

中華水土保持學報編審委員會

JOURNAL OF THE CHINESE SOIL AND WATER
CONSERVATION, EDITORIAL COMMITTEE

水字第20299號

馮教授大鑒：

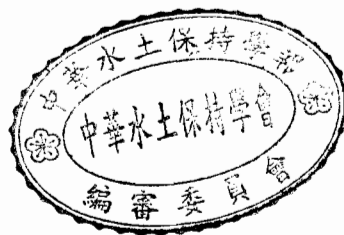
台端研究著作初稿已經通過審查，訂於中華水土保持學報第三十七卷第二期刊出，謹訂於九十五年六月出刊，承蒙 台端鼎力支援，惠賜稿件，謹申謝忱。

為因應投稿作者引用文獻之需求，凡經本學會編審委員會通知錄取之文章稿件，即視同已刊登於所告知之該期學報中，各作者得逕自引用本學報，特此為證。不便之處，敬祈希諒！簡此敬祝

大安

題目：利用有線差分法配合試算表求解滲流、壓密與波傳問題

作者：馮正一 梁家齊 張育瑄



總編輯 陳樹群 敬上
94年9月28日

利用有限差分法配合試算表求解滲流、壓密與波傳問題

馮正一^[1] 梁家齊^[2] 張育瑄^[2]

Application of Finite Difference Method with Spreadsheet to Solve Seepage, Consolidation and Wave Propagation Problems

Zheng-yi Feng^[1] Jia-Chi Liang^[2] Yu-hsuan Chang^[2]

[1] 國立中興大學水土保持學系助理教授（通訊作者）

Assistant Professor, Department of Soil and Water Conservation, National Chung Hsing University, Taichung 402, Taiwan,

R.O.C. (Corresponding Author)

Email: tonyfeng@dragon.nchu.edu.tw

[2] 國立中興大學水土保持學系碩士班研究生

Graduate student, Department of Soil and Water Conservation, National Chung Hsing University, Taichung 402, Taiwan,

R.O.C.

摘 要 本研究探討如何應用有限差分法配合試算表求解偏微分方程式，對於一般常見之橢圓型、拋物線型、雙曲線型等三種偏微分方程式，舉出地下水滲流、土壤壓密沉陷、地盤震動與波浪傳遞等工程問題的應用案例，由試算表快速地建立有限差分法之網格點進行求解，並與解析解加以驗證，其結果顯示以有限差分法配合試算表計算所得之數值與解析解相當接近。有限差分法以試算表語法來撰寫相當快速容易，且可即時繪圖檢視結果。本研究所建立之試算表程式富修改彈性以反應各種不同的起始與邊界條件，可直接應用在滲流、壓密沉陷與波傳等實際工程問題之分析上，為一有效率的工具。

關鍵詞：有限差分法、試算表、偏微分方程式、滲流、壓密、波傳。

Abstract This paper discusses how to apply finite difference method (FDM) with spreadsheet to solve partial differential equations (PDE) of elliptic, parabolic and hyperbolic types. Examples of groundwater seepage, soil consolidation, earthquake shear stress wave propagation and sea wave propagation are illustrated. They are solved by the FDM with the proposed spreadsheet models. The numerical results obtained by the spreadsheet model are verified by analytical or other numerical solutions with satisfactions. The setup of the spreadsheet model for solving PDEs is quick and easy and the plots can be viewed immediately. The spreadsheet for PDEs in this study is full of flexibility for modification to reflect various initial and boundary conditions. The spreadsheet model developed is an effective tool and can be readily applied in solving practical engineering problems such as seepage, consolidation and wave propagation.

Keywords: finite difference method, spreadsheet, partial differential equation, seepage, consolidation, wave propagation.

一、前言

對於地下水滲流、地盤下陷、地震彈性波傳遞與淺水長波傳遞等物理現象，可用偏微分方程式來描述，作為該課題控制方程式，其求解方法有解析解與數值解兩種。由於解析解常需將邊界條件與起始條件簡化才易於導出並假設許多條件，因此在面對複雜的起始條件與邊界條件而無法求得解析解時，常採用數值解，而數值解一般為近似解。由於數值方法解常需撰寫程式或使用相關套裝軟體才得以進行計算，但撰寫程式一般耗時較長且除錯不易，若無較好的程式基礎，即使知道數值方法之理論，仍不易完成問題之計算。

Foxes Team (2005) 介紹試算表求解 Laplace Equation、Wave Equation、Heat Equation 等三種偏微分方程式數值方法。簡單說明試算表的設定方法，以及各種偏微分方程式在試算表中邊界條件與初始條件的設定，並以圖形表示在試算表中各網格值的計算方式，但對於 Dirichlet Boundary 並無介紹。

Lehre (2004) 根據“successive over-relaxation”方法對“Poisson's equation”進行求解試算表，來求解簡單之抽水井問題，可應用在均質、等向之含水層，包含了拘束含水層與非拘束含水層，能分析抽水後地下水位變化關係。Hutchens and Gupta (2000) 應用試算表來分析二維熱傳方程，包含了非線性熱傳問題，配合自行撰寫之 VBA 程式可求解二維穩態溫度變化關係。

本研究以常用之電子試算表 (Excel) 計算偏微分方程式之數值解，使本研究可用試算表工具配合有限差分法來瞭解前述各物理問題。簡單的公式解決數值問題。本研究首先介紹偏微分方程式有限差分顯性解之數值方法，範圍包含橢圓型 (Elliptic Equation)、拋物線型 (Parabolic Equation)、雙曲線型 (Hyperbolic Equation) 等三種常見之偏微分

方程式，再詳細說明應用試算表進行數值解的方法，再分別舉例三種偏微分方程式應用在實際物理問題上的案例，並將試算表所得之近似解與解析解或其它方法數值解進行比較，探討本研究有限差分法之準確性。本研究以試算表應用有限差分法解題，可大幅簡化撰寫程式的複雜度，在瞭解各微分方程式所代表的物理意義上，應有相當大的助益。

二、基本理論與研究方法

對於前述之物理現象之二階偏微分方程式，本研究就其有限差分顯性解之數值方法以及應用於試算表的步驟，分別詳細介紹如下：

二階偏微分方程的通式為 (Kreyszig, 1999)：

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

其中當 $B^2 - 4C < 0$ 為橢圓型偏微分方程式， $B^2 - 4C = 0$ 為拋物線型偏微分方程式， $B^2 - 4C > 0$ 為雙曲線型偏微分方程式，各微分方程以數值方法解之過程如下。

1. 橢圓型偏微分方程

橢圓型微分方程之應用之一為 Laplace Equation，工程應用為侷限含水層地下水滲流之控制方程式，即

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Harr (1990) 根據有限差分法發展出“Relaxation Method”，結合試算表應用於求解滲流問題之 Laplace 偏微分方程式，只要於試算表欄位中輸入各網格點之公式即可求得有限差分法之解，對於一般侷限含水層地下水滲流問題，均能以 Relaxation Method 來求解，此方法能有效地簡化解題的難度。

求解時必需給定邊界條件，且考量網格點 (i, j) 處之差分公式，令 x 方向增量 $\Delta x = h$ ， y 方向分增量 $\Delta y = k$ ，以顯性數值方法求解，

將二階偏微分方程以中央差分法近似得 Laplace Equation 公式 (1) 之差分公式：

$$\nabla^2 u_{i,j} = \left[\frac{r^2 u_{i-1,j} + r^2 u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 2(1+r^2)u_{i,j}}{r^2 h^2} \right] \quad (2)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, m$$

$$\text{其中 } r = \frac{k}{h}$$

假設網格點間長度 $Dx = Dy$ 即 $r = 1$ ，則公式 (2) 可改為下式

$$\nabla^2 u_{i,j} = \left(\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} \right) = 0 \quad (3)$$

