

文章编号:1000-2499(2002)04-0011-05

基于孔隙水压力的路堤稳定性分析

楼捍卫,李 亮,杨小礼

(中南大学土木建筑学院,湖南 长沙 410075)

摘 要:将单侧铁路路堤离散为三角形单元,在单元中构造线性速度场,将孔隙水压力视为外力,在计算路堤单元的内能消散率和外力的功率时采用有效应力,建立路堤稳定性的上限目标函数,引入内点法规划方法寻求路堤稳定性的上限解.根据工程实例,应用 Bishop 的简化条分法对上限解进行检验,通过比较本文方法是一种有效的数值方法.

关键词:单侧铁路路堤;内点法规划;孔隙水压力

中图分类号:TU470

文献标识码:A

Stability of Embankment with Groundwater

LOU Han-wei, LI Liang, YANG Xiao-li

(Civil Architectural Engineering College, Central South University, Changsha 410075, China)

Abstract: The stability of subgrade soil with groundwater is studied with upper bound approach. Discretization of railway Embankment soil into triangular elements is an effective way to construct kinematically admissible linear velocity field within elements. Groundwater pressures are taken into consideration. Interiorpoint method of mathematical programming is employed to solve the objective function, corresponding to the dissipated power and the solution of stability factor for Embankment is obtained. The method presented in the paper proves to be credible compared with simplified Bishop's solution.

Keywords: unilateral railway Embankment; interior point programming; groundwater

前 言

路堤稳定性分析的目的是为了求得路堤在无荷载作用下的稳定性程度或路堤在已知外荷载作用下的极限承载力大小,这一直是岩土工程界的热门研究课题之一.其研究方法一般分为三类:弹塑性有限元法,极限平衡法即条分法,极限分析法.

在路堤稳定性分析时广泛应用的方法是条分法.即首先将边坡分为若干条块,然后假定各条块之间相互作用力的大小和方向,最后根据力的平衡原理求解.条分法最早是由瑞典人彼德

收稿日期:2002-06-17

基金项目:铁道部科技开发计划项目(2000G050)

作者简介:楼捍卫(1963-),男,浙江义乌人,中南大学工程硕士生,高级工程师.

莱(1916)提出的,后来经很多学者不断的改进,以形成各种不同的方法.在具有 n 个条块的路堤边坡问题中,一般来说具有 $5n-2$ 个未知量,而平衡方程只有 $3n$ 个,这样需要做出 $2n-2$ 个互不相关的假设以满足平衡理论的要求,不同的假设形成不同的方法.但是,使用条分法时,有以下几点值得注意:(1)正如 Nash(1987)^[1]所说的那样,由于各条块之间的相互作用力复杂,现有的各种计算方法所得的安全系数不是真实的安全系数.(2)条分法并不能证明滑动面以外的土体是否违反 Mohr-Coulomb 屈服条件或 Tresca 屈服条件.根据前人的二维路堤上限定理有限元分析可以看出:在滑动面附近还存在着大量的单元处于塑性破坏状态.(3)当所求的路堤处于多相不均匀状态时,无论是 Bishop 的条分法还是其它的条分法都无法求出它的系数.

为了克服条分法中存在的上述弊端,Sloan^[2]、Jiang^[3]等学者采用上限定理研究稳定性问题,运用上限定理求得的解答为精确解答的上限,因此,该方法日益受到重视,并在实践中得到应用.该方法避开岩土弹塑性变形过程,根据能量耗散情况直接求出最终达到塑性流动状态(即开始产生无限制塑性流动)时所对应的稳定性程度,使求解过程简单化.然而,他们都没有考虑孔隙水压力的影响.

实际上,孔隙水压力是影响路堤稳定性的一个重要因素,如:路堤在天然降雨、爆破、地震等外界因素作用下孔隙水压力增加,导致路堤的稳定性降低.在采用条分法和弹塑性有限元法时,孔隙水压力计算一般根据地下水位变化情况而进行计算,如:渗流状态下的流网分布或孔隙水压比等方法.在采用上限定理对路堤稳定性分析时,前人的主要工作是基于总应力法基础上,而不考虑孔隙水压力的影响.在上限定理的基础上,本文将孔隙水压力作为外力,采用有限元法求解路堤稳定性问题,其基本思路是:将路堤离散为三角形单元,同时构造线性速度场;三角形单元中以及速度间断线上需要满足流动法则,速度边界上满足边界条件,以此建立约束方程;最后引入线性规划中的内点法寻求问题的上限解.

