

圆形地物的测量精度及其分析*

刘科利

(山东理工大学 建筑工程学院, 山东 淄博 255049)

摘要: 圆形地物定位是测绘中常见的问题, 不但需要确定其位置和大小, 而且需要对其圆心坐标和半径进行精度评定, 但目前尚没有对圆形地物进行定位和精度评定的完整模型。基于此, 对圆形地物的定位及精度评定问题进行了探讨, 提出了一种圆形地物定位的平差模型, 即首先利用 3 个边界点坐标推算出地物中心和半径的计算公式和精度评定公式, 继而给出平差模型, 最后通过实例, 验证了该模型的正确性。

关键词: 圆形地物; 精度分析; 平差模型; 定位参数

中图分类号: P 217

文献标识码: A

文章编号: 1007-9394(2008)01-0003-03

Surveying Accuracy and Analysis of Circular Culture Object

LIU Ke-li

(School of Architectural Engineering, Shandong University of Science and Technology, Zibo Shandong 255049, China)

Abstract: The determining orientation of circular culture object is a common problem in survey. The position and shape of circular culture object must be determined and its accuracy of the coordinate and radius (location parameters) of circular object must be evaluated. But there is not a complete model of determining orientation of circular object and the accuracy evaluation. This paper presents direct calculating formula of location of the circular object's centre, radius (location parameters) and the accuracy evaluation of three location parameters. Then the adjustment model is given. At last, all formulae are right provided by the instance. It is useful that locating and evaluating of circular culture object are necessary.

Key words: circular culture object; accuracy analysis; adjustment model; orientation parameters

0 引言

测绘中, 常会遇到一些圆形地物如水塔、水池、储油罐等, 这些地物都需要准确定位, 但目前尚没有对圆形地物进行定位和精度评定的完整模型。圆形地物的定位在城市地形图测绘及线路建设中是经常会被遇到的问题。虽然已有人提出用若干个点圆形图斑的边界点的坐标来拟合圆方程解决定位问题^[1,2], 但却没有定位精度的评定。南方 CASS、AutoCAD 等绘图软件也没有定位的平差模型和精度评定^[3,4]。基于此, 本文对圆形地物的定位及精度评定问题进行了探讨, 首先介绍了利用 3 个边界点坐标推算出圆形地物中心和半径的计算公式和精度评定公式, 继而给出平差模型, 并通过实例, 验证了该模型的正确性。

