# 测量学

第三版

高等学校教材

2004/01/01

# 目　　录


第一章　绪　论……（1）
§1-1　测绘工作的任务及其在社会主义建设中的作用……（1）
§1-2　测量学的发展概况……（2）
第二章　测量学的基本知识……（5）
§2-1　地球形状大小和测量坐标系的概念……（5）
§2-2　用水平面代替水准面的限度……（10）
§2-3　地形图的认识……（13）
§2-4　测图原理与测量工作概述……（17）
第三章　直线丈量与定向……（21）
§3-1　地面点的标定与直线定线……（21）
§3-2　直线丈量……（22）
§3-3　钢尺的检定……（26）
§3-4　直线丈量的误差来源……（27）
§3-5　丈量成果整理……（29）
§3-6　直线的定向……（31）
第四章　水准仪及其使用……（37）
§4-1　水准测量原理……（37）
§4-2　水准器……（39）
§4-3　水准尺和尺垫……（42）
§4-4　望远镜……（43）
§4-5　水准仪的构造及使用……（51）
§4-6　自动安平水准仪……（54）
第五章　水准测量……（59）
§5-1　概述……（59）
§5-2　水准路线的拟订……（59）
§5-3　水准测量的施测……（62）
§5-4　水准仪的检验与校正……（68）
§5-5　水准尺的检验……（80）
§5-6　水准测量误差的主要来源……（82）
§5-7　断面测量和面水准测量……（85）
第六章　误差理论的基本知识……（92）
§6-1　观测误差……（92）

§6-2 偶然误差的特性……（93）
§6-3 评定精度的指标……（96）
§6-4 误差传播定律……（98）
§6-5 算术平均值及其中误差……（103）
§6-6 同精度观测值的中误差……（105）
§6-7 广义算术平均值及权……（108）
§6-8 单位权中误差的计算公式……（116）
§6-9 由真误差计算中误差……（121）
§6-10 等权代替法平差……（125）
§6-11 水准测量的精度……（133）
第七章 经纬仪及水平角观测……（139）
§7-1 水平角观测的概念……（139）
§7-2 光学经纬仪……（139）
§7-3 经纬仪的电子测角原理……（148）
§7-4 游标经纬仪的读数原理……（152）
§7-5 经纬仪的安置……（153）
§7-6 水平角的观测方法……（154）
§7-7 经纬仪的检验和校正……（158）
§7-8 水平角观测的误差及其减弱的措施……（168）
第八章 导线测量……（175）
§8-1 导线测量的一般知识……（175）
§8-2 导线测量的外业工作……（176）
§8-3 导线测量内业计算的基本公式……（179）
§8-4 单一导线的计算……（181）
§8-5 导线网的平差……（186）
§8-6 检查导线测量错误的方法……（187）
§8-7 导线测量的精度……（188）
第九章 交会法和小三角测量……（198）
§9-1 概述……（198）
§9-2 前方交会……（200）
§9-3 侧方交会……（204）
§9-4 后方交会……（206）
§9-5 交会点的精度……（210）
§9-6 单三角形……（221）
§9-7 其他交会方法……（225）
§9-8 测边交会……（228）
§9-9 线形锁……（234）

§9-10 线形锁的精度……(244)
§9-11 中点多边形……(248)
第十章 三角高程测量……(251)
§10-1 三角高程测量的原理……(251)
§10-2 竖盘构造及竖角测定……(254)
§10-3 单指标竖盘的偏心问题……(259)
§10-4 三角高程测量的应用……(263)
§10-5 三角高程测量的误差来源……(267)
§10-6 三角高程测量的精度……(268)
第十一章 视距测量及视差法测距……(276)
§11-1 概述……(276)
§11-2 普通视距测量的原理和公式……(277)
§11-3 视距常数的测定……(281)
§11-4 视距测量的计算工具……(283)
§11-5 普通视距测量的误差来源及精度……(285)
§11-6 其他视距仪……(289)
§11-7 视差法测距……(297)
第十二章 光电测距……(303)
§12-1 概述……(303)
§12-2 脉冲式光电测距仪……(303)
§12-3 相位式光电测距仪……(306)
第十三章 平板仪及其使用……(314)
§13-1 图解测量原理……(314)
§13-2 大平板仪……(315)
§13-3 平板仪的安置……(316)
§13-4 小平板仪……(319)
§13-5 前方交会和侧方交会……(320)
§13-6 后方交会……(321)
§13-7 平板仪导线……(327)
§13-8 大平板仪的检验和校正……(329)
第十四章 碎部测量……(332)
§14-1 测定碎部点的方法……(332)
§14-2 碎部测图的方法……(334)
§14-3 地物的测绘……(337)
§14-4 地貌在地形图上的表示……(340)
§14-5 地貌的测绘……(344)
§14-6 细部点坐标的测量……(351)

§14-7 碎部测图时应注意的事项……（354）
§14-8 地形图上等高线的应用……（355）
§14-9 地形图的修测……（358）
第十五章 地形图的分幅及编号、高斯投影的概念……（360）
§15-1 地形图的分幅及编号……（360）
§15-2 高斯投影的概念……（364）
§15-3 《高斯投影大比例尺图廓坐标表》的使用……（371）
第十六章 大比例尺地形测量……（374）
§16-1 概述……（374）
§16-2 大比例尺测图的技术计划……（374）
§16-3 地形控制（图根控制）测量……（376）
§16-4 地形测图的准备工作……（377）
§16-5 测站点的测定……（381）
§16-6 图边测图及图的拼接……（382）
§16-7 地形图的检查与地形测图的结束工作……（383）
附录一 测量计算中的有效数字……（386）
附录二 面积计算……（391）

# 第一章 绪 论

## §1-1 测绘工作的任务及其在社会主义建设中的作用

测绘科学研究的对象主要是地球的形状、大小和地表面上各种物体的几何形状及其空间位置，目的是为人们了解自然和改造自然服务。

假如要研究的只是地球自然表面上一个小区域，则由于地球半径很大，就可以把这块球面当作平面看待而不考虑其曲率。研究这类小区域地表面各类物体形状和大小的测绘科学是地形测量学的范畴。地形测量学研究的内容可以用文字和数字记录下来，也可用图表示。

凡研究的对象是地表上一个较大的区域甚至整个地球时，就必须考虑地球的曲率。这种以研究广大地区为对象的测绘科学是大地测量学的范畴。这门学科的基本任务是建立国家大地控制网，测定地球的形状、大小和研究地球重力场的理论、技术和方法。大地控制网是为研究地球有关的各种科学服务的，并且是施测地形图的重要依据。由于人造地球卫星的发射及遥感技术的发展，大地测量学又分成常规大地测量与卫星大地测量等。

摄影测量学是利用摄影象片来研究地表形状和大小的测绘科学。因获得象片的方法不同，摄影测量学又可分为地面摄影测量和航空摄影测量学。此外，还可利用人卫摄影象片编制1∶100万至1∶25万小比例尺普通地图以及各类专业地图。

城市建设、大型厂矿建筑、水利枢纽、农田水利及道路修建等在勘测设计、施工放样、竣工验收和工程监测保养等方面的测绘工作，统称工程测量学。这门学科的主要任务有三方面，即：把地面上的情况描绘到图纸上，把图纸上设计的建筑物桩定到地面上，以及为建筑物施工过程中和竣工后所产生的各种变化而进行的变形观测。

利用测量所得的资料，研究如何投影编绘成地图，以及地图制作的理论、工艺技术和应用等方面的测绘科学是制图学的范畴。

测绘工作常被人们称为建设的尖兵，这是由于不论是国民经济建设还是国防建设，其勘测、设计、施工、竣工及保养维修等阶段都需要测绘工作，而且都要求测绘工作走在这类任务的前面。测绘科学在保卫祖国的战斗中也起着很重要的作用，如地形图就是战略部署的重要资料之一。随着科学技术的日益发展，测绘科学在国民经济建设和国防建设中的作用也将日益增大。目前，在地震预测预报、海底资源勘测、近海油井钻探、地下电缆埋设、灾情监视与调查、宇宙空间技术，以及其他科学研究方面无不需要测绘工作的配合。祖国幅员辽阔，资源丰富，测绘任务十分繁重，这是测绘工作者的光荣。每个测绘工作者有责任兢兢业业，不避艰辛，努力当好国民经济建设的尖兵，为实现四个现代化多做贡献。

## §1-2 测量学的发展概况

科学技术是生产力。现代科学技术是人类世世代代同自然界斗争的经验结晶。远溯到世界上古史时代，就有夏禹在黄河两岸治理水患和埃及尼罗河泛滥后农田边界整理的传说。这些都需要一定的测量知识，或者说已用简单的工具进行了测量。

公元前七世纪前后，即春秋时期管仲在所著《管子》一书中已收集了早期的地图三十七幅。到公元前五世纪至三世纪，即战国时代，我国已有利用磁石制成最早的指南工具"司南"的记载。公元前一百三十年，西汉初期的《地形图》及《驻军图》已于1973年从长沙马王堆三号汉墓中出土，为目前所发现我国最早的地图。公元前三百五十年左右（战国时代）我国甘德和石申合编了世界第一个星表，即《甘石星表》。东汉张衡（78～139年）创造了水运浑象仪或称天球仪，把天象正确地表示出来；他又制候风地动仪，为世界上第一架地震仪；还著有《灵宪》等书，总结了当时的"浑天说"。三至四世纪魏晋时期的刘徽著《海岛算经》，论述了有关测量和计算海岛距离及高度的方法。四世纪后秦姜岌发现大气折光现象，并给予正确的解说。西晋的裴秀（224～271年）提出了绘制地图的六条原则，即《制图六体》，是世界最早的制图理论；他还绘制了《禹贡地域图》十八幅，缩编成《天下大图》为《地形方丈图》。唐代贾耽（730～805年）根据《制图六体》的理论曾编绘有《华夷图》，原图已失传，宋代有人参考原图制成的《华夷图》和《禹迹图》刻在石碑上，现尚保存于西安，是目前见到仅次于马王堆出土的古地图。九世纪李吉甫的《元和群县图志》为我国古代最完善的全国地图。在720年前后，唐代僧一行（本名张遂），因当时历法误差太大，要进行修改，在他主持下进行了大规模的天文测量。其中最著名的是724年由太史监南宫说负责的，自滑县经浚仪、扶沟到上蔡直接丈量了长达三百公里的子午线弧长，并用日圭测太阳的阴影来定纬度。这是我国第一次应用弧度测量的方法测定了地球形状和大小，也是世界上最早的一次子午线弧长的测量。到了宋代，沈括（1031～1095年）曾在1076～1087年间绘制《天下州县图》，他还在1072～1074年间创用分层筑堰法，使用水平尺、罗盘进行地形测量；并且制作了表示地形的立体模型，称为"木图"，比欧洲最早的地形模型早七百余年。元代郭守敬（1231～1316年），在他倡议下进行了大规模的天文测量，拟定了全国纬度测量计划，共实测了二十七个点。十八世纪初，即清代初年，进行了大地测量，在这个基础上开展了全国测图工作，于1708～1718年间完成了《皇舆全图》。在此以后，我国在日益腐朽的清封建王朝、北洋军阀和国民党统治下，测绘科学很少发展。1911年后虽然成立了测量局，有的省还办了测绘学校，曾测了部分地图，但成效也不大。中华人民共和国成立后，在党的领导下，测绘科学才又得到了新的发展。

世界各国测绘科学的发展主要是从十七世纪初开始逐步发展起来的。当时产资阶级革命兴起，生产力得到发展，各种科学也在相互促进下得到发展。十七世纪初望远镜应用于天象观测，这是测绘科学发展史上一次较大的变革。以后望远镜普遍应用于各种测量仪器。1617年三角测量方法开始应用。至1668年，已有放大倍率为四十倍的望远镜出现，使在可见光谱范围内进行测量工作大为方便，并且提高了测量成果的精度。1683年法国进行了弧

度测量，证明地球确是两极略扁的椭球体。此后，世界测绘科学无论在测量理论、测量方法及测绘仪器各方面都有不少创造发明。如高斯（德国，1777～1855年）于1794年提出了最小二乘法理论，以后又提出了横圆柱投影学说。这些理论经后人改进后至今仍在应用。但这个时期的测绘工作仍然是手工业生产方式。到1899年摄影测量的理论研究得到发展。1903年飞机的发明，促进了航空摄影测量学的发展，从而使测图工作部分地由野外转移到室内，利用仪器描绘成图，相应地减轻了劳动强度，特别有利于高山地区的测绘工作。

20世纪50年代前后开始，不少新的科学技术迅速发展。如电子学、信息论、相干光理论、电子计算机、空间科学技术等，它们又推动了测绘科学的发展。1947年研究利用光波进行测距，到六十年代中利用氦氖激光器作为光源的电磁波测距仪就问世了，这是量距工作的一大变革。现在，在白天或黑夜电磁波测距仪的最大测程都能达到六十公里，而且精度很高，可达 $\pm\left(5\text{mm}+\frac{1\text{mm}}{\text{km}}\times\text{距离的公里数}\right)$。短测程的测距仪，测程为1～2km，误差仅及厘米。

20世纪40年代自动安平水准仪的问世，标志着水准测量自动化的开端。1973年试制成功能保证视线水平并使观测者在同一位置进行前后视读数的水准仪，这使水准测量逐步走向观测记录自动化，行动机车化。目前经纬仪的读数方法也有了新的变革，如电子经纬仪则采用光栅、光学编码来代替刻度分划线等。1968年生产了电子经纬仪，测量的数据可自动记录在磁带上，若接通电子计算机还可立即根据观测数据算出所需成果。陀螺经纬仪与激光经纬仪亦已应用于工程测量的定向工作。1957年第一颗人造地球卫星上天，1966年开始进行人卫大地测量，这种新技术具有不受气候的影响，可全天候观测，速度快，精度高，对洲际之间、岛屿和岛屿之间及岛屿和大陆之间的联测能既快速又正确。20世纪70年代，通过人造卫星应用黑白、单光谱段、多光谱段及彩色红外等拍摄地球的照片，使航天技术有了发展和应用。由于卫星运行的高度比飞机高几十倍到几百倍，故视野宽广，覆盖面积大，可以对同一地区重复摄影，便于监视自然现象变化；并且不受地理及气候条件的限制，对深山、荒漠及海洋都能进行有效的勘测。利用象片进行测量的新方法有两种：其一是近景摄影测量，它是地面摄影测量的发展，可对一百米以内的地物进行测绘，目前主要用于动态物的摄影测量，如变形观测等。由于这种方法还可以用普通摄影机拍摄象片，因而适应性更强。其二是影象地图，就是带有象片影象又有线划的地形图，它既具有丰富的信息内容，又保持了地形图的地形符号、注记和等高线。因此影象地图所包含的信息比普通地形图多，能表达一般地形图不能表达的微小地形，更客观地反映出地面情况。它的另一个特点是成本低、成图快，能满足经济建设部门用图的迫切要求。测图绘图自动化是当前测绘工作者的努力方向。现在，部分测绘工序已可由仪器自动完成，光明的前景已显示出来。

测绘科学的研究对象在第一章绪论中已阐明，主要是研究地球的形状、大小和地表面上各种物体的几何形状及其空间位置。随着工具及数据处理方法的改进，它的研究范围及服务对象已远远超出地球表面这一目标。20世纪60年代初发射的宇宙飞船，开始了人类对

太阳系的行星及其所属卫星（诸如金星、火星、月球等）的形状、大小、表面形态的制图工作的研究。测绘科学的服务范围也从单纯的工程建设进入到山岩崩塌监测、古文物保护、交通事故分析、医疗病灶的定位诊断等等。

我国测绘科学自中华人民共和国成立后也进入了一个崭新的发展阶段。中国共产党一向关怀测绘事业，即使在战争时期也已注意测绘人才的培养，并于1956年成立国家测绘总局（1982年改称国家测绘局），科学院系统成立了测量及地球物理研究所，各业务部门也纷纷设立测绘机构，培养测绘人员的各级学校也相继成立。三十几年来测绘事业在党和政府的关怀下，测绘队伍飞速壮大，测绘科学的研究工作亦得到发展。现已建成了全国绝大部分地区的大地控制网，完成了大量不同比例尺的地形图，各种工程建设的测量工作也取得了显著成绩。仪器制造方面从无到有，已能自制航空摄影机、红外摄影机、立体测图仪、多倍投影仪，以及大型纠正仪等航测仪器。电磁波测距仪方面也已生产不同类型的激光测距仪、微波测距仪及红外测距仪。经纬仪的生产已基本配套；其中DJ6●级及DJ2级已有多种不同结构的产品。高精度的DJ07-1级的经纬仪也已试制成功。水准仪方面除DS3级和DS1级均已生产外，自动安平水准仪也已批量生产。其他测绘仪器工具绝大部分已能自给。预计不远的将来，祖国测绘工作的测图自动化、计算电子化及测量资料数字化等方面将会不断取得新成绩。

● 我国对大地测量仪器规定总代号为“D”，经纬仪的代号为“J”，水准仪的代号为“S”，平板仪的代号为“P”，连写起来就是“DJ”，“DS”，“DP”。每种仪器又按精度划分等级，即在编号后再加精度代号，依具体介绍各种仪器时分别加以说明。通常使用代号时常省略总代号“D”而仅用各种仪器代号如J6。

# 第二章　测量学的基本知识

## § 2-1　地球形状大小和测量坐标系的概念

### 一、地球的形状和大小

测量工作的主要研究对象是地球的自然表面，即岩石圈的表面，但它是不规则的。我国西藏与尼泊尔交界处的珠穆朗玛峰高达8848.13m，而在太平洋西部的马里亚纳海沟深达11022m。尽管有这样大的高低起伏，但相对于地球庞大的体积来说仍可忽略不计。地球的表面形状十分复杂，不便于用数学式来表达。通过长期的测绘工作和科学调查，了解到地球表面上的海洋面积约占百分之七十一，陆地面积约占百分之二十九，因此人们把地球总的形状看作是被海水包围的球体，也就是设想有一个静止的平均海水面，向陆地延伸而形成一个封闭的曲面。由于海水有潮汐，时高时低，所以取平均海水面作为地球形状和大小的标准；它所包围的形体称为大地体。

地球上的任一质点，因受地球引力影响而不脱离地球。同时，地球又在不停地自转，使质点受到离心力的作用。因此，一个质点实际上所受到的力是地球引力与离心力的合力；这个合力就是大家熟悉的重力（图2-1）。

静止而不流动的水面上的每一个分子，各自都受到重力的作用，在重力位相同时这些水分子便不流动而成静止状态，形成一个重力等位面，这个面被称为水准面。由物理学知，等位面处处与产生等位能的力的方向垂直，即水准面是一个处处与重力方向垂直的连续曲面。

平均海水面是海水静止时的水面，是一个特定重力位的水准面，称为大地水准面。

测量工作取得重力方向的一般方法是，用细绳悬挂一个垂球 $G$（图2-1($b$)），细绳即为悬挂点 $O$的重力方向，通常称它为垂线或铅垂线方向。

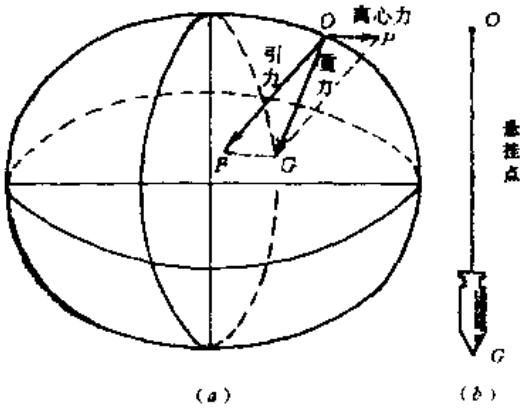



图 2-1

由于地球吸引力的大小与地球内部的质量有关，而地球内部的质量分布又不均匀，这引起地面上各点的铅垂线方向产生不规则的变化，因而大地水准面实际上是一个有微小起伏的不规则曲面。

经过常期的测量实践研究证明，大地体与一个以椭圆的短轴为旋转轴的旋转椭球的形状十分近似（图2-2）；而旋转椭球是可以用数学式严格表示的，所以测绘工作便取大小与

大地体很接近的旋转椭球作为地球的参考形状和大小；一般称其外表面为参考椭球面（图2-3）。若对参考椭球面的数学式加入地球重力异常变化参数的改正，便可得到大地水准面的较为近似的数学式。这样，从严格的意义上讲，测绘工作是取参考椭球面为测量的基准面，但在实际工作中仍取的是大地水准面作为测量的基准面。当对测量成果的要求不十分严格时，则不必改正到参考椭球面上。另一方面，实际工作中又可以十分容易地得到水准面和铅垂线，所以用大地水准面作为测量的基准面便大为简化了操作和计算工作。因而水准面和铅垂线便成为实际测绘工作的基准面和基准线。

如图2-2所示，确定大地水准面与参考椭球面的相对关系，可在适当地点选择一点$P$，设想把椭球体和大地体相切，切点$P'$位于$P$点的铅垂线方向上，这时，椭球面上$P'$的法线与该点对大地水准面的铅垂线相重合，这项确定椭球体与大地体之间相互关系并固定下来的工作，称为参考椭球体的定位。

椭球体是绕椭圆的短轴NS（图2-3）旋转而成的，也就是说包含旋转轴NS的平面与

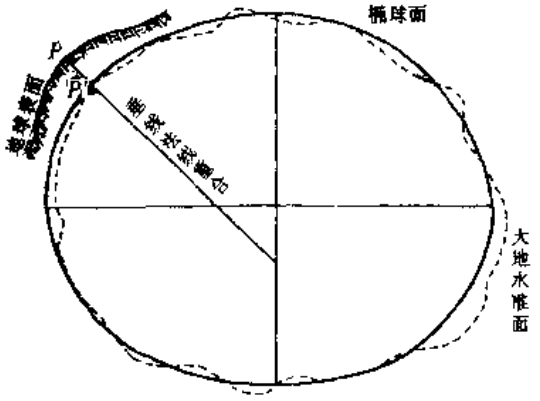



图 2-2

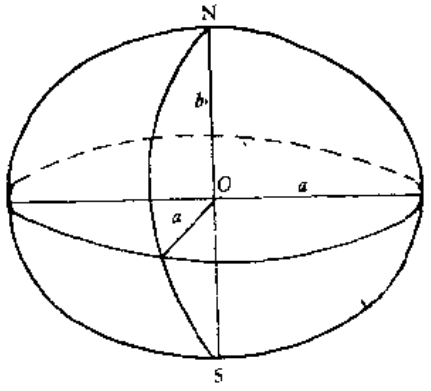



图 2-3

椭球面相截的线是一个椭圆，而垂直于旋转轴的平面与椭球面相截的线是一个圆。椭球体的基本元素是：

长半轴 $a$

短半轴 $b$

扁 率 $\alpha$ $\dfrac{a-b}{a}$ （2-1）

几个世纪以来，许多学者曾分别测算出参考椭球体的元素值；表2-1为几次测算的成果。

我国目前所采用的参考椭球体为1980年国家大地测量参考系，其原点在陕西省泾阳县永乐镇，称为国家大地原点。

由于参考椭球体的扁率很小，在普通测量中可把地球作为圆球看待，其半径为

$$R=\frac{1}{3}(a+a+b)=6371\text{km}$$

表 2-1

| | 长半轴$a$(m) | 短半轴$b$(m) | 扁 率 $a$ | 年代和国家 |
|---|---|---|---|---|
| 德兰布尔 | 6375653 | 6356564 | 1:334 | 1800法国 |
| 白塞尔 | 6377397 | 6356079 | 1:299.2 | 1841德国 |
| 克拉克 | 6378249 | 6356515 | 1:293.5 | 1880英国 |
| 海福特 | 6378388 | 6356912 | 1:297.0 | 1909美国 |
| 克拉索夫斯基 | 6378245 | 6356863 | 1:298.3 | 1940苏联 |
| 我国1980年国家大地测量坐标系 | 6378140 | 6356755.3 | 1:298.257 | 1975年国际大地测量与地球物理联合会 |

## 二、大地坐标系和高程

地面上的物体大多具有空间形状，例如丘陵、山地、河谷、洼地等。为了研究空间物体的位置，数学上采用投影的方法加以处理。一个点在空间的位置，需要三个量来确定。在测量工作中，这三个量通常用该点在基准面（参考椭球面）上的投影位置和该点沿投影方向到基准面（一般实用上是大地水准面）的距离来表示。

在图2-4中，NS为椭球的旋转轴，N表示北极，S表示南极。通过椭球旋转轴的平面称为**子午面**，而其中通过原格林尼治天文台的子午面称为**起始子午面**。子午面与椭球面的交线称为**子午圈**，也称**子午线**。通过椭球中心且与椭球旋转轴正交的平面称**赤道面**，它与椭球面相截所得曲线称为**赤道**。其他平面与椭球旋转轴正交，但不通过球心，这些平面与椭球面相截所得曲线称为**平行圈**或**纬圈**。起始子午面和赤道面，是在椭球面上确定某一点投影位置的两个基本平面。在测量工作中，点在椭球面上的位置用**大地经度** $L$ 和**大地纬度** $B$ 表示。所谓某点的大地经度，就是通过该点（如图2-4中的 $P$ 点）的子午面与起始子午面的夹角；大地纬度就是在椭球面上的$P$点作一与椭球体相切的平面，过$P$点作一垂直于此平面的直线，这条直线称为$P$点的法线，它与赤道面的交角就是$P$点的大地纬度。大地经度$L$和大地纬度$B$统称为大地坐标。由此可见，大地经度与大地纬度是以法线为依据的，就是说，以参考椭球面作为基准面。

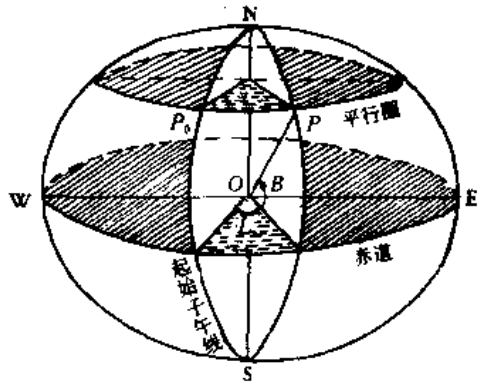


图 2-4

为求得$P$点的位置，可在该点上安置仪器，用天文测量的方法来测定。这时，仪器的竖轴必然与铅垂线相重合，即仪器的竖轴与该处的大地水准面相垂直。因此，用天文观测所得的数据是以铅垂线为准，也就是说以大地水准面为依据。由天文测量求得的某点位置，可用天文经度$\lambda$和天文纬度$\varphi$表示。由于铅垂线与法线并不重合，所以$\lambda \neq L$，$\varphi \neq B$。依据铅垂

线相对于法线的关系（称为垂线偏差），可以将$\lambda$、$\varphi$改算为$L$、$B$。

不论大地经度$L$或是天文经度$\lambda$，都要从一个起始子午面算起。在原格林尼治以东的点从起始子午面向东计，由0°到180°称为东经。同样，在原格林尼治以西的点则从起始子午面向西计，由0°到180°称为西经。实地上东经180°与西经180°是同一个子午面。我国各地的经度都是东经。不论大地纬度$B$或天文纬度$\varphi$，都从赤道面起算。在赤道以北的点的纬度由赤道面向北计，由0°到90°，称为北纬；在赤道以南的点，其纬度由赤道面向南计，也是由0°到90°，称为南纬。我国疆域全部在赤道以北，各地的纬度都是北纬。

在测量工作中，某点的投影位置一般用大地坐标$L$及$B$来表示。但实际进行观测时，如量距或测角都是以铅垂线为准，因而所测得的数据若要求精确地换算成大地坐标则必须经过改化。在普通测量工作中，由于要求的精确程度不必很高，所以可不考虑这种改化。

如上所述，仅说明了空间某点在基准面上的投影位置。除此以外，还应确定该点沿投影方向到基准面的距离。在一般测量工作中都以大地水准面作为基准面，因而某点到基准面的高度是指某点沿铅垂线方向到大地水准面的距离，通常称它为绝对高程或海拔，简称高程。在图2-5中，符号$H$代表高程，图中$H_a$及$H_b$都是绝对高程。如果是距任意一个水准面的距离，则称为相对高程，如图中$H'_a$及$H'_b$。我国的绝对高程（以后只简称高程）是以青岛港验潮站历年记录的黄海平均海水面高为准，并在青岛市内一个山洞里建立水准原点，其高程为72.260m（称1985年国家高程基准；原1956年高程基准为72.289m）。全国布置的国家高程控制点——水准点，都以这个水准原点为准。如果某项建设工程远离已知高程的国家控制点，也可临时以任意水准面为准，指定工地上某个固定点并假设其高程，该工区各工程的高程均以这个固定点为准，即所测得的各点高程都是以同一任意水准面为准的假设高程（也称相对高程），将来如有需要，只需与国家高程控制点联测，再经换算成绝对高程就可以了。

另外，由于卫星大地测量日益发展，常用球心空间直角坐标系来表示空间一点的位置。这种坐标系的原点设在椭球的中心$O$，用相互垂直的$x$，$y$，$z$三个轴表示，$x$轴通过起始子午面，故也称地心坐标系（图2-6），它与大地坐标有一定的换算关系。目前球心空间直角坐标已逐渐在军事及国民经济各部门采用作为实用坐标。

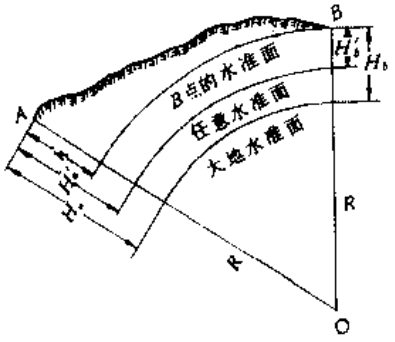



图 2-5

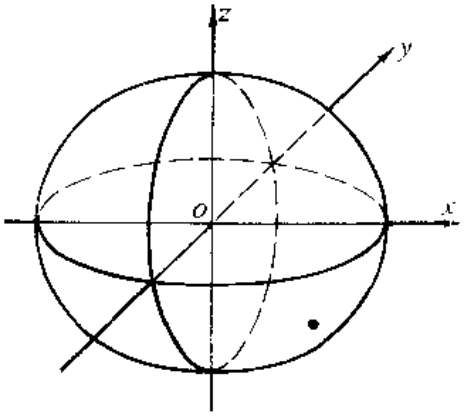



图 2-6

## 三、平面直角坐标

在小区域内进行测量工作若采用大地坐标来表示地面点位置是不方便的，通常是采用平面直角坐标。某点用大地坐标表示的位置，是该点在球面上的投影位置。研究大范围地面形状和大小时必须把投影面作为球面才符合实际，但研究小范围地面形状和大小时，常把球面的投影面当作平面看待。既然投影面是当作平面，这就可以采用平面直角坐标来表示地面点在投影面上的位置。测量工作中所用的平面直角坐标与解析几何中所介绍的基本相同，只是测量工作以$x$轴为纵轴，一般用它表示南北方向，以$y$轴为横轴，表示东西方向（如图2-7），这是由于在测量工作中以极坐标表示点位时其角度值是以北方为准按顺时针方向计算的夹角，而数学中则是从横轴按逆时针计的缘故。把$x$轴与$y$轴纵横互换后，全部三角公式都同样能在测量计算中应用。

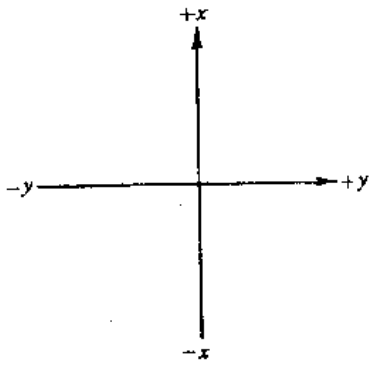


图 2-7

为实用方便，测量上用的平面直角坐标的原点有时是假设的。假设原点的位置应使测区内各点的$x$、$y$值为正。

## 四、高斯-克吕格坐标的轴系

当测区范围较小，把地球表面的一部分当作平面看待时，所测得地面点的位置或一系列点子所构成的图形，可直接用相似而缩小的方法描绘到平面上去。如果测区范围较大，就不能把地球很大一块地表面当作平面看待，必须采用适当的投影方法来解决这个问题。投影方法有多种，测量工作中通常采用的是高斯投影●。这里只讲它与大地坐标的联系。为简单起见，把地球作为一个圆球看待，设想把一个平面卷成一个横圆柱，把它套在圆球外面，使横圆柱的轴心通过圆球的中心，把圆球面上一根子午线与横圆柱相切，即这条子午线与横圆柱重合，通常称它为“中央子午线”或称“轴子午线”。因为这种投影方法把地球分成若干范围不大的带进行投影，带的宽度一般分为经差6°、3°和1.5°等几种，分称为6°带、3°带和1.5°带。6°带是这样划分的：它从0°子午线算起，以经度每差六度为一带，这带中间的一条子午线，就是这带的中央子午线或称轴子午线。以东半球来说，第一个六度投影带的中央子午线是东经3°，第二带的中央子午线是东经9°，依此类推。对于三度投影带来说，它从东经1°30′开始每隔3°为一个投影带，其第一带的中央子午线是东经3°，而第二带的中央子午线是东经6°，依此类推。图2-8表示两种投影的分带情况。中央子午线投影到横圆柱上是一条直线，把这条直线作为平面坐标的纵坐标轴即$x$轴，所以中央子午线也称轴子午线。另外，扩大赤道面与横圆柱相交，这条交线必然与中央子午线相垂直。若将横圆柱沿母线切开并展平后，在圆柱面上（即投影面上）即形成两条互成正交的直线（图2-9）。这两条正交的直线相当于平面直角坐标系的纵横轴，故这种坐标既是平面直角坐标，

● 其基本概念将在本书§15-2中介绍。

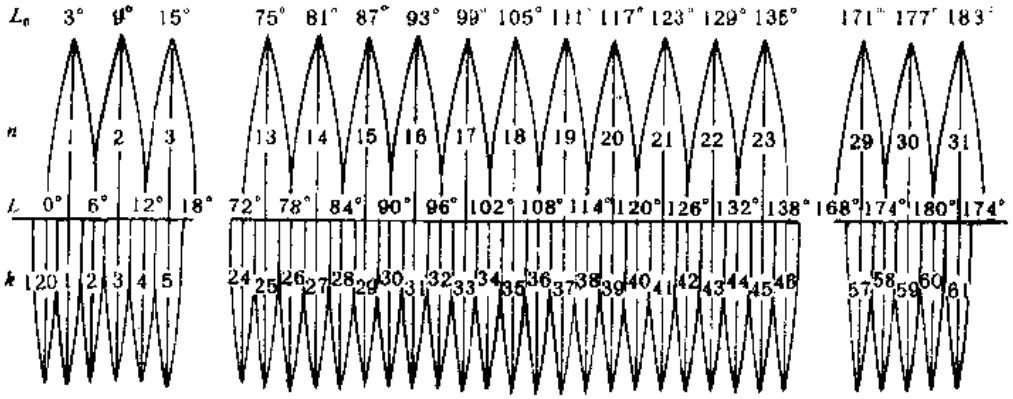



图 2-8

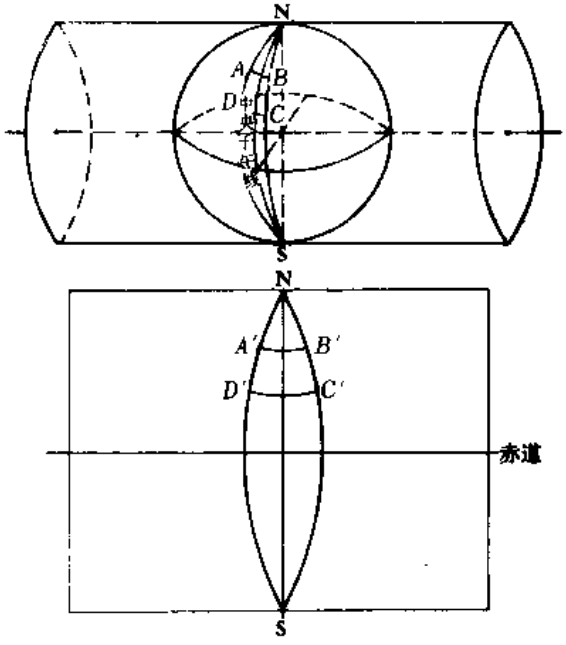



图 2-9

又与大地坐标的经纬度发生联系，对大范围的测量工作也就适用了。这种方法是由高斯创议并经克吕格改进的，因而通常称它为高斯-克吕格坐标。

## § 2-2 用水平面代替水准面的限度

上节已说明，在普通测量工作中是将大地水准面近似地当成圆球看待的。若将地面点投影到圆球面上，然后再投影描绘到平面的图纸上，这是很复杂的。在实际测量工作中，在一定的测量精度要求和测区面积不大的情况下，往往以水平面直接代替水准面，就是把较小一部分地球表面上的点投影到水平面上来决定其位置。但是，在多大面积范围能容许以平面投影代替球面投影的问题就必须加以讨论了。以下的内容是假定大地水准面作为一个圆球面来叙述的。

## 一、水准面的曲率对水平距离的影响

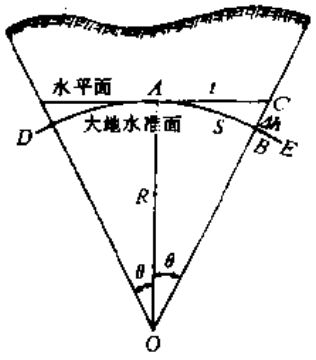



图 2-10

在图2-10中，设$DAE$为水准面，$AB$为其上的一段圆弧，设长度为$S$，其所对圆心角为$\theta$，地球半径为$R$。另自$A$点作切线$AC$，设长为$t$，如果将切于$A$点的水平面代替水准面，即以相应的切线段$AC$代替圆弧$AB$，则在距离方面将产生误差$\Delta S$，由图得

$$\Delta S = AC - \overset{\frown}{AB} = t - S,$$

其中

$$AC = t = R\operatorname{tg}\theta,$$

$$\overset{\frown}{AB} = S = R \cdot \theta$$

则

$$\Delta S = R\left(\frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \cdots\cdots\right)$$ ❶

因$\theta$角值一般很小，故可略去五次方以上各项，并以$\theta = \frac{S}{R}$代入，则得：

$$\Delta S = \frac{1}{3}\frac{S^3}{R^2}, \tag{2-2}$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{1}{3}\left(\frac{S}{R}\right)^2$$

在上式中取$R = 6371\text{km}$，则

当$S = 3.16\text{km}$时，$\dfrac{\Delta S}{S} = \dfrac{1}{12194000}$

当$S = 10\text{km}$时，$\dfrac{\Delta S}{S} = \dfrac{1}{1217700}$，

当$S = 20\text{km}$时，$\dfrac{\Delta S}{S} = \dfrac{1}{304400}$，

当$S = 50\text{km}$时，$\dfrac{\Delta S}{S} = \dfrac{1}{48710}$

由上述计算可知，当水平距离为10km时，以水平面代替水准面所产生的距离误差为距离的1/1217700，现在最精密距离丈量时的容许误差为其长度的1/100万。因此可得出结论：在半径为10km的圆面积内进行长度的测量工作时，可以不必考虑地球曲率；也就是说可以把水准面当作水平面看待，即实际沿圆弧丈量所得距离作为水平距离，其误差可忽略不计。

## 二、水准面的曲率对水平角度的影响

由球面三角学知道，同一个空间多边形在球面上投影的各内角之和，较其在平面上投影的各内角之和大一个球面角超$\varepsilon$的数值。其公式为：

❶ 根据三角函数的级数公式，$\operatorname{tg}\theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \cdots\cdots$。

$$\varepsilon'' = \rho'' \frac{P}{R^2}, \tag{2-3}$$

式中：$\rho''$为以秒计的弧度，$P$为球面多边形面积，$R$为地球半径。在测量工作中实测的是球面面积，绘制成图时则绘成平面图形的面积。

当$P = 10\text{km}^2$时，　$\varepsilon'' = 0.05''$

当$P = 100\text{km}^2$时，　$\varepsilon'' = 0.51''$

当$P = 400\text{km}^2$时，　$\varepsilon'' = 2.03''$

当$P = 2500\text{km}^2$时，　$\varepsilon'' = 12.71''$

由这些计算表明，对于面积在100km²以内的多边形，地球曲率对水平角度的影响只有在最精密的测量中才需要考虑，一般的测量工作是不必考虑的。

以上两项分析说明：在面积为100km²范围内，不论是进行水平距离或水平角度测量，都可以不顾及地球曲率影响；在精度要求较低的情况下，这个范围还可以相应扩大。

### 三、地球曲率对高差的影响

由图2-10得知

$$(R + \Delta h)^2 = \bar{R}^2 + t^2,$$

$$2R \times \Delta h + (\Delta h)^2 = t^2,$$

即

$$\Delta h = \frac{t^2}{2R + \Delta h}$$

前已证明，两点间投影的水平距离与在大地水准面上的弧长相差很小，可用$S$代替$t$，同时$\Delta h$比地球半径$R$小得可略去不计，故上式可写成

$$\Delta h = \frac{S^2}{2R} \tag{2-4}$$

当$S = 10\text{km}$时，　$\Delta h = 7.8\text{m}$；

当$S = 100\text{m}$时，　$\Delta h = 0.78\text{mm}$

从上述计算表明：地球曲率的影响对高差而言，即使在很短的距离内也必须加以考虑。

## §2-3 地形图的认识

凡是图上既表示出道路、河流、居民地等一系列固定物体的平面位置，又表示出地面各种高低起伏形态，并经过综合取舍，按比例缩小后用规定的符号和一定的表示方法描绘在图纸上的正形投影图，都可称为地形图。所谓正形投影，也叫等角投影；就是将地面点沿铅垂线投影到投影面上，并使投影前后图形的角度保持不变。前面已介绍过，由于参考椭球体的扁率很小，在普通测量中可以把地球看作圆球，故上述投影面应该是球面。当所表示的测区面积较大（例如超过100km²）时，要把地面上的地貌地物描绘到平面图纸上就必须考虑地球曲率。在具体测绘地形图时，是先把一些起控制作用的点，经过一定的数学

❶ 公式推导见球面三角学。

法则（地图投影）处理后，再把根据这些点所测得的地貌、地物，按上面所介绍的绘制地形图的原则绘制成图。若测区范围较小，投影面可视为平面，即不考虑地球曲率，直接按绘制地形图的原则绘制成图。地形图若以成图方法来分，有在实地施测而用线划描绘的线划图，即本书将介绍的一种地形图。有的地区用线划图表示不够明确，如沙漠、沼泽等，则有采用彩色象片以其色彩影象来表示的影象地图。比较多的影象地图是采用在黑白象片的影象上再加线划的某些符号，实质就是影象与线划两者结合。地形图以其内容来分，除一般的地形图外还有各种专业图，如地质图、森林分布图等。这类图也包括一般地形图所具有的内容，再加上专业所需的内容。所以现在有将专业内容描绘在同样大小的透明胶片上，配合地形图达到专业用图的要求。在工程上还常常需要详细了解某一方向地面的起伏情况，如建筑铁路公路、开挖沟渠等，这时需测绘纵横断面图。图2-11及2-12是一般线划的地形图。

## 一、地形图的内容

地形图一般四周都有图框。图框的方向，通常上面表示北方，下面表示南方，左边是西方，右边是东方。如果不是这样，就应在图上绘出指北的方向。图上还应有比例尺、坐标系、高程系及施测日期。图2-11是1:2000比例尺地形图的一部分。图中主要表示了城市街道、居民区、铁路等。凡地面各种固定性的物体，除上述各种物体外，还有江河、湖泊、森林、草地及其他各种人工建筑物等，均称之为地物。有时为了表示地面高低起伏，在若干点位上注明点的高程，还有用一些规定符号来表示，如图2-11中的铁路边坡绘了斜坡符号。图2-12是1:5000比例尺的地形图的一部分，它表示了地面的起伏；这种起伏主要是自然形成的，如高山、深谷、陡坎、悬崖峭壁及雨裂冲沟等，都称之为地貌。这两张地形图，各反映了不同的地面状况。在平坦地区，象一般城镇市区，在图上必然显示出较多的地物而反映地貌较少。这种图，为了表示地面高低坡度情况，可在适当位置分散注明若干点的高程。另一类图在测区内地面起伏较大，若散注几点高程尚不足以反映实地情况；如丘陵地带及山区，在所测地形图上应较详细地反映地面情况；图2-12上有很多曲线，称为等高线，是表示地面起伏的一种符号。关于等高线，将在第十四章中详细讲述。

## 二、图的比例尺

地面上各种地物不可能按真实的大小描绘在图纸上，通常总是将实地尺寸缩小为若干分之一来描绘的。图上某直线的长度与地面上相应线段实际的水平长度之比，称为图的比例尺。

图的比例尺一般用分子为一的分数形式表示。设图上某一直线的长度为$l$，地面上相应线段的长度为$L$，则该图的比例尺为

$$\frac{l}{L}=\frac{1}{M}$$

上式的$M$为比例尺分母。实用的比例尺有$\frac{1}{500}$，$\frac{1}{1000}$，$\frac{1}{2000}$，$\frac{1}{5000}$，$\frac{1}{10000}$，$\frac{1}{25000}$

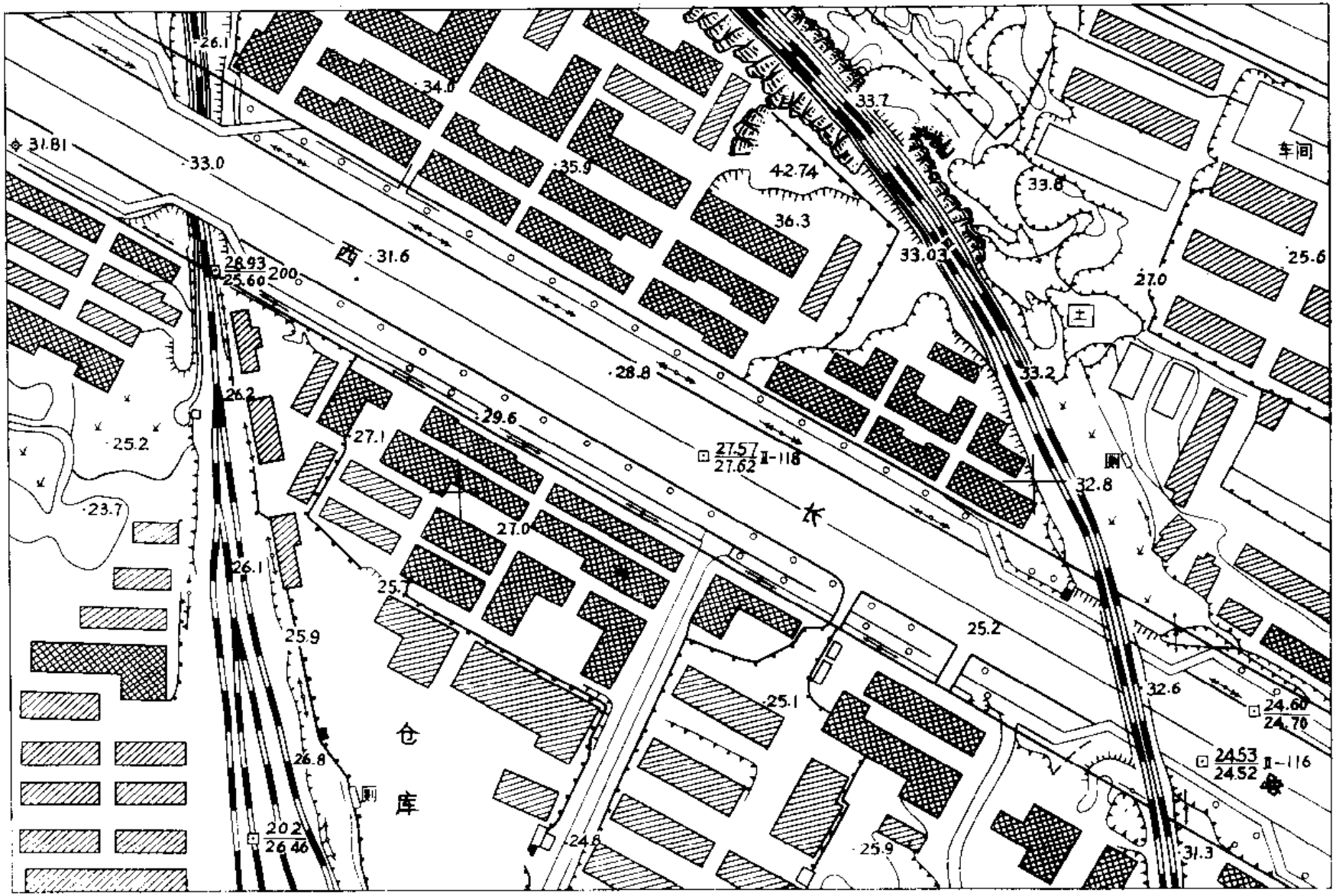

车间
仓
库
土
厕
水
26.1
34.0
33.7
31.81
33.0
35.9
42.74
39.8
36.3
33.03
25.6
27.0
31.6
28.93
25.60
200
28.8
33.2
26.2
29.6
27.1
25.2
27.57
27.62
II-118
32.8
23.7
27.0
26.1
25.7
25.9
25.2
25.1
32.6
24.60
24.70
24.53
24.52
II-116
26.8
20.2
26.46
24.8
25.9
31.3

图 2-11

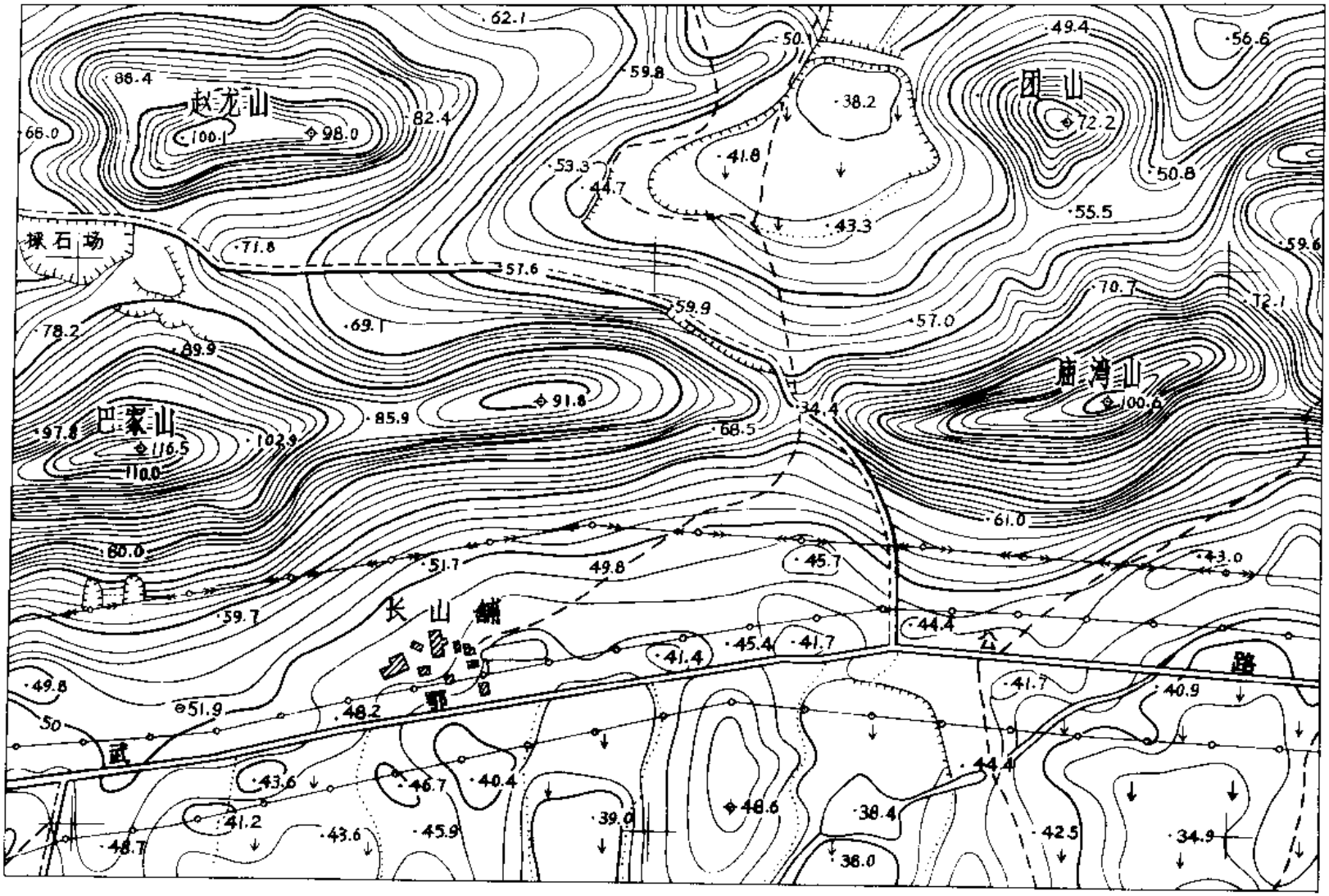

赵龙山
团山
采石场
巴家山
庙湾山
长山铺
公路
武
郭
62.1
50.1
49.4
56.6
86.4
59.8
66.0
100.1
98.0
82.4
38.2
72.2
41.8
53.3
44.7
50.8
43.3
55.5
59.6
71.8
57.6
59.9
70.7
72.1
78.2
69.1
57.0
89.9
91.8
34.4
97.8
116.5
103.9
85.9
68.5
100.6
110.0
61.0
80.0
51.7
49.8
45.7
43.0
59.7
44.4
41.4
45.4
41.7
49.8
51.9
48.2
41.7
40.9
50
43.6
46.7
40.4
44.4
41.2
43.6
45.9
39.0
48.6
38.4
42.5
34.9
48.7
36.0

图 2-12

等等。比例尺的大小视分数值的大小而定；分数值愈大，则比例尺亦愈大，分数值愈小，则比例尺亦愈小。以分数形式表示的比例尺叫**数字比例尺**。数字比例尺也可写成1∶500，1∶1000，1∶2000，1∶5000，1∶10000及1∶25000等形式。

知道了比例尺，就可以根据图上的长度求地面上相应的水平长度；也可以由地面上的水平长度化成图上相应长度。例如在比例尺为1/10000的图上，两点间距离$l$为2.38cm，则地面上的相应水平距离$L$为

$$L = Ml = 10000 \times 2.38\text{cm} = 238\text{m}$$

又如实地水平长度$L$为118m，若化算到1/2000比例尺的图上，则$l = \frac{L}{M} = \frac{118}{2000} = 5.9\text{cm}$。

如果应用数字比例尺来绘制地形图，每一段距离都要按上述式子化算是非常不方便的。此时可采用图示比例尺。直线比例尺（图2-13）即是其中的一种。为了用图方便，一般地形图上都绘有直线比例尺。因图纸在干湿情况不同时是有伸缩的，图纸使用日久也要变形，若在绘图时就绘上直线比例尺，用图时以图上所绘的比例尺为准，则由于图纸伸缩而产生的误差就可基本消除。

直线比例尺是在一段直线上截取若干相等的线段，称为比例尺的基本单位，一般为1cm或2cm，将最左边的一段基本单位又分成十个或二十个等分小段。图2-13所示为1∶2000

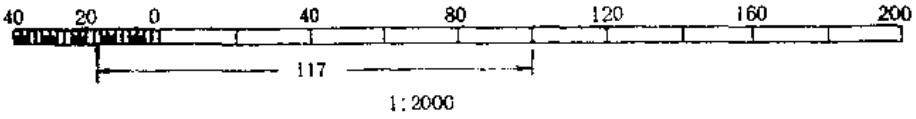



图 2-13

的直线比例尺，其基本单位为2cm，相当于实地40m。最左的基本单位分成二十等分，即每小分划为1mm，它相当于实地长度为1mm × 2000 = 2m。为使用方便，在直线比例尺上标的一般是实地长度值。图2-13中表示的一段距离为117m。应用时，用两脚规的两脚尖对准图上需要量距的两点，然后把两脚规移至直线比例尺上，使一脚尖对准0点右边一个适当的大分划线，而使另一脚尖落在0点左边的小分划上，估读小分划的零头数就能直接读出长度，无需再计算了。由于小分划的零头数是估读的，不一定准确，因此，可用称为**复式比例尺**的另一种图示比例尺，也称**斜线比例尺**，以减少估读的误差。

图2-14为1/1000的复式比例尺。其制作方法是在直线$AE$上以2cm为基本单位截取若干段，每段的末端作适当而等长的垂线$AC$、$BD$……$EF$，并在直线$AE$和$CF$之间用平行的横线分成10等分；另外再将最左边的基本单位$AB$及$CD$上也分10等分，然后上下错开1/10

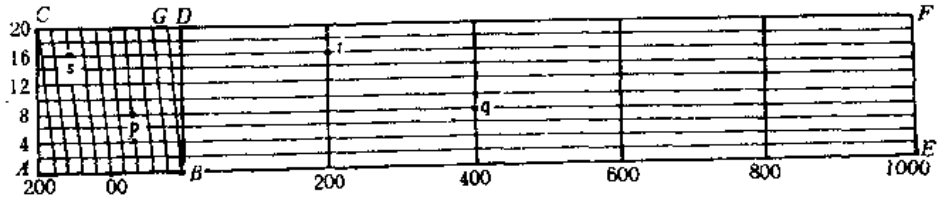



图 2-14

基本单位用斜线联起来，即成复式比例尺。最左边基本单位的一小格（如$GD$）为基本单位$CD$的$1/10$。根据相似三角形原理可证明，在纵线$BD$和斜线$BG$之间各横线段自下而上分别为$GD$的$\frac{1}{10}$，$\frac{2}{10}$，$\frac{3}{10}$，$\frac{4}{10}$，$\frac{5}{10}$，$\frac{6}{10}$，$\frac{7}{10}$，$\frac{8}{10}$，$\frac{9}{10}$；也就是任意两相邻横线之间的差数均为$GD/10$，即$CD/100$。所以根据复式比例尺能直接量取到基本单位的$1/100$。如图中$pq=468m$和$st=356m$都是直接量取的。

上述复式比例尺称为标准百分复式比例尺。基本单位与其垂线可以根据需要任意划分。设将基本单位分成$u$等分，垂线分成$v$等分，则复式比例尺最小读数为基本单位的$1/uv$。另外基本单位的长度也不一定为2cm或1cm，可以根据比例尺而取最适当的长度。

测图用的比例尺愈大，就愈能表示出测区地面的详细情况，但测图所需的工作量也愈大。因此，测图比例尺关系到实际需要、成图时间及测量费用。一般以工作需要为决定的主要因素，即根据在图上需要表示出的最小地物有多大，点的平面位置或两点间的距离要精确到什么程度为准。这里首先需要说明一个问题，人的眼睛由于视觉的限制，正常眼睛能分辨的最短距离一般取0.1mm，因此实地丈量地物边长，或丈量地物与地物间的距离，只要精确到按比例尺缩小后，相当于图上0.1mm即可。在测量工作中称相当于图上0.1mm的实地水平距离为比例尺的精度。表2-2为几种比例尺的比例尺精度。

表 2-2

| 比 例 尺 | 1:500 | 1:1000 | 1:2000 | 1:5000 | 1:10000 |
|---|---|---|---|---|---|
| 比例尺精度 | 0.05m | 0.1m | 0.2m | 0.5m | 1.0m |

根据比例尺精度，有两件事可参考决定：

1.按工作需要，多大的地物须在图上表示出来或测量地物要求精确到什么程度，由此可参考决定测图的比例尺。

2.当测图比例尺已决定之后，可以推算出测量地物时应精确到什么程度。

## §2-4 测图原理与测量工作概述

### 一、测图原理

前面谈到反映地面情况的地图，是把地面上高低不等的点投影到参考椭球面上的。在测区范围较小的地形图上，把投影面作为平面。如图2-15所示，上图中$A$、$B$、$C$、$D$和$E$是地面上高低不等的一系列点，构成一个空间多边形。下图$P$是个平面，从$A$、$B$、$C$、$D$、$E$各点向这个平面作铅垂线，这些铅垂线的垂足在$P$平面上构成多边形$A'B'C'D'E'$，平面上各点就是空间各点的正射投影。从图中可以看到多边形$ABCDE$与$A'B'C'D'E'$并不完全相似，平面上多边形的各边一般都短于空间的相应边，至多相等。投影平面上的角是包含两倾斜边的两面角在水平面上的投影。所以，图上各点是实地上相应点在水平面上正射投影的位置再用测图的比例尺缩绘在纸上的。由此得出测量工作中测定点与点之间关

系的三条规则：

1. 测定地面上两点间的距离，是指水平距离。

2. 测定两条边之间的夹角，是指通过角顶的两条边所作两个竖直平面在水平面上的投影所构成的角，测量上称为水平角。

3. 地面上各点的高差，是指各点沿铅垂线方向至大地水准面的距离之差，即高程之差。

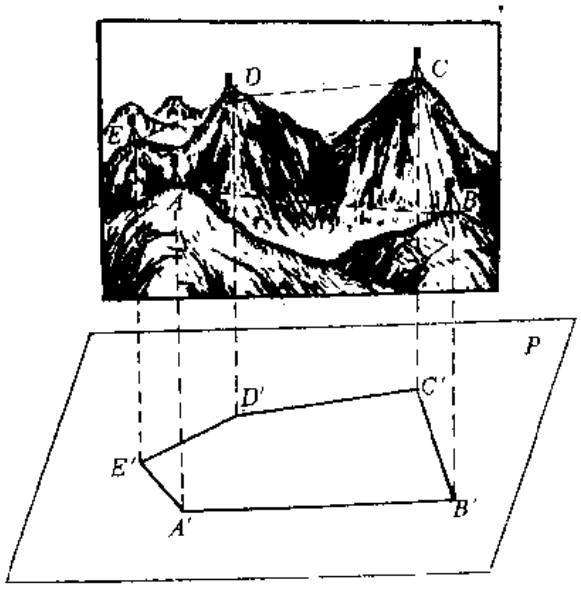



图 2-15

## 二、测量工作概述

### （一）测量控制的概念

在地面上从事测图工作时，需要测定很多碎部点（地物点和地貌点）的平面位置和高程。由于任何一种测量工作都会产生不可避免的误差，所以每次测量时都必须采取一定的程序和方法，以防止误差的积累。假如从一个碎部点开始，逐点进行施测，最后虽可得到欲测各点的位置，但是这些点的位置可能是很不准确的。因为前一点的量度误差，将会传递到下一点，这样积累起来，最后可能达到不可容许的程度，因此，必须采取另外一种工作程序和方法。

在实际测量工作中是遵循“从整体到局部”，“先控制后碎部”的程序，也就是在测区内先选择一些有控制意义的点子，首先把它们的平面位置和高程精确地测定出来，然后再根据它们测定其他地面点。这些有控制意义的点子组成了测区的测量骨干，所以称这类点子为控制点。例如图2-16所示的测区中，先选择$A$、$B$、$C$、$D$、$E$、$F$、$G$和$M$诸点作为控制点，然后再根据它们施测附近的碎部点。

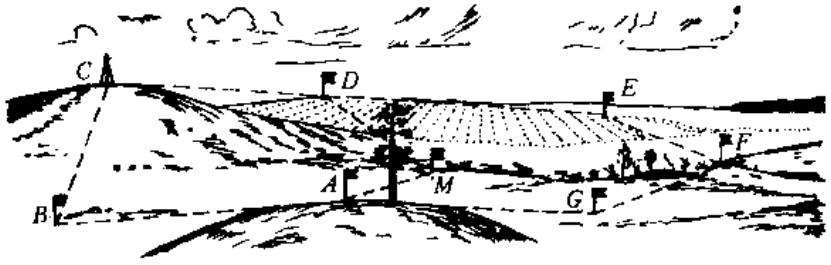



图 2-16

整个测量工作分为建立控制网和以控制网为基础的碎部测量两部分。碎部测量的精度虽比控制测量的精度为低，但由于每个碎部点的位置都是从控制点测定的，所以误差就不会从一个碎部点传递到另一个碎部点，在一定的观测条件下，使各个碎部点能保证它应有的精度。

对于全国性的测量工作，由于幅员广阔，必须采取分等布置控制的办法，才能达到既符合精度要求而又合乎经济原则。国家基本控制按照精度的不同，一般分为一、二、三、四等，由高级向低级逐步建立。这些国家基本控制点统称为**大地点**，是测图的必要依据。

国家基本平面控制可用下述两种方法建立：

1.三角测量　选择若干控制点而形成互相连接的三角形，测定其中一边的水平距离和每个三角形的三个顶角，然后根据起始数据可算出各控制点的坐标。三角形的各顶点称为**三角点**。各三角形联成锁状的称为**三角锁**（图2-17），联成网状的则称为**三角网**。

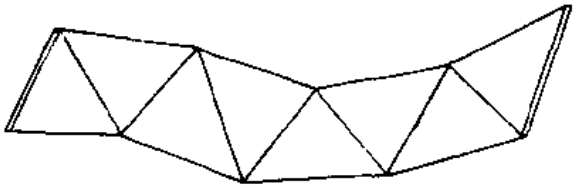


图 2-17

2.导线测量　导线测量系测定边长和转折角来逐步建立控制点，这些控制点称为**导线点**。相互连接的导线点则构成导线。导线有布置成单一的（图2-18）、网状的（图2-19），以及其他形式。

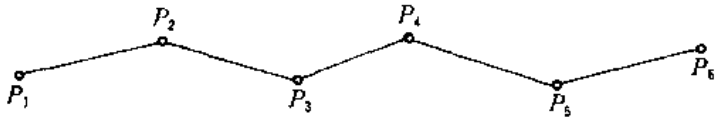



图 2-18

国家基本高程控制是用水准测量方法建立的；按照要求的精度不同，分为一、二、三、四等水准测量。

当上述国家基本平面控制点和高程控制点的密度不能满足测图要求时，可根据需要用不同的方法在高级控制点间逐步地进行控制点的加密，直至满足测图工作的要求为止。这种为测图而加密的控制点称为**地形控制点**（亦称**图根控制点**）。

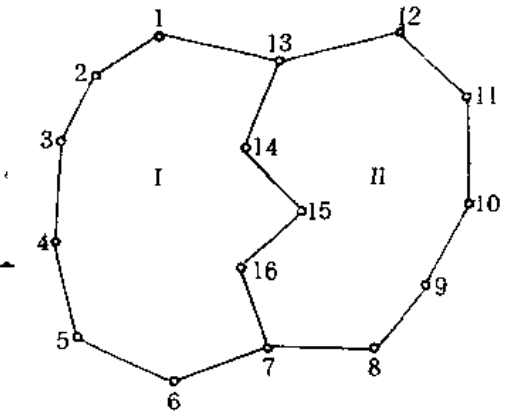



图 2-19

（二）碎部测量简介

碎部测量就是遵循“从整体到局部”、“先控制后碎部”的程序，根据邻近控制点来确定碎部点（地貌点和地物点）对于控制点的关系。如果测量的目的只为获得地面物体水平投影的位置，则称这种测量为**地物测量**。如果测量的目的既要获得地面物体的水平投影位置又要获得其高程，则这种测量就是**地形测量**。碎部测量最后成果是用图表示的；要完成这个目的有两种不同的测量程序：其一在野外用仪器将碎部点与控制点的关系（包括距离、方向和高差）测定，

并将这些数据记录下来，再在室内进行绘图，这就是一般称为的**测记法**。这种方法工作时受气候影响小，但在室内绘图无法与实地对照进行，有错误不易发觉，又不能及时改正。另一种是在野外根据图解的原理当时就把碎部点的位置确定下来，所以绘图工作是在野外进行的，这种方法一般称为**测绘法**，也是最常用的方法。用图表示地面上地物的形状大小，有的可以按比例缩小描绘在图纸上，有时由于实物较小，按比例缩小后无法在图纸上绘出，这时可不按比例而用规定的符号表示其位置。地貌一般是用表示高程的等值线即等高线（就是在同一条等高线上的点的高程相同）表示的。等高线既能表示出地形的高低起伏情况，也能表示其水平投影的位置。有的地貌用等高线表示有困难，也可用规定的符号来表示。关于施测的具体步骤和所用的仪器将在以后介绍。

上面所叙述的测量工作中，有些是在野外进行的，称为外业；有些是在室内进行的，称为内业。外业工作中主要是获得必要的数据，如点与点之间的距离，边与边之间夹角的水平投影（水平角）等；内业工作主要是计算与绘图。无论那种工作都必须小心谨慎地进行。一切测量工作都必须随时检查，杜绝错误。没有对前阶段工作的检查，就不能进行下一阶段的工作，这是测量工作中所必须坚持的原则之一。为了不使误差积累，必须遵循“先整体后局部”，即“先控制后碎部”的原则；为了保证成果的质量，必须坚持随时检查的原则，这样才能保证测量成果的质量和较高的工作效率。

# 第三章　直线丈量与定向

## §3-1　地面点的标定与直线定线

### 一、地面点的标定

测量工作主要是决定点的位置。重要的点须在地面上标定下来，例如要测定作为控制用的导线，则首先应把导线点在地面上标定下来。临时性的标志用木桩标定。木桩一般长20～30cm，粗3～6cm，视测区土质而定。凡松软的土质，木桩宜稍粗稍长。木桩打入土内后，应在桩顶钉一小钉作为该点位置的标志。若有重要的点子需长期保存，则应用石桩或混凝土桩标定，并在桩顶刻十字作标志，其尺寸在有关规范中都有说明。

为易于找到和保护这些点子，可在点的周围挖一方形或圆形边沟。此外，还要测定与附近地物的联系，并画一草图表示它们之间的关系（称点之记），如图3-1所示。

在进行测量时，为使远方能看到这些地面点，一般用标杆来标示。标杆也称花杆，如图3-2(*a*)所示，通常长2～3m，直径3～4cm，杆上每20cm，用红白漆相间涂漆，以易于

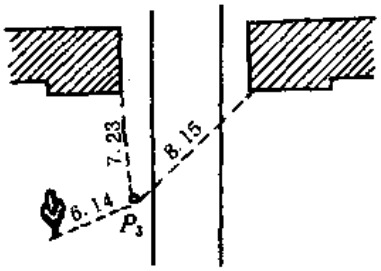



图 3-1

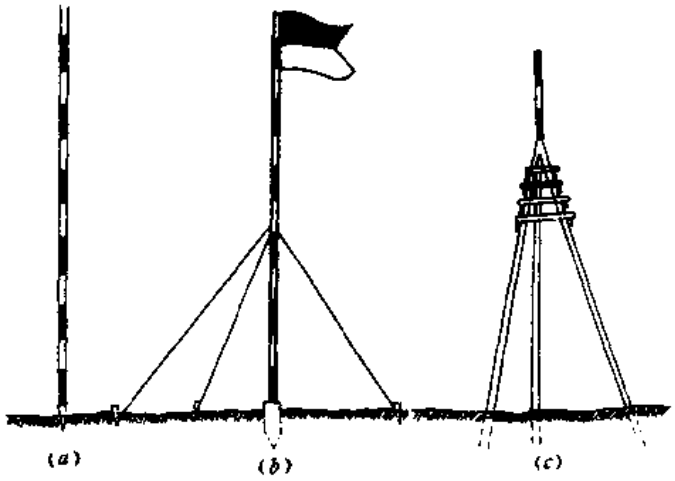



图 3-2

在明亮的背景和在阴暗的背景均易于看清。杆的下端装有尖铁脚，以便插入土内。为便于在稍远距离上寻找标杆，在标杆上部用一红白两色的旗作标记。通常为稳定标杆，可用人扶或用标杆架固定，也可用绳索铅丝固定，如图3-2(*b*)所示。对于需长期保存的观测标志，需用木质或金属觇标标示。图3-2(*c*) 为木质三角锥标。

### 二、直线的定线

一般丈量的边长都比整根尺子长，要用尺子连续量几次才能量完，因此需在直线方向

上作一些标记表明直线走向，这种工作称为**直线定线**。定线工作一般用目估或用仪器进行。用目估定线通常有下列几种情况：

1. 在两端点间定线。设两点为$A$和$B$，且能互相通视，分别在$A$、$B$点上竖立标杆，由一测量员站在$A$点标杆后1～2m处，观测另一测量员持标杆在大致$AB$方向附近移动，当与$AB$两点的标杆重合时，即在同一直线上。一般定线时，点与点之间距离宜稍短于一整尺子长，地面起伏较大时则宜更短。在平坦地区，这项工作常与丈量同时进行，即边丈量边定线。

2. 在两点延长线上定线，其方法与上述同，但应尽量避免两点间距离过短而延线却很长，这样定线不易精确。

3. 两端点不易到达或两端点间为山丘所阻而不通视的定线。如图3-3所示，两端都被宽

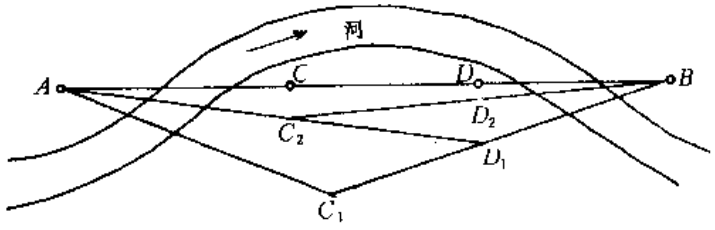



图 3-3

阔河道所阻，不易到达。开始由一测量员目估选择一点$C_1$，认为接近$AB$直线，且与$A$、$B$两点都通视，插上标杆。由$C_1B$方向确定$D_1$点，再由$D_1A$方向确定$C_2$点。如此继续由$C_2B$方向确定$D_2$，……。直至$A$、$C$、$D$、$B$在一条直线上为止。

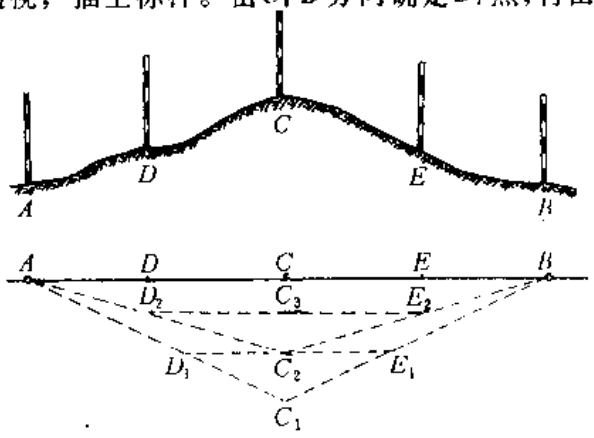



图 3-4

若$A$、$B$间为山岗所阻，互不通视，则可如图3-4所示，由$C_1B$确定$E_1$，$C_1A$确定$D_1$，再由$D_1E_1$确定$C_2$，……逐渐趋近。一般情况下，$C_1$、$C_2$……的位置应逐步增高，且能与$A$、$B$两点保持通视，而$D$、$E$间仅能望及标杆上部，因此在定$C_2$…等点时更应注意各标杆竖直。

## §3-2 直线丈量

### 一、丈量工具

丈量直线的工具通常有钢尺和皮尺。钢尺量距较为精确，皮尺则较为粗略。本节仅介绍用钢尺直接量距。

钢尺也称钢卷尺，如图3 5所示。图（$a$）为绕在尺架上的钢带尺，宽1～1.5cm，长度有30m或50m等几种。图($b$)为有皮盒的钢尺，一般较前者稍薄，长度有20m、30m、50m等几种。钢尺的分划也有几种，有的以厘米为基本分划，适用于一般量距；有的也以厘米为基本分划，但尺端第一分米内有毫米分划；更有的以毫米为基本分划；后两种适用于较精密的丈量。钢尺的各分米和米的分划线上都有数字注记，其零点位置，分端点尺（图3-6）和刻线尺（图3-7）两种；刻线尺可得较高的丈量精度。较精密的钢尺，制造时有规定的温度及拉力，如在尺端刻“30m，20℃，10kg”字样。这是标明检定该钢尺的长度时温度为20摄氏度，检定时拉力为10kg，在这个条件下其长度应为30m。

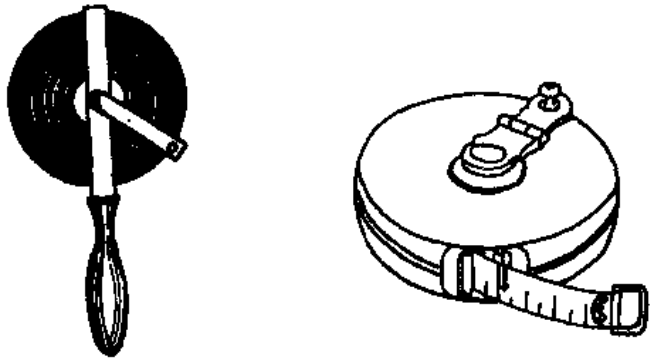



图 3-5

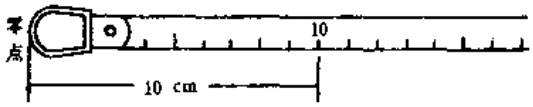



图 3-6




图 3 7

丈量的其他工具有测钎、垂球、标杆等。较精密的丈量还需弹簧秤和温度计。温度计通常用水银温度计，使用时应在钢尺邻近测定温度。为精确测定钢尺温度，可用半导体点温计。为了精确地标志丈量过程中尺段位置，常采用带尖脚的三角形铁片，在其上划标定尺段端点。

## 二、丈量的方法

### （一）直线的一般丈量

这里讲的是丈量精度只要求到厘米的一般丈量方法。如果地面平坦，就沿地面直接丈

量水平距离，可先在地面定出直线方向，也可边定线边丈量。丈量时后司尺员持钢尺零点一端，前司尺员持钢尺末端，通常用测钎标示尺段端点位置。丈量时注意沿着定线方向，钢尺须拉紧直伸而无卷曲，尽量用整尺段丈量，一般仅末一段用零尺段丈量。注意记清整尺段数。为了防止丈量过程中发生错误，同时也为了提高丈量精度，通常采用往返丈量作比较；若合乎要求，取其平均数作为丈量最后结果。一般用相对误差形式来表示成果的精度，例如一条直线往测长327.47m，返测长327.35m，则其相对误差为

$$\frac{327.47-327.35}{327}\approx\frac{1}{2700}$$

一般丈量要求不大于1/2000，所以这次丈量结果是合格的，其最后成果是1/2(327.47+327.35)=327.41(m)。

如果地面有倾斜，丈量时可将钢尺的一端抬高或两端同时抬高，使尺子水平。尺子的水平情况可由第三人离尺子侧边适当距离用目估判定。一般使尺子一端靠地，易于对准端点位置，尺子另一端用垂球线紧靠尺的某分划，此时尺子应拉紧成水平。放开垂球线，使它自由下坠，其尖端在地面上击出一个印子，即为某分划的水平投影位置。若坡度平缓，可整尺段丈量或分段丈量。如图3-8所示为一整尺段分两次量得。若坡度较大，整个线段需分成若干零尺段量得，如图3-9所示。进行这种丈量时，沿向下坡量距较易准确，因上坡时，后司尺员既要使垂球尖对准已定的地面点，又须使尺子水平，这样不易做到准确。且尺段一端抬高不宜过大，一般应低于司尺员肩部，否则很难将钢尺伸直。

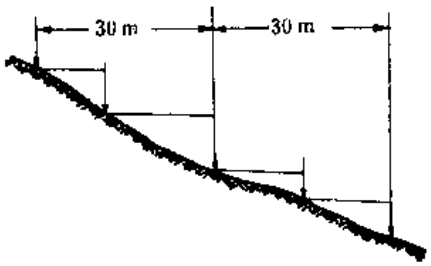



图 3-8

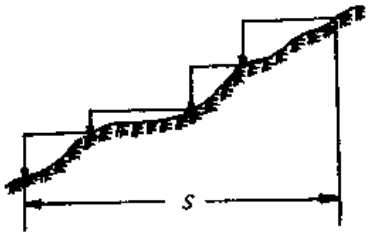



图 3-9

（二）直线较精确的丈量

这是指精度要求较高，读数至毫米的量距。此时要求钢尺有毫米分划，至少尺的零点端有毫米分划。钢尺须经检定，得出以检定时拉力、温度为条件的应有尺长方程式。丈量时就以检定时的拉力为准，用弹簧秤衡量。丈量的方法有“读数法”和“划线法”两种。读数法丈量时钢尺两端都对准尺段端点进行读数，若钢尺仅零点端有毫米分划，则须以尺末端某分米分划对准尺段一端以便零点端读出毫米数。每尺段丈量三次，以尺子的不同位置对准端点，其移动量一般在一分米以内。三次读数所得尺段长度之差，视不同要求而定，一般不超过2～5mm；若超限，须进行第四次丈量。表3-1为钢尺量距手簿的一种形式。

钢尺量距手簿　　表 3-1

| 线段 | 尺段号 | | 读数（m） | | | | 中数（m） | 高差（m） | 温度（℃） | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 第一次 | 第二次 | 第三次 | 第四次 | | | | |
| A | A | 前 | 29.435 | 29.451 | 29.402 | | | | | 30/7841号 |
| | | 后 | 0.048 | 0.060 | 0.010 | | | | | 钢尺的尺长方程式为： |
| | | | | | | | | | | $30+0.005+1.2\times10^{-5}$ |
| | 1 | 前—后 | 29.387 | 29.391 | 29.392 | | 29.390 | +0.86 | 10 | $\times30(t-20℃)$ |
| | 1 | 前 | 23.403 | 23.912 | 23.846 | | | | | |
| | | 后 | 0.014 | 0.520 | 0.456 | | | | | |
| | 2 | 前—后 | 23.389 | 23.392 | 23.390 | | 23.390 | -1.28 | 11 | |
| | 2 | 前 | 28.054 | 27.933 | 28.214 | | | | | |
| | | 后 | 0.372 | 0.263 | 0.530 | | | | | |
| | 3 | 前—后 | 27.682 | 27.680 | 27.684 | | 27.682 | -0.14 | 11 | |
| | 3 | 前 | 28.777 | 28.597 | 28.874 | | | | | |
| | | 后 | 0.239 | 0.057 | 0.338 | | | | | |
| | 4 | 前—后 | 28.538 | 28.540 | 28.536 | | 28.538 | -1.03 | 12 | |
| | 4 | 前 | 17.912 | 18.094 | 18.342 | | | | | |
| | | 后 | 0.014 | 0.194 | 0.443 | | | | | |
| B | B | 前—后 | 17.898 | 17.900 | 17.899 | | 17.899 | -0.94 | 13 | 以上为往测 |
| B | B | 前 | 25.345 | 26.035 | 25.828 | | | | | |
| | | 后 | 0.045 | 0.733 | 0.530 | | | | | |
| | 1 | 前—后 | 25.300 | 25.302 | 25.298 | | 25.300 | +0.86 | 13 | |
| | 1 | 前 | 23.929 | 24.085 | 24.120 | | | | | |
| | | 后 | 0.009 | 0.163 | 0.196 | | | | | |
| | 2 | 前—后 | 23.920 | 23.922 | 23.924 | | 23.922 | +1.14 | 13 | |
| | 2 | 前 | 25.166 | 25.308 | 25.835 | | | | | |
| | | 后 | 0.098 | 0.238 | 0.763 | | | | | |
| | 3 | 前—后 | 25.068 | 25.070 | 25.072 | | 25.070 | +0.13 | 11 | |
| | 3 | 前 | 28.601 | 28.589 | 28.789 | | | | | |
| | | 后 | 0.018 | 0.009 | 0.208 | | | | | |
| | 4 | 前—后 | 28.583 | 28.580 | 28.581 | | 28.581 | -1.10 | 10 | |
| | 4 | 前 | 24.315 | 24.085 | 24.113 | | | | | |
| | | 后 | 0.265 | 0.033 | 0.065 | | | | | |
| A | A | 前—后 | 24.050 | 24.052 | 24.048 | | 24.050 | -1.18 | 10 | 以上为返测 |

刻线法量整尺段无需读数，用铅笔在桩顶划线或插入细针来表示尺段端点；也可用有三个尖脚的小铁片，丈量时将小铁片踏入丈量方向的地面上，铁片表面用粉笔涂色，当拉力稳定且后尺端正好对准零点时，前司尺员可用小刀或尖铅笔在此小铁片上划线；其零尺段还是要用读数的方法量出余长。

## § 3-3 钢尺的检定

### 一、尺长方程式

较精确的钢尺出厂时必须经过检定。其长度用尺长方程式表示，它的一般形式为

$$l_t = l + \Delta l + \alpha \cdot l(t - t_0) \qquad (3\text{-}1)$$

式中：$l_t$——钢尺在温度$t$时的实际长度；

$l$——钢尺上所刻注的长度，即名义长度；

$\Delta l$——尺长改正数，即钢尺在温度$t_0$时的改正数；

$\alpha$——钢尺的膨胀系数，一般钢尺当温度变化1℃时其值约为$11.6\times10^{-6}\sim12.5\times10^{-6}$；

$t_0$——钢尺检定时的温度；

$t$——钢尺使用时的温度。

此式未顾及拉力变化，因此丈量时的拉力应与检定时的拉力相同，通常为10kg。

每根钢尺都应有尺长方程式才能得出实际长度，但尺长方程式中的$\Delta l$会因自然因素的影响而起变化，故尺子使用一个时期后必须重新检定，得出新的尺长方程式。

### 二、钢尺检定的方法

（一）比长检定法

用一根已有尺长方程式的钢尺作为标准尺，使与被检定尺相比较。两根钢尺的膨胀系数被认为是相同的。检定时，标准钢尺和被检定钢尺并排放在平坦的地面上，都加上规定的拉力，把两根钢尺的末端比齐，在零分划附近读出两尺的差数，这样就能根据标准钢尺的尺长方程式计算出被检定钢尺的尺长方程式。检定时最好在阴天或阴处进行，使大气温度与钢尺温度基本一致。

例 3：设作为标准尺的Ⅰ号钢尺尺长方程式为

$$l_{t\text{Ⅰ}} = 30\text{m} + 0.004\text{m} + 12.5\times10^{-6}\times30(t - 20℃)\text{m}$$

被检定的是Ⅱ号钢尺，其名义长度也是30m。当两尺末端比齐时，Ⅱ号钢尺的零分划对准Ⅰ号钢尺的0.007m处，比较时的温度为24℃，当然这时Ⅰ号钢尺上7mm的长度因受温度升高的影响会比名义长度稍长一些，但为数甚微，其伸长部分可忽略不计。

根据比较的结果，可以得出

$$l_{t\text{Ⅰ}} = l_{t\text{Ⅱ}} + 0.007$$

故

$$l_{t\text{Ⅱ}} = 30\text{m} + 0.004 + 12.5\times10^{-6}\times30(t - 20℃) + 0.007$$

即

$$l_{t\text{Ⅰ}} = 30\text{m} + 0.003 + 12.5\times10^{-6}\times30(t - 20℃)$$

（二）利用两固定点间已知长度检定法

在地面上埋设两个固定点作为基准线，用已有尺长方程式的标准钢尺进行若干次丈量，以其平均值作为这条基准线的真实长度。一般说这个长度只要两固定点位置不变，可保留较长时间。地面点之间的距离虽不受温度影响，但埋设时间较久后，少量的位移还是有可能的，也就是说两点间的实际长度可能起变化。所以两点间的距离宜适当长些，这样，点位少量位移所造成的丈量相对误差影响就会小些。基准线长度一般为钢尺长度的若干倍，例如取基准线长约300m是合适的。

例 3-2　为求一根名义长度为30m的钢尺的尺长方程式，用此尺子在基准线上丈量的结果为300.124m，丈量时的温度是12℃，这条基准线的实际长度为300.047m。

设被检定钢尺在丈量时的长度为（30－$\Delta l$）m，这是$t$＝12℃时的长度，而每米的长度为$\frac{30-\Delta l}{30}$，或为$1+\frac{\Delta l}{30}$m。量得的长度与实际长度相比较，为

$$300.047\text{m}=300.124\text{m}\left(1+\frac{\Delta l}{30}\right)$$

$$\Delta l=0.00770\text{m}$$

故

$$l_t=30\text{m}-0.008\text{m}$$

已知钢尺膨胀系数为$\alpha=12.5\times10^{-6}$，因此尺长方程式为

$$l_t=30\text{m}-0.008\text{m}-12.5\times10^{-6}\times30\text{m}(t-12℃)$$

若要将检定时的温度改为20℃，首先计算出该钢尺20℃时的长度

$$l_t=30\text{m}-0.008\text{m}-12.5\times10^{-6}\times30\text{m}(20-12)$$

$$=30\text{m}-0.008\text{m}+0.003\text{m}=30\text{m}-0.005\text{m}$$

故新的尺长方程式（检定时温度为20℃）为

$$l_t=30\text{m}-0.005\text{m}+12.5\times10^{-6}\times30(t-20℃)$$

这里有一点须指出，不论是建立基准线或用被检定钢尺丈量这段长度，30米钢尺使用的拉力都应是规定的拉力，即一般为10kg。

## §3-4　直线丈量的误差来源

平坦地区的一般丈量若考虑了温差改正和尺长改正，并用弹簧秤衡量拉力，在外界条件良好的情况下，丈量精度可达1/5000以上。若地面有起伏，必然分段较多，丈量精度也能达到1/3000。当地面崎岖不平，坡陡多变化的困难条件下，只要仔细丈量，其精度也不会低于1/1000。至于较精确的丈量，由于用弹簧秤衡量拉力，沿地面丈量倾斜距离而折算成水平距离，再加上温差、尺长等改正，其丈量精度一般都在1/5000以上。

通常往返两次丈量结果，一般不会绝对相同，这说明丈量中不可避免有误差存在。丈量中的误差来源有下列几种：

1.尺长本身的误差　如果钢尺未经检定或未按尺长方程式进行改算，仅用钢尺名义长度计算丈量的距离，则其中就包含了尺长误差。用同一根钢尺往返丈量，这种误差不会发

现，但实际是存在的。用两根钢尺同时丈量一段长度，所反映的是两根尺子的$\Delta l$之差与整尺段数的乘积，因此距离愈长则$\Delta l$反映愈明显。

2.温度变化的误差　设钢尺的膨胀系数$\alpha=12.5\times10^{-6}$，对每米每度温差变化仅八万分之一，但温差较大，距离很长时其影响也不小。再说一般测定的是空气温度，并未反映钢尺的实际温度，特别是沿地面丈量，钢尺温度与空气温度可能相差较大，因此，对于较精确的丈量，无论在检定钢尺和使用钢尺时都以测定钢尺温度为好，可用点温计测定尺温。

以上两项在尺长方程式中已考虑了。

3.拉力误差　拉力的大小会影响钢尺的长度。如果丈量不用弹簧秤衡量拉力，仅凭司尺员手臂感觉，则与检定时拉力难免要存在误差。设拉力误差为$\Delta P$，钢尺截面为$A$，$l$为钢尺整尺长，$E$为钢尺的弹性模数，一般约为$2\times10^6\text{kg/cm}^2$，则根据虎克定律，有

$$\Delta l_{拉}=\frac{1}{E}\frac{\Delta P}{A}\cdot l \tag{3-2}$$

式中$\Delta l_{拉}$是由拉力误差而引起的钢尺长度误差，其正负号决定于拉力误差$\Delta P$的正负。凡丈量时拉力大于检定时拉力，这项误差为正，即钢尺伸长了；反之为负。

例 3-3　设某钢尺的截面积为$1.3\times0.03=0.04\text{cm}^2$，整钢尺长为30m，拉力误差为$-5$kg（最大拉力误差约为$\pm3\sim5$kg），则

$$\Delta l_{拉}=\frac{5\times30\times100}{0.04\times2\times10^6}=1.88\text{mm}$$

其相对误差为0.188/3000=1/15900。这项误差在丈量过程中可正可负，其影响比前两项为小。为精确计，应用弹簧秤使拉力等于钢尺检定时的拉力为好。

4.丈量本身的误差　如钢尺端点对准的误差，插测钎的误差等。又钢尺基本分划为厘米，若读数只要求读到厘米，就可能会有5mm的凑整误差。所有这些误差是在工作进行中由于人的感官能力限制而产生的，其性质可正可负，或大或小，因此实际结果中已抵消了一部分，但这是丈量工作中一项主要误差来源，无法全部消除。

5.钢尺垂曲的误差　所谓垂曲，就是钢尺悬空丈量时中间下垂而产生的误差。悬空丈量时尺子中间必然有下垂现象，所以钢尺检定时要考虑这一因素，把尺子分悬空与水平两种情况予以检定，得出各自相应的尺长方程式。在成果整理时，若按实际情况采用相应的尺长方程式，这项误差就不存在了。但是拉力与规定有差异时仍会产生影响，只是这种影响很小而已。

6.钢尺不水平的误差　直接丈量水平距离时钢尺应尽量水平，否则会产生距离量长的误差，这与下面谈到的把倾斜距离改算为水平距离具有相同的性质。根据计算（见倾斜改正），对一根30米钢尺，若尺的两端高差达0.4m，则使30m距离增长约2.67mm，其相对误差约为1/11200。要求这样的钢尺整尺段两端高差小于0.4m是不难达到的，因此只要丈量时旁边有人仔细目估水平，这项误差实际很小。

7.定线误差　钢尺丈量时应直伸紧靠所量直线，如果偏离定线方向，就成一条折线，把实际距离量长了。这类情况与上述钢尺不水平相似，只不过前者是竖直面内的偏斜，而后者是水平面内的偏斜，故误差值的计算公式也相同。使用标杆目估定线使每30m整尺段

偏离直线方向不大于0.4m很容易做到，实际会更小，故这项误差也是很小的。

## §3-5 丈量成果整理

### 一、水平距离成果的整理

对于一般在平坦地区或起伏不大的地区直接丈量水平距离时，只须注意对边长进行尺长改正和温差改正，也就是以丈量所用钢尺的尺长方程式算出尺子实际长度，对边长进行改算。

例 3-4 某钢尺名义长度为30m，其尺长方程式为$l_t = 30\text{m} + 0.007\text{m} + 30 \times 12.5 \times 10^{-6} \times (t - 20℃)\text{m}$，用这根钢尺在温度为16℃时丈量一段水平距离为209.62m，试求出改正后的实际距离。

$$l_t = 30\text{m} + 0.007\text{m} + 30 \times 12.5 \times 10^{-6} \times (16 - 20)\text{m}$$
$$= 30\text{m} + 0.007\text{m} - 0.0015\text{m} = 30.006\text{m}(\text{丈量时钢尺实际长度})$$

因此所量距离的实际长度为

$$L = 209.62 \times \frac{30.006}{30} = 209.62 \times 1.0002 = 209.66(\text{m})$$

例 3-5 用两根钢尺在温度为24℃时丈量一段距离$AB$，Ⅰ号钢尺量得长度为161.29m，Ⅱ号钢尺量得长度为161.19m，已知两钢尺的尺长方程式为

$$l_{t\,\text{Ⅰ}} = 20\text{m} - 0.006\text{m} + 12.5 \times 10^{-6} \times 20(t - 20℃)\text{m}$$
$$l_{t\,\text{Ⅱ}} = 30\text{m} + 0.002\text{m} + 12.5 \times 10^{-6} \times 30(t - 20℃)\text{m}$$

分别求出两尺丈量时的真实长度为

$$l_{t\,\text{Ⅰ}} = 20\text{m} - 0.005\text{m}$$
$$l_{t\,\text{Ⅱ}} = 30\text{m} + 0.004\text{m}$$

由此求出两尺丈量$AB$经改正后的长度为

Ⅰ号尺 $$S'_{AB} = 161.29\text{m} \times \frac{(20 - 0.005)}{20} = 161.25\text{m}$$

Ⅱ号尺 $$S''_{AB} = 161.19\text{m} \times \frac{(30 + 0.004)}{30} = 161.21\text{m}$$

$$\text{相对精度为}\frac{161.25 - 161.21}{161} \approx \frac{1}{4000}$$

$$AB\text{的实际距离}S_{AB} = \frac{161.25 + 161.21}{2} = 161.23\text{m}$$

### 二、沿倾斜地面所量距离的改算

用这种方法丈量的距离，通常总是分段较多，每段长不一定是整尺段，且每段的地面倾斜也不相同，所以一般需要分段改正。如果地面坡度基本一致，则尺长、温差和倾斜三项改正也可按整条边的距离进行改正。关于三项改正的公式分列如下：

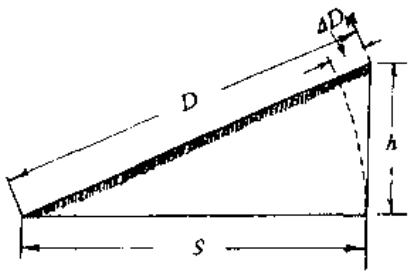



图 3-10

1. 尺长改正

$$\Delta D_{长} = D \times \frac{\Delta l}{l} \tag{3-3}$$

式中：$D$——分段丈量的倾斜距离；

$\Delta l$——钢尺检定时整尺段的尺长改正；

$l$——钢尺名义长度。

2. 温度改正

$$\Delta D_{温} = D \cdot \alpha \cdot (t - t_0) \tag{3-4}$$

式中：$\alpha$——钢尺膨胀系数；

$t$——丈量时钢尺的温度；

$t_0$——检定时钢尺的温度。

上面两项改正在尺长方程式中已考虑。

3. 倾斜改正

如图3-10所示，$h$为分段丈量时的两端高差，$S$为水平长度，由图可知，倾斜改正应为

$$\Delta D_{倾} = S - D = (D^2 - h^2)^{\frac{1}{2}} - D = D\left[\left(1 - \frac{h^2}{D^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]$$

将$\left(1 - \frac{h^2}{D^2}\right)^{\frac{1}{2}}$展开成级数，则可写成

$$\Delta D_{倾} = D\left[\left(1 - \frac{h^2}{2D^2} - \frac{1}{8}\frac{h^4}{D^4} \cdots\cdots\right) - 1\right]$$

$$= -\frac{h^2}{2D} - \frac{1}{8}\frac{h^4}{D^3} \cdots\cdots$$

一般$h$与$D$相比总是很小，式中二次项以上的各项可略去不计，故倾斜距离改正数为

$$\Delta D_{倾} = -\frac{h^2}{2D} \tag{3-5}$$

这三项改正可按表3-2格式进行计算。

直线长度计算表　　表 3-2

计算者　　校核者　　第　页

| 线段 | 尺段 | 距离 $D$ (m) | 温度 (℃) | 尺长改正 $\Delta D_{长}$ (mm) | 温度改正 $\Delta D_{温}$ (mm) | 高差 $h$ (mm) | 倾斜改正 $\Delta D_{倾}$ (mm) | 水平距离 $S$ (m) | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | A～1 | 29.390 | 10 | +4.9 | −3.5 | +860 | −12.6 | 29.379 | ①丈量数据转录自表3-1<br>②尺长方程式为<br>$30 + 0.005 + 1.2 \times 10^{-5} \times 30(t$<br>20℃) |
| | 1～2 | 23.390 | 11 | +3.9 | −2.5 | +1280 | −35.0 | 23.356 | |
| | 2～3 | 27.682 | 11 | +4.6 | −3.0 | −140 | −0.4 | 27.683 | |
| | 3～4 | 28.538 | 12 | +4.8 | −2.7 | 1030 | −18.6 | 28.522 | |
| | 4～B | 17.899 | 13 | +3.0 | −1.5 | −940 | −24.7 | 17.876 | |
| B | | | | | | | Σ | 126.816 | ③以上为往测 |

续表

| 线段 | 尺段 | 距离 $D$ (m) | 温度 (℃) | 尺长改正 $\Delta D_{长}$ (mm) | 温度改正 $\Delta D_{温}$ (mm) | 高差 $h$ (mm) | 倾斜改正 $\Delta D_{倾}$ (mm) | 水平距离 $S$ (m) | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | $B\sim1$ | 25.300 | 13 | +4.2 | −2.1 | +860 | −14.6 | 25.288 | |
| | $1\sim2$ | 23.922 | 13 | +4.0 | −2.0 | −1140 | −27.2 | 23.897 | |
| | $2\sim3$ | 25.070 | 11 | +4.2 | −2.7 | +130 | −0.3 | 25.071 | |
| | $3\sim4$ | 28.581 | 10 | +4.8 | −3.4 | 1100 | −21.2 | 28.561 | |
| | $4\sim A$ | 24.050 | 10 | +4.0 | −2.9 | +1180 | −28.9 | 24.022 | |
| $A$ | | | | | | | Σ | 126.839 | ④以上为返测 |
| | | | | | | | | | 相对精度 $\frac{126.839-126.816}{126}\approx\frac{1}{5480}$ 平均值 $S_{AB}=\frac{126.816-126.839}{2}=126.828(m)$ |

# §3-6 直线的定向

## 一、直线定向的意义

在测量工作中常常需要确定两点间平面位置的相对关系。要确定这种关系，仅仅量得两点间的距离是不够的，还需要知道这条直线的方向，这才算把两点间相对位置确定了。测量工作中，一条直线的方向是根据某一基本方向来确定的。确定一条直线与基本方向的关系称为**直线定向**。

图3-11所示是测量工作中常用的三种基本方向。椭球的子午线方向称为**真子午线**；用磁针北端确定的方向称为**磁北线**；平行于高斯投影平面直角坐标系$X$坐标轴的方向称为坐标纵线。图3-11所示为三个基本方向之间关系的一种情况，通常称为“三北方向”。通过地面上某点的真子午线，与该点坐标纵线方向比较，这两个基本方向之间的夹角，一般测量工作中称**子午线收敛角**。凡坐标纵线偏在真子午线以东者为正，反之为负。子午线收敛角用$\gamma$表示。图3-12所示为分别处于中央子午线的东和西两侧的情况。这里须说明，地形图图廓下方所绘三北方向中的真子午线是该幅图中间位置的真子午线。

磁北线与真子午线方向之间的夹角称为**磁偏角**；凡磁北线偏于真子午线以东者称**东偏**，

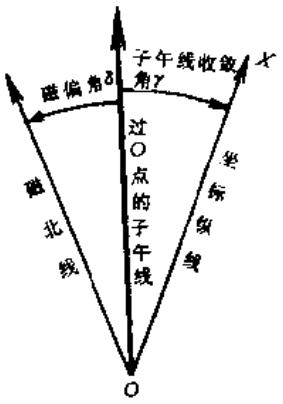



图 3-11

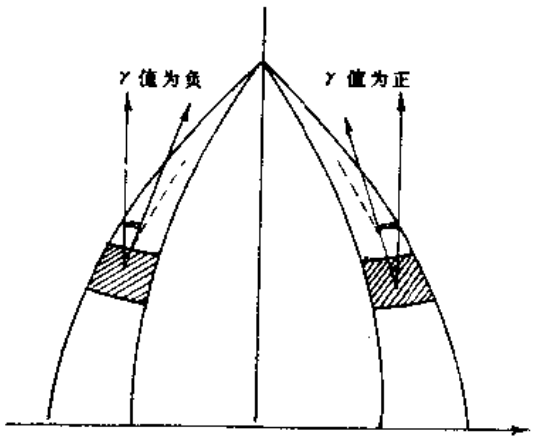



图 3-12

其角值为正；偏于西者称西偏，其角值为负；磁偏角用$\delta$表示。

## 二、子午线收敛角

为了近似地确定子午线收敛角的数值，可将地球作为圆球看待。如图3-13所示，$P$ 及 $P'$ 为某投影带东西两边真子午线通过的点，$C$ 为该投影带中央子午线通过的点。

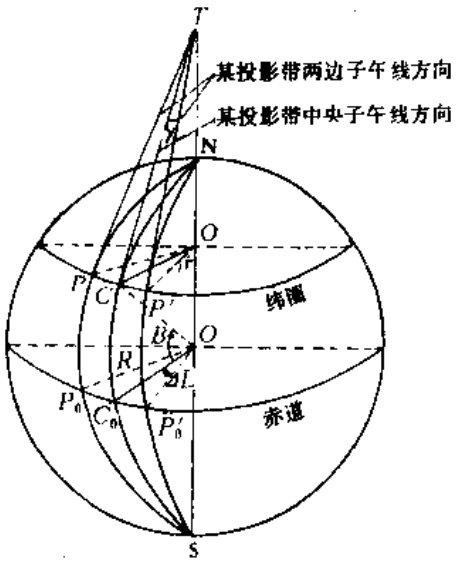



图 3-13

$\Delta L$ 为 $P'$ 点处的大地经度 $L_{P'}$ 和 $C$ 点处大地经度 $L_C$ 之差，即 $\Delta L = L_{P'} - L_C$，两点在纬圈上的距离 $\overset{\frown}{CP'} = S$。今在 $C$ 和 $P'$ 上各作子午圈的切线 $CT$ 和 $P'T$，则这两条切线将与地球旋转轴相交于 $T$，所形成的夹角 $\gamma$，即为 $C$、$P'$ 两点间的子午线收敛角。$\Delta L$ 的最大值为投影带经差的一半，如6°带的最大 $\Delta L = 3°$。在普通测量中可近似地将两点间距离 $S$ 当作以 $CT$ 为半径的弧线，由于 $\frac{\gamma}{\rho} = \frac{S}{CT}$，在直角三角形 $COT$ 中，可知 $CT = R \cdot \operatorname{ctg} B$，式中 $R$ 为地球半径，$B$ 为 $C$、$P'$ 两点的大地纬度，因此

$$\frac{\gamma}{\rho} = \frac{S}{R\operatorname{ctg}B}$$

或

$$\gamma = \rho \cdot \frac{S}{R}\operatorname{tg}B \tag{3-6}$$

从扇形 $COP'$ 可得 $S = r \cdot \frac{\Delta L}{\rho}$，而 $r = R \cdot \cos B$

则

$$S = R \cdot \cos B \cdot \frac{\Delta L}{\rho},$$

将此式代入（3-6）式得

$$\gamma = \Delta L \cdot \sin B \qquad (3\text{-}7)$$

由（3-6）和（3-7）两式可知，当$\Delta L$不变时，纬度愈低则子午线收敛角愈小，在赤道时$\gamma = 0$，纬度愈高则子午线收敛角愈大，在两极时$\gamma = \Delta L$。

## 三、罗盘定向

用磁针测定直线的方向较方便，但磁针所测定的磁北方向的精度不高。磁针是指向地球的磁北极或磁南极。概略地说，磁北极在北纬74°西经110°附近，磁南极在南纬69°东经114°附近。严格地说，磁极每年在移动的，因此磁偏角在同一地点也不是定值，甚至每天早晚测定的磁偏角也有微小的差异。所以磁偏角有长期变化和周日变化。

磁针还受地磁极的影响产生磁倾角。例如，在北半球，磁针受磁北极吸引，其指北端向下倾斜，通常在磁针的指南端绕上一些细铜丝以保持其水平。除此以外，磁针受环境影响较大，如钢铁建筑物和高压电线都会影响其所指方向，更有偶然性的磁变反常现象。所有这些因素都会影响磁针测定方向的精度，但由于用磁针测定方向简单方便，所以道路踏勘、森林普查等测量工作中迄今仍采用这种方法。

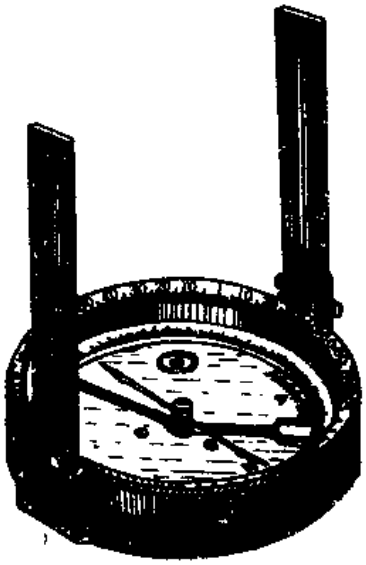


图 3-14

罗盘是测定直线磁方向的工具。如图3-14所示，其主要组成部分为照准设备（图中为两块觇板，也有用望远镜的）、分度圈和磁针。磁针中部通常嵌有较硬的玻璃或玛瑙，把下表面磨成球面，使其在顶针上转动灵活。图3-15所示为罗盘的剖面。磁针一般为钢片用电流充磁制成，在不使用时应将螺钉往下旋，使杠杆把磁过抬起，免得磨损顶针尖。




图 3-15

罗盘的分度通常以1°为分划单位，每10°作一注记。注记的形式有两种：其一按逆时针方向由0°到360°（图3-16*a*），称为**方位罗盘**；其二有南北相对两个0°，向两个方向分别注记到90°，如图3-16(*b*）所示，称为**象限罗盘**。在象限罗盘上除注有南北字样外，并注有东西字样。由于使用罗盘定向时，分度盘随着照准设备转动，而磁针静止不动，所以东西方向与实际情况相反。同样，方位角是按顺时针从北端算起的，而方位罗盘是自北端按逆时针注记的。

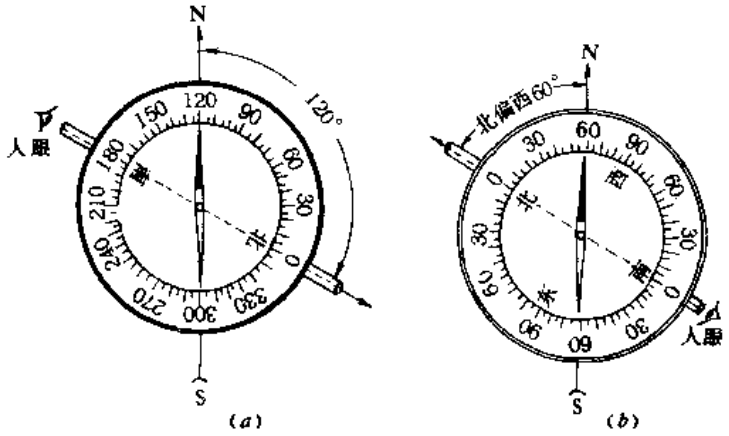



图 3-16

## 四、直线定向的几种表示方法

### （一）方位角

由基本方向线的北端起顺时针方向到一方向线的角度，称为该方向线的**方位角**。一般用$A$表示。图3-17中，设NS为通过$O$点的基本方向线，$OP_1$、$OP_2$、$OP_3$、$OP_4$为通过$O$点的四条方向线，则水平角$A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$即为四条直线的方位角。方位角的取值范围通常为0°～360°；小于0°和大于360°的方位角应该以±360°或-360°的方法换算至0°～360°的范围内。凡方位角的计算以真子午线方向为基本方向者称为真方位角（$A_{真}$）。磁北线为基本方向，则称磁方位角（$A_{磁}$）。

如果有当地磁偏角的资料，真方位角与磁方位角可以相互换算。图3-18中，设$A_{真}$为$OP_1$方向的真方位角，$A_{磁}$为$OP_1$方向的磁方位角，$\delta$为磁偏角。

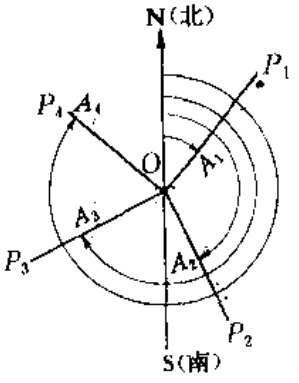



图 3-17

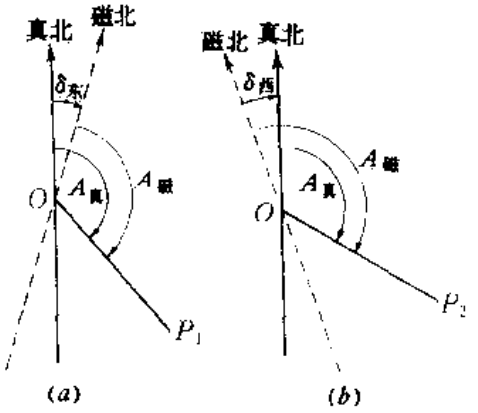



图 3-18

由图3-18可知

$$A_{真}=A_{磁}+\delta$$

直线的方向有起点和终点；为标明此情况常注以下标；如图3-19以$P_1$为起点的真方位角$A_{真1,2}$，以$P_2$为起点的同一直线的真方位角为$A_{真2,1}$。$P_1$点的真子午线为$S_1N_1$，$P_2$点的真子午线为$S_2N_2$，而$S_1N_1$不平行于$S_2N_2$。由图3-19可见

$$A_{真2,1} = A_{真1,2} + 180^\circ + \gamma_2 - \gamma_1 \tag{3-8}$$

$\gamma_1$、$\gamma_2$为$P_1$、$P_2$点的子午线收敛角。上式也可写为

$$A_{真2,1} = A_{真1,2} + 180^\circ - \gamma_{2,1}$$

$\gamma_{2,1}$可近似用（3-7）式求得。计算时，$\Delta L$为$P_1$、$P_2$两点的经度差，即$\Delta L = L_2 - L_1$，$B$则取两点的平均纬度。

（二）象限角

有时与直线与基本方向线相交的锐角来表示直线定向，这种定向的锐角称为**象限角**，用符号$R$表示。它是由基本方向线北端或南端顺时针方向或逆时针方向量至直线的角度。在图3-20中，NS为经过$O$点的子午线，$OP_1$、$OP_2$、$OP_3$、$OP_4$为地面上的四条直线，则

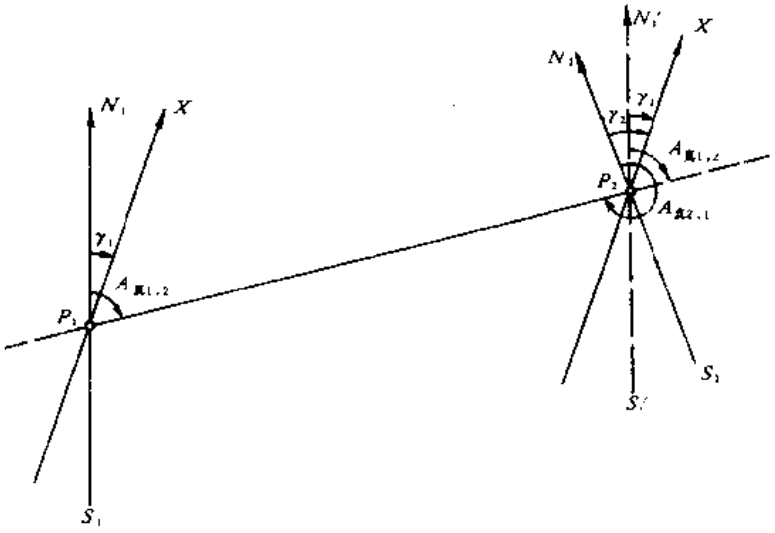



图 3-19

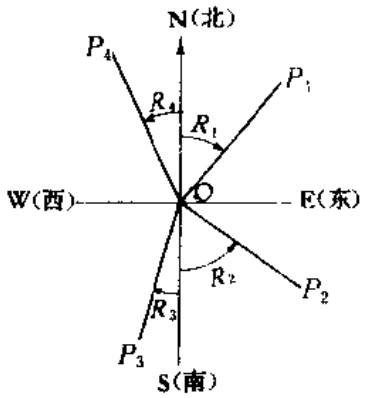



图 3-20

$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$即为这四条直线的象限角。由于象限角可自子午线北端量起，也可自其南端量起，可以向东量，也可以向西量；因此，用象限角定向时，不但要注明角度的大小，同时还要注明它所在的象限；例如$OP_1$、$OP_2$、$OP_3$、$OP_4$诸直线的象限角应写成北东$R_1$、南东$R_2$、南西$R_3$、北西$R_4$。

方位角与象限角之间有一定的换算关系；表3-3所列是两者的关系。

表 3-3

| 直线方向 | 根据象限角$R$求方位角$A$ | 根据方位角$A$求象限角$R$ |
|---|---|---|
| 北东，即第一象限 | $A = R$ | $R = A$ |
| 南东，即第二象限 | $A = 180^\circ - R$ | $R = 180^\circ - A$ |
| 南西，即第三象限 | $A = 180^\circ + R$ | $R = A - 180^\circ$ |
| 北西，即第四象限 | $A = 360^\circ - R$ | $R = 360^\circ - A$ |

（三）坐标方位角（方向角）

以平行于纵坐标轴（坐标纵线）的方向为基本方向的方位角，称为坐标方位角，简称

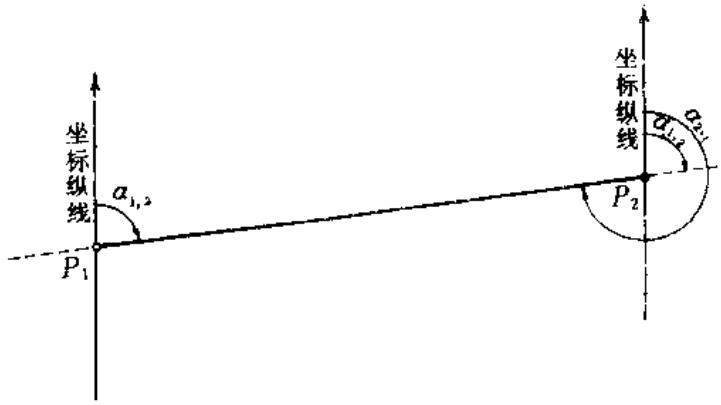



图 3-21

方向角；它以指北方向，即 $X$ 轴正方向为起算方向，通常以 $\alpha$ 表示。如图3-21，$\alpha_{1,2}$ 表示 $P_1P_2$ 方向的坐标方位角，$\alpha_{2,1}$ 表示 $P_2P_1$ 方向的坐标方位角。$\alpha_{1,2}$ 和 $\alpha_{2,1}$ 互称为正、反坐标方位角。称 $\alpha_{1,2}$ 为正坐标方位角，$\alpha_{2,1}$ 为反坐标方位角；反之，$\alpha_{2,1}$ 为正坐标方位角则 $\alpha_{1,2}$ 为反坐标方位角。由图3-21可知

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} + 180^\circ$$

或

$$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,1} - 180^\circ$$

综合两式可知，一直线正、反坐标方位角的换算为 $\pm 180^\circ$ 的关系。由于方位角的取值范围为 $0^\circ \sim 360^\circ$，因此 $180^\circ$ 前的加、减号可任意选取，即

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} \pm 180^\circ \tag{3-9}$$

例 3-6　已知 $\alpha_{1,2} = 124^\circ 30' 20''$，求 $\alpha_{2,1}$。

解法 1：

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} + 180^\circ = 304^\circ 30' 20''$$

$\alpha_{2,1}$ 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围内，合乎要求。

解法 2：

$$\alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} - 180^\circ = -55^\circ 29' 40''$$

$\alpha_{2,1}$ 在 $0^\circ \sim 360^\circ$ 范围外，应化算至取值范围，即

$$\alpha_{2,1} = -55^\circ 29' 40'' + 360^\circ = 304^\circ 30' 20''$$

由此例可见：在一直线的正、反坐标方位角换算中，使用常数 $180^\circ$ 的作用是将直线方向的起、终点号予以颠倒；而使用常数 $360^\circ$ 的作用是将计算结果化算至坐标方位角的取值范围内。

按照子午线收敛角正负号的规定，坐标方位角与真方位角的换算关系为

$$A_{真1,2} = \alpha_{1,2} + \gamma_1 \tag{3-10}$$

式中，$\gamma_1$ 为直线方向起始点的子午线收敛角。

# 第四章 水准仪及其使用

## § 4-1 水准测量原理

水准测量是测出地面点高程的方法之一。

水准测量的基本测法是：若有一个已知高程的$A$点，首先测出$A$点到$B$点的高程之差，简称高差$h_{AB}$，于是$B$点的高程$H_B$为

$$H_B = H_A + h_{AB} \tag{4-1}$$

以此计算出$B$点的高程。（见图4-1）

### 一、水准测量的原理

测出高差$h_{AB}$的原理如下：如图4-1在$A$、$B$两点上竖立两根尺子，并在$A$、$B$两点之间安置一架可以得到水平视线的仪器。这种尺子称为水准尺，所用的仪器称为水准仪。设水准仪的水平视线截在尺子的位置为$M$、$N$，过$A$点作一水平线与过$B$点的铅垂线相交于$C$。因为$BC$之长即是$A$、$B$两点之间的高差$h_{AB}$，所以由矩形$MACN$中可以得到计算$h_{AB}$的式子

$$h_{AB} = a - b \tag{4-2}$$

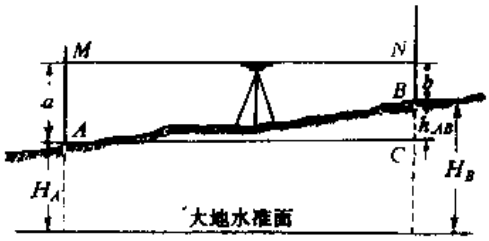



图 4-1

在实际工作时，$a$、$b$的值是用水准仪瞄准水准尺直接读出来的。因为$A$点是已知高程的点，通常称$a$为后视读数，而称$b$为前视读数。

即 $$h_{AB} = \text{后视读数} - \text{前视读数}$$

高差$h_{AB}$本身可正可负。由式（4-2）知，当$a$大于$b$时$h_{AB}$值为正，这种情况是$B$点高于$A$点；当$a$小于$b$时$h_{AB}$值为负，即$B$点低于$A$点。无论$h_{AB}$值为正或负，式（4-2）始终成立。为了避免计算中发生正负符号的错误，在书写高差$h_{AB}$的符号时必须注意$h$的下标小字。例如$h_{AB}$是表示由已知高程的$A$点推算至未知高程的$B$点的高差。

### 二、转点、测站

图4-1所表示的水准测量是当$A$、$B$两点相距不远的情况，这时水准仪可以直接在水准尺上得到读数，且能保证一定的读数精度。如果两点之间的距离较远，或高差较大时，仅安置一次仪器便不能测得它们的高差，这时需要如设若干个临时的立尺点，作为传递高程的过渡点，称为转点。如图4-2，欲求$A$点至$B$点的高差$h_{AB}$，选择一条施测路线，用水准仪依次测出$AP$的高差$h_{AP}$、$PQ$的高差$h_{PQ}$……等等，直到最后测出$WB$的高差$h_{WB}$。每安

置一次仪器，称为一个测站，而$P$、$Q$、$R$……$W$等点即为转点。高差$h_{AB}$由下式算得：

$$h_{AB} = h_{AP} + h_{PQ} + \cdots\cdots + h_{WB}$$

式中各测站的高差均为后视读数减去前视读数之值，即

$$h_{AP} = a_1 - b_1$$

$$h_{PQ} = a_2 - b_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_{WB} = a_n - b_n$$

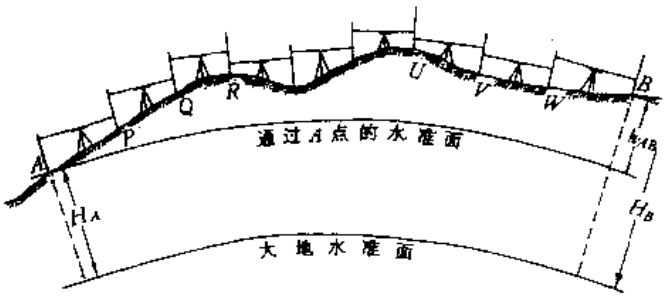



图 4-2

式中等号右端用下标 1、2……$n$ 表示第一站、第二站……第 $n$ 站的后视读数和前视读数。因此

$$h_{AB} = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \cdots\cdots + (a_n - b_n)$$

$$= \sum_1^n (a - b) = \sum_1^n a - \sum_1^n b \qquad (4\text{-}3)$$

在实际作业中可先算出各测站的高差，然后取它们的总和而得$h_{AB}$。再用式（4-3），即用后视读数之和 $\sum_1^n a$ 减去前视读数之和 $\sum_1^n b$ 来计算高差$h_{AB}$，检核计算是否有错误。

### 三、地球曲率的影响

在图4-1中，将大地水准面看作平面，因而可用式（4-2）计算高差。但实际上大地水准面接近于球面，一个测站上的水准测量应如图4-3所示，图中用圆弧表示过$A$点的大地水准面。因$\theta$角很小（$AB$相距200m时，$\theta \approx 6''$），故在$A$、$B$两点竖立的水准尺接近于平行，实际此时高差$h_{AB}$为

$$h_{AB} = a - b - \Delta h_{AB}$$

式中$\Delta h_{AB}$称为地球曲率的影响。

从过$A$点的水准面与测站垂线的交点处作切线，由图4-3可见，

$$\Delta h_{AB} = \delta_a - \delta_b$$

按式（2-4）知

$$\delta_a = \frac{1}{2R} S_a^2$$

$$\delta_b = \frac{1}{2R} S_b^2$$

则

$$\Delta h_{AB}=\frac{1}{2R}(S_a^2-S_b^2)$$

或

$$\Delta h_{AB}=\frac{1}{2R}(S_a-S_b)(S_a+S_b) \qquad (4\text{-}4)$$

式（4-4）为地球曲率对一个测站的影响。若$S_a=S_b$，则$\Delta h_{AB}=0$，说明当后、前视距●的距离相等时，地球曲率对一个测站的高差没有影响。

对一条水准线路而言，如图4-2的情形，则

$$\Delta h_{AB}=\Sigma\left\{\frac{1}{2R}(S_{后}-S_{前})(S_{后}+S_{前})\right\}$$

设每测站的$S_{后}+S_{前}$相等，将有

$$\Delta h_{AB}=\frac{1}{2R}(S_{后}+S_{前})\Sigma(S_{后}-S_{前}) \qquad (4\text{-}5)$$

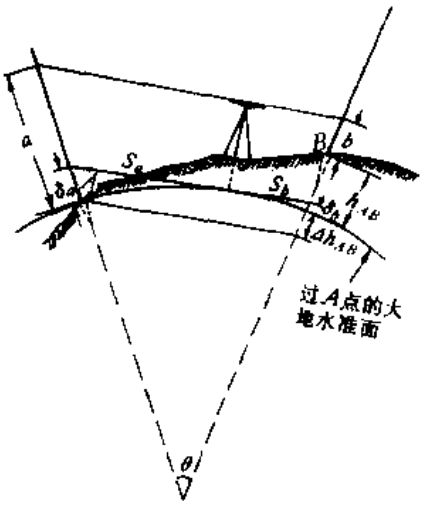


图 4-3

它和式（4-4）不同之处是，用后、前视距离之差的总和替换每站的后、前视距离之差。实际工作均将$\Sigma(S_{后}-S_{前})$加以限制，以使$\Delta h_{AB}$不致过大。由于$S_{后}-S_{前}$表示每一测站的后视距离减去前视距离，它可正可负，只要作业中随时注意它的积累，将$\Sigma(S_{后}-S_{前})$限制在某一范围内并不十分困难。例如当$S_{后}+S_{前}$平均为200m，$\Sigma(S_{后}-S_{前})<10$m时，$\Delta h_{AB}\leqslant 0.16$mm，以普通水准测量对成果的精度要求而言，这样的误差可忽略不计。

## § 4-2 水 准 器

水准仪的水平视线是应用一个称为水准器的部件获得的。

水准器是利用液体受重力作用后气泡居最高处的特性，使水准器的一条特定的直线位于水平或竖直位置的一种装置。

水准器分两种：图 4-4（$a$）为管水准器，通常称为水准管。图4-4（$b$）称为圆水准器。

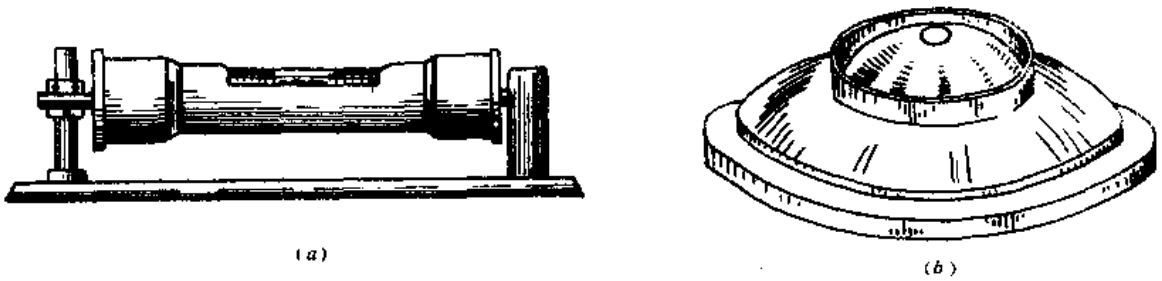


图 4-4

● $S_a$、$S_b$为仪器至后、前标尺的距离，在水准测量中是用普通视距法测得。视距测量将在第十一章讲述。§5-3介绍测视距值的方法。

## 一、水准管

水准管的管子用玻璃制成，其纵剖面方向的内表面为具有一定半径的圆弧（图4-5）。精确水准管的圆弧半径约为80～100m，最精确的可达200m。内表面琢磨后，将一端封闭，由开口的一端装入质轻而易流动的液体如酒精或氯化锂，装满后再加热使液体膨胀而排去一部分，然后将开口端隔闭或用玻璃塞塞住，待液体冷却后，管内即形成了一个被液体蒸气以充塞的空间，这个空间称为水准气泡。

为了保护水准管不易破碎，通常将其安装在有长圆形开口的金属管内，并用石膏紧固。

在水准管上刻有2mm间隔的分划线（图4-6），分划线与中间的$S$点成对称。如图4-5所示，$S$点称为水准管的零点，零点附近无分划，零点与圆弧相切的切线$LL$称为水准管的水准轴。根据气泡在管内占有最高位置的特性，当气泡中点位于管子的零点位置时，称气泡居中，也就是管子的零点最高时，水准轴成水平位置。气泡中点的精确位置依气泡两端相对称的分划线位置确定。

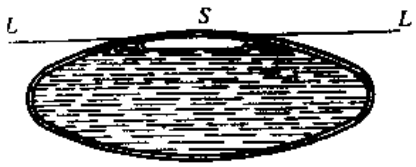



图 4-5

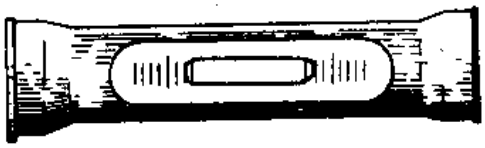


图 4-6

根据上述，设图4-7中的$AB$表示水准管内表面的圆弧，$O$为圆心，$S$为水准管的零点；当气泡中心$C$与$S$重合时，$OC$线成竖直位置，因此水准轴$LL$成水平位置，设水准轴$LL$对水平线$L_1L_1$倾斜了一个$\theta$角，如图4-8所示，则气泡必偏离$S$点数格，但气泡中点仍居于最高位置，也就是$OC$线仍为竖直线，因此切于气泡中点$C$的切线为水平线$L_1L_1$。由于半径与切线有互成垂直的关系，所以水准轴$LL$对水平线$L_1L_1$的倾斜角等于半径$OS$与$OC$的夹角，此夹角可用气泡中心偏离水准管零点$S$的圆弧长来量度。

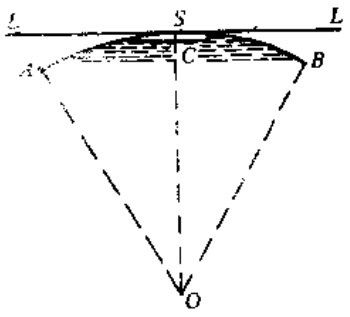



图 4-7

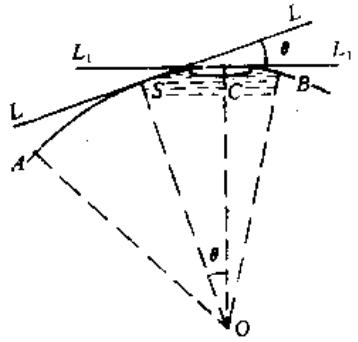



图 4-8

水准管的分划值就是水准管上相邻两分划线间弧长所对的圆心角值。测量仪器上的水准管分划值，小的可到2″，大者可达2′～5′。水准管的分划值与圆弧的半径$R$成反比；半

径愈大分划值愈小，则用以导致仪器某部分成水平位置或竖直位置及测定倾斜角的精度也就愈高。但是上述精度除了决定于水准管分划值外，还决定于水准管内表面的琢磨情况、液体的性质、气泡的长度和温度等等，这些因素都会影响到气泡准确而快速移居管中最高位置的能力，这种能力称为水准管的灵敏度。测量仪器上水准管的灵敏度须适合它的用途。用灵敏度较高的水准管可以更精确地导致仪器的某部分成水平位置或竖直位置；但灵敏度愈高，置平愈费时间，所以水准管灵敏度应与仪器其他部分的精密情况相适应。

## 二、圆水准器

圆水准器主要用于粗略置平，或者与水准管装在同一仪器上时，作初步整置平面成水平或轴线成竖直位置之用。圆水准器（图4-9）是将一圆柱形的玻璃盒子装嵌在金属的框内，盒内部是装满酒精或氯化锂后加热密封的。盒顶面的内壁磨成圆球形，其半径为0.5～2m。顶面的中央画一小圆，其圆心$S$即为水准器的零点。连结零点$S$与球面的球心$O$的直线称为圆水准器的水准轴。当气泡位于圆内中央位置时，圆水准器的水准轴即成竖直，这时切于零点的平面也就成水平了。

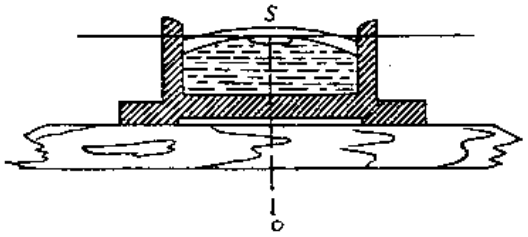


图 4-9

圆水准器也有分划值。在圆水准器通过零点的任意一个纵断面方向上，气泡中心偏离2mm时，它所对的圆心角的大小就是圆水准器的分划值。可见它和圆水准器顶部圆球面的半径有关，半径愈大分划值愈小，半径愈小分划值愈大。分划值小的圆水准器能使水准轴成竖直位置的精度较高。

## 三、符合水准器

为了观察方便，水准仪常在水准管上面装有倾斜的反光镜，使观测人员在读数前读数后可以很方便地看到气泡。这种方法观察气泡虽然方便，但气泡居中精度并未提高。目前多数水准仪在水准管上装有符合棱镜系统，当气泡两端影象符合一致时就表明气泡已经居中。此种水准器称符合水准器。在判断两端气泡的符合程度时常会出现误差，而气泡不符合的程度是指两个端点之间的距离，它正好是距完全符合位置的两倍。因此，用符合水准器作业可使气泡居中的精度提高一倍。符合棱镜系统由三块棱镜组成，如图4-10（$a$）。左右两块棱镜对称于水准管的零点$S$，并彼此相连接。棱镜的两个侧面及棱镜的上下面，各互相平行。左边棱镜和右边棱镜构造成左右对称。

两个棱镜的侧面所在的平面，通过水准管的纵轴线。第三块棱镜为45°的直角棱镜，其底为等腰直角三角形，一个直角面与左右两棱镜的侧面相靠或互相平行。

从水准气泡一端$P$发出的竖直光线，在同一端棱镜内发生两次全反射，进入第三块棱镜后又发生一次全反射，最后射出的光线将平行于望远镜的视准轴，并在望远镜内或目镜旁的放大镜内看到此气泡的$P$端半边象。气泡$P_1$端发出的光线也同样成象于望远镜内或目

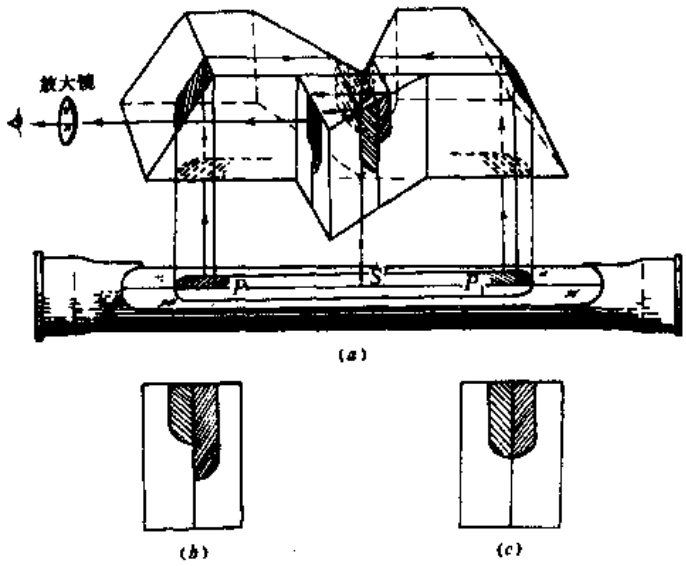



图 4-10

镜旁的放大镜内。图4-10（$a$）的箭头表示光的路径。

当水准气泡不在水准管中央时，观测者所见到的气泡影象如图4-10（$b$）所示；而图4-10（$c$）为气泡居中时的影象。

为了使水准气泡看得清楚一些，在水准管下面装有可转动的反光镜，可将光线反射到水准管上，照亮水准气泡。

## § 4-3 水准尺和尺垫

水准尺使用干燥木料制成，一般长约 3 ～ 4 m，按其构造不同可分为折尺、塔尺、直尺等数种。折尺可以对折，塔尺可以缩短，这两种尺运输方便，但用旧后的接头处容易损坏，影响尺长的精度，所以较高精度的水准测量规定只能用直尺。为使尺子不弯曲，其横剖面作成丁字型、槽型、工字型等（图4-11）。



图 4-11

尺面每隔一厘米涂有黑白或红白相间的分格，每分米有数字注记。为倒象望远镜观测方便起见，注字常倒写。尺子底面钉以铁片，以防磨损。水准尺一般式样如图4-12所示。

作为转点用的尺垫（或称尺台，如图4-13$a$）系用生铁铸成，一般为三角形，中央有一突起的圆顶，以便放置水准尺，下有三尖脚可以插入土中。尺垫应重而坚固，方能稳定。在土质松软地区，尺垫不易放稳，可用尺桩（或称尺钉，如图4-13$b$）作为转点。尺桩长约30cm，粗约 2 ～3cm，使用时打入土中，比尺垫稳固，但每次需用力打入，不太方便。

三、四等水准测量采用尺长为 3 m，以厘米为分划单位的区格式木质双面水准尺。双面水准尺的一面分划黑白相间称为黑面尺（也叫主尺）。另一面分划红白相间称为红面尺

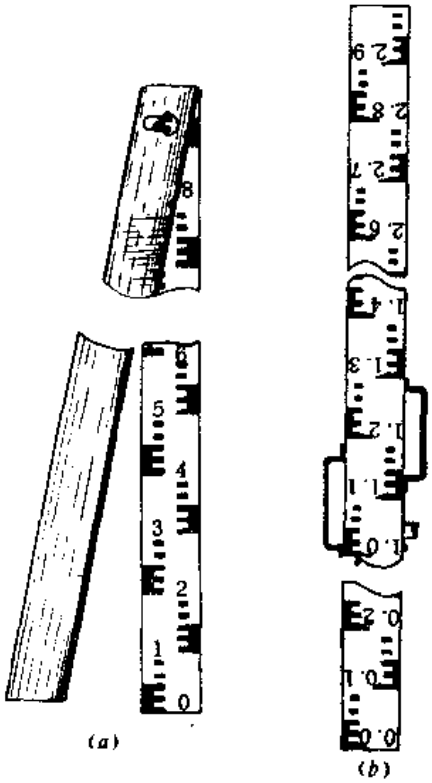



图 4-12

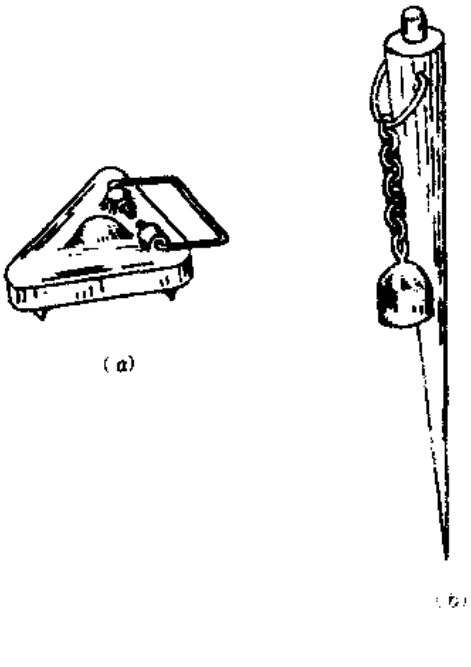



图 4-13

（也叫辅助尺）。黑面分划的起始数字为“零”，而红面底部开始不是“零”，一般为4687 或4787。这样做是为了使水准测量过程中在红面上的读数不致与黑面读数近似，以便于发现读数错误。如果要使水准尺能更精确地处于竖直位置，可在水准尺侧面装一圆水准器。

## §4-4 望 远 镜

### 一、望远镜的构造原理

#### （一）透镜及其成象

望远镜的主要构件是透镜，它分凸透镜和凹透镜两种。无论单个的透镜或由几个单个透镜组合而成的组合透镜，均有两个焦点、两个主平面和一个主轴线，见图4-14。通常为了使论讨问题简便起见，可用一个主平面来替代两个主平面，其结论仍然正确。

根据几何光学的理论研究，靠近主轴线的光线经透镜折射后，它的传播方向按照下列规则：平行于主轴线的入射光通过第二焦点；通过第一焦点的入射光平行于主轴线；通过主平面与主轴线交点的入射光不改变方向。依据这些规则，可以用作图的方法了解透镜的成象情况。

图4-15所示为物体 $A$ 在凸透镜焦点之外的成象情况。这时它的象 $A'$ 在透镜的另一侧，是一个倒立的实象。如果焦点至主平面的距离用 $f$ 表示（称为焦距）、物体至主平面的距

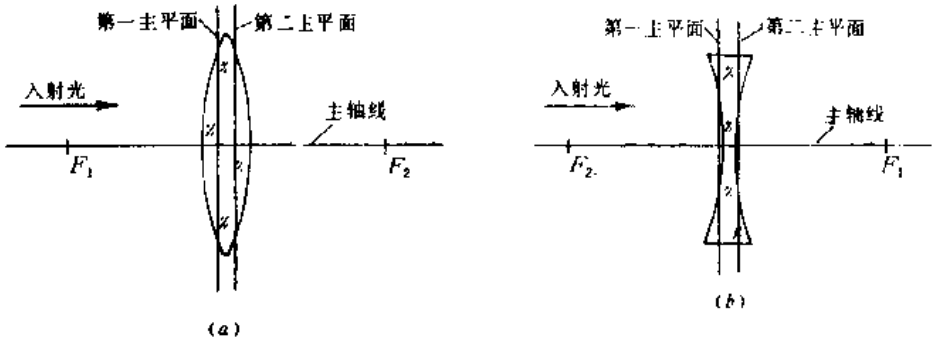



图 4-14

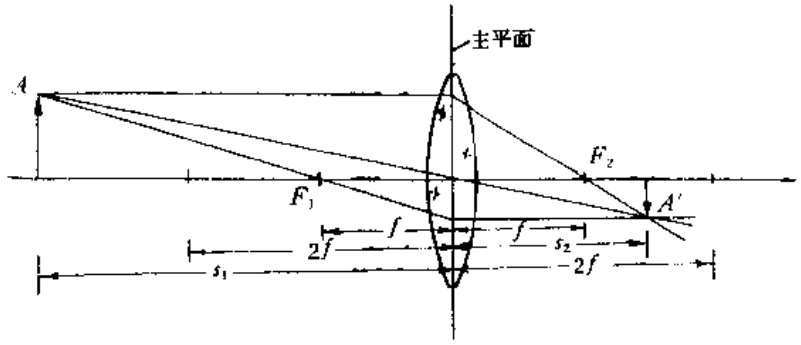



图 4-15

离用$s_1$表示（称为物距）、物体的象至主平面的距离用$s_2$表示（称为象距），那末，它们之间有如下数学关系：

$$\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f} \tag{4-6}$$

当透镜的焦距已经知道，可由物距$s_1$求出象距$s_2$的值，即

$$\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f}-\frac{1}{s_1},$$

$$s_2=\frac{s_1 f}{s_1-f} \tag{4-7}$$

当$s_1>2f$时

$$f<s_2<2f$$

此时，物体$A$的象是被缩小了的一个实象。

当$s_1<f$时，由式（4-7）计算得的$s_2$为负值，这说明物体$A$的象$A'$是与入射光在透镜的同一侧，因而$A'$是一个虚象，而且始终是一个被放大了的虚象。这时能由眼睛直接看到一个物体的放大了的正象，所以一般将凸透镜称为放大镜。成象情况见图4-16。

凹透镜的成象原理与凸透镜相同，但应注意，第一焦点在入射光相反的另一侧。因此凹透镜总是产生虚象，而且总是被缩小了的虚象。成象情况见图4-17。此时，物体$A$的象$A'$在入射光的同一侧，是一个正立并被缩小了的虚象。当用眼睛通过凹透镜观察物体时，能够看到这个虚象。

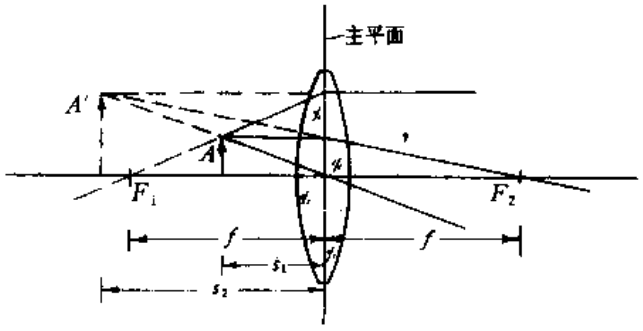



图 4-16

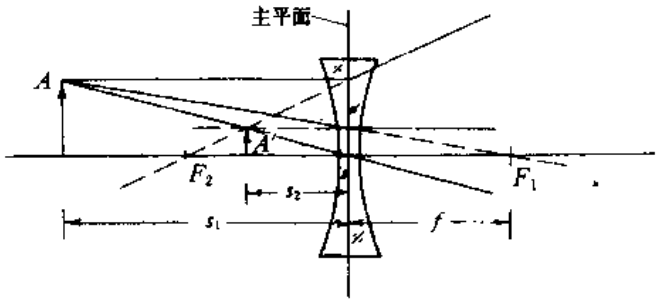



图 4-17

凹透镜的物距$s_1$、象距$s_2$、焦距$f$之间仍存在关系式（4-6），但应用时$s_2$需取负值，而凹透镜的焦距$f$总是负值。

（二）望远镜成象原理

最简单的望远镜是由一个物镜和一个目镜构成，这种望远镜的成象原理如图 4-18 所示。$MN$为物镜，$mn$为目镜，制造望远镜的目的是希望通过它能够看清楚远处的物体，因此物体$AB$距物镜的距离必然大于物镜焦距的两倍，而物镜是一个凸透镜，因此，物体$AB$经物镜折射后将产生一个倒立而被缩小了的实象$ab$，同时又将目镜安置在使实象$ab$距目镜的距

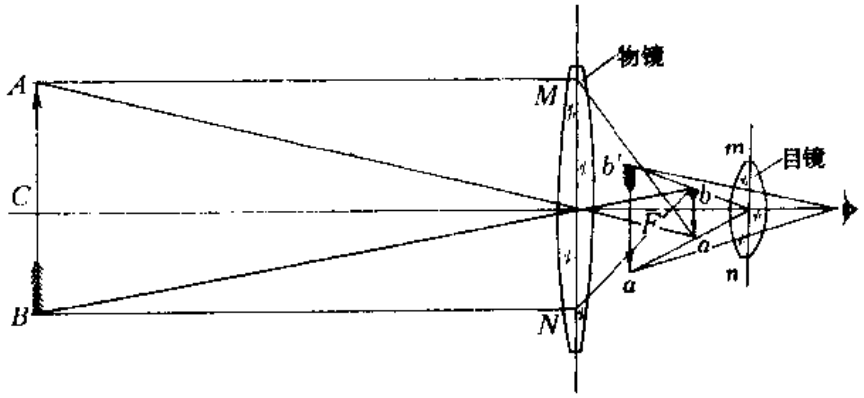



图 4-18

离小于目镜的焦距这样一个位置，即实象$ab$成为目镜$mn$的物体，这样，由于目镜也是一个凸透镜，因此可以得到一个将$ab$放大了的虚象$a'b'$。这个虚象本身的大小并不一定比$AB$实物大，为什么觉得能够看得更清楚一些呢？这是因为，人用眼睛观察判别物体的大小，是以观察物体的视角大小不同而定，望远镜的作用并不是得到一个比物体本身还要大的象，而是将观察物体的视角加以放大，物体$AB$是在远处（图4-19），如果不经过望远镜来看它，$AB$对人眼构成的视角为$\alpha$，经过望远镜后所看到的象$A'B'$对人眼构成的视角为$\beta$，只要$\beta$大于$\alpha$，制造望远镜的目的便达到了。

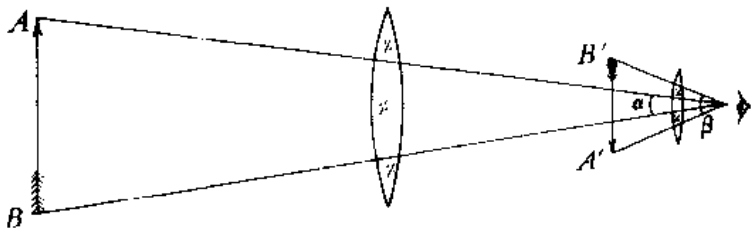



图 4-19

（三）象差的消除

由几何光学理论知道，如果入射光线不是靠近主轴线，则通过单个透镜后，所得的象将有球面象差。此外，可见光包括了各种颜色的光，由于它们的波长不同，通过单透镜后将会产生色象差。因此，用单透镜制成的望远镜远不能满足测量工作的需要。

消除象差的办法是采用复合透镜。例如选用不同材料的玻璃制成几个透镜，利用它们的折射率不一样并选用适当的透镜形状，那末由几个透镜组成的复合透镜便能达到消除象差的目的。

（四）十字丝

测量用的望远镜除了希望能看清远处的物体之外，主要是要用它瞄准测量目标；在水准测量中则要求通过望远镜能在水准尺上读数，因此必须在望远镜内装一个十字丝分划板。

图4-20是几种十字丝分划板的图形。位于分划板中部的两根垂直相交的丝构成十字丝。为了瞄准目标时精度更高一些，也有用双丝的对称中线来代替单丝，如图4-20（$b$）、（$c$）所示。在十字丝旁边的几条短丝称为视距丝●，如图4-20（$b$）、（$d$）所示。上下

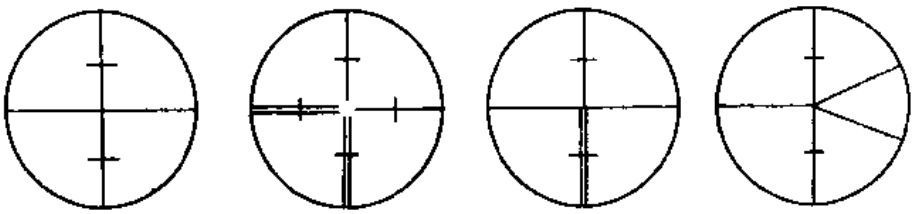



图 4-20

● 视距原理将在第十一章中讲述。

两根视距丝用来在竖直的标尺上读数以求得距离。左右两根视距丝用来在水平安置的标尺上读数求得距离。图4-20（$d$）为用于精密水准测量的十字丝分划板图形。

通常简称中间的横丝为中丝、上、下视距丝为上丝和下丝。

十字丝被安置在物镜和目镜之间，使用望远镜时要求物体$AB$的象落在十字丝平面上。

用望远镜瞄准目标或在水准尺上读数，均以十字丝的交点为准。前面分析望远镜成象时都以物镜主平面和主轴线的交点为主要通过点，一般称该点为物镜光心。物镜光心与十字丝交点的连线构成望远镜的视准轴，可见观测的视线即为视准轴的延长线。

