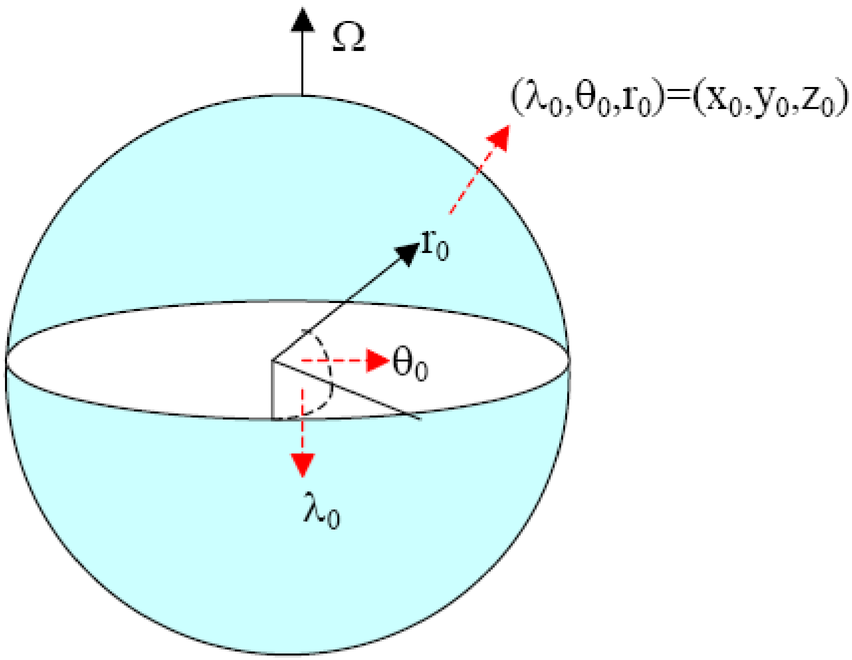
旋转 101（继续）：球面上的旋转效应：f 和 β 平面

我们会依照之前的惯例并试着简化地球对于旋转系统中的质点动力学的曲面效应。一种假设是质点在**球形坐标系**中坐标(λ,θ,r)，表达为**笛卡尔坐标系**中的变量（x，y，z）代表离开参考点的一小段距离。

考虑下边这个图。

在球面上，我们选择一个参考点，经度，纬度，半径，用坐标(λ_0,θ_0,r_0)来表示，笛卡尔系坐标为(x_0,y_0,z_0)。对于离开该点的一小段距离，我们可以写为：



$$x' = x - x_0 = r_0 \cos\theta_0 (\lambda - \lambda_0)$$

$$y' = y - y_0 = r_0(\theta - \theta_0)$$

$$z' = z - z_0 = r - r_0$$

重力沿着半径方向或“z”方向，旋转向量 **Ω**，速度 **V** 和科氏加速度 2**Ω**×**V** 有如下分量：

$$\vec{\Omega} = (0, \Omega\cos\theta, \Omega\sin\theta),$$

$$\vec{v} = (u, v, w) = (\frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt})$$

$$2\vec{\Omega}\times\vec{v} = (2w\Omega\cos\theta - 2v\Omega\sin\theta, 2u\Omega\sin\theta, -2u\Omega\cos\theta)$$

