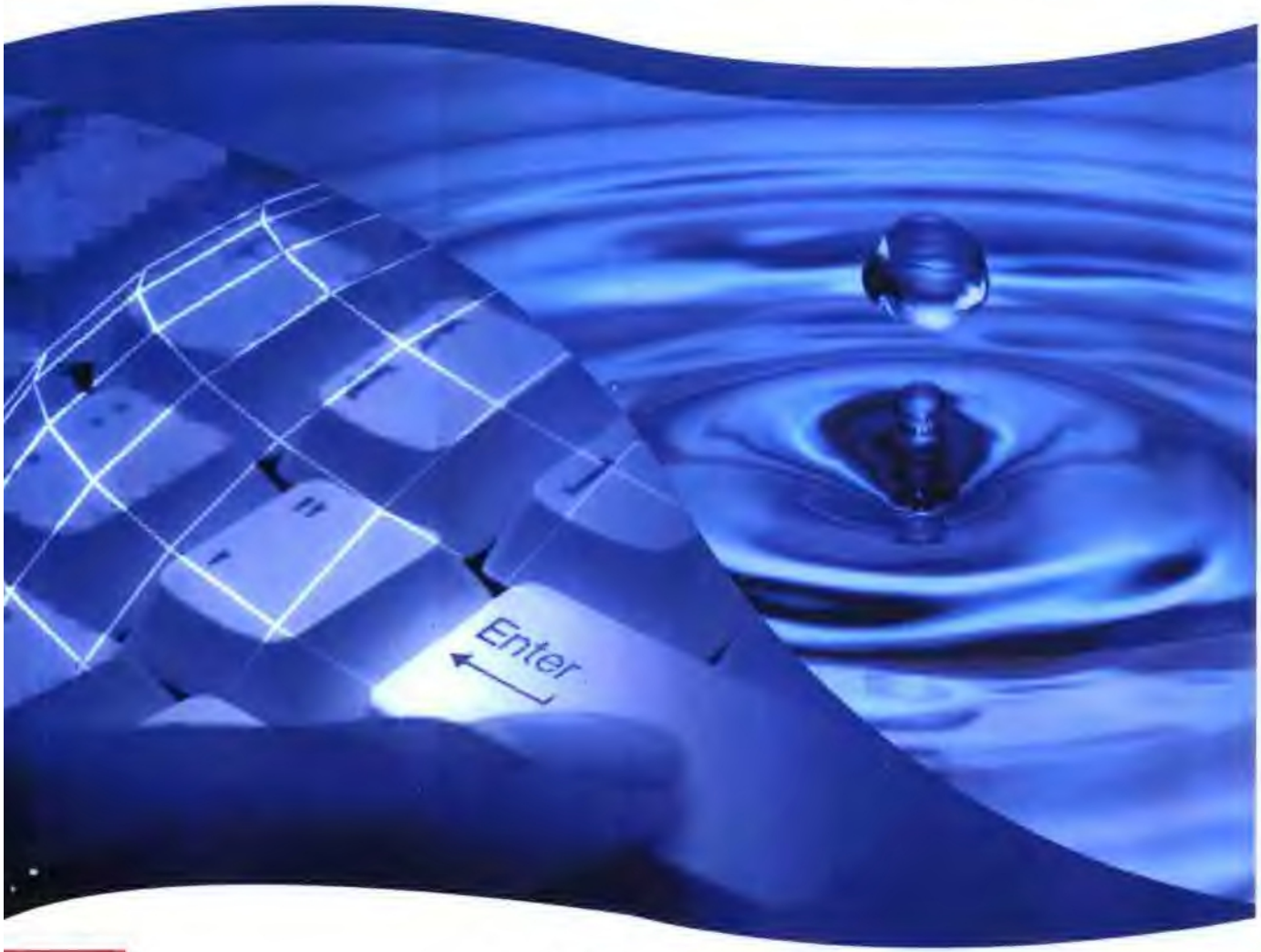
煤炭科学研究
总院西安分院 资助

含水层参数识别方法

李竞生 姚磊华 著



地质出版社



含水层参数识别方法

HANSHUICENG CANSHU SHIBIE FANGFA

ISBN 7-116-03928-7

9 787116 039285 >

ISBN 7-116-03928-7

P·2426 定价：25.00 元

国家科学技术学术著作出版基金
煤炭科学研究总院西安分院 资助出版

含水层参数识别方法

李竞生 姚磊华 著

地质出版社
·北 京·

内 容 简 介

本书讨论分布参数模型的参数识别问题，内容共分三部分。第一部分简要介绍解析解法在参数识别中的应用。第二部分对修正的高斯-牛顿法在含水层参数识别中的应用进行了比较深入详细的研究。第三部分是关于遗传算法，主要介绍简单遗传算法的改进以及这些算法在一维、二维和三维地下水系统参数识别中的应用。本书可供从事供水水文地质、矿山水文地质、水资源管理、农田水利、水工建筑、石油地质等专业的科研、工程技术人员及高等学校有关专业的大学生和研究生参考

图书在版编目（CIP）数据

含水层参数识别方法/李竞生等著.-北京：地质出版社，2003.11
ISBN 7-116-03928-7

Ⅰ.含… Ⅱ.李… Ⅲ.含水层-参数-识别 Ⅳ.P641

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 093929 号

责任编辑：陈军中
责任校对：黄苏晖
出版发行：地质出版社
社址邮编：北京海淀区学院路 31 号，100083
电　　话：（010）82324508（邮购部）；（010）82324574（编辑部）
网　　址：http://www.gph.com.cn
电子邮箱：zbs@gph.com.cn
传　　真：（010）82310759
印　　刷：北京长宁印刷有限公司
开　　本：787 mm×1092 mm 1/16
印　　张：10
字　　数：220 千字
印　　数：1－800 册
版　　次：2003 年 11 月北京第一版·第一次印刷
定　　价：25.00 元
ISBN 7-116-03928-7/P·2426

（凡购买地质出版社的图书，如有缺页、倒页、脱页者，本社发行处负责调换）

前　言

水是人类赖以生存的物质基础，是大自然赋予人类最可宝贵的资源。没有水就没有人类的产生与发展，没有社会的文明与进步。同时，水资源的短缺和污染又制约着社会的持续发展，影响着人类的生存环境。

我国是一个水资源相对紧缺的国家，人均水资源占有量仅为世界人均占有量的四分之一。随着我国国民经济的迅速发展和人民生活水平的不断提高，数量巨大的污水、废液和种类繁多的固态和液态可溶性物质不断地污染地表水和地下水资源。农业生产中化肥流失、化学药剂的残存物，对农业生态环境构成日益严重的威胁。乡镇工业的发展和广大中小城镇的兴起，使不少中小河流和水系受到不同程度的污染。我国近半数的城市和乡镇供水不足，特别是北方地区，水资源利用率已达到极限。地下水过量开采，采补失衡，区域地下水位下降，地面沉降，海水入侵，致使生态环境严重恶化。上海市1921～1986年期间由于超采地下水，地下水位下降35 m，累计地面沉降量达2.61 m；通过减少开采量和地下水回灌等措施，地面沉降基本得到控制。福州市经多次的水准重复测量证实，热水开采区已经发生了地面沉降。从1967年到1986年19年期间，地面沉降量＞150 mm的范围为2.6 km^2，沉降量最大的地段为313～414 mm。把地面沉降量的分布与相应的第四系热水水位下降值的分布相重叠，可以显示出地面沉降幅度与水位降幅的密切关系。水位降落漏斗的中心地带是地面沉降幅度最大的地区。地面沉降的速度大致数据为：20世纪60年代小于20 mm/a，20世纪70年代为25～33 mm/a，20世纪80年代后期90年代初期增至40 mm/a以上。与此同时，热水的开采量也由每年几十万方增加到500万方左右。地面水-土壤水-地下水是生态环境链中一个十分活跃的动态开放系统，其生态稳定性十分脆弱。地面水的污染，必然导致地下水水质的恶化，地下水质恶化和水量均衡失调，又将导致严重的环境灾难。就目前我国水资源状况来看，如果不加强治理和保护，不但危及人们的身体健康，也将阻碍工农业生产的进一步发展。因此，对地下水资源的保护和合理开发利用，已成为刻不容缓的重要课题。

另一方面，在我国的许多矿区，水文地质条件复杂，地下水害严重；特别是广泛分布于晋、冀、鲁、苏、皖、陕诸省，总面积约72600 km^2，煤炭产量占全国总产量的60%的华北型煤田，即石炭系—二叠系煤田，地下水害尤为严重，80%的生产矿井受到煤系底板以下奥陶系灰岩溶水的威胁与危害。在

过去的30多年中，曾发生突水淹井事故200多次，造成数以千万吨煤炭损失和1000多人死亡，经济损失超过40多亿元。酿成地下水害的原因很多，但矿井涌水量预测不正确，水害防治措施不力是主要原因。

地下水水流和溶质运移数学模型不仅是合理地、科学地开发利用和保护地下水的有效工具，而且也是进行矿井涌水量预测，疏干计算和防治水方案论证的有效工具。地下水流动模型和污染物迁移模型是对真实问题的近似，并非实际问题本身。有时它们甚至可能是非常粗略的近似。然而，粗略的预测也比心中无数要好。因为一些绝对精度较低的模型仍然可以正确地反映出各种影响过程的不同趋势。当然我们在研究地下水问题时总是希望所建立的模型尽可能地接近实际的水文地质条件，但往往受到各种因素的制约。

模拟过程包括若干不同的步骤，基本的步骤是[1]：

1）提出问题。这一步骤是决定工作内容及所需的精度。它亦决定一个模型的维数和时间相关性。

2）选择变量。这一步骤是定量分析的起点。

3）确定变量间的定量关系。通常借助于一些最基本的原理，如质量守恒定律或经验关系来推导方程。

4）解的算法。确定解的算法及在计算机上的实现。

5）模型参数的确定。每一个模型都含有若干个未知参数，这些参数必须在模型确立过程中，通过模拟结果和现场观测值的比较来确定。没有现场观测数据，那就不会有合理的数学模型。

6）模型的检验。模型的确立使得参数适合于所观测的情况。因此，不能用模型确立的观测数据来检验模型。为了检查模型是否具有预测能力，必须用一组独立的数据来检验它。

7）模型的应用。模拟是一个迭代过程。在模拟过程中，甚至有可能不得不修改初始点。

从上面模拟的步骤中可以看出，地下水流动和地下水溶质运移的模拟（称为正问题或预测问题）都离不开模型参数。可以毫不夸张地说，如果不解决水文地质参数反演问题（称为参数识别、逆问题或反问题），则预测问题就会变成空中楼阁，再好的预测方法也解决不了实际水量计算问题和污染预测问题。

自20世纪70年代以来，由于有限差分法、有限单元法和边界元等数值方法的介入，极大地促进了地下水动力学发展，解决了以往用解析法很难处理的不规则边界、非均质和各向异性等问题，提高了解正问题的能力。与之相比，解逆问题的理论和方法还处于探索阶段，尚未达到完全实用的程度，这主要是由逆问题本身的复杂性决定的。事实上解逆问题的重要性不亚于解正问题，单从计算时间上来说，目前求解一个具体水量问题花在参数识别上的

时间大约是预测时间的10倍或更多。即便如此，计算出的参数也不一定符合实际情况，预测的水量就更谈不上准确了。因此对逆问题进行深入的理论研究，考察各种因素对参数识别的影响，建立一套与用解析法或有限单元法求解地下水正问题相配套的水文地质参数识别方法，实为当务之急。

本书讨论分布参数模型的参数识别问题，内容共分三大部分。

第一部分简要介绍解析解法在参数识别中的应用，主要包括Dupuit-Theim模型、Theis模型、Hantush-Jacob模型以及用定降深井流试验识别含水层参数的方法。虽然由于在推导各种解析表达式时，作了许多假设，因而使解析法的实际应用受到很大限制；但是解析解法在给出参数初值或在水文地质条件比较简单、实际条件与推导公式所作的假设比较接近时，还是可以使用的，特别是解析解法对解决正演问题所提供的思路，在地下水动力学发展的全过程中具有重要意义。解析表达式一般比较简单，但也有许多解析解需要借助于计算机才能计算。在参数识别中，解析解法可以和各种最优化方法相结合，这类方法大都属于间接法。与数值法和最优化方法相结合不同，这里水头(或降深）用解析表达式计算，而在数值方法中本头（或降深）用有限单元等方法计算。用解析法和最优化算法相结合的方法识别含水层参数的最大好处是可以避免用一般的配线法和直线法等所造成的人为影响。

第二部分是对修正的高斯-牛顿法进行了比较深入详细的研究。修正的高斯-牛顿法与传统的最优化方法如参数逐个修正法、单纯形法、最速下降法等都属于间接法，许多作者所做的研究认为修正的高斯-牛顿法具有收敛速度快，稳定性好的优点。因此我们以该方法作为传统最优化方法的代表作了比较详细的介绍，内容包括高斯-牛顿法的具体计算步骤。灵敏度系数矩阵计算方法、各种随机和非随机因素对参数识别的影响。

第三部分是遗传算法。自20世纪80年代初期禁忌搜索、模拟退火、遗传算法和人工神经网络算法的兴起，世界上许多国家的科学工作者对这些算法的模型、理论和应用技术等一系列问题进行着深入的研究，并将这些算法称为现代优化算法。遗传算法因其擅长全局搜索，具有高度的鲁棒性，又不需要对优化问题的性质进行深入的数学分析而深受科学工作者的青睐。这一部分主要介绍了简单遗传算法的改进以及这些算法在一维、二维和三维地下水系统参数识别中的应用。

由于水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者批评指正。

本书的出版得到国家科学技术学术著作出版基金的资助，同时也得到煤炭科学研究总院西安分院的资助，作者在此一并表示感谢。

作　者

2003.3

目　录

1 地下水系统参数反演理论与方法 …… (1)
1.1 反演问题的一些基本概念 …… (1)
1.2 反演方法分类与进展 …… (5)
2 用解析法识别含水层参数 …… (9)
2.1 若干地下水流数学模型的解析解 …… (9)
2.2 用 Dupuit-Theim 公式识别含水层参数 …… (14)
2.3 用 Theis 公式识别含水层参数 …… (16)
2.4 用 Hantush-Jacob 公式识别含水层参数 …… (17)
2.5 用定降深井流试验识别含水层参数 …… (21)
2.6 各向异性含水层参数识别方法 …… (28)
3 地下水流方程的有限元解法 …… (34)
3.1 地下水流方程 …… (34)
3.2 地下水流方程的有限元解法 …… (34)
3.3 例题与精度比较 …… (35)
4 修正的高斯-牛顿法 …… (38)
4.1 含水层参数识别问题的提法 …… (38)
4.2 修正的高斯-牛顿法 …… (38)
4.3 计算步骤 …… (40)
5 灵敏度系数矩阵计算方法 …… (41)
5.1 影响系数法 …… (41)
5.2 灵敏度系数方程法 …… (42)
5.3 变分法 …… (42)
5.4 例题与精度比较 …… (43)
6 各种随机和非随机因素对参数识别的影响 …… (48)
6.1 理想化模型 …… (48)
6.2 灵敏度系数矩阵计算方法对参数识别的影响 …… (48)
6.3 水位观测数据序列的长短对参数识别的影响 …… (51)
6.4 参数初值和上、下限的选择对参数识别的影响 …… (53)
6.5 流量和水位观测数据的随机误差和系统误差对参数识别结果的影响 …… (53)
6.6 水位观测孔分布与待识别参数个数之间的关系 …… (56)
7 遗传算法研究进展 …… (57)
7.1 概述 …… (57)
7.2 遗传算法的基本原理 …… (57)

7.3 基本的遗传算法 …… (58)
7.4 遗传算法的主要步骤 …… (59)
7.5 遗传算法的特点 …… (61)
7.6 遗传算法研究进展 …… (63)
8 十进制遗传算法 …… (65)
8.1 引言 …… (65)
8.2 十进制遗传算法简介 …… (65)
9 十进制遗传算法的改进 …… (68)
9.1 引言 …… (68)
9.2 优体克隆操作 …… (69)
9.3 子体优生操作 …… (70)
9.4 多代调环操作 …… (71)
9.5 因素变异操作 …… (72)
9.6 组合操作 …… (72)
9.7 小结 …… (73)
10 一维地下水系统遗传反演方法 …… (74)
10.1 引言 …… (74)
10.2 泰斯模型遗传反演方法 …… (74)
10.3 水动力弥散方程遗传反演方法 …… (89)
10.4 小结 …… (95)
11 多维地下水系统遗传反演方法 …… (96)
11.1 引言 …… (96)
11.2 二维承压水非稳定流模型遗传反演方法 …… (96)
11.3 三维承压水非稳定流模型遗传反演方法 …… (104)
11.4 小结 …… (109)
12 结束语 …… (110)
参考文献 …… (113)
附录 1 修正的高斯-牛顿法识别含水层参数的计算机程序 …… (116)
附录 2 综合改进的遗传算法识别含水层参数的计算机程序 …… (131)

1 地下水系统参数反演理论与方法

1.1 反演问题的一些基本概念

1.1.1 反演问题的必要性

当用数值法对地下水运动进行模拟时，所建立的数学模型应当客观地反映实际含水层系统的水文地质条件和地下水运动的基本特征。也就是说，当施加自然的或人为的影响时，数学模型的反映和实际含水层的反映应当一致或非常接近。只有这样，我们才能利用模型来预测含水层系统的状态，进行合理的管理与控制。因此，我们必须对所建立的数学模型进行检验，即利用已建立的微分方程和定解条件，模拟已知的实际过程（天然地下水位动态或抽水试验过程），将计算值与实测值相比较。如果相差过大，就要修改微分方程或边界条件或参数，重新模拟，直至基本吻合为止。

事实上，反演问题的核心内容是水文地质参数识别问题。因为微分方程类型的选择和定解条件等的确定，通过水文地质勘探和试验是比较容易解决的。在反演过程中，即使对这两项进行修改，由于可供选择的类型有限，问题也较容易解决。然而，我们却不能直接将根据野外试验资料用解析公式求得的水文地质参数用于数值计算的正演问题。这是因为，地下水动力学中各解析求参公式的数学模型与实际情况出入较大，如含水层均质、各向同性、等厚、无限延伸等假设。严格地讲，解析公式求出的水文地质参数也仅适用于与求参公式相对应的数学模型的正演问题。事实上，参数与模型相对应，这就是所谓的模型参数的概念。另一方面，野外抽水试验求得的水文地质参数只代表试验点附近一个很小的区域。因此，我们必须用基于相应的模型反求水文地质参数。

1.1.2 模型参数的概念

自然界地下水流系统在时空域上都是非常复杂的，为了便于解决实际问题，必须对含水层系统进行概化，即忽略一些和当前问题无关或关系不大的因素，建立相应的数学模型。概化一般包括以下几个方面：

1）地下水流系统区域几何形状的概化；

2）边界性质的概化与初始流场的模拟；

3）参数性质的概化；

4）地下水流态的概化。

由于数学工具的局限性，往往概化得非常合理的水文地质模型，却不能用现有的数学工具来描述，或者可以描述却不能得到它的解。因此，权宜的做法是“两相凑合”，即使概化不失大体，而数学模型又简单可解。由这里的分析可知，通过对复杂的地下水流系统进行概化而建立起来的数学模型仅仅是对实际地下水流系统的一个近似表述。作为数学模

型一部分的参数也是对含水层本身固有参数的近似和综合，它并不是含水层本身所固有的参数。为了区别，我们将按数学模型求得的参数定义为“模型参数”。显然，对同一地下水流系统通过勘探建立水文地质模型时，由于勘探的局限性和工作者经验上的差别，不同的工作者可以建立起不同的水文地质模型，相应地就有不同的数学模型和“模型参数”。因此，在实际工作中，判断参数是否正确将是困难的，不能一概而论。例如，对于一潜水含水层系统，我们既可选用 Boulton 模型，也可选用 Neuman 模型对其进行模拟。显然，两种模型参数的个数和类型是有差异的；即使是同类型的参数，由于模型之间的差异，在数值上也不会一致。

1.1.3 反演问题的适定性

对于一个描述地下水流的数学模型，如果满足以下三条：

1）一定可以求得其解（解的存在性）；

2）所求得的解是唯一的（解的唯一性）；

3）这个解对原始数据是连续依赖的，即当参数或定解条件发生微小变化时，解的变化也是微小的（解的稳定性），就称这个数学模型是适定的。

一般来讲，正问题都是适定的，而逆问题往往是不适定的。从水文地质本身来讲，逆问题解的存在性是没有疑问的，因此下面只对解的唯一性和稳定性问题做一些讨论。

1.1.3.1 反演问题解的不唯一性

由于当水文地质参数不同时，仍有可能产生相同的水头分布，所以仅靠水头观测值往往不能唯一确定水文地质参数，如承压一维稳定流模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\dfrac{\partial h}{\partial x}\right) = 0 \\ h\big|_{x=0} = H_1 \\ h\big|_{x=L} = H_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

式中 h 为地下水水头，T（x）为导水系数，x 为坐标，H_1、H_2 为给定水头值。

当含水层是均质的，也即 T（x）$= C$ 时，其水头分布与导水系数 T、贮水系数 S 无关，仅取决于边界条件。由此可见，尽管水文地质参数不同，仍可以产生相同的水头分布。

上述模型的正问题是已知 T（x）和边界条件求 h（x），现在我们考虑逆向题，即已知 h（x），求 T（x）。将式（1-1）积分得：

$$T(x)\frac{\partial h}{\partial x} = C \tag{1-2}$$

即：

$$T(x) = C/\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \tag{1-3}$$

虽然$\dfrac{\partial h}{\partial x}$是已知的，而常数 C 是任意的，故解 T（x）不是唯一的。但是，如果已知某个断面的流量，例如 $x = L$ 处不仅已知 h（x），而且已知

$$T(x)\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x=L} = -q \tag{1-4}$$

则式（1-3）中的 $C=-q$，从而 $T(x)$ 在 $x=L$ 处被唯一确定了。

再考虑承压二维稳定流动，其方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial h}{\partial y}\right)+W=0 \tag{1-5}$$

其中 h 为地下水水头，$T(x)$ 为导水系数，W 为源汇项，x，y 为坐标变量。

将方程（1-5）改写为

$$T\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x}+T\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}+W=0 \tag{1-6}$$

并令

$$a=\frac{\partial h}{\partial x},b=\frac{\partial h}{\partial y},c=\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \tag{1-7}$$

将式（1-7）代入式（1-6），得：

$$a\frac{\partial T}{\partial x}+b\frac{\partial T}{\partial y}+cT+W=0 \tag{1-8}$$

因在区域 Ω 中的每一点 $h(x,y)$ 和源汇项为已知，所以方程（1-8）是关于 T 的一阶线性偏微分方程，其通解一定包含一个任意函数。如 T 是方程（1-8）的一个解，T' 是方程

$$a\frac{\partial T'}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial y}+cT'=0$$

的一个解，则 $T+T'$ 也一定是方程（1-8）一个解。因为

$$\begin{aligned}&a\frac{\partial}{\partial x}(T+T')+b\frac{\partial}{\partial y}(T+T')+c(T+T')+W\\&=\left(a\frac{\partial T}{\partial x}+b\frac{\partial T}{\partial y}+cT+W\right)+\left(a\frac{\partial T'}{\partial x}+b\frac{\partial T'}{\partial y}+cT'\right)=0\end{aligned} \tag{1-9}$$

也就是说，方程（1-5）的解是不唯一的。

1.1.3.2 反演问题解的不稳定性

为了说明该问题，我们再次以一维承压稳定流动为例，其数学模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T(x)\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)=0\\ h|_{x=0}=H_1\\ T\dfrac{\partial h}{\partial x}\Big|_{x=L}=-q\end{cases} \tag{1-10}$$

由公式（1-4）可得：

$$T(x)=\frac{-q}{\dfrac{\partial h}{\partial x}} \tag{1-11}$$

由于规则的水头 $h^*(x)$ 总带有一定误差 e，因此我们可以写出

$$h^*(x)=h+e \tag{1-12}$$

式中 $h(x)$ 是真正的水头值。由式（1-10）和式（1-11），得：

$$T^*_{(x)}=\frac{-q}{\dfrac{\partial h}{\partial x}+\dfrac{\partial e}{\partial x}}$$

因此 T 与 T^* 的绝对误差为

$$|T - T^*| = \left| \frac{-q}{\partial h/\partial x} - \frac{-q}{\partial h/\partial x + \partial e/\partial x} \right| = T \frac{|\partial e/\partial x|}{|\partial h/\partial x + \partial e/\partial x|}$$

因此，$|T - T^*|$ 的大小与 $\frac{\partial e}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial h}{\partial x}$ 的大小有关。e 虽然很小，但 $\frac{\partial e}{\partial x}$ 可能仍然很大。如果

$$\frac{\partial e}{\partial x} \gg \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{则} \frac{|\partial e/\partial x|}{|\partial h/\partial x + \partial e/\partial x|} \approx 1 \tag{1-13}$$

于是

$$|T - T^*| \approx T$$

很明显，这是不符合实际的。因此在上述情况下，逆问题的解是不稳定的，即水头 h（x)的微小误差可能导致所求参数的较大误差。

以承压二维稳定流为例

$$\begin{cases} T\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + W = 0 & (x, y) \in \Omega \\ h|_\Gamma = \varphi(x, y) \end{cases} \tag{1-14}$$

假设已知区内水头函数 h（x，y）和源汇项 W，求导水系数 T（x，y)。

由式（1-5）得：

$$T = -\frac{W}{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}}$$

由于 h（x，y）只能通过实测获得其近似值，不可避免地会带有误差。设误差为 e（x，y)，则实测水位值 $h' = h + e$（H 为水头真值)，计算得的导水系数为

$$T' = -\frac{W}{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2}}$$

$$T - T' = -\frac{W\left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\right)}{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)}$$

即使 e（x，y）很小，但 $\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}$ 仍然可能很大，因而绝对误差 $|T - T'|$ 可能很大。以上讨论表明，反演问题的解是不稳定的，即水头微小的误差可能给逆问题的解 T（x，y）带来很大的误差。因为逆问题的不适定性，求解时常加上约束条件，以避免出现不合理的情况。例如，由水文地质常识可知，渗透系数和导水系数都是非负的，即 $K \geqslant 0$，$T \geqslant 0$。贮水系数和给水度不能大于 1，即 $0 \leqslant \mu \leqslant 1$，$0 \leqslant S \leqslant 1$ 等等。

Neuman[2]较为系统的研究了逆问题解的不唯一性和不稳定性问题，此后我国学者薛愚群、孙讷正、陈崇希等人[3-10]也对这些问题进行了讨论，有兴趣的读者可参阅有关著作。

1.2 反演方法分类与进展

反演水文地质参数的方法可根据正演计算所用的方法分为解析法和数值法。解析法主要以泰斯（Thies）公式为代表，具体又有配线法、直线图解法等。数值法求参按其求解方法又可分为试估-校正法和最优化计算方法。

试估-校正法的优点是能充分利用水文地质工作者对一个地区水文地质条件的各种认识，达到识别参数的目的。但是，该方法无收敛判别准则，很难达到最优识别，工作量比较大。使用该方法，结果的可靠性和花费时间的多少取决于调参者的经验和技巧。

最优化方法是将水文地质参数识别归结为求极值问题。即求水文地质参数使得误差评价函数达到最小。

在实际应用时，解析法求参的配线法和直线图解法等很难应用于数值法的反演问题中，但数值法反演的各种方法均可用于解析法的反演求参之中，因此严格的分类是不存在的。

Neuman[2]按求参使用的判别原则将反演方法分为两类，直接解法和间接解法。

直接解法是从联系水头和水文地质参数的偏微分方程或其离散形式出发，把水头的实际观测值作为已知数，把水文地质参数作为待求的未知数直接来解。具体方法有局部直接求逆法、数学规划法等。实际上，利用裘布衣公式或蒂姆公式计算渗透系数也是一种直接解法。直接解法由于计算上稳定性差，在实际计算中应用较少。

间接解法利用正问题的解是适定的这一重要性质，把解逆问题化为解一系列的正问题。其基本思想是先假设一组水文地质参数作为初值，用数值法计算水头。求出水头的计算值和实测值之间的误差，不断修改水文地质参数，反复计算水头，直到水头的计算值和实测值很好拟合时为止。此时的水文地质参数值就是所求的水文地质参数值。

设共有 n 个水文地质参数，用符号 p_1，p_2，…，p_n 来代表。同时假设在 j 号观测点上 i 时刻的计算水头为 $h_j^c(t_i)$，实测水头为 $h_j^r(t_i)$，比较的观测点总数为 N 个，比较的时间段为 M 个。通常用平均误差绝对值及平均误差平方和来表示拟合的程度。称为评价函数（也称目标函数）E。显然，E 是所给出的参数值的函数。评价函数的表达式如下：

$$E(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}|h_j^c(p_1,p_2,\cdots,p_n,t_i)-h_j^r(t_i)|/(M\cdot N) \quad (1-15)$$

$$E(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}[h_j^c(p_1,p_2,\cdots,p_n,t_i)-h_j^r(t_i)]^2/(M\cdot N) \quad (1-16)$$

由上面二式很易看出，目标函数愈小，拟合得愈好。只要改变水文地质参数 p_1，p_2，…，p_n 的值，可得出不同的目标函数值。解逆问题实质上就是寻找一组水文地质参数，使目标函数为极小。一般而言，(1-15) 式拟合判别准则最好，(1-16) 式拟合判别准则次之。

无论是直接方法或间接方法求参，最终的问题均归结为如何调整参数使得评价函数 E 达到极小值。到目前为止探索出的各种方法很多，William W-G Yeh 在 1986 年综述了参数反演方法。表 1-1 和表 1-2 是他列出的直接方法和间接方法参数识别的研究成果。从已有文献看，用于识别水文地质参数的最优化方法主要有：最速下降法、逐个修正法、Gauss-

表 1-1 直接法参数识别模型

应用条件	数值方法	识别参数	数据处理	信息或约束	反演方法	特性与评价	资料来源
二维、三维承压或非承压含水层，稳定流	有限差分	K，T	无	无			Nelson，1960，1961
二维、三维承压或非承压含水层，非稳定流		K，T	正交回归	二类边界条件	能量衰减法		Nelson，1968[12]
二维承压非稳定流		T，S	无	无	线性规划法		Kleinecke，1971[13]
二维稳定或非稳定流		T，S，Q	无	参数固定	误差流最小模	带数增加	Emsellem & de Marsily，1971[14]
二维承压稳定流	有限元	T	无		矩阵求逆法	$T(x, y)$用有限元表示	Frind & Pinder，1973[15]
二维承压稳定流，非均质	有限元	T_x，T_y	无	已知参数上下限	参数线性规划		Neuman，1973[2]
二维非稳定流，均质或非均质		T_x，T_y，S，Q	样条或拉格朗日插值	无	代数逼近		Sagar，et al.，1975[70]
二维承压非稳定流	有限差分	T，S，Q	无	无	线性规划或二次规划	比较5种不同的优化准则	Hefez，et al.，1975[17]
二维承压非稳定流	有限差分	T，S	无	限制T的局部变化	PDE直接积分法		Nutbrown，1975[16]
二维承压非稳定流	有限差分	T，S	无	初始估计值	罚函数法		Navarro，1977[18]
二维承压非稳定流	有限差分	T	Kriging方法	无	广义逆矩阵		Yeh，et al.，1983[19]

注：表中以时间顺序列出典型模型，K为渗透系数，T为导水系数，S为贮水系数，Q为源汇项。本表资料引自Yeh W W-G[11]，个别参考文献在书后未列。

Newton法、Powell方法、单纯形法、线性规划法、二次规划法、拟线性化方法和罚函数法等。

地下水系统的参数估计方法可分为方程误差准则法和输出误差准则法[11]，逆问题的这种分类方法最初来源于Neuman的直接方法和间接方法分类[2]。方程误差准则方法在一般的逆边值问题中将模型参数作为独立的变量。逆问题的求解方法包括能量衰减法[12]，线性规划法[13]，误差流最小模方法[14]，多目标决策过程[2]，Galerkin方法[15]，代数逼近法[12]，归纳法[16]，线性规划和二次规划法[17]，罚函数法[18]，结合Kriging法的广义逆矩阵法[19]。表1-1给出了方程误差准则法的一个总结。

输出误差准则法进行参数估计是基于逆问题的优化或控制模型。优化模型的目标是最小化输出误差。参数估计的目的是在参数上下限的范围内，尽可能地满足含水层系统的水量或水质方程。参数值不断地更新直到模型的响应最有效地逼近历史的观测数据。

基于拟线性化[20]的控制技术已用来求解含水层参数问题。算法包括拟线性化[21,22]，优化控制法[23,24]，Kalman滤波技术[25,26]。

表 1-2　间接方法参数识别模型

应用条件	数值方法	识别参数	信息或约束	反演方法	特性与评价	资料来源
二维承压非稳定流	有限差分	T，S	无	Gauss-Newton	为油藏	Jacquard & Jain, 1965[27]
二维承压非稳定流	有限差分	T，S	无	Gauss-Newton	提供参数估计的统计量（为油藏）	Jahns, 1966[30]
二维潜水非稳定流	有限差分	K，S	无	最速下降法	在混合计算机上计算	Vemuri & Karplus, 1969
一维潜水非稳定流	有限差分	D	无	拟线性化方法		Yeh & Tauxe, 1971[22]
二维非稳定流	有限差分	K，φ	参数上下限限制	Gauss-Newton 法，步长用二次插值确定		Thomas, et al., 1972[73]
一维越流含水层	有限差分	T，S，K'/b'	无	拟线性化	径向流	Marino & Yeh, 1973
二维非稳定流	有限差分	K，φ	无	最速下降法	参数考虑为位置的连续函数，用优化控制论获得梯度	Chen, et al., 1974[24]
二维非稳定流	有限差分	K，φ	参数上下限约束	最速下降法	为油藏，解伴随模型获得梯度	Chavent, et al., 1975[23]
一维潜水非稳定流	有限差分	D	无	拟线性化方法等	比较 5 种不同算法	Yeh, 1975a[29]
一维承压非稳定流	有限差分	D	参数上下限约束，线性约束	二次规划法	径向流	Yeh, 1975b[74]
二维承压非稳定流	有限元	T	结构约束	拟线性化方法	导水系数用有限元表示	Distefano & Rath, 1975[21]
一维问题	有限差分	K，φ	参数的均质和协方差矩阵	共轭梯度法，Gauss-Newton 法，Marquardt 法		Cavalas, et al., 1976
二维承压非稳定流	有限元	K	参数上下限约束	Gauss-Newton 法伴随 Rosen 梯度影射	渗透系数用有限元表示	Yoon & Yeh, 1976[32]
二维潜水非稳定流	有限差分	T	参数上下限约束	同上		Yeh & Yoon, 1976[32]
二维稳定流	有限元	K，Q	无	改进的 Gauss-Newton 法	给出模型和参数的统计特征	Cooley, 1977
一维问题		K，φ	参数的均质和协方差矩阵	Gauss-Newton 法	为油储，提供参数估计的协方差矩阵	Shah, et al., 1978[71]
二维稳定流	有限元	T	参数预估计附加在目标函数	Newton-Raphson 法	提供参数估计的协方差矩阵	Neuman & Yakowitz, 1979[33]
二维承压非稳定流	有限差分	T	参数上下限约束	Gauss-Newton 法伴随 Rosen 梯度影射	考虑参数随机性，确定优化参数分区，$T(x, y)$ 用有限元表示	Yeh & Yoon, 1981
二维稳定流	有限元	K，Q	参数预估计附加在目标函数	修正 Gauss-Newton 法	考虑预估计信息的两个类型	Cooley, 1982
稳定流		K	渗透系数和水头的点测量	最佳逼近和 Kriging 法	参数用随机场表示	Kitanidis & Vomvoris, 1983

续表

应用条件	数值方法	识别参数	信息或约束	反演方法	特性与评价	资料来源
二维承压非稳定流	有限元	K	无	Gauss-Newton 法伴随 Rosen 梯度影射	广义最小二乘法，考虑相关误差	Sadeghipour & Yeh, 1984
二维稳定流	有限差分	T	导水系数和水头的点测量值	协 Kriging 方法	参数作为随机场	Hoeksema & Kitanidis, 1984
二维承压非稳定流	有限元	T	无	Gauss-Newton 法	参数结构识别	Sun & Yeh, 1985 [72]
二维稳定流	解析解	T	导水系数和水头的点测量值	Gaussian 条件均值法	参数作为随机场	Dagan, 1985
有越流的二维稳定流	有限差分	T	导水系数和水头的点测量值		Gaussian 条件均值和 Kriging 估计的比较	Hoeksema & Kitanidis, 1985

注：表中按时间顺序列出典型模型，K'/b'为越流系数，D为扩散系数，φ为孔隙度，其他见表 1-1 注。本表资料引自 Yeh[11]，个别文献未列书后。

数学规划技术已广泛应用于水文地质和石油工程的参数识别问题。梯度寻求法[27]，多水平优化方法[28]，线性规划[29]，二次规划[29]，Gauss-Newton 法[30]，修正的 Gauss-Newton 法[31,32]，Newton-Raphson 方法[33]，共轭梯度法[34]等均属此类方法。输出误差准则法见表 1-2。

近年来，禁忌搜索算法、模拟退火算法、遗传算法、人工神经网络法等近代优化方法不断发展，其中部分研究成果已用来求解地下水逆问题。Harrouni 等[35]用简单二进制遗传算法和边界元结合进行地下水边界和参数识别，Morshed 等[36]用简单二进制遗传算法和神经网络结合进行渗透系数估计，金菊良等[37]用加速二进制遗传算法求解的泰斯（Thies）模型的逆问题，姚姚[38]分别用模拟退火方法和二进制遗传算法讨论了地球物理反演问题，石琳珂❶ 用二进制遗传算法讨论了地球物理反演问题，并对遗传算法进行了部分改进，这些方法均可对水文地质反演求参起到很好的引导作用。

❶ 石琳珂。地球物理遗传反演方法研究，中国地质大学博士论文，1996。

2 用解析法识别含水层参数

2.1 若干地下水流数学模型的解析解

对于地下水稳定流动，数学模型由偏微分方程和边界条件组成；而对于非稳定流动，除了偏微分方程和边界条件外，还需要有初始条件。在一般情况下，数学模型不存在解析解，也就是说我们无法获得水头关于流量、参数、空间和时间的表达公式。在这种情况下，我们只能用数值法，如有限单元法，有限差分法和边界元等方法去求某些事先给定的离散点上的解。然而对于一些方程形式简单、区域形状规则和定解条件单纯的数学模型，解析解还是存在的。总的来说，用解析解求参比较简单，不需要过多的数学知识；但是由于在推导解析解时对问题本身作了大量简化和假设，在实际中很难找到这些理想化条件，因而这在很大程度上限制了解析法在含水层参数识别中的应用。此外有些解析表达式也十分复杂，一般用手计算解决不了问题，而必须借助于计算机进行计算。例如 Chan 等人[39]利用积分变换导出的矩形含水层中降深的解析解。在推导这一问题的解析解时，Chan 等人所作的主要假设是：

1）含水层为矩形承压含水层，并且是均质各向同性的；

2）含水层中仅有一口抽水井；

3）抽水井为承压完整井，且为定流量抽水；

4）地下水的流动服从达西定律。

根据边界条件的不同，可分为六种情形（见图 2-1）

对于第一种情形，边界条件为 $x=0$ 时，$s=0$；$x=a$ 时，$s=h$；$y=0,b$ 时，$\frac{\partial s}{\partial y}=0$；初始条

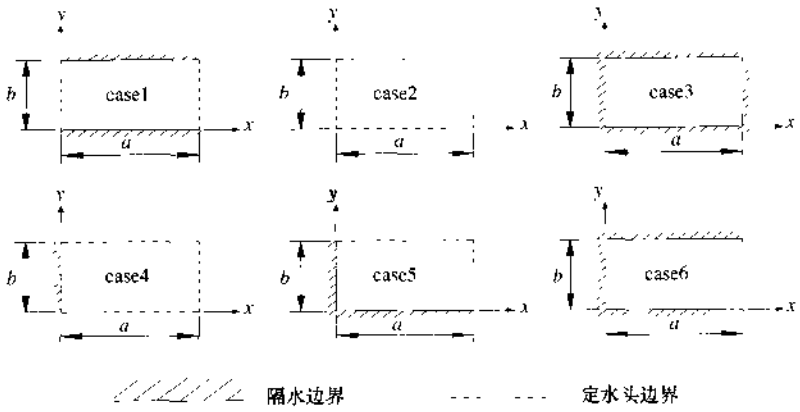


图 2-1 边界条件不同的六种含水层

件为 $s=\frac{xh}{a}$（s 为降深值）；解析表达式为（S 为贮水系数）

$$s_1(x,y,t)=s_1(x,y,\infty)-\frac{2Q}{abT}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-T\frac{\alpha_m^2 t}{S}\right)}{\alpha_m^2}\sigma(\alpha_m,x,\zeta)$$

$$-\frac{4Q}{abT}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-T\frac{\gamma_{m,n}^2 t}{S}\right)}{\gamma_{m,n}^2}\sigma(\alpha_m,x,\zeta)c(\beta_n,y,\eta) \tag{2-1}$$

稳态解 s_1（x，y，∞）为

$$s_1(x,y,\infty)=\frac{xh}{a}+\frac{Q}{aT}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma(\alpha_m,x,\zeta)}{\alpha_m\sinh(\alpha_m b)}\{\cosh[\alpha_m(b-|\eta-y|)]+$$

$$\cosh[\alpha_m(b-\overline{\eta+y})]\} \tag{2-2}$$

如果初始水头面为水平，则可令 $h=0$

对于第二种情形，解析表达式为

$$s_2(x,y,t)=s_2(x,y,\infty)-\frac{4Q}{abT}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}$$

$$\frac{\exp\left(-T\frac{\gamma_{m,n}^2 t}{S}\right)}{\gamma_{m,n}^2}\sigma(\alpha_m,x,\zeta)\ c\ (\beta_n,y,\eta) \tag{2-3}$$

稳态解 s_2（x，y，∞）为

$$s_2(x,y,\infty)=\frac{Q}{aT}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma(\alpha_m,x,\zeta)}{\alpha_m\sinh(\alpha_m b)}$$

$$\{\cosh[\alpha_m(b-|\eta-y|)]-\cosh[\alpha_m(b-\overline{\eta+y})]\} \tag{2-4}$$

对于第三种情形，解析表达式

$$s_3(x,y,t)=s_3(x,y)+\frac{Qt}{abS}-\frac{2Q}{abT}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-T\frac{\alpha_m^2 t}{S}\right)}{\alpha_m^2}c(\alpha_m,x,\zeta)-$$

$$\frac{2Q}{abT}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-T\frac{\beta_n^2 t}{S}\right)}{\beta_n^2}c(\beta_n,y,\eta)-$$

$$\frac{4Q}{abT}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-T\frac{\gamma_{m,n}^2 t}{S}\right)}{\gamma_{m,n}^2}c(\alpha_m,x,\zeta)c(\beta_n,y,\eta) \tag{2-5}$$

伪稳态解是

$$s_3(x,y)=\frac{bQ}{2aT}\left(\frac{2}{3}-\frac{|\eta-y|+\eta+y}{b}+\frac{\eta^2+y^2}{b^2}\right)+$$

$$\frac{Q}{aT}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c(\alpha_m,x,\zeta)}{\alpha_m\sinh(\alpha_m b)}\{\cosh[\alpha_m(b-|\eta-y|)]+\cosh[\alpha_m(b-\overline{\eta+y})]\} \tag{2-6}$$

对于第四种情形，解析表达式为

$$s_4(x,y,t)=s_4(x,y,\infty)-\frac{4Q}{abT}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-T\frac{\rho_{m,n}^2 t}{S}\right)}{\rho_{m,n}^2}$$

$$c(\lambda_m, x, \zeta)\sigma(\beta_n, y, \eta) \tag{2-7}$$

$$s_4(x, y, \infty) = \frac{Q}{bT}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(\beta_n, y, \eta)}{\beta_n \cosh(\beta_n a)}$$
$$\{\sinh[\beta_n(a - |\zeta - x|)] + \sinh[\beta_n(a - \overline{\zeta + x})]\} \tag{2-8}$$

对于第五种情形，解析表达式为

$$s_5(x, y, t) = s_5(x, y, \infty) - \frac{4Q}{abT}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}$$
$$\frac{\exp\left(-T\frac{\nu_{m,n}^2 t}{S}\right)}{\nu_{m,n}^2}c(\lambda_m, x, \zeta)c(\mu_n, y, \eta) \tag{2-9}$$

稳态解 s_5（x，y，∞）为

$$s_5(x, y, \infty) = \frac{Q}{aT}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c(\lambda_m, x, \zeta)}{\lambda_m \cosh(\lambda_m b)}$$
$$\{\sinh[\lambda_m(b - |\eta - y|)] + \sinh[\lambda_m(b - \overline{y + \eta})]\} \tag{2-10}$$

对于第六种情形，解析表达式为

$$s_6(x, y, t) = s_6(x, y, \infty) - \frac{2Q}{abT}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{T\lambda_m^2 t}{S}\right)}{\lambda_m^2}c(\lambda_m, x, \zeta)$$
$$-\frac{4Q}{abT}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\exp\left(-T\frac{\rho_{m,n}^2 t}{S}\right)}{\rho_{m,n}^2}c(\lambda_m, x, \zeta)c(\beta_n, y, \eta) \tag{2-11}$$

稳态解 s_6（x，y，∞）为

$$s_6(x, y, \infty) = \frac{Q}{aT}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c(\lambda_m, x, \zeta)}{\lambda_m \sinh(\lambda_m b)}$$
$$\{\cosh[\lambda_m(b - |\eta - y|)] + \cosh[\lambda_m(b - \overline{\eta + y})]\} \tag{2-12}$$

在公式（2-1）至式（2-12）中：s 为降深；S 为贮水系数；Q 为抽水量；T 为导水系数；t 为时间；x，y 为笛卡儿坐标；ζ，η 为抽水井坐标；Q 为抽水量；h 为在 $x=0$，a 处测压水头差；s_r（x，y，t）为在图 2-1 中的第 r 种情形下（$r=1$，2，3，4，5，6）t 时刻的降深；s_r（x，y，∞）为第 r 种情形下的稳态降深（$r\neq3$）；s_3（x，y）为第三种情形下的伪稳态降深；a，b 为含水层尺寸；m，n 为整数；$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$；$\beta_n = \frac{n\pi}{b}$；$\gamma_{m,n}^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$；$\lambda_m = \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}{a}$；$\rho_{m,n}^2 = \lambda_m^2 + \beta_n^2$；$\mu_n = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{b}$；$\nu_{m,n}^2 = \lambda_m^2 + \mu_n^2$；$\sigma(\alpha_m, x, \zeta) = \sin(\alpha_m x)\sin(\alpha_m \zeta)$；$c(\beta_n, y, \eta) = \cos(\beta_n y)\cos(\beta_n \eta)$；

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } m = n \\ 0 & \text{如果 } m \neq n \end{cases};$$

$$\delta(x-\zeta) = \begin{cases} \infty & \text{如果 } x = \zeta \\ 0 & \text{如果 } x \neq \zeta \end{cases}, \text{并且} \int_{\zeta-\epsilon_1}^{\zeta+\epsilon_2} f(x)\delta(x-\zeta)\mathrm{d}x = f(\zeta)。$$

表 2-1 列出的是若干常见的地下水流数学模型及其解析表达式[40]。

表 2-1　若干常见的地下水流数学模型及其解析表达式

序号	数学模型	解析解	附注
1	$\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$ $h(r,0)=h_0$ $\lim_{r\to\infty} h=h_0$ $\lim_{r\to 0} r\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{Q}{2\pi T}$	$h=h_0-\frac{Q}{4\pi T}\int_u^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx$ $u=\frac{r^2 S}{4Tt}$	Theis, 1935[48]
2	$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{K_s}{Tm_s}(H_s-h)=\frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$ $h(r,0)=h_0$ $\lim_{r\to\infty} h=h_0$ $\lim_{r\to 0} r\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{Q}{2\pi T}$	$h=h_0-\frac{Q}{4\pi T}\int_u^{\infty}\frac{e^{h(x)}}{x}dx$ $h(x)=-x-\frac{r^2}{4b^2 x}$ $u=\frac{r^2 S}{4Tt};\ b^2=\frac{Tm_s}{K_s}$	Hantush & Jacob(1935). K_s 为弱透水层渗透系数；m_s 为弱透水层厚度；H_s 为上伏含水层中的水头
3	$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}\right)=0$ $\lim_{r\to 0} r\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}=\frac{Q}{2\pi T}h=h_e, r=r_e$	$h=\frac{Q}{2\pi T}\ln\left(\frac{r}{r_e}\right)+h_e$	Theim(1906)
4	$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}h^2}{\mathrm{d}r}\right)=0$ $\lim_{r\to 0} r\frac{\mathrm{d}h^2}{\mathrm{d}r}=\frac{Q}{\pi T}$ $h=h_e, r=r_e$	$h^2=\frac{Q}{\pi K}\ln\left(\frac{r}{r_e}\right)+h_e^2$	稳态无压流动
5	$T_{xx}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+2T_{xy}\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}+T_{yy}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$ $-Q\delta(x-x_w,y-y_w)=S\frac{\partial s}{\partial t}$ $s(x,y,0)=0$ $s(\pm\infty,y,t)=0$ $s(x,\pm\infty,t)=0$	$s=\frac{Q}{4\pi\sqrt{T_{xx}T_{yy}}}\int_{-u_{xy}}^{\infty}\frac{e^{-u-u_{xy}}}{u_{xy}}du$ $u_{xy}=\frac{S}{4t}\left[\frac{T_{xx}y^2+T_{yy}x^2}{T_{xx}T_{yy}}\right]$	Papadopulos (1965) $x_w, y_w=0$
6	$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\frac{S_y}{K}\frac{\partial h}{\partial t}$ S_y 为比贮水系数 $h(x,0)=h_0(x)$ $h(0,t)=h_0(0)=0\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right\|_{x=L}=0$	$h(x,t)=h_0(x)\left[1+\frac{\beta K h_0(L)}{S_y L^2 t}\right]^{-1}$ $\alpha=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{3\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)}\approx 0.862;\beta=\frac{3}{2}\alpha^2\approx 1.12$	Boussinesq (1904)
7	$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{S_y}{K\bar{h}}\frac{\partial h}{\partial t}$ S_y 为比贮水系数 $h(x,0)=h_0, x>0$ $h(0,t)=D, t>0$	$h=D+(h_0-D)\mathrm{erf}(\alpha)$ $\alpha=\sqrt{\frac{S_y x^2}{4K\bar{h}t}}$	线性化的 Boussinesq 方程
8	$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{S_y}{K\bar{h}}\frac{\partial h}{\partial t}$ S_y 为比贮水系数 $h(x,0)=h_0, 0\leqslant x\leqslant\infty$ $Q=bt, x=0, t\geqslant 0$	$h=h_0-\frac{2}{3}\left\{\frac{bS_y}{(K\bar{h})^2}\right\}\left\{\frac{Kht}{S_y}\right\}^{\frac{1}{2}}-\left[(2\alpha^3+3\alpha)\right.$ $\left.(1-\mathrm{erf}(\alpha))-2(\alpha^2+1)\pi^{-\frac{1}{2}}e^{-\alpha^2}\right]$ $\alpha=\left(\frac{S_y x^2}{4Tt}\right)^{\frac{1}{2}}$	Edlemann (1947)