## 二、外调焦望远镜

图4-21是外调焦望远镜的剖面。外调焦望远镜也称外对光望远镜。此种望远镜将物镜安装在一个圆筒上，称为物镜筒，将目镜和十字丝分划板安装在另一个圆筒上，称为目镜筒，然后用一个称作调焦螺旋的部件调节两个镜筒的相对位置。十字丝分划板固定在目镜筒上。目镜被安置在可旋转的螺旋套筒上，当转动目镜时可以调节十字丝和目镜之间的相对距离。

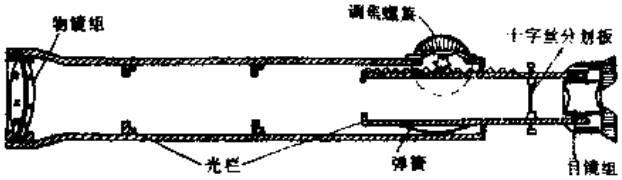



图 4-21

用望远镜观察物体时，由于物体的远近不同，即物距$s_1$在变动，而物镜的焦距是固定的，所以物体的象距$s_2$也将随物距$s_1$的远近而发生变化。如果要求远近不同的物体的象都能落在十字丝平面上，就必须转动调焦螺旋，改变十字丝与物镜的距离，即象距，这个操作通常称为**物镜调焦**（也称为**物镜对光**）。有的测量仪器将望远镜的物镜筒固定在支架上，当转动调焦螺旋时，从外部看来物镜筒不动而目镜筒作相对运动。也有的测量仪器是将望远镜的目镜筒固定在支架上，当转动调焦螺旋时，只是物镜筒作相对运动。

当物体位于无限远时，物体经物镜的象是在焦面上，但实际上物体总是在有限远的，因此它的象实际不会正好在焦面上，而是在它的附近。一般情况下，$s_1$远远大于$f$，由式（4-7）可以看出，当物距$s_1$大于某一个数，而继续增大时，$s_2$的变化则十分缓慢，因此十字丝平面的位置基本上总是处于物镜焦点的附近，而且调焦螺旋的调节范围也不会过大。

至于十字丝平面与目镜的相对位置，则决定于眼睛处于松弛状态时观察物体的距离。对正常的人这个距离是无限远。但在日常生活中人们并不习惯于看无限远的物体，而每个人又各有差异。为了调节这个长度，只能通过调节目镜的物距来实现，因为物距有了变化，象距当然也将发生变化。目镜的观察目标就是物象$ab$，而$ab$与十字丝又处于同一个平面，所以实际上是调节目镜与十字丝分划板间的距离，也就是使目镜在螺旋套筒上进行转动。这项工作称为**目镜调焦**（也称为**目镜对光**）。

## 三、内调焦望远镜

上述外调焦望远镜存在着许多缺点：镜筒很长，因而相应地增加了仪器的重量，同时在使用上也很不方便：调焦时物镜筒或目镜筒必须作相对运动而移进移出，使望远镜在仪器上的重心经常发生变化而不稳定；在构造上不能使整个望远镜密封，水汽和灰尘很容易进入望远镜筒内，影响使用寿命。为了改进这些缺点，现在多使用内调焦望远镜（也称内对光望远镜）。

图4-22表示内调焦望远镜的结构原理。图中$L_A$为相当于外调焦望远镜的物镜，它固定不动。十字丝分划板也固定不动，为要使不同远近物体的象都能落到十字丝分划板上，在$L_A$和它的第二焦点$F_{A2}$之间安置一个凹透镜$L_B$；$L_B$是可以移动的。$L_A$和$L_B$实际上构成了一个复合透镜，从望远镜外面平行于主轴线的光进入$L_A$后，本来应该通过第二焦点$F_{A2}$，由于中途遇到凹透镜$L_B$，光线向外偏折而使光线通过主轴线上的$P$点。这种情况好比有一个透镜$L_C$（图4-22中用虚线表示）代替了$L_A$和$L_B$两个透镜的作用，它们的功效是相等的。透镜$L_C$称为**等效透镜**，它的焦距$f_C$按下式计算：

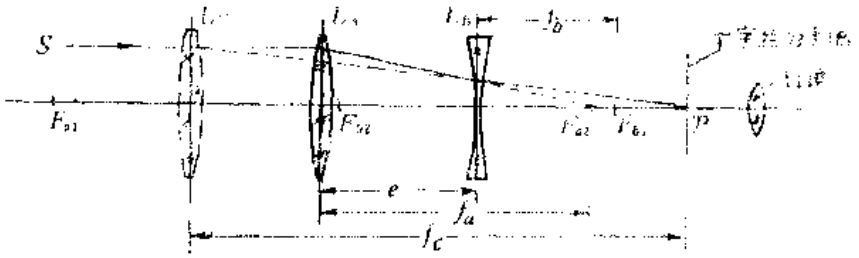



图 4-22

$$f_C = -\frac{f_a f_b}{f_a + f_b - e} \tag{4-8}$$

当改变$L_A$和$L_B$之间的距离$e$时，焦距$f_C$也随之改变。这时移动的虽然是凹透镜$L_B$，但它的效能好象是使等效透镜$L_C$在前后移动。图4-23是一种内调焦望远镜的剖面图，凸透镜为物镜，它和十字丝固定在一个镜筒上，凹透镜固定在另一个镜筒上，并用齿轮与镜筒外面的物镜调焦螺旋连系起来，当转动物镜调焦螺旋时，可以使凹透镜与物镜作相对运动，凹透镜的移动使等效透镜$L_C$（图4-24）的焦距发生变化，故也称凹透镜为调焦透镜。

## 四、望远镜的性能

### （一）放大率

望远镜的放大率，就是从望远镜内所看到的物体的象的视角$\beta$与未通过望远镜直接观察物体的视角$\alpha$之比。即放大率$v$为

$$v = \frac{\beta}{\alpha}$$

如图4-24所示，由于望远镜镜筒的长度相对于望远镜与物体的距离而言是很短的，所

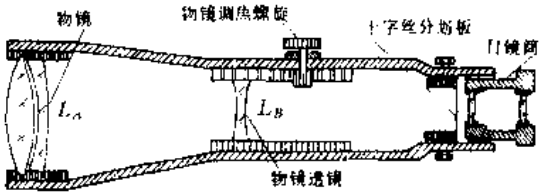



图 4-23

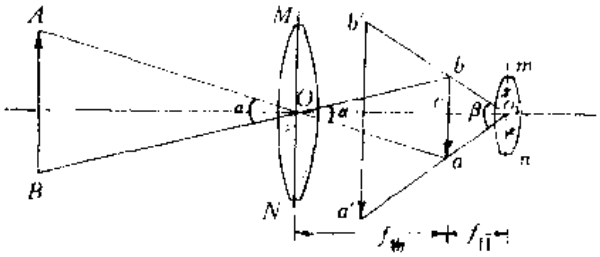



图 4-24

以眼睛在目镜处看物体与在物镜处看物体的两处视角可以认为是相等的，即物镜处的 $\alpha$ 为没有通过望远镜直接看物体的视角。当物体位于无限远时，物体的实象 $ab$ 正位于物镜的焦点上，即 $oc$ 为 $f_{物}$，同时 $ab$ 极其靠近目镜的焦点，因此可认为 $o_1c$ 等于 $f_{目}$。于是由 $\triangle obc$ 和 $\triangle o_1bc$ 得

$$bc = f_{物} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = f_{目} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

但视角一般均很小，$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ 和 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 可分别用 $\frac{\beta}{2}$ 和 $\frac{\alpha}{2}$ 代替，故上式可写成

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_{物}}{f_{目}}$$

所以，放大率为

$$v = \frac{f_{物}}{f_{目}} \tag{4-9}$$

由此可见，为了要得到较大的望远镜放大率，必须尽可能选用长焦距的物镜与短焦距的目镜。计算内调焦望远镜的放大率时，$f_{物}$ 应用等效透镜的焦距。由于式（4-8）中的 $f_A$ 为负值，故分母通常较小，因而算得的 $f_{物}$ 较大，易于获得较大的放大率。

由图4-22可知，放大率相同的望远镜，内调焦望远镜的镜筒长度必定比外调焦望远镜的为短。

此外，内调焦望远镜的等效透镜焦距 $f_A$ 随 $e$ 的大小而发生变化，所以它的放大率是一个变数。通常以物体在无限远处的放大率作为内调焦望远镜的放大率。

（二）视场

望远镜静止不动时，通过望远镜所能看到的空间称为望远镜的视场。可见，望远镜的视场是一个圆锥体，通常用圆锥体的顶角即视角 $\varepsilon$ 来表示（如图4-25）。$\varepsilon$ 角的大小决定于十字丝处光阑 $MN$ 的孔径 $a$ 和它离物镜中心 $O$ 的距离，一般可以认为十字丝处的光阑离物镜中心的距离等于 $f_{物}$，光阑的孔径 $a$ 约等于 $\frac{2}{3}f_{目}$，而 $\varepsilon$ 角一般很小，大约在1.5°～2°之间，若以分表示 $\varepsilon$ 角，则

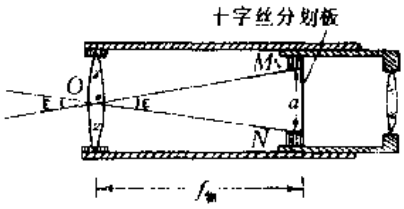



图 4-25

$$\frac{\varepsilon'}{3438}=\frac{a}{f_{物}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{f_{目}}{f_{物}}=\frac{2}{3v}$$

即

$$\varepsilon'\approx\frac{2000}{v} \tag{4-10}$$

可见，望远镜的视场与放大率成反比，而与物镜的孔径无关。望远镜的放大率愈大，则愈能看清远处的目标，但望远镜的视场则愈小，因而寻找目标愈不容易。

（三）分辨率

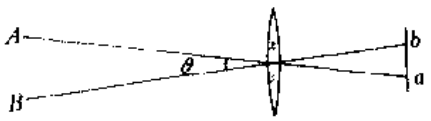



图 4-26

图4-26中，$A$、$B$为两个发光点，光线经过光学系统之后，它们的像$a$、$b$也为两个点。若$A$、$B$逐渐靠近，则$a$、$b$也将逐渐靠近。当$A$、$B$靠近至某一距离时，将发现$a$、$b$已不能被区分为两个点子，此时的$\theta$角称为光学系统的分辨率。

由光的衍射（绕射）理论知道，光线通过圆孔的最小分辨角$\theta$用下式计算：

$$\theta=\frac{1.22\lambda}{D}$$

式中：$\lambda$——光的波长；

$D$——圆孔的直径，以毫米计。

望远镜的分辨率主要是指物镜的分辨率，即光通过物镜后的最小分辨角有多大。取人眼最敏感的黄绿光波长$\lambda=0.00055$mm代入上式并化为秒，得

$$\theta=\frac{140''}{D} \tag{4-11}$$

此$\theta$角经目镜放大之后应与人眼的最小分辨角（60″）相适应。若有一望远镜其物镜的有效孔径为50mm，算得$\theta=2.8''$，即此时图4-26中$A$、$B$两点的象已不能明显的分离为$a$、$b$两个点了。此象经目镜放大40倍后，对人眼构成112″的角度，它远远大于60″，但是人眼仍不能清晰地分辨出$A$、$B$两点，得到的象只能是一个较大而模糊的斑点。相反，如果目镜的放大倍数过小，那末本来仍然可以分辨的两点，因人眼分辨率的限制而不能分为两点，也即物镜分辨率的作用未被充分发挥。在制造望远镜时都考虑了这个关系，就是望远镜的放大率不能按式（4-9）任意选取目镜焦距与物镜焦距来确定，还应注意物镜的有效孔径，使物镜的分辨率和目镜的放大倍数配合适当。目镜的放大倍数与其焦距$f_{目}$成反比。

## 五、望远镜的使用

（一）操作程序

首先将望远镜对向明亮的背景，例如对向白色的墙面，转动目镜进行调焦，使十字丝的分划线能看得十分清楚。正确的操作是由负曲光度向正曲光度（目镜套筒上带有“－、－”的注记）转动目镜，使十字丝由不清晰至清晰的初始位置，然后再瞄准目标用物镜调焦螺旋使目标也能看得十分清楚。为了寻找目标比较方便，一般在望远镜筒的外面都装有瞄准器（准星和照门），可以先用瞄准器将望远镜对准目标之后再使用物镜调焦螺旋。

（二）视差及视差的消除

有时会出现这种情况：当望远镜瞄准目标后，眼睛在目镜处上下左右作少量的移动，发现十字丝和目标有着相对的运动，这种现象称为视差。测量作业是不允许存在视差的，因为这说明尚未精确地瞄准目标。

产生视差的原因是目标通过物镜之后的象没有与十字丝分划板重合，如图4-27（$a$）和（$b$）所示：人眼位于中间位置时，十字丝交点$o$与目标的象$a$点重合，当眼睛略为向上，$o$点又与$b$点重合，当眼睛略为向下时，$o$点便与$c$点重合了。如果连续使眼睛上下移动，就好象看到$o$点在目标的象上面运动一样。图4-27（$c$）是没有视差的情况，此时即不存在上述现象。

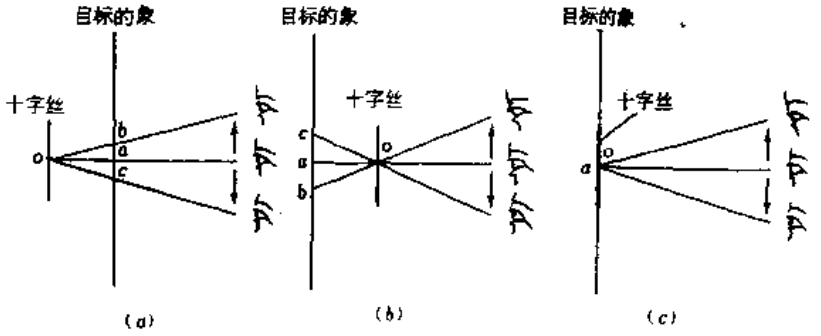



图 4-27

产生视差的原因可能是没有按上述正确的操作程序调焦，也可能在目镜调焦看十字丝时眼睛有一个焦距，而转向瞄准目标看目标的象时，眼睛本身自行调焦用了另一个焦距，因而使象和十字丝不在同一个平面上。

消除视差的方法，首先必须按操作程序依次调焦，其次是要控制眼睛本身不作调焦。能做到后一点的办法是，无论调节十字丝或目标，都不要使眼睛紧张，而要保持眼睛处于松驰状态。

由于望远镜目镜的出瞳直径约为1.5mm，人眼的瞳孔直径约为2.0mm，所以检查有无视差时，眼睛上下左右移动的距离不宜大于0.5mm，否则会因观察物象不清晰而引起错觉。

## § 4-5 水准仪的构造及使用

### 一、水准仪的构造

图4-28为一种S3❶水准仪的外形和各部件名称。

下面分别说明各个部件的作用。

❶ 目前我国水准仪是按仪器所能达到的每公里往返测高差中数的中误差这一精度指标划分，共分四个等级，见右表

| 水准仪系列型号 | S05 | S1 | S3 | S10 |
|---|---|---|---|---|
| 每公里往返测高差中数偶然中误差 | ＜0.5mm | ＜1mm | ＜3mm | ＜10mm |

的三角压板。三角压板的中间是与三脚架连接的螺母，三脚架上的中心连接螺旋即旋入这个螺母之中而使仪器与三脚架连结在一起。

## 二、水准仪的使用

使用水准仪时，将仪器装于三脚架上，安置在选好的测站上，三脚架头大致水平，仪器的各种螺旋都调整到适中位置，以便螺旋向两个方向均能转动。用脚螺旋导致圆水准器的气泡居中，称为粗平；放松制动螺旋水平方向转动望远镜，用准星和照门大致瞄准水准标尺；固定制动螺旋，用微动螺旋使望远镜精确瞄准水准标尺；用微动螺旋使水准管气泡居中，称为精平；最后通过望远镜用十字丝中间的横丝在水准尺上读数。

1. 水准仪的安置

安置水准仪的方法，通常是先将脚架的两条腿取适当位置安置好，然后一手握住第三条腿作前后移动和左右摆动。一手扶住脚架顶部，眼睛注意圆水准器气泡的移动，使之不要偏离中心太远。如果地面比较坚实，如在公路上、城镇中有铺装面的街道上等等可以不用脚踏，如果地面比较松软则应用脚踏实，使仪器稳定。当地面倾斜较大时，应将三脚架的一个脚安置在倾斜方向上，将另外两个脚安置在与倾斜方向垂直的方向，如图4-30所示，这样可以使仪器比较稳固。



图 4-30

2. 粗平

粗平工作是用脚螺旋将圆水准器的气泡导致居中。操作方法如下：用两手分别以相对方向转动两个脚螺旋，此时气泡移动方向与左手大拇指旋转时的移动方向相同，如图4-31（$a$）所示。然后再转动第三个脚螺旋使气泡居中，见图4-31($b$)。实际操作时可以不转动第三个脚螺旋，而以相同方向同样速度转动原来的两个脚螺旋使气泡居中，如图4-31（$c$）所示。在操作熟练以后，不必将气泡的移动分解为两步，而可以转动两个脚螺旋直接导致气泡居中。这时，两个脚螺旋各自的转动方向和转动速度都要视气泡的具体位置而定，按照气泡移动的方向及时控制两手的动作。

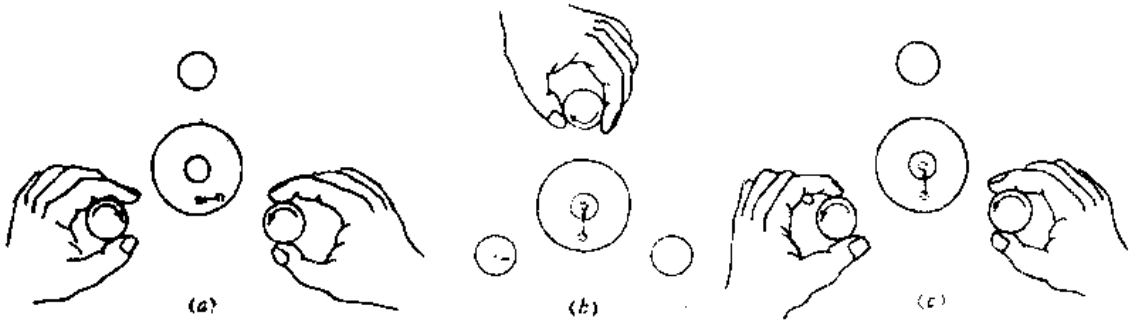



图 4-31

3. 瞄准

在用望眼镜瞄准目标之前，必须先将十字丝调至清晰。瞄准目标应首先使用望眼镜上面的瞄准器，在基本瞄准水准尺后立即用制动螺旋将仪器止动。若望远镜内已经看到水准尺但成象不清晰，可以转动调焦螺旋至成象清晰，注意消除视差。最后用微动螺旋转动望远镜使十字丝的竖丝对准水准尺的中间稍偏一点以便读数。

4. 精平

读数之前应用微倾螺旋调整水准管气泡居中，使视线精确水平。由于气泡的移动有惯性，所以转动微倾螺旋的速度不能快，特别在符合水准器的两端气泡影象将要对齐的时候尤应注意。只有当气泡已经稳定不动而又居中的时候才达到精平的目的。

5. 读数

仪器已经精平后即可在水准尺上读数。为了保证读数的准确性，并提高读数的速度，可以首先看好厘米的估读数（即毫米数），然后再将全部读数报出。一般习惯上是报四个数字，即米、分米、厘米、毫米，并且以毫米为单位，例如1.367m 只须读1367 四个字，2.000m 则读2000，0.068m 则读0068。这对于观测、记录及计算工作都有一定的好处，可以防止不必要的误会和错误。

## § 4-6 自动安平水准仪

用水准仪进行水准测量的特点是，根据水准管的气泡居中而获得水平视线。因此，在水准尺上每次读数都要用倾斜螺旋将水准管气泡调至居中位置，这对于提高水准测量的速度是很大的障碍。为了解决这个问题，必须对仪器的结构进行一些改革。本世纪40年代研制出了一种自动安平水准仪。这种水准仪上没有水准管和微倾螺旋，使用时只须将水准仪上的圆水准器的气泡居中，在十字丝交点上读得的便是视线水平时应该得到的读数。因此，使用这种自动安平水准仪可以大大缩短水准测量的工作时间；同时由于水准仪整置不当、地面有微小的振动或脚架的不规则下沉等等造成的视线不水平，可以由“补偿器”迅速调整而得到正确的读数，这样也就提高了水准测量的精度。

### 一、自动安平水准仪的原理

最早对自动安平水准仪的设想可以用图4-32表示。用一个重物与望远镜筒连接，并能以某个点为轴一起旋转；如果在结构上做到当重物由于重力作用而静止时，视线就在水平位置，那末使用这样的仪器进行水准测量将随时保持视线水平。

由于这样制造的仪器不够灵巧，所以现在生产的自动安平水准仪都不采用这种结构；而是在望远镜中设置一个补偿装置，当视准轴虽已倾斜（一般倾斜度不太大），通过物镜光心的水平光线经补偿装置后仍能通过十字丝交点。

如图4-33所示，视准轴已倾斜了一个 $\alpha$ 角，为使经过物镜光心的水平光线能通过十字丝交点，可采用以下两个办法：

其一，在光路中装置一个“补偿器”，使光线偏转一个 $\beta$ 角而通过十字丝交点 $A$；由

图4-36中虚线框内的部分，即是补偿器的主要零件，它由两个直角棱镜和一个屋脊棱镜构成。两个直角棱镜$B$用交叉的金属片$C$吊挂着，以零件$A$固定在望远镜上，如图4-37所示。当望远镜有微小的倾斜时，直角棱镜在重物（活塞$P$）的重力作用下，将与望远镜作相对的偏转运动，偏转方向刚好与望远镜的倾斜方向相反。图4-38是望远镜的视准轴向下倾斜时直角棱镜的偏转情况。粗线代表棱镜未受重力作用时的位置，直角棱镜将偏转望远镜筒的倾斜角$\alpha$，细线为棱镜受重力作用以相反方向偏转$\gamma$角。选择合适的悬挂材料及重心位置等等，可使$\gamma=\alpha$。

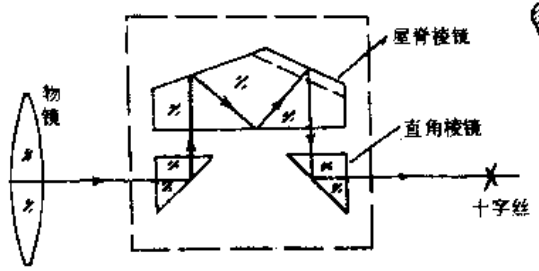



图 4-36

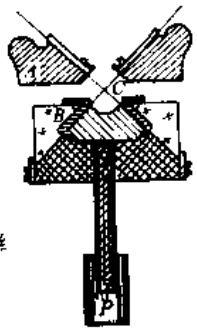



图 4-37

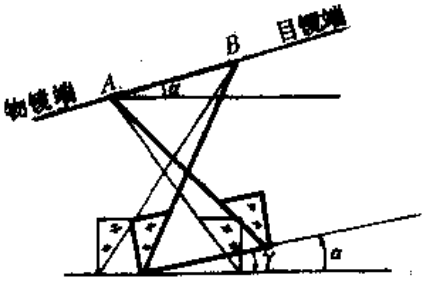



图 4-38

当视准轴水平时，它的光路见图4-36。水平光线进入物镜后经第一个直角棱镜反射到屋脊棱镜，在屋脊棱镜内作三次反射到达另一个直角棱镜，又被反射一次最后通过十字丝的交点。

再看视准轴倾斜后光线的路径。为了叙述得较为详细，将光路的变化分作下述两种情况：一种，如图4-39表示的是视准轴已经倾斜而直角棱镜也随着倾斜，即“补偿器”没有发生作用的光路。图中实线表示与倾斜的视准轴重合的光线，虚线表示通过物镜光心的水平光线，水平光线经棱镜几次反射之后并不通过十字丝交点$A$，而是通过$B$点。两条光线间的角度即为视准轴倾斜的角度$\alpha$。第二种（图4-40）为“补偿器”发生作用后的光路，直角棱镜在重物的重力作用下产生了偏转，因此经棱镜反射后的光线也将偏转。图4-40中用粗线表示水平光线的路径，它和在图4-39中用虚线表示的光路之间的夹角为$\beta$。“补偿器”的作用是希望$\beta$角的大小能使水平光线（粗线）刚好通过十字丝的交点$A$。DSZ3自动安平水准仪的补偿器设计满足下述条件，即水平光线偏转角$\beta$为视准轴倾斜的四倍，$\beta=4\alpha$。在一般自动安平仪器中，其结构上通过适当选择簧片材料、截面尺寸、几何图形及活动部分的重心位置可以使直角棱镜由于望远镜倾斜而产生的偏转角正好等于视准轴的

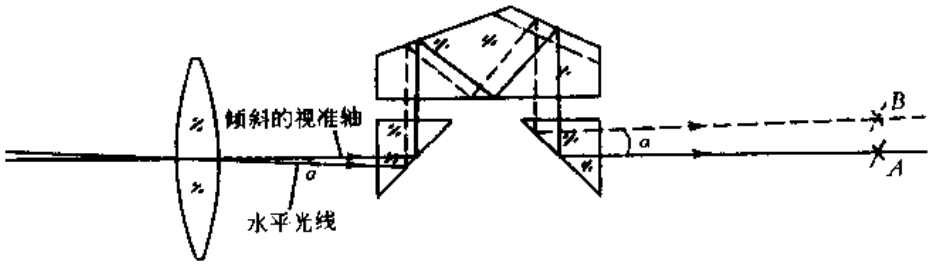



图 4-39

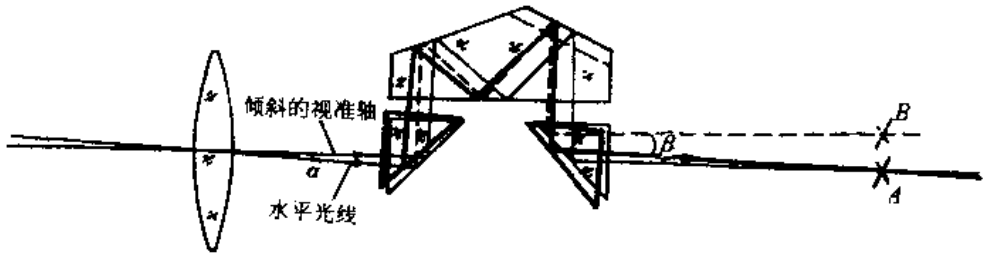



图 4-40

倾斜角$\alpha$。由光线的全反射理论知道，当反射面旋转一个角度$\alpha$时，原来被反射的光线将与其行进方向偏转$2\alpha$大小的角度，如图4-41所示。因此水平光线经第一个直角棱镜产生$2\alpha$的偏转，经第二个直角棱镜又产生$2\alpha$的偏转，两次偏转的和为$4\alpha$，即$\beta=4\alpha$。适当地选择补偿器的位置，即式（4-12）中的$s$大小，可使水平光线正好通过十字丝的交点，达到“补偿”目的。

### 三、移动十字丝的“补偿”装置

此种装置原理如图4-42所示。望远镜视准轴成竖直状态，十字丝分划板用四根吊丝挂着，当望远镜倾斜时，十字丝分划板将受重力作用而摆动。令$l$为四根吊丝的有效摆动半径长度，设计时使之与物镜焦距$f_{物}$相等。恰当地选择吊丝的悬挂位置，将能使通过十字丝交点的铅垂线始终通过物镜的光心，即视准轴始终是铅垂位置。两个反光镜构成45°角，视准轴经两次反射后射出望远镜的光线必是水平光线，因此十字丝交点上始终得到水平光线的读数。

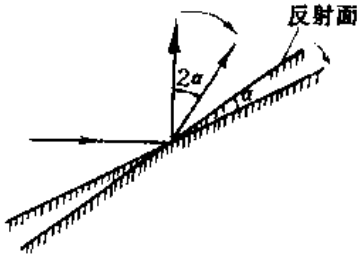



图 4-41

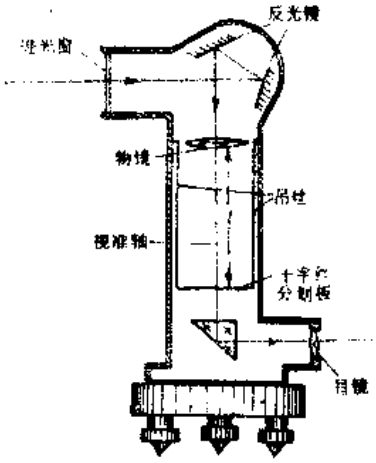



图 4-42

### 四、阻尼器

上述两种补偿装置都有一个因重力作用的“摆”。为使“摆”的摆动能迅速静止，必须装一个“阻尼器”。目前多采用空气“阻尼器”，也有的采用磁“阻尼器”。

图4-43（$a$）为空气“阻尼器”的剖面示意图。活塞$P$置于一个气缸中并与摆动杆相连；当它在气缸中摆动时，由于气孔很小、排气速度很慢，气缸中的空气将产生阻力，因此能迅速使活塞停止摆动。实际装置时，两个气孔已用螺钉堵死，只在检修时才放开。气缸中的空气则由旁边的窄缝（图4-43（$b$））排出和吸进。

图4-44为磁阻尼器的工作原理。在摆动杆上连接一金属阻尼板，金属阻尼板位于两个永久磁铁间的窄缝中，并可左右移动，当摆动杆的摆动而使阻尼板移动时，在磁场的作用下将产生电荷，而电荷与磁场的作用又产生一个与阻尼板移动相反方向的力，它将阻止阻尼板的移动，从而使与阻尼板相联的摆动杆迅速静止。

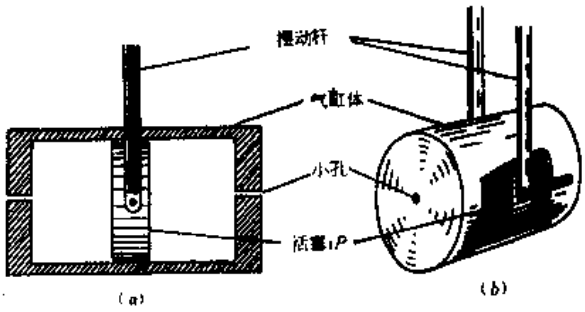



图 4-43

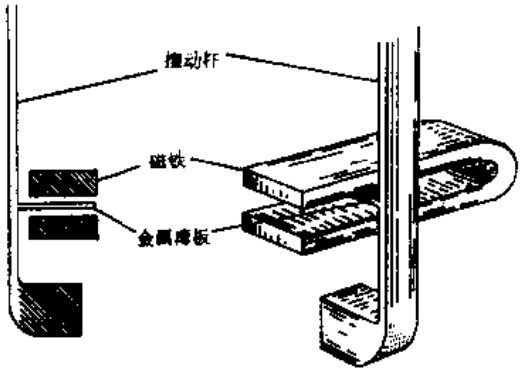



图 4-44

# 第五章　水准测量

## §5-1　概　　述

水准测量的主要目的是测出一系列点的高程。通常称这些点为水准点。从水准点高程数值的大小，能对一定范围内地表高低有个完整的了解。所以水准点对地表形状、地壳变化等方面的科学研究，以及对各类经济建设的设计、施工都是很重要的。

我国水准点的高程是从青岛水准原点起算的。全国范围内国家等级水准点的高程都属于这个统一的高程系统。

无论是科学研究或是经济建设对水准点的密度和水准点高程的精度要求，都随着具体任务的不同而有差别。为了适应各方面的需要，国家测绘局对全国的水准测量作了统一的规定，按不同的要求订了四个等级。这四个等级，以精度分：一等水准测量最高，四等水准测量最低；以用途分：一、二等水准测量主要用于科学研究，也作为三、四等水准测量的起算根据，三、四等水准测量主要用于国防建设、经济建设和地形测图的高程起算。由于主要用途及精度要求不同，因此对各等级水准测量的路线布设、点的密度、使用仪器以及具体操作在规范中都有相应的规定。

为了进一步满足工程建设和地形测图的需要，以国家水准测量的三、四等水准点为起始点，尚需布设工程水准测量或图根水准测量，通常统称为普通水准测量（也称等外水准测量）。普通水准测量的精度较国家等级水准测量低一些，水准路线的布设及水准点的密度可根据具体工程和地形测图的要求而有较大的灵活性。此外，对水准测量有特殊要求的某些工程（比如大型精密机械的基础施工，它们对高差的精度要求特别高），有关部门还有一些特殊的作业规定。

有时在一个作业地区内找不到国家水准点，那末也可根据具体情况选择一个点，给予假定高程，整个测区的高程便以这个点为起始点。需要注意的是，这种假定高程的点，在构成整体的一个地区只能选择一个，不可任意假设几个点子的高程，否则在推算高程时会发生矛盾。

无论属于何种类型的水准测量，它们的作业原理是一样的。本章仅对S3 水准仪的检校，以及用它进行水准测量的基本作业方法等一些有关问题加以介绍。

## §5-2　水准路线的拟订

### 一、计划的拟订

进行水准测量必须先作技术设计，其目的在于根据作业的具体任务要求，从全局考虑

统筹安排，使整个水准测量任务能够顺利地进行。此项工作的好坏，不仅直接影响到水准测量的速度、精度和成果的使用，而且还影响到与此有关的工程建设速度和质量，因此必须认真负责地作好水准路线的拟订工作。

水准路线拟订工作的内容包括：水准路线的选择，水准点位置的确定。

选择水准路线的基本出发点是必须满足具体任务的需要。例如施测国家三、四等水准测量，它们必须以高一等级的水准点为起始点，并较为均匀地分布水准点的位置。对厂矿建设和农田水利工程的水准测量，由于在高程精度和水准点密度等方面有特殊的要求，因此有关部门均制定有相应的规范，拟订水准路线时应按规范要求进行。

拟订水准路线一般首先要收集现有的较小比例尺地形图，收集测区已有的水准测量资料，包括水准点的高程、精度、高程系统、施测年份及施测单位。设计人员还应亲自到现场勘察，核对地形图的正确性，了解水准点的现状，例如是保存完好还是已被破坏。在此基础上根据任务要求确定如何合理使用已有资料，然后进行图上设计。一般说来，对精度要求高的水准路线应该沿公路、大道布设，精度要求较低的水准路线也应尽可能沿各类道路布设，目的在于路线通过的地面要坚实，使仪器和标尺都能稳定。为了不增多测站数，并保证足够的精度，还应使路线的坡度较小。水准点的位置应在拟订水准路线时同时考虑；对于较大测区，如果水准路线布成网状，则应考虑平差计算的初步方案，以便内业工作顺利进行。

图上设计结束后，绘制一份水准路线布设图；图上按一定比例绘出水准路线、水准点的位置，注明水准路线的等级、水准点的编号。

## 二、埋石

水准点的标定工作，通常称为埋石。选择埋设水准点的具体地点，应能保证标石稳定、安全、长期保存，而且又便于使用。较常用的水准点标石用混凝土制成。永久性的称基本水准标石，其次称普通水准标石。标石中间均嵌有水准标志。图5-1为瓷质水准标志，图5-2为金属水准标志。它的纵断面中间的圆顶顶部就是应测定高程的位置。基本水准标石分

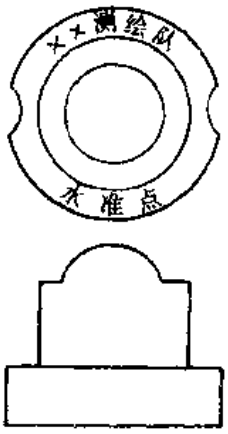



图 5-1

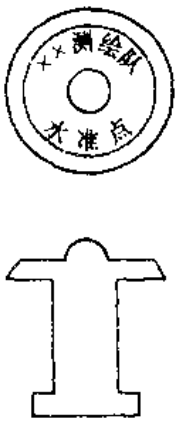



图 5-2

两个部分，一个是方形的底盘，另一个是柱石。底盘放在下面，柱石放在底盘上面。除柱石顶部嵌水准标志之外，在底盘上也要嵌一个水准标志。水准测量时应测出两个标志的高程。它的大小和埋设的一般规格见图5-3所示。普通水准标石只有柱石，它的大小和埋设的一般规格见图5-4所示。

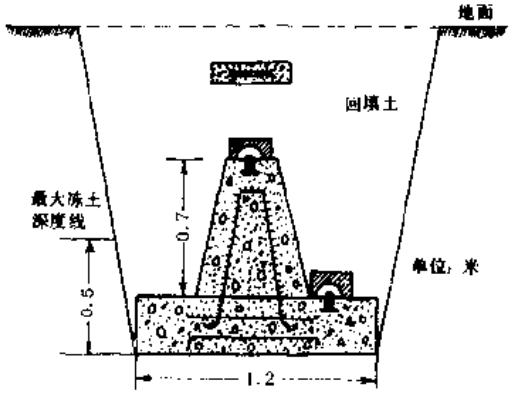



图 5-3

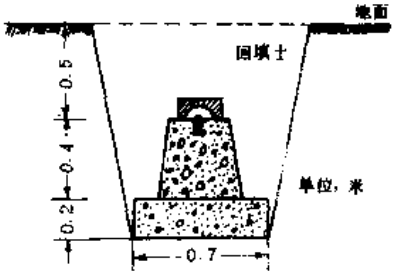



图 5-4

埋石工作最好采用现场浇灌。水准测量的成果通常都取至毫米，因此标石的稳定性十分重要。现场浇灌比预制成品再挖坑掩埋效果要好一些。此外，水准测量作业必须在埋石之后间隔一段时间进行，万一标石有下沉等移动也就有了一个稳定的过程。

在城镇和厂矿区，还可以采用墙脚水准标志，选择稳固建筑物墙脚的适当高度埋设墙脚水准标志作为水准点。图5-5表示墙脚水准标志的形状及其埋设情况。

为便于寻找水准点，所有水准点都应绘制水准点点之记；一般应在埋石之后立即绘制。水准点点之记应作为水准测量的成果妥为保存。图5-6为一个点之记的示例。

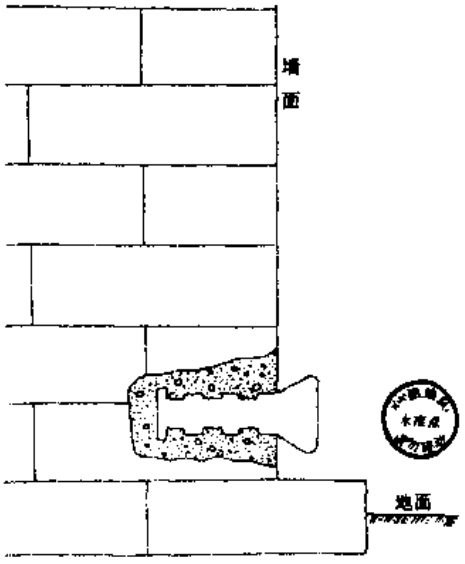



图 5-5

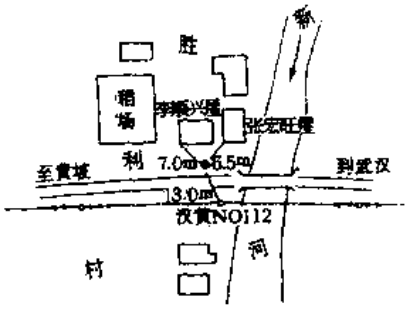



图 5-6

## § 5-3 水准测量的施测

水准路线的布设分单一水准路线和水准网。本节仅讲述水准测量的外业施测和单一水准路线的内业计算方法。水准网的内业计算方法将在第六章中介绍。

### 一、单一水准路线的种类

单一水准路线的形式有三种，即：附合水准路线、支水准路线、闭合水准路线。

从一个已知高程的水准点Ⅲ18（例如国家某一级的水准点）起，沿一条路线进行水准测量，以测定另外一些水准点的高程，最后连测到另一个已知高程的水准点Ⅲ19，如图5-7所示，称为**附合水准路线**。

如果最后没有连测到已知高程的水准点，则这样的水准路线称为**支水准路线**。为了对测量成果进行检核，并提高成果的精度，单一水准支线必须进行往返测量。此外尚应限制其路线的总长，一般地形测量中不能超过4km。

从一已知高程的水准点Ⅲ18出发，沿一条环形路线进行水准测量，测定沿线若干水准点的高程，最后又回到水准点Ⅲ18，如图5-8所示，称为**闭合水准路线**。

### 二、水准网的形式

若干条单一水准路线相互连接构成图5-9的形状，称为**水准网**。单一路线相互连接的点称为**结点**，如图5-9（*a*）中的Ⅳ06、Ⅳ12、Ⅳ22和图5-9（*b*）中的Ⅳ04、Ⅳ09、Ⅳ15、Ⅳ29。图5-9（*a*）有四个起始点，称附合水准网，图5-9（*b*）只有一个起始点，称独立水准网。

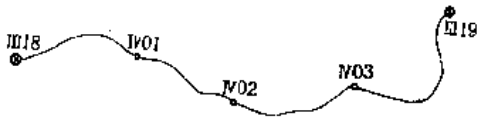



图 5-7

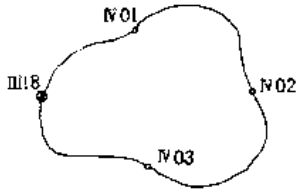



图 5-8

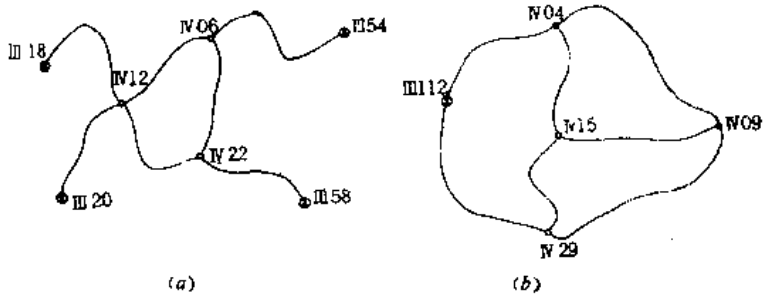



图 5-9

## 三、水准测量的外业施测

### （一）普通水准测量

施测程序如下：将水准尺立于已知高程的水准点上作为后视，水准仪置于施测路线附近合适的位置，在施测路线的前进方向上取仪器至后视大致相等的距离放置尺垫、在尺垫上竖立水准尺作为前视。观测员将仪器用圆水准器粗平之后瞄准后视标尺，用微倾螺旋将水准管气泡居中，用中丝读后视读数读至毫米。掉转望远镜瞄准前视标尺，此时水准管气泡一般将会偏离少许，将气泡居中，用中丝读前视读数。记录员根据观测员的读数在手簿中记下相应的数字，并立即计算高差。以上为第一个测站的全部工作。

第一站结束之后，记录员招呼后标尺员向前转移，并将仪器迁至第二测站。此时，第一测站的前视点便成为第二测站的后视点。依第一站相同的工作程序进行第二站的工作依次沿水准路线方向施测直至全部路线观测完为止。

表5-1为普通水准测量的手簿记录和有关的高差计算示例。

表5-1中第3栏视距值由上丝、下丝读数之差乘以100而得[1]。第8栏为相应点号的观测高程，转点可不计算。

水准测量手簿　　表 5-1

观测：_____

测自Ⅳ3005 至 Ⅳ3018　　_____年_____月_____日　记录：_____

| 测站 | 点号 | 视距 (m) | 后视 | 前视 | 高差 + | 高差 − | 高程 (m) | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | Ⅳ3005 | 56 | 0347 | | | 1284 | 46.215 | |
| | 转点 | 54 | | 1631 | | | | |
| 2 | 转点 | 72 | 0306 | | | 2318 | | |
| | 101 | 74 | | 2624 | | | 42.613 | |
| 3 | 101 | 98 | 0833 | | | 0683 | | |
| | 转点 | 96 | | 1516 | | | | |
| 4 | 转点 | 41 | 1528 | | +1027 | | | |
| | 转点 | 43 | | 0501 | | | | |
| 5 | 转点 | 79 | 2368 | | +1674 | | | |
| | 102 | 77 | | 0694 | | | 44.631 | |

### （二）三、四等水准测量

国家三、四等水准测量的精度要求较普通水准测量的精度高，其技术指标见表5-2。三、四等水准测量的水准尺，通常采用木质的两面有分划的红黑面双面标尺。表5-2中的黑红面读数差，即指一根标尺的两面读数去掉常数之后所容许的差数。

[1] 视距测量的原理，在第十一章中讲述。

表 5-2

| 等　级 | 仪器类型 | 标准视线长度（m） | 后前视距差（m） | 后前视距差累计（mm） | 黑红面读数差（mm） | 黑红面所测高差之差（mm） | 检测间歇点高差之差（mm） |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 三　等 | S3 | 75 | 2.0 | 5.0 | 2.0 | 3.0 | 3.0 |
| 四　等 | S3 | 100 | 3.0 | 10.0 | 3.0 | 5.0 | 5.0 |

三、四等水准测量在一测站上水准仪照准双面水准尺的顺序为：

1.照准后视标尺黑面，按视距丝和中丝读数；

2.照准前视标尺黑面，按视距丝和中丝读数；

3.照准前视标尺红面，按中丝读数；

4.照准后视标尺红面，按中丝读数。

这样的顺序简称为“后前前后”（黑、黑、红、红）。

四等水准测量每站观测顺序也可为后—后—前—前（黑、红、黑、红）。

无论何种顺序，视距丝和中丝的读数均应在水准管气泡居中时读取。

四等水准测量的观测记录及计算的示例，见表5-3。表内带括号的号码为观测读数和计算的顺序。（1）～（8）为观测数据，其余为计算所得。

三（四）等水准测量观测手簿

表 5-3

测自　　至

时刻始 8 时05分

末　时　分

1978年 8 月 2 日

天气：晴

呈象：清晰

| 测站编号 | 后尺 下丝 / 上丝 | 前尺 下丝 / 上丝 | 方向及尺号 | 标尺读数 黑面 | 标尺读数 红面 | K＋黑减红 | 高差中数 | 备考 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 后距 | 前距 | | | | | | |
| | 视距差 $d$ | $\Sigma d$ | | | | | | |
| | (1) | (5) | 后 | (3) | (8) | (10) | | |
| | (2) | (6) | 前 | (4) | (7) | (9) | | |
| | (12) | (13) | 后—前 | (16) | (17) | (11) | | |
| | (14) | (15) | | | | | | |
| I | 1571 | 0739 | 后 5 | 1384 | 6171 | 0 | | |
| | 1197 | 0363 | 前 6 | 0551 | 5239 | -1 | | |
| | 374 | 376 | 后—前 | +0833 | -0932 | -1 | +0832.5 | |
| | -0.2 | -0.2 | | | | | | |

续表

| 测站编号 | 后尺 下丝 / 上丝 / 后距 / 视距差 $d$ | 前尺 下丝 / 上丝 / 前距 / $\Sigma d$ | 方向及尺号 | 标尺读数 黑面 | 标尺读数 红面 | $K$ + 黑减红 | 高差中数 | 备考 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2121 | 2196 | 后 6 | 1934 | 6621 | 0 | | |
| | 1747 | 1821 | 前 5 | 2008 | 6796 | -1 | | |
| | 374 | 375 | 后－前 | -0074 | -0175 | +1 | -0074.5 | |
| | -0.1 | -0.3 | | | | | | |
| 3 | 1914 | 2056 | 后 5 | 1726 | 6513 | 0 | | |
| | 1539 | 1678 | 前 6 | 1866 | 6554 | -1 | | |
| | 375 | 377 | 后－前 | -0140 | -0041 | +1 | -0140.5 | |
| | -0.2 | -0.5 | | | | | | |
| 4 | 1965 | 2141 | 后 6 | 1832 | 6519 | 0 | | |
| | 1706 | 1874 | 前 5 | 2007 | 6793 | +1 | | |
| | 265 | 267 | 后－前 | -0175 | -0274 | -1 | -0174.5 | |
| | -0.2 | -0.7 | | | | | | |
| 5 | 0089 | 0124 | 后 5 | 0054 | 4842 | -1 | | |
| | 0020 | 0050 | 前 6 | 0087 | 4775 | -1 | | |
| | 69 | 74 | 后－前 | -0033 | +0067 | 0 | -0033.0 | |
| | -0.5 | -1.2 | | | | | | |

1. 测站上的计算与校核

高差部分：

$$(9)=(4)+K-(7)$$

$$(10)=(3)+K-(8)$$

$$(11)=(10)-(9)$$

(10) 及 (9) 分别为后、前视标尺的黑红面读数之差，(11) 为黑红面所测高差之差。

$K$ 为后、前视标尺红黑面零点的差数；表5-3的示例中，5号尺之 $K=4787$，6号尺之 $K=4687$。

$$(16)=(3)-(4)$$

$$(17)=(8)-(7)$$

(16)为黑面所算得的高差，(17)为红面所算得的高差。由于两根尺子红黑面零点差不同，所以(16)并不等于(17)(表5-3的示例(16)与(17)应相差100)因此(11)尚可作一次检核计算，即

$$(11)=(16)\pm 100-(17)$$

视距部分：

$$(12)=(1)-(2)$$

$$(13)=(5)-(6)$$

$$(14)=(12)-(13)$$

$$(15)=\text{本站的}(14)+\text{前站的}(15)$$

(12)为后视距离，(13)为前视距离，(14)为前后视距离差，(15)为前后视距累积差。

2.观测结束后的计算与检核

高差部分：

$$\Sigma(3)-\Sigma(4)=\Sigma(16)=h_{黑} \qquad \Sigma[(3)+K]-\Sigma(8)=\Sigma(10)$$

$$\Sigma(8)-\Sigma(7)=\Sigma(17)=h_{红} \qquad \Sigma[(4)+K]-\Sigma(7)=\Sigma(9)$$

$$h_{中}=\frac{1}{2}(h_{黑}+h_{红})$$

$h_{黑}$、$h_{红}$分别为一测段黑面、红面所得高差；$h_{中}$为高差中数。

视距部分：

末站 $(15)=\Sigma(12)-\Sigma(13)$　　总视距 $=\Sigma(12)+\Sigma(13)$

若测站上有关观测限差超限，在本站检查发现后可立即重测。若迁站后才检查发现，则应从水准点或间歇点起，重新观测。

## 四、内业计算

观测值与重复观测值之差，或与已知点的已知数据的不符值，通称为闭合差。常用符号$f_h$表示高差闭合差。

对于支水准路线的往、返观测闭合差$f_h$为

$$f_h=\Sigma h_{往}+\Sigma h_{返} \tag{5-1}$$

对于附合水准路线为

$$f_h=\Sigma h_{测}-\Sigma h_{理}$$

或如图5-7情况

$$f_h=H_{Ⅲ18}+\Sigma h_{测}-H_{Ⅲ19} \tag{5-2}$$

若上式中的$H_{Ⅲ19}$用$H_{Ⅲ18}$代替，则构成闭合路线的闭合差为

$$f_h=\Sigma h_{测} \tag{5-3}$$

可见闭合路线的闭合差是附合路线的一个特例。

产生闭合差的原因很多。但闭合差的数值必须有一个限度，例如表5-4所示，作业规范

表 5-4

| 等级 \ 路线种类 | 路线往返测闭合差（mm） | 附合路线或闭合路线闭合差（mm） |
|---|---|---|
| 二等水准测量 | $\pm 12\sqrt{S}$ | $\pm 12\sqrt{L}$ |
| 四等水准测量 | $\pm 20\sqrt{S}$ | $\pm 20\sqrt{L}$ |
| 普通水准测量 | $\pm 40\sqrt{S}$ | $\pm 40\sqrt{L}$ |

注：$S$ 为相邻两水准点间的距离，以公里为单位；

$L$ 为附合路线或闭合路线的长度，以公里为单位。

规定，超过了这个限度则应检查原因，返工重测。

水准测量中，消除闭合差的原则一般按距离成正比地改正各段的观测高差。

表5-5为一附合的四等水准路线计算示例。该水准路线的闭合差为

$$f_h = -20\text{mm},$$

路线总长为4km。允许闭合差为

$$f_{h允许} = \pm 20\sqrt{4} = +40\text{mm}$$

因 $|-20|$ 小于 $|\pm 40|$，故该观测值符合要求。

高程误差配赋表　　表 5-5

| 点号 | 距离（km）（或测站数） | 高差中数 | 改正数（mm） | 改正后的高差（m） | 改正后点之高程（m） |
|---|---|---|---|---|---|
| Ⅲ18 | 0.82 | 0.250 | +4 | +0.254 | 10.000 |
| Ⅳ01 | 0.54 | 0.302 | +3 | +0.305 | 10.254 |
| Ⅳ02 | 1.24 | -0.472 | +6 | -0.466 | 10.559 |
| Ⅳ03 | 1.40 | -0.357 | +7 | -0.350 | 10.093 |
| Ⅲ19 | | | | | 9.743 |

$\Sigma S = 4\text{km}$　　$f_h = H_{Ⅲ18} + \Sigma h_{测} - H_{Ⅲ19} = -0.020$

每公里改正数为 $-\frac{f_h}{\Sigma S} = -\frac{-20}{4} = +5.0\text{mm}$

通常规定，将$h_{测}$加上改正数$v$之后，闭合差$f_h$即应被消除，即

$$\Sigma(h_{测} + v) - \Sigma h_{理} = 0$$

$$\Sigma v + \Sigma h_{测} - \Sigma h_{理} = 0$$

$$\Sigma v + f_h = 0$$

$$\Sigma v = -f_h$$

即，观测高差的改正数与闭合差的符号相反。

第$i$测段的改正数$v_i$按下式计算：

$$v_i = \frac{-f_h}{\Sigma S} \cdot S_i \qquad (5-4)$$

高差改正之后还应检查改正后高差的总和是否与理论值相等。相等则证明计算无误，然后顺序推算各点的高程。求得最后一个已知点的高程时，再次检查与已知值是否相等，以保证各点的高程正确无误。

## §5-4 水准仪的检验与校正

根据水准测量的基本原理，要求水准仪能具有一条水平视线。这个要求是水准仪构造上的一个极为重要的问题。此外还要创造一些条件使仪器便于操作。例如增设了一个圆水准器，利用它使水准仪初步安平。在正式作业之前必须对水准仪加以检验，视其是否满足所设想的要求。对某些不合要求的条件，应对仪器加以必要的校正，使之符合要求。

### 一、水准仪应满足的条件

水准仪的主要轴线见图5-10。

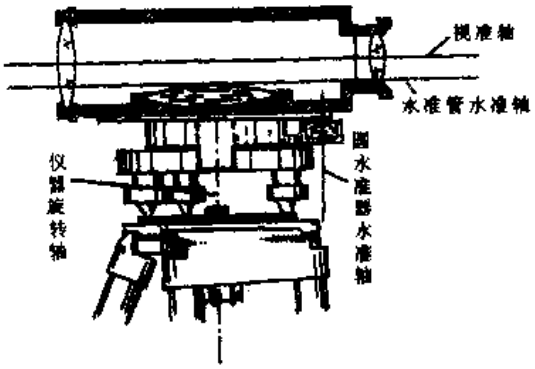


图 5-10

（一）水准仪应满足的主要条件

水准仪应满足的主要条件有两个：一是水准管的水准轴应与望远镜的视准轴平行，二是望远镜的视准轴不因调焦而变动位置。

第一个主要条件的要求如果不满足，那末水准测量的水准管气泡居中后，即水准轴已经水平而视准轴却未水平，不符合水准测量基本原理的要求。

第二个主要条件是为满足第一个条件而提出的。如果望远镜在调焦时视准轴位置发生变动，就不能设想在不同位置的许多条视线都能够与一条固定不变的水准轴平行。望远镜的调焦在水准测量中是绝不可免的，因此必须提出此项要求。

（二）水准仪应满足的次要条件

水准仪应满足的次要条件也有两个：一是圆水准器的水准轴应与水准仪的旋转轴平行；二是十字丝的横丝应当垂直于仪器的旋转轴。

第一个次要条件的目的在于能迅速地整置好仪器，提高作业速度；也就是当圆水准器的气泡居中时，仪器的旋转轴已基本处于竖直状态，使仪器旋转至任何位置都易于导致水准管的气泡居中。

第二个次要条件的目的是当仪器旋转轴已经竖直，那末在水准尺上的读数可以不必严格用十字丝的交点而可以用交点附近的横丝。

### 二、水准仪的检验与校正

上述第二个主要条件，在于装置望远镜的透镜组和十字丝的位置是否正确，其中又以移动调焦透镜的机械结构的质量为主要因素，因此一般应由工厂保证。对用于国家三、四等及普通水准测量的水准仪，应经常检验第一个主要条件和两个次要条件。对用于国家

一、二等水准测量的精密水准仪尚应定期对第二个主要条件进行检验。本节只讲述第一个主要条件和两个次要条件的检验原理、检验和校正方法。

检验、校正的顺序应按下述原则进行：即，前面检验的项目不受后面检验项目的影响。

（一）圆水准器的水准轴应与仪器的旋转轴平行的检验与校正

1.检验原理

图5-11中的$V$为仪器旋转轴，$l$为圆水准器的水准轴，假设它们互不平行而有一交角$\alpha$，那末当气泡居中时，水准轴$l$是竖直的，仪器旋转轴$V$则与竖直位置偏差$\alpha$角，见图5-11（$a$）。将仪器旋转180°（5-11（$b$）），由于仪器旋转时是以$V$为旋转轴，即$V$的空间位置是不动的。仪器旋转之后，水准器中的液体受重力作用，气泡仍将处于最高处，而圆水准器的水准轴将在$l'$处。由图5-11($b$)中可以看出水准轴$l'$与竖直线$l''$之间的角度为$2\alpha$，这时，水准器的气泡已不再居中而偏歪到了另外一边，气泡偏移的弧长所对的中心角即等于$2\alpha$。

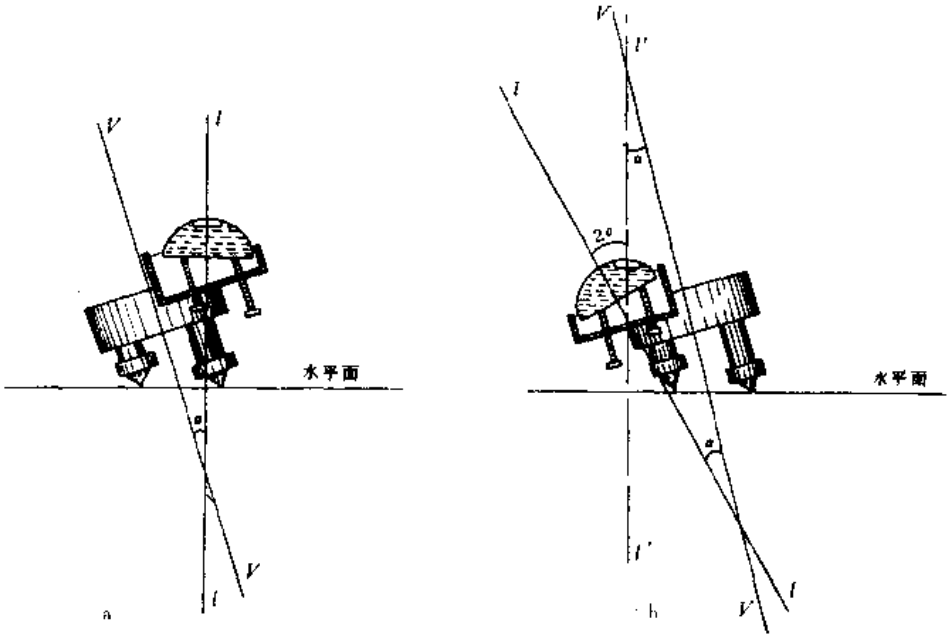



图 5-11

2.检验方法

先用脚螺旋将圆水准器气泡居中，然后将仪器旋转180°，若气泡仍在居中位置，则表明此项条件已得到满足；若气泡有了偏移，则表明条件没有满足。根据上述检验原理可知，气泡偏移的长度代表了仪器旋转轴和水准轴的交角的两倍。

3.校正

如果在检验时发现仪器旋转轴与水准轴不平行，则应进行校正。校正工作可用装在圆水准器下面的校正螺钉来实现。校正螺钉一般有三个，见图5-12。操作时，按整平圆水准器那样的方法，分别调动三个校正螺钉使气泡向居中位置移动偏离长度的一半；如果操作完全准确，经过校正之后，水准轴$l$将与仪器旋转轴$V$平行，见图5-13（$a$）。如果此时用

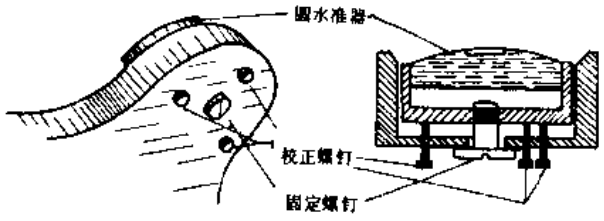



图 5-12

脚螺旋将仪器整平，则仪器旋转轴 $V$ 处于竖直状态，见图5-13（$b$）。实际上由于各种原因，例如拨动校正螺钉时振动了仪器，估计气泡的移动长度不准确等，校正工作要反复进行多次。而且每次校正工作都必须首先整平圆水准器，然后旋转仪器180°，观察气泡的位置，确定是否需要再进行校正，直到将仪器整平后旋转仪器至任何位置，气泡都始终居中，校正工作才算结束。

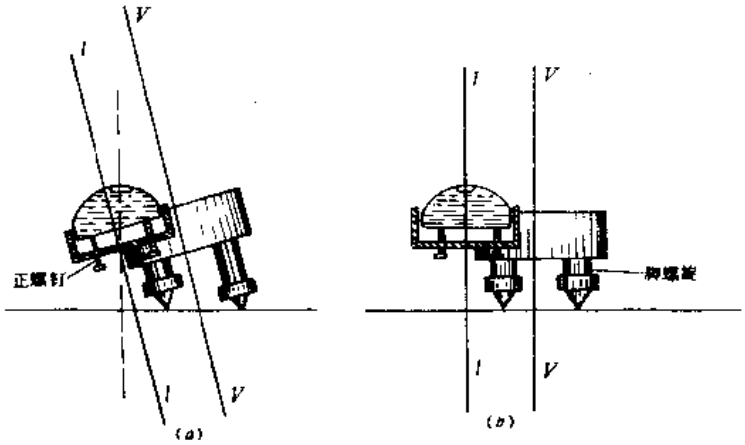



图 5-13

（二）十字丝横丝应与仪器旋转轴垂直的检验和校正

1. 检验原理

设十字丝横丝已与仪器旋转轴垂直，那末通过十字丝的横丝必定可作一平面与仪器旋转轴垂直；当仪器旋转轴竖直而旋转时，这个平面将在水平位置且不会发生变化。

由此可见，如果有一个点子，它和垂直于仪器旋转轴且通过十字丝横丝的平面重合，则当仪器旋转时这个点将始终在这个平面上。

具有微倾螺旋的水准仪，其视准轴虽并不一定垂直于仪器旋转轴，但与垂直于仪器旋转轴平面的偏差角却不会太大，因此可以认为视准轴是垂直于仪器旋转轴的。由此出发，如果十字丝横丝与视准轴组成的平面垂直于仪器旋转轴，则条件得到满足；反之，若此平面不垂直于仪器旋转轴，那末条件就不满足。

2. 检验方法

先用十字丝横丝的一端瞄准一个点，如图5-14（$a$）中的 $A$ 点，然后用微动螺旋缓慢地转动望远镜，观察 $A$ 点在视场中的移动轨迹；如果 $A$ 点始终能在横丝上移动，则说明十字丝的横丝已与仪器旋转轴垂直；如果 $A$ 点离开了横丝，如图5-14（$b$）中的虚线所示，则说明横丝没有与仪器旋转轴垂直，而是这条虚线的位置与仪器旋转轴垂直。

3. 校正

如果经过检验，条件不满足，则应进行校正。校正工作用固定十字丝环的校正螺钉进行。放松校正螺钉使整个十字丝环转动，让横丝与图5-14($b$)中所示的虚线重合或平行。由于这条虚线是$A$点在视场中移动的轨迹，并没有一个实在的线划，所以转动十字丝环的方向是转向$A$点，转动角度凭估计进行。校正之后再进行检验，确定是否还需要校正，直到满足条件为止。

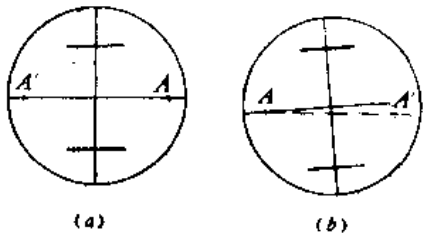



图 5-14

（三）望远镜视准轴应与水准管的水准轴平行的检验和校正

望远镜视准轴和水准管水准轴都是空间直线，如果它们互相平行，那末无论是在包含视准轴的竖直面上的投影还是在水平面上的投影，都应该是平行的。对竖直面上投影是否平行的检验称为$i$角检验，水平面上投影是否平行的检验称为交叉误差检验。

对于水准测量，重要的是$i$角检验。如果$i=0$，则水准轴水平后，视准轴也是水平的，满足水准测量基本原理的要求。

1. $i$角在读数和高差中的影响

（1）在读数中的影响

如图5-15所示，设$i$角使视线向上倾斜，那末它在$A$点尺子上的读数将较水平视线的读数增大一个$x$值。若$A$点距仪器的距离为$S$，则

$$x = S \cdot \mathrm{tg}i$$

一般$i$角均甚小，上式可写为

$$x = \frac{S \cdot i''}{\rho''} \qquad (5\text{-}5)$$

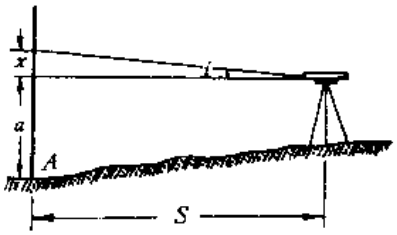



图 5-15

当$i$角的大小不变时，则$x$的大小与$S$成正比；即尺子离仪器愈远，$i$角对读数的影响愈大。

现规定向上倾斜的$i$角为正，则由此引起的读数误差$x$亦为正。设$a'$为水准尺上的实际读数，那末水准尺上的正确读数$a$为

$$a = a' - x \qquad (5\text{-}6)$$

（2）在高差中的影响

已知$A$、$B$两点的高差$h'_{AB}$可按下式计算：

$$h'_{AB} = a' - b'$$

式中，$a'$为后视读数；$b'$为前视读数。

于是$A$、$B$两点的正确高差为

$$h_{AB} = (a' - x_A) - (b' - x_B)$$
$$= h'_{AB} - (x_A - x_B)$$

式中，$x_A - x_B$为$i$角在高差中的影响，用$\delta h_{AB}$表示；即

$$\delta h_{AB} = x_A - x_B = \frac{i}{\rho} S_A - \frac{i}{\rho} S_B$$

$$= \frac{i}{\rho} (S_A - S_B) \tag{5-7}$$

可见，当后视与前视的距离相等时，$i$ 角的影响$\delta h_{AB} = 0$，得到正确的高差。而当后视与前视的距离不相等时，后、前视的距离相差愈大，$i$ 角在高差中的误差影响$\delta h_{AB}$也愈大。且$S_A > S_B$时，$\delta h_{AB}$与$i$ 的符号相同，反之与$i$ 的符号相异。

2.检验$i$ 角的基本原理

检验$i$ 角的具体方法较多，其基本原理如下：

在地面选定两个固定点$A$、$B$，测出$A$、$B$ 的两次高差$h'_{AB}$和$h''_{AB}$。设仪器存在$i$ 角误差，则按式 (5-7)得

$$h_{AB} = h'_{AB} - \frac{i}{\rho} (S'_A - S'_B)$$

$$h_{AB} = h''_{AB} - \frac{i}{\rho} (S''_A - S''_B)$$

即

$$h''_{AB} - \frac{i}{\rho} (S''_A - S''_B) = h'_{AB} - \frac{i}{\rho} (S'_A - S'_B)$$

$$i = \frac{h''_{AB} - h'_{AB}}{(S''_A - S''_B) - (S'_A - S'_B)} \cdot \rho \tag{5-8}$$

目前在实际应用中采用两种作法，一种是使$S'_A = S'_B$，此时$h'_{AB}$为无$i$ 角影响的高差$h_{AB}$，

$$i = \frac{h''_{AB} - h_{AB}}{S''_A - S''_B} \cdot \rho \tag{5-9}$$

另一种是使$S'_A - S'_B = -(S''_A - S''_B)$，此时

$$i = \frac{h''_{AB} - h'_{AB}}{2(S''_A - S''_B)} \cdot \rho \tag{5-10}$$

3.第一种方法的检验和校正

（1）检验

在较平坦地方选定适当距离的两个点$A$、$B$，并用木桩钉入地面，或用尺垫代替。置水准仪于$A$、$B$ 的中间，使两端距离严格相等，如图5-16($a$)。此时测量正确的高差$h_{AB}$。然后将水准仪置于两点的任一点附近，例如在$B$ 点附近，如图5-16($b$)。这时因距离不等，在测得的高差$h'_{AB}$中将有$i$ 角的影响，按式 (5-9)

$$i = \frac{h''_{AB} - h_{AB}}{S_A - S_B} \cdot \rho \tag{5-11}$$

因$A$ 点距仪器最远，$i$ 角在读数上的影响最大。按式 (5-5)得

$$x_A = \frac{i}{\rho} \cdot S''_A$$

此式也可由图5-16($b$)中直接得出。

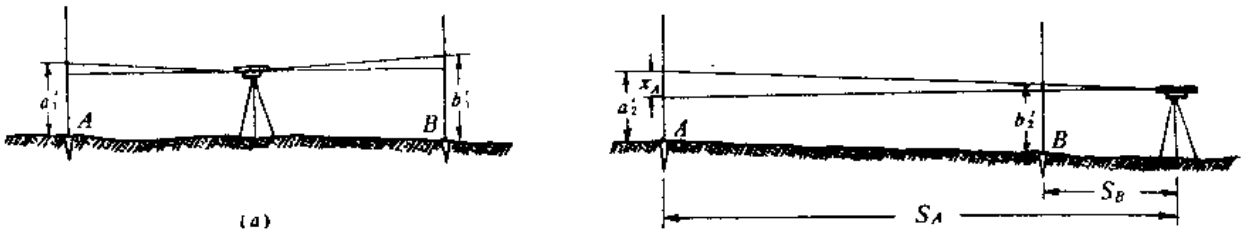



图 5-16

（2）校正

有了$x_A$之值，即可对水准仪进行校正。校正工作应紧接着检验工作进行，即不要搬动$B$点一端的仪器，先算出在$A$点标尺上的正确读数$a_2$。

$$a_2 = a_2' - x_A$$

用微倾螺旋使读数对准$a_2$，这时水准管气泡将不居中，调节上下两个校正螺钉使气泡居中。实际操作时，需先将左（或右）面的螺钉（如图5-17）略为松开一些，使水准管能够活动，然后再校正上、下两螺钉。校正结束后仍应将左（或右）面的螺钉上紧。

这种校正方法的实质是先将视线水平，即读数对准$a_2$，然后校正水准轴至水平位置。检验校正应反复进行，直到符合要求为止。

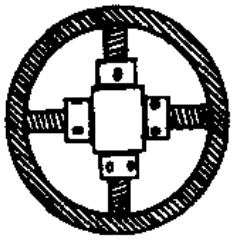


图 5-17

（3）例5-1

对S3№1301水准仪进行$i$角检验。取$A$、$B$之长为100m，第一次仪器安置在$A$、$B$的中间，得读数$a_1'$ = 1364mm，$b_1'$ = 1579mm。第二次仪器安置在$B$点的一端距$B$点10m(图5-16(b))，得读数$a_2'$ = 1483mm，$b_2'$ = 1641mm。计算得两次的高差分别为$h_{AB}$ = -0215mm，$h'_{AB}$ = -0158mm；两次高差不相等，说明存在$i$角误差；计算得$\delta h_{AB}$ = +57mm；$A$点水准尺上的读数影响$x_A$ = +63mm，因此正确读数$a_2$ = 1483 - 63 = 1420。整个计算可以在表格中进行（见表5-6）。

表 5-6

| 第一次读数（mm）仪器在$A$、$B$点中间 | | 第二次读数（mm）仪器在$B$点一端 | | 距离（m） |
|---|---|---|---|---|
| $a_1'$ | 1364 | $a_2'$ | 1483 | $S_A$ = 110 |
| $b_1'$ | 1579 | $b_2'$ | 1641 | $S_B$ = 10 |
| $h_{AB}$ | -0215 | $h'_{AB}$ | -0158 | |
| $h''_{AB} - h_{AB} = +57$mm<br>$x_A = \frac{h''_{AB} - h_{AB}}{110 - 10} \cdot 110 = -63$mm<br>$a_2 = a_2' - x_A = 1420$mm | | | | |

校正时用微倾螺旋使$A$点标尺上的读数为1420，然后用水准管上的校正螺钉将气泡居中。

4．第二种方法的检验和校正

（1）检验

如图5-18（$a$），将仪器置于$AB$延长线上$A$点一端，得$AB$两点的第一次高差$h'_{AB}$：

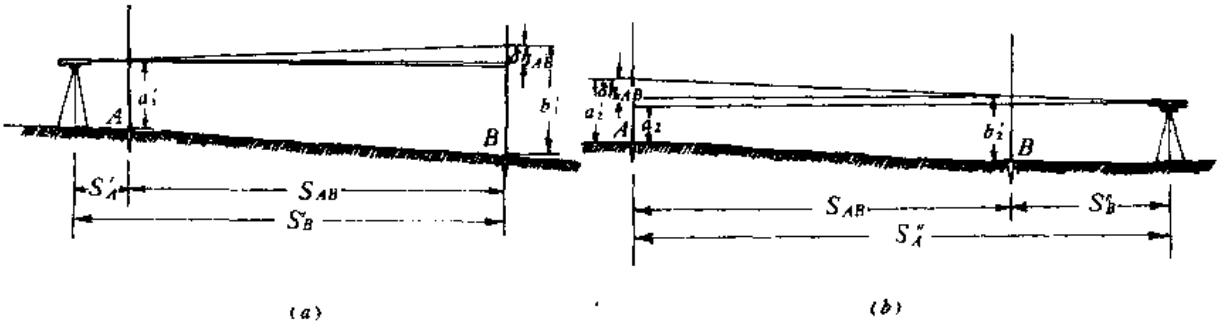



图 5-18

$$h'_{AB}=a'_1-b'_1$$

然后将仪器置于$AB$延长线$B$点一端，如图5-18($b$)，得$A$、$B$两点的第二次高差$h''_{AB}$：

$$h''_{AB}=a'_2-b'_2$$

两次仪器位置距水准尺的距离差相等，即

$$S_{AB}=S''_A-S''_B=-(S'_A-S'_B)$$

按式（5-10）计算$i$：

$$i=\frac{h''_{AB}-h'_{AB}}{2S_{AB}}\cdot\rho \tag{5-12}$$

为了下一步的校正工作，应求出较远一点上尺子的正确读数；若仪器在$B$点一端，则$A$点上尺子的读数误差为

$$x''_A=\frac{i}{\rho}\cdot S''_A$$

对正确读数为

$$a_2=a'_2-x''_A$$

（2）校正

首先算出在远处标尺上的正确读数。仪器在$B$点一端的正确读数为

$$a_2=a'_2-x''_A$$

仪器在$A$点一端的正确读数为

$$b_1=b'_1-x'_B$$

用微倾螺旋使读数对准正确数值，然后用水准管上、下校正螺钉将气泡居中。

（3）例5-2

检验S №1301水准仪的场地布置如图5-19，第一次仪器置于C点得读数$a'_1$ = 1086mm，$b'_1$ = 1146mm。将仪器迁至$D$点得读数$a'_2$ = 1278mm，$b'_2$ = 1358mm，按式（5-11）计算

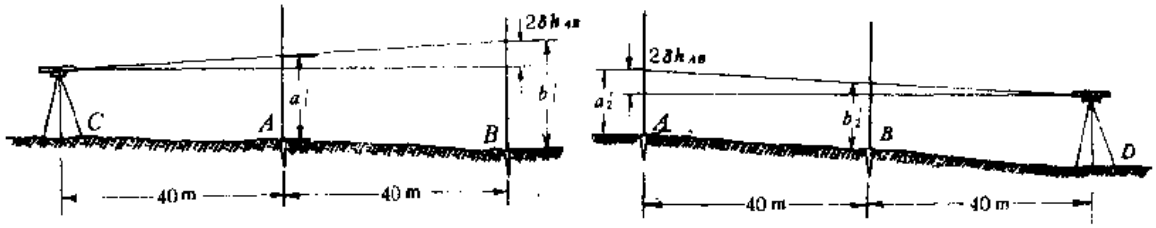



图 5-19

$\delta h_{AB}$值为 - 10mm。因为$S''_A = 80$m，$S_{AB} = 40$m，所以，仪器在$D$点对$A$点尺子的读数误差

$$x''_A = \frac{h''_{AB} - h'_{AB}}{2S_{AB}} S''_A = -20\text{mm}$$

因此，正确读数

$$a_2 = a'_2 - x''_A = 1298(\text{mm})$$

计算工作可在表格中进行（见表5-7）。

表 5-7

| 测站：C | | 测站：D | |
|---|---|---|---|
| $a'_1$ | 1086 | $a'_2$ | 1278 |
| $b'_1$ | 1146 | $b'_2$ | 1358 |
| $h'_{AB}$ | -0060 | $h''_{AB}$ | -0080 |

$$\frac{1}{2}(h''_{AB} - h'_{AB}) = -10\text{mm}$$

$$x''_A = \frac{h''_{AB} - h'_{AB}}{2S_{AB}} \cdot S''_A = -20\text{mm}$$

$$a_2 = 1278 + 20 = 1298\text{mm}$$

上述两种方法均需利用仪器至$A$、$B$两点的距离不等长来反映$i$角的影响，而且距离差愈大，检验的效果愈好。但由此却带来了望远镜必须调焦这一操作，而望远镜的调焦过程常使视准轴发生变化，即$i$角将不是固定的值。为尽量减小此种影响，对第一种方法可加大$S''_B$（图5-16），对第二种方法亦可加大$S'_A$和$S''_B$（图5-18），使望远镜的调焦范围减小。比较（5-11）与（5-12）两式可见，在$S_{AB}$相等的条件下，$h''_{AB} - h'_{AB}$为$h'_{AB} - h_{AB}$的两倍。同样的$S_{AB}$值，第二种方法比第一种方法获得两倍的$\delta h_{AB}$，因此它优于第一种方法。

$i$角的检验校正通常都规定了一个允许范围。对S3级水准仪，当后、前视距差给以较严的限制时，一般规定$i$角的角值不得大于20″；当后、前视距差未作具体限制时，一般规定在100m的水准尺上读数误差不得大于4mm。如果仪器经检验了解已能满足规定的要求，即可不再进行校正。

5. 交叉误差的检验校正

前面已经讲过，交叉误差是指视准轴与水准管水准轴在水平面上的投影是否平行的问题。

交叉误差在水准测量中的影响，主要看它是否会引起视准轴不水平。假若水准仪在水准尺上读数时视准轴是水平的，那就完全用不着考虑它和水准轴在水平面上的投影是否平行。可是检验 $i$ 角时仪器旋转轴并不严格竖直，水准测量时仪器旋转轴也不严格竖直，而且两者并不一致。因此水准管水准轴除了有由倾斜到水平的运动外，还可能产生旋转的运动。这样，两轴在水平面上的投影不平行会导致两轴在竖直面上也不平行，即交叉误差转变为 $i$ 角误差；为了与上述的 $i$ 角有所区别，另用符号 $i_\omega$ 表示。

（1）交叉误差和 $i$ 角误差之间的函数关系

图5-20中，平面 $P$ 表示水平面，$V$ 表示竖直面，$R$ 是为了讨论方便而另作的一个竖直面；$P$、$V$、$R$ 都互相垂直。直线 $AB$ 表示水准管水准轴在水平面 $P$ 上的投影，也是在竖直面 $V$ 上的投影；$AC$ 表示视准轴在水平面 $P$ 上的投影；$AB$ 与 $AC$ 的交角即为交叉误差，用 $\omega$ 表示。如果以 $AB$ 为轴使 $AC$ 转旋一个 $\alpha$ 角，即 $AC$ 到了 $AC_1$ 位置，这时 $AC_1$ 在竖直面 $V$ 上的投影 $AE$ 便与 $AB$ 产生了一个交角 $i_\omega$；根据水准测量的基本原理，只要 $i$ 等于零，$\omega$ 有多大也没有关系，但是图5-20所示的现象说明如果仪器产生 $\alpha$ 角的旋转，交叉误差 $\omega$ 也会重新使 $i$ 角不为零。

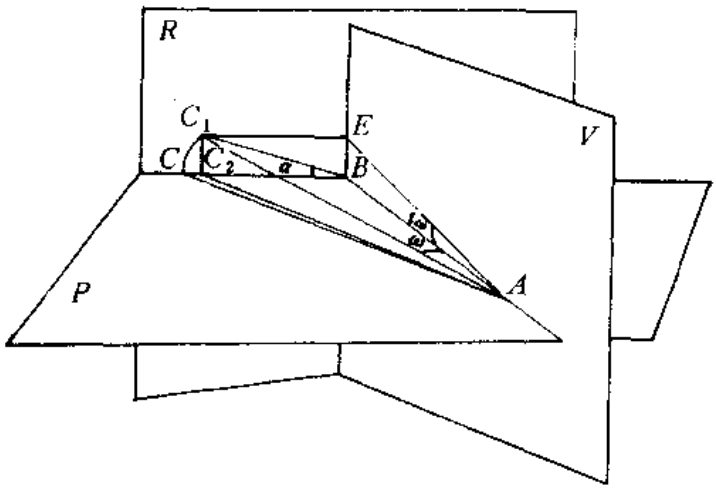



图 5-20

作辅助线 $C_1C_2 \perp BC$，$C_1E \perp BE$，由图中的几个直角三角形可得

$$\operatorname{tg} i_\omega = \frac{BE}{AB}$$

而

$$BE = C_1C_2 = BC_1 \sin\alpha$$

$$BC_1 = AB \cdot \operatorname{tg}\omega$$

所以

$$\operatorname{tg} i_\omega = \frac{AB \cdot \operatorname{tg}\omega \cdot \sin\alpha}{AB} = \operatorname{tg}\omega \cdot \sin\alpha$$

由于 $i_\omega$、$\omega$、$\alpha$ 均是小角，所以

$$\frac{i_{\omega}''}{\rho''}=\frac{\omega''}{\rho''}\cdot\frac{\alpha''}{\rho''}$$

即

$$i_{\omega}''=\frac{\omega''\cdot\alpha''}{\rho''} \tag{5-13}$$

$\alpha$ 的大小与仪器旋转轴处于竖直位置的精度有关。这个精度基本上由圆水准器的分划值所决定。一般圆水准器的分划值为$8'$。从最坏的情况考虑，取$\alpha=4'$。如果要使$i_{\omega}<1''$，则由式（5-13）知交叉误差不应大于下列数值：

$$\omega=\frac{i_{\omega}}{\alpha}\cdot\rho\approx 14'$$

（2）交叉误差在水准测量中的影响

讨论交叉误差在水准测量中的影响，也就是考察它转变为$i_{\omega}$角误差后在水准测量中的影响。

前面的分析中已经指出，交叉误差被转变为$i_{\omega}$角的基本原因是仪器旋转轴不严格竖直的结果。在一个测站上，假设后视读数时产生的$i_{\omega}$角为“+”（即如图5-20所示，视线向上）；由于仪器旋转轴的方向不变，那末转向前视时产生的$i_{\omega}$角将为“-”(即视线向下)。按式（5-7),得

$$\delta h_{AB}=\frac{i_{\omega后}}{\rho}S_{后}-\frac{i_{\omega前}}{\rho}\cdot S_{前}$$

考虑到$i_{\omega}$的符号，$i_{\omega前}=-i_{\omega后}$，则

$$\delta h_{AB}=\frac{i_{\omega后}}{\rho}(S_{后}+S_{前}) \tag{5-14}$$

这个现象对一个测站的水准测量的最后结果十分不利；因为它不能在前后视的高差中得到减弱，反而会被增大。即交叉误差在一个测站上的影响是系统性的，它与前后视距离之和成正比。

不同的测站上仪器旋转轴的位置因重新安置了仪器而有了变化，例如对后视而言，产生的$i_{\omega后}$角符号有时为“+”有时为“-”,$i_{\omega后}$角的绝对值大小亦不相等，所以交叉误差在高差中的影响对各个测站而言是偶然性的。

必须指出：如果圆水准器水准轴未能严格与仪器旋转轴平行（即圆水准器校正不完善），那末用圆水准器气泡居中来粗平水准仪时，将使仪器旋转轴始终是倾斜状态，它的倾斜方向将相对于三脚架大体保持在某一固定的位置。在水准测量中，三脚架的某两个脚如果固定在线路的一方，仪器旋转轴的倾斜方向没有变化，各测站交叉误差在水准测量成果中的影响便是系统性的。

（3）交叉误差的检验原理

设水准管的水准轴已经水平，如果不存在交叉误差，那末当以视准轴为旋转轴使整个仪器左右倾斜后，水准轴将出现两种情况：第一，当没有 $i$ 角误差时，视准轴应是水平的，即两轴完全平行，因此水准轴将始终处于水平位置。第二，当存在 $i$ 角误差时，视准轴将与水平线有一交角 $i$ 而是倾斜状态，仪器左右倾斜后水准轴将不再水平而发生倾斜。

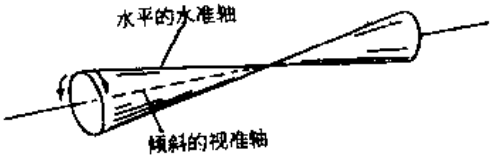



图 5 21

由图5-21可见，无论仪器向左或向右倾斜，水准轴倾斜的总方向将维持不变，即一端向上则始终向上，另一端向下则始终向下，而且若仪器左、右倾斜的角度相同，那末水准轴两次倾斜的角度也相同。

如果存在着交叉误差，水准管水准轴的变动也有两种情况：第一，当没有 $i$ 角误差时，如图5-22（$a$），以视准轴为旋转轴使整个仪器向左和向右倾斜后，水准轴的倾斜方向不能一致，即如果向左倾斜时水准轴一端向上，向右倾斜时这一端变为向下；第二，当存在 $i$ 角误差时，如图5-22（$b$），仪器左右倾斜后水准轴的运动或为异向倾斜——水准轴未越过最高或最低的界限，或为同向倾斜——水准轴越过了最高或最低的界限，但尽管仪器左右倾斜的角度相同，水准轴同向倾斜的角度将不再相同。

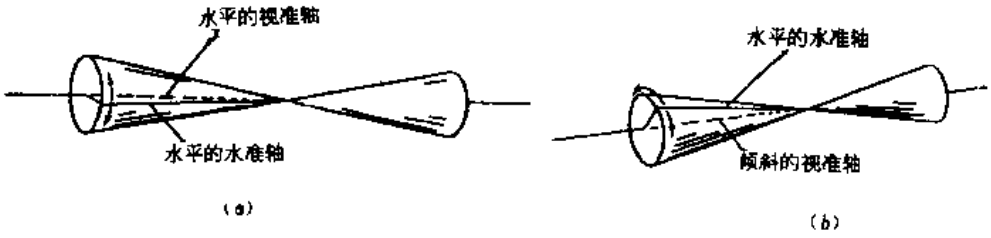



图 5-22

（4）交叉误差的检校

为了使视准轴为旋转轴，应将视准轴与两个脚螺旋的连线垂直，如图5-23，将水准管气泡居中后，按相对方向转动 $A$、$B$ 脚螺旋两周，例如同时向里转动，使仪器向一方倾斜。

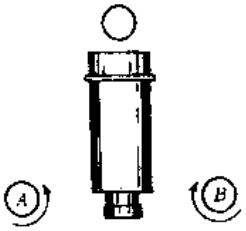



图 5-23

注意十字丝交点所对准的某个目标应始终保持不变，目标也可以是水准尺，使十字丝交点的读数保持不变，观察水准管气泡的变化，然后反向转动脚螺旋使仪器回到初始位置。

以同样的方法，将 $A$、$B$ 脚螺旋同时向外转动两周，使仪器向另一方倾斜，仍应注意十字丝交点所对的目标保持不变，观察水准管气泡的变化。

在仪器向两侧倾斜的情况下，若气泡始终保持符合，或是同向离开相同距离，如图5-24（$a$）、（$b$），则表示不存在交叉误差；如果气泡的移动是异向离开，或同向离开但距离不等，如图5-24（$c$）、（$d$）、（$e$），则表示存在交叉误差。气泡异向离开的情况也存在距离相等与距离不相等两种；在异向离开距离相等时（图5-24$e$），表示 $i=0$，$\omega\neq 0$；在异向离开距离不相等时（图5-24$c$）表示 $i\neq 0$，$\omega\neq 0$，且 $i<\omega$。若气泡两端点有明显的异向离开，或同向离开但距离明显的不等，则应进行校正。

校正时，应先分析水准轴与视准轴在水平面上投影的关系，然后调节水准管上水平方向的两个校正螺钉，使水准管轴在水平方向移动至气泡符合为止。实际操作时亦可松开两个校正螺钉，用试验的方法确定螺钉的校正方向。

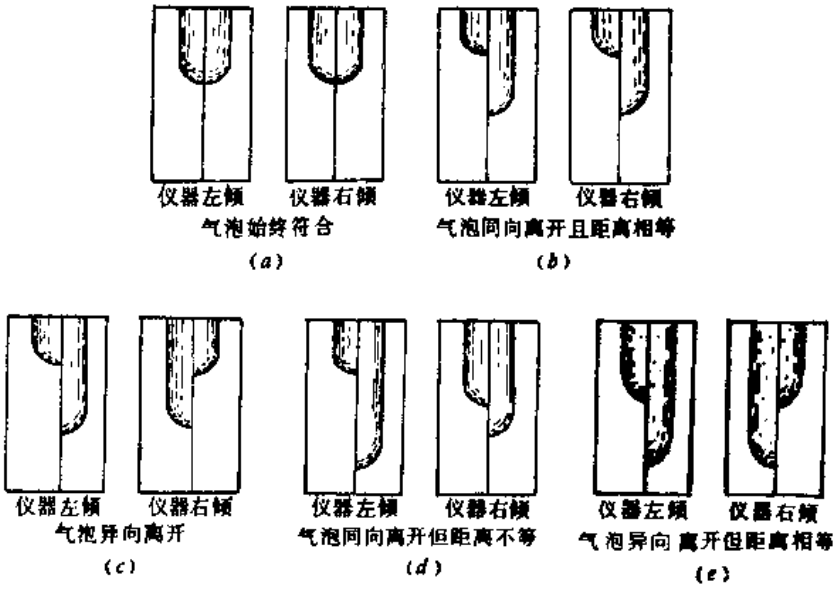



图 5-24

$i$ 角和交叉误差的检验因互有干扰，故应反复进行，但实际上，经校正后残余的交叉误差在水准测量中的影响，较 $i$ 角误差的残余误差为小，故通常先作交叉误差的检验校正，而后进行 $i$ 角误差的检验校正。

## 三、自动安平水准仪补偿器性能的检验

### （一）检验原理

自动安平水准仪补偿器的作用是：虽然视准轴倾斜（在补偿器的允许范围内）仍能在十字丝上读得视线水平时同样的读数。检验补偿器性能的一般原则是有意将仪器的旋转轴安置得不竖直，并测定两点间的高差，使之与正确高差相比较。

检验的一般方法是将仪器安置在 $A$、$B$ 两点连线的中点，设后视读数时视准轴向下倾斜，那末将望远镜转向前视时，由于仪器旋转轴是倾斜的，视准轴将向上倾斜。如果补偿器的补偿性能正常，无论视线下倾（后视）或上倾（前视）都可读得水平视线的读数，测得的高差也是 $A$、$B$ 点间的正确高差；如果补偿器性能不正常，由于前、后视的倾斜方向不一致，视线倾斜产生的读数误差不能在高差计算中抵消，因此测得的高差将与正确的高差有明显的差异。

### （二）检验方法

在较平坦地方选择 $A$、$B$ 两点，$AB$ 长约100m 左右，在 $A$、$B$ 点各钉入一木桩（或用尺垫代替），将水准仪置于 $AB$ 连线的中点，并使两个脚螺旋中心的连线（为讲述方便称为第 1、2 脚螺旋）与 $AB$ 连线方向垂直。

首先用圆水准器将仪器置平，测出 $A$、$B$ 两点间的高差 $h_{AB}$，此值作为正确高差；

升高第 3 个脚螺旋，使仪器向上（或向下）倾斜，测出 $A$、$B$ 两点间的高差 $h_{AB\,上}$；

降低第 3 个脚螺旋，使仪器向下（或上）倾斜，测出 $A$、$B$ 两点间的高差 $h_{AB\,下}$；

升高第3个脚螺旋，使圆水准器气泡居中；

升高第1个脚螺旋，使后视时望远镜向左（或向右）倾斜，测出$A$、$B$两点间的高差$h_{AB左}$；

降低第1个脚螺旋，使后视时望远镜向右（或向左）倾斜，测出$A$、$B$两点间的高差$h_{AB右}$。

无论上、下、左、右倾斜，仪器的倾斜角度均由圆水准器气泡位置确定；四次倾斜的角度应相同，一般取补偿器所能补偿的最大角度。

将$h_{AB上}$、$h_{AB下}$、$h_{AB左}$、$h_{AB右}$与$h_{AB}$相比较，视其差数确定补偿器的性能；对于普通水准测量，此差数一般应小于5mm。

若经反复检验发现补偿器失灵，则应送工厂或检修车间修理。

## § 5-5 水准尺的检验

水准尺是水准测量所用仪器的重要组成部分，水准尺质量的好坏直接影响到水准测量的成果，如果尺的质量很差、甚至会造成返工。因此对水准尺进行检验也是十分必要的。

### 一、一般检视

对水准尺进行一般的查看，首先应查看是否有弯曲，程度如何，如图5-25所示，若$a<8$mm，则对尺长的影响可以不计。“$a$”值的量取系在水准尺两端张一细直线，量取尺中央至此细直线的垂距，再看尺上刻划的着色是否清晰、注记有无错误，尺之底部有无磨损情况等。

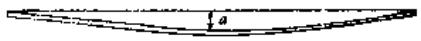



图 5-25

### 二、圆水准器的检验与校正

除一般检视外，还要检查圆水准器装置是否正确，其检查与校正的方法有两种：一种是用一个垂球挂在水准尺上，使尺的边缘与垂线一致，用圆水准器的校正螺钉导致气泡居中；这种方法须在室内或能避风之处进行。另一种方法是安置一架经检校后的水准仪，在相距约50m处的尺垫上竖立水准尺，检查时观测者指挥持尺员将水准尺的边缘与望远镜中竖丝重合，用圆水准器校正螺钉导致气泡居中，然后将水准尺转动90°，重新操作如前，这样至少须进行两次。此法可在室外进行。

### 三、水准尺分划的检验

水准尺分划的检验包括：

（1）水准尺每米平均真长的测定；

（2）水准尺分米分划误差的测定；

（3）水准尺黑面与红面零点差数的测定；

（4）一对水准尺黑面零点差的测定。

现将上述检验及测定分别简述如下：

（一）水准尺每米平均真长的测定

水准尺每米平均真长测定的目的，在于了解水准尺的名义长度与实际长度之差。例如，《国家水准测量规范》对三、四等水准测量用的区格式木质水准尺，规定每米长度的误差不得超过±0.5mm，否则应在水准测量中对所测高差进行改正。

测定方法是将水准尺与检验尺相比较。通常用一级线纹米尺作为检验尺，一级线纹米尺本身应经过检定并有尺长方程式。它的形状如图5-26所示：全长103cm；全部尺面都有0.2mm间隔的分划；尺上还附有一温度计用以测定尺子的温度，以便对尺长进行温度改正；因为尺上的线划很细，读数时用尺上可以移动的放大镜进行。

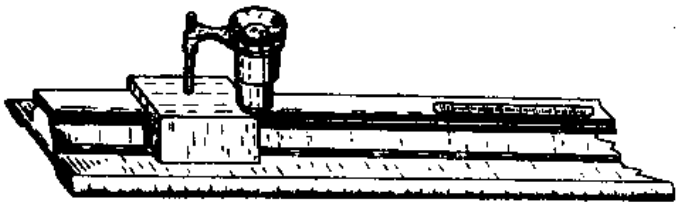


图 5-26

具体测定方法可参考有关的规范进行作业。

（二）水准尺每分米分划误差的测定

此项测定的目的是检查水准尺的分米分划线位置是否正确，从而审定该水准尺是否允许用于水准测量作业。《国家水准测量规范》对区格式木质水准尺规定分划线位置的误差不应超过±1.0mm。

测定方法仍是将水准尺与检验尺相比较，通常也用一级线纹米尺作检验尺，但需每分米进行读数，以便计算分米分划线的误差值。

具体测定方法可参考有关《规范》进行作业。

（三）水准尺红面与黑面零点差数的测定

水准尺上红黑面之零点差应为4687或4787，但需加以检查，看是否正确。测定方法如下：安置好水准仪，在距水准仪约20m处打一木桩，桩顶须钉一圆帽钉，将水准尺竖直地放在圆帽钉头上（或尺垫上）。将水准仪上的水准管气泡严格居中，照准水准尺黑面进行读数，不动仪器随即将水准尺转180°使红面朝向仪器，进行红面读数，两读数之差即为水准尺红面与黑面零点差。

需在不同高度进行这样的测定四次而取平均值。两支水准尺应分别进行检查。

实际作业时应以测定之值作为黑、红面读数的常数差$K$。

（四）一对水准尺黑面零点差的测定

水准尺黑面零点应与其底面相合，但由于使用时磨损和制造的关系，零点与尺底可能

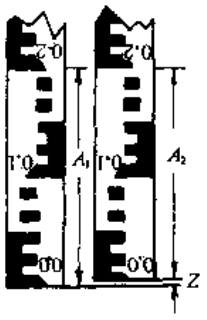


图 5-27

不一致。如果一对水准尺的此项数值相等，则在水准测量的高差中将能抵消。如果两支水准尺的此项数值不相等，则对偶数测站的水准测段同样能得到抵消，而在奇数测站才需引入零点差的改正。

测定的方法：将两水准尺水平放置，在两水准尺的底面上各贴一双面刀片，在两水准尺上一米范围内选择一清楚的同一读数的分划线，用检查尺量出从刀片至该线的距离。若第一根水准尺量得为 $A_1$，第二根水准尺量得为 $A_2$，则所求的零点差 $z$ 为

$$z = A_2 - A_1$$

如图5-27所示。

## § 5-6 水准测量误差的主要来源

水准测量误差的来源通常可从三方面讨论，即仪器构造上的不完善，操作中因作业人员感官灵敏度的限制，以及受作业环境的影响。§5-4讨论的水准仪轴线条件及§5-5水准尺各条件不满足的误差属于仪器误差。第四章所讲地球曲率的影响属环境影响。本节就观测误差及其他外界影响的主要来源加以简要的讨论。

### 一、水准管气泡居中的误差

水准测量的主要条件是视线必须水平，它是利用水准管气泡位置居中来实现的。气泡居中与否是用眼睛观察的，由于生理条件的限制，不可能做到严格辨别气泡的居中位置。同时，水准管中的液体与管内壁的曲面有磨擦和粘滞作用。这种误差叫做水准管气泡居中的误差，它的大小和水准管内壁曲面的弯曲程度有关。比较两种原因，以后者为主。

通常以水准管内壁2mm弧长所对圆心角来表示水准管的分划值 $\tau$。水准管气泡居中的误差可取 $0.1\tau$。此时它在读数上引起的误差为

$$m_{居中} = \frac{0.1\tau}{\rho} \times s \tag{5-15}$$

式中：$\tau$ 一般以秒为单位，$\rho = 206265$，$s$ 为视线长。

采用符合水准器时，由于精度约可提高一倍，上式将写成

$$m_{居中} = \frac{0.1\tau}{2 \times \rho} \times s \tag{5-16}$$

设水准管的分划值 $\tau = 20''$，距离 $S = 75\text{m}$，则

$$m_{居中} = \frac{0.1 \times 20}{2 \times \rho''} \times 75 \times 1000 \approx 0.4\text{mm}$$

### 二、在水准尺上的估读误差

观测员读数时是用十字丝在厘米间隔内估读毫米数，而厘米分划又是经过望远镜将视角放大后的象，可见毫米数的准确程度将与厘米间隔的象的宽度及十字丝的粗细有关。

目前望远镜的十字丝宽度，经目镜放大后在人眼明视距离上约为0.1mm。如果厘米间隔的象大于1mm，则估读间隔的十分之一，即水准尺读数的毫米值基本上可以得到保证，否则读数精度将受影响。用放大率为20倍的望远镜在距离小于50m时，厘米间隔的象即可大于1mm。

由此可见，此项误差与望远镜的放大率和视距长度有关，因此对各级水准测量规定仪器望远镜的放大率和限制视线的最大长度是有必要的。

### 三、水准尺竖立不直的误差

水准尺是否竖直，会影响水准测量的读数精度。由图5-28可见，如果尺子没有竖直，则总是使尺上的读数增大（即$a' > a$）。

因为$a = a'\cos\gamma$

所以

$$\Delta a = a' - a = a'(1 - \cos\gamma) \tag{5-17}$$

可见$\Delta a$的大小既与尺子倾斜角$\gamma$的大小有关，也和在尺上的读数$a'$的大小有关；设$a'$为2m，当尺子倾斜大约2°（$\gamma \approx 2°$）时，就会造成约1mm的读数误差，因此作业时努力使水准尺保持在竖直位置是很重要的。这项误差的影响是系统性的——无论前视或是后视都使读数增大，在高差中会抵消一部分，但与高差总和的大小成正比；所以应认真扶尺，才能使最后成果中的误差不占主要地位。

例 5-3　若水准测量中水准尺偏离竖直位置的平均倾斜角为30′，问这个误差对一个约为10m的高差有多大的影响。

解：由式（5-17）知

$$\begin{aligned}\Delta h &= h'(1 - \cos\gamma)\\ &= 10 \times (1 - \cos 30')\\ &= 0.00038\text{m} = 0.38\text{mm}\end{aligned}$$

### 四、仪器和尺子升沉的误差

对一条水准路线来讲，还会出现尺子与仪器的上升和下沉的问题。由于仪器、尺子的重量会下沉，而又由于土壤的弹性会使仪器、尺子上升。

假设仪器下沉（上升）的变动量是和时间成比例的。如图5-29，第一次后视读数为

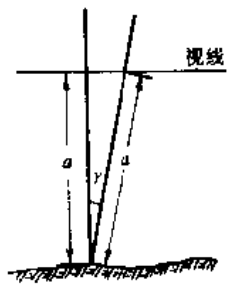



图 5-28

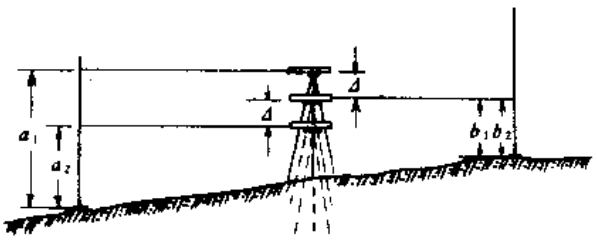



图 5-29

$a_1$，当仪器转向前视时仪器下沉了一个 $\Delta$，前视读数为 $b_1$，那么高差 $h = a_1 - b_1$ 中必然包含误差 $\Delta$。为了减小这种影响，读取红面读数时采用先读前视的办法。当最后读取后视读数时，仪器视线又变动了一个 $\Delta$。由图5-29可以看出，黑面读数的高差为

$$h_{黑} = a_1 - (b_1 + \Delta) = a_1 - b_1 - \Delta$$

红面读数的高差为

$$h_{红} = (a_2 + \Delta) - b_2 = a_2 + \Delta - b_2$$

取两次高差的平均得

$$h = \frac{(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)}{2}$$

这样，正好将 $\Delta$ 消除。由于实际上仪器的变动量和时间并不完全成比例，因此这种措施只能减弱而不能完全消除影响。同时，熟练操作以减少观测时间，也可使这项误差影响减小。

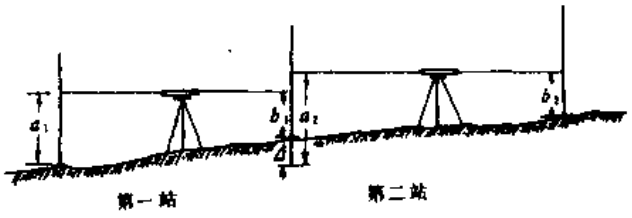



图 5-30

关于尺子下沉（上升）的影响，当仪器在第一站观测完毕之后转向第二站时，前视尺变动了一个 $\Delta$ 值（图5-30），于是第二站的后视读数和第一站的前视读数的尺子零点不在同一个位置。对于同类土壤的水准路线，它们造成的影响是系统性的，如果属于尺子下沉，则是使高差增大，反之则是使高差减小。这就了解到如果作业时对一条水准路线采用往、返方向进行观测，那么在往返测的平均值中这种误差的影响将会得到减弱。

### 五、后前视调平水准管气泡的误差

为了保持视线水平，望远镜每照准后、前视水准尺进行读数之前必须用微倾螺旋将水准管气泡居中，此时望远镜连同水准管必作上下倾斜运动。从水准仪的结构分析可知，这个上下倾斜运动的旋转轴是在物镜一端靠近水平微动螺旋之处。如果仪器的旋转轴并非严格竖直，则由后视转向前视并重新调平水准管气泡之后，仪器旋转轴处的望远镜高度将会产生微小的变化，即视准轴的高度发生了变化；也就是说后视的视准轴与前视的视准轴不构成一条直线，而是两条相互平行的线。

设仪器旋转轴至望远镜上下倾斜的旋转轴之间的距离为50mm，后视转向前视后气泡需调动5格（分划值 $\tau = 20''$ 的水准管为 $100''$），则后、前视视准轴平行线间的高差为

$$\Delta h = 50 \times 100'' / \rho'' = 0.024\text{mm}$$

这个误差对于一个测站的观测高差来讲是完全可以忽略不计的；对一条水准路线的影响如何则要视具体情况而定。在圆水准器校正完善的条件下，上述误差呈偶然性的机会多，否则将易于呈系统性影响，对测站数较多的水准路线的观测成果是不利的。

### 六、大气折光影响

由于空气的温度不均匀，将使光线发生折射，视线即不成为一条直线。特别在晴天，

靠近地面的温度较高，使空气密度较上面为稀。因此，视线离地面愈近折射也就愈大（图5-31）；它使尺子上的读数增大。因此一般规定视线必须高出地面一定的高度（例如0.3m），就是为了减少此项影响。

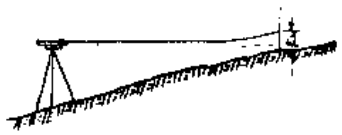


图 5-31

以上所述各项误差来源，都是采用单独影响的原则进行分析的，而实际情况则是综合性的影响。只要作业中注意上述措施，特别是在操作熟练后观测速度提高的情况下，各项外界影响的误差都将大为减小，完全能够达到施测精度要求。用自动安平水准仪作业时，因不需要用微倾螺旋调整水准管气泡居中，使观测速度提高很多，而且仪器与尺子升沉的误差影响也同时减小。此外，当某种外界因素使视线产生微小倾斜时，补偿器能够迅速调整而仍读得水平线的读数，因而在整个水准路线总高差中的精度也将得到提高。

## § 5-7 断面测量和面水准测量

在建设铁路、公路、运河、渠道和敷设各种各样的管道、电力线等工程的路线时，测量工作通常是在一个狭长地带进行。为了选择最合理的路线而使土方量最少，这就需要了解沿线地区的地形起伏变化情况，亦即沿路线中心线进行水准测量，其目的是要绘制出路线的纵断面图，这种测量称为路线水准测量或称为纵断面水准测量。

只有路线的纵断面图往往还不能满足工程上的需要。譬如，在道路的设计和建筑中，为了设计路基的断面，计算填土挖土的数量，以及布置路线两侧的建筑物等，还必须获得路线两侧地形的情况。为此，要在垂直于路线中心线的横断面上进行水准测量，这叫做横断面水准测量，根据这种测量的结果可以绘制路线的横断面图。

纵断面和横断面的水准测量，只能获得某些狭长地带的起伏形状，同时在这些横断面之间，还可能有很大的地形起伏不能测量出来。在修建工厂区、居民区、飞机场、运动场或编制农田排水与灌溉等计划时，地区一般比较平坦而宽广，精度要求较高，通常要进行面水准测量，以测得这些地区内一定密度的点的高程，从而较精确地了解地面起伏情况。

### 一、纵断面水准测量

纵断面水准测量是在事先选定的干线上进行的。干线是在现有的地形图上拟定后再经过实地勘测桩定在地面上的。选择干线时应考虑到工程的需要和将来施工时的便利。从干线起点起每隔一定距离，一般为100m打一桩，称为里程桩。在里程桩旁边，另打入一标志桩，桩顶露出地面10～20cm。标志桩上写明里程桩的编号，编号用距起点的距离公里数＋百米数表示。对干线上位于地面坡度变化、方向变化或沟边等具有地形特征的点子，也必须打入木桩及标志桩，称为加桩，如图5-32中的 0 ＋410点。

图5-32为一纵断面的平面线路图。

纵断面水准测量的任务就是测出里程桩和加桩的高程，以供绘制纵断面图。

为减少测站数，可采用称为间视的作业方法。即一个测站上除一个后视点（例如图

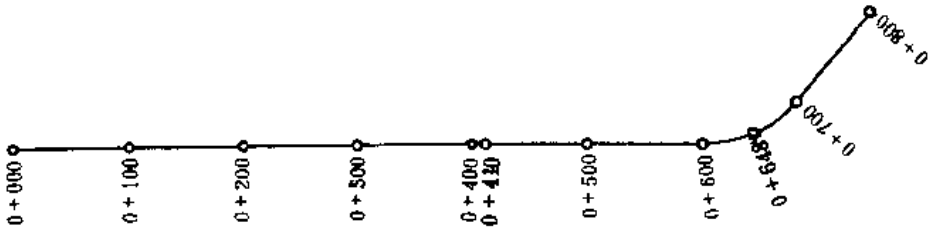



图 5-32

5-33中的$E$点）之外，可设几个前视点。取一个前视点作为传递高程的转点（例如图5-33中的$M$点）称作前视，其余的点（例如图5-33中的$L$、$N$点）则称为间视。它们的高程计算如下：

$$H_L = H_E + h_{EL}$$

$$H_N = H_E + h_{EN}$$

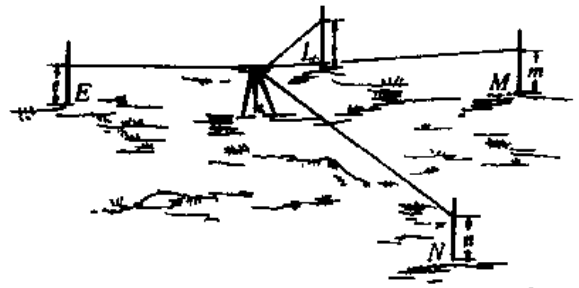



图 5-33

式中

$$h_{EL} = e - l$$

$$h_{EN} = e - h$$

表5-8为采用单面水准尺的纵断面水准测量手簿。如水准仪置于测站1，测水准点25及0 + 000点的高差，得后视读数$a_1$为634mm，前视读数$b_1$为675mm；变换仪器高以后，得$a_2$ = 602mm，$b_2$ = 641mm。两点之间的高差按理论应为

$$h = a_1 - b_1 = a_2 - b_2$$

或者

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

即在这样读数程序中，交叉读数之和应相等，但在实际工作中由于不可避免地有误差存在，故有微小差异，其差数视精度要求而作具体规定。若两点间设有加桩，移站前还要测定加桩的高程。加桩不作为转递高程之用，即间视，间视仅读一次读数，如里程桩0 + 400至0 + 500点间0 + 410的读数为1275mm等，它们是水准仪在第二个位置时读的。根据该站第二次仪器高推得间视点的高程。

纵断面水准测量得到必要的资料后，就可以绘制纵断面图。纵断面图是用图解的方法显示出水准测量手簿所计算的高度、各桩点间的距离及其他有关数据。

图解是在特制的断面图纸（即厘米方格纸）上进行，纸上印有黄色或绿色的分米、厘米、毫米方格网。在此纸的下部先选取一条水平线（图5-34），在水平线上以左端某点为起点，用一定的比例尺（如1∶1000，1∶2000等叫做距离比例尺）标出各桩间的距离，注明各桩的号码（以百米为单位），并根据手簿在里程桩及加桩的桩号旁注明地面高程（也叫做黑字高程）。其次要用较大的比例尺（通常比距离比例尺放大10倍，叫做高差比例尺）沿垂直线表示这些地面的高程；如各点的高程值较大时，可从一个假定的高程作起点，这

纵断面水准测量手簿　　表 5 8

| 测站 | 桩号 | 水准尺读数 | | | | | 高差 | | 仪器高程 | 高程 | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 读数 | | | 平均 | | + | − | | | |
| | | 后视 | 前视 | 间视 | 后视 | 前视 | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 水准点25<br>0 + 000 | 0634<br>0602 | <br>0675<br>0641 | | 0618 | <br>0658 | | + 1<br>0040 | | 22471<br>22432 | 水准点25<br>高程为<br>22.471m |
| 2 | 0 + 000<br>0 + 100 | 1475<br>1455 | <br>0121<br>0401 | | 1465 | <br>0411 | 1054 | | | 23486 | |
| 3 | 0 + 100<br>0 + 200 | 1077<br>1098 | <br>0354<br>0377 | | 1088 | <br>0366 | + 1<br>0722 | | | 24209 | |
| 4 | 0 + 200<br>0 + 300 | 0248<br>0204 | <br>1755<br>1709 | | 0226 | <br>1732 | | 1506 | | 22703 | |
| 5 | 0 + 300<br>0 + 400 | 0022<br>0065 | <br>1843<br>1886 | | 0044 | <br>1864 | | 1820<br>+ 1 | | 20884 | |
| 6 | 0 + 400<br>0 + 410<br>0 + 445<br>0 + 460<br>0 + 500 | 0875<br>0850 | <br><br><br>0633<br>0608 | 1275<br>1823<br>1888 | 0862 | <br><br><br>0620 | <br><br>0242 | | 21734 | <br>20459<br>19911<br>19846<br>21126 | 中间点按第　次<br>仪器高计算 |
| 7 | 0 + 500<br>0 + 600 | 1722<br>1702 | <br>0274<br>0252 | | 1712 | <br>0263 | − 1<br>1449 | | | 22576 | |
| 8 | 0 + 600<br>0 + 648<br>0 + 700 | 1533<br>1588 | <br>0052<br>0102 | 1477 | 1560 | <br>0077 | 1483 | | 24164 | 22687<br>24059 | |
| 9 | 0 + 700<br>水准点26 | 0837<br>0807 | <br>0651<br>0621 | | 0822 | <br>0636 | + 1<br>0186 | | | 24246 | 水准点26<br>高程为<br>24.246m |
| | Σ | 16791 | 13255 | | 8397 | 6627 | 5136 | 3366 | | | |

注：③ − ④ = 3539　　⑧ − ⑦ = 1770　　④ − ⑤ = 1770　　闭合差 = 1770 − (24.246 − 22.471) = − 5mm

容许闭合差 = ± 20mm $\sqrt{L}$ = ± 18mm ③ — ⑤ 应等于 2 × (⑧ − ⑦)。此处 2 × 1770 − 3540 = 3539 是因为由③取平均得⑧和由④取平均得⑦时，有四舍五入的凑整误差的缘故。

样可以避免垂直线画得过长（在图5-34中以18.00m为高程起点），然后将这些点连接起来，就得到沿水准路线地区的纵断面图。如所测纵断面高差较大，以同一假定的高程作起点绘制纵断面图仍有困难时，可在适当位置另假定一高程作为起点，但不同起点的图须用符号分开。

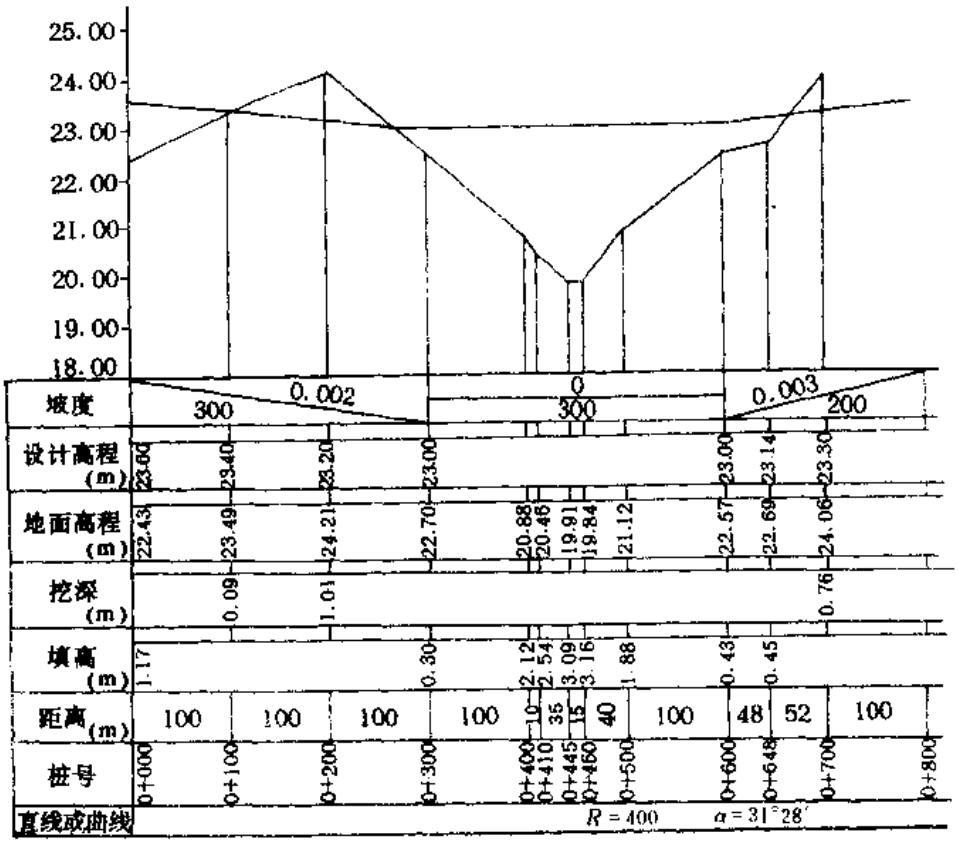



图 5-34

根据所绘的纵断面图，按照一定的工程任务，可以画出未来建筑物（如道路、河流坡面）具有某种坡度的设计线●，设计线通常用红色表示，故设计高程又称红色高程。地面高程与设计高程的差异，即表示将来挖土的深度或填土的高度，这种高度称为工作高度。在纵断面图上绘好设计线后，便可去现场在每个里程桩或加桩上注明该桩的工作高度。

## 二、横断面水准测量

为了查勘沿干线两侧地带的地形，还要在与中心线大致成垂直的方向作横断面水准测量。横断面之长度视工程的需要而定。例如对于道路及渠道需要向两侧测出25～50m。测量距离用轻便卷尺丈量。在横断面上应选择较为显著的地形变化点作为断面点，其长度自中心线（干线）量起，并记入草图中。在这类点上设置与地面相平的木桩，以备立水准尺；在木桩旁设立标志桩，并注记距离数；有时亦可不设木桩，水准尺直接立在地面上。图5-35表示在0＋200号桩处横断面点的设置情况。沿干线前进方向的左、右加距离作为

● 确定设计线要考虑许多问题，例如坡度、土方数量，以及路线上各种建筑物等，这将在《工程测量学》中讨论。

横断面点的编号。横断面上的水准测量可以与纵断面水准测量同时进行，或在完成纵断面水准测量以后单独进行。

水准仪通常置于两桩之间，例如在0 + 200及0 +300号点间（图5-35）。在测出两点高差后，将立于0 + 200号点之后视水准尺依次竖立于标出的断面点上，如图5-36所示。并将测量的结果记入手簿中（见表5-9）。

按照水准测量的数据即可绘出横断面图；它的绘法与纵断面图同。为了计算土方的方便，通常距离与高程采用同一比例尺。图5-37即为里程桩0 + 200的横断面图。

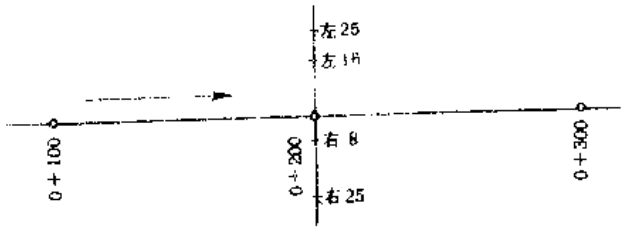



图 5-35




图 5-36

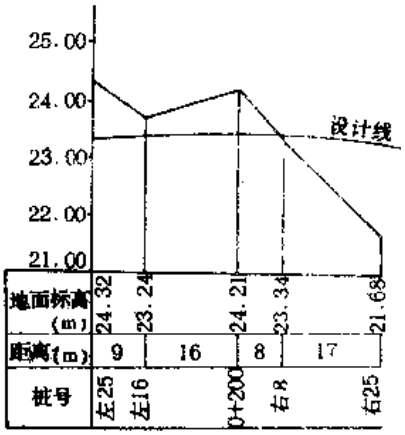



图 5-37

横断面水准测量手簿　　表 5-9

| 站 | 离中心桩的距离 (m) | 读数 | | | 高程 | | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 后视 | 前视 | 间视 | 仪器 | 点 | |
| 3 | 0 + 200 | 0.377 | | | 24.586 | 24.209 | |
| | 左16 | | | 1.35 | | [illegible] | |
| | 25 | | | 0.27 | | [illegible] | |
| | 右8 | | | 1.25 | | [illegible] | |
| | 25 | | | 2.96 | | [illegible] | |
| | 0 + 300 | | 1.884 | | | [illegible] | |

## 三、面水准测量

面水准测量适用于地面比较平坦，障碍较少的地区。面水准测量最常用的方法有平行线法和方格法两种。

### （一）平行线法

当用平行线法进行面水准测量时，应先在地区内选择一条或若干条干线，然后垂直于干线测设一系列的平行线。如图5-38所示是在测区中部敷设

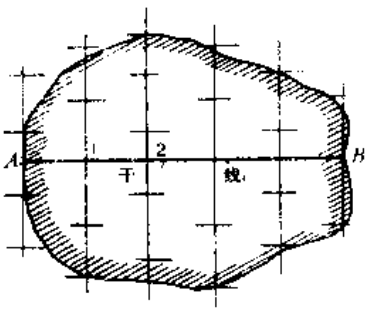



图 5-38

一条干线$AB$，并在其上丈量等长的$A1$、12，……等线段，由此得1、2，……等点。在这些点上作垂直于干线$AB$的平行线穿过测区。根据地形情况在这些平行线上用木桩标定若干地形特征点。桩点的数量及间隔，根据地形及比例尺而定。桩距不一定相等。

平行线间的距离可采取20～500m范围内的某个整数。当距离为100m或者更大时，在每条平行线上应设置横断面。进行面水准测量时，是从干线上水准点$A$开始，进一步沿每条平行线施测。关于干线及平行线上横断面的测量方法，与以前所讨论的相同。

（二）方格法

当用方格法进行水准测量时，必须在地面上设置一系列互相垂直和平行的直线，以组成一个方格网。方格的大小取决于地区的地貌特征及施测面水准的工作目的；一般在5～250m的范围内变动。

布设方格常用下述方法进行：即在地区中部选择一个点，通过此点标定两条互相垂直的直线为主轴，定线时应考虑到近似地平行于施测地段的主要道路或建筑物的方向。在主轴上量取彼此相等的线段（例如取200m），并在所取得的点上作垂线，于垂线上量取同样长度的一些线段，这样便构成了基本方格网。在基本方格边的两点间再进行定线和用卷尺丈量的方法，以使基本方格加密为更小的填充方格。

所有方格的顶点均用木桩来标志。工作进行时，按方格所编号码的顺序，如图5-39所示，对大的方格则在每个方格的中心安置仪器，并读取四角上立尺的读数。例如在方格1中，读取$A$、$G$两桩上立尺的读数为$a$、$c$；将两水准尺平行移至$E$、$F$点，并读取读数为$b_1$、$b_2$；此时水准尺仍留在$E$、$F$桩上，而仪器搬至方格2，仍读$E$、$F$两桩上立尺的读数，得$a_1$、$a_2$；由于$E$、$F$点上出现了两组读数，故常以下式进行检验：

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1$$

其差数视要求精度而定，一般为4mm。检查观测无误，两尺可平行移至$K$、$L$点。同样为了加快作业速度，可以采用两根后视尺和两根前视尺一次施测四个桩点。

如果方格比较小时，一个测站可测若干个方格，图5-40中Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ为测站，$K$、$R$、$S$、$P$点为转点，其他各桩点则作间视进行施测。每一个桩点都要编号。将读数

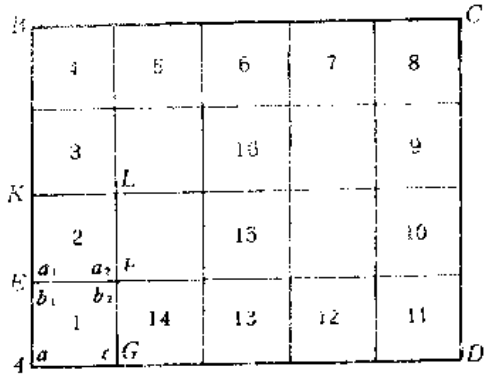



图 5-39

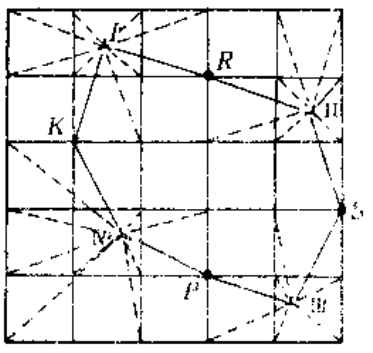



图 5-40

仔细记入手簿中，手簿的格式通常就是一张全部施测点的略图。

面水准测量的成果整理，首先从一个起始点开始，计算出第一个转点的高程，依次推算整个方格网转点的高程，再回到起始点，以求得水准路线的闭合差。若闭合差在容许范围内，即按距离成正比例地进行分配，并根据各转点调整后的高程，计算所有各间视点的高程。

# 第六章　误差理论的基本知识

## §6-1 观测误差

在各项测量工作中，例如直线丈量，对某段距离进行多次重复丈量时，发现每次丈量的结果通常是不一致的。又如对若干个量进行观测，如果知道这几个量所构成的某个函数应等于某一理论值，则可以发现，用这些量的观测值代入上述函数通常与理论值不一致。这类现象在测量工作中是普遍存在的。这种现象之所以产生，是由于观测结果中存在着观测误差的缘故。

为什么观测结果中会存在观测误差呢？概括说来，有下列三方面原因：

首先，观测者是通过自己的感觉器官来进行工作的，由于感觉器官的鉴别力的局限性，在进行仪器的安置、瞄准、读数等工作时，都会产生一定的误差。与此同时，观测者的技术水平、工作态度也会对观测结果产生不同的影响。

其次，观测时使用的是特定的仪器，而每种仪器都具有一定的精密度，而使观测结果受到相应的影响。例如使用只有厘米刻划的普通钢尺量距，就难以保证估读厘米以下的尾数的准确性。再说仪器本身也含有一定的误差，例如水准仪的视准轴不平行于水准管水准轴、水准尺的分划误差等等。显然，使用这些仪器进行测量也就给观测结果带来误差。

再有，在观测过程中所处的外界自然环境，如地形、温度、湿度、风力、大气折光等因素都会给观测结果带来种种影响。而且这因素随时都有变化，由此对观测结果产生的影响也随之变化，这就必然使观测结果带有误差。

人、仪器和客观环境这三方面是引起观测误差的主要因素，总称“观测条件”。不论观测条件如何，观测结果都含有误差。根据观测误差的性质，观测误差可分为**系统误差**和**偶然误差**两类。现分别叙述如下：

### 一、系统误差

在相同的观测条件下对某个固定量作多次观测，如果观测误差在正负号及量的大小上表现出一致的倾向，即按一定的规律变化或保持为常数，这类误差称为系统误差。例如用一支名义长度为20m而实际比20m长出$\Delta$的钢卷尺去量距，测量结果为$D'$，则$D'$中含有因尺长不准确而带来的误差为$\frac{\Delta}{20}D'$，这种误差的大小，与所量直线的长度成正比，而正负号始终一致，所以这种误差属于系统误差。系统误差对观测结果的危害性很大，但由于它有规律性而可以设法将它消除或减弱。例如上述钢尺量距的例子，可利用尺长方程式对观测结果进行尺长改正。又如在水准测量中，可以用前后视距离相等的办法来减少由于

仪器视准轴不平行于水准管水准轴给观测结果带来的影响；可以在测站上以后黑、前黑前红、后红的观测程序来减弱由于仪器下沉对观测结果的影响等等。

## 二、偶然误差

在相同观测条件下对某个固定量所进行的一系列观测，如果观测结果的差异在正负号和数值上，都没有表现出一致的倾向，即没有任何规律性，例如读数时估读小数的误差等等，这种误差称为偶然误差。

在观测过程中，系统误差和偶然误差总是同时产生的。当观测结果中有显著的系统误差时，偶然误差就处于次要地位，观测误差就呈现出“系统”的性质。反之，当观测结果中系统误差处于次要地位时，观测结果就呈现出“偶然”的性质。

由于系统误差在观测结果中具有积累的性质，对观测结果的影响尤为显著，所以在测量工作中总是采取各种办法削弱其影响，使它处于次要地位。研究偶然误差占主导地位的观测数据的科学处理方法，是测量学的重要课题之一。

在测量中，除不可避免的误差之外，还可能发生错误。例如在观测时读错读数、记错时记错等等，这些都是由于观测者的疏忽大意所造成的。在观测结果中是不允许存在错误的。一旦发现错误，必须及时加以更正。不过只要观测者认真负责和细心地作业，错误是可以避免的。

# §6-2 偶然误差的特性

在观测结果中主要存在偶然误差，所以为了研究观测结果的质量，以及如何根据观测结果求出未知量的最或然值，就必须进一步研究偶然误差的性质。

下面先介绍一个测量中的例子：在相同的观测条件下，独立地●观测了217个三角形的全部内角。由于观测结果中存在着偶然误差，三角形的三个内角观测值之和不等于三角形内角和的理论值(也称真值，即180°)。设三角形内角和的真值为$X$，三角形内角和的观测值为$L_i$，则三角形内角和的真误差（或简称误差，在这里这个误差称为三角形的闭合差）为

$$\Delta_i = L_i - X \quad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{6-1}$$

对于每个三角形来说，$\Delta_i$是每个三角形内角和的真误差，$L_i$是每个三角形三个内角观测值之和，$X$为180°。现将217个真误差按每3″为一区间，以误差值的大小及其正负号，分别统计出在各误差区间内的个数$\nu$，及相对个数$\nu/217$。其结果见表6-1。

从表6-1中可以看出：小误差出现的百分比较大误差出现的百分比为大；绝对值相等的正负误差出现的百分比相仿；最大的误差不超过某一个定值（本例为27″）。在其它测量结果中也显示出上述同样的规律。通过大量实验统计结果表明，特别是当观测次数较多时，可以总结出偶然误差具有如下的规律性：

1.在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限度；

---

● 所谓“独立地”，一般说来是指各个观测值之间互不影响，即每一个观测值所产生的误差，不影响其余各观测值误差的大小。

表 6-1

| 误差区间（3″） | 正误差 | | 负误差 | | 合计 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 个数 $v$ | 相对个数 $\frac{v}{n}$ | 个数 $v$ | 相对个数 $\frac{v}{n}$ | 个数 $k$ | 相对个数 $\frac{k}{n}$ |
| 0～3 | 30 | 0.138 | 29 | 0.134 | 59 | 0.272 |
| 3～6 | 21 | 0.097 | 20 | 0.02 | 41 | 0.189 |
| 6～9 | 15 | 0.069 | 18 | 0.083 | 33 | 0.152 |
| 9～12 | 14 | 0.065 | 16 | 0.073 | 30 | 0.138 |
| 12～15 | 12 | 0.055 | 10 | 0.046 | 22 | 0.101 |
| 15～18 | 8 | 0.037 | 8 | 0.037 | 16 | 0.074 |
| 18～21 | 5 | 0.023 | 6 | 0.028 | 11 | 0.051 |
| 21～24 | 2 | 0.009 | 2 | 0.009 | 4 | 0.018 |
| 24～27 | 1 | 0.005 | 0 | 0 | 1 | 0.005 |
| 27以上 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 108 | 0.498 | 109 | 0.502 | 217 | 1.000 |

2.绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的可能性大；

3.绝对值相等的正误差与负误差，其出现的可能性相等；

4.当观测次数无限增多时，偶然误差的算术平均值趋近于零。

上述第四个特性是由第三个特性导出的。从第三个特性可知，在大量的偶然误差中，正误差与负误差出现的可能性相等，因此在求全部误差总和时，正的误差与负的误差就有互相抵消的可能。当误差个数无限增大时，真误差的算术平均值将趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0 \tag{6-2}$$

实践表明，对于在相同条件下独立进行的一组观测来说，不论其观测条件如何，也不论是对一个量还是对多个量进行观测，这组观测误差必然具有上述四个特性。而且，当观测的个数 $n$ 愈大时，这种特性就表现得愈明显。偶然误差的这种特性，又称为统计规律性。

为了充分反映误差分布的情况，除去上述用表格的形式（称误差分布表），还可以用直观的图形来表示。例如，在图6-1中以横坐标表示误差的大小，纵坐标表示各区间误差出现的相对个数除以区间的间隔值（本例是3″）。这样，每一误差区间上方的长方形面积，就代表误差出现在该区间的相对个数。例如，图中有斜线的长方形面积就代表误差出现在 $+6''\sim+9''$ 区间内的相对个数0.069。这种图称为直方图，其特点是能形象地反映出误差的分布情况。

当观测次数愈来愈多，误差出现在各个区间的相对个数的变动幅度就愈来愈小。当 $n$ 具有足够大时，误差在各个区间出现的相对个数就趋于稳定。这就是说，一定的观测条件，对应着一定的误差分布。可以想象，当观测次数足够多时，如果把误差的区间间隔无限缩小，则图6-1中各长方形顶边所形成的折线将变成一条光滑曲线（图6-2），称为**误差分布曲线**。在概率论中，把这种误差分布称为正态分布（或高斯分布），描绘这种分布的方程（称概率密度）为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{6-3}$$

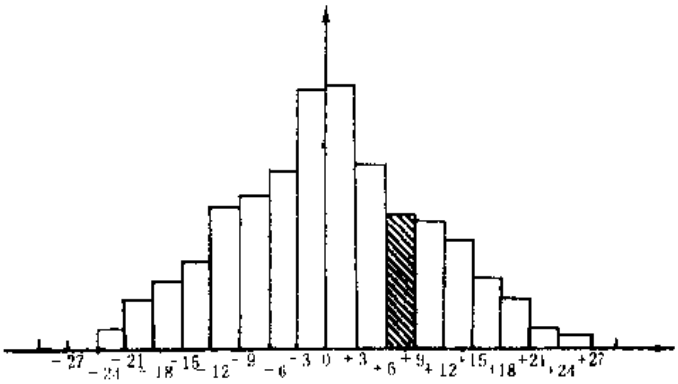



图 6-1

式中参数

$$\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta^2]}{n} \tag{6-4}$$

$\sigma$ 是观测误差的**标准差（方根差或均方根差）**。从（6-3）式可以看出正态分布具有前述的偶然误差特性。即

1. $f(\Delta)$ 是偶函数。即绝对值相等的正误差与负误差求得的 $f(\Delta)$ 相等，所以曲线对称于纵轴。这就是偶然误差的第三特性。

2. $\Delta$ 愈小，$f(\Delta)$ 愈大。当 $\Delta=0$ 时，$f(\Delta)$ 有最大值：$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 反之，$\Delta$ 愈大，$f(\Delta)$ 愈小。当 $\Delta\to\pm\infty$ 时，$f(\Delta)\to 0$。所以，横轴是曲线的渐近线。由于 $f(\Delta)$ 随着 $\Delta$ 的增大而较快地减小，所以当 $\Delta$ 到达某值，而 $f(\Delta)$ 已较小，实际上可以看作零时，这样的 $\Delta$ 可作为误差的限值。这就是偶然误差的第一和第二特性。

下面介绍（6-3）式中参数 $\sigma$。从图6-2可见：误差曲线在纵轴两边各有一个转向点（拐点）。如果将 $f(\Delta)$ 求二阶导数等于零，可以求得曲线拐点横坐标：

$$\Delta_{拐}=\pm\sigma$$

从图6-2可见，由于误差出现在 $-\sigma\sim-\sigma$ 区间内的相对次数是某个定值，即介于曲线 $f(\Delta)$，横轴和直线 $\Delta=-\sigma$、$\Delta=+\sigma$ 之间的曲边梯形面积是个定值。所以当 $\sigma$ 愈小时，曲线将愈陡峭，即误差分布比较密集；当 $\sigma$ 愈大时，曲线将愈平缓，即误差分布比较分散。由此可见，参数 $\sigma$ 的值表征了误差扩散的特征。

例如，有两组在不同观测条件下进行观测的观测值，其中一组的观测条件较好，误差分布比较密集，它具有较小的参数 $\sigma_1$；另一组的观测条件较差，误差分布比较分散，它具有较大的参数 $\sigma_2$，即 $\sigma_1<\sigma_2$。此时，具有 $\sigma_1$ 的误差曲线的最大纵坐标 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}$，必然大于具有 $\sigma_2$ 的误差曲线的最大纵坐标 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$，即 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}>\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$（图6-3）。由于每条曲线与横轴之间的面积表示落在各区间的误差个数的总和与全部观测个数之比：$\frac{[v]}{n}=1$。

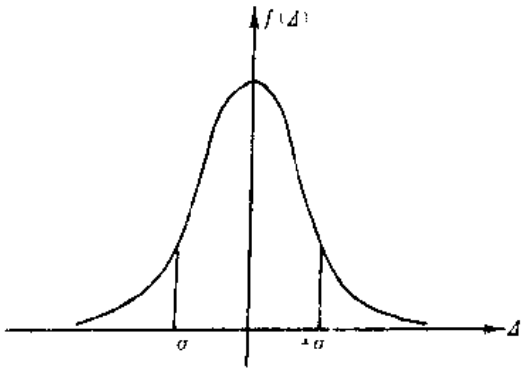



图 6-2

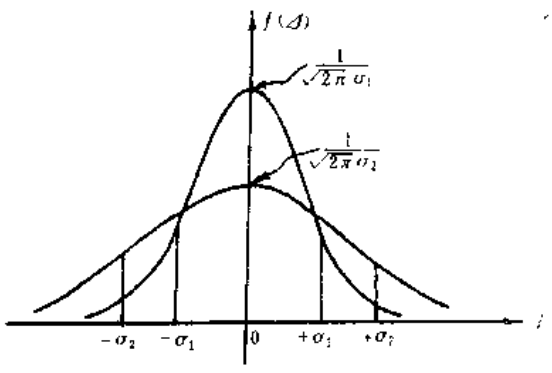



图 6-3

即恒等于 1。因此，具有$\sigma_1$的误差曲线，自最大纵坐标$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}$点向两侧以较陡的趋势急速下降；而具有$\sigma_2$的误差曲线；则自$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$点向两侧以较平缓的趋势伸展在横轴上方。由此可见，观测条件的好坏在误差曲线的形态（指误差扩散情况）上得到了充分的反映，而曲线的形态又可用具体的数值——参数$\sigma$——予以表达。

## §6-3 评定精度的指标

前面已经介绍，在一定的观测条件下进行一组观测，它对应着一定的误差分布。如果该组误差值总的说来偏小些，即误差分布比较密集，则表示该组观测质量好些，这时标准差$\sigma$的值也较小；反之，如果该组误差值偏大，即误差分布比较分散，则表示该组观测质量差些，这时标准差的值也就较大。因此，一组观测误差所对应的标准差值的大小，反映了该组观测结果的精度。

所以在评定观测精度时，就不再作误差分布表（表6-1），也不绘制直方图（图6-2），而是设法计算出该组误差所对应的标准差$\sigma$的值。

从公式（6-4）可知，求$\sigma$值要求观测个数$n\to\infty$，但这实际是不可能的。

在测量工作中，观测个数总是有限的，为了评定精度，一般采用下述公式：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{6-5}$$

$m$称为**中误差**。这里的方括号表示总和，$\Delta_i(i=1,2\cdots n)$为一组同精度观测误差。从（6-4）式和（6-5)式可以看出，标准差$\sigma$跟中误差$m$的不同，在于观测个数$n$上：标准差表征了一组同精度观测在$n\to\infty$时误差分布的扩散特征，即理论上的观测精度指标，而中误差则是一组同精度观测在$n$为有限个数时求得的观测精度指标。所以中误差实际上是标准差的近似值（估值）；随着$n$的增大，$m$将趋近于$\sigma$。

必须指出，在相同的观测条件下进行的一组观测，得出的每一个观测值都称为同精度观测值。由于它们对应着一个误差分布，即对应着一个标准差，而标准差的估值即为中误

差。因此，同精度观测值具有相同的中误差。但是，同精度观测值的真误差却彼此并不相等，有的差别还比较大(见表6-1)，这是由于真误差具有偶然误差性质的缘故。

在应用（6-5）式求一组同精度观测值的中误差$m$时，式中真误差$\Delta$可以是同一个量的同精度观测值的真误差，也可以是不同量的同精度观测值的真误差。在计算$m$值时注意取2-3位有效数字，并在数值前冠以“±”号，数值后写上“单位”。

例6-1 设对某个三角形用两种不同的精度分别对它进行了10次观测，求得每次观测所得的三角形内角和的真误差为

第一组：$+3''$，$-2''$，$-4''$，$+2''$，$0''$，$-4''$，$-3''$，$+2''$，$-3''$，$-1''$；

第二组：$0''$，$-1''$，$-7''$，$+2''$，$+1''$，$+1''$，$-8''$，$0''$，$+3''$，$-1''$；

试求这两组观测值的中误差。

解：这两组观测值中误差（用三角形内角和的真误差而得的中误差，也称为三角形内角和的中误差）计算于下：

$$m_1=\sqrt{\frac{3^2+2^2+4^2+2^2+0^2+4^2+3^2+2^2+3^2+1^2}{10}}=\pm 2.7''$$

$$m_2=\sqrt{\frac{0^2+1^2+7^2+2^2+1^2+1^2+8^2+0^2+3^2+1^2}{10}}=\pm 3.6''$$

比较$m_1$和$m_2$的值可知，第一组的观测精度较第二组观测精度高。

显然，对多个三角形进行同精度观测（即相同的观测条件），求得每个三角形内角和的真误差，仍可按上述办法求得观测值（三角形内角和）的中误差。

在测量工作中，对于评定一组同精度观测值的精度来说，为了计算上的方便或别的原因，在某些精度评定时也采用下述精度指标：

$$\vartheta=\pm\frac{[|\Delta|]}{n}$$

$\vartheta$称为**平均误差**，它是误差绝对值的平均值。

在某些国家，也有将一组误差按其绝对值的大小顺序排列，取居中的一个误差值作为精度指标，并称为**或然误差**，以$\rho$表示，在误差理论中可以证明，对于同一组观测误差来说，当$n\to\infty$时，求得的中误差$m$、平均误差$\vartheta$和或然误差$\rho$之间都有一定的数量关系，即

$$\vartheta\doteq 0.7979m \tag{6-6}$$

$$\rho\doteq 0.6745m$$

偶然误差第一特性说明，在一定的观测条件下，偶然误差的绝对值不会超过一定的限值，那么这个值是多大呢？根据理论知道，大于中误差的真误差，其出现的可能性约为32%。大于两倍中误差的真误差，其出现的可能性约为5%，大于三倍中误差的真误差，其出现的可能性只占3‰左右。因此测量中常取两倍中误差作为误差的限值，也就是在测量中规定的**容许误差**（或称限差）。即

$$\Delta_{容}=2m \tag{6-7}$$

在有的测量规范中也有取三倍中误差作为容许误差的。

对于评定精度来说，有时利用中误差还不能反映测量的精度。例如丈量两条直线，

条长100m，另一条长20m，它们的中误差都是±10mm，那么，能不能说两者测量精度相同呢？不能！而是前者优于后者。为此，利用中误差与观测值的比值，即$\frac{m_i}{L_i}$来评定精度，通常称此比值为**相对中误差**。相对中误差都要求写成分子为1的分式，即$1/N$。比例为

$$\frac{m_1}{L_1}=\frac{1}{10000}, \qquad \frac{m_2}{L_2}=\frac{1}{2000}$$

可见

$$\frac{m_1}{L_1}<\frac{m_2}{L_2}$$

即前者的精度比后者高。

有时，求得真误差和容许误差后，也用相对误差来表示。例如，在本书以后要介绍的导线测量中，假设起算数据没有误差时，求出的全长相对闭合差也就是相对真误差；而规范中规定全长相对闭合差不能超过1/2000或1/15000，它就是相对容许误差。

与相对误差相对应，真误差、中误差、容许误差都称为绝对误差。

## §6-4 误差传播定律

上节讨论了如何根据同精度观测值的真误差来评定观测值精度的问题。可是，在实际工作中有许多未知量不能直接观测而求其值，需要由观测值间接计算出来。例如某未知点$B$的高程$H_B$，是由起始点$A$的高程$H_A$加上从$A$点到$B$点间进行了若干站水准测量而得来的观测高差$h_1$、$h_2$……$h_n$求和得出的。这时未知点$B$的高程$H_B$是各独立观测值（这观测高差$h_1$、$h_2$……$h_n$）的函数。那么如何根据观测值的中误差去求观测值函数的中误差呢？阐述观测值中误差与观测值函数中误差之间关系的定律，称为**误差传播定律**。

现按几种不同情况，从简到繁分别论讨如下：

### 一、倍数的函数

设有函数：

$$z=kx \tag{a}$$

式中$z$为观测值的函数，$k$为常数（无误差，下同），$x$为观测值，已知其中误差为$m_x$，现在求$z$的中误差$m_z$。

设$x$和$z$的真误差分别为$\Delta_x$和$\Delta_z$。由（$a$）式可以知道$\Delta_x$和$\Delta_z$的关系为

$$\Delta_z=k\Delta_x$$

若对$x$共观测了$n$次，则

$$\Delta_{z_i}=k\Delta_{x_i} \qquad (i=1,\ 2\cdots\cdots n)$$

将上式平方，得

$$\Delta_{z_i}^2=k^2\Delta_{x_i}^2 \qquad (i=1,\ 2\cdots\cdots n)$$

按上式求和，并除以$n$，得

$$\frac{[\Delta_z^2]}{n}=\frac{k^2[\Delta_x^2]}{n} \tag{b}$$

按中误差定义可知

$$m_z^2 = \frac{[\Delta_z^2]}{n}$$

$$m_x^2 = \frac{[\Delta_x^2]}{n}$$

所以（$b$）式可写为：

$$m_z^2 = k^2 m_x^2$$

或

$$m_z = k m_x \qquad (6\text{-}8)$$

即，观测值与常数乘积的中误差、等于观测值中误差乘常数。

例 6-2 在1:500比例尺地形图上，量得$A$、$B$两点间的距离 $S_{ab} = 23.4\text{mm}$，其中误差$m_{Sab} = \pm 0.2\text{mm}$，求$A$、$B$间的实地距离$S_{AB}$及其中误差$m_{S_{AB}}$。

解：$S_{AB} = 500 \times S_{ab} = 500 \times 23.4 = 11700\text{mm} = 11.7\text{m}$

由（6-8）式得

$$m_{S_{AB}} = 500 \times m_{Sab} = 500 \times (\pm 0.2) = \pm 100\text{mm} = \pm 0.1\text{m}$$

最后答案为

$$S_{AB} = 11.7\text{m} \pm 0.1\text{m}$$

## 二、和或差的函数

设有函数

$$z = x \pm y \qquad (c)$$

式中$z$是$x$、$y$的和或差的函数，$x$、$y$为独立观测值，它们的中误差已知为$m_x$、$m_y$，现在求$z$的中误差$m_z$。

设$x$、$y$、$z$的真误差分别为$\Delta_x$、$\Delta_y$、$\Delta_z$。由（$c$）式可以得出

$$\Delta_z = \Delta_x \pm \Delta_y$$

当对$x$、$y$均观测了$n$次，则

$$\Delta_{z_i} = \Delta_{x_i} \pm \Delta_{y_i} \qquad (i = 1,\ 2\cdots\cdots n)$$

将上式平方，得

$$\Delta_{z_i}^2 = \Delta_{x_i}^2 + \Delta_{y_i}^2 \pm 2\Delta_{x_i}\Delta_{y_i} \qquad (i = 1,\ 2\cdots\cdots n)$$

按上式求和，并除以$n$，得

$$\frac{[\Delta_z^2]}{n} = \frac{[\Delta_x^2]}{n} + \frac{[\Delta_y^2]}{n} \pm 2\frac{[\Delta_x\Delta_y]}{n} \qquad (d)$$

由于$\Delta_x$、$\Delta_y$均为偶然误差，其符号为正或负的机会相同，因为$\Delta_x$、$\Delta_y$为独立误差，它们出现的正、负号互不相关，所以其乘积$\Delta_x\Delta_y$也具有正负机会相同的性质，根据偶然误差第三、第四特性，在求$[\Delta_x\Delta_y]$时其正值与负值有互相抵消的可能；当$n$愈大时，（$d$）式中最后一项$\frac{[\Delta_x\Delta_y]}{n}$将趋近于零，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_x\Delta_y]}{n} = 0 \qquad (e)$$

以后将满足上式的误差 $\Delta_x$、$\Delta_y$ 称为互相独立的误差，简称独立误差，相应的观测值称为独立观测值。在推导误差传播定律时，对于独立观测值来说，即使 $n$ 是有限量，由于（$c$）式残存的值不大，一般就忽视它的影响。根据中误差定义，得

$$m_z^2=\frac{[\Delta_z^2]}{n},\quad m_x^2=\frac{[\Delta_x^2]}{n},\quad m_y^2=\frac{[\Delta_y^2]}{n}$$

因此（$d$）式可写为

$$m_z^2=m_x^2+m_y^2$$

即，两观测值代数和的中误差平方，等于两观测值中误差的平方之和。

当 $z$ 是一组观测值 $x_1$、$x_2\cdots x_n$ 代数和的函数时，即

$$z=x_1\pm x_2\cdots\cdots\pm x_n$$

根据上面推导的方法，可以得出函数 $z$ 的中误差平方为

$$m_z^2=m_{x_1}^2+m_{x_2}^2+\cdots+m_{x_n}^2 \tag{6-9}$$

式中 $m_{x_i}$ 是观测值 $x_i$ 的中误差。由（6-9）式可见，$n$ 个观测值代数和的中误差平方，等于 $n$ 个观测值中误差平方之和。

当诸观测值 $x_i$ 为同精度观测值时，设其中误差为 $m$，即 $m_{x_1}=m_{x_2}=\cdots=m_{x_n}=m$ 则(6-9)式将为

$$m_z=m\sqrt{n} \tag{6-10}$$

这就是说，在同精度观测时，观测值代数和的中误差，与观测值个数 $n$ 的平方根成正比。

例 6-3 设用长为 $l$ 的卷尺量距，共丈量了 $n$ 个尺段，已知每尺段量距的中误差都为 $m$，求全长 $S$ 的中误差 $m_s$。

解：因为全长 $S=l+l+\cdots\cdots+l$（式中共有 $n$ 个 $l$）。而 $l$ 的中误差为 $m$，按(6-10)式得

$$m_s=m\sqrt{n} \tag{6-11}$$

即，量距的中误差与丈量段数 $n$ 的平方根成正比。

例如以30m长的钢尺丈量90m的距离，当每尺段量距的中误差为±5mm时，全长的中误差为

$$m_{90}=\pm5\sqrt{3}=\pm8.7\text{mm}$$

当使用量距的钢尺长度相等，每尺段的量距中误差都为 $m_l$，则每公里长度的量距中误差 $m_{km}$ 也是相等的。当对长度为 $S$ 公里的距离丈量时，全长的真误差将是 $S$ 个一公里丈量真误差的代数和，于是 $S$ 公里的中误差为

$$m_s=\sqrt{S}\,m_{km} \tag{6-12}$$

式中，$S$ 的单位是公里。（6-12）式表明：在距离丈量中，距离 $S$ 的量距中误差与长度 $S$ 的平方根成正比。

例 6-4 为了求得 $A$、$B$ 两水准点间的高差，今自 $A$ 点开始进行水准测量，经 $n$ 站后测完。已知每站高差的中误差均为 $m_{站}$，求 $A$、$B$ 两点间高差的中误差。

解：因为 $A$、$B$ 两点间高差 $h_{AB}$ 等于各站的观测高差 $h_i$（$i=1,2\cdots n$）之和，即

$$h_{AB} = H_B - H_A = h_1 + h_2 + \cdots h_n$$

按（6-10）式可得

$$m_{h_{AB}} = \sqrt{n}\, m_{站} \tag{6-13}$$

即，水准测量高差的中误差，与测站数 $n$ 的平方根成正比。

从（6-13）式可以看出，在不同的水准路线上，即使两点间的路线长度相同，但是由于受地面起伏的限制，设的测站数不同时，则两点间高差的中误差是不同的。但是，当水准路线通过平坦地区时，各站的视线长度大致相同，每公里的测站数接近相等，因而每公里的水准测量高差的中误差可以认为相同，设为$m_{km}$。当$A$、$B$两点间的水准路线为 $S$ 公里时，$A$、$B$ 点间高差的中误差为

$$m_{h_{AB}}^2 = \underbrace{m_{km}^2 + m_{km}^2 + \cdots + m_{km}^2}_{S个} = S m_{km}^2$$

或

$$m_{h_{AB}} = \sqrt{S}\, m_{km} \tag{6-14}$$

即，水准测量高差的中误差与距离 $S$ 的平方根成正比。例如，已知用某种仪器，按某种操作方法进行水准测量时，每公里高差的中误差为 ±20mm，则按这种水准测量进行了25km后，测得高差的中误差为 $\pm 20\sqrt{25} = \pm 100$mm。

在水准测量作业时，对于地形起伏不大的地区或平坦地区，可用（6-14)式计算高差的中误差；对于起伏较大的地区，则用（6-13）式计算高差的中误差。

在一个观测量中，常常同时存在几个无函数关系的误差，如在水准测量中进行后视或前视读数时，有水准管气泡不精确居中所引起的视线不严格水平而产生的误差，有估读毫米值的估读误差等。这些误差在观测成果中是相加的关系，如上述两种误差对读数值的联合影响为

$$\Delta_{读数} = \Delta_{居中} + \Delta_{估读}$$

影响中误差为

$$m^2_{读数} = m^2_{居中} + m^2_{估读}$$

一般地讲，观测值的中误差 $m$ 为

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots\cdots + m_n^2$$

式中 $m_1$、$m_2$、……$m_n$为各独立误差源的中误差。

## 三、线性函数

设有线性函数：

$$z = k_1 x_1 \pm k_2 x_2 \pm \cdots \pm k_n x_n$$

式中$x_1$、$x_2 \cdots x_n$为独立观测值，$k_1$、$k_2 \cdots k_n$为常数，则综合（6-8）式和（6-9）式得

$$m_z^2 = (k_1 m_1)^2 + (k_2 m_2)^2 + \cdots + (k_n m_n)^2 \tag{6-15}$$

例 6-5 设有某线性函数

$$z = \frac{4}{14}x_1 + \frac{9}{14}x_2 + \frac{1}{14}x_3$$

其中$x_1$、$x_2$、$x_3$的中误差分别为$m_1 = \pm 3$mm、$m_2 = \pm 2$mm、$m_3 = \pm 6$mm，求 $z$ 的中误差

解：按（6-15）式，并将$x_1$、$x_2$、$x_3$的中误差代入后可得

$$m_z = \pm\sqrt{\left(\frac{4}{14}\times 3\right)^2 + \left(\frac{9}{14}\times 2\right)^2 + \left(\frac{1}{14}\times 6\right)^2}$$

$$= \pm 1.6\text{mm}$$

## 四、一般函数

$$z = f(x_1,\ x_2\cdots x_n)$$

式中$x_i$（$i=1,\ 2\cdots n$）为独立观测值，已知其中误差为$m_i$（$i=1,\ 2\cdots n$），求$z$的中误差

当$x_i$具有真误差$\Delta_i$时，函数$z$相应地产生真误差$\Delta_z$.这些真误差都是一个小值，由数学分析可知，变量的误差与函数的误差之间的关系，可以近似地用函数的全微分来表达。为此，求函数的全微分，并以真误差的符号“$\Delta$”替代微分的符号“$d$”,得

$$\Delta_z = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta_{x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta_{x_2} - \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta_{x_n}$$

式中$\frac{\partial f}{\partial x_i}$（$i=1,\ 2\cdots n$）是函数对各个变量所取的偏导数，以观测值代入所算出的数值，它们是常数，因此上式是线性函数 按（6-15）式得

$$m_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2 \qquad (6\text{-}16)$$

上式是误差传播定律的一般形式。前述的（6-8）、（6-9）、（6-15）式都可以看作上式的特例。

例 6-6 设有某函数

$$z = S\cdot\sin a$$

式中$S=150.11\text{m}$，其中误差$m_S=\pm 0.05\text{m}$；$a=119^\circ 45' 00''$，其中误差$m_a=\pm 20.6''$；求$z$的中误差$m_z$.

