

文章编号:0559-9350(2009)10-1274-06

饱和-非饱和土中渗流 Richards 方程有限元算法

吴梦喜

(中国科学院力学研究所,北京 100190)

摘要:发展了一种求解理查森方程的一般有限元算法。该方法采用积分法处理孔隙水压力对时间的导数项,采用集中质量技术处理有限元方程中质量矩阵来保证数值稳定。所采用的质量守恒迭代方法不须改变迭代方式,采用一般的 Picard 迭代方法。该方法能求解入渗、地下水位瞬变和排水等范围广泛的饱和-非饱和和渗流问题。对 3 个已公开发表具有详细试验数据的算例的模拟表明,该方法对入渗锋、稳定渗流地下水位和非稳定渗流溢出面都模拟很好。Picard 迭代方法效率很高,且无数值振荡发生。

关键词:理查森方程;非饱和渗流;有限单元法;入渗;瞬变水位

中图分类号:TV698.2

文献标识码:A

1 研究背景

很多与水相关的问题都牵涉到饱和和非饱和土。这些问题包括湿地、海滩环境、地下含水层的抽取、地下洞室开挖、土石坝渗流控制、边坡稳定等。描述非饱和土中水的流动控制方程一般采用 Richards 微分方程。Richards 方程常常表示为 3 种标准的形式:基于压力水头,基于含水率和同时采用这两个变量的混合形式。基于压力水头的方式允许同时存在饱和和非饱和条件。然而,对于高度非线性问题,如干土中的降雨入渗问题,这将引起质量平衡误差、迭代效率低和迭代不收敛等问题^[1-2]。差的质量平衡来源于时间导数项^[1]。偏导数 $(\partial s / \partial t)$ 和偏导数 $(\partial s / \partial \psi \cdot \partial \psi / \partial t)$, s 为饱和度, ψ 为孔隙水压力水头, t 为时间)在连续的偏微分方程中是等效的,在离散的方程中却不是,且离散形式的不等性因 $\partial s / \partial \psi$ 的高度非线性而加剧。这导致了严重的质量平衡误差问题,且这种误差随着时间步长的加大增长。对于基于含水率的形式,离散近似质量守恒,但这种形式对于完全饱和条件失效,因为饱和条件下压力水头与含水率的关系不再存在。对于多层介质,因为含水率在介质接触界面不连续,因而这种形式也是失效的。减小质量平衡误差和增强迭代效率的求解混合形式的数值技术已经得到了发展。Celia 等^[1]提出了在时步内依据孔压变化直接计算含水率变化的改进的皮卡(Picard)迭代方法来确保质量平衡,在模拟非饱和湿润峰问题中表现出很好的质量守恒特性。然而,质量守恒的方法并不能保证计算就一定准确。最大部分方法,无论是有限差分还是有限单元法,都采用欧拉时间步差分方法来模拟时间项,介质的非饱和导水系数在一个时步内是不变的。这就需要小的时间步长和细密的网格来确保求解精确,使大尺度和长时间的多维问题在没有超性能的并行计算机的条件下难以实施。本文的目的是提供一种质量守恒的、考虑非饱和参数在时步内变化的多维通用的有限元方法。

2 饱和非饱和渗流问题的描述

由达西定律(Darcy equation)描述的流体运动可表示为:

收稿日期:2008-08-06

基金项目:中国科学院知识创新工程项目(KJ92-YW-L02);科技部对欧盟科技合作专项经费(0820)

作者简介:吴梦喜(1967—),男,湖南涟源人,高级工程师,主要从事岩土工程渗流与变形的数值方法研究。E-mail:wumx@imech.ac.cn

$$q_i = -k_r(s)K_{ij}h_{,j} = -k_r(s)K_{ij}(\psi + z)_{,j} \quad (1)$$

根据质量平衡原理推导出理查兹(Richards)方程^[3]

$$[-k_r(\psi) \cdot K_{ij} \cdot (\psi + z)_{,j}]_{,i} + \varepsilon\gamma \cdot s(\psi) \partial \psi / \partial t + \varepsilon \partial s(\psi) / \partial t + s(\psi) \partial \varepsilon / \partial t = Q \quad (2)$$

