

一种渗流场有限元分析的改进模型

杜小凯 任青文
(河海大学土木工程学院, 南京 210098)

摘 要 研究裂隙岩体渗流的模型有: 等效连续介质模型、裂隙网络模型和双重介质模型。但这些模型在使用上不便或与实际精度要求有一定的差距。本文给出了一种裂隙岩体渗流的改进模型, 即分区同时考虑结构面和岩块的渗透, 将结构面按准平面连续介质模型考虑, 微细裂隙和岩块按等效连续介质模型处理。应用该种模型对高压输水隧洞衬砌开裂内水外渗的稳定渗流场进行了初步的分析研究, 并与常规等效连续介质模型的计算结果进行了对比。

关键词 裂隙岩体 结构面 渗透特性 高压输水隧洞 渗流场

An Improved Finite Element Analyzed Model of Seepage for Joint Rock Masses

DU Xiao-kai REN Qing-wen
(College of Engineering, Hohai Univ, Nanjing 210098)

Abstract: Equivalent continuum medium model, Fracture network model and Double-porosity medium model have been used to study the seepage of joint rock. But these models are inconvenient and the accuracy is not enough on the usage. An improved model, which considers the joint face and rock mass at the same time, has been advised in this paper. Macro fractures are analyzed as plane continuum medium model. Micro fractures and rock mass are looked on as equivalent continuum model. The steady flow field about the permeated water from high-pressure water inlet tunnel has been studied with the new model. Also the results have been compared with using Equivalent continuum medium model.

Key words: joint rock; joint face; permeability; high-pressure water inlet tunnel; seepage flow field

近年来, 对裂隙岩体渗流的等效连续介质模型、裂隙网络模型和双重介质等渗流模型的研究已取得了不少成果, 但这些模型在使用上不便或是与实际有一定的差距。孔隙介质的土体, 用等效连续介质模型进行恒定和非恒定渗流分析, 能够得到满意的结果。但是等效连续介质模型用于分析裂隙岩体, 就存在一定的问题, 如: 典型单元体的大小和等效水力参数较难确定; 把裂隙岩体等效为连续介质, 不能很好地刻画裂隙的特殊导水作用^[1]; 等效连续介质模型只能用作恒定渗流分析, 不能用于非恒定渗流分析, 适用范围受到限制, 而双重介质模型和裂隙网络模型在应用和操作上又存在诸多的不便。本文给出了一种裂隙岩体渗流的改进模型, 即分区同时考虑结构面和岩块的渗透, 将结构面按准平面连续介质模型分析; 微细裂隙和岩块按等效连续介质模型处理。基于该种模型, 应用 GeoStudio(SEEP/W)有限元商用软件对高压输水隧洞, 衬砌开裂内水外渗的恒定渗流场进行了计算分析。同时, 又采用常规等效连续介质模型方法对同样的对象进行了分析计算, 并对两者的计算结果进行了比较。

1 改进模型与控制方程

本文给出的改进模型是指，将整个研究区域分为两大部分考虑：结构面部分、微细裂隙和岩块部分。将结构面按准平面连续介质模型考虑，微细裂隙和岩块按等效连续介质模型处理。改进模型仍基于连续介质模型，与常规等效连续介质模型不同的是，将整个研究区域分成两大区域：岩块、结构面区域，同时考虑了两者的渗透特性。由于没有将结构面渗透特性等效到整个研究区域，故能较好地模拟结构面的特殊导水性。