解：因为$z=S\cdot\sin a$，所以$z$是$S$及$a$的一般函数。它们之间真误差的关系式为

$$\Delta_z = \left(\frac{\partial z}{\partial S}\right)\Delta_S + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)\Delta_a$$

按（6-16）式得：

$$m_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial S}\right)^2 m_S^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2 \left(\frac{m_a}{\rho''}\right)^2$$

式中：

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \sin a;\quad \frac{\partial z}{\partial a} = S\cdot\cos a$$

因此

$$m_z^2 = \sin^2 a m_S^2 + (S\cos a)^2 \left(\frac{m_a''}{\rho''}\right)^2$$

$$= (0.868)^2(\pm 5)^2 + (150\times 10^2\times 0.496)^2\left(\frac{\pm 20.6}{206\times 10^3}\right)^2$$

$$= 18.8 + 0.6 = 19.4\text{cm}$$

即 $$m_z = \pm 4.4\text{cm}$$

在上述演算中，$\left(\frac{m''_\alpha}{\rho''}\right)$是将角值化成弧度，$m_S$以厘米为单位，$S$以$150\times10^2$代入是考虑其前项系以厘米为单位，所以也将$S$以厘米表示，以便整个式子的单位统一。

应用误差传播定律求观测值函数的精度时，可归纳为如下三步：

1）按问题的要求写出函数式：

$$Z = f(x_1,\ x_2\cdots x_n)$$

2）对函数式全微分，得出函数的真误差与观测值真误差之间的关系式：

$$\Delta_Z = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\Delta_{x_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\Delta_{x_2} - \cdots\cdots - \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Delta_{x_n}$$

式中，$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$是用观测值代入求得的值。

3）写出函数中误差与观测值中误差之间的关系式：

$$m_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 m_n^2$$

上式写出的规律是：将偏导数值平方，把真误差换成中误差平方。用数值代入上式计算时，注意各项的单位要统一。

必须指出，在误差传播定律的推导过程中，要求观测值必须是独立观测值，它们的真误差之间须满足（$e$）式，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_x\Delta_y]}{n} = 0$$

例如，设有函数$z = x + y$，而$y = 3x$，此时，$m_z^2 \neq m_x^2 + m_y^2$，因为$x$与$y$不是独立观测值，因为不论$n$值多少，恒有

$$\frac{[\Delta_x\Delta_y]}{n} = \frac{[\Delta_x\cdot 3\Delta_x]}{n} = 3\frac{[\Delta_x^2]}{n} = 3m_x^2$$

因此，应把$z$化成独立观测值的函数，即

$$z = x + 3x$$

上式中$x$与$3x$两项是由同一个观测值$x$组成的，必须先并项为

$$z = 4x$$

而后求其中误差，即

$$m_z = 4m_x$$

## §6-5 算术平均值及其中误差

设在相同的观测条件下对未知量观测了$n$次，观测值为$L_1$、$L_2\cdots\cdots L_n$，现在要根据这$n$个观测值确定出该未知量的最或然值。

设未知量的真值为$X$，则按（6-1）式可写出观测值的真误差公式为

$$\Delta_i = L_i - X \qquad (i = 1, 2\cdots n) \tag{f}$$

将上式相加得

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots\cdots + \Delta_n = (L_1 + L_2 + \cdots\cdots + L_n) - nX$$

或

$$[\Delta] = [L] - nX$$

故

$$X = \frac{[L]}{n} - \frac{[\Delta]}{n}$$

设以$x$表示上式右边第一项的观测值的算术平均值，即

$$x = \frac{[L]}{n} \tag{6-17}$$

以$\Delta x$表示算术平均值的真误差，即

$$\Delta_x = \frac{[\Delta]}{n} \tag{g}$$

代入上式，则得

$$X = x - \Delta x \tag{h}$$

由偶然误差第四特性知道，当观测次数无限增多时，$\Delta_x$趋近于零，

即

$$\lim_{n\to\infty} \Delta x = 0$$

也就是说，$n$趋近无穷大时，算术平均值即为真值。在实际工作中，观测次数总是有限的，所以算术平均值不可视为所求量的真值；但从（$g$）和（$h$）式可以看出，随着观测次数的增加，$x$值是趋近于真值的。在计算时，不论观测次数的多少均以算术平均值$x$作为未知量的最或然值，这是误差理论中的一个公理。这种只有一个未知量的平差问题，在传统的平差计算中称为**直接平差**。

现在来推导算术平均值的中误差公式。

因为

$$x = \frac{L_1}{n} + \frac{L_2}{n} + \cdots\cdots + \frac{L_n}{n}$$

式中，$1/n$为常数。由于各独立观测值的精度相同，设其中误差均为$m$。现以$m_x$表示算术平均值的中误差，则按（6-15）式可得算术平均值的中误差为

$$m_x^2 = \underbrace{\frac{1}{n^2}m^2 + \frac{1}{n^2}m^2 + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2}m^2}_{n\ 项} = \frac{m^2}{n}$$

故

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{6-18}$$

由上式可知，**算术平均值的中误差为观测值的中误差的**$\frac{1}{\sqrt{n}}$**倍**。那末是不是随意增加观测个数对$x$的精度都有利而经济上又合算的呢？下面来分析一下：设观测值精度在一定时，例如设$m = 1$时，当$n$取不同值时，按（6-18）式得$m_x$值如下表：

由表6-2的数据可以看出，随着$n$的增大，$m_x$值不断减少，即$x$的精度不断提高。但

表 6-2

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 1.00 | 0.71 | 0.58 | 0.50 | 0.45 | 0.41 | 0.32 | 0.22 | 0.18 | 0.16 | 0.14 | 0.10 |

是，当观测次数增加到某一定的数目以后，再增加观测次数，精度就提高得很少。例如，观测次数自5次增加到20次，精度提高了一倍。而观测次数自20次增加到100次，精度也只能提高一倍。由此可见，要提高最或然值的精度，单靠增加观测次数是不经济的。精度受观测条件的限制。为了提高观测精度，需要考虑采用适当的仪器、改进操作方法、选择良好的外界环境并提高人员的操作素质等措施来改善观测条件。

## §6-6 同精度观测值的中误差

从（6-5）式可知，同精度观测值中误差的计算公式为

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$$

而

$$\Delta_i = L_i - X \qquad (i = 1,\ 2\cdots n)$$

这是利用观测值真误差求观测值中误差的定义公式，由于未知量的真值往往是不知道的，真误差也就不知道了。所以，一般不能直接利用上式求观测值的中误差。但是未知量的最或然值是可以求得的，它和观测值的差数也可以求得，即

$$v_i = x - L_i \qquad (i = 1,\ 2\cdots n) \tag{6-19}$$

式中 $v$ 称为改正数。为了评定精度，需要导出由改正数 $v$ 来计算观测值中误差的公式。

将（$f$）式加上式，可得

$$\Delta_i = -v_i + (x - X) \qquad (i = 1,\ 2\cdots n)$$

将上式分别自乘并取和，得

$$[\Delta\Delta] = [vv] - 2[v](x - X) + n(x - X)^2$$

全式均除以 $n$，并顾及（$h$）式，则得

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{[vv]}{n} - 2[v]\frac{\Delta x}{n} + \Delta x^2$$

由（6-19）、（6-17）式可得

$$[v] = nx - [L] = n\frac{[L]}{n} - [L] = 0 \tag{6-20}$$

则前式可写为

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{[vv]}{n} + \Delta x^2$$

由（$f$）式可得

$$X = \frac{[L]}{n} - \frac{[\Delta]}{n} = x - \frac{[\Delta]}{n}$$

所以

$$\Delta x = x - X = \frac{[\Delta]}{n}$$

则

$$\Delta x^2 = \frac{[\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n]^2}{n^2}$$

$$= \frac{[\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2]}{n^2} + 2\frac{[\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1\Delta_3 + \cdots + \Delta_{n-1}\Delta_n]}{n^2}$$

当 $n$ 无限增大时，上式右边第二项趋于零，而右边第一项为 $\frac{m^2}{n}$，顾及（6-18）式，得

$$\Delta x^2 = m_x^2$$

因 $n$ 为有限值，故在实用上可以用 $x$ 的中误差近似地代替 $x$ 的真误差，则

$$\frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{[vv]}{n} + m_x^2$$

将（6-5）式及（6-18）式代入，并移项得

$$m^2 - \frac{m^2}{n} = \frac{[vv]}{n}$$

故

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{6-21}$$

上式就是用改正数来求观测值中误差的公式，称为白塞尔公式。将上式代入（6-18）式，得到用改正数计算最或然值中误差的公式为

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \tag{6-22}$$

例 6-7　对某段距离进行五次同精度丈量，观测值列于表6-3中，试求这段距离的最或然值、观测值中误差及最或然值中误差。

解：为使计算成果清晰，计算的全部数据列于表6-3中。

表 6-3

| 观测次序 | 观测值 $L$（m） | $\delta L$（mm） | $v$（mm） | $vv$ | $v\delta L$ | 精度评定 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 148.064 | +6 | −3 | 9 | −18 | $m=\pm\sqrt{\frac{24}{4}}=\pm2.4$mm |
| 2 | 148.058 | 0 | +3 | 9 | 0 | |
| 3 | 148.063 | −5 | 2 | 4 | −10 | |
| 4 | 148.062 | −4 | 1 | 1 | −4 | $m_x=\pm\sqrt{\frac{24}{20}}=\pm1.1$mm |
| 5 | 148.066 | +2 | −1 | 1 | −2 | |
| | $x_0=148.058$ | $[\delta L]=+17$ | $[v]=-2$ | $[vv]=24$ | $[v\delta L]=-34$ | 最后成果： |
| | $x=x_0+\delta x$ | $\delta_x=\frac{[\delta L]}{n}$ | | | | $X=148.061\pm0.0011$m |
| | $=148.061$ | $=+3.4$ | | | | |
| | | $\approx+3$ | | | | |

计算步骤如下：

1. 计算最或然值 $x$

由于各 $L$ 之间差异不大，为了计算简便，可以选定一个与观测值接近的值作为 $x$ 的近似值 $x_0$，例如，表6-3中令 $x_0 = 148.058\text{m}$，然后，将每个观测值 $L_i$ 减去 $x_0$，得差值为

$$\delta L_i = L_i - x_0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n) \tag{6-23}$$

按（6-17）式得

$$x = \frac{[L]}{n} = x_0 + \frac{[\delta L]}{n}$$

$$= x_0 + \delta x \tag{6-24}$$

式中 $\delta x = \frac{[\delta L]}{n}$。这样，利用 $\frac{[\delta L]}{n}$ 计算 $\delta x$，而后求出 $x$，较直接用 $\frac{[L]}{n}$ 计算 $x$ 值方便。在表6-3中

$$\delta x = \frac{[\delta L]}{n} = -\frac{+17}{5} = +3.4 \approx +3\text{mm}$$

$$x = x_0 + \delta x$$

$$= 148.058\text{m} + 3\text{mm}$$

$$= 148.061\text{m}$$

2. 计算改正数 $v$

因为

$$v_i = x - L_i \qquad (i = 1, 2 \cdots\cdots n)$$

即

$$v_i = x_0 + \delta x - (x_0 + \delta L_i)$$

$$= \delta x - \delta L_i \qquad (i = 1, 2 \cdots\cdots n) \tag{6-25}$$

3. 检核

如果计算 $x$ 和 $v$ 时没有错误，也没有计算时的凑整误差，则

$$[v] = 0$$

如果计算中有凑整误差，例如 $\delta x = +3.4\text{mm}$，现凑整成 $\delta x = +3\text{mm}$，这时凑整误差为 $\Delta\delta x = \delta x' - \delta x = -0.4\text{mm}$，从而按（6-25）式求得的改正数实际上为 $v'$，即

$$v_i' = \delta x' - \delta L_i$$

$$= \delta x + \Delta\delta x' - \delta L_i$$

$$= v_i + \Delta\delta x'$$

这时

$$[v'] = [v] + n \cdot \Delta x'$$

$$= +n\Delta\delta x' \tag{6-26}$$

例如，表6-3中，求出的 $v$ 值，实际上是带有凑整误差 $\Delta\delta x'$ 后的 $v'$，所以，此 $[v] \neq 0$，而应等于 $-n\Delta\delta x' = +5 \times (-0.4) = +2$。实际上，由于计算 $\delta x$ 时的最大凑整误差为 $\delta x$ 所取数值末位上的0.5，为了计算简便，只要算出的 $[v']$ 小于 $\pm 0.5n$ 就成了。

4. $[vv]$ 的计算及检核

评定精度时，需先求出 $[vv]$。$[vv]$ 除用 $v_1^2 + v_2^2 + \cdots\cdots + v_n^2$ 计算外，还需用下式作检核计算：

$$[vv] = v_1^2 + v_2^2 + \cdots\cdots v_n^2$$

$$= v_1(\delta x - \delta L_1) - v_2(\delta x - \delta L_2) + \cdots + v_n(\delta x - \delta L_n)$$

$$= [v]\delta x - [v\delta L] = \quad [v\delta L] \tag{6-27}$$

当计算$\delta x$有凑整误差时，求得的改正数是$v'$，而$[v'] \neq 0$，则以（6-26）式代入上式，得

$$[v'v'] = +n\Delta\delta x'\delta x - [v'\delta L] \tag{6-28}$$

例如，表6-3中，$[v'v'] = +24$，而

$$[v'v'] = +n\Delta\delta x'\delta x - [v'\delta L] = +5\times(-0.4)\times 3-(-30)$$
$$= +24$$

可见计算中没有错误。

5. 精度评定

观测值中误差：$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{24}{4}} = \pm 2.4\text{mm}$$

最或然值中误差：$$m_x = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{24}{20}} = \pm 1.1\text{mm}$$

以上计算工作可使用具备“统计计算”功能的电子计算器。计算时，只需将选择开关（或键）按规定操作，之后依次输入观测值，然后按六个相应的键钮，即可显示如下六个结果：$n$（观测值个数）；$\Sigma L$（观测值之和，计算器上习惯以$x$表示投入计算的“数据”，即观测值，故表示观测值之和时用$\Sigma x$）；$\Sigma L^2$（观测值平方之和，以$\Sigma x^2$表示）；$\bar{x}$（算术平均值，计算器上以$\overline{x}$表示）；$m$（观测值中误差$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$，计算器上通常以$\sigma_{n-1}$或$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n}{n-1}}$●表示，称为采样标准偏差，“±”号另加）；$\sigma_n$或$\sigma$（$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n}{n}}$，称为总体标准偏差）。这六个结果是应不同的统计计算的要求而设计的。对于测量计算来讲，通常只求其中两项，即算术平均值$x$（$\overline{x}$）和观测值中误差$m$（$S_x$或$\sigma_{n-1}$）；而观测值个数$n$可供检核。

## §6-7 广义算术平均值及权

### 一、广义算术平均值

在求一个未知量的平差（直接平差）计算中，如果对未知量进行了$n$次同精度观测，则可按算术平均值（6-17）式求未知量的最或然值，按（6-21）及（6-22）式求观测值及最或然值的中误差。但是，在测量工作中经常遇到的是对未知量进行了$n$次不同精度观测，这就需要解决如何由这些不同精度的观测值求出未知量的最或然值，以及评定它们的精度的问题。

前一个问题可以这样来考虑：设对未知量进行了$n$次同精度观测，得$l_1$，$l_2$……$l_n$，

● 因$[vv] = \left[\left(\frac{[x]}{n} - x\right)^2\right] = \left[\left(\frac{[x]}{n}\right)^2 - 2\frac{[x]}{n}x + x^2\right] = n\cdot\frac{[x]^2}{n^2} - 2\frac{[x]^2}{n} + [x^2] = [x^2] - \frac{[x]^2}{n}$　$\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n$

$l_{n_1+1}$，$l_{n_1+2}$，$\cdots l_{n_1+n_2}$。现将 $n$ 个观测值分成两组，其中第一组有 $n_1$ 个观测值，第二组有 $n_2$ 个观测值，则 $n=n_1+n_2$。将两组观测值分别进行平差计算，按（6-17）式分别求得两组观测值的算术平均值，并以 $L_1$ 及 $L_2$ 表示为

$$L_1=\frac{1}{n_1}(l_1+l_2+\cdots+l_{n_1})=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}l_i \tag{i}$$

$$L_2=\frac{1}{n_2}(l_{n_1+1}+l_{n_1+2}+\cdots+l_{n_1+n_2})=\frac{1}{n_2}\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}l_j$$

设观测值的中误差为 $m$，则它们的中误差可按（6-18）式求得，为

$$m_{L_1}=\frac{m}{\sqrt{n_1}} \tag{j}$$

$$m_{L_2}=\frac{m}{\sqrt{n_2}}$$

从（$i$）及（$j$）式可以看出，当 $n_1\neq n_2$ 时，$L_1$ 及 $L_2$ 的精度是不等的。现在的问题是，如何根据不同精度的 $L$ 求出未知量的最或然值。

根据全部同精度观测值求该未知量的最或然值为

$$x=\frac{[l]}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}l_i+\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}l_j}{n_1+n_2}$$

顾及（$i$）式，得

$$x=\frac{n_1L_1+n_2L_2}{n_1+n_2} \tag{k}$$

从上式可见，如果将 $L_1$ 及 $L_2$ 看成两个不同精度观测值，则为求被观测量的最或然值时，在本例的情况下，只要考虑求得它们的观测次数 $n_1$ 和 $n_2$，并代入（$k$）式就可求得。为了得出由不同精度观测值求被观测量的最或然值的一般公式，可将（$j$）式代入（$k$）式，得

$$x=\frac{\frac{m^2}{m_{L_1}^2}L_1+\frac{m^2}{m_{L_2}^2}L_2}{\frac{m^2}{m_{L_1}^2}+\frac{m^2}{m_{L_2}^2}} \tag{l}$$

从上式可见，如果将上式中的 $m^2$ 换成另一常数 $\mu^2$，并不影响 $x$ 的值。在测量工作中，令

$$p_i=\frac{\mu^2}{m_i^2} \tag{6-29}$$

则（$i$）式为

$$x=\frac{p_1L_1+p_2L_2}{p_1+p_2} \tag{6-30}$$

从（6-29）及（6-30）式可以看出，$L_i$ 的精度愈高，即 $m_i$ 愈小，而 $p_i$ 愈大，相应的 $L_i$

在 $x$ 中的比重就大。反之，$L_i$ 的精度愈低，即 $m_i$ 愈大，而 $p_i$ 愈小，相应的 $L_i$ 在 $x$ 中的比重就小。所以，也可以说：$p_i$ 值的大小，权衡了观测值 $L_i$ 在 $x$ 中所占比重的大小，故称 $p_i$ 为 $L_i$ 的**权**。

公式(6-30)式表示的是求两个不同精度观测值的最或然值。对照（$i$）、（$k$）和（$l$）式可以看出，对于同精度观测值的算术平均数 $L_i$ 来说，其权就是参与计算的观测值的次数。

如果从（$i$）式求出 $L_1$ 和 $L_2$ 的真误差并代入（$e$）式，将发现它们是满足（$c$）式的。因此，如果将一组同精度观测值分成若干小组，各小组分别求出的算术平均值，是可以作为独立观测值投入后续计算的。当然，它们的权将是各小组中观测值的个数。

当对某未知量进行了 $n$ 次不同精度观测，得 $L_1$、$L_2$……$L_n$，其相应的权为 $p_1$、$p_2$…$p_n$，求该量的最或然值时，可将（6-30）式扩充为

$$x=\frac{p_1L_1+p_2L_2+\cdots+p_nL_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{[pL]}{[p]} \tag{6-31}$$

称上式为**广义算术平均值，或带权平均值。**

当 $L_i$ 的精度相同，即 $m_1=m_2=\cdots=m_n=m$ 时，按（6-29）式可知，这些观测值的权也相等，即 $p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n=p$，则（6-31）式为

$$x=\frac{p(L_1+L_2+\cdots+L_n)}{p(1+1+\cdots+1)}=\frac{[L]}{n}$$

这就是算术平均值。可见同精度观测值的情况是不同精度观测的一种特例。

附带指出，由不同精度观测值求最或然值的公式（6-31），通常是按最小二乘原理导出的，这个问题，在《测量平差基础》中讲述。

从（$l$）或（6-31）式可以看出，对于不同精度观测值来说，必须先求出它们的中误差或权，方能算出最或然值。要求算出不同精度观测值的中误差，一般来说，比较麻烦，而直接求出其权则较方便（见下文介绍），所以在测量的有关计算中，总是先求出权值。下面介绍求权的问题。

## 二、权

求权的基本公式为（6-29）式，即

$$p_i=\frac{\mu^2}{m_i^2} \qquad (i=1,2\cdots n)$$

式中 $\mu$ 是任意常数。由此可见，权与中误差平方成反比，即精度愈高，权愈大。应用上式求一组观测值的权 $p_i$ 时，必须采取同一个 $\mu$ 值，那末这个 $\mu$ 值含有什么意义呢？现将(6-29)式写为

$$\mu^2=p_im_i^2 \qquad (i=1,2\cdots n)$$

或

$$\frac{\mu^2}{m_i^2}=\frac{p_i}{1}$$

可见：当 $m_i=\mu$ 时，$p_i=1$，所以 $\mu$ 是权等于 1 的观测值的中误差，通常称等于 1 的权为

**单位权**，权为1的观测值为**单位权观测值**。而$\mu$为单位权观测值的中误差，简称为**单位权中误差**。

由（6-29）式可以写出各观测值的权之间的比例关系：

$$p_1:p_2:\cdots:p_n=\frac{\mu^2}{m_1^2}:\frac{\mu^2}{m_2^2}:\cdots:\frac{\mu^2}{m_n^2}$$

$$=\frac{1}{m_1^2}:\frac{1}{m_2^2}:\cdots\cdots:\frac{1}{m_n^2} \qquad (6\text{-}32)$$

由此可知，一组观测值的权之比等于它们的中误差平方的倒数之比。不论假设$\mu$为何值，这组权之间的比例关系不变。所以，权反映了观测值之间的相互精度关系。就计算$p$值来说，不在乎权本身数值的大小，而在于确定它们之间的比例关系。就（6-32）式来说，$m_i$可以是同一个量的观测中误差，也可以是不同量的观测中误差，即权可以反映同一量的若干个观测值之间的精度高低，也可以反映不同量的观测值之间的精度高低。

此外，由（1）式可知：$\mu$值的不同，对$x$值的计算毫无影响；即，它并不改变最或然值的计算结果。

例6-8　已知$L_1$的中误差$m_1=\pm 3\text{mm}$，$L_2$的中误差$m_2=\pm 4\text{mm}$，$L_3$的中误差$m_3=\pm 5\text{mm}$，求各观测值的权。

解：设　　$\mu=m_1=\pm 3\text{mm}$，则

$$p_1=\frac{\mu^2}{m_1^2}=\frac{(\pm 3)^2}{(\pm 3)^2}=1$$

$$p_2=\frac{\mu^2}{m_2^2}=\frac{(\pm 3)^2}{(\pm 4)^2}=\frac{9}{16}$$

$$p_3=\frac{\mu^2}{m_3^2}=\frac{(\pm 3)^2}{(\pm 5)^2}=\frac{9}{25}$$

这时$p_1=1$，　　$p_2=\frac{9}{16}$，$p_3=\frac{9}{25}$。

定权时，也可以令$\mu=\pm 1\text{mm}$，则

$$p_1'=\frac{\mu^2}{m_1^2}=\frac{(\pm 1)^2}{(\pm 3)^2}=\frac{1}{9}$$

$$p_2'=\frac{\mu^2}{m_2^2}=\frac{(\pm 1)^2}{(\pm 4)^2}=\frac{1}{16}$$

$$p_3'=\frac{\mu^2}{m_3^2}=\frac{(\pm 1)^2}{(\pm 5)^2}=\frac{1}{25}$$

这时$p_1'=\frac{1}{9}$，$p_2'=\frac{1}{16}$，$p_3'=\frac{1}{25}$。

上述两组权$p_1$、$p_2$、$p_3$和$p_1'$、$p_2'$、$p_3'$都同样地反映了观测值之间的精度关系，因为$p_1:p_2:p_3=p_1':p_2':p_3'=1:0.56:0.36$。在上述求权时，首先令$\mu=\pm 3\text{mm}$，此时$p_1=1$，即令第一个观测值$L_1$的权为单位权，则$L_1$的中误差就是单位权中误差，即$\mu=m_1=\pm 3\text{mm}$

在第二组定权计算时，令$\mu = \pm 1\text{mm}$，即令中误差为$\pm 1\text{mm}$的观测值的权为单位权，不过这个观测值不是真实的观测值，而是个“设想的观测值”,因为在上例中，没有一个观测值的中误差等于$\pm 1\text{mm}$。

例 6-9　按同精度丈量三条边长，得：$S_1 = 3\text{km}$，$S_2 = 4\text{km}$，$S_3 = 6\text{km}$。试定这三条边长的权。

解：因为是同精度丈量，所以每公里的丈量精度是相同的，设为$m_{\text{km}}$.按（6-12）式得三条边长的丈量的精度为：

$$m_1 = \sqrt{S_1}\,m_{\text{km}},\quad m_2 = \sqrt{S_2}\,m_{\text{km}},\quad m_3 = \sqrt{S_3}\,m_{\text{km}}$$

按定权的公式（6-29)。可得各条边长丈量的权为

$$p_i = \frac{\mu^2}{(\sqrt{S_i}\,m_{\text{km}})^2} = \frac{\left(\frac{\mu}{m_{\text{km}}}\right)^2}{S_i}$$

在选定$\mu$值时，通常令$\left(\frac{\mu}{m_{\text{km}}}\right)^2 = c$，即令$\mu^2 = c\,m_{\text{km}}^2$，

则上式为

$$p_i = \frac{c}{S_i} \qquad (i = 1,\ 2\cdots n) \tag{6-33}$$

即，在同精度丈量时，边长的权与边长成反比。

例如在本例中，如设$c = 4$，则

$$p_1 = \frac{c}{S_1} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$p_2 = \frac{c}{S_2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$p_3 = \frac{c}{S_3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

其中：因为$c = 4 = S_2$，即当$\mu = \sqrt{c}\,m_{\text{km}} = \sqrt{S_2}\,m_{\text{km}}$时，$p_2 = 1$，所以是以丈量$S_2$公里距离的权为单位权，其相应的中误差为单位权中误差。

例 6-10　图6-4表示有一个结点的水准网。网中水准点$A$、$B$、$C$、$D$的高程为已知，由四条同一等级的水准路线来测定$E$点高程。设四个观测高差为$h_1$、$h_2$、$h_3$、$h_4$，相应的水准路线长为$S_1 = 4\text{km}$、$S_2 = 2\text{km}$、$S_3 = 2\text{km}$、$S_4 = 3\text{km}$，试确定这四条水准线的权。

解：因为这四条水准路线是按同一等级测设的，所以它们每公里水准测量的中误差都是$m_{\text{km}}$.按（6-14）式得四个观测高差的中误差为

$$m_{h_i} = \sqrt{S_i}\,m_{\text{km}}$$

按定权公式（6-29)，得观测高差的权为

$$p_i = \frac{\mu^2}{(\sqrt{S_i}\,m_{\text{km}})^2} = \frac{\left(\frac{\mu}{m_{\text{km}}}\right)^2}{S_i}$$

令 $\left(\frac{\mu}{m_{km}}\right)^2 = c$，即$\mu^2 = cm_{km}^2$时，上式为

$$p_i = \frac{c}{S_i} \quad (i = 1,\ 2\cdots n) \tag{6-34}$$

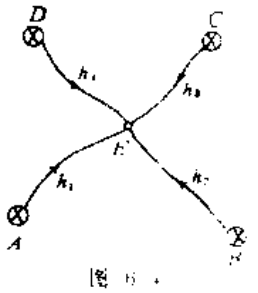


图 6-4

即，**当每公里水准测量的精度相同时、水准路线观测高差的权与路线长度成反比。**

例如在本例中，设$c = 10$，这时：

$$p_1 = \frac{c}{S_1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$p_2 = \frac{c}{S_2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$p_3 = \frac{c}{S_3} = \frac{10}{2} = 5$$

$$p_4 = \frac{c}{S_4} = \frac{10}{3}$$

而当$p = \frac{c}{S} = \frac{10}{S} = 1$时，$S = 10$，即选择水准路线长为10km的观测高差为单位权观测，其的权为单位权。

在水准测量中，也可以按水准路线的测站数定权。根据（6-13）式所示，水准测量的高差中误差$m_{h_i}$与测站数$n_i$的平方根成正比，即

$$m_{h_i} = \sqrt{n_i}\, m_{站}$$

按本节介绍的定权方法，得各观测值的权为

$$p_i = \frac{c}{n_i} \quad (i = 1, 2\cdots n) \tag{6-35}$$

即，**当各测站观测高差的精度相同时，水准路线观测高差的权与测站数成反比。**

在例6-10中已知各观测高差的测站数为：$n_1 = 50$，$n_2 = 25$，$n_3 = 25$，$n_4 = 40$时，可令$c = 100$，即当$n = 100$时，$p = \frac{c}{n} = \frac{100}{100} = 1$；就是选择100个测站的观测高差的权为单位权，这样：

$$p_1 = \frac{100}{50} = 2,\qquad p_2 = \frac{100}{25} = 4,\qquad p_3 = \frac{100}{25} = 4,\qquad p_4 = \frac{100}{40} = 2.5$$

在水准测量中，可以用距离或测站数来定权，但是必须注意前者要求每公里观测精度相同，后者要求每测站的精度相同。至于什么情况下用距离来定权，什么情况下用测站数来定权，在相应的规范中是有规定的。一般说来，在起伏不大的地区，每公里测站数相仿，可按距离来定权；而在起伏较大的地区，每公里测站数相差较大，则按测站数来定权。

例 6-11　设对某角作三组同精度观测，第一组测4测回❶，其算术平均值为$\beta_1$；第二组

❶ 测回的定义在第七章中讲述。

测 6 测回，其算术平均值为$\beta_2$；第三组测 8 测回，其算术平均值为$\beta_3$，求$\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$的权。

解：按（6-18）式可求得算术平均值的中误差为

$$m_i^2 = \frac{m^2}{n_i}$$

式中，$m$为观测值中误差，$n_i$为参与求算术平均值的观测值个数（即测回数）。按定权公式（6-29），得算术平均值的权为

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2} = \frac{\mu^2}{\frac{m^2}{n_i}} = \frac{n_i}{\frac{m^2}{\mu^2}}$$

令 $\frac{m^2}{\mu^2} = c'$，即$\mu = \frac{m}{\sqrt{c'}}$，也就是说，以$c'$个观测值的算术平均值作为单位权观测值，则上式为

$$p_i = \frac{n_i}{c'} \tag{6-36}$$

即，**由不同个数的同精度观测值求得的算术平均值，其权与观测值个数成正比**

例如令$c' = 2$，即以两个测回平均值为单位权观测值时，按（6-36）式得

$$p_1 = \frac{4}{2} = 2, \quad p_2 = \frac{6}{2} = 3, \quad p_3 = \frac{8}{2} = 4.$$

从定权公式（6-33）、（6-34）、（6-35）、（6-36）可见，定权时不需要知道观测值中误差的大小，仅根据距离长、水准路线长、测站个数和测回数等因素来定权。在测量计算中，通常都是在平差计算的后期才可能求出有关量的中误差，而在平差计算的前期只要求定观测值的权，以便求出最或然值（见（6-31）式）；定权公式就解决了这个矛盾。

在应用定权公式定权时，$c$或$c'$是可以任意设定的，但在一个平差问题中，只能设定一个$c$或$c'$的值，否则就破坏了观测值的权之间的比例关系。$c$或$c'$值定了，该平差问题中的单位权观测值也就定了。至于单位权中误差$\mu$则在平差后期再计算出来。$\mu$的计算公式在下节中介绍。

### 三、观测值函数的权

前述的定权公式可以计算各观测值的权，然而在测量工作经常有很多量是观测值的函数。在已知观测值的权时如何确定观测值函数的权呢？求观测值函数的权可以按误差传播定律求出观测函数的中误差，然后按（6-29）式定其权。

设有独立观测值$L_1$、$L_2 \cdots L_n$，它们的中误差及权分别为$m_1$、$m_2 \cdots m_n$和$p_1$、$p_2 \cdots p_n$。令观测值函数为

$$z = f(L_1, L_2 \cdots L_n)$$

按误差传播定律

$$m_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)^2 m_2^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2 m_n^2$$

按定权公式（6-29）得

$$\frac{\mu^2}{p_z}=\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2\frac{\mu^2}{p_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)^2\frac{\mu^2}{p_2}+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2\frac{\mu^2}{p_n}$$

式中$\left(\frac{\partial f}{\partial L_i}\right)$是常量，用$f_i$表示，即$\left(\frac{\partial f}{\partial L_i}\right)=f_i$，上式约去$\mu^2$后得，

$$\frac{1}{p_z}=f_1^2\frac{1}{p_1}+f_2^2\frac{1}{p_2}+\cdots+f_n^2\frac{1}{p_n}=\left[\frac{ff}{p}\right] \tag{6-37}$$

这就是独立观测值权倒数与其函数权倒数之间关系的表达式。这个表达式称为**权倒数传播律**。从上面推导过程可以看出，它是在误差传播定律的基础上，与定权公式（6-29）组合而成的。因此，在应用这个公式时，既要遵照应用误差传播定律时的注意事项，也要注意定权时的有关规定。

例 6-12　求广义算术平均值$x=\frac{[pL]}{[p]}$的权。

解：因

$$x=\frac{[pL]}{[p]}=\frac{p_1L_1+p_2L_2+\cdots+p_nL_n}{[p]}$$

将上式全微分，得

$$\Delta x=\frac{p_1}{[p]}\Delta_1+\frac{p_2}{[p]}\Delta_2+\cdots\cdots+\frac{p_n}{[p]}\Delta_n$$

应用权倒数传播律（6-37）式，得

$$\frac{1}{p_x}=\left(\frac{p_1}{[p]}\right)^2\frac{1}{p_1}+\left(\frac{p_2}{[p]}\right)^2\frac{1}{p_2}+\cdots+\left(\frac{p_n}{[p]}\right)^2\frac{1}{p_n}$$

$$=\frac{1}{[p]^2}(p_1+p_2+\cdots+p_n)=\frac{1}{[p]}$$

所以

$$p_x=[p] \tag{6-38}$$

即，**广义算术平均值的权，等于观测值权之和。**

例 6-13　设三角形三内角的观测值为$\alpha$、$\beta$、$\gamma$，它们的精度相同，其权为$p_\alpha=p_\beta=p_\gamma=p$。设三角形的闭合差$w=\alpha+\beta+\gamma-180°$。观测角值经闭合差反号平均分配后，得$\hat{\alpha}=\alpha-\frac{w}{3}$，$\hat{\beta}=\beta-\frac{w}{3}$，$\hat{\gamma}=\gamma-\frac{w}{3}$，求$\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$、$\hat{\gamma}$的权倒数$\frac{1}{p_{\hat{\alpha}}}$，$\frac{1}{p_{\hat{\beta}}}$和$\frac{1}{p_{\hat{\gamma}}}$。

解：已知　　$\hat{\alpha}=\alpha-\frac{1}{3}w$

考虑到$\alpha$与$w$之间的误差不是独立的，所以须用$w=\alpha+\beta-\gamma-180°$代入上式，并将相同的观测值并项，即

$$\hat{\alpha}=\alpha-\frac{1}{3}(\alpha+\beta-\gamma-180°)=\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{3}\beta-\frac{1}{3}\gamma+60°$$

将上式全微分，得

$$\Delta_{\hat{\alpha}} = \frac{2}{3}\Delta_{\alpha} + \frac{1}{3}\Delta_{\beta} + \frac{1}{3}\Delta_{\gamma}$$

按权倒数传播律，得

$$\frac{1}{p_{\hat{\alpha}}} = \frac{4}{9}\frac{1}{p_{\alpha}} + \frac{1}{9}\frac{1}{p_{\beta}} + \frac{1}{9}\frac{1}{p_{\gamma}} = \frac{2}{3p}$$

同样可得

$$\frac{1}{p_{\hat{\beta}}} = \frac{2}{3p}, \quad \frac{1}{p_{\gamma}} = \frac{2}{3p}$$

## §6-8 单位权中误差的计算公式

在同精度观测中，观测值的精度是相同的，因此可以用

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \quad 或 m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

来计算观测值的中误差。在不同精度观测中，每个观测值的精度不同，就必须先求出单位权中误差 $\mu$，然后根据 $m_i = \mu/\sqrt{p_i}$ 求出各观测值的中误差。

设已知不同精度观测值 $L_i\ (i = 1, 2\cdots n)$ 的权为 $p_i\ (i = 1, 2\cdots n)$。它们相应的中误差为 $m_i (i = 1, 2\cdots n)$，而相应的真误差为 $\Delta_i\ (i = 1, 2\cdots n)$。由于这组观测值是不同精度的，所以不能直接应用公式

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \qquad (m)$$

求中误差。

为了应用上式，就必须找出一组精度相同的观测值，才能用其真误差计算中误差。这个问题可以这样解决：将权为 $p_i$ 的观测值 $L_i$ 乘以 $\sqrt{p_i}$，得出一组虚拟的观测值 $L_i' = L_i\sqrt{p_i}$。为了求 $L_i'$ 的权 $p_i'$，必须先求得 $L_i'$ 的中误差 $m_{L_i'}^2 = (\sqrt{p_i})^2 m_i^2$，根据权的定义公式 $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$，即 $m_i^2 = \frac{\mu^2}{p_i}$，得

$$\frac{\mu^2}{p_i'} = p_i\frac{\mu^2}{p_i}$$

所以

$$\frac{1}{p_i'} = 1$$

或

$$p_i' = 1$$

这个例子说明，任何一个观测值 $L_i$ 只要乘上其权 $p_i$ 的平方根，所得的虚拟观测值 $L_i'$ 的权都为 1，即 $L_i'$ 的权都是单位权，它们的中误差就是单位权中误差。这组虚拟观测值

$L_i'$的真误差可按$L_i' = \sqrt{p_i}\,L_i\ (i = 1,\ 2\cdots n)$求得，为

$$\Delta_i' = \sqrt{p_i}\,\Delta_i \quad (i = 1,\ 2\cdots n)$$

因为它们都是同精度观测的真误差，所以按（$m$）式计算得到的中误差就是单位权中误差，即

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{(\sqrt{p_1}\Delta_1)^2 + (\sqrt{p_2}\Delta_2)^2 + \cdots + (\sqrt{p_n}\Delta_n)^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}} \tag{3 39}$$

这就是用观测值真误差计算单位权中误差的公式。式中$\Delta_i$是不同精度观测值$L_i$的真误差，而$\mu$是权为1的观测值的中误差。

在许多测量计算中，真误差是求不出来的，所以还有必要导出用改正数$v$计算单位权中误差的公式。下面推导这个公式。因为

$$v_i = x - L_i \quad (i = 1,\ 2\cdots n)$$

及

$$\Delta_i = L_i - X\ (i = 1,\ 2\cdots n)$$

则

$$\Delta_i = -v_i + (x - X) = -v_i + \Delta_x \quad (i = 1,\ 2\cdots n)$$

式中$\Delta_x$是带权平均值$x$的真误差。将上式两边平方并乘$p_i$，得

$$p_i\Delta_i\Delta_i = p_i v_i v_i - 2p_i v_i\Delta_x + p_i\Delta_x^2 \quad (i = 1,\ 2\cdots n)$$

取$n$式的和，得

$$[p\Delta\Delta] = [pvv] - 2[pv]\Delta_x + \Delta_x^2[p] \tag{$n$}$$

因为$v_i = x - L_i\ (i = 1,\ 2\cdots n)$，将它乘以$p_i$后求和，得$[pv] = [p]x - [pL]$，将$x = \dfrac{[pL]}{[p]}$代入后得

$$[pv] = [p]\frac{[pL]}{[p]} - [pL] = 0 \tag{6-10}$$

（$n$）式中第三项的$\Delta_x$，按§6-6介绍可用$m_x$代替它，这样（$n$）式可写为

$$[p\Delta\Delta] = [pvv] + m_x^2[p] = [pvv] + \frac{\mu^2}{[p]}[p] = [pvv] + \mu^2$$

从（6-39）式知：$n\mu^2 = [p\Delta\Delta]$，所以上式为

$$n\mu^2 = [pvv] + \mu^2$$

即

$$\mu^2 = \frac{[pvv]}{n-1}$$

所以

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \tag{6-41}$$

这就是用改正数计算单位权中误差的公式。

例 6-14 从已知水准点$A$、$B$、$C$、$D$经四条水准路线，求得$E$点的观测高程$H_i$及水准路线长度$S_i$均列于表6-4中。试求$E$点的最或然高程及其中误差。

这里提供使用一般计算工具或电子计算器的两种解法。

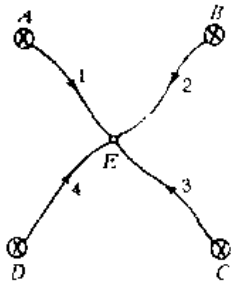


图 6-5

解法 1：使用一般的计算工具

1.计算最或然值 $x$ 及检核

令 $x_0 = L_3 = 48.758\text{m}$，按 $\delta L_i = L_i - x_0$，求得以毫米为单位差值 $\delta L_i$ 填于表6 4中。

表 6 4

| 编号 | E点观测高程（m） | 路线长（km） | $p_i = \frac{100}{S_i}$ | $\delta L_i$（mm） | $p_i \delta L_i$ | $v_i$（mm） | $p_i v_i$ | $pvv$ | $p_i \delta L$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 48.759 | 45.6 | 2.19 | +1 | -2.2 | +9 | -19.7 | 177 | -20 |
| 2 | 48.784 | 32.8 | 3.05 | +26 | -79.3 | -16 | -48.8 | 781 | -1269 |
| 3 | 48.758 | 40.3 | 2.48 | 0 | 0 | +10 | -24.8 | 248 | 0 |
| 4 | 48.767 | 51.4 | 1.95 | +9 | +17.6 | +1 | -2.0 | 2 | -18 |
| 和 | $x_0 = 48.758$ | | 9.67 | | +99.1 | | -2.3 | 1208 | 1231 |

水准路线的权可按（6-34）式：$p_i = \frac{c}{S_i}$ 予以确定。这里设 $c = 100$，即以100km的水准测量结果为单位权观测。按 $p_i = \frac{100}{S_i}$ 求出各观测值的权填于表6-4中，从表中取出：$[p\delta L] = +99.1$。以 $x = x_0 + \frac{[p\delta L]}{[p]}$，并都以米为单位，则得

$$x = 48.758 + \frac{99.1}{9.67 \times 10^3} = 48.768\text{m}$$

因 $v_i = x - L_i = (x_0 + \delta_x) - (\delta L_i + x_0)$，故按 $v_i = \delta_x - \delta L_i$ 求 $v_i$（$i = 1, 2, 3, 4$），并求 $p_i v_i$（$i = 1, 2, 3, 4$）及 $[pv]$。按（6-29）式 $[pv] = 0$ 予以检核。在这里 $[pv] = -2.3 \neq 0$。这是由于计算 $\delta_x = \frac{[p\delta L]}{[p]} = 10.25 \approx 10(\text{mm})$，即由凑整误差 $-0.25\text{mm}$ 引起的。即 $\delta_x = \delta'_x - \Delta\delta'_x$，式中 $\delta'_x$ 是 $\delta_x$ 的凑整值，$\Delta\delta'_x$ 是凑整误差，则 $\delta'_x = \delta_x + \Delta\delta'_x$，因而求得的改正数：$v'_i = \delta'_x - \delta L_i = \delta_x + \Delta\delta'_x - \delta L_i = v_i + \Delta\delta'_x$ 也受到了凑整误差的影响。这样 $[pv'] = [pv] + [p]\Delta\delta'_x = [p]\Delta\delta'_x$。在本例中 $[pv'] = [p](-0.25) = -2.3(\text{mm})$。说明计算没有错误为了顾及凑整误差对检核公式 $[pv] = 0$ 的影响，可以这样检核：由于凑整误差不会超过 $x$ 所取数值的末位为单位的 $\pm 0.5$，所以只要 $[pv] \leqslant \pm 0.5[p]$ 就行了。

2.评定精度

计算单位权中误差的公式为

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$$

带权平均值的中误差为

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$$

在计算 $[pvv]$ 时，除了用 $[pvv] = p_1 v_1 v_1 + p_2 v_2 v_2 + \cdots\cdots + p_n v_n v_n$ 计算外，还可用下述公

式予以检核：

$$[pvv]=[pv(\delta_x-\delta L)]=[pv]\delta_x-[pv\delta L] \qquad (o)$$

即

$$[pvv]=-[pv\delta L] \qquad (6\text{-}42)$$

表6-4中 $[pvv]=1208$，而 $-[pv\delta L]=1231$，两者不等，这是由凑整误差所引起的。这时 $[pv]\neq 0$，所以 $[pvv]$ 的检核计算可用（$o$）式进行。不过这里的 $v_i$ 实际上是 $v_i'$，$\delta_x$ 是 $\delta_x'$ 罢了。按（$o$）式得 $[pvv]+[pv\delta L]=[pv]\delta_x$，即 $[pvv]+[pv\delta L]=1208-1231=-23$；而 $[pv]\delta_x=-2.3\times 10=-23$，两者相等，说明计算没有错误。于是求得单位权中误差为

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{1208}{3}}=\pm 20\text{mm}$$

而 $E$ 点最或然高程的中误差为

$$m_x=\frac{\mu}{\sqrt{[p]}}=\pm\frac{20}{\sqrt{9.67}}=\pm 6.5\text{mm}$$

在本例中，因为设 $c=100$，$S$ 是以公里为单位，所以是以100km观测高差为单位权观测，而 $\mu$ 将是100km高差的中误差。即100km观测高差的中误差是 $\pm 20$mm。

使用电子计算器解法2：

电子计算器的“统计计算”功能是针对同精度观测值来说的，此时

$$x=\frac{[L]}{n}$$

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

对于不同精度观测值来说，要应用上述功能求广义算术平均值并评定精度，必须将公式适当改变。例如，求广义算术平均值时，可以利用计算器具有一次输入 $n_i$ 个相同观测值 $L_i$ 的功能，将观测值的权 $p_i$ 当成“观测个数” $n_i$，即

$$x=\frac{[pL]}{[p]}=\frac{p_1L_1+p_2L_2+\cdots+p_nL_n}{[p]}$$

$$=\frac{\overbrace{L_1+L_1+\cdots L_1}^{p_1\text{个}}+\overbrace{L_2+\cdots L_2}^{p_2\text{个}}+\cdots\cdots+\overbrace{L_n+L_n+\cdots L_n}^{p_n\text{个}}}{p_1+p_2+\cdots+p_n} \qquad (p)$$

对于计算器来说，观测值个数 $n$ 是个整数，所以观测值的 $p$ 也必须是整数。为此，利用权是相对精度的特性，在定权时，扩大（或缩小）常数 $c$（或 $c'$），以保证权 $p$ 具有二到三个有效数字，又是个整数。例如，本例中，为了保证权有三位有效数字，可令 $c=10000$，则 $p_1=219$，$p_2=305$，$p_3=248$，$p_4=195$。此时就可以按（$p$）式求广义算术平均值 $x$。

计算单位权中误差的公式为

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$$

式中：

$$[pvv]=p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots+p_nv_n^2$$

$$= \overbrace{v_1^2 + v_1^2 + \cdots + v_1^2}^{p_1\text{个}} + \overbrace{v_2^2 + \cdots + v_2^2}^{p_2\text{个}} + \cdots\cdots + \overbrace{v_n^2 + \cdots + v_n^2}^{p_n\text{个}}$$

即，将权$p_i$当成$v_i$的个数也是$L_i$的个数时，$[pvv]$与计算器中算出的$[vv]$相同。但是计算器中求$m$时，分母中（$n-1$）是指参与计算$x$的观测总数减一，而（$p$）式中"观测总数"为$[p]$，所以为$[p]-1$，即计算器求出的中误差为

$$m' = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p]-1}}$$

要得出单位权中误差$\mu$，必须将$\sqrt{\frac{[p]-1}{n-1}}$乘以$m'$，即

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = m'\sqrt{\frac{[p]-1}{n-1}}$$

其他计算照常。

例 6-15　设在已知水准点$A$、$B$之间（见图6-6），为了测定$C$、$D$、$E$点的高程，敷设了一条附合水准路线，测得高差$h_{AC}$、$h_{CD}$、$h_{DE}$、$h_{EB}$，试求出$C$、$D$、$E$点的最或然高程。

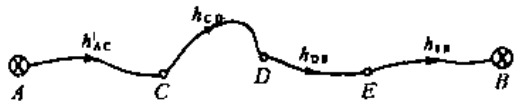



图 6-6

解：现在先来求出$E$点的高程。$E$点有两个观测高程，一个是从$AE$水准路线算得的，另一个是从$BE$路线算得的，即

$$H_E^{(1)} = H_A + h_{AC} + h_{CD} + h_{DB} \qquad (q)$$

$$H_E^{(2)} = H_B - h_{EB}$$

$H_E^{(1)}$和$H_E^{(2)}$的精度是不同的，它们的权为：

$$p_E^{(1)} = \frac{C}{S_{AC} + S_{CD} + S_{DE}}$$

$$p_E^{(2)} = \frac{C}{S_{EB}} \qquad (r)$$

所以$E$点的最或然高程为

$$H_E = \frac{p_E^{(1)} H_E^{(1)} + p_E^{(2)} H_E^{(2)}}{p_E^{(1)} + p_E^{(2)}} \qquad (s)$$

这就是在单一水准路线中的$E$点最或然高程的计算公式。显然，对于水准路线中的其它点（如$C$或$D$等）都可按同样的方式求其最或然高程。为了得出某些计算中的规律，再进行如下演算。从$A$点已知高程$H$及诸观测高差可算出$B$点的观测高程$H'_B$为

$$H'_B = H_A + h_{AC} + h_{CD} + h_{DE} + h_{EB}$$

这样$B$点就有了两个高程，一个是已知高程$H_B$，另一个是观测高程$H'_B$.在测量计算中，将已知点的观测高程减去已知高程得出的值，即水准路线的闭合差，并以$f_h$表示为

$$f_h = H_B - H_B = H_A + h_{AC} + h_{CD} + h_{DE} + h_{EB} - H_B$$

顾及（$q$）式，得

$$f_h = H_E^{(1)} - H_E^{(2)}$$

将上式代入（$s$）式，得

$$H_E=\frac{p_E^{(1)}H_E^{(1)}+p_E^{(2)}(H_E^{(1)}-f_h)}{p_E^{(1)}+p_E^{(2)}}$$

$$=H_E^{(1)}-\frac{p_E^{(2)}f_h}{p_E^{(1)}+p_E^{(2)}}$$

将（$r$）式代入上式，得

$$H_E=H_E^{(1)}-\frac{\frac{C}{S_{EB}}}{\frac{C}{S_{AC}+S_{CD}+S_{DE}}+\frac{C}{S_{EB}}}f_h$$

$$=H_E^{(1)}-\frac{S_{AE}}{S_{AB}}f_h \tag{6-43}$$

式中：$S_{AB}=S_{AC}+S_{CD}+S_{DE}+S_{EB}$，$S_{AE}=S_{AC}+S_{CD}+S_{DE}$。从上式中可以看出，单一水准路线上任何点的最或然高程可以这样计算：从水准路线的某一端（例如$A$点）算出该点的观测高程（如$H_E^{(1)}$），再加这条水准路线闭合差反号（如$-f_h$）乘以该点离开起算点的距离与路线总长度之比值。或者说，将单一水准路线的闭合差反号，按距离成比例地分配到各段观测高差上，得改正后的高差，然后从路线某一已知高程点开始，按改正后的高差计算水准路线上各点的高程。(6-43) 式即为（5-4）式的理论基础。

上述结论对于闭合水准路线也是适用的。

## §6-9 由真误差计算中误差

对于一组同精度或不同精度观测值来说，如果已经知道它们的真误差，则可按（6-5）式或（6-39）式计算观测值的中误差或单位权中误差。但是，已如前述，在一般情况下，由于被观测量的真值不知道，所以真误差也无法知道。这时，就不能直接由真误差计算中误差了，然而，在测量工作中，有时由若干个被观测量（如角度、长度和高差等）所构成的函数，其真值是知道的，因而这些观测值函数的真误差可以求得，这时，就可以用真误差来计算中误差了。

下面介绍几种在测量工作中常用到的由真误差计算中误差的公式。

### 一、由三角形闭合差求测角中误差

设以同精度观测三角网中各角，由每个三角形的三个内角的观测值$\alpha_i$、$\beta_i$、$\gamma_i$求出的闭合差$w_i=\alpha_i+\beta_i+\gamma_i-180^\circ(i=1,\ 2\cdots n)$。按真误差的定义公式（6-1）可知，闭合差$w$就是三角形内角和（$\alpha+\beta+\gamma$）的真误差。所以按中误差的定义公式（6-5），得三角形内角和的中误差为

$$m_{(\alpha+\beta+\gamma)}=\pm\sqrt{\frac{[ww]}{n}}$$

式中：$[ww]=w_1^2+w_2^2+\cdots+w_n^2$，$n$为三角形的个数。由于三角形内角和是三个观测角之和，即

$$(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma$$

设测角中误差为$m$，则

$$m^2_{(\alpha+\beta+\gamma)}=3m^2$$

所以

$$m=\frac{m_{(\alpha+\beta+\gamma)}}{\sqrt{3}}$$

即

$$m=\pm\sqrt{\frac{[ww]}{3n}} \tag{6-44}$$

上式就是由三角形闭合差计算的测角中误差的公式，名为**菲列罗公式**。在三角测量中，通常用它来初步评定测角精度。

例6-16：已知某条有24个三角形的三角锁，按同精度测角后，算得闭合差$w$见表6-5，试求测角中误差。

表6-5

| 编号 | 闭合差 | 编号 | 闭合差 | 编号 | 闭合差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.7″ | 9 | -0.3″ | 17 | +0.5″ |
| 2 | -0.6 | 10 | +2.6 | 18 | +1.2 |
| 3 | +3.2 | 11 | -1.4 | 19 | 2.7 |
| 4 | -1.9 | 12 | -0.1 | 20 | -0.6 |
| 5 | +3.0 | 13 | +1.4 | 21 | +1.3 |
| 6 | +1.7 | 14 | -0.6 | 22 | +1.5 |
| 7 | +2.5 | 15 | -2.0 | 23 | -1.3 |
| 8 | 0.8 | 16 | +3.6 | 24 | -0.8 |

解：按（6-44）式求测角中误差：

$$m=\pm\sqrt{\frac{[ww]}{3n}}=\pm\sqrt{\frac{83.99}{72}}=\pm1.08''$$

## 二、由同精度双观测值的差数求观测值中误差

在测量工作中，常常对一系列被观测量各进行两次观测。例如，在第八章中介绍的导线测量中，对每条导线边各丈量两次；在水准测量中，对每两个水准点之间的高差进行往返测量等。这种观测称为双观测。对一个未知量进行的两次观测，称为一个观测对

设对未知量$X_1$、$X_2$……$X_n$各同精度观测两次，得观测值：

$$L_1'、L_2'\cdots\cdots L_n'，$$

$$L_1''、L_2''\cdots\cdots L_n''。$$

对于任何一个被观测量$X_i$来说，由这个量的真值$X_i$组成的差数必为零，即$X_i-X_i=0$，所以这里的“0”实际上是这个量差数的真值。现对每个量作双次观测，得$L_i'$和$L_i''$，由于含有观测误差，所以其差数通常就不等于“0”，而有差数$d_i$，即

$$L_i' - L_i'' = d_i \quad (i = 1, 2 \cdots n) \tag{f}$$

这里的$d_i$是观测值的差数。而差数的真值为“0”，按（6-1）式可求得各差数的真误差为

$$\Delta_{d_i} = d_i - 0 = d_i \quad (i = 1, 2 \cdots n)$$

可见$d_i$就是差数的真误差，由于所有的观测值都是同精度的，所以$d_i$也是同精度的。按中误差定义公式（6-5），得差数的中误差为

$$m_d = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{n}} \tag{6-45}$$

式中：$n$是$d$的个数，也就是“观测对”的个数，不是观测值的个数。

设观测值的中误差为$m$，由（$f$）式得

$$m_d = \sqrt{2}\,m$$

即

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \tag{6-46}$$

在内业计算时，总是取各量的两次同精度观测值的算术平均值作为相应量的最或然值。即

$$x_i = \frac{L_i' + L_i''}{2}$$

由于所有观测值都是同精度的观测值，所以所有的最或然值$x_i$也是精度相同的，其中误差为

$$m_{x_i} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}} \tag{6-47}$$

公式（6-45）、（6-46）、（6-47）分别是求同精度双观测差数的中误差、观测值中误差、算术平均值中误差的公式。

例 6-17　对8条边长作等精度双次观测，观测结果见表6-6。取每条边两次观测的算术平均值作为该边的最或然值，求观测值中误差和每边最或然值的中误差。

表 6-6

| 编　号 | $L'$(m) | $L''$(m) | $d$(mm) | $dd$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 103.478 | 103.482 | -4 | 16 |
| 2 | 99.556 | 99.534 | +22 | 484 |
| 3 | 100.373 | 100.382 | -9 | 81 |
| 4 | 101.763 | 101.742 | +21 | 441 |
| 5 | 103.350 | 103.343 | +7 | 49 |
| 6 | 98.885 | 98.876 | +9 | 81 |
| 7 | 101.004 | 101.014 | -10 | 100 |
| 8 | 102.293 | 102.285 | +8 | 64 |
| | | | | $[dd]=1316$ |

解：因 8 条边长的长度相差很小，是在同样条件下丈量的，所以这些观测值都可以当作是等精度的。按（6-46）式求得观测值中误差

$$m = \pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}} = \pm\sqrt{\frac{1316}{16}} = \pm 9.1\text{mm}$$

按（6-47）式求得各边最或然值的中误差

$$m_x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[dd]}{n}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1316}{8}} = \pm 6.4\text{mm}$$

## 三、由不同精度双观测值的差数求中误差

在测量工作中，经常会遇到不同精度的双次观测的问题。例如，对不同长度的边长作双次观测；对不同长度的水准路线的两点间作往返水准测量等。这时，对一个观测对来说，由于边长的长度相等，或者水准路线相同，它们是同精度的。但是对于不同的观测对来说，它们是不同精度的。下面来推导这类不同精度观测时有关中误差的计算公式。

设对未知量$X_1$、$X_2\cdots X_n$进行了双次观测，得观测值：

$$L_1', \quad L_2', \quad \cdots L_n'$$
$$L_1'', \quad L_2'', \quad \cdots L_n''$$

观测值$L_1'$、$L_1''$的权为$p_1$；$L_2'$、$L_2''$的权为$p_2$；$\cdots L_n'$、$L_n''$的权为$p_n$。而每个观测对，两次观测值的差数为$d_i = L_i' - L_i''(i = 1、2\cdots n)$，差数的真误差为

$$\Delta d_i = d_i - 0 = d_i \ (i = 1, \ 2\cdots n) \qquad (u)$$

按（6-39）式可知，要求出不同精度观测时的单位权中误差$\mu$，需要知道真误差及相应的权，本题已求出了差数的真误差，所以还要求出差数的权。根据$d_i = L_i' - L_i''$，按权倒数传播律可得

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i} = \frac{2}{p_i}$$

或

$$p_{d_i} = \frac{p_i}{2} \qquad (v)$$

将（$u$）及（$v$）式代入（6-39）式得单位权中误差

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p_d dd]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[pdd]}{2n}} \qquad (6\text{-}48)$$

式中：$p_i$是$L_i'$或$L_i''$的权，$d_i$为第$i$对观测值之差，$n$为观测对的个数，而$\mu$是单位权中误差。观测值$L_i'$或$L_i''$的中误差为

$$m_i = \mu\sqrt{\frac{1}{p_i}} = \pm\sqrt{\frac{[pdd]}{2np_i}} \qquad (6\text{-}49)$$

每个观测对算术平均值$x_i = \frac{L_i' + L_i''}{2}$的中误差为

$$m_{x_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[pdd]}{np_i}} \qquad (6\text{-}50)$$

例 6-18　设有 8 段高差，每段各往返观测一次，观测结果和水准路线的长度见表6 7。试求：（1）每公里高差的中误差；（2）第二段观测高差的中误差；（3）第二段最或然高差的中误差；（4）全长一次（往测或返测）观测高差的中误差；（5）全长最或然高差的中误差。

表 6 7

| | $L'$(m) | $L''$(m) | $d$(mm) | $dd$ | 路线长 $S$(km) | $pdd=\frac{dd}{S}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +3.444 | -3.455 | -11 | 121 | 3.0 | 40.3 |
| 2 | -0.763 | +0.778 | +15 | 225 | 3.2 | 70.3 |
| 3 | +2.234 | -2.225 | + 9 | 81 | 4.0 | 20.2 |
| 4 | -0.004 | +0.012 | + 8 | 64 | 5.5 | 11.6 |
| 5 | -0.938 | +0.937 | - 1 | 1 | 2.0 | 0.5 |
| 6 | -1.438 | +1.429 | - 9 | 81 | 4.3 | 18.8 |
| 7 | +3.386 | -3.383 | + 3 | 9 | 5.6 | 1.6 |
| 8 | +2.965 | -2.962 | + 3 | 9 | 2.1 | 4.3 |
| 和 | | | | | 29.7 | 167.6 |

解（1）：设$c=1$。即以一公里观测高差作为单位权观测。这时$p_i=\frac{1}{S_i}$。则单位权中误差按（6-48）为

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}=\pm\sqrt{\frac{\left[\frac{dd}{S}\right]}{2n}}=\pm\sqrt{\frac{167.6}{16}}=\pm 3.2\text{mm}$$

即一公里观测高差的中误差为 ± 3.2mm。

（2）第二段观测高差的中误差按（6-49）式为

$$m_2=\mu\sqrt{\frac{1}{p_2}}=\mu\sqrt{S_2}=\pm 3.2\sqrt{3.2}=\pm 5.7\text{mm}$$

（3）第二段最或然高差的中误差为

$$m_{x_2}=\frac{m_2}{\sqrt{2}}=\pm 4.0\text{mm}$$

（4）全长观测高差（即全长往测或返测）的中误差为

$$m_{[L]}=\mu\sqrt{[S]}=\pm 3.2\sqrt{29.7}=\pm 17.4\text{mm}$$

（5）全长最或然高差的中误差为

$$m_{[x]}=\frac{m_{[L]}}{\sqrt{2}}=\frac{\pm 17.4}{\sqrt{2}}=\pm 12.3\text{mm}$$

## § 6-10　等权代替法平差

### 一、基本概念

前面几节是利用误差理论的知识来解算一个未知量的问题。而等权代替法则把这一原

理加以引伸，使能解算两个以上的未知数，例如有两个结点的问题。为了简便起见，先用一个未知数的例子来说明等权代替法的原理。

设有一个结点的水准网如图6-7。为了求定$E$点的高程，则先定各观测值的权$p_i = \frac{C}{S_i}$，而后用带权平均值求$E$的最或然值。即

$$x = \frac{p_1 L_1 + p_2 L_2 + p_3 L_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

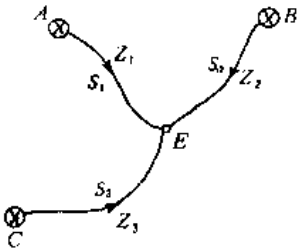



图 6-7

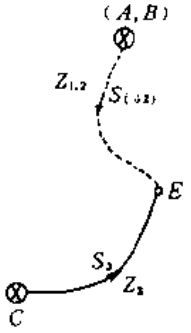



图 6-8

令

$$p_{(1,2)} = p_1 + p_2$$

$$H_E^{(1,2)} = \frac{p_1 L_1 + p_2 L_2}{p_1 + p_2}$$

则

$$x = \frac{p_{(1,2)} H_E^{(1,2)} + p_3 L_3}{p_{(1,2)} + p_3}$$

这样，图6-7中的水准路线就可以理解成图6-8所示的单一水准路线的情况。

这时可以这样理解：即用一条虚拟路线$Z_{1,2}$代替水准路线$Z_1$和$Z_2$，由虚拟路线求得的$E$点高程$H_E^{(1,2)}$，虚拟路线的权为$p_{(1,2)}$，虚拟路线的距离为$S_{(1,2)} = \frac{C}{p_{(1,2)}} = \frac{C}{p_1 + p_2}$。通过虚拟路线$Z_{1,2}$和$Z_3$求得$E$点的高程$H_E$。

这种平差法称为等权代替法。现在将这里所得出的结论阐述如下：

一些路线可以为一条虚拟的等权路线所代替，这条路线的观测值就是那些路线的带权平均值，它的权等于那些路线的权之和，它的距离与其权成反比，

即

$$p_{(1,2,\cdots\cdots j)} = p_1 + p_2 + \cdots\cdots p_j$$

$$S_{(1,2,\cdots\cdots j)} = \frac{C}{p_{(1,2,\cdots\cdots j)}} \tag{6-51}$$

这里应指出的是，$S_{(1,2,\cdots\cdots j)} \neq S_1 + S_2 + \cdots\cdots - S_j$，而必须由上式求出。

## 二、等权代替法作水准网平差示例

例 6-19　图6-6的观测数据见附表6-8。解本题时，首先在$E$点上用等权路线$Z_{1,2}$来代替$Z_1$及$Z_2$两条路线（图6-9）。为此，用该两点的观测值求算$E$点高程的局部带权平均

值。由路线$Z_1$算得$E$点的观测高程为

$$H_E^{(1)} = H_A + h_1 = 75.974\text{m}$$

权为 $$p_1 = \frac{100}{40.0} = 2.5$$

表 6-8

| 路线 | 观测高差（m） | 距离（km） | 已知点 | 已知高程（m） |
|---|---|---|---|---|
| 1 | +5.974 | 40.0 | $A$ | 70.000 |
| 2 | +7.360 | 66.7 | $B$ | 68.594 |
| 3 | +2.468 | 55.0 | | |
| 4 | -0.066 | 50.0 | $C$ | 78.476 |
| 5 | -5.896 | 40.0 | $D$ | 84.318 |

由路线$Z_2$算得$E$点观测高程为

$$H_E^{(2)} = H_B + h_2 = 75.954\text{m}$$

权为$p_2 = \frac{100}{66.7} = 1.5$，求局部带权平均值得

$$H_E^{(1,2)} = \frac{p_1 H_E^{(1)} + p_2 H_E^{(2)}}{p_1 + p_2}$$

即

$$H_E^{(1,2)} = 75954 + \frac{2.5(+20) + 1.5(0)}{2.5 + 1.5}$$

$$= 75954\text{mm} + 12.5\text{mm} = 75.966\text{mm}$$

它的权为

$$p_{(1,2)} = 2.5 + 1.5 = 4.0$$

它的距离为

$$S_{(1,2)} = \frac{100}{4.0} = 25\text{km}$$

现在，水准网可设想为如图6-10所示的形状。这时在网中只有一个结点$F$，就可以按带权平均值求其最或然值了。解算时，先分别由$C$、$D$及（$A$、$B$）点计算$F$的观测高程。由$C$点得

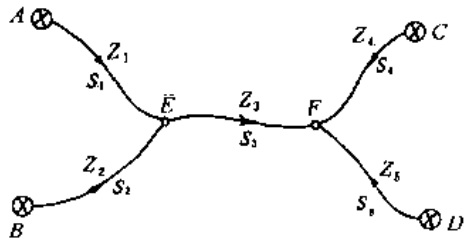



图 6-9

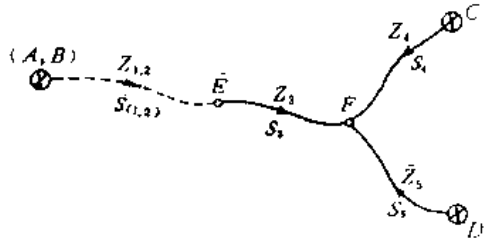



图 6-10

$$H_F^{(4)} = H_C + h_4 = 78.476 + (-0.066) = 78.410\text{m}$$

由$D$点得 $$H_F^{(5)} = H_D + h_5 = 84.318 + (-5.896) = 78.422\text{m}$$

由（$A$、$B$）点得

$$H_F^{(1,2+3)} = H_E^{(1,2)} + h_3 = 75.966 + 2.468 = 78.434\text{m}$$

$Z_4$及$Z_5$两路线的距离已知为50km及40km。路线“（$A$、$B$）→$F$”是$Z_{1,2}$与$Z_3$两段路线连接而成，故其距离$S_{(1,2+3)}$为

$$S_{(1,2+3)} = S_{(1,2)} + S_3 = 25 + 55 = 80\text{km}$$

由此，可算得$F$点各观测高程的权分别为

$$p_4=\frac{100}{S_4}=\frac{100}{50}=2,\qquad p_5=\frac{100}{S_5}=\frac{100}{40}=2.5,$$

$$p_{(1,2+3)}=\frac{100}{S_{(1,2+3)}}=\frac{100}{80}=1.25$$

$F$点的最或然高程为

$$H_F=\frac{[pL]}{[p]}=\frac{p_4H_F^{(4)}+p_5H_F^{(5)}+p_{(1,2-3)}H_F^{(1,2+3)}}{p_4+p_5+p_{(1,2+3)}}$$

即

$$H_F=78410\text{mm}+\frac{1.25(24)+2(0)+2.5(12)}{1.25+2+2.5}$$

$$=78410\text{mm}+\frac{60}{5.75}=78410\text{mm}+10.4\text{mm}=78.420\text{m}$$

以上的计算，就是利用一条等权路线将两个结点化为一个结点$F$，而最后求出该结点的最或然高程，结点$F$称为中心结点。

现在余下的问题，就是求$E$点的最或然高程及各观测高差的改正数。在处理这问题时，把中心结点$F$作为固定点，把路线（$A$、$B$）→$F$作为起迄于固定点的单一水准路线。用$F$点的最或然高程减去由此路线所算得的$F$点的高程$H_F^{(1,2+3)}$就是改正数$v_{(1,2+3)}$，即

$$v_{(1,2+3)}=H_F-H_F^{(1,2+3)}=-f_{(1,2+3)}$$

这样，路线上各段的改正数就可以按照与距离成正比地分配闭合差的方法计算。线段（$Z_{1,2}$）的改正数为

$$v_{(1,2)}=v_{(1,2+3)}\frac{S_{(1,2)}}{S_{(1,2+3)}}$$

线段（$Z_3$）的改正数为

$$v_3=v_{(1,2+3)}\frac{S_3}{S_{(1,2+3)}}$$

由此可得$E$点的最或然高程为

$$H_E=H_E^{(1,2)}+v_{(1,2)}$$

至于其他路线观测值改正数的计算，与一般的方法相同，即

（改正数）=（最或然值）-（观测值），

故

$$v_1=H_E-H_E^{(1)}$$

$$v_2=H_E-H_E^{(2)}$$

而

$$v_4=H_F-H_F^{(4)}$$

$$v_5=H_F-H_F^{(5)}$$

计算单位权中误差时，采用公式

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-t}}$$ ●

● 这个公式在《测量平差基础》中推导。

此处

$$[pvv] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + p_4 v_4^2 + p_5 v_5^2$$

式中的 $n$ 为原来观测路线的数目，本例 $n = 5$；$t$ 为结点的个数，即未知点的个数，本例 $t = 2$。等权路线的改正数 $v_{(1,2+3)}$ 和 $v_{(3,2)}$ 等，不参加计算。

中心结点的最或然高程的权为

$$p_F = p_{(1,2+3)} + p_4 + p_5$$

而其中误差为

$$m_F = \frac{\mu}{\sqrt{p_F}}$$

由此可见，在等权代替法中，求算中心结点的最或然高程 $H_F$ 的中误差是比较方便的，但若要求 $E$ 点最或然高程 $H_E$ 的中误差，就首先需要重新把 $E$ 点作为中心结点，重新计算权，此时由路线（$Z_4$）、（$Z_5$）开始，向 $E$ 点推算，即得

$$p_{(4,5)} = p_4 + p_5$$

$$S_{(4,5)} = \frac{c}{p_{(4,5)}}$$

$$S_{(3+4,5)} = S_{(4,5)} + S_3$$

$$p_{(3+4,5)} = \frac{c}{S_{(3+4,5)}}$$

最后得 $E$ 点的权

$$p_E = p_{(3+4,5)} + p_1 + p_2$$

而其中误差为

$$m_E = \frac{\mu}{\sqrt{p_E}}$$

现将等权代替法的计算方法总结如下：

1.根据水准路线图选定中心结点，并考虑如何合并路线；

2.从离中心结点最远的结点开始，将几条路线合并为一条等权路线。它的观测值等于原来几条路线观测值的带权平均值。它的权等于这些路线的权之和，它的距离与其权成反比；

3.将等权路线与其他路线联接，新路线的总长等于各段路线距离之和。其权等于 $c$ 除以新路线的总长；

4.最后余下的一个中心结点，就用解算一个结点的方法计算它的最或然高程；

5.计算各路线的改正数：计算改正数时，不外乎两种方法，一是用最或然值减去观测值，一是按照与距离成正比分配的方法计算。非中心结点的最或然高程，可将改正数加到相应的观测值求得；

6.若在每条路线上有若干个水准点，则把路线看成是单一水准路线，将整个路线的改正数按与距离成正比的方法分配于各段。

最后附带指出，为了检核计算有无错误，可以采用常用的一些方法，例如：

表 6-9

| 固定点 | | 水准路线 | | | 未知点 | | | $\delta L$ | $p\delta L$ | $v$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 点号 | 高程(m) | 编号 | 观测高差(m) | 距离(km) | 点号 | 观测高程(m) | $p=\frac{100}{s}$ | (mm) | | (mm) | $pvv$ |
| $A$ | 76.000 | 1 | +5.974 | 40.0 | | 75.974 ① | 2.5 ③ | 20 ⑥ | 50 ⑦ | 12 ⑰ | 360 ⑩ |
| $B$ | 68.594 | 2 | +7.360 | 66.7 | | 75.954 ② | 1.5 ④ | 0 ⑤ | 0 ⑧ | -8 ⑱ | 96 |
| | | (1,2) | $S_{(1,2)}=\frac{C}{p_{(1,2)}}=25.0$ ⑬ | | $E$ | 75.966 ⑫ | $[p]=4.0$ ⑨ | $\delta_x=12.5$ ⑪ | $[p\delta L]=50$ ⑩ | 4 ⑭ | |
| | | | | | | $H_E=H_E^{(1,2)}+v_{(1,2)}=75.962$ ⑯ | | | | | |
| | | 3 | +2.468 | 55.0 | | | 1.82 ⑲ | | | 10 ⑮ | 182 |
| | | (1,2+3) | $S_{(1,2)}+S_3=80.0$ ⑭ | | | 78.434 ⑯ | 1.25 ⑮ | 24 ㉒ | 30 ㉔ | -14 ㉑ | |
| $C$ | 78.476 | 4 | -0.066 | 50.0 | | 78.410 ⑰ | 2.00 ⑲ | 0 ㉑ | 0 ㉓ | 0 ㉒ | 200 |
| $D$ | 84.318 | 5 | -5.896 | 40.0 | $F$ | 78.422 ⑱ | 2.50 ⑳ | 12 ㉓ | 30 ㉖ | 2 ㉕ | 10 |
| | | | | | | | $[p]=5.75$ ㉗ | $\delta_x=10.5$ ㉙ | $[p\delta L]$ 60 ㉘ | $[pvv]$ | |
| | | | | | | $H_F=H_F^A+\delta_x=78.420$ ㉚ | | | | | |

求出$H_E^{(1,2)}$后，用$[pv']=0$作检核。此时，$v_1'=H_E^{(1,2)}-H_E$；$v_2'=H_E^{(1,2+3)}-H_E$。

求出$H_F$后，用$[pv]=0$作检核。此时，$[pv]=p_{(1,2)}v_{(1,2)}+p_4v_4+p_5v_5$。单位权中误差，即100km观测高差的中误差$\mu=\pm\sqrt{\frac{848}{5-2}}=\pm17$mm。

1公里观测高差的中误差$m_{km}=\frac{\mu}{\sqrt{p_{km}}}=\frac{\mu}{\sqrt{\frac{100}{1}}}=\pm1.7$mm，

$F$点最或然高程的中误差$m_F=\frac{\mu}{\sqrt{p_F}}=\frac{\mu}{\sqrt{5.75}}=\pm\frac{17}{2.4}=\pm7.1$mm。

检核：

$$[pv]_E=1.5\times(-12)+2.5(+8)=+2$$

$$[pv]_F=2.5(-2)+2\times10+1.25(-14)=-2.5$$

$$v_{1,2+3}=v_{1,2}+v_3=-4-10=-14$$

求出$v_{(1,2)}$及$v_3$后，检核为$v_{(1,2)}+v_3=v_{(1,2+3)}$；即分段改正数之和应等于全路线的总改正数。

通常将上述计算排列成表。这种表格可根据实际计算情况自行编制；原则要求是整齐简洁，便于计算。兹将上例计算排列成表（见表6-9），并附计算公式及计算顺序（表中以圆圈内数字表示），以供编制表格时参考。

### 三、用等权代替法作水准网平差的一些例子

通过前面的例子，讨论了等权代替法原理和应用。现在再用几个例子来介绍它用于各种图形的情形。

当结点多于两个时，平差的方法基本上与两个结点时相同。图6-11是三个结点的网。设以$T$为中心结点，平差时，首先从$O$点开始，合并（$Z_1$）、（$Z_2$）两路线（图6-12）。其次，将（$Z_{1,2}$）与（$Z_7$）作为单一路线，与（$Z_3$）、（$Z_6$）等路线求局部带权平均值，又消去第二个结点（图6-13）。

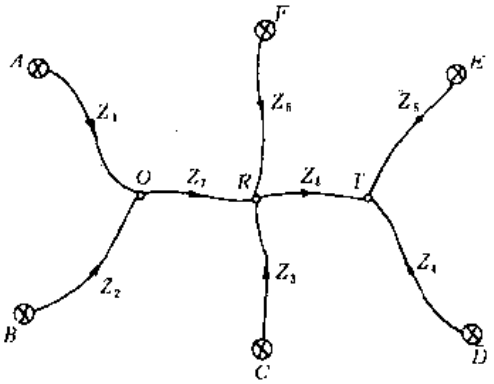



图 6-11

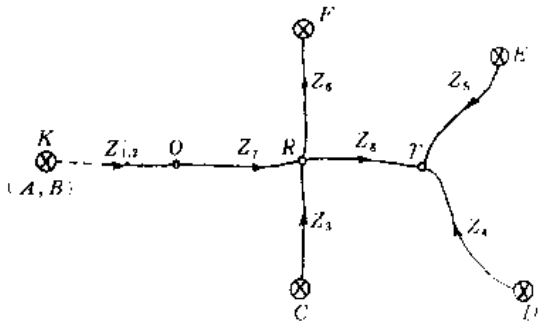



图 6-12

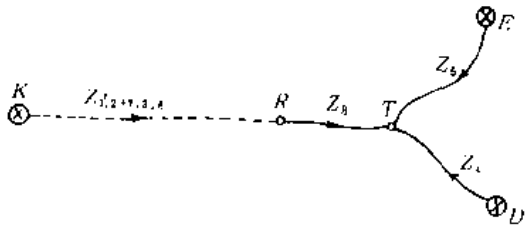



图 6-13

最后，解求中心结点$T$的最或然高程。

至于各路线改正数的计算，仍按上述方法（参阅上面总结的第5点）处理。但注意要逐个结点反算回去，不要把一条总的等权路线错误地分成几段。例如对等权路线$KT$，只能先求等权路线$KR$的改正数：

$$v_{(1,2-7,3,6)}=v_{(1,2-7,3,6-8)}\frac{S_{(1,2-7,3,6)}}{S_{(1,2-7,3,6-8)}},$$

而不能错误地直接求改正数$v_{(1,2-7)}$，$v_3$和$v_6$。这些改正数应在求得$R$结点的最或然高程后再逐步计算，即

$$H_R=H_R^{(1,2-7,3,6)}+v_{(1,2-7,3,6)}$$

$$v_3 = H_R - H_R^{(3)}$$

$$v_6 = H_R - H_R^{(6)}$$

$$v_{(1,2+7)} = H_R - H_R^{(1,2,7)}$$

在$R$点解完后，就进行$O$点的解算。这时，将$KR$段的改正数$v_{(1,2+7)}$分配于（$Z_{1,2}$）和（$Z_7$）两段，并按例6-19同法处理。

当然，以本例的图形来说，选$R$点作为中心结点更为合适。此处选$T$为结点，只是借以说明连续解几个结点的一般方法而已。

当水准网中有闭合环时，也可以应用等权代替法。在图6-14中，水准网的中部形成环形。此时可将路线（$Z_2$）与（$Z_4$）用等权路线（$Z_{2,4}$）代替，使水准网成为图6-15所示的图形，然后作为单一水准路线解算。这里的解算原理，基本上仍与前同。只是以前是解算结点的高程，而这里则直接用（$Z_2$），（$Z_4$）两路线的高差求带权平均值，作为路线（$Z_{2,4}$）的高差。最后，也不必解算中心结点的高程，而只是将改正数分配在（$Z_1$）、（$Z_{2,4}$）和（$Z_3$）三段路线上。

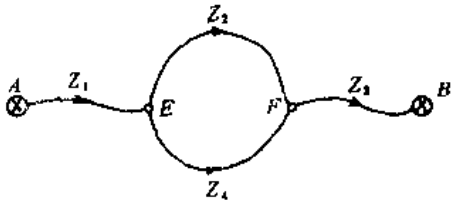



图 6-14

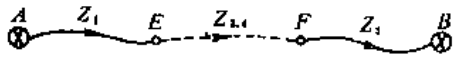



图 6-15

图6-16（$a$）也是成闭合环形的网。这时，可以先将（$Z_1$）、（$Z_2$）用等权路线（$Z_{1,2}$）代替得图（$b$）所示图形。再将（$Z_3$）与（$Z_{1,2}$）作为一条路线，与（$Z_4$）合并成等权路线（$Z_{1,2+3,4}$），将（$Z_6$）与（$Z_7$）合成（$Z_{6,7}$），得图6-16（$c$）的闭合路线，然后按闭合路线解算。在解算这类图形时，不必选定中心结点。

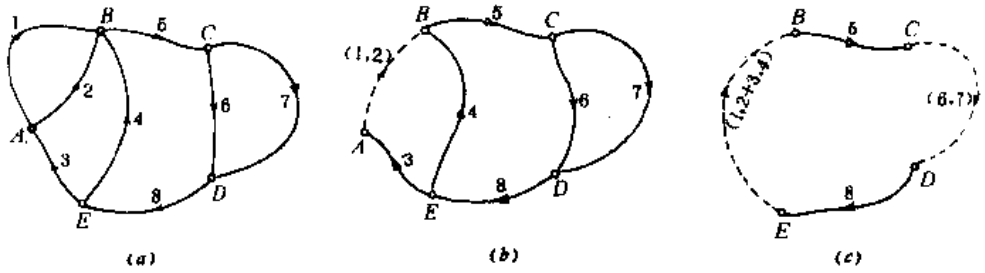



图 6-16

## 四、用等权代替法作水准网的精度估算

等权代替法在测量实践中的另一个最大特点是，可以在水准测量施测之前，根据设计的网形及水准路线的概略长度，对水准点高程的精度作一预期估计。

由（6-29）式知，水准网中任一点$i$的高程中误差$M_{H_i}$可按下式求得：

$$M_{H_i}=\frac{\mu}{\sqrt{p_{H_i}}}$$

$\mu$ 为单位权中误差，估算时可取水准测量施测等级的每公里高差中误差。

$p_{H_i}$ 为 $i$ 点平差后高程的权，它可按水准网用等权代替法求得。

因为水准网中的任意一个水准点的中误差均可算出，所以将它们加以比较后便能找到中误差最大的某个水准点，即通常所称的最弱点。有了最弱点的中误差，则该水准网是否满足设计需要便可得以判定。

## §6-11 水准测量的精度

测量工作中经常要用到本章所介绍的一些基本知识。这些知识对成果的精度分析和精度预估有实际意义。本节以水准测量为例对水准测量的精度加以讨论。

### 一、简单水准测量的中误差

水准测量的误差主要来自下列因素的影响：

1.水准仪检校后存在残差；

2.水准尺长度和分划有误差，以及水准尺零点不准；

3.水准尺的水准管检校后存在残差；

4.仪器脚架和尺桩的竖直移动；

5.地面折光；

6.水准仪置平误差；

7.瞄准和读数误差。

上述因素对水准测量结果的影响，可以通过一系列约定的操作程序和方法予以消除或减弱：如限制前后视距之差，以减弱水准仪检校后存在的 $i$ 角残差及地面折光的影响；要求进行往返观测和在每站上按某种程序读数，以消除或减弱脚架和尺桩竖直移动的影响；要求尽可能设偶数站，以消除水准尺零点不准的影响；要求使用检校合格的水准尺，以减弱水准尺长度和分划误差的影响。至于水准尺的水准管经校正后，如留下$3\tau''$误差时（$\tau''$为分划值，一般圆水准为$8'$），由于圆水准有$24'$的误差致使水准尺倾斜，使3m处读数带来约0.08mm的误差，这样的误差在三、四等水准测量中是可以忽略不计的。

通过上述措施后，对水准测量结果产生较大影响的有：水准仪置平误差、瞄准和读数误差。

下面讨论就一个测站求得的两点间高差的精度。

#### （一）水准仪置平误差的影响

当水准仪的主条件得到满足后，视线是否水平，决定于水准管置平的精度。一般说来，水准管的置平精度为$0.1\tau''\sim0.2\tau''$。现取置平精度为$0.15\tau''$，它对距水准仪 $S$ 米处的水准尺上读数的影响为

$$m_1 = \pm\frac{0.15\times S\times\tau''}{\rho''} \qquad (a)$$

（二）瞄准误差的影响

望远镜的瞄准精度一般可取其中误差为$\frac{30''}{v}$，$v$为望远镜的放大倍数，由此对距水准仪$S$米处的水准尺上的读数影响为

$$m_2 = \pm\frac{30''\times S}{v\times\rho''} \qquad (b)$$

（三）读数误差的影响

读数误差的大小与水准尺的分划值有关，也与水准仪至水准尺的距离有关。经试验认为，在水准测量的常用距离（70m～100m）情况下，一般读数误差为分划值的-1/4～+1/4之间。当水准尺的分划值为1cm时，读数误差在－2.5～+2.5mm之间，则读数中误差为

$$m_3^2 = \frac{[\Delta\Delta]}{n} = \frac{1}{2.5}\int_0^{2.5} x^2dx$$

$$= 2.08$$

则

$$m_3 = \pm 1.4\text{mm} \qquad (c)$$

所以在一根水准尺上读一个数的中误差为

$$m_{读} = \pm\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}$$

$$= \pm\sqrt{\left(0.15^2\times\tau''^2+\frac{30^2}{v^2}\right)\frac{S^2\times1000^2}{\rho^2}+1.4^2} \qquad (d)$$

由前后水准尺各读一个数求得高差的中误差为

$$m_{h'} = \sqrt{2}\,m_{读} \qquad (e)$$

在三、四等水准测量中，均要求由红黑面读数求两次高差，而后取中数，则其中误差为

$$m_h = \frac{m_{h'}}{\sqrt{2}} = m_{读} \qquad (f)$$

例如在四等水准测量中，水准仪的$\tau''=20''$，$v=25$倍，最大视距$S=100$m，则一个高差的中误差为

$$m_h = \pm\sqrt{\left(0.15^2\times20^2+\frac{30^2}{25^2}\right)\frac{100000^2}{206000^2}+1.4^2}$$

$$= \pm2.1\text{mm}$$

如果一公里水准路线中平均设10站，则每公里水准测量的中误差为

$$\mu' = +2.1\sqrt{10} = \pm6.5\text{mm}$$

## 二、水准测量的中误差

在两点间进行单程（只作往测或返测）水准测量，测得高差$h'$的中误差为

$$m_{h'} = \mu'\sqrt{\frac{1}{p}}$$

式中$\mu'$是单位权中误差，$p$是高差$h'$的权。在平坦或起伏不大的地区，因每公里测站数相仿，一般以水准路线长$S$来定权，而且通常令：

$$p = \frac{1}{S}$$

所以

$$m_{h'} = \mu'\sqrt{S} \tag{6-52}$$

这时，$\mu'$为一公里水准测量高差的中误差。

在起伏较大地区，每公里的测站数相差很大，这时宜按测站数$N$定权，即

$$p = \frac{C}{N}$$

则

$$m_{h'} = \mu'\sqrt{\frac{N}{C}} \tag{6-53}$$

式中，$\mu'$是$C$个测站测得高差的中误差。

当在两点间进行往返测，则取往返测高差$h'$、$h''$的中数$h$，作为两点间的观测高差，即

$$h = \frac{h' + h''}{2}$$

若$h'$、$h''$是同精度观测值，它们的中误差均为$m_{h'}$，则

$$m_h = \frac{1}{\sqrt{2}}m_{h'} \tag{g}$$

将（6-52）式代入上式，得

$$m_h = \mu'\sqrt{\frac{S}{2}}$$

式中：$\mu'$为每公里单程水准测量的中误差。从（g）式可以推出：$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\mu'$；$\mu$是每公里往返测高差中数的中误差。因此上式为

$$m_h = \mu\sqrt{S} \tag{6-54}$$

求单程（往测或返测）水准测量的中误差，可以按（6-52）或（6-53）式进行。求往返测高差中数的中误差则按（6-54）式计算。

通过对大量水准资料的分析研究，在水准路线只有几公里或几十公里时，可不考虑系统误差影响，此时每公里往返测高差中数的偶然中误差定为：三等水准测量时$\mu = \pm 3\text{mm}$；四等水准时$\mu = \pm 5\text{mm}$。对等外水准测量，一般规范要求$\mu = \pm 10\text{mm}$。

### 三、往返测高差较差的限差

对于三等水准测量来说，规范中要求进行往返观测，对于四等和等外水准测量则仅要求在水准支线上进行往返观测。下面讨论往返测高差较差的限差。设在两点间测得的往测

高差为$h'$，返测高差为$h''$，则往返测高差的较差$d$为

$$d = h' + h''$$

将上式微分，转化成中误差的形式为

$$m_d^2 = m_{h'}^2 + m_{h''}^2$$

由于往返测是在同一线路上进行，而且是按同一级的水准测量要求进行的，所以$m_{h'} = m_{h''}$。于是

$$m_d = \sqrt{2}\, m_{h'}$$

顾及（6-52）式，得

$$m_d = \mu' \sqrt{2S}$$

取两倍中误差为容许误差，则

$$d_{容} = 2\mu' \sqrt{2S} = 4\mu \sqrt{S} \qquad (6\text{-}55)$$

式中：$\mu'$是单程水准测量每公里的中误差，$\mu$是每公里往返测高差中数的中误差，$S$是两点间水准路线长，以公里为单位。在三、四等水准测量中，按（6-55）式可求得往返测高差较差的容许误差为：

三等水准　$d_{容} = \pm 12\sqrt{S}$ mm；

四等水准　$d_{容} = \pm 20\sqrt{S}$ mm；

等外水准　$d_{容} = \pm 40\sqrt{S}$ mm。

有些规范中，考虑到在山地甚至在高山地区也要用等外水准测量联测个别大地点的高程，但此时用测站数定权又不太方便，在这种情况下，若顾及在山区比在平坦地区或起伏不大地区的设站数平均约增加一倍，则每公里水准测量的中误差将增大$\sqrt{2}$倍，于是要求：

等外水准（山地，高山地）：$d_{容} = \pm 60\sqrt{S}$ mm

## 四、附合水准路线闭合差的限差

在已知水准点$A$、$B$中间（图6-17）敷设一条水准线路，其中观测得的单程高差为$h'_1$、$h'_2$、……$h'_{n-1}$、$h'_n$，相应的水准线路长为$S_1$、$S_2$、…$S_{n-1}$、$S_n$。设$A$、$B$点的已知高程为$H_A$、$H_B$.

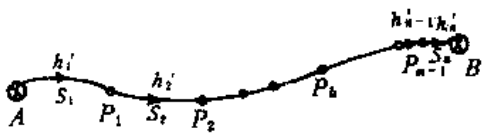



图 6-17

这条水准线路的闭合差为

$$f = H_A + h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_n - H_B \qquad (h)$$

当起始点高程误差独立时，闭合差的中误差为

$$M_f = \pm\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + m_{h_1}^{2'} + m_{h_1}^{2'} + \cdots + m_{h_n}^{2'}}$$

式中：$m_A$、$m_B$是已知点高程的中误差。当不考虑起始数据误差影响时，附合水准路线闭合差的中误差为

$$m_f = \pm\sqrt{m_{h'}^{2'} + m_{h_2}^{2'} + \cdots + m_{h_n}^{2'}}$$

将（6-52）式代入上式，得

$$m_f = \mu' \sqrt{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$$

设以$L$表示$A$、$B$点间的水准路线长，即$L = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$，

则上式为

$$m_f = \mu' \sqrt{L} \qquad (j)$$

取两倍中误差为容许误差，得

$$f_{容} = 2\mu' \sqrt{L} = 2\mu\sqrt{2L} \qquad (6\text{-}56)$$

在附合水准路线中，由于四等水准和等外水准只作单程观测，如果附合路线在几公里或几十公里范围内，即不考虑系统误差影响，并不顾及起始点高程的误差，四等水准仍取$\mu = \pm 5\text{mm}$，等外水准取$\mu = \pm 10\text{mm}$，则附合水准路线闭合差的容许值为

四等水准：　　$f_{容} = \pm 14\sqrt{L}\,\text{mm}$

等外水准：　　$f_{容} = \pm 28\sqrt{L}\,\text{mm}$

当任何两点间都要往返观测，此时附合水准线路闭合差容许值的推算与单程水准线路相同，只需将（6-56）式的右端乘以$1/\sqrt{2}$，即

$$f_{容} = \mu' \sqrt{2L} = 2\mu\sqrt{L} \qquad (6\text{-}57)$$

在图6-17中，当附合水准路线中的已知点$B$就是已知点$A$时，就形成了闭合水准线路。在闭合水准线路中，只进行单程水准测量，求闭合差容许值可用（6-56）式；如果每段都进行往返观测，则用（6-57）式求闭合差的容许值。

当长距离水准测量时，如经分析，观测成果中含有系统误差时，则（6-56）及（6-57）式中的$\mu'$及$\mu$均为相应的综合中误差，即顾及偶然误差及系统误差联合影响时的中误差。

## 五、单一水准路线中最弱点的精度

在一条附合水准路线中，将高程闭合差配赋后，求出各点最或然高程，试问线路中那一点高程的精度最弱？最弱点的中误差是多少？下面来讨论这个问题。

设单一水准线路全长为$L$公里，下面用求广义算术平均值中误差的办法，求水准线路中任意点$i$的高程最或然值的精度。设$i$点距已知点$A$为$S_i$公里（图6-18）。这时，$i$点高程可由下列两个值$l'$、$l''$及其权$p'$、$p''$，按广义算术平均值求其最或然值。下列的权$p'$、$p''$只考虑测量误差的影响。

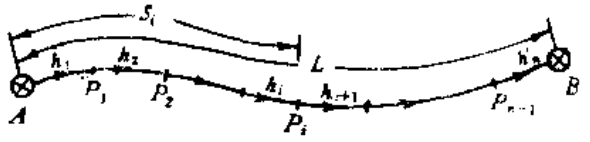



图 6-18

$$l' = H_A + h_1 + h_2 + \cdots\cdots + h_i, \qquad p' = \frac{1}{S_i}$$

$$l'' = H_B - h_n - h_{n-1} - \cdots\cdots - h_{i+1}, \qquad p'' = \frac{1}{L - S_i}$$

点$i$的最或然高程$x_i$为

$$x_i = \frac{[pl]}{[p]}$$

点$i$最或然高程的中误差为

$$m_x = \mu' \sqrt{\frac{1}{p_x}} \qquad (j)$$

在这里$\mu'$是每公里水准测量高差的中误差。在一定规格的测量中，$\mu'$是一个常数。

而
$$p_x = [\,p\,] = p' + p'' = \frac{L}{S_i(L - S_i)} \qquad (k)$$

从上式中可以看出，在单一水准线路中，距 $A$ 点不同距离的点，其最或是高程的权不同，因此精度也不同。那么哪一点的精度最弱呢？因为中误差 $m_x$ 最大的点，其权 $p_x$ 必最小。从（k）可以看出，对一定长度的水准线路来说，$L$ 是常量，所以只有当 $y = S_i(L - S_i)$ 为最大时，$p_x$ 得最小值。即当 $\frac{d^2y}{dS_i^2} < 0$ 时，可从 $\frac{dy}{dS_i} = 0$ 解得使 $y$ 得极大值的 $S_i$ 值，即

$$\frac{dy}{dS_i} = L - 2S_i = 0$$

即
$$S_i = \frac{L}{2}$$

而
$$\frac{d^2y}{dS_i^2} = -2 < 0$$

从上列演算可知，当 $S_i = \frac{L}{2}$ 时，$y$ 得最大值。此时 $p_x$ 为最小，$m_x$ 为最大。即在单一水准线路中点的最或然高程的精度最差。或者说，经平差后，单一水准线路的最弱点在线路的中点。这时，

$$p_x = \frac{L}{\frac{L}{2}\left(L - \frac{L}{2}\right)} = \frac{4}{L}$$

将上式代入（j）式得

$$m_x = \frac{\mu'}{2}\sqrt{L} \qquad (6\text{-}58)$$

将上式与（i）式及（6-56）式比较可知：单一水准线路中，平差后最弱点高程的中误差，等于线路闭合差中误差的二分之一，或等于线路最大闭合差的四分之一。

# 第七章　经纬仪及水平角观测

## §7-1　水平角观测的概念

为了测定地面点的平面位置，一般需要观测水平角。所谓水平角，就是相交的两直线之间的夹角在水平面上的投影。例如在图7-1中，角$AOB$为直线$OA$与$OB$之间的夹角，测量中所要观测的水平角是$AOB$角在水平面上的投影，即$\angle A_1O_1B_1$，而不是斜面上的$\angle AOB$。

由图可以看出，地面上$A$、$O$、$B$三点在水平面上的投影$A_1$、$O_1$、$B_1$是通过它们的铅垂线得到的。因此，$\angle A_1O_1B_1$就是通过$OA$与$OB$的两竖面所形成的两面角。此两面角在两竖面交线$O_1O_2$上任意一点均可进行量测。设想在竖线$O_1O_2$上的$O_2$点放置一个有分划的圆盘（例如按顺时针注记的全圆量角器），使其中心正好在$O_1O_2$竖线上，并成水平位置。从$OA$竖面与圆盘的交线得一读数$a$，再从$OB$竖面与圆盘的交线得另一读数$b$，则$b$减$a$就是圆心角$\beta$，即

$$\beta = b - a$$

这个$\beta$就是水平角$\angle A_1O_1B_1$的值。

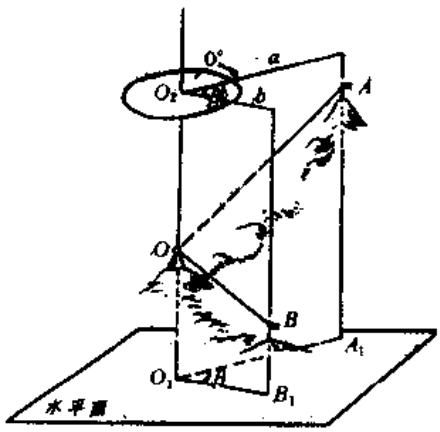



图 7-1

## §7-2　光学经纬仪

由上节所述得知，用于观测水平角的仪器必须要有照准目标的瞄准设备，它不但能上下转动而形成一竖面，并可绕一竖轴在水平方向内转动；还要有一个带分度的圆盘，将它安置成水平位置，并使分度中心与上述的竖轴重合。经纬仪正是根据这些要求而设计制造的。

经纬仪的类型很多，单按精度划分，我国生产的中等精度和一般精度的经纬仪就有J2、J6、J15●几个等级。每个等级的经纬仪由于生产厂家的不同，仪器的部件和结构又不尽一样。但是各种经纬仪主要部分的构造则大致相同。现将普通常用的光学经纬仪的一般构造和读数设备说明于后。

● 经纬仪的精度指标按野外"一测回方向中误差"划分等级，例如野外"一测回方向中误差"为6″（或稍小于6″）的经纬仪用代号"DJ6"来表示，简写为"J6"。

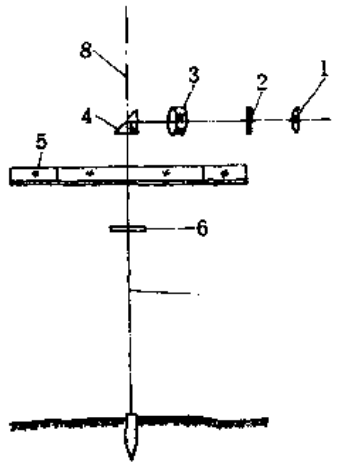
还在横轴的一端装有一个竖直度盘（简称竖盘）。当望远镜在竖面内上下转动时，竖盘跟着一起转动。

观测角度时，为了使竖轴处于竖直位置和水平度盘处于水平位置，照准部一般装有圆水准器和水准管，用于整平仪器。另外，为了能够按固定的指标位置进行竖盘读数，通常还装有竖盘指标水准管。

为使竖轴轴线与所测角度顶点的铅垂线重合，在连接三脚架与基座的中心螺旋的正中装有挂垂球的挂钩，观测水平角时使所挂垂球对准所测角度顶点的标志中心。

有的光学经纬仪装有光学对中器，它是一个小型外调焦望远镜。当照准部水平时，对中器的视线经棱镜折射后的一段成铅垂方向，且与竖轴中心重合，如图7-3所示。若地面标志中心与光学对中器分划板中心相重合，这说明竖轴中心已位于所测角度顶点的铅垂线上。

光学对中器有的装在经纬仪的基座上，但一般是装在仪器的照准部。由于仪器的高度不同，光学对中器也要调焦。大多数仪器的调焦结构是移动分划板的位置（连同对中器的目镜一起移动），也有少数对中器是移动其物镜位置进行调焦。




1—目镜；2—分划板；3—物镜；4—棱镜；5—水平度盘；6—保护玻璃；7—光学垂线；8—竖轴中心

图 7-3

## 二、度盘和读数设备

光学经纬仪的水平度盘和竖直度盘都是用玻璃做的，一般把整个圆周分为360°❶。J6级的光学经纬仪一般每隔1°有一分划，并有注记。J2光学经纬仪每隔20′有一分划，每度有注记。

在度盘读数时，设想用一指标线来读数是最简单的方法，但是这种方法过于粗略，不能满足测角的精度要求。又由于度盘的分划线很细密，需要放大一定的倍数才能看得清楚和读得准确。因此光学经纬仪通常利用读数显微镜进行读数。显微镜的成象原理与望远镜基本一样，所不同的是，显微镜的物镜把物体的成象放大，物象再经目镜放大，使放大率增高。

---

❶ 角度的度量制有弧度制、60分制和百分制。

弧度制是以等于圆的半径的弧长所对圆心角为一弧度。在计算器上常用R或D符号表示弧度制。

60分制是将全圆分为360等分，即360度，记作360°。度（°）以下的单位为分（′）和秒（″），1° = 60′，1′ = 60″。在计算器上常用DEG符号表示60分制。

百分制是将全圆分为400等分，即400百分度，记作400ᵍ。百分度（ᵍ）以下的单位为百分分（ᶜ）和百分秒（ᶜᶜ），1ᵍ = 100ᶜ，1ᶜ = 100ᶜᶜ。在计算器上常用GRA符号表示百分制。

60分制和百分制相互的换算关系如下：

1ᵍ = 0.9°，1ᶜ = 0.54′，1ᶜᶜ = 0.324″

1° = 1.1111…ᵍ，1′ = 1.851…ᶜ，1″ = 3.08642…ᶜᶜ。

百分度现通称“闵”，记作“gon”，闵的千分之一为毫闵，记作“mgon”。例如0.058ᵍᵒⁿ = 58ᵐᵍᵒⁿ。

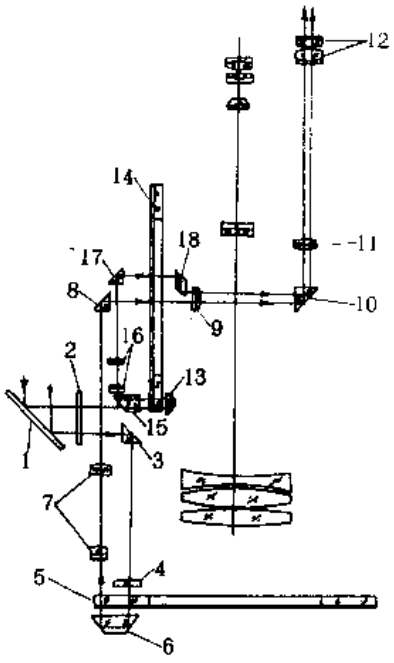
现将我国统一设计的J6光学经纬仪的读数系统光路图（图7-4）说明如下。

经水平度盘的光路　光线由反光镜1反射后穿过照明进光窗2，经转向棱镜3的折射，透镜4的聚光，以及棱镜6的照明，照亮了水平度盘5的分划线，然后由水平度盘显微物镜组7和转向棱镜8将水平度盘5的分划线转向后，在读数窗与场镜9的平面上成象。光线通过读数窗与场镜9后，再经过转向棱镜10和转象透镜11，在读数显微镜目镜12的焦平面上成象。

经竖盘的光路　光线由反光镜1反射后穿过照明进光窗2，经照明棱镜13的折射，照亮了竖盘14的分划线，然后由转向棱镜15和竖盘显微物镜组16，转向棱镜17及菱形棱镜18，将竖盘的分划线在读数窗与场镜9的平面上成象。光线通过读数窗与场镜9后，与水平度盘的光线沿同一路线继续前进。

因此，在读数显微镜中能同时反映出两个度盘的读数。

至于其它光学经纬仪读数系统的光路原理，大体上与此类似。




1—反光镜；2—照明进光窗；3—转向棱镜；4—水平度盘聚光透镜；5—水平度盘；6—水平度盘照明棱镜；7—水平度盘显微物镜组；8—水平度盘转向棱镜；9—读数窗与场镜；10—转向棱镜；11—转象透镜；12—读数显微镜目镜；13—竖盘照明棱镜；14—竖盘；15—竖盘转向棱镜；16—竖盘显微物镜组；17—竖盘转向棱镜；18—菱形棱镜

图 7-4

通常用于光学经纬仪的读数设备和读数方法有下列几种：

（一）带分划尺的显微镜（简称带尺显微镜）

很多J6光学经纬仪都采用这种读数设备。它是在显微镜读数窗与场镜上设置一个带有分划尺的分划板，度盘上的分划线经显微镜物镜放大后成象于分划尺之上。分划尺1°分划间的长度应等于度盘的一格，即1°的宽度。图7-5是读数显微镜内所见到的度盘和分划尺的影象，上面注有“水平”的窗口为水平度盘读数窗，下面注有“竖直”的窗口为竖盘读数窗。其中长线和大号数字是度盘上的分划线及其注记，短线和小号数字为分划尺的分划线及其注记。每个读数窗内的分划尺分成60小格，每小格代表1′，每10小格注有数字，表示10′的倍数，因此在分划尺可直接读到1′，估读到0.1′。这里需要注意的是分划尺上的0分划线是指标线，它所指度盘上的位置就是应该读数的地方。例如在竖盘的读数窗中，分划尺的0分划线已过75°，但不到76°，这时竖盘的读数一定是75°多一些，所多的数值，要看分划尺上的0分划线到度盘上75°分划线之间有多少小格来确定。从图7-5中可以看出，分划尺的读数为56.1′，因此竖盘的整个读数为75°56.1′。同理，水平度盘的读数窗中，分划尺的0分划线已过了180°，整个读数应是180°05.1′。

实际读数时并不需要按上法进行，只要看出那一根度盘分划线盖在分划尺上，度数就是这根分划线的注记数，分数则在这根分划线所指的分划尺上读取。

这种读数设备的读数精度因受显微镜放大率与分划尺长度的限制，一般仅用于J6以下

的光学经纬仪。

（二）光学测微器显微镜

有的光学经纬仪读数设备是在显微镜的光路中，设置光学元件和测微分划尺组成的光学测微器。在这种测微器中，通过光学机械元件的作用，使度盘分划线的影象产生移动，以与固定指标线相重合，或者使度盘对径分划线的影象相向移动而符合。分划线影象的这个移动量反映在测微分划尺上，可在读数窗内读取。

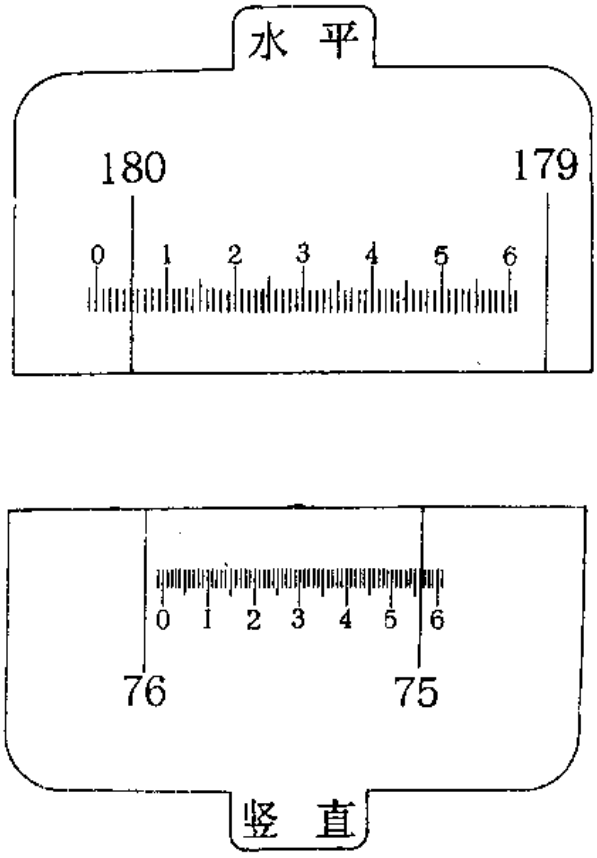


图 7-5

在光学经纬仪的读数系统中所采用的光学测微元件，通常为平板玻璃或移动光楔。现分别介绍这两种光学测微器如下：

1.平板玻璃测微器

由应用光学得知，光线以一定的入射角穿过平板玻璃时，将发生平行移动的现象（图7-6）。移动量的大小决定于平板玻璃的厚度、玻璃的折射率和光线的入射角。当平板玻璃的厚度和折射率给定后，光线的移动量就完全决定于入射角。平板玻璃测微器正是利用了这一光学现象，其平板玻璃可绕一固定轴转动，使度盘分划线的影象作平行移动。

J6光学经纬仪光学测微器的光学元件一般为单平板玻璃，它和测微分划尺用金属机构连结在一起，转动仪器测微手轮，平板玻璃和测微分划尺就绕同一轴转动。图7-7所示为这

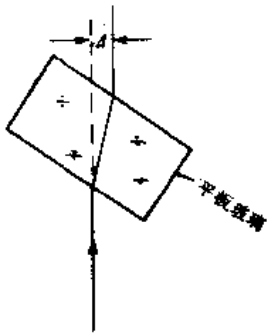


图 7-6

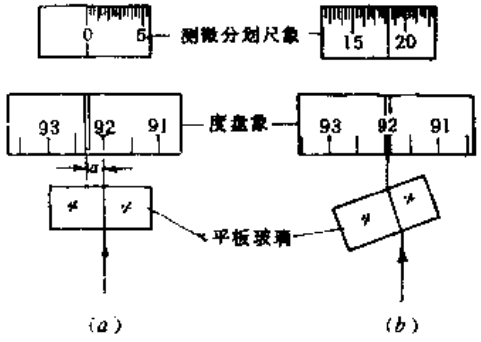


图 7-7

种读数设备的原理图，当测微分划尺读数为零，平板玻璃的底面水平，光线垂直通过平板玻璃，度盘分划线的影象不改变原来的位置，如按读数窗上的双指标进行读数，应为

92°+$a$(图7-7$a$)。转动测微手轮，平板玻璃转动一个角度后，度盘分划线的影象也就平行移动一微小距离，如果使92°分划线的影象正好夹在双指标线的中间，这个移动量$a$可由测微分划尺上读出为18′20″(图7-7$b$)。

图7-8所示为这种读数显微镜中所见到的度盘和测微分划尺的影象，下面为水平度盘读数窗，中间为竖盘读数窗，上面为两个度盘合用的测微分划尺的读数窗。

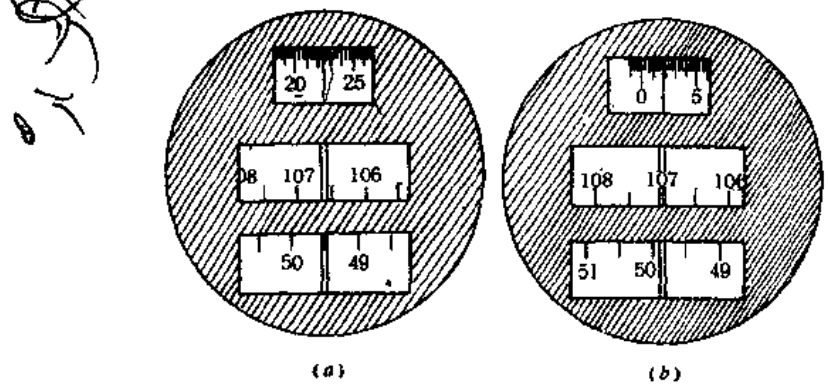


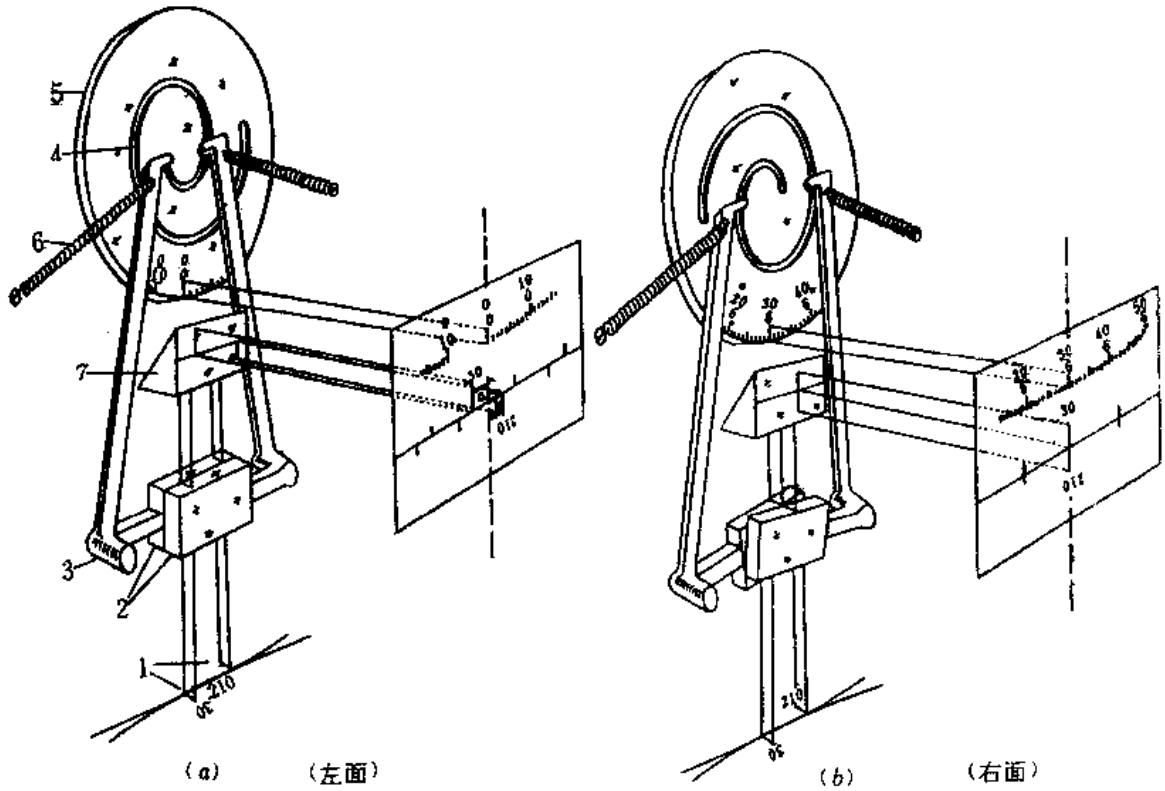

图 7-8

实际测角时，转动测微手轮使双指标线旁的度盘分划线精确位于读数窗中双指标线的中间，先从度盘上读出度数，再从测微分划尺上读取分数和秒数。这种仪器的测微分划尺上共有90小格，当度盘分划线影象移动30′间隔时，测微分划尺转动90小格，故测微分划尺上每小格为20″。水平度盘与竖盘读数应分别读取，图7-8($a$)中水平度盘读数为49°52′30″、图7-8($b$)中竖盘读数为107°01′55″。

在J2光学经纬仪中，一般都采用对径分划线影象符合的读数设备。它将度盘上相对180°的分划线，经过一系列棱镜和透镜的反射与折射，而显现于读数显微镜内，采用对径符合和测微显微镜原理进行读数。为了测微时获得度盘分划线的相对移动，广泛应用了双平板玻璃的光学测微器。例如生产单位用得较多的威特T 2 经纬仪的读数设备中就是应用这种测微器。

威特T 2 经纬仪的双平板玻璃光学测微器由测微手轮、秒盘（测微分划盘）和一对平板玻璃组成。图7-9为其结构原理。测微手轮一方面连接秒盘，另一方面又通过机械装置与平板玻璃相连。当转动测微手轮时，秒盘随之转动，一对平板玻璃则作等量的相反方向的转动。它的基本原理就是转动测微手轮时，一对平板玻璃作等量相反方向转动可使度盘分划线影象作相向移动而彼此接合，这个等量的相向移动量可在秒盘相应的转动量上显示出来。

当秒盘读数为零时，一对平板玻璃的底面水平（图7-9$a$），度盘上相对180°处来的光线垂直通过平板玻璃而不产生移动。如按指标线进行读数，正象为30°00′+$a$，倒象为210°00′+$b$，平均读数为30°00′+$\frac{a+b}{2}$。转动测微手轮，由于平板玻璃的相对转动，对径的分划线就彼此接合，同时秒盘的读数亦相应增加（图7-9$b$）。这时秒盘上的读数（即由零所增加的读数）就是$\frac{a+b}{2}$。




1—度盘对径分划影象；2—平板玻璃；3—平板玻璃摆动轴；4—凹槽；
5—秒盘（测微分划盘）；6—消隙动拉力弹簧；7—转向棱镜

图 7-9

这种仪器度盘的最小格值为20′，度盘影象的上下分划线最大移动量为半格（10′），即秒盘上读数范围为10′，故不到10′的分值和秒值可由秒盘读出。实际读数时是转动测微手轮，使上下分划线接合。这时取度盘正象的一个整度分划线（例如图7-10(*a*)的285°），由此分划线能按角度值的增加方向，在度盘倒象上找到与它相差180°的整度分划线（图7-10(*a*)

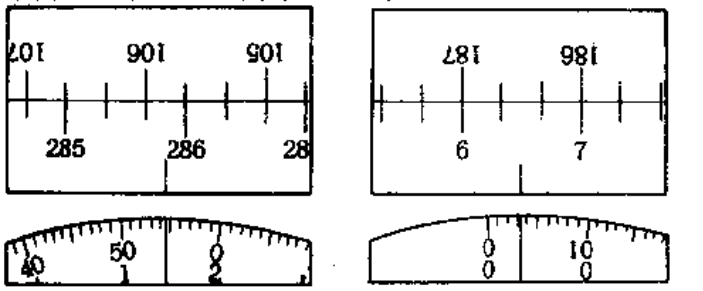



图 7-10

的105°），则以该分划线的读数为度的值（285°）。以两条整度分划线间（285°和105°之间）的度盘分划格数为10′（度盘格值的一半）的倍数，即相差一格为10′，相差两格为20′，……等等（图7-10(a)为五格，得50′）。再由秒盘读出10′以下的分、秒值。移盘一格为1″，因此最小可估读到0.1″。

必须指出，图7-9所示为读数的原理，它与仪器的实际构造只是大体相同。

图7-10为这种仪器度盘的读数举例。

这种仪器的水平度盘和竖盘的分划线都是在同一读数显微镜的读数窗中呈象，但借助于一个与度盘换象手轮相连的棱镜（图7-11）作用，使显微镜中只能看到水平度盘或竖盘一种构象。观测水平角时，使换象手轮上的刻划线水平，通向竖盘的光路即不通，使显微镜中只看到水平度盘分划线的构象。测定竖直角时，使换象手轮上的刻划线成竖直位置，通向水平度盘的光路即不通，使显微镜中只看到竖盘分划线的构象。

2. 移动光楔测微器

由应用光学得知，当光线通过光楔时，光线将偏转一个$\varepsilon$角（图7-12），此$\varepsilon$角的大小与光楔的楔角$\alpha$、玻璃的折射率和光线的入射角有关。当光楔的$\alpha$角很小和玻璃的折射率被选

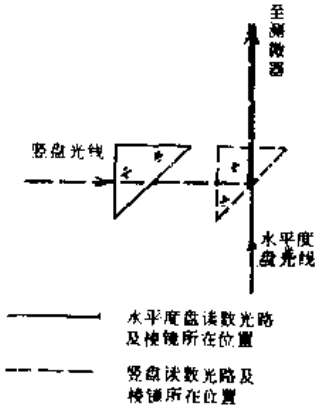



图 7-11

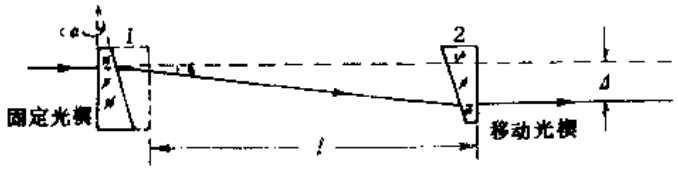


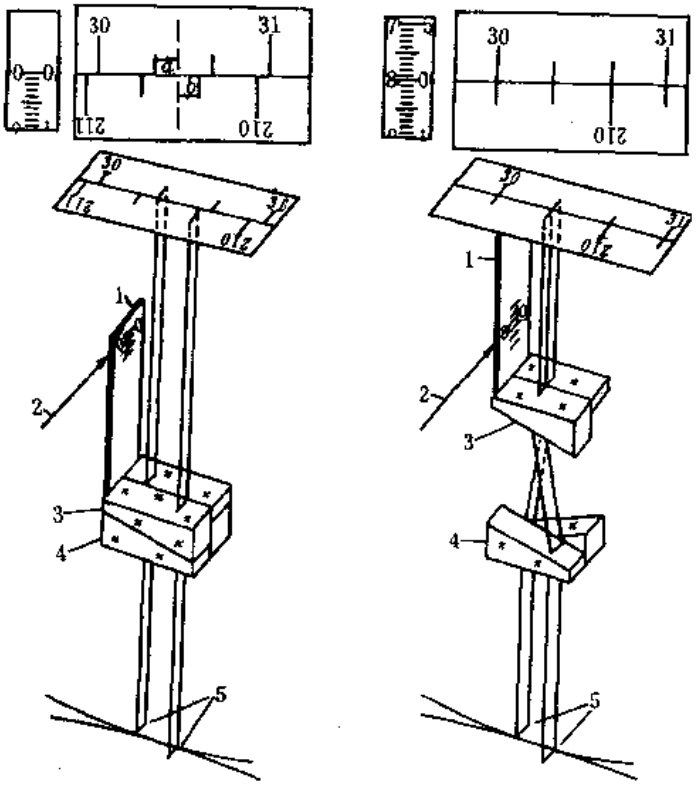

图 7-12

定，并且入射角不大时，偏转角$\varepsilon$可以认为是不变的。若反向设置两个大小、形状相同的光楔，当移动光楔与固定光楔重合时，合成一平行平面玻璃板，光线通过后不发生偏转（图7-12中虚线光路）。当移动光楔由位置1移动到位置2时，光线经固定光楔后发生偏转，经过移动光楔后光线又反向偏转，由于两次偏转角$\varepsilon$相等，使原光线产生一段平行移动量$\Delta$。因$\alpha$角很小，$\Delta$与$l$实际上成正比关系。

如果把移动光楔设置在读数系统的光路中，则光楔的移动就可使度盘分划线影象产生所需要的位移，而其位移量可通过光楔本身的移动量来确定。

我国有的光学仪器厂生产的J2光学经纬仪，其读数设备中就是应用的移动光楔测微器，由于这种仪器是采用对径符合读数，在度盘对径两端分划线的光路中各设置一个移动光楔，并使它们的楔角方向设置成相反位置，而且固定在同一个光楔架上作等量移动，以使度盘分划线影象作等距而方向相反的移动。当移动光楔与固定光楔接合在一起时（图7-13(a)），两个光楔就相当于一块平板玻璃，来自度盘分划线的光线将垂直通过底面而不发生平移。

这时量测光楔移动量的测微分划尺的读数为零（见图7-13(*a*）的小读数窗）。设想读数显微镜内的度盘分划线影象图中（见图7-13(*a*）的大读数窗）的长虚线为指标线（实际上没有这个指标线），则正象读数为30°20′ + *a*，倒象读数为210°20′ + *b*，平均读数为30°20′ $+\frac{a+b}{2}$。转动测微手轮，由于一对移动光楔的移动（图7-13(*b*)），通过度盘对径一端分划线的光线因移动光楔折射而向右移动了$\frac{a+b}{2}$，对径另一端的光线则被折射而向左移动了$\frac{a+b}{2}$，使对径分划线影象接合。这时与测微手轮连接的测微分划尺也相应移动，最后显示的读数即$\frac{a+b}{2}$。图7-13为读数结构的原理，它与仪器的实际构造只是大体相同。




1—测微分划尺；2—读数指标线；3—移动光楔；4—固定光楔；5—度盘对径分划像

图 7-13

实际读数时，其具体步骤与威特T2经纬仪的读数方法一样。图7-14（*a*）、（*b*）所示为这种经纬仪的读数举例。

为使读数更为方便和不易出错，近年来生产的J2经纬仪采用图7-14(*c*）所示的读数窗。中间的窗为度盘对径分划影象，没有注记。上面的窗为度和整10分的注记，用小方框标记整10分数，下面的窗为分和秒数，图7-14(*c*)的读数为60°17′22.0″。

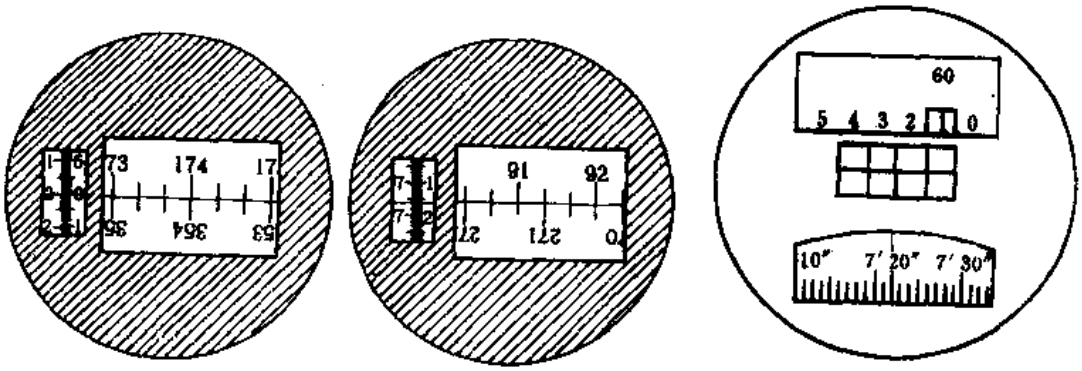



图 7-14

## § 7-3 经纬仪的电子测角原理

随着电子技术的发展，使经纬仪向自动化记录方向的改进有了技术基础。近几年来生产的电子全站仪便是这方面的一种改进，它所采用的为电子测角方法，其优点是可以将角度的电信号直接记入存贮器（例如磁带），以便送入电子计算机中进行计算。

电子测角仍然是采用度盘来进行，其特点是电子测角的度盘不是在度盘上按某一个角度单位刻上刻线，然后根据刻划线来读取角度值，而是从度盘上取得电信号，根据电信号再转换成角度。目前，根据取得电信号的方式不同而分为编码度盘测角和光栅度盘测角两种。现分别将它们的基本原理介绍于下。

### 一、编码度盘测角

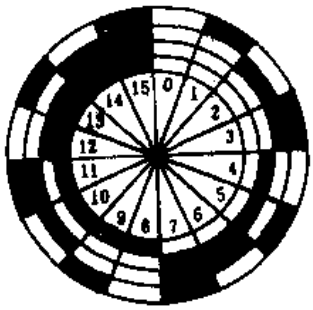


图 7-15

如图7-15为一个纯二进制编码度盘的示意。度盘的整个圆周被均匀地分为16个区间，从里到外有四道环（称为码道），图7-15所示则被称为四码道度盘。每个区间中的码道黑色部分为透光区（或为导电区），白色部分为不透光区（或为非导电区）。因为各区间的各个码道是否透光（或是否导电）的不同，所以各区间由码道组成的状态也不相同。设透光（或导电）为1，不透光（或不导电）为0，则各区间的状态可列出表7-1。依据两区间的不同状态，便可测出该两区间的夹角。

识别望远镜照准方向落在那一个区间是编码度盘测角的关键设备。它分为两种系统，即机电读数系统和光电读数系统。

机电读数系统如图7-16所示。在度盘的半径方向的直线上，对每一码道设置两个接触片，一个为电源，另一个为输出。测角时，设接触片为固定的，当度盘随照准部旋转到某

表 7-1

| 区 间 | 编 码 | 区 间 | 编 码 | 区 间 | 编 码 | 区 间 | 编 码 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0000 | 4 | 0100 | 8 | 1000 | 12 | 1100 |
| 1 | 0001 | 5 | 0101 | 9 | 1001 | 13 | 1101 |
| 2 | 0010 | 6 | 0110 | 10 | 1010 | 14 | 1110 |
| 3 | 0011 | 7 | 0111 | 11 | 1011 | 15 | 1111 |

目标不动之后，接触片就和某一区间相接触，由于黑、白区的导电或不导电，于是在输出端就得到该区间的电信号状态。图7-16的状态为1001，它代表图7-15的第9区间。如果照准部转到第二个目标，输出端的状态为1110，即表示14区间的状态，那末两目标间的角值就由1001与1110反映出9至14区间的角度。

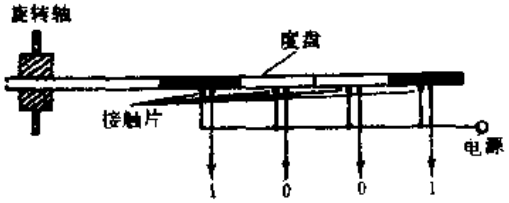


图 7-16

光电读数系统如图7-17所示，它与机电读数不同之处在于用光信号是否能通过度盘来代替接触片之是否导电。图7-17中度盘的上部为发光二极管，它们位于度盘半径方向的一条直线上，而度盘下面的相对位置上是光电二极管。对于码道的透光区，发光二极管的光信号能够通过而使光电二极管接收到这个信号，使输出为1。对于码道的不透光区，光电二极管接收不到这个信号，则输出为0。图7-17的输出状态为1001。

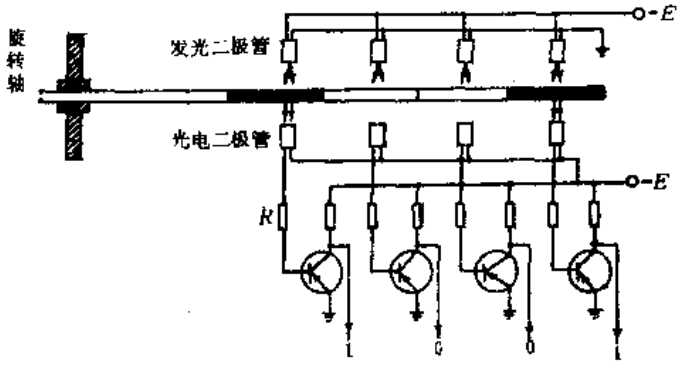


图 7-17

这种编码度盘所得到的角度分辨率$\delta$与区间数$s$有关，而区间数$s$又取决于码道数$n$，它们之间的关系为

$$s = 2^n,$$

$$\delta = \frac{360^\circ}{s}.$$

由此可知，图7-15这样的编码度盘的角分辨率为22.5°。如果将码道数增加到9，角度分辨

率也只有42.19′。设这时的度盘半径为80mm，码道宽度为1mm，那末最里面一圈的码道在一个区间的弧长只有1mm长。如果要求角度分辨率为20″左右，则码道数$n$应为16。在度盘半径为80mm，码道宽度亦为1mm的条件下，那末最里面一圈的码道在一个区间的弧长将应为0.006mm。要制作这样小的接收元件，显然是很困难的。由此可见，直接利用编码度盘不容易达到高的测角精度。

## 二、光栅度盘测角

1.光栅与莫尔条纹

在光学玻璃上均匀地刻划出许多线条就构成了光栅，如图7-18($a$)。图7-18($b$)为在玻璃圆盘的径向上刻线，形成光栅度盘。

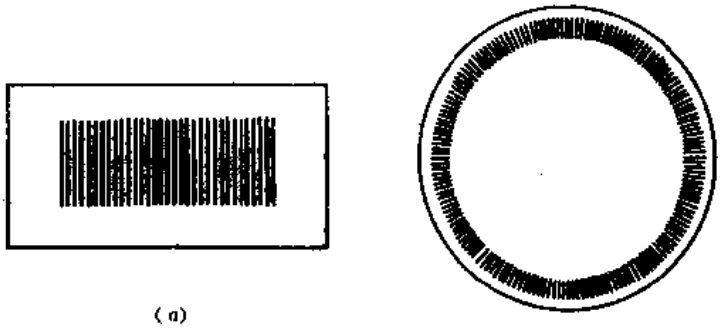



图 7-18

将两块密度相同的光栅重叠，并使它们的刻线相互倾斜一个很小的角度，这时便会出现如图7-19($a$)所示的明暗相间的条纹，称该条纹为莫尔条纹。莫尔条纹有如下三个特点：

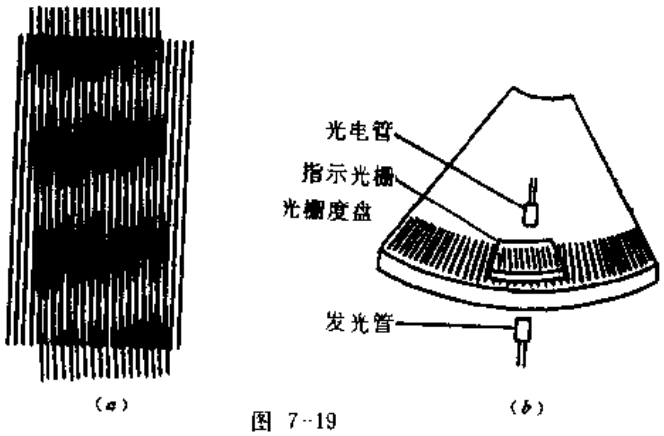



图 7-19

（1）两光栅之间的倾角越小，条纹越粗，即相邻明条纹（或暗条纹）之间的间隔越大。

（2）在垂直于光栅构成的平面的方向上，条纹亮度按正弦周期性变化。

（3）当光栅在水平方向（即垂直于刻线方向）移动时，莫尔条纹作上下移动（即顺着刻线方向移动）。光栅水平方向相对移动一条刻线，莫尔条纹正好上下移动一周期（即

明条纹移到邻近的一条明条纹的位置上）。其关系式为

$$y = x\mathrm{ctg}\varphi \tag{7-1}$$

式中：$y$——条纹上下移动的距离；

$x$——光栅水平相对移动的距离；

$\varphi$——两光栅之间的夹角。

由式（7-1）可见，只要两光栅之间的夹角较小，很小的光栅移动量就会产生很大的条纹移动量。

2. 光栅度盘测角

图7-19(*b*）为由光栅度盘取得一个方向读数的原理。光栅度盘下面是一个发光管，上面是一个与光栅度盘形成莫尔条纹的指示光栅，指示光栅上面为光电管。若发光管、指示光栅和光电管的位置固定，当度盘随经纬仪照准部转动时，由发光管发出的光信号通过莫尔条纹落到光电管上。度盘每转动一条光栅，莫尔条纹就移动一周期。通过莫尔条纹的光信号强度也变化一周期，所以光电管输出的电流就变化一周期。当望远镜照准零方向后，让仪器中的计数器处于0°状态，那末在度盘随着照准部转动到第二个目标时，流过光电管光信号的周期数就是两方向之间的光栅数，可由输出电流的周期来表示。由于光栅之间的夹角是已知的，所以经过处理显示就可得到两方向之间的夹角。

如果在电流波形的每一个周期内再均匀内插 $n$ 个脉冲，计数器对脉冲进行计数，则相当于光栅刻线增加了$n$倍，即角度分辨率提高了$n$倍。

## 三、正弦刻缝测角

在度盘圆周刻上如图7-20所示图形的细缝。由于细缝的宽度不同，所以通过细缝的光亮度亦将产生变化。今设计成光亮度的变化为正弦周期性变化，故称为正弦刻缝。若全圆有360个周期，则每一周期将代表角值1°。每一周期再内插60个脉冲，则每个脉冲代表角值1′。可见，用此正弦刻缝亦可测出一个周期内的较小的角值。

## 四、编码、光栅与正弦刻缝结合测角

这种度盘的构造示意如图7-21。整个度盘分作三部分，外面部分为光栅刻划，中间部分为编码码道，里面部分为正弦刻缝。电子全站仪HP-3820 A就是采用的这种方式。它的

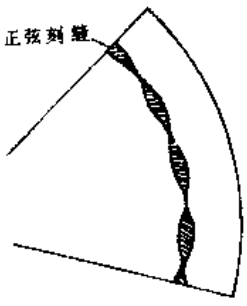



图 7-20

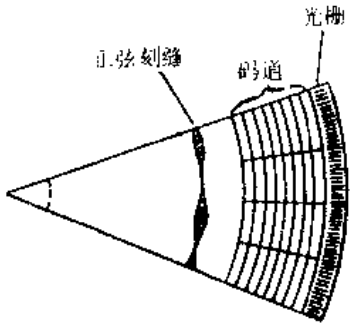



图 7-21

中间部分采用八码道，角分辨率为1.4°，因此可取得度分的值。里面部分有128个正弦周期刻缝，每一周期内插1000个脉冲，相当于全圆有128000个间隔，即每一脉冲约为10″，一个正弦周期为2.8°，因此可以决定角度的分、秒。外面的光栅为4096条，每条光栅内插100个脉冲，这样，每个脉冲相应为0.32″，这就能够更精确地确定角度的秒值。

## § 7-4 游标经纬仪的读数原理

游标经纬仪的度盘系用金属制成，度盘上的最小分划通常为20′或30′。为要获得更小的读数，常采用游标来读出最小分划的若干分之一。

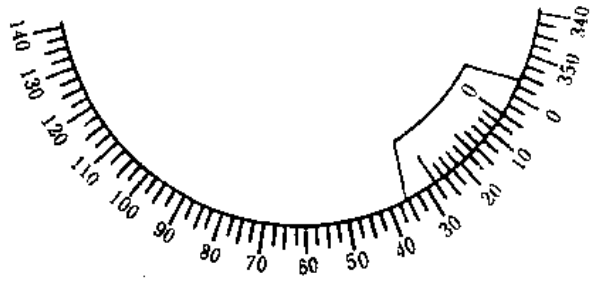


图 7-22

游标读数的结构如图7-22所示，下部（外圈）为度盘，上部（里圈）为游标。游标与照准部连接，用望远镜瞄准目标时，度盘不动，而游标则随着旋转。

现以图7-23所示为例说明游标读数的原理。度盘每格所对的圆心角为$l$（图中为30′），将度盘上$n$个（图中为29个）分划格之长，分成$n+1$个分划格，组成游标的分划。则游标上每一格所对圆心角将较度盘上每一格的小$t$。由于

$$nl = (n-1)(l-t),$$

所以

$$t = \frac{l}{n+1}. \tag{7-2}$$

通常称$t$为游标的最小读数，但应注意它并不是游标一格所对的圆心角。图7-23中$t = \frac{30'}{29+1} = 1'$。

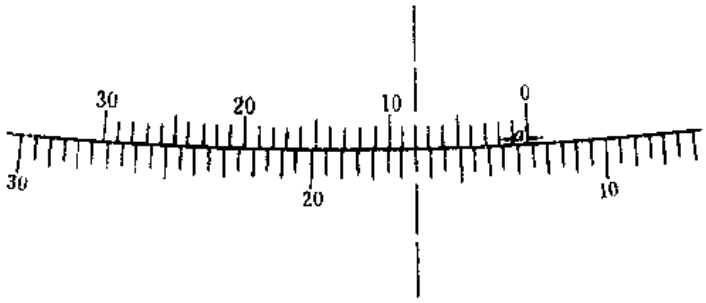


图 7-23

游标上的0分划线为读数的指标线，图7-23中按0分划线的读数为12°30′ + $a$，$a$可由若干个$t$得到。图7-23中游标第八格的分划线与度盘第八格（自12°30′起算）分划线成一

直线，它表示度盘八格与游标八格之差为$a$，即$a$为八个$l$值，则$a = 8'$。为便于读数，在游标上标出注记可直接读出，图7-23的读数为12°38′。

## § 7-5 经纬仪的安置

用经纬仪观测水平角之前，必须把仪器安置在测站上。安置水准仪只要整平仪器，安置经纬仪不仅要整平仪器，而且要使仪器对中，所以安置经纬仪有对中和整平两项工作。

### 一、对中

对中的目的是使仪器的中心与测站点的标志中心在同一铅垂线上。

进行对中时，先打开三脚架，放在测站点上，使脚架头大致水平，架头的中心大致对准测站标志，同时注意脚架的高度要适中，以便观测。然后踩紧三脚架，装上仪器，旋紧中心螺旋，挂上垂球。如果垂球尖偏离测站点，就稍松中心螺旋，在架头上移动仪器，使垂球尖准确对中，再旋紧中心螺旋，使仪器稳固。如果在脚架头上移动仪器还无法准确对中，那就要调整三脚架的脚位。这时要注意先把仪器基座放回到移动范围的中心，旋紧中心螺旋，防止摔坏仪器。调整脚位时应注意，当垂球尖与测站点相差不大时，可只动一条腿，并要同时保持架顶大致水平；如果相差较大，则需移动两条腿进行调整。

### 二、整平

整平的目的是使仪器的竖轴竖直，即水平度盘居于水平位置。

整平时，转动仪器的照准部，使水准管先平行于任意两个脚螺旋，然后转动这两个脚螺旋使气泡居中。再将照准部旋转90°，使水准管垂直于原先的位置，用另一只脚螺旋再使气泡居中。当转动第三个脚螺旋时，基座顶面将作倾斜变化，这个变化的方向，与顶面转动的方向有关，而顶面的旋转又是依前两个脚螺旋底部支点的连线为旋转轴进行的。由此可见，一条已经水平了的水准管水准轴要围绕不是水平的脚螺旋支点的连线旋转，必然不能再度保持水平。所以上述第二步操作必定会破坏第一步的操作。因此整平工作要反复进行，直到水准管气泡在任何方向都居中为止。

对于照准部上装有圆水准器的经纬仪，则可水准仪那样先将圆水准器气泡居中，然后再对水准管作整平工作。

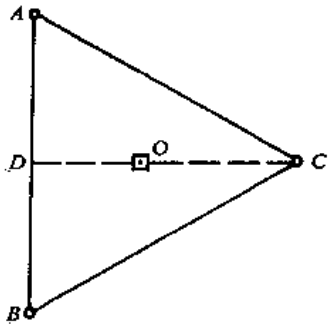
### 三、使用光学对中器作经纬仪的对中和整平

操作如下：固定三脚架的一条腿于适当位置，两手分别握住另外两条腿。在移动这两条腿的同时，从光学对中器中观察，使对中器对准标志中心。此时脚架顶部并不水平，调节三脚架的伸缩连接处，使脚架顶部大致水平（若经纬仪带有圆水准器，可使其气泡居中）。其现象可作如下分析：图7-24中的$A$、$B$、$C$三点为三脚架支于地面的三个点，在支于$C$点的三脚架腿伸长时经纬仪的运动将以$AB$连线为轴旋转。当脚架顶面大致水平时，倾斜的光学垂线将基本位于铅垂位置。倾斜光学垂线与地面标志的重合点$F$亦将旋转至$F'$位置。

由于$DF'$之长等于$DO$之长，故铅垂位置的光学垂线将不再通过$O$点，而与$O$点相差一个距离$d$。设$ABC$构成等边三角形，且边长为1 m，则$DO = DF' = 0.4$ m。此时$d$可用下式求得：

$$d = DO\,(1 + \cos\delta)$$

式中，$\delta$为调整$C$点脚架长度时仪器偏转的角度。当$\delta = 10°$时，$d = 6$mm。可见，整个仪器的对中状态变化并不大。




脚架顶部大致水平之后，即可用脚螺旋调平水准管整平仪器。之后，平移（不可旋转）基座使精确对中。此两项操作应反复进行，直到用水准管整平了仪器，而光学垂线仍对准标志为止。