式中: h , $h = \psi + z$ 为水头; ψ 为压力水头 ($\psi > 0$ 介质饱和, $\psi \leq 0$ 介质非饱和), 量纲为 L ; $s(\psi)$ 为饱和度 ($0 \leq s \leq 1$, 介质饱和时 $s=1$); q 为达西流速向量; z 为参考平面上的高程; K 为饱和介质渗透张量 (各向异性); ε 为介质孔隙率; γ 为流体的体积压缩系数; $k_r(s)$ 为相对导水系数 ($0 \leq k_r(s) \leq 1$, $s=1$ 时 $k_r(s)=1$); Q 代表源项; $i, j=1, \dots, D$ 指几何坐标下标; D 为空间维数。

式(1)、式(2)中相对渗透系数 k_r 是饱和度的函数, 饱和度 s 是孔隙水压力 ψ 的函数。确定了这两个函数关系式(2)才能求解。饱和度与孔隙水压力关系常采用文献[4]中的 Van Genuchten 公式 (VG 公式)表示, 公式如下:

$$S_e(\psi) = \frac{S(\psi) - S_r}{1 - S_r} = \begin{cases} (1 + |\alpha\psi|^n)^{-m}, & \psi < 0 \\ 1, & \psi \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

非饱和土透水性与饱和度的关系常使用 Mualem 模型^[5]描述, 如式(4)

$$k_r(s_e) = S_e^{1/2} [1 - (1 - S_e^{1/2})^m]^2 \quad (4)$$

式中: S_e 为有效饱和度; S_r 为残余饱和度; α 为和平均粒径大小有关的参数; n 为和粒径均匀性有关的参数, $m=1-P/n$ 。

3 有限元算法

将空间离散为有限个单元连续区域, $\Omega \approx \sum_{\Omega_e} \Omega_e$, 对于形函数为 N_i 的等参单元, 令 $\psi = N_i \psi_i$, $z = N_i z_i$, 将 ψ 作为基本变量, 根据变分原理和格林或高斯公式, 可以推导出有限元方程:

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} N_{i,i} k_r(\psi) K_{ij} N_{j,j} d\Omega \cdot (\psi + z)_{,j} + \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} [\varepsilon\gamma s(\psi) + \varepsilon s'(\psi)] N_i N_j d\Omega \cdot \partial \psi_j^2 / \partial t \\ & = \oint_L -q_n N_i dL + \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} [Q - s(\psi) \partial \varepsilon / \partial t] N_i d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

式中: L 为封闭的边界域; q_n 为边界外法线方向流速, $q_n = -k_r(\psi) K_{ij} \cdot (\psi + z)_{,j} n_i$, n_i 为边界外法线方向的方向余弦。

对时间域的离散有差分法和积分法两种, 差分法推出的方程是不能保证质量守恒的, 因而本文采用积分法。时间域用上标 n , 设 Δt^* , $\Delta t^* = t^* - t_{n-1}$, 在 $[t_{n-1}, t_n^*]$ 之间式(5)对时间 t 积分。对于很多问题, 孔隙水的压缩性和土体孔隙率的变化均可以忽略, 所以下式中水的压缩项和孔隙率变化项略去, 对于这两项不可略去的问题, 只要在下述方程中增加这两项的推导即可。可得

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega_e} \int_{t_{n-1}}^{t_n^*} \int_{\Omega_e} N_{i,i} k_r(\psi) K_{ij} N_{j,j} d\Omega \cdot (\psi + z)_{,j} dt + \sum_{\Omega_e} \int_{t_{n-1}}^{t_n^*} \int_{\Omega_e} \varepsilon s'(\psi) N_i N_j d\Omega \cdot \partial \psi_j^2 / \partial t dt = \\ & \int_{t_{n-1}}^{t_n^*} \oint_L -q_n N_i dL dt + \sum_{\Omega_e} \int_{t_{n-1}}^{t_n^*} \int_{\Omega_e} Q N_i d\Omega \cdot dt \end{aligned} \quad (6)$$

