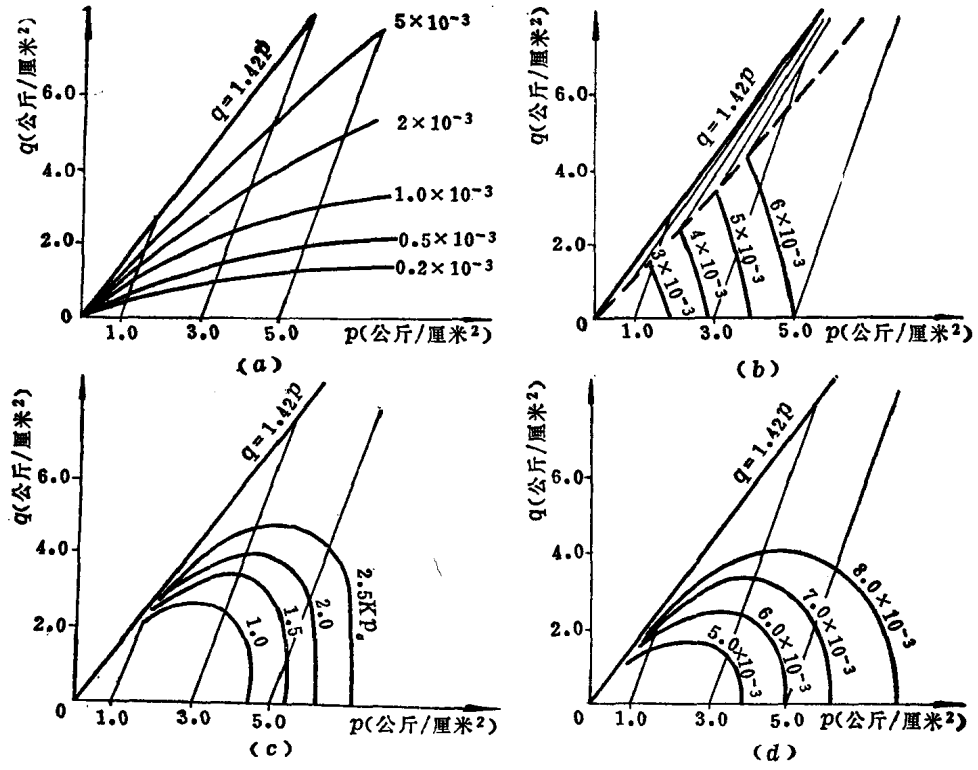


图 1-18 不同硬化规律的屈服轨迹

利用某一σ_3=常数试验曲线上各任意点$M(p,q)$的ε_v^p和$\bar{\varepsilon}^p$值，我们可以在ε_v^p-$\bar{\varepsilon}^p$平面上绘上相应的ε_v^p-$\bar{\varepsilon}^p$曲线。ε_v^p-$\bar{\varepsilon}^p$曲线上某点$M(p,q)$的坡度，就是p-q平面上相应点的合成塑性应变增量的方向。在此资料的基础上，可以在p-q平面上画出流线和等势线，如

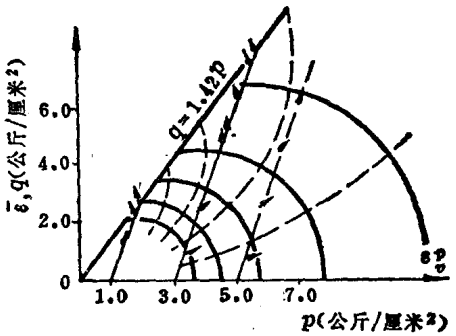


图 1-19 塑性势线

图1-19。

我们可以从图1-19发现，对于相对密度$D_r=64\%$的承德砂，等势线g与和它相同的屈服轨迹f可近似地用一椭圆来表示，即：

$$f=g=q^2+2(p-7H)^2-78H^2=0$$

其中加工硬化参数H，通过试算为：

$$H=[(\varepsilon_v^p)^2+0.05(\bar{\varepsilon}^p)^2]\times 10^4+2\sqrt{\bar{\varepsilon}^p}$$

从公式（1-71）计算所得的硬化模量A为：

$$A=(28p-36H)\left[8\times 10^4(p-7H)\varepsilon_v^p+2\times 10^3 q\left(\bar{\varepsilon}^p-\frac{0.001}{\sqrt{\bar{\varepsilon}^p}}\right)\right]$$

弹性剪切模量G，可以从$\sigma_3=$常数的$q-\bar{\varepsilon}$卸荷与再加荷曲线段求取，由此得：

$$G=217p_a\left(\frac{p-0.33q}{p_a}\right)^{0.60}$$

式中 p_a——大气压力。

弹性体积模量K，可由各向等压固结试验的ε_v-ln$p$的卸荷和重加荷曲线求取，由此得：

$$K=\frac{dp}{d\varepsilon_v^e}=350p$$

为了验证求取的f、H、G、K的精确度，计算了q-$\bar{\varepsilon}$，q-ε_v曲线，并与实验结果加以比较。计算和实验结果，见图1-20和图1-21。从图上可以看出，两者是很接近的。

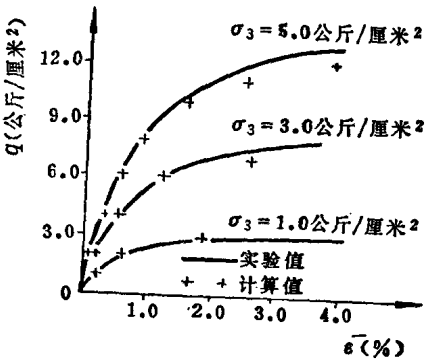


图 1-20 计算与实验$q-\bar{\varepsilon}$曲线

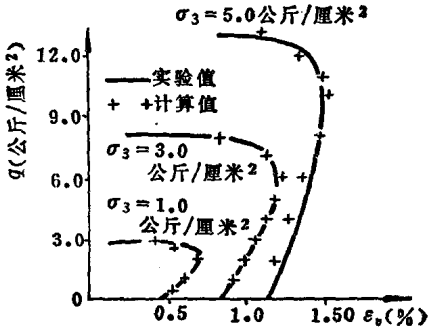


图 1-21 计算与实验q-ε_v曲线

第四节 弹塑性应力-应变模型示例

十几年来，学者们建议采用的应力-应变数学模型有许多种。在弹性模型方面，最常使用的模型有两种。第一种是以E（弹性模量）和ν（泊桑比）两个弹性常数表达的，称

$E-\nu$ 弹性模型。第二种是以K（弹性体积模量）和G（剪切模量）两个弹性常数表达的，称$K-G$弹性模型。这两种弹性模型，将在本节中介绍。另外一种是南京水利科学研究所采用的非线性的变弹性体模型，它的特点是不用常规的弹性常数，改用两个非线性函数，来表达应力与应变之间的关系。由于这种特点，本节中也将予以介绍。

塑性数学模型，本节中只介绍三种具有代表性的或能阐明上节理论的模型。一种是剑桥模型，这是最早发表的帽子模型。另一种是科斯拉与吴(Khosla与Wu)[18]建议的椭圆形帽子KW模型。赖特与邓肯(Lade与Duncan)的LD模型也是应用增量塑性理论建立起来的一个模型。罗威(Rowe)的剪胀理论，把具有锯齿形分隔面的两个楔体，作为散体颗粒的模型，来研究它的变形特性。虽然出发点不同，但理论的结果却也可以纳入增量塑性理论的范畴。

一、$E-\nu$弹性模型[13、14]

邓肯和张等人研究的目的，是为常规三轴压缩试验所得的$(\sigma_1-\sigma_3)-\varepsilon_a$（轴向应变）一组（$\sigma_3$＝常数）试验曲线，找出一个共同的数学公式，并从这个数学公式去推导出切线模量E_t的公式来，供增量弹性分析之用。同时，结合着试验所得的体积应变ε_v与ε_a的关系曲线，也可将泊桑比ν的变化公式推导出来。我们简称这些E_t、ν_t公式为E、ν弹性模型。

考特纳（Kondner）建议采用下列双曲线公式代表（$\sigma_1-\sigma_3$）$-\varepsilon_a$试验曲线，即当σ_3＝常数时：

$$\sigma_1-\sigma_3=\frac{\varepsilon_a}{a+b\varepsilon_a} \qquad (1\text{-}A1)$$

其中a、b是试验常数。将式（1-$A1$）改写成：

$$\frac{\varepsilon_a}{\sigma_1-\sigma_3}=a+b\varepsilon_a \qquad (1\text{-}A2)$$

这就是说将图1-22a的实验曲线，改按图1-22b的座标绘出，那末a、b两个试验常数，极易从图1-22b直接量得。

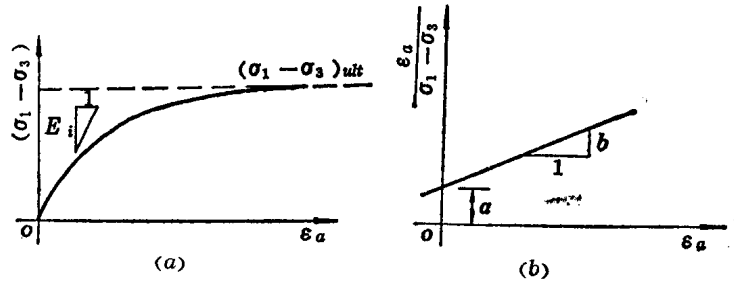


图 1-22　双曲线型的应力-应变关系

邓肯和张建议将式（1-$A1$）写成：

$$\sigma_1-\sigma_3=\frac{\varepsilon_a}{\frac{1}{E_i}+\frac{R_f\varepsilon_a}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}} \qquad (1\text{-}A3)$$

其中起始弹性模量：

$$E_i=\frac{1}{a} \qquad (1\text{-}A4)$$

$$b=\frac{R_f}{(\sigma_1-\sigma_3)_f} \qquad (1\text{-}A5)$$

上式中R_f称为破坏比率，其定义是：

$$R_f=\frac{(\sigma_1-\sigma_3)_f}{(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}}=\frac{\text{破坏时强度}}{(\sigma_1-\sigma_3)\text{的极限值}} \qquad (1\text{-}A6)$$

R_f值一般在0.75～1.00间。

随着试验时σ_3值的不同，试验曲线也将不同。邓肯和张认为，这些曲线都可用式（1-$A3$）表示，只是其中的E_i值随σ_3而变动。他们建议采用：

$$E_i=Kp_a\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \qquad (1\text{-}A7)$$

式中p_a=大气压力，K、n是试验常数。对于不同土类，K值可能小于100，也可能大于3500。n值一般在0.2～1.0间。

因切线弹模 $$E_t=\frac{\partial(\sigma_1-\sigma_3)}{\partial\varepsilon_a}$$

即 $$E_t=\frac{1/E_i}{\left[\frac{1}{E_i}+\frac{R_f\varepsilon_a}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\right]}$$

故从式(1-$A3$)可得： $$\varepsilon_a=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{E_i\left[1-\frac{R_f(\sigma_1-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\right]}$$

代入上式得 $$E_t=(1-R_fS)^2E_i \qquad (1\text{-}A8)$$

$$S=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)_f} \qquad (1\text{-}A9)$$

根据摩尔-库伦破坏准则：

$$(\sigma_1-\sigma_3)_f=\frac{2c\cos\phi+2\sigma_3\sin\phi}{1-\sin\phi} \qquad (1\text{-}A10)$$

将式（1-$A10$）代入式（1-$A8$）、（1-$A9$），可得切线模量公式：

$$E_t=\left[1-\frac{R_f(1-\sin\phi)(\sigma_1-\sigma_3)}{2c\cos\phi+2\sigma_3\sin\phi}\right]^2E_i \qquad (1\text{-}A11)$$

卸荷和重复加荷时弹性模量值为E_{ur}

$$E_{ur}=K_{ur}p_a\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n \qquad (1\text{-}A12)$$

K_{ur}值也应通过试验测定，一般情况$K_{ur}>K$。

泊桑比ν值虽然也有一些经验公式，但不很可靠。起始泊桑比ν_i：

$$\nu_i=G-F\log\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right) \qquad (1\text{-}A13)$$

式中G、F为试验常数。通常F值约0.1～0.2，故$\nu_i\approx G$。切线泊桑比ν_t：

$$\nu_t=\frac{\nu_i}{(1-D\varepsilon_a)^2} \qquad (1\text{-}A14a)$$

其中D为试验常数。或：

$$\nu_t=\frac{G-F\log(\sigma_3/p_a)}{\left\{1-\frac{D(\sigma_1-\sigma_3)}{Kp_a(\sigma_3/p_a)^n[1-R_f(\sigma_1-\sigma_3)(1-\sin\phi)/2c\cos\phi+2\sigma_3\sin\phi}\right\}^2} \qquad (1\text{-}A14b)$$

如果计算所得的ν_t值大于1/2，则可采用$\nu_t=0.49$，作为计算的依据。因为式（1-$A14$）的计算值常偏大，故有人建议用下式计算：

$$\nu_t=\nu_i+(\nu_{tf}-\nu_i)\frac{\sigma_1-\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)_f} \qquad (1\text{-}A15)$$

式中 ν_{tf}——破裂时的切线泊桑比。

二、K-G弹性模型[15]

杜马许克（Domaschuk）等人建议，作弹性增量分析时采用弹性体积模量K与剪切模量G，以代替工程上常用的E及ν。

选用p、q两个八面体应力不变量，即：

$$p=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \qquad (1\text{-}B1)$$

$$q=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}(s_1^2+s_2^2+s_3^2)=\sqrt{3J_2} \qquad (1\text{-}B2)$$

当$\sigma_2=\sigma_3$时

$$p=\frac{1}{3}(\sigma_1+2\sigma_3) \qquad (1\text{-}B3)$$

$$q=\sigma_1-\sigma_3 \qquad (1\text{-}B4)$$

与p和q分别相适应的应变为体积应变ε_v和剪切应变$\bar{\varepsilon}$，

$$\varepsilon_v=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \qquad (1\text{-}B5)$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\sqrt{2}}{3}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (1\text{-}B6)$$

当$\sigma_2=\sigma_3$时

$$\varepsilon_v=\varepsilon_1+2\varepsilon_3 \qquad (1\text{-}B7)$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{2}{3}(\varepsilon_1-\varepsilon_3)=\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_v}{3} \qquad (1\text{-}B8)$$

应力与应变的关系为：

$$p=K\varepsilon_v \qquad (1\text{-}B9)$$

$$q=3G\bar{\varepsilon} \qquad (1\text{-}B10)$$

研究的主要目的，是通过一系列试验来测定K、G随应力水平变化的规律，并把这规律用数学模型表达出来。

（一）K值的测定

主要采用各向等压固结试验，即使土样在静水压力$p=\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$作用下压缩固结，求得孔隙比$e$与压力$p$的$e$-$p$关系曲线。并从这曲线推出$dp/d\varepsilon_v=K_t$，即切线体积变形模量。$e$-$p$关系曲线通常用下列对数式表示（图1-28）。

$$e=e_{a0}-\lambda\ln p \qquad (1\text{-}B11)$$

式中 e_{a0}和λ——试验常数。

从式（1-B11）可以推得：

$$K_t=\frac{dp}{d\varepsilon_v}=\frac{1+e_0}{\lambda}p \qquad (1\text{-}B12)$$

式中 e_0——起始孔隙比。

另外一种方式是不用式（1-$B11$），改用下式表达p-ε_v的关系

$$\frac{p}{p_c}=\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{vc}}\left(1+\alpha\left|\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{vc}}\right|^{n-1}\right) \qquad (1\text{-}B13)$$

其中p_c、ε_{vc}、α、n是四个试验常数。对于粉土和粘土，$\alpha\approx1$。当$\alpha=1$时：

$$K_t=\frac{p_c}{\varepsilon_{vc}}\left(1+n\left|\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{vc}}\right|^{n-1}\right) \qquad (1\text{-}B14)$$

或

$$K_t=K_i\left[1+n\left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{vc}}\right)^{n-1}\right] \qquad (1\text{-}B15)$$

其中K_i＝起始体积变形模量：

$$K_i=\frac{p_c}{\varepsilon_{vc}} \qquad (1\text{-}B16)$$

图1-24表示两种不同的土（甲土和乙土）的p-ε_v试验曲线和K_t-p关系曲线。

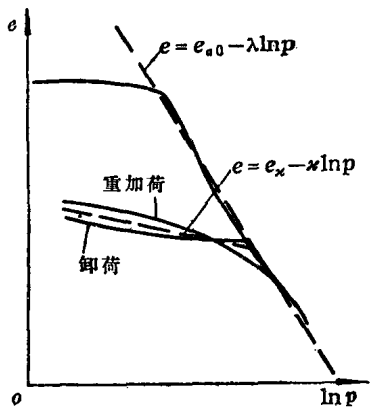


图 1-23　压缩曲线

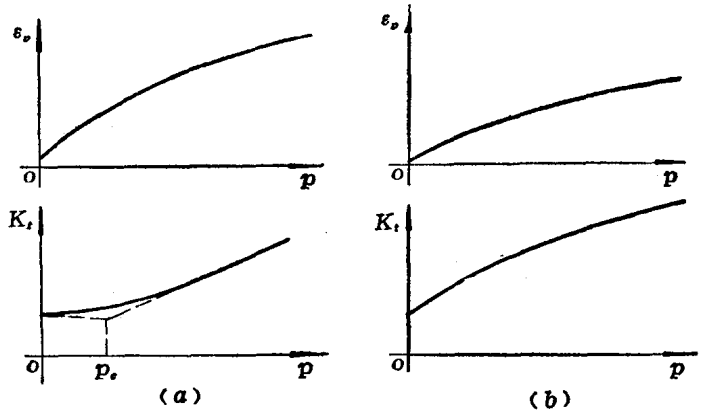


图 1-24　甲、乙两种土的p-ε_v和K_t-p曲线
a—甲土；b—乙土

（二）G值的测定

采用p等于常数的三轴压缩试验（即排水的），进行G值的测定。杜马许克等人先使土样在p_c三向等压下固结，然后在p/p_c＝1.0、0.8、0.6、0.4和0.2等5种不同情况下，进行各向等压固结试验。求取一组（5条）应力-应变关系曲线。然后从p_c等于另一不同值的土样，求取另一组曲线。这许多试验曲线，都可用考特纳的双曲线关系式来表示：

$$(q/3)=\frac{\bar{\varepsilon}}{a+b\bar{\varepsilon}}=\frac{\bar{\varepsilon}G_i}{1+b\bar{\varepsilon}G_i} \qquad (1\text{-}B17)$$

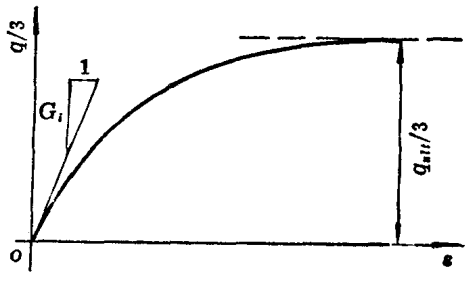


图 1-25　$q/3$-$\bar{\varepsilon}$曲线

其中$1/a=G_i$＝起始切线剪切模量，$b=1\Big/\frac{1}{3}(q_{ult})$。图1-25是$q/3$-$\bar{\varepsilon}$的一根代表曲线。将式（1-$B17$）微分，可得切线剪切模量：

$$G_t=G_i\left[1-b\left(\frac{q}{3}\right)\right]^2 \qquad (1\text{-}B18)$$

从实验资料的分析结果得：

$$\ln\left(\frac{G_i}{p}\right)=A-B\left(\frac{p}{p_c e_{ic}}\right) \qquad (1\text{-}B19)$$

其中e_{ic}=起始孔隙比。A和B对于某一类粘土基本上是常数；但对于另一类粘土，A值与塑性指数PI有关，即$\ln A$随着$\ln(PI)$的增大而线性地减小。

式（1－B17）给出q的一个极限值q_{ult}，这个极限值与破裂时的q_f值之间的关系可写成：

$$\frac{q_f}{3}=R_f\left(\frac{q_{ult}}{3}\right)=R_f\left(\frac{1}{b}\right) \qquad (1\text{-}B20)$$

试验证明：

$$\frac{q_f}{3}=10^{\alpha}\left(\frac{p}{p_c e_{ic}}\right)^{\beta} \qquad (1\text{-}B21)$$

式中　α、β——两个试验常数。

将此式和式（1-B20）代入式（1-B18），可得：

$$G_t=G_i\left[1-R_f\frac{(q/3)}{10^{\alpha}\left(\frac{p}{p_c e_{ic}}\right)^{\beta}}\right]^2 \qquad (1\text{-}B22)$$

三、南京水科所模型

南京水利科学研究所沈珠江等人，将土的应力－应变关系用下列两个函数来表达，即：

$$\varepsilon_v=f_1(p,\ q) \qquad (1\text{-}C1)$$

$$\bar{\varepsilon}=f_2(p,\ q) \qquad (1\text{-}C2)$$

p、q、ε_v和$\bar{\varepsilon}$，分别为八面体应力及其相应的应变。写成增量形式为：

$$\delta\varepsilon_v=\frac{\partial f_1}{\partial p}\delta p+\frac{\partial f_1}{\partial q}\delta q \qquad (1\text{-}C3)$$

$$\delta\bar{\varepsilon}=\frac{\partial f_2}{\partial p}\delta p+\frac{\partial f_2}{\partial q}\delta q \qquad (1\text{-}C4)$$

和经典的弹性理论相比，上面两个公式分别指出：1.纯粹的剪切可以产生体积应变；2.法向力之和如有变化，可以引起剪切应变。这样就考虑了土的剪胀（或剪缩）性，也否定了两个弹性常数K和G存在的假定。

问题的关键在于如何选择与确定f_1与f_2两个函数。

（一）f_1函数的选择

通过各向等压固结试验、常规的单向固结试验以及其它使

$$n=q/p \qquad (1\text{-}C5)$$

值保持不变而进行的固结试验，可以得到一组$e-p$曲线。对于正常固结或弱超固结的粘性土和松砂，这组曲线如绘在e与$\ln p$座标上，将成为一群基本上互相平行的直线，如图1-26a所示。这些曲线的数字表达式为：

$$e=e_{an}-\lambda\ln p \qquad (1\text{-}C6)$$

或

$$\varepsilon_v=\frac{e_{an}}{1+e_0}-\frac{\lambda}{1+e_0}\ln p$$

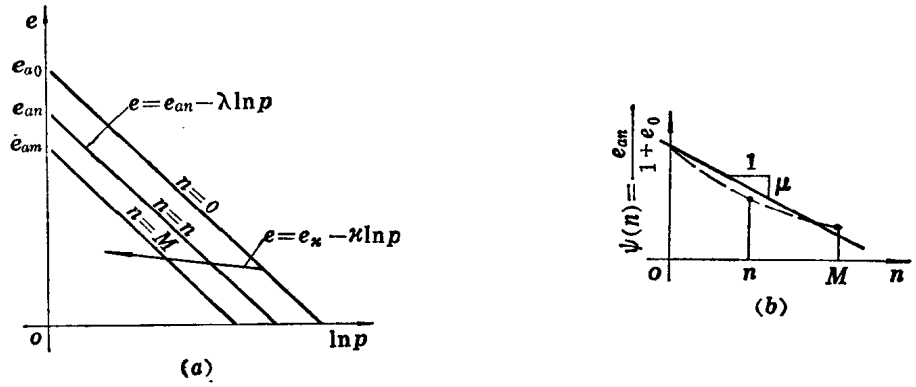


图 1-26　体积变化与应力比之间的关系

如令

$$\psi(n)=\frac{e_{an}}{1+e_0} \tag{1-C7}$$

可得代表f_1的函数：

$$\varepsilon_v=\psi(n)-\frac{\lambda}{1+e_0}\ln p \tag{1-C8}$$

从这组曲线可以求得λ的平均值和每一曲线的e_{an}值。再用图解法求$\psi(n)$，即$\frac{e_{an}}{1+e_0}$与n的关系。这个关系可以简化为直线关系，即可假定此线的坡度μ为一常数：

$$\mu=\frac{\partial\psi(n)}{\partial n}=常数 \tag{1-C9}$$

如果是各向等压固结（$n=0$）试验，则$e_{an}=e_{a0}$，或者如果代表破坏状态或临界状态（参阅剑桥模型，$n=M$），则$e_{an}=e_{am}$，于是：

$$\mu=\frac{e_{an}-e_{am}}{M}=\frac{\lambda-\kappa}{M} \tag{1-C10}$$

当然，μ的数值，也可以不利用剑桥模型研究成果，而从图1-26 b上直接量取。用这种方法确定μ值，与南京水科所原来采用的从不排水剪试验成果推断的方法相比较，似较简便些。

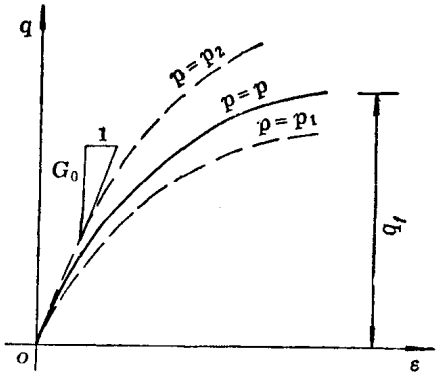


图 1-27　$q-\varepsilon$ 曲线

（二）f_2函数的选择

采用p等于常数的三轴压缩排水试验，可以得到一组曲线，如图1-27所示。其中每根曲线都可用下式表达，即：

$$q=\frac{\bar{\varepsilon}}{\frac{1}{G_0}+\frac{\bar{\varepsilon}}{q_f}} \tag{1-C11}$$

式中　q_f——破坏时的q值；

G_0——试验常数。

原作者声称，相当多的试验资料表明，p对应力-应变关系的影响，可以通过$n=q/p$

代替 q 的办法进行归一化。按照这一办法，这一组曲线可以简化为如下的关系式，即：

$$\left(\frac{q}{p}\right)=n=\frac{\bar{\varepsilon}}{a+b\bar{\varepsilon}} \qquad (1\text{-}C12)$$

式中

$$a=\frac{p}{G_0},\quad b=\frac{p}{q_f} \qquad (1\text{-}C13)$$

这个公式最初是南京水科所在“油罐地基固结变形的非线性分析”一文中介绍的。现据沈珠江同志后来研究结果，已改为（图1-28）：

$$n=\frac{\zeta}{a+b\zeta} \qquad (1\text{-}C14)$$

其中

$$\zeta=\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_v} \qquad (1\text{-}C15)$$

这是因为在本节之三的（一）中所述的 $n=q/p=$常量的排水试验中，我们得到的剪切应变 $\bar{\varepsilon}=\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_v}{3}=\frac{2}{3}\varepsilon_1$，不是一个常量，而从式（1-C12）计算所得的 $\bar{\varepsilon}$，却是常量，这与事实不符。考虑到 $n=$常量时 $\bar{\varepsilon}/\varepsilon_v=2/3$是常量，因此，采用式(1-C14)比较恰当。

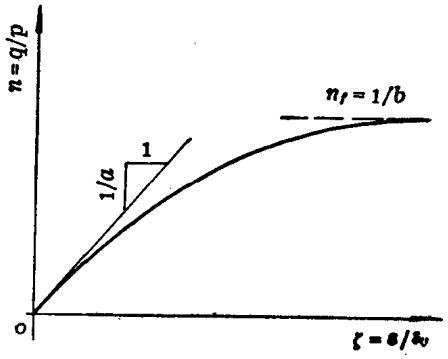


图 1-28 归一化后的应力-应变关系

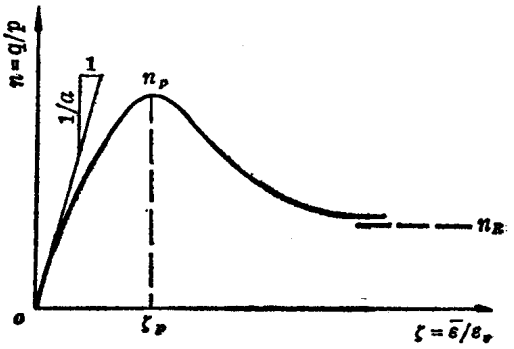


图 1-29 考虑软化现象的 $n-\zeta$ 曲线

另外，如考虑软化现象，则式（1-C14）可改写为类似（1-26）的形式（图1-29）：

$$n=\frac{\zeta(a+c\zeta)}{(a+b\zeta)^2} \qquad (1\text{-}C16)$$

式（1-C14）和（1-C16）代表f_2函数。如将式（1-C14）微分，可得：

$$\beta=\frac{\delta n}{\delta\zeta}=\frac{a}{(a+b\zeta)^2} \qquad (1\text{-}C17)$$

将式（1-C16）微分，可得：

$$\beta=\frac{\delta n}{\delta\zeta}=a\,\frac{a+(2c-b)\zeta}{(a+b\zeta)^3} \qquad (1\text{-}C18)$$

如令 $\beta=0$，则由式（1-C18）可得：

$$\zeta_p=\frac{a}{b-2c} \qquad (1\text{-}C19)$$

代入式（1-C16），可得：

$$n_p=\frac{1}{4(b-c)} \qquad (1\text{-}C20)$$

当 ζ 接近无限大时：

$$n_R=\frac{c}{b^2} \qquad (1\text{-}C21)$$

同样，由式（1-C14）可得，当 $\zeta\to\infty$ 时：

$$n_f=\frac{1}{b} \qquad (1\text{-}C22)$$

当 $\zeta=0$ 时，式（1-C14）和（1-C16）均得：

$$\beta=\frac{1}{a} \qquad (1\text{-}C23)$$

即 $n-\zeta$ 曲线的起始坡降。

（三）应力-应变增量公式

把式（1-C8）写成增量公式：

$$\delta\varepsilon_v=(-)\frac{\partial\psi}{\partial n}\delta n+\frac{\lambda}{1+e}\frac{\delta p}{p} \qquad (1\text{-}C24)$$

因

$$\mu=\frac{\partial\psi}{\partial n} \qquad (1\text{-}C25)$$

$$\delta n=\frac{\delta q}{p}-n\frac{\delta p}{p} \qquad (1\text{-}C26)$$

故

$$\delta\varepsilon_v=\left[\frac{\lambda}{1+e}-n\mu\right]\frac{\delta p}{p}+\mu\frac{\delta q}{p} \qquad (1\text{-}C27)$$

另外因

$$\delta\zeta=\frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_v}-\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_v}\frac{\delta\varepsilon_v}{\varepsilon_v}=\frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_v}-\zeta\frac{\delta\varepsilon_v}{\varepsilon_v}$$

$$\delta_n=\beta\delta\zeta=\beta\left[\frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_v}-\zeta\frac{\delta\varepsilon_v}{\varepsilon_v}\right]$$

故

$$\frac{\delta q}{p}-n\frac{\delta p}{p}=\beta\left[\frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_v}-\zeta\frac{\delta\varepsilon_v}{\varepsilon_v}\right]$$

以式（1-C27）代入上式，可得：

$$\frac{\delta q}{p}-n\frac{\delta p}{p}=\beta\left[\frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_v}+\frac{\zeta}{\varepsilon_v}\left\{\left(\frac{\lambda}{1+e}-n\mu\right)\frac{\delta p}{p}+\mu\frac{\delta q}{p}\right\}\right]$$

或

$$\beta\frac{\delta\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_v}=\frac{\delta q}{p}\left[1+\frac{\mu\beta\zeta}{\varepsilon_v}\right]+\frac{\delta p}{p}\left[-n+\frac{\beta\zeta}{\varepsilon_v}\left(\frac{\lambda}{1+e}-n\mu\right)\right]$$

即

$$\delta\bar{\varepsilon}=\frac{\delta q}{p}\left[\frac{\varepsilon_v}{\beta}+\mu\zeta\right]+\frac{\delta p}{p}\left[(-)\frac{n\varepsilon_v}{\beta}+\zeta\left(\frac{\lambda}{1+e}-n\mu\right)\right] \qquad (1\text{-}C28)$$

式（1-C27）和（1-C28）就是代表南京水科所模型的应力-应变增量关系公式。

沈珠江最近建议的新模型[29]，将式（1-C1）和（1-C2）中的总应变分成了弹性与塑性应变两部分。他并设想通过应力空间中任何一点有两个屈服面，一个是体应变屈服面 f_v，在这个面上塑性体应变 ε_v^p 是常数，另一个是偏应变屈服面 f_r，在这个面上塑性剪应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 是常数。此外，他抛弃了增量塑性理论中的流动法则，建议改用下列关系式去计算塑性应变分量 $\delta\varepsilon_v^p$ 与 $\delta\bar{\varepsilon}^p$：

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon_v^p&=\frac{\partial f_v}{\partial p}\delta p+\frac{\partial f_v}{\partial q}\delta q\\ \delta\bar{\varepsilon}^p&=\frac{\partial f_r}{\partial p}\delta p+\frac{\partial f_r}{\partial q}\delta q\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}C29)$$

对于正常固结粘土，沈建议采用：

$$\left.\begin{aligned}f_v&=c\log\frac{p(1+x)}{p_0}-c_e\log\frac{p}{p_0}-H_1=0\\ f_r&=\frac{au}{1-bn}\log\frac{p(1+x)}{p_0}-\frac{q}{G}-H_2=0\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}C30)$$

式中 $H_1=\varepsilon_v^p$；

$H_2=\bar{\varepsilon}^p$；

$n=\dfrac{q}{p}$；

$x=dn^m$；　　(1-C31)

p_0——体应变等于零时的初始压力；

c和c_e——分别为体积压缩指数和膨胀指数；

m——$m>1$；

a、b、d——另外三个正的计算常数；

G——弹性剪切模量。

式（1-C30）中假定弹性应变为：

$$\varepsilon_v^e=c_e\log\frac{p}{p_0},\qquad\bar{\varepsilon}^e=\frac{q}{G}\qquad(1\text{-}C32)$$

从而总应变为：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_v&=c\log\frac{p(1+x)}{p_0}\\ \bar{\varepsilon}&=\frac{au}{1-bn}\log\frac{p(1+x)}{p_0}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}C33)$$

对式（1-C30）微分，可求得（1-C29）中δp和δq项的四个系数。

四、剑 桥 模 型[10、16、17]

剑桥模型（Cambridge Model）是英国剑桥大学罗斯柯等人为正常固结粘土和弱超固结粘土（也就是他们所谓的“湿粘土”）创制的弹塑性应力-应变关系的数学模型。这个模型的理论含有一些基本概念，现概述如下。

（一）物态边界面

试验证明，正常固结的饱和重塑粘土的孔隙比 e 和它所受力 p 与 q 之间存在着一种固定的关系，如将这种关系用 $p-q-e$ 空间座标画出来，就能得到一个面，这个面称“物态边界面”（State boundary surface）。例如，图1-30的$ACEF$，就是这个面的一部分。图中AC线是画在e-p平面中的**原始各向等压固结线**(Virgin isotropic consolidation line)，以后将简称为$VICL$线，它就是$p=\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$试验情况下的$e$-$p$曲线。图中的 EF 空间曲

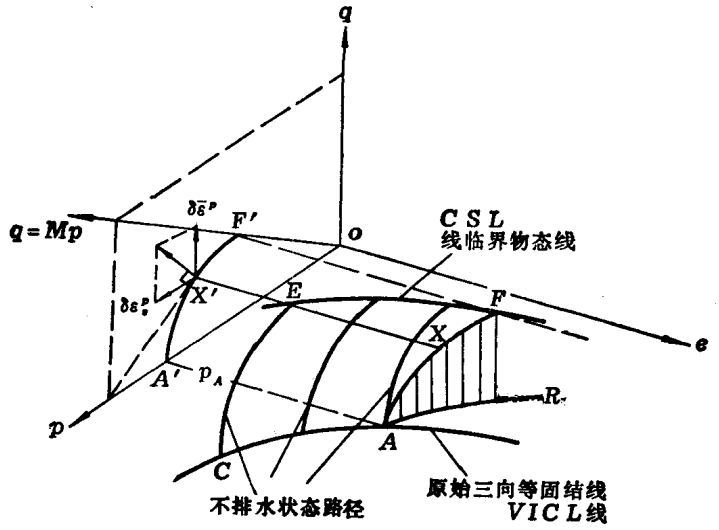


图 1-30 物态边界面

线，称为临界物态线（Critical state line）或简称*CSL*线。在此线上各点代表一种临界状态，原作者们假定，到这种状态时，土将发生很大的剪切变形，而应力p与q及体积或孔隙比e，却保持不变。事实上，也可以说是到达了“湿粘土”的破坏状态了。因此，也有人主张用破坏状态线来代替这根所谓临界物态线。当然，这根线也是可以通过实验来测定的。正常固结饱和粘土和较松的砂，即在剪切时只发生收缩而无膨胀现象的土，它们的存在状态，通常是在*VICL*线和*CSL*线两线所包括的“物态边界面”的部分范围内。剑桥模型也只适用于这种情况的“湿粘土”和松砂。

原始各向等压固结线或*VICL*线的数学表达式为：

$$e=e_{a0}-\lambda\ln p \qquad (1\text{-}D1)$$

其中e_{a0}和λ均为试验常数，它的卸荷和重复加荷曲线，亦即回弹曲线的公式为：

$$e=e_{\kappa}-\kappa\ln p \qquad (1\text{-}D2)$$

式中 e_{κ}和κ——都是试验常数。

临界物态线或*CSL*线在p-q平面上投影的公式为：

$$q=Mp \qquad (1\text{-}D3)$$

在e-p平面上的投影为：

$$e=e_{am}-\lambda\ln p \qquad (1\text{-}D4)$$

式中 M、e_{am}——都是试验常数。

比较式（1-*D*1）和（1-*D*4），可见*VICL*线与*CSL*线画在e-ln$p$平面上时，将成为两根互相平行的直线，它们的坡度为λ。

（二）弹性能与塑性能

单位体积的土在p、q的应力作用下如发生应变$\delta\varepsilon_v$和$\delta\bar{\varepsilon}$，能量变化将为：

$$\delta E=p\delta\varepsilon_v+q\delta\bar{\varepsilon} \qquad (1\text{-}D5)$$

其中一部分为可回复的弹性能δW_e，另一部分为不可回复的消耗能或塑性能δW_p，即：

$$\delta E=\delta W_e+\delta W_p \qquad (1\text{-}D6)$$

其中

$$\delta W_e=p\delta\varepsilon_v^e+q\delta\bar{\varepsilon}^e \qquad (1\text{-}D7)$$

$$\delta W_p=p\delta\varepsilon_v^p+q\delta\bar{\varepsilon}^p \qquad (1\text{-}D8)$$

角标 e、p 分别代表弹性与塑性。

在剑桥模型的理论推导中，作了下列一些补充假定：

1.假定 $\delta\varepsilon_v^e$ 可以从各向等压固结试验中所得的回弹曲线求取，即由式（1-$D2$）可得：

$$\delta e^e=\frac{-\varkappa}{p}\delta p$$

$$\delta\varepsilon_v^e=\frac{(-)\delta e^e}{1+e}=\frac{\varkappa}{1+e}\cdot\frac{\delta p}{p} \qquad (1\text{-}D9)$$

因

$$\delta e=\delta e^e+\delta e^p$$

故

$$\delta e^p=\delta e-\delta e^e=\delta e+\frac{\varkappa}{p}\delta p \qquad (1\text{-}D10)$$

$$\delta\varepsilon_v^p=\frac{(-)\delta e^p}{1+e}=\frac{(-1)}{1+e}\left[\delta e+\frac{\varkappa}{p}\delta p\right]$$

故

$$\delta\varepsilon_v^p=\delta\varepsilon_v-\frac{\varkappa}{1+e}\cdot\frac{\delta p}{p} \qquad (1\text{-}D11)$$

2.假定一切剪应变都是不可回复的，即假定：

$$\delta\bar{\varepsilon}^e=0,\quad \delta\bar{\varepsilon}^p=\delta\bar{\varepsilon} \qquad (1\text{-}D12)$$

因此，式（1-$D7$）成为：

$$\delta W_e=p\delta\varepsilon_v^e=\frac{\varkappa}{1+e}\delta p \qquad (1\text{-}D13)$$

3.假定全部消耗能 δW_p 等于 $Mp\delta\bar{\varepsilon}$，即：

$$\delta W_p=Mp\delta\bar{\varepsilon} \qquad (1\text{-}D14)$$

根据这三个补充假定可由式（1-$D5$）、（1-$D6$）、（1-$D13$）和（1-$D14$）得能量方程

$$p\delta\varepsilon_v+q\delta\bar{\varepsilon}=\frac{\varkappa\delta p}{1+e}+Mp\delta\bar{\varepsilon} \qquad (1\text{-}D15)$$

（三）屈服轨迹

“湿粘土”是加工硬化土料，并且可以认为其特性符合相适应的流动规则。因此，可以假定其塑性势面和屈服面是重合的。在 p-q 平面上塑性势线和屈服轨迹也是重合的。图1-31中的 VSC 曲线就代表经过 S 点的屈服轨迹在 p-q 平面上的投影。

剑桥模型理论又假定在同一屈服轨迹上 ε_v^p =常数，也就是：

$$\delta\varepsilon_v^p=0 \qquad (1\text{-}D16)$$

即

$$\delta e^p=0$$

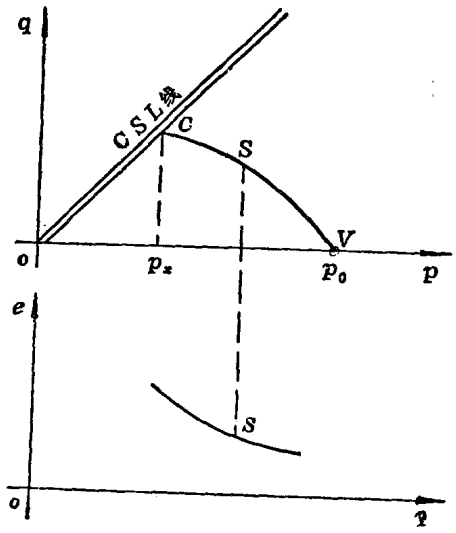


图 1-31 VSC 曲线及其投影

代入式（1-$D10$）得：

$$Se+\frac{\varkappa}{p}\delta p=0$$

将此式积分得：

$$e=e_{\varkappa}-\varkappa\ln p \qquad (1\text{-}D17)$$

这说明屈服轨迹在e-p平面上的投影，必需落在一根各向等压固结回弹曲线上[参阅式（1-$D2$）]。

利用**正交定律**，在屈服轨迹上任何一点S处，应满足下列条件：

$$\delta p\delta\varepsilon_v^p+\delta q\delta\bar{\varepsilon}^p=0 \qquad (1\text{-}D18)$$

现因

$$\delta\bar{\varepsilon}^p=\delta\bar{\varepsilon} \qquad (a)$$

将式式（a）和式（1-$D11$）代入式（1-$D18$）得：

$$\delta p\cdot\delta\varepsilon_v-\frac{\varkappa}{1+e}\cdot\frac{\delta p}{p}\cdot\delta p+\delta q\cdot\delta\bar{\varepsilon}=0 \qquad (b)$$

另外，从式（1-$D15$）即能量方程得：

$$\delta\varepsilon_v=\frac{-q}{p}\delta\bar{\varepsilon}+\frac{\varkappa\delta p}{(1+e)p}+M\delta\bar{\varepsilon} \qquad (c)$$

将式(c)代入式(b)得：

$$\frac{\delta q}{\delta p}-\frac{q}{p}+M=0 \qquad (1\text{-}D19)$$

将此式积分，可得：

$$\frac{q}{Mp}+\ln p=c \qquad (1\text{-}D20)$$

其中c为积分常数。如果假定此轨迹经过$VICL$线上的一点$V(p_0,0,e_0)$，则：

$$c=\ln p_0 \qquad (1\text{-}D21)$$

如果假定此轨迹经过CSL线上的一点$C(p_x,q_x,e_x)$，则：

$$c=\frac{q_x}{Mp_x}+\ln p_x \qquad (1\text{-}D22)$$

将式(1-$D21$)或式(1-$D22$)分别代入式(1-$D20$)，可得屈服轨迹在p-q平面上投影的公式：

$$n=\frac{q}{p}=M\cdot\ln\frac{p_0}{p} \qquad (1\text{-}D23)$$

或

$$n=\frac{q}{p}=M\left[\ln\frac{p_x}{p}+1\right] \qquad (1\text{-}D24)$$

根据式（1-$D23$）或（1-$D24$），再加上屈服轨迹在e-p平面上投影的公式（1-$D17$），就充分确定了屈服轨迹在p-q-e空间的位置与形式。

（四）物态边界面的形式

屈服轨迹沿着$VICL$线或CSL线移动所产生的曲面是屈服面，也就是前文所称的物态边界面。现如令轨迹沿$VICL$线移动，则因$VICL$线的公式为：

$$e=e_{a0}-\lambda\ln p$$

故如$p=p_0$，则：

$$e_0=e_{a0}-\lambda\ln p_0$$

由于p_0、e_0点也同时在回弹曲线上，故：

$$e_0=e_\kappa-\kappa\ln p_0$$

$$e_\kappa=e_{a0}-(\lambda-\kappa)\ln p_0$$

将此值代入式（1-D17），可得：

$$e=e_{a0}-(\lambda-\kappa)\ln p_0-\kappa\ln p \qquad (a)$$

从式（1-D23）得：

$$\ln p_0=\frac{q}{Mp}+\ln p$$

代入式（a）得：

$$n=\frac{q}{p}=\frac{M}{\lambda-\kappa}[e_{a0}-e-\lambda\ln p] \qquad (1\text{-}D25)$$

这就是物态边界面的公式。

同理，如果我们沿着CSL线移动，则因CSL线公式为

$$e=e_{am}-\lambda\ln p$$

故当$p=p_x$时

$$e_\lambda=e_{am}-\lambda\ln p_x$$

因p_x、e_x点也必在一根回弹曲线上，即：

$$e_\lambda=e_\kappa-\kappa\ln p_\lambda$$

故

$$e_\kappa=e_{am}-(\lambda-\kappa)\ln p_\lambda$$

代入式（1-D17）得：

$$e=e_{am}-(\lambda-\kappa)\ln p_x-\kappa\ln p \qquad (b)$$

从式（1－D24）得：

$$\ln p_x=\frac{q}{Mp}+\ln p-1$$

代入式（b）得：

$$n=\frac{q}{p}=\frac{M}{\lambda-\kappa}[e_{am}+\lambda-\kappa-e-\lambda\ln p] \qquad (1\text{-}D26)$$

这是“物态边界面”公式的又一种形式。

因为式（1-D25）及式（1-D26）两个公式必须相等，故e_{am}必须满足下列条件，即：

$$e_{am}=e_{a0}-\lambda+\kappa \qquad (1\text{-}D27)$$

（五）应力-应变关系公式

将式（1-D25）微分，可得：

$$\delta e=(-)\left[\frac{\lambda-\kappa}{Mp}(\delta q-n\delta p)+\frac{\lambda}{p}\delta p\right]$$

$$\delta\varepsilon_v=\frac{\lambda}{(1+e)}\left[\frac{1-\kappa/\lambda}{Mp}(\delta q-n\delta p)+\frac{\delta p}{p}\right] \qquad (1\text{-}D28)$$

再用能量方程式（1-D15）可得：

$$\delta\bar{\varepsilon}=\frac{(\lambda-\kappa)}{(1+e)Mp}\left[\frac{\delta q}{M-n}+\delta p\right] \qquad (1\text{-}D29)$$

式（1-D28）和（1-D29）就是应力-应变增量关系公式。也可以将其写成另一种形式如

下：

因

$$n=\frac{q}{p}$$

$$\delta q=p\delta n+n\delta p$$

故将此代入式（1-D28）和（1-D29）可得：

$$\delta\varepsilon_v=\frac{1}{1+e}\left[\frac{\lambda-\varkappa}{M}\delta n+\lambda\frac{\delta p}{p}\right] \qquad (1\text{-}D30)$$

$$\delta\bar{\varepsilon}=\frac{\lambda-\varkappa}{1+e}\left[\frac{p\delta n+M\delta p}{Mp(M-n)}\right] \qquad (1\text{-}D31)$$

又因从式（1-D19）可得：

$$\frac{\delta q}{\delta p}=-M+n$$

再利用正交条件[式（1-D18）]，从上式可得：

$$\Psi=\frac{\delta\varepsilon_v^p}{\delta\bar{\varepsilon}}=(-)\frac{\delta q}{\delta p}=M-n \qquad (1\text{-}D32)$$

故将Ψ代入式（1-D30）和（1-D31），可得：

$$\delta\varepsilon_v=\frac{\lambda}{1+e}\left[\frac{\delta p}{p}+\left(1-\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\frac{\delta n}{\Psi+n}\right] \qquad (1\text{-}D33)$$

$$\delta\bar{\varepsilon}=\frac{\lambda-\varkappa}{1+e}\left[\frac{\delta p}{p}+\frac{\delta n}{\Psi+n}\right]\frac{1}{\Psi} \qquad (1\text{-}D34)$$

从式（1-D28）、（1-D29）或（1-D30）、（1-D31）或（1-D32）、(1-D33)、（1-D34）可以看出，只要通过简单的常规三轴试验测定λ、$\varkappa$、M三个土壤常数，就可以应用这个模型的理论来确定土的弹塑性应力-应变关系。这是剑桥模型的优点。但是，这种优点是依靠前文所述及的、在推导中所作的种种补充或简化假定而获得的。因此，其可靠性需要进一步验证。

（六）修正剑桥模型

实践证明，如果$n=q/p$值较小，根据上节剑桥模型式（1-D28）、（1-D29）或（1-D30）、（1-D31）或（1-D33）、（1-D34）所得的计算应变值，一般偏大。如果n值较大，计算值与实测值就很接近。另外，计算的静止侧压力值也偏大。为了改进原来的模型，曾建议了一个“修正剑桥模型”。在此模型中建议用：

$$\delta W_p=p[(\delta\varepsilon_v^p)^2+(M\cdot\delta\bar{\varepsilon}^p)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (1\text{-}D35)$$

以代替剑桥模型中的假定[式（1-D14）]：

$$\delta W_p=Mp\delta\bar{\varepsilon}$$

根据这种修正推得的屈服轨迹公式为：

$$\frac{p}{p_0}=\frac{M^2}{M^2+n^2} \qquad (1\text{-}D36)$$

物态边界面公式为：

$$\frac{e_{a0}-e}{\lambda\cdot\ln p}=\left(\frac{M^2}{M^2+n^2}\right)^{\left(1-\frac{\varkappa}{\lambda}\right)} \qquad (1\text{-}D37)$$

$$\Psi=\frac{\delta\varepsilon_v^p}{\delta\varepsilon}=\frac{M^2-n^2}{2n} \qquad (1\text{-}D38)$$

$$\delta\varepsilon_v^p=\frac{\lambda-\varkappa}{1+e}\left(\frac{2n\delta n}{M^2+n^2}+\frac{\delta p}{p}\right) \qquad (1\text{-}D39)$$

$$\delta\varepsilon_v=\frac{1}{1+e}\left[(\lambda-\varkappa)\frac{2n\delta n}{M^2+n^2}+\lambda\frac{\delta p}{p}\right] \qquad (1\text{-}D40)$$

$$\delta\bar{\varepsilon}=\delta\bar{\varepsilon}^p=\frac{\lambda-\varkappa}{1+e}\left(\frac{2n}{M^2-n^2}\right)\left(\frac{2n\delta n}{M^2+n^2}+\frac{\delta p}{p}\right) \qquad (1\text{-}D41)$$

据与实测结果比较，修正剑桥模型的计算值一般过小，但总的情况比剑桥模型好些。

（七）在物态边界面底下的塑性剪切变形

上文假定，在物态边界面底下各点在状态变动时不发生塑性变形。试验证明，这一假定只能近似地用于体积应变，因为通常还是能发生塑性剪切应变的。为了计算这个附加的塑性剪切应变$\bar{\varepsilon}_c^p$值，可假定经过物态边界面上任何一点X（图1-30）或其在$p-q$平面上的投影点X'（图1-32）有两道屈服轨迹。一道是前文所提到的体积屈服轨迹$A_1'X'F_1'$，一道是与p轴平行的$X'D_1'E_1'$直线，后者是新假设的剪切屈服轨迹。现在假定当应力路

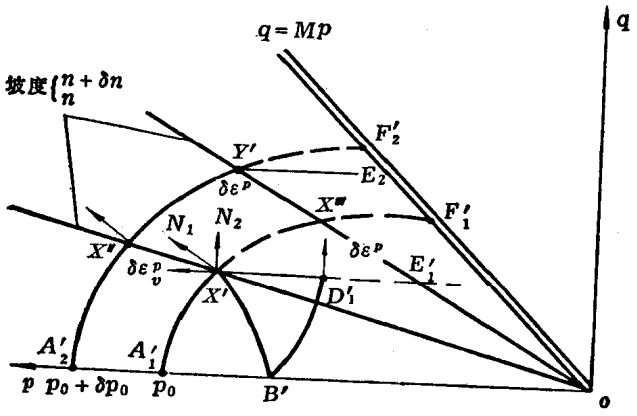


图 1-32　屈服轨迹

线为$B'D_1'$或$B'X'$时发生的塑性剪切变形为：

$$\bar{\varepsilon}_c^p=f(n) \qquad (1\text{-}D42)$$

其中$n=q/p$指的是OX'线的坡度。因此，当土体在X'点或D'，点处受到δp、δq的应力增量时，就会发生塑性剪切应变增量：

$$\delta\bar{\varepsilon}_c^p=\frac{\partial f}{\partial n}\delta n \qquad (1\text{-}D43)$$

根据这个假定，问题的关键就在通过试验去找出式（1-D42）的函数f来。f应该通过沿着体积屈服轨迹$A'F'$加荷的试验来求取。因为在这样的试验中，$\varepsilon_v^p=0$，而且只有$\bar{\varepsilon}_c^p$而没有与ε_c^p相应的$\bar{\varepsilon}^p$发生。土样应该用正常固结粘土（即超固结比$\overline{n}=1$）来进行。通过这种试验，可以求得$A_1'X'F'$线上任何一点X'（该点与原点o相连的oX'线坡度等于n）

