海洋中的应力

处理流体中的应力和张力很复杂，有些超出了本课程的范围。真正感兴趣的学生，可以进一步参看 *Introduction to Fluid Dynamics* 这本书，在本课程开始时的参考文献中。从湍流应力提高到海洋尺度会更深奥。这里我们将仅仅总结已经了解的海洋流动的“外力”F。这牵扯到有三个分量的应力张量，对三个动量方程中的每一个。

$$F^x = [\tau_x^x + \tau_y^x + \tau_z^x]$$
$$F^y = [\tau_x^y + \tau_y^y + \tau_z^y]$$
$$F^z = [\tau_x^z + \tau_y^z + \tau_z^z]$$

要说明的是上角标是在某个分量方向的应力，下角标是相对于分量的导数。应力和张力（流体响应）的关系很复杂。像水这样的流体，和本课程中我们将要讨论的典型尺度，可以得到下式：

$$\tau_j^i = \rho A^j \frac{\partial u^i}{\partial x_j}$$

其中 A^j 是常数“涡动粘性”。对于相对于它们的宽度很浅的流体，这三个假设的常量（A^x，A^y，A^z）不都一样：垂直分量比两个水平分量小得多，经常（不总是）假定为零。如果我们将这个定义代入上面外力向量的方程，我们得到下面关系（其中A^x= A^y= A^h）

$$F^x = \rho[A^h u_{xx} + A^h u_{yy} + A^z u_{zz}]$$
$$F^y = \rho[A^h v_{xx} + A^h v_{yy} + A^z v_{zz}]$$
$$F^z = \rho[A^h w_{xx} + A^h w_{yy} + A^z w_{zz}]$$

我们的动力方程中已经加入了其中的一个体力：上述剪切应力的第三个分量。考虑这三个力中某一个的垂直积分（比如第一个）。

$$\int_{-H}^{0} dzF^x = \int dz[\tau_x^x + \tau_y^x + \tau_z^x] \approx \frac{\partial}{\partial x}\int dz\tau^x + \frac{\partial}{\partial y}\int dz\tau^x + \tau^x(z=0) - \tau^x(z=-H)$$

这样近似是因为我们令水深 H 为常数，并假设还表面是平的（或其变化 h 相对于海洋深度很小）。考虑上式的最后两项。最后一项正比于海底的应力，而倒数第二项与自由面的应力有关。如果我们将底应力记为：

$$\tau^x(z=-H) = \rho A^z \frac{\partial u}{\partial z}(z=-H) = \rho ru \quad ,$$

我们看到，现在可以将这一项和我们在“pucks on ice”模型中用的简单底摩擦一致起来。这一项在 Stommel 的风生环流西向强化模型中起重要作用。对于风的驱动，这正是应力在海表面的分量 τ^x （z=0）。对于 Sverdrup 平衡，我们得到下式：

$$\beta v = \frac{1}{\rho}(\nabla_h \times \vec{F})$$ ， 或

$$\beta \int dz v = \frac{1}{\rho}\nabla \times \int dz \vec{F} = \frac{1}{\rho}\nabla \times \vec{\tau}(z=0)$$

其中，我们也忽略了 h，H 的空间分布，设海底的应力为 0，忽略应力的水平分量。你可能会想起，这个假设在 Sverdrup 平衡中本来就有，这样我们可以忽略底应力和正比于 r 的摩擦项。上述 Sverdrup 平衡的表达比前一个更普遍，因为我们明确的包含了海表风应力，并没有假设速度 v 随深度不变。这样 Sverdrup 平衡可以用在风生环流（包括斜压流）的垂向积分上，符合了一些海洋深度上分层的要求，这对于风生环流，摩擦很小（除了海洋表层）得流动是有用的描述。注意它包含了风的驱动以及海表 Ekman 层的动力。

Sverdrup 环流中的地转和 Ekman 分量

Sverdrup 平衡是对简化的位涡方程的垂向积分。我们回头看看什么速度产生了平衡。我们会用对于斜压流动的更普遍的公式，回想下面公式：

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - ru + \frac{F^x}{\rho},$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - rv + \frac{F^y}{\rho},$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