由于结构和操作上的原因，用光学对中器进行经纬仪对中的精度约为1mm～2mm，显然高于用垂球对中的精度。

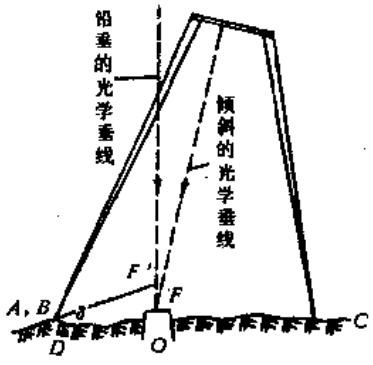



图 7-24

当三脚架顶部倾斜较大时，用垂球对中的精度将受到一定的影响。设经纬仪基座脚螺旋伸长长度之差有10mm，则此时三脚架顶部平面的倾斜角约为6°。这时连接经纬仪的中心螺旋也偏离竖直位置约6°。设中心螺旋长为50mm，则螺旋上下两端在水平方向上将相差5 mm。实际上这就是由脚架顶面不水平而产生的对中误差。

## § 7-6 水平角的观测方法

水平角的观测方法一般根据目标的多少而定。现将常用的两种测角方法介绍如下：

### 一、测回法

这种测角方法只用于观测两个方向之间的单角。设要测的水平角为$\angle AOB$（图7-25），在$O$点安置经纬仪，分别照准$A$、$B$两点的目标并进行读数，两读数之差即为要测的水平角值。为了消除仪器的某些误差，一般用盘左和盘右两个位置进行观测。所谓盘左，就是观测者对着望远镜的目镜时，竖盘在望远镜的左边；盘右，是观测者对着目镜时，竖盘在右边。盘左又称正镜；盘右又称倒镜。其具体操作步骤如下：

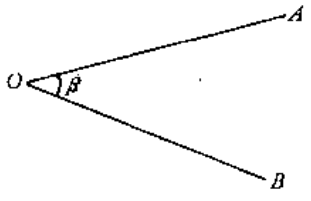



图 7-25

1. 盘左位置，松开照准部制动钮，瞄准左边的目标$A$（注意消除视差，凡瞄准目标都要如此），使标杆或测钎准确地夹在双竖丝中间（或用单竖丝去平分）；为了减低标杆或测钎竖立不直的影响，应尽量瞄准标杆或测钎的最下部；读取水平度盘读数$a_{左}$，记入观测手簿；

2. 顺时针方向转动照准部，用同样方法瞄准右边的目标$B$，读记水平度盘读数$b_{左}$；

以上两步叫做盘左半测回或上半测回，测得角值为

$$\beta_{左}=b_{左}-a_{左}$$

3.倒转望远镜，使盘左变盘右，按上述方法先瞄准右边的目标$B$，读记水平度盘读数$b_{右}$；

4.顺时针方向转动照准部，瞄准左边的目标$A$，读记读数$a_{右}$。

以上3、4两步叫做盘右半测回或下半测回，测得的角值为

$$\beta_{右}=b_{右}-a_{右}$$

盘左和盘右两个半测回合在一起叫做一测回。两个半测回测得角值的平均值就是一测回的观测结果，即

$$\beta=\frac{1}{2}(b_{左}-\beta_{右})$$

当水平角需要观测几个测回时，为了减低度盘分划误差的影响，在每一测回观测完毕之后，应根据测回数$n$，将度盘读数改变$\frac{180}{n}$，再开始下一测回的观测。例如要测两个测回，第一测回开始时，度盘读数可配置在0°00′或稍大于0°的读数处，第二测回开始时，度盘读数应配置在90°00′或稍大的读数处。

表7-2是用J6经纬仪作测回法观测水平角手簿的记录格式举例。

水平角观测手簿（测回法）　　表 7-2

| 测点 | 读数 盘左 | | | | 读数 盘右 | | | | 半测回方向 | | | 一测回平均方向 | | | 各测回平均方向 | | | 附注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | 3 | 4 | | | 5 | 6 | | | 7 | | | 8 | | | 9 |
| 第一测回 | ° | ′ | ″ | | ° | ′ | ″ | | | | | | | | | | | |
| A | 0 | 03 | 24 | | 180 | 03 | 36 | | 0 | 00 | 00 | 0 | 00 | 00 | 0 | 00 | 00 | |
| B | 79 | 20 | 30 | | 259 | 20 | 18 | | 79 | 17 | 06 | 79 | 17 | 03 | 79 | 17 | 12 | |
| 第二测回 | | | | | | | | | | | 12 | | | | | | | |
| A | 90 | 02 | 18 | | 270 | 02 | 12 | | 0 | 00 | 00 | 0 | 00 | 00 | | | | |
| B | 169 | 19 | 36 | | 349 | 19 | 24 | | 79 | 17 | 18 | 79 | 17 | 15 | | | | |
| | | | | | | | | | | | 12 | | | | | | | |

记录手簿中的第2、4两列是水平度盘读数的记录。读数中，分的小数部分直接化成秒数，以便后面的计算。对于两个方向的单角，本可根据读数直接计算$\beta_{左}$和$\beta_{右}$，再取平均值$\beta$，但为了与后面的方向观测法手簿一致起见，把每一测回的盘左和盘右的左边目标读数都改化成0°00′00″（称方向值），则右边目标的读数也跟着改正一个相同的数值。如第一测回的盘左，瞄准左边目标的读数原为0°03′24″，改化成0°00′00″就要减去3′24″，所以右边目标读数79°20′30″也应减去3′24″，即得$B$目标的方向值为79°17′06″。这个79°17′06″也就是$\beta_{左}$。下一行的数字是盘右半测回$B$目标的方向值79°17′12″，由于度分相同，故盘右方向值只写出秒数。两个半测回方向值的平均数79°17′09″就是一测回的平均方向值（即一测回的角值），写在第7列。第8列记载的79°17′12″是两个测回的平均方向值（即两测回的平均角值）。

测回法通常有两项限差，一是两个半测回的方向值（即角值）之差，二是各测回方向值之差；对于不同精度的仪器，有不同的规定限值。

## 二、方向观测法

观测三个以上的方向时，通常采用方向观测法。

设在图7-26所示的测站$O$上，用方向观测法观测$O$到$A$、$B$、$C$、$D$各方向之间的水平角，其操作步骤如下：

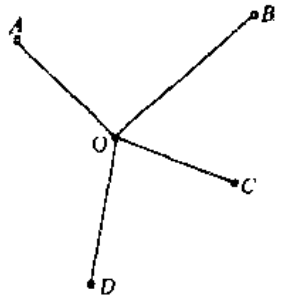


图 7-26

1.盘左。将度盘配置在0°00′或稍大的读数处，先观测所选定的起始方向（又称零方向）$A$，再按顺时针方向依次观测$B$、$C$、$D$各方向，每观测一个方向均读取水平度盘读数，并记入观测手簿。如果方向数超过3个，最后还要回到起始方向$A$，并读数记录。这最后一步称为“归零”，其目的是为了检查水平度盘的位置在观测过程中是否发生变动。上述全部工作叫做盘左半测回或上半测回。

2.倒转望远镜，用盘右位置按逆时针方向依次照准$A$、$D$、$C$、$B$、$A$，读数并记录。此为盘右半测回或下半测回。

上、下半测回合起来为一测回，表7-3为两个测回的方向观测法手簿的记录和计算举例。

记录和计算的方法基本上与测回法一样，但由于有“归零”观测，因此起始方向有前、后两个读数，最后取平均值记于有关列（3、5列）的上面，如第一测回盘左的12″是00″和24″的平均数。

为了便于以后的计算和比较，要把起始方向值改化成0°00′00″，在第7列记载的半测回方向值中，是把原来的方向值减去起始方向$A$“归零”后的平均值12″而算得的。

方向观测法通常有三项限差规定：一是半测回中两次瞄准起始方向的读数之差，称为半测回归零差；二是上、下半测回同一方向的方向值之差；三是各测回同一方向的方向值之差，称为各测回方向差。以上三项限差，根据不同精度的仪器而有不同的规定。

表7-3的记录格式仅适用于单指标读数的经纬仪（如通常的J6经纬仪）。至于双指示读数（即能在对径分划读数）的经纬仪的记录格式，与此表略有不同；即表中的第6栏不记

水平角观测手簿（方法观测法）　　表 7-3

作业日期　　观向　　天气

开始时刻　　测站　　测略　　仪器

结束时刻　　方图　　观测者

| 觇点 | 读数 盘左 | | | 读数 盘右 | | | 半测回方向 | | | 一测回平均方向 | | | 各测回平均方向 | | | 附注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | 3 | 4 | | 5 | 6 | | | 7 | | | 8 | | | 9 |
| | ° | ′ | ″ | ° | ′ | ″ | ° | ′ | ″ | ° | ′ | ″ | ° | ′ | ″ | |
| 第一测回 | | | 12 | | | 18 | | | | | | | | | | |
| *A* | 0 | 01 | 00 | 180 | 01 | 18 | 0 | 00 | 00 | 0 | 00 | 00 | 0 | 00 | 00 | |
| *B* | 91 | 54 | 06 | 271 | 54 | 00 | 91 | 52 | 54 | 91 | 52 | 48 | 91 | 52 | 45 | |
| | | | | | | | | | 42 | | | | | | | |
| *C* | 153 | 32 | 48 | 333 | 32 | 48 | 153 | 31 | 36 | 153 | 31 | 33 | 153 | 31 | 35 | |
| | | | | | | | | | 30 | | | | | | | |
| *D* | 214 | 06 | 12 | 34 | 06 | 06 | 214 | 05 | 00 | 214 | 04 | 54 | 214 | 04 | 54 | |
| | | | | | | | | 04 | 48 | | | | | | | |
| *A* | 0 | 01 | 24 | 180 | 01 | 18 | | | | | | | | | | |
| 第二测回 | | | 24 | | | 30 | | | | | | | | | | |
| *A* | 90 | 01 | 12 | 270 | 01 | 24 | 0 | 00 | 00 | 0 | 00 | 00 | | | | |
| *B* | 181 | 54 | 00 | 1 | 54 | 18 | 91 | 52 | 36 | 91 | 52 | 42 | | | | |
| | | | | | | | | | 48 | | | | | | | |
| *C* | 243 | 32 | 54 | 63 | 33 | 06 | 153 | 31 | 30 | 153 | 31 | 33 | | | | |
| | | | | | | | | | 36 | | | | | | | |
| *D* | 304 | 06 | 36 | 124 | 06 | 18 | 214 | 05 | 12 | 214 | 05 | 00 | | | | |
| | | | | | | | | 04 | 48 | | | | | | | |
| *A* | 90 | 01 | 36 | 270 | 01 | 36 | | | | | | | | | | |

为“半测回方向”而改记为2C，其记录格式见表7-4。2C值的计算如下：

$$2C = L \quad (R \pm 180^\circ)$$

$L$为盘左读数，$R$为盘右读数，$\pm 180^\circ$是顾及同一方向的盘右读数与盘左读数相差为180°之故。

2C值也是观测成果中一个有限差规定的项目，但它不是以2C的绝对值的大小作为是否超限的标准，而是以各个方向的2C的变化值（即最大值与最小值之差）作为是否超限的检查标准。

测　　站　　G　　表 7-4

| 觇点 | 读数 盘左 | | | 读数 盘右 | | | 2C | $\frac{1}{2}(L+R\pm180^\circ)$ | 一测回方向 | 各测回平均方向 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ° ′ ″ | | | ° ′ ″ | | | | ° ′ ″ | ° ′ ″ | ° ′ |
| A | 0 02 31 | 30 | | 180 02 27 | 27 | | −3 | 0 02 25 | 0 00 00 | |
| | | 30 | | | 27 | | | | | |
| B | 61 18 53 | 53 | | 241 18 48 | 48 | | −5 | 61 18 50 | 61 16 25 | |
| | | 53 | | | 49 | | | | | |
| C | 133 09 41 | 41 | | 313 09 36 | 36 | | −5 | 133 09 38 | 133 07 13 | |
| | | 41 | | | 36 | | | | | |
| D | 198 21 02 | 01 | | 18 23 59 | 58 | | −3 | 198 24 00 | 198 21 35 | |
| | | 00 | | | 57 | | | | | |
| A | 0 02 26 | 25 | | 180 02 19 | 20 | | −5 | 0 02 22 | | |
| | | 21 | | | 20 | | | | | |

# §7-7　经纬仪的检验和校正

## 一、经纬仪上主要轴线应满足的条件

为了保证水平角观测达到规定的精度，经纬仪的主要部件之间，也就是主要轴线和平面之间，必须满足水平角观测所提出的要求。如图7-27所示，经纬仪的主要轴线有：仪器的旋转轴$VV$（简称竖轴）、望远镜的旋转轴$HH$（简称横轴）、望远镜的视准轴$CC$和照准部水准管轴$LL$。根据水平角观测的概念，经纬仪应满足：

1. 竖轴必须竖直；

2. 水平度盘必须水平，其分划中心应在竖轴上；

3. 望远镜上下转动时，视准轴形成的视准面必须是竖直平面。

仪器厂装配仪器时，要求水平度盘与竖轴为相互垂直的关系，其分划中心亦在竖轴延长线上。所以只要竖轴竖直，水平度盘就成水平。竖轴的竖直是利用照准部的水准管气泡居中，即水准轴水平来实现的。因此上述的1、2两项要求可改为照准部水准轴应与竖轴垂直。

视准面必须竖直的要求，实际上是由两个条件组成的。首先，视准面必须是平面，这就是视准轴应垂直于横轴；再就是这个平面必须是竖直的平面，即当视准轴垂直于横轴之后，横轴又必须水平，即横轴必须垂直于竖轴

综上所述，经纬仪必须满足下列几个条件：

1. 照准部水准管轴应垂直于竖轴；

2. 视准轴应垂直于横轴；

3. 横轴应垂直于竖轴；

观测水平角时，若用十字丝交点去瞄准目标不很方便，通常是用竖丝去瞄准目标，这又要求

4. 竖丝应垂直于横轴。

另外，当经纬仪作竖角观测时，还必须满足其它有关条件，这在第十章中再作介绍。

## 二、经纬仪构造上条件不满足对水平方向的影响

### （一）水平度盘偏心

度盘偏心是度盘分划线的中心与照准部旋转中心不重合所致。如图7-28所示，设$O'$与

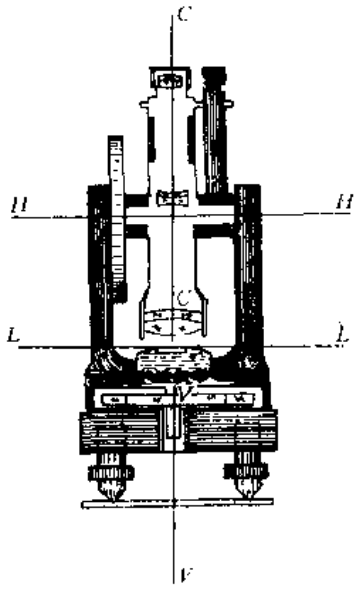


图 7-27

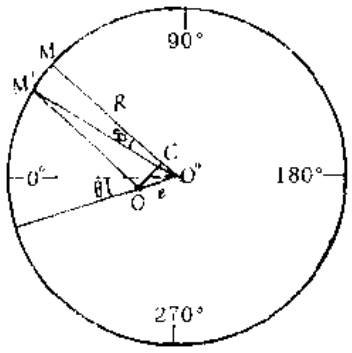


图 7-28

水平度盘的中心，$O$为照准部旋转中心，如果不存在度盘偏心，$O'$与$O$重合，当照准目标$M$，正确的读数为$M$。由于存在着度盘偏心，实际的度盘读数为$M'$，比正确读数小了$\delta$。

作$OC\perp O'M$，通常$MM'$较小，故$MM'\approx OC$。由图7-28可见，

$$OC = OO'\sin\theta \approx OO'\sin(\theta - \varphi)$$

故

$$\delta = \frac{OO'}{R}\rho\sin(\theta - \varphi)$$

令偏心距$OO'$为$e$，两中心联线$O'O$顺时针转至$0°$分划的角度为$\varphi$，又$OO'$与$0°$分划

确读数$M$加$\theta$，故

$$\delta = \frac{e}{R} \cdot \rho \sin(M - \theta) \qquad (7\text{-}3)$$

式中，$R$——水平度盘分划的半径。

因$\delta$很小，实际计算时可用实际读数$M'$代替$M$。

由图7-28知正确读数　　$M = M' + \delta$。

故式（7-3）所得$\delta$之值为$M'$的改正数。

式（7-3）说明，在度盘不同位置读数将有不同的读数改正数。

因$\sin(M+\theta) = -\sin[(180^\circ + M) + \theta]$，可知在度盘相差180°的两处（称对径分划）读数中的$\delta$，其绝对值相同而符号相反，故取它们的平均值（顾及常数180°）将消除度盘偏心的影响。可见，对于双指标读数的经纬仪，度盘偏心的误差将直接能由读数的平均而被消除。

（二）视准轴不垂直于横轴

视准轴不垂直于横轴对水平方向的影响见图7-29。$AO$为垂直于横轴的视准轴，由于存在视准轴误差$c$，视准轴实际瞄准了$A'$，此时$A$、$A'$两点同高，竖角为$\alpha$，$a$、$a'$为$A$、$A'$点在水平位置上的投影。$\angle aOa' = x_c$，即为$c$角引起的目标$A$的读数误差。

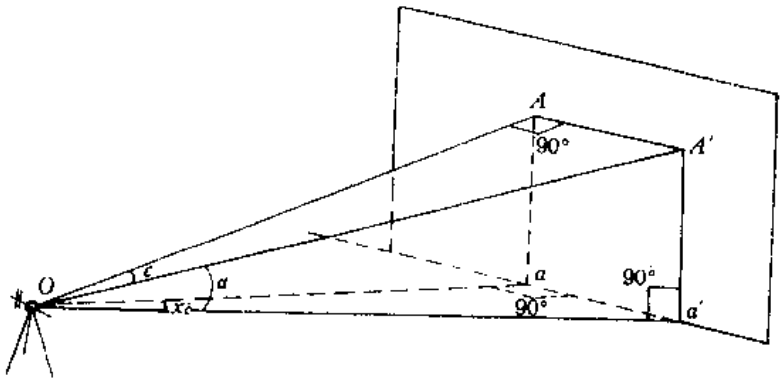



图 7-29

由rt△$Oaa'$得

$$\sin x_c = \frac{aa'}{Oa'} \qquad (7\text{-}4)$$

而　　$aa' = AA'$　　(a)

由rt△$OAA'$得

$$AA' = OA' \cdot \sin c \qquad (b)$$

rt△$A'a'O$得

$$Oa' = OA' \cdot \cos\alpha \qquad (c)$$

将（a）、（b）、（c）三式代入式（7-4）并顾及$x_c$和$c$均为小角，得

$$x_c = \frac{c}{\cos a} \tag{7-5}$$

若规定视准轴物镜端向左偏斜的 $c$ 值为正，向右偏斜为负，则对于同一目标若盘左观测时 $c$ 为正（负），盘右观测即为负（正），而 $a$ 值不变，故盘左、盘右的 $x_c$ 值的绝对值相等而符号相反。若取两者的平均值，将消除 $c$ 角的影响。

$x_c$ 的大小与竖角 $a$ 有关，$a$ 愈大 $x_c$ 愈大，且“$+a$”与“$-a$”的影响相同。$a=0$ 时 $x_c=c$。

（三）横轴不水平

横轴不水平对水平方向的影响见图 7-30。$H$ 为横轴水平（$H_1H_1$ 位置）时视准轴照准的目标，$h$ 为 $H$ 点的水平投影，此时平面 $HOh$ 为一竖面。若横轴倾斜一个 $i$ 角至 $A_1A_1$ 位置，竖面 $HOh$ 将随之倾斜一个 $i$ 角为倾斜面 $AOh$，此时水平位置 $Oh$ 不发生变动。$A$ 点即为横轴倾斜时视准轴照准的目标，$a$ 为 $A$ 点的水平位置投影。$\angle hOa = x_i$ 即为因横轴倾斜 $i$ 角而产生的水平方向读数影响。

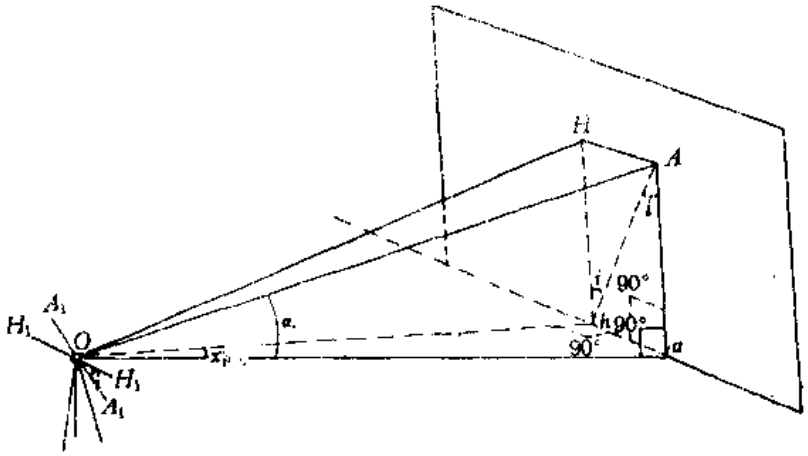



图 7-30

由 rt△$ahO$ 得

$$\sin x_i = \frac{ah}{aO} \tag{b}$$

由 rt△$Aah$ 得

$$ah = Aa \cdot \mathrm{tg}i, \tag{d}$$

又由 rt△$AaO$ 得

$$aO = \frac{Aa}{\mathrm{tg}a} \tag{e}$$

将（$d$）、（$e$）两式代入（7-6）式，并顾及 $x_i$ 及 $i$ 均为小角，得

$$x_i = i \cdot \mathrm{tg}a \tag{7-7}$$

若规定横轴左端高于另一端时的 $i$ 为正，低于另一端时为负，则对于同一目标，在竖轴是竖直的情况下，因横轴不垂直于竖轴所引起的横轴倾斜，盘左观测时 $i$ 为正（负），盘右观测时 $i$ 即为负（正）。故盘左、盘右的 $x_i$ 为绝对值相等而符号相反，取两者的平均值即

可消除$x_i$。

$x_i$的大小与竖角$\alpha$有关，$\alpha$愈大$x_i$愈大；$\alpha=0$时，$x_i=0$，即对水平位置的目标，横轴不水平对水平方向没有影响。

（四）竖轴不竖直

若竖轴与照准部水准管轴原已垂直，而安置仪器时未能将水准管轴严格导致水平，这时将使竖轴不在竖直位置。如图7-31，$OT$为处于竖直位置的竖轴；此时横轴必在水平面$P$上；$OT'$为倾斜了$V$角的竖轴位置，此时横轴必在倾斜平面$P'$上。由几何学知，$P$、$P'$两平面的交线$O_1O_2$与平面$TOT'$垂直，若横轴位于此处，则无论$V$有多大，它也始终保持水平。除此以外，横轴在平面$P'$上的任何位置均将产生不同大小的倾斜，其中以垂直于$O_1O_2$的$ON$位置的倾斜角最大，并等于竖轴的倾斜角$V$。

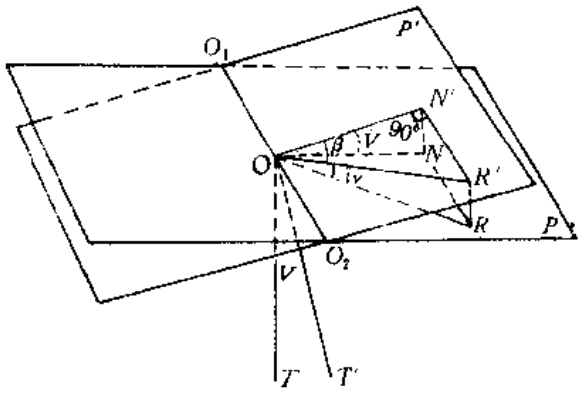


图 7-31

任取一横轴位置$OR'$，其倾斜角为$i_v$，作$R'N'\perp ON'$，将$N'$、$R'$两点投影至平面$P$上得$N$、$R$，令$\angle N'OR'=\beta$，由rt△$R'RO$得

$$\sin i_v=\frac{R'R}{OR'}, \tag{7-7}$$

因

$$R'R=N'N \tag{7-8}$$

由rt△$N'NO$得

$$N'N=ON'\cdot\sin V \tag{g}$$

rt△$R'N'O$得

$$OR'=\frac{ON'}{\cos\beta} \tag{h}$$

将（$f$）、（$g$）、（$h$）三式代入式（7-8），并顾及$V$和$i_v$均为小角，得

$$i_v=V\cdot\cos\beta \tag{7-9}$$

注意到式（7-7），竖轴倾斜对目标$A$的读数影响$x_v$为

$$x_v=V\cdot\cos\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha \tag{7-10}$$

必须指出，横轴不水平的误差实际上由两个因素组成：一为竖轴虽已竖直而横轴不垂直于竖轴，即横轴误差；一为横轴虽已垂直竖轴，但竖轴并不竖直，通常称为竖轴倾斜误差。由上述讨论得知，无论盘左或盘右照准同一目标，式（7-10）中的$\beta$相同、即$x_v$的符号不变，故盘左盘右的平均值不能消除竖轴倾斜误差对水平方向的影响。在视线倾斜角大的地区进行水平角观测时，要特别注意仪器的整平。进行精密测角而竖角特别大时，应该用专门的水准管安置在横轴上整置仪器，或由水准管分划值及气泡的位置求得横轴的倾斜角，以便用式（7-10）引入水平方向的改正值。

综上所述，J6经纬仪照准一个目标所得读数中，包含度盘偏心误差$e$、视准轴不垂直

竖轴的误差$\delta$及横轴不水平的误差$i$三者的联合影响。设盘左读数为$L'$，盘右读数为$R'$，则由（7-3）、(7-5)、(7-7)式知，正确读数应是：

$$L = L' - \delta - x_c - x_i$$

$$R = R' - \delta + x_c - x_i$$

由于

$$R = L \pm 180^\circ$$

所以

$$L' - R' \pm 180^\circ = 2(x_c + x_i - \delta)$$

$$= 2\left(\frac{c}{\cos\alpha} - i\operatorname{tg}\alpha - \delta\right)$$

例 7-1 已知$A$、$B$、$C$三点在同一铅垂线上，其竖角分别为10°、20°、40°。今用某J6经纬仪以盘左、盘右观测此三点得读数为：

$$L'_A = 10^\circ 18' 12'' \qquad R'_A = 190^\circ 18' 24''$$

$$L'_B = 10^\circ 18' 18'' \qquad R'_B = 190^\circ 18' 18''$$

$$L'_C = 10^\circ 18' 24'' \qquad R'_C = 190^\circ 18' 12''$$

试求$\delta$、$c$、$i$之值。

解：由三个目标之读数可得三个方程为：

$$\frac{c}{\cos 10^\circ} - i\operatorname{tg}10^\circ - \delta = -6''$$

$$\frac{c}{\cos 20^\circ} - i\operatorname{tg}20^\circ - \delta = 0''$$

$$\frac{c}{\cos 40^\circ} + i\operatorname{tg}40^\circ - \delta = +6''$$

联立解之得：$\delta = -64''$，$c = -78''$，$i = +52''$。

## 三、经纬仪的检验和校正

经纬仪轴系之间的正确关系常常在使用期间及搬运过程中发生变动，因此在使用经纬仪观测水平角度之前需要查明仪器的各轴系是否满足前述的条件；如不满足这些条件则应使其满足。前一项工作在测量中叫做检验，后一项工作叫做校正。现将J6经纬仪检验和校正的通用方法说明于后。

### （一）照准部水准轴应垂直于竖轴的检验和校正

检验方法与第五章圆水准器的方法相同。

检验时先将仪器大致整平，转动照准部使其水准管与任意两个脚螺旋的连线平行，调整脚螺旋使气泡居中，然后将照准部旋转180°（可利用度盘读数），若气泡仍然居中则说明条件满足，否则应进行校正。

它的原理与第五章圆水准器水准轴平行于水准仪旋转轴原理相同。因水准管轴是水准管零点的切线，圆水准器水准轴为零点的法线，将图5-11中的$II$用切线$LL$表示，得图7-32($a$)，照准部旋转180°之后，仪器竖轴方向不变，得图7-32($b$)。可见，水准管轴和

水平线相差$2\alpha$角，气泡偏离正中的格数是$2\alpha$角的反映。

校正的目的是使水准管轴垂直于竖轴。由图7-32(*b*)可见，校正时将$LL$向水平线方向转动一个$\alpha$角，可得$LL \perp VV$，即用校正针拨动水准管一端的校正螺钉，使气泡向正中间位置退回一半，如图7-32(*c*)所示。为使竖轴竖直，再用脚螺旋使气泡居中即可。如图7-32(*d*)所示。

此项检验与校正必须反复进行，直至照准部转到任何位置气泡都居中为止。

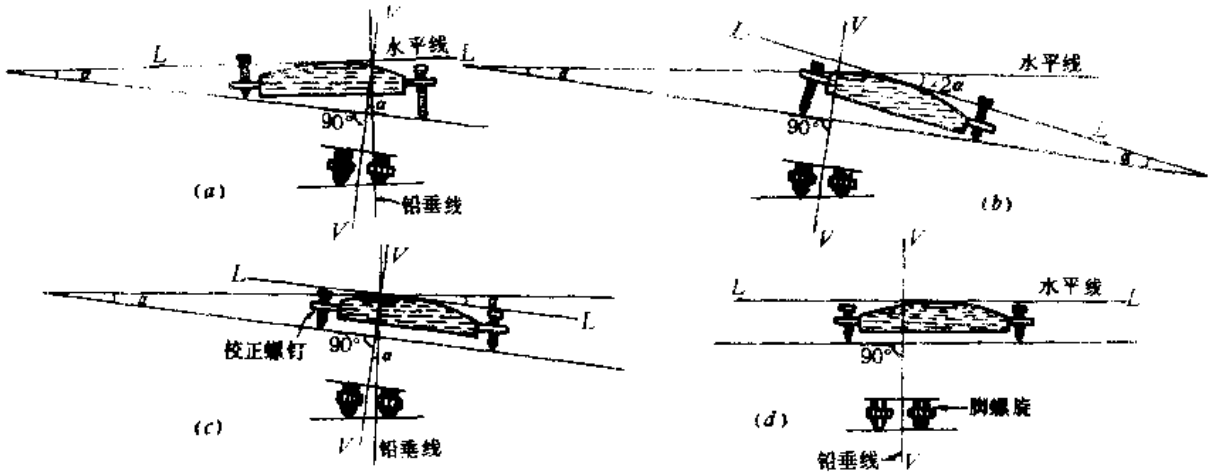



图 7-32

（二）十字丝竖丝应垂直于横轴的检验和校正

此项检验的原理与第五章水准仪十字丝横丝垂直于仪器旋转轴的原理相同。

检验时用十字丝竖丝瞄准一清晰小点，使望远镜绕横轴上下转动，如果小点始终在竖丝上移动则条件满足，否则需要进行校正。

由于各种仪器的结构不同，校正方法也不一样。现以一种通常的结构为例介绍校正的方法。

这种结构是将装有十字丝环的目镜筒用压环和四个压环螺钉与望远镜筒相连接（图7-33）。校正时松开四个压环螺钉，转动目镜筒使小点始终在十字丝竖丝上移动，校好后将压环螺钉旋紧。

（三）视准轴应垂直于横轴的检验和校正

如前所述，视准轴不垂直于横轴的误差$c$，对水平位置目标的影响$x_c = c$，且盘左、盘右的$x_c$绝对值相等而符号相反。此时横轴不水平的影响$x_i = 0$。因此，此项条件的检验可这样进行：选择一水平位置的目标，用盘左盘右观测之，取它们的读数差（顾及常数180°）即得两倍的$c$值。

例如图7-34所示的情况，水平目标为$A$，盘左时读数为$a'_{左}$，盘右时读数为$a'_{右}$，令盘左时$c$为正，则它们的正确读数

$$a_{左} = a'_{左} - c,$$

$$a_{右} = a'_{右} + c.$$

因

$$a_{右} - a_{左} \pm 180°,$$

故 $$c=\frac{1}{2}(a'_{左}+a'_{右}\pm 180°)$$

校正时，配置水平度盘读数（盘右位置）等于$a'_{右}+c$或$a'_{右}+\frac{1}{2}(a'_{左}-a'_{右}\pm 180°)$。此刻视准轴若不对准$A$点，则将十字丝环的左右两校正螺钉一松一紧（先略放松上、下校正螺钉，使十字丝环能够移动），移动十字丝环，使十字丝交点对准$A$点（校正结束后应将上、下校正螺钉上紧）。

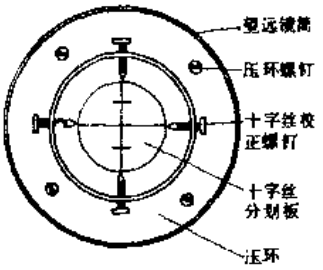



图 7-33

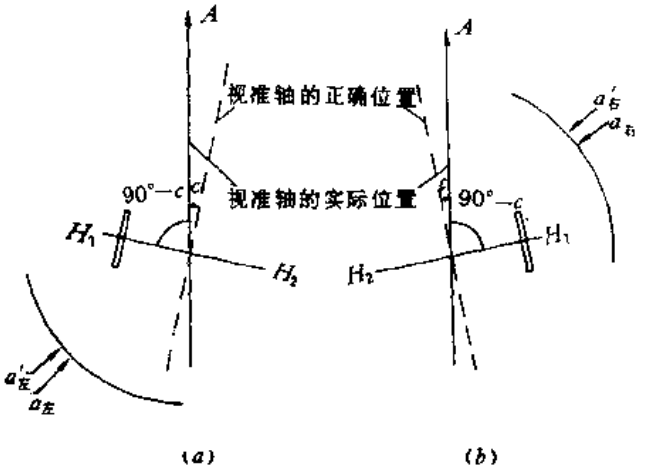



图 7-34

这种检校方法对于单指标的经纬仪，仅在水平度盘无偏心或偏心差的影响小于估读误差时才见效。若偏心差的影响大于估读误差，则$a'_{左}$与$a'_{右}\pm 180°$的差数可能是偏心差引起的，或者偏心差的影响是主要的，根据上述方法进行校正，将得不到正确的结果。在这种情况下，可采用下法进行检验校正：

选择一平坦场地，在一条直线上确定$A$、$O$、$B$三点，安置经纬仪于$O$点，横置一支有毫米分划的小尺于$B$点（$OB$长应大于10m），$A$点设一照准标志。以盘左位置照准$A$点，绕横轴倒转望远镜在小尺上读数得$m$点（图7-35(a)）。再以盘右位置照准$A$点，倒转望远镜在小尺上读数得$n$点（图7-35(b)）。若$m$、$n$两点重合，则条件满足。

若视准轴不垂直于横轴，相差一$c$角，则盘左时$mB$之长为$2c$的反映，盘右时$nB$之长

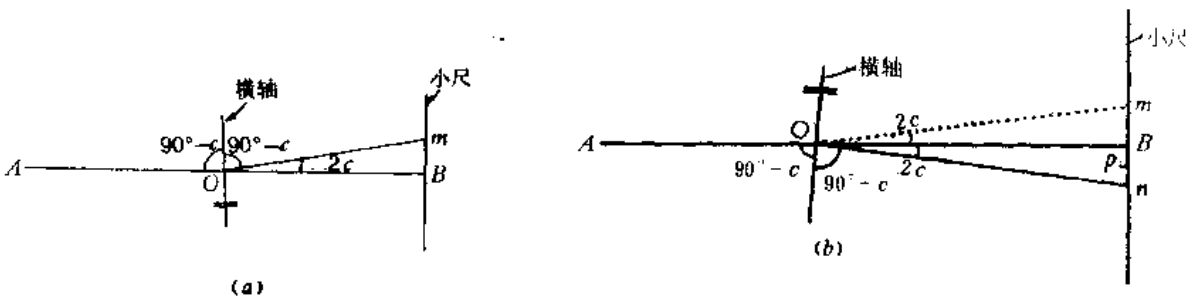



图 7-35

亦为$2c$的反映，即$mn$之长为$4c$的反映。

校正时只应校正一个$c$角，取$mn$长的$\frac{1}{4}$得一$p$点，校正十字丝交点对准$p$点。

此外，也可采用水平度盘读数的方法进行。在上述检验场地，用盘左、盘右照准$A$点得读数$a'_{左}$、$a'_{右}$，再用盘左、盘右照准$B$点得读数$b'_{左}$、$b'_{右}$。因

$$(a'_{左}+\delta_{a_{左}})-(a'_{右}+\delta_{a_{右}}\pm 180^{\circ})=2c \tag{a}$$

$$(b'_{左}+\delta_{b_{左}})-(b'_{右}+\delta_{b_{右}}\mp 180^{\circ})=2c \tag{b}$$

式中，$\delta_{a_{左}}$、$\delta_{a_{右}}$、$\delta_{b_{左}}$、$\delta_{b_{右}}$表示度盘偏心在读数上的改正数。

考虑到单指标经纬仪的读数装置及式（7-3）可知：

$$\delta_{a_{右}}=-\delta_{a_{左}}$$

$$\delta_{b_{右}}=-\delta_{b_{左}}$$

故（$a$）、（$b$）两式可写为：

$$a'_{左}-a'_{右}\pm 180^{\circ}=2c-2\delta_{a_{左}} \tag{c}$$

$$b'_{左}-b'_{右}\pm 180^{\circ}=2c-2\delta_{b_{左}} \tag{d}$$

而检定场地取$A$、$O$、$B$三点在一直线上，即$\angle AOB=180^{\circ}$，$a'_{左}$、$b'_{左}$为相差$180^{\circ}$的对径分划上的读数，所以

$$\delta_{b_{左}}=-\delta_{a_{左}}$$

故（$c$）、（$d$）两式可写为：

$$a'_{左}-a'_{右}\pm 180^{\circ}=2c-2\delta_{a_{左}} \tag{e}$$

$$b'_{左}-b'_{右}\pm 180^{\circ}=2c+2\delta_{a_{左}} \tag{f}$$

将（$e$）、（$f$）两式相加得

$$(a'_{左}-a'_{右})-(b'_{左}-b'_{右})=4c$$

故

$$c=\frac{1}{4}[(a'_{左}+b'_{左})-(a'_{右}+b'_{右})] \tag{7-11}$$

由此式求得的$c$值已消除了度盘偏心的影响。

校正时，将读数配置到$b'_{左}-c$或$b'_{右}-c$处，重新照准$A$点，然后倒转望远镜于$B$点方向，校正十字丝交点对准$B$点。

（四）横轴应垂直竖轴的检验和校正

检验时，如图7-36所示，选择较高墙壁近处安置仪器。以盘左位置瞄准墙壁高处一点$p$（仰角最好大于30°），放平望远镜在墙上定出一点$m_1$（图（$a$））。倒转望远镜，盘右再瞄准$p$点，又放平望远镜在墙上定出另一点$m_2$（图（$b$））。如果$m_1$与$m_2$重合，则条件满足，否则需要校正。

由于进行了前两项的检验和校正，竖轴在仪器整平后即成竖直，并且视准轴已垂直于横轴。因此，若横轴不垂直于竖轴，则横轴将倾斜一个$i$角。在这种情况下，如果上下转动望远镜，视准面将是一个倾斜平面，它与竖直面的倾斜角亦为$i$。因为盘左观测与盘右观测时，视准面向着相反方向偏斜同样大小的$i$角，所以$m_1$和$m_2$的中点$m$与$p$点的连线必为一铅垂线，过$pm$的视准面必为一竖直面。

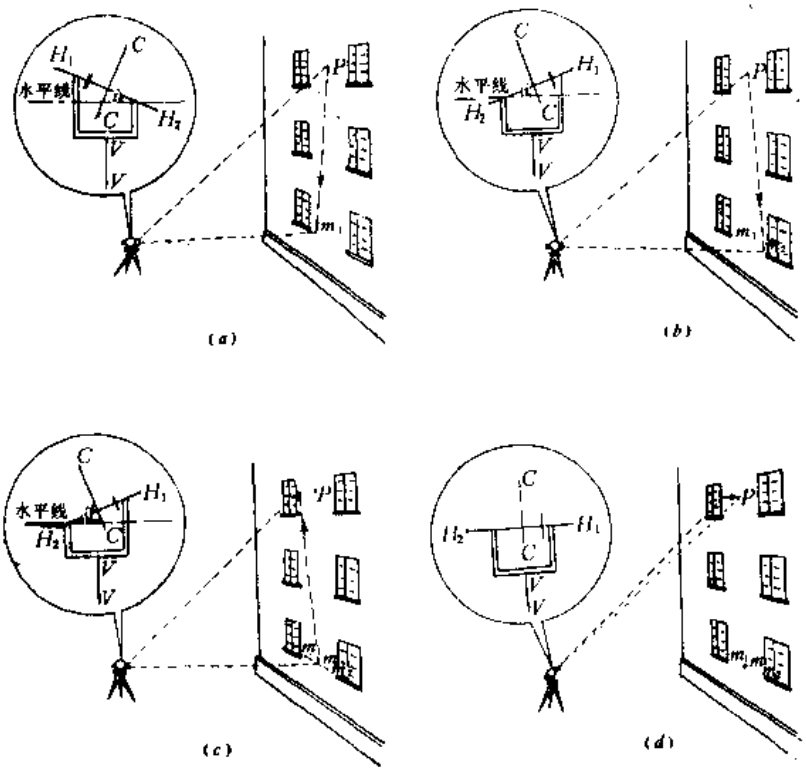



图 7-36

由式（7-7）知，横轴倾斜对水平位置的目标将不产生影响，目标愈高，影响愈大，即视准面偏离竖直面的距离愈大。上述检验的$m_1m$或$m_2m$之长实际上应是高点$p$处的偏差距离。

校正时，瞄准$m_1m_2$的中点$m$，固定照准部，向上转动望远镜，此时十字丝交点将不对准$p$点。抬高或降低横轴的一端，使十字丝的交点对准$p$点。

此项检验校正也要反复进行，直至条件满足为止。

光学经纬仪的横轴是密封的，一般能保证横轴与竖轴的垂直关系，测量人员只要进行此项检验就行。如果需要校正，最好由仪器检修人员进行。

以上四项检验校正，以一、三、四项最为重要，在观测期间最好经常进行。每项检校完毕后必须旋紧有关的校正螺钉。

（五）光学对中器的检验校正

检验校正光学对中器的目的是使光学垂线与仪器旋转轴（竖轴）重合。如图7-37所示为条件不满足的情形。

如果把光学对中器绕竖轴旋转，光学垂线的轨迹将出现如图7-38所示的情形，图7-38（$a$）为光学垂线与竖轴交叉的情形，图7-38（$b$）为两者平行但不重合的情形。

由此，采取如下检验方法：第一步，距光学对中器一定距离（例如通常架设仪器的高度1.3m），在一个平板上设一$A$点，使光学对中器分划板中心与之重合。然后绕竖轴旋转光学对中器180°，若分划板中心仍与$A$点重合，则可进行第二步检验；若分划板中心与另一点$B$重合，则应作第一步校正，要求分划板中心与$AB$之中点重合。第二步，改变$A$点距光学对中器的距离（例如将平板向上移动，由1.3m缩短为1.0m），如图7-38中$A'$位

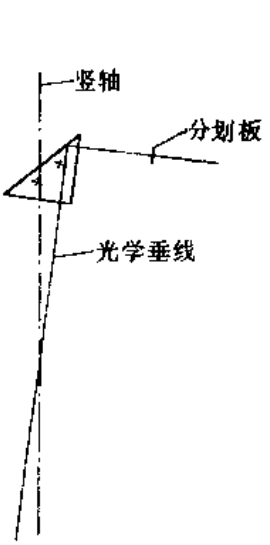
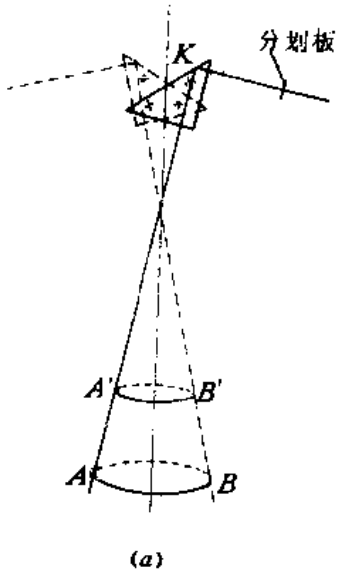



图 7 37



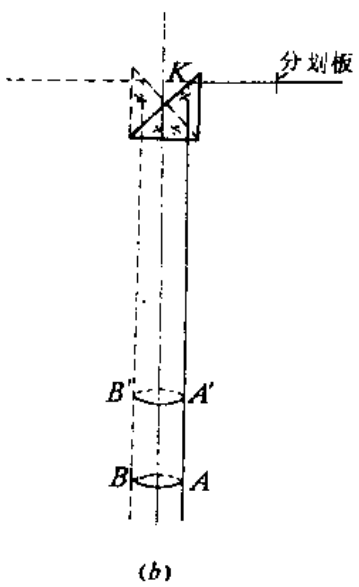




图 7-38

置，进行与第一步相同的检验。若光学对中器旋转180°之后，分划板中心仍与$A'$重合，则表明条件已经满足；若分划板中心并不与$A'$重合而与$B'$重合，则应校正，要使分划板中心与$A'B'$之中点重合。

必须指出，如果转向直角棱镜上的有效转向点$K$（图7-38）不在竖轴上，则上述第二步的校正必然破坏第一步的校正工作。因此，检验校正工作的两步必须反复进行，直到都满足要求为止。

光学对中器上可以校正的部件随仪器的类型而异，有的校正转向直角棱镜，有的校正分划板，有的则两者均可校正，工作时可视具体构造进行。

经纬仪的每项检校需要反复进行，最后要求满足应具备的条件。不过要校正得完全满足理论上提出的要求是很困难的，一般只要求达到实际作业所需要的精度，因此必然存在着残余的误差。这些残余的误差，如果采用合理的观测方法，大部分是可以相互抵消的。

## § 7-8 水平角观测的误差及其减弱的措施

在水平角观测中有各种各样的误差来源，这些误差来源对水平角的观测精度又有着不同的影响。下面将就水平角观测中的几种主要误差来源以及测角的精度分别加以说明。

### 一、水平角观测的误差

#### （一）仪器误差

仪器误差有属于制造方面的，如度盘偏心、度盘刻划误差、水平度盘与竖轴不垂直等；有属于校正不完善的，如竖轴与照准部水准管轴不完全垂直，视准轴与横轴的残余误差。这些误差中，有的可用适当的观测方法来消除或减低其影响，有的误差本身很小，对

测角精度的影响不大。

度盘偏心误差可取对径分划读数的平均值消除。即使是单指标读数的经纬仪，若采用盘左和盘右两个位置进行观测，同一方向的水平度盘读数正好相差180°，按理取其平均值就可消除水平度盘偏心的影响。但因竖轴旋转时有幌动而微小地改变了偏心元素$\theta$和$e$的值。所以对单指标读数的经纬仪，取盘左和盘右的平均值只能减小而不能完全消除偏心误差。

度盘刻划误差和水平度盘平面不与竖轴垂直的误差，就现代生产的仪器来说，一般都很小，而且当观测的测回数不止一个时，还可以采用变换度盘位置的办法来减低度盘刻划误差的影响。

视准轴误差和横轴误差，用盘左和盘右两个位置进行观测可以抵消这两种误差在水平方向上的影响。

竖轴不竖直的误差可以用较精密的水准管置于横轴上（通常称此种水准管为跨水准管）使横轴水平或求得横轴的倾斜值而用式（7-7）引入观测方向的改正数。

（二）仪器对中误差与目标偏心误差

如图7-39所示，设$O$为测站标志中心，$O'$为仪器中心，$\beta$为无对中误差时的角度（即正确的角度），$\beta'$为有对中误差时的角度（即实测的角度），则

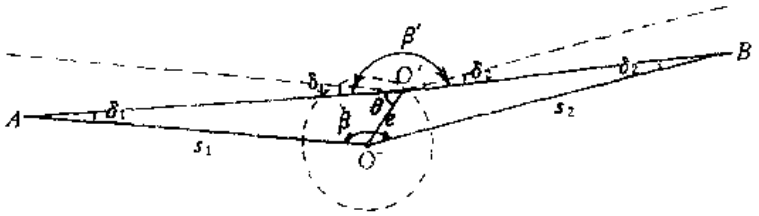



图 7-39

$$\beta = \beta' - (\delta_1 + \delta_2)$$

而

$$\delta_1 = \frac{e \cdot \sin\theta}{s_1}\rho$$ ❶

$$\delta_2 = -\frac{e \cdot \sin(\beta' + \theta)}{s_2}\rho$$ ❶

故

$$\beta - \beta' = -(\delta_1 + \delta_2) = -e \cdot \rho \left( \frac{\sin\theta}{s_1} - \frac{\sin(\beta' + \theta)}{s_2} \right)$$

实际上，$O'$的位置可在以$O$为圆心，$e$为半径的圆周上的任意位置。因此$d\beta = \beta - \beta'$将有无限多个，即$\theta$角每变化一$d\theta$值就有一个$d\beta$。按中误差定义，可得$\beta$角的中误差

$$m_\beta^2 = \frac{[d\beta d\beta]}{\frac{2\pi}{d\theta}}$$

将式（7-12）代入，得

❶ $\theta$及$\beta' + \theta$等角值均自$O'O$方向起按顺时针方向计。

$$m_{中}^2 = \frac{\rho^2 \cdot e^2 \sum_0^{2\pi} \left( \frac{\sin\theta}{s_1} - \frac{\sin(\beta' + \theta)}{s_2} \right)^2}{\frac{2\pi}{d\theta}}$$

$$= \rho^2 \cdot \frac{e^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin^2\theta}{s_1^2} + \frac{\sin^2(\beta' + \theta)}{s_2^2} - 2\frac{\sin\theta \cdot \sin(\beta' + \theta)}{s_1 \cdot s_2} \right) d\theta$$

因为

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\beta' + \theta) d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \cdot \sin(\beta' + \theta) d\theta = \pi \cdot \cos\beta'$$

故

$$m_{中}^2 = \rho^2 \frac{e^2}{2\pi} \left( \frac{\pi}{s_1^2} + \frac{\pi}{s_2^2} - \frac{2\pi\cos\beta'}{s_1 \cdot s_2} \right)$$

$$= \rho^2 \frac{e^2}{2} \cdot \frac{s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos\beta'}{s_1^2 \cdot s_2^2}$$

$$= \rho^2 \frac{e^2}{2} \cdot \frac{s_{AB}^2}{s_1^2 \cdot s_2^2}$$

即

$$m_{中} = \frac{\rho e}{\sqrt{2}} \cdot \frac{s_{AB}}{s_1 \cdot s_2} \tag{7-13}$$

目标偏心如图7-40，$A$、$B$分别为标志实际中心，$A'$、$B'$为照准的中心。$\beta$为正确的角度，$\beta'$为观测的角度。如图7-40所示的情况，照准目标$A'$的读数小于照准目标$A$的读数，即

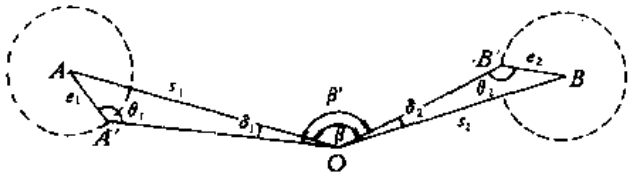



图 7-40

$$A' + \delta_1 = A$$

同样

$$B' + \delta_2 = B$$

则

$$\beta = B - A = B' + \delta_2 - A' - \delta_1 = \beta' + \delta_2 - \delta_1$$

而

$$\delta_1 = \frac{e_1}{s_1} \cdot \rho \cdot \sin\theta_1 \tag{7-14}$$

$$\delta_2 = \frac{e_2}{s_2} \cdot \rho \cdot \sin\theta_2 \tag{7-15}$$

故
$$\beta' - \beta = \delta_2 - \delta_1 = \frac{e_2 \cdot \rho}{s_2}\sin\theta_2 - \frac{e_1 \cdot \rho}{s_1}\sin\theta_1 \tag{7-16}$$

实际上$A'$的位置，可在以$A$为圆心，$e_1$为半径的圆周上的任意位置。因此，$\delta_1$将有无限多个，则由目标偏心误差而引起的$A$方向的中误差为

$$m_{偏A}^2 = \frac{[\delta_1 \delta_1]}{\frac{2\pi}{d\theta}}$$

将式（7-14）代入，得

$$m_{偏A}^2 = \frac{\rho^2 \frac{e_1^2}{s_1^2} \sum_0^{2\pi} \sin^2\theta_1}{\frac{2\pi}{d\theta_1}}$$

$$= \rho^2 \frac{e_1^2}{2\pi s_1^2} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta_1 \, d\theta_1$$

因
$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta_1 \, d\theta_1 = \pi$$

故
$$m_{偏A}^2 = \rho^2 \frac{e_1^2}{2s_1^2} \tag{7-17}$$

同理，由式（7-15），可得

$$m_{偏B}^2 = \rho^2 \frac{e_2^2}{2s_2^2}$$

它们对水平角的影响为

$$m_{偏} = \sqrt{m_{偏A}^2 + m_{偏B}^2}$$

$$= \rho \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{e_1^2}{s_1^2} + \frac{e_2^2}{s_2^2}} \tag{7-18}$$

由式（7-13）知，仪器对中误差对水平角的影响与两目标之间的距离$s_{AB}$成正比，即水平角在180°时影响最大，此时$s_{AB} = s_1 + s_2$；而与测站至目标的距离$s_1$和$s_2$的乘积成反比；距离愈短，影响愈大。

例 7-2　当$e = 3\text{mm}$，$s_1 = s_2 = 100\text{m}$，$\beta = 180°$时，

$$m_{中} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{200000}{100000^2} \cdot \rho = \pm 8.8''$$

为了减低这种误差的影响，对于短边的角度要特别注意对中，把对中误差限制到最小的程度。

由式（7-18）知，目标偏心误差对水平角的影响与测站至目标的距离$s_1$和$s_2$有关，距离愈短，影响愈大，但与$\beta$的大小无关。

例 7-3　当$e_1 = e_2 = 3\text{mm}$，$s_1 = s_2 = 100\text{m}$时，

$$m_{偏} = \frac{3}{100000} \cdot \rho = \pm 6.1''$$

瞄准目标时，若尽量瞄准目标的下部，则可使目标偏心元素$e_1$小一些，从而减小水平角中的误差。

值得注意的是，目标偏心误差和仪器对中误差均属于“对中”性质的误差。就对中本身而言，它是偶然性误差，一旦目标标志和仪器已经安置，则对中误差的真值已经不再发生变化，因此无论水平角观测多少个测回，这两项误差分别在各测回之间均保持相同，绝不会因增加测回数而减小它们对水平角观测成果的影响。

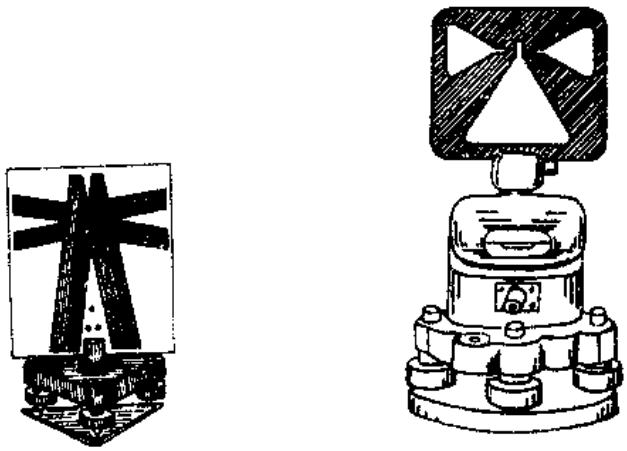
例 7-4　已知目标偏心误差和仪器对中误差均为±3mm，约180°的水平角的两个边长均为100m。今用经纬仪对此水平角观测了两个测回，设每个测回的观测中误差为±10″，试求顾及目标偏心误差和仪器对中误差后，两测回平均值的测角中误差$m_\beta$。

解：由例7-2和例7-3知$m_{中} = \pm 8.8''$，$m_{偏} = \pm 6.1''$。由于$m_{中}$和$m_{偏}$与测回数无关，故

$$m_\beta = \sqrt{8.8^2 + 6.1^2 + \frac{10^2}{2}} = \pm 12.8''$$

（三）三联脚架法

为减小仪器对中误差和目标偏心误差对水平角的影响，有些经纬仪的照准部可与其基座分离而换置供瞄准用的标牌（图7-41）。两者的旋转中心均能在基座上共轴。标牌上绘有供瞄准的图形，它的对称中心与旋转轴重合，供精确照准用。



(a)　(b)

图 7-41

作业时可按如下程序进行。如图7-42，欲测2、3、4……等点上的水平角，先在1、3两点安置标牌，2点安置经纬仪。2点水平角观测结束之后，将1点的标牌连同三脚架移至4点。将2点上的经纬仪照准部和3点上的标牌自基座上取下，互相对调，注意三脚架连同基座不能动。在3点又进行水平角观测。依次继续向前作业。由此取得的水平角将是以基座中心为顶点的水平角，因标牌与经纬仪共旋转轴，故对中误差和目标偏心误差将极




图 7-42

小。这些空中的基座中心偏离地面上点子的误差既与边长无关，又与角度的大小无关，而且各点之间互相独立，因此特别用在导线测量中能大为提高地面导线点的精度。

（四）照准误差与读数误差

这两项误差纯属观测本身的误差。

影响照准精度的主要因素有：望远镜的放大率，目标与照准标志的形状以及人眼的判别能力，目标影象的亮度和清晰度等。如果只考虑望远镜放大率这一因素，则通过望远镜的照准误差为

$$d\beta'' = \frac{p''}{v}$$

式中$p''$为人眼在理想状态下（目标的亮度适宜，清晰度也很好）瞄准的判别能力，$v$为望远镜的放大率。例如由经验数据知，用视间隔为20″的双丝来照准宽度为1m的目标时，人眼的理想判别角$p'' = 10''$，当$v = 25$时，则在理想情况下，

$$d\beta'' = \frac{10''}{25} = 0.4''$$

由于外界条件及其它因素的影响，$d\beta''$一般将增大一定的倍数$\nu$，即

$$d\beta'' = \frac{\nu \cdot p''}{v}$$

根据实验得知，当野外观测的亮度适宜，目标影象稳定，可取$\nu = 1.5$；当用中等精度光学经纬仪进行边长为2～8km的水平角观测时，可取$\nu = 3$。

读数误差主要取决于仪器的读数设备。对于用带分划尺的显微镜读数的J6级光学经纬仪来说，估读的极限误差可以不超过分划值的十分之一，即可以不超过6″。如果照明情况不佳，显微镜的目镜未调好焦以及观测者的技术不熟练，估读的极限误差则可能大为超过此数。

（五）外界条件的影响

外界条件的影响很多，如大风会影响仪器的稳定，地面的辐射热会影响大气的稳定，大气的透明度会影响照准精度，温度变化会影响仪器的正常状态，地面坚实与否会影响仪器的稳定等等。这些因素均将使测角的精度受到影响。要完全避免这些影响是不可能的，但如果选择有利的观测时间和避开不利的条件，可以使这些外界条件的影响降低到较小的程度。例如，观测视线应避免从建筑物旁、冒烟的烟囱上面和近水面的空间通过，这些地方都会因局部气温变化而使光线产生不规则的折光，使观测成果受到影响。

## 二、水平角观测的精度

水平角观测的精度与上述各种误差的综合影响有关。对于J6光学经纬仪来说，设计时考虑了有关误差的影响，保证野外一测回的方向中误差为6″。实际上，顾及到仪器使用期间轴系的磨损及其它一些不利因素的影响，设计精度一般都高于6″，新出厂的仪器，其野外一测回的方向中误差不到6″，在精度上有所富裕。

现以野外一测回的方向中误差6″为依据，应用误差传播定律来分析水平角观测的精度。设一测回的方向中误差为$m_{1方}$，则各测回同一方向的较差中误差为

$$m_{1方d}=m_{1方}\sqrt{2}=\pm 6''\sqrt{2}$$

由于一测回的方向值是两个半测回方向值的平均值，则半测回方向值的中误差为

$$m_{半方}=m_{1方}\sqrt{2}=\pm 6''\sqrt{2}$$

从而得上、下两个半测回同一方向的较差中误差为

$$m_{半方d}=m_{半方}\sqrt{2}=\pm 6''\times 2$$

若取两倍中误差作为限差，则各测回同一方向的较差为

$$2m_{1方d}=6''\sqrt{2}\times 2=\pm 16.8''$$

上、下半测回同一方向的较差为

$$2m_{半方d}=6''\times 2\times 2=\pm 24''$$

若取三倍中误差作为限差，则各测回同一方向的较差和上、下半测回同一方向的较差分别为

$$3m_{1方d}=6''\sqrt{2}\times 3=\pm 25.2''$$

$$3m_{半方d}=6''\times 2\times 3=\pm 36''$$

下面再分析一下角度。由于角值是两个方向值之差，故得野外一测回角值中误差为

$$m_{1角}=m_{1方}\sqrt{2}=\pm 6''\sqrt{2}$$

若取两倍中误差作为限差，则野外一测回角值最大误差为

$$2m_{1角}=6''\sqrt{2}\times 2=\pm 16.8''$$

如果取三倍中误差作为限差，则野外一测回角值最大误差为

$$3m_{1角}=6''\sqrt{2}\times 3=\pm 25.2''$$

# 第八章　导线测量

## §8-1　导线测量的一般知识

§2-4中曾提到导线测量是建立国家基本平面控制方法之一。其实导线测量也用于工程建设的平面控制，城市建设的平面控制和地形测图的平面控制等方面。导线，就是由若干条直线连成的折线，每条直线叫做导线边。其边长用钢卷尺丈量或其它方法测定。相邻两直线之间的水平角叫做**转折角**，通常用经纬仪观测。有了转折角的角值与边长之后，即可根据已知方向和已知坐标算出各导线点的坐标。

按照不同的情况和要求，导线可以布置成下列几种形式：

1.附合导线　如图8-1所示，导线起始于一个已知控制点，而终止于另一个已知控制点。

2.闭合导线　如图8-2所示，由一个已知控制点出发，最后仍旧回到这一点。整个闭合导线中有时也可以假定一点作为已知点。

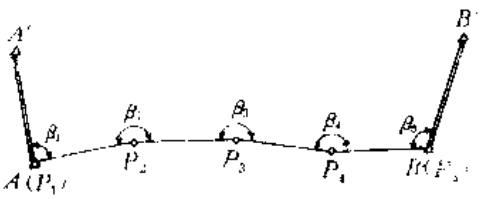



图 8-1

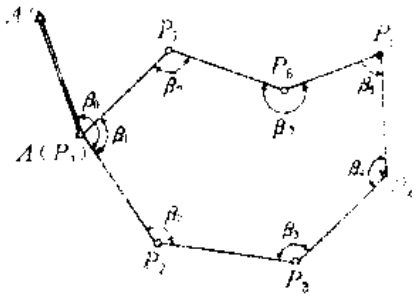



图 8-2

3.支导线　如图8-3所示，从一个已知控制点出发，既不附合到另一个已知控制点，也不回到原来的起始点。支导线没有检核条件，不易发现错误，故一般不宜采用。

4.一个结点的导线网　如图8-4所示，从两个或更多的已知控制点开始，几条导线汇合

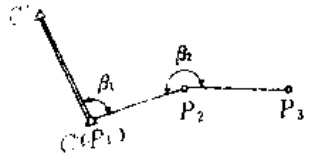



图 8-3

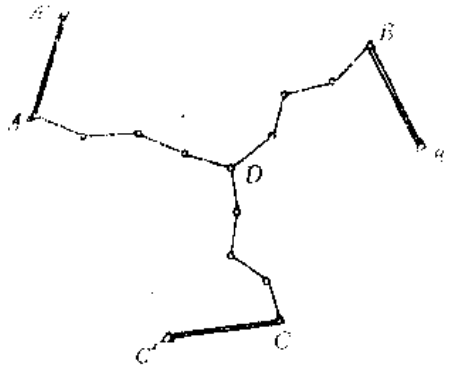



图 8-4

于一个结点。

5.两个以上结点或两个以上闭合环的导线网　图8-5所示的为**两个结点**（$E$、$F$）**的导线网**。图8-6所示的为**三个闭合环的导线网**。

导线测量与其他地形控制比较，其主要优点是布置起来较为灵活。在平坦而荫蔽的地区以及城市和建筑区，布设导线具有很大的优越性。但是导线测量也存在一些缺点，其中比较突出的就是量距工作十分繁重。不过由于电磁波测距仪的发展，已大为改善了繁重的量距工作，为导线测量提供了广阔的前景。

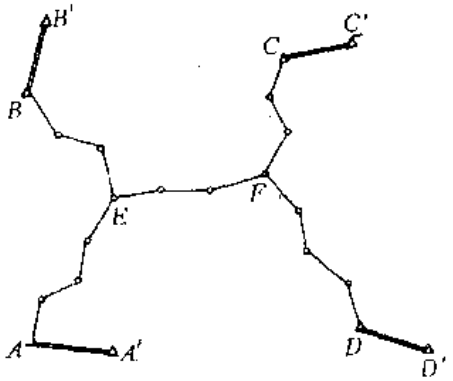



图 8-5



图 8-6

## §8-2　导线测量的外业工作

作业前应首先作出导线的整体布置设计，然后到野外踏勘。设计方案经踏勘证实符合实地情况，或作了必要的修改之后，即可到实地选定各点的位置，并桩定或埋设标石，以后便可根据这些标点进行测角和量边工作，这就是导线测量的外业。

### 一、布设

不同的测量目的，对导线的形式、平均边长、导线总长以及导线点的位置都有一定的要求。为了能够更好地满足这些要求，应尽可能根据测区现有的最大比例尺地形图来设计。首先在图上标出已有的控制点和测区范围，再根据地形条件和测量的具体要求来计划导线测量的路线和导线点的位置；然后到实地勘察，查看所计划的路线和导线点位置是否合适；如有必要，应作适当的改动并在计划图上注明。若测区没有现成的地形图或者测区范围不大，可以到实地边勘察、边选择导线测量的路线和确定点位。

为了使以后的导线测量计算工作不过于复杂和繁重，计划导线的路线时，应尽量敷设成单一的附合导线或闭合导线，或具有少量结点的导线网。通常，导线网中结点与结点、结点与高级点间导线长度，不应大于该等级所规定导线总长的0.7倍。由于直伸导线具有较大的优越性，因而在设计时要尽量使导线成直伸形状。

为便于测角和量边，应选择尽可能平坦而开阔的路线，这对测角的通视和减少旁折光的影响也很有利。

导线边长大致相等，可减免因望远镜调焦而带来的误差。因此在一条导线中不宜出现过长和过短的导线边，尤其要避免由长边立即转变为短边的情况。

导线愈长，测角误差对导线点位误差的影响愈大。若遇较长的路线时，应设法从导线中部与已知高级点通视，从高级点传递坐标方位角于导线上，以增加坐标方位角控制。也可在导线中选择能隔几点而通视的导线点，构成新的导线边，以利校核，如图8-7所示。测

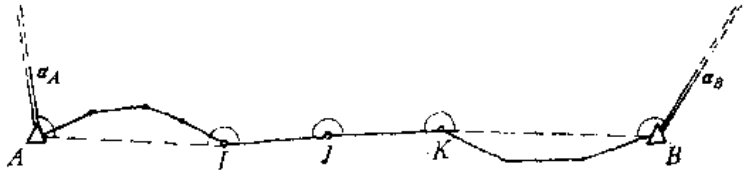



图 8-7

角时除观测导线本身的全部转折角和连接角外，还应观测与此长边有关的连接角与转折角。

导线点位置选好后，要在地面上标定下来，一般方法是打一木桩并在桩顶中心钉一小铁钉。对于需要长期保存的导线点，则应埋入石桩或混凝土桩，桩顶刻凿十字或铸入锯有十字的钢筋。

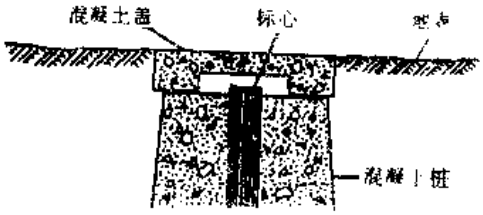



图 5-8

图8-8为常用的城市导线标石类型之一，中心标石采用直径不小于10cm的钢管或短铁轨，也可用直径不小于30mm的钢筋。

埋设于地下的城市导线标石易受维修道路和挖掘管道的影响，为此可设置墙上标志。图8-9为常用的一种墙上导线标志。它是由安装在墙内的金属圆形标志和观测用的活动支架组成的。圆盘上有两个固定的竖直棒槽，中心有一小孔，其高度用水准测量方法测定，使用时将支架的两个锥形爪子插入铸铁圆盘的槽内，支架的另一尖端钻一通孔，以安置照准标志。支架长度为80cm，圆盘离地面约2m，水准测量时系采用悬垂水准尺。

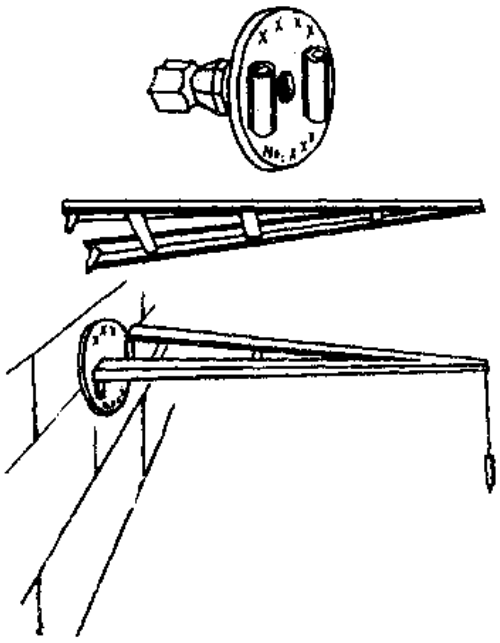


图 8-9

为了便于日后寻找使用，对于重要的导线点应绘制点之记（参阅图3-1）。

## 二、测角及测角精度的评定

导线中两相邻导线边构成的转折角用经纬仪观测。为计算方便，常观测导线前进方向的左角。

测角的方法应根据具体情况而定。单角用测回法观测；三个或更多的方向则采用方向观测法。

当观测短边的转折角时，应特别仔细地进行仪器和照准目标的对中，或用三联脚架法。

水平角观测之前，应对所用的仪器、标牌和光学对中器等进行检查、检验；在观测过程中也要随时检查。

在城市或工业区进行导线测量，由于一些街道上交通繁忙，车多人众，从而造成观测的不利条件，同时也影响到人身和仪器的安全，所以在交通量大的繁忙马路上，安排在夜间进行作业较为有利。夜间作业时空气稳定、仪器震动小和免于日光曝晒（同时减少撑伞的人力），可提高成果的精度。

夜间观测时无论测角仪器和照准目标都应有妥善的照明设备。某些光学经纬仪的读数设备已装置有供夜间观测用的照明设备。若经纬仪无照明设备，则需用手电等光照明。

在角度观测外业工作结束后，必须将外业成果作仔细的检查，尤其要注意手簿的记录和计算是否合乎规范要求，其精度是否在规定的限差以内。

外业测角结束后，应按下式评定测角精度：

$$m_\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{N}\cdot\frac{f_\beta f_\beta}{n+1}}$$

式中，$m_\beta$为导线测角中误差；

$f_\beta$为附合导线或闭合环的角度闭合差；

$n+1$为计算$f_\beta$时的角度个数；

$N$为角度闭合差的个数。

## 三、量距工作

导线边长可用钢尺直接丈量，或用光学视距法和电磁波测距仪直接测出，也可布置某种几何图形，依据直接测出的长度间接地算出。至于选用何种方法较好，则应视设备条件和对导线边长的精度要求而定。

量得的边长除要进行尺长、温度和倾斜等改正外，还要进行归算至大地水准面的改正和归算至高斯投影面上的改正。

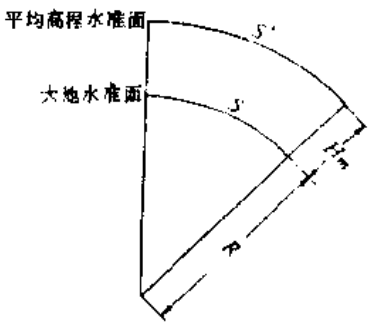


图 8-10

（一）归算至大地水准面的改正

在图8-10中，设$H_m$为导线边的平均高程，$S'$为导线边在平均高程水准面上的长度，$S$为导线边在大地水准面上的长度，$R$为地球半径，则由图可得

$$S = S'\cdot\frac{R}{R+H_m} = S'\cdot\frac{1}{1+\frac{H_m}{R}}$$

用级数展开略去二次项以上各项，即得

$$S = S'\left(1 - \frac{H_m}{R}\right)$$

故边长的归算改正为

$$\Delta S_H = S - S' = -S'\cdot\frac{H_m}{R} \qquad (8\text{-}1)$$

当$H_m = 2000\text{m}$，取$R = 6370\text{km}$，则

$$\frac{\Delta S_H}{S'} = -\frac{H_m}{R} = -\frac{1}{3185}$$

设导线边长的相对容许误差为1/3000，则此项改正在边长丈量的精度范围之内。

（二）边长化算到高斯投影面上的改正

此项改正称为高斯投影的距离改化。计算改正数的公式为

$$\Delta S = \frac{y^2}{2R^2}\cdot S$$●

式中$S$为球面上的边长，$y$为导线边的中点离开高斯投影带轴子午线的距离，$R$为地球半径。

大比例尺地形测量大多采用3°带投影，最大的$y$值（绝对值）约为160km，由上式可得投影带边界处的相对改正值约为

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{160}{6370}\right)^2 = \frac{1}{3170}$$

设丈量导线边的相对容许误差为1/3000，则导线边长在投影面上的改正将在丈量的精度范围之内。

以上两项改正，对于一条导线边来说，其相对改正数只要不超过相对容许误差，可以不加考虑。但对整条导线的闭合差（见§8-7）的影响可能是显著的，因此要根据具体情况采取合理的处理办法。对采用简易平差的测图导线来说一般均不加改正。但对较长的附合导线的相对闭合差计算，关系到相对闭合差是否超限的问题，则须注意此两项的影响：若超过相对容许误差，边长须先加改正。对于精密导线，在平差计算前，导线边一般须进行此两项改正。

## §8-3 导线测量内业计算的基本公式

导线测量的最终目的是要获得各导线点的平面直角坐标，因此外业工作结束后就要进行内业计算。

内业计算的原始数据为观测的角度和边长，它们必须正确可靠。因此内业计算工作应从审核整个外业资料着手，目的在于发现可能存在的遗漏、记错和算错。

对于作为起算依据的已知点坐标，也需进行审核，防止转抄错误。

● 此式的由来见第十五章的（15-6）式。

由图8-1所示导线的几何图形可以看出，为算得各点的坐标，需依次推算各导线边的坐标方位角；由导线边的坐标方位角和边长，计算两相邻导线点的坐标增量，然后推算各点的坐标。

关于坐标方位角的推算已在第三章中讲过，此处不再重复。

## 一、根据已知点坐标、已知边长和坐标方位角计算未知点坐标

如图8-11所示，设$A$为已知点，$B$为未知点，当$A$点的坐标$x_A$、$y_A$、边长$S_{AB}$和坐标方位角$\alpha_{AB}$均为已知时，则可求得$B$点的坐标$x_B$、$y_B$。通常称为**坐标正算问题**。由图可知

$$\left.\begin{aligned} x_B &= x_A + \Delta x_{AB} \\ y_B &= y_A + \Delta y_{AB} \end{aligned}\right\} \tag{8-2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_{AB} &= S_{AB}\cdot\cos\alpha_{AB} \\ \Delta y_{AB} &= S_{AB}\cdot\sin\alpha_{AB} \end{aligned}\right\} \tag{8-3}$$

所以式（8-2）又可写成

$$\left.\begin{aligned} x_B &= x_A + S_{AB}\cdot\cos\alpha_{AB} \\ y_B &= y_A + S_{AB}\cdot\sin\alpha_{AB} \end{aligned}\right\} \tag{8-4}$$

$\Delta x_{AB}$和$\Delta y_{AB}$称为坐标增量。

由于坐标方位角和坐标增量均带有方向性（由下标标示），故务必注意下标的书写。

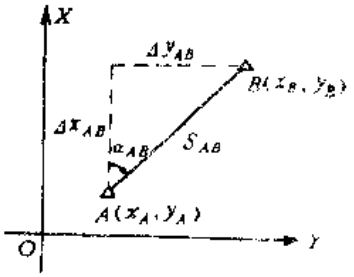


图 8-11

## 二、由两个已知点的坐标反算坐标方位角和边长

边的坐标方位角可根据两端点的已知坐标反算出来。有时不仅需要反算坐标方位角，而且要反算边长，这叫做**坐标反算问题**。如图8-15所示，设$A$、$B$为两已知点，其坐标分别为$x_A$、$y_A$和$x_B$、$y_B$，则可得

$$\operatorname{tg}\alpha_{AB} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}} \tag{8-5}$$

$$S_{AB} = \frac{\Delta y_{AB}}{\sin\alpha_{AB}} = \frac{\Delta x_{AB}}{\cos\alpha_{AB}} \tag{8-6}$$

上两式中$\Delta x_{AB} = x_B - x_A$；$\Delta y_{AB} = y_B - y_A$。

由式（8-6）算出两个$S_{AB}$，并作相互校核。

边长$S_{AB}$也可用下式计算：

$$S_{AB} = \sqrt{\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2} \tag{8-7}$$

(8-5)式求得的$\alpha_{AB}$可在四个象限之内，它由$\Delta y_{AB}$和$\Delta x_{AB}$的正负符号确定，计算时应注意。

一般能作科技运算的计算器都有极坐标换算为直角坐标及其逆运算的功能。若取$A$点

为新坐标系的原点，则$\Delta x_{AB}$、$\Delta y_{AB}$相应为$B$点的新坐标值$x'_B$、$y'_B$，而$S_{AB}$、$\alpha_{AB}$则相应为极坐标的元素，即向径$r$和极角$\theta$。由$r$、$\theta$求$x'_B$、$y'_B$为正算问题，反之为反算问题。

## §8-4 单一导线的计算

单一导线的图形，除分支导线、附合导线和闭合导线外，尚随导线角度观测的数量和位置不同而将附合导线分为如下三种情况：在导线两端的已知点均观测了连接角（图8-12（$b$））；仅在导线的一端的已知点观测了连接角(图8-12($c$))；一个连接角也未观测（图8-12（$d$））。

现将这几种单一导线的计算方法叙述如下。

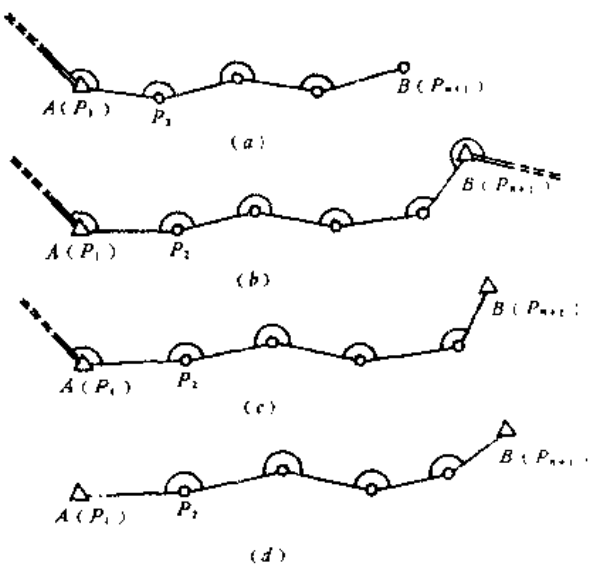



图 8-12

### 一、支导线的计算

以图8-12（$a$)图形为例，其计算顺序如下：

1. 由$A$、$M$两点的坐标，反算出坐标方位角$\alpha_{AM}$。

2. 由$\alpha_{AM}$起始，按$\beta_1$、$\beta_2$……角推算$AP_2$、$P_2P_3$、……各边的坐标方位角$\alpha_{AP}$、$\alpha_{P_2P_3}$、……。

3. 由各边的坐标方位角及边长，正算两相邻导线点的坐标增量$\Delta x_{AP_2}$、$\Delta y_{AP_2}$、$\Delta x_{P_2P_3}$、$\Delta y_{P_2P_3}$……。

4. 按（8-2)式依次推算$P_2$、$P_3$、……各导线点的坐标$x_{p_2}$、$y_{p_2}$、$x_{p_3}$、$y_{p_3}$、……。

### 二、仅有一个连接角的附合导线的计算

这种导线的计算顺序与支导线相同，但其最后一点为已知点$B$，故最后求得的坐标$x'_B$和$y'_B$的值由于观测值（$\beta$和$S$）存在误差，必然与已知的坐标$x_B$、$y_B$不相同，它将产生坐标闭合差$f_x$、$f_y$。

$$\begin{aligned} f_x &= x'_B - x_B \\ f_y &= y'_B - y_B \end{aligned} \tag{8-8}$$

可见，这种导线较之支导线增加了一项处理坐标闭合差的工作。最简便的处理方法为按各导线边的长度成比例地改正它们的坐标增量，即

$$v_{\Delta x_i} = \frac{-f_x}{\sum S} S_i \tag{8-9}$$

$$V_{\Delta x_{ij}} = \frac{f_x}{\sum S} S_{ij}$$

最后的坐标增量为

$$\begin{aligned} \Delta x_{ij} &= \Delta x'_{ij} + v_{\Delta x_{ij}} \\ \Delta y_{ij} &= \Delta y'_{ij} + v_{\Delta y_{ij}} \end{aligned} \tag{8-10}$$

### 三、具有两个连接角的附合导线的计算

这种导线为通常采用的标准形状。由图8-12（b）可知，因$B$点观测了连接角$\beta_{n+1}$，故由$\alpha_{AM}$推算坐标方位角时必然可以求得$BN$的坐标方位角$\alpha'_{BN}$。由于各观测角$\beta_i$中存在误差，所以$\alpha'_{BN}$将不会与已知的坐标方位角$\alpha_{BN}$相等，从而产生方位角闭合差$f_\beta$。

$$f_\beta = \alpha'_{BN} - \alpha_{BN} \tag{8-11}$$

在各观测角精度相同的前提下，闭合差$f_\beta$可平均地分配至每个角度上，即每个角度应加上改正数$v_{\beta_i}$。推算坐标方位角$\alpha'_{BN}$时的$\beta_i$前为正号时用

$$v_{\beta_i} = -\frac{f_\beta}{n+1} \tag{8-12}$$

$\beta_i$前为负号时用

$$v_{\beta_i} = \frac{f_\beta}{n+1} \tag{8-12}$$

各角的观测值经改正之后的计算，则与仅有一个连接角的附合导线的计算相同。

### 四、未测连接角的附合导线的计算

由于这种导线的两端均未测连接角，故无法直接从已知的坐标方位角$\alpha_{AM}$或$\alpha_{BN}$推算出各导线边的坐标方位角。为此，可采用如下途径：

首先对导线边$AP_2$假定一个坐标方位角$\alpha'_{AP_2}$，依此推算出各导线边的假定坐标方位角$\alpha'_{ij}$，然后按支导线的计算顺序推求各点的坐标$x'_i$、$y'_i$。由几何原理知，实际的导线与按假定坐标方位角推算的导线呈形状及大小均相同的关系（在不顾及观测误差的前提下），仅仅是它们所处的方位有所不同，如图8-13所示。因此，以下的任务便是将这条推算的导线旋转至实际位置。其旋转角$\delta$为

$$\delta = \alpha_{AP_2} - \alpha'_{AP_2} \tag{8-13}$$

连接$A$、$B$两点和$A$、$B'$两点。由图8-13中的几何图形关系知$\angle BAB' = \delta$，所以

$$\delta = \alpha_{AB} - \alpha_{AB'} \tag{8-14}$$

$\alpha_{AB}$和$\alpha_{AB'}$可由$A$、$B$和$A$、$B'$的坐标反算求得。

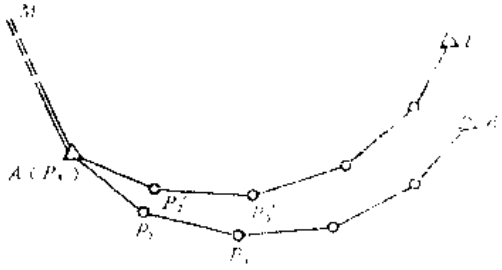



图 8-13

$\delta$算出之后，将各假定坐标方位角加以改正，得实际坐标方位角$\alpha_{ij}$为

$$\alpha_{ij} = \alpha'_{ij} - \delta \tag{8-15}$$

最后重复一次支导线的计算工作，便可求得各

导线点的坐标。

因各观测值中实际存在着误差，所以由上述求得的$B$点坐标$x'_B$、$y'_B$仍将与已知点坐标$x_B$、$y_B$不同，而产生坐标闭合差$f_x$、$f_y$。此时仍可按与导线边长成比例的方法（式（8-9））求出坐标增量的改正数，改正各边的坐标增量，从而消除此项矛盾。

## 五、闭合导线的计算

闭合导线的图形（图8-2）实际上可以看作是附合导线的$B$点（图8-12）与$A$点相重合，因此它的计算完全可按附合导线的方法进行。计算时只需将已知点$A$（图8-2）看作两个坐标相同的点，一个作为附合导线的$A$点，一个作为附合导线的$B$点即可。

闭合导线至少必须观测一个连接角，否则无法推算导线各边的坐标方位角。

## 六、导线计算中闭合差的限差

前面已讲过，导线计算中的闭合差是由于观测值中存在误差而产生的，因此闭合差的大小将反映出观测值的误差大小。如果闭合差过大，则表明观测值中的误差太大。为了解和限制观测值的误差值，在导线计算中常对闭合差给以一个容许值，通常称为限差。

### （一）坐标方位角闭合差的限差

在不顾及已知的坐标方位角$\alpha_{AM}$和$\alpha_{BN}$的误差条件下，坐标方位角闭合差$f_\beta$的大小与导线转折角的个数有关。因

$$\alpha'_{BN} = \alpha_{AM} + \Sigma\ (\pm\beta) \pm n \cdot 180^\circ$$

所以

$$f_\beta = \alpha_{AM} + \Sigma\ (\pm\beta) \pm n \cdot 180^\circ - \alpha_{BN} \tag{8-15}$$

式中，$\beta$前的符号由$\beta$在导线中的位置而定；

$n$为推算坐标方位角时正反方位角转换的次数。

由误差传播定律得

$$m_{f\beta} = (m_{\beta_1}^2 + m_{\beta_2}^2 + \cdots\cdots + m_{\beta_{n+1}}^2)^{1/2}$$

对等精度角度观测，$\beta_i$的中误差均可用$m_\beta$表示，则

$$m_{f\beta} = m_\beta \sqrt{n+1} \tag{8-16}$$

取2倍中误差为容许误差，则

$$f_{\beta容} = 2\, m_\beta \sqrt{n+1} \tag{8-17}$$

而算得的闭合差应满足

$$f_\beta < f_{\beta容} = 2\, m_\beta \sqrt{n+1}$$

例如要求$m_\beta < \pm 20''$，则$f_\beta$应满足

$$f_\beta < \pm 40'' \sqrt{n+1}$$

### （二）导线全长闭合差与相对闭合差

导线计算中导致坐标闭合差$f_x$、$f_y$的函数关系较为复杂。因为它们受到角度和边长两类观测值的影响，且不呈线性函数关系，所以在一般的导线计算中可求出导线全长闭合差$f_s$，

$$f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \tag{8-18}$$

它的几何意义如图8-14。然后再计算$f_s$与导线全长的比值，并使分子为1，即

$$\frac{f_s}{\Sigma s}=\frac{1}{\Sigma s/f_s} \tag{8-19}$$

称为全长相对闭合差。

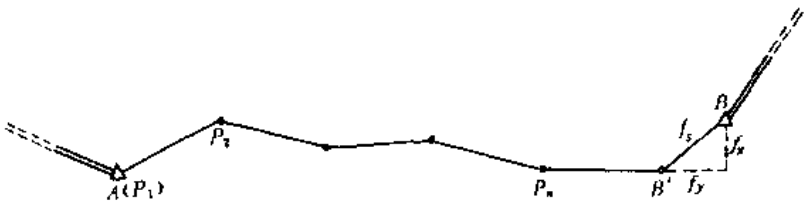



图 8-14

通常各类导线对$f_s/\Sigma s$的要求都有规定。导线计算时，在求得$f_x$、$f_y$之后应立即计算$f_s/\Sigma s$值，检查是否超出规定的要求。例如对用J6经纬仪测角，用普通钢尺量距的导线，$f_s/\Sigma s$的容许值为1/2000；凡此类导线计算出的全长相对闭合差，均不得大于此值。

无连接角的导线计算出的全长闭合差$f_s$，其实质主要是观测边长投影到两已知点连线上之后与已知边长之差。因此，对于垂直于已知点连线方向的导线边的丈量误差将不会在$f_s$中被反映出来，即使有了错误也无从发现，所以应尽量避免在此方向布设导线边。另外，由于水平角的观测误差在$f_s$中反映极小，所以应特别注意水平角的观测工作。

## 七、单一导线计算举例

### （一）有两个连接角的附合导线的计算

例 8-1　表8-1是计算图8-15导线的全部数据，其计算顺序如下：

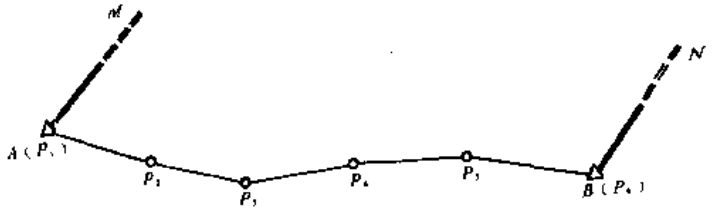



图 8-15

第一步是角度闭合差的计算及分配。分配的改正值写在观测角值的上面。

第二步是根据起始边的坐标方位角和改正后的转折角值（观测值加改正值）推算其余各边的坐标方位角。$BN$边的坐标方位角亦应算出，以便与已知值比较是否计算有错。只有在算出的$BN$边坐标方位角与已知值完全相同时才可确认计算无误。

第三步是进行坐标增量的计算。计算是根据各边的坐标方位角$\alpha$和边长$S$，按式(8-3)进行的。

第四步按式（8-8）计算坐标增量闭合差，得$f_x=-0.15$、$f_y=+0.14$。并按式（8-18）算得全长闭合差$f_s=0.20$，全长相对闭合差$K=1/3700$。这里$K$小于容许的1/2000，故接着按式（8-9）计算各坐标增量的改正数$v_{\Delta x}$、$v_{\Delta y}$并将其填写在有关的坐标增量的上

## 附合导线计算表

表 8-1

| 点号 | 观测角 $\beta$ | 坐标方位角 $\alpha$ | 边长 $s$ | $\Delta x$ | $\Delta y$ | $x$ | $y$ | 附注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | | 237°59.5′ | | | | | | |
| $A$ ($P_1$) | +0.1 99°01.0′ | | | | | 2507.69 | 1215.63 | |
| | | 157 00.6 | 225.85 | +5 −207.91 | −4 +88.21 | | | |
| $P_2$ | +0.1 167 45.6 | | | | | 2299.83 | 1303.80 | |
| | | 144 46.3 | 139.03 | +3 −113.57 | −3 +80.20 | | | |
| $P_3$ | +0.1 123 11.4 | | | | | 2186.29 | 1383.97 | |
| | | 87 57.8 | 172.57 | +3 +6.13 | −3 +172.46 | | | |
| $P_4$ | +0.1 189 20.6 | | | | | 2192.45 | 1556.40 | |
| | | 97 18.5 | 160.07 | +2 −12.73 | −2 +99.26 | | | |
| $P_5$ | +0.1 179 59.3 | | | | | 2179.74 | 1655.64 | |
| | | 97 17.9 | 102.48 | +2 −13.92 | −2 +101.65 | | | |
| $B$ ($P_6$) | +0.2 129 27.4 | | | | | 2166.74 | 1757.27 | |
| | | 46 45.5 | | $\Sigma$ = −341.10 | +541.78 | $x_B - x_A$ = −340.95 | $y_B - y_A$ = 541.64 | |
| $N$ | $\Sigma$ = 888°45.3′ | | | | | | | |
| | | | $\Sigma$ = 740.00 | $f_x$ = −0.15 | $f_y$ = +0.14 | | | |
| | | $\alpha_{终} - \alpha_{始}$ = −191°11.0′ | | $f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ = 0.20 | | | | |
| | | | | $K = \frac{f_s}{\Sigma s} = \frac{0.20}{740} \approx \frac{1}{3700} < \frac{1}{2000}$ | | | | |

$f_\beta$ = −0.7′　　$f_{\beta容}$ = ±25″$\sqrt{6}$ = ±1.0′

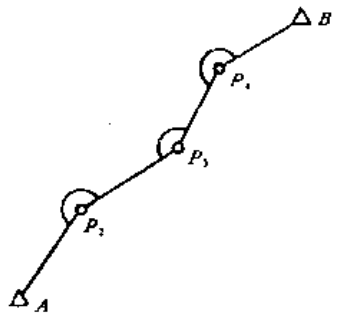



图 8-16

## 无连接角导线计算表

表 8-2

| 点号 | 观测角 $\beta$ | 假定坐标方位角 $\alpha'$ | 边长 $s$(m) | $\Delta x'$(m) | $\Delta y'$(m) | $\Delta x$(m) | $\Delta y$(m) | $x$(m) | $y$(m) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | | 20 00 00 | 51.794 | +48.670 | +17.715 | −5 +51.133 | −2 +8.247 | 5075.215 | 5111.594 |
| | | | | | | | | 5126.343 | 5119.839 |
| $P_1$ | 211 35 05 | 51 35 05 | 66.781 | +41.495 | +52.325 | −7 +50.594 | −3 +43.589 | | |
| $P_2$ | 144 35 41 | | | | | | | 5176.930 | 5163.425 |
| | | 16 10 46 | 123.898 | +118.991 | +34.524 | −12 +123.360 | −6 +11.533 | | |
| $P_3$ | 208 33 07 | | | | | | | 5300.278 | 5174.952 |
| | | 45 03 53 | 146.298 | +103.331 | +103.565 | −15 +120.962 | −7 +82.287 | | |
| $B$ | | | $\Sigma$388.771 | | $\Sigma$ | 346.049 | 145.656 | 5421.225 | 5257.232 |
| | | $\alpha_{AB}'$ = 33°39′55″ | | | $f_x$ = +39mm | $f_y$ = +18mm | | | |
| | | $\alpha_{AB}$ = 22°49′36″ | | | $f_s = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$ = 43mm | | $\frac{f_s}{\Sigma s} = \frac{1}{9051} < \frac{1}{2000}$ | | |
| | | $\delta = \alpha_{AB} - \alpha_{AB}'$ = −10°50′19″ | | | | | | | |

面。

第五步即根据起始点坐标及改正后的坐标增量依次计算各导线点的坐标。由推算而得的$B$点的坐标应与已知值完全相符，否则应检查计算中的错误所在，而加以更正。

（二）无连接角的附合导线的计算

例 8-2　表8-2为图8-16导线的全部计算数据。因由假定坐标方位角$\alpha'$计算出的导线位置与实际位置之间相差一个$\delta$角，故表中的$\Delta x$、$\Delta y$可按下列旋转公式求得，

$$\begin{aligned}\Delta x_{ij} &= \Delta x'_{ij}\cos\delta - \Delta y'_{ij}\sin\delta \\ \Delta y_{ij} &= \Delta y'_{ij}\cos\delta + \Delta x'_{ij}\sin\delta\end{aligned} \qquad (8\text{-}19)$$

计算顺序如下：

1.由观测手簿抄录水平角$\beta$和边长$S$；

2.假设$AP_2$的坐标方位角为20°00′00″，然后依次推算各边的假定坐标方位角；

3.由$\alpha'_{ij}$和$S_{ij}$计算$\Delta x'_{ij}$、$\Delta y'_{ij}$；

4.计算$x'_B$、$y'_B$：

$$x'_B = x_A + \Sigma\Delta x'$$
$$y'_B = y_A + \Sigma\Delta y'$$

5.按（8-5）式反算$\alpha_{AB}$、$\alpha'_{AB}$，计算$\delta$，

$$\delta = \alpha_{AB} - \alpha'_{AB}$$

6.按（8-19）式和（8-8）式计算$\Delta x_{ij}$、$\Delta y_{ij}$和$f_x$、$f_y$；

7.计算全长闭合差$f_s$及全长相对闭合差并检查其是否小于规定的1/2000；

8.按（8-9）式计算$v_{\Delta x}$、$v_{\Delta y}$及推算各点的坐标$x$、$y$。

## §8-5　导线网的平差

上节所述单一导线的计算方法多用于低精度的地形测量中。随着电子计算机的普及，对导线的平差计算工作大多采用严密平差程序。严密平差属《测量平差基础》的内容，本教材不予讲述。

如果对计算结果的要求不甚严密，也可采用近似方法计算导线网。其原则是将计算要素分为坐标方位角和纵、横坐标三类。首先对坐标方位角单独进行平差计算，然后根据计算出的坐标方位角再分别对纵、横坐标进行计算，最后求得各导线点的坐标值。这种方法称为分别平差法。

下面以一个结点的导线网为例说明坐标方位角的计算方法。

如图8-17为三条导线构成一个结点的导线网。可先选定与结点相连结的任一导线边作为结边，一般最好选在边数较多的一条导线上，如$DD'$。由已知方向及所测的转折角分别沿线路$L_1$、$L_2$、$L_3$推算结边的坐标方位角$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$。设各线路的转折角数分别为$n_1+1=4$、$n_2+1=3$、$n_3+1=3$，则结边的坐标方位角$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$的权为$p_{\alpha_1}=\frac{c}{4}$、$p_{\alpha_2}=\frac{c}{3}$、$p_{\alpha_3}=\frac{c}{3}$，其中$c$为任意常数，按带权平均值公式可算得$DD'$边的坐标方位角的最或然值为

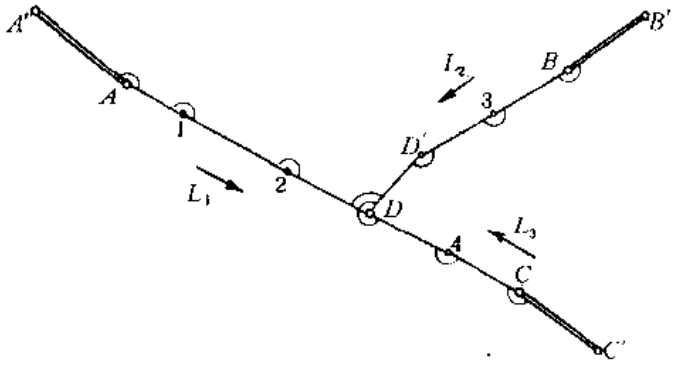



图 8-17

$$\alpha_{DD'} = \frac{P_{\alpha_1}\alpha_1 + P_{\alpha_2}\alpha_2 + P_{\alpha_3}\alpha_3}{P_{\alpha_1} + P_{\alpha_2} + P_{\alpha_3}}$$

算得结边坐标方位角的最或然值后，则将三个已知方向至$DD'$间的线路作为附合导线，计算其角度闭合差并改正各转折角的观测值。算出各导线边的坐标方位角。

至于纵、横坐标的计算，可如水准测量那样进行。取已知点的坐标与高程相应，坐标增量与高差相应，则一切过程均与水准网完全相同。

多于一个结点的导线网，也可采用等权代替法进行计算，其原理和方法均与水准网相同。

## §8-6 检查导线测量错误的方法

在单导线的计算中，当角度闭合差或全长闭合差超过其容许范围时，很可能是测角或量边发生了错误，也可能是在计算坐标增量时用错了边的坐标方位角或边长。测角错误将首先表现于角度闭合差的超限，而边长错误及用错边的坐标方位角则将表现于全长闭合差的超限。

每当发现闭合差超过容许范围时，应首先检查原始手簿记录及草图数据有无错误，然后再检查全部计算。如均不能发现错误，则到实地检查外业。不论检查计算或外业，特别是外业，如能先确定最可能发生错误的地方，从这些地方着手检查，有可能立即检查出错误，而节省人力和时间。下面就是讨论如何寻找最可能发生错误所在的方法。

1. 角度闭合差超限，检查角度错误

设欲确定如图8-18所示附合导线$A\cdots\cdots B$中之测角错误时，可根据未经调整的角度自$A$向$B$计算各边的坐标方位角和各导线点的坐标，并同样自$B$向$A$进行推算。如果只有一点的坐标极为接近，而其他各点均有较大的差数，即表示坐标很接近的这一点上，其测角有错。若错误较大（如5′以上），直接用图解法亦可发现错误所在。即先自$A$向$B$用量角器和比例直尺按角度和边长画导线，然后再由$B$向$A$画，两条导线相交的导线点即测错角的地方。

对于闭合导线也可采用此法进行检查，不过不是从两点对向检查，而是从一点开始以

顺时针方向和反时针方向按同法作对向检查。

2. 全长闭合差超限，检查边长或坐标方位角的错误

角度闭合差未超限才进行全长闭合差的计算，所以当全长闭合差超限时错误可能发生于边长或坐标方位角。若错误发生于边长，例如图8-19中的$de$边上错了$ee'$，则闭合差$BB'$将平行于该边。若错误系由于计算坐标增量时用错了$ef$的坐标方位角（图8-20），则




图 8-18

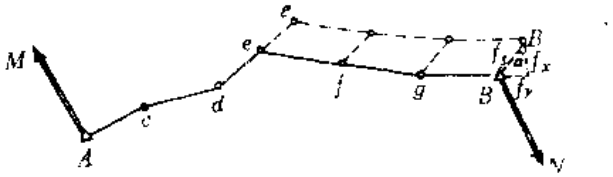



图 8-19

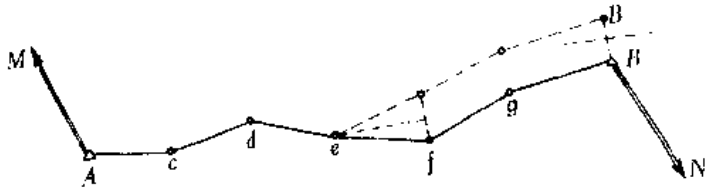



图 8-20

最后的闭合差将大致垂直于错误方向的导线边。为了要确定错误所在，就必须先确定全长闭合差的方向。

由图8-19可得全长闭合差$BB'$的坐标方位角之正切公式为

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f_y}{f_x},$$

根据上式得$\alpha$后，则将其与各边的坐标方位角相比较。如有与之相差约90°者，则检查其坐标方位角有无用错或算错。如有与之平行或大致平行的导线边，则应检查边长的计算。如果从手簿记录或计算中检查不出错误，则到现场检查相应的边长丈量。

上述的寻找错误方法，仅对只有一个错误存在时方为有效。

## §8-7 导线测量的精度

本节只对各导线边长相等、导线转折角均为180°（连接角除外）的等边直伸导线的精度进行讨论。

### 一、直伸支导线终点的中误差

设有等边直伸支导线（图8-21），$A$是已知点，$P_2$、$P_3$……$P_{n+1}$是导线点，$\beta_1$、$\beta_2$……$\beta_n$是等精度观测的转折角，$s$是导线各边的边长。

由于量边有误差，将使导线点在导线长度方向产生位移，这种位移称为纵向误差，相

应的中误差称为**纵向中误差**，以$m_l$表示。由于测角有误差，将使导线点在导线长度的垂直方向产生位移，这种位移称为**横向误差**，相应的中误差称为**横向中误差**，以$m_u$表示。

下面来讨论测角和量边误差对导线终点$P_{n+1}$的影响（图8-22）：

设距离丈量的单位权中误差为$\mu$，当导线终点$P_{n+1}$离开已知点$A$的长度为$S=ns$时，距离丈量的中误差为

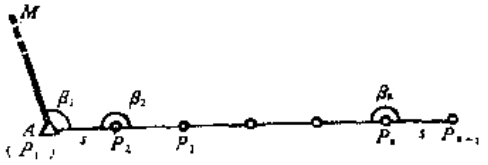



图 8-21

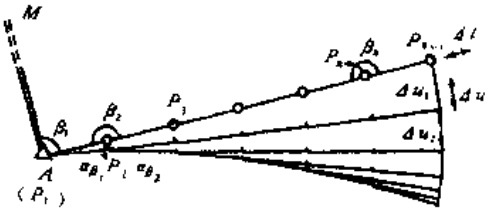



图 8-22

$$m_s=\mu\sqrt{S}$$

距离丈量中误差，也就是导线终点$P_{n+1}$在导线纵向的中误差。即

$$m_l=m_s=\mu\sqrt{S}\ ●\tag{8-20}$$

下面再讨论测角误差的影响：当第一个转折角$\beta_1$有误差$d\beta_1$，其他转折角都没有误差时，将使导线终点产生横向位移$\Delta u_1$（图8-22），而$\Delta u_1=ns\frac{d\beta_1}{\rho}$。同样，当第二个转折角$\beta_2$有误差$d\beta_2$，而其他转折角都没有误差时，导线终点$P_{n+1}$又产生横向位移$\Delta u_2$，$\Delta u_2=(n-1)s\frac{d\beta_2}{\rho}$。依此类推，由于$\beta_1$、$\beta_2$……$\beta_n$有误差$d\beta_1$、$d\beta_2$……$d\beta_n$，将使导线终点$P_{n+1}$产生横向位移的真误差$\Delta u$为

$$\begin{aligned}\Delta u&=\Delta u_1+\Delta u_2+\cdots\cdots+\Delta u_n\\&=ns\frac{d\beta_1}{\rho}+(n-1)s\frac{d\beta_2}{\rho}+\cdots\cdots+s\frac{d\beta_n}{\rho}\end{aligned}\tag{a}$$

$P_{n+1}$点的横向中误差为

$$\begin{aligned}m_u&=\frac{m_\beta\cdot s}{\rho}\sqrt{n^2+(n-1)^2+\cdots+1^2}\\&=\frac{m_\beta\cdot s}{\rho}\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\approx\frac{m_\beta S}{\rho}\sqrt{\frac{n+1.5}{3}}\end{aligned}\tag{8-21}$$

导线点$P_{n+1}$的点位中误差$m_{P_{n+1}}$为

$$m_{P_{n+1}}=\pm\sqrt{m_l^2+m_u^2}=\pm\sqrt{\mu^2S+\frac{m_\beta^2\cdot S^2}{\rho^2}\cdot\frac{n+1.5}{3}}\tag{8-22}$$

或

$$\frac{m_{P_{n+1}}}{S}=\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{S}+\frac{m_\beta^2}{\rho^2}\cdot\frac{n+1.5}{3}}$$

● 当考虑系统误差时，$m_l^2=\mu^2s+\lambda^2s^2$，式中$\lambda$是单位长度的系统误差。

上两式是估算直伸和边长近似相等的支导线终点点位中误差的公式。当估算导线点$P_i$的中误差时，要注意(8-22)式中的$S=(i-1)s$，以及$n=i-1$，然后按（8-22）式计算。

从（8-20）、（8-21）、（8-22）式可以看出：**当导线长度增加时，横向中误差比纵向中误差增加得快，所以要提高导线的精度就应该减少导线转折点的数量，或适当地提高测角精度。**

在距离丈量中，由于尺长有误差及某些外界的影响，使量距结果带有系统误差的影响。设量距时单位长度的系统中误差为$\lambda$，则长度为$S$的距离丈量结果中带有的系统误差为$\lambda \cdot S$。

此外导线点位还受到起始点点位中误差$m_A$的影响，以及由于起始坐标方位角中误差$m_{\alpha_{起}}$而使导线终点产生横向位移为$\frac{m_{\alpha_{起}}}{\rho}\cdot S$的影响。考虑到起始数据误差、测量中的偶然误差及量距中系统误差的综合影响，导线点$P_{n+1}$的点位总误差为

$$M_{P_{n+1}}=\pm\sqrt{m_A^2+\left(\frac{m_{\alpha_{起}}}{\rho}\cdot S\right)^2+\mu^2 S-\left(\frac{m_\beta\cdot S}{\rho}\right)^2\frac{n+1.5}{3}+(\lambda\cdot S)^2} \tag{8-23}$$

例 8-3　设测量某一直伸等边支导线，全长0.5km，布设4条边，测角中误差$m_\beta=\pm 12''$，量距的偶然误差系数$\mu=\pm 0.001$，求导线终点的点位中误差。

解：根据（8-22）式得

$$m_{终}=\pm\sqrt{(0.001)^2\times 500+\frac{12^2}{(206000)^2}\times 500^2\times\frac{4+1.5}{3}}$$

$$=\pm 0.04\text{m}$$

对近于直伸的导线，如图8-23，其终点纵、横向中误差的计算应作如下考虑：纵向为$AP_{n+1}$连线的方向，也称闭合线方向；横向为与纵向相垂直的方向，因此，$P_{n+1}$点的纵向中误差$m_l$为

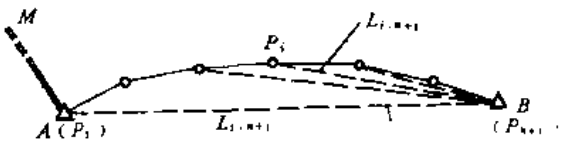


图 8-23

$$m_l=\mu\sqrt{L_{1,n+1}}\ ;$$

横向中误差$m_u$为

$$m_u=\frac{m}{\rho}\sqrt{(L^2_{i,n+1})}$$

式中，$L_{i,n+1}$为各导线点至$P_{n+1}$点的连线长。

## 二、直伸附合导线闭合差的中误差

对于起闭于两个已知点$A$、$B$之间的等边直伸导线（图8-24）它的两端都有已知坐标方位角控制，坐标计算时，首先要配赋坐标方位角闭合差，然后再计算导线的坐标闭合差（或纵横向闭合差）。附合导线的闭合差与支导线终点点位中误差不同之处在于，前者的角度是经过坐标方位角闭合差配赋过的，而后者没有经过任何配赋。

对于直伸附合导线，由于角度经过坐标方位角闭合差的配赋，角度的精度被提高了，因此角度误差所引起的导线横向中误差也会减小，但是不能减小由于距离丈量误差所引起的导线纵向中误差。所以讨论直伸附合导线闭合差时，只要讨论角度经过坐标方位角闭合差配赋后，角度误差对导线终点的影响，而距离丈量误差对终点的影响与支导线是相同的，即$m_s = \mu\sqrt{S}$。

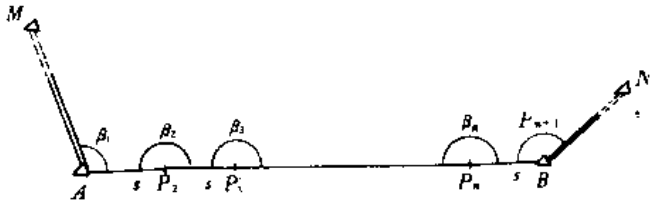


图 8-24

设导线转折角的观测值为$\beta_i$（$i = 1$、$2 \cdots\cdots n+1$，下同），$\beta_i$的真误差为$d\beta_i$改正数为$v_i$，经过坐标方位角配赋后的角值为$\beta'_i$、$\beta'_i$的真误差为$d\beta'_i$。图18-3中附合导线的坐标方位角应满足的条件为

$$\alpha_{MA} + [\beta'] - (n+1)180^\circ - \alpha_{BN} = 0$$

或

$$[v] + f_\beta = 0$$

式中

$$f_\beta = \alpha_{MA} + [\beta] - (n+1)180^\circ - \alpha_{BN} \qquad (b)$$

当观测角是等精度、只考虑坐标方位角条件时，角度改正数等于坐标方位角闭合差平均数的反号，即

$$v_1 = v_2 = \cdots\cdots = v_{n+1} = -\frac{f_\beta}{n+1} \qquad (c)$$

经过坐标方位角闭合差配赋后的角度为

$$\beta'_i = \beta_i + v_i = \beta_i - \frac{f_\beta}{n+1}$$

$$= \beta_i - \frac{1}{n+1}\{\alpha_{MA} + [\beta] - (n+1)180^\circ - \alpha_{BN}\}$$

所以$\beta'_i$的误差$d\beta'_i$为

$$d\beta'_i = d\beta_i - \frac{1}{n+1}[d\beta] \qquad (d)$$

将上式代入（$a$)式，就可以求得终点横向位移真误差$\Delta u$为

$$\Delta u = ns\frac{d\beta'_1}{\rho} + (n-1)s\frac{d\beta'_2}{\rho} + \cdots\cdots + s\frac{d\beta'_n}{\rho}$$

顾及（$d$)式，上式为

$$\Delta u = \frac{s}{\rho}\left\{n\left(d\beta_1 - \frac{1}{n+1}[d\beta]\right) + (n-1)\left(d\beta_2 - \frac{1}{n+1}[d\beta]\right) + \cdots\right.$$

$$\left. \cdots + \left(d\beta_n - \frac{1}{n+1}[d\beta]\right)\right\}$$

$$= \frac{s}{\rho}\left\{ nd\beta_1 + (n-1)d\beta_2 + \cdots\cdots + d\beta_n - \frac{n+(n-1)+\cdots\cdots+1}{n+1}[d\beta] \right\}$$

$$= \frac{s}{\rho}\left\{ nd\beta_1 + (n-1)d\beta_2 + \cdots\cdots + d\beta_n - \frac{n}{2}[d\beta] \right\}$$

$$= \frac{s}{\rho}\left\{ \frac{n}{2}d\beta_1 + \left(\frac{n}{2}-1\right)d\beta_2 + \cdots\cdots - \left(\frac{n}{2}-1\right)d\beta_n - \frac{n}{2}d\beta_{n+1} \right\}$$

根据上式，得出横向中误差$m_u$为

$$m_u = \frac{sm_\beta}{\rho}\sqrt{2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}-1\right)^2 + \cdots\cdots + 2^2 + 1^2\right]}$$

$$= \frac{sm_\beta}{\rho}\sqrt{2\times\frac{n(n+1)(n-2)}{24}}$$

$$\approx \frac{Sm_\beta}{\rho}\sqrt{\frac{n+3}{12}}$$

所以直伸附合导线闭合差的中误差为

$$m = \pm\sqrt{m_f^2 + m_u^2} = \pm\sqrt{\mu^2 S + \frac{S^2 m_\beta^2}{\rho^2}\cdot\frac{n+3}{12}} \qquad (8\text{-}25)$$

从上式中可以看出，**当$S$为一定值时，边数$n$愈大**（即每条边愈短），**则对$m$（或横向中误差）的影响愈大，所以布设导线时必须避免用短的导线边。**

比较公式（8-24）和（8-22）可以看出：直伸等边附合导线的横向中误差约为同样情形的支导线的横向中误差的一半。或者说，**当导线转折角经坐标方位角闭合差配赋后，由此计算导线点的坐标，其横向中误差比转折角未经改正前减少一半。**

下面讨论量距系统误差和起始数据误差对直伸附合导线闭合差的影响。

量距系统误差对长度闭合差的影响为$\lambda\cdot S$。

设起闭点点位中误差为$m_A$、$m_B$，起闭坐标方位角的真误差为$d\alpha_{MA}$、$d\alpha_{BN}$，其相应的中误差为$m_{\alpha_{MA}}$、$m_{\alpha_{BN}}$。起闭点对长度闭合差的影响为$\sqrt{m_A^2+m_B^2}$，当$m_A=m_B$时，其影响为$\sqrt{2}\,m_A$。下面再来讨论起闭坐标方位角误差对导线长度闭合的影响。从（$b$）式中可以看出，在坐标方位角条件的闭合差中，有起闭坐标方位角的误差$d\alpha_{MA}-d\alpha_{BN}$，从转折角改正数公式（$c$）可知：转折角改正数中包括的起闭坐标方位角误差为：$-\frac{1}{n+1}(d\alpha_{MA}-d\alpha_{BN})$，这样，起闭坐标方位角误差对长度闭合差的影响为

$$\Delta u' = \frac{d\alpha_{MA}}{\rho}\cdot S - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{d\alpha_{MA}-d\alpha_{BN}}{\rho}s\{n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1\}$$

$$= \frac{d\alpha_{MA}}{\rho}\cdot S - \frac{d\alpha_{MA}-d\alpha_{BN}}{\rho}s\cdot\frac{n}{2}$$

$$= \frac{d\alpha_{MA}}{\rho}S - \frac{d\alpha_{MA}-d\alpha_{BN}}{\rho}\cdot\frac{S}{2}$$

$$= \left( \frac{da_{MA}}{\rho} - \frac{da_{BN}}{\rho} \right) \frac{S}{2}$$

上式的中误差为

$$m'_u = \pm \frac{S}{2\rho} \sqrt{m_{a_{MA}}^2 + m_{a_{BN}}^2}$$

当$m_{a_{MA}} = m_{a_{BN}} = m_{a_{起}}$时，

$$m'_u = \frac{S}{\sqrt{2}\,\rho} m_{a_{起}} \qquad (e)$$

考虑起始数据误差、测量中的偶然误差及量距系统误差的综合影响，得直伸导线闭合差总的中误差约为

$$M = \pm \sqrt{m_A^2 + m_B^2 + \frac{1}{2}\left( \frac{m_{a_{起}} S}{\rho} \right)^2 + \mu^2 S + \left( \frac{m_\beta \cdot S}{\rho} \right)^2 \frac{n+3}{12} + \lambda^2 S^2}$$

或

$$M = \pm \sqrt{2\,m_A^2 + \frac{1}{2}\left( \frac{m_{a_{起}} S}{\rho} \right)^2 + \mu^2 S + \left( \frac{m_\beta \cdot S}{\rho} \right)^2 \frac{n+3}{12} + \lambda^2 S^2} \qquad (8\text{-}25)$$

### 三、直伸附合导线最弱点的中误差

对于直伸附合导线来说，导线的纵向和横向中误差最大的地方是导线的中间点$K$（图8-25）。$K$点距离已知点$A$、$B$的长度都是$S/2$。导线点$K$的最后坐标可以这样求出，即从已知点$A$、$B$分别推算$K$的两组坐标，而取其算术平均值。然后从已知点$A$（或$B$）求出$K$点的点位中误差，再按求算术平均值中误差的公式，求$K$点最后坐标的中误差。

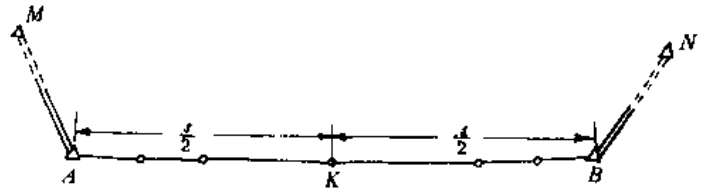



图 8-25

从已知点$A$（或$B$）推算得的$K$点的点位中误差$m'_K$，是将$S/2$、$n/2$分别代替（18-5）式中的$S$、$n$而求得，即

$$m'_K = \pm \sqrt{\mu^2 \frac{S}{2} + \left( \frac{S \cdot m_\beta}{\rho} \right)^2 \frac{n+6}{96}}$$

而$K$点最后坐标的点位中误差$m_K$为

$$m_K = \frac{m'_K}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mu^2 S + \left( \frac{S \cdot m_\beta}{\rho} \right)^2 \frac{n+6}{48}} \qquad (8\text{-}26)$$

设$m_l$为导线全长纵向闭合差中误差。$m'_u$为经方位角闭合差分配后，导线全长横向闭合差中误差。$m_u$为未经方位角闭合差分配导线全长横向闭合差中误差。比较（8-22）、（8-24）和（8-26）式可得

$$m_{K_l} = \frac{1}{2} m_l \tag{8-27}$$

$$m_{K_u} = \frac{1}{4} m'_u + \frac{1}{8} m_u$$

式中 $m_{K_l}$——$K$ 点的纵向闭合差中误差；

$m_{K_u}$——$K$ 点的横向闭合差中误差。

可见

$$m_K^2 = m_{K_l}^2 + m_{u_l}^2 = \frac{1}{4} m_l^2 + \frac{1}{64} m_u^2$$

若

$$m_l = m_u = m$$

则

$$M = m\sqrt{2}$$

$$m_K^2 = \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{64} \right) m^2 \approx \frac{1}{7.5} \cdot 2m^2 = \frac{1}{7.5} M^2$$

所以

$$m_K \approx \sqrt{\frac{1}{7.5}} M^2 \approx \frac{1}{2.7} M \tag{8-28}$$

例 8-4 已知某直伸等边附合导线，全长 6 km，布设10条边，测角中误差 $m_\beta = \pm 12''$，量距的单位权中误差 $\mu = \pm 0.001$，求导线最弱点的点位中误差。

解：根据（8-26）式得导线最弱点的点位中误差 $m_K$ 为

$$m_K = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(0.001)^2 \times 6000 + \left( \frac{12}{206265} \times 6000 \right)^2 \times \frac{10+6}{48}} = \pm 0.22\text{m}$$

下面讨论起始数据误差及量距系统误差的影响问题。

考虑到量距系统误差的影响是与直伸导线的长度成正比，当计算附合导线中任何一点坐标时，已经按边长配赋坐标闭合差，这样求出的导线点的坐标中就消去了系统误差的影响。

对于导线中点来说，当起闭点点位中误差相等，即 $m_A = m_B$ 时，其影响为 $\frac{1}{\sqrt{2}} m_A$。同时，仿照讨论起闭坐标方位角中误差对导线长度闭合差影响的方法，可得起闭坐标方位角对平差前导线中点的影响为

$$u_{K1} = \frac{da_{MA}}{\rho} \frac{S}{2} - \frac{1}{n+1} \frac{da_{MA} - da_{BN}}{\rho} \cdot S \left\{ \frac{n}{2} + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) + \cdots + 2 + 1 \right\}$$

$$\approx \frac{da_{MA}}{\rho} \frac{S}{2} - \frac{da_{MA} - da_{BN}}{\rho} \frac{S}{8}$$

$$= \frac{da_{MA}}{\rho} \frac{3}{8} S + \frac{da_{BN}}{\rho} \frac{S}{8}$$

当从 $B$ 点推算时，

$$u_{K2} = -\left( \frac{da_{BN}}{\rho} \frac{3S}{8} + \frac{da_{MA}}{\rho} \frac{S}{8} \right)$$

平差后 $K$ 点的横向位移为

$$u_K = \frac{1}{2}(u_{K_1} + u_{K_2}) = \frac{S}{8\rho}(da_{MA} - da_{BN})$$

相应的中误差为

$$m''_K = \pm\frac{S}{8\rho}\sqrt{m_{a_{MA}}^2 + m_{a_{BN}}^2} = \frac{S}{4\sqrt{2}\rho}m_{a_{起}}$$

将上式与（e）式比较可知，起闭坐标方位角对直伸导线平差后导线中点的影响，为起闭坐标方位角对导线长度闭合差影响的四分之一。

所以考虑起始数据误差、测量中偶然误差及量距系统误差的综合影响，得直伸附合导线最弱点点位中误差为

$$M_K = \pm\sqrt{m_A^2 + \frac{1}{32}\left(\frac{S\cdot m_{a_{起}}}{\rho}\right)^2 + \frac{1}{4}(\mu^2 S) + \left(\frac{S\cdot m_\beta}{\rho}\right)^2\frac{n+6}{172}} \qquad (8\text{-}29)$$

## 四、导线的曲折系数

在直伸导线中，直线丈量的误差形成导线的纵向误差，测角误差形成导线的横向误差，因而在直伸导线平差时，可以把导线的纵向误差按边长分配，把横向误差按角度分配。这样分配可以较完善地消除系统误差的影响。所以在布设等级导线时，一般要求布设成近于直伸的导线，即要求在三角点与结点，或结点与结点之间布设近于直伸的导线。而在布设作为地形控制用的导线时，则对此要求不严。

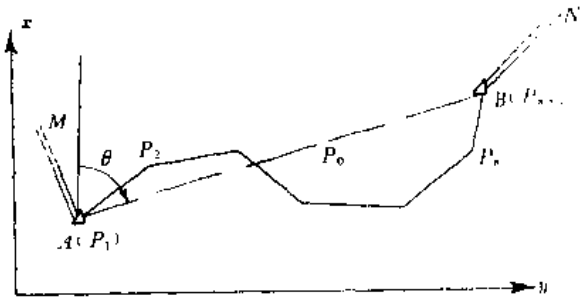



图 8-26

下面讨论导线是否近于直伸的标准问题。

在导线计算时，当角度经方位角闭合差配赋后，设起始点$A$、$B$（图8-26）坐标误差很小，可以忽略不计时，要求

$$\Delta x_1 + d\Delta x_1 + \Delta x_2 + d\Delta x_2 + \cdots\cdots + \Delta x_n + d\Delta x_n + x_A - x_B = 0$$

即

$$\cos\alpha_1 ds_1 + \cos\alpha_2 ds_2 + \cdots\cdots + \cos\alpha_n ds_n - s_1\sin\alpha_1\frac{d\alpha_1}{\rho} - s_2\sin\alpha_2\frac{d\alpha_2}{\rho} \cdots\cdots - s_n\sin\alpha_n\frac{d\alpha_n}{\rho} + f_x = 0$$

式中：$f_x = [\Delta x] + x_A - x_B$顾及$\alpha_1 = \alpha_{MA} + \beta'_1 - 180°$，$\alpha_2 = \alpha_{MA} + \beta'_1 + \beta'_2 - 2\cdot 180°$、……$\alpha_n = \alpha_{MA} + [\beta'] - n\cdot 180°$，以及$y_{n+1} - y_1 = \Delta y_i + \Delta y_{i+1} + \cdots\cdots + \Delta y_n$，

得

$$-f_x = [\cos\alpha ds] - \frac{1}{\rho}[(y_{n+1} - y)d\beta'] \qquad (f)$$

设各导线点的重心为$P_0$，其坐标$x_0 = \frac{[x]}{n+1}$，$y_0 = \frac{[y]}{n+1}$。过重心$P_0$作平行于$x$、$y$轴

的$\zeta$、$\eta$坐标轴，而导线点$P_i$在新坐标轴系中的坐标$\zeta_i$、$\eta_i$称重心坐标。显然$\zeta_i = x_i - x_0$，$\eta_i = y_i - y_0$。在（$f$）式中的末项

$$[(y_{n+1} - y)d\beta'] = y_{n+1}[d\beta'] - [yd\beta']$$

从（$d$）式知：$[d\beta'] = [d\beta] - \frac{n+1}{n+1}[d\beta] = 0$。并以$y_i = \eta_i + y_0$代入上式：

$$[(y_{n+1} - y)d\beta'] = -[(\eta + y_0)d\beta'] = -[\eta d\beta']$$

顾及（$d$）式及$[\eta] = [y] - (n+1)y_0 = 0$，上式为

$$[(y_{n+1} - y)d\beta'] = -\left[\eta\left(d\beta - \frac{1}{n+1}[d\beta]\right)\right]$$

$$= -[\eta d\beta] + \frac{[d\beta]}{n+1}[\eta]$$

$$= -[\eta d\beta]$$

将上式代入（$f$）式得

$$-f_x = [\cos a ds] + \frac{1}{\rho}[\eta d\beta]$$

已知$m_s = \mu\sqrt{s}$、测角中误差都等于$m_\beta$、$f_x$的中误差为$m_x$时，将上式的真误差转成中误差形式为

$$m_x^2 = \mu^2[s\cos^2 a] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2}[\eta^2]$$

当直线丈量中含有明显的系统误差时，系统误差将使求出的$P_{n+1}$点在闭合线$AB$方向移动$\lambda L$。设闭合差$AB$的坐标方位角为$\theta$，则$\lambda L$在两坐标轴上的投影为$\lambda L\cos\theta$和$\lambda L\sin\theta$。于是上式为

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= \lambda^2 L^2\cos^2\theta + \mu^2[s\cos^2 a] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2}[\eta^2] \\ m_y^2 &= \lambda^2 L^2\sin^2\theta + \mu^2[s\sin^2 a] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2}[\xi^2] \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

同理得

为了求出导线的纵向中误差和横向中误差，可以将图8-26中的坐标轴转动$\theta$角，这时新坐标轴$x'$与闭合线$AB$方向相同，这样各导线边的坐标方位角为

$$a'_i = a_i - \theta$$

用$\zeta'_i$、$\eta'_i$表示各导线点在新坐标轴系中的重心坐标。这时（$g$）式为

$$\left.\begin{aligned} m_l^2 &= \lambda^2 L^2 + \mu^2[s\cos^2 a'] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2}[\eta'^2] \\ m_u^2 &= \mu^2[s\sin^2 a'] + \frac{m_\beta^2}{\rho^2}[\xi'^2] \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

在求$m_l$的等式中，前两项是直线丈量误差的影响，后一项是测角误差的影响；当导线是直伸形状时，后一项为零；若后一项很小时，可以认为导线是近于直伸的。设前两项之

和为$m_{l_s}^2$，而后一项为$m_{l_\beta}^2$，则$m_l^2 = m_{l_s}^2 + m_{l_\beta}^2$。设$m_{l_\beta}$较小，只为$\frac{1}{K}m_{l_s}$，而$K \gg 1$，即$m_{l_\beta} = \frac{1}{K}m_{l_s}$时，$m_l^2 = m_{l_s}^2\left(1 + \frac{1}{K^2}\right)$，则

$$m_l = m_{l_s}\left(1 + \frac{1}{2K^2}\right)$$

当$K$取5～10时，$\frac{1}{2K^2}$等于$\frac{1}{50}$～$\frac{1}{200}$，这时可以认为：$m_l = m_{l_s}$。即导线为近于直伸的。顾及$m_{l_\beta} = \frac{1}{K}m_l$，这时要求

$$\frac{m_{l_\beta}}{m_l} \leqslant \frac{1}{K}$$

即

$$\frac{m_\beta}{\rho}\frac{\sqrt{[\eta'^2]}}{m_l} \leqslant \frac{1}{K}$$

或

$$g = \frac{\sqrt{[\eta'^2]}}{L} \leqslant \frac{m_l \cdot \rho}{LK m_\beta} \qquad (8\text{-}30)$$

式中$g$称为导线的曲折系数，$L$为导线全长。在导线设计时，可以根据选点草图，量出各导线点到闭合线的垂足$\eta'$，按（8-30）式算出$g$。这个$g$值要小于或等于$\frac{\rho \cdot m_l}{LK m_\beta}$。而$m_l$、$m_\beta$、$K$等在各级导线中都有相应的要求。例如有的规范要求三等导线中的$m_\beta = \pm 2.5''$、$\frac{m_l}{L} = \frac{1}{60000}$。若令$K = 5$，则

$$g \leqslant \frac{206000}{5 \times 2.5 \times 60000} = \frac{1}{3.6}$$

当$g$满足上式要求，则可认为该三等导线是近于直伸的；这时导线的纵向误差将很少受到测角误差的影响。也可以用限制导线点的$\eta'$值使不超过某一数值，来达到上述目的。例如国家规范中，要求一、二等导线中任一导线点至连接导线两端点的闭合边的垂距，不得大于闭合边长的1/5。

此外，还要考虑使横向误差很少受直线丈量误差的影响问题。根据上述同样思路、要求在（h）式的$m_u$等式中，直线丈量误差影响与横向中误差要满足

$$\frac{\mu\sqrt{[s\sin^2\alpha']}}{m_u} \leqslant \frac{1}{K} \qquad (8\text{-}31)$$

$K$仍为5～10之间的数值，以此来限制导线边与导线闭合线之间的偏角$\alpha'$不得大于某一限值。在国家规范中，要求一、二等导线中的任一导线边对连接导线两端点的闭合边的偏角（即导线边与闭合边的方位角之差）不得大于40°。

# 第九章　交会法和小三角测量

## §9-1　概　　述

在我国广阔的土地上，已经布设了一系列高精度的大地点（或称高级控制点）。这些大地点的平面坐标和高程可以从有关控制点成果表中查取。但是，这些点还比较稀少，必须根据实际需要，以大地点为基础，再发展若干精度较低的解析控制点。

解析控制点的布设形式是多种多样的：可以采用测角和量边联合作业的导线测量方法；也可以采用单是测角的作业方法，即测角交会和小三角测量；还可以采用测边交会的方法。

如果已知 $A$、$B$ 两点的坐标（图9-1），为了计算未知点 $P$ 的坐标，只要观测 $\angle A$ 和 $\angle B$ 就行了。这样测定未知点 $P$ 的平面坐标的方法，称为**前方交会**。

如果不是测定 $\angle A$ 和 $\angle B$，而是测定 $\angle A$ 和 $\angle P$（图9-2），或者测定 $\angle B$ 和 $\angle P$，同样也可以计算出未知点 $P$ 的坐标。这种方法称为**侧方交会**。

为了求得未知点 $P$ 的坐标，也可以在 $P$ 点上瞄准 $A$、$B$、$C$ 三个已知点，测得 $\angle\alpha$、$\angle\beta$（图9-3）。这种方法称为**后方交会**。

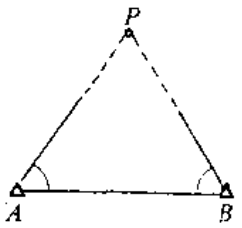



图 9-1

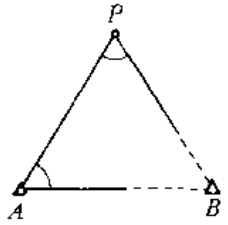



图 9-2

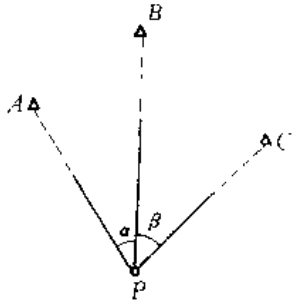



图 9-3

前方交会、侧方交会和后方交会统称为**测角交会法**，或经纬仪交会。用测角交会法测定未知点的坐标，由于图形结构简单，外业工作都比较简易，是经常采用的加密控制点的方法。

有时，测区条件比较困难，例如测区中的已知点较少，或者地物稠密，采用上述典型的测角交会有困难时，也可以因地制宜地采用**旁点交会法**（图9-4），即用已知点 $A$、$B$ 来测定未知点 $C$、$D$、$E$、$F$、$G$ 的坐标，或者采用**双点后方交会**（图9-5）来测定未知点 $P_1$、$P_2$ 的坐标。

目前电磁波测距仪已被广泛应用，在测定未知点坐标时，也可采用测量边长 $S_a$、$S_b$ 的方法，称为**测边交会法**（图9-6）。

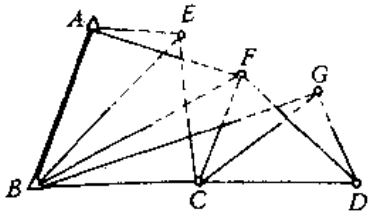



图 9-4

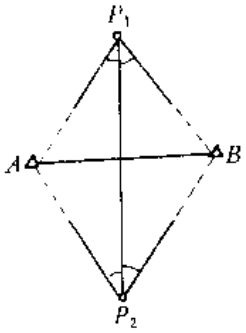



图 9-5

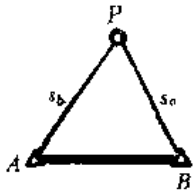



图 9-6

有时为了同时测定一系列未知点的坐标，可以采用结构比较复杂的图形。图9-7和图9-8的图形都是由一些相邻的三角形构成的复杂图形，这种结构的图形称为三角网。在三角网中的每个三角形的内角一般都要观测，测定这类图形的测量工作，称为**三角测量**。为了与高精度的国家等级三角测量有所区别，一般又称为**小三角测量**。小三角测量的图形结构是多种多样的，图9-7的图形称为**中点多边形**；图9-8是连接在两个已知点间的单三角锁，称为**线形三角锁**，简称**线形锁**。

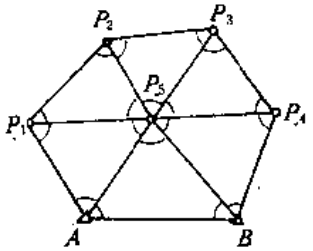



图 9-7

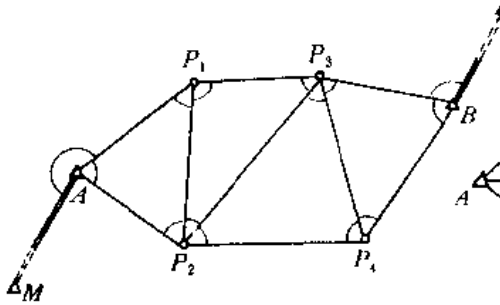



图 9-8(a)

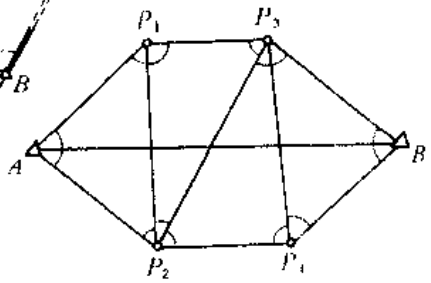



图 9-8(b)

在测设解析控制点时，不论采用测角交会法、测边交会法或者小三角测量，它们的作业步骤都是相同的，即首先进行外业测量工作，然后是内业计算。外业测量工作又分为选点、造标、埋石和观测。选点工作是先在测区已有的地形图上根据已知点分布情况，结合规范对控制点的要求，拟定解析控制点的布置计划，这步工作叫**室内选点**或**图上选点**，然后拿这个计划到野外踏勘，最后选定点位以完成选点工作。解析控制点一般宜布设在周围视线开阔的地方，以便于观测，又能控制较大的测区。当然，解析控制点的布设必须满足相应图形的技术要求(见本章以下各节)。如果布设的是航测成图用的野外控制点，则必须按照航测内业成图的要求布设(由航空摄影测量学讲述)。

选点工作完成以后，接着就是造标、埋石。通常是建立木质的或钢质的觇标。这些觇标的式样，有关规范均有具体规定。造标工作常先于埋石工作，以便觇标中心与标石中心易于在一条铅垂线上。如果不需要建立觇标，则在埋石点上竖立用三根铁丝拉紧的旗杆来代替觇标。

埋石工作用的中心标石，分为普通三角点标石(图9-9)和埋于岩石中的标志(图9-10)

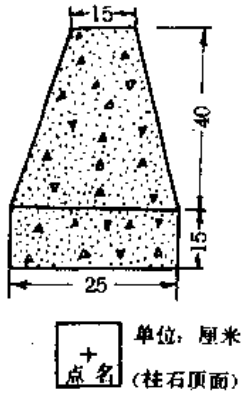



图 9-9

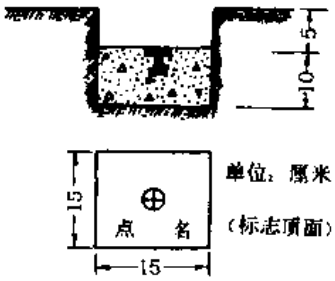



图 9-10

两种。在平地和丘陵地埋设普通三角标石。普通三角标石有上下两块，上面的一块叫柱石，下面的一块叫盘石。在山地一般可只埋设一块柱石。如果在岩石地带埋设标石发生困难时，可挖一小坑将标志用水泥浇灌固定在坑中（图9-10）。埋设普通三角标石时，柱石和盘石中心应在同一铅垂线上，最大偏差一般不应大于3mm。当保留时间不需要太长久时也可只埋设柱石。

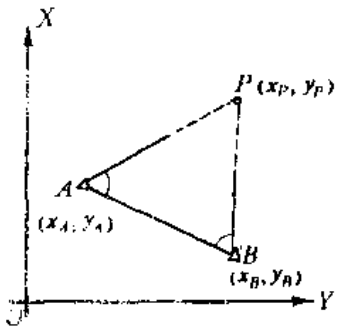



图 9-11

水平角观测完成以后，内业计算可以立即开始。内业计算的第一步是将外业观测资料进行全面的、认真的检查。在保证外业观测成果符合规范要求的前提下，首先是抄录已知数据，包括已知点坐标、已知边的边长和坐标方位角。如果成果表中没有后两项数据，则根据已知坐标用反算公式反算得出。其次是将观测角度归算到以标石为中心的水平角，即将观测角度加上归心改正数（见后续课程）。最后，根据不同的布设图形和各单位的作业习惯，采用不同的计算公式和表格，求出未知点的坐标。

## §9-2 前 方 交 会

在三角形$ABP$中（图9-11），已知点$A$、$B$的坐标为$x_A$、$y_A$和$x_B$、$y_B$。在$A$、$B$两点设站，测得$A$、$B$两角，通过解算三角形算出未知点$P$的坐标$x_P$、$y_P$，这是前方交会的基本概念。

如果图9-11中$AP$边的边长$S_{AP}$和坐标方位角$\alpha_{AP}$为已知，就可以按坐标正算公式求得$P$点的坐标，即

$$x_P = x_A + S_{AP} \cdot \cos\alpha_{AP}$$

$$y_P = y_A + S_{AP} \cdot \sin\alpha_{AP}$$

或

$$x_P - x_A = S_{AP} \cdot \cos\alpha_{AP}$$

$$y_P - y_A = S_{AP} \cdot \sin\alpha_{AP}$$

从图9-11可知，$\alpha_{AP} = \alpha_{AB} - A$，代入上式则得：

$$\begin{aligned} x_P - x_A &= S_{AP} \cdot \cos(\alpha_{AB} - A) \\ &= S_{AP}(\cos\alpha_{AB}\cos A + \sin\alpha_{AB}\sin A) \\ y_P - y_A &= S_{AP} \cdot \sin(\alpha_{AB} - A) \\ &= S_{AP}(\sin\alpha_{AB}\cos A - \cos\alpha_{AB}\sin A) \end{aligned}$$

因为

$$\cos\alpha_{AB} = \frac{x_B - x_A}{S_{AB}}$$

$$\sin\alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{S_{AB}}$$

则

$$x_P - x_A = \frac{S_{AP} \cdot \sin A}{S_{AB}}[(x_B - x_A)\mathrm{ctg}A + (y_B - y_A)]$$

$$y_P - y_A = \frac{S_{AP} \cdot \sin A}{S_{AB}}[(y_B - y_A)\mathrm{ctg}A - (x_B - x_A)]$$

根据正弦定理，得

$$\frac{S_{AP}}{S_{AB}} = \frac{\sin B}{\sin P} = \frac{\sin B}{\sin(A+B)}$$

则

$$\frac{S_{AP} \cdot \sin A}{S_{AB}} = \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)} = \frac{1}{\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B}$$

故

$$\left.\begin{aligned} x_P - x_A &= \frac{(x_B - x_A)\mathrm{ctg}A + (y_B - y_A)}{\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B} \\ y_P - y_A &= \frac{(y_B - y_A)\mathrm{ctg}A - (x_B - x_A)}{\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B} \end{aligned}\right\}$$

移项化简即得

$$\left.\begin{aligned} x_P &= \frac{x_A\mathrm{ctg}B + x_B\mathrm{ctg}A - y_A + y_B}{\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B} \\ y_P &= \frac{y_A\mathrm{ctg}B + y_B\mathrm{ctg}A + x_A - x_B}{\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B} \end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}1)$$

上式称为**余切公式**（或变形的**戎格公式**）。

如果将 $P$ 点代 $A$ 点，$A$ 点代 $B$ 点，则根据同样的推演可以得出：

$$\left.\begin{aligned} x_B &= \frac{x_P\mathrm{ctg}A + x_A\mathrm{ctg}P - y_P + y_A}{\mathrm{ctg}P + \mathrm{ctg}A} \\ y_B &= \frac{y_P\mathrm{ctg}A + y_A\mathrm{ctg}P + x_P - x_A}{\mathrm{ctg}P + \mathrm{ctg}A} \end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}2)$$

必须指出：1）在推导出（9-1）和（9-2）式时，是假设$\triangle ABP$（见图9-11）的点号是依$A$、$B$、$P$按逆时针方向编号的，其中$A$、$B$是已知点，$P$为未知点。2）求未知点坐标时，用（9-1）式。为了检查计算中有无错误，可以根据$A$、$P$点坐标，按（9-2）式计算$B$点坐标，并与$B$点的已知坐标核对。但是按（9-2）式只能发现计算中有无错误，不能发现角度测错及已知点坐标用错等错误，也不能提高计算成果的精度。为了避免外业观测发生错误，并提高未知点$P$的精度，在一般测量规范中，都要求布设有三个起始点的前方交会（见图9-12）。这时在$A$、$B$、$C$三个已知点向$P$点观测，测出了四个角值：$\angle\alpha_1$、$\angle\beta_1$、$\angle\alpha_2$、$\angle\beta_2$，分两组计算$P$点坐标。计算时可按$\triangle ABP$求$P$点坐标$x'_P$、$y'_P$，再按$\triangle BCP$求$P$点坐标$x''_P$、$y''_P$。当这两组坐标的较差在容许限差内，则取它们的平均值作为$P$点的最后坐标。在一般测量规范中，对于地形控制点，上述限差是这样规定的：要求两组算得的点位较差不大于两倍比例尺精度，用公式表示为

$$\Delta S=\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}\leqslant 2\times 0.1M(\text{mm}) \tag{9-3}$$

式中：$\delta x=x'_P-x''_P$，$\delta y=y'_P-y''_P$，$M$为测图比例尺分母。

例 9-1　为了求得地形控制点$F_{10}$（图9-13）的坐标，分别在已知点$F_6$、$F_{11}$、$F_{21}$设站观测了四个角，试按前方交会计算$P$点坐标。

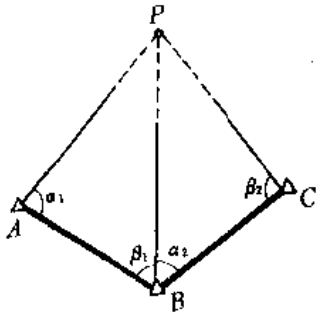



图 9-12

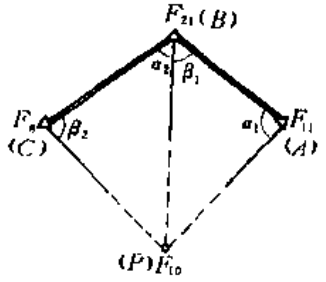



图 9-13

解法1：使用一般计算工具

按前方交会对图形点号编排的要求，设$F_{11}$为$A$，$F_{21}$为$B$，$F_6$为$C$（见表9-1）在$\triangle ABP$中$\angle PAB=\alpha_1$、$\angle ABP=\beta_1$；在$\triangle BCP$中$\angle PBC=\alpha_2$、$\angle BCP=\beta_2$。按（9-1）式求得$F_{10}$点的两组坐标于表9-1。由于$\delta x=0.03\text{m}$，$\delta y=0.00\text{m}$，所以$\Delta S=\sqrt{\delta x^2+\delta y^2}=0.03\text{m}$。设$M=10000$，则$2\times 0.1M(\text{mm})=2\text{m}$。现在$\Delta S<2\times 0.1M(\text{mm})$，故取两组坐标的平均值作为$P$点（$F_{10}$）的最或然坐标。

解法2：用可编程序型计算器

使用这种计算器的计算公式仍为（9-1）式，但可按计算过程的先后顺序预先存入计算器中，计算工作只需将已知点坐标和$\alpha$、$\beta$角值输入，即可直接获得$P$点坐标$x_P$、$y_P$。因此它对于重复计算一个以上的前方交会点是很省时的。计算表格也可将表9-1中的“角之余切”这一栏省去，而直接填写计算结果$x_P$、$y_P$。

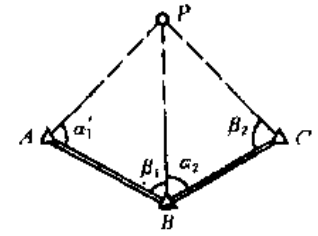
在测角交会的图形中，由未知点至相邻两起始点间方向的夹角称为**交会角**。当交会角过小（或过大）时，由于$A$和$B$角含有误差$\Delta\alpha$和$\Delta\beta$，将使$P$点有较大的位移$PP'$（见图

**前方交会计算表**

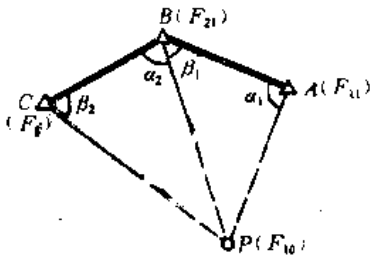
计算者　李　军
检查者　张　勇

表 9 7

示意图




野外图




备考

| 点之名称 | | 观测角 | | X | | 角之余切 | | Y | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $F_{10}$ | | | $x_P$ | 37194.57 | | | $y_P$ | 6226.42 |
| $A$ | $F_{11}$ | $\alpha_1$ | 40°41′57″ | $x_A$ | 37477.54 | $\mathrm{ctg}\alpha_1$ | 1.162641 | $y_A$ | 6307.24 |
| $B$ | $F_{21}$ | $\beta_1$ | 75 19 02 | $x_B$ | 37327.20 | $\mathrm{ctg}\beta_1$ | 0.262024 | $y_B$ | 6078.90 |
| | | | | | | $\sum$ | 1.424665 | | |
| $P$ | $F_{10}$ | | | $x_P$ | 37194.54 | | | $y_P$ | 6226.42 |
| $B$ | $F_{21}$ | $\alpha_2$ | 59 11 35 | $x_B$ | 37327.20 | $\mathrm{ctg}\alpha_2$ | 0.596284 | $y_B$ | 6078.90 |
| $C$ | $F_6$ | $\beta_2$ | 69 06 23 | $x_C$ | 37163.69 | $\mathrm{ctg}\beta_2$ | 0.381735 | $y_C$ | 6046.65 |
| | | | | | | $\sum$ | 0.978019 | | |
| | | | | 中数$x_P$ | 37194.56 | | | 中数$y_P$ | 6226.42 |

9-14）。所以要求交会角一般应大于30°并小于150°。

为了取得满足要求的交会角投入计算，可以适当地改组图形，例如图9-15（$a$）。如果利用典型布点（图9-12）来组织图形，那么在$\triangle ACP$中的交会角（$\angle APC$）过小，达不到规定要求，为此可以利用$\triangle ABP$和$\triangle CBP$来组成图形。这种图形通称**前方交会折迭图形**，显然前方交会折迭图形的计算和典型的前方交会的计算是同样的。

有时也可以在四个已知点上设站观测四个角（图9-15（$b$））。这时仍然可以组成两个三角形来推算$P$点坐标，从而达到检查的目的。

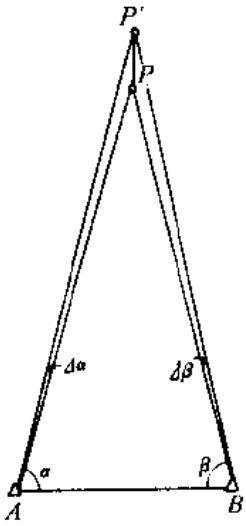
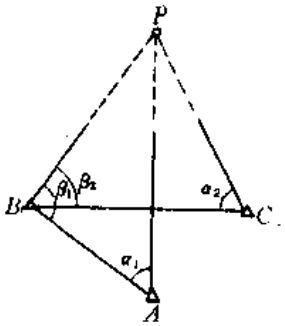
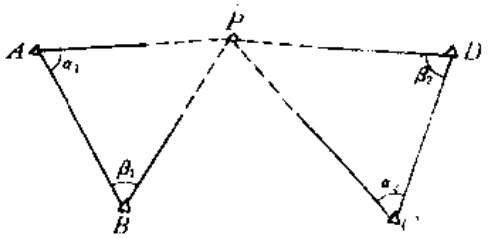



