

文章编号:1000-2499(2002)01-0041-05

上限有限元法及其在路堤稳定性分析中的应用

杨小礼¹, 李 亮¹, 李克坤²

(1. 中南大学铁道校区土木建筑学院, 湖南 长沙 410075; 2. 铁道部第四工程局二处, 安徽 阜阳 236024)

摘 要: 在上限定理的基础上, 将铁路路堤离散为三角形单元, 在单元中构造线性速度场, 根据相关联流动法则以及边界条件建立约束方程, 引入数学规划方法寻求路堤承载力的上限解. 通过和经典解析解相比较知: 该方法是一种有效的数值方法.

关键词: 路堤稳定性; 上限定理; 流动法则; 速度间断线

中图分类号: TU47

文献标识码: A

Bearing Capacity Analysis of Subgrade Soil Using Upper Bound Finite Element Method

YANG Xiao-li¹, LI Liang¹, LI Ke-kun²(1. Civil Architectural Engineering College, Central South University, Changsha 410075, China;
2. 4th Engineering Bureau of Ministry of Railways, Fuyang 236024, China)

Abstract: According to upper bound theorem, discretization of subgrade soil into triangular elements is an efficient way to construct kinematically admissible linear velocity field within elements. Functions subjected to associated flow rule within elements, associated flow rule along discontinuities and boundary conditions are solved by the method of mathematical programming, and the solution of bearing capacity for subgrade is obtained. The method presented in the paper proves to be correct using analytical solutions.

Keywords: stability for subgrade; upper bound theorem; flow rule; velocity discontinuity

对于岩土结构物承载力的计算, 传统的分析方法主要有两类: 一类是弹塑性分析法, 即根据应力应变关系、具体问题的初始与边界条件、荷载历史逐步求解承载力问题, 但由于微分方程的复杂性, 岩土本构关系的多样性, 弹塑性区分界线的不确定性等因素导致弹塑性法计算过程相当复杂. 另一类是条分法, 它是将结构物分成若干条块, 根据力的平衡理论求解. 条分法简单易懂, 在工程中广泛应用, 但是由于各条块之间的相互作用力复杂, 从而影响计算结果的准确性. 另外, 平衡微分方程、流动法则也不能在各条块中的每一点得到满足.

对许多岩土结构物来讲, 有时并不需要知道应力和应变随外荷载如何变化, 只要求出最

收稿日期: 2001-05-17

基金项目: 湖南省中青年科学基金资助项目(00JZY2140)

作者简介: 杨小礼(1971-), 男, 安徽安庆人, 中南大学讲师, 博士生.

终达到塑性极限状态(即开始产生无限制塑性流动)时所对应的破坏荷载.20 世纪 50 年代, Drucker 和 Prager 把静力场和速度场结合起来并提出极值理论,建立岩土结构物的极限分析理论,为求解岩土极限荷载提供了新的途径.从理论上讲,由平衡条件、屈服条件、流动法则与相应的边界条件,足以确定应力场、速度场和破坏荷载,但由于实际问题的复杂性,要求全面满足这些条件的解答几乎不可能.为此,本文在极限分析理论基础上,运用上限定理有限单元法求解承载力问题,其基本思路是:将岩土离散为三角形单元,同时构造线性速度,三角形单元中以及速度间断线上满足相关联流动法则,速度边界上满足边界条件,最后引入数学规划方法寻求问题的上限数值解.

1 上限有限元形成

虚功率原理表明:对于任意一组静力容许的应力场和任意一组机动容许的速度场,外力的虚功率等于物体内能消散功率.在虚功率原理的基础上可推导出上限定理为:在所有的机动容许的塑性变形速度场相对应的荷载中,极限荷载为最小^[1].

1.1 单元离散

对计算区域的结构物按三角形单元离散,并假设三角形中速度场线性分析,即

$$[u \quad v]^T = [\phi] [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_k \quad v_k]^T \quad (1)$$

式中 $[\phi] = [N_i E \quad N_j E \quad N_k E]$

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad \left. \begin{aligned} a_i &= x_j y_k - y_j x_k \\ b_i &= y_i - y_k \\ c_i &= -x_j + x_k \end{aligned} \right\} \quad (i = i, j, k)$$

i, j, k 为三角形单元节点,逆时针排列; a_i, b_i, c_i 为系数; $u_i \cdots v_k$ 分别为节点 i, j, k 的速度分量; A 为三角形单元面积; E 为 2×2 阶单位矩阵; N_i 为单元形函数.