根据积分中值定理, 存在一个 $\bar{\psi}$, $\bar{\psi} \in [\psi^n, \psi^{n-1}]$, 不防设 $\psi^n = \bar{\psi}$

$$\begin{aligned} & \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} N_{i,i} K_{ij} N_{j,j} k_r(\psi^n) d\Omega \cdot (\psi^n + z)_{,j} + \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \varepsilon \frac{s(\psi^n) - s(\psi^{n-1})}{\psi^n - \psi^{n-1}} N_i N_j d\Omega \cdot (\psi_j^n - \psi_j^{n-1}) \Delta t^* = \\ & \oint_L -q_n N_i dL + \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} Q N_i d\Omega \end{aligned} \quad (7)$$

设 $\Delta t = t_n - t_{n-1}$, 并对第二项进行近似处理, 可得

$$\sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} N_{i,i} k_{ij} N_{j,j} k_r(\psi^n) d\Omega \cdot (\psi^n + z)_{,j} + \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \varepsilon \frac{s(\psi^n) - s(\psi^{n-1})}{\psi^n - \psi^{n-1}} N_i N_j d\Omega \cdot (\psi_j^n - \psi_j^{n-1}) \Delta t^n =$$

$$\oint_L -q_n N_I dL + \sum_e \int_{\Omega_e} Q N_I d\Omega \quad (8)$$

写成简化的形式:

$$[K_U(\psi) + O_U(\psi) \Delta t_n] \cdot \psi_J^n = F_I(\psi) + O_U(\psi) \Delta t_n \cdot \psi_J^{n-1} - K_U(\psi) \cdot z_J \quad (9)$$

公式中的各分量可表示如下:

$$K_U(\psi) = \sum_e \int_{\Omega_e} N_{I,i} k_r(\psi^n) K_{ij} N_{j,j} d\Omega \quad (10)$$

$$O_U(\psi) = \sum_e \int_{\Omega_e} N_I N_J \varepsilon \bar{s}'(\psi) d\Omega, \bar{s}'(\psi) = \frac{s(\psi^n) - s(\psi^{n-1})}{\psi^n - \psi^{n-1}} \quad (11)$$

$$F_I(\psi) = \oint_L -q_n N_I dL + \sum_e \int_{\Omega_e} Q N_I d\Omega \quad (12)$$

式(9)–(12)构成了 Richards 方程的有限元解法。其中 $s'(\psi)$ 的取值是算法在饱和-非饱和接触区域迭代计算是否稳定和质量守恒的关键之一,大量的研究者对此进行过探讨,文献[1]提出的一种取值方法得到广泛应用。作者于 1999 年在文献[6]中提出的 $s'(\psi)$ 的取值方法不但效果与文献[1]相同,且该方法具有不需要改变迭代方式的优越性。其引入符号函数 $\beta(\psi)$,使饱和非饱和和接触区迭代结果的跳动和该处产生质量误差的问题得以解决。令

$$\beta(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi < 0 \\ 0, & \psi \geq 0 \end{cases} \quad (13)$$

$\bar{s}'(\psi)$ 在 $[\min(0, \psi^n), \min(0, \psi^{n-1})]$ 区间取平均值,为如下的形式:

$$\bar{s}'(\psi) = \begin{cases} \frac{s(\psi^n) - s(\psi^{n-1})}{\beta(\psi^n) \cdot \psi^n - \beta(\psi^{n-1}) \cdot \psi^{n-1}}, & |\beta(\psi^n) \cdot \psi^n - \beta(\psi^{n-1}) \cdot \psi^{n-1}| \geq 0.01 \\ \frac{s(\psi^n) - s(\psi^n - 0.01)}{0.01}, & |\beta(\psi^n) \cdot \psi^n - \beta(\psi^{n-1}) \cdot \psi^{n-1}| < 0.01 \end{cases} \quad (14)$$