处的 $\bar{\varepsilon}^{p}_{c}$ 值。将 n 与 $\bar{\varepsilon}^{p}_{c}$ 的试验实测值绘成图1-33之 $n-\bar{\varepsilon}^{p}_{c}$ 曲线，就可求得 $\frac{\partial f}{\partial n}$ 与 $\delta\bar{\varepsilon}^{p}_{c}$ 值，参见式（1-D43）。试验也可用超固结比例如 $\overline{n}=1.2$、1.4、1.8来进行。试验结果，见图1-34中的几根曲线。但如利用 D_1' 点的测验数据 $\bar{\varepsilon}^{p}_{c}$ 值时，其相应的 n 值应采用通过 D_1' 点的水平线与体积屈服轨迹 $A_1'X'F_1'$ 相交的 X' 点的 n 值，即用 OX' 的坡度，而不是 OD_1' 线的坡度。

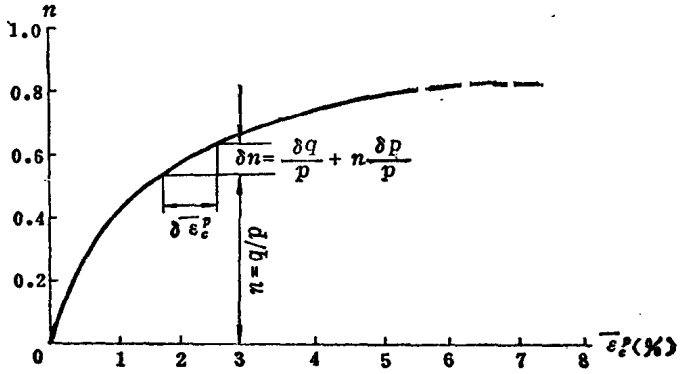


图 1-33 $n-\bar{\varepsilon}^{p}_{c}$ 曲线

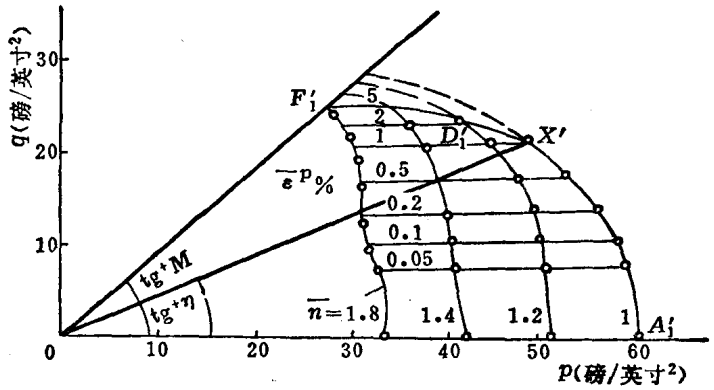


图 1-34 体积屈服轨迹

必须指出，式（1-D43）对于应力增量方向在 $X''X'F_1'$ 这个角的范围内时，是完全适用的。它用于 X' 点，也适用于 D_1' 点，已如上述。如应力增量方向在 $X_1'E_1'$ 线与经 X' 点但与 $A_1'X'F_1'$ 体积屈服轨迹相切的向上切线范围之内，那末这个公式所给的值，是塑性剪切应变总值。如应力增量方向在这个向上切线与 $X'X''$ 之间，那末塑性应变总值还应加上 $\delta\bar{\varepsilon}^{p}$ 与 $\delta\varepsilon^{p}_{v}$ 两项，它们是由于体积屈服轨迹由 $A_1'X'F_1'$ 变至 $A_2'Y'F_2'$ 而发生的。这时，总的塑性剪切应变为 $\delta\bar{\varepsilon}^{p}_{c}+\delta\bar{\varepsilon}^{p}$，塑性体积应变为 $\delta\varepsilon^{p}_{v}$。$\delta\bar{\varepsilon}^{p}$ 与 $\delta\varepsilon^{p}_{v}$，可由式（1-$D$30）、（1-$D$31）或式（1-$D$39）、（1-$D$41）计算。如果应力增量方向在 $X'X''$ 与经 X' 点的向下切线之间，那末 $\delta\bar{\varepsilon}^{p}_{c}=0$，而只有 $\delta\bar{\varepsilon}^{p}$ 与 $\delta\varepsilon^{p}_{v}$ 两种塑性应变；如果应力增量方向在 $A_1'X'E_1'$ 范围内，则只发生弹性应变。

五、K W 模 型[18]

科斯拉与吴用砂土作了静力与动力三轴试验（$\sigma_2=\sigma_3$）。根据试验结果，提出了一个帽子模型。他们建议破坏条件采用特洛克建议的广义密色斯破坏条件，即：

$$f^k=\sqrt{J_2}-\alpha I_1=0 \qquad (1\text{-}E1)$$

如果写成 p、q 函数，则为：

$$f^k=q-Mp=0 \qquad (1\text{-}E2)$$

其中 $M=\sqrt{3}\ \alpha$。这和剑桥模型是相同的。

他们采用相适应的流动规则，即 $f=g$，故：

$$\left.\begin{aligned}\delta\varepsilon_v^p&=d\lambda\frac{\partial f}{\partial p}\\ \delta\bar{\varepsilon}^p&=d\lambda\frac{\partial f}{\partial q}\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}E3)$$

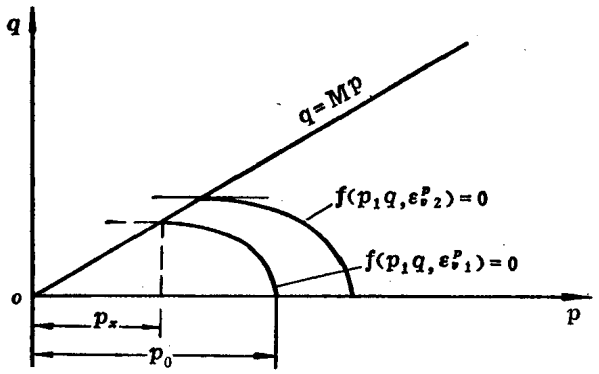


图 1-35 椭圆形帽子

其中硬化规律与塑性势函数采用：

$$f(p,\ q,\ \varepsilon_v^p)=\left(\frac{p-p_x}{p_0-p_x}\right)^2+\left(\frac{q}{Mp_x}\right)^2-1=0, \qquad (1\text{-}E4)$$

这是一个椭圆形的帽子（图1-35），其中 p_x 与 p_0 分别代表椭圆中心与右端的 p 值，都是 ε_v^p 的函数。它们之间的关系为：

$$p_x=p_0-R(Mp_x) \qquad (1\text{-}E5)$$

式中 R——椭圆长轴与短轴之比。

从三向等固结（即 $p=\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$）试验，可以求得 $p_0\sim\varepsilon_v^p$ 的关系曲线，如图1-36。再从常规三轴压缩（$\sigma_2=\sigma_3$）试验，可以求得在破坏状态，即 $p=p_x$ 时的 ε_v^p 值，从而建立 p_λ-ε_v^p 曲线，如图1-37。从这两根由实验资料得来的曲线，就可以查得相当于某一 ε_v^p 定值的 p_0 和 p_x 值，以此代入式（1-E4），就得相当于该 ε_v^p 值的 p-q 曲线，或屈服帽子。由此可见，通过 p-q 平面上任何一点（p，q），就必有一个相当于某一 ε_v^p 定值的屈服帽子通过它。

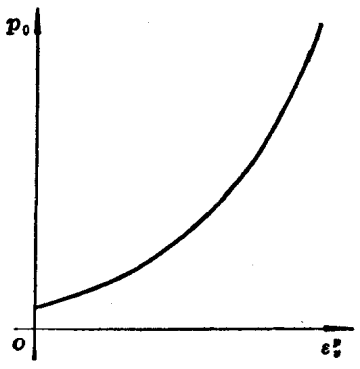


图 1-36 p_0-ε_v^p 曲线

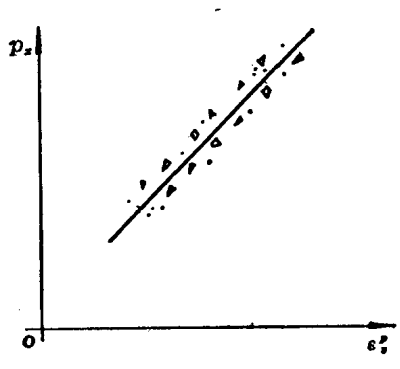


图 1-37 p_x-ε_v^p 曲线

因为

$$d\lambda=\frac{df}{F'_v\cdot\dfrac{\partial f}{\partial p}}$$

$$F'_v=\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_v^p}=\frac{\partial f}{\partial p_0}\frac{\partial p_0}{\delta\varepsilon_v^p}+\frac{\partial f}{\partial p_x}\frac{\partial p_x}{\partial \varepsilon_v^p}$$

从p_0-ε_v^p和p_x-ε_v^p两曲线，可以分别求得相当于p_0和p_x某值的$\frac{\partial p_0}{\partial \varepsilon_v^p}$和$\frac{\partial p_x}{\delta\varepsilon_v^p}$值。由此，可以确定$F'_v$值，代入式（1-$E$3），可求得：

$$\delta\varepsilon_v^p=\frac{df}{F'_v} \qquad (1\text{-}E6)$$

及

$$\delta\bar{\varepsilon}^p=\frac{df}{F'_v\dfrac{\partial f}{\partial p}}\cdot\frac{\partial f}{\partial q} \qquad (1\text{-}E7)$$

六、L D 模 型[19,20,28]

赖特与邓肯二人曾对一种密砂（e=0.57）和一种松砂（e=0.78）进行了真三轴压缩（$\sigma_1\neq\sigma_2\neq\sigma_3$）试验。另外，他们也整理了郭与斯各特（Ko与Scott）对中密渥太华标准砂（e=0.52）和中松标准砂（e=0.61）进行的真三轴压缩试验的资料。他们研究的结果，证明砂的破坏条件不受第二主应力σ_2或比率b（$0\leqslant b\leqslant 1$）即

$$b=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3} \qquad (1\text{-}F1)$$

的影响。赖特最后建议的破坏条件为：

$$f^*=(I_1^3/I_3-27)(I_1/p_a)^m=n_f \qquad (1\text{-}F2)$$

这个函数代表一个锥体形式，如图（1-38）。式（1-F2）中的m及n_f为试验常数，p_a为大气压力。

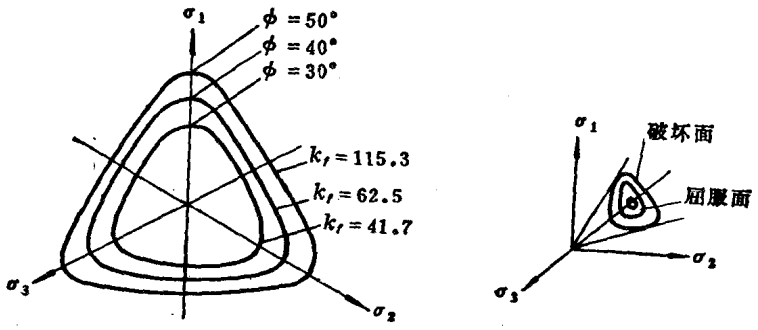


图 1-38 赖特的破坏条件

对于屈服函数，赖特与邓肯建议采用：

$$f_p=(I_1^3/I_3-27)(I_1/p_a)^m=H(W_p) \qquad (1\text{-}F3)$$

这就是说，他们采用$W_p=\int\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}^p$为硬化参数，并假定屈服面与破坏面形式相似，前者并以后者为它的极限。他们分析了三轴压缩试验资料求得：

$$H(W_p)=ae^{-bW_p}\left(\frac{W_p}{p_a}\right)^{1/n} \qquad (1\text{-}F4)$$

其中a、b、n都是随σ_3而异的试验系数。$e=2.7183$。从f_p-W_p/p_a曲线（σ_3=常数），可以从下式计算n、a、b值。

$$n=\frac{\log\left(\frac{W_{p\ peak}}{W_{p60}}\right)-\left(1-\frac{W_{p60}}{W_{p\ peak}}\right)\log e}{\log\left(\frac{n_f}{f_{p60}}\right)} \qquad (1\text{-}F5)$$

$$a=n_f\left(\frac{ep_a}{W_{p\ peak}}\right)^{1/n} \qquad (1\text{-}F6)$$

$$b=\frac{1}{nW_{p\ peak}} \qquad (1\text{-}F7)$$

$W_{p\ peak}$是f_p-W_p/p_a曲线上峰值的W_p值，W_{p60}是相当于n_f的60%的f_p值的W_p值。

$W_{p\ peak}$与σ_3的关系据资料整理结果可写成

$$W_{p\ peak}=Pp_a\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^e \qquad (1\text{-}F8)$$

式中 P、e——试验常数。

n与σ_3的关系也可整理成：

$$n=\alpha+\beta\frac{\sigma_3}{p_a} \qquad (1\text{-}F9)$$

式中 α、β——试验常数。

与f_p屈服面相当的塑性势面g_p，假定与f_p不同；因此，在计算塑性应变ε_{ij}^p时，采用了不相适应的流动规则。据研究，g_p的数学表达式应采用：

$$g_r=I_1^3-\left[27+n_g\left(\frac{p_a}{I_1}\right)^m\right]I_3 \qquad (1\text{-}F10)$$

式中

$$n_g=\frac{3(1+\nu^p)I_1^2-27\sigma_3(\sigma_1+\nu^p\sigma_3)}{\left(\frac{p_a}{I_1}\right)^m\left[\sigma_3(\sigma_1+\nu^p\sigma_3)-\frac{m(1+\nu^p)I_1^2}{f_p(p_a/I_1)^m+27}\right]} \qquad (1\text{-}F11)$$

其中

$$\nu^p=(-)\frac{\Delta\varepsilon_3^p}{\Delta\varepsilon_1^p} \qquad (1\text{-}F12)$$

整理试验资料的结果，可以求得下列简易关系式：

$$n_g=s\cdot f_p+R\sqrt{\frac{\sigma_3}{p_a}}+t \qquad (1\text{-}F13)$$

式中 s、R、t——试验常数。

赖特在1977年发表的文章[28]中，建议对于塑性应变，除上述由屈服面f_p计算所得的ε_{ij}^p部分外，另再加上ε_{ij}^c一部分。ε_{ij}^c这部分塑性变形是由加在上述f_p锥形屈服面上的一个球面帽子屈服面f_c引起的。这等于说，通过应力空间中任何一点有两个屈服面：一个是锥形屈服面f_p，另一个是球形屈服面f_c。f_c的数学表达式为：

$$f_c=I_1^2+2I_2=H_c(W_c) \qquad (1\text{-}F14)$$

式中 $$W_c=\int \sigma_{ij}\cdot\delta\varepsilon_{ij}^c$$

从等向固结试验，可以求得函数$H_c(W_c)$与f_c之关系如下：

$$H_c(W_c)=p_a^2\left(\frac{W_c}{cp_a}\right)^{\frac{1}{k}} \qquad (1\text{-}F15)$$

在计算$\delta\varepsilon_{ij}^c$这部分塑性应变时，采用了相适应的流动规则，即$f_c=g_c$。根据上述理论，可见总应变ε_{ij}应包括三部分，即弹性应变ε_{ij}^e、塑性应变ε_{ij}^p和塑性应变ε_{ij}^c，亦即：

$$\delta\varepsilon_{ij}=\delta\varepsilon_{ij}^e+\delta\varepsilon_{ij}^c+\delta\varepsilon_{ij}^p \qquad (1\text{-}F16)$$

七、罗威剪胀模型[26、27]

罗威假定密砂滑动的情况，可以用上下两块刚性楔体在其分隔面上滑动来模拟。分隔面的形式，可以假定为如图1-39的锯齿形。滑动时锯齿的方向如果偏离了分隔面，就将引起体积变化。

假定图1-39代表一个圆柱形土体模型的垂直断面，h指圆柱高度，A指圆柱的剖面积。σ_1代表x向即竖向应力，$\sigma_2=\sigma_3$代表水平径向应力。α为分隔面与最小主应力σ_2、σ_3方向间的夹角。β为锯齿面与最大主应力σ_1方向间的夹角。因为主应力σ_1与σ_2、σ_3是相互垂直的，故锯齿面和分隔面之间形成的偏差θ，应满足下列条件：

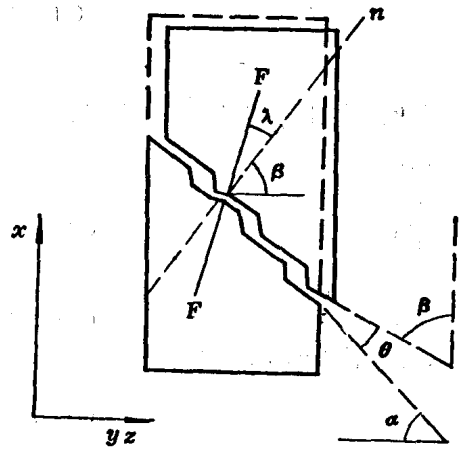


图 1-39 锯齿形分隔面

$$\theta=\alpha+\beta-\frac{1}{2}\pi \qquad (1\text{-}G1)$$

图1-39中的θ是正值，滑动将引起剪胀，即体积增大。

（一）力F是假定通过锯齿面传递的。F_v与F_h代表F的分量。图1-39中的分隔面的水平投影面积为A，垂直投影面积为$A\tan\alpha$，故：

$$F_v=\sigma_1 A,\quad F_h=\sigma_3 A\tan\alpha \qquad (1\text{-}G2)$$

图中的n线与锯齿面垂直，它的水平倾角是β。如果F与n线的夹角为λ，那末F的水平倾角为$\beta+\lambda$，故力的平衡条件要求：

$$\tan(\beta+\lambda)=\frac{F_v}{F_h}=\frac{\sigma_1}{\sigma_3\tan\alpha}$$

如令R为应力比，则：

$$R=\frac{\sigma_1}{\sigma_3}=\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\lambda) \qquad (1\text{-}G3)$$

这就是平衡条件。

（二）其次，研究模型变形的几何相容条件。令Δu代表上下两楔体沿着分隔面上的锯齿滑动而形成的相对位移，Δu与锯齿面平行，与分隔面形成一偏差角θ，因此，滑动后

裂缝开展的距离为$\Delta u\sin\theta$，如图1-40。因为分隔面的面积为$A/\cos\alpha$，故因裂缝开展引起的体积变化（膨胀为负值）为：

$$\Delta V=(-)\frac{A\cdot\Delta u\sin\theta}{\cos\alpha} \qquad (1\text{-}G4)$$

根据式（1-G1）有：

$$\Delta V=A\Delta u(\cos\beta-\tan\alpha\sin\beta) \qquad (1\text{-}G5)$$

现在滑动时上面的楔体（水平面积为A）下沉的距离为$\Delta u\cos\beta$，故使圆柱产生的竖向体积变化（体积缩小为正）为：

$$\Delta V_v=A\cdot\Delta u\cos\beta \qquad (1\text{-}G6)$$

滑动时上面楔体也有水平方向相对位移，这将引起水平向的体积变化ΔV_h。因为：

$$\Delta V=\Delta V_v+\Delta V_h \qquad (1\text{-}G7)$$

故由式（1-G5）和（1-G6）得：

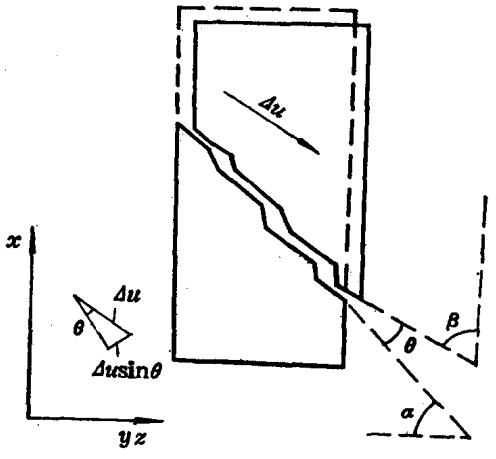


图 1-40 裂缝开展的距离

$$\Delta V_h=(-)A\Delta u\tan\alpha\sin\beta \qquad (1\text{-}G8)$$

从式（1-G6）和（1-G8）可得：

$$\frac{(-)\Delta V_h}{\Delta V_v}=\tan\alpha\tan\beta \qquad (1\text{-}G9)$$

这个公式说明它和Δu的大小无关，并且也可以证明它和分隔面数量的多寡无关。

因为应变增量与体积变化之间存在着下列关系，即：

$$\delta\varepsilon_1^p=\frac{\Delta V_v}{V} \qquad (1\text{-}G10)$$

$$\delta\varepsilon_1^p+\delta\varepsilon_2^p+\delta\varepsilon_3^p=\frac{\Delta V}{V}$$

$$\delta\varepsilon_2^p+\delta\varepsilon_3^p=\frac{\Delta V_h}{V} \qquad (1\text{-}G11)$$

故将式（1-G10）和（1-G11）代入式（1-G9），可得：

$$D=\frac{\delta\varepsilon_2^p+\delta\varepsilon_3^p}{(-)\delta\varepsilon_1^p}=\frac{(-)\Delta V_h}{\Delta V_v}=\tan\alpha\tan\beta \qquad (1\text{-}G12)$$

这就是变形相容条件。

（三）从平衡条件式（1-G3）和变形相容条件式（1-G12）可得：

$$K_u=\frac{R}{D}=\frac{(-)\sigma_1\delta\varepsilon_1^p}{\sigma_3(\delta\varepsilon_2^p+\delta\varepsilon_3^p)}=-\frac{\tan(\beta+\lambda)}{\tan\beta} \qquad (1\text{-}G13)$$

这个比率K_u代表σ_1与σ_3所做的功之比。现因：

$$dW=\sigma_1\delta\varepsilon_1^p+2\sigma_3\delta\varepsilon_3^p=\sigma_1\delta\varepsilon_1^p\left[1+\frac{1}{K_u}\right]$$

故当dW＝最小时，dK_u＝最大。

由

$$\frac{\partial K_u}{\partial\beta}=0$$

可得：

$$\beta=\frac{\pi}{4}-\frac{\lambda}{2} \qquad (1\text{-}G14)$$

又因λ的极限值为ϕ，即：

$$\lambda_{ext}=\phi \qquad (1\text{-}G15)$$

故β极限值为：

$$\beta_{ext}=\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2} \qquad (1\text{-}G16)$$

代入式（1-G13）可得：

$$K_u=\frac{(-)\sigma_1\delta\varepsilon_1^p}{\sigma_3(\delta\varepsilon_2^p+\delta\varepsilon_3^p)}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right) \qquad (1\text{-}G17)$$

因

$$\delta\varepsilon_v^p=\delta\varepsilon_1^p+\delta\varepsilon_2^p+\delta\varepsilon_3^p$$

$$\therefore \quad \left(1-\frac{\delta\varepsilon_v^p}{\delta\varepsilon_1^p}\right)=\frac{-(\delta\varepsilon_2^p+\delta\varepsilon_3^p)}{\delta\varepsilon_1^p}$$

$$\therefore \quad K_u=\frac{\sigma_1}{\sigma_3\left(1-\frac{\delta\varepsilon_v^p}{\delta\varepsilon_1^p}\right)}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right) \qquad (1\text{-}G18)$$

式（1-G18）代表罗威的剪胀理论。

这个剪胀方程$R=D\cdot K_u$，实际上就代表增量塑性理论中的一条流动规则。例如在平面应变状态，式（1-G18）就可写成：

$$\frac{\delta\varepsilon_3^p}{\delta\varepsilon_1^p}=(-)\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot\frac{1}{K_u} \qquad (1\text{-}G19)$$

比较增量塑性理论中的

$$\delta\varepsilon_{ij}^p=\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (1\text{-}G20)$$

式（1-G19）和（1-G20）中的塑性势函数g等于：

$$g=\frac{\sigma_1^{K_u}}{\sigma_3} \qquad (1\text{-}G21)$$

由式（1-G21）和（1-G20）可得：

$$\delta\varepsilon_1^p=\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_1}=\lambda K_u\frac{\sigma_1^{K_u-1}}{\sigma_3}$$

$$\delta\varepsilon_3^p=\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_3}=-\lambda\frac{\sigma_1^{K_u}}{\sigma_3^2}$$

$$\frac{\delta\varepsilon_3^p}{\delta\varepsilon_1^p}=(-)\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot\frac{1}{K_u}$$

这也就是式（1-G19）。

罗威的理论只给出了体积应变ε_v^p与轴向应变ε_1^p间的比率，而不能得出ε_v^p与ε_1^p的数值。但是，从常规三轴试验可以得到σ_1/σ_3（σ_3＝常数）与ε_1的曲线。从这曲线可以得$\delta\sigma_1$和$\delta\sigma_3$引起的$\delta\varepsilon_1^p$值。将这个$\delta\varepsilon_1^p$值代入罗威的剪胀方程式（1-G18），就可求得$\delta\varepsilon_v^p$或$\delta\varepsilon_3^p$值。

结　　论

土的应力-应变关系是非常复杂的，要找出一个数学模型来全面地、正确地表达土的这种特性，是难于想象的。因此，作一定程度的简化是必要的。在选择或建立模型时，下列几条原则是可供参考的。（1）任何一个模型，只有通过实践的验证，也就是计算值与实测值的比较，才能确定它的可靠性。例如，模型是通过某种实验的试验结果推出来的，可以进行其它种试验来验证它的可靠性，也可以通过对某项工程的计算值与实测值的比较来进行验证。（2）模型应该尽量简化，最有用的模型是能解决实际问题的最简单的模型。举例来说，如果应用鲍辛涅斯克（Boussinesq）解答和形变模量估算出来的地基沉降量的精度，能满足当地工程的需要，就无需用本文介绍的弹塑性模型来求更精确的解答了。（3）复杂的工程问题，应该采用不同的模型来进行反复的比较。（4）模型应该有针对性，不同的土和不同的工程问题，应该选择不同的、最合适的模型。（5）可以把经过实践验证的、但比较复杂的弹塑性模型当作衡量标准，在与其计算结果相比较的基础上，去创建便于应用的简化模型，或去鉴定旧的简化计算方法的可靠性。

任何模型都有它的局限性。例如，过去利用$E-\nu$弹性模型和$K-G$弹性模型，虽然对坝和地基的应力应变分析都曾作出了一些有意义的贡献。但它们都忽视了土的剪胀性和应力途径的影响，因此，其计算成果的正确性尚待论证。

剑桥模型在验证它本身的正确性方面，曾做了一些工作。除了它只适用于只有剪缩而没有剪胀的正常固结粘土与松砂外，试验结果证明它的应变增量计算值在$n=q/p$较小的场合，常偏小。对于预测的K_0（即静止侧压力系数）值，却偏大。其它塑性模型在验证方面做的工作也极少，对它们的适用范围和可靠程度也尚待进一步的深入研究。

今后除了选择模型本身的研究工作外，如何将模型纳入计算程序，以及如何比较各种模型的计算结果等方面，都有大量的科研工作需要做。特别应该提到的是，试验工作应大力开展。不但应该设置新的试验设备，如真三轴试验仪、平面应变试验仪、空心圆柱扭转压缩试验仪、离心机模型试验设备，等等，而且对常规的三轴试验设备，也应提高它的应力水平和试样尺寸。使目前已提到国民经济建设日程上来的两、三百米高的土石坝的设计问题，能得到合理的和可靠的解决。

附录1　张　量　符　号

张量符号意义

i，j，$k=1$，2，3

σ_{ij}指σ_{11}，σ_{22}，σ_{33}，σ_{12}，σ_{23}，σ_{31}，σ_{21}，σ_{32}，σ_{13}中的任何一个。

$\sigma_{ii}=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$

$$\sigma_{ij}\sigma_{ij}=\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2+\sigma_{21}^2+\sigma_{32}^2+\sigma_{13}^2$$
$$=\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{33}^2+2[\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2]$$

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}=\sigma_{11}\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\varepsilon_{22}+\sigma_{33}\varepsilon_{33}+2[\sigma_{23}\varepsilon_{23}+\sigma_{31}\varepsilon_{31}+\sigma_{12}\varepsilon_{12}]$$

$$\sigma_{ij}\sigma_{jk}=\sigma_{i1}\sigma_{1k}+\sigma_{i2}\sigma_{2k}+\sigma_{i3}\sigma_{3k}$$

$$\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}=\sigma_{11}^3+\sigma_{22}^3+\sigma_{33}^3+3\sigma_{11}(\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2)+3\sigma_{22}(\sigma_{21}^2+\sigma_{23}^2)$$
$$+3\sigma_{33}(\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2)+6\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31}$$

附录2　八面体应力

通过土体中的任何一点（x，y，z）作一无限小的立方单元。作用在这单元六个面上的应力分量σ_x，σ_y，σ_z，$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{xz}=\tau_{zx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，就代表该点处的应力状态。在本文中法向应力σ以压应力为正，剪应力τ以图1-2-1所示方向为正。

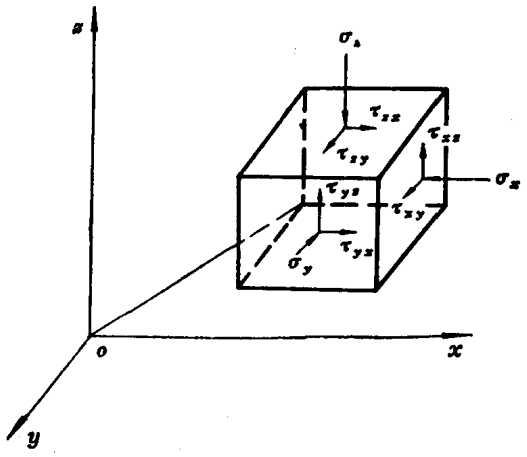


图 1-2-1　应力及其方向

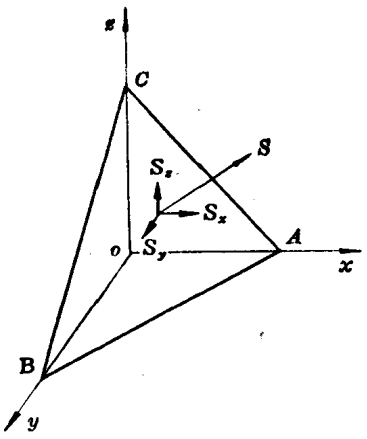


图 1-2-2　作用在ABC面上的力

现试找此立方体中任何一个斜面ABC上的法向应力σ_n。如以l、m、n表示此平面法线的方向余弦，以a代表ABC的面积，那末OBC、OCA和OAB三个投影面积分别为la、ma和na。作用在图1-2-2中这个ABC平面上的应力矢量S的x、y、z方向分量将为：

$$\left.\begin{aligned}S_x&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\S_y&=\tau_{yx}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n\\S_z&=\tau_{zx}l+\tau_{zy}m+\sigma_z n\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}2\text{-}1)$$

作用在ABC面上法向应力将为：

$$\sigma_n=S_{xl}+S_y m+S_z n$$

即
$$\sigma_n=\sigma_x l^2+\sigma_y m^2+\sigma_z n^2+2\tau_{yz}mn+2\tau_{xz}ln+2\tau_{xy}lm\qquad(1\text{-}2\text{-}2)$$

假定通过土体中O点的坐标轴x、y、z分别与该点的主应力轴σ_1、σ_2、σ_3重合（图1-2-3），那么这三轴所定出的空间，同时也是主应力空间。如图中的OQ线与三个轴所形成的夹角都相等，即：

$$\beta=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=54°44'$$

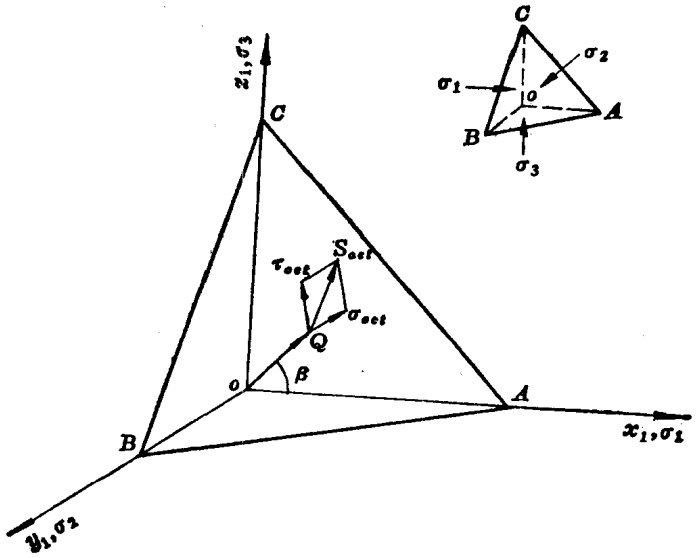


图 1-2-3　空间对角线的方向

这根OQ线就称为**空间对角线**。与此线相垂直的ABC平面，称为π平面。在O点周围的 8 个象限内，可以画八个这样的平面，形成一个八面体。因此象ABC这样的π平面，也就称为八面体平面。作用在这个平面上的应力就称八面体应力。假定当O点处的主 应 力 为 σ_1、σ_2、σ_3时，$ABC\pi$平面所受的总应力为S_{oct}。根据式（1-2-1），可得S_{oct}在x、y、z 三个方向的分力分别为：

$$S_{octx}=\sigma_1/\sqrt{3},\quad S_{octy}=\sigma_2/\sqrt{3},\quad S_{octz}=\sigma_3/\sqrt{3}$$

因

$$(S_{oct})^2=(S_{octx})^2+(S_{octy})^2+(S_{octz})^2$$

故

$$S_{oct}^2=\frac{1}{3}(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2) \qquad (1\text{-}2\text{-}3)$$

根据式（1-2-2）得S_{oct}在$ABC\pi$平面上的法向分力σ_{oct}：

$$\sigma_{oct}=\sigma_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\sigma_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\sigma_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

即

$$\sigma_{oct}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}=I_1/3 \qquad (1\text{-}2\text{-}4)$$

S_{oct}在$ABC\pi$平面上的切向分力τ_{oct}为：

$$\tau_{oct}^2=S_{oct}^2-\sigma_{oct}^2$$

由式（1-2-3）和（1-2-4）可得：

$$\tau_{oct}=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$=\frac{1}{3}(s_1^2+s_2^2+s_3^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}J_2} \qquad (1\text{-}2\text{-}5)$$

为了使用方便，我们将引进 p、q 两个新版符号，其中：

$$p=\sigma_{oct}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}=I_1/3 \tag{1-2-6}$$

$$q=\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{oct}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3J_2} \tag{1-2-7}$$

p 与 σ_{oct} 称为八面体法向应力；q 与 τ_{oct} 称为八面体切向应力。

上面研究的是作用在 x、y、z 坐标轴所确定的物质空间的八面体平面上的应力。下面将研究在 σ_1、σ_2、σ_3 三个主应力轴所确定的主应力空间中任何一点 P（σ_1，σ_2，σ_3）至原点 O 在沿空间对角线 OQ 方向的分量 $\overline{OQ}$ 和在 P 点的 π 平面上的分量 $\overline{PQ}$ 与八面体应力 σ_{oct}、τ_{oct} 或 p、q 间的关系。

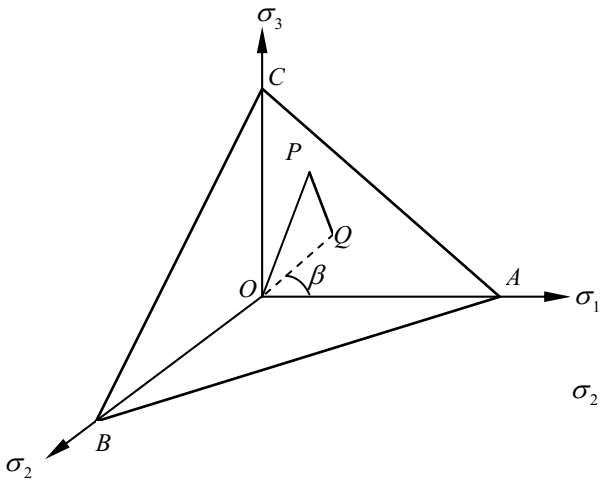


图 1-2-4 OP 在 π 平面和空间对角线上的分量

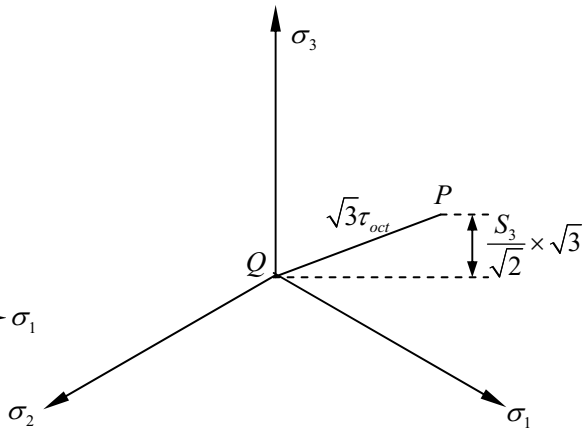


图 1-2-5　沿 σ_3 轴方向的分力

在图 1-2-4 中：

$$\overline{OP}=(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)^{1/2}=\sqrt{3}S_{oct} \tag{1-2-8}$$

因为任何平面的方程均可写作：

$$lx+my+nz=R$$

ABC π 平面的 $l:m:n=1/\sqrt{3}:1/\sqrt{3}:1/\sqrt{3}$，故一般 π 平面的方程式为：

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=\sqrt{3}R \tag{1-2-9}$$

由上式可见，在同一 π 平面上的各点的 $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$ 值是相等的。现在的 π 平面与 σ_1，σ_2，σ_3 三个主应力轴相交于 A、B、C 三点：

$$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{3}R$$

$$\overline{OQ}=\overline{OA}\cos\beta=R$$

由式（1-2-9）可得：

$$\overline{OQ}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} \tag{1-2-10}$$

前已证明：

$$p=\sigma_{oct}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}=I_1/3$$

故
$$\overline{OQ}=\sqrt{3}\,p=\sqrt{3}\,\sigma_{oct}=I_1/\sqrt{3} \qquad (1\text{-}2\text{-}11)$$

另外
$$\overline{PQ}=(\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2)^{1/2}$$

故
$$\overline{PQ}=\frac{1}{\sqrt{3}}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (1\text{-}2\text{-}12)$$

前已证明：

$$q=\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{oct}=\frac{1}{\sqrt{2}}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3J_2}$$

故
$$\overline{PQ}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,q=\sqrt{3}\,\tau_{oct}=\sqrt{2J_2} \qquad (1\text{-}2\text{-}13)$$

式（1-2-8）、（1-2-10）和（1-2-11）证明，图1-2-4中$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$与$\overline{PQ}$三线的方向，分别与图1-2-3中八面体平面上的总应力S_{oct}、八面体法向应力σ_{oct}与八面体切向应力τ_{oct}的方向重合。今按八面体平面上的总应力S_{oct}在σ_1、σ_2、σ_3三轴方向的分力分别为：

$$S_{octx}=\sigma_1/\sqrt{3},\quad S_{octy}=\sigma_2/\sqrt{3},\quad S_{octz}=\sigma_3/\sqrt{3}$$

其中分力$\sigma_3/\sqrt{3}$沿π平面上σ_3轴的投影（图1-2-6）为：

$$\frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_3$$

同理，$\sigma_1/\sqrt{3}$和$\sigma_2/\sqrt{3}$两分力沿π平面上σ_1与σ_2轴的投影分别为$\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1$和$\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_2$。这两个投影在$\pi$平面上沿$\sigma_3$轴方向的分力为$\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1\cos60°$和$\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_2\cos60°$（见图1-2-5），即$\frac{\sqrt{2}}{6}\sigma_1$和$\frac{\sqrt{2}}{6}\sigma_2$。又因这两个分力的方向与$\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_3$相反，故$S_{oct}$在$\pi$平面上沿$\sigma_3$轴方向的总分力为：

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_3-\frac{\sqrt{2}}{6}(\sigma_1+\sigma_2)=\frac{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2}{3\sqrt{2}}=\frac{S_3}{\sqrt{2}}$$

这个总分力应该等于八面体π平面上总剪力τ_{oct}在σ_3轴方向的分力。因此：

$$\tau_{oct}\sin\theta=S_3/\sqrt{2}$$

亦即
$$\sin\theta=\frac{S_3}{\sqrt{2}\,\tau_{oct}},$$

或
$$\theta=\frac{1}{3}\sin^{-1}\left[\frac{-3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}}\right] \qquad (1\text{-}2\text{-}14)$$

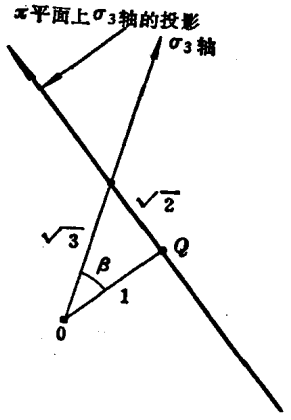


图 1-2-6　π平面上σ_3轴的投影

上式也可写成：

$$\theta=\tan^{-1}\frac{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2}{\sqrt{3}(\sigma_1-\sigma_2)} \qquad (1\text{-}2\text{-}15)$$

为了方便，有时常用劳台系数$\overline{\mu}$代替θ角：

$$\overline{\mu}=\pm\sqrt{3}\tan\theta=\frac{2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2} \qquad (1\text{-}2\text{-}16)$$

通过上述推导，可见表示一点的应力状态，可以用许多不同的方式。除用σ_1、σ_2、σ_3三个独立参数外，也可以用σ_{oct}、τ_{oct}、θ（这等于用极坐标来代替笛卡儿坐标），或p、q、$\overline{\mu}$，或I_1、I_2、I_3，或I_1、J_2、J_3等各组不同的三个独立参数来表示。

另外值得提出的一点是，如果将任何上述一组不变量，例如将I_1、J_2、J_3或p、q、$\overline{\mu}$组成的函数

$$F(I_1,J_2,J_3)=k$$

或

$$F(p,q,\overline{\mu})=k$$

描绘在主应力空间，就可以得到一个面，这个面与任何一个π平面相交，就将形成一个闭合曲线Γ。由于σ_1、σ_2、σ_3在这个函数中是可以互换的，因此，这Γ曲线必然与图1-2-5中的σ_1、σ_2、σ_3轴对称。为此，只要知道Γ线的1/6分段的形式，Γ曲线的全部就可以定出了。

附录3 流 动 规 则

因塑性势函数g可写成式(1-57)或式（1-58），即：

$$g(\sigma_{ij},H)=0，\ 或g(p,q,H)=0$$

故

$$\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}=\frac{\partial g}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial\sigma_{ij}}+\frac{\partial g}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial\sigma_{ij}}$$

$$=\frac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial g}{\partial p}+\frac{3}{\partial q}s_{ij}\frac{\partial g}{\partial q} \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

因

$$s_{ii}=0$$

故

$$\underline{\delta\varepsilon_v^p=\delta\varepsilon_i^p=d\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ii}}=d\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial p}} \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

因

$$\delta e_i^p{}_j=\delta e_i^p{}_j-\frac{1}{3}\delta_{ij}(\delta\varepsilon_k^p{}_k)=d\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{3}\delta_{ij}d\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial p} \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

将（1-3-1）代入（1-3-3）得：

$$\delta e_i^p{}_j=d\lambda\cdot\frac{3}{\partial q}\cdot s_{ij}\frac{\partial g}{\partial q}$$

$$\underline{\delta\bar{\varepsilon}^p=\left(\frac{2}{3}\delta e_i^p{}_j\delta e_i^p{}_j\right)^{\frac{1}{2}}=d\lambda\cdot\frac{\partial g}{\partial q}} \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

附录4 弹塑性模量矩阵$[D_{ep}]$的推导

一、$[D_{ep}]$的普遍公式

$$[D]_{ep}=[D]-\frac{[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]}{A+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}} \qquad (1\text{-}4\text{-}1)$$

$$[D]_{ep}=[D]-\frac{G[X]}{\frac{A}{G}+\Phi} \tag{1-4-2}$$

其中

$$[D]=G\begin{Bmatrix} \alpha & & & & & \\ \beta & \alpha & \text{对} & & & \\ \beta & \beta & \alpha & \text{称} & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \tag{1-4-3}$$

$$\alpha=\frac{K}{G}+\frac{4}{3},\qquad \beta=\frac{K}{G}-\frac{2}{3} \tag{1-4-4}$$

如令

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1&=2\frac{\partial f}{\partial\sigma_x}+\beta\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_x}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_y}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_z}\right)\\ \lambda_2&=2\frac{\partial f}{\partial\sigma_y}+\beta\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_x}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_y}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_z}\right)\\ \lambda_3&=2\frac{\partial f}{\partial\sigma_z}+\beta\left(\frac{\partial f}{\partial\sigma_x}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_y}+\frac{\partial f}{\partial\sigma_z}\right)\\ \lambda_4&=\frac{\partial f}{\partial\tau_{xy}}\\ \lambda_5&=\frac{\partial f}{\partial\tau_{yz}}\\ \lambda_6&=\frac{\partial f}{\partial\tau_{zx}} \end{aligned}\right\} \tag{1-4-5}$$

可以证明：

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]=G\{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6\} \tag{1-4-6}$$

又如令

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1&=2\frac{\partial g}{2\sigma_x}+\beta\left(\frac{\partial g}{2\sigma_x}+\frac{\partial g}{\partial\sigma_y}+\frac{\partial g}{\partial\sigma_z}\right)\\ \alpha_2&=2\frac{\partial g}{\partial\sigma_y}+\beta\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma_x}+\frac{\partial g}{\partial\sigma_y}+\frac{\partial g}{\partial\sigma_z}\right)\\ \alpha_3&=2\frac{\partial g}{\partial\sigma_z}+\beta\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma_x}+\frac{\partial g}{\partial\sigma_y}+\frac{\partial g}{\partial\sigma_z}\right)\\ \alpha_4&=\frac{\partial g}{\partial\tau_{xy}}\\ \alpha_5&=\frac{\partial g}{\partial\tau_{yz}}\\ \alpha_6&=\frac{\partial g}{\partial\tau_{zx}} \end{aligned}\right\} \tag{1-4-7}$$

可以证明：

$$[D]=\left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}=G\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\end{Bmatrix} \tag{1-4-8}$$

如令

$$[D]=\left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^T \quad [D]=G^2[X] \tag{1-4-9}$$

由（1-4-6）和（1-4-7）得：

$$[X]=\begin{Bmatrix}\alpha_1\lambda_1 & \alpha_1\lambda_2 & \alpha_1\lambda_3 & \alpha_1\lambda_4 & \alpha_1\lambda_5 & \alpha_1\lambda_6\\ \alpha_2\lambda_1 & \alpha_2\lambda_2 & \alpha_2\lambda_3 & \alpha_2\lambda_4 & \alpha_2\lambda_5 & \alpha_2\lambda_6\\ \alpha_3\lambda_1 & \alpha_3\lambda_2 & \alpha_3\lambda_3 & \alpha_3\lambda_4 & \alpha_3\lambda_5 & \alpha_3\lambda_6\\ \alpha_4\lambda_1 & \alpha_4\lambda_2 & \alpha_4\lambda_3 & \alpha_4\lambda_4 & \alpha_4\lambda_5 & \alpha_4\lambda_6\\ \alpha_5\lambda_1 & \alpha_5\lambda_2 & \alpha_5\lambda_3 & \alpha_5\lambda_4 & \alpha_5\lambda_5 & \alpha_5\lambda_6\\ \alpha_6\lambda_1 & \alpha_6\lambda_2 & \alpha_6\lambda_3 & \alpha_6\lambda_4 & \alpha_6\lambda_5 & \alpha_6\lambda_6\end{Bmatrix} \tag{1-4-10}$$

如令

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^T [D]\left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}=G\Phi \tag{1-4-11}$$

可得：

$$\Phi=\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}\alpha_1+\frac{\partial f}{\partial \sigma_y}\alpha_2+\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}\alpha_3+\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}\alpha_4+\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\alpha_5+\frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}}\alpha_6$$

或

$$\Phi=\alpha_1\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial \sigma_y}+\alpha_3\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}+\alpha_4\lambda_4+\alpha_5\lambda_5+\alpha_6\lambda_6 \tag{1-4-12}$$

最后可得：

$$[D]_{ep}=[D]-\frac{G[X]}{\frac{A}{G}+\Phi} \tag{1-4-13}$$

如果材料满足相适应的流动规则，即：

$$g=f$$

则：

$$[X]=\begin{bmatrix}\lambda_1^2 & & & & & \\ \lambda_2\lambda_1 & \lambda_2^2 & & \text{对} & & \\ \lambda_3\lambda_1 & \lambda_3\lambda_2 & \lambda_3^2 & & & \\ \lambda_4\lambda_1 & \lambda_4\lambda_2 & \lambda_4\lambda_3 & \lambda_4^2 & \text{称} & \\ \lambda_5\lambda_1 & \lambda_5\lambda_2 & \lambda_5\lambda_3 & \lambda_5\lambda_4 & \lambda_5^2 & \\ \lambda_6\lambda_1 & \lambda_6\lambda_2 & \lambda_6\lambda_3 & \lambda_6\lambda_4 & \lambda_6\lambda_5 & \lambda_6^2\end{bmatrix} \tag{1-4-14}$$

$$\Phi=\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}\lambda_1+\frac{\partial f}{\partial \sigma_y}\lambda_2+\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}\lambda_3+\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}\lambda_4+\frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}\lambda_5+\frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}}\lambda_6$$

或

$$\Phi=\lambda_1\frac{\partial f}{\partial \sigma_x}+\lambda_2\frac{\partial f}{\partial \sigma_y}+\lambda_3\frac{\partial f}{\partial \sigma_z}+\lambda_4^2+\lambda_5^2+\lambda_6^2 \tag{1-4-15}$$

二、平面应变弹塑性模量矩阵的推导

平面应变弹塑性模量矩阵$[\overline{D}]_{ep}$，即

$$\begin{Bmatrix}\delta\sigma_x\\ \delta\sigma_y\\ \delta\sigma_z\\ \delta\tau_{xy}\end{Bmatrix}=[\overline{D}]_{ep}\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_x\\ \delta\varepsilon_y\\ \delta\varepsilon_z\\ \delta\gamma_{xy}\end{Bmatrix} \tag{1-4-16}$$

可以从弹塑性模量矩阵$[D_{ep}]$，即

$$\begin{Bmatrix}\delta\sigma_x\\ \delta\sigma_y\\ \delta\sigma_z\\ \delta\tau_{xy}\\ \delta\tau_{yz}\\ \delta\tau_{zx}\end{Bmatrix}=[D]_{ep}\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_x\\ \delta\varepsilon_y\\ \delta\varepsilon_z\\ \delta\gamma_{xy}\\ \delta\gamma_{yz}\\ \delta\gamma_{zx}\end{Bmatrix} \tag{1-4-17}$$

$$[D]_{ep}=[D]-\frac{G[X]}{\frac{A}{G}+\Phi} \tag{1-4-18}$$

并根据平面应变的三个条件

$$\delta\varepsilon_z=0,\quad \delta\tau_{yz}=0,\quad \delta\tau_{zx}=0 \tag{1-4-19}$$

来推导。

式（1-4-17）和（1-4-18）可写成：

$$\begin{Bmatrix}\delta\sigma_x\\ \delta\sigma_y\\ \delta\sigma_z\\ \delta\tau_{xy}\\ \delta\sigma_{yz}\\ \delta\tau_{zx}\end{Bmatrix}=\frac{G}{m}\begin{bmatrix}m\alpha-\alpha_1\lambda_1 & m\beta-\alpha_1\lambda_2 & m\beta-\alpha_1\lambda_3 & -\alpha_1\lambda_4 & -\alpha_1\lambda_5 & -\alpha_1\lambda_6\\ m\beta-\alpha_2\lambda_1 & m\alpha-\alpha_2\lambda_2 & m\beta-\alpha_2\lambda_3 & -\alpha_2\lambda_4 & -\alpha_2\lambda_5 & -\alpha_2\lambda_6\\ m\beta-\alpha_3\lambda_1 & m\beta-\alpha_3\lambda_2 & m\alpha-\alpha_3\lambda_3 & -\alpha_3\lambda_4 & -\alpha_3\lambda_5 & -\alpha_3\lambda_6\\ -\alpha_4\lambda_1 & -\alpha_4\lambda_2 & -\alpha_4\lambda_3 & m-\alpha_4\lambda_4 & -\alpha_4\lambda_5 & -\alpha_4\lambda_6\\ -\alpha_5\lambda_1 & -\alpha_5\lambda_2 & -\alpha_5\lambda_3 & -\alpha_5\lambda_4 & m-\alpha_5\lambda_5 & -\alpha_5\lambda_6\\ -\alpha_6\lambda_1 & -\alpha_6\lambda_2 & -\alpha_6\lambda_3 & -\alpha_6\lambda_4 & -\alpha_6\lambda_5 & m-\alpha_6\lambda_6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_x\\ \delta\varepsilon_y\\ \delta\varepsilon_z\\ \delta\gamma_{xy}\\ \delta\gamma_{yz}\\ \delta\gamma_{zx}\end{Bmatrix} \tag{1-4-20}$$

其中

$$m=\frac{A}{G}+\Phi \tag{1-4-21}$$

由式（1-4-20）可得：

$$\delta\tau_{yz}=\frac{G\alpha_5}{m}\Big\{-\lambda_1\delta\varepsilon_x-\lambda_2\delta\varepsilon_y-\lambda_3\delta\varepsilon_z-\lambda_4\delta\gamma_{xy}$$
$$+\Big(\frac{m}{\alpha_5}-\lambda_5\Big)\delta\gamma_{yz}-\lambda_6\delta\gamma_{zx}\Big\}$$
$$\delta\tau_{zx}=\frac{G\alpha_6}{m}\Big\{-\lambda_1\delta\varepsilon_x-\lambda_2\delta\varepsilon_y-\lambda_3\delta\varepsilon_z-\lambda_4\delta\gamma_{xy}$$
$$-\lambda_5\delta\gamma_{yz}+\Big(\frac{m}{\alpha_6}-\lambda_6\Big)\delta\gamma_{zx}\Big\}$$