续表

序号	数学模型	解析解	附注
9	$Kh\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}+W(x)=S_y\dfrac{\partial h}{\partial t}$ $h(x,0)=h_0(x)$ $W(x)=W_0,\ \lvert x\rvert \leqslant L$ $W(x)=0,\ \lvert x\rvert >L$ $h(\pm\infty,t)=h_0$	$h=h_0+\dfrac{W}{2S_y}\int_0^t\left[\operatorname{erf}\left(\dfrac{L-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)+\operatorname{erf}\left(\dfrac{L+x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right]\mathrm{d}\tau$ $a=\left(\dfrac{S_y x^2}{4T}\right)^{\frac{1}{2}}$	Polubarinova-Kochina (1963)
10	$T\left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial h}{\partial r}\right)=S\dfrac{\partial h}{\partial t}+D_i S_y\int_0^t\dfrac{\partial h}{\partial t}e^{-D_i(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$ $h(r,0)=h_0$ $\lim\limits_{r\to\infty}h(r,t)=h_0$ $\lim\limits_{r\to 0}r\dfrac{\partial h}{\partial r}=\dfrac{Q}{2\pi T}$	$h=h_0-\dfrac{Q}{4\pi T}\int_0^\infty\dfrac{2}{x}\left[1-e^{u_1}\left(\cosh u_2+\dfrac{D_i N(1-x^2)t}{2u_2}\sinh u_2\right)\right]J_0\left(\dfrac{rx}{\eta D_i}\right)\mathrm{d}x$ $u_1=-\dfrac{D_i tN(1-x^2)}{2};\ u_2=\dfrac{D_i t\sqrt{N^2(1+x^2)^2-4Nx^2}}{2}$ $\eta=\sqrt{\dfrac{N-1}{N}}=\sqrt{\dfrac{S_i}{S+S_y}};\ D_i=\sqrt{\dfrac{T}{D_i S_y}}$	Boulton (1963)
11	$T\left(\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right)-\sum_{w=\kappa}Q_w(t)\delta(x-x_w,y-y_w)=S\dfrac{\partial h}{\partial t}$ $s(x,y,0)=0$ $\lim\limits_{x,y\to\infty}s(x,y,t)=0$	$s(x,y,t)=\dfrac{1}{4\pi T}\sum_{w=\kappa}\int_0^t Q_w(\tau)e^{r(\tau)}\mathrm{d}\tau$ $r(\tau)=-\dfrac{R^2S}{4T(t-\tau)}$ $R^2=[(x-x_w)^2+(y-y_w)^2]$	Maddock (1972)
12	$T\left(\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right)-Q\delta(x-\eta,y-\zeta)=S\dfrac{\partial s}{\partial t}$ $s(x,y,0)=s_0$ $\left(-K\dfrac{\partial s}{\partial x}+\dfrac{K_e}{m_a}S\right)\Big\rvert_{x=0}=0$ $0\leqslant y\leqslant b,\ t>0$ $\left(-K\dfrac{\partial s}{\partial x}+\dfrac{K_e}{m_a}S\right)\Big\rvert_{y=0}=0$ $0\leqslant x\leqslant a,\ t>0$ $s(a,y,t)=0,0\leqslant y\leqslant b,\ t>0$ $s(x,b,t)=0,0\leqslant x\leqslant a,\ t>0$	$s(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-t(\alpha_n^2+\beta_m^2)t}D_{nm}\cdot\sin\alpha_n(a-x)\sin\beta_m$ $(b-y)\cdot\left[-\dfrac{s_0}{\alpha_n\beta_m}(1-\cos\alpha_n a)(1-\cos\beta_m b)-q\sin\alpha_n(a-\eta)\cdot\sin\beta_m(b-\zeta)\dfrac{1}{\tau(\alpha_n^2+\beta_m^2)}(e^{\tau(\alpha_n^2+\beta_m^2)t}-1)\right]$ $D_{nm}^2=\dfrac{4(\alpha_n^2+1)(\beta_m^2+1)}{[a(\alpha_n^2+1)+1][b(\beta_m^2+1)+1]}$ $\tau=\dfrac{T}{S}$ $\alpha_n\cot\alpha_n a=-1$ $\beta_m\cot\beta_m b=-1$	Corapcioglu 等(1983)
13	$\dfrac{\partial h}{\partial t}=\dfrac{K}{S_y}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(h\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)$ $h(0,t)=h_1$ $h(x,0)=h_0$	$\int_0^\infty(H-1)\mathrm{d}\eta=-2\mu\left.\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\right\rvert_{\eta=0}$ $\eta=x\left[\dfrac{Kh_0}{S_y}t\right]$ $H=\dfrac{h}{h_0};\ \mu=\dfrac{h_1}{h_0}$ $h_1>h_0$	Tolikas 等(1984)

续表

序号	数学模型	解析解	附注
14	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right)+l\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}+\frac{R}{K}=0$ $h=h_0, x=0$ $h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}+lh=\frac{q_0}{K}, x=0$	$H=-uQ_0\frac{f(u)}{f(u_0)}, 0\leqslant aX\leqslant Q_0, u<0$ $H=uQ_0\frac{f(u)}{f(u_0)}, Q_0<aX, u\geqslant 0$ $f(u)=\lvert au^2+u+1\rvert^{-0.5}e^{0.5g(u)}$ $g(u)=2(4a-1)^{-0.5}\arctan\left[\frac{2au+1}{(4a-1)^{0.5}}\right], a>\frac{1}{4}$ $g(u)=(1-4a)^{-0.5}\ln\left[\frac{2au+1-(1-4a)^{0.5}}{2au+1+(1-4a)^{0.5}}\right], a<\frac{1}{4}$ $g(u)=\frac{-2}{(2au+1)}, a=\frac{1}{4}$ $Q_0=(i\frac{q_0}{h_0Kl})$ $H=\frac{h}{h_0}$ $X=\frac{lx}{h_0}$ $u_0=-\frac{1}{Q_0}$	Yates 等 (1985)
15	$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}+\frac{\alpha_{\theta\theta}}{r^2}\frac{\partial^2 s}{\partial\theta^2}+\alpha_{zz}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}+\left(\frac{\alpha_{r\theta}+\alpha_{\theta r}}{r}\right)\frac{\partial^2 s}{\partial r\partial\theta}+(\alpha_{rz}+\alpha_{zr})\frac{\partial^2 s}{\partial r\partial z}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial s}{\partial t}$ $s(r,\theta,z,0)=0$ $s(r,\theta,z,t)=0$ 当 $r\to\infty$ $\left(\frac{\partial s}{\partial r}+\frac{\alpha_{r\theta}}{r}\frac{\partial s}{\partial\theta}\right)+\gamma s=-Q$ $r=r_w$	$s(r,\eta,\zeta,t)=\frac{Q}{8\pi K_{rr}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos n\delta_{r\theta}(\zeta-\zeta),$ $\int_0^\infty C(k,r)C(k,r)\cdot$ $\left[\mathrm{e}^{-k(\eta-\eta')^{\frac{1}{2}}}\mathrm{erfc}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2-\eta'^2}{a(t-t')}\right)^{\frac{1}{2}}-K[a(t-t')]^{\frac{1}{2}}\right\}\right.$ $\left.-\mathrm{e}^{-k(\eta^2-\eta'^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{erfc}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2-\eta'^2}{a(t-t')}\right)^{\frac{1}{2}}+K[a(t-t')]^{\frac{1}{2}}\right\}\right]\mathrm{d}k$ $C(k,r)=$ $\frac{J_{n\delta r\theta}[kY'_{n\delta r\theta}-\beta Y_{n\delta r\theta}(kr_w)]-Y_{n\delta r\theta}(kr)[kJ'_{n\delta r\theta}-\beta J_{n\delta r\theta}(kr_w)]}{[kY'_{n\delta r\theta}(kr_w)-\beta Y_{n\delta r\theta}(kr_w)]^2+[kJ'_{n\delta r\theta}(kr_w)-\beta J_{n\delta r\theta}(kr_w)]^2}$ $k[Y'_{n\delta r\theta}(kr_w)+J'_{n\delta r\theta}(kr_w)]+\beta[J_{n\delta r\theta}(kr_w)+Y_{n\delta r\theta}(kr_w)]=0$ $\beta=\frac{K_{rr}}{S_s}$ $\zeta=\frac{1}{\delta_{r\theta}}[\theta-(\alpha_{r\theta}+\alpha_{\theta r})\ln r]$ $\eta=\frac{1}{\delta_{rz}}[z-(\alpha_{r\theta}+\alpha_{zr})r]$ $\delta_{ij}=[\alpha_{ij}-(\alpha_{ij}+\alpha_{ji})^2]^{1/2}, j=\theta,z, \alpha_{ij}=\frac{K_{ij}}{K_{rr}}, i,j=r,\theta,z$ γ 是给定的参数	Falade (1981)，J，为 s 阶 Bessel 函数，Y，修正的 s 阶 bessel 函数

（资料引自 willis 和 yeh[40]，1987）

2.2 用 Dupuit-Theim 公式识别含水层参数

Dupuit-Theim 公式[3,5,41,42]是最常见的一个求参公式，对于承压含水层中的径向流动推导该公式的假设条件是：

1）地下水流动符合达西定律并且为径向稳定流动；

2）地下水流动是二维承压的；

3）含水层均质、各向同性、水平、等厚、导水系数为常数；

4）抽水井位于圆形岛状含水层的中心（图 2-2）；

5）抽水井为完整井。

在上述假设条件下，可以写出 Dupuit-Theim 数学模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial h}{\partial r}\right)=0 & r_0 \leqslant r \leqslant R \\ 2\pi rT\dfrac{\partial h}{\partial r}=Q & r=r_0 \\ h(R)=H \end{cases} \tag{2-13}$$

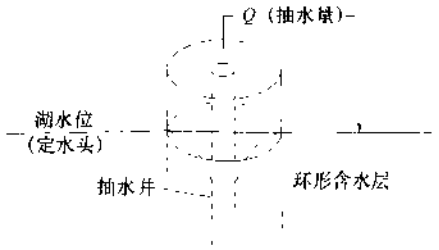


图 2-2　以抽水井为中心的环形含水层[142]

式中 r 是极坐标；T 是导水系数；Q 是井的抽水量；R 是从抽水井中心到圆形定水头边界的距离；H 是圆形定水头边界上的水头；r_0 是抽水井半径。

方程（2-13）的解是

$$h(r)=H+\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r}{R} \tag{2-14}$$

上式即为关于承压含水层的径向稳定流动的 Dupuit-Theim 公式。

对于无压含水层中的径向稳定流动，推导 Dupuit-Theim 公式的假设条件是：

1）含水层均质、各向同性、底板水平；

2）流动符合达西定律和 Dupuit-Forcheimer 假设；

3）渗流区域是以抽水井为中心的环形含水层（图 2-2），内边界条件为给定流量的，外边界条件是给定水头的；

4）抽水井为完整井。

在这些假设之下，可得如下数学模型

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial h^2}{\partial r}\right)=0 & r_0 \leqslant r \leqslant R \\ 2\pi rKh\dfrac{\partial h}{\partial r}=Q & r=r_0 \\ h(R)=H \end{cases} \tag{2-15}$$

求解这个数学模型就得到关于无压含水层中的 Dupuit-Theim 公式

$$h^2(r)=H^2+\frac{Q}{\pi K}\ln\frac{r}{R} \tag{2-16}$$

利用公式（2-14）和式（2-16）除了可以确定水头分布外，还可以用来识别含水层的导水系数 T 和渗透系数 K。以承压径向稳定流动为例，可以将公式（2-14）写成

$$T=\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{H-h}\ln\left(\frac{R}{r_0}\right) \tag{2-17}$$

如果在抽水试验时只有一个观测孔，设观测孔中的水位为 H，观测孔到抽水井中心的距离为 R，并设抽水井的水头和半径分别为 h_w 和 r_w，将这些值代入公式（2-17），得：

$$T=\frac{Q}{2\pi}\frac{1}{H-h_w}\ln\left(\frac{R}{r_w}\right) \tag{2-18}$$

如果在抽水试验时有两个观测孔，两个观测孔中的水位和它们到抽水孔中心的距离分

别为 h_1 和 h_2，r_1 和 r_2，则由公式（2-17）得：

$$T = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{h_1 - h_2}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \tag{2-19}$$

如果在抽水试验时有多个观测孔，则可以用施鑫源[43]提出的用最小二乘法求导水系数 T。对于无压径向流动完全可以用采用类似方法计算渗透系数 K。

实际中遇到的地下水流问题很难完全满足推导 Dupuit-Theim 公式提出的假设条件，因此采用该公式计算的参数是近似的。

2.3 用 Theis 公式识别含水层参数

推导 Theis 公式的假设条件是：

1）流动符合达西定律，并且是二维承压的；

2）含水层均质、各向同性、水平、等厚，在平面上无限延伸；

3）含水层的顶、底板为隔水层；

4）水头下降时，水从孔隙介质中瞬时释出，贮水系数为常数；

5）初始水头面水平；

6）抽水井为承压完整井，抽水流量保持不变。

在这些假设条件的基础上，可以建立以下数学模型：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial s}{\partial r}\right) = \dfrac{S}{T}\dfrac{\partial s}{\partial t} & r > 0, t \geqslant 0 \\ s(r,0) = 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty} 2\pi r T\dfrac{\partial s}{\partial r} = Q \\ \lim\limits_{r\to\infty} s(r,t) = 0 \end{cases} \tag{2-20}$$

这个数学模型的解析解是

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W(u) \tag{2-21}$$

$$u = \frac{Sr^2}{4Tt} \tag{2-22}$$

$$W(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-y}}{y}dy = -0.577216 - \ln u + u - \frac{u^2}{2.2!} + \frac{u^3}{3.3!} - \cdots \tag{2-23}$$

式中 s 为降深；Q 为井的不变抽水量；T 为导水系数；$W(u)$ 为井函数。

式（2-21）即 Theis 公式，其中包含导水系数 T、贮水系数 S 和抽水量 Q，当它们的数值给定时，渗流场中任何一点任何时刻的降深 $s(r, t)$ 均可由公式（2-21）算出。

Theis 公式的重要用途之一就是根据定流量抽水试验资料反求含水层的水文地质参数。这些参数包括导水系数 T 和贮水系数 S，常用的求参方法是配线法和直线法。有关这类求参方法的详细说明和计算实例可参阅薛禹群[5]，陈崇希[44]，孙讷正[3]，Lohman [42]和 Walton [45]等人的著作。

除了用直线法和配线法求解含水层参数外，我们还可以用最优化方法或遗传算法等来计算含水层水文地质参数。为此我们将泰斯模型转化为以下极小化问题：

$$\begin{cases} \min E(T,S) = \sum_{i=1}^{m} [s_i^c(T,S) - s_i^0]^2 \\ T^a \leqslant T \leqslant T^b \\ S^a \leqslant S \leqslant S^b \end{cases} \tag{2-24}$$

式中 E 为目标函数；T 为含水层导水系数；S 为贮水系数；$[T^a, T^b]$ 为 T 的取值区间；$[S^a, S^b]$ 为 S 的取值区间；s_i^0 为某时空点的地下水降深观测值；$s_i^c(T, S)$ 为某时空点的地下水降深计算值，可用 Theis 公式（2-21）计算。

对于具有简单边界条件的情况，可先用映射原理去掉含水层边界，再利用叠加理论计算出降深 s_i^c。例如对于矩形含水层，从理论上讲，除了利用 1.1 节的公式去计算降深 $s_i^c(T, S)$ 外，还可以将抽水井对边界作无穷次映射，把矩形含水层转化为无限含水层，然后将所有的虚、实井在 P（x，y）点所产生的降深叠加。

$$s(p,t) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(p,t) \tag{2-25}$$

在实际计算中，当然不可能作无穷次映射，映射次数总是有限的。必须指出，在过去的某些计算中，由于映射次数不够，造成计算结果误差很大，甚至结果完全不能使用。尤其是在研究大流量、大降深的矿井疏干问题时，更要慎重处理。

我们建议采用试算法来确定映射次数。设第 n 次映射叠加的降深为 s_n，第 $n+1$ 次映射时的叠加降深为 s_{n+1}，要求满足

$$|s_n - s_{n+1}| \leqslant \varepsilon \tag{2-26}$$

式中 ε 为一事先给定的足够小的正数。

一般说来，满足上述准则（2-26）要求的映射井的个数相当多，使计算工作量很大，不可能用手算完成，但可用计算机处理。矩形含水层中非稳定流动的计算机程序较简单，其中主要是编写井函数的过程，例如可以在程序中直接利用泰斯井函数的过程。

2.4 用 Hantush-Jacob 公式识别含水层参数

Hantush-Jacob 公式[45]是描述越流含水层系统地下水流动的重要公式，推导该公式所作的假设是：

1）主含水层和相邻含水层的初始水头面水平；

2）主含水层和弱透水层中地下水的流动服从达西定律；

3）主含水层为均质、等厚、平面上无限扩展的承压含水层；

4）弱透水层为均质等厚平面上无限延伸的，弱透水层中的流动是垂直的，并且从中释出的弹性贮量可以忽略不计；

5）主含水层中的流动为二维的水平径向流动；

6）抽水井为完整井，且在抽水过程中抽水量保持不变。

2.4.1 数学模型

第一种情形：如在上部含水层中抽水，下部含水层的水头保持不变时，用极坐标形式表示，数学模型为：

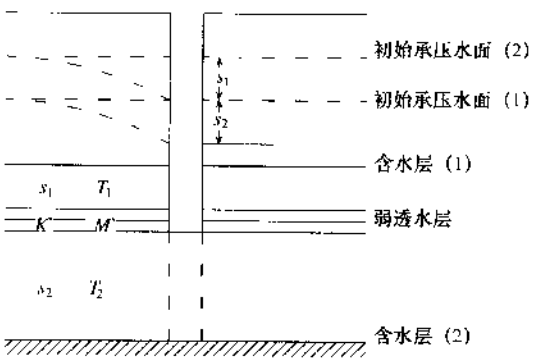


图 2-3 越流含水层系统

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial h}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial s}{\partial r}\right) = \dfrac{S}{T}\dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{s}{B^2} \\ s(r,0) = 0 \\ \lim\limits_{r\to\infty} s(r,t) = 0 \\ \lim\limits_{r\to 0} 2\pi r T\dfrac{\partial s}{\partial r} = -Q \end{cases} \tag{2-27}$$

式中：T 为导水系数；S 为贮水系数；Q 为流量；B 为越流因子；s 为与抽水孔相距为 r 的观测点的降深。

第二种情形：在下部含水层中以定流量 Q 抽水，上部含水层水位同时发生变化，含水层系统如图 2-3，其数学模型为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 s_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_1}{\partial r} - \frac{1}{B_1^2}(s_1 - s_2) = \frac{S_1}{T_1}\frac{\partial s_1}{\partial t} \\ &\frac{\partial^2 s_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_2}{\partial r} + \frac{1}{B_1^2}(s_1 - s_2) = \frac{S_2}{T_2}\frac{\partial s_2}{\partial t} \\ &s_1(r,0) = s_2(r,0) = 0 \\ &s_1(\infty,t) = s_2(\infty,t) = 0 \\ &\lim_{r\to 0} r\frac{\partial s_2}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi T_2} \\ &\frac{\partial s_1}{\partial r}(0,t) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-28}$$

式中下标“1”表示上部含水层，“2”表示下部含水层。

2.4.2 数学模型的解

利用傅氏变换可得数学模型（2-27）的解

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W\left(u,\frac{r}{B}\right)$$

运用拉普拉斯和汉克尔变换可得数学模型（2-28）的解。对于较长时间，当 $\dfrac{T_1 t}{S_1 B_1^2} > \dfrac{T_1}{S_2}$，即 $\dfrac{a_1 t}{B_1^2} > \dfrac{5(|a_2 - a_1|)}{a_2\delta_1}$ 时，方程（2-28）的近似解为

$$s_1 = \frac{Q_2}{4\pi(T_1 + T_2)}[w(u_v) - F(u_v,\beta)] \tag{2-29}$$

$$s_2 = \frac{Q_2}{4\pi(T_1 + T_2)}\left[w(u_v) + \delta_1 F(u_v,\beta) + \frac{(a_2 - 1)(1 + \delta_1)}{(a_2 + 1)q_v}e^{-u_v}(1 - e^{-u_v})\right] \tag{2-30}$$

式中：$u_v = \dfrac{r^2}{4a_v t}$；$\beta^2 = \beta_1^2(1 + \delta_1) = \beta_2^2(1 + \delta_2)$；$\delta_1 = \dfrac{T_1}{T_2}$；$\delta_2 = \dfrac{T_2}{T_1}$；$q_v = a_v t\left(\dfrac{1}{B_1^2} + \dfrac{1}{B_2^2}\right)$；$a_v = \dfrac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)}$；$\beta_1 = \dfrac{r}{B_1}$；$\beta_2 = \dfrac{r}{B_2}$；$a_2 = a_2/a_1$；$W(u)$ 为泰斯井函数；F

(u_e, β) 为不考虑弱透水层贮存水释放时的越流含水层的井函数。

2.4.3 参数识别方法

对于越流含水层系统，在相邻含水层中水头保持不变的情况下，待识别的水文地质参数是主含水层的导水系统 T、贮水系数 S 和越流因子 B。当相邻含水层中的水头同时发生变化时，待识别的水文地质参数为 T_1，T_2，S_1，S_2，以及 B_1 和 B_2。原则上讲，这些参数都可以用配线法来确定，但是类似于用 Theis 公式求参在群孔抽水的条件下和含水层具简单直线边界条件下，例如对于扇形含水层，半无限含水层，象限含水层、带状含水层和矩形含水层，则首先必须通过映射去掉含水层边界，然后用公式（2-21），式（2-22）和式（2-23）算出的降深进行叠加，再利用类似于公式（2-24）所提出的方法确定含水层参数。不过此时的目标函数与约束条件分别为

$$\begin{cases} \min E(T,S,B) = \sum_{i=1}^{m} [s_i^c(T,S,B) - s_i]^2 \\ T^a \leqslant T \leqslant T^b \\ S^a \leqslant S \leqslant S^b \end{cases} \tag{2-31}$$

和

$$\begin{cases} \min E(T_1,T_2,S_1,S_2,B_1,B_2) = \sum_{i=1}^{m} [s_i^c(T_1,T_2,S_1,S_2,B_1,B_2) - s_i]^2 \\ T_1^a \leqslant T_1 \leqslant T_1^b \\ T_2^a \leqslant T_2 \leqslant T_2^b \\ S_1^a \leqslant S_1 \leqslant S_1^b \\ S_2^a \leqslant S_2 \leqslant S_2^b \\ B_1^a \leqslant B_1 \leqslant B_1^b \\ B_2^a \leqslant B_2 \leqslant B_2^b \end{cases} \tag{2-32}$$

2.4.4 应用例题

某矿区[46]分布的主要含水层为寒武系、奥陶系厚层灰岩，上石炭统太原组薄层灰岩含水层。A_1 槽煤底板距太原群一组灰岩 12～18 m。在 A_1 组煤的开采过程中，下部太原组灰岩水的突水是威胁煤矿安全开采的主要含水层。据放水和突水资料，太原组含水层与寒武系、奥陶系灰岩含水层之间水力联系密切。例如在奥陶系灰岩含水层中抽水时，太原组含水层的水位有明显下降，最大日降幅达 0.6 m/d。在太原组含水层中抽水时，初期奥陶系灰岩的水位虽然通常保持不变，但到后期水位也有显著变化，说明有水力联系。由于寒武系、奥陶系灰岩相对于太原组含水层来说，厚度大，水量丰富，所以可以认为太原组的突水和疏干降压过程中奥陶系灰岩的地下水以“越流”形式补给太原组含水层。

另外，据野外调查及水文地质试验资料，整个矿区在平面上，东南部为断层上盘第三系地层与下盘寒武系地层接触，第三系阻隔地下水对矿区的补给，构成东南部的隔水边界。西南部为中、上寒武统出露区，寒武系灰岩水流向矿区补给奥陶系灰岩含水层，形成补给边界。

西北部为阻水断层带，在模型中处理为隔水边界。东北部奥陶系灰岩埋藏很深，计算中以灰岩埋深 -1200 m 的地面投影作为隔水边界。

概化后的模型为一矩形含水层，矩形长边为 12430 m，短边为 2500 m。在矩形含水层中有四个抽水孔以定流量抽水，流量分别为 $Q_1 = 294\ m^3/h$，$Q_2 = 390\ m^3/h$，$Q_3 = 290\ m^3/h$，$Q_4 = 140\ m^3/h$（见图 2-4）。

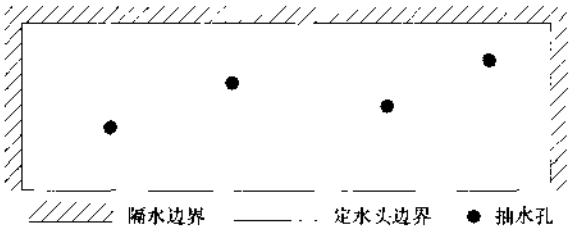


图 2-4　某矿区概化模型图

根据矿区的抽水试验资料，选择 14 个观测孔，一个时段的降深，用参数逐个修正法进行计算，具体计算过程见图 2-5，计算的水文地质参数见表 2-2。

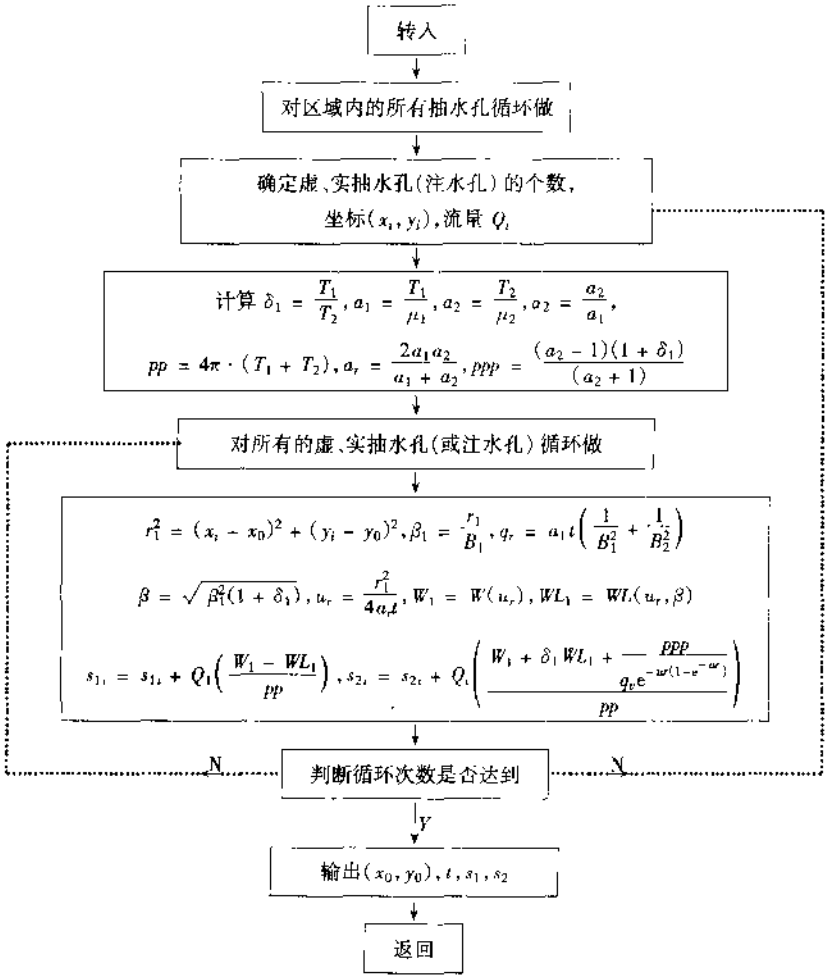


图 2-5　越流计算框图

表 2-2 某矿区水文地质参数识别结果

参　　数	参 数 值
太原群—组灰岩导水系数 T_1 (m^2/d)	17
奥陶系灰岩导水系数 T_2 (m^2/d)	280
越流因子 B_1 (m)	2550
越流因子 B_2 (m)	4000
太原群—组灰岩的贮水系数 S_1	8×10^{-6}
奥陶系灰岩贮水系数 S_2	1.2×10^{-4}

对于矩形含水层（包括无限带状含水层，半无限带状含水层）正确地确定映射次数有重要意义。映射次数不够，可能导致完全错误的计算结果，映射次数太多，则造成不必要的计算工作量增大，确定适当的映射次数至关重要。为了满足计算要求，映射井的个数通常是很多的，因为除了计算工作量大以外，各类井函数的值也无法从现有的井函数表中查找，故必须用计算机计算。程序设计一般比较简单，关键是编写各类井函数的子程序。

2.5 用定降深井流试验识别含水层参数

实践表明，在许多情况下采用定降深的井流试验，能够达到多快好省地测定含水层水文地质参数的目的。例如，在某些自流盆地中，在某些矿井下，由于井孔所处的位置较低，下部承压含水层中的地下水往往具有“自喷”的特点。如果在这种情况下，先把井口关闭一定时间，使承压水位恢复至“静止水位”，然后突然将井口打开，则在一定的时间内，井流即具有降深保持不变、流量随时间自然减少的性质。鉴于在许多地区具有进行定降深井流试验的条件，所以研究用这种试验方法测定含水层的水文地质参数，具有一定的价值。

2.5.1 数学模型及其解析解

图 2-6 表示打入承压含水层中的一个自喷井[42]。假设：①含水层为均质、等厚、各向同性、无越流存在的平面上无限大的承压含水层；②“自喷”井为完整井，地下水的流动服从达西定律；③地下水的释出与水头降低同时发生；④试验前承压水面为水平；⑤试验过程中，井水位的降深保持不变。

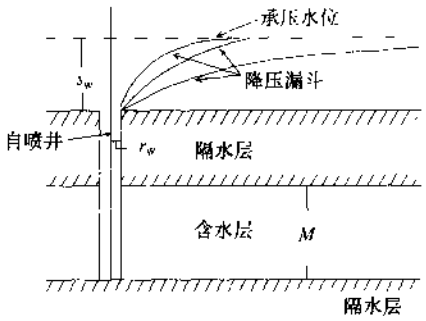


图 2-6 承压含水层中的一个自喷井

在上述假设条件下，用极坐标表示地下水非稳定流动的偏微分方程及初始条件和边界条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial s}{\partial r}=\dfrac{S}{T}\dfrac{\partial s}{\partial t} & \\ s(r,0)=0 & (r_w<r<\infty,t=0)\\ s(\infty,t)=0 & (t>0)\\ s(r_w,t)=s_w & (t>0)\end{cases}\tag{2-33}$$

用一个数学上变强度的汇点代替“自喷”井，这个问题的解为

$$Q = 2\pi T s_w \frac{4\alpha}{\pi}\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2}\left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{Y_0(x)}{J_0(x)}\right)\right]dx \tag{2-34}$$

式中：

$$\alpha = \frac{Tt}{Sr_w^2} \tag{2-35}$$

Q 为“自喷”井涌水量；s_w 为“自喷”井中降深；r_w 为“自喷”井半径；t 为“自喷”井开始涌水后的时间；T 为导水系数；S 为贮水系数；$J_0(x)$ 为第一类零阶贝塞尔函数；$Y_0(x)$ 为第一类零阶贝塞尔函数。

令

$$G(\alpha) = \frac{4\alpha}{\pi}\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2}\left[\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}\left(\frac{Y_0(x)}{J_0(x)}\right)\right]dx \tag{2-36}$$

则（2-34）式可写成

$$T = \frac{Q}{2\pi s_w G(\alpha)} \tag{2-37}$$

公式（2-36）不易直接积分，但可用一个积分和式代替并通过数值求积法求得。对于一定范围内的 α 和 $G(\alpha)$ 值见图 2-7。

假设图 2-6 所示的承压含水层下部有垂直越流补给。在这种情况下如果弱透水层的压缩性很小，从中释出的水量可以忽略不计，并且弱透水层下伏的承压含水层的水位，在定降深井流试验过程中基本上不受影响，则地下水非稳定流动的偏微分方程及初始条件和边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial s}{\partial r} - \dfrac{s}{B^2} = \dfrac{S}{T}\dfrac{\partial s}{\partial t} & \\ s(r,0) = 0 & (t = 0) \\ s(\infty,t) = 0 & (t > 0) \\ s(r_w,t) = s_w & (t > 0) \end{cases} \tag{2-38}$$

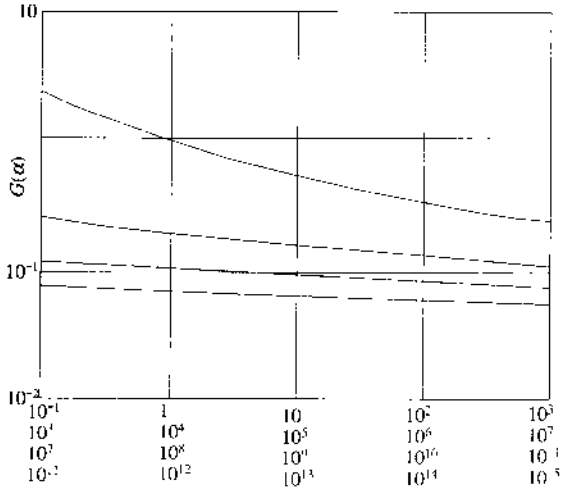


图 2-7　$G(\alpha)$ 对 α 的对数关系曲线

仍用一个数学上变强度的汇点代替“自喷”井，则这个问题的解是：

$$Q = 2\pi Ts_w\left\{\left(\frac{r_w}{B}\right)\frac{K_1\frac{r_w}{B}}{K_0\frac{r_w}{B}} + \frac{r}{\pi^2}\exp\left[-\alpha\left(\frac{r_w}{B}\right)^2\right]\times\int_0^\infty \frac{u\exp(-\alpha u^2)}{J_0^2(u)+r_0(u)}\cdot\frac{du}{u^2+\frac{r_w}{B}}\right\} \tag{2-39}$$

式中：

$$\alpha = \frac{Tt}{Sr_w^2} \tag{2-40}$$

$$\frac{r_w}{B} = \frac{r_w}{\sqrt{\frac{T}{(K'/m')}}} \tag{2-41}$$

k'为弱透水层的渗透系数；m'为弱透水层的厚度；K_1为第二类一阶修正贝塞尔函数；K_0为第二类零阶修正贝塞尔函数；u为积分变量；其他符号同前。

令

$$G\left(\alpha,\frac{r_w}{B}\right) = \left(\frac{r_w}{B}\right)\frac{K_1\frac{r_w}{B}}{K_0\frac{r_w}{B}} + \frac{r}{\pi^2}\exp\left[-\alpha\left(\frac{r_w}{B}\right)^2\right]\times\int_0^\infty \frac{u\exp(-\alpha u^2)}{J_0^2(u)+Y_0(u)}\cdot\frac{du}{u^2+\left(\frac{r_w}{B}\right)^2}$$

则（2-39）式可写成

$$T = \frac{Q}{2\pi s_w G\left(\alpha,\frac{r_w}{B}\right)} \tag{2-42}$$

对于一定范围的α、$\frac{r_w}{B}$和$G\left(\alpha,\frac{r_w}{B}\right)$值见图2-8。

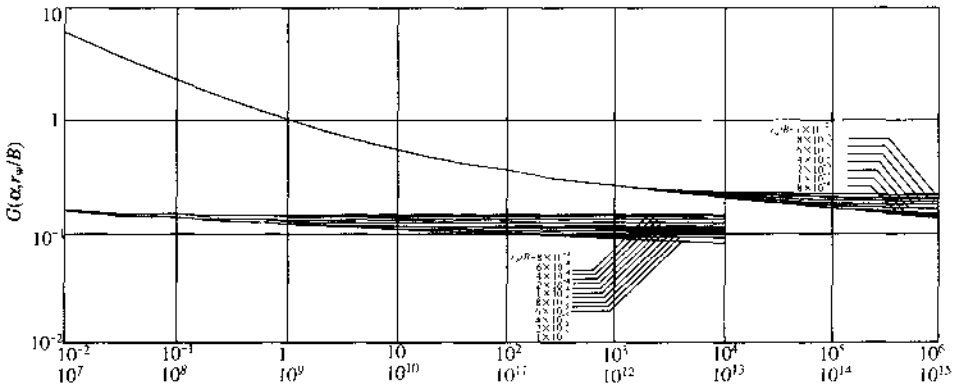


图2-8　α对$G\left(\alpha,\ r_w/B\right)$对数关系曲线

2.5.2　含水层参数计算方法

根据定降深井流试验所获得的资料，一般采用配线法或直线法计算含水层的水文地质参数：导水系数T，贮水系数S和弱透水层的渗透系数K'。

2.5.2.1 配线法

(1) 对于无越流补给的定降深井流试验

图 2-7 是在对数纸上绘出的 α 和 $G(\alpha)$ 的关系曲线，以下简称典型曲线。根据试验测定的数据，在同级（图 2-7 为四级对数纸）透明对数纸上绘出 Q 对 t 或 $\frac{Q}{s_w}$ 对 $\frac{t}{r_w^2}$ 的关系曲线，以下简称实测曲线。将实测曲线图重叠在典型曲线图上，使 $G(\alpha)$ 轴与 Q 轴或 $\frac{Q}{s_w}$ 保持平行，α 轴与 t 轴或 $\frac{t}{r_w^2}$ 轴保持平行，移动实测曲线图，找出实测曲线与典型曲线最好的重合位置后，任意选一点作为匹配点（注意该点不一定在曲线上），将匹配点的四个坐标 $G(\alpha)$、α、Q、t 或 $G(\alpha)$、α、$\frac{Q}{s_w}$、$\frac{t}{r_w^2}$ 分别代入公式 (2-35) 和 (2-37)，算出导水系数 T 和贮水系数 S。

(2) 对于有越流补给的定降深井流试验

图 2-8 是在对数纸上绘出 α 对 $G\left(\alpha, \frac{r_w}{B}\right)$ 的典型曲线。根据试验测定的数据，绘出 Q 对 t 的实测曲线。进行配线后，选择一个对计算简便的匹配点，将该点的四个坐标 α、$G\left(\alpha, \frac{r_w}{B}\right)$、$Q$ 和 t 以及 $\frac{r_w}{B}$ 依次代入公式 (2-42)、(2-40) 和 (2-41)，算出含水层的导水系数 T，贮水系数 S 以及弱透水层的渗透系数 K'。

2.5.2.2 直线法

对于无越流补给的定降深井流试验，可采用更为简便的直线法。

可以证明，当 t 值比较大时，函数 $G(\alpha)$ 近似等于函数 $2/W(u)$，即

$$G(\alpha) = \frac{2}{W(u)} \tag{2-43}$$

其中 $W(u)$ 为泰斯井函数，$u = \frac{r_w^2 S}{4Tt}$ (2-44)

将公式 (2-43) 代入公式 (2-37)，得

$$T = \frac{QW(u)}{4\pi s_w} \tag{2-45}$$

如果 $u \leqslant 0.01$，则上式可改写成

$$T = \frac{Q}{4\pi s_w}\left[-0.577216 - \ln\frac{r_w^2 S}{4Tt}\right] = \frac{2.30Q}{4\pi s_w}\lg\frac{2.25Tt}{r_w^2 S} \tag{2-46}$$

公式 (2-46) 也可以写成

$$\frac{s_w}{Q} = \frac{2.30}{4\pi T}\left[\lg\frac{2.25T}{S} + \lg\frac{t}{r_w^2}\right] \tag{2-47}$$

因为对于给定的含水层试验而言，T、S、s_w 和 r_w 均为常数，所以公式 (2-47) 表明，s_w/Q 与 $\lg t/r_w$ 为线性关系。

对于 s_w/Q 和 $\lg t/r_w^2$ 的导数，得

$$T = \frac{2.30}{4\pi \mathrm{d}(s_w/Q)/\mathrm{d}(\lg t/r_w^2)} \tag{2-48}$$

类似地，公式 (2-46) 也可以写成

$$\frac{1}{Q} = \frac{2.30}{4\pi Ts_w}\left[\lg\frac{2.25T}{Sr_w^2} + \lg t\right] \tag{2-49}$$

可见 $1/Q$ 与 $\lg t$ 亦为线性关系。取 $1/Q$ 对 $\lg t$ 的导数，得

$$T = \frac{2.30}{4\pi s_w[\mathrm{d}(1/Q)/\mathrm{d}(\lg t)]} \tag{2-50}$$

如上所述，s_w/Q 对 t/r_w^2 和 $1/Q$ 对 $\lg t$ 均为线性关系，因此公式（2-46）和公式（2-50）中的 $\mathrm{d}(s_w/Q)/\mathrm{d}(\lg t/r_w^2)$ 和 $\mathrm{d}(1/Q)/\mathrm{d}(\lg t)$ 可分别用 $\Delta(s_w/Q)/\Delta(\lg t/r_w^2)$ 和 $\Delta(1/Q)/\Delta(\lg t)$ 代替，这样可得

$$T = \frac{2.30}{4\pi[\Delta(s_w/Q)/\Delta(\lg t/r_w^2)]} \tag{2-51}$$

和

$$T = \frac{2.30}{4\pi s_w[\Delta 1/Q/\Delta(\lg t)]} \tag{2-52}$$

在半对数纸上，绘出 s_w/Q（线性尺度）对 $\lg(t/r_w^2)$ 的直线，或绘出 $1/Q$（线性尺度）对 $\lg t$ 的直线，求出 $\Delta(s_w/Q)$，$\Delta(\lg t/r_w^2)$ 或 $\Delta(1/Q)$、$\Delta(\lg t)$ 值，代入公式（2-51）或（2-52）即可算出导水系数 T。

如果将 $\Delta s_w/Q$ 对 $\lg t/r_w^2$ 的关系直线进行外推，使其和 t/r_w^2 轴相交，设交点为（t/r_w^2）。则

$$S = 2.25T\left(\frac{t}{r_w^2}\right) \tag{2-53}$$

有时为了避免由于过长地外推 s_w/Q 对 $\lg t/r_w^2$ 的关系直线所造成的困难，可以采用以下公式求贮水系数。

根据公式（2-46），得

$$2.25\frac{Tt}{r_w^2 S} = \lg^{-1}\left[\frac{4\pi Ts_w}{2.30Q}\right]$$

$$S = \frac{2.25Tt/r_w^2}{\lg^{-1}\left[\frac{4\pi Ts_w}{2.30Q}\right]} \tag{2-54}$$

由公式（2-51），得

$$\frac{4\pi T}{2.30} = \frac{\Delta(\lg t/r_w^2)}{\Delta(s_w/Q)} \tag{2-55}$$

将公式（2-55）代入公式（2-54），得

$$S = \frac{2.25Tt/r_w^2}{\lg^{-1}\left[s_w/Q \times \frac{\Delta(\lg t/r_w^2)}{\Delta(s_w/Q)}\right]} \tag{2-56}$$

当 $\Delta(\lg t/r_w^2) = 1$ 时，则

$$S = \frac{2.25Tt/r_w^2}{\lg^{-1}[s_w/Q/\Delta(s_w/Q)]} \tag{2-57}$$

2.5.3 实例

我们利用河北省峰峰矿区王风矿 2709 孔所作的一次定降深井流试验的实测数据（表

2-3)作为例子进行计算[47]。2709孔原为井下－250水平的一个疏干放水孔。该孔打入上石炭统太原组大青灰岩裂隙含水层．根据过去的水文地质资料，大青灰岩含水层在试验区分布稳定，厚约5 m。

表2-3　峰峰王凤矿2709孔定降深井流试验实测数据

观测时间	开始试验后的时间 / min	涌水量 / $m^3 \cdot min^{-1}$	$s_w \cdot Q^{-1}$ / $m^2 \cdot min^{-1}$	$t \cdot r_w^{-2}$ / $min \cdot m^{-2}$
9：12	2	3.12	87.82	1163
9：16	6	2.97	92.26	3482
9：20	10	2.83	96.82	5810
9：24	14	2.76	99.26	8125
9：28	18	2.63	104.2	10460
9：32	22	2.56	107.0	12770
9：36	26	2.52	108.9	15090
9：40	30	2.48	110.5	17430
9：45	35	2.43	112.7	20320
9：50	40	2.39	114.8	23220
9：55	45	2.36	116.3	26110
10：00	50	2.34	117.1	29030
10：05	55	2.32	118.1	31950
10：10	60	2.29	119.8	34800
10：15	65	2.29	119.8	37760
10：20	70	2.26	121.6	40670
10：30	80	2.23	123.1	46450
10：40	90	2.20	124.9	52250

注：$r_w = 0.0415$ m，$s_w = 274$ m。

试验前一星期关闭了2709孔周围的所有打入大青灰岩含水层的放水孔，使水位恢复至“静止水位”后开始进行试验。

本次定降深井流试验从上午9:10开始，历时90 min。

根据试验过程中对观测孔水位的观测，试验开始18 min以后，边界产生了明显的影响，因此在计算含水层的水文地质参数时，只能利用18 min以前的资料。

（1）用直线法计算含水层的水文地质参数

图2-9乃是根据表2-2的数据绘出的 s_w/Q 和 t/r_w^2 的半对数关系图。从这张图上求出 $\Delta(s_w/Q)$、s_w/Q 和 t/r_w^2，依次代入公式（2-51）和（2-57），得

$$T = \frac{2.3 \times 1440}{4 \times 3.14 \times [100.4 - 85.2]_{m^2/d}} = 17.4\ m^2/d$$

$$S = \frac{2.25 \times 10^4 \times 17.4}{\lg^{-1}[100.4/15.2] \times 1440} = 6.7 \times 10^{-5}$$

（2）用配线法计算含水层的水文地质参数

根据表2-2的实测数据，绘出 Q 对 t 的关系曲线（图2-10），然后把它重叠在图2-7上，利用前述的配线法，选择一个适当的匹配点 A。将匹配点 A 的四个坐标 $G(\alpha)$、α、t 和 Q，即 $G(\alpha) = 10^{-1}$、$\alpha = 10^6$、$t = 2.2$ 和 $Q = 2.33$，依次代入公式（2-37）和式（2-35），算出含水层的水文地质参数。

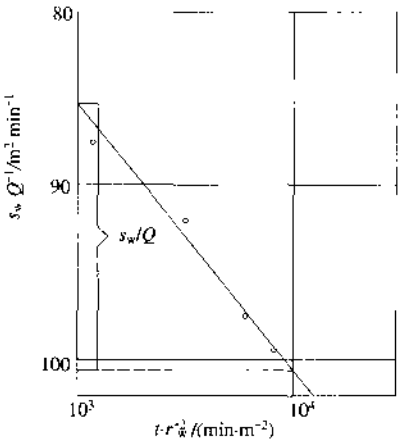


图 2-9　s_w/Q 对 t/r_w^2 半对数关系图

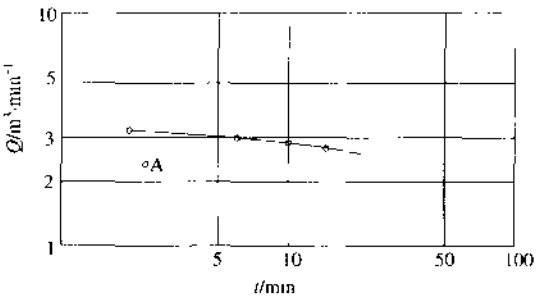


图 2-10　Q 对 t 的双对数关系曲线图

$$T = \frac{2.33 \times 1440}{2 \times 3.14 \times 274 \times 0.1}\mathrm{m^2/d} = 20\ \mathrm{m^2/d}$$

$$S = \frac{20 \times 2.2}{10^6 \times (0.0415)^2 \times 1440} = 1.8 \times 10^{-5}$$

由于试验开始后 18 min 这一段时间里，实测数据少（仅有四个点），因此用配线法和直线法算出的水文地质参数不完全相等。作为近似值或进一步用优化方法求水文地质参考值的初值，可分别取两种算法求得的 T 和 S 的平均值。

2.5.4　用最优化方法识别含水层参数

与 2.3 节和 2.4.3 节提到的方法相类似，在定降深井流试验条件下，我们将目标函数和约束条件写成以下形式。

对于无越流存在的定降深井流试验：

$$\begin{cases} \min E(T,S) = \sum_{i=1}^{m} [Q_i^c(T,S) - Q_i^0]^2 \\ T^a \leqslant T \leqslant T^b \\ S^a \leqslant S \leqslant S^b \end{cases} \tag{2-58}$$

对于有越流存在的定降深井流试验：

$$\begin{cases} \min E(T,S,B) = \sum_{i=1}^{m} [Q_i^c(T,S,B) - Q_i^0]^2 \\ T^a \leqslant T \leqslant T^b \\ S^a \leqslant S \leqslant S^b \\ B^a \leqslant B \leqslant B^b \end{cases} \tag{2-59}$$

式中 E（T，S）和 E（T，S，B）为目标函数；Q_i^c（T，S）和 Q_i^c（T，S，B）为计算的“自喷”井的涌水量；Q_i^0 为实测的“自喷”井的涌水量；m 为观测次数；T^a，S^a

和 B^a 分别为导水系数、贮水系数和越流因子取值的下限；T^b、S^b 和 B^b 分别为导水系数、贮水系数和越流因子取值的上限；T，S 和 B 分别为待求参数。

2.6 各向异性含水层参数识别方法

一般用抽水试验确定含水层的水文地质参数时，都假定含水层是均质各向同性的。实践表明，许多含水层具有明显的各向异性特点。例如，在某些基岩裂隙含水层和岩溶裂隙含水层，甚至在松散岩层中，不同方向的导水系数（含水层厚度与渗透系数的乘积）可以相差若干倍。在这种情况下，如果不考虑各向异向性的影响，就不能正确地确定含水层的水文地质参数。因此，正确地确定各向异性含水层的水文地质参数具有很大的实际意义。

当含水层的导水系数仅仅是方向的函数时，含水层即是均质各向异性的。在平面二维流情况下，流动方向的导水系数称为方向导水系数；各向异性长轴方向和短轴方向的导水系数称为主方向导水系数。描述均质各向异性含水层水力性质的水文地质参数有主方向导水系数，T_x，T_y 和贮水系数 S，在各向异性主方向为未知的情况下，尚需确定某一已知方向 r 与主方向 x 轴之间的夹角 θ。

2.6.1 数学模型及其解析解

本节介绍用抽水试验确定均质各向异性含水层水文地质参数方法[48,49]。公式的推导基于以下假设：

1）含水层为等厚、均质各向异性的无限含水层；

2）含水层为无越流的承压含水层；

3）抽水井为完整井，井径与含水层相比可视为无限小；

4）地下水的释出与水头降低同时发生；

5）抽水井以定流量抽水。

在上述假设条件下，可写出如下数学模型：

$$\begin{cases} T_x \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} + 2T_{xy} \dfrac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} + T_y \dfrac{\partial^2 s}{\partial y^2} + QD\delta(x)D\delta(y) = S \dfrac{\partial s}{\partial t} \\ s(x,y,0) = 0 \\ s(\pm\infty, y, t) = s(x, \pm\infty, t) \\ s(x, \pm\infty, t) = 0 \end{cases} \tag{2-60}$$

该数学模型的解析解为

$$s = \frac{Q}{4\pi T_e} W(u) \tag{2-61}$$

式中

$$T_e = \sqrt{T_x T_y} \tag{2-62}$$

$$u = \frac{r^2}{4a_r t} \tag{2-63}$$

$$a_r = \frac{T_r}{S} \tag{2-64}$$

s 为降深；Q 为抽水井涌水量；$W(u)$ 为无越流承压含水层的井函数；T_x、T_y 为含水层主方向的导水系数；r 为抽水井到观测孔的距离；t 为抽水开始后的时间；T_r 为 r 方向的导水系数；S 为贮水系数。

在平面二维流中，r 方向的导水系数可表示为

$$\frac{1}{T_r} = \frac{1}{T_x}\cos^2\theta + \frac{1}{T_y}\sin^2\theta \tag{2-65}$$

式中 θ 为 r 方向与 x 轴的夹角。

因为 $\cos^2\theta = \frac{x^2}{r^2}$，$\sin^2\theta = \frac{y^2}{r^2}$，所以（2-65）式可改写成

$$\frac{r^2}{T_r} = \frac{x^2}{T_x} + \frac{y^2}{T_y} \tag{2-66}$$

将式（2-63）、式（2-64）、式（2-66）代入式（2-61）可得

$$s = \frac{Q}{4\pi T_e} W\left[\frac{S}{4t}\left(\frac{x^2}{T_x} + \frac{y^2}{T_y}\right)\right] \tag{2-67}$$

公式（2-61）和公式（2-67）即为描述抽水井周围降深的基本公式。

2.6.2 分析

图 2-11 表示以抽水井为中心三条不同方向射线上的观测孔组（一个观测孔也可以作为一个孔组）。设 α、β 分别为第 2、第 3 条方向射线与第 1 条方向射线的夹角，x 轴和 y 轴分别与各向异性的主方向平行，第一条方向射线与 x 轴的夹角为 θ。由图 2-11 可以看出，第 1、2、3 条方向射线与 x 轴的夹角分别为 θ、$\theta+\alpha$、$\theta+\beta$。若第 1、2、3 条方向射线上的参数 a_r、T_r 的值分别用（a_{r1}，T_{r1}）、（a_{r2}，T_{r2}）、（a_{r3}，T_{r3}）表示，则根据公式（2-65）可得

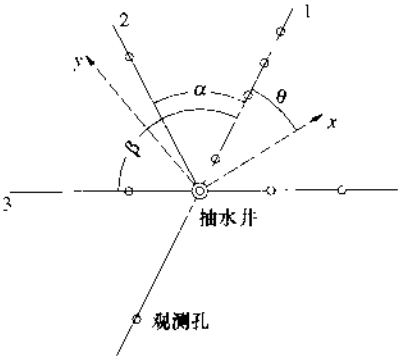


图 2-11 以抽水孔 中心三条不同方向射线上的观测孔组

1，2，3 为射线编量，0 为观测孔

$$\frac{1}{T_{r1}} = \frac{T_x}{\cos^2\theta + n\sin^2\theta} \tag{2-68}$$

$$\frac{1}{T_{r2}} = \frac{T_x}{\cos^2(\theta+\alpha) + n\sin^2(\theta+\alpha)} \tag{2-69}$$

$$\frac{1}{T_{r3}} = \frac{T_x}{\cos^2(\theta+\beta) + n\sin^2(\theta+\beta)} \tag{2-70}$$