移項可得

$$u_{i,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{4} \quad (4)$$

以試算表進行求解時，首先要根據問題的描述，定義邊界條件，之後再依照公式 (4) 輸入非邊界上之網格點，其值為該網格點相鄰上下左右四個網格點之平均，如圖 1a 所示為

$$f_1 = \frac{1}{4}(f_2 + f_3 + f_4 + f_5) \quad (5)$$

其中 f 即表示 u 之解，及水壓力(水壓勢能值)

邊界條件本研究只考慮 Dirichlet Boundary 以及 Neumann Boundary 兩種，在 Dirichlet Boundary 方面，網格點的計算方法與公式 (5) 相同。Neumann Boundary 代表 Flux (通量) 指定，如果 $\text{Flux} = 0$ ，代表不透水層(如岩盤面)而 Neumann Boundary 的計算方式，則有下列幾種情況：

- (1) 網格點位於單一 Neumann Boundary：此類型之邊界條件之計算方式如圖 1b 所示為

$$f_6 = \frac{1}{4}(f_7 + f_8) + \frac{1}{2}(f_9) \quad (6)$$

- (2) 網格點位於兩個 Neumann Boundary 交界處：此類型之邊界條件之計算方式如圖 1c 所示為

$$f_{10} = \frac{1}{2}(f_{11}) + \frac{1}{2}(f_{12}) \quad (7)$$

- (3) 網格點位於板樁底部時：此類型之邊界條件之計算方式如圖 1d 所示為

$$f_{15} = \frac{1}{4}(f_{13} + f_{16} + f_{18}) + \frac{1}{8}(f_{14} + f_{17}) \quad (8)$$

其中“虛欄位”為故意建立，以對應上方之板樁網格點，不會造成不連結。

2. 拋物線型偏微分方程式

拋物線型微分方程式以熱傳方程式 (Heat Conduction Equation) 為代表，工程應用上可為土壤壓密沉陷的控制方程式，即：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < z < H, \quad t > 0 \quad (9)$$

求解時必需給定邊界條件與起始條件，且考量網格點 (i, j) 處之差分公式，將 z 值域部份等分為 n 段，則 $Dz = h = L/n$ ，並令時間 t 方向增量 $Dt = k$ 。以顯性數值方法求解，將空間項之二階偏微分以中央差分法改寫，時間項之一階偏微分以前進差分法改寫，並代入公式 (9) 中可得：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} \end{aligned} \quad (10)$$

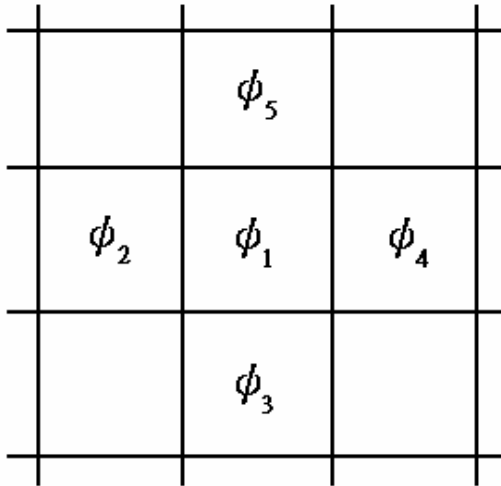
移項整理得

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= a^* u_{i-1,j} + (1 - 2a^*) u_{i,j} \\ &\quad + a^* u_{i+1,j} \end{aligned} \quad (11)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, m$$

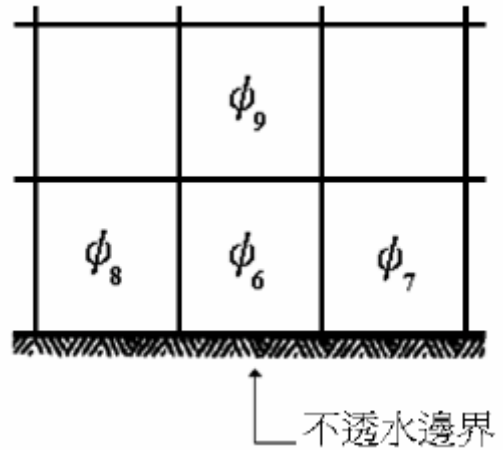
其中 $a^* = a^2 k / h^2$ ，式中之 h 及 k 的大小可自行決定，但為了確保所求得之值能收斂，必須使 $0 < a^* < 1/2$ 才能使顯性解穩定。要在試算表內建立有限差分網格點，需在試算表 (Excel) 內以欄位 (cell) 來儲存有限差分網格點值。本研究是以 Excel“欄”作為空間方向之增量 i ，Excel 列作為時間方向之增量 j 。計算時首先要根據要求解問題的初始條件與邊界條件描述來輸入。初始條件一般定義為



$$f_1 = \frac{1}{4}(f_2 + f_3 + f_4 + f_5)$$

圖 1a 非靠近邊界之網格點勢能值

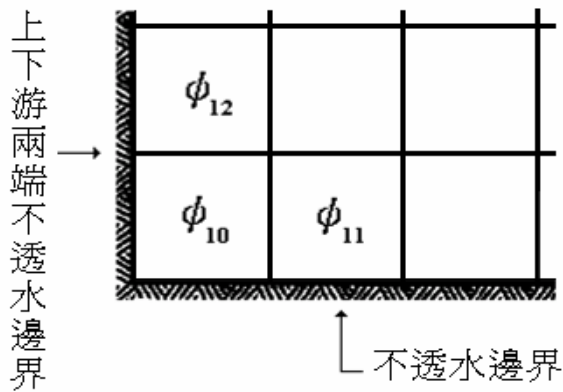
Fig.1a Potential of grid point not at boundary



$$f_6 = \frac{1}{4}(f_7 + f_8) + \frac{1}{2}(f_9)$$

圖 1b 單一不透水邊界之網格點勢能值

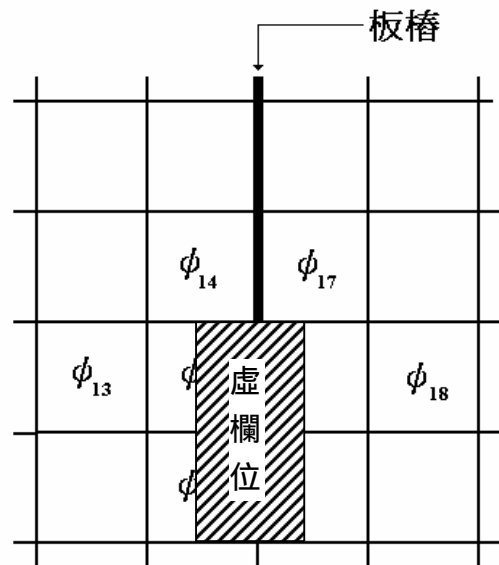
Fig.1b Potential of grid point at one impervious boundary



$$f_{10} = \frac{1}{2}(f_{11}) + \frac{1}{2}(f_{12})$$

圖 1c 兩個不透水邊界之網格點勢能值

Fig.1c Potential of grid point at two impervious boundary



$$f_{15} = \frac{1}{4}(f_{13} + f_{16} + f_{18}) + \frac{1}{8}(f_{14} + f_{17})$$

圖 1d 板樁底部之網格點勢能值

Fig.1d Potential of grid point at the bottom of sheetpile

$u(x,0)=f(x)$ ，在網格點中直接於 $t=0$ 的網格點輸入 $f(x)$ 的值即可。在邊界條件方面，本研究只考慮 Dirichlet Boundary 以及 Neumann Boundary 兩種，當邊界條件為 Dirichlet Boundary 時，若其值為 $u(0,t)=0$ 或 $u(H,t)=0$ ，輸入時直接於 Excel 欄位中鍵入數值“0”即可。要注意的是當邊界為 Neumann Boundary 時，利用中央差分近似一階微分值得