根据式（1-4-19）的三个平面应变条件，上二式可简化为：

$$\Big(\frac{m}{\alpha_5}-\lambda_5\Big)\delta\gamma_{yz}-\lambda_6\delta\gamma_{zx}=\lambda_1\delta\varepsilon_x+\lambda_2\delta\varepsilon_y+\lambda_4\delta\gamma_{xy}$$
$$-\lambda_5\delta\gamma_{yz}+\Big(\frac{m}{\alpha_6}-\lambda_6\Big)\delta\gamma_{zx}=\lambda_1\delta\varepsilon_x+\lambda_2\delta\varepsilon_y+\lambda_4\delta\gamma_{xy}$$

解此二式可得：

$$\delta\gamma_{yz}=\frac{\alpha_5(\lambda_1\delta\varepsilon_x+\lambda_2\delta\varepsilon_y+\lambda_4\delta\gamma_{xy})}{m-\alpha_5\lambda_5-\alpha_6\lambda_6}$$
$$\delta\gamma_{zx}=\frac{\alpha_6(\lambda_1\delta\varepsilon_x+\lambda_2\delta\varepsilon_y+\lambda_4\delta\gamma_{xy})}{m-\alpha_5\lambda_5-\alpha_6\lambda_6}$$

令
$$n=m-\alpha_5\lambda_5-\alpha_6\lambda_6 \qquad (1\text{-}4\text{-}22)$$
$$\delta\gamma_{yz}=\frac{\alpha_5}{n}(\lambda_1\delta\varepsilon_x+\lambda_2\delta\varepsilon_y+\lambda_4\delta\gamma_{xy}) \qquad (1\text{-}4\text{-}23)$$
$$\delta\gamma_{zx}=\frac{\alpha_6}{n}(\lambda_1\delta\varepsilon_x+\lambda_2\delta\varepsilon_y+\lambda_4\delta\gamma_{xy}) \qquad (1\text{-}4\text{-}24)$$

因
$$\delta\sigma_x=\frac{G}{m}[(m\alpha-\alpha_1\lambda_1)\delta\varepsilon_x+(m\beta-\alpha_1\lambda_2)\delta\varepsilon_y-(m\beta-\alpha_1\lambda_3)\delta\varepsilon_z$$
$$-\alpha_1\lambda_4\delta\gamma_{xy}-\alpha_1\lambda_5\delta\gamma_{yz}-\alpha_1\lambda_6\delta\gamma_{zx}]$$

代入式（1-4-19）、（1-4-23）和（1-4-24），简化后可得：

$$\delta\sigma_x=\frac{G}{n}[(n\alpha-\alpha_1\lambda_1)\delta\varepsilon_x+(n\beta-\alpha_1\lambda_2)\delta\varepsilon_y-\alpha_1\lambda_4\delta\gamma_{xy}] \qquad (1\text{-}4\text{-}25)$$

同样可得：

$$\delta\sigma_y=\frac{G}{n}[(n\beta-\alpha_2\lambda_1)\delta\varepsilon_x+(n\alpha-\alpha_2\lambda_2)\delta\varepsilon_y-\alpha_2\lambda_4\delta\gamma_{xy}] \qquad (1\text{-}4\text{-}26)$$
$$\delta\tau_{xy}=\frac{G}{n}[-\alpha_4\lambda_1\delta\varepsilon_x-\alpha_4\lambda_2\delta\varepsilon_y+(n-\alpha_4\lambda_4)\delta\gamma_{xy}] \qquad (1\text{-}4\text{-}27)$$

因此
$$\begin{Bmatrix}\delta\sigma_x\\ \delta\sigma_y\\ \delta\sigma_z\\ \delta\tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{G}{n}\begin{bmatrix}n\alpha-\alpha_1\lambda_1 & n\beta-\alpha_1\lambda_2 & -\alpha_1\lambda_4\\ n\beta-\alpha_2\lambda_1 & n\alpha-\alpha_2\lambda_2 & -\alpha_2\lambda_4\\ n\beta-\alpha_3\lambda_1 & n\beta-\alpha_3\lambda_2 & -\alpha_3\lambda_4\\ -\alpha_4\lambda_1 & -\alpha_4\lambda_2 & n-\alpha_4\lambda_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_x\\ \delta\varepsilon_y\\ \delta\gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (1\text{-}4\text{-}28)$$

因此

$$[\overline{D}]_{ep}=[\overline{D}]-\frac{G[\overline{X}]}{\frac{A}{G}+\overline{\Phi}} \tag{1-4-29}$$

其中

$$[\overline{D}]=G\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 0\\ \beta & \alpha & 0\\ \beta & \beta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1-4-30}$$

$$[\overline{X}]=\begin{bmatrix}\alpha_1\lambda_1 & \alpha_1\lambda_2 & \alpha_1\lambda_4\\ \alpha_2\lambda_1 & \alpha_2\lambda_2 & \alpha_2\lambda_4\\ \alpha_3\lambda_1 & \alpha_3\lambda_2 & \alpha_3\lambda_4\\ \alpha_4\lambda_1 & \alpha_4\lambda_2 & \alpha_4\lambda_4\end{bmatrix} \tag{1-4-31}$$

$$\overline{\Phi}=\Phi-\alpha_5\lambda_5-\alpha_6\lambda_6$$

$$\overline{\Phi}=\alpha_1\frac{\partial f}{\partial\sigma_x}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial\sigma_y}+\alpha_3\frac{\partial f}{\partial\sigma_z}+\alpha_4\lambda_4 \tag{1-4-32}$$

三、轴对称弹塑性矩阵的推导

轴对称弹塑性模量矩阵$[\overset{\circ}{D}]_{ep}$，即

$$\begin{Bmatrix}\delta\sigma_r\\ \delta\sigma_\theta\\ \delta\sigma_z\\ \delta\tau_{rz}\end{Bmatrix}=[\overset{\circ}{D}]_{ep}\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_r\\ \delta\varepsilon_\theta\\ \delta\varepsilon_z\\ \delta\gamma_{rz}\end{Bmatrix} \tag{1-4-33}$$

的推导，与平面应变弹塑性模量矩阵之推导相似，只是$\delta\varepsilon_z\neq 0$。从$[D]_{ep}$推导时，可取$\delta\sigma_r=\delta\sigma_x$，$\delta\sigma_\theta=\delta\sigma_y$，$\delta\sigma_z=\delta\sigma_z$，$\delta\tau_{rz}=\delta\tau_{xy}$，$\delta\tau_{\theta z}=\delta\tau_{yz}=0$，$\delta\tau_{r\theta}=\delta\tau_{zx}=0$

$$\begin{Bmatrix}\delta\sigma_r\\ \delta\sigma_\theta\\ \delta\sigma_z\\ \delta\tau_{rz}\\ \delta\tau_{z\theta}\\ \delta\tau_{r\theta}\end{Bmatrix}=[D]_{ep}\begin{Bmatrix}\delta\varepsilon_r\\ \delta\varepsilon_\theta\\ \delta\varepsilon_z\\ \delta\gamma_{rz}\\ \delta\gamma_{z\theta}\\ \delta\gamma_{r\theta}\end{Bmatrix} \tag{1-4-34}$$

并利用

$$\left.\begin{aligned}\delta\tau_{z\theta}&=0\\ \delta\tau_{r\theta}&=0\end{aligned}\right\} \tag{1-4-35}$$

二条件，以消去$\delta\gamma_{z\theta}$和$\delta\gamma_{r\theta}$，所得的结果为：

$$[\overset{\circ}{D}]_{ep}=[\overset{\circ}{D}]-\frac{G[\overset{\circ}{X}]}{\frac{A}{G}+\dot{\Phi}} \tag{1-4-36}$$

其中

$$[\overset{\circ}{D}]=G\begin{bmatrix}\alpha & & & & \text{对}\\ \beta & \alpha & & & \\ \beta & \beta & \alpha & & \text{称}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix} \tag{1-4-37}$$

$$[\overset{\circ}{X}]=\begin{bmatrix}\alpha_1\lambda_1 & \alpha_1\lambda_2 & \alpha_1\lambda_3 & \alpha_1\lambda_4\\ \alpha_2\lambda_1 & \alpha_2\lambda_2 & \alpha_2\lambda_3 & \alpha_2\lambda_4\\ \alpha_3\lambda_1 & \alpha_3\lambda_2 & \alpha_3\lambda_3 & \alpha_3\lambda_4\\ \alpha_4\lambda_1 & \alpha_4\lambda_2 & \alpha_4\lambda_3 & \alpha_4\lambda_4\end{bmatrix} \tag{1-4-38}$$

$$\overset{\circ}{\Phi}=\overline{\Phi}=\alpha_1\frac{\partial f}{\partial\sigma_x}+\alpha_2\frac{\partial f}{\partial\sigma_y}+\alpha_3\frac{\partial f}{\partial\sigma_z}+\alpha_4\lambda_4 \tag{1-4-39}$$

参 考 文 献

[1] Hill, R., The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Univ. Press, 1950.

[2] Nadai, A., Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. 1, Mc Graw-Hill Book Company, 1950.

[3] Freundenthal, A.M., The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures, John Wiley and Sons, 1950.

[4] Prager, W. and Hodge, P.G., Theory of Perfectly Plastic Solids, John Wiley and Sons, 1951.

[5] Kondner, R. L., Hyperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils, Proc. ASCE, JSMFD, Vol.89, No. SM1, 1963.

[6] Prévost, J. H. and Höeg, K., Effective Stress-Strain-Strength Model for Soils, Proc. ASCE, JGTD, Vol.101, No. GT3, 1975.

[7] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., Theory of Elasticity, 3rd Ed., Mc-Graw-Hill, 1970.

[8] Zienkiewicz, O.C., Humpheson C. and Lewis, R.W., Associated and Non-associated Visco-plasticity and Plasticity in Soil Mechanics, Geotechnique, Vol.25, No.4, 1975.

[9] Drucker, D.C., Gibson R.E. and Henkel, D. H., Soil Mechanics and Work-hardening Theories of Plasticity, Trans. ASCE, Vol. 122, 1957.

[10] Roscoe, K.H. and Burland, J.B., On the Generalized Stress-Strain Beha vior of 'Wet Clay', Engineering Plasticity (ed. Heyman, J. and Leckie, F. A.), Cambridge Univ. Press, 1968.

[11] Wood, D.M., Truly Triaxial Stress-Strain Behavior of Kaolin, Proc. of the Symposium on the Role of Plasticity in Soil Mechanics, Cambridge, 1973.

[12] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1977.

[13] Lee, K.L. and Idriss, I.M., Static Stresses by Linear and Non-Linear Me-

thods, Proc. ASCE. JGTD, Vol. 101, No. GT9, 1975.
[14] Duncan, J.M. and Chang, C.Y., Non-linear Analysis of Stress and Strain in Soils, Proc. ASCE, JSMFD, Vol. 96, No. SM5, 1970.
[15] Domaschuk, L. and Volliappan, P., Non-linear Settlement Analysis by Finite Element, Proc. ASCE, JGTD, Vol. 101, No. GT.7, 1975.
[16] Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Thurairajah, A., Yielding of Clays in States Wetter Than Critical, Geotechnique, Vol. 13, No.3, 1963.
[17] Schofield, A. and Wroth, P., Critical State Soil Mechanics, McGraw-Hill, 1968.
[18] Khosla, V.K. and Wu, T.H., Stress-Strain Behavior of Sand, Proc. ASCE, JGTD, Vol. 102, No. GT4, 1976.
[19] Lade, P.V. and Duncan, J.M., Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless Soil, Proc. ASCE, JGTD, Vol. 101, No. GT10, 1975.
[20] Lade, D.V. and Duncan, J.M., Cubical Triaxial Tests on Cohesionless Soil, Proc. ASCE. JSMFD, Vol. 99, No. SM10, 1973.
[21] Sandler, I.S., Dimaggio, F.L. and Baladi, G.Y., Generalized Cap Model for Geological Materials, Proc. ASCE, JGTD, Vol. 102, GT7, 1976.
[22] Zienkiewicz, O.C. and Naylor, D.J., Discussion on the Adaption of Critical State Soil Mechanics Theory for Use Infinite Element. Stress-Strain Behavicr of Soils, Roscoe Memorial Symposium, Cambridge Univ., 1972.
[23] Scott, R.F. and Ko, H.Y., Stress Deformation and Strength Characteristics, State of Art Volume, 7th ICSMFE, Mexico, 1969.
[24] Drucker, D.C., Basic Concepts, Part 5, Plasticity and Viscoelasticity, Handbook of Eng. Mech (Ed. W. Flugge), McGraw-Hill, 1962.
[25] 华东水利学院，弹性力学问题的有限单元法，水利出版社，1974。
[26] Rowe, P.W., Theoretical Meaning and Observed Values of Deformation Parameters for Soil, Stress-Strain Behavior of Soils (Ed. R. H. G. Parry), Roscoe Memorial Symposium, Cambridge Univ., 1972.
[27] De Josselin De Jong, G., Rowe's stress-dilatancy Relation Based on Friction, Geotechnique, Vol. 26, No. 3, 1976.
[28] Lade, P. V., Elasto-plastic Stress-strain Theory for Cohesionless Soil with Curved Yield Surfaces, Intern. J. Solids Structures, Vol. 13, 1977.
[29] 沈珠江，土的弹塑性应力应变关系的合理形式，岩土工程学报，1980年2卷2期。
[30] 黄文熙，硬化规律对土的弹塑性应力-应变模型影响的研究，岩土工程学报，1980年2卷1期。
[31] Wen-Xi Huang, Effect of Work Hardening Rules on the Elastoplastic Matrix, Int. Symposium on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea, 1980.

第二章　土的渗透性

第一节　概　　述

土的渗透性，同强度和变形特性一起，是土力学中所研究的几个土的主要力学性质。它研究在各种势能作用下，土孔隙中的流体（一般是水和空气）的流动过程及其规律性。它在土木工程的各个领域中都有重要的作用。

广义地说，各种多孔介质中都有流体的传输现象，并且服从相同的规律性。多孔介质可定义为：

1.由多相物质组成的空间，其中必有一相为非固态的，这种非固态相可以为液相或气相；

2.组成多孔介质骨架的固相，必须分布在多孔介质占有的整个空间，并存在于每一代表性单元体内；

3.固相骨架的空隙必须有部分是互相连通的，可以容许流体通过。

实际上，几乎所有非金属材料都具有这种性质。因此，多孔介质中流体传输现象就成为许多学科的研究对象。例如，在水文地质、石油工业、化学工业、建筑材料、环境保护、农业土壤、农田水利、土木工程等许多部门，都有着广泛的应用领域。有些部门还要研究一些十分复杂的渗流运动规律。例如在石油工业中，要研究油、气、水的多相渗流，而且在渗流运动过程中还有较大的压力和温度变化；在土壤物理和灌溉排水工程中，要研究水的入渗和蒸发与水盐运动规律，研究淡水和盐水两相混合流和水力扩散现象；在化学工业中，要研究在水力、热力、盐浓度差、电位梯度等共同作用下的渗流运动，还要考虑过滤过程中介质和流体化学成分的变化所产生的影响等。近年来国际土壤学会和国际水力学学会联合召开了多次多孔介质中传输现象的学术会议，推动了这门学科的发展[1、2]。

土力学中研究的渗流现象，对饱和土来说，孔隙流体是水；对非饱和土来说，孔隙流体是水和空气，并假定两者不能混合，而且只有水在流动，而空气却是停滞不动的。在选择模型和进行推导时，一般都假定土骨架不变形和孔隙流体不可压缩。实际上，这两者都是变化的。但由于土中孔隙水压力一般变化不大，水的弹性变形又很小，可以视为不可压缩流体，而土力学中的固结理论就是专门研究土骨架可以变形的瞬时渗流问题的，所以渗流理论就可以只研究土骨架不变形的课题了。

研究土的渗透性，是土力学中极其重要的一环，这是由于：

1.多孔介质的渗透性，与其它所有材料的物理性质常数相比，其变化范围要大得多[3]。一般按土的渗透系数 k 进行渗透性的分类，如表2-1所示。实际上，干净砾石的 k 值可达30厘米/秒，纯粘土的 k 值可达$<10^{-9}$厘米/秒，相差可达10^{10}倍以上。其他物理性质常数变化都没有这么大，如材料强度，从钢到软粘土，相差也不过10^{5}倍。再加上土体

宏观构造和微观结构的复杂性，土体渗透性可以具有高度的不均匀和各向异性性质。在分析计算中，常因不易取得能代表现场实际情况的参数值，而使计算结果与实际情况出入较大。由于渗透系数取值不当或渗透规律的偏差，往往使计算结果的偏差远超过各计算方法本身的差别，甚至于导致精确的解答给出不合理结果的反常现象。

表 2-1　　土　的　渗　透　性　分　类

透水程度	高渗透性	中渗透性	低渗透性	极低渗透性	实际不透水
渗透系数 k（厘米/秒）	$>10^{-1}$	$10^{-1}\sim10^{-3}$	$10^{-3}\sim10^{-5}$	$10^{-5}\sim10^{-7}$	$<10^{-7}$

2.土的三个主要力学性质，即强度、变形和渗透性之间，有着密切的相互关系。在古典土力学中，由有效应力原理将三者有机地联系在一起，形成一个理论体系。因此渗透性的研究已不限于渗流问题自身的范畴。例如，控制土在荷重下变形的时间过程的渗透固结阶段，其变形速率就取决于土的渗透性；用有效应力原理研究土的强度和稳定性时，土的孔隙压力消散和有效应力的增长控制着土体强度随时间而增长的过程，而孔隙压力消散速度又主要取决于土的渗透性、压缩性和排水条件。在无粘性土的动力稳定性和振动液化的试验研究中，也发现当其它条件相同时，渗透性小的土比渗透性大的土更易于液化。

3.土木工程各个领域内许多课题都与土的渗透性有密切关系。在水利水电工程中，要研究土石坝坝体及地基的渗流量、各部位的渗透压力、浸润线位置、出逸梯度等问题，以判别坝的安全程度和经济合理性，并据以选择渗流控制措施；水库水位降落时土石坝上游坝坡的稳定性，就主要取决于组成材料的渗透性和上游水位降落速度。土木工程各部门施工基坑的排水降水，也同含水层的构造和渗透性有关。软粘土层上的建筑物，往往要研究沉降和孔隙压力的消散速率，使施工速率与地基土层强度指标增长速率相适应，以维持施工期稳定，并使大量沉降在施工期完成。在炎热干旱地区，有路面覆盖的道路和某些房屋建筑下，由于温度和湿度差引起的水分转移，对地基稳定和变形影响很大，特别对结构不稳定土体影响尤大。这些课题都离不开对土体渗透性的深入研究。

下面举一些例子说明土的渗透性对实际工程的影响。

碧口水电站粘土心墙土石坝的横断面如图2-1，其上游棱体下部为砂砾石，上部为堆

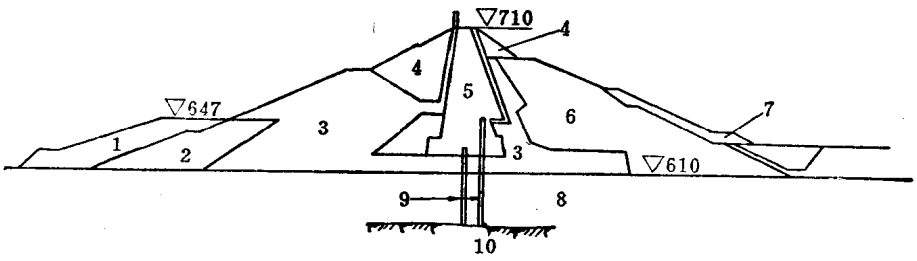


图 2-1　碧口水电站土石坝断面图

1—施工临时粘土斜墙；2—石渣；3—砂砾石；4—堆石；5—粘土心墙；6—含泥砂砾石及石渣；7—卵石；8—河床砂砾层；9—混凝土防渗墙；10—基岩

石体，上游坝脚处有施工围堰用的石渣堆积体 2 及临时粘土斜墙 1 。在原设计中根据室内试验和现场试坑注水试验资料，确定砂砾石的渗透系数为10^{-1}厘米/秒。在上游水位从高程680米骤降至647米时，由于上游棱体中自由水面可随之下降，这一段坝坡是稳定的。但是在填筑过程中发现砂砾料中细料含量较多，于是在已填筑的坝体中打了两个钻孔，做注水试验，发现其渗透系数只有10^{-3}厘米/秒，这样，上游水位骤降时这一段砂砾石坝坡就由于其中自由水面来不及随之下降，土体中产生大的孔隙水压力，因而发生不稳定。最后决定在原坝坡外680米高程以下加筑一层高透水性的石渣料，以增加有效压重，并将上游临时粘土斜墙拆除，以改善排水条件，这样才能保持上游坝坡在水位降落时的稳定性。

莫亨和庞达利（Moham和Bhandari）[4]在研究印度海淤土时，发现现场用测压管作注水试验所得的渗透系数是0.89×10^{-6}厘米/秒，而相应的原状试样室内固结试验得到的 k 值是0.16×10^{-6}厘米/秒。他认为前者可视为水平向渗透系数k_h值，后者是垂直向渗透系数k_v值，两者的比值约为 5 。为此，进行了具有不同k_h/k_v比值的海淤土的砂井固结计算，结果见表2-2，从表中可以看出渗透性各向异性的影响。在碾压土坝中，土体是分层碾压筑成的，往往形成水平的层次，粘土颗粒在压实机械作用下，也易形成水平的定向排列，因此，k_h也将大于k_v，具有各向异性性质。对均质土坝而言，具有各向异性渗透性的坝体浸润线，要比考虑各向同性渗透性的情况为高，对坝坡的稳定有一定影响。有的土坝发现实测测压管水位高于计算值，也可能有这种影响存在。

表 2-2　　k_h/k_v 比值对固结度的影响

砂	井	间距/直径	固结度，U(%)		
直径(米)	间距(米)		$k_h/k_v=1$	5	10
0.30	3.0	10	22	69	90
0.15	3.0	20	17	56	80
0.30	1.5	5	38	90	98

注：设固结系数$C_v=1\times10^{-3}$米²/天，土层厚度$H=10$米，时间$t=100$天。

许多土力学工作者注意到非达西（Darcy）型渗透规律对土体固结的影响，提出了很多研究成果。米契尔和杨格（Mitchell和Younger）[5]认为，如考虑存在某一界限梯度，小于它时不发生渗流，则在土体中超孔隙水压力降到相应于界限梯度以下时，固结过程就停止了，超孔隙水压力不会消散到零。如考虑不存在界限梯度，但在小梯度时流速 v 和梯度 i 间存在非线性关系，用$v=xi^n$表达，则固结速率将大为延迟，且与应力增量有关。实测固结速率与太沙基（Terzaghi）理论相比较，在大荷重下比较接近，而小荷重下则相差较大。实测的从固结度85%到100%的时间滞后很长，达到100%固结度的时间和达到85%固结度的时间之比是10～15，而用太沙基理论算出的同一比值是 3 ，也说明很可能存在非达西型渗流。如考虑非达西型渗流，渗透系数将随梯度的不同而有变化，现场和室内试验梯度的不同，也有可能导致估算渗流量和固结速率方面的误差。

摩舍（Moser）[6]对砂井固结粘土层的研究工作表明，如考虑粘土具有起始梯度 i_0

及固结过程中 k 值随孔隙比 e 而变化的情况，则与按达西定律及 k 为常数的计算结果相比较，对其固结度 U 有明显影响，结果如图2-2所示。由图中曲线 3 和 5 相比较可见，如考虑 i_0，在早期阻滞排水，而且在固结度70～75%时就停止排水了。

密云水库白河主坝为粘土斜墙坝，其断面见图2-3。其粘土斜墙上游保护层由砂砾石所组成，含砾量平均约60%，在1976年7月28日唐山地震时，其水下部分发生大面积流动性坍滑。为了论证其是否因砂砾料液化而破坏，曾在试验室内进行圆筒振动试验，研究含砾量和液化度的关系，结果如图2-4[7]。由图可见，液化度随含砾量的变化趋势和渗透系数的变化密切相关，渗透系数越大，振动孔隙水压力比越小。说明在其它条件相似情况下，渗透系数对振动孔隙水压力的发生，特别是消散，有重要影响。

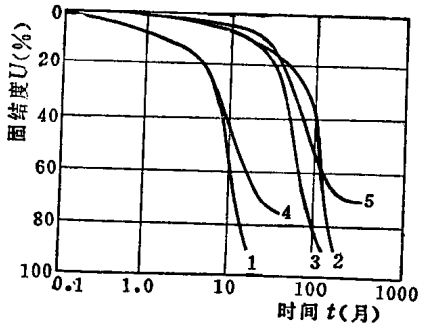


图 2-2 理论固结度和时间关系

1—k=常数，e_0；$i_0=0$；2—k=常数，e_f；$i_0=0$；3—$k=f(e)$；$i_0=0$；4—k=常数，e_0；$i_0=f(e)$；5—$k=f(e)$；$i_0=f(e)$

由上述实例可见，土的渗透性对解决工程实际问题的严重影响。土的 v-i 关系是土的本构关系的一个重要方面，也是土中渗流问题计算和模拟试验的物理基础。采用何种渗透

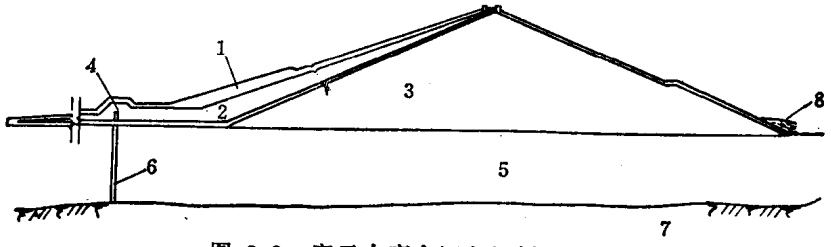


图 2-3 密云水库白河主坝剖面图

1—砂砾石保护层；2—粘土斜墙；3—砂砾石坝体；4—粘土铺盖；5—河床砂砾石层；6—混凝土防渗墙；7—基岩；8—滤水坝趾

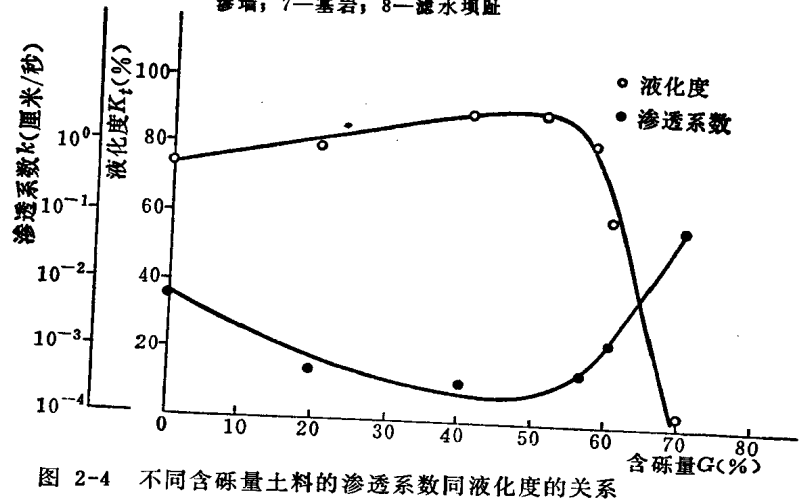


图 2-4 不同含砾量土料的渗透系数同液化度的关系

$$\left(\text{液化度 } K_t=\frac{\text{振动孔隙水压力}}{\text{完全液化孔隙水压力}}\right)$$

定律，对结果将起决定性的作用[8]。所以不能只重视渗流运动理论的研究，而忽视对土的渗透性的物理本质和规律性的探讨。

第二节　土水体系中的势能概念

一、土　水　体　系

土中吸持水分的能力和水分转移机制，可以用势能概念很方便地表达出来，并用于分析计算中[9、10、11]。因此，我们先对土水体系中的势能概念作扼要的叙述。

分布于土骨架孔隙中的水，可能含有多种可溶解物质，且与土粒表面有物理和物理化学的相互作用，其性质和自由水体有显著区别。一般按其物理化学性质，分为粘结水、毛管水和重力水等几大类，它对土中水的静态平衡和转移提供不同的机制。

粘结水由土粒和水的物理化学的相互作用力所吸持，并可分为强粘结水和弱粘结水两部分。强粘结水包括吸持在矿物晶体内部的水和直接吸附在土粒表面几个水分子厚度的薄膜水，其属性与固体相类似，仅在变成蒸汽状态时才能在土中转移。从研究土中渗流的观点看，可以视为固相的一部分，在水力下是不能移动的。在离颗粒表面一定距离范围内，粘土颗粒表面所带的负电荷，一方面使水分子偶极化，定向排列于强粘结水层外面，另一方面又将土中水内的阳离子吸引到颗粒周围，这些阳离子周围又带了许多定向排列的极性水分子。这样，就在粘土颗粒周围形成双电层，而双电层内的水，就称为弱粘结水，其粘滞性比自由水高，具有半结晶水的属性，在小的水力梯度下，克服了外层弱粘结水的粘滞阻力，使它逐渐转变为自由水而参与运动，从而扩大孔隙通道的过水断面。这种性状有可能导致粘土呈现非线性的渗透规律。

毛管水依靠气-水界面弯液面的表面张力而被吸持于土的孔隙中。由于土颗粒是亲水的，弯液面呈凹形，土中水受到附加的负压力，也就是孔隙水受到的是张力，毛管水的物理性质与自由水完全相同。当土的含水量很低时，毛管水的数量很少，只是在土粒接触点周围形成孤立的水环，不能传递静水压力，也不能以液态转移。随着含水量的增加，毛管水的数量也增加，孤立的水环互相联系起来，可以传递静水压力，且可以呈液态缓慢转移。以后毛管水继续增加，就形成包围土颗粒的水，但孔隙中仍有连通的空气通道存在。毛管水的进一步增加，可以阻塞空气通道，使空气以个别的封闭气泡形式存在。与此同时，土的吸力逐渐减小，透水性越来越大，直到接近饱和土的透水性；而透气性则越来越小，直到空气通道完全闭塞时降到零为止。

重力水，也称自由水，它同土颗粒没有直接的相互作用，它不能静止地悬留在土体中，其运动服从重力规则，其性质和自由水体没有区别。

二、势　能　概　念

用势能概念可以很方便地表示土的持水能力和水分转移机制。各种势能的总和为零时，土中水达到静态平衡。在总势能不为零时，就产生水的流动，并总是从高势能处流向低势能处，也就是从低吸力处流向高吸力处。土中水的势能和含水量的关系是土的一种基

本特性，被称为土的持水曲线，或土的水分特征线，见图2-5。实际资料表明，势能与含水量关系是一条光滑曲线，并无突变点。因此，有人认为将土中水划分为粘结水、毛管水和重力水是人为的，实际上并无明确界限。

土中水总的势能$\Delta\phi$为各种势能分量之和，可以表达如下：

$$\Delta\phi=\Delta\phi_g+\Delta\phi_m+\Delta\phi_p+\Delta\phi_0+\Delta\phi_e+\cdots\cdots \qquad (2\text{-}1)$$

式中 $\Delta\phi_g$——重力势；

$\Delta\phi_m$——广义毛管势（*matric potential*）；

$\Delta\phi_p$——压力势；

$\Delta\phi_0$——盐渗析势（*osmotic potential*）；

$\Delta\phi_e$——电渗势（*electro-osmotic potential*）；

……

重力势表示土中水的位能，取决于所研究点和基准面的相对位置。基准面以上重力势为正，基准面以下重力势为负。

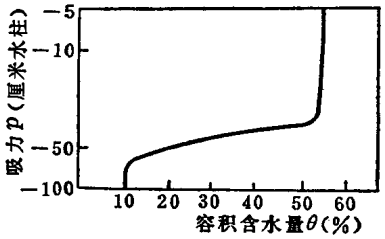


图 2-5 土的含水量和吸力关系曲线

广义毛管势取决于土粒骨架与水的相互作用而形成的势能。过去因其作用范围的主要部分与毛细管中水的上升相似，而称为毛管势。以后因这种吸力不仅取决于孔隙中弯液面的表面张力，而且也与颗粒表面与水的物理化学作用力有关，故改称广义毛管势，其含义更广。它在地下水位以上恒为负值，处于静平衡状态时，和重力势大小相等，符号相反。在地下水位以下为零。

将土的孔隙视为毛管，则毛管张力p_c可表达如下：

$$p_c=T_s\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad (2\text{-}2)$$

式中：T_s为水的表面张力，R_1、R_2为两个正交方向上的弯液面曲率半径，对圆形毛细管，$R_1=R_2$。水与土粒间的接触角假设为零，弯液面曲率半径等于毛管的半径r，上式可改写为：

$$p_c=\frac{2T_s}{r} \qquad (2\text{-}3)$$

相应的毛管升高为：

$$h_c=\frac{2T_s}{\gamma_w r} \qquad (2\text{-}4)$$

式中 r_w——水的容重。

可用于计算因毛管现象而形成的土的吸力。对细粒土，由于吸力而引起的负孔隙水压力可以达到很大的数值。例如，对于$<5\mu$的颗粒占一定数量的粘土，其孔隙直径的量级可取$0\cdot2\mu$，即$r=0\cdot1\mu$，室温时水的表面张力为0·075克/厘米，则$p_c=15$公斤/平方厘米，由此可以看出毛管压力的量级。

对粘土颗粒而言，双电层范围内的阳离子浓度大于自由水中的离子浓度，因而水有向双电层中转移的趋向。在一定密度的土中，颗粒距离较近，彼此的双电层受到压缩而交错在一起。这种因渗析作用而使水吸入颗粒间的双电层中的力，使颗粒彼此排斥，引起土的膨胀，直到重新平衡，吸力消失时为止。这种因颗粒表面与水的物理化学作用而产生的引力和斥力，也是土中吸力的来源之一。对自由膨胀的粘土薄片，其势能分量 $\Delta\phi'_m$ 为[10]：

$$\Delta\phi'_m = R_y T \cosh(y_c - 1) \qquad (2\text{-}5)$$

式中 R_y——气体常数；

T——绝对温度；

y_c——两粘土薄片间中点的电势。

其它复杂情况现在还无法计算。

由于这种引力和斥力与毛管压力共同组成广义毛管势分量，而在实验量测中，两者又无法分开，故在实用上视为一个分量。

压力势是由与基准面上压力不同的外压力所引起的水的能量差而形成的。在地下水位以下，它相当于测压管压力。

渗析势是土中两点因土中水的盐浓度不同而引起的孔隙水势能差。电渗势是土中两点因电位不同而引起的孔隙水势能差。除特殊情况外，在一般土中水运动的研究中是略而不计的。

实际上，在土中水的渗流运动中，各种势能是组合存在的，最常见的主要组合有：

地下水位以上：

$$\Delta\phi = \Delta\phi_g + \Delta\phi_m \qquad (2\text{-}6)$$

地下水位以下：

$$\Delta\phi = \Delta\phi_g + \Delta\phi_p \qquad (2\text{-}7)$$

为便于应用起见，这种势能概念也可以用能头单位表示，则式（2-6）和（2-7）可改写成：

地下水位以上：

$$\Delta H = \Delta H_g + \Delta H_m \qquad (2\text{-}8)$$

地下水位以下：

$$\Delta H = \Delta H_g + \Delta H_p \qquad (2\text{-}9)$$

此外，土中水还可以蒸汽形式转移。一种是以扩散形式，从蒸汽压力高处向低处转移；另一种是和空气一起，由总气压力高处向低处转移。这些都取决于温度差，因而这种形式下水分是由高温处向低温处转移的。在渗流运动中一般也不讨论这种形式的水分转移。

各种势能的组合使总势能不为零时，就产生土中水的渗流运动，即是土中渗透规律的研究对象。

各专业对势能的表示方法有所不同，常用的单位有以下几种：

1.水柱高度，H 或 h，厘米或米；

2.水银柱高度，H_{Hg} 或 h_{Hg}（$1\,h_{Hg}=13.6h$），厘米；

3.大气压力 p_a，大气压；

1大气压＝76厘米水银柱高度

＝1033.6厘米水柱高度

＝1.013巴（bar）

4.巴：

1巴＝10^6达因/厘米^2

＝0.99大气压

＝1022厘米水柱高度

1毫巴＝1.022厘米水柱高度

5.pF：$pF=\mathrm{Log}H$，即H＝10厘米水柱高度时，pF＝1；H＝1厘米水柱高度时，pF＝0。

第三节 饱和土的渗透规律

一、达西定律

1885年达西用图2-6所示的装置，对两种均匀砂质滤床进行试验，发现渗过试样的流量Q与能量损失（以上下游测压管水位差h_1-h_2表示）成正比，与流程长度（以上下游测压管间的距离，即渗水试样的长度L表示）成反比，由此得出如下关系式：

$$Q=-kA\frac{h_1-h_2}{L} \qquad (2\text{-}10)$$

式中A为试样的断面积。如以单位面积渗过试样的流量q（$=Q/A$）计，且将水力梯度i定义为$i=\frac{h_1-h_2}{L}$，则式（2-10）可写成：

$$q=-ki \qquad (2\text{-}11)$$

或

$$v=-ki \qquad (2\text{-}11a)$$

这就是熟知的达西定律，表明单位时间的渗透流量与水力梯度之间，或渗流速度v与水力梯度之间呈线性比例关系，其比例常数k就称为渗透系数，或达西渗透系数。式中的负号表示渗透水流的方向与水中势能增加的方向相反。

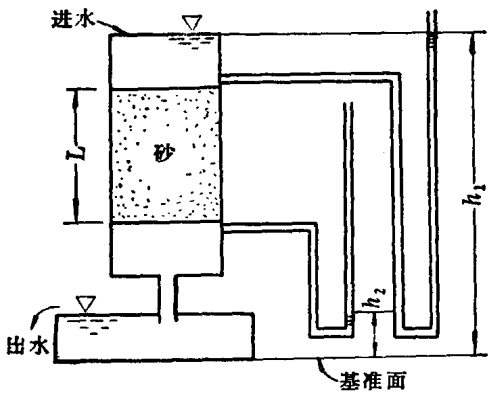


图 2-6 达西的渗透试验装置示意图

在达西的表达式中，采用了两个基本假设：

1.由于土试样断面内，仅颗粒骨架间的孔隙是渗水的，而沿试样长度的各个断面，其孔隙大小和分布是不均匀的。达西采用了以整个断面积计的假想渗流速度，或单位时间内通过单位总面积的流量，而不是孔隙流体的真正流速；

2.土中水的实际流程是十分弯曲的，比试样长度大得多，而且也无法知道。达西考虑了以试样长度计的平均水力梯度，而不是局部的真正水头损失。

这样处理就避免了微观流体力学分析上的困难，得出一种统计平均值，基本上是经验性的宏观分析，但仍不失其理论和实用价值，故一直沿用迄今。

达西的实验研究对象是砂中的渗透水流。在v-i的关系式中，他忽略了这一点，即k值不单与多孔介质的特性有关，而且也和流体的性质有关。为此，有人定义了另一个常数K，令：

$$k = K\frac{\gamma_w}{\mu} = K\frac{\rho g}{\mu} \qquad (2\text{-}12)$$

以$\frac{\gamma_w}{\mu}$或$\frac{\rho g}{\mu}$来表征流体性质的影响。这样K值就是仅受多孔介质特性影响，而不受流体性质影响的常数了，它可以更好地表征土的渗透性的物理本质。为了将这两个常数区分开来，在某些专业中，将k称为水力传输系数（Hydraulic Conductivity），而将K称为渗透系数或物理渗透性（Permeability或Physical Permeability）。k值的量纲为LT^{-1}，习用的单位是厘米/秒或米/天；K值的量纲是L^2，习用的单位是平方米。对于20℃的水，k=1厘米/秒相当于$K=1.02\times10^{-5}$平方厘米。

油田开采方面，还以达西作为渗透性的单位，其定义为：粘度为1厘泊的单相流体，充满多孔介质孔隙，在每厘米一个大气压或相当的水力梯度下，在每平方厘米面积上通过1立方厘米/秒的流量。对于20℃的水，1达西$=9.8697\times10^{-9}$平方厘米$=9.613\times10^{-4}$厘米/秒。

在土力学中，仍习用达西的渗透系数k，因为土力学中涉及的对象是水在土中的运动。这时：

1.在土中常遇到的温度和压力变化范围内，水的密度变化很小，可以视为常数，而不致引起明显的误差；

2.温度变化时水的粘滞度的变化对渗透性的影响，可以用将特定温度下的k_s定义为标准值的方法予以消除。换算公式如下：

$$k_S = k_T\frac{\mu_S}{\mu_T} \qquad (2\text{-}13)$$

式中k_s和μ_s——某一标准温度下的渗透系数和水的粘滞系数值；

k_T和μ_T——试验水温为T℃时的渗透系数和水的粘滞系数值。

标准温度以采用10℃或20℃的较多，我国水利电力部制定的土工试验规程，采用10℃为标准温度[12]。

3.水力引起的渗流与电渗、热渗、盐渗析等相似，其数学表达式也基本相同[13]。这时四种流动定律都可表达为流量和相应的力的线性关系：

$$J = LX \qquad (2\text{-}14)$$

式中 J——流量；

X——作用力；

L——比例常数。

由这四种梯度引起的水流可用下式表示：

$$J_H = L_{HH}X_H + L_{HT}X_T + L_{HE}X_E + L_{HC}X_C \qquad (2\text{-}14a)$$

式中 J_H——水的单位渗流量；

X_i——相应的水力、热渗、电渗和盐渗析梯度；

L_{ij}——相应的比例常数。

其它梯度对渗透水流量的影响，取决于土的类型。对无粘性土，以水力梯度的影响为主；对粘性土，其渗透系数越小，受其它梯度的影响越显著。

达西定律表达的是均匀不可压缩流体的单向渗流方程，要把它普遍化，推广到二向和三向渗流，就要表达为微分形式。将达西定律表达为微分形式并非只有一种途径，一般可以用向量形式表达如下：

$$\vec{q}=-k\vec{i}=-k\mathrm{grad}h \tag{2-15}$$

式中 $\vec{q}$——单位流量向量，其分量为q_x、q_y、q_z；

$\vec{i}$——水力梯度向量，其分量为：

$$\left.\begin{aligned} i_x&=\frac{\partial h}{\partial x};\\ i_y&=\frac{\partial h}{\partial y};\\ i_z&=\frac{\partial h}{\partial z}。\end{aligned}\right\} \tag{2-16}$$

对均匀各向同性介质，k为常数，所以

$$\left.\begin{aligned} q_x&=-ki_x=-k\frac{\partial h}{\partial x}\\ q_y&=-ki_y=-k\frac{\partial h}{\partial y}\\ q_z&=-ki_z=-k\frac{\partial h}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{2-17}$$

对不均匀各向同性介质，$k=k(x,\ y,\ z)$，式（2-15）仍适用。

有时将式（2-15）写成：

$$\vec{q}=-grad(kh) \tag{2-18}$$

但是在$k=k(x,\ y,\ z)$时，上式可变成：

$$\vec{q}=-k\mathrm{grad}h-h\mathrm{grad}k \tag{2-18a}$$

这意味着对一h为常数的某一区域，由于k的变化，也将产生渗流，但这是不可能的。所以只在均匀各向同性介质时，式（2-15）和（2-18）才相等，而对不均匀各向同性介质，式（2-18）是错误的[14]。

如以势能ϕ代替能头h，则式（2-15）变成：

$$\vec{q}=-\frac{k}{\rho g}grad\phi \tag{2-19}$$

对各向异性介质，式（2-17）可写成：

$$\left.\begin{aligned} q_x&=-k_{xx}i_x-k_{xy}i_y-k_{xz}i_z\\ q_y&=-k_{yx}i_x-k_{yy}i_y-k_{yz}i_z\\ q_z&=-k_{zx}i_x-k_{zy}i_y-k_{zz}i_z\end{aligned}\right\} \tag{2-20}$$

实际土层一般都是水平成层，只需要考虑垂直方向和水平方向渗透性的各向异性性质。这时，可通过座标变换，转换为各向同性问题求解[3]。平面问题的拉普拉斯方程为：

$$k_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_z\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0 \qquad (2\text{-}21)$$

采用新的座标系统（$\overline{x}$，$\overline{y}$，$\overline{z}$），并定义为：

$$\overline{x}=\frac{x}{\sqrt{k_x}}$$

$$\overline{y}=\frac{x}{\sqrt{k_y}} \qquad (2\text{-}21a)$$

$$\overline{z}=\frac{z}{\sqrt{k_z}}$$

则上式可变成：

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \overline{x}^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial \overline{z}^2}=0 \qquad (2\text{-}21b)$$

所以只要将渗透性大的方向（一般是水平方向）的长度缩小$\sqrt{\frac{k_v}{k_h}}$倍，按各向同性问题解出流网，再转换到原断面即可。

对总厚度为T的层状土，设各层厚度为T_1、T_2、……T_n，相应各层的渗透系数为k_1、k_2、……k_n，其水平方向的等效平均渗透系数为k_x（平行层面方向），垂直方向的等效渗透系数为k_z（垂直于层面方向），则：

$$k_x=(k_1T_1+k_2T_2+\cdots\cdots+k_nT_n)/T \qquad (2\text{-}22)$$

$$k_z=T\Big/\left(\frac{T_1}{k_1}+\frac{T_2}{k_2}+\cdots\cdots+\frac{T_n}{k_n}\right) \qquad (2\text{-}23)$$

这样，就可以把层状土的非均质渗流场，转换为水平和垂直渗透系数分别为k_x和k_z的各向异性均质渗流场求解了。

对不均匀流体、可压缩流体、多相流、非饱和渗流等情况下的运动方程，推导时也往往采用和达西定律相似的表达式，有时也把这些方程叫做达西定律或修正的达西定律，但与其原义已完全不同了。

二、达西定律的物理意义

达西定律基本上是由实验得出的经验关系，只是在以后才有许多研究者提出各种模式，进行理论推导，阐明其物理意义。仅在达西提出他的关系式之后两年，杜布依（Dupuit）就利用管流和明槽流的相似性，从明槽均匀流的公式出发，考虑土中渗流速度一般很小，可以将二次项略去不计，就得到和达西定律相似的形式。所以杜布依写道：现在认为基本方程$q=-ki$是一个实验成果。如果我们首先从均匀流方程导出这一关系，那末它仅仅是指出这两种流动形式的相似性而已[15]。为了便于将各种渗流模型的理论分析和达西定律相比较，杜布依引入了孔隙流体平均速度v_s，以与渗流速度v相区别，并定义为：

$$v_s=\frac{v}{n} \tag{2-24}$$

式中 n——土试样的面积孔隙率，假设其平均值和体积孔隙率相等。

但应指出，这也是一个统计平均值，而不是局部孔隙流体的真正流速。这里要分清楚，v_s是以孔隙面积计的，而v是以总面积计的，$v_s>v$。

在层流区域内推导流动方程的途径有量纲分析、毛管模型、水力半径理论、拖曳理论和统计模型等，兹分述如下。

（一）量纲分析[16]

麦斯盖特和鲍赛特（Musket和Botset）首先建议用量纲分析研究达西定律。影响土中渗流的因素可归纳为：

$$F(\mu,\ \rho,\ v_s,\ d,\ \Delta s,\ \Delta p)=0 \tag{2-25}$$

式中 μ——粘滞系数，$ML^{-1}T^{-1}$；

ρ——密度，ML^{-3}；

v_s——孔隙流体平均流速，LT^{-1}；

d——特征孔隙尺寸，L；

Δs——某一长度，L；

Δp——某一长度Δs内的总水压力损失，$ML^{-1}T^{-2}$。

式（2-25）中有6个变数，3个基本尺度，根据布金汉（Buckingham）π理论，式（2-25）可写成：

$$F(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3)=0 \tag{2-25a}$$

π_1，π_2，π均为无量纲比值，令：

$$\pi_1=\mu^x d^y \rho^z V_s \tag{2-25b}$$

将量纲代入，并将每一量纲的指数集中到一起，解得：$x=-1$，$y=+1$，$z=+1$，故：

$$\pi_1=\frac{\rho V_s d}{\mu}=R_e \tag{2-25c}$$

同样，令π_2为μ、d、ρ及Δs的无量纲比值，π_3为μ、d、ρ及Δp的无量纲比值，可求得：

$$\pi_2=\frac{\Delta s}{d} \tag{2-25d}$$

$$\pi_3=\frac{d^2\rho\Delta p}{\mu^2} \tag{2-25e}$$

代入式（2-25a）得：

$$F\left(\frac{\rho V_s d}{\mu},\ \frac{\Delta s}{d},\ \frac{d^2\rho\Delta p}{\mu^2}\right)=0 \tag{2-25f}$$

或

$$\frac{d^2\rho\Delta p}{\mu^2}=C_a F'\left(\frac{\rho V_s d}{\mu},\ \frac{\Delta s}{d}\right)$$

$$=C_a F_1\left(\frac{\rho V_s d}{\mu}\right)\cdot F_2\left(\frac{\Delta s}{d}\right) \tag{2-25g}$$

式中$F_1\left(\frac{\rho V_s d}{\mu}\right)=F_1(R_e)$，实验证明，对粘滞流是和$R_e$的一次方成正比的，故上式变成：

$$\frac{d^2\rho\Delta p}{\mu^2}=C_a\frac{\rho V_s d}{\mu}\cdot F_2\left(\frac{\Delta s}{d}\right) \qquad (2\text{-}25h)$$

又$\Delta p=\gamma_w\Delta h$，假设水头损失$\Delta h$和$\frac{\Delta s}{d}$的一次方成比例，并令$I=\frac{\Delta h}{\Delta s}$，则式（2-25$h$）变成：

$$v_s=\frac{1}{C_a}\frac{\gamma_w I}{\mu}d^2 \qquad (2\text{-}25i)$$

或

$$v=C_s\frac{\gamma_w I}{\mu}R_H^2\cdot n \qquad (2\text{-}25j)$$

式中 C_a及C_s——形状系数；

R_H——水力半径。

和达西定律相比较，并令$I=i$，得：

$$k=C_s\cdot\frac{\gamma_w}{\mu}\cdot R_H^2\cdot n \qquad (2\text{-}25k)$$

（二）毛管模型

小直径毛管中水的层流的物理规律由海根-伯朔尼（Hange-Poiseuille）定律表达[17]。基本假定是毛管水流服从牛顿粘滞流规律，断面上各点因摩擦损失而有流速变化，边界上流速为零，中心处流速最大，沿断面的流速分布呈抛物线型（见图2-7）。设毛

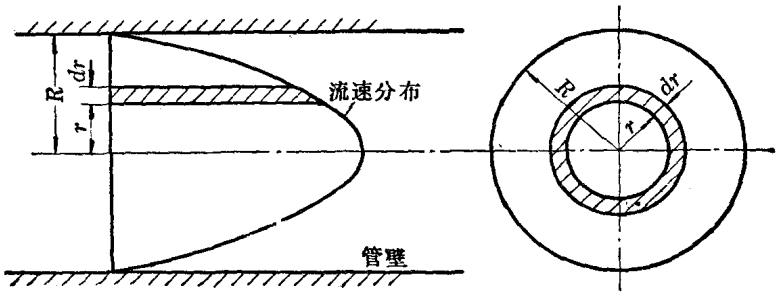


图 2-7 毛管模型示意图

管半径为R，断面积为a，r为毛管中任一同心圆柱体的半径，长度为L的圆柱体内的水头损失h所引起的压力$\pi r^2\gamma_w h$为周边阻力$2\pi rL\cdot\tau$所平衡。对牛顿流体$\tau=-\mu\frac{dv}{dr}$，所以：

$$\pi r^2\gamma_w h=2\pi rL\left(-\mu\frac{dv}{dr}\right) \qquad (2\text{-}26)$$

解式（2-26），并应用$r=R$，$v=0$条件，求积分常数得：

$$v=\frac{\gamma_w i}{4\mu}(R^2-r^2) \qquad (2\text{-}26a)$$

适合于抛物线型式。单位时间流量为：

$$dQ=v\cdot 2\pi r\cdot dr \qquad (2\text{-}27)$$

积分之，r从0到R，得：

$$Q=\frac{\pi R^4\gamma_w i}{8\mu}=\frac{\gamma_w R^2}{8\mu}ia \qquad (2\text{-}28)$$

式中 a——一根毛细管的横断面积。

孔隙中水的平均流速为：

$$v_s=\frac{Q}{a}=\frac{\gamma_w R^2}{8\mu}\ i \qquad (2\text{-}28a)$$

整个断面计的渗透流速为：

$$v=\frac{\gamma_w R^2}{8\mu}i\cdot n \qquad (2\text{-}28b)$$

这就是多孔介质渗流的最简单的物理模式。从此方程出发，无论如何处理，都将得到v-i的一次方比例关系。

1.假设多孔介质由一束直径相同、面积为a的平行毛管组成，单位面积上有m根这样的毛管。则孔隙率$n=ma$，单位时间通过单位面积的流量为：

$$q=m\frac{\gamma_w R^2}{8\mu}ia=\frac{\gamma_w R^2}{8\mu}i\cdot n \qquad (2\text{-}29)$$

这也就是以总断面积计的渗透流速v。和达西定律相比较，得：

$$k=\frac{\gamma_w R^2}{8\mu}n \qquad (2\text{-}29a)$$

这是单向流情况下的表达式。有人将这m根毛管分成互相正交的三组，每一方向有$m/3$根，和流动方向正交的两组毛管中无水流，因此渗透性也相应变为：

$$k=\frac{\gamma_w R^2}{24\mu}\cdot n \qquad (2\text{-}29b)$$

对平行的平板，其间距之半为R，板间流速也呈抛物线型，则很容易导出：

$$q=\frac{1}{3}\frac{\gamma_w R^2}{4\mu}\ i=\frac{1}{12}\frac{\gamma_w R^2}{\mu}\cdot i \qquad (2\text{-}30)$$

