

渗流问题灰色数值模型的解法研究

李树文¹, 王义闹², 赵秀娟¹, 杨卫华¹, 周继红¹

(1 河北建筑科技学院, 河北 邯郸 056038)

(2 温州大学, 温州 325035)

摘要: 灰色数值模型的求解是研究灰色数值模型的一个重要问题。本文根据灰集合、灰数及其灰色运算规则, 在渗流系统的基本灰色数值模型的基础上, 分析了求解这类模型的一整套灰色数值算法, 并对灰色数值算法、普通算法和经典数值方法的计算结果进行了全面比较, 论证了灰色数值算法对灰信息传递的正确性和对渗流系统描述的合理性。

关键词: 灰集合; 渗流系统; 灰色数值模型; 灰色算法

1 问题的提出

八十年代后期, 人们应用邓聚龙教授创立的灰色系统理论于渗流问题中, 开始研究渗流系统的灰色信息问题, 但主要是针对集中参数的灰色模型研究^[1-2]。与集中参数模型相比, 分布参数模型在刻画渗流场的时空分布特征方面更具优点。因此, 进入九十年代, 人们开始研究渗流系统的灰色分布参数模型问题^[3-4]。文献^[3]和文献^[4]中的研究成果标志了渗流系统灰色分布参数模型研究的开始。这两项研究的主要成就是: 前者探讨了当灰色数值模型的参数值和输入信息全部为灰量时, 模型输出量的基本特点以及灰色分布参数模型应用的可行性; 后者研究了灰色数值模型中的灰参数问题, 而其它输入信息仍视为确定值, 研究重点放在了灰参数方面。但这两项研究成果均未依据灰色数学的基本运算规则去建立离散结点的灰色有限元方程, 而对灰色数值模型采用了传统算法求解, 这样不可避免地导致由输入到输出过程中的信息遗漏, 影响模型的应用效果。因此, 本文直接运用灰集合和灰色数学的基本理论与算法规则, 提出了求解这类模型的一整套灰色数值算法, 试图为水资源环境的预测和评价开辟一个新的研究领域。

2 渗流系统的基本灰色数值模型

基于灰信息分析^[5]的渗流系统的微分方程^[3-4]可表示为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\otimes T_x) \frac{\partial (\otimes H)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\otimes T_y) \frac{\partial (\otimes H)}{\partial y} \right] - (\otimes Q_w) \delta(x - x_w, y - y_w) + (\otimes e) - (\otimes \mu) \frac{\partial (\otimes H)}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

根据伽辽金(Galerkin)有限元方法, 对于(1)式乘以基函数 $\varphi(x, y)$, 然后积分, 得到如下方程:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[(\otimes T_x) \frac{\partial (\otimes H)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\otimes T_y) \frac{\partial (\otimes H)}{\partial y} \right] \right] \cdot \varphi(x, y) dx dy$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{B_i} (\odot \ominus) \varphi(x, y) dx dy - \iint_{B_i} (\odot Q_w) \delta(x - x_w, y - y_w) \\
& \cdot \varphi(x, y) dx dy - \iint_{B_i} (\odot \mu) \left[\frac{\partial (\odot H)}{\partial a} \right] \cdot \varphi(x, y) dx dy \\
& = \begin{cases} - \int_{\Gamma_i} (\odot q_l) \cdot \varphi(x, y) dl & \text{在二类边界上} \\ 0 & \text{其它边界上} \end{cases} \quad (2)
\end{aligned}$$

对以上方程进一步离散, 并把所有灰数表示成区间灰数^[6]的形式, 便可得到任一结点 i 的灰色有限元方程:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\beta} \frac{[T_a, T_b]}{4 \beta} \{ \alpha_i [H_{ia}, H_{ib}] + \alpha_j [H_{ja}, H_{jb}] + \alpha_k [H_{ka}, H_{kb}] \} \\
& + [Q_a, Q_b] - \sum_{\beta} \frac{\beta}{3} [\epsilon_a, \epsilon_b] + \sum_{\beta} \frac{\beta}{\beta} [\mu_a, \mu_b] \frac{H}{t} \\
& = \begin{cases} \frac{1}{2} \{ l_{iu} [q_{ua}, q_{ub}] + l_{iv} [q_{va}, q_{vb}] \} & \text{在第二类外结点上} \\ 0 & \text{其它结点上} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3)
\end{aligned}$$

其中 $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ 是关于座标的量^[3].

方程(3)即为渗流系统的基本灰色数值模型

3 灰色数值模型的解法研究

以上基本灰色数值模型中包含了不少区间型灰数, 因此对于基本灰色数值模型的求解, 应当从灰集合理论出发, 运用灰数的运算性质^[5-6], 以获得真正的灰结果. 前人的同类研究中, 借用了求解白化方程(组)的方法^[3-4]来求解基本灰色数值模型(本文称之为普通算法), 作者认为这种算法缺乏必要的理论基础. 为此, 以下首先给出了灰色数值模型的灰色算法, 然后简述了灰色数值模型的普通算法, 并将不同算法的计算结果作了比较.