式(8)则改写为:

$$[K_U(\psi) + O_U(\psi) \Delta t_n] \cdot \psi_J^n = F_I(\psi) + \mathcal{M}_U(\psi) \Delta t_n \cdot \psi_J^{n-1} - K_U(\psi) \cdot z_J \quad (15)$$

其中

$$O_U(\psi) = \sum_e \int_{\Omega_e} \varepsilon \bar{s}'(\psi) \beta(\psi^n) N_I N_J d\Omega, \mathcal{M}_U(\psi) = \sum_e \int_{\Omega_e} \varepsilon \bar{s}'(\psi) \beta(\psi^{n-1}) N_I N_J d\Omega \quad (16)$$

O_U 称之为质量矩阵,为非对角占优矩阵,当 Δt_n 很小时, $K_U + O_U \Delta t_n$ 的对角占优特性将改变,甚至成为病态矩阵,因此有人提出采用集中质量矩阵的方式来处理,处理方式可以借鉴求解含有惯性力的位移有限元方程的方法,强制 O_U 对角占优,本文的取值方式如下:

$$O_U(\psi) = \sum_e \int_{\Omega_e} \frac{1}{l} \bar{s}'(\psi) \beta(\psi^n) \delta_U d\Omega, \mathcal{M}_U(\psi) = \sum_e \int_{\Omega_e} \frac{1}{l} \bar{s}'(\psi) \beta(\psi^{n-1}) \delta_U d\Omega, \quad (17)$$

其中 l 为单元的节点个数, δ_U 是 Kronecker delta。

式(15)、(10)、(12)、(17)构成了 Richards 方程的一种稳定的有限元求解算法。由于式(15)为非线性方程组,式(10)、(12)、(17)确定的系数都是变量 ψ 的函数,因而需要通过非线性迭代求解。非线性迭代方法分为 Picard 迭代法和 Newton 迭代法两种,本文采用 Picard 迭代法,即在计算第 m 次迭代的系数矩阵时 ψ 采用第 $m-1$ 次计算所得的结果。

4 验证

公开发表的典型试验结果,常常用来验证算法的有效性。本文用 3 个试验的结果来验证。

4.1 例 1:一维干土中的入渗问题 文献[7]介绍的一维现场入渗试验被很多研究者^[4,10]用于检验算法的正确性和有效性。该试验的土体是典型的粉黏土。在土体深度为 30、60、90、120、150、180cm 处设置有

张力计测含水率。土体的初始含水率在场地的表面为 0.15, 向下到 0.6m 深度线性增长到 0.2, 0.6m 以下含水率均为 0.2。

先使用 0.2N 的 CaCl_2 溶液浸润土体, 使表面保持饱和状态, 2.8h 后, 单位面积上 7.62cm 的溶液完全渗入土中。之后立即使用纯水浸润, 再过 14.7h 后, 单位面积上 22.9cm 的水完全渗入土中。入渗共历时 17.5h, 单位面积入渗总水量 30.52cm。

土体的平均饱和含水率为 0.38, 饱和渗透系数 0.016m/h。图 1 为根据试验测定的含水率、孔压、渗透系数, 按照最小二乘方法回归出土体非饱和土水特征关系参数后, 理论值与试验值的对比, 可见 VGM 公式 (Van Genuchten 公式和 Mualem 模型) 能较好的模拟该非饱和土的本构关系, 参数见表 1。