与式（2-28a）相比较，可见仅差一常数项。由于土中毛管通道的形状各不相同，而实际观测到的$k-n$关系也和伯朔尼方程不同，因此认为式中的常数项可用一任意常数C_s代表，并称之为形状系数。这样式（2-29）及（2-29a）可分别改写成：

$$q=C_s\frac{\gamma_w R^2}{\mu}\cdot i\cdot n \qquad (2\text{-}31)$$

$$k=C_s\frac{\gamma_w R^2}{\mu}\cdot n \qquad (2\text{-}31a)$$

2.假设多孔介质由一束不同直径的平行毛管组成[18]。将毛管直径δ和介质的孔隙大小分布$\alpha(\delta)$联系起来，定义$\alpha(\delta)d\delta$为直径δ和$(\delta+d\delta)$之间那部分孔隙所占有的面积，$\int_0^\infty\alpha(\delta)d\delta=1$。令单位面积内一束毛管的直径分布和上述孔隙大小分布$\alpha(\delta)$相对应，则直径从δ到$(\delta+d\delta)$间的毛管占有的前缘面积为$n\cdot\alpha(\delta)d\delta$，则单位时间内通过单位面积的流量为：

$$q=\int_0^{\infty} v_s \cdot n \cdot \alpha(\delta) \cdot d\delta \qquad (2\text{-}32)$$

在式（2-28a）中，以直径δ取代半径R，并代入式（2-32），得：

$$q=\frac{\gamma_w i}{32\mu} \cdot n \int_0^{\infty} \delta^2 \alpha(\delta) d\delta \qquad (2\text{-}32a)$$

和达西定律相比较，得：

$$k=\frac{\gamma_w}{32\mu} \cdot n \int_0^{\infty} \delta^2 \alpha(\delta) d\delta \qquad (2\text{-}32b)$$

令平均毛管直径$\overline{\delta}^2=\int_0^{\infty} \delta^2 \alpha(\delta) d\delta$，则和相同直径的平行毛管模型公式没有什么区别，只不过是平均直径有个更确切的定义罢了。因此，这种改进并无更多的优点。

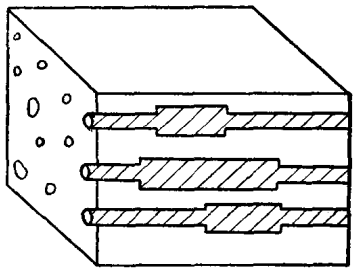


图 2-8 改良毛管模型示意图

3.假设不同直径的毛管，一根接一根地放在一起，形成孔隙流槽（见图 2-8）。以上介绍的毛管模型，都是假设每根毛管从多孔介质的一面，垂直地通到另一面，但这与实际情况不符。有人提出改进意见，假设孔隙空间是螺旋形的，一个流体质点从一边的小孔中进入，经过十分弯曲的流程，然后从对面相应的小孔中流出，但这也是不真实的。夏迪格（Scheidegger）提出了介于两者之间的模型，如图2-8所示。

设这个模型的毛管平均直径$\overline{\delta}$都相同，由于渗流通道的真正长度s大于模型长度x，表示在某一方向上的流动可能有摆动。则由海根一伯朔尼方程得：

$$v_s=-\frac{\gamma_w \overline{\delta}^2}{32\mu} \cdot \frac{\Delta h}{s} \qquad (2\text{-}33)$$

如单位体积有m根这样的毛管，则：

$$q=m\frac{\pi}{4}\overline{\delta}^2 v_s=-\frac{m\pi\gamma_w}{128\mu}\overline{\delta}^4 \cdot \frac{\Delta h}{s} \qquad (2\text{-}33a)$$

模型的孔隙率为：

$$n=\frac{1}{4}\pi \overline{\delta}^2 \frac{s}{x} \cdot m \qquad (2\text{-}33b)$$

由式（2-33a）及（2-33b）消去m得：

$$q=-\frac{1}{32}\left(\frac{x}{s}\right)^2 \frac{\gamma_w}{\mu}\overline{\delta}^2 \cdot \frac{\Delta h}{x} \cdot n$$

$$=-\frac{1}{32}\frac{\gamma_w}{\mu}\frac{\overline{\delta}^2}{T^2} \cdot i \cdot n \qquad (2\text{-}33c)$$

式中：$T=\frac{s}{x}$，为弯曲度因素。和达西定律相比较，可得：

$$k=\frac{1}{32}\ \frac{\gamma_w}{\mu}\ \frac{\overline{\delta}^2}{T^2}\cdot n \qquad (2\text{-}33d)$$

但是平均直径$\overline{\delta}$仍无明确的意义。为此，使毛管沿程的直径变化和多孔介质中的孔隙大小分布相应，即使某一长度单元ds的毛管体积和整个毛管体积之比，等于孔隙直径δ到$(\delta+d\delta)$之间那部分孔隙空间与整个孔隙空间之比，即：

$$\frac{\frac{1}{4}\pi\delta^2 ds}{\int_0^s \frac{1}{4}\pi\delta^2 ds}=\alpha(\delta)d\delta \qquad (2\text{-}33e)$$

因为：

$$\int_0^s \frac{1}{4}\pi\delta^2 ds=\frac{nx}{m}, \qquad (2\text{-}33f)$$

$$ds=Tdx \qquad (2\text{-}33g)$$

式（2-33 e）可变成：

$$\frac{1}{4}\pi\delta^2 Tdx=\alpha(\delta)d\delta\frac{nx}{m} \qquad (2\text{-}33h)$$

由连续方程得：

$$q=\frac{1}{4}\pi\delta^2\cdot m\cdot v_s \qquad (2\text{-}33i)$$

假设海根-伯朔尼方程对流槽的每一单元长度适用，由式（2-33）得：

$$\gamma_w dh=-\frac{32\mu v_s}{\delta^2}ds$$

即

$$\gamma_w(h_2-h_1)=-\int\frac{32\mu v_s}{\delta^2}Tdx \qquad (2\text{-}33j)$$

以式（2-33h）和（2-33i）中的Tdx和v_s代入式（2-33j）得：

$$\gamma_w(h_2-h_1)=-\frac{512\mu nx}{\pi^2 m^2}q\int_0^\infty\frac{\alpha(\delta)}{\delta^6}d\delta$$

整理得：

$$q=-\left[\frac{512\mu n}{\gamma_w\pi^2 m^2}\int_0^\infty\frac{\alpha(\delta)}{\delta^6}d\delta\right]^{-1}i \qquad (2\text{-}33k)$$

与达西定律相比较，得：

$$k=\left[\frac{512\mu n}{\gamma_w\pi^2 m^2}\int_0^\infty\frac{\alpha(\delta)}{\delta^6}d\delta\right]^{-1} \qquad (2\text{-}33l)$$

最好以弯曲度T代替m，则由式（2-33f）可得：

$$m\cdot\frac{\pi}{4}\delta^2=\frac{n}{T}$$

两边乘以$\alpha(\delta)d\delta$，并积分之，δ从0到∞，得：

$$\frac{n}{T}=\frac{\pi}{4}m\int_0^{\infty}\delta^2\alpha(\delta)d\delta$$

代入式（2-33 l ）得：

$$k=\frac{n}{32T^2}\cdot\frac{\gamma_w}{\mu}\left[\left(\int_0^{\infty}\delta^2\alpha(\delta)d\delta\right)^2\cdot\int_0^{\infty}\frac{\alpha(\delta)}{\delta^6}d\delta\right]^{-1} \qquad (2\text{-}33m)$$

如果定义：

$$\frac{1}{\overline{\delta^2}}=\left(\int_0^{\infty}\delta^2\alpha(\delta)d\delta\right)^2\cdot\int_0^{\infty}\frac{\alpha(\delta)}{\delta^6}d\delta \qquad (2\text{-}33n)$$

则式（2-33m）就与以前讨论过的简单模型一样了，只是对平均孔隙直径给以特定的意义罢了。

毛管模型经过各种修正，用定义平均孔隙直径、引入弯曲度因素等方法，使其更接近于实际多孔介质。但不论那种模型，都存在以下主要问题：

1.模型中毛管都是直的，而土中渗流的实际流程都是十分弯曲的；

2.毛管束只在沿流程方向连通，而实际孔隙流槽在各个方向都是连通的，有横向流动存在。

因此，模型和实际情况并不相似，但可以从中分析影响渗流的各项因素。

（三）水力半径模型[14、16、18]

柯森（Kozeny）将多孔介质模拟为由一系列相互连通的流槽、而不是毛管所组成，渗透水流的扩散和收束效应相互抵销，在垂直于流动方向的平面内没有速度分量，即所有水流的合速度方向和宏观水流方向一致。这些流槽的断面各不相同，但长度是一定的。

引入水力半径的概念以代替毛管模型中的平均直径。水力半径R_H的定义是整个断面积和润周之比，或者是充满流体的管道体积和润湿面积之比。在单位体积饱和土中，将水力半径定义为孔隙率n和颗粒比表面积s之比，即：

$$R_H=\frac{n}{s} \qquad (2\text{-}34)$$

柯森对所有通过和流动方向相正交的断面的流槽，同时解纳维-斯笃克（Navier-stokes）方程，最后以颗粒比表面积s表示k值。从量纲方面考虑，也可得出同样结果。因物理渗透性K的尺度是L^2，所以用长度单位的水力半径和其他无量纲参数表征K值的基本表达式如下：

$$K=\frac{CR_H^2}{F(n)} \qquad (2\text{-}35)$$

式中：C为无量纲常数，F（n）为孔隙率的某一函数。从式（2-25j）和（2-34）得：

$$v=C_s\frac{\gamma_w}{\mu}\cdot I\cdot\frac{n^3}{s^2} \qquad (2\text{-}36)$$

和达西定律相比较，并令$I=i$，得：

$$k=C_s\frac{\gamma_w}{\mu}\cdot\frac{n^3}{s^2} \qquad (2\text{-}36a)$$

或 $$K=C_s\cdot\frac{n^3}{S^2} \qquad (2\text{-}36b)$$

这就是柯森方程，C_s称为柯森常数。C_s在理论上变化很小，其值取决于流槽断面形状，如表2-3所示。

以后对柯森方程也有过许多修正式，最常见的是卡门（Carman）的修正式。卡门的修正主要有两方面：

表 2-3　不同流槽形状的相应C_s值

流槽形状	圆　形	方　形	等边三角形	条　形
C_s值	0.50	0.5619	0.5974	0.6667

1.找出 I 和 i 的关系；

因为 $I=\frac{\Delta h}{\Delta L_T}$，　$i=\frac{\Delta h}{\Delta L}$，所以：

$$I=i\frac{\Delta L}{\Delta L_T}=\frac{i}{T} \qquad (2\text{-}37)$$

式中　$T=\frac{\Delta L_T}{\Delta L}$，是弯曲度因素；

ΔL_T——沿弯曲流槽的实际流程长度；

ΔL——沿水流方向的宏观流程长度。

2.找出沿弯曲流槽的实际流速（v_l）和假思流速（v_i）的关系。

因为 $v_i=\frac{\Delta L}{\Delta t}$；　$v_l=\frac{\Delta L_T}{\Delta t}$；所以：

$$v_i=v_l\cdot\frac{\Delta L}{\Delta L_T}=\frac{v_l}{T} \qquad (2\text{-}37a)$$

式（2-36）中的v，即相当于式（2-37a）中的v_l。将式（2-36）、（2-37）、（2-37a）联立解v_i，并略去脚标i，得：

$$v=C_s\frac{\gamma_w}{\mu}\cdot\frac{i}{T^2}\frac{n^3}{S^2} \qquad (2\text{-}37b)$$

引用每单位体积固体颗粒的润湿面积$S_0=S(1-n)$代替S，得：

$$v=C_s\frac{\gamma_w}{\mu}\frac{i}{T^2}\frac{n^3}{S_0^2(1-n)^2} \qquad (2\text{-}37c)$$

与达西定律相比较，得：

$$k=C_s\frac{\gamma_w}{\mu}\frac{n^3}{T^2S_0^2(1-n)^2} \qquad (2\text{-}37d)$$

或 $$K=C_s\frac{n^3}{T^2S_0^2(1-n)^2} \qquad (2\text{-}37e)$$

令 $T^2=k_T$，　$C_s=\frac{1}{k_0}$，则得下式，即所谓柯森-卡门方程：

$$K=\frac{1}{k_0k_T}\frac{n^3}{S_0^2(1-n)^2} \qquad (2\text{-}37f)$$

式中　$k_0=\frac{1}{C_s}$——形状系数；

$k_T=\left(\frac{L_T}{L}\right)^2$——弯曲度系数；

n ——孔隙率；

S_0 ——比 面 积，$S_0=\frac{\text{润湿孔隙的表面积}}{\text{单位固体体积}}$。

卡门认为，从试验资料看，$k_0k_T=5$ 较为符合。实际上k_0变化不大，取$k_0=2$ 引起的误差不超过25%。但k_T却是极不确定的，各个研究者用不同材料得出的结果 差 别 极 大。同时$k_0k_T=5$ 暗示式（3-36b）中的$C_s=0.2$，而柯森常数的值不小于0.5（表2-4），两者也是矛盾的。总之柯森-卡门方程中有三个独立常数C_s、T、S，都要分别测定，这就带来了一些不定的误差。柯森本人也得到实测和计算的比表面积之差达－69～＋86%，这也不能用实验误差来解释。另外，水力半径理论中假定所有孔隙流槽都有同样有效的断面积，但实际上极少数大孔隙流槽，对比表面积的影响很小，而对渗透性却有很大影响，其渗透特性不是比表面积可以表征的。难怪以后许多研究者想用试验方法论证柯森-卡门方程的正确性，但并不都能得到合理的结果，从而引起许多研究者的评论和怀疑。甚至像夏迪格[18]还认为，柯森理论除了作为现象的定性描述以外，不能对其有更多期望。

如果考虑k或K与孔隙率的关系，则对变化范围较大的体系，柯森-卡门方 程 中的孔隙率函数$\frac{n^3}{(1-n)^2}$或$\frac{e^3}{(1+e)}$还是最常用的，且实际资料表明$k-\frac{e^3}{1+e}$曲线的相关关系是较好的。

（四）流动阻力模型——拖曳理论[14、18、19、20]

如果说水力半径模型和毛管模型仍有相似之处，那末流动阻力模型则是对渗透性作物理解释的另一种途径。这种理论将孔隙的壁假设为流体运动的障碍，流体流动过程中对孔隙的壁有拖曳力，这种总的拖曳力就等于多孔介质中流体的流动阻力。这类模型中，有将障碍物视为纤维状和视为球体两种假设，先计算单个颗粒在粘滞流体中运动时的阻力，然后考虑相邻颗粒的影响，导出运动方程。

进行基本推导时，采用以下假设：

1.多孔介质骨架是固定不变的，即不考虑骨架的压缩和个别颗粒的膨胀、收缩；

2.孔隙流体是不可压缩的；

3.不考虑固相-液相 界 面上的吸附现象；

4.考虑多孔介质孔隙完全为液体所充满的饱和系统；

5.多孔介质 的骨架 由 均匀 圆球所组成，但这不是必要的限制[19]。

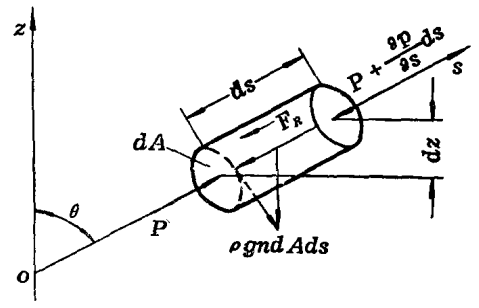


图 2-9 单元圆柱体作用力系示意图

考虑图 2-9 中所示的由圆球状颗粒组成的单元圆柱体，设体积孔隙率等于面积孔隙率，则流体体积为$ndAds$，dA为断面积，ds为沿流线方向的长度增量。每一固体颗粒的面积为αd_s^2，体积为βd_s^3；对圆球形颗粒，

$\alpha=\frac{\pi}{4}$，$\beta=\frac{\pi}{6}$，d_s为直径；对非圆球形不均匀介质，可取平均颗粒的特征长度。

由作用于单元圆柱体的力系平衡条件，即$\Sigma F_s=0$，得力平衡方程：

$$pndA-\left(p+\frac{\partial p}{\partial s}ds\right)ndA-(\rho gndAds)\cos\theta-F_R=0 \qquad (2\text{-}38)$$

以$\cos\theta=\frac{\partial z}{\partial s}$代入，并化简之，得：

$$-\frac{\partial p}{\partial s}-\rho g\frac{\partial z}{\partial s}-\frac{F_R}{ndAds}=0 \qquad (2\text{-}38a)$$

如ρ为常数，$h=\left(\frac{p}{\rho g}+z\right)$，则上式变成：

$$-\frac{\partial h}{\partial s}-\frac{F_R}{\rho gndAds}=0 \qquad (2\text{-}38b)$$

在线性层流区，流体粘滞性符合牛顿定律。单个球体在牛顿液体中缓慢流动的阻力由斯笃克定律给出：

$$f_p=\lambda\mu d_s v_s \qquad (2\text{-}38c)$$

式中 μ——粘滞系数；

d_s——球体直径；

v_s——在 s 方向球体周围液体的局部平均流速；

λ——考虑邻近颗粒影响的一个系数，取决于颗粒周围流线的轮廓，因此是孔隙系统几何形状的函数。

单元圆柱体中球体颗粒的总数为：

$$N=\frac{(1-n)dAds}{\beta d_s^3} \qquad (2\text{-}38d)$$

所有颗粒的总阻力：

$$F_R=Nf_p=\frac{(1-n)dAds}{\beta d_s^3}(\lambda\mu d_s v_s) \qquad (2\text{-}38e)$$

代入式（2-38b）得：

$$-\frac{\partial h}{\partial s}-\frac{\lambda(1-n)\mu}{\beta d_s^2 n\rho g}v_s=0 \qquad (2\text{-}38f)$$

单位时间内通过单位总面积的流量q，也就是达西公式中的v，可以从式（2-38f）解得：

$$q=-\frac{\beta n^2}{\lambda(1-n)}\,d_s^2\,\frac{\gamma_w}{\mu}\,\frac{\partial h}{\partial s} \qquad (2\text{-}38g)$$

式中$\frac{\beta n^2}{\lambda(1-n)}$仅与孔隙系统的几何学参数有关，可用一常数$c$代替，则：

$$q=-cd_s^2\frac{\gamma_w}{\mu}\,\frac{\partial h}{\partial s} \qquad (2\text{-}38h)$$

和达西定律相比较，可得：

$$k=\frac{\beta n^2}{\lambda(1-n)}\,d_s^2\,\frac{\gamma_w}{\mu}=cd_s^2\frac{\gamma_w}{\mu} \qquad (2\text{-}38i)$$

或
$$K=\frac{\beta n^2}{\lambda(1-n)}d_s^2=cd_s^2 \qquad (2\text{-}38\,j)$$

对均匀球形颗粒组成的介质进行一系列试验，可从式（2-38 i）计算λ值。路梅（Rumer）利用哈尔曼（Harleman）等用直径0.2～0.039毫米、均匀系数1.0～1.15的均匀球形颗粒所做的试验结果，以平均$n=0.27$，$\lambda=174.5$，代入式（2-38 j）得：

$$K=6.54\times10^{-4}d_s^2 \qquad (2\text{-}38\,k)$$

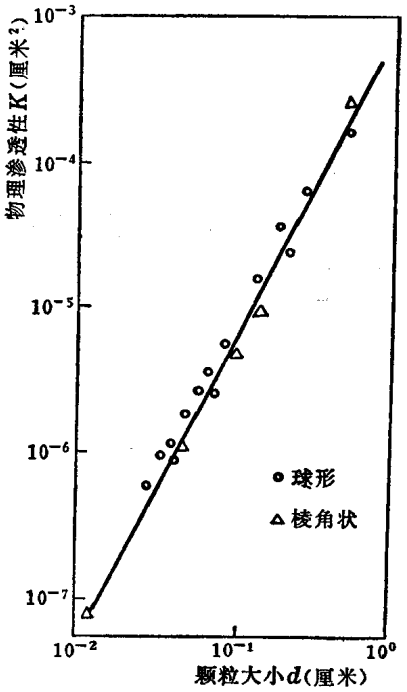


图 2-10　物理渗透性K和颗粒大小d_s的关系曲线

路梅还将一些研究者用圆球形颗粒和用棱角状颗粒所做的试验结果绘成图2-10，图中的直线即式（2-38 k），可见两者极为相近。由于球状和棱角状颗粒的试验结果都和式（2-38 k）相近，可见形状系数β的影响不大。λ值与不均匀程度有很大关系，这些试验所用材料的均匀系数在1.0～1.15之间，故式（2-38 k）不能推广到非均匀介质。同时，上面的推导中只计算了粘滞阻力，并认为流速小到可以使惯性项略去不计。由于渗流断面积变化引起水流的收缩和扩散，流程弯曲而引起离心加速度等情况，而使惯性项不能略去时，上面方程就不再适用了。

另一类拖曳理论，设想流动的障碍物是许多相同直径、但任意分布的圆柱状纤维[14、18]。假定每个纤维的长度大于其直径，按三个正交方向排列，其中之一沿流动方向。一个单位长度的纤维，当周围为中等距离的相同纤维时，其沿流动方向的拖曳力f_z为：

$$f_z=4\pi\mu v \qquad (2\text{-}39)$$

假设单位体积内有N个单位长度的纤维，有$\frac{N}{3}$沿流动方向排列，其流动方向的压力梯度等于平行流动方向的总拖曳力：

$$\frac{\Delta p}{L}=\frac{N}{3}4\pi\mu v \qquad (2\text{-}39\,a)$$

垂直于流动方向的$\frac{N}{3}$个单位长度纤维的总拖曳力也等于单位长度的压力降落，即：

$$\frac{\Delta p}{L}=\frac{N}{3}f_\perp=\frac{1}{2-\ln(\mathrm{Re})}4\pi\mu v\cdot\frac{N}{3} \qquad (2\text{-}39\,b)$$

式中 $\mathrm{Re}=\frac{d_s v p}{\mu}$为雷诺数；

f_1——垂直流动方向一个单位长度纤维的拖曳力。

将一组平行于流动方向和两组垂直于流动方向的压力梯度简单相加，得总的压力梯度为：

$$\frac{\Delta p}{L}=\frac{4\pi N}{3}\ \frac{4-\ln(\mathrm{Re})}{2-\ln(\mathrm{Re})}\mu v_s \qquad (2\text{-}39c)$$

以$(1-n)=\frac{1}{4}\pi d^2\cdot N$和假定纤维间的流速为常数而得的$q=v_s\cdot n$代入式（2-39c）得：

$$i=q\frac{16\mu}{3}\ \frac{1-n}{nd_s^2}\ \frac{4-\ln(\mathrm{Re})}{2-\ln(\mathrm{Re})} \qquad (2\text{-}39d)$$

与达西定律相比较，得：

$$\begin{aligned}k&=\frac{3}{16\mu}\ \frac{n}{1-n}\ d_s^2\ \frac{2-\ln(\mathrm{Re})}{4-\ln(\mathrm{Re})} \qquad (2\text{-}39e)\\&=f_1(\mathrm{Re})\\&=f_2(v)\end{aligned}$$

由此可见，这样导出的k不是常数，而是随流速而变的。因此，渗透性的拖曳理论，不单是一种和以前的假设完全不同的途径，而且也是对达西定律的修正，可以由此导出更一般的运动方程。问题是土颗粒间是紧密排列、彼此相互接触的，与拖曳理论的基本假设不甚符合，只是在高孔隙率的土中才较为相似。

前述各种模型，虽可导出达西定律的形式，给出k值或K值的物理意义和影响因素，但是与实际多孔介质对比，其渗流情况都已高度简化，有些也可能不尽合适。为了考虑多孔介质的不规则性，就要运用统计理论来处理，可参见有关专著[18、22]。

三、影响渗透性的各种因素

（一）惰性体系（无粘性土）和活性体系（粘性土）

土按其性质和成分，按其与水及其他渗透液体相互作用的程度，可以分为惰性和活性两类体系。影响这两类体系渗透性的各项因素及其作用机理也是各不相同的，需分别讨论。

1.无粘性土组成的惰性体系。这种土呈散粒状，单个颗粒浑圆或有棱角，但三个方向尺寸一般相差不大，矿物晶格活动性小，颗粒比表面小，在土粒和水界面上的相互作用力主要是毛管张力，在饱和土中趋于消失。影响渗透性的主要因素是颗粒堆积的不同方式形成的孔隙系统的几何形状和渗透液体的粘滞阻力等物理因素。

2.粘性土组成的活性体系。这种土的颗粒尺寸小，呈扁平状，比表面积大，颗粒与周围液相界面上有强烈的物理化学的相互作用，矿物晶格内部能强烈吸水膨胀。在紧靠颗粒表面处形成扩大的双电层，双电层内的水分子受到吸附作用，而表现出与自由水的性质不同的现象，所受作用力的大小随离颗粒表面的距离而迅速减小。因颗粒和团粒的排列以及土粒与水相互作用而形成的结构和组构，对粘土的力学性质（包括渗透性在内）有显著的影响。

从上节提到的各种模拟渗透性的物理模式推导的结果以及量纲分析的结果来看，表达

k 值的方程所包含的参数基本上是相似的。尽管各种模型和多孔介质的实际情况都有一定距离，但可以用来分析影响土的渗透性的主要因素。

泰勒（Taylor）[17] 用毛管流的海根-伯朔尼方程导出达西渗透系数的表达式如下：

$$k = d_s^2 \cdot \frac{\gamma_w}{\mu} \cdot \frac{e^3}{1+e} \cdot C \qquad (2\text{-}40)$$

式中 $\frac{\gamma_w}{\mu}$——表征渗透流体影响的因子；

d_s^2、$\frac{e^3}{1+e}$、C——表征多孔介质特性影响的因子，其中d_s为当量圆球直径，它相当于土粒比表面积和体积之比；

C——形状系数。

因此，可以将渗透流体和多孔介质特性的各项因子分别研究，以便考虑其影响[3,16,17,23]。

此外，封闭气泡和细颗粒的移动，土的结构和组构，粘性土中的物理化学作用等，也都对土的渗透性有很大影响；但这些影响不是上述由毛管模型推导出的公式可以反映出来的，需要从有关理论和实验予以阐明。

由于砂土和粘土这两类体系的作用内力和在外力作用下的性状各不相同，控制其渗透性的主要因子也不尽相同，因此，对其影响因素也宜于分别讨论。

（二）影响砂性土渗透性的主要因素

1.渗透流体的影响

无粘性土中渗透流体对渗透性的影响，主要是其单位体积重量γ_w和粘滞度μ的影响。如引入物理性常数K值，令

$$K = k\frac{\mu}{\gamma_w}$$

则可消除流体性质的影响，从而用一种流体的试验资料换算成另一种流体的渗透性。在由于渗透流体的压力、温度、电解质浓度等变化而使其各点的密度有较大变化时，则K值不能视为常数处理，这时令

$$K = k\frac{\mu}{\rho g}$$

而在运动方程中将ρ视为变数项。

前已述及，土力学关于饱和土渗透性的研究中，渗透流体主要是水，压力和温度变化都不大，故一般都将γ_w视为常数，且$\gamma_w \approx 1$。另外，还采用10℃或20℃下的渗透系数k_{10}或k_{20}以消除温度对水的粘滞性的影响。所以习惯上仍是用达西的渗透系数来表示。只有在某些特殊情况下，如在含有大量可溶盐的地层（如黄土）或在可溶性岩石（如石灰岩）中的渗流，才涉及电解质的水溶液，如沿程有溶解、吸附或交换等效应，而使溶液密度有较大变化时，则另行处理。

2.颗粒大小和级配的影响

从各种模型推导出的理论方程来看，都表示为k与多孔介质的某一特征直径的平方成

正比。从量纲分析来看，K的单位是L^2，也和理论分析结果相符。故许多研究者研究k-d关系的经验方程的形式多为：

$$k=Cd^2 \tag{2-41}$$

关于特征粒径的选用，一般都用有效粒径d_{10}，即土中有10%的颗粒小于该直径，但也有人用中数粒径d_{50}等其它特征值。例如熟知的海森（Hazen）公式为：

$$k=100d_{10}^2 \tag{2-41a}$$

式中k以厘米/秒计，d_{10}以厘米计。在海森的试验中，用的是一种松散的砂滤层材料，d_{10}=0.1～3厘米，均匀系数不超过5。式中的常数值变化于41～146之间，大多数在81～117之间，其平均值是100[23、24]。因此，该式只能表示他所研究的范围内的平均值，只适用于均匀砂，对别的土类并不适用。别的研究者得到的常数值也各不相同。例如，莱因和华许朋（Lane和Washburn）列举了粒径和k/d_{10}^2的试验结果，如表2-4[23]。由表可见，k/d_{10}^2的数值变化于1～42之间，平均为16，变化是很大的。

表2-4　渗透试验资料

土类	粒径 d_{10}（厘米）	渗透性（微米/秒）	k/d_{10}^2（1/厘米·秒）
粗砾	0.082	1100	16
砂砾	0.020	160	40
细砾	0.030	71	8
粉质砾	0.006	4.6	11
粗砂	0.011	1.1	1
中砂	0.002	0.29	7
细砂	0.003	0.096	1
粉土	0.0006	0.15	42
平均			16

颗粒愈小，渗透性也愈小，这是合乎逻辑的；因为一般细颗粒组成的孔隙流槽也小，所以带来较低的渗透性。对砂土和粉土，其颗粒形状更接近于各向相等，组构上的差异也较小。这种粒径与渗透性关系的相关性应当更好，但实际上各种土类的常数值相差很大。所以也有人认为，不单是粒径，而且级配的均匀性对渗透性也有影响。在级配良好的土中，细颗粒填充大颗粒的孔隙，减小孔隙流槽尺寸，从而降低渗透性。

爱米尔和阿怀特（Amer & Award）[25]曾报导过用4组35个试样研究均匀系数C_u及孔隙比e对k值的影响。试验成果表明均匀系数对k值起主要作用。绘制k-C_u的对数曲线呈线性关系，不同d_{10}的k-C_u直线基本平行，见图2-11。故k-C_u关系可以下式表示：

$$k=\beta C_u^m \tag{2-42}$$

对一系列曲线，用最小二乘方可求出$m\approx0.6$，是常数。在式（2-40）中，取d_s为d_{10}，令形状系数C用均匀系数和另一个系数α表达：

$$C=\alpha C_u^m \tag{2-43}$$

则：

$$\beta=\alpha\frac{e^3}{1+e}\frac{\gamma_w}{\mu}d_{10}^2 \tag{2-43a}$$

试验表明α随d_{10}而变，但和e无关，见图2-12。用适线法可得：

$$\alpha=3.5\times10^{-4}d_{10}^{0.32} \tag{2-43b}$$

所以：

$$k=3.5\times10^{-4}\frac{e^3}{1+e}\frac{\gamma_w}{\mu}d_{10}^{2.32}\cdot C_u^{0.6} \tag{2-43c}$$

实测k值和用式（2-43c）所得的值甚为相符。但他们所用试样的均匀系数还不够大，而

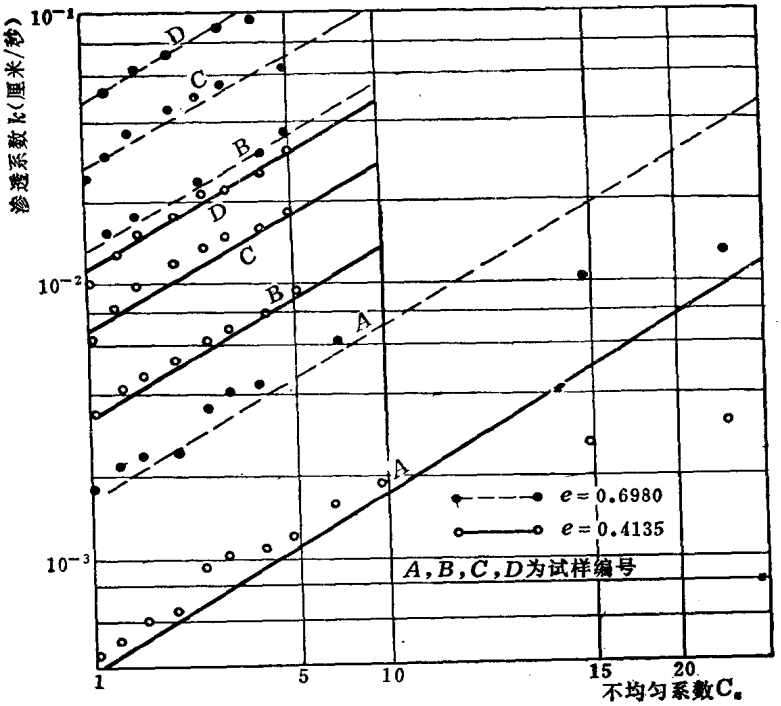


图 2-11 渗透系数k与均匀系数C_u关系图

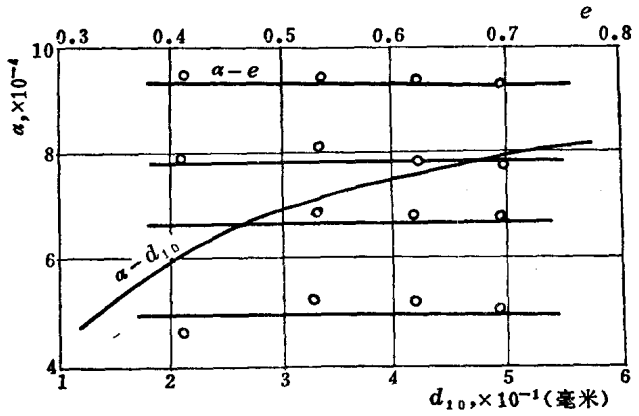


图 2-12 α与d_{10}及e关系图

且图 2-11 中均匀系数较大的几个点偏离直线也较大，因此，这种数值的关系只能作为参考。

马许和邓尼（Masch和 Denney）[26] 用粒径 2.0～0.0625 毫米的砂做试验，研究颗粒大小及级配对渗透性的影响。他认为，可以用平均粒径 d_{50} 和表示颗粒级配曲线分散程度的参数 σ_I 预估砂的渗透性，如图 2-13 所示。由图可见，k 随 d_{50} 增加而增加；对给定的d_{50}，k随σ_I减小而增加，d_{50}大时变化大，而 d_{50} 小时变化也小，对<3.5Φ 单

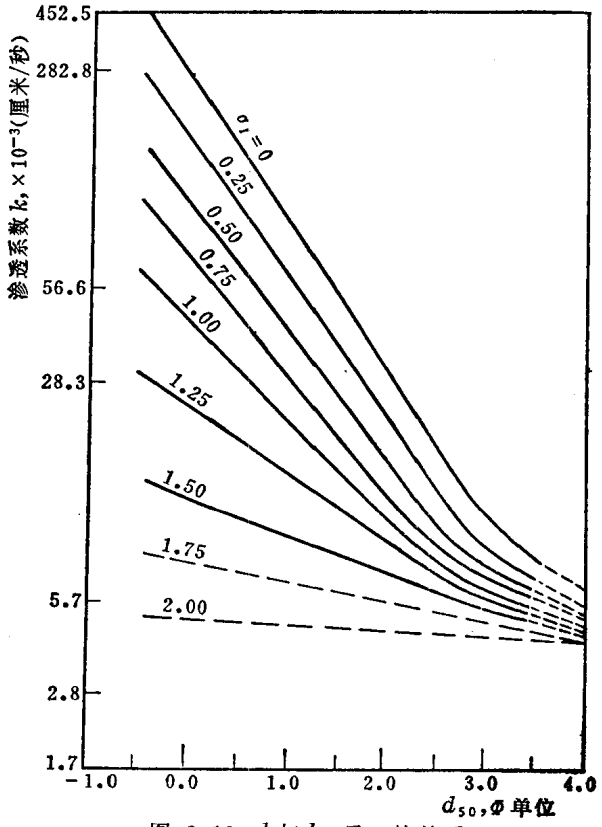


图 2-13 k与d_{50}及σ_I的关系

位*时和σ_I基本无关。σ_I的定义为：

$$\sigma_I=\frac{(\Phi_{84}-\Phi_{16})}{4}+\frac{(\Phi_{95}-\Phi_5)}{6.6} \qquad (2\text{-}44)$$

对级配良好的砂为零；对级配极不良的砂为 4 。

由以上几例可见，影响渗透性的不是某一单一因子，而与颗粒大小及其分布、颗粒形状等都有关，企图以单一因子或某些土类的试验成果表征土的渗透性的数值关系，是难以概括全面的。

推理和试验资料都表明，土中细颗粒对渗透性有较大影响，但影响的性质和程度与土的级配有关。如果土的颗粒级配足以阻止细颗粒为渗透水流所带动，则这种体系是动水稳定的，其v-i关系不随水力梯度和时间而变化。如果土中的细粒是动水不稳定的，则可在渗

---

* Φ单位系统用颗粒直径的以 2 为底的对数的负值表示粒径，其对应关系如下：

土　　类	极粗砂	粗　砂	中　砂	细　砂	极细砂
颗粒直径(毫米)	2.0～1.0	1.0～0.5	0.5～0.25	0.25～0.125	0.125～0.0625
Φ单位	-1.0～0.0	0.0～1.0	1.0～2.0	2.0～3.0	3.0～4.0

透水流作用下，在粗颗粒孔隙中移动。如细粒被冲出边界面以外，则将使土增加渗透性；如被带动到某处停止下来，起堵塞大孔隙的作用，则可使土的渗透性减小。这种土的v-i关系将随水力梯度和时间而变化，并呈现某种不规律性，这在以后还将提到。

土中细粒对渗透性的影响还与其含量有关。我国一般以5毫米以上颗粒为粗料（砾石），它占总干土重的百分数为含砾量。在含砾量30～40%以下时，粗料还没有起骨架作用，渗透性大小主要取决于细料，且因粗料是不透水的，随其含量的增加，减小了渗透的过水断面积，从而使渗透性随粗料含量的增加反而略有降低。到粗料含量超过30～40%以后，粗颗粒开始起骨架作用，但细料仍能充满粗料孔隙，不过将因得不到充分压实，而使其密度相应降低；待达到因粗料本身阻水而降低透水性的效应为细料密度降低而增加透水性的效应所补偿时，渗透系数又开始增大，此后就随粗料含量的增加而迅速增加，在含砾量和渗透系数的关系曲线上出现明显的转折。在粗料含量达到70～75%以上时，粗料间明显架空，细料在粗料孔隙内只起填料作用，且随时有被渗透水流带动的可能，这时土的渗透性就仅取决于粗料，而就与细料含量和级配几乎无关了。图2-14示出了某些试验资料[7、27]。

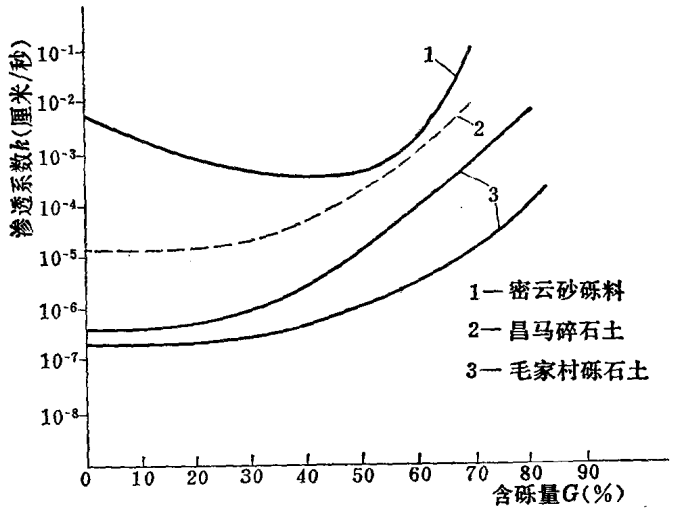


图 2-14　含砾量与渗透系数关系的一些试验资料

3.密度的影响

密度（或孔隙比、孔隙率）对渗透性的影响虽不如颗粒大小的影响大，但也是很明显的。由式（2-40）可见，在其它条件相同时，k-$\frac{Ce^3}{1+e}$呈线性关系。但形状系数与密度变化关系不大，可视为常数，故k-$\frac{e^3}{1+e}$呈线性关系。也有人建议k-e^2或k-$\frac{e^2}{1+e}$关系成直线。兰姆和惠脱曼（Lambe和Whiteman）[23]用变水头渗透试验资料绘成图2-15，指出以k-$\frac{e^3}{1+e}$的直线关系较好。此外，大量试验资料指出，e-log$k$呈直线关系。他们还指出，粘土的k-$\frac{e^3}{1+e}$关系偏离直线，而e-log$k$仍为直线，因之认为k-$\frac{e^3}{1+e}$的直线关系仅适用于砂土，而e-log$k$的直线关系对两者都适用。

渗透性随孔隙比的减少而降低，也可以用一些经验公式来表示。如对干净的中细砂，可用卡萨格兰德（Casagrande）的公式表达[28]：

$$k=1.4e^2k_{0.85} \qquad (2\text{-}45)$$

式中$k_{0.85}$为$e=0.85$时的渗透系数。但如有云母或其他片状颗粒时，$e-\frac{k}{k_{0.85}}$曲线形式也有所不同，看来很难有通用公式。

砂土的密度也可以用相对密度D_r来表示。布密斯特（Burmister）[29]曾发表各种砂土渗透性和相对密度关系的一系列试验资料，他认为，渗透性随D_r的增加而减小，对颗粒大小分布范围较窄的土变化较小，而对颗粒大小分布范围较宽的土变化较大。且发现不同d_{10}的土的k-D_r线几乎平行。他认为这种D_r-d_{10}-k关系是土工试验中估计渗透性的有用工具。

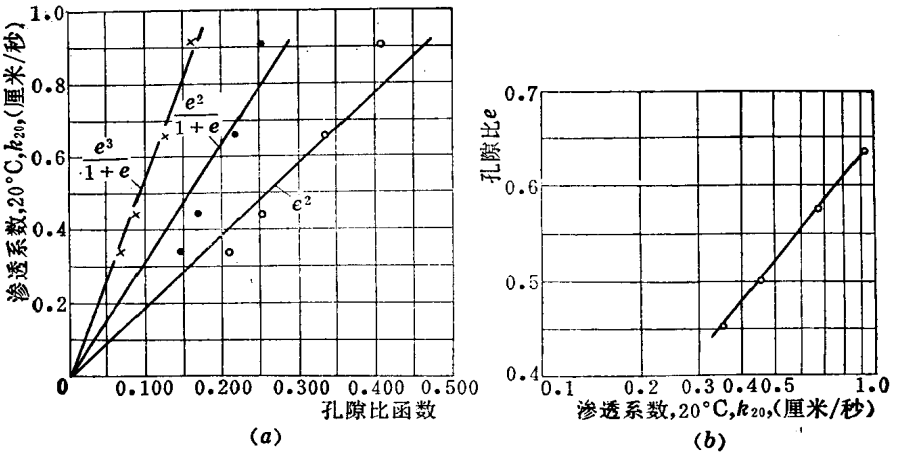


图 2-15 变水头渗透试验资料
(a)k-$f(e)$关系曲线；(b)e-log$k$关系曲线

孔隙率对渗透性的影响机理，主要有两个方面：

（1）孔隙率的增加使土的过水断面增加；

（2）增大孔隙尺寸而使平均渗流速度增加。

在这两者之中，前一因素不如后一因素重要。在土壤物理学中，往往将土中孔隙尺寸的大小和分布看作影响土的渗透性的重要因素。曾经研究了许多将渗透性表达为孔隙率函数的形式，用以预测土的渗透性，这将在后面非饱和土的渗透规律一节中一并介绍。

4.封闭气泡和细颗粒移动的影响

土中封闭气体即使含量很小，也会对渗透性有很大影响。它可以使土的渗透性随时间而变化，甚至使v-i关系偏离达西定律。封闭气泡的影响不单是减小孔隙流槽的过水断面，更重要的是可以堵塞某些孔隙通道，而使k值大为降低。因之，即使土中封闭气体的数量不变，但其所在位置如有所变化，也会使k值发生明显变化。当封闭气泡为渗透水流带出土体以外时，k值会随之增加。而且，由于这些气泡的含量和位置都是不固定的，因此，对k值的影响也不恒定，使k值随试验条件（如时间、梯度、压力、温度等）而有不同的变化，这将对正确测定k值带来许多麻烦。

通常所说的饱和试样，实际上总是有不同数量的封闭气泡存在，因为：

（1）在非饱和土充水过程中，总有一些小孔隙中的气体来不及排出土体，而被封闭在孔隙中；

（2）孔隙水压力和温度的变化，可使原来溶解在孔隙水中的气泡释出，或因孔隙水压力减小或温度的增加而使原有气泡体积增加，例如，从深层取出的原状土样，变水头渗透试验时水头逐渐降低等情况；

（3）天然土层在水中沉积过程中，因土粒有对抗被水浸湿的阻力，而使颗粒表面有气泡附着，或因植物残渣和有机质分解而释出气体；

（4）碾压土坝中的土料压实时，总有一定数量的气体残留在土体内。

为了取得正确的试验资料，最好是使试验土样中的含气量及其分布能模拟实际情况，但这几乎是不可能的。因此，通常的做法是使试样的饱和度尽量提高，排除封闭气泡的影响，以得出一个稳定的 k 值。常用的措施是，施加倒压力使试样完全饱和，试验时用无空气水，将渗透水略为加温而在渗透过程中冷却，以避免气泡逸出等。有时也可用天然水模拟现场情况，但这样做起来既麻烦，也不一定符合实际，因此采用得较少。

土中细颗粒的移动和悬浮在水中的其它微小固体物质，也有与封闭气泡类似的影响。水流通道的堵塞和冲开将对 k 值有显著影响，有可能成为偏离达西定律的原因之一。路塞尔和斯维森特洛勃（Russel和Swartzendruber）[30] 曾报导过他们用砂和粉土的混合物所做的试验。砂的粒径有90%在297～105μ之间，主要成分是石英，粉土颗粒直径主要在105～2μ之间，用的水是无空气和无离子水。试验结果如图2-16。图2-16a所示的试验成果为通过原点的直线，增加梯度和减少梯度的试验点子吻合，没有随时间和梯度而变化的渗流现象，v-i关系服从达西定律。图2-16b所示的试验结果，第一次增加梯度的试验为一小于 i 一次方比例关系的曲线，而在减小梯度的试验中得一通过原点的直线，说明经过渗流作用后土样已发生变化，而这种变化可以用初次增加梯度时某些粉土颗粒被带动，并沿流程沉积下来，使 k 值逐渐减小。但减小梯度时已不能带回原处，故表现出近似达西定律的性状。在第二次增加和减小梯度时的试验结果是吻合的，也证明了以上推断。这种细颗粒移动而破坏比例关系的现象，已作为非达西渗流性状的有力解释之一。

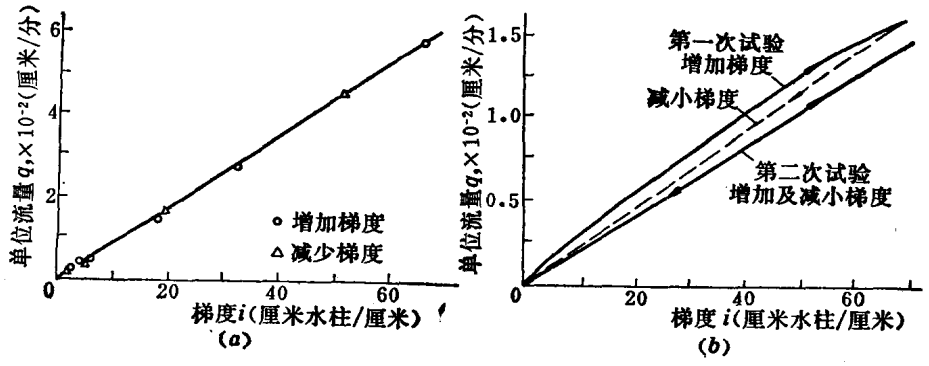


图 2-16 粉土和砂混合物的 q-i 关系

（a）粉土：砂＝1:1；（b）粉土：砂＝1:3

（三）影响粘性土渗透性的主要因素

1.渗透流体的影响

粘土的渗透性不单是受渗透流体的容重和粘滞性的影响，而是受整个水-土-电解质体系的相互作用的强烈影响[31]。而这种相互作用的影响的性质和程度，与粘土矿物和电解质溶液的成分，以及渗透溶液的极性都有密切关系。

米却尔斯和林（Michaels和Lin）[32]用饱和纯高岭土，以不同渗透流体作过系统试验，研究其对渗透性的影响。试验结果如图2-17和2-18。所用流体的特性如表2-5。图中渗透性的指标用的是物理渗透性，因此，渗透溶液的密度和粘滞性的影响已经消除。

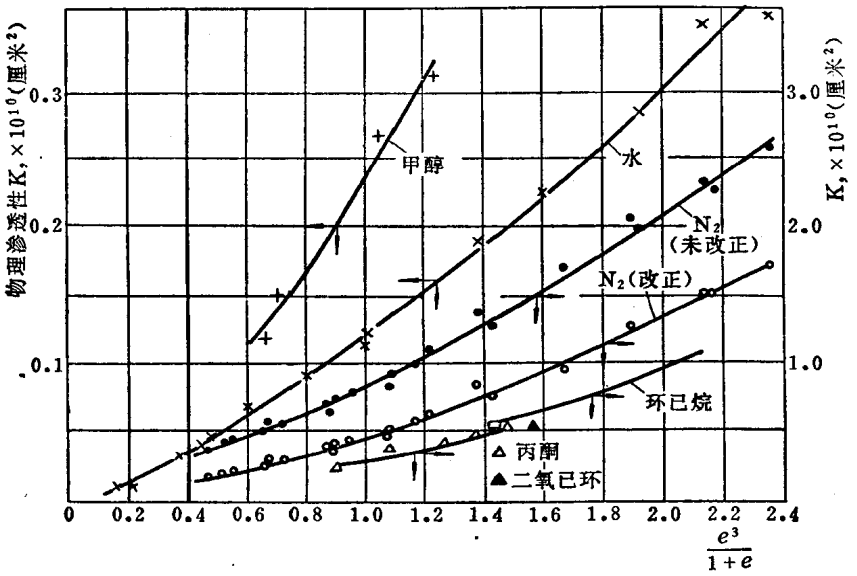


图 2-17　不同渗透流体下高岭土的渗透性 k 与 $\frac{e^3}{1+e}$ 的关系

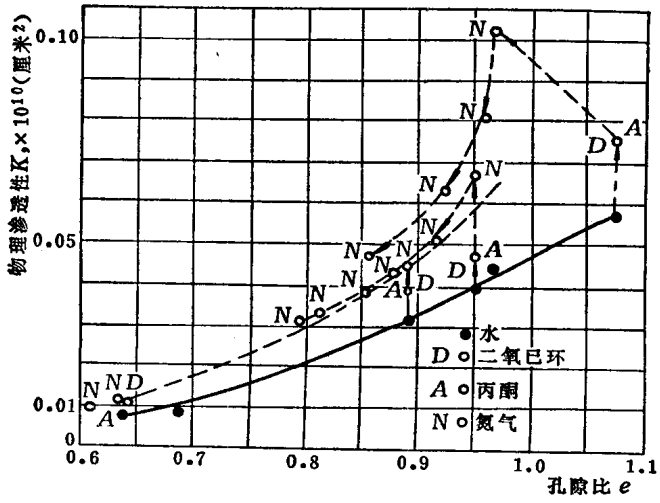


图 2-18　渗透流体的取代对高岭土渗透性的影响(初始渗透流体为水)

表 2-5　　各　种　渗　透　流　体　特　性　表

渗透流体	介电常数	粘度（厘泊）	密度(克/厘米^3)
氮气	1.00	0.00184	0.001165
环已烷	2.05	0.966	0.779
丙酮	21.4	0.330	0.792
二氧已环	—	1.329	1.036
甲醇	33.1	0.593	0.792
水	80.0	1.005	0.998

图2-17是以不同流体将高岭土拌制成型，并进行渗透试验的成果。可以看出，不同流体对K值影响很大，引起的变化达百分之几百。在给定孔隙比下，随着渗透流体极性的增大，K值随之减小。顺便指出，图中$K-\frac{e^3}{1+e}$不是直线关系，说明$K-\frac{e^3}{1+e}$的线性关系对粘土是不适合的。图2-18示出高岭土在水中沉积，并以水作为初始渗透流体，然后以其它有机溶液取代水，最后又以氮气取代有机溶液的渗透试验结果。这些渗透流体的极性大小的顺序为：水→二氧已环→丙酮→氮气。由图可见，不同渗透流体给出不同的渗透性。用二氧已环取代水时，K值约增加20～30%；以丙酮取代二氧已环时，K值仅略增2～3%；但在以氮气进一步取代丙酮时，K值却又显著增加，且起始孔隙比大的增加值也大。与图2-17对比可见，后一试验中不同渗透流体的渗透性的差别，要比前一试验表现出的为小。

米却尔斯和林由这些试验资料得出结论，认为不同渗透流体引起渗透性的变化，主要是由于在不同介质条件下形成的土的组构不同所致。因为极性越大的液体，将使土形成更为分散的组构，颗粒将更有规律地定向排列，而使土具有更小的渗透性。以极性不同的溶液相互取代，就会引起土的分散度的变化，从而使渗透性也随之变化。在后一试验中，以水制备试样和作为初始渗透流体，使土样的组构已基本定型，以后的取代引起的变化自然就小于前一类试验了。高孔隙比的试样颗粒排列较松，有更多重新排列的机会，并在干燥时发生凝聚，而密实试样中对颗粒重新定向排列和凝聚的阻力加大，因而高孔隙比试样的渗透性变化比密实试样大得多。密瑟里和奥尔逊（Mesri和Olson）[31]用三种粘土所做的试验也表明，非极性流体给出最大的k值，低介电常数的极性流体得出较小的k值，而高介电常数的极性流体——水，则给出最小的k值。同时，在非极性流体中，这三种粘土几乎具有相似的k值，表明此时渗透性与物理化学因素无关，仅取决于机械因素的作用。

土的渗透性对渗透溶液电解质类型和浓度也很敏感。一般来说，一价交换性阳离子的土具有较小的k值，而高价交换性阳离子的土的k值大。电解质浓度降低趋向于使k值减小，但在高价阳离子情况下，电解质浓度的影响就消失了[31]。哈特凯斯特尔（Hardcastle）和米契尔[33]曾报导过伊里土和粉土混合物的试验成果。图2-19表示电解质浓度从0.6N氯化钠变到0.1N氯化钠时，相对透水性随之降低的变化情况。图中相对透水性系以0.6N氯化钠时的渗透性为1，总通过量系总流量与试样孔隙体积之比。透水性范围在10^{-5}～10^{-7}厘米/秒之间。他们将这种现象归之于渗透过程中，电解质浓度减小，使粘土