设岩体由岩块和若干组结构面组成，见图 1，现分别研究它们的渗透情况。岩块区域以 C^r 表示，结构面区域以 C^f 表示。

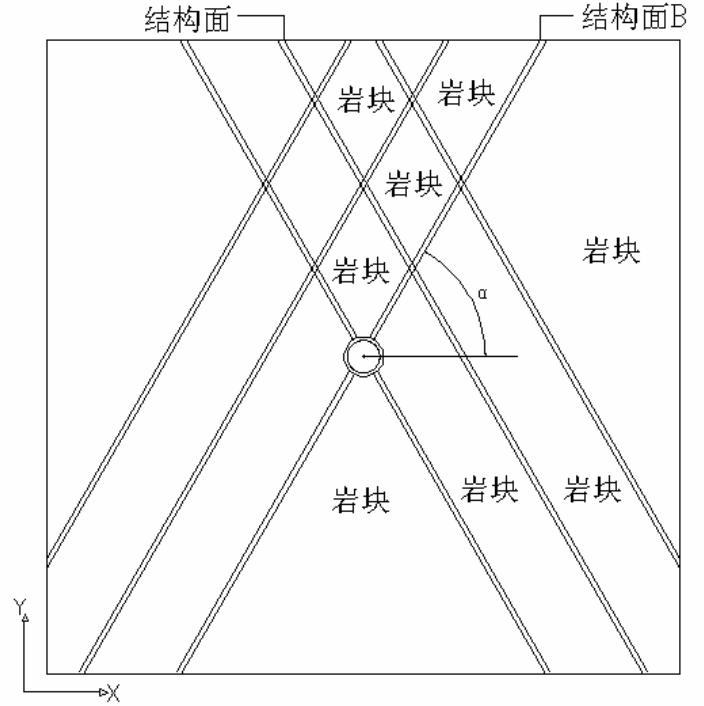


图 1 岩体组成

Fig.1 The constitution of rock

1.1、岩块部分

岩块部分（包括可能存在的微小裂隙）可以按等效连续体考虑。假定岩体中的渗透主向与 x, y 方向重合。则在不考虑入渗和蒸发水量时，岩体中稳定渗流场的控制方程^[2~4]为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{边界条件} \quad \begin{cases} H(x, y) = \varphi(x, y) & \text{在 } l_1 \text{ 上} \\ k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) = q & \text{在 } l_2 \text{ 上} \end{cases}$$

k_x 、 k_y 分别为 x 、 y 方向上的渗透系数， $\varphi(x, y)$ 为边界 l_1 上的已知水头， q 为边界 l_2 上的已知渗透流量。简单起见，本文算例中 $q=0$ ，岩块部分看成为各向同性 $k_x = k_y$ 。

对于所研究的稳定渗流场，根据变分原理，定解问题的求解等价于下列泛函 $I(H)$ 的极值问题，即：（采用四节点等参元）

$$I[H(x, y)] = \frac{1}{2} \iint_{C^r} \left\{ k_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \int_l q H dl = \min \quad (2)$$

渗流区域离散化后，单元 e_i 内任意点的渗透水头可表示为

$$H_{ei} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) H_i^e \quad (3)$$

设区域 C^r 划分为 m 个四边形单元 C_{ei}^r 之和，即 $C^r = \sum_{i=1}^m C_{ei}^r$ ，于是泛函 I 表示为

$$I(H) = \sum_{i=1}^m I^{ei}(H) = \sum_{i=1}^m I^{ei}(H_{ei}) = I(\tilde{H}) \quad (4)$$

其中 \tilde{H} 是 $H(x, y)$ 在各节点的值 H_1, H_2, \dots, H_n 的函数。根据式(2)，泛函 I 必须满足

$$\frac{\partial I(\tilde{H})}{\partial H_i} = \frac{\partial}{\partial H_i} \sum_{i=1}^{m_i} I^{ei}(H_{ei}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial H_i} I^{ei}(H_{ei}) = 0 \quad (5)$$

单元的渗透矩阵：

$$\frac{\partial I^{ei}(H)}{\partial H_i} = \iint_{c_i} \left[k_x \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] dx dy - \int_l q \frac{\partial H}{\partial H_i} dl \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_2}{\partial x}, \frac{\partial N_3}{\partial x}, \frac{\partial N_4}{\partial x} \right] [H_1^e, H_2^e, H_3^e, H_4^e]^T \quad (7)$$

所以(6)式成为

$$\frac{\partial I^{ei}(H)}{\partial H_i} = \iint_{c_i} \left[k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} H_i^e + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} H_i^e \right] dx dy - \int_l q N_i dl \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial I^{ei}}{\partial H_1} \\ \frac{\partial I^{ei}}{\partial H_2} \\ \frac{\partial I^{ei}}{\partial H_3} \\ \frac{\partial I^{ei}}{\partial H_4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1}^e & h_{1,2}^e & h_{1,3}^e & h_{1,4}^e \\ & h_{2,2}^e & h_{2,3}^e & h_{2,4}^e \\ & & h_{3,3}^e & h_{3,4}^e \\ & & & h_{4,4}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1^e \\ H_2^e \\ H_3^e \\ H_4^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ f_4^e \end{Bmatrix} = 0 \quad (9)$$

