高等学校教材

水库运行调度

河海大学　陈宁珍编

高等学校教材

水库运行调度

河海大学 陈宁珍编

水利电力出版社

高等学校教材

水库运行调度

河海大学　陈守珍　编

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米　16开本　10.75印张　240千字

1990年5月第一版　1990年5月北京第一次印刷

印数0001—1290册

ISBN 7-120-00887-0/TV·290

定价2.20元

内 容 提 要

本教材系统地介绍水库运行中的各种调度及其计算方法。主要内容可分为两大部分，第二章至第六章是阐述常规的调度方法，求水电站水库长期调度，电力系统中水、火电站日最优运行方式，潘派调度，防洪调度及综合利用水库调度等。第七章至第十一章是阐述系统分析法，如线性规划，网状系统分析，动态规划，大系统分解协调技术，模糊数学等的基本理论和方法及其在水库调度中的应用，并介绍了具体实例。

本教材可作为有关专业研究生课程及高年级大学生选修课用。还可供有关教师、科研、工程技术及运行人员参考。

前　言

水库运行调度是研究水能系统的重要组成部分。在设计、运行中都必须认真考虑。合理的水库调度既是充分利用水力水利资源，又是整个能源系统中开源节能的一种途径。为了合理地开发和利用水力水利资源，在水库调度问题上，既要掌握传统的时历法，又要跟上近代发展的趋势，运用系统分析的方法，全面考虑整个能源系统的问题。本教材分常规概念及其算法与系统分析及其应用，共计十一章。

本书由合肥工业大学韩志刚教授负责主审，他提出很多宝贵意见，对提高本书质量帮助很大，在此表示衷心的感谢。

限于水平和条件，书中一定有不少缺点和问题，敬请读者指正。

编　者

1988年12月

目　录

前　言

第一章　概　述……1

第一节　水库运行调度的意义和水库调度图的编制要求……1

第二节　水库调度分类……2

第三节　水库调度方法及发展趋向……3

第二章　水电站水库长期调度……6

第一节　水电站在电力系统中的运行方式简介……6

第二节　水库调度图基本资料的收集与分析……7

第三节　水电站长期最优运行任务与水库调度准则……11

第四节　时历法绘制水电站水库调度图……14

第五节　水库群调度的若干问题……20

第三章　电力系统中水、火电站的日最优运行方式……28

第一节　水、火电站的日最优运行所需的基本资料……28

第二节　水电站在电力系统中日运行方式的最优准则……29

第三节　水、火电站间日负荷最优分配的基本条件……31

第四节　水、火电站间日负荷最优分配的充分条件……33

第五节　负荷最优分配……34

第四章　灌溉水库调度……39

第一节　概　述……39

第二节　年调节灌溉水库调度图的绘制……40

第三节　多年调节灌溉水库调度图的绘制……43

第四节　水库群灌溉调度的基本原则……45

第五章　防洪水库调度……47

第一节　概　述……47

第二节　防洪调度……48

第三节　防洪预报调度概述……50

第四节　分期洪水防洪调度……52

第五节　水库群的防洪调度……53

第六章　综合利用水库调度……57

第一节　有综合利用任务的水库调度图的绘制……57

第二节　水库调度图的应用……59

第七章　线性规划……62

第一节　基本概念……62

第二节　线性规划的数学模型一般表示……64

第三节　线性规划的几何图解法……68

第四节　单纯形法……71

第五节　线性规划的对偶性……72
第六节　线性规划在水量调配上的应用……76
第八章　网状系统分析……78
第一节　概述……78
第二节　最短路程问题……82
第三节　最大流量问题……85
第四节　最小费用流问题……91
第五节　网络分析在水库调度中应用……97
第九章　动态规划……102
第一节　动态规划的基本理论……102
第二节　动态规划的递推方程式……106
第三节　增量动态规划……111
第四节　随机动态规划……111
第五节　动态规划在水库调度中应用……114
第十章　大系统分解协调法……123
第一节　概述……123
第二节　大系统分解协调法……129
第三节　大系统分解协调法在水库调度中应用……137
第十一章　模糊数学及其在水库调度中的应用……141
第一节　概述……141
第二节　模糊子集的表示与运算……141
第三节　隶属函数的确定……145
第四节　模糊综合评判……158
第五节　模糊数学在水库调度中的应用……161
参考文献……165

第一章 概 述

我国有丰富的水力资源，可开发的水力资源有3.78亿kW，居世界第一位。根据原水利电力部电力生产司编制的《水电站设计运行资料》指出：截至1983年底，已建成的大中型水电站共102座，总装机容量1869.52万kW，其中以发电为主并具有季调节以上的水电站水库共39座，水库总容积为1455.60亿m^3。以防洪灌溉为主结合发电的水库共13座，水库总容积为577.03亿m^3。这些水电站和水库，无论在发电、防洪、灌溉、供水、航运等方面均发挥了很大效益和重要作用。

根据国民经济的发展，全国已形成华东、华北、华中、东北、西南、西北等六大电网以及广西、广东、福建和新疆等省（区）的地区电网。上述水电站均分别投入各电网，其中若干年调节以上的水电站在电网中起调峰作用与电力补偿作用。如华东电网中的新安江、湖南镇、陈村等水电站，其水库均具有多年调节性能，是一些相当好的调峰电站，且对电网中调节性能差的水电站起到电力补偿作用，使水电群充分发挥自身的优越性。

第一节 水库运行调度的意义和水库调度图的编制要求

水库运行调度（以下简称水库调度）在规划设计与运行中均占有一定的重要位置，它直接关系着水库的综合效益的发挥，直接关系着电力系统供电的安全性、经济性与可靠性。特别是已建成的水库愈来愈多，单一水库调度和水库群的综合利用联合运行调度问题，愈来愈受到重视。

一、水库调度的意义

水电站水库的运行情况与河川径流密切相联。河川径流的多变性和不重复性给水库运行带来很大困难。尤其是年调节水电站的水库，由于缺乏准确可靠的长期水文预报，在水库运用管理上往往容易造成人为的错误。例如，供水期开始，为了想多发电，水电站以较大出力工作，结果供水期还未结束，水库可能提前放空，使汛前一段时间里，以天然来水量发电，不能满足电站保证出力的要求，破坏了电力系统的正常工作。反之，供水期开始，担心以后来水少，为避免正常工作遭受破坏，水电站在整个供水期均按保证出力工作，结果在下一个汛期来到时水库还未放空，汛期水库又很快蓄满，造成大量弃水，这样就不能充分利用水能。以上情况也可能同样会发生在蓄水期。为了避免人们管理上的差错，实际工作中常制定“水库调度图”作为指导水电站水库运行调度的工具。

对于综合利用水库，“水库调度图”也是解决各部门之间的矛盾，更好地发挥水库综合效益的一种重要途径和措施。

二、水库调度图的编制要求

为了进行水库调度，必须利用径流的时历特性资料或统计特性资料，按水库运行调度

的最优准则，预先编制出一组控制水电站水库工作的水库蓄放水指示线即调度线组成的水库调度图。水库调度图是以时间为横坐标，以水库蓄水量或水位为纵坐标，由一些控制水库蓄水和供水的指示线所组成的曲线图。所以，使用水库调度图就是根据水库各时刻的存水量来确定水库和水电站各时刻工作情况的一种管理方法。这样调度结果，就会较好地满足各方面的要求，获得较大的综合效益。如果水库调度结合水文预报进行，则称水库预报调度。制定水库调度图的要求是：

（1）尽可能满足各综合利用部门的要求；

（2）在设计保证率以内年份，应能满足电站正常供电，并有利于多余水量的利用，在特枯水年，尽量减少电站的破坏程度；

（3）对于多沙河流的水库工程，要有利于排涝防淤。

水库调度图的编制，在不同的设计阶段，有不同深度要求。设计阶段制定水库调度图为的是核定水电站的动能指标和分析水电站多年运行情况，并为将来水库管理工作提供基本依据。在运行期间，对调度图的要求则更为细致、严格，并且要经常按照实际情况进行修订。

第二节 水库调度分类

水库调度可按不同用途、不同目的进行分类，一般有以下几种方式。

一、按水库目标分

（1）防洪调度。防洪调度方式是根据河流上、下游防洪及水库的防洪要求、自然条件、洪水特性、工程情况而合理拟定的。为此，必需绘制防洪调度线，该线是指为满足安全拦蓄设计洪水的要求，汛期各时刻水库必须预留（腾空）的库容的指示线，其作用是指示何时需要启闭泄洪闸门进行泄洪控制。防洪调度问题将于第五章详细讨论。

（2）兴利调度。兴利调度一般包括发电调度、灌溉调度以及工业、城市供水与航运对水库调度的要求等。发电调度、灌溉调度将分别于第二章、第四章详细讨论。

工业及城市供水的显著特点就是要求保证率高，一般要求保证率为95～98%，年内供水过程，除了受季节影响略有波动外，一般比较均匀，供水水质要求较高，供水时应按国家规定控制污染物及泥沙下泄。以供水为主要任务的水库调度图与灌溉水库类似，分正常供水、降低供水与加大供水等区域。在正常供水区只是在向下游供水时才发电，当库水位处于正常供水区以上，可以多泄流加大发电以扩大经济效益。

航运对水库调度的要求：航运方面要求水库下泄流量不小于某一最低通航流量；如果水电站进行日调节，则要求下游水位的日变幅与时变幅不大于航运要求的数值，另外，还要求平均流速与表面流速不大于航运要求的数值。

水库上游的库水位希望不要消落过快，尽可能保持较长时间的高水位，更不要消落到死水位以下。另外希望能在水库调度中控制泥沙，尽可能避免航道的淤积。

（3）综合利用调度。如果水库担任有发电、防洪、灌溉、给水、航运等方面的任务，则在绘制调度曲线时，应根据综合利用原则，使国民经济各部门要求得到较好的协调，使

水库获得较好的综合利用效益。

其他如环境因素、控制泥沙淤积以及防凌等对水库调度均有一定要求时，请参看有关书籍。

二、按水库数目分

（1）单一水库调度。随着水利水电建设事业的发展，单一水库运行情况愈趋减少。为了说明绘制水库调度的原则、方法，多从基本的最简单的单一水库入手，进而引深到水库群的联合调度。

（2）水库群的联合调度。水库群联合调度就其结构形式一般可有三种：

1）并联水库。系指电力系统中位于不同河流上或位于同一河流的不同支流上的水库群。各水库水电站之间有电力联系而没有水力联系。但在同一河流不同支流上的并联水库水电站群之间，除有电力联系外，还要共同保证下游某些水利部门的任务，例如防洪等，因之常有水力联系。

2）梯级水库群又称串联水库群。位于同一条河流的上、下游形成串联形式的水库群。各水电站之间有着直接的径流联系，有时在落差和水头上也互有影响，故称有水力联系的梯级水库群。

3）混联水库群。是串联与并联的组合形式，是位于同一河流或不同河流上更一般的水库水电站形式。这些水电站、群之间，有的有水力联系，有的有水利联系，又因处于同一电力系统中而有电力联系，情况是多种多样的。

三、按调度周期分

水库调度实际是确定水库运用时期的供、蓄水量和调节方式。根据水库运用的同期长短可分长期调度和中、短期调度。

（1）长期调度。对于具有年调节以上性能的水电站水库，首先要安排调节年度内的运行方式、供水、蓄水的情况，这就是人们所说的长期调度。具体内容是以水电厂水库调度为中心，包括电力系统的长期电力电量平衡、设备检修计划的安排、备用方式的确定、水库入流预报及分析、洪水控制和水库群优化调度等。长期调度是短期调度的基础。

（2）短期调度与厂内经济运行。短期调度通常又称水火电厂短期经济运行，主要研究的是，电力系统的日（周）电力电量平衡；水火电厂有功负荷和无功负荷的合理分配；负荷预测；电网潮流和调频调压方式；备用容量的确定和合理接入方式；水电厂水库的日调节和上游水位变动、下游不稳定流对最优运行方式的影响等。

对厂内经济运行，主要研究的是电厂动力设备的动力特性和动力指标；机组间负荷的合理分配；最优的运转机组数和机组的起动、停用计划；机组的合理调节程序和电能生产的质量控制及用计算机实现经济（优化）运行适时控制等。

第三节　水库调度方法及发展趋向

水库调度在20年代～40年代时期主要应用判别式与求极值的方法。1951年美国数学家贝尔曼（R.Bellman）等人提出“最优化原理”，并研究了实际问题，从而创建了解决最优

化问题的一种新方法——动态规划法。他写的名著动态规划于1957年出版，该书是动态规划第一本著作。1955年J.D.C李特尔首先把动态规划思想应用于水电站优化调度。1960年霍华特（R.A.Howard）提出动态规划与马尔柯夫决策过程的研究，使这种方法的应用范围更扩大了，他在《水电工程出力最优化》的论文中明确指出：动态规划法可以成功地应用到较复杂水电站水库群的运行调度上。但随着问题维数的增多，计算工作量增加非常快．以致应用计算机都不能解决问题，即所谓维数灾。为了解决这个问题，先后提出增量动态规划（I.D.P）、微分动态规划（D.D.P）、离散微分动态规划等。

我国在50年代末60年代初开始研究把动态规划原理应用于水电站水库优化调度。70年代我国一些科研机构、大专院校、设计与运行等单位，应用随机序列理论，按动态规划原理研究水电站水库优化调度。80年代初提出应用模糊集理论网络技术进行水库调度。近年来水库优化调度通过广泛的研究，无论在理论上、方法上、实践上均取得一定的成效。

一、水库调度的常规方法

水库调度的常规方法一般指时历法与统计法。由于水利工程的不断发展，电力系统也不断发展，常构成一个多目标、多单元的大水利系统，使一群水电站水库处于联合工作状态共同担负供水、供电任务，因此要研究如何全面考虑确定各电站水库的运行方式，使整个水利系统工作最优，具体处理方式有如下几种：

（一）判别式法

该方法是水库群联合运行方式中，应用最广泛、研究最多的一种途径，特别是对并联或串联水电站的蓄放水次序问题。判别式多种多样，考虑的因素和公式结构复杂程度各有不同，但其理论基础，一种是从方案比较得出；另一种是以严密的多元函数求极值或变分法导出的。判别式的优点是简单易行，能考虑较复杂情况，其缺点是①对限制条件考虑不够，如未考虑最大、最小出力的限制，因此有时出力分配过程不匀，蓄放水过于集中，对于天然来水集中在后期的水库，有可能造成电站全出力运行还会发生弃水的不合理现象。②判别式往往把供水期与蓄水期硬性分开，因此，对供蓄水期运行方式的相互影响考虑不够，所得的运行方式不是整个调节期的最优运行方式。③判别式要求较精确的长期预报。

（二）等微增率法

它与判别式法在一定程度上相近似，都属于古典求极值的方法。如用多元函数求极值的方法推导各电站的微增耗水率，然后用图解形式求解。其缺点是对有不等式的约束条件应用不便。

（三）多元函数求极值法

此方法把水库供水期的总电能看作是各月库水位的一个多元函数，这样，供水期的最优调度问题，就成为一个多元函数求极值的问题，当水库运行受到水位、设备容量等要求的限制时，就成为多元函数求条件极值，但由于水库调度的复杂性，直接求解较困难。

（四）变分法

电力系统的最优调度问题，是一个典型的变分问题。对水电站最优运行来说，是用变分求极值解出最优调度线，如果径流为随机时，就成为最优调度的问题．此法也往往难以直接得出，因此也多用判别式表示，与此法近似的是逐步逼近法。

二、水库调度的系统分析法

系统分析（*System Analysis*）是从整个系统来探索增加整个系统的效益，而不是着眼于系统中某一部分效益的增加。所以必须明确地了解系统结构，如系统的内在矛盾与因果关系，系统外的边界情况以及因为边界情况的改变对整个系统效益的影响。应用系统观点的系统分析方法探求改善整个系统运筹的最优方案。

系统分析方法一般可以分数学规划及概率模型两大类。数学规划（*Mathematic Programming*）在系统分析中占显要地位。其中包括线性规划（*Linear Programming*），整数规划（*Integer Programming*），非线性规划（*Non-Linear Programming*），网状系统分析（*Network Analysis*），动态规划（*Dynamic Programming*）及博奕论（*Game Theory*）等；概率模型（*Probabilistic Models*）考虑事态发生的不可靠性，其中包括排队论（*Queueing Theory*），存储论（*Inventory Theory*），马尔可夫决策过程(*Markovian Decision Processes*)，系统可靠性分析(*System Reliability Analysis*)，决策分析（*Decision Analysis*）及模拟（*Simulation*）等。另外又增加了模糊集与大系统分解协调技术。

三、水库调度发展趋向

随着电力系统范围愈来愈大，电力系统中供电组成结构愈来愈复杂，水库调度更为复杂化。例如，在我国随着葛洲坝大江电站、三峡水电站的建成，金沙江上巨型水电站群的开发，不仅华中电网与华东电网联网，甚至全国将联成统一电网。电网内水电站群的水库调度问题，水电站群与火电站群、其它类型电站的联合运行问题，其复杂程度决非单一的系统分析方法所能解决，而要综合在一起，运用钱学森专家的工程控制论中大系统理论，结合复杂的计算机网络控制系统付诸实施。

联网问题决非遥远的将来，例如美国将水电比重较高的西北电力系统与火电占比重较高的西南电力系统联网，通过长距离超高压输电线联网以后，更有利于水火电的调剂，既可以提供调峰容量，还可输送廉价的季节性电能。从1970年到1980年，西北向西南输送电1216亿kW·h。又如法国南部多水电，北部多火电，全国联成统一的电力系统，水火电联合运行，丰水期由南部的水电向北部送电，枯水期由北部的火电向南部送电，互相调剂，取得了很大的效益。此外，国家与国家之间也逐步联网。例如，挪威、瑞典、芬兰与丹麦等国联成北欧电网。电力系统联网是合理开发利用能源的必然趋势。例如，我国的广东、广西两地区联网，广东多调峰电站，广西多径流式电站，联网后将取得明显的效益。

上述情况说明水电站水库群统一调度这样一个实际问题，其属性是庞大而又复杂的，且可用递阶结构描述，也就是说要通过大系统分解协调技术探寻水电站水库群统一调度。

因此，水库调度不仅要从事于方法论的研究，而且要从事于解决实践。充分地、合理地、经济地利用能源，现在不是进行得差不多了，而是有许许多多问题，需要我们去开拓、探索。

第二章　水电站水库长期调度

水电站建成后均联入电力系统，由系统统一向用户供电。电力系统内的水电站的运行方式与水库运行调度有关。因此必须研究水电站水库长期调度问题。本章先用单一水库调度来解决基本概念、基本绘制方法，进而介绍水电站水库群联合调度问题。

第一节　水电站在电力系统中的运行方式简介

水电站在电力系统中的运行方式与水库调节性能、径流的变化以及电站群组合等因素有关。

一、无调节水电站

无调节水电站的水库无调节能力，电站的出力大小取决于河流来水量，为了减少水量损失，电站一般在基荷运行。但在晚间低谷负荷，有时因火电站为供热或保证机组技术最小出力的需要，迫使无调节水电站改变运行方式，少承担一部分负荷而产生弃水。在洪水期，若天然流量所能产生的出力大于系统最小负荷时，亦将被迫产生弃水。

二、日调节水电站

日调节水电站，可以使一日内均匀的河流来水经过水库的调节，适应负荷的变化，在不发生弃水的原则下，水电站尽可能担任峰荷、腰荷工作。洪水期，为了充分发挥日调节水电站装机容量的作用，随着来水流量的增加，水电站工作位置逐步由峰荷转至基荷运行，如图2-1所示。

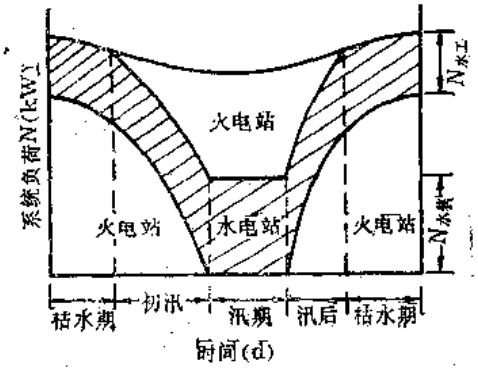


图 2-1　日调节水电站设计枯水年运行方式

当日调节水电站下游有航运、灌溉或给水渠道进水口引水要求，且下游又无反调节水库时，日调节水电站的运行方式将受到这部分航运、灌溉、给水等综合利用要求的约束，这时，往往有一部分容量要在基荷运行，以减小下游流量、水位和流速的波动幅度。

三、年调节水电站

年调节水电站，可以将年内的天然径流经过水库的调蓄作用按照年负荷变化要求重新分配。在供水期，水电站发电用水不受其它部门用水限制时，一般担任峰荷工作；当用水受综合利用部门限制时，有时可能担任部分峰荷、部份腰荷，视具体情况而定。在蓄水期，天然径流增大，水电站运行的工作位置由峰荷逐步转向腰荷、基荷工作。在弃水期，水电站一般担任基荷，按全装机运行。不蓄期，随着天然径流的减少，水电站工作位置由

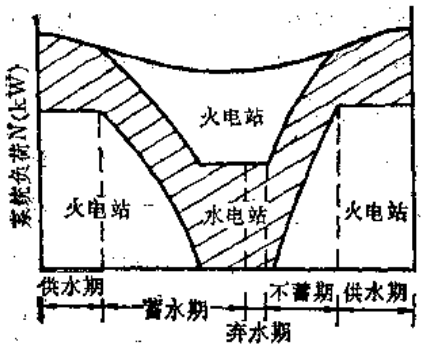


图 2-2 年调节水电站设计枯水年运行方式

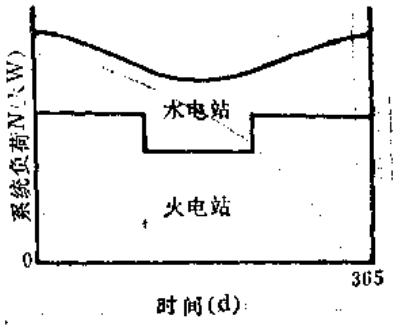


图 2-3 多年调节水电站一般年份运行方式

基荷逐步上升至腰荷、峰荷，如图2-2所示。

四、多年调节水电站

多年调节水电站，由于其水库的调节库容较大，可以将丰水年的水调蓄到枯水年用，而且多年调节水库一般总是同时进行年调节与日调节。因此，具有多年调节水库的水电站一般担任系统峰荷工作，如图2-3所示。

具有一定调节能力的水电站，担任系统峰荷工作，其特点有：

（1）水电站担任峰荷工作可以充分发挥水电站运行的灵活性、经济性。最大限度地替代火电站容量，较为合理地利用水能资源。

（2）水电站担任峰荷后，上、下游水位将随时间而变化。

（3）可以使火电站在基荷均匀地工作，提高火电站的发电效率，节省煤耗，降低成本。

（4）使水、火电站合理地配合运行，提高了供电质量，降低了事故机率。

第二节 水库调度图基本资料的收集与分析

绘制水库调度图的基本资料主要有：

（一）电力系统中各组成水电站资料

（1）各组成水电站入库径流资料，包括时历特性资料和统计特性资料；

（2）各组成水电站的水库特性资料和下游水位流量资料；

（3）各组成水电站各种特征水位资料；

（4）各组成水电站水轮机运行综合特性曲线资料；

（5）各组成水电站引水系统水头损失资料，若水电站开发方式为坝后式，引水管路短，引水系统水头损失较小；若为引水式开发，引水系统长而复杂，其水头损失也较大。水头损失计算式为$\Delta H=FQ^2$（式中F为系数，Q为流量）。即引水系统水头损失与过流量成平方关系，如图2-4所示；

（6）各组成水电站保证出力图，它表示为了保证电力系统正常运行而要求水电站每月发出的平均出力。

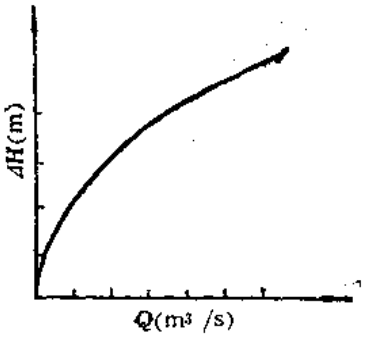


图 2-4 引水系统水头损失曲线

（二）航运、灌溉、给水等综合利用用水要求

（三）电力系统负荷及电量资料

1.电力系统状态分析

电力系统状态分析包括系统历年供电范围，主要电源及其分布、网络结构、相应的厂用电率、线损率。系统历年负荷水平、负荷结构、年负荷曲线与历年代表日负荷曲线以及系统中主要电力用户的用电方式等。年负荷的变化规律，其主要内容有：

（1）日负荷率（γ）。日负荷率系日平均负荷与日最大负荷之比：

$$\gamma=\frac{\text{日平均负荷}(\overline{N})}{\text{日最大负荷}(N'')} \tag{2-1}$$

（2）日最小负荷率(β)。日最小负荷率系日最小负荷与日最大负荷之比：

$$\beta=\frac{\text{日最小负荷}(N')}{\text{日最大负荷}(N'')} \tag{2-2}$$

（3）月负荷率(σ)。月负荷率为该月平均负荷与月内最大负荷日的平均负荷的比值，它表示在一月中负荷变化的不均衡性。即：

$$\sigma=\frac{\text{月平均负荷}\overline{N}_{月}}{\text{月内最大负荷日的日平均负荷}(\overline{N}_{日})} \tag{2-3}$$

全年各月σ值不同，其一年的平均值可用下式计算：

$$\overline{\sigma}=\sum_{i=1}^{12}\frac{\sigma_i}{12} \tag{2-4}$$

式中 $\overline{\sigma}$——一年内月负荷率的平均值；

σ_i——各月的月负荷率。

当电力系统内连续性生产企业占比重较大时，表示一月负荷变化比较均匀，则σ值大。当电力系统内进行负荷调整，使月内变化比较均匀，则σ值就大；若月内例假日多，节日多，一般σ就要小些。

（4）季负荷率(ρ)。季负荷率表示全年各月最大负荷日的最大负荷与年最大负荷的比值。即

$$\rho=\frac{\sum_{i=1}^{12}N_{max}^{i}}{12N_{max}''} \tag{2-5}$$

式中 N_{max}^{i}——全年各月最大负荷日的最大负荷；

N_{max}''——年最大负荷。

ρ大表示一年中月最大负荷变化比较均匀，反之，表示一年中月最大负荷变化大。

2.电力系统负荷、电量的增长情况

统计分析电力系统历年年最大负荷或年电量的平均年增长率$K_{增}$，可用下列公式进行计算：

$$K_{增}=(\sqrt[m]{A}-1)\times 100\% \qquad (2\text{-}6)$$

$$A=\frac{N_n^n}{N_1^1}$$

或

$$A=\frac{E_n}{E_1}$$

式中 $K_{增}$——年平均增长率；

m——第一年和最后一年相隔的年数；

A——最后一年对第一年负荷（或电量）的比值；

N_1^1、N_n^n——第一年、最后一年（第n年）的最大负荷值；

E_1、E_n——第一年、最后一年的年电量值。

据统计，国内平均年负荷增长率在10～20%之间。

此外，还应根据电力系统供电范围，负荷结构情况，分析系统负荷曲线的变化。

3.各类用户设计负荷及典型负荷曲线的收集与分析

（1）各类用户设计负荷的分析。一般可将电力系统用户分为工业用电、农业用电、交通运输及市政生活用电等四个方面。工业用电中又可分煤炭、石油、黑色冶金、有色冶金、机械、化学、建筑材料、造纸……等。各类用户用电特点各异，各用户的典型日负荷曲线变化规律亦不相同，例如，市政生活用电与农业用电，用电变化差异非常大，市政生活用电一般在傍晚负荷较高，其余时间均较低，如图2-5所示；而农业用电一般在7～10点与13点～21点用电较为集中，而且还有季节性，如图2-6所示。同一种类用电，如工业用电中有色冶金工业与机械工业用电亦大不相同，如图2-7，图2-8。前者三班制生产，用电比较平稳，后者二班制生产，日内用电变化较前者大。了解电力系统用电结构以后，各类用户可根据国民经济的发展，推算远景产品产量或产值，再根据各产品或产值的单位耗电定额推算各部门用电量与最大负荷，其计算式如下：

产品（或产值）×单位耗电定额＝年用电量

$$各类用户最大负荷=\frac{年用电量}{最大负荷年利用小时数}\times 用户同时率 \qquad (2\text{-}7)$$

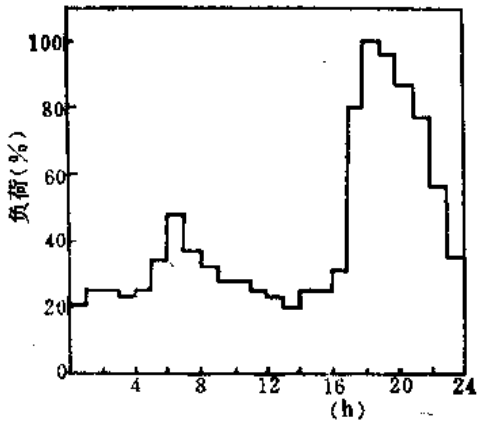


图 2-5 市政生活用电

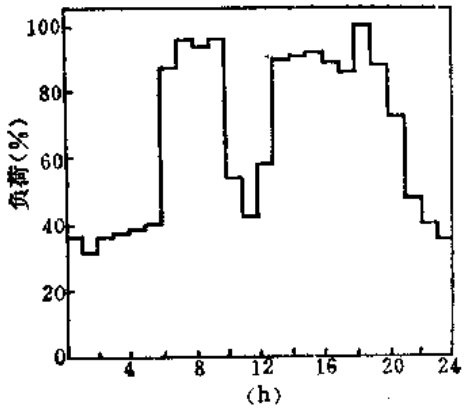


图 2-6 农业用电

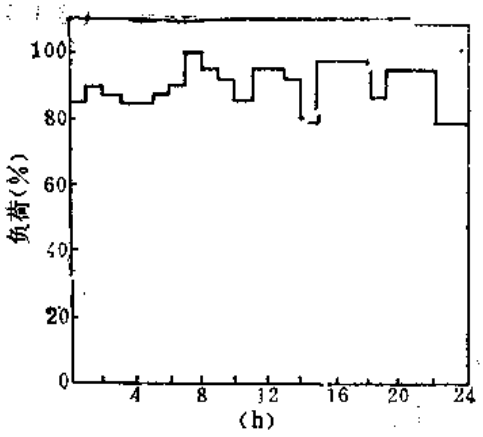


图 2-7 黑色冶金工业用电

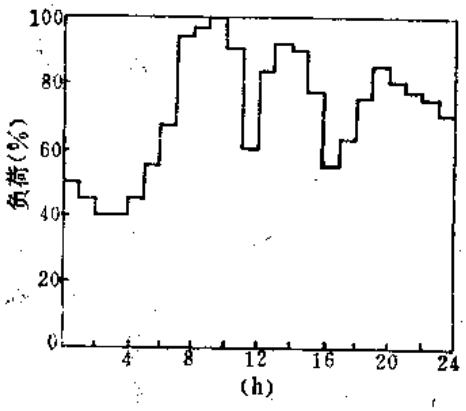


图 2-8 机械工业用电

式中最大负荷年利用小时数指各类用户的最大负荷年利用小时数。用户同时率指最大负荷同时出现的机率，其值与电力用户多少，各用户用电特点有关。

上述最大负荷值未考虑线损率与厂用电率。线损率包括输电线电力损失与变压器损失两部份，一般占供电负荷的5～10%。可供编制负荷曲线用。

（2）各类用户典型负荷曲线的分析。根据各类用户的用电特点，可能的变化情况，对原有典型日负荷曲线进行修改，使其符合远景用电特点，供编制远景负荷曲线用。例如，市政生活用电、农业用电、黑色冶金工业用电以及机械工业用电……等等。

（四）负荷曲线的编制：

编制负荷曲线的方法多种多样，这里主要讨论应用历史负荷曲线修改法。具体步骤如下：

（1）分析电力系统实际负荷曲线，选出系统负荷调整较少、较符合远景情况的典型日负荷曲线，并用换算成最大负荷的百分数表示。

（2）确定各类用户负荷比重变化的相对大小。

（3）将负荷比重变化大的电力用户：按远景所改变的比重代入相应的用户典型曲线，修正电力系统夏、冬典型日负荷曲线（以百分比表示）。

（4）按实测电力系统年负荷下降率，分析确定远景年负荷下降率，以此年负荷下降率确定夏季最大负荷。

（5）将远景冬、夏季最大负荷值，乘以上述修正后的冬、夏典型日负荷曲线，即可求得要求的远景冬、夏典型日负荷曲线。

（6）按冬、夏季典型日负荷曲线进行补插求得春、秋季典型日负荷曲线。

如果这些资料已经具备就不需要重新编制，可直接采用。

4.系统电站组成结构与系统经济特性

（1）系统电站组成结构　系统中水火电站及其他电站随系统负荷增涨而改变，进而影响电站运行方式与送电潮流。

（2）系统经济特性

1）系统中火电站的峰荷煤耗、基荷煤耗以及平均煤耗；

2）系统内煤矿投资与单位煤价；

3）系统内不同负荷电价。

第三节　水电站长期最优运行任务与水库调度准则

一、水电站长期最优运行任务

对于具有长期调节性能的水电站，由于其库容较大，可以将年内或年际径流量重新进行分配，以满足负荷及其它用水的需要。因此，研究制定水电站长期最优运行方式，对实现电站最优运行有很大的指导意义。水电站长期最优运行的中心问题是水库最优调度问题。

水电站长期最优运行及其水库最优调度的基本任务，就是寻求对水电站及其水库长期运行方式的最优控制，即在原始数据和一定约束条件下，为满足系统的用电和用水要求，按照一定的原则和最优准则，制定水电站在较长时期内最优利用动力资源和水利资源的方式。在系统工程理论中，这一课题就是寻求一个最优控制，使系统在一定约束条件下，由初始状态$x_0=x(t_0)$过渡到终了状态$x_K=x(t_K)$时，目标函数达到最优。

这类课题有大量控制变量和原始信息，各种各样的非线性关系和不等式约束条件，是一种极为复杂的随机规划课题。这种课题，要完全求解是极为复杂和困难的。当系统中有若干水电站和综合利用要求时，求解的困难就更大了，因此，有必要在一定的允许误差范围内，对课题加以简化。

水库调度图是水电站及其水库运行控制函数的一种特殊形式，是在缺乏准确信息情况下，实现水电站长期近似最优运行方式的工具。

二、水库调度运行准则

建国以来，许多已建的大中小水电站，结合本电站具体情况，在调度上创造了不少经验，制订了不少管理运行的规章制度。水库蓄水、放水、供水合理与否，直接关系着水库的经济效益、所属电力系统效益以及国民经济效益。因此，水电站和水库运行调度准则应根据党的方针政策和水库的开发任务，价格和价值法则，在确保工程安全的前提下，合理协调防洪、灌溉、发电、航运和给水等部门关系，充分发挥水电站和水库的综合经济效益。调度准则归纳起来一般可分以下四个方面：

（一）单项指标最优准则

（1）水电站发电量最大准则：

$$E_{水}=\max \tag{2-8}$$

该准则是指在满足各综合利用部门用水要求的条件下，使水电站发电量最大。一般来说，该准则缺乏电力系统的整体概念，按此准则运行，水电站发电量虽最大，但对系统整体却不一定最优。该准则国内外应用虽然广泛，但欠合理也欠完善，在当前电量比较紧张之际尚可应用。但这仅仅是权宜之计。

（2）火电站总燃料费用最小准则：

$$U=\sum_{i=1}^{n} u_i=\min \tag{2-9}$$

式中 U——火电站总燃料费；

u_i——第 i 火电站的燃料费；

i——电站数（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n$）。

该准则多用于短期最优运行。在长期调度运行中仍欠整体性。

（二）电力系统总计算支出最小准则

电力系统总计算支出：

$$S_{系}=\sum_{j=1}^{m}S_{水j}+\sum_{i=1}^{n}S_{火i}=\min \tag{2-10}$$

式中 $S_{系}$——电力系统总计算支出；

$S_{水j}$——第 j 水电站计算支出；

$S_{火i}$——第 i 火电站计算支出；

i——火电站电站数，（$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n$）；

j——水电站电站数，（$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots m$）。

将电力系统内水电站与火电站的运行，统一到系统中来，并从系统总经济价值来体现，比上一准则进了一步，但仍然存在一定缺点。其缺点是还不能反映该运行方式使国民经济总效益达到最优。

（三）国民经济总费用最小准则

在确保系统可靠性和经济性要求的前提下，充分满足水利电力系统用电用水要求，同时考虑可靠性遭到破坏时，整个水利电力系统所引起的损失，以水利电力系统内国民经济总费用最小为准则。即

$$\Sigma U=U_p+U_I+U_N+U_M+L_p+L_I+L_N+L_M=\min \tag{2-11}$$

式中 ΣU——水利系统、电力系统总费用；

U_p、U_I、U_N、U_M——分别表示发电、灌溉、航运及其他综合利用部门的运行费用；

L_p、L_I、L_N、L_M——分别表示发电、灌溉、航运及其他综合利用部门由于水量不足所引起的损失费用。

该准则理论上比较完善，但使用中有些经济损失指标很难确定，许多问题目前研究得尚不够成熟，实行该准则，在当前尚存在一定困难，但应作为努力方向。

（四）水电站保证峰荷电能最大，电力系统能耗最小，电力系统总效益最优准则

$$E=A\left(\int_{t_1}^{t_2}N\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\Delta N\,dt\right)=\text{最大} \tag{2-12}$$

$$u=EC \tag{2-13}$$

$$\Delta u=\beta\alpha f A\left|\int_{t_1}^{t_2}(N_{保}-N)\,dt\right|$$

$$=\text{最小} \tag{2-14}$$

$$\beta=\begin{cases}B, & \text{当}N_{保}-N>0\\ \Delta B, & \text{当}N_{保}-N<0\end{cases} \tag{2-15}$$

式中 E——水电站在负荷端的供电量；

C——水电站1度电的单价；

A——计算时段历时；

u——水电站发电效益；

β——判别系数；

α——水、火电站厂用电的差异系数；

f——电力系统中火电站燃料平均单价；

$N_{保}$——水电站保证出力；

Δu——需火电站额外增加峰荷电能的费用；

B——火电站峰荷煤耗；

ΔB——火电站峰、基荷煤耗差；

$A\int_{t_1}^{t_2} N dt$——计算时段水电站发电量；

$A\int_{t_1}^{t_2} \Delta N dt$——计算时段水电站厂用电量与输配电损失；

$\left|\int_{t_1}^{t_2}(N_{保}-N)dt\right|$——需火电站额外增加的峰荷电能。

C值应视水电站各时期运行方式而定(国内目前采用的不变值是不合理的)，当水电站在发峰荷电能时，单位电度价格C考虑最高，以鼓励电站调峰；当水电站发电量大于峰荷电能时，单位电度价格次之；当水电站发电量低于峰荷电能，但其相应出力的减少值小于系统三分之一事故备用容量时，C值更小，若出力减少值大于系统三分之一事故备用容量，由于其破坏最深，给系统带来损失最大，C值考虑最小。根据系统中水电站发电量，运行方式不同，采用不同计算单价，使系统总能耗最小，系统经济效益最大。

各种状态的C值计算分别叙述如下：

（1）当$E=E_{保}$时，C值最大，用C_1表示，即：

$$C=C_1(\text{元/kW·h}) \tag{2-16}$$

（2）当$E<E_{保}$时：

1）水电站出力减少值小于系统三分之一事故备用容量时：

$$C=(C_2E-\Delta u)/E \tag{2-17}$$

式中 C_2——水电站发低于保证电能的单位电能价格（元/kW·h）。

2）水电站出力减少值大于系统三分之一事故备用容量时

$$C=C_3-(\Delta u/\Delta E) \tag{2-18}$$

式中 $\Delta E=E_{保}-E$；

C_3——水电站出力减少值大于系统三分之一事故备用时，每度电的单价(元/kW·h)。

3）当$E>E_{保}$时：

$$C=(C_4E-\Delta u)/E \qquad (2\text{-}19)$$

式中 C_4——水电站发大于峰荷电能时的单价（元/kW·h）。

上述电价关系为$C_1>C_4>C_2>C_3$。

式（2-14）和式（2-15）表示水电站少发ΔE值后，火电站需增发电能而多消耗的能耗费用。这部分损失是由系统内水电站而造成，应由系统内水电站来承担。

至于各种部位单价C_1，C_2，C_3，C_4的具体值，其间的相互关系系数应如何确定，这与各电力系统的用电、供电组成等复杂因素有关。需对电力系统中供用电特性，系统经济条件进行分析后确定。

总之，各水电站采用什么准则，应根据具体情况采用切实可行的准则，同时还要考虑准则的科学性与发展的可能性，做到逐步完善。

第四节 时历法绘制水电站水库调度图

在水利水电规划一书中已经讨论过应用时历法绘制水库调度图，这里仅做简单的回顾。

水库基本调度图分四个主要区域：正常工作区，加大出力区、降低出力区与防洪区。

一、年调节水库调度图的绘制

（一）年调节水库供水期基本调度线的绘制

供水期基本调度线为水库在供水期内，按保证出力图或保证供水图工作时，水库的最高和最低蓄水指示线。它指示水库在保证率小于或等于设计保证率的年份，在发足保证出力的前提下，充分利用水库的蓄水量与水头，适当加大出力，使水库在供水期末，库水位降至死水位。水库供水期基本调度线的绘制步骤：

（1）选取典型年。由于径流年内分配不同，水库蓄水指示线也不仅相同，所以要选择符合设计保证率P的若干典型年。选择典型年主要考虑其供水期的平均出力$\bar{N}_{供}$应等于或接近于保证出力，且供水期的终止时刻应与设计保证率范围内大多数年份一致。同时，也可选取一些枯水期起迄时间不同（最迟与最早）的典型年和一些特殊情况的典型年。将各典型年逐月流量分别乘以修正系数，即得虚拟的流量过程。

（2）将典型年来水过程，按保证出力图自供水期末死水位开始，逐时段逆算至供水期初。求得各年供水期的水库蓄水指示线。

（3）联包络线。取各年蓄水指示线的上包线与下包线。上包线称为上基本调度线，下包线称为下基本调度线。上下基本调度线之间称为正常工作区，如图2-9所示。

运行中为了防止由于洪水期迟到，引起水电站出力的剧烈下降，带来运行工作上的集中破坏，因此，可将上下基本调度线结束于同一点，该点相当于洪水最迟的开始时间。绘法为将原下包线（虚线）的上端与上包线的下端连起来，或将下包线平行移动，使其结束点与上包线下端重合，得到修正后的上下基本调度线，如图2-10。

（二）年调节水库蓄水期调度线的绘制

蓄水期基本调度线为水库在洪水期内按保证出力图或保证供水图的用水来工作，并保证水库蓄满的最高蓄水指示线和最低蓄水指示线。即对于包括设计枯水年在内的一般年

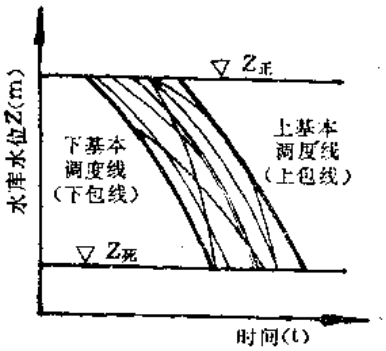


图 2-9 供水期调度线

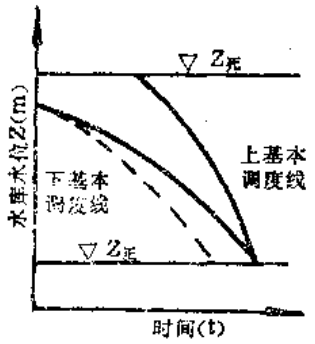


图 2-10 修正后的供水期调度线

份，洪水期按保证出力图工作，在保证汛末蓄满水库的前提下，加大出力，以增加电力系统发电效益。因此，在蓄水期水库调度的任务是，在保证水电站工作可靠性和水库蓄满的前提下，尽量利用多余水量加大出力，以增加电力系统发电效益。蓄水期的基本调度线的绘制方法和步骤与供水期基本相同。即先求出若干典型年，自各年蓄水期以正常蓄水位或防洪限制水位开始，逆时序地按保证出力图进行水能计算。求得各年蓄水指示线后，取上包线和下包线，即为水库在蓄水期上、下基本调度线，如图2-11所示。

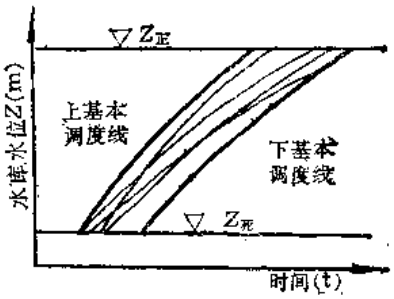


图 2-11 蓄水期基本调度线

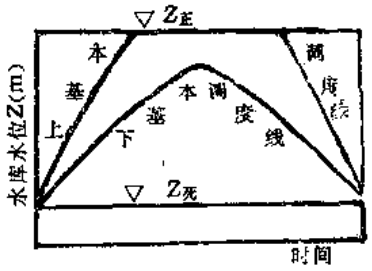


图 2-12 年调节水库基本调度图

（三）基本调度图

将上述绘制得的供水期和蓄水期的基本调度线绘于同一张图上，即为水电站水库基本调度图，如图2-12所示。该基本调度图还可按整个调节年的来水过程连续绘制求得。即对若干典型年各年的来水过程，按保证出力图工作，自供水期末从死水位开始，逆时序算至蓄水期初，库水位又返回到死水位为止。这样针对每一年来水过程可得一根蓄水指示线，针对若干典型年可得若干根蓄水指示线（曲线簇）。然后取上包线为上基本调度线，将下包线适当修正后即为下基本调度线。两种不同方法绘制，所得成果基本一致。

基本调度线将全图分成保证出力区（正常工作区），加大出力区与降低出力区。由于水库调节系数的差异和径流分配特性不同，基本调度图有三种形式。

（1）径流年内分配比较稳定，即各年汛期起始日期比较稳定；水库供水结束日期与水库蓄水开始日期正好衔接，则供水期末与蓄水期初的基本调度线的界限会聚于一点，如图2-13所示。

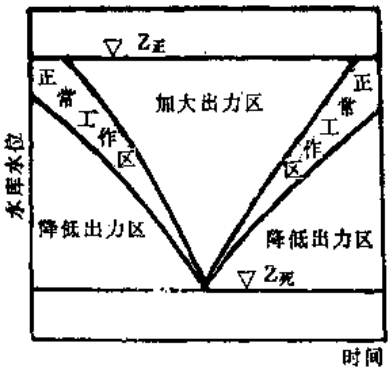


图 2-13 调度线界限会聚一点

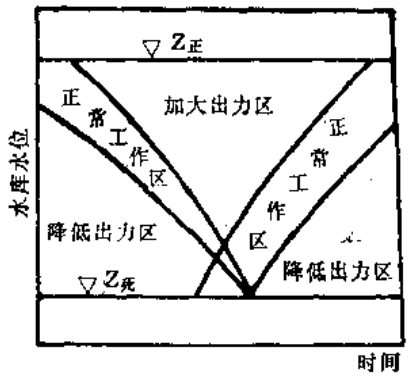


图 2-14 调度线界限交错

（2）水库供水期结束日期与水库蓄水期开始日期交错，如图2-14。交错日期如何调度，应视水文的具体情况，当河流来水量还小于供水量，且库水位还在下降，则按供水期调度线的规则调度，反之，如果来水大于供水，库水位上升，则按蓄水期调度线的规则调度。

（3）供水期末与蓄水期初之间有一段不蓄期，如图2-15所示。

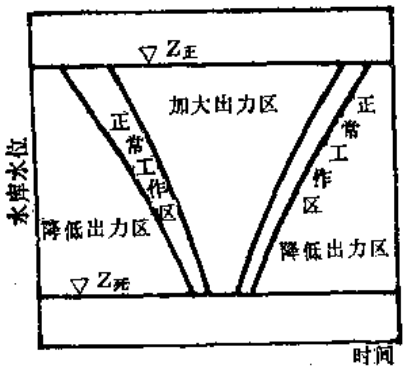


图 2-15 调度线界限不交

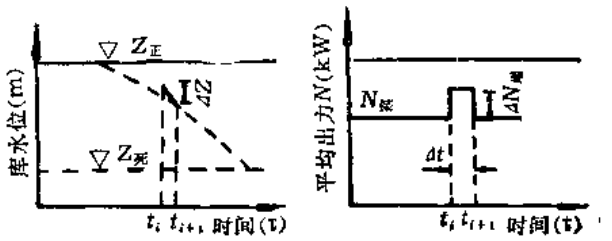


图 2-16 立即加大出力运行

（四）加大出力和降低出力调度线

1.加大出力调度线

水电站在实际运行中，当天然来水较大，水电站按保证出力图工作，库水位比上基本调度线高出ΔZ_i时，相应ΔZ_i的多余水量ΔW利用方法，一般有以下三种形式：

（1）立即加大出力运行。将多余水量尽快用掉，使水库水位在时段末t_{i+1}处落在上基本调度线上，如图2-16所示。该运行方式由于短时间内出力突增，对系统中火电站的正常工作有不利影响，但水量利用比较充分。

（2）后期集中加大出力运行。当t_i时段出现多余水量后，并不立即利用，而是将它蓄存到供（蓄）水后期才集中加大出力使用，如图2-17。该运行方式可使水电站较长期处于较高水头下工作，但出力不均匀，对系统火电站正常工作有不利影响，若汛期提前开始，则还有可能产生不应有的弃水。

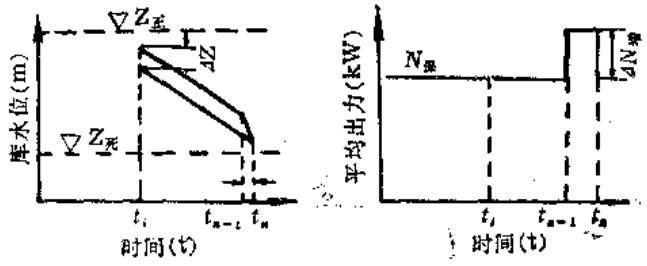


图 2-17　后期集中加大出力运行

（3）均匀加大出力运行。从t_i时段出现多余水量到供（蓄）水期末整个时段内均匀加大出力，如图2-18所示。该方式出力较均匀，能充分利用水能资源。

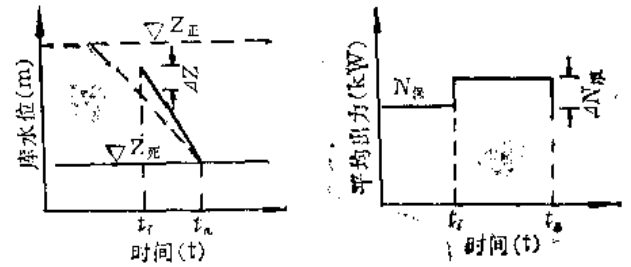


图 2-18　均匀加大出力运行

上述三种不同运行方式，由于使用多余调配水量不同，增加的出力、发电量也就不同，一般以（2）、（3）种情况增加得较大。第（1）种方式多用于易弃水的小水库，第（2）种多用于调节性能好的大水库，一般水库常用第（3）种。

2.降低出力调度线

当水电站按保证出力图工作，经过一定时段至t_i时，由于实际来水减少，水库供水结果使水库水位落于下基本调度线以下，出现水量不足，在这种情况下，水库调度亦有以下三种可能处理方式。

（1）水电站一直按保证出力图工作，直至水库到达死水位为止。以后时期水电站按天然流量工作，如果该时期天然径流很小，水电站出力将剧烈下降；如果天然径流尚可，水电站出力则降低较少。也就是该时期水电站出力降低程度直接取决于天然径流的大小，供电破坏时可考虑动用系统的部分事故备用容量来代替水电站所减少的出力。这种调度方式比较简单，且系统正常工作破坏的持续时间较短，一般使用于系统容量内水电站比重小的情况。

（2）一旦出现不足水量时，水电站在下一时段立即减少出力，使水库蓄水尽快回蓄到下基本调度线上。此调度方式引起的破坏强度较前者小，时间也较短。

（3）水电站自发现不足水量时刻t_i起至供水期结束为止，逐渐减少出力，系统正常工作均匀破坏。此调度方式破坏时间长一些，但破坏强度最小。这种方式一般使用于水电站容量占系统容量比重较大的情况。

二、年调节水电站水库调度图绘制实例

某年调节水电站水库调度图绘制步骤如下。

（一）某年调节水电站基本情况

（1）水位：正常蓄水位166m，死水位147m；

（2）防洪限制水位：前汛期（4～6月）防洪限制水位162.5m，后汛期（7～9月）防洪限制水位164m；

（3）保证出力：供水期（10～3月）各月平均出力3.9万kW，蓄水期（4～9月）各月平均出力4.34万kW。设计年平均出力4.12万kW；

（4）已知水电站水库历年入库逐月平均流量；

（5）已知库容曲线及下游水位流量关系曲线（省略），库容单位采用（m³/s·月）；

（6）其他：出力系数$K=8.3$（当水头>54m时）。

（二）选择若干典型年，并修正其流量过程

（1）选典型年。选择符合设计保证率P_0的若干典型年，所选择的典型年应满足两个条件：一是典型年供水期平均出力接近于保证出力3.9万kW；二是其供水期终止月份，与大多数年份相同，即3月底或稍早于3月底。

根据以上两个条件，选择1956～1957年，1965～1966年，1966～1967年，1969～1970年，1971～1972年，1972～1973年等六个年份为典型年。

（2）对各典型年进行流量修正。按下式求出各典型年的修正系数：

$$K=\overline{Q}_{年设}/\overline{Q}_{年典}$$

式中 $\overline{Q}_{年设}$——相当于设计保证率的年平均流量。某水电站为78m³/s；

$\overline{Q}_{年典}$——所选择的典型年平均流量。

各典型年的修正系数及修正前后的逐月平均流量值见表2-1。

（3）调节计算。对各年修正后的供水期来水过程，按保证出力图自供水期末死水位

表 2-1　　所选典型年的流量修正　　流量单位：m³/s

典型年	修正系数	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月	1月	2月	3月	$\overline{Q}_{年}$
1956	0.757	60.5	278.0	388.0	98.6	66.5	30.9	27.3	40.3	33.3	25.5	69.2	117.0	103.0
1957		45.8	211.0	293.7	74.6	50.3	23.4	20.7	30.5	25.2	19.3	52.4	88.6	78.0
1965	0.898	149.1	242.0	168.0	85.9	80.5	29.0	78.8	60.9	35.4	28.8	30.5	52.8	86.8
1966		133.9	217.3	151.0	77.0	72.2	26.0	70.8	54.6	31.8	25.8	27.4	47.4	78.0
1966	0.619	84.3	71.4	702.0	203.0	162.0	60.0	46.5	40.5	44.0	36.5	57.2	35.0	128.0
1967		51.4	43.5	428.0	123.9	98.9	36.0	28.4	24.7	26.8	22.3	34.9	20.1	78.0
1969	1.035	114.0	180.0	124.0	63.0	78.8	43.8	53.9	36.1	26.5	46.1	23.2	107.0	75.2
1970		118.0	186.0	128.0	65.2	81.6	45.4	55.8	37.4	27.4	47.7	30.2	111.0	78.0
1971	1.16	34.3	106.0	164.0	85.0	102.0	93.4	40.9	30.7	70.7	40.8	34.1	14.2	67.2
1972		39.8	123.0	179.0	98.5	118.0	108.0	47.5	35.6	82.0	47.3	39.6	16.5	78.0
1972	0.782	118.0	200.0	262.0	88.3	148.0	52.5	43.6	48.8	52.9	97.4	47.6	38.1	99.7
1973		92.3	156.6	204.8	69.0	115.8	41.0	34.1	38.2	41.4	76.0	37.2	29.8	78.0

147m进行逐时段（月）的逆时序计算，一直算到蓄水期初，再从蓄水期开始算到死水位147m为止，以求得各典型年发保证出力时的水库蓄水指示线。表2-2为1965～1966年调节水电站基本调度线计算。

表 2-2　　年调节水电站水库基本调度线计算表

年	月	Q (m³/s·月)	N (万kW)	Q' (m³/s·月)	$\pm\Delta Q$ (m³/s·月)	$V_{末}$ (m³/s·月)	$\overline{Z}_{上}$ (m)	$Z_{下}$ (m)	$\overline{H}$ (m)	$N_{校}$ (万kW)
1966	3	47.4	3.9	82.7	−35.3	284.8 320.1	148.40	91.60	56.80	3.90
	2	27.4	3.9	78.3	−50.9	371.0	151.58	91.60	60.00	3.90
	1	25.8	3.9	73.9	−48.1	419.1	155.03	91.53	63.50	3.90
1965	12	31.8	3.9	70.6	−38.8	452.9	157.0	91.50	66.40	3.90
	11	54.6	3.9	69.1	−14.5	472.4	159.6	91.50	68.10	3.90
	10	70.8	3.9	68.6	2.2	470.2	159.98	91.50	68.48	3.90
	9	26.0	4.34	75.1	−49.1	519.3	161.30	91.55	69.75	4.34
	8	72.2	4.34	73.6	−1.4	520.7	162.78	91.54	71.24	4.34
	7	77.0	4.34	73.6	3.4	517.3	162.70	91.50	71.20	4.34
	6	151.0	4.34	76.1	64.9	442.4	160.40	91.60	68.80	4.34
	5	217.3	4.34	84.3	133.0	309.4	153.60	91.60	62.60	4.34
	4	133.9	4.34	94.5	39.4	270.4	147.37	91.71	55.66	4.34

