

非线性渗流方程分界面的正则性

李海峰,曹贤通

(中原工学院 数学教研室,河南郑州 450007)

摘 要:本文用 Harnack 不等式研究了具有非线性源和对流项的一般渗流方程正解分界面的 Hölder 连续性.

关键词:非线性源;对流;分界面;Hölder 连续

中图分类号: O175.26

文献标识码: A **文章编号:** 1000-4424(2001)04-0421-07

§ 1 引 言

本文考虑具有非线性源和对流项的较一般的渗流方程

$$u_t - \Delta u^m + b'(x, t, u)D_i u^i = u^p, x \in \mathbf{R}^N, t > 0 \quad (1.1)$$

正解的分界面或自由边界的 Hölder 连续性.

近来,作者在[1]中对方程(1.1)的正解得到了 Harnack 不等式.基于这类 Harnack 不等式,本文证明了其分界面的 Hölder 连续性和初始阶段等待时间的存在性.

许多文章曾经讨论了经典的多孔介质方程 $u_t = \Delta u^m$ 弱解的分界面的正则性,但关于较一般的渗流方程的结果并不多见.例如[2]利用不等式 $u_t \geq -k \frac{u}{t}, k = (m-1 + \frac{2}{N})^{-1}$ 得到上述方程自由边界的 Hölder 连续性.[3]则研究了仅有吸收项的多孔介质方程以 $u_0 \in C_0(\mathbf{R}^N)$ 为初值的 Cauchy 问题分界面的 Hölder 连续性.本文首先得到(1.1)分界面的初始性质即等待时间的存在性,而这是[2,3]所未讨论的问题.接着用在[1]中得到的 Harnack 不等式以及[2,3]不同的技巧,特别是引入了集 Ω_0 (见(1.15)式),利用定理 3.1,在较弱的条件下用简单的方法证明了更为一般的多孔介质方程(1.1)分界面的 Hölder 正则性.

记 $Q_T = \mathbf{R}^N \times (0, T), T$ 为某一正数.令 $\Omega = \{(x, t) | u(x, t) > 0\}, \Omega(t) = \{x \in \mathbf{R}^N | u(x, t) > 0\}, u$ 为方程(1.1)的解.称 $\Gamma = \partial\Omega \cap \{t > 0\}$ 为解 u 的分界面或自由边界.

设(1.1)的系数关于其变元连续可微且满足:

(H) 存在常数 $\lambda_1 \geq 0$ 使得

$$|b^i(x, t, u)| \leq \lambda_1 u^{\frac{m-1}{2}}, \left| \sum_{i=1}^N \frac{\partial b^i}{\partial x_i} \right| \leq \lambda_1. \quad (1.2)$$

定义 1.1 称非负函数 $u(x, t)$ 为方程 (1.1) 在 Q_T 中的弱解, 如果它满足

$$u \in C(Q_T) \text{ 和 } |\nabla u^m| \in L_{\text{loc}}^2(Q_T) \quad (1.3)$$

以及

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{B_R(x_0)} [u \zeta_t - \nabla u^m \nabla \zeta + D_i \zeta \int_0^u b^i(x, t, s) ds + u^k \zeta + \\ & \zeta \int_0^u \frac{\partial b^i}{\partial x_i}(x, t, s) ds] dx dt = \int_{B_R(x_0)} u(x, t) \zeta(x, t) \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} dx, \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中 $0 < \tau_1 < \tau_2 \leq T, \forall \zeta \in C^{1,1}(\overline{B_R(x_0)} \times [0, T])$ 及 $\zeta|_{\partial B_R(x_0) \times [0, T]} = 0, B_R(x_0)$ 是 \mathbf{R}^N 中的任意球; 式中重复指标遵从通常的求和约定.

