维普资讯 http://www.cqvip.com

单根斜拉索的变形特性及在施工监理中的应用

文/张军

斜拉桥作为缆索承重桥梁之一，以其较大的跨越能力、轻巧的主梁结构型式以及相对较小的缆索断面在跨江河桥梁中占居了很大的比例。斜拉索作为斜拉桥重要的基本构件，其内力与变形对主梁及塔柱内力与变形是否合理有着直接的影响。在成桥及运营阶段，斜拉索的变形不仅影响着主梁和塔柱的内力与变形，而且相互影响。因此，斜拉索变形与内力计算是结构设计阶段重要的工作之一。在施工阶段，斜拉索的变形对主梁线形控制及内力的均匀起着决定性的作用。因此，正确认识单根斜拉索的变形特性对于施工及其施工监理有着非常重要的意义。

在斜拉桥的结构分析中，单根斜拉索是假定其作为只能抵抗拉力的完全柔性的柔索而工作的。因此，拉索曲线将与作用于拉索的荷载曲线相重合。

单根斜拉索的变形特性

在斜拉桥中，斜拉索承受由外荷载作用引起的轴向拉力。但由于斜拉索自重作用的存在，斜拉索中必然出现垂度。并且，垂度随着斜拉索索长的增长，其值越来越大。

斜拉索中最主要的变形特性乃是弦向力T与弦长C之间的关系，如图1。

众所周知，单根斜拉索的恒载沿曲线是均匀分布的（冷铸锚部分忽略其影响），正确的索曲线是悬链线。然而在通常情况下，采用抛物线型索曲线对结构分析不致产生较大的误差。下面分别以悬链线及抛物线型索曲线，分析承受不同弦向力的斜拉索的变形特性。为分析方便起见，将斜拉索等效成图2所示的水平拉索情形。

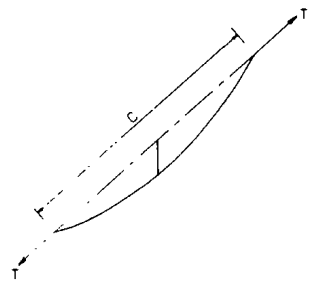


图1

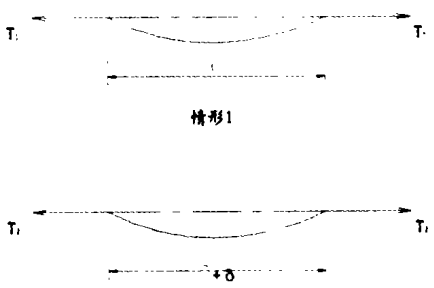


图2 具有不同弦向力T_1和T_2的两种水平拉索情形

——链线型索曲线的变形特性

如图3所示，悬链线为双曲余弦曲线，在此坐标系下的一般方程为：$y = m \cdot ch\frac{x}{m}$

对于图示中的情形1，通过平移坐标轴，得到悬链线方程为：

$$y = m\left\{ch\left[\frac{1}{m}\left(x-\frac{c}{2}\right)\right]-ch\frac{c}{2m}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

式中 $m=\frac{T}{q}$，对于给定的斜拉索，m与弦向力T成正比。

q—斜拉索单位长度恒载（集度）



图3

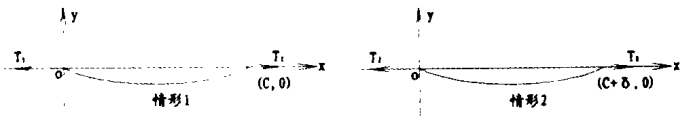


图4

维普资讯 http://www.cqvip.com

故(1)式可写成：

$$y=\frac{T_1}{q}\left\{ch\left[\frac{q}{T_1}\left(x-\frac{c}{2}\right)\right]-ch\frac{qc}{2T_1}\right\} \quad \cdots\cdots (2)$$