颗粒的水膜增厚，发生内部膨胀和分散的结果。胡（Woo）等[34]也报导过用粘粒含量68%的土，在氯化钠含量35克/立升的溶液中沉积，用淡水过滤，测定渗滤溶液浓度和渗透系数的关系，如图2-20所示，也得到相似的结果。这种现象说明海相沉积的含盐粘土和其它盐渍土的结构变化对渗透性有很大影响。

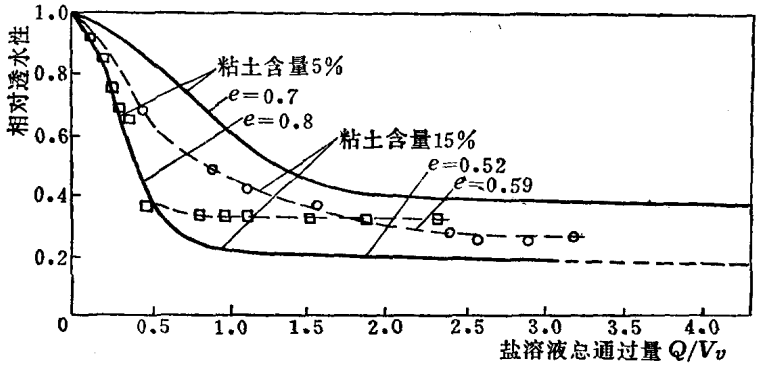


图 2-19　粘粒内部膨胀引起的渗透性降低

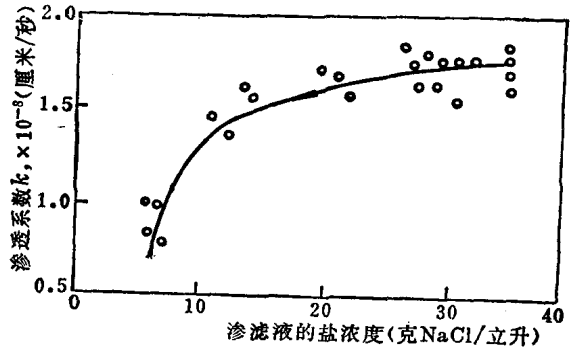


图 2-20　溶滤过程中渗透性的降低

2.固体颗粒的影响

粘土颗粒对渗透性的影响也不仅像砂粒那样，只是颗粒大小和级配影响土的孔隙大小和分布，而同样有更为复杂的机理。

粘土颗粒大小和其矿物成分有一定关系，参见表2-6[13]。而不同矿物成分和周围液相的相互作用和晶格内部的稳定性都不相同，其渗透性也各不相同，而且和交换性阳离子成

表 2-6　　不同粒组土粒的矿物成分

颗粒大小，μ	主要成分	一般成分	少量成分
0.1	蒙脱石	坡缕石	伊里石(痕量)
0.1～0.2	坡缕石	高岭石，蒙脱石	伊里石，石英(痕量)
0.2～2.0	高岭石	伊里石，坡缕石	石英，蒙脱石，长石
2.0～11.0	云母，伊里石，长石	石英，高岭石	埃洛石，蒙脱石(痕量)

分有关。一般纯粘土的渗透系数都小于10^{-5}厘米/秒，有些单价阳离子饱和的蒙脱土的k值可以小于10^{-10}厘米/秒。将同一含水量的粘土矿物相比较，其渗透性大小的顺序为：

蒙脱石＜坡缕石＜伊里石＜高岭石

不同矿物及交换阳离子成分的粘土的孔隙比与渗透性的关系，见图2-21[23]。同时，颗粒表面双电层内吸附水膜厚度及其对渗透性的影响也和矿物成分有关。对高岭土，一般吸附水膜厚度约为孔隙直径的2.2～3.5%，对孔隙流槽尺寸影响不大；而对蒙脱土类矿物，因水膜厚，孔隙小，其相对影响就较大。

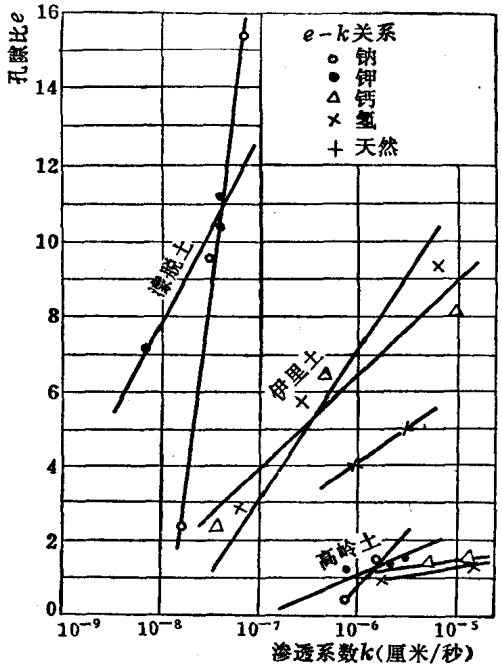


图 2-21 不同矿物成分和交换阳离子成分的粘土的孔隙比与渗透性关系



图 2-22 正交方向水流流程弯曲示意图

粘土颗粒的形状是扁平的，有定向排列作用，使平行于层面和垂直于层面方向的渗透性呈现显著的各向异性性质，参见图2-22。米契尔用若干原状粘土试样进行测定的结果，水平和垂直渗透性的比值约为1～7，与粘土颗粒定向排列关系甚为一致。如所有颗粒都按一定方向排列，则根据弯曲流程模型分析，高岭土的水平和垂直渗透比可大到20，对别的粘土甚至可大到100以上[13]。

天然粘土层在沉积过程中，是在垂直应力p和水平应力K_0p(K_0为静止侧压力系数）下固结的，已受到偏应力（$1-K_0$）p的作用，使粘土颗粒沿剪切面定向排列，从而形成各向异性渗透性。分层碾压筑成的填土，在碾压工具的反复作用下，也可以使粘土颗粒沿水平方向定向排列，而使填土水平方向的渗透系数大于垂直方向。这种渗透性的各向异性性质对粘土的渗透固结和土体的渗流分析都有很大影响。

3.孔隙大小及分布——组构（fabric）的影响

土的组构说明土中颗粒、粒团及孔隙的分布，与土的工程性质密切相关。近来由于电子显微镜的出现，使有可能直接观测土的组构，使土的性质的微观研究有了长足进步。粘性土中，以单个颗粒存在的情况较少，大多数沉积物及其它人工填土中，若干粘土薄片组成的粒团或若干粒团组成的集合体是更常见的组构单元。近年来，逐渐认识到土的结构是

单个颗粒及大小不同的粒团组成的组构单元按一定方式排列组成的，各种粒团内部的更小一级的粒团和颗粒也有一定排列方式。土骨架间的孔隙也随之分为粒团间的大孔隙和粒团内的微孔隙两种（图2-23）。粒团间和粒团内由不同的化学和物理化学力相联结[10]。密度和孔隙比相同的土，由于组构不同，可以具有极不相同的性质。

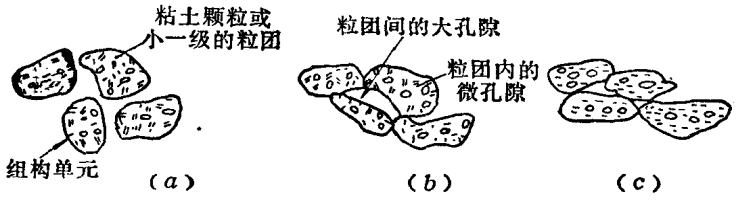


图 2-23　土的结构示意图

(a)组构单元的原始排列；(b)组构单元重新定向排列，但组构单元内部的排列基本不变；(c)组构单元内部及外部都定向排列

实践证明没有一种细粒土的性质，象渗透性那样，受组构如此巨大的影响。渗透性的毛管模型表明，渗透流速与孔隙直径平方成正比，而单位流量与孔隙直径的四次方成正比，因此，孔隙率相同的两个粘性土，粒团间大孔隙占有高比例的组构，与均匀孔隙尺寸的组构相比较，其渗透性要大得多。压实粘性土的渗透试验成果清楚地表明了这种影响。压实到同一密度的土，在干于最优含水量下压实时，对重新排列的阻力较大，形成杂乱排列的凝聚性结构，具有较大的孔隙，故其渗透性较大；而在湿于最优含水量下压实时，粒团强度较弱，易于重新定向排列，形成分散性结构，其平均孔隙较小。一种压实粘土的典型试验成果如图2-24所示[35]。

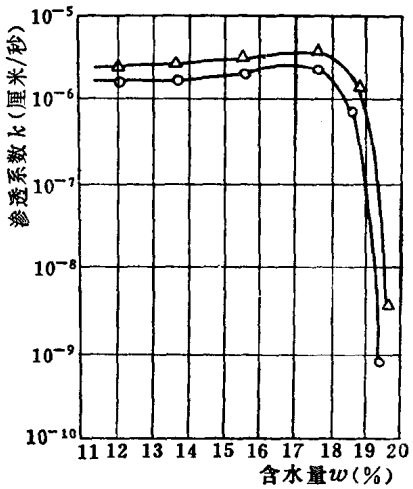


图 2-24　等密度粉质粘土的k-w关系曲线

γ_d = 1.73克/厘米³；w = 11.8～19.5%；S_r = 90～95%

在固结过程中，测定不同孔隙比下土的渗透性，并与毛管模型公式（如柯森-卡门公式等）计算值相比较，发现两者并不相符。实测渗透性可比计算值大或小，高孔隙率时，渗透性随孔隙比减小而降低的程度要比计算预测的快得多，而低孔隙率时则相反，也就是k-$\frac{e^3}{1+e}$偏离直线关系。这是由于在高孔隙率时，土的压缩主要由于粒团间大孔隙的压缩，并趋于更紧密的排列，所以对渗透性影响较大；而在低孔隙率时，进一步的压缩主要是粒团本身压缩和粒团内部颗粒的重新定向排列，所以对渗透性影响较小。颗粒的定向排列和孔隙大小及分布两者都对渗透性有影响，但后者影响更大，所以出现前述现象。两者综合起来，一般使粘性土的e-log$k$关系呈直线关系。

据西田等[36]的报导，从大量实验结果可得出下列关系式：

$$e=\alpha+\beta\log k \qquad (2\text{-}46)$$

式中α及β都是常数，且和塑性指数有关：

$$\alpha = 10\beta \qquad (2\text{-}46a)$$

$$\beta = 0.01I_p + \delta \qquad (2\text{-}46b)$$

式中 I_p——塑性指数；

δ——与土的类型有关的常数，其平均值可取0.05。

他们发现在$k=10^{-7}\sim10^{-4}$厘米/秒范围内，式（2-46）的计算成果和试验甚为符合，但对$k<10^{-8}$厘米/秒的高塑性粘土，e-log$k$不再呈直线关系。他们假设高塑性粘土中，颗粒周围的吸附水膜不参与流动，从而使过水的孔隙直径缩小所致。在此基础上推导出：

$$k = K_0 \frac{e^5}{1+e} \qquad (2\text{-}46c)$$

式中K_0为表示不同因素对k值影响的常数，其值随吸附水膜的厚度、水的粘滞性及吸附阳离子种类而变。并用膨润土及金泽（Kanazawa）天然粘土的试验成果予以验证，认为式（2-46）适用于$k=10^{-7}\sim10^{-4}$厘米/秒的粘土，而式（2-46c）适用于$k<10^{-7}$厘米/秒的粘土。这也可以说明高塑性粘土中，影响渗透性的因素较多，与粒状土的规律性有所不同。

4.实际土体的渗透性

粘性土的微观结构和宏观构造对渗透性影响很大，常因此而使室内试验成果不能代表现场土体的实际情况，在取用计算参数时，必须计及这些影响。例如：

层状粘土。在沉积过程中，粉细砂夹层和透镜体的存在，粘土颗粒的水平定向排列，往往使其水平方向的渗透系数远大于垂直方向的。据张和肯尼（Chan和Kenney）报导[37、38]，以前太沙基、斯各特、卡萨格兰德和保罗斯（Poulos）都认为，层状土平行于层面方向的渗透系数k_x远大于垂直于层面方向的渗透系数k_z，其比值k_x/k_z可能达到10，甚至100。但他们在试验室及现场对新立斯克特（New Liskeard）层状粘土做的试验，得出k_x/k_z在1～5之间，一般都<5。他们认为，这一比值与组成层状土各单元层次的土的性质有关。新立斯克特层状粘土各组成层次本身的渗透系数相差就不大，所以k_x/k_z比值也就不大了。

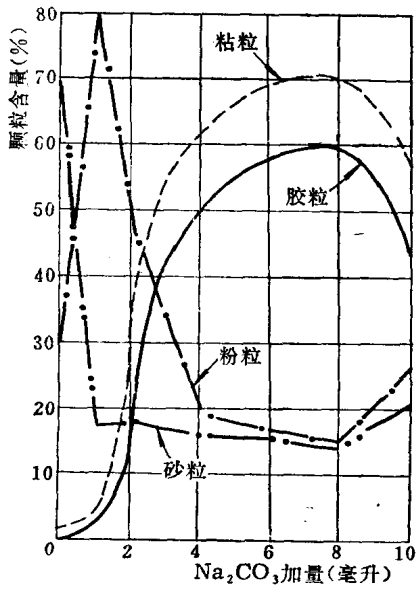


图 2-25 红粘土粘粒含量与分散剂加量的关系

裂缝硬粘土。由于裂缝网络的存在，使它的现场渗透系数接近于粗砂，且具有严格的方向性。取小试件在试验室内测定渗透系数，就难以包括这种影响在内。

红粘土。在我国南方广泛分布的红土，在不加任何处理的情况下进行颗粒分析，其分类可达砂土或砂壤土，而在经过化学处理的极限分散条件下，其粘粒含量极高，分类可达重粘

土（图2-25）[39]。红土具有稳固的团粒结构，压实性差，密度很小，粒团间大孔隙比较发达，浸水后也不易崩解，因而比之颗粒级配相似的分散性粘土，具有较高的透水性。例如毛家村红粘土，干容重γ_d=1.50～1.61克/立方厘米，$k=1.6\times10^{-6}$～7.0×10^{-7}厘米/秒；庄寨红粘土，γ_d=0.94～1.12克/立方厘米，$k=9.50\times10^{-7}$～1.7×10^{-7}厘米/秒[40]。

我国西北和华北广大地区广泛分布的黄土和黄土状土中，由于垂直的大孔隙发育，垂直方向的渗透性大于水平方向的。

因此，在研究实际土体的渗透特性时，要注意其特殊规律，并注意试验室内小块试样的渗透试验往往会与现场原位土体有出入，要用相应的措施，才能取得较为符合实际的成果。

四、达西定律的适用范围

（一）渗流类型和达西定律

水流可分为层流和紊流两种基本类型。层流情况下，每一质点沿一固定途径流动，其流线互不相交；紊流情况下，质点流动途径是不规则的，其流线可任意相交和再相交，并发生漩涡。雷诺（Reynold）曾用实验研究了这个问题，得到管道中水流速度和摩擦水头损失的关系，其基本形式如图2-26所示[17]，按v-i关系可分为三区：

1.层流区：在小流速时，v-i呈直线关系，且梯度增加和减小时v-i线重合；

2.过渡区：v-i线波动不定，梯度增加和减小时v-i线也不重合；

3.紊流区：大流速时，v-i有固定关系，但与小流速时的关系不同。

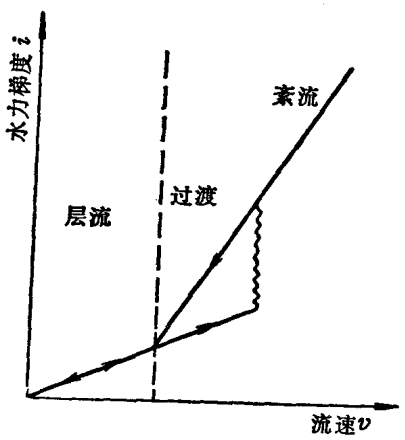


图 2-26 水流分区示意

在层流区，流速较小，水流的摩擦水头损失以粘滞力为主，由惯性力引起的水头损失可略去不计。这时，流体服从牛顿粘滞定律，即剪应力和剪应变速率成直线关系，渗流服从达西定律。在过渡区的前段，虽仍属层流，但由于流速增加，惯性力已不容忽略，v-i也偏离直线关系，即达西定律已不适用。所以达西定律适用的上限，即为层流区和过渡区的分界点。

在细粒土的小孔隙内，水和固体颗粒表面之间有较强的相互作用力，使流体的流变方程偏离牛顿定律，从而使渗流偏离达西定律，尤其是小流速、小梯度时更甚。这是达西定律适用的下限。细颗粒在土的大孔隙中自由移动，或堵塞通道，然后又被冲开，或被渗透水流带走，也往往使v-i关系偏离直线。

在许多著作中，都认为土力学中所涉及的大多数对象，一般都在达西定律适用范围之内[3]。对粗粒料，如反滤排水体、堆石体等，就可能超过其适用上限。对密实粘土，或

细颗粒可以自由移动的土，也可能偏离达西定律，此即其下限。下面将分别进行讨论。

（二）达西定律的适用上限

雷诺根据管道中水流的实验研究，提出用一个无量纲参数Re来反映水流结构，以后被广泛采用，并被称为雷诺数，其定义为：

$$Re=\frac{vd\rho}{\mu} \tag{2-47}$$

式中 v——流速；

d——管道直径；

ρ——流体密度；

μ——粘滞系数。

对直的圆管，层流区的上限Re值约为2000～2200。对于土中渗流而言，由于流程弯曲，动能损失大，孔隙直径大小有很大变化范围，此值显然是太高了。但是，一般还是用Re值作为确定达西定律适用上限的重要指标，称之为临界雷诺数。前人对此作过许多研究，但成果比较分歧。

和管子中水流一样，还可定义一阻力系数λ：

$$\lambda=\frac{di\gamma_w}{2\rho v^2}=\frac{d(\Delta p/L)}{2\rho v^2} \tag{2-47a}$$

由式（2-47）和（2-47a）可得：

$$Re=\frac{\gamma_w d^2}{2\mu}\cdot\frac{i}{v}\cdot\frac{1}{\lambda} \tag{2-47b}$$

如达西定律适用，则$\frac{v}{i}=k$为常数，则在常温下，式（2-47b）可写成：

$$Re=C\cdot\frac{1}{\lambda} \tag{2-47c}$$

式中C为某一常数。式（2-47c）也可写成：

$$\log Re=C'-\log\lambda \tag{2-47d}$$

即Re与λ成反比，或$\log Re$-$\log\lambda$呈直线关系时，达西定律适用。芬奇（Fancher）等的大量研究成果，如图2-27所示[16]。他们采用的特征长度定义如下：

$$d=\sqrt{\frac{\Sigma N_s d_h^3}{\Sigma N_s}} \tag{2-47e}$$

式中 d_h——任意两相邻筛孔直径的算术平均值；

N_s——直径为d_h的颗粒数。

根据他们的实验成果，极限雷诺数$Re=1$，此一界限相当于紊流的开始。

夏迪格[18]曾列举出一系列前人所做的λ-Re关系的资料，如：

林奎斯特（Lindquist）总结前人资料，认为：

$Re<4$，达西定律适用；

$4<Re<180$，用$\lambda Re=aRe+b$，$a=40$，$b=2500$。

克林格（Kling）得到：

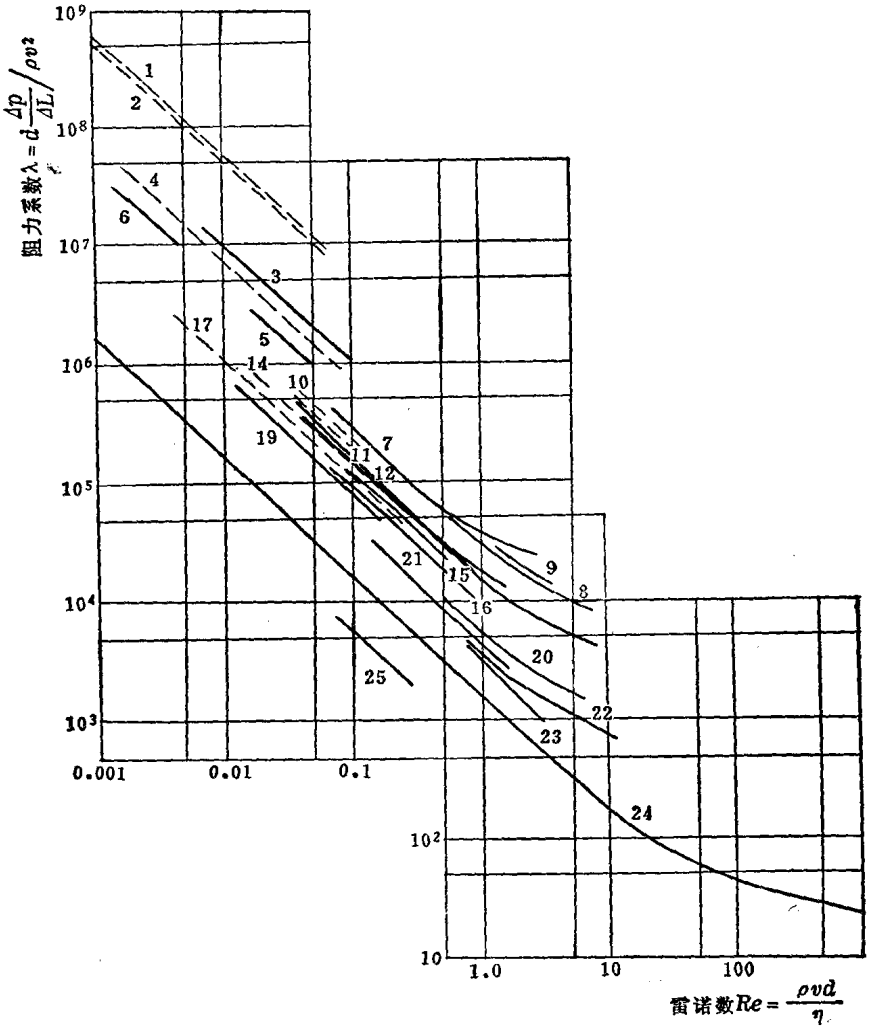


图 2-27 阻力系数与雷诺数关系（对数座标）

$Re\leqslant 10$，达西定律适用；

$$10<Re<300,\quad \text{用}\ \lambda=\frac{94}{(Re)^{0.16}}。$$

纳杰和卡拉迪（Nagy和Karadi）以土的有效粒径d_{10}作为特征长度，从试验研究结果得到临界雷诺数 $Re=5$；当 $Re>5$ 时，进入层流紊流的过渡区；而 $Re>200$ 时，进入完全紊流区[41]。

从多数资料看，极限雷诺数 $Re=1\sim10$，即当 Re 不超过 1～10时，达西定律是适用的。但是夏迪格总结众多的前人资料，发现极限雷诺数相差极大，从最小的0.1（尼尔逊，Nielson）到最大的75（普兰因和摩里逊，Plain和Morrison），相差达750倍。因此，他认为这些关系式只能适合某一组特定的多孔介质，而不可能是通用的。这种分歧虽反映了特征长度 d 的值的不定性，但更重要的是用极限雷诺数区分流动区域，实质上还是将多孔介

质视为一束毛管，认为管流和多孔介质渗流相似。各个研究者得到的极限雷诺数的极大分歧，有可能说明这种理论的根本失败[18]。

沃德从量纲分析出发，结合达西定律，得：

$$R_k=\frac{vk^{1/2}\rho}{\mu} \tag{2-48}$$

他称之为多孔介质的雷诺数。他又定义一无量纲的阻力系数f_k：

$$f_k=\frac{dp}{dL}\cdot\frac{\sqrt{k}}{v^2\rho}\cdot\mu \tag{2-48a}$$

则达西定律可写成：

$$f_k=\frac{1}{R_k} \tag{2-48b}$$

或

$$f_k=\frac{1}{R_k}+C \tag{2-48c}$$

他由20种材料的实验结果，绘成图2-28，并由此得出结论称，由层流到紊流是逐渐过渡的，并无明显的界限[21]。

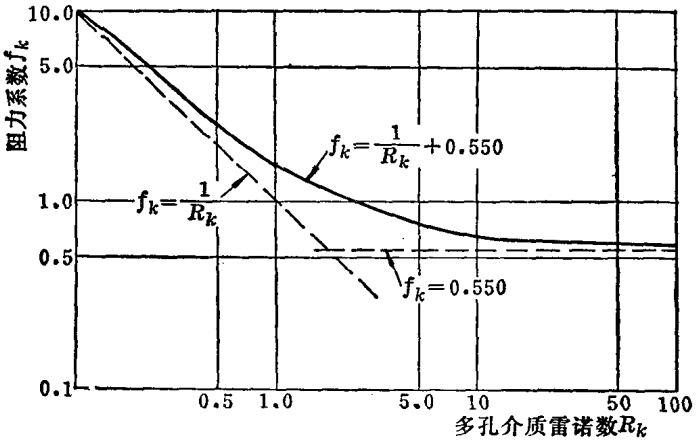


图 2-28 f_k与R_k关系（对数座标）

也有一些研究者直接从试验资料绘成的图解上，区分层流和紊流区，划分出达西定律的适用范围。如辛格（Singh）举出的达西定律适用范围，如图2-29和2-30所示[24]。

此外，也有用土的特征粒径表示达西定律的适用范围的意见。如海森（Hazen）的试验表明，$d_{10}\leqslant 3$ 毫米时，$v-i$ 呈直线关系。泰勒利用芬奇等的试验成果，以$Re=1$作为达西定律适用的界限，令$v=ki$，$i=1$，并用海森公式$k=100d^2$，得：

$$Re=\frac{vd\rho}{\mu}=\frac{100d^2\cdot 1\cdot d\cdot 1}{10^{-5}\cdot 980}=1$$

解出d大致是0.5毫米；如$i=8$，则d大致为0.25毫米[17]。临界雷诺数$Re=1$，是保守的近似值。此外，还可看出，梯度对临界粒径的影响也不大。奥特尔（Ohdl）给出的达西定律适用的d_{10}和相应的i值，如表2-7[42]。

木斯盖特曾指出，土中从纯层流到中等紊流是缓慢转变的，得不到对于临界点的正确

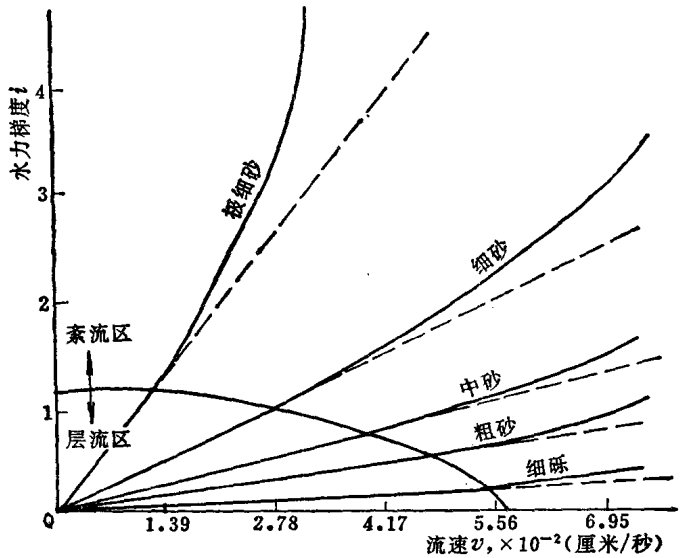


图 2-29　达西定律适用范围（一）

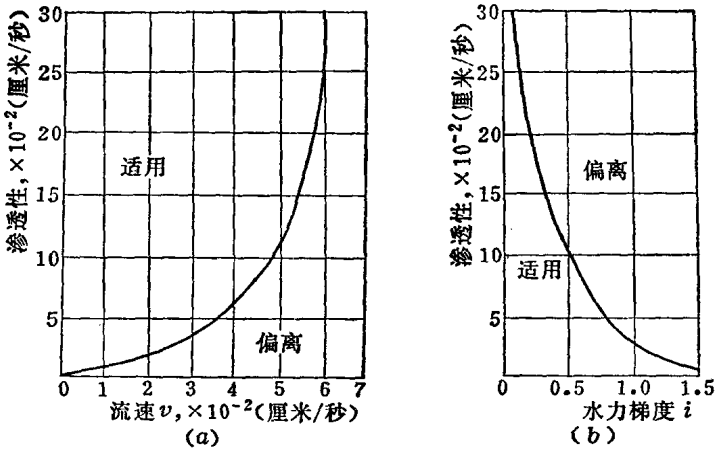


图 2-30　达西定律适用范围（二）

表达式。由于土体中孔隙大小有广泛的分布范围，它们并不是同时达到临界状态的，常常是较大的孔隙中已进入紊流状态，而较小孔隙中仍然保持层流。在 λ-Re 关系中，也还有其他变量影响其线性关系，如孔隙率、颗粒形状和颗粒直径等。夏迪格[18]总结他对高流速、大雷诺数区域渗流运动的讨论时指出，相应于流动分区的极限雷诺数有两个，第一个相应于层流区内由粘滞力为主转变为惯性力不可忽视，第二个相应于转变为惯性力为主的紊流区，但它们都不能得出通用值。他认为这种状况的根本原因是，对土中渗流而言，Re相同时、流动状态也相同这一结论是

表 2-7　达西定律适用的d_{10}和相应的i值

d_{10}（毫米）	0.05	0.1	0.2	0.5	1
$i \leqslant$	800	100	12	0.8	0.1

缺乏物理基础的，因此得出的种种关系式仅适用于特定介质，仅对解决这类特定介质的工程问题有用。

从实用观点而言，除了对堆石体、排水体等粗料为主和孔隙较大的情况以外，达西定律可用于广泛范围的各种土体，并且由此引起的误差是不大的。梯度值对达西定律的适用性影响也不大。例如席德格伦（Cedergren）[3]曾引用贾可布（Jocob）和费西尔（Fishel）所得出的结论。贾可布从近乎均匀球体的天然砂和人工砂的试验中得出结论，认为由层流到紊流过渡，至少要成千倍地增大流速，以达到建立完全紊流的极限值；并且指出，流速增加到接近极限值的10倍时，将导致用达西定律预测的水力梯度值的误差约为50%[42]。费西尔在极低水头下，用福斯特凯斯维尔（Fost Caswell）砂做试验，证明在极低水力梯度下，v-i仍遵守直线关系，达西定律仍适用[43]。他还指出，砾石中的水头损失比达西定律得出的要大；但如渗透试验是在与原型类似的条件下进行的，则误差是相抵销的。因此，可以仍然采用达西定律，但在设计中采用较大的安全系数。他并且对紊流和半紊流状态，提出了对达西渗透系数的修正方法，这将在第五节中进一步讨论。

（三）层流区内的非达西渗流

在细粒土的渗透试验中，尽管有许多研究者（如太沙基[44]、木斯盖特[45]、泰勒[16]、席德格伦[3]等）认为也应严格遵守达西定律，但是，也有不少试验成果表明，在小梯度、低流速情况下，特别是密实粘土，其v-i曲线不是通过原点的直线，即偏离达西定律。顾铁勒克（Kutilek）[46]总结了不同作者测定的非达西型的v-i关系，归纳成12种类型，如图2-31所示。这些v-i关系大致可分为三种类型：

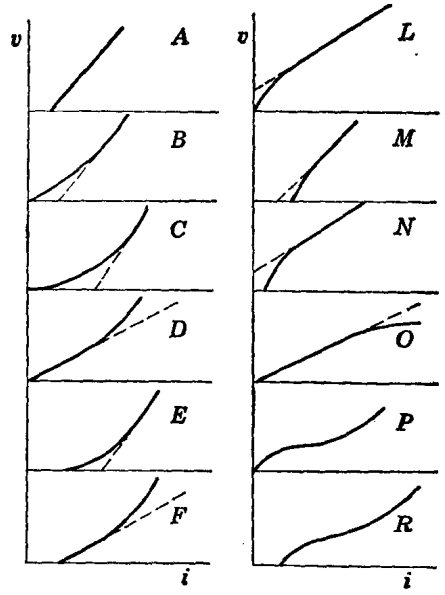


图 2-31 各种类型的v-i关系

1.A型：有一起始梯度i_0，不超过i_0时，测不出可见渗流，而超过i_0时，v-i呈直线关系。

2.B-F型：v与i^n成正比，而$n>1$，称之为大于一次方的比例关系。

3.L-O型：v与i^n成正比，而$n<1$，称之为小于一次方的比例关系。

P及R型分别为各种类型综合影响的结果。顾铁勒克还指出，大于一次方的比例关系多发现于压实的和具有较大活动表面的均匀材料，而小于一次方的比例关系，甚至综合型的v-i关系，多发生于低浓度的悬液和土膏，或不均匀的材料。

已发表的大量文献资料表明，研究者对这一问题的认识分歧较大，但大致可归纳成三种意见（见图2-32）：

1.达西定律在小梯度时也完全适用，偏离达西定律的现象乃是由于实验误差所造成的，有其具体原因[36、47、48、49、50]；

2.达西定律在小梯度时不适用，但存在起始梯度i_0，梯度小于i_0时无渗流，而大于i_0时，v-i关系呈线性或非线性关系[51、52]；

3.达西定律在小梯度时不适用，但也不存在起始梯度，v-i曲线通过原点，但呈非线性关系[53、54、55]。

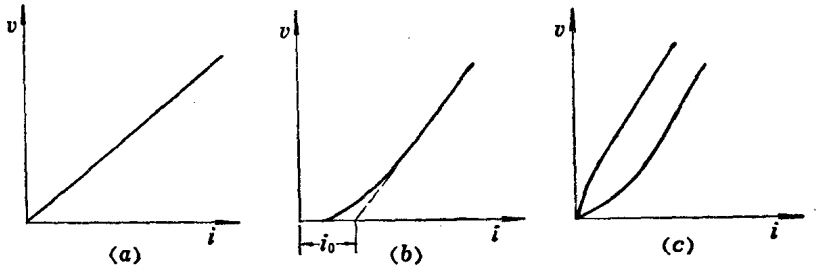


图 2-32 v-i关系的三种情况示意图

粘土中水的渗透服从达西定律时，必须遵守下列四个条件[48、56]：

1.处于多孔介质孔隙通道中的自由水应服从牛顿摩擦定律；

2.土中自由水的单位含量不受剪切速率及其内部孔隙压力的影响；

3.多孔介质的饱和度不应随渗透过程而变化，特别是不因其气相含量而变；

4.介质本身的结构必须足够牢固，使得它的孔隙通道的大小和形状不因渗透力的作用而有所改变。

席林可夫（Жиленков）以塑性指数I_p＝3.6～73的粘性土作试验，最小水力梯度i＝0.24～3.0，试验延续21～270天，得到k＝8.0×10^{-7}～8.7×10^{-9}厘米/秒，没有看到明显的起始梯度，也没有发现偏离达西定律的现象。他还报导了巴维龙斯基(Павилонский)的类似结论[56、57]。奥尔逊[48]用高岭土做试验，孔隙率n＝0.588～0.225，固结压力0.5～350公斤/平方厘米，i＝0.2～40。试验中采用压力传感器测量试样两侧的水头差，用测微表量测变形，以校正渗径长度，尽量避免实验误差的影响。得出的试验成果表明，没有不符合达西定律的现象（见图2-33）。有人为了证明粘土中即使在很小比降下达西定

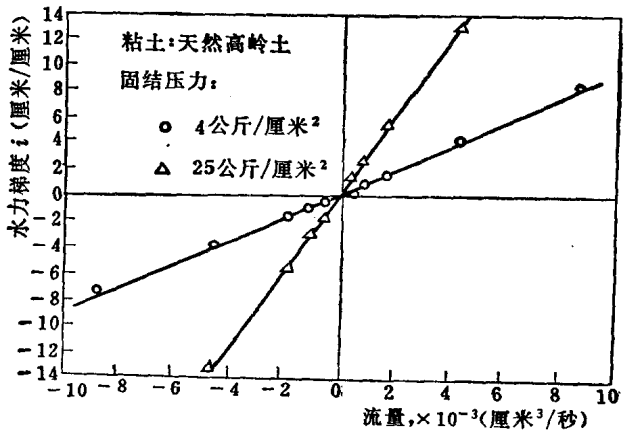


图 2-33 奥尔逊所做高岭土的渗透试验成果

律也适用，还做过一些专门试验[50、51]。例如米勒（Miller）等[51]用图2-34的装置做试验，在P处给一水头后，关住开关S_1，压力传感器D承受这一水头的作用，通过土样产生渗流，D处测得的压力将随时间而消散。如没有起始梯度的作用，则最后两边压力将相等，否则D处测得的读数到相应于i_0时就停止了。他们发现水头差消散到1%以下，没有发现起始梯度。

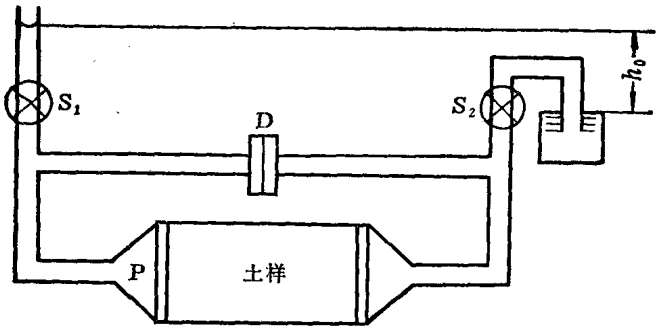


图 2-34 米勒等的渗透试验装置示意图
S_1、S_2—开关；D—压力传感器

所观察到的一些非达西型渗流的可能原因，大致有物理化学的和机械的两种类型，有一些是实验误差所引起，兹分别讨论如下。

1.引起偏离达西定律的物理化学作用机制

（1）颗粒表面吸附水的异常性质。一般都认为粘土中渗流的非达西性状来源于孔隙水的非牛顿性状，参见图2-35。由于粘土颗粒和孔隙水界面上的物理化学的相互作用，使紧靠颗粒表面的水层具有半晶体性质，其剪应力和应变速率之间的关系并不服从牛顿粘滞定律，它仅在作用力超过其屈服强度后才开始流动，因而存在一个起始梯度。而且在双电层内，随着离颗粒表面距离的增加，相互作用的引力逐渐减小，故在水力梯度增加过程中，将有越来越多的水层参与流动，而使孔隙中的渗流通道逐渐扩大；同时，土中孔隙大小不一，吸附水层的影响也各不相同，所以将使$v-i$关系偏离达西定律。

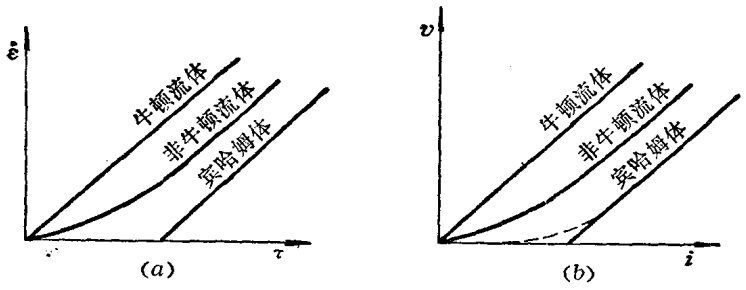


图 2-35 流动性状类型对比

邦达连科（Бондаренко）[58]曾利用双电层模型说明粘结水对非达西型渗流的影响。假设孔隙中流体和颗粒表面的剪应力从管壁处的最大值ω_0变到自由水中的零，并呈直线变化。根据孔隙尺寸及双电层厚度可以有三种情况，如图2-36所示。则：

$$\omega = \Omega(R - R_1) \tag{2-49}$$

式中：

$$\Omega = \frac{\omega_0}{R_0 - R_1} \tag{2-49a}$$

所用符号意义，见图2-36。

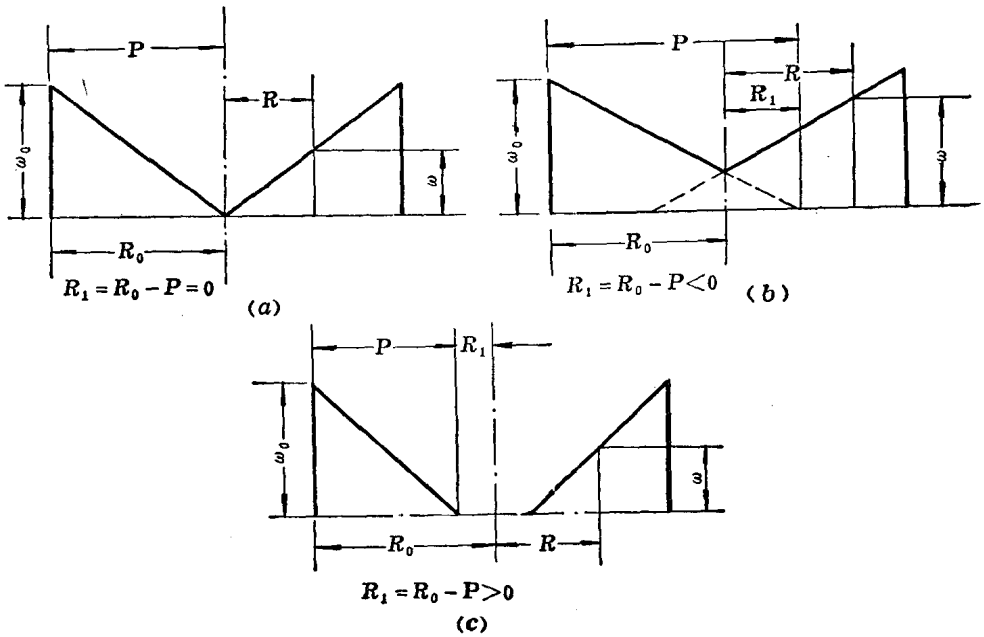


图 2-36　简化的双电层计算模型

在距离孔隙轴线处距离为R的任一截面上的力系平衡条件为：

$$F_1 + F_2 + F_3 = 0 \tag{2-49b}$$

式中　渗透力　$F_1 = \rho g i l \pi R^2$

粘滞力　$F_2 = 2\pi R l \mu \frac{dv}{dr}$ (2-49c)

粘结力　$F_3 = \omega 2\pi R l = \Omega(R - R_1) 2\pi R l$

将式（2-49c）代入（2-49b）得：

$$\rho g i l \pi R^2 = 2\pi R l \left[\Omega(R - R_1) - \mu \frac{dv}{dR} \right] \tag{2-49d}$$

利用$R = R_0$处$v = 0$的边界条件，解式（2-49d）得：

$$v = \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\rho g i}{2} - \Omega \right)(R_0^2 - R^2) + 2\Omega R_1 (R_0 - R) \right] \tag{2-49e}$$

因为

$$Q = \int_0^{R_0} 2\pi R v dR \tag{2-49f}$$

在情况a时，$R_1 = 0$，解式（2-49e）及（2-49f）得：

$$Q_a = \frac{\pi}{\mu} \cdot \frac{R_0^4}{4} \left(\frac{\rho g i}{2} - \Omega \right) \tag{2-49g}$$

令$Q_a=0$，则$i=i_{oa}$，即为起始梯度，得：

$$i_{oa}=\frac{2\Omega}{\rho g} \tag{2-49h}$$

在情况b时，$R_1<0$，用绝对值$|R_1|$代入式（2-49e）并解式（2-49f）得：

$$Q_b=\frac{\pi}{\mu}\left[\left(\frac{\rho g i}{2}-\Omega\right)\frac{R_0^4}{4}-\Omega\frac{|R_1|R_0^3}{3}\right] \tag{2-49i}$$

令$Q_b=0$，则$i=i_{ob}$，即为起始坡降：

$$i_{ob}=\frac{2\Omega}{\rho g}\left(1+\frac{4}{3}\frac{|R_1|}{R_0}\right) \tag{2-49j}$$

这说明了起始梯度的实质。并且可用这种简化模型，说明在水力梯度增加时，将有越来越多的双电层内的结合水转为自由水而参与渗流运动，表现为$v-i$的非线性关系。

这种非牛顿流体的性状，对各种大小的孔隙的影响是极不相同的。有人估算了一下，高岭土颗粒的吸附水膜厚度约为20～40个水分子，仅为其孔隙平均直径的2.5～3.5%，看来不致对其渗透性有多大影响[32]。也有一些研究成果说明，所谓水的异常性状的影响，常常可以用某种实验误差来解释。因此可以预期，吸附水的半晶体结构，仅对相互作用强烈而孔隙平均直径小的膨润土类，才是发生非达西型渗流的可能机理之一。

（2）电渗、热渗和盐渗析等共轭流对水的渗流的影响[13、59]。在第三节中曾提到，土中水可能有四种流动规律，并可以用式（2-14a）来表达。在粘土中，渗透系数越小，电渗和盐渗析的影响可能变得更为重要，有可能导致偏离渗透的达西定律，特别对小孔隙比和高塑性的粘土，更其如此。由水流引起的电位比降的方向是和水流的方向相反的，且电位差和水头差并不成正比关系，故这种电渗的回流作用可引起小于一次方的比例关系。

2.引起偏离达西定律的机械作用机制

土孔隙结构和几何形状变化，是可能引起偏离达西定律的机械作用机制。这可能有以下几种作用：

（1）渗透力使粘土试样固结，从而减小孔隙体积；

（2）细粒在较大孔隙中可以自由移动，使孔隙堵塞或冲开，从而引起渗透性的变化；

（3）渗透力使颗粒沿流程重新定向排列，缩短流程的弯曲度，渗透力也可使较小孔隙膨胀成较大的流槽，但这种影响是可逆的；

（4）在膨胀性土中，可因土粒吸水膨胀而使孔隙闭塞或缩小。

这种孔隙的几何学变化中，渗透力使试样固结，而土的膨胀趋向于使体积增加，两者的影响是相消的。对未用压力限制其体积变化的情况下，有可能因渗透过程中引起土的组构变化而导致偏离达西定律。

对于粗料中带有少量细颗粒的不均匀材料，颗粒易于活动的低密度的粘土膏，以及含有胶结较弱的细颗粒的粗粒沉积物，其中因细颗粒移动而使孔隙流槽变化，可能对非达西流起重要作用[30]。

3.实验误差

顾铁勒克[46]列举了20位不同作者得出的非达西型渗流的实验资料，表明极大部分资料未能消除实验误差。有一些资料未报导其实验细节，因而不能判断其误差来源。可能的实验误差来源有以下几种：

（1）量测用的毛管壁的沾污。奥尔逊[47]的研究工作指出，大多数粘土渗流试验中，梯度和流速都比较低，因而用毛管中气水界面的移动量测单位渗流量。这时水头差经弯液面校正后得出，计算中采用水的表面张力$\sigma=72$达因/厘米（25℃），接触角$\theta=0°$。气泡两端弯液面的压力差互相抵销，因而两端的压力差为零。但在毛管壁为空气的油脂沾污以后，毛管中的气泡两端的弯液面引起一定的压力差，导致试验成果对达西定律的虚假偏离。奥尔逊的分析计算表明，在偏离达西定律的一些试验成果中，汉斯堡(Hansbo)的试验资料[53]完全可以用毛管壁的沾污解释；米勒和劳(Low)的资料[51]仅有部分可归之于这种影响，而另一部分却不能用此种因素来解释；而对试验中不用压力限制的路兹和肯普(Lutz和Kemper)的资料[59]，则完全无法解释。这说明毛管壁的沾污，仅是实验误差的来源之一。但由此可以看到其影响，因而在以后的研究成果中，都细心排除其影响，以便更好地研究其它的因素。

（2）因固结和膨胀而引起土的孔隙结构和尺寸的变化，导致试样只是在一较长时间后才达到稳定渗流状态。如在固结和膨胀过程中进行试验和量测，就可能得到非达西型的结果。当增加梯度时，得到大于一次方的比例关系；而在减小梯度时，得到小于一次方的比例关系。

（3）土中的封闭气泡在渗流过程中被逐渐带出或堵塞渗流通道，或在试验中未使用无空气水，而使渗流入口处为气泡所阻塞，均可使渗透流速发生变化，从而歪曲$v-i$关系。图2-37所示为马特阿斯(Matyas)[60]用萨苏马(Sasumua)粘土在三轴仪内做渗透试验的结果。试验中分别施加0.35、1.69、4.92公斤/平方厘米的反压力，发现$v-i$关系曲线在小反压力时偏离达西定律，而在大反压力下则呈通过原点的直线。杜延龄等[61]用两

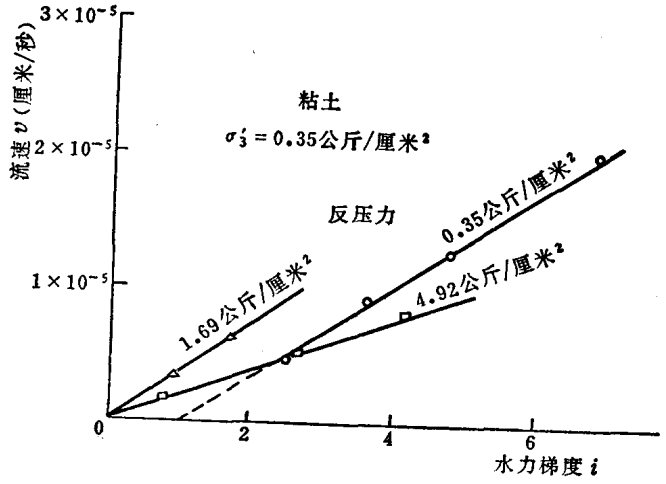


图 2-37　反压力对粘土v-i关系的影响(a)

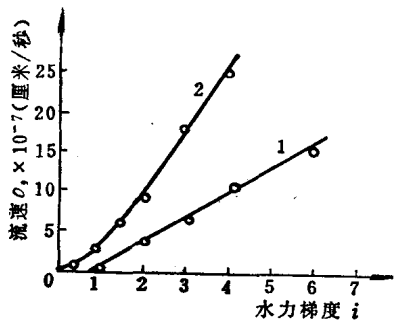


图 2-38　反压力对粘土v-i关系的影响(b)
1—未加反压力；2—加8公斤/平方厘米反压力

种粘土做试验，得出未加反压力的试样的$v \sim i$关系给出一起始梯度，而在加反压力饱和后$v \sim i$关系呈通过原点的曲线关系（图2-38），也说明试样加反压力饱和后就使起始梯度消失。

（4）长时间渗透试验中，微生物的生长将使渗透流速随时间而减小。

近年来，在消除实验误差后，对饱和粘土所做的一些精细试验结果表明，在一般情况下还是符合达西定律的；仅对颗粒极细的高塑性粘土(特别是膨润土)，对含有少量细颗粒的粒状土，以及对无限制压力而可以自由膨胀的粘土等，才有少数的例外。对粘土是否存在起始梯度的问题，认识并不完全一致，但倾向于并不存在。例如1976年在苏联基辅召开的第三次国际渗流问题讨论会上，根据实验资料和理论分析，认为在粘土中不存在起始梯度，粘土渗流过程可按达西定律确定[62]。

由于非线性渗流定律在某些情况下确实存在，因而有一些研究者将它引入土力学计算中去[6、8、53、63、64等]，其表达方式也各不相同。例如：

（1）图2-39a：$v=k_1(i-i_0)$，i_0为起始梯度；（2-50）

（2）图2-39b：$v=k_2 i^n$，$n\neq 1$；（2-50a）

（3）图2-39c[54]：v-i曲线分两段

$$i<i_e,\quad v=k_3 i^n,\quad n\geqslant 1; \tag{2-50b}$$

$$i>i_e,\quad v=k_4(i-i_0); \tag{2-50c}$$

i_0为v-i关系曲线的直线段在i轴上的截距；

（4）图2-39d[66、67、68、69]：

$$v=B[i-J(1-e^{-ci})] \tag{2-50d}$$

式中：B、J、c为常数。如$i=0$，$v=0$；$i\to\infty$，$v=B(i-J)$，为其渐近线，J为此渐近线在i轴上的截距；当$J=0$，$c=0$时，$v=Bi$，即达西定律，B即k。如展开为级数

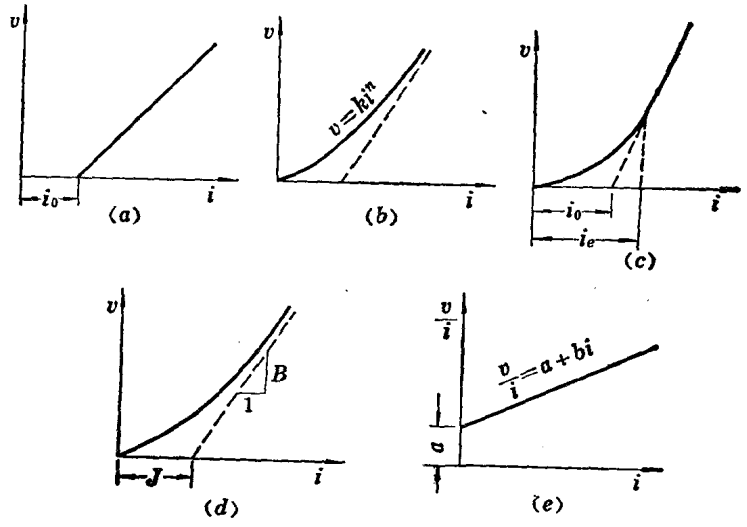


图 2-39　几种典型的非达西型渗流规律

式，并略去高次项，可得：

$$v=ai+bi^2 \qquad (2\text{-}50e)$$

式中 $a=B(1-Jc)$；

$b=BJc^2/2$。

上式可改写成：

$$\frac{v}{i}=a+bi \qquad (2\text{-}50f)$$

绘$\frac{v}{i}$-i关系直线，由截距及坡度可求出a和b（图2-39e）。

上述这些表达方式，可根据试验资料和应用方便酌情采用。

五、饱和土渗透性指标的测定方法

（一）各种测定方法的适用条件

饱和土渗透性指标的测定方法很多，从原则上说，有理论解的任何模型，都可用于测定渗透系数；但各种方法都有其适用范围，参见表2-8[28]。这些试验方法可分为直接方法和间接方法两大类：直接方法包括常水头和变水头试验，前者适用于渗透性较大的土，后者适用于渗透性较小的土；间接方法包括根据固结试验成果和颗粒级配等资料计算得出，前者适用于粘性土，后者适用于无粘性土。这些试验方法又可分为试验室试验和现场原位试验两大类。一些常规试验方法可参阅有关土工试验规程或手册及水文地质专著，如参考文献12、69、70等。这里仅对某些问题作些补充介绍。