图 9-14




（$a$）




（$b$）

图 9-15

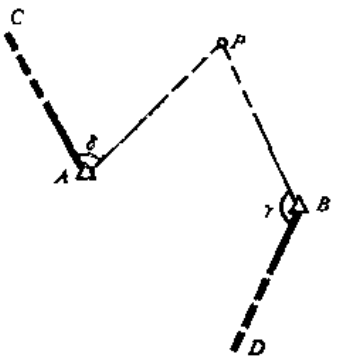


图 9-16

图（9-16）所示情况也属于前方交会。可将其化算为图9-11的情况来计算$P$点的坐标。即由$A$、$B$两点坐标经反算而求得边长$S_{AB}$和坐标方位角$\alpha_{AB}$。再由已知的坐标方位角$\alpha_{AC}$、$\alpha_{BD}$及观测角$\delta$、$\gamma$计算出$\alpha$、$\beta$，即

$$\alpha = \alpha_{AB} - \alpha_{AC} - \delta$$

$$\beta = \gamma - \alpha_{BA} + \alpha_{BD}$$

最后按（9-2）式计算$P$点的坐标。

此外、也可用如下公式进行计算。由

$$\operatorname{tg}\alpha_{AP} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}$$

和

$$\operatorname{tg}\alpha_{BP} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B}$$

可得

$$y_P = x_P \cdot \operatorname{tg}\alpha_{AP} - x_A \operatorname{tg}\alpha_{AP} + y_A$$

$$y_P = x_P \cdot \operatorname{tg}\alpha_{BP} - x_B \operatorname{tg}\alpha_{BP} + y_B$$

由

$$\operatorname{ctg}\alpha_{AP} = \frac{x_P - x_A}{y_P - y_A}$$

和

$$\operatorname{ctg}\alpha_{BP} = \frac{x_P - x_B}{y_P - y_B}$$

可得

$$x_P = y_P \cdot \operatorname{ctg}\alpha_{AP} - y_A \operatorname{ctg}\alpha_{AP} + x_A$$

$$x_P = y_P \cdot \operatorname{ctg}\alpha_{BP} - y_B \operatorname{ctg}\alpha_{BP} + x_B$$

整理后得

$$\left.\begin{aligned} x_P &= \frac{x_A \operatorname{tg}\alpha_{AP} - x_B \operatorname{tg}\alpha_{BP} + y_B - y_A}{\operatorname{tg}\alpha_{AP} - \operatorname{tg}\alpha_{BP}} \\ y_P &= \frac{y_A \operatorname{ctg}\alpha_{AP} - y_B \operatorname{ctg}\alpha_{BP} + x_B - x_A}{\operatorname{ctg}\alpha_{AP} - \operatorname{ctg}\alpha_{BP}} \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}4)$$

应用（9-4）式的优点是省去了坐标反算的工作、减少了计算时间。

## §9-3 侧 方 交 会

以已知点$A$、$B$为基础，用侧方交会测定$P$点坐标是这样进行的：分别在已知点$A$（或$B$）和未知点$P$上设站，测得$\angle\alpha$（或$\angle\beta$）和$\angle\gamma$（见图9-17）。在计算$P$点坐标时，先求出$\beta$角；$\angle\beta = 180^\circ - (\angle\alpha + \angle\gamma)$，这样就和前方交会的情形一致了，于是可以用前方交会的计算公式进行计算。

侧方交会测定$P$点时，一般采用检查角的方法进行检查观测成果的正确性，即在$P$点

向另一个已知点$C$观测检查角$\varepsilon_{测}$，利用检查角$\varepsilon_{测}$进行检查是按如下方法实施的：

在图9-17中，当计算出$P$点坐标以后，可以根据坐标反算公式求得$PC$和$PB$的坐标方位角$\alpha_{PC}$、$\alpha_{PB}$和边长$S_{PC}$，即

$$\operatorname{tg}\alpha_{PC}=\frac{\Delta y_{PC}}{\Delta x_{PC}},\quad \operatorname{tg}\alpha_{PB}=\frac{\Delta y_{PB}}{\Delta x_{PB}}$$

$$S_{PC}=\frac{\Delta y_{PC}}{\sin\alpha_{PC}}=\frac{\Delta x_{PC}}{\cos\alpha_{PC}}$$

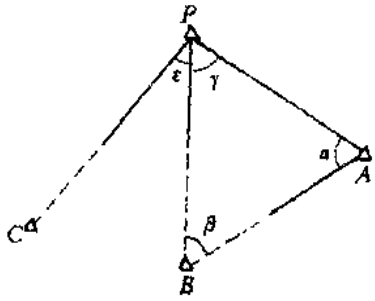



图 9-17

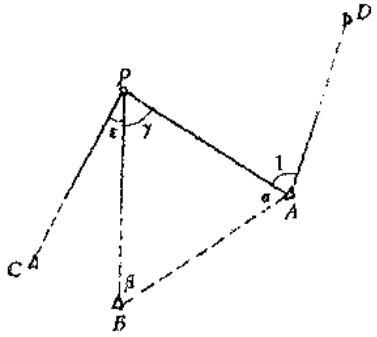



图 9-18

这样就可以计算出角$\varepsilon$的计算值$\varepsilon_{算}$：

$$\varepsilon_{算}=\alpha_{PC}-\alpha_{PB}$$

求角$\varepsilon$的计算值$\varepsilon_{算}$与观测值$\varepsilon_{测}$的较差：

$$\Delta\varepsilon=\varepsilon_{算}-\varepsilon_{测} \tag{9-5}$$

用$\Delta\varepsilon$及$S_{PC}$可以算出$P$点的横向位移$e$：

$$e=\frac{S_{PC}\cdot\Delta\varepsilon''}{\rho''}\quad 即\Delta\varepsilon''=\frac{e}{S_{PC}}\rho''$$

在一般测量规范中，对于地形控制点规定最大的横向位移$e_{容}$不大于比例尺精度的两倍，即

$$e_{容}=2\times0.1Mmm$$

所以$e_{容}$所相应的圆心角$\Delta\varepsilon''_{容}$为

$$\Delta\varepsilon''_{容}=\frac{0.2M}{S_{PC}}\rho'' \tag{9-6}$$

式中：$S_{PC}$以毫米为单位，$M$为测图比例尺的分母，$\rho''=206\times10^3$，求出的$\Delta\varepsilon$的单位是秒。从上式可以看出，当边长$S_{PC}$太短时$\Delta\varepsilon''_{容}$会过大。所以对检核边的长度应作适当限制，不宜太短。在有些规范的附录中，附有以$S_{PC}$为引数查取$\Delta\varepsilon_{容}$的专门用表。

侧方交会的交会角的规定与前方交会的有关要求相同。

有时，由于某种原因，已知点$A$和$B$间不通视，则可在$A$点瞄准另一已知点$D$，测出过度角$\angle1$（见图9-18），这样就可以求出$\angle\alpha$：

$$\angle\alpha=\alpha_{AD}-\alpha_{AB}-\angle1$$

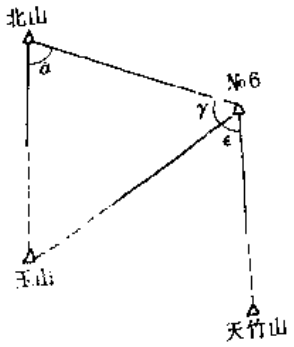



图 9-19

式中$\alpha_{AB}$和$\alpha_{AD}$都是根据已知点坐标反算出来的。当上式中被减数小于减数，不够减时，应加360°。

例 9-2　在图9-19中，按侧方交会法的要求观测了∠α、∠γ、∠ε，试求未知点No.6的坐标。

解：用计算器求侧方交会点坐标的格式见表9-2。用计算器计算P点坐标时，其操作方法与例9-1同，只是这里的β角是计算出来的，即$\beta = 180° - \alpha - \gamma$。

**侧方交会计算**

计算者　李　军
检查者　张　弓

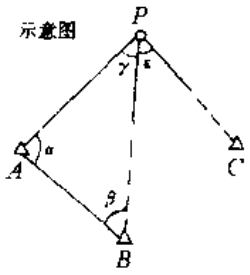
表 9-2

一、起算数据

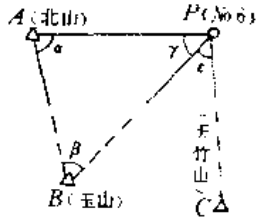
所求点名称：No.6

| 点名 | x | y |
|---|---|---|
| A(北山) | 6244.732 | 28117.809 |
| B(玉山) | 5551.322 | 28413.701 |
| C(天竹山) | 5182.270 | 28894.741 |

示意图




野外图




$$x_P = \frac{x_A \operatorname{ctg}\beta + x_B \operatorname{ctg}\alpha + y_A + y_B}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

$$y_P = \frac{y_A \operatorname{ctg}\beta + y_B \operatorname{ctg}\alpha - x_A - x_B}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$$

二、计算P点坐标

| 点名 | x(m) | 角 | 度 | y(m) |
|---|---|---|---|---|
| P(No.6) | 6009.668 | γ | 68° 26′ 32″ | 2804.528 |
| A(北山) | 6244.732 | α | 47 59 42 | 2117.809 |
| B(玉山) | 5551.322 | β | (63 33 46) | 28413.701 |
| | | Σ | 180 00 00 | |

三、检查计算

| | | | | 备考 |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha_{PB}$ | 220° 27′ 14″ | | | |
| $\alpha_{PC}$ | 173 46 39 | $S_{PC}$ | 832.30m | |
| $\varepsilon_{算}$ | 46 40 35 | | | 设M = 10000 |
| $\varepsilon_{测}$ | 46 40 45 | $\Delta r_{容}$ | 495″ | |
| $\Delta\varepsilon$ | 10″ | | | |

## §9-4　后方交会

后方交会的图形如图9-20。它的特点是仅在未知点P上设站，向三个已知点A、B、C进行观测，测得水平角∠α和∠β。然后根据A、B、C三点的坐标和∠α、∠β计算P

点坐标。

计算后方交会点坐标的实用公式很多，为了解解算此几何图形的基本概念，现介绍一种思路较为简单的方法。

过未知点$P$及两个已知点$A$、$B$作一圆（图9-21）。连接$P$、$C$两点，延长后与圆周交于$Q$点。根据同一圆弧上圆周角相等的定理，得

$$\angle ABQ = 180^\circ - \alpha$$

$$\angle BAQ = 180^\circ - \beta$$

因此可由$A$、$B$两已知点按前方交会的（9-1)式计算$Q$点坐标$x_Q$、$y_Q$。之后由$Q$、$C$两点坐标反算求得坐标方位角$\alpha_{QC}$。同样由反算求得坐标方位角$\alpha_{QA}$、$\alpha_{QB}$。则

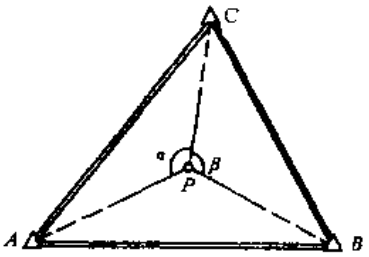



图 9-20

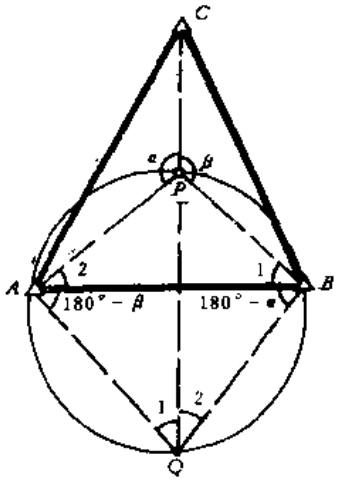



图 9-21

$$\angle 1 = \alpha_{QC} - \alpha_{QA}$$

$$\angle 2 = \alpha_{QB} - \alpha_{QC}$$

根据同一圆弧上圆周角相等的定理，得

$$\angle ABP = \angle 1$$

$$\angle BAP = \angle 2$$

再次按（9-1）式由$A$、$B$两点计算出$P$点的坐标。

这种方法主要利用了辅助点$Q$，因而称为辅助点法。

下面给出另外两种计算公式：（推证从略）

（一）余切计算式

由已知点坐标及观测角$\alpha$、$\beta$（图9-20），计算

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I} &= (y_C - y_B)\mathrm{ctg}\beta - (y_A - y_C)\mathrm{ctg}\alpha - (x_A - x_B) \\ \mathrm{II} &= (x_C - x_B)\mathrm{ctg}\beta - (x_A - x_C)\mathrm{ctg}\alpha + (y_C - y_A) \\ \mathrm{ctg}Q &= \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}} \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}7)$$

由已知点坐标及$\mathrm{ctg}Q$求$N$，

$$\left.\begin{aligned} N &= (y_C - y_B)(\mathrm{ctg}\beta - \mathrm{ctg}Q) - (x_C - x_B)(1 - \mathrm{ctg}\beta\mathrm{ctg}Q) \\ N &= (y_A - y_C)(\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}Q) + (x_A - x_C)(1 - \mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}Q) \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}8)$$

两个$N$值可互为计算的检核。

求$P$点的坐标：

$$\left.\begin{aligned} x_P &= x_C + \frac{N}{1+\operatorname{ctg}^2 Q} \\ y_P &= y_C + \operatorname{ctg} Q \cdot \frac{N}{1+\operatorname{ctg}^2 Q} \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}9)$$

若以 $A$、$B$、$C$ 三点的坐标值和观测值 $\alpha$、$\beta$ 为原始计算数据，经合理编排好计算表格，按每做一次算术运算作为计算的一步，将此公式与其他计算公式相比较，据统计，此式的计算步骤最少。

此外，用此公式进行计算时，只需按图9-20将点和角进行编号，则无论 $P$ 点处于任何位置，计算均可直接按公式进行，便能得到正确的结果，这比辅助点法——需注意角度与已知点的关系，要简便得多。

（二）仿权计算式

此种计算公式的形式与广义算术平均值的计算式相同，因此得名仿权公式。

未知点 $P$ 的坐标按下式计算：

$$\left.\begin{aligned} x_P &= \frac{P_A x_A + P_B x_B - P_C x_C}{P_A + P_B + P_C} \\ y_P &= \frac{P_A y_A + P_B y_B - P_C y_C}{P_A + P_B + P_C} \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}10)$$

式中：

$$P_A = \frac{1}{\operatorname{ctg}\angle A - \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$P_B = \frac{1}{\operatorname{ctg}\angle B - \operatorname{ctg}\beta}$$

$$P_C = \frac{1}{\operatorname{ctg}\angle C - \operatorname{ctg}\gamma}$$

$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 为 $A$、$B$、$C$ 三个已知点构成的三角形的内角。

$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为未知点 $P$ 上的三个角，不论 $P$ 点在什么位置，它们均应满足下列等式：

$$\alpha = \alpha_{PB} - \alpha_{PC}$$

$$\beta = \alpha_{PC} - \alpha_{PA}$$

$$\gamma = \alpha_{PA} - \alpha_{PB}$$

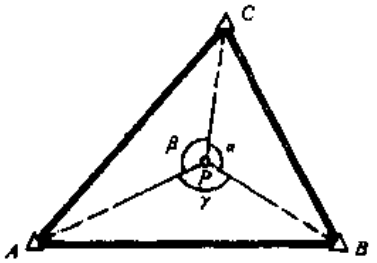
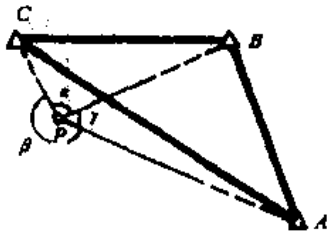
仿权公式计算过程中的重复运算公式较多，如由已知点坐标反算坐标方位角来求得 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 和仿权 $P_A$、$P_B$、$P_C$ 的计算，它们都只需换一换变量就能完成几个计算步骤，因而较宜于用电子计算机和可编程序的计算器进行运算。

例 9-3　用仿权公式计算后方交会点的算例见表9-3。

## 二、后方交会法的危险圆

用后方交会法求未知点时，一个需要特别注意的问题是危险圆。过三个已知点构成的圆称为危险圆（图9-22）。凡位于危险圆上的 $P$ 点，无论采用何种计算公式，其结果均无解。

后方交会计算　　表 9-3

| 示意图 | 野外图 |
|---|---|
|  |  |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_A$ | 2858.06 | $y_A$ | 6860.08 | $\alpha$ | 118°58′18″ |
| $x_B$ | 1371.87 | $y_B$ | 6564.14 | $\beta$ | 204°37′22″ |
| $x_C$ | 5141.96 | $y_C$ | 6083.07 | $\gamma$ | 36°24′20″ |
| $x_A - x_B$ | 1516.81 | $y_A - y_B$ | 295.94 | $\alpha_{BA}$ | 168°57′35.7″ |
| $x_B - x_C$ | −770.09 | $y_B - y_C$ | 481.07 | $\alpha_{CB}$ | 148°00′27.0″ |
| $x_A - x_C$ | 2286.90 | $y_A - y_C$ | 777.01 | $\alpha_{CA}$ | 161°14′03.0″ |
| $A$ | 7°13′32.7″ | $P_a$ | 0.126185 | | |
| $B$ | 159°02′51.3″ | $P_b$ | −0.208617 | $x_P$ | 4657.78 |
| $C$ | 13°13′36.0″ | $P_c$ | 0.315003 | $y_P$ | 6074.26 |
| $\Sigma$ | 180°00′00.0″ | $\Sigma$ | 0.262571 | | |

由图9-22知，$P$点在$AB$弧上的任意位置时，$\alpha$、$\beta$均不变；同样在$BC$弧、$AC$弧上亦有相同的情况。也就是说，同一组$\alpha$、$\beta$角值可以算得无限个$P$点坐标，这在计算过程中的表现就是无解。

若$P$点位于危险圆上，当用辅助点法解算时，$P$、$Q$两点重合在一起，即由$Q$、$C$两点反算出的坐标方位角所解算出的$\angle 1$、$\angle 2$与$\alpha$、$\beta$相同，因而无法解算。

当用余切公式解算时，由(9-6)式求得的Ⅰ和Ⅱ均为零，$\operatorname{ctg} Q$为不定解，因而无法解算。

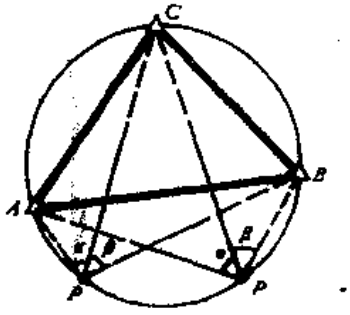


图 9-22

当用仿权公式解算时，计算仿权值$P_A$、$P_B$、$P_C$的分母为零，因而也无法解算。

在测量实践中，$P$点绝对地位于危险圆上的情况是极为偶然的；但是在距危险圆不远的范围内的情况又是很容易出现的。此时计算出的坐标将有较大的误差，因而在野外选点和内业组成计算图形时应给以足够的重视。

### 三、后方交会点的检核

与前方、侧方交会法相同，为了防止外业工作中的$\alpha$、$\beta$观测错误，或内业计算中的已知点坐标抄写错误，需要有一个多余的观测作为检核用。常用的方式是在未知点$P$上不仅向3个已知点进行观测，而且向第四个已知点$D$进行观测（图9-23）。这样，由4个方向可以求得3个水平角。检核的方式有两种：一种是将4个已知点中的3个已知点为一组，分作两个后方交会图形。由两组图形计算的$P$点坐标相互比较。第二种是，如同侧方交会那样，取图形结构较好的3个已知点计算$P$点的坐标，第三个角用作检核角，按（9-5）式计算$\Delta\varepsilon$值，再用$P$点的横向位移允许值作为检核要求。

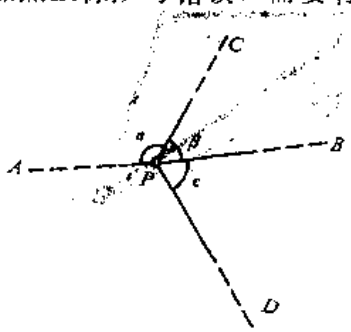


图 9-23

## §9-5 交会点的精度

由上述前方交会点、侧方交会点和后方交会点的坐标计算可知，$x_P$和$y_P$都是已知点的坐标和观测角的函数值，即

$$x_P = f(x_A, y_A, \cdots\cdots \alpha, \beta, \cdots\cdots)$$

$$y_P = \varphi(x_A, y_A, \cdots\cdots \alpha, \beta, \cdots\cdots)$$

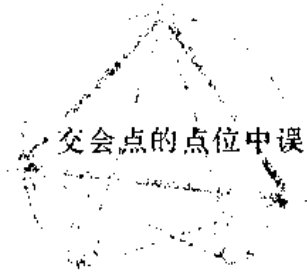
式中：$x_A$、$y_A$——已知点坐标；

$\alpha$、$\beta$——观测角。

计算中的已知点通常均取精度较高的控制点，它们本身的误差对低一级精度的交会点的误差影响可略而不计。应用误差传播定律可得，

$$m_{x_P}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \left(\frac{m\alpha}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2 \left(\frac{m\beta}{\rho}\right)^2 + \cdots\cdots$$

$$m_{y_P}^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right)^2 \left(\frac{m\alpha}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right)^2 \left(\frac{m\beta}{\rho}\right)^2 + \cdots\cdots$$



交会点的点位中误差$m_P$（图9-24）为

$$m_P = \sqrt{m_{x_P}^2 + m_{y_P}^2} \qquad (9\text{-}11)$$

由于从$f$和$\varphi$的具体函数形式推求$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdots\cdots\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\cdots\cdots$的过程较为繁琐，本节仅给出计算前方、侧方、后方交会点坐标中误差的主要推演过程，最后给出交会点的点位中误差计算式。对交会点位置的某种特定情况的中误差状况，也给予分析讨论，以求对交会点的精度有个一般的了解。

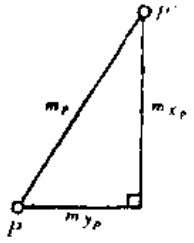


图 9-24

## 一、两点前方交会

两点前方交会点 $P$ 的坐标的计算过程如下：

根据已知边长 $S$ 及观测角 $\alpha$、$\beta$（图9-25），先求 $AP$ 的长度 $b$ 及坐标方位角 $\alpha_{AP}$，然后按坐标正算公式求 $P$ 点的坐标。即

$$x_P = x_A + b\cos\alpha_{AP} \qquad (a)$$

$$y_P = y_A + b\sin\alpha_{AP}$$

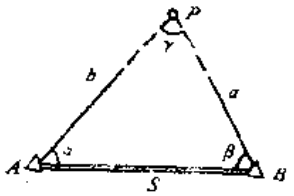



图 9-25

式中，$b$、$\alpha_{AP}$ 不是直接观测值，而是由下式计算的：

$$b = \frac{S\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\alpha_{AP} = \alpha_{AB} - \alpha \qquad (b)$$

将（$b$）式代入（$a$）式并对 $\alpha$ 和 $\beta$ 取微分得：

$$dx_P = \frac{S\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha_{AP}}{\sin^2(\alpha+\beta)}\frac{d\beta}{\rho} + \left\{b\sin\alpha_{AP} - \frac{S\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha_{AP}}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right\}\frac{d\alpha}{\rho}$$

$$dy_P = \frac{S\cdot\sin\alpha\cdot\sin\alpha_{AP}}{\sin^2(\alpha+\beta)}\frac{d\beta}{\rho} + \left\{b\cos\alpha_{AP} - \frac{S\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha_{AP}}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right\}\frac{d\alpha}{\rho}$$

转换为中误差得

$$m_{x_P}^2 = \left(\frac{S\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha_{AP}}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right)^2\frac{m_\beta^2}{\rho^2} + \left\{b\sin\alpha_{AP} - \frac{S\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha_{AP}}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right\}^2\frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$$

$$m_{y_P}^2 = \left(\frac{S\cdot\sin\alpha\cdot\sin\alpha_{AP}}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right)^2\frac{m_\beta^2}{\rho^2} + \left\{b\cos\alpha_{AP} + \frac{S\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha_{AP}}{\sin^2(\alpha+\beta)}\right\}^2\frac{m_\alpha^2}{\rho^2} \qquad (9\text{-}12)$$

设 $m_\beta = m_\alpha = m$，表示测角中误差，则点位中误差为

$$m_P = \sqrt{m_{x_P}^2 + m_{y_P}^2} = \frac{S\cdot m\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}{\rho\sin^2(\alpha+\beta)} \qquad (9\text{-}13)$$

或

$$m_P = \frac{m}{\rho}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (9\text{-}14)$$

若令 $K = \dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}{\rho''\sin^2(\alpha+\beta)\times10^{-6}}$，$S$ 以公里为单位，$m_P$ 以毫米为单位，$m$ 以秒为单位，则

$$m_P = S\cdot m\cdot K$$

为了计算方便，可以 $\alpha$ 和 $\beta$ 为引数制成求前方交会点精度用的 $K$ 值表（见表9-4）

例 9-4　设 $m = \pm12''$，$S = 3\text{km}$，$\alpha = 90°$，$\beta = 60°$，求 $m_P$。

解：从表9-4查得 $K = 26$，按（$e$）式得

$$m_P = S \cdot m \cdot K$$
$$= \pm 3 \times 12 \times 26$$
$$= \pm 936\,\text{mm} = \pm 0.94\,\text{m}$$

**前交点精度 $K\left(=\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}{\rho\sin^2(\alpha-\beta)\times10^{-6}}\right)$ 值表**

表 9-4

| $\beta$ \ $\alpha$ | 10° | 20 | 30 | 40° | 50° | 60 | 70° | 80 | 90 | 100° | 110 | 120 | 130 | 140° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10° | — | 7.4 | 6.2 | 5.5 | 5.1 | 4.8 | 4.8 | 4.8 | 5.1 | 5.5 | 6.2 | 7.3 | 9.2 | 13 |
| 20° | 7.4 | 5.7 | 5.0 | 4.7 | 4.6 | 4.7 | 4.8 | 5.4 | 5.5 | 6.7 | 8.3 | 11 | 16 | |
| 30° | 6.2 | 5.0 | 4.6 | 4.5 | 4.6 | 4.8 | 5.3 | 6.1 | 7.2 | 9.2 | 12 | 19 | | |
| 40 | 5.5 | 4.7 | 4.5 | 4.5 | 4.8 | 5.4 | 6.2 | 7.6 | 9.8 | 14 | 22 | | | |
| 50° | 5.1 | 4.6 | 4.6 | 4.8 | 5.3 | 6.3 | 8.0 | 10 | 15 | 24 | | | | |
| 60° | 4.8 | 4.7 | 4.8 | 5.4 | 6.3 | 7.9 | 11 | 15 | 26 | | | | | |
| 70° | 4.8 | 4.8 | 5.3 | 6.2 | 8.0 | 11 | 16 | 26 | | | | | | |
| 80° | 4.8 | 5.4 | 6.1 | 7.6 | 10 | 15 | 26 | | | | | | | |
| 90° | 5.1 | 5.5 | 7.2 | 9.8 | 15 | 26 | | | | | | | | |
| 100° | 5.5 | 6.7 | 9.2 | 14 | 24 | | | | | | | | | |
| 110° | 6.2 | 8.3 | 12 | 22 | | | | | | | | | | |
| 120° | 7.3 | 11 | 19 | | | | | | | | | | | |
| 130° | 9.2 | 16 | | | | | | | | | | | | |
| 140° | 13 | | | | | | | | | | | | | |

两点前方交会点的点位误差大小与交会点 $P$ 相对于已知点 $A$、$B$ 的位置有关。现分以下两种情况加以分析：

1. 交会点 $P$ 在过 $A$、$B$、$P$ 三点所作圆的圆周上（图9-26）。

交会点的这个位置表明所有在同一个圆弧上的交会点的交会角 $\gamma$ 均相等，即（9-13）式中分母的 $\sin^2\gamma$ 不变。$m_P$ 的大小将与分子的 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$ 有关。

令 $U=\sin^2\alpha+\sin^2\beta$，对 $\alpha$、$\beta$ 求一阶导数并令其为零，得

$$U'=2\sin\alpha\cos\alpha-2\sin(180^\circ-\alpha-\gamma)\cos(180^\circ-\alpha-\gamma)=0$$

满足上式的条件是

$$\alpha=\beta=90^\circ-\frac{\gamma}{2},$$

即$U$存在极大或极小的条件：

取$\alpha=\beta$，对$U$求二阶导数，得

$$U''=4\sin^2\frac{\gamma}{2}-4\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

可见：$\gamma<90°$时，$U''<0$，$U$有极大值；

$\gamma=90°$时，$U''=0$，$U$无极值；

$\gamma>90°$时，$U''>0$，$U$有极小值。

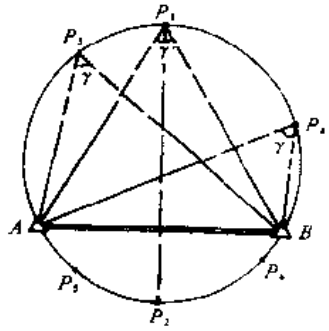


图 9-26

即在$AB$已知边$S$和测角中误差$m$一定的条件下，$\alpha=\beta$且$\gamma<90°$时，$m_P$最大；$\alpha=\beta$且$\gamma>90°$时，$m_P$最小；$\gamma=90°$时，$P$点在圆周上的任何位置$m_P$的值不变。

因此，垂直平分$AB$连线而与圆周相交的$P_1$、$P_2$两点（图9-26）的点位中误差为$m_{P_2}<m_{P_1}$（图中$P_2$的交会角大于90°，而$P_1$的交会角小于90°）。

由于$m_{P_1}$和$m_{P_2}$为极值，所以当交会点自$P_1$（或$P_2$）向$A$、$B$两已知点方向移动时，$m_P$的变化规律为$m_{P_3}$小于$m_{P_1}$，$m_{P_4}$也小于$m_{P_1}$，而$m_{P_5}$则大于$m_{P_2}$，$m_{P_6}$也大于$m_{P_2}$（图9-26）

为了解在靠近$A$、$B$两点时交会点的中误差趋向何值，现求$\alpha$（或$\beta$）趋近于0°时$\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}{\sin^2\gamma}$的极限值。

$$\lim_{\substack{\alpha\to 0\\(\beta\to 0)}}\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}{\sin^2\gamma}=\frac{1}{\sin\gamma}$$

即交会点趋近于$A$、$B$两已知点时，它的点位中误差极限值为

$$\lim_{\substack{P\to A\\(P\to B)}} m_P=S\cdot\frac{m}{\rho}\frac{1}{\sin\gamma} \qquad (9\text{-}15)$$

2. 交会点$P$在$AB$连线的垂直平分线上。

交会点$P$位于此位置（图9-27）的特点是$\alpha=\beta$，即

$$m_P=S\cdot\frac{m}{\rho}\frac{\sin\alpha}{\sin^2 2\alpha}\sqrt{2}$$

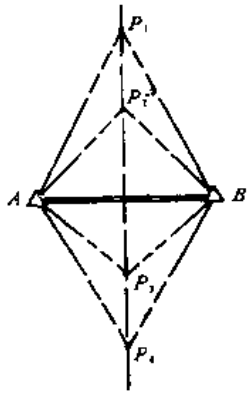


图 9-27

现对$U=\frac{\sin\alpha}{\sin^2 2\alpha}$求一阶导数并令其为零，得

$$\lg\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (9\text{-}16)$$

$$\alpha_{AP}=\alpha_{AB}-\alpha$$

将（$d$）式代入（$c$）式并按$\alpha$和$\gamma$进行微分，得

$$d\alpha_{AP}=-d\alpha$$

将上两式代入（$a$）式，得：

$$dx_P = -\cos\alpha_{AP}\frac{S\cdot\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\frac{d\gamma}{\rho} + \left(b\sin\alpha_{AP} + \frac{S\cdot\cos(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}\cos\alpha_{AP}\right)\frac{d\alpha}{\rho}$$

$$dy_P = -\sin\alpha_{AP}\frac{S\cdot\sin\alpha}{\sin^2\gamma}\frac{d\gamma}{\rho} + \left(-b\cos\alpha_{AP} + \frac{S\cdot\cos(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}\sin\alpha_{AP}\right)\frac{d\alpha}{\rho}$$

转化成中误差的公式为：

$$m_{x_P}^2 = \frac{\cos^2\alpha_{AP}S^2\sin^2\alpha}{\sin^4\gamma}\frac{m_\gamma^2}{\rho^2} + b^2\sin^2\alpha_{AP}\frac{m_\alpha^2}{\rho^2} - \frac{S^2\cos^2(\alpha+\gamma)}{\sin^2\gamma}\cos^2\alpha_{AP}\frac{m_\alpha^2}{\rho^2} + \frac{2b\sin\alpha_{AP}\cos\alpha_{AP}\cdot S\cdot\cos(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}\frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$$

$$m_{y_P}^2 = \frac{\sin^2\alpha_{AP}\cdot S^2\cdot\sin^2\alpha}{\sin^4\gamma}\frac{m_\gamma^2}{\rho^2} - b^2\cos^2\alpha_{AP}\frac{m_\alpha^2}{\rho^2} - \frac{S^2\cos^2(\alpha+\gamma)}{\sin^2\gamma}\sin^2\alpha_{AP}\frac{m_\alpha^2}{\rho^2} - \frac{2b\cos\alpha_{AP}\sin\alpha_{AP}\cdot S\cdot\cos(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}\frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$$

考虑到测角中误差相同，即$m_\alpha = m_\gamma = m$，则交会点$P$的点位中误差为

$$m_P = \frac{Sm}{\rho}\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma}}{\sin^2\gamma} \tag{9-17}$$

或

$$m_P = \frac{m}{\rho}\frac{\sqrt{a^2+S^2}}{\sin\gamma} \tag{9-18}$$

由图9-27可知，$P$点的点位中误差若存在极值必为极小值，故满足(9-16)式的$\alpha$(或$\beta$)求得的$m_P$必为极小值，即

$$\alpha = \beta = 35°15'52''$$

或

$$\gamma = 109°28'16''$$

的$m_P$为最小，$P$点在这个位置的精度最高。

综上所述，前方交会点的位置最宜于选在与已知点构成等腰三角形，且交会角$\gamma = 90°$的位置上；最佳位置则为$\gamma = 109°$；而当交会角小于90°时则以靠近已知点的位置较好，而不宜于选在与已知点构成等腰三角形的地方。

## 二、两点侧方交会

侧方交会与前方交会不同之处在于观测角不是$\alpha$和$\beta$而是$\alpha$和$\gamma$(图9-28)，计算$x_P$、$y_P$的

公式如下：

$$x_P = x_A + b\cos\alpha_{AP} \qquad (c)$$

$$y_P = y_A + b\sin\alpha_{AP}$$

式中

$$b = \frac{S\cdot\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma} \qquad (d)$$

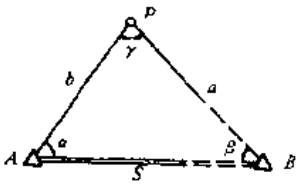



图 9-28

若令 $K = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\gamma}}{\rho\sin^2\gamma\cdot 10^{-6}}$，$S'$ 以公里为单位，$m_P$ 以毫米为单位，$m$ 以秒为单位，则

$$m_P = S\cdot m\cdot K \qquad (e)$$

为了计算方便，可以 $\alpha$ 和 $\gamma$ 为引数，制成求侧交点用的 $K$ 值表（见表9-5）。

侧交点精度 $K\left(=\frac{\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\gamma}}{\rho 10^{-6}\sin^2\gamma}\right)$ 值表

表 9-5

| γ \ α | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20° | 16 | 20 | 25 | 30 | 35 | 39 | 41 | 43 | 44 | 43 | 41 | 39 | 35 | 30 | 25 |
| 30° | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 19 | 21 | 21 | 22 | 21 | 21 | 19 | 18 | 16 | |
| 40° | 7.8 | 8.5 | 9.6 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 | 14 | 13 | 13 | 12 | | |
| 50° | 6.5 | 6.9 | 7.6 | 8.3 | 9.0 | 9.6 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 9.6 | | | |
| 60° | 5.7 | 6.0 | 6.5 | 7.0 | 7.5 | 7.9 | 8.3 | 8.5 | 8.6 | 8.5 | 8.3 | | | | |
| 70° | 5.2 | 5.5 | 5.8 | 6.3 | 6.7 | 7.0 | 7.3 | 7.5 | 7.5 | 7.5 | | | | | |
| 80° | 5.0 | 5.2 | 5.5 | 5.9 | 6.2 | 6.6 | 6.8 | 7.0 | 7.0 | | | | | | |
| 90° | 4.9 | 5.1 | 5.4 | 5.8 | 6.1 | 6.4 | 6.7 | 6.8 | | | | | | | |
| 100° | 5.0 | 5.2 | 5.5 | 5.9 | 6.2 | 6.6 | 6.8 | | | | | | | | |
| 110° | 5.1 | 5.5 | 5.8 | 6.3 | 6.7 | 7.0 | | | | | | | | | |
| 120° | 5.7 | 6.0 | 6.5 | 7.0 | 7.5 | | | | | | | | | | |
| 130° | 6.5 | 6.9 | 7.6 | 8.3 | | | | | | | | | | | |
| 140° | 7.8 | 8.5 | 9.6 | | | | | | | | | | | | |
| 150° | 10 | 12 | | | | | | | | | | | | | |

例 9-5　在侧交测量时，设 $m = \pm 12''$，$S = a = b = 6\text{km}$，$\alpha = \beta = \gamma = 60°$，求 $m_P = ?$

解：查表9-5得 $K = 7.9$，所以

$$m_P = \pm 6\times 12\times 7.9$$

$$= \pm 569\text{mm}$$

$$\approx 0.57\text{m}$$

与前方交会相同，侧方交会点的点位精度与交会点 $P$ 相对于已知点 $A$、$B$ 的位置有关。下面分三种情况加以讨论。

1. 交会点 $P$ 位于 $A$、$B$、$P$ 三点构成的圆周上。

图9-29所示的 $P_1$、$P_2$、……$P_4$ 点均位于过 $A$、$B$ 两点的同一个圆周上。由于在同一圆弧上的圆周角相同，即 $P_1$、$P_2$、$P_3$ 点的交会角 $\gamma$ 不变。设 $S$、$m$ 一定，由（9-17）式知，当 $\alpha = 90°$（$P_1$ 点）时，$m_P$ 有最大值；也就是说交会点在这个位置的精度最低。

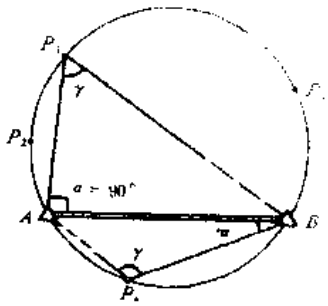


图 9-29

当交会点 $P$ 自 $P_1$ 顺圆弧向已知点 $A$ 移动时，$m_P$ 逐渐减小。在靠近 $A$ 点的位置，即 $\alpha$ 趋近于 $180° - \gamma$ 时，$m_P$ 的极限值为

$$\lim_{\alpha \to 180° - \gamma} m_P = S \cdot \frac{m}{\rho} \frac{\sqrt{2}}{\sin\gamma}$$

当交会点 $P$ 自 $P_1$ 顺圆弧向已知点 $B$ 移动时，$m_P$ 亦逐渐减小。在靠近 $B$ 点的位置，即 $\alpha$ 趋近于 $0°$ 时，$m_P$ 的极限值为

$$\lim_{\alpha \to 0} m_P = S \cdot \frac{m}{\rho} \frac{1}{\sin\gamma}$$

若交会点 $P$ 在圆弧 $AP_4B$ 上（图9-29），它的点位中误差 $m_P$ 的变化趋势是自靠近 $B$ 点一端起向靠近 $A$ 点方向移动，其值逐渐减小，即由 $S \cdot \frac{m}{\rho} \frac{\sqrt{2}}{\sin\gamma}$ 向 $S \cdot \frac{m}{\rho} \frac{1}{\sin\gamma}$ 减小。

需要指出的是，上述讨论遵守了这样的规定：即，$\alpha$ 角的位置始终是面对交会点，取左侧已知点上的角度，即符合图9-29的编号规定。如果观测角取右侧已知点上的角度，则上述讨论应将 $A$、$B$ 对换，因为侧方交会不存在前方交会那样一种对称性。

2. 交会点 $P$ 位于 $\alpha = 90°$ 的直线上。

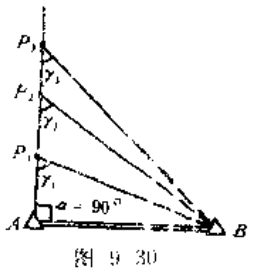


图 9-30

此种情况如图9-30所示。因 $\alpha = 90°$，故 $\gamma$ 的最大值为 $\gamma \to 90°$。由（9-17）式知，$\gamma \to 0°$ 时 $m_P \to \infty$，即 $m_P$ 的极大值，但它对测量实践毫无意义。当 $\gamma \to 90°$ 时，$m_P$ 为极小值，即 $P$ 点在靠近 $A$ 点时的点位中误差，即

$$\lim_{\gamma \to 90°} m_P = S \cdot \frac{m}{\rho} \sqrt{2}$$

由此可见，点位中误差 $m_P$ 将从 $\gamma \to 90°$ 起逐渐增大。

3. 交会角 $\gamma = 90°$ 时。

此种情况相当于交会点 $P$ 位于以已知点 $AB$ 连线为直径的圆周上（图9-31）。由（9-17）式知，$m_P$ 的大小随 $\alpha$ 的值而变，$\alpha \to 0°$ 时 $m_P$ 最小，$\alpha \to 90°$ 时 $m_P$ 最大。

由图9-31知，$m_{P_1}$ 自靠近已知点 $B$ 的位置起逐渐增大至靠近已知点 $A$ 为止，$m_{P_2}$ 则自 $A$ 点向 $B$ 点方向逐渐增大，其变化范围均为由

$$\lim_{\alpha \to 0} m_P = S \cdot \frac{m}{\rho}$$

起笔

$$\lim_{\gamma \to 90} m_P = S \cdot \frac{m}{\rho} \sqrt{2}$$

综上所述，侧方交会点的精度以$\gamma = 90°$，交会点位于未观测角度的已知点附近的位置最高，其中误差$m_P$趋向于$S \cdot \frac{m}{\rho}$。

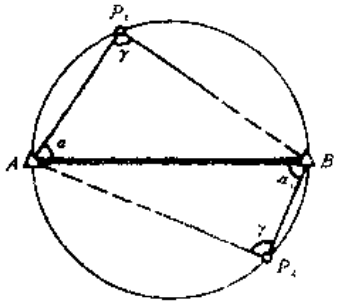


图 9-31

在$\gamma$角$\geqslant 90°$的条件下，交会点由未观测角度的已知点向观测了角度的已知点方向移动时，$m_P$将逐渐增大，最后将增大$\sqrt{2}$倍。在$\gamma$角$< 90°$时，$\alpha = 90°$的$m_P$最大，从$\alpha = 90°$的位置由两侧向两已知点移动时，$m_P$均将逐渐减小，但以偏向未观测角度的已知点一侧更有利。

## 三、三点后方交会

按后方交会测定未知点$P$的平面位置，通常是在$P$点上安置仪器，如图9-32所示，测定方向值$L_1$、$L_2$、$L_3$从而算出：$\alpha = L_2 - L_1$、$\beta = L_3 - L_2$，然后可按如下顺序算出$P$点坐标：

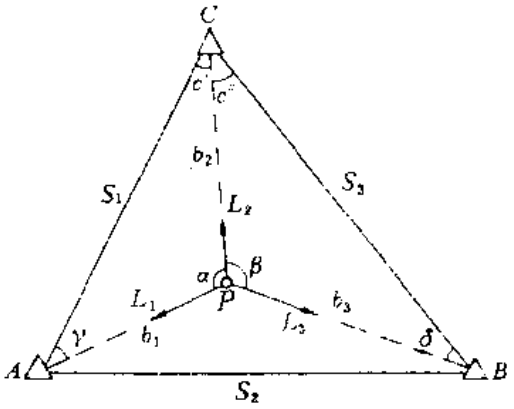


图 9-32

首先由下列两式解算辅助角$\gamma$和$\delta$：

$$\gamma + \delta = 360° - (\alpha + \beta + C)$$
$$= 360° - (L_3 - L_1 + C) \quad (e)$$

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\delta} = \frac{S_3 \cdot \sin\alpha}{S_1 \cdot \sin\beta}$$
$$= \frac{S_3 \cdot \sin(L_2 - L_1)}{S_1 \cdot \sin(L_3 - L_2)} \quad (f)$$

求出$\gamma$和$\delta$后，由$\triangle ACP$、$BCP$计算$c'$、$c''$，并解出$AP$、$BP$的边长$b_1$、$b_3$和它们的坐标方位角$\alpha_{AP}$、$\alpha_{BP}$，即

$$\left.\begin{aligned} c' &= 180° - \alpha - \gamma = 180° - (L_2 - L_1) - \gamma \\ c'' &= 180° - \beta - \delta = 180° - (L_3 - L_2) - \delta \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= \frac{S_1 \sin c'}{\sin\alpha} = \frac{S_1 \sin c'}{\sin(L_2 - L_1)} \\ b_2 &= \frac{S_3 \sin c''}{\sin\beta} = \frac{S_3 \sin c''}{\sin(L_3 - L_2)} \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{AP} &= \alpha_{AC} + \gamma \\ \alpha_{BP} &= \alpha_{BC} - \delta \end{aligned}\right\} \quad (i)$$

最后根据下列公式计算$P$点的坐标

$$x_P = x_A + b_1 \cos\alpha_{AP} = x_B + b_3 \cos\alpha_{BP}$$
$$y_P = y_A + b_1 \sin\alpha_{AP} = y_B + b_3 \cos\alpha_{BP}$$

为了求得$P$点的点位中误差$M_P$，先求出$P$点纵横坐标的中误差。为此，将(i)式微分得

$$d_{x_p} = \cos\alpha_{AP} db_1 - b_1 \sin\alpha_{AP} d\alpha_{AP}$$
$$d_{y_p} = \sin\alpha_{AP} db_1 + b_1 \cos\alpha_{AP} d\alpha_{AP}$$

式中，$db_1$和$d\alpha_{AP}$都是观测方向$L_1$、$L_2$、$L_3$的误差的函数。然后将(e)、(f)、……(i)式分别进行微分并代入相关项，最后得

$$dx_P = b_1 \left\{ \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\delta + 1}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \cos\alpha_{AP} + \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\delta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \sin\alpha_{AP} \right\} \frac{dL_1}{\rho} + b_1 \left\{ \operatorname{ctg}c' \frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\delta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \cos\alpha_{AP} + \frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\delta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \sin\alpha_{AP} \right\} \frac{dL_3}{\rho} - b_1 \left\{ \left( \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\delta + 1}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} + \operatorname{ctg}c' \frac{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\delta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \right) \cos\alpha_{AP} + \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \sin\alpha_{AP} \right\} \frac{dL_2}{\rho}$$

$$dy_P = b_1 \left\{ \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\delta + 1}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \sin\alpha_{AP} - \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\delta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \cos\alpha_{AP} \right\} \frac{dL_1}{\rho} - b_1 \left\{ \operatorname{ctg}c' \frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\delta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \sin\alpha_{AP} - \frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\delta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \cos\alpha_{AP} \right\} \frac{dL_3}{\rho} - b_1 \left\{ \left( \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\delta + 1}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} + \operatorname{ctg}c' \frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\delta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \right) \sin\alpha_{AP} - \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta} \cos\alpha_{AP} \right\} \frac{dL_2}{\rho}$$

由微分转换为中误差，并顾及各方向观测值的中误差相同，且$\alpha$、$\beta$角的中误差为方向中误差的$\sqrt{2}$倍，则由

$$m_P = \sqrt{\overline{m_{x_p}^2} + \overline{m_{y_p}^2}}$$

得 $$m_P = \frac{b_2 m}{\rho \sin(\gamma + \delta)} \sqrt{\frac{\sin^2 c}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2 c''}{\sin^2\beta} - \frac{\sin c' \cdot \sin c''}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} \cos(\gamma + \delta)} \quad (9\ 19)$$

令$K_1 = \frac{\sin^2 c'}{\sin^2\alpha}$、$K_2 = \frac{\sin^2 c''}{\sin^2\beta}$、$K_3 = \frac{m''}{\rho'' \cdot 10^6 \sin(\gamma + \delta)}$，$b_2$以公里为单位，$m_P$以毫米为单位，则上式可写成

$$m_P = b_2 K_3 \sqrt{K_1 + K_2 - \sqrt{K_1 \cdot K_2} \cos(\gamma + \delta)} \quad (k)$$

$K_1$、$K_2$分别以$c'$(或$c''$)与$\beta$(或$\alpha$)为引数查表9-6；$K_3$以$m''$与$(\gamma + \delta)$为引数查表9-7，$\cos(\gamma + \delta)$可查一般的余弦函数表。

(9-19)式亦可写为

$$m_P = \frac{m b_2}{\rho \sin(\gamma + \delta)} \sqrt{\frac{b_1^2}{S_1^2} + \frac{b_3^2}{S_3^2} - \frac{b_1 b_2}{S_1 S_3} \cos(\gamma + \delta)} \quad (9\ 20)$$

● 当后方交会用角度观测时，点位中误差为

$$m_P = \frac{b_2 m}{\rho \sin(\gamma + \delta)} \sqrt{\frac{\sin^2 c'}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2 c''}{\sin^2\beta}} = b_2 K_3 \sqrt{K_1 + K_2}$$

后交点精度 $K_1(K_2)\left(=\frac{\sin^2 c}{\sin^2\beta}\right)$ 值表　　表 9-6

| $\beta$° \ $C$ | 20 (160) | 25 (155) | 30 (150) | 35 (145) | 40 (140) | 45 (135) | 50 (130) | 55 (125) | 60 (120) | 65 (115) | 70 (110) | 75 (105) | 80 (100) | 85 (95) | 90 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 (160) | 1.00 | 1.53 | 2.14 | 2.81 | 3.53 | 4.27 | 5.02 | 5.74 | 6.41 | 7.02 | 7.55 | 7.98 | 8.29 | 8.48 | 8.55 |
| 25 (155) | 0.65 | 1.00 | 1.40 | 1.84 | 2.31 | 2.80 | 3.29 | 3.76 | 4.20 | 4.60 | 4.94 | 5.22 | 5.43 | 5.56 | 5.60 |
| 30 (150) | 0.47 | 0.71 | 1.00 | 1.32 | 1.65 | 2.00 | 2.35 | 2.68 | 3.00 | 3.29 | 3.53 | 3.73 | 3.88 | 3.97 | 4.00 |
| 35 (145) | 0.36 | 0.51 | 0.76 | 1.00 | 1.26 | 1.52 | 1.78 | 2.04 | 2.28 | 2.50 | 2.68 | 2.84 | 2.95 | 3.02 | 3.04 |
| 40 (140) | 0.28 | 0.43 | 0.61 | 0.80 | 1.00 | 1.21 | 1.42 | 1.62 | 1.82 | 1.99 | 2.14 | 2.26 | 2.35 | 2.40 | 2.42 |
| 45 (135) | 0.23 | 0.36 | 0.50 | 0.66 | 0.83 | 1.00 | 1.17 | 1.34 | 1.50 | 1.64 | 1.77 | 1.87 | 1.94 | 1.98 | 2.00 |
| 50 (130) | 0.20 | 0.30 | 0.43 | 0.56 | 0.70 | 0.85 | 1.00 | 1.14 | 1.28 | 1.40 | 1.50 | 1.59 | 1.65 | 1.69 | 1.70 |
| 55 (125) | 0.17 | 0.27 | 0.37 | 0.49 | 0.62 | 0.75 | 0.87 | 1.00 | 1.12 | 1.22 | 1.32 | 1.39 | 1.45 | 1.48 | 1.49 |
| 60 (120) | 0.16 | 0.24 | 0.33 | 0.44 | 0.55 | 0.67 | 0.78 | 0.89 | 1.00 | 1.10 | 1.18 | 1.24 | 1.29 | 1.32 | 1.33 |
| 65 (115) | 0.14 | 0.22 | 0.30 | 0.40 | 0.50 | 0.61 | 0.71 | 0.82 | 0.91 | 1.00 | 1.08 | 1.14 | 1.18 | 1.21 | 1.22 |
| 70 (110) | 0.13 | 0.20 | 0.28 | 0.37 | 0.47 | 0.57 | 0.66 | 0.76 | 0.85 | 0.93 | 1.00 | 1.06 | 1.10 | 1.12 | 1.13 |
| 75 (105) | 0.13 | 0.19 | 0.27 | 0.35 | 0.44 | 0.54 | 0.63 | 0.72 | 0.80 | 0.88 | 0.95 | 1.00 | 1.04 | 1.06 | 1.07 |
| 80 (100) | 0.12 | 0.18 | 0.26 | 0.34 | 0.43 | 0.52 | 0.61 | 0.69 | 0.77 | 0.85 | 0.91 | 0.96 | 1.00 | 1.02 | 1.03 |
| 90 | 0.12 | 0.18 | 0.25 | 0.33 | 0.41 | 0.50 | 0.59 | 0.67 | 0.75 | 0.82 | 0.88 | 0.93 | 0.79 | 0.98 | |

例 9-6　设在后方交会图形（图9-33）中，$S_{AC}=8.3$km，$S_{BC}=9.1$km，$S_{AP}=5.5$km，$S_{CP}=4.9$km，$S_{BP}=5.7$km，或$\alpha=106°$，$\beta=118°$，$c'=40'$，$c''=34'$，$\gamma+\delta=62°$，$m=\pm12''$，求 $P$ 点精度。

解：查表9-6及9-7得$K_1=0.44$，$K_2=0.42$，$K_3=65$，又因$\cos(\gamma+\delta)=0.47$，所以代入（$k$）式得

$$m_P=\pm4.9\times65\sqrt{0.44+0.42-\sqrt{0.44\times0.42}\times0.47}$$
$$=\pm259\text{mm}=\pm0.26\text{m}$$

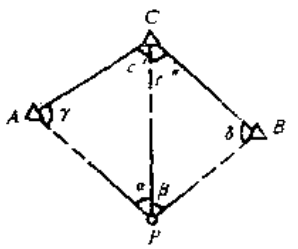


图 9-33

下面讨论后方交会点的点位中误差与图形的关系。由于后方交会点相对于已知点和三个已知点构成的三角形的图形变化无穷，现仅对已知点构成等边三角形，且交会点在过已知点$C$并垂直于$AB$边的直线上这一特定情况（图9-34）。

后交点精度$K_3\left(=\frac{m''}{\rho''10^{-6}\sin(\gamma+\delta)}\right)$值表　　表 9-7

| $\gamma'+\delta'$ \ $m''$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20°(160°) | 85 | 99 | 113 | 128 | 142 | 156 | 170 | 184 | 198 | 213 | 227 | 241 | 255 |
| 25°(155°) | 69 | 80 | 92 | 103 | 115 | 126 | 138 | 149 | 161 | 172 | 184 | 195 | 206 |
| 30°(150°) | 58 | 68 | 78 | 87 | 97 | 107 | 116 | 126 | 136 | 145 | 155 | 165 | 175 |
| 35°(145°) | 51 | 59 | 68 | 76 | 85 | 93 | 101 | 110 | 118 | 127 | 135 | 144 | 152 |
| 40°(140°) | 45 | 53 | 60 | 68 | 75 | 83 | 91 | 98 | 106 | 113 | 121 | 128 | 136 |
| 45°(135°) | 41 | 48 | 55 | 62 | 69 | 75 | 82 | 89 | 96 | 103 | 110 | 117 | 23 |
| 50°(130°) | 38 | 44 | 51 | 57 | 63 | 70 | 76 | 82 | 89 | 95 | 101 | 108 | 14 |
| 55°(125°) | 36 | 41 | 47 | 53 | 59 | 65 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 | 101 | 107 |
| 60°(120°) | 34 | 39 | 45 | 50 | 56 | 62 | 67 | 73 | 78 | 84 | 90 | 95 | 101 |
| 65°(115°) | 32 | 37 | 43 | 48 | 53 | 59 | 64 | 70 | 75 | 80 | 86 | 91 | 96 |
| 70°(110°) | 31 | 36 | 41 | 46 | 52 | 57 | 62 | 67 | 72 | 77 | 83 | 88 | 93 |
| 75°(105°) | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
| 80°(100°) | 30 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 | 69 | 74 | 79 | 84 | 89 |
| 90° | 29 | 34 | 39 | 44 | 48 | 53 | 58 | 63 | 68 | 73 | 78 | 82 | 87 |

此时，可取$\delta$为变量将（9-19）式化简。

因$c'=c''=30°$、$\gamma=\delta$、$\alpha=\beta=150°-\delta$、

$b_2=S_{BC}\frac{\sin\delta}{\sin(15°-\delta)}$，故$m_P$可写为

$$m_P=S_{BC}\cdot m\cdot K$$

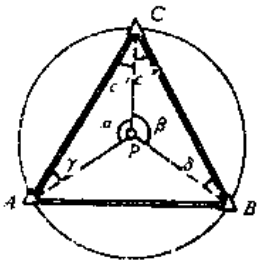


图 9-34

式中：$m$——测角中误差，以秒计；

$S_{BC}$——已知边边长，以公里计；

$m_P$——$P$点的点位中误差，以毫米计。

$$K=\frac{\sin30°\cdot\sin\delta\sqrt{2-\cos2\delta}}{\rho\cdot\sin2\delta\cdot\sin^2(150°-\delta)}\cdot10^6$$

现将$P$点的几个特殊位置的$K$值标于图9-35上，图中的直线左侧标示$\delta$的角度，右侧标示$K$值及其变化情况。

三角形的中心，即$\delta=30°$时$m_P$值最小，$K_{30}=2.3$。

$P$点向已知点$C$移动，误差开始增大，但速度缓慢，在趋近$C$点时$K$的极值为

$$\lim_{P\to C}K=\frac{10}{\rho}\approx 4.8$$

$P$点越过已知点$C$之后，误差继续增大，$K$值由4.8一直增大到$\infty$，$\delta=170°$（$\angle CBP=10°$）时$K_{170}=10.8$，$\delta=165°$（$\angle CBP=15°$）时$K_{165}=19.9$。从此以后的速度则迅速加快。

$P$点自三角形中心向危险圆移动，在$\delta=60°$（即$P$点在$AB$直线上）之前，$K$值变化缓慢，越过$AB$线之后$K$值变化加快，$\delta=80°$时的$K_{80}=13.6$。

当$P$点越过危险圆之后，误差开始减小，$\delta=100°$时，$K_{100}=20.4$；在$\delta=112.8°$时，$K$有最小值$K_{112.8}=14.06$，$\delta$继续增大，$K$值又迅速增大直至$\infty$。

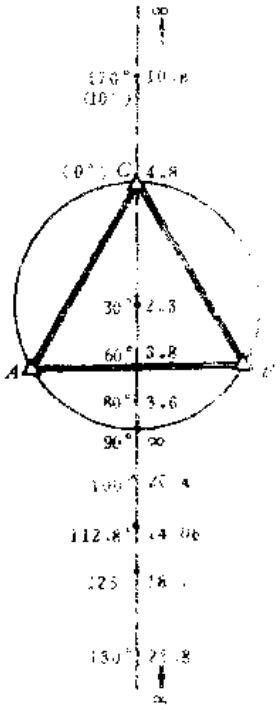



图 9-11

需要指出的是，（9-19）式是按方向观测法由方向值求得$\alpha$、$\beta$角的。如果$\alpha$、$\beta$角是用的角度观测法，即分别对$\alpha$角和$\beta$角单独进行观测，那末$m_P$应为

$$m_P=\frac{b_2 m}{\rho\cdot\sin(\gamma-\delta)}\sqrt{\frac{\sin^2 c'}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2 c''}{\sin^2\beta}} \tag{9-21}$$

或

$$m_P=\frac{b_2 m}{\rho\cdot\sin(\gamma+\delta)}\sqrt{\frac{b_1^2}{S_1^2}+\frac{b_3^2}{S_3^2}} \tag{9-22}$$

式中的符号仍与（9-19）式相同。

若用表9-6和表9-7来查算$m_P$，则

$$m_P=b_2K_3\sqrt{K_1+K_2}$$

应用（9-21）式计算$m_P$的特点是，$m_P$的值不仅与交会点$P$相对于已知点的位置（即图形位置）有关，而且与观测角的位置有关。因在$P$点设站按角度观测水平角时，可以在三个角度中任择两个，两个一组则共有三组，仅其中的一组为图9-32中的$\alpha$、$\beta$。此时$m_\alpha=m_\beta=m$，而$\angle APB=360°-\alpha-\beta$，其中误差则为$m\sqrt{2}$。因此，用（9-21）式或（9-22）式计算$m_P$时，不可将$\alpha$、$\beta$任意换为$\alpha$、$\gamma$或$\beta$、$\gamma$，否则计算结果将不正确。

## §9-6 单三角形

利用测角交会法求未知点坐标，对于前方交会和侧方交会来说，未知点$P$必须与三个已知点通视；对于后方交会来说，未知点$P$必须与四个已知点通视。如果在未知点$P$上要同时与三个或四个已知点通视有困难，也就是在构成各种交会法的图形有困难时，可以采用单三角形的方法来测定未知点$P$的坐标。

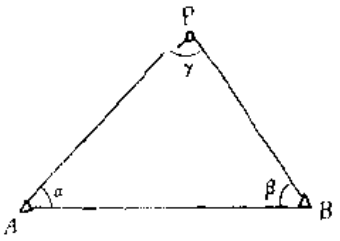


图 9-36

单三角形的图形如图9-36所示，它是分别在已知点 $A$、$B$ 和未知点 $P$ 上设站测得 $\angle\alpha$、$\angle\beta$、$\angle\gamma$。由图可以看出，单三角形的图形和前方交会的图形基本上是一致的，所不同的只是单三角形多观测了一个 $\gamma$ 角，由于多测了一个角，这样就要求三角形三个内角和等于180°，但是由于观测有误差，三个内角的观测值之和一般不等于180°，它们的差值为三角形闭合差，即

$$\omega = \alpha + \beta + \gamma - 180 \tag{9-23}$$

为了使三角形三个内角之和等于180°，就必须消除三角形的闭合差，为此将闭合差反号平均分配作为各个观测角的改正数，$v_\alpha = v_\beta = v_\gamma = -\frac{\omega}{3}$，即每个分配闭合差后的观测角（也称角的最或然值）为：$\alpha - \frac{\omega}{3}$、$\beta - \frac{\omega}{3}$、$\gamma - \frac{\omega}{3}$，这样：

$$\left(\alpha - \frac{\omega}{3}\right) + \left(\beta - \frac{\omega}{3}\right) - \left(\gamma - \frac{\omega}{3}\right) = \alpha + \beta + \gamma - \omega$$

顾及（9-23）式，得

$$\left(\alpha - \frac{\omega}{3}\right) + \left(\beta - \frac{\omega}{3}\right) + \left(\gamma - \frac{\omega}{3}\right) = 180° \tag{9-24}$$

由上式可见，三角形三个内角的最或然值之和等于它的理论值，即180°。这时就可以用与前方交会法相同的公式和表格计算 $P$ 点坐标了。

最后指出，用单三角形定点时，如果已知点坐标抄错了，或者是$\alpha$与$\beta$抄反，这些错误不能在计算时发现，所以在抄录起始数据和观测值时，要严格检查。

例 9-7 以已知点Ⅱ2、Ⅱ3（图9-37）为基础，按单三角形法测定未知点104，为此观测了三角形的三个内角，试求未知点104的坐标。

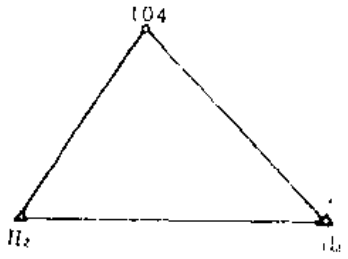


图 9-37

解：单三角形的三个点的编号及观测角值见表 9-8。按（9-23）式求闭合差：$\omega = +37''$，而观测角改正数为 $-\frac{\omega}{3}$，为了使三个改正数之和刚好等于"$-\omega$"，所以取改正数$v$为 $-12''$、$-12''$、$-13''$。在计算时，一般将多或少一秒的改正值分给角值较大的那个观测值，本例中将 $-13''$ 作为角$B$的改正值。在求出全部"改正角度"后，按（9-24）式进行检查，即三个"改正后角度"之和应等于180°。余下的计算与前方交会法同。表9-8是用计算器计算的。

下面来讨论单三角形点的精度。设观测角为$\alpha'$、$\beta'$、$\gamma'$（图9-38）。观测角经配赋三角形闭合差后，再推算$AP$边的边长$b$及其坐标方位角$\alpha_{AP}$，而后求出 $P$ 点坐标。

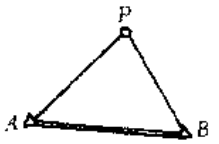
$$x_P = x_A + b\cos\alpha_{AP}$$
$$y_P = y_A + b\sin\alpha_{AP}$$

三角形点之计算

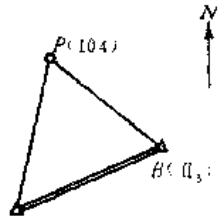
计算者：李　军
检查者：张　勇

表 9-8

示意图




野外图




三角形之解算

| 点名 | 观测值 | $-\frac{\omega}{3}$ | 改正后角值 |
|---|---|---|---|
| $P$（104） | 25°12′22″ | −12″ | 25°12′10″ |
| $A$（Ⅱ2） | 45 10 18 | −12 | 45 10 06 |
| $B$（Ⅱ3） | 109 37 57 | −13 | 109 37 44 |
| $\omega$ | −37 | −37 | 180 00 00 |

| 计算 | 点名 | $x$(m) | 角度 | $y$(m) | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|
| 已知点坐标 | $P$（104） | 39069.01 | 25°12′10″ | 14420.48 | |
| | $A$（Ⅱ2） | 38856.23 | 45 10 06 | 14628.45 | |
| | $B$（Ⅱ3） | 38990.74 | 109 37 44 | 14630.39 | |

式中 $b=\dfrac{S\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$

$\alpha_{AP}=\alpha_{AB}-\alpha$

而

$$\alpha=\alpha'+v_\alpha=\alpha'-\frac{\omega}{3}$$

$$=\alpha'-\frac{1}{3}(\alpha'-\beta'+\gamma'-180^\circ)$$

$$=\frac{2}{3}\alpha'-\frac{1}{3}\beta'-\frac{1}{3}\gamma'+60^\circ$$

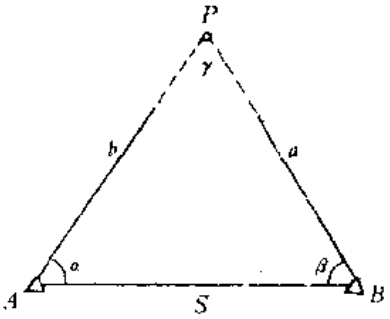



图 9-38

$$\beta=-\frac{1}{3}\alpha'+\frac{2}{3}\beta'-\frac{1}{3}\gamma'+60^\circ$$

$$\gamma=-\frac{1}{3}\alpha'-\frac{1}{3}\beta'+\frac{2}{3}\gamma'+60^\circ$$

将以上各式依次代入，求$x_P$、$y_P$对$\alpha'$、$\beta'$、$\gamma'$的微分并转换为中误差，最后由

$$m_P=\sqrt{m_{x_P}^2+m_{y_P}^2}$$

得

$$m_P=\frac{m\cdot S}{\rho\sin^2\gamma}\sqrt{\frac{1}{3}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)} \qquad (9\text{-}25)$$

$$=m\cdot S\cdot K$$

或

$$m_P = \frac{m}{\rho \sin\gamma}\sqrt{\frac{1}{3}(b^2 + a^2 + S^2)} \qquad (9\text{-}26)$$

（9-25）式中：$S$以公里为单位，$m$以秒为单位，$m_P$以毫米为单位，则

$K = \frac{1}{\rho \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2\gamma}\sqrt{\frac{1}{3}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)}$。以$\alpha$、$\beta$为引数制成的$K$值见表9-9。

例 9-8　用单三角形测定$P$点时，设$m = \pm 12''$、$S = a = b = 6\text{km}$，$\alpha = \beta = \gamma = 60°$，求$m_P$=？

解：从表9-9查得$K$=5.6，得

$$m_P = \pm 12 \times 6 \times 5.6 = \pm 403\text{mm} = \pm 0.40\text{m}$$

单三角形点精度$K\left(=\frac{1}{\rho \cdot 10^{-6}\sin^2\gamma}\sqrt{\frac{1}{3}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)}\right)$值表　　表 9-9

| $\alpha$ \ $\beta$ | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | 100° | 110° | 120° | 130° | 140° | 150° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10° | 7.1 | 5.6 | 4.8 | 4.4 | 4.1 | 4.0 | 4.0 | 4.1 | 4.3 | 4.8 | 5.6 | 6.9 | 9.3 | 15 |
| 20° | 5.4 | 4.7 | 4.2 | 4.0 | 4.1 | 4.0 | 4.1 | 4.5 | 5.1 | 6.0 | 7.7 | 11 | 19 | |
| 30° | 4.7 | 4.2 | 3.9 | 3.9 | 4.0 | 4.2 | 4.6 | 5.3 | 6.4 | 8.4 | 13 | 23 | | |
| 40° | 4.2 | 3.9 | 3.8 | 4.0 | 4.2 | 4.7 | 5.5 | 6.7 | 9.1 | 14 | 27 | | | |
| 50° | 4.0 | 4.0 | 4.0 | 4.2 | 4.7 | 5.6 | 7.0 | 9.6 | 15 | 30 | | | | |
| 60° | 3.9 | 4.0 | 4.2 | 4.7 | 5.6 | 7.1 | 9.9 | 16 | 32 | | | | | |
| 70° | 4.0 | 4.2 | 4.7 | 5.6 | 7.1 | 10 | 16 | 34 | | | | | | |
| 80° | 4.1 | 4.6 | 5.4 | 7.0 | 9.9 | 16 | 34 | | | | | | | |
| 90° | 4.5 | 5.3 | 6.7 | 9.6 | 16 | 34 | | | | | | | | |
| 100° | 5.1 | 6.4 | 9.1 | 15 | 32 | | | | | | | | | |
| 110° | 6.0 | 8.4 | 14 | 30 | | | | | | | | | | |
| 120° | 7.7 | 13 | 27 | | | | | | | | | | | |
| 130° | 11 | 23 | | | | | | | | | | | | |
| 140° | 19 | | | | | | | | | | | | | |

对图9-34单三角形点点位中误差与图形的关系可作如下讨论：

1.$\gamma$角不变时。

此时（9-25）式中$K$的极值即为$\sin^2\alpha + \sin^2\beta$的极值，可见它与两点前方交会点的交

会角$\gamma$不变的情况完全相同。比较（9-25）式与（9-13）式知，在$S_{AB}$与$m$相同的条件下，图形一致的单三角形点比两点前方交会点的精度高。

2.$\alpha=\beta$时。

将（9-25）式的$K$改写为

$$\frac{1}{\rho''\cdot 10^{-6}}\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha}{\sin^4 2\alpha}}$$

并对最后一个因子根号内的函数求导数，得

$$\left(\frac{2\sin^2\alpha-\sin^2 2\alpha}{\sin^4 2\alpha}\right)'=-\frac{8\sin^2\alpha(4\sin^4\alpha-9\sin^2\alpha+3)}{\sin^5 2\alpha}$$

因$\alpha\neq 0$且$\alpha<90°$，故欲使此导数值为零，只需

$$4\sin^4\alpha-9\sin^2\alpha\cdot 3=0$$

即可：此时函数有极小值。

解此方程得$\alpha=39°38'10.7''$，即$\gamma=100°43'38.6''$。可见，单三角形点点位在$\alpha$ $\beta$、$\gamma\approx 100°40'$时的中误差最小，即精度最高。

## §9-7 其他交会方法

在测量实践中，人们经常会遇到各种各样的困难，例如测区中大地点稀少或地物密集，以致不能充分利用已知点；有时在狭长的山沟中工作，沟的两侧悬崖陡壁。在这些困难地区布设地形控制点，应用前述的交会方法是困难的。下面介绍几种比较适用的方法。

### 一、旁点交会法

有时会遇到这种地形：一条狭长，坡度较大，不便于直接量距的山沟，沟的两侧是耸立的难以攀登的山岭，而且在一侧的山上布满了茂密的森林（图9-39的阴影部分）。在山沟一端两侧有$A$、$B$两个已知点，今要求在山沟中测设$P_2$点。为此，布设了一个过渡的控制点$C$，并选择了几个从$B$、$A$、$C$、$P_2$等点中至少有三个点都能够观测的明显地物点（如独立树、独立石、岩石角等）$D$、$E$、$F$，然后从$B$、$A$、$C$、$P_2$等点向$D$、$E$、$F$点作前方交会观测。

怎样计算$P_2$点坐标呢？首先从已知边$AB$，通过$\triangle ABD$求$AD$边长，再通过$\triangle ADC$求$AC$边长。同时，通过$\triangle ABE$求出$AE$边长再通过$\triangle AEC$求$AC$边长。这样就两次求出了$AC$的边长，当它们符合精度要求时，取它们的平均值作为$AC$最终边长。

同样，$CP_2$边长也可以求出两次：一次是通过$\triangle AEC$和$\triangle CEP_2$算出来，另一次是通过$\triangle AFC$和$\triangle CFP_2$算出来。最后取两次边长的平均值作为$CP_2$的最终边长。

有了$AC$和$CP_2$的边长，以及$A$和$C$点观测的水平角，就可以从已知方位角$\alpha_{AB}$和$A$点坐标按支导线计算的方法，推算出$P_2$点的坐标。

## 二、双点后方交会

有时可以用布设双点后方交会的办法解决测区中已知点较少的困难。图9-40中 $A$、$B$ 是两个已知点，$P_1$、$P_2$ 是未知点，今在未知点 $P_1$、$P_2$ 上分别观测得 $\alpha_1$、$\beta_1$ 和 $\alpha_2$、$\beta_2$，要求未知点 $P_1$、$P_2$ 的坐标，必须先求出已知点到未知点的边长和坐标方位角，而后用坐标正算公式来计算未知点的坐标。双点后方交会与后方交会（指通常的一个未知点的后方交会）存在同样的困难，即已知边和未知边之间没有现成的夹角（如图9-36中的 $\gamma$ 和 $\delta$）可以利用，为此必须先解出辅助角 $\gamma_1$、$\delta_1$ 和 $\gamma_2$、$\delta_2$。下面介绍双点后方交会的计算公式

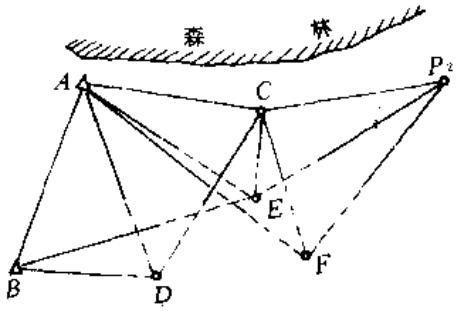
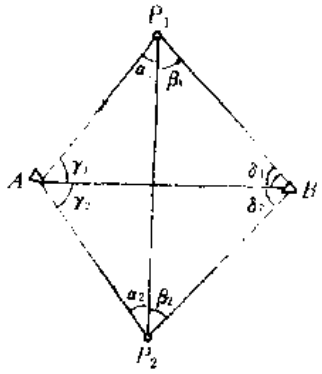
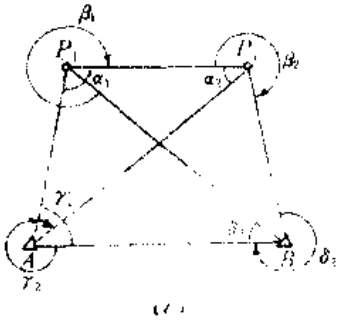



图 9-39




(a)




(b)

图 9-40

图9-40(a)是两个未知点分别布设在已知点 $A$、$B$ 两侧的图形。图9-40(b)是两个未知点都布设在已知点 $A$、$B$ 同侧的图形。为了使导出的公式适用于各种图形，对各角的符号注记作如下规定：未知点 $P_1$ 上的两个观测角以 $\alpha_1$、$\beta_1$ 表示，而 $\alpha_1$ = $\angle P_2P_1A$，$\beta_1$ = $\angle BP_1P_2$，各角标记时，一律顺时针向，例如角 $\alpha_1$ 是以 $P_1$ 为测站，从 $P_1P_2$ 边起顺时针方向转到 $P_1A$ 边间的角（下同）。在未知点 $P_2$ 上观测的两个角以 $\alpha_2$、$\beta_2$ 表示，而 $\alpha_2$ = $\angle AP_2P_1$，$\beta_2 = \angle P_1P_2B$。辅助角 $\gamma_1 = \angle P_1AB$，$\delta_1 = \angle ABP_1$，$\gamma_2 = \angle BAP_2$，$\delta_2 = \angle P_2BA$。

求辅助角 $\gamma_1$、$\delta_1$、$\gamma_2$、$\delta_2$ 的公式推演如下：

从图9-40可见

$$\gamma_1 + \delta_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \beta_1)$$

即

$$\frac{\gamma_1 + \delta_1}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1) \tag{9-27}$$

按正弦定理循两条路线求得边 $S_{P_1P_2}$ 为

$$S_{P_1P_2} = S_{AP_1}\frac{\sin\{180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)\}}{\sin\alpha_2}$$

$$= S_{AB}\frac{\sin\delta_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}\cdot\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_2}$$

$$S_{P_1P_2}=S_{BP_2}\frac{\sin\{180^\circ-(\beta_1-\beta_2)\}}{\sin\beta_2}$$

$$=S_{AB}\frac{\sin\gamma_1}{\sin(\alpha_1-\beta_1)}\cdot\frac{\sin(\beta_1+\beta_2)}{\sin\beta_2}$$

于是

$$\frac{\sin\delta_1}{\sin\gamma_1}=\frac{\sin\alpha_2\cdot\sin(\beta_1-\beta_2)}{\sin\beta_2\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$$

令

$$Q=\frac{\sin\alpha_2\cdot\sin(\beta_1+\beta_2)}{\sin\beta_2\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{9-28}$$

所以

$$\frac{1}{Q}=\frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta_1}$$

按配分比例，得

$$\frac{1-Q}{1+Q}=\frac{\sin\gamma_1-\sin\delta_1}{\sin\gamma_1+\sin\delta_1}=\frac{2\cos\frac{\gamma_1+\delta_1}{2}\sin\frac{\gamma_1-\delta_1}{2}}{2\sin\frac{\gamma_1+\delta_1}{2}\cos\frac{\gamma_1-\delta_1}{2}}$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\gamma_1+\delta_1}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma_1-\delta_1}{2}$$

或者

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma_1-\delta_1)=\frac{1-Q}{1+Q}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma_1+\delta_1}{2} \tag{9-29}$$

按公式（9-28）式求$Q$，然后按（9-29）式求出$\frac{1}{2}(\gamma_1-\delta_1)$，结合（9-27）式可以求出$\gamma_1$和$\delta_1$。最后以$Q=\frac{\sin\delta_1}{\sin\gamma_1}$进行检查。

从图9-40可见：

$$\left.\begin{aligned}\gamma_2&=180^\circ-(\alpha_1+\alpha_2-\gamma_1)\\ \delta_2&=180^\circ-(\beta_1+\beta_2-\delta_1)\end{aligned}\right\} \tag{9-30}$$

求出辅助角$\gamma_1$、$\delta_1$、$\gamma_2$、$\delta_2$以后，就可以按前方交会的方法从$\triangle ABP_1$求$P_1$点坐标，从$\triangle ABP_2$求$P_2$点坐标。

必须指出，在上述计算中，如果有任何一个参予计算的元素（观测角，已知坐标等）存在错误，将导致最后坐标的错误，但是在上述计算中无从发觉，所以还必须在$P_1$和$P_2$点对第三个已知点$K$（和$K'$）观测$\varepsilon_1$及$\varepsilon_2$角（图9-41）作为检核之用，检核的方法与测方交会同。

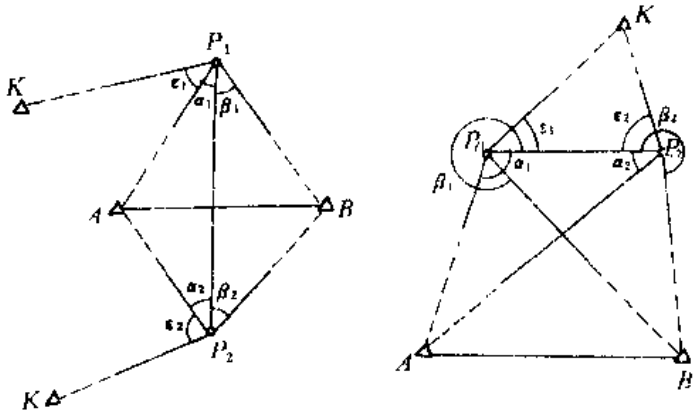



图 9-41

## §9-8 测 边 交 会

为了求算未知点$P$的平面坐标，除去测角交会法外，目前电磁波测距仪已在测量工作中普遍采用，所以可以测量边长$S_a$、$S_b$(图9-42)，以算出$P$点坐标，这种方法称为测边交会法。本来为了求出$P$点的坐标，测量两条边长就可以了，但是为了检核，同时又为了提高$P$点坐标的精度，通常是采用三边交会法(图9-42)。其中两条边长是求$P$点坐标的，另外一条边长作检核。或者用四边交会法（图9-43)，这时可以组成两个各有两条观测边的图形，求得$P$点的两组坐标$x'_P$、$y'_P$；$x''_P$、$y''_P$。当这两组相应坐标之差在一定范围内时，取其平均值作为$P$点的最后坐标。

下面来推导，由两条观测边长推算$P$点坐标的公式。

设已知点$A$、$B$（图9-44）的坐标为$x_A$、$y_A$和$x_B$、$y_B$，$A$与$B$间的已知边长为$S_{AB}$。测量了边长$S_a$、$S_b$。在$\triangle ABP$中，$AB$边的高为$h$，而高$h$将$AB$边分成$l$和$g$两段，显然$l+g=S_{AB}$。

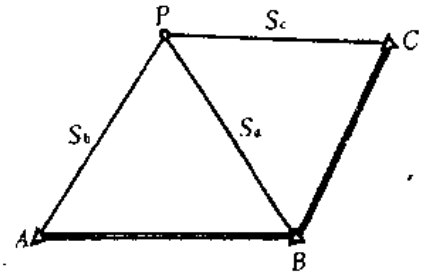



图9-42

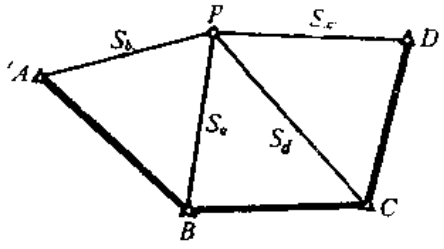



图 9-43

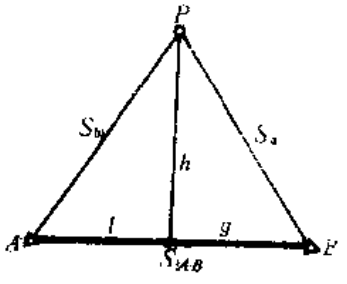



图 9-44

推导公式的思路是这样的：由已知边$S_{AB}$和观测边长$S_a$、$S_b$，推出$l$、$g$、$h$，从而算出$\angle A$、$\angle B$，并按余切公式（9-1)式求$P$点坐标。

由图可见：

$$h^2 + l^2 = S_b^2 \qquad (a)$$

$$h^2 + g^2 = S_a^2 \qquad (b)$$

$$l + g = S_{AB} \qquad (c)$$

从（$c$）式得：$l = S_{AB} - g$，将它等式两边取平方后代入（$a$）式得：

$$h^2 + g^2 - 2S_{AB}g = S_b^2 - S_{AB}^2$$

将上式减去（$b$）式，整理后得

$$g = \frac{S_a^2 + S_{AB}^2 - S_b^2}{2S_{AB}} \qquad (d)$$

将上式代入（$c$）式得：

$$l = \frac{S_b^2 + S_{AB}^2 - S_a^2}{2S_{AB}} \qquad (e)$$

由($a$)、($b$)式得：

$$h = \sqrt{S_b^2 - l^2} = \sqrt{S_a^2 - g^2} \qquad (f)$$

这样就可以算出$l$、$g$、$h$。而

$$\operatorname{ctg} A = \frac{l}{h}$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{g}{h}$$

则

$$\frac{1}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} = \frac{1}{\frac{l+g}{h}} = \frac{h}{S_{AB}} \qquad (g)$$

以及

$$\left.\begin{aligned} \frac{\operatorname{ctg} A}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} &= \frac{l}{S_{AB}} \\ \frac{\operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B} &= \frac{g}{S_{AB}} \end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

将($g$)、($h$)式代入余切公式（9-1）式，就可以求得$P$点坐标：

$$x_P = \frac{x_A \operatorname{ctg} B + x_B \operatorname{ctg} A + (y_B - y_A)}{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}$$

$$= \frac{g}{S_{AB}} x_A + \frac{l}{S_{AB}} x_B + \frac{h}{S_{AB}} (y_B - y_A)$$

$$= \frac{g+l}{S_{AB}} x_A + \frac{l}{S_{AB}} (x_B - x_A) + \frac{h}{S_{AB}} (y_B - y_A)$$

即

同样可得

$$\left.\begin{aligned} x_P &= x_A + L(x_B - x_A) + H(y_B - y_A) \\ y_P &= y_A + L(y_B - y_A) + H(x_A - x_B) \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}3)$$

式中：

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{l}{S_{AB}} = \frac{S_b^2 + S_{AB}^2 - S_a^2}{2S_{AB}^2} \\ H &= \frac{h}{S_{AB}} = \sqrt{\frac{S_b^2}{S_{AB}^2} - L^2} \\ &= \sqrt{\frac{S_a^2}{S_{AB}^2} - G^2} \\ G &= \frac{g}{S_{AB}} = \frac{S_a^2 - S_{AB}^2 - S_b^2}{2S_{AB}^2} \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}32)$$

按（9-31）及（9-32）式可以直接由两条边长推算出 $P$ 点坐标。

对于三边交会（图9-37）来说，为了提高 $P$ 点点位精度，一般可取两条近似正交的边计算坐标，而取第三条测量边长 $S_C$ 作为检核。这时可以由 $C$、$P$ 点坐标反算出 $PC$ 边长：

$$S_{C\text{算}} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$$

$PC$ 的测量边长 $S_C$ 与其计算值 $S_{C\text{算}}$ 的较差为：

$$\Delta S_C = S_{C\text{算}} - S_C$$

对于地形控制点，当 $\Delta S_C$ 不大于比例尺精度的两倍，即

$$\Delta S_C \leqslant 2 \times 0.1M\ (\text{mm})$$

时，可认为外业成果合格。一般说来，由于电磁波测距仪精度极高，只要观测和计算中没有错误，上式是肯定能得到满足的。

对于四边交会（图9-38）来说，可以组成两组图形，即△$ABP$和△$CDP$，求出 $P$ 点两组坐标 $x'_P$、$y'_P$ 和 $x''_P$、$y''_P$。一般要求两组算得的点位较差不大于两倍比例尺精度，即

$$\Delta S = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \leqslant 2 \times 0.1M\ (\text{mm})$$

式中 $\delta x = x'_P - x''_P$，$\delta y = y'_P - y''_P$。则取两组坐标的平均值作为 $P$ 点的最后坐标。对于一般电磁波测距仪来说，上式是容易满足的。

例 9-9　为了求出 $P$ 点坐标，自已知点 $A$、$B$、$C$ 向 $P$ 点测了三条边长 $S_a$、$S_b$、$S_c$，试求 $P$ 点坐标。

全部计算在表9-10中进行。

下面分两种情况来讨论测边交会的精度。

## 一、两边交会的精度

测边交会点 $P$ 的坐标由（9-31）、（9-32）式算出，即

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{l}{S_{AB}} = \frac{S_b^2 + S_{AB}^2 - S_a^2}{2S_{AB}^2} \\ H &= \frac{h}{S_{AB}} = \sqrt{\frac{S_b^2}{S_{AB}^2} - L^2} \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

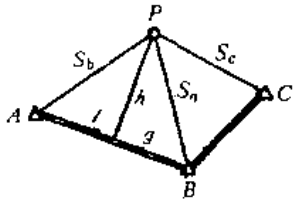
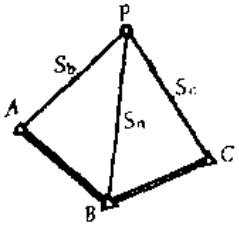
$$\left.\begin{aligned} x_P &= x_A + L(x_B - x_A) - H(y_B - y_A) \\ y_P &= y_A + L(y_B - y_A) + H(x_B - x_A) \end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

三边交会计算

计算者　李　军

检查者　张　勇

表 9-10

| 示意图 | | 野外图 | | 公式 | |
|---|---|---|---|---|---|
|  | |  | | $L=\frac{l}{S_{AB}}=\frac{S_b^2-S_{AB}^2-S_a^2}{2S_{AB}^2}$<br>$G=\frac{g}{S_{AB}}=\frac{S_a^2+S_{AB}^2-S_b^2}{2S_{AB}^2}$<br>$H=\frac{h}{S_{AB}}=\sqrt{\frac{S_b^2}{S_{AB}^2}-L^2}$<br>$=\sqrt{\frac{S_a^2}{S_{AB}^2}-G^2}$ | |
| $x_B$ | 3400367.42 | $y_B$ | 536076.44 | $x_P=x_A+L(x_B-x_A)$<br>$+H(y_B-y_A)$ | |
| $x_A$ | 3401438.75 | $y_A$ | 533934.58 | | |
| $x_B-x_A$ | -1071.33 | $y_B-y_A$ | 2141.86 | $y_P=y_A+L(y_B-y_A)$<br>$+H(x_A-x_B)$ | |
| $S_b$ | 2957.30 | $S_a$ | 2586.82 | | |
| $S_{AB}$ | 2394.85 | $L$ | 0.6790650 | | |
| $1-l$ | .0313803 | $G$ | 0.3209350 | $S_C$ 算 | 3949.11 m |
| $L(x_B-x_A)$ | -727.503 | $L(y_B-y_A)$ | -1454.462 | $S_C$ | 3949.13 |
| $H(y_B-y_A)$ | +2209.072 | $H(x_A-x_B)$ | +1104.948 | $\Delta S_C$ | 0.02 m |
| $x_P$ | 3402920.32 | $y_P$ | 536493.99 | | |

由于测量的边长$S_a$、$S_b$有误差，从而使$L$、$H$带有误差，导致$P$点坐标有误差，即：

$$dL=\frac{1}{2S_{AB}^2}\left(2S_b\,dS_b-2S_a\,dS_a\right)=\frac{S_b}{S_{AB}^2}dS_b-\frac{S_a}{S_{AB}^2}dS_a \qquad (c)$$

$$dH=\frac{1}{2H}\left(\frac{2S_b}{S_{AB}^2}dS_b-2L\,dL\right)=\frac{S_b}{HS_{AB}^2}dS_b-\frac{L}{H}\left(\frac{S_b}{S_{AB}^2}dS_b-\frac{S_a}{S_{AB}^2}dS_a\right)=\frac{S_b(1-L)}{HS_{AB}^2}dS_b+\frac{S_aL}{HS_{AB}^2}dS_a \qquad (d)$$

而

$$d_{x_P}=(x_B-x_A)dL+(y_B-y_A)dH$$
$$d_{y_P}=(y_B-y_A)dL+(x_A-x_B)dH$$

将（$c$）和（$d$）式代入上式，得

$$dx_P=\Delta x_{AB}\left(\frac{S_b}{S_{AB}^2}dS_b-\frac{S_a}{S_{AB}^2}dS_a\right)+\Delta y_{AB}\left(\frac{S_b}{HS_{AB}^2}(1-L)dS_b+\frac{LS_a}{HS_{AB}^2}dS_a\right)=\left(\frac{S_b}{S_{AB}}\cos\alpha_{AB}+\frac{S_b(1-L)}{HS_{AB}}\sin\alpha_{AB}\right)dS_b+\left(-\frac{S_b}{S_{AB}}\cos\alpha_{AB}+\frac{LS_a}{HS_{AB}}\sin\alpha_{AB}\right)dS_a$$

$$dy_P = \Delta y_{AB}\left(\frac{S_b}{S_{AB}^2}dS_b - \frac{S_a}{S_{AB}^2}dS_a\right) - \Delta x_{AB}\left\{\frac{S_b}{HS_{AB}^2}(1-L)dS_b + \frac{LS_a}{HS_{AB}^2}dS_a\right\}$$

$$\left\{\frac{S_b}{S_{AB}}\sin\alpha_{AB} - \frac{S_b(1-L)}{HS_{AB}}\cos\alpha_{AB}\right\}dS_b$$

$$-\left\{\frac{S_a}{S_{AB}}\sin\alpha_{AB} + \frac{LS_a}{HS_{AB}}\cos\alpha_{AB}\right\}dS_a$$

将上式转成中误差的关系式，得

$$m_{x_P}^2 = \left\{\frac{S_b}{S_{AB}}\cos\alpha_{AB} + \frac{S_a(1-L)}{HS_{AB}}\sin\alpha_{AB}\right\}^2 m_{S_b}^2$$

$$+\left\{-\frac{S_b}{S_{AB}}\cos\alpha_{AB} + \frac{LS_a}{HS_{AB}}\sin\alpha_{AB}\right\}^2 m_{S_a}^2$$

$$m_{y_P}^2 = \left\{\frac{S_b}{S_{AB}}\sin\alpha_{AB} - \frac{S_b(1-L)}{HS_{AB}}\cos\alpha_{AB}\right\}^2 m_{S_b}^2$$

$$+\left\{\frac{S_a}{S_{AB}}\sin\alpha_{AB} + \frac{LS_a}{HS_{AB}}\cos\alpha_{AB}\right\}^2 m_{S_a}^2$$

考虑到在使用短程或中程电磁波测距仪测距时，在测距误差中固定误差占主要地位。固定误差与所测距离的长度无关，所以在讨论地形控制的精度时，可以假设测距是同精度的，即$m_{S_a} = m_{S_b} = m_S$。这样，$P$点的点位中误差为

$$m_P^2 = m^2\left\{\left(\frac{S_b}{S_{AB}}\right)^2 + \left[\frac{S_b(1-L)}{HS_{AB}}\right]^2 + \left(\frac{S_a}{S_{AB}}\right)^2 + \left(\frac{LS_a}{HS_{AB}}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{m^2}{S_{AB}^2}\left\{S_b^2 + \frac{S_b^2(1-L)^2}{H^2} + S_a^2 + \frac{L^2S_a^2}{H^2}\right\}$$

$$= \frac{m^2}{H^2S_{AB}^2}\left\{S_b^2(L^2+H^2) + S_a^2(L^2+H^2) + S_b^2(1-2L)\right\}$$

顾及（$a$）式，以及从图18-15中可见$\triangle APE$是直角三角形，则

$$L^2 + H^2 = \frac{1}{S_{AB}^2}(l^2+h^2) = \frac{S_b^2}{S_{AB}^2}$$

所以

$$m_P^2 = \frac{m^2}{H^2S_{AB}^4}\left\{S_a^2S_b^2 + S_b^4 + S_b^2(1-2L)S_{AB}^2\right\}$$

再将（$a$）式代入上式，得

$$m_P^2 = \frac{m^2S_b^2}{H^2S_{AB}^2}\left\{S_a^2 - S_b^2 + S_{AB}^2 - S_b^2 - S_{AB}^2 + S_a^2\right\} = \frac{2m^2S_a^2S_b^2}{H^2S_{AB}^4} = \frac{2m^2S_a^2S_b^2}{h^2S_{AB}^2}$$

从图9-44可见：

$$\frac{S_a}{S_{AB}} = \frac{\sin A}{\sin P}, \qquad \frac{S_b}{h} = \frac{1}{\sin A}$$

所以

$$m_P^2 = \frac{2m^2 \sin^2 A}{\sin^2 P \cdot \sin^2 A} = \frac{2m^2}{\sin^2 P}$$

即

$$m_P = \frac{\sqrt{2}}{\sin P} m \qquad (9\text{-}33)$$

从上式可以看出，在两边交会中，当测边精度相同，交会角 $P = 90°$ 时，待定点 $P$ 的点位精度最高。也就是说，待定点 $P$ 位于以已知边 $AB$ 为直径的圆周上时（图9-45），待定点 $P$ 的点位精度最高。

## 二、四边交会的精度

按四边交会求 $P$ 点坐标（图9-46），实际上是先分成两组两边交会求出 $P$ 点的两组坐标 $x'_P$、$y'_P$ 和 $x''_P$、$y''_P$ 而后取中数，即

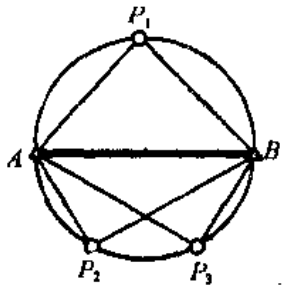


图 9-45

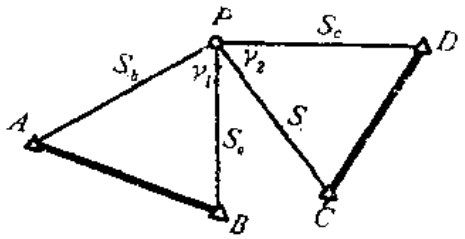


图 9-46

$$x_P = \frac{1}{2}(x'_P + x''_P)$$

$$y_P = \frac{1}{2}(y'_P + y''_P)$$

所以

$$m^2_{x_P} = \frac{1}{4}(m^2_{x'_P} + m^2_{x''_P})$$

$$m^2_{y_P} = \frac{1}{4}(m^2_{y'_P} + m^2_{y''_P})$$

则

$$m_P^2 = \frac{1}{4}(m^2_{P'} + m^2_{P''})$$

式中 $m^2_{P'}$、$m^2_{P''}$ 是由两组两边交会来得的点位精度，对于图9-46来说，按（9-33）式，有

$$m_{P'} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\gamma_1} m$$

$$m_{P''} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\gamma_2} m$$

所以

$$m_P^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{2m^2}{\sin^2\gamma_1} + \frac{2m^2}{\sin^2\gamma_2}\right)$$

则

$$m_P = \frac{m}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\gamma_1} + \frac{1}{\sin^2\gamma_2}} \tag{9-34}$$

**例 9-10** 设四边交会时，$\gamma_1 = 85°$，$\gamma_2 = 73°$，$m = \pm 20\text{mm}$，试求 $P$ 点精度。

**解**：按（18-25）式，得

$$m_P = \frac{\pm 20}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 85°} + \frac{1}{\sin^2 73°}} = \pm 20\text{mm} = \pm 0.02\text{m}$$

## §9-9 线 形 锁

线形锁的布网形式如图9-47，图中 $A$、$B$、$M$、$N$ 是已知点，在 $A$、$B$ 中间布设若干个互相连结的三角形，其中Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ等点是未知点。这种图形布设灵活，能控制较大的面积，所以在生产上得到广泛应用。

线形锁的布设形式有下列三种：（1）观测两个连接角 $\varphi$、$\psi$，如图9-47（$a$）、（$b$）；（2）观测一个连接角 $\varphi$，如图9-47（$c$）；（3）不观测连接角，如图9-47（$d$）。

线形锁测角工作完成之后，经过对手簿的检查，当所有的记录、计算及三角形闭合差

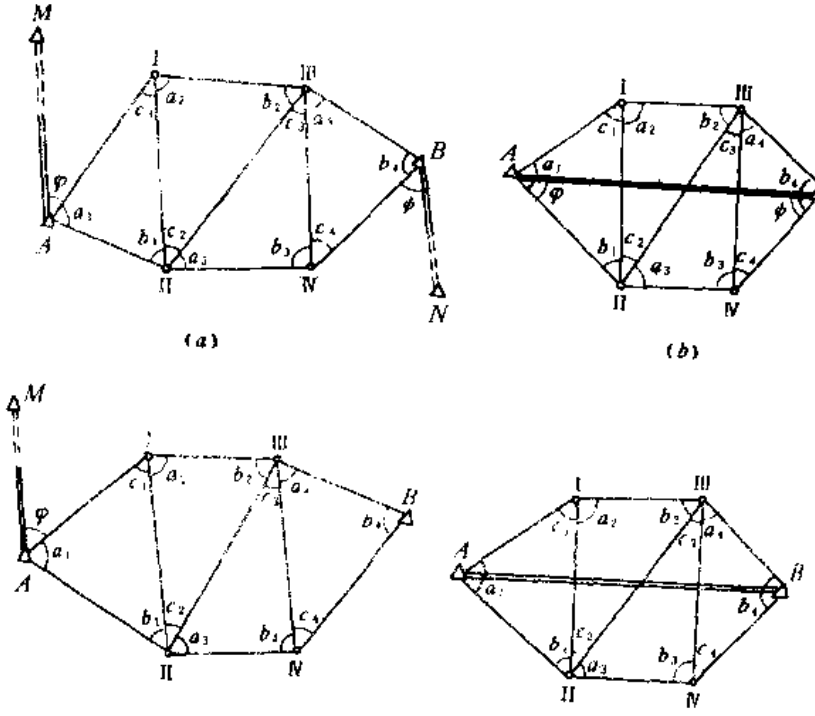



图 9-47

都符合要求后才开始计算。在地形控制的内业计算中，线形锁一般采用近似的平差计算，下面分别介绍线形锁的计算公式和表格。

## 一、不测连接角的线形锁

不测连接角的线形锁(图9-47(*d*))是计算线形锁的基础图形。每个三角形必须至少观测两个内角。

解求线形锁点坐标的方法的思路和解算过程如下：

在将三角形的内角和闭合差分配之后，先假设$A$Ⅰ边的边长为$S_{A\text{Ⅰ}}$，和它的坐标方位角为$\alpha_{A\text{Ⅰ}}$(图9-48)。由$A$点求得Ⅰ点的假定坐标

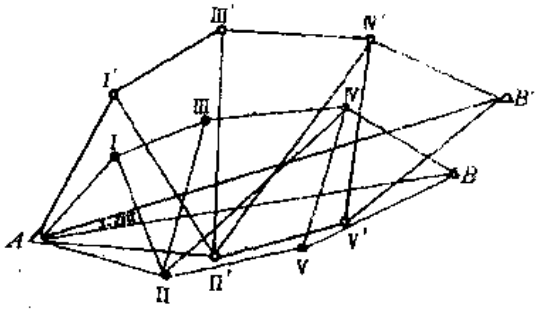


图 9-48

$$x_{\text{Ⅰ}'} = x_A + S_{A\text{Ⅰ}}\cos\alpha_{A\text{Ⅰ}}$$

$$y_{\text{Ⅰ}'} = y_A + S_{A\text{Ⅰ}}\sin\alpha_{A\text{Ⅰ}}$$

然后由$A$、Ⅰ′两点按解算前方交会点的(9-1)式依次求得Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、$B$点的假定坐标，即图9-48中的Ⅱ′、Ⅲ′、Ⅳ′、Ⅴ′、$B'$等点。

由于各三角形的内角值并未发生变化，即图9-48中两个线形锁的三角形内角一一对应相等，因此两者必呈相似的形状，其不同之处仅为大小不同和方位不一致。因此，解算不测连接角线形锁的关键，在于如何使$A$Ⅰ′Ⅱ′……$B'$线形锁转换成$A$ⅠⅡ……$B$线形锁，即必须对假定方位角和边长的线形锁给以缩放和旋转，使其与实际的线形锁大小相同、方位一致。

由于图形的相似性，所以两条线形锁的对应边必成比例，各对应边的夹角亦相等。这个规则对于线形锁中的任意两点的连线当然也成立，即

$$\frac{S_{AB}}{S_{AB'}} = \frac{S_{A\text{Ⅰ}}}{S_{A\text{Ⅰ}'}} = \cdots\cdots = \frac{S_{Ai}}{S_{Ai'}} = \cdots\cdots = \frac{S_{A\text{Ⅴ}}}{S_{A\text{Ⅴ}'}} = Q \qquad (a)$$

$$\alpha_{AB} - \alpha_{AB'} = \alpha_{A\text{Ⅰ}} - \alpha_{A\text{Ⅰ}} = \cdots = \alpha_{Ai} - \alpha_{Ai'} = \cdots = \alpha_{A\text{Ⅴ}} - \alpha_{A\text{Ⅴ}'} = \delta_\alpha \qquad (b)$$

即

$$S_{Ai} = Q \cdot S_{Ai'}$$

$$\alpha_{Ai} = \alpha_{Ai'} + \delta_\alpha \qquad (c)$$

由于

$$x_i = x_A + S_{Ai}\cos\alpha_{Ai}$$

$$y_i = y_A + S_{Ai}\sin\alpha_{Ai}$$

将(*c*)式代入后得

$$x_i = x_A + Q \cdot S_{Ai'}\cos(\alpha_{Ai'} + \delta_\alpha)$$

$$y_i = y_A + Q \cdot S_{Ai'}\sin(\alpha_{Ai'} + \delta_\alpha)$$

展开$\cos(\alpha_{Ai'} + S_\alpha)$，$\sin(\alpha_{Ai'} + \delta_\alpha)$，并令

$$Q_1 = Q\cos\delta_\alpha$$

$$Q_2 = Q\sin\delta_a \qquad (d)$$

则

$$\begin{aligned} x_i &= x_A + Q_1 \Delta x_{Ai}' - Q_2 \Delta y_{Ai}' \\ y_i &= y_A + Q_1 \Delta y_{Ai}' + Q_2 \Delta x_{Ai}' \end{aligned} \qquad (e)$$

特殊地，若$i$为$B$，则

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + Q\Delta x_{AB}' - Q\Delta y_{AB}' \\ y_B &= y_A + Q\Delta y_{AB}' + Q_2 \Delta x_{AB}' \end{aligned}$$

式中的$x_B$、$y_B$为已知，$\Delta x_{AB}'$、$\Delta y_{AB}'$则可由假定坐标算出，故

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\Delta x_{AB} \cdot \Delta x_{AB}' + \Delta y_{AB} \cdot \Delta y_{AB}'}{\Delta x_{AB}'^2 + \Delta y_{AB}'^2} \\ Q_2 &= \frac{\Delta y_{AB} \cdot \Delta x_{AB}' - \Delta x_{AB} \cdot \Delta y_{AB}'}{\Delta x_{AB}'^2 + \Delta y_{AB}'^2} \end{aligned} \qquad (f)$$

由（$f$）式求得$Q_1$、$Q_2$之后，则可由（$e$）式求得任意一个线形锁点的坐标。

若令

$$\begin{aligned} K_1 &= x_A(1 - Q_1) + y_A Q_2 \\ K_2 &= y_A(1 - Q_1) - x_A Q_2 \end{aligned} \qquad (g)$$

则（$e$）式可简写为

$$\begin{aligned} x_i &= K_1 + Q_1 x_i' - Q_2 y_i' \\ y_i &= K_2 + Q_1 y_i' + Q_2 x_i' \end{aligned} \qquad (9\text{-}35)$$

归纳计算过程如下：

1. 假设边长$S_{A\,\mathrm{I}}$为$S_{A\,\mathrm{I}}'$，坐标方位角$\alpha_{A\,\mathrm{I}}$为$\alpha_{A\,\mathrm{I}}'$；

2. 由假设的边长$S_{A\,\mathrm{I}}'$、坐标方位角$\alpha_{A\,\mathrm{I}}'$按正算计算坐标$x_{\mathrm{I}}'$、$y_{\mathrm{I}}'$；

以上两步在实际计算中也可由直接假设$x_{\mathrm{I}}'$和$y_{\mathrm{I}}'$的值代替；

3. 由$A$、$\mathrm{I}'$两点按（9-1）式计算$x_{\mathrm{II}}'$、$y_{\mathrm{II}}'$；依次计算其余各点的假定坐标直至$B$点；

4. 由（$f$）式计算缩放旋转系数$Q_1$、$Q_2$；

5. 由（$g$）式计算$K_1$、$K_2$；

6. 由（9-35）计算各点的最后坐标。

例 9-11　已知没有测连接角的线形锁如图9-49试按线形锁平差用真数计算未知点的坐标。

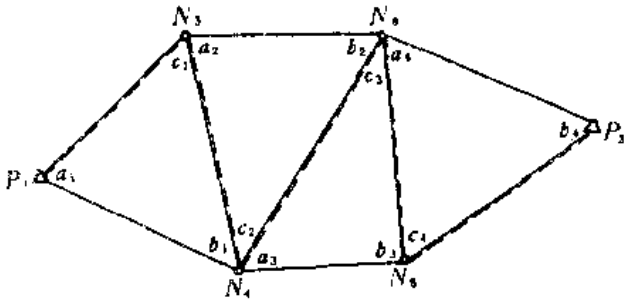


图 9-49

解：（1）绘计算略图（见图9-49）；

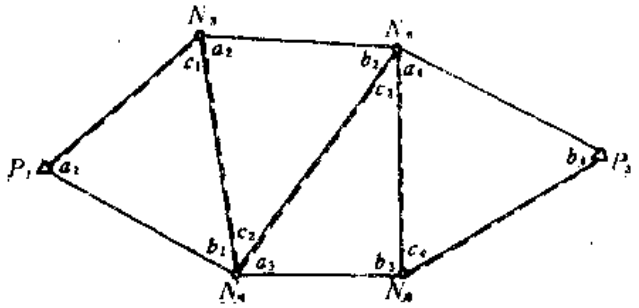
（2）编起算数据表（见表9-11）；

（3）求观测角的最或然值，可将三角形闭合差平均反号分配（见表9-12）；

（4）计算各点假定坐标：首先假定点$N_3$的假定坐标$x''_{N_3}$=514250.00m、$y''_{N_3}$=671350.00m，（$x''_{N_3}$、$y''_{N_3}$的值可从已有地形图上量取，或假定$S''_{P_1N_3}$、

线 形 锁 的 计 算

已 知 数 据　　表 9-11



| | 点 名 | $x_m$ | $y_m$ | 坐标方位角 ° ′ ″ | 边 长 m |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| A | $P_1$ | 512406.50 | 670525.72 | | |
| | | | | 59 30 29 | 28[illegible] |
| B | $P_3$ | 514342.99 | 673814.29 | | |
| | | | | | |

$\alpha''_{P_1N_1}$的值再求出$x''_{N_1}$、$y''_{N_1}$)，然后按余切公式（9-1）求其它各点的假定坐标；

（5）求各未知点的最或然坐标：按（$f$）式求$Q_1$、$Q_2$，并按（$g$）式求$\Lambda_1$、$\Lambda_2$，最后按（9-35）式求$x_i$、$y_i$。

## 二、观测两个连接角的线形锁

观测了两个连接角的线形锁的典型图形如图9-50。这种线形锁的特点是，在两端已知点上各观测一个与已知方位角的边相联系的连接角，因此将与附合导线一样会产生一个坐标方位角闭合差。此外，坐标的推求亦将会出现坐标闭合差。这样，在解求线形锁点坐标的具体方法上，除了要处理三角形内角和闭合差（用$w_i$表示）之外，还要处理坐标方位角闭合差和坐标闭合差。

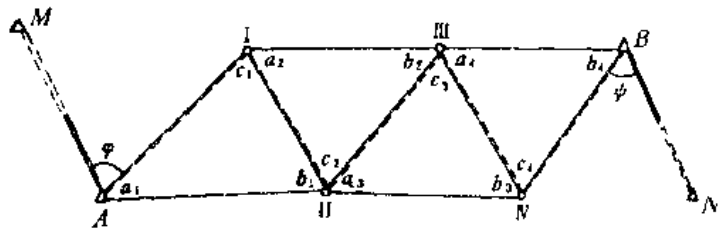


图 9-50

下面介绍一种较为合理而简便的方法。

首先将三角形闭合差平均分配到各个三角形内角上，即

$$v'_{a_i}=v'_{b_i}=v'_{c_i}=-\frac{1}{3}w_i \qquad (h)$$

## 线 形 锁 之 计 算

角度改正之计算　　坐标之计算　　表 9-12

| 三角形 | 点名 | 角号 | 观测角值 ° ′ ″ | 改正数 ″ | 改正后角值 ° ′ ″ | $x_i$ | cig | $y_i$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 2.323139 | | | |
| | $N_3$ | $c_1$ | 57 25 22 | −4 | 57 25 18 | 514250.00 | 0.638944 | 671350.00 | 514339.14 | 671398.27 |
| | $P_1$ | $a_1$ | 30 42 06 | 4 | 30 42 02 | 512406.50 | 1.684155 | 670525.72 | | |
| | $N_4$ | $b_1$ | 91 52 44 | −4 | 91 52 40 | 513388.12 | 0.632785 | 671916.81 | 513431.97 | 671990.17 |
| | | $\omega_1$ | +12 | −12 | 0 | | 1.651370 | | | |
| | | | | | | | 1.283301 | | | |
| | $N_3$ | $a_2$ | 53 21 43 | +3 | 53 21 46 | 514250.00 | 0.743674 | 671350.00 | | |
| | $N_4$ | $c_2$ | 61 38 48 | +3 | 61 38 51 | 513388.12 | 0.539627 | 671916.81 | | |
| | $N_5$ | $b_2$ | 64 59 20 | −3 | 64 59 23 | 514192.22 | 0.466526 | 672350.08 | 514274.67 | 672448.18 |
| | | $\omega_2$ | −9 | +9 | 0 | | 1.006153 | | | |
| | | | | | | | 0.779021 | | | |
| | $N_5$ | $c_3$ | 77 53 31 | −1 | 77 53 30 | 514192.22 | 0.214534 | 672350.08 | | |
| | $N_4$ | $a_3$ | 60 33 22 | −1 | 60 33 21 | 513388.12 | 0.564487 | 671916.81 | | |
| | $N_8$ | $b_3$ | 41 33 10 | 1 | 41 33 09 | 513414.61 | 1.128210 | 673262.96 | 513345.67 | 673403.80 |
| | | $\omega_3$ | −3 | −3 | 0 | | 1.692697 | | | |
| | | | | | | | 1.337507 | | | |
| | $N_8$ | $a_4$ | 73 29 43 | +1 | 43 29 44 | 514192.22 | 1.053944 | 672350.08 | | |
| | $N_8$ | $c_4$ | 74 10 07 | 0 | 74 10 07 | 513414.61 | 0.283563 | 673262.96 | | |
| | $P_3$ | $b_4$ | 62 20 08 | −1 | 62 20 09 | 514261.99 | 0.524214 | 673650.81 | 514343.00 | 673814.29 |
| | | $\omega_4$ | −2 | +2 | 0 | | 0.807777 | | | |

$\Delta x_{AB} = +1936.49$，　$\Delta x_{AB'} = +1855.49$

$\Delta y_{AB} = +3288.57$，　$\Delta y_{AB'} = +3125.09$

$$Q_1 = \frac{\Delta x_{AB} \cdot \Delta x_{AB'} + \Delta y_{AB} \cdot \Delta y_{AB'}}{\Delta x^2_{AB'} + \Delta y^2_{AB'}} = +1.050055$$

$$Q_2 = \frac{\Delta x_{AB'} \cdot \Delta y_{AB} - \Delta x_{AB} \cdot \Delta y_{AB'}}{\Delta x^2_{AB'} + \Delta y^2_{AB}} = +0.0038007$$

$K_1 = (1 - Q_1)x_A + Q_2 y_A = -23100.0403$

$K_2 = (1 - Q_1)y_A - Q_2 x_A = +35510.6683$

$x_i = K_1 + Q_1 x_i - Q_2 y_i$

$y_i = K_2 - Q_1 y_i + Q_2 x_i$

之后选择一条计算坐标方位角闭合差$f_\beta$的推算路线。为使角度改正数较为合理，这条推算路线的选择原则是每个三角形中仅允许一个角度参与$f_\beta$的计算。这个角度在三角形中编号为$c_i$，称为间隔角。另两个角分别编号为$a_i$、$b_i$，称为传距角。图9-50中加有虚线的$A$Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ$B$路线即为推算路线。与导线计算相同，按推算路线计算坐标方位角闭合差$f_\beta$而且用与导线计算相同的方法将$f_\beta$平均分配到参与计算的各个角度上。计算时应注意，$c_i$角并不总在推算路线的左侧或右侧，因此改正数的正、负符号是不一致的，要特别小心，不可弄错。即

$$v_\varphi = v_\varphi \quad v''_{c_i} \quad \frac{f_\beta}{n-2}$$ ❶ (i)

分配三角形闭合差给各三角形内角所加的改正数，称第一次角度改正数。分配坐标方位角闭合差给各角度所加的改正数，称第二次角度改正数。第一次角度改正数将使每个三角形的内角和满足其等于180°的条件（称图形条件）。第二次角度改正数将满足$BN$边坐标方位角的推算值与已知值相等的条件（称坐标方位角条件）。但由于第二次改正数只加给每个三角形的间隔角$c_i$，所以会使三角形内角和又不再等于180°，此时须将$a_i$、$b_i$两角也给以一个第二次改正，其值为

$$v''_{a_i} \quad v''_{b_i} \quad -\frac{1}{2}v''_{c_i}$$ (j)

才能使三角形内角和仍满足图形条件。

有了两次改正后的角度，以下的工作即为计算假定坐标。这时$A$Ⅰ边的坐标方位角可由

$$\alpha_A \quad \alpha_{AM} - \varphi$$ (k)

计算求得。因此只需对$A$Ⅰ边假定一个边长值$S'_{A1}$。由此可见，这种线形锁的计算较之不测连接角线形锁的计算少了一个旋转的问题，而只存在缩放问题。

各线形锁点假定坐标的具体计算方法可有两种。一种是由假定边长$S'_{A1}$起用正弦定理顺次推算出三角形各边的假定边长，即

$$S'_{1\text{Ⅱ}} = S'_{A1}\frac{\sin a_1}{\sin b_1}$$
$$S'_{\text{Ⅱ}\text{Ⅲ}} = S'_{1\text{Ⅱ}}\frac{\sin a_2}{\sin b_2}$$ (l)
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

求得假定边长之后再按导线的计算方法用正算顺次求出各点的坐标。

另一种是先用正算求出Ⅰ点的假定坐标，之后用前方交会方法顺次算出各点的坐标。

与不测连接角线形锁原理相同，由下式计算缩放系数$Q$。

$$Q = \frac{S_{AB}}{S'_{AB}}$$ (m)

因

❶ 更严格的计算式为$v''_{c_i} = \frac{f_\beta}{n-3}$；

$v_\varphi = 1.00'' \quad v_\varphi = 1.00'' \quad v_\varphi = 0''$

$$x_i = x_A + S_{Ai}\cos\alpha_{Ai}$$

故
$$x_i = x_A + QS'_{Ai}\cos\alpha_{Ai} \quad x_A + Q\Delta x'_{Ai}$$
$$= x_A + Q\ (x'_i - x_A)$$

整理后得

$$\left.\begin{aligned} x_i &= (1-Q)x_A + Qx_i \\ y_i &= (1 \quad Q)y_A - Q'y_i \end{aligned}\right\} \qquad (9\ 36)$$

与导线测量的情况相同，由（9-36）式算得的$B$点坐标，仍将与原有的已知值不相同而产生一个坐标闭合差$f_x$、$f_y$。其处理的方法仍可按单一导线的计算那样，将$f_x$和$f_y$按边长成比例对各边坐标增量加以改正。为计算方便起见，常直接算出它们的累计值而对各点的坐标加以改正。此时仍取坐标方位角的推算路线为分配$f_x$、$f_y$的路线。

例 9-12　已知两端测有连接角的线形锁见图9-51，试用线形锁近似平差计算各未知点的坐标。

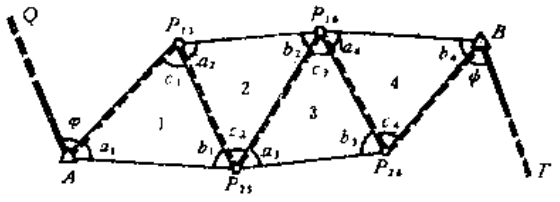



图 9 51

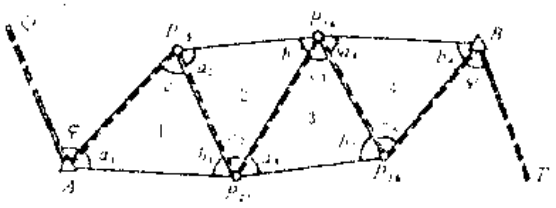
解：（1）绘平差略图（见表9-13，下同）

（2）编起算数据表

（3）计算角度改正数　先求$v'_i$ $-\frac{w_i}{3}$（见表9-14），求第一次改正后的角值，如$a'_i = (a_i) + v'_i$。显然，对于每个三角形来说，三角形三内角的第一次改正后的角值之和应等于180°。按第一次改正后的角值依推算路线列出坐标方位角条件，然后按$(i)$、$(j)$两式求观测角的第二次改正数$v''_i$，并

线 形 锁 的 计 算

已知数据　　表 9-13



| | 点 名 | $x_m$ | $y_m$ | 坐标方位角 ° ′ ″ | 边 长 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q$ | | | | | |
| | | | | 740550.1 | |
| $A$ | | 6102406.50 | 5570525.72 | | |
| | | | | 593024.3 | 3816.37 |
| $B$ | | 6104342.99 | 5573814.29 | | |
| | | | | 843922.2 | |
| $T$ | | | | | |

求出第二次改正后的角值。

（4）计算假定坐标

首先假定一条与已知点连接的边长的值，例如设 $S''_{AP_{15}}=200000\,\mathrm{m}$，算出坐标方位角 $\alpha'_{AP_{15}}=\alpha_{AQ}+\varphi=24^\circ17'44''$，然后算出点$P_{15}$的假定坐标$x''_{P_{15}}$、$y''_{P_{15}}$，最后按余切公式(9-1)推算全部未知点及已知点$B$的假定坐标。在计算假定坐标时，为了检查，在$\triangle ABP$中、先由$A$、$B$求$P$点坐标，然后，由$B$、$P$点反求$A$点坐标，则其值应与已知$A$点坐标相等。故表中每个三角形有（ctg $A$ - ctg $B$）和（ctg $B$ + ctg $P$）两组数字分别记在每个三角形的ctg $A$、ctg $B$、ctg $P$的上下一行，并以Σ表示。

（5）求缩放系数$Q$

推算出$A$与$B$的假定边长：

$$S''_{AB}=\sqrt{(x''_B-x_A)^2+(y''_B-y_A)^2}=3599.54$$

而

$$Q=\frac{S_{AB}}{S''_{AB}}=1.060238$$

（6）最后坐标计算

按（9-36）式各点的近似坐标$x'_i$为

$$x'_i=(1-Q)x_A+Qx''_i$$

同样

$$y'_i=(1-Q)y_A+Qy''_i$$

计算坐标闭合差$w_x$、$w_y$：

$$w_x=x'_B-x_B=+0.27$$

$$w_y=y'_B-y_B=-0.16$$

将坐标闭合差反号按边长成比例分配，即得各点的最后坐标。

$$x_i=x'_i+v_x=x'_i-\frac{S_1+\cdots+S_i}{\Sigma S}w_x$$

$$y_i=y'_i+v_y=y'_i-\frac{S_1+\cdots+S_i}{\Sigma S}w_y。$$

式中$S_i$可按$x'_i$、$y'_i$展点后量出。当坐标闭合差较小时也可以按点数平均分配。

如果要求相邻两点的边长及其方位角，则可由相邻两点的最后坐标按坐标反算公式求出。

## 三、测一个连接角的线形锁

对于测一个连接角的线形锁来说，它和测两个连接角的线形锁比较只是少测了一个连接角$\psi$，因而它就列不出坐标方位角条件。所以测一个连接角的线形锁的近似平差计算，除了少考虑一个坐标方位角条件之外，完全和测两个连接角的线形锁近似平差计算一样，故从略。

在测量实践中，常常遇到因地形情况的制约而无法使线形锁构成如图9-46那样的典型

角度改正数之计算

| 三角形 | 点　名 | 角　号 | 观测角值 ° ′ ″ | $v_i'$ | 第一次改正后角值 ° ′ ″ | $v_i''$ | 第二次改正后角值 ° ′ ″ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\varphi_1$ | 130 12 00 | 0 | | $-6''$ | 130 11 54 |
| 1 | $P_{15}$ | $c_1$ | 57 25 22 | −4 | 57 25 18 | +4 | 57 25 22 |
| | $A$ | $a_1$ | 30 42 06 | −4 | 30 42 02 | −2 | 30 42 00 |
| | $P_{25}$ | $b_1$ | 91 52 44 | −4 | 91 52 40 | −2 | 91 52 38 |
| | | $w_1$ | −12 | −12 | 0 | | 0 |
| | | | | | | | |
| 2 | $P_{15}$ | $a_2$ | 53 21 43 | +3 | 53 21 46 | +2 | 53 21 48 |
| | $P_{25}$ | $c_2$ | 61 38 48 | +3 | 61 38 51 | −4 | 61 38 47 |
| | $P_{16}$ | $b_2$ | 64 59 20 | +3 | 64 59 23 | +2 | 64 59 25 |
| | | $w_2$ | −9 | +9 | 0 | | 0 |
| | | | | | | | |
| 3 | $P_{16}$ | $c_3$ | 77 53 31 | −1 | 77 53 30 | +4 | 77 53 34 |
| | $P_{25}$ | $a_3$ | 60 33 22 | −1 | 60 33 21 | −2 | 60 33 19 |
| | $P_{26}$ | $b_3$ | 41 33 10 | −1 | 41 33 09 | −2 | 41 33 07 |
| | | $w_3$ | +3 | −3 | 0 | | 0 |
| | | | | | | | |
| 4 | $P_{16}$ | $a_4$ | 43 29 43 | +1 | 43 29 44 | +2 | 43 29 46 |
| | $P_{26}$ | $c_4$ | 74 10 07 | 0 | 74 10 07 | −4 | 74 10 03 |
| | $B$ | $b_4$ | 62 20 08 | +1 | 62 20 09 | +2 | 62 20 11 |
| | | $w_4$ | −2 | +2 | 0 | | 0 |
| | | $\phi$ | 120 08 11 | 0 | | +5 | 120 08 16 |

$$w_a' = 84°39'49.1'' - 84°39'22.2'' = +26.9''$$

$$v_i'' = \frac{1}{n+3} w_a' = -4''$$

坐标之计算 表 3-14

| $x''$ | ctg | $y''$ | $x'$ | $y'$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Σ | 2.323158 | | | | | |
| 6104229.37 | 0.638966 | 5571348.61 | -0.06<br>6104339.18 | +0.03<br>5571398.18 | 6104339.12 | 5571398.21 |
| 6102406.50 | 1.684192 | 5570525.72 | | | | |
| 6103373.79 | 0.032775 | 5571906.93 | 0.11<br>6103432.06 | -0.06<br>5571990.13 | 6103431.95 | 5571990.19 |
| Σ | 1.651417 | | | | | |
| Σ | 1.283311 | | | | | |
| 6104229.37 | 0.743659 | 5571348.61 | | | | |
| 6103373.79 | 0.539652 | 5571906.93 | | | | |
| 6104168.64 | 0.466514 | 5572338.85 | -0.16<br>6104274.79 | -0.10<br>5572448.07 | 6104274.63 | 5572448.17 |
| Σ | 1.006166 | | | | | |
| Σ | 0.779013 | | | | | |
| 6104168.64 | 0.214513 | 5572338.85 | | | | |
| 6103373.79 | 0.564500 | 5571906.93 | | | | |
| 6103395.32 | 1.128232 | 5573240.24 | -0.22<br>6103454.89 | +0.13<br>5573403.76 | 6103454.67 | 5573403.89 |
| Σ | 1.692731 | | | | | |
| Σ | 1.237507 | | | | | |
| 6104168.64 | 1.053923 | 5572338.85 | | | | |
| 6103395.32 | 0.283584 | 5573240.24 | | | | |
| 6104233.22 | 0.524202 | 5573627.30 | -0.27<br>6104343.26 | +0.15<br>5573814.14 | 6104342.99 | 5573814.29 |
| Σ | 0.807786 | | | | | |

$x''_{P15}$ 与 $y''_{P15}$ 之计算

| | |
|---|---|
| $\alpha_{AQ}$ | 254°50′50″ |
| $\varphi$ | 130 11 54 |
| $\alpha_{AP15}$ | 24 17 44 |
| $x''_{P15}$ | 6 104 229.37 |
| $x_A$ | 6 102 406.50 |
| $\Delta x''$ | +1 822.87 |
| $\cos\alpha_{AP15}$ | 0.911 435 |
| $S''_{P15}$ | 2000.00 |
| $\sin\alpha_{AP15}$ | 0.411 444 |
| $\Delta y''$ | +822.89 |
| $y_A$ | 5 750 525.72 |
| $y''_{P15}$ | 5 571 348.61 |

$S''_{AB} = \sqrt{\Delta x''^2_{AB} + \Delta y''^2_{AB}} = 3599.54$

$Q = \frac{S_{AB}}{S''_{AB}} = 1.060238$

$1 - Q = -0.060238$

$x'_i = x_A(1 - Q) + Q x'_i$

$x_A(1 - Q) = -144.96$

$y'_i = y_A(1 - Q) + Q y''_i$

$y_A(1 - Q) = -31.67$

$w_x = x'_B - x_B = -0.27$

$w_y = y'_B - y_B = -0.16$

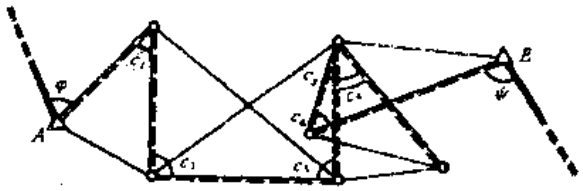


图 9-52

图形。作业人员则需将三角形之间的联系改用折叠状态以便构成锁形。图9-48即为其中的一个例子。这种图形的计算工作与上述典型图形完全相同，只是在选择坐标方方位角的推算路线时要特别注意。其特点是，它们都是两相邻三角形的公共边。推算路线初步认定之后再标出间隔角 $c$ 的位置，同时检查每个三角形中是否仅标了一个 $c$ 角以防有误。实际上，$c$ 角是两条相邻三角形的公共边的夹角，所以也可先由公共边的位置标出 $c$ 角的位置，然后再认定推算路线。

图9-52中加有虚线的路线为推算路线，$c_i$ 为间隔角的编号。

## §9-10 线形锁的精度

### 一、线形锁的边长及点位精度

讨论线形锁的精度与讨论导线或交会点的精度一样，如果采用典型（规则）的布网图形，不但避免了问题的复杂性，而且结论简洁、明确；同时有关结论仍具有一般意义。因此本节讨论按典型图形布设的线形锁。

（一）线形锁的边长精度

设在 $A$、$B$ 两个已知点间布设线形锁如图9-53。图中：$\alpha_i$、$\beta_i$ 为传距角，$\gamma_i$ 为间隔角，$S_1$、$S_n$ 为连接已知点的边，$S_{中}$ 为离已知点最远的边，$n$ 为间隔边的边数。

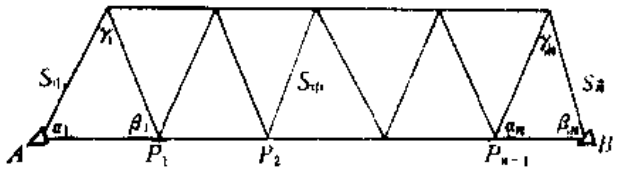


图 9-53

在推导线形锁边长精度时，如果观测的只是角度，而且只考虑图形条件（内角和条件），同时线形锁中的三角形又都是等边三角形，则边长 $S_1$ 的中误差为

$$m_{S_1} = \mu\sqrt{\frac{1}{P_{S_1}}}$$

而

$$\frac{1}{P_{S_1}} = \frac{S_1^2}{9n}(1n^2 - 3n + 5) \text{❶} \qquad (9\text{-}37)$$

❶ 公式（9-37）和（9-38）见于1963年第一届全国工程测量年会交流论文，范家鼎：《线形三角锁的平差及精度》。上述公式适用于间隔个数和三角形个数都是奇数的线形锁（图9-53）。当间隔边和三角形个数不都是奇数时，求 $1/P_S$ 的公式稍有不同，但结论结果与本目所述相似。下同。

因为图9-53中线形锁的图形是对称于锁段中点的垂线的，所以图中边长$S_n$与边长$S_1$的精度相等。即$\frac{1}{p_{S_1}}=\frac{1}{p_{S_n}}$

而边长$S_{中}$的权倒数为

$$\frac{1}{p_{S_{中}}}=\frac{S_{中}^2}{9n}(n^2+5) \tag{9-38}$$

比较（9-37）和（9-38）式可知，线形锁两端边长的权倒数大于中间边长的权倒数同样可以证明，其它边的权倒数小于两端边长$S_1$或$S_n$的权倒数，而大于中间边长$S_{中}$的权倒数。所以线形锁中间边$S_{中}$的精度最高，线形锁的最弱边在线形锁的两端。在等边三角形锁中，最弱边边长的中误差，大约为最强边中误差的两倍。

例如，当$m=\pm 12''$，$n=5$时，最弱边及最强边的相对中误差分别为：

$$\frac{m_{S_1}}{S_1}=\frac{\pm 12''}{\rho''}\sqrt{\frac{4\times 5^2+3\times 5+5}{9\times 5}}\approx\frac{1}{12000}$$

$$\frac{m_{S_{中}}}{S_{中}}=\frac{\pm 12''}{\rho''}\sqrt{\frac{5^2+5}{9\times 5}}\approx\frac{1}{21000}$$

从公式（9-37）和（9-38）也可以看出，边长的权倒数与间隔边个数$n$成正比，所以线形锁中三角形的个数不宜过多。因此对于线形锁来说，要对锁中三角形的个数给予相应的限制。

当起始边$S_{AB}$的相对中误差为$\frac{m_{S_{AB}}}{S_{AB}}$时，它将给线形锁中的各边以同样比例的影响。所以考虑起始边相对中误差及测量误差的影响时，线形锁中最弱边的总相对中误差可以用下式估算：

$$\frac{M_{S_1}}{S_1}=\pm\sqrt{\left(\frac{m_{S_{AB}}}{S_{AB}}\right)^2+\frac{\mu^2(4n^2+3n-5)}{9n}} \tag{9-39}$$

（二）线形锁中未知点的点位精度

对于线形锁来说，未知点的点位精度，随着未知点离开已知点$A$（或$B$）愈远，其精度也愈差。所以线形锁的最弱点位于锁的中部。对于图9-51中的线形锁来说，未知点$P_{\frac{n}{2}}$是最弱点。为了便于讨论，设锁中的三角形是全等三角形，则$P_{\frac{n}{2}}$点的点位权倒数为

$$\frac{1}{p}=\frac{L^2}{36n}\{n^2+5+(n^2+2)(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)+6\operatorname{ctg}^2\gamma+3\operatorname{ctg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)-(n^2-1)\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\}\text{❶} \tag{9-40}$$

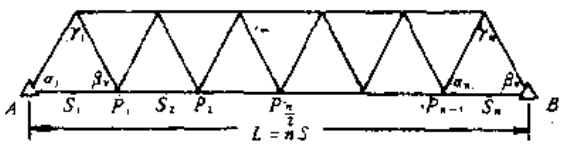



图 9-51

❶ （9-40）式摘自“晶克瓦尔锐：‘线形锁的精度’，测绘通报，1957年第3期”

式中 $L$ 是线形锁的锁长

当线形锁中的三角形都是等腰三角形时，即将 $\operatorname{ctg}\alpha$ 、$\operatorname{ctg}\beta$ 代入（9-40）式得 $P$ 点点位权倒数为

$$\frac{1}{p}=\frac{L^2}{36n}\{n^2+3+(n^2+2)(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)+6\operatorname{ctg}^2\gamma+3\operatorname{ctg}\gamma(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$$

$$+(n^2-1)\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha\}\quad\frac{L^2}{36n}\{n^2+3+(3n^2+3)\operatorname{ctg}^2\alpha+6\operatorname{ctg}^2\gamma$$

$$+6\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma\}$$

在等腰三角形中，$\gamma=180^\circ-\alpha-\beta=180^\circ-2\alpha$，将它代入上式，经整理得等腰三角形锁最弱点点位权倒数为

$$\frac{1}{p}=\frac{L^2}{72n}\{2n^2+10+(6n^2+3)\operatorname{ctg}^2\alpha+3\operatorname{tg}^2\alpha\}\qquad(9-41)$$

当线形锁中的三角形为等边三角形时，即将 $\alpha=60^\circ$，$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 代入上式，得全等三角形锁最弱点 $P_n$ 点的点位权倒数为

$$\frac{1}{p}=\frac{L^2}{18n}(n^2+3)\qquad(9-42)$$

从（9-40）和（9-41）式可以看出：线形锁最弱点点位的权倒数，不仅与锁中三角形个数有关，而且与每个三角形的形状（角的大小）有关。

## 二、线形锁图形的讨论

下面讨论线形锁中的三角形是什么形状时，线形锁最弱点的点位中误差最小。为了便于讨论，仍以等腰三角形的线形锁为例。

### （一）当锁长 $L$ 和间隔边 $n$ 为已知时的理想图形

从（9-41）式可以看出，当 $L$ 及 $n$ 为已知时，$\frac{1}{p}$ 是 $\alpha$ 的函数，为了求得 $\frac{1}{p}$ 为最小，可求（9-41）式对 $\alpha$ 的一阶导数等于零时的 $\alpha$ 值，它当（9-41）式对 $\alpha$ 的二阶导数为正值时，得 $\frac{1}{p}$ 的极小值。即令

$$\frac{d\left(\frac{1}{p}\right)}{d\alpha}=\frac{L^2}{72n}\left\{+(12n^2-6)\operatorname{ctg}\alpha\left(-\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\right.$$

$$\left.-6\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\right\}=0$$

得

$$\operatorname{tg}^4\alpha=2n^2-1$$

或

$$\alpha=\operatorname{tg}^{-1}\sqrt{2n^2-1}\qquad(9-43)$$

的（9-41）对$\alpha$的二阶导数为

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{d\alpha^2}=\frac{L^2}{12n}\{(2n^2+1)\cos^2\alpha(1+3\mathrm{ctg}^2\alpha)+\sec^2\alpha(1+3\mathrm{tg}^2\alpha)\}>0$$

所以当$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\sqrt[4]{2n^2+1}$时，最弱点点位权倒数$\frac{1}{p}$为最小，即点位精度最高。对于不同的$n$值，按（9-43）式求出的$\alpha$值和相应的间隔角$\gamma(\gamma=180^\circ-2\alpha)$值列于表9-15中。这种三角形的高$h$与底边$S$的比（图9-55）为

$$\frac{h}{S}=\frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$$

有关的$\frac{h}{S}$也列于表9-15中。

表 9-15

| $n$ | $\alpha$ | $\gamma$ | $\frac{h}{S}$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 60°00′ | 60°00′ | 0.9 |
| 3 | 64 24 | 51 12 | 1.1 |
| 4 | 67 21 | 45 18 | 1.2 |
| 5 | 69 29 | 41 02 | 1.3 |
| 6 | 71 07 | 37 46 | 1.5 |
| 7 | 72 25 | 35 10 | 1.6 |
| 8 | 73 28 | 33 04 | 1.7 |
| 9 | 74 22 | 31 16 | 1.8 |
| 10 | 75 08 | 29 44 | 1.9 |

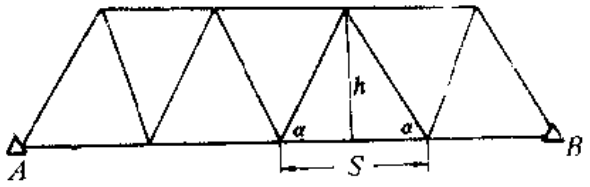



图 9-55

从表9-15中可以看出：

1. **为了求得点位的最高精度，只有当$n=2$时，等边三角形才是最理想（最佳）图形。随着$n$的增大，传距角应大于60°，即间隔角要小于60°的三角形才是理想图形**

2. **为了求得点位的最高精度，当$n$增大时，必须放大$\frac{h}{S}$的比值，也就是放大线形锁的横向宽度。**

（二）当线形锁的锁长$L$和宽度$h$为已知时的理想图形

当锁长$L$及宽度$h$已知时，从图9-55可以看出：$\alpha$是$h$和$S$的函数。为了演算方便，令$v=\frac{L}{h}$，则

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{h}{\frac{S}{2}}=\frac{2n}{v}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\frac{S}{2}}{h}=\frac{v}{2n}$$

将上式代入（9-41）式，得

$$\frac{1}{\rho}=\frac{L^2}{288n}\left\{\left(8-\frac{48}{v^2}\right)n^2+\frac{3v^4}{n^2}+6v^2+40\right\} \tag{a}$$

当 $L$、$v$ 为已知时，令上式对 $n$ 的一阶导数等于零，即

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dn}=\frac{L^2}{288n^4}\left\{8n^4+48\frac{n^4}{v^2}-6n^2v^2-40n^2-9v^2\right\}=0$$

或

$$\left(8+48\frac{1}{v^2}\right)n^4-(6v^2+40)n^2-9v^2=0$$

令

$$a=3v^2-20,\qquad b=v^2+6$$

$$n=\sqrt{\frac{2(3v^2+20)+\sqrt{4(3v^2+20)^2+4\times72b}}{\frac{2\times8b}{v^2}}}$$

$$=v\sqrt{\frac{1}{8b}\left(a+\sqrt{a^2+72b}\right)} \tag{9-44}$$

因（9-44）式对 $n$ 的二阶导数＞0，所以从上式解出的 $n$ 值，能使 $\frac{1}{\rho}$ 得极小值。根据不同的 $v$ 值，按（9-44）式，求得 $n$，及相应的 $\alpha$ 值列于表9-16中。从表中可以看出：当 $L$ 和 $h$ 为已知时，**最理想的图形是近似等边的三角形**。

表 9-16

| $v$ | $n$ | $\alpha$ |
|---|---|---|
| 2 | 1.9 | 62.5 |
| 3 | 2.8 | 61.9 |
| 4 | 3.5 | 61.2 |
| 5 | 4.3 | 60.9 |
| 10 | 8.8 | 60.2 |

## §9-11 中点多边形

中点多边形（图9-56）的平差计算的要求是：经过平差后的角值要满足中点多边形所具有全部几何条件。这些几何条件包括：（1）三角形内角和等于180°，（2）中点 $B$ 周围各角之和等于360°，这个条件称为**圆周条件**，（3）从 $AB$ 边出发，依次推算 $BN_1$、$BN_2$、$BN_3$、$BN_4$ 再算出 $AB$ 边，要与起算的 $AB$ 边长相等，这个条件称为**边长条件**。下面介绍一种处理这些条件的近似方法。

设只满足三角形内角和条件与圆周条件，暂时不顾边长条件，改正数以 $v$ 表示。下面列出三角形内角和条件与圆周条件式：

$$
\left.\begin{aligned}
&v_{a_1}-v_{b_1}+v_{c_1} &&+w_1=0\\
&v_{a_2}+v_{b_2}+v_{c_2} &&+w_2=0\\
&v_{a_3}+v_{b_3}+v_{c_3} &&+w_3=0\\
&v_{a_4}+v_{b_4}+v_{c_4} &&+w_4=0\\
&v_{a_5}+v_{b_5}+v_{c_5} &&+w_5=0\\
&v_{c_1}+v_{c_2}+v_{c_3}+v_{c_4}+v_{c_5} &&+w_{圆}=0
\end{aligned}\right\}\qquad (a)
$$

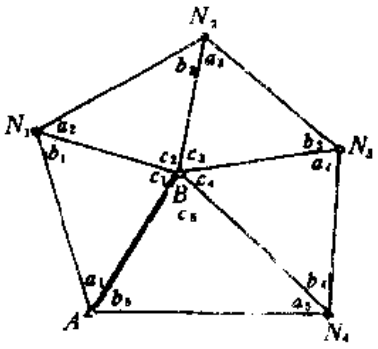



图 9-56

式中$w_{圆}$是圆周条件的闭合差，而

$$w_{圆}=(c_1)+(c_2)+(c_3)+(c_4)+(c_5)-360^\circ \cdots\cdots \quad (9-45)$$

$(c_i)$ 是$c_i$角的观测值。

这里用与线形锁中同样的设想来解算（$a$）式，即设每个条件式中各个改正数相等，从而可以均分闭合差。为此设

$$v'_{a_1}=v_{b_1}=v'_{c_1}=v'_1 \qquad v'_{c_1}=v'_{c_2}=v'_{c_3}=v'_{c_4}=v'_{c_5}=v'_6$$
$$v_{a_2}=v'_{b_2}=v'_{c_2}=v'_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v'_{a_5}=v'_{b_5}=v'_{c_5}=v'_5$$

而同时满足上述全部条件式的改正数为

$$v_{a_1}=v_{b_1}=v'_1, \qquad v_{c_1}=v'_1+v'_6$$
$$v_{a_2}=v_{b_2}=v'_2, \qquad v_{c_2}=v'_2+v'_6$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_{a_5}=v_{b_5}=v'_5, \qquad v_{c_5}=v'_5+v'_6$$

将上式代入（$a$）式得

$$
\begin{aligned}
3v'_1 &+v'_6+w_1=0\\
3v'_2 &+v'_6+w_2=0\\
3v'_3 &+v'_6+w_3=0\\
3v'_4 &+v'_6+w_4=0\\
3v'_5 &+v'_6+w_5=0\\
v'_1+v'_2+v'_3+v'_4+v'_5 &+5v'_6+w_{圆}=0
\end{aligned}
$$

解上列方程组得

$$
\left.\begin{aligned}
v_{a_1}=v_{b_1}&=-\frac{w_1}{3}+\mu, & v_{c_1}&=-\frac{w_1}{3}-2\mu\\
v_{a_2}=v_{b_2}&=-\frac{w_2}{3}+\mu, & v_{c_2}&=-\frac{w_2}{3}-2\mu\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_{a_5}=v_{b_5}&=-\frac{w_5}{3}+\mu, & v_{c_5}&=-\frac{w_5}{3}-2\mu
\end{aligned}\right\}
$$

而

$$\mu = \frac{1}{2n}\left[ w_{测} - \frac{1}{3}\sum w \right]$$

式中 $n$ 是中点多边形中的三角形个数。

在每个三角形中，经过上述改正后的三个角值，其和应等于180°，而中点周围各改正后的角值之和应等于360°，这是计算的一个检核。在以后的计算中，一律以改正后的角值参加计算。

改正后的角值算出后，依次计算：1）各边的近似边长，2）各边的近似方位角，3）各边的近似坐标增量，1）各点的近似坐标。由于没有考虑前述的边长条件，所以算出的近似坐标将产生不符值。例如图9-47中，由 $A$ 点坐标出发依次算出 $N_1 \rightarrow N_2 \rightarrow N_3 \rightarrow N_4$ 等点近似坐标，再推算出 $A$ 点的坐标得 $x'_A$、$y'_A$，将与 $A$ 点应有坐标 $x_A$、$y_A$ 不等，则产生不符值 $w_x = x'_A - x_A$、$w_y = y'_A - y_A$，可近似地将坐标闭合差反号，按推算所经边数成比例分配，即得各点的最后坐标。

# 第十章　三角高程测量

## §10-1　三角高程测量的原理

本书第五章介绍了用水准测量的方法测定点与点之间的高差，从而由已知高程点求得另一点的高程。应用这种方法求得地面点的高程其精度较高，普遍用于建立国家高程控制点及测定高级地形控制点的高程。对于地面高低起伏较大地区用这种方法测定地面点的高程就进程缓慢，有时甚至非常困难。因此在上述地区或一般地区如果高程精度要求又不很高时，常采用三角高程测量的方法传递高程。

### 一、三角高程测量的原理

进行三角高程测量所用的仪器一般为经纬仪或平板仪等；但必须具有能测出竖角的竖盘。为了能观测较远的目标，还应具备望远镜。

如图10-1所示，今欲在地面上$A$、$B$两点间测定高差$h_{AB}$，在$A$点设置仪器，在$B$点竖立标尺。量取望远镜旋转轴中心$I$至地面上$A$点的高度称为**仪器高**$i$，用望远镜中的十字丝的横丝照准$B$点标尺上一点$M$，它距$B$点的高度称为**目标高**$v$，测出倾斜视线$IM$与水平视线$IN$间所夹的竖角$\alpha$，若$A$、$B$两点间的水平距离已知为$S$，则由图10-1可得两点间高差$h_{AB}$为

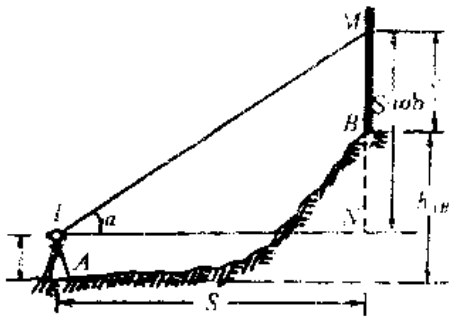


图 10-1

$$h_{AB}+v=S\operatorname{tg}\alpha+i$$

$$h_{AB}=S\operatorname{tg}\alpha+i-v \tag{10-1}$$

若$A$点的高程已知为$H_A$，则$B$点的高程为

$$H_B=H_A+h_{AB}=H_A+S\operatorname{tg}\alpha+i-v \tag{10-2}$$

具体应用上式时要注意竖角的正负号，当$\alpha$角为仰角时取正号，相应的$S\operatorname{tg}\alpha$也为正值；当$\alpha$角为俯角时取负号，相应的$S\operatorname{tg}\alpha$也为负值。从上式中还可以看出若截取标尺时使$v_B=i_A$，则计算高差$h_{AB}$较为方便。

凡仪器设在已知高程点，观测该点与未知高程点之间的高差称为**直觇**；反之，仪器设在未知高程点，测定该点与已知高程点之间的高差称为**反觇**。

### 二、地球曲率与大气折光的影响

在上述三角高程测量的公式中，没有考虑地球曲率与大气折光对所测高差的影响。在

§4-1中介绍公式（4-4）时分析过，地球曲率的影响可用前后视距离相等来抵消；即使前后视距离不能相等，产生影响的也仅是两段距离之差所引起的那部分。三角高程测量在一般情况下也可将仪器设在两点等距处进行观测，或在两点上分别安置仪器进行对向观测，并计算各自所测得的高差取其绝对值的平均值，也可消除地球曲率的影响。但有些情况应用三角高程测量测定地面点高程时则不然。例如独立后交会点（未知点到各已知点的距离长短不一，并且是单向观测，没有抵消影响的条件，因此必须考虑地球曲率对高差的影响。由于空气密度随着所在位置的高程而变化，越到高空其密度愈稀，当光线通过由下而上密度均匀变化着的大气层，光线产生折射，形成一凹向地面的连续曲线，这称为大气折光。