式中 T_1—弦向力

q—斜拉索单位长度恒载

同理，对于图 4 中的情形 2，其悬链线方程为：

$$y=\frac{T_2}{q}\left\{ch\left[\frac{q}{T_2}\left(x-\frac{c+\delta}{2}\right)-ch\frac{q(c+\delta)}{2T_2}\right]\right\} \quad \cdots\cdots (3)$$

式中 δ—斜拉索由情形 1 变化至情形 2 时的伸长量，由支点间距增量确定。

其余符号意义同(2)式。

对应斜拉索长度 S1 和 S2 由下式确定，分别为：

$$S_1=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=2\frac{T_1}{q}sh\frac{qc}{2T_1} \quad \cdots\cdots (4)$$

$$S_2=2\frac{T_2}{q}sh\left[\frac{q(c+\delta)}{2T_2}\right]$$

由于 δ << C，故上式可改写成：

$$S_2=2\frac{T_2}{q}sh\left(\frac{qc}{2T_2}\right)+\delta\cdot ch\frac{qc}{2T_2} \quad \cdots\cdots (5)$$

拉索在点（x，y）处的弹性应变 $\varepsilon(x)$ 可表示为：

$$\varepsilon(x)=\frac{T}{EA}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

式中 T—弦向力

E—斜拉索弹性模量

A—斜拉索面积（净钢丝面积）

$$\Delta S=\int\varepsilon(x)\frac{\partial s}{\partial x}dx=\frac{T}{EA}\int\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx \quad \cdots\cdots (6)$$

故从无应力状态变化至情形 1 时的总伸长量为：

$$\Delta S_1=\frac{T_1}{EA}\int\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx$$

$$=\frac{T_1^2}{2EAq}\left[sh\left(\frac{qc}{T_1}\right)+\frac{qc}{T_1}\right] \quad \cdots\cdots (7)$$

同理：$\Delta S_2=\frac{T_2^2}{2EAq}\left[sh\left(\frac{qc}{T_2}\right)+\frac{qc}{T_2}\right]$ …… (8)

由于 δ << C，(8)式是利用了 C+ δ =C 的关系。

式中：E—斜拉索的弹性模量

A—斜拉索面积（净钢丝面积）

由斜拉索的变形条件 $S_2-S_1=\Delta S_2-\Delta S_1$ 可得：

$$\delta=\left\{\frac{(T_2-T_1)\cdot c}{2EA}+\frac{1}{2EAq}\left[T_2^2sh\left(\frac{qc}{T_2}\right)-T_1^2sh\left(\frac{qc}{T_1}\right)\right]+\frac{2}{q}\left[T_1sh\left(\frac{qc}{2T_1}\right)-T_2sh\left(\frac{qc}{2T_2}\right)\right]\right\}$$

$$\div ch\left(\frac{qc}{2T_2}\right) \quad \cdots\cdots (9)$$

式中 $T_1=A\sigma_1$，$T_2=A\sigma_2$，$q=A\gamma$，则得：

式中：σ_1 — 情形 1 的斜拉索应力

σ_2 — 情形 2 的斜拉索应力

γ — 斜拉索密度

E — 斜拉索弹性模量

式(9)即为悬链线型索曲线在不同弦向力作用下的伸长率。

——抛物线型索曲线的变形特性

如图 5 所示，在情形 1 下，二次抛物线方程为：

$$y=\frac{4f_1}{c^2}x(x-c) \quad \cdots\cdots (10)$$

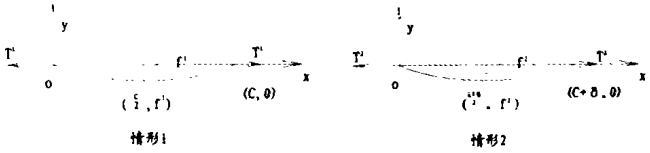


图 5

同理，在情形 2 状态下，二次抛物线方程为：

$$y=\frac{4f_2}{(c+\delta)^2}x[x-(c+\delta)] \quad \cdots\cdots (11)$$

对应情形 1 状态下斜拉索的长度 S_1 为：

$$S_1=\int\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=\int\sqrt{1+\left[\frac{4f_1}{c^2}(2x-c)\right]^2}dx \quad \cdots\cdots (12)$$