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z_n, t_j) = \frac{-u_{n-1,j} + u_{n+1,j}}{2h} = f_n \quad (12)$$

其中空間註標第 n 點為邊界點，將公式 (12) 代入公式 (11) 可得

$$u_{n,j+1} = 2a^* u_{n-1,j} + (1-2a^*)u_{n,j} + 2ha^* f_n \quad (13)$$

若 $f_i = 0$ (如 $u_z(H,t)=0$ ，代表不透水岩盤)，則

$$u_{n+1,j} = u_{n-1,j} \quad (\text{第 } n+1 \text{ 網格點內的值等於該邊界前一網格點(} n-1 \text{)內的數值}) \quad (14)$$

將公式 (14) 代入公式 (13) 可得

$$u_{n,j+1} = 2a^* u_{n-1,j} + (1-2a^*)u_{n,j} \quad (15)$$

其實前述之 Laplace Equation 的 Neumann 邊界條件亦是用此方式來計算，只是其效應已隱含入公式 (6)(7)(8) 之中，不再贅述。初始條件以及邊界條件給定後，其餘網格點可依照公式 (11) 輸入計算式來進行求解。

3. 雙曲線型偏微分方程

雙曲線型微分方程應用之一為波動方程式 (Wave Equation)，即：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (16)$$

求解時一樣必需給定邊界條件與起始條件，且考量網格點 (i, j) 處之差分公式，將 x 值域部份等分為 n 段，則 $\Delta x = h = L/n$ ，並令時間

t 方向增量 $\Delta t = k$ 。以顯性數值方法求解，空間項與時間項之二階偏微分方程式均以中央差分近似，如此公式 (16) 之偏微分方程可改寫為下列之差分型式：

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} = \frac{1}{c^2} \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2} \quad (17)$$

移項整理得

$$u_{i,j+1} = a^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + 2(1-a^2)u_{i,j} - u_{i,j-1} \quad (18)$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n$
 $j = 0, 1, 2, \dots, m$

其中 $a^2 = c^2 k^2 / h^2$ ，式中之 h 及 k 的大小可自行決定，但為了確保所求得的值能收斂，所以必須使 $0 < k^2 / h^2 < 1$ 才能使顯性解穩定。試算表所建置之有限差分網格點，如前述拋物線型偏微分方程式本研究之試算表設定方式，是以“欄”作為 x 方向之增量 i ，列作為 t 方向之增量 j 。計算時首先要根據欲求解問題的描述，輸入初始條件以及邊界條件，其方法與拋物線型微分方程式相同，其餘網格點可根據公式 (18) 的方法輸入計算式來進行求解。要注意的是由於公式 (18) 之時間間隔 (time steps) 引用到第 $j-1$ 時間，所以 $u_{i,1}$ 的網格點在計算時會出現無 $u_{i,-1}$ 的值可供輸入的情況，所以要在 $u_{i,-1}$ 處建立一虛擬 Excel 欄位 V_i (初始速度項) 後才可繼續計算，其欄位內的值可由初始條件 $u_t(x_i, t_0) = V_i$ 利用中央差分近似一階微分值得，即

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_0) &\approx \frac{-u_{i,-1} + u_{i,1}}{2\Delta t} \\ &= \frac{-u_{i,-1} + u_{i,1}}{2k} = V_i \end{aligned} \quad (19)$$

將公式 (19) 代入公式 (18) 可得

$$u_{i,1} = \frac{a^2}{2} (U_{i+1} + U_{i-1}) + (1-a^2)U_i + kV_i \quad (20)$$

波傳偏微分方程式亦有 Dirichlet 與 Neumann Boundary 兩種。邊界條件若為 Dirichlet Boundary 則可直接在 Excel 欄位中輸入其所給定之值，若為 Neumann Boundary 則可利用中央差分近似一階微分得差分式，同第 2 之 1 節之公式 (12)：

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z_n, t_j) = \frac{-u_{n-1,j} + u_{n+1,j}}{2h} = f_n$$

其中註標第 n 點為邊界點，經移項後得

$$u_{n+1,j} = 2hf_n + u_{n-1,j} \quad (21)$$

將公式 (21) 代入公式 (18) 之 $u_{i,j+1}$ ，即可得邊界網格點所需要指定的公式。若 f_i 值不為零，公式 (21) 中試算表在做運算時要再增加一欄，設定 f_i 後才可計算。如公式 (21) 中的 $f_i = 0$ ，則公式 (21) 可進而簡化成 $u_{i+1,j} = u_{i-1,j}$ ，則不需增加一欄即可計算。

三、滲流、壓密與波傳問題的應

用案例

1. 橢圓型偏微分方程式－板樁地下水滲流分析

土壤中的地下水會因水壓勢能高低而產

生流動，由於滲流會造成地下水位的變化，進而影響邊坡或一般基礎之穩定，因此在有滲流情況下做安定分析時，探討其滲流情況是必需的。如果土壤為均質性、等向性且土壤水分為不可壓縮，即可利用達西定律 (Darcy's Law) 推導水分在土壤內滲流的控制方程式 (Laplace 方程式)，其公式如下：

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (22)$$

其中 h 為水頭高。將公式 (22) 以前述之顯性有限差分數值方法進行求解，可求出各網格點之水力坡降 (Hydraulic Gradient)，進一步求出滲流量。以試算表進行計算時，首先訂定 x 方向與 y 方向空間增量的大小，本研究必需設定兩者的值相等，即 $D_x = D_y$ ，再依照問題之邊界條件設定試算表。

本研究案例模擬一板樁，貫入土壤 18 公尺，上下游水位高差 10 公尺，位於土層下方 36 公尺處為不透水之岩盤，土層之水力傳導係數 $k_1 = k_2 = 0.03 \text{ m/sec}$ ，上下游兩端之邊界計算至 50 公尺，假設蓄水因上游河川補注量與滲流損失量相同，所以水位高不變，如圖 2 所示。依照上述計算方法，假設 x 方向之增量與

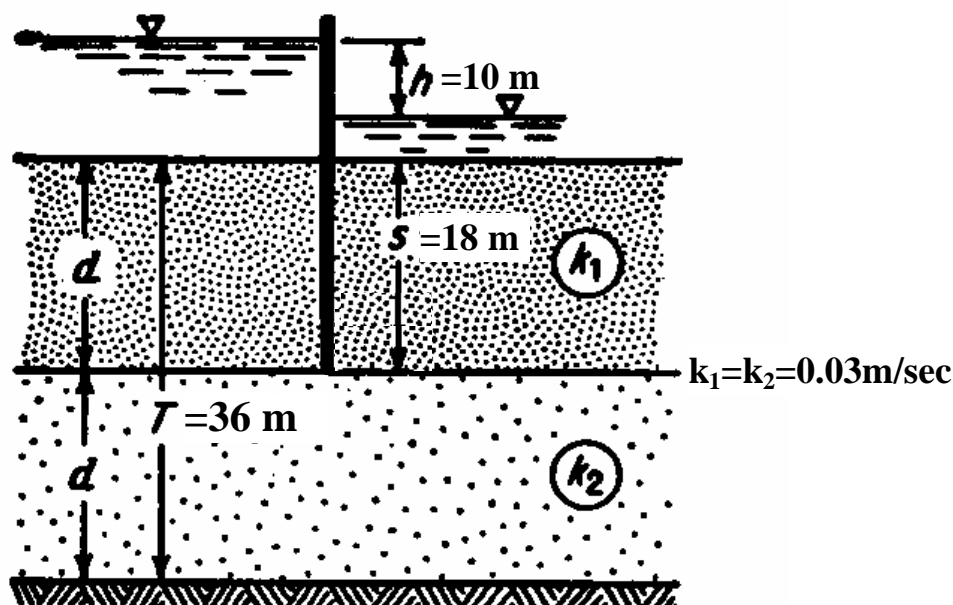


圖 2 板樁地下水滲流分析案例(修改自 Harr, 1990)