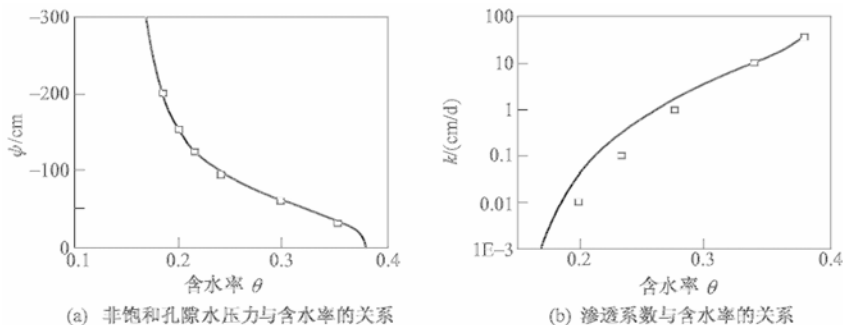


图 1 非饱和和孔隙水压力、渗透系数与含水率关系

表 1 粉黏土的土体参数

θ_r	θ_s	α (Pm)	n	K_s (m/h)
0.15	0.38	1.66	2.62	0.016

取 2m 深度, 划分 100 个高度 0.02m 的二维 4 节点计算单元。初始条件依据含水率按 VG 公式计算, 0~ -0.6m 之间孔压介于 $-\infty \sim -1.49\text{m}$, -0.6m 以下为 -1.49m , 边界条件底部孔压为 -1.49m , 表面孔压为 0, 计算得到各时刻的节点孔隙水压力。采用 0.02h 的时间步长, 收敛标准取两次迭代的孔压误差为 0.0001m。由于表面为饱和浸水入渗, 开始入渗时表面就是饱和的, 为了在表面单元靠近入渗面的高斯积分点一开始就能按较高饱和度计算相对渗透系数, 使模拟的入渗情况接近实际, 入渗开始的 0.5h 渗透系数按时步末当前值取值, 0.5h 以后, 相对渗透系数按几何平均取值。计算的收敛迭代次数均介于 3~30 之间。可见收敛速度很快。图 2(a) 为表面入渗速度, 累积入渗量和区域内累计增水量与时间之间的关系。开始入渗时入渗速度达到 0.204m/s, 在最初的 0.1h 内随时间急剧下降, 然后慢慢下降, 入渗试验结束时 (17.5h) 入渗速度下降到 0.0171m/s, 略大于饱和渗透系数, 这一规律与对非饱和土入渗的直观认识一致。将孔压计算结果按 VG 公式转换为含水率, 可累计计算区域内的增水量, 加上含底部下渗量可以得到整个区域的增水量。图中计算的区域增水量与计算的累积入渗量结果吻合较好。两者之比值介于 0.98%~1.06% 之间。表明本文的算法有很好的质量守恒特性。

图 2(b) 为不同时刻含水率与深度关系试验点与计算曲线的对比。图中各时刻含水率曲线有一个明显的湿润峰, 其形状与实测一致。由于土体的空间变异性, 土体的实测饱和和含水率值在 0.37~0.40 之间, 注意到计算采用 0.38 的值作为饱和和含水率, 可以说图 2(a) 中模拟值与实测值相当吻合。到 17.5h 入渗结束时计算范围内含水量增加 36.24cm, 迭加上向深部入渗的水量 0.04cm, 计算所得的总入渗水量共 36.28cm, 比试验入渗量仅大 18.9%。可见从总体的水量平衡看, 计算结果与实验也比较吻合。

增加时间步长至 0.2h, 或减小时间步长到 0.002h, 计算结果变化很小。可见对本算例的情况与网格密度, 计算结果对时间步长不太敏感。

4.2 例 2: 二维入渗作用下地下水水位问题 1979 年 Vauclin 发表的二维室内入渗试验^[8]也是检验算法的典型试验。流动区域为 6.00m×2.00m 的厚 0.05m 的土板, 底部为不透水边界, 两侧为自由排水边界。

