



武汉大学

Wuhan University



《摄影测量原理与应用》

（含当代摄影测量）

主讲：王树根

武汉大学遥感信息工程学院



第 4 章

空中三角测量及其拓展

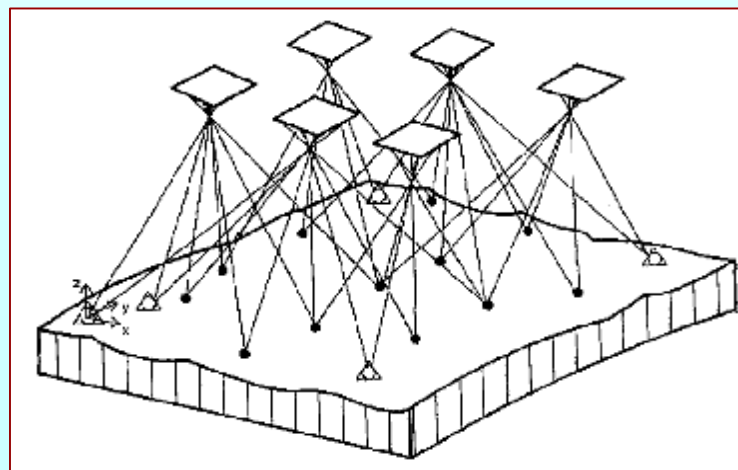


空中三角测量的基本任务

解析空中三角测量的目的和意义：

- q 确定区域内所有影像的外方位元素
- q 根据像片上点的二维量测坐标求出该点所对应的物方空间三维坐标

$$(x, y)_i \text{ -----> } (X, Y, Z)_i$$



空中三角测量在摄影测量中的地位

摄影测量辅助数据
及地面控制



航摄计划



像片解译



空中三角测量



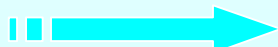
立体测图



线划图



外业调绘



数字测图



单片纠正



影像图



空中三角测量的发展过程

q 发展过程：

ü 全野外测控制点

ü 单航带或单模型内业加密（需要一定数量的控制点）

ü 区域网平差（可减少对地面控制点的要求）

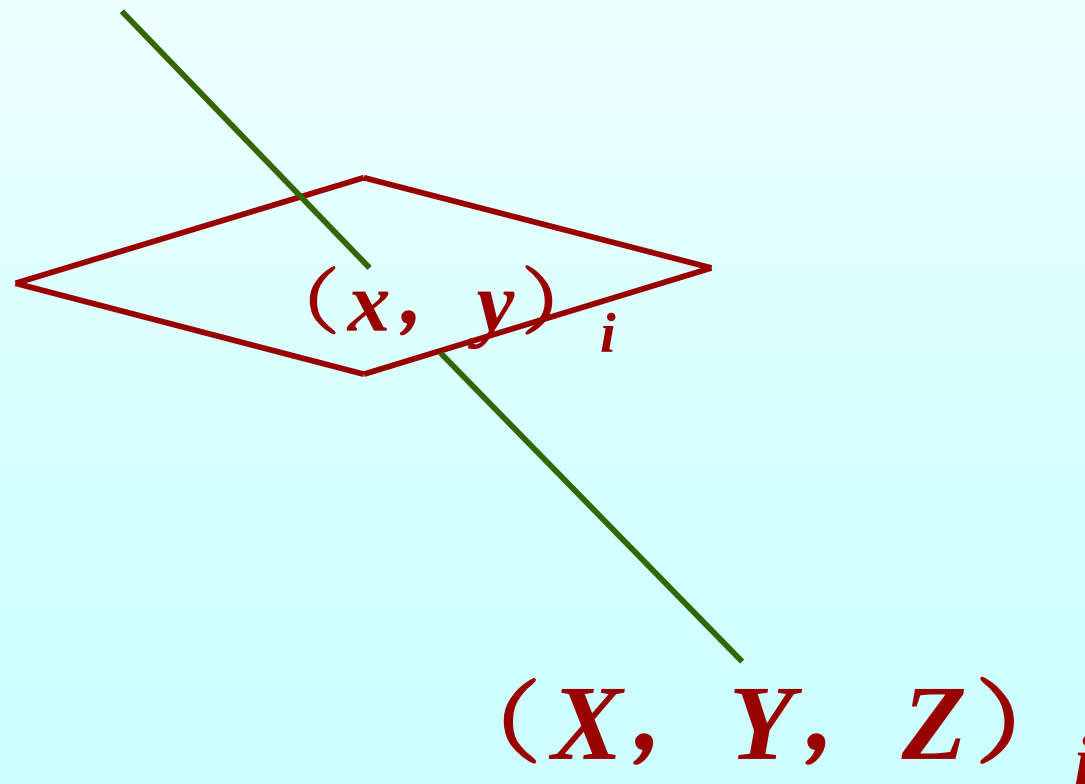
ü 联合平差（减少对地面控制点的要求，提高加密结果的精度和可靠性）

§ GPS辅助空三

§ POS辅助空三

像点坐标量测及系统误差改正

q 像点坐标观测值是空中三角测量的解析计算基础



像点坐标量测及系统误差改正

q 像点坐标量测：人工或自动量测

q 因物理因素引起的像点位移：

ü 底片变形

ü 物镜畸变

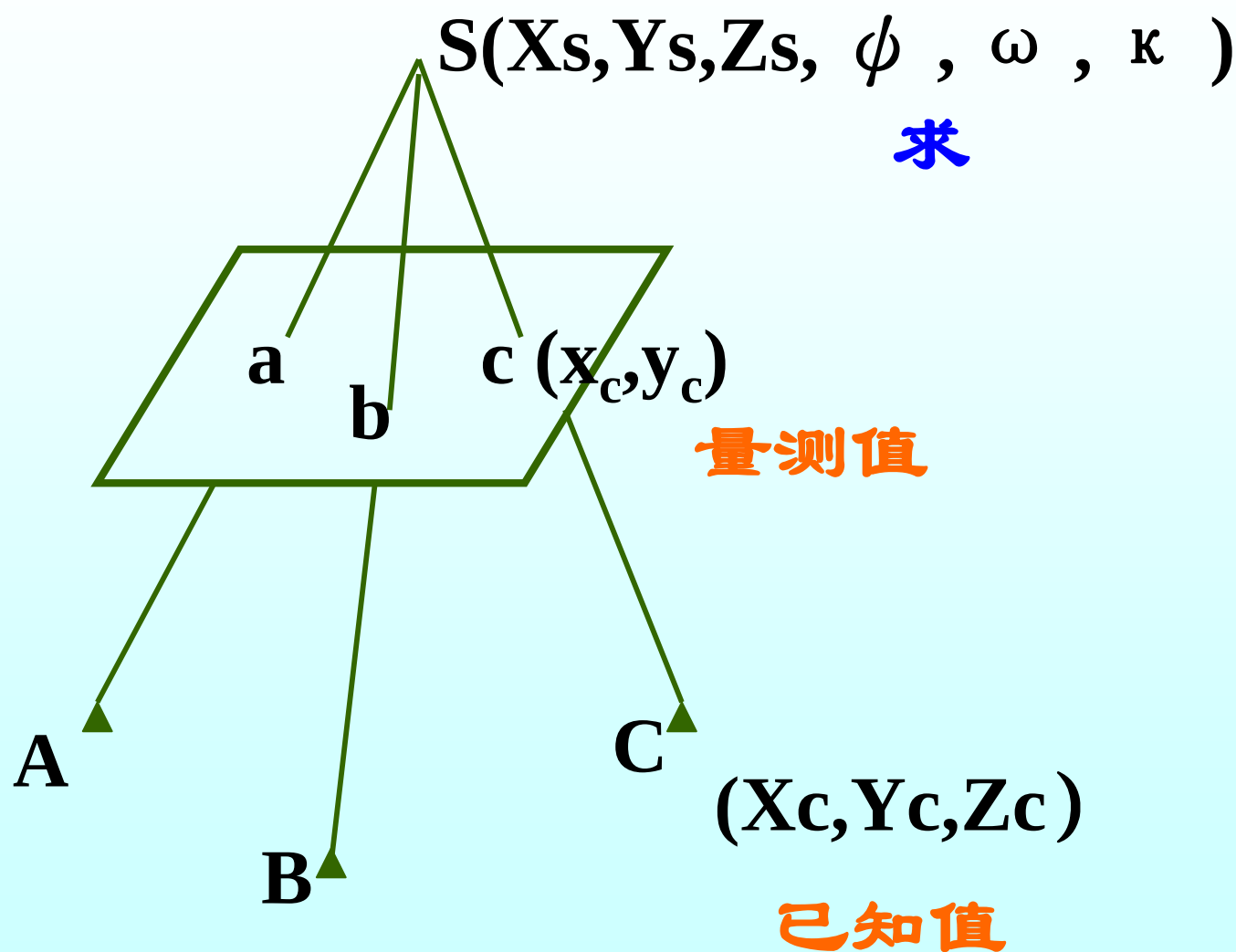
ü 大气折光

ü 地球曲率等

q 位移结果：像点、摄影中心和物点偏离了
三点共线

q 改正方法：模拟法、解析 / 数字法有别

单像空间后方交会



单向空间后方交会

空间后方交会的含义：

q 已知：

ü 像片覆盖范围内地面上三个以上控制点的坐标 X_c, Y_c, Z_c

ü 控制点对应的像点坐标 x_c, y_c 和

ü 内方位元素： x_0, y_0, f （一般认为已知）

q 求：像片摄影瞬间的外方位元素

单向空间后方交会

空间后方交会的基础方程：共线方程

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \\ y - y_0 &= -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \end{aligned} \right\}$$

q 注意：

- 1、共线方程中观测值和未知数之间是非线性的，平差解算之前需对其线性化**

单向空间后方交会

$$F(x) = F(x_0) + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= a_{11}\Delta X_s + a_{12}\Delta Y_s + a_{13}\Delta Z_s + a_{14}\Delta j + a_{15}\Delta w + a_{16}\Delta k - l_x \\ v_y &= a_{21}\Delta X_s + a_{22}\Delta Y_s + a_{23}\Delta Z_s + a_{24}\Delta j + a_{25}\Delta w + a_{26}\Delta k - l_y \end{aligned} \right\}$$

q 注意：

- 2、线性化按泰勒阶数展开，未知数取一次小项
- 3、线性化过程要引入未知数的初值
- 4、平差计算过程是迭代进行的
- 5、至少需要已知三个地面平高控制点的坐标

空间后方交会求解

空间后方交会的解算过程：

- 1、获取已知数据
- 2、量测控制点的像点坐标
- 3、确定未知数的初始值
- 4、计算旋转矩阵 R
- 5、逐点计算像点坐标的近似值
- 6、逐点计算误差方程式的系数和常数项，组成误差方程式
- 7、计算法方程的系数矩阵 $A^T A$ 与常数项 $A^T L$ ，组成法方程式
- 8、解求外方位元素
- 9、检查计算是否收敛