由不定积分公式 $\int\sqrt{1+z^2}dz=\frac{1}{2}z\sqrt{1+z^2}+\frac{1}{2}\ln\left[z+\sqrt{1+z^2}\right]$

在（12）式中，令 $z=\frac{4f_1}{c^2}(2x-c)$，求定积分值并取其前两项可得 S_1 的近似表达式为：

$$S_1=c\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2f_1}{c}\right)^2\right] \quad \cdots\cdots (13)$$

$$\Delta S=\frac{T}{EA}\int\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]dx \quad \cdots\cdots (14)$$

将 $T_1=\frac{qc^2}{8f_1}$，$\frac{dy}{dx}=\frac{4f_1}{c^2}(2x-c)$ 代入式（14）可得：

$$\Delta S_1=\frac{qc^2}{EA}\left(\frac{c}{16f_1}+\frac{f_1}{3c}\right)$$

同理：$S_2=(c+\delta)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2f_2}{c+\delta}\right)^2\right]$ …… (15)

$$\Delta S_2=\frac{q(c+\delta)^2}{EA}\left(\frac{c+\delta}{16f_2}+\frac{f_2}{3(c+\delta)}\right) \quad \cdots\cdots (16)$$

由于 δ << c，所以 $(c+\delta)^2=c^2$，$\frac{1}{c+\delta}=\frac{1}{c}$ 故式（15）可改写成：$S_2=(c+\delta)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2f_2}{c}\right)^2\right]$ …… (17)

（16）式可改写成：

$$\Delta S_2=\frac{qc^2}{EA}\left(\frac{c+\delta}{16f_2}+\frac{f_2}{3c}\right) \quad \cdots\cdots (18)$$

由变形协调条件 $S_2-S_1=\Delta S_2-\Delta S_1$，得

$$(c+\delta)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2f_2}{c}\right)^2\right]-\frac{qc^2}{EA}\left(\frac{c+\delta}{16f_2}+\frac{f_2}{3c}\right)=c\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{2f_1}{c}\right)^2\right]-\frac{qc^2}{EA}\left(\frac{c}{16f_1}+\frac{f_1}{3c}\right)$$

以 $\frac{2f_2}{c}$ 为未知数整理此方程式：

$$\left(\frac{2f_2}{c}\right)^3-\frac{qc}{2EA}\left(\frac{2f_2}{c}\right)^2+\left[\frac{qc}{2EA}\left(\frac{2f_1}{c}+\frac{3c}{8f_1}\right)-\left(\frac{2f_1}{c}\right)^2+\frac{3\delta}{2c}\right]\frac{2f_2}{c}-\frac{3qc}{8EA}=0 \quad \cdots (19)$$

两边同乘以 $\frac{c}{2f_2}$，得：

$$\left(\frac{2f_2}{c}\right)^2-\frac{qc}{2EA}\left(\frac{2f_2}{c}\right)+\frac{qc}{2EA}\left(\frac{2f_1}{c}+\frac{3c}{8f_1}\right)-\left(\frac{2f_1}{c}\right)^2+\frac{3\delta}{2c}-\frac{3qc^2}{16EAf_2}=0 \quad \cdots\cdots (20)$$

$$\delta=\frac{2c}{3}\left(\frac{2f_2}{c}\right)^2-\frac{2c}{3}\left(\frac{2f_1}{c}\right)^2+\frac{qc}{3EA}\left(\frac{2f_2}{c}\right)-\frac{qc}{3EA}\left(\frac{2f_1}{c}\right)+\frac{qc^2}{8EAf_2}-\frac{qc^2}{8EAf_1} \quad \cdots (21)$$

