

# 改进灰色模型对路基沉降预测的应用研究

刘军勇 薛 晖 吴德军

(长安大学研究生部,陕西西安 710054)

**【摘 要】** 讨论了灰色系统理论在路基沉降预测中的应用,并对等间隔的灰色模型 GM(1,1)进行了改进,建立了任意间隔的非时序改进灰色模型。通过具体工程实践,给出了两种模型对路基沉降量预测结果与实测结果的比较,表明改进灰色模型的预测沉降量与实际沉降量更接近,精度更高,更能满足工程需要。

**【关键词】** 道路工程;沉降;改进灰色模型;灰色预测

**【中图分类号】** TU 433

## Application of Improved Gray-model in the Settlement Prediction of Roadbed Foundation

Liu Junyong Xue Hui Wu Dejun

(Graduate student department, Chang'an university, Xi'an Shan'xi 710054 China)

**【Abstract】** The application of gray system theory in the settlement prediction of roadbed foundation is discussed. Some improvements on the restrictive equal model GM(1,1) are made and the nonrestrictive unequal interval model is built. With the help of practical projects, the prediction results of the two kinds of models are also compared, it's showed that the improved GM(1,1) has been more effective, suitable, and the out-come precision can meet the practical need even more.

**【Key Words】** road engineering; settlement; improved gray-model; gray prediction

### 0 引言

目前,国内外公路系统中主要采用回归分析、统计模型和混合模型来对公路的沉降进行预测。这些数学模型均在一定程度上含有统计特性,它们或者建立在观测误差的数学期望值为零、各次观测互相独立以及观测误差呈正态分布的假定前提下,或者建立在对公路物理力学性质一定的假设基础上。故其模型精度在较大程度上取决于建模因子的选择;此外,由于时效的影响因素复杂,存在很大的不确定性,故而用上述模型进行数据的拟合一般精度不是很高。因此,有必要寻求更有效的预测模型<sup>[1]</sup>。自 1982 年灰色系统理论的提出以来,灰色理论在路基的沉降监测、预测中应用越来越多,但传统的灰色模型仅适用于等间隔且累加生成具有明显指数规律的原始动态序列。由于各种复杂因素的影响,对路基沉降的观测很难做到等间隔时序观测,而本文提出的改进模型突破了传统等间隔时序系统的限制,拓宽了灰色预测的应用范围,具有较大的实用价值。

### 1 灰色系统理论

灰色系统是指信息不完全不确知的系统,它是一种综合运用数学方法对信息不完全的系统进行预测、预报的理论和方法。其基本思想是将与时间有关的已知数据按某种规则加以组合,构成白色模块,然后按某种规则提高灰色模块的白化度;其特点是应用为数不多的数据就能建模。灰色预测是灰色系统重要的组成内容,其基本三个环节为:模型识别(建模)、参数估计和预测。参数估计是指由系统过去行为构成的数据序列反演确定模型下一步预测参数的过程,称为灰色逆过程。参数确定以后就可以用灰色模型对目标进行预测、预报了<sup>[2]</sup>。

#### 1.1 等间隔的 GM(1,1)模型

##### 1.1.1 建立模型

路基的沉降量观测及预测<sup>[3]</sup>是以时间为变量,而对时间序列进行数量大小的预测称为数列预测。数列预测是以单一变量的 GM(1,1)模型为基础的,该模型要求时序数据是平稳变化的。GM(1,1)中前一个“1”表示阶数,后一个“1”表示因素<sup>[4]</sup>,在路基

沉降预测中为时间。

设  $\{x^{(0)}\} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(N)\}$  为原始数据列, 所对应的时间序列为  $t = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_N\}$ , 该数列的一次累加数列为:  $\{x^{(1)}\} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(N)\}$ , 且满足:

$$x^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^k x^{(0)}(m) \quad (1)$$

对  $x_i^{(1)}$  建立白化形式的微分方程:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = u \quad (2)$$

方程的解为:

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{u}{a}\right)e^{-ak} + \frac{u}{a} \quad (3)$$