（4）取包络线。将上述求得的各年水库蓄水指示线点绘于同一张图上，取上包线便得出上基本调度线；取下包线则得下基本调度线，即为水电站水库调度图，见图2-19。

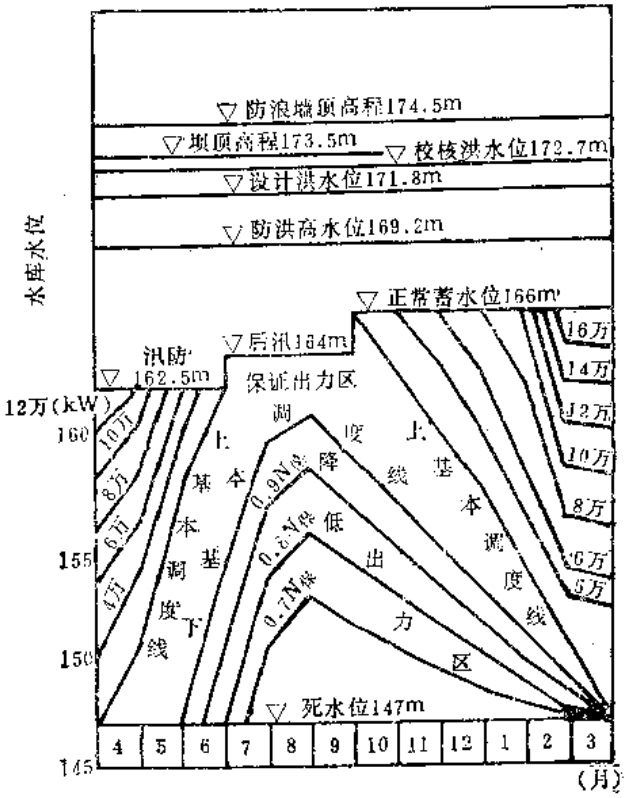


图 2-19　年调节水电站水库调度图

三、多年调节水库调度图的绘制

多年调节水库调度图的形状与年调节水库调度图形式大同小异，可分保证出力区，加大出力区与降低出力区三大部分。但多年调节水库在时历法计算中，将兴利库容分成年库容与多年库容两部份，其分界线为年消落水位，上基本调度线在年消落水位与正常蓄水位之间变化。上基本调度线的绘制，首先选择若干计算典型年，其来水量应等于该年发保证出力的用水，但径流的年内分配各不相同。为此，要对所选的典型水文年的各月流量按保证流量或保证出力进行修正，修正后的水文年即为计算典型年。

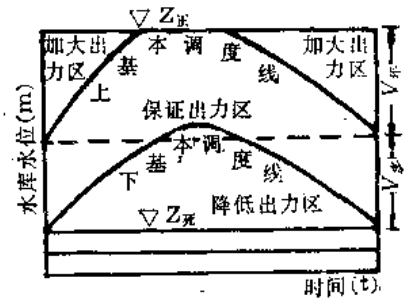


图 2-20 多年调度水电站水库调度图

然后对枯水年组各计算典型年的第一年，按保证出力图自蓄水期末正常蓄水位开始，逆时序逐月计算至蓄水期初的年消落水位。然后再自供水期末从年消落水位逆时序计算至供水期初相应的正常蓄水位止，即为水库蓄水指示线。取其上包线即得多年调节水库的上基本调度线。

下基本调度线绘制，对枯水年组各计算典型年的最后一年，自供水期末死水位开始按保证出力图逆时序计算至蓄水期初，再从蓄水期逆算到死水位止，即得各年发保证出力的水库蓄水指示线，取其上包线即得多年调节水库的下基本调度线。

将上、下基本调度线绘于一张图上，即构成多年调节水库基本调度图，如图2-20所示。

第五节 水库群调度的若干问题

一、水库群的结构形式

电力系统水电站水库群的结构形式如前所述有三种：

（一）串联水库

串联水库如图2-21所示。其连续方程为：

$$Q^t_{i\sim t+1}+V^t_i+q^{i-1}_{i+1}-q^t_{i\sim t+1}=V^t_{i+1} \qquad (2\text{-}20)$$

式中 $Q^t_{i\sim t+1}$——表示第 i 级水电站入库径流；

V^t_i, V^t_{i+1}——表示第 i 级水电站在计算时段 t 与 $t+1$ 的水库蓄水量；

$q^{i-1}_{i+1}, q^t_{i\sim t+1}$——表示第 $i-1$ 水电站与第 i 水电站出库流量；

i——代表梯级电站数，$i=1,2,\cdots\cdots n$。

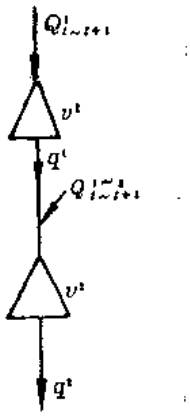


图 2-21 串联水库

（二）并联水库

并联水库如图2-22所示，其连续方程为：

$$Q^t_{i\sim t+1}+V^t_i-q^t_{i\sim t+1}=V^t_{i+1} \qquad (2\text{-}21)$$

式中 i 可以是 $1,2,\cdots\cdots n$ 个无水力联系的水电站，这些无水力联系的水电站通过电力系统联结成为一个统一的整体。

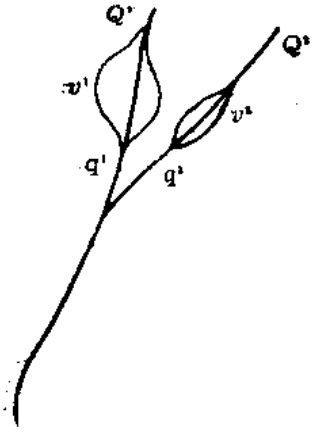


图 2-22 并联水库

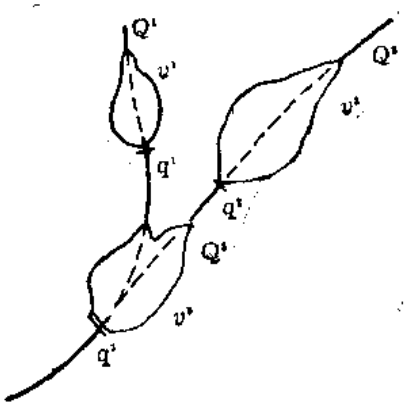


图 2-23 混联水库

（三）混联水库

混联水库如图2-23所示。其连续方程式为：

$$\left.\begin{aligned} &Q_{t\sim t+1}^{j}+q_{t\sim t+1}^{j-1}+V_t^j-q_{t\sim t+1}^{j}=V_{t+1}^{j}\\ &Q_{t\sim t+1}^{j}+q_{t\sim t+1}^{j-1}+V_t^j-q_{t\sim t+1}^{j}=V_{t+1}^{j}\\ &Q_{t\sim t+1}^{k}+q_{t\sim t+1}^{n}+q_{t\sim t+1}^{m}+V_t^k-q_{t\sim t+1}^{k}=V_{t+1}^{k} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}22)$$

式中 $q_{t\sim t+1}^{j-1}, q_{t\sim t+1}^{j}$——表示乙河上第$j-1$与第$j$级水电站水库放流量；

V_t^j, V_{t+1}^j——表示乙河上第j级水电站水库计算时段t与$t+1$的水库蓄水量；

$Q_{t\sim t+1}^{k}, q_{t\sim t+1}^{k}$——表示丙河上第$k$电站的入库与出库流量；

V_t^k, V_{t+1}^k——表示丙河上第k电站计算时段t与$t+1$的水库蓄水量；

$q_{t\sim t+1}^{n}, q_{t\sim t+1}^{m}$——分别表示甲、乙河最末级水库放流量；

$i、j、k$——分别表示甲、乙、丙河上的水电站水库序号。混联水电站构成了复杂的水力联系条件。

无论何种水库群结构形式，联入同一电力系统后形成统一的整体。因此，各个水电站就不能孤立地考虑其本身的运行方式，而应考虑各电站之间的关系，拟定合理的联合运用方式，使得水电站群总效益最大。为此，就有必要进行水库群补偿调节计算以及水库的最优蓄放水次序等。

二、水库群的补偿调节运行

水库群之间可以相互进行补偿，补偿作用有两种：

（1）根据水文特性，不同河流间，或同一河流各支流间的水文情况有同步和不同步两种。利用两河（或支流）丰、枯水期的起迄时间不完全一致（即所谓水文不同步情况）、最枯水时间相互错开的特点，把它们联系起来，共同满足用水或用电的需要，就可以相互补充水量，提高两河的保证流量。这种有水量联系的补偿称为径流补偿，这也是利用水文条件的差别来进行的补偿，故也称为水文补偿。

（2）利用各水库调节性能的差异也可以进行补偿。以年调节水库和多年调节水库联合工作为例。如果将两个水库联系在一起来研究调节方案，设年调节水库工作情况不变，则多年调节水库的工作情况要考虑年调节水库的工作情况，一般在丰水年适当多蓄水，枯

水年份多放水；在一年之内，丰水期尽可能多蓄水，枯水期多放水。这样，两水库联合运行就可提高总的枯水流量。这种利用库容差异所进行的径流补偿，称为库容补偿。

通过水库群的补偿调节，可以提高系统中水电站群的总保证出力与总发电量，更充分地利用水电站的设备容量，增加替代火电容量的效益，改善火电站的运行工况，降低火电煤耗指标，提高系统供电的可靠性。

补偿调节的步骤简要介绍如下：

（1）确定水库群中补偿水库与被补水库　将系统中所有水电站分为补偿电站与被补偿电站两类。选择补偿电站时应考虑如下几点：

1）一般以调节库容大，调节性能好的水电站担任补偿电站；

2）当调节性能相同时，以综合利用要求简单的水电站（如无灌溉、航运等要求）担任补偿电站；

3）调节性能与综合利用任务相同时，则选水头较高、距用电中心较近或单位千瓦投资低的水电站担任补偿任务；

4）当上述条件不统一或一个水电站无力胜任全部补偿任务时，可考虑各水电站间相互补偿。

（2）计算总出力过程线。首先对系统中若干补偿电站进行分析，比较各补偿电站的库容系数（β）、保证出力与装机容量的比值（$N_{装}/N_{保}$）、电站水头和综合利用要求来确定补偿次序。一般库容系数小或$N_{装}/N_{保}$比值较大或电站水头较高，或综合利用限制较小者先补偿，与上述条件相反者应后补偿，依次排列次序。

补偿调节计算时，被补偿电站的各时刻出力先算，作出被补电站的出力过程线，然后第一补偿电站先补，再依序对其进行再补偿，最后得出系统中各电站总出力过程线。

三、水库群最优蓄放水方式

各水库由于水库动力特性、设备特性和天然流量分布特性不同，各电站虽发出同样的水库电能，但各水库所造成的不蓄电能损失数值是不同的，为使水库调度获得最大电能，有必要研究水电站群最有利的蓄放水方式，以便使水电站的不蓄水量在尽可能大的水头下流放。

（一）并联水库蓄放水次序

设有甲、乙两个并联的年调节水电站在电力系统中联合运行，它们的来水资料和系统负荷资料均为已知，水库特性资料也已具备。某一供水时段，根据该时段内水电站的不蓄流量和水头，两电站能生产的总不蓄出力$\Sigma N_{不蓄i}$为：

$$\Sigma N_{不蓄i}=N_{不蓄甲i}+N_{不蓄乙i} \tag{2-23}$$

如果该值不能满足当时系统负荷$N_{系i}$的需要，则还要水库放水补充出力$N_{库i}$，它由下式求定：

$$N_{库i}=N_{系i}-\Sigma N_{不蓄i}$$

设该补充出力由水电站甲承担，则需放出的流量$Q_{甲i}$为：

$$Q_{甲i}=\frac{dV_{甲i}}{dt}=\frac{F_{甲i}dH_{甲i}}{dt}=\frac{N_{库i}}{AH_{甲i}} \tag{2-24}$$

式中 $dV_{甲i}$——某时段dt内水库甲消落的库容；

$F_{甲i}$——某时段内水库甲的库面积；

$dH_{甲i}$——某时段内水库甲消落的深度；

A——计算出力的常数，设两电站相同。

如果补充出力由水电站乙承担，则需流量：

$$Q_{乙i}=\frac{F_{乙i}dH_i}{dt}=\frac{N_{库i}}{AH_{乙i}} \tag{2-25}$$

式中符号意义同前，由上两式可得：

$$dH_{甲i}=-\frac{F_{乙i}H_{乙i}}{F_{甲i}H_{甲i}}dH_{乙i} \tag{2-26}$$

该式表示两水库在某供水时段内的水库面积、水头和水库消落水层三者之间的关系。必须注意，该时段的水库消落水层不同会影响以后时段的发电水头，从而使两水库的不蓄电能损失不同。两水库的不蓄电能的损失值可按下式求定。

$$dE_{不蓄i甲}=0.00272\eta_{水甲}W_{不蓄i甲}dH_{甲i} \tag{2-27}$$

$$dE_{不蓄i乙}=0.00272\eta_{水乙}W_{不蓄i乙}dH_{乙i} \tag{2-28}$$

式中 $W_{不蓄i甲}$、$W_{不蓄i乙}$——分别为甲、乙水库在i时段以后的供水期不蓄水量；

$\eta_{水甲}$、$\eta_{水乙}$——分别为水电站甲、乙的发电效率。

对于在同一系统中联合运行的两水电站，如果希望它们的总发电量最大，就应该使总的不蓄电能损失尽可能小。为此，就需要根据不蓄电能损失的两计算式来判别确定水库的放水次序。显然，设$\eta_{水甲}=\eta_{水乙}$，如果$dE_{不蓄i甲}<dE_{不蓄i乙}$即：

$$0.00272\eta_{水甲}W_{不蓄i甲}dH_{甲i}<0.00272\eta_{水乙}W_{不蓄i乙}dH_{乙i}$$

$$W_{不蓄i甲}dH_{甲i}<W_{不蓄i乙}dH_{乙i} \tag{2-29}$$

则水电站甲先放水发补充出力以满足系统需要较为有利；反之，应由电站乙先放水。将上述$dH_{甲i}$值代入，可得水电站甲先放水为有利的条件是：

$$\frac{W_{不蓄i甲}}{F_{甲i}H_{甲i}}<\frac{W_{不蓄i乙}}{F_{乙i}H_{乙i}} \tag{2-30}$$

令$W_{不蓄}/FH=K$，则水电站的放水次序可根据K值来判别。

在水库供水期初，可根据各年的水库面积、水电站水头和供水期天然来水量计算出各库的K值，哪个水库的K值小，这个水库就先供水。应该注意，由于水库供水而使库面下降，F、H值发生变化，各计算时段以后（算到供水期末）的$W_{不蓄}$值也不同，所以K值是变化的，应该逐时段判别调整。当两水库K值相等时，它们同时供水发电。至于两电站间如何合理分配$N_{库}$值，则要进行试算决定。

在水库蓄水期，抬高库水位可以增加不蓄电能。因此，当并联水库联合运行时，亦有一个蓄水次序问题，即要研究哪个水库先蓄可使不蓄电能尽可能大的问题。按照上述决定放水次序的原理，找出蓄水期蓄水次序的判别式：

$$K'=\bar{W}'_{不蓄}/FH \tag{2-31}$$

式中$\bar{W}'_{不蓄}$为自该计算时段到汛末的天然来水量，减去水库在汛期尚待蓄的库容。该判别式的用法与供水期情况恰好相反，即应以K'值大的先蓄有利。必须说明，为了尽量避免

弃水，在考虑并联水库蓄水次序时，要结合水库调度进行。对库容相对较小，有较多弃水的水库，要尽早充分利用装机容量满载发电，以减少弃水数量。

对于综合利用水库，在研究蓄放水次序过程中，一定要认真考虑各水利部门的要求，不能仅凭一个系数（K或K'）来决定各电站蓄放水次序。

（二）串联水库蓄放水次序

设有甲、乙两个串联的年调节水库在电力系统中联合运行，某一供水时段要依靠其中任一电站的水库放水来补充出力。如果由上游水库供水，那么它可提供的电能为：

$$dE_{库!甲i}=0.00272\eta_{水甲}F_{甲i}dH_{甲i}(H_{甲i}+H_{乙i}) \tag{2-32}$$

上式中计及$H_{乙}$，是因为上游水库放水，还可通过下一级电站发电。

如果由下游水库放水发电以补充出力之不足，则乙库提供的电能为：

$$dE_{库!乙i}=0.00272\eta_{水乙}F_{乙i}dH_{乙i} \tag{2-33}$$

因要求$dE_{库!甲i}=dE_{库!乙i}$，仍设$\eta_{水甲}=\eta_{水乙}$，所以可得：

$$dH_{甲i}=\frac{F_{乙i}H_{乙i}}{F_{甲i}(H_{甲i}+H_{乙i})}dH_{乙i} \tag{2-34}$$

不蓄电能计算，对甲库来说和并联水库情况一样。而对乙库则有差别，其计算式分别为：

$$dE_{不蓄!甲}=0.00272\eta_{水甲}W_{不蓄!甲}dH_{甲i} \tag{2-35}$$

$$dE_{不蓄!乙}=0.00272\eta_{水乙}(W_{不蓄!甲}+V_{甲}+W_{不蓄!乙})dH_{乙i} \tag{2-36}$$

式中$W_{不蓄!甲}$、$V_{甲}$表示上一级水库不蓄水量与蓄水量均通过下级水库；$W_{不蓄!乙}$为两电站间的区间不蓄水量。

在串联水库情况下，上游水库甲先供水的有利条件是：

$$W_{不蓄!甲}dH_{甲i}<(W_{不蓄!甲}+V_{甲}+W_{不蓄!乙})dH_{乙i} \tag{2-37}$$

将$dH_{甲i}$代入式(2-38)则：

$$\frac{W_{不蓄!甲}}{F_{甲i}(H_{甲i}+H_{乙i})}<\frac{W_{不蓄!甲}+V_{甲}+W_{不蓄!乙}}{F_{乙i}H_{乙i}} \tag{2-38}$$

如果令$W_{不蓄!总}/F\Sigma H=K$，式中分子表示流经该电站的总不蓄水量，分母中的ΣH表示从该电站到最后一级电站的各站水头之和，则串联水电站水库的放水次序可根据此K值来判别，哪个水库的K值较小，那个水库就先供水。同理，可以推出蓄水期的蓄水次序判别式。

四、水库群调度图的绘制

（一）总调度图的绘制

水库群的联合补偿，其主要作用在于提高保证出力，通过蓄、放水方式来提高总年发电量。因此，总调度图的基本要求是提出水电站群总保证出力工作区的界限线。当采用最有利蓄、放水方式时，还需提出总加大出力与总降低出力的工作区界限线。总调度图的绘制步骤为：

（1）选用设计枯水年（段）及编制总调度图所需的各种计算年。可用简单的电当量法计算。

计算总不蓄出力差积曲线，即将各水电站的历年逐月的天然流量过程换算为不蓄出力过程。

$$N_{不蓄}=AQ_{天}\overline{H} \qquad (2\text{-}39)$$

式中 A——出力系数；

$Q_{天}$——天然流量；

$\overline{H}$——平均水头。

将各水电站的兴利库容存蓄水量换算为电当量：

$$E_{V}=AV_{兴}\overline{H} \qquad (2\text{-}40)$$

式中 E_{V}——电当量(kW·月)；

$V_{兴}$——兴利库容存蓄水量(m³/s·月)。

以总的库容电当量在总不蓄出力差积出力曲线上进行图解计算（计算中尚须校核大库容小流量时的水电站能否在蓄水期蓄满的问题）；初步得出补偿调节后的总出力过程，如图2-24所示。

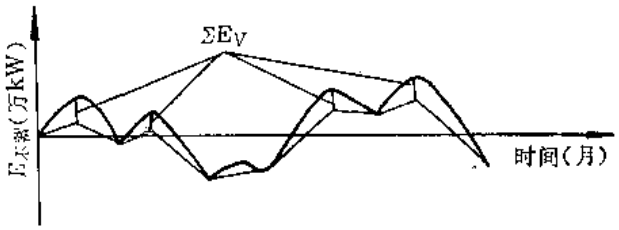


图 2-24 水电站群出力差积曲线图解法

按总出力大小排序绘制水电站群出力保证率曲线，据此选出与总保证出力相应的设计枯水年（段）及编制调度图的计算年（段）。

（2）对设计枯水年（段）列表进行详细的补偿调节计算，求出精确的总保证出力值。

（3）选择若干个相当于发保证出力的典型年，分供、蓄水期列表进行详细的补偿调节计算，求出各水库在各时刻的蓄水量相应的库容电当量和出力值，得出水电站群在各时刻的总库容电当量和总出力值。在同一图上绘出各典型年的供、蓄水期的总库容电当量过程线。作出其上、下包线，即得总调度图的总保证出力工作区的上、下界线。上、下界线之间为总保证出力区，上界线以上为总加大出力区，下区线以下为总降低出力区如图2-25所示。

（二）单个调度图的编制

由于采取用最佳供、蓄方式，各个水电站调度都要按最佳供、蓄方式来确定。编制时最佳供、蓄水分配需满足如下约束条件。即：

$$N_{max}>N_{运行}>N_{min}$$

$$V_{总}>V_{运行}>V_{死}$$

也就是最大出力等于装机容量减去备用容量，最小出力为保证电力系统的电力电量平衡所必需的平均出力。对于后供水的水库要防止后期来不及放空，先供水的水库要防止过早放

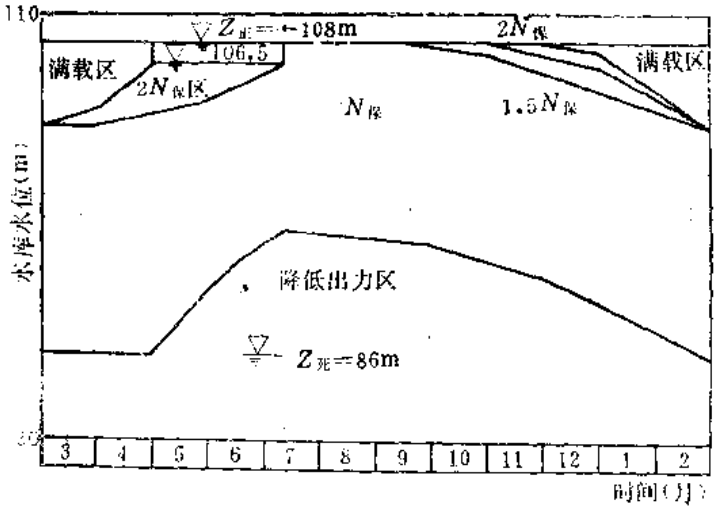


图 2-25 某梯级水电站水库调度图

空水库，致使后期不能维持最小出力，因而需要为各个水库制定最有利供、蓄水分配方式的上、下界线来定出分配区。出力分配区的上界线直接按最大出力计算得的蓄水过程线。出力分配区的下界线是为了防止供水过早，因而可以选用若干水文年，使由供水期末自年调节水位开始，逆时序按发最小出力进行水库调节计算，到蓄水期初能刚好返回到年调节消落水位，然后作下包线，即为出力分配区的下界限线。在上界限线以上作加大出力线，下界限线以下作出力破坏线即得单个水库调度全图。

五、水库群调度运行注意事项

进行水库群调度运行时，需注意如下特点：

（1）电网负荷的增长以及用电负荷组成与供电组成的变化对调峰电站参数的影响，并且运行一段时期以后水库特性也产生了变化。因此，一定时期要根据新条件新任务复核已建电站参数，尤其是系统中的关键性电站。

（2）以水电站为主的电力系统，由于水电站在系统中占容量比重较大，会增加电力调度的复杂性。例如，黄河上的刘家峡、盐锅峡、八盘峡和青铜峡等四个水电站容量占系统容量的1/2，运行中往往受到系统负荷、火电技术最小出力以及保安、供热、稳定等要求的约束，因此，调度中须论证调峰的合理经济范围，以充分发挥水电站固有特性。

（3）水电站既是电力系统组成部分又是水力系统组成部分，需考虑两个系统最优化前提下的水库控制运行。例如，黄河上的刘家峡、盐锅峡、八盘峡和青铜峡等水电站水库，除了一般水库都有的防洪、供水及灌溉用水要求外，还有防凌、防淤等特殊要求均要妥善处理，合理满足，综合优化。

（4）要有经济观点与价值观点。仅以发电量多少作指标不能完全反映经济、价值两个方面的效益，而需按照各电站各时期在电力系统中所起的作用，按质论价，合理地利用“价值规律”的杠杆作用，确保电站有效地、安全地、经济地、可靠地供电。

（5）电力系统中供、需必须平衡。即：

$$\sum N_{系}=N_{水}+N_{火}+\sum N_{其它}$$

$$\sum E_{系}=E_{水}+E_{火}+\sum E_{其它}$$

式中 $\sum N_{系}$——电力系统总需电力（万kW）；

$N_{水}$——电力系统中水电站群供给的电力（万kW）；

$N_{火}$——电力系统中火电站群供给的电力（万kW）；

$\sum N_{其它}$——电力系统中其它电站提供的电力（万kW）；

$\sum E$——电力系统中总需电量（亿kW·h）；

$E_{水}$——电力系统中水电站群供给的电量（亿kW·h）；

$E_{火}$——电力系统中火电站群供给的电量（亿kW·h）；

$\sum E_{其它}$——电力系统中其它电站供给的电量（亿kW·h）。

如果电力系统中供电组成结构中任一部分不能发足预期额，则系统需求的电力、电量将遭到破坏，出现不平衡状态，欲使其平衡，或拉负荷削减系统需求量；或使水电或火电或其它电站超计划发电，缓和当务之急，但这将造成系统的恶性循环。如果水库调度控制运行合理，不仅满足系统电力电量的需要，且可充分地、合理地利用可再生能源，节省系统能耗，使供电能源处于最优控制运行状态。

第三章　电力系统中水、火电站的日最优运行方式

电力系统中水、火电站的日最优运行方式是电力系统经济调度中重要组成部分。从调度周期来看是属短期调度的范畴。电力系统经济调度的任务是在满足安全和一定质量要求的条件下尽可能提高运行的经济性，即合理地利用现有的能源和设备，以最少的燃料消耗量（或燃料费用或运行成本）保证对用户可靠而满意地供电。

经济调度效益是人们最关心的问题，一般它与系统实际运行条件和管理水平有关。从国内外调度经验可得到一个大体的概念：经济的负荷分配可节约0.5～1.5%的系统总耗燃料量；机组经济组合的效益可达1～2.5%的系统总耗燃料量；水火电站协调的经济效益高于火电系统经济负荷分配的效益。

我国水火电配合调度始于40年代，那时东北电网已形成水火电联合调度局面。50年代京津唐电网和东北电网曾试用按耗煤微增率相等的原则确定各发电厂的出力。60年代东北电管局和华北电管局编制出了各发电厂的耗煤微增率曲线。在60年代末期，京津唐电网曾试用计算机编制日经济调度计划。70年代末期经济调度工作再次受到重视，有更多的电网开展了这方面的工作，很多研究单位和高等院校开展了经济调度算法研究，并开发了许多新的应用程序。80年代由于微型计算机的出现，京津唐电网应用微型计算机编制了日调度计划的程序，应用计算机进行日负荷预测、机组经济组合和负荷经济分配等工作。而且不断向纵深发展。

第一节　水、火电站的日最优运行所需的基本资料

电力系统中水、火电站日最优运行方式所需的基本资料，除了第二章已述的资料外，尚需水、火电站动力特性资料。

一、水轮发电机机组段流量特性曲线

机组段流量特性曲线系指以机组段水头为参数的流量特性曲线，是研究水电站厂内经济运行必须具备的资料。若水电站已进行过机组段动力特性试验，可直接取用其试验资料；若尚未进行过动力试验，可按原厂家提供的水轮机综合特性曲线以及发电机效率特性曲线，绘制机组段的流量特性曲线。绘制步骤如下：

（1）根据水轮机综合特性曲线换算成运转综合特性曲线，即$H\sim N$线，如图3-1所示。

（2）于图3-1上作$H_j(j=1,2,\cdots\cdots,a)$线。该线与等效率线相交，交点处$\eta_j$与$N_j$即为在$H_j$状态下，效率为$\eta_j$所能发生的出力值。利用出力基本方程式$N_j\approx9.81\eta_jQ_jH_j$，可求得对应的$Q_j$值，当$H_j$不变，$N_j$变化，可求得对应的一组$Q_j$值。将$N_j$与$Q_j$绘制成以$H_j$为参数的$Q_j\sim N_j$关系曲线。同理改变$H_j$值，可求得一簇$Q_j=N_j(H_j)$关系线，如图3-2所示。

（3）在图3-2$Q_j=N_j(H_j)$曲线上作等Q线，（如Q_1，Q_2，…）与H_{j1}，H_{j2}，…，H_{jn}相交，各交点可读出H_j和N_j值，运用该值在水轮机运转综合特性曲线上加绘一根等流量线。用同样方法可绘制一簇等流量线。

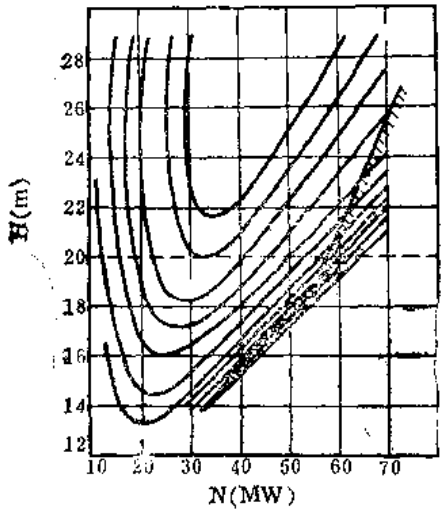


图 3-1 运转综合特性曲线$H\sim N$线

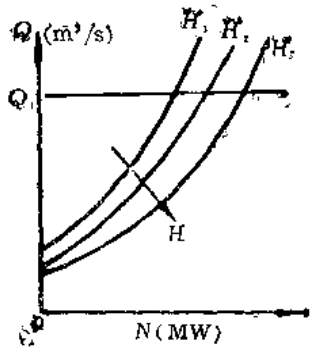


图 3-2 $Q\sim N(H)$曲线

（4）再根据H_{j1}、Q_1的值，拟出水轮机机组出力N_{j1}值，考虑发电机效率可求得水轮发电机机组段的出力。绘制以机组段水头为参数的$Q=N(H)$曲线簇即为所求的水轮发电机机组段流量特性曲线，如图3-3。

二、火电站的动力特性

火电站的动力特性主要从两个方面表示：

（1）耗煤量特性曲线。火电站单位时间的煤耗量B与其负荷N_h之间的关系曲线，即：

$$B=f(N_h)$$

（2）耗煤量微增率特性曲线。耗煤量微增率指火电站单位负荷时耗煤量的改变值，即煤耗量B对负荷N_h的一次导数（$b=dB/dN_h$）。火电站系由多台锅炉和多台汽轮发电机组组成，当火电站运行的锅炉或汽轮发电机组的组合发生变化时，火电站全厂的动力特性曲线也随之发生变化。

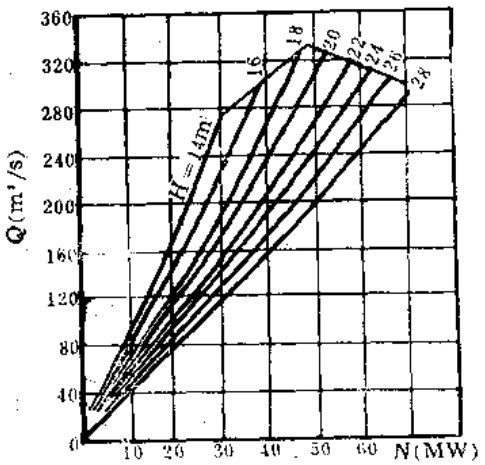


图 3-3 不同水头机组段流量特性曲线

第二节 水电站在电力系统中日运行方式的最优准则

一、水电站在电力系统日运行最优准则

水电站在电力系统中最优运行方式的准则是衡量水电站日运行方式是否最优的根本标准，是制定最优运行方式的基本目标。这一基本目标即在满足各种限制条件下，使电力系

统运行费用最小准则。可用公式表示为：

$$S=\int_{t_1}^{t_2}u\,dt=\min \tag{3-1}$$

式中 S——电力系统在一日内的总运行费；

u——电力系统每小时的运行费用；

t_1、t_2——分别为一日初和一日末的时刻。

电力系统运行费用包括两部分：

（1）固定费用。该费用与运行方式无关或关系极小，如设备折旧费，大修提成，保险费，职工工资和小修支出等；

（2）可变费用。该费用与运行方式有关，主要指火电站的燃料费用。

电力系统每小时的运行费用称为费用率，可用下式表示：

$$u=A_0+\alpha_1B_1+\alpha_2B_2+\cdots\cdots+\alpha_mB_m \tag{3-2}$$

式中 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_m$——分别为第1、2、…、$m$号火电站每吨标准燃料的价格；

$B_1,B_2,\cdots,\ B_m$——分别为第1、2、…、m号火电站每小时标准燃料的耗用量，称火电站的煤耗率；

A_0——电力系统各项固定费用的总和；

u——电力系统的费用率。

当各火电站的燃料价格相同时，最优准则式（3-1）可用“电力系统中各火电站一日内总的燃料耗量最小”来表示，即：

$$G=\int_{t_1}^{t_2}(B_1+B_2+\cdots\cdots+B_m)\,dt=\min \tag{3-3}$$

式中 G——电力系统中各火电站在一日内总的燃料耗量。

二、水电站最优日运行方式的限制条件

必须满足水电站最优日运行方式的限制条件有：

（1）电力系统的电力电量平衡。为简化计，电力平衡不考虑电网损失。其数学表达式为：

$$\sum_{i=1}^{m}N_{hi}+\sum_{j=1}^{n}N_j-N_{sT}=0 \tag{3-4}$$

式中 N_{hi}——第i号火电站的出力，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$；

N_j——第j号水电站的出力，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$；

N_{sT}——电力系统在某时刻的负荷。

（2）水电站的水量平衡。水电站一日中的耗水量应正好等于给定的日耗水量。对日调节水电站，日耗水量取决于天然来水量；对具有年或多年调节能力的水电站，日耗水量由水电站长期运行方式给出。水量平衡方程式为：

$$W_j=\int_{t_1}^{t_2}Q_j\,dt\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3-5}$$

式中 W_j——第 j 号水电站一日内给定的耗水量；

Q_j——第 j 号水电站的工作流量。

（3）日调节水电站在一日内库水位变化在日调节库容范围之内，即最高水位不得超过正常蓄水位或防洪限制水位，最低库水位不得低于日调节库容的最低库水位：

$$Z_{j低} \leqslant Z_j \leqslant Z_{j高}$$

式中 $Z_{j高}$——第 j 号日调节水电站最高库水位；

Z_j——第 j 号日调节水电站库水位；

$Z_{j低}$——第 j 号日调节水电站最低库水位。

（4）综合利用要求。水电站库水位应满足防洪、灌溉、航运等要求；水电站最大、最小放流量也要满足航运、灌溉等部门要求。

第三节 水、火电站间日负荷最优分配的基本条件

为了简单起见，这里主要讨论一个水电站和一个火电站的情况。且不考虑水电站一日内水头变化的影响。

假定电力系统日负荷最优分配方案已经找到，如图3-4所示。即该分配方案使电力系统在一日之内的燃料费用达到最小值，满足方程式（3-1）。

为获得最优分配方案，对图3-4负荷分配方案作微小变化；即在时刻t_a后的Δt时段内火电站减少ΔN_a，水电站增加ΔN_a。由于火电站出力变化导致电力系统费用的变化。系统将减少燃料费ΔS_a。

$$\Delta S_a = \Delta U_a \Delta t = \left(\frac{\partial U}{\partial N_h}\right)_a \Delta N_a \Delta t \qquad (3\text{-}6)$$

而另一时刻t_b以后Δt时段内，水电站减少ΔN_b，系统火电站将增加出力ΔN_b，由于火电站出力的增加引起系统内燃料费用的增加ΔS_b

$$\Delta S_b = \Delta U_b \Delta t = \left(\frac{\partial U}{\partial N_h}\right)_b \Delta N_b \Delta t \qquad (3\text{-}7)$$

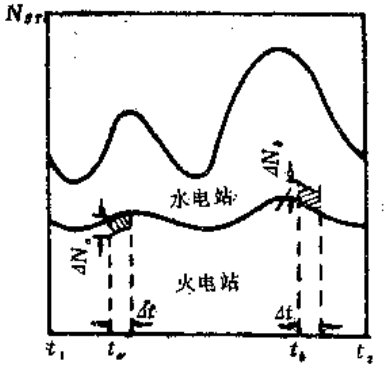


图 3-4 水、火电站之间分配系统负荷

上两式中ΔU_a、ΔU_b分别为时刻t_a、t_b后Δt时间内，因火电站负荷N_h变化所引起的系统费用率的改变值。

由于系统日负荷分配方案作微小变动，电力系统费用的增加值为：

$$\Delta S = \Delta S_b - \Delta S_a$$

$$= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial N_h}\right)_b \Delta N_b \Delta t - \left(\frac{\partial U}{\partial N_h}\right)_a \Delta N_a \Delta t\right] \qquad (3\text{-}8)$$

当$\Delta S > 0$，说明系统中火电站出力微增后，电力系统燃料费用增加，不是最优；当$\Delta S < 0$，说明系统中火电站出力微增后，电力系统燃料费用反而减小，不现实与原假定不符，因此，只有$\Delta S = 0$，原分配方案最优，才是我们所要求的。也就是说：

$$\left(\frac{\partial U}{\partial N_h}\right)_b \Delta N_b - \left(\frac{\partial U}{\partial N_h}\right)_a \Delta N_a = 0 \tag{3-9}$$

对水电站而言，在t_a时刻后Δt时段内，水电站增加出力ΔN_a需多耗用水量为：

$$\Delta W_a = \Delta Q_a \Delta t = \left(\frac{\partial Q}{\partial N}\right)_a \Delta N_a \Delta t \tag{3-10}$$

在t_b时刻后Δt时段内，水电站减少出力ΔN_b而较原方案减少耗用水量为：

$$\Delta W_b = \Delta Q_b \Delta t = \left(\frac{\partial Q}{\partial N}\right)_b \Delta N_b \Delta t \tag{3-11}$$

在一昼夜内其余时间负荷分配情况未变动，所以当负荷分配方案作微小变动后一日内水电站多耗用的水量为：

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta W_a - \Delta W_b \\ &= \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial N}\right)_a \Delta N_a - \left(\frac{\partial Q}{\partial N}\right)_b \Delta N_b\right]\Delta t\end{aligned} \tag{3-12}$$

根据日负荷分配应满足水量平衡条件，要求$\Delta N = 0$，即：

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial N}\right)_a \Delta N_a - \left(\frac{\partial Q}{\partial N}\right)_b \Delta N_b = 0 \tag{3-13}$$

则

$$\Delta N_a = \Delta N_b \left(\frac{\partial Q}{\partial N}\right)_b \Big/ \left(\frac{\partial Q}{\partial N}\right)_a \tag{3-14}$$

将式（3-14）代入式（3-9）可得：

$$\frac{(\partial U/\partial N_h)_a}{(\partial Q/\partial N)_a} = \frac{(\partial U/\partial N_h)_b}{(\partial Q/\partial N)_b} \tag{3-15}$$

令

$$\dot{u} = \frac{\partial U}{\partial N_h} = a\dot{b}$$

$$\dot{q} = \frac{\partial Q}{\partial N}$$

得

$$\left(\frac{\dot{u}}{\dot{q}}\right)_a = \left(\frac{\dot{u}}{\dot{q}}\right)_b \tag{3-16}$$

式中 $\dot{q}$——以上游水位为参数的水电站耗水微增率；

$\dot{u}$——火电站费用微增率；

a——火电站每吨标准煤的价格；

$\dot{b}$——火电站的煤耗微增率，$\dot{b} = \dfrac{dB}{dN_h}$。

上述各式为一日内任意两个时刻t_a、t_b。如取其他任何时刻，其关系式仍然成立，故有：

$$\frac{\dot{u}}{\dot{q}} = \lambda \tag{3-17}$$

或

$$\dot{u} = \lambda \dot{q} \tag{3-18}$$

式中 λ——常数。

上述说明，在最优日负荷分配条件下，一日内任意时刻的火电站费用微增率与水电站耗水微增率之比值为常数，即等微增率。也就是水火电站间日负荷最优分配方案应满足等

微增率原则。

将火电站和水电站的微增率表达式代入式（3-17）后可得：

$$\lambda=\frac{\dot{u}}{\dot{q}}=\frac{\dfrac{\partial U}{\partial N_s}}{\dfrac{\partial Q}{\partial N}}=-\frac{\partial U}{\partial Q}$$

该式称为日负荷最优分配的等比节约的原则。说明在一日内任意时刻增加水电站单位流量，所得到的电力系统费用率的节约值相等。$\frac{\partial U}{\partial Q}$前面的负号表示当水电站耗用的流量增加时，电力系统的费用率将减少。

系数λ称为水的电力效益，又称“水煤当量”或“比节约”。它等于水电站改变单位耗水量时所引起的火电站燃料费用的改变量。如果耗水量以m^3/h为单位，燃料费用率以元/h为单位，则λ值将以利用水量为$1m^3$时所相当的燃料费用的元数来表示。λ值越大，水电站耗用$1m^3$水量所节省的火电站燃料费用量也越大。

第四节　水、火电站间日负荷最优分配的充分条件

等微增率原则，是实现水火电站间日最优运行的必要条件，下面进一步讨论充分条件。

一日内电力系统的总燃料费用为：

$$S=\int_{t_1}^{t_2}U(N_s)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}U(N_{sr}-N)dt$$

水电站运行必需满足：

$$W-\int_{t_1}^{t_2}Q(N)dt=0$$

负荷最优分配方案应使：

$$S=\min$$

为了将泛函的条件极值问题变为求泛函的无条件极值问题，作一辅助泛函：

$$\phi=\int_{t_1}^{t_2}U dt+\lambda\left(\int_{t_1}^{t_2}Q dt-w\right)$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}(U+\lambda Q)\,dt-\lambda w \qquad (3\text{-}19)$$

当水电站一日的出力过程线作微小变化δN时，泛函ϕ的改变为：

$$\Delta\phi=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial N}[U+\lambda Q]\,\delta N dt+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial N^2}[U+\lambda Q]\delta N^2 dt+\cdots$$

$$=\delta\phi+\frac{1}{2}\delta^2\phi+\cdots\cdots \qquad (3-20)$$

因只有泛函的极值曲线，才可能有使泛函ϕ为最小（即$S=\min$)的负荷分配方案($N\sim t$曲线），故可先认定$\delta\phi=0$，即：

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial N}[U+\lambda Q]\delta N dt=0$$

因δN的取值是任意的，故有：

$$\frac{\partial}{\partial N}[U+\lambda Q]=0$$

即
$$\frac{\partial U}{\partial N_h}\frac{\partial N_h}{\partial N}+\lambda\frac{\partial Q}{\partial N}=-\dot{u}+\lambda\dot{q}=0$$

或
$$\dot{u}=\lambda\dot{q}$$

这就是前述的等微增率原则。如果原来的负荷分配方案是最优的，当水电站的出力过程线作微小变动时，系统的日燃料费用应增大，即$\Delta\phi>0$，又因$\delta\phi=0$，且$\Delta\phi$的符号系由式（3-20）右边含δN最低阶的项决定，故知保证系统日费用取极小值的充分条件是$\delta^2\phi>0$。即

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2}{\partial N^2}[U+\lambda Q]\delta N^2 dt>0$$

由于δN值是任意的，故有：

$$\frac{\partial^2}{\partial N^2}[U+\lambda Q]>0$$

令
$$\ddot{u}=\frac{\partial^2 U}{\partial N_h^2},\qquad \ddot{q}=\frac{\partial^2 Q}{\partial N^2}$$

则
$$\ddot{u}+\lambda\ddot{q}>0 \qquad (3-21)$$

该式就是电力系统日负荷最优分配的充分条件。

因为水火电站的负荷在一日之内不断变化，所以u、q在一日之内的不同时刻是不相同的，对应于系统日费用达极小值的负荷分配方案来说，应满足充分条件。

第五节 负荷最优分配

一、火电站之间负荷分配的最优化条件简述

电力系统中一般有多个火电站，应考虑火电站之间的负荷最优分配。最优分配中必须考虑火电站燃料价格及燃料政策的影响，一般来说采用电力系统运行费用最小的准则。而与运行方式有关的电力系统运行费用只有火电站燃料费，故可采用“系统中火电站总燃料费用最小”准则。

按电力平衡条件：

$$N_{h1}+N_{h2}+\cdots\cdots+N_{hm}=N_{zH} \tag{3-22}$$

按燃料等微增原则：

$$a_1\dot{b}_1=a_2\dot{b}_2=\cdots\cdots=a_i\dot{b}_i=\cdots\cdots=a_m\dot{b}_m \tag{3-23}$$

式中 N_{zH}——各火电站的总负荷；

N_{hi}——第i号火电站的负荷，$i=1$，2，……m；

$\dot{b}_1$，$\dot{b}_2$，……，$\dot{b}_m$——各火电站的耗煤量微增率；

a_1，a_2，……，a_m——第1、2、…、m号火电站燃料价格。

燃料价格可以是真实的价格，也可以是反映国家政策的一个系数。

二、水电站机组进行有功负荷的最优分配

（一）机组段流量微增率特性曲线

以机组段水头为参数的流量微增率特性曲线，是指在固定的机组段水头下流量对机组出力的一次导数。即：

$$\dot{q}=\frac{dQ}{dN} \tag{3-24}$$

微分指标$\dot{q}$（$m^3/s\cdot MW$）的数值，可以由流量特性曲线（$Q\sim N$）来确定；也可以利用功率损失关系来确定，前者误差较大，后者较为准确。

利用功率损失曲线计算流量微增率公式：

$$\dot{q}=\frac{1}{9.81H}\left(1+\frac{d\Delta N}{dN}\right) \tag{3-25}$$

上式可计算得以机组段水头为参数的机组段微增率曲线。

（二）机组间最优负荷分配原则

在满足电力系统负荷要求的条件下，使水电厂所消耗的总水量最小，这就是厂内运行机组之间负荷最优分配的准则。

根据这一准则，当电力系统在某一时刻分配给水电站的负荷为常数时，水电站机组间最优负荷分配应该满足通过各机组的总流量为最小的条件。

$$N=\sum_{j=1}^{n}N_j=N_1+N_2+\cdots\cdots+N_n=\text{const} \tag{3-26}$$

$$Q=\sum_{j=1}^{n}Q_j=Q_1+Q_2+\cdots\cdots+Q_n=\min \tag{3-27}$$

式中 N——系统给定水电站的总负荷值；

Q——水电站机组引用的总流量；

N_1，N_2，…，N_n——各台机组承担的负荷；

Q_1，Q_2，…，Q_n——各台机组引用的工作流量。

当水电站有两台机组时，各机组间如何进行经济负荷分配。两台机组的流量特性曲线如图3-5所示。

当电力系统分配给水电站的负荷为N时，根据电力平衡条件有：

$$N=N_1+N_2=\text{const} \tag{3-28}$$

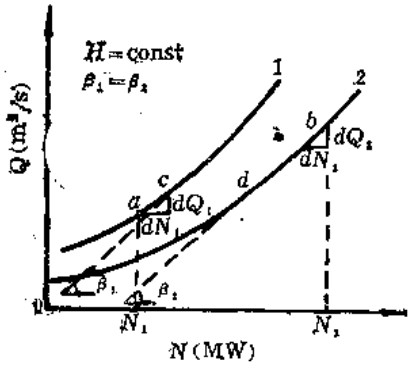


图 3-5 两台机组的流量特性曲线

两台机组的总工作流量为：

$$Q=Q_1+Q_2 \tag{3-29}$$

若分配机组1带负荷N_1，机组2带负荷N_2，则机组1在曲线1上a点运行，机组2在曲线2上b点运行（见图3-5）。如果增加机组1的负荷，就需要减少机组2的负荷，$|dN_1|=|-dN_2|$，而机组2减少负荷dN_2时，其所消耗的流量亦将减少dQ_2（为负值）；机组1所消耗的流量将增加dQ_1（为正值）。从图3-2可看出，曲线的坡度量由下向上渐增的，因此$|dQ_1|<|dQ_2|$，电站总流量值为$dQ=dQ_1+dQ_2<0$。说明将两台机组的运行方式稍加改变，电站的总工作流量可以减少，减少机组2负荷，增加机组1的负荷是有利的。如果继续减少机组2的负荷，增加机组1的负荷，直至$\frac{dQ_1}{dN_1}=\frac{dQ_2}{dN_2}$为止，即增加单位负荷所消耗的水量与降低单位负荷所节约的水量相等$dQ=dQ_1+dQ_2=0$。也就是两机组流量特性曲线的微增率值相等处，如图3-5中c点、d点，电站的总工作流量最小。

通过以上分析，在某一给定负荷情况下，水电站总工作流量为最小的条件，就是这两台机组的流量微增率相等，即：

$$\frac{dQ_1}{dN_1}=\frac{dQ_2}{dN_2} \tag{3-30}$$

当水电站有n台机组同时运行时，按照等微增率原则：

$$\dot{q}_1=\dot{q}_2=\cdots=\dot{q}_i=\cdots=\dot{q}_n \tag{3-31}$$

等微增率原则也可用求函数条件极值的拉格朗日乘数法进行推导。各台机组所消耗的流量是其负荷的函数，即：

$$\begin{aligned}Q_1&=Q_1(N_1)\\Q_2&=Q_2(N_2)\\&\cdots\cdots\\Q_n&=Q_n(N_n)\end{aligned}$$

为求解式（3-26）的条件极值，今引入一辅助函数：

$$F=(Q_1+Q_2+\cdots+Q_n)+\lambda(N_1+N_2+\cdots+N_n-N)$$

使辅助函数实现无条件极值的必要条件是：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial N_1}&=\frac{\partial Q_1}{\partial N_1}+\lambda_1=0\\\frac{\partial F}{\partial N_2}&=\frac{\partial Q_2}{\partial N_2}+\lambda_2=0\\&\cdots\cdots\\\frac{\partial F}{\partial N_n}&=\frac{\partial Q_n}{\partial N_n}+\lambda_n=0\end{aligned}\right\} \tag{3-32}$$

上式可写成：

$$\frac{\partial Q_1}{\partial N_1}=\frac{\partial Q_2}{\partial N_2}=\cdots\cdots=\frac{\partial Q_n}{\partial N_n}=-\lambda \tag{3-33}$$

$$\dot{q}_1=\dot{q}_2=\dot{q}_3=\cdots\cdots=\dot{q}_n=-\lambda$$

在一般情况下，机组段的流量微增率值是随机组出力的增加而增大的，因而流量对出

力的二阶导数大于零，即$\frac{d^2Q_i}{dN_i^2}>0$（也就是总工作流量获得极小值的充分条件），所以满足等微增率原则的负荷分配方式是使水电站总工作流量为极小值的最优运行方式。

（三）机组间最优负荷分配的方法

1.两台机组最优负荷分配方法

当电厂为两台机组同时运行，最优负荷分配比较简单，根据流量微增率相等的原则，将两台机组的流量微增率的曲线$\dot{q}_1=\dot{q}_1(N_1)$和$\dot{q}_2=\dot{q}_2(N_2)$绘于同一图中，把这两条曲线按横坐标方向相反绘于同一张图上，两个座标原点O_1和O_2的距离必须等于给定的水电站总负荷的数值N，如图3-6所示。

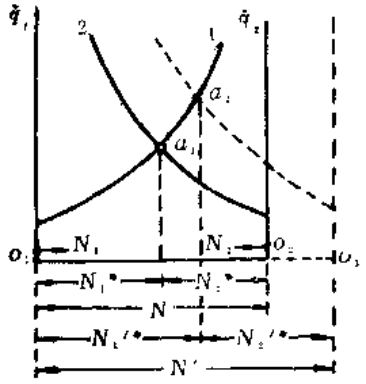


图 3-6 两台机组的流量微增率曲线

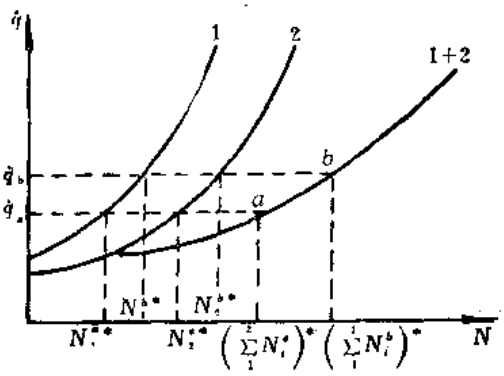


图 3-7 二台机组的流量微增率曲线

从图3-6可知，两台机组流量微增率曲线的交点a_1是满足$\dot{q}_1=\dot{q}_2$条件的点。这个交点横坐标便是两台机组最优运行时，所应分别承担的N_1^*及N_2^*的负荷值。

若负荷由N增至N'，只要将微增率特性曲线$\dot{q}_2=f(N_2)$向右平移一段距离，便得新原点O_2'，这时O_1与O_2'的距离必须等于N'，可以求得两台机组微增率曲线交点a_2'，其横坐标为两台机组相应于总负荷N'的最优负荷分配值。

2.多台机组最优负荷分配方法

分配方法的步骤如下：

（1）分别将各机组的流量微增率特性曲线绘制在图3-7上，如曲线1、2、……。

（2）绘制并列运行的各台机组总出力的流量微增率曲线。设微增耗水率为某一值$\dot{q}_j$时（$j=a, b, \cdots\cdots$），相应各机组所承担的负荷值为N_1^j，N_2^j，…，N_n^j，则厂内并列运行所承担的总出力值为：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} N_i^j\right)=N_1^j+N_2^j+\cdots\cdots+N_n^j$$

当$\dot{q}_j$不同时可求得不同的$\left(\sum_{i=1}^{n} N_i^j\right)$值，将$\dot{q}_j$与$\left(\sum_{i=1}^{n} N_i^j\right)$各点联成光滑曲线，该曲

线即为厂内各台机组总出力与流量微增率关系曲线。

（3）利用（$\sum_{i=1}^{n} N_i'$）与流量微增率关系曲线求各机组应承担的最优负荷值。根据电力系统最优负荷分配得水电站应承担的总负荷值（ΣN），可于（$\sum_{i=1}^{n} N_i$）～流量微增率关系曲线横坐标上找得点（ΣN），作垂线交该特性曲线于b点，再过b点作水平线与各台机组特性曲线相交，即可求得各台机组应承担的最优负荷值N_1^{b*}、N_2^{b*}、……、N_n^{b*}。

其他关于变水头水电厂的水火电经济负荷分配以及梯级水电厂的经济调度请参阅有关书籍。

第四章　灌溉水库调度

第一节　概　　述

一、灌溉水库调度的特点

灌溉水库调度的特点一般有以下几点：

（1）灌溉水库调度系讨论以灌溉为主兼顾防洪、发电的水库，一般情况下，在满足防洪要求的前提下，满足灌溉、发电用水要求。当兴利之间出现矛盾时，则首先满足灌溉要求，其次才是其他任务。

（2）灌溉用水季节性强。要适时适量才能保证农作物的稳产、高产。因此，灌溉水库调度要遵循作物季节用水特点。

（3）灌溉用水量与流域内灌溉面积、作物组成、农业技术、土地状况、灌溉方式、灌溉定额等有关。因此，必须合理地确定灌溉用水量。

（4）要注意提高灌溉用水效益。既要合理编制灌溉需水过程线，又要根据流域内水利系统布局，合理分配水量，做到经济配水，经济用水，提高水量利用率。

（5）要经常注意流域内农作物组成发展耕地面积的变化，导致需水过程线的改变，并核算满足灌溉用水的保证率等。

二、灌溉需水过程线编制

灌溉需水量是灌溉面积上需要水源供给的灌溉水量，其大小及其多年和年内的变化情况，与各种作物的灌溉制度、灌溉面积以及渠系输水和田间灌水的水量损失等因素有关。因此，确定灌溉用水量，须先取得以上这些基本资料。灌溉需水量计算可分年灌溉用水过程与多年灌溉用水量计算。