即

$$\left\{ \frac{\partial I^{ei}}{\partial H} \right\} = [h^e] \{H_i^e\} + \{f^e\} \quad (10)$$

$$[h^e]_r \{H_i^e\} = -\{f\}^e \quad (11)$$

$$\text{其中} \quad f_i^e = -\int_l q N_i dl = 0 \quad q=0 \quad (12)$$

$$h_{ij}^e = \iint_{c_{ei}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} dx dy \quad (13)$$

$$h_{ij}^e = \iint_{c_{ei}} B_i^T M_r B_j dx dy \quad (14)$$

$$B_i^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad M_r = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (15)$$

1.2 结构面部分

以结构面 B 为例，它与 x 方向的夹角为 α 。建立局部坐标系，其延结构面方向为 x' 方向，垂直结构面方向为 y' 方向，则有以下坐标转换矩阵^[5]：

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (16)$$

设坐标转换矩阵为 P 矩阵。则在不考虑入渗和蒸发水量情况下，对裂隙岩体中宏观不连续结构面，如节理、裂隙、可建立准平面连续性方程，同时考虑两个方向上的渗透（ $x'Oy'$ 坐标系下）为：

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left(k_{x'} \frac{\partial H}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left(k_{y'} \frac{\partial H}{\partial y'} \right) = 0 \quad (17)$$

$$\text{边界条件} \begin{cases} H(x', y') = \psi(x', y') & \text{在 } l_1' \text{ 上} \\ k_{x'} \frac{\partial H}{\partial x'} \cos(n, x') + k_{y'} \frac{\partial H}{\partial y'} \cos(n, y') = q & \text{在 } l_2' \text{ 上} \end{cases}$$

$k_{x'}$ 、 $k_{y'}$ 分别为 x' 、 y' 方向上的渗透系数， l_1' 为已知水头边界， l_2' 为已知流量边界。在本文的算例中 $q=0$ ，在饱和渗透场下，顺延结构面的渗透系数远大于垂直结构面的渗透系数， $k_{y'}$ 取为岩块的渗透系数 $k_{y'} = k_y$ 。

根据变分原理，定解问题的求解等价于下列泛函 $I(H)$ 的极值问题，即：（采用四节点等参元）

$$I[H(x', y')] = \frac{1}{2} \iint_{c'} \left\{ k_{x'} \left(\frac{\partial H}{\partial x'} \right) + k_{y'} \left(\frac{\partial H}{\partial y'} \right) \right\} dx' dy' = \min \quad (18)$$

渗流区域离散化后，设区域 C^f 划分为 n 个四边形单元 C_{ei}^f 之和，即 $C^f = \sum_{i=1}^n C_{ei}^f$ ，于是泛函 I 表示为

$$I(H) = \sum_{i=1}^n I^{ei}(H) = \sum_{i=1}^n I^{ei}(H_{ei}) = I(\tilde{H}) \quad (19)$$

单元的渗透矩阵：

$$\frac{\partial I^{ei}(H)}{\partial H_i} = \iint_{C_{ei}^f} \left[k_{x'} \frac{\partial H}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x'} \right) + k_{y'} \frac{\partial H}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial y'} \right) \right] dx' dy' \quad (20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x'} = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x'}, \frac{\partial N_2}{\partial x'}, \frac{\partial N_3}{\partial x'}, \frac{\partial N_4}{\partial x'} \right] [H_1^e, H_2^e, H_3^e, H_4^e]^T$$

所以(20)式成为：

$$\frac{\partial I^{ei}(H)}{\partial H_i} = \iint_{C_{ei}^f} \left[k_{x'} \frac{\partial N_i}{\partial x'} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x'} H_i^e + k_{y'} \frac{\partial N_i}{\partial y'} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y'} H_i^e \right] dx' dy' \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial I^{ei}}{\partial H_1} \\ \frac{\partial I^{ei}}{\partial H_2} \\ \frac{\partial I^{ei}}{\partial H_3} \\ \frac{\partial I^{ei}}{\partial H_4} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccc} h_{1,1}^{e'} & h_{1,2}^{e'} & h_{1,3}^{e'} & h_{1,4}^{e'} \\ & h_{2,2}^{e'} & h_{2,3}^{e'} & h_{2,4}^{e'} \\ & & h_{3,3}^{e'} & h_{3,4}^{e'} \\ & & & h_{4,4}^{e'} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} H_1^e \\ H_2^e \\ H_3^e \\ H_4^e \end{array} \right\} = 0 \quad (22)$$

$$\text{所以有：} \quad [h^e]_f \{H_i^e\} = 0 \quad (23)$$

$$h_{ij}^{e'} = \iint_{C_{ei}^f} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x'} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y'} \right] \left[\begin{array}{cc} k_x' & 0 \\ 0 & k_y' \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N_j}{\partial x'} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y'} \end{array} \right] dx' dy' \quad (24)$$