然后确定  $k=1, 2, 3, \dots, N-1$  时的值:  $\hat{x}^{(1)}(2), \hat{x}^{(1)}(3), \hat{x}^{(1)}(4), \dots, \hat{x}^{(1)}(N)$

进而得还原数列:  $\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1), k=2, 3, 4, \dots, N$  (4)

### 1.1.2 参数估计

式(2)中的参数列为  $[a, u]^T$ , 由最小二乘法  $[a, u]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y_N$  (5)

$$\text{其中 } B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[x_1^{(1)}(2) + x_1^{(1)}(1)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x_1^{(1)}(3) + x_1^{(1)}(2)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[x_1^{(1)}(N) + x_1^{(1)}(N-1)] & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$Y_N = [x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(N)]^T \quad (7)$$

### 1.2 改进 GM(1,1) 模型

本文提出的改进灰色模型是在 GM(1,1) 的基础上派生出来的灰色预测模型, 它不仅能更充分地反映和利用原始数据提供的信息, 并可将等间隔时序系统分析建模延伸到任意间隔的非时序系统<sup>[5]</sup>。

路基的沉降观测及预测是以时间为变量, 因此设随时间变化而形成的序列数据为:

$y(t_i) = \{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}, i=1, 2, 3, \dots, N$   
此序列的 GM 白化形式的微分方程为:

$$\frac{dy(t_i)}{dt_i} + a \frac{y(t_i)}{t_i} = b \quad (8)$$

式(8)的数学解析式为:

$$y(t_i) = mt_i^{-a} + nt_i \quad (9)$$

式中:  $a, b$  为待辨识灰参数;  $m, n$  为待辨识灰系数;  $y(t_i)$  为因变量值;  $t_i$  为自变量值。

对于灰系数  $a, b$  可采用一元线性回归辨识方

法进行确定:

$$\text{令 } x = -\frac{y(t_i)}{t_i}, y = \frac{dy(t_i)}{d(t_i)}, \text{ 代入式(8)整理得: } y = ax + b \quad (10)$$

求解出灰参数  $a, b$  后, 再借助回归方程的相关系数  $r$ , 初步判断改进 GM 模型作为路基沉降灰色预测模型的可行性。

而对于灰系数  $m, n$  可由最小二乘法求得:

$$(m, n) = (A^T A)^{-1} A^T Z \quad (11)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{-a} & x_2^{-a} & \dots & x_n^{-a} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \\ Z = [y(x_1) \ y(x_2) \ \dots \ y(x_n)]^T \quad (12)$$

建模参数  $y = \frac{dy(t_i)}{dt_i}$  的具体数值计算, 可采用

离差商近似微商:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (13)$$

在  $t = t_1$  处, 采用前差分:

$$\frac{dy_1}{dt_1} = \frac{-y(t_3) + 4y(t_2) - 3y(t_1)}{2(t_2 - t_1)} \quad (14)$$

在  $t = t_n$  处, 采用后差分:

$$\frac{dy_n}{dt_n} = \frac{3y(t_n) - 4y(t_{n-1}) + y(t_{n-2})}{2(t_n - t_{n-1})} \quad (15)$$

## 2 预测模型的精度检验

### 2.1 残差检验

预测的绝对误差:

$$\epsilon^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k), k=1, 2, 3, \dots, N \quad (16)$$

预测的相对误差:

$$q = |\epsilon^{(0)}(k) / x^{(0)}(k)| \times 100\% \quad (17)$$

### 2.2 后验差检验

设  $x^{(0)}(k)$  为原始数列,  $\hat{x}^{(0)}(k)$  为模型模拟预测数列,  $\epsilon(k)$  为残差数列, 则:

$$S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x^{(0)}(k) - \bar{x}^{(0)}(k)]^2 \\ \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(0)}(k) \quad (18)$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\epsilon(k) - \bar{\epsilon}]^2 \quad \bar{\epsilon} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \epsilon(k) \quad (19)$$

