

文章编号: 1001-1986(2010)02-0028-04

双层软土非线性固结理论研究

冶小平¹, 万 龙², 赵杰伟¹, 王志春¹, 周 舟¹

(1. 中兵勘察设计研究院, 北京 100053; 2. 杭州市地质环境监测站, 浙江 杭州 310012)

摘要: 对固结系数的非线性变化进行了理论分析, 推导了固结系数的非线性控制方程, 指出了 γ 因子对固结系数非线性变化的影响。考虑到固结系数、渗透系数、压缩系数整体变化以及双层软土一维非线性固结方程求解困难, 建立了差分格式的双层软土一维非线性固结差分方程, 利用差分法对该方程进行了求解, 为工程中复杂方程的计算提供了一种新的方法。研究表明: 固结系数并不是决定双层软土非线性固结性状的唯一指标, 须综合考虑各种因素的影响。

关键词: 双层软土; 非线性; 固结系数; 差分法

中图分类号: TU4 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1001-1986.2010.02.007

One-dimensional non-linear consolidation theory of double layer soft soil

YE Xiaoping¹, WAN Long², ZHAO Jiewei¹, WANG Zhichun¹, ZHOU Zhou¹

(1. China Ordnance Industry Survey and Geotechnical Institute, Beijing 100053, China;

2. Geo-Environment Monitoring Station of Hangzhou, Hangzhou 310012, China)

Abstract: Through the theoretical analysis of non-linear variation of consolidation coefficient, non-linear governing equations of consolidation coefficient were deduced, and influence of γ was studied. Considering the variation of consolidation coefficient, permeability coefficient and compressibility, meanwhile, the consolidation equations were difficult to be solved, one-dimensional non-linear consolidation difference equations of double layer soft soil, which are solved by difference method, was proposed. And it was a new method for complex status function in engineering practice. The mechanical researches showed that consolidation coefficient was not unique index governing the non-linear consolidation behavior of double layer soft soil. Therefore, various factors should be considered systemacally.

Key words: double layer soft soil; non-linear; consolidation coefficient; difference method

地面沉降作为一种破坏性较大的地质灾害, 大部分是由于过度抽汲地下水造成的, 但是在部分地区由于土体本身固结引起的地面沉降亦能达到总沉降量的 50%~60%。对于考虑土体渗透系数 k_v 和体积压缩系数 m_v 随深度和时间变化的单层均质软土一维固结问题, 国内外的学者已经作了深入的研究^[1-3], 但在实际工程中经常会遇到双层或多层的一维非线性固结问题, Gray 给出了双层地基在瞬时加荷条件下的解析解, 但是未能考虑加荷随时间的变化^[4], 谢康和等^[5]研究了变荷载下成层地基一维非线性固结问题, 并采用半解析法对此问题作了求解。但是, 部分学者在研究软土固结时假定固结系数不变, 并将变形指标分离开来, 进行讨论。因此, 笔者在前人研究基础上, 讨论了固结系数的非线性特性; 并利用差分法, 对双层软土一维非线性固结问题进行了分析和研究。

1 软土固结系数非线性分析

为了预测软粘土随时间的固结进程, 通常用固结试验来确定土的固结参数, 而用 Terzaghi 理论来预测结果。这种方法假定固结系数通常为不变, 但是实际的固结过程中, 一方面固结系数是随着压缩系数 m_v 和渗透系数 k_v 变化而变化; 另一方面, 数值计算方法的进步及非线性偏微分方程能够推出更具有实际意义的解析解^[6]。

1.1 固结系数控制方程推导

一般认为, 在 $e - \lg \sigma'$ 的半对数空间, 众多的试验结果显示线性 $e - \lg \sigma'$ 关系最能代表天然软粘土的特性; 对于任何给定的有效应力值 (σ'), 孔隙比-有效应力的关系可用下式表达:

$$e = a - c_c \lg \sigma' \quad (1)$$

式中 c_c 为压缩指数; e 为在某有效应力状态 σ' 下

收稿日期: 2009-09-28

作者简介: 冶小平 (1985—), 男, 青海民和人, 硕士, 从事岩土工程方面的研究。

的孔隙比; a 为孔隙比-有效应力直线在坐标轴上的截距。实际上, a 为单位有效应力的孔隙率, 因此在给定某种土的情况下 a 一般是定值; 同时, 孔隙比-渗透系数近似的线性关系式可用下式表达:

$$e = b + M \lg k. \quad (2)$$

由式(1)及式(2)整理后得到:

$$k = 10^{(a-b)/M} (\sigma')^{-c_c/M}. \quad (3)$$

式(1)两边对 t 微分得到:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{-2.3c_c}{\sigma'} \frac{\partial \sigma'}{\partial t}. \quad (4)$$