进行坐标转换：

$$\frac{\partial N_i}{\partial x'} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y'} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'}$$

$$\text{由(16)式得} \quad \begin{cases} x = \cos \alpha x' - \sin \alpha y' \\ y = \sin \alpha x' + \cos \alpha y' \end{cases} \quad (25)$$

所以有：

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \cos \alpha \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = \sin \alpha \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = -\sin \alpha \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = \cos \alpha$$

所以有：

$$h_{ij}^{e'} = \iint_{c_{ei}} B_i^T P^T \begin{bmatrix} k_{x'} & 0 \\ 0 & k_{y'} \end{bmatrix} P B_j |P| dx dy \quad |P| = 1 \quad (26)$$

$$h_{ij}^{e'} = \iint_{c_{ei}} B_i^T M_f B_j dx dy \quad (27)$$

$$M_f = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} k_{x'} & 0 \\ 0 & k_{y'} \end{bmatrix} P \quad B_i^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

所以有：

$$\text{结构面} \quad h_{ij}^e = \iint_{c_{ei}} B_i^T M_f B_j dx dy \quad \text{岩块} \quad h_{ij}^e = \iint_{c_{ei}} B_i^T M_r B_j dx dy$$

1.3 整体劲度矩阵组装

$$\text{岩块} [K]_R \{H_i\} = [F]$$

$$\text{裂隙} [K]_F \{H_i\} = 0 \quad [F] \text{包括已知节点水头、节点流量}$$

$$\text{整体} [K] \{H\} = [F] \quad [K] \text{中的元素可根据单元所描述的介质不同选择} (*) (**) \text{式进行计算。}$$

为了便于和改进模型进行对比，下面对常规等效连续介质模型进行简单的回顾。

2 常规等效连续介质模型简介

常规等效连续介质模型就是把岩块-裂隙系统等效成连续介质，用连续介质理论描述渗流方程。在裂隙岩体中，岩块的渗透系数很小，通常被忽略不计。裂隙介质按连续介质考虑，将 n 组裂隙面的渗透传导系数等效到整个研究区域上，渗透矩阵^[6]为：

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$k_{xx} = \sum_{i=1}^n \frac{g a_i^3}{12 b_i \nu} \sin^2 \alpha_i \quad (30)$$

$$k_{xy} = k_{yx} \sum_{i=1}^n \frac{ga_i^3}{12b_i\nu} (-\sin \alpha_i \cos \alpha_i) \quad (31)$$

$$k_{yy} = \sum_{i=1}^n \frac{ga_i^3}{12b_i\nu} (\cos^2 \alpha_i) \quad (32)$$

α_i 为第 i 组裂隙面法线方向与 x 轴的夹角，
 n 为裂隙面组数， a_i 为第 i 组裂隙面平均宽度， b_i 为第 i 组裂隙平均间距，
 ν 为水的运动粘滞系数。

3 算例比较

洞径为 10m、衬砌厚 1m，外边界取为 30 倍的洞径，设衬砌有两条缝隙，恰和外部两组结构面（六条）中的两条相交，且两组结构面分别与 x 轴方向（逆时针）成 60° 、 300° ，结构面宽 1m、间距 80m，内边界水头 100m、外边界水头 0m。岩块渗透系数为 $1E-7m/s$ （各向同性），结构面的渗透系数取为（ $1E-4m/s$ 顺结构面方向、垂直结构面方向取为 $1E-7m/s$ ），衬砌渗透系数取为 $1E-10m/s$ 。如右图 2 所示：

对整个区域用四节点等参元剖分，采用商用软 GeoStudio(SEEP/W)进行了计算。水头分布如图 3 所示，由于结构面渗透系数较大，岩块渗透系数很小。结构面为主要渗水通道，故结构面附近水头梯度变化较小，整个水头变化向四周渐进变化至 0 水头，图中的黑箭头很好地刻画了结构面的渗透特性。