3.1 灰色数值模型的灰色算法

将方程(3)简记为:

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 = I_5$$

运用灰数运算法则, 可以将方程(3)逐项计算. 对于 I_1 项计算, 要特别注意其中的 $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ 的符号问题, α_i 总是大于零的, 而 α_j, α_k 符号有正有负, 因此应根据不同情况讨论, 即:

$$I_1 = I_{1-1} = \sum_{\beta} \frac{[T_a, T_b]}{4 \beta} [\alpha_i H_{ia} + \alpha_j H_{ja} + \alpha_k H_{ka}, \alpha_i H_{ib} + \alpha_j H_{jb} + \alpha_k H_{kb}] \quad \text{当 } \alpha_j, \alpha_k > 0 \text{ 时} \quad (4)$$

$$I_1 = I_{1-2} = \sum_{\beta} \frac{[T_a, T_b]}{4 \beta} [\alpha_i H_{ia} + \alpha_j H_{jb} + \alpha_k H_{kb}, \alpha_i H_{ib} + \alpha_j H_{ja} + \alpha_k H_{ka}] \quad \text{当 } \alpha_j, \alpha_k < 0 \text{ 时} \quad (5)$$

$$I_1 = I_{1-3} = \sum_{\beta} \frac{[T_a, T_b]}{4 \beta} [\alpha_i H_{ia} + \alpha_j H_{ja} + \alpha_k H_{kb}, \alpha_i H_{ib} + \alpha_j H_{jb} + \alpha_k H_{ka}] \quad \text{当 } \alpha_j > 0, \alpha_k < 0 \text{ 时} \quad (6)$$

$$I_1 = I_{1-4} = \sum_{\beta} \frac{[T_a, T_b]}{4 \beta} [\alpha_i H_{ia} + \alpha_j H_{jb} + \alpha_k H_{ka}, \alpha_i H_{ib} + \alpha_j H_{ja} + \alpha_k H_{kb}] \quad \text{当 } \alpha_j < 0, \alpha_k > 0 \text{ 时} \quad (7)$$

其它各项分别为:

$$I_2 = [Q_a, Q_b] \quad (8)$$

$$I_3 = \sum_{\beta} \frac{\beta}{3} [\epsilon_a, \epsilon_b] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \sum_{\beta} \frac{\beta}{3} \frac{1}{t} [\mu_a, \mu_b] \{ [H_{ia}^{t+1}, H_{ib}^{t+1}] - [H_{ia}^t, H_{ib}^t] \} \\ &= \sum_{\beta} \frac{\beta}{3} \frac{1}{t} [\mu_a (H_{ia}^{t+1} - H_{ib}^t), \mu_b (H_{ib}^{t+1} - H_{ia}^t)] \end{aligned} \quad (10)$$

$$I_5 = \begin{cases} \frac{1}{2} [l_{iu}q_{ua} + l_{iv}q_{va}, l_{iu}q_{ub} + l_{iv}q_{vb}] \\ 0 \end{cases} \quad (11)$$

将(4)一(11)式代入方程(3)中, 得到四种情况下结点 i 的灰色有限元方程:

第一种情况: 当 $\alpha_i, \alpha_k > 0$ 时, 结点灰色有限元方程具有如下形式:

$$\begin{aligned} &\sum_{\beta} \left[\frac{T_a}{4} \frac{1}{\beta} (\alpha H_{ia}^{t+1} + \alpha H_{ja}^{t+1} + \alpha H_{ka}^{t+1}) + Q_a - \frac{\beta \epsilon_a}{3} + \frac{\beta \mu_a}{3} \frac{1}{t} (H_{ia}^{t+1} - H_{ib}^t), \right. \\ &\quad \left. \frac{T_b}{4} \frac{1}{\beta} (\alpha H_{ib}^{t+1} + \alpha H_{jb}^{t+1} + \alpha H_{kb}^{t+1}) + Q_b - \frac{\beta \epsilon_b}{3} + \frac{\beta \mu_b}{3} \frac{1}{t} (H_{ib}^{t+1} - H_{ia}^t) \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} [l_{iu}q_{ua} + l_{iv}q_{va}, l_{iu}q_{ub} + l_{iv}q_{vb}] \\ 0 \end{cases} \quad I = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (12)$$

依次可以写出 $\alpha_i, \alpha_k < 0, \alpha_j > 0, \alpha_k < 0$ 和 $\alpha_i < 0, \alpha_k > 0$ 其它三种情况的结点灰色有限元方程