代入 $q=A\gamma$，$f_1=\frac{qc^2}{8T_1}=\frac{\gamma\cdot c^2}{8\sigma_1}$，$f_2=\frac{\gamma\cdot c^2}{8\sigma_2}$ 于式（21）可得：

$$\delta=\frac{\gamma^2c^3}{24}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right)+\frac{\gamma^2c^3}{12E}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}\right)+\frac{c(\sigma_2-\sigma_1)}{E}$$

$$\frac{\delta}{c}=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{E}+\frac{\gamma^2c^2}{24}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right)+\frac{1}{12E}\left(\frac{1}{\sigma_2}-\frac{1}{\sigma_1}\right)$$

由于E＞＞σ，故略去最后一项

$$\frac{\delta}{c}=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{E}+\frac{\gamma^2c^2}{24}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right) \quad \cdots\cdots (22)$$

式中：$\frac{\delta}{c}$ —斜拉索从情形1变化至情形2时的伸长率

σ 1—情形1的斜拉索应力

σ 2—情形2的斜拉索应力

γ —斜拉索密度

E—斜拉索弹性模量

很明显，式（22）较式（9）简单的多，且结果相当接近。故工程实践中常以抛物线型索曲线为计算依据。

——倾斜拉索的变形特性及垂度

如图6所示，在斜拉索中产生垂度的荷载集度为qcos φ，它的变形特性可等效成相同弦长的水平拉索。

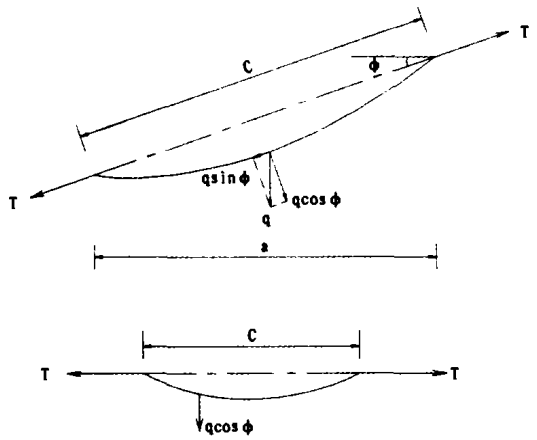


图6

将$c=a/\cos\phi$，$\gamma'=\gamma\cos\phi$ 代入式（22）可得：

$$\frac{\delta}{c}=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{E}+\frac{\gamma^2a^2}{24}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right) \quad \cdots\cdots (23)$$

式中a—斜拉索的水平投影长度，其余符号同（22）式；式（23）中第一项为斜拉索的弹性伸长，第二项为垂度对斜拉索伸长率的影响。

如图7，在倾斜拉索中，垂直于弦的的垂度fc为：

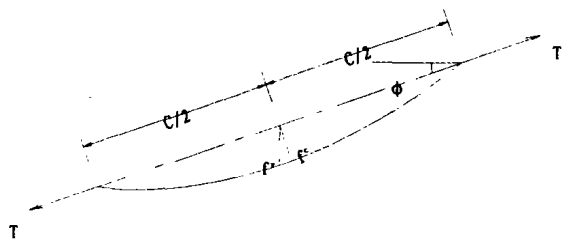


图7

$$f_c=\frac{qc^2}{8T}\cos\phi=\frac{\gamma\cdot c^2}{8\sigma}\cos\phi \quad \cdots\cdots (24)$$

其竖向垂度 $f_v=\frac{f_c}{\cos\phi}=\frac{\gamma\cdot c^2}{8\sigma}$ …… (25)

式中：γ —斜拉索的密度

σ —对应于某弦向力T时的斜拉索应力

由式（25）可得出如下结论：斜拉索的竖向垂度fv与斜拉索的倾斜角度无关。

——斜拉索垂度引起的角度修正值计算

以二次抛物线型索曲线推导公式。在斜拉桥施工中，只有斜拉索最后一次张拉后的索力（恒载终索力）对应的垂度引起的角度修正对施工和监理有指导意义。因为主梁和塔柱的索导管定位均以此角度修正值为依据。