1)  $C = \frac{S_2}{S_1}$  为均方差比值, 给定  $C_0 > 0$ , 当  $C < C_0$  时, 则模型为均方比合格模型。

2)  $P = P\{|\epsilon(k) - \bar{\epsilon}| < 0.6745 S_1\}$  为小误差概

率,对给定的  $P_0 > 0$  当  $P > P_0$  时,则模型为小误差概率合格模型。

3)外推性好的预测,  $C$  必须小,小误差概率  $P$  大,按  $C$  和  $P$  将精度分为“好”、“合格”、“基本合格”、“不合格”四个等级。具体数值见表 1。

表 1 预测精度

预测精度	好	合 格	基本合格	不合格
$P$	$>0.95$	$>0.8$	$>0.7$	$\leq 0.7$
$C$	$<0.35$	$0.5$	$<0.45$	$\geq 0.65$

4) $q$  由具体工程需要而定,一般小于 10 %。

当  $P$ 、 $C$ 、 $q$  都在允许的范围之内,则可以应用模型预测,所建立的灰色模型精度满足要求。

### 3 灰色预测模型在工程实例中的应用

#### 3.1 工程概况与地质特征

河南省焦作至巩义黄河公路大桥接线工程为二级公路,其中第五和第六合同段(K13+650~K18+

502.5)位于伊洛河冲积平原,为河滩相软土地基上的路堤工程。伊洛河冲积平原以第四系全新统上段新近沉积物为主,岩性为流塑和软塑状的淤泥质低液限粘土夹低液限粉土、粉细砂透镜体,主要为黄河水倒灌及伊洛河河流漫流等形成的静水环境下的沉积。根据地质层状构造情况,试验为了加快软土地基的固结排水及沉降过程,该路段采用袋装砂井处理软土地基,长度达 1 384 m。为保证工程质量,总结路堤填筑期和预压期河滩相软土地基的沉降变形规律,该工程选取 14 个观测断面,埋设沉降板 34 块、测斜导管 10 根,对填筑期和预压期软土地基变形进行了两年多的观测,获取有关数据两万多个。以 K17+400 和 K17+800(左)两个断面为例,对两个断面建立沉降预测模型。2000 年 4 月 8 日到 2000 年 5 月 22 日两断面沉降量的实测数据见表 2<sup>[6]</sup>,其中带“\*”的数据为拉格朗日插值后获得的数据。

表 2 K17+400、K17+800(左)两断面实测数据及补充值

mm

日 期	断 面		日 期	断 面	
	K17+400	K17+800(左)		K17+400	K17+800(左)
2000-04-08	114.2	70.2	2000-05-06	233.94*	288.94*
2000-04-10	120.2*	73.6*	2000-05-08	241.1	295.5
2000-04-13	129.1	78.8	2000-05-09	245.47*	301.3*
2000-04-16	148.3	89.5	2000-05-11	254.2	312.9
2000-04-19	154.2	121.4	2000-05-12	259.0*	314.25*
2000-04-21	165.2	151.0	2000-05-13	263.8	315.6
2000-04-22	172.0*	167.1*	2000-05-15	269.0*	317.0*
2000-04-24	185.5	199.4	2000-05-17	274.2	318.4
2000-04-25	190.2*	208.4*	2000-05-18	277.12*	318.56*
2000-04-27	199.7	226.5	2000-05-21	285.88*	319.04*
2000-04-28	205.6*	239.7*	2000-05-22	288.8	319.2
2000-05-03	223.2	279.1			

#### 3.2 模型预测

根据上述实测数据,建立 GM(1,1)模型和改进 GM(1,1)模型。本文以 2000 年 4 月 10 日到 4 月 28 日的实测数据建立非等时有序(非等时有序取值在表 2 中直接取得);以 2000 年 4 月 10 日为起点每隔 3 天所测量的数据作为一个等时有序,所取的具体有序如下:

$$t_k = \{4.10, 4.13, 4.16, 4.19, 4.22, 4.25, 4.28, 5.3, 5.6, 5.9, 5.12, 5.15, 5.18, 5.21\}$$

相应数据见表 2,将上述等时有序和非等时有序所对应的数据代入 GM(1,1)模型和改进 GM(1,1)模型,利用 MATLAB 工程软件计算各参数,计算结果见表 3。

