底板突水的非线性特征及预测

李术才 宋扬 著

煤炭工业出版社

21
53

底板突水的非线性特征及预测

王连国　宋　扬　著

煤 炭 工 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

底板突水的非线性特征及预测/王连国，宋扬著.
北京：煤炭工业出版社，2001
ISBN 7－5020－2043－8

Ⅰ.底… Ⅱ.①王…②宋… Ⅲ.矿山突水—研究
Ⅳ.TD742

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 053189 号

底板突水的非线性特征及预测
王连国 宋 扬 著
责任编辑：王铁根 史 彦
*
煤炭工业出版社 出版发行
（北京市朝阳区芍药居 35 号 100029）
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
*
开本 787×1092mm 1/32 印张 7 1/8
字数 152 千字 印数 1—1,000
2001 年 8 月第 1 版 2001 年 8 月第 1 次印刷
社内编号 4814 定价 15.00 元

版权所有 违者必究
本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，本社负责调换

内 容 提 要

本书基于大量的实测信息，对底板岩层变形破坏过程中岩移、注水量观测时序进行了关联维及 Lyapunov 指数的提取，并对其运动性态进行了分析；详细讨论了底板岩层破裂过程的自组织临界特性；由力学模型得到的突水临界条件出发，导出了底板突水的势函数，并对其突变学特征进行了分析，在此基础上应用数学方法，建立了底板岩层水压应力比的尖点突变模型；为了弥补 BP 网络自身的缺陷，采用遗传算法训练 BP 网络，建立了底板突水量预测的组合人工神经网络模型。

本书可供矿井安全、采矿工程、工程地质、岩土工程、岩石力学等专业的研究人员、工程技术人员及大专院校相关专业的师生使用。

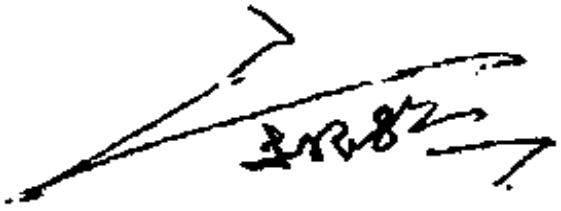
序

底板突水是我国煤矿的重大灾害之一，煤炭科技工作者在大量突水灾害和控制实践基础上，针对这一课题，进行了持久、深入的研究，并取得了一定成效。但由于底板突水受到含水层富水性、隔水层厚度、构造断裂、水压及矿压等诸多因素的影响，且各因素之间存在着复杂的关系，目前的理论与方法还不够成熟，很难普遍解决底板突水问题。大量的实践表明，研究底板破坏及突水机理，实现底板突水的有效预测预报，是解决底板突水问题的关键，因而一直是我国矿业界、地质界十分关注的问题。本书作者抓住底板突水的非线性本质，创造性地将非线性科学理论与底板突水研究相结合，着重从理论上研究了底板破坏及突水机理，对底板突水前的裂隙发展和损伤过程进行了详细的混沌数学及自组织临界分析，特别是运用突变和人工神经网络等理论，建立了突水突变和组合人工神经网络预测模型，对底板突水预测和突水防治途径，从理论上给出了科学的解释，这对把我国底板突水防治的研究，从主要依靠人工决策推进到由计算机进行定量决策阶段具有重要作用。书中取得了多方面的创新性成果，这是一项开拓性的工作，因此读后深

感欣慰。

本书是国内有关非线性科学在矿井水害防治中应用方面的第一部专著，它必将为矿井水害防治领域增添新的芬芳，相信本书的出版会对矿井水害防治及相关学科的发展起到积极的推动作用。

中国科学院院士、教授



2001 年 4 月 26 日

前　言

底板突水是在采动矿压和承压水的共同作用下底板岩层变形破坏，导致承压水大量涌入采掘空间的现象，严重影响着煤矿生产和建设的发展。我国华北煤田位于复杂的岩溶水文地质类型区，由于受煤系底部灰岩强岩溶含水层的威胁，突水事故频繁发生且突水量大。随着矿井向深部延伸，华北地区开采煤层所承受的岩溶含水层水压将越来越大，受底板突水的威胁也将更加严重。因此，对煤层底板突水机理及预防技术的研究是保证我国煤矿安全生产的重大课题。

由于底板突水演化过程的复杂性，描述底板突水演化过程的数学物理方程一般是高度非线性的，因而底板突水是一个非线性开放系统，故采用非线性科学的理论与方法对底板突水问题进行研究是符合其本质特征的。本书作者就是在国家自然科学基金（项目批准号 59774001）资助下，针对在采动矿压和承压水作用下，从底板岩层变形→裂隙扩展→形成导水通道→引发底板突水这一过程，对底板突水的非线性动力学特征进行了较全面系统的研究，在此基础上提出底板突水预测预报的新方法。本书就是该研究工作的总结。

在本书的完成过程中得到了山东科技大学高延法教授、俞书伟教授、姜福兴教授、谭云亮教授、吕爱钟教授及中国矿业大学缪协兴教授的大力支持和帮助，在此一并致谢。由于作者水平所限，书中缺点和不足之处在所难免，恳请各位专家、学者和读者指正。

作　者

2001 年 4 月

目　录

1　概　述 …… 1

1.1　我国底板突水问题研究现状 …… 1
1.2　非线性动力学发展综述 …… 4
1.3　本书特色 …… 6

2　底板岩层变形破坏过程中混沌动力学特征 …… 10

2.1　概　述 …… 10
2.2　混沌理论基础 …… 11
2.3　重建相空间 …… 40
2.4　底板岩层变形破坏过程中混沌吸引子分维特征 …… 42
2.5　底板岩层变形破坏过程中混沌性态的 Lyapunov 指数描述 …… 54
2.6　本章小结 …… 64

3　底板突水自组织临界特性 …… 66

3.1　概　述 …… 66
3.2　重整化群方法 …… 68
3.3　底板破坏型突水岩层破裂过程的自组织临界特性 …… 72
3.4　断层采动型突水断层破裂过程的自组织临界特性 …… 80
3.5　本章小结 …… 85

4 底板突水的突变机理 …… 86

4.1 概 述 …… 86
4.2 突变理论的数学基础与几种基本的突变类型 …… 87
4.3 底板突水的突变特征 …… 126
4.4 涨落对底板突水的诱导作用 …… 137
4.5 应用数学方法建立底板突本突变模型 …… 143
4.6 实例分析 …… 151
4.7 本章小结 …… 157

5 底板突水量组合人工神经网络预测 …… 159

5.1 概 述 …… 159
5.2 人工神经网络 …… 161
5.3 遗传算法 …… 185
5.4 底板突水量预测的组合人工神经网络模型 …… 196
5.5 本章小结 …… 206

参考文献 …… 207

1 概　　述

1.1　我国底板突水问题研究现状

我国是煤炭大国，煤炭一直是我国的主要能源，由于埋藏深度和煤层赋存条件的限制，开采煤炭资源主要以井工开采为主。对于受水体威胁的煤层而言，井工开采带来的最大安全问题就是矿井突水事故的发生。我国许多煤田的水文地质条件十分复杂，在煤层开采过程中受到多种水体的威胁，但影响范围最广的主要是灰岩强岩溶含水层对上覆煤层开采的威胁，几乎所有大的突水及淹井事故都是由这类水害引起的。目前，全国煤矿遭受水害威胁的储量高达 250 亿 t，主要分布在约占全国产量 50%的华北地区石炭二叠纪煤田。该煤田位于复杂的岩溶水文地质类型区，主要受煤系底部灰岩强岩溶含水层的威胁，突水事故频繁发生且突水量大。据不完全统计，自 1956 年到 1994 年内，我国北方开采山西组与太原组煤层时，来自煤层夹层灰岩和基底中奥陶统灰岩岩溶水的底板突水 1300 余次，其中淹井 200 余次，造成的经济损失几十亿元，造成人员伤亡达几千人。例如：河北开滦范各庄矿[85]于 1984 年 6 月 2 日发生了称之为“举世罕见”的特大突水灾害，仅 20 小时 55 分就淹没了整个矿井，而后涌水又冲破井田边界煤柱溃入相邻的一个矿井，使之被淹，进而涌水渗入另一个矿井，迫使该矿井停产；同时还威胁其他两矿的安全，

使之处于半停产状态，造成直接经济损失达5亿元以上。针对华北型煤田的煤层底板突水问题，我国学者经过艰苦不懈的努力，在煤层底板突水的机理及突水预测方面的研究取得了可喜的进展。我国对突水规律方面的研究始于60年代，当时统计了峰峰、焦作、淄博和井陉四个矿区与突水密切相关的水压和底板隔水层厚度资料，并将其比值，即突水系数作为预测突水与否的标准，这是我国广大第一线生产技术、科学研究工作者，从长期大量的突水实际资料统计分析中得出的一个规律性的认识。70年代中后期，人们发现利用突水系数进行突水预测结果不准确，究其原因，由于突水系数中未考虑一个根本性的问题——矿压对底板的破坏深度，为此经西安分院水文所考虑了矿压破坏因素，又提出了修正的突水系数公式。山东矿院、峰峰矿务局、井陉矿务局的科研人员于80年代初期提出了“下三带”观点，后由山东矿院荆自刚、李白英、孙振鹏、高航、高延法等人，深入隔水层内部经过几年综合观测井结合相似材料模拟有限元分析等研究工作后上升为理论的高度，即“下三带”理论[86~87]。该理论将煤层底板分为底板破坏带、完整岩层带、承压水导高带。“下三带”理论比较符合煤层采动条件下底板破坏突水的规律，在生产实践中得到了较为广泛的应用。北京煤科院张金才、刘天泉详细分析了底板采动裂隙带的深度及分布形态，并得出了导水裂隙带深度的计算公式[88]，在此基础上采用板的弹塑性理论得出了底板突水的综合判据[89][90]。高延法、李白英采用断裂力学方法分析了采动裂隙带的深度及破坏机制[91]；另外，高延法等人还对突水优势面、突水类型划分、水压在突水中的力学作用[92]等方面进行了研究。煤炭科学总院西安分院李抗抗等采用岩体的原位测试技术对煤层底板突水机理进

行了研究，并从力学角度给出煤层底板突水判据的表达式[93]。中国矿业大学钱鸣高、缪协兴等将破断前的老底视作板结构，破断后的块体视作“砌体梁”结构对采场底板岩层破断规律进行了研究，认为底板中含水层以上承载能力最高的一层岩层是控制突水的关键层，一旦关键层破裂，就会引发突水，并将关键层看成薄板，在力学手段上采用薄板模型建立了关键层理论[94][135]。北京煤科院王作宇、刘鸿泉从矿山压力及承压水压力角度，解释了煤层开采过程中的底板破坏过程，提出了原位张裂与零位破坏理论[95]。陈秦生、蔡元龙[127]用模式识别方法预测底板突水取得了一定的成效。李金凯、王延福对华北型的岩溶煤矿提出一种底板突水量的预测方法。张玉卓、朱泽虎及黎良杰等对底板突水机理也做了一些研究工作。郭维嘉、施龙青、肖洪天、李家祥、连传杰、娄华君、张文泉等从不同角度，并注意结合现代力学与计算机应用，对底板突水机理及预测方法研究做了一些工作。另外，许多现场工作人员如张希平、卜昌森、杨善安、于树春等在突水机理研究方面也做了一定的工作。总之，这些研究成果，对减少煤层底板突水事故的发生，改善我国煤矿安全状况起到了重要的作用。

近几年来，随着矿井向深部延伸，华北地区开采煤层所承受的岩溶含水层水压将越来越大，受底板突水的威胁也将更加严重。因此，对煤层底板突水机理及有效预测进行研究，仍旧是我国煤矿生产安全所面临的十分迫切的问题。

目前，在对煤层底板突水机理及预测研究上，主要是给定简化条件，建立相应的力学模型。然而岩石是一种十分复杂的地球介质，其复杂性、模糊性和不确定性，使得传统的力学方法难以很好的应用，因此造成其计算结果准确度低，工

程应用“信誉不高”[96]。非线性是岩石体力学行为的本质特征，煤层底板岩体系统是高度非线性复杂大系统，并处于动态不可逆演化之中。因此，对底板突水机理和预测的研究，必须借助当代非线性科学，充分研究底板突水的非线性动力学特征，即从非线性角度探讨底板突水的机理、寻求底板突水预测的新方法。

1.2 非线性动力学发展综述

20 世纪 70 年代前后，关于系统的演化问题及过程的非线性引起了人们极大的关注，出现了以耗散结构、协同、突变、混沌、重整化群、分形和神经网络为核心的非线性科学理论。如果说一般系统科学研究的是系统的物理状态构成，要素之间的作用与联系，那么非线性科学理论研究的就是系统的性质及其演化，如何从一种状态达到另一种新的状态，从纷繁复杂的现象中，揭示出事物发展的规律性。近 20 年来，非线性科学理论取得了令人瞩目的成就，有人称之为在本世纪内继量子力学、相对论两项重大科学发展的第三次科学革命。

20 世纪 60 年代以前，对于复杂的非平衡系统，在物理学界常常认为是不可捉模、杂乱无章的。然而 1969 年 Prigogine 首先提出了耗散结构的概念，并逐渐发展形成的耗散结构理论[1][2]，使得对非平衡系统的认识，取得了重大突破。接着 Haken 的协同学[3][4]问世，它克服了耗散结构理论的局限性，从物理系统出发，研究了系统如何在子系统的协同下，由无序走向有序的过程。1972 年 Thom 提出了研究连续发展过程中出现的突变现象以及它与连续变化因素之间关系的突变理

论[5]。1963 年美国气象学家 Lorenz[6]在分析天气预报模型时，得出气象不可预测的结论，第一次发现了混沌，但直到 1975 年李天岩和 York 才提出了描述确定性系统表现出“初值敏感性”的随机行为（或无规则运动）的混沌理论[136]，从而提供了把复杂行为理解为有目的某种行为的方法，而不是理解为外来的偶然行为。1974 年 Wilson[20]提出了处理各种相变和临界点问题的重整化群方法。1982 年 Mandbrot 提出了分形几何理论[7]，它通过自相似性为我们描述复杂性又提供了一种方法。人工神经网络[8](ANN)创立于 80 年代中期，它试图模拟人脑的一些基本特性，如自适应、自组织、容错性等，已在模试识别、数据处理、自动控制等领域得到广泛应用。

应该指出的是关于混沌现象的研究，由于 Feigenbaum 得到对单峰映射的出色结果，而在 80 年代掀起了一个高潮。对于低维离散动力系统，我们可以较容易地通过映象函数的分类，将各种动力系统分作一些行为相似的类，而单峰映象就是其中最重要的类之一。Feigenbaum 利用尺度变换和重整化群的方法，发现了单峰映象中通过倍周期分岔进入混沌的一系列普适律[9]。随后人们通过这个映象进一步研究，又发现了通过“阵发”现象进入混沌[10]，通过危机进入混沌[11]等一系列现象及普适律。在对于混沌的度量方面也取得了重大进展，Packara[12]1980 年提出用时间序列重新构造吸引子的相空间图像的方法。Takens[13]1981 年提出了嵌入定理，表明只要相空间的维数足够大，就可以刻划 D_0 维的混沌吸引子。1984 年，Grassberger 和 Procaccia[14]提出从时间序列中提取关联维数的方法。1987 年 J. D. Farmar[15]研究了如何预测混沌时间序列问题。在我国，郝柏林院士[16]等率先对分岔混沌、

奇怪吸引子之间的关系等进行系统研究。郑伟谋、郝柏林[17]等创立了实用符号动力学方法来研究混沌性态，刘式达等[18]对大气湍流发生的问题进行了探讨。杨维明[19]利用偶合映象格子模型对时空混沌进行了研究。

非线性科学作为一门旨在应用的科学，近年来在气象[21~27]、地震[28~43]、生物[44~47]、岩土力学[48~67]、工程地质[68~84]等领域得到了广泛的应用，取得了丰硕的成果。

1.3 本书特色

1.3.1 目前的研究方法

如前所述，目前煤层底板突水机理及预测的研究方法与突水形成过程（图 1—1）如下：

（1）承压水上煤层开采后，由于矿山压力作用，底板岩层发生变形、破坏而形成导水裂隙。对矿山压力作用下底板岩层的变形破坏特征，目前主要采用弹塑性力学方法进行研究。

（2）在矿压及水压的作用下底板岩层中的裂隙扩展并贯通，形成导水通道时，就会发生底板突水。对底板岩层裂隙扩展的条件及判断依据，目前主要采用断裂力学方法进行研究。

（3）承压水上煤层开采将受到底板突水的威胁，因此对煤层底板突水可能性的预测预报是承压水上安全开采的关键。目前对于底板突水可能性的预测，主要是采用薄板理论进行研究。

（4）若煤层开采存在突水危险，会发生底板突水，那么

预测其底板突水量将对有效采取防范措施有重要意义。对煤层底板突水量预测，目前主要采用数理统计与模糊数学方法进行研究。

1.3.2 本书的特色

针对以上过程，本书的特色（图 1—1）在于：

（1）首先基于大量的实测信息，对底板岩层变形破坏过程中岩移、注水量（渗透性）等矿压显现的观测时序进行关联维及 Lyapunov 指数的提取，若关联维存在，说明所研究的系统具有混沌性，且关联维愈大说明系统愈复杂，因此可以用关联维来描述底板岩层变形破坏的状态及其发展程度。同样，亦可用 Lyapunov 指数对此予以描述。

（2）研究表明，由于从底板岩层裂隙扩展到贯通形成导水通道，发生底板突水，处处都存在自组织过程。本文将利用重整化群方法对底板岩层破裂过程的自组织临界特性进行研究，即通过研究底板岩层单元体的破坏率的变化来判断单元体破裂的随机性和关联性，从而可以描述底板导水裂隙的扩展情况。

（3）底板破坏发生突水，是一种突变现象，属突变理论研究的范畴。故本文拟首先采用拓扑学的方法建立底板突水的势函数，分析、证实底板突水具有尖点突变特征。在此基础上，建立底板岩层水压应力比的尖点突变模型，以此研究底板突水可能性的预测问题。

（4）为了弥补一般统计方法预测底板突水量的缺陷，本文采用优越的遗传算法训练人工神经网络，建立底板突水量预测的组合人工神经网络模型，解决突水量的有效预测问题。为了保证预测模型的实用性，本文综合考虑水源、水压、隔

水层、矿压、断层等因素对底板突水的影响，采用多个典型工作面突水资料对网络进行训练，直到达到要求精度为止，最后采用满足精度要求的预测模型对底板突水量进行预测。

煤层底板由不突水状态转化到突水状态是一个发展的过

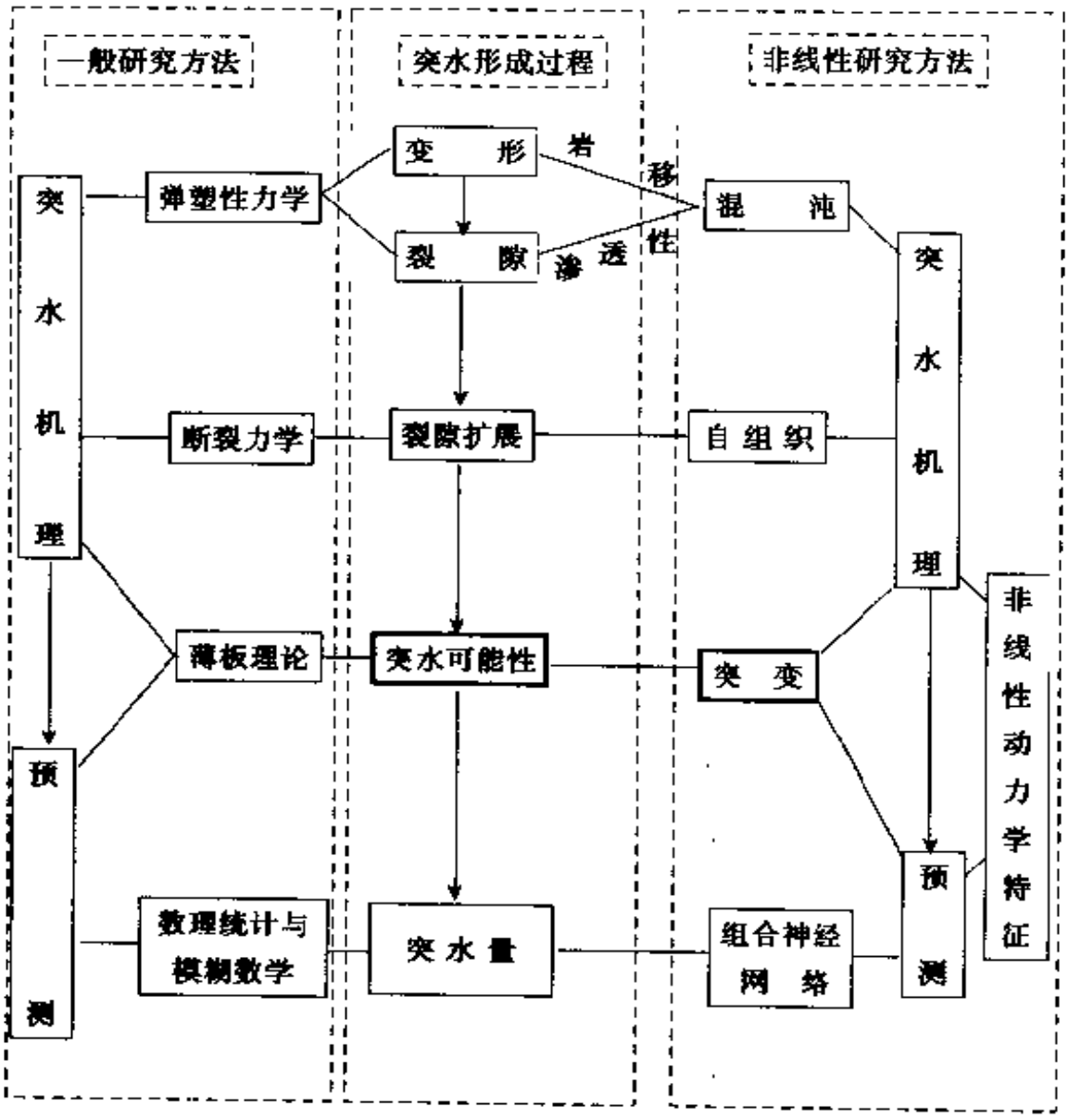


图 1—1　底板突水形成过程与底板突水研究方法

程，针对这一过程，本书从以上几个方面，对底板突水的非线性动力学特征进行较全面、系统的阐述，并在此基础上提出煤层底板突水预测的新方法，为底板突水的可靠防治奠定基础。这无疑对煤矿的安全生产有着重要的现实意义。

2 底板岩层变形破坏过程中混沌动力学特征

2.1 概 述

煤层开采之前，煤层底板岩层处于平衡状态。煤层开采之后，原有的平衡状态被破坏，促使应力重新分布，其结果造成煤层底板岩层移动变形，向上臌起形成破坏性裂隙。特别是在薄隔水层条件下，常常因采动造成底板的变形破坏，从而引发底板突水。为了查明采场矿压作用下的底板变形破坏规律，一些矿区与高校和科研院所合作，进行了许多的采场底板变形破坏观测，取得了大量的观测数据。理论研究、数值模拟研究及实验研究等虽然在认识底板岩层移动变形规律及其动力学特性方面起到了重要的作用，但在工程实践中，利用实测数据信息来推断底板岩层移动变形破坏规律及其动力学特性无疑是最直接，也是最重要的方法。

本章将按照非线性动力学的观点，从实测数据序列中分析底板岩层变形破坏过程中的混沌现象，来认识、识别底板岩层所处的状态及其动力学行为，这无疑对底板突水机理及预测预报方法研究具有重要意义。

2.2 混沌理论基础

2.2.1 混 沌

2.2.1.1 确定论和概率论

对同一客观世界，在物理学中有确定论和概率论两套理论体系。牛顿力学是确定论的典型代表。由于牛顿力学在天体等领域的辉煌成就，人们习惯地认为，确定论是一种“一一对应”的因果关系。一组确定的初值，决定了未来一条确定的轨道，即系统的演化行为是由系统的初值唯一地确定。按确定论，如果初始条件有微小的差别，轨道的差别也不大，即对初始条件的不敏感性，只有这样才能对系统的将来和过去进行准确的预测，确定论是目前从事一切动力预测、预报的数理基础。当然，自 1963 年，Lorenz 在一个确定性的非线性耗散系统中，发现了完全无序的非周期运动——混沌以来，上述的习惯看法便受到了根本的冲击。以下的讨论将表明：只要客观确定性系统稍微复杂一些，其行为将是确定和随机并存。即牛顿力学系统亦存在随机性（内在随机性）。

与确定论的“一一对应”的因果关系相反的是“一多对应”关系，即概率论。热力学和流体力学系统是概率论描述的代表，虽然系统的每个分子都遵循牛顿力学，这是确定性的，但由系统的微观态到宏观态就出现了不确定性。一个平衡态对应许许多多微观态，这样一多对应关系就导致了不确定性。我们不知道系统到底处在哪个确切的微观态，而只知道系统处在每个微观态的几率是多大。对于孤立系统，众多不同的非平衡态最终要归于一个平衡态，这又是多对一关系，

从最终的平衡状态无法判断系统来自哪个非平衡态，这就是Prigogine所说的，未来并不完全包含在过去之中。

2.2.1.2 外在随机性和内在随机性

确定性行为产生于确定性方程。确定性方程是指方程中所含的参数和初始条件都是确定的。随机行为产生于两类方程：一类是随机微分方程，一类是确定性方程。随机微分方程表现的随机性是系统与外部环境相互作用中产生的，故把它称为外在随机性。系统的外在随机性，虽然是造成长期预报不准确的一种因素。然而，近十几年的大量研究表明，一些完全确定的非线性方程（组）却在一定的参数范围内给出了非周期的、类似随机的混乱输出。我们把这种导致确定性系统的类随机行为的起因，称之为系统的内在随机性。混沌就是由确定性方程产生出来的随机现象。内在随机性是混沌系统的特征表现之一。

2.2.1.3 混 沌

“混沌”亦写成“浑沌”。它是自然界中的一大类现象，它比有序更为普通。因为在现实的世界中，绝大部分现象不是有序的、稳定的和平衡的，而是处于无序的、变化的和涨落起伏之中的。

如前所述，在某些不需要附加任何随机因素的确定性非线性系统中，由于其系统内部存在着非线性的相互作用所产生的类随机现象我们把它称为“混沌”、“自发混沌”、“内在随机性”等。混沌一词由李天岩（Li TY）和约克（Yorke JA）于1975年首先提出。1975年他们在“周期3意味着混沌”的文章中给出了混沌的一种数学定义，即Li—Yorke定义：

设连续自映射 $f: I \to I \subset R$，I 是 R 中一个子区间。如果

存在不可数集合 $S\subset I$ 满足：

(1) S 不包含周期点。

(2) 任给 x_1，$x_2\in S$ $(x_1\neq x_2)$，有：

$$\limsup_{t\to\infty}|f^t(x_1)-f^t(x_2)|>0$$

$$\liminf_{t\to\infty}|f^t(x_1)-f^t(x_2)|=0$$

这里 $f^t(\cdot)=f(f(\cdots f(\cdot)))$ 表 t 重函数关系。

(3)任给 $x_1\in S$ 及 f 的任意周期点 $P\in I$ 有：

$$\limsup_{t\to\infty}|f^t(x_1)-f^t(P)|>0$$

此定义中，由于前两个极限说明了子集的点 $x_1,x_2\in S$ 相当分散而又相当集中，第三个极限说明了子集不会趋近于任意周期点，所以这个定理本身只预言有非周期轨道存在，既不涉及这些非周期点的集合是否具有非零测度，也不涉及哪个周期是稳定的。因此，Li—Yorke 定义的缺陷在于集合 S 的勒贝格测度有可能为零，即这时混沌是不可观测的，而人们感兴趣的是可观测的情形，即此时 S 有一个正的测度。

根据 Li—Yorke 定义，1983 年梅(Day)认为一个混沌系统应具有如下三种性质：第一，存在所有阶的周期轨道；第二，存在一个不可数集合，该集合只含有混沌轨道，且任意两个轨道既不趋向远离，也不趋向接近，而是两种状态交替出现，同时任一轨道不趋于任一轨道，即该集合不存在渐近周期轨道；第三，混沌轨道具有高度的不稳定性。

混沌现象的发现以及基于上述定义，使人们认识到客观事物的运动不仅是定常、周期或准周期的运动，而且还存在着一种具有更为普遍意义的形式，即无序的混沌。正是有了混沌现象，人们发现，在确定论和概率论这两套体系的描述

之间存在着由此及彼的桥梁。混沌的发现还使人们认识到，像大气、海洋这样的耗散系统是一个对初始条件极为敏感的系统，即使初始条件差别微小的两种状态，那么最终也会导致结果差异很大，甚至两种结果变得毫无关系，这就是所谓的非线性确定性系统的长期不可预测性。混沌概念的提出，还使得人们能够将许多复杂现象看作是有目的、有结构的行为，而不再是某种外来的偶然性行为。

除此之外，混沌还丰富了人们对远离平衡态现象的认识。物理系统在远离平衡条件下，既可通过突变进入更为有序和对称的状态，也可能经过突变进入混沌状态，然而混沌并不是简单的“无序”或“混乱”，而是没有明显的周期和对称，但它却具备了丰富的内部层次的“有序”状态。一般说来，在自然界中，混沌是更为普遍的现象。

大家知道，在经典力学中，不论耗散系统还是保守系统的运动，都可用相空间中的轨道来表示。若运动方程不含随机项，它描述一种确定性的运动。混沌运动是确定论系统中局限于有限相空间的轨道高度不稳定的运动。这种轨道高度不稳定，是指随着时间的发展，相邻相空间轨道之间的距离会指数地增大。正是这种不稳定性，从而使系统的长时间行为会显示出某种混乱性。对时间的或相空间的粗视平均将呈现典型的随机行为。

下面以一个最简单的例子——描述生态学中的人口（或虫口）方程（即 Logistic 方程）来说明上述有关混沌的基本概念[141]。其方程为：

$$x_{n+1}=\mu x_n\ (1-x_n) \qquad (2-1)$$

它描述了人口（虫口）数目随世代的变化。式中 x_n 为 n 代虫口数，x_{n+1} 为 $n+1$ 代虫口数，μ 为一控制参数，恰当定

义参数和变量后，可把式（2—1）写成标准形式

$$x_{n+1}=f\ (x_n)\ =1-ax_n^2 \qquad (2-2)$$

如果把参数 a 限制在［0，2］区间内，式（2—2）就是从线段 $I=[-1,1]$ 到它本身的一个非线性映射：只要 x_n 取自 I，x_{n+1}也就落在 I 内。这里仅讨论 $a=2$ 的情况，即

$$x_{n+1}=1-2x_n^2 \qquad (2-3)$$

它被称作 Uam—von Neumnn 映射，正是由于取极特殊的参数 $a=2$，所以 x_{n+1}可能充满整个线段 $I=[-1,1]$，这称为线段的满映射。为使式（2--3）所描述的混沌行为可以解析地求得，于是引入变换

$$x=\cos t \qquad (2-4)$$

那么式（2—3）变为

$$\cos t_{n+1}=-\cos 2t_n \qquad (2-5)$$

式（2—5）的解为

$$t_{n+1}=\ (2k+1)\ \pi\pm 2t_n \qquad (2-6)$$

式中 k 为任意整数，最后结果与 k 的取值无关。由式（2—6）中的 t_{n+1}与 t_n 关系，可将 t_n 通过

$$t_n=\ (2k_n+1)\ \pi\pm 2^n t_0 \qquad (2-7)$$

表示为 n 的函数，k_n 为与 n 有关的整数。由式（2—4）和式（2—7）易于求得

$$x_n=-\cos\ (2^n\arccos x_0) \qquad (2-8)$$

若 $\arccos x_0/2\pi$ 为无理数，那么

$$\theta_n=2^n\arccos x_0\ (\mathrm{mod}2\pi) \qquad (2-9)$$

为一典型的伪随机。而对任意的 x_0，$\dfrac{\arccos x_0}{2\pi}$为无理数的测度为 1，故式（2—8）描述的是一种伪随机运动。其轨迹的分布呈现随机的性质，尽管它是一种确定性的运动。式（2—9）所

产生的点集分布应对变换 $\theta \to 2\theta \pmod{2\pi}$ 保持不变，于是其概率分布是（0，2π）区间上的均匀分布

$$P(\theta) = 1/2\pi \tag{2-10}$$

根据下式

$$P(x)\mathrm{d}x = P(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{2-11}$$

可求得 x_n 的分布函数

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1/\{\pi \sqrt{1-x^2}\} \tag{2-12}$$

式中因子 2 是由于反函数 $\theta = \arccos(-x)$ 的双值性所致。式（2－12）就是式（2－3）经多次迭代所得的序列 x_n 的分布。

关于轨道的稳定性，通常采用 Lyapunov 指数来描述（将在后面讨论），对于一维映射定义为

$$\mathrm{LE} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_0} \right| \tag{2-13}$$

如果 LE$<$0，相邻轨道以 $\mathrm{e}^{\mathrm{LE}n}$ 的方式指数地靠拢，所给定的轨道是稳定的。如果 LE$>$0，相邻轨道便指数地分离，所给定的轨道是不稳定的。由式（2－8）和式（2－13）很易求出式（2－3）的 Lyapunov 指数

$$\mathrm{LE} = \ln 2 \tag{2-14}$$

由于 LE$>$0，所以 Uam－von Neumann 映象的轨道是不稳定的，是一种混沌运动。

2.1.1.4 混沌的基本特征

（1）混沌是确定性与随机性、无序性与有序性的对立统一体。一方面系统的初值敏感性和非关联性决定了系统在时域上的随机性和无序性，另一方面混沌产生于确定性规律（如动力学方程或映射），混沌状态均落入一定的吸引子上，而使系统具有自相似分形结构（有序性）和不变概率密度分布

（确定性）。

（2）混沌源于非线性，具有非线性特征。当系统出现非线性机制后往往产生混沌。如描述生态系统的虫口方程：$x_{n+1}=\mu x_n-\mu x_n^2$，由于存在二次项——$\mu x_n^2$，使系统在一定条件下出现混沌态而具有随机性、非叠加性和不可预测性等非线性特征。

（3）混沌是稳定性和不稳定性的矛盾统一体。一方面混沌系统本身具有局部或状态的随机性、不稳定性和整体上的稳定性与确定性，另一方面相对稳定的混沌系统可在一定外界条件下通过分岔、突变可转化为有序系统或新的混沌态。混沌系统的状态不稳定性贯穿于所有状态和状态的转化过程中，而稳定性是相对的和有条件的。

（4）混沌系统具有 Gestalt 特征[97]，即复杂系统的整体行为和特征不能通过其组成部分的特征来获得。混沌系统的整体行为和性质来源于各部或多种因素的内在联系和相互作用。系统的非线性决定了它不具有线性叠加性。

（5）混沌运动具有有限域的连续功率或频谱，而平衡运动、周期运动和准周期运动的频率或功率谱分别为一个点、若干分离线和离散谱。

2.2.2 研究混沌现象的方法

2.2.2.1 功率谱法

人们熟知且应用最多的一种表征复杂时间序列特性的统计量是功率谱。它把复杂的时间序列分解成不同频率的正弦振荡的叠加。给定频率处的功率谱值与该频率的正弦波系数的平方成正比。下面给出功率谱分析的基本方法[142]。

在实际测量中得到的往往是按等时间间隔 τ 的时间序列

x_1，x_2，……x_n。对这个序列人为地加上周期边界条件 $x_{N+j}=x_j$，$\forall j$，然后计算自相关函数，即离散卷积

$$C_j=\left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}x_ix_j \tag{2-15}$$

再对 C_j 作离散 Fourier 变换，计算其 Fourier 系数

$$P_k=\sum_{i=1}^{N}C_j e^{[(2\pi j\ \sqrt{-1}/N)]} \tag{2-16}$$

P_k 代表第 k 个频率分量对 x_i 的贡献，这就是功率谱的本来意义。利用快速 Fourier 变换，更有效的计算功率谱的方法是不经过自关联函数而直接求 x_i 的 Fourier 系数。

$$a_k=\left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}x_i\cos\left(\frac{\pi ik}{N}\right) \tag{2-17}$$

$$b_k=\left(\frac{1}{N}\right)\sum_{i=1}^{N}x_i\sin\left(\frac{\pi ik}{N}\right) \tag{2-18}$$

然后计算

$$\overline{P}_k=a_k^2+b_k^2 \tag{2-19}$$

通常为许多组 x_i 计算一批 P_k，平均后即逼近前面定义的功率谱。

在倍周期分叉过程中，每分叉一次功率谱中就出现一批对应新分频及其倍频的峰。例如 1P 的功率谱只有基频及其倍数 1，2，3，4，…，由 1P 分叉到 2P 分叉后出现 1/2，3/2，5/2……，2P 到 4P 后出现 1/4，3/4，5/4，7/4，……，等等。图 2—1 是一幅 32P 的功率谱。新出现的分频峰达到一定高度后就不再增长。这时 $2n$P 的平均峰高 $\phi(n)$ 与 $2(n+1)$ P 的平均峰高 $\phi(n+1)$ 之比是一个常数。混沌带功率谱的特点是依次出现各阶宽峰。时间序 x_i 自然地包含了两个时间常数，即采样间隔 τ 和总采样时间 $N\tau$。这两个时间常数的

倒数，分别决定两个特征频率

$$f_{max}=1/2\tau \qquad (2-20)$$

和

$$f_{max}=\Delta f=1/N\tau \qquad (2-21)$$

f_{max}是以此种采样数据所能观测的最高频率，不然就会出现波形重叠现象，使抽样后的 Fourier 变换产生畸变而失真。为了反映变频成分，应该缩短采样间隔。F_{min}是两个相邻 Fourier 系数的频率差。

