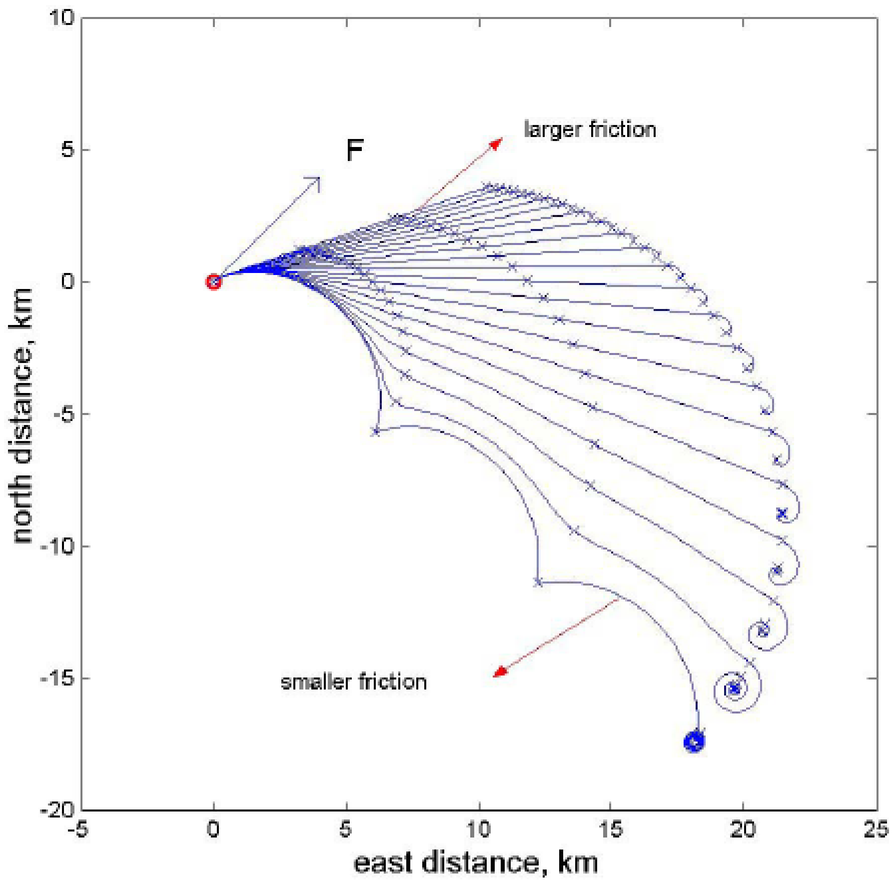
Ekman 层，摩擦和地转流

作业（pucks_on_ice）阐释了以下重要几点：

1. 质点垂直于外力运动，北半球在右边，南半球在左边
2. 质点不是稳定的运动而是以惯性频率 $2\Omega\sin\theta$ 振荡，其中 θ 是纬度
3. 去掉外力后，质点运动减弱除非接近“起伏”，它们继续沿着起伏转动，北（南）半球右（左）边为高水位。
4. 由于摩擦，接近起伏的质点会慢慢沿着斜坡滑下。

第一点解释了海洋中的 Ekman 层。外力（风应力）推的它们在旋转坐标系中向右动。人们在想在这样一个“世界”中怎么从加利福尼亚开车到西雅图：可能会开车向西（向着太平洋）去那！但事实上，汽车的摩擦力很大：除了车前进的方向轮胎总会阻碍那种运动。所以不要尝试这个试验！



质点运动随摩擦力增大的变化如上图所示。随着摩擦力的增大（相对于 f）质点运动更靠近外力（蓝色箭头）的方向。振荡的振幅也随其减小。在摩擦力远大于 f 的极限情况下，运动沿外力的方向。

作业“Pucks on Ice”的动力学都包含在方程中，它描述了质量为“m”的质点在起伏为

“h(x,y)”的冰面这一旋转坐标系上运动的动量变化，外力作用为“F”，很小的摩擦“r”。如我们所看到的，当摩擦足够小（上面讨论的一中极限），外力作用很短的时间(作业中是 3 天)后被去掉，冰球开始很有趣的运动。动力平衡如下

$$m\left[\frac{d\vec{v}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{v}\right]=-mr\vec{v}-mg\nabla h+\vec{F}$$