1 圆参数的确定

根据几何原理知, 通过不在一条直线上的 3 个点仅能确定 1 个圆, 因此, 要确定 1 个圆, 至少需要在其边界上的 3 个点(见

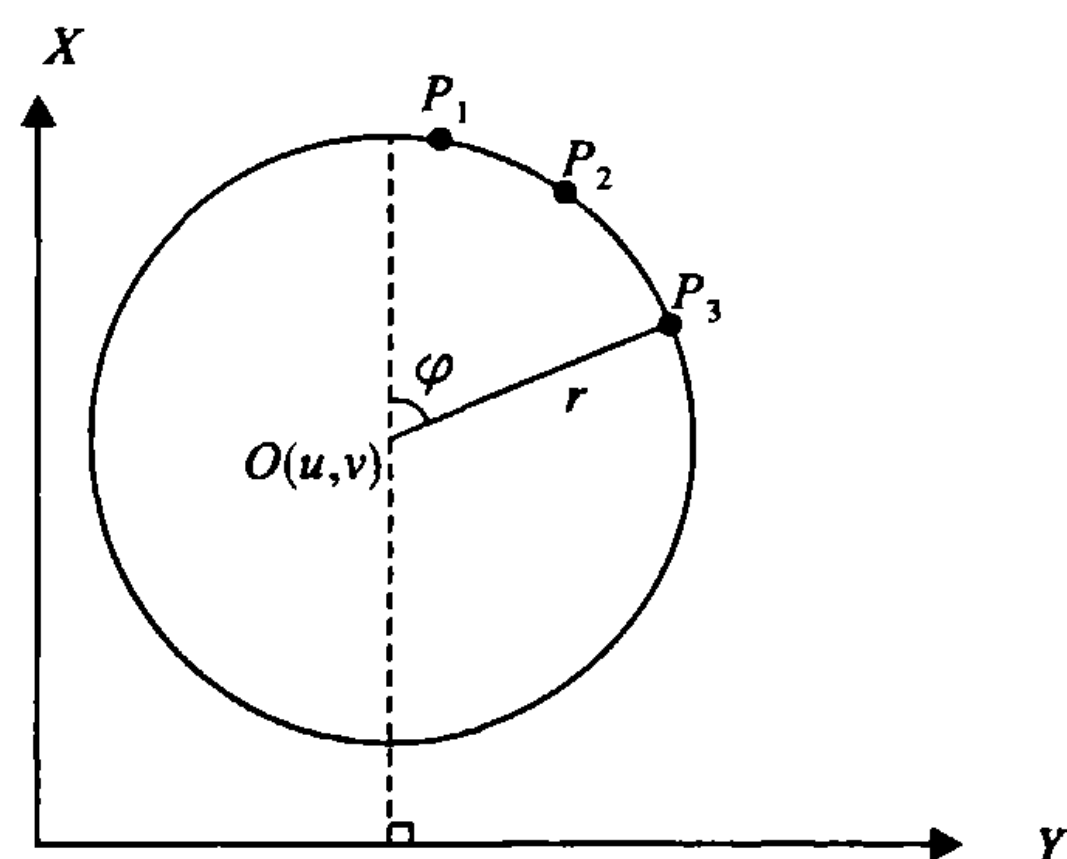


图 1 圆形地物的定位

Fig 1 Position of circular object

图 1), 圆心坐标和半径直接计算公式为^[5]:

$$\begin{cases} u = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \\ v = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \\ r = \sqrt{(X_1 - u)^2 + (Y_1 - v)^2} \end{cases} \quad (1)$$

式中: $a_1 = X_2 - X_1$; $b_1 = Y_2 - Y_1$; $a_2 = X_3 - X_1$; $b_2 = Y_3 - Y_1$;

$c_1 = \frac{1}{2}(X_2^2 + Y_2^2 - X_1^2 - Y_1^2)$; $c_2 = \frac{1}{2}(X_3^2 + Y_3^2 - X_1^2 - Y_1^2)$; P_1, P_2, P_3 的坐标分别为 $P_1(X_1, Y_1), P_2(X_2, Y_2), P_3(X_3, Y_3)$ 。下面是

定位参数的精度计算公式的推导。

$$\text{设 } A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial [u \ v \ r]^T}{\partial [X_1 \ Y_1 \ X_2 \ Y_2 \ X_3 \ Y_3]^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} a_{11} = \frac{\partial u}{\partial X_1} &= \frac{\frac{\partial c_1}{\partial X_1} \frac{\partial c_2}{\partial X_1}}{A} + \frac{\frac{\partial c_1}{\partial X_1} \frac{\partial c_2}{\partial X_1}}{A} - \\ &= \frac{B}{A^2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial X_1} \frac{\partial a_2}{\partial X_1} + \frac{\partial b_1}{\partial X_1} \frac{\partial b_2}{\partial X_1} \right) - \\ &= \frac{1}{A} \left(\frac{-X_1}{b_1} \frac{-X_2}{b_2} + \frac{c_1}{0} \frac{c_2}{0} \right) - \\ &= \frac{B}{A^2} \left(\frac{-1}{b_1} \frac{-1}{b_2} + \frac{a_1}{0} \frac{a_2}{0} \right) - \\ &= \frac{1}{A} (b_1 X_1 - b_2 X_1) - \frac{u}{A} (b_2 - b_1) \\ &= \frac{1}{A} (X_1 - u) (Y_2 - Y_1) \end{aligned}$$