空间后方交会精度评定

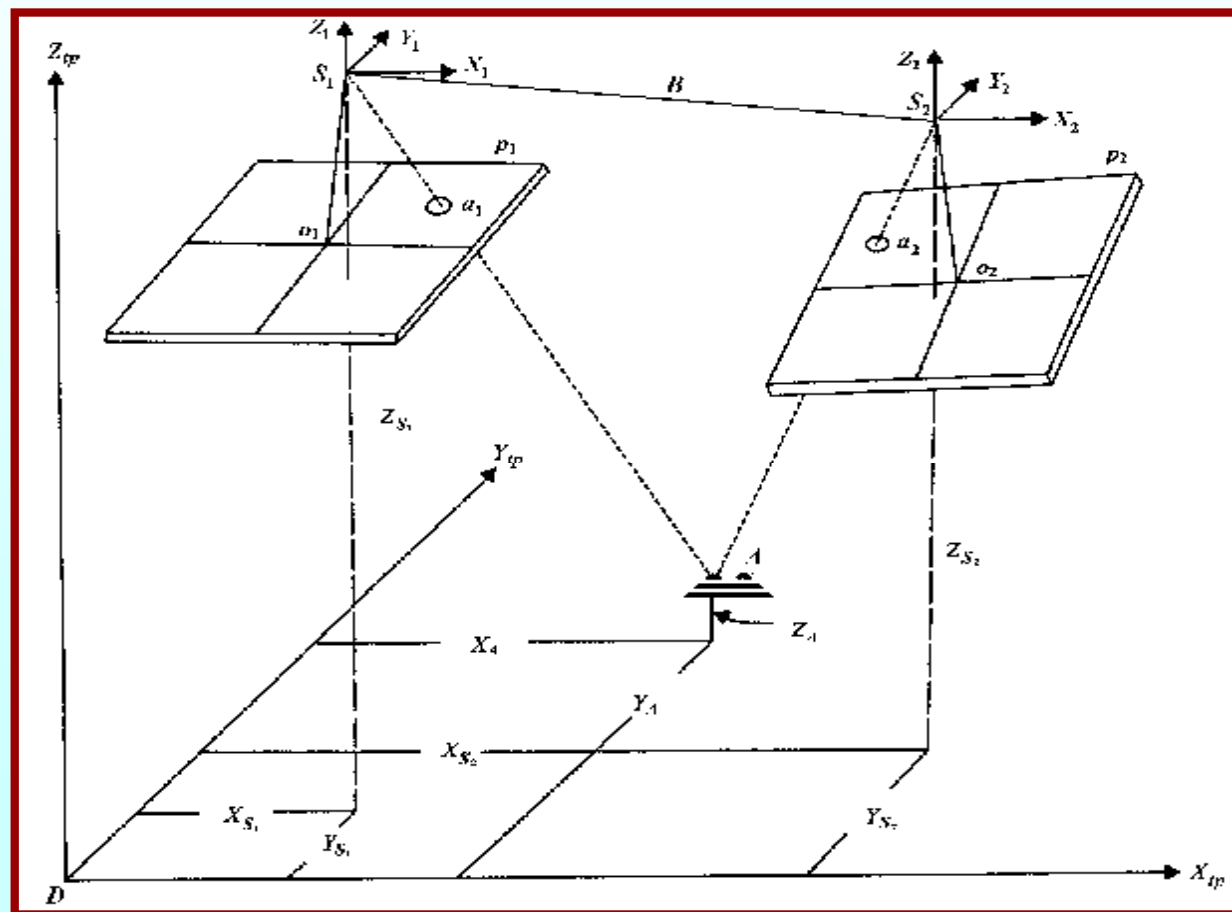
精度评定方法：

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{2n-6}}$$

$$m_i = m_0 \sqrt{Q_{ii}}$$

立体像对空间前方交会

目的：由立体像对中两张像片的内、外方位元素和像点坐标来确定相应地面点的坐标



立体像对空间前方交会

q 基于共线方程的严格解法

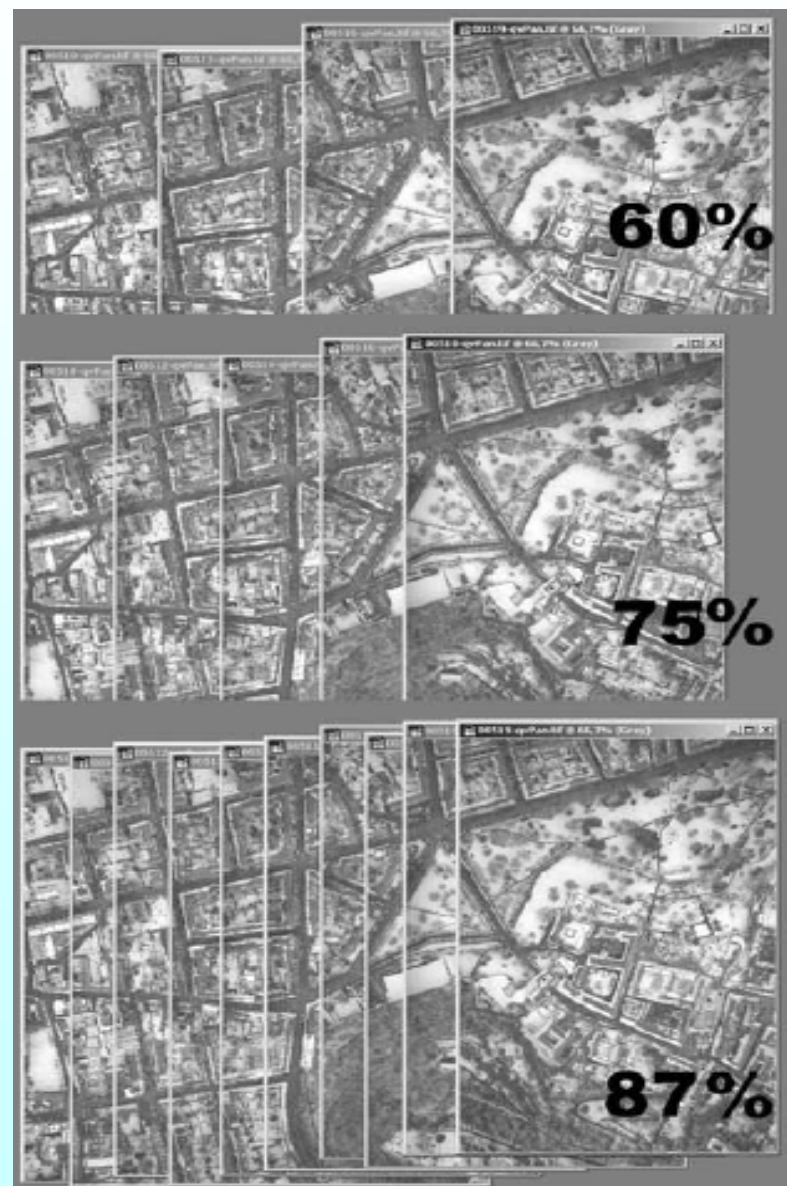
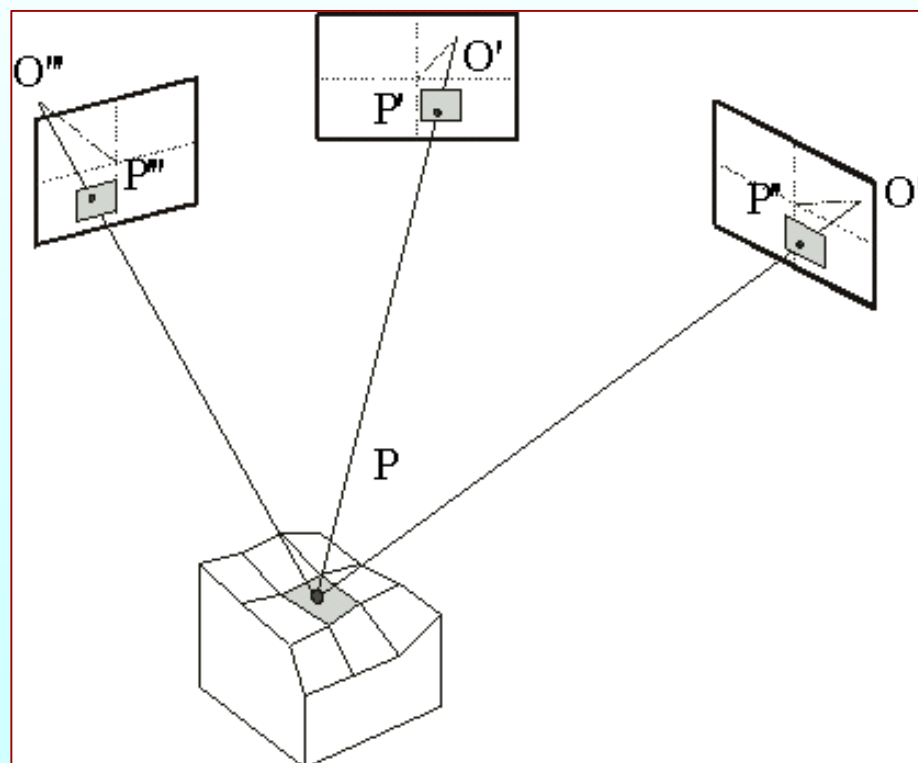
$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \\ y - y_0 &= -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \end{aligned} \right\}$$

已知： 像对的内、外方位元素

量测： 像点的像片坐标

求： 对应点的物方空间坐标

多片空间前方交会

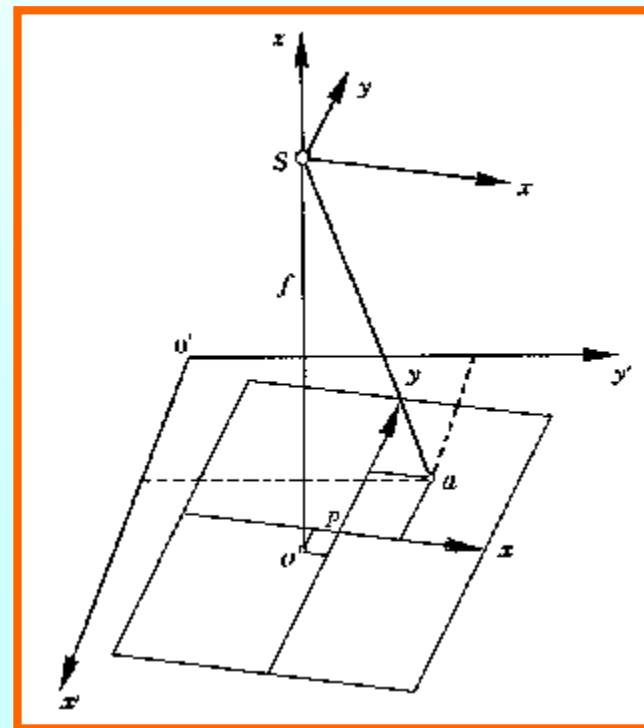
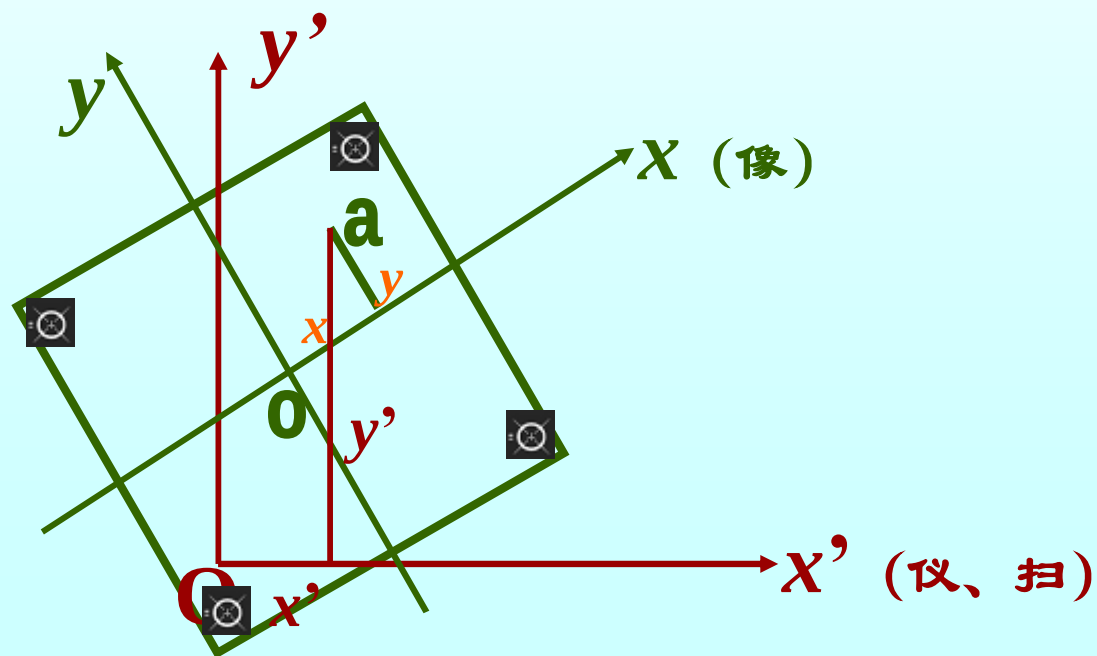


影像的内定向

ü 内定向目的

§ 扫描坐标 ↔ 像片坐标

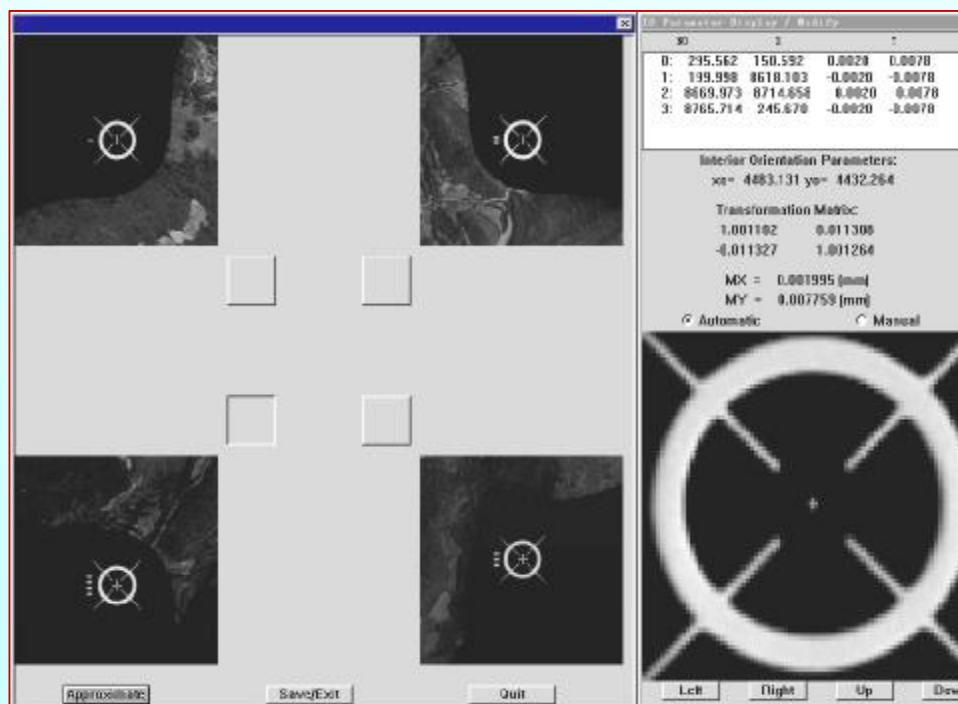
§ 像片系统误差改正



影像的内定向

ü 内定向步骤

- § 框标识别，确定框标位置初值
- § 框标中心的精确定位（研究热点）
- § 计算内定向参数



影像的内定向

q 扫描影像的内定向

内定向变换公式：

ü 线性正形变换公式（四个参数）

ü 仿射变换（六个参数）

ü 双线性变换公式（八个参数）

ü 投影变换（八个参数）

影像的内定向

内定向步骤(以仿射变换为例):

q 框标识别

q 利用框标的像片坐标和扫描坐标求转换公式中的系数:

$$x = a_0 + a_1x' + a_2y'$$

$$y = b_0 + b_1x' + b_2y'$$

q 将所求得的系数回代转换公式求任意一点扫描坐标所对应的像片坐标

影像的内定向

q 扫描影像的内定向

ü 自动内定向存在问题

§ 搜索窗口问题

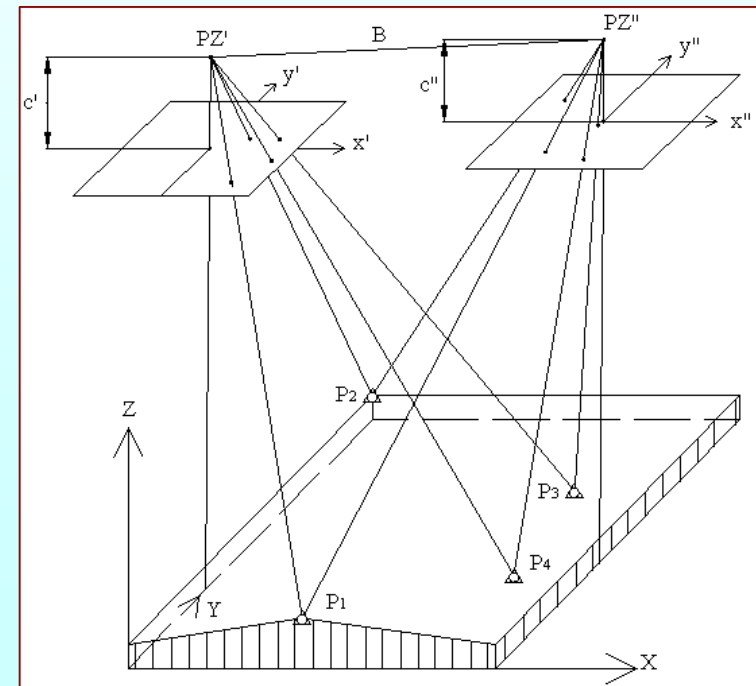
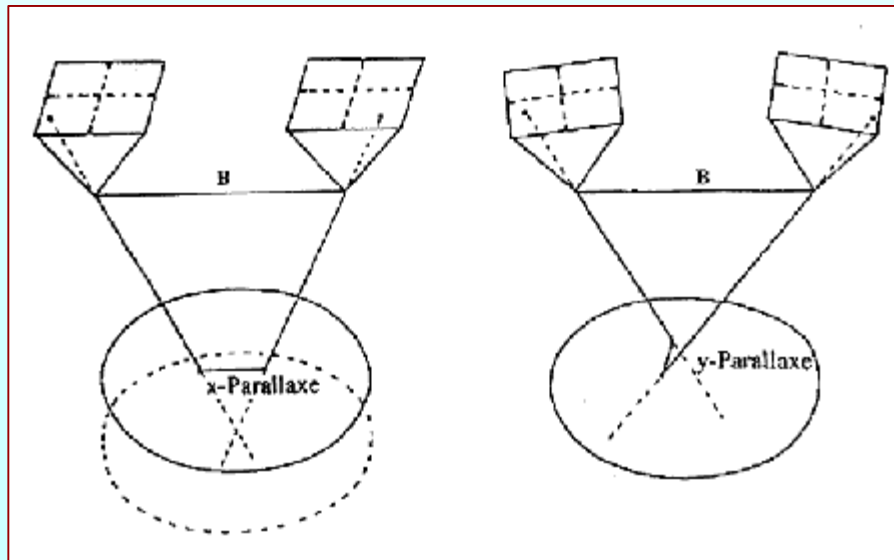
§ 框标模板的标准化和自适应问题



解析法相对定向

相对定向的目的：

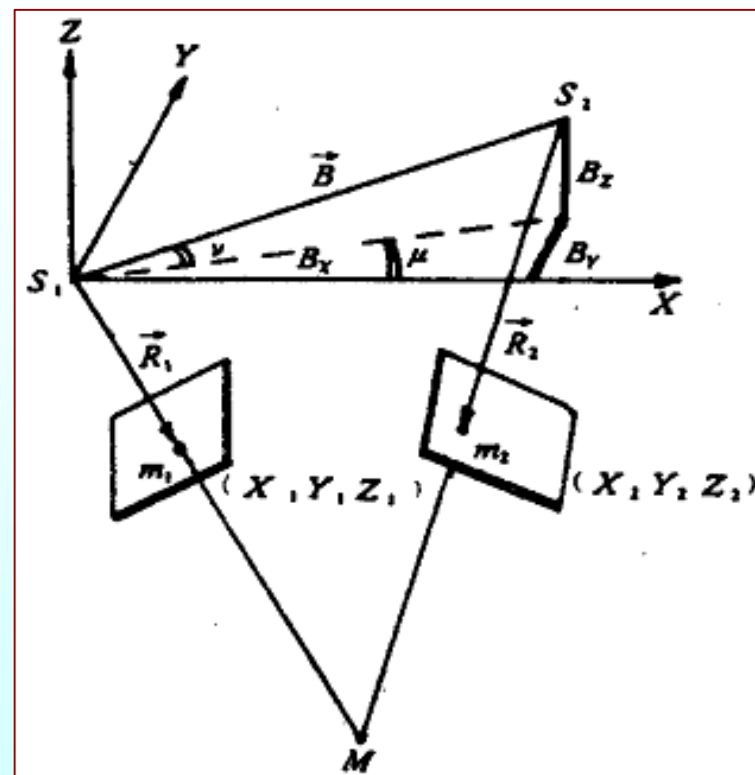
q 恢复摄影时左、右片之间的相互（位置和姿态）关系，建立与地面相似的几何模型



解析法相对定向原理——共面条件

共面条件方程：确定摄影基线与左、右片同名光线三矢量共面的方程

$$\vec{B} \cdot (\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) = 0$$

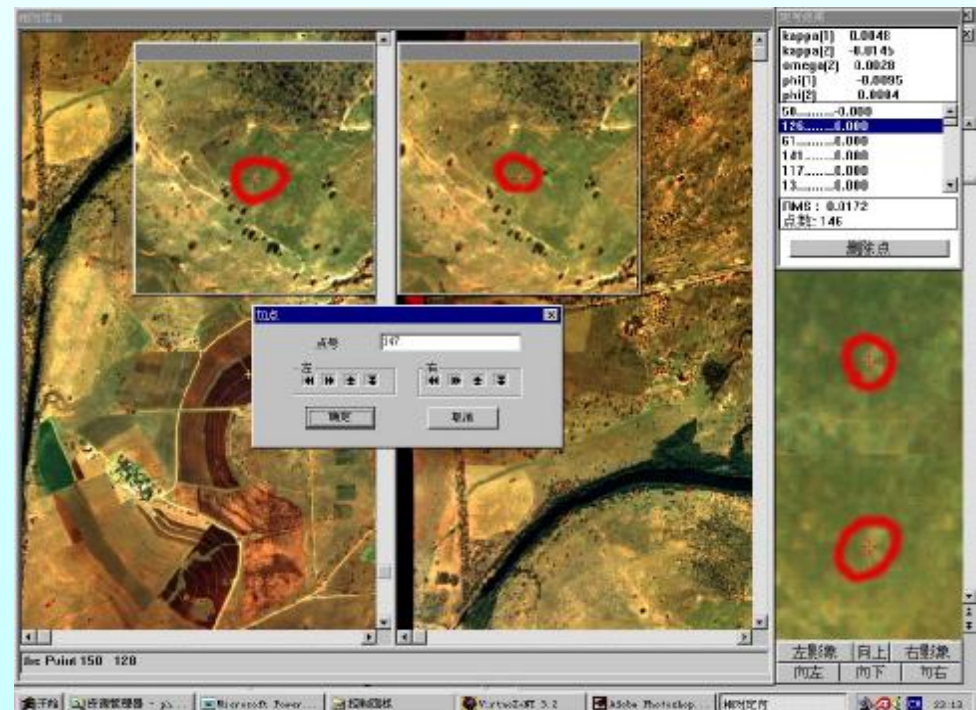


从共面条件出发，解析计算出5个相对定向元素，以恢复左、右片的相互关系。

解析法相对定向解算

注意：

- ① 共面条件需线性化，未知数需引入初值，计算是迭代进行的
- ② 相对定向利用6对以上同名像点
- ③ 相对定向无需地面控制点的信息



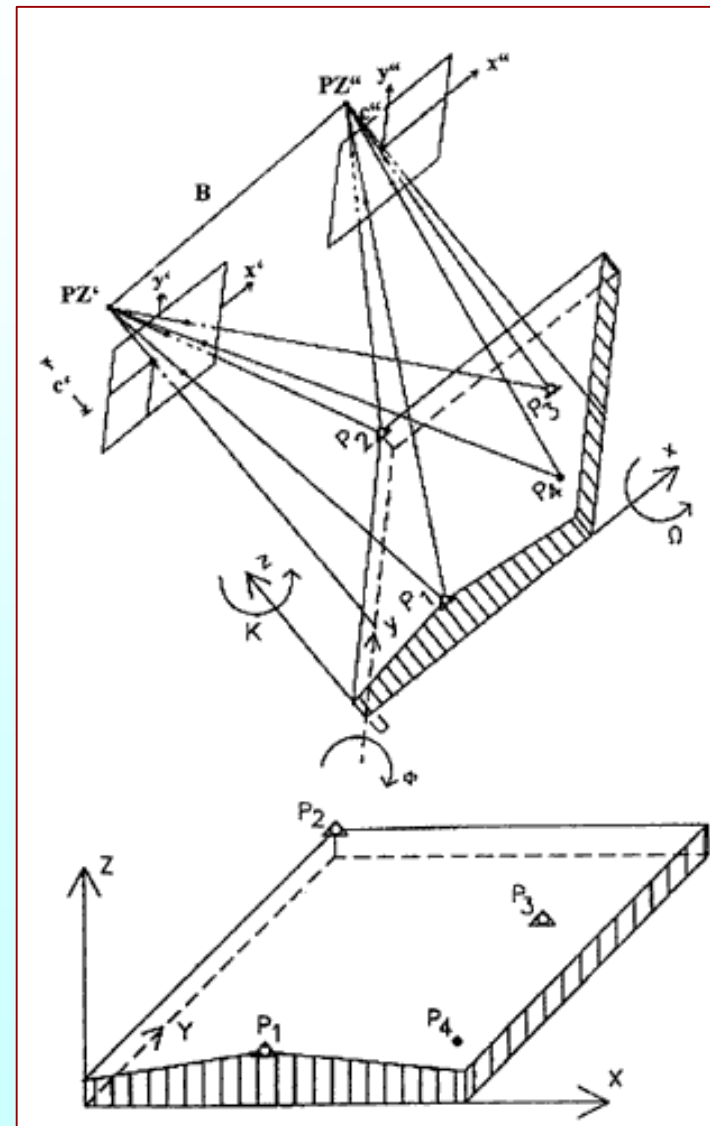
立体模型的解析绝对定向

目的：把相对定向后前方交会求得的模型点坐标纳入到大地坐标系中

q 绝对定向元素：

(12 - 5 = 7个)

(Ψ , Ω , K , λ , ΔX , ΔY , ΔZ)



立体模型的解析绝对定向

q 绝对定向基本公式：三维空间相似变换

$$\begin{bmatrix} X_{tp} \\ Y_{tp} \\ Z_{tp} \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix}$$

一个比例尺缩放

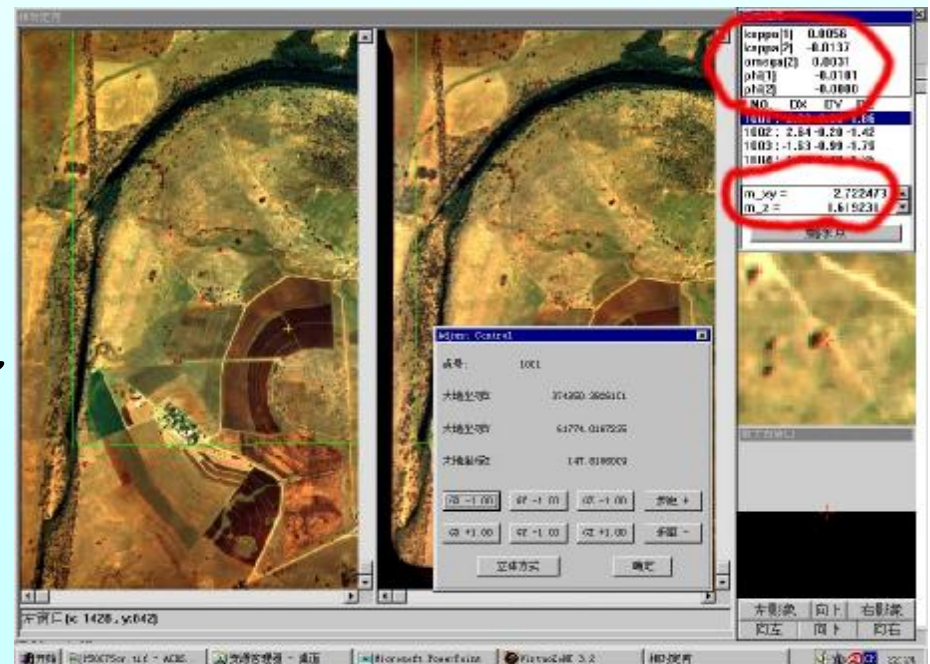
三个旋转

三个平移

解析法绝对定向过程

注意：

- ① 三维空间相似变换式需线性化，未知数需引入初值，计算是迭代进行的；
- ② 绝对定向至少需要已知2个平高控制点、1个高程控制点的地面坐标；
- ③ 坐标重心化的的概念及意义。



