风生环流：**Stommel** 环流和 **Sverdrup** 平衡

我们开始回到旋转地球上一层均匀流体的流动方程。

$$\frac{du}{dt} - fv = -g\frac{\partial h}{\partial x} - ru + \frac{F^x}{\rho}$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -g\frac{\partial h}{\partial y} - rv + \frac{F^y}{\rho}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[u(H+h)] + \frac{\partial}{\partial y}[v(H+h)] = 0$$，其中

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

我们回想流体底部是 $z = -H$，自由面是 z=h。为了简化，我们定义 D 是流体的总深度：D=H+h。因为流体底部不随时间变化，我们可以把第三个方程中 h 随时间的变化变为 D 随时间的变化。接下来我们定义涡度。

一个与剪切和旋转有关的运动要素，重要的流体特性，涡度 ζ。定义如下：

$$\xi \equiv \nabla \times v$$

它是向量，但是我们这里考虑涡度的垂直分量，它是

$$\xi^z = (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})$$

这个量取决于流体的剪切，而不是流体本身。将看到它是重要的瞬时值。首先从上述方程看出动量会随着流体质点变化，在外力，摩擦，压强梯度里作用下。考虑到涡度是可以去掉非守恒性，因为当你将第二个方程对 x 微分，第一个方程对 y 微分，将两式相减，与压强梯度有关的相被去掉。我们不推导下面的公式，你可以自己推[事实上这是个新的作业]，但是用上面的步骤和涡度的定义，和上面三个方程，我们可以得到下面不用*任何*关于科氏参数是常数的假设（除了对时间!）：

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{f+\xi^z}{D}\right] = -\frac{r}{D}\xi + \frac{1}{\rho D}(F^y_x - F^x_y) = -\frac{r}{D}\xi + \frac{1}{\rho D}(\nabla_h \times \vec{F})$$

在没有摩擦或外力时，量值$[(f+\xi)/D]$守恒，现在我们去掉了已经假设的垂向角标“v”。

这个量值被称作**位势涡度**，是物理海洋中的最基本的变量之一。它会被摩擦和外力（如风应力）旋读改变，其他情况下守恒。它很重要，以至于被叫做卡通人物“呆伯特”（参见课堂展示的图片）。就是说，在没有外力（或摩擦）时，流体会沿海洋中的等深线运动。由于地

形变化比科氏参数变化快的多，流体质点只有在形成了一个相对涡度时才会穿越等深线。

线性化概念：

研究一下上述方程，并不是所有项都一样大。我们已经知道总的来说摩擦很小，大多数流动的基本平衡是地转平衡。因为方程是非线性的，是的求解方程很难。所以如果去掉一些非线性的小项，使我们可以求解。比方说位势涡度，它会有不同的大小。我们看看这些项[这个称为“尺度分析”]。

我们有方括号来表示量值的尺度：

$$
\begin{aligned}
& f \approx [f] \\
& \xi \approx [u/L] \\
& h \approx [h] \\
& H \approx [H_0] \\
& \left[\frac{f+\xi}{H+h}\right] \approx \left[\frac{f}{H_0}\right]\left[\frac{1+(u/fL)}{1+(h/H_0)}\right] \approx \left[\frac{f}{H_0}\right], \text{如果} \\
& R \equiv [u/fL] \ll 1, \text{并且} [h/H_0] \ll 1
\end{aligned}
$$

R 称为 Rossby 数，与相对涡度 ζ 和行星涡度 f 成比例。对于本课程中的大部分速度和水平长度尺度，这是个很好的近似（如 $R \ll 1$）。如果流体的总深度远远大于自由面的起伏，第二个近似也很好。这种情况下，位势涡度简化为（f/H），在没有外力时，一定是守恒的。这意味着流体一定沿着等（f/H）线流动。对于 f 平面，这意味着流体不能穿越等深线，除非有外力作用。这是相当有力的特点！

现在我们来看 Stommel（1948）关于风声环流的思考。我们已经推导了我们需要的。我们将用上述线性化来简化位涡（PV）方程。他的模型是在等深的海洋中，这样更简化了。因为 H 是常数，f 在纬向（y 方向）变化，这说明 PV 守恒要求流体质沿着东/西方向流动而不是南/北方向，除非有外力作用。这样

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{f+\xi^z}{D}\right] = -\frac{r}{D}\xi + \frac{1}{\rho D}(F_x^y - F_y^x)$$，或尺度分析后

$$\beta v = -r(v_x - u_y) + \frac{1}{\rho}(F_x^y - F_y^x)$$

等水深时（$u_x + v_y = 0$），我们可以将上面第二个方程写为流函数 $\Psi : (u,v) = (-\psi_y, \psi_x)$

$$r(\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) + \beta\Psi_x = +\frac{1}{\rho}(F_x^y - F_y^x)$$

Stommel 也用了一个简化的外力形式：是在 x 方向上的力，只在 y 方向上正弦变化。这样，

可以粗糙的将它和经向变化的纬向风应力联系起来。如果外力记为 $(F^x, F^y) = ((-a\pi\rho/b)\cos(\pi y/b, 0)$，利用 Stommel 的假设，上式变为

$$r(\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) + \beta\Psi_x = a\sin(\pi y/b)$$