（一）年灌溉用水量及年灌溉用水过程的计算

一般可按下列步骤进行：

（1）分别计算出各种作物灌溉水量

1）按以下公式先计算某一作物一次灌水量：

$$W_{净}=mA_i$$

$$W_{毛}=W_{净}+\Delta W=W_{净}/\eta$$

$$Q_{毛}=W_{毛}/Tt=mA/Tt\eta$$

式中　m——某作物某次灌水定额（m^3/亩）；

A_i——某作物种植面积（亩）；

η——灌溉水量利用系数，恒小于1；

Tt——一次灌水天数乘以每天灌水时间（s）；

ΔW——渠系及田间灌水损失（m^3/亩）；

$$\Delta W=\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)W_{净}$$

2）计算某作物各次毛灌水流量$Q_{毛}$。

3）按月或旬列出该作物灌溉流量，并绘制成曲线。

4）依次计算得灌区内各种作物灌溉流量，并绘出各种作物灌溉需水过程线图。

（2）计算全灌区全年灌溉需水流量过程线。

将上述计算得灌区内各种作物灌溉需水过程线，按相应月叠加而得全灌区全年灌溉需水流量过程线，如图4-1所示。

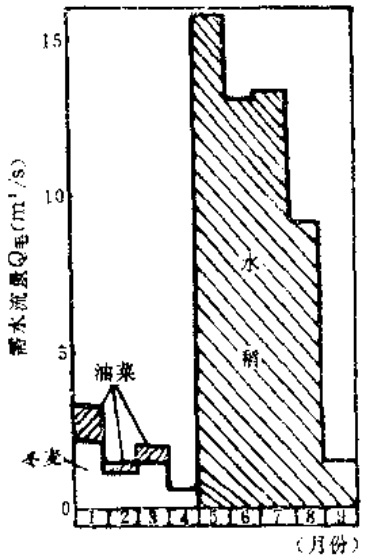


图 4-1 灌溉需水过程线

另外年灌溉用水量过程线还可用综合灌水定额$m_{综}$求得。任何时段内，全灌区的综合灌水定额，是该时段内各种作物灌水定额的面积加权平均值，即：

$$m_{综,净}=\alpha_1 m_1+\alpha_2 m_2+\alpha_3 m_3+\cdots\cdots$$

式中 $m_{综,净}$——某时段内综合灌水定额（m³/亩）；

m_1，m_2，m_3……——第1，2，3…种作物在该时段内灌水定额（m³/亩）；

α_1，α_2，α_3……——各种作物灌溉面积占全灌区的灌溉面积的比值。

全灌区某时段内的净灌溉用水量$W_{净}$可用下式求得：

$$W_{净}=m_{综净}A$$

式中 A——全灌区的灌溉面积（亩）。

全灌区某时段内的毛灌溉用水量：

$$W_{毛}=m_{综净}A/\eta$$

通过综合灌溉定额，可直接推算全灌区该时段相应的灌溉用水量及全年灌溉用水过程线。

（二）多年灌溉用水量的确定

作多年调节水库的规划及控制运行计划时，常需求得多年的灌溉用水量系列。多年灌溉用水量可按照以上的方法逐年推求。有了多年的灌溉用水量系列，应用数理统计原理求得年灌溉用水量的理论频率曲线。

第二节 年调节灌溉水库调度图的绘制

一、设计典型年的选择

所选典型年的年来水量等于或略大于相应于设计保证率年灌溉需水量（保证供水量），同时还应考虑各种年内分配情况，尤其是枯水期较长的年分，以及来水与灌溉用水不同年

分的可能组合。然后对所选典型年年水量按灌溉用水量大小进行修正。

二、水量平衡、调节计算

对所选典型年，按灌溉需水过程线要求自供水结束时、库水位为死水位进行起调，逆时序逐月进行水量平衡计算，至供水期初水库蓄满，再从正常蓄水位库满时开始，逆时序调节至洪水期初库空为止，即可求得一个完整的循环。依次对若干典型年进行调节计算。然后将所有各结果点绘于一张图上，取上、下包线。则上、下包线之间为正常供水区；上包线以上为加大供水区，下包线以下为降低供水区。该图即为年调节水库灌溉调度图，如图4-2所示。

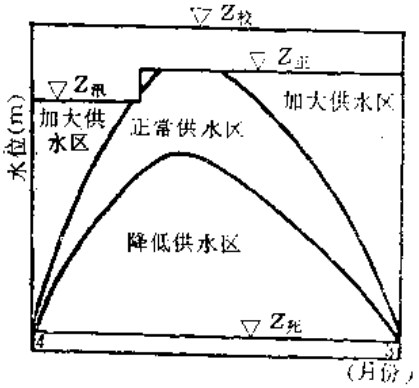


图 4-2 年调节水库灌溉调度图

在绘制灌溉调度图过程中，还应注意满足综合利用要求。如以灌溉为主的水库有防洪要求，则调节计算中应满足防洪库容的需要。即应根据防洪在各个时段所要求的防洪（调洪）库容来控制。

三、年调节灌溉水库调度图绘制实例

已知某水库的基本情况：

（1）水库参数：正常蓄水位96.6m，相应总库容为5.43亿m^3；死水位70.0m，相应死库容0.1亿m^3；兴利库容为5.33亿m^3。

（2）灌溉和工业用水均在水库下游取水，故可利用灌溉和工业用水及部分弃水发

表 4-1 兴利用水及水库水量损失表 单位：亿m^3

月份	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
灌溉用水量	1.66	0.75								1.40	2.13	2.13
工业用水量	0.1	0.1	0.1	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19	0.10	0.10
蒸发渗漏损失	0.09	0.11	0.10	0.10	0.05	0.02	0.02	0.02	0.04	0.07	0.08	0.10
总耗用水量	1.85	0.96	0.20	0.20	0.24	0.21	0.21	0.21	0.23	1.66	2.31	2.33

表 4-2 典型年径流 单位：亿m^3

年份	项目	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	$K^*=\frac{W_{设}}{W_{典}}$
1962～1963年	天然来水量	2.680	7.700	2.230	1.380	0.766	0.407	0.214	0.171	0.305	0.371	0.534	0.436	0.995
	修正后来水量	2.680	7.600	2.230	1.380	0.766	0.407	0.214	0.171	0.305	0.371	0.534	0.436	
1956～1957年	天然来水量	3.290	3.210	4.360	1.260	0.920	0.274	0.204	0.161	0.697	2.340	0.894	0.515	0.945
	修正后来水量	3.110	3.030	4.120	1.190	0.870	0.259	0.193	0.152	0.651	2.210	0.843	0.486	
1969～1970年（设计枯水年）	天然来水量	4.260	5.340	4.260	0.786	0.533	0.274	0.123	0.126	0.245	0.415	0.344	0.368	

* K为水量修正系数；$W_{设}$为设计枯水年年水量；$W_{典}$为选择典型年年水量。

电，不单独考虑发电用水。具体数据见表4-1。

（3）水库蒸发渗漏损失见表4-1。该水库属年调节水库，灌溉用水保证率为75%。库容曲线，水位流量线略。

调度图绘制步骤：

（1）选典型年。对24年水文资料分析，选择了1956～1957年，1962～1963年及1969～1970年共计三年，其径流及修正后径流见表4-2。

（2）调节计算。分别上述三年逆时序自死水位开始调节计算，计算成果见表4-3，表4-4及表4-5。

（3）绘图取上下包线。将上述各表计算成果点绘于一张图上，然后取上、下包线，

表 4-3　　设计枯水年（1969～1970年）调节计算表　　单位：亿m³

月份	总用水量加损失水量	天然来水量	水库供水量	月初水库蓄水量	月初水库总蓄水量	月初水库水位(m)
7	1.85	4.260				
8	0.96	5.340	−4.380	29日蓄水		
9	0.20	4.260	−4.060	0.326	0.426	75.5
10	6.20	0.786	−0.586	4.386	4.486	94.0
11	0.24	0.533	−0.293	4.972	5.072	95.7
12	0.21	0.274	−0.064	5.265	5.365	96.5
1	0.21	0.123	0.087	5.329	5.429	96.6
2	0.21	0.126	0.084	5.242	5.342	96.4
3	0.23	0.245	−0.015	5.158	5.258	96.2
4	1.66	0.415	1.245	5.173	5.273	96.1
5	2.31	0.344	1.966	3.928	4.028	92.8
6	2.33	0.368	1.962	1.962	2.062	86.0
总计	10.61	17.10				

表 4-4　　1962～1963年典型年调节计算表　　单位：亿m³

月份	总用水量加损失水量	修正后天然来水量	水库供水量	月初水库蓄水量	月初水库总蓄水量	月初水库水位(m)
7	1.85	2.680				
8	0.96	7.600	−6.640	27日蓄水		
9	0.20	2.230	−2.030	0.986	1.086	81.0
10	0.20	1.380	−1.180	3.016	3.116	89.9
11	0.24	0.766	−0.526	4.196	4.296	93.6
12	0.21	0.407	−0.397	4.722	4.822	95.1
1	0.21	0.214	−0.004	4.919	5.019	95.6
2	0.21	0.171	0.039	4.923	5.023	95.6
3	0.23	0.305	−0.075	4.884	4.984	95.5
4	1.66	0.371	1.289	4.959	5.059	95.7
5	2.31	0.534	1.776	3.670	3.770	92.0
6	2.33	0.436	1.894	1.894	1.994	85.6
总计	10.61	17.10				

表 4-5　　1956～1957年典型年调节计算表　　单位：亿m^3

月份	总用水量加损失水量	修正后天然来水量	水库供水量	月初水库蓄水量	月初水库总蓄水量	月初水库水位(m)
7	1.85	3.110				
8	0.96	3.030				
9	0.20	4.120	−3.920	25日蓄水		
10	0.20	1.190	−0.990	0.746	0.846	79.0
11	0.24	0.870	−0.680	1.736	1.836	85.0
12	0.21	0.259	−0.049	2.366	2.466	87.5
1	0.21	0.193	0.017	2.415	2.515	88.0
2	0.21	0.152	0.058	2.398	2.948	87.8
3	0.23	0.651	−0.421	2.340	2.440	87.5
4	1.66	2.210	−0.550	2.761	2.861	89.0
5	2.31	0.843	1.467	3.311	3.411	90.8
6	2.33	0.486	1.844	1.844	1.944	85.5
总计	10.61	17.10				

上包线为上基本调度线，下包线为下基本调度线，上、下基本调度线之间为保证供水区，上基本调度以上为加大供水区，下基本调度线以下为降低供水区，如图4-3。

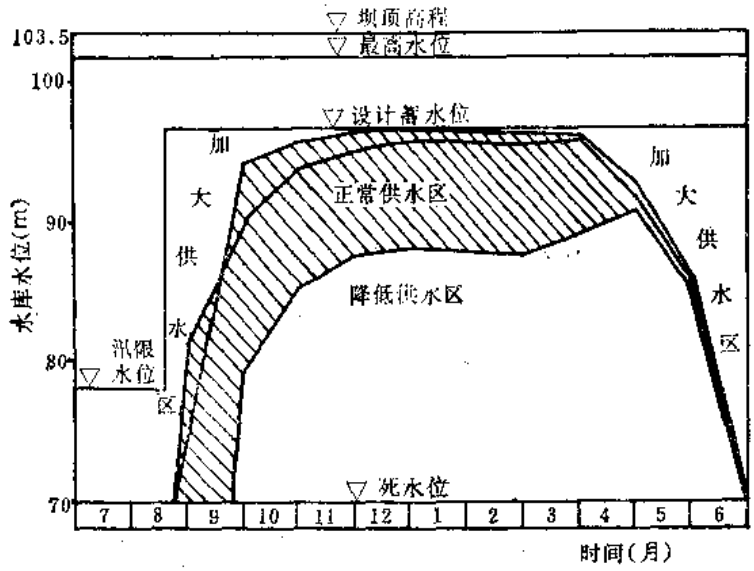


图 4-3　某灌溉为主的年调节水库

根据此调度图对全部水文系列逐年调节计算，累计出正常用水量遭受破坏的年数，以验算兴利用水保证率，如果算出的保证率与设计保证率相差很大，应对调度图进行适当修正。

第三节　多年调节灌溉水库调度图的绘制

多年调节水库兴利调度图的基本原理和年调节水库调度图完全一样，其绘制方法也是

多采用代表年法，并且是以把总兴利库容$V_{兴}$分成多年库容$V_{多年}$和年库容$V_{年}$的方法为基础。

（一）多年库容$V_{多}$和年库容$V_{年}$的确定

多年库容$V_{多}$和年库容$V_{年}$的确定可用以下两种方法：

（1）规划设计阶段用数理统计法进行多年调节计算求$V_{兴}$时，$V_{多}$与$V_{年}$分开计算。$V_{多}$用数理统计法求得，$V_{年}$用时历法求得，在编制水库调度图时这些都是已知的值。

（2）规划设计阶段用长系列时历法进行多年调节计算时，目前大都用时历法做调节计算求$V_{兴}$，而不再划分$V_{多}$与$V_{年}$，在编制调节图时须自行确定$V_{多}$与$V_{年}$。其方法是：选择几个年来水量等于或稍大于年用水量的年份，分别计算其$V_{年}$，这样的年份不需动用多年库容。由于来、用水年内分配的差异致使不同年份所求得的$V_{年}$变化幅度可以很大，使得$V_{年}$的选定遇到一定困难。当$V_{年}$选得较小时，需要来水量较大的年份，如果其来水量不大于年用水量，那就要动用多年库容，这是不够合理的。为使所选年份中不致有过多年份需要动用多年库容，初选$V_{年}$时可取较大值，根据初步选定的$V_{年}$，计算$V_{多}=V_{兴}-V_{年}$。因$V_{年}$较大时，$V_{多}$较小，加大供水线偏低，这样的$V_{多}$是否合理，还需要通过长系列操作进行检验。

值得注意的是，在用数理统计法做多年调节计算求$V_{多}$，并用时历法求$V_{年}$时，$V_{年}$应是来水能满足用水诸年份中之最大者，这样求得的$V_{兴}=V_{多}+V_{年}$最大，偏于安全。但在用长系列时历法做调节计算求$V_{兴}$时，因$V_{兴}$已定，故$V_{年}$一般并不是来水能满足用水诸年份中之最大值。

（二）代表年选择和兴利调度线的绘制

加大供水线的作用是判断水库何时可以加大供水。多年调节水库符合以下两个条件时才可以允许加大供水：

（1）水库的多年库容已经蓄满；

（2）天然来水量较丰，除保证正常供水外，尚有多余的水量。因此，为绘制多年调节水库的加大供水线，应选择这样的年份，即在这一年中，水库按正常供水只用本年度的来水量，而不需动用多年库容中的存水量，且多年库容是蓄满的。以这样的代表年做出的水库水位（或蓄水量）过程线，可作为正常供水区的上限和加大供水区的下限。

根据上述理由，用来绘制多年调节水库加大供水线的年份，其年来水量（$W_{净}$）应等于或稍大于年供水量（$W_{毛}$），按此条件初选一些代表年。再在这些年份中，选择年内分配差别较大的几年。必须注意，所选代表年中应包括原来确定$V_{年}$的那一年，或者包括所需年库容稍大于原定年库容$V_{年}$的某一年份。或采用“虚拟代表年法”确定代表年的来、用水过程。先根据历年净来水量$W_{净}$和毛供水量$W_{毛}$资料，分别进行频率计算，求得两条频率曲线交点处的纵坐标值，记作$W'_{净}$和$W'_{毛}$，再按$W'_{净}$和$W'_{毛}$将所选各年来、供水过程进行缩放，以突出不同分配过程的影响。当然，在这种情况下，年库容$V_{年}$的确定也应采用由某一“虚拟代表年”所确定的数值了。

根据允许加大供水的第一个条件，从供水期末，多年库容蓄满开始，逆时序进行调节计算。将各年调节计算所得各月末库水位（或蓄水量）过程线绘在一起，取外包线即加大供水线。在绘制加大供水线时，若计算的年初外包值小于$V_{多}$，为使年初、年末衔接，年初应取为$V_{多}$，如图4-4所示。

多年调节水库限制供水线的绘制，应考虑多年库容已经放空这一条件，仍利用绘制加大供水线时所选代表年份，从供水期末库容开始，逆时序计算求得各月末库水位（或蓄水量），将各年逐月库水位（或蓄水量）过程绘制在一起，取内包线即限制供水线如图4-4所示。

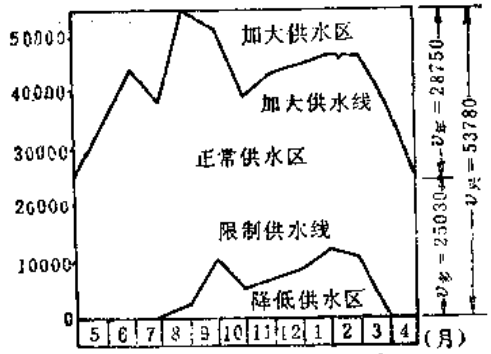


图 4-4 某水库多年调节兴利调度图

多年调节水库兴利调度图，也分为正常供水区、加大供水区和降低供水区，与年调节水库不同之处在于扩大正常供水区，扩大的范围正好等于多年库容$V_{多}$，如图4-4所示。与年调节水库的情况一样，多年调节水库的加大供水线和限制供水线绘出后，也应利用长系列的来、用水资料逐年逐月顺时序进行操作，以检查灌溉用水能够得到保证的年数是否与设计保证率相符合，如不符合，则需对原调度图进行一定的修改，直至符合要求为止。若多年调节水库的总兴利库容$V_{兴}$是按长系列时历法进行调节计算而得到的，则修改调度图时除可对加大供水线和限制供水线的部分位置做一定的改动外，必要时还可把图上的$V_{年}$增大或减小，因为$V_{年}$的选取有一定任意性，其最后确定应由实践来检验。

第四节 水库群灌溉调度的基本原则

灌溉调度的基本原则考虑以下几点：

（1）首先要区分水库群各库的基本任务，是属纯灌溉水库或以灌溉为主兼顾发电的水库，还是灌溉发电并重的水库。根据不同基本任务处理方式不同。

（2）纯灌溉水库群向灌区适时提供水量问题，只需考虑分配水量，而不需要考虑水头损失而导致的能量损失。对于梯级纯灌溉水库，由于上游水库所放之水下游水库可再调节，下游水库的需水量可由上游各梯级补给，因此，蓄水时应由上游水库先蓄，最下级水库最后充蓄，供水期最下游水库先供水，最上游水库最后供水。这种蓄供方式可使各梯级入库水量得以充分利用，达到总弃水量最小的目的。

并联水库一般可按调节性能和来水规律决定蓄放水次序。调节性能高的或汛期结束较早的水库先蓄水，以保证它们的正常充蓄；调节性能低的或汛期结束较迟的水库可后蓄水，以避免早蓄而产生弃水。供水期，调节能力较差的水库按自身有利方式放水，调节性能高的水库根据灌溉用水要求，考虑补偿需要放水。

（3）灌溉、发电并重的水库，既要考虑适时提供足够灌溉水量，又要使发电效益达到最大，最终使总效益达到最大。

在水库群统一调度方面，灌溉与发电往往有一定矛盾，例如在梯级水库中，为了提高灌溉用水的保证程度及充分利用水量，往往以上游水库先蓄水，下游水库先供水为有利。但从发电角度考虑，下游水库先蓄水，上游水库先供水一般是有利的。因此，在拟定统一的调度方式时，就要照顾到这两方面，拟定一些调度的方案（例如可根据各水库的水位情

况来决定何时应由上库供水，何时应由下库供水，何时各水库应按某一比例共同供水等，通过对历史资料的调度计算，选出既能满足灌溉要求，又使发电效益较大的统一调度方式。

若系上游库内取水灌溉，由于发电用水和灌溉用水不能结合，即需分别满足两者要求。这种情况一般只有通过一些方案的计算来选择统一调度方案。或先按发电蓄放水次序判定各库的蓄放水次序，若其与灌溉蓄放水次序符合，可进一步确定两者的蓄供水量。若与灌溉要求的蓄放次序有矛盾，则按任务主次关系作决策。

若系自坝下引水，则应先发电后灌溉。则可先从发电方面研究补偿调节或蓄放水方式来制定水库群的统一调度方式。然后检验是否满足灌溉需水要求，如不满足则应视来水情况调整发电用水量。如来水较丰，可采用加大发电用水量以满足灌溉需水要求；如来水偏枯，可采用改变或适当调整蓄供水次序的方式满足灌溉要求。

（4）对面积较大的灌区，可按灌区的地理位置、渠道布置情况、控灌高程等因素划分成若干供水区，分别供水，其原则为：

1）各库就近供水，当附近水库不能满足近区需水量时，其他水库补给，多余水量统一分配至其他供水区。

2）高库高灌，低库低灌。即引水渠道高的水库，首先应尽量满足控灌高程高的灌区的需水量。

第五章　防洪水库调度

第一节　概　　述

在天然河道上修建水库，既可以按照用水部门所规定的用水要求，将枯水年或枯水年组的径流重新分配，又可以利用水库的调蓄作用，将汛期的洪水流量过程，按照人们的需要进行再分配，以达到规划设计水库工程及下游防洪工程的目的，使水库建成后既满足兴利要求，又满足防治洪水灾害的要求。防洪措施一般有以下两方面：

（1）以蓄、滞为主的防洪措施，如水土保持，控制流域面上的径流和泥沙，不使其流失和大量进入河槽。其措施有修建谷坊、塘、堰、植树造林及坡地改梯田等，是一种大面积上大范围的调节径流、保持水土的有效措施。它既有利于防洪，又有利于农业增产。修库蓄洪和滞洪，利用水库库容拦蓄洪水或滞蓄洪水，削减下游河道的洪峰流量，减轻或消除洪水灾害。

（2）以排为主的防洪措施，有筑堤防洪，在我国平原地区河流多采用这种防治措施，即用增加两岸堤防高程方式，提高河槽安全宣泄洪水的能力，有时也可以起到束水攻沙的作用；整治河道，对河道截弯取直及浚深河床，以加大河道过水能力，使水流畅通，水位降低。

水库防洪的任务一般有两方面：①确保大坝安全；②既要确保大坝安全，又要承担下游防洪任务。不论是哪一种防洪任务，均需设置防洪库容（或拦洪库容、调洪库容）。防洪库容与兴利库容的相对位置（图5-1），一般有如下三种状态：

（1）防洪（或调洪）库容在兴利库容上面，即防洪限制水位与正常蓄水位在同一高程（图5-1 a）。在这种情况下，防洪效益与兴利效益不矛盾，防洪调度比较单一，只要满足防洪任务即可。

（2）防洪（或调洪）库容与兴利库容完全结合，即防洪限制水位在正常蓄水位与死水位之间，防洪高水位与正常蓄水位重合，设计洪水位高于正常蓄水位（图5-1 b）。这种形式虽然库容得以充分利用，但防洪效益与兴利效益矛盾较大，防洪调度较为复杂。

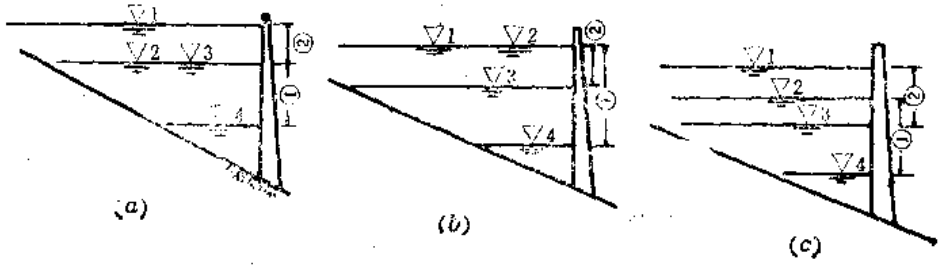


图 5-1　拦洪库容位置图

▽1—设计洪水位；▽2—正常蓄水位；▽3—防洪限制水位；▽4—死水位；①—兴利库容；②—拦洪库容

（3）防洪（或调洪）库容与兴利库容共用一部份（图5-1c），即防洪限制水位在正常蓄水位以下，库容同样得以合理利用，但防洪效益与兴利效益有一定矛盾，防洪调度也较复杂。

为了充分发挥水库的防洪作用及确保大坝安全，每一个水库都应当根据上下游及水库本身的防洪要求、自然条件、洪水特性、工程情况等，拟定合理的防洪调度方式。防洪调度方式的选择是比较复杂的，一般要根据水库至防洪控制点的情况与防洪保护区的情况具体研究处理，是采取固定泄量下泄，还是采用补偿调节的方式或分级防洪调度等。

第二节 防 洪 调 度

一、水库下游具有防洪要求的调度方式

（一）固定泄量调度方式

当来水标准不超过下游防洪标准时，按下游允许泄量或分级允许泄量泄水，若判别来水超过下游防洪标准后，即不再满足下游防洪要求，仅考虑水工建筑物自身安全，按其泄洪能力泄水。

在调度运行过程中，如果有些水库由于受水工建筑物消能、振动方面的影响，闸门只能全开，不能局部开启控制泄量，可采用全开部分泄洪设备来控制泄量。当来水超过下游防洪标准后，全开所有泄洪设备泄洪。

固定泄量调度方式主要适用于水库距防洪控制点很近，区间流量较小的情况。

（二）补偿调度

水库放水与区间洪水有机配合，当区间洪水大时，水库少泄洪，区间洪水小时，水库多泄洪，使两者之和不超过防洪控制点的允许泄量。这种调度方式要求水库泄水到达防洪控制点的传播时间小于（至少等于）区间洪水的集流时间或预见期。如果上述传播大于区间洪水的集流时间或预报预见期时，一旦知道区间发生大洪水时，水库再减少泄量已来不及了。此外，对区间洪水预报的精度要求较高，而且要及时提供给水库，便于水库控制泄量。

这种补偿调度方式适用于水库距防洪控制点有一定距离，区间洪水较大的情况。

（三）经验调度

当水库至防洪控制点区间集流面积较大，而水文预报在预见期、预报精度等方面满足不了上述补偿调度要求时，往往要采取一些经验性的调度方式来满足下游一定的防洪要求。

二、确保大坝安全调度方式

当水库承担有下游防洪任务时，在防洪调度中，在来水不超过下游防洪标准时，应保证下游防洪安全。当洪水超过下游防洪标准后，且在大坝设计标准，校核标准范围内，应确保大坝安全，因此，在防洪调度中，首先要判别在什么情况下应保下游，什么情况下应保大坝，又在什么情况下需要启用非常溢洪道。

（一）判别条件的选择

判别方式的优劣在于能否正确判别洪水，使各级防洪安全能得到可靠保证，合理考虑决策时间，便于控制运行，而且在确保各级防洪安全的前提下，使防洪库容及调洪库容较

小，以提高发电、灌溉等兴利效益。

判别方式一般有“库水位判别”、“入库流量判别”以及库水位与入库流量相合的“峰前蓄水量判别”，下面分别介绍。

（1）用库水位进行判别。用各种频率洪水进行调洪求得最高库水位来判别洪水达到什么标准。这种方法比较可靠，一般不会出现未达标准而加大泄量或敞泄的情况，但在泄洪时机的掌握上，就显得滞后一些。因此，这种方法多适用于防洪库容较大，且调洪结果主要决定于洪水总量的情况。

（2）以入库流量作为判别条件。以各种频率的洪峰流量作为判别洪水是否超过标准。这种方法比起用库水位作为判别条件来说，泄水要早，因而所需防洪库容相对较小。但当判别失误，将造成较大损失。因此，该法一般适用于调洪库容很小，以及调洪最高水位主要受洪峰流量决定的水库，或者洪水峰量关系较好的水库。否则失误的可能性就较大。

（3）用“峰前蓄水量”作为判别条件。峰前蓄水量系指上述两判别条件相结合的方法。即将防洪库容V分为V_1与V_2两部分，V_1指峰前蓄水量，V_2为峰后蓄水量。若防洪库容V为相应于某一洪水频率的水库蓄水量，则V_1相应于该频率洪水的峰前蓄水量，V_2相应于该频率洪水的峰后蓄水量，如图5-2所示。也就是考虑洪水的持续性，当入库流量出现洪峰Q，前段系按q泄水，水库蓄水V_1后，相继有退水水量入库，相应蓄水V_2。

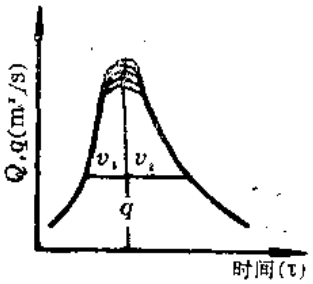


图 5-2 峰前、后蓄水量图

因此，如果选择具有足够可靠性的洪水典型，在已知峰前蓄水V_1情况下，就可以判断洪水是否超过标准。只要慎重分析、考虑各有关因素，此法比较可靠，且所需防洪库容也较小。

至于各水库采用什么判别条件，应结合本水库的具体分析。

（二）非常泄洪设施的标准与启用条件

非常运用洪水标准的下限值根据《水利水电枢纽工程等级划分及设计标准》中表5的规定选用，表5摘录于下。

不同坝型的枢纽工程	建筑物级别				
	1	2	3	4	5
	洪水重现期（年）				
混凝土坝、浆砌石坝和其他水工建筑物	5000	1000	500	300	200

选择的原则为：失事后对下游将造成较大灾害的大型水库、重要的中型水库以及特别重要的小型水库，当采用土石坝时，应以可能最大洪水（PMP）作为非常运用洪水标准；当采用混凝土坝、浆砌石坝时，根据工程特性、结构型式、地质条件等，其非常运用洪水标准较土石坝可适当降低。

由于正常运用（设计）标准与非常运用（校核）标准相差较大。据部分水库统计，校核标准洪峰比设计标准洪峰大1.5～4.6倍，故非常运用泄洪设施一般采用非常溢洪道和破

副坝泄洪等，对泄洪通道和下游可能发生的情况，要预先做出安排，确保泄洪设施启用生效；规模大或具有两个以上的非常泄洪设施，一般应考虑能分别先后启用，以控制下泄流量。由于启用非常泄洪设施将使下游产生严重的淹没损失。启用后还必须进行修复，影响水库效益的发挥，后果是严重的。故应根据水库的规模、重要性、地形地质条件、启用非常措施后对下游影响程度等方面慎重拟定标准。一般来说，对下游有密集居民点、重要城镇、大型工矿企业及铁路，且启用后修复困难、严重影响效益发挥的水库，应采用较高的标准，反之可采用稍低的标准。

由于启用非常措施的后果十分严重，故判别条件应十分可靠。在一般情况下，当水库具有一定的调洪能力时，以水库水位高于相应标准的库水位作为启用非常措施的判别条件比较安全，也比较明确。对于调洪能力不大，洪峰与洪量有一定相关关系的水库，也可以考虑按入库流量及库水位相结合来作为判别条件。即：①在基本按防洪调度原则运用情况下，虽入库流量未达启用非常设施标准，但库水位达到了标准，就应启用非常设施；②库水位虽未达到标准，但入库流量达到了标准，且根据水文预报及洪水特性判别如不运用非常泄洪设施库水位将明显超过标准时，也应及时启用非常设施。

考虑到未来实际发生特大洪水的过程与设计时所采用的不会完全相似，加之启用非常泄洪设施还需要一定的决策时间、准备时间、生效时间等，故在保坝洪水的调洪计算中最好在超过启用设施标准后再推迟 1 ～ 2 个计算时段才计入非常溢洪道的泄量；或在库水位高于启用设施标准水位一定数值后才计入非常溢洪道的泄量，以留有余地。

在具有几个非常溢洪道能分段使用情况下，要充分利用水库的调洪库容，研究不同的启用标准采用分级分段的非常运用方式，但分段不宜太多，一般以 2 ～ 3 段为限。

非常措施有几处时，宜采用先远后近的启用顺序，当各处对下游影响有较大差别时，宜先用对下游影响较小者；当各处地质条件及修复难易程度不同时，应先启用地质条件较好、修复较易的溢洪口门。

三、防洪调度计划中需注意的问题

为了更好地进行防洪调度，必须编制防洪调度规则与调度计划。为使拟定的调度方式切实可行，需考虑如下因素：

（ 1 ）要考虑各种可能影响泄洪的因素。当判别来水超过某种标准需加大泄量，但是往往又有一系列因素影响及时泄出应泄的流量，由于管理不够现代化，自动化，编制调洪计划时需要适当给予考虑。

（ 2 ）尽可能使泄量逐步增大或减少，避免突变。除了水库泄流量大小对下游堤防有影响外，泄量大小变化太剧烈也将对堤防产生不利的影响。因此，在编制水库防洪调度规则时要尽可能避免泄量的突变。

（ 3 ）应当实行“大水多放，小水少放，常遇洪水适当调蓄”的原则。

第三节　防洪预报调度概述

为了充分发挥水库的效益，使防洪与兴利尽可能地结合起来，利用预报进行水库防洪

调度，称之为防洪预报调度。从水库规划设计角度而言，考虑预报进行预泄，从而减少防洪库容。或者考虑预报提前判别洪水是否超过标准，从而减少防洪库容、调洪库容，以降低设计洪水位、校核洪水位。从已建成水库的防洪控制运用来说，考虑预报进行预泄，可以腾空部分防洪库容，增加水库的抗洪能力，或更大限度地削减洪峰，保证下游防洪安全；当水库建有电站时，可以减少洪水弃水量，增加发电量。并可利用洪水预报适时超蓄或及时抓住“洪水尾巴”，增加兴利蓄水量等。进行防洪预报调度最重要的条件是：预报的预见期、预报洪峰与洪量的可靠度与精确度。因此，对预报方案需作详细的评定分析。

一、预报方案的评定分析

由于影响水文现象的因素多而复杂，作预报方案时，往往不可能全部考虑进去，加上水文数据的测验误差及其他各种误差，因而预报值与实测值不符是常见的，预报误差用绝对误差与相对误差两种形式表示：

绝对误差　　δ ＝预报值－实测值

相对误差　　$$e=\frac{\text{预报值}-\text{实测值}}{\text{实测值}}\times 100\%$$

则相对预报精度　　$\mu=1-e$

预报合格率（θ）为合格点据数与总点据数之比。所谓合格点据数是指总点据数中符合要求精度的点据数。

预报误差有正有负，在评定时不记正负号。评定预报方案时，原则上应将制作方案的全部点据都参加检验。只有偏离很大的点据，经分析确有某些特殊因素（如决口、分洪等），才允许不参加评定。评定的方法，就是将全部点据按照预报方案进行一次预报操作，得出各个点据的预报值，将这些预报值与实测值对照，计算出绝对误差与相对误差。

然后，统计在各种允许误差条件下的合格率。同样可找到在一定合格率要求下的可能产生的相对误差，或找到达到一定的允许误差条件下的预报合格率。

从防洪调度观点看，对预报的要求首先是要高合格率。因为预报误差可以通过调度中的逐时段修正来得到一定的消除，但如果合格率过低，尽管预报误差小，使用价值也不大，因为很有可能出现的误差大大超过原定的情况，从而使防洪调度失误。至于对合格率的具体要求，目前尚未有正式规定。一般来说，它应与所采用的防洪标准有一定关系，防洪标准高，合格率要高一些，相反可低一些。这就可以看出，对于为确保大坝安全而进行的防洪调度，如要考虑预报，预报合格率应予以足够的重视。

二、考虑短期水文预报进行防洪调度

短期水文预报一般指降雨径流预报或上下站水位、流量对应关系的预报，其预见期一般不长，但精度较高，合格率较高。一般考虑短期水文预报进行防洪调度比较可靠。

根据防洪标准的洪水过程，按照采用的洪水预报预见期及精度，进行调洪演算。调洪演算中所采用的预泄流量是在水库泄流能力范围内，不能大于下游允许泄量。如果下游区间流量比较大时，应该是不能超过下游允许泄量与区间流量的差值。通过调洪演算即可求出能够预泄的库容及调洪最高水位，如图5-3所示。

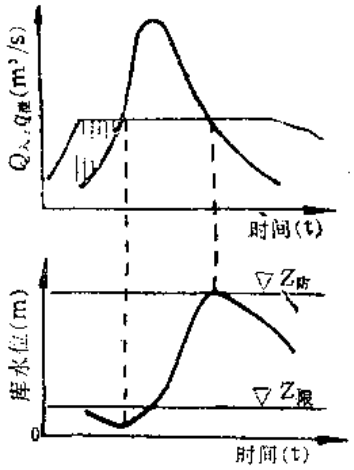


图 5-3 预报防洪调度

三、考虑中期预报进行防洪调度

中期预报，一般指三天到五天的预报。它既有水文预报、也包括一定的气象预报，因而精度较低。目前中期预报还不够成熟，尚需深入研究。但对溶雪洪水来说，进行中期预报可能有一定精度，利用它来进行防洪调度是可能的。

第四节 分期洪水防洪调度

我国若干河流在整个汛期中，主要受大气环流的影响，由于降雨成因不同，洪水特性与大小各异，但其大小常有一定的变化规律。从实测洪水资料统计分析可以看出，在年内各个时期出现洪水的大小与机遇一般也有明显的规律。利用这一特性，就可以在汛期中根据各时期设计洪水的大小及其他条件，留出不同的防洪库容，即各时期防洪限制水位不同。例如，前期所需防洪库容大，后期所需防洪库容小，防洪限制水位可逐步抬高，有利于逐步充水，有利于防洪与兴利的结合，充分发挥水库的兴利效益。

一、分期的原则

从理论上说，整个汛期内划分为几个时期应当基于对气象成因以及对实测洪水资料的分析：

（1）气象成因规律的分析。从气象上分析本流域形成大洪水的天气系统，气团的运动规律，找出一般的时间界限。

（2）统计洪水出现的规律。统计在各个时期内洪峰出现的次数、相应时段的平均洪峰流量、平均每次洪水总量以及各时段最大洪峰与最大洪量等，用以分析洪水在汛期出现的规律。

（3）其他。当洪水的大小在整个汛期无明显差异，如果下游允许泄量、预报预见期及精度等方面各时期不同，也可以采用不同防洪限制水位。

从确保防洪安全来说，分期不宜太多，每期不宜过短。同时还要充分考虑气象因素的复杂性，洪水出现除了一般规律性而外，还有出现特殊情况的可能。所以对分期防洪调度一定要慎重对待，留有一定余地。

二、分期设计洪水问题

分期确定后，根据分期的时间界限，分别进行洪水统计，进行水文计算；拟定出分期设计洪水过程线；并将分期设计洪水过程线与全年最大设计洪水过程线作比较。当按分期设计洪水定出的最大防洪库容小于按全年最大设计洪水过程线算出的防洪库容时，如果采用前者进行防洪调度似乎不够安全，又似乎降低了防洪标准。因此，一般处理方法为以全年最大设计洪水代替各分期设计洪水中最大者，或经过分析，将全年最大设计洪水用于汛期中洪峰发生最频繁、量级最大的时段，其余各期则用分期计算结果。致于分期设计洪水标准，一般均取与全年最大设计洪水同一标准。另外，在分期设计洪水计算中，还可以考

虑各期的洪峰、洪量均一致的标准，而洪水典型根据各期特点选取。

三、分期防洪限制水位的确定

分期设计洪水确定后，即可根据水库的具体情况，选择合适的调洪计算方法与防洪调度方式，进行调洪演算，求得各期所需的防洪库容。自防洪高水位向下留出所需的防洪库容，从而得到各期的防洪限制水位。

例如，丹江口水库主汛为7～10月，但从气象上看，可划分为7～8月与9～10月两个明显的时期，而且所采用的下游允许泄量也不同，7～8月份下游受长江水位顶托的可能大，允许泄量相对要小些；9～10月份洪水主要来自上游，流程较长，故洪水预报预见期也长一些。因此，两期所要求的防洪库容与汛限水位均可不同，如表5-1及图5-4所示。

表 5-1　　分期防洪限制水位

时　段	防洪库容（亿m³）	防洪高水位（m）	汛前限制水位（m）
7～8月	78	160	149
9～10月	58	160	152.2

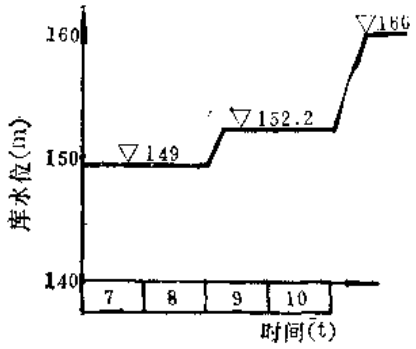


图 5-4　丹江口水库分期防洪限制水位

第五节　水库群的防洪调度

水库群由于水库参数间密切联系、相互影响以及各水库上、下游的防洪要求，其防洪调度远比单一水库复杂。水库群的防洪调度无论在理论上与实践上均越来越受到重视，下面主要叙述水库群防洪调度的一般原则和一些主要问题。

一、水库群自身安全调度原则

水库群中各水库遭遇设计洪水或校核洪水时，为确保自身安全的防洪调度，原则上可采用与单一水库相同的方法进行；但在梯级水库中，应考虑梯级上下蓄泄洪量的相互影响，具体如下：

（1）若运行水库上游有防洪标准较高的水库时，本水库可在偏安全的条件下，考虑上游水库的调洪作用来拟定防洪调度方案，其设计洪水和校核洪水过程线应考虑如下两种可能遭遇：

1）区间发生相当本水库设计标准或校核标准洪水，加上上游水库相应洪水经水库调节后的泄量。

2）上游水库发生相当本水库设计标准或校核标准的洪水经水库调节后的泄量，加上区间相应洪水。

（2）若运行水库上游有防洪设计标准较低的水库时，应考虑上游水库可能失事的影响拟定保坝措施。

（3）若运行水库下游有防洪设计标准较低的水库，在拟定防洪调度方案时，应考虑发生超过下游水库的校核标准洪水，尽可能减轻对下游水库安全的不利影响。

（4）若运行水库下游有防洪设计标准较高的水库，在拟定防洪调度方案时，应拟定切实可行的保坝方案并落实具体措施，在可能的条件下，按下游水库的校核标准拟定本库保坝方案，以防止本水库万一失事对下游水库产生连锁反应。

二、水库群为保护下游防洪区的调度方式

水库群为下游防洪调度方式基本与单一水库类似。即当水库下游区间流域面积不大，区间和入库洪水基本同步的条件下，可采用从库水位或入库流量为判别条件的固定泄量方式；当下游区间流域面积较大，区间和入库洪水组成多变，或各库入库洪水不同步，应按下游区间洪水特性以及水库入库洪水的组成情况，进行补偿调节。此外，由于是多库对同一防护对象防洪，还需研究各库间统一调度问题，如防洪库容的分配、蓄泄洪水的次序等，这些问题比较复杂。

（一）水库群的防洪库容

1.总防洪库容的确定

（1）并联水库总防洪库容的确定。甲乙两并联水库共同承担下游丙处防洪任务，如图5-5。如果甲、乙两水库到防洪控制点的区间设计洪峰流量（相应于防洪标准）不大于丙处的安全泄量，则可根据丙处的设计洪水过程线，控制点丙处的允许的安全泄量$q_{允}$进行调洪计算，如图5-6，即可求得所需的总防洪库容。该库容系满足丙处防洪要求需设置的最小防洪库容V_c。在实际调度中，考虑到补偿调节的误差，总防洪库容常常比V_c大，一般可取该值1.1～1.3倍。即：

$$V_{总}=(1.1\sim1.3)V_c$$

以下分别叙述甲、乙两库必须承担的防洪库容。



图 5-5　水库群示意图

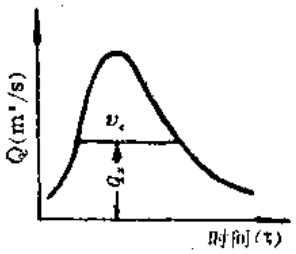


图 5-6　水库群调洪

甲库必须承担防洪库容的确定：设丙处发生符合设计标准的大洪水，乙、丙区间也发生同频率洪水（即丙处流域面积减去乙库以上流域面积发生同频率洪水），乙库以上洪水全部拦蓄在乙库内，即乙库不泄洪，推求甲库为满足丙处防洪要求所需的库容即为甲库所需承担的防洪库容。同理可求得乙库的必须防洪库容。

两水库的必需防洪库容确定后，由总防洪库容减去总必需防洪库容，即为由两库共同分担的防洪库容。如果总必需防洪库容比总防洪库容大，甲、乙两水库的总必需库容就是它们的总防洪库容。

（2）串联水库防洪库容的确定。由于串联水库具有水力、水利联系，上游甲库调节放下的洪水，加上甲～乙库区间洪水为乙库入库的洪水，在乙库再进行一次调节。即甲库防洪库容可以削减乙库入库洪水，从而减少乙库的防洪库容。乙库的防洪库容可按甲库至丙处的区间设计洪水过程线，根据丙处允许的安全泄量进行推算。

2.防洪库容的分配

（1）按各水库蓄洪抵偿系数分配。所谓抵偿系数是指单位蓄洪量可消减下游洪水有效成灾水量。例如，1亿m^3防洪库容可削减0.6亿m^3成灾水量，则抵偿系数为0.6。此值可通过调洪计算及下游河道洪流演算后分析得出。一般系数大者多分配一些防洪库容。但如果缺乏资料时，一般可考虑干流水库较支流水库、距防护点近的水库较远的水库、串联水库的下级水库较上级水库、洪水比重大的水库较比重小的水库多分担一些共同防洪库容。

（2）按各水库总兴利效益最大或总兴利损失最小原则分配。在初步拟定时，可先尽量利用各水库防洪和兴利的重叠库容。不够时再在调节性能高、本身防洪要求较高、发电水头较低的水库多分配一些共同防洪库容。

（3）按总计算支出最小分配。满足下游防洪要求的前提下，按各分配方案的计算支出最小确定最优方案。各方案的兴利效益差值用替代方案的投资和运行费折算。

分配方案选定后，采用不同典型的设计洪水进行各水库调洪和下游洪流演算，校核是否满足下游防洪要求，否则要进行适当调整，必要时还可加大总防洪库容。

（二）水库群防洪调度方式

1.固定下泄量方式

当防洪控制处的洪水主要由各库来水决定，且担任同一处防洪任务的各水库洪水基本同步时，可采用固定下泄量方式进行洪水调节。这种调洪方式中与单级固定下泄量防洪调度方式类似。

2.补偿调度方式

若共同担任同一处防洪任务的各水库洪水组成同步性较差，或各水库入库洪水与防护区区间洪水组成多变，应由防洪控制处的洪水情况决定各库的泄洪量，即需采用对区间洪水进行补偿调节方式。这种调洪方式与单库补偿调节方式类似。不同处在于确定补偿次序。

当甲、乙两库洪水具有一定程度的同步性，但下游区间洪水比重较大，区间洪水与入库洪水组成多变。选择两库中防洪调节能力较好，且洪水比重亦大的甲水库作为补偿水库，调节性较差、洪水比重亦小的乙水库作为被补偿水库。在洪水调度中，乙库可按其自身防洪特性及综合利用要求放水，求得下泄流量过程线$q_{乙}\sim t$，将此过程线（计及洪水流量传播时间和河槽调蓄作用）和甲、乙库至丙区间洪水过程线$Q_{丙}\sim t$同时间相加，得出$(q_{乙}+Q_{丙})\sim t$过程线。

为使丙处流量不超过安全泄量$q_{安丙}$，则甲库的泄量为$Q_{允}-(q_{乙}+Q_{区})$可作图说明：①绘制$Q_{甲}\sim t$过程线；②于过程线$Q_{甲}\sim t$图上作$q_{允}$线；③将$(q_{乙}+Q_{丙})$线倒绘于$q_{允}$线下，如图5-7所示。

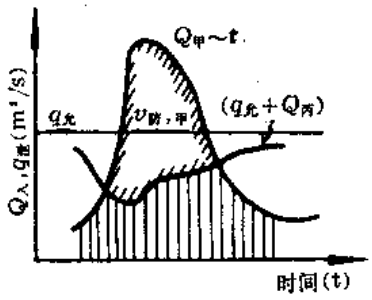


图 5-7　水库群洪水补偿调节

由图可知，甲库泄流量相当于图中竖线部分，即$Q_{甲}-(q_{乙}+Q_{丙})$。倒置的$(q_{乙}+Q_{丙})\sim t$过程线与$Q_{甲}\sim t$过程线所包围的斜影面积即为甲库总防洪库容即：

$$V_{防,甲}=\sum_{t_1}^{t_2}[Q_{甲}-Q_{允}+(q_{乙}+Q_{区})]\Delta t$$

若两并联水库（甲、乙库）调节洪水能力相差不多，且洪水同步性差，较难确定水库的补偿次序，而需具体考虑每次发生洪水情况及预报值，以决策两库蓄泄水次序和补偿调节关系。如甲、乙两库发生洪水相当，但甲库来水较乙库提前，则甲库应先蓄，让乙库尽量腾空，以迎接迟到的洪峰。即甲库进行补偿调节，先蓄满防洪库容，而后乙库再进行补偿调节，乙库防洪库容后蓄满。

3.串联水库的防洪调度方式

设甲、乙两串联水库共同担任丙处的防洪任务。若甲、乙两库调洪性能相差较大，且乙库防洪性能较高，应以调洪性能较高的水库为补偿水库，调洪性能较低的水库可按单独运行方式调节洪水。若甲、乙两水库调节性能相差不多，则应考虑甲库入库洪水，甲、乙库区间洪水与丙处洪水，三者洪水组合情况确定蓄泄次序，这是一种相当复杂的问题，当丙处发生大洪水需要水库拦蓄时，一般应甲库先蓄，甲库无能力时，则乙库拦蓄。若甲库和甲乙区间同时遭遇较大洪水，也可采用甲乙两库均匀分担对丙处洪水进行补偿调节。

合理的洪水调度，有利于防洪、兴利库容的结合，提高水库总效益。

第六章　综合利用水库调度

本章主要包括两部分内容：一是有综合利用任务的水电站水库调度图的绘制；二是水库调度图的应用。

第一节　有综合利用任务的水库调度图的绘制

以发电为主兼顾防洪、灌溉、航运等综合利用水库，其调度图的绘制必须切实贯彻综合利用原则，以取得最大综合效益。

一、具有防洪任务的发电水库调度图

防洪和兴利的水库调度方式是不同的，其间的矛盾是由于不能准确预知径流。解决矛盾的办法是掌握径流（特别是洪水径流）的特性，分析洪水的规律，合理地确定各个时期的防洪限制水位和调洪方式。对各种频率的洪水进行调洪演算，确定相应的调洪库容及其库水位，在调度图中将各时期防洪限制水位以上的区域作为调洪区（见第五章介绍，不再赘述）。尽可能使同一库容既能用于防洪，又能用于兴利，也就是使防洪库容和兴利库容有机地结合使用。

在防洪调度区（即各时期防洪限制水位）已经确定的前提下绘制发电等兴利调度线。具体调节计算方法同前，通过调节计算可绘制得如图6-1所示的调度图。全图汛期防洪限制水位分两级$Z_{汛1}$、$Z_{汛2}$，防洪限制水位约束了发电蓄水高程，发电调度图同样可分为保证出力区，加大出力区与降低出力区三部分。

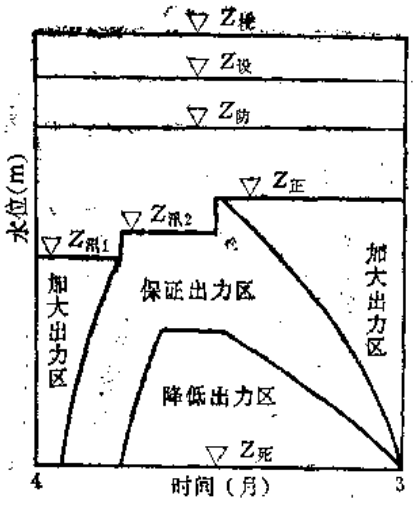


图 6-1　有防洪、发电任务的水库调度图

二、具有发电和灌溉任务的水库调度图

（一）水电站上游库区引水灌溉时的水库调度图

当水库上游灌区有灌溉用水时，自水库上游库区引水灌溉后，将使发电用水和水头减少，从而影响到水电站的发电量；灌溉正常工作保证率和发电正常工作保证率（即设计保证率）的不同，将影响到水库及水电站的运行调度方式。但是，水库调度中最重要的是：在灌溉设计保证率范围内，灌溉需水期间，保证水库水位不低于上游自流灌溉的引水高程，满足正常灌溉用水。

灌溉用水一般多直接从水电站天然来水中扣除，灌溉用水的扣除量，一般以特征库水位作为控制标准。当水库水位高于或等于灌溉引水要求的最低控制高程$\nabla Z_{灌}$时，按正常

灌溉用水扣除；当水库水位低于 $\nabla Z_{灌}$ 而高于灌溉进水口堰顶高程 $\nabla Z_{灌堰}$ 时，按渠道过水能力扣除；当库水位低于该引水堰顶高程时，因无法引水灌溉，则不考虑灌溉用水。

绘制水库调度图步骤：

（1）根据灌溉设计保证率 $P_{灌}$，选择相应于 $P_{灌}$ 的若干典型来水年份，扣除上游正常灌溉用水，自供水期末，由灌溉控制高程 $\nabla Z_{灌}$ 起调，逆时序进行水能计算，算出并绘制各典型年水电站以相应于 $P_{灌}$ 的出力 $N_{加灌}$ 工作时水库蓄水指示线，取上下包线，上包线为满足 $P_{灌}$ 的上调度线，下包线为满足 $P_{灌}$ 的下调度线，即图6-2中所示2线及2′线。

（2）以发电设计保证率 $P_{电}$ 为依据，选取相应于 $P_{电}$ 的若干典型年，扣除折减二～三成后的灌溉用水量，自死水位（年调节水库）逆时序调节计算，绘制得各条保证出力运行的蓄水指示线，取上、下包线，上包线表示保证出力区的上调度线，下包线表示保证出力区的下调度线，如图6-2中的1线及1′线所示。

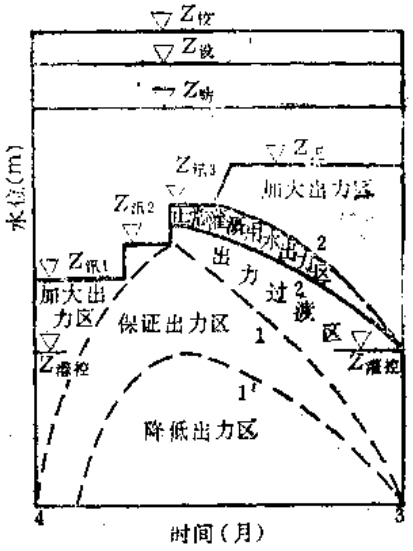


图 6-2 上游库区引水灌溉的水库调度图

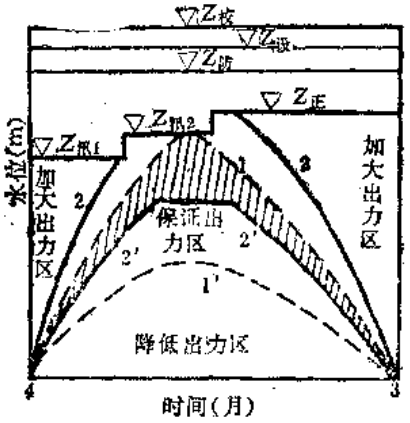


图 6-3 下游有灌溉时的水库调度图

全图可分为保证出力区，保证正常灌溉供水出力区，出力过渡区（如图中1线以上2′线以下），加大出力区（如图中2线以上，蓄水期1线以上），以及降低出力区（图中1′线以下）。

（二）水电站下游有引水灌溉时的水库调度图

水电站自下游引水灌溉时，灌溉引水可以先通过发电后再引走，矛盾较上述情况为小。但是，由于灌溉设计保证率与发电设计保证率不相同，灌溉用水方式与发电用水方式亦不相同，往往也会出现一些矛盾。因此，水库运行调度中必须按综合利用原则妥善处理这些矛盾。

绘制水库调度图的步骤：

（1）选取相应于 $P_{电}$ 的若干来水典型年，在满足折减后的灌溉用水的前提下，按相应的水电站保证出力工作，自供水期末死水位起逆时序调节计算，求得不同来水状态下的水库蓄水指示线，取上、下包线，上包线为保证出力区的上调度线，下包线为保证出力区

的下调度线，如图6-3中的1线与1′线。

（2）选取相应$P_{灌}$的若干来水典型年，在满足正常灌溉需水的前提下，水电站按相应的出力（不得小于水电站保证出力）工作，自供水期末，死水位起逆时序计算，求得不同的蓄水指示线，取上、下包线，上包线为满足下游正常灌溉用水的上调度线，下包线为满足下游正常用水的下调度线，如图6-3中的2线与2′线。

全图分保证出力区（由图中1线与1′线构成）；保证灌溉用水区（由图中2线与2′线构成）；斜线为综合保证区（由1线与2′线构成）；加大出力区（图中2-2线以上）；降低出力区（图中1′线以下）。

第二节 水库调度图的应用

一、水库调度图

将各种防洪水位，兴利水位以及各种兴利调度线绘制在同一张图上，即组成了水电站水库调度图。水库调度图形状随水库所承担任务而异。水库调度图综合反映了水库在各种水文条件下的调度规则。调度图中的各种调度线和水位线将调度图划分为若干调度区。在调度过程中，视库水位落于哪一个区域就按该区域要求调度运行，例如，发电水库的调度规则是：