Fig.2 Example of groundwater seepage of sheetpile (modified from Harr, 1990)

y 方向之增量均為 1 公尺，在試算表中輸入邊界條件及各之計算公式，如圖 3 所示。設定迭代最大誤差為 0.00001，進行反覆計算 10000 次，所得結果如圖 4 所示。若將各數值相等之 Excel 欄位標示出來，可隱約看出等勢能線之分布狀況。其中位於板樁下游 I_e 之水力坡度為 0.16。滲流損失量 q 的計算方式為板樁底部以下至不透水岩盤延伸線兩側之 Excel 欄位，以左側欄位之總合減去右側欄位總合得到一差值，再將差值乘以水力傳導係數即得 q ，本案例計算所得的 q 值為 0.13。

為了驗證本研究所採用研究方法的準確性，本研究將試算表計算所得之有限差分近似解結果與解析解進行比較。經試算表計算所得之板樁下游出口處水力坡度 I_e 為 0.16，將所得之近似解結果與 Polubarinova-Kochina (Harr, 1990) 求得之解析解進行比較，由於解析解已繪製成圖，因此其值可藉由查圖得知，如圖 5 所示。其中 e 可由下式得知

$$\tan pe = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

在本案例中已知 $k_1 = k_2$ ， e 經計算所得為 0.25，而 s/t 則為 0.5。經查圖得知 $I_e T/h = 0.6$ ，故 I_e 值經計算後所得為 0.16，與試算表計算所得結果相同。另外經試算表計算所得之下游處出水量 q 為 0.13，由圖 6 得知 $q/k_1 h = 0.5$ ，解析解計算所得 q 為 0.15，兩者誤差約 12%。

2. 拋物線型偏微分方程式-土層壓密沉陷分析

土層在受到載重後，會因為應力的增加產生超額孔隙水壓造成壓密沉陷，沉陷過程可分為瞬時沉陷、主要壓密沉陷、次壓密沉陷等三種。沉陷開始之際為瞬時沉陷，由土層彈性變形所造成，而後發生之主壓密沉陷，是因土層中之水分受壓產生超額孔隙水壓，由排水所產生的體積變化而來，其沉陷速率與土層滲透係

數有關。在透水性高的砂土層中，受壓之超額孔隙水壓能快速的排出，使主要壓密過程能在短期內完成。相對地在透水性低的黏土層中，因其水力傳導度低，導致受壓之超額孔隙水壓無法快速的排出，所以主要壓密沉陷往往需要很長的時間來進行。次壓密沉陷發生於排水過程結束後，是土層顆粒進行重新排列的結果。根據 Terzaghi 單向度壓密理論所得之結果，飽和黏土層之單向度主要壓密方程式(與一維熱傳方程式相同)，其公式如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < z < H, \quad t > 0 \quad (23)$$

其中 z 為土層深度， t 為壓密時間， u 為超額孔隙水壓，其中 $1/a^2 = C_v$ = 壓密係數。假設壓密係數 (C_v) 為定值，將公式 (23) 依先前 2 之 2 節介紹之方法以差分形式表示，由有限差分網格點進行求解，可求出各網格點經過“ t ”時間壓密後，不同深度“ z ”之超額孔隙水壓。再進一步可積分消散掉之孔隙水壓求得平均壓密度 (U)。在試算表中進行計算時，首先訂定 x 方向深度的增量“ h ”以及 y 方向時間的增量“ k ”的大小。依據工程問題初始條件與邊界條件設定，而其餘網格點由公式 (11) 之計算式進行求解。在初始條件方面，一般定訂 $u_{i,0}$ = 超額孔隙水壓值，表示剛開始壓密時，各網格點初始超額孔隙水壓值。在邊界條件方面，若飽和黏土層邊界為透水性高之砂土層，則 B.C. 訂定為 $u_{i,j} = 0$ ，代表邊界處因排水而無超額孔隙水壓，在試算表中輸入的時候，位於邊界處之各 Excel 欄位輸入數值“0”即可。若邊界為不透水之岩層 (Neumann Boundary)，則訂定 $u_z(H, t) = 0$ 。如前述 2 之 2 節以公式 (15) 輸入邊界網格點，設定不透水邊界。