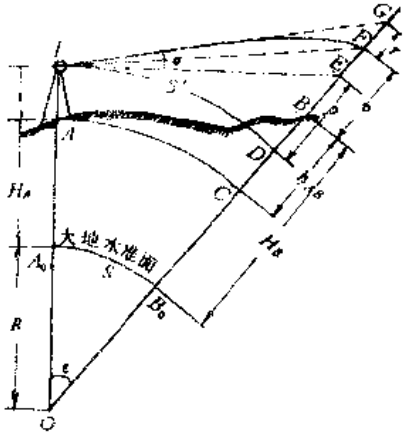


图 10-2

图10-2中，假设$A$点的高程已知为$H_A$，现在要测定$B$点对于$A$点的高差$h_{AB}$，从而计算出$B$点的高程$H_B$。仪器安置在$A$点，标尺竖立于$B$点，其他如图所示，图中$IG$为视线未受大气折光影响时的方向线，而实际上是照准在$F$上，$FG$用符号$r$表示之。视线的竖角为$\alpha$。$I$为望远镜旋转轴中心，$IE$为通过$I$的水平面，$ID$为通过$I$的水准面。由于地球曲率的影响，$E$与$D$不是同高程，而$I$与$D$才是同高程，$DE$这段距离在图中用符号$p$表示。$p$值的计算式在第二章中已用式（2-4）列出，即$p=\dfrac{S^2}{2R}$，式中$S$为$A$、$B$两点在大地水准面上的投影长度，$R$为地球的半径。按理说，计算式中的分子应用$AB$在水准面$ID$上的投影长度$S'$，分母应用$2(R+H_A+i)$。但$S$一般不会超过几公里，故$S'$与$S$除非在高山地区，通常相差甚微；又地球半径$R$与$H_A$和$i$相比要大得很多，分母中后两项亦可忽略不计。因此，通常用$p=\dfrac{S^2}{2R}$计算地球曲率对高差的影响。由图10-2可知

$$\begin{aligned} h_{AB} &= H_A+i+DE+EG-GF-FB \\ &= H_A+i+p+EG-r-v \end{aligned} \tag{a}$$

上式中“$r$”是大气折光影响，其正确值不易测定。因折光曲线$IF$的形状随着空气密度不同而变化，而空气密度除与所在点高程大小这个因素有关外，还受气温、气压等气候条件影响。在一般测量工作中近似地把折光曲线看作圆弧，其半径$R'$的平均值约为地球半径的六到七倍。若设$R'\approx 6R$，则根据与$p$值同样的推理，可写出：

$$r=\frac{1}{2}\frac{S^2}{R'}\approx\frac{1}{2}\cdot\frac{S^2}{6R}=0.16\frac{S^2}{2R}=0.08\frac{S^2}{R} \tag{b}$$

通常令$f=p-r$，若考虑（$b$）式，则$f=0.42\dfrac{S^2}{R}$。在（a）式中的$EG$，可由图10-2中的$\triangle IEG$求得。因$\angle EGI=90^\circ-\varepsilon-\alpha$，$\angle EIG=\alpha$，故

$$EG = IE\frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ-\varepsilon-\alpha)} = IE\frac{\sin\alpha}{\cos(\varepsilon+\alpha)}$$

$$= IE\frac{\sin\alpha}{\cos\varepsilon\cos\alpha-\sin\varepsilon\sin\alpha}$$

$$= IE\,\mathrm{tg}\alpha\cdot\frac{1}{\cos\varepsilon(1-\mathrm{tg}\varepsilon\,\mathrm{tg}\alpha)} \qquad (c)$$

当$S=11.1$km时，$\varepsilon=0^\circ\cdot1$，而$\mathrm{tg}0^\circ\cdot1=0.0017$，$\cos0^\circ\cdot1\approx1$。除非在山区进行三角高程测量，两点间距离在1km左右时，竖角可能达30°～40°，若两点间距离达10km时，竖角一般在5°范围内。故式(c)分母中$\mathrm{tg}\varepsilon\cdot\mathrm{tg}\alpha$的乘积往往很小，可将式（c）写成

$$EG = IE\,\mathrm{tg}\alpha$$

在第二章中已谈到直线长度在20km范围内，水准面可当作水平面看待，则上式中$IE$可用$ID$代替。除高山地区外，一般情况下可认为$ID$的长度即是$S$。于是$EG=S\mathrm{tg}\alpha$。将（a）式可写成

$$H_B = H_A + S\,\mathrm{tg}\alpha + i - v + f \qquad (10\text{-}3)$$

这是三角高程测量的基本公式。因为$H_B-H_A=h_{AB}$，故（10-3）式又可写成

$$h_{AB} = S\,\mathrm{tg}\alpha + i - v + f \qquad (10\text{-}4)$$

为计算方便起见，在表10-1中列出了不同距离$S$时的地球曲率与大气折光的影响$f$，$f=0.42\frac{S^2}{R}$（取$R=6370$km）。

地球曲率与大气折光的改正数（单位：米）　　表 10-1

| $S$ | $f$ | $S$ | $f$ | $S$ | $f$ | $S$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 390 | 0.01 | 1292 | 0.11 | 1785 | 0.21 | 2169 | 0.31 |
| 551 | 0.02 | 1349 | 0.12 | 1827 | 0.22 | 2204 | 0.32 |
| 675 | 0.03 | 1404 | 0.13 | 1868 | 0.23 | 2238 | 0.33 |
| 779 | 0.04 | 1458 | 0.14 | 1908 | 0.24 | 2272 | 0.34 |
| 871 | 0.05 | 1509 | 0.15 | 1948 | 0.25 | 2305 | 0.35 |
| 954 | 0.06 | 1558 | 0.16 | 1986 | 0.26 | 2337 | 0.36 |
| 1030 | 0.07 | 1606 | 0.17 | 2024 | 0.27 | 2370 | 0.37 |
| 1102 | 0.08 | 1653 | 0.18 | 2061 | 0.28 | 2401 | 0.38 |
| 1168 | 0.09 | 1698 | 0.19 | 2098 | 0.29 | 2433 | 0.39 |
| 1232 | 0.10 | 1742 | 0.20 | 2134 | 0.30 | 2464 | 0.40 |

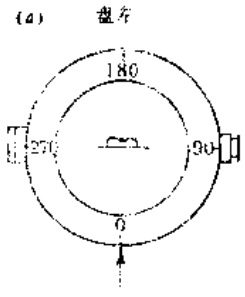
# § 10-2 竖盘构造及竖角测定

## 一、竖盘构造

竖盘是固定在望远镜旋转轴上的。当望远镜为找寻目标而在竖直面内上下转动时，竖盘被带着一起转动。在竖盘上进行读数的指标是在读数窗上的。竖盘分划的影象，通过光路成象在读数窗上。望远镜转动时（竖盘随着转动），传递竖盘分划的光路位置并不改变，所以可在读数窗内进行读数。但是，若转动竖盘指标水准管微动螺旋，则可以使光路产生变动。如第七章的图7-4中的竖盘照明棱镜和竖盘转向棱镜是与竖盘指标水准管微动螺旋相连在一起的。转动此微动螺旋的同时，必然使照明棱镜和转向棱镜产生联动运动，从而使呈象在读数窗上的竖盘的部位发生变化，即读数发生变化。所以正常位置是用水准管气泡居中来表示指标的标准位置。

竖盘注记形式很多，因而由竖盘读数计算竖角的公式也不相同，但其基本原理是一样的。常见的注记形式为全圆注记；注记的方向又分顺时针与逆时针两类；现把比较多见的两种注记形式分列如下：

用竖盘测定的角都称竖直角，简称竖角，有两种表示形式，都是在竖直面内由目标方向与一特定方向所构成的角度。一种是目标方向与水平方向间的夹角称为**高度角**，一般用符号$\alpha$表示。视线上倾所构成的仰角为正高度角，视线下倾所构成的俯角为负高度角，角值的大小都是由0°到90°。本书中谈到高度角都简称为竖角。图10-3（$a$）所示的竖盘为盘左时情况，当视线上倾时读出的就是高度角读值，图（$b$）为盘右时情况。另一种是目标方向与天顶方向（即铅垂线的反方向）所构成的角，称为**天顶距**，一般用符号$Z$表示。天顶距的大小从0°到180°，没有负值，大地测量与天文测量中常用这种表示法。图10-4（$a$）所示竖盘注记是盘左时情况，其读值即为天顶距读数，图（$b$）为盘右时情况。



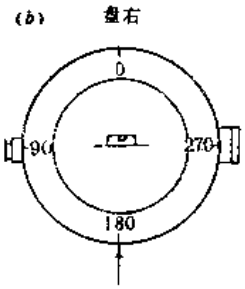
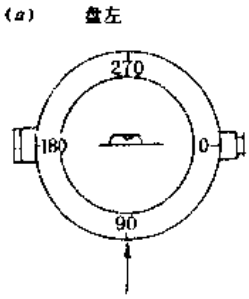




图 10-3



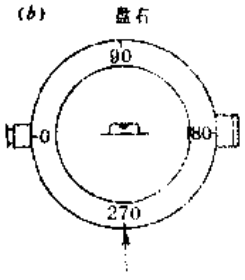




图 10-4

## 二、竖角（高度角）

根据竖角的基本概念，它是在竖直面内目标方向与水平方向的夹角。所以要测定竖角，必然也与观测水平角一样是两个方向读数之差。不过任何注记形式的竖盘，当视线水平时，不论是盘左还是盘右，其读数是个定值，正常状态应该是90°的整倍数。所以测定竖角时

实际只对视线指向的目标进行读数。计算竖角的公式无非是两个方向读数之差，问题是那个读数减那个读数以及视线水平时的读数为多少。以仰角为例，只需对所用仪器把望远镜放在大致水平位置观察一下读数，望远镜逐渐上倾时观察读数是增加还是减少，就可得出计算公式。

（1）当望远镜视线慢慢上倾，竖盘读数逐渐增加，则竖角$\alpha$＝瞄准目标时的读数减去视线水平时的读数；

（2）当望远镜视线慢慢上倾，竖盘读数逐渐减少，则竖角$\alpha$＝视线水平时的读数减去瞄准目标时的读数。

如图10-4所示为常用的J6光学经纬仪的竖盘注记形式。今以下列符号表示：

$L$——盘左时视线照准目标时的读数；

$R$——盘右时视线照准目标时的读数。

由图10-5可知，当望远镜上倾、盘左时读数减少，盘右时读数增加，盘左、盘右水平视线的读数如图所示。

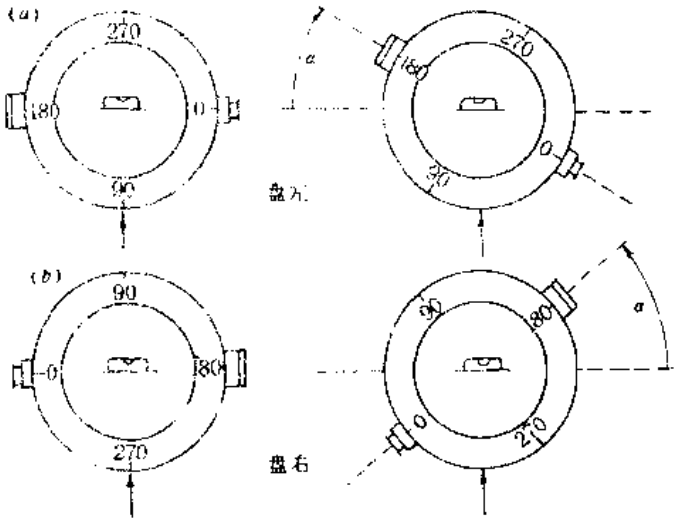



图 10-5

根据上列计算公式得出这种竖盘的计算式为：

$$\alpha_{左} = 90° - L \tag{a}$$

$$\alpha_{右} = R - 270° \tag{b}$$

由于竖盘读数$L$和$R$每每含有误差，$\alpha_{左}$与$\alpha_{右}$常不相等，竖角值应取$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_{左} + \alpha_{右})$

或

$$\alpha = \frac{1}{2}[(R - L) - 180°] \tag{10-5}$$

例 10-1　今用图10-5注记形式的竖盘观测一高处目标，盘左时读数为81°47′.6″，盘右读数为278°12′.4″，试计算此竖角的角值。

$$\alpha = \frac{1}{2}[(R - L) - 180°]$$

$$=\frac{1}{2}[(278°12.4'-81°47.6')-180°]=-8°12.4'$$

式（10-5）同样适用于俯角，今举例说明之：

例 10-2 若用上例中同一仪器观测低处一目标，盘左时读值为107°25.7′，盘右时读值为252°34.3′，试计算此竖角的角值。

$$\alpha=\frac{1}{2}[(R-L)-180°]$$

$$=\frac{1}{2}[(252°34.3'-107°25.7')-180°]=-17'25.7'$$

前面谈到图10-3所示竖盘，当视线上倾，盘左时读数逐渐增大，盘右时读数逐渐减小，见图10-6所示，其仰角计算式（正的竖角）为：

$$\alpha_{左}=L-0°$$

$$\alpha_{右}=180°-R$$

$$\alpha=\frac{1}{2}[(L-R)+180°] \quad (a)$$

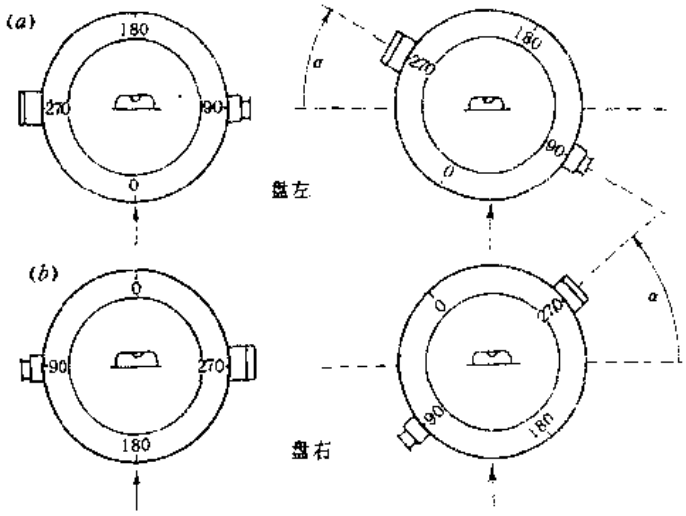



图 10-6

但这种注记的竖盘，当视线下倾，盘左时的读数逐渐减小，而盘右时的读数逐渐增大。根据前述同样方法，由于现在测的是负的竖角，故竖角的计算式为：

$$\alpha_{左}=L-360°$$

$$\alpha_{右}=180°-R$$

即

$$\alpha=\frac{1}{2}[(L-R)-180°] \quad (b)$$

因此这种注记的竖盘其竖角计算公式应为

$$\alpha=\frac{1}{2}[(L-R)\pm 180°] \quad (10-6)$$

应用式（10-6）时，按理说应该是仰角用+180°，而俯角用-180°，但当角值较小不易看出仰俯角时将如何决定呢？兹举例说明之：

**例** 10-3　今用图10-3所示注记形式的竖盘观测一目标，盘左时读数为$L=357°14'36''$，盘右时读数为$R=182°45'24''$，试计算此竖角的角值。

若用$\alpha=\frac{1}{2}[(L-R)+180°]$计算，则得$\alpha=177°14'36''$，这是不合理的，因为竖角最大值为90°，因此必须用$\alpha=\frac{1}{2}[(L-R)-180°]$，则得$\alpha=-2°45'24''$。

## 三、指标差的计算

上面谈的竖角计算公式（10-5）和（10-6）都认为当视线水平时，其读数是90°的整倍数。但实际情况这个条件有时是不满足的。这样，上面所推导出的竖角计算公式是否仍适用就必须加以分析了。这是由于指标从正确位置偏移了的缘故，使视线水平时的读数大了或小了一个数值引起的，所以称这个偏移值为指标差，通常用$x$表示。当指标偏移方向与竖盘注记方向一致时，则使读数中增大了一个$x$值，令$x$为正；反之，指标偏移方向与竖盘注记方向相反时，则使读数中减少了一个$x$值，令$x$为负。今仍以图10-4所示竖盘为例说明之。

如图10-7所示，当盘左视线水平且指标水准管气泡居中时，指标所指不是90°，而是

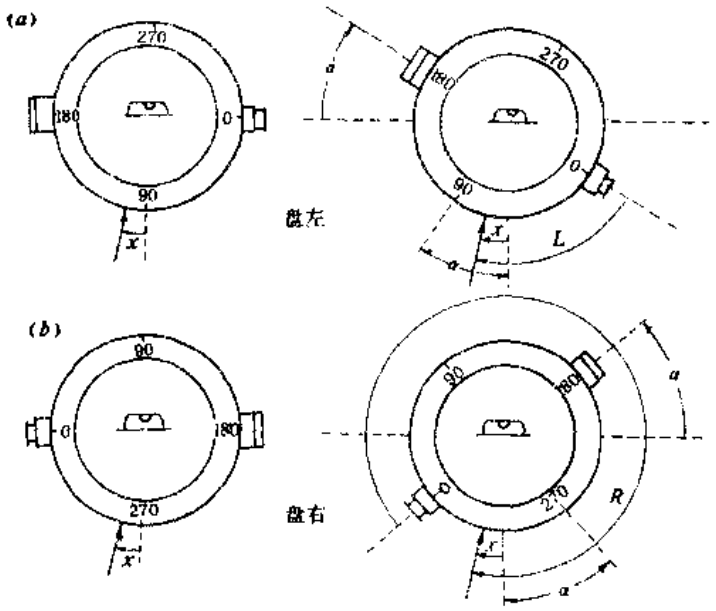



图 10-7

$90°+x$，同样，盘左位置视线指向目标时的读数中也大了一个$x$，若用$\alpha_{左}=90°-L$，则$\alpha_{左}$比正确值必然小了一个$x$，应用$\alpha=(90°+x)-L$就对了。同样，盘右时应用$\alpha=R-(270°+x)$。若将此两式相加取中数，则得：

$$\alpha = \frac{1}{2}\{|(90^\circ + x) - L| + |R - (270^\circ - x)|\}$$

$$= \frac{1}{2}[(R - L) - 180^\circ]$$

这与（10-5）式完全相同，也就说明了用盘左盘右两次读数而求算竖角，其角值不受指标差的影响。若将此两式相减，则得

$$x = \frac{1}{2}[(L + R) - 360^\circ] \qquad (10-7)$$

这就是求算指标差的计算公式。

## 四、竖角的测定

1. 在测站上安置好仪器，量取仪器高$i$；❶

2. 盘左位置瞄准目标，使十字丝的中丝切目标于某一位置（如为标尺，则读出中丝在尺上截取的数字；若照准的是觇标上某个位置，则应量取该中丝所截的位置至地面点的高程），这就是$v$。❷

3. 转动竖盘水准管微动螺旋，使竖盘水准管气泡居中。读取竖盘读数即为$L$。

4. 同上法，以盘右位置照准原目标，读取竖盘读数即为$R$。这里须着重指出，读取竖盘读数时竖盘水准管气泡务必居中。

上述观测法仅用十字丝的中丝照准目标，故一般称为中丝法。有的规范中规定测竖角时按盘左及盘右依次用上、中、下三根丝照准目标进行读数，这种测法称三丝法。由于上、下两丝与中丝间所夹视角都约为17′（见第十一章），所以由上、下丝观测值算得的指标差分别约为－17′和－17′。记录观测数据时，盘左按上、中、下三丝读数次序，盘右则按下、中、上丝次序记录。各按三丝所测得的$L$与$R$分别计算出相应的竖角，最后以平均值为该竖角的角值。

由于竖盘指标差对每架仪器在同一段时间内的变化应该很少，故可视为定值。当用仪器向各个方向以盘左盘右位置观测竖角后，则同一测回观测结果的指标差应该相等。但由于仪器误差、观测误差和外界条件的影响，使计算出的指标差发生变化。通常规范规定两倍指标差变化的容许范围，如果超限，则应重测。下面仍以图10-4所示注记形式的竖盘，测定某独立点高程的竖角观测记录为例，来说明之：

例 10-4 如果J6经纬仪指标差变化容许为±15″，则两倍指标差变化为±30′，上例的成果是合格的。

## 五、指标差的检验与校正

在实际工作中，如果指标差的绝对值太大，对于计算工作很不方便，因此在工作开始之前应对竖盘进行检验。若指标差超过限差则必须进行校正。具体检验方法如下：

仪器整平后，以望远镜盘左、盘右两个位置瞄准同一明显目标，读取竖盘读数$L$和$R$

❶、❷ 这些读数均为三角高程测量计算时用。

独立高程点竖角观测记录　　表 10-2

| 测站点 | 仪器高（m） | 觇　点 | 觇标高（m） | 竖盘位置 | 竖盘读数 | 两倍指标差 | 一测回竖角 | 照准觇标位置图 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| №1 | 1.43 | 九峰山 | 4.12 | 左 | 59°20′30″ | -30″ | +30°39′45″ | 觇标顶 |
| | | | | 右 | 300 40 00 | | | |
| | | 葛　岭 | 4.40 | 左 | 71 44 12 | -24″ | +18°16′00″ | 觇标顶 |
| | | | | 右 | 288 16 12 | | | |
| | | 王家湾 | 3.82 | 左 | 124 03 42 | +36″ | -34°03′24″ | 觇标顶 |
| | | | | 右 | 235 56 54 | | | |

时竖盘水准管气泡务必居中。以指标差计算公式（10-7）计算$x$的值，若超过规定限差则进行校正。一般要观测另一明显目标时再检验一次所算$x$值是否正确。若变化甚微或完全相同，证明观测读数无误，于是进行校正。校正时即在当时望远镜位置进行，不动望远镜使仍照准原目标，若这时为盘右位置，正确的指标差$x$为已知，则正确的$R$读数如图10-7所示为$R-x$。用竖盘指标水准管微动螺旋使竖盘读数为$R-x$，当然这时水准管的气泡一定偏移了，就用它的校正螺钉使气泡居中，并且是偏移多少校回多少。再照准另一明显目标进行观测，重新计算指标差$x$，若$x$已接近为零，可不再校正；若$x$值还很大，则继续用上述方法进行校正，直至达得目的，即$x$小于限差为止。

这里需指出：指标差的检校最好在视线尽量接近水平的情况下进行。因为竖角为零时，指标差将不受竖盘偏心的影响。关于这个问题将在§10-3中讨论。

### 六、竖盘指标自动归零装置

从竖角测定的过程中可以知道，竖盘指标水准管气泡居中是很重要的，若水准管气泡不居中，则指标位置必然不正确，读数就有错误。然而每次读数都必须使竖盘指标水准管气泡严格居中是十分费事的，所以现在不少工厂生产的经纬仪，其竖盘指标已采用自动归零装置。所谓自动归零装置，即当经纬仪有微量的倾斜时，这种装置会自动地调整光路使读数为水准管气泡居中时的数值，正常情况下，这时的指标差为零。竖盘指标自动归零装置的基本原理与自动安平水准仪的补偿装置原理相同。目前较先进的结构是长摆补偿器，它具有较好的防高频振动的能力，是用空气阻尼器作为减振设备。具有这种归零装置的经纬仪能在仪器整平后立即照准目标进行竖角观测，简化了操作程序，节省了观测时间；同时这种补偿装置的工作范围达±2′，安平误差不到±0.5″，从而提高了竖角测量的精度。这里需要指出的是，这种归零装置使用日久亦会变动，也应检验有无指标差存在。若指标差超限则必须加以校正。一般是送检修机构进行。

## §10-3　单指标竖盘的偏心问题

度盘的分划中心应与其旋转中心相重合。但制造和安装时或检修后若没有完全符合这

一要求，即两个中心不相重合，称为偏心。与水平度盘相同，有了偏心，就会使读数产生偏心误差。对于单指标经纬仪水平度盘存在偏心的问题由§7-6知其偏心误差可用盘左盘右两次读数的平均值而相互抵消。若竖盘同样也是单指标，若也存在偏心，由于对同一目标竖盘的盘左、盘右读数相差并非180°，所以单指标经纬仪竖盘读数中的偏心误差，就不能用盘左盘右两次读数取平均值加以消除，因此有必要加以分析和讨论。

无论是水平度盘或是竖盘，它们的度盘偏心对读数带来的影响其实质是一样的。因此，水平度盘偏心对读数影响的（7-3）式完全可用于竖盘偏心对读数的影响，即：

$$\left.\begin{aligned}\delta_{左} &= +\frac{e'}{r}\rho\sin(\theta - L')\\ \delta_{右} &= +\frac{e}{r}\rho\sin(\theta + R')\end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

式中：$L'$、$R'$——盘左、盘右时竖盘带有偏心误差的读数（亦即实际读数）。至于$\delta$的符号，则由$\theta + L'$或$\theta + R'$的值决定。$\delta$的性质根据其定义是改正数，故正确读数为：

$$\left.\begin{aligned}L &= L' + \delta_{左}\\ R &= R' + \delta_{右}\end{aligned}\right\} \qquad (b)$$

由盘左盘右带有偏心误差的读数所计算出的竖角值为$a' = \frac{1}{2}[(R' - L') - 180°]$。

即：$L' = 90° - a'$、$R' = 270° + a'$；代入（$a$）式得：

$$\delta_{左} = \frac{e}{r}\rho\sin(90° - a' + \theta) = \frac{e}{r}\rho\cos(a' - \theta) = \frac{e}{r}\rho(\cos a'\cos\theta + \sin a'\sin\theta)$$

$$\delta_{右} = \frac{e}{r}\rho\sin(270° + a' + \theta) = -\frac{e}{r}\rho\cos(a' + \theta) = -\frac{e}{r}\rho(\cos a'\cos\theta - \sin a\ \sin\theta)$$

考虑到（$b$）式，

$$L = L' + \frac{e}{r}\rho(\cos a'\cos\theta + \sin a'\sin\theta)$$

$$R = R' - \frac{e}{r}\rho(\cos a\cos\theta - \sin a'\sin\theta)$$

因而

$$a = \frac{1}{2}[(R - L) - 180°] = \frac{1}{2}[(R' - L') - 180°] - \frac{e}{r}\rho\cos a'\cos\theta \qquad (10\text{-}8)$$

$$x = \frac{1}{2}[(R + L) - 360°] = \frac{1}{2}[(R' + L') - 360°] + \frac{e}{r}\rho\sin a'\sin\theta \qquad (10\text{-}9)$$

### 一、竖角误差$\Delta a$与指标差误差$\Delta x$

从（10-8）、（10-9）式可知，$a'$中并未消除偏心误差的影响，同样用读数$L'$、$R'$计算出的指标差$x' = [(R' + L') - 360°]$也依然包含有误差。

令　　竖角误差　$\Delta a = a' - a$

指标差误差　$\Delta x = x' - x$

则

$$\Delta a = +\frac{e}{r}\rho\cos a'\cos\theta \tag{10-10}$$

$$\Delta x = -\frac{e}{r}\rho\sin a'\sin\theta \tag{10-11}$$

对同一架仪器而言，$r$是个定值，在一定的时间内，$e$及$\theta$是很少变化的，也可看作是常数，于是上列两式改写为

$$\Delta a = +K_a\cos a'$$

式中

$$K_a = +\frac{e}{r}\rho\cos\theta \tag{10-12}$$

$$\Delta x = K_x\sin a'$$

$$K_x = -\frac{e}{r}\rho\sin\theta \tag{10-13}$$

## 二、竖角误差$\Delta a$及指标差误差$\Delta x$的变化

从（10-10）式知，当$e$及$\theta$作为常数看待，$a' = 0°$时$|\Delta a|$值为最大；若$a'$角逐渐增大，则$|\Delta a|$逐渐变小；当$a' = 90°$，$\Delta a = 0$。$\Delta a$的符号与$a'$的符号无关。在实际作业中，$a'$值一般不超过10°，因此只要竖盘存在偏心，测竖角的精度就受到影响，特别是在平坦地区，$a'$值较小，更应注意。当然这里还有个因素须加以说明，即偏心方向问题，$\theta$角的大小，对$\Delta a$有影响。当$\theta$为90°或270°时，（10-10）式中的$\cos\theta$为零，从而可知即使有偏心存在，此时$\Delta a$亦为零，也就是没有竖角误差。当$\theta$为0°或180°时，从（10-10）式知道这时$\Delta a$最大，也就是偏心方向与竖盘0°～180°直径平行时，影响$\Delta a$最大。

至于指标差误差的变化，由（10-11）式可知：当$a' = 0°$，则$\Delta x = 0$，即偏心对水平视线不产生指标差误差，这也说明当竖角较小时，由偏心而引起的指标差误差很小，所以前面提到检验指标差时以视线水平为最好。又当$\theta = 0°$或180°时，$\Delta x = 0$，即偏心方向与竖盘0°～180°直径一致时，亦不产生指标差误差，当然原有的指标差$x$依然存在。

## 三、竖角误差$\Delta a$对高差的影响

由竖角误差的基本概念知，$a = a' - \Delta a$，如在$A$、$B$两固定点间相对观测竖角，$v$ $i$。若$a_{AB}$为正，则$a_{BA}$为负。当竖盘有偏心时

$$a_{AB} = a'_{AB} - \Delta a_{AB} = a'_{AB} - K_a\cos a'_{AB} \tag{10-14}$$

$$a_{BA} = a'_{BA} - \Delta a_{BA} = a'_{BA} - K_a\cos a'_{BA}$$

$$\cos a'_{BA} \approx \cos a'_{AB}$$

故

$$a_{BA} = a'_{BA} - K_a\cos a'_{AB} \tag{10-15}$$

由式（10-14）及式（10-15）可知，往返观测的竖角就其绝对值而言，一个少了个改

正项，而另一个多了个改正项，因此对向观测竖角而取其平均值时，可以基本消除偏心误差的影响，即用$\alpha=\frac{1}{2}(\alpha_{AB}-\alpha_{BA})$来计算高差$h$可不考虑偏心误差的影响。

## 四、偏心误差系数的测定

从上面的分析说明，只有往返观测的三角高程路线及复觇的高程导线能消除偏心误差的影响，而单觇的独立点高程就不能从测量方法中消除偏心影响，只能由测定偏心误差的改正系数$K_a$及$K_x$，再对测量成果加以改正。

设在平坦地区选择两个固定点$A$和$B$，相距约50m，在两点上都竖立标尺。（图10-8）先将仪器尽可能安置在靠近$A$点的标尺，一般为2m左右。根据仪器已测定的视线水平时的读数来安置望远镜，这样保持视线水平。如所用仪器的竖盘如图10-4所示形式，则盘左水平视线时读数为$90°+x$。若仪器没有指标差，则水平视线时读数为90°，这时由偏心而引起的指标差误差$\Delta x$应为零。在$A$点标尺上读得读数为“$a$”（需估读到毫米），然后转动望远镜照准$B$点上的标尺，使读数亦为“$a$”，即$v=a$。用盘左盘右进行观测并计算出竖角$\alpha_{AB}$，这时的$\alpha_{AB}$就是$A$、$B$两点间的地面倾斜角。同样将仪器移到$B$点附近测定$\alpha_{BA}$，即先以水平视线读出“$b$”，再照准$A$点标尺使读数为“$b$”时测定竖角。由$\alpha_{AB}$、$\alpha_{BA}$计算$A$、$B$两点间的正确地面倾斜角。（见表10-3）

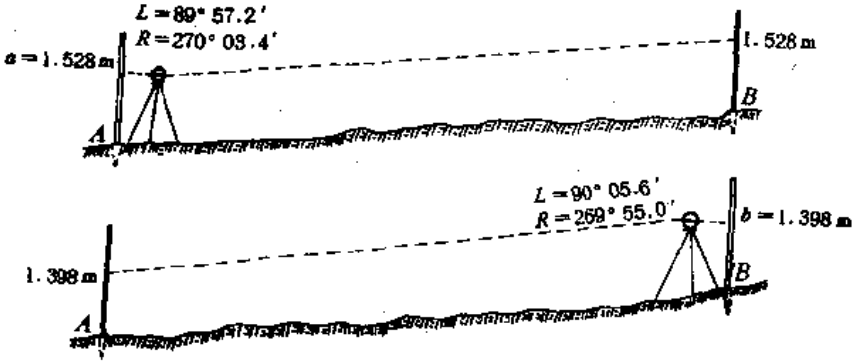



图 10-8

**例** 10-5：

计 算 表　　表 10-3

| 仪器位置 | 近尺读值(m) | 竖盘位置 | 竖盘读值 | 竖角角值及指标差 |
|---|---|---|---|---|
| 靠近$A$点 | 1.528 | 左 | $L=89°57.2'$ | $\alpha'_{AB}=+03.1'$ |
| | | 右 | $R=270°03.4'$ | $x=+0.3'$ |
| 靠近$B$点 | 1.398 | 左 | $L=90°05.6'$ | $\alpha'_{BA}=-05.3'$ |
| | | 右 | $R=269°55.0'$ | $x=+0.3'$ |

由上表可知正确的地面倾斜角为$\frac{1}{2}(\alpha_{AB}-\alpha_{BA})=+04.2'$，因$\alpha_{AB}=+03.1'$，在(10-15)式中$\cos\alpha'$基本为1，故$K_\alpha=\alpha'_{AB}-\alpha_{AB}=-03.1'-04.2'=-01.1'$，有了$K_\alpha$，就可写出这架仪器的竖盘偏心改正公式为

$$\alpha=\alpha'_{AB}-K_\alpha\cos\alpha'=\alpha'+1.1'\cos\alpha'$$

一般情况下，$\alpha$角通常都不大，因此指标差$x$就无需进行偏心改正。但在丘陵区或山区测量时，$\alpha$角可能较大，这样就应该进行这项改正。由（10-9）及（10-13）两式得

$$x=x'-\Delta x=x'-K_x\sin\alpha' \qquad (10-16)$$

其中$x$为没有受偏心影响的指标差值，可在$\alpha'$为0°测得，于是

$$K_x=\frac{x'-x}{\sin\alpha'}$$

求得$K_x$值后，即可对有关成果进行改正。

若要求测定偏心元素$e$及$\theta$，可由下列式子求得

$$e=\frac{\sqrt{K_\alpha^2+K_x^2}}{\rho''}\cdot\frac{1}{2}r$$

$$\theta=\arccos\frac{rK_\alpha}{e\rho''}\quad\text{或}\quad\arcsin\frac{rK_x}{e\rho''}$$

偏心距$e$的值一般仅及毫米。

## §10-4 三角高程测量的应用

### 一、三角高程测量的应用

在地形控制测量及航测外业控制测量工作中主要应用三角高程测量的方法测定一系列控制点的高程。其最大的优点是在测定控制点平面位置的过程中同时测定其高程，与水准测量相比，能一次测定距离较远或高差较大两点间的高差。通常有下列三种形式。

（一）三角高程路线

所谓三角高程路线，是在两已知高程点间，由已知其水平距离的若干条边组成的路线，用三角高程测量的方法，对每条边都进行往返向测定高差。这种方法可应用于导线测量及锁网形三角测量。用于导线，其本身就可作为三角高程路线。用于线形三角锁，可选择$P_1$、$N_3$、$N_5$、$P_{10}$和$P_1$、$N_4$、$N_6$、$N_7$、$P_{10}$为两条三角高程路线，如图10-9所示。用于其他锁网形的平面控制，应预先计划好传递高程的起迄路线，要求由竖角较小且边长较短的各边组成。各边的边长已由各点平面位置的求算确定了，一般只需在观测该路线各边的水平方向同时也观测竖角，并量取仪器高$i$和目标高$v$后，就可利用式（10-1）计算出点与点之间

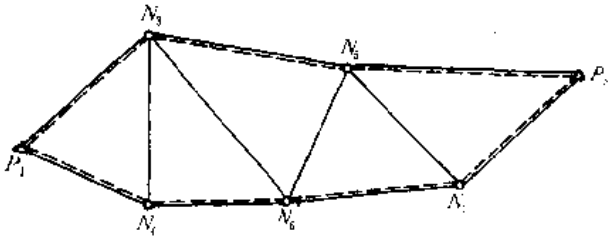


图 10-9

的高差。三角高程路线中各条边的高差均须往返观测，其竖角均用盘左盘右测定，测回数按规定办理。在推算出整条路线的总高差后，根据两端点的已知高程算得高差闭合差，用水准测量同样的方法将该闭合差按边长成比例分配，然后求算出路线中各点的高程。

（二）独立高程点

由二至三个已知高程点对一个未知高程的点，用三角高程的方法求算该点的高程，称为独立高程点。通常已知高程各点至未知高程点间的水平距离，已在求算未知高程点的平面位置时求得。凡不能包括在三角高程路线内的锁网形平面控制点及各种交会点，其高程可用独立高程点的方法测定。例如用解析后交会法求得$P$点的平面位置后，因$P$点至三个已知高级点的距离是已知了，而三个高级点的高程原是已知的，若用三角高程测量的方法求算出已知点与待定点间的高差，即能求得待定点$P$的高程。测定高差$h$时需用盘左盘右观测竖角$\alpha$，测出$i$及$v$的值。当由三个已知高程点推算得待定点$P$的高程互有差异时，若其较差在容许范围内，可以其平均值为准，否则须重测。

（三）高程导线

高程导线亦是根据三角高程测量原理测定的。它采用导线的形式联测所求各点的高程。其特点是不需要测定点的平面位置，所以与水准测量相似。计算高差所需的距离用视距测量的方法求得。高程导线可以根据地形测量需要布置成附合导线形式，起闭于两个已知高程点；或用闭合导线形式，起闭于同一已知高程点；有时也可用支导线形式，但对总长有限制。通常对附合与闭合形式的导线是隔点设站，就是只单向测定各边的高差，所以称为单觇导线。对于支导线形式则必须每点设站，即往返测定每条边的高差，故称复觇导线。施测过程中在对后视和前视读数测定视距的同时，测定竖角，量取仪器高及读出目标高。竖角用盘左盘右测定。对单觇高程导线，也可象水准测量一样，设置仪器于两欲求高程点之间测定其高差，这种情况时可不必量取仪器高。

## 二、三角高程测量的计算

在三角高程测量中，为了校核并消除地球曲率和大气折光的影响，一般都进行往返观测。往返测得高差的较差，规范都有具体规定。例如有的规范规定：距离在500m以内，高差的较差不得超过0.2m；当距离在500m以上时，按每百米不超过0.04m计算。当计算出往返高差的较差满足规范规定时才容许计算高差中数。

（一）三角高程路线的计算

在地形控制测量中，三角高程路线一般由边长较短和高差较小的边组成。每条边都要进行往返观测，有的规范规定竖角用中丝法两测回或三丝法一测回。前面谈到三角高程路线有附合和闭合两种形式，其起闭点一般为水准点或三角点，高级地形控制点亦可作一般地形控制点的起闭点。

1.高差计算

在计算之前应对外业成果进行检查，看其有无不合规定的数据。全部合乎要求后才可进行计算，并且通常是在规定表格上进行。

例 10-6 有附合三角高程路线如图10-10所示。图中所示各边高差的计算见表10-4。

图上所注高差为每边往返测高差的平均值。

2.三角高程路线成果整理

高差计算完毕，若每段高差的往返较差合乎要求，则取它们的平均值，然后再计算整条路线的高差闭合差

$$\Delta h = \sum h - (H_b - H_a) = \sum h + (H_a - H_b) \tag{10-17}$$

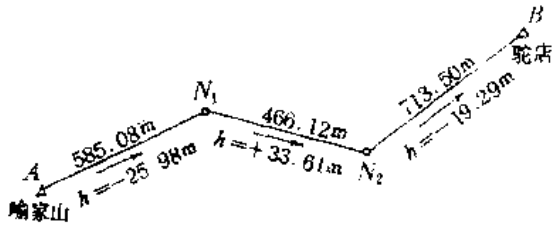



图 10-10

如果$\Delta h \leqslant \Delta h_{容}$，则先求出距离每百米的高差改正数$\delta_{百}$，即

$$\delta_{百} = -\frac{\Delta h}{\sum S_{百}}$$

三角高程路线高差计算　　表 10-4

| 测站点 | 喻家山 | $N_1$ | $N_1$ | $N_2$ | $N_2$ | 驼店 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 观点 | $N_1$ | 喻家山 | $N_2$ | $N_1$ | 驼店 | $N_2$ |
| 观法 | 直 | 反 | 直 | 反 | 直 | 反 |
| $\alpha$ | -2°28′54″ | +2°32′18″ | +4°07′12″ | -3°52′24″ | -1°17′42″ | +1°21′52″ |
| $S$ | 585.08 | 585.08 | 466.12 | 466.12 | 713.50 | 713.50 |
| $h'=S\operatorname{tg}\alpha$ | -25.36 | +25.94 | +33.58 | -31.56 | -16.13 | +16.99 |
| $f$ | +0.02 | +0.02 | +0.02 | +0.02 | +0.03 | +0.03 |
| $i$ | +1.34 | +1.30 | +1.30 | +1.32 | +1.32 | +1.28 |
| $v$ | -2.00 | -1.30 | -1.30 | -3.40 | -1.50 | -2.00 |
| $h$ | -26.00 | +25.96 | +33.60 | -33.62 | -16.28 | +16.30 |
| 高差平均值 | -25.98 | | +33.61 | | -16.29 | |

再计算每段高差的改正数$\delta i = S_{i百} \times \delta_{百}$，

式中：$\sum S_{百}$——以百米为单位的路线总长；

$S_{i百}$——以百米为单位的第$i$段距离。

以各段高差改正数之和应与闭合差绝对值相等而符号相反作为计算的校核。

$\Delta h_{容}$的大小与测图等高距和测区地面的平均坡度有关，其值在作业规范中都有具体规定。

例 10-7　计算图10-9中$N_1$、$N_2$点的高程，见表10-5。

三角高程路线成果整理（单位：米）　　表 10-5

| 点号 | 距离 | 高差中数 | 改正数$\delta_i$ | 改正后的高差 | 平差后的高程 | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 喻家山（A） | | | | | 430.74 | |
| | 585.08 | -25.98 | +0.05 | -25.93 | | |
| $N_1$ | | | | | 404.81 | |
| | 466.12 | +33.61 | +0.04 | +33.65 | | |
| $N_2$ | | | | | 438.46 | |
| | 713.50 | -16.29 | +0.06 | -16.23 | | |
| 驼店（B） | | | | | 422.23 | |
| | Σ1764.70 | | | | | |

$$\sum h = -8.66\text{m}$$

$$H_b - H_a = 8.51\text{m}$$

$$\Delta h = -0.15\text{m}$$

$$\Delta h_{容} = \pm 0.70\text{m}$$

$$\delta_{百} = \frac{-0.15}{17.65} = +0.0085\text{m}$$

（二）独立高程点的计算

地形控制点高程的测定应尽可能包括在三角高程路线或水准路线之内，这样既有校核又与周围地形控制点协调一致。但有时某些交会点纳入三角高程路线有困难时亦可独立计算其高程。一般情况有下列几种：

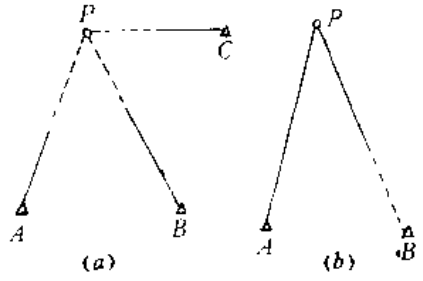



图 10-11

1. 后方交会及侧方交会测定的点

图10-11(*a*)为三个直觇，(*b*)为一个双向观测和一个反觇。凡是直觇的$P$点高程为$H_P = H_a - h_{ap}$　$H_b + h_{bp}$，反觇为$H_p$　$H_b$　$h_{pb}$，当两个以上方向所算的$H_p$其较差在容许范围内，取平均值作为最或然值。凡双向观测的高差应按前例一样比较往返较差，合乎要求后仍作为两个单向分别计算$P$点的高程。最后高程$H_p$则取三个$H_p$的平均〔图10-11(*b*)〕。

2. 后方交会测定的点

后方交会点的高程一般都是在待定点$P$向各高级控制点反觇决定的。

$$H_p - H_a \quad h_{pa}$$

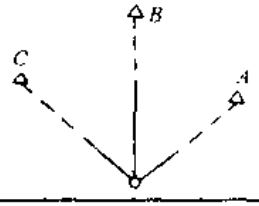
$$H_p = H_b \quad h_{pb}$$

$$H_p - H_c \quad h_{pc}$$

同样当三个方向算得的$H_p$其较差在容许范围以内时，取三个数的平均值作为$P$点高程的最或然值。下面举一个计算独立交会点高程的例子。

例 10-8

独立交会点已知数据与观测成果（单位：米）　　表 10-6

| 站点 | 仪器高 $i$ | 觇点 | 目标高 $v$ | 距离 $S$ | 竖角 $\alpha$ | 高程 | 观测略图 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 1.56 | $A$ | 2.50 | 445.56 | +0°39′48″ | $H_a$ 53.57 |  |
| | | $B$ | 2.50 | 439.16 | -0°09′18″ | $H_b$ 49.69 | |
| | | $C$ | 2.50 | 511.30 | 1°08′24″ | $H_c$ 38.20 | |

高 程 计 算（单位：米） 表 10 7

| 测 站 点 | P | P | P |
|---|---|---|---|
| 觇 点 | A | B | C |
| 觇 法 | 反 | 反 | 反 |
| $\alpha$ | +0°39′48″ | +0°09′18″ | 1°08′23″ |
| $S$ | 445.56m | 439.16m | 511.30m |
| $h'=S\operatorname{tg}\alpha$ | +5.16 | +1.19 | -10.17 |
| $f$ | -0.01 | +0.01 | +0.02 |
| $i$ | +1.56 | -1.56 | +1.56 |
| $v$ | 2.50 | -2.50 | 2.50 |
| $h$ | +4.23 | -0.26 | -11.09 |
| $H_0$ | 53.57 | 49.60 | 38.20 |
| $H$ | 49.34 | 49.34 | 49.29 |
| 中数$H_p$ | 49.32 | | |

上列算例因都是反觇的，故$H=H_0-h$。

## §10-5 三角高程测量的误差来源

三角高程测量的误差来源一般认为有以下四个方面：

### 一、竖角的测角误差

测角误差中包括观测误差、仪器误差及外界条件影响。观测误差中有照准误差、读数误差及竖盘指标水准管气泡居中的误差等。仪器误差中有单指标竖盘偏心误差及竖盘分划误差等。外界条件影响主要是大气折光，有时空气对流、空气能见度等也影响照准精度。目前经纬仪竖盘指标有的已有归零装置，这样能减弱气泡居中误差的影响，从而提高了测角精度。一般认为J6经纬仪用中丝法两测回的测角中误差约为±15″。竖角测定误差对三角高程测量的影响与推算高差的边长或路线的平均边长及总长有关，边长或总长愈长，影响愈大。

### 二、边长误差

边长误差的大小决定于测量的方法。例如解析法测定的地形控制点，根据其坐标反算而得的边长其精度是比较高的。如果是利用其展点位置在图上量得的边长，则边长精度就差些，一般认为相当图上的0.2mm。如果是一般视距法测定的边长，其精度可达到边长的1/300。若为图解法获得的边长（关于这部分内容将在第十三章中介绍），再从图上量得其长度，在不利的情况下，误差可能达到图上的0.3mm。

### 三、折光系数的误差

在本章第一节中讲到大气折光影响时曾认为其情况与地球曲率影响相似，即$r=\frac{S^2}{2R'}$

$=0.16\frac{S^2}{2R}$。这里的0.16称为折光系数，实际并非是常数，主要决定于空气的密度。空气密度，从早到晚在不定地变化着，一般认为早、晚变化较大，中午附近比较稳定，夜天与夜间空气的密度亦较稳定。所以折光系数是个变数，通常采用其平均值来计算大气折光的影响，故系数值是有误差的；曾有实验说明折光系数的中误差约为$\pm0.03\sim\pm0.05$。折光系数的误差对于短距离三角测量的影响不是主要的；但对于长距离三角测量而言，其影响很显著，应予注意。

### 四、仪器高$i$和目标高$v$的测定误差

对于$i$及$v$的测定误差，因在三角高程测量中仅要求精确到厘米级。因此，仪器高一般容易测量精确，而目标高$v$有些情况下略为困难一些。总的说来，这两项误差不构成主要影响。

## §10-6 三角高程测量的精度

### 一、三角高程测量的中误差和权

#### （一）单向观测的高差中误差

应用三角高程测量，在单向观测时，计算$A$、$B$两点间的高差$h_{AB}$的公式为

$$h_{AB}=S_{AB}\operatorname{tg}\alpha_A+i_A-v_B+f_{AB}$$

式中：$S_{AB}$——$A$、$B$两点间的距离；

$\alpha_A$——在$A$点向$B$点测得的竖角；

$i_A$——$A$点的仪器高；

$v_B$——在$A$点上向$B$点观测时的瞄准高；

$f_{AB}$——$A$、$B$两点间的两差（地球弯曲差和大气折光差）改正。

将上式微分并转换成中误差公式，得

$$m_{h_{AB}}=\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha_A m_{S_{AB}}^2+\frac{S_{AB}^2}{\cos^4\alpha_A}\frac{m_{\alpha_A}^2}{\rho^2}+m_{i_A}^2+m_{v_B}^2+m_f^2}$$ ❶

在三角测量中，仪器高和觇标高都用卷尺丈量，精度可保证到厘米，所以在地形控制测量中，$m_{i_A}$和$m_{v_B}$可以不必考虑。于是单向观测的高差中误差公式为

$$m_{h_{AB}}=\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha_A m_{S_{BA}}^2+\frac{S_{AB}^2}{\cos^4\alpha_A}\frac{m_{\alpha_A}^2}{\rho^2}+m^2f''}\qquad(10\text{-}18)$$

❶ 为了避免符号重复，这里将两差改正的中误差写成$m_f$。

（二）对向观测的高差中误差

在多数情况下，三角高程测量是用对向观测的。这时，仪器设在$A$点，测得$A$、$B$两点间的高差$h_{AB}$为

$$h_{AB}=S_{AB}\mathrm{tg}\alpha_A+i_A-v_B+f_{AB}$$

而仪器设在$B$点时测得$B$、$A$两点间的高差$h_{BA}$为

$$h_{BA}=S_{BA}\mathrm{tg}\alpha_B+i_B-v_A+f_{BA}$$

而$A$、$B$两点间的高差$h_{AB}$是取往返高差的中数，即

$$h_{AB}=\frac{1}{2}(h_{AB}-h_{BA})=\frac{1}{2}\{(S_{AB}\mathrm{tg}\alpha_A-S_{BA}\mathrm{tg}\alpha_B)+(i_A-i_B)+(v_A-v_B)+(f_{AB}-f_{BA})\}$$

将上式微分，并考虑$S_{AB}=S_{BA}=S$，以及设$di_A=di_B=dv_A=dv_B=0$，得

$$dh=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{tg}\alpha_A dS+\frac{S}{\cos^2\alpha_A}\frac{d\alpha_A}{\rho}-\mathrm{tg}\alpha_B dS-\frac{S}{\cos^2\alpha_B}\frac{d\alpha_B}{\rho}+df_{AB}-df_{BA}\right\}$$

由于$\alpha_A\approx-\alpha_B$，于是设$\mathrm{tg}\alpha_A\approx-\mathrm{tg}\alpha_B=\mathrm{tg}\alpha$，$\cos\alpha_A\approx\cos\alpha_B=\cos\alpha$，则上式为

$$dh=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{tg}\alpha dS+\frac{S}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha_A}{\rho}+\mathrm{tg}\alpha dS-\frac{S}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha_B}{\rho}+df_{AB}-df_{BA}\right\}$$

$$=\mathrm{tg}\alpha dS+\frac{S}{2\rho\cos^2\alpha}(d\alpha_A-d\alpha_B)+\frac{1}{2}(df_{AB}-df_{BA})$$

将上式转化成中误差公式时，设$m_{\alpha_A}=m_{\alpha_B}=m_\alpha$，$m_{f_{AB}}=m_{f_{BA}}=m'_f$。则得对向观测高差的中误差为

$$m_h=\pm\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha m_s^2+\frac{S^2}{2\rho^2\cos^4\alpha}m_\alpha^2+\frac{1}{2}m'^2_f}\qquad(10\text{-}19)$$

比较（10-18）和（10-19）式可以看出，对向观测能将竖角观测误差的影响减小$1/\sqrt{2}$倍，但是不能减小边长误差的影响。

为了估算一下竖角、边长及折光系数等中误差对高差的影响，设$S=3\mathrm{km}$；$m_s=\frac{0.1\times M}{\sqrt{2}}\mathrm{mm}$，当测图比例尺分母$M=10000$时，$m_s=\pm0.71\mathrm{m}$；$\alpha=5°$，$m_\alpha=\pm15''$，$m'_f=\frac{S^2}{2R}n_k$，折光系数$k$的中误差$m_k$为$\pm0.03\sim\pm0.05$现取$m_k=\pm0.04$。按（10-19）式得

$$\mathrm{tg}^2\alpha m_s^2=0.0039$$

$$\frac{S^2}{2\rho^2\cos^4\alpha}m_\alpha^2=0.0242$$

$$\frac{1}{2}m'^2_f=0.0004$$

这时$m_h=\pm0.17\mathrm{m}$。

根据（10-19）式及上述计算数字可以看出：

1.竖角误差的影响最大，它与边长成正比，所以在用三角高程测量传递高程时，尽量选短边；

2.在地形控制中，交会点的边长误差可能较大，如果再遇上竖角$\alpha$又较大，这时边长误差的影响就较大，所以传递高程宜选择竖角较小的边；

3.折光系数误差的影响与边长平方成正比，为了减低折光系数误差的影响，除了选择短边传递高程外，竖角的观测宜在中午附近进行，此时折光系数比较稳定。

用三角高程测量求高差，当竖角误差的影响起主要作用时，高差$h_{AB}$的中误差可近似地写成

$$m_{h_{AB}} \approx \pm \sqrt{\frac{S_{AB}^2}{\cos^4 \alpha_A} \frac{m_{\alpha_A}^2}{\rho^2}} \qquad (a)$$

因为在$\alpha$<5°时，$\cos \alpha_A \approx 1$，于是

$$m_{h_{AB}} \approx \pm \sqrt{S_{AB}^2 \frac{m_{\alpha_A}^2}{\rho^2}}$$

按权的定义得出观测高差的权$p_{h_{AB}}$为

$$p_{h_{AB}} = \frac{\mu^2}{m_{h_{AB}}^2} = \frac{\left(\frac{\mu \cdot \rho}{m_{\alpha_A}}\right)^2}{S_{AB}^2}$$

各站的竖角用同样的精度观测，所以$m_{\alpha_A}$是常数。因此对各个高差的权来说，$\left(\frac{\mu}{m_{\alpha_A}} \rho\right)^2$是个常数，设以$c$表示，得

$$p_{h_{AB}} = \frac{c}{S_{AB}^2} \qquad (1\text{-}20)$$

即，在三角高程测量中，当各竖角的精度相同时，观测高差的权与该方向的距离的平方成反比❶。当以一公里三角高程测量的权为单位权时$p = \frac{c}{S^2} = 1$，所以$c = S^2 = 1$，则$p_{h_{AB}} = \frac{1}{S_{AB}^2}$。而$m_{h_{AB}} = \mu \sqrt{\frac{1}{p_{h_{AB}}}} = \mu \sqrt{S_{AB}^2}$。式中$\mu$是一公里三角高程测量的中误差，$S_{AB}$以公里为单位。

## 二、独立交会高程点的精度

在地形控制中，独立交会高程点是从三个已知高程点用单向观测求出的。设已知点A、

❶ 在三角高程测量中，用$p_i = \frac{c}{S_i^2}$定权，是在竖角误差起决定性作用时才成立。这个问题，在测绘界有不同看法。大致通过对资料的分析或推算提出：三角高程测量的权$p_i = \frac{c}{S_i}$或$p_i = \frac{c}{S_i(1+S_i)}$也有人提出对短边和边长作三角高程测量时，宜用不同形式定权。这个问题，还有待进一步分析讨论。

$B$、$C$点的高程为$H_A$、$H_B$、$H_C$，从已知点用三角高程测量测得到待定点的高差为$h_{AD}$、$h_{BD}$、$h_{CD}$，则算出的$D$点高程为：$H'_D = H_A + h_{AD}$、$H''_D = H_B + h_{BD}$、$H'''_D = H_C + h_{CD}$；而$D$点的最后高程是取上述三个计算值的平均值。即

$$H_D = \frac{1}{3}(H'_D + H''_D + H'''_D) = \frac{1}{3}(H_A + h_{AD} + H_B + h_{BD} + H_C + h_{CD})$$

将上式微分并转化成中误差，得

$$m_{H_D} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_{h_{AD}}^2 + m_{h_{BD}}^2 + m_{h_{CD}}^2}$$

式中$m_A$、$m_B$、$m_C$是起始点$A$、$B$、$C$的高程中误差。当不考虑起始数据误差影响时，得

$$m_{H_D} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{m_{h_{AD}}^2 + m_{h_{BD}}^2 + m_{h_{CD}}^2}$$

设$\mu$是一公里三角高程测量的中误差，则$m_i = \mu\sqrt{S_i}$

所以

$$m_{H_D} = \pm\frac{\mu}{3}\sqrt{S_{AD}^2 + S_{BD}^2 + S_{CD}^2} \qquad (10\text{-}21)$$

例 10-9 设已知每公里高差中误差$\mu = \pm 0.10\text{m}$，$S_{AD} = S_{BD} = S_{CD} = 3\text{km}$，求独立交会点$D$的精度。

解：按（10-21）式得

$$m_{H_D} = \pm\frac{0.10}{3}\sqrt{3^2 \times 3} = \pm 0.17\text{m}$$

### 三、高程较差与高差较差的容许值

在地形控制中，经常用高程较差的限差来衡量高程测量中是否含有粗差。所谓高程较差就是指从不同的已知点求得新点的高程之差。例如分别从已知点$A$、$B$求得未知点$D$的计算高程为：$H'_D = H_A + h_{AD}$、$H''_D = H_B + h_{BD}$，由于测量有误差，上述两个计算高程不相等，那末这两个计算高程差数的限差是多少？下面来讨论这个问题。这两个计算高程的差数为

$$\Delta = H'_D - H''_D = H_A + h_{AD} - (H_B + h_{BD})$$

将上式微分，得

$$d\Delta = dH_A + dh_{AD} - dH_B - dh_{BD}$$

将上式转化成中误差的公式，得

$$m_\Delta = \pm\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + m_{h_{AD}}^2 + m_{h_{BD}}^2}$$

式中 $m_A$、$m_B$是起始点$A$、$B$的高程中误差。当不考虑起始数据误差影响时，高程差数的中误差为

$$m_\Delta = \pm\sqrt{m_{h_{AD}}^2 + m_{h_{BD}}^2}$$

即

$$m_\Delta = \mu\sqrt{S_{AD}^2 + S_{BD}^2} \qquad (10\text{-}22)$$

取两倍中误差作为容许误差，得

$$\Delta_{容}=2\mu\sqrt{S_{AD}^2+S_{BD}^2} \qquad (10\text{-}23)$$

用独立交会高程方法测定地形控制点的高程时，（10-22）式可以估算高程较差的中误差，而（10-23）式是高程较差的容许值。式中$\mu$是一公里三角高程测量测得高差的中误差；$S$以公里为单位。

例如1:10000比例尺地形测量中，用独立交会高程方法测定未知点高程时，如果地形平坦地区平均边长为3km，每公里高差的中误差为$\pm 0.10$m，则根据（10-23）式求得高程较差的容许值为

$$d_{容}=2\times(\pm 0.10)\sqrt{3^2+3^2}=\pm 0.84\text{m}$$

在用三角高程路线求地形控制点高程时，两点间的高差要往返观测。下面求两点间往返观测高差较差的容许值。

设$A$、$B$两点间往返测高差为$h_{AB}$、$h_{BA}$往返测高差的较差为

$$d'=h_{AB}+h_{BA}$$

将上式微分，转换成中误差的公式，并以$S$表示两点间距离，得

$$m_{d'}=\pm\sqrt{m_{h_{AB}}^2+m_{h_{BA}}^2}=\mu\sqrt{S_{AB}^2+S_{BA}^2}=\sqrt{2}\,\mu\cdot S \qquad (10\text{-}24)$$

往返高差较差的允许值为：

$$d'_{容}=2\sqrt{2}\,\mu\cdot S \qquad (10\text{-}25)$$

比较（10-22）、（10-23）、（10-24）、（10-25）式可见，求高程较差和往返测高差较差的中误差和容许误差的公式是基本相同的。

（10-25）式中，$\mu$是一公里三角高程测量测得高差的中误差，$S$以公里为单位。

当只考虑测角误差影响时，设$m_\alpha=\pm 15''$，$\alpha\leqslant 5°$，$S=1000$m时。按(a)式，$\mu=\pm\frac{S}{\rho\cos^2\alpha}\cdot\frac{m_\alpha}{\rho}=\pm 0.07$m。按（10-25）式可以求得$S=100\text{m}=\frac{1}{10}$km时，往返测高差的较差容许值为

$$d'_{100容}=\pm 0.02\text{m}$$

上列结论是只考虑竖角误差的影响，但是在地形控制中，边长误差的影响也是不容忽视的。根据广泛的资料统计，一般规范都要求100m间往返测高差较差的容许值是4cm。从（10-25）式可以看出，$d'_{容}$与$S$成正比，所以当$S$不是100m，而是$K\times 100$m，即$K$个100m时，其往返测高差较差的容许值将是$K\times 4$cm。

## 四、三角高程路线闭合差的限差

设在已知点$A$、$B$间敷设三角高程路线（图10-12）。$A$、$B$的已知高程是$H_A$、$H_B$，导线点间的观测高差为$h_1$、$h_2$……$h_n$，则三角高程路线的高程闭合差$f_h$为

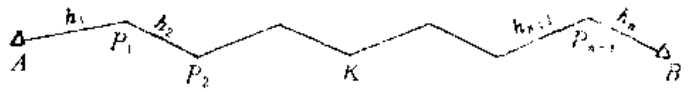



图 10-12

$$f_h = H_A + h_1 + h_2 + \cdots\cdots + h_n - H_B$$

所以闭合差的中误差为

$$m_{f_h} = \pm\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + \cdots + m_{h_n}^2}$$

式中：$m_A$、$m_B$是起始点高程的中误差。当不考虑起始数据误差影响时，闭合差的中误差为

$$m_{f_h} = \pm\sqrt{m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + \cdots + m_{h_n}^2} \qquad (b)$$

或

$$m_{f_h} = \mu\sqrt{[S^2]} \qquad (10-26)$$

所以闭合差的容许误差$f_{h容}$为

$$f_{h容} = 2\mu\sqrt{[S^2]} \qquad (10-27)$$

式中：$\mu$是一公里高差往返测高差中数的中误差，$S$以公里为单位。

当闭合差经配赋后，路线中点的高程精度最差。下面来求$K$点高程的中误差（图10-12）。这时$K$点的高程可以分别从$A$、$B$求出，得A的高程$H'_K = H_A + h_1 + h_2 + \cdots + h_B$及$H''_K = H_B - h_{K+1} - \cdots - h_n$，而后取中数作为$K$的最或然高程$H_K$，$H_K = \frac{1}{2}(H'_K + H''_K)$。这样可以求得$K$点两次高程的中误差分别为

$$m'_{H_K} = \pm\sqrt{m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + \cdots + m_{h_K}^2 + m_A^2}$$

及

$$m''_{H_K} = \pm\sqrt{m_{h_{K+1}}^2 + m_{h_{K+2}}^2 + \cdots + m_{h_n}^2 + m_B^2}$$

而求得$K$点高程最或然值的中误差为

$$m_{H_K} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{m_{H'_K}^2 + m_{H''_K}^2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + \cdots + m_{h_n}^2 + m_A^2 + m_B^2} \qquad (10-28)$$

当不考虑起始数据误差时：

$$m_{H_K} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + \cdots + m_{h_n}^2}$$

顾及（b）式得

$$m_{H_K} = \frac{1}{2}m_{f_h} \qquad (10-29)$$

从上式可以看出，三角高程导线经配赋闭合差后，其中点的中误差为闭合差的中误差的二分之一。

当已知$\mu$值和$S$，可以按(10-26)式估算闭合差的中误差$m_f$，并按（10-27）式计算闭合差的容许值$f_{容}$。反之，当已知闭合差$f$时，可以按（10-27）式估算单位权中误差$\mu$，并按（10-29）式估算经概略平差后，路线中点高程的中误差。当已知路线中点的中误差，可以按（10-29）式算得闭合差的中误差，从而规定闭合差的容许值，及路线的最大长度。

例 10-10　设三角高程路线全长9km，平均边长3km，一公里单向观测高差的中误差为±0.10m，求路线闭合差的容许误差及路线经概略平差后，路线中点高程的中误差。

解：已知一公里单向观测高差的中误差为±0.1m，则一公里双向观测高差的中误差

为 $\pm 0.10/\sqrt{2} = \pm 0.07$m，即 $\mu = \pm 0.07$m。按(10-27)式得路线闭合差的容许误差为

$$f_{h\text{容}} = 2 \times (\pm 0.07)\sqrt{3 \times 3^2} = \pm 0.73\text{m}$$

按（10-29）式求经概略平差后路线中点高程的中误差为

$$m_{H_K} = \frac{1}{2} m_{f_h} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} f_{h\text{容}} = \pm 0.18\text{m}$$

## 五、高程导线的精度

高程导线是用视距仪和视距尺来测定两点间的距离和高差的。两点间的高差为

$$h = \frac{1}{2} S' \sin 2\alpha + i - v + f \qquad (10-30)$$

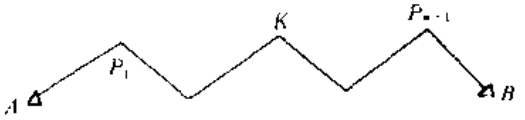



图 10-13

式中：$S'$——两点间的倾斜视距；

$\alpha$——视线的竖角；

$i$——仪器高；

$v$——瞄准高；

$f$——两差改正。

设敷设在 $A$、$B$ 两已知点间的高程点为 $P_1$、$P_2$、$\cdots P_{n-1}$（图10-13）。观测高差为 $h_1$、$h_2$、$\cdots h_n$，导线高程闭合差 $f_h$ 为

$$f_h = H_A + h_1 + h_2 + \cdots + h_n - H_B$$

闭合差的中误差为

$$m_{f_h} = \pm\sqrt{m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + \cdots + m_{h_n}^2 + m_A^2 + m_B^2} \qquad (c)$$

当不考虑起始数据误差时为

$$m_{f_h} = \pm\sqrt{m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + \cdots + m_{h_n}^2} \qquad (d)$$

根据（10-30）式得 $m_h$ 为

$$m_h^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha m_S^{2\prime} + S'^2 \cos^2 2\alpha \left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2$$

上式，假设量测仪器高和觇标高的精度较高；由于两点间距离较短而 $f$ 值很小；由折光系数误差引起的两差改正误差很小。所以不考虑仪器高、觇标高和两差改正的中误差。将上式代入（d）式得：

$$m_{f_h}^2 = \left[\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha m_S^{2\prime}\right] + \left[S'^2 \cos^2 2\alpha \left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2\right]$$

为了讨论问题方便，设高程导线是等边的，即 $S_1' = S_2' = \cdots = S_n' = S$，或 $[S] = n \cdot S$，以及 $m_{S_1}' = m_{S_2}' = \cdots = m_{S_n}' = m_S$，$m_{\alpha_1} = m_{\alpha_2} = \cdots = m_{\alpha_n} = m_\alpha$；同时设各边的竖角接近相等，即 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha_0$，$[\sin^2 2\alpha] = n \cdot \sin^2 2\alpha_0$，$[\cos^2 2\alpha] = n \cdot \cos^2 2\alpha_0$；于是上式可以写为

$$m_{f_h}^2 = \frac{1}{4} m_S^2 \cdot n \sin^2 2\alpha_0 + S^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho_2} n \cdot \cos^2 2\alpha_0$$

$$= n \cdot S^2 \left[\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha_0 \left(\frac{m_S}{S}\right)^2 + \cos^2 2\alpha_0 \left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2\right]$$

或

$$m_{fh}=\pm\frac{[S]}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha_0\left(\frac{m_S}{S}\right)^2+\cos^2 2\alpha_0\left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2} \tag{10-31}$$

而闭合差的容许误差为

$$f_{h容}=2m_{fh}=\pm\frac{2[S]}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha_0\left(\frac{m_S}{S}\right)^2+\cos^2 2\alpha_0\left(\frac{m_\alpha}{\rho}\right)^2} \tag{10-32}$$

高程导线经概略平差后，导线最弱点在导线的中点$K$，中点高程的中误差$M_{H_K}$仿（10-29）式得：

$$m_{HK}=\frac{1}{2}m_{fh} \tag{10-33}$$

例 10-11 设有全长为6km的高程导线，导线的平均竖角$\alpha_0=4°$，导线平均边长$S=300$m，视距的相对精度$\frac{m_S}{S}=\frac{1}{300}$，竖角中误差$m_\alpha=\pm 15''$，试估算这条导线的最大闭合差，并求经概略平差后，导线中点高程的中误差。

解：根据（10-32）式求得导线的最大闭合差为

$$f_{h容}=\pm\frac{2\times 6000}{\sqrt{20}}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2 8°\cdot\left(\frac{1}{300}\right)^2+\cos^2 8°\cdot\left(\frac{15}{\rho}\right)^2}=\pm 0.67\text{m}$$

而导线中点高程的中误差为

$$m_{HK}=\pm 0.17\text{m}$$

# 第十一章　视距测量与视差法测距

## §11-1　概　　述

视距测量是一种测距的方法，它根据几何光学原理用简便的操作方法即能迅速测出两点间的距离。

视线水平时，视距测量测得的是水平距离。如果视线是倾斜的，为求得水平距离，还应测出竖角。有了竖角，也可以求得测站至目标的高差。所以说视距测量也是一种能同时测得两点之间的距离和高差的测量方法。

视距测量可分为精密视距测量和普通视距测量。目前精密视距测量的测距精度可达1/2000以上，而普通视距测量的测距精度仅有1/200～1/300。

视距测量常应用于建立较低级的平面控制和高程控制，例如建立白纸测图与象片测图时的地形控制点等。由于用这种方法测距简单、作业方便，所以通常采用视距导线形式建立控制点。

一般在经纬仪、平板仪等仪器的望远镜上增加视距装置（最简单的是在十字丝分划板上加视距丝）来进行视距测量。它是根据相似形原理，在等腰三角形或直角三角形中，有一条边和一个角已知，从而推算出另一条边的长度。图11-1表示装置有固定$\varphi$角值的视距仪置于$A$点，则$AD_i$之长可由下式求得

$$AD_i = \frac{B_i C_i}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \tag{11-1}$$

即$AD_i$值由$B_i C_i$的长度确定，这种方法称为**定角视距**测量。图11-2表示装置有固定长度的尺子$BC$的视距仪置于$A$点，$AD_i$值由角度$\varphi_i$的大小确定，这种方法称为**定基线视距**测量。目前大多数视距测量为定角视距。

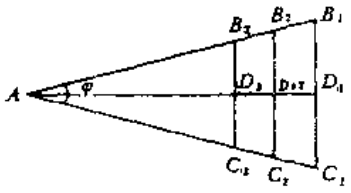



图11-1

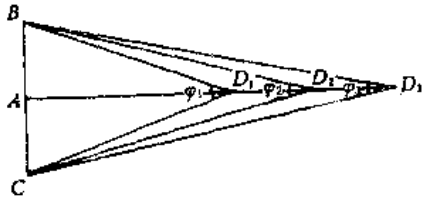



图11-2

无论哪一类视距测量，$BC$之长都是用一根尺子或是一根尺子的一部分。这种尺子一般均不太长，通常为2 m或3 m。与定角视距配套的尺子称为**视距尺**，与定基线视距配套的尺子称为**基线尺**。

视距测量之所以工作简便，对定角视距而言，主要原因是安置在被测点$D_i$处的视距尺比较短；对定基线视距而言，在被测点$D_i$处甚至可以不设标志而用一般的地物，基线$BC$也不太长。由式（11-1）可知，如要$AD_i$有足够的长，$\varphi_i$角将不可能很大，这是视距测量精度比较低的一个主要原因。如要提高$AD_i$的精度，对定角视距仪必须使$B_iC_i$很精确，对定基线视距仪必须使$\varphi_i$角很精确，为此而产生了各种类型的视距仪。

另有称为视差法的测距方法，它的原理与定基线视距仪一样。视差法测距的基线$BC$安置在$D$点，将经纬仪安置在$A$点测出$\varphi$角，可使$\varphi$角达得预期的精度要求，从而提高测距的精度。

## §11-2 普通视距测量的原理和公式

由于望远镜视准轴有水平和倾斜两种状态，获得水平距离的计算公式也不同。现分别加以讨论。

### 一、视准轴水平时的视距公式

（一）外调焦望远镜的视距公式

如图11-3，设望远镜的视准轴$qO$水平，并瞄准一竖立的视距尺$R$。尺上$G$、$M$两点成象在十字丝平面的$m$、$g$处，如果$m$、$g$两点恰好是十字丝分划板上的两根视距丝（如图11-4），那末尺上$GM$之长$l$便可以由上、下视距丝的两个读数相减而得到。

图11-3中$F$为物镜的第一焦点，通过$F$的光线经物镜折射后成平行光线。

由相似三角形$GFM$与$g'Fm'$中可得

$$\frac{GM}{g'm'}=\frac{FQ}{FO}$$

式中：$GM$（$=l$）——尺子间隔；

$FO$（$=f$）——物镜焦距；

$g'm'$（$=gm=p$）——十字丝分划板上视距丝之间的宽度。则

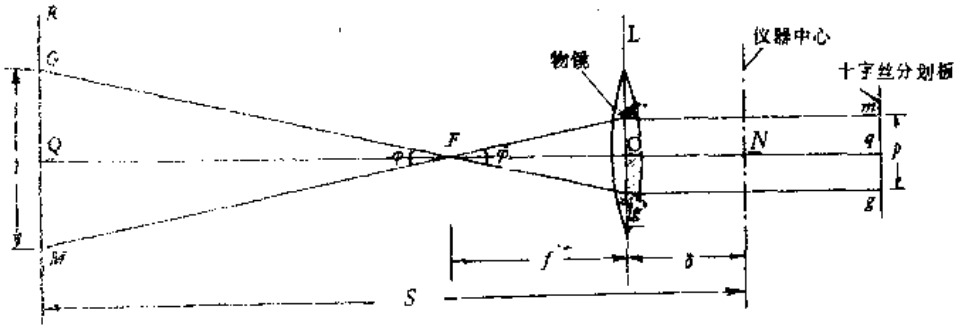



图11-3

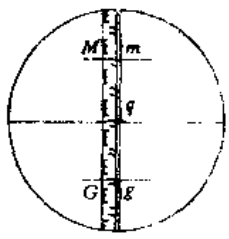



图11-4

$$FQ=\frac{FO}{g'm'}\times GM=\frac{f}{p}\cdot l$$

由图11-3得知，仪器中心$N$离物镜第一焦点之距离为$\delta + f$，其中$\delta$为仪器中心至物镜光心的距离，$f$为物镜焦距。故仪器中心至视距尺的水平距离为

$$S = FQ + (f + \delta) = \frac{f}{p} \cdot l + (f + \delta) \qquad (11\text{-}2)$$

式中$\frac{f}{p}$和$(f + \delta)$分别称为**视距乘常数和视距加常数**。

令 $$\frac{f}{p} = K, \quad (f + \delta) = c$$

则 $$S = Kl + c \qquad (11\text{-}3)$$

为计算上的方便，在设计时使$K = 100$，与些相应的$\varphi$角约为$34' 23''$（图11-3）

式（11-2）中的$\delta$值，对于移动物镜筒进行调焦的外调焦望远镜而言，是一个变数，但变化不大，一般可取经常用到的范围的平均值。各种外调焦望远镜的加常数大约在250mm至700mm。

（二）内调焦望远镜的视距公式

对于内调焦望远镜，它的物镜系统是由物镜$L_1$和调焦透镜$L_2$两部分组成（图11-5），当标尺$R$在不同的距离时，为使它的象落在十字丝平面上，必须移动$L_2$。因此，物镜系统的焦距是在发生变化的，即式（11-2）中的$f$将发生变化。下面就图11-5所示的情况讨论内调焦望远镜的视距公式。

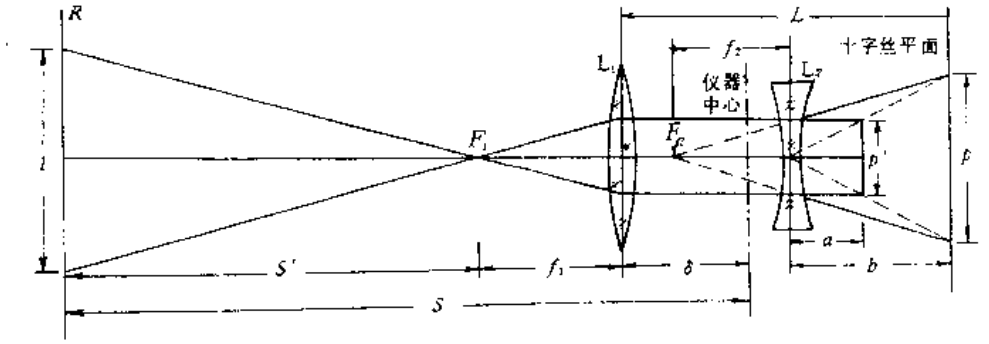



图 11-5

由透镜$L_1$成象原理可得下式：

$$\frac{S'}{f_1} = \frac{l}{p'} \qquad (a)$$

即 $$S' = \frac{f_1}{p'} \cdot l \qquad (b)$$

式中：$l$——作为物的视距尺上的间隔；

$p'$——$l$经透镜之后的象。

由透镜$L_2$成象原理可得

$$\frac{p}{p'}=\frac{b}{a} \tag{c}$$

式中：$p'$——物（实际是$l$经透镜$L_1$后的象）；

$p$——$p'$的象；

$a$——物距；

$b$——象距。

因$L_2$为凹透镜，而且作为物的$p'$是在光线的出射光一方，根据透镜成象的公式得

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{f_2} \tag{d}$$

即

$$\frac{1}{a}=\frac{f_2-b}{b\cdot f_2} \tag{e}$$

将式（$e$）代入式（$c$），得

$$\frac{p}{p'}=\frac{f_2-b}{f_2}$$

即

$$\frac{1}{p'}=\frac{f_2-b}{pf_2} \tag{f}$$

将式（$f$）代入式（$b$），得

$$S'=\frac{f_1(f_2-b)}{p\cdot f_2}\cdot l \tag{g}$$

由图11-5可见，标尺至仪器中心的距离$S$为

$$S=\frac{f_1(f_2-b)}{p\cdot f_2}\cdot l+f_1+\delta \tag{11-4}$$

令

$$b=b_\infty+\Delta b$$

式中：$b_\infty$——当$S$为无穷大时$b$的值。

代入式（11-4），

$$S=\frac{f_1(f_2-b_\infty-\Delta b)}{p\cdot f_2}\cdot l+f_1+\delta=\frac{f_1(f_2-b_\infty)}{P\cdot f_2}\cdot l-\frac{f_1\Delta b}{p\cdot f_2}\cdot l+f_1+\delta$$

令

$$K=\frac{f_1(f_2-b_\infty)}{p\cdot f_2} \tag{11-4a}$$

$$c=-\frac{f_1\cdot\Delta b}{p\cdot f_2}\cdot l+f_1+\delta \tag{11-4b}$$

则

$$S=K\cdot l+c \tag{11-5}$$

式（11-4$b$）中，$\Delta b$和$l$均随$S$而变，通常设计望远镜时，适当选择有关参数后，可使$K=100$，且使$\frac{f_1\cdot\Delta b}{p\cdot f_2}\cdot l$与$f_1+\delta$基本相等，即$c$可忽略不计，于是式（11-5）为

$$S=Kl=100\cdot l \tag{11-6}$$

例如某经纬仪的望远镜有关参数如下：

$f_1 = 125\text{mm}$，$f_2 = -50\text{mm}$，$p = 2.5\text{mm}$，$b_\infty = 50\text{mm}$，$\delta = 75\text{mm}$，$L = 150\text{mm}$，将它们代入式（11-4a）和（11-4b），得

$$K = 100$$

$$c = \Delta b \cdot l + 200$$

设$S$为100m时，经计算，$b = 49.791$●mm。即

$$\Delta b = b - b_\infty = -0.209\text{mm},$$

$S = 100$ m时的$l$为1000mm，故

$$c = -209 + 200 = -9\text{mm}。$$

## 二、视准轴倾斜时的视距公式

因目前使用的望远镜多为内调焦望远镜，故以下讨论均以内调焦望远镜的视距公式为基本公式，即视距$D$为

$$D = Kl \qquad (11-6a)$$

上式与（11-6）式基本相同。因所测为倾斜距离，故改用$D$表示。

如图11-6，$B$点高出$A$点较多，不可能用水平视线进行视距测量，必须把望远镜视准轴放在倾斜位置，如尺子仍竖直立着，则视准轴不与尺面垂直，上面推导的公式就不适用了。若要把视距尺与望远镜视准轴垂直，那是不易办到的。因此在推导水平距离的公式时，必须导入两项改正：（1）对于视距尺不垂直于视准轴的改正；（2）视线倾斜的改正。

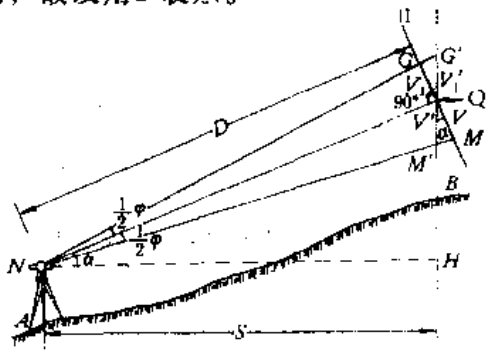



图 11-6

测定倾斜地面线$AB$的水平投影$S$时（图11-6），在$A$点安置仪器，在$B$点竖立视距尺，望远镜内上下视距丝和中横丝分别截在尺上$M'G'$和$Q$点。若视距尺安放得与视准轴垂直（如图示II的位置），则视距丝将分别截在尺上$M$和$G$两点。因为

$$\angle MQM' = \angle GQG' = a$$

---

● $b = 49.791\text{mm}$的计算过程如下：

如果只考虑物镜$L_1$的成象情况，则由图11-5知，它的物距为$S' + f_1 = S - \delta$，它的象距为$L - b + a$，$L$为望远镜物镜$L_1$至十字丝分划板的距离。按成象公式得

$$\frac{1}{S-\delta} + \frac{1}{L-b+a} = \frac{1}{f_1} \qquad (e)$$

由式（e）得

$$a = \frac{b \cdot f_2}{f_2 - b} \qquad (k)$$

代入式（f）得

$$\frac{1}{S-\delta} + \frac{1}{L-b+\dfrac{b \cdot f_2}{f_2-b}} = \frac{1}{f_1} \qquad (l)$$

式中除$b$之外均为已知值，代入计算则得$b$值

则

$$\angle QMM' = 90° - \frac{1}{2}\varphi$$

$$\angle QGG' = 90° + \frac{1}{2}\varphi$$

由于$\varphi/2$很小（一般等于17′11.$\dot{5}$″），故可以把$\angle QMM'$和$\angle QGG'$当作直角。由图11-6得知

$$V + V_1 = V'\cos\alpha + V_1'\cos\alpha = (V' + V_1')\cos\alpha \qquad (a)$$

式中$V' + V_1'$是两视距丝所截竖直视距尺的间隔$l$，而$V + V_1$是假设视距尺与视准轴垂直时两视距丝在尺上的间隔$l_0$，因此式（$a$）可写为：

$$l_0 = l\cos\alpha \text{●} \qquad (b)$$

应用式（11-5），得出直线$NQ$的长度为

$$D = Kl_0 = Kl\cos\alpha \qquad (c)$$

将倾斜距离折算成水平距离$S$须乘以$\cos\alpha$。

$$S = Kl\cos^2\alpha \qquad (11-7)$$

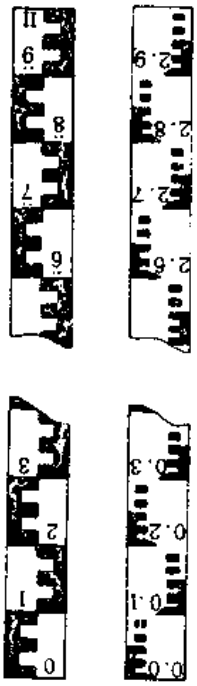


图 11-7

## 三、视距尺

进行视距测量时所用的视距尺可以用普通的水准尺代替。但施测地形时为了读数方便和迅速起见，以采用特制的视距尺为好。视距尺的分划，应根据常用距离的大小来设计。所谓常用距离是指一般情况立尺点距仪器的距离，这种距离因测图比例尺的不同而定。比例尺大者距离小，比例尺小者距离大。常用距离小者视距尺分划宜狭，大者宜阔。例如1：10000比例尺测图时，视距尺分划值取2cm较适宜。图11-7所示为常用的普通视距尺形式。

进行高程导线的测定时，以采用有水准器的水准尺为好。

# §11-3 视距常数的测定

在进行视距测量前必须把视距公式中两个常数加以精确的测定。具有外调焦望远镜的仪器，其视距加常数$c$是由物镜的焦距$f$和物镜光心至仪器中心的距离$\delta$所组成。测定时先使望远镜照准一很远的目标；当调焦后能清楚地看到这个目标在十字丝面上的象时，用尺量取物镜至十字丝分划板的距离得$f$，量取望远镜横轴中心至物镜的距离得$\delta$，则$c$

● 若不把$\angle QMM'$及$\angle QGG'$当作直角看待，按严密方法推导$l_0$与$l$的关系得：

$$l_0 = l\left(\cos\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

当$K = 100$时，即使在$\alpha = 15°$的情况下，

$$\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 1^2\left(\frac{1}{200}\right)^2 = \frac{1}{40000}$$

故将这数值略而不计，所引起的误差不超过$\frac{1}{40000}$。

$f+\delta$。内调焦望远镜的仪器无须进行这项常数的测定。

视距乘常数 $K$ 测定时应特别小心，因为它的误差对测量成果影响较大。关于内调焦望远镜的仪器测定 $K$ 值的方法如下：在平坦地区选择一段直线，如图11-8中的 $NB_5$。在 $N$

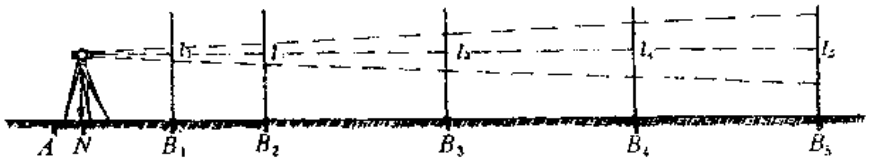



图 11-8

点打一木桩，从这木桩起沿直线依次在25m、50m、100m和200m的距离分别打下木桩 $B_1$、$B_2$、$B_3$、$B_4$、$B_5$。各桩距 $N$ 点的长度即为各 $S_i$ 之长。将仪器安置于 $N$ 点，在各 $B_i$ 点上顺序竖立视距尺，按盘左和盘右两个位置使望远镜成大致水平时，对各点所立视距尺，用上下丝进行读数，每次测定视距间隔各两次。再由 $B_5$ 点测向 $B_1$ 点，测法同上。这样往测得每立尺点的视距间隔各两次，返测时亦各得两次视距间隔，所以每桩所得的视距间

**视距乘常数 $K$ 的测定** 表 11-1

日期：79年3月20日　　观测者：王　民

天气：晴　　计算者：李　军

仪器：北光J6×××

| 标尺距离 $S_i$（m） | | 25.00 | 50.00 | 100.00 | 150.00 | 200.00 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 下丝读数 | 1.626 | 1.751 | 2.002 | 2.251 | 2.505 |
| | 上丝读数 | 1.375 | 1.250 | 1.000 | 0.750 | 0.500 |
| | 视距间隔 | 0.251 | 0.501 | 1.002 | 1.501 | 2.005 |
| 2 | 下丝读数 | 1.625 | 1.751 | 2.000 | 2.252 | 2.506 |
| | 上丝读数 | 1.375 | 1.249 | 1.000 | 0.749 | 0.499 |
| | 视距间隔 | 0.250 | 0.502 | 1.000 | 1.503 | 2.007 |
| 3 | 下丝读数 | 1.627 | 1.753 | 2.005 | 2.255 | 2.510 |
| | 上丝读数 | 1.377 | 1.252 | 1.004 | 0.755 | 0.508 |
| | 视距间隔 | 0.250 | 0.501 | 1.001 | 1.500 | 2.002 |
| 4 | 下丝读数 | 1.627 | 1.753 | 2.005 | 2.257 | 2.512 |
| | 上丝读数 | 1.376 | 1.253 | 1.004 | 0.755 | 0.507 |
| | 视距间隔 | 0.251 | 0.500 | 1.001 | 1.502 | 2.005 |
| 视距间隔的平均值 $l_i$ | | 0.2503 | 0.5019 | 1.0023 | 1.5013 | 2.0048 |
| $K_i=\frac{S_i}{l_i}$ | | 99.80 | 99.80 | 99.80 | 99.90 | 99.80 |
| 视距乘常数 $K$ 的平均值 | | $K=99.83$ | | | | |

隔$l_1$、$l_2$、$l_3$、$l_4$、$l_5$各四次。各取其平均值后分别代入公式$K=\frac{S_i}{l_i}$，计算出每间距离所测定的$K$值，取其平均值即为所求的$K$值。

至于外调焦望远镜的仪器，其$K$值的测定基本与上述方法同。仅由于这类仪器其视距加常数不为零而等于$c$。测定乘常数$K$时，仪器不置于$N$点而设在$A$点，如图11-8所示，使$AN=c$，因此$A$点至$B_i$点的距离为$S_i+c$。测定的程序与计算方法则完全相同。

例11-1　表11-1所示为内调焦望远镜的仪器测定视距乘常数$K$的例子。

## §11-4　视距测量的计算工具

### 一、普通视距测量测定高差的公式

上一章所得三角高程测量计算高差的公式（10-4）为

$$h_{AB}=S_{AB}\operatorname{tg}\alpha_{AB}+i_A-v_B+f$$

式中：$S_{AB}$——$A$、$B$两点间的水平距离。

将式（11-7）并顾及$\alpha$的方向，$S_{AB}=Kl\cos^2\alpha_{AB}$

代入，得　　$h_{AB}=Kl\cos^2\alpha_{AB}\operatorname{tg}\alpha_{AB}+i_A+v_B+f$

经化简后得　　$$h_{AB}=\frac{1}{2}Kl\sin 2\alpha_{AB}+i_A-v_B+f \qquad (11-8)$$

应用视距测量的一个特点是速度快。如果两点间的水平距离$S$和高差$h$都要用式（11-7）、（11-8）直接计算，将会花去很多时间，特别是在碎部测量中会严重的影响工作的进度。为解决繁琐的计算工作，通常采用一些计算工具，例如用视距计算表和电子计算器进行计算。

### 二、视距计算表

一般视距计算表系根据式（11-7）和式（11-8）编制而成。以视距值$Kl$和竖角$\alpha$为引数，可直接查出水平距离$S$和高差主值$h'$。

$$S=Kl\cdot\cos^2\alpha$$

$$h'=\frac{1}{2}Kl\cdot\sin 2\alpha \qquad (11-9)$$

表11-2所示的视距计算表就是根据$\alpha$和$Kl$为引数查取$S$及$h'$的，表中的水平距离$Kl$为100 m。此表按视距值10 m～300 m每米列载一页。竖角由0°～45°每5′列载一高差主值。加上高差主值左侧的修正值，可以查得竖角1′的高差主值。水平距离列载在高差主值的右侧，每隔20′编一值。不是20′整倍数的竖角的水平距离可用相邻两个水平距离内插求得。

表中高差主值和水平距离的单位为米，修正值的单位为厘米。

例11-2　已知视距$Kl$=100m，竖角$\alpha$=-18°29′，仪器高为1.35 m，目标高为3.00m，求高差$h$和水平距离$S$。

由表查得18°25′的高差主值为29.97m，修正值4′的值为10cm，即18°29′的高差主值为

表11-2

| 修正值 | | 高差主值 | | | | | | | | | | | | | 水平距离 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | α | 0′ | 5′ | 10′ | 15′ | 20′ | 25′ | 30′ | 35′ | 40′ | 45′ | 50′ | 55′ | α | 0′ | 20′ | 40′ |
| 1′ | 3 | 0° | 0.00 | 0.15 | 0.29 | 0.44 | 0.58 | 0.73 | 0.87 | 1.02 | 1.16 | 1.31 | 1.45 | 1.60 | 0° | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 2′ | 6 | 1° | 1.74 | 1.89 | 2.04 | 2.18 | 2.33 | 2.47 | 2.62 | 2.76 | 2.91 | 3.05 | 3.20 | 3.34 | 1° | 100.0 | 99.9 | 99.9 |
| 3′ | 9 | 2° | 3.49 | 3.63 | 3.78 | 3.92 | 4.07 | 4.21 | 4.36 | 4.50 | 4.65 | 4.79 | 4.94 | 5.08 | 2° | 99.9 | 99.8 | 99.8 |
| 4′ | 12 | 3° | 5.23 | 5.37 | 5.52 | 5.66 | 5.80 | 5.95 | 6.09 | 6.24 | 6.38 | 6.53 | 6.67 | 6.81 | 3° | 99.7 | 99.7 | 99.6 |
| | | 4° | 6.96 | 7.10 | 7.25 | 7.39 | 7.53 | 7.68 | 7.82 | 7.97 | 8.11 | 8.25 | 8.40 | 8.54 | 4° | 99.6 | 99.4 | 99.3 |
| 1′ | 3 | 5° | 8.68 | 8.83 | 8.97 | 9.11 | 9.25 | 9.40 | 9.54 | 9.68 | 9.83 | 9.97 | 10.11 | 10.25 | 5° | 99.2 | 99.1 | 99.0 |
| 2′ | 6 | 6° | 10.40 | 10.54 | 10.68 | 10.82 | 10.96 | 11.11 | 11.25 | 11.39 | 11.53 | 11.67 | 11.81 | 11.95 | 6° | 98.9 | 98.8 | 98.7 |
| 3′ | 8 | 7° | 12.10 | 12.24 | 12.38 | 12.52 | 12.66 | 12.80 | 12.94 | 13.08 | 13.22 | 13.36 | 13.50 | 13.64 | 7° | 98.5 | 98.4 | 98.2 |
| 4′ | 11 | 8° | 13.78 | 13.92 | 14.06 | 14.20 | 14.34 | 14.48 | 14.62 | 14.76 | 14.90 | 15.04 | 15.17 | 15.31 | 8° | 98.1 | 97.9 | 97.7 |
| | | 9° | 15.45 | 15.59 | 15.73 | 15.87 | 16.00 | 16.14 | 16.28 | 16.42 | 16.55 | 16.69 | 16.83 | 16.96 | 9° | 97.6 | 97.4 | 97.2 |
| 1′ | 3 | 10° | 17.10 | 17.24 | 17.37 | 17.51 | 17.65 | 17.78 | 17.92 | 18.06 | 18.19 | 18.33 | 18.46 | 18.60 | 10° | 97.0 | 96.8 | 96.6 |
| 2′ | 5 | 11° | 18.73 | 18.87 | 19.00 | 19.13 | 19.27 | 19.40 | 19.54 | 19.67 | 19.80 | 19.94 | 20.07 | 20.20 | 11° | 96.4 | 96.1 | 95.9 |
| 3′ | 8 | 12° | 20.34 | 20.47 | 20.60 | 20.73 | 20.87 | 21.00 | 21.13 | 21.26 | 21.39 | 21.53 | 21.66 | 21.79 | 12° | 95.7 | 95.4 | 95.2 |
| 4′ | 11 | 13° | 21.92 | 22.05 | 22.18 | 22.31 | 22.44 | 22.57 | 22.70 | 22.83 | 22.96 | 23.09 | 23.22 | 23.35 | 13° | 94.9 | 94.7 | 94.4 |
| | | 14° | 23.47 | 23.60 | 23.73 | 23.86 | 23.99 | 24.11 | 24.24 | 24.37 | 24.49 | 24.62 | 24.75 | 24.87 | 14° | 94.1 | 93.9 | 93.6 |
| 1′ | 2 | 15° | 25.00 | 25.13 | 25.25 | 25.38 | 25.50 | 25.63 | 25.75 | 25.88 | 26.00 | 26.12 | 26.25 | 26.37 | 15° | 93.3 | 93.0 | 92.7 |
| 2′ | 5 | 16° | 26.50 | 26.62 | 26.74 | 26.86 | 26.99 | 27.11 | 27.23 | 27.35 | 27.48 | 27.60 | 27.72 | 27.84 | 16° | 92.4 | 92.1 | 91.8 |
| 3′ | 7 | 17° | 27.96 | 28.08 | 28.20 | 28.32 | 28.44 | 28.56 | 28.68 | 28.80 | 28.92 | 29.04 | 29.15 | 29.27 | 17° | 91.5 | 91.1 | 90.8 |
| 4′ | 10 | 18° | 29.39 | 29.51 | 29.62 | 29.74 | 29.86 | 29.97 | 30.09 | 30.21 | 30.32 | 30.44 | 30.55 | 30.67 | 18° | 90.5 | 90.1 | 89.8 |
| | | 19° | 30.78 | 30.90 | 31.01 | 31.13 | 31.24 | 31.35 | 31.47 | 31.58 | 31.69 | 31.80 | 31.92 | 32.03 | 19° | 89.4 | 89.0 | 88.7 |
| 1′ | 2 | 20° | 32.14 | 32.25 | 32.36 | 32.47 | 32.58 | 32.69 | 32.80 | 32.91 | 33.02 | 33.13 | 33.24 | 33.35 | 20° | 88.3 | 87.9 | 87.5 |
| 2′ | 4 | 21° | 33.46 | 33.56 | 33.67 | 33.78 | 33.89 | 33.99 | 34.10 | 34.21 | 34.31 | 34.42 | 34.52 | 34.63 | 21° | 87.2 | 86.8 | 86.4 |
| 3′ | 6 | 22 | 34.73 | 34.84 | 34.94 | 35.05 | 35.15 | 35.25 | 35.36 | 35.46 | 35.56 | 35.66 | 35.76 | 35.87 | 22° | 86.0 | 85.6 | 85.1 |
| 4′ | 8 | 23° | 35.97 | 36.07 | 36.17 | 36.27 | 36.37 | 36.47 | 36.57 | 36.67 | 36.77 | 36.86 | 36.96 | 37.06 | 23° | 84.7 | 84.3 | 83.9 |
| | | 24° | 37.16 | 37.25 | 37.35 | 37.45 | 37.54 | 37.64 | 37.74 | 37.83 | 37.93 | 38.02 | 38.11 | 38.21 | 24° | 83.5 | 83.0 | 82.6 |
| 1′ | 2 | 25° | 38.30 | 38.40 | 38.49 | 38.58 | 38.67 | 38.77 | 38.86 | 38.95 | 39.04 | 39.13 | 39.22 | 39.31 | 25° | 82.1 | 81.7 | 81.2 |
| 2′ | 3 | 26° | 39.40 | 39.49 | 39.58 | 39.67 | 39.76 | 39.84 | 39.93 | 40.02 | 40.11 | 40.19 | 40.28 | 40.37 | 26° | 80.8 | 80.3 | 79.9 |
| 3′ | 5 | 27° | 40.45 | 40.54 | 40.62 | 40.71 | 40.79 | 40.87 | 40.96 | 41.04 | 41.12 | 41.21 | 41.29 | 41.37 | 27° | 79.4 | 78.9 | 78.4 |
| 4′ | 7 | 28° | 41.45 | 41.53 | 41.61 | 41.69 | 41.77 | 41.85 | 41.93 | 42.01 | 42.09 | 42.17 | 42.25 | 42.33 | 28° | 78.0 | 77.5 | 77.0 |
| | | 29° | 42.40 | 42.48 | 42.56 | 42.63 | 42.71 | 42.78 | 42.86 | 42.93 | 43.01 | 43.08 | 43.16 | 43.23 | 29° | 76.5 | 76.0 | 75.5 |
| 1′ | 1 | 30° | 43.30 | 43.37 | 43.45 | 43.52 | 43.59 | 43.66 | 43.73 | 43.80 | 43.87 | 43.94 | 44.01 | 44.08 | 30° | 75.0 | 74.5 | 74.0 |
| 2′ | 2 | 31° | 44.15 | 44.22 | 44.28 | 44.35 | 44.42 | 44.48 | 44.55 | 44.62 | 44.68 | 44.75 | 44.81 | 44.88 | 31° | 73.5 | 73.0 | 72.4 |
| 3′ | 4 | 32° | 44.94 | 45.00 | 45.07 | 45.13 | 45.19 | 45.25 | 45.32 | 45.38 | 45.44 | 45.50 | 45.56 | 45.62 | 32° | 71.9 | 71.4 | 70.9 |
| 4′ | 5 | 33° | 45.68 | 45.74 | 45.79 | 45.85 | 45.91 | 45.97 | 46.03 | 46.08 | 46.14 | 46.19 | 46.25 | 46.30 | 33° | 70.3 | 69.8 | 69.3 |
| | | 34° | 46.36 | 46.41 | 46.47 | 46.52 | 46.57 | 46.63 | 46.68 | 46.73 | 46.78 | 46.83 | 46.88 | 46.93 | 34° | 68.7 | 68.2 | 67.6 |
| 1′ | 1 | 35° | 46.98 | 47.03 | 47.08 | 47.13 | 47.18 | 47.23 | 47.28 | 47.32 | 47.37 | 47.42 | 47.46 | 47.51 | 35° | 67.1 | 66.6 | 66.0 |
| 2′ | 2 | 36° | 47.55 | 47.60 | 47.64 | 47.69 | 47.73 | 47.77 | 47.82 | 47.86 | 47.90 | 47.94 | 47.98 | 48.02 | 36° | 65.5 | 64.9 | 64.3 |
| 3′ | 2 | 37° | 48.06 | 48.10 | 48.14 | 48.18 | 48.22 | 48.26 | 48.30 | 48.33 | 48.37 | 48.41 | 48.44 | 48.48 | 37° | 63.8 | 63.2 | 62.7 |
| 4′ | 3 | 38° | 48.51 | 48.55 | 48.58 | 48.62 | 48.65 | 48.69 | 48.72 | 48.75 | 48.78 | 48.81 | 48.85 | 48.88 | 38° | 62.1 | 61.5 | 61.0 |
| | | 39° | 48.91 | 48.94 | 48.97 | 49.00 | 49.02 | 49.05 | 49.08 | 49.11 | 49.14 | 49.16 | 49.19 | 49.21 | 39° | 60.4 | 59.8 | 59.3 |
| 1′ | 0 | 40° | 49.24 | 49.27 | 49.29 | 49.31 | 49.34 | 49.36 | 49.38 | 49.41 | 49.43 | 49.45 | 49.47 | 49.49 | 40° | 58.7 | 58.1 | 57.5 |
| 2′ | 1 | 41° | 49.51 | 49.53 | 49.55 | 49.57 | 49.59 | 49.61 | 49.63 | 49.64 | 49.66 | 49.68 | 49.69 | 49.71 | 41° | 57.0 | 56.4 | 55.8 |
| 3′ | 1 | 42° | 49.73 | 49.74 | 49.76 | 49.77 | 49.78 | 49.80 | 49.81 | 49.82 | 49.83 | 49.85 | 49.86 | 49.87 | 42° | 55.2 | 54.6 | 54.1 |
| 4′ | 1 | 43° | 49.88 | 49.89 | 49.90 | 49.91 | 49.92 | 49.92 | 49.93 | 49.94 | 49.95 | 49.95 | 49.96 | 49.96 | 43° | 53 | 52.9 | 52.3 |
| | | 44° | 49.97 | 49.97 | 49.98 | 49.98 | 49.99 | 49.99 | 49.99 | 49.99 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 44° | 51.7 | 51.2 | 50.6 |
| | | α | 0 | 5′ | 10′ | 15′ | 20′ | 25′ | 30′ | 35 | 40′ | 45′ | 50′ | 55′ | α | 0 | 20 | 40 |

29.97 + 0.10 = 30.07 m，因竖角为负值，故高差

$$h = -30.07 + 1.35 - 3.00 = -31.72\ \text{m}$$

在高差主值的右侧查得18°20′的水平距离为90.1 m，18°40′的水平距离为89.8 m，可见竖角增加20′，距离减少了0.3 m。因此竖角增加9′，距离将减少0.135 m，注意到视距可能达到的精度应取0.1 m，即18°29′的水平距离为90.0m。

例11-3　已知视距 $Kl = 85$ m，竖角 $\alpha = -18°29'$，仪器高为1.35 m，目标高为3.00m，求高差 $h$ 和水平距离 $S$。

由视距表中查得视距为100 m的高差主值 $h'_{100} = 30.07$（见上例），顾及（1）式的比例关系知：85m的高差主值为

$$h'_{85} = 30.07 \times \frac{85}{100} = 25.56$$

故高差

$$h = -25.56 + 1.35 - 3.00 = -27.21\text{m}$$

同理，水平距离 $S$ 为

$$S = 90.0 \times 0.85 = 76.5\text{m}$$

采用电子计算器作视距测量的计算时，最好用可编程序型计算器。此时高差主值的计算公式选用

$$h' = S \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

较好；因 $S$ 已有程序算出，用此式编写程序只需再乘 $\operatorname{tg}\alpha$，可节省写程步骤。

## §11-5　普通视距测量的误差来源及精度

普通视距测量中的误差来源主要有下述几种：

- 用视距丝读取视距间隔 $l$ 的误差
- 视距尺分划的误差
- 常数 $K$ 不准确的误差
- 竖角观测的误差
- 视距尺竖立不直的误差
- 外界条件的影响

现分别叙述如下：

### 一、用视距丝读取视距间隔 $l$ 的误差

读取 $l$ 有两种方法：

（1）取上、下丝的直接读数之差；

（2）取上丝或下丝之一与尺子的某分划重合，另一丝读取有估读的读数，然后取其差。

用第一种方法读取 $l$ 时，由于上、下两丝都在视距尺上读数，因此存在两个读数误差。设每次读数中误差为 $m_{读}$，那末对间隔 $l$ 的中误差为

$$m_l = m_{读}\sqrt{2}$$

用第二种方法读取 $l$ 时，由于一根丝与尺子分划重合不存在读数误差，另一根丝才有读数误差，设一根丝的重合中误差相应于尺上长度的中误差为 $m_{重合}$，

则
$$m_l = \sqrt{m^2_{重合} + m^2_{读}}$$

至于 $m_l$ 对水平距离的影响可按下式计算：

$$m_S = K\cos^2 a m_l \qquad (11-10)$$

一根视距丝在视距尺上的读数中误差 $m_{读}$，与尺子最小分划的宽度、距离的远近、望远镜的放大率及成象清晰情况等有关。重合中误差 $m_{重合}$ 则与分划的图形及图形成象的清晰情况有关。因此它们的大小应视具体使用的仪器及作业条件而定。

## 二、视距尺分划的误差

如果视距尺的分划间隔是系统性的增大或减小。它实际上将反映在常数 $K$ 上。即是否仍能使 $K=100$，只要对 $K$ 加以测定即可得到改正。

如果视距尺的分划间隔的误差是偶然性误差，即有的分划间隔大，有的分划间隔小，那么它对读数间隔 $l$ 也将产生偶然性的误差影响。如果用水准尺进行普通视距测量，因通常规定水准尺的分米分划线偶然中误差为 $\pm 0.5$ mm，所以若按此值计算由上、下丝读数求得间隔 $l$ 的中误差则为

$$m_l = \pm 0.5\sqrt{2} = \pm 0.71\text{mm}$$

它在视距值上的影响为0.071m。

## 三、常数K不准确的误差

使用普通视距仪时，通常已认定 $K=100$，此时，影响常数 $K$ 的误差来自两方面，其一是望远镜视距丝间隔的误差，仪器制造时要求其对乘常数的影响应小于0.2%。其二是视距尺分划有系统误差。这两种因素表现在常数 $K$ 上的误差均为偶然性的。

如果对常数 $K$ 采用重新测定之值，则由于测定中的各种因素影响也使常数 $K$ 产生误差。

此外，常数 $K$ 尚受空气温度的影响，使 $K$ 值不稳定。

设常数 $K$ 的中误差为 $m_K$，则由 $D=Kl$ 知，视距 $D$ 的中误差为：

$$m_D = l \cdot m_{K_0}$$

必须指出，$K$ 值一经确定，$m_K$ 即可认为不再变化，所以它对视距 $D$ 的影响是系统性的。例如 $D_{AB}$ 分为 $n$ 段用视距测出，此时由 $m_K$ 引起的中误差 $m_{D_{AB}}$ 仍为

$$m_{D_{AB}} = \sum l \cdot m_K$$

## 四、竖角观测的误差

因水平距离

$$S = Kl\cos^2 a$$

所以测定竖角 $a$ 的中误差 $m_a$ 也必将影响到距离，即

$$m_S = Kl \sin 2\alpha \frac{m_\alpha}{\rho} \qquad (11\text{-}11)$$

$\alpha$ 一般小于45°，$\sin 2\alpha$为增函数，可见$m_\alpha$的影响随竖角$\alpha$的增大而增大。

设 $Kl = 100$ m，$\alpha = 45°$，$m_\alpha = \pm 10''$，则$m_S \approx \pm 5$ mm。可见 $m_\alpha$ 对距离的影响并不大，即使当$m_\alpha = 1'$，$m_S$也只有30mm。

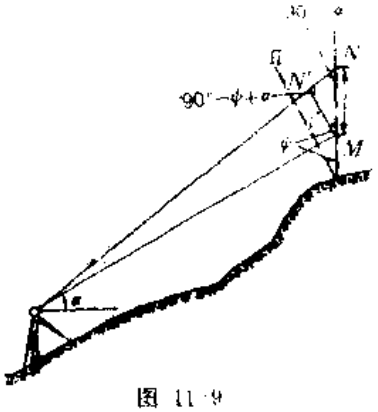


图 11-9

## 五、视距尺竖立不直的误差

本章第二节推导视距公式时，是以视距尺严格竖直为前提，如果视距尺不能严格竖直，将对视距值产生误差，如图11-9设 $l$ 为视距尺竖直时的上、下丝间隔，$l'$为视距尺不竖直的上、下丝间隔，尺子的倾斜角为$\psi$，因为两视距丝之间的夹角很小，故可以用上丝的竖角代替中丝的竖角$\alpha$。用$MN'$代替$l'$。

由图11-9中$\triangle NMN'$得

$$\frac{l}{\sin(90° - \psi + \alpha)} = \frac{l'}{\sin(90° - \alpha)}$$

即
$$l = l' \frac{\cos(\psi - \alpha)}{\cos\alpha} = l'(\cos\psi + \sin\psi \operatorname{tg}\alpha)$$

一般$\psi$角不可能太大，因此$\cos\psi$和$\sin\psi$可以表示为

$$\cos\psi = 1 - \frac{\psi^2}{2\rho^2}$$

$$\sin\psi = \frac{\psi}{\rho}$$

则
$$l = l'\left(1 - \frac{\psi^2}{2\rho^2} + \frac{\psi}{\rho}\operatorname{tg}\alpha\right)$$

可见如果直接用$Kl'\cos^2\alpha$作为水平距离$S$之值，将产生误差$\Delta S_\psi$

$$\Delta S_\psi = Kl'\cos^2\alpha - Kl\cos^2\alpha = Kl'\cos^2\alpha\left(\frac{\psi^2}{2\rho^2} - \frac{\psi}{\rho}\operatorname{tg}\alpha\right) \qquad (11\text{-}12)$$

等式右端括号内的第一项与视线的竖角 $\alpha$ 无关，且影响较小。例如当$\psi = 3'$时，

$$\frac{\psi^2}{2\rho^2} = \frac{1}{730}$$

第二项则随$\alpha$的增大而迅速增大，例如$\psi = 3'$，$\alpha = 10°$时

$$\frac{\psi}{\rho}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{108}$$

如果$\psi = 3'$，$\alpha$增大至20°，则

$$\frac{\psi}{\rho}\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{52}$$

将式（11-12）近似地写成

$$\Delta S_\psi \approx K l' \cos^2 \alpha \left( \frac{\psi^2}{2\rho^2} - \frac{\psi \alpha}{\rho^2} \right) \qquad (11-13)$$

并规定尺子前倾时 $\psi$ 值为正，后倾时 $\psi$ 值为负，作进一步的分析。

在 $\alpha$ 为正（仰角）的情况下，若 $\psi = 2\alpha$，则 $\Delta S_\psi = 0$，尺子的倾斜不影响视距值。此时，图11-9中 $\triangle NMN'$ 为等腰三角形，$NM$ 与 $N'M$ 相等。若 $0° < \psi < 2\alpha$，则 $\Delta S_\psi$ 为负，此时 $l'$ 短于 $l$。若 $0° > \psi > 2\alpha$，则 $\Delta S$ 为正，此时 $l'$ 长于 $l$。

在 $\alpha$ 为负（俯角）的情况下，除 $\psi = 2\alpha$，$\Delta S_\psi$ 仍为零外，$\Delta S_\psi$ 的符号正好相反，即 $0 < \psi < 2\alpha$ 时，$\Delta S_\psi$ 为正，$0° > \psi > 2\alpha$，$\Delta S_\psi$ 为负。

实际上，除平坦地区外在大多数作业情况下，$\alpha > 0°$ 时，$\psi > 0°$，$\alpha < 0°$ 时，$\psi < 0°$，且 $|\psi| < |2\alpha|$，所以 $\Delta S_\psi$ 为正的情况很少出现。因此，尺子倾斜对视距的影响基本上是系统性的，且使距离减小，所以在视距测量中不可忽视此项误差，特别是在山区作业，往往由于地表有坡度而给人以一种错觉，使视距尺不易竖直，倾斜角达3°是完全可能的。为减小它的影响，应在视距尺上安置圆水准器。

## 六、外界条件的影响

外界条件的影响，因素很多，主要有以下几种：

（1）大气的竖直折光。

由于视线通过的大气密度不同，使光线不是直线前进，而是一条曲线，如图11-10中靠近地面的部分，由于温差较大（特别是晴天）造成大气密度很不均匀，使视线弯曲。根据试验，只有当视线离地面超过 1 m时，折光影响才比较小。

（2）空气对流使视距尺的成象不稳定。

这种现象在晴天、视线通过水面上空和视线离地表太近时较为突出，成象不稳定造成读数误差的增大，对视距精度影响很大。

（3）风力使尺子抖动。

如果风力较大使尺子不易立稳而发生抖动，分别用两根视距丝读数时又不可能严格在同一个时候进行，所以对视距间隔 $l$ 将产生影响。

减小外界条件影响的唯一办法，只有根据对视距精度的需要而选择合适的天气作业。

归纳所有误差来源对普通距距测量的总影响，以第一、五、六三种最突出。从实验资料的分析，在比较良好的外界条件下普通视距的精度约为距离的1/200～1/300。当外界条件较差或尺子竖立不直时，甚至只有1/100 或更低。而且用厘米分划的视距尺的距离必须控制在 400m 以内，否则应采用二厘米分划的视距尺。

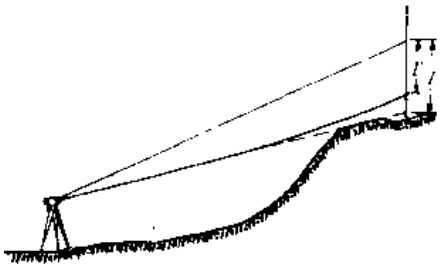


图 11-10

# §11-6 其他视距仪

为克服普通视距测量的某些缺点，过去曾有过其他各种型式的视距仪，现将它们的基本原理介绍于下。

## 一、斜丝视距仪

为了解决普通视距在尺上估读尾数的误差太大的问题，可采用一种斜丝读数方法，故叫做斜丝视距仪，它可测30～250m范围内的距离。

斜丝视距仪的基本原理如下：

如图11-11，为了减少大气折光影响，尺子采用横尺。当中丝与尺子上边缘重合时，尺上$a$，$b$两点相应为普通视距丝在尺上的位置，$b$点与整分划重合，没有估读尾数的问题。$a$点需要估读分划线$m$至$a$点这一段尾数。为此目的，斜丝视距仪将尺子这部分的分划线制成1:15的倾斜线。望远镜中左侧的视距丝也相应地制成1:15的倾斜线。如果将视距丝向上移动，倾斜的视距丝必然会与尺上的倾斜分划$mm'$重合（见图11-12）。仅就尺子上看，

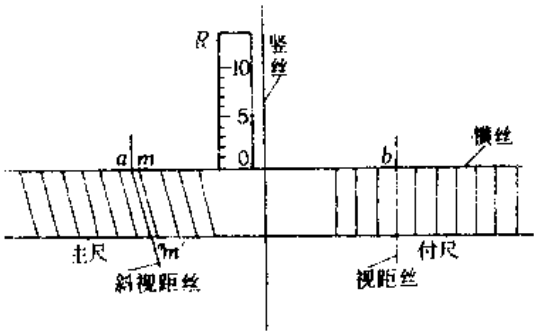



图 11-11

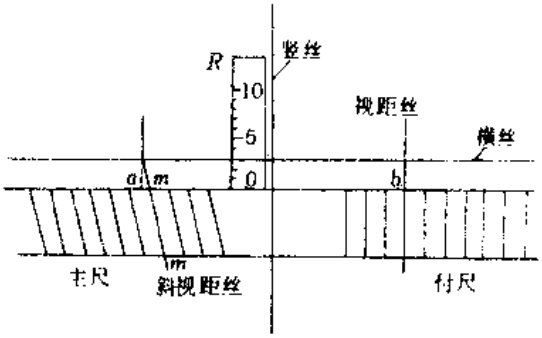



图 11-12

相当于$a$点移到了$m$点，$am$这一段长度将由视距丝向上的移动量在尺子$R$上由十字丝横丝直接读出。倾斜的视距丝是以1:15制作的，由三角形各边的比例关系可知，如果$am$移动1mm，横丝将向上移动15mm。也就是说在$R$尺上的读数是$am$的15倍，因而，大大提高了原来估读尾数的精度。这样所求得的距离其中误差$m_l$也就相应地减小。

随着尾数估读误差减少，引起读数误差的主要因素就转为在$b$处和在$m$处将视距丝与尺子分划重合的精度，这种情况和水平角观测一样，仍然是一个照准精度问题。而照准精度则与标志的图形和颜色有关。经过试验，可采用黑底白色条形标志的图形，条形的宽度约为视距丝相对粗度的三倍较好。条形的中心为尺子的分划中心，视距丝则以此中心位置为照准标准。试验结果，这种图形的照准中误差约为$\pm 0.36''$。由此而带来的尺子间隔$l$的相对中误差约为

$$\frac{m_l}{l}=\frac{0.36''\times\sqrt{2}}{\rho''}\times 100\approx\frac{1}{4100}$$

可见它对于测距的影响较小。

## 二、哈默视距仪

用普通视距丝测定水平距离和高差时，因高度角之不同，使得计算工作颇为麻烦，虽有各种辅助工具可资利用，但仍不能完全免除此缺点。哈默视距仪的主要思想如下：

将式（11-1a）代入式（11-7）得

$$S = \frac{f_1(f_2 - b_{\infty})}{p \cdot f_2} \cdot l \cdot \cos^2 \alpha \tag{11-14}$$

即

$$S = \frac{f_1(f_2 - b_{\infty})}{f_2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{p} \cdot l$$

当$\alpha = 0$时，$p$的大小保持不变而有式（11-6）

$$S = K \cdot l$$

现设想当$\alpha \neq 0$时，$p$能否随$\cos^2\alpha$值而变化，并使

$$\frac{f_1(f_2 - b_{\infty})}{f_2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{p} = K = 常数 \tag{11-15}$$

如果在仪器的构造上能够实现此设想，则对倾斜视线仍能使用式（11-6）

$$S = K \cdot l$$

欲使$p$的大小随$\alpha$的变化而变化，视距丝就不能刻划在一个固定不动的分划板上，而必须刻在竖盘上，这样才能使$p$的大小与$\alpha$值构成对应的关系。图11-13为哈默视距曲线的示意，图中的基准弧相当于普通视距的下丝，距离曲线则相当于上丝。由图中可见，在不同的竖角处，其$p_i$值将不相等，但能满足式（11-15）为常数。此曲线经光学系统传递到望远镜的视场中，且随望远镜的俯仰而变动，因此目标的竖角$\alpha$不同，则视距丝间隔$p$也就不同，保证了式（11-6）仍然有效。

关于图11-13中计算高差主值$h'$的曲线（高差曲线），其设想原理与上述相同，将式（11-1a）代入

$$h' = \frac{1}{2} K \cdot l \cdot \sin 2\alpha$$

中得

$$h' = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_1(f_2 - b_{\infty})}{f_2} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{p} \cdot l \tag{11-16}$$

令

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{f_1(f_2 - b_{\infty})}{f_2} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{p} = K_h \tag{11-16a}$$

则

$$h' = K_h \cdot l \tag{11-17}$$

若使式（11-16a）中的$p$随$\alpha$变化而使$K_h$保持为某个常数，那末用式（11-17）作高差主值的计算将是很方便的。

由于$p$随$\sin 2\alpha$变化，高差曲线与基准弧间的间隔变化较快，故$K_h$常取三个值，即

10、20、100，绘出三条高差曲线，使曲线的曲率半缓，而读数能较为精确，竖角值也可达45°。

图11-14为望远镜目镜视场所看到的图形。水平距离为49 m，高差正值为0.35（-20）=-7.0 m，或0.70×（-10）=-7.0 m。基准弧所对的1.0 m，即目标高$l$为1 m测站点至立尺点的高差$h=h'+i-l$，设$i=1.42$m

则 $$h=-7.0+1.42-1.0=-6.58\text{m}$$

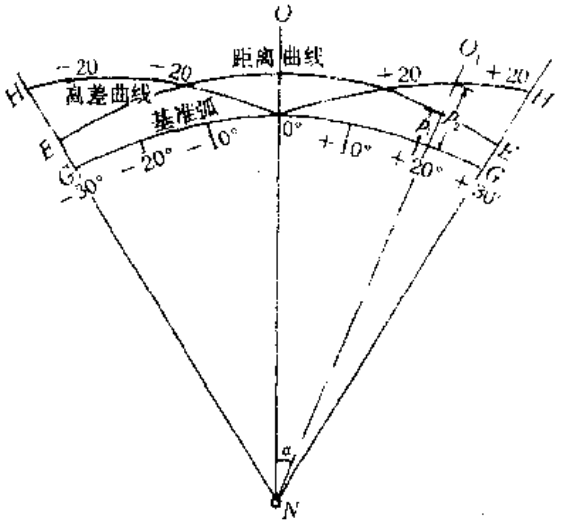



图 11-13

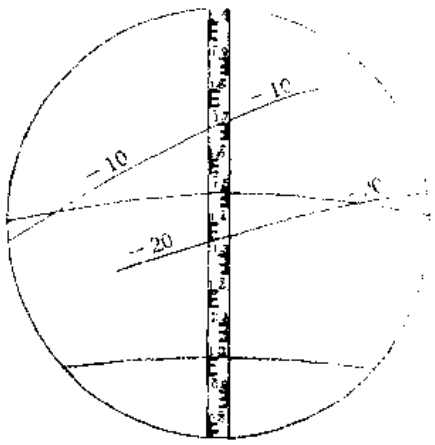



图 11-14

## 三、等差级数视距尺

为了避免估读尺子间隔 $l$ 的尾数产生估读误差，除了斜丝视距仪外，还可用等差级数视距尺。它的测距原理如下：

视距丝测距时，对不同的距离相应地在尺上间隔 $l$ 就不同。普通视距是用一般的读数方法得到，斜丝视距是用斜丝来读取尾数。等差级数视距尺则不读尾数，它采用等差级数递增的间隔制成尺子的分划线，因此，由两根分划线的不同组合便可得到不同长度的尺子间隔。

图11-15是尺子分划的示意。对每个分划线都编上号，第一条是0号，以后依次为1号、2号……。第一段，即0号到1号分划之间的长度为20 mm。此段长度为等差级数的首项，用$d_1$表示。以后按0.02 mm的差数递增，例如1号到2号（$d_2$）为20.02 mm，2号到3号（$d_3$）为20.04 mm……依此类推。（$n-1$）号到$n$号（$d_n$，称为通项）为$20+(n-1)\times 0.02$mm。

在尺子设计的测程和精度范围内，任何视距间隔 $l$ 都可以在尺上找到两条相应的整分划线，由等差级数和的公式求得它的数值。

例如，视距丝的上、下丝分别与75号和32号分划线重合。按等差级数前$n$项和的公式

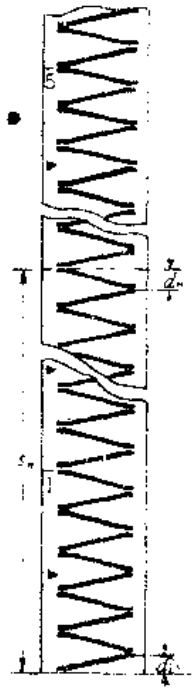


图 11-15

$$s_n = \frac{d_1 + d_n}{2} \times n$$

可以求得由0号到 $n$ 号分划线之间的长度 $s_n$。因此0号到75号分划之间的长度可如下计算：

$$d_1 = 20\text{mm}$$

$$d_{75} = 20 + (75 - 1) \times 0.02 = 21.48\text{mm}$$

故

$$s_{75} = \frac{20 + 21.48}{2} \times 75 = 1555.50\text{mm}$$

按同样方法求得0号到32号分划之间的长度为 $s_{32} = 649.92$ mm，因此32号到75号分划之间的长度为

$$l = 1555.50 - 649.92 = 905.58\text{mm}$$

若视线水平，则所测距离便为90.56m。

应用等差级数视距尺，尺子间隔 $l$ 的误差，主要为视距丝与尺子分划线重合的误差。

若尺子的分划采用角形（即 ⍋），图形的对称中心为分划中心，经过试验，视距丝照准一个角形分划的照准中误差约为 $\pm 0.62''$。一个间隔 $l$ 需照准两个分划，两次照准的中误差为

$$\pm 0.62'' \times \sqrt{2} = \pm 0.87''$$

因视距丝间隔角 $\varphi \approx 34' 23''$，故照准中误差对距离的影响约为1/2300。

等差级数视距的测程，由尺子的长度及分划个数决定。如140个分划的三米尺子，测程为16～280m。

## 四、光学楔镜视距仪

### （一）光学楔镜视距仪的原理

如图11-16，当光线 $S$ 经过光学棱镜后，将折一个角度 $\beta$，$\beta$ 角随光线入射角 $\gamma$、玻璃的折射系数 $n$ 和棱镜的棱角 $\alpha$ 而定。但由于视距仪上所采用的光学棱镜，其棱角 $\alpha$ 甚小（等于 $1°8'45''$），由计算可知，即使 $\gamma$ 角改变1°，甚至更大一些，也不会使 $\beta$ 角产生任何实际的影响，通常称这种小棱角的棱镜为楔镜。

若将望远镜物镜遮盖一部分（图11-17中斜线部分），则由望远镜中可看到原来的构象与未遮盖时一样，不过亮度减低。同样在图11-17中若仅容许光线由斜线部分通过，而将上下两半遮着，则同样可看到原来全部构象。因此在望远镜物镜前面装置一块楔镜遮着物镜的一部分，则不通过楔镜的光线成象于十字丝平面上，同时通过楔镜的光线偏折 $\beta$ 角后也另成一象在十字丝平面上。因此在望远镜中将看到互相重叠的两个象，所以这种视距仪也叫做**双象视距仪**。

图11-18中设有横尺 $R$ 上 $MQ$ 两点发出之光线，通过物镜成象在十字丝平面 $yy_1$ 上为 $mq$。由于物镜前面一部分为楔镜所遮盖，所以由尺面 $MQ$ 发出之光线一部分透过楔镜后偏折 $\beta$ 角成象在 $yy_1$ 上为 $m'q'$。因此在望远镜中看到两个尺象，并看到 $q$ 与 $m'$ 重合。如 $M$

为尺面分划之零点，$Q$为距$M$点$l$长之分划线，即可在望远镜中根据$q$和$m'$之重合，按尺面分划读数$l$值。由图中可看出：

$$D_0 = l \cdot \mathrm{ctg}\beta$$

$D_0$为楔镜$N$至尺面$Q$之距离，但需要测的距离为由仪器中心$G$至尺架中心$E$之距离$D$，因此需要加上两段常数$c_1$及$c_2$，则

$$D = l \cdot \mathrm{ctg}\beta + c_1 + c_2 \qquad (11\text{-}18)$$

又因$\beta$角为定值，因此可使$\mathrm{ctg}\beta = K$得

$$D = K \cdot l + c_1 + c_2 \qquad (11\text{-}19)$$

（二）普通双象视距仪

普通双象视距仪的构造，系在普通经纬仪的望远镜上用一个消色差楔镜装置于物镜前面而成。

普通双象视距仪的楔镜使式（11-19）中的$K = 100$。

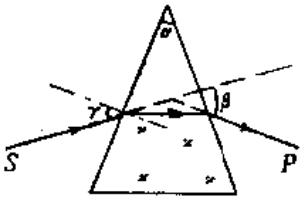



图 11-16

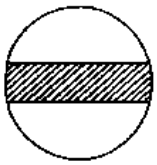


图 11-17

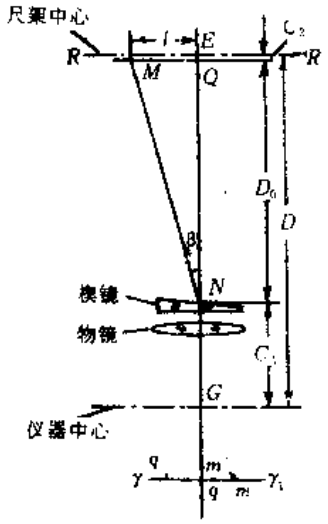



图 11-18

为减小竖直折光的影响，普通双象视距仪采用横尺为主要的视距方式。横尺安置在三脚架上，并用尺架承托。尺架上装有圆水准器，可使尺子水平。另外还装有照准设备，以使尺面与视线互相垂直。

为了提高读数精度，此种仪器常采用游标读数和测微鼓读数相结合的办法。设图11-19($a$)为一有2cm分划间隔的横视距尺。由于$K = 100$，所以每分划相当于测距2m，因此可以直接看作2m来读数。尺上数字以10m为单位（测距的读数）。通过装有楔镜的望远镜可以看到图11-19($b$)的双象。以$B$象的零线为准，可在$A$象上读出欲测之距离，为26m + 1.4m（估计）= 27.4m。




($a$)

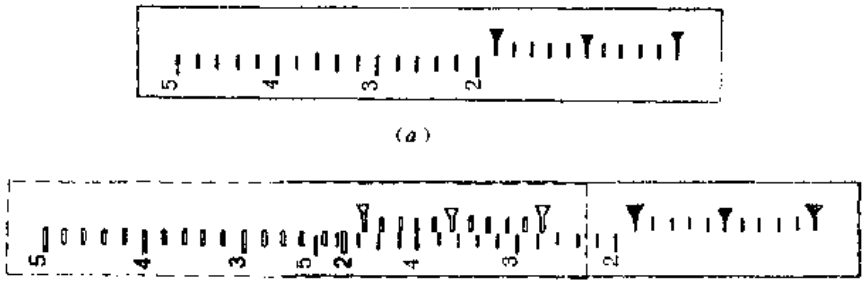



($b$)

图 11-19

为提高读数精度，在指标零线处加一个可以读出主尺格值的十分之一的游标，如图11-20（$a$）。主尺间格为2cm，游标最小读数则为2mm，相当测距0.2 m。在望远镜中可看到图11-20（$b$）的双象，读得距离为26m（主尺）+1.4 m（游标）=27.4m。

由于游标最小读数为2 mm，所以读数时游标线与主尺线并不能完全相对正，最大时可达到此值，测距精度相应也只能达到0.2 m。为了更提高读数精度起见，可于楔镜之前安置一块平板玻璃，用测微鼓使其旋转。由平板玻璃的原理得知，当光线与玻璃板的平行

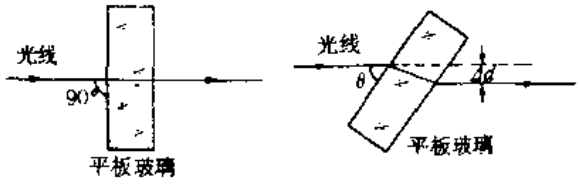


（$a$）

（$b$）

图 11-20

平面成垂直时，通过它的光线没有改变（图11-21$a$）。当通过它的光线与平行面不互相垂直而成$\theta$角时，则光线将平行移动一段距离$\Delta d$（图11-21$b$），若使$\Delta d$最大等于2 mm，并在测微鼓上相当$\theta$角变动最大范围内刻成20个分划，每转动一个分划相当光线平行移动2/20 mm = 0.1 mm。由于平板玻璃系装在楔镜前面，所以转动测微鼓时可使光线平移，其最大范围为2 mm。读数时由于游标线与主尺分划线不能完全对正，则转动测微鼓使完全对正，此时即可由测微鼓上读出光线平移之量。为了提高读数精度，可用测微鼓进行多次重合，取其平均值。




（$a$）　　（$b$）

图 11-21

由于采取了上述读数措施，使测距误差主要受两条分划线重合误差的影响。对蔡司厂生产的普通双象视距尺的分划图形，两条分划线重合的中误差约为±10″，因此它对测距的影响为

$$\frac{m_D}{D}=\frac{10''}{\rho''}\cdot\frac{K}{V}$$

式中：$K$——视距乘常数；

$V$——望远镜放大率。

在$K=100$，$V=25$的条件下，

$$\frac{m_D}{D}=\frac{1}{5000}$$

用此种仪器测得的距离为倾斜距离。为了得到水平距离，还要用望远镜照准尺面菱形标志的中心测定竖角$\alpha$，则水平距离 $S$及由仪器横轴至尺面中心的高差$h$可用下式求得：

$$S = D\cos\alpha$$

$$h = D\sin\alpha$$

（三）对数双象视距仪

采用均匀分划标尺的双象视距仪，当距离增大后，所见尺上的分划将愈小，影响测距精度，因此其测距范围一般不能超过200 m。采用不等间隔的对数标尺，可以免除此项缺点，而能精确测定较长距离。

图11-22为一对数分划标尺与一均匀分划标尺并列一起的比较，均匀分划的间隔为10、而对数分划间隔为0.1的对数差。由图中可看出距零点愈远，则同样对数差的实际长度愈大。按光学楔镜视距仪测距原理的公式（11-19），暂不考虑加常数，则可写为：

$$D = Kl$$

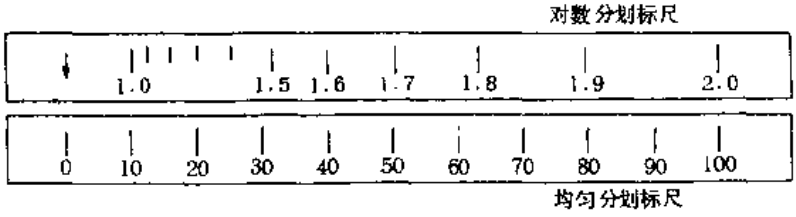



图 11-22

写为对数式：

$$\lg D = \lg Kl \qquad (11\text{-}20)$$

当标尺按$\lg Kl$分划时，则可直接读得 $Kl$的对数，也即$\lg D$，再用对数表可查出所测距离$D$。

在对数标尺上，其分划为不等的间隔，相邻两分划点对于标尺零点距离的对数差为一常数。如以 $i$表示此对数差，$n$表示任一分划点（图11-23），则$\lg l_n = \lg l_{(n-1)} + i$，这样的对数分划标尺具有一项重要的特性，即任一分划间隔$t_n$与相应的标尺截段$l_n$成正比。

在图11-26所示的对数标尺上，设以$l_1$、$l_2$…$l_n$表示第 1 、第 2 、……第 $n$个分划点对零点的距离，以常数$i$ 表示两相邻分划点对于标尺零点的对数差，则

$$\left.\begin{aligned}
&\lg l_2 = \lg l_1 + i\\
&\lg l_3 = \lg l_2 + i = \lg l_1 + 2i\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lg l_n = \lg l_1 + (n-1)\,i
\end{aligned}\right\}$$

因为$i$，$2i$……$(n-1)\,i$可用$\lg 10^{i}$，$\lg 10^{2i}$，…$\lg 10^{(n-1)\,i}$代替

则 $$\lg l_n = \lg l_1 + \lg 10^{(n-1)\,i}$$

即 $$l_n = l_1 \cdot 10^{(n-1)\,i}$$

以$t_n$表示第 $n$分划点和第（$n-1$）分划点间的间隔，按上式可得：

$$t_n = l_n - l_{n-1} = l_1 \cdot 10^{(n-1)i} - l_1 \cdot 10^{(n-2)i} = l_1 \cdot 10^{(n-1)i}\left(1 - \frac{1}{10^i}\right)$$

将式$l_n = l_1 \cdot 10^{(n-1)i}$代入上式，即

$$t_n = l_n \cdot \frac{10^i - 1}{10^i}$$

因 $i$ 为常数，则$\frac{10^i - 1}{10^i}$也为常数，故上式说明对数标尺的任一个分划间隔$t_n$与相应的标尺截段$l_n$成正比。

当用双象原理测距时（图11-24），设仪器对标尺末端间隔$t_n$的夹角为$\varepsilon_0$，则

$$\varepsilon_0 = \frac{t_n}{K l_n} = \frac{10^i - 1}{K 10^i}$$

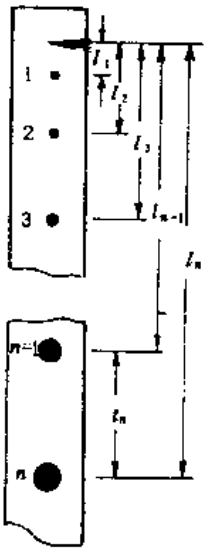



图 11-23

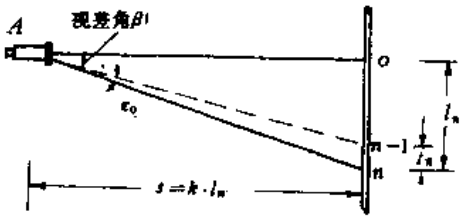



图 11-24

（因$\beta$角很小，所以图11-24中可认为$An$与标尺垂直）

根据上述对数标尺特性，$t_n$与$l_n$成正比，因此$\varepsilon_0$为常数；也就是无论标尺与仪器的距离如何，标尺末端间隔看来总是不变的。

由于需要精确读数，必须有测微装置，对数分划标尺系采用一种可以改变折光角的旋转楔镜，以代替前一种仪器将平板玻璃作为测微装置，其折光角的变动范围为由0 至$\varepsilon_0$。用测微鼓旋动测微楔镜，即可读出$\varepsilon_0$的部分值$\varepsilon$，从而也就可以测定尺上截段末端间隔的部分值$t$。

## 五、无标尺视距仪

属定基线类型的无标尺视距仪的结构及测距原理如下。如图11-25，$P_{\text{I}}$为平面反光镜，但其上面一半为透明的，目标$A$的光线可以穿过而进入望远镜中。$P_{\text{II}}$也为平面反光镜，但可以绕$c$点旋转，其初始位置（图中$P_{\text{II}}$）与$P_{\text{I}}$平行，经反射进入望远镜的光线为与$AB$平行的光线。此时望远镜视场中将只有上半部出现目标的象。转动$P_{\text{II}}$，视场下半部将逐渐出现目标的象，直到两部分的象完全吻合为止。此时$P_{\text{II}}$将旋转至$P'_{\text{II}}$的位置。因为要求的距离

$$S = b \cdot \operatorname{ctg} y$$

$b$为$BC$之长，即固定的基线长，由平面反光镜反射光线的原理知

$$\angle P_{\text{I}}\, CP_{\text{II}}' = \frac{\gamma}{2}$$

所以$S$值可由$P_{\text{II}}$的旋转角而得到。

属定角类型的无标尺测距仪的结构及测距原理如下。如图11-26，$P_{\text{I}}$为固定的五角棱镜，$P_0$为楔形棱镜，光线通过$P_0$后偏转$\gamma$角。$P_{\text{II}}$为可以在基线$b$上移动的五角棱镜。因

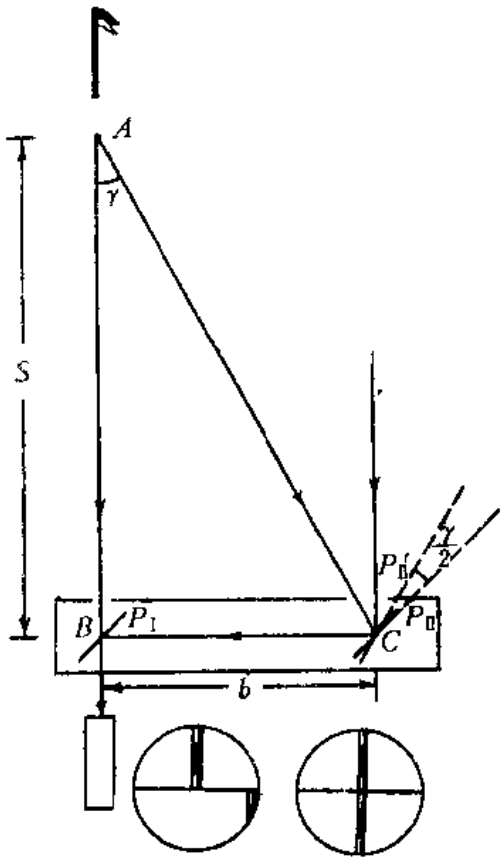



图 11-25

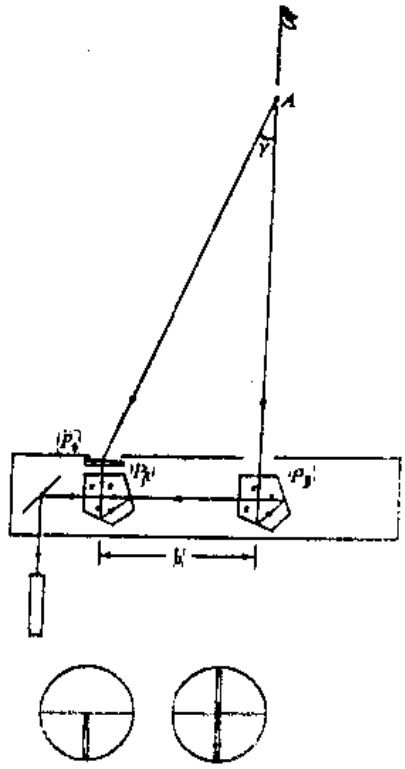



图 11-26

$$S = b \cdot \operatorname{ctg}\gamma$$

当目标光线通过$P_0$经$P_{\text{I}}$在望远镜中所成的象（视场的下半部）和通过$P_{\text{II}}$（$P_{\text{II}}$移动到一个合适的位置）在望远镜中所成的象（视场的上半部）相互吻合时，$S$值可由$P_{\text{II}}$的移动值（即$b$的大小）而求得。

无标尺视距仪的测距精度，受$\gamma$的大小、$b$的长短以及观察目标的上下两象吻合的准确度的影响。使用该类仪器的优点是可以用明显地物作为目标，对减轻地形测图工作的劳动强度有一定的好处。但也由于地物的背景、形状等等条件不够好而会降低上下两象吻合的准确度，使距离的误差增大，有时因目标轮廓不明显发生错觉而产生错误。

## §11-7 视差法测距

对一定长的水平横尺，用经纬仪测得横尺上两固定标志间的水平角，从而计算出仪器

$$\left(\frac{m_s}{S}\right)^2=\left(\frac{m_l}{l}\right)^2+\left(\frac{m_\varphi}{\varphi}\right)^2 \tag{11-23}$$

或

$$\left(\frac{m_s}{S}\right)^2=\left(\frac{m_l}{l}\right)^2+\left(\frac{S}{l}\right)^2\left(\frac{m_\varphi}{\rho}\right)^2 \tag{11-24}$$

因$l$的精度较高，$\frac{m_l}{l}$可达$\frac{1}{40000}$，故略而不计。

则

$$\frac{m_s}{S}=\frac{m_\varphi}{\varphi} \tag{11-25}$$

或

$$\frac{m_s}{S}=\frac{S}{l}\cdot\frac{m_\varphi}{\rho} \tag{11-26}$$

由式（11-25）可以看出测距的相对误差也等于$m_\varphi/\varphi$，但测角的误差和角值大小无关，故欲提高测距精度，可以增大$\varphi$角，使用J2级经纬仪很容易达到$m_\varphi=\pm 3''$。若欲使测距之相对中误差的限度达到1/2000，即需

$$\frac{3}{\varphi}\leqslant\frac{1}{2000}$$

故$\varphi$角应等于1°40′或更大。$\varphi$角愈大，$S$将愈短，因此使用二米长的横基尺布成简单环节时，不能测量很长的距离。

## 二、对称视差环节

如图11-29，将横基尺放在测线的中间，大约将欲测的直线分成二等分，在两个端点上分别测出视差角$\varphi_1$和$\varphi_2$，则距离可由两个简单环节之和求出：

$$S=\frac{l}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1}{2}+\frac{l}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_2}{2}$$

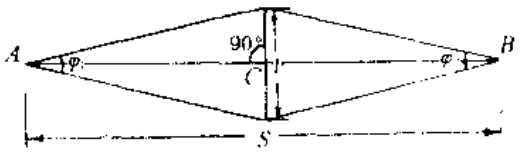



图 11-29

在不考虑$l$误差的情况下，注意到式（11-25）。$S$的中误差为

$$m_s^2=S_{AC}^2\cdot\frac{m_{\varphi_1}^2}{\varphi_1^2}+S_{BC}^2\frac{m_{\varphi_2}^2}{\varphi_2^2} \tag{11-27}$$

如果布成严格的对称形式，则

$$S_{AC}=S_{BC}=\frac{S}{2}$$

$$\varphi_1=\varphi_2=\frac{2l}{S}\cdot\rho$$

代入式（11-27）得

$$m_s=\frac{S_2}{4l}m_\varphi\sqrt{2}\,\frac{1}{\rho}$$

或
$$\frac{m_s}{S}=\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{Sm_\varphi}{l\ \rho} \tag{11-28}$$

将式（11-28）与式（11-26）相比较，在$l$和$S$等长以及视差角精度$m_\varphi$相同条件下，对称环节的测距精度比简单环节的测距精度高约$\sqrt{8}$倍。

尺子安置在测线中间，由于尺面要一次对向$A$点，一次对向$B$点，如果旋转中心与标志联线的中点不重合，则尺子的此项误差影响较简单环节多一次。

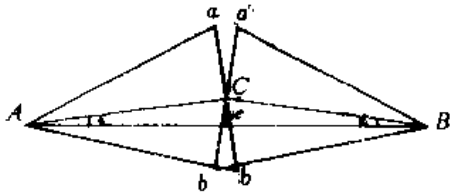


图 11-30

如果尺子未能安置在测线上，将出现如图（11-30）所示的情况，则

$$S=S_{AC}\cos\varepsilon+S_{BC}\cos\varepsilon=(S_{AC}+S_{BC})\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2\rho^2}\right)$$

$$=(S_{AC}+S_{BC})-(S_{AC}+S_{BC})\frac{\varepsilon^2}{2\rho^2}$$

式中后一项即为由于尺子中心$C$偏离测线$e$而产生的误差，即

$$\Delta S_e=(S_{AC}+S_{BC})\frac{\varepsilon^2}{2\rho^2}\approx S\frac{\varepsilon^2}{2\rho^2}$$

因$\varepsilon$值不大，故

$$\varepsilon=\frac{e}{S_{AC}}\rho=\frac{e}{S_{BC}}\rho=\frac{2e}{S}\rho$$

则

$$\Delta S_e=\frac{S\cdot 4e^2}{2S^2}$$

或
$$\frac{\Delta S_e}{S}=2\left(\frac{e}{S}\right)^2 \tag{11-29}$$

当$e=\frac{1}{100}\cdot S$时，

$$\frac{\Delta S_e}{S}=\frac{1}{5000}$$

即如果尺子中心偏离测线的$e$值为所测距离的1/100，它引起的测距误差为距离的1/5000。必须注意，此项误差总是使距离增大，为系统误差。

### 三、复杂视差环节

遇到受地形条件的限制或所求边太长时，用视差法测距也可布置成复杂环节。如图11-31所示的情况，因为基线尺只能设置在河流对岸，故先用简单环节由视差角$\varphi_1$及基线尺$l$求出辅助基线$b$的长度，再根据辅助基线$b$及所测的基线邻角$\gamma$与视差角$\varphi_2$，用正弦定律可求出$AB$的长度。即

$$b = \frac{l}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1}{2}$$

$$S = b\frac{\sin(\varphi_2+\gamma)}{\sin\varphi_2} \tag{11-30}$$

其中$\varphi_1$和$\varphi_2$角需用较高精度测得，其理由如下：将（11-30）式改为对数，则

$$\ln S = \ln b + \ln\sin(\varphi_2+\gamma) - \ln\sin\varphi_2$$

微分得

$$\frac{dS}{S} = \frac{db}{b} + \operatorname{ctg}(\varphi_2+\gamma)\frac{(d\varphi_2+d\gamma)}{\rho} - \operatorname{ctg}\varphi_2\frac{d\varphi_2}{\rho}$$

用中误差表示，则

$$\left(\frac{m_s}{S}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left[-\operatorname{ctg}\varphi_2 + \operatorname{ctg}(\varphi_2+\gamma)\right]^2\left(\frac{m_{\varphi_2}}{\rho}\right)^2 + \operatorname{ctg}^2(\varphi_2+\gamma)\left(\frac{m_\gamma}{\rho}\right)^2 \tag{11-31}$$

式中（$\varphi_2+\gamma$）通常接近于90°，当$\varphi_2+\gamma$接近于90°时，则ctg（$\varphi_2+\gamma$）即接近于零。此时上式中最后一项中的$m_\gamma$对$m_s$的影响将不如第二项重要，因此即使$m_\gamma$比$m_{\varphi_2}$大若干倍，对所求边的精度也没有多大影响，所以$\gamma$角可用较低精度施测。

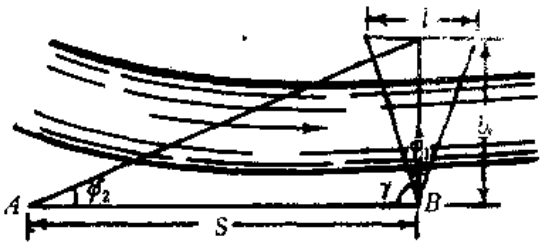


图 11-31

此外，复杂环节的辅助基线$b$系由一简单环节施测而得，它的误差不可能忽略不计。由于$b$不会太长，经纬仪的对中误差和横尺的安置误差在$m_b/b$上的影响较大，故应引起注意。

关于$b$的合理长度，可作如下讨论。布置复杂环节时常取$\gamma\approx 90°$，且$\varphi_2$不会太大，故可取

$$\operatorname{ctg}(\varphi_2+\gamma) = 0$$

$$\operatorname{ctg}\varphi_2 = \frac{S}{b}$$

考虑到式（11-24），即

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = \left(\frac{m_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{b}{l}\right)^2\left(\frac{m_{\varphi_1}}{\rho}\right)^2$$

若

$$m_{\varphi_1} = m_{\varphi_2} = m_\varphi$$

则式（11-31）可写为

$$\left(\frac{m_s}{S}\right)^2 = \left(\frac{b^2}{l^2}+\frac{S^2}{b^2}\right)\left(\frac{m_\varphi}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{m_l}{l}\right)^2 \tag{11-32}$$

略去$\left(\frac{m_l}{l}\right)$一项，则

$$\left(\frac{m_s}{S}\right)^2 = \left(\frac{b^2}{l^2}+\frac{S^2}{b^2}\right)\left(\frac{m_\varphi}{\rho}\right)^2 \tag{11-33}$$