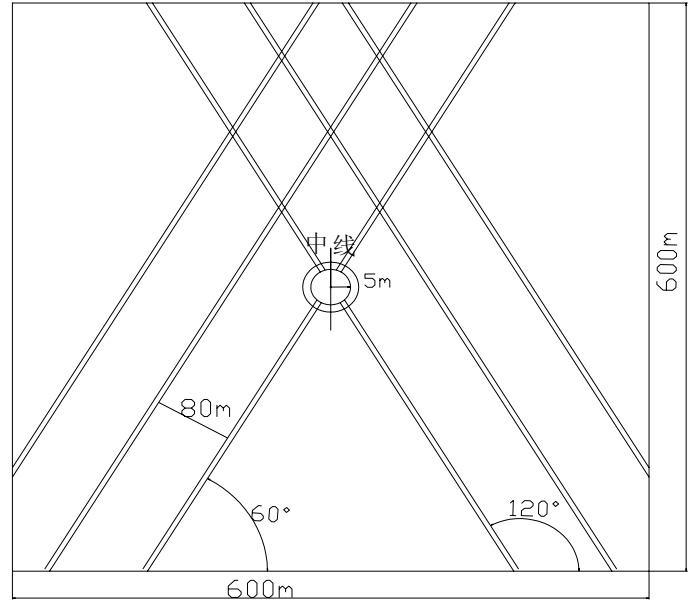


图 2 算例模型

Fig.2.The figure of calculation

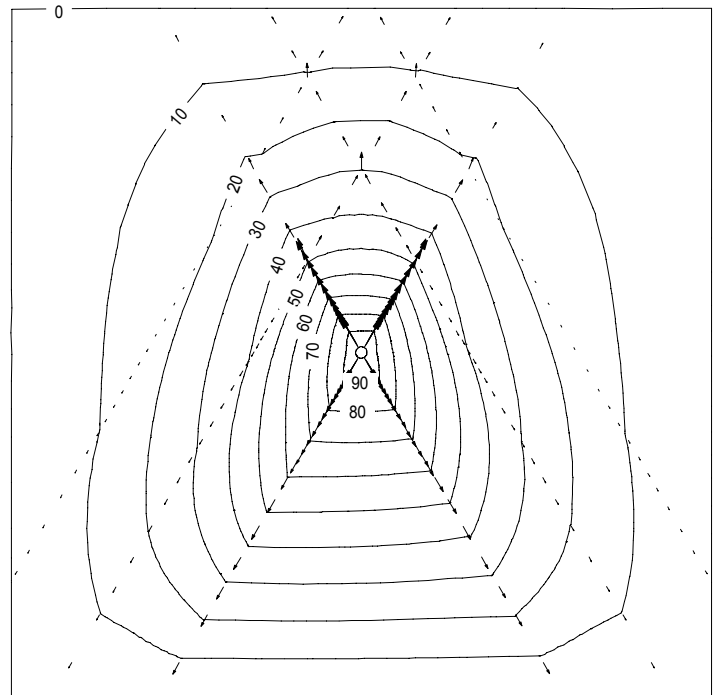


图 3 水头分布

fig 3 The distribution of water

为了比较说明，我们又对相同的研究对象，采用常规等效连续介质模型（忽略岩块渗透，将两组结构面渗透系数等效到整个区域）的方法进行了计算分析。经计算，x,y 方向为渗透主方向。