我们现在将上面推到的体力的形式加入，我们就会得到大尺度物理海洋中用的完整的湍动方程。但这里我们对 Sverdrup 平衡感兴趣，也就是稳定的，线性的海洋，有风作用，但没有其他外在的摩擦。这样上式变为：

$$-fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau_z^{\ x}}{\rho},$$

$$+fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\tau_z{}^y}{\rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

假如我们将速度分量表示为地转部分和 Ekman 部分之和，用上角标表示。前两个方程变为

$$-fv = -fv^g - fv^e = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau^x}{\partial z}$$

$$fu = -fu^g - fu^e = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau^y}{\partial z}$$

我们已经看过了地转平衡。现在我们进一步看看Ekman平衡，将Ekman平衡从自由海面（z=0）到Ekman层之下的一个深度（$z=-z_e$）积分。

$$\int dz u^e = \frac{\tau^y(z=0)}{\rho f},$$

$$\int dz v^e = -\frac{\tau^x(z=0)}{\rho f}$$

$$\int dz\left[\frac{\partial u^e}{\partial x} + \frac{\partial v^e}{\partial y}\right] = w^e(z=-z_e) = \frac{1}{\rho}\nabla_h \times \left[\frac{\vec{\tau}(z=0)}{f}\right]$$

上面前两个方程中，我们看到积分的 Ekman 输运在施加的风应力的右边。从第三个方程中我们看到有一个净的 Ekman 输运的水平散度会在 Ekman 层底部产生垂向速度（海表的垂向速度为零)。这些公式在赤道地区失效因为科氏参数在那消失！垂直速度是这样分布的不管南北半球，在副热带环流内是个汇，在副极地环流内是上升流。

现在我们知道了垂向积分的Ekman输运，也知道了垂向积分的Sverdrup输运，这样垂向积分的地转输运就正是Sverdrup输运和Ekman输运之差，因为之前定义，$v^s=v^g+v^e$。一些调查者用这个约束来帮助决定参考面上的未知的地转运动的速度，但这和它的假设用起来一样。实际上，你将会在接下来的一个作业中研究它。事实上，在湾流区实际输运和Sverdrup输运有很大差别（分别是 150 和 30Sv)，用这个方法时要小心！我们以后会看到他们的不同。

Munk 环流和 Stommel 环流

Munk（1950 年）发展了另一个北大西洋风生环流的模型，并用了一个和 Stommel 不同的摩擦模型来解释西向强化。Munk 没有用与运动反向的用摩擦系数 r 表示的垂向摩擦，而是用了一个水平涡动粘性系数。我们不详细看这个模型，这个模型也需要正的 β 使湾流在西边界很强。我们只写下在两个摩擦项下的线性涡度平衡。

$$-A^{h}(\psi_{xxxx}+\psi_{yyyy})+r(\psi_{xx}+\psi_{yy})+\beta\psi_{x}=-\frac{1}{\rho}[\tau_{x}^{y}(z=0)-\tau_{y}^{x}(z=0)]$$

我们在海表面用风应力来代替了外力，这里的流函数是对之前的流函数的垂向积分：

$$\int dzv=\psi_{x}\text{和}\int dz\mathrm{u}=-\psi_{\mathrm{y}}$$

Munk解出了上述方程忽略了底摩擦项（正比于r）但保留了水平摩擦（正比于A^{h}）

因为这里有了流函数对 x 的四阶倒数，西边界流比 Stommel 的对于 x 的二阶倒数的更急更强。像我们之前所说的，内区里 Sverdrup 平衡在海盆里起作用，但在西边界上，一个不同的动力平衡起作用。我们可以很简单的算出两个模型中西边界流的宽度，而不用真的解出来。每个模型中在西边界我们都有以下假设，那里物理量随 x 变化很快：

$$r\psi_{xx}+\beta\psi_{x}\approx 0\rightarrow x_{s}\approx\left[\frac{r}{\beta}\right]$$，Stommel 西边界流的宽度

$$A^{h}\psi_{xxxx}+\beta\psi_{x}\approx 0\rightarrow x_{m}\approx\left[\frac{A^{h}}{\beta}\right]^{1/3}$$，Munk 西边界流的宽度

依赖于时间的和非线性的海洋数值模式用底摩擦或侧摩擦来解决西边界的结构。上述两种类型的边界流的空间尺度成为海洋数值模式所需的重要的最小尺度。

现在完成了风生环流的额外的说明。更进一步的讨论都在课本上，直到我们进入海洋中的下一部分内容。