（1）当库水位落于保证出力区，水电站按保证出力工作；

（2）当库水位落于加大出力区，水电站按加大出力进行工作；如果加大出力区分得比较细，按相应出力进行工作；

（3）当库水位落于降低出力区，水电站按降低出力运行；

（4）当库水位升至防洪限制水位与防洪蓄水位之间的防洪区时，水库按$q_{溢}+q_{电}\leqslant q_{安}$工作。即溢洪道下泄流量＋发电流量（满装机运行）不能超过下游安全泄流量；

（5）当库水位处于防洪高水位与大坝安全设计洪水位之间拦洪区时，水库按设计洪水规则下泄，电站按满装机运行；

（6）当库水位处于设计洪水位与校核洪水位之间的调洪区，水库按校核洪水调洪规则下泄。

又如以防洪、发电、灌溉、航运、养殖为任务的丹江口水利枢纽。防洪系解决汉江流域百年一遇洪水作为防洪标准，当发生百年一遇洪水时，经过水库调蓄、下游民垸分洪、杜家台分洪工程配合运用，保证汉江下游遥堤、干堤不溃口和江汉平原的安全。发电：电站保证出力24.7万kW，多年平均发电量38.3亿kW·h，是华中电网的骨干电站之一。灌溉：近期以唐白河流域为主，规划灌溉引水量15亿m^3，灌溉面积360万亩（其中湖北省210万亩，河南省150万亩）。航运：水库上游形成200多km的深水航道，可终年通航；下游河道枯水流量由124m^3/s提高到400m^3/s以上。养殖：当库水位在155m时，有近100万亩的水面，为大力发展养殖创造了良好的条件。

该水库调度的原则是：在确保大坝安全的前提下，蓄泄兼顾，最大可能地拦蓄洪水，

减少汉江下游杜家台和民垸分洪的机遇，确保汉江下游干堤、遥堤安全。在汛期应充分利用水量，抓住时机多发电，少弃水；在供水期应充分利用水头，使电站尽可能维持在较高水头下工作，增加发电效益。在汛末不失时期地抓住最后一场洪水，蓄满水库。在发电不受破坏的条件下，尽可能满足灌溉引水和下游航运要求。

水库运行主要指标及依据

（1）丹江口最高蓄水位157.0m，死水位139m，发电保证率90%，保证出力24.7万kW，灌溉保证率80%，航运保证率与发电保证率相同。

（2）防洪限制水位规定：7月1日至8月31日防洪限制水位为149m；9月1日至9月30日防洪限制水位为152.5m；10月1日开始逐步充蓄至157m。

防洪调度规则

（1）当预报流量等于或小于五年一遇洪水时，碾盘山处允许泄量为11000～12000 m^3/s，最高库水位夏季不超过154.8m，秋季不超过155.7m。

（2）当预报流量大于五年一遇直到十年一遇洪水，碾盘山处允许泄量为16000～17000m^3/s。最高库水位：夏季不超过155.5m，秋季不超过155.8m，杜家台分洪闸尽量避免分洪。

（3）当预报流量等于或小于二十年一遇洪水，而大于十年一遇洪水时，碾盘山处允许泄量20000～21000m^3/s，新城允许泄量不超过18400～19000m^3/s。最高库水位：夏季不超过156.8m，秋季不超过156.9m，杜家台分洪，民垸尽量不分洪。

（4）当预报流量等于或小于百年一遇洪水，而大于二十年一遇洪水时，碾盘山处允许泄量为27000～30000m^3/s。最高库水位：夏季不超过160m，秋季不超过159.3m。杜家台分洪16亿m^3，民垸分洪：夏季24.1亿m^3，秋季16.1亿m^3，确保遥堤和干堤安全。

（5）当预报流量大于百年一遇，小于万年一遇洪水时，应根据预报及水库上涨趋势逐级加大泄量，避免骤然加大加剧下游洪水灾害。以建筑物的最大泄量渲泄洪水，以保大坝安全，要求最高水位不超过161.4m。

（6）当发生大于万年一遇特大洪水，应采取一切保坝措施，以建筑物最大泄量渲泄洪水，以确保大坝安全。

兴利调度原则

（1）当库水位处于死水位139m以下时，考虑到系统实际负荷需要和下游航运要求，至少有一台机组运行。

（2）当库水位处在调度图的保证出力区时，水电站发保证出力24.7万kW运行。

（3）当库水位在灌溉保证区时，按灌溉保证区的出力28万kW工作。

（4）当库水位在灌溉上基本调度线与最高蓄水位157m之间，或在防洪限制水位附近时，水电站应加大出力运行。

（5）当库水位高于防洪限制水位和汛末最高水位157m时，水电站以最大出力工作，同时开闸泄洪。

（6）水库应开展径流预报，及时增加出力，减少弃水。

（7）水库在4月末的库水位不应低于146.5m，以满足灌溉用水要求。

二、水库调度图在水电站水库调度中的应用

（一）水库调度图的应用

水库调度图一般可供以下几方面用：

（1）复核水电站的设计保证率与灌溉保证率，多年平均年发电量，多年平均年用水量及发电耗水率等。

（2）供编制水电站及其水库的年运行调度计划时用，根据预报资料，按调度图计算逐月和全年的水电站发电量及水库运行方式。

（3）在实际调度运行计划时，可按调度图和中长期水文预报逐月修正调度计划，根据洪水预报进行洪水预报调度和发电调度（如发电引用流量，日发电量）等。

（4）水库运行中成本和效益核算。

（二）评定水电站水库运行调度效益

如何评定水库运行调度的优劣，一般都应通过各种主要水利动能经济指标及各种影响因素和条件的综合分析，来全面论证和评价水库实际运行效益的大小。

评定水电站水库运行效益的指标有：

（1）水电站设计保证率与保证出力。这是说明水电站供电可靠性的重要指标，在其它条件相同时，$P_{设}$值与$N_{保}$值大的运行调度方案较好。

（2）年发电量E是检验水电站的水库是否满足调度准则的指标之一。

（3）装机利用小时数。其大小是反映水电站设备的利用程度。

（4）水量利用系数α。该系数可说明天然水量利用的程度。它是年发电用水量$W_{用}$与天然来水量$W_{天}$的比值，即$\alpha=W_{用}/W_{天}$。α值一般小于1，弃水量是决定α值大小的重要因素，应尽量减少弃水量。

（5）单位耗水率q。单位耗水率是指水电站发1度电所需用的水量，即发电用水量除以发电量（$q=W_{用}/E$，m^3/度）。该指标可说明水电站机组的运行效率。当工作机组台数和其间负荷分配合理时，则q值就小，否则就大。

（6）电能成本（$u_{水}$）。电能成本是指发1度电所需要的费用。为提高系统供电经济性，应充分利用水能多发电，降低电能成本。

（7）厂用电率。厂用电率系指水电站本身消耗的电量占总发电量的百分比。

（8）年计算支出。计算系统总年计算支出，可以检验电力系统运行的经济性与合理性是否达到电力系统最优经济运行。

此外，水电站水库的综合利用尚应分析各部门用水保证率，以及综合分析灌溉效益，防洪效益等。

除了对水电站水库调度运行进行成本、效益核算外，还应建立各种规章制度。通过一系列规章制度，以保证日常管理调度工作的正常开展。

第七章 线 性 规 划

第一节 基 本 概 念

线性规划（*Linear Programming*）所考虑的问题，就是如何在各种相互关联的多变量线性约束条件下，去解决或规划一个对象的线性目标函数最优化问题。所以，线性规划的数学模型，也就是在满足一组等式或不等式约束条件的情况下，使目标函数值最大（或最小）。下面举例说明。

【例 7-1】 有一电视机厂，生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ型电视机，根据市场需要情况，每天最小需要量分别为200、250、100台，而该厂每天可以利用的工时为1000个时间单位，每天可利用的原材料有2000个单位。各型电视机生产1台所需工时和原材料单位数见表7-1。问每天各种电视机应生产多少台，才能使该厂得到最大利润。

表 7-1　　每台电视机所需工时和原材料

型　　式	原 材 料	工　　时	最低需要量	利　　润
Ⅰ	1.0	2.0	200	10
Ⅱ	1.8	1.2	250	14
Ⅲ	4.5	1.0	100	12
可 利 用 量	2000	1000		

令x_i为第i型电视机的生产数量。根据已知条件和要求，可建立如下约束方程式：

$$x_1+1.8x_2+4.5x_3\leqslant 2000$$
$$2x_1+1.2x_2+1.0x_3\leqslant 1000$$
$$x_1\geqslant 200$$
$$x_2\geqslant 250$$
$$x_3\geqslant 100$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0$$

目标函数 $\max\ x_0=f(x)=10x_1+14x_2+12x_3$

用线性规划法求解得：

Ⅰ型电视机应生产200台；

Ⅱ型电视机应生产250台；

Ⅲ型电视机应生产300台。

最大利润额为9100单位值.

【例 7-2】 某工厂在计划期内要安排生产I、II两种产品，这些产品分别要在 A、B、C、D四种不同的设备上加工。按工艺规定，产品 I 和II 在各设备上所需要的加工台时数如表 7-2。又已知各设备在计划期内有效台时数分别是12、8、16和12（1台设备工作1小时称为1台时数）。该工厂每生产1件产品 I 可得利润 2 元，每生产 1 件产品 II可得利润 3 元。问应如何安排生产计划，才能得到利润最多？

表 7-2　　I、II产品在各设备上加工的台时数

产品 \ 设备	A	B	C	D
第 I 种	2	1	4	0
第 II 种	2	2	0	4

设x_1表示计划期内产品 I 的产量；x_2表示计划期内产品II的产量。根据题意可建立下列约束方程：

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2 &\leqslant 12 \\ x_1+2x_2 &\leqslant 8 \\ 4x_1 &\leqslant 16 \\ 4x_2 &\leqslant 12 \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

目标函数　max　$x_0=f(x)=2x_1+3x_2$

用线性规划法求解得：

第 I 种产品产量为 4 台；

第II种产品产量为 2 台。

最大利润额为14元。

【例 7-3】 某水泥供应站有 I 、II 两个仓库，某水泥的存货量分别为 1500 包与1800包，现有甲、乙、丙三个工地分别需要900包、1200包和600包的水泥。若由仓库 I 运送给甲、乙、丙，则每包运费分别为 1 元、4 元、1 元，如果由仓库 II运送给甲、乙、丙，则每包的运费分别为 5 元、9 元、5 元，问如何由这两个仓库运送给这三个工地，才能使总运费为最少？

解：设由仓库 I 运送水泥给甲、乙、丙分别为 x_1、x_2、x_3 包；由仓库 II 运送水泥给甲、乙、丙分别为x_4、x_5、x_6包。

根据存货量与工地需要量的限制，得出约束条件为：

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &\leqslant 1500 \\ x_4+x_5+x_6 &\leqslant 1800 \\ x_1+x_4 &= 900 \\ x_2+x_5 &= 1200 \\ x_3+x_6 &= 600 \end{aligned}$$

求目标函数即总运费的最小值：

$$\min \quad x_0=f(x)=x_1+4x_2+x_3+5x_4+9x_5+5x_6$$

经过运算后，解得：

$$x_1=300,\ x_2=1200,\ x_3=0;$$
$$x_4=600,\ x_5=0,\quad x_6=600;$$

总运行费最小为11100元。

第二节　线性规划的数学模型一般表示

一、线性规划的普遍形式

目标函数为极大化或极小化形式：

$$\max\ (\min)\quad x_0=F(x)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$$

约束条件为不等式：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\ (\leqslant,\ =,\ \geqslant)\ b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\ (\leqslant,\ =,\ \geqslant)\ b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\ (\leqslant,\ =,\ \geqslant)\ b_m$$
$$x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n\geqslant 0$$

需将这些形式改变成适合于一定的求解程序。改变后的形式有两种：

一种为范式（Canonical form），适用于讨论对偶性理论。

另一种为标准式（Standard form），可用来直接求得模型的解。

二、线性规划的范式

任一线性规划问题均可用下列范式表示：

$$\max\quad x_0=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

受下列条件约束：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i$$
$$i=1,2,\cdots m,$$
$$j=1,2,\cdots n$$

决策变量：

$$x_j\geqslant 0$$

范式的特性是：

（1）目标函数为极大化形式。

（2）所有约束条件为（$\leqslant$）形式。

（3）所有决策变量（x_j）为非负数。

一个线性规划问题，可用下列五种变换方法使其改变成为范式。

（1）一函数的极小化，在数学上相当于其负函数的极大化。例如：

$$\min \quad x_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$$

相当于

$$\max \quad -x_0 = -c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots\cdots - c_nx_n$$

因此，任一线性规划的目标函数均可变为极大化形式。

（2）在一个方面的不等式（≤或≥），若乘以－1则可以改变为在另一方面的不等式（≥或≤）。例如：

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geqslant b$$

相当于

$$-a_1x_1 - a_2x_2 \leqslant -b$$

同样

$$P_1x_1 + P_2x_2 \leqslant q$$

相当于

$$-P_1x_1 - P_2x_2 \geqslant -q$$

（3）一个等式可用两个不同方向的不等式代替。例如：

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$

相当于两个联立不等式

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant b \\ a_1x_1 + a_2x_2 \geqslant b \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \leqslant b \\ -a_1x_1 - a_2x_2 \leqslant -b \end{cases}$$

（4）若一个不等式约束条件的左端需取绝对值，则可以改变为两个通常的不等式。例如：

若$b \geqslant 0$，

$$|a_1x_1 + a_2x_2| \leqslant b$$

相当于

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \geqslant -b \\ a_1x_2 + a_2x_2 \leqslant b \end{cases}$$

同样，若$q \geqslant 0$，

$$|P_1x_1 + P_2x_2| \geqslant q$$

相当于

$$\begin{cases} P_1x_1 + P_2x_2 \geqslant q \\ P_1x_1 + P_2x_2 \leqslant -q \end{cases}$$

（5）一个变量的值若可为正、为负或零，这个变量相当于两个无负值变量的差。例如，若x的符号未加限制，则$x = x^+ - x^-$，其中$x^+ \geqslant 0$，$x^- \geqslant 0$。下面举例说明。

【例 7-4】 某线性规划的目标函数为：

$$\min \quad x_0 = 3x_1 - 3x_2 - 7x_3$$

约束条件：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\leqslant 40 \\ x_1 + 9x_2 - 7x_3 &\geqslant 50 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 20 \\ |5x_2 + 8x_3| &\leqslant 100 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

x_3值可正可负或零

将上式变为范式：

目标函数：

$$\max \quad Z = -x_0 = -3x_1 + 3x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-)$$

约束条件：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3(x_3^+ - x_3^-) &\leqslant 40 \\ -x_1 - 9x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) &\leqslant -50 \\ 5x_1 + 3x_2 &\leqslant 20 \\ -5x_1 - 3x_2 &\leqslant -20 \\ 5x_2 + 8(x_3^+ - x_3^-) &\leqslant 100 \\ -5x_2 - 8(x_3^+ - x_3^-) &\leqslant 100 \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3^+, \quad x_3^- &\geqslant 0 \end{aligned}$$

即将原题中目标函数由极小化变为极大化。所有约束条件均改写成（$\leqslant$）形式。原题中x_3中符号未加限制，用$x_3 = x_3^+ - x_3^-$代替；不等式中的（$\geqslant$），（$=$）与绝对式分别按上述变换方式（2）、（3）和（4）进行改变。

【例 7-5】 某线性规划的目标函数为：

$$\min \quad x_0 = 12x_1 + 8x_2$$

约束条件：

$$\begin{aligned} 9x_1 + 4x_2 &\geqslant 36 \\ 5x_1 + 8x_2 &\geqslant 40 \\ 3x_1 + 10x_2 &\geqslant 30 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

将上式变为范式：

目标函数：

$$\max \quad Z = -x_0 = -12x_1 - 8x_2$$

约束条件：

$$\begin{aligned} -9x_1 - 4x_2 &\leqslant -36 \\ -5x_1 - 8x_2 &\leqslant -40 \\ -3x_1 - 10x_2 &\leqslant -30 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

三、线性规划的标准式（Standard form）

线性规划标准式为：

（1）目标函数为极大化或极小化：

$$\max(\min) \quad x_0=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

（2）当约束条件为不等式时，应在左端加或减一无负值的变量，使其变为等式。

若约束条件为（$\leqslant$）形式，则在其左端加一变量，该变量称松弛变量（Slack Variable）。即当原式为$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i$时，则应改变为：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+S_i=b_i$$

$$x_j\geqslant 0,\ S_i\geqslant 0,\ (j=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,m)$$

若约束条件为（$\geqslant$）形式，则应于左端减去一变量，该变量称剩余变量（Surplus Variable）。即当原式为$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i$时，则可改变为：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-S_i=b_i$$

$$x_j\geqslant 0,S_i\geqslant 0,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

总之，标准式的特点是：

（1）目标函数为极大化或极小化形式。

（2）约束条件可能是不等式，亦可能是等式。当不等式属于（$\leqslant$）形式，应于不等式左端加一无负值的松弛变量，使其变为等式。当不等式属于（$\geqslant$）形式，应于不等式左端减一无负值的剩余变量，使其变为等式。

（3）所有变量均无负值。

（4）约束条件等式右端的值均为非负值。

【例 7-6】 目标函数：$\max \quad x_0=4x_1+3x_2$

约束方程：$3x_1+4x_2\leqslant 12$

$3x_1+3x_2\leqslant 10$

$4x_1+2x_2\leqslant 8$

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

将上述方程变为标准式：

目标函数：$\max \quad x_0=4x_1+3x_2+0S_1+0S_2+0S_3$

$3x_1+4x_2+S_1=12$

$3x_1+3x_2+S_2=10$

$4x_1+2x_2+S_3=8$

$x_1,\ x_2,\ S_1,\ S_2,\ S_3\geqslant 0$

【例 7-7】 原问题的数学模式为：

目标函数：$\max \quad x_0=5x_1+6x_2$

约束条件：

$$3x_1+x_2\leqslant 48$$
$$3x_1+4x_2\leqslant 120$$
$$3x_1+5x_2\leqslant 150$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

改为标准式，引入松弛变量，改写为：

$$3x_1+x_2+S_1=48$$
$$3x_1+4x_2+S_2=120$$
$$3x_1+5x_2+S_3=150$$
$$x_1,\ x_2,\ S_1,\ S_2,\ S_3\geqslant 0$$

目标函数为：max $x_0=5x_1+6x_2+0S_1+0S_2+0S_3$

线性规划的标准式，基本上使线性规划问题化为一集m个线性代数方程式，包括$m+n$个未知量。若这联立方程式的解能满足$x_i\geqslant 0$及$c_i\geqslant 0$，则该解为可行的，而最优解则为可行解中能使目标函数之值极大化者。但一集m方程式中若包括$m+n$个未知量，则可有无限的解，故需要一有效程序，经过检查有限数目的可行解后求得最优解。

第三节　线性规划的几何图解法

几何图解法对确定满足约束条件的可行域和找出符合目标函数极值的最优解，都比较直观。多用于分析两维结构变量问题。当变量为三维时，则将构成空间的三个平面，当变量大于三维时，则构成了多维空间问题，难以用几何图形表示。下面以实例说明几何图解过程。

【例 7-8】 有一自行车厂生产两种型式的自行车，生产一辆所需的原材料分别为 2 和 3 个单位数，所需工时分别为 4 和 2 个单位数，而生产的产值分别为 6 和 4 个单位数。如果每天工厂能提供的原材料为100个单位，能提供的工时为120个单位，问两种自行车各生产多少辆，才能使产值最高？

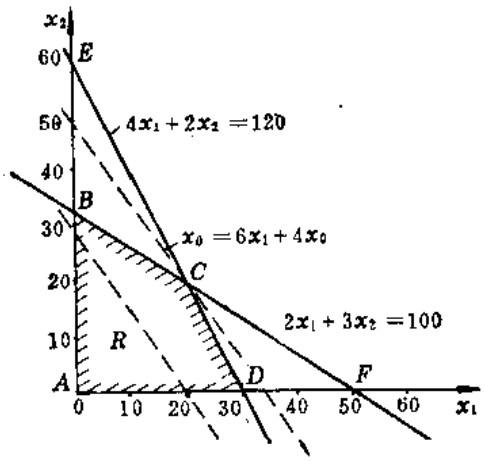


图 7-1　几何图解 1

设x_1、x_2分别表示两种型式的自行车产量。

目标函数：max $x_0=6x_1+4x_2$

约束条件：$2x_1+3x_2\leqslant 100$　原材料限制

$4x_1+2x_2\leqslant 120$　工时限制

$x_1,\ x_2\geqslant 0$　非负限制

用图解法求解步骤如下：

（1）找出满足第一个约束条件的区域。由约束条件方程式知为一直线。当$2x_1+3x_2=100$时，可得直线BF线如图7-1所示，按约束条件性质确定，在BF线以下的区域均是。又因该不等式右端是非负的，所以原点亦在该区域。

（2）找出满足第二条件的区域。同样可作图满足方程$4x_1+2x_2=120$的直线DE，则该线以下即为所求的满足第二约束条件的区域。

BF线与DE线相交于C点，则BCD以下即为满足两个约束条件的区域。

（3）又要满足非负条件$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$。所以$ABCD$区域中的任一点，都满足约束条件，称该区域为可行域（Feasible Region），用R来表示。这个区域有无穷多个点是可行解的集合，我们要从中找出最优解。可行域的边界是个多边形，每个边都是由约束条件的方程式得来。

（4）目标函数是变量x_1，x_2的线性函数，其斜率取决于产值系数。不同的x_0值是一组平行直线，由图7-1可以看出，随着x_0值的增长，目标函数逐渐向C点趋近，最后，x_0直线总有可能被推出可行域R之外，离开可行域前的最后一点是拐点或极点C。在C点的目标函数值是它在可行域中的最大值。因此C点的坐标值（x_1，x_2）和x_0值就是这个线性规划问题的最优解。

可行域R的多边形，共有四个拐点A、B、C、D。A点的目标函数值等于0，是这个可行域中目标函数最小点，A、B、C、D四点目标函数值是逐步增加的，当目标函数直线与C点相切，该点即为在可行域中目标函数达最大值。

【例 7-9】 某工厂，生产A、B两种型号产品，生产A、B产品所需的原材料、加工时数及工厂可利用的原料与工时见表7-3。根据市场需要情况，A、B两种产品产量每天分别不得超过30个单位和40个单位。而生产获利分别为10和20个单位。问每天各种产品应生产多少单位数，才能获得最大利润？

表 7-3 A、B产品所需的原材料和加工时

型　号	原材料	工　时	每天不得超过量
A	2	2	30
B	2	1	40
可利用量	100	80	

解：

（1）建立方程式。令x_1代表A产品；x_2代表B产品。

约束条件：$2x_1+2x_2\leqslant 100$　　（1）

$2x_1+x_2\leqslant 80$　　（2）

$x_1\leqslant 30$　　（3）

$x_2\leqslant 40$　　（4）

$x_1,\ x_2\geqslant 0$

目标函数：$\max\ x_0=10x_1+20x_2$

（2）作图。由约束方程（1）绘制得直线AB，由约束方程（2）得直线CD，由约束方程（3）得EF以及约束方程（4）得GH。另有非负约束条件，满足各约束条件构成$KGHFE$可行域范围。

由目标函数方程构成的直线，其斜率为A、B两种产品的产值系数之比，其值为1/2，如图中虚线簇所示。

由约束方程和非负条件绘制得直线，两两直线的交点即拐点，如图中K、G、C、H、I、J、F、E、D、B各点。这些点均为基础解（BAsic Solution）。其中K、G、H、F、E诸点在可行域上称基础可行解。基础可行解中使目标函数达到最大值的那一点，该点解即为最优解。当只有一个点使目标函数达到最大值，该点解为唯一最优解。也就是当约束

条件构成凸多边形可行域，则最优解在可行域的拐点上，如图 7-2 中H点。即生产A产品10台，B产品40台，厂方可获最大利润900单位。

如果A、B两种型号的产品，厂方获利每台均为20单位，那么目标函数方程式将变为：

$$\max \quad x_0 = 20x_1 + 20x_2$$

该方程式绘制得的直线簇，其斜率与约束条件（1）直线平行，当目标函数由小到大增加，目标函数线向右上方移动至与约束条件（1）AB线重合时，线段HF上任一点均使目标函数达最大值。于是该线性规划问题变为无限个最优解。

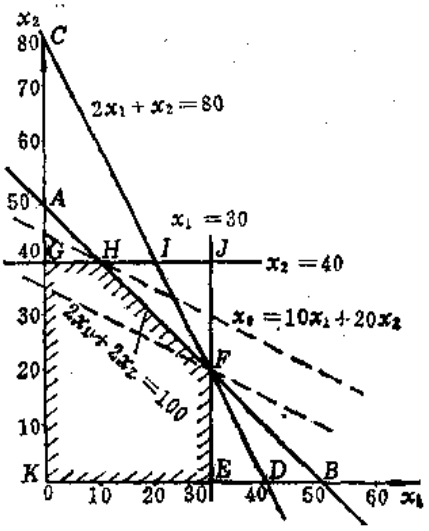


图 7-2 几何图解二



图 7-3 几何图解三

【例 7-10】 试求$x_0=x_1+2x_2$的最小值，且(x_1, x_2)满足下列约束条件：

$$x_1+x_2 \geqslant 1$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

解：首先画出约束条件图形，如图7-3，再作目标函数图形得一组平行线，如图7-3中虚线。由图可知目标函数的极小值为 1，而其对应的极小点则为(1,0)。

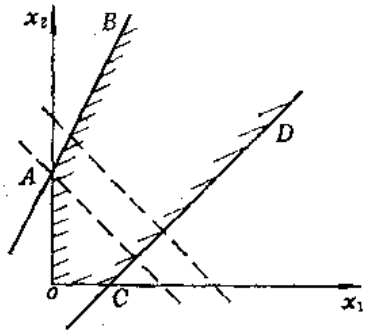


图 7-4 几何图解四

【例 7-11】 目标函数：$\max \quad x_0=x_1+x_2$

$$\text{约束条件} \begin{cases} -2x_1+x_2 \leqslant 4 & (1) \\ x_1-x_2 \leqslant 2 & (2) \\ x_1, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

作图：

（1）约束方程（1）知，$-2x_1+x_2=4$，当$x_1=0$时，$x_2=4$；当$x_2=0$时，$x_1=-2$为直线AB。

（2）约束方程（2）知，当$x_1=0$时，$x_2=-2$；当$x_2=0$时，$x_1=2$为直线CD。

（3）考虑非负约束为x_1轴线、x_2轴线。

由图7-4知为无界可行域，如图中阴影线所示。目标函数$x_0 \to \infty$，为无最优解。

上述各例说明：线性规划问题解，可能有唯一最优解，也可能有无限个最优解，也可能无解，视具体情况而定。

第四节 单 纯 形 法

第三节用几何图解法求简单问题的解。但复杂的问题所含未知变量及约束条件的数目均较多，就需用单纯形法或改善单纯形法等来求解。单纯形法是以线性规划的标准式为基础，逐次迭代求最优解，其计算步骤为：

（1）将原来的线性规划的数学形式改变为标准式。

（2）选择起始基本可行解。这一步要考虑两种情况：

1）若原题中的约束条件均为（≤）形式，则松弛变量可用作起始基本可行解。

2）若原题中的约束条件，包括（≥）或（=）形式，则需用人造变量法得到起始解。

（3）求新的基本可行解。新的基本可行变量，可按最优性和可行性情况来决定。若该题的最优解存在，且为有限值，则可由逐次迭代而求得。换句话说，根据问题的标准型，从可行域中一个基本可行解(一个顶点开始)，转换到另一个基本可行解（顶点），并且使目标函数的值逐步增大，当目标函数达到最大值时，就得到问题的最优解。以下举例说明解题步骤。

【例 7-12】 求下列线性规划的最优解。

目标函数：

$$\max \quad x_0 = 6x_1 + 4x_2 \qquad (1)$$

约束条件：

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 100 \qquad (2)$$

$$4x_1 + 2x_2 \leqslant 120 \qquad (3)$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0$$

求解步骤：

（1）将以上公式变为标准式：

$$\max \quad x_0 = 6x_1 + 4x_2 \qquad (4)$$

$$2x_1 + 3x_2 + S_1 = 100 \qquad (5)$$

$$4x_1 + 2x_2 + S_2 = 120 \qquad (6)$$

$$x_1,\ x_2,\ S_1,\ S_2 \geqslant 0$$

（2）这例属第一种情况，故可用松弛变量为起始基本变量，其余两个未知量则为非基本变量其值均为零。单纯形法的迭代计算列于表7-4至表7-6。为统一起见，目标函数可写成：

$$x_0 - 6x_1 - 4x_2 = 0 \qquad (7)$$

这标明目标函数与约束条件等式的右端均为常数，左端仅包括未知量。

表7-4中x_1，x_2为非基本变量均为零。最后一列等于各基本变量的值。表中其它数值均为各变量在式（5）至式（7）中的系数。其中基本变量S_1，S_2在式（5）、式（6）中的系数为单位矩阵。

（3）从式（7）可知，非基本变量x_1的系数负值为最大。故较x_2更能增加x_0的值。所以x_1应选为新加入的基本变量。若目标函数为极小化，则应选非基本变量具最大正系数

者，这种情况称之为最优情况。新加入的基本变量，必须取代一个现有基本变量。被代替的变量可由可行情况决定。亦即算出现时基本变量的值与新加入变量在相应的约束条件中各正系数的比值，比值为最小的相应变量被代替。若两基本变量有相等的最小比值，则可任选其一。

x_1为新进变量。计算比值如右表，说明S_2应被替代。第一次迭代计算如表7-5。

现时基变量值	基变量值/x_1的系数
$S_1=100$	$100/2=50$
$S_2=120$	$120/4=30$

由表中x_0行中x_2系数为负值，进行第二次迭代，也就是x_2应为新基本变量代替S_1。

由表7-6知，x_0行中的各系数均无负值。故$x_0=200$，$S_1=0$，$S_2=0$，$x_1=20$，$x_2=20$为最优解。

表 7-4　　起　始　解　表

基本变量	x_0	x_1	x_2	S_1	S_2	解值
x_0	1	−6	−4	0	0	0
S_1	0	2	3	1	0	100
S_2	0	4	2	0	1	120

表 7-5　　第　一　次　迭　代　计　算

基本变量	x_0	x_1	x_2	S_1	S_2	解值
x_0	1	0	−1	0	3/2	180
S_1	0	0	2	1	−1/2	40
x_1	0	1	1/2	0	1/4	30

表 7-6　　第　二　次　迭　代　计　算

基本变量	x_0	x_1	x_2	S_1	S_2	解值
x_0	1	0	0	1/2	5/4	200
x_1	0	1	0	−1/4	3/8	20
x_2	0	0	1	1/2	−1/8	20

第五节　线性规划的对偶性

线性规划有一个很有意思的特性，这就是在形式上，它可以形成一对对称的问题，对任何求极大值的线性规划问题，都有一个与之对应的求极小值问题。与这两种问题有关的数学模型的矩阵，具有相同的数据，互为转置，其最优解也是严格对应的。因此，可以通

过求对偶问题的极小值，去解决一个求极大值的规划问题。反之亦然。这就是线性规划的对偶性（Duality）。例如，四边形的边长l一定时，问四边形为什么样的形状，其面积最大。当然，这个答案是很清楚的，正方形的面积最大，它的各边边长相同，均为$l/4$，面积为$(l/4)^2$。与之相对应的对偶问题是：如果四边形的面积是一定的，问这个四边形是什么形状，其周长最短。答案同样也是正方形最短。如果面积的数据与上相同，为$(l/4)^2$，则求出的周长也一定是l。这两个对偶问题的最优解都是正方形。这样，前一问题的约束条件，可转变为后一对偶问题的目标函数，前一问题的目标函数，又可变换为后一问题的约束条件。

对偶问题是对一个研究对象从两个不同角度提出极值问题，又具有一个最优解。

一、原问题与对偶问题的关系

研究线性问题的对偶问题，首先分析原问题的状态进而找出其对偶问题。在本章第二节线性规划的数学模型一般表示式中介绍了两种不同形式，下面分别考虑原问题为两种不同形式时的对偶问题.

（一）原问题为范式

原问题为范式的表达式：

目标函数：
$$\max \quad x_0=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

约束条件：
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$
$$x_j\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

与之对应的对偶问题表达式为：

目标函数：
$$\min \quad y_0=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i$$

约束条件：
$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\geqslant c_j \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$
$$y_i\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

式中 y_0——为对偶问题的目标函数；

$y_1,y_2,\cdots,y_m$——为对偶问题中的变量。

原问题：
$$\max \quad x_0=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

约束条件：
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m$$
$$x_i\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

对偶问题：
$$\min \quad y_0=b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$$

约束条件：
$$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m\geqslant c_1$$
$$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m\geqslant c_2$$
$$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m\geqslant c_n$$
$$y_i\geqslant 0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

也可以用矩阵形式表示

目标函数：
$$\max \quad x_0 = CX$$

约束条件：
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

即
$$AX \leqslant B$$
$$X \geqslant 0$$

对偶问题：
$$\min \quad y_0 = YB$$

约束条件：
$$[y_1, y_2 \cdots y_m] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \geqslant [c_1, c_2, \cdots, c_m]$$

即
$$YA \geqslant C, \quad Y \geqslant 0$$

从上述原问题与对偶问题的关系，可归纳为如下几点：

（1）原问题为极大化则对偶问题为极小化。

（2）极大化的约束条件为（$\leqslant$）形式，极小化问题为（$\geqslant$）的形式。

（3）原问题的约束条件相当于对偶问题中的变量。

（4）原问题中约束条件的右边各元素，等于对偶问题目标函数中各系数。

（5）原问题目标函数中各系数为对偶问题中约束条件的右边各元素。

（6）两问题中的变量均无负值。

【例 7-13】 原问题的目标函数：
$$\max \quad x_0 = 5x_1 + 6x_2$$

约束条件：
$$x_1 + 9x_2 \leqslant 60 \qquad (1)$$
$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 45 \qquad (2)$$
$$5x_1 - 2x_2 \leqslant 20 \qquad (3)$$
$$x_2 \leqslant 30 \qquad (4)$$
$$x_1, \ x_2 \geqslant 0$$

令y_1，y_2，y_3和y_4为相当于上述第（1）至（4）各约束条件的对应问题变量，则对偶问题为：

目标函数：
$$\min \quad y_0 = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4$$

约束条件：
$$y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geqslant 5$$
$$9y_1 + 3y_2 - 2y_3 + y_4 \geqslant 6$$
$$y_1, \ y_2, \ y_3, \ y_4 \geqslant 0$$

从上例中可看出，对偶问题约束条件的数目较原问题为少。而线性规划问题计算的繁简程度主要取决于约束条件数目的多少。这样原问题的最优解可通过对偶问题解求得。大大提高了计算效率，这是用对偶问题的一个优点。

（二）原问题为标准式

原问题的等式约束条件相当于对偶问题中相应的变量无非负约束。原问题：

目标函数：$\max \quad x_0=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

约束条件：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$

$x_j\geqslant 0 \qquad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$

对偶问题：

目标函数：$\min \quad y_0=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

约束条件：$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i\geqslant c_j \qquad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$

y_i的符号不受限制。$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$

【例 7-14】 线性规划的原问题为：

目标函数：$\max \quad x_0=5x_1+12x_2+4x_3$

约束条件：$x_1+2x_2+x_3\leqslant 5$

$2x_1+x_2+3x_3=2$

$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0$

对偶问题：

目标函数：$\min \quad y_0=5y_1+2y_2$

约束条件：$y_1+2y_2\geqslant 5$

$2y_1+\ y_2\geqslant 12$

$y_1+3y_2\geqslant 4$

$y_1\geqslant 0$，y_2符号不受限制

二、对偶问题的性质

对偶问题的性质，主要介绍以下几点：

（1）对称性。对偶问题的对偶是原问题。

设原问题是 $\max \quad x_0=CX$

$AX\leqslant b$

$X\geqslant 0$

则对偶问题是：$\min \quad y_0=YB$

$YA\geqslant C$

$Y\geqslant 0$

若对上式两边都取负号，又因为$-\min y_0=\max(-y_0)$

可得到：$\max(-y_0)=-YB$

$-YA\leqslant -C$

$Y\geqslant 0$

求上式对偶关系：$\min(-y_0')=-CX$

$$-AX \geqslant -B$$
$$X \geqslant 0$$

又因 $\min(-y'_0) = \max y'_0$

所以

$$\max y'_0 = \max x_0 = CX$$
$$AX \leqslant B, \quad X \geqslant 0$$

这就是原问题。由此可见原问题与对偶问题是互为对偶的。

（2）原问题的任一可行解X的目标函数值，总小于等于对偶问题的任一可行解Y的目标函数值，即：$C\overline{X} \leqslant \overline{Y}B$。其中，$\overline{X}$是原问题的可行解，$\overline{Y}$是对偶问题可行解。

设原问题是：
$$\max \quad x_0 = CX$$
$$AX \leqslant b$$
$$X \geqslant 0$$

因$\overline{X}$是原问题的可行解，所以满足约束条件，即$A\overline{X} \leqslant b$。又$\overline{Y}$是对偶问题的可行解，将$\overline{Y}$乘上式，可得$\overline{Y}A\overline{X} \leqslant \overline{Y}b$。

原问题的对偶问题是：
$$\min \quad y_0 = Yb$$
$$YA \geqslant C, \quad Y \geqslant 0$$

由于$\overline{Y}$是对偶问题可行解，所以满足 $\overline{Y}A \geqslant C$。

将$\overline{X}$乘上式得：
$$\overline{Y}A\overline{X} \geqslant C\overline{X}$$

∴ 得到：
$$C\overline{X} \leqslant \overline{Y}A\overline{X} \leqslant \overline{Y}b$$

（3）可行解是最优解时的性质。设X^*是原问题的可行解，Y^*是对偶问题的可行解，当$CX^* = Y^*b$时，X^*，Y^*是最优解。

证：若$CX^* = Y^*b$，根据第（2）条性质，可以知道，对偶问题的所有可行解$\overline{Y}$，都存在$\overline{Y}b \geqslant CX^*$，因$CX^* \approx Y^*b$，所以$\overline{Y}b \geqslant Y^*b$，可见$Y^*$是使目标函数取值最小的可行解，因此是最优解。

同样可以证明：对于原问题的所有可行解$\overline{X}$，存在$CX^* = Y^*b \geqslant C\overline{X}$，所以$X^*$是原问题最优解。

其它性质不一一介绍，请参见有关线性规划书籍。

对偶定理是线性规划中很重要的一个定理。在理论分析和实际解题方面都有很多应用。有的时候，原问题不容易解，可以化为对偶问题来处理。另外，对偶问题在灵敏度分析中也有重要的意义。

第六节　线性规划在水量调配上的应用

应用线性规划解决从各种水源调引水量至几个灌区的问题。由于从各水源到各个灌区的输水线路长短以及地形条件不同，所需渠道及建筑物费用亦就不同。线性规划的目标是使总费用最小，求最优水量调配。

现有$i(i=1, 2, \cdots\cdots, N)$个水源输水至$j(j=1, 2, \cdots\cdots, s)$个灌区的情况。每i个水源有不同的输水方式，例如水源1可以单独输水至灌区1，或灌区2，3，……，s，也可以是1个水源同时向2个灌区、3个灌区输水。求最优水量调配方式，其线性规划的模型如下：

使
$$\min \quad 2^*=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s}c_{ij}x_{ij}$$

且约束于

$$\sum_{j=1}^{s}x_{ij}\leqslant V_i(i=1, 2, \cdots\cdots, N);$$

$$\sum_{i=1}^{N}x_{ij}\geqslant M_j(j=1, 2, \cdots\cdots, s);$$

$$x_{ij}\geqslant 0\ (i=1, 2, \cdots\cdots N;\ j=1, 2, \cdots\cdots, s)$$

式中 c_{ij}——由水源i输水至灌区j的单位水量费用（元/m³）；

x_{ij}——由水源i调至灌区的水量（m³）；

V_i——i水源可能提供水量（m³）；

M_j——j灌区所需灌溉用水量（m³）。

求解步骤：首先将其转化成最大化的数学模型：

$$\max \quad Z=-Z^*=-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{s}c_{ij}x_{ij}$$

约束于

$$\sum_{j=1}^{s}x_{ij}\leqslant V_i(i=1, 2, \cdots\cdots, N)$$

$$\sum_{i=1}^{N}x_{ij}\geqslant M_j(j=1, 2, \cdots\cdots, s)$$

$$x_{ij}\geqslant 0\ (i=1, 2, \cdots\cdots, N;\ j=1, 2, \cdots\cdots, s)$$

然后引入松弛变量或人造变量，将不等式约束方程变为等式约束方程，应用单纯形法解此线性规划，求得最优水量调配量x_{ij}。

第八章 网状系统分析

第一节 概 述

网状系统分析或网络分析，就是用一种叫做网络的图形作为数学模型来描述系统，以求解系统中的各种实际问题。许多工程系统的共同特点是它们的组成部分具有网络形式，如公路系统、电话系统传送信息、输电线系统输送电能，货物运输、污水系统排污……等，许多生产组织系统，工程决策问题或生产计划进度等，也可以看作是一个网络（*Network*）或用图（*Graph*）来描述。实践证明，网络技术能为许多工程问题和管理问题提供确切数学模型和求解方法。

网络分析技术是将研究与开发的项目和控制过程，作为一个系统去加以处理，将组成系统的各项任务的各个阶段和先后顺序，通过网络形式对整个系统统筹规划，并分别轻重缓急进行协调，使此资源在系统中得到合理地安排、有效地加以利用，达到以最少的时间和资源消耗来完成整个系统的预期目标，从而获得良好的经济效益。

网络技术的主要基础是图论。图论是应用数学的一个分支，它是一种关系学。这里从系统工程应用的角度来讨论图和网络。

一、若干概念

（一）图

图论所研究的图是一种抽象的几何概念，但它和平面几何中的图又不同，它不按比例尺画，线条和点的位置具有随意性，只要满足一定的关系要求即可。

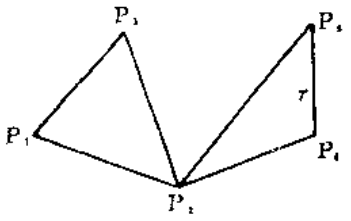


图 8-1 电话线路无向图

在图理论中，图就是由一个表示具体事物的点的集合和表示事物之间联系的线段的集合所构成。这些点称为图的顶点（*vertices*）或节点（*nodes*），线段称为边（*edges*）。例如五个单位P_1，P_2，P_3，P_4，P_5之间有无电话相通，若P_1、P_2之间有电话线相通，则两单位间有一条连线（即边），它表示P_1、P_2之间的特定关系，我们感兴趣的是P_1、P_2之间是否有这种特定关系，如图8-1所示。

又如，用点可表示城镇，用边表示公路；用点表示电子元件，用边表示导线等，都可以用图来描述。

综上所述，所谓图是由点和边组成，记之为$G=(P, L)$。其中，P：代表点集合，L：代表边集合：

$P=\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$

$L=\{(P_1, P_2), (P_2, P_3), (P_1, P_3), (P_2, P_4), (P_4, P_5), (P_2, P_5)\}$

这种类型的图称为无向图。例如，$l_1=(P_1, P_2)$表示可以从P_1打到P_2，也可以从P_2打到P_1。如果电话联系是单向的，若P_1只能打到P_2，P_2只能打到P_3……等等，如图8-2所示，其方向用箭头所示。

如果某一个点是一条边的两个端点中的一个，我们把这条边与这个端点的关系称为关联，或者说这条边是与这个点相关联的。例如，图8-3中l_4，l_6和l_7与P_4点相关的，l_1，l_2，l_6和l_8与P_3点相关联的。

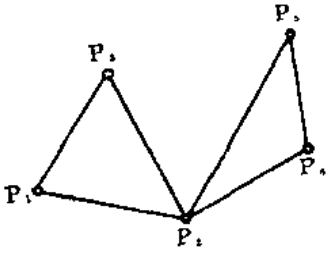


图 8-2　电话线路有向图

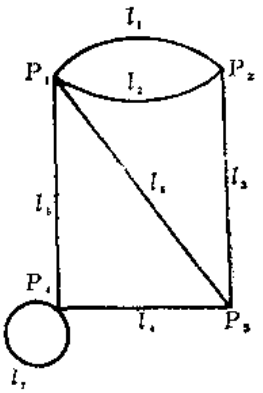


图 8-3　多重边图

若边l的两个端点相同，则称之为环。如图8-3中$l_7=(P_4, P_4)$即为一个环。若两个点之间多于一条边，称之为多重边，含多重边的图称为多重图。图8-3中，点P_1和P_2之间有两条边，即为多重边。

无环、无多重边的图称为简单图。图8-2就是一个简单图。

（二）连通图

若图G的一个点和边的交替序列$\{P_{i_1}, l_{i_1}, P_{i_2}, l_{i_2}\cdots\cdots P_{i_{k-1}}, l_{i_k}\}$满足$e_{i_t}=[P_{i_t}, P_{i_{t+1}}]$（$t=1, 2, \cdots\cdots, k-1$）则称这个点边序列为一条从$P_{i_1}$到$P_{i_k}$的链，为简便起见，以后就记为$\{P_{i_1}, P_{i_2}\cdots\cdots P_{i_k}\}$。

链$\{P_{i_1}, P_{i_2}, \cdots\cdots, P_{i_k}\}$中，若$P_{i_1}=P_{i_k}$，则称之为圈。圈实际上是闭链。如果在开链中，每个顶点只经过一次，这样的开链称为通路（$path$）。例如，在图8-4中，$P_4l_3P_3l_4P_2l_8P_4l_2P_2l_7P_5$是一条链；$P_3l_3P_4l_8P_2l_5P_1l_1P_2$是一条通路；$P_5l_4P_3l_6P_2l_7P_5l_8P_4l_1P_5$是一条闭链。

如果对图G中每一对不同的顶点P_i，P_j都有一条（P_i，P_j）通路，则称G为连通图（$Connected\ Path$）。

起点与终点重合的通路叫做回路（$Circuit$）。

二、树

树（Tree）是图论中的一个重要概念，图形结构象一棵树。树是不含圈的连通图。

例如，设有人要去A、B、C三个城市。去三城市可供选择的所有可能的路线共六条，可以用一棵树状来表示，如图8-5。

又如，某工厂的组织机构如图8-6所示。该工厂的组织机构图就是一棵树，如图8-7所示。

以上两例均表现为无圈的连通图。由结点连线构成，两结点之间的边称为树枝，全图称为树。树的有关性质为：

（1）在树中，任意两点之间必有一条且仅有一条链。

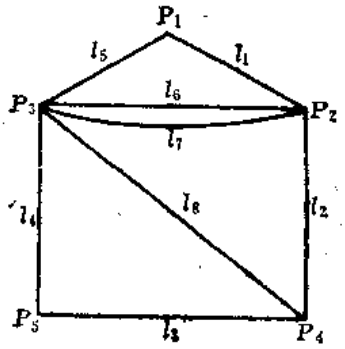


图 8-4 连通图

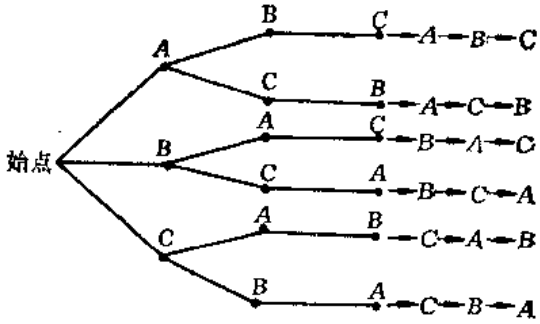


图 8-5 城市路线树

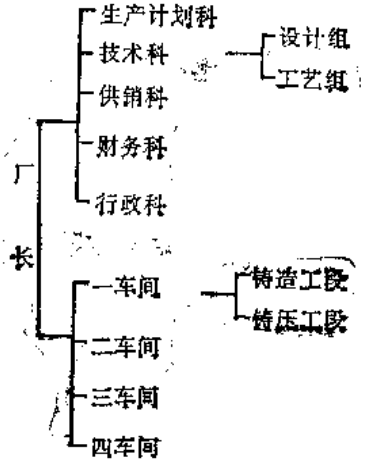


图 8-6 组织机构图

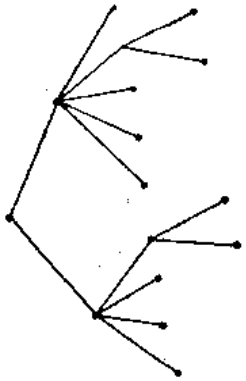


图 8-7 组织机构树

（2）在树中去掉任一条边，则树成为不连通图。

（3）在树中不相邻的两个顶点间添上一条边，恰好得到一个圈。

树的定义：如果图$G=(P, L)$的部分图$T=(P, L')$是树，则称T为G的一个部分树。例如，图8-8（b）是G图（图8-8（a））的一个部分树。

若$T=(P, L')$是$G=(P, L)$的一个部分树，则G中属于T的边称为树T内的边，其余的边称为树T外的边。

若图G有部分树，那么G必定是连通图。反之，结论也成立。即若图G是连通图，则G必有部分树。

设G是一个连通图，对它的每一边$L_{ij}=(P_i, P_j)$赋以一个实数$W_{ij}=W(L_{ij})$，我们就称G为赋权图，如图8-9所示。赋权图的边不仅表示图中各点之间的关联关系，而且

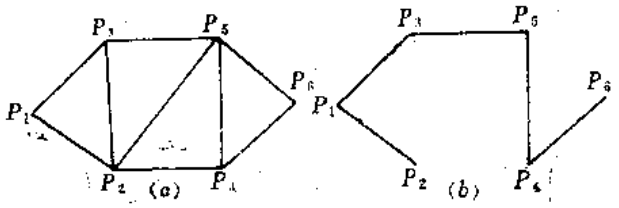


图 8-8 部分树图

同时表示出各点之间的数量关系。边上的数字表示该边上的权。在实际问题中，它可以代表距离、运费、造价（此时要求$W_{ij}>0$）等。赋权图被广泛应用在解决工程技术及科学管理等各个领域的最优化问题。

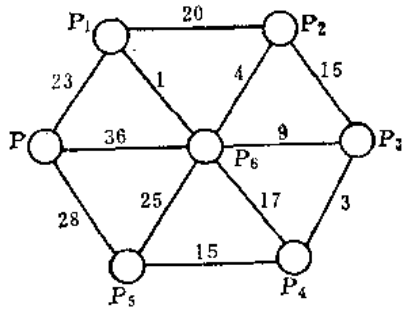


图 8-9 赋权图

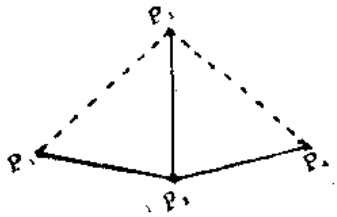


图 8-10 破圈法求最优树

如果赋权图G的一棵树T，其诸边权之和不大于或小于所有其它任一树的边权之和，则称T为G的一棵最小树，或最优树（*Optimal tree*）。

有许多实际问题可归结为寻求连通赋权图的最优树问题。例如，在若干城市之间建造连接这些城市的铁路网、输电网或通信网等。已知城市P_i和P_j间的直通线路的造价为$w_{ij}=w(L_{ij})$，其中$L_{ij}=(P_i, P_j)$，要求给出一个总造价为最小的设计方案。又例如，一个城市中，对若干新建居民点供应自来水和煤气，已测知连接各点间的直通管道的造价，要求给出一个总造价最小的铺设方案……等等，均属此类问题。

怎样求最优树，一般有破圈法与加边法两种：

（1）破圈法。“任取一个圈，去掉圈上最长的一条边”，反复进行到图G上无圈为止，这时，剩下的边组成的图T，就是所要找的最优树；当一个圈上同时有两条边为最长时，也只去掉其中一条，其余保留，否则可能破坏T的连通性。例如，图8-10中实线表示一个树T，虚线表示T外的边，在圈$\{P_1, P_2, P_3, P_1\}$中，T外的边$[P_1, P_3]$的权最大，而在圈$\{P_2, P_3, P_4, P_2\}$中，T外的边$[P_3, P_4]$的权最大，因此，实线所表示的树是最优树。

（2）加边法。加边法则是一开始就先把图中所有的边统统去掉，只留下孤立的顶点，然后逐步的把边由短到长地加上去，但每次加的时候，要保持无圈性，在加了$(n-1)$条边之后，就得到要求的最优树了。

另一种加边法的形式，它可以从任意顶点开始：

1）任意地选一个顶点，并且随即把它同最近的（距离最近的）一个相异的顶点连接起来；

2）识别跟一个已连接顶点最靠近的未连接点，并且随即把两个顶点连接起来。反复这样进行，直至所有顶点已被连接完为止。

【例 8-1】 如图8-9所示的赋权图，求最优树。

解：任意地挑选顶点P_2来开始加边，最近P_2的未连接顶点是P_6，加P_2P_6线；

最接近(P_2, P_6)的未连接点P_1（最接近P_6），加P_1P_6线；

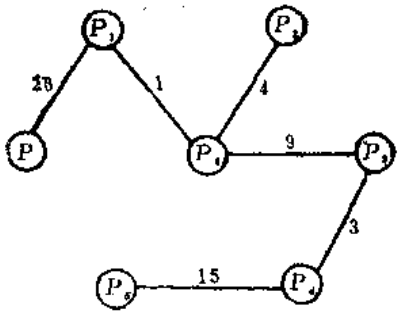


图 8-11 加边法求最优树

最接近(P_2, P_6, P_1, P_3)的未连接点P_4（最接近P_3），加P_3P_4线；

最接近（P_2, P_6, P_1, P_3, P_4）的未连接点P_5（最近P_4），加P_5P_4线；

唯一剩下的未连接点是P，它最接近P_1，连接PP_1线。

至此，所有顶点都得到连接，且是无圈的，如图8-11所示。所以，求得了最优树，其赋权值为55。还可验证，不管从哪一个顶点开始，所得结果一样。

破圈法与加边法各有优缺点。一般网络中的圈较少时，用破圈法较方便；圈很多时，用加边法较方便。另外破圈法比较简单，易于普及，而加边法比较系统，易于编成程序在计算机上实现。

第二节 最短路程问题

一、最短路程问题

在图$G=[P, L]$中，如果每一弧(P_i, P_j)上有一个长度$l(P_i, P_j)$。设P_i, P_j是P中任意两个顶点。$L(P)=\{P_i\cdots\cdots P_j\}$是G中从$P_i$到$P_j$的一条路，我们定义这条路的长度是路上所有弧的长度的总和，记作$L(P)$.