式中

$$n = \frac{T_x}{T_y} = \frac{T_x T_y}{T_y^2} = \left(\frac{T_e}{T_y}\right)^2 \tag{2-71}$$

式（2-68）除以式（2-69），得

$$\alpha' = \frac{\cos^2(\theta+\alpha) + n\sin^2(\theta+\alpha)}{\cos^2\theta + n\sin^2\theta} \tag{2-72}$$

式（2-68）除以式（2-70），得

$$b' = \frac{\cos^2(\theta+\beta) + n\sin^2(\theta+\beta)}{\cos^2\theta + n\sin^2\theta} \tag{2-73}$$

式中

$$a' = \frac{T_{r1}}{T_{r2}} = \frac{a_{r1}}{a_{r2}} \tag{2-74}$$

$$b' = \frac{T_{r1}}{T_{r3}} = \frac{a_{r1}}{a_{r3}} \tag{2-75}$$

如果各向异性的主方向为已知，则将公式（2-71）和（2-74）代入式（2-72），可得

$$T_y = T_e\left[\frac{\sin^2(\theta+\alpha) - \frac{a_{r1}}{a_{r2}}\sin^2\theta}{\frac{a_{r1}}{a_{r2}}\cos^2\theta - \cos^2(\theta+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2-76}$$

因为 θ、α 为已知，T_e、a_{r1}和 a_{r2}可以根据第 1、第 2 条方向射线上的观测资料算出，所以将这些数值依次代入公式（2-76）、（2-71）、（2-68）、（2-69）和（2-64）可分别求得 T_y、T_x、T_{r1}、T_{r2}和 S。由此可见，在各向异性主方向为已知的情况下，具有两条不同方向射线上的观测资料，即能确定含水层的水文地质参数。

如果各向异性的主方向为未知，则首先应根据公式(2-72)和公式(2-73)求出 θ 和 n，

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left[(-2)\times\frac{(b'-1)\sin^2\alpha - (a'-1)\sin^2\beta}{(b'-1)\sin 2\alpha - (a'-1)\sin 2\beta}\right] \tag{2-77}$$

$$n = \frac{\cos^2(\theta+\alpha) - a'\cos^2\theta}{a'\sin^2\theta - \sin^2(\theta+\alpha)} \tag{2-78}$$

或

$$n = \frac{\cos^2(\theta+\beta) - b'\cos^2\theta}{b'\sin^2\theta - \sin^2(\theta+\beta)} \tag{2-79}$$

然后根据公式（2-76）、（2-71）、（2-68）、（2-69）、（2-70）和（2-64）依次确定 T_y、T_x、T_{r1}、T_{r2}、T_{r3}和 S。因此，在各向异性主方向为未知的情况下，要确定含水层的水文地质参数，至少需要三条不同方向射线上的观测资料。应当注意的是，若 θ 角为负值，则表示 x 轴的正向位于第 1 条方向射线的左侧。公式（2-77）在 $x-y$ 平面内的 0 到 2π 之间给出两个 θ 值，其中一个 θ 值给出的 $n>1$，另一个给出的 $n<1$。因为已假定 x 轴为各向异性的长轴，所以 $n=\frac{T_x}{T_y}>1$。故使 $n>1$ 的 θ 角表示各向异性长轴 x 轴的位置。

下面让我们分析一下公式（2-67）。公式（2-67）可改写成反函数的形式

$$\frac{x^2}{T_x} + \frac{y^2}{T_y} = \frac{4t}{S}W^{-1}\left(\frac{4\pi T_e s}{Q}\right) \qquad W^{-1}\text{ 为井函数的反函数} \tag{2-80}$$

令

$$a^2 = \frac{4T_x t}{S}W^{-1}\left(\frac{4\pi T_e s}{Q}\right) \tag{2-81}$$

$$b^2 = \frac{4T_y t}{S}W^{-1}\left(\frac{4\pi T_e s}{Q}\right) \tag{2-82}$$

则公式（2-80）可写成

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2-83}$$

上式表明，任一时刻的等降深曲线为一族椭圆。图 2-12 表示这些椭圆中的一个椭圆，其中 a 为椭圆的长轴，b 为椭圆的短轴。

公式（2-81）除以（2-82）可得

$$\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{T_x}{T_y}} \tag{2-84}$$

因为 $T_e=\sqrt{T_xT_y}$，所以

$$\frac{a}{b}=\frac{T_x}{T_e}=\frac{T_e}{T_y} \tag{2-85}$$

合并公式（2-66）和（2-85）可得

$$\frac{r^2}{T_r}=\left(\frac{ab}{T_e}\right)\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right]$$

由于$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，故 r 方向的导水系数可表示为

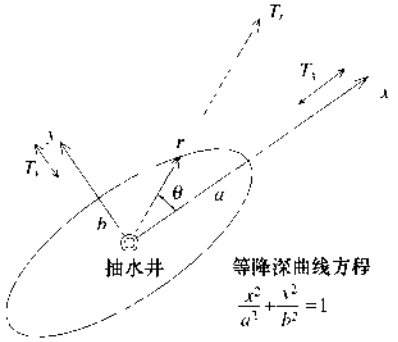


图 2-12　椭圆形等降深曲线

$$T_r=\frac{r^2T_e}{ab} \tag{2-86}$$

2.6.3　计算参数步骤

由公式（2-62）、（2-64）、（2-65）可以看出，当含水层为均质各向异性含水层时，T_e 应当是一个常数，同一条方向射线上的 a_r 值也应当是一个常数。因此我们首先可以根据解泰斯公式的方法，即利用配线法或直线法（以后简称各向同性法），算出每一条方向射线的 T_{ei}和 a_{ri}（角注 i 表示根据第 i 条方向射线上的观测资料计算的数值）。设用各向同性法算出的第 1、2、3 条方向射线上的这些参数分别为（T_{e1}、a_{r1}）、（T_{e2}、a_{r2}）、（T_{e3}、a_{r3}）。从理论上来说，关系式

$$T_{e1}=T_{e2}=T_{e3}$$

$$a_{r1}\neq a_{r2}\neq a_{r3}$$　　应当成立。

实际上，由于观测和计算误差 T_{e1}、T_{e2}和 T_{e3}不可能完全相等，而只能近似地相等。如果算出的 T_{e1}，T_{e2}，T_{e3}差别很大，则说明野外条件不符合理论假设条件。如果 T_{e1}、T_{e2}和 T_{e3}的数值彼此接近，则计算步骤如下。

1）当各向异性的主方向为已知时，根据两条不同方向射线上的观测资料，用各向同性法求出 T_{e1}、a_{r1}和 T_{e2}、a_{r2}。因 θ、α 为已知，故由公式（2-76）可得：

$$T_y=\frac{1}{2}(T_{e1}+T_{e2})\left[\frac{\sin^2(\theta+\alpha)-\frac{a_{r1}}{a_{r2}}\sin^2\theta}{\frac{a_{r1}}{a_{r2}}\cos^2\theta-\cos^2(\theta+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2-87}$$

由公式（2-71）得

$$T_x=\frac{\left[\frac{1}{2}(T_{e1}+T_{e2})\right]^2}{T_y} \tag{2-88}$$

由公式（2-86）和（2-69）求出 T_{r1}和 T_{r2}，再根据公式（2-64）求出 S 的平均值：

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{r1}}{a_{r1}} + \frac{T_{r2}}{a_{r2}}\right) \tag{2-89}$$

2）当各向异性的主方向为未知时，根据三条不同方向射线上的观测资料，用各向同性法求出 T_{el}、a_{r1}、T_{e2}、a_{r2}和 T_{e3}、a_{r3}。因为 α、β 为已知，故由公式（2-77），得

$$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left[(-2)\times\frac{\left(\frac{a_{r1}}{a_{r3}}-1\right)\sin^2\alpha - \left(\frac{a_{r1}}{a_{r2}}-1\right)\sin^2\beta}{\left(\frac{a_{r1}}{a_{r3}}-1\right)\sin 2\alpha - \left(\frac{a_{r1}}{a_{r2}}-1\right)\sin 2\beta}\right] \tag{2-90}$$

由公式（2-76），得

$$T_y = \frac{1}{3}(T_{e1} + T_{e2+}T_{e3})\left[\frac{\sin^2(\theta+\alpha) - \frac{a_{r1}}{a_{r2}}\sin^2\theta}{\frac{a_{r1}}{a_{r2}}\cos^2\theta - \cos^2(\theta+\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2-91}$$

由公式（2-71），得

$$T_x = \frac{\left[\frac{1}{3}(T_{e1} + T_{e2} + T_{e3})\right]^2}{T_r} \tag{2-92}$$

由公式（2-65）、（2-69）、（2-70）求出 T_{r1}、T_{r2}、T_{r3}，再根据公式（2-64）求出 S 的平均值

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{T_{r1}}{a_{r1}} + \frac{T_{r2}}{a_{r2}} + \frac{T_{r3}}{a_{r3}}\right) \tag{2-93}$$

当有 m 条不同方向射线观测孔组时（$m>3$），我们可以把每三个孔组作为一个组合，应用公式（2-90）、（2-91）、（2-92）和（2-93）算出一组 θ、T_y、T_x、S。这样总共可以算出 $N = C_m^3 = \frac{m!}{3!\ (m-3)!}$组 θ、T_y、T_x、S。如果野外条件与理论假设条件吻合，则对应的数值应当大致相等。最后我们可以取它们的平均值作为含水层的水文地质参数。

$$\bar{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{N}\theta_j}{N}, \overline{Ty} = \frac{\sum_{j=1}^{N}T_{yj}}{N}, \bar{T}_x = \frac{\sum_{j=1}^{N}T_{xj}}{N}, \bar{S} = \frac{\sum_{j=1}^{N}S_{sj}}{N}$$

当抽水井周围具有足够数量的观测孔，能够绘出一条或几条等降深椭圆曲线时，我们可以首先用各向同性法求出每一条方向射线上的 T_{ei}、a_{ri}值，然后取 T_{ei}的平均值作为含水层常数 T_e，取用同一条方向射线上的观测资料，但按不同的方法（配线法、直线法）算出的 a_{ri}值的平均值作为该方向射线上的参数 a_{ri}。按比例量出椭圆的长轴 a 和短轴 b，利用以下关系式确定 T_r、T_y、T_x 和 S。

$$T_r = \frac{r^2T_e}{ab};\ T_x = \frac{a}{b}T_e;\ T_y = \frac{b}{a}T_e;\ W(u) = \frac{4\pi T_eS}{Q}$$

$$S = \frac{4T_etu}{ab} \tag{2-94}$$

利用井函数 W（u）表，求出与 W（u）等于$\frac{4\pi T_eS}{Q}$时所对应的 u 值，然后按（2-94）

式计算 S 值。或

$$S = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{T_{ri}}{a_{ri}} \tag{2-95}$$

如果能够绘出几个等降深椭圆，则应对每一个椭圆重复上述计算，最后取相应参数的平均值作为含水层的水文地质参数。

2.6.4 例题

图 2-13 表示布置在一个均质各向异性无越流承压含水层中三条不同方向射线上的孔组。用各向同性法算出的 $T_{e1}\approx 964.2\ m^2/d$，$a_{r1}\approx 9256160\ m^2/d$，$T_{e2}\approx 803.5\ m^2/d$，$a_{r2}\approx 4942080\ m^2/d$，$T_{e3}\approx 7231.7\ m^2/d$，$a_{r3}\approx 4104000\ m^2/d$。试确定 θ 和含水层的水文地质参数 T_y，T_x，S 以及 T_{r1}、T_{r2}和 T_{r3}。

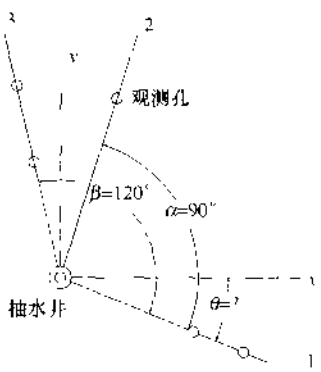


图 2-13 含水层中三条不同方向射线上的孔组

比值 $a_{r1}/a_{r2}\approx 1.87$，$a_{r1}/a_{r3}\approx 2.26$，$a'\approx 1.9$，$b'\approx 2.21$，将这些数值分别代入式 2-90、2-91、2-92、2-68、2-69、2-70 和 2-93 可得 $\theta\approx -26°51'$（因为 $n\approx 3.22>1$，所以 θ 的这个值确定的是各向异性长轴的位置）。

$T_y\approx 462.2\ m^2/d$

$T_x\approx 1486.1\ m^2/d$

$T_{r1}\approx 1020.4\ m^2/d$

$T_{r2}\approx 533.9\ m^2/d$

$T_{r3}\approx 462.2\ m^2/d$

$S\approx 1.1\times 10^{-4}$

在推导上述公式时，为了简便，我们假定含水层是无越流的。但是对于有越流的承压含水层，只要首先根据各向同性法求出 T_e、a_r 和 B（$B=\sqrt{\frac{T_e m'}{K'}}$，其中 K'，m' 分别为弱透水层的渗透系数和厚度），然后经过类似地分析也可得到确定均质各向异性有越流承压含水层水文地质参数的公式。

对于承压含水层中的非完整井，如果我们利用离抽水井距离大于 $1.5m\sqrt{K_v/K_h}$ 的那些观测孔资料，仍可采用上述公式。这里 m 是含水层厚度，K_v、K_h 分别为垂向渗透系数和水平方向的渗透系数。

对于无压含水层，当抽水降深远远小于含水层厚度时，上述计算公式仍然有效。

3 地下水流方程的有限元解法

3.1 地下水流方程

考虑自然界中最常见的非均质各向同性二维承压含水层中的稳定和非稳定流动，对于稳定流动，控制方程和边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)=W \\ h(x,y)=g_1(x,y) & (x,y)\in\partial\Omega_1 \\ T\dfrac{\partial h}{\partial n}=g_2(x,y) & (x,y)\in\partial\Omega_2 \end{cases} \tag{3-1}$$

对于非稳定流动，控制方程及初始和边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)=S\dfrac{\partial h}{\partial t}+W \\ h(x,y,0)=g_0(x,y) & (x,y)\in\Omega \\ h(x,y,t)=g_1(x,y,t) & (x,y)\in\partial\Omega_1 \\ T\dfrac{\partial h}{\partial n}=g_2(x,y,t) & (x,y)\in\partial\Omega_2 \end{cases} \tag{3-2}$$

式中：h 为水头；T 为导水系数；W 为源汇项；S 为贮水系数；x，y 为空间变量；t 为时间；Q 为流动区域；$\dfrac{\partial}{\partial n}$为法向导数；$g_1$，$g_2$，$g_0$ 为已知函数。

从上述方程不难看出，导水系数和贮水系数是空间变量 x，y 的函数。

3.2 地下水流方程的有限元解法

方程（3-1）和（3-2）可以用各种数值法来求解[3,50,51]。其中矩形网格有限差分法对拟合不规则边界和不规则参数分区效果不好，且解的精度不高，而边界元法对处理分块较多的非均质含水层有一定困难。因此，我们在这里采用 Calerkin 有限单元法求解上述方程。如果将渗流区域剖分成若干个三角形单元，则得方程（3-1）和（3-2）有如下离散形式：

$$[B]h+[F]=0 \tag{3-3}$$

$$[B]h+[C]\frac{\partial h}{\partial t}+[F]=0 \tag{3-4}$$

式中，矩阵 $[B]$，$[C]$ 和 $[F]$ 的元素是

$$B_{p,q}=\iint_{(\Omega)}T\left(\frac{\partial\phi_p}{\partial x}\frac{\partial\phi_q}{\partial y}+\frac{\partial\phi_p}{\partial y}\frac{\partial\phi_q}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3-5}$$

$$C_{p,q} = \iint_{(\Omega)} S\phi_p\phi_q \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3-6}$$

$$F_i = \iint_{(\Omega)} W\phi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{(\partial\Omega)} g\phi_i \mathrm{d}(\partial\Omega) \tag{3-7}$$

式中：ϕ 为基函数，对于三角形单元△ijk（图 3-1），基函数 ϕ_i，ϕ_j，ϕ_k 的定义是

$$\phi_n = \frac{1}{2\Delta}(a_n + b_n x + c_n y) \quad (n = i, j, k) \tag{3-8}$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k \\ b_j &= y_k - y_i \\ c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_k &= y_i - y_j \\ c_k &= x_j - x_i \end{aligned}\right\} \tag{3-9}$$

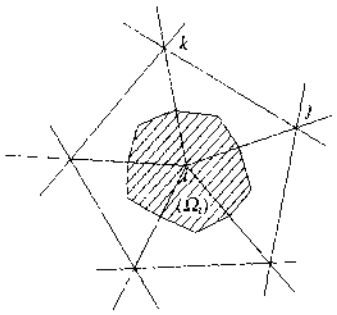


图 3-1　三角形单元△ijk 及结点 i 的专有子域

而 Δ 是三角形单元△ijk 的面积；(x_i, y_i)，(x_j, y_j) 和 (x_k, y_k) 分别为结点 i，j，k 的坐标。

3.3　例题与精度比较

为了说明有限元解的正确性，我们选取一个均质各向同性的正方形承压含水层模型（图 3-2）。对于这种模型，解析解是可以求出的（可参阅 2.1）。设正方形的尺寸为 1400 m × 1400 m，边界 AB 和 CD 为隔水边界；BC 和 AD 为定水头边界，水头 h = 100 m。含水层的贮水系数和导水系数分别为 0.001 和 100 m²/d。含水层稳定初始水位为 100 m。将流动区域剖分成 416 个三角形单元，结点总数 237。一个抽水量不变的抽水井位于正方形含水层的中心，即结点 104，流量为 10000 m²/d，并且假定观测孔位于结点 14，28，42，56，70，93 和 95。对于这种含水层，Chan 等导出的解析表达式为

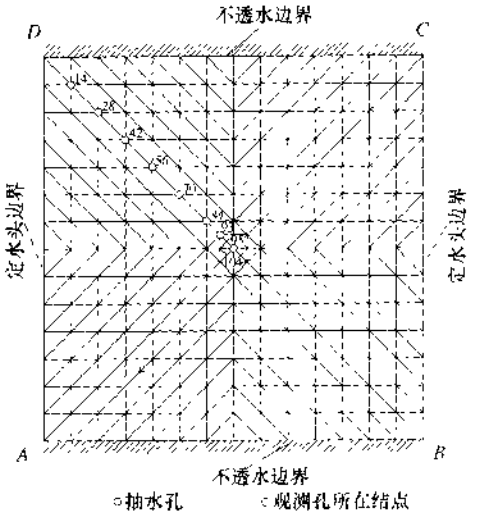


图 3-2　含水层轮廓与有限单元离散化[51]

$$h(x,y,t) = 100 - s(x,y,\infty) + \frac{2Q}{a^2T}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-T\frac{a_m^2 t}{S}\right)}{a_m^2}\sigma(a_m,x,\zeta)$$

$$+\frac{4Q}{a^2T}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-T\frac{r_{m,n}^2 t}{S}\right)}{r_{m,n}^2}\sigma(a_m,x,\zeta)C(\beta_n,y,\eta) \tag{3-10}$$

式中，稳定解为

$$s(x,y,\infty) = \frac{Q}{aT}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma(a_m,x,\zeta)}{a_m\sinh(a_m b)}\{\cosh[a_m(a-|\eta-y|)]+\cosh[a_m(a-\eta+y)]\} \tag{3-11}$$

式中：s 为降深；S 为贮水系数；T 为导水系数；t 为时间；x，y 为坐标；Q 为抽水井流量；ζ，η 为抽水井坐标；a 为含水层尺寸；m，n 为整数；

$$a_m = m\frac{\pi}{a};\beta_n = n\frac{\pi}{a};r_{m,n} = a_m^2+\beta_n^2;\sigma(a_m,x,\zeta) = \sin(a_m x)\sin(a_m\zeta);$$

$$C(\beta_n,y,\eta) = \cos(\beta_n y)\cos(\beta_n\eta)$$

首先比较一下抽水 1.0，2.0，3.0，5.0，10.0 和∞天（稳定）时的解析解和数值解。

由解析法和有限元法求出的测压水头列于表 3-1。显然采用较小的时间步长 0.2 d 计算的水头值比用较大的时间步长 1.0 d 计算的水头值更接近解析解。应当注意，数值解与解析解基本上一致。因此，图 3-2 的有限单元剖分具有可以接受的截断误差，时间步长 0.2 d 是适宜的。

表 3-1　用解析法和有限单元法计算的测压水头

抽水开始后的时间/d		结点号							
		14	28	42	56	70	84	93	95
1	[1]	99.565	98.863	97.538	95.027	90.271	80.362	69.626	58.562
	[2]	99.538	98.853	97.627	95.316	90.844	80.996	71.239	60.149
	[3]	99.495	98.833	97.785	95.933	92.325	83.762	74.570	63.701
2	[1]	98.620	96.944	94.620	91.145	85.562	75.088	64.202	53.100
	[2]	98.681	97.080	94.847	91.477	86.016	75.430	65.502	54.371
	[3]	98.835	97.431	95.471	92.458	87.401	77.176	67.344	56.238
3	[1]	97.979	95.687	92.802	88.847	82.897	72.190	61.245	50.128
	[2]	98.049	95.832	93.023	89.147	83.286	72.439	62.454	51.309
	[3]	98.272	96.286	93.718	90.082	84.435	73.742	63.793	52.657
5	[1]	97.348	94.456	91.032	86.626	80.336	69.418	58.419	47.289
	[2]	97.396	94.555	91.182	86.832	80.610	69.536	59.502	48.345
	[3]	97.573	94.901	91.685	87.468	81.349	70.340	60.320	49.168
10	[1]	97.013	93.804	90.095	85.451	78.983	67.953	56.926	45.788
	[2]	96.993	93.768	90.051	85.413	78.974	67.762	57.700	46.536
	[3]	97.069	93.917	90.265	85.681	79.284	68.098	58.041	46.879
∞	[1]	96.984	93.746	90.013	85.349	78.864	67.825	56.795	45.657
	[2]	96.984	93.746	90.013	85.349	78.864	67.825	56.795	45.657
	[3]	96.984	93.746	90.013	85.349	78.864	67.825	56.795	45.657

注：[1] 用解析表达式 (3-10)，(3-11) 计算的水头；[2] 用有限单元法式 (3-4) 和式 (3-3) 计算的水头（时间步长为 0.2 d）；[3] 用有限单元法式 (3-4) 和式 (3-3) 计算的水头（时间步长为 1.0 d）

为了进一步说明本书中所用的有限单元法及其相应程序的正确性，再选择一个理想化模型，对解析法和有限单元法的计算结果进行比较[52]❶。

例题。现假设有一均质、各向同性、底板水平的无压含水层；渗流区是以一个抽水井为中心的圆形区域；圆形区的边界上是给定水头的；抽水井以不变的流量抽水；含水层中的流动符合 Dupuit-Forchheimer 条件。在这种情形下，当地下水处于稳定流动时，可以导出大家熟知的关于无压含水层的 Dupuit 公式，即

$$h = \sqrt{H^2 + \frac{Q}{\pi K}\ln\frac{r}{R}} \tag{3-12}$$

式中，H 为不变的外边界水位；Q 为抽水井流量；K 为含水层的渗透系数；R 为抽水井中心到外边界的距离；r 为抽水井中心到观测点的距离；h 为含水层的水位。

因为对于这个理想化模型来说，流动是径向对称的。为了节省工作量，我们选取角度为 45° 的扇形部分来研究（图 3-3）。扇形的半径 $R = AB = AC = 4063$ m。边界 BC 为给定水位边界。含水层的渗透系数 $k = 250$ m/d，抽水井流量 $Q = 1000$ m^3/d。

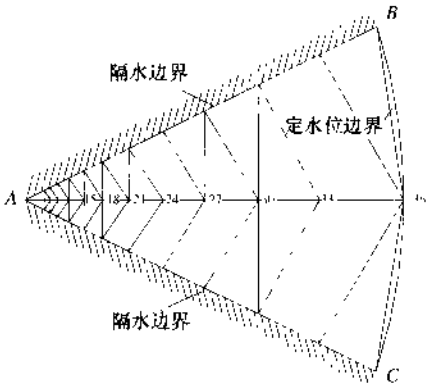


图 3-3　理想化模型及有限单元剖分

渗流区用三角形单元剖分，单元总数 46，结点总数 37，抽水井位于结点 1，而假定的观测孔位于结点 6，12，18，21，24，27，30，33。

由解析表达式（3-12）和有限元法式（3-3）计算的各观测孔水位列于表 3-2，从表 3-2 可以看出，两种方法得到的水位值比较接近。

表 3-2　用解析法和有限单元法计算的各观测孔水位值

计算方法	结点编号							
	6	12	18	21	24	27	30	33
解析法	96.257	97.105	97.855	98.219	98.576	98.934	99.291	99.644
有限元法	96.475	97.263	97.971	98.315	98.652	98.991	99.328	99.662

❶ 地下水灵敏度系数的计算方法，精度及工作量研究。煤炭科学研究院论文集。1987。

4 修正的高斯-牛顿法

4.1 含水层参数识别问题的提法

在第1章中已经述及，含水层参数识别方法分为两类，即间接法和直接法。间接法的基本思想是先给定一组水文地质参数，用有限单元法算出各观测点水头与实测的观测水头比较。如果计算水头与观测水头不一致，则改变水文地质参数，重复上述过程直到计算水头与观测水头基本一致为止。此时得到的水文地质参数就是我们要求的水文地质参数。在数学上这种问题的提法是确定一组参数（K_1，K_2，…，K_m）使得目标函数

$$E(K) = \sum_{l=1}^{L} f_l^2(K) \tag{4-1}$$

取极小值，并且满足约束条件

$$a_i \leqslant K_i \leqslant b_i \tag{4-2}$$

式中：

$$f_l = (h_l^c - h_l^0) \tag{4-3}$$

K 是含水层参数，E 是目标函数，L 为观测数据总数，a_i 和 b_i 表示参数的上、下限，h_l^c 和 h_l^0 分别表示计算水头值和观测水头值。如何确定一组参数使目标函数 E 取极小值这就是修正的高斯-牛顿法所要解决的问题。

4.2 修正的高斯-牛顿法

如果已知探索序列的某个点 K^n，在 K^n 附近把函数 f_l 近似当作线性函数[3,31]，于是可得在 K^n 的泰勒展开式

$$f_l(K) \approx f_l(K^n) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_l}{\partial K_j} \Delta K_j \tag{4-4}$$

式中 $\Delta K = K - K^n$，ΔK_j（$j = 1, 2, \cdots, m$）是它的分量。

将式（4-4）代入式（4-1），得

$$E(K^n + \Delta K) \approx \sum_{l=1}^{L} [f_l(K^n) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_l}{\partial K_j} \Delta K_j]^2 \tag{4-5}$$

式中 L 是观测数据总数。

按照极值的必要条件，应有

$$\left.\frac{\partial E}{\partial K_i}\right|_{K^{n+1}} = 0 \qquad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{4-6}$$

将式（4-5）代入式（4-6），得

$$\sum_{l=1}^{L}\left(f_l+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_l}{\partial K_j}\Delta K_j\right)\frac{\partial f_l}{\partial K_i}=0$$

整理上式，得

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial f_l}{\partial K_i}\frac{\partial f_l}{\partial K_j}\Delta K_j=-\sum_{l=1}^{L}f_l\frac{\partial f_l}{\partial K_i}\qquad(i=1,2,\cdots,m)\tag{4-7}$$

以上方程组可表示为以下形式

$$[J]^{\mathrm{T}}[J]\Delta K=-[J]^{\mathrm{T}}f\tag{4-8}$$

式中矩阵

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial K_1} & \frac{\partial f_1}{\partial K_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial K_M}\\ \frac{\partial f_2}{\partial K_2} & \frac{\partial f_2}{\partial K_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial K_M}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_L}{\partial K_1} & \frac{\partial f_L}{\partial K_2} & \cdots & \frac{\partial f_L}{\partial K_M}\end{bmatrix}\tag{4-9}$$

为 $L\times M$ 阶矩阵。

由式（4-8），得

$$\Delta K=-([J]^{\mathrm{T}}[J])^{-1}[J]^{\mathrm{T}}f$$

于是可得改进点

$$K^{n+1}=K^n-([J]^{\mathrm{T}}[J])^{-1}[J]^{\mathrm{T}}f$$

将上式修正，得如下修正的高斯-牛顿法迭代序列

$$K^{n+1}=K^n+\lambda^n\bar{P}^n\tag{4-10}$$

式中 $\bar{P}^n$ 和 λ^n 分别是第 n 次迭代的探索方向和步长。如果已知初始估计值 K^0，则由上式可以算出 K^1。重复这一过程，直到满足预先给定的迭代次数 N 或计算的 K^{n+1} 使得目标函数的绝对值小于 ζ，即 $|E(K)|\leqslant\zeta$，这里 ζ 是一个小的正数。为了确定方向 P^n，首先需要计算目标函数 E 的梯度 g 和高斯-牛顿方向 ΔK。这样

$$P^n=\begin{cases}\Delta K & \text{如果 } g\cdot\Delta K<0\\ -g & \text{如果 } g\cdot\Delta K\geqslant 0\end{cases}\tag{4-11}$$

式中：

$$\Delta K=([J]^{\mathrm{T}}[J])^{-1}[J]^{\mathrm{T}}f\tag{4-12}$$

式中 $[J]$ 是灵敏度系数矩阵。现在引入投影算子 $\bar{P}$ 以保证 K^{n+1} 在给定的约束范围内，P 的定义为

$$\bar{P}=\begin{cases}0 & K_i=a_i \text{ 和 } P_i<0\\ 0 & K_i=b_i \text{ 和 } P_i>0\\ P_i & \text{其他情形}\end{cases}\tag{4-13}$$

方程（4-10）中的步长是一个标量，可以用二次插值公式确定。

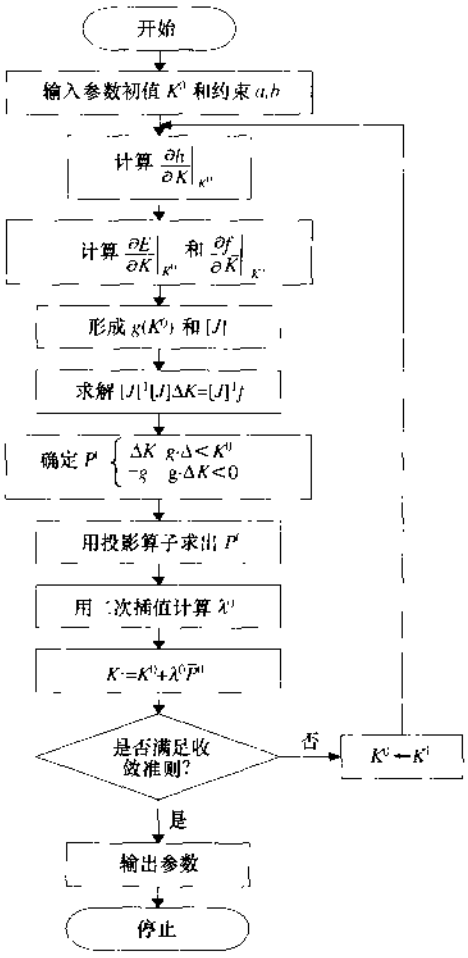


图 4-1　用修正的高斯-牛顿法识别含水层参数的流程图

4.3　计算步骤

1）给出参数初始估计值 K^0，计算在该点的 f_i 值及其一阶偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial K_i}$（$i=1, 2, \cdots, m$）的值；

2）根据计算的偏导数形成矩阵 $[J]$，然后解方程组 $[J]^{\mathrm{T}}[J]\Delta K=-[J]f$，求出改进量 ΔK；

3）计算目标函数 E 在 K^0 点的梯度 g 和高斯-牛顿方向 ΔK，并且引入投影算子 $\bar{P}^0$，确定探索方向；

4）利用二次插值法求出 λ^0，再按式（4-10）形成改进点 K^1。如果满足收敛准则，则停机，否则以 K^1 代替 K^0 返回到 1），进行重复计算，直到满足收敛准则为止。

利用修正的高斯-牛顿法识别含水层参数的过程见框图 4-1。

5 灵敏度系数矩阵计算方法

灵敏度系数矩阵，即由水位关于参数一阶偏导数所组成的矩阵，在利用高斯-牛顿类方法识别含水层参数的过程中具有重要意义。可以毫不夸张地说，如果无法精确地算出灵敏度系数，则所有用到水位关于参数一阶偏导数的最优化方法都不能用来识别含水层参数，或者即使对含水层参数进行了识别，所得结果也是不可靠的。在一般的地下水流模型中，水位与参数的关系没有明显的表达式，这也增加了计算灵敏度系数矩阵的难度。

为了简便，对于方程（3-2）所描述的地下水流问题，如果假定贮水系数和源汇项为已知，则待识别的参数为导水系数向量 $T=(T_1, T_2, \cdots, T_M)^{\mathrm{T}}$，此处上标 T 为转置。灵敏度系数矩阵 $[J]$ 可表示为

$$[J]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial T_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial T_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial T_M} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial T_2} & \dfrac{\partial h_2}{\partial T_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_2}{\partial T_M} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial h_L}{\partial T_1} & \dfrac{\partial h_L}{\partial T_2} & \cdots & \dfrac{\partial h_L}{\partial T_M} \end{bmatrix} \tag{5-1}$$

式中 L 表示总的观测次数，M 表示参数总个数。矩阵 $[J]$ 有三种算法，即影响系数法、灵敏度系数方程法和变分法。

5.1 影响系数法

这是一种最简单的算法，方法基于参数扰动的概念[53]。一般利用有限差分格式。向前差分格式和中心差分格式都是可行的。为了简便，这里采用向前差分格式，对于稳定流动

$$\frac{\partial h}{\partial T_i}\approx\frac{h(x,y,T_1,T_2,\cdots,T_i+\Delta T_i,\cdots,T_M)-h(x,y,T_1,T_2,\cdots,T_i,\cdots,T_M)}{\Delta T_i} \tag{5-2}$$

而对于非稳定流动

$$\frac{\partial h}{\partial T_i}\approx\frac{h(x,y,t,T_1,T_2,\cdots,T_i+\Delta T_i,\cdots,T_M)-h(x,y,t,T_1,T_2,\cdots,T_i,\cdots,T_M)}{\Delta T_i} \tag{5-3}$$

式中，$h(x, y, T)$ 和 $h(x, y, t, T)$ 是方程（3-3）和方程（3-4）的解；ΔT_i 是 T_i 的增量。

该方法的关键是如何选择 ΔT_i。根据导数的定义，似乎 ΔT_i 越小计算结果越精确。事实并非如此，因为用任何数值法得到的测压水头都是近似值，有效数字的位数是有限的。如果 ΔT_i 太小以致不能使 h 的有效数字发生变化，那么方程（5-2）和方程（5-3）就没有意义了。因此，增量 ΔT_i 一方面应当足够大，使 h 的有效数字发生变化，而另一方面还应当足够小，以减小方程（5-2）和方程（5-3）的不准确性而造成的截断误差。在一般情

况下，为了确定 ΔT_i 的数值，对于实际模型，需要利用试估校法。Bard[26]建议

$$\Delta T_i = \alpha T_i \tag{5-4}$$

式中，$10^{-5} \leqslant \alpha \leqslant 10^{-2}$。

显然用向前差分逼近格式需要 $M+1$ 次模拟，这里 M 是参数个数。

5.2 灵敏度系数方程法

在方程（3-1）和方程（3-2）中，关于 T_i 中求偏导数，就得到灵敏度系数方程。对于稳定流动，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial h_{T_i}}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial h_{T_i}}{\partial y}\right)=-\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial T}{\partial T_i}\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial T}{\partial T_i}\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)\right] \\ h_{T_i}(x,y)=0 \qquad (x,y)\in\partial\Omega_1 \\ T\dfrac{\partial h_{Ti}}{\partial n}(x,y)=\dfrac{\partial T}{\partial T_i}\dfrac{\partial h}{\partial n} \qquad (x,y)\in\partial\Omega_2 \end{cases} \tag{5-5}$$

对于非稳定流动，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial h_{T_i}}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial h_{T_i}}{\partial y}\right)=S\dfrac{\partial h_{T_i}}{\partial t}-\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial T}{\partial T_i}\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial T}{\partial T_i}\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)\right] \\ h_{T_i}(x,y,0)=0 \qquad (x,y)\in\Omega \\ h_{T_i}(x,y,t)=0 \qquad (x,y)\in\partial\Omega_1 \\ T\dfrac{\partial h_{T_i}(x,y,t)}{\partial n}=\dfrac{\partial T}{\partial T_i}\dfrac{\partial h}{\partial n} \qquad (x,y)\in\partial\Omega_2 \end{cases} \tag{5-6}$$

式中，$h_{T_i}=\dfrac{\partial h}{\partial T_i}$。

为了用 Galerkin 有限单元法进行实际计算，需要从水流方程的离散形式式（3-3）和式（3-4）入手。对方程（3-3）和方程（3-4）关于 T_i 求偏导数，有

$$[B]h_{T_i}+[B_{T_i}]h=0 \tag{5-7}$$

$$[B]h_{T_i}+[C]\frac{\mathrm{d}h_{T_i}}{\mathrm{d}t}+[B_{T_i}]h=0 \tag{5-8}$$

式中：

$$B_{T_{p,q}}=\iint_{(\Omega)}\frac{\partial T}{\partial T_i}\left(\frac{\partial\phi_p}{\partial x}\frac{\partial\phi_q}{\partial x}+\frac{\partial\phi_p}{\partial y}\frac{\partial\phi_q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5-9}$$

在方程（5-7）和方程（5-8）中，$[B_{T_i}]h$ 一项相当于方程（3-3）和方程（3-4）中的 $[F]$。通过解方程（3-3），方程（3-4）和方程（5-6），可以求出 $[B_{T_i}]h$；然后利用与方程（3-3），方程（3-4）相同的解法便可得到 h_{T_i}。

用该方法需要 $M+1$ 次模拟。

5.3 变分法

对于稳定流动，变分法求灵敏度系数的公式可写成

$$\frac{\partial h_i}{\partial T_i} = \frac{1}{12}\sum_{e_i}\frac{1}{\Delta_e}[(b_ih_i + b_jh_j + b_kh_k)(b_iq_i + b_jq_j + b_kq_k) + (c_ih_i + c_jh_j + c_kh_k)(c_iq_i + c_jq_j + c_kq_k)] \tag{5-10}$$

对于非稳定流动为

$$\frac{\partial h_i}{\partial T_i} = \frac{1}{12}\sum_{m=1}^{K}\sum_{e_i}\frac{1}{\Delta_e}[(b_ih_i + b_jh_j + b_kh_k)(b_i\bar{q}_i + b_j\bar{q}_j + b_k\bar{q}_k) + (c_ih_i + c_jh_j + c_kh_k)(c_i\bar{q}_i + c_jq_j + c_k\bar{q}_k)]|_{m\Delta\tau} \tag{5-11}$$

式中，$\bar{q}_s|_{m\Delta\tau} = q_s[(K-m+1)\Delta\tau] - q_s[(K-m)\Delta\tau]$，$s = (i, j, k)$；$h$ 为方程（3-3）和式（3-4）的解；$\sum_{e_i}$ 为对具有共同结点 i 的所有单元求和；$\Delta\tau$ 为时间步长；K 为时间步长个数；q 为下列伴随方程（5-12）和方程（5-13）的解。

对于稳定流动为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial q}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial q}{\partial y}\right) = G_i(x,y), \\ q(x,y) = 0 & (x,y)\in\partial\Omega_1 \\ T\dfrac{\partial q(x,y)}{\partial n} = 0 & (x,y)\in\partial\Omega_2\end{cases} \tag{5-12}$$

对于非稳定流动，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(T\dfrac{\partial q}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(T\dfrac{\partial q}{\partial y}\right) = S\dfrac{\partial q}{\partial t} + G_i(x,y)H(t), \\ q(x,y,0) = 0 & (x,y)\in\Omega \\ q(x,y,t) = 0 & (x,y)\in\partial\Omega_1 \\ \dfrac{\partial q(x,y,t)}{\partial n} = 0 & (x,y)\in\partial\Omega_2\end{cases} \tag{5-13}$$

式中

$$G_i(x,y) = \begin{cases}\dfrac{1}{P_i} & (x,y)\in(\Omega_i), \\ 0 & \text{其他情形}\end{cases} \tag{5-14}$$

$$H(t) = \begin{cases}0 & t \leqslant 0 \\ 1 & t > 0\end{cases} \tag{5-15}$$

P_i 为子域（Ω_i）（图 3-1）的面积。

应当注意，在使用方程（5-10）时，应采取相等的时间步长 $\Delta\tau$，所需要的模拟次数为 $L'+1$，这里 L' 是观测孔个数。

5.4 例题与精度比较

我们仍利用 3.3 节给出的模型。对该模型而言，灵敏度系数矩阵简化为

$$[J] = \left[\frac{\partial h_1}{\partial T}, \frac{\partial h_2}{\partial T}\frac{\partial h_3}{\partial T}\frac{\partial h_4}{\partial T}, \frac{\partial h_5}{\partial T}\frac{\partial h_6}{\partial T}\frac{\partial h_7}{\partial T}, \frac{\partial h_8}{\partial T}, \cdots, \frac{\partial h_L}{\partial T}\right]^{\mathrm{T}} \tag{5-16}$$

式中，$\frac{\partial h_1}{\partial T} = \frac{\partial h^{14}}{\partial T}$，$\frac{\partial h_2}{\partial T} = \frac{\partial h^{28}}{\partial T}$，…，$\frac{\partial h_8}{\partial T} = \frac{\partial h^{95}}{\partial T}$。此处上标为结点编号。

表 5-1　用解析法计算的灵敏度系数

抽水时间 d	结点号							
	14	28	42	56	70	84	93	95
1	-0.005566	-0.010042	-0.010592	-0.000813	0.032201	0.120715	0.225173	0.335071
2	-0.002245	-0.001046	-0.007702	0.029817	0.075716	0.174096	0.281312	0.391918
3	0.005240	0.013895	0.029889	0.058636	0.109963	0.211932	0.320088	0.430932
5	0.017370	0.037589	0.064026	0.101569	0.159569	0.265707	0.374925	0.486037
10	0.028391	0.059073	0.094908	0.140294	0.204197	0.313999	0.424148	0.535284
∞	0.030160	0.062529	0.099867	0.146513	0.211362	0.321753	0.432052	0.543435

在方程（3-10），式（3-12）中取关于 T 的导数，则对于非稳定流动有

$$\frac{\partial h}{\partial T}(x,y,t) = -\frac{\partial s}{\partial T}(x,y,\infty) + \frac{2Q}{a^2T}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{T}-\frac{a_m^2 t}{S}\right)\left[\exp\left(-\frac{Ta_m^2 t}{S}\right)\times\frac{\sigma(\alpha_m,x,\zeta)}{a_m^2}\right]\right\}$$

$$+\frac{4Q}{a^2T}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{T}-\frac{r_{m,n}^2 t}{S}\right)\left[\exp\left(-\frac{T\gamma_{m,n}^2 t}{S}\right)\frac{\sigma(\alpha_m,x,\zeta)C(\beta_n,y,\eta)}{\gamma_{m,n}^2}\right]\right\} \quad (5-17)$$

对于稳定流动有

$$\frac{\partial h}{\partial T}(x,y,\infty) = \frac{Q}{aT^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sigma(\alpha_m,x,\zeta)}{\alpha_m\sinh(\alpha_m a)}$$

$$\{\cosh[\alpha_m(a-|\eta-y|)]+\cosh[\alpha_m(a-|\eta-y|)]\} \quad (5-18)$$

由式（5-17），式（5-18）计算的灵敏度系数见表 5-1，这些值可以作为精确解。

表 5-2 中［1］列出了由式（5-2）和式（5-3）算出的灵敏度系数，采用的时间步长为 0.2 d。$\Delta T_i = 1.0\ m^2/d$。

表 5-2 中［2］列出了时间步长为 0.2 d 时由方程（5-6）和式（5-7）计算的结果。

表 5-2 中[3]是用变分法计算的灵敏度系数，在计算 h 和 q 时，采用的时间步长为 0.2 d。由于含水层均质，因此 $\frac{\partial h}{\partial T}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial h_i}{\partial T_i}$，式中 N 是结点总数，$\frac{\partial h_i}{\partial T_i}$ 按式(5-10)或式(5-11)计算。

显然，灵敏度系数方程法和变分法计算结果相同，并且十分接近解析解（见表 5-1，表 5-2 中［2］和表 5-2 中［3］）。虽然影响系数法的结果没有其他两种方法好，但如果进一步优选扰动值，则影响系数法的精度还可大大提高。因此，从理论上讲，所有三种方法都能得到类似的、可以接受的结果。

当时间步长取 0.2 d，ΔT_i 取 0.1 m^2/d 时，影响系数法计算的灵敏度系数列于表 5-2 中［4］。很明显，表中的结果不同于解析解，因此在使用影响系数法时，选择合适的扰动向量至关重要。对于所选模型，由于可用解析解作对比，通过试算容易确定扰动值。对于一个实际地下水模型，选择合适的扰动向量极为困难，所以从实际计算的目的来看，影响系数法较其他两种方法的精度低。在本例中，式（5-4）中的最优 α 值在 1×10^{-2} 和 3×10^{-2} 之间。

从表 5-3 可以看出，抽水试验早期的结果不同于解析解，而后期的结果十分接近解析解。因此，时间步长对灵敏度系数的精度有影响。

表 5-2　用影响系数法、灵敏度方程法、变分法计算的灵敏度系数

抽水时间 d		结点号							
		14	28	42	56	70	84	93	95
1	[1]	-0.003967	-0.007080	-0.007492	0.000458	0.029419	0.114517	0.208084	0.317062
	[2]	-0.004112	-0.007430	-0.007760	0.000408	0.029683	0.115821	0.210405	0.320565
	[3]	-0.004111	-0.007429	-0.007759	0.000410	0.029684	0.115818	0.210401	0.320561
	[4]	-0.006104	0.012512	0.017508	0.029755	0.061340	0.151672	0.249176	0.359955
2	[1]	-0.001511	0.000046	0.008301	0.028824	0.072525	0.170242	0.266907	0.376648
	[2]	-0.001619	-0.00247	0.008038	0.029037	0.073336	0.172323	0.270097	0.381048
	[3]	-0.001618	-0.00246	0.008040	0.029039	0.073334	0.172318	0.270095	0.381043
	[4]	0.013275	0.027771	0.046539	0.074310	0.122681	0.227203	0.329759	0.439453
3	[1]	0.005112	0.013580	0.028824	0.056427	0.106140	0.207977	0.305603	0.415619
	[2]	0.005066	0.013376	0.028852	0.056896	0.109305	0.210555	0.309289	0.420471
	[3]	0.005067	0.013377	0.028854	0.056897	0.109303	0.210553	0.309283	0.420456
	[4]	0.022736	0.046844	0.073700	0.110626	0.165863	0.275421	0.377960	0.489654
5	[1]	0.016663	0.036224	0.061752	0.097992	0.154373	0.260559	0.359100	0.469330
	[2]	0.016746	0.036302	0.062071	0.098919	0.156117	0.263717	0.363386	0.474791
	[3]	0.016747	0.036304	0.062072	0.098916	0.156116	0.263709	0.363377	0.474783
	[4]	0.036621	0.074005	0.113831	0.160675	0.223999	0.339203	0.441284	0.553436
∞	[1]	0.029907	0.062073	0.098846	0.144989	0.208679	0.319809	0.418418	0.530014
	[2]	0.030074	0.062336	0.099520	0.145911	0.210310	0.322441	0.423080	0.534711
	[3]	0.030075	0.062337	0.099517	0.145910	0.210308	0.322440	0.423077	0.534710
	[4]	0.057983	0.114746	0.171051	0.232239	0.307157	0.425262	0.529480	0.640716

注：[1] 用影响系数法计算的灵敏度系数，时间步长为 0.2 d，$\Delta T_t = 1.0\ m^2/d$；[2] 用灵敏度方程法计算的灵敏度系数，时间步长为 0.2 d；[3] 用变分法计算的灵敏度系数，时间步长为 0.2 d；[4] 用影响系数法计算的灵敏度系数，时间步长为 0.2 d，$\Delta T_t = 0.1\ m^2/d$。

应当注意，解方程（5-11）要求采用相同的时间步长，为此在上述所有计算中利用了相等时间步长。变分公式（5-11）的这一限制意味着较多的计算工作量。Distefano 和 Rath 曾建议用灵敏度系数方程法应当使用较小的时间步长。我们的计算表明这并不是必须的。

根据以上计算结果，我们可以得出灵敏度系数的精确计算依赖于测压水头精确计算的结论。影响测压水头计算精度的所有因素对灵敏度系数计算都有影响。这些因素就是时间步长和网格大小。

例　利用图 3-3 给出的理想模型进行精度比较[52]。

由式（3-12）对 K 求导数，得灵敏度系数公式，即

$$\frac{\partial h}{\partial K} = \frac{Q}{2\pi K^2 h}\ln\frac{R}{r} \tag{5-19}$$

用该公式计算的灵敏度系数是精确的解析解。

对于这个理想化模型，灵敏度系数矩阵（4-9）简化为

表 5-3　用影响系数法、灵敏度方程法、变分法计算的灵敏度系数

抽水时间 d		结点号 14	28	42	56	70	84	93	95
1	[1]	-0.001480	-0.002167	-0.001022	0.005859	0.027283	0.095749	0.180206	0.285431
	[2]	-0.001540	-0.002354	-0.001005	0.005925	0.027523	0.096540	0.182060	0.288381
	[3]	-0.001539	-0.002354	0.001004	0.005926	0.027524	0.096538	0.182057	0.288377
2	[1]	0.000397	0.002819	0.007979	0.027603	0.065979	0.158081	0.252945	0.362213
	[2]	0.000381	0.002801	0.010238	0.027916	0.066674	0.159590	0.255574	0.366046
	[3]	0.000385	0.002802	0.010240	0.027918	0.066675	0.159587	0.255572	0.366043
3	[1]	0.004868	0.012527	0.026047	0.051437	0.098572	0.198471	0.293395	0.405197
	[2]	0.004888	0.012490	0.026398	0.051890	0.099543	0.200369	0.298496	0.409527
	[3]	0.004879	0.012491	0.026400	0.052000	0.099549	0.200367	0.298493	0.409525
5	[1]	0.014542	0.031906	0.055222	0.089951	0.145111	0.250687	0.349035	0.459183
	[2]	0.014624	0.032083	0.055842	0.090871	0.146596	0.253213	0.352666	0.464019
	[3]	0.014625	0.032084	0.055843	0.090871	0.146594	0.253212	0.352664	0.464017
10	[1]	0.026474	0.055359	0.089096	0.132736	0.194656	0.304611	0.403809	0.514221
	[2]	0.026788	0.055918	0.090289	0.134330	0.196956	0.307973	0.408371	0.519950
	[3]	0.026790	0.055920	0.090290	0.134329	0.196954	0.307972	0.408367	0.519947
∞	[1]	0.029907	0.062073	0.098846	0.144989	0.208679	0.319809	0.419418	0.530014
	[2]	0.030074	0.062336	0.099520	0.145911	0.210310	0.322441	0.423080	0.534711
	[3]	0.030075	0.062337	0.099517	0.145910	0.210308	0.322440	0.423077	0.534710

注：[1] 用影响系数法计算的灵敏度系数，时间步长为 0.1 d，$\Delta T_i = 1.0\ m^2/d$；[2] 用灵敏度方程法计算的灵敏度系数，时间步长为 0.1 d；[3] 用变分法计算的灵敏度系数，时间步长为 0.1 d。

$$A = \left[\frac{\partial h_1}{\partial K}, \frac{\partial h_2}{\partial K}, \cdots, \frac{\partial h_8}{\partial K}\right]^{\mathrm{T}} \tag{5-20}$$

式中，$\frac{\partial h_1}{\partial K} = \frac{\partial h^6}{\partial K}$，$\frac{\partial h_2}{\partial K} = \frac{\partial h^{12}}{\partial K}$，…，$\frac{\partial h_8}{\partial K} = \frac{\partial h^{33}}{\partial K}$（图 3-3）；$T$ 表示转置；上标 6，12，…，33 表示结点号。

由表达式（5-19）计算的各观测点的灵敏度系数列于表 5-4。这些数值可以看作精确解。表 5-4 中的下半部分的数值是用变分法计算的灵敏度系数。很明显，用变分法计算的结果接近解析解。