表 2-8　　土 的 渗 透 试 验 方 法 的 适 用 范 围

渗透系数 k（厘米/秒）	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
渗透性能	好						不好		实际不透水			
土类	干净砾石		干净砂，干净砂砾混合物			极细砂，有机或无机粉土，砂、粉土和粘土的混合物，冰川沉积、层状粘土沉积等			不透水土，即风化区以下的均匀粘土			
					为植物及风化作用改造过的不透水土							
k的直接测定	就地抽水试验											
	常水头渗透试验											
			变水头渗透试验			变水头渗透试验			变水头渗透试验			
k的间接测定	由颗粒大小分布计算，仅用于无粘性砂和砾石								根据固结试验成果计算			

（二）小梯度、低流速粘土的室内渗透试验

近年来对粘土渗透规律的研究都强调要排除实验误差的影响。这是由于粘土渗透性很小，特别是小梯度试验，水头差和渗流量都很小，易于受到仪器漏水、蒸发、温度变化、气泡、读数方法等因素的影响，而歪曲实验结果，因之必须在实验技术上对这些问题得到较好的解决。

水利水电科学研究院在1965年研制了一台适用于研究饱和粘土渗透规律的仪器，见图2-40[61]，其特点是：

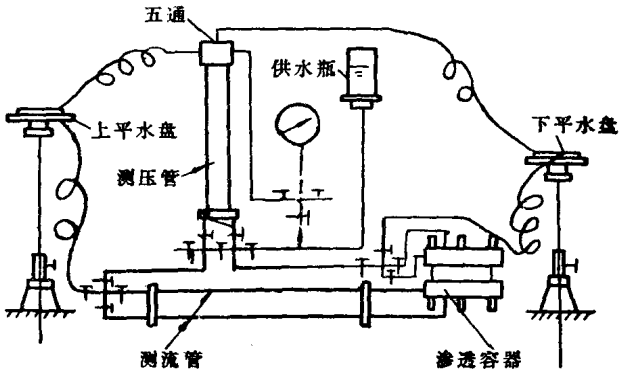


图 2-40　饱和粘土渗透试验装置示意图

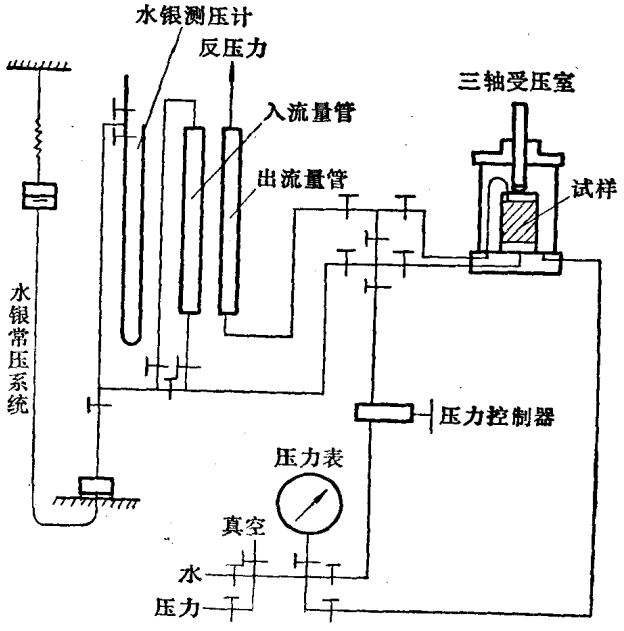


图 2-41　用三轴仪进行常水头渗透试验装置示意图

1.整个系统是封闭的，测流和测压都不受蒸发和漏水的影响；

2.有施加反压力设备，使试样达到完全饱和；

3.渗透容器分隔成内外两圈，其面积相等，可分别量测渗流量，以校核是否有环壁漏水；

4.用可以调整水平位置的上下游平水盘施加水头差，水在一水平面上的圆圈状塑料管中移动，便于在试验中保持常水头和施加小梯度；

5.在20±0.5℃的常温条件下进行试验；

6.以硬质塑料管作测流测压元件，便于连接部位的密封，可以测得极小的压力和流量。

用这种仪器得到的试验成果稳定可靠，所得 v-i 曲线平顺光滑，不加反压力时出现起始梯度的土，在施加反压力（8公斤/平方厘米）后，变成通过原点的曲线（图2-38）。

（三）用三轴仪做渗透试验

为了研究不同应力条件对粘土渗透性的影响，并尽量模拟原位的应力状态，消除某些取样扰动的影响，可以在三轴受压室中进行渗透试验。张和肯尼所采用的装置示意图，如图2-41[37]。

（四）成层土水平和垂直渗透系数的测定

由于天然土层一般都是水平成层沉积的，人工填土也是水平分层填筑的，所以土层渗透系数存在明显的各向异性，可以用水平向渗透系数k_h和垂直向渗透系数k_v及其比值R_k来表征。k_h和k_v值可以用垂直和平行于层面切取的试样测定，但也可以用不同的处理方法。

1.用径向排水固结试验求k_h值[71]。这种固结仪的构造示意图，见图2-42。仪器用液压加荷，可以施加反压力，用量管或毛管测流量。径向流试验时，在底板上离中心不同距离处埋设陶瓷孔隙压力测头，测量其孔隙压力分布，计算k_h值。这种装置可以在直接测定k值后，加压使试样固结，同时测量变形量、孔隙压力和体积变化等，从测得的c_v、c_h和m_v中计算k值，以便和直接测定值相比较。试验成果还可给出不同有效压力下的v-i关系，以验证达西定律的适用性。

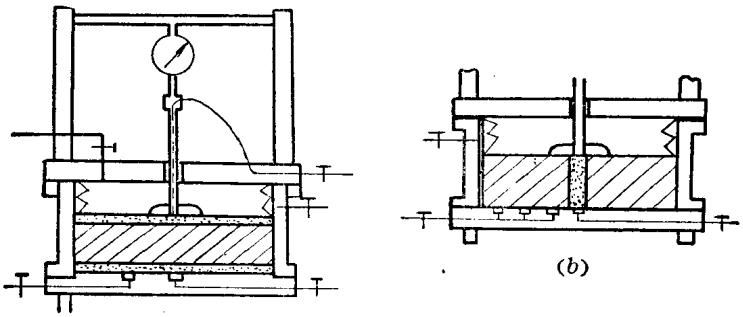


图 2-42　垂直和径向排水渗透固结仪

(a)垂直向排水；(b)径向排水

2.张和肯尼[37]认为，一般用平行和垂直于层面切取试样的方法来测定渗透的各向异性，往往会因使用的两个试样结构和状态不同，而得不到合理的结果。他们在研究新立斯克特成层粘土的水平和垂直渗透系数时，采用一个边长为6.4厘米的立方体试样，先将层面呈水平方向放在三轴受压室中，测定垂直层面方向的渗透系数k_v。然后卸除仪器，将试样转过来使层面呈垂直方向，测定平行于层面方向的渗透系数k_h。一个试样一般做4次试验，用以消除再压缩的影响，从而求出比值R_k（$=k_h/k_v$）。他们认为，这样取得的成果比较可靠。

3.莫亨[4]曾指出，室内固结试验求出的渗透试验为k_v值，而在现场用测压管进行原位渗透试验时，得到的渗透系数为k_h值。将两者进行比较，可以得到渗透系数比值R_k。

（五）提高测试精度

在饱和粘土渗透试验中，因渗流量很小，且需形成密封的加压系统，故常用带有刻度的毛管中气泡的移动测流。为了避免管壁沾污对毛管测流量的精度的影响[见本节四之（二）]，奥尔逊[47]曾用图2-43所示装置做试验，他用压力传感器直接测读试样两端的压力差，因而就与毛管无关了。

（六）原位渗透试验

近年来用原位试验确定粘土渗透系数的方法有很大发展[72、73]。一般认为，通过测

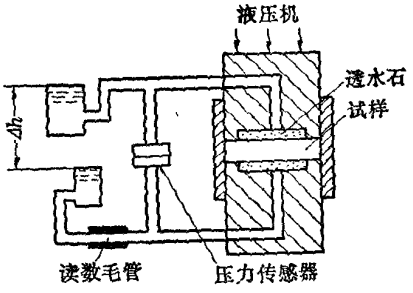


图 2-43 奥尔逊所用渗透试验装置示意图

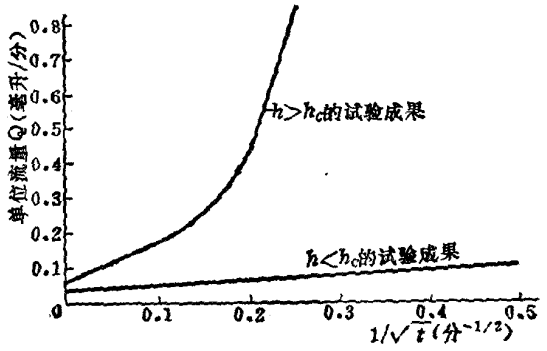


图 2-44 不同水头作用下的单位流量 Q 与 $\frac{1}{\sqrt{t}}$ 的关系曲线

h—作用水头；h_c—临界水头

压管进行原位粘土常水头试验求粘土渗透系数，仍然是较好的方法。但是要注意水力劈裂引起的试验成果的偏差。

别伦（Bjerrum）等[74]曾报导过在以色列一个工地做原位渗透试验时，得到 $k=10^{-4}$ 厘米/秒。以后在挪威某土坝的类似试验中发现孔内水位达到某一高度时，有突然失水现象，说明心墙粘土在压力下开裂了。因而又回去对以色列某工地再做试验，得到未劈裂的粘土体 $k\approx10^{-7}$ 厘米/秒。在室内试验中又证实了这一发现，即观察到在增加水压力过程中流量有突变，裂缝也随之发生和发展，而在退压时又看到裂缝的闭合。由此还设计了一种用水力劈裂测定土层水平应力的方法[75]。

威尔克斯（Wilkes）[76]也曾报导过类似结果。在原位试验中，通过测压管施加的水压力超过某一临界水头后，其流量就有显著增加，且随时间的变化不再是直线关系，如图2-44所示。

类似钻孔失水、水库充水时土石坝防渗体裂缝渗水等情况的报导，还有不少[77,78]。因此，在进行原位渗透试验时，必需考虑这一因素，以免歪曲试验成果。

第四节 非饱和土的渗透规律

一、非饱和土的水气形态

当多孔介质中的孔隙并未完全充满一种给定的均匀液体时，就被称为非饱和的。非饱和土由固体骨架、孔隙水和气三相所组成，其固体骨架的结构性和孔隙中水气形态，对非饱和土的力学性质都有很大的影响，国内外都有人作过较深入的研究。由于非饱和土的孔隙水气形态对其渗透性同样有决定性的影响，因此，先作一定的讨论是有益的。

按照孔隙中水相和气相的存在形态，可将非饱和土归纳为三种基本形态[79]。按照这种意见，非饱和土可以分为水封闭、双开敞和气封闭三种基本形态，如图2-45所示。当饱

和度小于a时，孔隙中的气体是连通的，而孔隙中的水，只能依靠气-水界面的弯液面的表面张力而被吸持在小孔隙的某些“并口”，或在固相颗粒周围形成孤立的水环或角点。由于孔隙中的水彼此是互不连通的，为气相所分隔包围，故称为水封闭、气开敞系统。当饱和度介于a与b之间时，孔隙水和气都是连通的，故称为双开敞系统。而当饱和度增加到b以上时，孔隙中的气相为水所分隔包围，以孤立气泡的形式存在于孔隙水中，而孔隙水则是连通的，故称之为气封闭、水开敞系统。

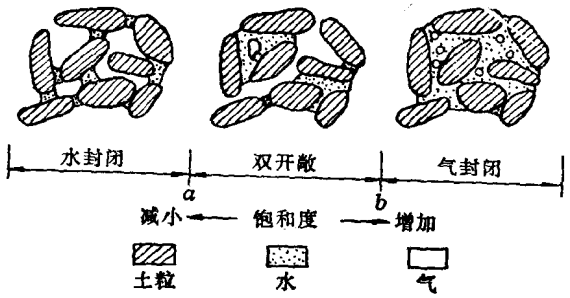


图 2-45 非饱和土的三种基本水气形态

有人将气封闭系统进一步划分为气内部连通和气完全封闭两种形态，认为前者在一定压力梯度下可以转变为双开敞状态。这种形态也可以视为双开敞和气封闭两种系统的过渡形态，这样，两者就没有什么原则的差别了。

在水封闭形态的低含水量土中，液相之间并无水力联系，只有孔隙气体的流动，而水只能以蒸汽形式随气体流动而转移，这在土力学中不是主要的研究对象，而有实际意义的却是双开敞和气封闭这两种形态。前者可视为互不混合的两种流体的运动，而后者则为一种挟气水流的运动，二者都有其各自的规律性。

二、非饱和土的渗透性

（一）非饱和土的透水性k_w和透气性k_a

非饱和土的渗透性在很大程度上取决于孔隙中空气的[redacted]。对水封闭系统而言，空气是连通的，土只有一个透气性[redacted]；对双开敞系统，气相和液相都是连通的，分别有一个透水性[redacted]；而对气封闭系统，就只有一个透水性[redacted]。简单地用通水或通气的方法测量土的渗透性，将改变土的结构和饱和度，从而使渗透性有所变化，因此，必须分别控制孔隙水压力u_w和孔隙气压力u_a，建立水和气的单独循环，保持土的结构和饱和度不变，才能较正确地测定k_w和k_a值。有些土壤学家，如里查兹（Richards）、考里（Corey）等，早就认识到这一问题，并曾分别控制水和气压力，使[redacted]不[redacted]以后还有许多人作过研究[60、80、81、82、83]。

巴登（Barden）等认为，要系统研究k_a及k_w，必须分别控制u_a和u_w，以控制土中的有效应力σ'，

$$\sigma'=(\sigma-u_a)+x(u_a-u_w) \tag{2-51}$$

式中σ为总应力，x为取决于饱和度的某一参数。他们认为$(\sigma-u_a)$主要控制土的结构，而(u_a-u_w)主要控制土的饱和度。由于$u_a>u_w$，只要保持空气不进入水的通道，即可分别保持空气和水的连续性，而只要采用高进气值的陶瓷板，就可以达到这一要求。巴登[84]还根据土壤学和石油工程中的实验资料，认为对两种甚至三种不可混合的流体在多

孔介质中的渗流运动，达西定律也能极为近似地用于每一种流体的运动，并以下式表达：

$$v_a = k_a i_a$$
$$v_w = k_w i_w \qquad (2\text{-}52)$$

同时k_a和k_w还是土的孔[redacted]S_r的函数，即：

$$k_a = f_a(\lambda, u, S_r)$$
$$k_w = f_w(\lambda, u, S_r) \qquad (2\text{-}52a)$$

这些因素的影响是综合性的，很难分别研究，只能用实验方法加以探讨。

（二）饱和度对土的渗透性的影响

许多资料表明，土的渗透性和含水量（饱和度）有关。土越干，含水量越小，则透气性越大，透水性越小。图2-46系4种砂土的水渗透系数与饱和度的关系[23]，由此可见饱和度对透水性的重大影响。这种影响的机理可能有以下几方面：

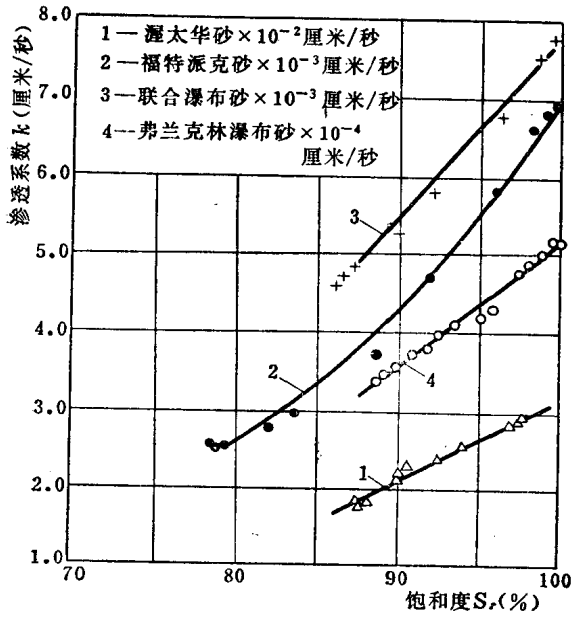


图 2-46 饱和度与水渗透系数的关系

1.空气的存在使孔隙流槽的过水[redacted]并增加流程的弯曲度，从而使水渗透系数减小；

2.大孔隙中水的吸力较低，易于在干燥时排空；细孔隙中水的吸力较高，不易排空。由于土的[redacted]槽，大孔隙进气后使流程中断，而使透水性有较大的降低，同时可以把细孔隙中的水孤立起来，不能参与渗流运动。这种效应有时被称为[redacted]

3.土的含水量越小，土中水和颗粒表面的距离越近，相互作用也越强烈，水的类晶体结构的影响也越大，从而使[redacted]加。

由于后两个因素的作用，所以水渗透系数随饱和度而减小的程度，比之单纯减小过水面积的影响要大得多。

巴登用分别控制非饱和土的孔隙水、气压力测量k_a和k_w值，更清楚地表明了结构和饱和度对渗透性的影响。图2-47为西水(West Water)粘土试样，起始含水量9.96%(干于最优含水量)，在三轴仪内施加$\sigma_3 = 1.05$公斤/平方厘米，$u_a = 0.49$公斤/平方厘米，$u_w = 0.15$公斤/平方厘米，使σ_3和u_a保持不变，u_w逐渐增加到0.49公斤/平方厘米，使吸力降到零，测得k_a和k_w的试验结果。这时，$(\sigma_3 - u_a)$保持不变，可假定结构不发生变化，k_a和k_w的变化为$(u_a - u_w)$，即饱和度变化的单独影响所致。由此可见，在空气通道闭塞以前，k_a保持较高而不太变化的值；但在吸力最后消失时，大孔隙内的空气通道最后闭塞，k_a突然下降到接近k_w值。

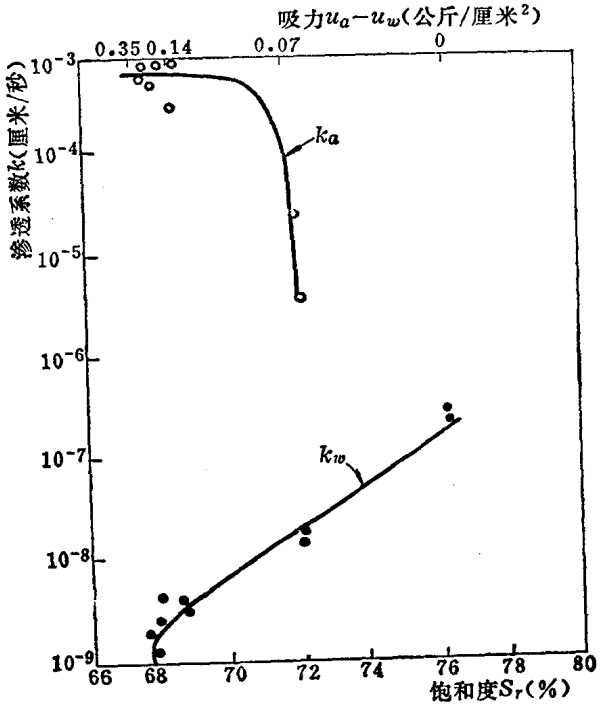


图 2-47 k_a和k_w随吸力和饱和度的变化

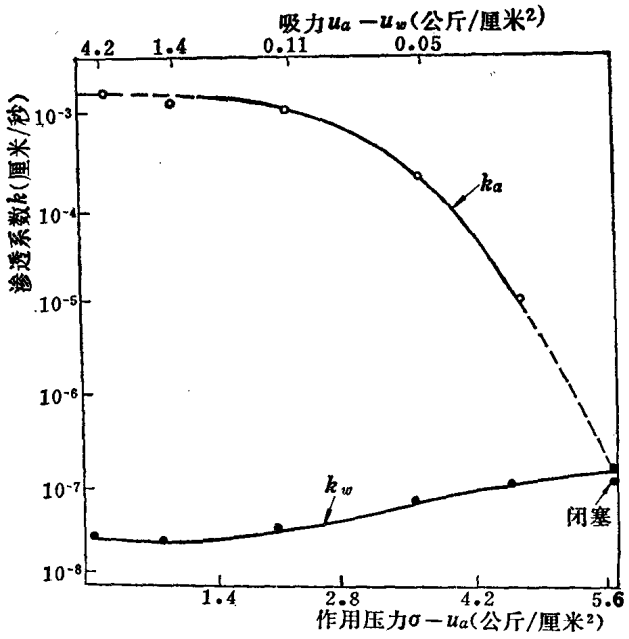


图 2-48 k_a和k_w随吸力和作用压力的变化

图2-48所示为起始含水量10.38%的粘土试样，在三轴仪中施加 σ_3 =0.84公斤/平方厘米，u_a=0.56公斤/平方厘米，u_w=0.14公斤/平方厘米，测定k_a和k_w值后，将受压室压力σ_3增加到1.76公斤/平方厘米，并减小u_a防止试样排水，在新应力系统下平衡后再测k_a

和k_w。这样，使试样在常含水量下受压缩而达到封闭，这时k_a和k_w变化是结构和饱和度同时变化的结果。同时表现出在最后一点吸力消失后，k_a突然下降几个量级而达到k_w值，在（u_a-u_w）为零时封闭。

由于用水作渗透流体时，可能因渗透力使颗粒重新定向排列，有些土在高含水量时还有进一步分散的趋向，这些情况都可使土的结构发生变化。而用空气渗透时，通常渗透力较小，与土颗粒间也没有相互作用，较少引起土结构的变化，因而可以用通气的办法认识土结构的微细变化。

在毛管渗透模型中，假设水和管壁接触处的流速为零，逐渐变到管子中心线上的最大值。但是，在干土中，气体沿固体壁有滑移现象，其接触处流速不为零，故不能用通气的办法测量土的透水性。

（三）渗透性、吸力与含水量的关系

在饱和土中，$v-i$呈直线关系，即k值为常数，而与含水量和孔隙水压力无关。但在非饱和土中，透水性为含水量的函数，即：

$$k=k(\theta) \qquad (2\text{-}53)$$

式中 θ——容积含水量，即土中水的体积与总体积的比值。

其次，在势函数中，饱和土的总势能$\Delta\phi$取决于重力势$\Delta\phi_g$和压力势$\Delta\phi_p$，即：

$$\Delta\phi=\Delta\phi_g+\Delta\phi_p \qquad (2\text{-}7)$$

而对非饱和土，则取决于重力势$\Delta\phi_g$和广义毛管势$\Delta\phi_m$，即：

$$\Delta\phi=\Delta\phi_g+\Delta\phi_m \qquad (2\text{-}6)$$

$\Delta\phi_m$在水位以下为零，水位以上为负值，即孔隙水承受张力作用。这种孔隙水张力的大小，取决于土中气水界面的表面张力和水与土粒相互作用的引力，其值也是含水量的函数，即：

$$\tau=\tau(\theta) \qquad (2\text{-}53a)$$

式中 τ——吸力。

式（2-53）和（2-53a）表明，非饱和土的渗透系数和吸力都是容积含水量的函数，这是对饱和土中水分运动的两项重要修正。$k(\theta)$和$\tau(\theta)$的关系见图2-49。由此可见：

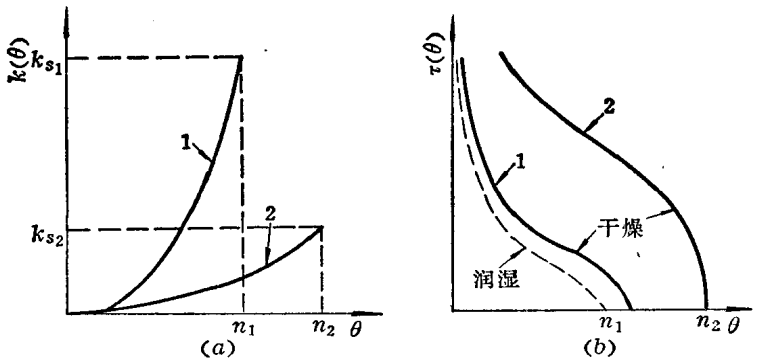


图 2-49 k和τ与θ的关系

1. k 随 θ 的增加而增加，在 $\theta = n$ 时达到最大值，即饱和土的渗透系数 k_s，而且在高含水量时变化更快；

2. 和 k 相反，τ 随 θ 的降低而增加，在 $\theta = n$ 时降到零，因为在低含水量时，需要越来越多的能量才能把水排出；

3. 由图2-49 b 可见，干燥和润湿的 $\tau-\theta$ 关系线是不同的，有一滞后过程。在 $\tau = 0$ 时两者的差别是由于封闭空气所致。而滞后过程的可能解释是：在干湿过程中土和水的接触角可能不同；孔隙内形成弯液面前水膜厚度的可能影响；有盲端孔隙或“并口”效应的影响等等；

4. 在给定 τ 值时，粗粒土的 θ 值比细粒土的为大，因为粗粒土有较大的孔隙和较小的内表面积。

试验证明，$k-\theta$ 关系并无滞后，或滞后小到可忽略不计[85]，而 $k-\tau$ 关系的明显滞后，是由于 $\tau-\theta$ 关系的滞后所引起。这样 k 不再象饱和土中那样，是和压力 p 无关的常数，而是和吸力 τ 有着密切的关系。这种 $\tau-\theta$ 或 $k-\tau$ 关系的滞后，说明其关系不是唯一的，这给数学处理带来了困难。因此，所采用的 $\tau-\theta$ 关系，必须是和实际含水量变化过程相应的资料。这种 $k-\tau-\theta$ 关系在土力学中应用尚不太普遍，但在土壤物理学中却已研究得很多了。

三、非饱和土的达西定律

由于非饱和土中引入了 $k=k(\theta)$ 和 $\tau=\tau(\theta)$ 两个重要修正，且总水头 $h=z-\tau(\theta)$，以此代入达西公式得：

$$q=-k\nabla h=-k(\theta)[\nabla z-\nabla\tau(\theta)] \tag{2-54}$$

$$\because \quad \frac{\partial\tau}{\partial x}=\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x};\ \frac{\partial\tau}{\partial y}=\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y};\ \frac{\partial\tau}{\partial z}=\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z} \tag{2-54a}$$

代入式（2-54）得：

$$q=-k(\theta)\nabla z+k(\theta)\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\nabla(\theta)$$

$$=-k(\theta)\nabla z-D(\theta)\nabla(\theta) \tag{2-54b}$$

式中 $k(\theta)$——称为毛管传输性；

$D(\theta)=k(\theta)\left(-\frac{\partial\tau}{\partial\theta}\right)$——称为扩散系数。

由于 $\tau-\theta$ 关系的滞后作用，对同一土样，在相同 τ 下，$\nabla z=0$，$\nabla\tau=0$，由式（2-54）得 $q=0$，是正确的；但在相同 τ 下，$D(\theta)\neq0$，$\nabla(\theta)\neq0$，由式（2-54b）得 $q\neq0$，这是不正确的。故认为式（2-54）比式（2-54b）更具有普遍性。

假设在 x 一个方向产生非饱和渗流，且因 $k(\theta)=k[\theta(\tau)]=k(\tau)$，故式（2-54）变成：

$$v=k(\tau)\frac{d\tau}{dx} \tag{2-54c}$$

由式（2-54b）得：

$$v=-D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x} \qquad (2\text{-}54d)$$

$\frac{d\tau}{dx}$为吸力梯度，$\frac{\partial\theta}{\partial x}$为含水量梯度。在式（2-54 c）中，渗透速度与吸力梯度成正比；在式（2-54 d）中，渗透速度与含水量梯度成正比。

由式（2-54 b）中可见，$D(\theta)$的一个分量是$k(\theta)$，它既非唯一的，又非线性的，因此，这就是非达西因素的来源。此外，在非饱和土中，孔隙中水膜厚度较小，水和土粒相互作用的力较大，也就是吸附水的非牛顿性状影响较大，也可用来解释部分非达西性状[68]。这种非比例关系并不是很敏感的，有的资料说明比降相差 8 倍，引起扩散系数的偏差而导致水分水平吸入速度的影响只有40%。从实用而言，总的实验误差常常大到足以掩盖这种非比例关系的效应。因此，仅在需要精确研究时，才考虑这种非比例关系。

四、压实土的渗透性

（一）填筑含水量对渗透性的影响

压实土是水利水电工程中常遇到的一种非饱和土，其特性受到结构和饱和度的影响极大，国内外已有过许多研究，其中也包括对渗透性的系统研究[86]。美国加州大学的试验研究指出，压实和含水量对渗透性有很大影响，在干于最优含水量（w_{op}）一边，压实土的颗粒较任意地定向排列，形成凝聚结构，颗粒呈团粒状存在，团粒之间的孔隙尺寸较大，故相应渗透性也较大。而在湿于最优含水量的一边，颗粒间滑动阻力较小，击实时产生的剪应变使颗粒接近于平行的定向排列，形成分散结构，其总孔隙率可能与干于最优含水量的土样一样，但其孔隙尺寸较小，所以其渗透性也显著减小。图2-50就是一个典型成果。由图可见：

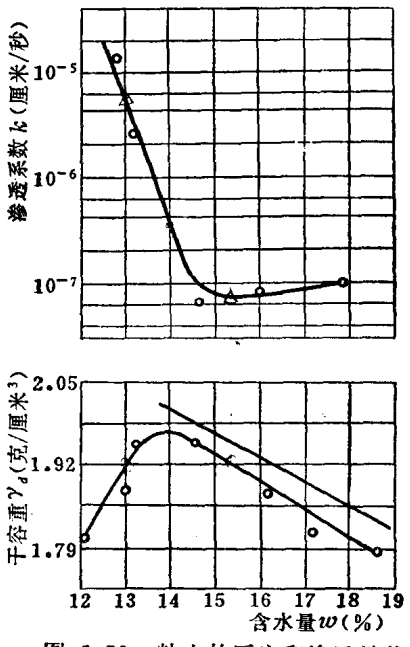


图 2-50　粘土的压实和渗透性状

1.在干于w_{op}一边，k随w增大而减小，到w_{op}附近为最小；而湿于w_{op}一边，则k值比较接近，显示出击实粘土结构性的影响，且看到结构性的影响超过了饱和度的影响。结构性的影响可使k值相差$10^2\sim10^3$倍。

2.其它条件相同时，饱和度越大，k值也越大。饱和度的变化可使k值相差 4 ～ 5 倍。

3.密度大小的影响比结构性和饱和度的为小。

（二）影响压实土渗透性的其它因素

除填筑含水量外，压实方法、压实粘土的触变性和试验方法等，也都对压实粘性土的渗透性有影响。

不同的压实方法和压实功能对渗透性的影响，在于压实土结构性方面。搓揉压实产生的剪应变最大，有利于粘土颗粒的定向排列，故土的渗透性最小。静压法产生的剪应变最小，形成的土的渗透性较大。而动力击实则介于两者之间。增加压实功能可使土更趋于分散结构，从而减小其渗透性。这种影响在干于w_{op}一边较小，而在湿于w_{op}一边则较大（见图2-51）。

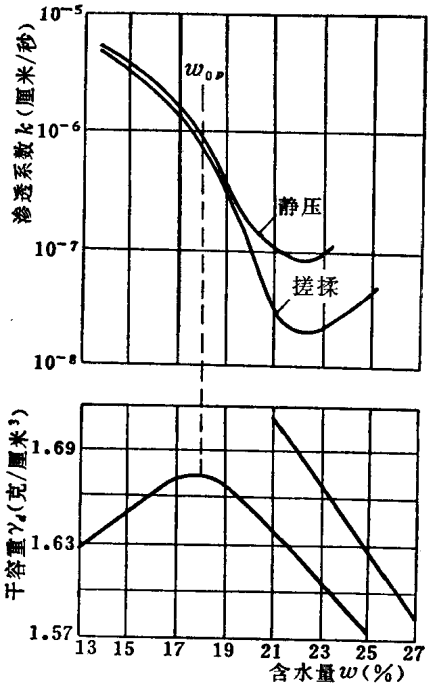


图 2-51 压实方法对渗透性的影响

压实土在γ_d和w不变情况下，其强度随成型后时间的增长而增加。这是击实土触变性的反映，其实质是因颗粒的弹性效应，使土随时间增长而趋向于更凝聚的结构。因此，渗透性也应随龄期而加大，与强度增长的规律是一致的（见图2-52）。

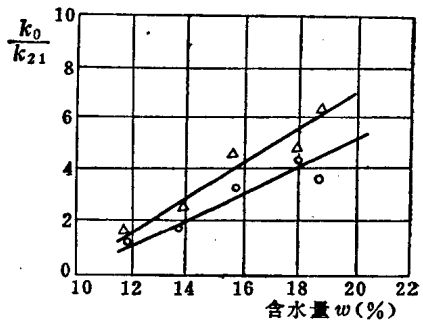


图 2-52 龄期对渗透性的影响
k_0—成型后立即试验；
k_{21}—成型后养护21天试验

五、非饱和土渗透系数的测定

上面提到在测定非饱和土的渗透系数时，要分别控制孔隙水和气压力，分别建立水气循环，分别测定k_a和k_w。巴登等[81]使用的设备，如图2-53所示。

由于非饱和土渗透性的直接测定相当麻烦，而且容易产生误差，故不如测定含水量和吸力关系的水分特征线较为简易可靠。所以许多土壤物理学家一直在研究间接计算非饱和土渗透性的方法。据文献[87、88]等的报导，蔡尔兹（Childs）和柯连斯-乔治（Collis-George）根据渗透的毛细模型，并基于下列假设：

1.从水分特征线，即含水量和静水压力的关系曲线，可确定其孔隙大小分布；

2.在两个孔隙系列中，有效流动阻力取决于较细的一组；

3.渗透性仅与直接沿流动方向的孔隙系列有关，而与旁路无关。

按照伯朔尼方程导出下列计算公式：

$$K = m \sum_{\rho=0}^{R} \sum_{\sigma=0}^{R} \overline{\sigma}^{2} f(\rho)\delta r f(\sigma)\delta r \qquad (2\text{-}55)$$

式中　K——物理渗透性，单位为L^2；

$f(\rho)\delta r$——半径ρ到（$\rho+\delta r$）之间的孔隙的断面积；

$f(\sigma)\delta r$——半径σ到$(\sigma+\delta r)$之间的孔隙断面积；上式一直累加到保持充满水分的最大孔隙；

m——一匹配因素，用于考虑某一点实测和计算渗透系数的差值。

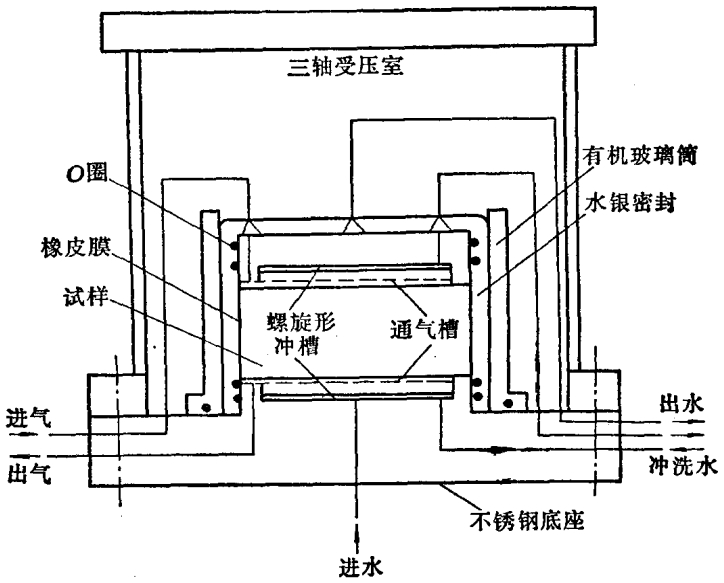


图 2-53　水气分别循环的三轴渗透试验装置示意图

如在式（2-55）中，令$m=\frac{1}{8}$，则变成$K=\frac{\overline{\sigma^2}}{8}$，此即伯朔尼方程和达西方程结合起来所解答的结果。

马歇尔（Marshall）[89、90]对上式作了一些改进。他假设有相邻的A、B两单位面积的断面，通过均匀多孔介质任意连接起来，A断面划分为n个单元，每单元的面积是$1/n$，其孔隙平均半径依次为r_1、$r_2\cdots r_n$，而$r_1>r_2>\cdots>r_n$。半径r_1的单元又与断面B上的n个单元有效地接触，而每单元的面积为$1/n^2$，其孔隙的当量半径也是r_1，$r_2\cdots r_n$。其相互联系取决于其较小的那个半径，但这些孔隙可以和断面A的孔隙相连接，也可以和土骨架相连接，因此，其与孔隙接触的有效面积是：

$$\varepsilon\pi r_1^2,\ \varepsilon\pi r_2^2\cdots\varepsilon\pi r_n^2$$

式中　ε——孔隙率。

断面A内相应于r_2的单元和断面B接触的有效面积为：

$$\varepsilon\pi r_2^2,\ \varepsilon\pi r_2^2\cdots\varepsilon\pi r_n^2$$

依此类推，直到：

$$\varepsilon\pi r_n^2,\ \varepsilon\pi r_n^2\cdots\varepsilon\pi r_n^2$$

因此，两个断面孔隙连通的平均断面积为：

$$\varepsilon\pi[(r_1^2+r_2^2+\cdots r_n^2)+(2r_2^2+\cdots r_n^2)+\cdots+nr_n^2]\times\frac{1}{n^2}$$

或 $$\varepsilon\pi n^{-2}[r_1^2+3r_2^2+5r_3^2+\cdots+(2n-1)r_n^2]$$

控制渗流的相应毛管半径为：

$$r_t^2=\varepsilon n^{-2}[r_1^2+3r_2^2+5r_3^2+\cdots+(2n-1)r_n^2]$$

与伯朔尼方程结合起来，可得：

$$K=\varepsilon^2 n^{-2}[r_1^2+3r_2^2+5r_3^2+\cdots+(2n-1)r_n^2]/8 \qquad (2\text{-}56)$$

如以吸力表示，则：

$$K=2.8\times10^{-3}\varepsilon^2 n^{-2}[h_1^{-2}+3h_2^{-2}+5h_3^{-2}+\cdots+(2n-1)h_n^{-2}] \qquad (2\text{-}56a)$$

式中h_1，h_2，$\cdots h_n$为相应于半径r_1，$r_2\cdots r_n$的毛管的吸力，可以从含水量与吸力关系曲线上求得。

米林顿和夸克（Millingtor和Quirk）[91、92、93]认为，对孔隙率为ε的多孔介质，其单位断面上的有效渗透面积并不是ε，要考虑彼此相互交叉的问题，其有效过流面积是$\varepsilon^x\cdot\varepsilon^x=\varepsilon^{2x}$，$x=0.6\sim0.7$之间，取为2/3。令孔隙平均分为$m$级，从而将上式修正为：

$$K=\frac{1}{8}\frac{\varepsilon^{4/3}}{m^2}[r_1^2+3r_2^2+\cdots+(2m-1)r_m^2] \qquad (2\text{-}56b)$$

如以ε^2代替$\varepsilon^{4/3}$，则上式即为马歇尔的计算式。可见这三者都是以毛管模型为基础，只是根据不同的假设得出不同的常数值罢了。

顾兹（Kunze）等[87]将这三种计算方法和实测资料作了比较，认为用米林顿和夸克的计算式加上一个匹配因素MF，可得到较为满意的结果：

$$MF=\frac{K_s}{K_{sc}} \qquad (2\text{-}56c)$$

式中 K_s——实测饱和土的渗透性；

K_{sc}——计算饱和土的渗透性。

不管土壤物理学家如何努力，仍然不能脱出毛管模型本身的局限性，而不得不用所谓“MF”这样的系数去适应试验资料。因此，这种方法也就没有多大的优点了。

由以上介绍的情况可见，非饱和土的渗透性是个十分复杂的问题，不论是用直接或间接方法确定渗透系数，都存在不少问题，尚有待进一步研究。

第五节 粗粒料的渗透规律

一、大雷诺数渗流的非线性规律[18]

（一）大雷诺数渗流的表达式

在第三节中讨论达西定律适用上限时，曾提到$v-i$呈线性关系的极限雷诺数约为$Re=1\sim10$，而在Re超过该值后，$\frac{i}{v}$比值也逐渐增加，可以清楚地看到偏离达西定律的现象（图2-54）。为了考虑大雷诺数时出现的非线性关系，曾有过不少不同的数学表达形

式。富许梅（Forchheimer）首先建议在达西定律的表达式后面加一个二次项，去适应试验资料：

$$i=aq+bq^2 \qquad (2\text{-}57)$$

式中 a、b——常数。

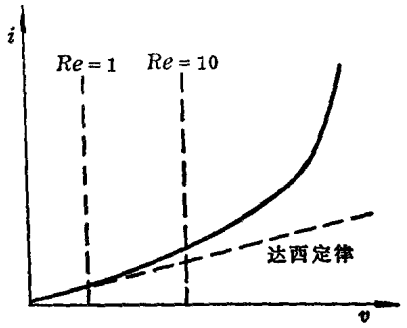


图 2-54 v-i 关系曲线示意图

初步看来，好象偏离达西定律的现象是由于出现紊流，因为在管流情况下，粗糙管子中的紊流也是梯度与流速成二次方比例关系的。但进一步分析，其中还是有许多基本不同之点。例如：

1.紊流公式是$i=bq^2$，其中并无aq项；

2.管流中，由层流到紊流是突变而不是渐变的，但土中渗流是渐变的；

3.在管流中，实验表明转变为紊流的极限雷诺数 Re 约为2000左右，比土中偏离达西定律的 Re 值大几个量级。

为了适合试验资料，他又一再修改表达式如下：

$$i=aq+bq^2+cq^3 \qquad (2\text{-}57a)$$

$$i=aq+bq^2+c\frac{\partial q}{\partial t} \qquad (2\text{-}57b)$$

这是不去搞清其物理意义，只是简单地用公式去适应试验资料。还有一些表达式，如：

$$i=aq^m,\ m=1\sim 2 \qquad (2\text{-}57c)$$

也可归之于这一类。

（二）大雷诺数渗流的机制

对于大雷诺数时渗流出现非线性关系的机制，以前是用开始出现紊流来解释的。但是，许多试验结果确定，开始出现紊流的$Re=60\sim150$之间，而开始偏离达西定律的$Re=1\sim10$，可见这不能归之于紊流。有人企图用土中孔隙大小的不均匀性来解释，认为大孔隙先进入紊流，此时小孔隙仍是层流状态，但也不能阐明这种分歧。为此，另一些研究者将偏离达西定律解释为惯性力的作用。因为在小雷诺数时，以粘滞力为主，惯性力可略去不计；而在大雷诺数时，惯性力已大到不可忽略了。惯性力是与流速的二次方成比例的，且与液体的粘滞度无关。看来这是式（2-57）中二次项的最好解释。

按照这种解释，有人建议按照作用力的不同机理，将流动状态划分为4个不同区域[21、94]：

1.层流区。在多孔介质中的每一点都是层流的，流线相互平行，并无交叉，微观流速是稳定的，不随时间而变，水头损失和流速的一次方成比例。在这区域内，流体的流动阻力以粘滞力为主，惯性力可以略去不计。流速分布表明最大流速在孔隙流槽的中间点。在层流区内完全合乎达西定律。

2.非线性层流区。这时随着雷诺数的加大，各点虽然仍保持层流状态，但是孔隙水流速的加大，使惯性力的项和粘滞力相比，已不可忽略，两者都对渗流运动有影响，渗流开

始偏离达西定律。

3.紊流过渡区。此时微观流速已开始出现脉动，土体中有些部位开始转入紊流，运动阻力以惯性力为主，水头损失和流速的平方近似地成比例。

4.完全紊流区。微观流速杂乱摆动，水头损失与流速的平方严格地成比例。

如以雷诺数Re和阻力系数λ之间的关系来研究土中渗流运动的分区，可以发现并无突然变化的明显转折点，而呈逐渐过渡的光滑曲线，如图2-55，即为拉埃特（Wright）[94]的试验结果。拉埃特用砾石和粗砂进行试验得出：

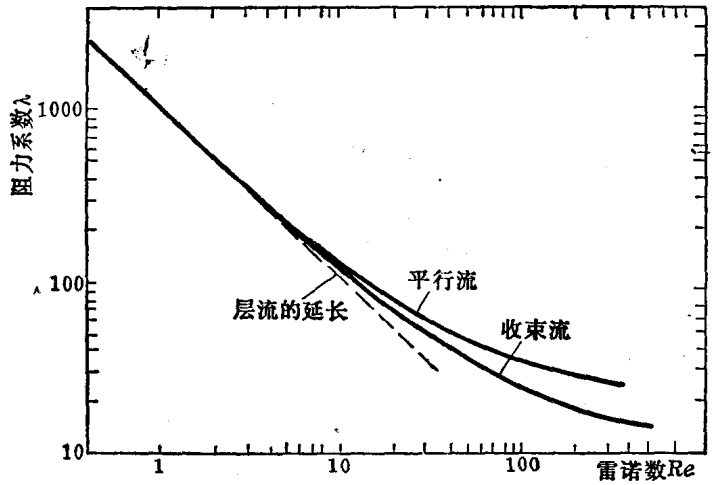


图 2-55 雷诺数与阻力系数关系

层流与非线性层流区的分界 Re＝1～5；

非线性层流与紊流过渡区的分界 Re＝90～120；

紊流过渡与完全紊流区的分界 Re＝800以上。

这些试验成果，证实了紊流开始以前就有偏离达西定律的意见。在出现偏离到完全紊流，有一过渡区，其较低雷诺数一端为非线性层流区，高雷诺数一端为紊流过渡区，其渗流规律介于线性定律和紊流的平方定律之间，以下式表示：

$$v=ki^m,\ m=0.5\sim1.0,\ \text{平均可取}0.75$$

（三）非线性定律的表达形式[14]

已发表的各种非线性定律的表达式数量极多，但归纳起来，不外乎以下几种基本形式：

1．$i=aq+bq^2$ 或 $\frac{i}{q}=a+bq$

运用后一表达式，即可从$\frac{i}{q}\sim q$的图解上求得经验常数a和b了（见图2-39e）。以后，有人从理论上推导常数a和b的表达式，使它与流体和多孔介质的性质联系起来，有的还用实验定出其系数值。例如：

夏迪格从毛管理论推出：

$$i=c_1\frac{\mu T^2}{gn}q+c_2\frac{T^3}{gn^2}q^2 \qquad (2\text{-}58)$$

式中 c_1、c_2——取决于颗粒大小分布的系数；

T——弯曲度。

欧根和奥明（Ergun和Orming）从柯森-卡门公式得出：

$$i=\frac{5\alpha(1-n)^2\mu M_s^2}{gn^3}q+\frac{\beta(1-n)M_s}{8gn^3_2}q^2 \qquad (2\text{-}58a)$$

$$=180\alpha\frac{(1-n)^2\mu}{gn^3d^2}q+\frac{3}{4}\frac{\beta(1-n)}{gn^3d}q^2$$

式中 α、β——形状系数；

M_s——单位固体体积的比表面积；

$d=6/M_s$。

欧根给上式中的系数以定值，得：

$$i=150\frac{(1-n)^2\mu}{n^3gd^2}q+1.75\frac{(1-n)}{n^3gd}q^2 \qquad (2\text{-}58b)$$

而依尔梅（Irmay）则由试验得出系数值180和0.6分别取代上式中的150和1.75。

2. $i=aq^m$，$m=1\sim2$

完全层流时，$m=1$；完全紊流时，$m=2$；过渡区内$m=1\sim2$。a值可从试验资料经验地求出。也有人进行理论推导以得出a的表达式，例如路梅和屈林克（Drinker）：

$$i=(\alpha C_D/n^2)\sqrt{(1-n)/\lambda\beta k}\,q^2/2g \qquad (2\text{-}58c)$$

式中 α、β——体积及面积形状系数；

λ——考虑相邻球体影响的因素；

C_D——一个颗粒的拖曳系数，与Re有关；

k——介质的渗透性。

3.其它，如式（2-57a）和（2-57b）等。

二、堆石体的渗流

（一）土石坝中的堆石体

由于堆石体是极不均匀的材料，填筑时的分离现象，使垂直方向的不均匀性更为明显，也使垂直和水平方向的渗透性表现出各向异性性状。同时，对多孔介质中的紊流区远还没有很好研究过，因此，就使问题更加复杂化了。

莱普斯（Leps）在研究堆石渗流的文章[95]中，提出了堆石的定义。他认为，起决定作用的是其中小于1英寸的颗粒含量。如其级配中主要由$>\frac{1}{2}$英寸的颗粒组成，而通过4号筛的细颗粒含量不大于30%（最好不大于10%），包括天然或人工的采石场碎石、开挖石渣、卵砾漂石，都可定义为堆石体。其渗流除特别小的梯度外，不服从达西定律，而更接近于紊流。如通过4号筛的细颗粒含量大于30%，则细料将填充粗料孔隙，从而对渗流和应力-应变关系等起控制作用，这时可将填筑体视为填土，而不是堆石，其渗流特性也

更趋于合乎达西定律了。他统计了10个坝的资料，规定的小于1英寸的细料含量不超过10～15%，而实际测得的有40%的坝超过35%，在40～50%之间，使填筑体性质更接近于填土而不是堆石。有50%的实例在18～26%之间，这时由于分离而导致有的地方达到30～40%，有的地方仅5～15%。分离也使垂直方向渗透性降低，但对水平方向渗透性影响不大，从而使填筑体呈现不均匀和各向异性。只有一例，细料含量小于10%，达到干净石料的要求，其正常分离不致严重影响其渗透性。

（二）堆石体的渗透规律

维尔金斯（Wilkins）[96、97]用尽可能干净的均匀的碎石做试验，碎石尺寸为3/4～3英寸。根据实验室资料，认为用以下形式表达为好：

$$v_s = C\mu^a R^b i^n \tag{2-59}$$

式中 v_s——孔隙水流的平均流速；

C——综合性的形状系数；

μ——水的粘滞度；

R——块石孔隙的平均水力半径；

i——水力梯度；

a、b、n——经验常数。

他从实验资料得：

$$v_s = 32.9R^{0.5}i^{0.54} \tag{2-59a}$$

派金（Parkin）[98]对直径1～10英寸的干净均匀岩块做了试验，也支持式(2-59a)，但他指出，要采用适合实际块石条件的水力半径值。他们都没有研究任意而不是单一尺寸的堆石体的问题。迄今研究堆石渗流的基本方程是紊流方程，其表达形式如下：

$$v_s = WR^{0.5}i^{0.54} \tag{2-59b}$$

式中W为给定堆石材料的经验常数，主要取决于岩块的形状和粗糙度，也和水的粘滞度有关。当采用英制单位时，对压碎砾石，$W=33$；对光滑砾石，$W=46$。对单一尺寸的干净碎石，莱普斯建议采用表2-9所列的水力半径值[95]。但是，对级配良好的堆石体还需研究。

表 2-9 不同粒径碎石的水力半径值

岩块尺寸，英寸	4/3	2	6	8	24	48
水力半径，英寸	0.09	0.24	0.75	0.96	3.11	6.43

由于v_s-$R^{0.5}$成正比，故孔隙中的流速对块石尺寸相对来说不太敏感。有可能的话，采用一控制渗透性的优势粒径，从实用上来说，也不是不合理的。莱普斯的意见是，可采用d_{50}作为这一优势粒径，将其用于实际计算中去。他认为，在多数实际问题中，用式（2-59b）估算孔隙平均流速已足够精确。用小粒径的块石所取得的经验数推论大粒径堆石体性状引起的误差，比之确定梯度和d_{50}所带来的误差要小得多。

席德格伦[3]介绍了研究粗粒材料紊流和半紊流的另一种途径。他指出，如原型材料的水力梯度相对变化不大，则可以在试验中采用和原型相同的水力梯度。这样测得的系数虽然不是真正的达西系数，但因紊流引起的误差，可因实验条件近似于原型而得以消除，

故可在估算渗流量和流速时，得到接近实际的结果。如原型中水力梯度变化较大时，他建议了另一种方法。即在进行渗透试验时，用一定范围的水力梯度值，其中包括一很低的梯度，以产生近似层流的条件，也包括较大的梯度，以产生一定程度的紊流。这时达西定律已不适用，但可以绘出有效渗透性和梯度关系图，而用一类似达西公式的关系式进行计算：

$$q=k'iA=(ck)iA \qquad (2\text{-}60)$$

式中 $k'=ck$，称为有效渗透性，用于紊流和半紊流；

k ——在小梯度下测定的达西渗透系数；

c ——随水力梯度而变的经验常数，由试验决定。

这时，$\frac{q}{i}=k'A=ckA$，是随梯度增大而减小的变数。同时某一梯度 i_n 下的有效渗透性 k_n，可以下式与小梯度 i_0 时的达西渗透系数联系起来：

$$k_n=k_0\left(\frac{i_0}{i_n}\right)^y \qquad (2\text{-}61)$$

式中 i 和 c 及 y 关系的实验资料，如图 2-56 。以上方法可作为用于紊流和半紊流的一种实用方法。

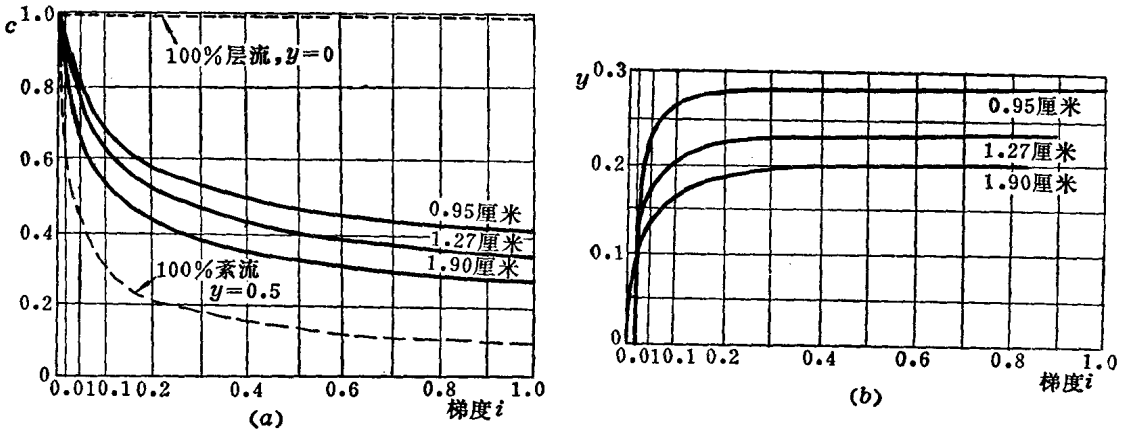


图 2-56 i 与 c 及 y 关系的实验曲线

（美利坚河碎砾，无细料，设 $i=0.01$ 时是层流）

参 考 文 献

[1] International Association for Hydraulic Research, Proc. of International Symposium on the Fundamental Phenomena in Flow through Porous Media, 1969.