设斜拉索恒载终索力值为T，此时垂直于弦向的垂度为f，斜拉索的伸长值为δ，因此可以建立如图所示的索曲线及其坐标。A、B、C三点的坐标分别为（0，0）、（$\frac{c+\delta}{2},f$）和（c+δ，0），在此情形（工况）下的斜拉索曲线方程为：

$$y=\frac{4f}{(c+\delta)^2}x[x-(c+\delta)] \quad \cdots\cdots (26)$$

因此

$$\tan\Delta\phi=\frac{dy}{dx}=\frac{8f}{(c+\delta)^2}x-\frac{4f}{c+\delta} \quad \cdots\cdots (27)$$

将C点坐标代入式（27）得：$\tan\Delta\phi=\frac{4f}{c+\delta}$

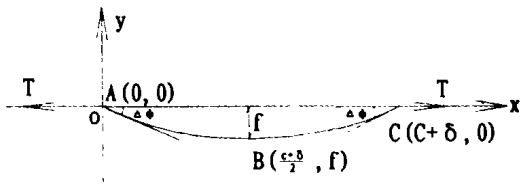


图8

所以 $\Delta\phi=\arctan\left(\frac{4f}{c+\delta}\right)$ …… (28)

即为某根斜拉索恒载终索力对应的拉索垂度引起的角度修正值。

式中f —垂直于斜拉索弦的垂度

δ—第一次张拉后至最后一次张拉后的拉索伸长值

c—斜拉索的弦长

斜拉索变形特性在斜拉桥施工监理中的应用

笔者曾经参加过多座斜拉桥的施工监理工作，如温州大桥（瓯江二桥）、荆州长江大桥、鄂黄长江大桥、安庆长江大桥等。下面以温州大桥及荆州长江大桥施工监理中所做的斜拉索变形



计算为例，对单根斜拉桥变形特性在施工中的应用作简要说明。

——温州大桥

温州大桥主桥系双塔双索面全漂浮体系预应力混凝土斜拉桥。跨径组成为135+270+135（m），塔墩固结花瓶型桥塔。各塔对称布置16对共128根斜拉索。主梁全宽30.0m，两边箱加中隔板型横断面。

主梁除0号段35.0m在支架上浇筑外，其余采用挂篮悬臂对称浇筑，每段长8.0m。斜拉索采用三次张拉到位，即挂篮定位后的第一次张拉，主梁混凝土浇至一半时的第二次张拉及体系转换（挂篮与混凝土锚固解除）后的第三次张拉。为减小温度改变对斜拉索和主梁内力与变形的影响，要求三次张拉均在夜间（24时至次日5时）进行，每次张拉前后测量高程控制点高程。现以主跨8号索为例，进行如下计算：