相对定向与绝对定向

q 举例说明

解析空中三角测量简介

解析空中三角测量分类：

按所采用的数学模型分为：

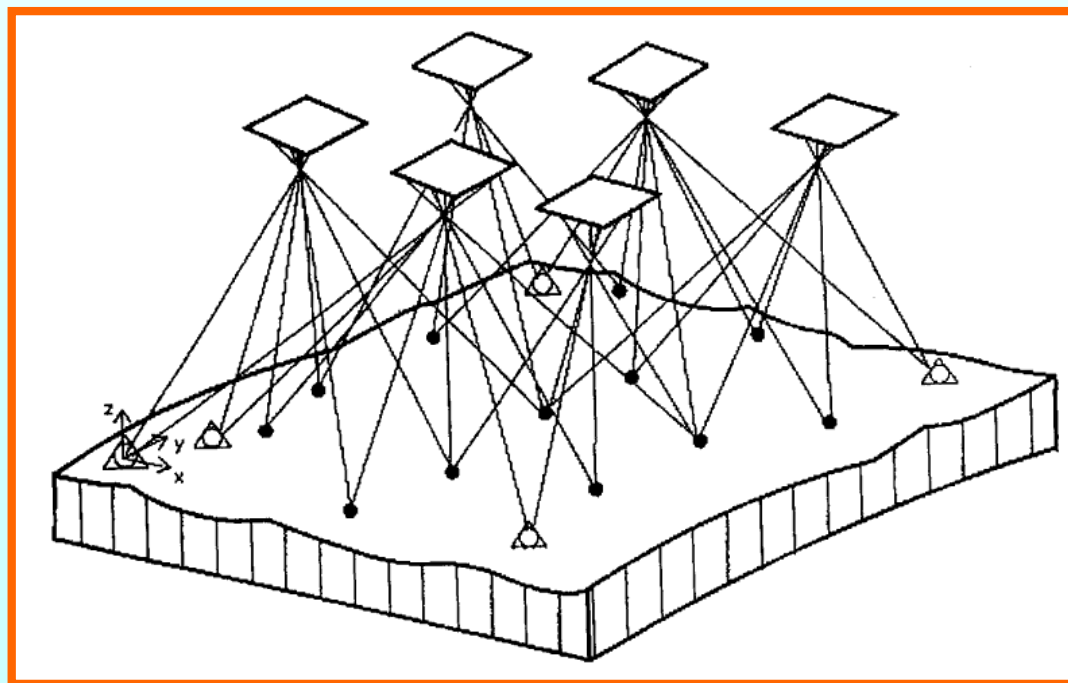
- q 航带法
- q 独立模型法
- q 光束法

按平差区域的大小分为：

- q 单模型法
- q 单航带法
- q 区域网法

光束法区域网空中三角测量

q 基本思想： 以一幅影像所组成的一束光线作为平差的基本单元，通过各个光线束在空间的旋转和平移，使像片之间公共点的光线实现最佳地交会。



光束法区域网空中三角测量

q 基础方程：

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \\ y - y_0 &= -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \end{aligned} \right\}$$

ü 根据像片上点的量测坐标求出该点所对应的物方空间坐标

$$(x, y) \rightarrow (X, Y, Z)$$

以及像片的外方位元素 $(X_s, Y_s, Z_s, \dots k)$

解析空中三角测量的精度评定

精度分析：

q 理论精度分析：利用误差传播律

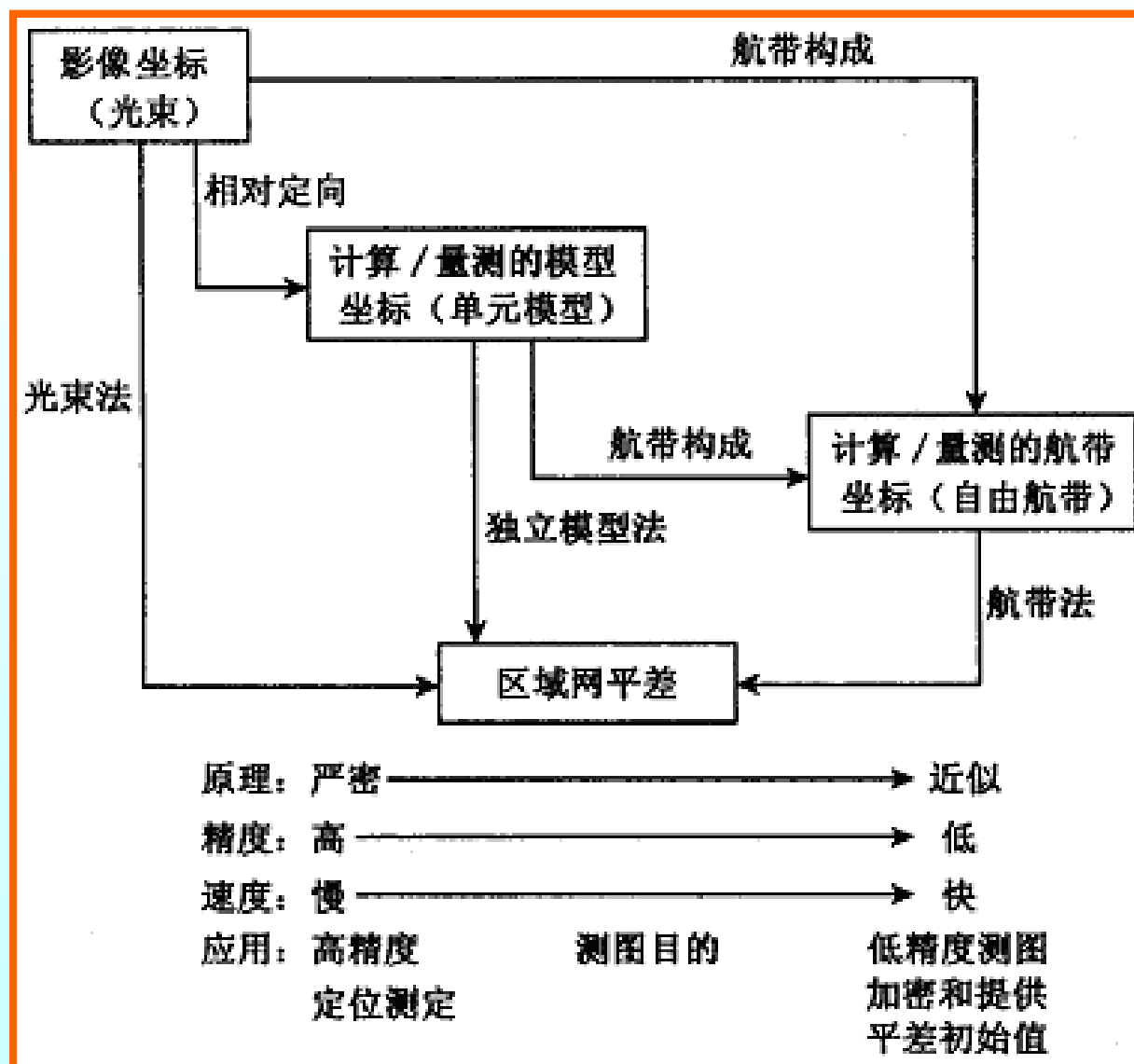
q 实际精度评定

$$m_x = \sqrt{\frac{\sum (X_{\text{控}} - X_{\text{摄}})^2}{n_x}}$$

$$m_y = \sqrt{\frac{\sum (Y_{\text{控}} - Y_{\text{摄}})^2}{n_y}}$$

$$m_z = \sqrt{\frac{\sum (Z_{\text{控}} - Z_{\text{摄}})^2}{n_z}}$$

三种方法的比较



系统误差补偿与自检校光束法平差

问题的提出：试验发现

- q 理论上：光束法 优于独立模型法
优于航带法
- q 实际上：并非完全如此
- q 原因：像片坐标系统误差未严格考虑

自检校光束法平差

严格的共线方程：

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 + \Delta x &= -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \\ y - y_0 + \Delta y &= -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} \end{aligned} \right\}$$

像片坐标系统误差来源：摄影系统、量测系统
(包括仪器和人)

自检校光束法平差

q 基本思想是：把可能存在的系统误差作为待定参数引入区域网空中三角测量的整体平差运算中求出其值。

q 系统误差模型的选择：

以Ebner教授所给模型为例（12个参数）

$$\Delta x = b_1x + b_2y - b_3(2x^2 - 4b^2/3) + b_4xy + b_5(y^2 - 2b^2/3) + b_7x(y^2 - 2b^2/3) + b_9(x^2 - 2b^2/3)y + b_{11}(x^2 - 2b^2/3)(y^2 - 2b^2/3)$$

$$\Delta y = -b_1y + b_2x + b_3xy - b_4(2y^2 - 4b^2/3) + b_6(x^2 - 2b^2/3) + b_8(x^2 - 2b^2/3)y + b_{10}x(y^2 - 2b^2/3) + b_{12}(x^2 - 2b^2/3)(y^2 - 2b^2/3)$$

摄影测量与非摄影测量观测值的联合平差

- q 摄影测量观测值：**指用摄影测量方法得到的观测值，如像点坐标、模型坐标等
- q 非摄影测量观测值：**指不是用摄影测量方法得到的观测值，如水平距离、方位角等
- q 联合平差定义：**在摄影测量平差计算中利用各种非摄影测量的原始观测值或相对控制条件，在一个统一的三维坐标系中进行整体平差的理论、方法和技术

关于联合平差

q 为什么要进行联合平差：

- ① 摄影测量加密的精度已提高到可以与大地测量观测值相当；
- ② 加密的目的不仅仅是为了测图，而且还应用于加密三、四等大地网、变形测量及地籍测量；
- ③ 在困难地区要减少甚至不做地面控制，就要利用非摄影测量信息。

关于联合平差

可供利用的非摄影测量观测值：

q 物方空间的大地测量观测值：

ü 物点坐标、坐标差、水平距离、空间距离、距离差、水平角、方位角等

q 像方空间观测值：

ü 内外方位元素、高差仪数据等

q 相对控制条件：

ü 位于一个平面上的点、位于一条直线或规则曲线上的点

GPS辅助空中三角测量

q 关于GPS全球定位系统

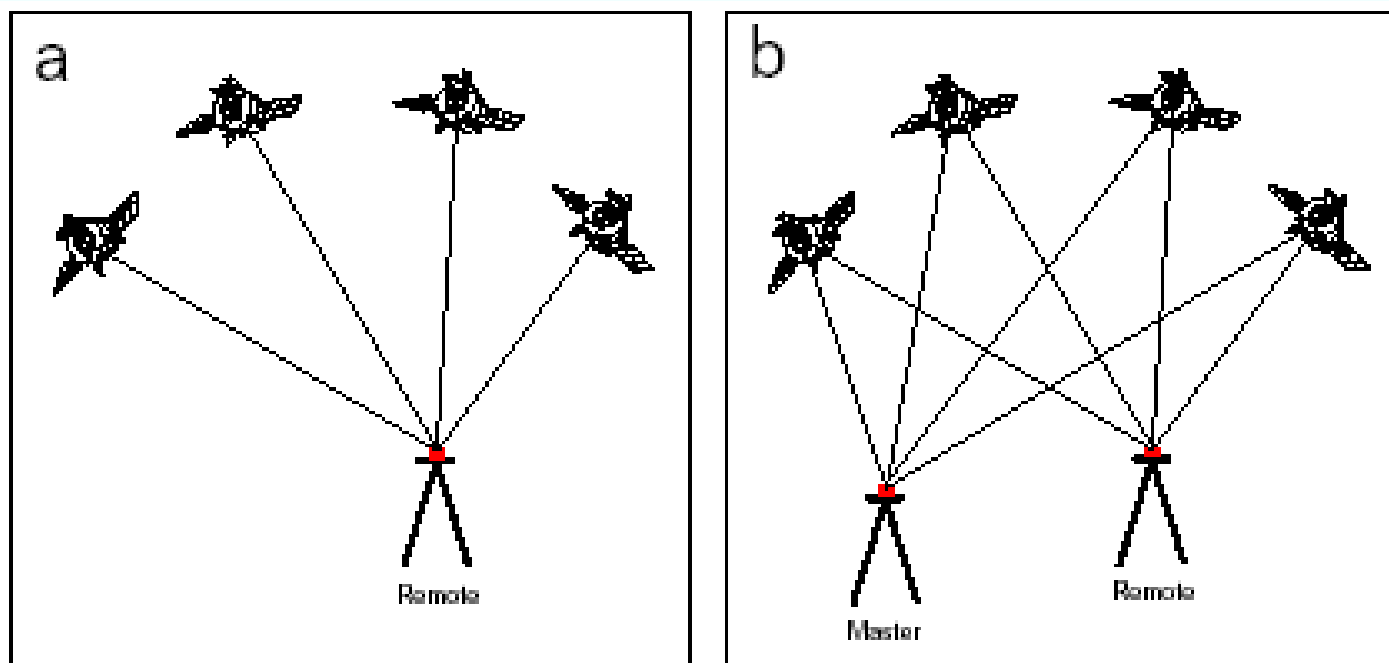
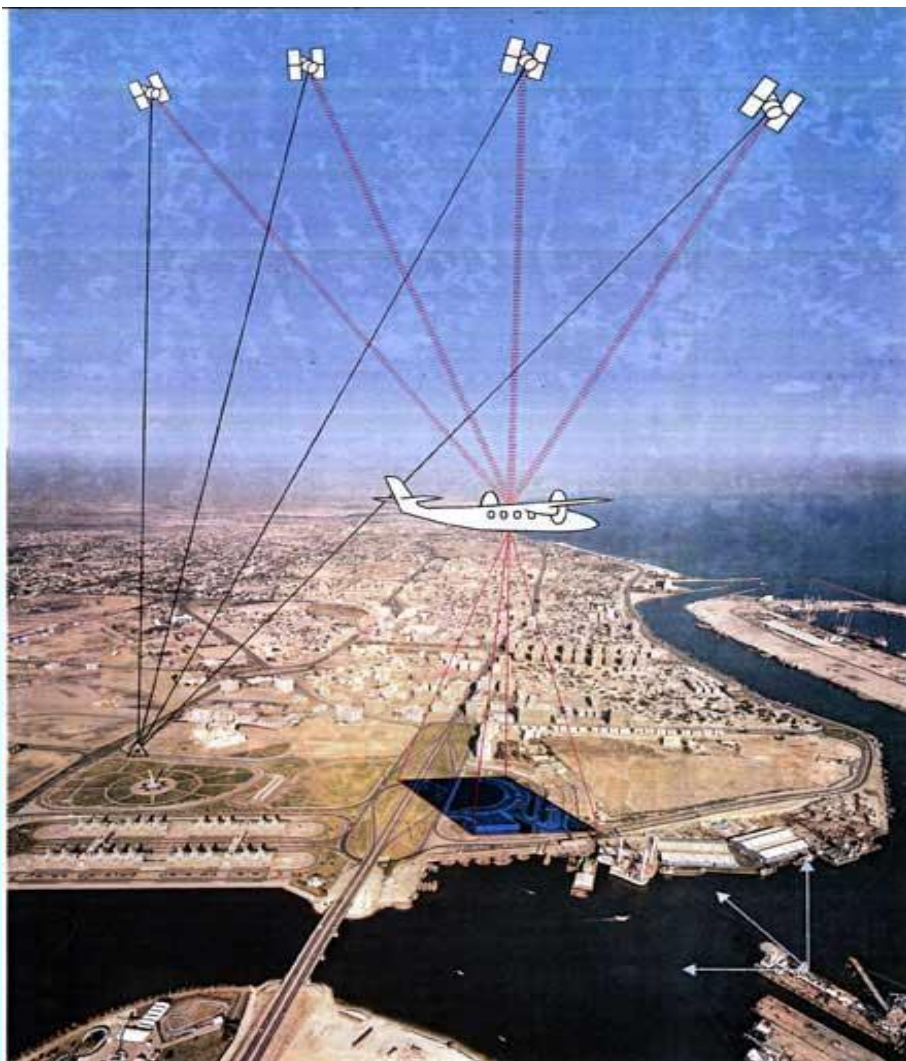