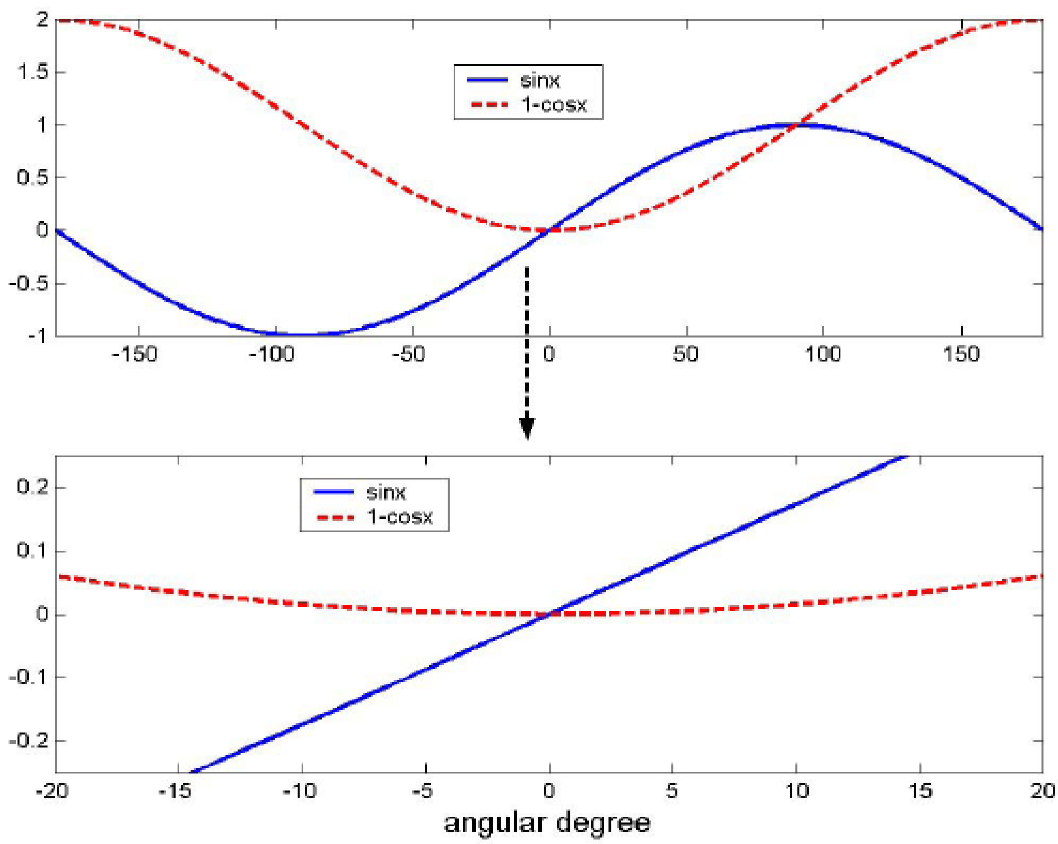
因为对于大尺度，低频运动来说垂向速度远小于水平速度，并且垂向的基本平衡是静力平衡，

上述最后一个方程可近似为：

$2\vec{\Omega}\times\vec{v} = (-2\Omega v\sin\theta, 2\Omega u\sin\theta, 0) = (-fv, fu, 0)$，其中

$f \equiv 2\Omega\sin\theta$

科氏参数 f 是旋转向量的垂直分量。这个近似在高纬度地区不准确，那里冬天垂向对流会产生大的垂向速度，而在赤道很大的纬向流会影响静力平衡。理解简化的海洋中的物理的一个问题就是科氏参数不是一个常数[sinθ 随纬度变化]。在本课程讨论的问题中，海盆被看作足够小，以致局地化，更为简化。我们考虑两个例子称为“**f 平面**”和“**β 平面**”近似。



我们现在把 $\theta = \theta_0 + \theta'$ 这一情形加到上面的公式中，其中 $\theta' \ll 1$，并应用三角恒等式 $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$。现在可以见到上图中，相对于参考纬度对于很小的角度变化（用弧度表示），$\cos(\theta') \sim 1$ 和 $\sin(\theta') \sim \theta'$。

这样对于旋转向量的垂直分量，f，我们得到如下式子：

$$f = 2\Omega\sin(\theta_0 + \theta') \approx 2\Omega\sin\theta_0 + \frac{2\Omega\cos\theta_0}{r_0}(\theta - \theta_0)$$