定义 1.2 一个 \mathbf{R}^N 中的 Radon 测度 μ 称为方程 (1.1) 在 Q_T 中的 Cauchy 问题的初始迹, 如果对于 (1.1) 在 Q_T 中的弱解 u 成立

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^N} u(x, t) \zeta(x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \zeta(x) d\mu, \forall \zeta \in C_0(\mathbf{R}^N). \quad (1.5)$$

对于 $u \in L_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N)$ 或 \mathbf{R}^N 中的 Radon 测度 μ , 使用下列记号^[1] ($\forall r > 0$):

$$\|v\|_r = \sup_{\rho \geq r} \rho^{-\frac{2}{m-1}} \int_{B_\rho} v dx, \quad \|v\|_{or} = \sup_{\rho \geq r} \rho^{-\frac{2}{m-1}} \int_{B_\rho} v dx, \quad (1.6)$$

$$\|\mu\|_r = \sup_{\rho \geq r} \rho^{-\frac{2}{m-1}} \frac{\mu(B_\rho)}{|B_\rho|}, \quad \|\mu\|_{or} = \sup_{\rho \geq r} \rho^{-\frac{2}{m-1}} \mu(B_\rho), \quad (1.7)$$

其中 $B_\rho = \{|x| < \rho\}$, $|B_\rho|$ 表示 B_ρ 的体积, 并且

$$\int_{B_\rho} v dx = \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} v dx.$$

关于方程 (1.1) 以 \mathbf{R}^N 中的某 Radon 测度 μ 为初始迹或有界连续函数 $u_0(x)$ 为初值的 Cauchy 问题弱解的存在性, 我们曾经得到的结果主要是^[1]:

(S1) 设

$$p > 1 \text{ 与 } m > \max \left\{ \frac{2}{N} \sqrt{p} + 1, \frac{2}{N}(p-1) + p \right\}, \quad (1.8)$$

且 (1.1) 的系数在 Q_T 中满足 (H) 时, 对于使得 $\|\mu\|_{or} < \infty$ 的在 \mathbf{R}^N 中给定的 Radon 测度 μ 和 $T^* = T^*(\mu) = \min \left\{ T, \frac{1}{c_1 \|\mu\|_r^{m-1}} \right\}$, 方程 (1.1) 的以 μ 为初始迹的 Cauchy 问题的弱解 u 存在, 并且 u 对于 $0 < t < T^*(\mu)$ 满足如下估计:

$$\|u(\cdot, t)\|_r \leq C_2 \|\mu\|_r, \quad (1.9)$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_r)} \leq C_3 t^{-\frac{N}{\lambda} r^{\frac{2}{m-1}}} \|\mu\|_r^{\frac{2}{\lambda}}, \quad (1.10)$$

$$\iint_{Q_r} u^{m-1} |Du| dx dt \leq C_4 (r^{1+\frac{\lambda}{m-1}} \|\mu\|_r + t^{\frac{1}{2}} \|\mu\|_{or}) t^{\frac{1}{\lambda}} \|\mu\|_r^{\frac{m-1}{\lambda}}, \quad (1.11)$$

其中 $\lambda = N(m-1) + 2$. 当 μ 由 $u_0 \in L^1(\mathbf{R}^N) \cap L^\infty(\mathbf{R}^N)$ 代替时, 结论仍然成立.

(S2) 设条件(H)满足且(1.8)式成立. 令 u 为(1.1)在 Q_T 中的一个弱解. 对某个 $\alpha \in (0, 1]$, $R > 0$ 和使得 $u(x_0, t_0) > 0$ 及 $t_0 > \frac{\alpha R^2}{u(x_0, t_0)^{m-1}}$ 的 $(x_0, t_0) \in Q_T$, 存在常数 $C_i \geq 1 (i=1, 2, 3)$ 仅依赖于 N, m, p 和 λ_1 , 使得如果

$$0 < \frac{R^2}{u(x_0, t_0)^{m-1}} \leq \frac{1}{C_1} \min\{1, \frac{C_1}{C_2}(T - t_0)\}, \quad (1.12)$$

则有

$$\inf_{x \in B_R(x_0)} u(x, t_0 + \frac{C_2 R^2}{u(x_0, t_0)^{m-1}}) \geq \frac{1}{C_3} u(x_0, t_0). \quad (1.13)$$