这是 Stommel 解的方程，是依赖于旋转（或不旋转）的地球和地球曲率的不同形式的流动。解在课本第 94 页。我们会在课堂中讨论。因为 β 总是正的，强化的西边界流*总是*在西边界。如果风应力反向，流动感觉到的旋转将会反向，而强化的西边界流会向南流。这就是我们看到的 Stommel 所说到的亚极地环流（亚热带环流以北）。这个总体的结论对两个半球风生环流的结构有了很多解释。你可能会想到南半球 f 是负的（不是 β）会导致什么。

Sverdrup 平衡

如果我们看看 Stommel 在旋转的 β 平面上对流动的解，第 94 页，左下，我们看到除了海盆的西边界，流动很强而且是向北的，其它地方的流速都是为零或向南。我们会想到内区不知为何会和西边界（wbc）区有着不同的动力。如果看一下先前的流函数的方程，我们看到三项：与摩擦成正比的项，β 项，有外力的第三项。第一项在西边界流函数梯度很大的地方变得重要。其它地方，摩擦不太重要，因为流函数的梯度（事实上是二阶倒数）很小。所以可以想象在*内区*后两项很重要，*边界层*区前两项很重要，外力没有很大的变化。内区是 Sverdrup 在 1947 年研究的，这两项的平衡被称作：Sverdrup 平衡。如果我们重新仔细写一遍这个平衡，它会变得更明显。

$$\beta\Psi_x = \frac{1}{\rho}(\nabla_h \times \vec{F})$$，或者

$$\beta\iint dxdzv = \frac{H_0}{\rho}\int_x dx(\nabla_h \times \vec{F})$$

如果我们将第一个方程在海盆中沿着某个固定的纬度从东到西积分，然后乘以流体的深度，我们得到了（第二个方程）内区经向穿越海盆的风生输运。这个输运的方向取决于外力 F 的旋度。在 Stommel 的假设外力下，外力旋度为负的时内区的流动向南。这样我们可以利用对外力的了解估计风生环流是什么样的。不管按照 Sverdrup 解的内区的流动是什么样，它必须作为边界流从西边界返回。在知道风应力和其旋度的情况下，我们可以直接用 Sverdrup 平衡估计风生环流。下面我们引用了 Josey,Kent,和 Taylor（JPO，提交）手稿中的两张图，讨论了风应力，来自几个知名的数据集（Hellermann 和 Rosenstein,JPO，1983；和 Josey，Kent 和 Taylor，1998，来自南安普顿海洋中心[SOC]）。

考虑到版权，图片被删除。

第一张图（上图），是几张全球风应力旋度分布图，来自这两个数据集（基于多年船测）。负（正）旋度区在北（南）半球是副热带环流。我们对这两个数据集的不同不感兴趣，你可以在网站 http://www.soc.soton.ac.uk/JRD/MET/PDF/SOCHR.pdf 上阅读这篇文献。我们这里感兴趣的是旋度场分布和其纬向积分以形成流函数的体积输运在 Sverdrup 平衡下，下图可见（摘自同样的文献）。

考虑到版权，图片被删除。

你回好奇第二幅图中的单位，是Sverdrup（$1Sv=10^6m^3/s$，猜猜用谁的名字命名？）我们来比较一下，亚马逊河，在全世界河流中输运了最多的水量，它的平均体积输运是 0.3Sv。所以海洋中风生环流驱动的输运是亚马逊径流的一百倍。我们以后会看到，西边界流的实际输运量其实比Sverdrup平衡估计的量还要大。但我们不会丢掉理解风生环流的这个有用的工具。

Sverdrup 环流建立在从海盆东边界对风应力旋度积分开始，并且*东*边界没有海流流进或流出。你会看到在海盆的*西边*有很多的海流流入或流出边界。因为我们需要西边界流再这些区域来返回风生环流，而这不是动力平衡的一部分。最后，注意到尽管地转运动的假设在赤道不成立，但没有打破那里的 Sverdrup 平衡。所以，不像动力高度推出的环流图那样，Sverdrup 环流可以用来计算赤道上或穿越赤道的风生环流。

比较北太平洋和北大西洋的副热带环流。这两个海盆的风场和风应力旋度很相似。但由于北太平洋在纬向上几乎是大西洋的两倍宽，Sverdrup 输运（纬向的风应力积分）几乎是两倍大。上述两个气候态数据集在南大洋很不同。很大程度上因为南大洋那很少有船只观测。另一个问题是在德雷克海峡（在南美洲和南极洲之间）那个纬度上没有陆地边界。所以我们不能用 Sverdrup 平衡的纬向积分，因为没有东边界或西边界来开始或结束！

在我们回到北大西洋副热带环流之前，再说点别的。我们没有说清外力 F 和风应力实际上是什么关系。我们也没说清摩擦力的。因为它们是 Stommel 理论三项中的两项，所以很有必要花些时间来研究它们。它们都与应力在海洋中流体质点间应力的传播方式有关。我们研究了之后，我们可以大体讨论一下 Munk（1950）的文章与 Stommel 的风生环流有什么不同。