$= f_0 + \beta_0 y'$，其中

$f_0 \equiv 2\Omega\sin\theta_0$，和

$\beta_0 \equiv (2\Omega\cos\theta_0 / r_0)$

“**f-平面**”近似假设旋转向量的垂直分量是常数。“**β 平面**”近似假设在对 y 求导后 f 是常数，其中 df/dy 被另一个常数 β 所替代。

作业“pucks_on_ice”建立在 f 平面上；风生环流的研究需要用到 β 平面。当我们开始第三章海洋环流的学习时会用到下面的内容。

正压流和斜压流的流动方程

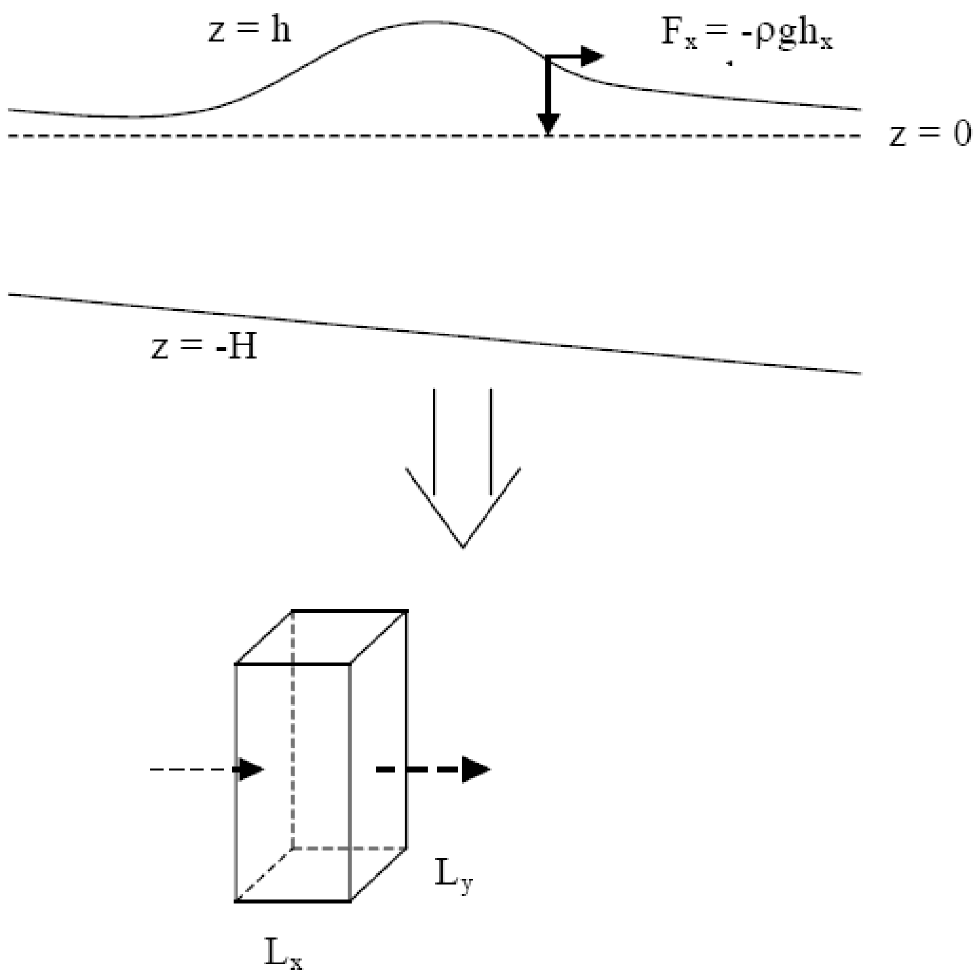
目前我们已经研究了固体对象在固体面上的运动，有一点或没有流动性。但事实上我们几乎得到了研究地球表面一层密度均匀流体需要的所有方程！最后要做得是需要将冰上的冰球转换为海洋中的环流：流体表面的起伏不会静止在那：运动会远离起伏，表面的表达式会消失除非有外力来维持。

对于没有流体力学经验的人来说，这可能是要克服的很大障碍。我们试着尽量将它简单化：从冰上的冰球开始，最后变为物理海洋学家经常用来解释观测的方程。对于过去学过流体的人来说，这看起来不像传统方法推导旋转流体中 Navier-Stokes 方程那么严格。本门课程中，我们不试图完整的解决正压或斜压得流体运动。事实上，由于振荡的非线性和时间依赖性不可能有*任何*一般性的解。不要担心解决他们！我们会用特殊的问题来简单化，现在列出来一共以后引用。

考虑下面这幅图。

一层密度为ρ的流体置于倾斜地面（z= -H）之上，并有自由面。因为流体表面有起伏，就会产生压强梯度力，来强迫下面的流体离开表面的起伏。较下面的图中，我们考虑一个流体柱，边长为L_x，L_y，和高度H+h（流体的总厚度）。

流体会流出想象出的盒子的边界，但不会流出固体底面。流体流出盒子，自由表面的高度就改变。这里我们来研究盒子的质量（或体积平衡），盒子的体积V是L_xL_y（H+h）。



$$uL_y(H+h)_{rhs} - uL_y(H+h)_{lhs} = L_y\Delta[u(H+h)] \quad = \text{x 方向净损失的流体}$$

$$vL_x(H+h)_{front} - vL_x(H+h)_{back} = L_x\Delta[v(H+h)] \quad = \text{y 方向净损失的流体}$$