所谓最短路程(*Shortest Path*)问题是要求从某一固定点（例如说起点P_0）到另一固定点（例如说终点P_n）的路程，使其长度是所有从P_0到P_n的路中最短的，并称之为从P_0到P_n的最短路。也就是说，网络中各支线的长度均为已知，在连接某一个固定点至另一固定点的各条路中，选择一条路线使其路程最短。即：

$$L(P)=\sum_{(i,j)\in P} l(i, j) \qquad (8-1)$$

为最短。

式中 $L(P)$——从某一个固定点到另一个固定点的总路程；

$l(i, j)$——为弧(i, j)上的权，应是$\geqslant 0$的。

在网络中，结点i与j可以理解为空间位置，也可以理解为时间座标，或者其他意义下的事件与活动；弧(i, j)上的权可以理解为空间距离，也可以理解为时间间隔，或者活动的经费、能耗等。也就是说，网络最短的实际意义是广泛的，可以是空间距离的“最短路”，也可以是时间概念上的“最短路”（总时间为最少），或者是一系列活动的总经费或总能耗为最少。

【例 8-2】 从油田铺设管道，把原油运到原油加工厂，要求管道必须沿图8-12所示给定的道路铺设。设图中的P_1点为油田，P_8为原油加工厂，每边的数字表示这条道路的长度，寻求使管道总长最短的铺设方案。

显然，满足条件的铺设方案是很多的。例如第一方案沿$\{P_1, P_2, P_3, P_6, P_8\}$（第一方案），或第二方案沿$\{P_1, P_2, P_5, P_6, P_8\}$，或第三方案沿$\{P_1, P_4, P_7, P_8,$

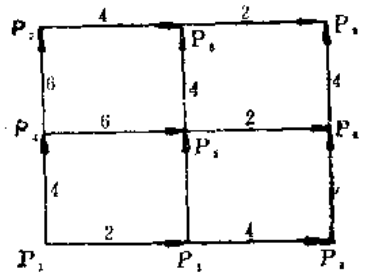


图 8-12　油田管路铺设图

P_9}……等等。不同的方案，管道长度是不同的。例如按第一方案铺设，管道长为 2 + 4 + 4 + 4 =14单位，按第二方案铺设为 2 + 4 + 4 + 2 =12单位，按第三方案铺设 4 + 6 + 4 + 2 =16单位等等。若定义一条路的长是这条路上各边长之和，从P_1到P_9最短路方案即可寻得。

图中弧长是非负的。为了求出从P_1到P_9的最短路，系采取从P_1出发逐步向外探寻的方法。

从P_1到P_2或P_4，前者需要0+2=2单位，后者需要0+4=4单位，以P_1P_2路程最短。

从P_1出发路经P_2至P_3或P_5，前者需要2+4= 6 单位，后者需要 2 + 4 = 6 单位，而从P_1至P_4需要 4 单位，以 4 单位为最短。

从P_1经P_4至P_7或P_5，需要4+6=10单位；从P_1经P_2、P_5至P_6或P_8，需要6+2= 8 单位或6+4=10单位，以 8 单位最小。

再由P_1经P_2、P_5、P_6至P_9，或由P_1经P_2，P_5，P_8至P_9，或由P_1经P_4、P_7、P_8至P_9的路径分别为8+4=12单位，或10+ 2 =12单位，或4+6+4+2=16单位。由此可知，最短路径有两条，即$P_1\rightarrow P_2\rightarrow P_5\rightarrow P_6\rightarrow P_9$与$P_1\rightarrow P_2\rightarrow P_5\rightarrow P_8\rightarrow P_9$，各条路线总路程值为12单位。

二、最短路算法

这里介绍如何求最短路的方法，大家看到，最后求到的不仅是从P_0到P_n的最短路，而且求出了从P_0到其它所有顶点的最短路。

对于网络起点0即$i=1$，令：

$$L(1)=0 \qquad (8-2)$$

对于其余各结点：

$$L(j)=\min\{L(i)+l(i,\ j)\} \qquad (8-3)$$

$$1\leqslant i<j \qquad (j=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$$

这就是说，若结点j只有一条弧进入，则该结点j的最短距离等于弧的箭尾结点i的最短距离加上该弧的权$l(i,\ j)$；若结点j有多条弧进入，则对每一条弧都作同样的计算之后，取其中的最小值作为结点j的最短距离。

计算时按照公式（8-2）与公式（8-3）从网络的起点逐点计算到网络的终点，计算顺序是从左到右正向前进，将各计算结果分别填入结点附近的三角框中，并且将实现最短距离的箭尾结点写在三角框附近，各个结点的三角框中的数值就是由网络的起点到终点的最短距离，现举下例说明。

【例 8-3】 某网络从D到T，弧旁数字表示该弧的权，求D到T的最短路，如图8-13所示。

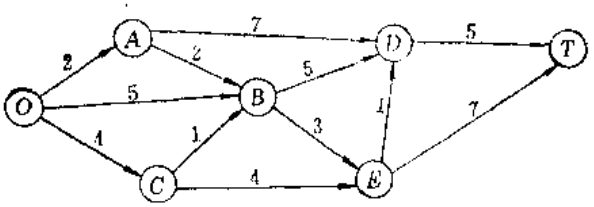


图 8-13 网络原图

计算步骤：

（1）将原网络图结点均用数码标上，如图8-14。

（2）令$L(1)=0$，即原O点等于零。

（3）按公式（8-3）逐点计算：

$$L(2)=L(1)+l(1,\ 2)=0+2=2$$

如图8-15所示，即图8-13的OA线，将2填入节点上三角框内。

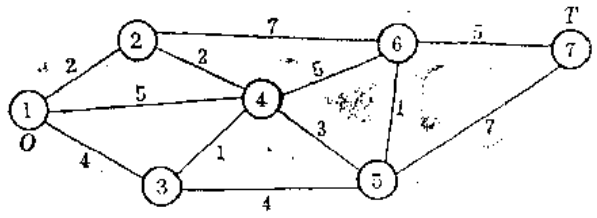


图 8-14 网络结点数码图

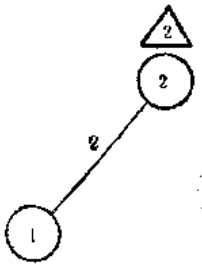


图 8-15 计算图示一

$$L(3)=L(1)+l(1,\ 3)=0+4=4$$

如图8-16所示，即图8-13的OC线。

$$L(4)=\min\{L(2)+l(2,\ 4),\ L(1)+l(1,\ 4),\ L(3)+l(3,\ 4)\}$$
$$=\min\{2+2,\ 0+5,\ 4+1\}=4$$

如图8-17所示即图8-13为OA线→AB线。

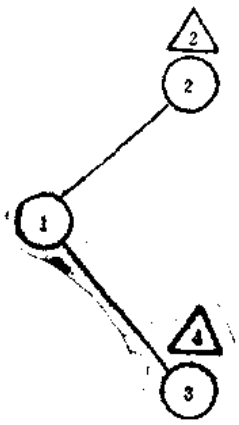


图 8-16 计算图示二

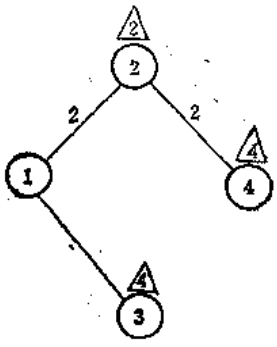


图 8-17 计算图示三

$$L(5)=\min\{L(4)+l(4,5),\ L(3)+l(3,\ 5)\}=\min\{4+3,\ 4+4\}=7$$

如图8-18所示，即图8-13的OA线→AB线→BE线。

$$L(6)=\min\{L(2)+l(2,\ 6),\ L(4)+l(4,\ 6),\ L(5)+l(5,\ 6)\}$$
$$=\min\{2+7,\ 4+5,\ 7+1\}=8$$

如图8-19所示，即图8-13的OA线→AB线→BE线→ED线路。

$$L(7)=\min\{L(6)+l(6,7),\ L(5)+l(5,\ 7)\}=\min\{8+5,\ 7+7\}$$

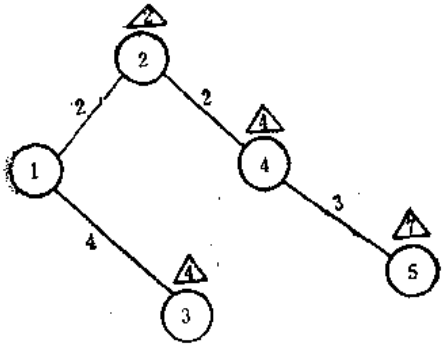


图 8-18 计算图示四

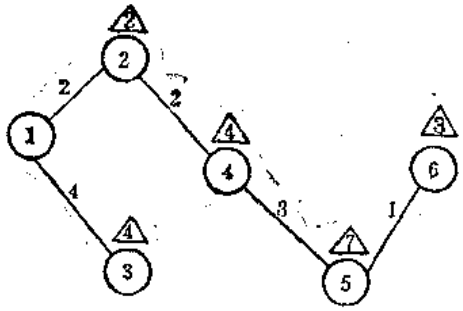


图 8-19 计算图示五

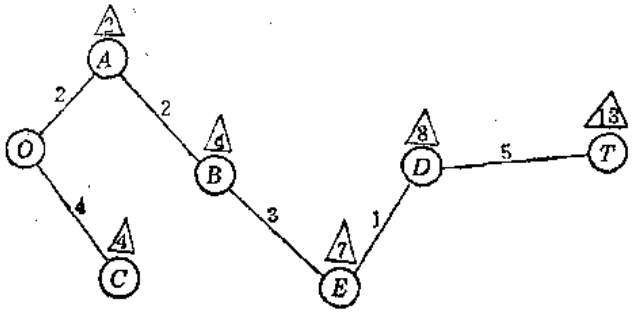


图 8-20 最短路径图

$$=\min\{13,\ 14\}=13$$

最后一点计算值即为所求的最短距离。最短线即为图8-13网络OA线→AB线→BE线→ED线→DT线路，如图8-20所示。

第三节 最大流量问题

许多系统包含了流量问题。例如，控制系统中的信息流，供水系统中的水流，公路系统中车辆流，金融系统中有现金流等等。

一、基本概念

（一）网络与流

对一个有向图$G=(P,\ L)$，在P中指定了一点，称为发点或称源（记为O），和另一点，称为收点或称汇（记为T），其余的点叫中间点。对于每一个弧$(P_i,\ P_j)\in L$，对应有一个$C(P_i,\ P_j)\geqslant 0$（或简写为C_{ij}），称为弧的容量。通常就把这样的G叫做一个网络。记作$G=(P,\ L,\ C)$。

所谓网络上的流，是指定义在弧集合L上的一个函数$f=\{f(P_i,\ P_j)\}$，并称$f(P_i,\ P_j)$为弧$(P_i,\ P_j)$上的流量，简记为f_{ij}。

（二）可行流与最大流

对于流有两个明显的要求：一是每个弧上的流量不能超过该弧的最大通过能力（即弧的容量）；二是中间点的流量为零，即流出量等于流入量。因为对于每个点，运出这点的产品总量与运进这点产品总量之差，是这点的净输出量，我们简称这一点的流量；由于中

间点只起转运作用，所以中间点的流量必为零。显然源点的净流出量和汇点净流入量必相等。因此有：

（1）满足下列条件的流 f 称为可行流：

1）容量限制条件：对每一弧$(P_i, P_j)\in L$：

$$0 \leqslant f_{ij} \leqslant C_{ij}$$

2）平衡条件：对于中间点：流出量＝流入量，即对每个i($i\neq$发点O，终点T)有：

$$\sum_{(P_i, P_j)\in L} f_{ij} - \sum_{(P_j, P_i)\in L} f_{ji} = 0$$

对于发点O为：

$$\sum_{(P_0, P_j)\in L} f_{0j} - \sum_{(P_j, P_0)\in L} f_{j0} = P(f)$$

对于收(汇)点T为：

$$\sum_{(P_t, P_j)\in L} f_{tj} - \sum_{(P_j, P_t)\in L} f_{jt} = -P(f)$$

式中$P(f)$称为这个可行流的流量，发源点的净输出量（或收点的净输入量）。当弧流量$f_{ij}=0$时，可行流为零流，即$P(f)=0$。

（2）最大流量问题(*The Maximum Flow Problem*)。这是求一个流$\{f_{ij}\}$使其流量$P(f)$达到最大，并且满足：

$$0 \leqslant f_{ij} \leqslant C_{ij} \qquad (P_i, P_j)\in L \tag{8-4}$$

$$\Sigma f_{ij} - \Sigma f_{ji} = \begin{cases} P(f) & (i=O) \\ 0 & (i\neq O,T) \\ -P(f) & (i=T) \end{cases} \tag{8-5}$$

即求一组$\{f_{ij}\}$，在满足公式(8-4)和公式(8-5)条件下使$P(f)$达到极大。

(三)增广链

可行流$f=\{f_{ij}\}$，当$f_{ij}=C_{ij}$的弧称为饱和弧，当$f_{ij}<C_{ij}$的弧称为非饱和弧。当$f_{ij}=0$的弧称为零流弧，$f_{ij}>0$的弧称为非零流弧。

若$L(P)$是网络中从发点O到收点T的一条链，我们定义链的方向从O到T，则链上的弧被分为两类：一类是弧的方向与链的方向一致，叫作前向弧或顺向弧。另一类弧与链的方向相反，称为后向弧或逆向弧。

当顺向弧上$0\leqslant f_{ij}<C_{ij}$，即顺向弧的全体中每一弧是非饱和弧。

当逆向弧上$0<f_{ij}\leqslant C_{ij}$，即逆向弧的全体中每一弧是非零流弧。

定义：设f是一个可行流，$L(P)$是从O到T的一条链，若$L(P)$满足上述条件则称之为(关于可行流f的)一条增广链。

二、寻求网络最大流

下面用一实例来说明寻求最大流量的一种方法。

【例 8-4】 某网络系统如图8-21所示，系统中各支线的流向和流量均为已知。且仅有单一源和单一汇。源点用O表示，汇点用T表示，各支线最大容量用数字表示，流向用箭头表示。求O到T的最大流量。

若该网络表示公路系统。其中跟每一站与公路相邻接的数字，表示该公路在离开该站方向上的限额。如由站A至站B只允许每天载客行车一次，但由站B至站A还另外允许一次。根据这些限制。考虑各种途径的组合，以求得每天行车次数达到极大的(或几种)组合。

计算步骤：

(1)将原始网络绘成图，如图8-21所示，并列成表如表8-1。

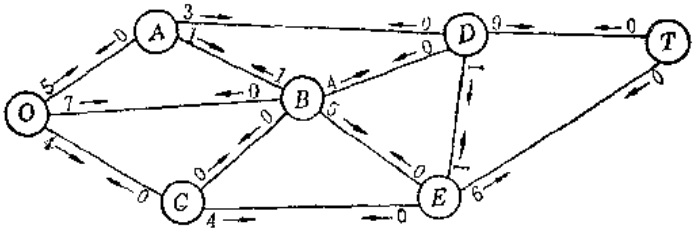


图 8-21 某网络系统图

表 8-1 原 始 情 况

i \ j	O	A	B	C	D	E	T
O	0	5→	7→	4→			
A	←0	0	1→		3→		
B	←0	←1	0	←0	4→	5→	
C	←0		←0	0		4→	
D		←0	←0		0	←1	9→
E			←0	←0	1→	0	6→
T					0→	0→	0

(2)任选一条通路从O—T。

(3)在通路支线中，找出最小容量用C^*表示。

(4)迭代计算：在所选通路上，顺向减C^*，逆向加C^*，按此循环计算。

迭代1：选$O\rightarrow B\rightarrow E\rightarrow T$路线，沿线最小容量$C^*=5$，计算网络容量变化，见图8-22，表8-2。

表 8-2 迭 代 1 的 情 况

i \ j	O	A	B	C	D	E	T
O	0	5→	2→	4→			
A	0	0	1→		3→		
B	←5	←1	0	←0	4→	0→	
C	←0		0→	0		4→	
D		←0	←0		0	←1	9→
E			5→	←0	1→	0	1→
T					←3	←5	0

迭代2：选$O\rightarrow A\rightarrow D\rightarrow T$路线，沿线最小容量$C^*=3$，计算网络容量变化见图8-23，表8-3。

迭代3：选$O\rightarrow A\rightarrow B\rightarrow D\rightarrow T$路线，该路线最小容量$C^*=1$。

迭代4：选 $O\rightarrow B\rightarrow D\rightarrow T$ 路线，该线路最小容量 $C^*=2$，计算得网络图为8-24，表8-4。

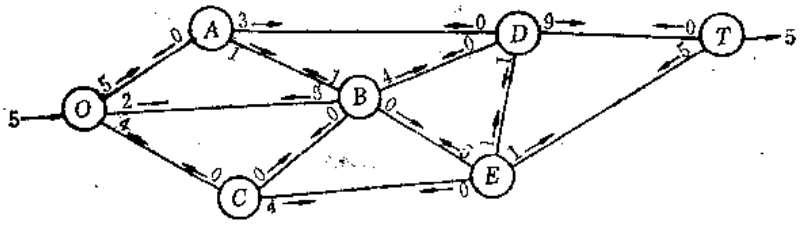


图 8-22 网络容量变化一

表 8-3 迭 代 2 的 情 况

i \ j	O	A	B	C	D	E	T
O	0	2→	2→	4→			
A	←3		1→		0→		
B	←5	←1	0	←0	4→	←0	
C	←0	←1	0→	0		4→	
D		←3	←0		0	←1	6→
E			←5	←0	1→	0	1→
T					←3	←5	

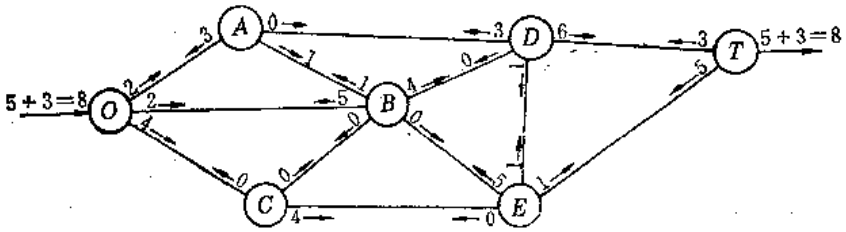


图 8-23 网络容量变化二

表 8-4 迭 代 3 及 迭 代 4 的 情 况

i \ j	O	A	B	C	D	E	T
O	0	1→	0→	4→			
A	←4	0	0→		0→		
B	←7	←2	0	←0	1→	←0	
C	←0		←0	0		4→	
D		←3	←3		0	←1	3→
E			←5	←0	←1	0	1→
T					←6	←5	0

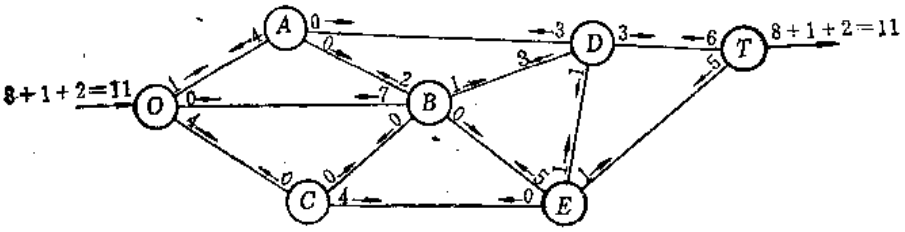


图 8-24 网络容量变化三

迭代5：选$O\rightarrow C\rightarrow E\rightarrow D\rightarrow T$线路，其最小容量$C^*=1$。

迭代6：选$O\rightarrow C\rightarrow E\rightarrow T$线路，其最小容量$C^*=1$，计算所得网络图8-25，表8-5。

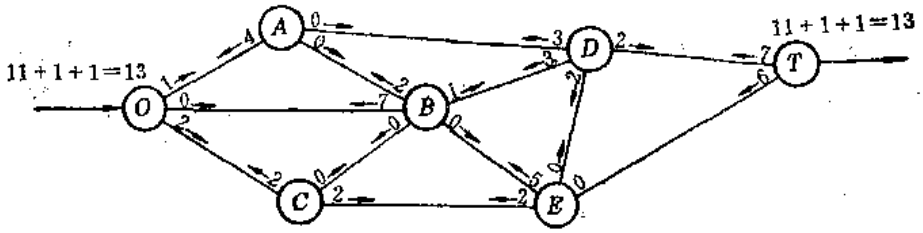


图 8-25 网络容量变化四

表 8-5 迭 代 5 及 迭 代 6 的 情 况

i \ j	0	A	B	C	D	E	T
O	0	1→	0→	2→			
A	←4	0	0→		0→		
B	←7	←2	0	←0	1→	0	
C	←2		←0	0		2→	
D		←3	←3		0	←2	2→
E			←5	←2	←0	0	0
T					←7	←6	0

迭代7：选$O\rightarrow C\rightarrow E\rightarrow B\rightarrow D\rightarrow T$路线，其最小容量$C^*=1$，计算网络图8-26，表8-6。

表 8-6 迭 代 7 的 情 况

i \ j	O	A	B	C	D	E	T
O	0	1→	0→	1→			
A	←4	0	0→		0→		
B	←7	←2	0	←0	0→	1→	
C	←3		0→	0		1→	
D		←3	←4		0	←2	1→
E			←4	←3	0→	0	0→
T					←8	←6	0

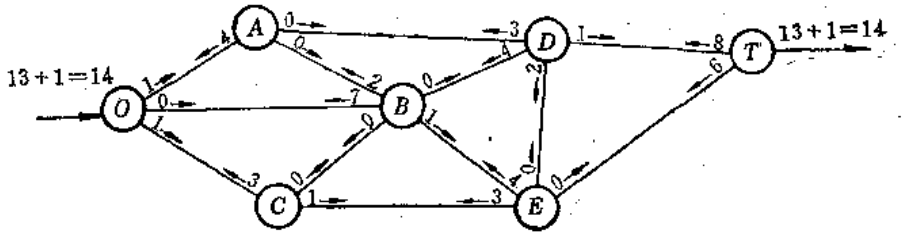


图 8-26 网络最大流量图

计算至此，发现从O到T已无正向流通容量，说明这就是该网络图的最大流通能力。

（5）最大流量计算：可用两种不同方法计算：

1）最大流量$C=C_1^*+C_2^*+\cdots+C_3^*=\sum_{i=1}^{*}C_i^*$

$=5+3+1+2+1+1+1=14$

2）比较原容量和最后剩余容量可得其流量。以源点为例，由图 8-19 源点O知原容量$=5+7+4=16$，剩余容量由图8-24知，两者差值为14。

也就是说，该网络图如图限制下的最大流量为14。

三、最大流—最小割定理

最大流—最小割定理是由福特(Ford)和付克逊(Fulkerson)于1956年提出的。这个定理是图论的重要核心。关于图的许多结果，在适当选择网络之后，应用这个定理往往能够容易地获得解决。

首先介绍网络中的一个重要概念——割集。设S为连通图G的一个边集。如果：

（1）在G中去掉S中的全部边后，图就被分割为不连通的两部份；

（2）加上S中的任一条边，图就将恢复为连通的；则边集S称为图G的“割集”。

图8-27中，令$W=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$\bar{W}=\{8\}$，边集$S=\{(6,8),(7,8)\}$是连结W与$\bar{W}$的所有边的集合，显然边集S即为割集。

割集的直观意义就是这些弧是从发点到收点的必经之道，如果把割集从网络中删掉的话，在剩下的图中，从发点到收点就没有路相通，如把上面的割集S从图8-27中去掉，余下的图仍是连通的。

接着说明最小割集：最小割集是指割集中所有各边的容量之和为最小。

然后，即可了解最大流—最小割定理的涵义：在一个给定的网络中，结点O与T之间的最大流量等于其割集的最小容量，即：

$$\max f(O,T)=\min C(O,T) \tag{8-6}$$

例如，如图8-28所示网络，求从结点O到结点T的最大流量。

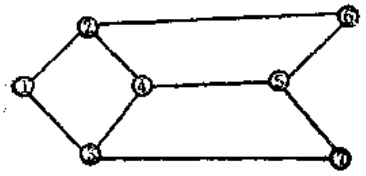


图 8-27　S割集图

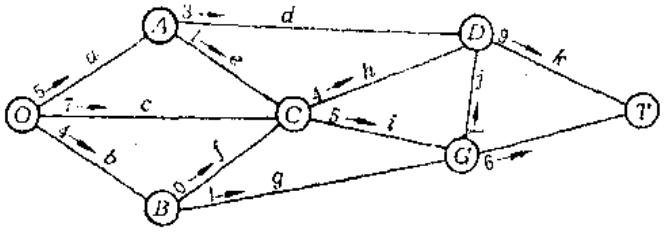


图 8-28　网络原图

当经验不足时，不防列表计算分析。将网络图的全部结点以点集$\bar{W}$和点集W表示。S是连结$\bar{W}$与W的所有边的集合，显然边集S即为割集。计算每一割集的容量结果见表8-7。

根据最大流—最小割定理函义，应该是最大流量等于其割集的最小容量：

$$\max f(O,\ T)=\min C(O,\ T)=14$$

该结论与上节结论一致。有经验的同志很快找出最小割集的容量。

该法简单易求。但只能得到最大流量值，却不能知道各支线的流量分配。

表 8-7

编　号	点　集　W	点　焦　$\overline{W}$	割　集　S	S 的容量
1	O	A, B, C, D, E, T	a, b, c	16
2	O, A	B, C, D, E, T	b, c, e, d	15
3	O, B	A, C, D, E, T	a, c, f, g	16
4	O, A, B	C, P, E, T	d, e, c, f, g	15
5	O, A, B, C	D, E, T	d, h, i, g	16
6	O, A, B, C, D	E, T	h, j, i, g	19
7	O, A, B, C, E	D, T	d, h, j, l	14
8	O, A, B, C, D, E	T	k, l	15

第四节　最小费用流问题

上一节讨论了寻求网络中的最大流问题。在实际生活中，涉及“流”的问题时，人们考虑的还不只是流量，而且还有“费用”的因素。这就产生了如何确定一种网络流，它既要满足输送一定数量的流量的要求，又要使总的费用达到最小的问题，即最小费用流的问题。

一、最小费用最大流问题

网络$G=(P, L, C)$，每一弧$(P_i, P_j)\in L$上，除了已给容量C_{ij}外，还给了一个单位流量的费用$b(P_i, P_j)\geqslant 0$(简记为b_{ij})。所谓最小费用最大流问题就是要求一个最大流f，使流的总输送费用

$$b(f)=\sum_{(P_i, P_j)\in L} b_{ij}f_{ij}$$

取极小值。

式中　$b(f)$——流的总输送费用；

b_{ij}——单位流量的费用；

f_{ij}——可行流。

二、最小费用最大流问题的解法

(一)*增广回路法*

(1)定义：设网络图G中有一回路C。如果确定了该回路方向，则回路中弧方向与回路方向一致时，这些弧记为C^+，否则记为C^-。在满足下述条件时，称回路C是关于可行流$f=\{f_{ij}\}$的增广回路。

$$C_{ij}-f_{ij}>0 \qquad (i, j)\in C^+ \tag{8-7}$$

$$f_{ij}-l_{ij}>0 \qquad (i, j)\in C^- \tag{8-8}$$

式中　C_{ij}——弧(支线)上容许最大流量；

f_{ij}——弧(支线)上可行(实际)流量；

l_{ij}——弧(支线)上容许最小流量。

式(8-7)表示弧(支线)可增加流量；式(8-8)表示弧(支线)可减少流量。

（2）调整流量。调整回路C上的弧的流量对于增广回路可按下式调整流量：

$$\Delta=\min\{\min_{c^+}\{C_{ij}-f_{ij}\},\ \min_{c^-}\{f_{ij}-l_{ij}\}\} \tag{8-9}$$

或

$$\Delta=\min\{\Delta_1,\ \Delta_2\}$$

$$\Delta_1=\min\{C_{ij}-f_{ij}\}$$

$$\Delta_2=\min\{f_{ij}-l_{ij}\}$$

当增广回路无后向弧时，则令$\Delta_2=+\infty$。则回路中调整后的流量为：

$$f'_{i,j}=f_{i,j}+\Delta \qquad (i,\ j)\in C^+ \tag{8-10}$$

$$f'_{i,j}=f_{i,j}-\Delta \qquad (i,\ j)\in C^- \tag{8-11}$$

不在回路C上所有其余的弧，其流量在调整前后保持不变。

按这样调整的目的是：希望属于C^+的弧（支线），其流量从原来$f_{ij}<C_{ij}$的状态，使f_{ij}尽可能接近于或等于C_{ij}的状态，而属于C^-的弧（支线）使其f'_{ij}尽可能接近于或等于零，且回路C上费用最小。下面比较调整前后的可行流f与f'的费用。

令b_{ij}代表$(i,\ j)$弧（支线）上的流量费用单价，则流量调整前后回路中费用之差为：

$$b(C)=\Sigma b_{ij}f'_{ij}-\Sigma b_{ij}f_{ij}$$

$$=\Delta(\sum_{c^+}b_{ij}-\sum_{c^-}b_{ij}) \tag{8-12}$$

式中 $b(C)$——表示流量调整前后回路中费用差；

Δ——表示回路中流量调整值，$\Delta>0$；

$\sum_{c^+}b_{ij}-\sum_{c^-}b_{ij}$——称为回路$C$的费用。

在式(8-12)中，若$b(C)>0$，表示调整后费用增大，若$b(C)<0$，表示调整后费用减小，且调整的流量仍为可行流。也就是说，当某一可行流f已是最小费用流，那么回路中必然不存在负费用的增广回路。

由此可得一个可行最小费用流f的充分和必要条件是：

（1）可行性：满足平衡条件及容量限制条件；

（2）最优性：不存在关于f的负费用的增广回路。

因此，一般可通过两个途径解决最小费用流问题：

（1）在计算过程中总是使流f满足可行性条件，同时使流逐步向最优性条件逼近，一旦f满足了最优性条件，即得最小费用流。

（2）在计算过程中总是使流f满足最优性条件，同时使f逐步地向满足可行性条件逼近，一旦满足可行性，即得最小费用流。

【例 8-5】 某网络G，每弧标有(C_{ij},b_{ij})，并设$l_{ij}=0$，$\forall(i,\ j)\in L$，如图8-29所示，求最小费用最大流。

求解步骤：

（1）拟定初始可行流。由最大流—最小割原理可判断出最大流为11，拟定初始可行流f如图8-30所示，但费用不一定最小。其总费用：

$$C^0_{总}=4\times9+1\times2+3\times2+6\times2+1\times7+2\times4=71$$

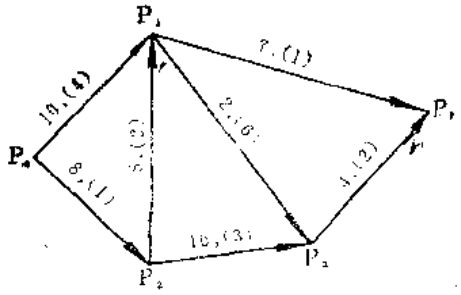


图 8-29　可行流网络原图

无括号数字表示最大流量；有括号数字表示单价流量

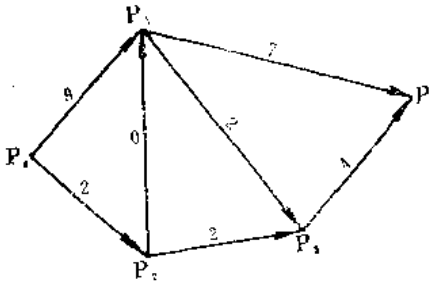


图 8-30　$P_4P_2P_1P_5$回路图

（2）找负费用增广回路　由近及远计算各回路的费用：

1）$P_4P_2P_1P_5$回路，其费用为：

$$\sum_{o^+} b_{ij} - \sum_{o^-} b_{ij} = b_{42} + b_{21} + b_{15} = 1 + 2 - 4 = -1$$

则$P_4P_2P_1P_5$回路为负费用增广回路。然后计算该回路的调整量：

$$\Delta = \min\{\min(C_{ij} - f_{ij}),\ \min(f_{ij} - l_{ij})\}$$
$$= \min\{\min\{(8-2),(5-0)\},\ 9-0\}$$
$$= \min\{5,\ 9\} = 5$$

再计算f'_{ij}：

$$f'_{42} = f_{42} + \Delta = 2 + 5 = 7$$
$$f'_{21} = f_{21} + \Delta = 0 + 5 = 5$$
$$f'_{15} = f_{15} - \Delta = 9 - 5 = 4$$

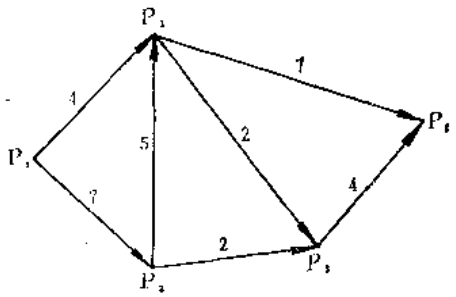


图 8-31　$P_4P_1P_3P_5$流量调整结果图

最后将调整后的流量标于图8-31。其总费用为：

$$C_{总} = 1\times 7 + 2\times 5 + 4\times 4 + 3\times 2 + 6\times 2 + 1\times 7 + 2\times 4 = 66$$

2）在图8-31所示网络中，考察$P_4P_2P_3P_1P_5$回路，其费用为：

$$\sum_{o^+} b_{ij} - \sum_{o^-} b_{ij} = b_{42} + b_{23} - b_{31} - b_{15} = 1 + 3 - 6 - 4 = -6$$

则$P_4P_2P_3P_1P_5$回路为负费用增广回路。然后计算该回路的调整量：

$$\Delta = \min\{\min\{(8-7),\ (10-2)\},\ \min\{(2-0),\ (4-0)\}$$
$$= \min\{1,\ 2\} = 1$$

再计算f'_{ij}：

$$f'_{42} = f_{42} + 1 = 7 + 1 = 8$$
$$f'_{23} = f_{23} + 1 = 2 + 1 = 3$$
$$f'_{31} = f_{31} - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$f'_{15} = f_{15} - 1 = 4 - 1 = 3$$

最后将f'_{ij}标于图8-32上。总费用为：

$$C'_{总} = 1\times 8 + 3\times 3 + 6\times 1 + 2\times 5 + 4\times 3 + 1\times 7 + 2\times 4 = 60$$

3）在图8-32所示网络中，考察$P_4P_3P_1P_5$回路，其费用为

$$\sum_{o^+} b_{ij} - \sum_{o^-} b_{ij} = 3-6-2=-5$$

则$P_1P_3P_4P_2$回路为负费用增广回路。然后计算该回路的调整量：

$$\Delta=\min\{\min\{10-3\},\ \min\{(2-1),\ (5-0)\}=1$$

再计算f'_{ij}：

$$f'_{13}=f_{13}+\Delta=3+1=4$$
$$f'_{34}=f_{34}-\Delta=1-1=0$$
$$f'_{42}=f_{42}-\Delta=5-1=4$$

最后将f'_{ij}标于图8-33上。其总费用：

$$C^1_{总}=1\times 8+3\times 4+2\times 4+4\times 4+4\times 3+1\times 7+2\times 4=55$$

至此，发现网络中已不存在负费用增广回路，计算结束。从上述逐次总费用来看是属递减趋势，最后结果即为网络流中最小费用流。

(二)逆境法

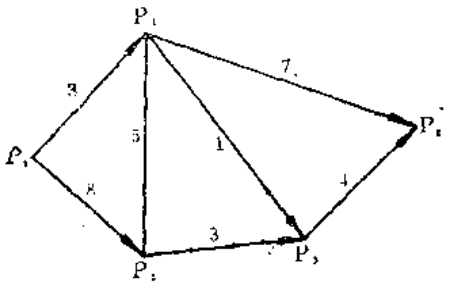


图 8-32 $P_1P_3P_4P_1P_2$流量调整结果图

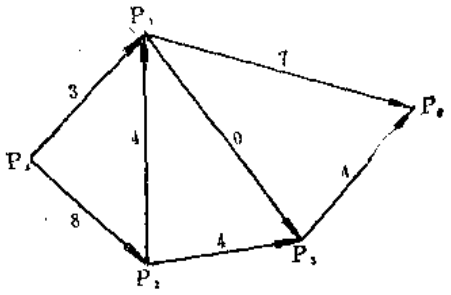


图 8-33 最小费用流图

所谓逆境法(*The Out-of-kilter Algorithm*)是在一个“经济系统”中，系统流量的分配是否已为最优，视系统费用是否最少。若非最优，则应设法调整各点价格或支线流量的分配，使其能达到最优化。其计算步骤为：

(1)将原网络变成封闭网络。亦即连接网络系统中的源和汇，若原网络中并未包括源和汇，此时的源和汇是人为构造的，称之为“人造点”，使原网络变成封闭网络。

(2)标定网络图中各支线状态。一般支线状态可划分为15种，如表8-8所示。

表 8-8　　支　线　状　态

1	2	3	4	5	6
	$X_{ij}<L_{ij}$	$X_{ij}=L_{ij}$	$L_{ij}<X_{ij}<U_{ij}$	$X_{ij}=U_{ij}$	$X_{ij}>U_{ij}$
$\overline{C}_{ij}<0$	*NF*	*NF*	*NF*	*K*	*NR*
$\overline{C}_{ij}=0$	*NF*	*KF*	KF或KR(即KFR)	*KR*	*NR*
$\overline{C}_{ij}>0$	*NF*	*K*	*NR*	*NR*	*NR*

表中所用符号说明：

C_{ij}——从 i 到 j 支线的效益值；

X_{ij}——从 i 到 j 点支线的分配流量，为一变量；

L_{ij}——从 i 到 j 点支线的最小规定容量，为一已知常数值；

U_{ij}——从 i 到 j 点支线的最大规定容量，为一已知常数值；

NF——支线在逆境中可增加顺向流量；

K——为支线在良好状态；

NR——指支线在逆境中可增加逆向流量。

表8-8的物理意义：

第1栏 $\bar{C}_{ij}<0$，说明收入>支出，盈利；

$\bar{C}_{ij}=0$，说明收入与支出平衡，不盈不亏；

$\bar{C}_{ij}>0$，说明收入<支出，亏本。

第2栏 $X_{ij}<L_{ij}$，表示支线流量小于最小流量，该状态下不论$\bar{C}_{ij}<0$或$\bar{C}_{ij}=0$，还是$\bar{C}_{ij}>0$的任何条件，支线均处于逆境，均可增加顺向流量，表中以NF表示。

第3栏 $X_{ij}=L_{ij}$，表示支线流量等于最小流量。又可分以下三种情况：

当$\bar{C}_{ij}<0$为NF，表示支线处于逆境，应增加顺向流至U；

当$\bar{C}_{ij}=0$为KF，表示支线处于良好状态，但仍可增加顺向流至U；

当$\bar{C}_{ij}>0$为K，表示支流处于优良状态。

第4栏 $L_{ij}<X_{ij}<U_{ij}$，表示支线流量大于最小流量，小于最大流量，又可以分为三种情况：

当$\bar{C}_{ij}<0$为NF，表示支线处于逆境，应增加顺向流至U；

当$\bar{C}_{ij}=0$为KF或KR，表示支线处于良好状态，可增加顺向流至U或可增加逆向流至L；

当$\bar{C}_{ij}>0$为NR，表示支线处于逆境，应增加逆向流至L。

第5栏 $X_{ij}=U_{ij}$，表示支线流量等于最大流量，又可分为三种状态：

当$\bar{C}_{ij}<0$为K，表示支线已处于优良状态；

当$\bar{C}_{ij}=0$为KR，表示支线已处于良好状态，但可增加逆向流至L；

当$\bar{C}_{ij}>0$为NR，表示支线处于逆境，应增加逆向流至L。

第6栏 $X_{ij}>U_{ij}$为支线流量超过最大流量，又可分为三种情况：

当$\bar{C}_{ij}<0$为NR，表示支线处于逆境，应增加逆向流，以L为限；

当$\bar{C}_{ij}=0$为NR，表示支线处于逆境，应增加逆向流，以L为限；

当$\bar{C}_{ij}>0$为NR，表示支线处于逆境，应增加逆向流，以L为界。

上述$\bar{C}_{ij}=C_{ij}+P_i-P_j$计算而得。式中$C_{ij}$表示 i 到 j 支线的运输单价，一般在原始网络图中已标明；P_i为与 i 点结合的价格；P_j为与 j 点结合的价格。一般原始情况$P_i=P_j=0$。根据计算得的$\bar{C}_{ij}$与X_{ij}、L_{ij}和U_{ij}关系，按照状态表示标定各支线的状态。在标定时，首先要确定已标定点。为此，可任选一处于逆境中，即N开头的支线作为起始支线，若该支线能增加顺向流，则源认为已标定点，该点为起始点；若该支线能增加逆向流，则汇认为已标定点，该点为起始点。然后选择被标定点。

（3）标定环道上各点。标定各点的原则有：

规则1：被标定的点必须与一已标定的点相连。当支线可能增加顺向流量时，则支线的汇与已标定的点相联；当支线可能增加逆向流量时，则支线的源与已被标定点相联。

在标定开始时，可任选一在逆境中的支线：

1）若该支线能增加顺向流量，则应标定其汇；

2）若该支线能增加逆向流量，则应标定其源。

在探索中，有时似无法再继续标定一环道，但某些支线仍在逆境之中，在此情况下，最优解尚未得到，变成无突破情况。为此，必须设法调整所有未标定点的价格P_i。按调整后的P_i值计算$\bar{C}_{ij}$值，以改变其中一条或数条支线的状态，使之可能增加其顺向或逆向流量。在无突破情况下，调整各点价格需遵守如下规则。

规则2：

1）按下列条件计算各支线中$\bar{C}_{ij}$的最小绝对值$|\bar{C}_{ij}|$。

（a）支线连接已标定点和一未标定点；

（b）该支线必须满足下列条件之一：

a）若$\bar{C}_{ij}>0$，$X\leqslant U$，支线的源已被标定；

b）若$\bar{C}_{ij}<0$，$X\geqslant L$，则支线的源未被标定。

但是，当任一支线是处于$\bar{C}_{ij}=0$，或$\bar{C}_{ij}>0$且$X>U$或$\bar{C}_{ij}<0$且$X<L$者，均不能满足此条件。

2）按上述原则对未标定点进行调整，其步骤为：

（a）取$|\bar{C}_{ij}|$最小值加在所有未标定点上。所有已标点价格保持不变。

（b）对调整价格后的各点计算$\bar{C}_{ij}$，按$\bar{C}_{ij}$重新确定支线的新状态再进行标定环道各点。

规则3：若点l已被标定(k_l)并与m点连接。按规则1标定m点，其符号表示为$[l^+$或$l^-,\ k_m]$。

其中 l^+——表示增加顺向流；

l^-——表示增加逆向流；

k_m——表示m点增加的流量值，其值等于$X_{ij}-L_{ij}$或$U_{ij}-X_{ij}$（L_{ij}系表8-8中最小值，U_{ij}系表8-8中最大流量值）；

k_l——表示l点的标定值。

规则3a：在开始标定时，m点将不能连接一已标定的点（因各点均未标定）。标号应为$[h^+$或$h^-,\ k_m]$。

其中 h——表示未标定点；

$[h^+,\ k_m]$——表示任一在逆境支线上一点h与m点相联，该支线增加顺向流，增加值为k_m；

$[h^-,\ k_m]$——表示任一在逆境支线上一点h与m点相联，该支线增加逆向流，增加值为k_m。

而k_m值为

$$X_{ij}-L_{ij} \qquad (8\text{-}13)$$

或

$$U_{ij}-X_{ij} \qquad (8\text{-}14)$$

至于取L或U则按表8-8确定。

（4）确定最优解。按上述所定规则，逐环进行，直至网络图中各支线均已达到良好状态。即均有K字母，则最优解即已得到。逆境法计算框图如图8-34所示。

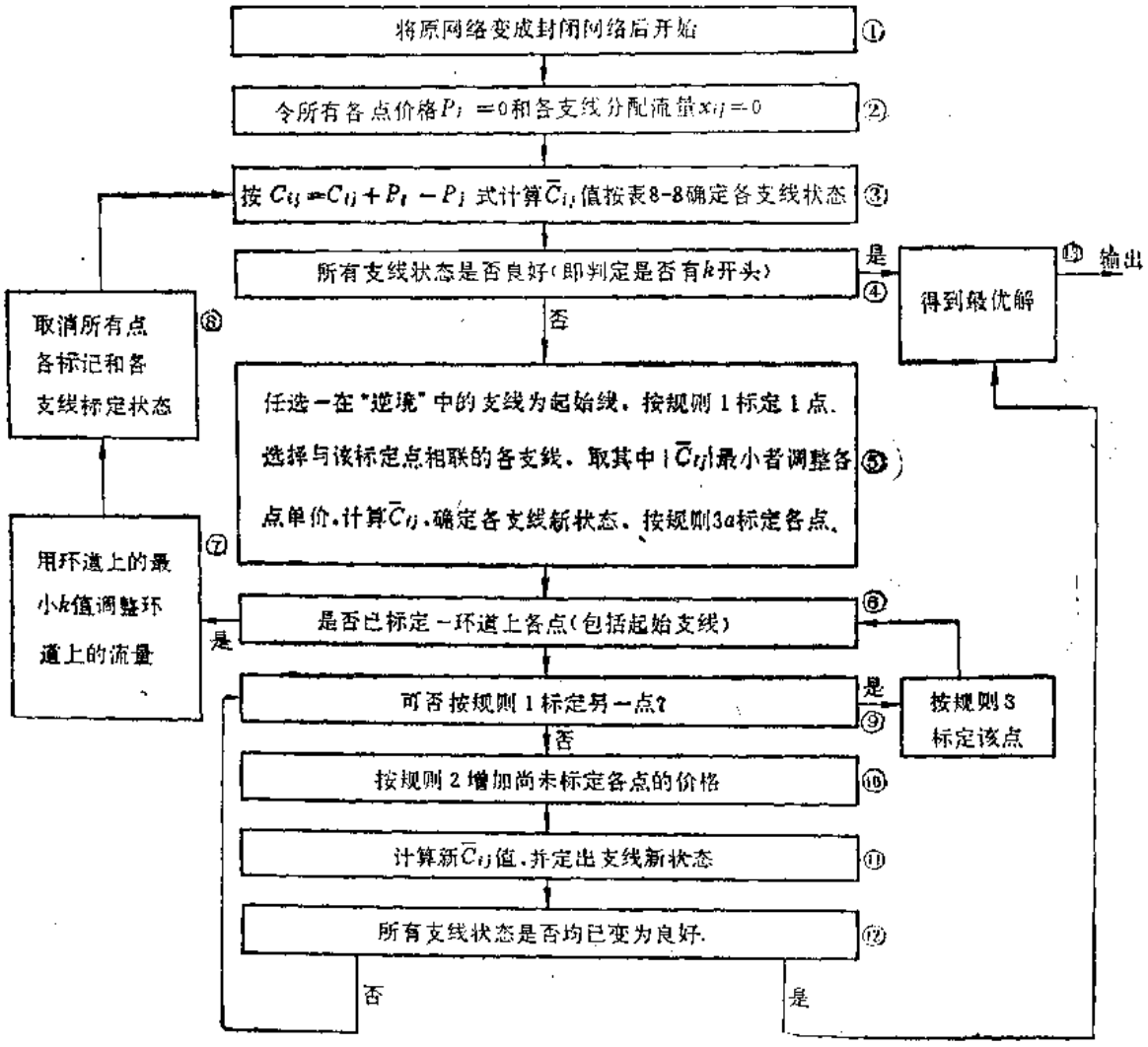


图 8-34 逆境法框图

第五节 网络分析在水库调度中应用

一、水库网络结构

为简单计，考虑以发电、防洪为主的水库。

（一）单库

取横坐标表示时间，纵坐标表示空间，取横向弧（支线）表示水量在时间上联系，纵向弧（支线）表示水量在空间上的联系。单一水库调度网络模型如图8-35所示。

图中符号含义：

Q_i——第i时段水库入库水量；

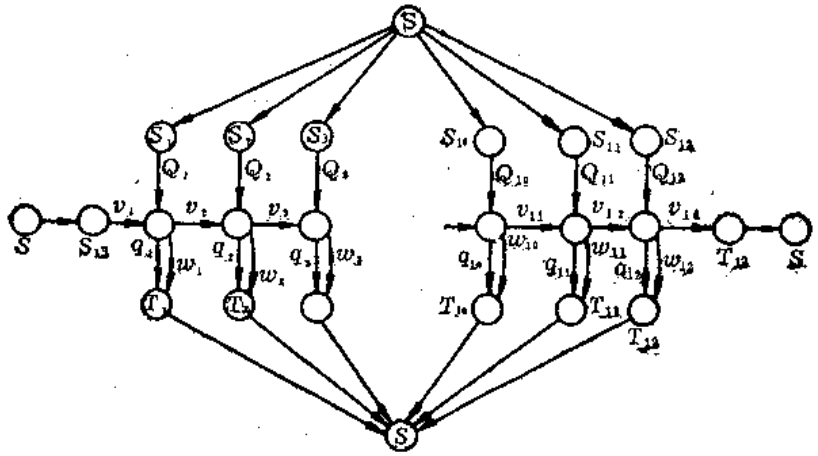


图 8-35　单一水库调度网络模型

q_i——第 i 时段水库发电出库水量；

v_i，v_{i+1}——第i时段初、末水库蓄水量；

w_i—— 第i时段水库泄洪水量；

$S, S_1, S_2, \cdots, S_{13}$；$T_1, T_2, \cdots, T_{13}$——分别为求解网络设置的源和汇。

（二）两库

两库网络结构如图8-36所示。

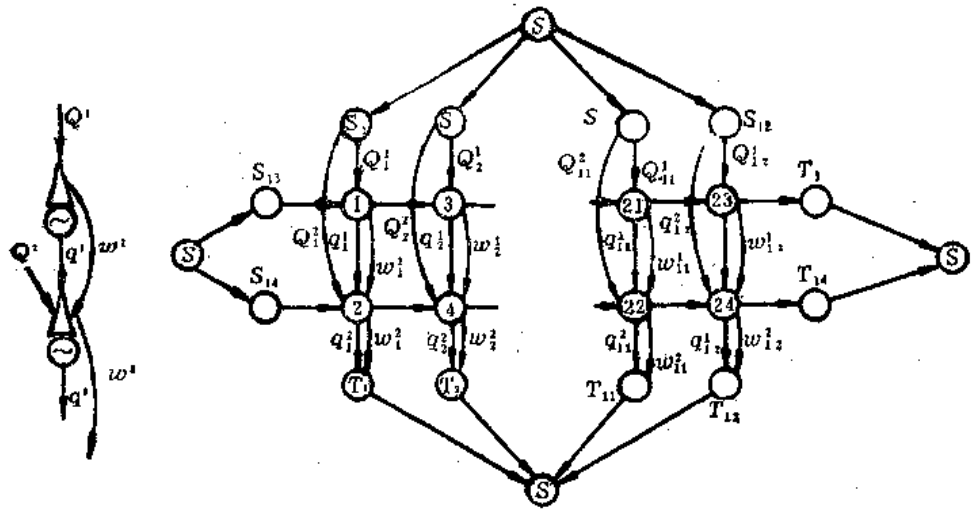


图 8-36　两库网络结构图

图中符号含义：

Q_i^1，Q_i^2——分别为i时段上游水库和两库区间入库水量；

q_i^1，q_i^2——分别为i时段上、下游水库发电用水量；

w_i^1，w_i^2——分别为i时段 1 、 2 水库泄洪水量；

符号的上角标代表水库编号，下角标代表时段。

（三）串、并联水库群

串、并联水库网络结构，如图8-37所示。

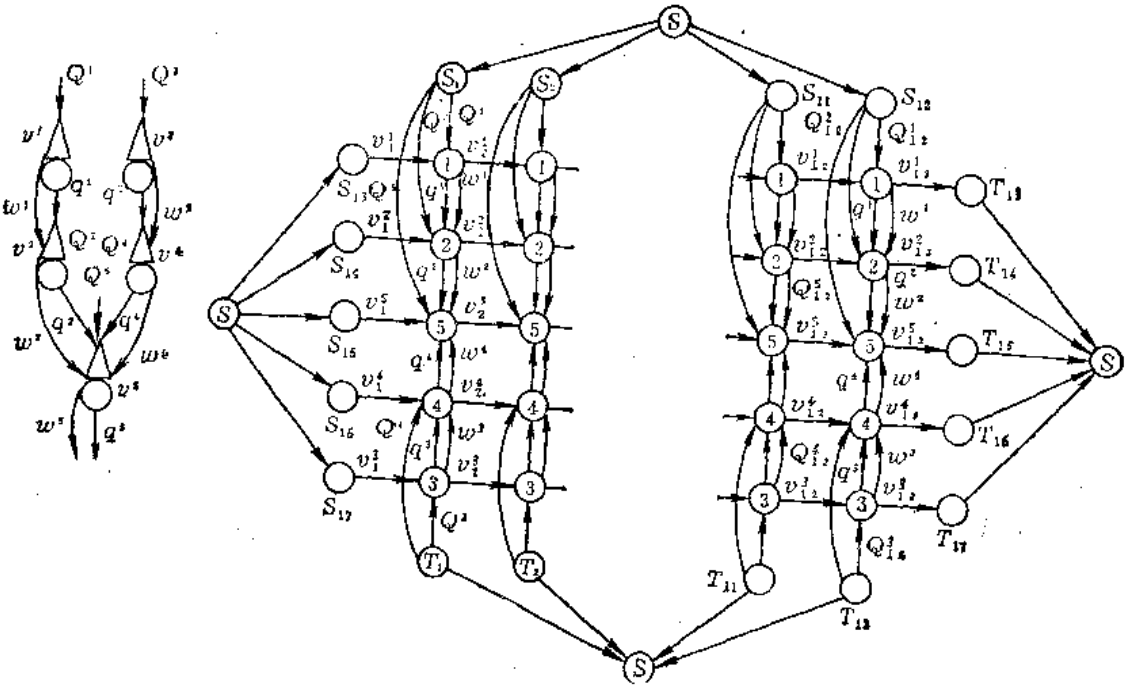


图 8-37 串、并联水库网络结构

二、数学模型

目标函数：

（1）水库主要任务为发电、防洪，其目标函数可用：

$$\max\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_jq_i^j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_jw_i^j+\sum_{j=1}^{m}c_jV_{n+1}^j\right] \tag{8-15}$$

式中 a_j——第 j 水库发电水量单价；

b_j——第 j 水库泄洪水量损失单价；

c_j——第 j 水库蓄水电能单价。

（2）水库开发任务有发电、防洪、灌溉、养鱼、库内航运等，其目标函数可描述为：

$$\max\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_jq_i^j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}b_jw_i^j+\sum_{j=1}^{m}c_jV_{n+1}^j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}d_jz_i^j+\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m}e_jV_i^j\right] \tag{8-16}$$

式中 z_i^j——第 i 时段 j 水库灌溉用水量；

d_j——第 j 水库灌溉用水单价；

e_j——第 j 水库养鱼，库内航运及其他等蓄水量单价。

如果有航运过闸放水，还要包括这部分内容。

约束条件：

$$V_i^j+Q_i^j+q_i^{j-1}+w_i^{j-1}-q_i^j-w_i^j=V_{i+1}^j \quad (8\text{-}17)$$

$$V_{死}^j\leqslant V_i^j\leqslant V_{正}^j \quad (8\text{-}18)$$

$$N_{保}^j\leqslant N_i^j\leqslant N_{i限}^j \quad (8\text{-}19)$$

$$q_{i小}^j\leqslant q_i^j\leqslant q_{i大}^j \quad (8\text{-}20)$$

$$0\leqslant w_i^j\leqslant w_{大}^j \quad (8\text{-}21)$$

式中 $V_{死}^j$——第 j 水库对应死水位的库容；

$V_{正}^j$——第 j 水库对应正常蓄水位的库容；

$N_{保}^j$——第 j 水库水电站保证出力；

N_i^j——第 j 水库第 i 时段发的出力；

$N_{i限}^j$——第 j 水库第 i 时段水轮发电机最大限制出力；

$q_{i小}^j$——第 j 水库第 i 时段最小发电引水流量；

$q_{i大}^j$——第 j 水库第 i 时段最大发电引用流量，受水轮发电机出力过水能力限制；

$w_{大}^j$——第 j 水库溢洪道最大下泄能力。

将总效益最大化优化问题，对各单价系数取相反符号，就变成等价的极小化优化问题，即最小费用最大流问题。

三、解法

（一）增广回路法

（1）拟定初始可行流。给定任一运行轨迹的水量（或电量）作为初始可行网络流。将已知的Q^j，$V_{正}^j$，$V_{死}^j$，各种单价以及初始可行网络流标于原始网络图上。

（2）计算各弧上的 $q_{i大}-q_i$ 与 $q_i-q_{i小}$，标于纵向坐标系统上，利用连续方程式（8-17）计算水库蓄水量的变化，并标于横坐标系统上。

（3）寻找增广回路，利用式（8-7）、式（8-8）判别是否有增广回路，并利用式（8-12）计算 $b(C)$，若 $b(C)<0$，则存在负费用的增广回路。按式（8-9）计算增广回路的调整流量值 Δ，再用式（8-10）及式（8-11）调整该回路中各弧的流量。

按此不断寻找增广回路，不断调整流量，直到网络中不存在负费用增广回路为止，该结果即为最小费用流成果。整个计算步骤用框图表示如下：

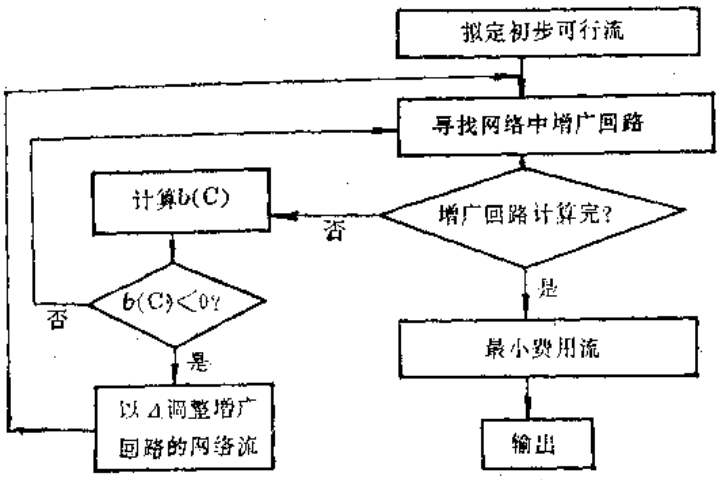


图 8-38 最小费用流计算框图

（二）逆境法

（1）将原网络变成封闭网路．虚拟源和汇，并连接成封闭网络。

（2）标定网络图中各支线状态。按表8-8进行标定。

（3）标定环道上各点。按逆境法标定规则标定环道上各点。

（4）从网络中处于逆境的某支线出发，按拟定规则寻找一个回路，并求出该回路的调整流量，使处于逆境的支线逐步变为良好状态。当网络中所有支线都变为良好状态，则网络流即为最小费用流。