表3 各断面沉降预测模型计算公式

断 面	GM(1,1)模型	改进 GM(1,1)模型
K17+400	$2\,415.298e^{0.058\,3k} - 2\,301.098$	$107.849t_i^{-0.007\,28} - 1.583t_i$
K17+800(左)	$2\,155.505e^{0.060\,4k} - 2\,085.305$	$67.106t_i^{-0.003\,56} - 1.476t_i$

式中所算结果为  $x^{(1)}(k+1)(k=1,2,3\cdots N-1)$ , 进而可得还原数列  $x^{(0)}(k)$ 。计算结果见表4、表5。

表4 GM(1,1)模型的预测结果

mm

日 期	K17+400			K17+800(左)		
	实 测 值	预 测 值	相对误差/%	实 测 值	预 测 值	相对误差/%
2000-04-08	114.2	114.2	0	70.2	70.2	0
2000-04-10	120.2*	118.15	1.71	73.6*	72.59	1.37
2000-04-13	129.1	127.29	1.40	78.8	77.93	1.10
2000-04-16	148.3	141.11	0.80	89.5	88.92	0.65
2000-04-19	154.2	152.37	1.19	121.4	119.54	1.53
2000-04-21	165.2	162.86	1.42	151.0	148.57	1.61
2000-04-22	172.0*	173.9	1.10	167.1*	168.82	1.03
2000-04-24	185.5	187.91	1.30	199.4	202.11	1.36
2000-04-25	190.2*	193.16	1.56	208.4*	211.46	1.47
2000-04-27	199.7	202.85	1.58	226.5	229.81	1.46
2000-04-28	205.6*	208.88	1.60	239.7*	243.99	1.79
2000-05-03	223.2	219.02	1.87	279.1	274.01	1.83
2000-05-08	241.1	236.75	1.80	295.5	289.69	1.97
2000-05-11	254.2	248.18	2.37	312.9	305.70	2.30
2000-05-13	263.8	257.47	2.40	315.6	308.37	2.29
2000-05-17	274.2	267.62	2.40	318.4	311.08	2.30
2000-05-22	288.8	281.90	2.39	319.2	311.83	2.31

表5 改进 GM(1,1)模型的预测结果

mm

日 期	K17+400			K17+800(左)		
	实 测 值	预 测 值	相对误差/%	实 测 值	预 测 值	相对误差/%
2000-04-08	114.2	112.83	1.20	70.2	69.54	1.07
2000-04-13	129.1	127.46	1.27	78.8	78.02	0.99
2000-04-16	148.3	146.98	0.89	89.5	88.75	0.84
2000-04-19	154.2	152.78	0.92	121.4	120.10	1.07
2000-04-21	165.2	163.44	1.07	151.0	148.93	1.37
2000-04-24	185.5	187.69	1.18	199.4	201.81	1.21
2000-04-27	199.7	197.16	1.27	226.5	223.53	1.31
2000-05-03	223.2	220.10	1.39	279.1	275.42	1.32
2000-05-08	241.1	237.92	1.32	295.5	291.63	1.31
2000-05-11	254.2	250.69	1.38	312.9	308.74	1.33
2000-05-13	263.8	260.11	1.40	315.6	311.43	1.32
2000-05-17	274.2	270.39	1.39	318.4	314.13	1.34
2000-05-22	288.8	284.76	1.40	319.2	314.95	1.33

### 3.3 预测结果分析

将表4和表5中的数据代入式(18)、式(19)可以算得  $C < 0.35$ ,  $P = 1$ , 根据本文中的精度检验表知两种模型的预测精度好, 满足工程要求。从表中

可以看出两种模型所得的预测值相对误差均小于2.5%。而改进GM(1,1)模型的预测沉降量相对误差更小, 精度更高, 与实测值更接近。这是因为改  
(下转第68页)

### 3 结论

在运用本程序进行分析过程中,发现了一些问题具体如下:

1)FLAC的分析结果与实地监测的结果有一定的误差,有时相差比较大;