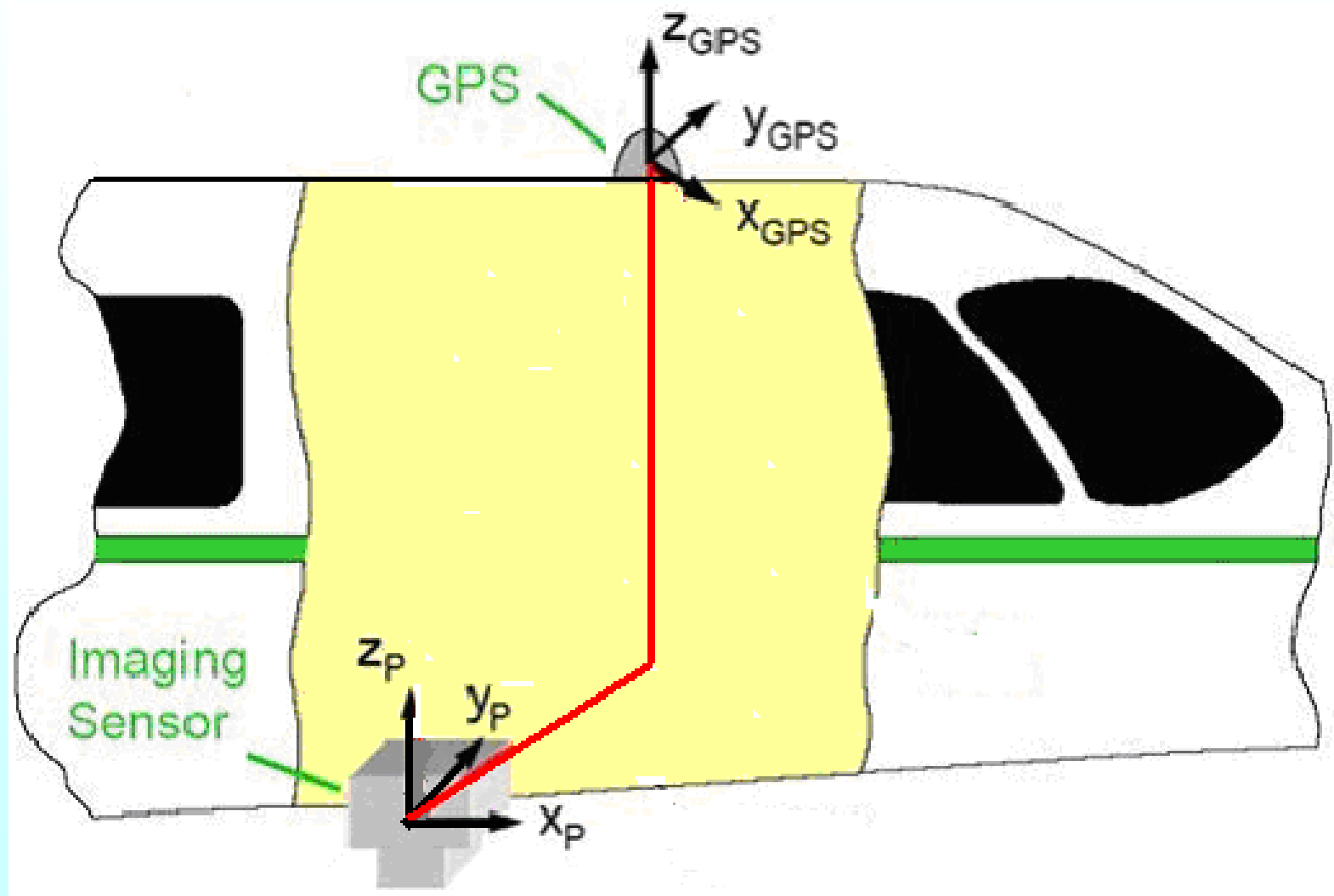
Figure 1: Principle of GPS positioning (a) absolute, (b) differential.

GPS辅助空中三角测量



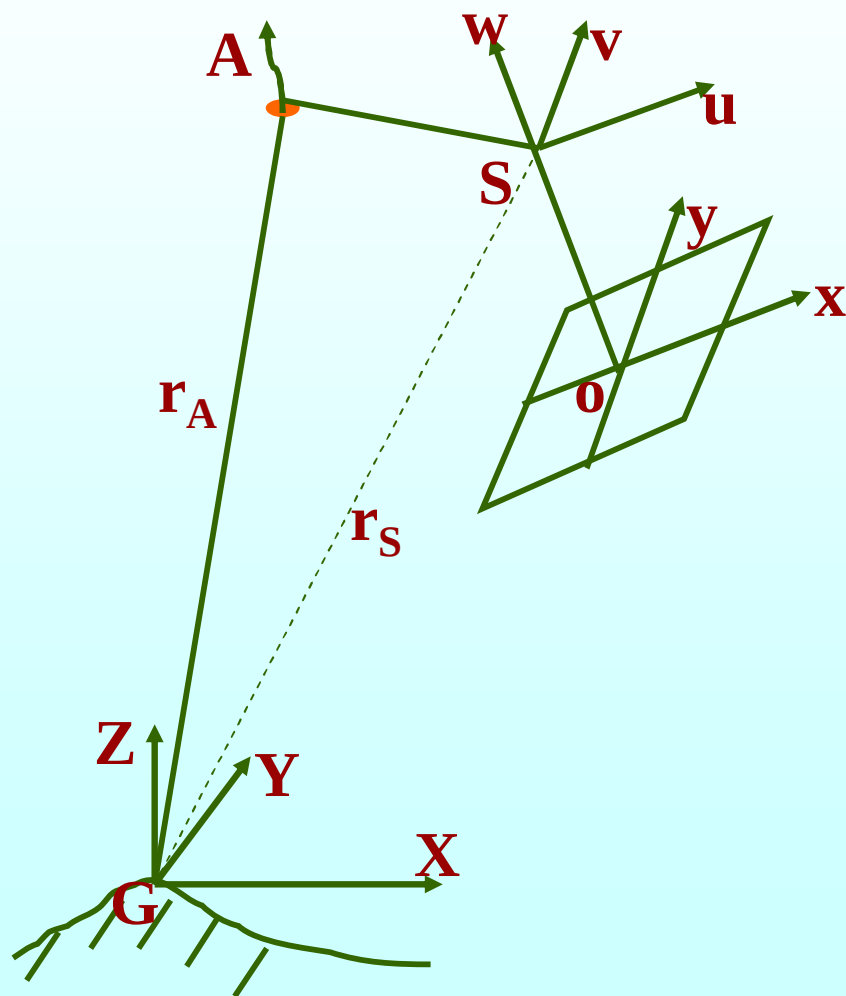
GPS辅助空中三角测量的含义：利用装在飞机上的一台GPS信号接收机和设在地面基准站的GPS接收机同时而连续地接收GPS信号，通过处理获取航摄影仪曝光时刻摄影中心的三维坐标，然后将其视为带权观测值引入摄影测量的区域网平差中，以确定物方点坐标和像片外方位元素的理论、技术和方法。

GPS辅助空中三角测量



GPS辅助空中三角测量

q 机载GPS天线与摄影中心的关系：



假设：

A、S在G-XYZ中的坐标分别为：

(X_A, Y_A, Z_A) 和

(X_S, Y_S, Z_S)

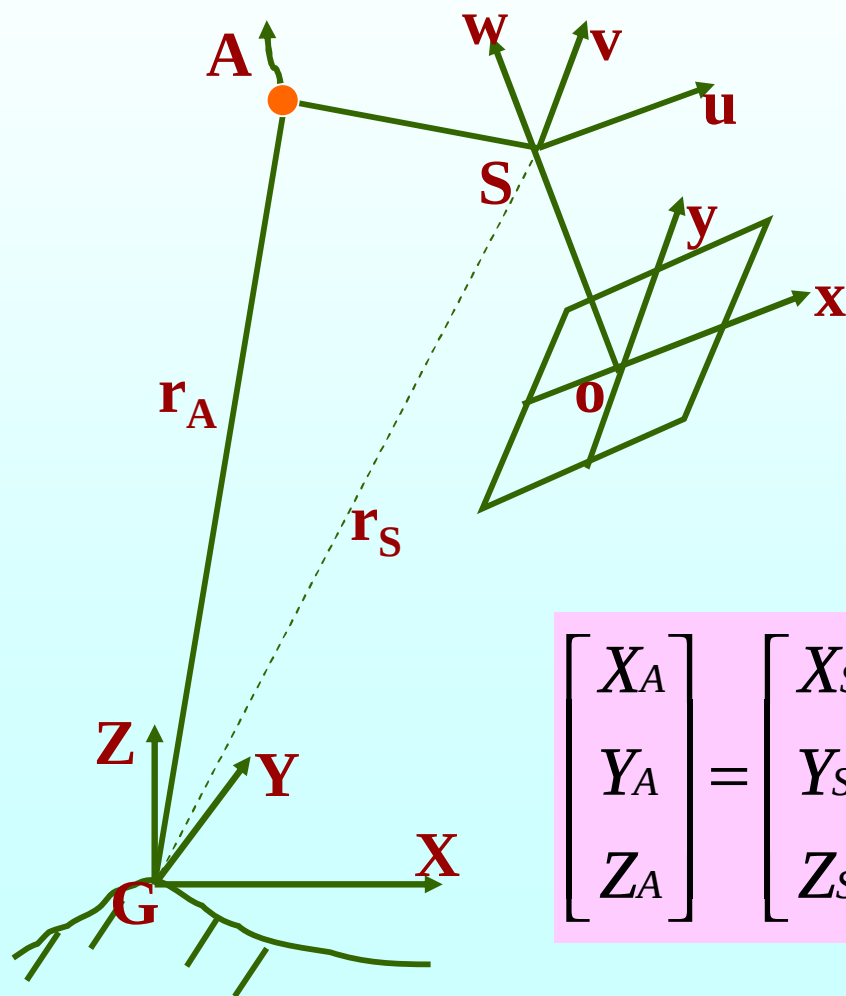
天线偏心矢量为 (u_A, v_A, w_A)

则有：

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} + R_{j,w,k} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix}$$