表 5-4　用解析法和变分法计算的灵敏度系数

计算方法	结点编号 6	12	18	21	24	27	30	33
解析法	-0.01526	-0.01175	-0.00867	-0.00719	-0.00574	-0.00429	-0.00285	-0.00143
变分法	-0.01326	-0.01109	-0.00820	-0.00689	-0.00543	-0.00406	-0.00270	-0.00136

众所周知，数值解是一种近似解。我们再次强调灵敏度系数的精度在很大程度上依赖于水位的计算精度，为了提高水位的计算精度，首先要对研究区的水文地质条件有一定正确认识。边界条件的选择应符合客观实际，渗透系数分区应当反映含水层透水性变化规律，并且在每个分区中至少要有一个观测孔，以保证解的适定性。此外，还必须尽可能地加密剖分，尤其是在各抽（放）水孔附近。

6 各种随机和非随机因素对参数识别的影响

6.1 理想化模型

为了说明修正的高斯-牛顿法在含水层参数识别中的有效性以及各种随机和非随机因素对参数识别结果的影响，我们选取一个非均质各向同性承压含水层作为理想模型(图 6-1)。渗流区用三角形单元剖分，单元总数92，结点总数59。边界 ABC 为定水头边界，水头等于 100 m，其余边界为隔水边界；初始条件 $h(x,y,0)=100$ m。我们假定含水层的贮水系数为已知，$S=0.0001$；含水层中有一口以不变流量30000 m^3/d抽水的水井，位于结点 48。

6.2 灵敏度系数矩阵计算方法对参数识别的影响

例题 1。将图 6-1 的理想化模型的渗流区按导水系数的不同分为 5 个亚区（图 6-2），

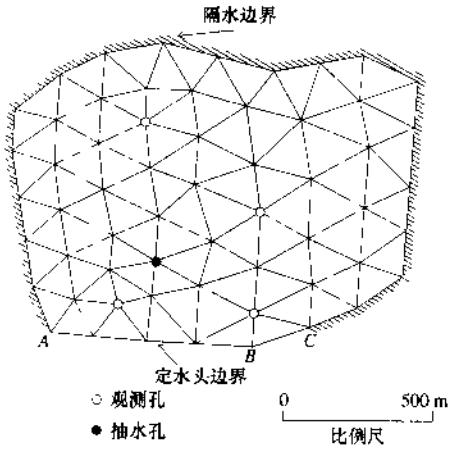


图 6-1 理想化模型及有限单元剖分

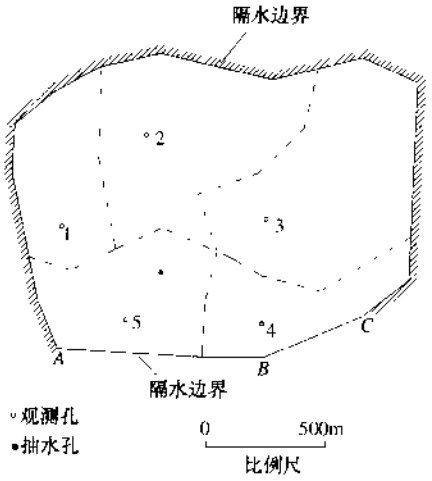


图 6-2 五个导水系数分区的情形

即 $T_1=100$ m^2/d，$T_2=500$ m^2/d，$T_3=5000$ m^2/d，$T_4=20000$ m^2/d 和 $T_5=1000$ m^2/d。这些数值被认为是待识别参数的“真值”。设每个亚区内有一个观测孔，分别位于结点 33，20，29，50 和 52。如果取不变的时间步长等于 1 d，则用有限单元法解方程（3-4）便可计算出抽水开始后第 1 天、2 天、3 天和 4 天的各观测孔水位（表 6-1）。

现在我们在理想模型上利用正演产生的上述“观测”数据考察修正的高斯-牛顿法能

表 6-1　用理想模型产生的各观测孔水位　　(m)

抽水时间 d	观测孔编号				
	1	2	3	4	5
1	97.57358	98.08834	99.43306	99.82436	97.32203
2	96.57968	97.39659	99.34580	99.80859	97.11819
3	96.24630	97.15604	99.32518	99.80554	97.08844
4	96.12123	97.06550	99.31839	99.80457	97.07983

否使含水层导水系数从“初值”返回到“真值”，与导水系数识别有关的基本数据列于表6-2。

表 6-2　与导水系数识别有关的基本数据

导水系数分区	真值/$m^2\cdot d^{-1}$	初值/$m^2\cdot d^{-1}$	下限/$m^2\cdot d^{-1}$	上限/$m^2\cdot d^{-1}$
Ⅰ	100	50	40	150
Ⅱ	500	250	200	700
Ⅲ	5000	7500	3000	8000
Ⅳ	20000	25000	1700	30000
Ⅴ	1000	1400	750	1700

用修正的高斯-牛顿法经过5次迭代识别的导水系数列于表6-3，其中灵敏度系数矩阵分别用灵敏度方程法、变分法和影响系数法计算。在用影响系数法时，取 $\alpha = 0.001$。表6-4给出了在迭代过程中目标函数和导水系数的变化情况，这里灵敏度系数矩阵用灵敏度方程法和变分法计算。表6-5是在 α 取值不同的情况下用影响系数法计算灵敏度系数矩阵所得到的导水系数识别结果。

表 6-3　经 5 次迭代识别的导水系数

灵敏度系数矩阵计算方法	识别的导水系数/$m^2\cdot d^{-1}$				
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
灵敏度系数方程法	99.989	500.000	5000.686	19998.170	1000.001
变分法	99.989	500.000	5000.686	19998.170	1000.001
影响系数法	67.373	392.541	5332.794	17000.000	986.248
真　值	100	500	5000	20000	1000

表 6-4　在迭代过程目标函数和导水系数的变化情况①

迭代次数	目标函数	导水系数/$m^2\cdot d^{-1}$				
		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
1	6.82498	75.763	405.678	8000.000	17000.000	1014.133
2	0.06749	83.706	441.122	6064.025	18188.660	1009.016
3	0.01769	96.180	490.790	4930.743	19703.330	1001.479
4	0.00091	99.936	500.060	5002.055	19995.220	1000.003
5	0.00000	99.989	500.000	5000.686	19998.170	1000.001

①灵敏度系数矩阵用灵敏度方程法和变分法计算。

表 6-5　不同 α 影响系数法计算灵敏度系数矩阵所得的导水系数识别结果

α	导水系数/$m^2 \cdot d^{-1}$				
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
0.005	40.000	200.000	8000.000	17000.000	750.000
0.002	40.036	699.056	3000.000	19485.220	992.673
0.0015	55.382	272.641	4763.701	30000.000	750.000
0.001	67.373	392.541	5332.794	17000.000	986.248
0.0001	60.223	700.000	3000.000	17000.000	750.000
真　值	100	500	5000	20000	1000

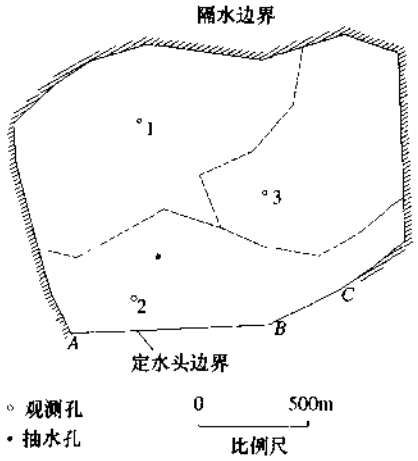


图 6-3　三个导水系数分区的情形

例题 2。将图 6-1 的理想化模型的渗流区按导水系数的不同划分为 3 个亚区（图 6-3）。设每个亚区内有一个观测孔。分别位于结点 20，29 和 52。用这个模型产生的各观测孔水位数据列于表 6-6，与导水系数识别有关的基本数据列于表 6-7。利用修正的高斯-牛顿法经过 5 次迭代识别的导数系数见表 6-8。

从表中可以看出，在用灵敏度系数方程法和变分法计算灵敏度系数矩阵的情况下，修正的高斯-牛顿法成功地识别了含水层导水系数，而用影响系数法计算灵敏度系数矩阵则不能使导水系数从“初值”返回到“真值”。表 6-5 给出的数据说明在用影响系数法计算灵敏度系数时，α 的取值不同，所得到的参数识别的结果变化很大。从表 6-4 给出的在迭代过程中目标函数和导水系数变化过程来看，如果灵敏度矩阵用变分法或灵敏度方程来计算，修正的高斯-牛顿法具有稳定性好和收敛快的特点。

表 6-6　用理想模型产生的各观测孔水位　　(m)

抽水时间 d	观测孔编号		
	1	2	3
1	96.10223	96.4904	96.68563
2	94.15842	95.98496	95.47626
3	93.32232	95.83492	94.99967
4	92.97078	95.77615	94.80320

表 6-7　与导水系数识别有关的基本数据

导水系数分区	真值/$m^2 \cdot d^{-1}$	初值/$m^2 \cdot d^{-1}$	下限/$m^2 \cdot d^{-1}$	上限/$m^2 \cdot d^{-1}$
Ⅰ	500	250	200	800
Ⅱ	1000	1300	600	1500
Ⅲ	2000	2500	1000	3000

表 6-8　经 5 次迭代识别的导水系数

灵敏度系数矩阵计算方法	识别的导水系数/$m^2 \cdot d^{-1}$		
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
灵敏度系数方程法	499.883	1000.014	2000.005
变分法	499.883	1000.014	2000.005
影响系数法	358.056	722.172	1721.641
真　值	500	1000	2000

6.3　水位观测数据序列的长短对参数识别的影响

例 3。为了研究这一问题，我们将上述理想化模型的导水系数的维数，即导水系数分区进一步减少为 2 个（图 6-4）。导水系数的真值 $T_1 = 500\ m^2/d$ 和 $T_2 = 1000\ m^2/d$。在贮水系数 $S = 0.001$ 和不变抽水量 $Q = 30000\ m^3/d$ 的情况下，用有限元方程（3-4）产生的抽水开始后 1 天，2 天，……，8 天的观测孔水位如表 6-9 所示。应当注意，表 6-9 列出的观测数据各不相同，这说明在两个观测孔处水位尚未到稳定状态。表 6-10 给出了与导水系数识别有关的基本数据。表 6-11 给出了在迭代过程中目标函数 E 及导水系数 T 的变化过程。由表 6-11 可以看出，根据表 6-9 的观测数据，当灵敏度系数矩阵采用灵敏度系数方程法计算时，利用修正的高斯-牛顿法达到了识别导水系数的目的。

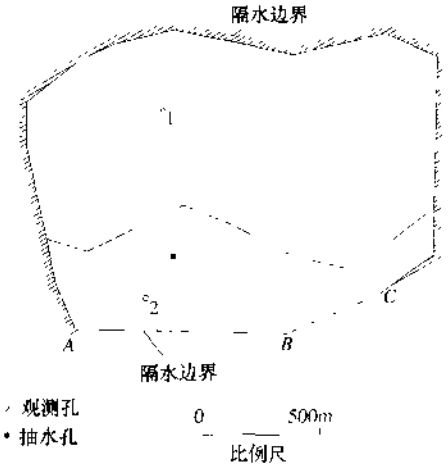


图 6-4　两个导水系数分区的情形

表 6-9　当贮水系数 $S = 0.001$ 时产生的观测孔水位　　(m)

抽水时间 d	观测孔编号	
	1	2
1	95.76622	96.34996
2	93.54007	95.80539
3	92.49639	95.63364
4	92.00385	95.55875
5	91.76817	95.52345
6	91.65430	95.50646
7	91.59895	95.49821
8	91.57196	95.49418

表 6-10　与导水系数识别有关的基本数据

导水系数分区	真值/$m^2 \cdot d^{-1}$	初值/$m^2 \cdot d^{-1}$	下限/$m^2 \cdot d^{-1}$	上限/$m^2 \cdot d^{-1}$
Ⅰ	500	250	200	800
Ⅱ	1000	1300	600	1500

表 6-11　当贮水系数 $S=0.001$ 时迭代过程目标函数 E 和导水系数 T 的变化

迭代次数	目标函数	导水系数/$m^2 \cdot d^{-1}$	
		Ⅰ	Ⅱ
1	24.31203	384.575	1202.445
2	0.19627	475.418	1004.877
3	0.00529	499.395	1000.087
4	0.00000	499.997	999.998
5	0.00000	500.001	999.999
导水系数真值		500	1000

在其他条件不变而仅改变贮水系数 $S=0.0001$ 情况下，用有限单元法生成的观测孔水位如表 6-12 所示。从表 6-12 可以看出，抽水开始后的前 6 天观测孔水位处于非稳定状态，因此该表中只有前 12 个观测数据是不同的。利用这 12 个数据进行参数识别，迭代过程中进行目标函数和导水系数的变化情况如表 6-13 所示。

表 6-12　当贮水系数 $S=0.0001$ 时产生的观测孔水位　(m)

抽水时间/d	观测孔编号	
	1	2
1	92.28389	95.62512
2	91.60809	95.49977
3	91.55145	95.49111
4	91.54659	95.49039
5	91.54617	95.49033
6	91.54612	95.49032
7	91.54612	95.49032
8	91.54612	95.49032

表 6-13　当贮水系数 $S=0.0001$ 时迭代过程中目标函数 E 和导水系数 T 的变化

迭代次数	目标函数	导水系数/$m^2 \cdot d^{-1}$	
		Ⅰ	Ⅱ
1	22.01094	394.431	1002.620
2	0.02263	493.927	1000.276
3	0.00062	499.944	1000.003
4	0.00000	499 936	1000.000
5	0.00000	499.951	1000.002
导水系数真值		500	1000

表 6-13 与表 6-11 进行对比，可以看出利用 16 个观测数据中不同的 12 个数据，同样也能精确识别出导水系数。这说明，在理想模型的情况下，用较少的观测数据也能达到识别参数的目的。

6.4 参数初值和上、下限的选择对参数识别的影响

我们仍采用例 3 中的模型来考察导水系数初值的选取对导水系数识别结果的影响。利用表 6-9 中的数据，在其他条件不变的情况下，从不同的导水系数初值出发，经过 5 次迭代所得到的识别结果如表 6-14 所示。从表 6-14 可以看出，对于理想模型来说，修正的高斯-牛顿法识别含水层参数对参数初值的选择不敏感。然而收敛过程表明，初值的选择对收敛速度略有影响，即选取的初值越接近真值，收敛速度越快。

表 6-14 经 5 次迭代所得到的识别的结果

初 值/$m^2 \cdot d^{-1}$		识别结果/$m^2 \cdot d^{-1}$		真 值/$m^2 \cdot d^{-1}$	
1	2	1	2	1	2
250	1300	500.001	999.999	500	1000
750	700	499.684	1000.022	500	1000
300	800	500.012	999.999	500	1000
780	1450	499.989	1000.000	500	1000

类似地，改变参数的上、下限，对识别结果影响也很小（见表 6-15）。

表 6-15 参数上、下限不同时经过 5 次迭代识别的导水系数

下 限/（$m^2 \cdot d^{-1}$）		上 限/（$m^2 \cdot d^{-1}$）		初 值/（$m^2 \cdot d^{-1}$）		真 值/（$m^2 \cdot d^{-1}$）		识别结果/（$m^2 \cdot d^{-1}$）	
Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ
200	600	800	1500	250	1300	500	1000	500.001	999.999
10	100	1000	2000	50	1800	500	1000	499.483	1000.090

6.5 流量和水位观测数据的随机误差和系统误差对参数识别结果的影响

在对上述所有模型进行参数识别时，我们使用的观测孔水位数据都是根据有限元方程（3-4）计算得到的。应该说这样的观测数据是精确的，不带有任何“噪声”。然而在实际测量中，水量和水位数据是不精确的，总具有某种噪声。表面上看，水量也有噪声，但究其实质，水量噪声一定会反映在水位噪声中。因此为了简便，这里只研究观测水位数据误差（即噪声）对参数识别的影响。

首先考察随机误差对参数识别的影响。假定随机误差为正态分布，我们仍用例 3 的理想模型，将表 6-16 给出的随机误差加在表 6-9 的观测数据上，就得到带有随机噪声的观测

数据。利用这些观测数据进行导水系数识别，迭代过程中目标函数 E 和导水系数的变化列于表 6-17。

表 6-16　呈正态分布的水位噪声

抽水时间 d	观测孔编号	
	1	2
1	-0.72751	0.05973
2	0.66745	-0.07146
3	0.14265	0.82425
4	0.08798	0.86630
5	0.46638	-0.22344
6	-0.70280	-0.33173
7	-0.56426	-0.16073
8	0.21190	-0.54570

表 6-17　迭代过程中目标函数 E 和导水系数 T 的变化

迭代次数	目标函数	导水系数/$m^2 \cdot d^{-1}$	
		I	II
1	28.28925	368.093	1004.230
2	4.14652	443.004	1001.997
3	3.99459	460.610	1004.261
4	3.99018	460.355	1004.302
5	3.99021	460.792	1004.072
6	3.99010	462.486	1004.979

在这种情况下，随机噪声与降深的最大比值 R 约为 20%。导水系数的相对误差 E' 约为 7.5%。由模型计算得到的 R 和 E' 的关系列于表 6-18。

表 6-18　R 和 E' 的关系

R	E'	导水系数/$m^2 \cdot d^{-1}$	
20%	7.5%	462.786	1003.979
10%	3.7%	481.204	1002.032

从表 6-19 给出的结果可以看出，在观测数据存在随机误差的情况下，导水系数初值的选取对参数识别结果的影响比无噪声时要大一些。

现在再来考察一下水位观测数据的系统误差对导水系数识别结果的影响。引起水位观测数据系统误差的原因很多，例如边界条件不适当的表示，水位测量仪器的固有误差，等等。将表 6-9 中的每个数据分别加上 -0.1 m 和 -0.9 m 的噪声形成两组新的观测数据。利

表 6-19　随机噪声存在时导水系数的识别结果　　($m^2 \cdot d^{-1}$)

参数下限		参数上限		初　值		真　值		识别结果	
Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ
10	100	1000	2000	50	1800	500	1000	462.116	1004.017
10	100	1000	2000	250	1300	500	1000	462.486	1003.979
200	600	800	1500	250	1300	500	1000	462.486	1003.979

用这些数据识别的导水系数列于表 6-20。噪声和降深的最大比值为 2.7% 的 24.6%，识别结果的最大相对误差分别为 5.8% 和 60%。这说明，修正的高斯-牛顿法对存在系统误差的水位观测数据十分敏感。因此，在实际反求水文地质参数的过程中应当尽可能地避免水位观测数据的系统误差。

表 6-20　当系统噪声存在时导水系数的识别结果

系统误差/m	初　值/$m^2 \cdot d^{-1}$		真　值/$m^2 \cdot d^{-1}$		识别结果/$m^2 \cdot d^{-1}$	
	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ
-0.1	250	1300	500	1000	528.927	978.290
-0.9	250	1300	500	1000	800.000	819.002

表 6-21　无噪声时的识别结果①

下　限/$m^2 \cdot d^{-1}$		上　限/$m^2 \cdot d^{-1}$		初　值/$m^2 \cdot d^{-1}$		真　值/$m^2 \cdot d^{-1}$		识别结果/$m^2 \cdot d^{-1}$	
Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ
600	600	800	1500	250	1300	500	1000	499.966	1000.22

①第五次迭代结果。

在 6.3 节中，我们已经讨论了观测数据序列的长短对参数识别的影响，但那里的讨论没有考虑到观测数据误差的存在。利用表 6-9 中无噪声的前 8 个数据进行导水系数识别，结果如表 6-21 所示。将表 6-22 中的随机噪声（最大约 20%）引入水位观测数据，识别的第Ⅰ和第Ⅱ区导水系数分别为 302.243 m^2/d 和 1031.01 m^2/d。表 6-21 给出的识别结果十分接近真值 500 m^2/d 和 1000 m^2/d。在观测水位序列较短且有随机噪声存在时，识别的导水系数严重偏离真值。

表 6-22　水位噪声

抽水时间/d	观测孔编号	
	1	2
1	-0.9555	-0.17098
2	0.43467	-0.30173
3	-0.08735	0.59094
4	-0.14283	0.63284

6.6 水位观测孔分布与待识别参数个数之间的关系

如图 6-3 所示，假设实际含水层由导水系数分别为 T_1、T_2 和 T_3 的三部分组成，我们只做了两个分区，并且只有两个观测孔，即观测孔 1 和观测孔 2。在此情况下，我们只能获得表 6-6 中观测孔 1 和 2 的观测水位序列。将这些数据作为观测数据，用修正的高斯-牛顿法进行反演，经过 5 次迭代识别的导水系数分别为 767.053 m^2/d 和 1329.174 m^2/d。显然这些数值与“真值” 500 m^2/d 和 1000 m^2/d 相比较有重大偏离。因此，在任何情况下观测孔个数都不能少于导水系数分区数。

7 遗传算法研究进展

7.1 概述

遗传算法（Genetic Algorithm，GA）是一种新兴的模拟自然界生物进化机制的搜索寻优技术。自然界的生物通过自身的演化就能使问题得到完美的解决，遗传算法就仿效生物的进化与遗传，从某一初始值群体出发，根据达尔文进化论中的“生存竞争”和“优胜劣汰”的原则，借助复制、交叉、变异等操作，不断迭代计算，经过若干代的演化后，群体中的最优值逐步逼近最优解，直至最后达到全局最优。这种方法又被称为进化算法。

遗传算法最先是由 Holland 提出来的。Holland 抽象地分析了自然系统的自适应过程，设计出含有自然系统的自适应特征的人工系统。它将自适应过程刻划为在变化的结构空间中的搜索过程，指出：①许多复杂结构可以用简单的位串形式编码表示；②可以通过一些简单的变换来改进这些位串结构，使之向希望的方向转变，并以这些思想为基础设计了遗传算法来实现结构的进化过程。1975 年，Holland 出版了颇有影响的专著[54]《Adaptation in Natural and Artificial System》，该书系统地论述了算法的基本原理，为遗传算法的发展奠定了基础。由此，遗传算法才逐渐为人所知。同年，De Jong [55]的博士论文“An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive System”，把 Holland 的模式理论与自己的实验结合起来，得到了一些很有意义的结论和方法，对以后遗传算法的运用和发展产生了很大影响。1985 年以来，全世界召开了七届国际遗传算法学术会议，遗传算法已经有了很大的发展，并开始渗透到人工智能、神经网络、机器人和运筹学等领域。遗传算法是多学科相互组合与渗透的产物，它已发展成为一种自组织、自适应的综合技术，广泛应用在计算机技术、工程技术、管理科学和社会科学等领域。

7.2 遗传算法的基本原理

自然界是一个自适应的大系统[53,56~60]，自然系统中的大多数生物体通过自然选择和有性生殖这两种基本过程进行自身的演化，使自己逐步达到完美来适应大自然。遗传算法受生物进化与遗传的启发，形成一种独特的优化方式，遗传算法的运算原理常常与生物进化及遗传学说相吻合，而且其术语也常仿照生物学的术语。遗传算法的运算基础是字符串，先将搜索对象编码为字符串形式；字符串就相当于生物学中的染色体，由一系列字符组成；每个字符都有特定的含义，反映所解决问题的某个特征，这就相当于基因，亦即染色体 DNA 的片段。每个字符串结构被称为个体，每个个体都可以通过问题本身所具有的适应值度量来计算反映其适应性好坏的适应值，然后对一组字符串结构（被称为一个群体）进行循环操作。每次循环操作被称作一代，其中的操作包括：保存字符串组中适应性

较好的那些字符串到下一代（对应于遗传学中的复制），使上一代中的优良个体得以生存下去，这类似于生物进化论中的自然选择。通过有组织的然而是随机的字符串间的信息交换来重新结合那些适应性好的字符串（对应于遗传学中的交叉），在每一代中利用上一代字符串结构中适应性好的位和段来生成一个新的字符串的群体；作为额外增添，偶尔也要在字符串结构中尝试用新的位和段来替代原来的部分（对应于遗传学中的变异），等等。遗传算法中这些操作只涉及字符串的某些片段，这就类似于遗传过程只涉及某些基因而不是整个染色体。遗传算法是一类随机算法，但它不是简单的随机走动，它可以有效地利用已有的信息来搜寻那些有希望改善解质量的字符串。类似于自然进化，遗传算法通过作用于染色体上的基因，寻找好的染色体来求解问题。与自然界相似，遗传算法对求解问题的本身一无所知，它所需要的仅是对算法所产生的每个染色体进行评价，并基于适应值来选择染色体，使适应性好的染色体有更多的繁殖机会。

7.3 基本的遗传算法

在许多实际应用领域，无论是工程技术科学还是社会经济科学中，都会遇到全局最优化问题[53,56~59,61]，这一类问题大多数可以形式化为一个对（S，f）的寻优问题，其中 $S \subset \mathrm{R}^n$ 是 R^n 中的有界集，$f: S \to \mathrm{R}$ 是 n 维实值函数。所要求解的问题就是要找到一点 $x_{\text{best}} \in S$，使得 $f(x_{\text{best}})$ 是 S 上的全局最优解，可以是极大值或极小值。以极小值为例，即求一点 $x_{\min} \in S$，满足

$$\forall x \in S \qquad f(x_{\min}) \leqslant f(x)$$

尽管人们对这类问题进行了大量的研究，但得到的成绩仍不能令人满意，目前只能解决一些简单的问题。对于更复杂的全局最优化问题，通常是利用数值解法，但许多数值解法都不能找到最优解，只是返回一个接近于全局最优的值。

全局最优化数值方法可以分为两大类：确定性算法和随机算法。在随机算法中，最优化步骤在一定程度上依赖于概率事件，它排除了确定性算法中的一个最大障碍——预先详细说明一个问题的全部特征并针对问题的特征决定算法应采用的对策。与常规的优化算法相比，遗传算法有可能在更大的范围内探寻问题潜在的解。确定性算法没有用到概率信息。只有当对 S 上进行穷举搜索及对 f 规定附加的假设条件下，算法才能找到全局最优解。实行穷举搜索在很多情况下（如实数解）是不可能的，因此多采用对 f 规定附加的假设条件，这必然影响到最终解的可靠性。在这些算法中，搜索速度越快的算法往往意味着需要对 f 做更多的假设，或者不能保证搜索成功。与此相对照，许多随机算法都可以证明在概率意义下渐近收敛到全局最优解，即这些算法保证以概率 1 渐近收敛，而且随机算法的计算结果一般要优于那些确定性算法的结果。遗传算法就是其中具有代表性的随机算法。

常用的遗传算法操作有选择（Selection）、交叉（Crossover）、变异（Mutation）。复制是直接将个体的代码进行拷贝形成新个体。下面就选择、交叉与变异操作做一介绍。

7.3.1 选择过程

选择过程是以旋转赌轮 Pop _ Size 次（种群规模，即群体中个体的总个数）为基础，

每次旋转都为新的种群选择一个染色体。首先计算出个体 i 被选择的概率 P_i，优秀的染色体其选择概率大，然后根据选择概率的大小将一个圆盘分为 Pop _ Size 个扇形，每个扇形的中心角的大小为 $2\pi P_i$。

每次进行选择时，先选择赌轮边界旁一个不动的参考点，赌轮随机地转动，若不动点停留在扇形 j 内，则选择个体 j。个体的适应值越大，被选择的概率越大，从而其染色体被遗传到下一代的概率越大。

赌轮式选择的特点是对于种群内的所有个体，无论其适应值大小，都有被选择的机会。适应值大的个体被选择的概率大，适应值小的个体被选择的概率小。经过选择后适应值大的个体在种群中的数目会增加。这正体现了适者生存的原则。

7.3.2 交叉操作

交叉操作是个有组织的、随机的字符串间的信息交换过程。假设群体 $G(t)$ 是模式库。历史信息以每个模式实例数目的形式存储于 $G(t)$ 中。交叉作用产生模式库中已有模式的新的实例，同时也产生新的模式。简单的交叉操作分为三步：

(1) 从当前群体 $G(t)$ 中选择两个个体结构：$A = a_1 a_2 \cdots a_n$，$B = b_1 b_2 \cdots b_n$；

(2) 以交叉概率 P_c 随机选择一个整数 $x \in \{1, 2, \cdots, n\}$；

(3) 交换 A 和 B 中位置 x 右边的元素，产生两个新的个体结构：$a_1 a_2 \cdots a_x b_{x+1} \cdots b_n$ 和 $b_1 b_2 \cdots b_x a_{x+1} \cdots a_n$。

7.3.3 变异操作

对于群体 $G(t)$ 中的每个个体 $A = a_1 a_2 \cdots a_n$，简单的变异操作过程如下：

1) 每个位置的字符变量都有一个变异概率 P_m，各位置互相独立，通过随机过程选择发生变异的位置 x_1，x_2，$\cdots$，x_n。

2) 产生一个新个体结构 $B = a_1 a_2 \cdots a_{x_1 - 1} b_{x_1} a_{x_1 + 1} b_{x_2} a_{x_2 + 1} \cdots a_n$，其中 b_{x_1} 是从对应位置 x_1 的字符变量的值域中随机选择的一个取值。类似地，b_{x_2}，$\cdots$，b_{x_k} 可以同样得到。

如果每个位置的变异概率等于 P_m，那么模式 H（阶为 $o(H)$）发生一次或多次变异的概率是

$$1 - (1 - P_m)^{o(H)} = o(H) P_m$$

遗传操作除了有选择、交叉、变异等算子外，还有染色体内部复制（Intrachromo-somal duplication）、删除、易位（Translocation）、分异（Segregation）等。

7.4 遗传算法的主要步骤

为了使用遗传算法来解决优化问题，准备工作分为以下四步[56,57,61]。

7.4.1 确定问题的潜在解的遗传表示方案

在基本的遗传算法中，表示方案是把问题的搜索空间中每个可能的点表示为确定长度的特征串（通常是二进制串）。表示方案的确定需要选择串长 l 和字母表规模 k。在染色

体串和问题的搜索空间中的点之间选择映射有时容易实现，有时又非常困难。选择一个便于遗传算法求解问题的表示方案经常需要对问题有深入的了解。

7.4.2 确定适应值的度量

适应值度量为群体中每个可能的确定长度的特征串指定一个适应值，它经常是问题本身所具有的。适应值度量必须有能力计算搜索空间中每个确定长度的特征串的适应值。

7.4.3 确定控制该算法的参数和变量

控制遗传算法的主要参数有群体规模 Pop _ Size、算法执行的最大代数 N _ Gen、交叉概率 P_c、变异概率 P_m 和选择策略 R 等参数。

(1) 群体规模 Pop _ Size。群体规模影响到遗传算法的最终性能和效率。当规模太小时，由于群体对大部分超平面只给出了不充分的样本量，所以得到的结果一般不佳。大的群体更有希望包含出自大量超平面的代表，从而可以阻止过早收敛到局部最优解；然而群体越大，每一代需要的计算量也就越多，这有可能导致一个无法接受的慢收敛率。

(2) 交叉率 P_c。交叉率控制交叉算子应用的频率，在每代新的群体中，有 $P_c \cdot$Pop _ Size 个串实行交叉。交叉率越高，群体中串的更新就越快。如果交叉率过高，相对选择能够产生的改进而言，高性能的串被破坏得更快。如果交叉率过低，搜索会由于太小的探查率而可能停滞不前。

(3) 变异率 P_m。变异是增加群体多样性的搜索算子，每次选择之后，新的群体中的每个串的每一位以相等的变异率进行随机改变。对于 M 进制串，就是相应的位从 1 变为 0 或 0 变为 1。从而每代大约发生 $P_m \cdot$Pop _ Size$\cdot L$ 次变异，其中 L 为串长。一个低水平的变异率足以防止整个群体中任一给定位保持永远收敛到单一的值。高水平的变异率产生的实质是随机搜索。

比起选择和交叉，变异在遗传算法中是次要的，它在恢复群体中失去的多样性方面具有潜在的作用。例如，在遗传算法执行的开始阶段，串中一个特定位上的值 1 可能与好的性能紧密联系，也就是说从搜索空间中某些初始随机点开始，在那个位上的值 1 可能一致地产生适应性度量好的值。因为越好的适应值与串中那个位上的值 1 相联系，复制作用就越会使群体的遗传多样性损失。当达到一定程度时，值 0 会从整个群体中的那个位上消失，然而全局最优解可能在串中那个位上是 0。一旦搜索范围缩小到实际包含全局最优解的那部分搜索空间，在那个位上的值 0 就可能正好是达到全局最优解所需的。这仅仅是一种说明搜索空间是非线性的方式，这种情形不是假定的，因为实际上所有我们感兴趣的问题都是非线性的。变异作用提供了一个恢复遗传多样性的损失的方法。

(4) 选择策略 R。有两种选择策略：一是利用纯选择，即当前群体中每个点复制的次数比与点的性能值成比例。二是利用最优选择，即首先执行纯选择，且具有最好性能的点总是保留到下一代。在缺少最优选择的情况下，由于采样误差、交叉和变异，最好性能的点可能会丢失。

通过指定各个参数 Pop _ Size、P_c、P_m 和 R 的值，可以表示一个特定的遗传算法。

7.4.4 确定指定结果的方法和停止运行的准则

当遗传的代数达到最大允许代数时，就可以停止算法的执行，并指定执行中得到的最好结果作为算法的结果。

基本的遗传算法

1）随机产生一个由固定长度字符串组成的初始群体。

2）对于字符串群体，迭代地执行下述步骤，直到选择标准被满足为止。

①计算群体中的每个个体字符串的适应值；

②实施下列三种操作（至少前两种）来产生新的群体，操作对象的选取基于与适应度成比例的概率。

选择：把现有的个体串按适应值复制到新的群体中。

交叉：通过遗传重组随机选择两个现有的子串进行遗传重组，产生两个新的串。

变异：将现有串中某一位的字符随机变异产生一个新串。

3）把在后代中出现的最好适应值的个体串指定为遗传算法运行的结果。这一结果可以是问题的解（或近似解）。

基本的遗传算法流程图如图 7-1 所示。

7.5 遗传算法的特点[1]

遗传算法具有十分顽强的鲁棒性[56,53]，这是因为比起普通的优化搜索方法，它采用了许多独特的方法和技术，归纳起来，主要有以下几个方面。

遗传算法的处理对象不是参数本身，而是对参数集进行了编码的个体。此编码操作，使得遗传算法可直接对结构对象进行操作。所谓结构对象泛指集合、序列、矩阵、树、图、链和表等各种一维或二维甚至三维结构形式的对象。这一特点，使得遗传算法具有广泛的应用领域。比如：

①通过对连接矩阵的操作，遗传算法可用来对神经网络或自动机的结构或参数加以优化；②通过对集合的操作，遗传算法可实现对规则集合或知识库的精炼而达到高质量的机器学习目的；③通过对树结构的操作用遗传算法可得到用于分类的最佳决策树；④通过对任务序列的操作，遗传算法可用于任务规划，而通过对操作序列的处理遗传算法可自动构造顺序控制系统。

如前所述许多传统搜索方法都是单点搜索算法，即通过一些变动规则，问题的解从搜索空间中的当前解（点）移到另一解（点）。这种点对点的搜索方法，对于多峰分布的搜索空间常常会陷于局部的某个单峰的优解。相反，遗传算法是采用同时处理群体中多个个体的方法，即同时对搜索空间中的多个解进行评估，更形象地说，遗传算法是并行地爬多个峰。这一特点使遗传算法具有较好的全局搜索性能，减少了陷于局部优解的风险，同时这使遗传算法本身也十分易于并行化。

在标准的遗传算法中，基本上不用搜索空间的知识或其他辅助信息，无需导数或其他

---

[1] 石琳珂，地球物理遗传反演方法研究，中国地质大学博士学位论文，1996。

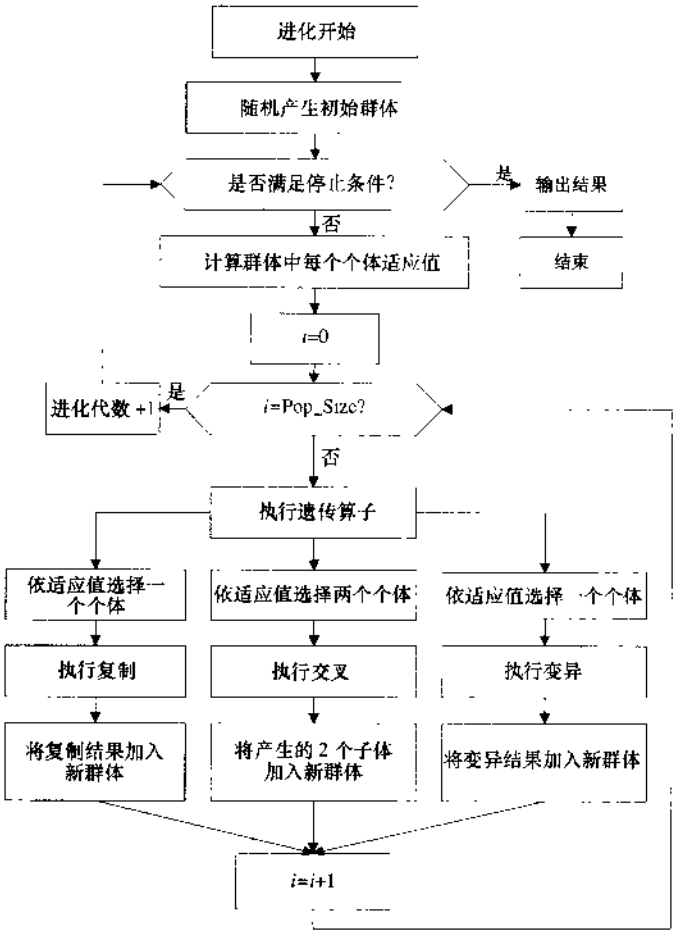


图 7-1　基本遗传算法的框图

辅助信息，而仅用适应度函数值来评估个体，并在此基础上进行遗传操作。需要着重提出的是，遗传算法的适应度函数不仅不受连续可微的约束，而且其定义域可以任意设定。对适应度函数的惟一要求是，对于输入可计算出加以比较的正的输出。遗传算法的这一特点使它的应用范围大大扩展。

遗传算法不是采用确定性规则，而是采用概率的变迁规则来指导它的搜索方向。在以后的章节中我们将会看到，遗传算法采用概率仅仅是作为一种工具来引导其搜索过程朝着搜索空间的更优化的解区域移动。因此虽然看起来它是一种盲目搜索方法，但实际上有明确的搜索方向。

遗传算法利用简单的编码技术和繁殖机制来表现复杂的现象，从而解决非常困难的问题。特别是由于它不受搜索空间的限制性假设的约束，不必要求诸如连续性、导数存在和单峰等假设，它能从离散的、多极值的、含有噪音的高维问题中以很大的概率找到全局最优解；其次，由于它固有的并行性，遗传算法非常适用于大规模并行计算。遗传算法目前已经在优化、机器学习和并行处理等领域得到了越来越广泛的应用。

7.6 遗传算法研究进展

遗传算法[56,53]研究的兴起是在20世纪80年代末和90年代初期，但它的历史起源可追溯到20世纪60年代初期。早期的研究大多以对自然遗传系统的计算机模拟为主。早期遗传算法的研究特点是侧重于对一些复杂的操作的研究。虽然其中像自动博弈、生物系统模拟、模式识别和函数优化等给人以深刻的印象，但总的来说这是一个无明确目标的发展时期，缺乏带有指导性的理论和计算工具的开拓。这种现象直到20世纪70年代中期由于Holland和De Jong的创造性研究成果的发表才得到改观。当然，早期的研究成果对于遗传算法的发展仍然有一定的影响，尤其是其中一些有代表性的技术和方法已为当前的遗传算法所吸收和发展。

在遗传算法作为搜索方法用于人工智能系统中之前，已有不少生物学家用计算机来模拟自然遗传系统。尤其是Fraser的模拟研究，他于1962年提出了和现在的遗传算法十分相似的概念和思想。但是，Fraser和其他一些学者并未认识到自然遗传算法可以转化为人工遗传算法。Holland教授及其学生不久就认识到这一转化的重要性，Holland认为比起寻找这种或那种具体的求解问题的方法来说，开拓一种能模拟自然选择遗传机制的带有一般性的理论和方法更有意义。在这一时期，Holland不但发现了基于适应度的人工遗传选择的基本作用，而且还对群体操作等进行了认真的研究。1965年，他首次提出了人工遗传操作的重要性，并把这些应用于自然系统和人工系统中。

1967年，Bagley在他的论文中首次提出了遗传算法（genetic algorithm）这一术语，并讨论了遗传算法在自动博弈中的应用。他所提出的包括选择、交叉和变异的操作已与目前遗传算法中的相应操作十分接近。尤其是他对选择操作做了十分有意义的研究。他认识到，在遗传进化过程的前期和后期，选择概率应合适地变动。为此，他引入了适应度定标（scaling）概念，这是目前遗传算法中常用的技术。同时，他也首次提出了遗传算法自我调整概念，即把交叉和变异的概率融于染色体本身的编码中，从而可实现算法自我调整优化。尽管Bagley没有对此进行计算机模拟实验，但这些思想对于后来遗传算法的发展所起的作用是十分明显的。

在同一时期，Rosenberg也对遗传算法进行了研究，他的研究依然是以模拟生物进化为主，但他在遗传操作方面提出了不少独特的设想。1970年Cavicchio把遗传算法应用于模式识别中。实际上他并未直接涉及到模式识别，而仅用遗传算法设计一组用于识别的检测器。Cavicchio对于遗传操作以及遗传算法的自我调整也做了不少有特色的研究。

Weinberg于1971年发表了题为《活细胞的计算机模拟》的论文。由于他和Rosenberg一样注意于生物遗传的模拟，所以他对遗传算法的贡献有时被忽略。实际上，他提出的多层次或多级遗传算法至今仍给人以深刻的印象。

第一个把遗传算法用于函数优化的是Hollstien。1971年他在论文《计算机控制系统中的人工遗传自适应方法》中阐述了遗传算法用于数字反馈控制的方法。实际上，他主要是讨论了对于二变量函数的优化问题。其中，对于优势基因控制、交叉和变异以及各种编码技术进行了深入的研究。

1975年在遗传算法研究的历史上是十分重要的一年。这一年，Holland出版了他的著

名专著《自然系统和人工系统的适配》。该书系统地阐述了遗传算法的基本理论和方法，并提出了对遗传算法的理论研究和发展极为重要的模式理论（schemata theory）。该理论首次确认了结构重组遗传操作对于获得隐并行性的重要性。直到这时才知道遗传操作到底在干什么，为什么又干得那么出色，这对于以后陆续开发出来的遗传操作具有不可估量的指导作用。

同年，De Jong 完成了他的重要论文《遗传自适应系统的行为分析》他在该论文中所做的研究工作可看作是遗传算法发展进程中的一个里程碑，这是因为他把 Holland 的模式理论与他的计算实验结合起来。尽管 De Jong 和 Hollstien 一样主要侧重于函数优化的应用研究，但他将选择、交叉和变异操作进一步完善和系统化，同时又提出了诸如代沟（generation gap）等新的遗传操作技术。可以认为，De Jong 的研究工作为遗传算法及其应用打下了坚实的基础，他所得出的许多结论迄今仍具有普遍的指导意义。

进入 20 世纪 80 年代，遗传算法迎来了兴盛发展时期，无论是理论研究还是应用研究都成了十分热门的课题。尤其是遗传算法的应用研究显得格外活跃，不但它的应用领域扩大，而且利用遗传算法进行优化和规则学习的能力也显著提高，同时产业应用方面的研究也在摸索之中。此外一些新的理论和方法在应用研究中亦得到了迅速的发展，这些无疑均给遗传算法增添了新的活力。

随着应用领域的扩展，遗传算法的研究出现了几个引人注目的新动向：一是基于遗传算法的机器学习（Genetic Base Machine Learning），这一新的研究课题把遗传算法从历来离散的搜索空间的优化搜索算法扩展到具有独特的规则生成功能的崭新的机器学习算法。这一新的学习机制对于解决人工智能中知识获取和知识优化精炼的瓶颈难题带来了希望。二是遗传算法正日益和神经网络、模糊推理以及混沌理论等其他智能计算方法相互渗透和结合，这对开拓 21 世纪中新的智能计算技术将具有重要的意义。三是并行处理的遗传算法的研究十分活跃。这一研究不仅对遗传算法本身的发展，而且对于新一代智能计算机体系结构的研究都是十分重要的。四是遗传算法和另一个称为人工生命的崭新研究领域正不断渗透。所谓人工生命即是用计算机模拟自然界丰富多彩的生命现象，其中生物的自适应、进化和免疫等现象是人工生命的重要研究对象，而遗传算法在这方面将会发挥一定的作用。五是遗传算法和进化规划（Evolution Programming，EP）以及进化策略（Evolution Strategy，ES）等进化计算理论日益结合。EP 和 ES 几乎是和遗传算法同时独立发展起来的，同遗传算法一样，它们也是模拟自然界生物进化机制的智能计算方法，既同遗传算法具有相同之处，也有各自的特点。

随着遗传算法研究和应用的不断深入和发展，一系列以遗传算法为主题的国际会议十分活跃。从 1985 年开始，国际遗传算法会议，即 ICGA（International Conference on Genetic Algorithm）每两年举行一次。在欧洲，从 1990 年开始也每隔一年举办一次类似的会议，即 PPSN（Parallel Problem Solving from Nature）会议。除了遗传算法外，大部分有关 ES 和 EP 的学术论文也出现在 PPSN 中。另外，以遗传算法的理论基础为中心的学术会议有 FOGA（Foundation of Genetic Algorithm）。它也是从 1990 年开始，隔年召开一次。这些国际学术会议论文集中反映了遗传算法近些年来的最新发展和动向。

8 十进制遗传算法

8.1 引言

把计算机科学与进化论结合起来的尝试开始于20世纪50年代，但直到20世纪60年代中期才得到发展。美国Michigan大学的John Holland在A.S.Fraser和H.J.Bremermann等工作的基础上提出了位串编码技术，这种编码既适合于变异又适合于交配操作，并且他强调将交配作为遗传的主要操作。随后，J.Holland将该算法用于自然和人工系统的自适应行为的研究之中，并于1975年正式出版其开创性的著作《自然与人工系统的自适应》。后来J.Holland与他的学生们将该算法加以推广并应用到优化和机器学习等问题中，并正式定名为遗传算法。

Holland的遗传算法常称为简单遗传算法（简记为SGA），SGA的操作对象是一群二进制串（称为染色体、个体），即种群（Population）。这里每个染色体对应于问题的一个解。从初始种群出发，采用基于适应度的选择策略在当前种群中选择个体，使用杂交（Crossover）和变异（Mutation）来产生下一代种群。如此一代代演化下去，直到满足期望的终止条件。

在进行遗传算法设计时初期一般采用二进制编码，二进制编码类似于生物染色体的组成，从而算法易于用生物遗传理论来解释并使得遗传操作如杂交、变异等很容易实现；同时采用二进制编码时，算法的处理模式数最多。在求解最优化问题时，二进制编码存在如下缺点[53,59]：①相邻整数的二进制编码可能具有较大的Hamming距离，这一缺点有时称为Hamming悬崖。②编码时，一般要先给出求解的精度以确定串长，而当精度确定后，就很难在算法执行过程中进行调整，从而使算法缺乏微调功能。若在算法一开始就选取较高的精度，那么串长就很大，这样也将降低算法的效率。③在求解高维优化问题时，二进制编码串将非常长。从而使得算法的搜索效率很低。

为了克服二进制编码的缺点，研究人员相继提出了Gray编码、动态编码、实数编码、有序串编码、结构式编码等编码方案。其中采用较多的为实数编码即十进制编码。采用十进制编码具有如下优点：①一般的实际问题均为十进制表达，采用十进制编码使得表示比较自然，容易引入相关领域的知识。②对于大部分数值优化问题，采用十进制比采用二进制编码时，算法的平均效率高。③在求解高维或复杂优化问题时，十进制编码的算法效率很高。

8.2 十进制遗传算法简介

8.2.1 反演优化问题

用遗传算法反演水文地质参数[38,61]，首先要构造优化问题。设区域有 m 个观测值，

则构造误差函数为：

$$E(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\sum_{i=1}^{m}\left|h_i(p_1,p_2,\cdots,p_n)-h_i^0\right|/m \tag{8-1}$$

其中：h_i^0 为实测值，h_i（p_1，p_2，…，p_n）为计算值。h_i^0 和 h_i 具有相同的时间和坐标点，p_1，p_2，…，p_n 为参数，为书写方便记 $P=[p_1,p_2,\cdots,p_n]$。

模型选定之后，通过改变参数使误差函数达到最小值。那么本问题就转化为约束条件下的优化问题（8-2）。

$$\begin{cases}\min E(p_1,p_2,\cdots,p_n)=\sum_{i=1}^{m}\left|h_i(p_1,p_2,\cdots,p_n)-h_i^0\right|/m\\ p_1^a\leqslant p_1\leqslant p_1^b\\ \cdots\\ p_n^a\leqslant p_n\leqslant p_n^b\end{cases} \tag{8-2}$$

8.2.2 遗传算法步骤

可用遗传算法求解优化问题（8-2），具体步骤如下。

1）解的表示结构。用十进制浮点向量，表示优化问题的解。每个染色体由一个浮点向量表示，其长度和解向量相同。这里用（p_1，p_2，…，p_n）表示最优化问题（8-2）的解。相应的染色体为 $V=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$。

2）初始化过程。定义整数 Pop _ Size 作为染色体的个数，并且随机产生 Pop _ Size 个初始染色体。从优化问题的约束条件可以看出，（p_1，p_2，…，p_n）的可行域是一个长方形，我们用随机的方法可以得到 Pop _ Size 个初始可行的染色体。

检验（p_1，p_2，…，p_n）是否为可行染色体，如果是，就保留。如果不是就再产生一组可行染色体。直到产生 Pop _ Size 个初始可行的染色体 V_1，V_2，…，$V_{\text{Pop_Size}}$。

3）评价函数。评价函数（用 eval（V）表示）用来对种群中的每个染色体 V 设定一个概率，以使该染色体被选择的可能性与其种群中其他染色体的适应性成比例。通过轮盘赌，适应性强的染色体被选择产生后代的机会大。在实际应用中我们采取如下方法确定评价函数。

设目前该代中的染色体为 V_1，V_2，…，$V_{\text{Pop_Size}}$，可以根据染色体的序进行再分配，无论采用何种数学规划均可以将染色体由好到坏进行重排，就是说，一个染色体越好，其序号越小。设参数 $\alpha\in(0,1)$ 给定，定义于序的评价函数为：

$$\text{eval}(V_i)=\alpha(1-\alpha)^{i-1},i=1,2,\cdots,\text{Pop_Size}$$

$i=1$ 意味着染色体是最好的，$i=\text{Pop_Size}$ 说明是最差的。

4）选择过程。选择过程是以旋转赌轮 Pop _ Size 次为基础的。每次旋转都为新的种群选择一个染色体。赌轮是按每个染色体的适应度进行选择染色体的。其过程如下。

A. 对每个染色体 V_i，计算累积概率 q_i

$$\begin{cases}q_0=0\\ q_i=\sum_{j=1}^{i}\text{eval}(V_i)\quad i=1,2,\cdots,\text{Pop_Size}\end{cases}$$

B. 从区间（0，$q_{\text{Pop_Size}}$）中产生一个随机数 r。

C. 若 $q_{i-1} < r \leqslant q_i$，则选择第 i 个染色体 V_i（$1 \leqslant i \leqslant$ Pop Size）。

D. 重复步骤②和步骤③共 Pop _ Size 次，这样可以得到 Pop _ Size 个复制的染色体。

上述过程并没有要求满足条件 $q_{\text{Pop_Size}} = 1$。实际上，可以用 $q_{\text{Pop_Size}}$除以所有的 q_i，使 $q_{\text{Pop_Size}} = 1$，新得到的概率同样与适应度成比例。

5）交叉操作。设 P_c 为交叉操作的概率，这个概率说明种群中有期望值为 $P_c \cdot$Pop _ Size 个染色体进行交叉操作。为确定交叉操作的父代，从 $i = 1$ 到 Pop _ Size 重复以下过程：从［0，1］中产生随机数 r，如果 $r < P_c$，则选择 V_i 作为一个父代。

