

旋转 101 (基础)

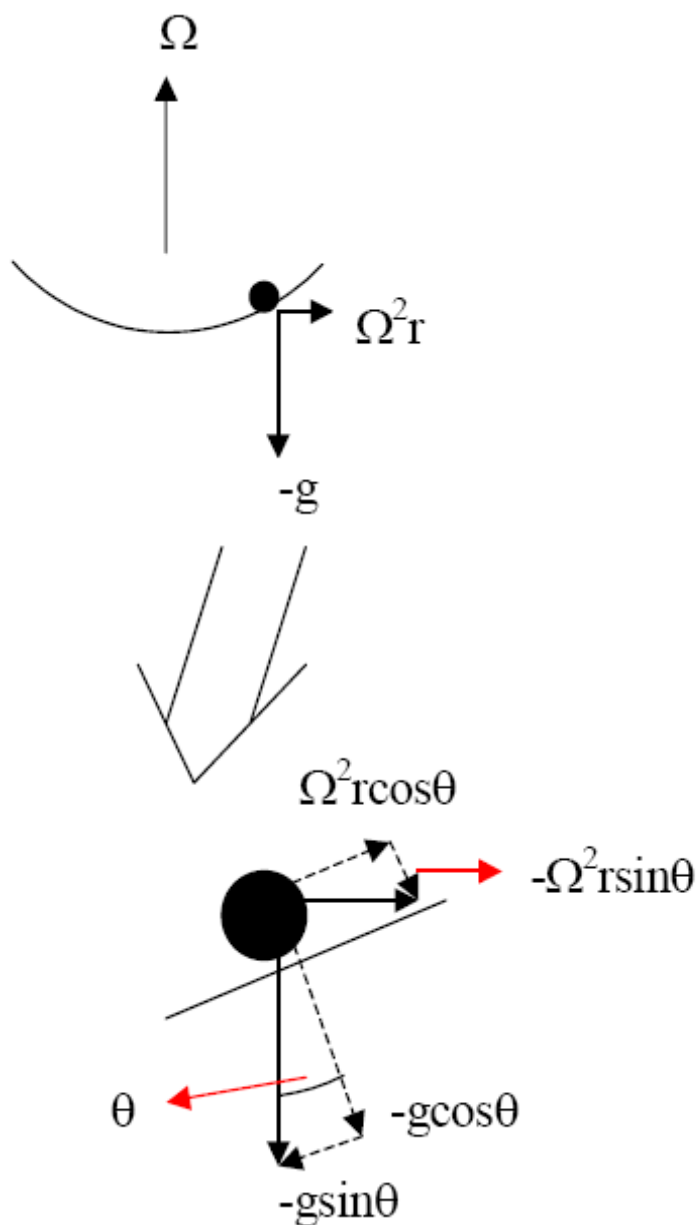
很多同学以前不是学海洋的，即使学过流体力学，也不熟悉在旋转的参考系下研究流体。这对于研究大尺度，低频海洋动力学是很有必要的。所以我们必须回过头来看看旋转动力学基础。

考虑一个圆盘弯曲如图所示，以角速度 Ω 绕着铅直轴旋转。只有铅直方向的重力，起作用。一个质点静止其表面上。(1) 要使质点上静力为零曲面应该是什么形状：质点能在旋转坐标系中静止吗？(2) 曲面法线方向的表观重力是多少？

在旋转坐标系中，有一个自转轴指向外的离心力和向下的重力。我们把这两个力分解为平行于 (a) 法线 (b) 曲面 的力。

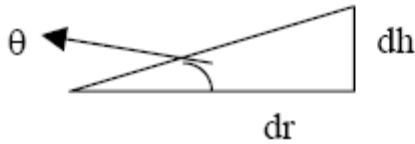
$$-mg \sin \theta + m\Omega^2 r \cos \theta = 0$$

$$-mg \cos \theta - m\Omega^2 r \sin \theta = -m\hat{g}$$



其中， \hat{g} 是表观重力。对于 $\theta < \pi/2$ 的情况第一个关系式（平行于曲面的平衡）变为：

$$-g \tan \theta + \Omega^2 r = 0, \quad \text{或} \quad \frac{dh}{dr} = \frac{\Omega^2}{g} r, \quad \text{其中公认} \quad \tan \theta \equiv \frac{dh}{dr}$$



所以问题（1）的答案是，盘面的形状是抛物线，解为：

$$h = h_0 + \frac{\Omega^2}{2g} r^2$$

其中 h_0 是个常数。问题（2）的答案需要用到一些三角恒等式以及以上 $\tan \theta$ 的答案。可以容易得到（这个经常写出来，它经常没那么容易）：

$$\hat{g} = g[1 + (\Omega^2 r / g)^2] / [1 + (\Omega^2 r / g)^2]^{1/2} = g[1 + (\Omega^2 r / g)^2]^{1/2}$$

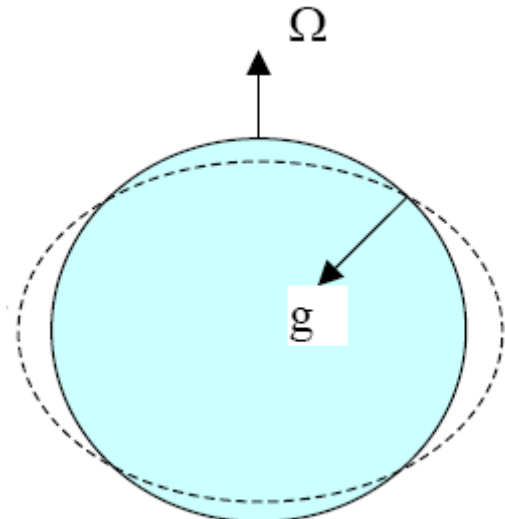
离心力可以被包含在一个对“重力”修正的定义中，这个“重力”作用在弯曲的抛物面上。在一个二维的旋转面上，它随着半径变化，越向外越大。所以如果你想变轻的话，就要向面的中心运动！