GPS辅助空中三角测量

q 机载GPS天线与摄影中心的关系：

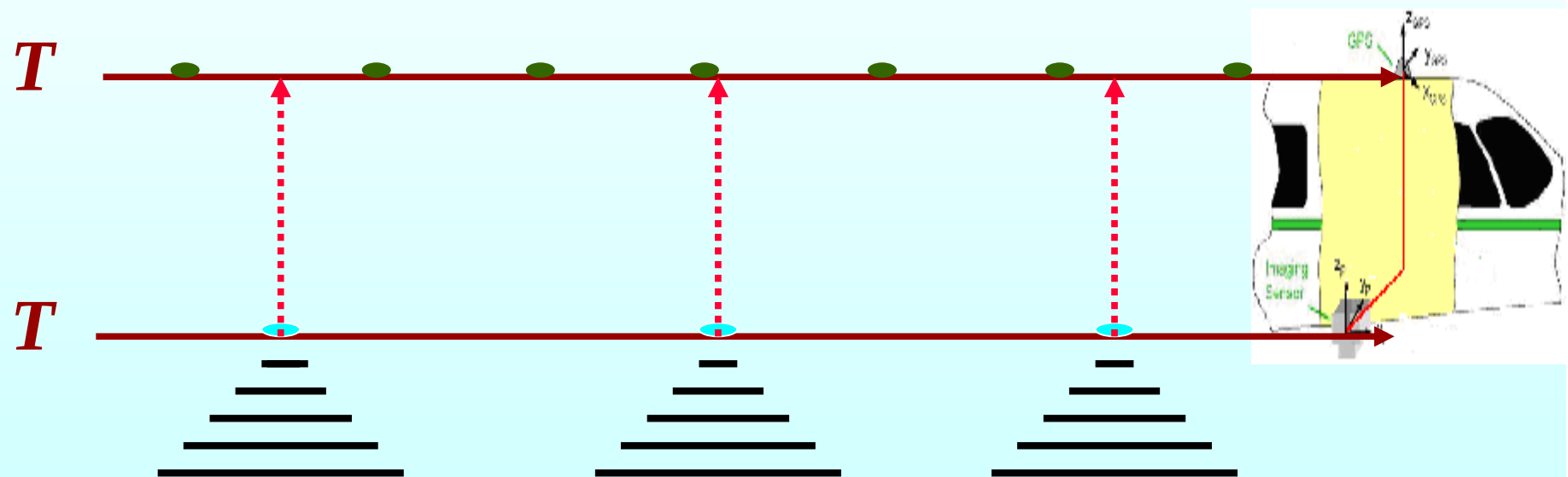


若顾及GPS载波相位漂移系统误差，则有：

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} + R_{j,w,k} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} (t - t_0) \right)$$

GPS辅助空中三角测量

q 摄影中心坐标内插



GPS辅助空中三角测量

q GPS摄站坐标观测方程：

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} + R_{j,w,k} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} (t - t_0) \right)$$

上式为非线性方程，为了能将GPS所确定的摄站坐标作为带权观测值引入空中三角测量中，必须对其进行线性化。

说明：引入GPS观测值后所增加的未知数包括 $(u \ v \ w)$ 和 $(a_x \ a_y \ a_z \ b_x \ b_y \ b_z)$

GPS辅助空中三角测量

q GPS摄站坐标观测方程：

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_S \\ Y_S \\ Z_S \end{bmatrix} + R_{j,w,k} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \\ w_A \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} (t - t_0) \right)$$

对上式按泰勒级数展开线性化得：

$$\begin{bmatrix} V_{XA} \\ V_{YA} \\ V_{ZA} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \Delta j \\ \Delta w \\ \Delta k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_S \\ \Delta Y_S \\ \Delta Z_S \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{bmatrix} + (t - t_0) \begin{bmatrix} \Delta b_x \\ \Delta b_y \\ \Delta b_z \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{bmatrix}^0 \right)$$

GPS辅助空中三角测量

q GPS摄站坐标观测方程：

最后可得到如下矩阵形式的GPS摄站坐标观测误差方程：

$$V_{GPS} = \bar{A}t + Rr + Dd - L_{GPS}$$

式中：

$$V_{GPS} = [V_{XA} \quad V_{YA} \quad V_{ZA}]^T$$

$$t = [\Delta j \quad \Delta w \quad \Delta k \quad \Delta X_s \quad \Delta Y_s \quad \Delta Z_s]^T$$

$$r = [\Delta u \quad \Delta v \quad \Delta w]^T$$

$$d = [a_X \quad a_Y \quad a_Z \quad b_X \quad b_Y \quad b_Z]^T$$

上式为GPS 辅助空中三角测量新增的基本方程。

GPS辅助空中三角测量

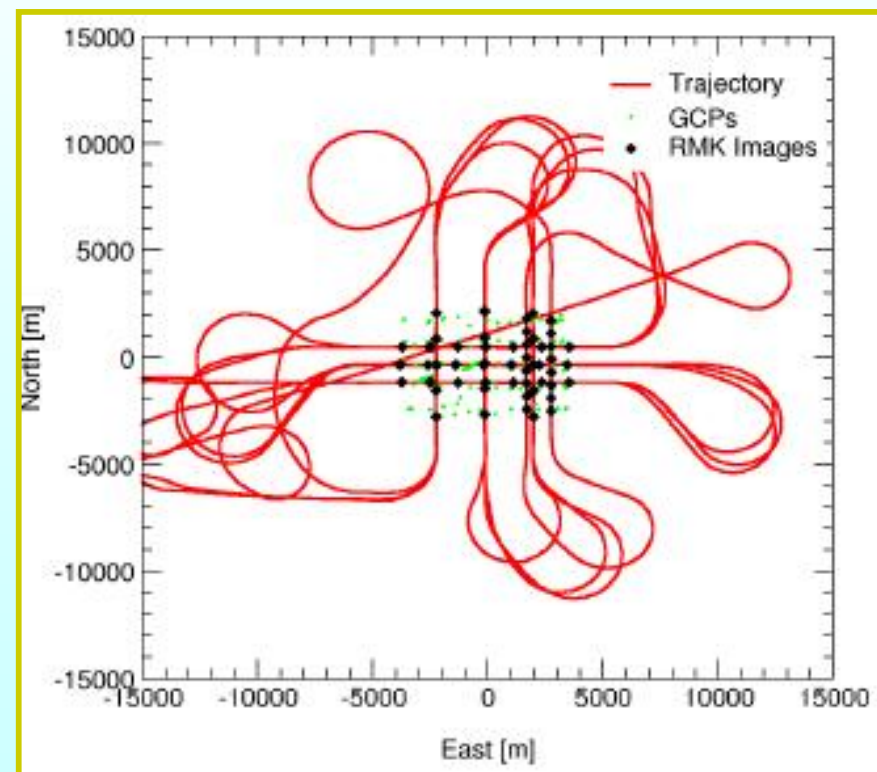
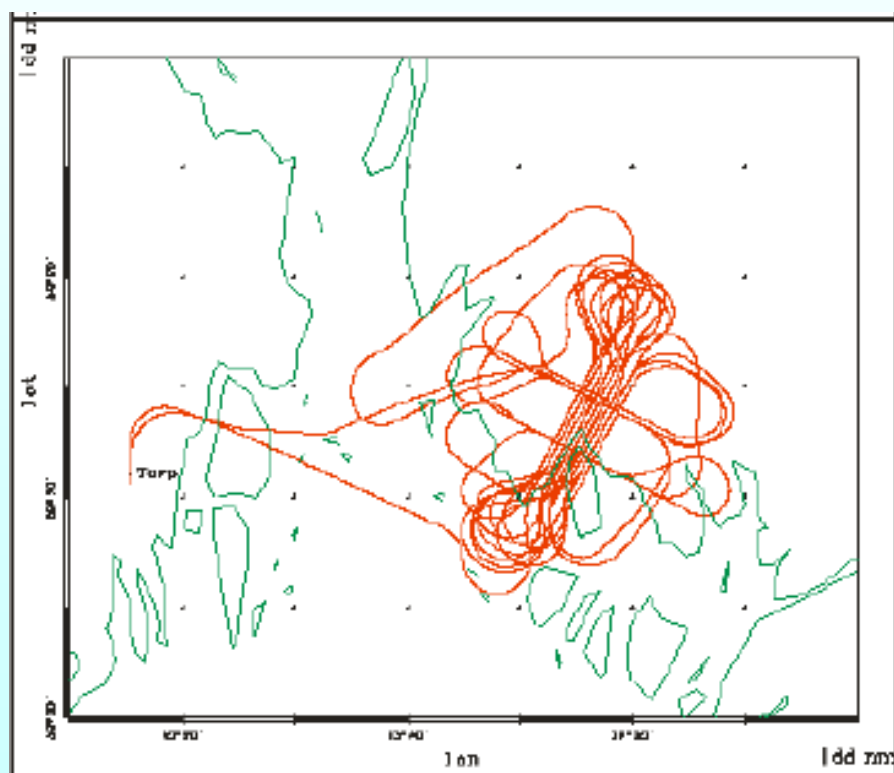
q GPS辅助光束法区域网平差的误差方程

其矩阵形式如下：

$$\begin{aligned} V_x &= At + Bx + Cc & -l_x & \text{权 } E \\ V_c &= E_x x & -l_c & \text{权 } P_c \\ V_s &= E_c c & -l_s & \text{权 } P_s \\ V_g &= \bar{A}t + Rr + Dd - l_g & \text{权 } P_g \end{aligned}$$

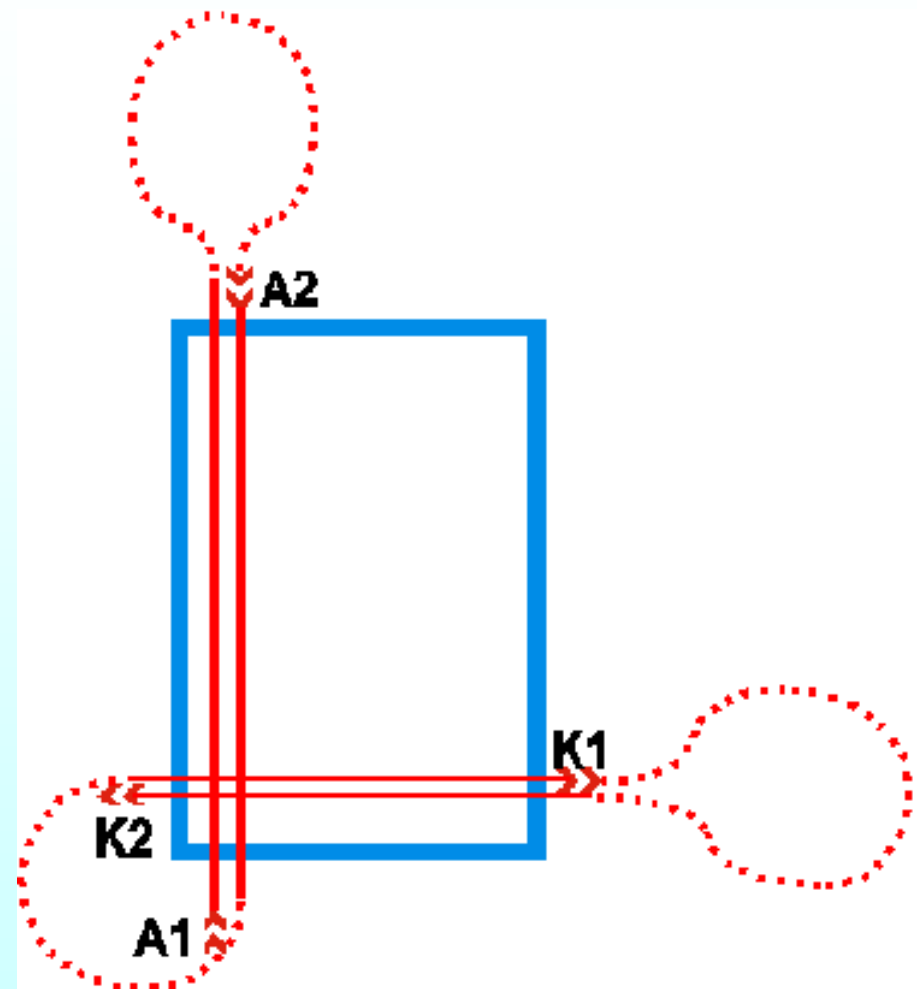
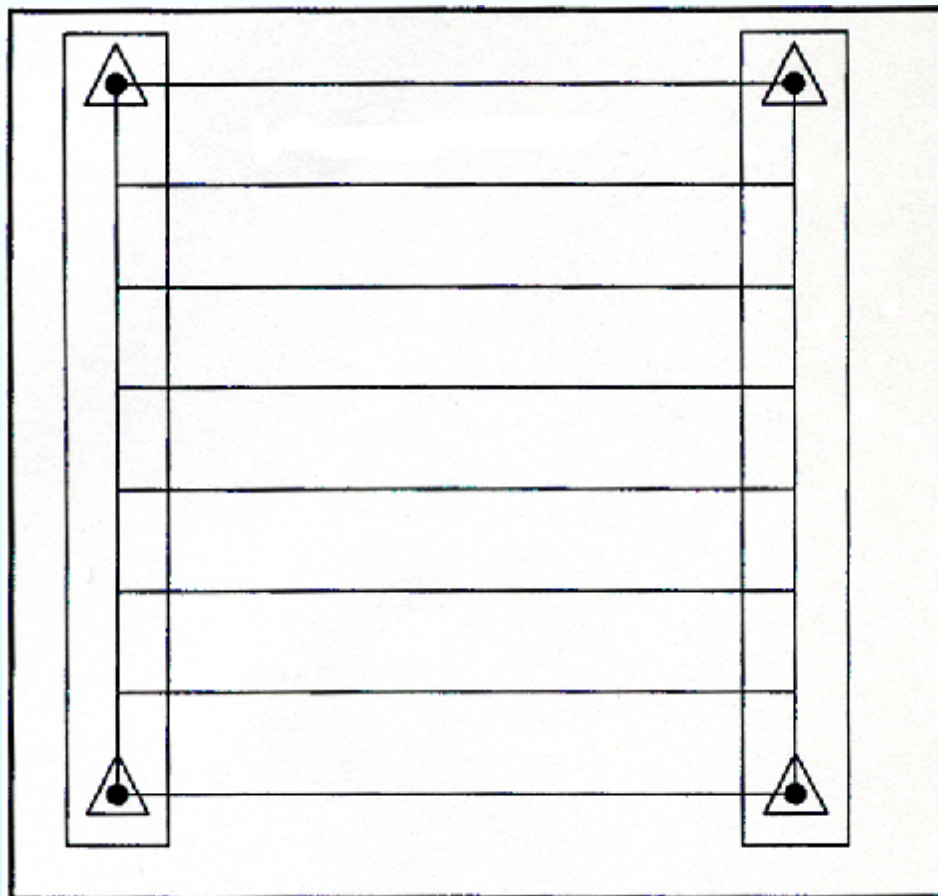
GPS辅助空中三角测量