1 孔隙水压力作用下的上限定理

传统的上限定理是建立在虚功率原理的基础上,因此,在分析孔隙水压力对上限定理的影响之前,首先探讨孔隙水压力作用下的虚功率原理.在对边坡进行上限分析时,孔隙水压力 u_p 的计算公式如: $u_p = r_u \cdot \gamma z$, 式中, r_u 是孔隙水压力比; γ 是土体的容重; z 是土体中某一点距地表的深度.当孔隙水压力作用为外力时,虚功率方程为:

$$\int_A T_i \dot{u}_i^* dA + \int_\Omega F_i \dot{u}_i^* d\Omega = \int_\Omega (\sigma_{ij}^0)' \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (1)$$

式中: T_i 、 F_i ——分别为物体上的面力和体力(包括重力、渗透力和浮力);

$(\sigma_{ij}^0)'$ ——静力场中的有效应力; \dot{u}_i^* 、 $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ ——分别为速度场中的速度和应变率;

A 、 Ω ——分别是面力作用的面积与物体的体积.

当孔隙水压力作为内力时,虚功率方程为:

$$\int_A T_i \dot{u}_i^* dA + \int_\Omega F_i \dot{u}_i^* d\Omega = \int_\Omega [(\sigma_{ij}^0)' + \delta_{ij} p] \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (2)$$

式中: F_i ——作用物体上的体力(只包括重力,不包括渗透力和浮力);

当 $i = j$ 时 $\delta_{ij} = 1$, 当 $i \neq j$ 时 $\delta_{ij} = 0$; p ——孔隙水压力.其它符号意义同上.

(1)式和(2)式的左边表示外力所做的虚功率;(1)式和(2)式的右边表示物体内的内能消散功率.(1)式和(2)式的主要区别在于孔隙水压力的处理方式不同:在(1)式中孔隙水压力当

作外力处理,在(2)式中孔隙水压力当作内力处理。

如果外荷载在真实的应变率场上所做的虚功率大于或等于物体内的内能消散功率,而且此时的应变率场满足机动容许条件和速度边界条件,那么物体处于即将破坏状态或破坏状态。也就是说此时的外荷载大于或等于物体所需要的荷载,根据虚功率方程(1)式知:

$$\int_{\Omega} F_i \dot{u}_i^* d\Omega + \int_s T_i \dot{u}_i^* ds \geq \int_{\Omega} (\sigma'_{ij})' \dot{\epsilon}_{ij}^* d\Omega \quad (3)$$

从(3)式可看出,孔隙水压力作用下的上限定理有两个主要特点:体力 F_i 包括重力、渗透力和浮力,此时的容重为天然容重,而非浮容重;在计算物体内的内能消散率时采用有效应力,而不是总应力。由流动法则知,对于 Mohr-Coulomb 材料,屈服状态下的体积应变率为(Finn1967年):

$$\dot{\epsilon}_v = \gamma \sin \theta' \quad (4)$$

在(4)式中, θ' 为有效内摩擦角; γ 为剪应变率。从(4)式可看出,体积应变率在塑性流动的过程中不为零,因此在选择机动容许的速度场时,速度在满足流动法则的同时还需满足(4)式。

2 孔隙水压力作用下的上限规划

极限分析法根据虚功率原理,建立土体内的内能消散率与外力所做功率的关系,寻求问题的解。土体内的内能消散率包括:土体单元能量消散率,单元间的速度间断线上的能量消散率;而外力所做功率包括:路堤重力的功率,路堤表面荷载的功率,以及孔隙水压力的功率。

土体所有单元能量消散率为:

$$w_e = \int_A (\sigma'_x \dot{\epsilon}_x + \sigma'_y \dot{\epsilon}_y + \tau'_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) dA \quad (5)$$

单元间全部速度间断线上的能量消散率为:

$$w_L = \int_L (|\tau \Delta u| + \sigma_n \Delta v) dL = \int_L C' |\Delta u| dL \quad (6)$$

