

一种确定岭估计参数的方法*

王建强¹, 邢 诚¹, 朱广彬¹, 贾志强²

(1. 武汉大学 测绘学院, 湖北 武汉 430079; 2. 天津勘察院, 天津 300191)

摘要:在最小二乘估计基础上, 岭估计从减小均方误差的角度出发来解决病态问题, 它的关键在于岭参数的确定。计算机存储数据的大数值和小数值是一个幂函数关系, 根据这一关系提出了一种通过选取法方程系数矩阵的行列式确定岭估计参数的方法, 并用算例验证这种方法的可行性。

关键词:最小二乘估计; 岭估计; 岭参数; 法方程; 病态问题

中图分类号: O 212.1

文献标识码: A

文章编号: 1007-9394(2009)01-0001-02

A Method of Ridge Estimation Parameters Determining

WANG Jian-qiang¹, XING Cheng¹, ZHU Guang-bin¹, JIA Zhi-qiang²

(1. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan Hubei 430079, China; 2. Tianjin Institute of Geotechnical Investigation & Surveying, Tianjin 300191, China)

Abstract: Based on least square estimation, ridge estimation is an estimated decrease of the mean square error method biased estimate and it lies on the determination of estimation parameter. According to the characteristics of computer data storage that the large numbers and the small numbers are power function, this paper proposes a method that how to determine the Ridge parameters with the chosen of determinant of the normal equation coefficient matrix, and the example verifies the feasibility of this approach.

Key words: least squares estimation; ridge estimation; ridge parameters; normal equation; ill-posed problems

0 引言

最小二乘估计是最优线性无偏估计^[1], 在处理病态问题时, 所得到的解是不稳定的。为了解决由于法方程系数阵病态而导致最小二乘估计不稳定问题, 统计学家们提出一些新的估计方法来改善这种情况下的最小二乘估计, 即有偏估计。岭估计^[2-3]是从减小均方误差的角度出发而提出的一种压缩性有偏估计方法^[4-5], 其中岭参数的确定是岭估计的主要内容, 关于岭参数的确定, 目前已经有不少的方法, 但是没有一种公认的良好方法, 使用较多的是岭迹法。岭迹法是通过大量的计算结果中选出一组计算结果, 选取的范围过大, 没有明确的依据。本文提出了一种确定岭参数的方法, 它是通过确定法方程行列式的值来确定岭参数, 并用算例来验证这种方法的可行性。

1 岭估计模型及性质

1.1 岭估计模型

经典的线性平差模型^[7]为:

$$\begin{cases} L = BX + \Delta \\ E(\Delta) = 0, D_{\Delta} = \sigma_0^2 Q \end{cases} \quad (1)$$

式中: L 为观测向量; X 为未知参数向量; Δ 表示误差向量; $E(\Delta)$ 表示数学期望; D_{Δ} 为协方差。当法方程系数矩阵的行列式 $|B^T P B|$ 近似为零时, 法方程病态, 此时参数最小二乘解不稳定, 有偏估计可以较好的解决这一类问题。岭估计是目前使用最多的一种有偏估计, 其估计值为:

$$\hat{X}(k) = (N + kI)^{-1} B^T P L \quad (2)$$

式中: k 为岭参数, 且 $0 \leq k < \infty$; I 为单位矩阵; $N = B^T P B$ 。

1.2 岭估计性质

根据式(2)可得:

$$\hat{X}(k) = (N + kI)^{-1} N N^{-1} B^T P L = Z_k \hat{X} \quad (3)$$

由式(3)可知, 岭估计是最小二乘估计的线性估计。根据式(3), 由矩阵反演公式^[1]可得:

$$Z_k = (N + kI)^{-1} N = (E + kN^{-1})^{-1} = I - k(N + kI)^{-1} \quad (4)$$

根据式(4)、(2)可得:

$$\begin{aligned} E(\hat{X}(k)) &= E(\hat{X}) - k(N + kI)^{-1} E(\hat{X}) \\ &= X - k(N + kI)^{-1} X \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)表明, 岭估计的偏差与 k 有关, 仅当 $k=0$ 时, 估值