q 航摄轨迹举例



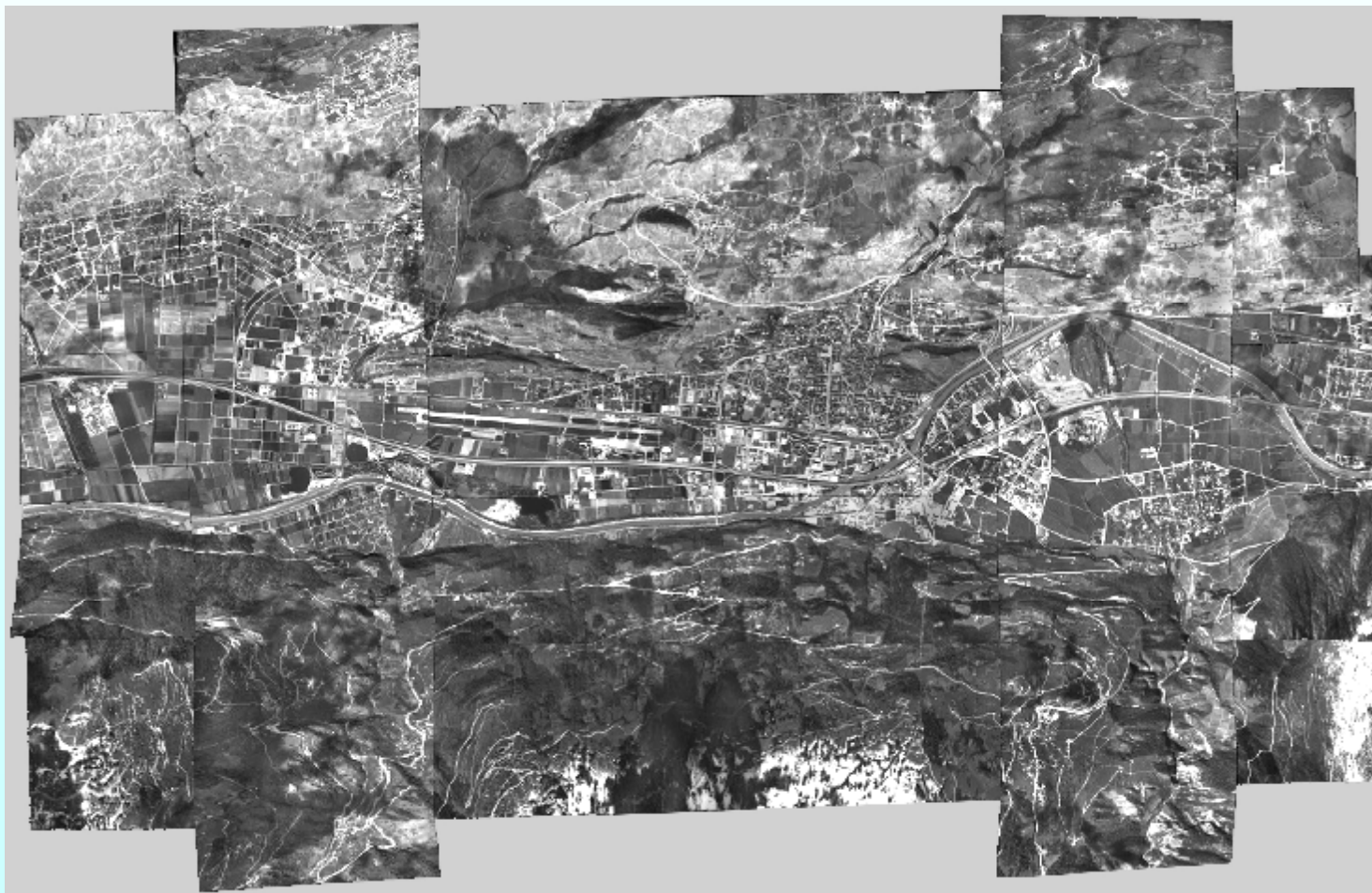
GPS辅助空中三角测量

构架航线



GPS辅助空中三角测量

构架航线



GPS辅助空中三角测量

q 小结

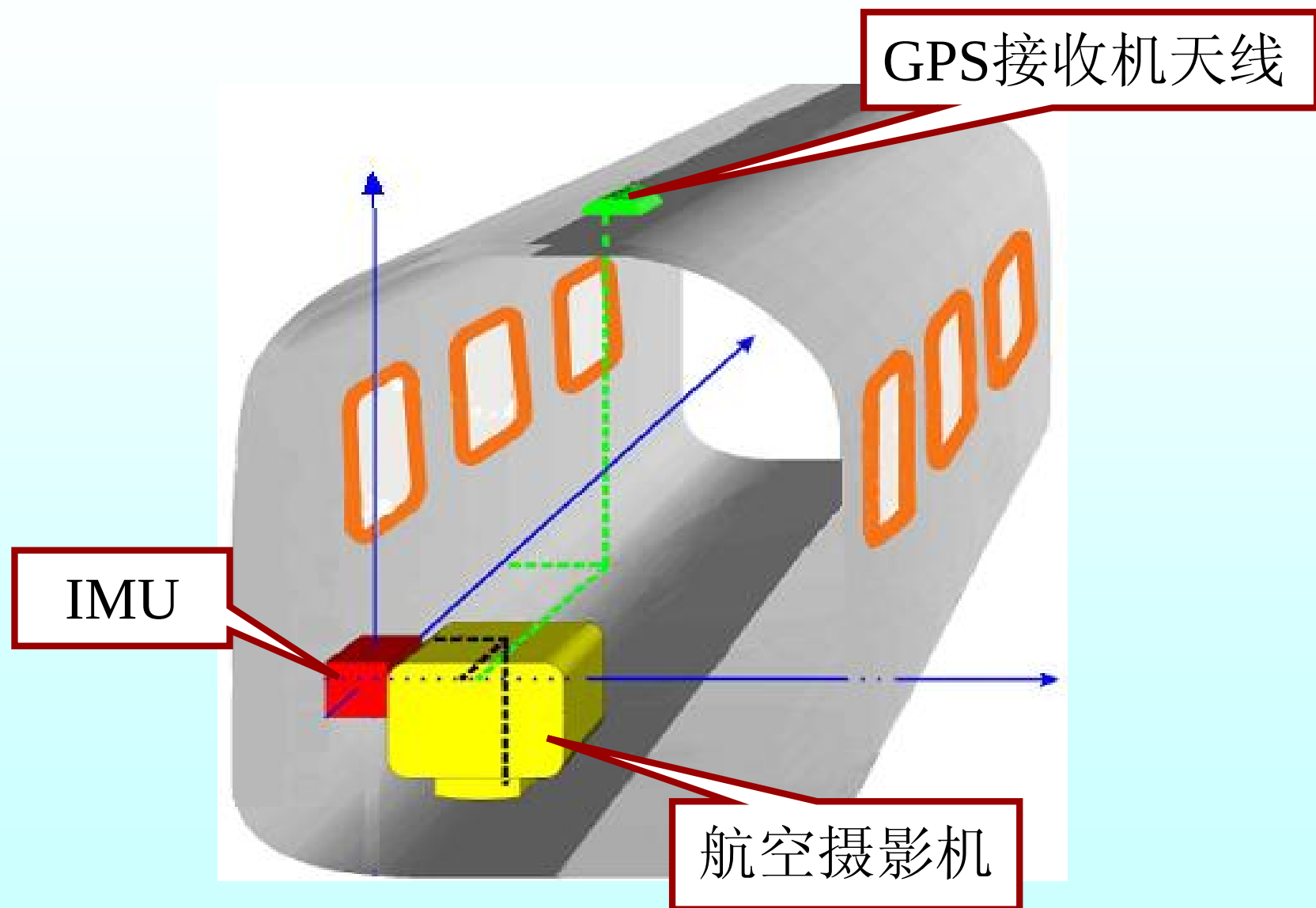
- ü 对航摄构网有一定的要求
- ü 对连接点的布设有一定的要求
- ü 两端需要布设构架航线
- ü 对单航带法（公路、铁路） GPS辅助空三在减少控制点方面没有优势
- ü 对沿海岸线航摄，因为大部分航片落水，在选择连接点时有困难

机载POS对地定位系统

q 基本含义：

- ü POS (Position and Orientation System)
机载定位定向系统，是基于全球定位系统 (GPS) 和惯性测量装置 (IMU) 的可直接测定影像外方位元素的现代导航定位系统
- ü 可用于在无地面控制或仅有少量地面控制点情况下的航空遥感对地定位和影像获取

POS辅助全自动空中三角测量



POS辅助空中三角测量

q 目前世界上主要POS厂商有：

厂 商	国 名	设 备 名
Applanix	加拿大	POS/AV-510 DG (系列)
IGI mbH	德国	AERO Control IIb

q Applanix POS系统组成：

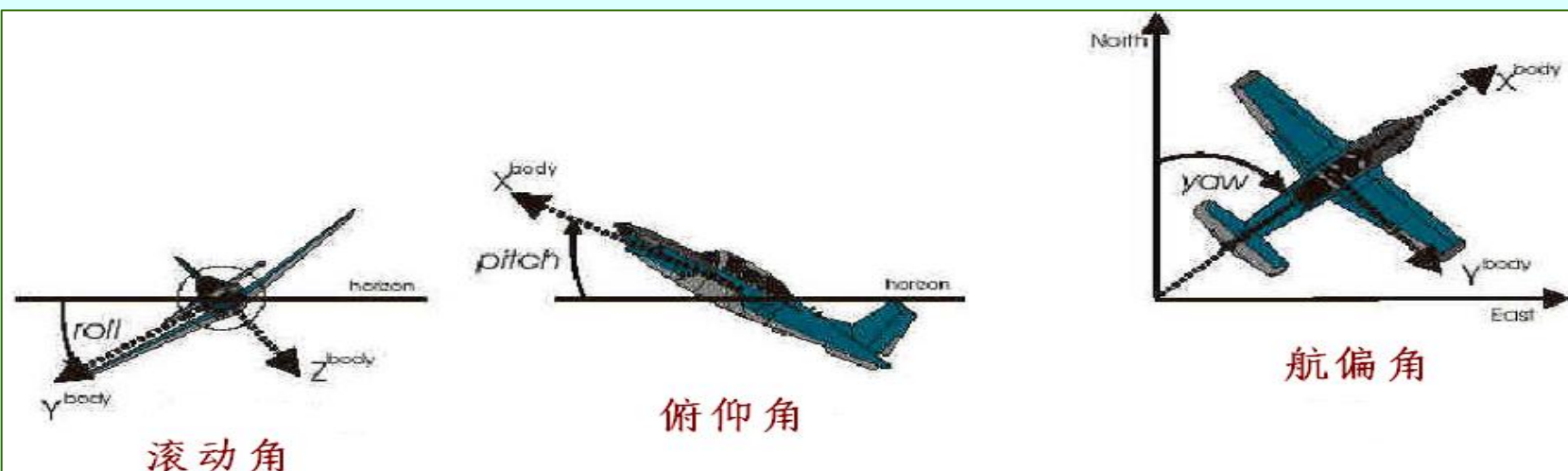
- ü 一个IMU
- ü 一个GPS接收机
- ü 一个计算机系统 (PCS)
- ü 一个后处理软件POSPac™