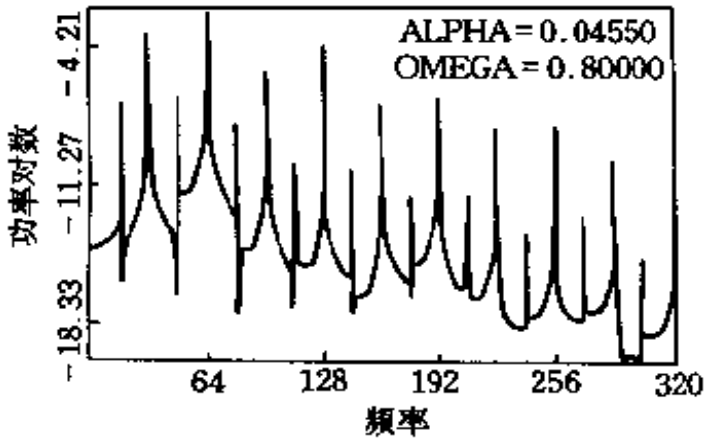


图 2－1　功率谱

使用离散 Fourier 变换时必须经过采样和截断的过程，而这些都会引起误差。设想从有限长的一段正弦函数采集了 100 个点。总有无穷多个办法来构造频率更高的周期函数，使之准确通过这 100 个点。这就是说，离散采样时总会出现虚假的高频成分。由于周期性边界条件，这些虚假的高频峰会反射回（0，f_{max}）频率区间内，造成所谓混淆现象。混淆现象原则上不能消除，只能设法减弱。办法是令 f_{max}显著地超过系统的实际之频率 f_0，例如取

$$f_{max}=kf_0 \qquad (2-22)$$

其中 $k=4\sim8$，然后在所得的频率谱只取 f_0 以下部分。这样处理后，来自混淆现象的假峰可以有效地降低甚至小到背景之下。

另一方面分频的出现对于识别通向混沌的道路有重要意义。因而设计功率谱的计算方案时，就必须要求分辨出一定的分频，例如 $P=32$ 的分频。所谓分辨出就是要求相应的峰由若干个点（例如 S 个点构成，在功率谱中形成有把握确认的结构），因此我们有

$$S\Delta f=f_0/P \tag{2-23}$$

如果取 $k=4$，$S=8$，$P=32$，$N=2048$。这就是说要有效地避免混淆现象和分辨 32 分频，至少要采 2048 个点来作一次 Fourier 变换。通常 N 由计算机的能力决定。这样，进行功率谱分析之前应当作到：

(1) 确定系统的基频 f_0 和计算机能力允许的 N；

(2) 给定 k，确定采样间隔 $\tau=1/(2kf_0)$。对于实验工作，这就确定了应当选用的模数转换器（ADC）的频率；对于理论计算，这决定了每迭代几次或积分几步采一个点，而决不是把所有的迭代点都送去作 Fourier 变换；

(3) 在 S 和 P 中寻求妥协。通过在研究过程中尽量减少 S，达到较高的频率分辨。但为了绘制频谱时，又增加 S 而牺牲 P；

(4)如果原始数据来自包含大量噪声与外界干扰的测量，还应当考虑适当的滤波或光滑化。

2.2.2.2 庞卡莱截面法

由于非线性系统的复杂性，一般地要直接研究（求解）非线性系统的轨道是极其困难的，故而我们引进 Poincare 截面方法。

所谓 Poincare 截面就是在相空间中取一适当的 $N-1$ 维超平面，通常它通过一个不稳定的不动点，这个超平面即为 Pincare 截面。当轨道给定的演化方向通过 Pincare 截面时记录下来，从而得到第 $n+1$ 次交点 x_{n+1} 与第 n 次交点 x_n，它们之间存在如下关系

$$x_{n+1}=f\ (x_n) \tag{2-24}$$

上式为 $N-1$ 个函数关系。

事实上，Poincare 截面法是将动力系统的轨线转化为轨迹与相空间里的一个横截面（Poincare 截面）的交点来研究，从而将连续的动力系统演化问题转化为一个离散的映射。Poincare 截面法的优点在它能在保持原连续动力系统的拓朴性质不变的前提下，而将相空间的维数减少一个，从面使问题的复杂程度极大地降低了；同时在数字上，由于映射是一差分方程，而差分方程较连续方程更容易解决。图 2—2 就是

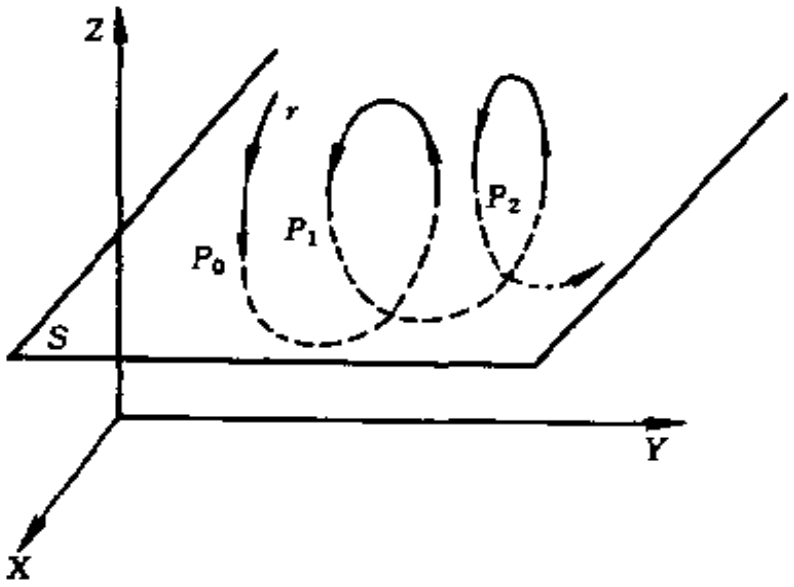


图 2—2　Poincare 截面的说明

这种方法的示意图。由图看出三维空间的轨线以一定的演化方向（$Z<0$）与$Z=$常数的横截面S（Poincare 截面）依次相交于P_0、P_1、P_2、……P_n点，这些离散的点形成了一个庞加莱映射。

$$P_1=T(P_0),P_2=T(P_1)=T^2(P_0)$$

$$P_3=T(P_2)=T(T(P_1))=T(T(T(P_0)))=T^3(P_0)$$

……

$$P_n=T(P_{n-1})=T^n(P_0) \qquad (2-25)$$

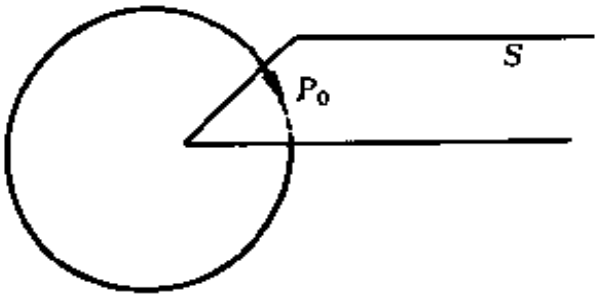


图 2—3　极限环的 Poincare 截面

这样，就将原动力系统所决定的随时间的连续运动转变为在 Poincare 截面上的一个离散映射。那么具体到耗散结构中的四种吸引子（定常吸引子，周期吸引子，准周期吸引子，混沌吸引子），它们在 Poincare 截面上是如何反映其相应的结构呢？大家知道，相空间中不同的初值可能对应不同的运动形态。只要运动是有界的，轨线将多次穿过 Poincare 截面。

（1）周期吸引子。对子周期运动的极限环，轨迹与 Poincare 截面的交点显然只有一个。如图 2—3 所示，显然此时有

$$P_0=P_1=P_2=\cdots\cdots P_n=\cdots=P$$

$$P_n=P=T^m(P_0)=T^n(P) \qquad (2-26)$$

这里的P为 Poincare 截面上的不动点，即轨道与截面S的唯一交点。而极限环的稳定性可由不动点P的稳定性来决

定。

因为

$$P_{n+1}=T\ (P_n) \tag{2-27}$$

$$P=T\ (P) \tag{2-28}$$

由式（2－27）、式（2－28）可得：

$$|P_{n+1}-P|=|T\ (P_n)\ -T\ (P)\ |=\left|\frac{\partial T}{\partial P_n}\right|\cdot|P_n-P| \tag{2-29}$$

所以当

$$\left|\frac{\partial T}{\partial P_n}\right|<1 \tag{2-30}$$

时，只要 n 充分大，则 $|P_{n+1}-P|$ 为无穷小量，即 P_n 趋于 P，从而不动点 P 是稳定的。

作为例子考虑方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x\ [1-\ (x^2+y^2)]\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=x+y\ [1-\ (x^2+y^2)]\end{cases} \tag{2-31}$$

非线性方程（2－31）可以严格求解。为此，令

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases} \tag{2-32}$$

对方程（2－31）的两边分别乘 x 和 y，并利用式（2－32）容易把它化为极坐标中的形式

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{dr^2}{dt}=r^2\ (1-r^2)\\[2ex]\dfrac{d\theta}{dt}=1\end{cases} \tag{2-33}$$

利用公式

$$\frac{1}{r^2\ (1-r^2)}=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{1-r^2} \tag{2-34}$$

容易得到方程（2－33）的积分

$$\begin{cases} r=\dfrac{1}{\sqrt{1-ce^{2t}}} \\ \theta=t \end{cases} \tag{2-35}$$

其中 C 是由初始条件决定的积分常数。因此，有

$$\begin{cases} x=\dfrac{\cos t}{\sqrt{1+ce^{-2t}}} \\ y=\dfrac{\sin t}{\sqrt{1+ce^{-2t}}} \end{cases} \tag{2-36}$$

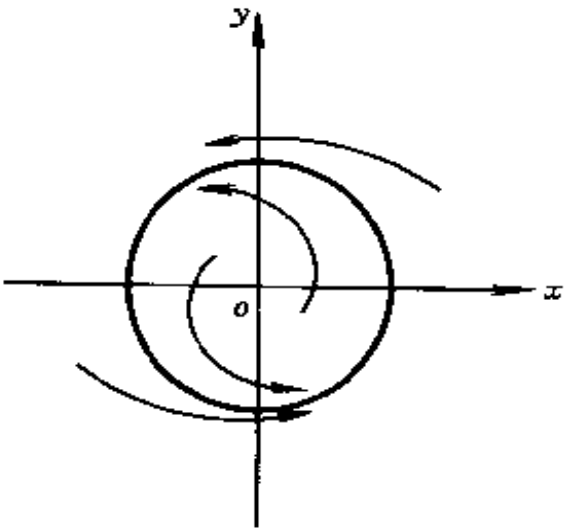


图 2－4　方程（2－31）产生的极限

由方程（2－35）可知，相平面中所有轨线的演化极限是经

$$r\ (t\to\infty)\ =1 \tag{2-37}$$

的单位圆，如图 2－4 所示。如果 $C>0$，初始轨线在单位圆内；如果 $-1<C<0$，初始轨线在单位圆外。在 $t\to\infty$ 时，内、外轨线都渐渐地进入单位圆。这个单位圆就是一个渐近稳定的极限环，因为它代表一种持续稳定的周期振荡，所以又把它称为周期吸引子。

(2)拟周期吸引子。如图 2－5 所示的二维环面上的运动，

由两个频率 f_1 和 f_2 叠加而成，其中 f_1 为沿柱轴的旋转，f_2 为围绕柱轴的旋转。图中所示的一闭合曲线 C 是由轨迹与横截柱轴的 Poincare 截面 S 相交后形成的。该曲线 C 或是简单的无自相交的点，如圆、椭圆等，或者类似于图 2—6 所示的 8 字形或圆滚线。当 f_1/f_2 是无理数时，由于运动轨道绕满整个环面，无始无终，永不封闭，既轨道永不重复已走的路，所以曲线 C 是连续的；当 f_1/f_2 为有理数时，由于运动是绕在环面上的封闭曲线，于是在 Poincare 截面上只出现有限个点，所以 Poincare 截面是沿 C 的有限点集。特别是当 $f_1/f_2=\frac{n_1}{n_2}$（n_1 和 n_2 是两个整数）时，由于动力系统中存在着两种振动模式之间的非线性偶合，这时就出现了频率锁相。但当这两个周期运动之间无偶合，且 n_1 和 n_2 为互不相约的整数时，则其周期变为 $T=\frac{n_1}{f_1}=\frac{n_2}{f_2}$，可见运动仍然是周期的，这时 Poincare 截面上仅有 n 个离散点，且 Poincare 截面是一维的。

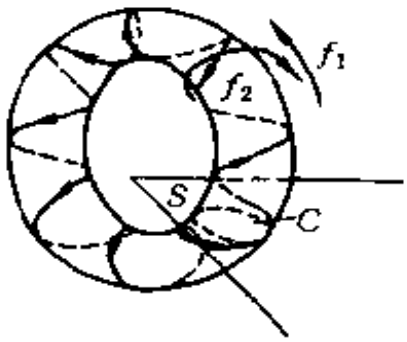


图 2—5　二维环面和它的 Poincare 截面



图 2—6　拟周期运动的 Poincare 截面图形

(3) 非周期的混沌吸引子。与周期和拟周期吸引子不同，它的运动轨道常常在三维或三维以上的空间中表现出极其复杂的图像，以致其内部结构从外面是根本看不出来的。然而通过 Poincare 映象，可以使其 Poincare 截面是沿一条线段或一曲线弧的分布点集。图 2－7 就是混沌吸引子的 Poincare 截面图像。

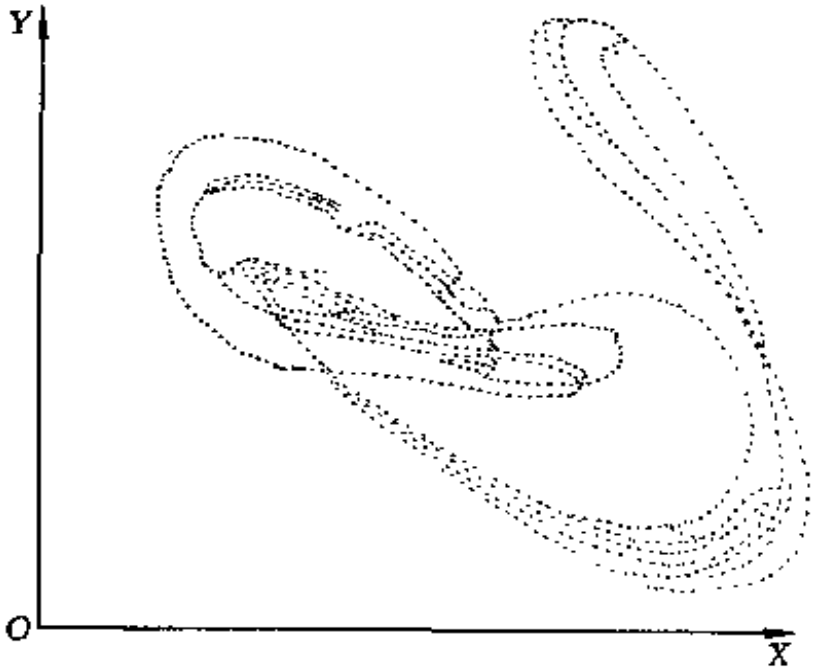


图 2－7　混沌吸引子的 Poincare 截面

2.2.2.3　从倍周期分岔进入混沌

出现混沌最为典型的模型就是生态学中的 Logistic 模型

$$x_{n+1}=f\ (x_n)\ =\mu x_n\ (1-x_n) \qquad (2-38)$$

式（2－38）描述了昆虫数目随世代的变化。若 n 代表时间，则可用 x_n 代表第 n 代的出生数，x_{n+1}代表第 $n+1$ 代的出生数。由式（2－38）可见，其右边第一项表示第 $n+1$ 代的

昆虫数 x_{n+1} 与第 n 代的昆虫数 x_n 成正比，第二项则反映环境限制因素引起的非线性项，即昆虫与环境的相互作用导致 x_{n+1} 存活率的降低。

显然式（2—38）是二次映象。它的极大值出现在 $x_n=\frac{1}{2}$ 处，此时相应的 $x_{n+1}=\frac{\mu}{4}$，即 $\mu/4$ 为抛物线的高度。由于 x_{n+1} 不大于 1，故 μ 不得大于 4，在昆虫出生数增长率为正值的前提下，必须使得 $\mu>1$。因此 $1<\mu<4$ 是人们感兴趣的参数 μ 的取值范围。要研究昆虫的长时间行为，首先我们要知道的是，在一定的环境和条件下，昆虫的数量能繁殖到什么数量。显然，出现此不变值或不动点的条件是

$$x_{n+1}=x_n \tag{2—39}$$

一种求不动点的形象方法是作图：用直角坐标系的纵横坐标分别表示 x_{n+1} 和 x_n，则式（2—38）如图 2—8 的曲线所示，不动点就是抛物线与分角线的交点。当开始 x 取任意小值 x_0 时，经过第一次迭代（映象），x 将取 x_1。把 x_1 再当横坐标（经 x_1 画平行横轴的横线，它与分角线交点的横坐标）作为第二次迭代的初值 x_1。通过此横坐标 x_1 的竖线与抛物线的交点的纵坐标就是第二次迭代的结果 x_2。如此下去，如果参数 μ 的值不太大时，最后便达到抛物线与分角线的交点 Q，此交点的纵横坐标 x^* 就是满足式（2—39）的不动点数值。可以看出，任意不同的初值 x_0，经过多次迭代都将达到同一不动点 Q，这表明在一定条件下，不管开始时昆虫数量如何，其最后数量总是稳定在 x^*。

由以上分析可以看出，不动点显然满足方程

$$\begin{cases} x_n=f\ (x_n) \\ x_n=\mu\ (1-x_n) \end{cases} \tag{2—40}$$

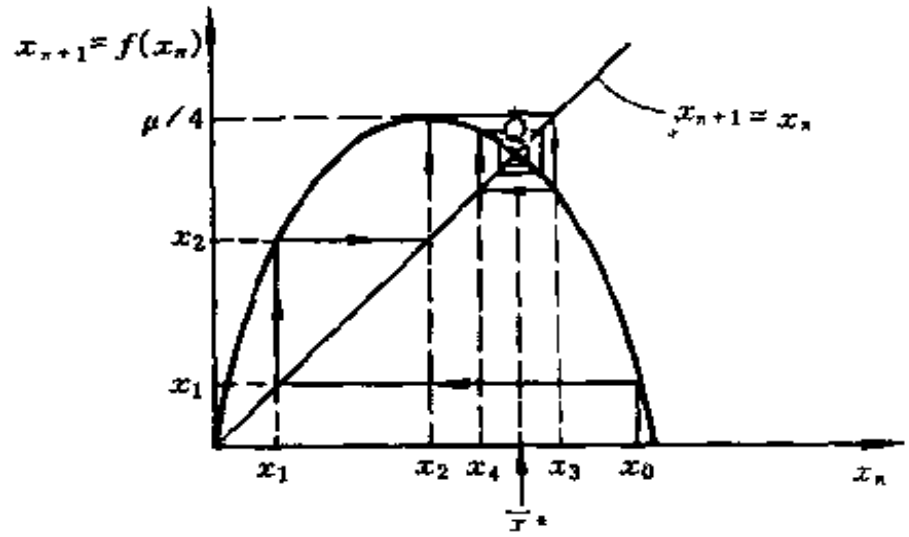


图 2—8　Logistic 映象

由此可解出两个不动点

$$\begin{cases} x^* = 0 \\ \bar{x}^* = 1 - \dfrac{1}{\mu} \end{cases} \tag{2—41}$$

若是稳定的不动点，当给定一个初值 x_0 后，则图 2—8 中箭头所示的迭代过程将收敛到该点。

关于不动点的稳定性问题，在这里不仅要找到使运动保持稳定的条件，而且还要找到运动失稳的条件，并研究失稳后运动如何进一步演化。为此我们来讨论不动点的稳定性条件。

在不动点 x^* 附近，如要把每次迭代的结果写成

$$x_n = x^* + \varepsilon_n \tag{2—42}$$

将式（2—42）代入式（2—38），展成 Tayor 级数

$$x_{n+1} = x^* + \varepsilon_{n+1} = f(x^* + \varepsilon_n)$$

$$=f(x^*)+f'(x)\varepsilon_n+\frac{1}{2}f''(x^*)\varepsilon_n^2+\cdots\cdots$$

考虑到式（2—40）得

$$\varepsilon_{n+1}=f'(x^*)\varepsilon_n+\frac{1}{2}f''(x^*)\varepsilon_n^2\cdots\cdots \qquad (2-43)$$

由于 ε_n 很小，上式中只需保留 ε_n 的一次项，于是得

$$\varepsilon_{n+1}=f'(x^*)\varepsilon_n \qquad (2-44)$$

所谓稳定性，自然要求经过迭代后的 ε_n 越来越小，因此得稳定性条件为

$$\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right|=|f'(x^*)|<1 \qquad (2-45)$$

其中

$$f'(x^*)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x^*}=\mu(1-2x^*) \qquad (2-46)$$

也就是说，稳定不动点要求图 2—8 中，曲线在 Q 处的斜率的绝对值小于 1。

把 $x^*=0$ 代入式(2—45)，并考虑到不等式(2—45)，得出不动点 x^* 的稳定性条件为

$$0<\mu<1 \qquad (2-47)$$

容易验证另一个不同点 $\overline{x}^*=1-\frac{1}{\mu}$ 在上述参数范围内是不稳定的。然而，根据稳定性条件式(2—45)，稳定的不动点 $\overline{x}^*$ 应当满足条件

$$\left|\mu\left[1-2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right]\right|=|-\mu+2|<1$$

即

$$1<\mu<3 \qquad (2-48)$$

但这时 x^* 又变为不稳定，也就是说当参数从 $\mu<1$ 变为 $\mu>1$ 时不动点 x^* 把稳定性交给了 $\overline{x}^*$。

当 $\mu=3$ 时，对 Q 点，由于 $f'(x_Q)=2-\mu=-1$ 因而发生叉型分岔。下面将进一步分析此情形。

当 μ 比 3 大不算太多(具体说，$3<\mu<3.4494897$)时，单一不动点的条件不能满足。

这时将交替出现两种状态，即分岔出周期 2 的解，当 n 很大后，周期 2 解满足

$$x_n=x_{n+2}=f(x_{n+1})=f[f(x_n)] \quad (\text{且 } x_{n+1}\neq x_n) \tag{2-49}$$

从式(2－49)可见，对原来的映射 $x_n=f(x)_n$ 来说，周期 2 就是用复合函数来表示的映射

$$x_n=f[f(x_n)]=f^{(2)}(x_n)$$

的不动点。为此我们把它明确写出

$$x_n=f^{(2)}(x_n)=\mu[\mu x_n(1-x_n)][1-\mu x_n(1-x_n)] \tag{2-50}$$

方程（2－50）是一个一元四次代表方程，它有 4 个根，即有 4 个不动点。由于

$$x_n=f\ [f\ (x_n)]\ =f\ (x_n)$$

可见四次方程（2－50）中包括原映射 $x_n=f\ (x_n)$ 的 2 个不动点。由以上分析可知，其两个因子为 $(x-0)$ $\left(x-\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\right)$，应从（2－50）中去掉，那么另外两个不动点则由剩下的二次方程

$$\mu^2x^2-\mu\ (\mu+1)\ x+\ (\mu-1)\ =0 \tag{2-51}$$

求出。解（2－51）方程可得两个根为

$$\begin{cases} x_1^*=\dfrac{1}{2\mu}\ [1+\mu-\sqrt{(\mu+1)\ (\mu-3)}] \\ x_2^*=\dfrac{1}{2\mu}\ [1+\mu+\sqrt{(\mu+1)\ (\mu-3)}] \end{cases} \tag{2-52}$$

它们就是周期 2 的解，或它们满足如下方程

$$\begin{cases} x_1^* = \mu x_2^* \ (1 - x_2^*) \\ x_2^* = \mu x_1^* \ (1 - x_1^*) \end{cases} \tag{2-53}$$

例如将 $\mu = 3.14$ 代入式（2－53）可得：$x_1^* = 0.538$，$x_2^* = 0.780$，也就是前面所说的 x_n 趋向于在 0.538 和 0.789 两个值上跳动这一情况，如图 2－9 所示。

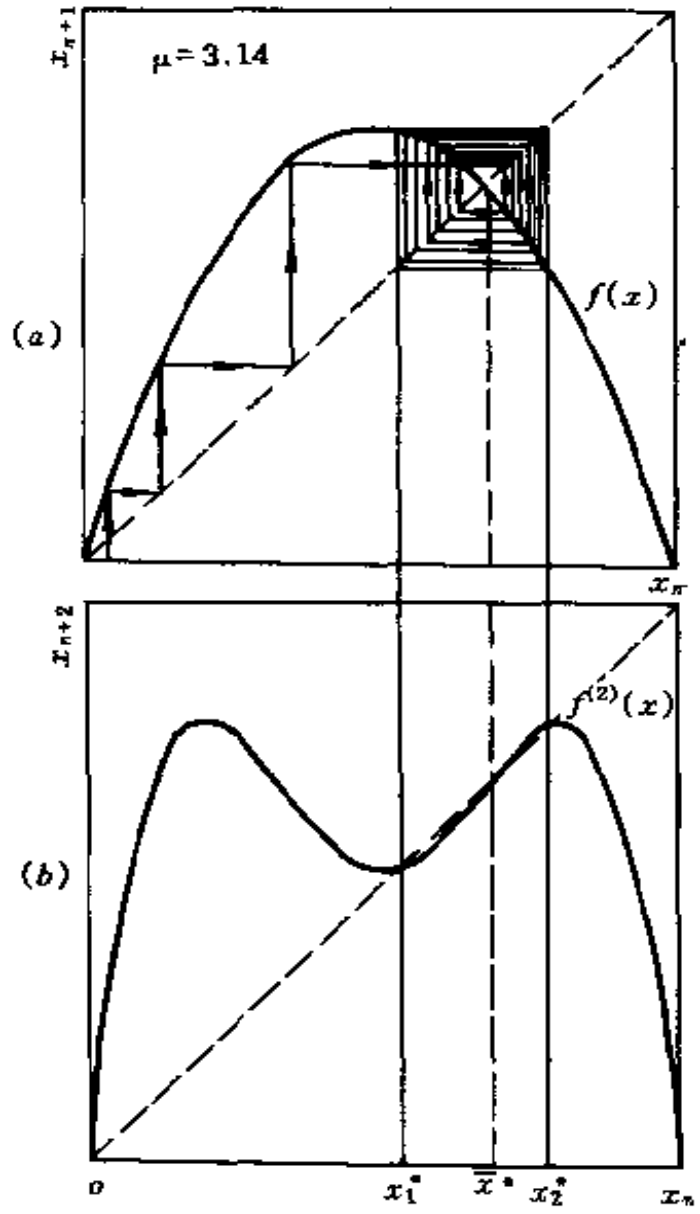


图 2－9　2 点周期

式（2—50）的四个不动点 x^*，x_1^*，$\bar{x}^*$ 和 x_2^*，在图 2—9 中它们就是映射曲线 $x_{n+2}=f^{(2)}(x_n)$ 与直线 $x_{n+1}=x_n$ 的交点，其中 $\bar{x}^*$ 是不稳定的，x_1^* 和 x_2^* 都是稳定的。由稳定变为不稳定必须在 $f^{(2)}(x_n)$ 的斜率等于 -1 处。在 2 点周期的两个数值 x_1^* 和 x_2^* 上具有相同的稳定条件。因为利用复合函数求导规则

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=x_n}&=\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x}\right)_{x=x_n}\\&=\left(\frac{\partial x_{n+2}}{\partial x_{n+1}}\right)_{x=x_{n+1}}\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n}\right)_{x=x_n}\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_{n+1}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_n}\\&=\left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=x_{n+1}}\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=x_1^*}&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_2^*}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_1^*}\\&=\left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x}\right)_{x=x_2^*}\end{aligned}\qquad(2-54)$$

所以 $f^{(2)}$ 在两点的导数相等，两点的稳定性相同。从而在同一个 $\mu=\mu_2$ 值处失稳，为求 μ_2 值，先计算 $f^{(2)}(x_n)$ 的导数

$$\begin{aligned}[f(f(x))]'_{x_n=x_1^*\text{或}x_2^*}&=f'(x_1^*)\cdot f'[f(x_1^*)]\\&=f'(x_1^*)\cdot f'[f(x_2^*)]\end{aligned}\qquad(2-55)$$

并令 $[f^{(2)}(x_n)]'$ 在 x_1^* 或 x_2^* 的数值为 -1，即得

$$\mu^2(1-2x_1^*)(1-2x_2^*)=-1\qquad(2-56)$$

将式（2—52）代入（2—56）得

$$\mu=1\pm\sqrt{6}\qquad(2-57)$$

μ 不能取负值，取正号可得：

$$\mu_2=1+\sqrt{6}\approx 3.4495 \qquad (2-58)$$

当 $\mu_1>\mu_2$ 时，取代 2 周期点的是 4 周期点 x_1^*，x_2^*，x_3^*，x_4^*，它们存在关系：

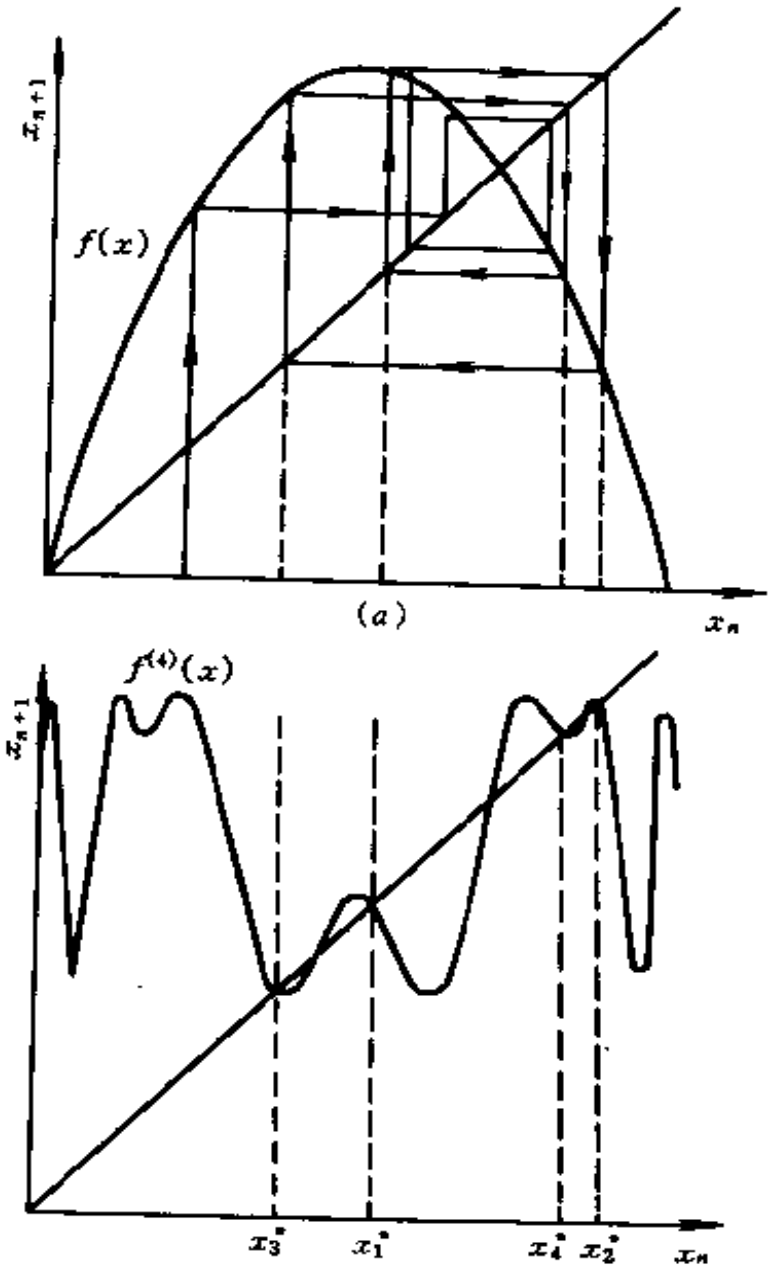


图 2—10　4 点周期

$$\begin{cases} x_2^* = f\ (x_1^*),\ x_3^* = f\ (x_2^*) \\ x_4^* = f\ (x_3^*),\ x_1^* = f\ (x_4^*) \end{cases} \tag{2-59}$$

上述方程也可写作

$$x_{n+4} = f^{(4)}\ (x_n)\ = f\ (f\ (f\ (x_n))) \tag{2-60}$$

如图 2－10 所示，函数 $f^{(4)}(x_n)$曲线与直线有 8 个交点，即共有 8 个不动点，其中包含映射 $x_n = f\ (x_n)$ 的 2 个不动点和映射 $x_n = f^{(2)}\ (x_n)$ 的 2 个不动点。去掉这 4 个不动点所包含的因子后，那么剩下的 4 个不动点就是周期 4 的解 x_1^*，x_2^*，x_3^* 和 x_4^*，4 点周期的稳定性条件是

$$\begin{aligned} |[f^{(4)}(x_i^*)]'| &= |f'(x_1^*)f'(x_2^*)f'(x_3^*)f'(x_4^*)| \\ &= \left|\prod_{j=1}^{4} f'(x_j^*)\right| < 1 \quad i = 1,2,3,4 \end{aligned} \tag{2-61}$$

而临界条件（分岔点）为

$$|[f^{(4)}(x_i^*)]'| = \left|\prod_{j=1}^{4} f'(x_j^*)\right| = 1 \quad i = 1,2,3,4 \tag{2-62}$$

可求解出 4 点周期变为不稳定的分岔点 $\mu_3 = 3.5441$。

当 μ 增加到 μ_3 时，4 点周期将被 8 点周期取代，进一步把 μ 增加到下一个分岔点 μ_4 时，8 点周期又要失稳，16 点周期取而代之……。这样一分为二，二分为四，四分为八……的周期加倍的分岔现象称为周期倍分岔（图 2—11）。类似的分岔可以不断地继续下去，每到分岔点 μ_n 会出现稳定的 2^n 周期（$n = 3$，4，5，……）。$k = 2^n$ 个点都是复合函数

$$f^{(k)}(x) = f(f(\cdots f(f(x))\cdots)) \tag{2-63}$$

的稳定不动点，稳定条件

$$|\ [f^{(k)}\ (x_i^*)]'| = \left|\prod_{j=1}^{k} f'\ (x_j^*)\right| < 1 \quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k \tag{2-64}$$

对于 k 个点都是相同的。

对于 Logistic 映射的倍周期分岔越往后由于相应的稳定范围愈来愈窄，故分岔点越来越密，直到 $\mu_\infty=3.56994572$ 处迅速达到无穷长周期

$$\lim_{n\to\infty}2^n=\infty \qquad (2-65)$$

即非周期。当 μ 稍大于 μ_∞，昆虫数的长时间行为不在稳定到任何不动点上或周期值上，它可以从小到大表现得很随机，这时我们就说昆虫的演化进入混沌态。其分岔值 μ_n 见表 2—1。

由表 2—1 和图 2—11 可见，解 x_i^* 与参数 μ 的依赖关系大致可分为两个区域：

(1) 周期区。

其参数 μ 在 $(0,\ \mu_\infty)$ 区间内为周期区。其内有一个正的周期 2^n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 倍周期分岔序列。

从周期 2^{n-1} 到 2^n $(n\geqslant 1)$，各分岔点 μ_n 存在如下关系

$$\mu_n=\mu_\infty-C\cdot\delta^{-n} \qquad (n\geqslant 1) \qquad (2-66)$$

式中 δ 就是 Feigenbaum 常数。

表 2—1 Logistic 映射分岔点的参数值及其间距比值

分岔情况	分岔值 μ_n	间距比值 $(\mu_n-\mu_{n-1})/(\mu_{n+1}-\mu_n)$
1→2	3	
2→4	3.449487743	4.751466
4→8	3.544090359	4.656251
8→16	3.564407266	4.668242
16→32	3.568759420	4.66874
32→64	3.569691610	4.6691
64→128	5.569891258	4.669
128→256	3.569934019	4.669
⋮	⋮	⋮
周期解→混沌	3.569945672	4.669201661

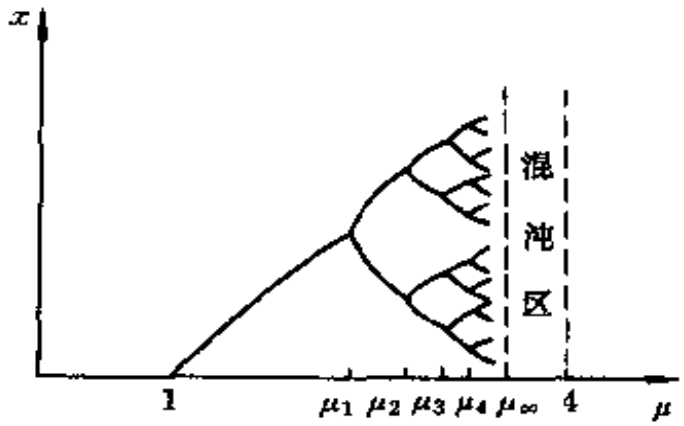


图 2－11　从倍周期分岔到混沌

$$\mu_\infty = 3.569945672$$

$$C = 2.6327$$

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{\mu_{n+1} - \mu_{n+2}} \tag{2-67}$$

从图 2－11 还可看出，每分岔一次，在 x 方向上的结构也在较小的标度上重复出现一次。图 2－12 中给出了在周期 2^n 中接近于 $x=\frac{1}{2}$ 处的各 x 值之间的距离 $d_1, d_2, \cdots, d_n, d_{n+1}$ ……，渐渐地按因子 α 衰减。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha = 2.502978751 \tag{2-68}$$

这个 α 值和 δ 值一样是无理数，这就是标度变换因子或称 Feigenbaum α 常数。Feigenbaum 常数 δ 和 α 在倍周期分岔现象中具有普遍意义，对一大类迭代过程都可得到这两个数。例如单峰映射

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2$$

$$x_{n+1} = \mu \sin(\pi x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n \exp[\mu(1 - x_n)]$$