用 V'_1，V'_2，V'_3，…表示上面选择的父代，并把他们随机分为交叉对。

$$(V'_1, V'_2), (V'_3, V'_4), (V'_5, V'_6), \cdots$$

现仅以第一对为例说明交叉操作的过程，从（0，1）区间产生一个随机数 c，然后按下式进行交叉操作，并产生两个后代 X 和 Y

$$X = cV'_1 + (1 - c)V'_2, \quad Y = (1 - c)V'_1 + cV'_2$$

检验新产生的后代是否为可行解，如果可行，用它们代替父代；否则，保留其中可行的。然后，产生新的随机数 c，重新进行交叉操作，直到得到两个可行的后代为止。

6）变异操作。设参数 P_m 为遗传操作中的变异概率，为确定变异操作的父代，从 $i = 1$ 到 Pop _ Size 重复以下过程：从［0，1］中产生随机数 r，如果 $r < P_m$，则选择 V_i 作为一个变异父代。先选择一个变异方向 D，M 为一个随机数，则可以用下式：

$$X = V + M \cdot D$$

为新后代，检验 X 是否为可行解。如不可行，改变随机数 M 或变异方向 D 直到 X 为可行解为止。

另一种产生变异的操作是在可行域中另外产生一个染色体，或染色体中的一个元素。

7）遗传算法的一般过程。遗传算法的一般过程可归纳如下：

输入参数 Pop _ Size，P_c，P_m；

通过初始化过程产生 Pop _ Size 个染色体；

重复

根据某抽样机制选择染色体；

对染色体进行交叉和变异操作；

计算所有染色体的评价函数；

满足终止条件时终止，否则重复以上三个过程。

9 十进制遗传算法的改进

9.1 引言

简单的遗传算法无论是二进制编码或是十进制编码的遗传算法，均遵守如下定理[56]。

定理 9.1 如果变异概率为 $P_m \in (0, 1)$，交叉概率 $P_c \in [0, 1]$，同时采用比例选择法（按个体适应度的比例进行复制），则标准遗传算法不能收敛至全局最优值。

定理 9.2 具有定理 9.1 所示参数，且在选择后保留当前最优染色体的遗传算法最终能收敛到全局最优值。

定理 9.3 具有定理 9.1 所示参数，且在选择前保留当前最优染色体的遗传算法最终能收敛到全局最优值。

在选择操作作用后保留当前最优解是一项比较复杂的工作，因为该解在选择算子作用后可能丢失。定理 9.2 表明了改进的遗传算法能收敛到全局最优解。定理 9.3 表明只要在选择前保留当前最优解，就可以保证遗传算法收敛到全局最优解。

从定理 9.1 我们可以看到标准的遗传算法（简单的遗传算法 SGA）在任意初始化，任意交叉算子以及任意适应度函数下，都不能收敛至全局最优解。要收敛到全局最优解，必须对 SGA 进行改进。

遗传算法自从诞生以后，已经在各个领域中得到了广泛的应用。但是，遗传算法在应用过程中，也暴露出了许多缺点。人们早就发现遗传算法在解决某些问题时速度很慢，而且遗传算法对编码方案的依赖性很强，算法的鲁棒性比较差。比较典型的例子是，使用二进制编码求解诸如函数优化一类问题时，效果比较差。另外，一些学者也对遗传算法理论上存在的一些问题进行了质疑。这些问题可以归结如下。

9.1.1 上位效应[58,59]

在对实际问题应用遗传算法时，实际问题的非线性，使得在编码中存在广泛的多基因性和基因多效性。多基因性是指，个体的单个表现型特征可能决定于许多基因的相互作用；基因多效性是指，单个基因可以同时影响若干个表现型特征。多基因性和基因多效性统称为上位效应。基因多效性和多基因性排除了单个基因引起单个效应的可能性。虽然单个基因的变异可能导致某个特征发生改变，但是并不表明一个基因对应一个特征。同时，上位效应也使得判断某个基因是不是“好”基因变得更加困难，因为此时一个基因在个体中所起的作用与个体中的其他基因有关。

9.1.2 编码方案

Holland[54]推测，从内在并行性的角度来说，个体中所包含的模式数目越多，GA 一次

处理的模式数目就越多，GA 的性能就越高。Holland 证明，当使用二进制编码时，个体中包含的模式数目最多，所以，他建议使用二进制串来表示个体。但是，最大的内在并行性并不能够保证提供最优的性能，二值串的使用并没有得到普遍赞同。遗传算法的许多研究者已经放弃了 Holland 建议的位串，对一些困难问题取得了很好的结果。例如，Michalewicz 指出，对于实值数值优化问题，浮点表示比二值表示运行得更好，这是因为它们具有更好的一致性，更准确，导致更快的执行。实际上，对于特定的问题使用相应的编码方式可以得到更高的性能，这种实事求是的态度正是应用 GA 解决实际问题的一个根本出发点。

9.1.3 早熟收敛

早熟收敛是遗传算法另一个重要问题。当通过染色体的交叉和变异，种群已经很难产生优于亲本的子代个体时，就会发生早熟收敛。在均匀种群中经常发生这种情况，所有标准形式的交叉简单地重复产生当前的亲本。进一步优化将完全依赖于位变异，而且可能非常缓慢。在遗传算法中，经常会遇到早熟收敛，因为伴随着交叉和选择的作用，观察到的最优个体就会以指数速度繁殖，该个体很快占据种群的大部分。Davis [62,63] 建议，当种群收敛到同一个个体，就对个体的许多位同时进行变异，以增加个体的适应值。另一种方法是生成不同的随机个体重新开始，还有一种方法就是使用启发式爬山法进行搜索。Schraudolph 和 Belew [64] 提出了一种方法，用于减轻早熟收敛的相关问题。这个方法叫做“动态参数编码”，即动态地改变每个参数可用范围的大小。粗略地说，当直观上感到种群已经收敛，就把范围的最小值和最大值重新调整，以得到更小的窗口，并且将此过程进行递推。早熟收敛也与算法所采用的选择算子有关，不同的选择算子会对个体产生不同的“选择压力”。当选择压力偏低时，选择算子的择优作用被削弱，其行为更加接近于随机游动，算法的收敛速度变慢。而当选择压力偏高时，选择算子的择优作用被放大，从而使得算法的收敛速度加快，但此时就有可能导致早熟收敛。所以，为了防止出现早熟收敛的现象，需要选择一种适当的选择算子。

为了解决这些问题，一些研究者对 GA 的基本理论进行了深入的研究，提出了很多改进 GA 性能的方案。

本书作者在进行遗传算法应用研究中，对标准的遗传算法进行了部分改进，其中有些改进和其他研究者不谋而合，有些改进则是独特的。其中主要包括优体克隆操作、子体优生操作、多代调环操作和因素变异操作。现把改进的操作简述如后。

9.2 优体克隆操作

优体克隆操作实际上就是把每一代的最优染色体无条件地复制到下一代中去，这样由定理 9.3 可知，优体克隆操作可以保证遗传算法收敛到全局最优解。同时保证了在进化的过程中目标函数是不断得到优化，而不会出现返祖现象。这种操作和 De Jong [55] 提出的“杰出人才模型”意义相同，余春峰[1] 在其硕士论文中也采用了这种操作。我们一般采用选择前保留最优个体的遗传算法，这样操作起来更方便，以下将此种算法简称为优体克隆

[1] 余春峰，十进制遗传算法的理论分析及其应用，清华大学硕士论文，1998。

遗传算法。其算法描述如下：

{

初始化种群，产生 Pop _ Size 个染色体；

计算每个个体的适应值，即目标函数值；

记录第 1 代最优染色体；

重复

{

根据某抽样机制选择染色体；

对染色体进行交叉和变异操作；

计算所有染色体的评价函数；

保留当前最优染色体，克隆到下一代；

}

满足终止条件时终止，否则重复以上四个过程。

}

9.3 子体优生操作

子体优生操作是上一代最优染色体在种群中按一定的概率产生子体。这种操作是作者研究首次提出的，其主要作用有：①加快收敛速度；②避免出现早熟；③提高解的精度。最优染色的子体是最有可能出现强于父体的个体，所谓“青出于蓝”，在这个操作中得到了体现。这个算子呈现强烈的父体特征但它又是父体的变异，我们把子体优生分为三种优生状态：①大变异状态。在遗传初期，大变异状态所起的作用非常大，对于加速收敛起到非常大的作用。②微变异状态。其作用是在遗传成熟期避免出现稳定的早熟现象，因为这种微变异可以使解的精度得到提高。③中变异状态。其作用介于大变异状态和微变异状态之间。三种算子的具体表述如下：

1）大变异子体优生操作。假设种群数为 Pop _ Size，染色体中参数的个数为 N_{vars}，大变异子体在种群中的概率为 P_1，则有算法如下（用描述性 Fortran 语言）：

首先记录上一代最优染色体 V（Pop _ Size，J）= V_{BEST}（J），J = 1，…，N_{vars}；

循环（I = 1，Pop _ Size-1）；

{A = RANDOM（）；

判断（A < P_1）成立；

{循环（J = 1，Nvars）；

{V（I，J）=（1 - 0.5 + 0.5 * 2 * RANDOM（））V_{BEST}（J）；

检验 V（I，J）是否在初始可行域，如果不是重新执行上一语句；

}

}

}

其中 RANDOM（）是随机数发生器，$V(I, J)$ 为种群，I 为染色体序号（1，2，…，Pop _ Size），J 为染色体中的元素（参数）序号（1，2，…，N_{vars}），$V_{BEST}(J)$ 为最

优染色体。

2）中变异子体优生操作。除最优染色体的浮动区间和中变异子体在种群中的概率 P_2 外，所有参数和上一操作相同，其算法描述如下：

```
循环（1=1，Pop_Size-1）；
    {A=RANDOM（）；
    判断（A<P2）成立；
    {循环（J=1，Nvars）；
    {V（I，J）=（1-0.01+0.01*2*RANDOM（））VBEST（J）；
    检验V（I，J）是否在初始可行域，如果不是重新执行上一语句；
    }
  }
}
```

基本和上一操作的步骤相同。

3）微变异子体优生操作。除最优染色体的浮动区间和小变异子体在种群中的概率 P_3 外，所有参数和大变异子体优生操作相同，其算法描述如下：

```
循环（I=1，Pop_Size-1）；
    {A=RANDOM（）；
    判断（A<P3）成立；
    {循环（J=1，Nvars）；
    {V（I，J）=（1-C+2*C*RANDOM（））VBEST（J）；
    检验V（I，J）是否在初始可行域，如果不是重新执行上一语句；
    }
  }
}
```

基本和上一操作的步骤相同。C 的确定有赖于最终的元素值和精度 ε。即：

$$C = \frac{\varepsilon}{\max(V_i)}$$

$$\varepsilon = C\max(V_i)$$

如果真解均为0，则无论 C 在（0，1）区间如何取值均能满足精度。一般情况下并不知道真解在何处，可以用初始可行域进行初步估计。

9.4 多代调环操作

多代调环操作是种群经过多代的遗传之后，调整生存环境，以便生成优秀的个体。调环操作的方法有很多种，Schraudolph 和 Belew[64] 提出的“动态参数编码”，即动态地改变每个参数可用范围的大小。石琳珂[1] 提出了真值邻域的概念，然后进行参数搜索范围压缩。多代调环操作只有当种群有一定收敛的时候才可以用，但这个问题有时很难判断，特

[1] 石琳珂。地球物理遗传反演方法研究。中国地质大学博士论文，1996。

别是当目标函数有很多极值点时很容易使参数的搜索区域陷入误区，而不可能使种群收敛到全局最优解。当然这个操作最大的优点是如果调整后的环境在真值的邻域内，种群中的优秀个体会非常接近真值，精度会达到非常之高。

在本文中我们采用两种调环方法，首先在前 500 代采用移动调环方法，每隔 10 代将环境调整为（$0.75V_{BEST}$，$1.25V_{BEST}$）在调整时注意上下限必须在初始可行域中。具体算法如下：

循环（$J=1,N_{vars}$）；

{$X_a(J)=0.75V_{BEST}(J)$；

$X_b(J)=1.25V_{BEST}(J)$；

检验 X_a（J）和 X_b（J）是否在初始可行域，如果不是调整到界限即可；

}

X_a（J）和 X_b（J）分别是第 J 个参数取值的上下限，上下限确定后可以用随机的方法生成新的初始化群体。这种移动调环方法因参数生成的上下限可以移动，即使初次参数可行域并不包括真值，也有可能经过移动使参数可行域包括真值。

在 500 代之后采用压缩调环方法，压缩系数为 0.4。具体压缩方法如下：

循环（$J=1$，N_{vars}）；

{$D=(X_b(J)-X_a(J))*C$

如果（$V_{BEST}(J)-D>X_a(J)$）则 $X_a(J)=V_{BEST}(J)-D$

如果（$V_{BEST}(J)+D<X_b(J)$）则 $X_b(J)=V_{BEST}(J)+D$

}

其中 C 为压缩系数，$C\in$（0，0.5）。如果想要压缩的速度快一些，C 取的小一些；反之，如果要压缩的速度慢些，C 取的大一些。

压缩调环必须保证群体就在真值附近时，实施才会有效。

9.5 因素变异操作

因素变异是在变异操作的过程中，不是像第 4 章中 4.2.2 节的变异操作，改变染色体中的所有因素，而是只改变其中的一个因素。这种操作特别适应于多参数的函数寻优过程，因为在遗传过程中可能有许多次全局最优点，许多参数已经到达真值附近而个别参数却远离真值，一般的遗传算法根本不可能再找到最优解，一般的变异操作很难改变现状，而因素变异却可以起到意想不到的作用。在实际应用过程中因素变异和一般变异操作可以配合使用。

9.6 组合操作

在进行遗传操作的过程中，为了达到最佳的求解效果，有时需要两种或更多种的操作组合应用。在本文中我们主要进行了 8 种遗传算法的应用研究，排列如下：

a. 简单遗传算法（SGA）；

b. 优体克隆遗传算法（The Best Chromosome Clone GA = BCC _ GA）；

c. 优体克隆 + 子体优生（Younger Generation Chromosomes Prepotency）的遗传算法（BCC_YGCP_GA）；

d. 优体克隆 + 子体优生 + 多代调环（Multi-Generations Adjusting Environment = MAE）的遗传算法（BCC_YGCP_MGAE_GA）；

e. 多代调环的遗传算法（MGAE_GA）；

f. 优体克隆 + 多代调环的遗传算法（BCC_MGAE_GA）；

g. 子体优生的遗传算法（YGCP_GA）；

h. 子体优生 + 多代调环的遗传算法（YGCP_MGAE_CA）。

从上可以看出在简单的遗传算法基础上，经过组合出现了多种遗传算法，其中一些组合体现了各种单一操作的优点的综合，而另一些组合却并没有明显的优点。

9.7 小结

在本章中我们讨论了十进制遗传算法的改进问题，提出了子体优生操作和因素变异的概念和方法，改进了多代调环的操作，将因素变异和一般变异配合使用。遗传算法是一类试验性很强的方法，它虽然借鉴了生物进化的思想，但毕竟不是生物进化过程本身，有时针对不同的问题可能需要不同的改进。万能的灵药是不存在的，只有在实践中不断改进遗传算法，才能使这种方法有更强的生命力。

10 一维地下水系统遗传反演方法

10.1 引言

在地下水研究和应用中，尽管一维地下水问题相对简单，但却是经常使用的。一维地下水模型所处理的不一定是一维地下水问题，而是可以概化为一维的地下水水问题；如泰斯模型实际上是处理平面二维问题，但经过变换后可以写出空间一维地下水数学模型。另外一维地下水问题因为有解析解，在进行方法研究和反演求参时，可以很方便地使用，备受水文地质工作者的青睐。在所有地下水渗流一维模型里，最著名的模型就是泰斯模型，而在一维地下水水质模型里最有名的就是一维连续注入模型。这两个模型均有解析解。本章主要进行一维遗传反演方法研究，主要就以这两个模型为例进行研究，所使用的方法可以很方便地推广到其他有解析解的模型中去。

10.2 泰斯模型遗传反演方法

10.2.1 数学模型

在承压含水层中打井抽水时，如果含水层在平面上是无限延伸的，侧向边界离井很远，抽水过程中边界不对抽水贡献；且含水层的顶底板均为隔水层，无垂向补给；天然水力坡度很小，径流影响也可忽略时，则认为井的抽水量不是来自外界补给，而是由含水层内部在水头降低的瞬间，地下水立即从含水层的储存中排出。将上述水文地质条件概括为[9]：

1）含水层为均质、等厚、产状水平承压含水层；

2）地下水天然水力坡度为0或近似为0；

3）单井远离边界，无垂向越流补给；

4）抽水流量为 $Q(t)$；

5）地下水抽水时瞬时释放。

可以把上述承压水非稳定运动问题归纳为如下数学模型：

$$\begin{cases} S\dfrac{\partial h}{\partial t} = T\left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) - Q\delta(x,y) & t>0, x\in(-\infty,+\infty), y\in(-\infty,+\infty) \\ h(x,y,t)\big|_{t=0} = H & x\in(-\infty,+\infty), y\in(-\infty,+\infty) \\ \lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} h(x,y,t) = H & t>0 \end{cases} \tag{10-1}$$

如果将上述问题转换为柱坐标系下的数学模型，则有：

$$\begin{cases} \dfrac{S}{T}\dfrac{\partial h}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial h}{\partial r} - Q\delta(x,y) & t>0, r\in(0,+\infty) \\ h(r,0) = H & r\in(0,+\infty) \\ \lim\limits_{r\to\infty} h(r,t) = H & t>0 \end{cases} \tag{10-2}$$

10.2.2 模型的解

模型[5,9]（10-2）通过一系列的数学变换和推导，可以求出其解析解，具体表达如下：

$$h(r,t) = H - \frac{Q}{4\pi T}W(u) \tag{10-3}$$

其中 W（u）为井函数，表达式为

$$W(u) = \int_{\frac{r^2}{4Tt}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}du = -0.577216 - \ln u + u - \frac{u^2}{2\cdot 2!} + \frac{u^3}{3\cdot 3!} + \frac{u^4}{4\cdot 4!} + \cdots \tag{10-4}$$

在具体进行计算时，W（u）可用如下近似表达式：

$$W(u) = \begin{cases} -\ln(u) + a_0 + u(a_1 + u(a_2 + u(a_3 + u(a_4 + a_5 u)))) & u<1 \\ \dfrac{1}{ue^u}\cdot\dfrac{b_0 + u(b_1 + u(b_2 + u(b_3 + u)))}{c_0 + u(c_1 + u(c_2 + u(c_3 + u)))} & u\geqslant 1 \end{cases} \tag{10-5}$$

其中：$a_0 = -0.57721566$，$a_1 = 0.99999193$，$a_2 = -0.24991055$，$a_3 = 0.05519968$，$a_4 = -0.00976004$，$a_5 = 0.00107857$，$b_0 = 0.2677737343$，$b_1 = 8.6347608925$，$b_2 = 18.059016973$，$b_3 = 8.5733287401$，$c_0 = 3.9584969228$，$c_1 = 21.0996530827$，$c_2 = 25.6329561486$，$c_3 = 9.5733223454$。

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \tag{10-6}$$

将（10-3）式转换为降深表达式：

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W(u) \tag{10-7}$$

式（10-7）即为著名的泰斯（Thies）公式。

10.2.3 反演方法简介

用泰斯模型反演水文地质参数时[5]，最常用的方法有配线法、直线图解法、水位恢复法。另外一些有效的数值反演方法已经引入到泰斯模型的反演问题中，如 Gauss-Newton 法、数学规划法等，现简述如下：

（1）配线法

a. s-t 配线法。将（10-7）式两端取对数，得：

$$\lg s = \lg W(u) + \lg\frac{Q}{4\pi T} \tag{10-8}$$

将（10-6）进行适当的变换得：

$$t = \frac{1}{u}\frac{r^2 S}{4T}$$

将上式两端取对数，得：

$$\lg t = \lg\frac{1}{u} + \lg\frac{r^2 S}{4T} \tag{10-9}$$

从方程（10-8）和方程（10-9）可知 $\lg s$-$\lg t$ 曲线的形状和曲线 $\lg W(u)$-$\lg(1/u)$ 的形状是相同的，只是坐标进行了相对位移。如果在双对数纸上作出 $W(u)$-$1/u$ 的关系曲线，在另一张模数相同的双对数纸上作出 s-t 关系曲线，两条曲线的形状是相同的。

一般情况下，$W(u)$-$1/u$ 的关系曲线称为标准曲线，s-t 关系曲线称为实际资料曲线。把两条曲线保持坐标轴平行的情况下，尽可能地重合或逼近。选一点作为配合点（无论在曲线上或曲线外均可）。读出两张对数纸上的坐标（$W(u)$，$1/u$），（s，t），将坐标代入（10-6）和（10-7）式，即可求出导水系数 T 和贮水系数 S。

b. s-r 配线法。当抽水试验有若干个观测孔时，可用 s-r 配线法。其原理和 s-t 配线法类似。只是将式（10-6）作如下变换：

$$r^2 = u\frac{4Tt}{S}$$

将上式两端取对数，得：

$$\lg r^2 = \lg u + \lg\frac{4Tt}{S} \tag{10-10}$$

在两张相同模数的双对数纸上，分别作出 s-r^2 曲线和 $W(u)$-u 曲线，配线后找出配合点，即可求出导水系数 T 和贮水系数 S。

c. s-（t，r）配线法。抽水试验时，如果记录有不同观测孔中不同时刻的水位降深值，可用此法求参数，此时：

$$\lg s = \lg W(u) + \lg\frac{Q}{4\pi T} \tag{10-10'}$$

$$\lg\frac{r^2}{t} = \lg u + \lg\frac{4T}{S} \tag{10-11}$$

可用 S-r^2/t 关系曲线和 $W(u)$-u 关系曲线进行配线。其他同前。

（2）直线图解法

当 u 值比较小时，将井函数（10-4）的展开项仅取前两项，对精度的影响不大，此时：

$$W(u) \approx -0.577216 - \ln u \tag{10-12}$$

（10-7）式可变为：

$$\begin{aligned} s &= \frac{Q}{4\pi T}W(u) = \frac{Q}{4\pi T}(-0.577216 - \ln u) = \frac{Q}{4\pi T}(\ln\frac{1}{u} - \ln 1.78) \\ &= \frac{2.30Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25Tt}{r^2S} = \frac{0.183Q}{T}\lg\frac{2.25Tt}{r^2S} \end{aligned} \tag{10-13}$$

上式为 Jacob 近似公式。直线图解法主要是依据上述公式。

a. s-$\lg t$ 直线图解法。在同一观测孔中不同时间进行降深观测时，可用此方法。

将（6-13）式变换后，可以写成：

$$s = \frac{0.183Q}{T}\lg\frac{2.25T}{r^2S} + \frac{0.183Q}{T}\lg t \tag{10-14}$$

上式为单对数纸上的直线方程。直线的斜率为 $0.183Q/T$，根据直线斜率可求出导水系数 T，在直线上任取一点的坐标（s_0，t_0）代入（10-14）式，因 Q、T、r、s_0、t_0 均为已知，可以很方便地求出贮水系数 S。一般取 t_0 为 10 的整数次幂，便于计算。

b. s-$\lg r$ 直线图解法。在同一时间的不同观测孔进行观测。此时 r 为变量，（10-13）

式可写成：

$$s = \frac{0.183Q}{T}\lg\frac{2.25Tt}{S} - \frac{0.366Q}{T}\lg r \tag{10-15}$$

在单对数纸上作出 s-lg$r$ 直线图，直线的斜率为 $-0.366Q/T$，可以根据直线的斜率求出 T，再在直线上任取一点的坐标（s_0，r_0）代入（10-15）式。因 Q、T、t、s_0、r_0 均为已知，可以很方便地求出贮水系数 S。一般取 r_0 为 10 的整数次幂，便于计算。

c. s-lg $\frac{t}{r^2}$直线图解法。如果同时获得不同观测孔不同时间的观测数据，可用此方法。(6-13) 式可写为

$$s = \frac{0.183Q}{T}\lg\frac{2.25T}{S} + \frac{0.183Q}{T}\lg\frac{t}{r^2} \tag{10-16}$$

方法同上。

10.2.4 遗传反演方法

只要是正演问题有解的问题，其反演问题均能用遗传算法来求解。传统的简单遗传算法仅有选择、交叉、变异三种操作，陈国良、佘春峰等曾用马尔可夫链证明了在概率意义下并不能保证简单的遗传算法收敛到全局最优解。因此本文中对简单的遗传算法进行了三种改进，①优体克隆；②子体优生；③多代调环。这三种操作的作用各不相同，前面已有论述，本节通过算例说明几种操作的不同作用，及对寻优过程的影响。

泰斯模型的反演是一类较简单的反演问题，因为反演的参数为导水系数 T 和贮水系数 S，一般是惟一确定的。只要有正演程序，把遗传算法相融合，就可以进行反问题的求解。因此这种方法不需要计算导数，使用简便，应用范围非常广。它与 Gauss-Newton 法及其类似的方法相比计算速度稍慢。由于其初值区间可以选择的范围很广，不会出现 Gauss-Newton 类方法由于初值选择不合适造成解不收敛的情况。它与常规的配线法和图解法相比，因采用计算机求解，计算速度很快，且解惟一确定并达到最优。避免了配线法和图解法因人而异且不易达到最优的缺点。

泰斯模型遗传反演的过程也就是求解如下优化问题的过程。

$$\begin{cases} \min E(T,S) = \sum_{i=1}^{m} \left| s_i(T,S) - s_i^0 \right| \\ T^a \leqslant T \leqslant T^b \\ S^a \leqslant S \leqslant S^b \end{cases}$$

其中：E（）为误差函数，T 为含水层导水系数，S 为贮水系数，［T^a，T^b］为 T 的取值区间，［S^a，S^b］为 S 的取值区间，s_i^0 为时空某点的地下水降深观测值，s_i（T，S）为时空某点的地下水降深计算值，可用泰斯公式计算。

待求参数初值区间的确定，可以给出一个相当宽松的大区间，用改进后的遗传算法很容易搜索到参数的最优值。这个区间的给定只要物理意义上的合理即可，如导数系数 T 的初始区间可以是（0，1000），或（0，10000），贮水系数 S 的初值区间（0，0.1），只会影响搜索速度，不会影响最终的结果。

演化终止的条件为：①目标函数小于给定的精度。②演化到指定的次数。③连续 100

代目标函数无改变。均可。

在进行计算时我们对每一个例题，均按如下 8 种方案进行演化计算：

a. 简单遗传算法（SGA）；

b. 优体克隆遗传算法（The Best Chromosome Clone GA = BCC GA）；

c. 优体克隆 + 子体优生（Younger Generation Chromosomes Prepotency）的遗传算法（BCC _ YGCP _ GA）；

d. 优体克隆 + 子体优生 + 多代调环（Multi-Generations Adjusting Environment = MAE）的遗传算法（BCC _ YGCP _ MGAE _ GA）；

e. 多代调环的遗传算法（MGAE _ GA）；

f. 优体克隆 + 多代调环的遗传算法（BCC _ MGAE _ GA）；

g. 子体优生的遗传算法（YGCP _ GA）；

h. 子体优生 + 多代调环的遗传算法（YGCP _ MGAE _ GA）。

例 1. 理想模型。假设在一个含水层中进行抽水，这个含水层符合泰斯模型假定，在抽水开始后，在一个观测孔中进行水位观测，其观测结果如表 6-1。抽水流量为：1000 m^3/h，观测孔距抽水孔 200 m，求含水层的导水系数 T 和贮水系数 S。

表 10-1 假设试验观测孔中降深资料表

序号	时间/h	水位降深/m	序号	时间/h	水位降深/m	序号	时间/h	水位降深/m
1	0.1000	0.4455	11	6.0000	3.3570	21	40.0000	4.8611
2	0.2000	0.8310	12	7.0000	3.4788	22	45.0000	4.9547
3	0.3000	1.0938	13	8.0000	3.5843	23	50.0000	5.0385
4	0.4000	1.2919	14	9.0000	3.6775	24	60.0000	5.1834
5	0.5000	1.4506	15	10.0000	3.7609	25	70.0000	5.3060
6	1.0000	1.9639	16	15.0000	4.0822	26	80.0000	5.4122
7	2.0000	2.4960	17	20.0000	4.3105	27	90.0000	5.5059
8	3.0000	2.8121	18	25.0000	4.4877	28	100.0000	5.5897
9	4.0000	3.0377	19	30.0000	4.6325	29	110.0000	5.6655
10	5.0000	3.2133	20	35.0000	4.7550	30	120.0000	5.7347

在用遗传算法反演参数时，在所有方案中均采用：导数系数 T 的初始取值区间为（0，1000.0 m^2/h），贮水系数 S 的初始取值区间为（0，0.1），遗传代数 Num _ Gen = 1000，种群数 Pop _ Size = 50，交叉概率 $P_c = 0.7$，变异概率 $P_m = 0.3$，评价函数中的 alph = 0.05。所有与多代调环有关的计算方案，其代数选择均为 10。前 500 代每隔 10 代对 T 和 S 设置一次取值区间，取值区间设为（$0.75V_{best}$，$1.25V_{best}$），V 为变量可代表 T 或 S，V_{best} 为这十代中最优的染色体，500 代后开始进行区间压缩技术，其压缩方法见前章所述，压缩系数为 0.4。其计算结果见图 10-1 和表 10-2。

此反演问题的真值为导水系数 $T = 100\ m^2/h$，贮水系数 $S = 0.0005$。用遗传算法反演的导水系数和贮水系数计算结果见表 10-3 和表 10-4。

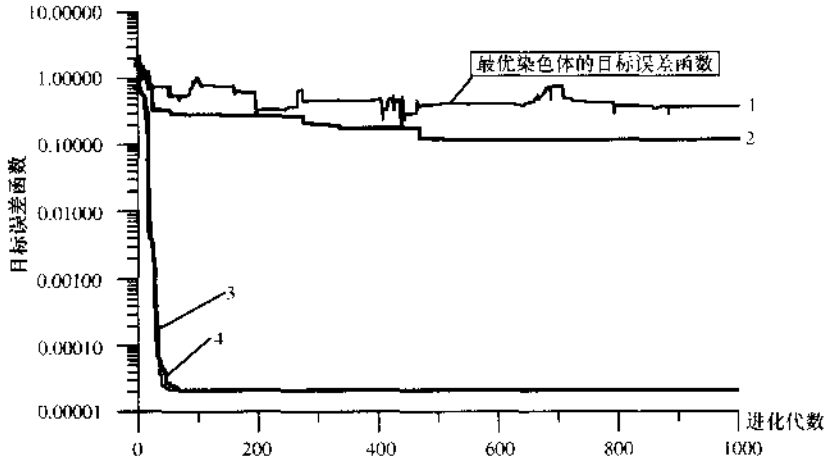


图 10-1（1）　遗传反演方法进化代数与目标函数计算结果图

1—SGA；2—BCC_GA；3—BCC_YGCP_GA；4—BCC_YGCP_MGAE_GA

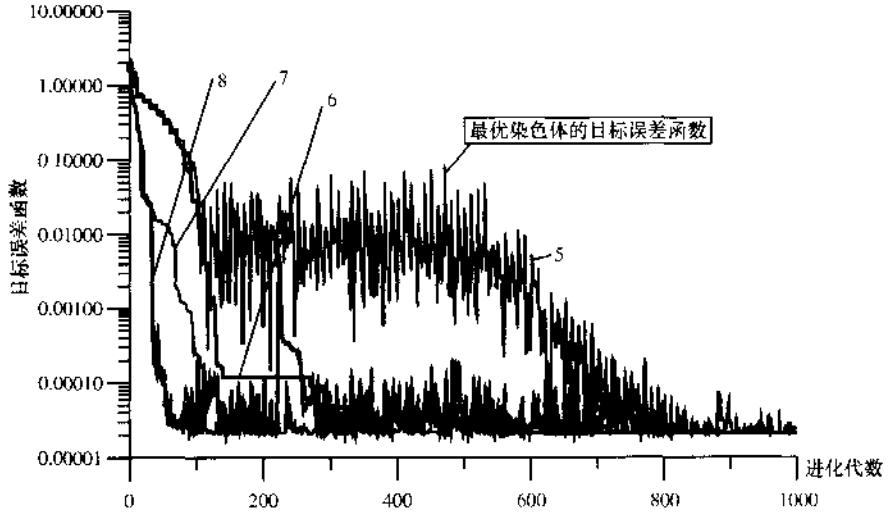


图 10-1（2）　遗传反演方法进化代数与目标函数计算结果图

5—MGAE_GA；6—BCC_MGAE_GA；7—YGCP_GA；8—YGCP_MGAE_GA

从计算结果可以看出，简单的遗传算法在达到 1000 代时，并没有明显的收敛特征，目标函数仍处于波动状态，其导水系数 T 和贮水系数 S 离真值相差较远。优体克隆遗传算法保证了后代无返祖现象，并且有收敛趋势，但收敛速度太慢，到 1000 代时两个参数距离真值尚有一定的差距。多代调环算法有明显的波动性，但收敛结果较好，压缩技术使用过早时，容易出现把真值抛弃的危险。何时开始实施压缩更好，尚待进一步研究。压缩太早，压缩因子太小均容易出现不收敛的情况，压缩太晚影响收敛速度。子体优生遗传算法收敛速度较好，但亦出现目标函数的波动即返祖现象。其他组合算法中以优体克隆 + 子体优生遗传算法和优体克隆 + 子体优生 + 多代调环遗传算法最好，它们均具有目标函数单

表 10-2　不同的遗传反演方法目标误差函数计算结果比较表

代数	SGA	BCC_GA	BCC_YGCP_GA	BCC_YGCP_MGAE_GA	MGAE_GA	BCC_MGAE_GA	YGCP_GA	YGCP_MGAE_GA
1	1.743546	1.743546	1.743546	1.743546	1.743546	1.743546	1.743546	1.743546
2	2.181821	1.743546	0.860912	0.860912	2.181821	1.743546	0.860912	0.860912
3	2.198710	1.743546	0.813459	0.813459	2.198710	1.743546	0.813459	0.813459
4	0.969620	1.470483	0.633748	0.633748	0.969620	1.470483	0.633748	0.633748
5	0.969620	1.470483	0.628553	0.628553	0.969620	1.470483	0.571737	0.571737
6	0.969620	1.470483	0.628499	0.628499	0.969620	1.470483	0.571119	0.571119
7	0.969620	1.470483	0.603576	0.603576	0.969620	1.470483	0.566536	0.566536
8	1.209948	1.470483	0.586593	0.586593	1.209948	1.470483	0.530759	0.530759
9	1.209948	1.470483	0.553417	0.553417	1.209948	1.470483	0.457593	0.457593
10	1.209948	1.255550	0.544300	0.544300	1.209948	1.255550	0.428223	0.428223
20	0.897370	0.781302	0.007012	0.003997	0.756872	0.705815	0.031440	0.103376
30	0.742210	0.337696	0.000662	0.000155	0.633220	0.594572	0.024718	0.026088
40	0.751327	0.335160	0.000025	0.000047	0.545246	0.486973	0.015526	0.000133
50	0.755391	0.331240	0.000022	0.000027	0.444154	0.392681	0.013814	0.000141
60	0.557210	0.296808	0.000021	0.000023	0.340427	0.304479	0.010375	0.000027
70	0.491801	0.296022	0.000021	0.000021	0.257073	0.227560	0.001934	0.000026
80	0.547317	0.286432	0.000021	0.000021	0.179960	0.146503	0.001176	0.000022
90	0.761565	0.286432	0.000021	0.000021	0.114646	0.070578	0.000909	0.000023
100	1.049896	0.286432	0.000021	0.000021	0.052406	0.027284	0.000253	0.000021
200	0.336221	0.271721	0.000021	0.000021	0.000583	0.000119	0.000052	0.000022
300	0.462304	0.204241	0.000021	0.000021	0.002958	0.000047	0.000027	0.000028
400	0.480105	0.178448	0.000021	0.000021	0.001315	0.000033	0.000022	0.000029
500	0.402591	0.121780	0.000021	0.000021	0.002172	0.000033	0.000027	0.000028
600	0.412127	0.118392	0.000021	0.000021	0.000277	0.000021	0.000023	0.000024
700	0.762924	0.118392	0.000021	0.000021	0.000042	0.000021	0.000022	0.000026
800	0.385809	0.118392	0.000021	0.000021	0.000025	0.000021	0.000026	0.000023
900	0.371217	0.118392	0.000021	0.000021	0.000021	0.000021	0.000029	0.000021
1000	0.372387	0.118392	0.000021	0.000021	0.000021	0.000021	0.000024	0.000021

表 10-3　导水系数 T 反演结果表

代数	SGA	BCC_GA	BCC_YGCP_GA	BCC_YGCP_MGAE_GA	MGAE_GA	BCC_MGAE_GA	YGCP_GA	YGCP_MGAE_GA
20	74.484077	56.108971	99.683968	100.273605	53.334297	57.528812	97.640312	91.720116
50	58.066265	78.956085	100.000084	100.001175	69.763924	73.995995	98.890450	99.994896
100	70.312965	79.899345	100.000038	99.999931	95.605148	97.887848	99.979431	99.999626
200	76.311798	81.056206	100.000031	99.999931	99.956360	100.008171	99.997093	100.000069
300	72.112854	84.791992	100.000107	99.999931	99.857262	99.996895	100.000824	100.001831
400	69.788017	86.846596	100.000107	99.999931	99.941605	99.999535	100.000389	100.001930
500	73.647385	90.388695	100.000107	99.999931	99.811729	99.999535	100.001396	99.999298
600	74.093681	91.061455	100.000107	99.999931	100.019135	99.999634	99.999489	99.998940
700	62.195324	91.061668	100.000107	99.999931	99.996994	100.000221	99.999382	99.999008
800	72.997269	91.061668	100.000107	99.999931	99.998756	99.999931	99.998802	100.000404
900	74.438080	91.061668	100.000107	99.999931	99.999992	99.999931	100.000267	99.999939
1000	74.855728	91.061668	100.000107	99.999931	99.999916	99.999931	100.001083	100.000053

调下降（随遗传代数），并且收敛速度非常快的优点。优体克隆 + 子体优生遗传算法在 51 代达到目标误差函数最小值 0.000021（误差主要是系统误差引起），优体克隆 + 子体优生 + 多代调环遗传算法在 68 代达到目标误差函数的最小值 0.000021。可见这两种组合遗传算法具有很好的性能，特别是优体克隆 + 子体优生遗传算法因不会出现抛弃全局最优解的可能性，收敛速度又很快，无返祖现象，许多次计算试验中此方法均表现出色，在实际应用中值得推广。

表 10-4　不同的遗传反演方法目标误差函数计算结果比较表

代数	SGA	BCC_GA	BCC_YGCP_GA	BCC_YGCP MGAE_GA	MGAE GA	BCC_MGAE GA	YGCP_GA	YGCP MGAE_GA
20	0.003574	0.005144	0.000511	0.000492	0.004731	0.004351	0.000567	0.000738
50	0.004814	0.001564	0.000500	0.000500	0.002180	0.001908	0.000529	0.000500
100	0.004801	0.001383	0.000500	0.000500	0.000607	0.000558	0.000501	0.000500
200	0.001601	0.001321	0.000500	0.000500	0.000501	0.000500	0.000500	0.000500
300	0.002279	0.001056	0.000500	0.000500	0.000501	0.000500	0.000500	0.000500
400	0.002433	0.000971	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500
500	0.001962	0.000790	0.000500	0.000500	0.000504	0.000500	0.000500	0.000500
600	0.001997	0.000787	0.000500	0.000500	0.000499	0.000500	0.000500	0.000500
700	0.004489	0.000787	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500
800	0.001837	0.000787	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500
900	0.001787	0.000787	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500
1000	0.001799	0.000787	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500	0.000500

表 10-5　抽水试验观 1 孔水位降深资料

序号	时间/h	水位降深/m	序号	时间/h	水位降深/m	序号	时间/h	水位降深/m
1	0.017	0.000	14	0.667	0.029	27	10.000	0.755
2	0.033	0.000	15	0.833	0.038	28	12.000	0.880
3	0.050	0.000	16	1.000	0.050	29	15.000	1.000
4	0.067	0.000	17	1.333	0.093	30	20.000	1.150
5	0.083	0.000	18	1.667	0.130	31	25.000	1.220
6	0.100	0.000	19	2.000	0.165	32	30.000	1.320
7	0.133	0.002	20	2.500	0.220	33	35.000	1.390
8	0.167	0.005	21	3.000	0.270	34	40.000	1.450
9	0.200	0.006	22	3.500	0.330	35	50.000	1.510
10	0.250	0.007	23	4.000	0.370	36	60.000	1.670
11	0.333	0.008	24	5.000	0.455	37	70.000	1.710
12	0.417	0.011	25	6.000	0.530	38	80.000	1.720
13	0.500	0.020	26	8.000	0.655	39	97.000	1.730

因本模型为理想模型，反演求出的导水系数和贮水系数在目标误差函数为最小值0.000021 m时已和真值几乎相等，画出的 s-t 曲线完全重合。在此不再显示图形。

例 2. 在江苏省某村一口机井进行非稳定流抽水试验。抽水井位于广阔的第四纪冲积平原上，可以认为平面上是无限的。含水层为粉细砂和亚砂土。抽水井深 120 m，直径 0.20 m。自 1976 年 11 月 6 日 9 时 40 分开始做抽水试验，抽水持续 97 h，流量为22.60 m^3/h。在抽水井及三个观测孔中进行水位观测，观 1 孔距抽水井 117.85 m，试根据观 1 孔资料计算贮水系数 S 和导水系数 T[5]（表 10-5）。

在用遗传算法反演参数时，在所有方案中均采用：导数系数 T 的初始取值区间为（0，1000.0 m^2/h），贮水系数 S 的初始取值区间为（0，0.1），遗传代数 Num _ Gen = 1000，种群数 Pop _ Size = 50，交叉概率 $P_c = 0.7$，变异概率 $P_m = 0.3$，评价函数中的 alph = 0.05。所有与多代调环有关的计算方案，其代数选择均为 10。前 500 代每隔 10 代对 T 和 S 设置一次取值区间，取值区间设为（$0.75V_{best}$，$1.25V_{best}$），V 为变量可代表 T 或 S，V_{best} 为这十代中最优的染色体，500 代后开始进行区间压缩技术，其压缩方法见前章所述，压缩系数为 0.4。其计算结果见图 10-2 和表 10-6。

表 10-6　不同的遗传反演方法目标误差函数计算结果比较表

代数	SGA	BCC _ GA	BCC _ YGCP _ GA	BCC _ YGCP _ MGAE _ GA	MGAE GA	BCC _ MGAE _ GA	YGCP _ GA	YGCP _ MGAE _ GA
1	0.495610	0.495610	0.495610	0.495610	0.495610	0.495610	0.495610	0.495610
2	0.504476	0.495610	0.476379	0.476379	0.504476	0.495610	0.476379	0.476379
3	0.485939	0.495610	0.443897	0.443897	0.485939	0.495610	0.443897	0.443897
4	0.491058	0.495610	0.406373	0.406373	0.491058	0.495610	0.443427	0.443427
5	0.499425	0.494060	0.364059	0.364059	0.499425	0.494060	0.377630	0.377630
6	0.498123	0.368873	0.318578	0.318578	0.498123	0.368873	0.315033	0.315033
7	0.439832	0.368873	0.239968	0.239968	0.439832	0.368873	0.300336	0.300336
8	0.482298	0.368873	0.139274	0.139274	0.482298	0.368873	0.285786	0.285786
9	0.493145	0.368873	0.108328	0.108328	0.493145	0.368873	0.170381	0.170381
10	0.488668	0.368873	0.056275	0.056275	0.488668	0.368873	0.134197	0.134197
20	0.447024	0.325902	0.018441	0.017817	0.411830	0.318315	0.017838	0.017819
30	0.458288	0.275118	0.017818	0.017816	0.376128	0.251287	0.017815	0.017815
40	0.458960	0.275118	0.017816	0.017815	0.329298	0.169323	0.017814	0.017814
50	0.435134	0.275118	0.017815	0.017815	0.269040	0.076524	0.017814	0.017814
60	0.398522	0.124302	0.017815	0.017814	0.198310	0.018744	0.017814	0.017814
70	0.410102	0.113456	0.017814	0.017814	0.095193	0.017816	0.017814	0.017814
80	0.403143	0.084333	0.017814	0.017814	0.044604	0.017816	0.017814	0.017814
90	0.404741	0.026615	0.017814	0.017814	0.018021	0.017816	0.017814	0.017814
100	0.405304	0.023313	0.017814	0.017814	0.018257	0.017816	0.017814	0.017814
200	0.300613	0.023313	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814
300	0.349588	0.022693	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814
400	0.321338	0.017817	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814
500	0.431181	0.017817	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814
600	0.412108	0.017817	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814
700	0.406528	0.017817	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814
800	0.422044	0.017817	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814
900	0.162261	0.017817	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814
1000	0.201058	0.017817	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814	0.017814

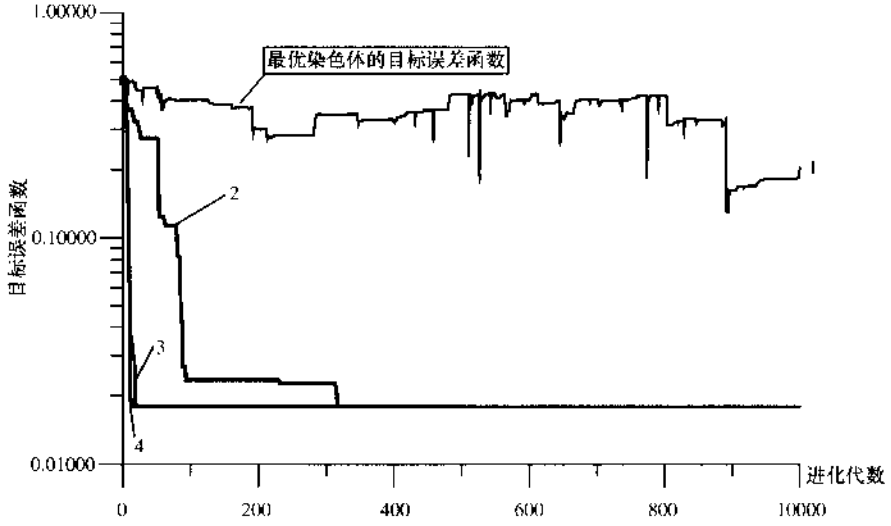


图 10-2（1）　遗传反演方法进化代数与目标函数计算结果图

1—SGA；2—BCC　GA；3—BCC　YGCP　GA；4—BCC　YGCP　MGAE　GA

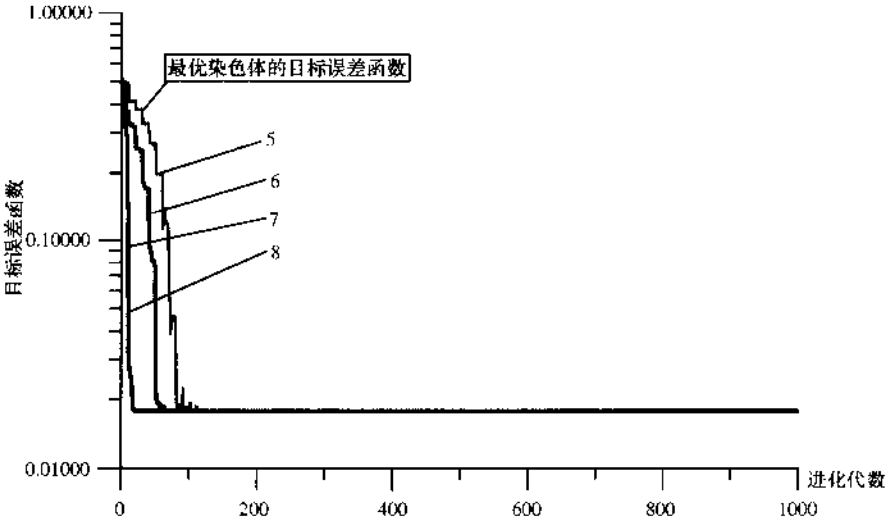


图 10-2（2）　遗传反演方法进化代数与目标函数计算结果图

5—MGAE_GA；6—BCC_MGAE_GA；7—YCCP_GA；8—YGCP_MGAE_GA

此反演问题并无真值，最小的目标误差函数为 0.017814，此时导水系数 $T=3.306231\ m^2/h$，贮水系数 $S=0.001549$。用遗传算法反演的导水系数和贮水系数计算结果见表 10-7 和表 10-8。

从计算结果可以看出，简单的遗传算法在达到 1000 代时，并没有明显的收敛特征，目标函数仍处于波动状态，其导水系数 T 和贮水系数 S 离真值相差较远。其他的遗传算法均有较好的收敛效果，所有与子体优生相关的遗传算法在20代时就近似收敛到全局最

表 10-7　不同的遗传反演方法目标误差函数计算结果比较表

代数	SGA	BCC_GA	BCC_YGCP_GA	BCC_YGCP_MGAE_GA	MGAE_GA	BCC_MGAE_GA	YGCP_GA	YGCP_MGAE_GA
20	35.926571	7.392820	3.407141	3.316535	10.853160	10.217701	3.359692	3.326615
50	7.134156	8.965521	3.310745	3.307857	5.130920	4.543156	3.306283	3.306423
100	15.991075	3.357704	3.306241	3.306246	3.420601	3.311755	3.306240	3.306320
200	6.018426	3.357704	3.306229	3.306254	3.306277	3.306511	3.306273	3.306324
300	10.929531	3.296683	3.306214	3.306254	3.306247	3.306224	3.306361	3.306452
400	7.926493	3.317405	3.306231	3.306254	3.306247	3.306224	3.306289	3.306313
500	24.104204	3.317459	3.306231	3.306254	3.306247	3.306224	3.306227	3.306273
600	17.762575	3.317434	3.306231	3.306254	3.306247	3.306224	3.306264	3.306361
700	17.505432	3.317434	3.306231	3.306254	3.306247	3.306224	3.306332	3.306294
800	18.308432	3.317434	3.306231	3.306254	3.306247	3.306224	3.306235	3.306281
900	4.874115	3.317434	3.306231	3.306254	3.306247	3.306224	3.306264	3.306279
1000	5.664513	3.317434	3.306231	3.306254	3.306247	3.306224	3.306319	3.306217

表 10-8　不同的遗传反演方法目标误差函数计算结果比较表

代数	SGA	BCC_GA	BCC_YGCP_GA	BCC_YGCP_MGAE_GA	MGAE_GA	BCC_MGAE_GA	YGCP_GA	YGCP_MGAE_GA
20	0.004128	0.004580	0.001551	0.001546	0.008805	0.002945	0.001547	0.001547
50	0.015841	0.002291	0.001549	0.001548	0.004036	0.001420	0.001549	0.001548
100	0.005318	0.001619	0.001549	0.001549	0.001515	0.001549	0.001549	0.001549
200	0.004447	0.001619	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001548	0.001549
300	0.003845	0.001621	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549
400	0.004092	0.001550	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001548
500	0.005131	0.001550	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549
600	0.005253	0.001550	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549
700	0.004834	0.001550	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001548
800	0.006115	0.001550	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549
900	0.002183	0.001550	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549
1000	0.002327	0.001550	0.001549	0.001549	0.001549	0.001549	0.001548	0.001549

优解，并在 100 代之前，使目标误差函数达到了全局最小值 0.017814。优体克隆遗传算法保证了后代无返祖现象，并且有收敛趋势，收敛速度较慢，到 1000 代时目标误差函数尚未达到全局最小值 0.017814。多代调环算法有明显的波动性，收敛结果较好。所有算法中以优体克隆 + 子体优生遗传算法最好，既无返祖现象，收敛速度又快，更不会出现抛弃全局最优解的现象。

因本模型为实际模型，已有不同的研究者反演求出的导水系数和贮水系数。其比较结

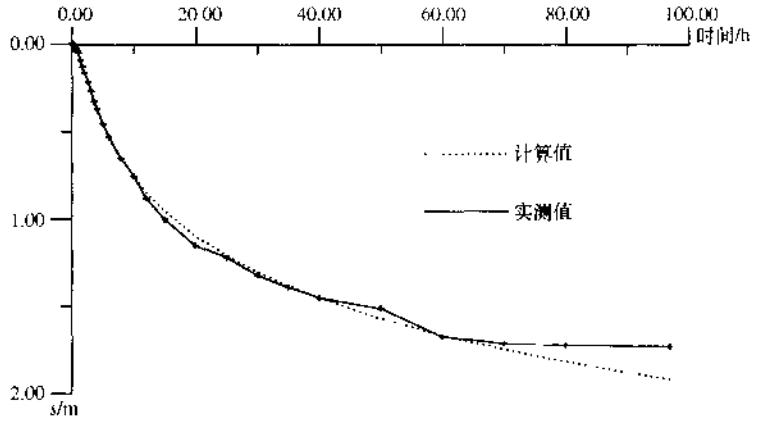


图 10-3　实测降深和计算降深结果对比图

果见表 10-9。用优体克隆 + 子体优生遗传算法反演出的导水系数 $T = 3.306231\ m^2/h$，贮水系数 $S = 0.001549$ 曲线拟合图见图 10-3。从比较结果看本文提出的优体克隆 + 子体优生遗传算法反演的参数效果最好。拟合绝对误差平均值最小。