(S3) 对满足(1.2)(1.8)的方程(1.1)的弱解 $u \in C(\overline{Q}_T)$, 存在 $C_0, C_1 \geq 1$ 仅依赖于 N, m, p, λ_1 , 使得对于 $T_0 \leq \frac{1}{C_0}$, 成立整体 Harnack 不等式

$$\int_{B_r} u(x, 0) dx \leq C_1 \{ (\frac{r^2}{T_0})^{\frac{1}{m-1}} + (\frac{T_0}{r^2})^{\frac{N}{2}} u(0, T_0)^{\frac{\lambda}{2}} \}. \quad (1.14)$$

设 Radon 测度 μ 是 $u(x, t)$ 的初始迹且令

$$\Omega_0 = \{x_0 \in \mathbf{R}^N \mid \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\rho(x_0))}{|B_\rho|} > 0\}. \quad (1.15)$$

记

$$\sigma(x_0, t_0) = \{(x, t) \mid x = x_0, 0 < t < t_0\}. \quad (1.16)$$

首先, 我们得到分界面 Γ 的初始性质:

定理 1.1 假设条件(1.2), (1.8)满足, 若 u 为(1.1)以某 Radon 测度 μ 为初始迹的弱解. 当 $x_0 \in \partial\Omega_0$ 且

$$\overline{\lim}_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-\frac{2}{m-1}} \frac{\mu(B_\rho(x_0))}{|B_\rho|} = \infty \quad (1.17)$$

时, 对 $t > 0$ 有 $(x_0, t) \in \Omega$.

我们还有

定理 1.2 设(1.2), (1.8)满足, 且 u 为(1.1)以某 Radon 测度 μ 为初始迹的弱解, 若 $x_0 \in \partial\Omega_0$ 且对某常数 $C > 0$ 成立

$$\rho^{-\frac{2}{m-1}} \frac{\mu(B_\rho(x_0))}{|B_\rho|} \leq C, \forall 0 < \rho < \infty. \quad (1.18)$$

则存在等待时间 $t^* \in (0, T]$ 使得当 $0 < t \leq t^*$ 时

$$u(x_0, t) = 0. \quad (1.19)$$

定理 1.3 设(1.2), (1.8)满足, u 为(1.1)的弱解且某 Radon 测度 μ 为其初始迹, 则对 $\forall (x^*, t^*) \in \Gamma$, 必有下列两种情形之一发生:

(1) $\sigma(x^*, t^*) \subset \Gamma$, 或者 (2) $\sigma(x^*, t^*) \cap \Gamma = \emptyset$.

定理 1.4 在定理 1.1 的条件满足时, 如果 $(x^*, t^*) \in \Gamma (t^* \geq \eta > 0)$ 使 $\sigma(x^*, t^*)$ 不含有 Γ 的任意点, 则有

$$u(x, t) = 0, \text{ 当 } |x - x^*| < C(t^* - t)^\gamma, t^* - h^* < t < t^*; \quad (1.20)$$

$$\text{万方数据} > 0, \text{ 当 } |x - x^*| < C(t - t^*)^\gamma, t^* < t < t^* + h^*, \quad (1.21)$$

对于正常数 C, h^* 及依赖于 N, m, p 和 λ_1 的正常数 γ 成立.

正如[2]指出的, 此定理蕴含着分界面 $t=S(x)$ 具有以 γ^{-1} 为指数的 Hölder 连续性, 即还有

定理 1.5 设定理 1.1 中的假定满足, 则分界面 Γ 由 Hölder 连续函数

$$t = S(x), \text{ 在 } \mathbf{R}^N \setminus D = \Omega(0) \text{ 中}$$

给出, 进而对任意紧集 $K \subset \mathbf{R}^N$, 若 $K \cap \overline{D} = \emptyset$, 则 $S(x)$ 在 K 中是一致 Hölder 连续的.

下面将在 § 2—§ 4 中给出这些定理的证明.