路堤重力场所做的功率为:

$$w_b = \int_{\Omega} v d\Omega = \gamma \cdot \int_A v dA \quad (7)$$

路堤表面荷载的功率:

$$w_T = T \cdot \int_s v dS \quad (8)$$

孔隙水压力所做的功率为:

$$w_p = \int_A p(\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y) dA + \int_L p \cdot \Delta v dL \quad (9)$$

在(5)式中, A 是二维路堤的横切面面积。在(6)式中, L 是全部速度间断线的长度。在(7)式中, γ 是土体的天然容重。在(8)式中, T 是作用路堤表面上的外荷载, S 是荷载作用的面积。在(9)式中, p 是孔隙水压力,其它符号意义同上。应当指出:在孔隙水压力作用下路堤的强度参数发生变化,上限分析是采用有效抗剪强度指标,即 C' 、 θ' ,应力采用有效应力。

在对路堤进行上限有限元分析时,首先将路堤离散为三角形单元,在屈服函数 $f(\sigma'_{ij})$ 线性化之后,使三角形单元和速度间断线满足流动法则和速度边界条件,以此建立约束方程;然后根据土体内的内能消散情况建立优化目标函数。根据上限定理,外荷载所做的功率大于土体内能耗散功率时,路堤发生失稳,目标函数是寻求外荷载的极小值。对无表面荷载作用的路堤,

目标函数是寻求路堤发生失稳的最小容重(路堤的坡角、高度、有效抗剪强度指标给定时),即:

$$\gamma = \frac{w_e + w_L - w_p}{\int_A v dA} \quad (10)$$

在求解(10)式时,一般假定 $\int_A v_y dA = 1$ (转化为约束矩阵),求 γ 的最小值就转化为求 $w_e + w_L - w_p$ 的最小值.对有表面荷载作用的路堤,目标函数一般是寻求该路堤承载力的大小,即:

$$T = \frac{w_e + w_L - w_p - w_b}{\int_s v dS} \quad (11)$$

在求解(11)式时,一般假定 $\int_s v_y dS = 1$ (转化为约束矩阵),求 γ 的最小值就转化为求 $w_e + w_L - w_p - w_b$ 的最小值.

3 内点法规划与工程计算

(10)式为无表面荷载作用的路堤稳定性目标函数,(11)式为有表面荷载作用的路堤稳定性目标函数,它们都是优化理论中的线性规划问题.对于少量的有限单元和速度间断线,采用最陡边有效集法^[2]是求解该规划问题行之有效的方法,但随着计算范围的扩大,优化变量从几百个增加到数万个;从几何观点看,线性规划问题的可行域是凸多面体,基本可行解对应着它的顶点,而可行域的顶点的个数一般随着问题维数的变大而成指数函数地增加.因此选择合适的优化方法尤为重要.Karmarker发表了需要 $O(nL)$ 次迭代次数 $O(n^{3.5}L)$ 次算术运算次数的内点算法,对于含几千个以上变量的问题,它的收敛性完全不同于其它的优化方法^[4-5].更令人吃惊的是,在实际计算中发现内点法的迭代次数与问题的规模无关,几乎保持在20~40次.基于这一事实,本文采用内点法中仿射变换原理,寻求该规划问题的上限数值解.

3.1 内点法规划原理

作适当的变换后,将问题(10)式或(11)式转化为标准的线性规划问题

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimize: } C^T X \\ \text{Subject to: } AX = B, X \geq 0 \end{array} \right\} \quad (12)$$

称满足 $AX = B$ 与 $X \geq 0$ 的点域为问题(12)的可行域.可行域内部的某一点称为问题(12)的内点,即非边界点.从整体来看,内点法是从可行域的一个内点 X^0 开始,在可行域内部生成一个点列 $\{X^k\}$,使点列 $\{X^k\}$ 逐步趋近于最优解.在迭代的每一步,目标函数的值都充分的减少,从而以多项式时间收敛或者实际迭代次数几乎与问题的规模无关.由生成点列 $\{X^k\}$ 的方法不同,内点法可分为射影变换法、仿射变换法和路径跟踪法等三类.本文采用仿射变换法求解问题(12)的最优解.下面简单阐述仿射变换法的基本思想:

假定已知一个内点 X^* ,此时,寻找目标函数最自然的优化方法是从 X^* 开始向可行域内函数 $C^T X$ 减少率最大的方向移动,即向量 $-C$ 在子空间 $\{X \mid AX = 0\}$ 的投影方向移动.但是,这一方法对 X^* 在中心附近时效果很好,而当 X^* 点在边界附近时,点列 $\{X^k\}$ 只是移动一点点,此时不能充分将目标函数减少.因此产生了一种想法,将原问题的可行域仿射为单位球体区域,在仿射后的区域内向目标函数减少最快的方向移动,寻求问题的最优解,最后再进行逆变换,将得到的解换回到原可行域.关于仿射变换法的实施过程见参考文献[4,5].

3.2 工程计算

图1为某单线电气化铁路单侧路堤的剖面示意图.图中标明路堤各部位的尺寸以及地下水分布情况, $\alpha = 45^\circ$,土体有效内摩擦角 $\varphi = 15^\circ$.AB线所在的平面为基岩顶面,AB线以下为基岩且具有不可压缩性;AB线以上为单侧路堤与部分路基,这里研究的目的是求出此路堤稳定性的安全系数.路堤稳定性的安全系数定义为:

$$F = \frac{\tan \varphi}{\tan \varphi^m} = \frac{C}{C^m} = \frac{\tau_f}{\tau^m} \quad (13)$$

式中 φ^m 、 C^m 、 τ^m 为破坏时沿整个滑动面产生的有效抗剪强度指标; φ 、 C 、 τ_f 边坡土体的抗剪强度指标.路基土容重 γ 的计算,对于地下水位以上的土体,按天然容重计算,对于地下水位以下的土体,按有效容重计算,即扣除孔隙水压力的影响.

对图1所示的剖面划分若干三角形单元,在上限定理的基础上,根据能量耗散情况建立路堤稳定性的目标函数约束方程,应用规划理论中的内点法进行优化,求得稳定性的安全系数 $F = 1.224$.从本质上讲,图1所示的路堤稳定性问题属于二维边坡稳定性问题,因此,可采用Bishop的简化条分法,根据力的平衡理论求解,求得稳定性的安全系数 $F = 1.163$.由此可见,在考虑孔隙水压力的影响后,上限定理有限元的解几乎与Bishop的简化条分法的结果一致,误差为5.2%.

4 结束语

上限定理是求解铁路路堤承载力或稳定性问题的一种有效工具.由于土体边界形状不规则、列车荷载、地下水位变化等因素的影响,路堤承载力或稳定性的求解遇到困难.本文应用上限有限元理论对路堤稳定性进行分析,并考虑孔隙水压力的影响,使在复杂条件下求解路堤承载力或稳定性问题成为可能,为上限定理的广泛应用开辟了新的途径.工程计算表明,本文的解与Bishop的解基本一致,误差在5%左右.

参考文献:

- [1] Nash D. A comparative review of limit equilibrium methods of stability analysis. Slope stability[M]. New York: Wiley, 1987.
- [2] Sloan S W, Kleeman M W. Upper Bound Limit Analysis Using Discontinuous Velocity Fields[J]. Comp Methods in Appl Mech Of Engrg, 1995, 127: 293 - 314.
- [3] J Gong liang, Mangan J P. Stability analysis of embankments comparison of limit analysis with method of slices[J]. Geotechnique, 1997, 47(4): 857 - 872.
- [4] Karmaker N. A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming[J]. Combinatorica, 1984, 4: 375 - 395.
- [5] Barnes E R. A Variation of Karmarker's Algorithm for Solving Linear Programming Problems[J]. Mathematical Programming, 1986, 36: 174 - 182.

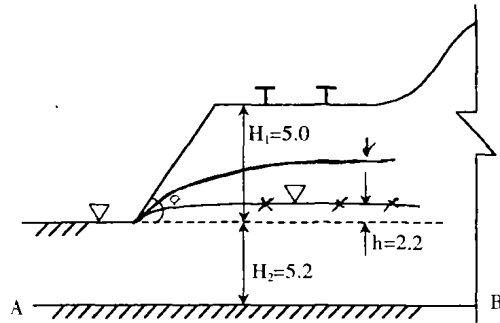


图1 单侧路堤剖面示意图 (单位:m)