整個黏土層平均壓密度的求法可根據 Taylor (1948) 所提出的近似解來求得

當 $U < 60\%$ 時

$$T_v = \frac{p}{4} U^2 \quad (24)$$

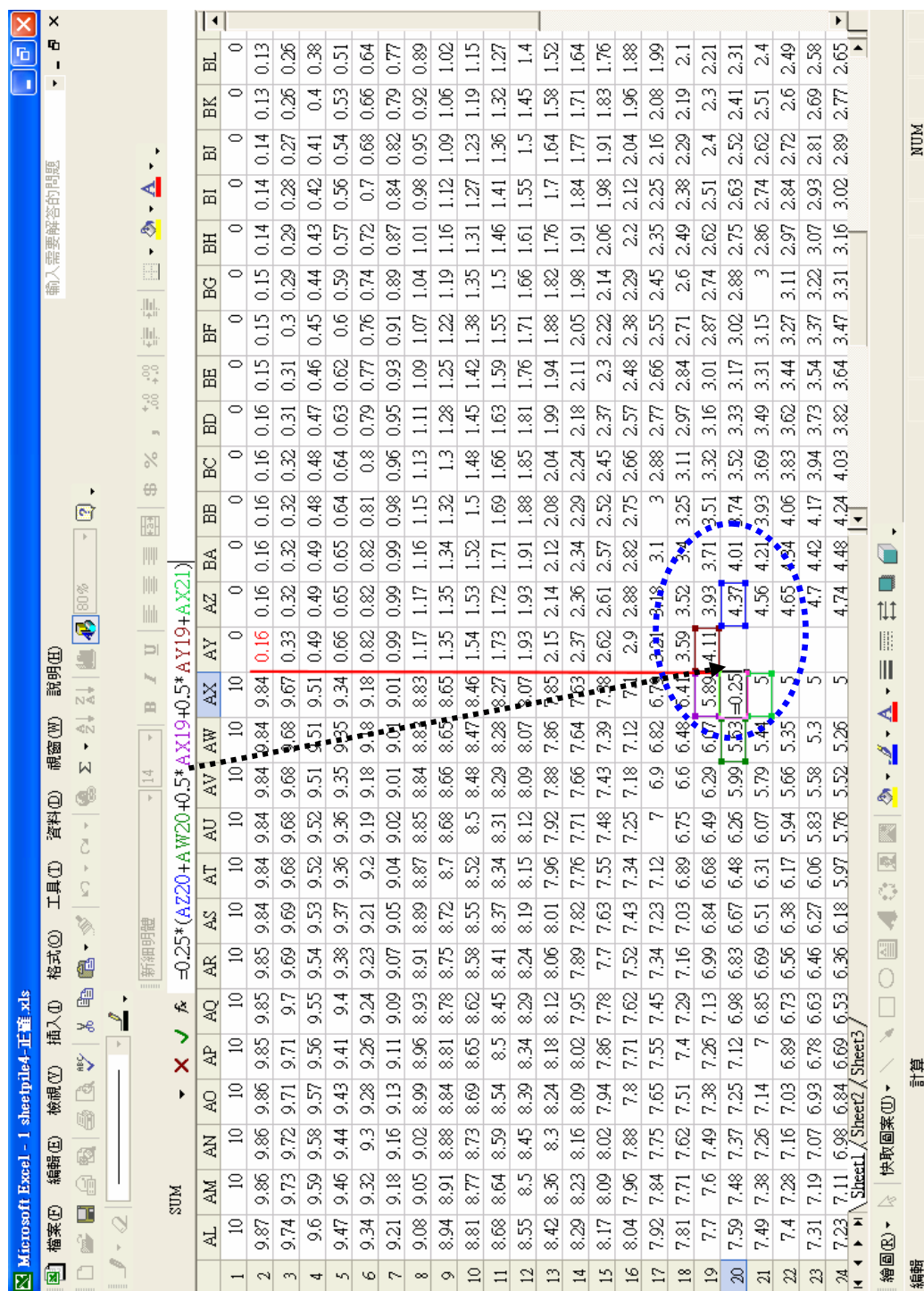
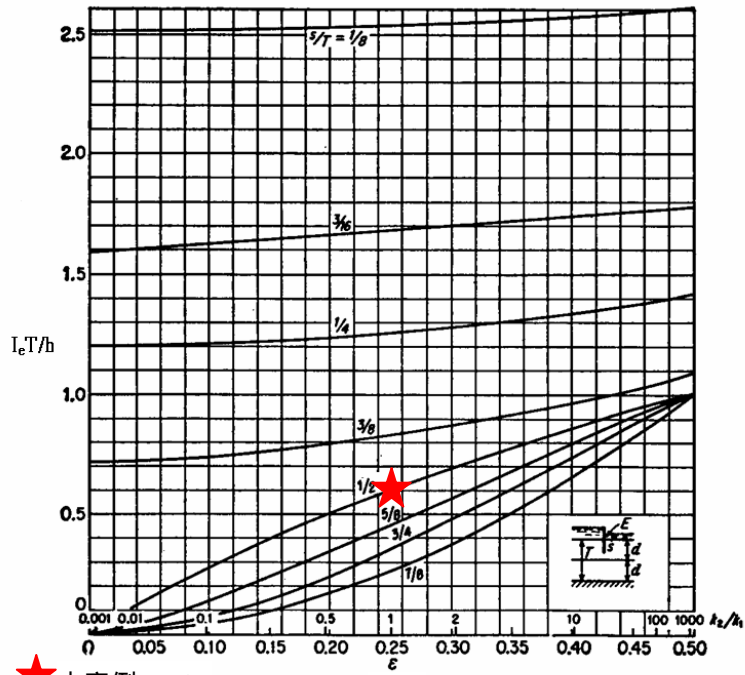


圖 4 板樁案例之試算表有限差分計算結果

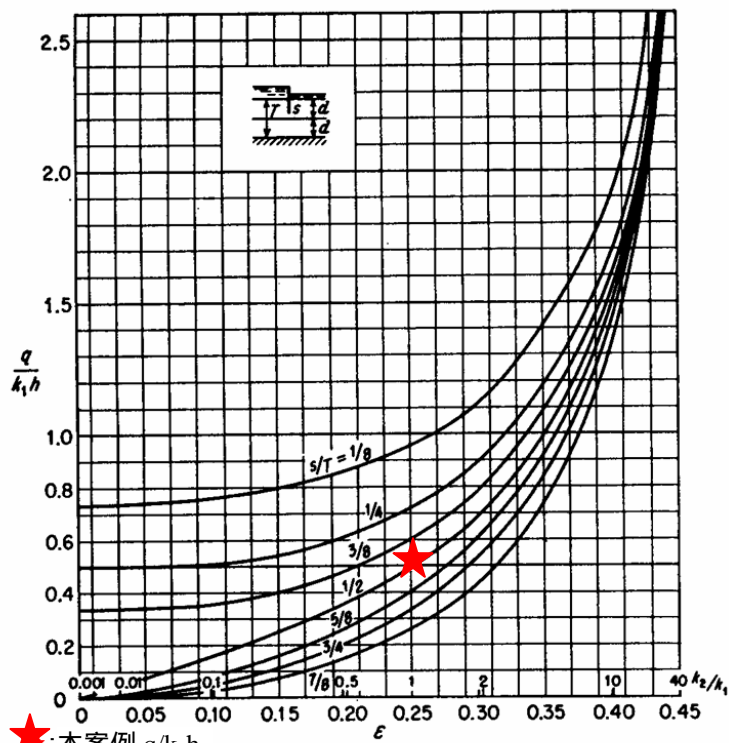
Fig.4 Calculation result by Finite Difference method in the case of sheetpile



★:本案例 $I_c T/h$
之解析解查

圖 5 $I_c T/h$ 之解析解之圖(Harr,1990)

Fig.5 Analytical solution of $I_c T/h$ (Harr,1990)



★:本案例 $q/k_1 h$
之解析解查

圖 6 $q/k_1 h$ 之解析解之圖(Harr,1990)

Fig.6 Analytical solution of $q/k_1 h$ (Harr,1990)

當 $U > 60\%$ 時

$$T_v = 1.781 - 0.933 \log(100 - U\%) \quad (25)$$

其中 $T_v = C_v t / H_{dr}^2$ 為一個無因次之時間因子。若飽和黏土層為上下排水時， H_{dr} 為土壤深度的一半“ $H/2$ ”，若飽和黏土層為單向排水時， H_{dr} 則為土壤深度“ H ”。

本研究案例假設一飽和黏土層厚 12 公尺，在飽和黏土層底部為不透水岩層，其上部覆蓋一層砂土如圖 7 所示，已知黏土層的壓密係數 (C_v) 為 $8 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{sec}$ ，初始超額孔隙水壓為 $u(z,0) = 100 \text{ kPa}$ ，推求 8 年後之「超額孔隙水壓—深度剖面圖」以及平均壓密度。

$$\text{B.C. } u(0,t) = 0$$

$$u_z(H,t) = 0 \quad (\text{岩盤不透水})$$

$$\text{I.C. } u(z,0) = u_0 = 100 \text{ kPa}$$

依照上述計算方法，設定 x 方向的增量為 1 公尺， y 方向的增量為 0.1 年，在試算表中輸入初始條件、邊界條件及值域 (domain) 內 Excel 欄位之計算公式，所得結果如圖 8 所示，而 8 年後之「超額孔隙水壓 v.s. 深度剖面圖」如圖 9 所示，在透水邊界網格點之超額孔隙水壓為

0 kPa，而在不透水層邊界之超額孔隙水壓則為 88.2 kPa。由試算表計算所得之 8 年後之 T_v 為 0.14，可得知平均壓密度 $U < 60\%$ ，因此由公式 (24) 可求得平均壓密度為 42.2 (%)，而 $T_v = 0.197$ ($U = 50\%$ 壓密) 與 $T_v = 0.848$ ($U = 90\%$ 壓密) 之本研究計算所得曲線，與解析解之比較亦繪製於圖 9 中，以資比較。