1.2 屈服条件

在平面应变问题中,以拉应力为正.岩土材料常用的 Mohr-Coulomb 屈服准则,可表示为:

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2C \cos \theta - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \theta]^2 = 0 \quad (2)$$

在(2)式中, C, θ 表示土体抗剪强度指标.以 $\sigma_x - \sigma_y$ 为横轴,以 $2\tau_{xy}$ 为纵轴,上述表达式是一个以 $2C \cos \theta - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \theta$ 为半径,以原点为圆心的圆域.由于三角形单元中采用线性速度场模式,所以屈服准则需要线性化,为此用一个外切正多边形逼近上述圆域^[2,3],如图 1 所示.设正多边形的边数为 m ,则第 k 边屈服条件的线性表达式为:

$$F_k = A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} - 2C \cos \theta = 0 \quad (3)$$

式中 $A_k = \cos \alpha_k + \sin \theta$ $B_k = -\cos \alpha_k + \sin \theta$ $C_k = 2 \sin \alpha_k$ $\alpha_k = 2k\pi/m$ $k = 1, \cdots, m$

1.3 三角形单元内满足相关联流动法则

在用上限定理求解岩土问题时,假设 1) 岩土为理想刚塑性体,且服从相关联流动法则;2) 岩土屈服函数 F 与塑性势函数相同.这时有:

$$\dot{\epsilon}_y^p = d\epsilon_y^p = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} d\lambda \quad d\lambda \geq 0 \quad (4)$$

φ 为塑性势函数; $d\epsilon_y^p$ 为塑性应变增量; $d\lambda$ 为一非负比例系数, $d\lambda \geq 0$.根据屈服函数 F_k 与塑性势函数相同得:

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_y} d\lambda \quad d\lambda \geq 0 \quad (5)$$

将表达式(1)代入(5)式中间项,将表达式(3)代入(5)式右边项,经整理后写成矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_p \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\lambda_1 \\ d\lambda_2 \\ \vdots \\ d\lambda_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$d\lambda_k$ 表示与屈服函数第 k 边相关联的比例系数, $d\lambda_k \geq 0$ 。(6) 式是某一个三角形单元相关联流动法则的约束方程,对计算区域所有的单元按(6) 式合并,得:

$$A_{11}X_1 - A_{12}X_2 = 0 \quad \text{且} \quad X_2 \geq 0 \quad (7)$$

1.4 速度间断线上满足相关联流动法则

速度间断线与水平线的头角为 Φ , 节点 i, j 是速度间断线 L 上的两点, 其速度分量为 u_i, v_i, u_j, v_j , 如图 2 所示。

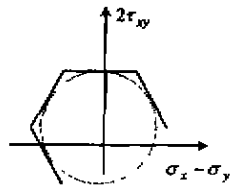


图1 屈服条件线性化

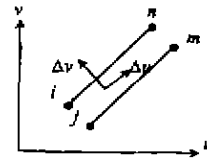


图2 速度间断线

$$\Delta u_y = (u_j - u_i) \cos \Phi + (v_j - v_i) \sin \Phi \quad (8)$$

$$\Delta_y = (u_i - u_j) \sin \Phi + (v_j - v_i) (\cos \Phi) \quad (9)$$

这里令 $\Delta u_y = u_y^+ - u_y^-$, 且 u_y^+, u_y^- 都是大于或等于零的数, 将它代入(8) 式得:

$$u_y^+ - u_y^- = (u_j - u_i) \cos \Phi + (v_j - v_i) \sin \Phi \quad (10)$$

则在速度间断线 L 上, 长为 l 的某一点速度为:

$$u^+ = u_y^+ + \frac{l}{L} (u_m^+ - u_y^+) \quad (11)$$

$$u^- = u_y^- + \frac{l}{L} (u_m^- - u_y^-) \quad (12)$$

$$\Delta u = u^+ - u^- = (u_y^+ - u_y^-) + \frac{l}{L} (u_m^+ - u_m^- + u_y^- - u_y^+) \quad (13)$$