若选定的$b$较长，则$\varphi_2$角也增大，用$b$所算出的$S$边精度也能提高。但同时$\varphi_1$角由于$b$之加长而减少，因此使$b$之精度降低，从而影响了$S$的精度。反之。若$b$减短，则$\varphi_1$增大，因而算得之$b$边精度也较高，但$b$短则$\varphi_2$减小，使用$\varphi_2$算得之$S$边精度将降低。因此$b$边的选定，应使$\varphi_1$及$\varphi_2$角接近相等为宜。因为$\varphi_1$及$\varphi_2$皆为甚小之角值，若使两者近似相等，则$l$、$b$与$S$之关系可写为：

$$\frac{l}{b}\approx(\varphi_1)=\frac{b}{S}\approx(\varphi_2)$$

若

$$\frac{l}{b}=\frac{b}{S}$$

即

$$b=\sqrt{l\cdot S} \qquad (11\ 34)$$

当已知$l$及$S$概略值时，即可按上式估计$b$之最适当的数值。

## 四、视差角的观测

视差角通常用J2经纬仪观测以保证必要的测角精度。因为视差角的两个目标为横基尺上的左、右标志，它们位于相同的高度，由§ 7-6知，经纬仪的视准轴误差和横轴不水平的误差在视差角值上的影响被消除了，使视差角值的精度大为提高。而且在观测程序上也不必采用盘左、盘右进行，仅用一个竖盘位置即可。为了完成一个测回的观测，通常将视差角（称小角）的观测称上半测回，将360°减去视差角的角（称大角）的观测称下半测回。具体程序如下（竖盘位置为盘左）：

1. 照准左标志，读数；
2. 顺时针转动照准部照准右标志，读数：完成上半测回；
3. 用水平微动螺旋重新照准右标志，读数；
4. 顺时针转动照准部照准左标志，读数：完成下半测回。

至此完成一测回的观测。

记录格式见表11-3。

表 11-3

| 觇点 | 度盘读数 | | | | 半测回角值 | 一测回角值 | 各测回角值 | 附注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 小角 | | 大角 | | | | | |
| 第一测回 | | | | | | | | |
| 左 | 000 02′028″ | 030″ | 000 02′001″ | 008″ | 002°52′328″ | 002°52′316″ | | |
| | 031 | | 014 | | | | | |
| 右 | 002 54 364 | 358 | 002 54 307 | 311 | 002 52 303 | | | |
| | 352 | | 316 | | | | | |

# 第十二章　光　电　测　距

## § 12-1　概　　述

前面已经讨论过直接丈量法量距(即用皮尺、钢尺等工具量距)、光学视距法测距和视差法测距。用直接丈量法量距，外业工作繁重，工作效率低，在复杂的地形条件下甚至无法工作。用光学视距法测距，虽然操作比较简便，可以克服某些地形条件的限制（如测线通过高低起伏的地区、跨过河流、池塘等障碍物），但测程较短，测距精度也不高。视差法测距的精度虽较高一些，但测程也较短。采用复杂环节能有限地解决测程问题，可是增加了不少外业工作量。为了改善作业条件，扩大测程，提高测距精度和作业效率，随着光电技术的发展，人们又创造出一种新的测距方法——电磁波测距法。

电磁波测距的基本原理是通过测定电磁波（无线电波或光波）在测线两端点间往返传播的时间 $t$，按下列公式算出距离 $D$。

$$D=\frac{1}{2}ct \tag{12-1}$$

式中，$c$ 为电磁波在大气中的传播速度，它可以根据观测时的气象条件来确定。

电磁波测距按采用的载波不同，可分为光电测距和微波测距。采用光波（可见光或红外光）作为载波的称为光电测距。采用微波段的无线电波作为载波的称为微波测距。

光电测距仪的研究已有几十年的历史了，直到一九四八年才开始在大地测量中得到实际应用。早期的光电测距仪大都采用白炽灯或高压水银灯作为光源。六十年代以来，激光技术的迅速发展，为光电测距仪提供了一个十分理想的光源，出现了各种以激光或红外荧光为光源的光电测距仪。

过去光电测距仪和微波测距仪多属于中长程（测程为五至几十公里）测距仪，一般应用于大地测量。近几十年来，短程（测程在五公里以内）光电测距仪发展很快，它具有小巧轻便，既能测距又能测角、自动化程度高等特点。这类仪器特别适用于小面积的控制测量、地形测量和各种工程测量。

本章着重介绍短程光电测距仪的基本测距原理。关于光电测距仪的误差分析及仪器检验则在专门的课程中讲述。

## § 12-2　脉冲式光电测距仪

### 一、测距原理

脉冲式光电测距是通过直接测定光脉冲在测线上往返传播的时间 $t$，并按式（12-1）

求得距离。

图12-1是脉冲式光电测距仪的工作原理方框图。仪器的大致工作过程如下：

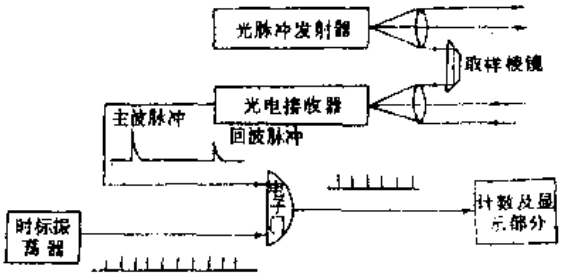


图 12-1

首先由光脉冲发射器发射出一束光脉冲，经发射光学系统后射向被测目标。与此同时，由仪器内的取样棱镜取出一小部分光脉冲送入接收光学系统，再由光电接收器转换为电脉冲（称为主波脉冲），作为计时的起点。从目标反射回来的光脉冲通过接收光学系统后，也被光电接收器接收并转换为电脉冲（称为回波脉冲），作为计时的终点。因此，主波脉冲和回波脉冲之间的时间间隔就是光脉冲在测线上往返传播的时间 $t$ 。为了测定时间 $t$ ，将主波脉冲和回波脉冲先后（相隔时间 $t$ ）送入“门”电路，分别控制“电子门”的“开门”和“关门”。由时标振荡器不断地产生具有一定时间间隔 $T$ 的电脉冲（称为时标脉冲），如同钟表一样提供一个电子时钟。在测距之前，“电子门”是关闭的，时标脉冲不能通过“电子门”进入计数系统。测距时，在光脉冲发射的同一瞬间，主波脉冲把“电子门”打开，时标脉冲一个一个地通过“电子门”进入计数系统，当从目标反射回来的光脉冲到达测距仪时，回波脉冲立即把“电子门”关闭，时标脉冲就停止进入计数系统。由于每进入计数系统一个时标脉冲就要经过时间 $T$ ，所以，如果在“开门”（即光脉冲离开测距仪的时刻）和“关门”（即目标反射回来的光脉冲到达测距仪的时刻）之间有 $n$ 个时标脉冲进入计数系统，则主波脉冲和回波脉冲之间的时间间隔 $t = nT$ 。由式（12-1）可求得待测距离 $D = \frac{1}{2}c \cdot nT$ 。令 $l = \frac{1}{2}cT$ ，表示在时间间隔 $T$ 内光脉冲往返所走的一个单位距离，则有

$$D = nl \tag{12-2}$$

由上式可以看出，计数系统每记录一个时标脉冲，就等于记下一个单位距离 $l$ 。由于测距仪中 $l$ 值是预先选定的（例如10m、5 m或1 m）。因此计数系统在计数通过“电子门”的时标脉冲个数 $n$ 之后，就可以直接把待测距离 $D$ 用数码管显示出来。

目前脉冲式光电测距仪，一般是采用固体激光器（如红宝石激光器或掺钕钇铝石榴石激光器等）作为光源，能发出高功率的单脉冲激光。因此这类仪器一般可以不用合作目标（如反射镜），直接利用被测目标对脉冲激光产生的漫反射进行测距，作业甚为方便、迅速。但是这类仪器受脉冲宽度和电子计数器时间分辨率的限制，测距精度一般较低，约为 ±1 m ~ ±5 m。它适用于军事测量和工程测量中精度要求不高的某些项目。还可用于无人立尺地形测图。

## 二、仪器的外部构造

图12-2为我国生产的1C-1型激光地形测绘仪，测程为40～1000m，精度为 ±1m。该仪器采用掺钕钇铝石榴石固体激光器作为光源，激光波长为1.06μm。仪器的测距系统是由主机、电源计数箱和电池箱三个部分组成。

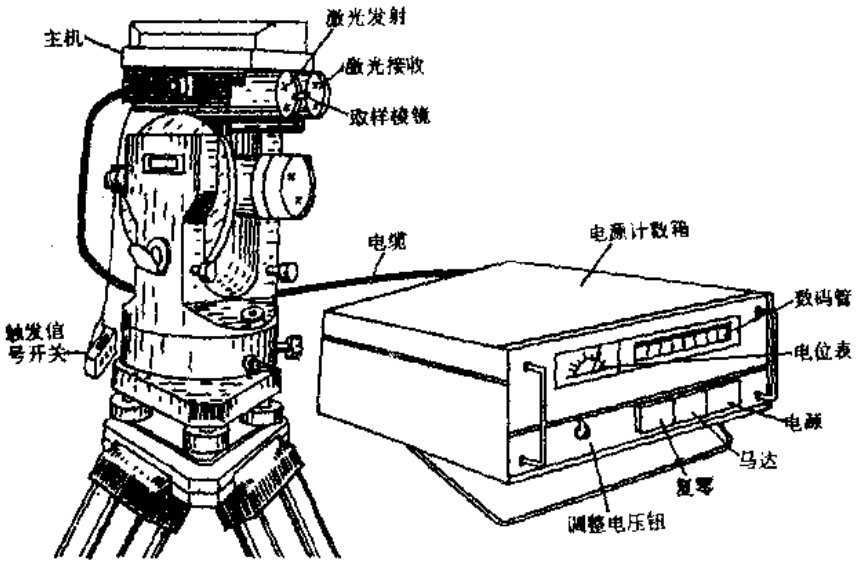



图 12-2

（一）主机

主机内装有发射和接收光学系统，以及脉冲激光器和光电转换器。

脉冲激光器的组成如图12-3所示。其脉冲激光的发射过程如下：

通过转速为每分钟几万转的马达 9，由其转子带动反射棱镜 8 和磁钢10旋转，每当磁钢通过放音磁头11时产生一个读出信号，按动启动按钮14时放大器12接通电源，读出信号被放大，由触发电路13产生高压触发信号加到脉冲氙灯 2 的触发线圈 6 上，这使氙灯内气体被电离，储能电容 4 上存储的大量电荷通过氙灯放电，于是氙灯瞬间强烈闪光，照射激光晶体 1 。当反射棱镜转到其镜面与激光晶体轴向垂直的位置时，在激光器的输出端即可发射出高功率的单脉冲激光。

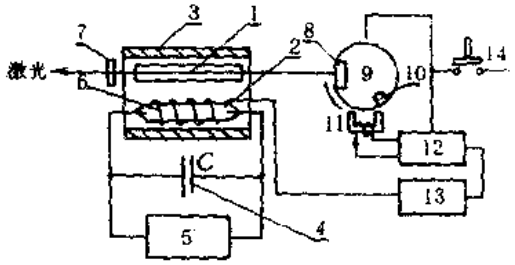



图 12-3

1—激光晶体；2—脉冲氙灯；3—聚光器；4—储能电容；5—脉冲氙灯电源；6—触发线圈；7—介质膜；8—反射棱镜；9—马达转子；10—磁钢；11—放音磁头；12—放大器；13—触发电路；14—启动按钮。

主机上有三个定位螺钉和一个锁紧扳手，用以将主机安置固定在经纬仪望远镜的定位板上。主机通过电缆与电源计数箱联结。主机电缆上还装有触发信号开关。按一下触发信号开关即可产生激光脉冲，自动进行测距。

（二）电源计数箱

电源计数箱包括电源变换器和电子计数器两个部分。

电源变换器的作用是将12V 蓄电池电压变换成整机电子线路各单元所需的各种交、直流电压。电子计数器用以测定主波脉冲和回波脉冲之间的时间间隔 $t$ ，并将所测距离用四位数字数码管直接显示出来。电源计数箱通过电缆与电池箱联结，其操作面板如图12-2所示，其中电压表用以指示储能电容的充电电压，此电压可通过电压调整旋钮调节，一般

应调节在600～1000V 之间。

（三）电池箱

电池箱内装有12V 蓄电池，一般采用银锌蓄电池。

## § 12-3 相位式光电测距仪

### 一、测距原理

（一）相位式测距的基本公式

相位式光电测距是通过测量调制光在测线上往返传播所产生的相位移，测定调制波长的相对值来求出距离 $D$。仪器的基本工作原理可用方框图（图12-4）来说明。

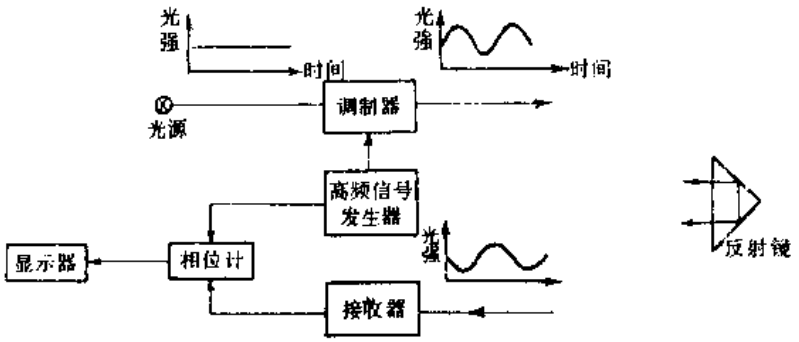



图 12-4

由光源灯发出的光通过调制器后，成为光强随高频信号变化的调制光射向测线另一端的反射镜。经反射镜反射后被接收器所接收，然后由相位计将发射信号（又称参考信号）与接收信号（又称测距信号）进行相位比较，并由显示器显示出调制光在被测距离上往返传播所引起的相位移 $\phi$，这就是大概的工作过程。如果将调制波的往程和返程摊平，则有如图12-5所示的波形。

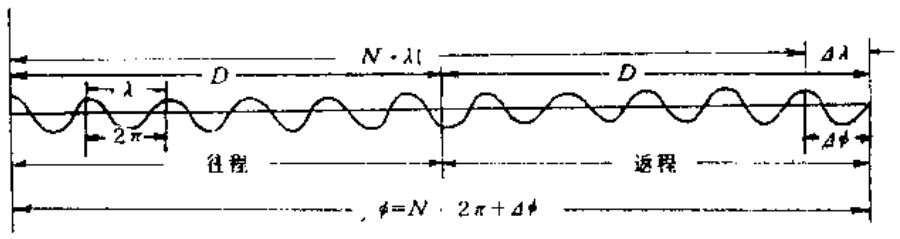



图 12-5

由图12-5可见，调制光全程的相位变化值为

$$\phi = N \cdot 2\pi + \Delta\phi = 2\pi \left( N + \frac{\Delta\phi}{2\pi} \right) \qquad (12\ 3)$$

对应的距离值为

$$D=\frac{1}{2}(N\lambda+\Delta\lambda)=\frac{\lambda}{2}\left(N+\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) \tag{12-4}$$

式中：$N$——相位移的整周期数或调制光整波长的个数，其值可为零或正整数；

$\lambda$——调制光的波长；

$\Delta\lambda$——不足一个波长的调制光的长度；

$\Delta\phi$——不足一个整周期的相位移尾数。

此式为相位式光电测距仪的基本测距公式。式中的$\lambda$可以被看作一根“光尺”的长度。光电测距仪就是用这根“光尺”去量测距离。括号中的$N$表示“光尺”的整尺段数，$\Delta\lambda$为不足一个“光尺”长的余长值。因此$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$必然为小于1的数。$\lambda$所对应的相位移为$2\pi$，$\Delta\lambda$所对应的相位移为$\Delta\phi$，故$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$可以由$\Delta\phi$相对于$2\pi$的相对比值来求得，即

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{\Delta\phi}{2\pi}$$

或

$$\Delta\lambda=\lambda\frac{\Delta\phi}{2\pi}$$

实际上，相位式光电测距仪中的相位计也只能测定全程相位移尾数$\Delta\phi$，而无法测定整周期数$N$，因此（12-4）式有多值解。

（二）确定$N$值的方法

由上述可知，如果$N=0$则可求得唯一确定的解，即

$$D=\frac{\Delta\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}\frac{\Delta\phi}{2\pi} \tag{12-5}$$

由物理学知

$$\lambda=\frac{c}{f}$$

式中，$f$为调制光的频率。

(12-5)式亦可写为

$$D=\frac{c}{2f}\frac{\Delta\phi}{2\pi} \tag{12-6}$$

令

$$u=\frac{c}{2f}$$

则

$$D=u\frac{\Delta\phi}{2\pi} \tag{12-7}$$

实际上$u$为$\frac{\lambda}{2}$（即“光尺”长的一半），常称为测尺长度。

可见，要$N=0$，则必须选用较长的测尺长度，即较低的调制频率（或称测尺频率取$c=3\times10^5\text{km/s}$，可求出与测尺长度相应的测尺频率。由于仪器的测相系统存在测相误差，其值一般达$10^{-3}$，可见它对测距精度的影响将随测尺长度的增长而增大，如表12-1所示。因此，为了解决扩大测程与提高精度的矛盾，可以采用一组测尺配合测距，以短测尺（又称精测尺）保证精度，用长测尺（又称粗测尺）保证测程，解决“多值解”的问题，这就如同钟表上用时、分、秒针互相配合来确定十二小时内的准确时间一样。

表 12-1

| 测尺频率 | 15MHz | 1.5MHz | 150kHz | 15kHz | 1.5kHz |
|---|---|---|---|---|---|
| 测尺长度 | 10m | 100m | 1km | 10km | 100km |
| 测距精度 | 1cm | 10cm | 1m | 10m | 100m |

设仪器中采用了两把测尺配合测距，其中精测频率为$f_1$，相应的测尺长度为$u_1=\frac{c}{2f_1}$，粗测频率为$f_2$，相应的测尺长度为$u_2=\frac{c}{2f_2}$。

若取$f_2=150\text{kHz}$，则$u_2=1\text{km}$，即在1km长度范围内$N_2=0$，因此、由$u_2$可以准确测得“百米”和“十米”的数值，至于第三位“米”的值，因存在测相误差而为近似值。再取$f_1=15$兆赫，则$u_1=10\text{m}$，即在$N_1$未知的情况下可以准确知道10m以下的余长，即“米”和“分米”的数值。同样，因测相误差的存在，第三位“厘米”的值为近似值。对同一距离，将$u_1$和$u_2$所测的值联合起来便可得到在一公里以内的距离，其准确度可达厘米。

某些短程相位式测距仪就是采用这种办法，其测程最大为2km。因由测尺$u_1$、$u_2$只能测得1km以内的值，所以在距离大于1km时，需加上1km的概值，这可用目估求得。

例如，由$u_1$测得$\Delta N_1=0.698$，即以10m为单位的0.698，实际为6.98m。由$u_2$测得$\Delta N_2=0.387$，即以1000m为单位的0.387，实际为387m。另由目估可知所测距离$D$在1～2km之间，则$D$由如下图示求得，

由$u_1$得　　6.98m
由$u_2$得　　387m
由距离概值得　1

所测距离　　$D=1386.98\text{m}$

在实际仪器结构上，由精、粗测尺读数计算距离（小于$u_2$的部分）的工作，已由仪器内部的逻辑电路自动完成。

（三）内光路的设置

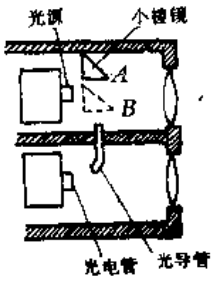
考虑到仪器内部电子线路在传递信号的过程中将产生附加相移$\phi'$，实际上由相位计所测得的参考信号与测距信号之间的相位差$\phi$应为

$$\phi=\phi_D+\phi'$$

式中$\phi_D$为调制光在被测距离上往返传播所产生的相位移。

由于附加相移$\phi'$是随着工作环境变化的，故又称为随机相移。目前大多数仪器都采用在仪器内部设置内光路的办法，来消除随机相移$\phi'$的影响。

如图12-6所示，内光路系统由小棱镜和光导管组成，当小棱镜位于$A$时，光束通过物镜射向镜站反射镜，作外光路测量。当小棱镜位于$B$时，光束不再通过物镜射出，而是被小棱镜反射，经光导管直接引回接收光电管，作内光路测量。小棱镜的移位可以由手动控制，也可以由仪器内部的逻辑电路自动控制。




1—小棱镜；2—光导管；3—光源；4—光电管

图 12-6

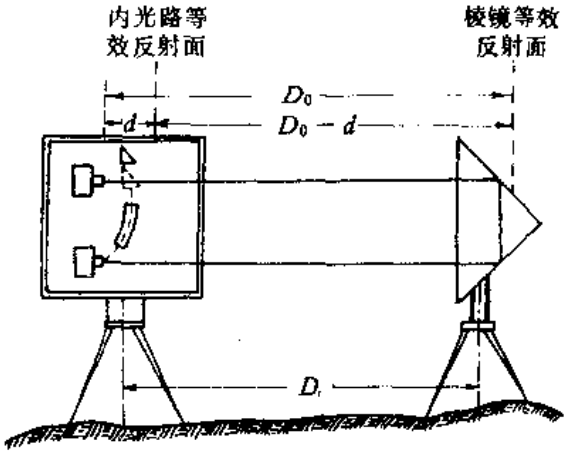



图 12-7

设内外光路测量时的相位差分别用$\phi_{内}$和$\phi_{外}$表示，则有：

$$\left.\begin{aligned}\phi_{内}&=\phi_d+\phi'_{内}\\ \phi_{外}&=\phi_D+\phi'_{外}\end{aligned}\right\}\qquad(12\text{-}8)$$

式中，$\phi_d$为调制光在内光路光程$2d$上的相位移。

由于内外光路测量时，信号被接收后所经过的电子线路完全一样，且测量时间比较接近，故可认为$\phi'_{内}=\phi'_{外}$。将式（12-8）中的两式相减可得

$$\phi_{D-d}=\phi_D-\phi_d=\phi_{外}-\phi_{内}$$

式中$\phi_{D-d}$为相应于调制光在光程$2(D-d)$上的相位移。

显然，由内外光路观测结果求得的相位移$\phi_{D-d}$就消除了随机相移$\phi'$的影响。

（四）仪器加常数的改正

如图12-7所示，由于仪器内光路等效反射面和仪器的安置中心不一致，以及镜站反射镜等效反射面和反射镜安置中心不一致，使仪器所测得的距离$D_0-d$与所要测定的距离$D$不相等，通常称其差数为仪器加常数$k$。即$k=D-(D_0-d)$。仪器加常数$k$可由人工计算对测距结果进行改正，也可通过仪器逻辑电路预置仪器加常数的办法自动加以改正。

## 二、仪器的外部构造

目前短程光电测距仪虽然型号较多，但其外部构造及使用方法基本类似。

图12-8为常州第二电子仪器厂生产的DCH-2型红外光电测距仪的外貌。其最大测程为2km，测距中误差为

$$m_D = 5mm + 5ppm \cdot D$$

式中，ppm为英语百万分之一的缩写，即每公里的$D$值（$D = 10^6 mm$）增加1mm。

（一）测距主机

主机架设在J2经纬仪上，所用电源由电缆连接输入。

主机内装有：红外光调制及调制光发射系统，接收光学系统，内外光路转换、测相系统，Z80微处理机系统。

主机的前端为调制光发射和经反射镜反射光接收镜头。后端，即工作时位于操作人员的一面有一操作面板。测距及其他计算等的操作均在面板上按键进行。有关的信号及工作成果则显示在面板上方的显示窗中。

面板上各键的作用可由使用说明书中查得。

（二）反射镜

反射镜（又称棱镜）安置在被测距离的另一端，它的作用是将调制光反射回到主机。单个的反射镜为一个矩形角镜，即将一个矩形体切下一角（图12-9（$b$)中带影线的部分）形成的反射镜。这种反射镜的特点是可以使任何方向进入反射镜的光线都可沿入射方向平行地反射回去。与光电测距仪配合使用的反射镜在近距离可用一块反射镜，对远距离则要用一组，如三块、四块、六块、九块、十二块等等。DCH-2型测距仪用一块反射镜的最大测程为1.3km，用三块一组的反射镜可达到2km测程。

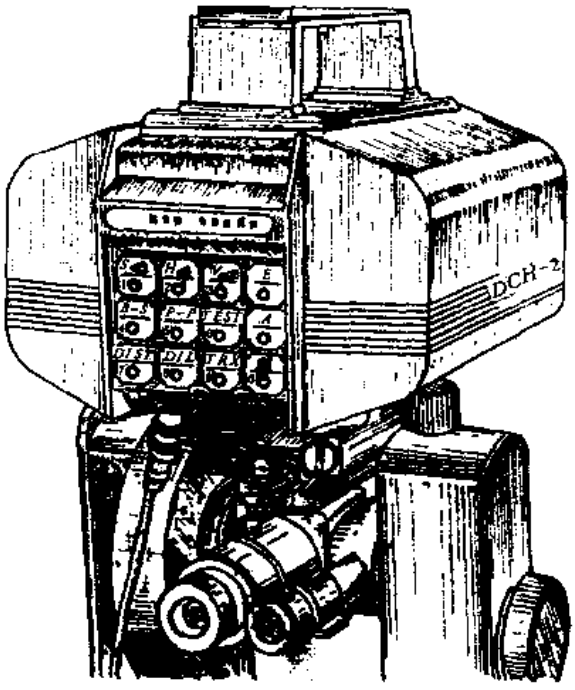



图 12-8

## 三、距离计算

由短程光电测距仪测定的距离，其观测成果还只是测线倾斜距离的初步值，为了求得测线的水平距离，需要加气象改正，为了求得测线的水平距离还需加倾斜改正。下面分别介绍这两项改正。

（一）气象改正$\Delta D_1$

光电测距的基本公式是：

$$D = \frac{1}{2}ct$$

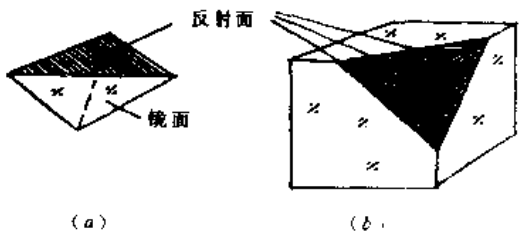



图 12-9

而光在大气中的传播速度为：

$$c = \frac{c_0}{n} \tag{12-9}$$

式中：$c_0$为真空中的光速值；

$n$ 为大气折射率。

所以

$$D = \frac{1}{2}\frac{c_0}{n}t \tag{12-10}$$

由于各仪器在计算调制波波长 $\left(\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c_0}{nf}\right)$ 时，$n$是采用假定大气状态下的大气折射率$n_0$，而实际测距时的大气状态一般不同于假定大气状态，设相应的大气折射系数为$n$，由于$n \neq n_0$，所以必须加气象改正。

微分式（12-10）并用有限增量代替微分量，则可求得：

$$\Delta D = -\frac{1}{2}\frac{c_0 t}{n^2}\Delta n = -\frac{1}{2}\frac{c_0}{n}t \cdot \frac{\Delta n}{n} = -D\frac{\Delta n}{n} \tag{12-11}$$

设由观测得到的距离为$D'$，经气象改正后的距离为$D_a$，则有：

$$\Delta D_1 = D_a - D'$$

顾及$\Delta n = n - n_0$，$n_0 \approx 1$，则式（12-11）可改写为：

$$\Delta D_1 = -D'\frac{n - n_0}{n_0} = D'\frac{n_0 - n}{n_0} \approx (n_0 - n)D' \tag{12-12}$$

对于调制光在标准大气状态（温度$t_g = 0$ ℃，气压$p_g = 760$毫米水银柱，温度$e_g = 0$毫米水银柱，含有0.03%二氧化碳）下，大气折射系数$n_g$可按下式计算：

$$n_g = 1 + \left(2876.04 + \frac{48.864}{\lambda^2} + \frac{0.680}{\lambda^4}\right) \cdot 10^{-7} \tag{12-13}$$

式中$\lambda$为光的波长，以微米为单位，

在一般大气条件下，大气折射系数$n$可按下式计算：

$$n = 1 + \frac{n_g - 1}{1 + \alpha t} \cdot \frac{p}{760} - \frac{5.5 \times 10^{-8}}{1 + \alpha t} \cdot e \tag{12-14}$$

式中：$\alpha$为空气膨胀系数，$\alpha = \frac{1}{273.2}$；$t$以摄氏度为单位；$p$、$e$均以毫米水银柱为单位。

在短程光电测距中，由于上式中第三项湿度的影响很小，可忽略不计，故上式可简化为：

$$n = 1 + \frac{n_g - 1}{1 + \alpha t} \cdot \frac{p}{760} \tag{12-15}$$

例如，某测距仪，假定大气状态$t_0 = +15$ ℃，$p_0 = 760$mmHg（毫米水银柱），光的波长$\lambda = 0.93\mu$m，代入式（12-13）可算得$n_g = 1.000293$。由式(12-15)可算得$n_0 = 1.000278$。

将$n_0$和$n$的计算公式(12-15)代入式（12-12），则可得到气象改正的计算公式为：

$$\Delta D_1 = \left(278 - \frac{0.386P}{1+0.0037t}\right) D' \tag{12-16}$$

式中：$t$以摄氏度为单位；$p$以毫米水银柱为单位，$D'$以公里为单位，$\Delta D_1$以毫米为单位。

实际作业时，$\Delta D_1$可由现成的气象改正计算用表或气象改正图查得。

由此可得，经气象改正后的实际距离为

$$D_a = D' + \Delta D_1 \tag{12-17}$$

（二）倾斜改正$\Delta D_2$

当测线两端不等高时，测距结果为倾斜距离，尚需加倾斜改正，才能得到测线的水平距离。其计算方法有以下两种：

1. 当测线两端之间的高差已知时，$\Delta D_2$可按下式计算：

$$\Delta D_2 = -\frac{h^2}{2D_a} - \frac{h^4}{8D_a^3} \tag{12-18}$$

式中$h$为经纬仪水平轴与反射镜中心之间的高差。

水平距离 $$S = D_a + \Delta D_2$$

2. 当测线两端之间高差未知时，可用经纬仪测定测线的竖角$\alpha$，按下式计算水平距离：

$$S = D_a \cdot \cos\alpha \tag{12-19}$$

（三）归算至大地水准面的改正$\Delta S$

由式（8-1）知，$\Delta S$为

$$\Delta S = -S\frac{H}{R}$$

式中，$H$为反射镜面的高程●。

归算至大地水准面上的距离为

$$S_0 = S + \Delta S$$

## 四、距离测量

作业方法如下：将测距仪和反射镜分别安置在测线的两端，仔细地对中。接通测距仪的电源，然后照准反射镜，检查经反射镜反回的光强信号，合乎要求后即可开始测距。为防止出现粗差，可一次照准读两次读数。然后，重新照准再次读两次距离读数。采用两次照准的目的是为了减小照准误差的影响；使其由系统性变为偶然性。将读数值记入手簿中。接着读取竖盘读数，记入手簿的相应部分。测距时尚应由温度计读取大气温度值，由气压计读取气压值。观测完毕可按测线的竖角值进行倾斜改正，按气温和气压进行气象改正，最后求得测线的水平距离。

表12-2为一导线边长测距示例。表中的气象改正可用下式计算：

● 设反射镜面的高程为$H_{镜}$，则对于较为严格的计算$H = H_{镜} - \frac{S^2}{4R}$。

$$\Delta D_1 = \left(282 - \frac{0.387P}{1 + 0.0037t}\right) D'$$

$\Delta D_1$的单位为毫米，$D'$的单位为公里。此式与式（12-16）的形式一样，由于DI3S的$t_0$取12℃，光波波长为0.885μm所以括号中第一项不是278而是282，第二项的分子为0.387。

表 12-2

日期 1980.11.1　　仪器：DI3S 27351　　观测：陈新　　记录：王月

| 边号 | 测向（往、返） | 距离读数 | | 竖盘读数 | 倾斜改正（mm） | 水平距离 | 气象数据 ℃(mmHg) | | 气象改正（mm） | 边长 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 112 / 113 | 往 | 962.887 | 887 | 270°00′49″ | 0 | | 21.2 | 757 | | |
| | | 888 | 887 | | | | | | | |
| | | 平　均 | 962.887 | | | 962.887 | | | + 9 | 962.896 |
| 113 / 112 | 返 | 962.891 | 887 | 270°00′52″ | 0 | | 21.0 | 757 | | |
| | | 888 | 888 | | | | | | | |
| | | 平　均 | 962.888 | | | 962.888 | | | + 9 | 962.897 |

注：气中的法定计量单位为毫巴（hPa），1mmHg = 133.3221Pa

# 第十三章　平板仪及其使用

## §13-1　图解测量原理

前面介绍了测定两个方向或两个以上方向之间夹角的水平投影（即水平角）及两点之间直线的水平投影（即水平距离）的方法，是应用各种仪器或工具直接测定其数值的。本章介绍的平板仪测量是根据图解的原理测定水平角，如果用图解交会法测定待定点的平面位置，则点与点之间的距离也可以从图上量得，所以平板仪测量又称**图解测量**。

图解测量的要点如下：以图13-1所示为例，设地面上$A$、$B$两点，其坐标是已知的，所以该两点在图上的位置能标示出来●，现在要测定地面上另一点$C$在图上的位置。（兹规定该图中实地上的点用大写字母表示，图板上的点用小写字母表示。）先在一块图板上用规定的比例尺$1:M$展绘出$A$、$B$点在图上的位置$a$和$b$。将图板水平地安置在$A$点，使$a$与$A$位于同一铅垂线上，并使图板上的$ab$线与实地上$AB$线在同一竖直面内。然后设想通过$AC$方向作一竖直面与图板相交得线$ac'$。再将图板安置于$B$点，使$b$与$B$点位于同一铅垂线上，并使$ba$线与实地上$BA$线也在同一竖直面内，然后用上述在$A$点同样方法得线$bc''$。图板上$ac'$与$bc''$线相交得$c$点，此点$c$即相应于实地上$C$点在图板上的位置。这是由于上述图解角度的方法使$\angle cab = \angle CAB$，$\angle abc = \angle ABC$，即图板上的$\triangle abc$与地面上$\triangle ABC$的水平投影相似。又因$ab:AB = 1:M$，所以$bc:BC = ac:AC = 1:M$，$C$点在图上的位置就这样用图解法测定了；$ac$与$bc$的长可从图上量得，根据已知比例尺即可计算出实地$AC$和$BC$的水平长度。

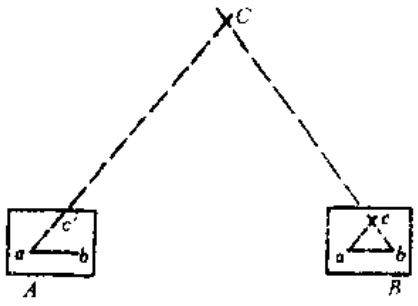


图 13-1

从以上所述可知，平板仪测量是以相似图形为根据的。图上三角形（或多边形）的边与地面上三角形（或多边形）的相应边，应当相互平行或重合。

由此可见，为了用图解法进行测量工作，所用的仪器必须具有能导致水平位置的图板、照准目标的瞄准设备和画直线用的直尺。这种仪器除了用图解法测定角度外，还常用视距法或量距法等测定水平距离和用三角高程测量法测定高差，因此还应具有测距离的视距丝和测竖角的竖盘或其它装置。平板仪的平板正是可以导致水平的图板，大平板仪所用的照准仪装有带视距丝的望远镜、直尺和竖盘。小平板仪则是用比较简单的照准器代替望远镜和竖盘

● 具体的展点方法参阅§16-4之三。

# §13-2 大 平 板 仪

大平板仪的主要构成部分为平板和照准仪；另外还应备有附件。

## 一、平板

平板由测板、基座和三角架构成。

测板是用风干的木料制成，通常做成边长为60cm的正方形，其厚度为 2 ~ 4 cm 。

各种不同结构的平板，其主要区别在于它的基座。基座有金属的、木质的和球窝状的。

金属基座如图13-2所示，它与经纬仪的基座很相似。其上部为一金属圆盘1，在圆盘的边缘有三个螺旋 2，利用这三个螺旋把基座和测板连接在一起。圆盘的下面是个竖轴，插在基座内，并可在其中旋转。其他如制动螺旋、微动螺旋、中心螺旋及脚螺旋的作用均与经纬仪上的一样，不需再作说明。

平板的三脚架与经纬仪或水准仪的三脚架大致相同。

## 二、照准仪

照准仪是用来瞄准目标、画方向线、测定距离和竖角的，这是大平板仪中最主要的部分。它由望远镜、竖盘、支柱和直尺所组成，其整个作用和经纬仪的照准部分相似，只是没有水平度盘，而以一支用作画方向线的直尺来代替。图13-3所示为国产的PG3 \2型光

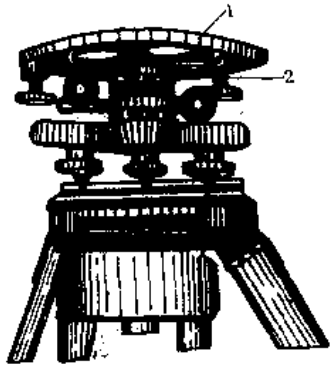



图 13-2

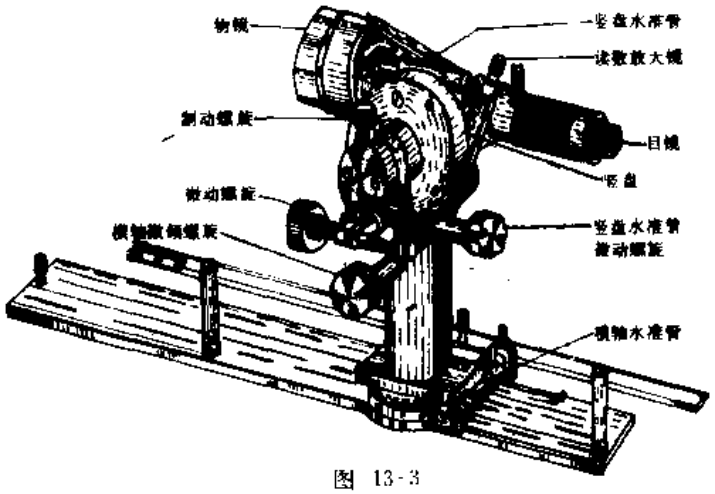
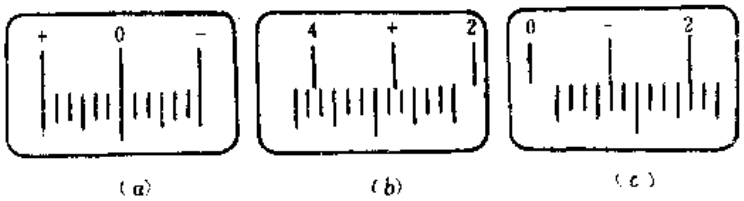



图 13-3

学平板仪的照准仪。望远镜、竖盘等构件都装在支柱上部，支柱的作用相当于经纬仪的支架。支柱下部的横轴微倾螺旋和横轴水准管是配合使用的。转动横轴微倾螺旋时，支柱连带望远镜的横轴的左右两端就会作微小的倾斜，横轴水准管的气泡也随之移动，气泡居中时，应是横轴水平。最下部画方向线的直尺还装有能使直尺边平行移动的平行尺，当瞄准目标后，直尺边离开测站点时可不动照准仪而用平行尺，使直尺边对准测站点画方向线。

十字丝平面上除刻有十字丝和乘常数为100的普通视距丝外，还刻有1/4视距丝以备测定较长的距离和在高秆作物地区使用。

竖盘的读数方法与J6光学经纬仪带分划尺显微镜的读数方法基本一样。所不同的是，这种竖盘是按高度角进行注记的。当望远镜水平时，竖盘的读数为零，望远镜上仰时，读数为正，望远镜下俯时，读数为负。度数的偶数处有注记，奇数处则注以“+”或“-”，以示正高度角（仰角）或负高度角（俯角）。由于竖盘不是按同一方向连续注记，而是从零开始分向两个方向进行注记，这就使得读数显微镜中要有两段读数分划尺，具有指标线作用的零分划线是公共的。图13-4中读数分划尺中间的一根较长分划线即指标线，其右边部分是用来读取正高度角的，左边部分是用来读取负高度角的。例如，图13-4(*b*)所示的读数为 $+3°15'$，图13-4(*c*)所示的读数为 $-1°21'$。




(a)　(b)　(c)

图 13-4

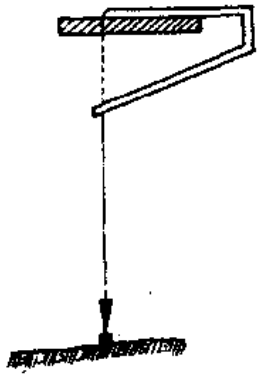


图 13-5




图 13-6

## 三、附件

平板仪的附件一般有对点器、定向罗盘和水准器。

1.对点器　对点器是用来进行平板仪对中的，利用它可使地面点与图上相应点位于同一铅垂线上。对点器由一木质或金属的叉架和一个垂球组成（图13-5）。

2.定向罗盘　定向罗盘是用来定测图板方向的。用于平板仪上的罗盘一般都为长盒罗盘，如图13-6所示，它是一个长方形的金属盒或木盒，内部装有两个有分划的圆弧和一根磁针。定向罗盘有时也装在照准仪的直尺上。

3.水准器　水准器是用来整平平板的。有的是水准管，有的是圆水准器。

# §13-3　平板仪的安置

平板仪测量是以相似图形为依据的，所以在一个测站上平板仪的安置工作不仅要对中

和整平，而且要进行定向。对中就是使地面点和测图板●上的相应点位于同一铅垂线上，整平是使测图板成水平位置。定向则是使测图板上的直线与相应的地面线重合或互相平行。这三项工作都是相互影响的，因此不能一次就把平板仪安置好，必须按下列次序分两次进行。

## 一、初步安置

先以目估将测板定向；接着移动脚架，仍用目估使测图板大致水平；然后移动整个测图板进行大概对中，此时应尽可能不破坏前面的定向与整平。进行这项初步安置后，要进一步作较精确的安置。

## 二、精确安置

这时的工作步骤恰好与初步安置相反，其次序为对中、整平和定向。下面分别就这三项工作叙述之。

### （一）对中

对中的目的已如上所述。在实际工作中，需要知道平板仪对中要求达到什么样的精度，以便对于不同的要求采用不同的对中方法。

由实践得知，对距离小于0.1mm的两点，无法再用肉眼分辨出来，即图纸上以0.1mm为直径的小圆看起来只是一点，因此当对中误差在图上不超过0.05mm时，则认为是可以容许的，也就是说比例尺精度的一半可认为是容许的对中误差。例如，当比例尺为1:5000时，容许对中误差为0.25m，因此可直接用目估对中。若比例尺为1:2000时，容许对中误差为0.1m，此时必须用对点器进行对中。由以上两例可知，当比例尺等于或大于1:2000时，均须利用对点器来进行对中；而比例尺等于或小于1:5000时，则可用目估对中。但是也必须注意到，由于它会影响到定向工作，有必要进行较上述更精确的对中。

### （二）整平

测图板的精确整平，是利用直尺上的水准器或单独的水准器来进行的。方法与经纬仪的整平相同。并且也要重复进行数次。现在应该了解的是测图板整平需要达到什么样的精度的问题。就测图板本身来说，即使倾斜了0.5°，对图解的精度亦不会发生什么显著的影响。但对于支柱固连于直尺的照准仪，由于测图板的倾斜，就会直接影响到照准仪和横轴。若横轴已校正得和直尺底平面平行，也就是说和测图板的平面平行，则当照准仪在测图板上向各个方向转动时，横轴将有不同的倾斜，最大的倾斜角等于测图板的倾斜角。由§7-7可知，横轴的倾斜对视线在水平投影内所引起的误差与视线的高度角有关。当高度角为45°时，横轴倾斜对视线在水平投影内所引起的误差等于横轴的倾斜角，这将使测量结果发生很大的误差。因此在平板仪测量中，特别是在山区工作时，测图板的整平必须精确。

### （三）定向

测图板的最后定向，可根据测图板上的已知直线来进行。当没有已知直线可以利用时，也可用罗盘来定向。

---

● 测板上绷上画图纸或加上图板之后，统称之为测图板。

1.用定向罗盘定向：当用定向罗盘定向时，可利用磁子午线、真子午线或者用直角坐标格网来进行。按磁子午线定向时，将定向罗盘侧边切于图板上已画好的磁子午线，然后转动测图板使磁针的两端和定向罗盘的零直径对准为止。若按真子午线定向，则必须先知道磁偏角，将定向罗盘侧边切于真子午线上，转动测图板，使磁针的北端指在已知的磁偏角读数上。如果已知磁偏角和子午线收敛角，这时也可用直角坐标格网来定向，即将定向罗盘侧边切于纵向直线上，转动测图板，使磁针指在磁偏角与子午线收敛角之代数和的读数上，此时要注意磁偏角的正负。由于磁针的周日变化可达15′，所以按罗盘定向的误差至少会有这样的大小，加上磁针不够稳定及罗盘的最小分划值为1°，故实际定向精度比较低，除低精度的测量工作外，一般不用定向罗盘作最后定向之用。

2.依已知直线定向：设在测图板上有$a$、$b$两点，对应于地面的$A$、$B$两点（图13-7），今欲按测图板上的$ab$线定向，设测图板放在$A$点，经过对中和整平后，将照准仪直尺的斜边切于图上的$ab$线，旋转测图板使照准仪的望远镜瞄准地面上的$B$点，此时测图板的定向即已完成。

3.依已知直线定向的精度：虽然测图板依直线定向较用定向罗盘定向为精确，但是要达到一定的精度，还必须考虑到其他几项对定向有影响的因素。

首先，依直线定向的精度与定向时所用图上直线的长度有关，定向所用的直线愈长，定向就愈精确。如图13-8所示，设$s$为测图板上用作定向的两点间之距离，以厘米计，$d$为所绘点的直径，它的大小为0.1mm，$x$为由于直尺切该两点不准确所产生的定向误差，因此，根据这样长度的直线来进行定向所产生的误差为：

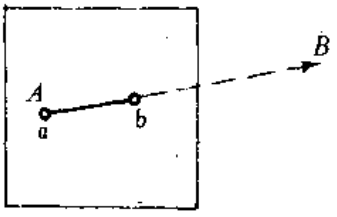



图 13-7

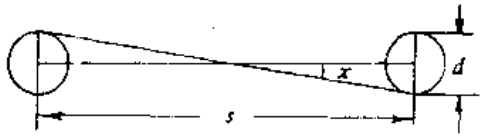



图 13-8

$$x=\frac{\frac{d}{2}}{\frac{s}{2}}=\frac{d}{s}$$

或
$$x''=\frac{d}{s}\rho''=\frac{0.01}{s}\times 3438'=\frac{34'}{s}$$

这就说明了，用以定向的直线愈短，所产生的定向误差愈大。

因而，若使定向误差$x''\leq 1'$，则定向用的长度不得短于34cm。为此，画在图板上而作定向用的直线$ab$必须延长到测图板的图框上，如图13-9所示。

其次，平板的对中误差也会影响定向的精度，在图13-10中，设$e$为对中误差，当测图板按直线$ab$定向时，则将产生定向误差$y$：

$$y''=\rho''\frac{e}{s}$$

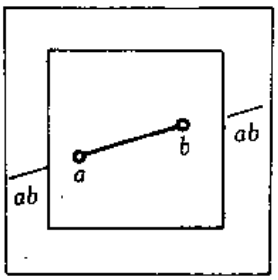



图 13-9

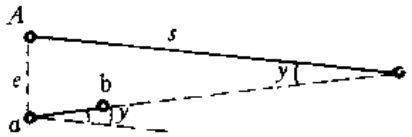



图 13-10

式中 $s$ 为地面上的直线长度。

实际上，用作定向的直线在图上的长度一般为 5 ～ 6 cm，在这种情形下，若使对中误差对定向的影响不超过1′，即当$s = 6\ (\mathrm{cm}) \cdot M$和$y = 1'$时，则由$y = \rho \cdot \frac{e}{s}$可得

$$e\ (\mathrm{cm}) \leqslant \frac{1}{3438} \cdot 6 \cdot M = \frac{M}{570}$$

若比例尺为1∶10000时，则$e \leqslant 17\ (\mathrm{cm})$。

目标偏心也会影响到依直线定向的精度，其影响与对中误差的影响相似，设所产生的定向误差为 $z$，按同理，可用公式$z = \rho \cdot e / s$来计算。

除上述这些因素之外，还有平板整平的误差、照准误差和画方向线的误差等也会影响定向的精度。

当测图板的对中、整平有足够的精度并注意到其他有关误差的影响，按直线定向的极限误差可以不超过4′，即定向中误差不超过 ±2′。

## §13-4 小 平 板 仪

所谓小平板仪，即测板较小，测板与三脚架的连接简单，并以测斜照准仪作为照准设备。

测斜照准仪的构造如图13-11所示，系由直尺、觇孔板和分划板所组成。直尺有木制和

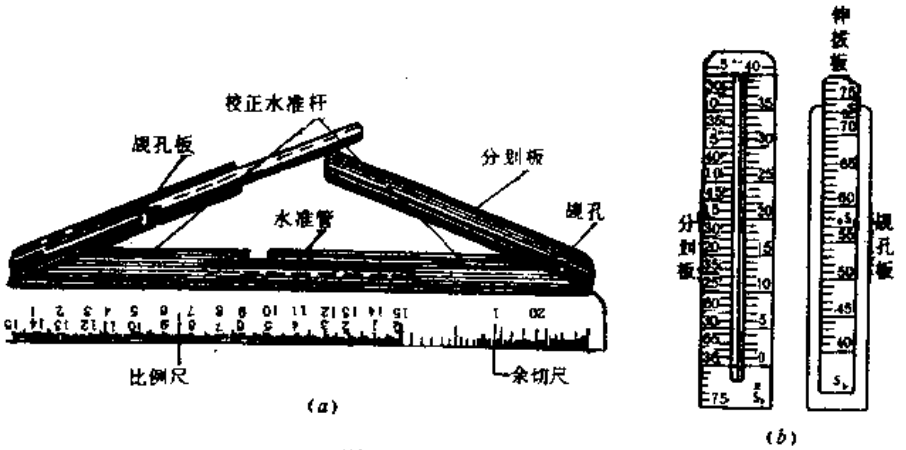



图 13-11

金属制的两种，长约20～30cm，在其斜边上刻有分划。为了能够置平测板，在直尺上附有一水准管。靠近尺的两头，还有两个校正水准杆，在不动平板时，用以纠正照准仪使其成水平。

觇孔板与分划板分别连结在直尺的两端，使用时可使其垂直于直尺，不用时可与直尺贴靠在一起。分划板上有一长方形小窗，窗中张一马鬃，作为观测方向的标准；觇孔板的中央装有伸拔板，上面有上、中、下三个觇孔，作瞄视方向之用。在分划板和伸拔板上都刻有分划，最小的分划值等于两板之间距离的1/100，利用这些分划可以测定距离和高差。

用觇板上的分划来测定距离和高差，视线不能过长，故在实际工作中，常用卷尺量距，以水平视线测高。小平板或是与经纬仪或是与水准仪联合使用。使用的方法详见下章。

## §13-5 前方交会和侧方交会

如果在测图板上有了与地面点相应的两点，设还要在测图板上确定出相应于地面第三点的位置，用平板仪进行前方交会或侧方交会是很方便的。用平板仪交会法不但可以在测图板上获得所需要的点位，而且还可在测图板上量出已知点到待定点的距离。

### 一、前方交会

设在测图板上已有$a$、$b$两点，各代表地面上的$A$和$B$点（图13-12），今欲在测图板上定出第三点$C$的位置，如在$A$、$B$两地面点上均可安置平板仪，并且$A$、$B$、$C$三点又互相通视，则可用前方交会法测定$C$点在测图板上之位置。先将平板仪安置于$A$点，经对中、整平和以$ab$线定向后，把照准仪的直尺边紧靠$a$点而照准地面上的$C$点，并在测图板上沿直尺斜边画方向线$ac'$。然后，将平板仪搬到$B$点，亦进行对中、整平并以$ba$线定向，而将直尺边紧靠$b$点照准地面$C$点，沿直尺边画另一方向线$bc''$。$ac'$与$bc''$的交点$c$就是地面点$C$在测图板上的相应位置。测图板上的$c$点位置确定以后，$AC$与$BC$的距离即可从图上量出来了。

用上述前方交会的方法，可以从两个已知点确定很多地面点在测图板上的位置。

交会的精度决定于交会角的大小，过锐或过钝的交会角对交会精度不利，因此一般要求交会角不小于30°或不大于150°。

为了避免发生错误和提高交会精度，应该用三个或更多的方向来进行交会。如出现示误三角形，必须重新测定。

### 二、侧方交会

设测图板上已有$a$、$b$两点相应于地面点$A$和$B$（图13-13），今欲测定地面点$C$在测图板上的位置，若$A$、$B$、$C$三地面点可以互相通视，但$A$、$B$两点中的$B$点不能到达，或在$B$点上不能安置平板仪，则此时不能用前方交会法，而要用侧方交会法来确定$C$点在测图板上的位置。先如前方交会法同样将平板仪安置于$A$点，以$ab$线定向，通过$a$照准地面上的$C$点，并沿直尺边画方向线$ac'$。然后把平板仪搬到$C$点，这时图上相应的$c$点还未

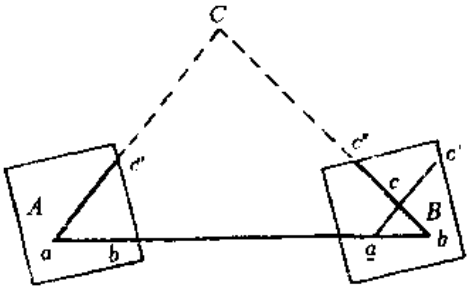



图 13-12

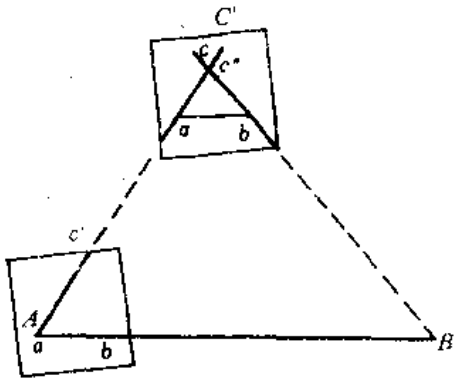



图 13-13

定出，所以先在$ac'$线上估计出相应于地面点$C$和$c''$点，用它来进行对中，并经整平和按$c'a$线定向后，把直尺边紧靠着$b$点而去瞄准$B$点，并沿直尺边画线，设与$ac'$线相交于点$c$，则这个$c$点就相应于地面上的$C$点。当$c$与$c''$相差较大时，即表示$c''$估计得不准确，因而使得出的$c$点也将不对应于地面上的$C$点，需要加以改正。改正的方法即在$C$点又以$c$来进行对中，并重复上述的操作，直到测图板上对中用的点子和该次测出的点子十分接近或重合为止。对于1:1万比例尺的测量工作，由于对中的容许误差常远远大于$cc''$的长度，故交会一次即够，不必重复上述操作。

侧方交会也要求交会角不得小于30°或大于150°，并且要用三个或更多的方向来进行交会，以免错误。如发现示误三角形，也必须重新测定。

## §13-6 后 方 交 会

如果在测图板上已有三个相应于地面点的点子，当要根据这三个已知点确定待定的地面点在测图板上的位置时，可以直接将平板仪置于待定点处，在整平测图板后，用本节介绍的方法或其他类似的方法确定它在测图板上的位置，这个方法就是所称的后方交会，有时又叫做三点题。

在尚未讨论后方交会的各种实测方法之前，先来分析一下待定点$P$对于三个已知点的相对位置（图13-14）的各种情况。

第Ⅰ种情况，$P$点在三个已知点所组成的三角形之内。

第Ⅱ种情况，$P$点在三角形的任意一边上。

第Ⅲ种情况，$P$点在三角形之外，但在危险圆内。

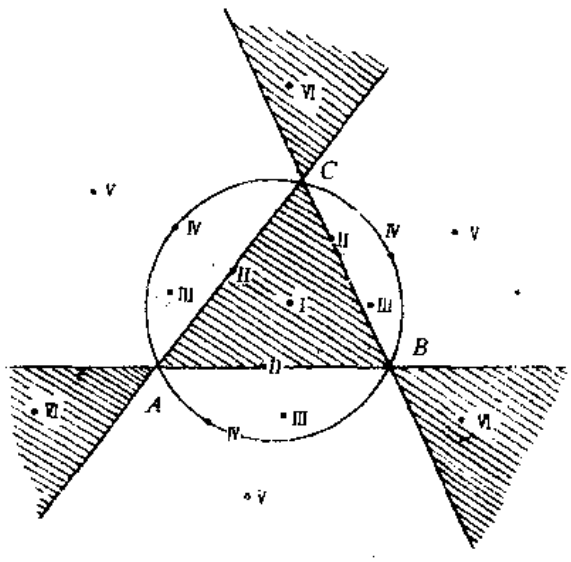



图 13-14

第Ⅳ种情况，$P$点在危险圆上。

第Ⅴ种情况，$P$点在圆外并与三角形的任一边相对。

第Ⅵ种情况，$P$点在圆外并与三角形的任一角相对。

解决这一问题的方法很多，下面分别介绍几种最常用的方法。

## 一、辅助点法（白塞尔法）

解决三点题的主要关键是定向问题，只要测图板定向好了，待定点在图上的位置就可以很快地求出来。辅助点法解决定向问题是从寻找定向所根据的直线着手的。在叙述这一方法的具体操作之前，先介绍一下该方法的几何基础。

设测图板上的$a$、$b$、$c$三点相应于地面上的三已知点$A$、$B$、$C$，并设测图板上的$p$点相应于地面上的待定点$P$，如图13-15（$a$）、（$b$）所示。今通过$a$、$b$和$P$作一圆，联$cp$并延长而交圆周于$d$，联$da$和$db$并亦延长之，则由图13-15（$b$）可知：

$$\angle abn = \angle apc = \beta_1$$

$$\angle bam = \angle bpc = \beta_2$$

因此，若在点$b$作$\angle abn = \beta_1$，而在点$a$作$\angle bam = \beta_2$，延长$ma$和$nb$相交于点$d$，联结$cd$，因待定点$p$位于$cd$线上，此$cd$线即为用于定向的直线。

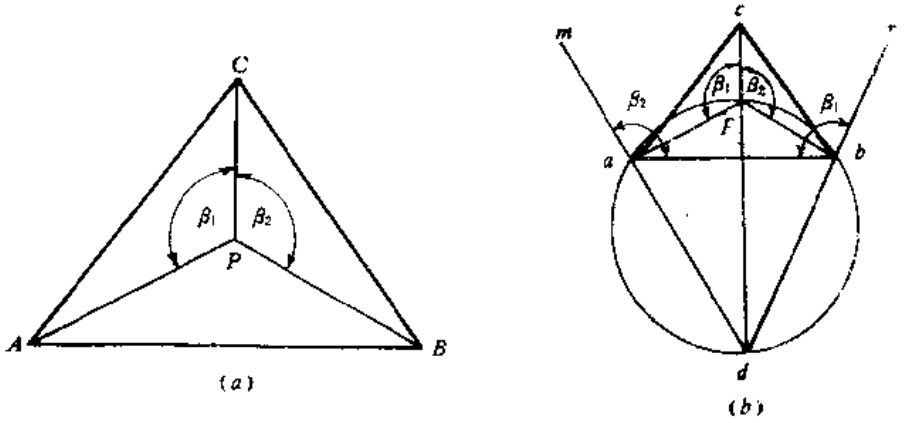



图 13-15

根据这个原理，要在测图板上求$p$点的位置时，其操作步骤如下：

1. 在待定点$P$上整平图板，用照准仪的直尺边紧靠$ba$线（$a$点在前），旋转测图板以$ba$照准$A$点，然后将图板固定；

2. 将照准仪直尺边靠紧$b$点，瞄准地面点$C$，画方向线与$ba$交成$\beta_1$角（图13-16（$a$））；

3. 将直尺边靠紧$ab$线（$b$点在前），转动测图板，瞄准$B$点，然后将测图板固定；

4. 将直尺边靠紧$a$点，瞄地面点$C$，画方向线与$ab$交成$\beta_2$角（图13-16（$b$）），并且与在$b$点所画方向线交于辅助点$d$；

5. 联$dc$线并将尺边靠紧$dc$线瞄准地面点$C$，固定图板，此时测图板即已定向（图13-16（$c$））；

6. 将尺边分别靠$a$瞄$A$，靠$b$瞄$B$，作出方向线$ap$与$bp$；若$ap$、$dp$、$cp$三方向线交

点$p$，则此点即为待定点$P$在图上的位置$p$。

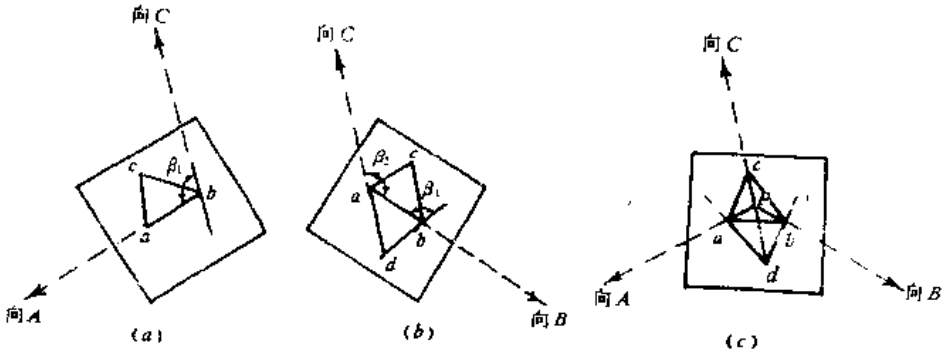



图 13-16

以上所述是当待定点在地面上的已知三角形之内，但这一原理和它的应用，对于其他几种情况亦同样适用。现在就第Ⅵ种情况为例再说明之。图13-17表示了第Ⅵ种情况的图解关系，根据这种图解关系亦可得到与第Ⅰ种情况相同的施测步骤，如图13-18所示。

上述有关几个步骤的对中，可根据比例尺的要求，考虑是否需要移动测图板或整个平板。

若在测图板上得不到$ad$和$bd$线的交点$d$时（图13-19），可在三角形$abc$的$ac$和$bc$边上，由$c$点按二分之一或三分之一或别的比例求得分点$a'$和$b'$，并从分点作平行于$ad$和$bd$的直线$a'd'$和$b'd'$，其交点$d'$与点$c$联起来，同样可得到定向线。

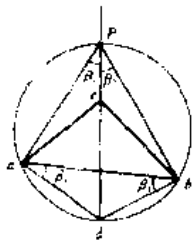


图 13-17

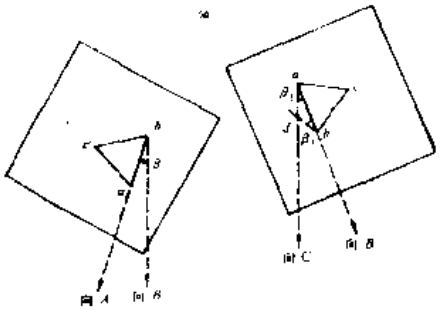



图 13-18

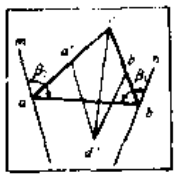


图 13-19

辅助点法的关键是在测图板上找出定向线。在其他条件相同的情况下，定向线愈长，平板的定向就愈准确，因而由辅助点法所得到的结果也愈可靠。

图13-20表示四种不同情况下的定向线，这四种情况的三角形是相等的。

由图13-20可见，最有利的情况是第Ⅰ种和第Ⅵ种，即待定点位于图13-14所示的覆线范围内。

除了定向线的长度外，还必须考虑待定点在定向线上的位置以及在$d$点的交角。由图13-20可知，在第Ⅰ种情况下，待定点若过于靠近$AB$线或$C$点，则在$d$点的交角将太锐或

太钝，最好是待定点在三角形的中央；在第Ⅵ种情况下，待定点最好不要离三角形顶点远。至于待定点在定向线上的位置，则当它在 $c$、$d$ 之间而不是在延长线上时是较好的。所以第Ⅰ种情况又较第Ⅵ种情况为好。

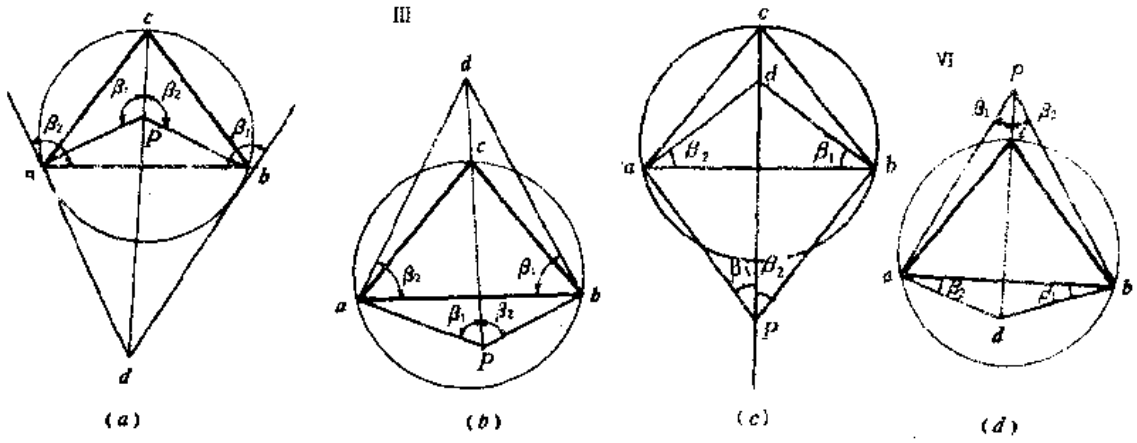



图 13-20

在实际工作中，测图板上通常不止只有三个已知点。因此在选择已知点时应该考虑上述情况，使能得出 $P$ 点的最可靠位置。

为了避免发生错误，由三个已知点求得的待定点位置，应以第四个已知点作检查。即以直尺边切图上第四点瞄地面上相应的第四点，沿直尺边画直线，此直线应该通过所求得的待定点。如不通过，即表示所求点或第四点位置有错，必须找出原因，进行纠正。

## 二、逐次接近法（李曼法）

设安置在待定点上的测图板的定向是正确的，也即三角形 $abc$ 的各边将相应地平行于地面上三角形 $ABC$ 的各边。如图13-21所示，这时如通过测图板上三个已知点分别照准地面上三个相应点时，所画的三条直线将交于一点 $P$，此 $P$ 点即所求的待定点。若三角形 $abc$ 绕 $P$ 点转动了一个 $\varepsilon$ 角，例如是向右转动的，测图板的定向不正确了，$a'$、$b'$、$c'$ 才是原来 $a$、$b$、$c$ 的位置，图上实际并无 $a'$、$b'$、$c'$。

现在再由 $a$、$b$、$c$ 分别照准 $A$、$B$、$C$ 三个地面点（图13-22），并画相应的直线。由于图上所画方向线的长度，与测图板至地面点的距离比较起来是极微小的，因此可以认为所画的 $ax$、$by$、$cz$ 线分别与 $pa'$、$pb'$、$pc'$ 相平行，且分别与 $pa$、$pb$、$pc$ 交成 $\varepsilon$ 角，组成了误差三角形 $xyz$，如图13-22所示。

从图13-22可以看出，由于测图板有偏右的定向误差，所画的方向线 $ax$、$by$、$cz$ 都偏到 $P$ 点的右侧，亦即 $P$ 点应在 $ax$、$by$、$cz$ 的左侧（以面向所照准的点为准）。反之，若测图板有左偏的定向误差，则 $P$ 点应在所画三条直线的右侧。总之，不论测图板有怎样的定向误差，所求的 $P$ 点总是在示误三角形各边的同一侧。

若从 $P$ 点向示误三角形各边作垂线 $h_a$、$h_b$、$h_c$，并以 $s_a$、$s_b$、$s_c$ 分别表示 $P$ 至 $a$、$b$、$c$

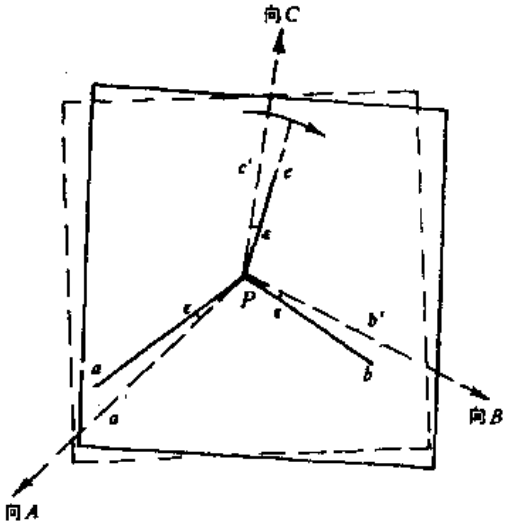



图 13-21

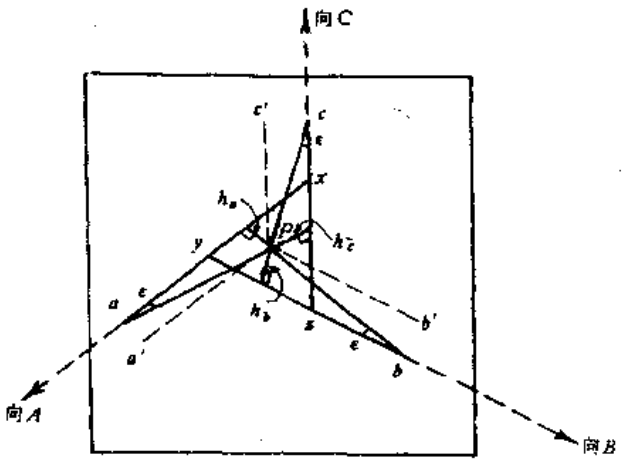



图 13-22

的距离，则从图13-22可得：

$$\frac{h_a}{S_a}=\frac{h_b}{S_b}=\frac{h_c}{S_c}=\frac{\varepsilon}{\rho}$$

即

$$h_a:h_b:h_c=S_a:S_b:S_c$$

由此可得到一个实用上很重要的规则，待定点在示误三角形各边之同侧，并且至示误三角形各边的垂距与它至相应已知点的距离成正比。

上面所举的例子是对第Ⅰ种情况而言的，但是对其他的几种情况亦同样适用上述的规则，只是第Ⅱ种和第Ⅳ种情况是例外。在第Ⅱ种情况下，当测图板没有正确定向时，所画的三条方向线不交成示误三角形（图13-23）。在第Ⅳ种情况下，虽然测图板没有正确定向，三条方向线却总是交于一点，但此交点并不是待定点在测图板上的相应位置。所以，如图13-24所示，第Ⅳ种情况应用逐次接近法也是失效的。

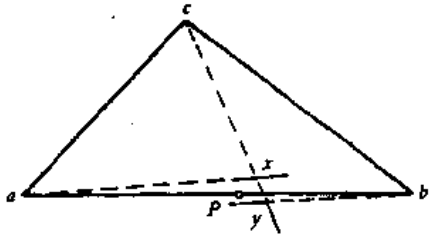



图 13-23

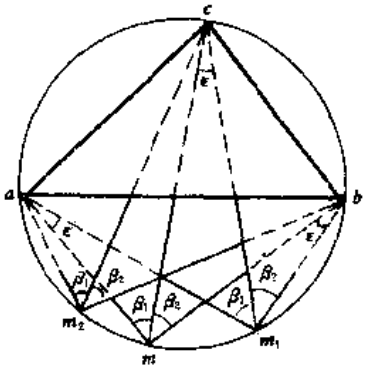



图 13-24

上述规则对于第Ⅰ种情况来说，应用起来是很方便的，但是对于其他几种情况，应用时就没有第Ⅰ种情况那样简便。为此，除了上述总的规则外，并由它再引伸出两条附加规则，作为在各种情况下寻求待定点时的参考。

规则一：当待定点在已知三角形之外，并在外接圆内（第Ⅲ种情况），或是在外接圆之外而与三角形之一角相对（第Ⅵ种情况），则测图板上的待定点与示误三角形分别位于中央照准线（即照准 $c$ 点的线）的异侧（图13-25$a$和13-25$b$）。

规则二：当待定点在外接圆外而与三角形之一边相对（第Ⅴ种情况），则测图板上的待定点与示误三角形位于中央照准线的同侧（图13-26）。

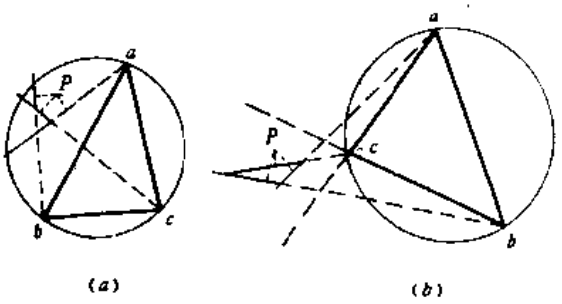



图 13-25

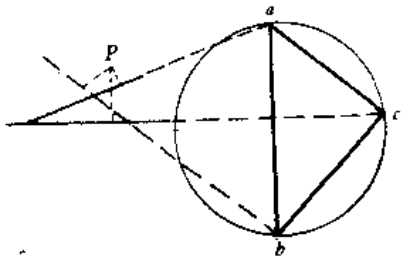



图 13-26

掌握了示误三角形的规律后，就可以用逐次接近法来解三点题。

将平板仪安置在待定点上，用目估或定向罗盘使测图板定向，然后通过测图板上三个已知点照准地面上的相应点，并沿直尺边划线，这些直线将组成示误三角形。根据此示误三角形并应用上述规则，估定待定点在测图板上的位置，然后把照准仪直尺边通过所估的待定点与图上三个已知点中的最远点，旋转测图板使照准相应的地面已知点，并沿直尺边画线。再通过测图板上其它两点照准地面上的相应点，亦画线。若此时三直线交于一点，则表示测图板的定向已正确，而此交点即为所求的待定点。否则，必定得到一个较前者为小的示误三角形。再继续重复上述工作，直至示误三角形逐渐趋小而最后成为一点为止。

如果在利用逐次接近法则时，第一次三方向线就交于一点，而不是组成示误三角形，则可能是测图板的定向已正确，也可能待定点恰好位于危险圆上。但是在第Ⅰ和第Ⅵ两种情况下，后一种可能性是不存在的。因此在第Ⅲ和第Ⅴ两种情况下，为了检查待定点是否在危险圆上，可再根据图上第四个已知点照准地面上的相应目标并画方向线，若第四个方向亦交于同一点，则表示测图板定向已正确。如果没有第四个已知点，应略微转动图板，重新通过图板上的点照准地面上的相应点。若此时得到了示误三角形，则表示先前获得的点是正确的。

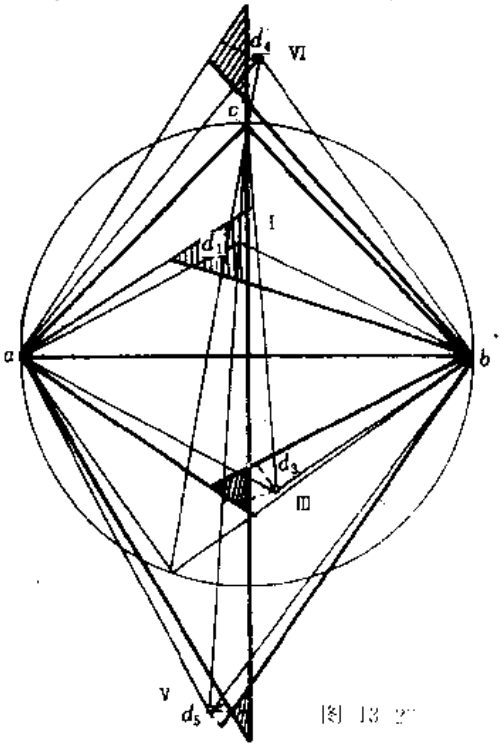



图 13-27

很明显，当测图板的定向误差相同时，获得的示误三角形较大者，根据它估定待定点位置就容易得到较好的结果。图13-27所示的，为测图板分别存在相同定向误差时各种情况下的示误三角

形。由图可知，在第Ⅰ和第Ⅵ种情况下的示误三角形较大，而第Ⅲ和第Ⅴ种情况下的示误三角形较小。由此可知，逐次接近法与辅助点法一样，第Ⅰ和第Ⅵ种情况是有利的情况，特别是在第Ⅰ种情况下，根据示误三角形来估定待定点的位置时，既有把握又精确。因此，逐次接近法解三点题时，第Ⅰ种情况认为是最有利的情形。

必须注意，用此法求得图板上待定点位置后，也要用第四个已知点来作检查。

### 三、透明纸法

将平板置于待定点上，在已整平的测图板上固定一张透明纸，并在纸上用铅笔任意标出一点，如图13-28（$a$）所示的$p$；通过它瞄准$A$、$B$、$C$，画出三条方向线。放松透明

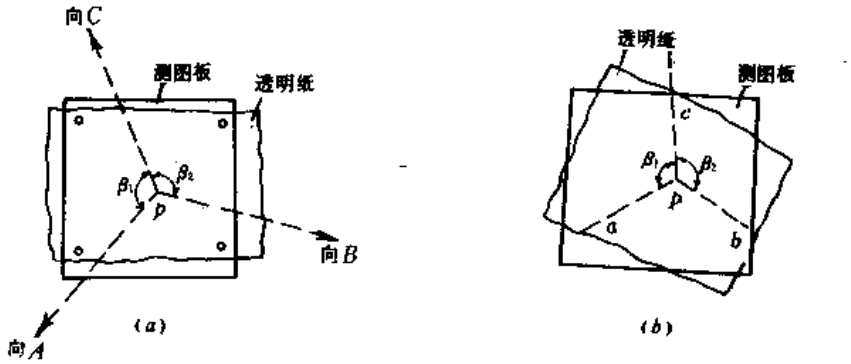



图 13-28

纸并在测图板上移动，直至三条方向线通过测图板上相应的$a$、$b$、$c$三点，如图13-28（$b$）；然后把透明纸上的$p$点刺到图纸上，即得所求的待定点。为了检核，以$p$与$a$、$b$、$c$三点中距离较长的直线进行定向，然后通过其余两个点照准其相应的地面点，此时用直尺边所画的直线都应通过$p$点。

## §13-7 平板仪导线

平板仪导线也是若干有联系的导线边所组成，不过它的边长是用视距法测定，相邻导线边之间的联系是以图解法确定的。由于边长是用视距法测定的，所以在测定边长的同时，还可测定相邻导线点之间的高差。

按测设方法的不同，平板仪导线分为复觇和单觇两种。根据已知直线定向并且每点设站而对每条导线边作往返观测的，叫做复觇导线。根据定向罗盘定向并且隔点设站的叫做单觇导线。今分别介绍于下。

### 一、平板仪复觇导线

测设平板仪复觇导线时，如图13-29所示，先将平板仪安置在已知起始点$A$，瞄准较远的已知点$M$借以精确标定测图板方向，然后照准前标尺描绘方向线$ac$，并用视距法测定其距离，以盘左盘右两位置测定高度角。方向线不要画得太长，以能刺出被测定点为限，

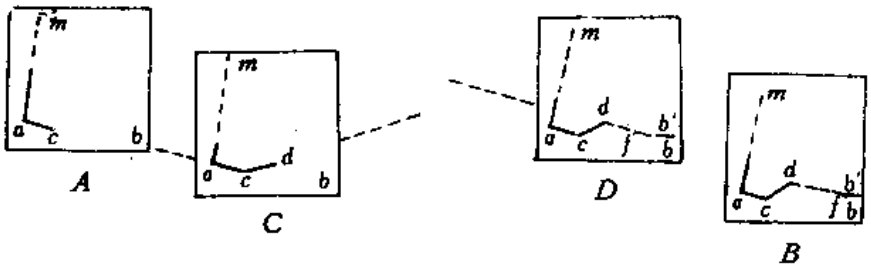



图 13-29

但为了下一站精确标定测图板起见，应在图廓外绘出该线的延长部分。以视距法测得的斜距，当其倾斜改正数大于图上0.1mm时，即应进行倾斜改正。用两脚规按测图比例尺截取所测定的距离，并于所绘方向线上刺出被测定点$c$。量取仪器高，并于搬仪器前算出高差。

在$A$点观测结束后，即将仪器搬至$C$点，原立于$C$点的视距尺转至下一点$D$，另一视距尺留在$A$点。仪器安置后，按照前一测站所绘方向线$ac$标定测图板，再测定$CA$的距离，并按比例尺在测图板上截取之，以检查在前一测站所刺的$C$点是否正确。然后依次进行下列工作：观测后视标尺的高度角；照准前视标尺描绘方向线；观测前视标尺的高度角，用视距法测定其距离，并于所绘方向线上刺出下一导线$d$；量仪器高；计算至后视点的高差，若往返测高差之较差不超过限差，取其中数，最后计算至前视导线点的高差。

以后各站的工作，均按上述程序进行；直至最后的已知点$B$为止。

如果最后测得$B$点在测图板上的位置为$b'$，与原来图上位置$b$的差异即导线的全长闭合差。设导线在图上的长度为14cm，全长闭合差为0.5mm，则导线的全长相对闭合差为1/280；如果容许的全长相对闭合差为1/200，则可按与边长成比例的原则用平行线法改正之，如图13-30所示。如果导线的全长闭合差是0.4mm，则可将导线全长分为四等分改正之。

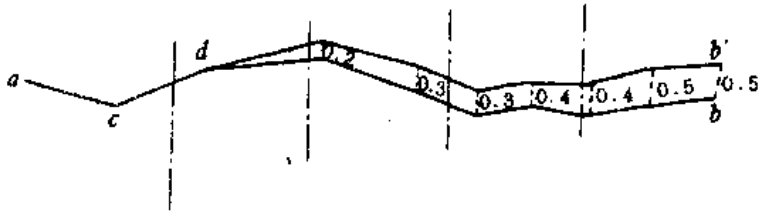



图 13-30

如果全长闭合差超限，则从最后已知点起，反方向进行施测，直到在某一点上的不符值小于规定的限差时为止。此项不符值亦按与边长成比例的原则用平行线法向两端进行分配。

整个导线的高程闭合差的计算及其分配方法，与三角高程路线相同。

平板仪导线作业中以定向误差及两脚规截取图上距离所产生的误差对导线的精度影响较大，因此在导线全长不超过规定限值的情况下，于已知点间选择导线点时，应注意选择使导线边较长而导线点最少的路线；在安置仪器时，应尽量使仪器精确对中，这样就可减低定向误差和截取图上距离所产生误差的影响。当然，由于视距法测距的相对精度与距离有关，一般规范又根据不同比例尺的测图，对最大边长作了规定。

### 二、平板仪单视导线

在森林阴蔽地区，平板仪导线的边长往往很短，这时如用定向罗盘定向，其精度反比根据短边定向的精度为高，而且速度也快，在这种情况下，一般采用平板仪单视导线。但是必须注意平板仪单视导线只是在没有磁力异常的情况下才能采用。

测设单视导线时（图13-31），应先在起点 $a$ 上整置仪器，根据能通视的已知方向线 $am$ 标定测图板，然后放上定向罗盘，使磁针两端对准0°，沿定向罗盘的边缘画一直线。照准立于 $c$ 点的标尺，画方向线；用视距法测定距离，以盘左盘右两位置测定高度角，并按规定的比例尺在所绘方向线上截取此距离，得 $c$ 点；量仪器高；最后可算出 $a$、$c$ 两点间的高差。

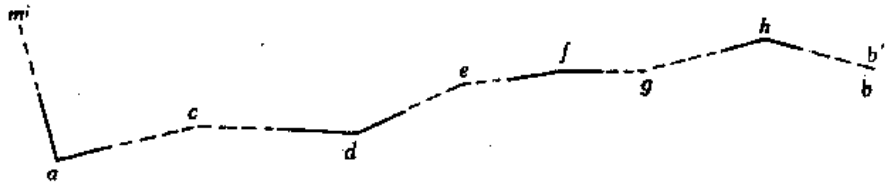



图 13-31

在 $A$ 点的工作结束后，将仪器搬至 $d$ 点，$c$ 点的标尺不动，另在 $e$ 点立一标尺。然后依次进行下列工作：将定向罗盘的边缘切于在 $a$ 站沿罗盘边缘所画的直线，转动测图板使磁针的两端对准于0°，以标定测图板的方向；使直尺边缘通过图上的 $c$ 点，反视地面上的 $c$ 点目标，用视距法测定 $cd$ 的距离，并按比例尺截取此距离以得 $d$ 点；使直尺边缘通过图上的 $d$ 点，照准 $e$ 点的标尺，画方向线，并按比例尺截取以视距法测得的距离 $de$，得 $e$ 点；以盘左盘右两位置观测前后标尺的高度角；量仪器高；根据测得数据计算 $d$ 点至 $c$、$e$ 两点的高差。

以后即隔站设置仪器，并重复在 $d$ 点上的工作，直至最后一站为止。

全长闭合差及其分配，高程闭合差的计算及其分配，均与复视导线同。

## §13-8 大平板仪的检验和校正

平板仪作为用图解法测定水平角的仪器来说，它必须具备§7-6所述经纬仪应满足的条件。但是由于以画直线代替了水平度盘读数，故用以画直线的直尺边应当是笔直的。平板仪还用以测定竖直角，所以竖盘的指标差也应等于0°。综合这些必须满足的条件，对平板仪的照准仪应作如下的检验和校正。

### 一、照准仪直尺的斜边应成一直线

检验直尺的斜边时，将照准仪放在测板上．用削得很尖的铅笔沿直尺斜边画一条与直尺一样长的直线，然后将照准仪调头而放到所画直线的另一边，根据原直线两端点，再画一条直线。如果所画的两条直线重合，则表示条件满足，否则送修理机构进行修整。

### 二、照准仪直尺上的水准管轴线应平行于直尺的底平面

检验时将照准仪放在测板的中央，并使水准管与两个脚螺旋的连线平行，沿着直尺斜边画一直线，并转动脚螺旋使气泡居中，然后将照准仪的两端调头，使直尺斜边仍贴在原来的直线上，同时支柱仍放在测板的中央，若此时气泡仍然居中，则此条件是满足的．否则应拨动水准管上的校正螺旋使气泡向中间移动所偏出弧长的一半，而另一半用脚螺旋整平测板移动之。这一检验校正要重复进行直至条件满足为止。

### 三、十字丝的竖丝应在望远镜的视准面内

此项检验校正与经纬仪中十字丝竖丝应垂直于横轴的检验校正相同。

### 四、视准轴应垂直于横轴

首先使测板水平，以望远镜大致水平的位置瞄准远处一明显目标．并沿直尺斜边画一直线，在线上接近观测者的一端定一点，倒转望远镜，并将整个照准仪调头，使直尺斜边仍经过刚才所定的一点，再瞄准原来的目标，又沿直尺斜边画一直线，若两直线重合，则表示条件已满足，否则、两直线交成一夹角，把直尺边放在所交夹角的分角线上，利用十字丝的校正螺旋，使十字丝交点对准远处的原目标。

### 五、横轴应平行于照准仪直尺的底平面

整平测板后，在距仪器约30m处，先瞄准一高点．并沿直尺斜边画一直线，再以望远镜大致水平位置瞄准另一低点并作标志；然后倒转望远镜并将整个照准仪调头，使直尺斜边仍与原画的直线．同样先照准高点，再放平望远镜照准低点，若仍照准原标志的低点．则条件满足，否则需进行校正，两低点的差异即为横轴误差影响的两倍。

校正时．应根据检查的情况确定横轴倾斜的方向，然后按校正经纬仪横轴倾斜的方法一样．利用有关螺旋改正两个低点差的一半，对于象PG3-X2型一类的光学平板仪．照准仪的支柱与一块金属板连成一整体，在这块金属板上装有水准管，并有一微倾螺旋可使该板的一边上下升降，因此横轴两端的高低能随着改变，按校正经纬仪横轴的道理，旋转该微倾螺旋使横轴的位置能满足与直尺底面平行的条件．此时金属板上的水准管气泡若偏离中央，用此水准管的校正螺旋使气泡居中。在以后的工作中．只要在每次观测时旋转金属板上的微倾螺旋使水准气泡居中，则横轴即在水平位置。对于照准仪支柱固连在直尺上的照准仪，可将有关的固定螺丝松开（一般在直尺的底面），于适当位置垫以纸片再加以固定。

在山区作业时，此项检验校正应特别仔细，若发现横轴倾斜很大，在校正后，还必须重新检验视准轴是否垂直于横轴。

### 六、视准面应通过直尺的斜边或与它平行

检验时可将十字丝交点对准远处一点，并沿直尺斜边画一直线，在此直线的两端插两根细针，然后看这两根细针是否遮住所瞄准的点，如果遮住了，则此条件满足，否则将固定支柱于直尺上的螺旋放松，转动支柱使条件满足。对于那种也是利用这些螺旋校正横轴的照准仪，经过这一项检校后，要重新检验横轴是否仍平行于直尺的底平面。

### 七、竖盘的指标差应等于零

这一项的检校方法与经纬仪同。

除了对照准仪应作上述的检验校正外，还应对附件进行必要的检验校正。关于水准器附件的检验校正原理和方法，与水准仪或经纬仪上有关的检验校正相同。定向罗盘的检验校正，主要检查磁针是否灵敏。凡不够灵敏的，若因顶针磨损则磨尖之，磁性失效的则增强磁性。若磁针不平衡，则移动针上的铜丝圈使其平衡。至于对点器的检验校正，如图13-32所示，检验时，置测板于水平位置，将对点器的尖端对准测板上的$m$点，

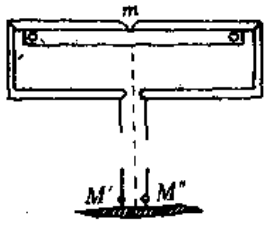


图 13-32

并在地面上标出对应于垂球尖端的$M'$点，然后把对点器放在测板的对称边，仍对准$m$点，若此时垂球尖端仍对着$M'$点，则表示条件已满足，假如垂球尖端对到另一点$M''$，则对点器必须校正。校正的方法即稍微移动一下挂垂球线的位置，使垂球尖端对准$M'M''$的中点。

# 第十四章 碎 部 测 量

碎部测量是利用平板仪、经纬仪或水准仪等仪器在某一测站点上测绘各种地物、地貌的平面位置和高程的工作。

为了在测站点上测绘地物、地貌，首先必须确定这些地物、地貌的特征点（又称碎部点），如房角、道路交叉口、山顶、鞍部、山谷等在图上的位置和高程。在测定足够数量碎部点的基础上，然后根据这些碎部点对照实地情况，以相应的符号在图上描绘各种地物、地貌。因此，碎部测量的工作主要包括两个过程：一个是测定碎部点的平面位置和高程，一个是在图上描绘地物、地貌。这两个过程在碎部测量中是互相配合的，一面测定碎部点，一面随即描绘地物符号、地性线（见§14-4）、地貌符号，这样可以避免错误和遗漏。

碎部测量是在测站上进行工作的。因此，选好测站点的位置，是测好碎部的关键之一。测站点应选择在视野广阔、观察地物和地貌清楚、工作方便的地方。

本章重点介绍碎部测量中地物、地貌的测绘及其表示，介绍碎部测量的几种方法以及等高线的应用等主要内容。

## §14-1 测定碎部点的方法

### 一、极坐标法

极坐标法是根据测站点上的一个已知方向，测定已知方向与所求点方向间的角度和量测测站点至所求点的距离，以确定所求点位置的一种方法。

这是大比例尺平板仪测图最主要的方法。如图14-1中，$A$、$B$为地面上两个已知测站点，在图上的相应点为$a$、$b$。今欲将房屋测绘到图纸上，置平板仪在$A$点上，经整平、对中，以$ab$进行定向后，用照准仪瞄准房屋的房角1，在图纸上绘出$a1'$的方向线，用视距（或用皮尺丈量）测出$A1$的距离，根据所用的测图比例尺化算得图上长度为$a1'$，则地面上房角1在图上的位置为$1'$。用同样的方法可测得房角$2'$、$3'$，根据房屋的形状，在图上连接$1'$、$2'$、$3'$各点便可得到房屋在图上的位置。

极坐标法适用于通视良好的开阔地区，施测的范围较大。测定地物时，绝大部分特征点的位置都是独立测定的，不会产生误差的累积。少数特征点测错时，在描绘地物、地貌时一般能从对比中发现，便于现场改正。

### 二、方向交会法

方向交会法（又称角度交会法），是分别在两个已知测点上对同一个碎部点进行方向交会以确定碎部点位置的一种方法。

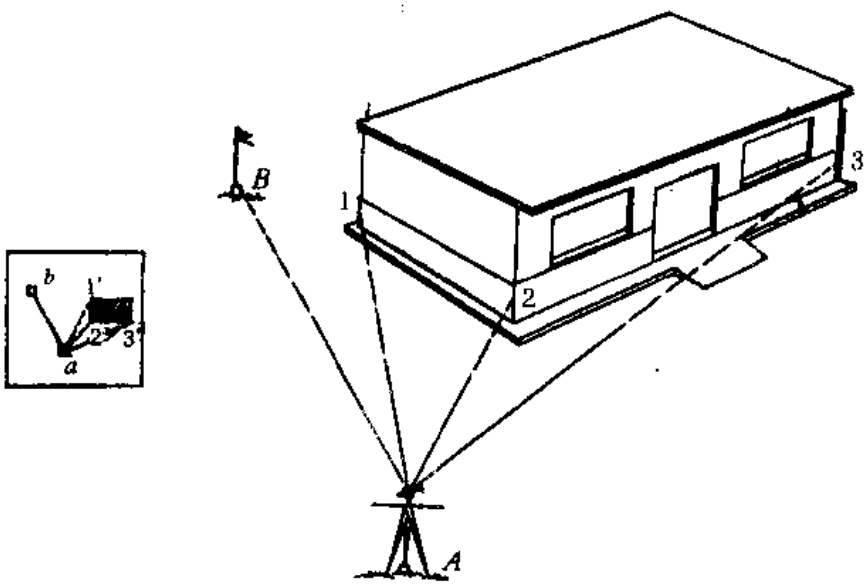



图 14-1

如图14-2所示，$A$、$B$为地面上两个已知测站点，其在图上的相应点为$a$、$b$。今欲将河流对岸的电杆$C$和独立树$D$测绘到图上，首先置平板仪于$A$点，经整平、对中、以$ab$线定向后，用照准仪瞄准电杆$C$，在图板上绘出$ac'$的方向线。依次瞄准独立树$D$，在图板上绘出$ad'$的方向线。然后将平板仪搬至$B$点，经整平、对中，以$ba$线定向后，用同样的方法瞄准$C$、$D$各点，在图板上可绘出$bc''$、$bd''$方向线。由$ac'$与$bc''$两条方向线相交得$c$点，由$ad'$与$bd''$两条方向线相交得$d$点。$c$、$d$两点即为实地上电杆$C$和独立树$D$在图板上的位置。

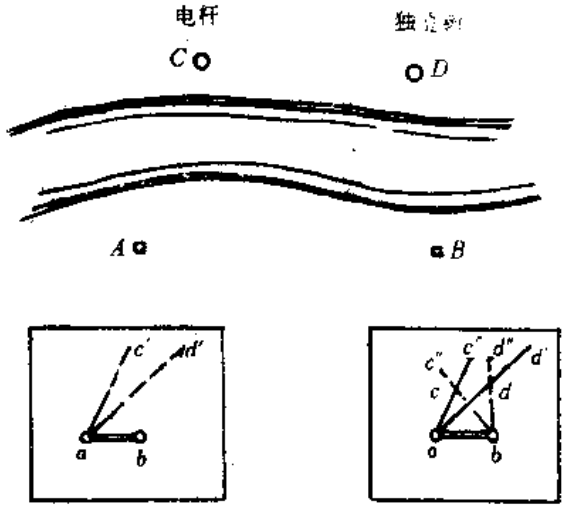



图 14-2

方向交会法常用于测绘目标明显，距离较远，易于瞄准的碎部点。如电杆、水塔、烟囱等地物。方向交会法的优点是可以不测距离而求得碎部点的位置，若使用恰当，可以节省立尺点的数量，以提高作业速度。极坐标法和方向交会法常常是互相配合使用的。

以上只讲到了确定碎部点的平面位置，如果需要确定碎部点的高程，则必须测得测站至碎部点的竖角。极坐标法只要根据仪器测得的竖角和视距，按视距测量中所介绍的方法计算碎部点的高差主值$h$，然后按下式计算碎部点的高程$H$。

$$H = H_0 + h + i - v \tag{14-1}$$

式中：$H_0$——测站点高程；

$i$——测站点仪器高；

$v$——碎部点觇标高。

方向交会法是不读视距的，测站点至碎部点的距离由图上量取（为水平距离），按测图比例尺化算至地面上距离，然后可按下式计算高差主值$h$。

$$h = S \cdot \mathrm{tg}\alpha \tag{14-2}$$

式中：$S$——测站点至碎部点的水平距离，由图上量取，按测图比例尺化算而得；

$\alpha$——测站点仪器瞄准碎部点的地面位置的竖角。

在实际作业中，高差主值$h$常以$S$和$\alpha$为引数，从《高差计算表》中直接查取，或者用电子计算器进行计算。

为使计算简便，可将（14-1）式化简。若使$H_0 + i - v$为一个整数$M$，则（14-1）式可化简为

$$H = M + h \tag{14-3}$$

式中

$$M = H_0 + i - v$$

例如某测站高程$H_0 = 40.38\text{m}$，仪器高$i = 1.54\text{m}$。代入（14-1）式得

$$H = 40.38 + 1.54 - v + h = 41.92 - v + h$$

上式可改写为

$$H = 41.00 - 0.92 - v + h$$

或

$$H = 40.00 + 1.92 - v + h$$

从上面的等式中知道，如果在测定碎部点读取竖角时，仪器中丝对准标尺上0.92m处或1.92m处，即$v = 0.92\text{m}$或$v = 1.92\text{m}$，则上面等式可化简为

$$H = 41.00 + h$$

或

$$H = 40.00 + h$$

这样得出的41.00m或40.00m的整数，便于记忆和计算高程，称为便利高。

施测完碎部点的平面位置和高程以后，应立即在碎部点旁注记碎部点的高程。如“·53.2”或“·48.7”(高程以米为单位)。

## § 14-2 碎部测图的方法

碎部测图的方法，按使用的仪器不同，一般有如下几种：

### 一、平板仪测图

平板仪是碎部测图中常用的一种仪器。测图的步骤如下：

1.在测站上整置仪器，进行对中、整平、定向工作，并量取仪器高；

2.用照准仪瞄准碎部点上的视距尺，使照准仪的直尺边正确地通过图板上测站点的刺孔，读取测站至标尺的视距和竖角，根据《高差计算表》查取高差主值$h$，按（14-1）式计算高程；

3.按测图比例尺，用卡规（或叫两脚规）在复式比例尺（或三棱尺）上截取水平距离在图上的长度，沿照准仪的直尺边将碎部点刺于图板上，并在点位旁注记高程；

4.重复上述2、3步骤，将测站四周所要测的全部碎部点测完为止；

5.根据所测的碎部点，按规定的图式符号，着手描绘地物、地貌。并随时注意和实地对照检查，发现错误立即改正。必须经检查后，方可迁至下一测站工作。

## 二、小平板仪配合经纬仪测图

在大比例尺测图中，采用小平板仪配合经纬仪进行碎部测图比较方便。测图步骤如下：

1.首先将经纬仪安置在距测站点1～2m处便于观测的适当位置，经整平后，将经纬仪望远镜视准轴置于水平位置，在测站点上竖立标尺，将望远镜对准标尺，读取中丝读数 $i$ 作为仪器高。如图14-3所示；

2.将小平板仪安置在测站点上，经对中、整平、定向后，用测斜照准仪瞄准经纬仪垂球线，并量取测站点至经纬仪的距离，沿直尺斜边按所用测图比例尺，将经纬仪的位置在图板上标出。如图14-4所示，$a$ 为测站点，$d$ 为经纬仪在图板上的位置；

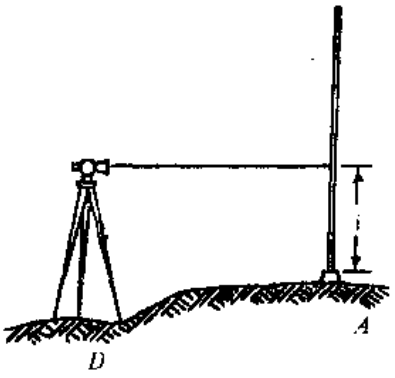



图 14-3

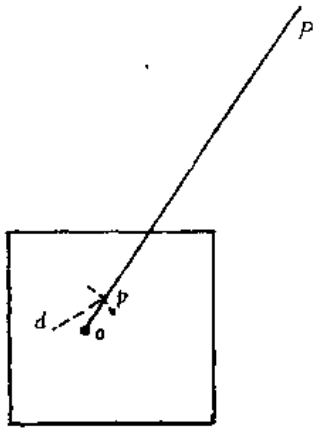



图 14-4

3.测定碎部点时，首先在图板上 $a$ 点处插一测针，用测斜照准仪紧靠测针照准碎部点 $P$ 上的标尺，在图板上绘出方向线 $ap$。由经纬仪观测 $P$ 点的标尺，读取视距和竖角，计算出 $D$ 点至 $P$ 点的水平距离及 $P$ 点的高程，按测图比例尺用卡规截取图上距离 $dp$，以 $d$ 点为圆心，以 $dp$ 为半径画弧，与 $ap$ 方向线相交于 $P$ 点，即为所测碎部点 $P$ 在图上的位置，并在点位旁注记高程，如图14-4所示；

4.按第3步骤的方法，将测站周围所需要测的全部碎部点测完；

5.根据测得的碎部点，按规定的图式符号描绘地物、地貌。经检查后，即可迁站。

在平坦地区，小平板仪也可配合水准仪进行测图。其方法基本与小平板仪配合经纬仪测图相同，仅是由于用水平视线读数，故求高差的原理同水准测量，这里就是：$h=i-v$ 因为受视线水平的限制，为了能在一个测站上测较多的碎部点，可使用较长的地形尺。

## 三、经纬仪测图

采用经纬仪与分度规（又称量角器）配合进行碎部测图，它的优点是使用灵活方便，不必配备平板仪，速度和精度均能达到一定的要求。

### （一）分度规极坐标展点测图

施测方法如图14-5所示。在测站点$A$上整置经纬仪，选择另一控制点$B$作为起始方向（或称零方向），然后照准所要测的碎部点$P$上的标尺，读出与起始方向之间的水平角、视距和竖角。图板可安放在经纬仪一旁的适当位置，将分度规的中心圆孔固定在图板上$a$点，按经纬仪所测的碎部点$P$与起始方向之间的水平角放置分度规，并在分度规直径刻划上，按测站点至碎部点的水平距离按测图比例尺截取图上长度，即可定出碎部点$P$在图上的位置。根据经纬仪所测的竖角及视距，并量取仪器高，用（14-1）式可求出碎部点的高程。

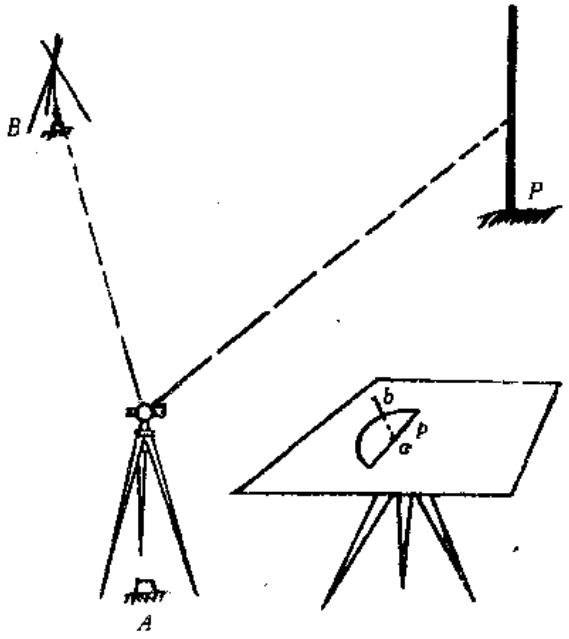


图 14-5

### （二）直角坐标展点测图

上述极坐标展点测图的水平距离是用普通视距测量进行的。测站点至碎部点的距离受到视距精度的限制而不太长。若将轻便的小型光电测距仪安置于经纬仪上，则施测碎部点的距离可大为增长。这对于充分发挥测站点的作用是很有利的。若仍用分度规按极坐标展点，分度规的角度精度对长距离的碎部点在图上的位置将会引起较大的移动，从而影响测图精度。解决这一问题的办法是采用直角坐标展点。

为了直接由经纬仪读出测站点至碎部点的坐标方位角，经纬仪在照准已知点$B$定向时（图14-5）应将度盘配置成$AB$的坐标方位角$\alpha_{AB}$。这样，在经纬仪照准碎部点$P$时的读数就直接是$AP$的坐标方位角$\alpha_{AP}$了。

按坐标正算公式：

$$x_P = x_A + S_{AP}\cos\alpha_{AP}$$

$$y_P = y_A + S_{AP}\sin\alpha_{AP}$$

用计算器算出$P$点的坐标，然后在图板上直接按坐标值$x_P$、$y_P$展绘，即得$P$点在图上的位置。

展绘$P$点的工具可用特制的展点仪，也可用边缘刻有毫米分划而质量较高的三角板。

## 四、水平板仪与皮尺配合测图

在平坦地区，作大比例尺测图时，还可利用小平板仪与皮尺配合进行碎部测图，即将

小平板仪安置在测站点上，用测斜照准器来瞄准碎部点的方向，距离直接用皮尺量出。使用这种方法时，测站点到碎部点的距离不能太长，它适用于测绘地物平面图。在城市中经常用这种方法修测地形图。

## §14-3 地物的测绘

### 一、测绘地物的一般原则

地物一般可分为两大类：一类是自然地物，如河流、湖泊、森林、草地、独立岩石等。另一类是经过人类物质生产活动改造了的人工地物，如房屋、高压输电线、铁路、公路、水渠、桥梁等。所有这些地物都要在地形图上表示出来。

地物在地形图上的表示原则是：凡是能依比例尺表示的地物，则将它们水平投影位置的几何形状相似地描绘在地形图上，如房屋、双线河流、运动场等。或是将它们的边界位置表示在图上，边界内再绘上相应的地物符号，如森林、草地、沙漠等。对于不能依比例尺表示的地物，在地形图上是以相应的地物符号表示在地物的中心位置上，如水塔、烟囱、纪念碑、单线道路、单线河流等。

测绘地物必须根据规定的测图比例尺，按规范和图式的要求，经过综合取舍，将各种地物表示在图上。国家测绘局和有关的勘测部门制定的各种比例尺的规范和图式，是测绘地形图的依据，必须遵守。

地物测绘主要是将地物的形状特征点测定下来，例如：地物的转折点、交叉点、曲线上的弯曲交换点、独立地物的中心点等。连接这些特征点，便得到与实地相似的地物形状。

### 二、居民地的测绘

居民地房屋的排列形式很多，农村中以散列式即不规则的排列房屋较多，城市中的房屋排列比较整齐。

测绘居民地根据所需测图比例尺的不同，在综合取舍方面就不一样。对于居民地的外轮廓，都应准确测绘。其内部的主要街道以及较大的空地应区分出来。对散列式的居民地、独立房屋应分别测绘。

测绘房屋时，只要测出房屋三个房角的位置，即可确定整个房屋的位置。如图14-6所示，在测站 $A$（或$B$）安置仪器，标尺立在房角1、2、3（或4、5、6），用极坐标法即可定出房屋的位置。

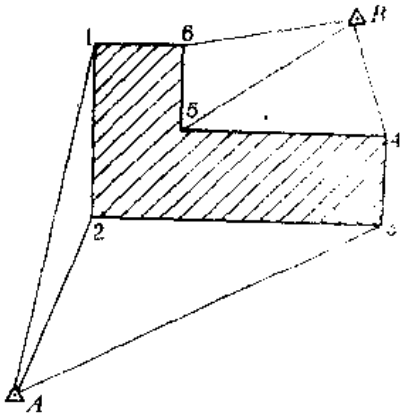


图 14-6

### 三、道路的测绘

（一）铁路

铁路符号按图式规定表示，测绘铁路时，标尺应立于铁轨的中心线上。对于1:2000或

更大比例尺测图时，可测定下列点位，如图14-7（路堤部分的断面），特征点1用于测绘铁路的平面位置；特征点2、3用于测绘路堤部分的路肩位置；特征点4、5用于测绘路堤的坡足或边沟的位置。有时特征点2、3可以不立尺而是量出铁路中心至它们的距离直接在图上绘出。铁路线上的高程是测铁轨面的高度，因此，在测出铁路中心位置后，应将标尺移至轨面上测定高程（曲线部分测内轨面），但图上注记仍标在中心。

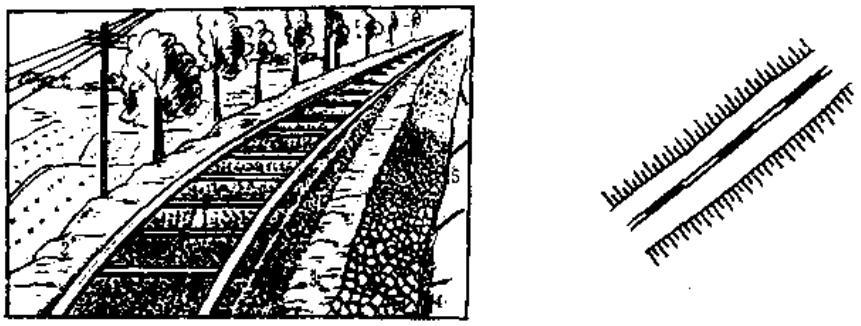


图 14-7

图14-8是路堑部分的断面，与路堤比较可以看出除1、2、3、4、5点要立尺之外，在6、7点路堑的上边缘也要立尺。



图 14-8

铁路的直线部分立尺点可稍稀一些，在曲线部分及道岔部分立尺点就要密一些，这样才能正确地表示出铁路的实际位置。

铁路两旁的附属建筑物如信号灯、板道房、里程碑等，都要按实际位置测出。

（二）公路

公路在图上一律按实际位置测绘。在测量方法上有的采用将标尺立于公路路面中心，有的采用将标尺交错立在路面两侧，也可以将标尺立在路面的一侧，实量路面的宽度，作业时可视具体情况而定。

公路的转弯处，交叉处，标尺点应密一些，公路两旁的附属建筑物都应按实际位置测出，公路的路堤和路堑的测绘方法与铁路相同。

大车路一般指农村中比较宽的道路，有的还能通行汽车，但是没有铺设路面。这种路

的宽度大多不均匀，道路部分的边界不十分明显。测绘时可将标尺立于道路中心，以地形图图式规定的符号描绘于图上。

人行小路主要是指居民地之间来往的通道，田间劳动的小路一般不测绘，上山小路应视其重要程度选择测绘。如该地区小路稀少应少舍去。测绘时标尺立于道路中心，由于小路弯曲较多，标尺点的选择要注意弯曲部分的取舍。既要使标尺点不致太密，又要正确表示小路的位置。

人行小路若与田埂重合，应绘小路不绘田埂。有些小路虽不是直接由一个居民地通向另一个居民地，但它与大车路、公路或铁路相连，这时应根据测区道路网的情况决定取舍。

## 四、管线的测绘

架空管线、在转折处的支架塔柱应实测，位于直接部分的可用挡距长度在图上以图解法确定。塔柱上有变压器时，变压器的位置按其与塔柱的相应位置绘出。电线和管道用规定的符号表示。

## 五、水系的测绘

水系包括河流、渠道、湖泊、池塘等地物，通常无特殊要求时均以岸边为界，如果要求测出水涯线（水面与地面的交线）、洪水位（历史上最高水位的位置）及平水位（常年一般水平的位置）时，应按要求在调查研究的基础上进行测绘。

河流的两岸一般不大规则，在保证精度的前提下，对于小的弯曲和岸边不甚明显的地段可进行适当取舍。对于在图上只能以单线表示的小沟，不必测绘其两岸，只要测出其中心位置即可。渠道比较规则，有的两岸有堤，测绘时可以参照公路的测法。对那些田间临时性的小渠不必测出，以免影响图面清晰。

湖泊的边界经人工整理、筑堤、修有建筑物的地段是明显的，在自然耕地的地段大多不甚明显，测绘时要根据具体情况和用图单位的要求来确定以湖岸或水涯线为准。在不甚明显地段确定湖岸线时，可采用调查平水位的边界或根据农作物的种植位置等方法来定。

## 六、植被的测绘

测绘植被是为了反映地面的植物情况。所以要测出各类植物的边界，用地类界符号表示其范围，再加注植物符号和说明。

如果地类界与道路、河流、拦栅等重合时，则可不绘出地类界，但与境界、高压线等重合时，地类界应移位绘出。

在测绘地物的过程中，有时会发现图上绘出的地物与地面情况不符，例如本应为直角的房屋角，但图上不成直角；在一直线上的电杆，但图上不在一直线上等等。在外业要很好检查产生这种现象的原因，如果属于观测错误，则必须立即纠正。若不是观测错误，则可能是由于各种误差的积累所引起的，或在两个测站观测了同一个地物的不同部位所引起。当这些不符的现象在图上小于规范规定的地物误差时，则可以采用分配的办法予以消除，使地物的形状与地面相似。

## §14-4 地貌在地形图上的表示

地形图上所表示的内容除地物外，另一部分内容就是地貌。

地貌是指地球表面高低起伏，凹凸不平的自然形态。地球表面的形态，主要是由地球本身内部矛盾运动（内力和外力作用）的结果而形成的。因此，地球表面的自然形态多数是有一定规律性的，认识了这种规律性，然后采用恰当的符号，即可将它表示在图纸上了。

### 一、地貌的基本形状及其名称

地貌一般可归纳为五种基本形状：

（一）山。较四周显著凸起的高地称为山，大者叫山岳，小者（比高低于200m）叫山丘。山的最高点叫山顶，尖的山顶叫山峰。山的侧面叫山坡（斜坡）。山坡的倾斜在20°～45°的叫陡坡，几乎成竖直形态的叫峭壁（陡壁）。下部凹入的峭壁叫悬崖，山坡与平地相交处叫山脚，如图14-9所示。

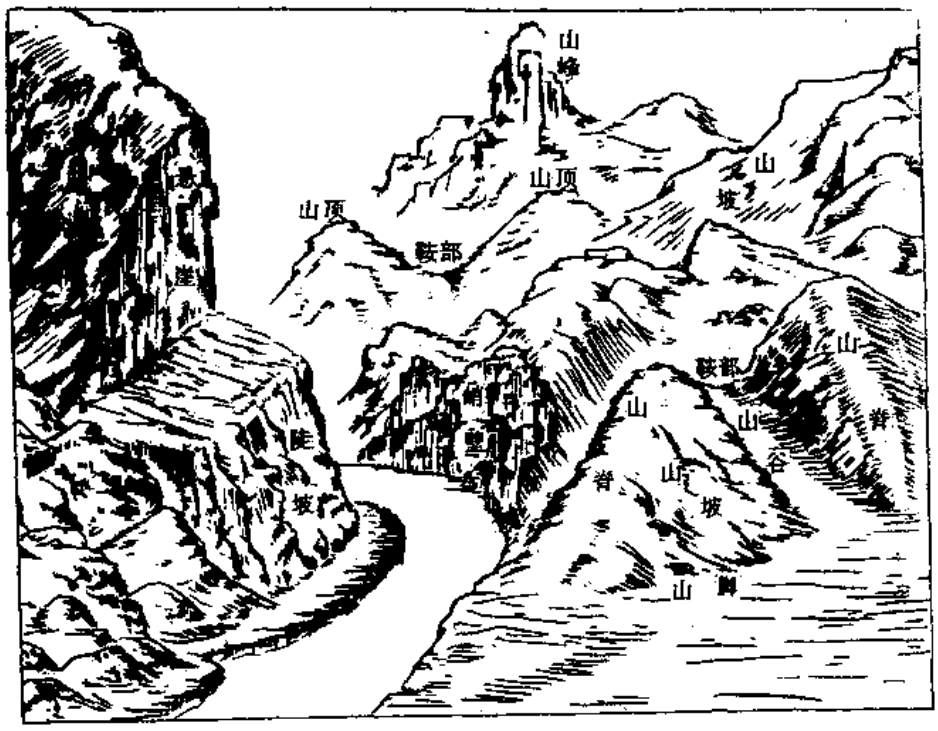



图 14-9

（二）山脊。山的凸棱由山顶延伸至山脚者叫山脊。山脊最高的棱线称分水线（或山脊线）。

（三）山谷。两山脊之间的凹部称为山谷。两侧称谷坡。两谷坡相交部分叫谷底。谷底最低点连线称山谷线（又称合水线）。谷地与平地相交处称谷口。

（四）鞍部。两个山顶之间的低洼山脊处，形状象马鞍形，称为鞍部。

（五）盆地（洼地）。四周高中间低的地形叫盆地。最低处称盆底。盆地没有泄水道，水都停滞在盆地中最低处。湖泊实际上是汇集有水的盆地。

地球表面的形状虽有千差万别，但实际上都可看作是一个不规则的曲面。这些曲面是由不同方向和不同倾斜的平面所组成，两相邻倾斜面相交处即为**棱线**，山脊和山谷都是棱线，也称为**地貌特征线**（**地性线**）。如果将这些棱线端点的高程及平面位置测定，则棱线的方向和坡度也就确定。

在地面坡度变化的地方，比较显著的有：山顶点、盆地中心最低点、鞍部最低点、谷口点、山脚点、坡度变换点等，这些都称为地貌特征点。

这些特征点和特征线就构成地貌的骨骼。在地貌测绘中，立尺点就应选择在这些特征点上。

## 二、等高线表示地貌的方法

在地形图上，显示地貌的方法很多，目前常用的是等高线法。等高线能够真实反映出地貌形态和地面高低起伏。

（一）等高线的概念

在图14-10中，有一高地被等距离的水平面$P_1$、$P_2$、$P_3$所截，在各平面上得到相应的截线，将这些截线沿铅垂方向投影（即垂直投影）到一个水平面$M$上，便得到了表示该高地的一圈套一圈的闭合曲线，即**等高线**。所以等高线就是地面上高程相等的相邻各点连成的闭合曲线，也就是水平面与地面相交的曲线

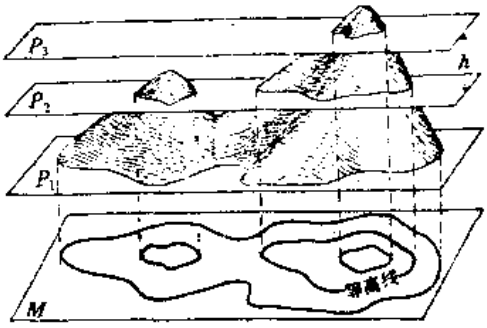


图 14-10

（二）等高距及示坡线

从上述介绍中可以知道，等高线是一定高度的水平面与地面相截的截线。水平面的高度不同，等高线表示地面的高程也不同。相邻两等高线之间的高差称为**等高距**。等高距愈小则图上等高线愈密，地貌显示就愈详细、确切。等高距愈大则图上等高线就愈稀，地貌显示就愈粗略。但不能由此得出结论认为等高距愈小愈好。事物总是一分为二的，如果等高距很小，等高线非常密，不仅影响地形图图面的清晰，而且使用也不便，同时使测绘工作量大大增加。因此，等高距的选择必须根据地形高低起伏程度、测图比例尺的大小和使用地形图的目的等因素来决定。

必须指出，在同一幅地形图上一般不能有两种不同的等高距。

用等高线表示地形时，将会发现盆地的等高线和山头的等高线在外形上非常相似。如图14-11*a*表示的为盆地地貌的等高线，图14-11*b*所表示的为山头地貌的等高线，它们之间的区别在于，山头地貌是里面的等高线高程大，盆地地貌是里面的等高线高程小。为了便于区别这两种地形，就在某些等高线的斜坡下降方向绘一短线来示坡，并把这种短线叫**示坡线**。示坡线一般仅选择在最高、最低两条等高线上表示（见图14-11*a*），能明显地表示出坡

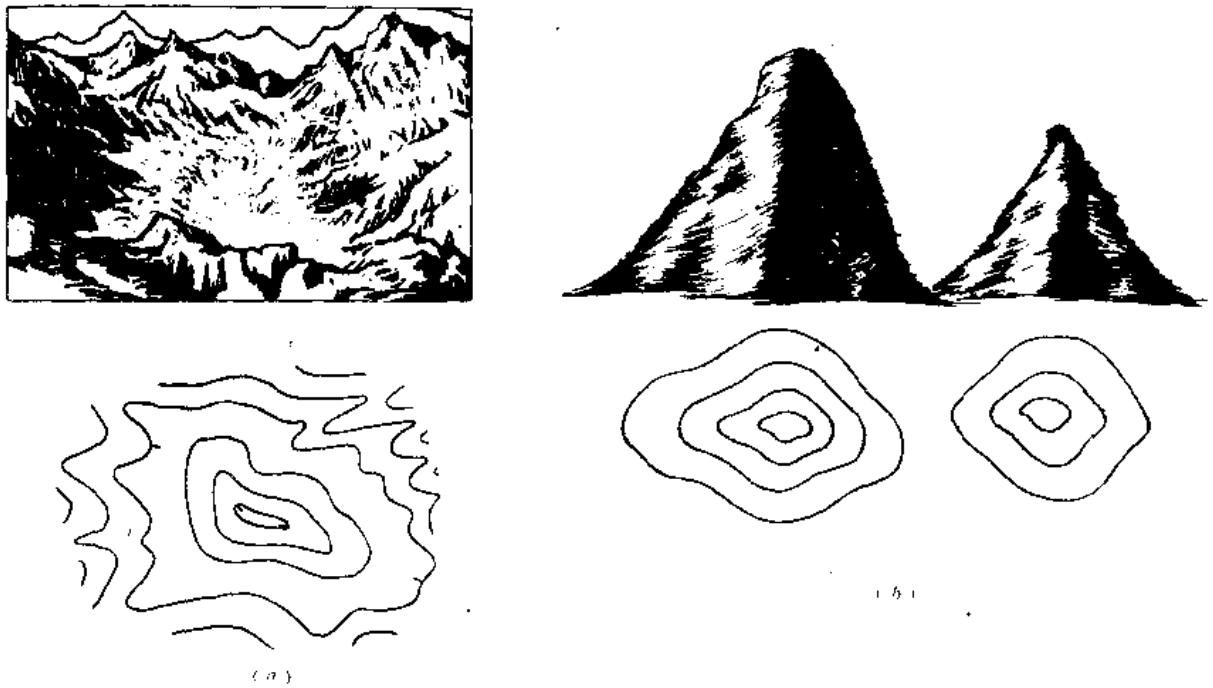


图 14-11

度方向即可。

（三）等高线的分类

为了更好地表示地貌的特征，便于识图用图，地形图上主要采用下列三种等高线：

1.基本等高线（又称**首曲线**），即按基本等高距测绘的等高线。

2.加粗等高线（又称**计曲线**），每隔四条首曲线加粗描绘一根等高线。其目的是为了计算高程方便。

3.半距等高线（又称**间曲线**），是按二分之一基本等高距内插描绘的等高线，以便显示首曲线不能显示的地貌特征。在平地当首曲线间距过稀时，可加绘间曲线。间曲线可不闭合，但一般应对称。图14-12表示首曲线、计曲线、间曲线的情况。

（四）等高线的特性

深刻了解等高线的特性是很重要的，只有这样才能正确地描绘等高线。等高线的规律和特性可归纳如下几条：

1.在同一条等高线上的各点的高程相等。因为等高线是水平面与地表面的交线，而在一个水平面上的高程是一样的，所以等高线的这个特性是很明显的。但是不能得出结论说：凡高程相等的点一定在同一条等高线上。当水平面和两个山头相交时，会得出同样高程的两条等高线（见图14-13）。

2.等高线是闭合的曲线。一个无限伸展的水平面和地表面相交，构成的交线不可能不是一个闭合曲线。所以某一高程的等高线必然是一条闭合曲线。由于具体测绘地形图的范围是有限的，所以等高线若不在同一幅图内闭合，也会跨越一个或多个图幅闭合。按此特性，可得出等高线不能在图中间中断。在具体绘图时，等高线除遇有房屋、公路、某些工

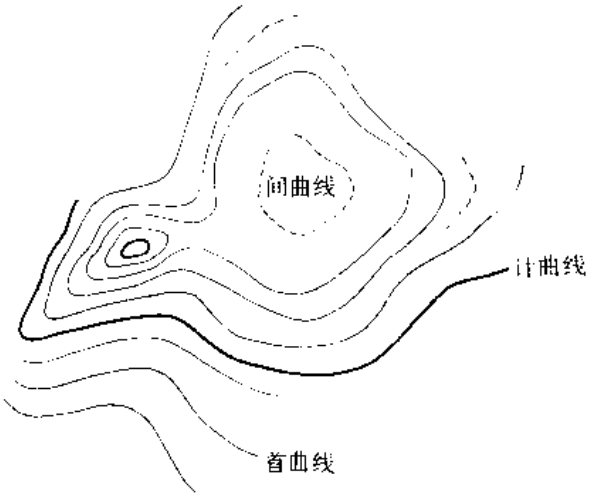



图 14-12

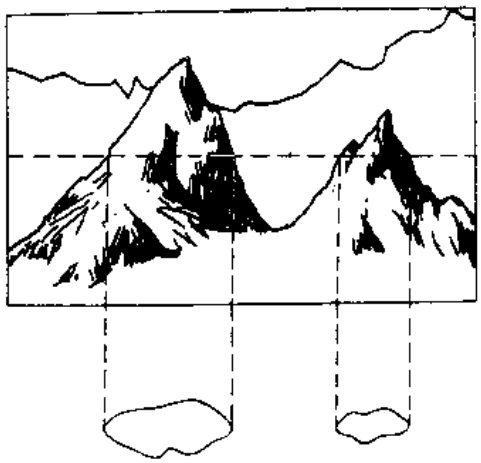


图 14-13

业设施及数字注记等为了使图面清晰需要中间断开之外，其他地方不能中断。只有间曲线可以在不需要表示的地方中断，因为它是辅助首曲线表示地貌的，它只在局部地区使用。

3.不同高程的等高线不能相交。因为不同高程的水平面是不会相交的。所以，它们和地表面的交线也不会相交。但是一些特殊地貌，如陡壁、陡坎的等高线就会重叠在一起（见图14-14），这些地貌必须加用陡壁、陡坎符号表示。通过悬崖的等高线，其投影才可能相交（见图14-15）。

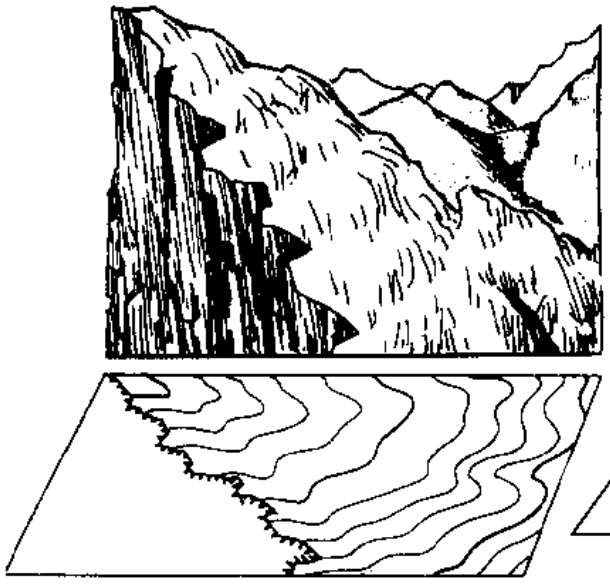


图 14-14

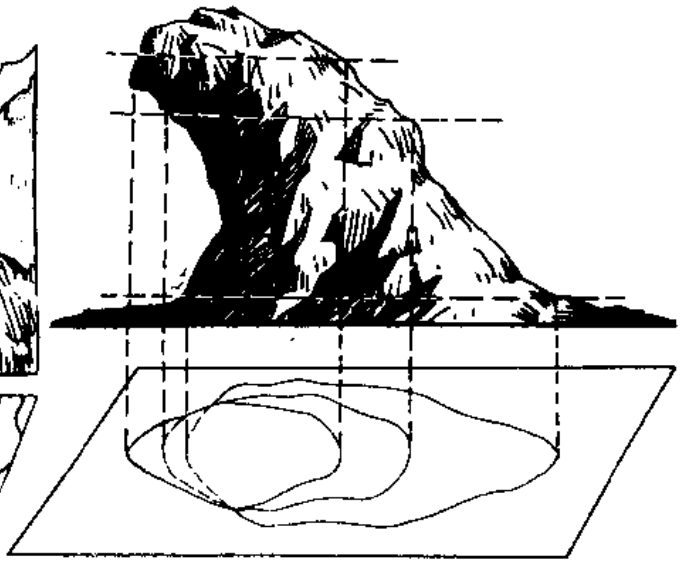


图 14-15

4.等高线与分水线（山脊线）、合水线（山谷线）正交。在山脊线上各点有如下特征：如图14-16所示，过山脊线上任意一点$A$、以$P$、$R$、$H$三平面的交线为一空间直角坐标系，$P$为水平面、$H$为包含山脊线的竖直面（将一微小段的山脊线看作直线）、$R$为与

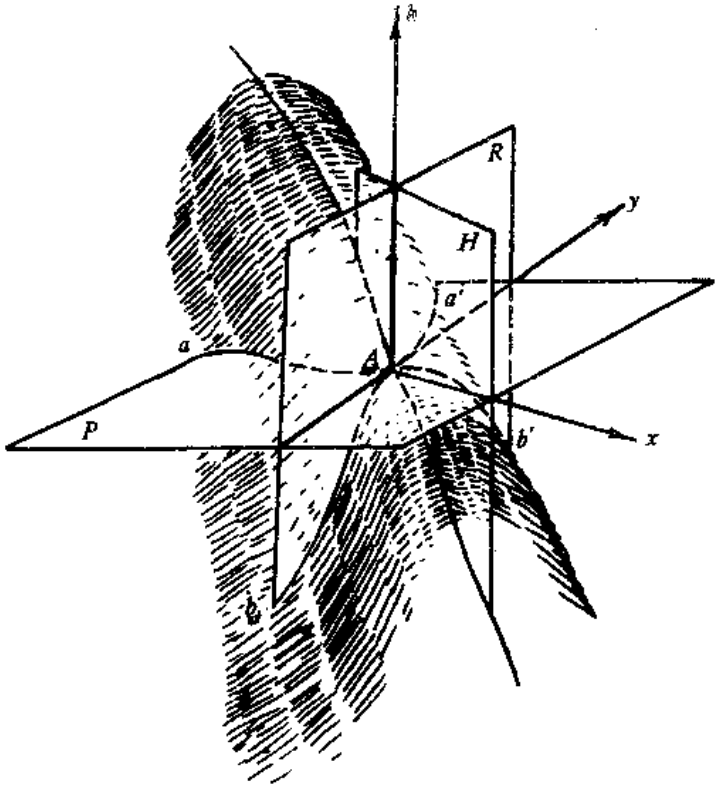



图 14-16

$H$垂直的竖直面。由山脊线的性质可知等高线$aAa'$上的$x$坐标以$A$点为最大，而断面线$bAb'$上的$h$坐标（即高程）亦以$A$点为最大。由此可知$y$坐标轴是等高线$aAa'$和断面线$bAb'$的切线。由于面$H$垂直面$R$，所以山脊线在$P$平面上的投影必在$A$点与此切线垂直。换言之，山脊线在$A$点与等高线垂直。同理可推论山脊线在水平面上的投影将处处与等高线垂直。

5.两等高线间的垂直距离称为平距，等高线间平距的大小与地面坡度的大小成反比。在同一等高距的情况下，如果地面坡度愈小，则等高线在图上的平距愈大；反之，如果地面坡度愈大，则等高线在图上的平距愈小。换句话说，坡度陡的地方，等高线就密；坡度缓的地方，等高线就稀。

等高线的这些特性是互相联系的，其中最本质的特性是第一个特性，其他的特性是由第一个特性所决定的。在碎部测图中，要掌握这些特性，才能用等高线较逼真地显示出地貌的形状。

## §14-5 地貌的测绘

前面介绍了等高线的原理、种类和特性，下面介绍如何测绘等高线的问题。测绘等高线与测绘地物一样，首先需要确定地貌特征点，然后连结地性线，便得到地貌整个骨干的基本轮廓，按等高线的性质，再对照实地情况就能描绘出等高线。

## 一、测定地貌特征点

地貌特征点是指山顶、鞍部、山脊、山谷的地形变换点，山坡倾斜变换点，山脚地形变换点等等。

对以上这些特征点，采用极坐标法或交会法测定其在图纸上的平面位置，用小点表示，并在小点的旁边注记高程。

## 二、连接地性线

测定了地貌特征点后，不能马上描绘等高线，必须先连地性线。通常以实线连成山脊线，以虚线连成山谷线（见图14-17）。地性线连接情况与实地是否相符，直接影响到描绘等高线的逼真程度，必须予以充分注意。地性线应该随着碎部点的陆续测定而随时连接，不要等到所有的碎部点测完后再去连接地性线，以免发生连错点，使等高线不能如实地反映实地地貌的形态。

## 三、求等高线的通过点

完成地性线的连接工作之后，即可在同一坡度的两相邻点之间，内插出每整米高程的等高线通过点。例如，在同一坡度上有相邻的$a$、$b$两点（见图14-18），其高程分别为21.2m和27.6m，从这两个点的高程，可以断定在$ab$直线上能够找出22、23、24……27m等高线所通过的点子。假设$ab$间的坡度是均匀的，则根据$a$和$b$点间的高差为6.4m（即27.6－21.2），$ab$线长（图上平距）为48mm，由$a$点到22m等高线的高差为0.8m，由$b$点到27m等高线的高差为0.6m，则由$a$点到22m等高线及由$b$点到27m等高线的线长$x_1$和$x_2$可以根据相似三角形原理得下列关系式：

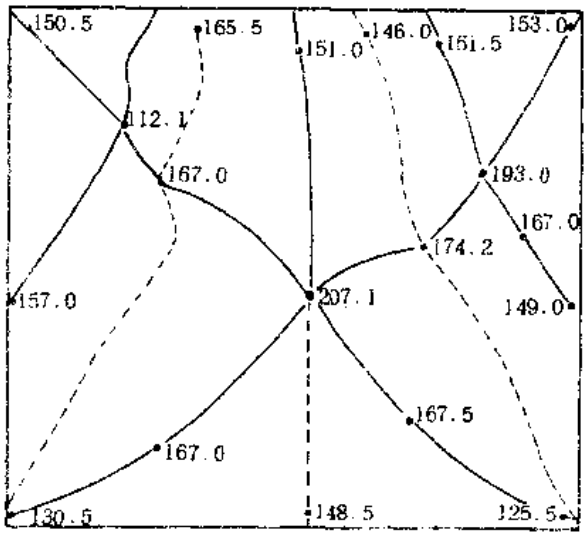



图 14-17

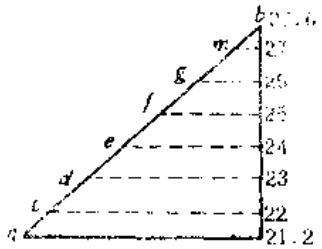



图 14-18

$$\frac{x_1}{0.8}=\frac{48}{6.4}$$

$$\frac{x_2}{0.6}=\frac{48}{6.4}$$

$$x_1 = \frac{48 \times 0.8}{6.4} = 6.0\text{mm}$$

$$x_2 = \frac{48 \times 0.6}{6.4} = 4.5\text{mm}$$

根据$x_1$和$x_2$的长度即可在$ab$直线上截取22m和27m等高线所通过的点$c$和$m$，然后再将$c$、$m$两点之间的距离分为5等分，就得到23、24、25、26m等高线所通过的点子$d$、$e$、$f$、$g$。

用同样的方法，可以截得位在同一坡度上的相邻点间等高线的通过点（如图14-19所示）。

在碎部测图中，由于同一坡度的相邻两碎部点在图上的间隔比较近，所以也常用目估内插法来确定等高线通过的点。这样做，简单、方便，也能得到比较正确的位置。

## 四、勾绘等高线

在地性线上求得等高线的通过点以后，即可根据等高线的特性，把相等高程的点连结起来，即为等高线（见图14-20）。

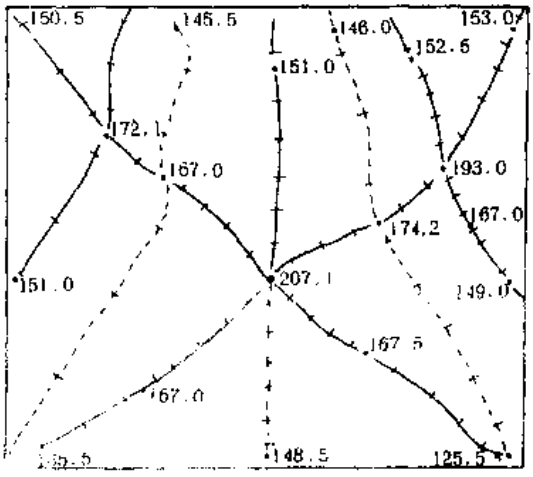



图 14-19

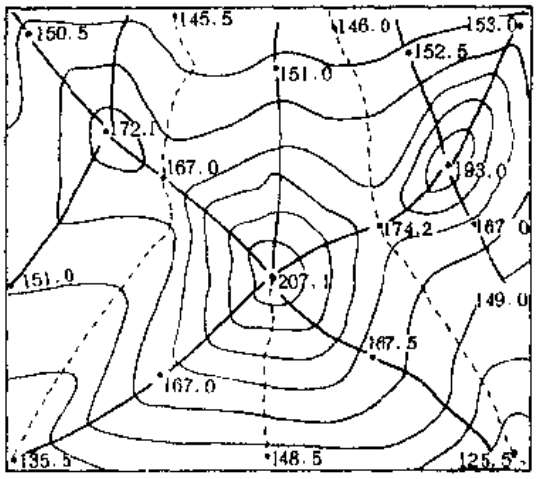



图 14-20

在两相邻地性线之间求出等高线通过点之后，立即根据实地情况，将同高的点子连起来。不要等到把全部等高线通过点都求出后再勾绘等高线。应该一边求等高线通过点，一边勾绘等高线。勾绘时，要对照实地情况来描绘等高线，这样才能逼真地显示出地貌的形态。

## 五、各种地貌的测绘

### （一）山顶

山顶是山的最高部分。山地中突出的山顶，有很好的控制作用和方位作用。因此对山顶要按实地形状来描绘。山顶的形状很多，有尖山顶、圆山顶、平山顶等。各种形状的山顶，等高线的表示都不一样（见图14-21）。

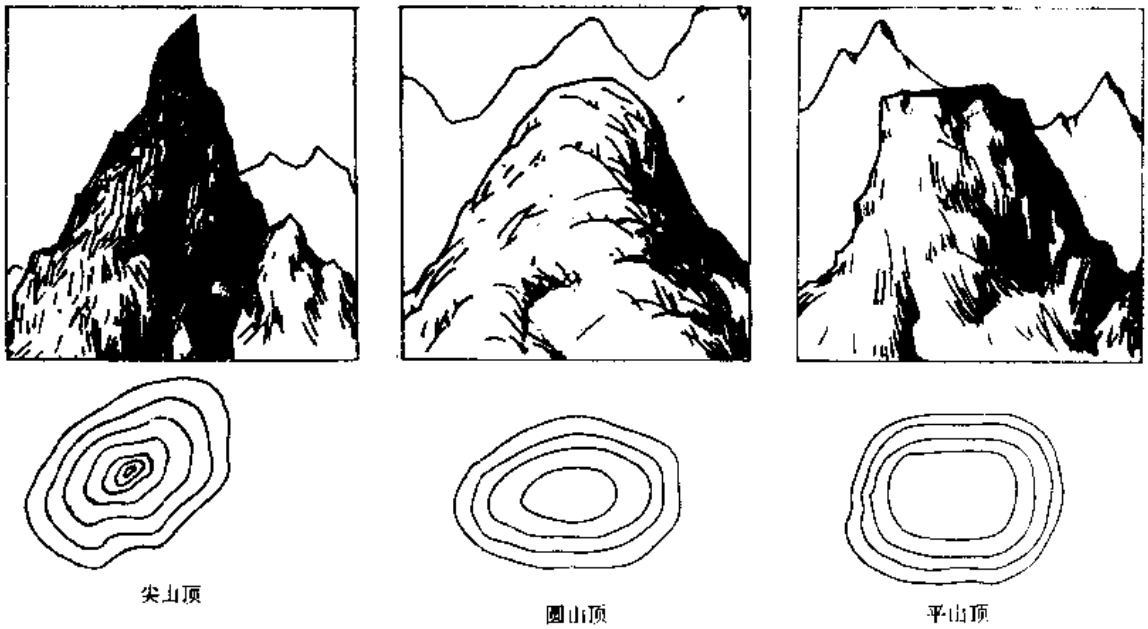



图 4-21

在尖山顶的山顶附近倾斜比较一致，因此，尖山顶的等高线之间的平距大体相等，即使在顶部，等高线之间的平距也没有多大的变化。测绘时标尺点除立在山顶外，其周围适当立一些就够了。

在圆山顶的顶部坡度比较平缓，然后逐渐变陡，等高线之间的平距在离山顶较远的山坡部分较小，愈至山顶，平距逐渐增大，在顶部最大。测绘时山顶最高点应立尺，在山顶附近坡度逐渐变化的地方也需要立尺。

平山顶的顶部平坦，到一定范围时坡度突然变化。因此，等高线之间的平距，在山坡部分较小，但不是向山顶方向逐渐变化，而是到山顶时平距突然增大。测绘时必须特别注意在山顶坡度变化处立尺，否则地貌的真实性将受到显著影响。

（二）山脊

山脊是山体延伸的最高棱线，山脊的等高线均向下坡方向凸出，两侧基本对称，山脊的坡度变化反映了山脊纵断面的起伏状况，山脊等高线的尖圆程度反映了山脊横断面的形状。山地地貌显示得象不象，主要看山脊与山谷，如果山脊测绘得真实、形象，整个山形就较逼真。测绘山脊要真实地表现其坡度和走向，特别是大的分水线倾斜变换点和山脊、山谷转折点，应形象地表示出来。

山脊的形状可分为尖山脊、圆山脊和台阶状山脊。它们都可通过等高线的弯曲程度表现出来。如图14-22所示，尖山脊的等高线依山脊延伸方向呈尖角状；圆山脊的等高线依山脊延伸方向呈圆弧形；台阶状山脊的等高线依山脊延伸方向呈疏密不同的方形。

尖山脊的山脊线比较明显，测绘时，除在山脊线上立尺外，两侧山坡也应有适当的立尺点。

圆山脊的脊部有一定的宽度，测绘时需特别注意正确确定山脊线的实地位置，然后立尺。此外对山脊两侧山坡也必须注意它的坡度的逐渐变化，恰如其分地选定立尺点。

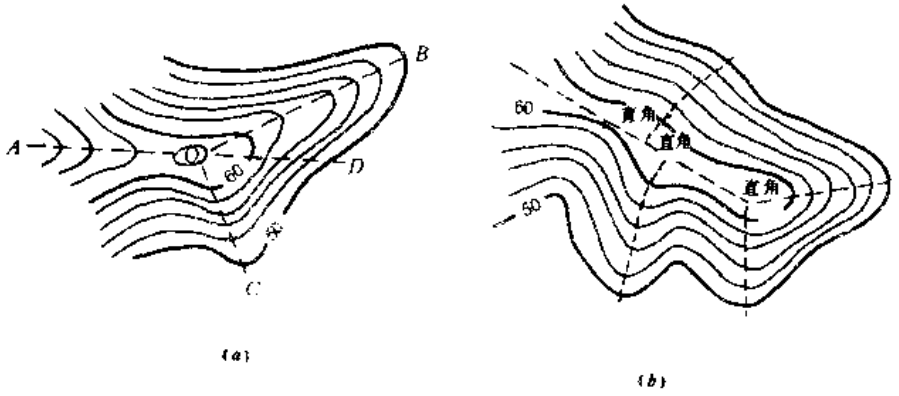



图 14-22

对于台阶状山脊，应注意由脊部至两侧山坡坡度变化的位置，测绘时，应恰当地选择立尺点，才能控制山脊的宽度。不要把台阶状山脊的地貌测绘成圆山脊甚至尖山脊的地貌。

在实际地貌中，山脊往往有分歧脊。在一般情况下，分歧脊的大小与其分歧角的大小成反比，同时分歧点常隆起，如图14-23(*a*)所示，*AO*为主脊，主脊方向为*AOD*，分歧脊为*OB*、*OC*，若$\angle BOD<\angle DOC$，则*OB*脊>*OC*脊。

主脊大致水平的山脊，其所形成的分歧脊的方向与主脊方向略成直角状态(如图14-23(*b*)所示)。了解了这样的关系，才能较好地掌握山脊等高线的走向。测绘时，在山脊分歧处必须立尺，以保证分歧山脊的正确位置。




(a)　　(b)

图 14-23

（三）山谷

山谷等高线表示的特点与山脊等高线所表示的相反。山谷的形状也可分为尖底谷、圆底谷和平底谷。如图14-24所示，尖底谷是底部尖窄，等高线通过谷底时呈尖状；圆底谷是底部近于圆弧状，等高线通过谷底时呈圆弧状；平底谷是谷底较宽，底坡平缓，两侧较陡，等高线通过谷底时在其两侧近于直角状。

尖底谷的下部常常有小溪流，山谷线较明显。测绘时，标尺点应选择在等高线的转弯处。

圆底谷的山谷线不太明显，所以测绘时，应注意山谷线的位置和谷底形成的地方。

平底谷多系人工开辟耕地之后形成的，测绘时，标尺点应选择在山坡与谷底相交的地



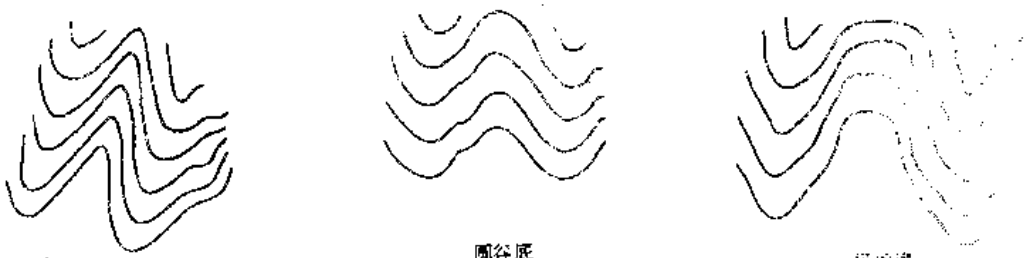



图 14-24

方，这样才能控制住山谷的宽度和走向。

（四）鞍部

鞍部属于山脊上的一个特殊部位，是相邻两个山顶之间呈马鞍形的地方，可分为窄短鞍部、窄长鞍部和平宽鞍部。鞍部往往是山区道路通过的地方，有重要的方位作用，测绘时在鞍部的最低点必须有立尺点，以便使等高线的形状正确。鞍部附近的立尺点应视坡度变化情况选择。描绘等高线时要注意鞍部的中心位于分水线的最低位置上，并针对鞍部的特点，抓住两对同高程的等高线分别描绘，即一对高于鞍部的山脊等高线，另一对低于鞍部的山谷等高线，这两对等高线近似地对称（见图14-25）。

（五）盆地

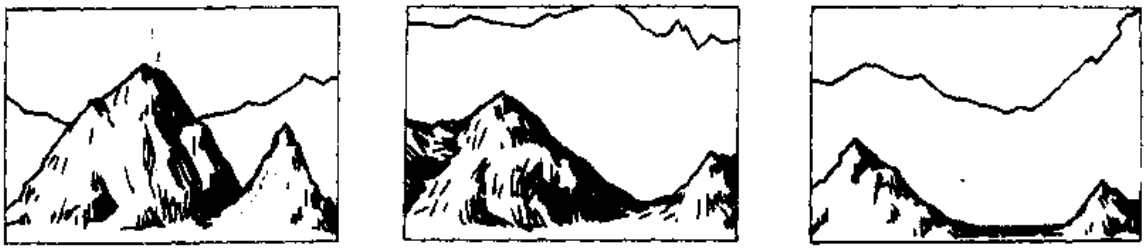
盆地是中间低四周高的地形，其等高线的特点与山顶相似，但其高低相反，即外圈的等高线高于内圈的等高线，（见图14-11(*a*)）。测绘时，除在盆底最低处立尺外，对于盆底四周及盆壁地形变化的地方均应适当选择立尺点，才能正确显示出盆地的地貌。

（六）山坡

在上述几种地貌形状之间都有山坡相连，山坡虽都是倾斜的面，但坡度并不是没有变化的。测绘时，标尺位置应选择在坡度变换的地方。坡面上的地形变化实际也就是一些不明显的小山脊、小山谷，等高线的弯曲也不大，因此，必须特别注意选择标尺点的位置，以显示出微小地貌来。

（七）梯田

梯田是在高山上、山坡上及山谷中经人工改造了的地貌。梯田有水平梯田和倾斜梯田两种。梯田在地形图上一般以等高线、符号和高程注记（或比高注记）相结合的形式来表示。



窄短鞍部　　窄长鞍部　　平宽鞍部

图 14-25

测绘时要沿田坎立标尺，注意等高线的进出点和田坎比高的注记。描绘时应先绘田坎符号，要对照地貌情况，边测边绘等高线，以防错漏。梯田与等高线的表示见图14-26。

（八）不用等高线表示的地貌

除了用等高线表示的地貌以外，还有些地貌如雨裂、冲沟、悬崖、陡壁、砂崩崖、土崩崖等等都不能用等高线表示。对这些地貌，用测绘地物的方法，测绘出这些地貌的轮廓位置，用图式规定的符号表示。要注意这些符号与等高线的关系不要发生矛盾。

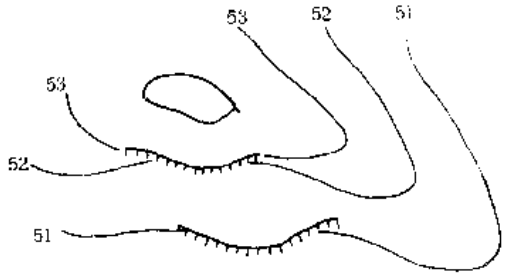



图 14-26

以上所述的是用等高线表示几种基本地貌的测绘方法，而实地的地貌是复杂的，它是各种地貌要素的综合体。因此，在测绘中必须区别对待，找出主要的地貌要素，运用等高线逼真地表示地貌。

为了使地形图能保持一定的精度要求，测绘时，立尺点的选择是十分重要的，在一个测站上要有统筹考虑，全盘计划。点子太密，会影响图面清晰，增加工作量；点子太稀，则不能真实地反映地貌形状。因此，在实际工作中，要经常总结，随时改进提高。

测绘地形图的工作是集体力量的表现，工作中的每一个环节都很重要，互相之间一定要配合好，立尺员和绘图员之间更要密切合作，每个立尺点的作用以及点子之间的联系，双方都要清楚，必要时，测绘一段时间之后立尺员要回到测站上向绘图员讲明情况，然后再继续工作。

# §14-6 细部点坐标的测量

在工厂、矿区的测图工作中，为了满足厂矿扩建或改建的设计和施工的需要，对厂矿各种建筑物的表示要细一些，即使埋入地下的管线，根据设计的要求也要测绘在图上。对主要地物点，如厂房角、电力线塔中心、地下管线主要井位的中心、铁路道岔中心点……等，有时还要根据规定用解析法测出它们的坐标，用水准的方法测出它们的高程。这些需要测定坐标和高程的地物点称为**细部点**。