$\hat{X}(0)$ 才是无偏估计,此时岭估计便退化为最小二乘估计。

设 N 的特征根为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t > 0$, 对应的特征向量为 $A_1, A_2, \dots, A_t$, 相关推见参考文献[1], $(N + kE)$ 的特征根为 $(\lambda_i + k)$, Z_k 的特征根为 $\lambda_i / (\lambda_i + k)$, 它们的特征向量均与 N 的特征向量相同, 并与常数 k 值无关。

因为 Z_k 的特征根都在 $(0, 1)$ 之间, 且 Z_k 为对称方阵, 所以存在正交方阵 Q , 使得 $Z_k = Q^T A Q$, A 为对角矩阵, 其主对角元素为 Z_k 的特征根。于是有:

$$\|\hat{X}(k)\|^2 = \|Z_k \hat{X}\|^2 = \|Q^T A Q \hat{X}\|^2 = \|A Q \hat{X}\|^2 \quad (6)$$

由于 $\hat{X} \neq 0$, 则 $Q \hat{X} \neq 0$ 。再顾及 A 的特性, 得

$$\|\hat{X}(k)\|^2 = \|A Q \hat{X}\|^2 < \|Q \hat{X}\|^2 = \|\hat{X}\|^2 \quad (7)$$

从式(7)、(3)可以看出, 岭估计 $\hat{X}(k)$ 是最小二乘估计 $\hat{X}$ 的一种压缩型有偏估计。

2 讨论分析

法方程系数阵的行列式 $\det(N)$ 的绝对值很小, 这导致了最小二乘解的不稳定。有偏估计为了改善这种性质, 加入了常数 k 。由岭估计的均方误差公式为:

$$\text{MSE}(\hat{X}(k)) = \sigma_0^2 \sum_{i=1}^t \frac{\lambda_i}{(\lambda_i + k)^2} + k^2 \sum_{i=1}^t \frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i + k)^2} \quad (8)$$

式中: $\alpha = QX$, 对式(8)求导得:

$$\frac{d(\text{MSE}(\hat{X}(k)))}{dk} = -2\sigma_0^2 \sum_{i=1}^t \frac{1}{\lambda_i^2} < 0 \quad (9)$$

式(9)表明 $\hat{X}(k)$ 的均方误差是 k 的递减函数, 但是当 k 增大时, 岭估计的偏差也受到影响, 为得到一个合理的估计值, 需选取一个合理的 k 值。设

$$\det(N + kI) = \prod_{i=1}^t (\lambda_i + k) = \tau \quad (10)$$

由矩阵性质^[8]可得

$$\prod_{i=1}^t \lambda_i = \tau \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^t \lambda_i = \sum_{i=1}^t a_{ii} \quad (12)$$

式中: a_{ii} 为法方程系数阵的主对角线上的元素, 这些元素都是正值。法方程的特征值也只有少数个极小值, k 值和 τ 值是一个映射的关系, 一个 k 值有一个唯一的 τ 值对应, 但是一个 τ 值却有 t 个 k 值相对应, 因此必须确定 k 值范围。计算机的数据存储中, 最大数和有效的最小数的数量级是倒数关系, 因此可以设定 $\tau = 1$ 。此时

$$\det(k(N + kI)^{-1}) = k^t / (\prod_{i=1}^t (\lambda_i + k)) = k^t \quad (13)$$

由于法方程的特征值都为正数, 此时的 k 值小于 1。因此, k 值的取值区间为 $(0, 1)$, 采用二分法可以很快找到在 $\tau = 1$ 所对应的岭参数 k 值, 实际计算时可以取 τ 的一个小区间, 在这个区间范围内所对应的岭参数 k 都是有效值。

系数矩阵的行列式与岭参数的关系是一个递增凸函数, 如图 1 所示。计算机存储数据的大数和小数是一个幂函数, 以浮点数 8 字节为例, 可以存储的最大数为 $\pm 1.79 \times 10^{308}$, 最小数为 $\pm 2.23 \times 10^{-308}$, 大数和小数近似为倒数, 两极限值相乘为