§ 2 分界面的初始性质

定理 1.1 的证明

设 $x_0 \in \partial\Omega_0$. 不失一般性, 假设 x_0 为原点. 由(S3)中的(1.14)知, $\forall 0 < T_0 < \frac{1}{C_0}$, 有

$$\| \mu \|_r \leq C_1 \left\{ \left(\frac{1}{T_0} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \frac{T_0^{\frac{N}{2}}}{r^{\frac{\lambda}{2(m-1)}}} u(0, T_0)^{\frac{\lambda}{2}} \right\}. \quad (2.1)$$

据条件(1.17)知, 存在 $r_0 > 0$ 使得

$$\| \mu \|_{r_0} \geq 2C_1 \left(\frac{1}{T_0} \right)^{\frac{1}{m-1}},$$

故由(2.1)得 $u(0, T_0) > 0$.

定理 1.2 的证明

设 $x_0 \in \partial\Omega_0$ 为原点. 由假定(1.18)知, 对某常数 F_0 有

$$\sup_{0 < \rho < \infty} \| \mu \|_{\rho} \leq F_0. \quad (2.2)$$

由(S3)中的(1.14)知, $\forall \tau \in (0, \frac{T}{2})$ 成立

$$\int_{B_r} u(x, \tau) dx \leq C \left[\left(\frac{r^2}{T - \tau} \right)^{\frac{1}{m-1}} + \left(\frac{T - \tau}{r^2} \right)^{\frac{N}{2}} u(0, T)^{\frac{\lambda}{2}} \right], \quad (2.3)$$

其中 C 仅依赖于 N, m, p 与 λ_1 . 式(2.3)蕴含着

$$\| u(\cdot, \tau) \|_r \leq C \left[\frac{1}{T^{\frac{1}{m-1}}} + T^{\frac{N}{2}} u(0, T)^{\frac{\lambda}{2}} \right] \triangleq A_T.$$

于是

$$\sup_{0 < s < \frac{T}{2}} \| u(\cdot, s) \|_r \leq A_T. \quad (2.4)$$

因此(S1)中的估计(1.9)–(1.11)成立.

考虑 $u(x, t)$ 为 $\mathbf{R}^N \times [\varepsilon, T]$ ($\forall \varepsilon > 0$) 中的解, 由(1.10), 对

$$\varepsilon < t < T^* = \min \left\{ T, \frac{1}{C_1 \sup_{0 < \tau < \varepsilon} \| u(\cdot, \tau) \|_{\rho}^{\frac{m-1}{\lambda}}} \right\},$$

有

万方数据

$$\| u(\cdot, t) \|_{L^\infty(B_\rho)} \leq C(t - \varepsilon)^{-\frac{N}{\lambda} \rho^{\frac{2}{m-1}}} \| u(\cdot, \varepsilon) \|_{\rho}^{\frac{2}{\lambda}},$$

于是 $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_\rho)} \leq Ct^{-\frac{N}{\lambda}} \rho^{\frac{2}{m-1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(\cdot, \varepsilon)\|_{\rho}^{\frac{2}{\lambda}}.$

设 μ 为 $u(x, t)$ 在 $t=0$ 的迹. 下证

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(\cdot, \varepsilon)\|_{\rho} \leq C \|\mu\|_{\rho}.$$

事实上, 在(1.4)中取 $B_{2\rho}$ 中的截断函数 ζ 为试验函数, 在 B_ρ 中 $\zeta=1$. 则 $\forall 0 < \tau < \varepsilon$, 有