在本案例土層壓密沉陷分析中，可解得解析解為

$$u(z,t) = \frac{400}{np} e^{-(cI_n)^2 t} \sin I_n z, \quad n=1,3,5\dots$$

$$I_n = \frac{n\pi}{2\ell}, \quad n=1,3,5\dots$$

將此解析解繪製成圖 9，得知其與數值解的曲線幾乎重疊，其誤差約在 0.2%~0.9% 之間。

3. 雙曲線型偏微分方程式—波傳分析

地震時所產生之剪力波在地層中傳遞時會受不同地質的影響，也可能會形成土壤放大效應，設計構造物時需特別注意。剪力波在地層中的運動方式，可以波傳偏微分方程式來表

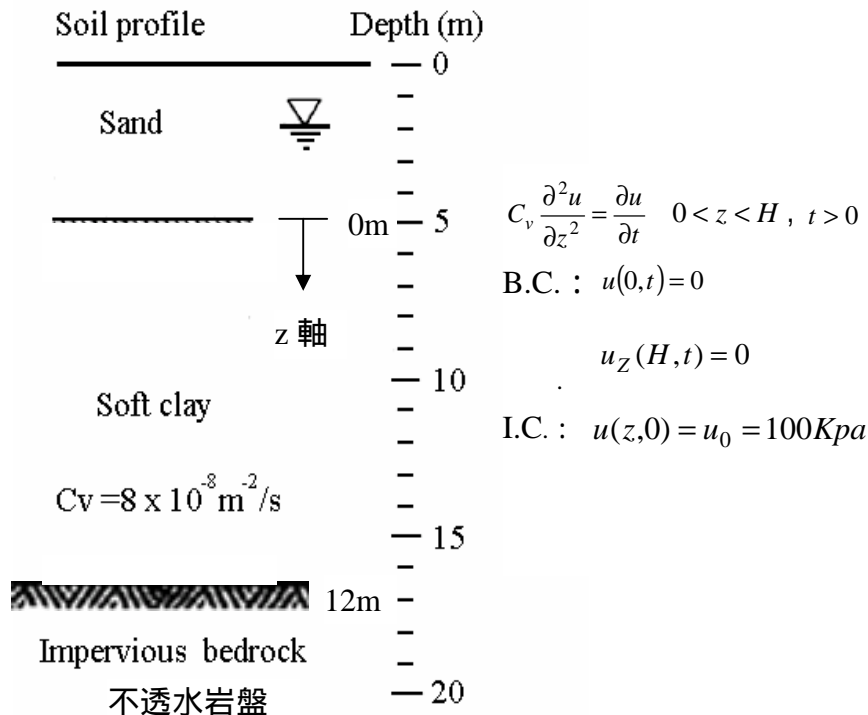


圖 7 土層壓密案例(土層厚 12m)

Fig.7 Example of consolidation of soil(thickness of soil layer : 12m)

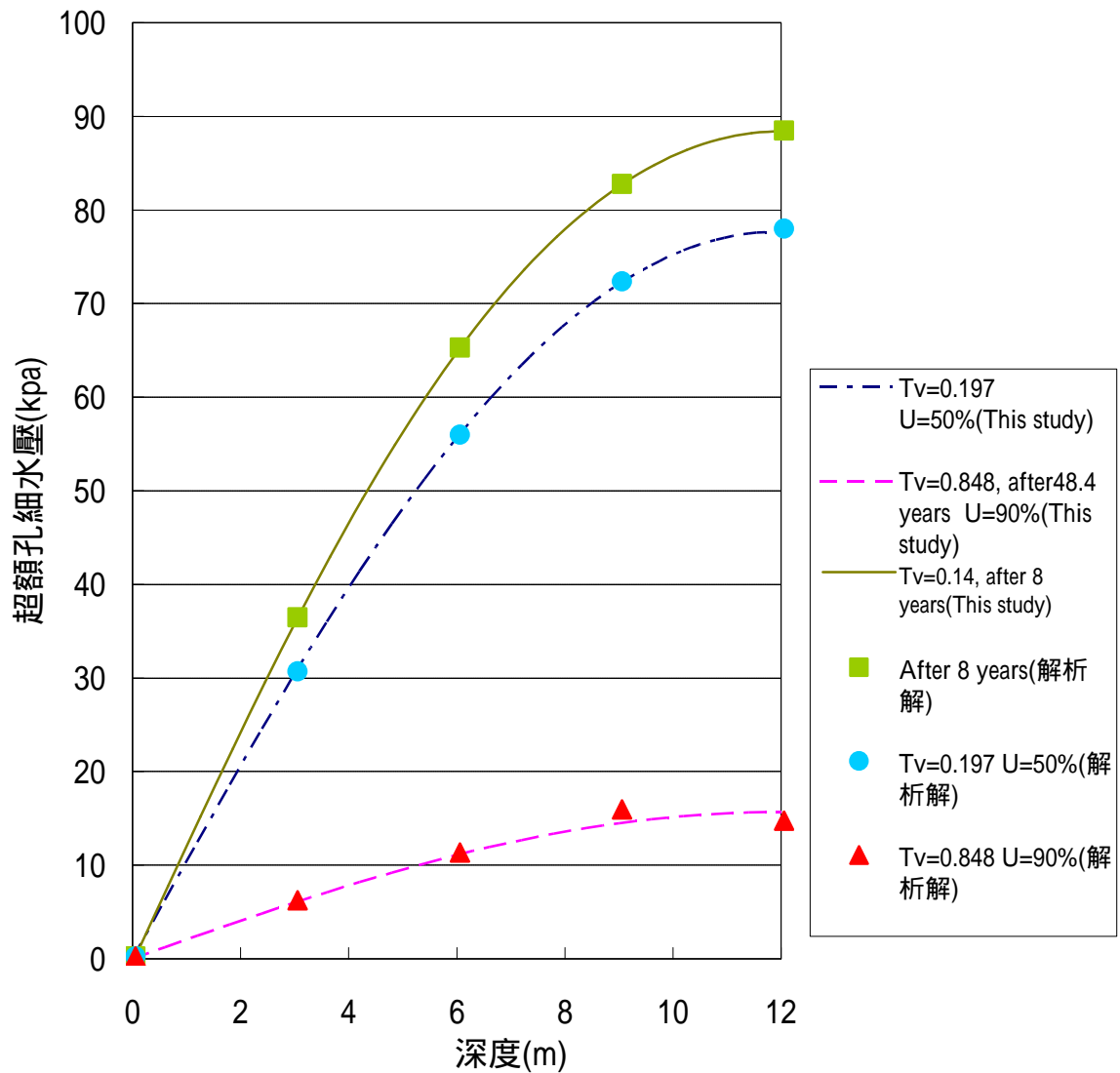


圖 9 土層壓密案例數值之比較圖

Fig.9 Comparison of the results for the consolidation of soil

示，其公式如 (26) 式所示：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (26)$$

其中 c 即為波速。如為桿縱波 $c = \sqrt{E/\rho}$ ，如為無限域縱波 $c = \sqrt{(1+2G)/\rho}$ ，如為剪力波 $c = \sqrt{G/\rho}$ ，如為淺水長波 $c = \sqrt{gh}$ ，其中 h 為水深。

波傳方程式可描述的物理系統還有許多，如縱波於桿中的傳遞，扭力波於桿中的傳遞與繩子的橫向振動與淺水長波等。其它如週

期在 12 小時以上之潮汐波，湖泊或港口中之盪樣與振盪等均屬之，其波速近於 $c = \sqrt{gh}$ ，與波之週期，波長無關（駱尚廉，1998）。

本研究應用波傳方程式 (26) 的第一個案例如圖 10 所示，假設在岩盤處有一簡諧位移震波 $(0.1 \sin 2\pi t)$ ，頻率為 1Hz ，土層深度為 400 公尺，地表之 I.C. 初始位移及速度都為 0，其 B.C. 如下所示。