表 10-9　例 2 几种方法计算结果对比表

文献	方法	$T/m^2 \cdot h^{-1}$	S	绝对误差平均值
文献［5］	配线法	3.34	0.00154	0.01788
文献［65］	类高斯-牛顿法	3.534	0.001455	0.02080
本文	优体克隆 + 子体优生遗传算法	3.306231	0.001549	0.017814

例 3. 一口水井以 1907 m^3/d 的流量抽水，在抽水两个小时后从附近的几个观测孔中测量水位如表 10-10，试求导水系数 T 和贮水系数 S[5]。

表 10-10　抽水试验资料表

井号	1	2	3	4	5	6	7	8
距抽水井的距离/m	8.8	10.7	13.4	18.3	25.9	30.5	38.1	49.7
实测降深/m	4.54	4.21	3.87	3.57	3.08	2.93	2.62	2.13

本例题主要是已知降深 s 和距离 r 之间的关系来求参数 T 和 S。和上例中相同，在用遗传算法反演参数时，在所有方案中均采用：导数系数 T 的初始取值区间为（0，1000.0 m^2/h），贮水系数 S 的初始取值区间为（0，0.1），遗传代数 Num _ Gen = 1000，种群数 Pop _ Size = 50，交叉概率 $P_c = 0.7$，变异概率 $P_m = 0.3$，评价函数中的 alph = 0.05。所有与多代调环有关的计算方案，其代数选择均为 10。前 500 代每隔 10 代对 T 和 S 设置一次取值区间，取值区间设为（$0.75V_{best}$，$1.25V_{best}$），V 为变量可代表 T 或 S，V_{best}为这十代中最

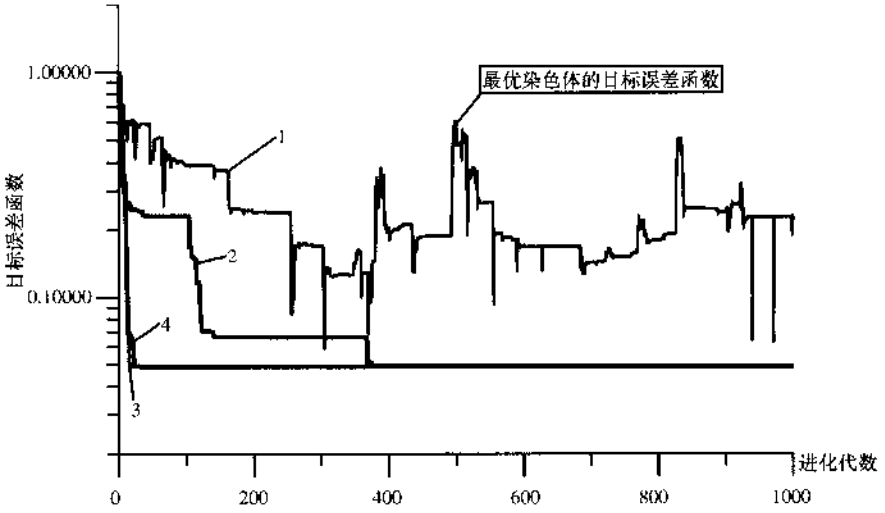


图 10-4（1）　遗传反演方法进化代数与目标函数计算结果图

1—SGA；2—BCC_GA；3—BCC_YGCP　GA；4—BCC_YGCP_MGAE_GA

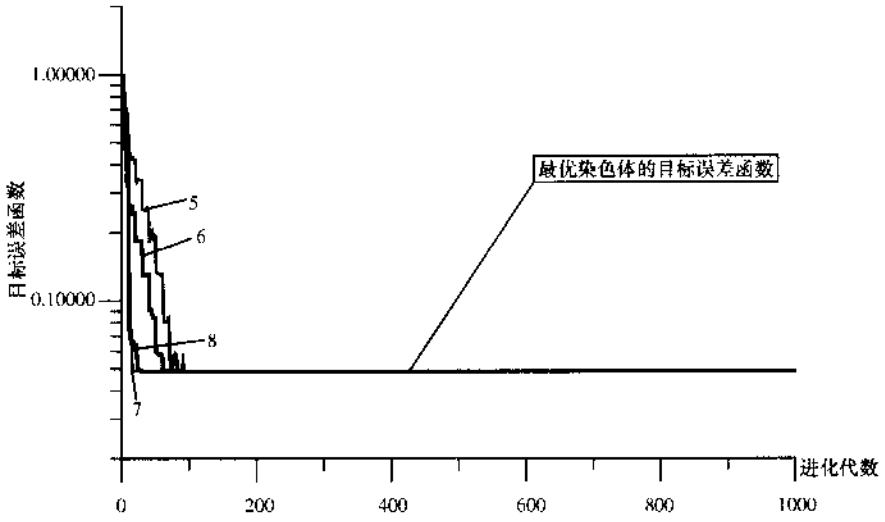


图 10-4（2）　遗传反演方法进化代数与目标函数计算结果图

5—MGAE_GA；6—BCC_MGAE_GA；7—YGCP_GA；8—YGCP　MGAE_GA

优的染色体，500 代后开始进行区间压缩技术，其压缩方法见前章所述，压缩系数为 0.4。其计算结果见图 10-4 和表 10-11。

从计算结果可以看出，简单的遗传算法在达到 1000 代时，并没有明显的收敛特征，目标函数仍处于波动状态，其导水系数 T 和贮水系数 S 离真值相差较远。其他的遗传算法均有较好的收敛效果，所有与子体优生相关的遗传算法在 30 代时就近似收敛到全局最优解；在 200 代之前，使目标误差函数达到了全局最小值 0.048724。优体克隆遗传算法保证了后代无返祖现象，并且有收敛趋势，但收敛速度较慢，到 400 代时目标误差函数基本

表 10-11　不同的遗传反演方法目标误差函数计算结果比较表

代数	SGA	BCC_GA	BCC_YGCP_GA	BCC_YGCP_MGAE_GA	MGAE_GA	BCC_MGAE_GA	YGCP_GA	YGCP_MGAE_GA
1	0.853952	0.853952	0.853952	0.853952	0.853952	0.853952	0.853952	0.853952
2	0.853952	0.853952	0.847316	0.847316	0.853952	0.853952	0.847316	0.847316
3	0.853952	0.758738	0.680066	0.680066	0.853952	0.758738	0.819097	0.819097
4	0.949061	0.758738	0.622780	0.622780	0.949061	0.758738	0.667991	0.667991
5	0.706581	0.721732	0.438711	0.438711	0.706581	0.721732	0.651761	0.651761
6	0.706581	0.471990	0.406917	0.406917	0.706581	0.471990	0.648206	0.648206
7	0.706581	0.471990	0.296070	0.296070	0.706581	0.471990	0.454357	0.454357
8	0.706581	0.325697	0.293550	0.293550	0.706581	0.325697	0.450344	0.450344
9	0.542111	0.325697	0.291656	0.291656	0.542111	0.325697	0.448031	0.448031
10	0.542111	0.325697	0.262218	0.262218	0.542111	0.325697	0.294025	0.294025
20	0.613525	0.247079	0.048777	0.064581	0.417537	0.243783	0.048872	0.063684
30	0.574650	0.243529	0.048748	0.049014	0.341610	0.183475	0.048840	0.048857
40	0.591511	0.231568	0.048733	0.048787	0.256920	0.130093	0.048822	0.048726
50	0.413099	0.231098	0.048728	0.048753	0.194976	0.084192	0.048812	0.048726
60	0.516007	0.231078	0.048727	0.048750	0.131103	0.057832	0.048796	0.048725
70	0.413818	0.231077	0.048727	0.048738	0.084907	0.048910	0.048739	0.048725
80	0.415432	0.231077	0.048727	0.048732	0.058447	0.048797	0.048734	0.048724
90	0.403297	0.231077	0.048726	0.048728	0.048848	0.048748	0.048730	0.048724
100	0.388555	0.231077	0.048726	0.048726	0.048756	0.048734	0.048729	0.048724
200	0.237730	0.066115	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048725	0.048724
300	0.170145	0.065977	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724
400	0.205357	0.049065	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724
500	0.476454	0.049065	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048725	0.048724
600	0.170521	0.049065	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724
700	0.142957	0.049065	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724
800	0.179612	0.049065	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724
900	0.239807	0.049065	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048725	0.048724
1000	0.223685	0.049065	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724	0.048724

达到全局最优值。多代调环算法有明显的波动性，但收敛结果较好。所有算法中以优体克隆＋子体优生遗传算法最好，既无返祖现象，收敛速度又快，更不会出现抛弃全局最优解的现象。

优体克隆＋子体优生遗传算法达到目标函数最小时，其导水系数 $T = 241.650192\ m^2/d$，贮水系数 $S = 0.000484$。其计算曲线与实测曲线拟合图见图 10-5。用遗传算法反演的导水系数和贮水系数计算结果见表 10-12 和表 10-13。

表 10-12　导数系数 T 反演结果表　　(m^2/d)

代数	SGA	BCC_GA	BCC_YGCP_GA	BCC_YGCP_MGAE_GA	MGAE_GA	BCC_MGAE_GA	YGCP_GA	YGCP_MGAE_GA
20	131.950073	167.758652	238.796768	214.734146	150.318176	180.261047	233.772278	251.374725
50	162.920181	181.626648	241.403473	240.077255	182.289749	208.596405	237.130188	241.570328
100	152.541061	181.680756	241.525558	241.568253	239.741074	241.051666	241.380402	241.645630
200	181.112564	213.877182	241.638870	241.647232	241.643082	241.645416	241.617828	241.648804
300	191.667618	215.344498	241.650162	241.650955	241.650543	241.648788	241.636429	241.651077
400	183.222504	224.380493	241.650192	241.650955	241.650497	241.648773	241.646515	241.651077
500	149.349380	224.380493	241.650192	241.650955	241.650497	241.648773	241.642487	241.651077
600	184.336990	224.380493	241.650192	241.650970	241.650497	241.648773	241.646027	241.651077
700	194.440125	224.384796	241.650192	241.650970	241.650497	241.648773	241.648636	241.651077
800	191.894211	224.390717	241.650192	241.650955	241.650497	241.648773	241.634537	241.651077
900	178.879303	224.390717	241.650192	241.650955	241.650497	241.648773	241.646500	241.651077
1000	183.103958	224.390717	241.650192	241.650955	241.650497	241.648773	241.647186	241.651077

表 10-13　贮水系数 S 反演结果表

代数	SGA	BCC_GA	BCC_YGCP_GA	BCC_YGCP_MGAE_GA	MGAE_GA	BCC_MGAE_GA	YGCP_GA	YGCP_MGAE_GA
20	0.005554	0.001832	0.000517	0.000817	0.003462	0.001930	0.000567	0.000397
50	0.003092	0.001849	0.000486	0.000502	0.001538	0.000915	0.000539	0.000485
100	0.003132	0.001849	0.000486	0.000485	0.000500	0.000490	0.000487	0.000485
200	0.001889	0.000828	0.000485	0.000484	0.000485	0.000485	0.000485	0.000484
300	0.001408	0.000828	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0.000485	0.000484
400	0.001631	0.000662	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484
500	0.003939	0.000662	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0.000485	0.000484
600	0.001369	0.000662	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0.000485	0.000484
700	0.001228	0.000662	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484
800	0.001483	0.000662	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0.000485	0.000484
900	0.001901	0.000662	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0 000484	0.000484
1000	0.001794	0.000662	0.000484	0.000484	0.000484	0.000484	0.000485	0.000484

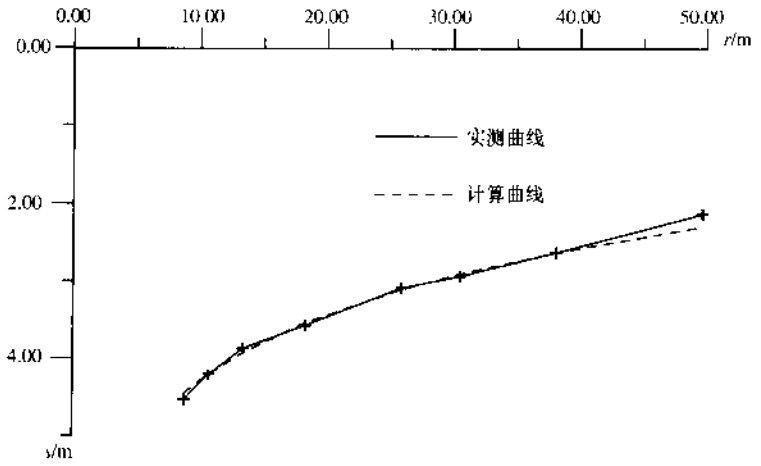


图 10-5　实测降深和计算降深结果对比图

10.3 水动力弥散方程遗传反演方法

10.3.1 数学模型

无论是实验室或野外的弥散试验，最常用的数学模型是一维流场中点源连续注入问题的水质模型[66]。假设：

1）渗流区域为半无限沙槽，且地下水流动和示踪剂弥散可以简化为一维均匀稳定流和一维弥散；

2）流体是不可压缩的均质流体，温度不变，渗流区域的介质为均质且各向同性；

3）当 $t=0$ 时，渗流区域中不存在示踪剂；

4）从 $t=0$ 时刻开始在渗流区域上端连续注入含示踪剂浓度为 C_0 的流体；

5）除注入点，渗流区域不存在其他源和汇。

依据上述假定，取地下水流动方向为 x 轴的正向，取示踪剂注入点为坐标原点。任意点 x 处在时刻 t 时的示踪剂浓度 $C(x, t)$ 满足如下数学模型。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v\dfrac{\partial C}{\partial x} & 0 < x < +\infty, t > 0 \\ C(x,0) = 0 & 0 \leqslant x < +\infty \\ C(0,t) = C_0 & t > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} C(x,t) = 0 & t > 0 \end{cases} \tag{10-17}$$

方程中 D 为弥散系数，v 为地下水流速。

10.3.2 模型的解析解

数学模型[66]（10-17）可用 Laplace 变换求解，其解为：

$$C(x,t) = \frac{C_0}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}\right) + \exp\left(\frac{vx}{D}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] \tag{10-18}$$

若令 $C_R = \dfrac{C(x,t)}{C_0}$，则

$$C_R = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}\right) + \exp\left(\frac{vx}{D}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x+vt}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] \tag{10-19}$$

其中：$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\exp(-z^2)\mathrm{d}z$，$\exp(x) = \mathrm{e}^x$。

10.3.3 反演方法简介

地下水水质模型[66]最常用的反演方法为正态分布函数法和配线法，配线法和泰斯模型的方法有相似处，这里我们主要介绍正态分布函数法。

在式（10-19）中，当 x 很大时，右端第二项与第一项相比非常小，可以忽略。Φ.M. 鲍契维尔已证明，当 $D/(vx) \leqslant 0.005$ 时，忽略第二项后误差 $\leqslant 4\%$。因此，当 x 很大时，即离示踪剂注入点很远时，浓度的分布可近似表示为：

$$C_R \approx \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x-vt}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x-vt}{\sqrt{2Dt}}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)\mathrm{d}\eta \tag{10-20}$$

由于

$$1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x-vt}{\sqrt{2Dt}}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)\mathrm{d}\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)\mathrm{d}\eta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x-vt}{\sqrt{2Dt}}}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)\mathrm{d}\eta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-vt}{\sqrt{2Dt}}}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)\mathrm{d}\eta = F(x) = \Phi\left(\frac{x-vt}{\sqrt{2Dt}}\right) \tag{10-21}$$

其中，$F(x)$为一正态分布函数，期望值为 $\mu = vt$，均方差为 $\sigma = \sqrt{2Dt}$。当 x 很大时，$1-C_R$服从于正态分布。已知标准正态分布函数 Φ 有如下性质：

$\Phi(1) = 0.8413$

$\Phi(-1) = 0.1587$

我们把浓度为 0.8413 的 x 坐标与浓度为 0.1578 的 x 坐标差定义为过渡带的宽度，则对于均方差为 σ 的正态分布函数来说，过渡带宽度 e 与均方差 σ 之间有如下关系

$$e = 2\sigma \tag{10-22}$$

由于 $1-0.8413=0.1587$，$1-0.1587=0.8413$。$1-F(x)$ 和 $F(x)$ 所代表的过渡带的宽度是相等的，利用这个性质从 C_R-x 关系图上可以很容易地计算出过渡带的宽度为：

$$e = x_{0.1587} - x_{0.8413} \tag{10-23}$$

其中 $x_{0.1587}$代表 $C_R = 0.1587$ 时所对应的 x 坐标，$x_{0.8413}$代表 $C_R = 0.8413$ 时所对应的 x 坐标。由方程（10-22）和 $\sigma = \sqrt{2Dt}$可以很方便地计算出弥散系数 D 的值：

$$D = \frac{1}{8t}e^2 = \frac{1}{8t}(x_{0.1587} - x_{0.8413})^2 \tag{10-24}$$

如果弥散试验给出的是 C_R-t 关系曲线图，上式可作适当的修改。

由（10-20）式可得：

$$x = vt + 2\sqrt{Dt}[\operatorname{arcerf}(1-2C_R)] \tag{10-25}$$

当 $C_R = 0.5$ 时，如果弥散试验给出的是 C_R-x 关系曲线图有：

$$x_{0.5} = vt$$

$$v = \frac{x_{0.5}}{t} \tag{10-26}$$

当 $C_R = 0.5$ 时，如果弥散试验给出的是 C_R-t 关系曲线图有：

$$x = vt_{0.5}$$

$$v = \frac{x}{t_{0.5}} \tag{10-27}$$

用式（10-26）和式（10-27）可以很方便地计算地下水的流速。

其他的反演方法如配线法，Gauss-Newton 法均可解水质反演问题。但是用正态分布函数法和配线法因为要查对坐标值，容易造成不同的人查出不同的坐标，引起人为误差。Gauss-Newton 法因为要给定参数的初值，如果参数初值给的不合适，解不收敛。尤其对于地下水水质问题，对地下水流速特别敏感，而计算开始时并不知道速度的分布范围，极易造成解的发散情况。Gauss-Newton 法因为要进行导数的操作，求导的过程很容易引起误差，

使结果带有较大的误差。Gauss-Newton 最大的优点是初值给的合适时，计算速度特别快。

10.3.4 遗传反演方法

遗传反演方法的特点是只要正演问题可以计算，反演问题就能进行计算。它是将生物遗传的特点引入到参数反演的过程中，通过一系列的正演计算达到反演的目的。

首先构造目标误差函数。

设区域有 m 个观测值，则构造误差函数为

$$E(p_1,p_2,\cdots,p_n) = \sum_{i=1}^{m} \left| C_i(p_1,p_2,\cdots,p_n) - C_i^0 \right| / m \tag{10-28}$$

其中：C_i^0 为实测值，C_i（p_1，p_2，…，p_n）为计算值。C_i^0 和 C_i 具有相同的时间和空间坐标，p_1，p_2，…，p_n 为参数，为书写方便记 $P = [p_1, p_2, \cdots, p_n]$。

模型选定之后，通过改变参数使误差函数达到最小值。那么本问题就转化为约束条件下的优化问题。

$$\begin{cases} \min E(p_1,p_2,\cdots,p_n) = \sum_{i=1}^{m} \left| C_i(p_1,p_2,\cdots,p_n) - C_i^0 \right| / m \\ p_1^a \leqslant p_1 \leqslant p_1^b \\ \cdots \\ p_n^a \leqslant p_n \leqslant p_n^b \end{cases} \tag{10-29}$$

在地下水弥散参数计算中，有解析解的简单模型应用很广。将优化问题（6-29）和这些模型结合起来，方程（10-29）转化为：

$$\begin{cases} \min E(v,D) = \sum_{i=1}^{m} \left| C_i(v,D) - C_i^0 \right| / m \\ v^a \leqslant v \leqslant v^b \\ D^a \leqslant D \leqslant D^b \end{cases} \tag{10-30}$$

其中：E（）为目标误差函数，v 为地下水流速，D 为弥散系数，$[v^a, v^b]$ 为 v 的取值区间，$[D^a, D^b]$ 为 D 的取值区间，C_i^0 为时空某点的地下水中某种溶质的浓度（或相对浓度）观测值，C_i（v，D）为时空某点的地下水中某种溶质浓度（或相对浓度）的计算值，可用解析解计算。

和地下水渗流的计算一样，我们也用如下 8 种不同的遗传算法进行反演计算试验。

a. 简单遗传算法（SGA）；

b. 优体克隆遗传算法（The Best Chromosome Clone GA = BCC _ GA）；

c. 优体克隆 + 子体优生（Younger Generation Chromosomes Prepotency）的遗传算法（BCC _ YGCP _ GA）；

d. 优体克隆 + 子体优生 + 多代调环（Multi-Generations Adjusting Environment = MAE）的遗传算法（BCC _ YGCP _ MGAE _ GA）；

e. 多代调环的遗传算法（MGAE-GA）；

f. 优体克隆 + 多代调环的遗传算法（BCC _ MGAE _ GA）；

g. 子体优生的遗传算法（YGCP _ GA）；

h. 子体优生 + 多代调环的遗传算法（YGCP _ MGAE _ GA）.

试验的终止原则，由于要进行对比，我们选定进化代数为 1000 时终止计算。

例 1. 在水平密封的圆筒砂柱中做连续注入示踪示踪剂的试验，在距注入孔 0.65 m 的观测孔中获得浓度比值资料见表 10-14，试求出地下水流速和弥散系数[22]。

此问题的解析解为：

$$C_R = \frac{C}{C_0} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x - vt}{2\sqrt{Dt}}\right) + \exp\left(\frac{vx}{D}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x + vt}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]$$

表 10-14　相对浓度实测资料表

时间/min	实测 C/C_0	时间/min	实测 C/C_0	时间/min	实测 C/C_0	时间/min	计算 C/C_0
24.000	0.0100	26.500	0.2900	29.000	0.7274	31.500	0.9628
24.500	0.0200	27.000	0.3200	29.500	0.8019	32.000	0.9777
25.000	0.0500	27.500	0.4400	30.000	0.8617	32.500	0.9871
25.500	0.1100	28.000	0.5500	30 500	0.9072		
26.000	0.1700	28.500	0.6396	31.000	0.9401		

表 10-15　不同的遗传反演方法目标误差函数计算结果比较表

代数	SGA	BCC _ GA	BCC _ YGCP _ GA	BCC _ YGCP MGAE _ GA	MGAE _ GA	BCC MGAE _ GA	YGCP _ GA	YGCP _ MGAE GA
1	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778
2	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778
3	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778
4	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778
5	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778
6	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778
7	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778
8	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778
9	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778	0.457778
10	0.457657	0.457778	0.457778	0.457778	0.457657	0.457778	0.457778	0.457778
20	0.457778	0.010828	0.068935	0.457778	0.228310	0.457778	0.021837	0.457778
30	0.145991	0.010555	0.019038	0.457778	0.021010	0.457778	0.013693	0.457778
40	0.055888	0.008563	0.008531	0.457778	0.015355	0.457778	0.008641	0.457778
50	0.193046	0.008525	0.008492	0.457778	0.010016	0.457778	0.008479	0.457778
60	0.194927	0.008523	0.008467	0.457778	0.008762	0.457778	0.008467	0.457778
70	0.196085	0.008523	0.008466	0.457778	0.009095	0.457778	0.008466	0.457778
80	0.196424	0.008480	0.008466	0.457778	0.008947	0.457778	0.008466	0.457778
90	0.205458	0.008474	0.008466	0.457778	0.009398	0.457778	0.008466	0.457778
100	0.090740	0.008474	0.008466	0.457778	0.008673	0.457778	0.008465	0.457778
200	0.351099	0.008470	0.008465	0.457778	0.008649	0.457778	0.008465	0.457778
300	0.110586	0.008466	0.008465	0.457778	0.009086	0.457778	0.008467	0.457778
400	0.068587	0.008465	0.008465	0.457778	0.009620	0.457778	0.008465	0.008485
500	0.008818	0.008465	0.008465	0.095848	0.009049	0.457778	0.008467	0.008465
600	0.067611	0.008465	0.008465	0.009128	0.008493	0.457778	0.008466	0.008467
700	0.011444	0.008465	0.008465	0.008478	0.008702	0.457778	0.008466	0.008466
800	0.012786	0.008465	0.008465	0.008466	0.008581	0.457778	0.008465	0.008465
900	0.014071	0.008465	0.008465	0.008465	0.008482	0.457778	0.008466	0.008465
1000	0.032126	0.008465	0.008465	0.008465	0.009947	0.457778	0.008466	0.008465

本例题主要是已知相对浓度 C_R 和时间 t 之间的关系来求地下水流速 v 和弥散系数 D。在用遗传算法反演参数时，在所有方案中均采用：地下水流速 v 的初始取值区间为（0，1000.0 m/h），弥散系数 D 的初始取值区间为（0，0.1），遗传代数 Num _ Gen = 1000，种群数 Pop _ Size = 50，交叉概率 $P_c = 0.7$，变异概率 $P_m = 0.3$，评价函数中的 alph = 0.05。所有与多代调环有关的计算方案，其代数选择均为 10。前 500 代每隔 10 代对 v 和 D 设置一次取值区间，取值区间设为（$0.75v_{best}$，$1.25v_{best}$），v 为变量可代表 v 或 D，V_{best}为这十代中最优的染色体，500 代后开始进行区间压缩技术，其压缩方法见前章所述，压缩系数为 0.4。其计算结果见图 10-6 和表 10-15。

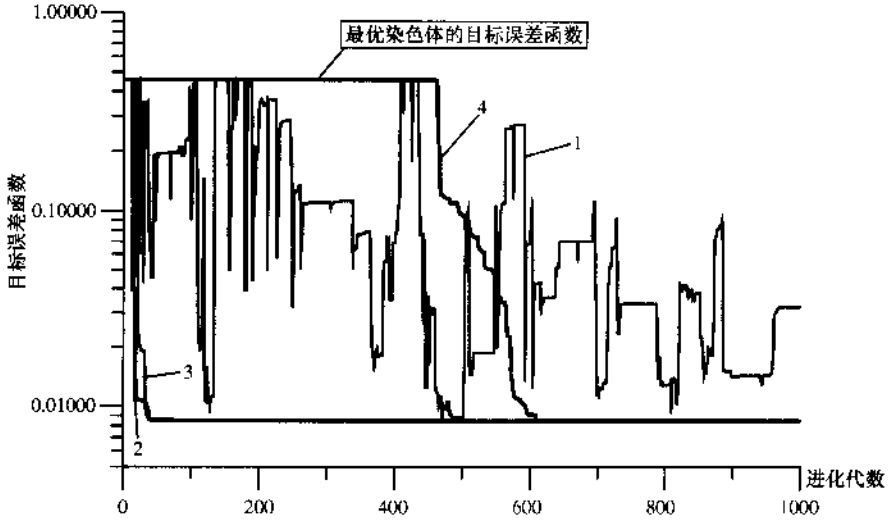


图 10-6（1）　遗传反演方法进化代数与目标函数计算结果图

1—SGA；2—BCC _ GA；3—BCC _ YGCP _ GA；4—BCC _ YGCP _ MGAE _ GA

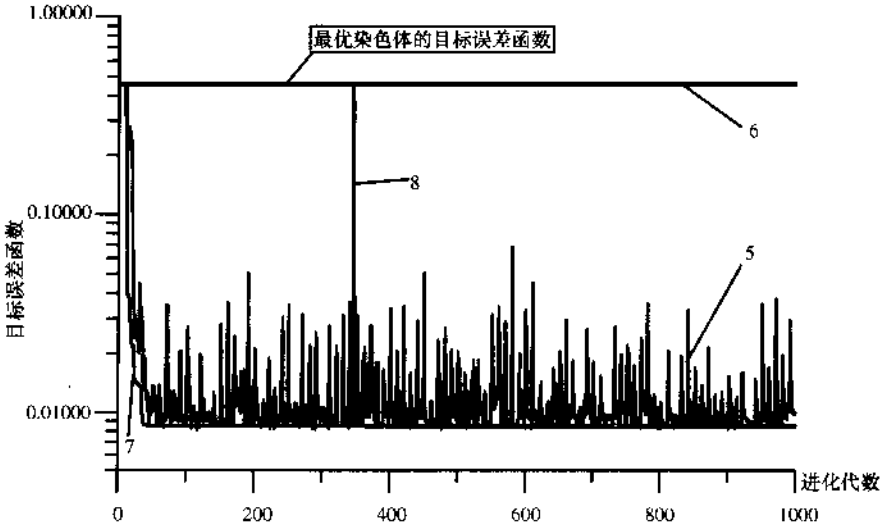


图 10-6（2）　遗传反演方法进化代数与目标函数计算结果图

5—MGAE _ GA；6—BCC _ MGAE _ GA；7—YGCP _ GA；8—YGCP _ MGAE _ GA

从计算结果可以看出，简单的遗传算法（1）、多代调环遗传算法（5）和优体克隆＋多代调环遗传算法（6）在达到1000代时，并没有明显的收敛特征，目标函数仍处于波动状态，其地下水流速 v 和弥散系数 D 离真值相差较远。特别是第6种优体克隆＋多代调环遗传算法因特殊的组合，一直没有改变目标误差函数，所有与多代调环有关的遗传算法其收敛速度均较慢，这主要是环境调整的不合适，使染色体失去了在全局生存的空间。如果调整环境的代数变为20，其收敛速度会有很大的改变。对于本问题第2种优体克隆遗传算法、第3种优体克隆＋子体优生遗传算法和第7种子体优生遗传算法均快速收敛，达到40代时已基本收敛到全局最优解。

优体克隆＋子体优生遗传算法达到目标函数最小时，其地下水流速 $v = 33.677212$ m/d，弥散系数 $D = 0.053982$ m^2/d。其计算曲线与实测曲线拟合图见图10-7。用遗传算法反演的地下水流速和弥散系数计算结果见表10-16和表10-17。

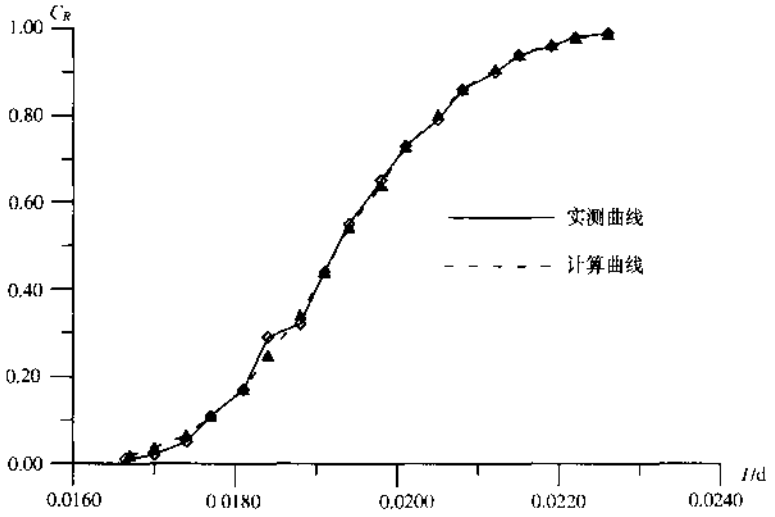


图10-7　相对浓度计算曲线与实测曲线拟合图

表10-16　地下水流速 v 反演结果表

代数	SGA	BCC_GA	BCC_YGCP_GA	BCC_YGCP_MGAE_GA	MGAE_GA	BCC_MGAE_GA	YGCP_GA	YGCP_MGAE_GA
50	36.173424	33.671337	33.676235	963.279236	33.716244	520.136719	33.676868	456.472565
100	34.634693	33.677322	33.677277	605.439514	33.690655	284.350555	33.677235	260.784821
200	39.152817	33.677704	33.677216	277.98526	33.674389	197.370758	33.677197	179.728256
300	34.987526	33.677269	33.677219	296.308868	33.678749	109.747185	33.677013	278.153046
400	34.417084	33.677200	33.677216	125.419624	33.714005	237.504684	33.677193	33.678314
500	33.674625	33.677216	33.677212	33.555416	33.651352	152.282700	33.677265	33.677197
600	34.417168	33.677216	33.677212	33.68309	33.678539	205.081924	33.677097	33.677116
700	33.715961	33.677216	33.677212	33.677952	33.671143	96.529434	33.677216	33.677151
800	33.742172	33.677216	33.677212	33.67728	33.682384	82.947456	33.677246	33.677208
900	33.728870	33.677216	33.677212	33.677208	33.676987	333.493866	33.677269	33.677200
1000	34.034618	33.677216	33.677212	33.677208	33.726131	288.583557	33.677299	33.677212

表 10-17　弥散系数 D 反演结果表

代数	SGA	BCC_GA	BCC_YGCP_GA	BCC_YGCP_MGAE_GA	MGAE_GA	BCC_MGAE_GA	YGCP_GA	YGCP_MGAE_GA
50	0.087202	0.053833	0.054073	0.013766	0.056520	0.071889	0.054046	0.027450
100	0.025721	0.053854	0.053963	0.016074	0.053783	0.060463	0.053974	0.031471
200	0.097374	0.053961	0.053978	0.007710	0.053223	0.022173	0.053979	0.063606
300	0.067593	0.053965	0.053981	0.002798	0.055236	0.019111	0.053976	0.040962
400	0.042034	0.053983	0.053982	0.004349	0.055638	0.025454	0.053982	0.053615
500	0.054839	0.053982	0.053982	0.009800	0.053590	0.027207	0.053987	0.053983
600	0.047135	0.053982	0.053982	0.051986	0.053486	0.023441	0.053984	0.053995
700	0.058453	0.053982	0.053982	0.053745	0.054555	0.020435	0.053971	0.053979
800	0.060182	0.053982	0.053982	0.053962	0.053066	0.036288	0.053973	0.053980
900	0.061396	0.053982	0.053982	0.053982	0.053792	0.033842	0.053963	0.053981
1000	0.059161	0.053982	0.053982	0.053982	0.052767	0.037044	0.053956	0.053982

10.4　小结

本章对地下水系统研究中常用的两个一维模型（泰斯模型和一维连续注入水质模型）的反演问题进行了研究。通过几个例子的计算分析，可以看出遗传反演方法在处理有解析解的地下水问题的反问题时，是一个非常有效的方法。简单的遗传算法并不是十分有效的，只在条件特殊情况下，才有收敛的可能，但其目标误差函数有返祖现象。改进后的遗传算法各有其特点，在所有这些改进的遗传算法中，优体克隆 + 子体优生遗传算法的鲁棒性最好，既保证了遗传无返祖现象，又可加快了收敛速度，并且可提高反演精度。

11 多维地下水系统遗传反演方法

11.1 引言

自从地下水非稳定流理论问世以来，地下水运动问题的解析方法有了很大的发展，许多地下水水流问题和地下水水质问题均有了解析解，并且被广泛地应用到水文地质实践中去。一般来说，解析方法只适用于含水层几何形状简单，并且是均质、各向同性的情况，因而限制了它的应用范围。

实际的水文地质条件往往是复杂的，如含水层是非均质的，含水层的厚度随坐标而变化，隔水底板起伏不平；边界形状不规则，边界条件复杂；地下水的补给除侧向补给外还存在垂向补给；由于抽水可能使承压含水层全部或部分转化为无压含水层，等等。对于这样的水文地质问题，解析方法求解就很困难，甚至无法求解。一些问题即使得到了解析表达式，仍很难以计算。

数值方法为研究这类问题开辟了新的途径，它和计算机结合起来可以解决解析方法难以解决的复杂问题。可以使所考虑的数学模型更接近实际的水文地质条件。在水文地质计算中常用的数值方法有有限元方法、有限差方法、边界元方法、有限解析方法等，因有限元方法可适应各种不规则的边界条件，并且有较好的精度，是水文地质计算中应用最为广泛的一种数值方法。

地下水数学模型按不同的标准可划分为很多种。按空间变量的特征可分为一维、二维和三维模型，按与时间有无关系可分为稳定流模型和非稳定流模型，按含水层特征可分为承压水模型、潜水模型和饱和-非饱和带模型，按状态变量和参数是否具有随机特征可分为确定性模型和随机模型……并且这些划分方法可以组合使得模型的种类更加的丰富多样。我们只能选择有代表性的模型进行研究，本章选择承压含水层中的地下水作为研究对象，列出相应的二维和三维定解问题，进行遗传反演方法的研究。因项目计划中没有对地下水水质反演问题提出要求，而且所研究方法具有很好的推广应用性能，对地下水水质模型的反演问题不再进行专门讨论。

11.2 二维承压水非稳定流模型遗传反演方法

11.2.1 数学模型[49]

$$\begin{cases} S\dfrac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div}(T \cdot \operatorname{grad} H) - W + E & (x,y) \in G, t > 0 \\ H(x,y,0) = H_0(x,y) & (x,y) \in \bar{G}, t = 0 \\ H(x,y,t)|_{\Gamma_1} = H_1(x,y,t) & (x,y) \in \Gamma_1, t > 0 \\ [T]\operatorname{grad} H \cdot n|_{\Gamma_2} = q(x,y,t) & (x,y) \in \Gamma_2, t > 0 \end{cases} \tag{11-1}$$

其中[29]：H 为地下水水头［L］；S 为贮水系数［量纲一］；$T=KM$ 为导水系数［L^2/T］；K 为含水层渗透系数［L/T］，二秩对称张量；M 为含水层厚度［L］；(x, y) 为笛卡儿坐标系的坐标；t 为时间；G 为不含边界的研究区域；Γ_1 为第一类边界；Γ_2 为第二类边界；$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ 为边界；$\bar{G}=G+\Gamma$ 为包括边界的研究区域；n 为边界单位外法向量；$H_0(x, y)$ 为初始水头分布；$H_1(x, y, t)$ 为第一类边界上的水头分布；$q(x, y, t)$ 为第二类边界单位宽度上的流量分布；E 为垂向补给强度。

$$W=\sum_{j=1}^{N_w} Q_j\delta(x-x_j, y-y_j) \tag{11-2}$$

其中，N_w 抽水井（或注水井）数目；Q_j 为 j 号井中的出水量。

11.2.2 模型的解

（1）化边值问题（11-1）为变分问题

若固定 t，并使 $H(x, y, t)\in C^2$ 则对任意 $\eta(x, y)\in H_E^1$ 则有：

$$\iint_G[S(\partial H/\partial t)-\mathrm{div}(T\mathrm{grad}H)+W-E]\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{11-3}$$

利用 Green 公式，并注意边界条件得：

$$\begin{aligned}\iint_G[S(\partial H/\partial t)\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}y=&\iint_G(-W+E)\eta\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&+\iint_G\left(T_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+T_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\Gamma_2}q\eta\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{11-4}$$

（2）剖分求解区域

在区域 G 的边界 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ 上，取有限个点依次联成一闭多边形 Γ_D．以此近似代替 Γ，并以 Γ_D 围成的多边形区域 G_D 近似代替 G，然后把 G_D 剖分为 N_e 个三角形之和，三角形的顶点为节点，节点编号 $i=1, 2, 3, \cdots, N_P$；其中内部节点 N_0 个，第一边界节点 N_1 个，第二边界节点 N_2 个。第 i 号节点的坐标记为 (x_i, y_i)，三角形单元用 $\Delta\beta$（$\beta=1, 2, \cdots, N_e$）表示。

（3）构造基函数和线性形状函数

对以顶点为 i，j，k 的三角形 $\Delta\beta$ 上的任意点 $P(x, y)$ 的面积坐标定义为：

$$\left.\begin{aligned}L_i(x, y)&=a_i+b_ix+d_iy=\Delta i/\Delta\beta\\L_j(x, y)&=a_j+b_jx+d_jy=\Delta j/\Delta\beta\\L_k(x, y)&=a_k+b_kx+d_ky=\Delta k/\Delta\beta\end{aligned}\right\} \tag{11-5}$$

式中，$\Delta\beta$ 为三角形面积，Δi，Δj，Δk 分别表示三角形 pjk，pki，pij 的面积（见图 11-1）。

$$a_i=(x_jy_k-x_ky_j)/(2\Delta\beta)$$
$$a_j=(x_ky_i-x_iy_k)/(2\Delta\beta)$$
$$a_k=(x_iy_j-x_jy_i)/(2\Delta\beta)$$
$$b_i=(y_j-y_k)/(2\Delta\beta)$$
$$b_j=(y_k-y_i)/(2\Delta\beta)$$
$$b_k=(y_i-y_j)/(2\Delta\beta)$$

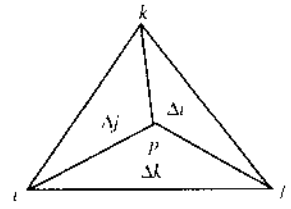


图 11-1　三角形面积坐标示意图

$$d_i = (x_k - x_j)/(2\Delta\beta)$$
$$d_j = (x_i - x_k)/(2\Delta\beta)$$
$$d_k = (x_j - x_i)/(2\Delta\beta) \tag{11-6}$$

节点 i 的基函数定义为：

$$\phi_i(x,y) = \begin{cases} L_i(x,y) & (x,y) \in \{\Delta\beta_i\} \\ 0 & (x,y) \notin \{\Delta\beta_i\} \end{cases} \tag{11-7}$$

其中，$\{\Delta\beta_i\}$ 为以 i 节点为公共节点的三角单元的集合。

取形状函数为线性元，则在节点 i 上水头的分片线性函数可表示为

$$H(x,y,t) = \sum_{i=1}^{N_p} H_i(t)\phi_i(x,y) \tag{11-8}$$

取在边界 Γ_1 上为 0 的任意分片光滑函数 η 为

$$\eta(x,y) = \sum_{i=1}^{m} r_i\phi_i(x,y) \tag{11-9}$$

式中，$m = N_0 + N_2$，r_i 为任意常数。

(4) 建立有限元方程

将式（11-8）和式（11-9）代入（11-4）式并考虑 r_i 的任意性，得有限元方程：

$$\sum_{i=1}^{N_p} D_{ij}\frac{\mathrm{d}H_i(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij}H_i(t) = G_j - F_j \quad (j = 1,2,\cdots,m) \tag{11-10}$$

考虑初始条件，用全隐式求解常微分方程组（11-3），可得：

$$\sum_{i=1}^{m}(D_{ij}/\Delta t + A_{ij})H_i^{(n+1)} = G_j - F_j + \sum_{i=1}^{N_p}(D_{ij}/\Delta t)H_i^{(n)} - \sum_{i=m+1}^{N_p}(D_{ij}/\Delta t)H_i^{(n+1)}$$
$$(j = 1,2,\cdots,m) \tag{11-11}$$

式中，$H_i^{(n)} = H(x_i, y_i, t_n)$，$\Delta t = t_{n+1} - t_n$，$m = N_0 + N_2$，$m$ 为未知节点的个数。其中：

$$D_{ij} = \begin{cases} \sum_{\beta=1}^{N_t} S_\beta\Delta\beta/12 & i \neq j \quad (i,j) \in \Delta\beta \\ \sum_{\beta=1}^{N_t} S_\beta\Delta\beta/6 & i = j \quad (i,j) \in \Delta\beta \end{cases}$$

$$A_{ij} = \sum_{\beta=1}^{N_t}(T_{xx\beta}b_ib_j + T_{yy\beta}d_id_j) \qquad (i,j) \in \Delta\beta$$

$$G_j = \sum_{\beta=1}^{N_t} q_{ij}l_{ij}/2 \qquad (i,j) \in \Delta\beta \cap \Gamma_2$$

其中，N_t 表示以 i 和 j 为公共节点的单元个数，$T_{xx\beta}$，$T_{yy\beta}$，S_β 为 $T_{xx}T_{yy}$，S 在 $\Delta\beta$ 内的值，l_{ij} 为 i，j 两节点之间距离，q_{ij} 为线段 ij 上的流量。

$$F_j = Q_j + \sum_{\beta=1}^{N_t}[Q_\beta L_j(x_\beta, y_\beta) + E_\beta\Delta\beta/3] \qquad j \in \Delta\beta$$

其中，N_t 表示以 j 为公共节点的单元个数，Q_j 表示 j 节点处的抽水流量，Q_β 表示 j 节点相邻

单元中(x_β, y_β)处的抽水流量，$Q_j = 0$ 表示 j 节点处无抽水，$Q_\beta = 0$ 表示单元 β 中无抽水。

方程组最终可以写为如下矩阵方程：

$$AH = B \tag{11-12}$$

A 为大型稀疏对称矩阵，方程组（11-12）可用一维压缩存储技术直接求解，也可用高斯-赛得尔迭代方法求解，按不同的时间步长解出每一预定时刻的每一节点的水位。

11.2.3 反演方法简介

二维承压水非稳定流模型的反演方法，在第 1 章已经进行详细的论述，许多方法也比较成熟。在实际的水文地质计算中，最常用的是试估-校正法，但是该方法无收敛判别准则，很难达到最优识别，工作量比较大。使用该方法，结果的可靠性和花费时间的多少取决于调参者的经验和技巧。

11.2.4 遗传反演方法

遗传反演方法是一种最优化方法，是将水文地质参数识别归结为求极值问题。即求水文地质参数使得误差评价函数达到最小。

设共有 n 个水文地质参数，用符号 p_1，p_2，…，p_n 来代表。同时假设在 j 号观测点上 i 时刻的计算水头为 $h_j^c(t_i)$，实测水头为 $h_j^r(t_i)$，比较的观测点总数为 N 个，比较的时间段为 M 个。通常用平均误差绝对值及平均误差平方和来表示拟合的程度。称为评价函数（也称目标函数）E。显然，E 是所给出的参数值的函数。评价函数的表达式如下：

$$E(p_1, p_2, \cdots, p_n) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \left| h_j^c(p_1, p_2, \cdots, p_n, t_i) - h_j^r(t_i) \right| / (M \cdot N) \tag{11-13}$$

遗传反演方法是将反演求参问题转化为优化问题，以简单的遗传算法为基础，并对简单的遗传算法进行改进，有效地求解优化问题，从而反演求参的方法。

在前面我们已使用遗传反演方法对一维地下水系统的反演问题进行了求解，本节讨论的问题和前面讨论的问题没有本质的区别。只不过问题更复杂，所求参数由于参数分区的存在，不再是一组参数，而是多组参数。其反演过程前面已有所述，我们仍然对 8 种遗传算法进行讨论和比较。

a. 简单遗传算法（SGA）；

b. 优体克隆遗传算法（The Best Chromosome Clone GA = BCC _ GA）；

c. 优体克隆 + 子体优生（Younger Generation Chromosomes Prepotency）的遗传算法（BCC _ YGCP _ GA）；

d. 优体克隆 + 子体优生 + 多代调环（Multi-Generations Adjusting Environment = MAE）的遗传算法（BCC _ YGCP _ MGAE _ GA）；

e. 多代调环的遗传算法（MGAE _ GA）；

f. 优体克隆 + 多代调环的遗传算法（BCC _ MGAE _ GA）；

g. 子体优生的遗传算法（YGCP _ GA）；

h. 子体优生 + 多代调环的遗传算法（YGCP _ MGAE _ GA）。

例 1. 假设承压含水层区域是一边长为 a 的正方形，东西边界为定水头边界，水头为 H_1，南北边界为隔水边界，区域中心有一抽水井以流量 Q 抽水，承压含水层的导水系数

为 T。非稳定流定解问题如下：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)-Q\delta(x-x_0,y-y_0)=S\frac{\partial H}{\partial t}(x,y)\in G,t>0 \quad (11-14)$$

$$H(x,y,0)=H_1 \quad (11-15)$$

$$H(x,y,t)|_{\overline{AD}}=H(x,y,t)|_{\overline{BC}}=H_1 \quad (11-16)$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial n}\right|_{\overline{DC}}=\left.\frac{\partial H}{\partial n}\right|_{\overline{AB}}=0 \quad (11-17)$$

此定解问题的解析解由 Chan[39]，Mullineux 和 Reed 给出。其中：(x_0, y_0) 为抽水井的坐标。在计算时，正方形的边长 a 为 1200 m，边界 AB 和 DC 为隔水边界，AD 和 BC 为定水头边界，$H_1=100$ m。计算剖分图见图 11-2，剖分三角形单元数为 312 个，节点数为 181 个，其中内部节点数为 133 个，一类边界节点数为 26 个，二类边界节点为 22 个。计算时分为三个参数分区，见图 11-3（表 11-1），在区域中心 P_1 点设置一抽水孔，抽水流量 $Q=1000$ m^3/d，T 的单位为 m^2/d，S 为量纲一变量。各参数分区的参数见表 7-1，H 的单位为 m，含水层的顶底板高程分别为 0 和 50 m，含水层厚度为 50 m。在三个参数分区分别设置一个观测孔 OBS1、OBS2、OBS3，其位置见图 11-3，其水位观测值见表 11-2。根据水位观测值反演水文地质参数。

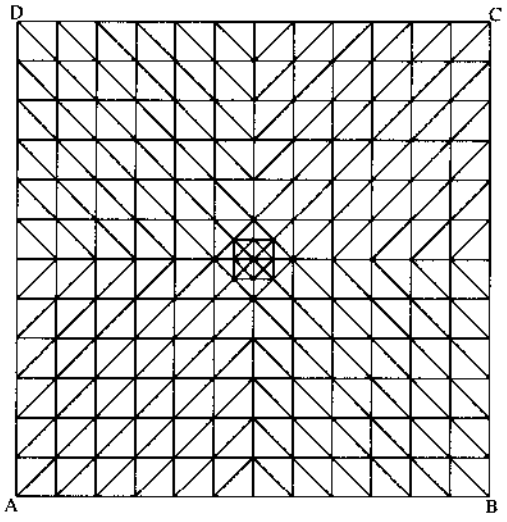


图 11-2　地下水水流模型有限元剖分图

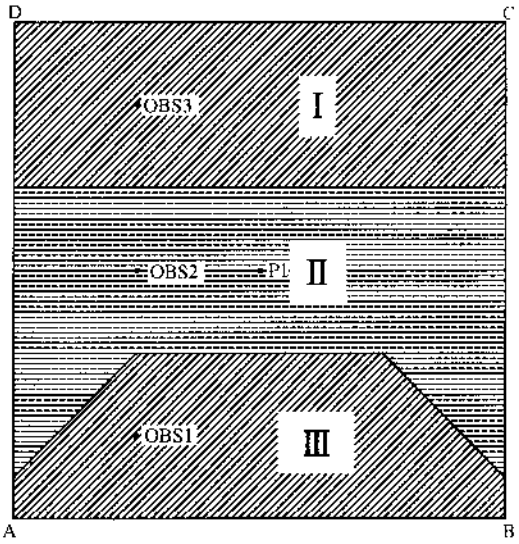


图 11-3　模型参数分区图

共 3 个分区，P1 为抽水孔，OBS1、OBS2、OBS3 为观测孔

表 11-1　模型各分区参数表

分区	T/m^2·d^{-1}	S
Ⅰ	50.00	0.0001
Ⅱ	250.00	0.0002
Ⅲ	500.00	0.0005

表 11-2　观测孔水位观测资料表

时间/d	OBS1 孔水位/m	OBS2 孔水位/m	OBS3 孔水位/m
0.100	99.8909	99.6771	99.8560
0.200	99.7840	99.4981	99.7064
0.300	99.7078	99.4037	99.5980
0.400	99.6580	99.3502	99.5267
0.500	99.6265	99.3182	99.4812
0.600	99.6067	99.2986	99.4525
0.700	99.5943	99.2865	99.4344
0.800	99.5865	99.2789	99.4231
0.900	99.5817	99.2742	99.4160
1.000	99.5787	99.2713	99.4115
2.000	99.5742	99.2669	99.4050
3.000	99.5735	99.2663	99.4040
4.000	99.5734	99.2662	99.4039
5.000	99.5734	99.2662	99.4039
6.000	99.5734	99.2662	99.4039
7.000	99.5734	99.2662	99.4039
8.000	99.5734	99.2662	99.4039
9.000	99.5734	99.2662	99.4039
10.000	99.5734	99.2662	99.4039

在用遗传算法反演参数时，在所有方案中均采用：导数系数 T_1，T_2，T_3 的初始取值区间为（0，1000.0 m^2/h），贮水系数 S_1，S_2，S_3 的初始取值区间为（0，0.1），遗传代数 Num _ Gen = 1000，种群数 Pop _ Size = 50，交叉概率 $P_c = 0.7$，变异概率 $P_m = 0.3$，评价函数中的 alph = 0.05。所有与多代调环有关的计算方案，其代数选择均为 10．前 500 代每隔 10 代对 T 和 S 设置一次取值区间，取值区间设为（$0.75V_{best}$，$1.25V_{best}$），V 为变量可代