POS辅助空中三角测量

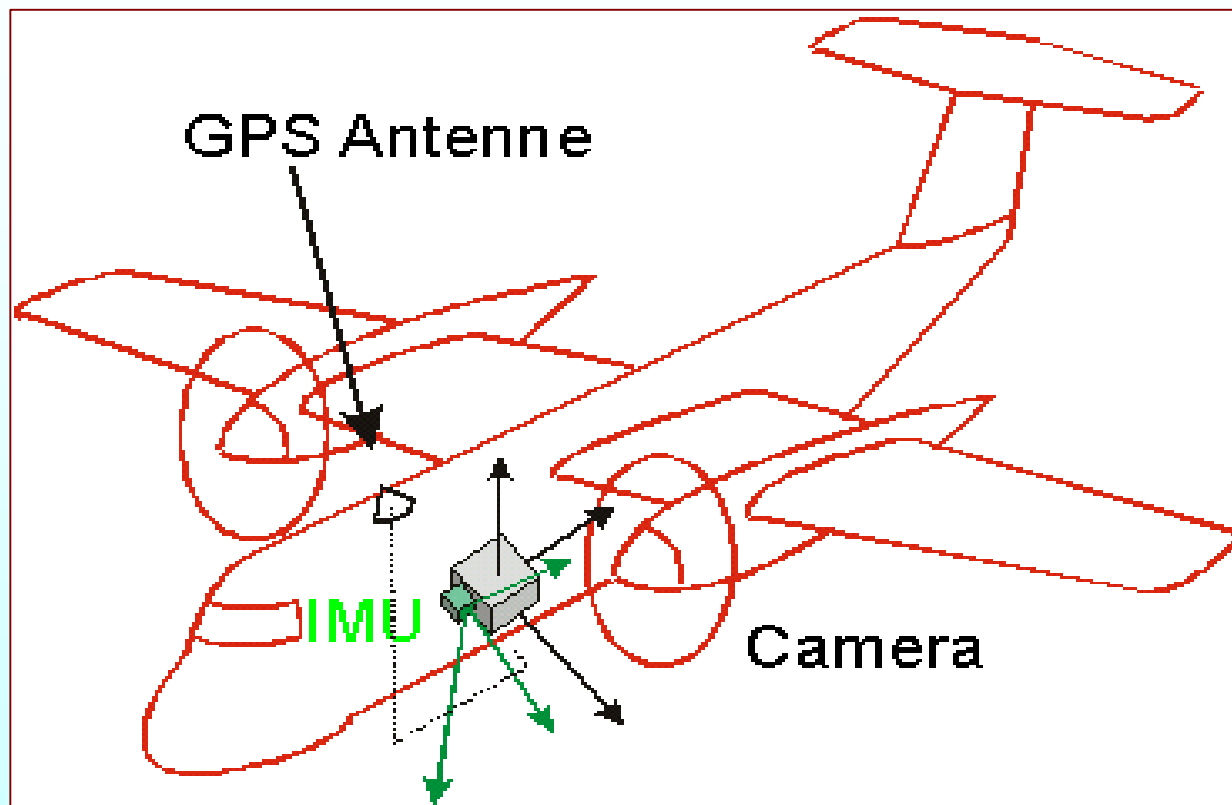
q POS/AV 510绝对精度指标：

测量元素	后处理结果
定位（米）	0.05~0.30
测速（米/秒）	0.005
滚动、俯仰角（度）	0.005
朝向（度）	0.008



POS辅助空中三角测量

Offset & BM



为确保姿态角测定精度，IMU体积必须要小，以便它能安装在比较靠近摄影机透视中心的附近。



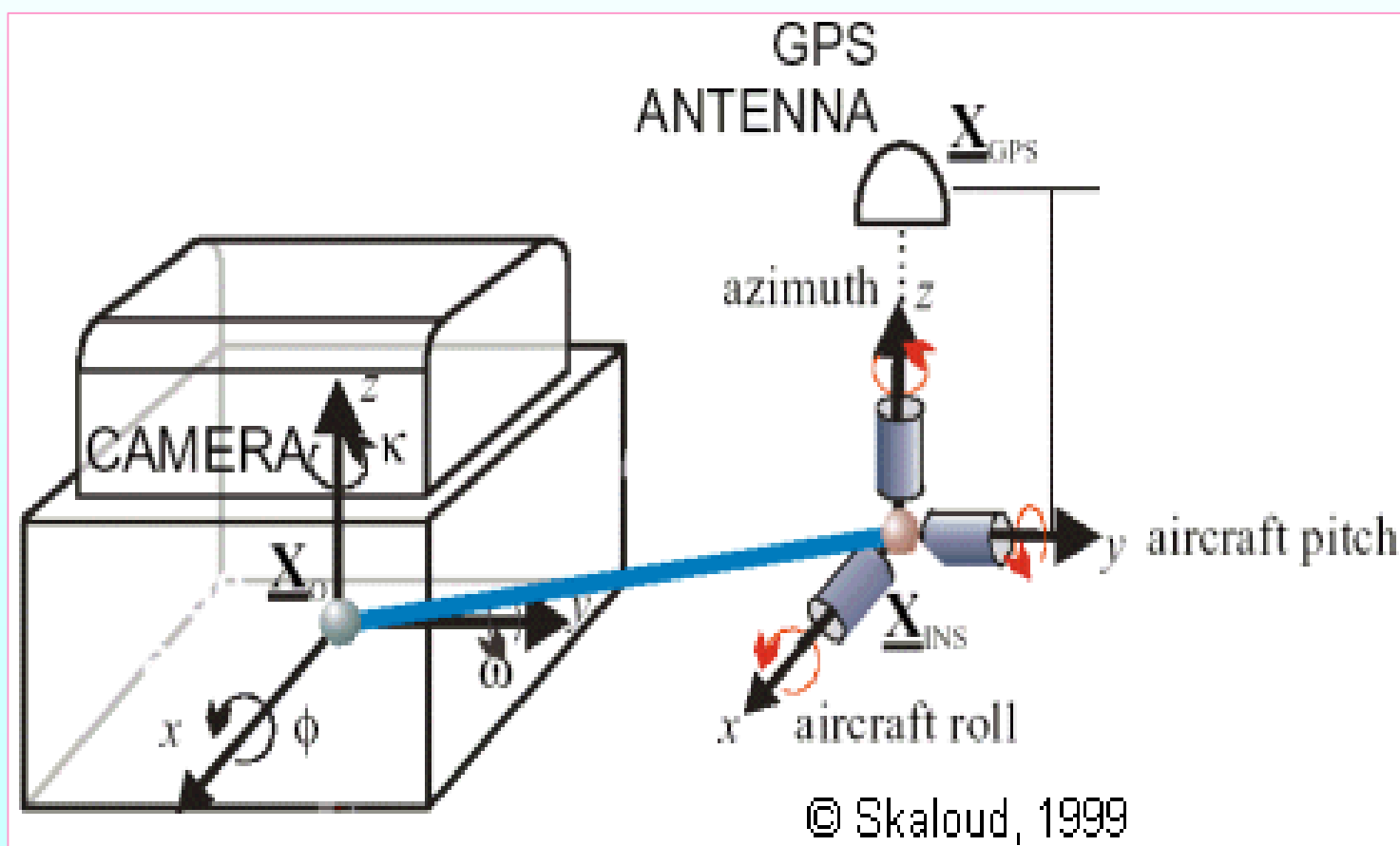
System installation POS/AV test
LN200 IMU mounted at RC30 camera



System installation AEROcontrol test
IMU-IId mounted at RMK-Top camera

POS辅助空中三角测量

q IMU和相机的相对位置关系 (Boresight Misalignment)

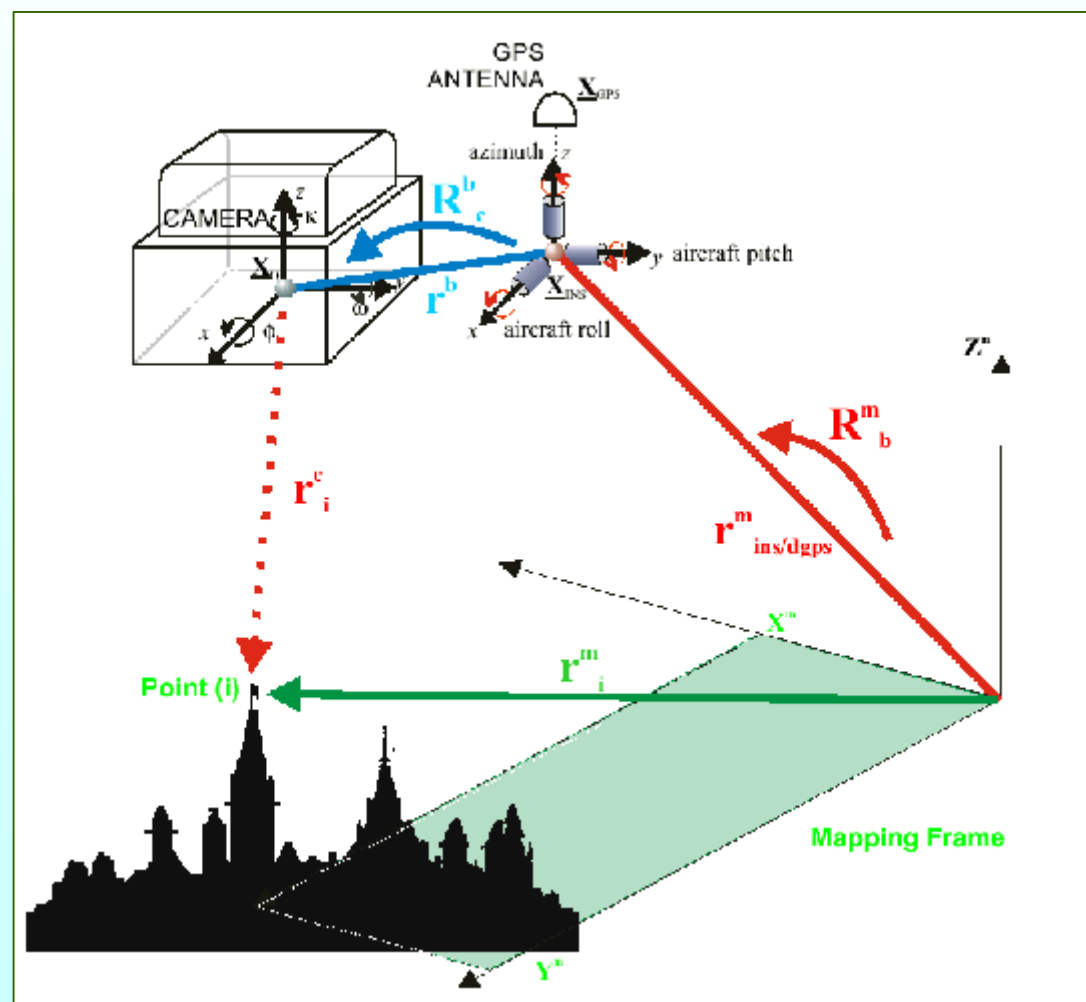
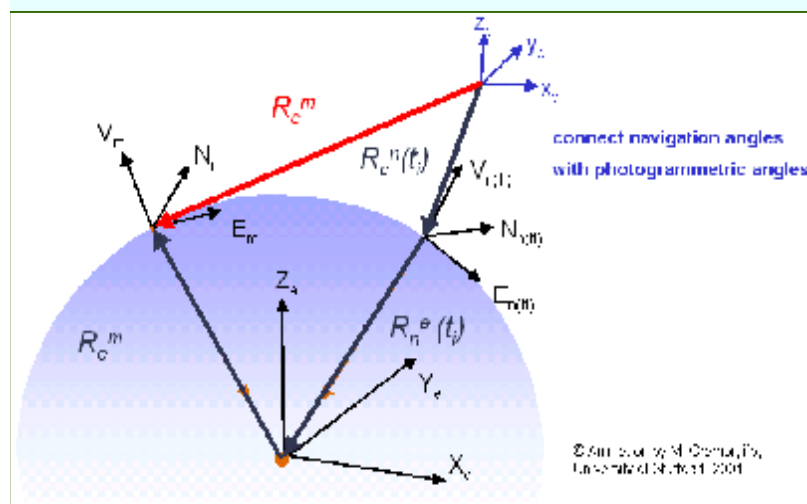


POS辅助空中三角测量

- q Boresight Misalignment (BM)的精确测定对POS系统特别重要，因为：
- ü 根据这种方法确定的地面点坐标相当于是—种外推（控制点在空中）
- ü 而常规的空三，根据区域周边控制点加密内部点的坐标是一种内插

GPS/POS辅助空中三角测量

坐标转换



POS辅助空中三角测量

q POS空中三角测量试验结果举例

以下为德国C.Heipke和K.Jacobsen教授对POS试验的结论：

摄影比例尺 1: 5000

平面精度 5~10 cm 高程精度 10~15 cm

像方精度 15~20um

比常规的摄影测量结果误差大 2~3倍

能用于：正射影像的生成、精度要求不高的应用

目前不能直接用于：测图（因有时有较大的上下视差）

POS辅助空中三角测量

q POS空中三角测量试验结果举例

适普公司的试验结果：

摄影比例尺 1: 5000

4条航带，共28张像片，扫描像元大小为14um

试验方法	X	Y	Z
直接交会	0.104	0.106	0.329
通过空三（无控制）	0.089	0.075	0.245
四个控制点空三	0.044	0.039	0.078

主要结论：

- 1、通过空三，即使是无控制点，其精度优于前方交
- 2、使用四角控制，可获得满意的结果

POS辅助空中三角测量

q 主要特点:

ü 可进一步减少对地面控制点的要求
仍然需要GCP的原因是:

§ 为了检校目的

§ 为检测和消除GPS的周跳

§ 可靠性目的

§ 基准转换目的

ü 对航摄布网的要求可进一步放宽

ü 对连接点的布设要求也可放宽

ü 因姿态角测定精度较低, 空三仍有必要

POS辅助空中三角测量

- q 在AAT中使用POS数据具有以下功能：**
 - ü 高精度的外方位元素初值可提高定向结果的精度、可靠性**
 - ü 有助于航摄机检校**
 - ü 减少对连接点的要求**
 - ü 空中三角测量不需要作交叉飞行**

进一步关于空中三角测量

空中三角测量的现状和发展趋势：

- q 区域周边地面控制点 + 空中三角测量**
- q 少量地面控制点 + GPS辅助空中三角测量**
- q 完全不要地面控制点 + POS辅助空中三角测量； 或只要GPS + INS，而不要空三**

POS与其它传感器的组合应用研究

q POS的其它主要应用：

ü 与机（星）载三行扫描传感器集成

ü 与激光测距仪Lidar集成

ü 与微波传感器SAR集成

ü 与其它数字摄影机和传感器集成



THE END