等，同样也可计算上述两个常数，虽然这些映射迭代关系不同，但所得到的常数值是完全一样的。这些常数的发现说明了倍周期分岔进入混沌是一种相当普遍的自然现象。

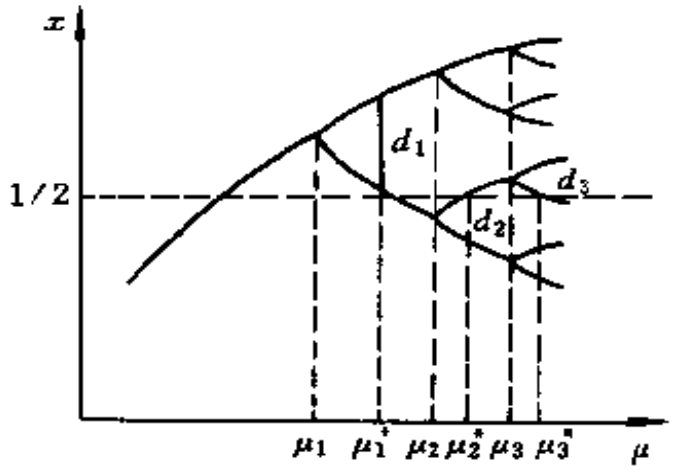


图 2—12　周期 2^n 中接近于 $x=\frac{1}{2}$ 处各 x 值之间的距离

（2）混沌区。其参数 μ 在 $[\mu_\infty, 4]$ 区间为混沌区。必须注意，混沌区并不是像白噪声那样完全混乱一片。首先，如图 2—13 所示，在混沌区最右边，对参数 μ 的每一取值，x 的取值是连在一起的，当 μ 减小到 $\mu(1)=3.6786$ 处往左，x 的取值分成两带，到 $\mu(2)$ 时，x 取值又分成四个带，再到 $\mu(3)$ 时，x 取值如分为八个带，如此等等，直到 μ_∞ 为止。我们又一次看到了与前面倍周期分岔的类似行为。不过这里的分岔不是周期点而是混沌带。在 $\mu=\mu(n)$ 时，将出现 2^n 条混沌带，昆虫数 x 会以确定的顺序历经这些带，每年出现在一条带上，在 2^n 年内不会在任何带上重复出现。在 2^{n+1} 年又回到原出发的带上，以后又从头开始同样的循环，这种在混沌带之间表现出的周期性是混沌有序的一面。然而每条混沌

带是一个区间，昆虫数到底落在每个区间的哪个具体部位则完全是随机的，这又是混沌的有序中的无序行为。当 $n\to\infty$ 时，μ（n）也趋于一个确定的值

$$\lim_{n\to\infty}\mu\ (n)\ =\mu'_{\infty} \tag{2-69}$$

并且

$$\mu'_{\infty}=\mu_{\infty} \tag{2-70}$$

与前面的倍周期分岔相对应，我们把上述混沌带的分岔过程称为混沌带倍周期逆分岔，如图 2—13 所示。

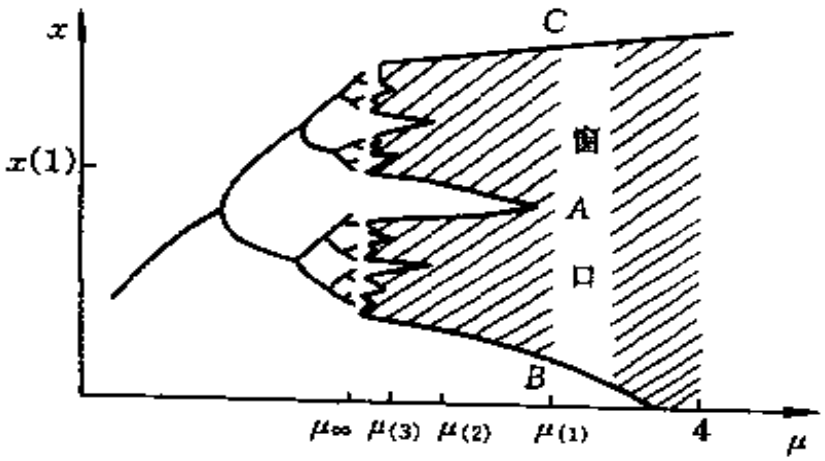


图 2—13　倍周期逆分岔

从上述分析我们已经看到，混沌区并不是完全无序的，它是有结构的。如果把 x 和参数 μ 的尺度放大以便看出混沌区内的细节，可以发现，在混沌区内也还存在着许多不是混沌的周期窗口，在这些窗口中周期 3 是最大的窗口，它发生在

$$\mu=1+\sqrt{8}=3.828\cdots \tag{2-71}$$

处。窗口区内还有混沌，窗口的混沌区内还有窗口。这种结构将无穷地重复，往往有无穷多的层次，而且每一层次都有

上一层次的重复，这是一种自相似的结构。同时也可以看到，当参数 μ 固定时（如上述周期 3 窗口参数 $\mu=1+\sqrt{8}$），由于初值 x_0 的不同将可能导致不同的周期，其中一定会出现大量的不稳定的周期。由于单峰映射最多只有一个稳定周期，那么将会出现哪些周期呢？它们出现的顺序又如何呢？乌克兰数学家萨柯夫斯基（Sarkovskii）论证了一类广泛的一维映射 $x_{n+1}=f(x_n)$ 存在如下整数编序

$$1,2,4,8,\cdots,9\times 2^3,7\times 2^3,5\times 2^3,3\times 2^3,\cdots,9\times 2^2,$$
$$7\times 2^2,5\times 2^2,3\times 2^2,\cdots,9,7,5,3 \qquad (2-72)$$

如果单峰映射 f 是有周期为某整数 p 的解，那么在（2—72）整数编序的意义下，它必定有一个排在它前面的那些数 Q 的周期解，并称为 Sarkovskii 定理。例如映射式（2—38）有周期 8 的解，那么它一定有周期 4、周期 2 和周期 1 的解。此定理后来又被推广到周期 5，7，…，乃至一切非 2^n 周期。Li—Yorke 定义是 Sarkovskii 定理的一个特例，这可通过序列（2—72）最后一个整数 3 来看，当映射只有周期 3 的解时，则它一定存在如（2—72）式所示的周期解，其中包括非周期解。显然，李（Li）和约克（Yorke）认为“周期 3 意味着混沌”的根据就在这里。

2.2.2.4　关联维数和 Lyapunov 指数法

关联维数和 Lyapunov 指数是分别量度动力学系统几何结构和规则程度的量，它们在用实际观测数据序列来识别系统的混沌性态方面起着至关重要的作用，特别是在地震、地球物理学科中已取得了不少有价值的成果。

总的来说，关联维数和 Lyapunov 指数是实测数据序列反演识别系统混沌性态较有效，也是具有良好发展前景的方法之一。为此，下面将重点讨论如何从实测数据序列中提取关联维

数和 Lyapunov 指数来刻画底板岩层运动过程中的混沌特性。

2.3 重建相空间

反映底板岩层在开采过程中变形破坏情况的实测数据主要有岩移、注水量（渗透性）观测数据，该观测结果是一单变量时间序列。通常认为单变量时间序列仅能提供底板岩层系统演化十分有限的信息，甚至有人怀疑用单变量时间序列这种一维的观点来研究底板岩层这种复杂体系的有效性和可靠性。事实上单变量时间序列原则上是复杂的底板岩层体系中各种要素相互作用的结果，它不但包括着底板变形破坏的综合信息，还蕴藏着参与底板岩层变形破坏整个过程其他变量的痕迹。因此，单变量时间序列实际上可能包含着动力系统的大多重要信息。那么如何利用信息有限的一维时间序列来尽可能多地提取底板岩层变形破坏过程中众多的动力学信息呢？1980 年 Packara[12]提出了用时间序列重构吸引子的相空间图像的方法，即通过对一维时序的维数进行扩充和延拓，重构吸引子的相空间。

对于一个 n 维动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad i=1,2,\cdots,n \qquad (2-73)$$

将其微商化，得如下 n 阶的微分方程

$$x^{(n)}=f\ (x,\ x',\ \cdots,\ x^{(n-1)'})$$

此时状态空间的坐标就由（x，x'，…，$x^{(n-1)'}$）或（x'，x''，…，$x^{(n)'}$）来代替，这种代替并不损失该动力系统演化的信息。

1981 年法国科学家 Ruelle 提出用离散的时间序列 $x\ (t)$

和它的连续漂移 $x\ (t+\tau)$，$x\ (t+2\tau)$，…，$x\ (t+\ (n-1)\ \tau)$ 来代替式（2—73）中的连续变数，其中 τ 叫延滞参数，显然这种漂移运算就类似于连续变数的微分[99]。

对于一个单变量时间序列

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\cdots \tag{2—74}$$

若该序列的时间隔为 Δt，取 τ 为 Δt 的整数倍，令 $\tau=1\cdot\Delta t$，则：

$$\begin{cases}(x_1,x_2,x_3)\\(x_2,x_3,x_4)\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\(x_N,x_{N+1},x_{N+2})\end{cases} \tag{2—75}$$

就形成三维空间中的 N 个点。

令 $\tau=2\cdot\Delta t$，则

$$\begin{array}{l}(x_1,x_3,x_5)\\(x_2,x_4,x_6)\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\(x_N,x_{N+2},x_{N+4})\end{array}$$

就形成延滞时间为 $\tau=2\Delta t$ 的三维空间中的 N 个点。

这里 n 维空间的 n 叫嵌入相空间的维数，用嵌入相空间代替状态空间，N 个点就形成该 n 维嵌入相空间的轨道，见图 2—14。

显然在这重建的 n 维相空间中，其吸引子的维数 D 应小于 n。这里将时滞 τ 选作时间序列的长时间尺度，将会保证延滞坐标线性无关。这似乎是可能的，因为延迟大于 τ，则时间序列的自相关等于零，即资料变为不相关或线性无关。因为点乘趋于零，意味着正交性。

从时间序列重建相空间的过程中，为了保证该相空间容

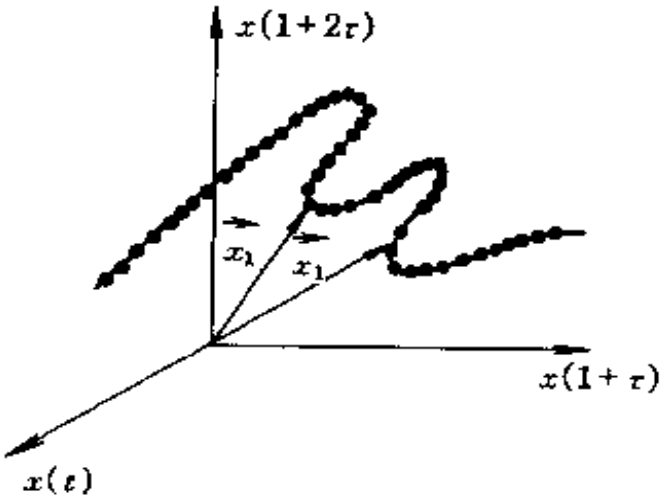


图 2—14　n 维嵌入相空间轨道

纳该状态空间原来吸引子的拓扑特征，那么嵌入相空间的维数 n 究竟应该取多大呢？Whitney 在 1934 年，后来 Takens[13] 在 1981 年证明了嵌入空间维数大小的嵌入定理：如果原来吸引子处在一个 d_A 维空间中，那么其嵌入空间维数必须是 $2d_A+1$。嵌入定理表明，只要相空间的维数足够大，即嵌入空间的维数 n 一般至少应是吸引子维数的两倍，它就可以刻化 D_0 维的混沌吸引子。

2.4　底板岩层变形破坏过程中混沌吸引子分维特征

2.4.1　关联维数

设一维时间序列为

$$x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_j),\cdots,x(t_n) \qquad (2-76)$$

将该时间序列延拓成 m 维相空间的一个相型分布

$$\begin{array}{cccc}
x(t_1) & x(t_2) & \cdots x(t_j) & \cdots x(t_n-(m-1)\tau) \\
x(t_1+\tau) & x(t_2+\tau) & x(t_j+\tau) & x(t_n-(m-2)\tau) \\
x(t_1+2\tau) & x(t_2+2\tau) & x(t_j+2\tau) & x(t_n-m-3)\tau \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x(t_1+(m-1)\tau) & x(t_2+(m-1)\tau) & \cdots x(t_j+(m-1)\tau) & \cdots x(t_n)
\end{array} \tag{2-77}$$

式（2—77）中：$\tau=k\Delta t$（$k=1$，2，…）为延滞时间。排列式（2—77）中的每一列构成 m 维相空间中的一个相点，任一相点有 m 个分量：$x(t_j)$，$x(t_j+\tau)$，…，$x(t_j+(m-1)\tau)$。上述的 $n'=n-(m-1)\tau$ 个相点在 m 维相空间中构成一个相型，而相点间的连线描述了系统在 m 维相空间中的演化轨线（轨迹）。为保证上述各个坐标分量之间的线性独立，τ 的取值必须足够大。

考察 m 维相空间中的一对相点

$$X_m(t_i):(x(t_i),x(t_i+\tau),\cdots,x(t_i+(m-1)\tau)$$
$$X_m(t_j):(x(t_j),x(t_j+\tau),\cdots,x(t_j+(m-1)\tau)$$

设它们之间的欧氏距离为 $r_{ij}(m)$，则

$$r_{ij}(m)=\|X_m(t_i)-X_m(t_j)\| \tag{2-78}$$

给定一临界距离 r，统计有多少对相点（X_i，X_j）之间的距离小于 r，若把距离小于 r 的“点对”在所有“点对”中所占的比例记为 $C_2(r,m)$，则

$$C_2(r,m)=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\theta(r-\|X_i-X_j\|)\quad(i\neq j) \tag{2-79}$$

其中，N 为相点数，θ 是 Heaviside 函数，即：

$$\theta(z)=\begin{cases}0 & (z<0)\\ 1 & (z>0)\end{cases} \qquad (2-80)$$

显然，$C_2(r, m)$ 是一个累积分布函数，它描写了相空间中吸引子上两点之间距离小于 r 的概率，刻画了相对于相空间某参考点 X_i 在 r 内的相点聚集程度。因此称 $C_2(r, m)$ 为吸引子的关联函数。对于 r 的取值，一般要使得 $0\leqslant C_2(r, m)\leqslant 1$ 才有意义。

考察 $C_2(r, m)$ 与 r 的关系：给定一个微量 δ，如果吸引子的结构是一维的线型，则在与相对于参考定点的距离在 r 以内的相关点数将正比于 r/δ；如果吸引子的结构是二维的面型，则所对应的相关点数将正比于 $(r/\delta)^2$，如此类推可知，如果吸引子的结构是 D_2 维流型的，则所对应的相点数应正比于 $(r/\delta)^{D_2}$，即

$$C_2(r, m)\propto r^{D_2}$$

由于上式的比例系数与微量 δ 的取值无关，所取比例为一单位时，有

$$D_2(m)=\left|\frac{\ln C_2(r,m)}{\ln r}\right| \qquad (2-81)$$

上式所定义的 $D_2(m)$ 即为关联维。按（2－81）式计算出的 D_2 显然与所嵌入的相空间的维数 m 有关，即 D_2 是 m 的函数。故一般称 $D_2(m)$ 是关联维 D_2 的估计值。

2.4.2 依据实测数据序列计算关联维的步骤

利用实测数据序列计算关联维的步骤如下：

(1) 重构 m 维相空间。

(2) 依次取若干个 τ 值，计算各坐标的相关系数，从而筛选相关性最小的 τ。

（3）依次取若干个不同的 r 值，分别算出与 r 值所对应的。

$$C_2(r,m)=\frac{1}{N^2}\sum_{i,j=1}^{N}\theta(r-\|x_i-x_j\|)\qquad(i\neq j)$$

（4）根据

$$D_2(m)=\left|\frac{\ln C_2(r,m)}{\ln r}\right|$$

计算关联维的估计值 D_2（r，m）。一般是根据所取的若干个 r 值和与其对应的 C_2（r，m）值，作出 $\ln C_2$（r，m）$-\ln r$ 曲线，而其近似直线部分的斜率就是 D_2（r，m）。

（5）不断逐渐地提高饱和嵌入维数 m，依次重复上述的(3)～(4)步骤，直到 m 达到某一值 m_c 时相应的关联维的估计值 $D_2(m)$不在随 m 的增长而发生有意义的变化(即保持在给定的误差范围内)为止。这在 $C_2(r,m)-\ln r$ 图上表现为一些曲线的直线部分的斜率不再随 m 的变化而变化，此时

$$D_2(m_c)=D_2(m_c+1)=D_2(m_c+2)=\cdots\cdots$$

记：

$$D_2(m_c)=D_2$$

D_2 即为所求的关联维，此时 m_c 称之为饱和嵌入维数。

了解时间序列关联维数 D_2（m）的意义在于：

（1）如果 m_c 不存在，那么关联维的估计值 D_2（m）将随 m 的增大趋于无穷大，这表示吸引子不存在。从而可知，该时间序列是一个随机系统。

（2）如果 D_2（m）是 m 的线性函数，表明该时间序列是白噪声的。

（3）当 $m=m_c$ 值时，D_2（m）趋于稳定或达到饱和，表明系统是一混沌系统。所以，我们可以通过研究底板岩层某一观测时序（如位移时序）的关联维数的性质来判断该底板

岩层变形破坏演化过程是否具有混沌特性。

Grassberger 和 Procaccia 给出了关联维 D_2 与信息维 D_1 和分维（Hausdorff 或 Kolmogorov）容量维 D_0 之间的关系：

$$D_2 \leqslant D_1 \leqslant D_0 \qquad (2-82)$$

当吸引子覆盖均匀时，取等号。因为 D_2 与 D_0 的差别不是很大，我们也称 D_2 为吸引子的维数，或（奇怪）吸引子的分维。

计算分数维的另一意义在于：它不仅说明了该系统是混沌的，还蕴含着或许可以用分形理论来研究该系统的特性。

2.4.3 底板岩层变形破坏过程中位移与渗透性分维特征

钻孔岩移观测与钻孔注水观测是底板变形破坏综合测试中的两种主要方法。在煤层开采过程中，作用于底板岩层的法向应力会发生变化，就某一时刻来说，在工作面推进方向上由煤壁前方至采空区，依次形成超前支承压力区、卸压区和应力恢复区。对于煤层底板岩层的某一断面来说，则要经历压缩—膨胀—再压缩的一个过程。钻孔岩层观测法，就是在钻孔内不同深度固定测点，用钢丝一端连接孔内测点，另一端引到钻孔孔口，当某一深度的岩层与孔口外岩层有相对位移时，在孔口就可测出这一位移值。钻孔注水观测法就是在工作面开采之前，向底板岩层中钻一定深度的钻孔。在工作面推过前后，观测钻孔注水量的变化，注水量的变化即是底板岩层渗透性或裂隙状况的变化。一般来说，钻孔注水观测过程中，注水量的变化要经历三个阶段：第一阶段，在回采工作面推进至注水观测钻孔一定距离（30～40m）时，钻孔处的岩层首先承受采场的超前支承压力的作用发生压缩，岩

层中的原生裂隙会逐渐闭合，岩层渗透性降低，钻孔注水量会减少；第二阶段，工作面推过钻孔且距离较小时（一般小于 50～60m），钻孔处的底板岩层处于原始法向地应力卸压带，底板岩层各层自身法向弹性压缩变形恢复，整体形成向上位移，底板岩层中的原生裂隙张开，在应力场变化过程中，裂隙一般还会扩展，使岩层渗透性增大，这时钻孔注水量会增大；第三阶段，随采场继续向前推进，采空区顶板岩层下沉，底板岩层法向地应力恢复，底板岩层裂隙再次闭合，渗透性降低，钻孔注水量也随之减少。

下面根据峰峰二矿 2701 工作面底板岩层岩移及注水量观测资料来分析底板岩层变形破坏过程中岩移与渗透性的分维特征。

峰峰二矿 2701 工作面走向长 350m，倾斜长 75～120m，倾角 10°～21°，采高 1.5m，采深 123～167m。除上边有一块采空区外，其余周围全为实煤。工作面内有 4 条沿走向分布的断层，落差 0.2～1.2m。机组采煤，日进 2.5～3.5m，最高达 4m，两班出煤。小青煤层下距奥灰顶面 48～55m，直接顶板为小青灰岩，局部为页岩。山东矿业学院特采研究室、峰峰矿务局和峰峰二矿联合进行了该工作面底板钻孔岩移与注水量等观测，图 2—15 为 2701 小青煤工作面底板综合测试工程布置剖面图，图 2—16、图 2—17 为该工作面在小青煤层下方 24m 的大青煤层中掘进的专用观测上山巷道 1 号钻窝中施工仰斜钻孔的观测成果，观测钻孔位于工作面下部底板中。

2.4.3.1　底板岩层变形破坏过程中岩移分维特征

首先，根据图 2—16 所示的 N_1 点岩移时序资料进行关联维计算。图 2—18 中的曲线表示不同的嵌入维数 $m=1$，2，3，4，5，6 时的$\ln C(r)$ —$\ln r$关系曲线，图 2—18 表明，当

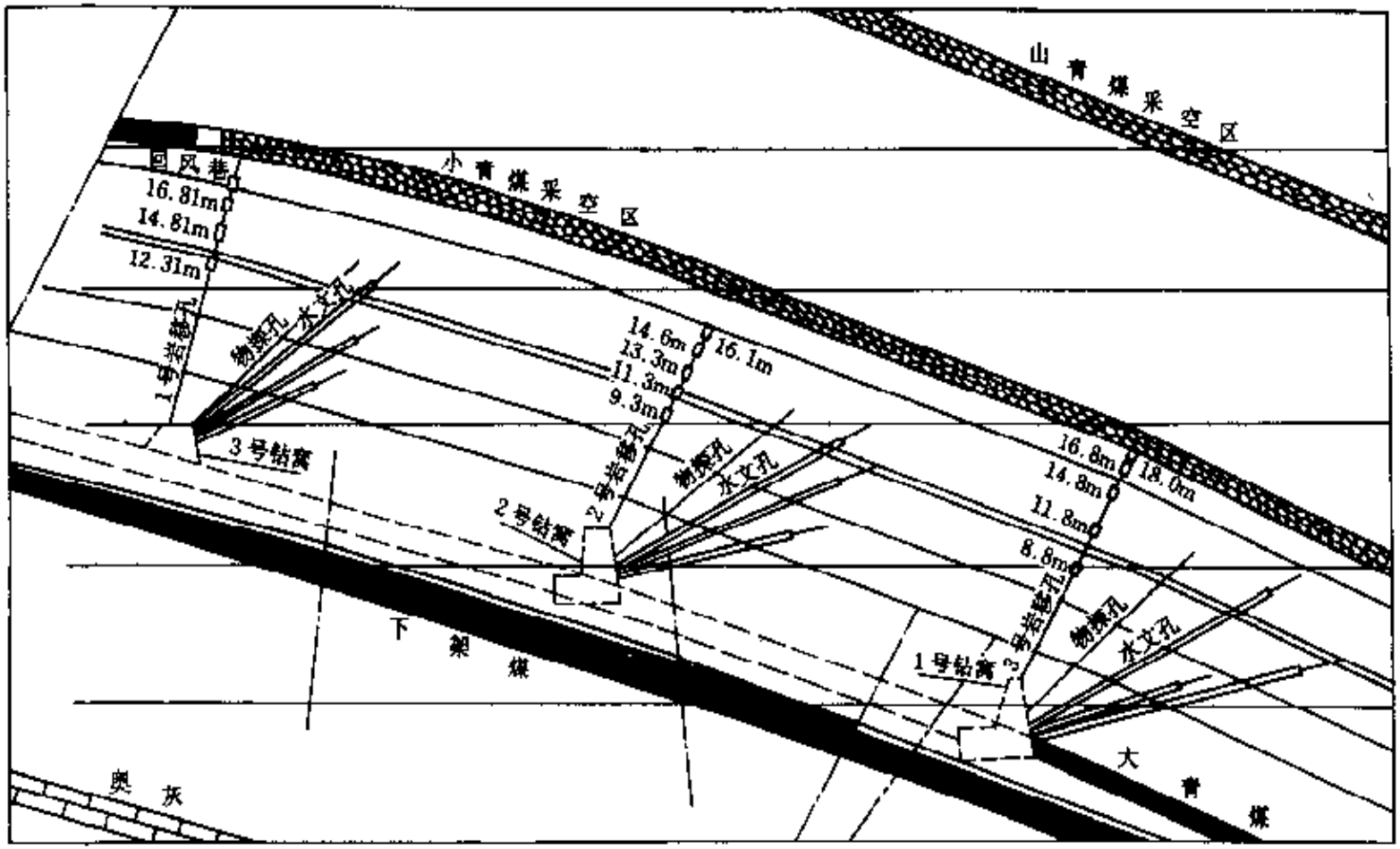


图 2-15　2701 小青煤工作面底板综合测试工程布置剖面图

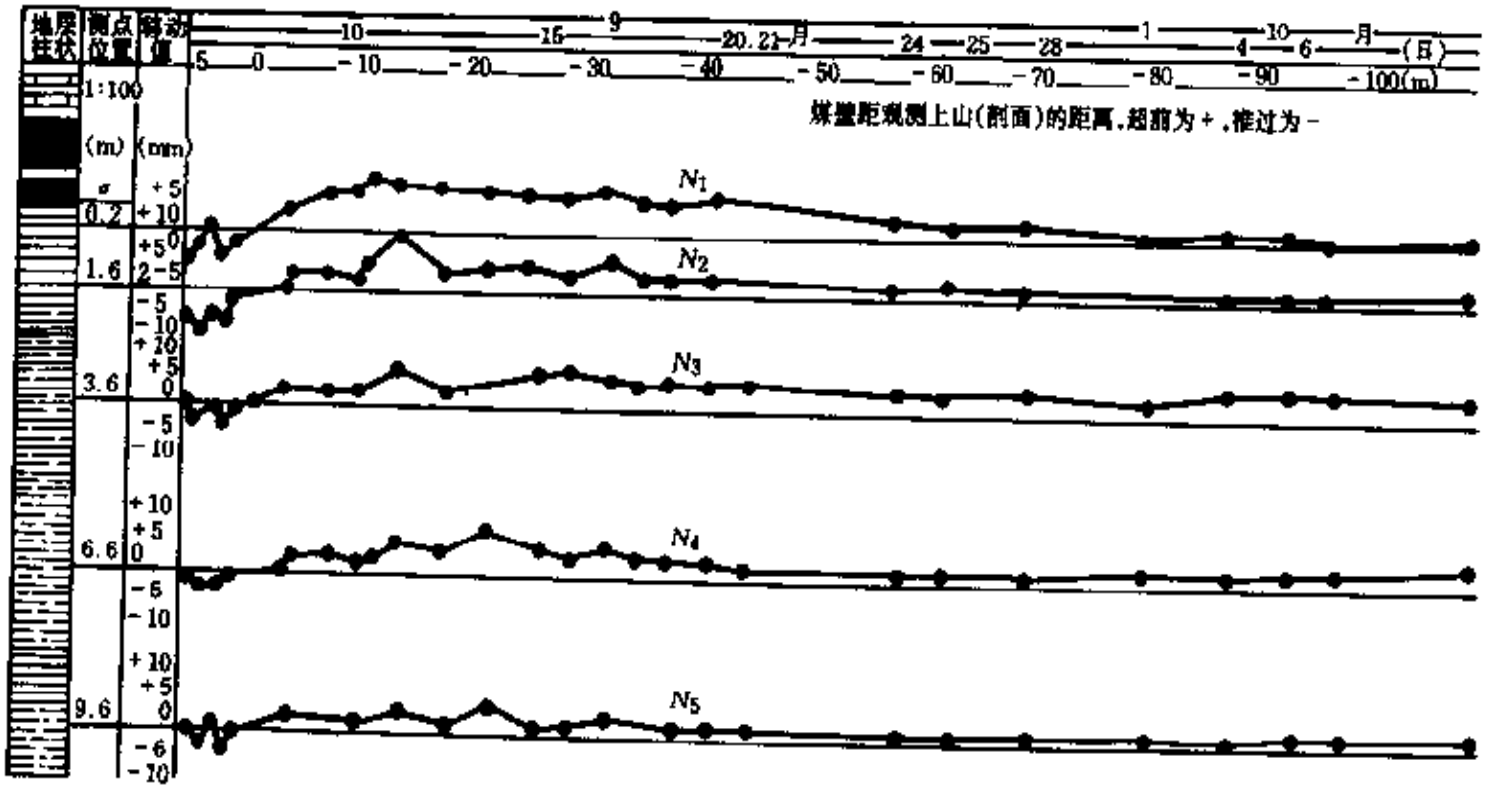


图 2—16　岩移观测与分析曲线

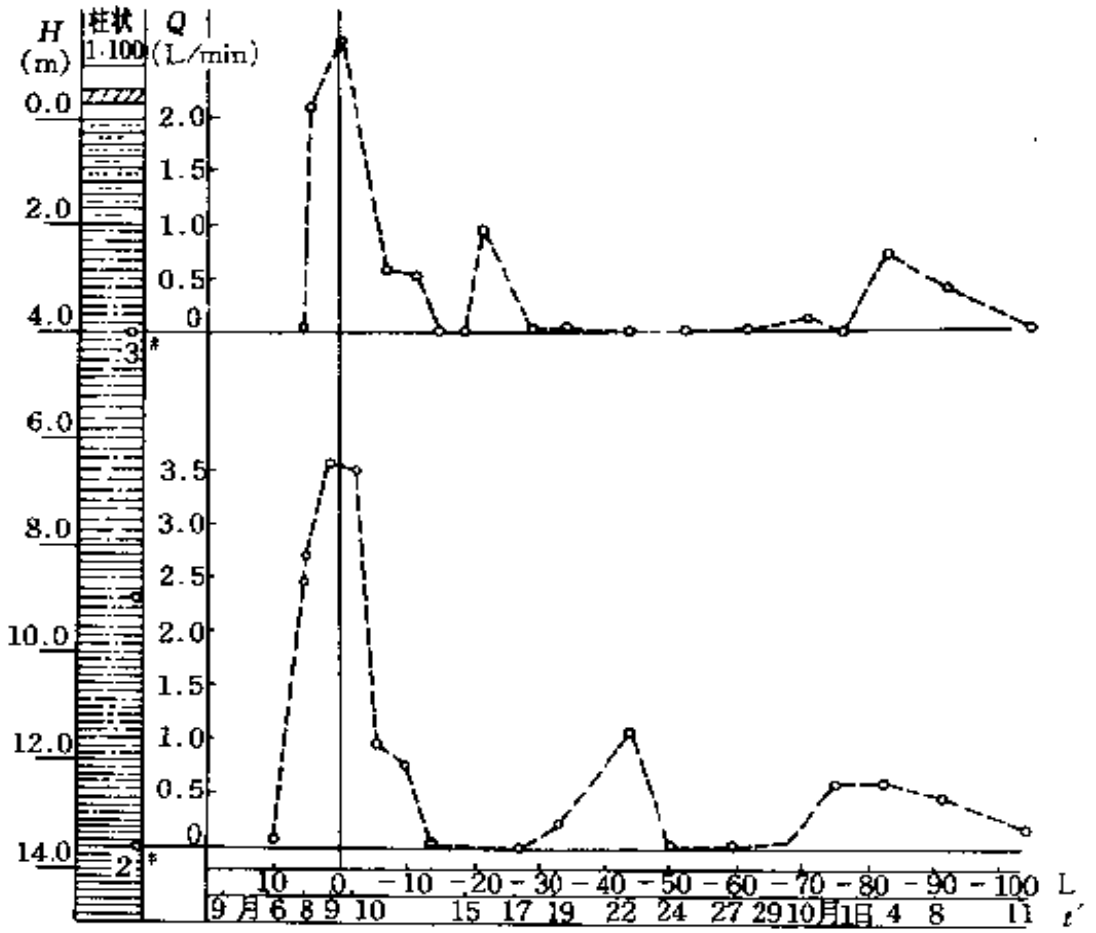


图 2—17　钻孔注水量观测与分析曲线

$m=4$ 时，$\ln C(r)-\ln r$ 图中直线段的斜率便不再发生有意义的变化，因此，该时间序列存在饱和嵌入维数 m_c，且 $m_c=4$（$\tau=3$），此时求得关联维数如下

$$D_2(m_c)=1.408$$

图 2—19 表明关联维数随嵌入相空间维数的变化情况，该图可更直观的显示当 $m\geqslant m_c$ 时，关联维数 $D_2(m)$ 不再发生有意义变化的情况，即 $D_2(m)\to D_2(m_c)$，存在饱和嵌入维数。

同理，可计算出 N_2，N_3，N_4，N_5 点底板岩层移动变形

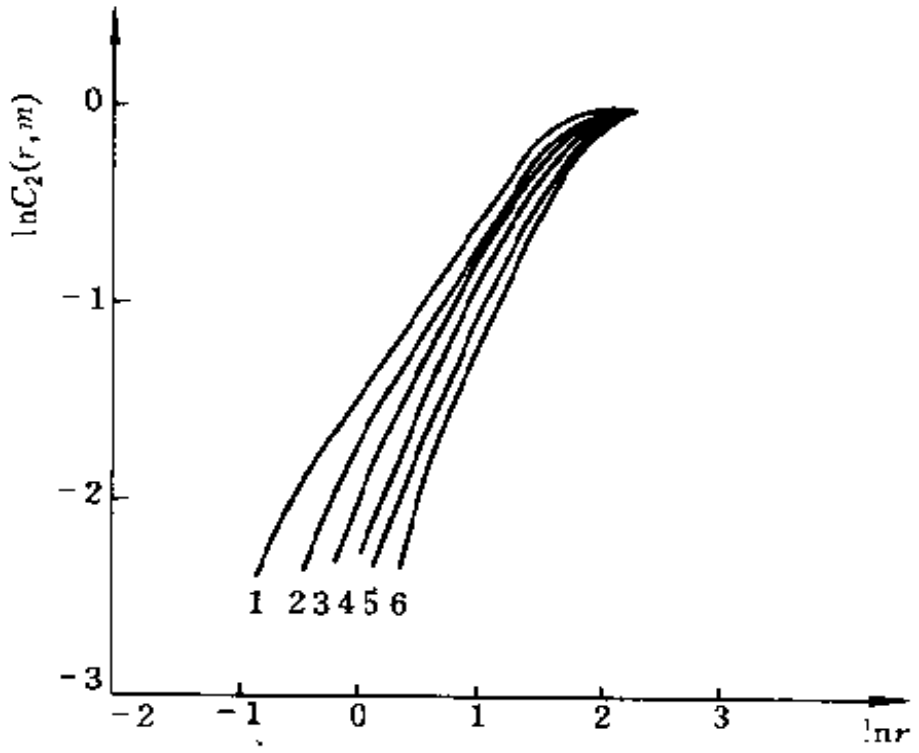


图 2—18 $\ln C(r)$—$\ln r$ 关系曲线

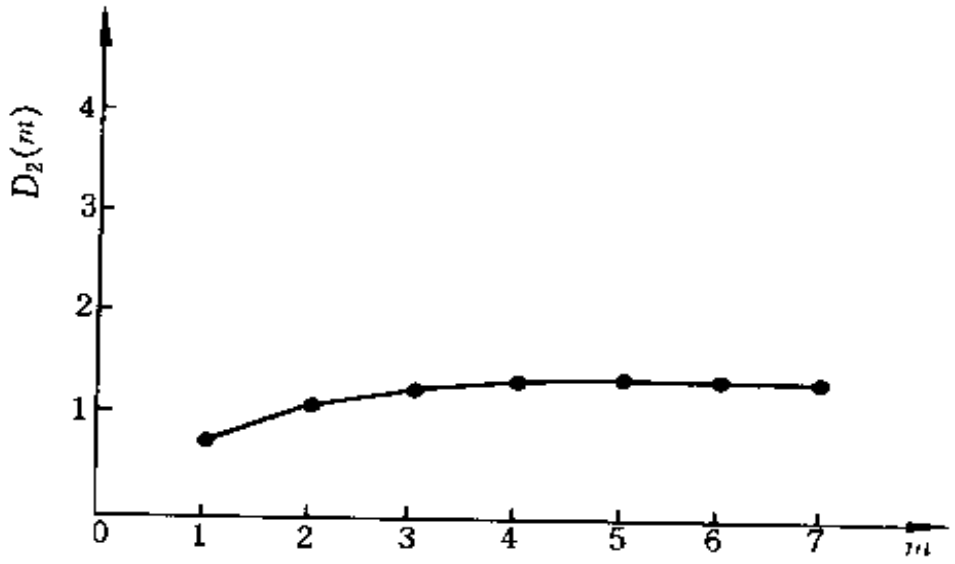


图 2—19 m—D_2 (m) 变化曲线

过程中岩移时序的关联维数，见表 2—2。

表 2—2 岩移观测时序关联维计算

序 号	观测点	$D_2(m_c)$	m_c	τ
1	N_1	1.408	4	3
2	N_2	1.526	4	3
3	N_3	1.471	4	3
4	N_4	1.447	4	3
5	N_5	1.432	4	3

以上计算表明，$N_1 \sim N_5$ 点的位移时间序列都具有混沌动力学特性，具有饱和嵌入相空间维数，存在混沌吸引子。描述系统所依赖的变量个数至少为大于其吸引子维数的最少整数，而最多也不会多于饱和嵌入维数 m_c 的值。由表 2—2 知。$N_1 \sim N_5$ 点底板岩层移动变形位移关联维数为 1.408～1.526，表明底板变形破坏过程中产生的岩移量至少依赖 2 个变量，最多依赖 4 个变量。

另外，由于 $N_1 \sim N_5$ 观测点各相邻点的岩移时间序列关联维数各不相同，表明不同深度岩层运动步调并不一致，这正是导致层间裂隙产生的根本原因。

2.4.3.2 底板岩层变形破坏过程中渗透性分维特征

由子底板岩层注水量大表明其渗透性强，反之则弱，故注水量变化即表明了底板岩层渗透性特征。根据图 2—17 所示的 2#钻孔注水量时序观测资料进行关联维计算。图 2—20 中的曲线表示不同的嵌入维数 $m=2$，4，6，8，10 时的 $\ln C(r) - \ln r$ 关系曲线，图 2—20 表明，当 $m=8$ 时，$\ln C(r) - \ln r$ 图中直线段的斜率便不再发生有意义的变化，