其中*lhs*是指盒子“左面”。流体的净损失与体积的变化必须平衡。所以我们可以得到以下的体积平衡（先简化L_x=L_y=L）：

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} + L[\Delta(u(H+h)) + \Delta(v(H+h))] = 0$$

$\dfrac{\Delta V}{\Delta t} + L^2\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = 0$，这样

$\dfrac{\Delta h}{\Delta t} + \dfrac{\Delta(u(H+h))}{L} + \dfrac{\Delta(v(H+h))}{L} = 0$ ，或随着 $L \to 0$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[u(H+h)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(H+h)]=0$$

这样我们就得到海洋中密度均匀的流体的运动方程：

$$\frac{du}{dt}-fv=-g\frac{\partial h}{\partial x}-ru+\frac{F^x}{\rho},$$

$$\frac{dv}{dt}+fu=-g\frac{\partial h}{\partial y}-rv+\frac{F^y}{\rho}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[u(H+h)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(H+h)]=0\text{，其中}$$

$$\frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$$

对于流体，我们可以跟踪质点运动[拉格朗日方法]或在一点看到不同质点经过的力学平衡[欧拉方法]。目前，我们研究了前者，但没有用到流体力学。两种方法中对时间导数的意义不同。上述最后一个方程中，质点对时间的导数在欧拉方法中变成了在一点（x，y）的水平导数。这反映了一个事实，在一点上，随时间的变化可以是由于外力也可以是有着不同记录的质点流经这个观测点。考虑到本课程以后所需要的数学知识，不会有本质的区别，我们将上述方程简单的线性化。我们将用它来理解中纬度环流动力学，热带和赤道，依赖时间的运动如潮汐，Rossby 波，和地形波，其中我们考虑整个水柱垂向密度均一，作为一个整体来响应。这种性质的运动被称为“**正压**”，是海洋环流中重要的一部分。

但是，我们知道密度确实是垂向变化的，海洋环流也不是垂向均一的。随垂向变化的速度场称为“**斜压**”速度，我们方程需要稍微修改一下来描述这个分量。我们现在简要讨论一下我们的“重要方程”中要描述斜压流动需要做哪些修改。

首先，我们必须知道*水平*压强梯度力会使流体产生*水平*加速度，由于科氏力的影响。回想我们用过的静力平衡，在垂向上垂直压强梯度和重力平衡。所以另一个方程就是静力平衡，表述为：

$$\frac{dw}{dt}=-g\rho-\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

在静力平衡不存在时，就会有流体的垂向加速度。

下一个对方程的修改是我们要把海表面水平起伏变为压强的水平变化，因为压强会在海表面以下产生变化。我们得到：

$$g\frac{\partial h}{\partial x}\to\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},g\frac{\partial h}{\partial y}\to\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

接着，我们想到平流导数必须包括垂向速度和对“z”导数，这样

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

最后，上组中最后一个方程，也就是连续方程，说明流进一个控制盒子的流体必须和流出盒子或自由面上变化的流体向平衡。在表面以下，这要修改为考虑一个小立方体流体边长为 L．通过立方体六个面上的流体通量现在变为

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} + L^2[\Delta(u) + \Delta(v) + \Delta(w)] = 0$$，其中 $V = L^3$，或

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$ ，随着 $L \to 0$

我们定义了一个固定体积的流体立方体， L 是立方体的边长为常数。为了进一步研究，描述了流体中的垂向变化（和没有垂向变化的情况）重要方程组现在变为

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - ru + \frac{F^x}{\rho},$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial h}{\partial y} - rv + \frac{F^y}{\rho},$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

我们有四个方程，有五个独立变量，（u，v，w，p，ρ），在外力的作用下，现在还没有进一步说明。摩擦力，r，很微小，但在流体的固体边界处很大，近海表湍流边界层较大摩擦力很大，会反方向作用或产生运动。通常理解摩擦力的方法会使我们很深入流体动力学。现在，理解摩擦力对于有侧边界应力的流体很重要，就像海表[这里有风应力驱动海洋]，侧边界和底边界上的侧向应力会阻止流体的运动。第五个方程（上面没有）说明平流和外力如何影响密度。我们以后再讨论它。现在，先考虑一下！