将式(3)及式(4)代入

$$\left(\frac{1}{1+e_0} \right) \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z^2}$$

可以得到:

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = \frac{2.3(1+e_0)}{c_c \gamma_w} 10^{(a-b)/M} (\sigma')^{\left(1-\frac{c_c}{M}\right)} \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z^2}. \quad (5)$$

假设:

$$\gamma = 1 - \frac{c_c}{M}, \quad (6)$$

$$c_n = \frac{2.3(1+e_0)}{c_c \gamma_w} 10^{(a-b)/M}, \quad (7)$$

式(5)可简化成

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial t} = c_n (\sigma')^\gamma \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z^2}. \quad (8)$$

式(8)为非线性的偏微分方程, 该式能够描述粘性土层的有效应力随着时间和深度变化的特征。

超孔隙水压力 u 可写成:

$$\sigma' = \sigma - u, \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)可得:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_n (\sigma - u)^\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (10)$$

初始和边界条件如下:

$$u(0, t) = 0; \quad u(2H, t) = 0; \quad u(z, 0) = u_0 = \sigma_i.$$

式(10)为非线性固结偏微分方程, 由该式可以得到固结系数 c_v 的表达式:

$$c_n (\sigma_i - u)^\gamma = c_v. \quad (11)$$

由式(11)可知固结系数 c_v 不是常数, 而且随着固结过程中超孔隙水压力 u 的变化而变化; 从式(11)中可以看出固结系数与有效应力的非线性关系。 γ 为一个无量纲的参数, 由式(6)可以看出该参数值依赖于土体的压缩性及渗透性指数 (c_v 、 M)。由式(7)可知, c_n 的维数是 $L^{2\alpha+2} T^{-1} F^\alpha$, 其中 L 、 T 及 F 分别代表长度、时间及外力。图 1 为 c_v 在不同 γ 情况下随时间的变化曲线图。

图 1 中可以知道, 当 γ 为正时, c_v 值随着时间增大而增大; 当 γ 为负时, c_v 值随时间的增大而减小,

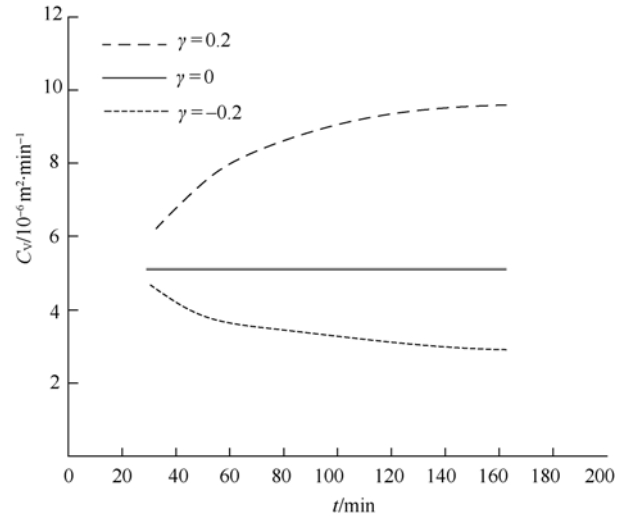


图 1 不同 γ 值的 c_v 随时间变化示意图

Fig. 1 Variation of c_v with time for different values of γ

因此, 当 $\gamma > 0$, c_v 值随固结过程逐渐增大; 相反地, 当 $\gamma < 0$, c_v 值随固结过程逐渐减小。当 $\gamma = 0$ 时, 固结系数为定值, 此时正好与 Terzaghi 的固结理论相一致。