同理得到

$$\begin{aligned} a_{12} = \frac{\partial u}{\partial Y_1} &= \frac{1}{A} (b_1 Y_1 - b_2 Y_1 - c_1 + c_2 + u a_1 - u a_2) \\ a_{13} = \frac{\partial u}{\partial X_2} &= \frac{b_2}{A} (X_2 - u) \\ a_{14} = \frac{\partial u}{\partial Y_2} &= \frac{1}{A} (b_2 Y_2 - c_2 + u a_2) \\ a_{15} = \frac{\partial u}{\partial X_3} &= \frac{b_1}{A} (u - X_3) \\ a_{16} = \frac{\partial u}{\partial Y_3} &= \frac{1}{A} (c_1 - b_1 Y_3 - u a_1) \\ a_{21} = \frac{\partial v}{\partial X_1} &= \frac{1}{A} [(c_1 - c_2) - X_1 (X_2 - X_3) - v (Y_2 - Y_3)] \\ a_{22} = \frac{\partial v}{\partial Y_1} &= \frac{1}{A} (X_3 - X_2) (Y_1 - v) \\ a_{23} = \frac{\partial v}{\partial X_2} &= \frac{1}{A} (c_2 - X_2 a_2 - v b_2) \\ a_{24} = \frac{\partial v}{\partial Y_2} &= \frac{a_2}{A} (v - Y_2) \\ a_{25} = \frac{\partial v}{\partial X_3} &= \frac{1}{A} (X_3 a_1 + v b_1 - c_1) \\ a_{26} = \frac{\partial v}{\partial Y_3} &= \frac{a_1}{A} (Y_3 - v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{31} = \frac{\partial r}{\partial X_1} &= \frac{1}{r} \left\{ (X_1 - u) \left[1 - \frac{1}{A} (X_1 - u) (Y_2 - Y_3) \right] - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{A} (Y_1 - v) [(c_1 - c_2) - X_1 (X_2 - X_3) - v (Y_2 - Y_3)] \right\} \\ a_{32} = \frac{\partial r}{\partial Y_1} &= \frac{1}{r} \left\{ - (X_1 - u) \frac{1}{A} (b_1 Y_1 - b_2 Y_1 - c_1 + c_2 + u a_1 - \right. \\ &\quad \left. u a_2) + (Y_1 - v) \left[1 - \frac{1}{A} (X_3 - X_2) (Y_1 - v) \right] \right\} \\ a_{33} = \frac{\partial r}{\partial X_2} &= \frac{1}{A r} [b_2 (X_1 - u) (u - X_2) + (Y_1 - v) (X_2 a_2 + v b_2 - c_2)] \\ a_{34} = \frac{\partial r}{\partial Y_2} &= -\frac{1}{A r} [(X_1 - u) (b_2 Y_2 - c_2 + u a_2) + a_2 (Y_1 - v) (v - Y_2)] \\ a_{35} = \frac{\partial r}{\partial X_3} &= -\frac{1}{A r} [b_1 (X_1 - u) (u - X_3) + (Y_1 - v) (X_3 a_1 + v b_1 - c_1)] \\ a_{36} = \frac{\partial r}{\partial Y_3} &= -\frac{1}{A r} [(X_1 - u) (c_1 - b_1 Y_3 - u a_1) + a_1 (Y_1 - v) (Y_3 - v)] \end{aligned}$$

2 圆形地物定位的平差模型

圆在平面坐标系中的方程为:

$$\begin{cases} x = u + r \cos \varphi \\ y = v + r \sin \varphi \end{cases} \quad (2)$$

式中: (x, y) 为圆上的任意一点; (u, v) 是圆形地物的圆心坐标; r 为圆半径; φ 为圆上任一点同圆心的连线与 X 轴的夹角 (如图 1 所示)。为了提高拟合圆的精度, 必须测量 3 个以上点的坐标。根据 (2) 式可列出误差方程:

$$\begin{cases} v_{xi} = \hat{x}_i + \cos \varphi_i \hat{x}_r - r^0 \sin \varphi_i \hat{x}_{\varphi_i} + l_{xi} \\ v_{yi} = \hat{x}_i + \sin \varphi_i \hat{x}_r + r^0 \cos \varphi_i \hat{x}_{\varphi_i} + l_{yi} \end{cases} \quad (3)$$

式中: 常数项 $l_{xi} = u^0 + r^0 \cos \varphi^0 - x_i$; $l_{yi} = v^0 + r^0 \sin \varphi^0 - y_i$; (u^0, v^0, r^0) 是由 (1) 式求得的圆形地物的圆心坐标和半径的近似值, φ^0 是用 3 点中的任一点同圆心的连线与 X 轴的夹角。测得 n 个点, 则可列出 n 组如 (3) 式的方程, 写成矩阵形式为:

$$V = B \hat{x} - l \quad (4)$$

式中:

$$V = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ \vdots \\ v_{xn} \\ v_{yn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos \varphi_1 & -r^0 \sin \varphi_1 & & & \\ 0 & 1 & \sin \varphi_1 & r^0 \cos \varphi_1 & & & \\ 1 & 0 & \cos \varphi_2 & & -r^0 \sin \varphi_2 & & \\ 0 & 1 & \sin \varphi_2 & & r^0 \cos \varphi_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \cos \varphi_n & & & & -r^0 \sin \varphi_n \\ 0 & 1 & \sin \varphi_n & & & & r^0 \cos \varphi_n \end{bmatrix};$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_u \\ \hat{x}_v \\ \hat{x}_r \\ \hat{x}_{\varphi 1} \\ \hat{x}_{\varphi 2} \\ \vdots \\ \hat{x}_{\varphi n-1} \\ \hat{x}_{\varphi n} \end{bmatrix}; \quad l = \begin{bmatrix} u^0 + r^0 \cos \varphi_1 - x_1 \\ v^0 + r^0 \sin \varphi_1 - y_1 \\ u^0 + r^0 \cos \varphi_2 - x_2 \\ v^0 + r^0 \sin \varphi_2 - y_2 \\ \vdots \\ u^0 + r^0 \cos \varphi_n - x_n \\ v^0 + r^0 \sin \varphi_n - y_n \end{bmatrix}.$$