± 3.9917 , 根据克莱默法则, 矩阵求逆的行列式前后是倒数关系, 两个函数具有相似性。因此可以通过选取系数行列式的值来确定岭参数, 系数行列式的值取值范围在 $(1, 4)$ 都是可靠的。

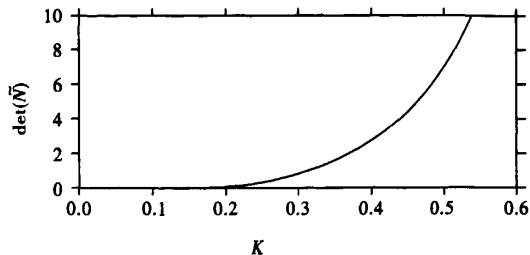


图 1 系数矩阵的行列式与岭参数的关系

Fig. 1 The relationship between determinant the coefficient matrix and the ridge parameter

3 数值计算

以 GPS 动态定位中的例子, 取历元为 2 s, 观测 5 颗卫星, 用 4 个历元解算整周模糊度, 相关数据见参考文献[1]。待求参数为 $X^T = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7]$, 其中, x_1, x_2, x_3 为坐标参数, x_4, x_5, x_6, x_7 为模糊度参数。观测值 L , 见表 1。

表 1 观测值

Tab. 1 Observation values

观测值	1	2	3	4	5	6	7	8
L_1	-4.85	9.25	-10.63	12.20	-4.86	9.26	-10.64	12.21
观测值	9	10	11	12	13	14	15	16
L_1	-4.84	9.24	-10.62	12.22	-4.84	9.27	-10.63	12.22

如图 2 所示是岭迹法和本文的方法计算的结果, 曲线表示的是岭迹法, 三角点是本文的计算结果。图 2 中, a, b, c 为坐标参数对应的岭参数; d, e, f, g 为整周模糊度对应的岭参数。当法方程系数阵的行列式 $\tau = 1$ 和 4 时, 所对应的岭参数 $k = 0.3172$ 和 $k = 0.4389$ (如图 2 三角点所示)。从图 2 中可以看出, 图中的 7 条曲线在 $k = 0.3172$ 和 $k = 0.4389$ 时, 各参数的估值变化已经变得相对稳定, 这也表明此时的法方程求逆时已经变得比较稳定了, 为了加强稳定性, 建议选取 $\tau = 4$ 。

4 结束语

病态问题产生的根源是由于参数之间存在近似线性关系而导致法方程中的行(列)向量之间存在了近似线性关系, 法方程系数矩阵行列式的值很小。岭估计是一种压缩型有偏估计, 它增大了系数矩阵行列式的值, 一般情况下, 岭参数 k 的选择要求使计算结果相对稳定, 虽然增大 k 值可以使岭估计趋向稳定, 但是它同时增加了估计的偏差量, 因此可以通过系数矩阵行列式的选取来确定岭参数。从公式推导和算例计算中可以看出当

(下转第 18 页)

4 结束语

本文讨论的方法实现了利用 ArcObject 组件库的空间分析功能自动检索点、点集、线、面等形式的研究区域内的确定比例尺地形图的功能,并以 VB6 为开发平台,开发了一个可在 ArcGIS9.1 软件环境下运行的扩展模块,并在实际项目中得到了具体的应用,实践表明该模块具有较强的实用性。

[参 考 文 献]

- [1] 潘正风,杨正尧.数字测图原理与方法[M].武汉:武汉大学出版社,2002.
- [2] 于付国.地形图图幅编号的自动查询与检索[J].测绘通报,2000,(11):32~33.
- [3] 田振坤,刘素红,傅莺莺,等.地形图新旧图幅编号自动检索算法及其可视化实现[J].测绘通报,2005,(2):61.
- [4] 马永立.国家基本比例尺地形图分幅编号解析法的优化[J].地

图,1998,(3):225.