2 双层软土一维非线性固结基本方程

2.1 基本问题

双层软土层如图 2 所示, 各层土的压缩系数 m_{vi} 及渗透系数 k_{vi} 随深度线性变化 ($i=1,2$), 对于一般情况, 可以假定:

$$k_{vi} = k_0 (1 + \alpha_i z / H),$$

$$m_{vi} = m_{v0} (1 + \beta_i z / H),$$

$$c_{vi} = c_{ni} (\sigma_i - u)^\gamma.$$

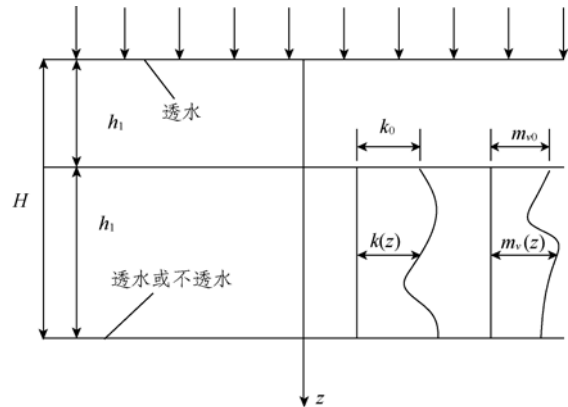


图 2 k 和 m 随深度变化示意图

Fig. 2 Variation of k and m with depth

在此假定下可以得到和单层形式相同的控制方程, 即:

$$(1 + \alpha_i z / H) \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} + \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{1}{c_{vi}} \left(\frac{du_i}{dt} - \frac{dq(t)}{dt} \right), (i=1,2) \quad (12)$$

整理得：

$$\frac{du_i}{dt} - \frac{dq(t)}{dt} = c_{vi}(1 + \alpha_i z/H) \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} + c_{v0} \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial z}, (i=1,2) \quad (13)$$

式(13)即为对流扩散方程的普遍表达式。令：

$$A_i = c_{vi}(1 + \alpha_i z/H), \quad B_i = c_{v0} \alpha_i,$$

则上式可转化为：

$$\frac{du_i}{dt} - \frac{dq(t)}{dt} = A_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} + B_i \frac{\partial u_i}{\partial z}, (i=1,2) \quad (14)$$

其相应的初始条件：

$$t=0, \quad u_i(z,0) = q(0) = q_0, \quad (i=1,2) \quad (15)$$

边界条件：

$$z=0, \quad u_i = 0; \quad (16)$$

$$z=H, \quad \frac{\partial u_i}{\partial z} = 0 \text{ (单面排水)}; \quad (17a)$$

$$u_i = 0 \text{ (双面排水)}. \quad (17b)$$

层间连续条件：

$$u_i = u_{i+1}, \quad (i=1,2), \quad (18a)$$

$$k_i \frac{\partial u_i}{\partial z} = k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial z}, \quad (i=1,2). \quad (18b)$$

2.2 双层软土一维非均质固结的差分法分析

对式(13)可以采用隐式格式进行求解，并考虑

Crank-Nicolson^[7-9]型隐式差分格式：

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) = \frac{v}{2} \left[\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \right], \quad (19)$$

式(19)精度是二阶的，其增长因子为：

$$G = \frac{(1 - \mu + \mu \cos kh) - i \frac{\lambda}{2} \sin kh}{(1 + \mu - \mu \cos kh) + i \frac{\lambda}{2} \sin kh},$$

其中 $\lambda = \frac{a\tau}{h}$, $\mu = \frac{v\tau}{h^2}$ 。因此，

$$|G|^2 = \frac{(1 - \mu + \mu \cos kh)^2 + \left(\frac{\lambda}{2} \sin kh\right)^2}{(1 + \mu - \mu \cos kh)^2 + \left(\frac{\lambda}{2} \sin kh\right)^2},$$

变换后得到：

$$|G|^2 - 1 = \frac{-4\mu(1 - \cos kh)}{(1 + \mu - \mu \cos kh)^2 + \left(\frac{\lambda}{2} \sin kh\right)^2}.$$

由于 $1 - \cos kh \geq 0$ 及上式的分母为正，所以有

$$|G|^2 - 1 \leq 0,$$

即 $|G|^2 \leq 1$ ，所以可以知道式(19)是无条件稳定的。

利用 Crank-Nicolson 型隐式差分格式，变换后

得到式(14)的差分方程为：

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{B_i}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta z} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z} \right) = \frac{A_i}{2} \left[\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta z^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right] + \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t}, \quad (20)$$