Mohr-Coulomb 材料在塑性变形过程中体积应变不等于零, 速度间断线两侧的法线速度分量和切线速度分量均不连续, 它们应满足下述关系:

$$\Delta v = |\Delta u| \cdot \tan \theta \quad (14)$$

上述(14) 式表明速度间断线上的相对速度 Δv 与间断线切线方向成 θ 角, 由(13) 式知: 切向速度 Δu 在单元中线性分布, 在速度线上的某一点可能会改变方向, 为此用 $s(u^+ - u^-)$ 代替 $|\Delta u|$, $s = \pm 1$, 并将表达式(14) 应用于节点 i, j 得:

$$\Delta v_y = (u_i - u_j) \sin \Phi + (v_i - v_j) \cos \Phi = s(u_y^+ - u_y^-) \tan \theta \quad (15)$$

(10) 式和 (15) 式构成速度间断线上的方程, 写成矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix} -\cos \Phi & -\sin \Phi & \cos \Phi & \sin \Phi \\ \sin \Phi & -\cos \Phi & -\sin \Phi & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s \tan \theta & -s \tan \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_y^+ \\ u_y^- \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

将 (16) 式拓展到计算区域全部的速度间断线上, 即所有的速度间断线按 (16) 式合并得:

$$A_{21} X_1 - A_{23} X_3 = 0 \quad \text{且} \quad X_3 \geq 0 \quad (17)$$

1.5 速度边界上满足边界条件

设节点 i 是速度边界上的一点, 其速度已知为 \bar{u}, \bar{v} , 速度边界线与水平线的夹角为 Φ_0 . 对机动容许的速度场须满足下列等式.

$$\begin{bmatrix} \cos \Phi_0 & \sin \Phi_0 \\ -\sin \Phi_0 & -\cos \Phi_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

对计算区域所有边界条件按 (18) 式合并, 可得: $A_{31} X_1 - A_3 = 0$ (19)

至此, (7) 式、(17) 式、(19) 式构成下限定理有限单元法求解的基本方程.

2 路堤稳定性分析

在路堤稳定性计算中, 所求的荷载常常是沿该路堤边界上的极限荷载. 根据虚功率原理, 外力的虚功率应等于内能消散率, 而内能消散率包括: 速度间断线上的能量消散率, 三角形单元的能量消散率.

$$\text{三角形单元的能量消散率为:} \quad w_e = \int_A (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_y \dot{\epsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dA \quad (20)$$

$$\text{将表达式 (3) 代入上式整理得:} \quad w_e = 2A \cos \theta \sum_{k=1}^m d\lambda_k \int_A C \cdot dA \quad (21)$$

$$\text{速度间断线上的能量消散率为:} \quad w_L = \int_L C |\Delta u| \cdot dL \quad (22)$$

在上述表达式中, 下标 e 和 L 分别表示三角形单元和速度间断线. (21) 式为某一个三角单元的内能消散率, (22) 式为某一条速度间断线上的内能消散率. 将它拓展到整个计算区域, 即将所有的单元和全部速度间断线上的内能消散率按 (21)、(22) 两式合并, 得:

$$C_2^T X_2 + C_3^T X_3 \quad (23)$$

C_2^T 、 C_3^T 为目标系数矩阵. 由此可以得到求解路堤稳定性问题的数学模型.

$$\left. \begin{array}{l} \text{求最小值:} \quad C_2^T X_2 + C_3^T X_3 \\ \text{约束条件:} \quad A_{11} X_1 - A_{12} X_2 = 0 \quad A_{21} X_1 - A_{23} X_3 = 0 \\ \quad \quad \quad A_{31} X_1 - A_3 = 0 \quad X_2 \geq 0 \text{ 且 } X_3 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (24)$$