第九章 动 态 规 划

在水能系统优化问题中，入流的随机性，时间的影响，目标函数和约束条件的非线性化，大系统中的大量变数和技术经济指标等。所有这些因素，在不简化或增加计算负担的情况下，线性规划和其它优化技术是很难胜任的。动态规划(*Dynamic Programming*)则是解决该类问题的一种最有效的优化技术。

一般说，动态规划是解决多阶段决策过程(*Multistage Decision Processes*)的规划。动态规划的概念和理论比较简单易懂，方法比较灵活，具有很大的直观吸引力，常为人们所喜用。不过当维数超过三个以上时，需要计算机的储存量很大，或者必须研究新的解算方法，否则，目前大容量的计算机也无法满足。这是动态规划法的最大缺点。

第一节 动态规划的基本理论

一、动态规划的概念

动态规划(DP)是一种系统分析的方法，主要用于解决多阶段决策过程的优化问题。所谓多阶段决策过程是这样一种过程，即把根据时间、空间或变化的特性，可将过程分为若干阶段，而在每一阶段都需作出决策(或决定)，而使整个过程取得最优的效果。换言之，它把一个包含n个决策变量的问题，分为n个各只包含一个决策变量而相互联系的子问题，顺序地加以解决，最后一个子问题所得的最优解就是这个原始问题的最优解。例如，在水库调度问题中调度周期取为一年时，则计算时段以月或旬为单位。计算时段若以月为单位，则将整个调节周期划分为12时段，每个时段若将水库水位(或库容)分为10级可供选择的比较方案，则可以组合成可供比较的运行过程方案，按穷举法有

$$10^{12}=10000\text{亿个}$$

若按旬分时段，一年分为36个时段，则有

$$10^{36}=10000\text{亿亿亿亿个}$$

显然要计算这样多的方案，再从中选择最优者，由于计算量庞大，甚至用计算机也不能完成，所以实际上是无法进行的。为了减少计算工作量，可用一个简便的择优方法，即将原问题按时间划分为12或36阶段，逐段寻优，直到求出水库调度问题的最优解。

例如，赛车，规定的赛车方式是：选手们都从S站出发，终止于F站，赛车路线如图9-1所示。全程共设有一一对应的P_1、q_1，P_2、q_2，P_3、q_3共六个检查站，选手们从S点出发须经过P_1或q_1；其后可选择检查站P_2或q_2……，以此类推最后到F站。选手们的目标是，经过一系列规定的检查站，在最短的时间里跑完由S到F的路程。

假定某个选手在比赛前知道了各检查站的位置，并且在适当时候试验了各检查站之间的行车时间，各支线的行车时间，以10分钟为一个单位，示于图9-1中。已知这些信息后，

这位选手应怎样规划路线，才能有最大的希望赢得这场比赛，即用最短时间从S跑到F。算法很简单：划出8个可能的路线，把每个支线的预测时间都加起来就算出了取每条路线的时间。每条路线要相加3次，总共需要相加24次。一般说来，如果不是四段，而是n段，对于这类问题，就需要相加$(n-1)2^{(n-1)}$次。

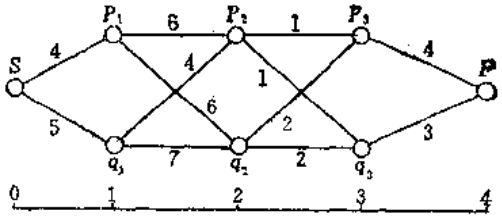


图 9-1 赛车路线图

让我们采用另一种从S到F的最优路程的方法，我们从最后一段开始，在两个检查站P_i与q_i算出从该检查站到终点F的可能的最小“代价”。代价用V来表示，其实就是行车时间。实际上，在这个例题中，最后一段没有选择的余地；从P_3起始的代价，写作$V_p(4)$，为4个时间单位，而$V_q(4)$为3个时间单位。其次我们来考虑在检查站P_2的决策，有两个方案可供选择：

$$\text{路径}P_2P_3F,\quad V=1+V_p(4)=5$$

$$\text{路径}P_2q_3F,\quad V=1+V_q(4)=4$$

后一条路径更快一些，因此我们记下：从P_2到F的最短时间或称最小代价为$V_p(3)=4$。用同样的方法我们算出$V_q(3)=5$，以此类推，综合起来列出表9-1。

表 9-1 赛车问题的最短时间

$V(1)=13$	$V_p(2)=10,$	$V_p(3)=4,$	$V_p(4)=4,$
	$V_q(2)=8,$	$V_q(3)=5,$	$V_q(4)=3$

最后一次计算对应第一段，赛手有两个选择：

$$\text{路径}SP_1F,V=4+V_p(2)=14$$

$$\text{路径}Sq_1F,V=5+V_q(2)=13$$

选手选择路径q，整个问题的最小时间单位是$V(1)=13$个时间单位。这种方法只需要相加10次。

这种解题过程，就是多阶段最优决策过程，即动态规划法。

从这个例子可以得到下面一些概念：

（1）多阶段最优决策过程是一个很有效的方法。它的前提是必须能把问题表示或转化为一个多阶段决策过程，这个过程需具有这样的性质：在当前阶段以前的各阶段的决策和状态，对后面各阶段的过程来说，只不过相当于一个初始条件而已，并不影响后面过程的最优决策的选择。

（2）这种动态规划法可大大减少优化问题求解的计算工作量。随着问题阶段数的增加和复杂程度的提高，它与穷举法计算工作量之比，成指数规律减小。

（3）这种方法不仅能给出由起点到终点的最优路线和最优效果(费用或效益)。而且还给出了任何阶段 任何中间点到达终点的最优决策。

（4）这种方法求解问题的顺序，是由后向前，与阶段行进方向相反来逐步寻优的，这是动态规划法的一个重要特征，所以也可以说，动态规划法是一种从终点逐段向始点方向寻优的方法。

当系统有了一定的时序或顺序后，则其阶段即可确定。方法可按逆序法或顺序法求解(详见第二节)。从基本概念上说，逆序法和顺序法应得到对等的结果，它们在方法上是等价的。

为了讨论方便，我们首先介绍如下的基本概念。

（一）阶段（*stage*）

把所研究的问题的全过程，恰当地划分成若干个相互联系的阶段。阶段变量决定系统中各事件发生的次序。若以离散时间为阶段变量，则可用 $i=1$，2，……，n 来代表各阶段。例如，图9-1所示问题，根据时间序列与空间关系，可将原问题划分成 $t_0\to t_1$，$t_1\to t_2$，$t_2\to t_3$，$t_3\to t_4$ 共四个阶段。$t_0\to t_1$ 代表起始时间，用 $i=1$ 表示，在该阶段选手们从 S 站出发，可以选择 P_1 或 q_1 检查站；$t_3\to t_4$ 代表终了段用 $i=n$（此例 $n=4$）表示，在该阶段选手们从检查站 P_3（或 q_3）至终点 F 站。

（二）状态（*state*）

状态是指完整地描述系统在各阶段所有可能发生的状况。描述过程状态的变量称状态变量。而状态变量的决定，则依照该系统的数学模型的性质和范围而定。例如，赛车过程中，第一阶段初始状态仅一个状态，就是 S 站，第二阶段初始状态有两个状态为 P_1、q_1 站……等。又如，在水库调节计算中，在最简单的情形下，取水库的时段初始水位（或蓄水量）为状态变量，则第 i 段的初始状态集可表示为：

$$V_i=\{V_i^1,\ V_i^2,\ \cdots\cdots,\ V_i^k\} \tag{9-1}$$

式中 i ——阶段，$i=1$，2，……，n；

k ——该阶段可能发生的状态数。

因此，描述问题各阶段状态的变量，实际上是 n 个 k 维向量。简记为 x_n。

例如：上述赛车例中可表达为：

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\{S\}\\ x_2&=\{P_1,\ q_1\}\\ x_3&=\{P_2,\ q_2\}\\ x_4&=\{P_3,\ q_3\}\end{aligned}\right\} \tag{9-2}$$

（三）决策（*decision*）

决策就是某阶段初始状态给定以后，从该状态演变到下一阶段某状态（预定的目标）的选择。描述决策的变量称为决策变量（*Decision variable*）。决策变量同样可用一个数，一组数或一向量来描述。通常用 $d_i(x)$ 表示第 i 段，当状态处于 x 时的决策变量。

在实际问题中，决策变量的取值往往限制在某一定范围之内，此范围称为允许决策集合，以$D_i(x)$表示。即：

$$d_i(x) \in D_i(x_i) \tag{9-3}$$

如在赛车例中，第二阶段的状态集合为$x_2=\{P_1, q_1\}$，则在状态点P_1的允许决策集合为$D_2(P_1)=\{P_2, q_2\}$，若选定决策为P_2时，$d_2(P_1)=P_2$。

（四）策略（*policy*）

策略是指一个决策序列。由过程的第一阶段开始到终点为止的过程，称为问题的全过程。由每一阶段的决策$d_i(x_i)$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）组成的决策序列，称为全过程策略，简称策略。在实际问题中，可供选择的决策，有一定范围，称为允许策略集合。从允许策略集合中，找出达到最优效果的策略，称为最优策略。

（五）目标函数与指数函数

在多阶段最优决策过程中，目标函数是用来衡量整个过程优劣的一种数量指标。

若系统的第i阶段，阶段初的状态为x_i，阶段末的状态为x_{i+1}，阶段的决策为d_i，从而产生的阶段效益为r_i。状态的变化（或称状态转移）和效益的产生是同时发生的。阶段末的状态x_{i+1}和阶段效益r_i都是阶段初的状态x_i和阶段决策d_i的函数，可由下列方程表示：

$$x_{i+1}=L(x_i, d_i) \tag{9-4}$$

$$r_i=r_i(x_i, d_i) \tag{9-5}$$

方程(9-4)称为第i阶段系统状态转移方程式。在确定性的决策过程中，下一阶段的状态x_{i+1}，完全由面临阶段的状态x_i和决策d_i所确定。

方程(9-5)称为第i阶段效益方程式。显然从第一阶段的初始状态x_i开始，经历一个阶段决策，发生一次状态转移，同时产生一个阶段效益，依次经历系统全部阶段，得到系统的总效益R，它是衡量过程效益的一种数量指标，常称为指标函数。实际上，它是各阶段效益r_i（$i=1, 2, \cdots, n$）的总和，即：

$$R=\sum_{i=1}^{n} r_i=\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i, d_i) \tag{9-6}$$

体现全过程总效益最优值的数量指标，叫做过程的目标函数，以R^*表示：

$$R^*=\mathrm{Opt}\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i, d_i) \tag{9-7}$$

其中Opt是英文（Optimize）最优化的缩写，依题意可取min或max（极小化Minimize或极大化Maximize）。

（六）多阶段决策过程

经过以上分析，可以归结如下：

多阶段决策过程就是一个系统从某一个起始状态x_0开始，经过一系列的变化，到达终点状态x_n为止的过程，其状态变化可分为n个阶段，对每个阶段都要作出一定的决策$d_i(i=1, 2, \cdots, n)$，从而相应地得到每个阶段的末端状态（$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$）和效益（$r_1, r_2, \cdots, r_n$）。多阶段最优决策过程就是要对整个过程进行选择，得出一个最优决策系列，使系统整体取得最优效益的过程，且具有如下性质：

（1）在多阶段决策过程中，任一阶段的演变特征是用状态变量的变化来描述的，状态变化或转移的效果取决于该阶段决策变量的变化。前一阶段末的状态就是下一阶段初的状态。当系统为确定性的系统时，各阶段的状态变量和决策变量的值是确定的或可知的。

（2）无后效性。即过程过去的历史只能通过当前面临的状态去影响过程未来的发展，而与未来的过程无直接关系。换句话说：只有过程的现状与将来有关，而过程的将来与过程的过去无关。或者说过去的状态与将来的决策无关。如状态x_n只与本阶段面临的状态x_{n-1}及决策d_{n-1}有关，而与以前各阶段的状态x_0，x_1，$\cdots x_{n-2}$无关。过去的这些状态x_0，x_1，$\cdots$，x_{n-2}，只能通过面临的状态x_{n-1}去影响未来的发展。这就是说，多阶段决策过程具有马尔可夫链的性质。

在意欲把问题表述为一个多阶段决策过程时，必须恰当地选定状态变量，使它具有无后效性。如果所选的变量不具备无后效性，就不能用它作为状态变量来构造动态规划的模型。

（3）分段最优决策服从于全过程最优决策。n个阶段决策过程的全过程的决策序列是一个决策向量组（d_1，d_2，$\cdots$，d_n），每个决策向量若有k个可供选择的比较方案，则：

$$d_1=\begin{pmatrix} d_1^1 \\ d_1^2 \\ \vdots \\ d_1^k \end{pmatrix},\quad d_2=\begin{pmatrix} d_2^1 \\ d_2^2 \\ \vdots \\ d_2^k \end{pmatrix}\cdots\cdots,\quad d_n=\begin{pmatrix} d_n^1 \\ d_n^2 \\ \vdots \\ d_n^k \end{pmatrix}$$

即整个过程可供选择的决策数为$k\times n$个，每一个决策向量必有一个分量是最优的，叫做分段最优决策（局部最优）。在进行多阶段决策时，并不一定采用分段最优决策，而是选择全过程最优策略，在这个决策序列中的每一个决策完全可能不是分段最优决策，这就体现了局部最优服从整体最优的原则。

二、动态规划的基本原理

上述内容阐述了动态规划的理论。动态规划的理论基础是根据数学家贝尔曼于50年代提出的最优化原理。

贝尔曼认为最优决策有以下特性：“任何初始阶段的状态和决策都应和其后阶段的状态和决策共同构成最优决策”。也可以概括为：在一个多阶段的决策过程中，若该系统的现阶段的状态为已知，则其后各阶段的最优决策与先前各阶段的最优决策无关。且计算阶段决策序列为最优时，则包含在其中的余留时段亦是最优。因此，可以按每次一个阶段的标准来求得整个系统的最优决策。最后阶段所得的最优解，就是原问题的最优解。

例如，在赛车一例中，从S点开始经检查站q_1，P_2，q_3到达F点的最优决策系列为$Sq_1P_2q_3F$，通过P_2点，则不论前面的初始状态和决策如何，对于形成的状态P_2点来说，若把E_2作为初始状态，则P_2q_3F必为最优决策路线。

第二节　动态规划的递推方程式

根据最优化原理，把一个系统表述为使过程状态序贯转移，相应效益指标函数递推的

方程称为递推方程（*Recursive equation*），也就是动态规划的基本方程。递推次序可以是逆向递推，也可以是顺向递推，递推方程式各不相同。

在描述递推方程之前，尚需说明计算时期（段）的概念。计算时期（段）一般包括面临时期（段）与余留时期（段）两部分。只有起始计算时期（段），余留时期（段）为零，仅含面临时期(段)一个部分。由此可见，可将全系统划分为计算时期(段)与以往时期(段)两大时期(段)，各时期(段)所包含的段落随计算的推移而变化，如图9-2所示。

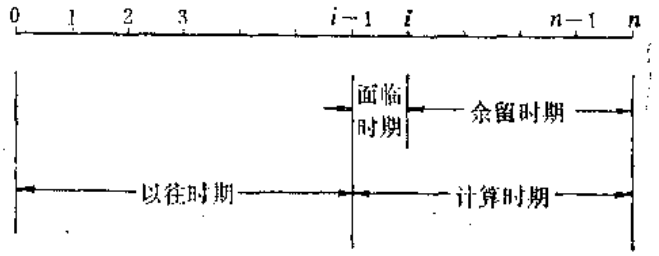


图 9-2 系统时段划分图

一、确定性动态规划逆向递推方程式

确定性动态规划是指在多阶段决策过程中，出现的因素是确定性的。在确定性的多阶段决策过程中，下一阶段的状态，完全决定于现阶段的状态和现阶段的决策。

系统划分阶段由起点至终点，其顺序如图9-3所示。递推计算从终点开始逐渐向起点递推，其方向如图中双箭头所示。其方向与划分阶段序列方向相反称为逆推计算。

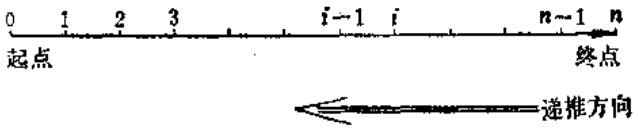


图 9-3 逆推图

逆推计算的状态转移为：

$$V_{i+1}=L(V_i,\ d_i) \tag{9-8}$$

然后，根据目标函数建立递推方程式：当我们取用的目标函数系以收益多少为标准，则最优值应是极大化；当取用的目标函数系以耗费多少为标准，最优值应是极小化。这里以前者为准，令收益以$R_i(V_i,\ d_i)$来代表，则递推式可写成：

$$f_i^*(V_i)=\max\{R_i(V_i,\ d_i)+f_{i+1}^*(V_{i+1})\} \tag{9-9}$$

式中 $f_i^*(V_i)$——表示从i时段V_i状态出发，在$i\sim n$时段内最大总效益；

$R_i(V_i,d_i)$——表示面临时段效益；

$f_{i+1}^*(V_{i+1})$——表示余留时期最大效益。

对于起始计算时段$f_n^*(V_n)$则为：

$$f_n^*(V_n)=\{R_n(V_n,\ d_n)\} \tag{9-10}$$

式中 $f_n^*(V_n)$——表示起始计算时段（第n时段）的效益值。

式（9-9）和式（9-10）说明，在起始计算时段中仅本身时段效益一项，即余留时期效益为零；而在非起始计算时段总效益值由两部分组成，一部分为面临时段效益，另一部分为余留时段的最优效益，两者之和的最优值作为下一时段递推计算中余留时期的效益值。

二、确定性动态规划的顺向递推方程式

顺向递推计算的顺序与系统由起点至终点的顺序一致。系统由起点至终点的顺序如图9-4所示，计算顺序如图中双箭头所示。

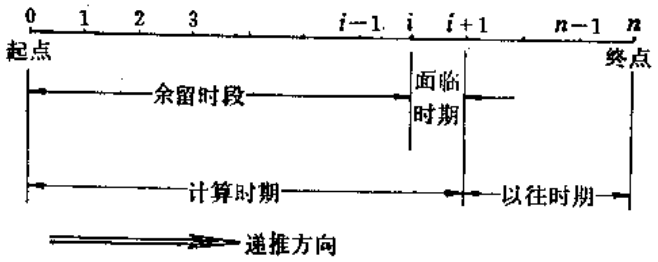


图 9-4 顺推图

因此，状态转移方程应由V_{i+1}状态出发，作d_{i+1}决策去确定V_i，其状态转移的一般方程为：

$$V_i=L(V_{i+1},\ d_{i+1}) \tag{9-11}$$

同样，根据目标函数建立递推方程式为：

$$f_{i+1}^*(V_{i+1})=\max_{d_{i+1}\in D_{i+1}}\{R_{i+1}(V_{i+1},\ d_{i+1})+f_i^*(V_i)\} \tag{9-12}$$

式中 $f_{i+1}^*(V_{i+1})$——表示从$i+1$时段V状态出发，在$i+1\sim n$时段内的最大总效益；

$R_{i+1}(V_{i+1},d_{i+1})$——表示面临时段效益；

$f_i^*(V_i)$——表示余留时期最大效益。

对于起始计算时段$f_1^*(V_1)$则为：

$$f_1^*(V_1)=\{R_1(V_1,\ d_1)\} \tag{9-13}$$

式中 $f_1^*(V_1)$——表示起始计算时段（即第1时段）的效益值。

同样说明，起始计算时段仅面临时段一项，其它时段均包括面临时段与余留时段两项之和。且应以两项之和的最优值作为下一计算时段中余留时段值，进行递推计算。

现在用举例来说明逆推方程式的演算情况。

【例 9-1】 设一引水式水电站，从水源A引至厂房B的引水建筑物路线，如图9-5所示。各段路线上的标码数字为引水道的建筑费用。要求找出联接A和B而费用最小的路线。

求解步骤如下：

（1）划分阶段。根据引水系统路线特性，将原系统划分为四个阶段。

阶段1 从水源A到节点①、②，用$i=1$表示；

阶段2 从节点①或②到节点③或④，用$i=2$表示；

阶段3 从节点③或④到节点⑤或⑥，用$i=3$表示；

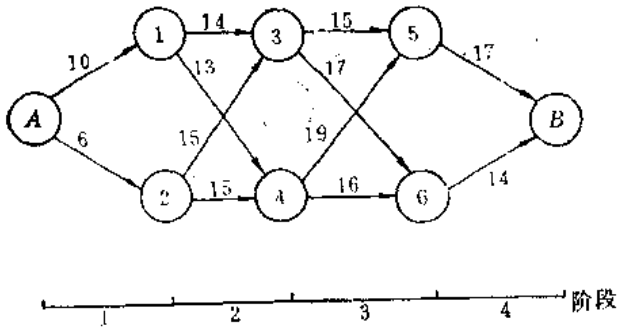


图 9-5 AB间的引水建筑物路线图

阶段 4　从节点⑤或⑥到节点B，用$i=4$表示，也就是$n=4$。

（2）状态变量。各阶段的节点表示相应阶段的状态变量。第 1 阶段初始状态仅 1 个，即节点A；第 2 阶段初始状态为两个变量，即{①，②}节点；第 3 阶段初始状态为两个变量，即{③，④}节点，第 4 阶段初始状态为两个变量，即{⑤，⑥}节点；终了状态为 1 个节点，即节点B。

表 9-2　　状态⑤、⑥递推计算表

状　态	选用决策	费　用
⑤	B	17
⑥	B	14

（3）决策变量$d(x)$。表示从状态x出发将要选择的下一点。如在第 3 阶段的初始状态集合是$x_3=\{③，④\}$，则从节点③出发，其决策集合是$D_3(③)=\{⑤，⑥\}$，若选取的点为⑥点，则$d_3(③)=⑥$。

为了寻求AB全线所需费用最小的最优路线。采用逐段寻优的方法。

（4）递推计算。我们从最后一阶段开始，即$n=4$开始，从状态（即节点）⑤开始，选用决策B，所需费用为17个单位；从状态⑥开始，选用决策B，所需费用为 14 个单位。如表9-2所示。

逆时序前进至$n=3$阶段，从状态③或④开始，选用的决策与所需最小费用见表 9-3 所示。

表 9-3　　状态③、④递推计算表

状　态	所需费用		最小费用	选用决策
	⑤	⑥		
③	15+17=32	17+14=31	31	⑥
④	19+17=36	16+14=30	30	⑥

由表可知，如果以状态$x_3(③)$为准，则最优路线为③→⑥→B；若以$x_3(④)$状态为准，则最优路线为④→⑥→B。

同理逆时序计算至$n=2$阶段，从状态$x_2\{①，②\}$出发，选用的决策与所需费用见表

9-4。

表 9-4　　状态①、②递推计算表

状态	所需费用		最小费用	选用决策
	③	④		
①	14+31=45	13+30=43	43	④
②	15+31=46	15+30=45	45	④

由表可知，若从x_2(①)出发，最优路线为①→④→⑥→B；若从x_2(②)出发，最优路线为②→④→⑥→B。

当逆推至$n=1$时段，由x_1(④)出发至①或②，选择决策与最小费用见表9-5。

表 9-5　　选择决策与最小费用表

状态	所需费用		最小费用	选择决策
	①	②		
A	10+43=53	6+45=51	51	②

说明最优引水路线应该是A→②→④→⑥→B。

从上述例子的逆推过程，可以建立如下的关系：

最后阶段（$n=4$）：

$$f_4^*(x_4)=\min_{d_4}\{C_4(x_4,\ d_4)\} \tag{9-14}$$

第3阶段

$$f_3^*(x_3)=\min_{d_3}\{C_3(x_3,\ d_3)+f_4^*(x_4)\} \tag{9-15}$$

第2阶段

$$f_2^*(x_2)=\min_{d_2}\{C_2(x_2,\ d_2)+f_3^*(x_3)\} \tag{9-16}$$

第1阶段

$$f_1^*(x_1)=\min_{d_1}\{C_1(x_1,\ d_1)+f_2^*(x_2)\} \tag{9-17}$$

式中　$f_4^*(x_4)$——最后一个阶段的最优总效益；

$f_3^*(x_3)$,$f_2^*(x_2)$,$f_1^*(x_1)$——分别为第3阶段、第2阶段和第1阶段的最优总效益；

$C_4(x_4,d_4)$,$C_3(x_3,d_3)$,$C_2(x_2,d_2)$,$C_1(x_1,d_1)$——分别为第4、3、2、1阶段本身阶段的费用。

由式（9-14）可知，最后一阶段仅有一项，该项在动态规划中称面临阶段或称现阶段的费用。式（9-15）～式(9-17)则包括两项，前项称面临（现）阶段的费用，后项称余留阶段费用。

第三节 增量动态规划

在推求水库优化调度方案中，增量动态规划法（*Increamental Dynamic Programming*）亦是行之有效的方法，该法可以减少计算工作量，可以解决人们常说的计算时间和所需计算机内存“维数灾”问题。

增量动态规划法的计算过程：首先选择一可行轨迹，该轨迹是一个满足一系列特定的初始条件与终了条件的可行轨迹。在该轨迹上、下加、减一个增量，形成一个试验“廊道”。在该领域内按递推方程式迭代计算，每次迭代的结果将得到一个局部改善的轨迹。然后，以此作为下一步迭代的新轨迹，重复上述步骤，直至不再增加效益或满足某一收敛准则为止。该法的求解程序如下：

（1）假设一个符合约束条件和初始、终了条件的初始可行调度线（即可行轨迹），如图9-6中的点线所示。

（2）在初始和终了时段以外的上下各取一增量 Δ，形成三个离散值的范围，并使初始调度线起始和终了时刻时的增量等于零。

（3）在正负增量的范围内，利用动态规划的递推方程寻求最优的调度线。在增量动态规划中，第1阶段和最末阶段，从初始和终了值出发各有3个决策值，其余各阶段也仅有9个决策值。通过计算可求得较好的调度线。

（4）用计算得的调度线代替旧调度线，进行重复计算，直至收敛为止，即得最优调度线，如图9-6实线所示。

增量动态由于状态变量数与决策数较少，从而可以减少计算工作量。

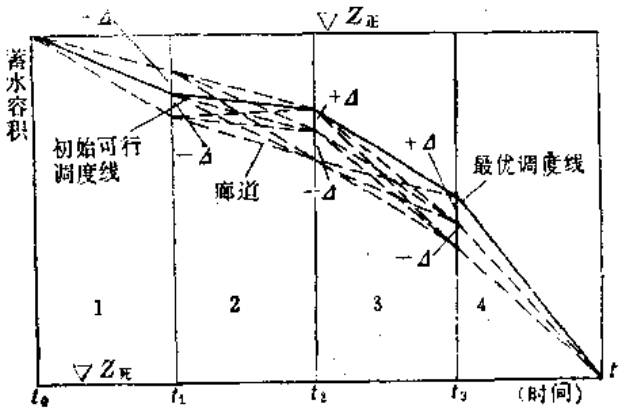


图 9-6 增量动态规划计算法

第四节 随机动态规划

动态规划法可用于具有序列结构的确定性系统和随机性系统、连续系统和不连续系统，线性系统和非线性系统等的最优化问题中。实际上，自然科学与社会科学系统中，大

量存在的许多参变量都是不确定性的。例如，水资源系统中入库径流是随 t 而变化的随机函数$Q(t)$，如图9-7所示。当 $t=t_1$或其它任一时刻，过 t_1作垂线交于各年径流过程线，各年的$Q_1(t_1)$，$Q_2(t_1)$，$Q_3(t_1)$均不相同，均是随机函数值。

这种考虑并包含了随机变量因素的动态规划问题，称为随机动态规划（*Stochastic Dynamic Programming*）。

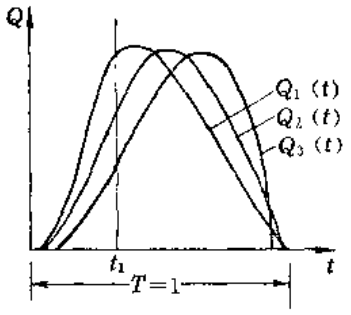


图 9-7　实测径流过程示意图

一、变量说明

（一）阶段变量

整个时段数以T表示，阶段变量以 t 表示。在水库调度中，调度周期以年表示，各时段历时Δt可以相同，均以月或旬表示，也可以不同，如供水期以月为时段，而洪水期因径流变化剧烈，可采用旬为一个时段。

（二）状态变量

如前所述状态变量的性质符合两个条件：一是状态变量能确切地描述系统状态；二是状态变量所描述的过程具有无后效性。在水库运行中，对入库径流及水库存蓄水量均作离散化处理。离散状态一般不直接用变量的实数来表示，而用 i、$j=0$，1，2，…，m来表示离散状态值，当 i、j代表其中某数时，该数即代表状态变量的相应状态。例如，某水库库水位状态值为[86，88，90，92，94，96，98，100，102,104]，其状态空间 $i=[1，2，3，4，5，6，7，8，9，10]$，当 $i=3$时，即代表库水位状态为90单位。

（三）决策变量

以d_t表示第 t 时段的决策变量。在水库运行中它可以定义为时段放水量、时段平均出力或时段末水库的蓄水量。

二、状态转移概率

若水库在 t 时段初的状态为 i，作出决策后，水库状态转变为该时段末(下一时段初)的状态 j，其状态转移概率表示为：

$$P_{ij}(t,\ d)=P\{x_{t+1}=j\mid x_t=i,\ d_t(t)=d\in D_t\} \qquad (9\text{-}18)$$

式中D_t为第 t 时段的允许决策集；$d_t(t)$表示在第 t 时段初状态为 i 时段的决策；$x_t=i$ 在 t 时的状态；$x_{t+1}=j$ 在 $t+1$ 时的状态。

水库的状态转移概率实际上就等于入库径流的状态转移概率，而且水库状态转移过程是一个具有周期性的马尔柯夫过程，其周期为T（一年）。将各种状态间的转移概率列成矩阵称为状态转移概率矩阵。

$$P_{ij}=\begin{Bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13}\cdots P_{1m} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23}\cdots P_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ P_{m1} & P_{m2} & P_{m3}\cdots P_{mm} \end{Bmatrix} \qquad (9\text{-}19)$$

P_{ij}表示水库在时刻 t 到$t+1$ 状态转移概率。并具有：

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij}=1 \quad \forall i,$$

假若对于各调度周期的同一时段，水库状态相同，则其决策也相同，即：

$$d_i(t+T)=d_i(t) \tag{9-20}$$

式中$d_i(t)$表示 t 时段状态为 i 的恒定决策。

水库状态在运行过程中不断转移，如以π_0表示年初水库状态的概率向量，即：

$$\pi_0=(\pi_0^1,\ \pi_0^2,\ \cdots,\ \pi_0^m)$$

式中π_0^i表示水库在年初运行状态为 i 的概率，则在 t 时段末水库状态的概率为：

$$\pi_t=\pi_0 P_1 P_2 \cdots P_t$$

第一年末水库状态的概率为

$$\pi_T=\pi_0 P_1 P_2 \cdots P_i \cdots P_T=\pi_0 \prod_{i=1}^{T} P_i=\pi_0 P \tag{9-21}$$

式中 P 表示以年为单位时段的年状态转移矩阵。第 1 年初水库状态概率为$\pi(0)=\pi_0$，经过一年后第 2 年初水库状态的概率为$\pi(1)=\pi(0)P$。由于水库状态的变化是以年为周期的马尔柯夫过程，各年的概率转移矩阵相同，第 $n+1$ 年初水库的状态概率矩阵为：

$$\pi(n)=\pi(0)P^n$$

数学上业已证明P^n矩阵可分解成两矩阵之和，其中一个分矩阵为所有行都相同的恒定矩阵，它与状态转移次数 n 无关；另一分量矩阵，经过水库多年转变后，其概率矩阵将收敛到某一稳定的概率向量，该稳定的概率向量与水库的初始状态无关。

三、效益函数

水库运行状态的转移过程，也就是水库运行过程。水库在 t 时段初由第 i 个状态转移到时段末(第 $t+1$ 时段初)的第 j 个状态，相应地将产生时段效益$r_{ij}(t,\ d)$。在每个时段内，水库状态发生转移，并伴随有效益的产生。与状态转移矩阵相对应，有 T 个效益矩阵：

$$\{r_{ij}(t,\ d)\} \quad t=1,\ 2,\ \cdots,\ T$$

当水库在 t 时段初的状态为 i 时，t 时段初到年末水库运行总效益包含两部份：

（1）t 时段内水库状态由 i 转移到 j 所产生的效益期望值为：

$$R_t(i)=\sum_{j=1}^{m} P_{ij}(t) r_{ij}(t)$$

式中$P_{ij}(t)$为相应于每种状态的转移概率；$r_{ij}(t)$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，表示水库状态由 i 转变到 j，在 t 时期的效益。

（2）$t+1$ 时段初始时刻到年末的水库运行效益，用$f_{t+1}(j)$表示。由于 $t+1$ 时段初始时刻水库状态 j 是由 t 时段初水库状态 i，按状态转移概率$P_{ij}(t)$转变而来的，所以需对$f_{t+1}(j)$进行数学期望运算，即：

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij}(t) f_{t+1}(j)$$

于是

$$f(i)=R_t(i)+\sum_{j=1}^{m} P_{ij}(t) f_{t+1}(j) \tag{9-22}$$

另外，在效益计算中，考虑采用第二章第三节中第四种目标函数时，则需根据水电站

不同运行方式，按该目标函数中各计算式进行计算。

四、递推计算方程

根据动态规划最优化原理，逆时序递推方程为：

$$f_t^*(i)=\max_{d\in D_t}\left\{R_t(i,\ d)+\sum_{j=1}^{m}P_{ij}(t,\ d)f_{t+1}^*(j)\right\} \qquad (9\text{-}23)$$

式中$f_t^*(i)$表示第t时段初水库状态为i，从第t时段初至时段末各时段均采用最优决策所得最大总期望效益。

随着迭代周期的增加，两相邻时段内各相应时段的决策完全相同。计算结果将单调地收敛于某一稳定的优化调度线。按所得优化调度图进行全系列验算，检查是否满足电站设计保证率要求，不满足就修正，直到满足电站设计保证率以后所得的优化调度图即为所求的调度图。

第五节　动态规划在水库调度中应用

应用动态规划法绘制水库调度图，处理方式多种多样，本节仅举两种方法绘制。

一、应用动态规划法绘制水库调度图算例

（一）两水库的基本资料

某河流有甲、乙两梯级水库，甲库位于河流上游为多年调节水库，乙库位于河流下游为日调节水库。两水库的开发任务均以发电为主兼顾防洪、养渔、下游水库尚有航运、过渔、灌溉等任务。该两水电站发出的电，联合投入某电网，供电网工农业、城市用电。该两电站水库设计参数见表9-6。

表 9-6　　河流两水库设计参数

项目	流域面积 (km²)	调节性能	设计保证率P (%)	正常蓄水位 (m)	死水位 (m)	汛限水位 (m)	相应正常蓄水位库容 (亿m³)	兴利库容 (亿m³)	死库容 (亿m³)	保证出力 (万kW)	装机容量 (万kW)	多年平均电能 (亿kW·h)
甲库	10442	多年调节	95	108	86	106.5	178.4	102.7	75.7	17.8	65.25	18.6
乙库	31800	日调节	95	23			4.45			5.1	28.6	9.24

该两水库水流连续方程：

甲库：

$$V_{\text{II}}+Q_{\text{I},\ (t\sim t+1)}-q_{\text{I},\ (t\sim t+1)}-\Sigma\Delta q_{\text{I},\ (t\sim t+1)}=V_{\text{I},\ (t+1)} \qquad (9\text{-}24)$$

式中　$V_{\text{II}}, V_{\text{I},\ (t+1)}$——为甲库时段初、末水库蓄水量；

$Q_{\text{I},\ (t\sim t+1)}$——为计算时段甲库入库流量；

$q_{\text{I},\ (t\sim t+1)}$——为计算时段甲库发电放水；

$\Sigma\Delta q_{\text{I},\ (t\sim t+1)}$——为计算时段甲库总损失水量，其中包括蒸发渗漏以及无益弃水等。

对于具有日调节的乙库来说，因为水库蓄水量时段初与时段末不变，保持平衡。其水流连续方程式为：

乙库：

$$q_{I,(i\sim i+1)}+Q_{(I\sim II),(i\sim i+1)}=q_{II,(i\sim i+1)}+\Sigma\Delta q_{II,(i\sim i+1)} \qquad (9\text{-}25)$$

式中 $Q_{(I\sim II),(i\sim i+1)}$——甲、乙两库区间流量；

$q_{II,(i\sim i+1)}$——为乙库发电放流量；

$\Sigma\Delta q_{II,(i\sim i+1)}$——为乙库蒸发、渗漏、弃水等损失流量。

即径流式电站在长期调度中，出库流量等于入库流量。

经对甲、乙两水库的径流资料的相关分析，发现仅个别月份相关性较好。为计算简便计，暂不考虑相关，即按时段径流随机独立的情形进行计算。取月或旬时段平均流量按递减次序排序，用径流频率曲线表示，或按皮尔逊III型曲线适线考虑。分别取5～95%（频率频长为10%）频率相应的流量进行计算。

（二）调度准则与递推方程式

1.调度准则

水电站经济运行中的最优准则，是动态规划的最优策略目标。目前在还不能正确估计水电站正常运行受到破坏时对系统国民经济各部门所造成的损失时，甲、乙两库采用的调度准则是：

（1）正常运行时期：在满足综合利用要求与甲、乙两梯级水库联合保证率与保证出力的前提下，即在各种径流过程组合状态下，水电站所发的月（旬）平均出力大于等于梯级保证出力的概率值，应符合设计保证率要求，考虑甲、乙两库相互补偿作用，使甲、乙两水电弃水量最小，使梯级电站多年平均发电量最大。

（2）非常运行时期：如特丰年，使梯级总弃水量最小，发电量最大；又如在特枯年，要求梯级电站由于出力不足使电力系统正常工作遭受破坏的程度最小。

2.基本递推方程式

（1）下调度线递推方程式。以计算期内梯级电站所发出力不低于梯级总保证出力，梯级电站正常工作不遭受破坏的概率不低于设计保证率为最优目标。其递推关系为：

$$P_i[\zeta_i^n(V_{Ii},\ \Sigma N_i)]=\frac{1}{n-i}\{P_i[\zeta_i^{i+1}(V_{Ii},\ \Sigma N_i)]+[n-(i+1)]\times EP_i[\zeta_{i+1}^n(V_{I,(i+1)},\ \Sigma N_{i+1}^*)]\} \qquad (9\text{-}26)$$

式中 $\Sigma N_i=N_I+N_{II}$表示甲、乙两电站出力之和；

E——数学期望；

n——调节周期划分的时段数。枯水期按月，洪水期按旬，总计24个时段；

V_I——表示甲库存蓄水量；

$P_i[\zeta_i^n(V_{Ii},\Sigma N_i)]$——从时刻$t_i$的蓄水$V_{Ii}$出发，在$(t_i,t_n)$时期内出力不低于规定出力$N_i$的概率，其中面临时段出力选用$N_{Ii}$；

$P_i[\zeta_i^{i+1}(V_{Ii},\Sigma N_i)]$——面临时段概率；

$EP_i[\zeta_{i+1}^n(V_{I,(i+1)},\Sigma N_{i+1}^*)]$——余留时期概率期望值。

（2）上调度线递推方程式。在计算时期内，按梯级电站的总发电量最大为最优目标。其递推方程式采用式(9-23)。

（三）水库调度线的绘制

1.水库下调度线绘制步骤

（1）约束条件：

$$Z_{死} \leqslant Z_{I,i} \leqslant Z_{I,限};\quad Z_{II,i} \leqslant Z_{II,限};$$

$$N_{I,min} \leqslant N_{I,i} \leqslant N_{I,保};\quad \Sigma N_{I,min} \leqslant \Sigma N_i \leqslant \Sigma N_{保}$$

综合利用一般均能满足，对电站运行不起约束作用。

（2）计算步骤：

1）时段计算组合：水库调节周期从3月到次年2月，洪水期按旬，供水期按月共计24计算时段，除供水期末水库蓄水量为零、库水位为死水位外，其它各时段初蓄水量假定为10个方案，即时段初蓄水状态集合为$\{V_i'_1, V_i'_2, \cdots, V_i'_{10}\}$用$\{V_i\}$代表；时段末蓄水状态集合为$\{V_{i+1}'_1, V_{i+1}'_2, \cdots, V_{i+1,10}\}$用$\{V_{i+1}\}$代表。那么，一个时段蓄水状态组合有$m \times m$组，即$\{V_i\} \times \{V_{i+1}\} = 10 \times 10 = 100$。且每个时段$\{V_i\} \times \{V_{i+1}\}$蓄水状态又与10种频率的流量$\{Q_i\}$相组合。因此，每个时段计算组合方案有$\{V_i\} \times \{V_{i+1}\} \times \{Q_i\} = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$个方案，只有末时段组合方案为$\{V_i\} \times \{Q_i\} = 10 \times 10 = 100$，故整个调节周期方案组合数为$[\{V_i\} \times \{V_{i+1}\} \times \{Q_i\}]^{(n-1)} + [\{V_i\} \times \{Q_i\}]$。大量计算工作通过计算机来实现。计算时段与蓄水状态的划分与组合见图9-8及图9-9。

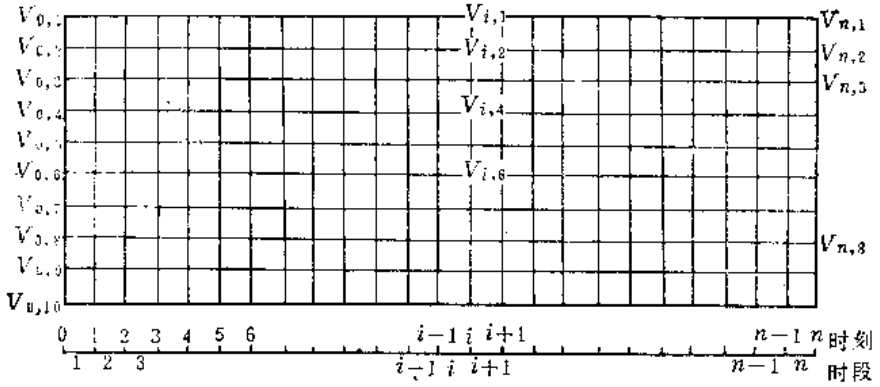


图 9-8 水库状态

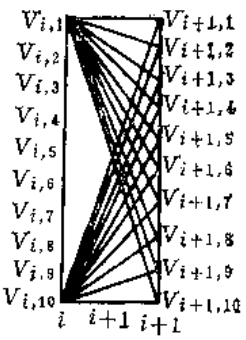


图 9-9 $(i+1)$时段放大

2）供水期最末一个时段的计算：由于供水期最后一个时段末的水库水位是已知的，水库的蓄水为死库容，即$V_{I,n} = V_{死}$。计算如下：

a）对一组时段初蓄水状态$\{V_{n-1}\}$，在一组天然来水$\{Q_n\}$情况下，与死水位$(V_n = V_{死})$进行调节计算，得出对应不同V_{n-1}与不同P（径流概率）下的梯级总出力ΣN。绘制以P为参数的$V_{n-1} \sim P \sim \Sigma N$关系曲线，如图9-10所示。

b）采用梯级决策出力$\Sigma N_i \leqslant \Sigma N_{保}$的一组方案，对每一方案分别在$V_{n-1} \sim P \sim \Sigma N$关系曲线上，求得不同$P$所对应的$V_{n-1}$值，绘制以$\Sigma N_i$为参数的$V_{n-1} \sim \Sigma N_i \sim P(\zeta_{i+1}^n)$关系曲线，即为最后一个时段的概率递推曲线，如图9-11所示。在$V_{n-1} \sim \Sigma N_i \sim P(\zeta_{i+1}^n)$曲线上用概率$P_{\#}$值与其相交，可求得在概率为$P_{\#}$的$V_{n-1} \sim \Sigma N_i$值，绘制成$V_{n-1} \sim \Sigma N_i$图，如图9-12。该图即为末时段最优下调度线。

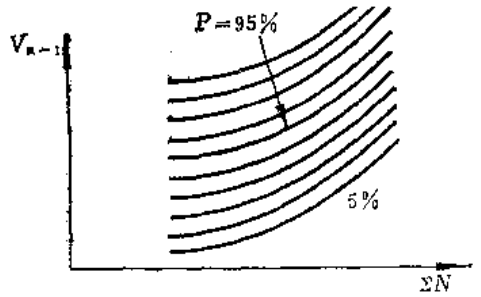


图 9-10 $V_{n-1}\sim P\sim \Sigma N$关系曲线

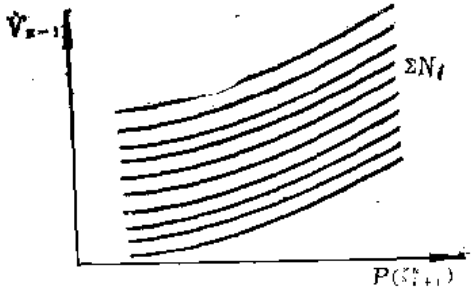


图 9-11 $V_{n-1}\sim \Sigma N_i\sim P(\zeta_{i+1}^n)$关系曲线

3）其他计算时段的计算，V_i与V_{i+1}（指时段初库容与时段末库容）均为未知值。

a）假设1个V_i值相应1个频率流量可求得10个V_{i+1}与ΣN_i值，即为一条以P为参量的$V_{i+1}\sim\Sigma N_i$线，相应10个P的流量，就有10条$V_{i+1}\sim\Sigma N_i$线，该10条$V_{i+1}\sim P\sim\Sigma N_i$线为时段初蓄水量为$V_i$时的一张调节计算图。当时段初蓄水量有10个时，则可作出10张$V_{i+1}\sim P\sim\Sigma N_i$曲线，如图9-13所示。该图纵坐标为$V_{i+1}$（时段末蓄水量），横坐标为$\Sigma N_i$（梯级出力）。该曲线不能作为下一时段的递推曲线，必须重新推求递推曲线。为了推求递推曲线，先要计算出该时段最优下调度线。

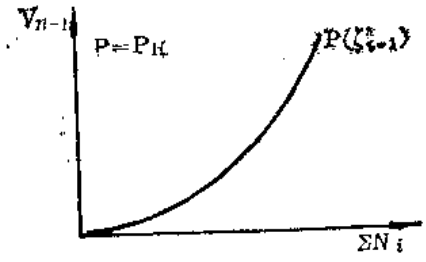


图 9-12 末时段最优下调度线

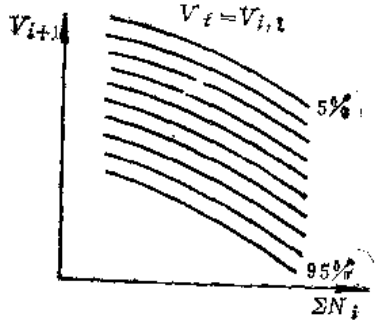


图 9-13 其他时段$V_{i+1}\sim P\sim\Sigma N_i$曲线

b）最优下调度线的推算：包括面临时段与余留时期两部分内容。面临时段的计算按表9-7格式，将上述10张调节计算曲线（即$V_{i+1}\sim P\sim\Sigma N_i$曲线）转换成工作曲线$V_i\sim\Sigma N_i\sim P$。

表9-7说明：

一、V_i：时段初水库蓄水量值。系调节计算时段假设值；

二、ΣN_i：选取的决策出力值；

三、第（1）栏，P：计算时段径流的概率取95～5%，共10组；

第（2）栏，V_{i+1}：时段末水库蓄水量。用决策出力ΣN_i在调节计算图上求出相应各种来水频率P时的V_{i+1}值，填入表9-7中的四～十三相应第（2）栏中；

第（3）栏，余留时期概率$P(\zeta_{i+1}^n)$，本计算时段末蓄水量为上一时段初的水库蓄水量。因此，根据表中V_{i+1}值在上一时段递推曲线$[V_i\sim\Sigma N_i\sim P(\zeta_{i+1}^n)]$上，找出相应的$P(\zeta_{i+1}^n)$值填入表内四～十三中第（3）栏内；

第（4）、（5）栏，同前；

表 9-7　　其他时段最优下调度线推算

一	V_i(月初库容)					
二	$\Sigma N_i(P=95\%)$			$\Sigma N_i(P=85\%)$		……
三	概率 P(%) (1)	V_{i+1} (2)	余留时期概率 $P(\zeta_{i+1}^n)$ (3)	V_{i+1} (4)	余留时期概率 $P(\zeta_{i+1}^n)$ (5)	
四	95					
五	85					
⋮	⋮					
十二	15					
十三	5					
十四	$EP(\zeta_{i+1}^n)$					
十五	$P(\zeta_i^{i+1})$					
十六	$P(\zeta_i^n)$					

十四、$EP(\zeta_{i+1}^n)$：对应每一决策出力ΣN_i下各V_{i+1}之概率，取期望值；

十五、$P(\zeta_i^{i+1})$：面临时段概率；

十六、$P(\zeta_i^n)$：总概率，即包括面临时段与余留时段的概率。

通过该表运算，可求得1个V_i值有1组$\Sigma N_i \sim P(\zeta_i^n)$值，10个$V_i$值，就有10组$\Sigma N_i \sim P(\zeta_i^n)$值，即为$V_i \sim \Sigma N_i \sim P(\zeta_i^n)$曲线，该曲线即为推求最优下调度线的工作曲线，如图9-14所示。

c）递推曲线的推算：对于其他时段的递推曲线推算，从递推曲线座标系统看与为求时段最优下调度线而作的工作曲线座标系统一样，均是$V_i \sim \Sigma N_i \sim P(\zeta_i^n)$，但两者有差异，因为计算工作曲线时，某1个$V_i$方案$t_i \sim t_{i+1}$时段可以采用不同出力$\Sigma N_i$。而绘制递推曲线时，应该是在某一种可靠度$P_{\text{设}}$状况下，对应某1个$V_i$只有1个最优出力$\Sigma N_i$，如图9-15。因此，必须在该时段最优下调度线求出后，由V_i在最优下调线上找出最优梯级出力值，再计算递推曲线，具体计算见表9-8。

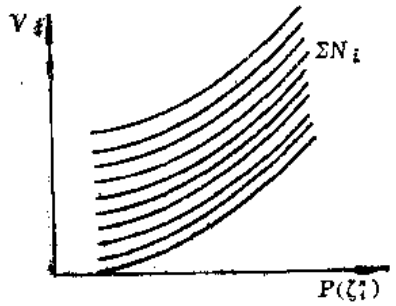


图 9-14　其他时段$V_i \sim \Sigma N_i \sim P(\zeta_i^n)$关系线

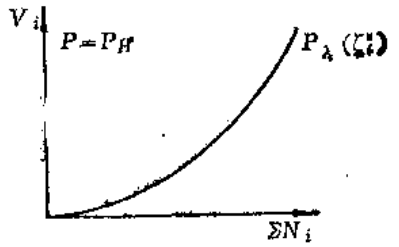


图 9-15　其他时段最优下调度线

表9-8说明：

一、V_i：时段初水库蓄水量；

ΣN_i^*：对应V_i时的最优出力。由V_i值在最优下调度线上查得；

二、第(2)栏，V_{i+1}：时段末水库蓄水量。用ΣN_i^*在调节曲线上查得在最优出力工况

表 9-8　　其他时段递推曲线计算

一		V_t	ΣN_t^*			
二		V_{t+1}	ΣN_{t1}	ΣN_{t2}	……	ΣN_{tj}
三	概率 P (%) (1)	(2)	$P_1(\zeta_{t+1}^*)$ (3)	$P_2(\zeta_{t+1}^*)$ (4)	……	$P_j(\zeta_{t+1}^*)$
四	95					
五	85					
⋮	⋮					
十二	15					
十三	5					
十四	$EP(\zeta_{t+1}^*)$					
十五	$P(\zeta_t^{t+1})$					
十六	$P(\zeta_t^*)$					

下，相应不同频率来水的V_{t+1}值填入表9-8中四～十三第(2)栏内；

二、第(3)、(4)栏，ΣN_{tj}：决策出力；

三、第(1)栏，概率P：指来水频率；

第(3)，(4)栏，$P(\zeta_{t+1}^*)$：余留时期概率，用V_{t+1}与ΣN_t在上一时段递推线上查得填入；

十四、$EP(\zeta_{t+1}^*)$：余留时期概率期望值；

十五、$P(\zeta_t^{t+1})$：面临时期概率；

十六、$P(\zeta_t^*)$：总概率，由递推计算式求得。

由表可求得1个V_t值有1组$\Sigma N_t \sim P(\zeta_t^*)$值，10个$V_t$值，有10组$\Sigma N_t \sim P(\zeta_t^*)$值，可绘得$V_t \sim \Sigma N_t \sim P(\zeta_t^*)$曲线。该曲线即为所求的递推曲线，供下一时段计算用。

按上面所述计算过程，逐时段推算，计算一个完整的调节周期(24个时段)的各时段的最优下调度线。分析所得各时段最优下调度线是否符合要求，如果符合，各时段最优下调度线即为所求，否则，重新递推计算。其鉴别标准为：

(1)整个调节周期按梯级保证出力工作；

(2)起调从死库容开始，至调节周期结束，仍回到死库容。

若终了蓄水量高于死库容，则减小pH值，若低于死库容则提高pH值，直到符合上述两标准，则各时段最优下调度线即为所求。

用梯级保证出力ΣN_t，在各时段最优下调度线上查得各时段V_t值，将每一时段V_t值联线即为所求的最优下调线。

降低出力线，在相应各时段最优下调度曲线上，用降低出力值求得相应的V_t值，分别将其各点联线，即为各降低出力曲线。

2.水库上调度线绘制步骤

上调度线是在下调度线所确定的保证运行方式基础上，使梯级水电站总出力满足发电

量最大的调度准则。

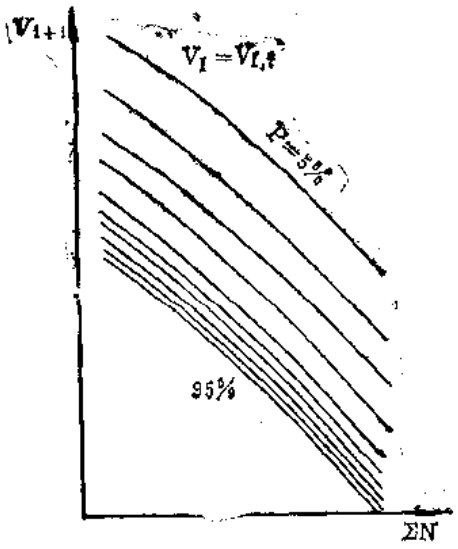


图 9-16 $V_{t+1}\sim P\sim \Sigma N$关系线

（1）约束条件：

$$Z_{1,\text{下限}}\leqslant Z_{1,t}\leqslant Z_{1,\text{上限}};$$

$$Z_{11,t}\leqslant Z_{11,\text{上限}}$$

$$N_{1,\text{保}}\leqslant N_{1,t}\leqslant N_{1,\text{限}}$$

$$N_{11,\text{保}}\leqslant N_{11,t}\leqslant N_{11,\text{限}}$$

$$(N_{1,\text{保}}+N_{11,\text{保}})\leqslant \Sigma N_{\text{梯},t}\leqslant (N_{1,\text{限}}+N_{11,\text{限}})$$

综合利用要求同前。

（2）计算步骤：于上限制线与最优下调度线之间，拟定1组蓄水方案$\{V_{1,t}\}$，即$V_{1,t}[1]$，$V_{1,t}[2],\cdots,V_{1,t}[10]$，对应每1个$V_{1,t}$方案，定出1组决策出力$\Sigma N_i(i=1,2,\cdots,10)$。对不同的$V_{1,t}$和不同的$\Sigma N_i$以及不同的来水频率$P$组合方案，进行等出力补偿调节计算，得到1组同一初始蓄水$V_{1,t}$下，不同决策出力ΣN，不同来水频率P的水库时段末蓄水$V_{1,t+1}$，如图9-16所示。

如果时段末蓄水量$V_{1,t+1}$低于最优下调度线（或死水位时），这时只能以时段初水库蓄水量与最优下调度线（或死水位）相应水库蓄水量的差值加上天然来水进行发电，其实际出力就达不到决策出力。

由1组$V_{1,t+1}$查余留时期的递推曲线，求得相应的余留时期梯级出力及其数学期望值。

根据递推关系式（9-26）计算，求得梯级面临时段实际出力与余留时期出力期望值之和ΣN_i^*。

同1个V_t值，有1组梯级出力值。重复上述计算，相应可求得1组ΣN_i^*值。根据最优化原理，选取$\Sigma N_i^*=\max$值，该值所相应的ΣN^*值即为相应于$V_{1,t}$时面临时段的最优决策。

逐一假定V_t，重复上述计算，求得$V_{1,t}\sim\Sigma N^*$及$V_{1,t}\sim EN_i^*$曲线。前者为该时段的上调度线，后者为发电效益递推曲线，供下一时段递推计算用。