- [5] 韩丽蓉.我国基本比例尺地形图分幅与编号的计算方法[J].青海大学学报:自然科学版,2006,(6):81~82.
- [6] GB/T13989-1992,国家基本比例尺地形图分幅与编号[S].
- [7] 蔡孟裔,毛赞酋,田德森,周占鳌.新编地图学实习教程[M].北京:高等教育出版社,2001.
- [8] 王腾军,杨建华,翟荷.国家基本比例尺新旧图幅编号自动互换的实现[J].测绘技术装备,2004,(4):24.
- [9] 蒋波涛. ArcObjects 开发基础与技巧——基于 VisualBasic. NET [M].北京:武汉大学出版社,2006.

作者简介:袁春霞(1982~),女,河北枣强人,博士研究生,主要研究方向为3S技术应用研究。

(上接第2页)

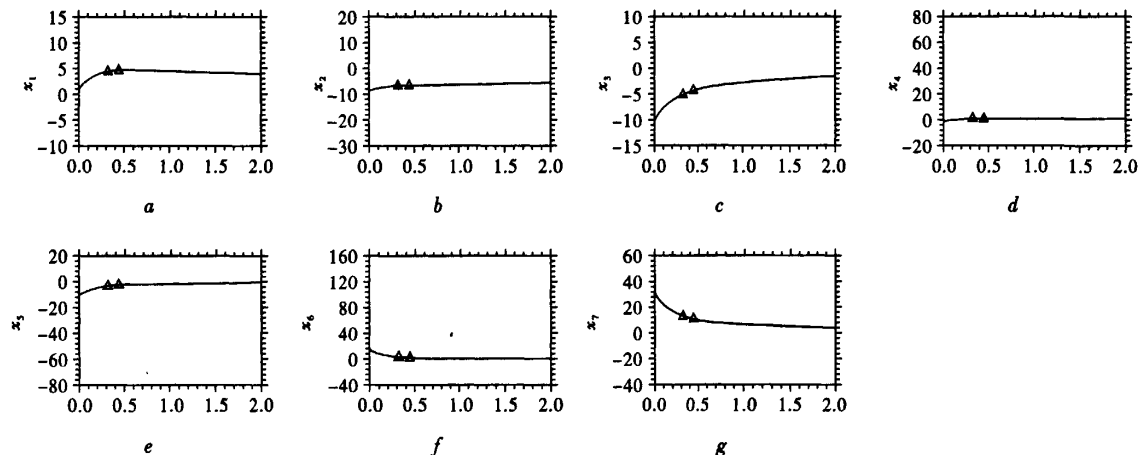


图2 岭估计随岭参数变化图

Fig. 2 The ridge estimation with the variation of ridge parameter

以 $\tau=1$ 为标准时,岭参数 k 的取值区间缩小为 $(0,1)$,此时均方误差 $MSE(\hat{X}(k))$ 并不一定是最小的,但是由于其法方程的求逆已经比较稳定,计算结果也已经比较稳定,实际计算时建议采用 $\tau=4$ 。

[参 考 文 献]

- [1] 崔希璋,於宗伟,陶本藻,等.广义测量平差[M].武汉:武汉大学出版社,2005:163~168.
- [2] HOERL A E and KENNARD R W. Ridge Regression: Biased Estimation for Non Orthogonal Problems[J]. Technometrics, 1970, 12(1): 55~67.
- [3] WIGGINS R A. The Generalized Linear Inverse Problem: Implication

of Surface Waves and Free Oscillations for Earth Structure[J]. Reviews of Geophysics and Space Sciences, 1972, 10: 251~285.

- [4] 林路.协方差阵扰动模型岭估计的影响分析[J].工程数学学报,1995,12(3):83~88.
- [5] 归庆明,郭建峰.病态平差模型直接解算方法的研究[J].大地测量与地球动力学,2004,24(3):15~18.
- [6] 黄有度,朱士信.矩阵理论及其应用[M].合肥:合肥工业大学出版社,2005:58.
- [7] 刘大杰,陶本藻.实用测量数据处理方法[M].北京:测绘出版社,2000:1~16.

作者简介:王建强(1981~),男,湖北枣阳人,博士研究生,研究方向为全球重力场模型研究。