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} u(x, \varepsilon) dx &\leq \int_{B_{2\rho}} u(x, \tau) dx + \frac{C}{\rho} \int_{\tau}^{\varepsilon} \int_{B_{2\rho}} u^{m-1} |Du| dx dt + \frac{C}{\rho} \int_{\tau}^{\varepsilon} \int_{B_{2\rho}} u^{\frac{m+1}{2}} dx dt + \\ &C \int_{\tau}^{\varepsilon} \int_{B_{2\rho}} u dx dt + C \int_{\tau}^{\varepsilon} \int_{B_{2\rho}} u^p dx dt \leq \int_{B_{2\rho}} u(x, \tau) dx + C \int_{\tau}^{\varepsilon} \rho^{N+\frac{2}{m-1}} (t-\tau)^{\frac{1}{\lambda}} \times \\ &[1 + (t-\tau)^{\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{m+1}{m-1}}] \cdot \|u(\cdot, t)\|_{\rho}^{\frac{m-1}{\lambda}+1} dt + C \int_{\tau}^{\varepsilon} \rho^{N+\frac{2}{m-1}} (t-\tau)^{-\frac{N}{2\lambda}(m+1)} \|u\|_{\rho}^{\frac{m+1}{\lambda}} dt + \\ &C \int_{\tau}^{\varepsilon} \rho^{N+\frac{2}{m-1}} (t-\tau)^{-\frac{N}{\lambda}} \|u(\cdot, \tau)\|_{\rho}^{\frac{2}{\rho}} dt + C \int_{\tau}^{\varepsilon} \rho^{N+\frac{2}{m-1}} (t-\tau)^{-\frac{N}{\lambda}p} \|u(\cdot, t)\|_{\rho}^{\frac{2p}{\rho}} dt, \end{aligned}$$

令 $\tau \rightarrow 0$ 得

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} u(x, \varepsilon) dx &\leq (2\rho)^{N+\frac{2}{m-1}} \|\mu\|_{\rho} + C_2 \varepsilon^\beta \rho^{N+\frac{2}{m-1}} \times \\ &\max\left\{\sup_{0 < t < \varepsilon} \|u(\cdot, t)\|_{\rho}^{\frac{m-1}{\lambda}+1}, 1\right\} \{1 + \varepsilon^k \rho^{-\frac{m+1}{m-1}}\}, \end{aligned}$$

其中 $0 < \beta = \min\{\frac{1}{\lambda}, 1 - \frac{N}{2\lambda}(m+1)\}$, $k > 0$, 即

$$\|u(\cdot, \varepsilon)\|_{\rho} \leq 2^{N+\frac{2}{m-1}} \|\mu\|_{\rho} + \tilde{C} \varepsilon^\beta (1 + \varepsilon^k \rho^{-\frac{m+1}{m-1}}).$$

因此 $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u(\cdot, \varepsilon)\|_{\rho} \leq 2^{N+\frac{2}{m-1}} \|\mu\|_{\rho}.$

于是对 $0 < t \leq T^* = \min\{\frac{1}{C_1 F_0^{m-1}}, T\}$ 可得

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_\rho)} \leq C_2 t^{-\frac{N}{\lambda}} \rho^{\frac{2}{m-1}} \|\mu\|_{\rho}^{\frac{2}{\rho}} \leq C_2 F_0^{\frac{2}{\rho}} t^{-\frac{N}{\lambda}} \rho^{\frac{2}{m-1}}, \quad (2.5)$$

其中 C_1 与 C_2 为不依赖于 ρ 的常数. 固定 $t \in (0, T^*)$, 令 $\rho \rightarrow 0$ 即得 $u(x, t) = 0$, 这就证明了存在等待时间 t^* 且 $t^* \geq T^*$.

§ 3 分界面的正则性

用与[4,5]类似的方法, 可以证明如下定理.

定理 3.1 假设条件(1.2), (1.8)满足. 若 $u(x, t)$ 是方程(1.1)的弱解, 则存在仅依赖于 N, m, p 和 λ_1 的常数 a , 使得如果

$$\sup_{Q_R(M)} u(x, t) \leq M, \quad (3.1)$$

其中 $Q_R(M) = B_R(x_0) \times (t_0 - \frac{aR^2}{M^{m-1}}, t_0] \subset Q_T$, 对某 $M > 0$. 则有

$$u(x_0, t) \leq C \inf_{x \in B_R(x_0)} u(x, t_0 - \frac{aR^2}{M^{m-1}}), t \in (t_0 - \frac{aR^2}{M^{m-1}}, t_0], \quad (3.2)$$

其中常数 $C \geq 0$ 仅依赖于 M, N, m, p, T, λ_1 和 Q .

证 使用[4,5]中的 Moser 迭代方法,由(3.1)可得如下 Harnack 不等式

$$\sup_{Q_R(M)} u(x, t) \leq C \inf_{Q_R(M)} u(x, t),$$

由此即得定理中的(3.2).