B.C.： $u(0, t) = 0.1 \sin 2\pi t$ （岩盤位移函數，即地震位移）

B.C. : $u_x(400,t) = 0$, 剪應力為 0。

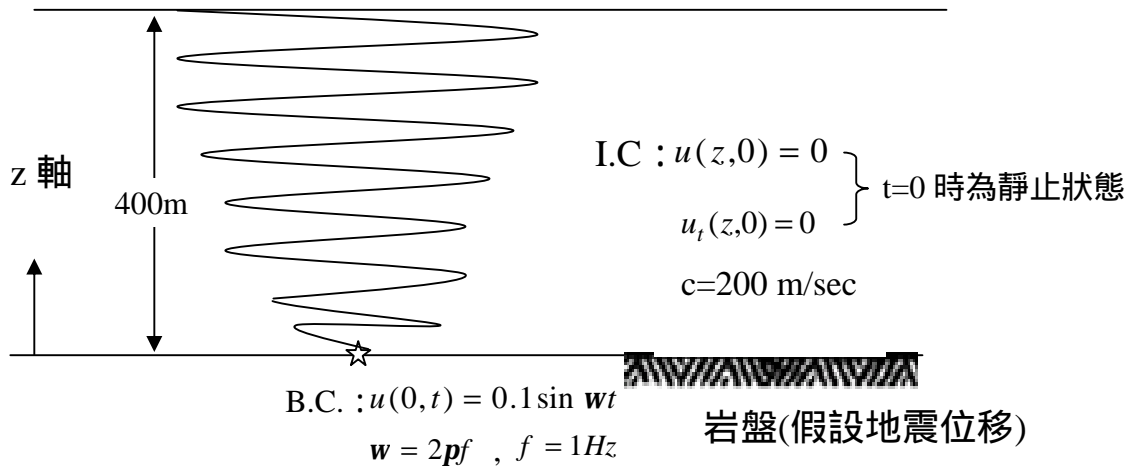


圖 10 地震剪力波案例

Fig.10 Example of earthquake Shear wave propagation

$u_x(400,t) = 0$ (地表剪應力為 0)

I.C. : $u(z,0) = 0$ (初始位移為零)

$u_t(z,0) = 0$ (初速度為零)

(表示地盤初始值為靜止。)

在波傳分析中,本研究採用 Maple 程式來求得一數值解,在與本研究由 Excel 試算表所得之數值解進行比較,地震剪力波之比較圖如圖 11 所示。其誤差介於 0.05%~4.5%,而當在頻率 $f_n = c/4\ell$ 時會共振 (Richart et al., 1970), 即 $c = 4\ell f_n$, 即 $c = 4 \times 400 \times 1\text{Hz} = 1600\text{m/sec}$ 時,可得地表共振時之相對位移,如圖 12 所示。

本研究第二個波傳案例為淺水波或稱淺水長波如圖 13 所示,其中 $h \ll \ell$ 及 $u \ll h$ (h 為平均水深, u 為波之振幅)。其公式 (26) 亦為波傳方程式,但 I.C.與 B.C.不同。此案例中河寬為 400 公尺,波速為 200m/s,在 $z=0$ 及 $z=\ell=400\text{m}$ 處,因受邊界之影響,速度為 0。

B.C. : $u_x(0,t) = 0$

$u_x(400,t) = 0$

I.C. : $u(x,0) = 0.1 \sin(\frac{p z}{400})$

$u_t(x,0) = 0$

本研究淺水長波的有限差分解析如圖 14 所示,與 Maple (2003) 程式之數值解比較亦於圖 14 中標示 (實心圓點與方點)。其誤差不大,惟以顯性法做有限差分分析時,若時間延時很長,有可能產生較大的誤差。

由結果可知,本研究試算表計算所得之有限差分數值解可說是相當準確,對於一般小型工程計算應以足夠。在壓密與地震剪力波傳的分析,本研究的試算表可處理多層土壤地層,只要簡單地改變 c 係數即可。

四、結論

本研究應用試算表結合顯性有限差分方法求解偏微分方程式,包含常見之橢圓型、拋物線型、雙曲線型等三種偏微分方程式,介紹有限差分法於試算表中各網格點之輸入設定,對邊界條件與初始條件之建立方式,也有詳細的說明。此外,對三種偏微分方程式分別舉例在工程上之應用分別舉例,包含橢圓型偏微分方程式-板樁滲流分析;拋物線型偏微分方程式-土層壓密沉陷分析;雙曲線型偏微分方程式-土層剪力波傳遞分析與淺水長波傳遞。經由本研究試算表所得之顯性有限差分數

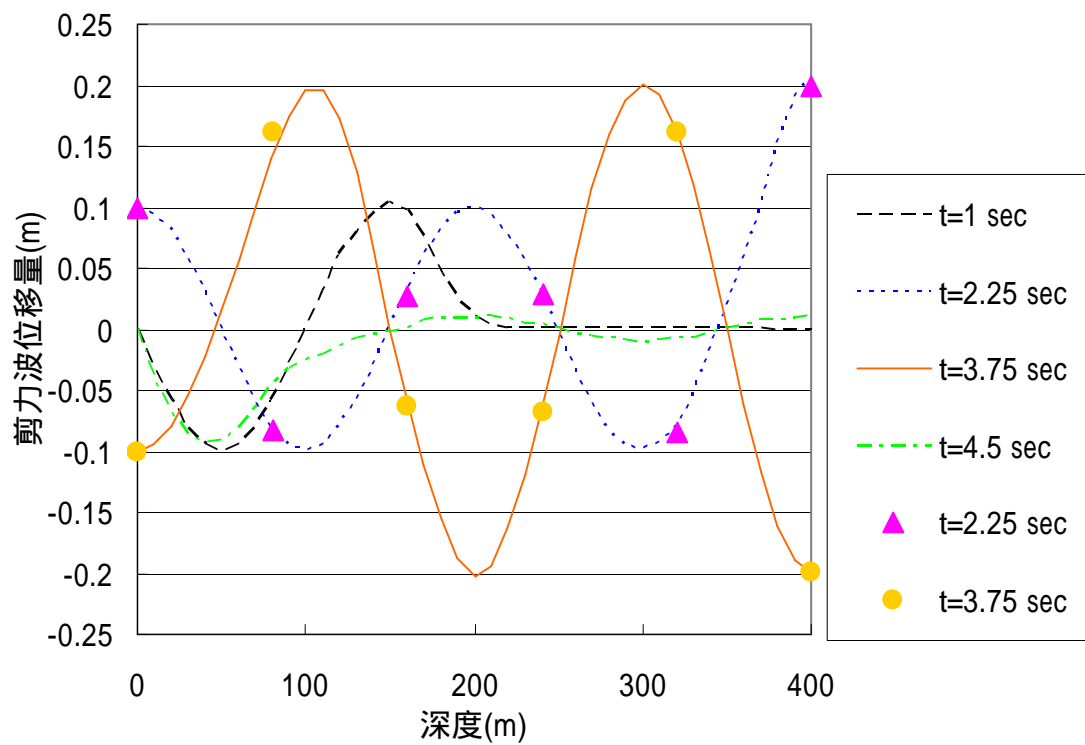


圖 11 地震剪力波案例試算表解與 Maple 數值解之比較圖
Fig.11 Comparison of the results by spreadsheet and Maple software