下面介绍几种细部点坐标测量的方法：

## 一、极坐标法

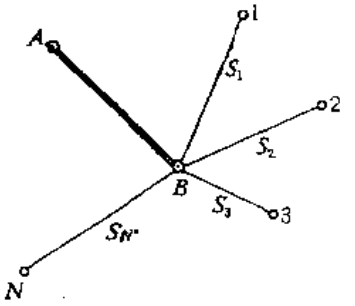


图 14-27

图14-27中$A$、$B$为已知地形控制点，在$B$点设站，要求测定1、2……$N$各细部点的坐标。可用$A$点为起始方向，观测1，2……$N$各点的水平角$\angle AB1$、$\angle AB2$……$\angle ABN$和距离$S_1$、$S_2$、……$S_N$（取至厘米）。根据已知点$B$、$A$的坐标计算出$BA$方向的坐标方位角$\alpha_{BA}$和照准1、2……$N$各点观测的水平角可计算出$B1$、$B2$……$BN$各边的坐标方位角$\alpha_{B1}$、$\alpha_{B2}$……$\alpha_{BN}$。根据距离和坐标方位角可计算出1、2……$N$各点的坐标。

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{BA}+\angle AB1=\alpha_{B1}\\
&\alpha_{BA}+\angle AB2=\alpha_{B2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\alpha_{BA}+\angle ABN=\alpha_{BN}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x_1&=S_1\cos\alpha_{B1}, & \Delta y_1&=S_1\sin\alpha_{B1}\\
\Delta x_2&=S_2\cos\alpha_{B2}, & \Delta y_2&=S_2\sin\alpha_{B2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta x_N&=S_N\cos\alpha_{BN}, & \Delta y_N&=S_N\sin\alpha_{BN}
\end{aligned}\right\}$$

坐标公式为

$$\left.\begin{aligned}
x_i&=x_B+\Delta x_i=x_B+S_i\cos\alpha_{Bi}\\
y_i&=y_B+\Delta y_i=y_B+S_i\sin\alpha_{Bi}
\end{aligned}\right\}\qquad(14\text{-}4)$$

式中：$x_i$，$y_i$——细部点$i$的坐标；

$x_B$，$y_B$——已知点$B$的坐标；

$S_i$——$B$点至$i$点的距离；

$\alpha_{Bi}$——$B$点至$i$点的坐标方位角。

## 二、角度（或方向）交会法

图14-28中$A$、$B$为已知点。在$A$、$B$设站，观测1、2点的水平角$\angle 1AB$、$\angle 2AB$、$\angle AB1$、$\angle AB2$。可按第九章前方交会的方法计算得1、2点的坐标。

## 三、不能直接求得的细部点坐标的测定

在厂矿区，有许多建筑物有时不能直接求得其点位坐标，如高炉中心、过滤池中心、烟囱中心、圆形（或方形）电杆中心，上下管道检查井盖中心……等。这种建筑物，一般可归纳为圆形和矩形（或方形）两大类。

（一）圆形建筑物中心坐标的测定

图14-29 $A$ 和 $B$ 为已知点，置经纬仪于 $B$ 点，瞄准圆形建筑物之切线方向 $Bm$、$Bn$，测得水平角为 $\angle ABm$、$\angle ABn$。则两切线的坐标方位角可按下式求得：

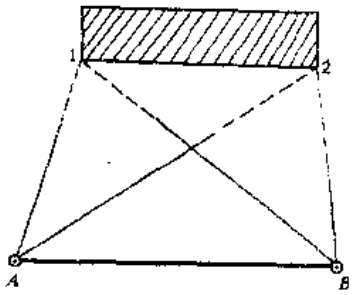



图 14-28

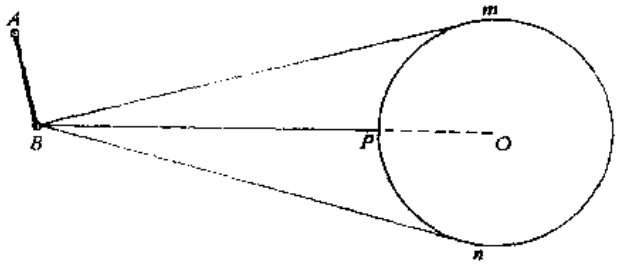



图 14-29

$$\alpha_{Bm} = \alpha_{BA} + \angle ABm$$

$$\alpha_{Bn} = \alpha_{BA} + \angle ABn$$

若将度盘读数置于 $\dfrac{\angle ABm + \angle ABn}{2}$ 的位置上，即可求得 $P$ 点的位置。则：

$$\alpha_{BP} = \alpha_{BA} + \frac{\angle ABm + \angle ABn}{2} = \frac{\alpha_{Bm} + \alpha_{Bn}}{2}$$

用钢尺丈量测站 $B$ 到 $P$ 之距离 $S$，并丈量圆形建筑物底部的周长 $L$，则测站 $B$ 至圆形建筑物中心 $O$ 的距离 $BO$ 可按下式求得：

$$BO = BP + PO = S - R$$

式中 $R$ 为圆形建筑物的半径，可由周长 $L$ 求出：

$$R = \frac{L}{2\pi}$$

根据计算的数据 $BO$ 及其坐标方位角 $\alpha_{BP}$，即可按式（14-4）计算圆形建筑物中心点 $O$ 的坐标。

（二）方形、矩形建筑物中心坐标的测定

图14-30中 $A$、$B$、$C$、$D$ 为电力线杆杆底座，对角线 $AB$ 与 $CD$ 的交点 $O$ 即为矩形之中心。设细部点 $A$、$B$ 的坐标已测定为（$x_A$、$y_A$）、（$x_B$、$y_B$），因 $O$ 点为 $AB$ 的中点，则 $O$ 点的坐标为：

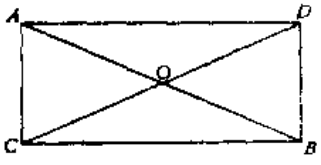



图 14-30

$$x_0 = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_0 = \frac{y_A + y_B}{2} \qquad (14\text{-}5)$$

## 四．厂矿区道路的测绘

厂矿区道路包括铁路专用线和车行道。在测绘铁路时，需要测出辙叉号数和确定道岔中心位置，如图14-31所示。现分述如下：

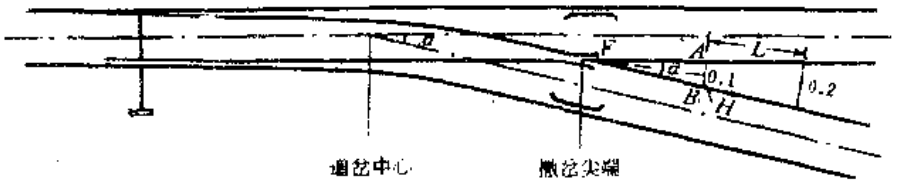



图 14-31

### （一）铁路辙叉号数的确定

根据辙叉号数的定义（图14-31）：

$$N=\frac{FH}{AB}=\frac{FH}{2AH}=\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

因为 $\alpha$ 很小

故 $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\approx 2\mathrm{ctg}\alpha$

$$N=\mathrm{ctg}\alpha$$

在实际工作中也可以用很简单的方法来确定辙叉号数。首先在辙叉上找出两辙间的距离为0.1m及0.2m所在处，再量出间距为0.1m处至间距为0.2m处之间的沿辙叉中线钢轨方向的长度 $L$（图14-31），根据相似形原理可以求得：

$$N=\frac{L}{0.2-0.1}$$

### （二）道岔中心（岔心）的测定

如果 $AB=0.2$m（图14-31），则

$$N=\frac{FH}{0.2}$$

故

$$FH=0.2N\ （以米为单位）$$

按厘米计算，则

$$FH=20N$$

在辙叉0.2m宽处向尖轨方向量取20倍道岔号数的长度（单位厘米）即为辙叉的理论尖端。从此点起沿直股中线向尖端方向量取 $K$ 值（$K$ 值即为辙叉理论尖端至道岔中心的距离），即得道岔中心的位置，用白漆在两钢轨腰部作标记线（$K$ 值可根据算出的道岔辙叉号数查表求得）。然后以钢尺量取测站至道岔中心的距离，并测出已知方向与道岔中心之间的水平角。按公式（14-4）算出道岔中心的坐标。

如果碰到对称道岔时（如图14-32），其岔心的测定可用经纬仪在两线路中心各定出中线，两中心线的交点即为道岔中心。

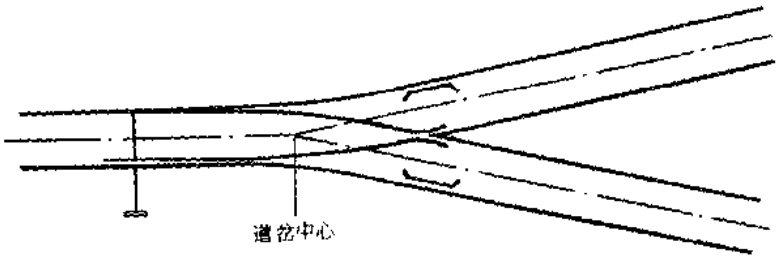



图 14-32

**五、测定细部点坐标应注意的事项**

1.细部点除测定其平面位置外，对固定性的细部点需要测定其高程。

2.两相邻细部坐标点间用坐标反算的距离与实际丈量距离之差，当距离小于50m时不得超过10cm；距离大于50m时较差不得超过$1/1000\cdot S+5cm$（式中$S$为距离）。

3.细部点坐标计算无误，即可进行展点，其展点误差不得大于0.3mm。

4.测绘时应在现场绘制草图，并注记建筑物的尺寸及名称。

5.建筑物的细部坐标应按规范进行分类编号，并编制细部坐标成果表

## §14-7 碎部测图时应注意的事项

一、在施测碎部时，首先要注意的是正确选定地物点、地形点。作业员对测站周围的地貌特征应进行分析，总的地貌是什么？细小的变化在那里？先测什么后测什么？这样观测者立尺者认识统一，心中有数。能按比例尺表示的地物，应选在地物拐角上、地物轮廓的变换点上。不能按比例尺表示的地物，如土堆、涵洞等，应选在地物的中心位置上。地形点应选择在地形特征点上，才能充分表示出测区的面貌。

二、碎部测图中，立尺员跑点应有次序，不要东跑一点西立一点。观测员要尽可能测完一个地物再测另外一个地物，并立即绘出地物的轮廓线。地形特征点也应测一点连一点，测完后地性线也连出来了，这样不会发生遗漏和弄错。

三、碎部测图时，观测员和立尺员应充分利用口哨、旗语、摆动标尺等自己约定的联络信号。否则，观测员和立尺员失去联络，测站上无法指挥立尺员，就会影响碎部测图的顺利进行。立尺员在跑尺过程中，还要注意调查地理名称和量测陡坎、冲沟等比高，以供图上描绘和注记。对本测站上无法测绘的局部隐蔽地区的地形，立尺员要向观测员介绍，以便研究处理的方法。

四、在碎部测图过程中，在测站上每测量一定数量的地形点之后，应重新瞄准零方向检查定向。另外也还要及时检查图上碎部点之间的相对位置与实地有无矛盾，所描绘的图形是否与实地一致等。对重要碎部点的观测数据，应记入碎部点记录手簿中，以备查考对本测站所测绘的地物、地貌，特别是与相邻测站所测绘的地物、地貌的衔接情况，要全面对照实地检查一遍，立尺员要根据所看到的碎部点的地形情况，参加对图上描绘的地物、

地貌的检查，以防错误或遗漏。

五、为了避免漏测或重复，两测站所测的范围应以人工的或天然的地面线作为分界，如道路、河流、水渠、山脊等。对分界线上的地物点、地貌特征点必须在两个测站上分别测定，可作为检核。

## §14-8 地形图上等高线的应用

### 一、根据等高线确定地面点的高程

假如点的位置恰巧在图的等高线上，那只需确定这根等高线的高程就可以了。如图14-33上的 $a$ 点，当等高距 $h=20$m，$a$ 点的高程应为160m。对位于两等高线之间的 $b$ 点，就必须定出通过 $b$ 的线段 $mn$ 和确定 $bn$ 占整个线段 $mn$ 的多少。如图14-33中 $\frac{bn}{mn}=0.5$，则 $b$ 点的高程应为

$$120\text{m}+20\text{m}\times 0.5=130\text{m}$$

### 二、根据等高线间的平距确定其坡度

若已知地形图上等高距 $h$，如要确定图上两相邻等高线间的倾斜角 $\tau$ 或坡度，则量出该两等高线间的平距（宽度）$a$，按下式计算：

$$i=\operatorname{tg}\tau=\frac{h}{a} \qquad (14\text{-}6)$$

式中 $i$ 为直线的坡度，$i$ 一般用百分率%或千分率‰表示。

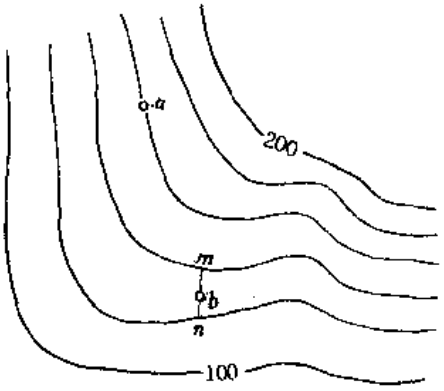


图 14-33

在等高距确定的情况下，也可以用“坡度尺”来反映坡度（或倾斜角 $\tau$）与等高线间平距 $a$ 的关系。坡度尺的作法如下：在纸上画直线 $MN$（图14-34），将 $MN$ 等分成若干段，顺序注以倾斜角的度数（或坡度 $i$），在这些代表倾斜角的点上作 $MN$ 的垂线，这样就可以按(14-6)式计算出与倾斜角 $\tau_i$（或坡度 $i$）相应的平距 $a_i$，按测图比例尺在相应垂线上截出 $a_i$，再用光滑曲线联结各垂线的顶点。当倾斜角很小时，$a_i$ 值变化较大，倾斜角稍大，$a_i$ 变化较小，所以在绘制坡度尺时，倾斜角在5°以内每一度在 $MN$ 线上所取的间隔，与5°以外每5°在 $MN$ 线上所取的间隔相等，这样坡度尺曲线在5°处分为两部分（图14-34）。也有在5°以前采用相邻两条等高线间的高差计算 $a$，而5°以后采用每相邻2～6条等高线间高差计算 $a$，这样绘制的坡度尺仍以5°为界分成两部分。

使用坡度尺时，用两脚规在地形图上量取等高线间的平距（宽度），再在坡度尺上找到 $MN$ 线与曲线之间的距离等于该平距的位置，设这位置在图14-34中的 $kl$ 处，用目估确定倾斜角 $\tau$ 为3 $\frac{3^\circ}{4}$。若已确定了某处两等高线的倾斜角，亦可用坡度尺求得该处两等高




图 14-34

线间的平距。

在工程方面，坡度尺中$MN$线上用坡度$i$来表示，这是为了便于根据平距寻找该直线的坡度，或者由坡度求平距。这样的坡度尺见图14-35，图中$PQ$处$i$为2.4%。

### 三、根据等高线绘制地形图上已知方向的断面图

在地形图上有一已知的方向，要根据等高线来绘制出这方向的断面图是很简捷而有实用意义的。由于这种断面图能较好地说明地形的特征，所以它对于各种工程设计、军事计划及制图规划方面是必需的。




图 14-35

假设经过图上两山头的方向线$MN$（图14-36($a$)）绘制断面图；先画直线$mn$平行于直线$MN$（图14-36($b$)），再在地形图上将$MN$线与各等高线的交点$c$、$d$、$e$……，以及$MN$线所经各地形特征点如山头$a$和鞍部$s$等各点分别向$mn$线作垂线得$c$、$d$……诸点。画平行于$mn$的诸平行线，使其间隔相等并分别标以相应等高线的高程。将这些平行线与各垂线的交点用平滑的曲线连结起来就成了所作的断面图。

### 四、根据等高线确定汇水面积

在建筑道路的桥涵或修建水库的水坝等工程建设中，就需要知道有多大面积的雨水往这个河流或谷地汇聚，这个面积就称为汇水面积。汇水面积界线的决定就是将一系列的分水线连接而成。

图14-37所示$A$处为修筑道路时经过一山谷，需建造一涵洞以排泄水流。涵洞孔径的大小，应根据流经该处的水量来决定，而这水量又与汇水面积有关。由图14-37中可以看出，由分水线$BC$、$CD$、$DE$、$EF$及道路$FB$所围成的面积即汇水面积。各分水线处处都与等高线相垂直，且经过一系列的山头和鞍部。

### 五、根据等高线整理地面

在工程建设中，常需要把地面整理成水平或倾斜的平面。

假设要把图14-38所示的地区整理成高程为201.7m的水平场地，也就是说完工后的场地与原地面相交于高程为201.7m的等高线上。确定填挖界线的方法：在201m与202m两等高线间，以7:3的比例内插出一系列高程为201.7m的点子，把这些点子用光滑的曲线

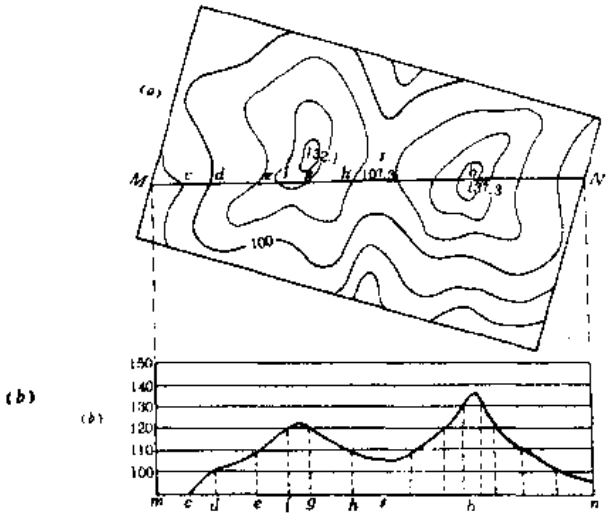



图 14 36

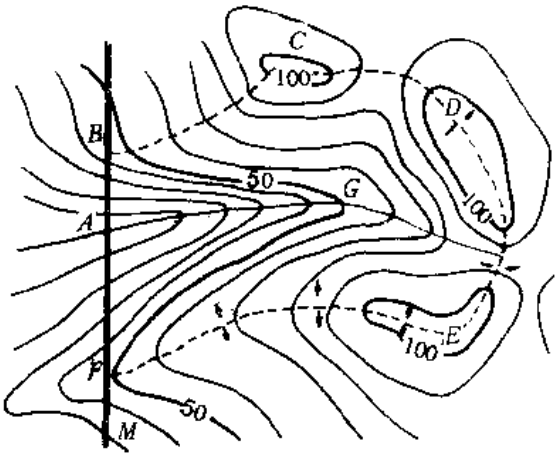



图 14 37

连接起来即为201.7m的等高线，在这条等高线上的各点就不填不挖，不在这条等高线上各点就需要填或挖，如图上204m等高线上处处要挖深2.3m，在198m等高线上处处要填高3.7m。

假定要把地表面设计成倾斜面，如在图14-39中，要通过实地上$A$、$B$、$C$三点筑成一倾斜平面。此三点的高程分别为152.3m、153.6m、150.4m。这三点在图上的相应位置为$a$、$b$、$c$。

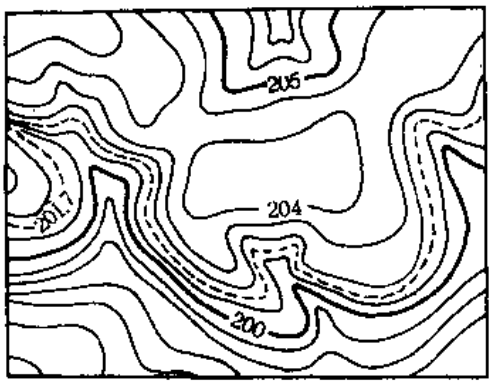



图 14 38

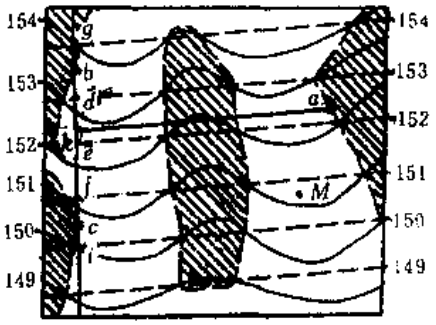



图 14-39

为了确定填挖的界限，必须先在地形图上作出设计面的等高线。由于设计面是倾斜的平面，所以设计面上的等高线应当是等距的平行线。画这些等高线时首先求出$ab$、$bc$、$ac$三线中任一线上设计等高线的位置。以图中$bc$线为例，在$bc$线上用内插法得到高程为153m、152m和151m的点子$d$、$e$、$f$，同样再内插出与$A$点同高程（152.3m）的点$k$，连接$ak$，此线即在设计平面上与等高线平行的直线。因此通过$d$、$e$、$f$各点作与$ak$

的平行线，就得到设计平面上所要画的等高线。这些等高线在图上是用虚线表示的。

如果要得到设计平面上$bc$两点以外的等高线，可在$bc$的延长线上继续截取与$de$线段相等的线段$dg$和$fi$而得$g$与$i$两点。通过$g$、$i$两点，作$ak$的平行线，同样可得出设计平面上的另两条等高线。

定出设计平面上的等高线与原地上同高程等高线的交点，把这些交点用平顺的曲线连接起来。即得到不填不挖的曲线，图14-39中画有斜线的面积表示应填土的地方，而其余部分表示应挖土的地方。

每处需要填土的高度或挖土的深度是根据实际地面高程与设计平面高程之差确定的。如在$M$点，实际地面高程为151.2m，而该处设计平面的高程为150.6m，因此$M$点必须挖深0.6m。

## §14-9 地形图的修测

### 一、地形图修测的目的和要求

随着社会主义建设的迅速发展，工农业基本建设项目日益增多，地物、地形变化很快、特别是城市建设，更是日新月异，盖起了新工厂和大片居民宿舍，铺设了许多管道，新建了铁路和公路等。为了不断地提供符合现状的图纸，对已有地形图纸必须进行经常性的修测和修绘，以满足用图的需要。

修测时对原图的图廓线、方格网应进行检查，其误差在±0.3mm以内时，可视为合格，有部分超过时，应注意加以适当的配赋。对修测的地物点的精度，根据有关单位的经验，平面位置的中误差可在原来中误差的基础上放大$\sqrt{2}$倍。高程中误差可仍按有关规范规定进行衡量。经过修测和修绘的地形图中，新老内容的衔接要妥当合理。凡经过修测和修绘的内容一律用新图式表示，以使地形图逐步更新和统一。

位于每幅图中的小三角点，Ⅲ级导线点，四等水准点和更高级的控制点，在修测过程中均应查明落实，必要时应加以维护，或重新布设，以维持控制网的完整性。这些控制点均可作为修测地形图的根据。

### 二、地形图修测的内容

地形图修测的主要内容包括以下几个部分：

（1）从老图上去掉现在实地已改变了的，或地面上已不存在的各种地物符号：如改建的房子、道路，填平的土坑等。

（2）在老图上用相应的符号，描绘出地面上新增加的地物：如新建的工厂、发电站、道路、水渠、新架设的高压输电线等。

（3）位置未改变但实质已改变的地物，用新符号描绘在地形图上：如老图上的草地已变成幼树林，老图上的土路已改建成公路，人行桥改建成了车行桥等。

（4）检查和改正所有的说明注记以及地物名称：如土路改成了公路，则应加注铺面材料以及路面和路基的宽度。

（5）地貌改变较大的地方，老图上的地貌部分也应进行修测。

## 三、地形图修测的方法

在修测地形图的工作中，首先必须对控制点和拟作测站点的地物点事先作适当的实地检核，以免因依据点不可靠而引起新修测内容的精度达不到要求。

对原有的导线点、图根点以及能在实地准确判定位置的墙角、电杆等均可作为测站点，在特别困难的情况下，还可以用极坐标法或交会法来决定新的测站点，必要时也可采用导线的办法来补测一定数量的图根控制点。

地形图修测的方法主要有：

（1）用平板仪来进行修测。

（2）用小平板配合经纬仪或小平板与卷尺进行修测。这种方法，使用仪器简单，操作方便，是目前城市修测中大量采用的方法。用小平板与卷尺修测时，高程可用水准仪统一进行联测。

（3）利用航空象片来更新地形图，这是一种速度快，精度高的修测方法。

航摄象片的比例尺应根据修测地图的比例尺来确定，最好是当年摄影、当年进行修测，不能用过于陈旧的航摄象片来修测地形图。

修测时，首先拿航摄象片与老图进行对照，从而确定地面上变化的情况，定出那些可以在室内进行判读，那些需要到野外去调查，那些可以在室内进行修测等，但应力求使野外工作尽量减少。然后根据实际变化的大小和修测地区地形起伏的情况，例如对于城市平坦地区，修测面积较大时，采用编制象片平面图进行调绘后，转绘于地形图上。对于小范围山区地形图修测，可采用单张象片调绘后，再转绘到地形图上。

关于编制象片平面图的方法、调绘、转绘等，将在航空摄影测量学中讲述。

# 第十五章　地形图的分幅及编号、高斯投影的概念

## § 15-1　地形图的分幅及编号

为了便于测绘，使用和保管地形图起见，需要将大面积的地形图进行分幅，并将分幅的地形图进行有系统的编号，因此需要研究地形图的分幅和编号问题。

地形图的分幅可分为两大类，一种是按经纬线分幅的梯形分幅法，另一种是按坐标格网划分的矩形分幅法。现分述于后。

### 一、梯形分幅

（一）1:100万比例尺地形图的分幅及编号

1:100万比例尺地形图的分幅编号由国际统一❶规定。作法是将整个地球表面用子午线分成60个6°的纵列，由经度180°起，自西向东用阿拉伯数字1～60编列号数（见图2-8）。同时，由赤道起分别向南向北直至纬度88°止，以每隔4°的纬度圈分成许多横行，这些横行用大写的拉丁字母A、B、C、……V标明。以两极为中心，以纬度88°为界的圆，则用Z标明。图15-1为北半球1:100万比例尺地形图的分幅与编号。图15-2为我国领域的1:100万比例尺地形图的分幅与编号情况。在北半球和南半球的图幅，分别在编号前加N或S字以区别。因我国领域全部位于北半球，故省注N。

由上所述可知，一张1:100万比例尺地形图，它是由纬差4°的纬圈和经差6°的子午线所形成的梯形。每一幅1:100万比例尺的梯形图图号是由横行的字母与纵列的号数组成。例如甲地的纬度为北纬39°54′30″，经度为东经122°28′25″，其所在1:100万比例尺图的图幅编号为J 51。

（二）1:50万比例尺和1:20万比例尺地形图的分幅及编号

将一幅1:100万比例尺地形图分为四幅，则图幅的经差为3°，纬差为2°，构成以A、B、C、D为代号的1:50万比例尺地形图（图15-3）。例如，甲地所在的1:50万比例尺地形图的编号为J-51-A。

将一幅1:100万比例尺地形图分为36幅，则图幅的经差为60′，纬差为40′，构成以带括号的数字（1）、（2）……（36）为代号的1:20万比例尺地形图（图15-4）。例如，甲地所在的1:20万比例尺地形图的编号为J-51-（3）。

❶ 1909年11月在伦敦召开的百万分之一地图国际会议上，通过了百万分之一地图的基本章程，之后又进一步确定了地图的投影、分幅、统一编号以及地图整饰要求等具体规范。

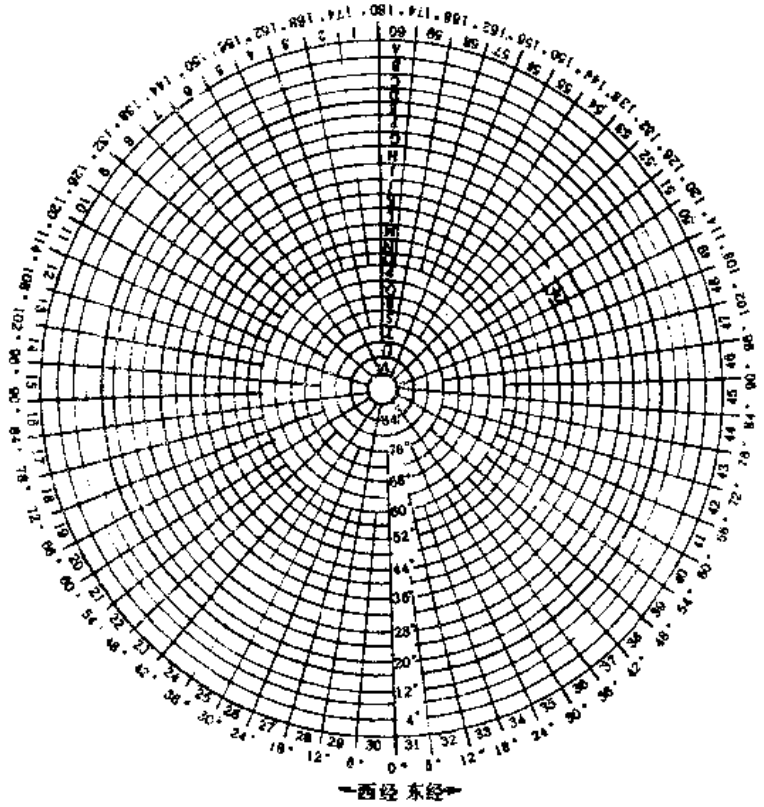



图 15-1

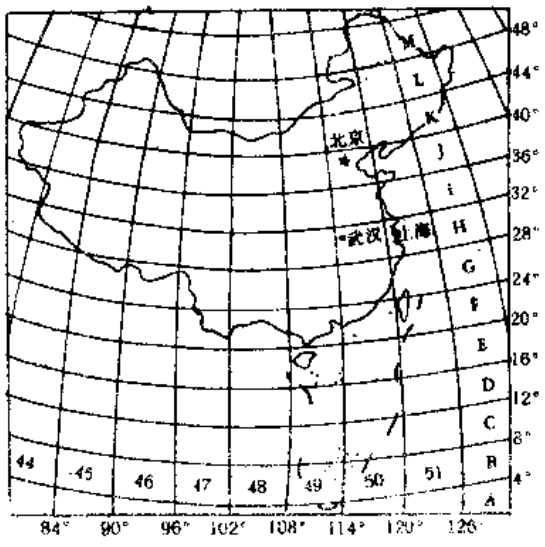



图 15-2

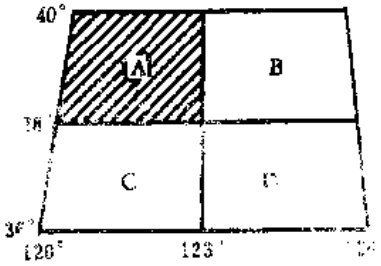



图 15-3

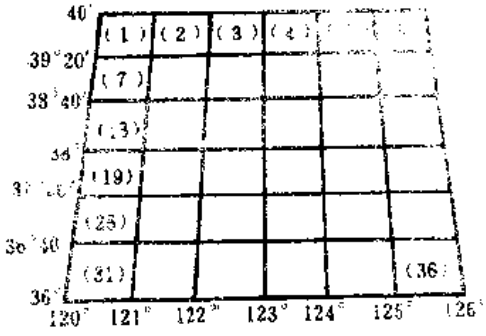



图 15-4

（三）1:10万比例尺地形图的分幅及编号

将1:100万比例尺的一幅图分为144幅1:10万比例尺的图，则图幅的经差为30′，纬差

为20′，并以1、2、3、……144为图幅代号。其编号的写法系在1:100万比例尺图幅编号后面分别用阿拉伯数字1到144表示（图15-5）。例如，甲地所在1:10万比例尺图幅的编号是J-51-5。

（四）1:5万至1:1万比例尺地形图的分幅及编号

这三种比例尺地形图的分幅编号是在1:10万比例尺地形图的基础上进行的。参看图15-6。

每幅1:10万比例尺地形图划分为4幅1:5万地形图，分别以A、B、C、D表示。其编号是在1:10万比例尺地形图的编号后加上各自的代号所组成。例如，甲地所在1:5万比例尺地形图的编号为J 51 5 B。

每幅1:5万比例尺地形图划分为4幅1:2.5万比例尺地形图，分别以数字1、2、3、4表示。其编号是在1:5万比例尺地形图的编号后加上1:2.5万比例尺地形图各自的代号所组成，如图J 51-5-B-4。

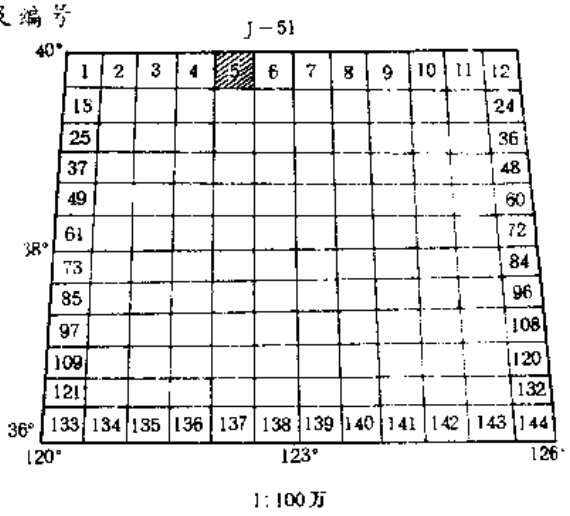



图 15-5

表15-1表示了上述比例尺地形图的分幅方法及以甲地为例的编号。

每幅1:10万比例尺地形图划分为8行、8列，共64幅1:1万比例尺地形图，分别以（1）、（2）、（3）、……（64）表示；其纬差是2′30″、经差3′45″，其编号是在1:10万比例尺地形图图号之后加上各自代号所组成，如J-51-5（24）。

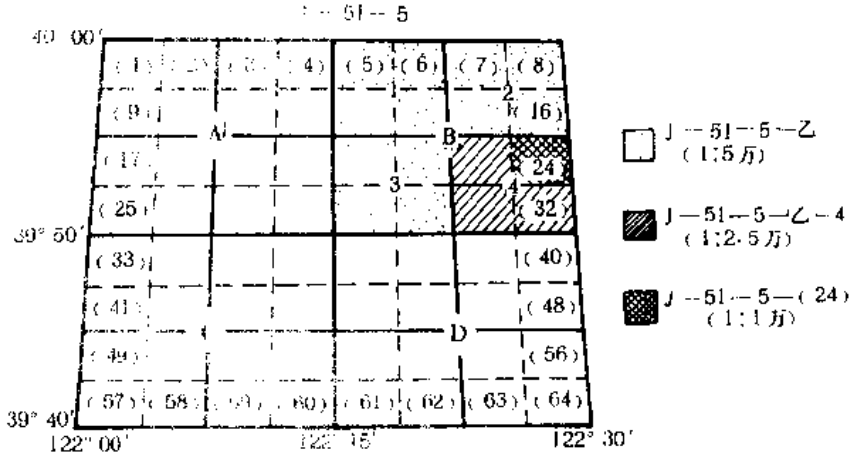



图 15-6

（五）大比例尺地形图的分幅及编号

1:5000和1:2000比例尺地形图是在1:1万比例尺地形图的基础上进行分幅编号的。每幅1:1万比例尺地形图分成4幅1:5000的图（图15-7），其纬差为1′15″，经差为1′52.5″。其编

号是在1:1万比例尺地形图后加上小写拉丁字母a 、b 、c 、d ，例如甲地所在的图幅为J-51-5-(24)-*b*。

表 15-1

| 比例尺 | 图幅的大小 | | 在一张前列比例尺图幅中所包含的图幅数 | 甲地所在图幅的编号 |
|---|---|---|---|---|
| | 纬差 | 经差 | | |
| 1:500 000 | 2° | 3° | — | J-51-A |
| 1:200 000 | 40′ | 60′ | — | J-51-(3) |
| 1:100 000 | 20′ | 30′ | — | J-51-5 |
| 1: 50 000 | 10′ | 15′ | 1 | J-51-5-B |
| 1: 25 000 | 5′ | 7′30″ | 4 | J-51-5-B-1 |
| 1: 10 000 | 2′30″ | 3′15″ | | J-51-5-(24) |

每幅1:5000比例尺地形图又分成9幅1:2000比例尺地形图（图15-8），其纬差是2.5′，经差是37.5″。其编号是在1:5000图的后面加上1 、2 、3 、4 …… 9等数字。如甲地所在1:2000比例尺地形图的图幅编号为J-51-5-(24)-b-4。

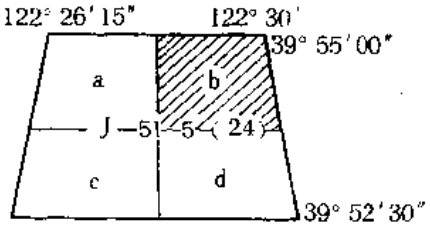



图 15-7

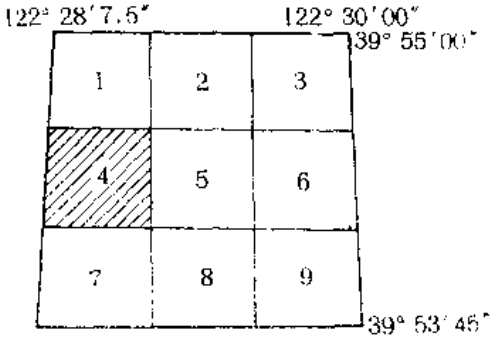



图 15-8

如果知道了某地的地理坐标，则可根据该地的经、纬度，首先算出包括该地的1:100万比例尺地形图的图幅编号。例如乙地位置为东经120°09′15″，北纬30°18′10″，则可计算如下：

$\frac{1}{4^\circ}$（30°18′10″）进整数 = 8 横行，其代号为H；

$\frac{1}{6^\circ}$（120°09′15″）进整数 = 21带，故纵列为51。

进整数即把除不尽的小数进为整数。所以乙地所在1:100万比例尺地形图的编号为H-51，然后可以根据图15-3、15-4……等求出包括乙地其余各种比例尺的编号。测绘部门为了便于实际工作，特印制了专门的图幅接合表，以便各业务单位使用。

## 二、矩形分幅

大比例尺地形图的图幅通常采取矩形分幅，一般规定在1:5000比例尺时采用纵、横各

40cm，即实地为2km的分幅。每个小方格为10cm，每幅图16格。1:2000、1:1000、1:500比例尺测图时图幅纵横各50cm，每个小方格为10cm。每幅图共25格，以整公里（或百米）坐标进行分幅。如果测区为狭长带状，为了减少图板和接图，也可采用任意分幅。

如果测区的范围较大，整个测区需要测绘几幅甚至几十幅图，这时应画一张分幅总图。图15-9为某测区1:1000比例尺测图时的分幅图。该测区有整幅图8幅及不满一整幅的破幅图17幅。

各种比例尺地形图的图号，均用该图图廓西南角的坐标以公里为单位表示。现举例说明之。图15-10为某1:2000比例尺地形图的图幅，其西南图角的坐标为$X$=83000m(83km)，$Y$=15000m(15km)，故其图幅编号为83-15，而图15-11为某1:1000比例尺地形图的图幅，其西南图角坐标为$X$=83500m、$Y$=15500m，故该图幅号为83.5-15.5。

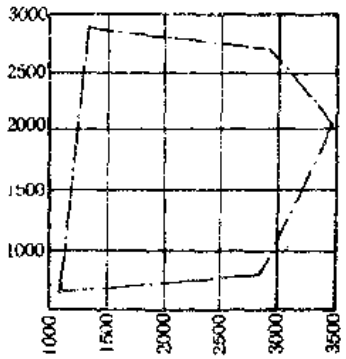



图 15-9

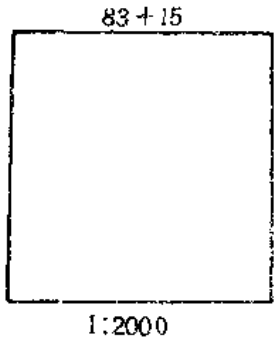



图 15-10

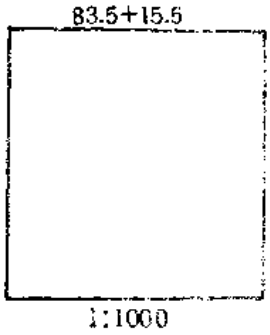



图 15-11

但也有用各种代号进行编号的；如用工程代号与阿拉伯数字相结合的方法。因为大比例尺地形图不少是小面积地区的工程设计施工用图，在分幅编号问题上，要本着从实际出发，根据用图单位的要求和意见，结合作业的方便灵活处理，以达到测图、用图、管图方便为目的。

## §15-2 高斯投影的概念

在第二章里，介绍了高斯平面直角坐标系，本节要讨论高斯投影的一些概念。

### 一、关于平面直角坐标系

选择平面直角坐标系的理由是：第一、测量工作的一个重要内容就是将地球表面上的地物地貌按一定的要求用平面图形表示出来，这就是测绘各种比例尺的地形图。地形图是画在纸上的，也即是画在平面上，这就需要将椭球（近似地说是圆球）上的图形投影到平面上，在平面上表示坐标的方法是采用平面直角坐标系。第二、在地面上所观测的三角网是椭球上（或圆球）的三角形，应用球面三角进行三角形的计算，不如计算平面三角形简单。第三、尤其重要的是：如果不用平面直角坐标系，则在椭球（或圆球）上的各点位置

要用经纬度来表示。这样，计算经纬度或已知两点的经纬度来反算距离及方位角，将都是一件很复杂的工作。如果有一个平面直角坐标系，则三角网可以在平面上（而不是在球面上）作计算，使计算工作大大简化。如何将椭球（或圆球）上图形或点的位置描写到平面上的问题，就是本节要研究的投影问题。

## 二、投影后的图形问题

根据日常生活经验可以知道，对于某些曲面，可以设法把它铺在平面上，而对于另外一些曲面，则办不到。例如，如果把一个圆柱面，用剪刀沿着平行于轴的直线剪开，就可以把它铺在平面上，而使原来柱面上的图形按原样描在平面上，即圆柱面上的图形可以保持不变（角度和长度）地投影到平面上。但是如果把半个桔子皮压平，它不是产生皱褶就是边缘破裂。假如这个表面上有一个图形，就不能保持原样把它画在平面上。这就是说投影前后图形要发生变化。这种变化称为变形。变形可分为长度变形、角度变形和面积变形三种。椭球面就象桔子皮一样，要把它上面的图形画在平面上总要产生变形。若要使投影后的角度保持不变，那么长度和面积就要改变；要使投影后各边的长度保持不变，那么角度和面积就要改变，等等。总之不可能十全十美，而只能是有得有失，至于应得什么失什么，则根据需要而定。在测量上，一般要求投影后的角度保持不变。这是因为角度不变就意味着在小范围内的图形是相似的。因而地形图上的任何图形都与实地图形相似，这在图的应用和测绘上都很方便。另外测量工作中角度观测是大量的工作，使投影后角度保持不变，可以免去大量的投影化算工作，这种使角度保持不变的投影称为正形投影。

## 三、正形投影的性质

所谓正形投影，就是高等数学中所讲的保角变换（也称为保角映射）。它具有下列两个性质：

1. 角度的不变性，也即保角性；

2. 伸长的固定性。

第一个性质是指球面上无穷小的图形，在投影面上描写成相似的形状。第二个性质是指在同一点上不同方向的微分线段，投影后各个方向的长度比为一常数，与直线的方向无关。很容易看出，由上述两个性质之一，即可推出另一性质，现利用图15-12来说明这一问题。

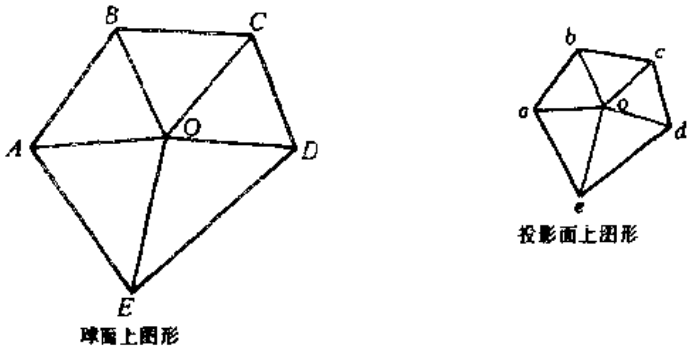



图 15-12

设球面上无穷小的中心多边形$ABCDE$及描写到投影面上的中心多边形$abcde$，由于相应角度保持不变，则其任意方向的长度比为

$$m=\frac{bo}{BO}=\frac{co}{CO}=\frac{do}{DO}=\cdots\cdots=\frac{d\sigma}{dS}=\text{常数} \tag{5-1}$$

或写成下式

$$m=\frac{\text{投影面上长度}}{\text{球面上长度}}=\frac{d\sigma}{dS}=K\ (\text{常数}) \tag{5-2}$$

式中 $m$为任意方向长度比，或称为长度比；$dS$为球面上的长度；$d\sigma$为投影面上的长度。

## 四、高斯投影的概念

正形投影有许多方法，其中一种就是§2-1中所指出的**高斯-克吕格投影**，**简称高斯投影**。

为了简单说明高斯投影的概念起见，把地球当作一个圆球看待。如图5-12(a)，在地球表面上选择其中一个子午圈，把投影面卷成一个圆柱，使圆柱与该子午圈相切，这条切线即轴子午线。这样，球面上的轴子午线就毫无改变地转移到圆柱面上，即投影面上。

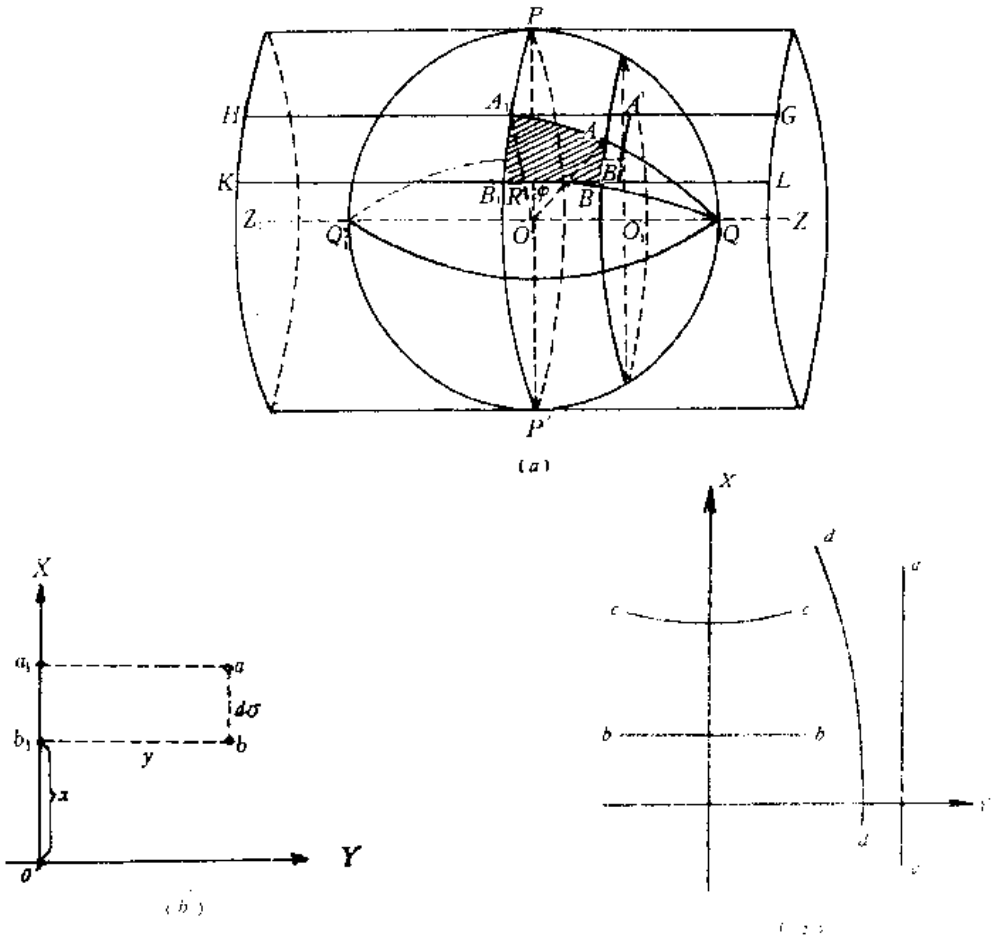



图 5-13

另外，扩大赤道面与圆柱体相交，这条交线是与轴子午线垂直的。当将圆柱体切开时，在圆柱体上（即投影面上）就形成两条正交直线，即§2-1中介绍的平面直角坐标系统。其中轴子午线形成$X$轴，赤道形成$Y$轴（图15-13$b$）。

根据这种横圆柱正形投影的图形变换关系，可以得到球面上几条特殊线段在平面上的形状。

平行于轴子午线的平面与球面相交而得的小圆，在平面上为平行$X$轴的直线，如图15-13($c$)中的$aa$。

通过球心并垂直于轴子午面的平面与球面的交线，即垂直于轴子午线的大圆，在平面上为平行于$Y$轴的直线，如图15-13($c$)中的$bb$。

地球上的纬线在平面上为图15-13($c$)中的$cc$曲线并与$X$轴正交。

地球上的除轴子午线以外的其他子午线在平面上为图15-13($c$)中的$dd$。

如上所述可知，在轴子午线上的长度不因为转移到平面上而有所改变。因此轴子午线上的长度比应等于1，即

$$m_0 = \frac{d\sigma}{dS} = 1 \tag{15-3}$$

现在再来研究在离开轴子午线附近任意点上长度比的问题。

设地表面上有非常接近的$A$、$B$两点（见图15-13($a$)），为了证明简单起见，选定该两点在平行于轴子午线的方向，即恰好在平行于轴子午圈的平行截面上，因为对长度比来说通过$A$点的任一方向都是一样的。今自圆柱轴线$ZZ_1$与地球赤道面之交点$Q$，经$A$、$B$两点作两个大圆弧面交轴子午线于$A_1$、$B_1$两点。球面上$A$、$B$两点投影到圆柱表面上，将到得$A'$、$B'$，其长度与$A_1B_1$相等而大于$AB$，而且不论$AB$的方向如何，其在投影面上的距离总是比球面上的距离为大，因此产生了长度变形。由图可知，离轴子午线愈远，长度变形愈大。

把圆柱表面切开后，即得到如图15-13($b$)所示的投影面。投影面上的长度$d\sigma$等于$ab$，$ab$应与圆柱面上$\overset{\frown}{A'B'}$相等，$\overset{\frown}{A'B'}$与轴子午线上的$\overset{\frown}{A_1B_1}$等长，用下式表之，即

$$d\sigma = ab = \overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{A_1B_1}$$

故知离开轴子午线任意一点的长度比为

$$m = \frac{d\sigma}{dS} = \frac{\overset{\frown}{A_1B_1}}{\overset{\frown}{AB}} = 1$$

综上所述，在轴子午线上的距离转移到投影面上，其长度不变。离开了轴子午线的球面距离转移到投影面上，其长度就发生变形，这种情况是由于正形投影的特性所决定的。因为要将球面上的图形相似地（保持角度不变）表象到平面上去，只有将球面上的距离拉长才能实现。

## 五、距离改化

根据球面上的距离，将其拉长改化为投影面上的距离，叫做**距离改化**。

由图15-13($a$)可知，扇形$B_1OA_1$与$BO_1A$具有相等的中心角；又设地球半径为$R$，

平行截面的小圆半径为$R_1$，则两圆弧之比应等于两半径之比，即

$$m=\frac{d\sigma}{dS}=\frac{\widehat{A_1B_1}}{\widehat{AB}}=\frac{R}{R_1} \tag{15-4}$$

现将必要的元素从图15-13($a$)取出来，如图15-14所示，以$Y$表示球面上的$B_1B$弧，则由直角三角形$BO_1O$中，得

$$R_1=R\cos\frac{Y}{R}$$

实际上由于$\frac{Y}{R}$总是很小，故取$\cos\frac{Y}{R}$展开级数的前两项已有足够的精度，即

$$\cos\frac{Y}{R}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{R}\right)^2$$

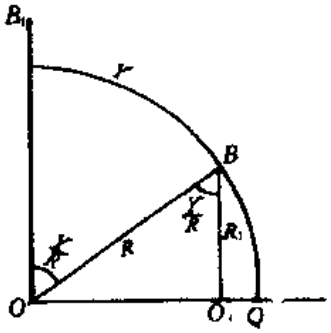


图 15-14

应用上列两关系，式（15-4)可写成

$$m=\frac{d\sigma}{dS}=\frac{R}{R_1}=\frac{1}{\cos\frac{Y}{R}}=\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{R}\right)^2\right]^{-1}$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{R}\right)^2+\cdots\cdots$$

略去$\frac{Y}{R}$四次方及其以后各项，则

$$d\sigma=dS+\frac{Y^2}{2R^2}\cdot dS \tag{15-5}$$

由于限等控制的边与地球半径$R$比起来，其数值非常小，并将球面上的$B_1B$弧长$Y$近似地以投影面上的$y$值代替，则（15-5)式可以写成

$$\sigma=S+\frac{y^2}{2R^2}\cdot S$$

从上式可知，只要知道球面上两点间的距离$S$及其在球面上离开轴子午线的近似距离（可取$a$、$b$两点横坐标的平均值），便可求出其在高斯投影面上的距离$\sigma$。并且$\sigma$总是长于$S$，其改化数值为

$$\Delta S=\sigma-S=\frac{y^2}{2R^2}\cdot S \tag{15-6}$$

在实际工作中，最好使得一般精度的直线丈量在投影面上不要发生变化，设普通直线丈量的相对极限误差为1/1000，则由（15-6)式得：

$$\frac{\Delta S}{S}=\frac{y^2}{2R^2}<\frac{1}{1000}$$

取$R=6400$km，则$y$应小于280km。对于不同的极限误差可算出距离$S$离开轴子午线不同的极限数值。

也可按公式（15-6)，将$\Delta S$计算成高斯投影距离改正表（表15-2)

表 15-2

| 改正数 $\Delta S$（m） / $y$（km） / $S$（m） | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.03 | 0.05 | 0.08 | 0.11 |
| 200 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.02 | 0.06 | 0.10 | 0.15 | 0.22 |
| 400 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.05 | 0.11 | 0.20 | 0.31 | 0.44 |
| 600 | 0.00 | 0.01 | 0.03 | 0.05 | 0.07 | 0.17 | 0.29 | 0.46 | 0.67 |
| 800 | 0.00 | 0.02 | 0.04 | 0.06 | 0.10 | 0.22 | 0.39 | 0.61 | 0.89 |
| 1000 | 0.00 | 0.02 | 0.04 | 0.08 | 0.12 | 0.28 | 0.49 | 0.77 | 1.11 |
| 2000 | 0.01 | 0.04 | 0.09 | 0.16 | 0.25 | 0.55 | 0.98 | 1.53 | 2.22 |
| 3000 | 0.01 | 0.06 | 0.13 | 0.24 | 0.37 | 0.83 | 1.47 | 2.30 | 3.33 |

**例**：由实际量得两点间距离为1400m，该两点平均的$y=150$km，求投影到平面上的长度等于多少？

由表15-2查得

当$y=150$km时，

$S=1000$m时　$\Delta S=0.28$m

$S=400$m时　$\Delta S=0.11$m

$S=1400$m时　$\Delta S=0.39$m

故
$$\sigma = S + \Delta S = 1400 + 0.39 = 1400.39\text{m}$$

为了减少长度变形的影响，在1:5000或更大比例尺测图时，必须采用3°带或1.5°带的投影。有时也用任意带（即选择测区中央的子午线为轴子午线）投影计算。

## 六、方向改化

现在再来研究一下高斯投影中的方向改化问题。

图15-15（$a$）表示了球面上$AB$线的方向，由$Q$经$A$、$B$两点的大圆与轴子午线所围成的球面四边形$ABB_1A_1$。由球面三角学得知：四边形$ABB_1A_1$的内角之和等于360°加其球面角超。球面角超$\varepsilon''$为

$$\varepsilon'' = \rho''\frac{P}{R^2} \tag{15-7}$$

式中：$P$——球面上四边形面积；$R$——地球半径。

由于正形投影是等角投影，也就是说，要想保持球面上的角度转移到投影面上时没有变形，由图15-15（$b$）可知，要用曲线而不是用直线联结图形顶点$a$和$b$，只有这样，才能达到等角的目的。

所以球面上$AB$方向线，应以曲线表象在投影面上，且该曲线对轴子午线来说是凸出来的。

在投影面上，将$a$、$b$两点之间的曲线以$a$、$b$两点之间的直线代替，必须进行方向改化，所谓方向改化，即计算曲线的切线与直线之间的夹角$\delta$。

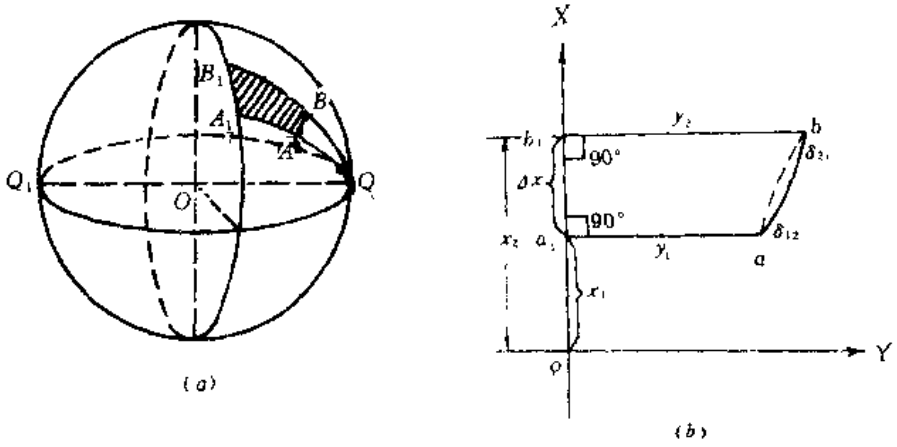



图 15-15

当距离很小时（几公里），角$\delta_{1,2}$与$\delta_{2,1}$可认为是相等的，因此

$$\delta'' = \frac{\delta_{1,2} + \delta_{2,1}}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon'' \tag{15-8}$$

如果将球面的面积$P$，用投影面上四边形$aa_1b_1b$的面积代替，此面积等于

$$P = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) = y_m(x_2 - x_1) \tag{15-9}$$

则式（15-8）可改写为

$$\delta'' = \rho'' \frac{y_m}{2R^2}(x_2 - x_1) \tag{15-10}$$

上式即方向改化公式：$\delta$的数值决定于$AB$线离开轴子午线的远近，及纵坐标增量的大小，即决定于直线的方位。例如当$y_m = 280\text{km}$，$x_2 - x_1 = 5\text{km}$，$R$取为6400km时，$\delta \approx 1''$

根据方向改化$\delta$，即可求得球面上观测的角度与其在投影面上平面角度的关系：由图15-16可得

$$\beta_{\text{平面}} = \beta_{\text{球面}} + \delta_{1,2} - \delta_{1,3}$$

根据以上所述，如果已知高级控制点的坐标已归化到投影面上，那么对其间所敷设的导线或三角测量的观测元素，（长度和角度）进行改化（将其转换成为投影面上的元素）以后，就可以按平面几何的原理，计算所有控制点的平面直角坐标。

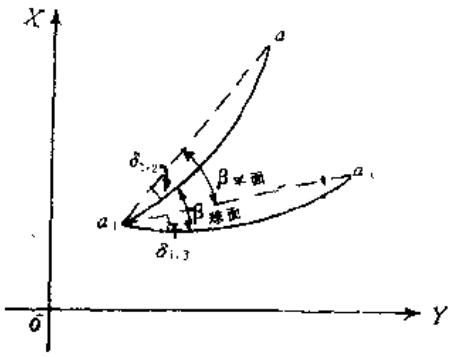



图 15-16

## 七、坐标网的重叠

为了使椭球面投影到平面上的变形不致超过一般的测量精度，在绘制中、小比例尺地形图时，通常采用6°带的高斯投影。在进行1∶1万以上大比例尺地形图测量时，则采用3°带的高斯投影。在工程测量中，有时采用任意带，即中央子午线可选择在测区中央，带的宽度一般为1.5°。

分带投影虽然起到了限制长度变形的作用，但由于每带独自进行投影，使相邻两带边

缘地区的控制点坐标不能互相利用，以及相邻带边缘附近的地形图不能互相拼接。此时相邻带图幅的坐标格网就形成如图15-17的形状。为解决上述矛盾，又采用了坐标网重叠的办法。这就是说在一定范围内的大地控制点有相邻两带的坐标值，在此范围内的地形图上有两套坐标格网。这对处理跨带控制网计算以及在分带子午线附近的图幅测图需要用到邻带控制点时，将有许多方便。

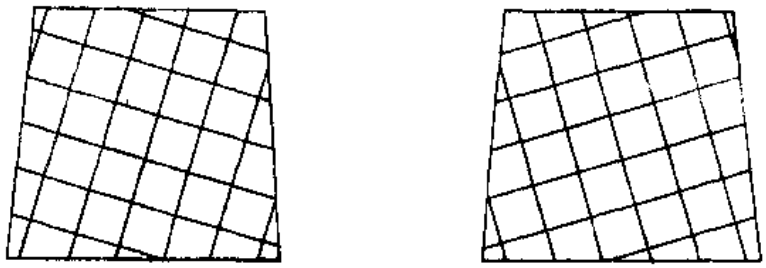


图 15-17

目前，我国对坐标网重叠的规定如下。对1:2.5万、1:5万、1:10万比例尺地形图，在该投影带西边缘的经差30′范围以内应绘上西边邻带的坐标格网。至于在东边缘绘出东边邻带坐标格网的范围，1:2.5万比例尺为经差7′30″，1:5万比例尺为经差15′，1:10万比例尺则可不绘。对1:1万比例尺地形图，只在该投影带西边缘的经差7′30″的范围内绘出西边邻带的坐标格网。图15-18为19带西边缘地形图绘出西边邻带坐标格网的示意。

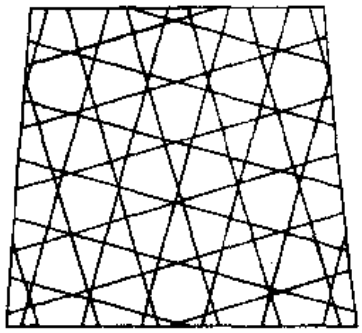


图 15-18

有关相邻带的坐标换算公式将在后继课程推导。在工程测量中，当利用国家控制点时，为了减少投影变形，有时需要换带。例如在6°带边缘地区测量，就应将国家控制点6°带坐标换算成3°带坐标，以减少投影变形。这种换带计算也将在后继课程中介绍。

## §15-3 《高斯投影大比例尺图廓坐标表》的使用

由高斯投影可知，若已知某点的经纬度（$L$、$B$），则可根据投影公式计算其平面直角坐标（$x$、$y$），还可求得图幅边的长度$a$、$b$、$c$及对角线长$d$。$a$、$b$、$c$、$d$以及图幅面积$P$、图幅平均子午线收敛角$\gamma$等统称为图幅元素。为实用方便，这些元素编有专门用表。国家测绘局分别以1:2.5万和1:5千比例尺图幅的经纬度为基础，编算出6°带投影和3°带投影的两种图幅用表，称《高斯-克吕格坐标表》和《高斯投影大比例尺图廓坐标表》。其中在查取小于1:1万比例尺地形图的图幅元素时，须采用6°带坐标表，而查取1:1万、1:5千、1:2千地形图的图幅时，须采用3°带坐标表。

3°带轴子午线之经度为$L_0$，投影带编号及相应1:100万比例尺图幅纵列编号列于表15-3。

表 15-3

| 投影带编号 | 轴子午线 $L_0$ | 百万分之一图幅纵列号数 | 投影带编号 | 轴子午线 $L_0$ | 百万分之一图幅纵列号数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 72 | 42、43 | 35 | 105 | 48 |
| 25 | 75 | 43 | 36 | 108 | 48、49 |
| 26 | 78 | 43、44 | 37 | 111 | 49 |
| 27 | 81 | 44 | 38 | 114 | 49、50 |
| 28 | 84 | 44、45 | 39 | 117 | 50 |
| 29 | 87 | 45 | 40 | 120 | 50、51 |
| 30 | 90 | 45、46 | 41 | 123 | 51 |
| 31 | 93 | 46 | 42 | 126 | 51、52 |
| 32 | 96 | 46、47 | 43 | 129 | 52 |
| 33 | 99 | 47 | 44 | 132 | 52、53 |
| 34 | 102 | 47、48 | 45 | 135 | 53 |

在高斯平面坐标系中，以每一带的轴子午线为直角坐标系统的纵轴，或称$X$轴，由赤道形成的直线作为横轴，或称$Y$轴，轴子午线与赤道所形成的直线的交点作为坐标原点。横坐标的计算是以轴子午线之东为正，西者为负，纵坐标的计算是以赤道之北为正，南者为负。为了使横坐标均为正值起见，在6°带及3°带均加入了常数500km，并冠以投影带带号。

现仍以上述甲地为例，查表求得其所在1:5千比例尺地形图的梯形图廓点坐标。甲地的经纬度分别为$L=122°28'25''$、$B=39°54'30''$。其3°带之轴子午线$L_0$为123°。图幅编号为J-51-5-(24)-b。现将图15-7中该比例尺地形图之四个图廓点位置编为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，如图15-19所示，并将其地理坐标列于表15-4。根据图廓点地理坐标，查表即得平面直角坐标，因为经差为负，故$y$坐标值应冠以负号。实际应用时，通常将$y$坐标加500km使成正值。由于我国领土均在北纬，故纵坐标$x$恒为正，也不必加“+”号。图廓四边的大小及图幅的面积也可根据南北图廓之纬度值，由该

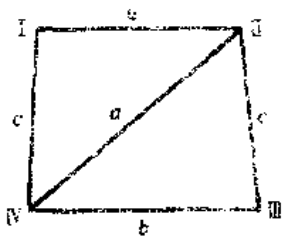


图 15-19

表 15-4

| 顶点编号 | 地理坐标 | | 平面直角坐标 | |
|---|---|---|---|---|
| | $B$ | $l=L-L_0$ | $x$ | $y$ |
| Ⅰ | 39°55′00″ | -0°31′52.5″ | 4420489.5 | -45421.5 |
| Ⅱ | 39°55′00″ | -0°30′00″ | 4420474.1 | -42749.6 |
| Ⅲ | 39°53′45″ | -0°30′00″ | 4418160.8 | -42762.5 |
| Ⅳ | 39°53′45″ | -0°31′52.5″ | 4418176.3 | -45435.2 |

表中的表Ⅱ部分查出。

为了确定1:2000比例尺的图廓点坐标，则应先查出所在的1:5000比例尺图幅之图廓点坐标$x$、$y$值，并用简单内插法算出所求坐标$x$、$y$。

同样，也可利用这册坐标表，查出1:1万比例尺图的图廓直角坐标。黑龙江省测绘局也编算了《1:10000比例尺高斯图廓坐标表》(测绘出版社，1976年)，利用该表，同样可根据图廓点的纬度及其与中央子午线的经差为引数查出地形图图廓的坐标$x$、$y$。对于1:5000比例尺地形图图廓点的坐标$x$、$y$，其中一个图廓点与1:10000比例尺图幅的图廓点相同，可从表中直接查取，其他三个图廓点的坐标可用简单内插法求出，取至0.1m，其精度约为±0.5m。

# 第十六章 大比例尺地形测量

## § 16-1 概　　述

地形测量的成果主要是得到各种不同比例尺的地形图。大比例尺测图所研究的问题，就是在局部地区根据工程建设的需要，如何将客观存在于地表的地物、地貌真实地测绘到图纸上。其特点是测区范围较小、精度要求较高、比例尺大，因而在如何真实地反映地表形态方面具有它的特殊性。

通常所指的大比例尺测图系指1:500～1:5000比例尺测图，而1:10000～1:50000比例尺测图，目前多用航测或综合法成图。小于1:100000的小比例尺图，则是根据较大比例尺地图及各种资料编绘而成。

1:10000和1:5000地形图为基本比例尺地形图，是国民经济建设各部门进行规划、设计的一项重要依据，也是编制其他更小比例尺地形图的基础资料。

1:5000比例尺地形图常用于各种工程勘察、规划的初步设计和方案的比较。也用于土地整理和灌溉网的计划、地质勘探成果的填绘和矿藏量的计算等等。

1:2000和1:1000比例尺地形图，主要供各种工程建设的技术设计、施工设计及工业企业的详细规划之用。要在图纸上确定主要建筑物、运输线路及工程管线的位置，有时还用来拟定施工测量的控制网，因而范围比初步设计阶段要小，而详细程度和精度要求较高。

更大比例尺的测图主要是供特种建筑物（如桥址、主要厂房等）的详细设计和施工之用。在测绘这种比例尺地形图时，面积更小，表示得更详细，要求精度更高。

设计部门根据该工程设计时对地形图精度和内容的要求不同而选择不同的比例尺。不同的设计阶段，也往往选择不同的比例尺。在初步设计阶段，通常选择较小比例尺的地形图，而在施工设计时，多数采用1:1000比例尺测图。对于城市市区或某些主体工程，要求精度高，常施测1:500比例尺地形图。应该指出，有的中小厂矿或单体工程在施工设计时采用1:500比例尺测图，并不是因为1:1000比例尺地形图的精度不够，而是嫌其图面较小，这时则可考虑采用将原图放大的办法或适当放宽测图精度要求。

总之，大比例尺地形图是适应城市和工程建设的需要而施测的，专业性比较强、保留期限不一，对地形图的要求也因各部门的特点而有所侧重，施测时应根据经济合理的原则，按有关技术规定进行。

## § 16-2 大比例尺测图的技术计划

测绘工作是进行一项基本建设的先行步骤。技术计划（也有称勘察纲要）是为了保证

测量工作在技术上合理、可靠，在经济上节省人力、物力，有计划有步骤地开展工作，同时便于上级检查与指导，以保证及时提交精确的地形资料，满足设计的需要。

根据上级下达的测量任务书和有关部门颁发的测量规范与细则，并依据所收集的资料，其中包括测区踏勘等资料来编制技术计划。

技术计划的主要内容有：任务概述，测区情况，已有资料及其分析，技术方案的设计，组织与劳动计划，仪器配备及供应计划，财务预算，检查验收计划，以及安全措施等。

测量任务书应明确工程项目或编号，设计阶段及测量目的，测区范围（附图）及工作量，对测量工作的主要技术要求和特殊要求，以及上缴资料的种类和日期等内容。

在编制技术计划之前，应预先搜集并研究测区内及测区附近已有测量成果资料，扼要说明其施测单位、施测年代、等级、精度、比例尺、规范依据、范围、平面和高程坐标系统、投影带号、标石保存情况及可以利用的程度等。

在一般工程建设中，面积多为几个至十几个平方公里，这时可利用国家控制网一个点的坐标和一个方向。但多数情况下没有国家控制点可资利用，这时可采用独立坐标系统。如测区面积大于100km²，则应与国家控制网连测，采用国家坐标系统。此时控制测量成果应顾及球面与平面的差别，并归化到高斯平面上计算。当采用3°带投影时，距中央子午线最远地区的长度变形为1/2900，这对普通导线测量影响尚不很严重。无论是3°带投影，或是1.5°带投影，一个测区只能用一种坐标系统。高程系统则应尽量与国家高程系统一致。即采用以1956年由青岛验潮站求出的黄海平均海水面为基准的高程系统。如测区附近没有国家水准点，或者连测工作量很大，这时可在已有地形图上求得一个点的高程作为起算高程。对于扩建和改建的工程测图，为保持两次测图的高程一致，可以利用原来的水准点高程。

凡影响到测量工作安排和进展的问题，应到测区进行实地调查，其中包括人文风俗、自然地理条件、交通运输、气象情况等。踏勘时还应核对旧有的标石和点之记。初步考虑地形控制网（图根控制网）的布设方案和必须采取的措施。

根据收集的资料及现场踏勘情况，在旧有地形图（或小比例尺地图）上拟定地形控制的布设方案，进行必要的精度估算。有时需要提出若干方案进行技术要求与经济核算方面的比较。对地形控制网的图形、施测、点的密度和平差计算等因素进行全面的分析，并确定最后采用的方案。实地选点时，在满足技术规定的条件下还容许对方案进行局部修改。

拟定计划时，还应将已有控制点展绘到图上，并绘制测区地形图分幅图。梯形分幅除绘出图廓线外，还应绘出坐标格网线（也称公里格网线）。

根据技术计划的方案，统计工作量，并结合规定计划提交资料的时间，编制组织措施和劳动计划，提出仪器配备计划、经费预算计划和工作计划进度，同时拟定检查验收计划。

在测量工作的各生产过程（如野外踏勘、选点、造埋、观测、计算）中要尽量避免工伤事故和减少仪器设备损坏，确保安全生产。测量人员要熟悉操作方法，执行安全规则，严格遵守规范细则，注意防病、防火，不断提高劳动生产率，为实现四个现代化多做贡献。

## § 16-3 地形控制(图根控制)测量

测区的高级控制点不可能满足大比例尺测图的需要，这时应布置适当数量的地形控制点，又称为图根点，作为测图控制用。在某些地区，若没有已知控制点，则应布设独立的小三角测量或导线测量。独立小三角网或导线的起始点的坐标可以假定，起算边可以用钢尺、视差法、光电测距等方法测定，其方位可用罗盘仪测定，也可测天文方位角，然后在独立网下按需要加密地形控制测量。

地形控制测量的方法，可根据测区的条件，布设中点多边形、线形锁或其他形状的三角网，还可根据地形隐蔽情况，布设导线、经纬仪测角交会等。

一般地说，作为地形控制测量的小三角网，可根据其边长情况分为一级小三角和二级小三角测量。其主要技术要求可参考表16-1。

表 16-1

| 等级 | 平均边长 (km) | 测角中误差 (″) | 起始边边长相对中误差 | 最弱边边长相对中误差 | 测回数 | | 三角形最大闭合差 (″) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | DJ6 | DJ2 | |
| 一级小三角 | 1 | ±5 | 1/40000 | 1/20000 | 6 | 2 | ±15 |
| 二级小三角 | 0.5 | ±10 | 1/20000 | 1/10000 | 2 | 1 | ±30 |

一、二级小三角网采用线形锁时，线形锁宜近于直伸，其传距角宜大于30°。在隐蔽地区，可用相应等级的导线测量代替小三角测量，其主要技术指标可参考表16-2。

表 16-2

| 等级 | 附合导线长度 (km) | 相对闭合差 | 测角中误差 (″) | 边长丈量较差相对误差 | 测回数 | | 方位角闭合差 (″) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | DJ6 | DJ2 | |
| 一 | 2.5 | 1/10000 | ±5 | 1/20000 | 4 | 2 | $\pm 10\sqrt{n}$ |
| 二 | 1.8 | 1/7000 | ±8 | 1/15000 | 3 | 1 | $\pm 16\sqrt{n}$ |
| 三 | 1.2 | 1/5000 | ±12 | 1/10000 | 2 | 1 | $\pm 24\sqrt{n}$ |

注：$n$ 为测站数。

导线应尽量布设成直伸形状，相邻边长不宜相差太大。附合导线长度超过上表规定时，宜布设成结点网形，结点间导线长度应为上表的0.7倍。

在上列小三角或导线的控制下，为了测绘地形图，还应进一步加密低一级的解析地形控制网，其形式与上述相同，如线形锁、经纬仪交会、导线测量等。只不过边长较前为短，精度要求放宽。一般说来，小三角或导线的边长不应大于测图的最大视距的1.5～1.7倍，测角中误差约为20″，导线边长的相对闭合差为1:2000。三角形最大闭合差为60″。同时为了使三角点的点位精度能满足测图或一般施工放样的要求，对三角形的个数也有限

定。作经纬仪交会时，应有多余方向校核，交会角一般不应小于30°或大于150°，交会法按分组算得的坐标差不超过规定数值，取其中数为坐标结果。

地形控制点（包括已知高级点）的个数，应根据地形复杂、破碎程度或隐蔽情况而决定其数量。一般平坦而开阔地区每平方公里，对于1:2000比例尺测图应不少于5个，1:1000比例尺则不少于50个，1:500比例尺为150个。

## § 16-4 地形测图的准备工作

地形控制结束之后，应先做好测图板的准备工作，同时观测图用的仪器进行必要的检验和校正。这里着重介绍测图板的准备工作、它包括图纸的准备、绘制坐标格网和展绘控制点。

### 一、图纸的准备

目前作业单位已广泛地采用聚酯薄膜代替图纸进行测图。这种经打毛后的聚酯薄膜，其优点是：伸缩性小，无色透明，牢固耐用，化学性能稳定，质量轻，不怕潮湿，便于携带和保存。清绘的聚酯薄膜原图可不必经过照相而直接制版印刷成图，使生产工序简化、缩短了成图周期，提高了工效，降低了成本。

薄膜表面比较光滑，需经打毛或涂一层化学涂料，使其表面形成能吸附墨的毛面。涂料薄膜价格昂贵，目前多采用打毛的薄膜作为测绘图纸。打毛的方法是将薄膜放在磨版机里，使用玻璃球加石英粉（或浮石粉）和适量的水进行研磨。研磨后要求薄膜表面粗细均匀，不带条痕。再用喷砂机将细金钢砂喷在薄膜表面，使其产生毛面。对于打毛的薄膜尚需涂一层明胶液，其浓度为：明胶1～2克，水1000毫升。涂好后要挂起阴干，并用放大镜检查涂膜质量。

据有关单位试验，认为聚酯薄膜从－50℃至0℃基本不变，0℃～50℃缩短0.06%，即每幅图50cm要缩短0.3mm，当温度大于70℃时，收缩较快，到100℃时可达2%。为解决以上毛病，在绘制格网前需进行热定型处理，使其变形较小。处理方法为：在80°～120℃的恒温箱中烘烤35～45分钟，或在热水中（90℃以上）浸泡20分钟，或在晒图机上连续曝晒六次以上。

通过以上方法处理，基本上可满足生产上的精度要求。当然最好的办法是在聚酯薄膜的生产过程中加以热定型处理，在120℃的温度保持半小时即可，经处理后，薄膜在－40℃～90℃时变形可小于$1\times10^{-4}$。

但聚酯薄膜易燃，应注意防火，防止接触高温。

测图时，在测板上先垫一张硬胶板和浅色薄纸，衬在聚酯薄膜下面，然后用胶带纸或铁夹将其固定在图板上，即可进行测图。

若用白纸测图，则需将图纸裱糊于测图板上。

测图用的图板通常采用铝板或胶合板作为底板，图板大小有50×50cm和60×60cm的，板的正面裱糊图纸，以供测图用。底板表面要平整，并用砂纸磨去其棱角，以防裱糊

后发生破裂。

裱糊前，须将图纸浸入清水中约 3 ～ 5 分钟（视图纸的质量而定），然后提出，使水流掉，将其正面复于预先铺以洁净白纸的底板上，在纸的反面和测图板上均匀涂以特制的胶糊或加水稀释的蛋清。涂好后，为使图纸与图板粘合紧密，再用软布或排刷自中央向四周抹，把空气全部驱出，使均匀贴于底板上，然后以宽 5 ～6cm 的纸条糊于图板正反面的边缘而包封之，为了防止图板的弯曲，须在图板的反面糊以较次的图纸，其四周尺寸应较图板小 1 ～2cm，亦须事先加以润湿，最后以湿软布再抹一次。

糊好的图板，两块一起正面与正面迭合堆放，上面再加以适当的重量压平，经过约半天或一天左右，图板达到半干湿程度，再取出放在干燥房间晾干(使图板互相斜靠放置），禁止用火烘或太阳晒，晾干后，检查图板是否平滑、贴紧、无皱纹和弯曲。

## 二、坐标格网（方格网）的绘制

控制点是根据其直角坐标的 $x$ 、 $y$ 值，先展绘在图纸上，然后到野外测图。为了能使控制点位置绘得比较准确，则需在图纸上先绘制直角坐标格网，又称方格网，其绘制方法如下：

1. 坐标仪绘制格网

直角坐标仪是专门用来绘制直角坐标格网和展绘解析控制点的仪器。它绘制坐标格网及展绘控制点坐标的精度较高，速度也快。它的类型很多，但其原理相同，结构也基本上一致。图16-1为大型手摇式电动刺点坐标仪的全貌，但此种仪器在较大的生产或研究单位才有。

2. 用直尺和杠规绘制坐标格网

在图板上用直尺和铅笔轻轻地画两条对角线，设相交于 $O$ 点（图16-2），自 $O$ 点用杠规沿对角线截取相等的长度 $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$，用直线连接各点，得到矩形 $ABCD$，再在各边上以10cm的长度截取 1 、 2 、 3 、 4 、 5 和 $1'$ 、 $2'$ 、 $3'$ 、 $4'$ 、 $5'$ 诸点，连接相应的各点即得坐标格网。

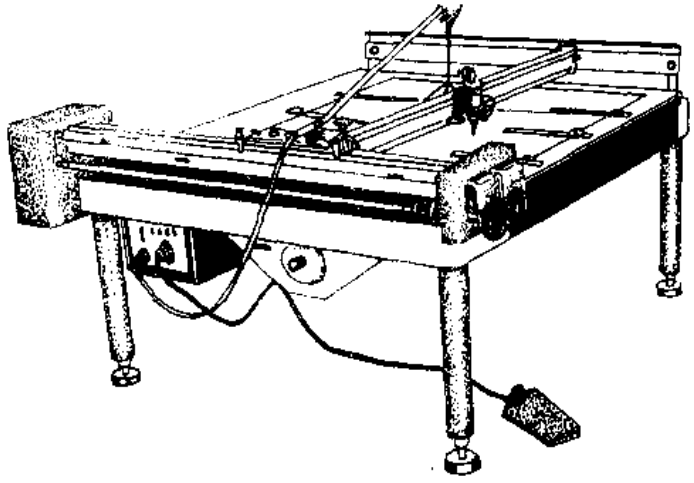


图 16-1

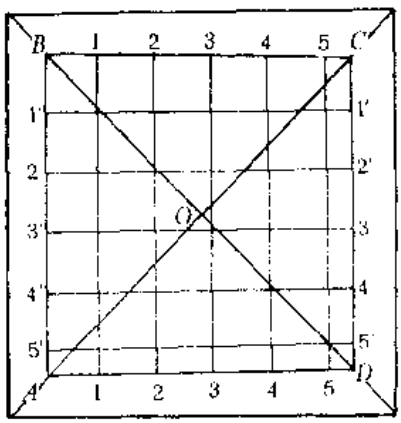



图 16-2

各点即得坐标格网。

3.用方眼尺（也叫格网尺）绘制坐标格网

方眼尺是一根金属直尺（如图16-3），其上每隔10cm（或8 cm）有一孔，每孔有一斜边，起始孔的斜边是一直线，其上划有一细线表示零点，其它各孔及尺子末端的斜边均以零点为圆心，如五四型以10、20……50及70.711为半径的短弧线。五四型方眼尺，它可展绘40×50cm、50×50cm的正方形，以及10×10cm的方格网。图16-3中的A和D均表示对角线长，如A-40为40cm×40cm正方形对角线长56.568cm。

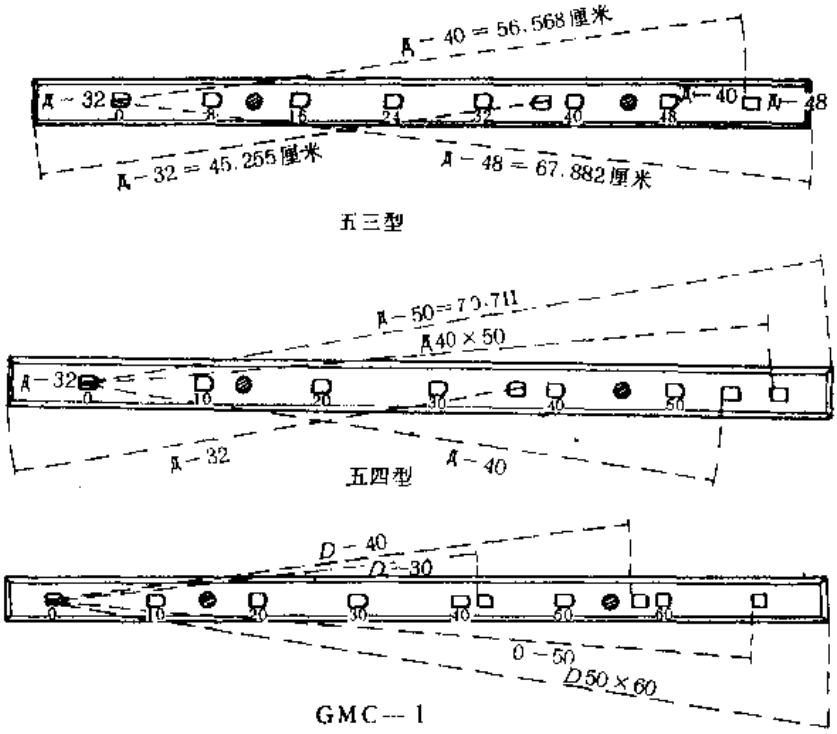



图 16-3

4.坐标格网板法

坐标格网板是操作简单方便的金属板。

图16-4是特制的金属方框，方框为正方形，边框四周垂直竖立几个金属小圆柱，圆柱同一侧之间的长度精确等于10cm或5 cm。绘制格网时，将直尺紧靠金属圆柱的一侧，沿直尺边画直线，便可得所需的方格网。

5.映绘（或透写）法绘制格网

采用聚酯薄膜测图时，也可以用映绘（或透写）的方法绘制方格网。即将已绘好的标准方格网，放在聚酯薄膜图纸的下面，压平后用直尺直接在薄膜上绘出方格。

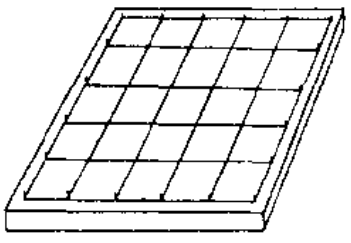


图 16-4

6.方格网的检查

方格网绘制的正确性直接影响到解析点展绘的精度。因此，无论用什么方法绘制的方格网都必须加以检查。

用直尺检查各方格网的交点是否在同一直线上，其偏离值应小于0.2mm。用标准直尺（如日内瓦尺[1]等）检查方格网线段的长度与理论值相差不得超过0.2mm。方格网对角直线长度误差应小于0.3mm，如超过规定的限差应重新绘制。

## 三、展绘图廓点及控制点

点的展绘就是把图廓点（梯形分幅时）及控制点的坐标位置，按比例展绘到图纸上。展点质量的好坏与成图质量有着密切的关系，因此须本着“过细”的精神，“认真”地对待。

根据测区“平面控制布置及分幅图”，抄录并核对有关图幅内控制点的点号及坐标、高程、等级和相邻点间的距离等，用来进行展点并留作测图时检查之用。

在展点时，首先确定控制点所在的方格。如图16-5中，控制点2的坐标$x_2=5674.16$m、$y_2=8662.72$m，根据点2的坐标知道它是在$klnm$方格内，然后从$m$点和$n$点用比例尺向上量取74.16，得出$a$、$b$两点，再从$k$、$m$向右量62.72，得出$c$、$d$两点。$ab$和$cd$的交点即为2点的位置。

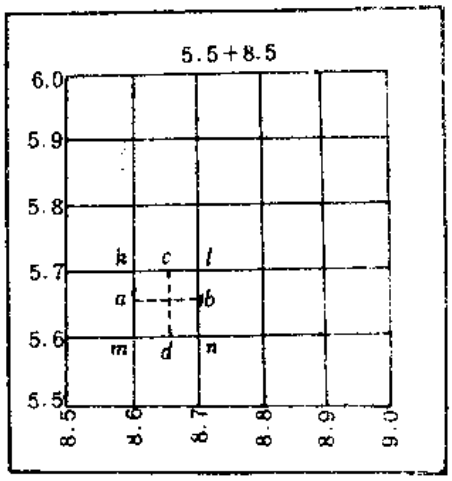


图 16-5

同法将其它各点展绘在坐标方格网内，各点展绘好后，也要认真检查一次，此时可用比例尺在图上量取各相邻控制点之间的距离，和已知的边长相比较，其最大误差在图纸上不得超过0.3mm，否则应重新展绘。

当控制点的平面位置绘在图纸上后，还应注上点号和高程。

用一般直尺展点只能估读到尺子最小格值的1/10。如要正确地读出最小格值的1/10，则可用复式比例尺。

复式比例尺常刻在金属板上，在展点时用分规在尺上量好需要的长度再转到地形图上。

为了检查图廓点的展绘是否正确，可以量取图廓的对角线和边长，该对角线及边长根据图廓点之坐标反算求得，对于1:5000比例尺地形图，可由《高斯投影大比例尺图廓坐标表》查取。三角点和地形控制点的展绘正确与否，用量度点与点之间距离来检查。

如果发现所绘的点位有错，应改变坐标格网的公里数，重新展点，而且只有当个别刺点有错，才允许抹去其刺孔而在其旁重新刺点。

## 四、至图外点方向线的展绘

为了标定图板的方向，常需要由图内点瞄向另一个不位于图板上的点，而需展绘其方向线。展绘时可采用内分点或外分点的方法进行。

设图16-6中的$P$至图外的$k$点的坐标方位角为已知，通过$P$点作一平行于纵坐标线的

[1] 日内瓦尺即指一级线纹米尺，由于该尺是在日内瓦国际会议上制定的，故习惯上称之为日内瓦尺。见本书图5-26。

直线，使与距 $P$ 点最远的横轴线相交于 $m$，根据已知的坐标方位角 $\alpha$ 及 $P$ 点与 $m$ 点的纵坐标之差，则可按下列公式求得线段 $mm'$ 之长度：

$$mm' = Pm \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

若按比例尺截取 $mm'$ 之长度，将得 $m'$ 点。通过 $P$ 与 $m'$ 点所作的直线即为至所求 $k$ 点的方向。$m'$ 称为内分点。

为了检查起见，须以同样的方法在 $Pm'$ 相反的方向得出外分点 $n'$。至 $k$ 点的方向线必须在得到检查点之后始行绘出。所绘的方向线须在图廓外刺点固定之。

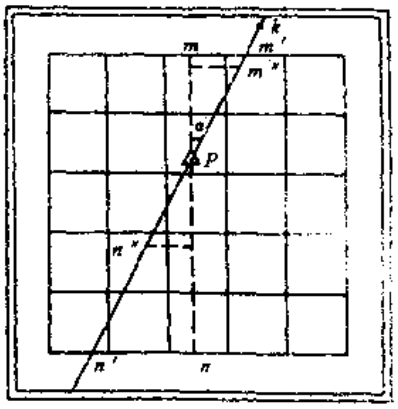


图 16-6

向图外点展绘方向线时，也可采用下述方法进行。设已知图16-6内 $P$ 点和图外 $k$ 点的坐标为

$$x_P = 4\ 419\ 662.53\mathrm{m}, \qquad y_P = 21\ 455\ 737.56\mathrm{m};$$

$$x_k = 4\ 423\ 412.53\mathrm{m}, \qquad y_k = 21\ 457\ 800.06\mathrm{m}。$$

先求出这两点的坐标差：

$$x_k - x_P = 3750.000\mathrm{m}, \qquad y_k - y_P = 2062.50\mathrm{m}$$

然后用目估概略定出图幅内能容纳此坐标差的若干分之一，设为 $x_k - x_P$ 的1/5，则以1/5分别乘以上列坐标差，即得辅助点 $m''$、$n''$ 对 $P$ 点的坐标增量：

$$\Delta x = 750.00\mathrm{m}, \qquad \Delta y = 412.50\mathrm{m}$$

$P$ 点的坐标加上此坐标增量即得 $m''$ 点的坐标：

$$x''_m = 4\ 420\ 412.53\mathrm{m}, \qquad y''_m = 21\ 456\ 150.06\mathrm{m};$$

$P$ 点的坐标减去此坐标增量即得 $n''$ 点的坐标：

$$x''_n = 4\ 418\ 912.53\mathrm{m}, \qquad y''_n = 21\ 455\ 325.06\mathrm{m};$$

将两辅助点展绘在测图板上，通过该两点及 $P$ 点即可作出至 $k$ 点的方向线。其中一个辅助点系作检查之用。

有的单位在满足其作业要求的情况下，利用有机玻璃或聚酯膜片等材料制成展点工具，使展点工效大大提高。

## § 16-5 测站点的测定

地形控制测量及图板准备就绪后，即可进行地形测图。测图时应尽量利用各级控制点作为测站点。地表上的地物、地貌有时是极其复杂零碎的，要想真实准确地显示它们，在测图时，一个测站测绘的范围就不能太大，否则视距和高程的精度就会大大地降低，所以规范对不同比例尺地形图按不同情况对最大视距有明确规定。而且要全部在三角点或地形控制点上测绘出所有碎部点往往也是困难的，因此为了保证碎部点的精度，除了尽可能利用三角点或地形控制点作测站点外，往往还须增设测站点。

尤其是地形琐碎，含水线地形复杂地段，小沟，小山脊转弯，房屋密集的居民地，以及雨裂冲沟繁多的地方，对测站点的数量要求会多一些，但要切忌用测站点作大面积的控制。

增设测站点可以用解析法，也可以用地控点为已知点做少量图解交会点，或用视距法往返观测引测一个测站点，即一条边的视距支导线。1:5000比例尺测图时，可引测两个点的支导线，支导线边长不应大于相应比例尺地形点最大视距长度的2/3，往返观测的视距较差一般不大于边长的1/150。交会点必须有一个多余方向作校核，交会角应在30°～150°之间。

交会点、支点的高程以竖角一测回测定之。由两个方向或往返观测推算的高差较差，一般地说，平地不应大于1/5等高距，山地不应大于1/3等高距。

## §16-6 图边测图及图的拼接

地形图是分幅施测的，为了保证相邻图幅的互相拼接，每一幅图的四边，一般均须测出图廓外5mm，对地物应测完其主要角点，为了测出电杆等直线形地物的方向，应多测出一些距离。

当布设地形控制点时，应当考虑到图边测图的需要，如果图廓边没有足够的解析点，可增设图边公共测站点，利用公共点测图将有利于相邻图幅的拼接，并有利于图边的测图精度。

完成图边测图后，白纸测图则需将图边摹绘于透明纸上，一般每幅图仅描绘东、南两个图边，这就是接图边。

在接图边上应绘出相应的图廓线及坐标格网线，并注出坐标数值，然后映绘图廓内外所有地物、地貌。图内绘出1～1.5cm，图外则按图边规定的所测宽度。并注明相应图幅编号、接图日期。为了区分不同图幅的地物、地貌，透写时可用不同的颜色。

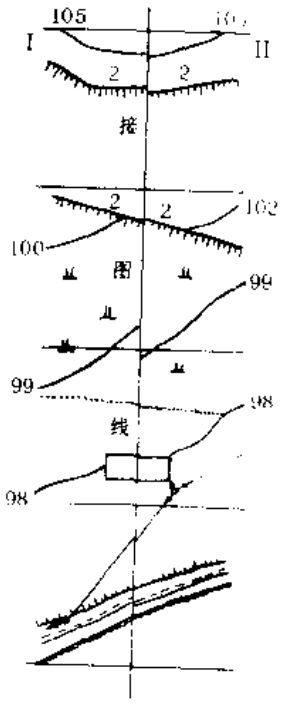


图 16-7

拼接时，两幅图接图的较差，视地形图测绘精度的要求而异。各作业规范对各种比例尺测图的地物和等高线的精度都有明确规定。

图16-7所示为两相邻图幅的接边情况。左边是图幅Ⅰ，右边是图幅Ⅱ。两幅图的坡坎和小路位置在图边均错开了一个位置。坎和小路属一般地物。假如说一般地物的测绘中误差要求小于0.8mm，由于图边部分的两幅图是单独测量的，则两幅图分别画出坎或小路位置之差的中误差应小于$0.8\sqrt{2}$mm。若以两倍中误差作为限差，则接图时两幅图上同一地物的相对位移可容许到$2\times0.8\sqrt{2}\approx2.2$mm。应当注意到，两倍中误差出现的机会只是5%，因此在接图时应注意各种地物接边时位移情况的规律性，应该是小误差出现的情况较多。如果接近限差的情况较多，即使均不超限也应考

虑测图的精度是否合乎要求。

再以图16-7为例说明等高线的接图误差。等高线的位置中误差与地面坡度有关。假如在平地规定等高线表示的高程中误差不能大于基本等高距的1/3，在丘陵为2/3，在山地为一个等高距。对于基本等高距为1m的地形图，在平地的中误差为1/3m，则接图时容许最大误差为 $2\cdot\sqrt{2}/3\approx0.9$m。在图16-7中，高程为99m的等高线，两幅图相错的位置按高程计约为0.3m，符合要求。

两幅图的接图较差合乎要求后，取地物和等高线的平均位置加以改正。改正后的地物地貌，还应注意保持它们的合理走向。

对于超限的部分，应通过外业检查解决。

相邻四幅图相接处的地物、地貌也要进行拼接，可用透明纸按上述要求在图的四角处进行重复接图。

当采用“聚脂薄膜”进行测图时，不必再描绘图边，即利用其自身的透明性，让相邻两图幅的相应邻边迭合在一起，如在容许误差范围内，则在其中一幅改正其地物、地貌的位置，另一幅可根据改正后的图边进行改正。四个图角的拼接也按上述方法重复进行接图。

图廓边测图与图的拼接，是地形测绘中的重要环节，必须认真对待，严格做好。

## § 16-7 地形图的检查与地形测图的结束工作

### 一、地形图的检查与验收

测绘工作是十分细致而复杂的工作。为了保证成果的质量，测量人员必须具有高度的政治责任感、严肃认真的工作态度和熟练的操作技术。同时还必须有合理的质量检查制度。测量人员除了平时对所有观测和计算工作作充分的检核外，还要在自我检查的基础上建立逐级检查制度。

（一）自检

自检是保证测绘质量的重要环节。测绘人员应经常检查自己的操作程序和作业方法。自检的内容有：所使用的仪器工具是否定期检验并符合精度要求；地形控制测量的成果及计算是否充分可靠；图廓、坐标格网及地控点的展绘是否正确；以及地控点的高程是否与成果表相符等。测图开始前，应选择一个通视良好的测站点设站，先以一远处清晰目标定向，然后瞄准其他已知点，来检查测板定向和已知点位置的正确性。每一测站，以一个方向定向，还至少以另一方向检查，并检查高程无误后，始能测图。每站测完后，应对照实地地形，查看地物有无遗漏，地貌是否相象，符号应用是否恰当，线条是否清晰，注记是否齐全正确等。当确认图面完全正确无误后，再迁到下一站进行测绘。测图员要做到随测随画，要做到一站工作当站清，当天工作当天清，一幅测完一幅清。

（二）全面检查

测图结束后，先由作业员对地形图进行全面检查，而后组织互检和由上级领导组织的专人检查。检查的方法分室内检查、野外巡视检查及野外仪器检查。

室内检查首先是对所有地形控制资料作全面详细的检查，包括：观测和计算手簿的记

载是否齐全、清楚和正确；各项限差是否符合规定。也可视实际情况重点抽查其中的某一部分。原图的室内检查，主要查看格网及控制点展绘是否合乎要求，图上地控点及埋石点数量是否满足测图要求，图面地形点数量及分布能否保证勾绘等高线的需要，等高线与地形点高程是否适应，综合取舍是否合理，符号应用是否合乎要求，图边是否接合等等。室内检查可以用蒙在原图上的透明纸进行，并以此为根据决定野外检查的重点与巡视的线路。

巡视检查应根据室内检查的重点按预定的路线进行。检查时将原图与实地对照，查看原图上的综合取舍情况，地貌的真实性，符号的运用，名称注记是否正确等。巡视检查也要在图板上复一透明纸，以备修正和记载错误之用。

仪器检查是在内业检查和外业巡视检查的基础上进行的。除将检查发现的重点错误和遗漏进行补测和更正外，对发现的怀疑点也要进行仪器检查。仪器检查一般用散点法进行，即在测站周围选择一些地形点，测定其位置和高程，检查时除对本站所测地形点重新立尺进行检查外，并注意检查其它测站点所测地形点是否正确。还应利用方向法照准一些突出目标，视其方向是否正确。仪器检查的另一种方法是断面法，它是沿测站的某一方向线进行，以测定该方向线上各地形特征点的平面位置和高程，然后再与地形图上相应地物点、等高线通过点进行比较。断面法测定点的位置和高程可仍用测图时相同的仪器，也可用钢尺量距，直接水准测定各断面点的高程。检查结果，各项误差应不超过规范所规定的要求。如检查方法与测图方法相同时，各项误差应不超过规定的最大误差的 $\sqrt{2}$ 倍。

在检查过程中对所发现的错误和缺点，应尽可能予以纠正。如错误较多，应按规定退回原测图小组予以补测或重测。

测绘资料经全面检查认为符合要求，即可予以验收。并按质量评定等级。

检查验收工作是对成果成图进行的最后鉴定。通过这项工作，不仅要评定其质量，而更重要的是最后地消除成图中可能存在的错误，保证各项测绘资料的正确、清晰、完整，真实地反映地物地貌。

技术检查工作的主要依据是技术计划和测量技术规范。

## 二、地形图的清绘与整饰

对测图小组提交的铅笔原图，按地形图图式进行着墨描绘，称为地形图的清绘。清绘时要注意地物地貌的位置、内容和种类均不得更改和增减。清绘时可按下列顺序：内图廓、坐标格网；控制点、地形点符号及高程注记；独立物体及各种名称、数字的绘注；居民地等建筑物；各种线路、水系等；植被与地类界；等高线及各种地貌符号等。

图廓的整饰包括外图廓线、坐标网、经纬度、图幅名称及图号等。

线条粗细、采用字体、注记大小等均应依照地形图图式的规定。

聚酯薄膜图板经外业测绘后，图面上往往带脏污和铅笔粉末，影响绘图着墨，因此，在清绘前要清洗图面。冲洗时可拿泡沫塑料（或脱脂棉）蘸肥皂水（或洗衣粉水）轻轻擦洗；忌用毛刷擦洗，以免破坏薄膜毛面和模糊铅笔线。个别图面带油污太多，也可放入苛性钠水溶液内浸泡后冲洗晾干，涂明胶后再进行清绘作业。

薄膜绘图用的墨汁，应较纸上用的墨汁干得快，干后不溶于水，跟图面结合牢固，一般可在黑墨中加入2％的重铬酸铵，也可用市面出售的专门墨水。

绘错和跑线部分可用刀子刮去，用砂橡皮擦毛后再绘。

薄膜上的图形，特别是点绘的图形，容易脱落，在整幅图完成后尚需涂布保护膜。保护膜要洁白透明，不影响图形，不干裂、不变形。一般以丙烯酸清漆和硝基清漆作为保护膜，可用沙布或喷雾器涂布保护膜。

# 附录一　测量计算中的有效数字

测量作业中，所有的测量成果都是经过计算而求得的。计算过程中，一般都有凑整问题，在计算中，如果参加计算的数据的位数取少了，就会损害外业成果的精度和影响计算结果的应有精度；如果位数取多了，则增加不必要的计算工作量。究竟取多少位数为宜，这就是测量计算中的有效数字问题。

## 一、凑整误差

由于数字的取舍而引起的误差，称为“凑整误差”，以 $\varepsilon$ 表示。$\varepsilon$ 的数值等于精确值 $A$ 减去凑整值（或近似值）$a$，即

$$\varepsilon = A - a$$

例如：某角度4测回观测值的算术中数（平均值）为60°32′18.4″，若凑整为60°32′18″，则这个观测结果含有的凑整误差 $\varepsilon = 60°32'18.4'' - 60°32'18'' = 0.4''$。

## 二、凑整规则

为避免凑整误差的迅速积累而影响测量成果的精度，在计算中通常用如下的凑整规则，它与习惯上的“四舍五入”规则基本上相同。

1.若数值中被舍去部分的数值，大于所保留的末位的0.5，则末位加1。

2.若数值中被舍去部分的数值，小于所保留的末位的0.5，则末位不变。

3.若数值中被舍去部分的数值，等于所保留的末位的0.5，则末位凑整成偶数。

上述规则也可归纳为：大于5者进，小于5者舍，正好是5者，则看前面为奇数或偶数而定，为奇数时进，为偶数时舍。

例：将下列数字凑整成小数后三位。

| 原有数字 | 凑整后数字 |
|---|---|
| 3.14159， | 3.142， |
| 2.71729， | 2.717， |
| 4.51750， | 4.518， |
| 3.21650， | 3.216， |
| 5.6235， | 5.624， |
| 6.378501， | 6.379， |
| 7.691499， | 7.691。 |

## 三、运算中的有效数字

### （一）加和减

设有四个凑整后的数字相加：

$$\begin{array}{r} 60.4? \\ 2.02? \\ 0.222? \\ +\ 0.0467? \\ \hline 62.6887 \\ ???? \end{array}$$

其中“？”表示该数带有若干的凑整误差。从这个算式中可以看出，因为第一个被加数已经可能有0.05

的误差，因此，和数最多能正确到小数后的第一位，小数后的第二位已是不可靠了，保留三位是完全不必要的。

从算式中容易看到减法的情形是相同的。

因此得出如下规则：在加减时，各项数字的取位，是以各项中的小数位最少的那一项为标准，其余各项均凑整成比该项多保留一位。上题应取

$$\begin{array}{r} 60.4 \\ 2.02 \\ 0.22 \\ +\ 0.05 \\ \hline 62.69 \end{array}$$

上式中小数后的一位是有效数字。多保留一位的目的，是为了不使因凑整而严重影响结果的精度，因此所多保留的一位数字常称为安全数字。

（二）乘和除

设有两个数字相乘

$$\begin{array}{r} 232.12? \\ \times\quad 0.34? \\ \hline ???\ ??? \\ 9284\ 8? \\ 69636\ ? \\ \hline 78.920\ 8?? \\ ???\ ??? \end{array}$$

由算式可见，乘积中第三个数字“9”已不可靠，保留更多的数字是没有意义的。这是因为因子“0.34”只有两个“数字”正确，因此乘积也只有两个“数字”正确。除法情形相同。

因此得出如下规则：在乘除时，各因子的取位是以“数字”个数最少的为准，其余各因子及乘积（商）均凑整成比该因子多一个“数字”，与小数点位置无关。这样，上题应为

$$\begin{array}{r} 232 \\ \times 0.34 \\ \hline 928 \\ 696 \\ \hline 78.88 \end{array}$$

答数为78.9。

本例中，有效数字为两位，第三位是安全数字。

有时，相乘的两个因子的第一个字相乘得两位数，如 $2\times 8$，$6\times 9$ 等等。在这种情况下，乘积的有效数字将多一位。

例：$232\times 0.64 = 148.5$

148为有效数，第四位5是安全数。

例：求

$$\frac{603.21\times 0.32}{4.011} = ?$$

解：

$$\frac{603\times 0.32}{4.01} = 49.1$$

（三）乘方与开方

关于乘方与开方的凑整问题，可以用微分的公式来说明。

1. 乘方

设有 $$u = x^n$$

则 $$du = nx^{n-1}dx$$

或

$$\frac{du}{u} = n\frac{dx}{x} \qquad (a)$$

即，数值 $u$ 的相对误差等于底数 $x$ 的相对误差的 $n$ 倍。我们知道，数值的“数字”个数，和它的相对（凑整）误差有关。一般来说，少一个“数字”，相对误差就大10倍。例如0.501和50.16，尽管前者的最大凑整误差只有0.0005，而后者是0.005，但前者只有三个“数字”，相对误差为 $\frac{0.0005}{0.501} = \frac{1}{1000}$，而后者却有四个“数字”，相对误差为 $\frac{0.005}{50.16} = \frac{1}{10000}$，比前者小10倍。前者的相对误差大10倍的原因，是由于它少了一个数字。由（$a$）式可知，当 $n \geqslant 1$ 时，$u$ 的相对误差就大于或等于 $x$ 的相对误差。因此，$u$ 的正确“数字”的个数，不会比底数 $x$ 的多。若 $n = 10$，则 $u$ 应比 $x$ 少一个正确数字。若 $n = 2$，即平方的情况，则两者的“字”数相差不到一个，理应在 $u$ 值中保留与 $x$ 同样多的“字”数，但为了避免引起新的凑整误差，故常多保留一个安全数字。

例 $$u = x^2 = (601)^2 = 3612 \times 10^2$$

若写成 $601^2 = 361201$，那就不仅增加不必要的计算工作，而且使人对答案的正确程度有错误的印象。

2. 开方

设有 $$u = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

则 $$\frac{du}{u} = \frac{1}{n}\frac{dx}{x} \qquad (b)$$

因为是开方，如 $n = 2$，则：

$$\frac{du}{u} < \frac{dx}{x}$$

由（$b$）式表明：$u$ 的相对误差小于 $x$ 的相对误差。同乘方的道理一样，则 $x$ 的数字必定小于 $u$ 的数字，因此当 $x$ 有 $m$ 个“字”数时，$u$ 应取（$m + 1$）个“字”数即可。

例 $$\sqrt{1234} = 35.128$$

由上面分析得知：

在计算 $u = x^2$ 或 $u = \sqrt{x}$ 时，若 $x$ 具有 $m$ 个“字”数，计算结果的 $u$，连安全数字在内，凑整至 $m + 1$ 个“字”数就可以了。

（四）对数

对数表是测量计算工具之一。正确地使用对数表，对于提高计算工作效率和保证计算成果的精度有很大的作用。因此必须研究对数的凑整规则，即研究由真数求对数的误差大小和对数表本身的最大凑整误差问题。

设有 $$u = \lg x$$

求微分得

$$du = M\frac{dx}{x} \qquad (M = \lg_{10} e = 0.43429)$$

或写成误差关系式

$$\Delta \lg x = M\frac{\Delta x}{x} \qquad (c)$$

$M$是常用对数率，$\frac{\Delta x}{x}$为真数$x$的相对误差，等式左边为对数$\lg x$的真误差，或称对数误差。因此，由真数求对数，它的对数误差可以用这个真数的相对误差来表示。而相对误差的大小又与这个真数的"字"数有关，因此，对数误差的大小也与真数的"字"数多少有关。

例：数值5027.68有六个数字，求其对数值。问应该用几位对数表。

解：由于真数最大的凑整误差为0.005，引起对数的误差将为

$$\Delta \lg x = M\frac{0.005}{5027.68} \approx 0.43\frac{1}{1000000} = 0.00000043$$

而六位对数表的本身可能有0.0000005的误差，它与例中真数所引起的误差相仿，所以用六位对数表是相适应的。

一般来说，可以作出如下结论：对于$n$个数字的数值，用对数运算时，应该采用$n$位对数表。反之，用$n$位对数表来反查真数时，查得的真数也只能有$n$位数字。

如已知真数为4.36785，则采用六位对数表查得对数为0.640268。

已知对数为6.8486603，则采用七位对数表，反查真数为7057653。

另外，必须注意一个问题，同是六个数字，其首位为1时，对数误差较大，首位为9时，对数误差最小，在通常情况下，以首位为5来研究应该采用多少位对数表。但当数字的首位小于5时，若对计算精度要求较严的情况下，还应考虑采用增多一位的对数表，以免对数误差大于对数表本身最大的凑整误差。

（五）三角函数

三角函数表也是测量计算工具之一。现讨论三角函数的误差和三角函数表本身的最大凑整误差问题：

正弦与余弦

设有 $u = \sin x$

则 $du = \cos x dx$

或 $\Delta u = \cos x\frac{\Delta x''}{\rho''}$

当$\Delta x = 1''$时，近似地取$\rho'' = 2 \times 10^5$。所引起的误差列于表附1-1。

六位函数表本身的凑整误差最大为$0.5 \times 10^{-6}$。除了接近90°以外，它比真数所引起的误差为小。故一般说来，真数凑整到$1''$，则应该用六位函数表。

对于余弦来说，结论相仿。

此外，由表列数字也可以看出，在反算正弦（余弦）时，若接近90°（或0°），则函数的小误差，可导致真数有好几秒的误差。

正切与余切

设有 $u = \operatorname{tg} x$,

则 $du = \sec^2 x dx$

或 $\Delta u = \sec^2 x\frac{\Delta x''}{\rho''}$

当$\Delta x = 1''$时，$\Delta u$值列于表附1-1。

表列数字说明，真数1″差所引起的函数误差，总是比六位函数表本身所有的凑整误差为大。

综上所述，一般采用如下规定：

当角度精度达 10″时，采用5位函数表；

当角度精度达 1″时，采用6位函数表；

当角度精度达 0.1″时，采用7位函数表；

当角度精度达0.01″时，采用8位函数表。

表附 1-1

| 三角函数 | 角度1″引起的函数误差 / 角度值 $x$ / 函数误差公式 | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $\Delta u=\cos x\frac{\Delta x''}{\rho''}$ $=\cos x\times 5\times 10^{-6}$ | $5\times10^{-6}$ | $4.4\times10^{-6}$ | $3.5\times10^{-6}$ | $2.5\times10^{-6}$ | 0 |
| $\cos x$ | $\Delta u=-\sin x\frac{\Delta x''}{\rho''}$ $=-\sin x\times 5\times 10^{-6}$ | 0 | $-2.5\times10^{-6}$ | $-3.5\times10^{-6}$ | $-4.4\times10^{-6}$ | $-5\times10^{-6}$ |
| $\operatorname{tg}x$ | $\Delta u=\sec^2 x\frac{\Delta x''}{\rho''}$ $=\sec^2 x\times 5\times 10^{-6}$ | $5\times10^{-6}$ | $6.6\times10^{-6}$ | $10\times10^{-6}$ | $20\times10^{-6}$ | $\infty$ |
| $\operatorname{ctg}x$ | $\Delta u=-\csc^2 x\frac{\Delta x''}{\rho''}$ $=\csc^2 x\times 5\times 10^{-6}$ | $\infty$ | $-20\times10^{-6}$ | $-10\times10^{-6}$ | $-6.6\times10^{-6}$ | $-5\times10^{-6}$ |

至于三角函数的对数表，一般来说，可以遵照同样的规则。

从表附1-1还可以看出：对于正弦和余切来说，当角度具有同样的误差时，在0°附近的小角度处，角度误差$\Delta x$所引起的函数误差$\Delta u$最大，故此时由角度查函数值的误差较大；但是，反过来此时由函数值反求角度则较准确。当角度在90°附近时，则由角度查函数值较准确，而由函数值反求角度的误差较大。余弦和正切的情况则正好与正弦和余切的情况相反。

# 附录二　面　积　计　算

在进行工程规划和设计时，常常需要测定某一地区或某一图形的面积。求面积的方法很多，下面介绍两种常用的方法：

一、图解法

首先将欲计算的图形划分成一些简单的几何图形，如三角形、平行四边形、梯形等等，然后在图上用两脚规和比例尺量取所需用的尺寸，根据几何公式算出面积。若遇到图形的轮廓线是曲线，则把它近似地当作直线看待。若欲测定的面积精度要求不高，则可采用透明方格板法来计算，将方格板放在图上，先数出在图形内完整的小方格数，然后用目估将不完整的小方格凑合成完整的小方格数，根据每个小方格所表示的实地面积，就可以求得整个图形的实地面积。

二、求积仪法

（一）求积仪的构造

求积仪主要由极臂、航臂（描迹臂）和计数机件三部分组成，如图附2-1所示。在极臂的一端有一重锤，重锤的下面有一短针，使用时短针借重锤的重量刺入图纸固定不动，短针端点称为求积仪的极点。极臂的另一端有圆头的短柄，短柄可以插在接合套的圆洞内，接合套又套在航臂上，把极臂和航臂连接起来。在航臂一端有一航针，航针旁有一支撑航针的小圆柱和一手柄。用制动螺旋和微动螺旋把接合套和航臂连接在一起。航臂长是指航针尖端至短柄旋转轴的距离。极臂长是指极点至短柄旋转轴的距离。

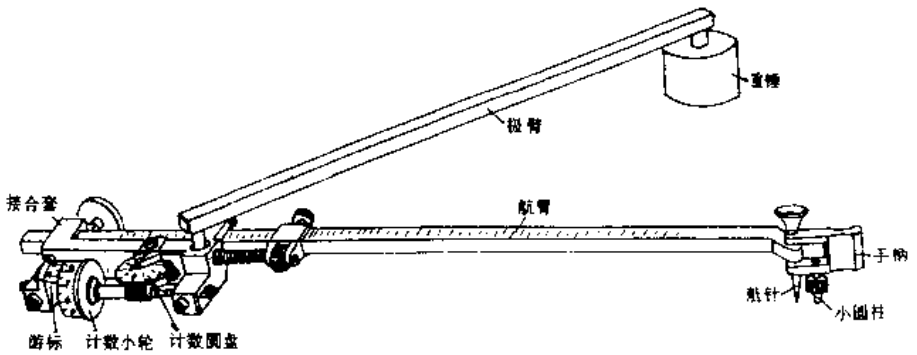



图　附 2-1

求积仪上最重要的部件是计数机件（图附2-2）。它包括计数小轮、游标和计数圆盘。当航臂移动时，计数小轮随着转动。当计数小轮转动一周时，计数圆盘转动一格。计数圆盘共分十格，由0至9注有数字。计数小轮分为10等份，每一等份又分成10个小格。在计数小轮旁附有游标，可直接读出计数小轮上一小格的十分之一。因此根据这个计数机件，可读出四位数字，首先从计数圆盘上读得千位数，然后计数小轮上读取百位数和十位数，最后按游标读取个位数。如图附2-2的读数为3686。

（二）求积仪的使用

首先将求积仪的极点固定于欲测的图形之内或图形之外(视具体情况而定)，航针尖安置在图形外廓

线上的某处，并作一记号，读出计数机件上起始读数$v_1$，然后手扶把手使航针尖顺时针方向平稳而准确地沿图形轮廓线绕行，待回到起始点再读数$v_2$，根据两次的读数即可按下式计算所测图形的面积。

极点在图形之内：$P = G(v_2 - v_1 + q)$　　（附 2-1）

极点在图形之外：$P = G(v_2 - v_1)$　　（a）

式中，$G$——求积仪的分划值；

$q$——求积仪的常数。

每一个求积仪的盒内均附有小表，其上对于不同长度的航臂和常用的比例尺给出不同的$C$和$q$值。

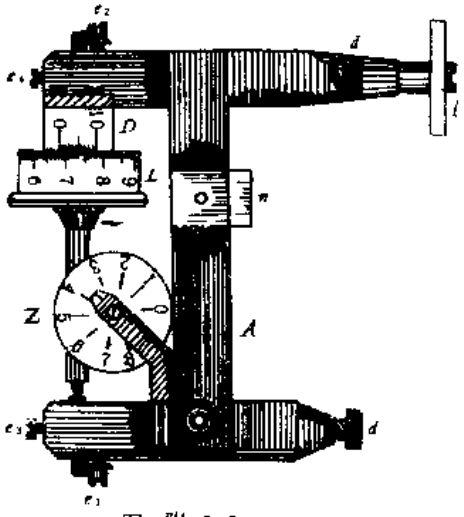


图 附 2-2

使用时必须注意读数盘零点越过指标的次数，如果读数盘的零点越过指标一次或数次，则在读数中加上一个或数个10000；如果反时针方向转动，则在读数中减去一个或数个10000。在量测面积时，最好使读数机件以这样两个位置进行而取其平均数：一次使读数机件位于极点与航针连线的右边，另一次在连线的左边。

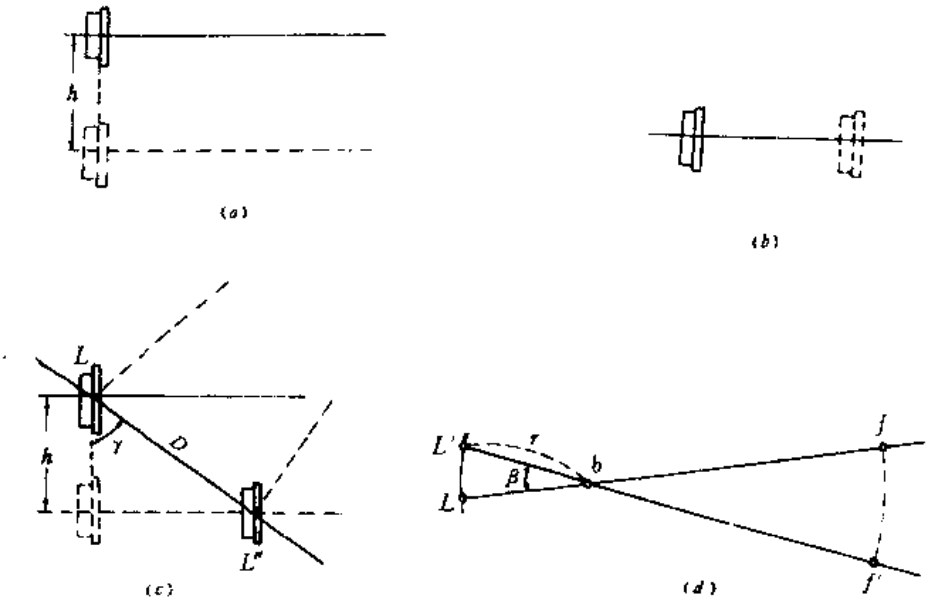
（三）求积仪的原理

用求积仪确定的面积，是测轮转动弧长的函数。因此先讨论航臂运动与测轮转动弧长之间的关系。

当航臂沿着垂直于它本身的方向平行移动时，如图附2-3$a$所示，这时测轮只有转动而无滑动，并且转动的弧长等于$h$。

当航臂沿着自己的轴线方向移动时，如图附2-3$b$所示，这时测轮只有滑动而无转动，因此测轮上的读数保持不变。

当航臂沿着斜方向平行移动时，如图附2-3$c$所示，并设$LL'' = D$，移动方向$LL''$与测轮平面成$\gamma$角，则可看成测轮的运动是由转动和滑动两部分合成，转动的弧长为：$h = D \cdot \cos\gamma$。



图附 2-3

当航臂绕两臂连接点$b$旋转$\beta$时，如图附2-3$d$所示，测轮转动的弧长$LL'=\gamma\cdot\beta$，$\gamma$为两臂连接处到测轮边的距离。

今设用求积仪确定图附2-4所示的面积。首先将求积仪的极点安置在图形内的$O$点上，把航针放在图廓线的任一点$f$上，求积仪的两臂处于$Ob$和$bf$的位置。现使航针沿图形轮廓线向右移动一个很小的弧段$ff_1$，则求积仪处于新的位置$Ob_1f_1$，测轮的位置也由$L$移动到$L_1$。为了用几何公式表示求积仪两臂所扫过的面积$Obff_1b_1O$，设想航臂$bf$先平移到$b_1f'$的位置，然后再绕$b_1$点转动到$b_1f_1$的位置。由于$ff_1$弧是图形轮廓线很小的一部分，可以近似地看成同曲线$ff'f_1$相合。

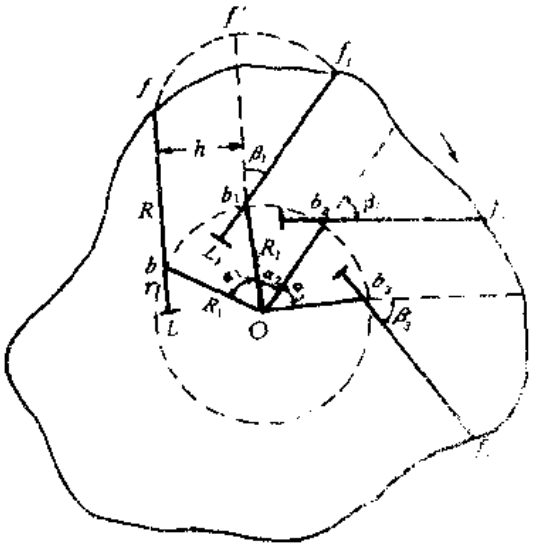


图 附 2-4

由图附2-4可知，图形$Obff'f_1b_1O$的面积可以当作一个平行四边形和两个扇形所组成。如用$P_1$表示这块面积，则可写为

$$P_1 = \text{面积}bff'b_1 + \text{面积}bb_1O + \text{面积}b_1f'f_1$$

为了计算这些面积，今以$R_1$表示极臂的长度，$R$表示航臂的长度，以$r$表示从$b$到测轮边缘的距离，以$h$表示$bf$和$b_1f'$之间的距离，以$\alpha_1$和$\beta_1$表示极臂和航臂的相应转动角，并假定$\alpha_1$和$\beta_1$是以弧度表示的，则

$$P_1 = Rh + \frac{1}{2}R_1^2\cdot\alpha_1 + \frac{1}{2}R^2\cdot\beta_1 \qquad (b)$$

根据前述航臂的移动与测轮运动的关系可知，当航臂从$bf$位置移动到$b_1f'$的位置时，测轮转了$h$的大小（图附2-3$a$）。而又当航臂从$b_1f'$绕两臂连接处$b_1$转到$b_1f_1$时，测轮$L$向相反的方向转了$L'L_1$弧长，如用$l_1$表示针尖由位置$f$移动到位置$f_1$时测轮所转动的弧长，则有

$$l_1 = h - L'L_1;$$

而

$$L'L_1 = r\beta_1,$$

故

$$l_1 = h - r\beta_1,$$

即

$$h = l_1 + r\beta_1, \qquad (c)$$

将上式代入（$b$）式得

$$P_1 = R(l_1 + r\beta_1) + \frac{1}{2}R_1^2\alpha_1 + \frac{1}{2}R^2\beta_1;$$

或

$$P_1 = Rl_1 + \frac{1}{2}R_1^2\alpha_1 - Rr\beta_1 + \frac{1}{2}R^2\beta_1 \qquad (d)$$

将航针尖沿图形外廓线继续顺序地再移到$f_2$、$f_3$……，而且以$l_2$、$l_3$……表示测轮相应转动的弧长，以$P_2$、$P_3$……表示求积仪两臂相应地扫过的面积，同理则有：

$$P_1 = Rl_1 + \frac{1}{2}R_1^2\alpha_1 + \frac{1}{2}R^2\beta_1 + Rr\beta_1;$$

$$P_2 = Rl_2 + \frac{1}{2}R_1^2\alpha_2 + \frac{1}{2}R^2\beta_2 + Rr\beta_2;$$

$$P_3 = Rl_3 + \frac{1}{2}R_1^2\alpha_3 + \frac{1}{2}R^2\beta_3 + Rr\beta_3 +$$

$$+ ) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots\cdots = R(l_1 + l_2 + l_3 + \cdots\cdots) + \frac{1}{2}R_1^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots\cdots) +$$

$$+ \frac{1}{2}R^2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots\cdots) + Rr(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots\cdots) \qquad (e)$$

如果求积仪的航针尖走遍全部图形的外廓线，而回到原来的起始位置$f$，则各部分面积$P_1$、$P_2$、$P_3$……将布满整个图形，故总面积$P$为

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots\cdots + P_n$$

用$L$表示测轮在航针尖走遍图形的外廓线以后所转动的弧长，则

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots\cdots + l_n$$

由图附3-1看出，$b$描绘了一个以极臂为半径，极点为中心的圆，故

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots\cdots + \alpha_n = 2\pi$$

为了计算$\beta$的总和，在图形外取一点$C$（图附2-5），并自$C$点引平行于航臂$bf$在沿图形绕行过程中所有位置$b_1f_1$、$b_2f_2$……的平行线。因为航针划过全部图形的外廓线而回到原来位置，航臂$bf$也随着回到原来的位置，那么航臂各连续位置所组成的角度总和将等于$2\pi$，即

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots\cdots + \beta_n = 2\pi$$

故式（$e$）可写成

$$P = RL + \pi R^2 + \pi R_1^2 + 2\pi Rr, \qquad (f)$$

$$P = RL + \pi(R^2 + R_1^2 + 2Rr)。$$

令

$$\pi(R^2 + R_1^2 + 2Rr) = Q$$

故

$$P = RL + Q$$

式中$Q$称为基圆面积。

当求积仪的极点在图形之外时，由图附2-6可以看出，（$e$）式以前的推导过程与极点在图形之内情

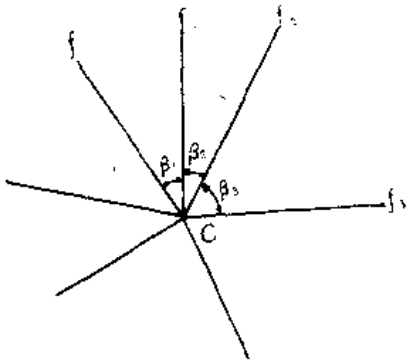



图　附 2-5

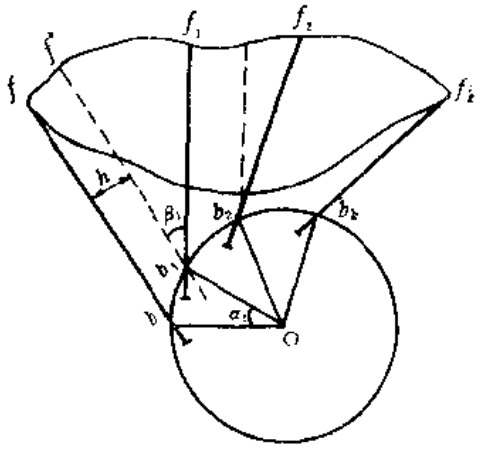



图　附 2-6

况相同。由于航针由$f$移动到$f_k$时，$\alpha$之和是由零增加到$bob_k$，当航针再继续沿图形轮廓线移动时，$\alpha$之和就不再增加而是逐渐减少，当航针回到原来位置时，$\alpha$之和就减少到零。即

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots\cdots = 0$$

同理可证：

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots\cdots = 0$$

因此，当极点在图形之外时，图形面积的公式可写为：

$$P = RL \qquad (2)$$

为了得出便于实际应用的面积公式，将求积仪航针围绕图形轮廓线移动时，测轮转动的弧长$L$转化为测轮的分划值，设测轮一整周弧长的1/1000等于$a$，以$n$表示测轮转动的分划数，即测轮游标终了读数$v_2$和起始读数$v_1$的差数为$n = v_2 - v_1$，则

$$L = an = a(v_2 - v_1)$$

当极点在图形之内时

$$P = Ra(v_2 - v_1) + Q$$

当极点在图形之外时

$$P = Ra(v_2 - v_1)$$

若令

$$Ra = C，\ \frac{Q}{G} = q$$

最后得到实用公式如下：

极点在图形之内：$P = G(v_2 - v_1 + q)$

极点在图形之外：$P = C(v_2 - v_1)$

式中：$C$——求积仪的分划值；$q$——求积仪的常数。

以上讨论的是计数机件在航针与两臂连接处之外的面积公式。当求积仪的计数机件在航针和两臂连接处之间时，其计算公式所不同的仅是

$$l = h + r\beta$$

而不是

$$l = h - r\beta$$

因此

$$Q = \pi(R^2 + R_1^2 + 2Rr)$$

而其它所有公式基本上相同。只在于$Q$中的$2Rr$正负号不同。

（四）求积仪常数的几何意义及其测定

上述公式中有两个常数，即分划值$C$及常数$Q$，也即

$$Q = \pi(R_1^2 + R^2 \pm 2Rr)$$

$$C = Ra$$

$$Q = Cq$$

为了说明公式中$Q$的几何意义，当计数机件处于航针和两臂连接处之外时，设想求积仪按图附2-7（$a$）所示位置，即使极点通过测轮平面，用$\rho$来表示极点$O$到航针尖的距离，则有：

$$\rho^2 = R^2 + R_1^2 + 2Rr$$

若计数机件在航针和两臂连接处之间时，如图附2-7（$b$），则有

$$\rho^2 = R^2 + R_1^2 - 2Rr$$

由上两式得

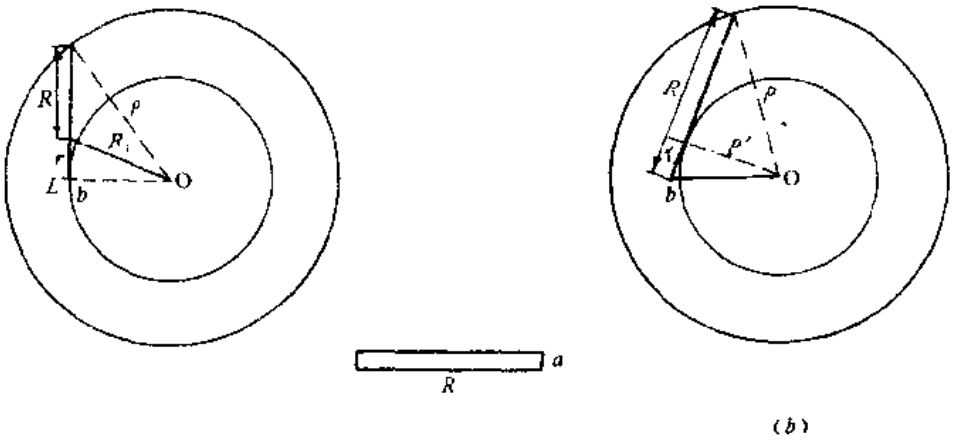



图 附 2-7

$$Q = \pi \rho^2$$

也就是说常数$Q$是一个用半径$\rho$描成的圆面积，这个圆称为求积仪的基圆。

基圆有这样一个特点，如在基圆中心安置求积仪的极点，而航针尖沿基圆的圆周绕行，即求积仪的测轮平面在全部运行时间内均位于通过极点的方向运动。因此根据前面讨论过的航臂的运动与测轮读数变化之间的关系可知，测轮只有滑动而无转动，计数机件的读数就始终保持不变。

由公式$C = Ra$可以看出，仪器常数$C$是一个狭小长方形的面积。长方形的底边为航臂的长度$R$、其高度为测轮周长的1/1000（图附2-7(c)）。

而公式$Q = Cq$则说明了常数$q$表示基圆面积内包含有若干个长方形的数目。

为了测定常数$C$，往往在图纸上划出任意正规图形（如圆、正方形、矩形）。把航臂安置在一定的长度，并使极点固定于图形之外，沿此图形外廓线绕行，得到开始和终了时的读数为$v_1$与$v_2$，因图形面积$P$为已知，按式（$i$）得

$$C = \frac{P}{v_2 - v_1}$$

下面以边长为100mm的正方形为例：已知其面积为10000mm²，通过不同位置（读数机件在航针到极点连线的左边和右边）的两个测回得差数$v_2 - v_1$的平均值为1004。故根据上式有

$$C = \frac{P}{v_2 - v_1} = \frac{10000}{1004.0} = 9.96 \approx 10\text{mm}^2$$

为了使求积仪求得的面积具有较高的精度，可采用特别的金属检验尺来划图。将求积仪的航针插入尺子的小孔中，转动检验尺一周所得面积在求积仪的小表中均列出。航针尖置于不同的小孔中，则可由表查出相应的圆面积。

测定常数$q$时，在图纸上划一个大小适当的正规图形，使极点放在图形外和图形内，均能用航针围绕图形周围而运行，设极点在图形外和在图形内两种情形所得到的读数分别为$v_1$、$v_2$；$v_1'$、$v_2'$，按式(a)则有

$$q = (v_2 - v_1) - (v_2' - v_1')$$

例：极点在图形之外时，$v_1 = 8160$，$v_2 = 12178$，得$n = 4018$；极点在图形之内时，$v_1' = 1980$，$v_2'$

2254；得$n'=-19726$[1]，则$q=4018-(-19726)=23744$。

求积仪常数随航臂的长度而变。为了计算面积方便起见，求积仪盒内附有相应的常数值。

（五）求积仪的检验

在使用求积仪之前必须进行检查，看它是否满足下列条件：

1.求积仪测轮应该在轴上自由地旋转。为了满足该条件，首先必须使测轮不与游标产生摩擦，但其间隔又不能过大，这是为了在游标上能读取较精确的读数。其次应注意测轮在轮架上的位置，当用手试验轴的位置时，轴应能勉强地活动。如果轴被压得太紧或太松，则应借助于轴架上螺旋来调整。调整时，先放松制动螺旋$e_3$或$e_4$，再用轴架上螺旋$e_1$和$e_2$（图附2-2）来调整好。

2.测轮的平面应垂直于航臂之轴。检查这个条件是否满足可用求积仪的两个位置围绕同一圆周进行检查（图附2-8）。位置Ⅰ测轮在航针与极点连线左边，位置Ⅱ则在此连线的右边。分别读取每个位置的开始和终了的读数而比较其差数。在进行几次测定后，若求积仪在同一位置间的成果符合得很好，两个位置间的成果差数超过了2～3个分划，就表示上述条件未得到满足。欲校正使满足此项条件是比较困难的，但因Ⅰ、Ⅱ两个不同位置产生的误差，其符号相反，故可取两结果的平均数以消除该项误差。能够作这种绕行的求积仪称为补偿求积仪。

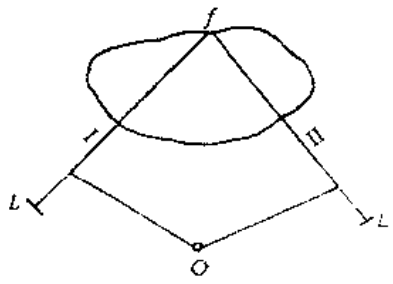


图 附 2-8

3.在小表内所指出的航臂长度和求积仪$q$值应正确。为了检查小表中所指的相应于各个$C$值的航臂长度，可依上节所述测定$C$的方法，反过来检查航臂的长度是否正确。把航臂安置在小表中所指示的长度，置极点于图形（矩形或圆）之外，环绕图形后用相应的$C$值计算其面积。如果算出的结果与用几何法算得的结果有显著的差异，则须改正航臂的长度。在改正时应注意到若按照求积仪所得到的面积大于几何方法得出的面积时，则航臂应伸长；反之，则应缩短。重复进行直至正确为止。

检查$q$时，可将航臂安置于小表中所指出的长度，而按照上节中测定$q$的方法进行。每一常数$q$要用两个位置反复进行检查。

小表中的全部航臂长度与常数$q$均须用上述方法逐一进行检查。

（六）求积仪测定面积的精度

用求积仪量测面积的精度取决于很多因素。首先与图形的形状有很大关系。对于面积约为150cm²图形的形状及状态良好的情况下，用补偿极点求积仪所测面积的相对误差一般为1/400。

为了检查用求积仪量测面积至少进行两次，且两次读数差数之差不得大于每一次读数差的5/1000，取两次的平均值作为成果。

为了取得好的成果，经实验证明：

1.图纸光滑和粗糙并不影响量测精度，但图纸有皱纹或裂痕则有很大的影响；

2.最好的图形为圆形。如图形伸展得狭长，它的边线和面积比较起来显然显得过大，这是不好的。例如图上的河流、道路等不宜用求积仪量测面积，因为不易达到满意的精度；

3.量测的面积过大或过小（当两臂间夹角或很钝或很锐的情况），都会降低精度。使用求积仪适于圆形状态之面积，边缘为不规则图形对求积仪有利。一般说来大的读数差具有较高精度，小的读数差是不好的。因此对于小的读数差情况应使航针围绕图形多转一、二转，或者缩短航臂使读数差增大，这样

[1] 因读数盘超过指标两次，故$n_2=2254-20000=-17746$。

可以获得提高精度的效果。

根据研究证明，求积仪测定面积的精度取决于下列几种误差：

1.用游标进行计数小轮读数的误差，包括该小轮上及游标上的分划误差，以及由于计数小轮偏心而引起的误差；

2.当航针沿图形轮廓描迹运行时的测量误差（未能完全沿轮廓线描迹），以及航针运行时起终点不重合的误差；

3.计数小轮运转不灵活等机械性能的误差；

4.求积仪分划值测定的误差。

用求积仪测定面积的误差估算公式有几种，例如

$$m = 0.68 + 0.028\sqrt{n}$$

式中：$m$——以求积仪量测面积的测定中误差；

$n$——以求积仪分划计的被测定图形的面积，即求积仪始终两次读数之差。

例如当$n = 1600$，则$m = \pm 1.8$，其相对中误差相当于面积的1/900。

# 第一章 绪 论

## §1-1 测绘工作的任务及其在社会主义建设中的作用

测绘科学研究的对象主要是地球的形状、大小和地表面上各种物体的几何形状及其空间位置，目的是为人们了解自然和改造自然服务。

假如要研究的只是地球自然表面上一个小区域，则由于地球半径很大，就可以把这块球面当作平面看待而不考虑其曲率。研究这类小区域地表面各类物体形状和大小的测绘科学是地形测量学的范畴。地形测量学研究的内容可以用文字和数字记录下来，也可用图表示。

凡研究的对象是地表上一个较大的区域甚至整个地球时，就必须考虑地球的曲率。这种以研究广大地区为对象的测绘科学是大地测量学的范畴。这门学科的基本任务是建立国家大地控制网，测定地球的形状、大小和研究地球重力场的理论、技术和方法。大地控制网是为研究地球有关的各种科学服务的，并且是施测地形图的重要依据。由于人造地球卫星的发射及遥感技术的发展，大地测量学又分成常规大地测量与卫星大地测量等。

摄影测量学是利用摄影象片来研究地表形状和大小的测绘科学。因获得象片的方法不同，摄影测量学又可分为地面摄影测量和航空摄影测量学。此外，还可利用人卫摄影象片编制1∶100万至1∶25万小比例尺普通地图以及各类专业地图。

城市建设、大型厂矿建筑、水利枢纽、农田水利及道路修建等在勘测设计、施工放样、竣工验收和工程监测保养等方面的测绘工作，统称工程测量学。这门学科的主要任务有三方面，即：把地面上的情况描绘到图纸上，把图纸上设计的建筑物桩定到地面上，以及为建筑物施工过程中和竣工后所产生的各种变化而进行的变形观测。

利用测量所得的资料，研究如何投影编绘成地图，以及地图制作的理论、工艺技术和应用等方面的测绘科学是制图学的范畴。

测绘工作常被人们称为建设的尖兵，这是由于不论是国民经济建设还是国防建设，其勘测、设计、施工、竣工及保养维修等阶段都需要测绘工作，而且都要求测绘工作走在这类任务的前面。测绘科学在保卫祖国的战斗中也起着很重要的作用，如地形图就是战略部署的重要资料之一。随着科学技术的日益发展，测绘科学在国民经济建设和国防建设中的作用也将日益增大。目前，在地震预测预报、海底资源勘测、近海油井钻探、地下电缆埋设、灾情监视与调查、宇宙空间技术，以及其他科学研究方面无不需要测绘工作的配合。祖国幅员辽阔，资源丰富，测绘任务十分繁重，这是测绘工作者的光荣。每个测绘工作者有责任兢兢业业，不避艰辛，努力当好国民经济建设的尖兵，为实现四个现代化多做贡献。

## §1-2 测量学的发展概况

科学技术是生产力。现代科学技术是人类世世代代同自然界斗争的经验结晶。远溯到世界上古史时代，就有夏禹在黄河两岸治理水患和埃及尼罗河泛滥后农田边界整理的传说。这些都需要一定的测量知识，或者说已用简单的工具进行了测量。

公元前七世纪前后，即春秋时期管仲在所著《管子》一书中已收集了早期的地图三十七幅。到公元前五世纪至三世纪，即战国时代，我国已有利用磁石制成最早的指南工具"司南"的记载。公元前一百三十年，西汉初期的《地形图》及《驻军图》已于1973年从长沙马王堆三号汉墓中出土，为目前所发现我国最早的地图。公元前三百五十年左右（战国时代）我国甘德和石申合编了世界第一个星表，即《甘石星表》。东汉张衡（78～139年）创造了水运浑象仪或称天球仪，把天象正确地表示出来；他又制候风地动仪，为世界上第一架地震仪；还著有《灵宪》等书，总结了当时的"浑天说"。三至四世纪魏晋时期的刘徽著《海岛算经》，论述了有关测量和计算海岛距离及高度的方法。四世纪后秦姜岌发现大气折光现象，并给予正确的解说。西晋的裴秀（224～271年）提出了绘制地图的六条原则，即《制图六体》，是世界最早的制图理论；他还绘制了《禹贡地域图》十八幅，缩编成《天下大图》为《地形方丈图》。唐代贾耽（730～805年）根据《制图六体》的理论曾编绘有《华夷图》，原图已失传，宋代有人参考原图制成的《华夷图》和《禹迹图》刻在石碑上，现尚保存于西安，是目前见到仅次于马王堆出土的古地图。九世纪李吉甫的《元和群县图志》为我国古代最完善的全国地图。在720年前后，唐代僧一行（本名张遂），因当时历法误差太大，要进行修改，在他主持下进行了大规模的天文测量。其中最著名的是724年由太史监南宫说负责的，自滑县经浚仪、扶沟到上蔡直接丈量了长达三百公里的子午线弧长，并用日圭测太阳的阴影来定纬度。这是我国第一次应用弧度测量的方法测定了地球形状和大小，也是世界上最早的一次子午线弧长的测量。到了宋代，沈括（1031～1095年）曾在1076～1087年间绘制《天下州县图》，他还在1072～1074年间创用分层筑堰法，使用水平尺、罗盘进行地形测量；并且制作了表示地形的立体模型，称为"木图"，比欧洲最早的地形模型早七百余年。元代郭守敬（1231～1316年），在他倡议下进行了大规模的天文测量，拟定了全国纬度测量计划，共实测了二十七个点。十八世纪初，即清代初年，进行了大地测量，在这个基础上开展了全国测图工作，于1708～1718年间完成了《皇舆全图》。在此以后，我国在日益腐朽的清封建王朝、北洋军阀和国民党统治下，测绘科学很少发展。1911年后虽然成立了测量局，有的省还办了测绘学校，曾测了部分地图，但成效也不大。中华人民共和国成立后，在党的领导下，测绘科学才又得到了新的发展。

世界各国测绘科学的发展主要是从十七世纪初开始逐步发展起来的。当时产资阶级革命兴起，生产力得到发展，各种科学也在相互促进下得到发展。十七世纪初望远镜应用于天象观测，这是测绘科学发展史上一次较大的变革。以后望远镜普遍应用于各种测量仪器。1617年三角测量方法开始应用。至1668年，已有放大倍率为四十倍的望远镜出现，使在可见光谱范围内进行测量工作大为方便，并且提高了测量成果的精度。1683年法国进行了弧

度测量，证明地球确是两极略扁的椭球体。此后，世界测绘科学无论在测量理论、测量方法及测绘仪器各方面都有不少创造发明。如高斯（德国，1777～1855年）于1794年提出了最小二乘法理论，以后又提出了横圆柱投影学说。这些理论经后人改进后至今仍在应用。但这个时期的测绘工作仍然是手工业生产方式。到1899年摄影测量的理论研究得到发展。1903年飞机的发明，促进了航空摄影测量学的发展，从而使测图工作部分地由野外转移到室内，利用仪器描绘成图，相应地减轻了劳动强度，特别有利于高山地区的测绘工作。

20世纪50年代前后开始，不少新的科学技术迅速发展。如电子学、信息论、相干光理论、电子计算机、空间科学技术等，它们又推动了测绘科学的发展。1947年研究利用光波进行测距，到六十年代中利用氦氖激光器作为光源的电磁波测距仪就问世了，这是量距工作的一大变革。现在，在白天或黑夜电磁波测距仪的最大测程都能达到六十公里，而且精度很高，可达 $\pm\left(5\text{mm}+\frac{1\text{mm}}{\text{km}}\times\text{距离的公里数}\right)$。短测程的测距仪，测程为1～2km，误差仅及厘米。

20世纪40年代自动安平水准仪的问世，标志着水准测量自动化的开端。1973年试制成功能保证视线水平并使观测者在同一位置进行前后视读数的水准仪，这使水准测量逐步走向观测记录自动化，行动机车化。目前经纬仪的读数方法也有了新的变革，如电子经纬仪则采用光栅、光学编码来代替刻度分划线等。1968年生产了电子经纬仪，测量的数据可自动记录在磁带上，若接通电子计算机还可立即根据观测数据算出所需成果。陀螺经纬仪与激光经纬仪亦已应用于工程测量的定向工作。1957年第一颗人造地球卫星上天，1966年开始进行人卫大地测量，这种新技术具有不受气候的影响，可全天候观测，速度快，精度高，对洲际之间、岛屿和岛屿之间及岛屿和大陆之间的联测能既快速又正确。20世纪70年代，通过人造卫星应用黑白、单光谱段、多光谱段及彩色红外等拍摄地球的照片，使航天技术有了发展和应用。由于卫星运行的高度比飞机高几十倍到几百倍，故视野宽广，覆盖面积大，可以对同一地区重复摄影，便于监视自然现象变化；并且不受地理及气候条件的限制，对深山、荒漠及海洋都能进行有效的勘测。利用象片进行测量的新方法有两种：其一是近景摄影测量，它是地面摄影测量的发展，可对一百米以内的地物进行测绘，目前主要用于动态物的摄影测量，如变形观测等。由于这种方法还可以用普通摄影机拍摄象片，因而适应性更强。其二是影象地图，就是带有象片影象又有线划的地形图，它既具有丰富的信息内容，又保持了地形图的地形符号、注记和等高线。因此影象地图所包含的信息比普通地形图多，能表达一般地形图不能表达的微小地形，更客观地反映出地面情况。它的另一个特点是成本低、成图快，能满足经济建设部门用图的迫切要求。测图绘图自动化是当前测绘工作者的努力方向。现在，部分测绘工序已可由仪器自动完成，光明的前景已显示出来。

测绘科学的研究对象在第一章绪论中已阐明，主要是研究地球的形状、大小和地表面上各种物体的几何形状及其空间位置。随着工具及数据处理方法的改进，它的研究范围及服务对象已远远超出地球表面这一目标。20世纪60年代初发射的宇宙飞船，开始了人类对

太阳系的行星及其所属卫星（诸如金星、火星、月球等）的形状、大小、表面形态的制图工作的研究。测绘科学的服务范围也从单纯的工程建设进入到山岩崩塌监测、古文物保护、交通事故分析、医疗病灶的定位诊断等等。

我国测绘科学自中华人民共和国成立后也进入了一个崭新的发展阶段。中国共产党一向关怀测绘事业，即使在战争时期也已注意测绘人才的培养，并于1956年成立国家测绘总局（1982年改称国家测绘局），科学院系统成立了测量及地球物理研究所，各业务部门也纷纷设立测绘机构，培养测绘人员的各级学校也相继成立。三十几年来测绘事业在党和政府的关怀下，测绘队伍飞速壮大，测绘科学的研究工作亦得到发展。现已建成了全国绝大部分地区的大地控制网，完成了大量不同比例尺的地形图，各种工程建设的测量工作也取得了显著成绩。仪器制造方面从无到有，已能自制航空摄影机、红外摄影机、立体测图仪、多倍投影仪，以及大型纠正仪等航测仪器。电磁波测距仪方面也已生产不同类型的激光测距仪、微波测距仪及红外测距仪。经纬仪的生产已基本配套；其中DJ6●级及DJ2级已有多种不同结构的产品。高精度的DJ07-1级的经纬仪也已试制成功。水准仪方面除DS3级和DS1级均已生产外，自动安平水准仪也已批量生产。其他测绘仪器工具绝大部分已能自给。预计不远的将来，祖国测绘工作的测图自动化、计算电子化及测量资料数字化等方面将会不断取得新成绩。

● 我国对大地测量仪器规定总代号为“D”，经纬仪的代号为“J”，水准仪的代号为“S”，平板仪的代号为“P”，连写起来就是“DJ”，“DS”，“DP”。每种仪器又按精度划分等级，即在编号后再加精度代号，依具体介绍各种仪器时分别加以说明。通常使用代号时常省略总代号“D”而仅用各种仪器代号如J6。