对于实际的渗流数值计算问题, 可以证明只要剖分时使三角形的三个角不尖不钝, 那么围绕任一结点 i 的各个三角形形成的三个有关坐标的量 $\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k$ 中, α_i 是大于零的, 其它两项 α_j, α_k 是小于零的 因此方程组(12)可以进一步整理写成如下的矩阵形式:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a_{11}H_{1b} & a_{12}H_{2a} & a_{13}H_{3a} & \dots & a_{1m}H_{ma} \\ a_{21}H_{1a} & a_{22}H_{2b} & a_{23}H_{3a} & \dots & a_{2m}H_{ma} \\ & \dots & & \dots & \\ a_{m1}H_{1a} & a_{m2}H_{2a} & a_{m3}H_{3a} & \dots & a_{mm}H_{mb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1a} \\ f_{2a} \\ f_{3a} \\ \dots \\ f_{ma} \end{bmatrix} \\ &\dots \dots \dots \\ &\begin{bmatrix} a_{11}H_{1a} & a_{12}H_{2b} & a_{13}H_{3b} & \dots & a_{1m}H_{mb} \\ a_{21}H_{1b} & a_{22}H_{2a} & a_{23}H_{3b} & \dots & a_{2m}H_{mb} \\ a_{31}H_{3b} & a_{32}H_{2b} & a_{33}H_{3a} & \dots & a_{3m}H_{mb} \\ & \dots & & \dots & \\ a_{m1}H_{1b} & a_{m2}H_{2b} & a_{m3}H_{3b} & \dots & a_{mm}H_{mb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1b} \\ f_{2b} \\ f_{3b} \\ \dots \\ f_{mb} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

以上方程组具有特殊的结构, 可以运用特殊的方法求解 求解的思路是: 先从前 m 个方程(第 $1 \sim m$)中解出 H_{ib} , 然后代入后 m 个方程中并求解, 得到灰水位的下限值 H_{ia} 之后对前 m 个方程回代直接计算出 H_{ib} 值

以上计算过程编制了 VB 微机程序, 实际计算问题由计算机完成

3.2 灰色数值模型的普通算法

这种算法是把基本灰色数值模型中的灰参数、灰变量以及灰水位函数的诸下限值对应起来, 构成一个白化的线性方程组, 从而求得灰水位的下限值 ($H_{ia}, i = 1, 2, \dots, m$); 然后再把

模型中的灰参数、灰变量以及灰水位函数的诸上限值对应起来, 构成一个白化的线性方程组, 从而求得灰水位的上限值($H_{ib}, i=1, 2, \dots, m$). 简而言之, 它是“下对下, 上对上”的算法, 即通过解两个独立的线性方程组来求得灰水位函数的上、下限^[3, 4].

4 计算结果的对比与分析

假定一个符合泰斯条件^[7]的承压含水层, 含水层被剖分成 30 个三角形单元, 23 个结点. 在数值结果比较时, 考虑灰色数值模型灰色算法计算结果、普通算法计算结果和经典数值模型计算结果三种方法的比较. 在输入信息方面, 考虑了导水系数 T 、 $[T_a, T_b]$ 取值与输出值水位 H 、 $[H_a, H_b]$ 的关系, 因为导水系数是灰色算法中较为难处理的一个参数, 也是建立灰色数值模型解算方法的核心问题. 以下选择 4、8 号两个结点的灰水位过程曲线进行比较 (见图 1 和图 2). 其中 4 号点为计算时段内水位降落较小的点, 8 号点为计算时段内水位降落较大的点 (抽水井结点), 它们各自有一定的代表性. 在具体计算时, 经典数值模型中采用 $T = 1000 \text{ m}^2/\text{d}$, 灰色数值模型中均采用 $[T_a, T_b] = [800, 1000] \text{ m}^2/\text{d}$.

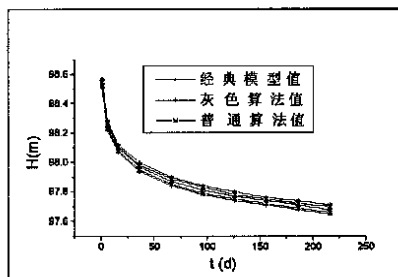


图 1 4 号结点不同算法的过程对比曲线

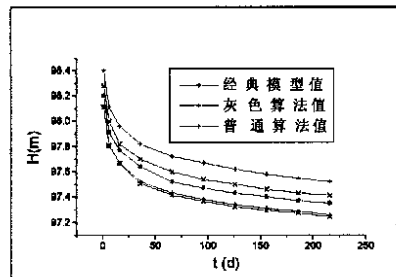


图 2 8 号结点不同算法的过程对比曲线

通过以上对灰色数值模型两种解法的输出过程曲线——“灰带”的比较可以看出, 灰色算法输出结果的灰度与普通算法的输出结果灰度^[2]相比, 在选定的模拟时段内水位降落大的点上, 两者相差大, 即灰色算法输出结果的灰度比普通算法输出结果的灰度明显大, 可以粗略地说前者包含了后者; 在选定的模拟时段内水位降落小的点上, 两者相差小, 在有些点上甚至很相近. 这是因为水位降深值越大, 系统的未知程度就越大的缘故. 另由水位过程曲线看出, 灰水位的上、下界对于确定性水位值是不对称的, 这是灰色数值模型本身的特点, 但后者被前者包含是一定的.