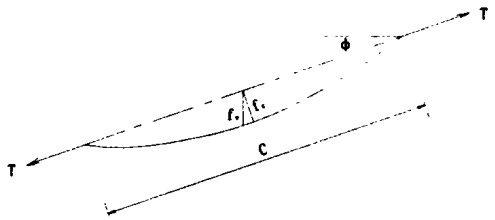


图9

如图9所示，已知主跨8号索为：

PES7—223

q=70.8kg/m=0.708kg/m

E=1.9×10⁵Mpa=1.9×10⁶kg/cm²

c=85.261m=8526.1cm

ϕ =34° 17′ 38″

A=8581mm²=85.81cm²

D=13.5cm（斜拉索直径）

T_1=136.5t=136500kg（第一次张拉力）

T_2=268.5t=268500kg（第二次张拉力）

T_3=395.0t=395000kg（第三次张拉力）

$$\sigma_1=\frac{T_1}{A}=\frac{136500}{85.81}=1590.72kg/cm^2$$

$$\sigma_2=\frac{T_2}{A}=\frac{268500}{85.81}=3129.01kg/cm^2$$

$$\sigma_3=\frac{T_3}{A}=\frac{395000}{85.81}=4603.19kg/cm^2$$

$$a=c\cdot\cos\phi=8526.1\times\cos 34^0 17'38''=7043.9cm$$

$$\gamma=\frac{q}{A}=\frac{4q}{\pi D^2}=\frac{4\times 0.708}{\pi\times 13.5^2}=4.94\times10^{-3}kg/cm^3$$

1、第一次张拉至第二次张拉后斜拉索的伸长量

$$\frac{\delta_1}{c}=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{E}+\frac{\gamma^2a^2}{24}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2}\right)=\frac{3129.01-1590.72}{1.9\times10^6}+\frac{1}{24}\times4.94^2\times10^{-6}\times7043.9^2$$

$$\times\left(\frac{1}{1590.72^2}-\frac{1}{3129.01^2}\right)=0.810\times10^{-3}+0.0148\times10^{-3}=0.8248\times10^{-3}$$

$$\delta_1=0.810\times10^{-3}\times8526.1+0.0148\times10^{-3}\times8526.1=6.91+0.13=7.04cm$$

2、第二次张拉至第三次张拉后斜拉索的伸长量

$$\frac{\delta_2}{c}=\frac{\sigma_3-\sigma_2}{E}+\frac{\gamma^2a^2}{24}\left(\frac{1}{\sigma_2^2}-\frac{1}{\sigma_3^2}\right)=\frac{4603.19-3129.01}{1.9\times10^6}+\frac{1}{24}\times4.94^2\times10^{-6}\times7043.9^2$$

$$\times\left(\frac{1}{3129.01^2}-\frac{1}{4603.19^2}\right)=0.776\times10^{-3}+0.003\times10^{-3}=0.779\times10^{-3}$$

$$\delta_2=0.776\times10^{-3}\times8526.1+0.003\times10^{-3}\times8526.1=6.6+0.025=6.63cm$$

从以上计算知，不论δ_1或δ_2均由两部分组成，即第一项斜拉索弹性变形（伸长）及第二项垂度改变引起的索伸长。

由于斜拉索的张拉是在上塔柱内进行的，并且塔柱相对于主梁刚度较大，所以，斜拉索从前一次张拉至后一次张拉的伸长量的60%～70%表现为主梁高度的下降。即$\Delta h=(60\%\sim70\%)\delta\sin\phi$，其余的30%～40%被后一次张拉引入塔柱内。

维普资讯 http://www.cqvip.com

3、第一次张拉后斜拉索的垂度。

如图9所示：

$$f_c=\frac{\gamma\cdot c^2}{8\sigma_1}\cos\phi=\frac{4.94\times8526.1^2\times10^{-3}}{8\times1590.72}\cos34^0 17'38''=23.3(cm)$$

$$f_v=\frac{f_c}{\cos\phi}=\frac{23.3}{\cos34^0 17'38''}=28.2(cm)$$

4、第二次张拉后斜拉索的垂度

$$f_c=\frac{\gamma\cdot c^2}{8\sigma_2}\cos\phi=\frac{4.94\times8526.1^2\times10^{-3}}{8\times3129.01}\cos34^0 17'38''=11.9(cm)$$

$$f_v=\frac{f_c}{\cos\phi}=\frac{11.9}{\cos34^0 17'38''}=14.4(cm)$$

5、第三次张拉后斜拉索的垂度

$$f_c=\frac{\gamma\cdot c^2}{8\sigma_3}\cos\phi=\frac{4.94\times8526.1^2\times10^{-3}}{8\times4603.19}\cos34^0 17'38''=8.1(cm)$$

$$f_v=\frac{f_c}{\cos\phi}=\frac{8.1}{\cos34^0 17'38''}=9.8(cm)$$

——荆州长江大桥北汊通航孔桥

荆州长江大桥北汊通航孔斜拉桥为双塔双索面PC斜拉桥，全漂浮体系。其跨径组成为200+500+200（m）。H型塔柱，各塔对称布置32对（含0#索）共252根斜拉索。主梁采用π型断面，全宽27.0m。现以31#塔主跨31#索为例，仅计算斜拉索第四次张拉后的垂度及垂度引起的角度修正值。