因此，该时间序列存在饱和嵌入维数 m_c，且 $m_c=8$ ($\tau=3$)，此时求得的关联维数如下

$$D_2(m_c) = 2.186$$

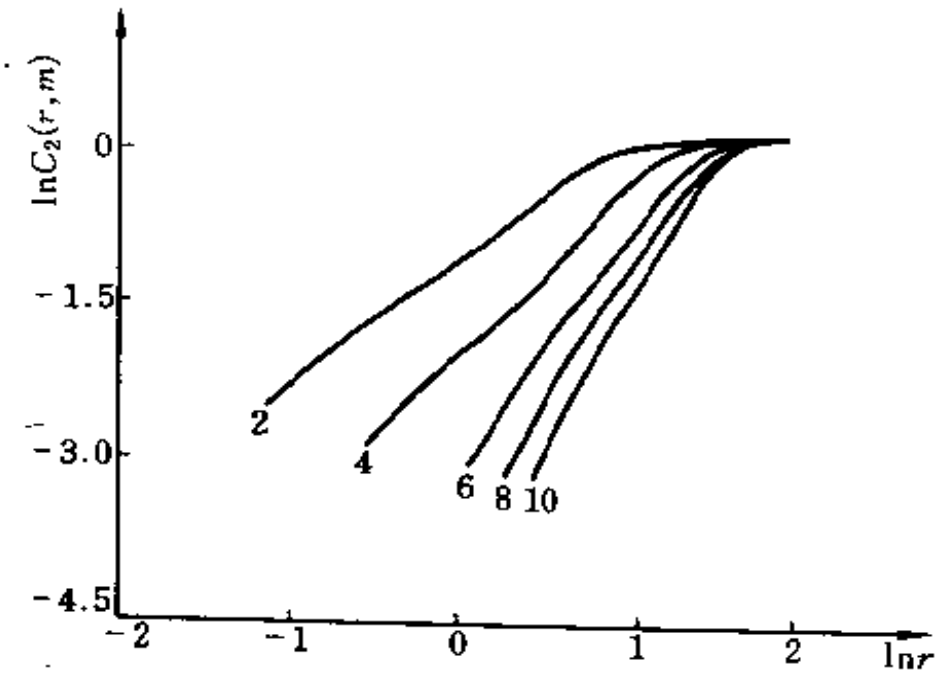


图 2－20　$\ln C\ (r)\ -\ln r$ 关系曲线

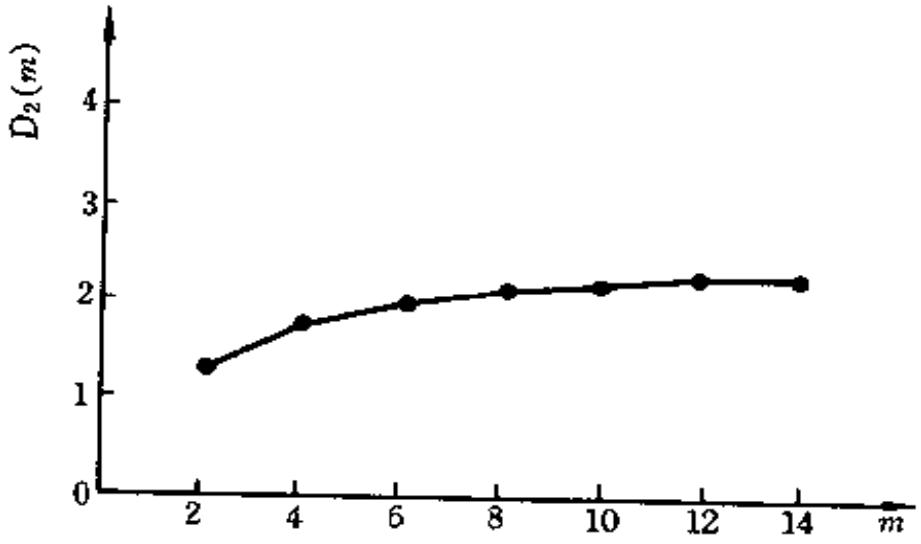


图 2－21　$m-D_2\ (m)$ 变化曲线

图 2－21 表明关联维数随嵌入相空间维数的变化情况，该图可更直观的显示当 $m \geqslant m_c$ 时，关联维数 $D_2(m)$ 不再发生有意义变化的情况，即 $D_2(m) \to D_2(m_c)$，存在饱和嵌入维数。

同理可求得，3#注水钻孔在底板岩层变形破坏过程中注水量观测时序的关联维数见表 2－3。

表 2－3 注水量观测时序关联维计算

序 号	观测钻孔	$D_2(m_c)$	m_i	c
1	2#	2.186	8	3
2	3#	2.143	8	3

以上计算表明钻孔注水量观测时序具有混沌动力学特征，具有饱和嵌入相空间维数，存在混沌吸引子。由表 2－3 知，2#～3#钻孔底板岩层渗透性关联维数为 2.143～2.186，表明底板岩层变形破坏过程中其渗透性变化至少依赖 3 个变量，最多依赖 8 个变量。

2.5 底板岩层变形破坏过程中混沌性态的 Lyapunov 指数描述

2.5.1 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数是相邻轨道的平均发散性或平均收敛性的一种度量，它反映了系统性态对初值的敏感程度。

先考察一个一维映射的例子

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n) \tag{2-83}$$

当初始条件 x_0 稍微出现偏差 δx_0，那么经过 n 次迭代后，就要产生指数分离，故 n 次迭代后的误差为

$$\delta x_n = |f^n(x_0 + \delta x_0) - f^n(x_0)| = \frac{\mathrm{d}f^n(x_0)}{\mathrm{d}x}\delta x_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{LE}\cdot n}\delta x_0 \tag{2-84}$$

其中：

$$\mathrm{LE} = \frac{1}{n}\ln\frac{\delta x_n}{\delta x_0} = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{\mathrm{d}f^n(x_n)}{\mathrm{d}x}\right| \tag{2-85}$$

这就是所谓的 Lyapunov 特征指数，它表征了相邻点之间距离的平均指数幅散率。

现在再考察一个 m 维流的动力系统：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f(x_1, x_2, \cdots, x_m, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \tag{2-86}$$

这里 t 为时间，$[x_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m]$ 是一个 m 维状态变量，并由它构成了一个 m 维相空间；$f_i = (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ \alpha)$ 是一个 m 维函数向量，它给出了 m 维相空间中的一个速度场；α 是系统的控制参数，它的取值如何，决定了相空间吸引子的类型。假如系统是耗散的，即它是相空间中的收缩流，则

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0 \tag{2-87}$$

式（2－86）的解在相空间形成一条轨道 $\vec{x}(t)$。若初始值 $\vec{x}(0)$ 有一误差 $\vec{w}(0)$，则 $\vec{x}(0)+\vec{w}(0)$ 出发就形成了另一条轨道 $\vec{w}(t)$，如图 2－22 所示。

为了研究 $\vec{w}(t)$ 随时间的演化规律，设 $\vec{w}(t)$ 的 m 个

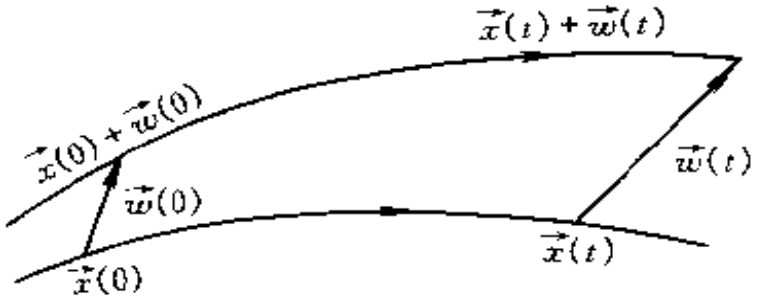


图 2—22　轨道的指数分离

分量在时刻 t 的误差为 $\delta x_i\ (t)$。将 $\{\delta x_i\ (t),\ i=1,\ 2,\ \cdots m\}$ 所构成的空间称为切空间。那么只要 $[\delta x_i]$ 足够小，则误差的增长率由下列线性微分方程控制

$$\frac{\mathrm{d}\delta x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{m}A_{ij}\delta x_j,\quad j=1,2,\cdots,m \tag{2—88}$$

系数 A_{ij} 是 f 的 Jacobi 矩阵的元素

$$A_{ij}=\left.\frac{\partial f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m;\alpha)}{\partial x_j}\right|_{x=x_0} \tag{2—89}$$

它们在基态 x_0（定态）处确定，并随每一步时间演变而变。所以，元素 A_{ij} 通常是依赖于时间的系数，它随系统时间演化而变化。

若初始时刻误差向量 $\vec{w}\ (0)$ 的长度为 $\|\vec{w}\ (t)\|$，那么 t 时刻以后 $\vec{w}\ (t)$ 的长度为 $|\vec{w}\ (t)\|$。由于敏感的初始条件，使其雅可比矩阵 A_{ij} 的特征值给出了某一确定时刻其长度在该特征方向上的指数变化率，故设：

$$\|\vec{w}\ (t)\|=\mathrm{e}^{\mathrm{LE}\cdot t}\|\vec{w}\ (0)\| \tag{2—90}$$

由此可得，m 维流的 Lyapunov 指数为

$$\mathrm{LE}=\frac{1}{t}\ln\frac{\|\vec{w}\ (t)\|}{\|\vec{w}\ (0)\|} \tag{2—91}$$

或

$$\mathrm{LE}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}\frac{\|\vec{w}(t)\|}{\|\vec{w}(0)\|}$$

在 m 维切空间中，若 $\vec{w}(t)$ 在每个基底上有分量，由于 Lyapunov 指数是针对系统的运动轨道而言的，所以在切空间中的每一个分量都有一个 Lyapunov 指数，通过式(2—91)求出 m 个 LE 之后，将它们从小到大排序

$$\mathrm{LE}_1\geqslant\mathrm{LE}_2\geqslant\cdots\mathrm{LE}_m \tag{2—92}$$

称这 m 个数为 Lyapuov 特征指数谱，而 LE_1 为最大 Lyapunov 指数。显然，若 A_{ij} 是常数矩阵，LE 就是 Jacobi 矩阵 A_{ij} 的特征值 λ 的实部 $Re\{\lambda\}$。

上面仅考虑了轨道间的“长度”的幅射率。为考虑轨道间的面积辐射率，设初始值 $\vec{x}(0)$ 有两个偏差 $\vec{w}_1(0)$ 和 $\vec{w}_2(0)$，那么从 $\vec{x}(0)+\vec{w}_1(0)$ 和 $\vec{x}(0)+\vec{w}_2(0)$ 出发形成两条轨道 $\vec{w}_1(t)$ 和 $\vec{w}_2(t)$，对每一条轨道则有

$$\begin{cases}\vec{w}_1(t)=e^{\mathrm{LE}_1\cdot t}\vec{w}_1(0)\\ \vec{w}_2(t)=e^{\mathrm{LE}_2\cdot t}\vec{w}_2(0)\end{cases} \tag{2—93}$$

把 $A(t)=\vec{w}_1(t)\cdot\vec{w}_2(t)$ 定义为“面积”，将(2—93)式两边相乘得

$$A(t)=e^{(\mathrm{LE}_1+\mathrm{LE}_2)\cdot t}A(0) \tag{2—94}$$

于是

$$\mathrm{LE}_1+\mathrm{LE}_2=\frac{1}{t}\ln\frac{A(t)}{A(0)} \tag{2—95}$$

或

$$\mathrm{LE}_1+\mathrm{LE}_2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{A(t)}{A(0)}$$

这就是平均“面积”的辐散率。

类似地，可得到相邻轨道的“体积”的辐散率为

$$LE_1+LE_2+LE_3=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{V(t)}{V(0)} \qquad (2-96)$$

一般地 m 维体积的辐散率为

$$LE_1+LE_2+\cdots LE_m=\frac{1}{t}\ln\frac{V(t)}{V(0)} \qquad (2-97)$$

或

$$LE+LE_2+\cdots LE_m=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{V(t)}{V(0)}$$

2.5.2 Lyapunov 指数与系统运动状态之间的关系

从式(2－91)的定义来看，Lyapunov 指数是与相空间中在不同方向上轨道的收缩和膨胀特征有关的一个平均量，每一个 Lyapunov 指数 LE_i 都可看作是相空间各个方向上相对运动的局部变形的平均，同时又都是由系统长时间演变决定的。所以，无论从空间上还是时间上的意义来讲，Lyapunov 指数都不是局部量，而是整体特性的一个表示。

对于保守系统，由于相体守恒，所以 $LE_i=0$，对于耗散系统而言，其相空间总体上是收缩的，所以 $\Sigma LE_i<0$。而由式(2－91)可知，LE_i 小于零的方向上，相体积是收缩的，该方向上的运动是稳定的。因此，耗散系统至少有一个负的 Lyapunov 指数，此外，每一个正的 Lyapunov 指数反映了系统在某个“方向”上不断膨胀。混沌吸引子的局部不稳定对应于某方向上的指数幅散或膨胀。所以，耗散混沌系统至少有一个正的 Lyapunov 指数，奇怪吸引子的 Lyapunov 指数谱必有一个分量是正值，这一性质是区别奇怪吸引子和平庸吸引子的一个重要标志。

对于随机系统，由于布朗运动过程使得相体积无限地膨胀，所以 $LE_1=\infty$。

系统运动特性与 Lyapunov 指数间有如下关系：

(1) 定常运动：所有 Lyapunov 指数都小于 0，即：$LE_i<0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$。

(2) 周期运动：有一个 Lyapunov 指数为 0，其他 Lyapunov 指数均小于 0，即 $LE_1=0$，$LE_i<0$ $(i=2, 3, \cdots, m)$。

(3) 准周期运动：有两个 Lyapunov 指数为 0，其他 Lyapunov 指数小于 0，即：$LE_1=LE_2$，$LE_i<0$ $(i=3, 4, \cdots, m)$。

(4) 混沌运动：至少有一个 Lyapunov 指数大于 0，即 $LE_1>0$，LE_i 可正、可负或为 0 $(i=2, 3, \cdots, m)$。

(5) 随机运动：有一个 Lyapunov 指数趋于无穷大，即：$LE_1\to\infty$，LE_i 可正、可负或为 0 $(i=2, 3, \cdots, m)$。

例如，对于三维系统，其 Lyapunov 指数的符号有如下关系：

定常运动 (－，－，－)；

周期运动 (0，－，－)；

准周期运动 (0，0，－)；

混沌运动 (＋，0，－)；

随机运动 (∞，0，－)。

四种吸引子 Lyapnov 特征指数谱如图 2—23 所示。

在解决实际问题时，具有特别意义的 LE_1 和 LE^+，LE^+ 表示 Lyapunov 指数谱中所有正的 Lyapunov 指数之和，即

$$LE^+=\sum_{LE_i>0} LE_i \tag{2—98}$$

LE_1 是判别系统的行为是否为混沌行为的最好指标之一，而 LE^+ 则描述了相空间中一个小体积元在其伸长方向上

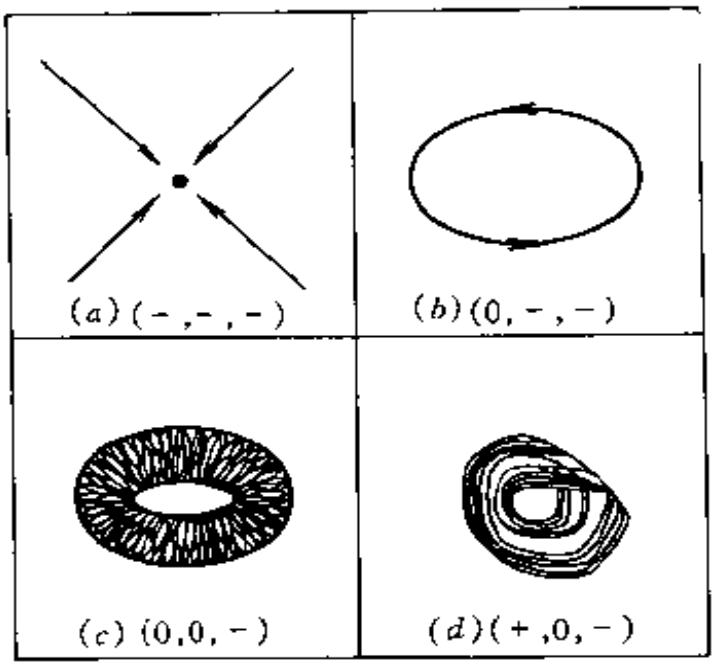


图 2—23　四种吸引子的 Lyapanov 特征指数谱

的平均指数增长率。所以，LE⁻也称为混沌度。

通过以上分析可以看出，在耗散系统中，Lyapunov 指数成为判定系统运动性态的较完备指标，而底板岩层系统是典型的耗散系统。因此，我们先择 Lyapunov 指标对底板岩层系统运动演化特征进行研究。

2.5.3　依据实测数据序列计算 Lyapunov 指数的方法

我们在前面介绍了 Lyapunov 指数的定义，并讨论了其与系统运动状态的关系。我们所观测到的底板岩层位移及注水量是一个单变量时间序列，1988 年，A. wolf[100]提出了如何从单变量时间序列中计算最大 Lyapunov 指数的方法。其方法和步骤如下：

（1）应用时间序列重构 m 维相空间。

（2）选取使各坐标相关性最小的延滞时间 τ。

（3）如图 2—24 所示，在延拓的 m 维相空间里，取初始相点 $A\ (t_1)$ 为参考点，其 m 个分量为

$$x\ (t_1),\ x\ (t_1+\tau),\ \cdots,\ x\ [t_1+\ (m-1)\ \tau] \tag{2—99}$$

根据下式

$$L_{nbt}=\min_{i\neq j}(\ \|\ X_i-X_j\ \|\ ) \tag{2—100}$$

可求得 $A\ (t_1)$ 的最近邻点 $B\ (t_1)$，这里 Lnbt 表示在欧氏意义下 $A\ (t_1)$ 与其最近邻点 $B\ (t_1)$ 的距离，设为 $L\ (t_1)$。当在时间，$t_2=t_1+K\Delta t$ 时，$A\ (t_1)$ 点演化到 $A\ (t_2)$ 点，而同时 $B\ (t_1)$ 演化到 $B\ (t_2)$，其间距 $\overline{A\ (t_2)\ B\ (t_2)}=u\ (t_2)$。如果用 λ_1 表示在此时间内线段的指数增长率，则

$$u(t_2)=L(t_1)2^{\lambda_1 K\Delta t} \tag{2—101}$$

$$\lambda_1=\frac{1}{K\Delta t}\ln\frac{u(t_2)}{L(t_1)} \tag{2—102}$$

若取 $\Delta t=1$，则

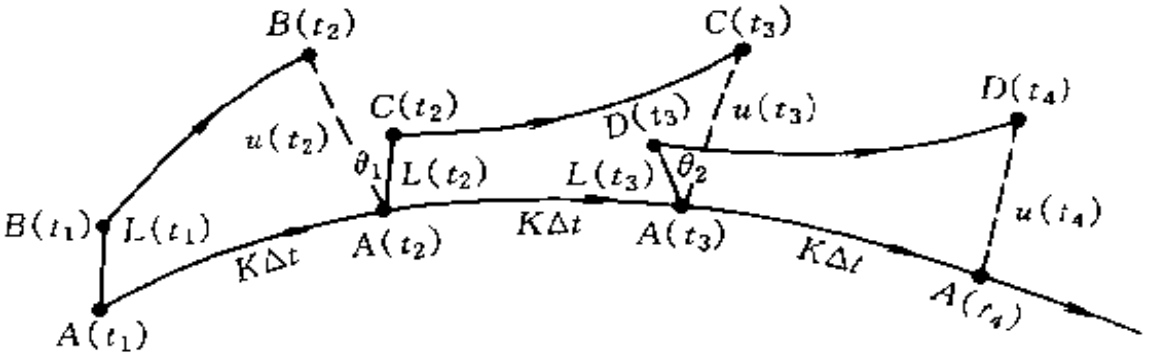


图 2—24　相轨线辐散示意图

$$\lambda_1=\frac{1}{K}\ln\frac{u(t_2)}{L(t_1)} \tag{2—103}$$

(4) 如图 2—24 所示，在 $A(t_2)$ 的若干近郊点中找出一个满足 θ_1 很小的近郊点 $C(t_2)$（若无法满足 θ_1 和近邻二条件，仍以 $B(t_1)$）。当在时间 $t_3=t_2+K\Delta t$，$A(t_2)$ 发展到 $A(t_3)$，而 $C(t_2)$ 发展到 $C(t_3)$，且 $\overline{C(t_3)A(t_3)}=u(t_3)$，而 $\overline{C(t_2)A(t_2)}=L(t_2)$，则

$$\lambda_2=\frac{1}{K}\ln\frac{u(t_3)}{L(t_2)} \tag{2—104}$$

将上述的过程一直进行到点集 X_i，$i=1$，2，…，n 的终点，而后取指数增长率 λ_i 的平均值为最大 Lyapunov 指数估计值，即

$$\mathrm{LE}_1(m)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{K}\ln\frac{u(t_i)}{L(t_i)} \tag{2—105}$$

这里的 N 不是相点数，而是发展的总步数，即 $N=\frac{n}{K}$，K 为步长。

(5) 依次增加嵌入空间的维数 m，重复上述 (3) ～(4)，直到指数的估计值 $\mathrm{LE}_1(m)$ 保持平稳为止，即

$$\mathrm{LE}_1(m_0)=\mathrm{LE}_1(m_0+1)=\cdots=\mathrm{LE}_1 \tag{2—106}$$

则此时得到的 LE_1 即为最大 Lyapunov 指数值。

与计算 $\mathrm{LE}_1(m_0)=\mathrm{LE}_1$ 类似，可以采用相空间面积增长速率、体积增长速率分别计算二维、三维 Lyapunov 指数如式 (2—107)、(2—108) 所示。

$$\mathrm{LE}_1(m)+\mathrm{LE}_2(m)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{K}\ln\frac{A(t_i)}{A(t_{i-1})} \tag{2—107}$$

$$LE_1(m)+LE_2(m)+LE_3(m)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{K}\ln\frac{V(t_i)}{V(t_{i-1})} \tag{2-108}$$

2.5.4 底板岩层变形破坏过程中岩移与渗透性 Lyapunov 指数特征

2.5.4.1 底板岩层变形破坏过程中岩移 Lyapunov 指数特征

同样，根据图 2－16 中的岩移时序资料计算其最大 Lyapunov 指数 LE_1，计算结果见表 2－4。

由表 2—4 知，N_1～N_5 观测点岩移时序相空间中邻近轨道都呈指数型发散（$LE_1>0$），表明底板岩层在其变形破坏过程中岩移有着对初始条件的敏感性，系统动力学行为具有混沌特征。

表 2—4 位移时序最大 Lyapunov 指数计算

序　号	观测点	LE_1	m_c	τ
1	N_1	0.00665	5	3
2	N_2	0.00639	5	3
3	N_3	0.00612	5	3
4	N_4	0.00591	5	3
5	N_5	0.00568	5	3

2.5.4.2 底板岩层变形破坏过程中渗透性 Lyapunov 指数特征

根据图 2—17 的注水量时序观测资料，计算其最大 Lyapunov 指数 LE_1，计算结果见表 2—5。

表 2—5　注水量时序最大 Lyapunov 指数计算

序　号	注水钻孔	LE_1	m_c	τ_c
1	2#	0.0375	9	3
2	3#	0.0354	9	3

由表 2—5 知，2#、3#注水钻孔注水量时序相空间邻近轨道均呈指数型发散（$LE_1>0$），表明底板岩层在其变形破坏过程中渗透性有着对初始条件的敏感性，系统的动力学行为具有混沌特征。

由以上的计算可知，岩移观测时序关联维数、Lyapunov 指数均比注水量观测时序小得多，因此，在底板变形破坏过程中，选择不同变量对系统动力学性态研究时，将会得出不同的结果。显然采用渗透性指标描述底板岩层变形破坏特征要比岩移量指标更敏感。

2.6　本 章 小 结

本章详细探讨了基于实测信息识别底板岩层变形破坏过程中混沌吸引子的方法，主要表现在：

（1）介绍了描述系统混沌状态的功率谱法，Poincare 映射法，倍周期分岔、关联维数与 Lyapunov 指数法，根据底板岩层运动的特性，确定选择关联维数与 Lyapunov 指数法来通过实测数据识别岩层运动的混沌性态。

（2）介绍了从底板岩层变形破坏过程中岩移、注水量时间序列提取关联维数来表征系统动力学特性的方法，讨论了饱和嵌入相空间维数 m_c 及相点不相关的延迟时间 τ 的大小。

（3）介绍了从实测底板岩移、注水量时间序列中提取表征底板岩层变形破坏过程中动力学特性的 Lyapunov 指数方法。实例分析表明，底板岩层变形破坏过程中呈现了典型的混沌性态。

（4）岩移观测时序关联维数、Lyapunov 指数均比注水量观测时序小得多，表明用渗透性指标描述底板岩层变形破坏性态比岩移量指标更加敏感。

3 底板突水自组织临界特性

3.1 概　　述

底板突水按其成因类型[92]可分为底板破坏型突水、断层采动型突水、构造揭露型突水三种类型，底板破坏型突水是指由于底板隔水层较薄，节理裂隙发育，当回采工作面开采一段距离后，由于底板应力的重新分布，造成底板岩层破裂形成导水通道而突水，如图 3—1 所示；断层采动型突水是指在回采工作面的推进过程中，由于底板应力的重新分布而引起底板和四周煤岩体的移动变形，从而造成断层面的相对移动，致使断层破裂形成导水通道而突水，如图 3—2 所示；构造揭露型突水是指采掘工作面接近或揭露含水构造时引发的突水，如图 3—3 所示。底板突水系统是由不同层次数目众多

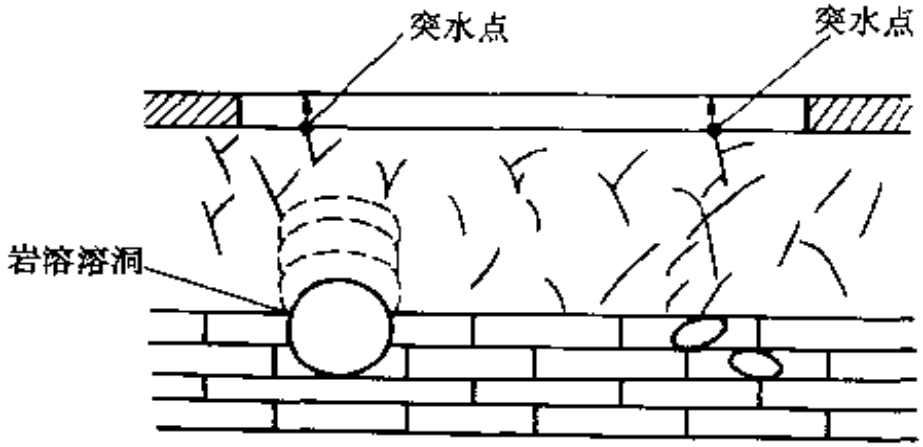


图 3—1　底板破坏型突水

的子系统所构成。底板突水的发生是以底板裂隙导通形成导水通道为前提的，而导水通道的形成又主要是由一系列的小破裂发展演化而实现，因为小破裂的积累才形成大的破裂，从而演化到突变。大量研究表明，从底板岩层小破裂到形成导水通道发生底板突水，处处都存在自组织的过程。下面我们主要采用重整化群方法对底板破坏型突水的岩层破裂过程自组织临界特性以及断层采动型突水的断层破裂过程的自组织临界特性进行研究。

研究结果表明，岩石破裂过程具有随机自相似性，在很宽的尺度范围内均具有分形结构[113][114]，这种自相似性甚至也存在于实验室中岩石内微破裂的标度范围[49]。事实证明，标度不变性是地学中的一个普遍现象，这为我们应用重整化群方法奠定了基础。

重整化群是一个标度变换群，通过对系统基本单元的一系列自相似变换，得出宏观大系统的特征描述。这种方法将临界相变中关联长度为无穷大作为重整化群中的不动点，在不动点之下计算系统的临界性质，从而将相变的临界点与重整化群变换的不动点有机地联系起来。

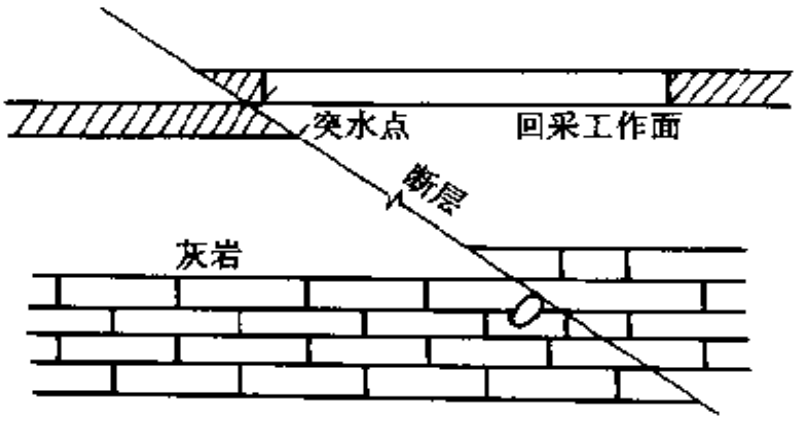


图 3—2　断层采动型突水

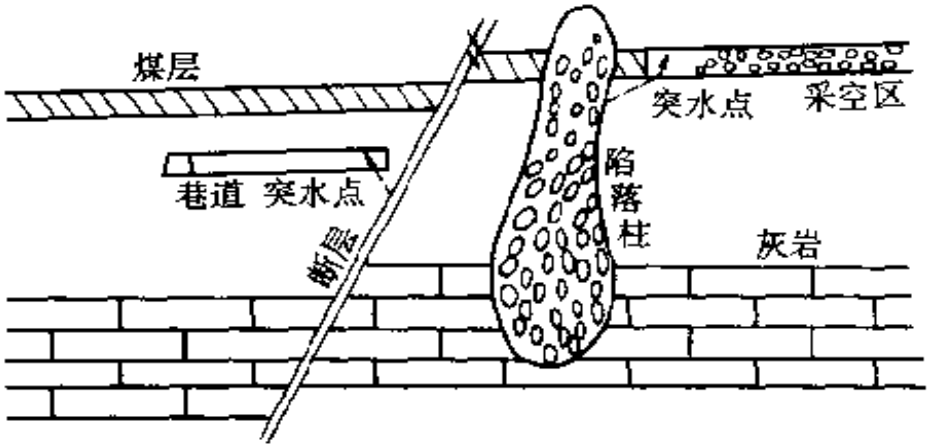


图 3—3　构造揭露型突水

3.2　重整化群方法

重整化群方法是美国物理学家 Wilson 在研究相变时，将量子场论中的重整化变换方法“嫁接”到相变理论中用于描述标度律和普适性的一种数学物理方法。

下面以一个最简单的一维渗流模型为例，对重整化群方法作一介绍。

取一条断续的裂隙，并假定有一水流从裂隙的一端流入，现在研究该裂隙渗流导通情况。

首先将裂隙离散化为若干个格点，每个格点有两种状态；空着（o）和被占据（·）。在此问题中，o 表示在此格点无水流通过，·表示在此格点处有水流占据。显然只有所有格点处均有水流占据，水流才能通过该裂隙。将上述格点分为若干原胞，也即将上述格点归并为若干组（群），每个原胞中有 b^d 个格点。其中 b 是原胞的边长，d 是相空间维数。对于线状构造，$b=2$，$d=1$，即把相邻的两个格点作为一个原胞，如

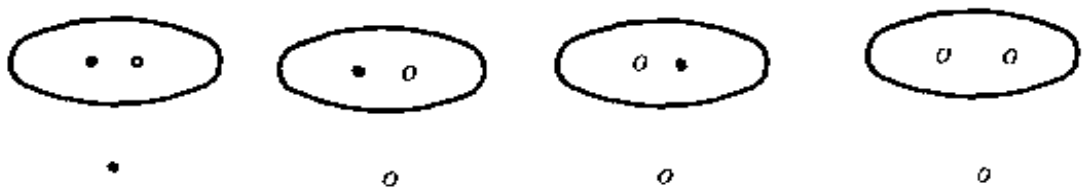


图 3—4　一维渗流模型

图 3—4 所示。这里格点归并成原胞的方式是按“否决权”的方式，即只有原胞中每个格点都被占据时，该原胞才被占据或“导通”，水流才能通过，否则就是空着或“不导通”，水流不能通过。若 P 是格点导通的概率，$(1-P)$ 就是格点不导通的概率，设原胞组态导通的概率为 P'，对一维渗流模型，则有

$$P' = R(P) = P \cdot P + 0 \cdot P(1-P) + 0 \cdot (1-P)P + 0 \cdot (1-P)(1-P) = P^2 \tag{3-1}$$

$$q' = rP' = 1 - P^2 \tag{3-2}$$

式(3—2)中，q' 为原胞不导通的概率。(3—1)式中 $R(P)$ 为 P 的重整化变换，因为它将格点的导通概率变换成了原胞的导通概率。求原胞组态导通概率的通式为

$$P' = \Sigma \alpha_i P_i \tag{3-3}$$

其中，P_i 是原胞中格点的各组态的概率；α_i 为权重函数，一般求值 0，1 二值模式。

现在求该变换的不动点。式 (3—1) 左端等于右端，即

$$R(P_c) = P_c = P_c^2$$

或

$$P_c^2 - P_c = P_c(1-P_c) = 0 \tag{3-4}$$

因而，不动点是

$$P_c = 0 \text{ 和 } P_c = 1 \tag{3—5}$$

按照映射式（3—1）右边 Jacobi 矩阵特征值的模是小于 1 和大于 1，来判断不动点是稳定还是不稳定。因式（3—1）右边的 Jacobi 矩阵是：

$$\frac{\partial R}{\partial P} = 2P \tag{3—6}$$

式（3—6）也是特征值 λ。

对不动点 $P_c=0$，这个特征值为

$$\lambda = \left.\frac{\partial R}{\partial P}\right|_{P_c=0} = 2 \times 0 = 0 \tag{3—7}$$

因而，$P_c=0$ 是稳定的不动点。

对不动点 $P_c=1$，特征值为

$$\lambda = \left.\frac{\partial R}{\partial P}\right|_{P_c=1} = 2 \times 1 = 2 \tag{3—8}$$

因 $\lambda>1$，$P_c=1$ 是不稳定的不动点。

因为变换使 $P-P_c$ 变大，因而离 P_c 愈远，故相变的临界点应该是不稳定的不动点，该模型中应是 $P_c=1$。$P_c=1$ 的意义很清楚，只有每个格点均是导体，整条裂隙才能导通。

以上各格点协同作用的系统行为，可用关联长度来描述。在相变点关联长度 ξ 趋向无穷，即

$$\xi \propto (P - P_c)^{-\upsilon} \tag{3—9}$$

其中，υ 叫临界指数。

将式（3—9）和分数维的定义式

$$D = \frac{\ln N(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} \tag{3—10}$$

比较，若把 ξ 理解成式（3—10）中的尺子 r，$(P-P_c)$ 理

解成式（3—10）中的 $N(r)$（用边长为 r 的小“立方”块去覆盖客体，量出的小立方块的最小个数），则临界指数 υ 相当于分数维 D 的倒数。如前所述，该重整化变换为

$$P' = R(P)$$

这种变换将尺子 $P-P_c$ 变长为 $P'-P_c$，尺子变长了，那么去量度的关联长度 ξ，按式（3—9）或就由 $\xi(P)$ 缩短为 $\xi(P')$。

但是在相变点 P_c 上，关联长度 $\xi(P_c)$ 趋向无穷，显然，P_c 是重整化变换的不动点，即

$$P_c = R(P_c)$$

将 $R(P_c)$ 在 P_c 附近 Taylor 展开

$$R(P) = R(P_c) + \lambda(P - P_c) + \cdots \qquad (3-11)$$

其中

$$\lambda = \left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)\Big|_{P_c} \qquad (3-12)$$

又设

$$\xi(P') = \frac{1}{b}\xi(P) \qquad (3-13)$$

则

$$\frac{1}{b} = \frac{\xi(P')}{\xi(P)} = \frac{(P' - P_c)^{-\upsilon}}{(P - P_c)^{-\upsilon}} \qquad (3-14)$$

由式（3—11）得

$$R(P) - R(P_c) \approx \lambda(P - P_c) \qquad (3-15)$$

即

$$P' - P_c \approx \lambda(P - P_c) \qquad (3-16)$$

故式（3—14）又可表示为

$$\frac{1}{b} = \frac{\lambda^{\upsilon}(P - P_c)^{-\upsilon}}{(P - P_c)^{-\upsilon}} = \lambda^{-\upsilon} \qquad (3-17)$$

则由此导得临界指数

$$\upsilon = \frac{\ln b}{\ln \lambda} \tag{3-18}$$

在一维渗流模型中 $b=2$，$\lambda=2$，故

$$\upsilon=\frac{\ln 2}{\ln 2}=1$$

3.3 底板破坏型突水岩层破裂过程的自组织临界特性

3.3.1 底板岩层损伤统计模型

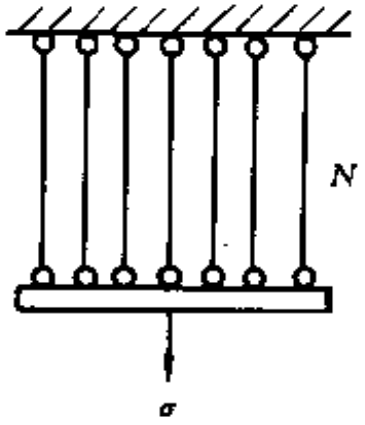


图 3—5 试样的细长杆集合体

导致材料和结构力学性能劣化的微观结构的变化称为损伤。近些年来，作为一门新兴学科，材料的损伤力学有了很大的发展，人们已越来越清楚地认识到，当材料受载变形，在宏观裂纹出现之前，损伤已影响了材料与结构的强度和寿命。70 年代末期，Lemaitre 等从损伤力学的角度，考虑了材料的损伤过程，提出了连续损伤力学的概念，并建立了以下损伤模型

$$\sigma = E(1-D)\cdot\varepsilon = (1-D)\sigma_x \tag{3-19}$$

式中 σ_x——有效应力；

D——损伤参量。

1982 年，D. Krajcinovic 等人将连续损伤理论和统计强

度理论有机地结合起来，提出了一个统计损伤模型，如图 3—5 所示。他将试样抽象成 N 根细长杆的集合体，其本构关系为

$$\sigma = E\epsilon\left(1 - \frac{n}{N}\right) \tag{3—20}$$

式中 n——已断裂的杆件数。

式（3—20）中的 n/N 即为（3—19）式中的损伤参量 D

$$D=\frac{n}{N} \tag{3—21}$$

基于损伤统计模型的思想，我们把底板岩层考虑为如图 3—6 所示的力学模型，并假定图中带阴影的单元为已破裂单元，空白为未破裂单元，设图 3—5 所示模型中总单元数为 N。在某一应力状态下已破裂的单元数为 n，则其损伤参量 D 同样满足（3—21）式。因此，损伤参量 D 从统计学角度讲实际上代表岩层中单元的破坏率，其值介于 0 到 1 之间。