（1）　（2）　（3）　（4）　（5）

在一些讨论中每一项都有所考虑。解的一个性质是，在加上或去掉外力后，质点做圆周振荡。这种振荡是惯性振荡，用第（1）项和第（2）项的平衡来描述

惯性振荡：第（1）项和第（2）项

对于在起伏的地形上的质点，运动时高地形在它们的右边（在北半球，南半球在左边）。这种平衡是地转平衡。

地转流：第（2）项和第（4）项

在外力作用下，质点运动与外力成某一夹角，北半球在右边（南半球在右边）。这反映了第（2）项和第（5）项的平衡，是风驱动的 Ekman 输运中基本平衡（由 V.Walfrid Ekman 提出）。

Ekman 流：第（2）项和第（5）项[和 第（3）项]

弱的摩擦力会修正以上各项，在实际中，不会完全遵守以上平衡，只是在不同地区不同时间的近似。但这些“平衡”是风生海洋运动的核心。在所有的这些例子中，第（2）项科氏力是中心。

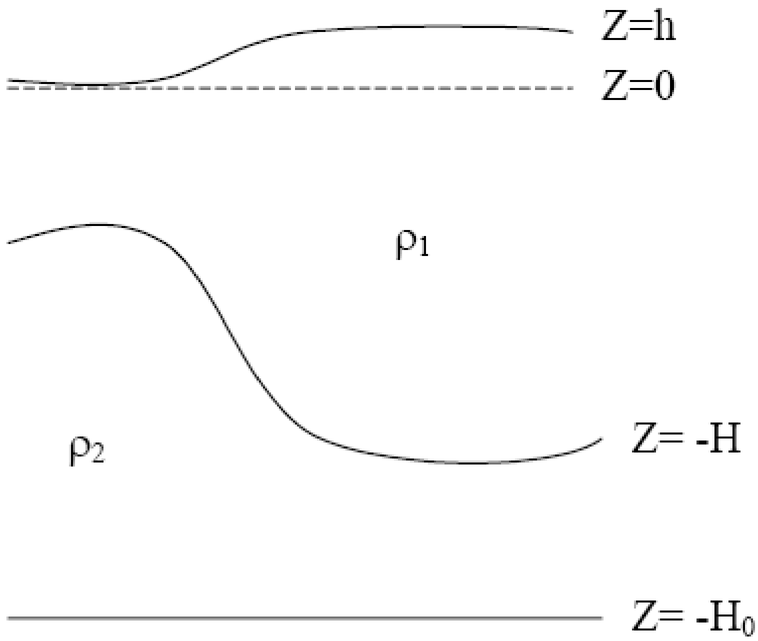
海洋中的 Ekman 流

现在考虑没有结冰的海洋在如蓝色向量所示方向的风应力驱动下。在海表，湍流很大，有效摩擦很大：所以质点会顺着风向并稍微偏向右运动（在北半球，下面也这样假设）。下层海水，对表层产生拖曳，这样也会运动。由于同样的原因它也会偏向于其上面的表层海水右边运动。如此在垂向继续，直到水柱中伴随着“层”的湍流最终消失，下面没有运动了。最后速度向量看起来像个螺旋：差不多沿着风向但在风的右边，随着深度增加顺时针旋转并且减小。这第一次由 Ekman 在 1905 年用一个简单的摩擦耦合模型得出，并由 Price 有力的在海洋中证明，以及 Weller 和 Schudlich 在 1987 年说明(Science，238 卷,1534-1538 页)。在摩擦层中的净输运几乎正好如所预言的在风应力右边！我们称这种有风应力影响的海洋表层为 Ekman 层。下图中，我们可以几乎看到表层 Ekman 层净输运积分的平衡，大约 25 米深，净输运在风应力的右面(北半球)。

考虑到版权，图片被删除。

在海洋底部也存在摩擦或 Ekman 层。这在作业中可以看到由于摩擦冰球沿着倾斜的底面缓慢下滑。冰球的主要运动是沿着地形“起伏”的顺时针运动。这体现了运动和起伏面斜坡间的**地转平衡**。由于摩擦耦合在与海洋底部接触的流动中也很强，非地转运动在海底也破坏了质点运动的轨迹，随着远离底面向*左*偏。这会形成与净摩擦流动反方向并向左偏的螺旋（北半球）。在绕着“涟漪”的地转流中也会有类似的结果。在海底，摩擦破坏了这种平衡也会有沿着压强梯度力的流动和将内部运动转到*左*边的流动。