其他时段逐一重复上述计算，递推至第一时段，即得各时段的发电效益递推曲线和上调度线。

一般这样的计算要重复两、三遍才可能趋于收敛，收敛稳定结果才是我们所求的最优上调度线。

（四）调度全图

将上、下调度线绘制在一张图上，即为调度全图。全图分保证出力区，加大出力区及降低出力区，见图9-17。

二、应用增量动态规划法绘制水库调度图算例

径流采用确定性的，第一级径流属平偏丰年，第二级径流属偏枯年。

调度准则采用“保证峰荷电能最大，电力系统能耗较小，系统经济效益最优”。用式（2-12）～式（2-19）来体现。

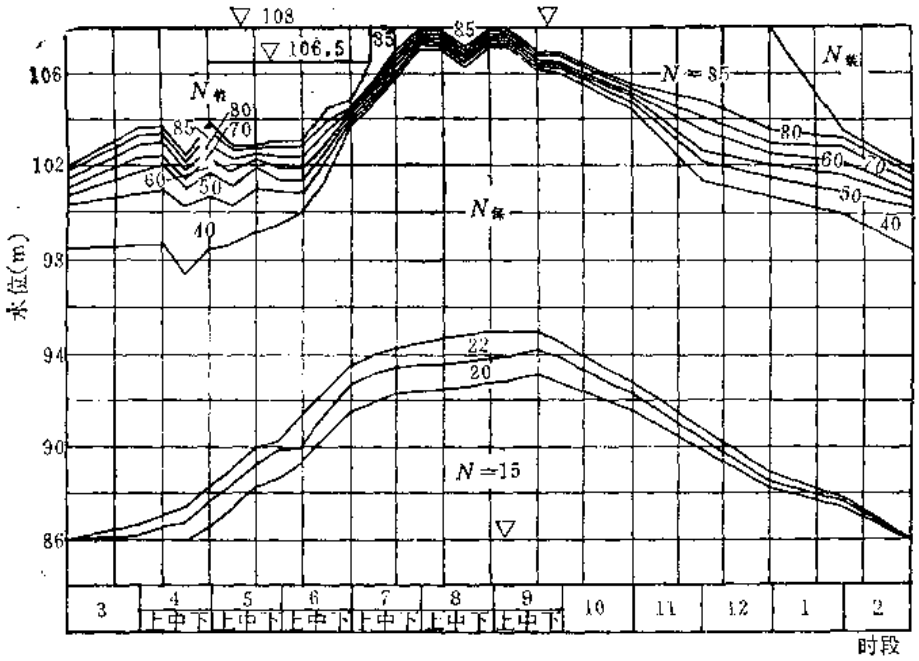


图 9-17　水电站水库调度全图

递推方程式采用确定性径流，增量动态规划法，进行递推计算，其递推式为：

$$f^*(n,i)=\max_{d\in D}\{CE+f^*(n+1,j)\} \qquad (9\text{-}27)$$

式中　C——水电站每度电价格，(元/kW·h)。

C值视水电站各时期运行方式而定。具体价格确定法见第二章第二节中所述。

计算中采用经济资料：

（1）火电站峰荷燃料费：0.021元/kW·h；

（2）火电站峰荷燃料费比基荷燃料费增加0.003元/kW·h；

（3）水电站每度电能价格

C_1　取0.065元/kW·h；　　C_2　取$\phi_1 C_1$；

C_3　取$\phi_2 C_1$；　　C_4　取$\phi_3 C_1$。

式中ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3为价格系数。按各电力系统特性来确定。

按照上述目标函数与资料，应用增量动态规划法分旬逐时段逆时序递推。递推计算中考虑两水库状态特点，利用库容差异进行补偿。该计算结果与以发电量最大为目标函数以及实际运行情况三者相比较，见表9-9。

由表9-9可知，以保证峰荷电能最大，系统能耗最小，系统总经济效益最优为目标函数的调度运行最为有利，总效益值最大，保证峰荷运行历时最长，降低出力运行历时最短，发电量居次，使该电站真正起到主导调峰作用。其次是以发电量最大为目标函数的运行方式。而实际运行方式虽然库水位比其他两种方式都高，但降低出力运行历时太长，甚至有的时段破坏太深、需增加系统总燃料费，不一定合理。

由此说明，选择水电站目标函数在水库调度中是很重要的问题，应予以足够地重视。

表 3-9　　结　果　比　较

项目 \ 目标函数	保证峰荷电能最大	发电量最大	实际运行
保证峰荷运行时段数(36时段)(段)	32	30	11
加大出力运行时段数(段)	—	1	3
降低出力运行时段数(段)	4	5	22
年末水位(m)	100.81	100.52	101.76
年总发电量(亿kW·h)	20.672	21.021	19.607
按质论价计算总效益(万元)	12930.25	12823.67	8581.91
水电站降低出力运行需火电增发的电量(亿kW·h)	0.496	0.557	5.62
*系统增加总燃料费(万元)	104.16	117.08	1180.16
**折合标准煤(万t)	7.18	8.07	81.39
标准煤差(万t)	—	0.89	74.21

* 增加系统总燃料费包括两部分，一部分为水电站降低出力运行后，系统火电站需增加发电部分；另一部分水电站发电过多而不能全调峰，需由火电来顶一部分而增加燃耗的费用；

** 标准煤价按国际市场供给火电厂燃料销售价的平均值14.5元/t计算。

第十章　大系统分解协调法

第一节　概　　述

一、系统

系统就是由相互作用和相互依赖的若干组成部分按一定规律结合成的，具有特定功能的有机整体。

系统具有以下特性：

（1）系统是由许多元素按照一定方式组合起来的，这一特征称为系统的"集合性"。随着生产技术与社会的发展，系统中的元素数目愈来愈多，一部电视机有10^3个元件，宇宙飞船系统则有10^7单元。

（2）系统的各个组成部分之间是互相联系，互相制约的，这一特征称为系统的"关联性"，这种关联是有一定规律的。例如机械加工车间是由机床组成的，但一群机床并不等于一个车间，必须按生产工序把一定类型的机床组织起来，才能形成一个车间。又如，对于电子计算机系统来说，各种运算装置、储存装置、控制装置、输入输出装置等各个硬件和操作系统、程序等各种软件都是构成要素，它们之间通过特定的关系，有机结合在一起，就形成一个具有特定性能的计算机系统。

（3）系统总是具有特定功能的，特别是人所创造或改造的系统，总有一定的目的性，各单元正是按这个目的组织起来的，人造系统的这一特征可称为它的"目的性"。

（4）任何系统总是存在并活动于一个特定的环境之中，与环境不断进行物质、能量、信息的交换。系统必须适应环境。这种特征称为系统的"环境适应性"。

为使系统执行所要求的任务，而改变输出的运行状态。其目的是向对人们有利的方向改变系统的运动规律而对系统进行控制。控制随着时间的演变叫做控制策略或称为控制轨迹，其中的时间间隔称时界。时界可以是有界的，也可以是无界的；可以事先决定，也可以结合控制过程的情况来决定。

（一）控制系统的类

控制系统一般可分五类：

1.开环控制系统

如图10-1所示。开环控制问题可以是静态的或是动态的。

2.闭环控制系统

此系统包含有一个正向通道和反馈通道，使得控制变量成为被控制系统的函数，如图10-2所示。闭环控制问题一般是动态最优化问题。

3.自适应控制系统

此系统在环境条件有大范围急剧变化时，能改变系统本身的参数或控制作用的方式，

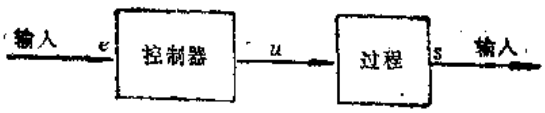


图 10-1 开环控制系统

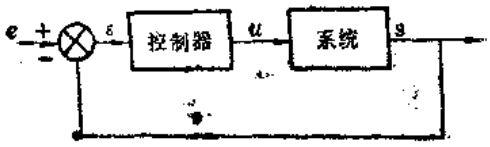


图 10-2 闭环控制系统

使系统仍按某一性能指标继续运行在最优状态。

4.自组织控制系统

此系统能在环境变化的情况下，选择自己最适应的结构。

5.递阶或多级系统

控制作用是分布在很多级上来控制。他具有一个整体目标，各级具有各自的目标，各子系统的局部目标与整体系统的全局目标最终将取得协调。在多级控制结构中的每一级包括有一定数量的决策器，且各级决策器均具有一定的决策能力。各决策器间是通过它们的模型、目标或约束条件等关联起来。同级决策器可以平行工作。信息是由相邻级传送，由上而下的信息有优先权。

如果上述系统系随机输入则称为随机控制问题，如果属确定性输入则称为确定性控制问题。

（二）系统模型的辨识

对于所研究与解决的系统，首先要对其实际过程进行数学描述，即用一组数学关系式来给以表达，而这一组数学关系式就构成了这一过程的数学模型。

对过程建立数学模型叫做辨识。辨识是实现优化的第一个重要步骤，其精度直接关系到系统优化的结果。

一般，辨识可以分成结构确定和参数估计两方面来进行。模型结构通常由我们对过程已有的物理知识来确定。参数估计能使我们对参数给出精确的数值，让模型来描述一个真实过程。

（三）最优化方法

最优化问题是解决既达到设定值（由控制过程所完成的任务）和最优准则，又满足约束条件的控制轨线问题。具体方法可分三类：

（1）数学规则（线性及非线性）；

（2）变分法：极大值原理，经典变分法；

（3）动态规划。

应用范围列于表10-1；

无论是哪一种最优化问题，均可归纳为如下所述步骤的流程图（图10-3）。

二、大系统

大系统（Large Scale System）是指规模庞大、结构复杂的各种工程或非工程的系统。例如，综合自动化的钢铁联合企业系统、区域电网的自动调节系统、水资源系统、能

表 10-1　　静态和动态过程采用的最优化方法

问题描述形式	方法
一、静态过程	
1.无约束问题 max　$J=J(x)$　(准则) 式中x为向量	初级极值原理
2.等式约束问题 max　$J=J(x)$　(准则) 约束条件:　$g(x)=0$	拉格朗日乘子法
3.不等式约束问题 $J=J(x)$ 约束条件:　$h(x)\leqslant 0$	
4.线性问题 $J=\sum_i c_i x_i$　$(i=1, 2, \cdots, n)$ 约束条件: $\sum_i a_{ij} x_i=b_j$　$(j=1, 2, \cdots, m)$ $x_i\geqslant 0$　$(i=1, 2, \cdots, n)$	单纯形法
5.一般非线性问题 $J=J(x)$ 约束条件为: $g_j(x)$　$(\leqslant, =, \geqslant)b_j$ $(j=1, 2, \cdots, m)$	非线性规划
二、动态过程	
1.线性问题 $J=J(x, u, t)$ 约束条件为: $\phi=\dot{x}-A(t)x-B(t)u=0$	变分法 动态规划 梯度法
2.非线性问题 $J=J(x, u, t)$ 约束条件为: $\phi=\dot{x}-g(x, u, t)=0$ (J, g为非线性)	变分法 动态规划 梯度法 准线性化
三、复合静态或动态系统	按数学规划和变分法的分解——协调法，递阶控制与最优化

源系统、大规模信息自动检索系统、财政金融管理系统、交通系统、生产管理系统、消费分配系统、社会系统、城市系统、环境保护系统和计算机系统等，均由许多环节构成，涉及的因素多而复杂。我们不能对各个环节孤立地进行研究和管理，必须把这些环节连接起来，全局地加以研究，以便获得一个全局优化的运行管理系统。这就构成了一个典型的大系统优化问题。

由于大系统性能的一些很小的改善都会带来巨大的收益，因此，研究大系统优化问题是非常有实用价值的。

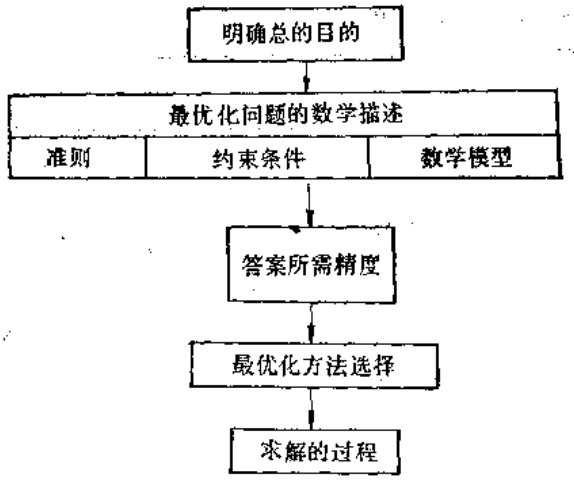


图 10-3 流程图

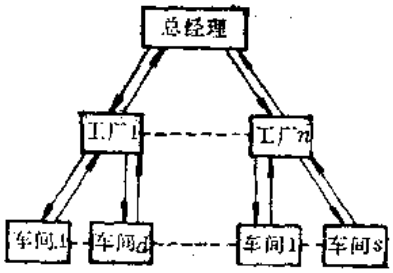


图 10-4 某公司的经营管理组织形式

大系统优化问题一般具有下列特征：

（1）复杂性。问题的特征，例如时标、分量的互连度，经常是非齐次、非线性（有时为分布参数）的，系统方程经常是动态的。

（2）规模大。系统方程的个数、约束数、状态变量个数都是相当大的。

（3）混合性。系统的决策变量具有混合性质，例如，在一些网络应用（电力网络规划问题，水资源泵的控制问题）和投资规划问题中经常同时具有离散和连续决策变量等。

（4）随机性。例如系统的资源要求（运行要求）常带有随机性，系统部件故障的发生也有随机性等。

一般说来，上述性质给大系统优化问题的解决带来困难。用一般的系统论、优化和控制理论及计算技术在目前的计算设备条件下解决大系统优化问题是有困难的。但是，从另一个方面来看，大系统优化问题的这些性质又向我们提供了一些简化问题、解决问题的可能机会。通过人们20多年的不断研究探索和实际应用，逐渐形成了大系统优化理论和应用技术。

大系统理论所要研究的问题，就是按照整个系统的最优指标和整个系统与各子系统之间的关系，最优地分配各子系统的指标，并以此控制各子系统，使整个系统达到最优化。

例如，某总公司与工厂、工厂与车间之间的经营管理组织形式，如图10-4所示。总公司的总经理不可能直接领导各个车间的生产，必然采取图10-4所示逐级领导的方式。在这种组织形式里，下级要向上级汇报，上级对下级发指示，从而使各个车间和各个工厂的生产秩序井然，以满足总公司的某种目标为最优。

（一）大系统结构

大系统是递阶或多级结构模型，其控制作用是分布在很多级上来控制。无论是经济管理系统、交通运输网的调度指挥、电力系统中发电运行调度或在自然界中的长期进化过程中，自然形成的生物神经系统均是多变量、多级结构。这种控制结构是以金字塔形组成递阶系统，如图10-5所示。

第一级系局部控制级，它直接控制大系统的各局部过程构成子系级。最高级协调，根

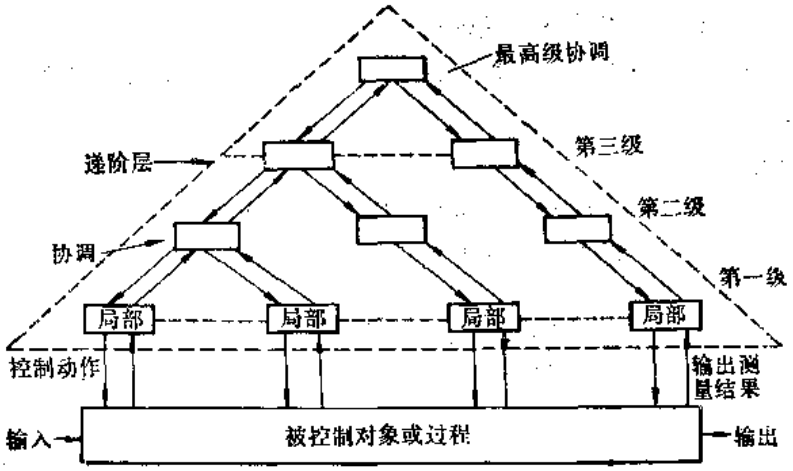


图 10-5 大系统递阶控制结构

据大系统的总目标，通过递阶结构，完成大系统管理、控制的总任务。中间各级对下级进行协调控制，并接受上一级控制。

递阶系统结构形式依据模型参数，决策变量，运行和环境情况，目标以及其它不确定因素等，一般有三种基本结构：

1.多阶层递阶结构

多阶层递阶结构(*Multistrata Hierarchical Structure*)的多级系统的级称为阶层。当描述或仿真一个复杂系统时，可以根据不同阶层的内容和要求垂直分成若干阶层。例如，水库调度运行，如图10-6。

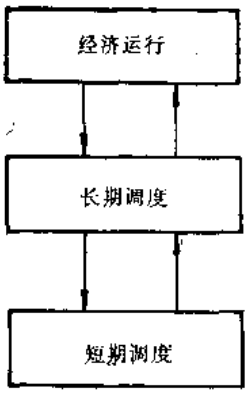


图 10-6 多阶层递阶结构

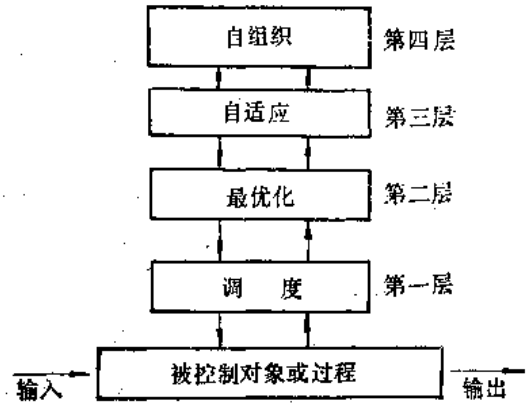


图 10-7 多层递阶结构

2.多层递阶结构

多层递阶结构(*Multilayer Hierarchical Structure*)是将控制任务垂直分解成若干基本控制任务。即可垂直划分成若干层（如图10-7）：

第一层调度层：根据第二层最优控制指令直接控制生产过程。

第二层最优化层：根据给定目标函数、约束条件及系统数学模型进行最优控制。

第三层自适应层：根据对象特性或运行情况的变化，对最优层的目标函数、约束条件

及数学模型进行适当修正，保持系统最优运行。

第四层自组织层：根据大系统的总目标、总任务，考虑环境条件变化，制订决策、计划协调与组织管理。

3.多阶递阶结构

多阶递阶结构(*Multiechelon Hierarchical Structure*)是最一般的结构形式，该结构既包含垂直分解，又包含水平分解如图10-5与图10-8所示。

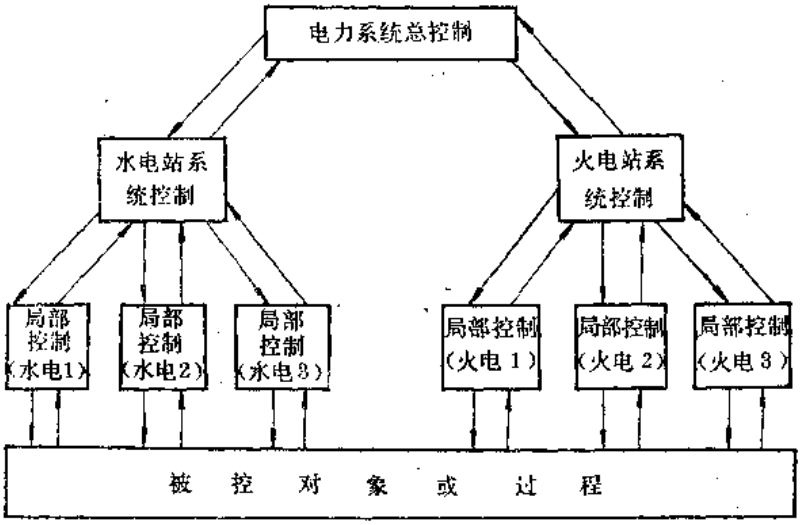


图 10-8 多阶递阶结构

（二）大系统优化

大系统优化分为静态优化和动态优化两大部分。静态的大系统优化问题的解法一般有三类型：

1.直接方法

即改进现有的优化方法去解各种大型的优化问题，例如，线性规划中的单纯形法，非线性规划中的共轭梯度，拟牛顿法。这类方法经常用于大型优化问题的特殊结构。

2.多级递阶分析法

就是把大规模的和复杂系统分解成“独立”的子系统，然后建立模型。即利用层次、等级和梯队分散处理，使系统分析人员可以分析、了解下层子系统的行为，并把得到的信息传递到上层子系统中。如果需要，尚可把子系统进一步分解。然后，对各个子系统分散地、独立地进行最优化处理，这是第一级解。子系统之间用耦合变量连接，在第二级或更高级执行控制，达到全系统最优化，称为第二级或高级解。这也就是解决大系统问题行之有效的分解协调法。

3.新方法

例如在解决美国大型电话系统优化的动机下提出的线性规划的新的多项式算法(*Karmar Kar*算法），它不同于传统的单纯形方法，对大型问题求解较为有效。这个方法的产生轰动了世界，具有很大的理论价值和应用价值。

第二节　大系统分解协调法

一、概述

分解协调法（*Decomposition Coordination*）系指将规模庞大而又复杂的系统，通过一定途径分解成若干独立的而又存在相互制约的子系统。先解决各子系统自身最优，反馈至上一级，再由上一级根据总体最优条件进行协调各子系统，直至它们各自既能达到最优，又能满足彼此制约关系，从而达到整体最优。

也就是说大系统通过递阶控制，把一个总体问题P，分解成若干子问题P_i。对该复杂系统的总体目标取极值，而各子问题是局部求解，要使各子问题的解值之和等于总体问题P的最优解。即：

$[P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n]$的解$\Longrightarrow$总体问题的最优解

但是，由于各子问题P_i之间存在着某种关联而发生的矛盾，实际上述等式是不可能的。为此，必须引进一个协调参数α，用$P_i(\alpha)$代替P_i，则上式改变为：

$[P_1(\alpha), P_2(\alpha), \cdots, P_n(\alpha)]_{\alpha=\alpha^*}$的解$\Longrightarrow$总体问题$P$的最优解

这样，就形成了一个两级结构，下级只管局部优化，但受上级给定的协调参量约束；上级只要进行协调。这种分解协调处理方式应用日益广泛，因为它具有下列优点：

（1）分解成子问题后，规模要小得多。如果系统有n个变量，分成N个子系统，则

$$n=\sum_{i=1}^{N} n_i$$

式中　n_i——每个子系统的变量。

在优化计算过程中，计算工作量（在计算机上涉及计算时间与内存容量）有的与n成正比，有的与n^2甚至与n^3成正比，若按n^3来估计，一般总是：

$$n^3 \gg \left(\sum_{i=1}^{N} n_i^3 + K\right)$$

其中K是用于协调的计算工作量。

（2）各个子系统可以各自选用自己适宜的模型，例如能用线性规划的就用线性规划，不必因为有一个子系统中有了非线性而在整个处理过程中都按非线性处理，因此，显得灵活。

（3）问题规模小，子系统的模型实际意义更鲜明，就更便于分析处理。

（4）可以使用多部微机进行并行处理，加快计算速度。

（5）更接近实际情况，如图10-8所示的逐级领导方式。

二、大系统分解协调

大系统分解一般有以下三种：

1.按时间分解

按不同时间标尺将原系统分解为若干子系统。

2.按空间分解

215—3

将一个整体系统变换为一组子系统以及和它们联系在一起的耦合关系。如电力系统中常将整个电力系统按地区或按电站类型划分成若干子系统。又如将整个水电能源系统中流域规划区域按行政区划分成为一些子系统，这种结构对于递阶决策很有利。

3.按职能分解

将一个整体系统按各部分不同职能分解成若干子系统。如将水电能源这个整体系统，按职能分解为发电、灌溉、航运、防洪、旅游等子系统。

为了说明问题，用一个简单例子说明。例如一个总公司，下属两个子公司，每个子公司都有两个决策变量，而且这两个子公司分别具有2个和3个需要遵守的约束，且所有决策变量需要遵守非负的约束。其数学表达式为：

目标函数：
$$\min_{x_1^1,\cdots,x_2^2} \quad -x_1^1-x_2^1-2x_1^2-x_2^2 \tag{10-1}$$

约束条件：
$$x_1^1+2x_2^1+2x_1^2+x_2^2=40 \tag{10-2}$$
$$x_1^1+3x_2^1=30 \tag{10-3}$$
$$2x_1^1+x_2^1=20 \tag{10-4}$$
$$x_1^2=10 \tag{10-5}$$
$$x_2^2=10 \tag{10-6}$$
$$x_1^2+x_2^2=15 \tag{10-7}$$
$$x_1^1,\ x_2^1,\ x_1^2,\ x_2^2\geqslant 0$$

式中，x_1^1，x_2^1为子公司1的两个决策变量；x_1^2，x_2^2为子公司2的两个决策变量。上角标表示公司，下角标表示变量。式(10-1)表示总公司目标，式(10-2)表示各子公司间的联系约束，式(10-3)、式(10-4)表示子公司1的约束，式(10-5)，式(10-6)和式(10-7)，表示子公司2的约束。

上述用向量形式表示：
$$\min_{X_1,\ X_2} \quad C_1X_1+C_2X_2$$

约束条件：
$$A_1X_1+A_2X_2=b_0$$
$$B_1X_1=b_1$$
$$B_2X_2=b_2$$
$$X_1,\ X_2\geqslant 0$$

并将该形式扩大则变为：
$$\min_{X_1,\cdots,X_p} \quad C_1X_1+C_2X_2+\cdots\cdots+C_pX_p \tag{10-8}$$

约束
$$A_1X_1+A_2X_2+\cdots\cdots+A_pX_p=b_0 \tag{10-9}$$

$$\left.\begin{array}{l} B_1X_1=b_1 \\ B_2X_2=b_2 \\ \ddots\quad\vdots \\ B_pX_p=b_p \end{array}\right\} \tag{10-10}$$

$$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_p \geqslant 0$$

式中，约束方程中的系数矩阵$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_p;\ B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_p$构成了约束矩阵，它具有下列结构

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots\cdots & A_p \\ B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & & B_p \end{bmatrix} \qquad (10\text{-}11)$$

该结构称为P块角形结构，简称块角结构。这种是大线性规划中的一种形式。

然后对其进行分解，一般可用Dantzing—Wolfe分解原理进行分解，阐述如下：

（1）Dantzing和Wolfe的分解原理。Dantzing和Wolfe（1961）利用凸组合定理把原问题变换成等价的主导规划问题。主导规划的约束条件个数比原问题的要少，但往往具有很多列。Dantzing——Wolfe分解原理实质上是二级方法。低级问题由几个独立的子问题组成。子问题接受从高级的主导规划来的一组参数（单纯形乘子或价格），子问题解再被送回主导规划，以便产生新的价格。如此迭代进行，直至通过最优性检验。在这种方法里，主导规划依靠子问题使用的资源的价格来协调子问题的活动，如图10-9所示。

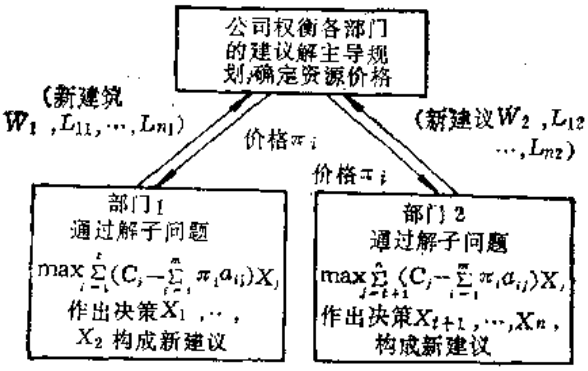


图 10-9 利用子问题的资源价格

该图说明分解原理使价格理论和分散决策建立了联系。分散原理使我们能利用价格来调节若干个决策者的活动。

如当公司给出资源的价格后，部门1的净利润为：

$$\text{净利润}=(\text{毛收入})-(\text{资源费用})$$

$$=W_1-\sum_{i=1}^{m}\pi_i L_{i1} \qquad (10\text{-}12)$$

其中$W_1=C_1X_1+C_2X_2+\cdots+C_tX_t=\sum_{j=1}^{t}C_jX_j$，而其中$X_j$表示部门1作出的决策；$\pi_i$表示资源价格；$L_{i1}$（资源使用总量）$=a_{i1}X_1+\cdots\cdots+a_{it}X_t=\sum_{j=1}^{t}(a_{ij}X_j)$。因此，上式可表示为：

$$\text{净利润}=\sum_{j=1}^{t}\left(C_j-\sum_{i=1}^{m}\pi_i a_{ij}\right)X_j \qquad (10\text{-}13)$$

部门要作出决策使获得最大净利润。其他部门同此。然后以建议的形式传送信息（W_k，L_{1k}，L_{2k}，…，L_{mk}）给公司（角标k表示部门数）。公司对k个部门送上来的建议加以判别，对最优性加以估计。

（2）Dantzing—Wolfe分解。式（10-10）中有P组独立的约束，第i组约束为：

$$B_iX_i=b_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ P$$

$$X_i\geqslant 0$$

该式实际表示了P个凸多面体，其中第i个凸多面体所属空间为n_i维。

根据凸多面体的一种性质：有界凸多面体上的任一点，可表示为该多面体各顶点的线性组合(称为凸组合)，即：

$$X_i=\sum_{j=1}^{l_i}\lambda_{ij}X_i^j \tag{10-14}$$

而

$$\sum_{j=1}^{l_i}\lambda_{ij}=1$$

$$\lambda_{ij}\geqslant 0$$

式中，X_i为第i个凸多面体上的任一点，为n_i维向量，X_i^j为第i个凸多面体的第j个顶点，也是n_i维向量；X_i^j只表示一组特定的值，即顶点，而不表示变量；λ_{ij}为标量，未知的，即表示变量；l_i表示第i个凸多面体所具有的顶点数目，顶点数一般大于空间的维数，即$l_i>n_i$，而$i=1,\ 2,\ \cdots,\ P$，表示有P组式子。

将式(10-14)代入式(10-8)则得：

$$\min_{\lambda_{11},\cdots,\lambda_{pl}}\sum_{j=1}^{l_1}(C_1X_1^j)\lambda_{1j}+\sum_{j=1}^{l_2}(C_2X_2^j)\lambda_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{l_p}(C_pX_p^j)\lambda_{pj} \tag{10-15}$$

约束条件：$\sum_{j=1}^{l_1}(A_1X_1^j)\lambda_{1j}+\sum_{j=1}^{l_2}(A_2X_2^j)\lambda_{2j}+\cdots+\sum_{j=1}^{l_p}(A_pX_p^j)\lambda_{pj}=b_0$

$$\sum_{j=1}^{l_1}\lambda_{1j}=1$$

$$+\sum_{j=1}^{l_2}\lambda_{2j}=1$$

$$\vdots$$

$$+\sum_{j=1}^{l_p}\lambda_{pj}=1$$

$$\lambda_{1j},\ \lambda_{2j},\ \cdots,\ \lambda_{pj}\geqslant 0$$

该式人们称之为主导规划与式(10-8)是等价的，它们具有同样的最优解值。

为了书写方便，将主导规划中的相对费用系数$C_iX_i^j$用f_{ij}表示，即：

$$f_{ij}=C_iX_i^j \tag{10-16}$$

主导规划的修正的相对费用系数$\bar{f}_{ij}$为：

$$\bar{f}_{ij}=f_{ij}-\pi P_i \tag{10-17}$$

式中，P_i表示主导规划约束矩阵的列。

$$\bar{f}_{ij}=f_{ij}-[\pi,\pi_{01},\pi_{02},\cdots,\pi_{0i},\cdots,\pi_{0P}]\begin{bmatrix}A_iX_i^j\\ \cdots\cdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \cdots\cdots\\ 1\\ \cdots\cdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\leftarrow\text{第 } i \text{ 块} \tag{10-18}$$

式中，π为单纯乘子向量(行向量)，π分成P+1块，除第一块为行向量π之外，其它P块均为标量。

按单纯形法将式(10-18)化为具有基本变量的标准形式，然后求出转动变换后的最小的一个相对费用系数$\min\bar{f}_{ij}$，如果它大于或等于零，则有最优解，计算结束；如果它小于零，则继续进行转动变换，直到$\min\bar{f}_{ij}\geqslant 0$，求出最优解为止。

由于π_{0i}是常量，故求$\min\bar{f}_{ij}$的问题等效于求，也就是这时子问题变成：

$$\min\sum_{i=1}^{P}(C_i-\pi A_i)X_i^j \tag{10-19}$$

约束条件为：　　$B_iX_i=b_i,\ X_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots;\ P。$

又因为子问题目标函数是可分的，约束条件又是相互独立的，所以变成P个独立子问题：

$$\min(C_i-\pi A_i)X_i$$

约束条件：　　$B_iX_i=b_i,\ X_i\geqslant 0$

这些问题就构成了子问题，与主导规划两级结构，如图10-10所示。

上述说明，Dantzing--Wolfe分解是把一个大线性规划分解成一个主导规划和P个子问题。

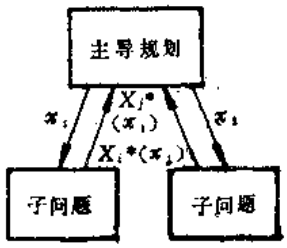


图 10-10　两级结构

(3)分解算法。这里讨论的分解算法就是两级算法。

首先考虑子问题的目标，并遵守约束条件，即：

$$\min_{X_i}\ C_iX_i$$

约束条件：　　$B_iX_i=b_i,\ X_i\geqslant 0$

未考虑关联约束的情况下，子问题独自寻优，然后把满足子问题约束的极点呈送给主问题，研究在这样的条件下，主问题是否亦能达到最优。如果不能，修改子问题目标，即：

$$\min_{X_i}(C_i-\pi A_i)X_i$$

式中，πA_i为考虑子问题目标的修正。子问题目标按此修正后，重新寻优，将新的顶点

X_i^j反馈给主问题．如此反复运算，直至主问题达到最优为止，如图10-11。

具体数字实例，因受篇幅限制不再例举，请参阅有关书籍。

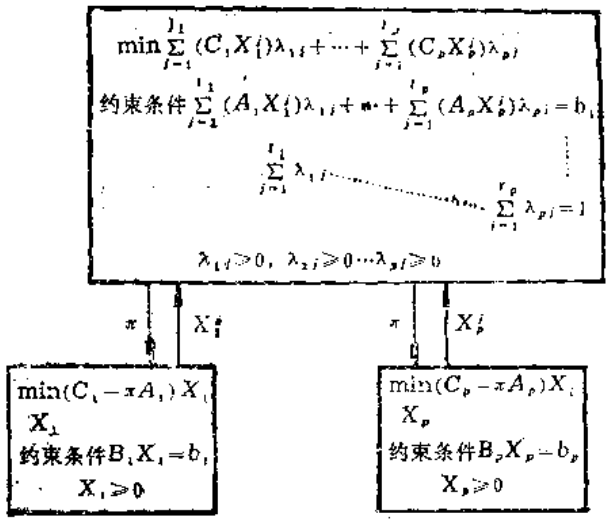


图 10-11

三、非线性规划的分解与协调

(一)非线性系统

我们所研究的大系统由N个子系统组成，目标函数与约束条件为

目标函数：
$$\min \sum_{i=1}^{N} f_i(X_i)$$

约束条件：
$$g_i(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_N)\geqslant 0$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

构成拉格朗日函数：

$$L(X,\mu)=\sum_{i=1}^{N} f_i(X_i)+\sum_{i=1}^{N}\mu_i^T g_i(X_1,X_2,\cdots,X_N)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}[f_i(X_i)+\mu_i^T g_i(X_1,X_2,\cdots,X_N)]$$

为了把这一问题加以分解，我们希望括号中各项只是各个子系统i本身变量X_i的函数。定义一组新变量S_j

$$S_j=X_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N$$

代入上式，得：

$$L(X,\ \lambda,\ \mu,\ S)=\sum_{i=1}^{N}[f_i(X_i)+\mu_i^T g_i(X_i,\ S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_k)$$
$$+\lambda_i^T(X_i-S_i)]_{j\neq i}$$

对$j\neq i$来说，如果$g_i(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_k)$不是$X_i$的函数，则$\lambda_i=0$。

(二)协调方法

协调方法基本用两种思路：一种是对子系统的目标函数施加作用称目标协调法；另一

种关联预估，对子系统输出的预估（又称模型协调）。或对子系统关联输入的预估。

1. 目标协调法

这种方法把λ_i当作固定参数，这时令：

$$S_{ij}=X_j,\quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N,$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N,\ j\neq i$$

其中S_{ij}表明在第i个系统中出现X_j，则原来的拉格朗日函数变为：

$$L(X,\ \lambda,\ \mu,\ S)=\sum_{i=1}^{N}\Big[f_i(X_i)+\mu_i^T g_i(X_i,\ S_{i1},\ S_{i2},\ \cdots\cdots,\ S_{iN})$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}^T(X_j-S_{ij})\Big]$$

其中当$g_i(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_N)$不是$X_j$的函数时，$\lambda_{ij}=0$。

这时，子系统的拉格朗日函数为：

$$L_i(X_i,\ \mu_i,\ S_i,\ \lambda_{ij})=f_i(X_i)+\mu_i^T g_i(X_i,\ S_{i1},\ \cdots\cdots,\ S_{iN})_{j\neq i}$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ji}^T X_i-\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}^T S_{ij}$$

求子系统的最优解：

$$\frac{\partial L_i}{\partial X_i}=\frac{\partial f_i}{\partial X_i}+\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right)^T\mu_i+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}=0$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mu_i}=g_i,\quad (X_i,\ S_{i1},\ \cdots\cdots,\ S_{iN})_{j\neq i}\geqslant 0$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial S_{ij}}=\left(\frac{\partial g_i}{\partial S_{ij}}\right)^T\mu_i-\lambda_{ij}=0$$

$$\mu_i^T g_i=0,\ \mu_i\geqslant 0$$

得出的最优解是λ_{ij}的函数。

上一级的优化是从系统整体出发，确定各个最优的λ_{ij}值。因此，最优解决定于下式：

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}}=0,$$

其中
$$L=\sum_{i=1}^{k}L_i,$$

由于
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_{ij}}=(X_j-S_{ij})$$

所以当利用梯度法（请参见有关书籍）寻求最优解时：

$$\lambda_{ij}^{(k+1)}=\lambda_{ij}^{(k)}-\omega_k(X_j-S_{ij})_k$$

下面用一简单例子说明其应用。

【例 10-1】 $\min f(X_1,\ X_2)=X_1^2-12X_1+\frac{1}{2}X_2^2-X_1X_2$

令：
$$X_1=S$$

$$L(X_1,\ X_2,\ S,\ \lambda)=X_1^2-12X_1+\frac{1}{2}X_2^2-SX_2+\lambda(X_1-S)$$

$$L_1(X_1,\ \lambda)=X_1^2-12X_1+\lambda X_1$$

$$L_2(X_2,\ S,\ \lambda)=\frac{1}{2}X_2^2-SX_2-\lambda S$$

因此各子系统的最优解决定于下式：

$$\frac{\partial L_1}{\partial X_1}=2X_1-12+\lambda=0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial X_2}=X_2-S=0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial S}=-X_2-\lambda=0$$

因而

$$X_1^*(\lambda)=6-\frac{\lambda}{2}$$

$$X_1^*(\lambda)=-\lambda$$

$$S^*(\lambda)=-\lambda$$

上一级优化：

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=X_1-S=0$$

代入子系统得最优解：

$$6-\frac{\lambda}{2}-(-\lambda)=0$$

$$\lambda^*=-12,\ X_1^*=12,\ X_2^*=12,\ f(X_1^*,\ X_2^*)=-72$$

2.关联预估法

把S_i当作固定参数，这时子系统：

$$L_i(X_i,\ \lambda_i,\ \mu_i,\ S_i)=f_i(X_i)+\mu_i^T g_i(X_i,\ S_1,\ S_2,\ \cdots\cdots,\ S_N)_{j\neq i}+\lambda_i^T(X_i-S_i)$$

最优解的必要条件可用一般所用的方法求得。求得的最优解是S_i的函数，这便是分解之后在子系统级的优化问题。即：

$$\frac{\partial L_i}{\partial X_i}=\frac{\partial f_i}{\partial X_i}+\left(\frac{\partial g_i}{\partial X_i}\right)^T\mu_i+\lambda_i=0$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mu_i}=g_i(X_i,\ S_1,\ S_2,\ \cdots\cdots,\ S_N)_{j\neq i}\geqslant 0$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i}=X_i-S_i=0$$

$$\mu_i^T g_i=0,\ \mu_i\geqslant 0$$

上一级的协调任务则是从系统总体优化的要求来选择各个S_i值，因此最优解要从下式来求：

$$\frac{\partial L}{\partial S_i}=0$$

其中

$$L=\sum_{i=1}^{N}L_i$$

由于

$$\frac{\partial L}{\partial S_i}=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial g_j}{\partial S_i}\right)^T\mu_j-\lambda_i$$

所以当用梯度法寻求上一级最优解时，公式为：

$$S_i^{(k+1)}=S_i^{(k)}-\omega\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial g_j}{\partial S_i}\right)^T\mu_j-\lambda_i\right]$$

我们用这一方法解上面的例子得：

$$L_1(X_1,\ \lambda;\ S)=X_1^2-12X_1+\lambda(X_1-S)$$

$$L_2(X_2;\ S)=\frac{1}{2}X_2^2-SX_2$$

最优解条件：

$$\frac{\partial L_1}{\partial X_1}=2X_1-12+\lambda=0$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda}=X_1-S=0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial X_2}=X_2-S=0$$

子系统最优解为：

$$X_1^*(S)=S$$

$$X_2^*(S)=S$$

$$\lambda^*(S)=12-2S$$

然后进行上一级优化，从

$$\frac{\partial L}{\partial S}=-X_2-\lambda=0$$

可得出：

$$X_2^*=-\lambda^*$$

代入下一级最优解值：

$$S=-(12-2S)$$

解出最优解：

$$S^*=12$$

因而

$$X_1^*=S^*=12,\ X_2^*=S^*=12$$

从而 $f(X_1^*,\ X_2^*)=-72$ 与前面方法结果一样。

第三节 大系统分解协调法在水库调度中应用

某河有5个水电站，其中1、2两个水电站具有一定调节性能，3、4、5三个水电站均为日调节，水库的开发任务主要是发电，如图10-12所示。

图中符号意义：

Q_j——第 j 座水电站天然入流量（m^3/s）；

d_j——第 j 座水电站工农业用水和水库水量损失（m^3/s）；

V_j——第 j 座水库蓄水量（$m^3/s\cdot$月）；

q_j——第 j 座水电站出流量（m^3/s）；

N_j——第 j 座水电站时段平均出力（万kW）；

P——系统总生产能力；

D——系统总需求量。

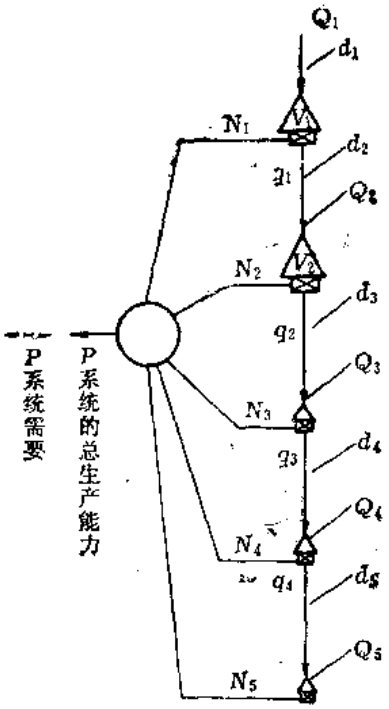


图 10-12

递推方程式：

$$N^{t,\,t-1}({}_NQ_1^t, V_1^t, {}_NQ_2^t, V_2^t) = \max_{N_1^t, N_2^t} \{N_1^t(V_1^t, {}_NQ_1^t, N_1^t) + EN_1^{t-1,\,1}(V_1^{t-1}, {}_sQ_1^{t-1}) + \sum_{m=2}^{5} N_m^t(V_2^t, {}_NQ_2^t, N_2^t) + EN_2^{t-1,\,1} \times (V_2^{t-1}, {}_sQ_2^{t-1})\}$$

$$t = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T$$

式中 $N^{t,\,t-1}(V_1^t, {}_NQ_1^t, V_2^t, {}_NQ_2^t)$——为在$t$时段初1、2两库蓄水量分别为$V_1^t$, V_2^t及t时段预报净入流量为${}_NQ_1^t$, ${}_NQ_2^t$时，全梯级从t时段到1时段的全时期最优发电量期望值；

$N_1^t(V_1^t, {}_NQ_1^t, N_1^t)$——在$t$时段初1库蓄水量为$V_1^t$，及$t$时段预报净入流量为${}_NQ_1^t$，决策变量为$N_1^t$时的发电量；

$EN_1^{t-1,\,1}(V_1^{t-1}, {}_sQ_1^{t-1})$——在$t$时段状态为$(V_1^t, {}_NQ_1^t)$，采用决策$N_1^t$后，$t-1$时段初状态为$V_1^{t-1}$、离散流量为${}_sQ_1^{t-1}$时，1库从$t-1$时段到1时段发电量的期望值；

$\sum_{m=2}^{5} N_m^t(V_2^t, {}_NQ_2^t, N_2^t)$——在$t$时段初，2库蓄水量为$V_2^t$，及该时段预报净入流量为${}_NQ_2^t$，决策变量为$N_2^t$时，2库到5库的发电量；

$EN_2^{t-1,\,1}(V_2^{t-1}, {}_sQ_2^{t-1})$——在$t$时段，2库状态为$(V_2^t, {}_NQ_2^t)$，采用决策$N_2^t$后，$t-1$时段初状态为$V_2^{t-1}$，离散流量为${}_sQ_2^{t-1}$时，2库到5库从$t-1$时段到1时段发电量的期望值；

${}_NQ_1^t$, ${}_NQ_2^t$——分别代表t时段第1库和第2库的预报净入流量；

${}_sQ_1^{t-1}$, ${}_sQ_2^{t-1}$——分别代表在t时段1、2两库预报净入流量为${}_NQ_1^t$, ${}_NQ_2^t$所属t时段流量区段所对应的$t-1$时段两库条件流量频率曲线的各离散流量值；

E——为对${}_sQ_1^{t-1}$、${}_sQ_2^{t-1}$取期望值。

为简单计，把$N_1^t(V_1^t,\ {}_aQ_1^t,\ N_1^t)$和$\sum_{m=2}^{5} N_m^t(V_1^t,\ {}_aQ_2^t,\ N_2^t)$分别简记为$N_1^t$和$\sum_{m=2}^{5} N_m^t$。

耦合条件为：

$$N^t = \sum_{m=1}^{5} N_m^t$$

$$N^{t''} \geqslant \sum_{m=1}^{5} N_m^t \begin{cases} >N^0 & \text{当} V_1^t > V_1^{t0},\ \sum_t Q_1^t > \sum_t Q_1^{t0} \\ =N^0 & \text{当} V_1^{t0} > V_1^t \geqslant V_1^{t'},\ \sum_t Q_1^{t0} > \sum_t Q_1^t \geqslant \sum_t Q_1^{t'} \\ \geqslant N' & \text{当} V_1^t < V_1^{t'},\ \sum_t Q_1^t < \sum_t Q_1^{t'} \end{cases}$$

式中 N^t——在t时段，全梯级发电量；

$N^{t''}$——在t时段，全梯级最大发电量；

N^0, N'——分别表示保证出力与破坏后最小出力，本系统采用$0.8N^0$；

V_1^{t0}——为梯级发保证出力时，1库蓄水量上限值；

$V_1^{t'}$——为梯级发破坏后最小出力时，1库蓄水量上限值；

$\sum_t Q_1^t$——为第1库连续若干时段入库流量；

$\sum_t Q_1^{t0}$——为梯级发保证出力时，1库连续若干时段入库流量上限值；

$\sum_t Q_1^{t'}$——为1库连续若干时段较枯的入库流量某规定值，小于该值时，梯级按破坏后最小出力N'发电。

应用大系统分解协调法进行控制，其优化模型见图10-13。

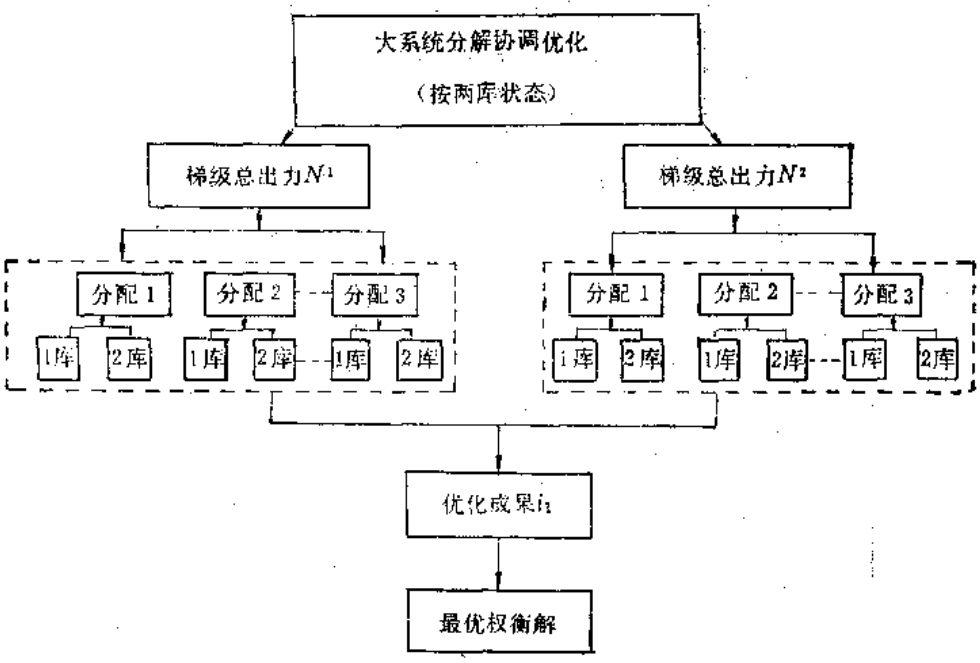


图 10-13 大系统分解协调优化模型

按大系统分解协调原理可得：

$$* \begin{cases} N_1^{t,1}(V_1^t, {}_NQ_1^t)=\max\limits_{N_1^t}\{N_1^t+EN_1^{t-1,1}(V_1^{t-1}, {}_EQ_1^{t-1})\} \\ N_1^{t''}\geqslant N_1^t\geqslant N_1^{t'} \end{cases} \quad (1)$$

$$** \begin{cases} N_2^{t,1}(V_2^t, {}_NQ_2^t)=\max\left\{\sum\limits_{m=2}^{5}N_m^t+EN_2^{t-1,1}(V_2^{t-1}, {}_EQ_2^{t-1})\right\} \\ N_m^{t''}\geqslant N_m^t\geqslant N_m^{t'} \end{cases} \quad (2)$$

$m=2,\ 3,\ 4,\ 5;\ t=1,\ 2,\ \cdots,\ T$

系统总的目标函数为两个子系统目标函数之和。

$$N^{t,1}(V_1^t, {}_NQ_1^t, V_2^t, {}_NQ_2^t)=N_1^{t,1}(V_1^t, {}_NQ_1^t)+N_2^{t,1}(V_2^t, {}_NQ_2^t)$$

在某个梯级总出力N下，假定某个出力分配N_1^t和$\sum\limits_{m=2}^{5}N_m^t$。根据式（1）与式（2）进行单库优化计算，求得全时期电量$N_1^{t,1}$和$N_2^{t,1}$，并可求得全时期梯级总发电量$N^{t,1}=N_1^{t,1}+N_2^{t,1}$；依此，不断假定不同的出力分配$N_1^t$和$\sum\limits_{m=2}^{5}N_m^t$，求得不同的电量$N_1^{t,1}$，$N_2^{t,1}$和$N^{t,1}$，选出在该梯级总出力为$N^t$时，全时期梯级总电量$N^{t,1}$为最大方案，即为最优出力分配方案，$N_1^{t*}$，$N_2^{t*}$，$\cdots$，$N_5^{t*}$。

然后改变梯级总出力N^t值，按上述过程分别求出其相应的全时期梯级总电量$N^{t,1}$，其中的最大值即为梯级最优出力，对应各电站的最优出力分配亦同时确定。分解协调计算优选过程如图10-14所示。

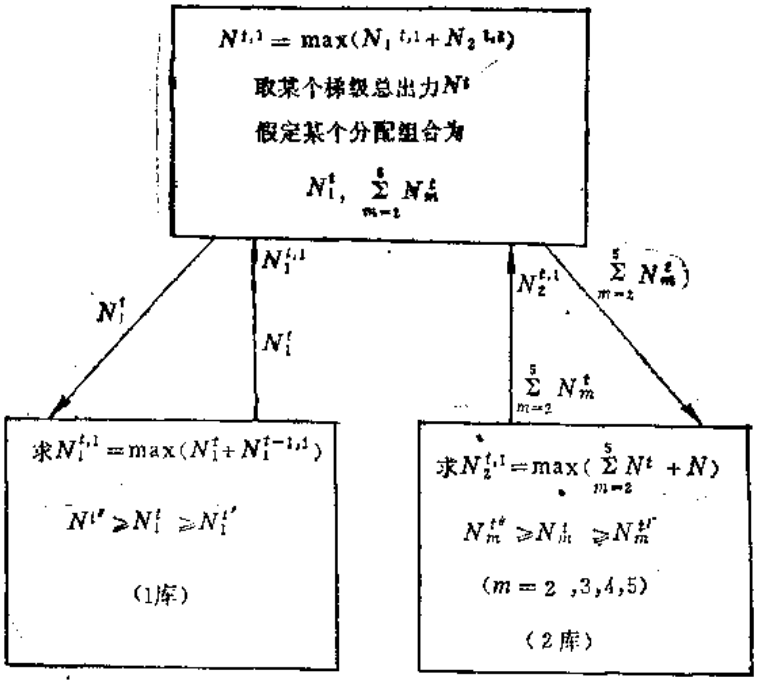


图 10-14 分解协调计算优选过程

第十一章　模糊数学及其在水库调度中的应用

第一节　概　　述

模糊集合（或称模糊集，或称不分明集合）的概念于1965年才由美国系统学家札德（L.Zadeh）提出，这个概念在相当程度上表达了客观世界中存在的模糊现象，因而迅速得到发展和应用。由此已经产生了模糊拓朴（*Fuzzy Topology*）、模糊群论（*Fuzzy Group*）、模糊图论（*Fuzzy Graph*）、模糊概率（*Fuzzy Probability*）、模糊逻辑（*Fuzzy Logic*）等方面的工作。在处理复杂系统、无法精确定量的系统时，模糊集（*Fuzzy Set*）是一个有用的概念。

模糊集的概念从人类的自然语言中可以看得很清楚。人类之间一直用自然语言来交换信息，而这类信息往往有一个显著的特点，就是“模糊”。例如“流量大、中、小”、“水位高、中、低”、“太冷”、“太热”、“不太冷”、“不太热”……等等，均是模糊的尚未量化的东西。与之相比，“温度为28℃”、“电压为220V”之类的信息则是含义完全确定的。

在经典集合论中，一个元素x和一个集合A的关系只能有$x\in A$和x与A没有关系两种情况。集合可以通过特征函数来刻划，每个集合都有一个特征函数，其定义为：

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\text{与}A\text{没有关系}\end{cases}$$

$\mu_A(x)$表征了x对A集合的隶属关系，且只允许取{0，1}两个值，故与两值逻辑相对应。模糊数学是将两值逻辑{0，1}，推广至可取[0，1]闭区间任意值，无穷多个值的连续值逻辑，因此也必须把特征函数作适当的推广，这就是隶属函数$\mu(x)$，它满足$0\leqslant\mu(x)\leqslant1$。其定义为：设给定论域$U$，$U$到[0，1]闭区间任一函数$\mu_A$都确定$U$的一个模糊子集$\underset{\sim}{A}$，$\mu_A$叫$\underset{\sim}{A}$的函，$\mu_A(\mu)$叫作$U$对$\underset{\sim}{A}$的隶属度。

模糊子集$\underset{\sim}{A}$完全由其隶属函数所刻划。特别当μ_A的值域取[0，1]闭区间的两个端点，亦即{0，1}两个值时，$\underset{\sim}{A}$便退化为一个普通子集，隶属函数也就退化为特征函数，由此可见，普通集合是模糊集合的特殊情形，而模糊集合是普通集合概念的推广。

近年来，模糊数学在医学、人工智能、农业、气象预报、结构计算，水利水能规划以及水库调度等领域开始应用。

第二节　模糊子集的表示与运算

一、模糊数学的表示

设有限论域为U，而$U=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$。其中a，b，c，d，e为元素，评定每一元

素对某一模糊集合A的隶属程度，其隶属度分别为1，0.9，0.4，0.2，0，即$\mu_{\underset{\sim}{A}}(a)=1$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(b)=0.9$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(c)=0.4$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(d)=0.2$，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(e)=0$，对于模糊集合$\underset{\sim}{A}$可有如下表达方式。