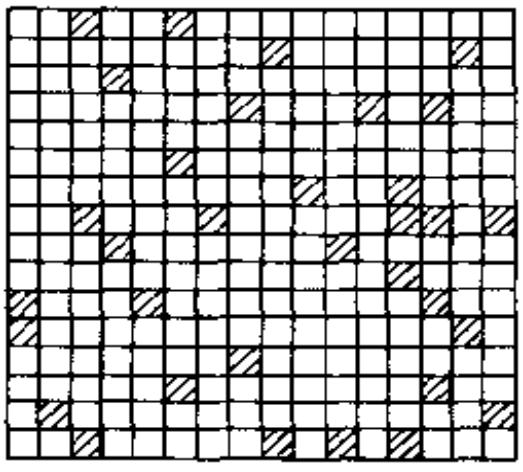


图 3—6 底板岩层损伤统计模型

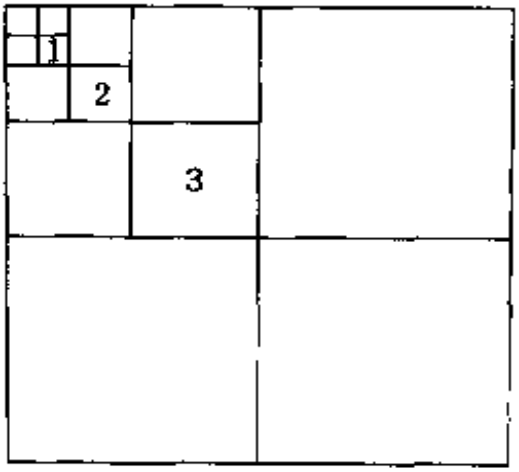


图 3—7 重整化群方法说明

煤层开采后，必然在采煤工作面底板一定深度内发生岩体的应力调整作用，从而导致新的应力一应变过程：首先在采掘前方一定深度的底板岩层产生超前增压，即所谓采掘前方的超前支撑压力作用；继而在采空区形成过程中，底板由超前增加转化为减压松弛，即所谓卸荷膨胀作用；最后又转化为由顶板冒顶引起的再次增加，这就是广义上的采动作用。就底板破坏型突水而言，正是由于这种采动作用，打破了底板岩层中原有地应力的平衡状态，为达到新的平衡，在应力相对集中的地方通常某些最薄弱环节（强度最低的单元）首先破裂，该单元的破裂会将释放的应变能转移给相邻单元，岩层内的应力发生重新分布，应力重新分布的结果使某些未破裂的单元应力集中程度增高，于是又导致次一级强度相对较低的单元发生破裂，这样连锁反应式地依次进行下去，直至岩层整体破坏形成导水通道发生底板突水。

3.3.2 底板破坏型突水岩层破裂过程自组织临界特性

由前面分析可知：底板岩层突变失稳破裂，形成导水通道，发生底板突水是由一系列小破裂发展演化而达到的，正是小破裂的积累才形成大的破裂，从而演化到突变。因此小破裂的演化将主宰着底板岩体宏观的破坏运动形态，这一过程具有自组织性。就系统观点而言，这个突变状态可以认为是恰恰代表系统经历的临界状态。如前所述，我们可以用重整化群方法对底板破坏型突水岩层破裂过程自组织临界特性予以很好的描述，如图 3—7 所示。在最低级的层次上考虑由 4 个单元组成的原胞，设 P_0 为单元破裂的概率，$1-P_0$ 为单元未破裂的概率，并假定 4 个单元中有 2 个发生了破裂，则下一层次的原胞就可能发生破裂，图 3—8 给出了由 1 级单元

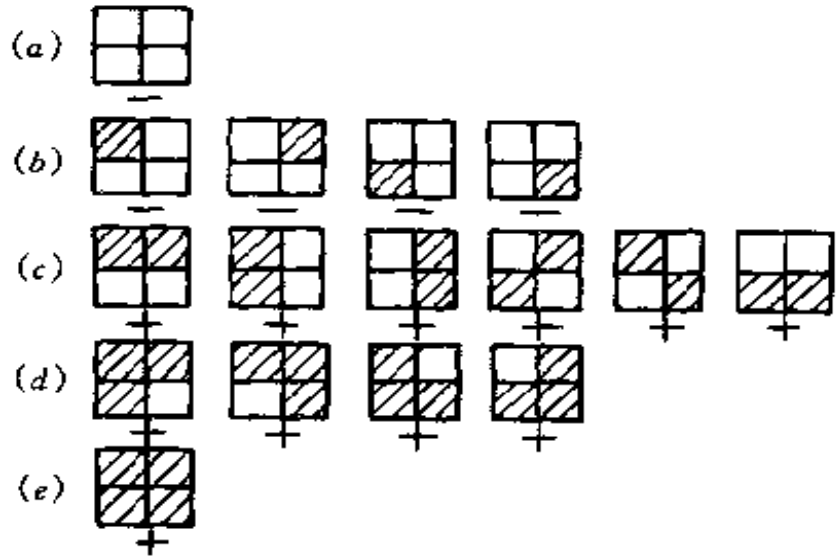


图 3－8　四个单元组成原胞的各种可能情况

组成的所有的可能情况。所有四个单元都不破裂的概率是 $(1-P_0)^4$，如图 3－8(a) 所示，这里仅有一种情况，这种情况下，原胞显然是不破裂的。1 个单元破裂，而其他 3 个单元不破裂的概率是 $P_0(1-P_0)^3$，如图 3－8(b) 所示，合并为原胞过程中这种情况会遇到 4 次，但没有一次原胞是可破裂的。2 个单元可破裂而另 2 个单元不破裂的概率是 $P_0^2(1-P_0)^2$，这种情况共出现 6 次，如图 3－8(c) 所示，这 6 次均可导致原胞破裂。3 个单元可破裂而 1 个单元不破裂的概率为 $P_0^3(1-P_0)$，这种情况共出现 4 次，如图 3－8(d) 所示，这次也均可导致原胞破裂。所有单元都破裂的概率为 P_0^4，这种情况共出现一次如图 3－8(e) 所示，显然，这时原胞是破裂的。

考虑到所有可能的情况，1 级原胞的破裂概率 P_1 为：

$$\begin{aligned} P_1 &= 6P_0^2(1-P_0)^2 + 4P_0^3(1-P_0) + P_0^4 \\ &= 6P_0^2 - 8P_0^3 + 3P_0^4 \end{aligned} \tag{3-22}$$

重正化群只能从小的部分并成大的部分，在进行重正化时，系统内小范围的涨落被逐渐消除，从而突出了与长程关联有关的因素。对于一个具有内部对称性系统的重整化群变换，不会改变系统的物理性质。进行与上述同样的分析，显然有：

$$P_2=6P_1^2-8P_1^3+3P_1^4$$

……

$$P_{n+1}=6P_n^2-8P_n^3+3P_n^4 \qquad (3-23)$$

式（3—23）即为重整化群变换关系，也就是标度变换。式中，P 为岩层中破坏单元所占的概率（即破坏率），下标代表重整化变换次数。

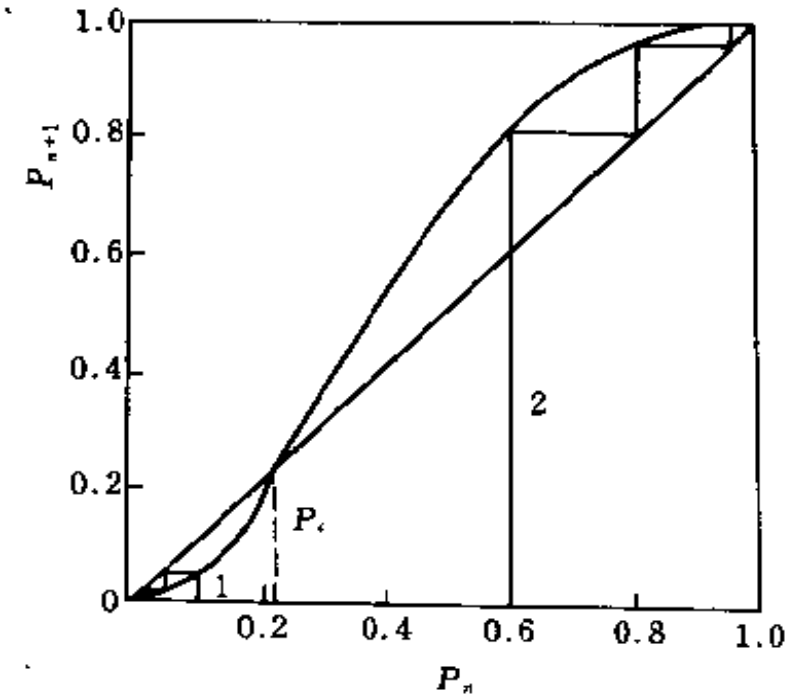


图 3—9　P_{n+1}与P_n关系曲线

现在求该变换的不动点，式（3—23）的不动点就是方程（3—23）与 $P_{n+1}=P_n$ 的交点，令

$$P_{n+1} = P_n = P_c = 6P_c^2 - 8P_c^3 + 3P_c^4 \tag{3-24}$$

解上述方程，可得 3 个不动点：$P_c=0$，0.2324，1 如图 3－9 所示。

给 P_c 一个小的偏差，如果经过迭代之后，偏差越来越小，P_c 为稳定不动点，反之为不稳定不动点。显然，若 $|f'(P_c)|>1$，则 P_c 为不稳定不动点；若 $|f'(P_c)|<1$，则 P_c 是稳定不动点。对于 $P_c=0$，0.2324，1。相应的 $\lambda=\left.\frac{dP_{n+1}}{dP_n}\right|_{P_c}$ 的值分别是 0，1.892，0。因此，$P_c=0$，1 是稳定不动点，$P_c=0.2324$ 为不稳定不动点。$P_c=0$ 表示完全不可能发生底板岩层破裂；$P_c=1$ 表示底板岩层已经破裂形成了导水通道。$P_c=0.2324$ 将系统分成两个状态区域，当 $P_0<P_c=0.2324$ 时，经若干次迭代后有 $P\to P_c=0$，如图 3－9 中折线 1 所示，即系统破裂仅是局部的；若 $P_0>P_c=0.2324$，则经若干次迭代后有 $P\to P_c=1$，即系统将失稳，底板岩层破裂形成导水通道，如图 3－9 中折线 2 所示。$P_c=0.2324$ 为临界点 P_{cc}。在临界点 P_c 之下，系统只能造成局部关联；而一旦超过临界值 P_c，系统就会产生长程关联。

采场底板岩层一般处于三向压应力状态，岩层单元破裂可视为在压应力作用下，在最小主应力方向上产生张应变引起的[92]。最小主应力方向产生张应变的条件为

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] < 0 \tag{3-25}$$

所以

$$\sigma_3 < \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \tag{3-26}$$

定义等效张应力 σ_e 与三轴应力状态下在最小主应力方向上产生的张应变相等的单轴张应力称为三轴压应力状态的

等效张应力，即 σ_e，则有

$$\sigma_e = E(-\varepsilon) = \mu(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3(\sigma_e > 0) \tag{3-27}$$

由式（3—19）得

$$\sigma_{en} = \frac{\sigma_e}{1 - D} \tag{3-28}$$

由前面的分析知

$$D = n/N = P \tag{3-29}$$

则

$$\sigma_{en} = \frac{\sigma_e}{1 - P} \tag{3-30}$$

由上述重整化群分析知，式（3—30）中 P 存在一个临界点 $P_c = 0.2324$。

当所施加应力仅使底板岩层单元的破坏率 $P < 0.2324$ 时，底板岩层内仅呈随机分布的强度较低的微元发生破坏，所以，从表观上看，此阶段裂隙的扩展（单元的破裂）呈散乱分布，由图 3—9 知，系统将向稳定态演化，即破裂停止发展。反之，当所施加的应力已使单元的破坏率 $P > 0.2324$ 时，底板岩层内单元的破裂方式将发生质的变化。此阶段单元的破裂不再是随机独立地进行，相邻单元甚至是底板岩层内各单元之间都存在着协同的相互作用，即自组织，出现长程关联现象。从表观上看，此阶段原有随机、无序分布的裂隙逐渐向某一吸引域（如底板岩层中的最大张应力面）集中，直至各裂隙贯通，形成导水通道，引发底板突水。

以上在临界点附近底板岩层中各单元协同作用的系统行为可用关联长度来描述。

关联长度 ξ 可定义为

$$\xi \propto (P - P_c)^{-\upsilon} \tag{3-31}$$

这里关联长度即为图 3－6 中某一单元与周围相连通单元的平均距离。式中 P、P_c 仍为单元破坏率和临界破坏率。υ 为关联临界指数，其被定义为

$$\upsilon = \frac{\ln b}{\ln \lambda} \tag{3-32}$$

式中 b——标度变换因子（原胞边长）；

λ——临界点处曲线的斜率。

由图 3－9 知：

$$\lambda = \left.\frac{\mathrm{d}P_{n+1}}{\mathrm{d}P_n}\right|_{P_c} = (12P^3 - 24P^2 + 12P)|_{P_c} = 1.643 \tag{3-33}$$

则

$$\upsilon = \frac{\ln b}{\ln \lambda} = \frac{\ln 2}{\ln 1.643} = 1.379 \tag{3-34}$$

在临界点附近，系统中各子单元之间的关联长度骤然增加，这种长程关联使各子单元之间协同作用，从而导致无序向有序的转化。

进一步，根据式（3－30）可得

$$\sigma_e = \sigma_{eo}(1 - P) \tag{3-35}$$

式中 σ_e——底板岩体所受的等效张应力；

σ_{eo}——底板岩体的峰值强度。

当因 $P = P_c = 0.2324$ 为临界值，故可得到使底板岩层发生不稳定破坏的等效张应力的临界值为

$$\sigma_{ec} = \sigma_{eo}(1 - 0.2324) \approx 0.77\sigma_{eo} \tag{3-36}$$

式（3－36）表明底板岩体的长期强度约为其峰值强度的 77%。这一结论与大量的岩石力学试验结果十分吻合[137]。

3.4 断层采动型突水断层破裂过程的自组织临界特性

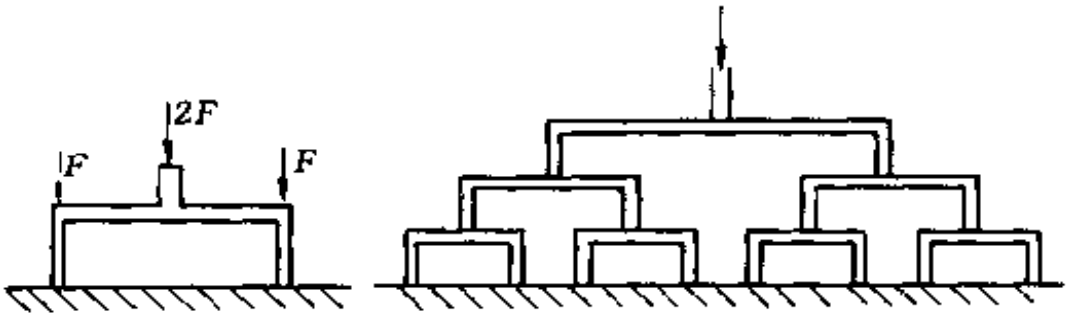
3.4.1 断层突水分析

采煤工作面的导水性断层可分为两种情况：一是断层原先就为导水断层，二是断层原先为非导水断层，受到矿山压力影响后转化为导水断层。断层采动型突水是指第二种情况，即在采场四周形成的矿山压力（支承压力）作用于断层两盘岩体，引起断层的相对移动，从而引发底板突水。对于原先不导水的断层，要在矿山压力的作用下引发突水，必须首先形成导水通道。若我们把煤层底板中的断层看成是一种平面构造，并假定断层包含了众多的凹凸体以表征断层面的粗糙性，那么导水通道的形成就是通过逐渐破坏凹凸体来实现的，其过程是一个局部应力集中→破坏某个凹凸体→应力转移→破坏另一凹凸体……这样连锁反应式的凹凸体被各个击破，最后形成导水通道，引发断层突水。

3.4.2 断层采动型突水断层破裂过程的自组织临界特性

为模拟底板断层在采动作用下发生破裂形成导水通道的过程，我们采用了 Smalley[116]等提出的一个分形树的破坏模型，如图 3—10 所示。

其基本模型如图 3—10（a）所示，假设组成 1 级原胞的两个 1 级单元的每一个单元受力 F 的作用，若一个单元破裂，则力转移至另一个单元，它将受到 $2F$ 的力。图 3—10



(*a*)基本模型　　(*b*)用基本模型建造的3级模型

图 3—10　分形树模型

(*b*) 给出了 3 个层次的分形树。它包括 4 个 1 级原胞，每个受 $2F$ 的力。2 个 2 级原胞各受 $4F$ 的力，而 3 级原胞则受 $8F$ 的力。

假设，每个单元的破坏概率由二次 Weibull 分布给出

$$P_0(F) = 1-\exp\left[-\left(\frac{F}{F_0}\right)^2\right] \qquad (3-37)$$

式中　F_0——参考强度。

对于图 3—10 中的基本模型，用 b 表示破坏单元，u 表示未破坏单元；并设单元破坏的概率为 P_0，未破坏的概率为 $1-P_0$。各种可能状态的概率用单元的破坏概率 P_0 表示如下

$$[bb] \qquad P_0^2 \qquad (3-38)$$

$$[ub] \qquad 2P_0(1-P_0) \qquad (3-39)$$

$$[uu] \qquad (1-P_0)^2 \qquad (3-40)$$

式 (3—38)、式 (3—39) 中均未考虑由一个单元破坏而发生的应力转移。

设 P_{21} 为已承受有力 F 的一个未破坏单元再承受附加力

F 时破坏的概率，那么，当应力转移时 $[ub]$ 状态发生破坏和不发生破坏的概率是

$$[ub] \to [bb] \qquad 2P_0(1-P_0)P_{21} \tag{3-41}$$

$$[ub] \to [ub] \qquad 2P_0(1-P_0)(1-P_{21}) \tag{3-42}$$

根据式（3－38）～式（3－42），1 级原胞破坏概率 P_1 为

$$P_1 = P_0^2 - 2P_0(1-P_0)P_{21} \tag{3-43}$$

其中条件概率 P_{21} 为

$$P_{21} = \frac{P_0(2F) - P_0(F)}{1 - P_0(F)} \tag{3-44}$$

式中　$P_0(2F)$ ——在 $2F$ 力作用下单元发生破坏的概率。

由式（3－37）得

$$P_0(2F) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{2F}{F_0}\right)^2\right] \tag{3-45}$$

将式（3－45）代入式（3－37）得

$$P_0(2F) = 1 - [1 - P_0(F)]^4 \tag{3-46}$$

将式（3－46）代入式（3－44）得

$$P_{21} = 1 - (1 - P_0)^3 \tag{3-47}$$

将式（3－47）代入式（3－43）得

$$P_1 = 2P_0[1 - (1 - P_0)^4] - P_0^2 \tag{3-48}$$

经重整化后，显然有

$$P_2 = 2P_1[1 - (1 - P_1)^4] - P_1^2 \tag{3-49}$$

……

$$P_{n+1} = 2P_n[1 - (1 - P_n)] - P_n^2 \tag{3-50}$$

式（3－50）即为重整化群变换关系。

现在求变换的不动点，式（3－50）的不动点就是方程（3－50）与 $P_{n+1}=P_n$ 的交点，令

$$P_{n+1} = P_n = P_c = 2P_c[1 - (1 - P_c)^4] - P_c^2 \tag{3-51}$$

解上述方程，可得 3 个不动点：$P_c=0$，0.2063，1，如图 3—11 所示。

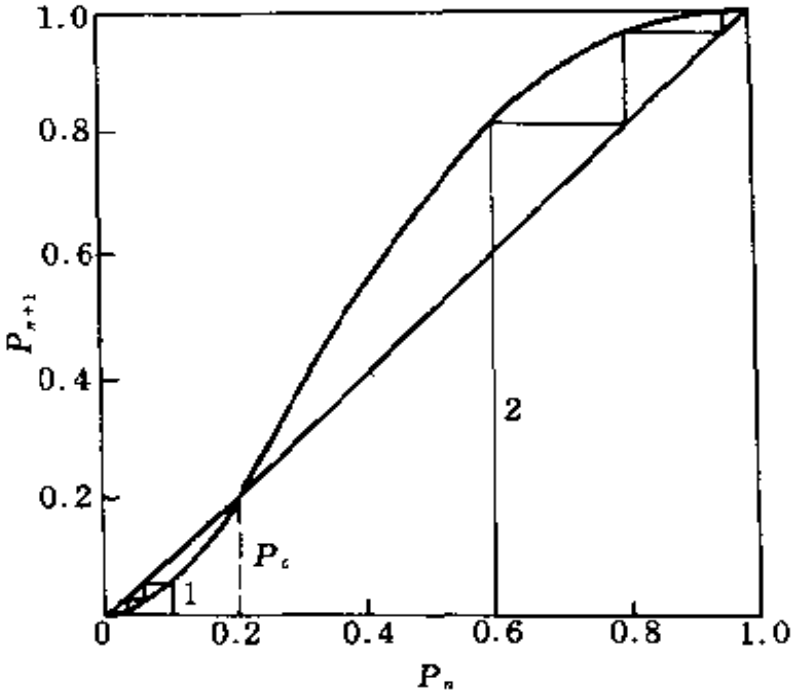


图 3—11　P_{n+1}与 P_n 关系曲线

与 3 个不动点相应的 $\lambda=\left.\dfrac{dP_{n+1}}{dP_n}\right|_{P_c}$ 的值分别为 0，1.619，1。所以，$P_c=0$，1 是稳定不动点，$P_c=0.2063$ 为不稳定不动点。$P_c=0$ 表示断层完全不可能发生破裂；$P_c=1$ 表示断层已经破裂形成了导水通道。$P_c=0.206$ 将系统分成两个状态区域，当 $P_0<P_c=0.2063$ 时，经若干次迭代后有 $P\to P_c=0$，如图 3—11 中折线 1 所示，即系统破坏仅是局部的；若 $P_0>P_c=0.2063$，则经若干次迭代后有 $P\to P_c=1$，即系统将失稳，断

层破裂形成导水通道，如图 3－11 中折线 2 所示。

由上述重整化群分析知，断层采动型突水系统存在一个临界点 P_c，当所施加应力仅使断层单元破坏率 $P<0.206$ 时，断层内仅呈随机分布强度较低的单元发生破坏，所以，从表观上看，此阶段裂隙的扩展（单元的破坏）呈随机分布，由图 3－11 知，系统将向稳定态演化，即破坏停止。反之，当所施加的应力已使断层单元的破坏率 $P>0.2063$ 时，断层内单元的破裂方式将发生质的变化。此阶段单元的破坏不再是随机独立地进行，相邻单元甚至是整个断层各单元之间都存在着协同的相互作用，即自组织，出现长程关联现象。从表观上看，此阶段原有随机、无序分布的裂隙逐渐向某一吸引域（如断层中的最大剪应力面）集中，直至各裂隙导通，形成导水通道引发断层突水。

以上在临界点附近断层中各单元协同作用的系统行为可用关联长度来描述。

关联长度 ξ 可定义为

$$\xi \propto (P - P_c)^{-\upsilon} \tag{3-52}$$

上式中 υ 为临界指数。

由图 3－11 中知：曲线临界点处的斜率为

$$\lambda = \left.\frac{\mathrm{d}P_{n+1}}{\mathrm{d}P_n}\right|_{P_c} = 1.619 \tag{3-53}$$

斜率 λ 与临界指数 υ 存在如下关系

$$\lambda = b^{1/\upsilon} \tag{3-54}$$

其中 b 为标度变换因子，本模型中显然有 $b=2$，则临界指数为

$$\upsilon = \ln b/\ln\lambda = \ln 2/\ln 1.619 = 1.439 \tag{3-55}$$

3.5 本章小结

本章介绍了底板破坏型突水与断层采动型突水的自组织临界特性，主要表现在：

（1）对底板破坏型突水而言，基于底板岩层损伤统计模型，建立了底板岩层破裂的重整化群变换关系方程。

（2）把底板岩层裂隙的扩展（单元的破裂）看作是由最小主应力方向的张应变引起的，当单元破坏率 P 小于临界破坏率 $P_c=0.2324$ 时，裂隙的扩展呈随机分布，系统向稳定态演化，即破裂停止；当单元破坏率大于临界率 $P_c=0.2324$ 时，原有随机、无序分布的裂隙逐渐向某一吸引域（如底板岩层中的最大张应力面）集中，直至各裂隙贯通形成导水通道，引发底板突水。

（3）将重整化群分析结果与损伤力学相结合，给出了底板岩体长期强度与峰值强度的关系式。

（4）对断层采动型突水而言，采用分形树破坏模型，建立了断层破裂的重整化群变换关系方程。计算结果表明：当所施加应力仅使断层单元的破坏率 P 小于临界破坏率 $P_c=0.2063$ 时，系统破坏仅是局部的；当 P 大于临界破坏率 $P_c=0.2063$ 时，原有随机无序分布的裂隙逐渐向某吸引域（如断层中的最大剪应力面）集中，直至各裂隙贯通，形成导水通道，引发断层突水。

4 底板突水的突变机理

4.1 概　　述

用数学模型描述自然现象，是科学研究的一种基本方法。自从微积分发明以来，建立微分方程模型来描述自然现象，已成为多种学科研究的主要途径。但是，微分方程只能描述连续变化的图像，用它建立的数学模型不能不具有某些局限性。自然界中非连续变化的现象比比皆是，仅就采矿工程而言，冲击地压、顶板大面积冒落、煤层底板突水等，都是非连续变化现象。对这类非连续变化的现象，寻找一种更好的数学方法加以解决，就显得十分必要了。

突变理论是法国数学家 Thom20 世纪 70 年代初期创立的，它是研究不连续现象的一个新兴数学分支。其主要数学原理是根据势函数把临界点分类，将各种领域的突变现象归纳到不同类别的拓扑结构中去，进而研究各种临界点附近非连续性态的特征，即为若干个数的初等变换。把这样得到的认识与对不连续现象的理论分析和观察资料相结合，建立数学模型，以更深刻地认识不连续现象的突变机理并作预测。

突变理论作为一种旨在应用的理论，虽然出现不久，但已取得出了许多应用成果，不仅渗透到物理学、生物学、医学等领域，而且也被用于研究地学、工程地质、岩土力学中的非稳定性问题。Henley[101]用突变理论曾提出过火山爆发、

相变、浊流、断层运动的定性模型，Cubitt 和 Shaw[102]定性地解释了沉积过程。康仲远[40]分析了板状岩体在水平和铅垂力共同作用下欧拉失稳问题，解释了某些地震现象。郑顾团、殷有泉[43]等应用突变理论研究了岩石系统在地下流体渗透作用下的稳定性问题。唐春安[63]用尖点（Cusp）突变模型研究了岩石在加载系统作用下破裂过程的机理。张业民、宋长清等用尖点突变模型研究了软粘土流动性问题[103]。黄润秋、许强[73]用突变理论分析了层状岩体变形、反倾斜坡弯曲拉裂变形的机理。秦四清[74][80][104]等用突变理论分析了顺层斜坡、水库诱发地震以及狭窄煤柱冲击地压的机理。崔鹏[81]用突变理论分析了泥石流起动的机理。

4.2 突变理论的数学基础与几种基本的突变类型

4.2.1 突变理论的数学基础

突变理论的数学基础相当宽厚，某些内容也很艰深、它涉及到现代数学的群论、流形、映射的奇点理论以及拓扑学方法。由于我们主要研究其在底板突水机理研究中的应用，下面仅就突变理论的数学基础[105~109]中的几个基本概念作一简单分析。

4.2.1.1 结构稳定性

判断一个系统是不是结构稳定的，即判断该系统的势函数是不是结构稳定的，这在数学上一般通过施加任意扰动来观察被扰动的势函数有无定性性质的变化。若被扰动的势函数与原来未被扰动的势函数具有相同的结构，如有相同的多

项式且多项式的系数也互相接近，则该势函数是结构稳定的，即该系统是结构稳定的。

其实，对势函数施加扰动相当于使势函数在变量的邻域作拓扑变换（映射）。假设一具有 m 个参数的函数族，若参数连续变化，则可把它们视为 m 维空间中的坐标，而每个函数都能以该空间中的一点表示。若 V_P 是对应于 P 点的势函数，若在 P 点的邻域内的 Q 点，有一个相应的势函数 V_Q 与 V_P 具有相同形式，则称 V_P 为函数族的一个结构稳定的函数或生成函数。亦可表述为如果 Q 是 P 的邻域，则 V_Q 是 V_P 的邻域，V_P 便是结构稳定的，V_Q 是 V_P 的满映射，所有相对应于函数为生成函数的 P 点的集合叫作生成点的子集，而与 V_P 的非生成函数相对应的 P 点的集合，称为分支点集。其实分支点集为 m 维空间超曲面在垂直方向平面中的投影，即 $R^m \to R^2$ 的映射，分支点集是拓扑不变量。

4.2.1.2 奇点理论

突变理论虽作为不连续现象的数学模型，但还是需要一定的微积分的基本思想。英国数学家 Saunders P. T. 曾明确指出“作为数学的一部分，突变理论是关于奇点的理论”。这里奇点是相对于正则点而言的。一般而言，正则点是大量的，而奇点则是个别的，正因为如此，它才在数学中占有较重要的位置。突变理论主要是研究某一系统或过程，由一种稳定状态到另一种稳定状态的跃进。

某一系统的状态可由一组参数来描述，当系统处于稳定状态时，则此时该系统状态的某个函数取唯一的极值。反之，当参数在某个范围内变动，该函数具有两个以上的极值，则该系统此时必处于不稳定状态。因此要从数学的角度考察一个系统是否处于稳定，就必须求出其函数的极值。首先需求

出该函数的导数为零的点，在相空间表现为奇点。

若系统的状态由 n 个变量 $x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n$，$m$ 个参数 u_1，u_2，…，u_m 来描述，则系统的动力学方程可以写为：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(\{x_j\}, \{u_\alpha\}) \tag{4-1}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n; \alpha = 1, 2, \cdots, m$$

方程（4－1）的右边可以表示为一个势函数 V（$\{x_j\}$，$\{u_\alpha\}$）的梯度，即：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \tag{4-2}$$

系统的定态解即奇点，可由方程：

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \tag{4-3}$$

求得。奇点的稳定性可由势函数的二阶导数来确定，势函数的极小点为吸引子，极大值点为排斥子。也就是说，势函数的梯度 $\nabla V = 0$，确定了奇点，而奇点的性质由它的二阶偏导数矩阵来确定，即：

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{4-4}$$

或

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{4-5}$$

式（4－5）称为 Hessen 矩阵。

基于前面的讨论可知在研究势函数的奇点及其性质时，可根据∇V与$\det V_{ij}$进行判定和分析。

当$\nabla V \neq 0$时，势函数处于非平衡状态，没有奇点。

当$\nabla V = 0$，而$\det V_{ij} \neq 0$时，势函数处于平衡状态，有奇点，通常称为孤立奇点，或称 Morse 奇点，属稳定奇点。

当$\nabla V = 0$，且$\det V_{ij} = 0$时，势函数所有的奇点称为非孤立奇点，或称非 Morse 奇点。

势函数V（$\{x_i\}$，$\{u_\alpha\}$）可以在奇点附近按 Taylor 级数展开，若奇点取在相空间原点，这样展开式中的常数项可取为零，由奇点的定义一阶偏导数项$\nabla V = 0$，于是有：

$$V(\{x_i\},\{u_\alpha\}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \text{高次项} \qquad (4-6)$$

式中λ_1，λ_2，…，λ_n是 Hessen 矩阵的特征值。

若 Hessen 矩阵的秩为n，则奇点的性质完全由 Hessen 矩阵的特征值λ_i来决定，高次项不起作用。这时的势函数称为 Morse 势，它是结构稳定的。

若 Hessen 矩阵的秩是$(n-k)$，则有$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$，此时二阶偏导数不能决定状态变量$x_1$，$x_2$，…，$x_k$的奇点的性质，必须考虑势函数对它们的三阶偏导数。这样，对于余秩数为k的 Hessen 矩阵，可以把势函数分为 Morse 部分和非 Morse 部分，即：

$$V \approx V_{NM}(x_1, x_2, \cdots, x_k) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i x_i^2 \qquad (4-7)$$

上式第二部分是孤立奇点对应的 Morse 部分，V_{NM}是非孤立奇点对应的非 Morse 部分。显然V_{NM}是 Taylor 级数展开式中关于x_1，x_2，…，x_k的 3 次项，如果势函数对它的三阶导数为零就应再考虑 4 次项，以此类推。结构不稳定性只局

限于状态变量 x_1，x_2，…，x_k，其余状态变量 x_{k+1}，x_{k+2}，…，x_n 均与函数的性质无关，因而可以忽略。

式（4－7）即为著名的剖分引理，它将势函数剖分成 Morse 部分和非 Morse 部分。同时也将状态变量剖分成与结构稳定性有关的实质性变量和与之无关的非实质性变量，并在分析突变类型时可将第二部分略去。

4.2.1.3 扩 展

式（4－7）中 V_{NM} 是突变的生成项，它是结构不稳定的，添加一些项使其变为结构稳定函数，这个添加过程称为扩展。

以 $V_{NM}(x)=x^4$ 为例，为了判断它是否稳定，可以和被扰动的多项式

$$\tilde{V}(x)=x^4+\alpha x^m \tag{4-8}$$

相比较，$V_{NM}(x)$ 有三重零点。若对 $\tilde{V}(x)$ 求导数则有：

$$\tilde{V}'(x)=4x^3+\alpha m x^{m-1} \tag{4-9}$$

$$\tilde{V}''(x)=12x^2+\alpha m(m-1)x^{m-2} \tag{4-10}$$

若 $m=3$，无论 α 为正还是为负。$\tilde{V}(x)$ 在 $x=0$ 处有一个拐点，在 $x=-3\alpha/4$ 有极小值。若 $m=2$，当 $\alpha<0$ 时，$\tilde{V}(x)$ 在 $x=0$ 有极大值，而在 $x=\pm\sqrt{(-\alpha/2)}$ 有极小值。若 $m=1$，$\tilde{V}(x)$ 在 $x=\sqrt[3]{(-\alpha/4)}$ 有极小值。

其次当 $m=5$ 时，$\tilde{V}(x)$ 在 $x=-4/5\alpha$ 处有临界点。从扰动的意义来说，当 α 为任意小时，若外加的临界点位于未扰函数临界点的 α 邻域内，同时临界点的配置相同，则该函数是结构稳定的。

在 $x^4+\alpha x^m$ 的例子中，当 $m=5$ 时，临界点为 $x=-4/5\alpha$，α 任意小使临界点远离原点。可见，x^4 不是结构稳定的函数。同样，对 $m=2$ 时的函数 $x^4+\alpha x^2$ 也不是结构稳定的。

若把 x^4 扩展为：

$$W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (4-11)$$

一阶与二阶导数分别为：

$$W'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \qquad (4-12)$$

$$W''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b \qquad (4-13)$$

显然，在临界点 x_0 处 $W''(x) \neq 0$，所以由 $W'(x) = 0$ 确定的临界点 x_0 的性质（极大、极小或拐点）完全由 $W'(x_0)$ 的符号决定，毋须考察高阶导数，因此高于四次的扰动函数不会影响 $W(x)$ 的定性特性。而式（4—11）通过变量代换和选取新的坐标原点就可以将三次项和常数项消去，因此式（4—11）可化简为：

$$V(x) = x^4 + ux^2 + vx \qquad (4-14)$$

式（4—11）是一个完全的四次多项式，即使添加低次项，也只是改变系数值，并不改变多项式的结构，所以 $W(x)$ 与 $V(x)$ 是结构稳定的。那么对于不稳定的函数，通过添加一些怎样的项才能稳定？下面将要介绍的“扩展”方法，正是用来解决这个问题的。

若函数 $V_{NM}(x)$ 与 $\tilde{V}(x;a)$ 有如下关系：

$$V_{NM}(x) = \tilde{V}(x;a)\Big|_{\substack{a=0 \\ x=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ a=(a_1,a_2,\cdots,a_r)}} \qquad (4-15)$$

那么 $\tilde{V}(x;a)$ 称作函数 $V_{NM}(x)$ 的 r 维扩展，如果通过下面的坐标变换：

$$x_i' = x_i' \quad (x_i,\ a)$$

$$a'\alpha = a'\alpha(a), \alpha = 1,2,\cdots,r'$$

使得 $V_{NM}(x)$ 的其他 r 维扩展能够从 $\tilde{V}(x;a)$ 求得，则称 $\tilde{V}(x;a)$ 为 $V_{NM}(x)$ 的完全扩展，此处 r' 并不一定与 r 相等。

如果 $\tilde{V}(x;a)$ 是 $V_{NM}(x)$ 的维数最少的扩展，则称 $\tilde{V}(x;a)$ 为万能扩展。这里所定义的扩展是结构稳定的扩展；对于不能保证结构稳定的扩展，则称作不完全扩展。

例如 $V_{NM}(x)=x^3$ 的三种不同扩展如下：

(1) 完全扩展：$\tilde{V}_1=(x;a_1,a_2)=x^3+a_1x+a_2x^2$

(2) 不完全扩展：$\tilde{V}_2=(x;b)=x^3+bx^2$

(3) 万能扩展：$\tilde{V}_3=(x;c)=x^3+cx$

因 $V_{NM}(x)=x^3$ 是三次奇点，则一个完全的扰动函数是：

$$P(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3 \qquad (4-16)$$

由式 (4—16) 知，$R^D=R^4$，这里 $D=(3+1)!/3!1!$，每一个 a 为任意小量。常数项 α_0 通过重新选取坐标零点而消去，既然 α_0 不影响 $P(x)$ 的定性性态，那么在今后的分析计算时可以忽略常数的作用。而 α_3x^3 这一项通过下列变换：

$$x\to x'=(1+\alpha_3)^{\frac{1}{3}}x \qquad (4-17)$$

就可以归并到 $V_{NM}(x)=x^3$ 之中，即：

$$V_{NM}(x')=V\left[(1+x_3)^{\frac{1}{3}}x\right]=(1+x_3)x^3=x'^3 \qquad (4-18)$$