式中 Δt 为时间步长； Δz 为空间步长； n 为时间节点数， $n=1,2,3,\dots$ ； j 为空间节点数， $j=1,2,3,\dots$ 。

考虑到 $\lambda_i = \frac{B_i \Delta t}{\Delta z}$, $\mu_i = \frac{A_i \Delta t}{\Delta z^2}$ ，式(20)可整理为：

$$\left(\frac{\mu_i}{2} - \frac{\lambda_i}{4} \right) u_{i,j+1}^n + (1 + \mu_i) u_{i,j}^n - \left(\frac{\lambda_i}{4} + \frac{\mu_i}{2} \right) u_{i,j-1}^n + q^n = \left(\frac{\lambda_i}{4} - \frac{\mu_i}{2} \right) u_{i,j+1}^{n-1} + (1 + \mu_i) u_{i,j}^{n-1} + \left(\frac{\lambda_i}{4} + \frac{\mu_i}{2} \right) u_{i,j-1}^{n-1} + q^{n-1}, \quad (21)$$

其求解初始条件为：

$$t=0, \quad u_{i,j}^0 = q_0, \quad i=1,2; \quad (22)$$

边界条件：

$$z=0, \quad u_{1,0}^n = 0, \quad (23)$$

$$z=H, \quad u_{2,J+1}^n = u_{2,J-1}^n \text{ (单面排水)}, \quad (24a)$$

$$u_{2,J}^n = 0 \text{ (双面排水)}, \quad (24b)$$

式中 $J = l/h$ 。

层间连续条件：

$$u_{1,J}^n = u_{2,1}^n, \quad (25a)$$

$$k_1 \frac{u_{1,J}^n - u_{1,J-1}^n}{\Delta z_1} = k_2 \frac{u_{2,2}^n - u_{2,1}^n}{\Delta z_2}. \quad (25b)$$

将式(21)、边界条件及层间连续条件表示成矩阵形式为：

$$\text{令 } \mathbf{U}^n = (u_{1,1}^n, u_{1,2}^n, \dots, u_{1,J-1}^n)^T \text{ 且 } i=1,2,$$

$$\mathbf{A} \mathbf{U}^n = \mathbf{B} \mathbf{U}^{n-1} \quad (26)$$

经变换可得： $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U}^n = \mathbf{U}^{n-1}$ ，该方程中矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 可直接求得，矩阵方程利用追赶法即可求解。

2.3 双层软土一维非线性固结性状分析

从固结系数非线性研究中建立的固结系数非线性控制方程 $C_n(\sigma_t - u)^\gamma = C_v$ 中可以得出固结系数随 γ 变化的平均固结度变化曲线图(图 3 所示)。当 $\gamma < 0$ ，该曲线位于太沙基解($\gamma=0, c_v$ 为常数)平均固结度曲线上方，说明 γ 为负值情况下的固结速率要比太沙基解预测的情况要慢；当 $\gamma > 0$ ，则要比太沙基解预测的情况要快。因此，无论 k_v 、 m_v 如何变化，但是 γ 对 c_v 的影响较大，从而间接决定了单层软土的固结性状。

3 结 语

研究表明，固结系数在整个固结过程中呈非线性变化，并建立了固结系数非线性控制方程，指出 γ 因子对固结系数的影响。

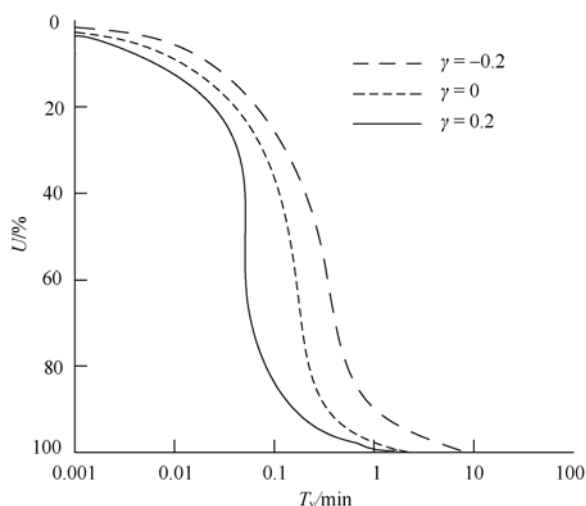


图 3 双层软土平均固结度变化曲线 *

Fig. 3 Variation curves of average degree of consolidation of double-layered soft soil