2)由于FLAC建立的差分单元是较规则的,在生成一些比较特殊的边界时需要做一定的修改。

问题1)可以通过修改FLAC中岩土材料的参数来实现分析结果与现场检测结果一致。究其原因,本人认为这是因为勘察精度的影响,而且FLAC本身也是建立在许多假设的基础之上,所以运用FLAC进行稳定性分析必须紧密与现场监测相结合,不断根据现场测量的结果作出相应的调整,使分析的结果能够符合实际,然后在此基础上对将来会发生的情况作出预测。问题2)则可以通过进一步修改程序中脚本文件的生成来加以解决。

本程序有效利用了已有的宝贵CAD资料,避免了工程人员按照图纸人工建立边坡模型这一工作量较大的简单重复性劳动。通过VB、VBA技术整合了AutoCAD与FLAC,实现了直接在CAD环境下进行边坡的开挖、支护并自动建模,避免了在FLAC环境用FLAC命令进行边坡开挖、支护这一较为繁琐的工作。AutoCAD的VBA是一项功能较强的二次开发工具,通过VBA编程可以实现许多对CAD文件的操作,这对于岩土行业充分利用已有的CAD资料推进本行业的数据处理自动化是十分有用的。

由于本人时间、水平有限,许多想要实现的功能还没能实现,如:通过对CAD原图的处理自动生成三维地形图;运用VBA处理三维地形图生成可以由FLAC3D运算处理的脚本文件;通过神经网络技术让本系统有自动进行工程类比、自动学习、自动提出参考加固方案的功能等。希望本文能够抛砖引玉,激发大家在这方面的研究热情。

### 参考文献

- 1 岩土工程计算机应用的几个发展趋势. 岩土工程界, 2002(1):4
- 2 张帆, 郑立楷, 王华杰. AutoCAD VBA 开发精彩实例教程. 北京:清华大学出版社, 2004
- 3 林永, 张乐强. Visual Basic 6.0 用户编程手册(第二版). 北京:人民邮电出版社, 2002
- 4 Itasca Consulting Group, Inc. FLAC Online Manual. 2002
- 5 C.-Y. Chen, G. R. Martin. Soil-structure interaction for landslide stabilizing piles. Elsevier, Computers and Geotechnics 2002(29):363~386
- 6 崔政权, 李宁. 边坡工程:理论与实践最新发展. 北京:中国水利水电出版社, 1999
- 7 陈祖煜. 土质边坡稳定性分析:原理 方法 程序. 北京:中国水利水电出版社, 2003
- 8 杨天鸿, 张哲, 唐春安. 基坑开挖引起围岩变形破坏过程的数值模拟分析. 岩土工程技术, 2002(5):294~296

收稿日期: 2004-12-27

(上接第62页)

进GM(1,1)模型对原始资料中已有信息的利用更加充分,突破了传统GM(1,1)模型等间隔时序系统的限制,拓宽了模型在实际预测中的适用范围,尽量减少了时间因素对模型的影响,使得模型预测精度更高,更加符合工程需要。

### 4 结论

1)利用改进GM(1,1)模型预测路基沉降,所需的实测数据少,建模简单,可节省大量的人力、物力和财力,具有重要的经济和社会效益。

2)传统的GM(1,1)模型对时序数据应有比较平稳的变化规律,而改进GM(1,1)突破了传统GM(1,1)模型等间隔时序系统的限制,预测精度更高。

3)利用改进GM(1,1)模型预测路基沉降,将对路基的施工进度控制以及高速公路的监测维护起到积极作用。

### 参考文献

- 1 尹志政, 张家生. 灰色模型在大坝变形监测与预报中的应用. 广西水利水电, 2002(4):13~15
- 2 邓聚龙. 灰色系统基本方法. 武汉:华中理工大学出版社, 1987. 44~118
- 3 张仪萍, 张士乔, 龚晓南. 沉降的灰色预测. 工业建筑, 1999, 29(4):45~48
- 4 孙奇涵, 王永岩. 利用灰色模型预测巷道围岩变形. 应用力学学报, 1997(9):136~140
- 5 张苗云, 项成龙. 环境振动的灰色预测模型. 环境监测管理与技术, 2001, 13(4):38~40
- 6 王晓谋, 袁怀宇. 路堤下河滩相软土地基变形研究. 中国公路学报, 2003, 16(2):22~26

收稿日期:2004-12-16