根据最小二乘原理,计算出圆参数的改正数为:

$$\hat{x} = (B^T P B)^{-1} B^T P l \tag{5}$$

根据公式 $\hat{u} = u^0 + \hat{x}_u, \hat{v} = v^0 + \hat{x}_v, \hat{r} = r^0 + \hat{x}_r$, 求出定位参数的平差值,并用下述方法对其精度进行确定^[6-8]。单位权中误差

(坐标观测误差)的计算公式为:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{V^T P V}{n-3}} \tag{6}$$

定位参数中误差的计算公式为:

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_u = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{uu}} \\ \hat{\sigma}_v = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{vv}} \\ \hat{\sigma}_r = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{rr}} \end{cases} \tag{7}$$

3 实验与分析

为了验证公式的正确性,利用全站仪对某圆形草坪进行实地测量,共测 11 个点,坐标见表 1。

表 1 某圆形草坪边界点坐标
Tab. 1 Boundary points coordinate of the circular pot garden

点号	X/m	Y/m	点号	X/m	Y/m
1	4 075 921.632 6	588 683.335 3	7	4 075 842.344 1	588 614.608 1
2	4 075 903.381 9	588 698.049 4	8	4 075 866.839 4	588 600.049 0
3	4 075 871.081 3	588 702.600 5	9	4 075 907.083 2	588 605.476 6
4	4 075 855.256 2	588 696.807 1	10	4 075 928.105 0	588 628.520 6
5	4 075 837.189 0	588 680.791 8	11	4 075 932.133 4	588 661.142 6
6	4 075 828.056 3	588 645.942 1			

数据处理全部用 MATLAB 编程计算^[9,10]。利用表 1 中前 3 个点按公式(1)计算圆形地物的中心坐标(u,v)和半径 r 的近似值,由公式(6)计算平差值和中误差,计算结果列于表 2,表 2

第五列先验值为利用 6 年 16 次测量学实习而得的测量结果计算出的平均值,表 2 第六、七列是先验值与用 3 点和多点计算的

表 2 利用 3 点坐标计算出的圆形草坪的定位参数及精度

Tab. 2 Location parameters and accuracy of that using three points'coordinates calculate circular grassplot

参数	参数近似值/m	参数平差值/m	参数中误差/cm	先验值/m	用 3 点计算出的值与先验值之差/m	用多点计算出的值与先验值之差/cm
u	4 075 880.460 5	4 075 880.456 1	3.40	4 075 880.458	-0.002 5	0.19
v	588 650.734 3	588 650.790 3	3.35	588 650.774	0.039 7	-1.63
r	52.516	52.577	2.40	52.571	0.055 0	-0.60

从表 2 可以得出,利用 3 个边界点对圆形地物进行定位,因没有约束条件,且观测点分布不合理,所以误差较大;测点越多,分布均匀越合理,数值越精确,由此也验证了该平差模型的正确性与实用性。

4 结论

通过实验,笔者得出如下结论:

- 1)圆形地物定位是测绘中常见的问题,不但要确定其位置和形状,而且要进行精度评定,及时了解地图的数学精度十分重要;
- 2)应用本文模型可以使图和精度合一,即绘图的同时得到其数学精度;
- 3)应用本文所述模型对不能到达中心测量的大型圆形地物的测绘数据处理更为有效。

[参 考 文 献]

[1] 杨松林. 测量学[M]. 北京:中国铁道出版社,2002.
[2] 王胤江. 三点法定圆及圆心坐标简易求解[J]. 矿山测量,1994(2):20~21.

[3] 吉绪发,等. 数字化地形地籍成图系统 CASS 6.0 用户手册[M]. 广州:南方测绘仪器有限公司,2004.
[4] 费立凡,颜辉,武骊晨,燕霍亮. MapInfo 基础教程[M]. 北京:科学出版社,2005.
[5] 童小华,刘大杰. 道路曲线数字化数据的联合平差模型[J]. 武汉大学学报·信息科学版,2001,26(1):64~69.
[6] 武汉测绘科技大学测量平差教研室. 测量平差基础[M]. 北京:测绘出版社,1996.
[7] 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉:武汉大学出版社,2003.
[8] 刘大杰,陶本藻. 实用测量数据处理方法[M]. 北京:测绘出版社,2000.
[9] 徐飞,施小红,等. MATLAB 应用图像处理[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2002.
[10] 王炳武,胥谓. MATLAB 5.3 实用教程[M]. 北京:中国水利水电出版社,2000.

作者简介:刘科利(1966~),男,山东潍坊人,实验师,现主要从事实验室管理和测绘数据的处理。