* 当 k_v 与 m_v 任意变化, c_v 随 γ 为变化时。

将渗透系数、压缩系数、固结系数有机地结合在一起,对双层软土的一维非线性固结进行了分析和讨论。得出在双层软土一维非线性固结过程中,固结系数并不是决定其固结性状的唯一指标,必须综合考虑其他因素;建立了差分格式的固结方程,该方法物理意义明确,基本方程简单,容易编制计

算机程序,笔者正是通过该方法较好地解决了上述问题,分析了双层软土非线性固结性状,指出在 γ 为任意值时对固结的影响过程。

参考文献

- [1] 陈根媛. 多层地基的一维固结计算方法与砂井地基计算的改进建议[J]. 水利水运科学研究, 1984(2): 1-13.
- [2] LEE P K, XIE K H, CHEUNG Y K. A study on one dimensional consolidation of layered systems[J]. Int J for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1992, 16: 815-831.
- [3] 谢康和, 郑辉, LEO C J. 软黏土非线性一维大应变固结解析理论[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(6): 680-694.
- [4] GRAY H. Simultaneous consolidation of contiguous layer of unlike compressible soil[J]. Trans. ASCE, 1948, 113: 718-733.
- [5] 谢康和, 郑辉, 李冰河, 等. 变荷载下成层地基一维非线性固结分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2003, 37(4): 426-431.
- [6] ABBASAI N, RAHIMI H, AKBAR A. Finite different approach for consolidation with variable compressibility and permeability[J]. Computer and Geotechnics, 2007(34): 41-52.
- [7] 孙志忠. 偏微分方程数值解[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [8] 徐长发, 李红. 偏微分方程数值解[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2000.
- [9] 李德元, 陈光南. 抛物型方程差分法引论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

(上接第 22 页)

平均产量 2 426 t/d; 最大产量 3 490 t/d。

d. 地层结构组合为松散层厚度 < 406 m, 基岩厚度与松散层厚度比值为 0.74~0.94, 下保护层与被保护层间距在 66~70 m 时, 布设在工作面轴线上的卸压煤层气地面井可承受的采煤活动范围是: 平均采高 2.1 m, 平均产量 3 898.6 t/d, 最大产量 5 367 t/d。

参考文献

- [1] 桑树勋, 秦勇, 姜波, 等. 淮南地区煤层气地质研究与勘探开发潜力[J]. 天然气工业, 2001, 29(4): 19-22.
- [2] HOGAN K. Options for reducing methane emissions internationally: Report to Congress, US Environmental Protection agency[R]. Washington: Office of Air and Radiation, 1993.
- [3] SANG Shuxun, HAN Jiazhang, CHENG Zhizhong, et al. Surface vertical well technology for pressure relief coalbed methane exploitation in Huainan Coal Mining Area [C]// Proceedings of the 2008 Asia Pacific CBM Symposium. Australia, University of Queensland. 2008.
- [4] HAN Jiazhang, SANG Shuxun, CHENG Zhizhong, et al. Exploitation technology of pressure relief coalbed methane in vertical surface wells in the Huainan coal mining area [J]. Mining Science and Technology, 2009, 19(1): 25-30.
- [5] 许家林, 钱鸣高. 地面钻井抽放上覆远距离卸压煤层气试验研究[J]. 中国矿业大学学报, 2000, 29(1): 78-81.
- [6] 刘玉洲, 陆庭侃, 于海勇. 地面钻孔抽放采空区瓦斯及其稳定性分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(增 1): 4982-4987.
- [7] 周德昶, 焦先军. 地面钻井抽采瓦斯技术的发展方向[J]. 矿业安全与环保, 2006, 33(6): 77-79.
- [8] 李日富, 梁运培, 欧聪, 等. 采空区瓦斯地面抽采钻井稳定性因素分析[J]. 矿业安全与环保, 2008, 35(3): 11-17.
- [9] THAKUR P C. Optimum width of longwall faces in highly gassy coal mines [C]. Part II 12th U.S./North American Mine Ventilation Symposium 2008: 81-85.
- [10] Vyacheslav P. Use of Gaussian distribution for estimation of gob gas drainage well productivity[J]. Mathematical Geology, 2002, 34(6): 743-765.