许多旋转面，东西放在上面或者实验在上面做，已经有这种抛物线的形状。如果有人在实验室看见了这样一个曲面，并想知道质点能在上面静止的旋转速率，可以（难的方法）算出曲面的二次项，或者（简单的方法），在非旋转平面上放个弹球，算出弹球振荡的频率。下面来解释。平行于旋转面在半径方向的力，用牛顿第二定律为：

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -g \frac{dh}{dr} = -g(\Omega^2 r / g) = -\Omega^2 r$$

这反映了使质点沿斜坡滚下的力学平衡和在重力作用下的加速。但是我们知道斜坡的表达式 (dh/dr) 从前面来的，代入上式我们得到解： $r = a \sin(\Omega t) + b \cos(\Omega t)$ ，其中 a 和 b 是任意常数，用来确定初始状态。所以振荡的频率， Ω 和曲面建造的旋转周期是一样的。

现在考虑一个旋转的，自吸引的球体，如右图。重力作用指向球心，但是在旋转，在流体上有一个自旋转轴指向外的离心力。如果旋转坐标系中没有运动会是什么形状？旋转对于表观重力有什么作用？我们将在这节课讨论，但实际上不解决这个问题……



科氏加速度/力

我们算过了一个旋转面上要使质点停住不动的形状必须是什么：那就是抛物线。现在考虑在这个旋转参考系中有运动时会发生什么。我们用的例子摘自 Jim Price 写的一个程序 (coriolis.m)，来阐明一个质点，如冰球，给了一个初始速度之后在没有外力（除了重力和离心力）的情况下怎么运动。所以曲面必须相对光滑（冰）这样摩擦很小可以忽略。我们将在两个参考系下研究质点的运动：一个是惯性坐标系（非旋转）而另一个是旋转坐标系，绕着平行于重力的轴旋转，角速度为 Ω 。在惯性系中，质点会沿着初始速度的方向运动。如我们所说的，它会被抛物面停下来并做频率为 Ω 的振荡。在旋转坐标系下，看起来会做一个圆周运动，在旋转周期的一半回到初始位置：它的振荡频率是 2Ω 。这种圆周运动是由质点下面的旋转坐标系引起的。在旋转坐标系下，我们在质点上加上一个等于 $2\Omega \times \mathbf{v}$ 的力来表示这种运动，其中这个加速度在相对速度向量 \mathbf{v} 和旋转向量 Ω 的正右边。这里我们用粗体来表示向量，也可以用字母上价格箭头表示，如以下所示。这个加速度，如果乘以质点的质量，等于指向质点右边的一个力，如果 Ω 如所示（逆时针），如果 Ω 反方向，就指向指点运动的左边。这个假想的力是海洋学中最重要的一個力之一！它单独出现是因为我们（和海洋）被限制在旋转的地球上。

试着运行由 Jim Price 写的 m 文件 “coriolis.m”。图中阐释了质点在一个抛物面上的运动，在一个惯性（非加速）参考系和旋转参考坐标系中。在前者中，质点将绕着抛物面的中心振荡，向我们上面所述，频率是 Ω 。当它振荡到一半时，旋转坐标系绕着旋转轴转到一半，所以质点在旋转坐标系中和开始在同一位置！在旋转系中，振荡频率是 2Ω ，是惯性系中的两倍。同样注意质点如何表现为顺时针圆周运动，由于“假想”的科氏力。在旋转坐标系中，如果 (x, y) 是质点位置， (u, v) 是其速度，牛顿第二定律被写成：

$$m \left[\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \right] = \sum_{i=1} \vec{F}_i$$

其中方程右边为外力。我们现在考虑一种特殊的“外”力：摩擦。摩擦的作用是阻止冰球的运动。我们都观察到摩擦最重会使运动的东西停止。最简单形式的摩擦表现为与质点的质量成正比而与质点的速度反向。它只作用在微粒和面的接触点上，但可以很简单的表示为作用在整个微粒上的现行线性拖曳。所以我们可以修正上述方程如下：

$$m \left[\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \right] = -mr\vec{v} + \sum_{i=2} \vec{F}_i$$

其中“r”是摩擦系数，正比于微粒与接触面之间的“粘性”。

现在我们加上另一个“力”。假设面上有一些起伏：它不平。[回想我们已经考虑过的由较缓的曲率引起的离心力]。假设曲面的地形用 h 表示，那么这个力就是 $-g\nabla h$ 。其中符号 ∇ 是梯度算子，它是记录曲面在 x -和 y -方向斜率向量： $(\partial_x, \partial_y)h$ 的简单记号。这在之前我们说明旋转面必须是什么平衡形状是就已经引入过。因此运动方程变为：

$$m \left[\frac{d\vec{v}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \right] = -mr\vec{v} - mg\nabla h + \sum_{i=3} \vec{F}_i$$

冰球上其他的力($i \geq 3$)简单表示为 \mathbf{F} 。如果我们把上述向量方程变为分量形式, 得到:

$$\frac{du}{dt} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x} - ru + \frac{F^x}{m},$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y} - rv + \frac{F^y}{m}$$

其中 $f \equiv 2\Omega$, 我们已经除以质量, m 。

我们用一个作业: **pucks_on_ice** 来解释上述平衡的一些动力学。我们用冰来部分表示曲面上的永久“起伏”。实际上, 流体中再“自由面”上没有永久的“起伏”除非被力来维持。我们之后会看到这会由称为“地转”平衡来维持, 需要有稳定的流来平衡永久起伏或引起自由流体面上的涟漪。