因此，对 $V_{NM}(x)=x^3$ 来说，扰动函数 $P(x)$ 简化为：

$$P_1(x)=\alpha_1x+\alpha_2x^2 \qquad (4-19)$$

现在对 $V_{NM}(x)=x^3$ 上面的三种扩展加以简单解释。$\tilde{V}_1=(x;a_1,a_2)$ 称作完全扩展是因为 $\tilde{V}_2(x;b)$ 与 $\tilde{V}_3(x;c)$ 完全可以由 $\tilde{V}_1=(x;a_1,a_2)$ 得出，只要作变量代换如下：

$$x\to x-\frac{1}{3}b,\ b\to b \text{ 和 } c\to -b^2/3$$

则 $\tilde{V}_2$ 与 $\tilde{V}_3$ 之间就可以映射。

$$\tilde{V}_2\left(x-\frac{1}{3}b;b\right)=x^3-\frac{1}{3}b^2x+\frac{2}{27}b^3\approx\tilde{V}_3\left(x;-\frac{1}{3}b^2\right)$$

$$\tilde{V}_3\left(x\pm\sqrt{-c/3};c\right)=x^3\pm\sqrt{-3cx^2}\pm\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{1}{3}c}\cdot c$$
$$\approx\tilde{V}_2\left(x;\pm\sqrt{-3c}\right)$$

同样，只要作如下变换：

$$x\to x+\frac{1}{3}a,\ \text{与}\ c=a_2-\frac{1}{3}a_1^2$$

$\tilde{V}_3(x;c)$ 就可以映射为 $\tilde{V}_1(x;a_1,a_2)$，但 $\tilde{V}_3(x;c)$ 是维数为 1 的扩展，所以是万能扩展。

在寻找 $V_{NM}(x)$ 或 $V_{NM}(x,y)$ 的扩展时，有一种很有用的方法，可以大大简化计算，现以 $V_{NM}(x,y)=x^3+y^4$ 为例作一介绍。其中心思想是将扩展项与其偏导数组合起来，对 $V_{NM}(x,y)=x^3+y^4$ 而言，扩展项即扰动有如下形式：

$$P(x,y)=\sum_{i\geq0,j\geq0}P_{ij}x^iy^j \qquad (4-20)$$

而 $V_{NM}(x,y)$ 的微分同胚是变量的一阶无限小量：

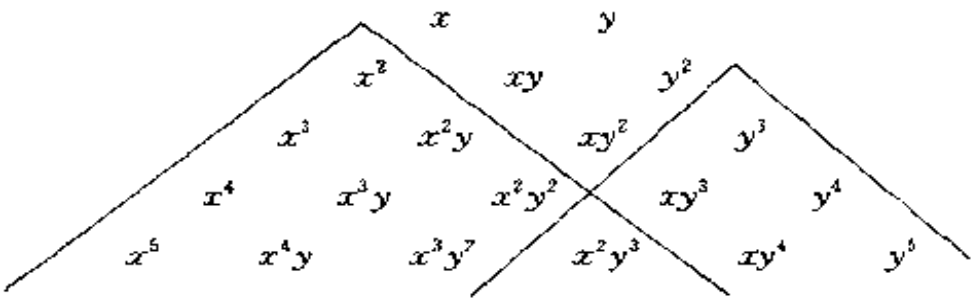
$$3x^2\delta x+4y^3\delta y \qquad (4-21)$$

因此，被扰动的函数为：

$$\tilde{V}(x',y',P)=x^4+y^4+\left(3x^2\delta x+4y^3\delta y+\sum_{i,j}P_{ij}x^iy^j\right)+O(\alpha) \qquad (4-22)$$

式中 $O(\alpha)$ 表示高阶无穷小量。现在作出 x^iy^j 的 Pascal 三角形，将包含微分同胚系数 x^2 与 y^3 的各项用底线标出，然后以 x^2 与 y^3 为顶点，画出各包含 x^2 因子和 y^3 因子的两个三角形，可见标有底线的各项均在这两个三角形之内，而剩余的那些项（除去常数项），就是所寻求的扩展项：

$$\tilde{V}(x,y,P) = x^3 + y^4 + P_{10}x + P_{01}y + \\ + P_{11}xy + P_{22}y^2 + P_{12}xy^2 \qquad (4-23)$$



4.2.1.4 确 定

一个函数在状态变量空间里的临界点附近的性态，可以通过研究 Taylor 级数在该临界点的展开式来加以确定，按照惯例将函数 $f(x)$ 在原点展开：

$$f(x) = f(0) + x_i f_i(0) + \frac{1}{2!}x_i x_j f_{ij}(0) + \cdots \qquad (4-24)$$

若 $\nabla f(x) \neq 0$，$f(x)$ 的性态完全由变量 x 的一次项决定，略去二次项及以后各项并不影响 $f(x)$ 在临界点的性态 $\nabla f(x) = 0, \det f_{ij} \neq 0$；那么 $f(x)$ 的性态将由 Taylor 级数展开式的二次项来决定，因此可以略去二次项以后的所有项；若 $\nabla f(x) = 0, \det f_{ij} = 0$，函数 $f(x)$ 的特性需要由高阶项来决定，不过仍然可以期望 $f(x)$ 的特性完全由 Taylor 级数展开式的 k 次项决定，不必考虑其后各项。这种略去 k 次项以后各项的方法是很有用的，为此而专门将这种方法定义为 k 次截断，并用 $k-jet$ 或 $j^k(f)$ 表示，例如：

$$j^3(\sin x) = x - \frac{1}{3!}x^3$$

$$j^2(3x - 2y + 7xy - 9x^3 + 43x^7y) = 3x - 2y + 7xy$$

对于复合函数，例如 $f(x)=1-2x+3x^2$ 和 $u(x)=3x+x^2$，求复合函数 $f[u(x)]$ 的二次截断，可以按照变量 x 的最终表达式来决定，即：

$$j^2[f(u)]=j^2[1-2(3x+x^2)+3(3x+x^2)^2]$$
$$=1-6x+25x^2$$

显然，两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的截断运算规则如下：

$$j^k(f+g)=j^kf+j^kg \tag{4-25}$$

$$j^k(fg)=j^k(j^kf\circ j^kg) \tag{4-26}$$

$$j^k[f(g)]=j^k(j^kf\circ j^kg) \tag{4-27}$$

式中符号$\circ$表示复合函数的意思。

对于 Taylor 级数展开式：

$$f(x)=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}D^rf(x)|_0\cdot x^r,x=x(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{4-28}$$

的 k 次截断可表示为：

$$j^kf(x)=\sum_{r=0}^{k}\frac{1}{r!}D^rf(x)|_0\cdot x^r,x=x(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{4-29}$$

D 为偏导数符号。

事实上，一个函数的 Taylor 级数能否被截断，以及截断的次数 k 如何确定，是一个较为复杂的问题，即所谓“确定”问题。若一个函数与任何有同样 k 次截断的函数类型相同，则称该函数是 k 次确定的，当 k 为有限数时，则称之为有限确定的。函数 $f(x)$ 是 k 次确定的，而 $f'[x'(x)]$ 是 k 次截断的，它们将满足下列关系：

$$f(x)=f'[x'(x)] \tag{4-30}$$

仍以 $\sin x$ 为例，

$f'(x)=\sin x, f(x)=x, j^1f(x)=x, j^1f'(x)=x$, $j^1f'(x)=x$，因此 $j^1f(x)=j^1f'(x)$，选取变量的适当变换形式使式（4－30）成立，显然 $x'=\sin^{-1}x(|x|<1, |x'|<\pi/2)$ 时，可得：

$$f'[x'(x)]=\sin x'=\sin(\sin^{-1}x)=x=f(x) \tag{4-31}$$

有时将函数的截断说成是甩掉 Taylor 级数的高次项“尾巴”，这两者是完全等价的。

为了研究一个函数是不是 k 次截断的，并求出 k 的值，Mather[44]提出了一种简单的计算步骤来实现上述目的，现简述如下：

（1）假定函数 $f(x)$ 是 k 次截定的。

（2）用 $m(x)$ 来表示变量 x 的单项式序列，即：

$$m_j(x)=x_1,\cdots x_l;x_1^2,x_1x_2,\cdots x_l^2;x_1^3,\cdots;x_1^l,\cdots \tag{4-32}$$

（3）按下式计算多项式 $R_{ij}(x)$：

$$R_{ij}(x)=j^{P+1}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i}m_j(x)\right\} \tag{4-33}$$

（4）判断式（4－32）能否表示成 $R_{ij}(x)$ 的线性叠加，其中 m_j 取 $k+1$ 次，$R_{ij}(x)$ 可以包含常系数。若 $f(x)$ 是 k 次确定的，则可以将 x 的各单项式写成 $R_{ij}(x)$ 的线性叠加；但 $f(x)$ 不是 k 次确定的，m_{ij} 也可能满足 $R_{ij}(x)$ 线性叠加的要求，所以尚需根据 $f(x)$ 的形式具体判断。

例如判断 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}y^3$ 是几次确定的。可以按以上步骤进行计算。

（1）假定 $k=3$，于是有：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + y, \frac{\partial f}{\partial y} = (x + y) + y^2$$

$$m_1, m_2, m_3 = x, y; x^2, xy, y^2; x^3, x^2y, xy^2; \cdots$$

(2) R_{ij} 的多项式在表 4－1 中给出。

(3) $k+1=4$ 的 $m(x)$ 的单项式可表示成 $R_{ij}(x)$ 的线性叠加。

$$y^4 = R_{25} - R_{15}, xy^3 = R_{24} - R_{14}$$

$$x^2y^2 = R_{23} - R_{13}, x^3y = R_{27} - (R_{23} - R_{13})$$

$$x^4 = R_{26} - [R_{27} - (R_{23} - R_{13})]$$

以上线性组合中不包含 x 或 y 的一次项，同时，$f(x,y)$ 的稳定性矩阵在原点的行列式为零，所以 $f(x,y)$ 也不是二次确定的，它只能是三次确定的。

4.2.1.5 扩展的一般规则

表 4－1 R_{ij} 的 多 项 式

m_y		$j^4\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}m_j\right]$	$j^4\left[\frac{\partial f}{\partial x_2}m_j\right]$
m_1	x	$x(x+y)$	$x(x+y)+xy^2$
m_2	y	$y(x+y)$	$x(x+y)+y^3$
m_3	x^2	$x^2(x+y)$	$x^2(x+y)+x^2y^2$
m_4	xy	$xy(x+y)$	$xy(x+y)+xy^3$
m_5	y^2	$y^2(x-y)$	$y^2(x+y)+y^4$
m_6	x^3	$x^3(x+y)$	$x^3(x+y)$
m_7	x^2y	$x^2y(x+y)$	$x^2y(x+y)$
m_8	xy^2	$xy^2(x+y)$	$xy^2(x+y)$
m_9	y^3	$y^3(x+y)$	$y^3(x+y)$
m_{10}	x_4	0	

Mather 同时提出函数 $f(x)$ 的扩展方法，与“确定”方法相似，现介绍如下：

(1) 求出 $f(x)$ 的 k 次确定，令 $f(x) = j^k f(x)$。

(2) 用 $n_j(x) = 1; x_1, x_2, \cdots, x_l; x_1^2, x_1x_2, \cdots$。

(3) 假定 $\tilde{V}(x,a)$ 是 $\bar{f}(x)$ 的 r 维的扩展，并按下式求出 $T_j(x)$：

$$T_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} j^{k+1}\tilde{V}(x;a)\big|_{a=0} \qquad (4-34)$$

(4) 求出下列所有的多项式

$$S_{ij}(x) = j^k\left\{\frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_i} n_j(x)\right\} \qquad (4-35)$$

(5) 小于或等于 k 的 $n_j(x)$ 的各单项式能否表示成下式：

$$n_j(x) \leqslant k, k = \Sigma S_{ij}S_{ij}(x) + \Sigma T_j(x) \qquad (4-36)$$

若能，则 $\tilde{V}(x,a)$ 是 $f(x)$ 的完全扩展。

(6) 若 $T_j(x)$ 是最小的组合，则 $\tilde{V}(x,a)$ 是 $\bar{f}(x)$ 的万能扩展。

如果 $\tilde{V}(x,a)$ 是 $\bar{f}(x)$ 的万能扩展，那么 $\tilde{V}(x,a)$ 可以表示成 $\bar{f}(x)$ 与 $T_j(x)$ 的线性组合：

$$\tilde{V}(x;a) = f(x) + \sum_{j=1}^{r} a_j T_j(x) \qquad (4-37)$$

需要指出的是万能扩展在形式上并不是唯一的，通过变量变换可以化为同一形式，也就是说，两个具有相同奇点的万能扩展是等价的。

下面举例说明扩展的计算步骤：

若 $f(x,y) = x^2y \pm \frac{1}{3}y^3$，求万能扩展。因 $f(x,y)$ 是 3 次确定的，一阶偏导数为：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\frac{\partial f}{\partial y}=x^2\pm y^2 \qquad (4-38)$$

$n_j(x,y)$，$S_{ij}(x)$ 的 3 次确定如下：

$n_j(x,y)$	$S_{1j}=j^3\left(\frac{\partial V}{\partial x}n_j\right)$	$S_{2j}=j^3\left(\frac{\partial V}{\partial y}n_j\right)$
$n_0=1$	xy	$x^2\pm y^2$
$n_1=x$	x^2y	$x(x^2\pm y^2)$
$n_2=y$	xy^2	$y(x^2\pm y^2)$
$n_3=x^2$	0	0

显然，没有任何一个 x 或 y 能表示成 $S_{ij}(x)$ 的线性组合，因此只能选取 $T_1(x,y)=y$ 来满足式 (4—36) 的要求。这时 $S_{11}=xy$，$S_{21}=x^2\pm y^2$，可以选取与 S_{11}，S_{21} 线性无关的项作为 $T_3(x,y)$，可供选择的有 x^2，y^2 或 $x^2\mp y^2$，考虑到对称性和计算方便，选取 $T_3(x,y)=x^2\mp y^2$，根据式 (4—37)，$f(x)$ 的万能扩展为：

$$\tilde{V}(x,y;a,b,c)=x^2y\pm\frac{1}{3}y^3+ax+by+c(x^2\mp y^2) \qquad (4-39)$$

4.2.1.6 余维数

万能扩展需要扩展参数的数目等于余维数，因此，余维数是一个重要的概念。余维数的定义为：几何对象的维数与所在空间的维数之差，称为几何对象的余维数，它表示描述几何对象所需要的方程数目。例如，在三维空间的一个二维曲面（几何对象），它的余维数为 1，需要一个方程来描述；在三维空间的一维曲线，其余维数为 2，需要两个方程；在三维空间的零维的点需要三个方程，其余维数也是 3。

余维数有两个重要的性质。其一是剖分性，不论几何对

象的维数是多少，只有当它的余维数为 1 时才能将它所在的空间剖分成两个不同的部分。如一个点剖分一条直线，一条线剖分一个面，一个面剖分一个立体。余维数的另一个重要性质是不变性。在讨论剖分定理时指出，一个势函数的状态变量可以分为实质性的与非实质性的两部分，如果略去非实质性部分，则对象的维数与所在空间维数均同时减少同样的数目，因而余维数是不变的。例如三维空间中一条曲线的余维数为 2，假如我们忽略了 z 坐标，曲线变为 $x-y$ 平面中的交点，其维数为 0，而它的余维数仍然是 2。

现在我们仍以 $V_{NM}=x^4$ 为例说明其余维数为万能扩展参数的数目。该函数的奇点 $\partial V_{NM}/\partial x=4x_0^3=0$，因此有，$\partial^2 V_{NM}/\partial x^2=\partial^3 V_{NM}/\partial x^3=0$，由此确定的参数值的子集是一个余维数为 2 的几何对象，因为它由两个方程给出。所以 x^4 的万能扩展需要两个扩展参数。由此可知势函数本身的余维数等于万能扩展中参数的数目。

假设有一 l 个状态变量的系统，它的 Hessen 矩阵的秩恒为零，这就意味着它的每个矩阵元都为零，即

$$V_{ij}=\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}=0, \qquad i\leqslant 1, j\leqslant l \qquad (4-40)$$

因此，共有 l^2 个方程。但由于 Hessen 矩阵的对称性 $V_{ij}=V_{ji}$，独立的方程数目为 $\frac{1}{2}l(l+1)$，因此其最小余维数也等于 $\frac{1}{2}l(l+1)$。如果 $l=1$，式（4－40）给出唯一的一个方程是 $\partial^2 V/\partial x^2=0$，其余维数最少是 1。如果 $l=2$，可以得到 3 个方程，$\partial^2 V/\partial x_1^2=\partial^2 V/\partial x_2^2=\partial^2 V/\partial x_1\partial x_2=0$，余维数至少为 3，因而至少需要 3 个扩展参数。

事实上，l 就是 Hessen 矩阵的余秩数，也是实质性状态

变量的个数。这样，对于余秩数为 l 的系统，至少需要 $\frac{1}{2}l(l+1)$ 个扩展参数。当有 3 个实质性状态变量时，即 $l=3$，余维数为 $\frac{1}{2}l(l+1)=\frac{3\times4}{2}=6$，因而至少需要 6 个扩展参数。由此反推，当扩展参数不多于 5 时，实质性状态变量不会多于 2。在下一部分我们会说明对 4 个或更少的控制参量，仅有 7 种不同的突变类型。

4.2.1.7 平衡曲面与分支点集

在突变理论中将可能出现突变的量称为状态变量，连续变化的因素称为控制变量。控制变量的连续变化可以导致势函数在临界点（奇点）附近的突变，而在其它地方，势函数则为光滑而无突变。

如前所述，系统的动力学方程通常可由一个光滑的势函数导出，设给定势函数 V，则由：

$$\nabla V(x)=0 \qquad (4-41)$$

定义其平衡曲面 M，即曲面 M 为由 V 的全部奇点构成，经数学证明 M 为一流形，也就是一个性态很好的光滑曲面。定义奇点集 S 为所有满足 $\nabla V=0$ 和 $\det V_{,ij}=0$ 的点组成的 M 的一个子集。S 在控制空间 C 中的投影称为分支点集，它是 C 中所有使势函数 V 的形式发生变化的点组成的集合。

4.2.1.8 拓扑学

早在 19 世纪末，法国的大数学家 Ponincare 在非线性常微分方程的定性理论中，即应用拓扑学方法研究突变现象——奇点。所谓拓扑学其研究对象为多维空间内的曲面，Klein 曾定义拓扑学为空间的从属于最一般的一对一连续变换群的几何。

n 维实数空间 R^n 的一对一连续变换称为 R^n 的拓扑变

换，简写为：

$$X \to X'$$

当 R^n 内的两个图形之一按 R^n 的拓扑变换可以变为另一个时，则称此二图形在 R^n 里是拓扑等价的。由此可知 R^n 空间的拓扑学是研究图形对 R^n 的拓扑变换不变性质的几何。只要两个几何对象是拓扑等价的，经拓扑变换后，它们的定性性质会保持不变，即结构是稳定的。就一个动力系统而言，如果控制参数连续变化，它的相空间中奇点的数目以及吸引子和排斥子的性质不变，尽管奇点周围轨线的分布形状发生了变化，我们就认为它的结构没变，即变化前后是拓扑等价的。

为了研究在拓扑等价的意义下拓扑不变量是什么，我们观察一下图 4—1，二维空间中闭合曲线 L 在环形区域不管怎样拉伸和弯曲都无法将它连续地缩成一个点，究其原因是图 4—1 中有一个洞而不是整体的圆盘，因而无洞的圆盘和有洞的环形不是拓扑等价的。在圆盘里任何闭曲线都能连续的缩成一个点，因为它具有连通性。因此在进行拓扑变换时，连通性是不会改变的，它是拓扑不变量。

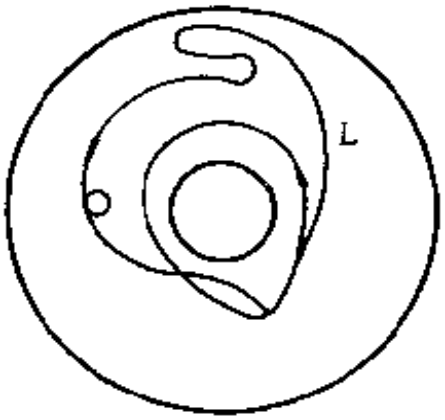


图 4—1　闭曲线 L

4.2.1.9　微分同胚

在分析中我们经常要用到微分同胚的概念。微分同胚是指一个一一对应的连续可微变换。如果两个几何对象之一可以连续地变形到另一个而无任何撕裂或无不同点的粘合，则把它们看作是同胚的或拓扑等价。如果两个几何对象是同胚

的，并且变形不引起皱折或展平折痕，则它们就是微分同胚的。例如，球、椭球和立方体都是同胚的，但只有前两个才是微分同胚的。

现举例来具体说明微分同胚这一概念。我们经常设

$$x'=ax+by,\quad y'=px+qy$$

把表达式

$$(ax+by)\ (px+qy)^2$$

化简为 $x'\ (y')^2$

或略去撇号而成为 xy^2

这时我们说 $(ax+by)(px+qy)^2$ 与 xy^2 是微分同胚的，这个关系用符号“$\sim$”来表示，即

$$(ax+by)(px+qy)^2\sim xy^2$$

这相当于定义了一个变换 Φ，即

$$\Phi:\ x\to ax+by,\quad y\to px+qy$$

通常我们把一个微分同胚表示为

$$\Phi:\ x\to x+\varphi\ (x,\ y),\quad y\to y+\psi\ (x,\ y)$$

这里 φ 和 ψ 是 x 和 y 的多项式，当然也可以把 x 和 y 归入多项式之中，当 $\varphi=\psi=0$ 时对应于全等微分同胚 $x\to x$，$y\to y$，全等微分同胚就是 x 和 y 到自身的变换。

4.2.2 几种基本的突变类型

任何一个系统，其状态总要保持平衡，系统由一个平衡状态跃变（而不是渐变）到新的平衡态时就发生了突变。这个过程的全貌可通过一个光滑的平衡曲面来描述。突变理论所研究的就是描述这种突变过程的所有可能的平衡曲面。千差万别的突变现象，以它们的平衡曲来分类，可以归结为若干基本的类型。

Thom 经过数学推导证明了渐变的控制因素(控制空间)所产生的突变行为(状态空间),在控制空间不超过四维的情况下自然界的各种形形色色的初等突变可以归结为 7 种基本突变类型,按其几何形状分别称为折叠型突变(fold catastrophe)、尖点型突变(cusp catastrophe)、燕尾型突变(swallowtail catastrophe)、蝴蝶型突变(butterly catastrophe)、双曲型脐点突变(hyperbolic umbilic catastrophe)、椭圆型脐点突变(elliptic umbilic catastrophe)及抛物型脐点突变(parabolic umbilic catastrophe)。7 种基本的突变类型如表 4—2 所示。

表 4—2 7 种基本突变

突变类型	状态变量数目	控制变量数目	势函数	平衡曲面方程
折叠型	1	1	x^3+ux	$3x^2+u$
尖点型	1	2	x^4+ux^2+vx	$4x^3+2ux+v$
燕尾型	1	3	$x^5+ux^3+vx^2+wx$	$5x^4+3ux^2+2vx+w$
蝴蝶型	1	4	$x^6+tx^4+ux^3+vx^2+wx$	$6x^5+4tx^3+3ux^2+2vx+w$
双曲脐型	2	3	$x^3+y^3+wxy+ux+v$	$3x^2+wy-u$ $3y^2+wx+v$
椭圆脐型	2	3	$x^3-xy^2+w(x^2+y^2)+ux+vy$	$3x^2-y^2+2wx+u$ $-2xy+2wy+v$
抛物脐型	2	4	$y^4+x^2y+wx^2+ty^2+ux+vy$	$2xy+2wx+u$ $4y^3+x^2+2ty+v$

可使突变模型尽可能地从直观几何图形表示，采用降维处理、绘制分歧点集的图形等方法，甚至研究平面与突变模型相交的曲线来帮助理解多维几何形状。

4.2.2.1 折叠突变

考察势函数：

$$V(x) = x^3 + ux \tag{4-42}$$

其状态空间是二维的 (x,u)，平衡曲面方程为：

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0$$

即：

$$3x^2+u=0 \tag{4-43}$$

当 $u<0$ 时，系统有两个定态：

$$A_1 : x_1=\sqrt{-\frac{u}{3}}$$

$$A_2 : x_2=-\sqrt{-\frac{u}{3}} \tag{4-44}$$

由稳定性分析可知：

$$\lambda = -\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_i} = -6x_i, i = 1、2 \tag{4-45}$$

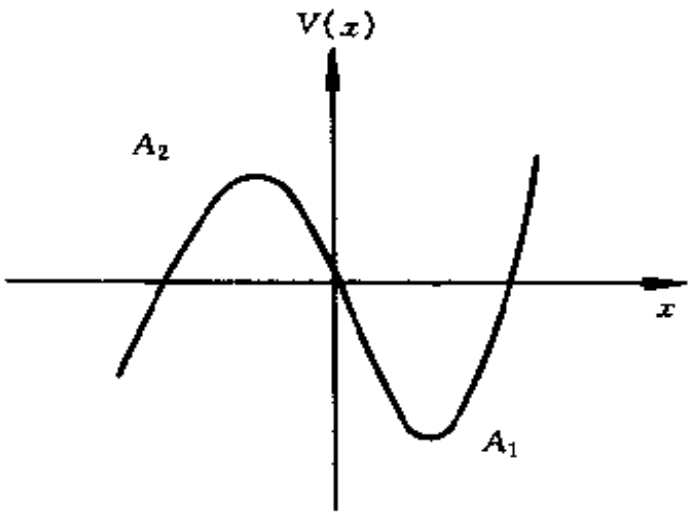


图 4-2 $V=x^3+ux$ 的曲线

对于 A_1，$\lambda<0$，故 A_1 是稳定的，对于 A_2，$\lambda>0$，故 A_2 是不稳定的。而由式（4-43）可知，定态 A_1 和 A_2 都是势函数 $V(x)$ 的极值点，如图 4-2 所示。

从图 4-2 中可以看出，稳定的定态 A_1 刚好位于势曲线的极小

值，而不稳定的定态 A_2 刚好位于势曲线的极大值。其物理意义显而易见。

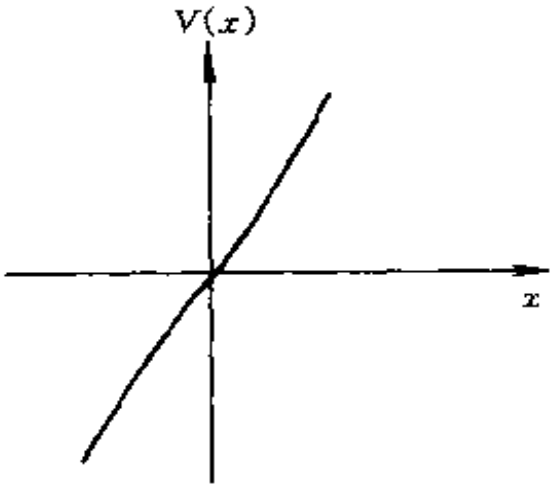


图 4－3　$V=x^3$ 的曲线

由分岔理论可知，当 $u=0$ 时，$A_1=A_2$，二个定态合二为一，且 $x=0$ 为一临界分岔点（$\lambda=0$）。而当 u 从零变到小于零时，该临界点分岔出 A_1 和 A_2 两个定态，即所谓的叉型分岔。

而从势函数来看，这一临界点刚好是势曲线的拐点，即：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=6x=0 \tag{4－46}$$

$$x=0$$

这从图 4－3 的 $u=0$ 的势曲线里可以清楚地看出。用突变理论来说，这一临界点（$u=0$，$x=0$）就是所谓的突变点。它的条件是：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0\end{cases} \tag{4－47}$$

从式（4－47）的第二个方程可以确定突变点的状态位置（即 x 的坐标），而第一个方程却给出了平衡态随控制参数变化的关系，如图 4－4 所示。

将定态方程式（4－43）投影到参数空间里，就给出了参数空间的分岔图解，如图 4－5 所示。图 4－5 可以看作是将图 4－4 中的稳定平衡态和不稳定平衡态沿 u 轴对称地折叠

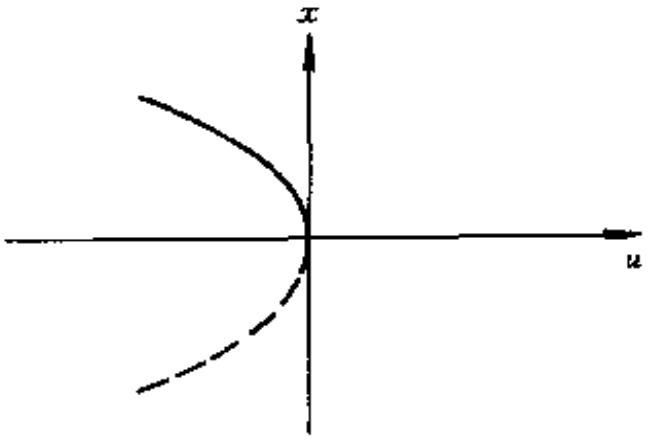


图 4－4　定态 $3x^2+u$ 随参数 u 的变化



图 4－5　在参数空间里 u 的参数图解

一起而形成的，其折叠点（$u=0$）就是突变点。故称之为折叠突变，从以上分析可知，一维单参量的连续动力系统的临界分岔点，就是折叠突变点。与分岔理论里的平衡态附近的线性稳定性分析方法所不同的是，突变理论是用（4－47）式方程组直接给出了突变点的参数取值和状态坐标。

Thom 已经证明：给位势 x^3 的扰动，不管控制参数是几个，其稳定性质或突变性质都等价于一个参数的系统式（4－42）。

4.2.2.2　尖点突变

尖点突变 Thom 又称为 Rienan-Hugonioc 点突变，其势函数为：

$$V\ (x)\ =x^4+ux^2+vx \qquad (4-48)$$

故相空间为状态变量 x 以及 u、v 两个控制变量构成的三维空间。平衡曲面 M 由方程：

$$\frac{\partial V}{\partial x}=4x^3+2ux+v=0 \qquad (4-49)$$

给出，非孤立奇点集既满足方程（4－49），又要满足：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=12x^2+2u=0 \qquad (4-50)$$

因为它是 M 的一个子集。由方程（4－49）和（4－50）消去 x，得到分支点集满足的方程：

$$8u^3+27v^2=0 \qquad (4-51)$$

将平衡曲面 $4x^3+2ux+v=0$ 及分支点集 $8u^3+27v^2=0$ 给出，如图 4－6 所示。

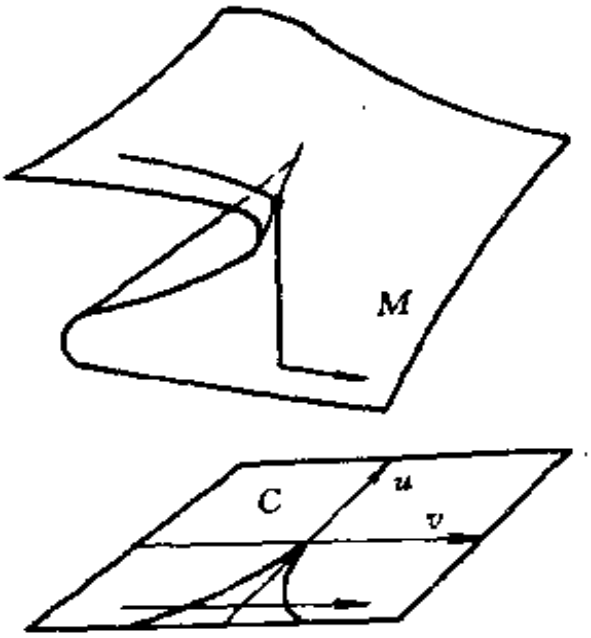


图 4－6　状态空间中的平衡曲面 M 及参数空间中的分支点集

设系统的状态是以 x、u、v 为坐标的三维空间中的一点所代表，则相点必定位于该曲面上，且总是位于曲面的顶叶或底叶，因为中叶是对应不稳定平衡。

平衡曲面 M 在控制平面 C 即 $u-v$ 中的投影是一种拓扑变换或映射，可用 f 表示为：

$$f: M\to C \quad (R^3-R^2)$$

即

$$(x,\ u,\ v) \mid\!\!\to (u,\ v) \qquad (x\in M) \qquad (4-52)$$

u、v 的平稳变化一般都引起 x 的平稳变化。仅当控制点 (u, v) 越过分支点集 $8u^3+27v^2=0$ 时，将使 x 产生不连续的突变，亦即如果相点恰好在 M 曲面终止的边缘上（曲面回折面形成中叶处），则它必定跳跃到另一叶上，这引起 x 的突变，并产生滞后现象。尖点之中有两个极点，它们被一个极大点分隔，而尖点之外只有一个极点，如图 4－6 所示。由于

当$u>0$时，v的变化只引起x的光滑变化，故称为正则性态，相应地称v为正则因子。但当u减少到负值时，即$u<0$时就分裂了M，出现折叠，x的变化不再连续，故称u为剖分因子。

4.2.2.3 燕尾突变

考察势函数

$$V(x)=x^5+ux^3+vx^2+wx \qquad (4-53)$$

故相空间为状态变量x以及u，v，w三个控制变量构成的四维空间，超曲面M由方程：

$$\frac{\partial V}{\partial x}=0$$

即：

$$5x^4+3ux^2+2vx+w=0 \qquad (4-54)$$

给出，非孤立奇点集即满足方程（4—54），又要满足：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=0$$

即：

$$20x^3+6ux+2v=0 \qquad (4-55)$$

由于相空间是四维的，所以我们无法画出等价于图4—6的图形。

因为式（4—55）是M的一个子集，由式（4—54）及式（4—55）联立求解，消去x而得到分支点集满足的方程，它是控制参数（u，v，w）空间中的曲面，所以在R^3中可以画出分支点集B的曲面。

由于从式（4—54）及式（4—55）消去x并不是简单的运算，其过程和最终的方程形式都很复杂。由于我们所关心的只是系统的定性性态，所以只能画出分支点集B的示意

图，就能达到我们的定性分析这一目的。

首先来确定 B 曲面在 $w-v$ 参数相面上的投影 B_u。

由于现在研究的是 $w-u-v$ 相空间里的曲面 B 在 $w-v$ 相平面上的投影问题，我们可以把 u 取为常数，而把 x 当作参数，从而由式（4－54）、式（4－55）得：

$$\begin{cases} x=0,\ w=0 \\ x=0,\ v=0 \end{cases} \tag{4-56}$$

由式（4－55）可知 v 是关于 x 的奇函数，且：

$x\to\infty$ 时，　　$v\to-\infty$　　（4－57）

$x\to-\infty$ 时，　　$v\to+\infty$

式（4－55）乘以 x 减去（4－54）式得：

$$w=15x^4+3ux^2 \tag{4-58}$$

所以，w 是关于 x 的偶函数，且：

$x\to\pm\infty$ 时，　　$w\to+\infty$　　（4－59）

由于 w 是关于 x 的偶函数，面 v 是关于 x 的奇函数，所以 w 是关于 v 的偶函数。

现在来研究 B_u 是否存在尖点、极值点和拐点的问题。

由式（4－55）得：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-(30x^2+3u) \tag{4-60}$$

而由式（4－54）和式（4－55）得：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=-2x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \tag{4-61}$$

尖点所应满足的条件是：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases} \tag{4-62}$$

极值点的条件是：

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=0 \qquad (4-63)$$

若 $u>0$，由式（4－60）得：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}>0 \qquad (4-64)$$

故 $u>0$ 时 B_u 不存在尖点。

由式（4－61）可知：

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v}\right|_{x=0}=-2x=0 \qquad (4-65)$$

所以 $u>0$ 时，B_u 有一极值点，且由于 $x<0$ 时，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}>0$；$x>0$ 时，$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v}<0$，故为极小点。

根据式（4－57）～式（4－59）和以上关于尖点，极小点的讨论，我们可以方便地作出 $u>0$ 时的 B_u 曲线——即分支点集曲面方程 B 在 $w-v$ 相平面的投影，如图 4－7（a）所示。若 $u<0$，由式（4－60）可知：

当 $x=\pm\sqrt{-0.1u}$ 时：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=0 \qquad (4-66)$$

由式（4－61）及式（4－66）有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\pm\sqrt{-0.1u}}=0 \qquad (4-67)$$