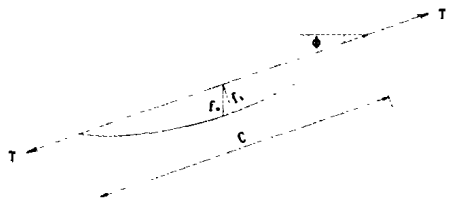


图10

如图10，已知该索参数如下：

型号PES7—283（平行钢丝斜拉索）

q = 85.5kg/m=0.855kg/m

E = 1.9 × 10^5Mpa =1.9 × 10^6kg/cm^2

C = 286.32m =28632cm

φ = 23° 33′ 23″

A = 10891mm^2 = 108.91cm^2（钢丝净面积）

D = 150mm = 15cm（拉索直径）

T1 = 121.2 t =121200kg（第一次张拉力）

T2 = 220.4 t =220400kg（第二次张拉力）

T3 = 352.2 t =352200kg（第三次张拉力）

T4 = 535.7 t =535700kg（第四次张拉力）

$$\gamma=\frac{q}{A}=\frac{4q}{\pi D^2}=\frac{4\times0.855}{\pi\times15^2}=4.841\times10^{-3}kg/cm^3$$

（考虑PE层的平均密度）

1、第四次张拉完成后该索的垂度计算

$$f_c=\frac{\gamma\cdot c^2}{8\sigma_4}\cos\phi$$

式中 $\sigma_4=\frac{T_4}{A}=\frac{535700}{108.91}=4918.74kg/cm^2$

因此 $f_c=\frac{\gamma\cdot c^2}{8\sigma_4}\cos\phi=\frac{4.841\times10^{-3}\times28632^2}{8\times4918.74}\cos23^0 33'23''=92.5cm$

$$f_v=\frac{f_c}{\cos\phi}=\frac{92.5}{\cos23^0 33'23''}=100.9(cm)$$

2、第四次张拉完成后该索垂度引起的角度修正值计算

$$\sigma_1=\frac{T_1}{A}=\frac{121200}{108.91}=1112.85kg/cm^2$$

$$\sigma_4=\frac{T_4}{A}=4918.74kg/cm^2$$

$$f=f_c=92.5cm$$

第一次张拉后至第四次张拉后斜拉索的伸长值δ计算

$$\frac{\delta}{c}=\frac{\sigma_4-\sigma_1}{E}+\frac{\gamma^2a^2}{24}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_4^2}\right)$$

式中 $\gamma=4.841\times10^{-3}kg/cm^2$

$$a=c\cdot\cos\phi=28632\times\cos23^0 33'23''=26246cm$$

$$\frac{\delta}{c}=\frac{4918.74-1112.85}{1.9\times10^6}+\frac{(4.841\times10^{-3})^2\times26426^2}{24}\left(\frac{1}{1112.85^2}-\frac{1}{4918.74^2}\right)$$

$$=2.003\times10^{-3}+0.515\times10^{-3}=2.518\times10^{-3}$$

$$\delta=2.518\times10^{-3}\times26832=67.6cm$$

所以

$$\Delta\phi=arctg\left(\frac{4\times92.5}{26832+67.6}\right)=0.788(rad)$$

$$\Delta\phi=0^0 47'17''$$

由此可得，施工过程中塔端该索索导管的角度修正值，主梁端该索索导管的角度修正值应与主梁纵坡值一并考虑。