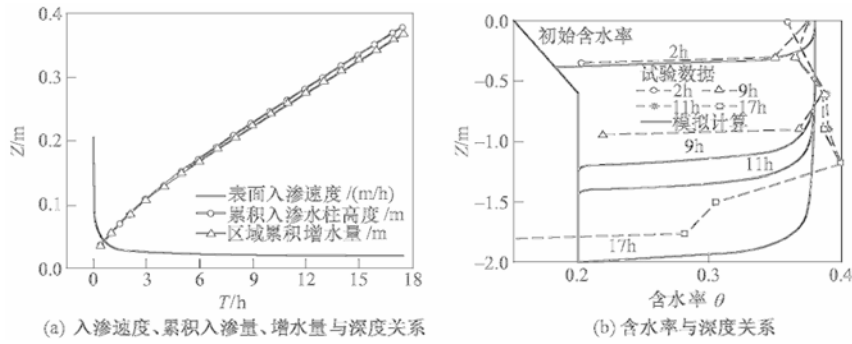


图2 不同时刻入渗速度、累积入渗量与增水量及含水率与深度关系

土体为颗粒分布很规则的河砂,50%筛余量的粒径为0.3mm,干密度1.57g/cm³。饱和含水率0.3,饱和渗透系数0.35m/h。初始水位0.65m,在土槽顶部中间1.00m的范围均匀施加降雨强度0.148m/h共8h,试验中测量流动域内的含水率、水压力、湿润峰、出流量和自由水面位置。直接引用文献[9]根据试验数据回归的本构模型参数见表2。

表2 砂土的土体参数

θ_r	θ_s	α (1/m)	n	K_s (m/h)
0.01	0.30	3.3	4.1	0.35

根据对称性从中线截取区域的右半部分计算,共剖分930个长度为10cm,高6.5cm左右的四边形单元。时间步长0.02h,收敛标准取两次迭代的孔压误差为0.0001m,收敛迭代次数均为2~12次。图3为不同时刻地下水位模拟位置与实测结果的对比,模拟与计算吻合较好。当相对渗透系数按照当前值取值时,计算不能收敛到设定精度。

4.3 例3:二维入渗作用下地下水位模拟问题 Clement等^[9]1994年介绍了Vauclin于1975年发表的关于地下水排水试验的结果,试验装置与例2同。土体的参数见表3,饱和含水率0.30,残余含水率0.00,饱和渗透系数0.4m/h。

表3 砂土的土体参数

θ_r	θ_s	α (1/m)	n	K_s (m/h)
0.00	0.30	3.3	4.1	0.4

与例2土体相比,饱和含水率相等,饱和渗透系数大11%,根据土体的这些参数,推测本实验中所用的土料与例2同,因而采用例2的非饱和参数。地下水位从1.45m瞬时降落到0.75m,并保持边界水位在0.75m位置。计算参数和计算网格与例2同,右侧0.75m以下为已知水头边界,其上部为可能的溢出面边界,处理方法见文献[6]。时间步长0.02h,两次迭代孔压收敛控制标准为0.0001m。迭代收敛次数介于2~6之间。计算得出各时刻的地下水位与实测结果比较如图4,模拟值与试验点测量值的差的平方的平均值的开方仅为 2.85×10^{-2} m,模拟值和实测值吻合较好。

从对以上的3个经典试验的模拟情况看,本文介绍的有限元算法都计算稳定、收敛速度快、计算与试验结果吻合很好。本文的算例中,相对在时步内取几何平均,收敛性更好,结果差别很小。