(24) 式为极限荷载问题的目标函数与约束方程, 可通过线性数学规划法求解, 如 Sloan(1995)^[3] 采用最陡边有效集法求解, 笔者采用仿射变换法求解. 图 3 为铁路双侧路堤的剖面示意图. 假设 AB 线所在的平面为路基面, AB 线以上为路堤填土部分, 填土为无重粘性土 (容重 $\gamma = 0$, 内摩擦角 $\theta = 0^\circ$); AB 线以下为基岩且具有不可压缩性; 路堤剖面为对称分布, 那么

根据极限分析理论,该路基的极限承载力的经典上限、下限解为^[1]:

$$Q^{\pm} = 2C \cdot (1 + \alpha) \quad Q^{\mp} = 2C \cdot (1 + \sin\alpha) \quad (25)$$

在采用上限定理有限元法求解时,由(3)式可知, m 的大小直接关系到计算工作量和计算精度。 m 取得越大,线性化屈服条件就越接近原来的屈服方程(2)式,但约束方程个数随之增加。图4为计算结果与 m 大小的关系,图中 $\alpha = 45^\circ$, $C = 30$ Kpa。由图4可知,当 m 较小时, m 的大小对计算结果影响较大,如 $m = 6$ 时,计算结果与经典上限解((25)式中的第一式)的误差为23.1%;当 m 较大时, m 的大小对计算结果影响较小,如 $m = 18$ 时误差值为9.5%,如 $m = 24$ 时误差值为4.1%。因此选择合适的 m 能够计算足够精确的上限解。

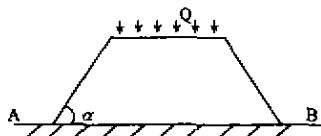


图3 双侧路堤剖面示意图

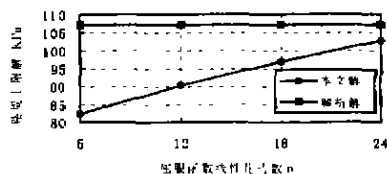


图4 屈服函数线性化 m 与上限解的关系

在图4中没有考虑土体容重的影响,实际上,土体容重是影响路堤承载力的一个重要因素。路堤材料合理选择直接关系到路堤的承载力以及路堤的工程造价,这一直是铁路勘测设计中一个重要的问题。图5为本文上限定理有限元计算结果与路堤容重的关系曲线,图中 $m = 24$,坡角 $\alpha = 45^\circ$, $C = 30$ Mpa。从图5可发现:路堤填土经过压实后越密实,路堤的承载能力就越大,如填土平均容重 $\gamma = 30$ KN/m³时,其极限承载力比经典上限解((25)式中的第一式,它不考虑容重是影响因素)提高12%左右。

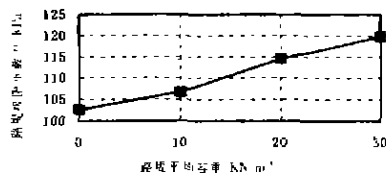


图5 路堤填土容重对极限承载力的影响

3 结束语

上限定理是求解土体极限平衡课题的一种有效工具,但由于土体边界形状不规则,荷载、土体容重等因素的影响,路堤承载力解析解的应用范围受到限制。本文在传统方法的基础上应用上限有限元理论对路堤承载力的分析,初步得出如下结论:

- 1) 有限单元法与上限定理相结合,使在复杂条件下求解路堤承载力问题成为可能,为上限定理的广泛应用开辟了新的途径。
- 2) 路堤填土密实度影响路堤的承载能力。 $\alpha = 45^\circ$, $C = 30$ Kpa, $\gamma = 30$ kN/m³时,路堤承载力比经典上限解提高12%左右。

参考文献:

- [1] Chen W F. Limit analysis and soil Plasticity[M]. Amsterdam: Elsevir Science, 1975.
- [2] Lysmer J. Limit Analysis of Plane Problems in Soil Mechanics[J]. J of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1970, 96: 1311-1334.
- [3] Sloan S W, Kleeman M W. Upper Bound Limit Analysis Using Discontinuous Velocity Fields[J]. Comp Methods in Appl Mech of Engg, 1995, 127: 293-314.