所以由式（4－66）及式（4－67）可知：$x=\pm\sqrt{-0.1u}$ 是两个尖点。

由式（4－65）可知：$x=0$ 仍是一个极值点。

由式（4－55）可知：当 $x=\pm\sqrt{-0.3u}$ 时，$v=0$

现在分析一下两个尖点在 $w-v$ 平面上的定性位置。

由式（4－54）和式（4－55）可知：

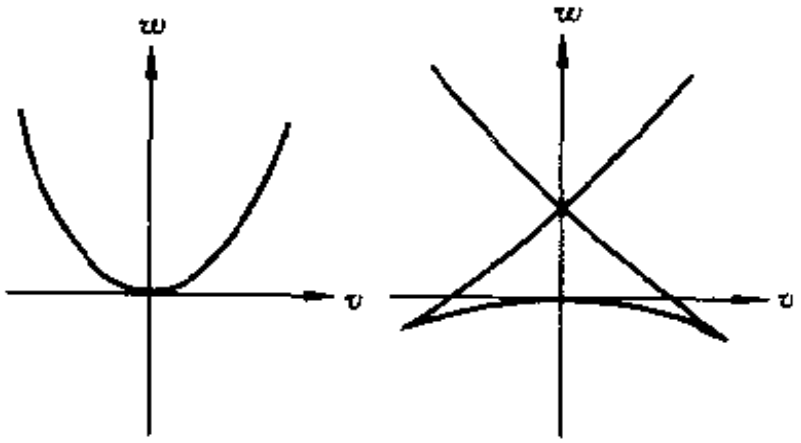
当 $x=\pm\sqrt{-0.1u}$ 时：

$$v=-10x^3-3ux=\mp 2u\sqrt{-0.1u} \qquad (4-68)$$

$$w=-5x^4-3ux^2-2vx=-0.15u^2<0 \qquad (4-69)$$

所以这两个尖点是关于 w 轴对称的，且位于 v 轴以下，从而极值点（$x=0$，$v=0$）是一极小点。

根据上面关于尖点和极小点位置的讨论及式（4－57）和式（4－59），我们可以画出 $u<0$ 时的 B_x 图形，如图 4－7（b）所示。



（a）$u>0$　　（b）$u<0$

图 4－7　燕尾分支点集的截线

至此，我们可以研究一下分支点集 B 曲面的定性结构了。

如前所述，当 $x=\pm\sqrt{-0.3u}$ 时，$v=0$，将这两个值代入（4－54）式可得：

$$w=0.45u^2,\quad v=0 \tag{4-70}$$

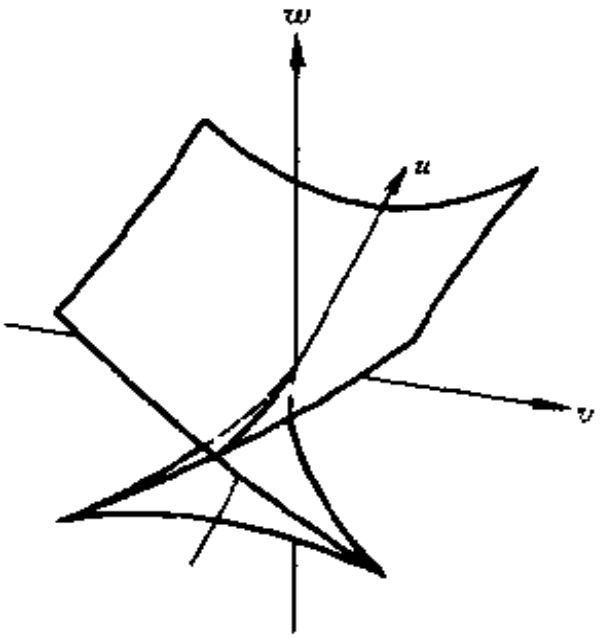


图 4-8　燕尾的分支点集

将图 4-7 的（a）、（b）及式（4-65）汇总起来，便可以得到图 4-8，即分支点集的曲面方程。由于图 4-8 酷象燕尾故名燕尾突变。

最后我们确定一下参数空间中各点对应的定态位置的总数及其性质。

在前一部分里我们已看到尖点曲线以内的点的所对应的稳定状态有两个，而尖点曲线以外的点所对应的稳定状态只有一个。这说明了分支点集曲面（线）是平衡位置的个数和性质改变的界线。所以要研究参数空间中各点对应的平衡位置的总数及其性质，只是在每一个区域中找一个代表就可以了。

考察 $v=0$，$u<0$

由方程（4—54）可得：

$$x^2=-\left(-3u\pm\sqrt{9u^2-20w}\right) \tag{4-71}$$

这里有三种情况：

（1）$w>9u^2/20$；此时方程（4-71）无实根，v 无临界点。

（2）$0<w<9u^2/20$；由于 $(9u^2-20w)^{1/2}$ 是实数并小于正实数 $-3u$，x^2 的两个解都是正实数，且 v 有四个临界点——两个极大点和两个极小点。

所以图 4－8 中曲面上不可能有稳定平衡点，一个稳定平衡点在曲面下方，另两个在燕尾内。

4.2.2.4　椭圆脐点突变

势函数：

$$V\ (x,\ y)\ =x^2y-\frac{1}{3}y^3+u\ (y^2+x^2)\ +vx+wy \tag{4-72}$$

故相空间为状态变量 x，y 以及 u，v，w 三个控制变量构成的五维空间。但控制参量空间是三维的（u，v，w），因此仍能画出分支点集的超曲面 B。平衡曲面 M 由下列方程决定：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial V}{\partial y}=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}2xy+2ux+v=0\\x^2-y^2+2uy+w=0\end{cases} \tag{4-73}$$

分支点集 B 是 M 的子集，由 Hessen 矩阵的行列式来决定：

$$\det V_{,,}=2\begin{vmatrix}y+u & x\\ x & -y+u\end{vmatrix}=4\ (u^2-y^2-x^2)\ =0 \tag{4-74}$$

亦即

$$y^2+x^2=u^2$$

式（4－74）为圆的方程，为了画图方便起见，引入辅助参量 θ，则方程（4－74）可由下式表达：

$$\begin{cases} y=-u\cos\theta \\ x=u\sin\theta \end{cases} \tag{4-75}$$

将式（4－75）代入式（4－73）得：

$$\begin{cases} v=u^2\ (\sin 2\theta-2\sin\theta) \\ w=u^2\ (\cos 2\theta+2\cos\theta) \end{cases} \tag{4-76}$$

现在画出分支点集 B 的截面曲线以及完整的超曲面 B 就比较容易了。

在绘制 v，w 代表的曲线时，首先由尖点条件求出尖点，以确定图形顶点的位置，为此分别求出 v，w 对 θ 的导数：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}=0,\ \theta=0,\ \pi,\ \pm\dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=0,\ \theta=0,\ \pm\dfrac{2\pi}{3} \end{cases} \tag{4-77}$$

将 $\theta=0$，$\pm\dfrac{2\pi}{3}$ 代入式（4－76）得出尖点坐标值（$3u^2$，0），$\left(-\dfrac{3}{2}u^2,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}u^2\right)$，$\left(-\dfrac{3}{2}u^2,\ \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}u^2\right)$。

将 $\theta=\pi$ 代入式（4－76）得出曲线与 v，w 的垂直交点或者说与 $u=1$ 的圆相切之切点坐标。

$\theta=\pi$ 时，$w=-u^2$，$v=0$ 再注意到势函数的对称性：当 $(x,\ y)\to(-x,\ y)$ 和 $(u,\ v,\ w)\to(+u,\ -v,\ +w)$ 时，$V\ (x,\ y)\to\pm V\ (x,\ y)$ 以及式（4－76）的对称性：$\theta\to-\theta\Rightarrow\ (x,\ y)\to(-x,\ y)$ 和 $(u,\ v,\ w)\to(+u,-v,+w)$ 时，方程形式不变。根据这些性质，给定不同的 u 值，就可定性画出 B_u 的示意图了，如图 4－9 所示。

考虑到 $u=0$ 时，$v=w=0$ 及尖点线在 $(u,\ w)$ 平面中的投影都是抛物线，就可画出分支点集 B 的示意图了，如图 4－10 所示。

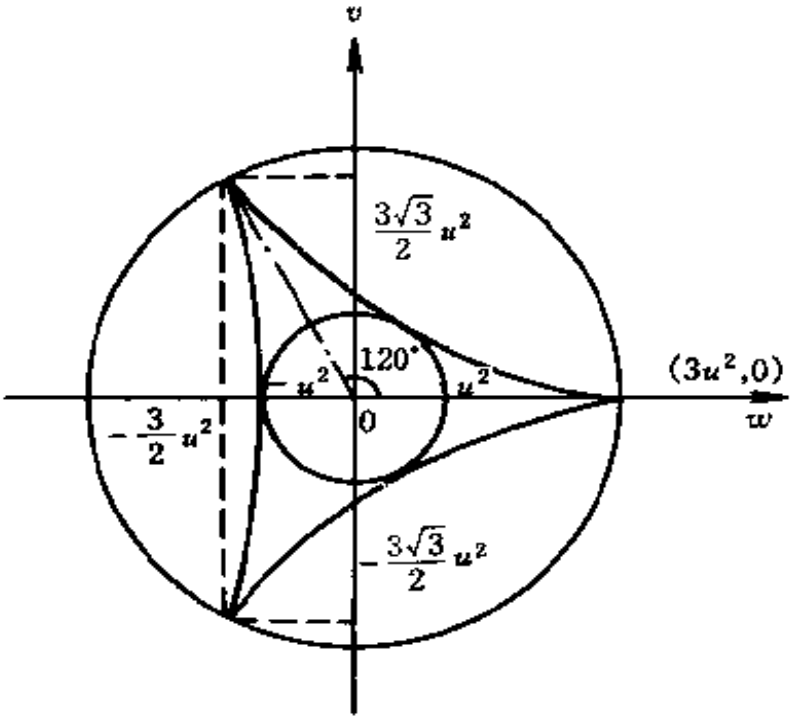


图 4—9　椭圆型脐点分支点集的截线

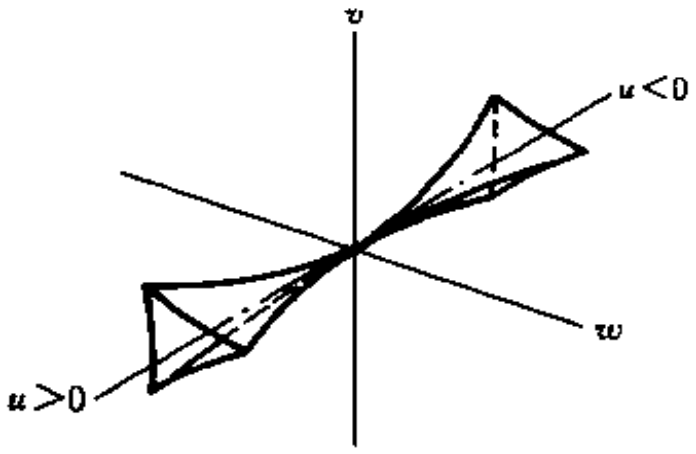


图 4—10　椭圆型脐点的分支点集

最后确定一下参数空间中各点对应的定态位置及其性质。

对于尖点锥体内的两个区域，可以通过在 u 轴上选取样本点的方法来简化计算。这时 $v=w=0$，平衡曲面方程可简化为：

$$\begin{cases} x\ (y+u)\ =0 \\ x^2-y^2+2uy=0 \end{cases} \tag{4-78}$$

共有 4 个奇点：

A_1：$(x_0=0,\ y_0=0)$；　　A_2：$(x_0=0,\ y_0=2u)$

A_3：$(x_0=\sqrt{3}u,\ y_0=-u)$；A_4：$(x_0=-\sqrt{3}u,\ y_0=-u)$

对 A_2，A_3 和 A_4 均有：

$$\det V_{ij}=A\ (u^2-y^2-x^2)\big|_{(x_0,y_0)}<0$$

所以 A_2，A_3，A_4 是不稳定的鞍点。

对 A_1 有：

$$\begin{cases} \det V_{ij}=4u^2<0 \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}=2u \end{cases} \tag{4-79}$$

故当 $u>0$ 时，A_1 是稳定的极小点；而当 $u<0$ 时，A_1 是不稳定极大点。

在尖点锥体外的区域则选 $(u,\ v,\ w)=(0,\ -2,\ 0)$ 作为计算样本。此时平衡曲面 M 方程为：

$$\begin{cases} xy=1 \\ x^2=y^2 \end{cases} \tag{4-80}$$

它有两个奇点：

$$A'_1\ (x_0=1,\ y_0=1)$$

$$A'_2\ (x_0=-1,\ y_0=-1)$$

而对于 A'_1 和 A'_2 都有

$$\det V_{ij}=-8<0$$

故 A'_1 和 A'_2 都是鞍点。因而在尖点锥体外的区域中无平衡位置。

4.2.2.5 双曲脐点突变

势函数

$$V\ (x,\ y)\ =x^2y+\frac{1}{3}y^3+u\ (y^2-x^2)\ +vx+wy \tag{4-81}$$

这与已研究过的椭圆脐点突变非常相似，只是剖分因子那一项 $u\ (y^2+x^2)$ 与这里的对应项 $u\ (y^2-x^2)$ 相差一个符号，要描述式（4－81）系统所需的相空间是五维的；而分支点集所满足的控制方程所在的控制空间是三维的 (u, v, w)，因此在分析时所采用的方法与椭圆型脐点大致相同。

平衡曲面方程 M 为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y}=0\end{cases}$$

即：

$$\begin{cases}2xy-2ux+v=0\\ x^2+y^2+2uy+w=0\end{cases} \tag{4-82}$$

稳定性矩阵——Hessen 矩阵的行列式为零，这就是奇点集 B 的方程：

$$\det V_{ij}=2\begin{vmatrix}y-u & x\\ x & y+u\end{vmatrix}=4\ (y^2-u^2-x^2)\ =0 \tag{4-83}$$

这是双曲线方程，x 为实轴，y 为虚轴。再由式（4－82）得出参数 v，w 的方程如下：

$$\begin{cases} -v=2xy-2ux \\ -w=x^2+y^2+2uy \end{cases} \tag{4-84}$$

将 x，y 当作参数，给定不同的 u 值，就可以画出分支点集 B_u 曲线。因为奇点集是双曲线，故对 x，y 作如下代换：

双曲线上半部分（$y>0$）

$$\begin{cases} y=u\mathrm{ch}\theta \\ x=u\mathrm{sh}\theta \end{cases} \tag{4-85}$$

于是：

$$\begin{cases} -v=u^2\ (\mathrm{sh}2\theta-2\mathrm{sh}\theta) \\ -w=u^2\ (\mathrm{ch}2\theta+2\mathrm{ch}\theta) \end{cases} \tag{4-86}$$

双曲线下半部分（$y<0$）

$$\begin{cases} y=-u\mathrm{ch}\theta \\ x=-u\mathrm{sh}\theta \end{cases} \tag{4-87}$$

则 v、w 的方程可写为：

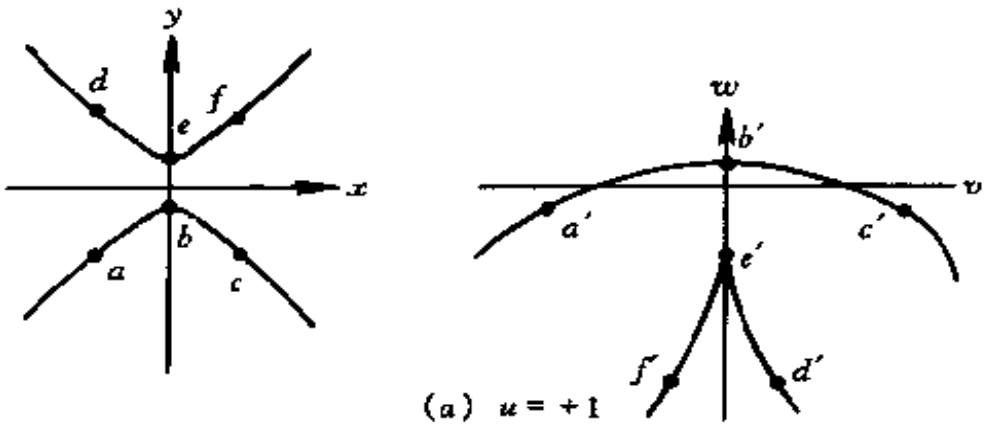
$$\begin{cases} -v=u^2\ (\mathrm{sh}2\theta+2\mathrm{sh}\theta) \\ -w=u^2\ (\mathrm{ch}2\theta-2\mathrm{ch}\theta) \end{cases} \tag{4-88}$$

下面在分别考虑 $u=+1$，0，-1 三种情况画出 $x-y$ 曲线及 B_u 曲线。需要说明的是 $u=0$ 的情况，由式（4—82）得：

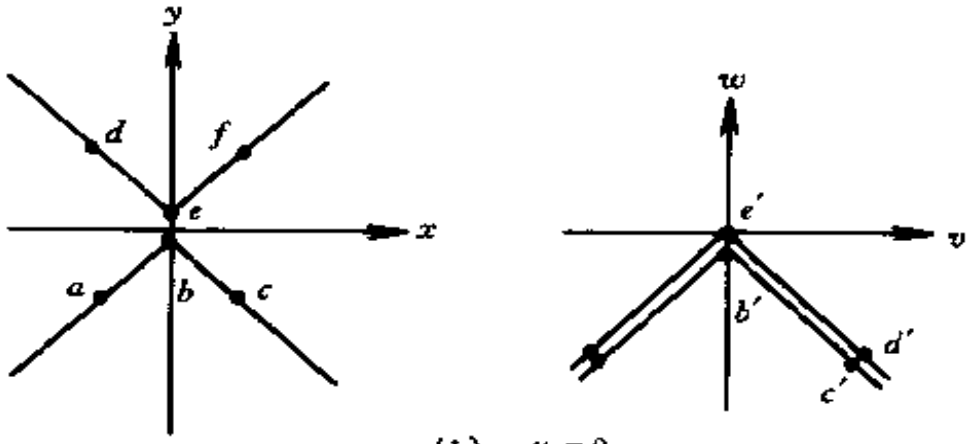
$$\begin{cases} -v=2xy \\ -w=x^2+y^2 \end{cases} \tag{4-89}$$

由于 $u=0$ 时 $x^2=y^2$，$x=\pm y$ 或 $y=\pm x$，那 $v=\pm 2x^2=\pm 2y^2$。很显然，无论 x 与 y 是取正实数还是负实数，v 的取值是在 $\pm\infty$ 之间，亦即从负到正的实数。但 w 只能取负值，即 $w\leqslant 0$。所以当 $u=0$ 时 B_u 曲线只有 $w\leqslant 0$ 的下半部分，如图 4—11（b）所示。

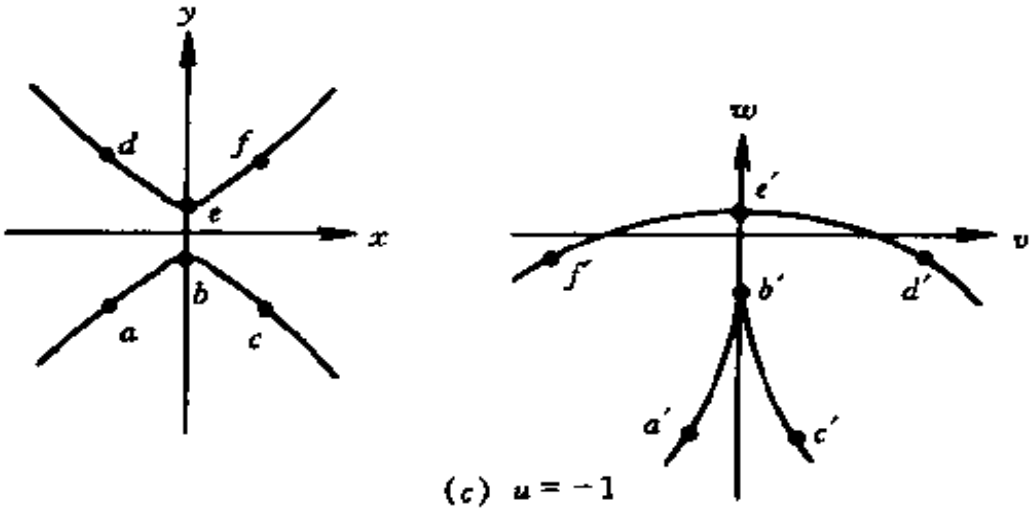
当 u 从负到正连续变化时，在三维空间 $R^3=(u, v, w)$ 中，图 4—11 所示的 B_u 曲线沿 u 轴形成三维超曲面 B，它



(a) $u=+1$



(b) $u=0$



(c) $u=-1$

图 4—11　双曲型脐点分支点集的截线

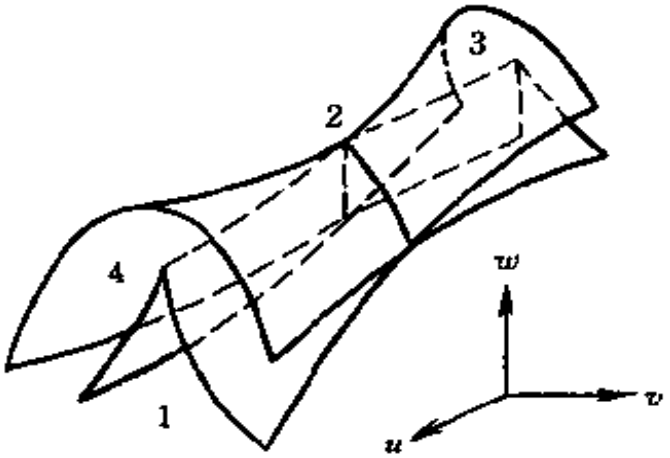


图 4—12　双曲型脐点的分支点集

由两个完全相同但在 u 轴方向相差 180°的曲面在 $u=0$ 处相交而成，如图 4—12 所示。

为了求出 $V(x, y)$ 的临界点并判断它的性态，根据图 4—12 由 B 曲面剖分的四个区域：1，2，3，4，在选择样点时，令 $v=0$，$u=\pm 1$，让 w 取不同的值，使状态变量 x, y 为控制变量 u, v, w 的函数，便可很容易求出全部临界点。

当 $v=0$，$u=+1$ 时，根据式（4—82）可得：

$$\begin{cases} 2xy-2x=0 \\ x^2+y^2+2y+w=0 \end{cases} \tag{4—90}$$

显然，$x=0$ 或 $y=+1$ 时，（4—90）式成立，即得：

$$y^2-2y+w=0$$

或

$$x^2+3+w=0$$

临界点为：

$$x=0,\ y=-1\pm\sqrt{1-w} \tag{4—91}$$

和

$$y=1,\ x=\pm\sqrt{-(3+w)} \tag{4—92}$$

当 $w>1$ 时，上述解无实根，对应 B 曲面上的 2 域，在该域内没有临界点；当 $w<+1$ 时，（4—91）式有两个实根；而当 $w<-3$ 时式（4—92）有两个实根。因此在 1 域中，$w<$

-3，式（4－91）、（4－92）均有两个实根，因此在1域有四个临界点；在4域中，$-3<w<+1$，只有式（4－91）有两个实根，所以在4域中有两个临界点；3域相应于$u<0$，当$u=-1$时3域与4域临界点极性相反，在4域为极大点时，则在3域为极小点，而鞍点则相同。

下面将较详细地判断临界点的类型及在$x-y$坐标系中的位置。

当$u=1$时，Hessen矩阵有如下形式：

$$V_{ij}=2\begin{bmatrix} y-1 & x \\ x & y+1 \end{bmatrix} \tag{4-93}$$

对x，y的四组解求出相应的特征值λ_{1-4}。

（1）$x=0$，$y=-1+\sqrt{1-w}$

$$2\begin{bmatrix} \lambda-(y-1) & x \\ x & \lambda-(y+1) \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} \lambda-(y-1) & 0 \\ 0 & \lambda-(y+1) \end{bmatrix}$$
$$=2[\lambda^2-2y\lambda+(y^2-1)]=0$$

解之，

$$\lambda=2\ (y\pm1)$$

将$x=0$与$y=-1\pm\sqrt{1-w}$代入λ的表达式得：

$$\begin{cases} \lambda_1=2\sqrt{1-w} \\ \lambda_2=-4+2\sqrt{1-w} \\ \lambda_3=-2\sqrt{1-w} \\ \lambda_4=-4-2\sqrt{1-w} \end{cases} \tag{4-94}$$

（2）$y=1$，$x=\pm\sqrt{-(3+w)}$

$$V_{ij}=2\begin{bmatrix} 0 & \pm\sqrt{-(3+w)} \\ \mp\sqrt{-(3+w)} & 2 \end{bmatrix}$$

特征值的方程为：

$$2\begin{bmatrix} \lambda & \pm\sqrt{-(3+w)} \\ \pm\sqrt{-(3+w)} & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

$$=2\left[\lambda^2-2\lambda+(3+w)\right]=0$$

解之，

$$\lambda=2\left[1\pm\sqrt{1-(3+w)}\right]$$

所以，这种情况下特征值 λ 有两组解，即：

$$\begin{cases}\lambda_{11}=2+2\sqrt{1-(3+w)} \\ \lambda_{22}=2-2\sqrt{1-(3+w)}\end{cases} \tag{4-95}$$

以 w 作为参数，在 $x-y$ 平面上画出临界点的位置和类别，如图 4－13 所示。其 S 表示鞍点，M 表示极大值临界点，m 表示极小值临界点。临界点的类型由二阶导数的正、负来决定，例如当 $-3<w<+1$ 时，$\lambda_1>0$，$\lambda_2<0$，因此 λ_1，λ_2 决定的临界点为鞍点，$\lambda_1>0$ 时坐标轴箭头指向临界点，$\lambda_2<0$ 时则背离临界点；当 $w<-3$ 时，$\lambda_3<0$，$\lambda_4<0$，因此 λ_3 与 λ_4 确定了一个极大值临界点。

根据 $(x-y)$ 与 $(u, v, w)=(\pm1, 0, w)$ 平面的映射关系，可以判断在图 4－12 所示的四个不同区域中，临界点的个数与类型为：2 区域（$w>+1$）没有临界点。4 域（$u=+1$，$-3<w<-1$）有一个极大点和一个鞍点；3 域（$u=-1$，$-3<w<-1$）有一个极小点和一个鞍点；1 域（$u=\pm1$，$w<-3$）有一个极大点，一个极小点和两个鞍点。

综上所述，双曲脐点的位势至多只能有一个稳定的平衡点。而存在稳定平衡点的区域如图 4－14 所示。

另外，Thom 还证明，对于形式复杂的势函数，只要满足

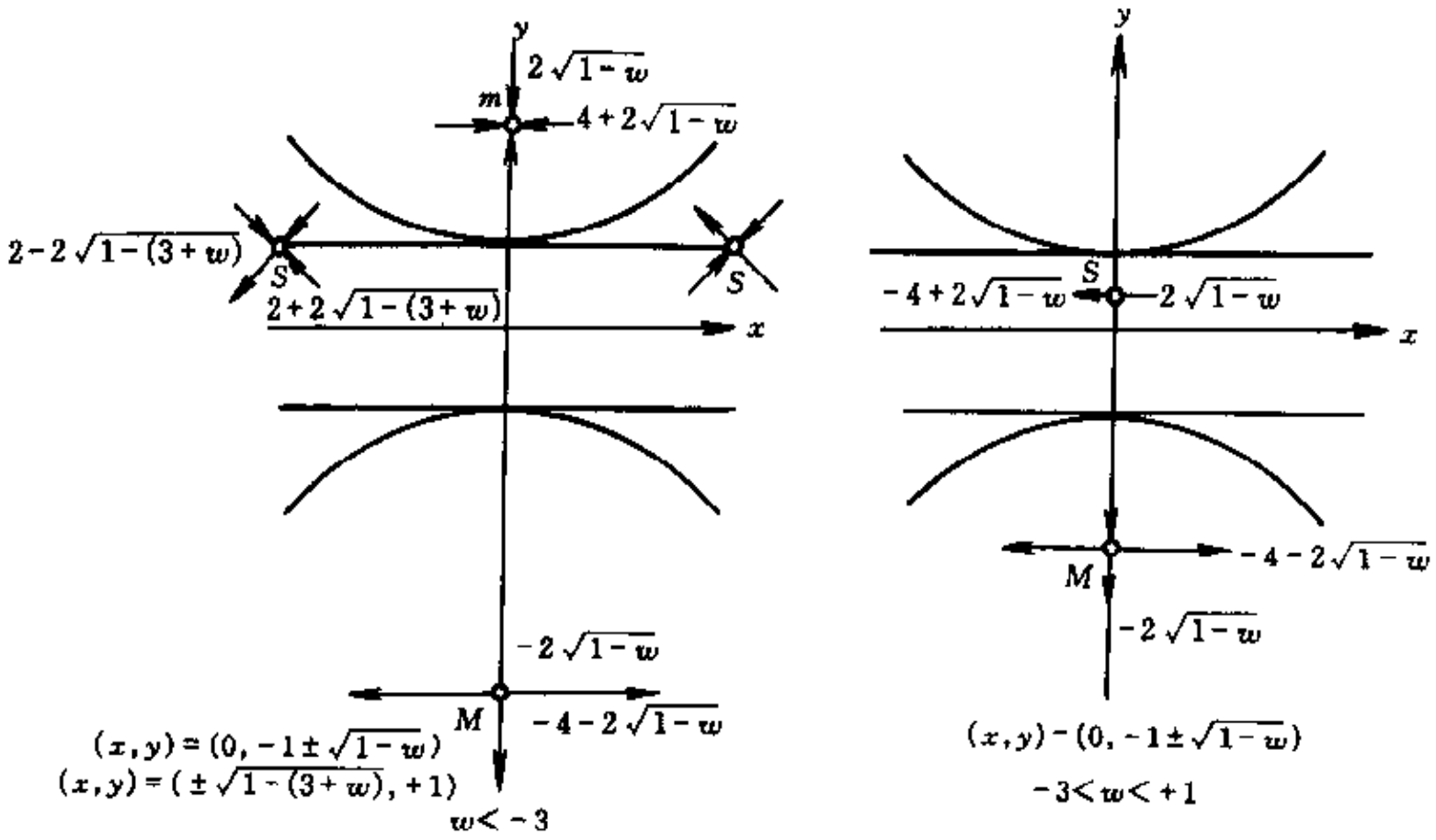


图 4—13　临界点的位置和类型

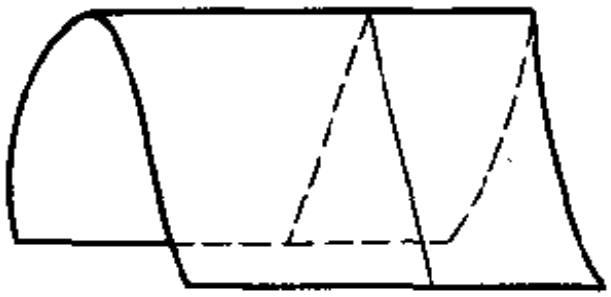


图 4－14　双曲型脐点仅有的非容状态的边界

条件，都可以用泰勒级数展开，且几乎在所有情况下，我们最终都能在级数中找到这样一项 $a_n x^n$，它由于势的性质而决不会为零。一旦如此，级数中的所有高次项就可以忽略。这一点是十分重要的，因为在大多数情况下，很难保证所求的势函数正好符合标准突变类型的多项式。

4.3　底板突水的突变特征

4.3.1　底板突水条件

底板突水机理是预测和防治突水的核心问题，大量突水现象表明：底板突水与水源、水压、底板岩层、地质构造、采掘活动这 5 个因素有关。下面就这 5 个因素对底板突水的影响作一分析：

（1）含水层富水性及水压。含水层的富水性即水源是底板突水的基本物质前提，是突水发生的内在因素。水压既是突水的动力又是决定突水与否和突水量大小的主要因素之一。含水层的高压水，在适合的条件下，可以克服隔水层岩体结构面的阻力，突入矿井。对于遭受变形破坏较为严重的底板隔水层，水压的作用愈明显，此时水压已成为发生突水的决定性因素。水压作用于煤层底板岩层的下部（承压含水

层的顶板），在煤层开采后水压主要以两种形式作用于底板岩层，一种是以静力的形式作用于岩层，使岩层产生变形破坏，另一种是以渗透挤压力作用于岩层，只有当水压力以静力的形式导致岩层产生导水裂隙后，这种渗透挤压力才发挥出其潜力。

（2）底板岩层。底板岩层是底板承压水突水的阻抗因素，是岩溶承压水上煤层开采的安全屏障。据统计，在其它条件相同的条件下，隔水层厚度越大越不易发生突水，隔水层的岩性及其组合不同，其隔水的能力也不相同。

（3）地质构造。地质构造是底板突水的通道，绝大多数突水，特别是大型突水一般都与地质构造有关。由于断层、节理等破裂结构面的存在，使岩体强度低于岩石强度数倍或十几倍。

（4）矿压是底板突水的触突与诱导因素矿压进一步破坏和降低了底板岩层的岩体强度和阻隔水能力，促使突水通道的形式。据井下工作面综合测试资料，在一次周期来压步距内，支承压力对底板岩层的作用有明显的分带特征。如图 4—15 所示，采空区周围为压缩带，底板岩层处于压缩状态；被压缩区包围的采空区内部为应力降低区或减压区，底板岩层处于膨胀状态。两者交汇部位形成剪切带，它是底板岩层遭受破坏最为严重的部位。当周期来压（或初次来压）时，剪切带上的断裂构造往往重新活动，从而使原来不导水的断层转化为导水断层。

对于某一带压工作面在开采后造成底板变形破坏的力主要是矿压及水压。只有当采动矿压与水压对底板岩层的破坏作用足以使底板岩层的阻抗水能力小于承压水的水压时，底板突水就会发生。文献 [110] 采用塑性力学理论求得煤层底

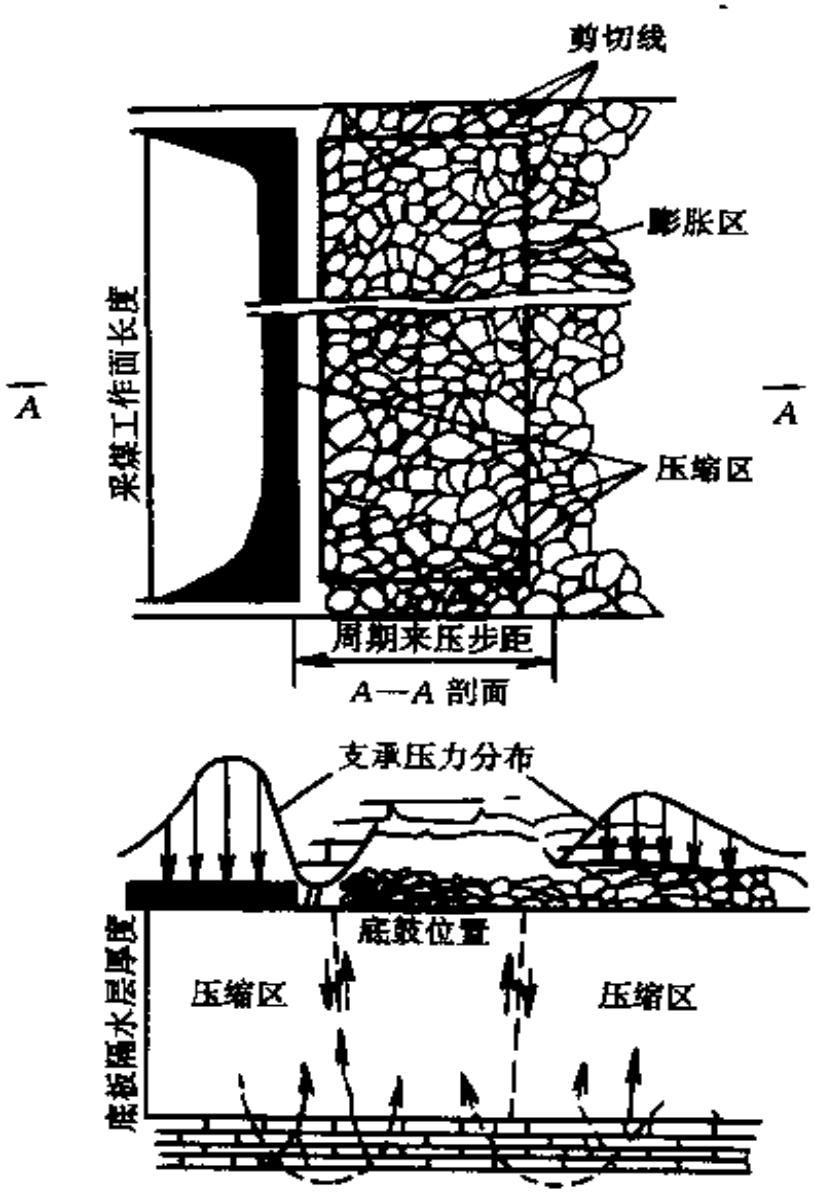


图 4—15　支承压力分布图

板达到临界突水时满足的关系式：

$$A\ (h-h_1)^2 S_t+\gamma h-P=0 \qquad (4-96)$$

式中　A——与研究区域大小及构造影响有关的系数；

h——底板岩层厚度；

h_1——底板采动导水裂隙带深度；

S_t——底板岩层平均抗拉强度；

γ——底板岩层的容重；

P——底板承受的水压。

4.3.2 煤层底板突水势函数

因为煤层底板突水主要是由底板导水裂隙含量的变化触发的，它使底板由稳定状态到失稳破裂形成导水通道，底板承压水沿通道高压喷出而发生底板突水[111]。所以我们取底板采动导水裂隙带深度 h_1 作为状态变量。

将式（4－96）整理得：

$$h_1^2+\alpha h_1-\beta P+\gamma=0 \qquad (4-97)$$

式中 $\alpha=-2h$

$$\beta=\frac{1}{AS_t}$$

$$\gamma=h^2+\frac{\gamma h}{AS_t}$$

对于一定的采场而言 α、β、γ 是常数。

现在我们用拓扑学的方法[108]，根据式（4－97）来生成描述煤层底板突水的势函数 $V(h_1)$。

令 $$F(h_1)=h_1^2+\alpha h_1-(\beta P-\gamma)=0 \qquad (4-98)$$

假定 $F(h_1)$ 与势函数的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 V}{\partial h_1^2}$ 是拓扑等价的，即：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h_1^2}\sim F(h_1)=h_1^2+\alpha h_1-(\beta P-\gamma) \qquad (4-99)$$

设有一微分同胚：

$$\Phi:\ \sqrt{3}\,h_1\to h_1+\frac{\alpha}{2},\ P\to\beta P-\gamma+\frac{\alpha^2}{4} \qquad (4-100)$$

则有：

$$F\ (h_1)\ \sim 3h_1^2-P \qquad (4-101)$$

故

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h_1^2}\sim 3h_1^2-P \qquad (4-102)$$

式（4－102）表达的意思是在拓扑变换下突变类型不会改变。现在的底板岩层承受的水压参数 P 与底板岩层实际承受的水压作用相同，但数值未必相等。对式（4－102）进行一次积分得：

$$\frac{\partial V}{\partial h_1}\sim h_1^3-Ph_1+C \qquad (4-103)$$

其中 C 是一个积分常数。根据突变理论，C 是与万能扩展参数 P 独立的另一个万能扩展参数。我们假定它是底板阻力控制参数 f，

$$\frac{\partial V}{\partial h_1}\sim h_1^3-Ph_1+f \qquad (4-104)$$

对式（4－104）再积分一次，得到底板突水的万能扩展势函数：

$$V\ (h_1,\ P,\ f)\ =\frac{1}{4}h_1^4-\frac{1}{2}Ph_1^2+fh_1 \qquad (4-105)$$

由式（4－105）看到，煤层底板突水属于尖点突变类型。其平衡曲面方程为：

$$\frac{\partial V}{\partial h_1}=h_1^3-Ph_1+f=0 \qquad (4-106)$$

分支曲线分支点集还要满足方程：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h_1^2}=3h_1^2-P \qquad (4-107)$$