5 讨论

提出了一种模拟饱和——非饱和土中非稳定渗流计算的一般的有限单元算法,这种算法对算例所

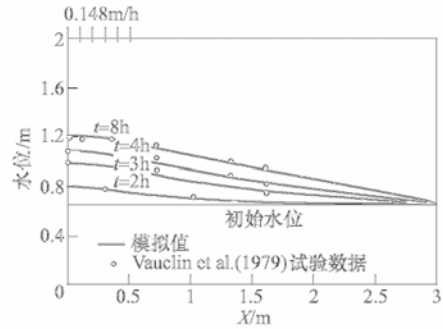


图3 不同时刻地下水位模拟位置与实测结果的对比

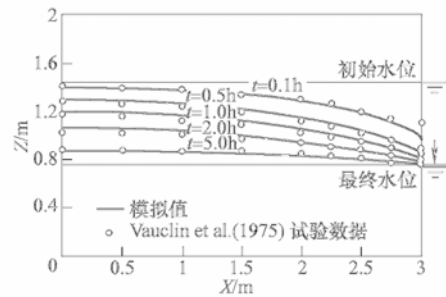


图4 排水试验不同时刻地下水位模拟位置与实测结果的对比

示入渗问题、湿润峰、瞬变的地下水位和稳定渗流问题具有普遍的有效性。突变函数的引入使迭代求解过程中水压力在超越 0 以上的区间变化时其值的变化不引起含水率的变化,从而算法稳定,计算结果质量守恒,收敛效率高。模拟不同经典算例的成功,使我们有理由相信,有限元法在复杂情况下求解 Richards 方程方面依然是可靠、有效的方法。

参 考 文 献:

- [1] Celia M A, Eftimios T B, Rebecca L Z. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation [J]. *Water Resources Research*, 1990, 26(7): 1483—1496.
- [2] McBride D, Cross M, Croft N, Bennett C and Gebhardt J. Computational modeling of variably saturated flow in porous media with complex three-dimensional geometries[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. Published online in Wiley Inter Sciences(www.wiley.com)DOI:10.1002/Fld.1087.
- [3] Richards L A. Capillary conduction of liquids through porous mediums [J]. *Physics*, 1931,1, 318—333.
- [4] Van Genuchten, MTh., A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils [J]. *Soil Sci. Am. J.*, 1980, 44. 892—898.
- [5] Mualem Y. A new model for predicting the conductivity of unsaturated porous media [J]. *Wat. Resour.*, 1976, 12, 513—522.
- [6] 吴梦喜,高莲士. 饱和-非饱和土体非稳定渗流数值模拟[J].*水利学报*,1999(12):38—42.
- [7] Warrick A W, Biggar J W, Nielsen D R, Simultaneous solute and water transfer for an unsaturated soil [J], *Water Resources Research*, 1971, 7(5), 1216—1225.
- [8] Vauclin M, Khanji D, Vauchaud G. Experimental and numerical study of a transient two-dimensional unsaturated-saturated water table problem [J]. *Water Resources Research*, 1979, 15(5): 1089—1101.
- [9] Clement T P, Wise W R, Molz F J. A physically based, two-dimensional, finite-difference algorithm for modeling variably saturated flow [J]. *Journal of Hydrology*, 1994, 161:71—90.
- [10] Simpson M J, T P Clement. Comparison of finite difference and finite element solutions to the variably saturated flow equation[J]. *Journal of Hydrology*, 2003, 270:49—64.

Finite-element algorithm for Richards' equation for saturated-unsaturated seepage flow

WU Meng-xi

(*Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100190, China*)

Abstract: A general numerical algorithm for finite element scheme is developed to solve the Richards' equation for saturated-unsaturated seepage flow, in which an integral method is proposed to approximate the governing equation, and mass lumping techniques are used to keep the numerical simulation stable. The algorithm works well over a wide variety of problems, as demonstrated by its performance against published experimental data. Solutions obtained are mass conservative within the unsaturated zone, resulting from the form and solution procedure for the governing equation. The algorithm is demonstrated to work well for infiltration fronts, steady-state and transient water tables as well as the transient seepage faces. The convergence efficiency of the Picard iteration is very good and no oscillation occurs. The algorithm is presented in sufficient detail to facilitate its easy implementation, and it is validated by comparison with three published, illustrated sets of experimental data.

Key words: Richards' equation; saturated-unsaturated seepage flow; finite element method; transient water table; infiltration

(责任编辑:李琳)