（一）用模糊向量（即隶属向量）表示

$$\underset{\sim}{A}=(1,0.9,0.4,0.2,0)$$

当模糊集合有n个元素，则：

$$\underset{\sim}{A}_n=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$$

其中 $\mu_i\in[0,1]$，（$i=1,2,\cdots,n$）——第i个元素对模糊集合A的隶属度。

（二）查德表达式

$$\underset{\sim}{A}=\frac{1}{a}+\frac{0.9}{b}+\frac{0.4}{c}+\frac{0.2}{d}+\frac{0}{e}$$

若有限论域有n个元素，则：

$$U=\{x_1,x_2,x_3,\cdots\cdots,x_n\}$$

对于U中模糊集合$\underset{\sim}{A}_n$表示为：

$$\underset{\sim}{A}_n=\frac{\mu_1}{x_1}+\frac{\mu_2}{x_2}+\cdots\cdots+\frac{\mu_n}{x_n}$$

或

$$\underset{\sim}{A}_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{x_i}$$

或

$$\underset{\sim}{A}_n=\overset{n}{\underset{i=1}{U}}\frac{\mu_i}{x_i}$$

式中分母是论域U元素；分子是相应元素的隶属度，＋或$\sum_{i=1}^{n}$或$\overset{n}{\underset{i=1}{U}}$均代表查德记号。

（三）单点表示

$$\underset{\sim}{A}=\{(1/a),\ (0.9/b),\ (0.4/c),\ (0.2/d),\ (0/e)\}$$

或

$$\underset{\sim}{A}=\{(1,a),\ (0.9,b),\ (0.4,\ c),\ (0.2,d),\ (0,e)\}$$

以上均是有限论域表示法，无限论域不能用，下面提出的一般表达式既适宜于有限论域又适宜于无限论域及连续论域。

（四）一般表达式

$$\underset{\sim}{A}=\int_{x\in U}\mu_A(x)/x$$

式中 U——论域；

$\int$——表示各个元素与隶属度对应关系的概括。

二、模糊集合的运算

（一）模糊集的并

若

$$\underset{\sim}{C}=\underset{\sim}{A}\ U\underset{\sim}{B}$$

则 $$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\vee\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

或 $$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x)=\max\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\}$$

式中 A、B、C——均是论域中的模糊集合。

例如，某一$x\in U$，而$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=0.9$，$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)=0.4$ 则

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x)=\max[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)]$$

$$=\max[0.9,0.4]=0.9$$

（二）模糊集的交

若 $$\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}$$

则 $$\mu_{\underset{\sim}{D}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\wedge\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

$$=\min\{\mu_{\underset{\sim}{A}}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)\}$$

例如，某论域$U=\{x_1,x_2,x_3\}$而集合$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$，其隶属函数分别为：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_1)=0.6 \qquad \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_1)=0.3$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_2)=0.4 \qquad \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_2)=0.4$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_3)\approx0.3 \qquad \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_3)=0.7$$

即

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.3}{x_3}$$

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.3}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.7}{x_3}$$

则交集 $\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}=\dfrac{0.6\wedge0.3}{x_1}+\dfrac{0.4\wedge0.4}{x_2}+\dfrac{0.3\wedge0.7}{x_3}=(0.3,\ 0.4,\ 0.3)$

（三）补集合

A的补集合为$\underset{\sim}{E}$，则

$$\mu_{\underset{\sim}{E}}(x)=1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$$

若论域中所有$x\in X$有$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\leqslant u_{\underset{\sim}{B}}(x)$，则称$\underset{\sim}{A}$包含在$\underset{\sim}{B}$中记为$\underset{\sim}{A}\subseteq\underset{\sim}{B}$。

若论域中所有$x\in X$有$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$，则称模糊$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$相等，记为$\underset{\sim}{A}=\underset{\sim}{B}$。

三、模糊集合与普通集合互相转化

（一）λ水平截集

λ水平截集是在模糊集合与普通集合相互转化中的一个很重要的概念，在模糊决策中也经常用到。

所谓取一个模糊集$\underset{\sim}{A}$的λ水平截集A_λ，也就是将隶属函数按下式转化成特征函数：

$$C_{A\lambda}(x)=\begin{cases}1 & \text{当}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\geqslant\lambda\text{时}\\ 0 & \text{当}\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)<\lambda\text{时}\end{cases}$$

设某组有x_1，x_2，x_3，x_4，x_5五人。在某次考试成绩及其隶属度为

x_1　95分　　隶属度　$\mu(x_1)=0.95$

x_2　88分　　隶属度　$\mu(x_2)=0.88$

x_3　76分　　隶属度　$\mu(x_3)=0.76$

x_4　40分　　隶属度　$\mu(x_4)=0.40$

x_5　62分　　隶属度　$\mu(x_5)=0.62$

试问“及格（60分）”、“良好（80分）”、“优秀（90分）”以上者各有多少人？

应用λ水平截集即可求得：

“及格”者　$A_{\lambda=0.6}=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_5\}$

“良好”者　$A_{\lambda=0.8}=\{x_1,\ x_2\}$

“优秀”者　$A_{\lambda=0.9}=\{x_1\}$

说明，当$\underset{\sim}{A}$是论域U中的一个集合，隶属函数值大于某一水平值λ的元素所组成的普通集合，叫做该模糊集合$\underset{\sim}{A}$的λ水平截集，或称为$\underset{\sim}{A}$的λ截集，用A_λ表示。

（二）λ截矩阵

设给定模糊矩阵$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})$，对任意$\lambda\in[0,\ 1]$。

$$R_\lambda=(\lambda r_{ij})$$

式中

$$\lambda r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}r_{ij}\geqslant\lambda\text{时}\\ 0 & \text{当}r_{ij}<\lambda\text{时}\end{cases}$$

则称$R_\lambda=(\lambda r_{ij})$为$R$的λ截矩阵。也就是说λ截矩阵中的元素只能为0或1。

例如，

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.3 & 0.6\\ 0.2 & 0.4 & 0.7\\ 0.5 & 0.8 & 1\end{bmatrix}$$

若取$\lambda=0.8$时则：

$$R_{\lambda=0.8}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

若取$\lambda=0.7$时则：

$$R_{\lambda=0.7}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

利用λ截矩阵的定义，可得：

（1）$\underset{\sim}{R}\subseteq\underset{\sim}{S}$时对于任意$\lambda\in[0,\ 1]$，则有：

$$R_\lambda\subseteq S_\lambda$$

例如，

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.5\\ 0.4 & 0.2\end{bmatrix}\qquad \underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.8\\ 0.6 & 0.4\end{bmatrix}$$

则 $\underset{\sim}{R}\subseteq\underset{\sim}{S}$，取$\lambda=0.5$

$$R_{\lambda=0.5}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad S_{\lambda=0.5}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

显然：

$$R_\lambda\subseteq S_\lambda$$

（2）

$$(\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{S})_\lambda=R_\lambda\cup S_\lambda$$

$$(\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{S})_\lambda=R_\lambda\cap S_\lambda$$

例如，$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{S}$，$R_{\lambda=0.5}$及$S_{\lambda=0.5}$同上述，则：

$$(\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{S})_{\lambda=0.5}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$R_{\lambda=0.5}\cup S_{\lambda=0.5}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

说明：

$$(\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{S})_\lambda=R_\lambda\cup S_\lambda$$

同样：

$$(\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{S})_{\lambda=0.5}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$R_{\lambda=0.5}\cap S_{\lambda=0.5}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

亦说明：$(\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{S})_\lambda=R_\lambda\cap S_\lambda$

第三节 隶属函数的确定

隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$的大小表示元素$x$从属于$\underset{\sim}{A}$的程度，是用来刻划模糊集合的。隶属函数确定得合适与否关系到模糊数学在实际应用中成果的优劣与可靠度。因此，如何确定隶属函数，在模糊数学中是很重要的问题，但是至今尚没有一个确定它的通用方法，下面仅介绍几种方法供参考。

一、利用几种典型的函数形式

若以实数域R为论域，则隶属函数便称为模糊分布，常见的模糊分布有：

（一）常见的模糊分布

（1）正态分布　这是最常见的一种分布，如图11-1所示，表示式为：

$$\mu(x)=e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \qquad b>0$$

（2）戒上型，如图11-2所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+[a(x-c)]^b} & (x>c)\\ 1 & (x<c)\end{cases}$$

$$a>0,\quad b>0$$

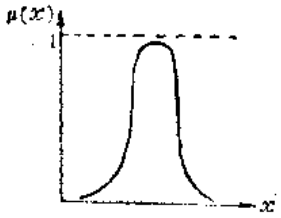


图 11-1 正态分布

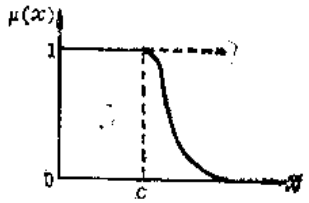


图 11-2 戒上型

（3）戒下型，如图11-3所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant c)\\ \dfrac{1}{1+[a(x-c)]^b} & (x>c)\end{cases}$$

$$a>0,\quad b>0$$

（4）Γ型，如图11-4所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ \left(\dfrac{x}{\lambda\nu}\right)^{\nu} e^{\nu-\frac{x}{\lambda}} & (x\geqslant 0)\end{cases}$$

$$\lambda>0,\quad \nu>0$$

当 $\nu-\dfrac{x}{\lambda}=0$，即$x=\lambda\nu$时隶属度为1。

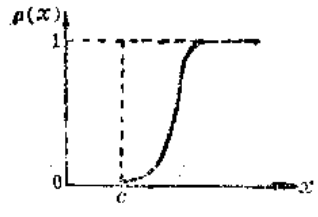


图 11-3 戒下型

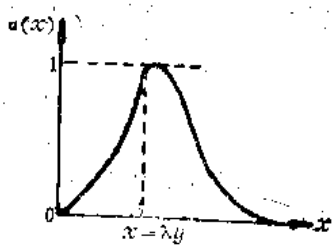


图 11-4 Γ型

（二）常用的隶属函数

1.适用于x很小的隶属函数

（1）降半矩形分布，如图11-5所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant c\\ 0 & x>a\end{cases}$$

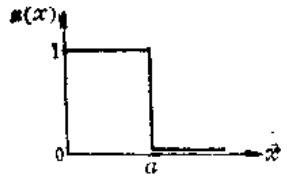


图 11-5 降半矩形分布

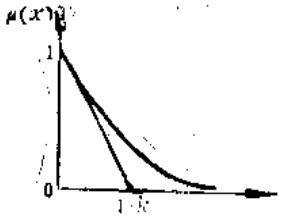


图 11-6 降半Γ型分布

（2）降半Γ型分布，如图11-6所示，表示式为：

$$\mu(x)=e^{-kx}\quad(k>0)$$

（3）降半正态型分布，如图11-7所示，表示式为：

$$\mu(x)=e^{-kx^2}\qquad(k>0)$$

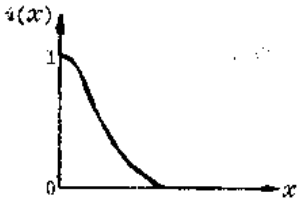


图 11-7 降半正态型分布

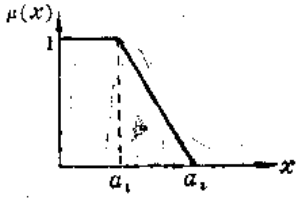


图 11-8 降半梯形分布

（4）降半梯形分布，如图11-8所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant a_1\\ \dfrac{a_2-x}{a_2-a_1} & a_1<x\leqslant a_2\\ 0 & a_2<x\end{cases}$$

（5）降半凹（凸）型分布，如图11-9所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}1-ax^k & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}\\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}<x\end{cases}$$

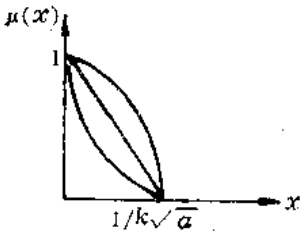


图 11-9 降半凹（凸）型分布

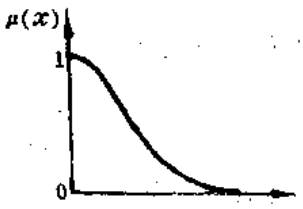


图 11-10 降半哥西型分布

（6）降半哥西型分布，如图11-10所示，表示式为：

$$\mu(x)=\frac{1}{1+kx^2}\qquad(k>1)$$

（7）降半岭形分布，如图11-11所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant a\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{b-a}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right) & a<x<b\\ 0 & b\leqslant x\end{cases}$$

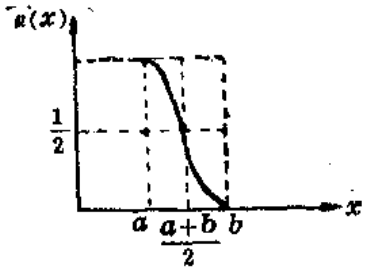


图 11-11 降半岭形分布

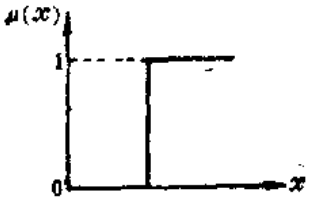


图 11-12 升半矩形分布

2.适用于x较大的隶属函数

（1）升半矩形分布，如图11-12所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant a\\ 1 & a<x\end{cases}$$

（2）升半Γ型分布，如图11-13所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant a\\ 1-e^{-k(x-a)} & a<x\end{cases}\quad(k>0)$$

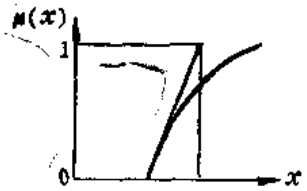


图 11-13 升半Γ型分布

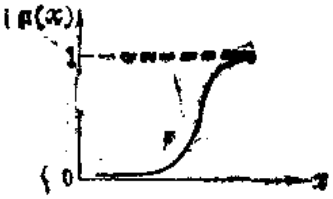


图 11-14 升半正态型分布

（3）升半正态型分布，见图11-14所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant a\\ 1-e^{-k(x-a)^2} & a<x\end{cases}\quad(k>0)$$

（4）升半梯形分布，如图11-15所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant a_1\\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1<x<a_2\\ 1 & a_2\leqslant x\end{cases}$$

（5）升半凹（凸）型分布，如图11-16所示，表示式为：

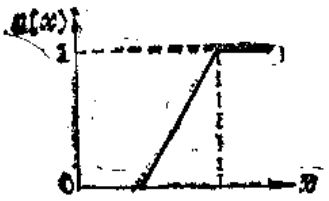


图 11-15 升半梯形分布

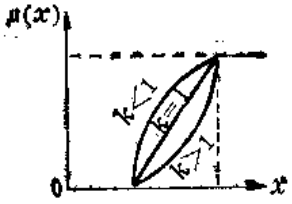


图 11-16 升半凹(凸)型分布

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant a\\ a(x-a)^2 & a<x<a+\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}\\ 1 & a+\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}\leqslant x\end{cases}$$

(6)升半哥西型分布，如图11-17所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant a\\ \dfrac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & a<x<\infty\end{cases}$$

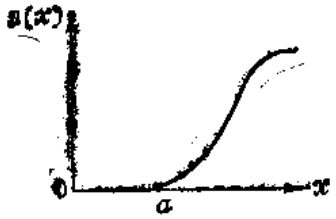


图 11-17 升半哥西型分布

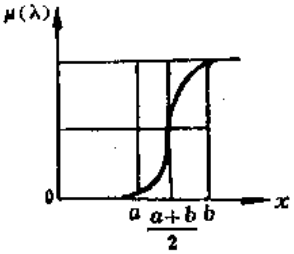


图 11-18 升半岭形分布

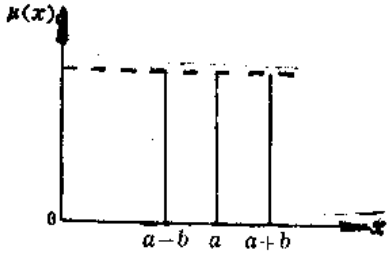


图 11-19 矩形分布

(7)升半岭形分布，如图11-18所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant a\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{b-a}\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right) & a<x\leqslant b\\ 1 & b<x\end{cases}$$

3.对称型

(1)矩形分布，如图11-19所示，表示式为：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant a-b\\ 1 & a-b<x\leqslant a+b\\ 0 & a+b<x\end{cases}$$

(2)正态分布，见图11-1。

(3)梯形分布，如图11-20所示，表示式为：

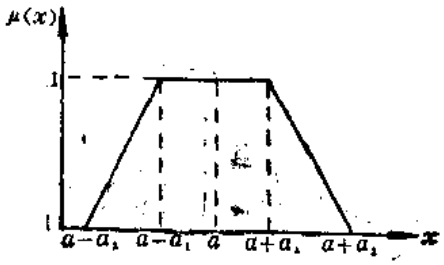


图 11-20 梯形分布

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant a-a_2\\ \dfrac{a_2+x-a}{a_2-a_1} & a-a_2<x\leqslant a-a_1\\ 1 & a-a_1<x\leqslant a+a_1\\ \dfrac{a_2-x+a}{a_2-a_1} & a+a_1<x\leqslant a+a_2\\ 0 & a+a_2<x\end{cases}$$

二、统计法确定隶属函数

用武汉建材学院张南论同志对“青年人”的最适宜的年龄课题为例说明运用统计法确定隶属函数。

以[0，100]为论域U(单位为岁)，则“青年人”是论域U的模糊集$\underset{\sim}{A}$，问当年龄$x_0=27$，其隶属度$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_0)$是多少？

选择129位合适人选，请每人认真考虑“青年人”最适宜的年龄，并给出“最适宜的年龄范围”，具体数据见表11-1。由表11-1可知最小年龄14岁，最大年龄36岁。

表 11-1　　最适宜的年龄范围

18—25	17—30	17—28	18—25	16—35	14—25
18—30	18—35	18—35	16—25	15—30	18—35
17—30	18—25	18—35	20—30	18—30	16—30
20—35	18—30	18—25	18—35	15—25	18—30
15—28	16—28	18—30	18—30	16—30	18—35
18—25	18—30	16—28	18—30	16—30	16—28
18—35	18—35	17—27	16—28	15—28	18—25
19—28	15—30	15—26	17—25	15—36	18—30
17—30	18—35	16—35	16—30	15—25	18—28
16—30	15—28	18—35	18—30	17—28	18—35
15—28	15—25	15—25	15—25	18—30	16—24
15—25	16—32	15—27	18—35	16—25	18—30
16—28	18—30	18—35	18—30	18—30	17—30
18—30	18—35	16—30	18—28	17—25	15—30
18—25	17—30	14—25	18—26	18—29	18—35
18—28	18—35	18—25	16—35	17—29	18—25
17—30	16—28	18—30	16—26	15—30	18—30
15—30	20—30	20—30	16—25	17—30	15—30
18—30	16—30	18—28	15—35	16—30	15—30
18—35	18—35	18—30	17—30	16—35	17—30
15—25	18—35	15—30	15—25	15—30	18—30
17—25	18—29	18—28			

然后对表11-1中所列岁数进行分组，分组时最小岁数与最大岁数均应包括在内，每一岁为一间隔，共计23组（如表11-2中“分组”项）。并统计各组年龄出现的次数，如表11-2中“频数”项。

最后按m/n式计算其相对频率，（m——出现的次数；n——总次数）。如表11-2内“相对频数”。

表 11-2　　岁数分组的相对频数

序号	分组	频数	相对频数	序号	分组	频数	相对频数
1	13.5～14.5	2	0.0155	13	25.5～26.5	103	0.7984
2	14.5～15.5	27	0.2093	14	26.5～27.5	101	0.7829
3	15.5～16.5	51	0.3953	15	27.5～28.5	99	0.7674
4	16.5～17.5	67	0.5194	16	28.5～29.5	80	0.6202
5	17.5～18.5	124	0.9612	17	29.5～30.5	77	0.5969
6	18.5～19.5	125	0.9690	18	30.5～31.5	27	0.2093
7	19.5～20.5	129	1.0	19	31.5～32.5	27	0.2093
8	20.5～21.5	129	1.0	20	32.5～33.5	26	0.2106
9	21.5～22.5	129	1.0	21	33.5～34.5	26	0.2106
10	22.5～23.5	129	1.0	22	34.5～35.5	26	0.2106
11	23.5～24.5	129	1.0	23	35.5～36.5	1	0.0078
12	24.5～25.5	128	0.9922	总计			13.6589

表11-2中结果表示不同年龄对$\underset{\sim}{A}$的隶属度$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$。将表11-2中的第二、四两项绘成曲线，如图11-21所示。该曲线即表示“青年人”隶属函数曲线。

三、用二元对比排序法确定隶属函数

所谓二元对比排序法，是把事物两两相比，确定顺序，从而确定隶属函数的大体形状。

二元对比排序法一般分为四种，即相对比较法，对比平均法，优先关系定序法和择优比较法。下面主要介绍前三种方法。

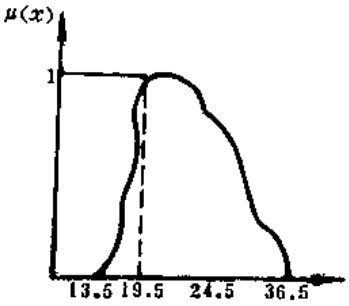


图 11-21　“青年人”隶属函数曲线

（一）相对比较法

设给定论域U，对U中的元素x，y……等需要按某种特性进行排序，这需要先在二元对比中建立比较级，然后再按一定方法转化为总体的排序。

一对元素(x, y)的二元比较级是指“数对”$[f_y(x)、f_x(y)]$需满足：

$$0 \leqslant f_y(x) \leqslant 1,\quad 0 \leqslant f_x(y) \leqslant 1$$

也就是说，在x和y的二元对比中，如果x具有某特性的程度定为$f_y(x)$的话，那么y具有该特性的程度便定为$f_x(y)$。

例如，设某论域$U=\{x_1, x_2, x_3, S\}$，其中x_1，x_2，x_3分别代表大、次、小三个孩子；S代表父亲。按照“谁最象父亲”这一标准排序。

选建立二元相对比较级：

（1）当考虑大儿子和次子与父亲相似程度时，大儿子与父亲相似程度为0.8，次子与父亲相似程度为0.5，即$[f_{x_2}(x_1), f_{x_1}(x_2)]=(0.8, 0.5)$；

（2）当考虑次子和小儿子与父亲相似程度时，次子与父亲相似程度为0.4，小儿子

与父亲相似程度为0.7，即$[f_{x_2}(x_2),\ f_{x_3}(x_3)]=(0.4,\ 0.7)$；

（3）当考虑小儿子和大儿子与父亲相似程度时，小儿子与父亲相似程度为0.5，大儿子与父亲相似程度为0.3，即$[f_{x_1}(x_3),\ f_{x_2}(x_1)]=(0.3,\ 0.5)$。

这样可将上述二元相对比较级具体情况列于表11-3：

然后转换为总体排序，其排序规则为：

令
$$f(x/y)=\frac{f_y(x)}{\max[f_x(y),\ f_y(x)]}$$

显然有

$$f(x/y)=\begin{cases} f_y(x)/f_x(y) & \text{当} f_y(x)\leqslant f_x(y) \\ 1 & \text{当} f_y(x)>f_x(y) \end{cases}$$

以$f(x/y)$为元素作成矩阵，并且$f(x/x)$取作1，该矩阵叫做相级矩阵，那么该例的相级矩阵为：

表 11-3　二元相对比较级

$f_{x/}(x_i)$ 与 x_j	x_1	x_2	x_3
x_1		0.8	0.5
x_2	0.5		0.4
x_3	0.3	0.5	

	x_1	x_2	x_3	每行最小值
x_1	1	1	1	1
x_2	5/3	1	4/7	4/7
x_3	3/5	1	1	3/5

然后对右边“每行最小值”由大到小排序：

$$1>3/5>4/7$$

亦即
$$1>0.6>0.57$$

说明，大儿子最象父亲为1，小儿子次之为0.6，次子最不象为0.57。

（二）对比平均法

设论域E为花的集合：

$$E=\{\text{樱花}(x),\ \text{菊花}(y),\ \text{蒲公英}(z)\}$$

又设樱花的美丽度为0.8，菊花的美丽度为0.7，可表示为：

$$g(x,y)=f_y(x)=0.8$$
$$g(y,x)=f_x(y)=0.7$$

如果仅考虑樱花和蒲公英的话，则有：

$$g(x,z)=f_z(x)=0.9$$
$$g(z,x)=f_x(z)=0.5$$

如果仅考虑菊花和蒲公英时，则有：

$$g(y,z)=f_z(y)=0.8$$
$$g(z,y)=f_y(z)=0.4$$

如此可得二元比较级为：

$$[f_y(x),\ f_x(y)]=[g(x,y),\ g(y,x)]=(0.8,\ 0.7)$$
$$[f_z(x),\ f_x(z)]=[g(x,z),\ g(z,x)]=(0.9,\ 0.5)$$
$$[f_z(y),\ f_y(z)]=[g(y,z),\ g(z,y)]=(0.8,\ 0.4)$$

令 $g(x,x)=1$，$g(y,y)=1$，$g(z,z)=1$，即自身相比美丽度为1。

这样可求得比较级表：

表 11-4　　比　较　级　表

$g(x,y)$	x	y	z
x	1	0.8	0.9
y	0.7	1	0.8
z	0.5	0.4	1

（1）取权数相同的判断：

1）樱花对“美”的隶属度

$$=\frac{1}{3}[g(x,x)+g(x,y)+g(x,z)]$$

$$=\frac{1}{3}[1+0.8+0.9]=0.9$$

2）菊花对“美”的隶属度

$$=\frac{1}{3}[g(y,x)+g(y,y)+g(y,z)]$$

$$=\frac{1}{3}[0.7+1+0.8]=0.83$$

3）蒲公英对“美”的隶属度$=\frac{1}{3}[g(z,x)+g(z,y)+g(z,z)]$

$$=\frac{1}{3}(0.6+0.4+1)=0.63$$

在平权时，以“美”作为论域E的模糊子集时，可表示为：

$$\text{“美”}=\frac{0.9}{\text{樱花}}+\frac{0.83}{\text{菊花}}+\frac{0.63}{\text{蒲公英}}$$

即“美”的次序为：樱花、菊花、蒲公英。

（2）对不同花给予不同赋权值，樱花、菊花、蒲公英分别为0.1，0.8，0.1，则：

1）樱花对“美”的隶属度$=0.1g(x,x)+0.8g(x,y)+0.1g(x,z)$

$$=0.1+0.8\times0.8+0.1\times0.9=0.83$$

2）菊花对“美”的隶属度$=0.1g(y,x)+0.8g(y,y)+0.1g(y,z)$

$$=0.1\times0.7+0.8\times1+0.1\times0.8=0.95$$

3）蒲公英对“美”的隶属度$=0.1g(z,x)+0.8g(z,y)+0.1g(z,z)$

$$=0.1\times0.5+0.8\times0.4+0.1\times1=0.47$$

则美的次序为：

$$\frac{0.95}{\text{菊花}}+\frac{0.83}{\text{樱花}}+\frac{0.47}{\text{蒲公英}}$$

（三）*优先关系定序法*

设有n个对象x_1，x_2，…，x_n。按照某种特性要在它们之间排一个优劣次序。其关系要求：

（1）$C_{ii}=0$

（2）$0\leqslant C_{ij}\leqslant 1$　　$(i\neq j)$

（3）$C_{ij}+C_{ji}=1$

式中　C_{ij}——表示对象自身相比优越成分；

C_{ij}——表示x_i与x_j比较时，x_i比x_j优越的成分；

C_{ji}——表示x_j与x_i比较时，x_j比x_i优越的成分。

式（2）说明x_i比x_j有优越成份情况，当只发现x_i比x_j有长处而未发现x_j比x_i有任何长处时，则$C_{ij}=1$，$C_{ji}=0$，当x_i比x_j的长处与x_j比x_i长处分不出轻重时，则$C_{ij}=C_{ji}=0.5$。式（3）说明，x_i与x_j相比各有其长时，各长处之和只能等于1，不能超过1。

按上述规定可求得优先关系矩阵：

$$R=(C_{ij})$$

然后求割矩阵

$$R_\lambda(\lambda\in[0,1])$$

$$R_\lambda=(\lambda C_{ij})$$

其中

$$\lambda C_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}C_{ij}\geqslant\lambda\\ 0 & \text{当}C_{ij}<\lambda\end{cases}$$

λ值变化系从1降至0。若λ为某值时，割矩阵R_λ中某一行元素除对角线元素为0外全等于1，则该x_i为第一批优越对象。

除去第一批优越对象，得到新的关系矩阵，用同种方法求得第二批优越对象。依次递推可求得全体对象优劣次序。

例如，设$U=\{x_1, x_2, x_3\}$，其优先关系矩阵为：

$$R=\begin{bmatrix}0 & 0.9 & 0.2\\ 0.1 & 0 & 0.7\\ 0.8 & 0.3 & 0\end{bmatrix}$$

令λ从大到小依次截取得：

$$R_{0.9}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$R_{0.8}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$R_{0.7}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$R_{0.3}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

当$R_{0.3}$时，第三行除对角线元素外，其余元素均为1，说明x_3对其它元素的优越成分一致地超过0.3，故x_3为第一优越对象。

除去x_3后，优先关系矩阵为：

$$R^{(1)}=\begin{bmatrix}0 & 0.9\\ 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

$$R_{0.9}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

第一行除对角线元素外为1，故取x_1为第二优越元素。

由此可知，按照优先关系定序法为定出的优先次序为x_3、x_1、x_2。

最后要说明所谓“优越性一致超过λ”问题，是指在关系矩阵R中元素$C_{32}=0.3$，即x_3超过x_2三分，而x_2超过x_3七分。单拿x_3与x_2对比，x_3是不如x_2的。但从一致性上考虑，仍把x_3排在x_2前面。

四、水利水电工程问题中隶属函数的拟定

关于模糊数学应用在水利水电工程问题，当前不少单位、不少同志都在从事于这方面研究。在研究过程中首先要解决隶属函数的确定，下面列举加以说明，供参考。

（一）若干水库指标隶属函数的处理

清华大学施熙灿教授在《水利水电模糊综合经济评价》一文中对水利水电工程中隶属函数进行了分析，各项隶属函数如下：

（1）水库年费用C的隶属函数，如图11-22所示，表示式为：

$$\mu_c(x_c)=\begin{cases}1 & \text{当}0\leqslant x_c\leqslant a_1\\ \dfrac{(a_2-x_c)}{(a_2-a_1)} & \text{当}a_1<x_c<a_2\\ 0 & \text{当}\quad x_c\geqslant a_2\end{cases}$$

式中：$x_c=\dfrac{c}{6}\times 10^{-3}$；$a_1=0.2$；$a_2=0.8$。

（2）下游地区防洪效益F的隶属函数，如图11-23所示，表示式为：

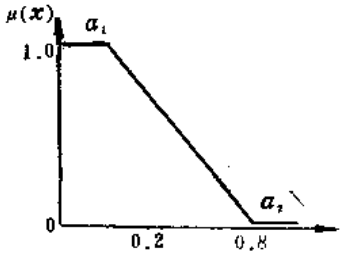


图 11-22 水库年费用的隶属函数

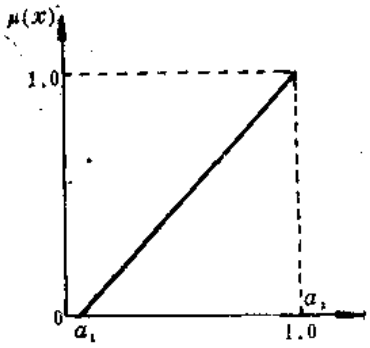


图 11-23 防洪效益F的隶属函数

$$\mu_F(x_F)=\begin{cases}1 & \text{当}\quad x_F\geqslant 1\\ \dfrac{(x_F-a_1)}{(a_2-a_1)} & \text{当}a_1<x_F<1\\ 0 & \text{当}\quad x_F\leqslant a_1\end{cases}$$

式中：$x_F=\dfrac{F}{50}$（F为方案实际防洪能力）；

$a_1=0.1$（下游防洪标准取50年一遇）；

$a_2=1.0$。

（3）灌溉效益I的隶属函数，如图11-24所示，表示式为：

$$\mu_I(x_I)=x_I$$

$$x_I=\frac{\text{I}\times10^{-4}}{\text{总耕地亩数(要求灌溉的)}}$$

式中 I——各方案可能灌溉的亩数。

（4）库区移民P的隶属函数，如图11-25所示，表示式为：

$$\mu_p(x_p)=1-x_p^{0.6}$$

$$x_p=\frac{P}{2}\times10^{-4}$$

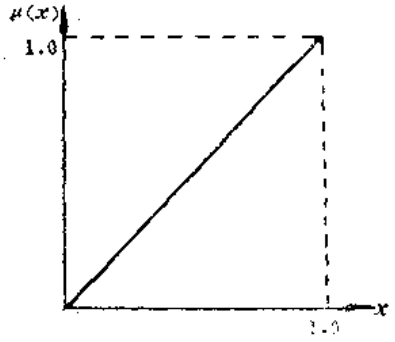


图 11-24 灌溉效益I的隶属函数

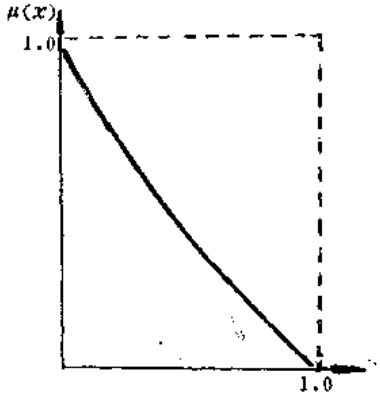


图 11-25 库区移民P的隶属函数

（二）选定各种变量的隶属函数

山西省水利勘测设计院罗高荣同志，在《模糊关系合成原理用于水电工程的多因素综合评价》一文中根据问题的特点，结合法国A.卡夫曼（A.Kaufuman）教授收集的常用隶属函数表，将各种变量的隶属函数选定如下：

（1）投资受益率R的隶属函数选定如图11-26所示，表示式为：

$$\mu(R)=\begin{cases}0 & 0\leqslant R<8\\ 1-e^{-(R-8)/6} & R\geqslant 8\end{cases}$$

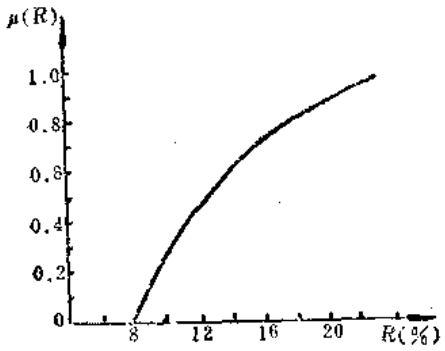


图 11-26 投资受益率R的隶属函数

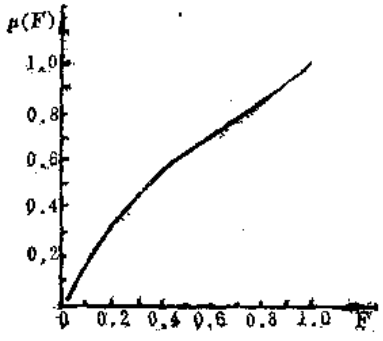


图 11-27 调峰系数F的隶属函数

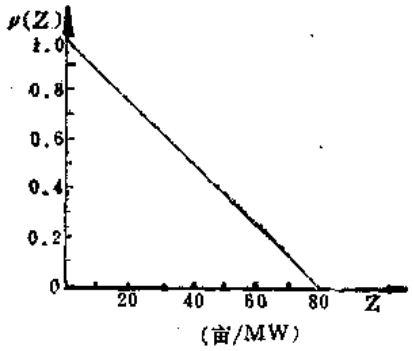


图 11-28 淹占耕地Z的隶属函数

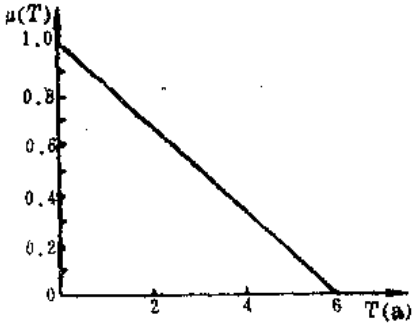


图 11-29 施工期T的隶属函数

（2）调峰系数F的隶属函数选定如图11-27所示，表示式为：

$$\mu(F)=F^{0.65} \qquad (0 \leqslant F \leqslant 1)$$

（3）淹占耕地Z的隶属函数选定如图11-28所示，表示式为：

$$\mu(Z)=\begin{cases}1-Z/80 & 0 \leqslant Z \leqslant 80\\ 0 & Z \geqslant 80\end{cases}$$

（4）施工期T的隶属函数选定如图11-29所示，表示式为：

$$\mu(T)=\begin{cases}1-T/6 & 0 \leqslant T \leqslant 6\\ 0 & T > 6\end{cases}$$

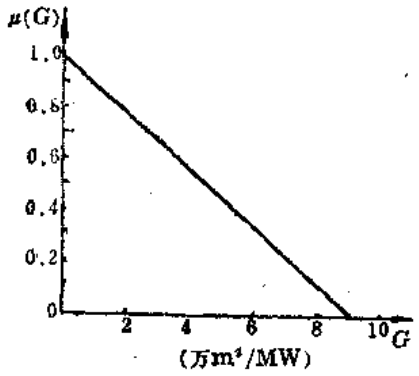


图 11-30 每兆瓦平均工程量G的隶属函数

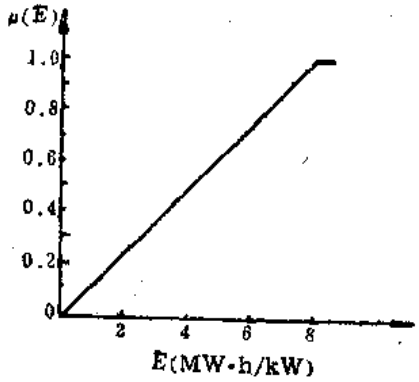


图 11-31 单位千瓦年平均发电量E的隶属函数

（5）每兆瓦平均工程量G的隶属函数选定如图11-30所示，表示式为：

$$\mu(G)=\begin{cases}1-G/9 & 0 \leqslant G \leqslant 9\\ 0 & G > 9\end{cases}$$

（6）单位千瓦的年平均发电量E的隶属函数选定如图11-31所示，表示式为：

$$\mu(E)=\begin{cases}E/8 & 0 \leqslant E \leqslant 8\\ 1 & 8 < E \leqslant 8.76\end{cases}$$

（三）用连续函数处理水库水位隶属函数

湖南镇水电站吴信益同志在《模糊数学在水库调度中的应用》一文中，用7个模糊子

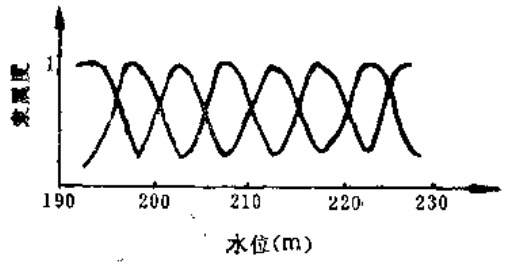


图 11-32　7个水位的连续隶属函数

集来反映水位的高低。其隶属度用连续函数处理（如图11-32）。即：

$$\text{特高水位}PHZ(Z)=\begin{cases}1; & Z\geqslant 227\\ e^{-\frac{(Z-227)^2}{10}}; & Z<227\end{cases}$$

$$\text{较高水位}RHZ(Z)=e^{-\frac{(Z-223)^2}{10}};$$

$$\text{略高水位}LHZ(Z)=e^{-\frac{(Z-213)^2}{10}};$$

$$\text{正中水位}MOZ(Z)=e^{-\frac{(Z-208)^2}{10}};$$

$$\text{略低水位}LIZ(Z)=e^{-\frac{(Z-203)^2}{10}};$$

$$\text{较低水位}RIZ(Z)=e^{-\frac{(Z-198)^2}{10}};$$

$$\text{特低水位}PIZ(Z)=\begin{cases}e^{-\frac{(Z-193)^2}{10}}; & Z\geqslant 193\\ 1; & Z<193\end{cases}$$

该文所探讨的水电站的正常蓄水位为230m，死水位为190m。

第四节　模糊综合评判

所谓综合评判，就是对受多种因素影响的事物或现象综合考虑各种因素的作用进行恰当的评价。

一、单因素评判

首先按评语等级组成一个评语论域。设该评语论域为：

$$V=\{V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_n\}$$

式中　V_i——代表评语等级。

评语论域中包括几个等级。

单因素评判就是根据事物的某一因素（u）进行评价，该因素从属于各评语等级V_i的程度为：

$$\mu_{V_i}(u)\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

由它们构成评语论域V上的一个模糊集合：

$$\underset{\sim}{B}=[\mu_{V_1}(u),\ \mu_{V_2}(u),\ \cdots,\ \mu_{V_n}(u)]$$
$$=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]$$

则称$\underset{\sim}{B}$为“等级模糊集合”或“等级模糊向量”。这就是考虑单因素u时对该事物评价的结果。

例如，对教师的教学效果进行评定。评语论域包括五个等级：

$$V=\{V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4,\ V_5\}$$

相应式中等级的物理意义为：

表 11-5

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
很　好	好	一　般	坏	很　坏

这时，某教师的教学效果就应是等级论域V上的一个模糊集合，用等级模糊向量表示，即

$$\underset{\sim}{B}=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$$

现用统计办法求等级模糊向量$\underset{\sim}{B}$。请该老师所教的100个学生对教师进行投票，投票结果为表11-6。

表 11-6

第　级	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
票　数	15	60	20	5	0

则

$$\underset{\sim}{B}=[0.15,\ 0.60,\ 0.20,\ 0.05,\ 0.00]$$

评判结果是好。

二、多因素评判

需要考虑两个论域：

评语论域：

$$V=\{V_1,\ V_2,\ V_3,\ \cdots,\ V_n\}$$

评定因素论域：

$$U=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_j,\ \cdots,\ u_m\}$$

在已知U中各因素的情况下，通过适当的综合和模糊变换求得等级模糊集合：

$$\underset{\sim}{B}=\frac{b_1}{V_1}+\frac{b_2}{V_2}+\cdots+\frac{b_j}{V_j}+\cdots+\frac{b_n}{V_n}$$

式中　b_j——为等级V_j对综合评定所得模糊集合$\underset{\sim}{B}$的隶属度。

这就是综合评判的结果。

多因素综合评判中关键在于找出因素论域U和评语论域V之间的模糊关系，并找出适当的综合方法。

由于各因素u_j均为已知，即可求得u_j对各等级的隶属度。

$$r_{ji}=\mu_{V_i}(u_j)\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

从而组成各因素u_j与评语论域V间的模糊关系向量：

$$r_j=[r_{j1},\ r_{j2},\cdots,r_{jn}]$$

所有因素u_j（$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）对V的模糊关系向量组合成U和V间的模糊关系矩阵（又称评价矩阵）：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_m\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}r_{11}\ r_{12}\ \cdots\ r_{1n}\\ r_{21}\ r_{22}\ \cdots\ r_{2n}\\ \vdots\\ r_{m1}\ r_{m2}\ \cdots\ r_{mn}\end{pmatrix}$$

在综合评定时，要考虑各个因素对评定等级所起作用的大小，这种评定作用就形成了因素论域U上的一个因素模糊集合：

$$\underset{\sim}{A}=\frac{a_1}{u_1}+\frac{a_2}{u_2}+\cdots\cdots+\frac{a_j}{u_j}+\cdots\cdots+\frac{a_m}{u_m}$$

式中 a_j——为u_j对评定作用A的隶属度。

上式表示各个因素单独考虑u_i对评定等级所能起作用的大小度量，代表根据单因素u_j评定等级的能力，其数值一般可根据经验判断给出。

模糊集合$\underset{\sim}{A}$和$\underset{\sim}{B}$可简化为模糊向量：

$$\underset{\sim}{A}=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m]$$

$$\underset{\sim}{B}=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]$$

由模糊向量$\underset{\sim}{A}$和模糊关系矩阵$\underset{\sim}{R}$即可进行综合评判，即进行模糊变换，其表达式为：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{R}$$

或

$$[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m]\cdot\begin{pmatrix}r_{11}\ r_{12}\ \cdots\ r_{1n}\\ r_{21}\ r_{22}\ \cdots\ r_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_{m1}\ r_{m2}\ \cdots\ r_{mn}\end{pmatrix}$$

【例 11-1】 描述某河根据其地形、地质、淹没等情况初步拟定为三级开发，每一级各工作深度方案水库均属年调节。现对第一级电站工作深度方案进行评定，第一级电站工作深度方案及各方案的供水期调节流量、保证出力及发电量列于表11-7。

表 11-7

方　　案	11.5m	14m	16.5m	19m
供水期调节流量Q(m³/s)	2.71	3.001	3.264	3.477
保证出力 N (kW)	970.97	1051.31	1118.41	1168.95
发电量 E (kW·h)	20.446	19.87	19.265	18.586

（1）考虑评判因素论域为：

$$U=\{u_1(Q),\ u_2(N),\ u_3(E)\}$$

评语论域为：

$$V=\{V_1(\text{优}),\ V_2(\text{良}),\ V_3(\text{一般}),\ V_4(\text{较差}),\ V_5(\text{差})\}$$

采用“加权平均型”的综合评判，即在决定各因素的评价对等级V_i的隶属度b_i时，考虑了所有因素u_j（$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）的影响，而不只考虑b_i影响最大的某一因素。因此，模型中a_j系代表各因素u_j重要性的权系数，需满足：

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = 1$$

所以权向量为：　　$\underset{\sim}{A}=[a_1, a_2, \cdots, a_m]$

而例中的权向量为：　　$\underset{\sim}{A}=[0.1, 0.47, 0.43]$

各等级的权重取：　　$W=[5, 4, 3, 2, 1]$

（2）按排序法确定各评判因素对各评语级的隶属度，构成各方案的模糊评价矩阵：

$$R_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.514 & 0.486 & 0 \\ 0 & 0 & 0.623 & 0.377 & 0 \\ 0 & 0.761 & 0.239 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3=\begin{bmatrix} 0.888 & 0.112 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.485 & 0.515 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.46 & 0.54 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（3）进行模糊变换。应用$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{R}$式可计算得各方案的综合评判结果：

$$\underset{\sim}{B}_1=\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{R}_1=[0.43, 0, 0, 0, 0.57]$$

$$\underset{\sim}{B}_2=\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{R}_2=[0, 0.327, 0.447, 0.226, 0]$$

$$\underset{\sim}{B}_3=\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{R}_3=[0.089, 0.239, 0.440, 0.232, 0]$$

$$\underset{\sim}{B}_4=\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{R}_4=[0.57, 0, 0, 0, 0.43]$$

（4）应用$S_i=\underset{\sim}{B}_i W^T$公式（其中$S_i$表示$i$方案的评定值，$W^T$表示$W$的转置矩阵）。计算各方案综合评判值列于表11-8：

表 11-8

方　案　(m)	11.5	14	16.5	19
综合评判值 S	2.72	3.1	3.186	3.28

以19m工作深度为最佳。

第五节　模糊数学在水库调度中的应用

模糊数学虽属新兴学科，但发展速度较快，应用面亦较广。水库是一个复杂的系统，人们如何根据水库运行特点进行水库调度，使现有工程发挥最大效益，已日益重视。以往水库调度的特点是人参与控制决策水库的运行。水调人员通过对水库状态的观测判断，结合以往的经验，作出水库的运行决策。在这个过程中有很多模糊性的内容。水库系统的输入是流入水库的径流过程，它具有随机性，一般用径流预报来描述，其结果具有模糊性。根据水库模糊性输入和要求，调度人员依赖头脑中的经验和形象化了的经验（如水库调度图等），作出水库运行决策。如水库在初汛期水位很高，入库流量较大，预报将有大水来

临。应加大发电量，使水库水位控制在汛限水位以下，这是基于模糊性水库状态和要求作出的模糊决策，实质上是个模糊控制过程。在我国1983年吴信益同志首先探讨了模糊数学在水库调度中应用，随后也有不少同志进行了研究。下面简单介绍“水电站调度的模糊控制模型”。

影响水库运行的基本因素是调度因子。调度因子包括时间，入库流量过程，水库初始状态等。根据水电站原设计，历史资料和实践经验，可以确定出各因子的论域，并定义各因子的模糊子集，然后编制水电站调度模糊控制，再应用模糊控制律作调度决策。

一、确定调度因子的模糊子集

（一）时间因子

按所研究对象流域径流的时间分布特征，并考虑日常调度中的习惯及径流预报方案等情况，把时间因子以年为周期划分 9 个时段，见表11-9。

表 11-9　　调　度　时　段　划　分

序　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
月　份	10、11	12、1、2	3	4	5	6	7	8	9
符　号	*ONT*	*DJF*	*MAR*	*APR*	*MAY*	*JUN*	*JUL*	*AUG*	*SEP*

（二）水位因子

甲水电站正常蓄水位为263.5m，死水位为243.5m，故水位的基本消落区间为243.5～263.5m，而水库实际运行水位变幅为230.12～265.5m。对水位基本消落区间定义为 9 个模糊子集。如图11-33和表11-10。

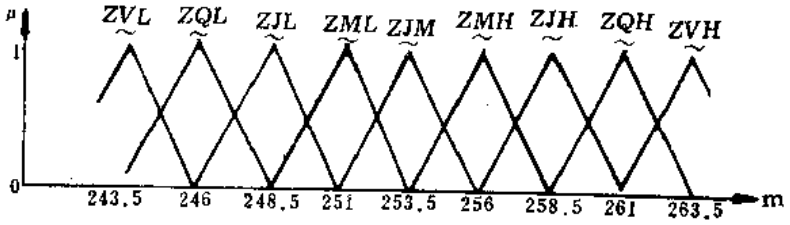


图 11-33　9 个水位因子模糊子集

表 11-10　　水　库　水　位　模　糊　子　集

序　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
中　心	243.5	246	248.5	251	253.5	256	258.5	261	263.5
名　称	很　低	较　低	低	中　低	中	中　高	高	较　高	很　高
符　号	*ZVL*	*ZQL*	*ZJL*	*ZML*	*ZJM*	*ZMH*	*ZJH*	*ZQH*	*ZVH*

（三）乙水电站放流量因子

按乙水电站初设调度方案对历史径流系列进行等出力调节计算，得出各月平均放流量。从此定义乙站放流量因子的5个模糊子集如图11-34和表11-11。

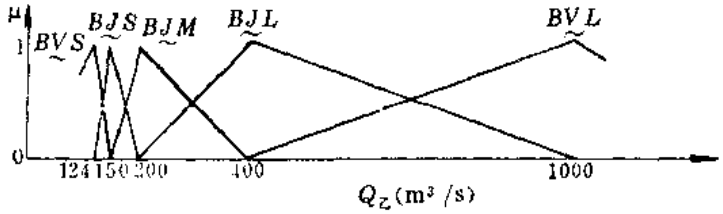


图 11-34　5个放流量模糊子集

表 11-11　　乙水电站放流量模糊子集

序　　号	1	2	3	4	5
中　　心	124	150	200	400	1000
名　　称	很　小	小	中	大	很　大
符　　号	$\underset{\sim}{BVS}$	$\underset{\sim}{BJS}$	$\underset{\sim}{BJM}$	$\underset{\sim}{BJL}$	$\underset{\sim}{BVL}$

（四）区间时段平均流量因子

由于不同时期区间径流量的数量级不同，不同时期内，径流“丰、中、枯”的标准亦不同。因此对各调度时段分别定义模糊子集，例如第6时段的3个模糊子集，如图11-35和表11-12。

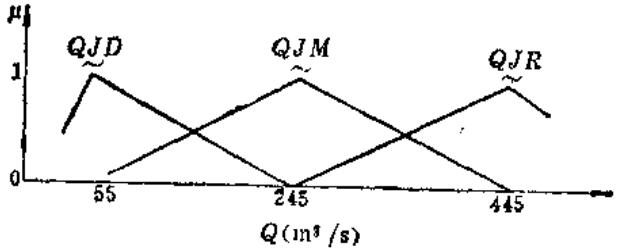


图 11-35

表 11-12　　第6时段区间流量模糊子集

符　　号	1	2	3
中　　心	55	245	445
名　　称	枯	中	丰
符　　号	$\underset{\sim}{QJD}$	$\underset{\sim}{QJM}$	$\underset{\sim}{QJR}$

二、编制水电站调度模糊控制性

水电站调度模糊控制律是反映各种可能水库状态下，水电站的发电决策，相应时段末水库水位和发电引用流量情况。对所划分的9个调度时段，逐一以每个时段为单位，研究水电站的调度规律，再经过对各种可能水库状态进行水能计算，作为各时段的模糊控制律，以指导该时段的电站运行，例如，6月份，根据历史统计资料，6月初的水库水位变化范围是235.7～259.28m，涉及了前7个水位模糊子集；乙水电站的时段平均放流量变化范围是157～589m^3/s，用5个模糊子集来描述；区间时段平均流量预报范围为3个模糊子集。因此，第6时段水电站调度模糊控制律有7×5×3=105种。该数值表示各因子模糊子集中心组合在标准水库状态下的决策。详见1986年水电能源科学第二期第155页。

三、应用模糊控制律作调度决策

有了模糊控制律表后，对于标准水库状态下可以直接查表。对于非标准水库状态，则需通过各因子的具体状态的加权计算，推求水库实际状态的发电决策值。

将水电站水库调度模糊控制律存入计算机，并将水库调度决策编制成程序，就可直接通过计算机进行调度运行。但是值得我们注意的是所得决策值，并非一个确切的决策数，因为调度因子的描述是有一定模糊性，导致了决策的模糊性，所以实际运行时，尚可根据具体情况作一定的灵活控制。

参 考 文 献

[1] 伍克勤，水能学，上、下册，燃料工业出版社，1955年。
[2] 电力工业部成都勘测设计院，水能设计，上、下册，电力工业出版社。
[3] 华东水利学院、天津大学、清华大学合编，水文及水利水电规划，下册，水利出版社，1981年。
[4] 华中工学院主编，水电站经济运行，电力工业出版社，1981年。
[5] 武汉水利电力学院，西北农学院、华中工学院合编，水能利用，电力工业出版社，1981年。
[6] 成都科技大学，华东水利学院，武汉水利电力学院合编，工程水文及水利计算，水利出版社，1981年。
[7] 张勇传著，水电能优化管理，华中工学院出版社，1987年。
[8] 于尔铿，现代电力系统经济调度，水利电力出版社，1986。
[9] 新安江水力发电厂、丰满发电厂、新丰江水电厂编，水电站水库调度，水利电力出版社，1984年。
[10] 中国科学院数学研究所运筹室编，最优化方法，科学出版社，1980年。
[11] 《运筹学》试用教材编写组编，运筹学，清华大学出版社，1982年。
[12] 西安交通大学汪应洛主编，系统工程导论，机械工业出版社，1982年。
[13] 王众托编，系统工程引论，电子工业出版社，1984年。
[14] 朱道立编著，大系统优化理论与应用，上海交通大学出版社，1987年。
[15] 钱学森、宋健著，工程控制论，科学出版社，1983年。
[16] 贺仲雄编，模糊数学及其应用，天津科学技术出版社，1985年。
[17] 李维铮等编著，运筹学，清华大学出版社。
[18] 陈听宽、章燕谋、温龙合编，新能源发电，机械工业出版社。
[19] 孙东川编，网络技术在系统工程中的应用，湖南出版社。
[20] 郑春瑞编著，系统工程学概述，科学技术文献出版社。
[21] 孙绍先译，电力系统规划，水利电力出版社，1984。
[22] 林延江、陆昌甫等编，水利土木工程系统分析方法，水利电力出版社，1983。
[23] 袁作新主编，水利计算，水利电力出版社，1987。
[24] 华东水利学院主编，水文学的概率统计基础，水利出版社，1981。
[25] [美]L.D.詹姆斯 R.R.李著，常锡厚、赵宝璋、谢安周等译，水资源规划经济学，水利电力出版社，1984。
[26] M.诺顿著，杨志坚译，现代控制理论，科学出版社。
[27] H.A.卡特维利施维利等著，中国科学院力学研究所运筹室、中国科学院、水利电力部水利水电科学研究院水文研究所合译，运筹学在水文水利计算中的应用，科学出版社。
[28] 复旦大学数学系编著，统计数学，上海科学技术出版社。
[29] Mohammad Jamshid, Large——Scale Systems Modeling and Control Series volume 9.
[30] Bellman R., Drefus S.,Applied Dynamic Programming.Princeton University Press, Princeton, New gersey, 1962.
[31] Mufit Ozden,A Binary State DP Algorithm for Operation Problems of Multireservoir Systems, Water Resources Research, Vol, 20, No.1 1984.
[32] Joseph J.Moder and Salah E.Elmaghraby, Handbook of Operation Research Foundations and Fundamental, Van NOSTRAXD REINHOLD Company, 1978年.
[33] Didier Dubois; Henri Prade, Fuzzy SeTs and Syst ems Theory and Applications, 1980.