$$k_{xx} = 0.625E - 6 \text{ m/s}$$

$$k_{xy} = k_{yx} = 0 \text{ m/s}$$

$$k_{yy} = 1.875E - 6 \text{ m/s}$$

同样用 GeoStudio(SEEP/W)进行了计算，水头分布情况如图 4 所示。

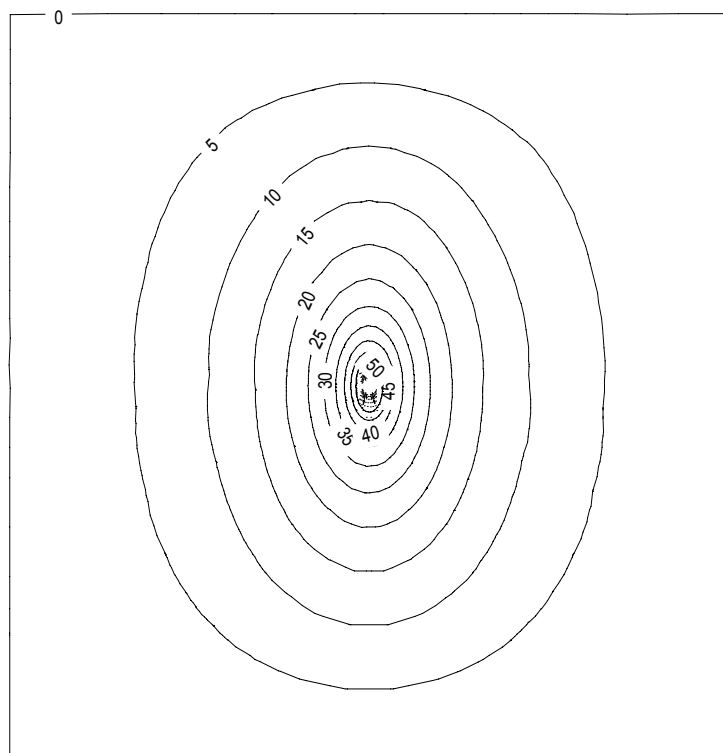


图 4 等效连续介质模型—水头分布

Fig.4 Equivalent continuum medium model—distribution of water head

如图 4 所示，常规等效连续介质模型将结构面岩体等效为连续介质，没有很好的刻画结构面的特殊导水作用。图 3、图 4、在水头分布上有很大的差异。为了进一步说明两者的差异，我们在关心的衬砌外缘节点上分别列出了两种分析方法下的节点水头值，如下：

因为所作算例的两组结构面分别与 x 轴成 60° 、 300° ，各节点水头情况以中间线为界左右对称，所以只给出左半部节点水头情况，共 27 个节点。如图 5 所示。

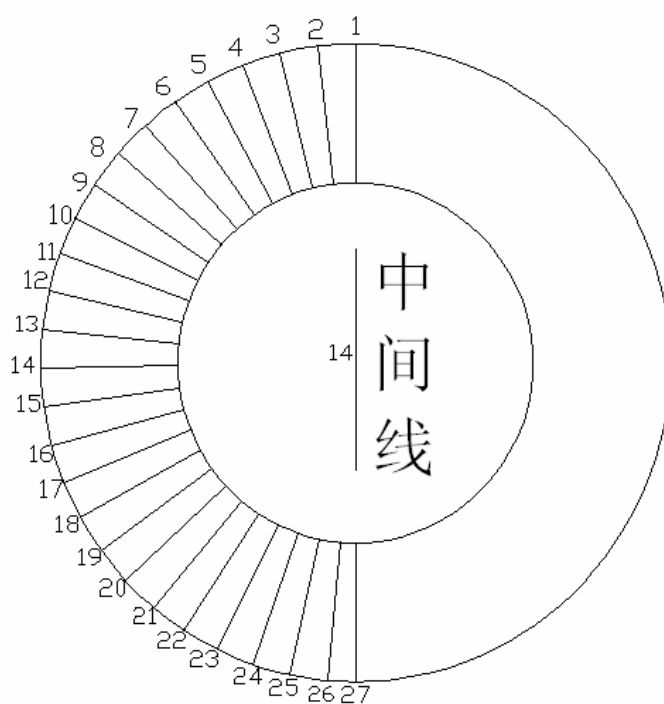


图 5 衬砌外缘节点

Fig.5 The outside node of lined tunnel

下面给出各节点水头变化趋势图如下:

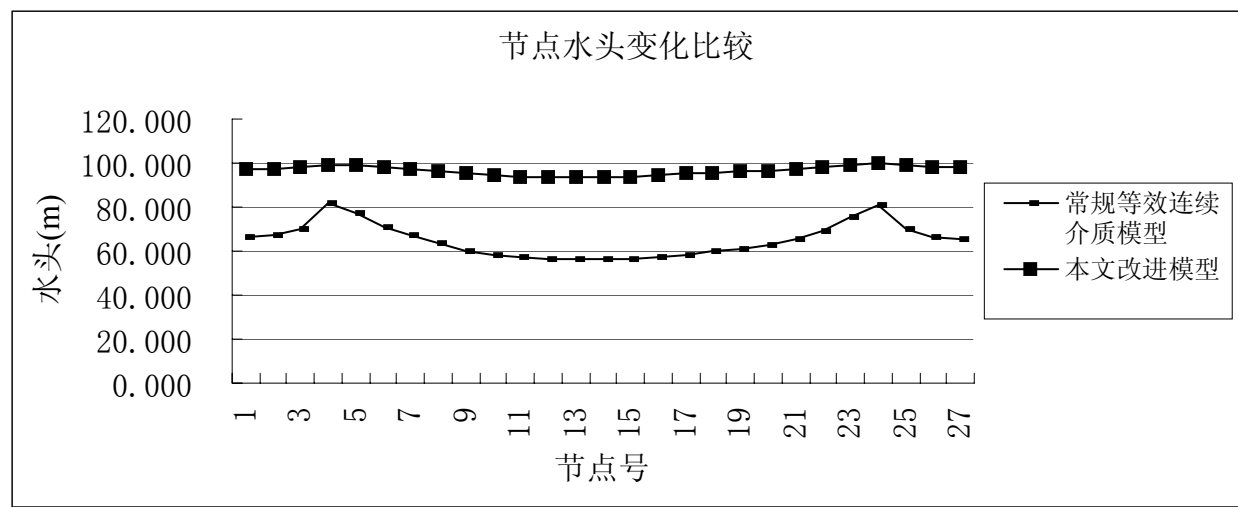


图 6 节点水头变化比较
Fig.6 Comparison of water head of node

表 1 节点水头值

Table 1 water head of node

节点号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
水头值*(m)	66.039	67.077	69.630	81.499	77.223	71.142	67.291	63.203	60.198
水头值**(m)	97.342	97.484	97.856	99.325	99.260	98.168	97.299	96.127	95.076
节点号	10	11	12	13	14	15	16	17	18
水头值*(m)	58.286	57.010	56.309	55.963	55.994	56.370	57.033	58.594	59.708
水头值**(m)	94.357	93.864	93.592	93.521	93.644	93.926	94.313	95.144	95.602
节点号	19	20	21	22	23	24	25	26	27
水头值*(m)	61.056	62.818	65.062	68.921	75.566	80.998	70.341	66.780	65.886
水头值**(m)	96.154	96.767	97.453	98.371	99.513	99.556	98.873	98.510	98.393

注：水头值*为按常规等效连续介质模型计算后的节点水头；水头值**为按改进模型计算后的节点水头值。

上述图表明明确说明，常规等效连续介质模型计算的结果和同时考虑岩块—结构面改进模型的计算结果有较大差别，同时常规等效连续介质模型没有很好地展示结构面的特殊导水性的缺点被展示出来。采用改进模型,即结构面按准平面连续介质渗流模型分析，微细裂隙和岩块按等效连续介质模型处理的方法，更符合实际情况。

4 结语

从分析计算结果可知，岩体的水力学及力学性质主要由结构面（裂隙、节理）决定，结构面的性质对渗透性质有重要的影响。此外，相对以往模型，文章给出的改进模型，同时考虑了岩块（包括微小裂隙）、结构面的渗透特性，采用有限单元法处理,方法简单、理论成熟，且在计算结果上也较为精确，有比较广泛的应用范围。这里，笔者只对岩体渗流场进行了研

究,在今后的工作中,多场耦合,渗流与应力、损伤、化学变化、特别是渗流与水力劈裂的耦合分析,是今后研究工作的重点。

参 考 文 献

- [1]. 周志芳、王锦国 著,裂隙介质水动力学[M],中国水利水电出版社 2004 年 1 月,73—88
- [2] 杜延龄、许国安著,渗流分析的有限单元法和电网络法[M],水利电力出版社,1992 年 3 月第一版,62—71
- [3] 李云鹏,张静,用似双重介质模型进行岩体应力与渗流耦合分析[J],西安科技学院学报,2002 年 12 月,407—410
- [4] 王君连、著,工程地下水计算[M],中国水利水电出版社,2004 年 3 月第一版,73—82
- [5] 毛昶熙著,渗流计算分析与控制[M],中国水利水电出版社,2003 年 9 月第二版,48—55
- [6] 张有天著,岩石水力学与工程[M],中国水利水电出版社,2005 年 4 月,118—119

基金项目:国家自然科学基金项目资助(50379005)

作者简介:杜小凯(1979),男,北京市密云县人,在读博士生,从事水工地下洞室结构的研究

任青文(1943),男,浙江宁海人,教授,博士生导师,江苏省力学学会秘书长,从事水工结构与岩土地基稳定性研究