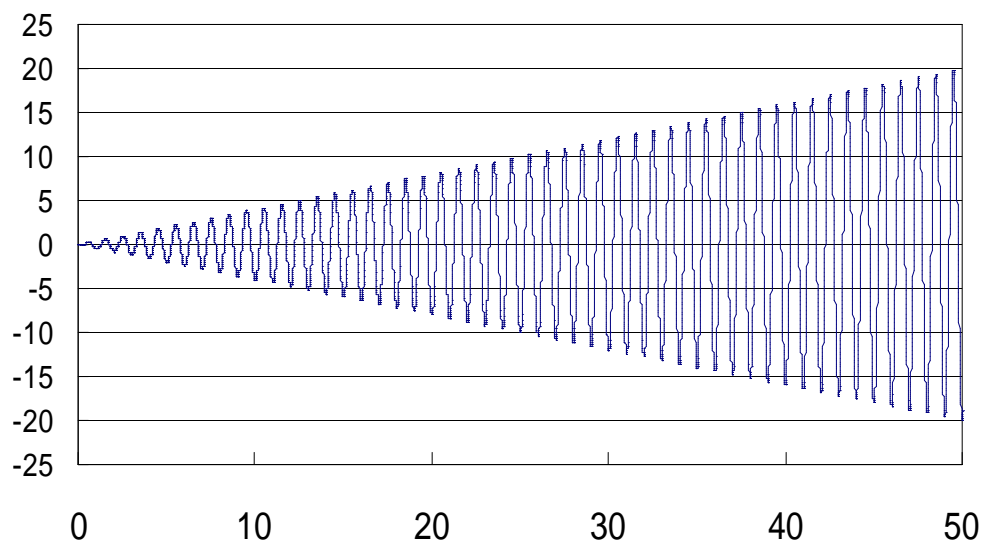
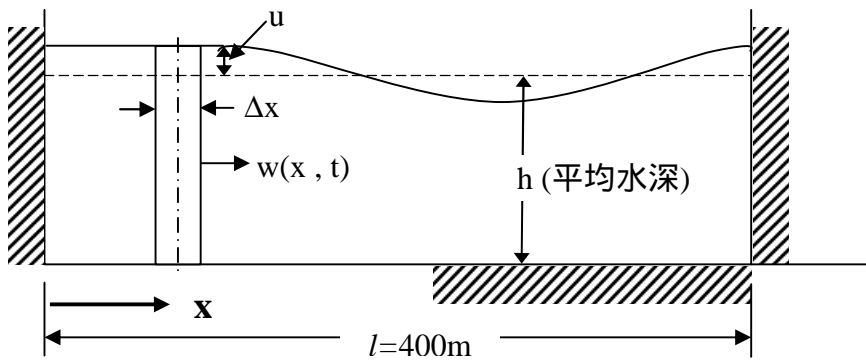


圖 12 共振時地表與岩盤面之相對位移圖(當 $c=1600\text{m/sec}$)
Fig.12 Relative displacement of the surface and baserock at when resonance



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

B.C. $u_x(0, t) = 0$
 $u_x(400, t) = 0$

I.C. $u(x, 0) = 0.1 \sin\left(\frac{\pi x}{400}\right)$
 $u_t(x, 0) = 0$
 $(c=200\text{m/sec})$

圖 13 淺水長波之案例(修改自駱尚廉,1998)

Fig.13 Example of the shallow water long wave

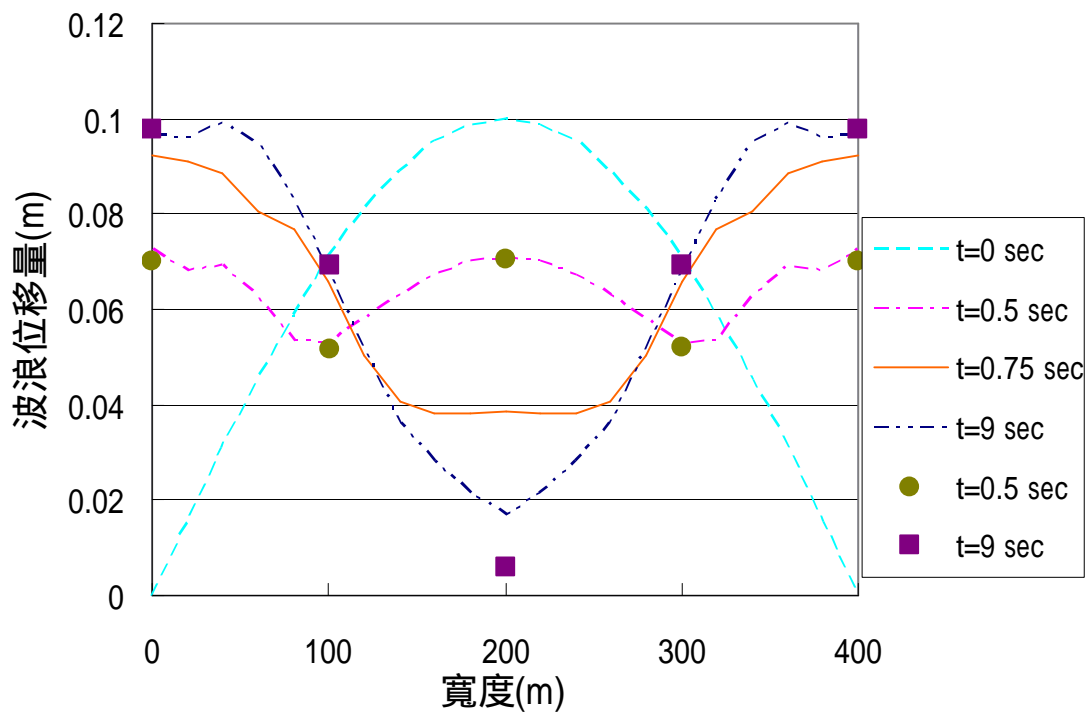


圖 14 淺水長波案例數值之比較圖

Fig.14 Comparison of the results for shallow wave long wave

值解結果與解析解或 Maple 數值解進行比較，驗證應用試算表求解偏微分方程式，有相當不錯之精確度。

本研究所介紹之三種有限差分應用於試算表的方法，可針對不同之實務狀況，修改其初始條件（I.C.）、邊界條件（B.C.）或偏微分方程式係數（如 c 值），即可計算得不同條件下之數值解。而數值解的特別好處在於可求解非線性問題，或介質性質不為均質時。對於其他類型之偏微分方程式，可參考本研究方法做進一步之研究，可分別建立其有限差分法之試算表，應用在更多工程問題上。本研究所建立之試算表界面富修改彈性，值得加以利用在拘限含水層地下水滲流、土壤壓密與波傳計算。本研究所完成之三個偏微分應用案例試算表求解之 Excel 檔案，讀者若有應用需要，本研究可提供給予自由使用，將有助於瞭解本研究所提出之方法。

五、誌謝

作者在此對李俊男與安軒霈先生對本研究資料蒐集與校對上的協助表達謝意。

六、參考文獻

1. Lehre, A. (2004), Department of Geology, Humboldt State University. Homepage.
http://www.humboldt.edu/~geology/courses/geology556/556_excel_gw_models_index.html
Accessed Oct 17, 2005.
2. Foxes Team (2005), Homepage.
http://digilander.libero.it/foxes/diffequ/FD_spr_eadsheet.htm Accessed Oct 17, 2005.
3. Hutchens, G.J. and Gupta, N.K. (2000), "A Spreadsheet Program for Steady-State Temperature Fields," Homepage.
<http://sti.srs.gov/fulltext/tr2000132/tr2000132.html> Accessed Oct 17, 2005.
4. Harr, M.E. (1990), *Groundwater and Seepage*, School of Civil Engineering, Purdue University, Dover Publications, Inc., New York.
5. Kreyszig, E. (1999), *Advanced Engineering Mathematics*, 8th edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.
6. Maple (2003), *Maple User Manual V.9*, Maplesoft, Waterloo Maple, Inc.
7. Richart, F.E., Jr., Hall, J.R., Jr. and Woods, R.D. (1970), *Vibrations of Soils and Foundations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
8. Taylor, D.W. (1948), *Fundamentals of Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
9. 駱尚廉 (1998), *環境數學*, ISBN 957-9510-63-6, 茂昌圖書有限公司, 台北, 台灣。