由灰色数值模型的输出状态曲线 (图 3) 可以看出, 在模拟时段内水位降落大的点上水位输出结果的灰度大, 而在模拟时段内水位降落小的点上水位输出结果的灰度小. 同时可以看出, 各个结点的输出水位灰度彼此之间有明显的区别. 这两点是符合客观实际的, 第一点, 是因为在模拟时段内水位降落值越大, 系统表现出的未知程度会越大的缘故; 第二点, 是因为各个结点的灰水位的灰度受多种因素

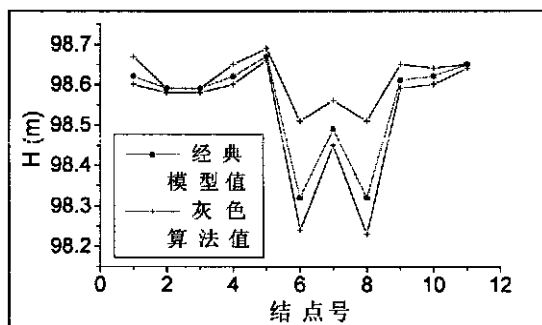


图 3 不同算法的流场状态对比曲线

的影响, 会表现出各自的差异, 不可能是相等的。这说明以上的灰色数值模型的求解方法在灰信息的传递上是比较合理和正确的。

以上分析比较说明, 灰色算法对于灰信息的传递是正确的, 它的模拟结果是比较合理的。

5 结 论

1) 对于渗流系统基本灰色数值模型的解算, 必须以灰集合和灰色数学理论为基础, 才能保证灰信息传递的正确性, 才能得到真正的“灰解”。本文提出的求解灰色数值模型的灰色算法对灰信息的运算和处理是比较合理的。

2) 与经典模型相比, 灰色数值模型对渗流计算中一些难以给出确定数据的量, 如含水层参数、边界条件值、补给排泄量等, 可以给出它们的一个灰范围, 模型的运算结果也是一个具有一定区间范围的“灰带”, 这给模型的应用和系统的决策带来很大的好处。

3) 本文建立的灰色数值模型对矿井涌水量预测、水资源评价以及水环境管理问题, 具有普遍的适用性。

参考文献

- [1] 焦灿灿. 灰色水文地质系统分析与时间序列建模[J]. 勘查科学技术, 1987, (2): 39—43.
- [2] 李树文, 王宝来, 肖国强. 灰色与周期残差叠加模型及其在地下水动态预测中的应用[J]. 河北建筑科技学院学报, 1992, (3): 246—251.
- [3] 王清印, 李树文. 灰色分布参数模型与地下水模拟[J]. 河北建筑科技学院学报, 1992, (3): 66—70.
- [4] 郭纯青, 夏日元, 刘正林. 岩溶地下水水资源评价灰色系统理论与方法研究[M]. 北京: 地质出版社, 1993. 3—60.
- [5] 邓聚龙. 灰色控制系统[M]. 武汉: 华中工学院出版社, 1985. 86—94.
- [6] Wang Qingyin, Wu Heqing. The concept of grey number and its property[J]. Proceedings of NAFIPS 98 USA, 1998. 45—49.
- [7] 薛禹群. 地下水动力学原理[M]. 北京: 地质出版社, 1998. 133—145.

A Study on Solution of the Grey Numerical Model of Seepage System

LI Shu-wen¹, WANG Yi-nao², ZHAO Xiu-juan¹
YANG Wei-hua¹, ZHOU Ji-hong¹

(1. Hebei Institute of Architectural Science & Technology, Handan Hebei 056038, China)

(2. Wenzhou University, Wenzhou 325035, China)

Abstract How to solve the grey numerical model is a important problem for the research on the grey numerical model. Based on grey set, grey numbers and their operation properties, the grey numerical model of seepage system is set up, the whole grey solving method of the model is given in this paper, and the solving method is compared with common solving method, classical numerical method so as to illustrate that the grey solving method is correct in transporting grey data and reasonable in depicting the seepage system.

Keywords grey set; seepage system; grey numerical model; grey solving method