关于地转平衡的说明



看右边这张图。海洋中有两个密度层，分别密度均匀，为ρ1 和ρ2。自由面的高度为h(x)，界面处为－H(x)， 平坦的下表面为－H_0：不一定是海底，只是个水平面。我们用净力关系来描述下表面的压强。如下：

$$P(z=-H_0)=g\rho_1(h+H)+g\rho_2(H_0-H)$$

如果在下表面处没有水平压强梯度力，P_x=0，我们得到下式（约掉了在两项中都出现的g）：

$P_x=0\rightarrow 0=\rho_1\left(h_x+H_x\right)-\rho_2 H_x$，或

$h_x=\dfrac{\Delta\rho}{\rho_1}H_x$，其中 $\Delta\rho\equiv\rho_2-\rho_1$

因为 $\Delta\rho/\rho_1\ll 1$，界面随自由面的升高而加厚加深的多得多。上图是站在哈特勒斯角附近往东看所看到的湾流。在海表面由于强海流，湾流的断面会有 1 米的升高，但随着深度的增加而迅速衰减。在密度跃层上的密度对比是 $\Delta\rho/\rho_1\sim 2\times10^{-3}$，所以密度跃层会穿越湾流往南（右）向下倾斜大约 500m。当然，上面的情况只是现实情况的理想化（本课程将有一个实测数据的作业），但这可以说明密度场补偿海表面起伏的程度。

我们来看看斜压运动中的地转平衡。在重要方程组中，我们将地转平衡运动[（u，v）=（u_g,v_g）] 写为

$$-\rho f v_g = -\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_{\Phi}$$

$$\rho f u_g = -\left[\frac{\partial p}{\partial y}\right]_{\Phi}$$

我们注意到为了更清晰（x,y）方向的压强梯度是在等重力势面上计算的。现在回想一下重力势面的概念，质点在等 Φ 面上运动势能不变，Φ（p(x,y),x,y）显然依赖于压强和水平位置。我们可以用此来变一下上式中的变量。例如，如果

$\Phi = \Phi(p(x, y), x, y)$，那么

$$\delta\Phi = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right]_{x,y}\delta p + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{p,y}\delta x + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{p,x}\delta y$$

对于 $\delta\Phi, \delta y = 0$，

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_{\Phi} \equiv \left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_{\Phi,y} = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{p,y} \Big/ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right]_{x,y}$$

这样得到

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_{\Phi} = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{p} \Big/ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right]_{x,y} = \rho\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{p}$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y}\right]_{\Phi} = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{p} \Big/ \left[\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right]_{x,y} = \rho\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{p}$$

地转平衡变为

$$-f v_g(p) = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_{p} = -\frac{\partial \Phi(0)}{\partial x} + \frac{\partial \Delta D(p)}{\partial x}$$

$$f u_g(p) = -\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_{p} = -\frac{\partial \Phi(0)}{\partial y} + \frac{\partial \Delta D(p)}{\partial y}$$

其中我们用到了动力高度章节中提到的重力势的定义，也用到了重力势的定义中每一项都没有*水平*梯度这一事实，它与参考比容偏差α_0成正比。方程的最后两项在p=0，ΔD=0 时简化

为：

$$-f[v_g(0)-v_g(p)]=-\frac{\partial \Delta D(p)}{\partial x}$$

$$f[u_g(0)-u_g(p)]=-\frac{\partial \Delta D(p)}{\partial y}$$

经常用这个形式的地转方程，因为自由面处的重力势梯度不容易“测量”。这说明了速度随着基于动力高度水平梯度的压强如何变化。没有其它信息的话，不能确定某一点的地转速度，只知道随压强（深度）的变化：其中有一个不确定的常数，可以规定出来：[在某个参考压强上的速度是零]或通过其它手段[在某个深度直接测量速度，将测量的速度定为“地转的”]。[参考 Fofonoff *The Sea*，Vol.1]。之后的作业中，我们会用实测海洋数据来计算地转流。用上述两个方程和理解用在没有运动的“深海参考压强”本质上是一样的。

在 f 平面中，动力高度等值线和相对于假设的“没有运动层”的地转流流线是一样的。这是个方便的事实，对考查水文数据动力高度的空间分布很有用。但必须注意这个近似的限制。因为 f 会随纬度变化，这个近似在整个海盆不成立了。