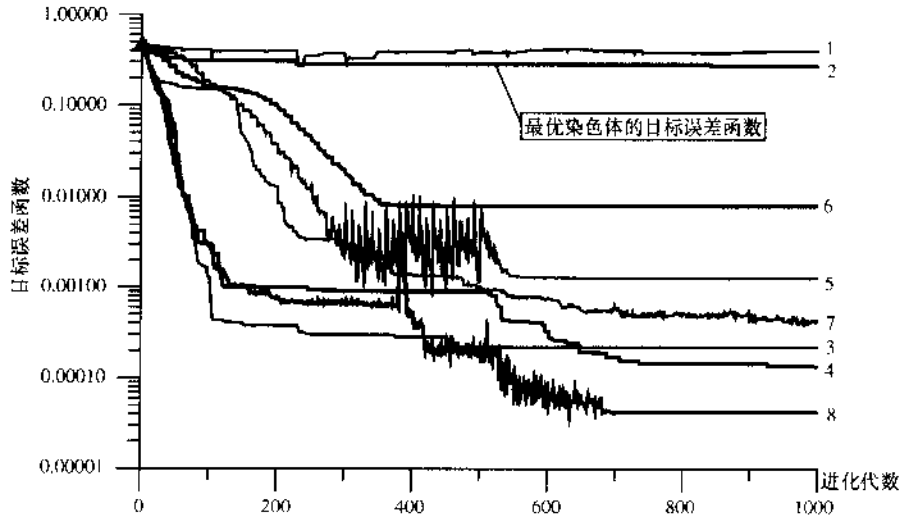


图 11-4　遗传反演方法进化代数与目标函数计算结果图

1—SGA；2—BCC _ GA；3—BCC _ YGCP _ GA；4—BCC _ YGCP _ MGAE _ GA；5—MGAE _ GA；6—BCC _ MGAE _ GA；7—YGCP _ GA；8—YGCP _ MGAE _ GA

表 T 或 S，V_{best} 为这 10 代中最优的染色体，500 代后开始进行区间压缩技术，其压缩方法见前章所述，压缩系数为 0.4。本问题为理想模型问题，我们用 8 种遗传算法或其不同的组合进行计算其结果见图 11-4 和表 11-3。

表 11-3　不同的遗传反演方法目标误差函数计算结果比较表

代数	SGA	BCC _ GA	BCC _ YGCP _ GA	BCC _ YGCP _ MGAE GA	MGAE _ GA	BCC _ MGAE _ GA	YGCP _ GA	YGCP _ MGAE _ GA
1	0.459486	0.459486	0.459418	0.455817	0.459486	0.459486	0.459418	0.459418
10	0.459958	0.403991	0.281724	0.281886	0.459958	0.403991	0.293928	0.293928
20	0.450424	0.389011	0.158818	0.194081	0.434717	0.380214	0.198788	0.206667
30	0.432276	0.389003	0.105458	0.130228	0.417937	0.350807	0.179089	0.138181
40	0.427894	0.327746	0.041233	0.100799	0.397956	0.310402	0.173306	0.084071
50	0.420361	0.327481	0.031531	0.049547	0.372964	0.265465	0.167509	0.022666
60	0.402118	0.327470	0.010175	0.014337	0.350189	0.225700	0.157146	0.011989
70	0.412346	0.308895	0.008124	0.007193	0.308428	0.204888	0.156392	0.010091
80	0.412308	0.308644	0.002848	0.004507	0.271006	0.191731	0.152920	0.004678
90	0.412259	0.308644	0.001737	0.004237	0.222886	0.177512	0.151240	0.003076
100	0.412297	0.308606	0.001290	0.003030	0.183342	0.161325	0.150146	0.002982
200	0.403476	0.308581	0.000378	0.000991	0.037545	0.100990	0.013033	0.000752
300	0.298509	0.281272	0.000298	0.000899	0.002175	0.019469	0.002918	0.000701
400	0.390030	0.281128	0.000285	0.000899	0.002744	0.008152	0.001385	0.000524
500	0.385275	0.281128	0.000219	0.000899	0.001180	0.008090	0.001013	0.000187
600	0.411679	0.281116	0.000219	0.000327	0.001285	0.008044	0.000760	0.000061
700	0.398554	0.281116	0.000219	0.000169	0.001243	0.008009	0.000584	0.000041
800	0.380715	0.281077	0.000219	0.000143	0.001243	0.008008	0.000500	0.000042
900	0.386553	0.268957	0.000219	0.000143	0.001243	0.008008	0.000454	0.000042
1000	0.391699	0.268345	0.000218	0.000134	0.001243	0.008008	0.000423	0.000042

从计算结果可以看出与子体优生有关的遗传算法如 BCC _ YGCP _ GA、BCC _ YGCP MGAE _ GA、YGCP _ GA 和 YGCP _ MGAE _ GA 均达到了收敛，其反演结果均较好。其中最好的结果是 YGCP _ MGAE _ GA，当达到 700 代时目标误差函数达到全局最小为 0.000041，但这种方法不稳定很容易出现返祖现象。这种方法比别的方法表现好，可能包含随机因素在内。简单的遗传算法和优体克隆遗传算法在一千代时均不收敛，其反演计算结果与真值相差太远。在所有这些遗传算法中优体克隆 + 子体优生遗传算法收敛速度最快，当到 100 代时其目标误差函数为 0.00129，其反演出的参数三个分区的渗透系数分别为：51.520，249.755，500.895；三个分区的贮水系数分别为 0.000101，0.000207，0.000479。反演的结果已接近真值。在这里我们列出简单遗传算法、优体克隆 + 子体优生遗传算法、子体优生 + 多代调环遗传算法的计算结果以便比较。其结果见表 11-4、表 11-5、表 11-6。

表 11-4　简单遗传算法反演结果表

代数	目标误差函数	$T_1/m^2\cdot d^{-1}$	$T_2/m^2\cdot d^{-1}$	$T_3/m^2\cdot d^{-1}$	S_1	S_2	S_3
1	0.459486	1981.840	479.650	3240.415	0.063256	0.012509	0.015127
10	0.459958	1034.175	644.485	1287.660	0.024809	0.021300	0.047168
20	0.450424	1959.715	541.070	1349.280	0.033813	0.009629	0.026118
30	0.432276	636.325	313.105	1295.960	0.040284	0.006179	0.039260
40	0.427894	798.070	111.465	1549.110	0.052880	0.009064	0.028588
50	0.420361	422.880	224.125	2818.900	0.046509	0.004386	0.018056
60	0.402118	624.200	178.240	1975.085	0.007169	0.006076	0.036093
70	0.412346	568.335	198.960	2148.695	0.029029	0.004635	0.027350
80	0.412308	574.385	195.420	2123.735	0.032025	0.004520	0.025706
90	0.412259	574.880	195.475	2123.065	0.032043	0.004516	0.025816
100	0.412297	574.925	195.460	2122 885	0.032038	0.004516	0.025822
200	0.403476	702.545	166.255	1533.625	0.030794	0.003872	0.029377
300	0.298509	4130.155	41.430	1262.875	0.046997	0.000155	0.042170
400	0.390030	2022.430	103.745	1763.235	0.042269	0.001865	0.048636
500	0.385275	823.930	153.925	1281 610	0.039036	0.002769	0.013690
600	0.411679	2226.780	111.015	1568.820	0.073026	0.004520	0.024254
700	0.398554	2340.130	160.645	1052.545	0.021879	0.004149	0.010579
800	0.380715	2203.285	160.655	487.185	0.028900	0.004214	0.007119
900	0.386553	1300.075	173.955	549.435	0.032521	0.004800	0.008817
1000	0.391699	1197.785	158.120	771.580	0.037867	0.005026	0.009228

表 11-5　优体克隆＋子体优生遗传算法反演结果表

代数	目标误差函数	$T_1/m^2\cdot d^{-1}$	$T_2/m^2\cdot d^{-1}$	$T_3/m^2\cdot d^{-1}$	S_1	S_2	S_3
1	0.459418	1981.840	479.650	3240.415	0.063256	0.012509	0.015127
10	0.281724	513.695	121.500	833.850	0.016245	0.000715	0.004562
20	0.158818	227.750	87.940	645.915	0.004252	0.000228	0.002384
30	0.105458	120.465	159.370	738.710	0.001259	0.000156	0.002338
40	0.041233	39.790	302.255	269.825	0.000356	0.000208	0.000386
50	0.031531	54.115	283.840	316.775	0.000298	0.000219	0.000308
60	0.010175	69.220	250.280	418.675	0.000115	0.000249	0.000458
70	0.008124	66.855	250.960	429.460	0.000102	0.000247	0.000470
80	0.002848	55.080	250.045	486.320	0.000108	0.000208	0.000457
90	0.001737	54.700	249.270	487.350	0.000101	0.000209	0.000476
100	0.001290	51.520	249.755	500.895	0.000101	0.000207	0.000479
200	0.000378	51.000	249.210	502.035	0.000101	0.000207	0.000484
300	0.000298	50.845	249.295	501.200	0.000100	0.000207	0.000488
400	0.000285	50.850	249.300	501.205	0.000100	0.000207	0.000488
500	0.000219	50.855	249.300	501.220	0.000100	0.000205	0.000490
600	0.000219	50.855	249.300	501.220	0.000100	0.000205	0.000490
700	0.000219	50.855	249.300	501.220	0.000100	0.000205	0.000490
800	0.000219	50.855	249.300	501.220	0.000100	0.000205	0.000490
900	0.000219	50.855	249.300	501.220	0.000100	0.000205	0.000490
1000	0.000218	50.855	249.290	501.195	0.000100	0.000205	0.000490

表 11-6　子体优生＋多代调环遗传算法反演结果表

代数	目标误差函数	K_1/m·d^{-1}	K_2/m·d^{-1}	K_3/m·d^{-1}	S_1	S_2	S_3
1	0.459418	39.6368	9.5930	64.8083	0.063256	0.012509	0.015127
10	0.293928	15.5651	1.2942	26.7227	0.049200	0.001125	0.004128
20	0.206667	20.4490	1.3794	12.8489	0.021706	0.000476	0.001506
30	0.138181	8.2178	1.8542	11.3286	0.007772	0.000234	0.000304
40	0.084071	4.1769	2.2638	12.8991	0.001884	0.000194	0.000293
50	0.022666	1.6660	5.0542	7.7299	0.000257	0.000096	0.000365
60	0.011989	1.7916	4.3518	10.9067	0.000197	0.000126	0.000365
70	0.010091	1.5197	4.3740	11.7696	0.000167	0.000121	0.000395
80	0.004678	1.3244	4.6478	10.7586	0.000139	0.000142	0.000524
90	0.003076	1.2783	4.7794	10.2041	0.000133	0.000152	0.000547
100	0.002982	1.2760	4.7732	10.2149	0.000133	0.000160	0.000548
200	0.000752	1.0846	4.9029	10.1670	0.000108	0.000191	0.000510
300	0.000701	1.0853	4.9090	10.1580	0.000108	0.000193	0.000509
400	0.000524	0.9963	5.0023	10.0305	0.000102	0.000199	0.000490
500	0.000187	0.9956	5.0035	10.0223	0.000101	0.000199	0.000502
600	0.000061	0.9971	5.0049	10.0065	0.000100	0.000199	0.000502
700	0.000041	0.9976	5.0026	10.0038	0.000100	0.000199	0.000502
800	0.000042	0.9976	5.0026	10.0038	0.000100	0.000199	0.000502
900	0.000042	0.9976	5.0026	10.0038	0.000100	0.000199	0.000502
1000	0.000042	0.9976	5.0026	10.0038	0.000100	0.000199	0.000502

11.3　三维承压水非稳定流模型遗传反演方法

11.3.1　数学模型[1]

$$\begin{cases} S\dfrac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{div}(K\ \operatorname{grad}\ H) - W & (x,y,z) \in G, t > 0 \\ H(x,y,z,0) = H_0(x,y,z) & (x,y,z) \in \bar{G}, t = 0 \\ H(x,y,z,t)\big|_{\Gamma_1} = H_1(x,y,z,t) & (x,y,z) \in \Gamma_1, t > 0 \\ [K]\operatorname{grad}H \cdot \boldsymbol{n}\big|_{\Gamma_2} = q(x,y,z,t) & (x,y,z) \in \Gamma_2, t > 0 \end{cases} \tag{11-18}$$

其中，H 为地下水水头［L］；S 为贮水系数［量纲一］；K 为渗透系数［L/T］，二秩对称张量；（x，y，z）为笛卡儿坐标系的坐标；t 为时间；G 为不含边界的研究区域；Γ_1 为第一类边界；Γ_2 为第二类边界；$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 为边界；$\bar{G} = G + \Gamma$ 为包括边界的研究区域；$\boldsymbol{n}$ 为边界单位外法向量；H_0（x，y，z）为初始水头分布；H_1（x，y，z，t）为第一类边界上的水头分布；q（x，y，z，t）为第二类边界单位面积上的流量分布。

$$W = \sum_{j=1}^{N_W}\sum_{k=1}^{N_L} Q_{jk}\delta(x - x_j, y - y_j, z - z_{jk}) \tag{11-19}$$

其中，N_W 抽水井（或注水井）数目；N_L 分层数；Q_{jk} 为 j 号井中 k 层的出水量。

[1] 姚磊华，非平稳随机地下水流模拟研究，煤炭科学研究总院西安分院科研报告，1998。

11.3.2 模型的有限元解法

(1) 化边值问题 (11-18) 为变分问题

若固定 t，并使 $H(x, y, z, t) \in C^2$，则对任意 $\eta(x, y, z) \in H_k^1$ 则有：

$$\iiint_S [G(\partial H/\partial t) - \mathrm{div}(K \ \mathrm{grad}\ H) + W]\eta \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \tag{11-20}$$

利用奥-高公式，并注意边界条件得：

$$\begin{aligned}\iiint_G G(\partial H/\partial t)\eta \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = & \iiint_G (-W)\eta \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ & + \iiint_G \left(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right. \\ & \left. + K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Gamma_2} q\eta \mathrm{d}s\end{aligned} \tag{11-21}$$

(2) 剖分求解区域

三维水流问题的有限元法是二维水流问题有限元法的自然推广，所以它的基本思想与解题步骤与二维问题有限元法类似。对于三维问题而言，最简单的单元是四面体，我们现在讨论三维地下水水流问题在剖分为四面体单元时的有限元法。

把区域 G 剖分为 N_e 个四面体，四面体的顶点为节点，节点编号 $i = 1, 2, 3, \cdots, N_p$；其中内部节点 N_0 个，第一边界节点 N_1 个，第二边界节点 N_2 个。第 i 号节点的坐标记为 (x_i, y_i, z_i)，四面体单元用◆β ($\beta = 1, 2, \cdots, N_e$) 表示。

(3) 构造基函数和线性形状函数

设单元◆β 的四个节点为 i, j, k, m。相应的坐标为 $(x_i, y_i, z_i), \cdots, (x_m, y_m, z_m)$，四个顶点的水头值 H_i, H_j, H_k, H_m。恰好在单元内可确定一线性插值。

$$H = L_iH_i + L_jH_j + L_kH_k + L_mH_m \qquad (x, y, z) \in ◆\beta \tag{11-22}$$

其中：

$$L_i = \frac{1}{6V_\beta}\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_m & y_m & z_m \end{vmatrix}$$

……

$$L_m = \frac{1}{6V_\beta}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} \tag{11-23}$$

其中，V_β 为四面体◆β 的体积。

L_r 可写作如下形式：

$$L_r = a_r + b_rx + d_ry + f_rz \qquad r = i, j, k, m \tag{11-24}$$

其中系数可通过式 (11-19) 展开求得。

节点 i 的基函数定义为：

$$\phi_i(x,y,z) = \begin{cases} L_i(x,y,z) & (x,y,z) \in i \text{ 节点相邻单元} \\ 0 & (x,y,z) \notin i \text{ 节点相邻单元} \end{cases} \tag{11-25}$$

我们取形状函数为线性元，则在节点 i 上水头的分片线性函数可表示为：

$$H(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{N_p} H_i(t)\phi_i(x,y,z) \tag{11-26}$$

取在边界 Γ_1 上为 0 的任意分片光滑函数 η 为

$$\eta(x,y,z) = \sum_{i=1}^{m} r_i\phi_i(x,y,z) \tag{11-27}$$

式中，$m = N_0 + N_2$，r_i 为任意常数。

(4) 建立有限元方程

将式（11-22）和式（11-23）代入（11-17）式并考虑 r_i 的任意性，得有限元方程：

$$\sum_{i=1}^{N_p} D_{ij}\frac{\mathrm{d}H_i(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{N_p} A_{ij}H_i(t) = G_j - F_j \qquad (j = 1,2,\cdots,m) \tag{11-28}$$

对初始条件可表示为：

$$H_i(t)\mid_{t=0} = H_0(x_i,y_i,z_i) \qquad i = 1,2,\cdots,N_p \tag{11-29}$$

用全隐式求解常微分方程组（7-24）得隐格式

$$\sum_{i=1}^{m}(D_{ij}/\Delta t + A_{ij})H_i^{(n+1)} = T_j + \sum_{i=1}^{N_p}(D_{ij}/\Delta t)H_i^{(n)} - \sum_{i=m-1}^{N_p}(D_{ij}/\Delta t)H_i^{(n+1)}$$
$$(j = 1,2,\cdots,m) \tag{11-30}$$

式中，$H_i^{(n)} = H(x_i, y_i, z_i, t_n)$，$\Delta t = t_{n+1} - t_n$，$T_j = G_j - F_j$

其中：

$$D_{ij} = \begin{cases} \sum_{\beta=1}^{N_t} S_\beta V_\beta/20 & i \neq j \quad (i,j) \in \text{四面体 } \beta \\ \sum_{\beta=1}^{N_t} S_\beta V_\beta/10 & i = j \quad (i,j) \in \text{四面体 } \beta \end{cases}$$

$$A_{ij} = \sum_{\beta=1}^{N_t}(K_{xx\beta}b_ib_j + K_{yy\beta}d_id_j + K_{zz\beta}f_if_j)V_\beta \quad (i,j) \in \text{四面体 } \beta$$

$$G_j = \iint_{\Gamma_2} q\phi_j \mathrm{d}s \quad (i,j) \in \text{四面体 } \beta \cap \Gamma_2$$

其中，N_t 表示以 i 和 j 为公共节点的单元个数，$K_{xx\beta}, K_{yy\beta}, K_{zz\beta}, S_\beta$ 为 K, S 在单元 β 内的值。

$$F_j = \iiint_G W\phi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

方程组（11-30）最后可化为 $AH = B$ 的形式，A 为大型稀疏对称矩阵，可用压缩方法存储并求解。如果未知节点太多，用直接解法速度太慢，可用高斯-塞德尔迭代方法求解。

11.3.3 遗传反演方法

二维地下水问题的遗传反演方法和二维地下水问题的反演方法没有本质的差别，所不

同的是在二维承压含水层中有导水系数的概念，在三维地下水模型中只有渗透系数的概念，研究区域和外部的水量交换是通过边界条件来实现的，其反演速度更慢，问题可能更复杂。我们通过例子说明三维遗传反演方法。

例 三维承压地下水模型遗传反演问题。承压含水层系统有三个水平层，每层的厚度为 20 m。首先作正演计算时从上到下含水层的渗透系数分别为 $K_1 = 5$ m/d，$K_2 = 2$ m/d，$K_3 = 1$ m/d，$S_1 = S_2 = S_3 = 0.0005$。从平面上看，含水系统为一正方形，和前述二维承压地下水水流模型算例相同（见图 11-2），边长 a 为 1200 m，东、西部边界 BC 和 AD 为两条水头均为 H_1 的河流，切割三个含水层，南、北部边界 AB 和 CD 为不透水边界，在含水层的中心有一抽水井，从上层顶端和下层底部抽水。含水系统的上、下均为不透水层。定解问题描述如同方程组（11-18）。

此问题只能用数值方法进行求解，我们采用有限元，并且用直接解法。假设顶部抽水水量 $Q_1 = 5000.0$ m^3/d，底部抽水水量 $Q_2 = 2000.0$ m^3/d。如果 A 为坐标系的原点，AB 为 X 轴的正方向，AD 为 Y 轴的正反向，含水层系统从底部沿 A 点向上为 Z 轴的正方向，则各观测点的资料见表 11-7 和表 11-8。以这些资料为依据反演含水层系统的渗透系数和贮水系数。

表 11-7 各观测点水位观测资料一览表 （m）

时间/d	OBS1	OBS2	OBS3	OBS4	OBS5	OBS6	OBS7	OBS8
0.1	99.9998	99.9999	100.0000	100.0000	99.9998	100.0000	100.0000	100.0000
0.2	99.9987	99.9993	100.0000	100.0000	99.9981	99.9993	100.0000	100.0000
0.3	99.9937	99.9950	100.0000	100.0000	99.9918	99.9943	100.0000	100.0000
0.4	99.9817	99.9841	99.9953	100.0000	99.9784	99.9824	99.9960	100.0000
0.5	99.9615	99.9649	99.9815	99.9941	99.9570	99.9624	99.9818	100.0000
0.6	99.9329	99.9372	99.9586	99.9752	99.9277	99.9342	99.9589	99.9826
0.7	99.8963	99.9015	99.9271	99.9470	99.8910	99.8985	99.9276	99.9553
0.8	99.8530	99.8588	99.8879	99.9107	99.8479	99.8560	99.8888	99.9197
0.9	99.8037	99.8101	99.8422	99.8672	99.7991	99.8078	99.8436	99.8768
1.0	99.7495	99.7565	99.7909	99.8178	99.7457	99.7547	99.7928	99.8279
2.0	99.1258	99.1343	99.1728	99.2030	99.1305	99.1378	99.1773	99.2114
3.0	98.5272	98.5363	98.5740	98.6036	98.5383	98.5433	98.5790	98.6087
4.0	97.9848	97.9941	98.0292	98.0570	98.0003	98.0031	98.0340	98.0587
5.0	97.4994	97.5088	97.5411	97.5670	97.5179	97.5189	97.5451	97.5655
6.0	97.0654	97.0746	97.1045	97.1285	97.0856	97.0850	97.1073	97.1240
7.0	96.6755	96.6847	96.7123	96.7346	96.6963	96.6944	96.7133	96.7269
8.0	96.3234	96.3325	96.3581	96.3790	96.3436	96.3406	96.3566	96.3678
9.0	96.0027	96.0117	96.0357	96.0554	96.0209	96.0171	96.0308	96.0398
10.0	95.7101	95.7190	95.7414	95.7600	95.7250	95.7204	95.7320	95.7392

表 11-8 各观测点位置一览表 （m）

坐标	OBS1	OBS2	OBS3	OBS4	OBS5	OBS6	OBS7	OBS8
X	400.00	400.00	400.00	400.00	600.00	600.00	600.00	600.00
Y	600.00	600.00	600.00	600.00	400.00	400.00	400.00	400.00
Z	60.00	40.00	20.00	0.00	60.00	40.00	20.00	0.00

因前面讨论的遗传算法及其组合有 8 个，本三维模型计算采用直接方法解方程组，速度较慢。我们采用前面比较好的方法即优体克隆 + 子体优生遗传算法进行反演计算，其计算时的参数分别为：渗透系数的初始取值区间为（0，100.0 m/d），贮水系数 S 的初始取值区间为（0，0.1），遗传代数 Num _ Gen = 1000，种群数 Pop _ Size = 50，交叉概率 P_c = 0.7，变异概率 P_m = 0.3，评价函数中的 alph = 0.05。计算结果见图 11-5 和表 11-8。从计算结果看，进化到 1000 代时目标函数并没有达到稳定状态还有下降的趋势。此时各参数已和真值很接近。结果比较见表 11-9。反演的结果比较好（表 11-10）。

表 11-9　优体克隆 + 子体优生遗传算法反演结果表

代数	目标误差函数	K_1/m·d^{-1}	K_2/m·d^{-1}	K_3/m·d^{-1}	S_1，S_2，S_3
1	1.210365	36.201763	95.361671	3.420376	0.004947
10	0.466146	2.885196	4.252251	13.955431	0.000458
20	0.020244	2.364438	2.488809	3.027581	0.000506
30	0.019286	2.473320	2.495302	3.060457	0.000502
40	0.018898	2.537947	2.516258	3.041971	0.000498
50	0.018624	2.578335	2.508384	2.992421	0.000499
60	0.018056	2.678625	2.472704	2.906327	0.000501
70	0.017770	2.782097	2.463301	2.919240	0.000497
80	0.017675	2.785211	2.439638	2.906121	0.000497
90	0.017190	2.854136	2.358270	2.826786	0.000500
100	0.017093	2.861225	2.355785	2.781577	0.000502
200	0.014199	3.319372	2.302003	2.400220	0.000500
300	0.008400	4.090199	2.336641	1.600271	0.000501
400	0.004051	4.523244	2.399118	1.101119	0.000501
500	0.001845	4.798057	2.193079	1.029933	0.000500
600	0.000671	4.927340	2.073418	0.995107	0.000500
700	0.000319	4.961242	2.061733	0.985993	0.000500
800	0.000307	4.961262	2.060234	0.986145	0.000500
900	0.000295	4.960833	2.060194	0.986076	0.000500
1000	0.000258	4.983071	2.046375	0.981012	0.000500

表 11-10　反演参数和真值比较表

参数	K_1/m·d^{-1}	K_2/m·d^{-1}	K_3/m·d^{-1}	S_1，S_2，S_3
真值	5.000000	2.000000	1.000000	0.000500
反演值	4.983071	2.046375	0.981012	0.000500
绝对误差	0.016929	0.046375	0.018988	0.000000
相对误差	0.33858%	2.31875%	1.8988%	0.0%

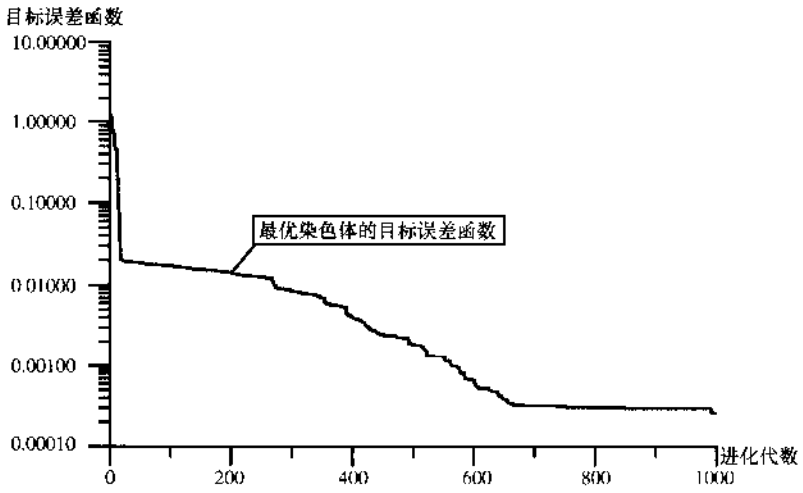


图 11-5　优体克隆 + 子体优生遗传反演方法进化代数与目标函数计算结果图

11.4　小结

本章对地下水多维问题的反演方法进行研究。由于正演问题变得复杂，反演问题一般速度较慢。由于在调参的过程中，不需要人工干预，保证了参数的客观性，可以节省水文地质工作者的时间。本文提出的优体克隆 + 子体优生遗传算法的鲁棒性最好，既保证了遗传无返祖现象，又可加快了收敛速度，并且可提高反演精度。

12 结束语

本书在第1章概述了地下水系统反演理论与方法，主体由三部分构成，分别是解析法在含水层参数识别中的应用，修正的高斯-牛顿法的研究及遗传算法在地下水系统反演中的应用研究。主要体会如下

1）从第3章到第6章全面系统地研究了修正的高斯-牛顿法在含水层参数识别中的应用，推导了伴随方程，灵敏度系数方程及修正的高斯-牛顿法识别含水层参数的有限元离散格式。讨论了各种随机和非随机因素对求解逆问题的影响。研制和开发了一套与用有限单元法解地下水流正问题相配套的含水层参数识别软件，为矿井涌水量预测和供水水源地开采资源评价奠定了基础。

2）用修正的高斯-牛顿法识别含水层参数的成败关键是计算灵敏度系数矩阵，灵敏度系数矩阵的计算方法对含水层参数识别结果有重大影响。对于一个实际的地下水流模型，如果采用修正的高斯-牛顿法识别含水层参数，则应当用变分法或灵敏度系数方程法去计算灵敏度系数矩阵。影响系数法虽然方法本身简单，但计算的灵敏度系数矩阵精度差，一般不能在实际中应用，这是因为人们在用影响系数法时无法事先给出正确的、待识别参数的扰动值。

3）理想的模型计算表明，水位观测数据的随机误差和系统误差对参数识别结果有较大影响。虽然识别的水文地质参数的相对误差都随噪声与降深的最大比值的增大而增大，但在系统误差的影响下，水文地质参数相对误差的增长速度比在随机误差存在的情况下快得多。因此，在实际识别含水层参数的过程中应尽可能地消除产生系统误差的各种因素的影响。

4）对于精确的水位观测数据来说，修正的高斯-牛顿法识别含水层参数对参数初值的选择不敏感。收敛过程表明，初值的选择对收敛速度略有影响，即初值选择越接近真值，收敛速度越快。类似地，改变参数上、下限，对识别结果的影响也很小。然而，对于具有噪声的水位观测数据，参数初值的选择对参数识别结果的影响比无噪声时要大一些。此外，对于具有噪声的水位观测数据，如果使用的观测数据序列较短，则识别的水文地质参数将严重偏离真值。

5）在用修正的高斯-牛顿法识别含水层参数时，观测孔个数与含水层参数分区数必须匹配，即观测孔个数应当大于或等于参数分区个数。由于实际的水位观测数据不可能存在噪声，因此在反求水文地质参数时应当尽可能地使用较长序列的水位观测数据。

6）研究证明，修正的高斯-牛顿法是一种极为有效的含水层参数识别方法，因为该方法具有收敛速度快、稳定性好的特点。我们的研究虽然只识别了含水层的导水系数，但这一方法不难推广到识别含水层贮水系数和其它水文地质参数

7）遗传算法求解优化问题不同于任何传统的方法，方法本身有其它算法无法比拟的特点。本书对遗传算法的基本原理、方法、研究进展，对遗传算法进行了重要的改进，对

遗传算法在地下水系统参数反演中的应用问题进行了深入的研究，同时对地下水参数反演问题从一维、二维到三维均给出了典型例子。把遗传算法应用于地下水系统数学模型的参数反演问题的尝试是可行的，其精度和效率均比较高，达到了实际应用的水平。

8）遗传算法本身就是一种优化方法。从数学上讲，它的运算很简单，这使它可以成为一种稳定、通用的反演方法。对于不同的应用问题，只要有相应的正演计算程序，就很容易与遗传算法相结合，形成遗传反演系统。

9）在反演过程中只利用目标函数值这种最一般的搜索信息。不必计算目标函数相对于模型参数的导数等特殊信息，所以本算法不要求目标函数可导。因此在构造目标函数时，不需要误差平方和，只需要绝对误差和即可。绝对误差和的标准要好于误差平方和的标准。

10）对正问题不必做任何形式的线性化处理。这一特点对非线性的地下水反演问题来说尤为重要，因此它的反演计算是完全精确的。

11）遗传算法本身是一种通用的非线性反演方法，它可以很容易地与各种不同问题的正演计算程序相结合形成不同的反演系统。一般把正演程序改成一个子程序，反演时由遗传算法做正演计算时调用。该子程序在反演计算时被多次调用。为保证每次正演计算的正确性，在调用该子程序时，除每次输入的模型参数外，其他的所有变量必须初始化，否则不能保证正演计算的正确性。

12）遗传算法的局限性。简单的遗传算法并不能保证群体收敛到全局最优解，保留每代最优解的遗传算法，虽然在理论上能收敛到全局最优解，但是收敛速度一般很慢，其精度在有限代的遗传操作中也很难保证。上位效应、编码问题和早熟现象也是经常出现的问题，必须对现有的遗传算法进行改进，另外改进的遗传算法仍有一定的局限性，它一般情况下仅对个别问题或一类问题有效，开发通用的遗传方法还存在很大的难度。

13）速度问题。在讨论一个反演方法的速度问题时，要明确两个概念。①计算速度：每迭代一次的计算时间。它主要受问题的正演计算速度的影响。②收敛速度：每迭代一次或几次后目标函数的下降速度。它主要受待求问题的非线性程度和反演方法的影响。在遗传算法中，计算速度受模型群体大小、迭代次数的影响。

14）本书算法改进。A. 提出子体优生的概念和操作方法，其主要作用有：①加快收敛速度；②避免出现早熟；③提高解的精度。把子体优生分为三种优生状态：①大变异状态，在遗传初期，大变异状态对于加速收敛起到非常大的作用。②微变异状态，其作用是在遗传成熟期避免出现稳定的早熟现象，可以使解的精度得到提高。③中变异状态，其作用介于大变异状态和微变异状态之间。B. 提出因素变异的概念，将因素变异和一般变异配合使用，可有效提高收敛速度，增强遗传算法的活力，避免演化过程陷入局部误区之中，对于早熟问题也可得到有效解决。C. 对多代调环方法，提出了适合于水文地质参数反演的操作，有利于提高解的精度，避免陷入参数误区，使模型参数的搜索范围在尽可能有理、有效的范围内进行。D. 组合操作。将本书提出的改进和已有的有效改进组合，生成多种组合改进方法，其效果强于单一的算子操作。E. 本书采用十进制编码系统，有效地解决了二进制编码系统在函数优化问题中的弊端。这些弊端包括①Hamming 悬崖；②缺乏微调功能；③求解高维问题时，二进制串非常长，搜索效率很低。

15）应用研究。遗传算法是一种通用的非线性反演方法，它可以很容易地与不同的问

题相结合，形成相应的反演系统。我们应用改进后的遗传算法及其组合方法，分别与多种地下水系统问题相结合进行了应用研究，无论是理想模型还是实际模型均取得很好的效果。A. 全面研究了地下水系统的一维问题，包括泰斯模型和水动力弥散连续注入模型（这两个模型均有解析解）的遗传反演方法。对多个例子用 8 种不同组合的遗传算法进行计算，对计算结果进行了比较研究。B. 全面研究了地下水系统二维问题（二维非稳定承压水模型，有限元解法）和三维问题（三维非稳定承压水模型，有限元解法）的反演方法，并对非均质多分区的情况进行了研究，对计算结果进行了比较。C. 改进后的遗传算法可以有效地进行地下水模型反演求参，有效求参的遗传算法不止一种，本书提出的优体克隆 + 子体优生遗传算法表现最为优秀，值得在实际的水文地质计算中推广应用。

参 考 文 献

[1] W. 舍士博. 水环境数学模型. 北京：中国建筑工业出版社. 1987

[2] Neuman S P. Calibration of distributed parameter groundwater flow models viewed as a multiple-objective decision process under uncertainty, Water Resources Research, 9 (4): 1006 ~ 1021, 1973

[3] 孙讷正. 地下水流的数学模型和数值方法. 北京：地质出版社. 1981

[4] 孙讷正著. 地下水污染——数学模型和数值方法. 北京：地质出版社. 1989

[5] 薛禹群，朱学愚. 地下水动力学。北京：地质出版社. 1979

[6] 薛禹群，谢春红编著. 水文地质学的数值法. 北京：煤炭工业出版社. 1980

[7] 王秉忱，杨天行主编. 地下水污染地下水水质模拟方法. 北京：北京师范学院出版社. 1985

[8] 朱学愚，钱孝星，刘新仁. 地下水资源评价. 南京：南京大学出版社. 1986

[9] 杨天行，傅泽周，刘金山，林学钰. 地下水流向井的非稳定运动的原理及计算方法. 北京：地质出版社 1980

[10] 陈崇希，唐仲华编著. 地下水流动问题数值解法. 武汉：中国地质大学出版社. 1990

[11] Yeh W W-G. Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: The inverse problem. Water Resources Research, 22 (1): 95 ~ 108, 1986

[12] Nelson R W. In-place determination of permeability distribution for heterogeneous porous media through analysis of energy dissipation. Soc. Pet. Eng. I., 8 (1): 33 ~ 42, 1968

[13] Kleinecke D. Use of linear programming for estimating geohydrologic parameters of groundwater basins, Water Resources Research, 7 (2): 367 ~ 375, 1971

[14] Emsellem Y & de Marsily G. An automatic solution for the inverse problem, Water Resources Research, 7 (5): 1264 ~ 1283, 1971

[15] Frind E O & Pinder G F. Galerkin solution of the inverse problem for aquifer transmissivity, Water Resources Research, 9 (5): 1397 ~ 1410, 1973

[16] Nutbrown D A. Identification of Parameters in a linear equation of groundwater Flow, Water Resources Research, 11 (4): 581 ~ 588, 1975

[17] Hefez E, Shamir V & Bear J. Identifying the parameters of an aquifer cell model, Water Resources Research, 11 (6): 993 ~ 1004, 1975

[18] Navarro A. A modified optimization method of estimating aquifer parameters, Water Resources Research, 13 (6): 935 ~ 939, 1977

[19] Yeh W W-G, Yoon Y S & Lee K S. Aquifer parameter identification with Kriging and optimum parameterization, Water Resources Research, 19 (1): 225 ~ 233, 1983

[20] Bellman R & Kabala R. Quasilinearization and nonlinear boundary-value Problems, New York: Elsevier, 1965

[21] DiStefano N & Rath A. An identification approach to subsurface hydrological Systems, Water Resources Research, 11 (6): 1005 ~ 1012, 1975

[22] Yeh W W-G & Tauxe C W. Quasilinearization and the identification of aquifer parameters, Water Resources Research, 7 (2): 375 ~ 381, 1971

[23] Chavent G, Dupuy M & Lemonnier P. History matching by use of optimal control theory, Soc. Pet. Eng. J., 15 (1): 74 ~ 86, 1975

[24] Chen W H, Gavalas G R, Seinfeld J H & Wasserman M L. A new algorithm for automatic historic matching, Soc. Pet. Eng. J., 14 (6): 593 ~ 608, 1974

[25] McLaughlin D B. Investigation of alternative procedures for estimating groundwater basin parameters, Report prepared for the Office of Water Research and Technology, U. S. Department of the Interior, Water Resources Engineering, Walnut Creek, California, 1975

[26] Wilson J, Kitanidis P & Dettinger M. State and parameter estimation in groundwater models, Paper presented at the Chapman Conference on Application of Kalman filter to Hydrology, Hydraulics, and Water Resources, AGU, Pittsburgh PA, 1978

[27] Jacquard P & Jain C. Permeability distribution from field pressure data, Soc. Pet. Eng. J., 5 (4): 281 ~ 294, 1965

[28] Haimes Y Y, Perrine R L & Wismer D A. Identification of aquifer parameters by decomposition and multilevel optimization, Water Resources Center Contribution No. 123, University of California, Los Angeles, 1968

[29] Yeh W W-G. Aquifer parameter identification, J. Hydraulic Div. Am. Soc. Civ. Eng., 101 (HY9): 1197 ~ 1209, 1975a

[30] Jahns H O. A rapid method for obtaining a two-dimensional reservoir description from well pressure response data, Soc. Pet. Eng. J., 6 (4): 315 ~ 327, 1966

[31] Jingsheng Li and Derek Elsworth. A modified Gauss-Newton method for aquifer parameter identification, Ground Water, 1995, Vol. 33 (4), 662 ~ 668

[32] Yoon Y S & Yeh W W-G. Parameter identification in an inhomogeneous medium with the finite-element method, Soc. Pet. Eng. J., 217 ~ 226, 1976

[33] Neuman S P & Yakowitz S. A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 1, Theory, Water Resources Research, 15 (4): 845 ~ 860, 1979

[34] Neuman S P. A statistical approach to the inverse problem of aquifer hydrology, 3, Improved solution method and added perspective, Water Resources Research, 16 (1): 331 ~ 346, 1980

[35] Harrouni K E., Ouazar D and A. H. -D. Cheng. Boundary and parameter identification using genetic algorithms and boundary element method. 1996, Proc. Of Computer Method and Water Resources Ⅲ. Computational Mechanics Publications, 487 ~ 496, 1996

[36] Morshed J and Kaluarachchi J J. Parameter estimation using artificial neural network and genetic algorithm for free-product migration and recovery, Water Resources Research, Vol. 34 (5), 1101 ~ 1113, 1998

[37] 金菊良，朱春龙，杨晓华. 水文地质模型参数估计的一种数值方法. 长春科技大学学报. 1998, Vol.28 (2), 176 ~ 179

[38] 姚姚. 蒙特卡洛非线性反演方法及应用. 北京：冶金工业出版社. 1997

[39] Chan Y K, Mullineux N and Reed J R. Analytic solutions for drawdowns in rectangular artesian aquifers, J. Hydro., 31, 151 ~ 160, 1976

[40] Robert Willis and William W-G. Yeh. Groundwater systems planning & management, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1987

[41] 汤金忠等. 多孔介质中水分及溶质运移的随机理论. 北京：科学出版社, 2000

[42] Lohman S W. Groundwater hydraulics, United states Government Printing office, Washington, 1972

[43] 施鑫源等. 供水水文地质手册，第二册. 北京：地质出版社. 1977

[44] 陈崇希. 地下水不稳定井流计算方法. 北京：地质出版社. 1983

[45] William C. Walton. Groundwater resource evaluation, Mc Graw-Hill Inc., 1970

[46] 李竟生，杨梓仙. 矩形含水层中非稳定流动的计算方法. 勘察科学技术. 1984, 35 ~ 41

[47] 李竟生. 用定降深井流试验确定均质各向同性含水层水文地质参数的方法. 煤田地质与勘探. 1977, 61 ~ 70

[48] 张宏仁等编译. 地下水非稳定流理论的发展和应用. 北京：地质出版社. 1975

[49] J. 贝尔，李竟生，陈崇希译，孙讷正校. 多孔介质液体动力学. 北京：建筑工业出版社. 1983

[50] L. 拉皮德斯，G. F. 平德. 陆祥璇，李竟生译，孙讷正校. 科学与工程中偏微分方程数值解法. 北京：煤炭工业出版社. 1986

[51] Li Jingsheng, Lu A, Sun N Z & Yeh W W-G. A comparative study of sensitivity coefficient calculation method in groundwater Flow, Working paper, Dept. Of civil Engineering, University of california, Los Angeles, 1985

[52] 李竟生等. 潜水流伴随方程及其有限元求解. 煤炭学报. 1995, (20) 2

[53] 潘正君，康立山，陈毓屏. 演化计算. 北京：清华大学出版社. 1998

[54] Holland J H. Adaptation in Natural and Artificial System, Univ. of Mich. Press, Ann Arbor, 1975

[55] De Jong K A. An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive System. Ph. D. dissertation, Univ. of Mich. Press, Ann Arbor, 1975

[56] 陈国良，王熙法，庄镇泉等. 遗传算法及其应用. 北京：人民邮电出版社. 1996

[57] 冯夏庭. 智能岩石力学. 北京：科学出版社. 2000

[58] 王正志，薄涛. 进化计算. 长沙：国防科技大学出版社. 2000

[59] 阎平凡，张长水. 人工神经网络与模拟进化计算. 北京：清华大学出版社. 2000

[60] Michalewicz Z. Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs, Springer-Verlag Berlin HeidelBerg, 1996

[61] 刘宝碇，赵瑞清. 随机规划与模糊规划. 北京：清华大学出版社. 1998

[62] Davis L. Handbook of genetic algorithms, Van Nostrand. Reinhold, New York, 1991

[63] Davis L. Genetic algorithms and simulated annealing, Morgan Kaufmann Publishers, Los Altos, CA. 1987

[64] Schraudolph N and Belew R. Dynamic parameter encoding for genetic algorithms, CSE Technical Report, University of San Diego, La Jolla, 1993

[65] 姚磊华，姚理论，尹尚先. 用 Taylor 展开最小二乘法反演水文地质参数. 世界地质. 2000 (1), 69～72

[66] 杨大行，朱政嘉. 水系统污染数学模型及应用. 长春：吉林大学出版社. 1990

[67] 邢文训，谢金星. 现代优化计算方法. 北京：清华大学出版社. 1999

[68] 于春兴，郑毅. 利用微机自动配线求解地下水弥散参数的方法. 见：长春地质学院建院 40 周年科学研究论文集（水文、工程、环境地质）. 长春：吉林科学技术出版社. 1992

[69] Bard Y. Nonlinear parameter Estimation. Academic, New York, 1974

[70] Sagar B, Yakowitz S & Duckstein L. A direct method for the identification of the parameters of dynamic nonhomogeneous aquifers, Water Resources Research, 11 (4): 563～570, 1975

[71] Shah P C, Gravalas G R, and Seinfeld J H. Eorror analysis in history matching: The optimum level of parameterization. Soc. Pet. Eng. J. V. 18. 219～228, 1978

[72] Sun N Z & Yeh W. W-G. Identification of Parameter Structure in groundwater in verse problem. Water Resources Reserch, 21 (6): 869～883, 1985

[73] Thomas L K, Hellums L J and reheis G M. A nonlinear automatic History Matching Technique for Reservoir Simulation Models. Soc. Pet. Eng. J., 12 (6): 508～514, 1972

[74] Yeh W W-G. Optimal identification of parameters in an inhomogeneous medium with quadratic programming, Soc. Pet. Eng. J. 15 (5): 371～375, 1975b

附录 1　修正的高斯-牛顿法识别含水层参数的计算机程序

1　计算机程序总体说明

我们用 Fortran 语言编写了修正的高斯-牛顿法识别含水层参数的计算机程序。这个程序包括一个主程序和九个子程序。主程序 ESURFACE 输入某些基本数据。子程序 UFEM 有两个功能，即当 II = 2 时，完成用有限单元法计算水头分布；当 II = 1 时完成用灵敏度系数方程法计算灵敏度系数。子程序 BAND 用于求解系数矩阵为稀疏带状对称矩阵的线性方程组。子程序 MTM 进行矩阵乘法运算。子程序 MT 对矩阵进行转置。子程序 GAUSS 用高斯消去法求解线性方程组。子程序 MATA 形成灵敏度系数矩阵。子程序 COF 形成水头等数据序列。子程序 SEDI 确定探索方向。子程序 SETE 计算步长。