[2] International Association for Hydraulic Research, Proc. of 2nd International Symposium on the Fundamental Phenomena in Flow through Porous Media, Vol. I、II, 1972.

[3] Cedergren, H. R., Seepage, Drainage and Flow Nets, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1977.
[4] Moham, D. & Bhandari, R. K., Analysis of Some Indian Marine clays, Proc. of International Symposium on Soft Clay, 1977.
[5] Mitchell, J. K. & Younger, J.S., Abnormalities in Hydraulic Flow through Finegrained Soils, in "Capillarity and Permeability of Soils", ASTM, STP, No. 417, 1967.
[6] Moser, M.A., The Effectiveness of Sand Drain in Soft Clays, Proc. of International Symposium on Soft Clay, 1977.
[7] Liu Lingyao, Li Kueifen & Bing Dongping, Earthquake Damage of Baihe Earth Dam and Liquefaction Characteristics of Sand and Gravel Materials, Research Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, 1979.
[8] Desai, C.S., Flow through Porous Media, in "Numerical Methods in Geotechnical Engineering", McGraw-Hill Book Company, 1977.
[9] Baver, L.D., Gardner, W.H. & Gardner, W.R., Soil Physics, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1972.
[10] Yong, R.N. & Warkentin, B.P., Soil Properties and Behaviour, Development in Geotechnical Engineering 5, Elsevier Sci. Pub. Company, Amsterdam, 1975.
[11] Childs, E.C., The Physics of Land Drainage, in "Drainage of Agricultural Lands", American Society of Agronomy, Madison, Wisconsin, 1957.
[12] 中华人民共和国水利电力部，土工试验规程（上册），水利出版社，1980。
[13] Mitchell, J.K., Fundamentals of Soil Behaviour, John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1976.
[14] Bear, J., Dynamics of Fluid in Porous Media, American Elsevier, 1972.
[15] De Wiest ed., Flow through Porous Media, Acadamic Press, 1969.
[16] Leonard, G.A., Engineering Properties of Soils, in "Foundation Engineering", McGraw-Hill Book Company, 1962.
[17] Taylor, D.W., Fundamentals of Soil Mechanics, John Wiley & Sons, Inc., 1948.
[18] Scheidegger, A.E., The Physics of Flow through Porous Media, 3rd Edition, The Macmillan Co., 1974.
[19] Rumer, R. R., Resistance to Flow through Porous Media, in "Flow through Porous Media", Acadamic Press, 1969.
[20] Rumer, R.R. & Drinker, P.A., Resistance to Laminar Flow through Porous Media, Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 92, No. HY5, 1966.
[21] Ward, J.C., Turbulent Flow in Porous Media, Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 90, No. HY5, 1964.
[22] Harr, M.E., Mechanics of Particulate Media, A Statistics Approach, McGraw-Hill Book Company, 1977.

[23] Lambe, T.W.& Whiteman, R. V., Soil Mechanics, John Wiley & Sons, Inc., 1969.

[24] Alan Singh, Soil Engineering in Theory and Practice, Vol. 1, Fundamentals and General Principles, Asia Publishing House, 1976.

[25] Amer, A.M. & Award A.A., Pérmeability of Cohesionless Soils, J. GED, ASCE, Vol. 100, No. GT12, 1974.

[26] Masch, F.D. & Denney, K.J., Grain Size Distribution and its Effects on the Permeability of Unconsolidated Sands, Water Resources Research, Vol.2, No. 4, 1966.

[27] 郭庆国，关于粗粒土工程特性及其分类探讨，水利水电技术，1979年第6期。

[28] Terzaghi, K. & Peck, R.B., Soil Mechanics in Engineering Practice, John Wiley & Sons, Inc., 1948.

[29] Burmister, D.N., Principles of Permeability Testing of Soils, ASTM STP No. 163, 1954.

[30] Russel, D.A. & Swartzendruber, D., Flux-Gradient Relationship for Saturated Flow through Mixtures of Sand, Silt and Clay, Proc. SSSA, Vol. 35, No. 1, 1971.

[31] Mesri, G. & Olson, R.E., Mechanisms Controlling the Permeability of Clays, Clay and Clay Mineral, Vol. 19, No. 3, 1971.

[32] Michaels, A.S. & Lin, C.S., Permeability of Kaolinite, in "Flow through Porous Media", from "Industrial and Engineering Chemistry", 1954.

[33] Hardcastle, S.H. & Mitchell, J.K., Electrolyte Concentration Permeability Relationship in Sodium Illite-silt Mixture, Clay and Clay Minerals, Vol. 22, No. 2, 1974.

[34] Woo, S.M., Moh, Z.C. & Bumrungsup,T., Effect of Soil Structure on Compressibility of An Artificially Sedimented Clay, Proc. International Symposium on Soft Clay, 1977.

[35] Mitchell, J.K., Hooper, D.R. & Campanella, R.G., Permeability of Compacted Clay, J. SMFD, ASCE, Vol. 91, No. SM4, 1965.

[36] Nishida, Y., Koike, H. & Nakagawa, S., Coefficient of Permeability of Highly Plastic Clays, Proc. of 4th Budapest Conference on SMFE, 1971.

[37] Chan, H.T. & Kenney, T.C., Laboratory Investigation of Permeability Ratio of New Liskeard Varved Soils, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 10, No. 3, 1973.

[38] Kenney, T.C. & Chan, H.T., Field Investigation of Permeability Ratio of New Liskeard Varved Soils, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 10, No. 3, 1973.

[39] 蒋国澄，具有稳固团粒结构的南方高塑性粘土坝料特性，水利水电技术，1962年第1期。

[40] 卞富宗，红工作为筑坝土料的特性研究，水利学报，1980年第4期。

[41] 华东水利学院土力学教研室主编，土工原理与计算（上册），水利出版社，1980。

[42] Jocob, C.E., Flow of Groundwater, in "Engineering Hydraulics", John Wiley & Sons, Inc., 1950.

[43] Fishel, V.C., Further Tests of Permeability With Low Hydraulic Gradients, Trans. of American Geophysics Union, 1935.

[44] Terzaghi, K., Principles of Soil Mechanics, 3. Determination of Permeability of Clay, Engineering News Records, 95; 1925.

[45] Muskat M., The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media, McGraw-Hill Book Company, 1937.

[46] Kutilek, M., Non-Darcian Flow of Water in Soil Laminar Region, a review, 1st Symposium on Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, 1969.

[47] Olsen, H.W., Deviation from Darcy's Law in Saturated Clays, Proc. SSSA, Vol. 29, No. 2, 1965.

[48] Olsen, H.W., Darcy's Law in Saturated Kaolinite, Water Resources Research, Vol. 2, No. 2, 1966.

[49] Miller, R.J., Overman, A.R. & Peverly, J.H., The Absence of Threshold Gradients in Clay Water System, Proc. SSSA, Vol. 33, No.2, 1969.

[50] Childs, E.C. & Tzimas E., Darcy's Law at Small Potential Gradient, Journal of Soil Science, Vol. 22, No. 3, 1971.

[51] Miller, R.J. & Low, P.F., Threshold Gradient for Water Flow in Clay Systems, Proc. SSSA, Vol.27, No.6, 1963.

[52] Роза,С.А., Осадки Гидротехнических Сооружений На Глинах Малой Влажностью, Гидротехническое Строительство, No. 9, 1950.

[53] Hansbo, S., Consolidation of Clay, with Special Reference to Vertical Sand Drains, Proc. No. 18, Swedish Geotechnical Institute, 1960.

[54] Hansbo, S., Influence of Mobile Particles in Soft Clay on Permeability, Proc. of the International Symposium on Soil Structure, Sweden, 1973.

[55] Swartzendruber, D., Non-Darcy Behavior of the Flow in Water Saturated Porous Media, Journal of Geophysical Research, 1962.

[56] Жиленков, В.Н., Водопроницаемость Экранирующих Покрытий Из Глинистого Грунта, Известия ВНИИГ, Т. 115, 1977.

[57] Павилонский, В.М., К Вопросу О Начальном Градиенте Напора В Глинистых Грунтах, Труды ВОДГЕО, Вып. 19, 1968.

[58] Бондаренко, Н.Ф., Физика Движения Подземных Вод, Гидрометеоиздат, 1973.

[59] Lutz, J.F. & Kemper, W.D., Intrinsic Permeability of Clay as affected by Clay-Water Interaction, Soil Science, Vol. 88, 1959.

[60] Matyas, E.L., Air and Water Permeability of Compacted Soils, in "Capallarity and Permeability of Soils", ASTM, STP No. 417, 1967.

[61] 杜延龄、李春华、徐家海，研究饱和粘土渗透特性的试验装置，水利学报，1980年第4期。

[62] Олейник, А.Я., Добронравов, А.А., Новейшие Достижения Теории Фильтрации И ее Приложений, Гидротехническое Строительство, No.12, 1977.

[63] Schmidt, J.D. & Westman, R.A., Consolidation of Porous Media With Non-Darcy Flow, Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM6, 1971.

[64] 弗洛林 *B.A.*，土力学原理，第一卷，同济大学土力学与地基基础教研组译，中国工业出版社，1965。

[65] Swartzendruber, D., Modification of Darcy's Law for the Flow in Soils, Soil Science, Vol. 93, No. 1, 1962.

[66] Swartzendruber, D., Non-Darcy Behaviour and Flow of Water in Unsaturated Soil, Proc. SSSA, Vol. 27, No.5, 1963.

[67] Swartzendruber, D., The Applicability of Darcy's Law, Proc. SSSA, Vol. 32, No. 1; 1968.

[68] Swartzendruber, D. , The Flow of Water in Unsaturated Soils, in "Flow through Porous Media" , Acadamic Press, 1969.

[69] U.S.Bureau of Reclamation, Earth Manual, 2nd edition, U.S. Government Printing Office, 1974.

[70] Permeability of Soils, ASTM, STP No. 163, 1954.

[71] Wilkinson, W.B. & Shipley, E.L., Vertical and Horizontal Laboratory Permeability Measurements in Clay Soils, Proc. International Symposium on Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media, 1969.

[72] Milligan, V., Field Measurement of Permeability in Soil and Rock, Proc. ASCE, Special Conference on "In Situ Measurement of Soil Properties" , Vol. II, 1975.

[73] Werneck, M.L., Costafilho, L.M. & France, H., In Situ Permeability and Hydraulic Fracture tests in Guanabara Bay Clay, Proc. International Symposium on Soft Clay, 1977.

[74] Bjerrum, L., Nash, J. K. T. L., Kennard, R. M. & Gibson, R. E., Hydraulic Fracturing in Field Permeability Testing, Geotechnique, Vol. 22, No. 2, 1972.

[75] Bjerrum, L. & Anderson, K.H., In-situ Measurement of Lateral Pressure in Clay, Proc. 5th European Conference on SMFE, Vol. 1, 1972.

[76] Wilkes, P.F., Permeability tests in Alluvial Deposits and the Determination of K_0, Geotechnique, Vol. 24, No. 1, 1974.

[77] Sherard, J.L., Embankment Dam Cracking, in "Embankment Dam Engineering" (中译本：《土石坝工程》，水利电力出版社，1978)，1973.

[78] Nobari, E.S., Lee, K.L. & Duncan, J. M., Hydraulic Fracturing in Zoned Earth and Rockfill Dam, AD-766-728, 1973.

[79] 俞培基、陈愈炯，非饱和土的水-气形态及其与力学性质的关系，水利学报，1965年第1期。

[80] Langfield, A.J., Chen, C.F. & Justice, J.A., Air Permeability of Compacted

Cohesive Soils, Journal SMFD, ASCE, Vol. 94, SM4, 1968.

[81] Barden, L., Madedor, A.O. & Sides, G.R., The Flow of Air and Water in Partly Saturated Clay Soil, Proc. of International Symposium on the Fundamentals of Transport Phenomena in Flow through Porous Media, 1969.

[82] Barden, L. & Sides, G.R., Engineering Behaviour and Structure of Compacted Clay, Journal SMFD, ASCE, Vol. 96, No. SM4, 1970.

[83] Barden, L. & Pavlakis, G., Air and Water Permeability of Compacted Unsaturated Cohesive Soils, Journal of Soil Science, Vol. 22, No. 3, 1971.

[84] Barden, L., Consolidation of Compacted and Unsaturated Clays, Geotechnique, Vol. 15, No. 3, 1965.

[85] Topp, G.C., Soil and Water Hysteresis in Silt Loam and Clay Loam Soil, Water Resources Research, Vol. 7, No. 4, 1971.

[86] Mitchell, J.K., Hooper, D.R. and Campanella, R.G., Permeability of Compacted Clay, Journal SMFD, ASCE, Vol. 91, No. SM4, 1965.

[87] Kunze, R.J., Uehara, G. & Graham, K., Factors Important in Calculation of Hydraulic Conductivity, Proc. SSSA, Vol. 32, 1968.

[88] Gardner, W.R., The Permeability Problem, Soil Science, 117, 1974.

[89] Marshall, T.J., A Relation Between Permeability and Size Distribution of Pores, Journal of Soil Science, Vol. 9, No. 1, 1958.

[90] Marshall, T.J., Relations Between Water and Soils, Commonwealth Agricultural Bureaux, 1959.

[91] Millington, R.J. & Quirk, J.P., Permeability of Porous Media, Nature, 183, 1959.

[92] Millington, R.J. & Quirk, J.P., Transport in Porous Media, Transactions of 7th International Congress of Soil Science, Vol.1, 1960.

[93] Millington, R.J. & Quirk, J.P., Permeability of Porous Solids, Transaction Faraday Society, 57, 1961.

[94] Wright, D.E., Nonlinear Flow through Granular Media, Journal of Hydraulic Division, ASCE, Vol. 94, No. HY4, 1968.

[95] Leps, T.M., Flow through Rockfill, in "Embankment Dam Engineering", John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1973.

[96] Wilkens, J.K., Flow of Water through Rockfill and Its Application to the Design of Dams, Proc. 2nd Aust. -N.Z. Conference on SMFE, 1956.

[97] Wilkens, J.K., The Stability of Overtopped Rockfill Dams, Proc. 4th Aust. -N.Z. Conference on SMFE, 1963.

[98] Parkin, A.K., Trollope, D.H. & Lawson, J.D., Rockfill Structure Subject to Water Flow, Journal of SMFD, ASCE, Vol. 92, No. SM6, 1966.

第三章　土的固结与压缩

第一节　概　　述

饱和土体或部分饱和土体，当其应力状态改变时，土体积逐渐压缩（应力解除时为膨胀），同时部分水量从土体中排出，外加压力相应地从孔隙水（与气）传递到土骨架上，直至变形达到稳定为止。土体的这一变形的全过程，称为固结。固结速率取决于土体排水的速率，并且是时间的函数。在固结过程中，土体积的改变只依赖于土中的有效应力，两者之间的关系称为土体的压缩，基本上与时间无关。

固结与压缩对土的工程性状有重要影响，与土工建筑物和地基的渗流、稳定和沉降等问题有密切联系。例如，由于土体压密，它的渗透性减小；伴随着固结过程，土体内的粒间应力不断改变，使土的强度相应变化；土体的压缩导致建筑物地基下沉，直接影响上层结构的使用条件和安全。

土的固结和压缩的规律是相当复杂的。它不仅取决于土的类别和状态，也随土的边界条件、排水条件和受荷方式等因素而异：粘性土与无粘性土的变形机理不同；二相土和三相土的固结过程迥然有别，后者由于土中含气，变形指标不易准确测定，状态方程的建立与求解都比较复杂；天然土体一般都是各向异性、非均质或成层的，如何合理地考虑它们对变形的影响，尚待进一步研究；就地基而言，建筑物施加的通常是局部荷重，在固结过程中，除上下方向的排水压缩外，同时有不同程度的侧向排水与膨胀，这一类二向与三向固结问题，迄今还没有获得普遍的解析解；考虑到荷重随时间而改变的情况，更使固结微分方程的数学处理复杂化了。

饱和土体的固结理论是太沙基于1925年首先提出的。它建立在许多简化假设的基础上：土骨架是线弹性变形材料；土孔隙中所含不可压缩流体按达西定律沿单方向流动引起单向压缩变形，等等。故这一理论常称为单向固结理论。后来，经太沙基与伦杜立克发展，得到三向固结方程，可以考虑三向排水时的单向压缩，其中假设了固结过程中总应力为常量。比奥（Biot）进一步研究了三向变形材料与孔隙压力的相互作用，导得比较完善的三向固结方程。但是，由于比奥理论将变形与渗流结合起来考虑，使得固结方程的数学求解大大增加了困难，至今仅得到个别情况的解答。五十多年来，固结理论的发展，主要围绕着假设不同土体材料的模式，而得到不同的物理方程：（1）土骨架—假设为弹性的（各向同性与各向异性的），塑性的，粘弹性的（线性与非线性以及它们的各种组合）；（2）土中流体—假设为不可压缩的，线性粘滞体的，可压缩的；（3）土骨架与流体间的相互作用—近年来，有人提出以混合体力学（mechanics of mixture）为基础，利用连续原理、平衡方程与能量守恒定律，建立混合体特性方程，选用适当边界条件，以获得固结理论解[1]。

虽然二向、三向理论在许多实际情况中比单向理解更为合理，但是，在指标测定与求解方面却比较复杂。因此，单向固结理论至今在某些特定条件下与近似计算中仍被广泛应用。多年来，单向固结理论也获得了较大进展，研究方向侧重于对太沙基基本假设的修正。例如，考虑土的有关性质指标在固结过程中的变化，压缩土层的厚度随时间改变，非均质土的固结以及固结荷重为时间的函数等。这些修正，使得计算模型能更准确地反映土的特性、土层分布和土的加荷过程。

对于土的压缩量（沉降）的计算，随着对土的应力应变关系理解的深化，也从原先只考虑单向压缩变形，发展到计及侧向变形，近年来，更将土的应力历史、应力途线等因素纳入计算方案。六十年代电子计算机问世后，计算技术有了划时代的跃进，极大地推动了岩土力学理论的发展，使得以往无法考虑的许多土的复杂的本构关系，有可能被引入计算。例如，在压缩变形计算中，除古典的土的线性弹性模型外，已经逐渐引用其它各种模型：双线弹性模型、弹塑性模型、双曲线模型（其中最著名的有邓肯-张模型）以及剑桥模型等。有限单元法在固结计算中的应用，可以在一次分析中，得到土体变形-荷重关系的全过程[2]。

在固结理论发展的同时，测试技术也有了相应提高。虽然沿用多年的侧限固结仪至今仍被采用，并作了许多改进，研制了各种形式的连续加荷的试验仪器和方法；但是，愈来愈多的研究者强调，应该用三轴仪测定土的变形指标，并建议了相应的计算方法[3、38、39、58、59]。当前，计算技术的飞跃前进，排除了计算途径上的许多障碍，使计算指标测定的可靠性问题跃居于重要地位。1979年9月召开的欧洲第七届土力学与基础工程会议的中心议题，就是各种土的设计指标问题[4]。

土的固结与压缩理论发展至今，内容已相当广泛，但许多问题还处于探索阶段，在本章中难以全面介绍。因此，只选择了与生产实际比较接近的部分，向读者引述。同时，为了避免重复，有的问题，例如次固结问题，虽然是固结理论中的重要组成部分，但因在第五章中要专门论述，故这里仅一提而过。

第二节　土体变形机理分析

天然土体一般由三相组成，即矿物颗粒构成土骨架，土骨架孔隙内充填有水和空气。土体受到外力后，土粒和孔隙中的流体均将发生位移。由于土粒的移动速度与水流速度相比，数值很小，故为了分析方便，常忽略不计。因而，常假设土体变形是孔隙中流体体积变化的结果。今假设从变形土体中取出单元土块，由于不考虑土粒位移，故土块中的土粒重量W_s显然为常量。土体的变形性质可以从研究其含水重W的变化率(或称储水率)$\frac{\partial W}{\partial t}$加以探讨。

根据土的三相组成的相关关系可知：

$$W = W_s \cdot w\% \tag{3-1}$$

而

$$w \cdot \gamma_{w_0} \cdot G_s = S_r \cdot e \cdot \gamma_w$$

故
$$w=\frac{S_r e\gamma_w}{\gamma_{w_0}G_s} \tag{3-2}$$

式中 w——土的含水量；

W_s——土粒重量；

S_r——土的饱和度；

e——孔隙比；

γ_w、γ_{w_0}——分别为水容重及其在4 ℃时的容重；

G_s——土粒比重。

因为$\gamma_{w_0}G_s$等于土粒容重γ_s，故式（3-2）可改写成：

$$w=\frac{S_r e\gamma_w}{\gamma_s} \tag{3-3}$$

根据式（3-1）与式（3-3），可求得含水重的变化率如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}(w\cdot W_s\%)\\&=\frac{W_s}{100}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S_r e\gamma_w}{\gamma_s}\right)\\&=\frac{W_s}{100}\left[e\gamma_w\frac{1}{\gamma_s}\frac{\partial S_r}{\partial t}+S_r\gamma_w\frac{1}{\gamma_s}\frac{\partial e}{\partial t}\right.\\&\quad\left.+S_r e\frac{1}{\gamma_s}\frac{\partial\gamma_w}{\partial t}-S_r e\gamma_w\frac{1}{\gamma_s^2}\frac{\partial\gamma_s}{\partial t}\right]\end{aligned} \tag{3-4}$$

式（3-4）表明，土块中水重的变化率，不外由下列几种原因所引起：1.饱和度变化；2.孔隙比变化；3.水容重变化；4.土粒容重变化。

从式（3-4）可以顺便看到，如果忽略水容重γ_w与土粒容重γ_s的微小变化，则土的孔隙比e与饱和度S_r的变化可能有以下四种组合情况：（1）e与S_r均为常量；（2）S_r为常量，e变化；（3）e为常量，S_r变化；（4）e与S_r均变化。第（1）种情况显然属于稳定渗流，是与本书第二章有关的。第（2）、（3）、（4）种情况都属于土体中的非稳定流。其中第（2）种如果孔隙比e减小，为本章将要研究的固结问题；如果e是增大，则为土的膨胀。第（3）种情况是恒定土体积时的排水（S_r减小）或吸水（S_r增大）。第（4）种情况则为土的压缩与膨胀问题，非饱和土的固结也可归于此类。

为了弄清土体的变形实质，下面进一步讨论引起土中水重变化的各种原因的相对作用。

1.饱和度变化

如果是饱和土，饱和度恒为$S_r=1$，故式（3-4）括号中的第①项等于零。

对于非饱和土，在固结过程中，土孔隙内的超静水压力与气压力不断发生变化，因而，土块中的孔隙体积也相应改变。根据波义耳定律，气体体积受压力而减小；另一方面，由亨利定律可知，部分气体在压力下溶解于孔隙水。斯各特按此导得了因饱和度改变引起含水重变化的表达式如下[5]：

$$e\gamma_w\frac{1}{\gamma_s}\frac{\partial S_r}{\partial t}=e\gamma_w\frac{1}{\gamma_s}\frac{p_0[100-S_r+HS_r]}{(u+p_0')^2}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{3-5}$$

式中 p_0——土块中起始气压力（绝对压力）；

S_r——起始饱和度；

H——亨利溶解系数（每立方厘米水能溶解气体的立方厘米）；

u——孔隙水的超静水压力；

p'_g——孔隙气压力与水压力之差。

2.孔隙比变化

孔隙比变化决定于土体中的有效应力变化。在单向压缩条件下，土体的孔隙比（或压缩量）与有效应力之间的试验曲线，如图3-1所示。在不大的应力变化范围内，上述关系可近似地以直线代替。直线的斜率，称为土的压缩系数a_v。因此：

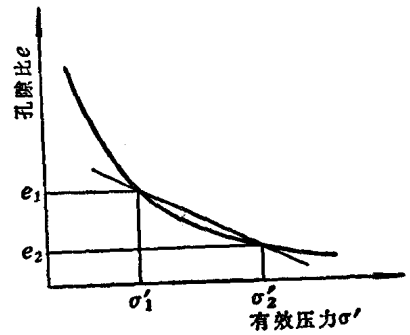


图 3-1 单向压缩条件下的e-σ'关系

$$\frac{\partial e}{\partial \sigma'} = -a_v \tag{3-6}$$

式中 σ'——有效应力，$\sigma' = \sigma - u$，故有：

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3-7}$$

代入式（3-6）得：

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -a_v\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

为此，式（3-4）中的第2项可以改写成：

$$S_r\gamma_w\frac{1}{\gamma_s}\frac{\partial e}{\partial t} = S_r\gamma_w\frac{1}{\gamma_s}a_v\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) \tag{3-8}$$

上式中的$\frac{\partial \sigma}{\partial t}$表示土单元体所受总应力的变化率，等于作用在它上面的外荷重的变化率。

3.水容重变化

水容重的变化决定于在压力作用下水体积的变化。而孔隙水的压缩量，要看水本身的压缩性与其所受压力的大小而定。根据物性方程，水容重按下式计算：

$$\gamma_w = \gamma_{w_0}(1+\beta_w \cdot p) = \gamma_{w_0}[1+\beta_w(\mu+\gamma_{w_0}h)] \tag{3-9}$$

式中 p——水体所受压力；

β_w——水的压缩模量，如果水不可压缩，则$\beta_w = 0$；

$\gamma_{w_0}h$——静水压力。

对式（3-9）的两端微分，可得：

$$\partial\gamma_w = \gamma_{w_0}\beta_w\partial u$$

代入式（3-4）中右侧第3项，有：

$$S_re\frac{1}{\gamma_s}\frac{\partial \gamma_w}{\partial t} = S_re\frac{1}{\gamma_s}\gamma_{w_0}\beta_w\frac{\partial u}{\partial t} \tag{3-10}$$

4.土粒容重变化

与水容重的变化相似，土粒容重可按下式计算：

$$\gamma_s=\gamma_{s_0}[1+\beta_s(u+\gamma_{w_0}h)] \tag{3-11}$$

式中 γ_{s_0}——大气压力作用下的土粒容重；

β_s——土颗粒的压缩模量。

同样可得：

$$\partial\gamma_s=\gamma_{s_0}\beta_s\partial u$$

故式（3-4）中的第4项可写成：

$$-S_re\gamma_w\frac{1}{\gamma_s^2}\frac{\partial\gamma_s}{\partial t}=-\frac{S_re\gamma_w\beta_s}{\gamma_{s_0}}\frac{1}{[1+\beta_s(u+\gamma_{w_0}h)]^2}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{3-12}$$

把以上各式代入式（3-4），可以得到单元土块水量变化率与各项因素的关系式如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{W_s}{100}\Bigg[&e\gamma_w\frac{1}{\gamma_s}\frac{p_0[100-S_r+HS_r]}{(\mu+p_0')^2}\frac{\partial u}{\partial t}\\&+S_r\gamma_w\frac{1}{\gamma_s}a_v\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\\&+S_re\frac{1}{\gamma_s}\gamma_{w_0}\beta_w\frac{\partial u}{\partial t}-S_re\gamma_w\beta_s\\&\times\frac{1}{\gamma_{s_0}}\frac{1}{[1+\beta_s(u+\gamma_{w_0}h)]^2}\frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned} \tag{3-13}$$

上式中的S_r、e、γ_w与γ_s，对一定的土块均为常量。如果将γ_{w_0}与γ_{s_0}也近似地看成是起始状态的水容重与土粒容重，则式（3-13）可简化为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t}=W_{w_0}\Bigg[&\frac{p_0(100-S_r+HS_r)}{S_0(u+p_0')^2}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{a_v}{e_0}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)\\&+\beta_w\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\beta_s}{[1+\beta_s(u+\gamma_{w_0}h)]^2}\frac{\partial u}{\partial t}\Bigg]\end{aligned} \tag{3-14}$$

式中 W_{w_0}——单元土块中的起始水重。

只要比较式（3-14）中$\frac{\partial u}{\partial t}$的各个系数的相对大小，便能获得各项因素对土块变形相对影响的定量概念。由于天然土的性质千差万别，故只能依据工程中的常见情况，选取合理的物理常数，代入式（3-14），进行粗略比较。斯各特曾作过这样的尝试[5]。他假设土的孔隙比$e=0.7$，非饱和土中的气泡直径为土粒平均粒径的$\frac{1}{5}$，超静水压力为0.5公斤/平方厘米，砂土、粉土与粘土的孔隙气压力分别为0.003、0.09与4.7公斤/厘米^2，亨利气体溶解系数$H=0.02$。按此计算，得到式（3-14）中各项$\frac{\partial u}{\partial t}$的系数，如表3-1所列。由表可见：

✓（1）土颗粒的压缩性远比水的为小，完全可以忽略不计；

✓（2）在饱和土中，孔隙水的压缩量与土骨架的压缩量比较，数值很小。在此情况下，土骨架的压缩显然对土的固结起控制作用。

表 3-1　　式（3-14）中各项 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 的系数

土类 \ 单位 \ 项次	×10⁻¹³公斤/厘米²				
	（1）气		（2）土骨架	（3）水	（4）土粒
砂土	S_0(%)=100	0	紧密 470－4700 松 4700	120	4.7
	95	47000			
	90	94000			
粉土	100	0	94000	120	4.7
	95	47000			
	90	94000			
粘土	100	0	94000 ～ 4700000	120	4.7
	95	24000			
	90	47000			

（3）与粘土骨架的压缩量比较，砂土的以及在一定程度上粉土的骨架压缩量要小得很多。因此，对于粘土与砂土相间的地基，粘土层的变形是沉降的主要来源。

（4）对于非饱和土，饱和度的变化对土体的固结有重要作用，必须加以考虑。

第三节　研究固结问题所需的基本方程

固结是土体受外力作用，内部应力变化引起体积变化，同时有部分孔隙水被挤出的压密过程。要探讨固结规律，建立固结微分方程，首先要研究平衡条件、应力应变关系和水流连续条件等几个基本课题。

一、平衡条件

当土体受外力作用处于平衡状态时，土体中任何一个单元体上的各应力分量(图3-2)，均应该满足下列平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+Y=0\\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}15)$$

式中　σ、τ ——分别为单元土体各个面上的正应力与剪应力；

x、y、z——所取坐标轴，它们分别垂直于单元体的各相应面；

X、Y、Z——单元体在x、y、z各方向上所受的体积力。

应力符号的规定，见图3-2。

如果只考虑单元体中水体部分的平衡，可按下法求得其平衡方程。假设所取单元土块

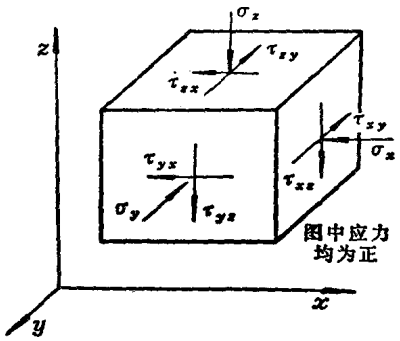


图 3-2　单元体应力

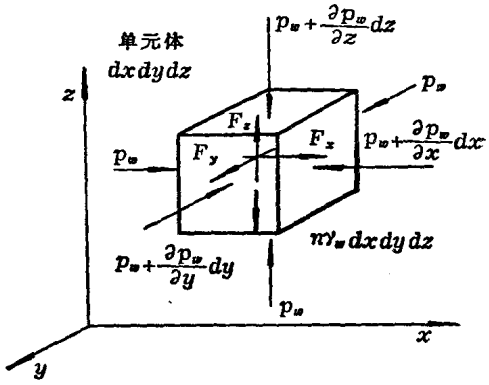


图 3-3　作用于单元体水上的力

与相应坐标系统如图3-3所示，写出x方向的平衡方程：

$$p_w n_{Ax} dydz-\left(p_w+\frac{\partial p_w}{\partial x}dx\right)n_{Ax}dydz+F_x n_v dxdydz=0 \qquad (3\text{-}16)$$

式中　p_w——水压力；

n_{Ax}、n_v——分别为yz面上的孔隙率与单元土块的孔隙率；

F_x——在x方向的曳阻力（与渗流力大小相等，方向相反）。

对于均质土体，假设$n_{Ax}=n_v=n$，式（3-16）可简化为：

$$F_x=\frac{\partial p_w}{\partial x} \qquad (3\text{-}17)$$

同理，可以求得y与z方向的平衡方程为：

$$F_y=\frac{\partial p_w}{\partial y} \qquad (3\text{-}18)$$

$$F_z=\frac{\partial p_w}{\partial z}+\gamma_w \qquad (3\text{-}19)$$

式（3-19）中多一项γ_w，是因为沿z方向水受重力作用。

二、应力-应变关系

土的应力-应变关系，是指土体在各种受力条件下，应力分量与应变分量之间的相互关系。在本书第一章中专门讨论了这个问题。这里只简单说一下在推导固结微分方程时对这个关系的处理。在实际问题中，考虑最多的是单向固结问题，它研究土体在四周有侧限条件下垂直向排水与垂直向变形的情况，即所谓K_0固结。针对单向固结，可以直接利用固结仪测定试样在各级荷重下的压缩量，从而计算它的应力-应变关系。式（3-6）就是这种关系的表达式。

对于三向与二向固结问题，土体的受力条件比较复杂，目前对于这种复杂应力条件的变形特征，还缺少完善的测试方法。因此，常按简化方法，即认为土体是理想均质各向同性弹性体，利用弹性常数来表达真正土体的应力-应变关系。在具体推导时，再随时加以说明。

三、水流连续条件

研究水流连续条件，以达西定律为依据，其数学表达形式如下：

$$q=kia \tag{3-20}$$

式中 q——在与水流方向垂直的平面内，单位时间通过的渗流量；

k——土的渗透系数；

i——沿水流方向的水力梯度；

a——过水面积。

假设所取单元土体及坐标系统如图3-3所示。对于饱和土，沿 z 方向的渗流情况如下。从单元土体底面流入的水量是：

$$q_z=k_z\left(-\frac{\partial h}{\partial z}\right)dxdy$$

由单元土体顶面流出的水量为：

$$q'_z=\left(k_z+\frac{\partial k_z}{\partial z}dz\right)\left(-\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}dz\right)dxdy$$

进入单元土体的净水量 Δq_z 则应为：

$$\begin{aligned}\Delta q_z&=q_z-q'_z\\&=\left(k_z\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}+\frac{\partial k_z\partial h}{\partial z^2}+\frac{\partial k_z}{\partial z}dz\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)dxdydz\end{aligned}$$

如果土块沿 z 方向的渗透系数为常量，则 $\frac{\partial k_z}{\partial z}=0$，上式简化为：

$$\Delta q_z=\left(k_z\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)dxdydz \tag{3-21}$$

同理，在 x、y 方向的净流入水量分别为：

$$\Delta q_x=\left(k_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)dxdydz \tag{3-21a}$$

$$\Delta q_y=\left(k_y\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)dxdydz \tag{3-21b}$$

由此，进入单元土体的总流量 Δq 为：

$$\begin{aligned}\Delta q&=\Delta q_x+\Delta q_y+\Delta q_z\\&=\left(k_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+k_z\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right)dxdydz\end{aligned} \tag{3-22}$$

式（3-22）是不可压缩流体在渗流过程中体积守恒的连续方程。如果是饱和土，在稳定渗流条件下，单元土体内的水量保持不变，即 $\Delta q=0$，则式（3-22）变成：

$$k_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+k_z\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0 \tag{3-23}$$

式（3-23）称为拉普拉斯方程。如果土骨架或土孔隙中的流体可以压缩，则 $\Delta q\neq 0$，土体中的渗流即为不稳定流或瞬时流，这时流量的变化相当于前面式（3-4）中的储水率，这种情况就是固结理论所要研究的问题。

第四节　单向固结的普遍方程与太沙基理论

一、单向固结的普遍方程

利用第三节中的基本方程，可以建立土体的固结方程。首先研究应用最广的单向固结理论。

根据达西定律，可以直接写出在 z 方向单位体积土中孔隙壁对水流的曳阻力的表达式如下：

$$F_z=-i_z\gamma_w=-n\frac{\gamma_w}{k}v_s \qquad (3\text{-}24)$$

式中　n——土的孔隙率；

v_s——在土体中沿水流方向的实际流速，它与渗透流速 v 的关系是 $v=nv_s$。

上式右侧带负号，表示曳阻力与流速方向相反。

但是，根据式（3-19），z 方向的曳阻力又可表示为：

$$F_z=\frac{\partial p_w}{\partial z}+\gamma_w \qquad (3\text{-}19)$$

因此

$$\frac{\partial p_w}{\partial z}+\gamma_w+n\frac{\gamma_w}{k}v_s=0$$

将上式对 z 求导数（该 k = 常量），则有：

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}+n\frac{\gamma_w}{k}\frac{\partial v_s}{\partial z}=0 \qquad (3\text{-}25)$$

如果 k 不是常量，而随深度变化，即 $k=f(z)$，则式（3-25）的形式为：

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}+n\gamma_w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_s}{k}\right)=0$$

即

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}+n\gamma_w\left[\frac{1}{k^2}\left(k\frac{\partial v_s}{\partial z}-v_s\frac{dk}{dz}\right)\right]=0$$

或

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}+n\gamma_w\frac{1}{k}\frac{\partial v_s}{\partial z}-n\gamma_w v_s\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dz}=0 \qquad (3\text{-}26)$$

在单向固结条件下：

$$n\frac{\partial v_s}{\partial z}=\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \qquad (3\text{-}27)$$

式中　ε_z——z 方向的应变；由于单向固结是在侧限条件下压缩，因此，轴向应变 ε_z 就等于土体的体积应变 ε_v。

按此，式（3-25）与式（3-26）分别可改写成：

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}+\frac{\gamma_w}{k}\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}=0 \qquad (3\text{-}28)$$

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}+\frac{\gamma_w}{k}\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}-n\gamma_w v_s\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dz}=0 \qquad (3\text{-}29)$$

在固结问题中，研究土体在外力作用下超静水压力随时间与位置的变化，最有实际意

义。因此，可将上式进行适当变化。

假设固结土层的剖面如图3-4。在土层表面的单位面积上原有荷重σ_0，荷重增量为$\Delta\sigma_0$在地面下（$H-z$）深度处存在超静水压力u。根据有效应力原理，在固结过程中该处的有效应力σ'为：

$$\sigma'=\sigma-p_w=\sigma-[\gamma_w(H_1-z)+u]$$

而按图3-4，（$H-z$）深度处的总应力σ应为：

$$\sigma=(\sigma_0+\Delta\sigma)+\gamma_f(H-z)+\gamma_w(H_1-H)$$

代入上式并简化得：

$$\sigma'=(\sigma_0+\Delta\sigma)+\gamma'(H-z)-u \qquad (3\text{-}30)$$

式中 γ_f、γ'——分别为土的饱和容重和浮容重。

将式（3-30）对时间t求导数得：

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\sigma)+\gamma'\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (3\text{-}31)$$

其次，垂直应变ε_z也可以用有效应力与变形指标表示。根据单向固结试验的压缩曲线，体积压缩系数m_v的定义如下：

$$m_v=\frac{1}{1+e}\frac{\partial e}{\partial\sigma'}$$

而

$$\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial t}=\frac{1}{1+e}\frac{\partial e}{\partial t}$$

故有

$$\frac{\partial\varepsilon_z}{\partial t}=m_v\frac{\partial\sigma'}{\partial t} \qquad (3\text{-}32)$$

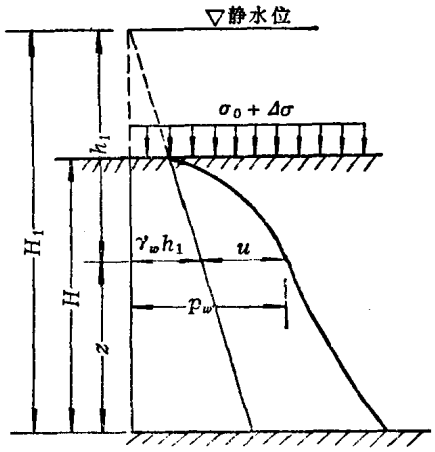


图 3-4 土层剖面和作用力

再将式（3-32）代入式（3-29），并且注意到式（3-29）的末项具有下列关系：

$$n\gamma_w v_s\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dz}=-F_z\frac{1}{k}\frac{dk}{dz}=-\left(\frac{\partial p_w}{\partial z}+\gamma_w\right)\frac{1}{k}\frac{dk}{dz}$$

则式（3-29）变成以下形式：

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}+\frac{m_v\gamma_w}{k}\frac{\partial\sigma'}{\partial t}+\left(\frac{\partial p_w}{\partial z}+\gamma_w\right)\frac{1}{k}\frac{dk}{dz}=0 \qquad (3\text{-}33)$$

再将式（3-31）代入（3-33），并以超静水压力表示，则式（3-33）变为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{m_v\gamma_w}{k}\left[\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\right]+\frac{1}{k}\frac{dk}{dz}\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (3\text{-}34)$$

式（3-34）是反映单向固结过程的普遍方程。它综合考虑了外加荷重随时间变化，土层厚度随时间变化，以及土的渗透性随深度变化等等可能遇到的情况。

二、太沙基单向固结理论

早在1925年，太沙基即建立了饱和土单向固结微分方程，并获得一定起始条件与边界条件时的数学解，迄今仍被广泛应用。

（一）基本假设

为了便于分析和求解，太沙基作了一系列简化假设：

1.土体是均质的，完全饱和的；

2.土的渗透性为常量；

3.土粒与水均为不可压缩体；

4.外荷重一次瞬时加到土体上，在固结过程中保持不变；

5.土体的应力与应变之间存在直线关系；

6.在外力作用下，土体中只引起上下方向的渗流与压缩；

7.土中渗流服从达西定律；

8.土体变形完全是由孔隙水排出和超静水压力消散所引起的。

以上假设，一部分是将实际情况理想化，一部分确是反映了近似的实际情况。属于后者的，例如有：地面上的加荷面积比压缩土层的厚度大得很多；压缩层埋藏比较深，侧向变形的可能性较小；土骨架的结构粘滞性小，渗透压缩占主要成分；施工期短，因而可认为是瞬时加荷，等等。

（二）太沙基方程及其解答

不难看出，太沙基所研究的问题只是前面所讲的普遍情况中的一个特例。在式(3-34)中，令 $k=$常量，$H=$常量，$\Delta\sigma=0$，则有：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{m_v\gamma_w}{k}\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

或

$$C_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (3\text{-}35)$$

式中

$$C_v=\frac{k}{m_v\gamma_w}=\frac{k(1+e)}{a_v\gamma_w} \qquad (3\text{-}36)$$

这就是太沙基单向固结微分方程。式中C_v称土的固结系数。因为假设了k和m_v为常量，故C_v自然也是常量。

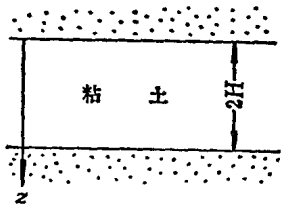


图 3-5 固结方程推导图

式（3-35）表示了超静水压力u与位置z及时间t的函数关系。根据给定的起始条件与边界条件，可以求得它的解析解。

如图3-5，假设土层厚为$2H$，顶面与底面均可自由排水，土面上瞬时施加的外荷重为σ。故起始条件与边界条件如下：

$t=0$，$u=u_0$；

$t>0$，$z=0$，$u=0$；

$t>0$，$z=2H$，$u=0$

由上述条件，借富里哀级数，可得式（3-35）的解答如下：

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{H}\int_0^{2H}u_0\sin\frac{n\pi z}{2H}dz\right)\left(\sin\frac{n\pi z}{2H}\right)\cdot\exp\left(-\frac{n^2\pi^2C_vt}{4H^2}\right) \qquad (3\text{-}37)$$

上式中的n为正整数，u_0为起始超静水压力，$u_0=\sigma$。

如果起始超静水压力不随深度而变，即$u_0=$常量，并令$n=2m+1$（m为整数），则

式（3-37）可改写成：

$$u=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2u_0}{M}\sin\frac{Mz}{H}\right)\exp(-M^2T_v) \tag{3-38}$$

式中 $M=\frac{1}{2}\pi(2m+1)$；

T_v——无因次时间因数：

$$T_v=\frac{c_vt}{H^2} \tag{3-39}$$

根据式（3-38），容易求得任何时刻 t、任意深度 z 处的超静水压力 u。为了研究土层中超静水压力的消散程度，常应用固结度概念。z 深度处土的固结度 U_z 表示该处超静水压力的消散程度，即：

$$U_z=\frac{u_0-u}{u_0}=\frac{\sigma-u}{u_0}=1-\frac{u}{u_0} \tag{3-40}$$

将式（3-38）代入式（3-40），可得：

$$U_z=1-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{M}\left(\sin\frac{Mz}{H}\right)\exp(-M^2T_v) \tag{3-41}$$

上式表示不同深度处土的固结度与时间的关系，即 $U_z=f(T_v)$，可以绘成图3-6。图中的曲线称为等时线。每一等时线（对应于某特定时间 t 或时间因数 T_v）上的各点，给出了该时刻各个深度处所达到的固结度。

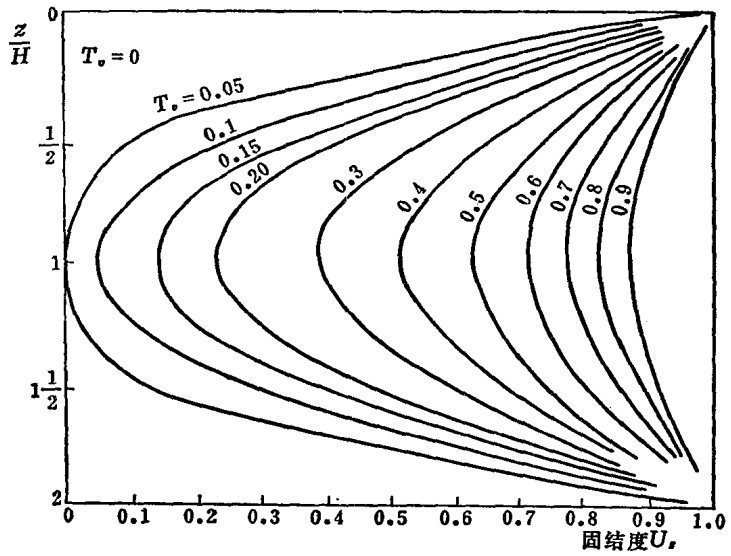


图 3-6 土层中各点在不同时刻（T_v）的固结度

对于工程更有实用意义的，是整个土层的平均固结度 U。它反映全压缩土层超静水压力的平均消散程度。固结开始时全土层的平均超静水压力为：

$$\frac{1}{2H}\int_0^{2H}u_0\,dz$$

待到某时刻，全土层的平均超静水压力为：

$$\frac{1}{2H}\int_0^{2H} u\,dz$$

类似于式（3-40），可得土层平均固结度为：

$$U=1-\frac{\int_0^{2H} u\,dz}{\int_0^{2H} u_0\,dz} \tag{3-42}$$

在本情况中，由于u_0沿深度为常量，故得：

$$U=1-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2}{M^2}\exp(-M^2T_v) \tag{3-43}$$

上式所示的$U=f(T_v)$，可绘成图3-7中的曲线I，或制成表3-2。

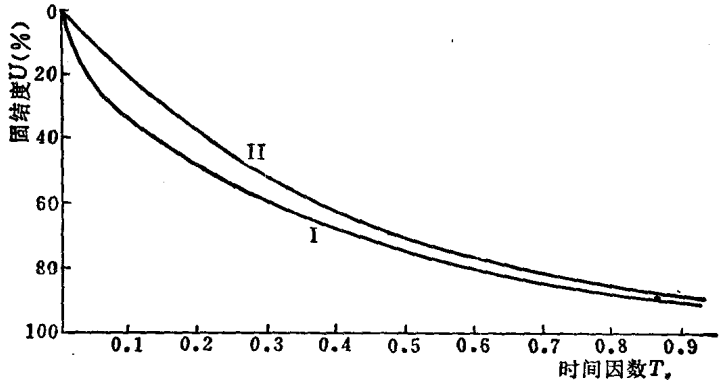


图 3-7　理论固结曲线$U=f(T_v)$

公式（3-43）还可以足够近似地用下列经验关系式代替：

当
$$\left.\begin{aligned} U<60\%,\ T_v&=\frac{\pi}{4}(U\%)^2 \\ U>60\%,\ T_v&=-0.0851-0.933\log(1-U\%)\end{aligned}\right\} \tag{3-44}$$

顺便指出，在单向固结条件下，由超静水压力所定义的固结度也正反映以土体变形表示的固结度，即由式（3-43）求得的固结度，同样表示土体完成变形（即地基沉降量）的百分数。如果已知地基的最终沉降量S，则任何时刻t的沉降量S_t即可按下式计算：

$$S_t=U_t\cdot S \tag{3-45}$$

（三）起始超静水压力非均匀分布的情况

如果不同深度处的u_0的分布是不等的，只要把式（3-37）代入式（3-42），同样可以求得固结度的计算式如下：

$$U=1-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\int_0^{2H} u_0\sin\frac{Mz}{H}\,dz}{M\int_0^{2H} u_0\,dz}\exp(-M^2T_v) \tag{3-46}$$

u_0的几种典型分布情况如下（参看表3-2）：

情况 I（a）均匀分布：即以上所谈的情况；

（b）直线分布：$u_0=u_1+u_1'\dfrac{H-z}{H}$；

情况II　半正弦曲线：$u_0=u_2\sin\dfrac{\pi z}{4H}$；

情况III　正弦曲线：$u_0=u_3\sin\dfrac{\pi z}{2H}$；

情况IV　直线增加与直线减小：

$$0<z<H,\quad u_0=u_4\frac{z}{H};$$

$$H<z<2H,\quad u_0=u_4\frac{2H-z}{H}。$$

将以上分布函数代入式（3-46），得到相应的U与T_v的相互关系，如表3-2。

表 3-2（a）　　各种u_0分布条件下的$U=f(T_v)$

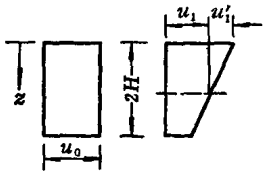
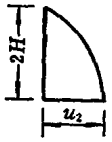
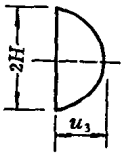
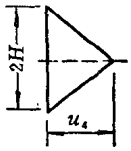
起始超静水压力分布 （上下面均可排水）					
固结度 U	时间因数 T_v				
（%）	情况 Ia	情况 Ib	情况 II	情况 III	情况IV
0	0		0	0	0
5	0.0017		0.0021	0.208	0.0247
10	0.0077		0.0114	0.427	0.0500
15	0.0177		0.0238	0.0659	0.0750
20	0.0314		0.0403	0.0904	0.102
25	0.0491		0.0608	0.117	0.128
30	0.0707		0.0845	0.145	0.157
35	0.0962		0.112	0.175	0.188
40	0.126		0.143	0.207	0.221
45	0.159		0.177	0.242	0.257
50	0.196		0.215	0.281	0.294
55	0.238		0.257	0.324	0.336
60	0.286		0.304	0.371	0.384
65	0.342		0.358	0.425	0.438
70	0.403		0.421	0.488	0.501
75	0.477		0.494	0.562	0.575
80	0.567		0.586	0.652	0.665
85	0.684		0.700	0.769	0.782
90	0.848		0.862	0.933	0.946
95	1.129		1.163	1.214	1.227
100	∞		∞	∞	∞

表 3-2(*b*)　　各种u_0分布条件下的$T_v=f(U)$

时间因数 T_v	固结度 U，% 情况 I	情况 II	情况 III	情况 IV
0.004	7.35	6.49	0.98	0.85
0.008	10.38	8.62	1.95	1.62
0.012	12.48	10.49	2.92	2.41
0.020	15.98	13.67	4.81	4.00
0.028	18.89	16.38	6.67	5.60
0.036	21.41	18.76	8.50	7.20
0.048	24.64	21.96	11.17	9.50
0.060	27.64	24.81	13.76	11.98
0.072	30.28	27.43	16.28	14.36
0.083	32.33	29.67	18.52	16.46
0.100	35.62	32.88	21.87	19.76
0.125	39.89	26.54	26.54	24.42
0.150	43.70	41.12	30.93	28.86
0.175	47.18	44.73	35.07	33.06
0.200	50.41	48.09	38.95	37.04
0.250	56.22	54.17	46.03	44.32
0.300	61.32	59.50	52.30	50.78
0.350	65.82	64.21	57.83	56.49
0.40	69.73	68.36	62.73	61.54
0.50	76.40	76.28	70.88	69.94
0.60	81.56	80.69	77.25	76.52
0.70	85.59	84.91	82.22	81.65
0.80	88.74	88.21	86.11	85.66
0.90	91.19	90.79	89.15	88.80
1.00	93.13	92.80	91.52	91.25
2.00	99.42			