定理 1.3 的证明

假设结论不成立,则存在 $t_1, t_2: 0 < t_1 < t_2 < t^*$, 使得

$$(x^*, t_2) \in \Gamma, (x^*, t_1) \in \overline{\Omega}. \quad (3.3)$$

不失一般性,我们可以假设 $t^* - t_1$ 很小且对任意给定的较大的常数 A , 有

$$t_2 - t_1 \leq \frac{1}{A}(t^* - t_2). \quad (3.4)$$

因为 $(x^*, t_1) \in \overline{\Omega}$, 则必存在 $R > 0$, 使得

$$u(x, t_1) = 0, \text{ 在 } B_R(x^*) \text{ 中.}$$

如果

$$\sup_{B_R(x^*) \times (t_1, t_2)} u \leq M \triangleq \left(\frac{aR^2}{4(t_2 - t_1)} \right)^{\frac{1}{m-1}}, \quad (3.5)$$

其中 a 为定理 3.1 中的常数,由定理 3.1 得

$$u(x, t) = 0, x \in B_{\frac{R}{2}}(x^*), t_1 < t \leq t_1 + \frac{a}{M^{m-1}} \left(\frac{R}{2} \right)^2 = t_2.$$

这同 $(x^*, t_2) \in \Gamma$ 及 Γ 的定义即 $u(\bar{x}, t_2) > 0$ (存在 $\bar{x} \in B_{\frac{R}{2}}(x^*)$) 的事实矛盾. 因此有

$$\sup_{B_R(x^*) \times (t_1, t_2)} u > M.$$

因为 u 在 Q_T 中连续,故存在点 $(x_0, t_0) \in \overline{B_R}(x^*) \times [t_1, t_2]$ 使得 $u(x_0, t_0) = M$. 由局部 Harnack 不等式(1.13)得

$$\frac{C_2 R^2}{M^{m-1}} \geq T - t_0 \text{ 或 } \inf_{x \in B_R(x_0)} u(x, t_0 + \frac{C_2 R^2}{M^{m-1}}) \geq \frac{1}{C_3} u(x_0, t_0) > 0.$$

由于 $(x^*, t^*) \in \Gamma$ 与 $x \in B_R(x_0)$, 必有 $t_0 + \frac{C_2 R^2}{M^{m-1}} > t^*$, 从而 $t_2 + \frac{C_2 R^2}{M^{m-1}} > t^*$. 由 M 的定义(3.5)

式得到 $\frac{C_2(t_2 - t_1)}{a} > t^* - t_2$, 这与取 $A = \frac{C_2}{a}$ 的(3.4)式矛盾. 定理 1.3 得证.

定理 1.4 可用[2]中的方法证明.

参考文献:

- [1] 李海峰,江成顺. 具有强非线性源与对流项的多孔介质方程的 Harnack 不等式和初始迹[J]. 南京大学学报(数学半年刊),1996,2:231~241.
- [2] Caffarelli L A, Friedman A. Regularity of the free boundary of a gas flow in an n -dimensional porous medium[J]. Indiana Univ. Math. J., 1980,29:361~389.
- [3] Yuan Hongjun. Hölder continuity of interfaces for the porous medium equations with absorption [J]. Commun. in PDE, 1993,58(6):965~976.
- [4] 李海峰,万丹数据. 具有强非线性源和对流的多孔介质方程的一类 Cauchy 问题(英文)[J]. 数学季刊,1997,2:42~50.

[5] 陈亚浙,吴兰成. 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组[M]. 北京:科学出版社,1991.

REGULARITY OF INTERFACES FOR THE NONLINEAR FILTRATION EQUATIONS

LI Hai-feng CAO Xian-tong

(Dept. of Math., Zhongyuan Institute of Technology, Zhengzhou 450007, China)

Abstract: With the Harnack inequality the Hölder continuity of the interfaces for positive solutions of general filtration equations with nonlinear sources and convections terms is studied.

Key Words: Nonlinear Sources; Convections; Interface; Hölder Continuity

Subject Classification: 35K55

田 万方数据
WANFANG DATA