2　程序中采用的主要标识符

整形量：

ITE——迭代次数；

NP——结点总数；

NE——单元总数；

NJ——内部结点数加二类边界上结点数；

NT——时间步长和个数；

MMT——待识别参数的个数，即导水系数分区个数；

NO——观测孔个数；

II——如果 II = 1，灵敏度系数方程法计算灵敏度系数。如果 II = 2 或其它整数，用有限单元法计算水头分布。

数组：

DT（NT）——存放时间步长；

X（NP）——存放结点的 X 坐标；

Y（NP）——存放结点的 Y 坐标；

IJM（3，NE）——存放单元的结点编号；

PARA（MMT）——存放待识别参数的初值；

PARAL（MMT）——存放待识别参数的下限值；

PARAU（MMT）——存放待识别参数的上限值；

IOBP（NO）——存放观测孔所在结点编号；

NPAN（NE）——存放每个单元所在参数分区编号。

3 修正的高斯-牛顿法识别含水层参数的计算程序

```
PROGRAM  MG
DIMENSION X (100), Y (100), IJM (3, 150), MA (100), RKE (3, 3, 150), PARAO (10),
1       TRS (150), H2 (100), HO (100), ME (3), NPAN (150), SSG (100),
2       H1 (100), H3 (100), DT (25), PK1 (5000), PK2 (5000), PT (150),
3       SG (100), HH (100, 25), HHH (100, 25, 10), HH1 (100, 25),
4       IOBP (10), PARAL (10), PARAU (10), PARAT (10), HC (250), HB (250),
5       HE (10), XN (250), HJHT (10, 250), ATA (10, 10), TF (10), PO (10),
6       HF (250), TTT (10), HA (250), HJH (250, 10)
OPEN (6, FILE = 'LI.OUT', STATUS = 'UNKNOWN')
OPEN (1, FILE = 'N.VX1')
READ (1, *) NP, NE, NJ, NT, MMT, NO
CLOSE (1)
OPEN (1, FILE = 'NTT.VX1')
READ (1, *) (DT (I), I = 1, NT)
CLOSE (1)
OPEN (1, FILE = 'X.VX1')
READ (1, *) (X (I), I = 1, NP)
CLOSE (1)
OPEN (1, FILE = 'Y.VX1')
READ (1, *) (Y (I), I = 1, NP)
CLOSE (1)
OPEN (1, FILE = 'IJM.VX1')
READ (1, *) ( (IJM (I, J), I = 1, 3), J = 1, NE)
CLOSE (1)
OPEN (1, FILE = 'PARAT.VX1')
READ (1, *) (PARAT (I), I = 1, MMT)
CLOSE (1)
OPEN (1, FILE = 'PARAO.VX1')
READ (1, *) (PARAO (I), I = 1, MMT)
CLOSE (1)
OPEN (1, FILE = 'PARAL.VX1')
READ (1, *) (PARAL (I), I = 1, MMT)
CLOSE (1)
OPEN (1, FILE = 'PARAU.VX1')
READ (1, *) (PARAU (I), I = 1, MMT)
CLOSE (1)
OPEN (1, FILE = 'IOBP.VX1')
READ (1, *) (IOBP (I), I = 1, NO)
```

```
      CLOSE (1)
C
      WRITE (6, 990) NP, NE, NJ, NT, MMT, NO
990   FORMAT (1X, 'NP, NE, NJ, NT, MMT, NO = ', /, 2X, 615)
      WRITE (6, 888) (DT (I), I = 1, NT)
888   FORMAT (1X, 'DT (NT) = ', /, 10 (3F10.4, /))
      WRITE (6, 991) (X (I), I = 1, NP)
991   FORMAT (1X, 'X (NP) = ', /, 20 (5F10.3, /))
      WRITE (6, 992) (Y (I), I = 1, NP)
992   FORMAT (1X, 'Y (NP) = ', /, 20 (5F10.3, /))
      WRITE (6, 993) ( (IJM (I, J), I = 1, 3), J = 1, NE)
993   FORMAT (1X, 'IJM (3, NE) = ', /, 200 (4 (3I4, 2X), /))
      WRITE (6, 994) (PARAT (I), I = 1, MMT)
994   FORMAT (1X, 'PARAT (MMT) = ', /, 10 (4F10.2, /))
      WRITE (6, 995) (PARAO (I), I = 1, MMT)
995   FORMAT (1X, 'PARAO (MMT) = ', /, 10 (4F10.2, /))
      WRITE (6, 996) (PARAL (I), I = 1, MMT)
996   FORMAT (1X, 'PARAL (MMT) = ', /, 10 (4F10.2, /))
      WRITE (6, 997) (PARAU (I), I = 1, MMT)
997   FORMAT (1X, 'PARAU (MMT) = ', /, 10 (4F10.2, /))
      WRITE (6, 998) (IOBP (I), I = 1, NO)
998   FORMAT (1X, 'IOBP (NO) = ', /, 20 (5I5, /))
C
      DO 3 I = 1, NJ
3     MA (I) = 0
      DO 8 N = 1, NE
      DO 5 J = 1, 3
5     ME (J) = IJM (J, N)
      DO 7 IP = 1, 3
      DO 6 IQ = 1, 3
      M1 = ME (IP)
      M2 = ME (IQ)
      IF (M1.GT.NJ) GOTO 6
      IF (M1 - M2.GE.MA (M1)) MA (M1) = M1 - M2
6     CONTINUE
7     CONTINUE
8     CONTINUE
C
      MA (1) = 1
      DO 9 I = 2, NJ
9     MA (I) = MA (I) + MA (I - 1) + 1
      IH = MA (NJ)
C
```

```
      DO 10 I=1, 61
10    NPAN (I) =1
      DO 100 I=62, 91
100   NPAN (I) =2
      NPAN (92) =1
C
      DO 11 N=1, NE
      M1=IJM (1, N)
      M2=IJM (2, N)
      M3=IJM (3, N)
      BI=Y (M2) -Y (M3)
      BJ=Y (M3) -Y (M1)
      BM=Y (M1) -Y (M2)
      CI=X (M3) -X (M2)
      CJ=X (M1) -X (M3)
      CM=X (M2) -X (M1)
      TRS (N) =ABS (BJ*CM-BM*CJ) /2.
      RKE (1, 1, N) =BI*BI+CI*CI
      RKE (2, 2, N) =BJ*BJ+CJ*CJ
      RKE (3, 3, N) =BM*BM+CM*CM
      RKE (2, 1, N) =BI*BJ+CI*CJ
      RKE (1, 2, N) =RKE (2, 1, N)
      RKE (3, 1, N) =BI*BM+CI*CM
      RKE (1, 3, N) =RKE (3, 1, N)
      RKE (2, 3, N) =BJ*BM+CJ*CM
11    RKE (3, 2, N) =RKE (2, 3, N)
C
      ITE=1
      NTNO=NT*NO
C
      CALL UFEM (NP, NE, NJ, IH, MA, IJM, TRS, RKE, PK1, PK2, HO, H1, H2, H3,
     1      DT, PT, NT, 2, SG, HH, MMT, SSG, HHH, NPAN, HH1, PARAT)
      CALL COF (NT, NO, NP, NTNO, HH, IOBP, HB)
C     CALL NOIS (XN, 0.5, NTNO)
C
      DO 550 I=1, NTNO
      XN (I) =0.0
550   HB (I) =HB (I) +XN (I)
C
      WRITE (6, 52)
52    FORMAT (/, 5X, 'HEAD NOISES XN(NTNO) =')
      WRITE (6, 53) (XN (I), I=1, NTNO)
53    FORMAT (/, 7X, 5F10.6)
```

```
      WRITE (6, 54)
54    FORMAT (/, 5X, 'OBSERVATION HEAD HB(NTNO) = ')
      WRITE (6, 55) (HB (I), I = 1, NTNO)
55    FORMAT (/, 7X, 5F10.6)
C
303   WRITE ( * , * ) 'ITE = ', ITE
      WRITE (6, 60) ITE
60    FORMAT (/, 5X, 'ITERATION ITE = ', /, I2)
C
      CALL UFEM (NP, NE, NJ, IH, MA, IJM, TRS, RKE, PK1, PK2, HO, H1, H2, H3,
     1      DT, PT, NT, 2, SG, HH, MMT, SSG, HHH, NPAN, HH1, PARAO)
C
      CALL COF (NT, NO, NP, NTNO, HH, IOBP, HC)
C
      CALL UFEM (NP, NE, NJ, IH, MA, IJM, TRS, RKE, PK1, PK2, HO, H1, H2, H3,
     1      DT, PT, NT, 1, SG, HH, MMT, SSG, HHH, NPAN, HH1, PARAO)
C
      CALL MATA (NP, NT, MMT, NO, NTNO, HHH, IOBP, HJH)
C
      CALL SEDI (NTNO, MMT, HC, HB, HE, HJH, HJHT, ATA, TF,
     1      PO, PARAO, PARAL, PARAU, HA)
C
      CALL SETE (ALF, NP, NE, NJ, IH, MA, IJM, TRS, RKE, PK1, PK2, HO,
     1      H1, H2, H3, DT, PT, NT, SG, HH, MMT, SSG, HHH, NPAN,
     2  HH1, PARAO, NO, NTNO, IOBP, HF, TTT, PO, HB)
C
      DO 300 I = 1, MMT
300   PARAO (I) = PARAO (I) + ALF * PO (I)
      DO 600 I = 1, MMT
      IF (PARAO (I) .LT.PARAL (I)) PARAO (I) = PARAL (I)
      IF (PARAO (I) .GT.PARAU (I)) PARAO (I) = PARAU (I)
600   CONTINUE
      WRITE (6, 57)
57    FORMAT (/, 5X, 'TRANSMISSIVITIES PARAO (MMT) = ')
      WRITE (6, 58) (PARAO (I), I = 1, MMT)
58    FORMAT (/, 7X, 5F10.3)
      IF (ITE.EQ.5) GOTO 302
      ITE = ITE + 1
      GOTO 303
C
302   WRITE (6, 99)
99    FORMAT (/, 5X, 'HEAD CALCULATED BY OPTIMIZED PARAMETER HC (NTNO) = ')
      WRITE (6, 98) (HC (I), I = 1, NTNO)
```

```
98    FORMAT (/, 7X, 5F10.6)
C
      STOP
      END
C
C     FINITE ELEMENT MEHTOD FOR TWO - DIMENSIONAL UNSTEADY STATE FLOW
C
      SUBROUTINE UFEM (NP, NE, NJ, IH, MA, IJM, TRS, RKE, PK1, PK2, HO, H1, H2, H3,
     1            DT, PT, NT, II, SG, HH, MMT, SSG, HHH, NPAN, HH1, PARAN)
      DIMENSION MA (NJ), IJM (3, NE), TRS (NE), RKE (3, 3, NE), PK1 (IH),
     1      PK2 (IH), HO (NP), H1 (NP), H2 (NP), H3 (NP), DT (NT), ME (3),
     2      EM (3, 3), PT (NE), SG (NP), HH (NP, NT), SSS (3), HH1 (NP, NT),
     3      SSG (NP), HHH (NP, NT, MMT), NPAN (NE), PARAN (MMT)
      S = 0.00005
      MMM = 1
      NN = 1
      IF (II.EQ.1) GOTO 60
      DO 21 I = 1, NP
      HO (I) = 100.0
21    H1 (I) = 0.0
      GOTO 62
60    DO 61 I = 1, NP
      HO (I) = 0.0
61    H1 (I) = 0.0
62    DO 22 I = 1, IH
22    PK1 (I) = 0.0
C
      DO 28 N = 1, NE
      DO 24 J = 1, 3
24    ME (J) = IJM (J, N)
      JJ = NPAN (N)
      T = PARAN (JJ)
C     M3 = ME (3)
C     T = (PARA (M1) + PARA (M2) + PARA (M3)) /3.
      DO 25 IP = 1, 3
      DO 25 IQ = 1, 3
25    EM (IQ, IP) = RKE (IQ, IP, N) * T/TRS (N) /4.
      DO 27 IP = 1, 3
      DO 26 IQ = 1, 3
      MP = ME (IP)
      MQ = ME (IQ)
      IF (MP.GT.NJ) GOTO 15
      MM = MA (MP) - MP + MQ
```

```
      IF (MP.GE.MQ) PK1 (MM) = PK1 (MM) + EM (IQ, IP)
15    IF ( (MP.GT.NJ) .AND. (MQ.LE.NJ)) H1 (MQ) = H1 (MQ) - EM (IQ, IP) * HO (MP)
26     CONTINUE
27    CONTINUE
28    CONTINUE
C
30    DO 29 I = 1, IH
29    PK2 (I) = 0.0
      DO 31 I = 1, NJ
31    H3 (I) = H1 (I)
      DO 35 N = 1, NE
      DO 32 J = 1, 3
32    ME (J) = IJM (J, N)
      PT (N) = S * TRS (N) /DT (NN)
      DO 34 IP = 1, 3
      DO 33 IQ = 1, 3
      MP = ME (IP)
      MQ = ME (IQ)
      EM (IQ, IP) = PT (N) /6.
      IF (IP.EQ.IQ) EM (IQ, IP) = 2. * EM (IQ, IP)
      IF (MP.GT.NJ) GOTO 17
      MM = MA (MP) - MP + MQ
      IF (MP.GE.MQ) PK2 (MM) = PK2 (MM) + EM (IQ, IP)
17    IF ( (MP.GT.NJ) .AND. (MQ.LE.NJ)) H3 (MQ) = H3 (MQ) - EM (IQ, IP) * HO (MP)
33    CONTINUE
34    CONTINUE
35    CONTINUE
C
      DO 36 I = 1, IH
36    PK2 (I) = PK1 (I) + PK2 (I)
C
      DO 45 I = 1, NP
45    H2 (I) = 0.
      DO 48 N = 1, NE
      DO 46 J = 1, 3
46    ME (J) = IJM (J, N)
      M1 = ME (1)
      M2 = ME (2)
      M3 = ME (3)
      DO 47 IP = 1, 3
      MP = ME (IP)
      IF (MP.LE.NJ) H2 (MP) = H2 (MP) + PT (N) * (HO (M1) + HO (M2) + HO (M3)
     1          + HO (MP)) /6.
```

```
47    CONTINUE
48    CONTINUE
      IF (II.EQ.1) GOTO 703
      DO 49 N=1, NJ
      IF (N.EQ.48) H2 (N) =H2 (N) -30000.0
49    CONTINUE
      DO 850 I=1, NJ
850   H2 (I) =H3 (I) +H2 (I)
      GOTO 704
703   DO 921 I=1, NP
921   SG (I) =0.0
C
      DO 400 N=1, NE
      JJ=NPAN (N)
      IF (JJ.NE.MMM) GOTO 400
      DO 901 IP=1, 3
      DO 401 IQ=1, 3
401   EM (IQ, IP) =RKE (IQ, IP, N) /TRS (N) /4.0
901   CONTINUE
      DO 402 J=1, 3
402   ME (J) =IJM (J, N)
      DO 403 IP=1, 3
      SSS (IP) =0.0
      DO 404 M=1, 3
      MP=ME (M)
404   SSS (IP) =SSS (IP) +EM (IP, M) *HH1 (MP, NN)
      DO 405 L=1, NP
      MQ=ME (IP)
      IF (MQ.EQ.L) SG (L) =SG (L) +SSS (IP)
405   CONTINUE
403   CONTINUE
400   CONTINUE
      DO 5 I=1, NP
5     SSG (I) =SG (I)
      DO 750 I=1, NJ
750   H2 (I) =H2 (I) +H3 (I) -SG (I)
C
704   CALL BAND (NJ, IH, PK2, H2, MA)
C
      DO 52 I=1, NJ
52    HO (I) =H2 (I)
      DO 53 I=1, NP
53    HH (I, NN) =HO (I)
```

```
      IF (NN.EQ.NT) GOTO 55
      NN = NN + 1
      GOTO 30
55    IF (II.NE.1) GOTO 809
      DO 805 I = 1, NT
      DO 805 J = 1, NP
805   HHH (J, I, MMM) = HH (J, I)
      IF (MMM.EQ.MMT) GOTO 800
      MMM = MMM + 1
      NN = 1
      DO 801 I = 1, NP
801   SC (I) = SSC (I)
      GOTO 60
809   DO 810 I = 1, NT
      DO 810 J = 1, NP
810   HH1 (J, I) = HH (J, I)
800   RETURN
      END
C
C     SOLVER FOR SOLVING A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS WITH A SYMMETRIC
C     BANDED MATRIX
C
      SUBROUTINE BAND (N, NP, A, B, LD)
      DIMENSION A (NP), B (N), LD (N)
      DO 20 I = 1, N
      LDI = LD (I)
      IF (I.EQ.1) GOTO 10
      I0 = LDI - I
      IM1 = I - 1
      MI = 1 - I0 + LD (IM1)
      IF (MI.GT.IM1) GOTO 10
      DO 6 J = MI, IM1
      J0 = LD (J) - J
      IJ = I0 + J
      IF (J.EQ.1) GOTO 6
      JM1 = J - 1
      MJ = 1 - J0 + LD (JM1)
      MIJ = MAX0 (MI, MJ)
      IF (MIJ.GT.JM1) GOTO 6
      S = 0.0
      DO 2 K = MIJ, JM1
      IK = I0 + K
      JK = J0 + K
```

```
2     S=S+A (IK) *A (JK)
      A (IJ) =A (IJ) -S
6     B (I) =B (I) -A (IJ) *B (J)
10    ALDI=A (LDI)
      IF (I.EQ.1) GOTO 13
      IF (MI.GT.IM1) GOTO 13
      DO 12 J=MI, IM1
      IJ=IO+J
      LDJ=LD (J)
      S=A (IJ)
      A (IJ) =S/A (LDJ)
12    ALDI=ALDI-S*A (IJ)
13    A (LDI) =ALDI
20    B (I) =B (1) /ALDI
      DO 70 LDI=2, N
      I=N-LDI+2
      IO=LD (I) -I
      MI=1-IO+LD (I-1)
      IM1=I-1
      IF (MI.GT.IM1) GOTO 70
      DO 30 J=MI, IM1
      IJ=IO+J
30    B (J) =B (J) -A (IJ) *B (I)
70    CONTINUE
      RETURN
      END
C
C     MATRIX MALTIPLICATION
C
      SUBROUTINE MTM (L, M, N, A, B, C)
      DIMENSION A (L, M), B (M, N), C (L, N)
      DO 2 I=1, L
      DO 2 J=1, N
      C (I, J) =0.0
      DO 1 K=1, M
1     C (I, J) =C (I, J) +A (I, K) *B (K, J)
2     CONTINUE
      RETURN
      END
C
C     TRANSPOSE OF A MATRIX
C
      SUBROUTINE MT (M, N, A, B)
```

```
      DIMENSION A (M, N), B (N, M)
      DO 1 I = 1, M
      DO 1 J = 1, N
1     B (J, I) = A (I, J)
      RETURN
      END
C
C     GAUSS ELIMINATION METHOD SOVING A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS
C
      SUBROUTINE GAUSS (N, A, B)
      DIMENSION A (N, N), B (N)
      L = N - 1
      DO 10 K = 1, L
      C = 0.0
      DO 2 I = K, N
      IF (ABS (A (I, K)) .LE.ABS (C)) GOTO 2
      C = A (I, K)
      M = I
2     CONTINUE
      IF (M.EQ.K) GOTO 6
      DO 4 J = K, N
      T = A (K, J)
      A (K, J) = A (M, J)
4     A (M, J) = T
      T = B (K)
      B (K) = B (M)
      B (M) = T
6     KL = K + 1
      C = 1.0/C
      B (K) = B (K) * C
      DO 10 J = KL, N
      A (K, J) = A (K, J) * C
      DO 8 I = KL, N
8     A (I, J) = A (I, J) - A (I, K) * A (K, J)
10    B (J) = B (J) - A (J, K) * B (K)
      B (N) = B (N) /A (N, N)
      DO 40 K = 1, L
      I = N - K
      C = 0.0
      LP = I + 1
      DO 50 J = LP, N
50    C = C + A (I, J) * B (J)
40    B (I) = B (I) - C
```

```
      RETURN
      END
C
C     FORM THE SENSITIVITY COEFFICIET MATRIX
C
      SUBROUTINE MATA (NP, NT, MMT, NO, NTNO, HHH, IOBP, HJH)
      DIMENSION HHH (NP, NT, MMT), IOBP (NO), HJH (NTNO, MMT)
      NNT = 0
      DO 101 K = 1, NT
      DO 200 I = 1, MMT
      DO 200 J = 1, NO
      NN = IOBP (J)
      JJ = J + NNT
      HJH (JJ, I) = HHH (NN, K, I)
200   CONTINUE
      NNT = NNT + NO
101   CONTINUE
      RETURN
      END
C
C     ARRANGE HEADS ETC. IN ORDER
C
      SUBROUTINE COF (NT, NO, NP, NTNO, HH, IOBP, HF)
      DIMENSION HH (NP, NT), IOBP (NO), HF (NTNO)
      NNT = 0
      DO 10 I = 1, NT
      DO 101 J = 1, NO
      NN = IOBP (J)
      JJ = J + NNT
      HF (JJ) = HH (NN, I)
101   CONTINUE
      NNT = NNT + NO
10    CONTINUE
      RETURN
      END
C
C     SEARCH DIRECTION
C
      SUBROUTINE SEDI (NTNO, MMT, HC, HB, HE, HJH, HJHT, ATA, TF,
     1          PO, PARAO, PARAL, PARAU, HA)
      DIMENSION HC (NTNO), HB (NTNO), HE (MMT), HJH (NTNO, MMT), HA (NTNO),
     1     HJHT (MMT, NTNO), ATA (MMT, MMT), TF (MMT), PO (MMT),
     2     PARAO (MMT), PARAL (MMT), PARAU (MMT)
```

```
      DO 20 I = 1, NTNO
20    HA (I) = 2.0 * (HC (I) - HB (I))
      CALL MT (NTNO, MMT, HJH, HJHT)
      CALL MTM (MMT, NTNO, 1, HJHT, HA, HE)
      CALL MTM (MMT, NTNO, MMT, HJHT, HJH, ATA)
      DO 21 I = 1, NTNO
21    HA (I) = - HA (I) /2.0
      CALL MTM (MMT, NTNO, 1, HJHT, HA, TF)
      CALL GAUSS (MMT, ATA, TF)
C
      GK = 0.0
      DO 22 I = 1, MMT
22    GK = GK + HE (I) * TF (I)
      IF (GK.LT.0.0) GOTO 23
      DO 24 I = 1, MMT
24    PO (I) = - HE (I)
      GOTO 27
23    DO 25 I = 1, MMT
25    PO (I) = TF (I)
27    DO 26 I = 1, MMT
      F = ABS (PARAO (I) - PARAL (I))
      W = PO (I)
      IF ( (F.LT.1.0E - 5) .AND. (W.LT.0.0)) PO (I) = 0.0
      F = ABS (PARAO (I) - PARAU (I))
      IF ( (F.LT.1.0E - 5) .AND. (W.GT.0.0)) PO (I) = 0.0
26    CONTINUE
      RETURN
      END
C
C     SEARCH STEP SIZE
C
      SUBROUTINE SETE (ALF, NP, NE, NJ, IH, MA, IJM, TRS, RKE, PK1, PK2, HO,
     1              H1, H2, H3, DT, PT, NT, SG, HH, MMT, SSG, HHH, NPAN,
     2              HH1, PARAO, NO, NTNO, IOBP, HF, TTT, PO, HB)
      DIMENSION MA (NJ), IJM (3, NE), TRS (NE), RKE (3, 3, NE), PK1 (IH),
     1       PK2 (IH), HO (NP), H1 (NP), H2 (NP), H3 (NP), DT (NT),
     2       PT (NE), SG (NP), HH (NP, NT), HH1 (NP, NT),
     3       SSG (NP), HHH (NP, NT, MMT), NPAN (NE), PARAO (MMT),
     4       S (3), AP (3), IOBP (NO), HF (NTNO), TTT (MMT), PO (MMT), HB (NTNO)
      AP (1) = 0.0
      AP (2) = 0.5
      AP (3) = 1.0
      DO 10 I = 1, 3
```

```
10    S (1) =0.0
      DO 2 I=1, 3
      T=AP (I)
      DO 3 J=1, MMT
3     TTT (J) =PARAO (J) +T*PO (J)
      CALL UFEM (NP, NE, NJ, IH, MA, IJM, TRS, RKE, PK1, PK2, HO,
     1      H1, H2, H3, DT, PT, NT, 2, SG, HH, MMT, SSG, HHH, NPAN,
     2      HH1, TTT)
      CALL COF (NT, NO, NP, NTNO, HH, IOBP, HF)
      DO 4 K=1, NTNO
4     S (I) =S (I) + (HF (K) -HB (K)) * (HF (K) -HB (K))
2     CONTINUE
      ALF= (3*S (1) +S (3) -4*S (2)) / (4*S (1) +4*S (3) -8*S (2))
      WRITE (6, 20) ALF
20    FORMAT (/, 5X, 'STEP SIZE ALF=', /, 7X, F10.5)
      WRITE (6, 21) S (1)
21    FORMAT (/, 5X, 'OBJECTIVE FUNCTION S (1) =', /, 7X, F10.5)
      RETURN
      END
C
C     HEAD NOISES                                                    1
C
      SUBROUTINE NOIS (XN, SIG, N)
      DIMENSION XN (N)                                               1
      IX=100
      DO 110 I=1, N
      A=0.0
      DO 100 J=1, 12
      CALL RANDU (IX, IY, Y)
      IX=IY
      WRITE (*, *) 'A', A
100   A=A+Y
      XN (I) = (A-6.0)
110   CONTINUE
      XM=0.0
      DO 200 I=1, N
200   XM=XM+XN (I)
      XM=XM/N
      COV=0.0
      DO 300 I=1, N
300   COV=COV+ (XN (I) -XM) * (XN (1) -XM)
      COV=COV/N
      COV=SQRT (COV)
```

```
      DO 400 I = 1, N
400   XN (1) = SIG * (XN (1) - XM) /COV
      WRITE (6, 600) (XN (I), I = 1, N)
600   FORMAT (/, 1X, 'HEAD NOISES XN (NTNO) = ', /, 20 (5F10.5, /))
      RETURN
      END
C
C     RANDOM
C
      SUBROUTINE RANDU (IX, IY, Y)
      IY = IX * 65539
      IF (IY) 100, 200, 200
100   IY = IY + 2147483647.0 + 1
200   Y = IY
      Y = Y * .4656613E - 9
      RETURN
      END
```

附录 2　综合改进的遗传算法识别含水层参数的计算机程序

1　计算机程序总体说明

我们用 Fortran 语言编写了综合改进的遗传算法识别含水层参数的计算机程序。这个程序包括一个主程序和五个子程序。主程序 GAFEM 为综合改进的遗传算法程序，改变或屏蔽某些语句可以组合成不同的遗传算法，如本书中介绍的 8 种遗传算法均可通过主程序稍微改动形成。子程序 FEM 为主要的子程序，主要用来进行二维承压水有限元模拟计算。子程序 NNE 为 FEM 子程序的子程序，主要用于形成节点的相邻节点数及相邻节点数组，节点的相邻二角形单元数和相邻三角形编号数组。子程序 CHANGEINF 为 FEM 的子程序，主要进行信息变换。子程序 BDK 为 FEM 的子程序，主要功能为用一维变带宽存储方式求解系数矩阵为稀疏带状对称矩阵的线性方程组。子程序 BSORT 为主程序 GAFEM 的子程序，主要进行数组排序。

2　程序中采用的主要标识符

变量：
NP _ SIZE——种群数；
NVARS——参数的个数；
PC——交叉概率
PM——变异概率；
ALPH——评价系数；
N _ GEN——遗传代数。
数组：
V（NP _ SIZE，NVARS）——存放每代的染色体；
X0（NVARS）——染色体的下限值；
X1（NVARS）——染色体的上限值；
NOO（NP _ SIZE）——每代种群优劣排序序号；
Q（0：NP _ SIZE）——过渡数组；
FMAX（N _ GEN）——存放每代最小误差；
VMAX（N _ GEN，NVARS）——存放每代最优染色体；
U（NP _ SIZE，NVARS）——存放种群中所有染色体；
FF（NP _ SIZE）——存放种群中所有染色体产生的误差；

EVAL (NP_SIZE) ——评价函数数组；
VMAX0 (NVARS) ——每代最优染色体；
VV (NVARS) ——染色体过渡数组。

3 综合改进遗传算法识别含水层参数的计算程序

```
      PROGRAM GAFEM.F
      PARAMETER (NP_SIZE=50, NVARS=6, PC=0.70, PM=0.30, ALPH=0.05,
     # N_GEN=1000)

      DIMENSION V (NP_SIZE, NVARS), X0 (NVARS), X1 (NVARS), NOO (NP_SIZE),
     # Q (0: NP_SIZE), FMAX (N_GEN), VMAX (N_GEN, NVARS), U (NP_SIZE, NVARS),
     # FF (NP_SIZE), EVAL (NP_SIZE), VMAX0 (NVARS), VV (NVARS)

      OPEN (1, FILE='GABAS.DAT', STATUS='OLD')
      READ (1, *) (X0 (I), X1 (I), I=1, NVARS)
      CLOSE (1)

      OPEN (8, FILE='YEND.DAT')

      DO I=1, NP_SIZE
        DO K=1, NVARS
          A=RAND ()
          V (1, K) =X0 (K) + (X1 (K) -X0 (K)) * A
        ENDDO
      ENDDO

      DO 5000 KKK=1, N_GEN

        IF (KKK.NE.1) THEN
          DO K=1, NVARS
            V (NP_SIZE, K) =VMAX0 (K)
          ENDDO

          DO I=1, NP_SIZE
            IF (RAND () .LE.0.1) THEN
              J=INT (NP_SIZE*RAND ()) +1
              IF (J.NE.NP_SIZE) THEN
                DO K=1, NVARS
1100              V (J, K) = (1.0-0.5+RAND ()) * VMAX0 (K)
                  IF (V (J, K) .LT.X0 (K) .OR.V (J, K) .GT.X1 (K)) GOTO 1100
                ENDDO
```

```
            ENDIF
          ENDIF
        ENDDO


      DO I = 1, NP_SIZE
        IF (RAND () .LE.0.1) THEN
          J = INT (NP_SIZE * RAND ()) + 1
          IF (J.NE.NP_SIZE) THEN
            DO K = 1, NVARS
2200          V (J, K) = (1.0 - 0.01 + 0.02 * RAND ()) * VMAX0 (K)
              IF (V (J, K) .LT.X0 (K) .OR.V (J, K) .GT.X1 (K)) GOTO 2200
            ENDDO
          ENDIF
        ENDIF
      ENDDO

      DO I = 1, NP_SIZE
        IF (RAND () .LE.0.1) THEN
          J = INT (NP_SIZE * RAND ()) + 1
          IF (J.NE.NP_SIZE) THEN
            DO K = 1, NVARS
3300          V (J, K) = (1.0 - 0.0001 + 0.0002 * RAND ()) * VMAX0 (K)
              IF (V (J, K) .LT.X0 (K) .OR.V (J, K) .GT.X1 (K)) GOTO 3300
            ENDDO
          ENDIF
        ENDIF
      ENDDO
      ENDIF

        DO I = 1, NP_SIZE
          DO J = 1, NVARS
            VV (J) = V (I, J)
          ENDDO
          CALL FEM (VV, NVARS, ERR)
          FF (I) = ERR
        ENDDO


      DO I = 1, NP_SIZE
        EVAL (I) = ALPH * (1.0 - ALPH) * * (I - 1)
      ENDDO
```

```
      CALL BSORT (FF, NOO, NP_SIZE)

      FMAX (KKK) = FF (NOO (1))
      FMAX0 = FF (NOO (1))
      DO K = 1, NVARS
        VMAX (KKK, K) = V (NOO (1), K)
        VMAX0 (K) = V (NOO (1), K)
      ENDDO

      DO I = 1, NP_SIZE
        DO K = 1, NVARS
          U (I, K) = V (NOO (I), K)
        ENDDO
      ENDDO

      Q (0) = 0.0
      DO I = 1, NP_SIZE
        Q (I) = 0.0
        DO J = 1, I
          Q (I) = Q (I) + EVAL (J)
        ENDDO
      ENDDO

      DO I = 1, NP_SIZE
        A = RAND ()
        R0 = Q (NP_SIZE) * A
        DO J = 1, NP_SIZE
          IF (R0.GT.Q (J - 1) .AND.R0.LE.Q (J)) THEN
            DO K = 1, NVARS
              V (I, K) = U (J, K)
            ENDDO
          ENDIF
        ENDDO
      ENDDO

C - - - - - - - Croesover

      NN = 0
      DO I = 1, NP_SIZE
        A = RAND ()
        IF (A.LT.PC) THEN
          NN = NN + 1
          NOO (NN) = I
```

```
          DO K = 1, NVARS
            U (NN, K) = V (I, K)
          ENDDO
        ENDIF
      ENDDO
      IF (NN.NE.NN/2 * 2) THEN
        NN = NN - 1
      ENDIF

      DO I = 1, NN/2
        NNN = 0
        I1 = (I - 1) * 2 + 1
        I2 = (I - 1) * 2 + 2
111     CONTINUE
        NNN = NNN + 1

        DO K = 1, NVARS
          A = RAND ()
          V (NOO (I1), K) = A * U (I1, K) + (1.0 - A) * U (I2, K)
          V (NOO (I2), K) = (1.0 - A) * U (I1, K) + A * U (I2, K)
          IF (V (NOO (I1), K) .LT.X0 (K) .OR.V (NOO (I1), K) .GT.X1 (K) .OR.
     #      V (NOO (I2), K) .LT.X0 (K) .OR.V (NOO (I2), K) .GT.X1 (K)) THEN
            IF (NNN.GT.1000) THEN
              V (NOO (I1), K) = U (I1, K)
              V (NOO (I2), K) = U (I2, K)
              GOTO 333
            ENDIF
            GOTO 111
          ENDIF
333       CONTINUE
        ENDDO
      ENDDO

C - - - - - - - Mutation

      NN = 0
      DO I = 1, NP_SIZE
        A = RAND ()
        IF (A.LT.PM) THEN
          NN = NN + 1
          NOO (NN) = I
          DO K = 1, NVARS
            U (NN, K) = V (I, K)
```

```
          ENDDO
          DO K = 1, NVARS
            NUM = 0
222         NUM = NUM + 1
            A = RAND ()
            B = RAND ()
            IF (A.LE.0.5) THEN
              S = -1.0
            ELSE
              S = 1.0
            ENDIF
            V (I, K) = U (NN, K) + S* (X1 (K) - X0 (K)) * B
            IF (V (I, K) .LT.X0 (K) .OR.V (I, K) .GT.X1 (K)) THEN
              IF (NUM.GT.1000) THEN
                V (I, K) = U (NN, K)
              ELSE
                GOTO 222
              ENDIF
            ENDIF
          ENDDO
        ENDIF
      ENDDO

      LAAA = KKK
      WRITE (*, 555) LAAA, FMAX (KKK), (VMAX (KKK, I), I = 1, NVARS)
      WRITE (8, 555) LAAA, FMAX (KKK), (VMAX (KKK, I), I = 1, NVARS)
555   FORMAT (I5, F9.6, 3F9.4, 3F9.6)

      FMIN = 1.0E20
      DO I = 1, MMM
        IF (FMAX (I) .LT.FMIN) THEN
          FMIN = FMAX (I)
          NMIN = I
        ENDIF
      ENDDO

5000  CONTINUE

      WRITE (*, *) 'ERRO MIN = ', FMIN, NMIN
      WRITE (8, *) 'ERRO MIN = ', FMIN, NMIN
      CLOSE (8)

      END
```

```
C* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
C  PROGRAM: SUB FEM                                                                                              *
C  WRITER: Yao Leihua Ph.D.                                                                                       *
C  TELPHONE: (010) 82321558, 13020005686                                                                          *
C  E-MAIL: yaolh@263.net, yao_lh@21cn.com                                                                         *
C  School of Engineering Technology, China University of Geosciences                                             *
C  Beijing, 100083 CHINA                                                                                         *
C* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
      SUBROUTINE FEM (VV, NVARS, EERO)
      PARAMETER (NE=312, NP=181, NT=19, NF=3, NW=1, NOBS=3, NR=0, NA=10000,
     # IIP=10, IIE=10)

      DIMENSION IJK (NE, 3), X (NP), Y (NP), Z0 (NP), Z1 (NP), NEN (NP),
     # NENO (NP, IIE), NNN (NP), NNNO (NP, IIP), INO (NP), ION (NP),
     # HA (NP), HB (NP), W (NP), S (NE), KB (NP), RF (NT), DET (NOBS),
     # AMU (NF), HB1 (NP), HBX (NP), DT (NT), B (NP), H0 (NP),
     # AIJ (NP, IIP), DIJ (NP, IIP), DDD (NA), G (NP), LD (NP), HX (NP),
     # NDIV (NE), NWELL (NW), Q (NW, NT), HOBS (NOBS, 0: NT), NRIV (NR), URIV (NR),
     # HCAL (NOBS, 0: NT), XOBS (NOBS), YOBS (NOBS), LOBS (NOBS), VV (NVARS)
      REAL KX (NF), KY (NF)

        KX (1) = VV (1)
        KX (2) = VV (2)
        KX (3) = VV (3)
        KY (1) = VV (1)
        KY (2) = VV (2)
        KY (3) = VV (3)
        AMU (1) = VV (4)
        AMU (2) = VV (5)
        AMU (3) = VV (6)

      OPEN (1, FILE='CHENXY.DAT', STATUS='OLD')
      READ (1, *) KNO1, KNO1
      READ (1, *) (KNO1, X (I), Y (I), I=1, NP)
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE='CHENIJK.DAT', STATUS='OLD')
      READ (1, *) KNO1
      READ (1, *) (KNO1, (IJK (I, J), J=1, 3), I=1, NE)
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE='CHENH0.DAT', STATUS='OLD')
      READ (1, *) (KNO1, H0 (I), I=1, NP)
```

```
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE = 'CHENZ0.DAT', STATUS = 'OLD')
      READ (1, *) (KNO1, Z0 (I), I = 1, NP)
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE = 'CHENZ1.DAT', STATUS = 'OLD')
      READ (1, *) (KNO1, Z1 (I), I = 1, NP)
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE = 'CHENDIV.DAT', STATUS = 'OLD')
      READ (1, *) (KNO1, NDIV (I), I = 1, NE)
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE = 'CHENKB2.DAT', STATUS = 'OLD')
      READ (1, *) (KNO1, KB (I), I = 1, NP)
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE = 'CHENBAS.DAT', STATUS = 'OLD')
      READ (1, *) CCKK, CRF, ARG, ALF
      READ (1, *) (KXI, KYI, AMUI, I = 1, NF)
      READ (1, *) (DT (I), I = 1, NT)
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE = 'CHENOBS.DAT', STATUS = 'OLD')
      READ (1, *) KNO1
      READ (1, *) (XOBS (I), YOBS (I), I = 1, NOBS)
      READ (1, *) ( (HOBS (I, J), J = 1, NT), I = 1, NOBS)
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE = 'CHENQ.DAT', STATUS = 'OLD')
      READ (1, *) KNO1
      READ (1, *) (NWELL (I), I = 1, NW)
      READ (1, *) ( (Q (I, J), J = 1, NT), I = 1, NW)
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE = 'CHENRF.DAT', STATUS = 'OLD')
      READ (1, *) (RF (I), I = 1, NT)
      CLOSE (1)

      OPEN (1, FILE = 'CHENRIV.DAT', STATUS = 'OLD')
      READ (1, *) KNO1
      READ (1, *) (NRIV (I), I = 1, NR)
```

```
      READ (1, *) (URIV (I), I = 1, NR)
      CLOSE (1)

      DO I = 1, NOBS
      XOBS (I) = CCKK * XOBS (I)
      YOBS (I) = CCKK * YOBS (I)
      ENDDO

     DO I = 1, NP
       X (I) = CCKK * X (I)
       Y (I) = CCKK * Y (I)
     ENDDO

      DO I = 1, NOBS
        XP = XOBS (I)
        YP = YOBS (I)
        DO J = 1, NE
          I0 = IJK (J, 1)
          J0 = IJK (J, 2)
          K0 = IJK (J, 3)
          SS = 0.5 * (X (I0) * (Y (J0) - Y (K0)) + X (J0) * (Y (K0) - Y (I0)) +
     #     X (K0) * (Y (I0) - Y (J0)))
          XI = X (I0)
          YI = Y (I0)
          XJ = X (J0)
          YJ = Y (J0)
          YK = Y (K0)
          XK = X (K0)
          FI = (XJ * YK - XK * YJ)
          FJ = (XK * YI - XI * YK)
          FK = (XI * YJ - XJ * YI)
          BI = (YJ - YK)
          BJ = (YK - YI)
          BK = (YI - YJ)
          DI = (XK - XJ)
          DJ = (XI - XK)
          DK = (XJ - XI)
          SLI = FI + BI * XP + DI * YP
          SLJ = FJ + BJ * XP + DJ * YP
          SLK = FK + BK * XP + DK * YP
          IF (SLJ.GE.0.0.AND.SLJ.GE.0.0.AND.SLK.GE.0.0) THEN
            LOBS (I) = J
          ENDIF
```

```
      ENDDO
    ENDDO

    DO 5500 I = 1, NOBS
    XP = XOBS (I)
    YP = YOBS (I)
    J = LOBS (I)
    I0 = IJK (J, 1)
    J0 = IJK (J, 2)
    K0 = IJK (J, 3)
    SS = 0.5 * (X (I0) * (Y (J0) - Y (K0)) + X (J0) * (Y (K0) - Y (I0)) +
    #   X (K0) * (Y (I0) - Y (J0)))
    XI = X (I0)
    YI = Y (I0)
    XJ = X (J0)
    YJ = Y (J0)
    YK = Y (K0)
    XK = X (K0)
    FI = (XJ * YK - XK * YJ)
    FJ = (XK * YI - XI * YK)
    FK = (XI * YJ - XJ * YI)
    BI = (YJ - YK)
    BJ = (YK - YI)
    BK = (YI - YJ)
    DI = (XK - XJ)
    DJ = (XI - XK)
    DK = (XJ - XI)
    SLI = FI + BI * XP + DI * YP
    SLJ = FJ + BJ * XP + DJ * YP
    SLK = FK + BK * XP + DK * YP
    FLI = SLI/ (2.0 * SS)
    FLJ = SLJ/ (2.0 * SS)
    FLK = SLK/ (2.0 * SS)
    HCAL (I, 0) = FLI * H0 (I0) + FLJ * H0 (J0) + FLK * H0 (K0)
    HOBS (I, 0) = FLI * H0 (I0) + FLJ * H0 (J0) + FLK * H0 (K0)
5500    CONTINUE

    CALL CHANGEINF (NP, NE, X, Y, Z0, IJK, KB, INO, ION, HX, H0, MUN, N0, Z1)
    CALL NNE (IJK, NEN, NENO, NNN, NNNO, NP, NE, IIP, IIE)

    M1 = MUN
    MAXNEN = 0
    DO I = 1, NP
```

```
      IF (NEN (I) .GT.MAXNEN) MAXNEN=NEN (I)
      ENDDO
      MAXNNN=0
      DO I=1, NP
      IF (NNN (I) .GT.MAXNNN) MAXNNN=NNN (I)
      ENDDO

      DO 510 J=1, M1+1
      LMIN=J
      DO 410 I=1, NNN (J)
      IF (NNNO (J, I) .LT.LMIN) THEN
      LMIN=NNNO (J, I)
      ENDIF
410     CONTINUE
      MI=LMIN
      IF (J.EQ.1) THEN
      LDI=0
      ELSE
      LDI=LD (J-1)
      ENDIF
          LD (J) =LDI+ (J-MI) +1
510       CONTINUE

      DO 11 I=1, NE
      I1=IJK (I, 1)
      I2=IJK (I, 2)
      I3=IJK (I, 3)
      S (I) =0.5* (X (I1) * (Y (I2) -Y (I3)) +X (I2) * (Y (I3) -Y (I1)) +
     #   X (I3) * (Y (I1) -Y (I2)))
11      CONTINUE

      DO 1=1, NP
      HA (I) =H0 (I)
      HB (I) =H0 (I)
      HB1 (I) =H0 (I)
      ENDDO

      DO 40 1=1, NP
      DO 40 J=1, HP
      AIJ (I, J) =0.0
      DIJ (I, J) =0.0
40      CONTINUE
```

```
      DO 400 J = 1, NP
      DO 401 I = 1, NNN (J)
      IK = NNNO (J, I)
        IF (IK.EQ.J) THEN
        DO 100 II = 1, NEN (J)
        I1 = NENO (J, II)
        DO 101 JJ = 1, 3
        IF (IJK (I1, JJ) .EQ.J) THEN
          J1 = JJ + 1 - JJ/3 * 3
          K1 = J1 + 1 - J1/3 * 3
        ENDIF
101           CONTINUE

      I0 = J
      J0 = IJK (I1, J1)
      K0 = IJK (I1, K1)
      BI = (Y (J0) - Y (K0)) /S (I1) /2.0
      DI = (X (K0) - X (J0)) /S (I1) /2.0
      JA = NDIV (I1)
        HH = (Z1 (I0) + Z1 (J0) + Z1 (K0)) /3. - (Z0 (I0) + Z0 (J0) + Z0 (K0)) /3.
      TX = HH * KX (JA)
      TY = HH * KY (JA)
      DIJ (J, I) = DIJ (J, I) + S (I1) * AMU (JA) /6.
      AIJ (J, 1) = AIJ (J, I) + (TX * BI * BI + TY * DI * DI) * S (I1)

100     CONTINUE
    ELSE
      DO 200 JJI = 1, NEN (J)
      JJ1 = NENO (J, JJI)
      DO 200 II = 1, NEN (IK)
      I1 = NENO (IK, II)
        IF (JJ1.EQ.I1) THEN
          DO 290 JJ = 1, 3
            IF (IJK (I1, JJ) .EQ.J) THEN
          IE = JJ
          J1 = JJ + 1 - JJ/3 * 3
          K1 = J1 + 1 - J1/3 * 3
          I0 = IJK (I1, IE)
          J0 = IJK (I1, J1)
          K0 = IJK (I1, K1)
          BI = (Y (J0) - Y (K0)) /2.0/S (I1)
          BJ = (Y (K0) - Y (I0)) /2.0/S (I1)
          BK = (Y (I0) - Y (J0)) /2.0/S (I1)
```

```
          DI = (X (K0) - X (J0)) /2.0/S (I1)
          DJ = (X (I0) - X (K0)) /2.0/S (I1)
          DK = (X (J0) - X (I0)) /2.0/S (I1)
          IF (J0.NE.IK) THEN
            BJ = BK
            DJ = DK
          ENDIF
          JA = NDIV (I1)
              HH = (Z1 (I0) + Z1 (J0) + Z1 (K0)) /3. - (Z0 (I0) + Z0 (J0) + Z0 (K0)) /3.
          TX = HH * KX (JA)
          TY = HH * KY (JA)
          DIJ (J, I) = DIJ (J, I) + S (I1) * AMU (JA) /12.
          AIJ (J, I) = AIJ (J, I) + (TX * BI * BJ + TY * DI * DJ) * S (I1)
            ENDIF
290           CONTINUE
        ENDIF
200       CONTINUE
    ENDIF
401     CONTINUE
400     CONTINUE

    TIME = 0.0
     DO 1000 NDT = 1, NT
     TIME = TIME + DT (NDT)
     DO I = N0 + 1, NP
     HB1 (I) = HA (I)
     ENDDO

     DO 120 IDDD = 1, NA
     DDD (IDDD) = 0.0
120    CONTINUE

     NBK = 0
     DO 202 J = 1, M1
     DO 202 JJ = 1, NNN (J)
     I = NNNO (J, JJ)
     IF (I.LE.J) THEN
       IJ = LD (J) - J + 1
       IF (IJ.GE.NBK) NBK = IJ
       DDD (IJ) = DIJ (J, JJ) + DT (NDT) * AIJ (J, JJ)
     ENDIF
202    CONTINUE
```

```
      DO J=1, NP
        G (J) =0.0
          ENDDO
          DO I=1, NR
          II=NRIV (I)
          DO J=1, 3
            IELE=IJK (II, J)
              G (IELE) =G (IELE) +S (II) *URIV (I) /3.
          ENDDO
        ENDDO

      DO I=1, NE
          DO J=1, 3
            IELE=IJK (I, J)
              G (IELE) =G (IELE) +S (I) * (RF (NDT) *CRF-ARG*ALF) /3.
          ENDDO
        ENDDO

      DO 450 J=1, NP
      W (J) =0.0
450     CONTINUE

      DO I=1, NW
        W (NWELL (I)) =-Q (I, NDT)
      ENDDO

      DO 15 J=1, M1
      BBJ=0.0
      BCJ=0.0

      DO 25 JJ=1, NNN (J)
      I=NNNO (J, JJ)
25      BBJ=BBJ+DIJ (J, JJ) *HA (I)

      DO 98 I=M1+1, NP
      HB (I) =HB1 (I)
98      CONTINUE

      DO 35 JJ=1, NNN (J)
       I=NNNO (J, JJ)
       IF (I.GT.M1) THEN
       BCJ=BCJ+ (DIJ (J, JJ) +DT (NDT) *AIJ (J, JJ)) *HB (I)
       ENDIF
```

```
35      CONTINUE
        B (J) = BBJ - BCJ + (G (J) + W (J)) * DT (NDT)
15      CONTINUE
        CALL BDK (NP, NA, M1, DDD, B, HBX, LD, NBK)

        DO I = 1, M1
        HB (I) = HBX (1)
        ENDDO

        DO I = 1, NP
        HA (1) = HB (I)
        ENDDO

        DO 500 I = 1, NOBS
        XP = XOBS (I)
        YP = YOBS (I)
        J = LOBS (I)
        I0 = IJK (J, 1)
        J0 = IJK (J, 2)
        K0 = IJK (J, 3)
        SS = 0.5 * (X (I0) * (Y (J0) - Y (K0)) + X (J0) * (Y (K0) - Y (I0)) +
        #   X (K0) * (Y (I0) - Y (J0)))
        XI = X (I0)
        YI = Y (I0)
        XJ = X (J0)
        YJ = Y (J0)
        YK = Y (K0)
        XK = X (K0)
        FI = (XJ * YK - XK * YJ)
        FJ = (XK * YI - XI * YK)
        FK = (XI * YJ - XJ * YI)
        BI = (YJ - YK)
        BJ = (YK - YI)
        BK = (YI - YJ)
        DI = (XK - XJ)
        DJ = (XI - XK)
        DK = (XJ - XI)
        SLI = FI + BI * XP + DI * YP
        SLJ = FJ + BJ * XP + DJ * YP
        SLK = FK + BK * XP + DK * YP
        FLI = SLI/ (2.0 * SS)
        FLJ = SLJ/ (2.0 * SS)
        FLK = SLK/ (2.0 * SS)
```

```
      HCAL (I, NDT) = FLI * HB (I0) + FLJ * HB (J0) + FLK * HB (K0)
500     CONTINUE
1000    CONTINUE

      ERR = 0.
      DO J = 1, NOBS
      ERO = 0.
      DO I = 0, NT
      ERO = ERO + ABS (HOBS (J, I) - HCAL (J, I))
      ENDDO
      ERO = ERO/ (NT + 1)
      DET (J) = ERO
      ERR = ERR + ERO
      ENDDO
      EERO = ERR/NOBS

      END

      SUBROUTINE NNE (IJK, NEN, NENO, NNN, NNNO, NP, NE, IIP, IIE)
      DIMENSION IJK (NE, 3), NEN (NP), NENO (NP, IIE), NNN (NP), NNNO (NP, IIP)

      DO 101 I = 1, NP
        NEN (I) = 0
        NNN (I) = 0
101     CONTINUE

      DO 111 I = 1, NE
        DO 121 J = 1, 3
          IN = IJK (I, J)
          NEN (IN) = NEN (IN) + 1
          NENO (IN, NEN (IN)) = I
121       CONTINUE
111     CONTINUE

      DO 131 I = 1, NP
        DO 132 J = 1, NEN (I)
          II = NENO (I, J)
          DO 133 KK = 1, 3
            IN = IJK (II, KK)
            IF (IN.NE.I) THEN
          LL = 0
          IF (NNN (I) .GE.1) THEN
            DO 134 L = 1, NNN (I)
```

```
            LNN = NNNO (I, L)
            IF (IN.EQ.LNN) LL = 1
134         CONTINUE
          ENDIF
          IF (LL.EQ.0) THEN
            NNN (I) = NNN (I) + 1
            NNNO (I, NNN (I)) = IN
          ENDIF
            ENDIF
133         CONTINUE
132       CONTINUE
131     CONTINUE

      DO 889 I = 1, NP
      NNN (I) = NNN (I) + 1
      NNNO (I, NNN (I)) = I
889       CONTINUE

      END

      SUBROUTINE BDK (LP, LA, N1, A, B, X, NA, BK)
      INTEGER BK, NA (LP)
      REAL X (LP), A (LA), B (LP)
      DO 5 I = 1, N1
      NO = I
      IF (NO.EQ.1) THEN
      NI = I + 1 - NA (I)
      ELSE
      NI = I + 1 - NA (I) + NA (I - 1)
      END IF
      DO 10 J = NI, I
      NC = J
      IF (NC.EQ.1) THEN
      NJ = J + 1 - NA (J)
      ELSE
      NJ = J + 1 - NA (J) + NA (J - 1)
      END IF
      IF (NJ.LT.NI) THEN
      NJ = NI
      END IF
      Z = 0.0
      DO 15 K = NJ, J - 1
      NX = NA (I) - I + K
```

```
      NY = NA (J) - J + K
      NNZ = NA (K)
      Z = Z + A (NX) * A (NY) /A (NNZ)
15    CONTINUE
      NF = NA (I) - I + J
      A (NF) = A (NF) - Z
10    CONTINUE
5     CONTINUE
      DO 20 J = 1, N1
      NO = J
      IF (NO.EQ.1) THEN
      NJ = J + 1 - NA (J)
      ELSE
      NJ = J + 1 - NA (J) + NA (J - 1)
      END IF
      Z = 0.0
      IF (NO.NE.1) THEN
      DO 25 K = NJ, J - 1
      NX = NA (J) - J + K
25    Z = Z + A (NX) * X (K)
      END IF
      NY = NA (J)
      X (J) = (B (J) - Z) /A (NY)
20    CONTINUE
      DO 30 J = N1, 1, - 1
      Z = 0.0
      NB = J + BK
      IF (NB.LT.N1) THEN
      BK = NB
      ELSE
      BK = N1
      END IF
      DO 35 K = J + 1, BK
      NF = K + 1 - NA (K) + NA (K - 1)
      IF (J.GE.NF) THEN
      NX = NA (K) - K + J
      Z = Z + A (NX) * X (K)
      END IF
35    CONTINUE
      NY = NA (J)
      X (J) = X (J) - Z/A (NY)
30    CONTINUE
      END
```

```
      SUBROUTINE CHANGEINF (NP, NE, X, Y, Z0, IJK, KB, INO, ION, A, HA, MUK, N0, Z1)
      DIMENSION X (NP), Y (NP), Z0 (NP), IJK (NE, 3), KB (NP), ION (NP), INO (NP)
      DIMENSION A (NP), HA (NP), Z1 (NP)

      L=0
      DO I=1, NP
      IF (KB (1) .EQ.0) THEN
      L=L+1
      ENDIF
      ENDDO
      N0=L

    L=0
    DO 211 I=1, NP
    IF (KB (I) .NE.1) THEN
    L=L+1
    ENDIF
211   CONTINUE
    MUK=L
    M=0
    N=L
    DO I=1, NP
      IF (KB (I) .NE.1) THEN
        M=M+1
        INO (M) =I
        ION (I) =M
      ELSE
        N=N+1
        INO (N) =I
        ION (I) =N
      END IF
    END DO

    DO I=1, NP
    A (I) =X (I)
    END DO
    DO I=1, NP
    X (I) =A (INO (I))
    END DO

    DO I=1, NP
    A (I) =Y (I)
```

```
END DO
DO I=1, NP
Y (I) =A (INO (I))
END DO

DO I=1, NP
    A (I) =Z0 (I)
END DO
DO I=1, NP
    Z0 (I) =A (INO (I))
END DO

DO I=1, NP
    A (I) =Z1 (I)
END DO
DO I=1, NP
    Z1 (I) =A (INO (I))
END DO

DO I=1, NP
A (I) =HA (I)
END DO
DO I=1, NP
HA (I) =A (INO (I))
END DO

DO I=1, NE
  DO J=1, 3
    K=IJK (I, J)
    IJK (I, J) =ION (K)
  END DO
END DO
END

    SUBROUTINE BSORT (A, NOO, N)
    DIMENSION A (N), B (N), NOO (N)

    DO I=1, N
      B (I) =A (1)
    ENDDO

    DO I=1, N
      TMIN=1.0E20
```

```
      DO J = 1, N
        IF (A (J) .LT.TMIN) THEN
          TMIN = A (J)
          NOO (I) = J
        ENDIF
      ENDDO
A (NOO (I)) = 1.0E20
ENDDO

  DO I = 1, N
    A (I) = B (I)
  ENDDO
  END
```

[General Information]
书名=含水层参数识别方法
作者=
页数=151
SS号=0
出版日期=

目录

1 地下水系统参数反演理论与方法
1．1 反演问题的一些基本概念
1．2 反演方法分类与进展
2 用解析法识别含水层参数
2．1 若干地下水流数学模型的解析解
2．2 用Ｄｕｐｕｉｔ－Ｔｈｅｉｍ公式识别含水层参数
2．3 用Ｔｈｅｉｓ公式识别含水层参数
2．4 用Ｈａｎｔｕｓｈ－Ｊａｃｏｂ公式识别含水层参数
2．5 用定降深井流试验识别含水层参数
2．6 各向异性含水层参数识别方法
3 地下水流方程的有限元解法
3．1 地下水流方程
3．2 地下水流方程的有限元解法
3．3 例题与精度比较
4 修正的高斯－牛顿法
4．1 含水层参数识别问题的提法
4．2 修正的高斯－牛顿法
4．3 计算步骤
5 灵敏度系数矩阵计算方法
5．1 影响系数法
5．2 灵敏度系数方程法
5．3 变分法
5．4 例题与精度比较
6 各种随机和非随机因素对参数识别的影响
6．1 理想化模型
6．2 灵敏度系数矩阵计算方法对参数识别的影响
6．3 水位观测数据序列的长短对参数识别的影响
6．4 参数初值和上、下限的选择对参数识别的影响
6．5 流量和水位观测数据的随机误差和系统误差对参数识别结果的影响
6．6 水位观测孔分布与待识别参数个数之间的关系
7 遗传算法研究进展
7．1 概述
7．2 遗传算法的基本原理
7．3 基本的遗传算法
7．4 遗传算法的主要步骤
7．5 遗传算法的特点
7．6 遗传算法研究进展
8 十进制遗传算法
8．1 引言

８．２十进制遗传算法简介
9十进制遗传算法的改进
９．１引言
９．２优体克隆操作
９．３子体优生操作
９．４多代调环操作
９．５因素变异操作
９．６组合操作
９．７小结
１０一维地下水系统遗传反演方法
１０．１引言
１０．２泰斯模型遗传反演方法
１０．３水动力弥散方程遗传反演方法
１０．４小结
１１多维地下水系统遗传反演方法
１１．１引言
１１．２二维承压水非稳定流模型遗传反演方法
１１．３三维承压水非稳定流模型遗传反演方法
１１．４小结
１２结束语&（1
参考文献&（1
附录1修正的高斯－牛顿法识别含水层参数的计算机程序&（1
附录2综合改进的遗传算法识别含水层参数的计算机程序