由于固结微分方程是线性函数，故它们的解可以迭加。因此，如果某情况下的起始超静水压力分布图能表示为表3-2中所列图形的组合，则可以利用各组合图形的固结度，来求该分布图形的平均固结度。例如，假设起始分布图形如图3-8中的面积A，求某时刻(相应的时间因数为T_v)的固结度$U_A(T_v)$。显然，面积A＝面积B－面积C，故$U_A(T_v)$可按下式计算：

$$U_A(T_v)=\frac{U_B(T_v)\cdot\text{面积}B-U_c(T_v)\cdot\text{面积}C}{\text{面积}A}$$

根据图3-8中的具体数字可举例计算如下：

面积$B=0.33(2H)$，

$$\text{面积}C=\int_0^{2H}(0.13)\sin\frac{\pi z}{2H}\,dz=\frac{2}{\pi}(0.13)(2H)=(0.083)(2H)$$

面积A＝面积B－面积$C=(0.247)(2H)$

故
$$U_A(T_v)=\frac{0.33(2H)U_B(T_v)-0.083(2H)U_C(T_v)}{(0.247)(2H)}$$
$$=\frac{0.33U_B(T_v)-0.083U_C(T_v)}{0.247}$$

假设$T_v=0.2$，由表3-2（b）可查得情况Ⅰb与Ⅲ的相应的$U_B=50.41$与$U_C=38.95$，

故
$$U_A=\frac{0.33\times50.41-0.083\times38.95}{0.247}\%=54.2\%$$

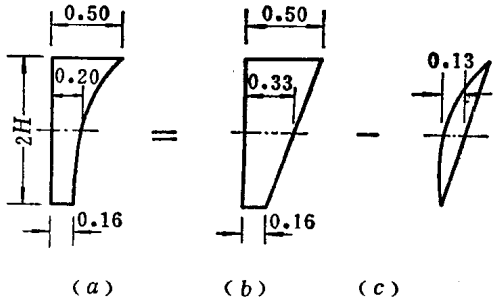


图 3-8 求任意超静水压力分布时的固结度

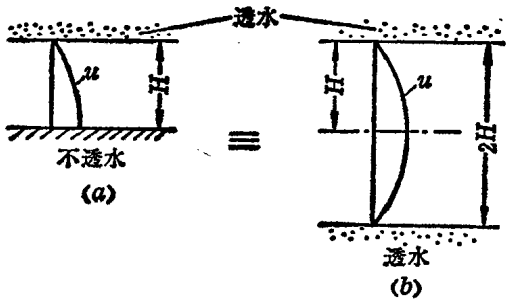


图 3-9 单面与双面排水比较

对于固结度问题，还可以注意到两点：（1）从图3-7看出，尽管起始超静水压力分布不同，但对固结度与时间因数关系的影响并不很大（尤其是当T_v较大时），而且在固结理论中又包括许多简化假设，故在实用上，不论u_0的分布情况如何，都可以近似地用图中的曲线Ⅰ求解。（2）在实际工程中常遇到压缩土层表面透水，底部不透水或相对不透水，即单面排水的情况。这时，可以把实际土层看成是假想土层的上半部，如图3-9所示。因此，仍可以按相应的双面排水情况求解，只是这里应认为，土层厚度为H，而在双面排水问题中，却认为土层厚度等于$2H$。

（四）固结系数的确定

由式（3-35）可以看出，要正确估算土体中超静水压力的消散与沉降过程，重要的是确定可靠的固结系数C_v。C_v值可以从压缩试验成果中求得。在压缩试验的某级荷重增量下，如果试样达到某固结度（例如50%）的时间t为已知，则C_v可以直接从式（3-39）求得。但是，由于在试验中不可避免地会出现初始压缩与次压缩，试验得到的固结曲线（时间-垂直变形曲线）与理论曲线不能直接对比，故需要凭经验方法，使试验曲线与理论曲线配合，再进行计算。下面介绍三种配合法。

1.时间平方根法

图3-10a是在压缩试验的某级荷重增量下试样垂直变形与时间平方根的关系曲线，它与理论曲线（图3-10b）相似。将图3-10a中的开始直线段向上延伸，交纵轴于d_s点，该点为理论零点。从d_s作一斜直线d_sf，使其各点的横坐标为前述直线的相应横坐标的1.15倍。根据固结理论，所作斜线必交试验曲线于固结度为90%的一点。例如，在图3-10中，对应于固结度为90%的M点的时间平方根为$\sqrt{t}=3.5\ \sqrt{分}$，故$t=12.3$分。固结度为90%时的时间因数$T_v=0.848$。该荷重下试样的最大排水距离为厚度之半，即$H=0.92$厘

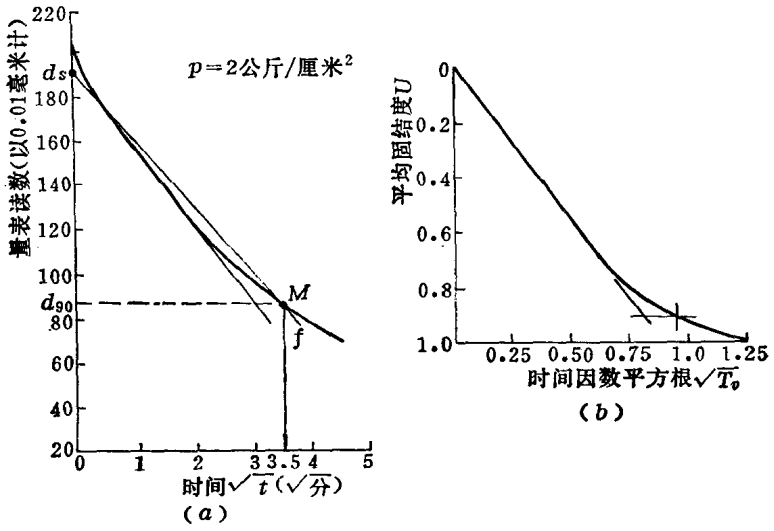


图 3-10　按时间平方根法求C_v

(a)试验曲线；(b)理论曲线

米。由式(3-39)，得：

$$C_v=\frac{T_vH^2}{t}=9.8\times10^{-4}\text{平方厘米/秒}$$

2.时间对数法

如图3-11a，试验曲线前段与后段的切线交于f点，该点为固结度达100%的理论点d_{100}。图3-11b是理论曲线。再用下法确定理论零点：在试验曲线的开始段，任意选择两点，令第一点的时间为t_1，使第二点的时间为$4t_1$。将两点间的压缩量差加到第一点上，得到d_s'。按同样要求，另选两点，如此可得d_s''、d_s'''……等点。平行于横轴，作诸d_s的平均线，交纵轴于d_s，即为理论零点。曲线上对应于d_s与d_{100}中间的点d_{50}，即为固结度达50%的点。在本图中，d_{50}对应的时间为3.3分，而固结度达50%的理论时间因数$T_v=0.197$，

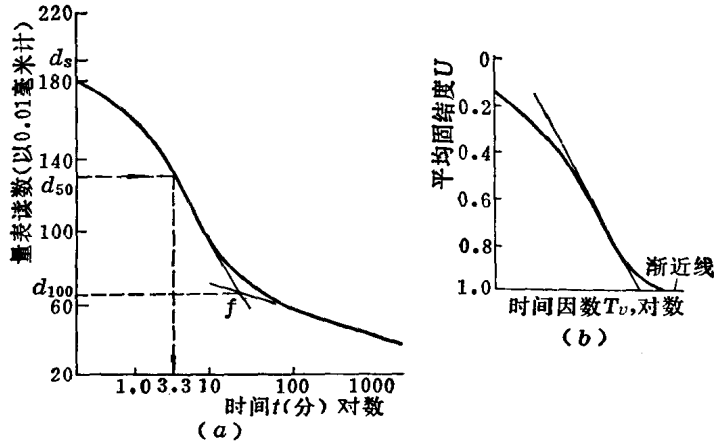


图 3-11　按时间对数法求C_v

故由式（3-39）得：

$$C_v=\frac{0.197}{3.3\times 60}(0.92)^2=8.45\times 10^{-4}\text{平方厘米/秒}$$

3.三点法[6]

上面两种方法都要靠作图求解，并且都要利用试验曲线的后半段。事实上，试验曲线后半段反映的是主、次压缩的变形量之和，要靠作图准确定出主固结的终点是困难的。近年来，日本学者提出了借计算确定固结系数的三点法。

该法认为，土体在任何时刻的固结度U，为该时刻的压缩量ρ与主固结压缩量ρ_f之比，它符合于太沙基固结理论的基本假设。故：

$$U=\frac{\rho}{\rho_f} \tag{3-47}$$

从这点出发，可以从试验曲线（某级荷重增量下的压缩量与时间关系曲线）上选取适当的三点，建立三个方程式，联立解得C_v。原理与方法如下。

可以将式（3-44）改写成另一形式，即：

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}T_v\text{很小，}T_v\ll 1\text{时，}U=(4\pi^{-1}T_v)^{0.5}\\ \text{当}T_v\text{很大，}T_v\gg 1\text{时，}U=1\end{array}\right\} \tag{3-48}$$

借曲线配合法，式（3-48）中两个式子可合并成下面的统一关系式：

$$U=\frac{\left[4\frac{T_v}{\pi}\right]^{0.5}}{\left[1+\left(\frac{4T_v}{\pi}\right)^{2.8}\right]^{0.179}} \tag{3-49}$$

或以U表示T_v：

$$T_v=\frac{\frac{\pi}{4}U^2}{(1-U^{5.6})^{0.357}} \tag{3-50}$$

如果已经有了某荷重增量下的试验固结曲线，假设在该曲线上已经排除了起始压缩与次压缩影响的主固结部分的理论零点与固结终点的读数分别为R_i与R_f，则为了求得R_i、R_f和C_v值，可以在曲线的开始段（$T_v\ll 1$）选取两个时刻t_1和t_2，它们的读数分别为R_1和R_2，由式（3-39）与（3-44）可得：

$$T_{v_1}=T_{v_1}:\qquad \frac{C_vt_1}{H^2}=\frac{\pi}{4}[(R_1-R_i)/(R_f-R_i)]^2$$

$$T_{v_2}=T_{v_2}:\qquad \frac{C_vt_2}{H^2}=\frac{\pi}{4}[(R_2-R_i)/(R_f-R_i)]^2$$

联立解以上两式，可求得：

$$R_i=\left(R_1-R_2\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right)\Big/\left(1-\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right) \tag{3-51}$$

再在试验曲线的后段（$T_v\gg 1$），读取时间t_3时的R_3，由式（3-50），可得：

$$T_{v_3}:\qquad \frac{C_vt_3}{H^2}=\frac{\pi}{4}\frac{[(R_3-R_i)/(R_f-R_i)]^2}{\{1-[(R_3-R_i)/(R_f-R_i)]^{5.6}\}^{0.357}}$$

根据T_{v_1}、T_{v_2}与T_{v_3}的三个式子，可以进一步求得：

$$R_f=R_i-\frac{R_i-R_3}{\{1-[(R_i-R_3)(\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1})/(R_1-R_2)\sqrt{t_3}]^{5.6}\}^{0.179}} \tag{3-52}$$

$$C_v=\frac{\pi}{4}\left[\frac{R_1-R_2}{R_i-R_f}\frac{H}{\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}}\right]^2 \tag{3-53}$$

例如，在图3-10中：

取$\sqrt{t_1}=\frac{1}{2}\sqrt{分}$，$t_1=\frac{1}{4}$分$=15$秒，相应的$R_1=1.71$毫米

$\sqrt{t_2}=1\sqrt{分}$，$t_2=1$分$=60$秒，　$R_2=1.56$毫米

$\sqrt{t_3}=4\frac{1}{2}\sqrt{分}$，$t_3=\frac{81}{4}$分$=1200$秒，　$R_3=0.70$毫米

分别代入式（3-51）～（3-53），可得：

$R_i=1.86$毫米，$R_f=0.62$毫米，$C_v=10.9\times10^{-4}$平方厘米/秒。

用以上三种方法分别求得的C_v值，由于它们在配合时所依据的时间-变形曲线段的范围不同，通常是不会相同的。一般是时间平方根法得出的值较大，时间对数法得出的较小，而以前者应用较多。可以注意，根据单向固结理论，理论曲线的开始段应该是抛物线，而在半对数纸上则为直线。故在时间平方根法中，延长前段直线以寻求理论零点，看来是比较合理的。但是，根据实测，在试验曲线上固结度相当于90%的一点的孔隙水压力，通常比理论计算值为高[7]。这表明次压缩可能会大大影响用平方根法求取固结度90%的时间t_{90}，故用对数法来确定R_{100}则比较可靠。三点法利用计算确定理论固结零点与终点，更符合单向固结定义，并且避免了作图，可能是较好的方法。

另外，C_v值受试验方法的影响较大[8]。三向与二向固结时的固结系数，也不同于单向固结时的数值。这些在下面有关部分再作讨论。

第五节　单向固结的其它情况

太沙基固结理论研究的是单向固结中的一种简单而特殊的情况，而在实际问题中，往往会遇到各种不同的复杂条件。对于这些复杂的情况，有一部分已经获得解答，但是，还有不少只能用数值方法求解。

一、外荷重随时间的变化

实际施工进程便是外荷重逐渐增大的过程。竣工以后，固结才是在恒定荷重下进行。在许多情况下都希望了解荷重增长过程中的固结情况。

对于荷重随时间变化的情况，可将$\Delta\sigma=f(t)$，$k=$常量，$H=$常量，代入式（3-34），得到相应的固结微分方程：

$$C_v\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial t} \tag{3-54}$$

假设土层是双面排水，荷重按直线规律增长，如图3-12，增长率为$\frac{\partial\Delta\sigma}{\partial t}=\frac{p_0}{t_0}$，$p_0$为某

时段t_0内施加的外荷重，即不排水条件下的起始超静水压力，故亦可写成$\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial t}=\frac{u_0}{t_0}$。在这种荷重条件下，式（3-54）的解答是[9]：

$$u(z,T_v)=\frac{16u_0}{T_{v_0}\pi^3}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi z}{2H}\times\left[1-\exp\left(-\frac{n^2\pi^2T_v}{4}\right)\right] \qquad (3\text{-}55)$$

相应于时间因数T_v的平均超静水压力为：

$$\bar{u}(T_v)=\frac{1}{2H}\int_0^{2H}u(z,T_v)dz \qquad (3\text{-}56)$$

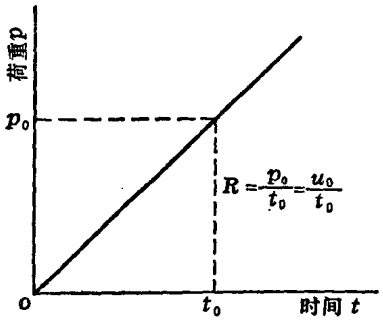


图 3-12 荷重随时间直线增大

将式（3-55）代入式（3-56），即得：

$$\bar{u}(T_v)=\frac{32\bar{u}_0}{T_{v_0}\pi^4}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left[1-\exp\left(-\frac{n^2\pi^2T_v}{4}\right)\right] \qquad (3\text{-}57)$$

式中 $T_{v_0}=\frac{C_vt_0}{H^2}$

实际工程情况是：开始荷重近似地按直线关系增长，到时间为t_0时完建，然后地基在恒定荷重下$\left(\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial t}=0\right)$继续固结。因此，完建前的固结属于荷重变化条件下的固结，超静水压力的消散由式（3-55）和（3-57）确定，或查用图3-13。完建以后在恒定荷重下的固结，则是以完建时(t_0)的u_0作为起始超静水压力，继续的消散问题则应由太沙基的单向固结理论，即由式（3-35）来确定。竣工后的超静水压力的解答为：

$$u(z,T_v)=\frac{16u_0}{T_{v_0}\pi^3}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\frac{n\pi z}{2H}\left[1-\exp\left(-\frac{n^2\pi^2T_{v_0}}{4}\right)\right]\times\exp\left[-\frac{n^2\pi^2}{4}(T_v-T_{v_0})\right] \qquad (3\text{-}58)$$

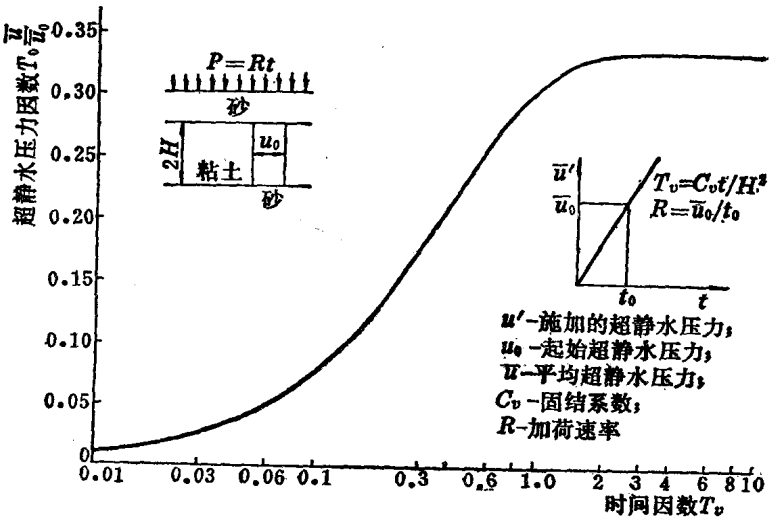


图 3-13 荷重随时间直线增长时的固结曲线

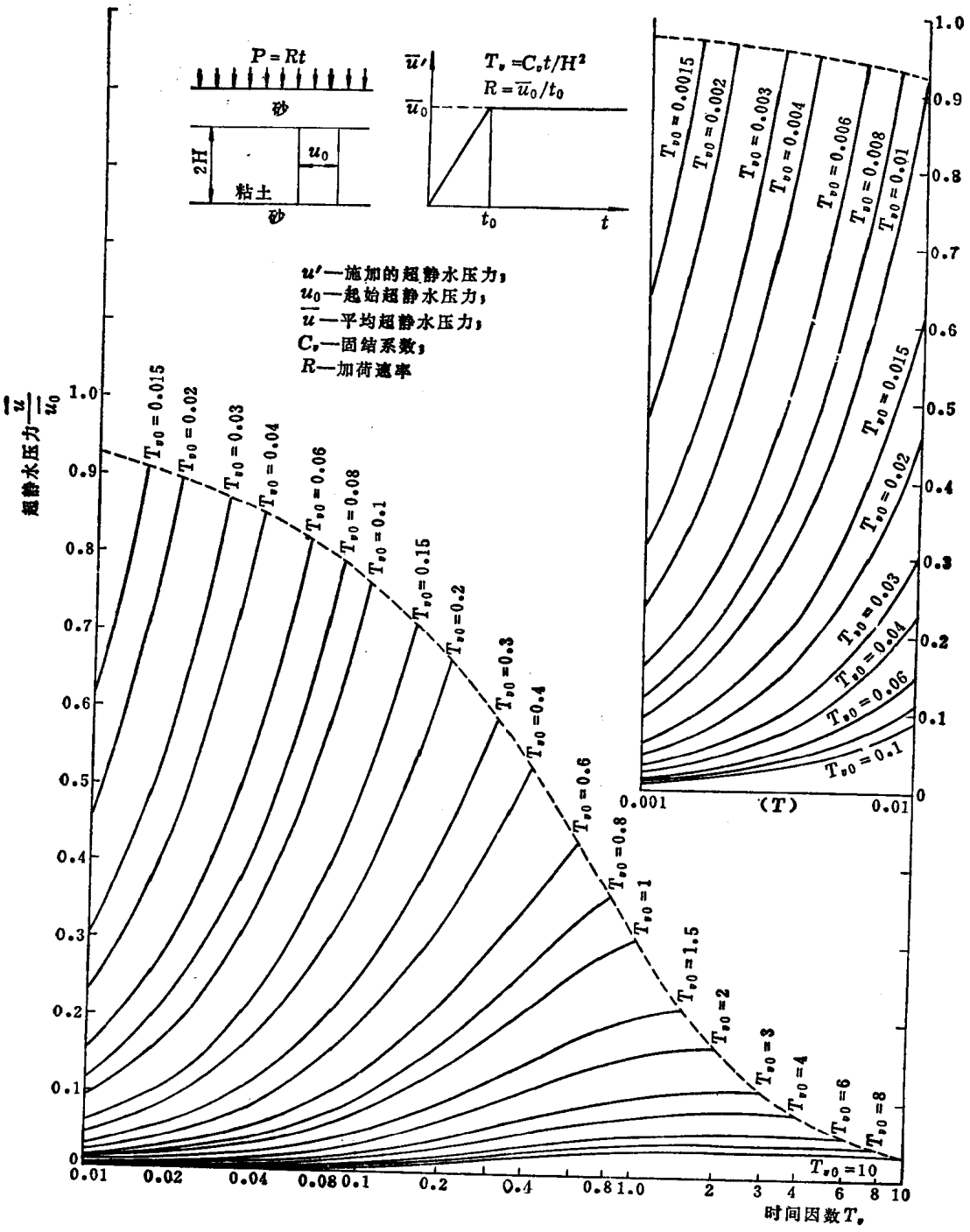


图 3-14（a） 施工期的固结曲线

而土层的平均超静水压力为：

$$\bar{u}(T_v)=\frac{32\bar{u}_0}{T_{v_0}\pi^4}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left[1-\exp\left(-\frac{n^2\pi^2T_{v_0}}{4}\right)\right]$$
$$\times\exp\left[-\frac{n^2\pi^2}{4}(T_v-T_{v_0})\right] \qquad (3\text{-}59)$$

如果将施工期与竣工后的超静水压力表示成固结度与时间因数的关系，则可绘成图3-14。

在外荷重随时间而变化的情况下，土层的固结曲线可用下述图解法求近似解。太沙基将施工期的荷重增长近似地以直线代替，则任何时刻 t 地基的沉降（固结）均可按下述方法估算（图3-15）：

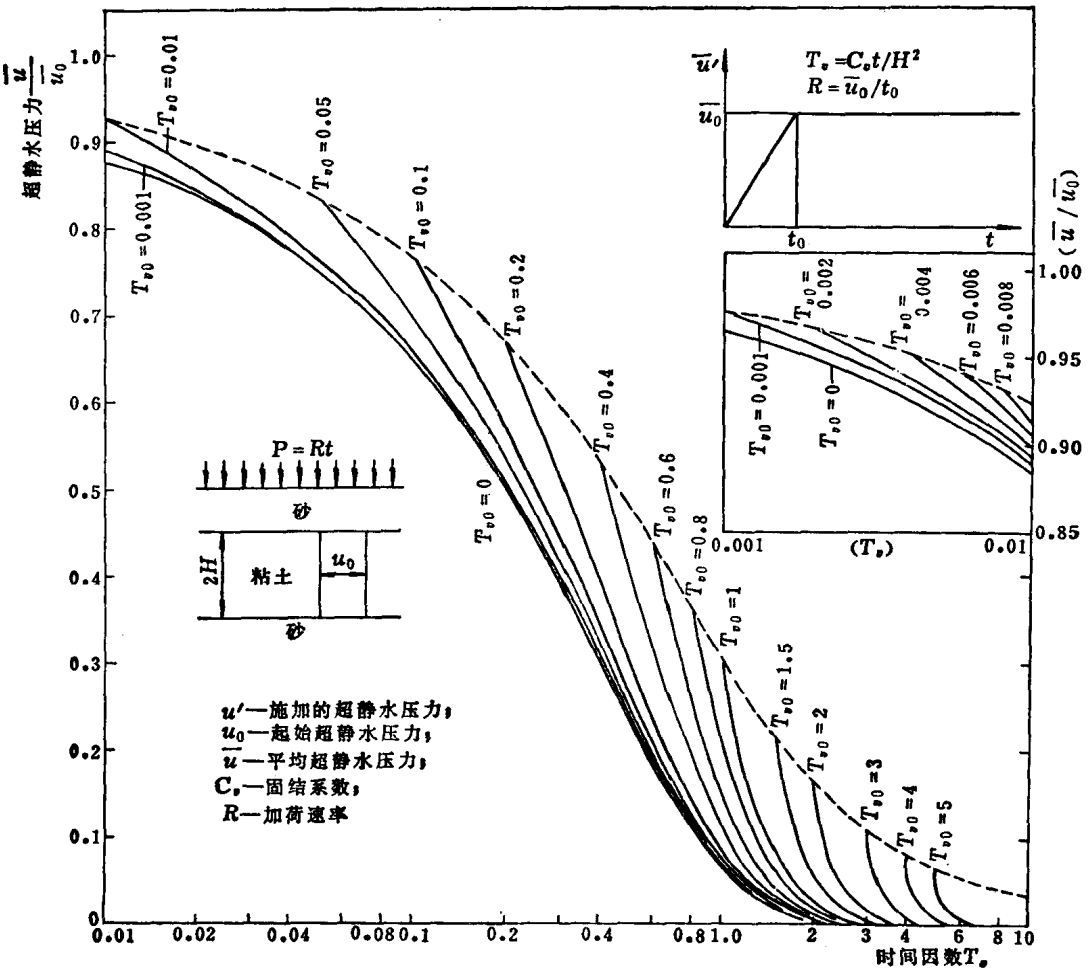


图 3-14（ b ） 竣工后的固结曲线

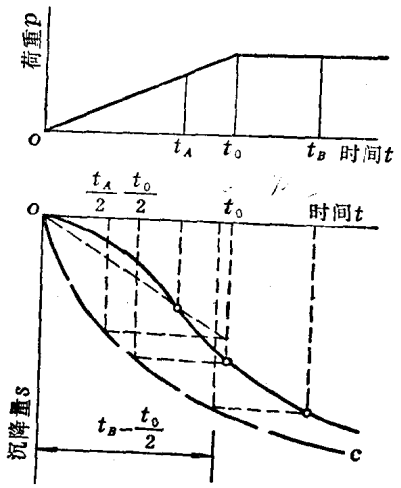


图 3-15 荷重随时间增长情况下沉降过程的简化计算

在施工期间，即当$t\leqslant t_0$（t_0—竣工时刻）：

沉降量＝（荷重瞬时施加后经过$\frac{t}{2}$时的沉降）×$\frac{t\text{ 时刻的荷重}}{\text{竣工时的荷重}}$ （3-60）

在竣工以后，即当$t>t_0$：

沉降量＝荷重瞬时施加后经过$\left(t-\frac{t_0}{2}\right)$时的沉降 （3-61）

如图 3-15中的虚线OC是按荷重瞬时施加算得的沉降曲线，即按式（3-45）所求得的曲线。

二、土层厚度随时间的变化

天然土在静水中的沉积过程，是土层厚度随时间变化的典型情况。如果是在大面积（相对于土层厚度而言）内的均匀沉积，则显然在自重下的固结过程近似于单向固结的情况。土堤、土坝的施工进程，也是土层厚度不断变化的实例。

对于这种情况，也容易从普遍方程式（3-34）求得固结微分方程。由于外荷重增量$\Delta\sigma=0$，假设渗透系数k＝常量，而土层厚度增长规律是$H=f(t)$，故该式变成：

$$C_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial t}-\gamma'\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (3\text{-}62)$$

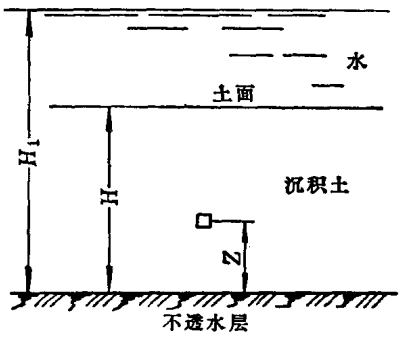


图 3-16 沉积土层

上式的边界条件是（参看图3-16）

$$\left.\begin{array}{lll} \text{当} & z=H\text{时}, & u=0 \quad (u\text{—超静水压力}) \\ & z=0\text{时}, & \dfrac{\partial u}{\partial z}=0 \quad (\text{不排水面}) \end{array}\right\} \qquad (3\text{-}63)$$

注意，在方程式中并不出现水深H_1，从而该式也完全可以用于研究堤坝工程中的固结情况，因为这时$H_1(t)=H(t)$。

（一）土层沉积过程中的固结

吉勃逊（Gibson）针对只有土层表面排水和表面与底部两面同时排水的两种情况给出了解答。土层沉积规律包括下列两类问题：1.沉积厚度与时间平方根成正比；2.厚度与时间呈直线关系[10]。前者有解析解，后者要用数值法求解。

1.单面排水，沉积厚度与时间平方根成正比

由于土层厚$H=Rt^{\frac{1}{2}}$（R—常数，表示沉降速率），利用边界条件式（3-63），解方

程（3-62）得：

$$u=\gamma' Rt^{\frac{1}{2}}\left[1-\left\{\frac{\exp\left(-\frac{z^2}{4C_vt}\right)+\frac{z}{2}\left(\frac{\pi}{C_vt}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{erf}\frac{z}{2\sqrt{C_vt}}}{\exp\left(-\frac{R^2}{4C_v}\right)+\frac{R}{2}\left(\frac{\pi}{C_v}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{erf}\frac{R}{2\sqrt{C_v}}}\right\}\right] \quad (3\text{-}64)$$

式中$\operatorname{erf}(x)$为误差函数，$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du$。以$\frac{R}{2\sqrt{C_v}}$为参数，可以将式（3-64）表示的超静水压力分布，绘成$\frac{u}{\gamma' H}$与$\frac{z}{H}$的关系曲线，如图3-17。从此图中可以看出，如果沉积厚度与沉积时间的平方根成正比，则沿土层厚的超静水压力的分布只与$\frac{R}{2\sqrt{C_v}}$有关，而不受时间 t 的影响，因而土层的平均固结度（见下面）也就与时间无关。

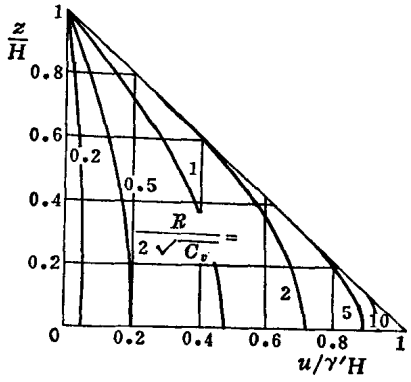


图 3-17 $\frac{u}{\gamma' H}$与$\frac{z}{H}$的关系曲线

（底面不透水，$H=Rt^{\frac{1}{2}}$的超静水压力分布）

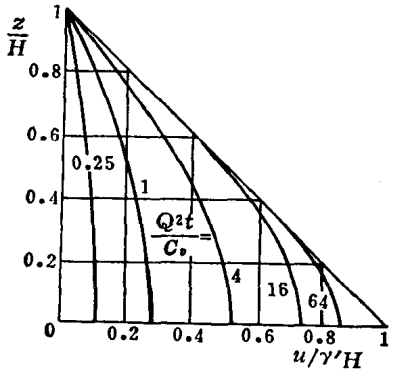


图 3-18 $\frac{u}{\gamma' H}$与$\frac{z}{H}$关系曲线

（底面不透水，$H=Qt$的超静水压力分布）

2.单面排水，沉积厚度与沉积时间成正比

这是更接近实际的情况，即$H=Qt$，但不易获得解析解。对此，吉勃逊求得下列表达式：

$$u=\gamma' Qt-\gamma'(\pi C_vt)^{-\frac{1}{2}}\exp\frac{-z^2}{4C_vt}\int_0^\infty \xi\tanh\frac{Q\xi}{2C_v}\cosh\frac{z\xi}{2C_vt}\exp-\frac{\xi^2}{4C_vt}d\xi \quad (3\text{-}65)$$

式中ξ是为满足边界条件式（3-63）中第二项需要选定的某函数。用数值法计算上式中的积分。若以$T=Q^2t/C_v$为参数，可以绘成$\frac{u}{\gamma' H}$与$\frac{z}{H}$的关系曲线，如图3-18。

土层的平均固结度可用下式计算：

$$U=1-\frac{\int_0^H u\,dz}{\gamma'\int_0^H(H-z)dz} \quad (3\text{-}66)$$

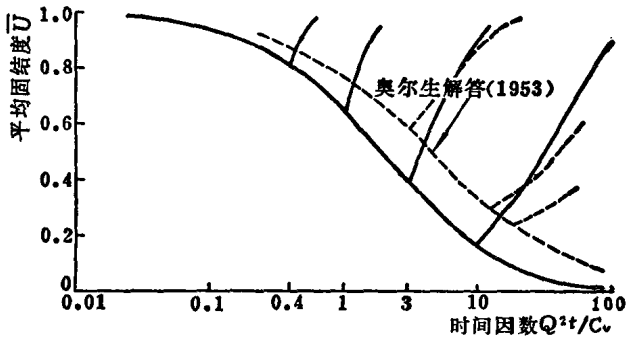


图 3-19 土层沉积过程中和沉积后的平均固结度（底面不透水情况）

上述U-T关系，如图3-19所示（注意，这里的时间因素T与太沙基理论中的T_v定义不同）。

3.双面排水时沉积土层的固结

吉勃逊给出双面排水时两种沉积规律下的总水压力的分布，如图3-20。

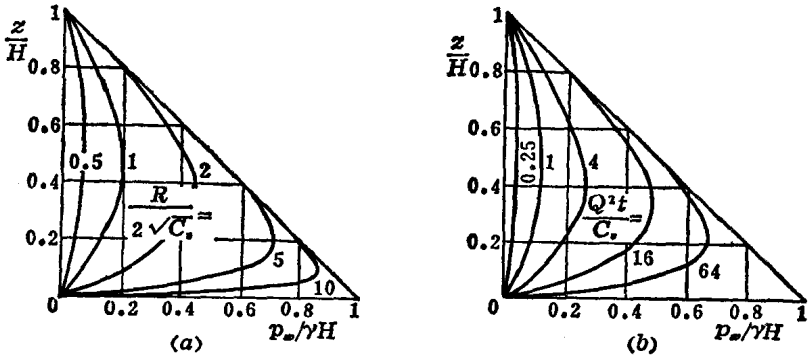


图 3-20 双面排水时总水压力的分布

（a）$H=Rt^{\frac{1}{2}}$，（b）$H=Qt$

（二）土坝施工期的孔隙水压力估算

以上所讲的都是饱和粘土的固结情况。对于部分饱和的土坝，在分析时需要引用斯肯普登建议的孔隙压力系数$\bar{B}$。由于在建坝初期，坝体内孔隙水很可能沿垂直方向流动，故按单向固结考虑是合理的。坝体内孔隙压力分布，可按下列微分方程求解：

$$C_v\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}=\frac{\partial p_w}{\partial t}-\gamma\bar{B}\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (3\text{-}67)$$

式中$\bar{B}=p_w/\gamma(H-z)$。C_v是非饱和土的固结系数。

事实上，如果土体是饱和的，（3-67）式的形式将为：

$$C_v\frac{\partial^2 p_w}{\partial z^2}=\frac{\partial p_w}{\partial t}-\gamma\frac{\partial H}{\partial t} \qquad (3\text{-}67a)$$

它的边界条件也是式（3-63），故其解答与式（3-64）、(3-65)完全相同。比较式(3-67)与（3-67a），可知式（3-64）与（3-65）的解答也完全适用于非饱和土，只是应该用$\gamma\bar{B}$代替饱和土的γ。

为了计算竣工后坝体内的孔隙压力分布，或研究施工过程中有间歇期的情况，用解析法求解有困难，需要借助于数值解法，见本节之五。

三、成 层 地 基

如果固结土层的变形特性不是常量，而是随其所在位置变化，则一般可以区分为两类情况：1.土层由几个水平分层组成，而每个分层内的性质可视为均匀一致；2.性质指标随深度而改变，即其性质为深度的函数。本节中先研究第1种情况。

假设土层由I、II两分层组成，如图3-21。可以是上下两面排水，也可以只有上面排

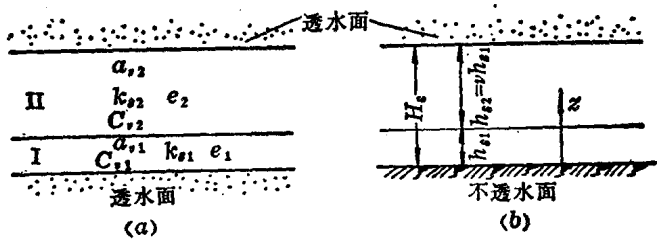


图 3-21 土层化引指标

水。为了推导方便，采用一些指标的化引值，即：

$$k_s=\frac{k}{1+e}$$

$$H_s=\frac{H}{1+e}\quad（H—实际土层厚度）$$

$$h_s=\frac{h}{1+e}\quad（h—实际分层厚度）$$

各分层的固结方程，根据式（3-35），应为：

$$\left.\begin{aligned}C_{v_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}&=\frac{\partial u_1}{\partial t}\\ C_{v_2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}&=\frac{\partial u_2}{\partial t}\end{aligned}\right\}\qquad（A）$$

由于在固结过程中，两分层实际上联合作用，相互制约，故需联立解式（A）的方程组。边界条件与起始条件如下：

	双面排水时	单面排水时
$z=0$	$u_1=0$	$\frac{\partial u_1}{\partial z}=0$
$z=H$	$u_2=0$	$u_2=0$
$z=h_1$	$u_1=u_2$	$u_1=u_2$
$z=h_1$	$k_{s_1}\frac{\partial u_1}{\partial z}=k_{s_2}\frac{\partial u_2}{\partial z}$	$k_{s_1}\frac{\partial u_1}{\partial z}=k_{s_2}\frac{\partial u_2}{\partial z}$
$t=0$	$u=p$（常量）	$u=p$（常量）

对于上下双面排水情况，可得方程组（A）的解答如下[11]：

底层：
$$u_1=\sum_1^{\infty}C_n e^{-T_v N''}\sin A_n\frac{Z}{h_1}\sin\mu\nu A_n \qquad (3\text{-}68)$$

顶层：
$$u_2=\sum_1^{\infty}C_n e^{-T_v N''}\sin A_n\sin\left(1+\nu-\frac{Z}{h_1}\right)\mu A_n \qquad (3\text{-}69)$$

式中A_n是下列方程的根：

$$F(A)=R\cos A\sin\mu\nu A+\sin A\cos\mu\nu A=0 \qquad (B)$$

$$C_n=2p\frac{R\sin\mu\nu A_n+\sin A_n}{RA_n\sin^2\mu\nu A_n+\mu\nu A_n\sin^2 A_n} \qquad (C)$$

$N''=(A_n)^2$

$R=\frac{1}{\mu}\frac{k_{s_1}}{k_{s_2}}$

$\mu^2=\frac{C_{v_1}}{C_{v_2}}$

$\nu=\frac{h_2}{h_1}$

$T_v=\frac{C_{v_1}}{(h_1)^2}t$ ——时间因数。

根据式（3-43），可以求得两层的平均固结度分别为：

$$U_1=1-2\sum_1^{\infty}\frac{\sin\mu\nu A_n(R\sin\mu\nu A_n+\sin A_n)}{(A_n)^2(R\sin^2\mu\nu A_n+\mu\nu\sin^2 A_n)}(1-\cos A_n)e^{-T_v N''} \qquad (3\text{-}70)$$

$$U_2=1-\frac{2}{\mu\nu}\sum_1^{\infty}\frac{\sin A_n(R\sin\mu\nu A_n+\sin A_n)}{(A_n)^2(R\sin^2\mu\nu A_n+\mu\nu\sin^2 A_n)}(1-\cos\mu\nu A_n)e^{-T_v N''} \qquad (3\text{-}71)$$

对于只有顶面排水的情况，相应的解答是：

$$u_1=\sum_1^{\infty}C_n e^{-T_v N''}\cos A\frac{Z}{h_1}\sin\mu\nu A_n \qquad (3\text{-}72)$$

$$u_2=\sum_1^{\infty}C_n e^{-T_v N''}\cos A_n\sin\mu A_n\left(1+\nu-\frac{Z}{h_1}\right) \qquad (3\text{-}73)$$

而式（3-72）与式（3-73）中的A是下列方程的根：

$$G(A)=R\sin A\sin\mu\nu A_n-\cos A\cos\mu\nu A_n=0 \qquad (D)$$

$$C_n=2p\frac{\cos A_n}{RA_n\sin^2\mu\nu A_n+\mu\nu A_n\cos^2 A_n} \qquad (E)$$

平均固结度为：

$$U_1=1-2\sum_1^{\infty}\frac{\sin A_n\cos A_n\sin\mu\nu A_n}{(A_n)^2(R\sin^2\mu\nu A_n+\mu\nu\cos^2 A_n)}e^{-T_v N''} \qquad (3\text{-}74)$$

$$U_2=1-\frac{2}{\mu\nu}\sum_1^{\infty}\frac{\cos^2 A_n(1-\cos\mu\nu A_n)}{(A_n)^2(R\sin^2\mu\nu A_n+\mu\nu\cos^2 A_n)}e^{-T_v N''} \qquad (3\text{-}75)$$

图3-22是针对以下条件求得的顶面排水情况时的结果：$\frac{k_{s_1}}{k_{s_2}}=10$，$\frac{a_{V_1}}{a_{V_2}}=0.4$，$\frac{C_{V_1}}{C_{V_2}}=\frac{k_{s_1}a_{V_2}}{k_{s_2}a_{V_1}}=25$，$\mu=\sqrt{\frac{C_{V_1}}{C_{V_2}}}=5$，$R=\frac{k_{s_1}}{k_{s_2}}\frac{1}{\mu}=2$，$\nu=\frac{h_2}{h_1}=4$，$e_1=e_2$。在本例

中，由于$\mu\nu=20$，故A_n由下式求得：

$$G(A)=2\sin A\sin 20A-\cos A\cos 20A=0 \qquad (F)$$

式（F）的开始8个根如表3-3所列。

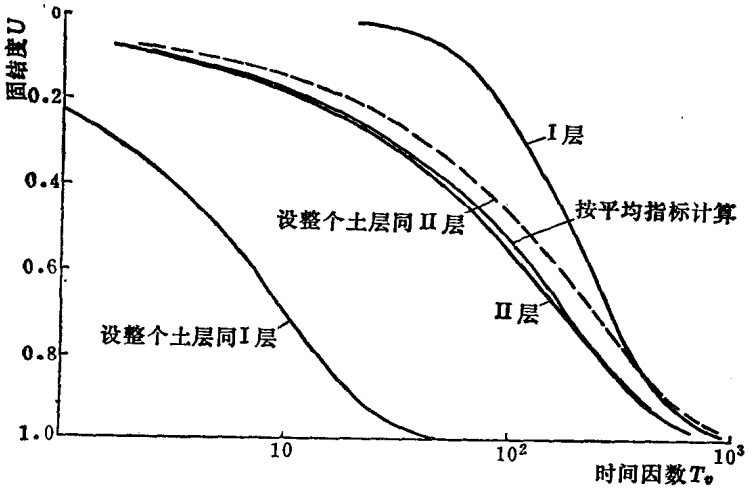


图 3-22　双层地基不同情况下的固结曲线

表 3-3　　式　（F）　开　始　的　8　个　根

根　序	根　值		根　序	根　值	
	度	弧　度		度	弧　度
A_1	$4°5\frac{1}{2}'$	0.0713	A_5	37°39′	0.6571
A_2	$12°19\frac{1}{3}'$	0.2150	A_6	$46°16\frac{2}{3}'$	0.8076
A_3	20°39′	0.3604	A_7	54°58′	0.9593
A_4	29°06′	0.5079	A_8	$63°41\frac{2}{3}'$	1.1117

图3-23是计算所得的$T_v=100$与$T_v=200$时超静水压力沿深度的分布图。由于本例中下层的透水性是上层的10倍，故下层的固结显然要比上层的快得多，并且超静水压力分布相当均匀。

从以上推导可知，考虑分层特性，计算相当复杂，如为多层地基，计算就更其繁琐。事实上，如果采用各分层的平均指标，仍按均匀土层的情况计算，则可以求得相当近似的结果，如图3-22。平均指标可按下式计算：

$$\overline{k}=\frac{\Sigma h_i}{\Sigma h_i/k_i}$$

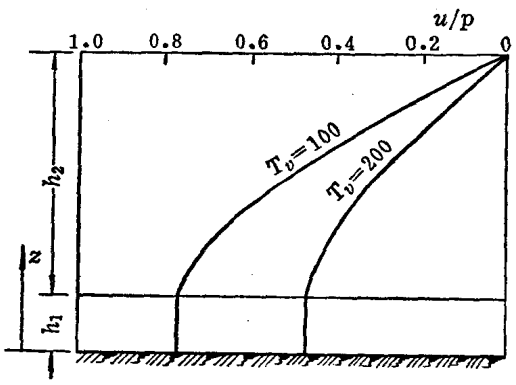


图 3-23　双层地基超静水压力的分布

$$\overline{m}_v=\frac{\Sigma m_{v_i}h_i}{\Sigma h_i}$$

$$\overline{C}_v=\frac{\overline{k}}{\overline{m}_v\cdot\gamma_w}$$

$$t=\frac{(\Sigma h_i)^2}{\overline{C}_v}T_v$$

$$=\Sigma m_{v_i}h_i\cdot\Sigma\frac{h_i}{m_{v_i}C_{v_i}}\cdot T_v \qquad (3\text{-}76)$$

对于有砂间层的情况，即各土分层为透水砂层所间隔，可以分别计算各土分层的固结度与最终沉降量，然后按式（3-76）计算整个土层的固结度：

$$U=\frac{1}{\Sigma h}(U_1h_1+U_2h_2+\cdots\cdots) \qquad (3\text{-}77)$$

式中 h_1、h_2……——各分层厚度；

U_1、U_2……——各分层在同一时刻达到的固结度；

Σh——各分层厚度之和。

四、变形指标随深度的变化

指标随深度变化情况下的固结微分方程，仍可从普遍方程（3-34）中求得。令该式中的$\Delta\sigma=0$，$H=$常量，则式（3-34）变成：

$$\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\frac{1}{k}\frac{dk}{dz}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{C_v(z)}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (3\text{-}78)$$

式中

$$C_v(z)=\frac{k(z)}{\gamma_w m_v(z)}$$

注意，由于k与m_v均为深度z的函数，故即使$C_v(z)$为常量，式（3-77）也不能简化成假设$C_v=$常量的太沙基方程式（3-35）。

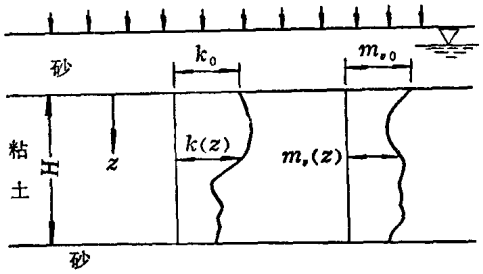


图 3-24 k与m随深度的变化

式（3-78）中包含两个变系数，用一般方法不能求解，需要引入新坐标，进行变换，使其变为一个变系数[12]。

今设k与m_v随深度的变化用下列函数表示：

$$\left.\begin{aligned}k(z)&=k_0\left(1+\alpha\frac{Z}{H}\right)^p\\ m_v(z)&=m_{v0}\left(1+\beta\frac{Z}{H}\right)^q\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}79)$$

式中 k_0与m_{v0}——土层顶面处的渗透系数与体压缩系数，如图3-24；

α、β、p、q——表示k与m_v随深度变化规律的系数；

H——土层厚度。

如果$\alpha=\beta$，可以再采用下列变换式：

$$\left.\begin{aligned} y &= \left(1+\alpha\frac{z}{H}\right)^{1-\frac{n}{2}} \\ u(y,t) &= y^{\frac{1-p}{2-n}}W(y,t) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}80)$$

式中 $n=p-q$（$n\neq 2$）。于是最终可得：

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{(p-1)^2}{(2-n)^2}\frac{1}{y^2}W=\frac{4H^2}{\alpha^2(2-n)^2C_0}\frac{\partial W}{\partial t} \qquad (3\text{-}81)$$

式中 C_{v0}——土层顶面处的固结系数。

式（3-81）为贝塞尔微分方程。利用此式，配合以给定的边界条件，可以求得解析

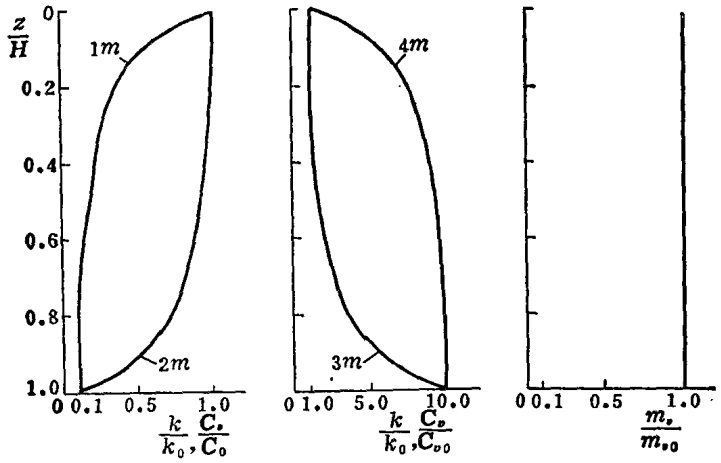


图 3-25 固结参数的变化（压缩性为常量）

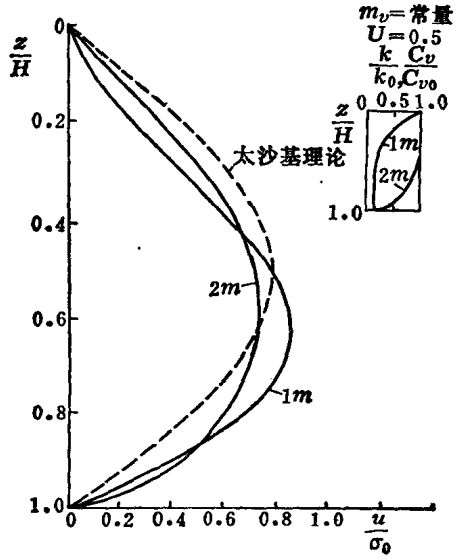


图 3-26 孔隙压力等时线

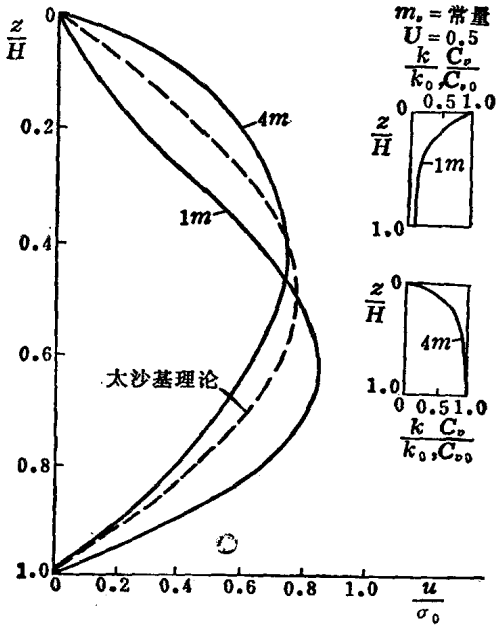


图 3-27 孔隙压力等时线

解。但在一般情况下，不易准确建立k与m_v随深度变化的函数关系，因此，宜将方程（3-78）变换成差分方程求近似解。

席佛曼（Schiffman）与吉勃逊曾就几种k与m_v随深度而变化的情形进行过分析[12]。

图3-26和3-27是根据m_v为常量，k沿深度减小与增大10倍（变化规律，见图3-25），在固结度为$U=50\%$时，整个土层内超静水压力的分布。图3-28是在图3-25情况下的固结

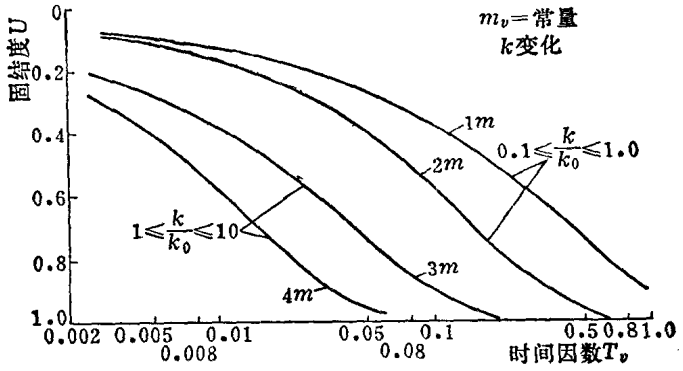


图 3-28 固结曲线

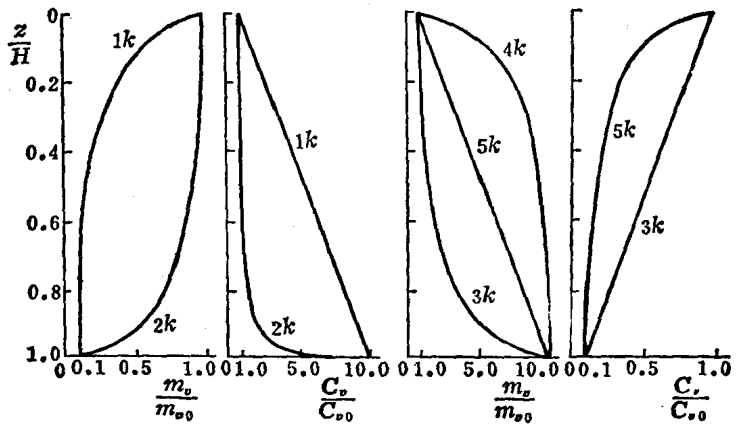


图 3-29 固结参数的变化（渗透性为常量）

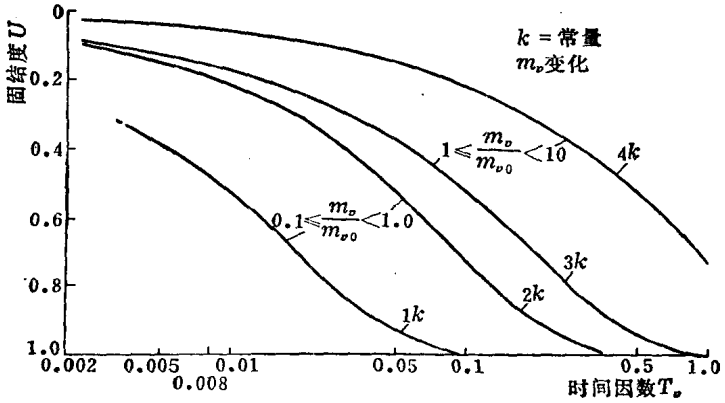


图 3-30 固结曲线