由（4－106）、（4－107）两式可求得分支曲线方程为：

$$4P^3-27f^2=0 \qquad (4-108)$$

平衡曲面和分支曲线如图 4－16 所示。

平面曲面的下页代表底板非突水状态，上页代表底板突水状态，中页是不稳定状态。

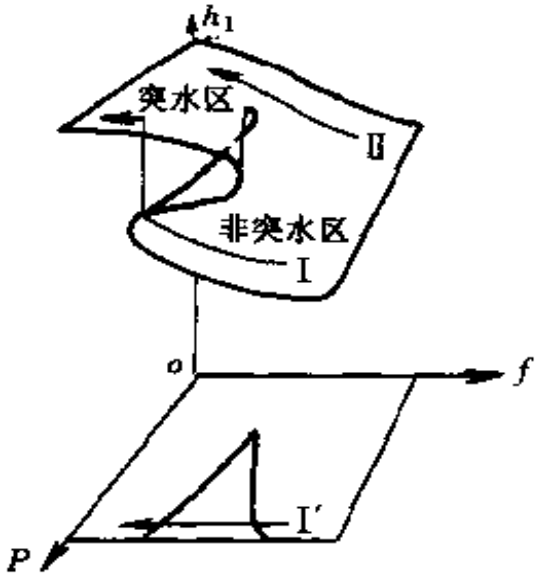


图 4－16　平衡曲面与分支曲线

4.3.3　底板突水的突变特征

煤层底板突水既然属于尖点突变类型，它就应具有尖点突变模型所具有的一般特征。

底板处于稳定状态时静态的承压水和底板岩层失稳破裂产生突水通道后，处于动态的承压水是煤层底板突水系统所处的两个平衡位置，突水的发生过程是这两个平衡位置之间的过渡环节。系统在动力效应影响下，实现从一个平衡位置向另一个平衡位置之间的转换，而导致突水的发生，突水发生的主要条件是，在应力作用下系统位势的变化 N 大于或等于系统势垒的高度（图 4－17），即符合尖点突变模型的煤层底板突水，具有如下特征：

4.3.3.1　多路径

底板突水系统在尖点附近具有突跃性，在与尖点对应的另一侧具有缓变性，系统状态的变化也有突跃和渐变两种方式。参数平面（P，f）中的尖点曲线内是底板岩层承受的水压与阻力的冲突对抗区域，其左支曲线为临界突水条件，当

底板岩层阻力系数小于左支曲线临界值时，底板岩层将会失稳破裂，高压水沿裂缝突出，其突水过程沿路径Ⅰ（图4—16）进行。其过程是突跃式发展，形成底板突水的加速起动。对于当底板导水裂隙带深度缓慢增加直至底板裂隙导通时，底板承压水沿导通裂隙缓慢流出且流出水量逐渐增加的情况，其突水过程沿路径Ⅱ进行。其过程是渐近式发展，形成底板突水的缓慢起动。

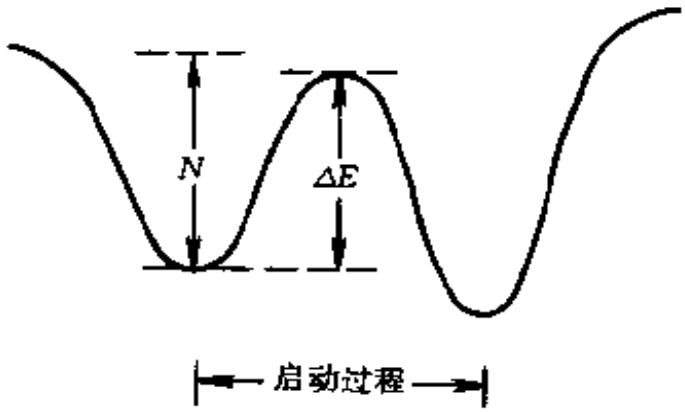


图4—17　突水发生的充要条件

4.2.3.2　发散性

对于底板突水而言，在远离突水临界点时，底板对控制参数 P 和 f 的反应比较迟钝，一旦接近突水临界点，控制参量的微小变化都会在煤层底板上引起很大的响应，甚至微小的变化就会使底板岩层破裂，发生突水。因而底板突水突变模型的发散性就是反映底板突水的加速起动效应。

下面用线性响应发散来说明底板突水发生过程中的发散性。

设有突水发生临界点为 (h_{10}, M_0)，M 表示控制参数，即：

$$M=G\ (f,\ P) \tag{4—109}$$

在临界点上，则为 $M_0=G(f_0,P_0)$。当参数受到扰动 δM 时，新的临界点为 $h_{10}+\delta h_1$，把势函数 V 做 Taylor 展开：

$$V(h_{10}+\delta h_1,M_0+\delta M)=V(h_{10},M_0)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 V}{\partial h_{1i}\partial h_{1j}}\Big|_{(h_{10},M_0)}\cdot\delta h_{1i}\delta h_{1j}+\frac{1}{2!}\sum_{i,\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial h_{1i}\partial M_\alpha}\Big|_{(h_{10},M_0)}\cdot\delta h_{1i}\delta M_\alpha+\frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 V}{\partial M_\alpha M_\beta}\Big|_{(h_{10},M_0)}\cdot\delta M_\alpha\delta M_\beta+O(3) \tag{4-110}$$

求导并略去下标 (h_{10},M_0)，有：

$$\frac{\partial V\{(h_{10}+\delta h_1),(M_0+\delta M)\}}{\partial h_{1i}}=\frac{1}{2!}\sum_j\frac{\partial^2 V}{\partial h_{1i}\partial h_{1j}}\cdot\delta h_{1j}+\frac{1}{2!}\sum_\alpha\frac{\partial^2 V}{\partial h_{1i}\partial M_\alpha}\cdot\delta M_\alpha+O(2)=0 \tag{4-111}$$

由此得到：

$$\delta h_{1j}=-\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h_{1i}\partial h_{1j}}\right]^{-1}\sum_\alpha\frac{\partial^2 V}{\partial h_{1i}\partial M_\alpha}\cdot\delta M_\alpha\quad j=1,2,\cdots,n \tag{4-112}$$

由上式知，当临界点 (h_{10},M_0) 趋于退化时，状态变量关于控制参数的线性响应趋于发散。当 V 为正则形式时，可得到：

$$\delta h_{1j}=-\frac{1}{\lambda_j}\sum_\alpha\frac{\partial^2 V}{\partial h_{1j}\partial M_\alpha}\cdot\delta M_\alpha\quad j=1,2,\cdots,n \tag{4-113}$$

当 $\lambda_j\to 0$，即在 h_{1j} 方向上退化时，线性响应发散。

对于突变模型（4－105），即：

$$V\ (h_1,\ P,\ f)\ =\frac{1}{4}h_1^4-\frac{1}{2}Ph_1^2+fh_1$$

有：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h_1^2}=3h_1^2-P \tag{4-114}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h_1 \partial P}=-h_1 \tag{4-115}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial h_1 \partial f}=1 \tag{4-116}$$

于是：

$$\delta h_1=\left(\frac{h_1}{3h_1^2-P},\ \frac{-1}{3h_1^2-P}\right)\begin{pmatrix}\partial P\\ \partial f\end{pmatrix} \tag{4-117}$$

临界点 h_{10}满足：

$$h_{10}^3-ph_{10}+f=0^+ \tag{4-118}$$

从而当 $f\to\pm\frac{2}{3}P\sqrt{\frac{P}{3}}$，即：$-27f^2+4P^3\to 0$ 时，有：$3h_{10}^2-P\to 0$，由（4—107）式知，$\delta h_1\to\infty$，即 h_1 发散。

在该底板突水模型中，把采动导水裂隙带深度作为状态变化量度的变量，底板裂隙发育，则 h_1 大，底板发生突水的可能性大；反之则小。在一定的控制变量下，h_1 由小到大增加（或突变）的过程，就反映了底岩层从稳定状态到不稳定状态形成导水通道的过程，也就是底板突水发生的过程。当控制参量有一微小的变化 δM 时，反映的状态变量 $\delta h_1\to\infty$，这说明此时物质的状态发生了变化，即发生了底板突水。因而，发散性就是反映平衡位置退化，底板突水发生的基本特征。根据底板突水这一特征，可通过调控底板突水条件，使之不突水，达到底板突水治理防患于未然的目的。例如，可通过疏水降压、注浆加固底板岩层或采用减少对底板产生破

坏的开采技术，来使底板突水系统达不到突水临界点，从而防止了底板突水灾害的发生。

4.3.3.3 滞后性

为了研究底板突水的滞后性，我们取 $P=$常数，这时图4—16中的平衡曲面就变为图4—18中的反 S 曲线。在图4—18中，当阻力控制参数 f 从 f_a 逐渐减小到 f_c，则状态变量 h_1 也会随着 f 连续光滑地变到折点 h_{1c}，这时只要稍有增加，哪怕是一个无穷小的扰动，系统都会从 h_{1c} 态跃迁到上支曲线上的 $h_{1c'}$ 态，即底板岩层失稳破裂，形成底板突水。但当底板突水发生后，如不采取堵水措施，突水系统仍保持原来的状态（$h_{1c'}$ 状态）。如对底板岩层进行注浆，增大底板阻力控制参数 f，只有当 f 逐渐增大到 f_b，系统连续变化到另一个折点 h_{1b}，在此才能跳跃到下支曲线，发生突变，即系统由突水状态突变为非突水状态，这种系统不能沿原路径返回的性质即为底板突水的滞后性。

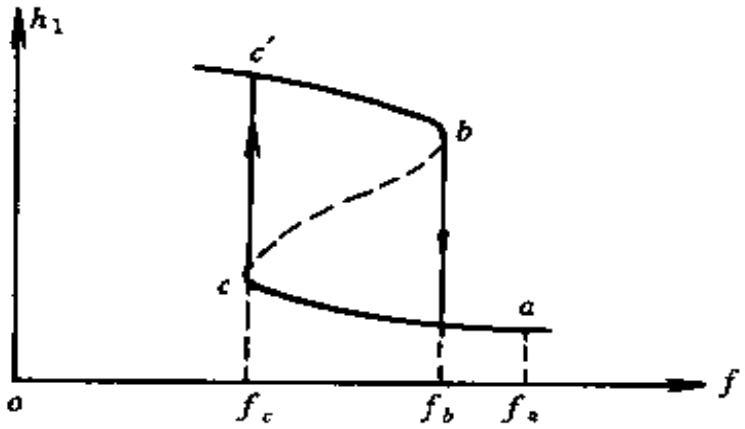


图 4—18

4.3.3.4 模态软化

把底板突水系统看作是一个牛顿(Newton)动力学系统，

则其支配方程为：

$$\frac{\mathrm{d}^2 h_1}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial V}{\partial h_{1i}} \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (4-119)$$

其线性化形式为：

$$\frac{\mathrm{d}^2 h_1}{\mathrm{d}t^2}=-\sum_{i,j}\frac{\partial^2 V}{\partial h_{1i}\partial h_{1j}}\cdot h_{1j}+O(2) \quad i=1,2,\cdots,n \qquad (4-120)$$

其通解为：

$$h_{1i}=\sum_k A_k e^{-w_k t} \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (4-121)$$

其中，$i=\sqrt{-1}$，A_k 为任意常数，W_k 是 Hessen 矩阵 $\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h_{1i}\partial h_{1j}}\right]$ 的特征值。当底板突水趋近发生时，式（4—120）有非零解，则 $\det\left[\frac{\partial^2 V}{\partial h_{1i}\partial h_{1j}}\right]\to 0$，这时有一个或多个特征值$\to 0$，于是式（4—121）中的时间参数 $t\to\infty$，这就出现了所谓模态软化，即时间延迟。也就是说，系统在不稳定暂时平衡位置退化的临界点附近克服摄动效应，维持稳定时间被拉长了。对于底板突水而言，在其临界点附近，随着外界因素的变化，底板岩层结构变化，强度降低，当其达到一定程度时，底板岩层无法维持稳定而破裂发生底板突水。这说明，只要满足突水条件，无论采取什么方式，底板突水就是必然的。根据这一特征，可以通过控制变量 P 和 f 距临界突水点的远近，来估计底板突水可能性的大小。

在突水临界点附近，底板突水具有模态软化的性质，其方差也必然出现反常。还可以通过分析临界点附近方差的异常现象，进一步评定和预测底板突水的可能性。

4.4 涨落对底板突水的诱导作用

当系统从一种状态向另一种状态过渡，系统必须跨越一个临界点，处于临界状态的系统，原来的定态解失稳，但系统并不会自动离开原来的定态而跃向一种新的态，必须要有一种驱动力，这种驱动力就是涨落。一般我们把外界因素引起的涨落称之为扰动。扰动对底板突水起着诱导和触发作用，如底板突水往往发生在初次来压和周期来压阶段。前面我们对底板突水突变学特征分析的基本思想是认为扰动是通过改变系统状态方程中某一控制参数来达到对系统本身发生影响的目的。事实上，我们也可以从另一角度来考虑扰动对底板突水系统演化的影响，即把扰动用随机强迫力 $\xi(t)$ 来表示，则式（4－106）变为随机微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}=-h_1^3+ph_1-f+\xi(t) \tag{4-122}$$

令 $$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}=-h_1^3+ph_1-f+\xi(t)=f(h_1)+\xi(t) \tag{4-123}$$

假定 $\xi(t)$ 是一白噪音，有 $<\xi(t)>=0$

$$<\xi(t)\xi(t')>=Q\delta(t-t') \tag{4-124}$$

式中角括号〈…〉表示系统平均，δ 为 Dirac 函数，Q 是随机涨落的方差，$<\xi(t)\xi(t')>$ 称为关联函数。

由式（4－123）、（4－124），可建立 Fokker－Plank 方程[108]：

$$\frac{\partial P(h_1,t)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial h_1}[f(h_1)P(h_1,t)]+\frac{Q}{2}\frac{\partial^2 P(h_1,t)}{\partial h_1^2} \tag{4-125}$$

式中 P（h_1，t）是 t 时刻底板导水裂隙带深度为 h_1 的几率密度。

方程（4－124）中的系统平均实际上就是用方程（4－125）解出的几率密度 P（h_1，t）求平均。

在定态显然有 $\partial P_0/\partial t=0$，这时对方程（4－125）右边积分一次，得：

$$-f(h_1)P_0(P_1)+\frac{Q}{2}\frac{\mathrm{d}P_0(h_1)}{\mathrm{d}h_1}=\text{常数} \qquad (4-126)$$

由（4－126）式易得到定态几率分布的解[3][108]：

$$P_0(h_1)=Z^{-1}\exp\left[-\frac{2}{Q}V(h_1)\right] \qquad (4-127)$$

式中 Z^{-1} 为正常化因子（normalization factor），V（h_1）为势函数，即由（4－25）式，其被定义为：

$$V(h_1)=-\int^{h1}f(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{4}h_1^4-\frac{1}{2}Ph_1^2+fh_1 \qquad (4-128)$$

由（4－128）式可知，V（h_1）一般为 4 次多项式，其为存在两个势的双稳态函数，如图（4－19）所示：

常数因子 Z 可由 P_0 的规范性：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P_0(h_1)\mathrm{d}h_1=1 \qquad (4-129)$$

来确定，由此可得：

$$Z=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{2}{Q}V(h_1)\right]\mathrm{d}h_1 \qquad (4-130)$$

由（4－130）式不难看出，V 的极小值对应 P_0 极大值，反之亦然（见图 4－19）。在双稳态的情况下，势函数有两个极小值，而且势谷最深的几率密度最大。底板的破坏就是沿着势能最小方向发展的。

下面我们计算双稳态的定态几率分布 $P_0(h_1)$，它的性质取决于 Z，对于任意大小的 Q，式（4—130）的积分不能精确计算。但对于小 Q，$\exp\left[-\frac{2}{Q}V(h_1)\right]$ 的极大值变得很锐，这时可用最陡下降法来计算 Z。因在定态 h_{101}、h_{103} 时被积函数有最大值，在不稳定态 h_{102} 被积函数有最小值。所以可以把积分划分两部分计算。

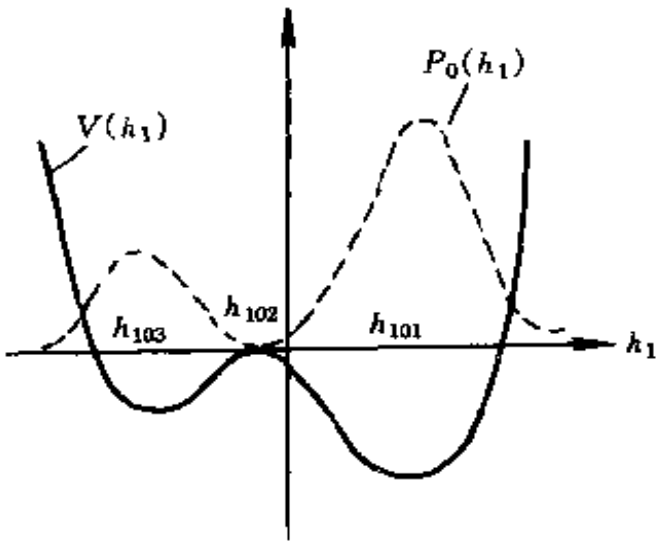


图 4—19　系统势函数与定态几率分布

$$Z=\int_{-\infty}^{h_{102}}\exp\left[-\frac{2}{Q}V(h_1)\right]\mathrm{d}h_1+\int_{h_{102}}^{+\infty}\exp\left[-\frac{2}{Q}V(h_1)\right]\mathrm{d}h_1 \qquad (4-131)$$

对这两部分积分分别在 h_{103} 和 h_{101} 附近展开 $V(h_1)$ 并保留到二阶项，则：

$$V(h_i)=V(h_{10i})+\frac{1}{2}V''(h_{10i})(h_1-h_{10i})^2 \quad i=1,3 \qquad (4-132)$$

上式中利用了定态条件：

$$V'(h_{10i})=\left(\frac{\partial V}{\partial h_1}\right)_{0i}=-f(h_{10i},\alpha)=0 \quad i=1,3 \qquad (4-133)$$

利用公式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha h_1^2} dh_1 = \alpha^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (4-134)$$

我们得到：

$$Z = \sqrt{\frac{\pi Q}{V''(h_{103})}}\exp\left[-\frac{2}{Q}V(h_{103})\right] + \sqrt{\frac{\pi Q}{V''(h_{101})}}\exp\left[-\frac{2}{Q}V(h_{101})\right] \qquad (4-135)$$

于是这是态几率分布为：

$$P_0(h_1) = \left\{\sqrt{\frac{\pi Q}{V''(H_{103})}}\exp\left[-\frac{2}{Q}V(h_{103})\right] + \sqrt{\frac{\Pi Q}{V''(h_{101})}}\exp\left[-\frac{2}{Q}V(h_{101})\right]\right\}^{-1} \exp\left[-\frac{2}{Q}V(h_1)\right] \qquad (4-136)$$

由于两个势 $V(h_{101})$ 和 $V(h_{103})$ 的深度不同，定态几率将产生较大的差别。若 $V(h_{101}) \neq V(h_{103})$，系统的发展演化将以绝对的优势偏向势谷的某一方，现分三种情况讨论如下：

(1) $V(h_{101}) < V(h_{103})$ 的情况

由于 Q 小使得指数上出现的因子 $2/Q$ 有较大作用，使大扩号中第一项的贡献趋于零，故可以忽略。这样 P_0 归于 h_{101} 态的 Gauss 分布：

$$P_0(h_1) = \sqrt{\frac{V''(h_{101})}{\pi Q}}\exp\left[-\frac{2}{Q}V''(h_{101})(h_1 - h_{101})^2\right] \qquad (4-137)$$

(2) $V(h_{103}) < V(h_{101})$ 的情况

通过类似的考虑，可以得到：

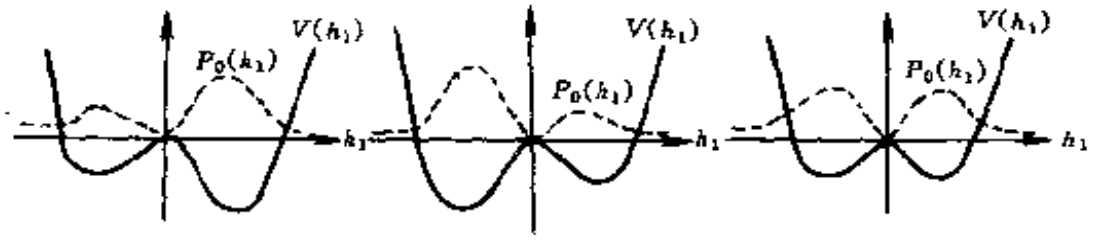
$$P_0(h_1)=\sqrt{\frac{V''(h_{103})}{\pi Q}}\exp\left[-\frac{2}{Q}V''(h_{103})(h_1-h_{103})^2\right] \tag{4—138}$$

(3) $V(h_{101})\approx V(h_{103})$ 的情况

在这种情况下，来自于 $V(h_{101})$ 和 $V(h_{103})$ 的贡献都不可忽略，结果得到双峰分布：

$$P_0(h_1)=\left\{\sqrt{\frac{\pi Q}{V''(h_{101})}}+\sqrt{\frac{\pi Q}{V''(h_{103})}}\right\}^{-1}\exp\left[-\frac{2}{Q}(V(h_1)-V_m)\right] \tag{4—139}$$

以上三种情况可用图 4—20 来描述。



(a)$V(h_{101})<V(h_{103})$　(b)$V(h_{101})>V(h_{103})$　(c)$V(h_{101})\approx V(h_{103})$

图 4—20　定态的几率分布

式（4～137）～（4～139）式的物理解释为：如果底板突水情况的势谷 $V(h_{101})$ 比不突水情况的势谷 $V(h_{103})$ 深，底板突水状态 h_{101} 就占优势，在控制参数达到左分支曲线（图 4—16）前就有可能在涨落（扰动）的作用下，发生极小值点的转移，由不突水状态发展为突水状态，究竟在何处发展为突水状态，要视涨落（扰动）的大小而定；与之相反的情况是 $V(h_{101})<V(h_{103})$，这时不突水状态 h_{103} 占优势，在控制参数未达到右分支曲线时就可能由突水状态发展为不突水状

态；如果 $V\ (h_{101}) \approx V\ (h_{103})$，两种状态 h_{101} 和 h_{103} 以相同的几率共存。因此在考虑涨落时，突变要遵循 Maxwell 规则。

下面我们回过来讨论系统突变时的涨落的临界行为。

$$\Delta h_1 = h_1 - h_{10} \tag{4-140}$$

将（4－140）式代入（4－122）式得：

$$\frac{\mathrm{d}\Delta h_1}{\mathrm{d}t} = -\Delta h_1^3 - 3h_{10}\Delta h_1^2 + (P - 3h_{10}^2)\ \Delta h_1 + \xi\ (t) \tag{4-141}$$

假定 Δh_1 很小，根据线性稳定性分析方法，（4－141）式中的非线性项可以忽略，则：

$$\frac{\mathrm{d}\Delta h_1}{\mathrm{d}t} = \varphi\ (P)\ \Delta h_1 + \xi\ (t) \tag{4-142}$$

上式中

$$\varphi\ (P) = (P - 3h_{10}^2) \tag{4-143}$$

（4－143）式也正好是底板突水突变模型的分支点集方程，由线性稳定性判据知：

$\varphi\ (P) < 0$　为渐近稳定

$\varphi\ (P) > 0$　为不稳定

$\varphi\ (P) = 0$　为临界稳定

对（4－142）式求解得：

$$\Delta h_1(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\varphi(t-\tau)} F(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4-144}$$

根据方程（4－124）、（4－143），可求得涨落的关联函数为：

$$<\Delta h_1\ (t+\tau)\ \Delta h_1\ (t)> = \frac{Q}{2|\varphi|}\mathrm{e}^{\varphi\tau} \tag{4-145}$$

（4－145）式反映了两个相距为 τ 的涨落之间的关联程度。系统稳定态（$\varphi < 0$）的涨落随时间衰减，衰减的快慢取决于 $|\varphi|$ 的大小，这时涨落（这里指微小的涨落）主要以随机、各

自独立的方式出现，对系统演化的影响较小。但当接近临界点时，涨落不仅本身幅度大大增加，而且相互关联，相互嵌套，出现所谓的“长程关联”现象，使各个涨落“协同”起来共同作用，把系统驱向新的状态，当$|\varphi|$很大时衰减的很快。当φ趋于临界点$\varphi_c=0$时，由于$|\varphi|$出现在（4—145）式分母中，所以涨落剧增，即在临界点附近，任何微小的涨落都会被放大，微涨落在临界点附近会转变成巨涨落，这也正是在突水系统处于临界点附近，任何微小的扰动都可能诱发底板突水的原因。

4.5 应用数学方法建立底板突水突变模型

在进行承压水上开采时，当煤层开采后，底板岩层的原始应力状态被破坏，致使应力重新分布，从而导致底板岩层失稳破坏形成导水裂隙，其结果往往造成底板承压水通过采动裂隙突然涌入开采作业空间，形成底板突水。这种煤层开采后，当底板岩层承受的水压超过自身强度时，发生的不连续的发散突变，即底板岩层失稳破坏形成底板突水的现象，属于突变理论研究的范畴，底板突水可以引用突变理论来研究。在前一节中，我们从一个力学模型出发，建立了底板突水的势函数，证明了底板突水符合尖点突变模式，讨论了底板突水的突变学特征。本节将在上一节分析的基础，以突变理论[106][109]为基础，应用数学方法建立底板突水的突变模型，以探求底板突水系统各要素间的定量关系。

4.5.1 建立平衡曲面方程

在上一节中以证明了底板突水符合尖点突变模式。这里选 MR 为突水阻抗因子，其中 R 为单位水压底板岩层厚度，即底板岩层厚度 h 与水压 P 之比，M 为正的系数；Nh_1 为底板导水裂隙发展因子，h_1 为底板采动导水裂隙带深度，N 为正的系数。MR 和 Nh_1 是控制煤层底板突水的两个基本因子，即控制变量。底板岩层所承受的水压 P 与其最小主应力 σ 之比 I_p[93]为状态变量，如图 4—21 所示。这里需要说明的是对一定的采场而言，在煤层开采前后底板岩层厚度 h 和水压 P 是不变的，只是煤层开采后，由于应力的重新分布导致底板岩层产生一定深度的破坏，这就降低了岩体强度，消弱

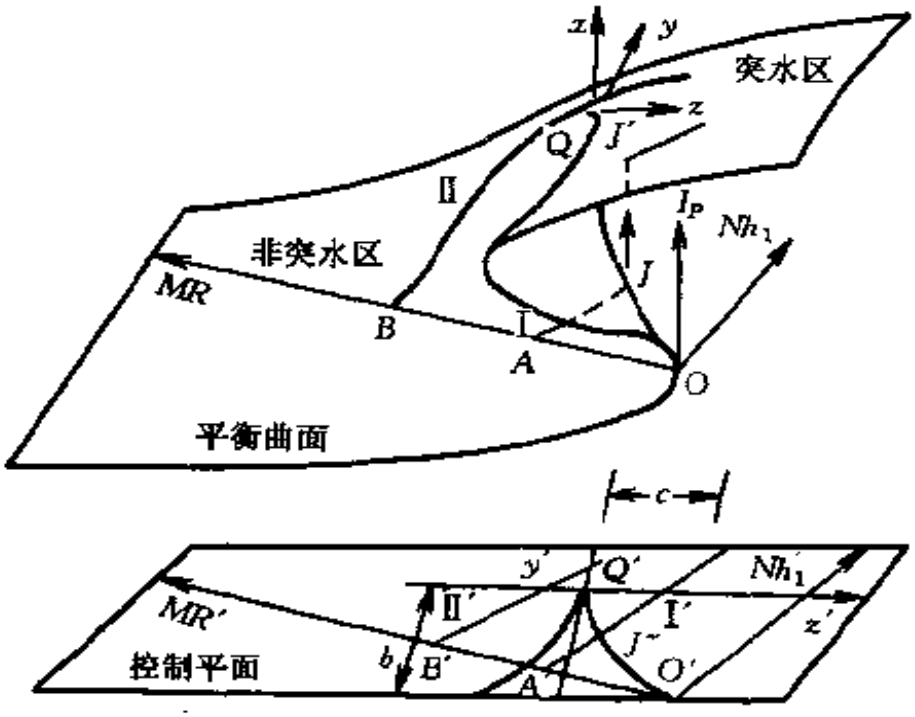


图 4—21 平衡曲面与分支曲线

了隔水性能，当 $I_P=\frac{P}{\sigma}>1$ 时，便会引发突水。

其中曲线 I 由 A 点开始，随着 Nh_1 值的增大而连续前进，其所对应的水压应力比亦随之逐渐升高，当达到 J 点时，若底板采动导水裂隙带深度 h_1 稍有增加，则水压应力比将剧增，底板岩层将失稳破裂，底板承压水沿裂缝突出，在模型中表现为系统状态由非突水区的 J 点跳跃 J' 点而达突水区。曲线 I 从 B 点起，随着 Nh_1 的不断增加，I_P 值连续增长达到突水区，而无突变现象，它是一种底板岩层逐渐破坏形成导水裂隙而发生突水的过程。

尖点突变的势函数一般可由下式描述：

$$V\ (x)\ =x^4+ux^2+vx \qquad (4-146)$$

实际上，对于所有的初等变换，并无公认的记号。不同的作者对开折参数采用不同的符号，有些学者更愿意将 V 写成 $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ux^2+vx$，平衡曲面方程中不含数字因子，这里按 PostonT. And Steawart. I. 的写法，将平衡曲面的标准方程表示为势函数 $V\ (x)\ =\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2y-xz=0$ 的微分式，即：

$$x^3+xy-z=0 \qquad (4-147)$$

平衡曲面上的突水区和非突水区的区别主要取决于水压应力比 I_P 的值。前者 I_P 值大于 1.0；后者 I_P 值小于 1.0。

控制平面内的分支曲线方程为：

$$4y^3+27z^2=0 \qquad (4-148)$$

将标准方程的坐标经旋转与平移至 $O\ (I_P, MR, Nh_1)$ 坐标中，则有：

$$\begin{cases} x = l_1 I_P + l_2 MR + l_3 Nh_1 - a \\ y = m_1 I_P + m_2 MR + m_3 Nh_1 - b \\ z = n_1 I_P + n_2 MR + n_3 Nh_1 - c \end{cases} \qquad (4-149)$$

式中 a、b、c——原点 Q 至 O 点的三维平移量；

l_i、m_i、n_i——新坐标的方向余弦。

由于 I_P 轴与 x 轴平行，其间夹角为零，故方向余弦 l_1 为：

$$l_1 = \cos 0° = 1 \qquad (4-150)$$

基于式（4－147）、（4－149）、（4－150）可以求得曲面在新坐标中的方程表达式为：

$$\begin{aligned} f(I_P, MR, Nh_1) = {} & (I_P + l_2 MR + l_3 Nh_1 - a)^3 \\ & + (m_1 I_P + m_2 MR + m_3 Nh_1 - b) \\ & \times (I_P + l_2 MR + l_3 Nh_1 - a) \\ & - (n_1 I_P + n_2 MR + n_3 Nh_1 - c) = 0 \end{aligned} \qquad (4-151)$$

坐标变换条件为：

$$\begin{cases} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1 \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1 \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \qquad (4-152)$$

及

$$\begin{cases} l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0 \\ l_3 l_1 + m_3 m_1 - n_3 n_1 = 0 \end{cases} \qquad (4-153)$$

同为左手系时，有：

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 1 \qquad (4-154)$$

模型的边界条件可以从所研究问题的物理意义获得。当无采动时，即 $Nh_1=0$，不同的底板岩层具有各自不同的突水阻抗因子 MR，所有这些突水阻抗因子皆位于 MR 轴上，故有：

$Nh_1=0, I_P=0$ 时，$f(I_P, MR, Nh_1)$ 为线性函数　　(4－155)

又因为平衡曲面通过原点 O，故

$$f\ (0,\ 0,\ 0)\ =0 \qquad (4-156)$$

将（4－156）式代入（4－151）式得：

$$a^3-ab-c=0 \qquad (4-157)$$

再将上述附加条件（4－152）～（4－154）与边界条件（4－155）、（4－156）式联立之后，求得：

$$\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (4-158)$$

其中　　$\theta=\mathrm{arcty}\ (a)$

基于尖点突变模型的物理意义，尖点 Q 为分支曲线的交点，当底板状态趋向突水区越过 Q 点时，其水压应力比 $I_P>1$。因此位于分支曲线交点 Q 处底板岩层的水压应力比界限值为 $I_P=1.0$。在 Q 点平移至原点 O 的上方时，相应的底板导水裂隙发展因子 Nh_1 和突水阻抗因子 MR 皆为零，故由式（4－149）的首式得：

$$a=1.0 \qquad (4-159)$$

由于 O 点表示突水阻抗因子为零的场地，因而该处经受一微小扰动，即可导致突水，如直接揭露含水构造所导致的突水。故应认为原点 O 亦位子分支曲线上，则由分支曲线方程（4－148）得：

$$4b^3-27c^2=0 \qquad (4-160)$$

将（4—157）、（4—159）、（4—160）三式联立求解得：

$$(a,\ b,\ c)\ =\ (1,\ 3,\ -2) \qquad (4-161)$$

再根据式（4—147）～（4—161），将平衡曲面对应新坐标系的方程式（4—71）简化为：

$$(I_P-1)^3+[(Nh_1+MR)/\sqrt{2}-3]I_P - \sqrt{2}Nh_1+1=0 \qquad (4-162)$$

式（4—162）即为底板岩层水压应力比 I_P，随底板突水阻抗因子和底板导水裂隙发展因子，而发展直至突水的尖点突变模型规律。由该式即可求得煤层底板岩层的水压应力比 I_P。当 $I_P>1$ 时，发生突水，当 $I_P<1$ 时，不会发生突水。

4.5.2 M、N 值确定及分支曲线方程建立

4.5.2.1 M、N 值的确定

由图 4—22 知：

$$Nh_{1Q}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (4-163)$$

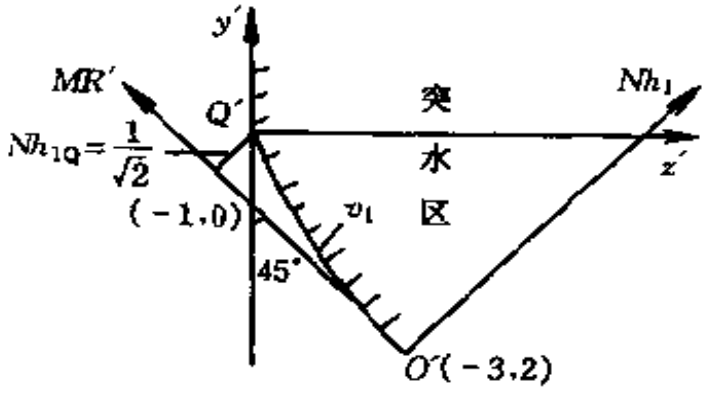


图 4—22　分支曲线

对分支曲线交点 Q 有：

$$I_P=1 \tag{4—164}$$

联立式（4—162）、（4—163）、（4—164）得：

$$M=\frac{5}{\sqrt{2}R_Q} \tag{4—165}$$

$$N=\frac{1}{\sqrt{2}h_{1Q}} \tag{4—166}$$

式中 R_Q、h_{1Q}分别为 Q 点的单位水压底板岩层厚度和采动导水裂隙带深度，其值可通过试验或经验统计得到。

根据我们对大量突水案例的统计分析，突水工作面底板岩层厚度 $h\leqslant 30$m 时，一般水压在 0.7～1.3MPa 左右；突水工作面底板岩层厚度 $h=30\sim 60$m 左右时，一般水压在 1.5～3.0MPa 左右，因此在本模型中 M、N 的确定考虑以下两种情况：

（1）底板岩层厚度 $h\leqslant 30$m

根据对突水案例的统计分析并参照有关试验资料[85][112]，取 $h_Q=30$m，$P_Q=1.3$MPa，$h_{1Q}=23$m，则单位水压底板岩层厚度 $R_Q=30/1.3=23$m。

分别将 R_Q、h_{1Q}的值代入式（4—165）及式（4—166）得：

$$M=0.1532$$

$$N=0.03075$$

（2）底板岩层厚度 $h=30\sim 60$m 左右

根据对突水案例的统计分析并参照有关试验资料，取 $h_Q=60$m，$P_Q=3$MPa，$h_{1Q}=45$m，则单位水压底板岩层厚度 $R_Q=60/3=20$m。分别将 R_Q、h_{1Q}的值代入式（4—165）及式（4—166）得：

$$M=0.1768$$

$$N=0.01572$$

4.5.2.2 分支曲线方程建立

由式（4－148）分支曲线标准方程为：

$$4y^3+27z^2=0$$

根据式（4－149）和式（4－158）可以求得：

$$\left.\begin{aligned} y&=MR\cos\theta+Nh_1\sin\theta-b\\ z&=-MR\sin\theta+Nh_1\cos\theta-c \end{aligned}\right\} \qquad (4-167)$$

将上式代入式（4－148）得：

$$4(MR\cos\theta+Nh_1\sin\theta-b)^3+27(-MR\sin\theta+Nh_1\cos\theta-c)^2=0 \qquad (4-168)$$

由于 $a=1$，故 $\theta=45°$，则：

$$\cos\theta=\sin\theta=1/\sqrt{2} \qquad (4-169)$$

设分支曲线 $O'Q'$ 上底板导水裂隙发展因子为 Nh_{1l}，则由式（4－161）、（4－168）、（4－169）可得分支曲线标准方程为：

$$4(MR/\sqrt{2}+Nh_{1l}/\sqrt{2}-3)^3+27(-MR/\sqrt{2}+Nh_{1l}/\sqrt{2}+2)^2=0 \qquad (4-170)$$

由上式即可求得 h_{1l} 的值。显然，当 $h_1>h_{1l}$ 时，发生突水；$h_1<h_{1l}$ 时，不会发生突水。表现在图 4－21 中右分支曲线为底板突水的临界曲线。在控制平面尖点曲线内临近右分支曲线附近，底板导水裂隙发展因子一个微小的增量，就可能导致底板由不突水状态突变为突水状态。根据这一特性，可通过调控煤层底板突水条件，使之不突水．达到底板突水治理防患于未然的目的。例如，可通过注浆充填底板裂隙，加固底板提高其强度，使 $h_1<h_{1l}$，或疏水降压控制水压应力比 $I_P<1$，

使底板突水系统达不到突水临界点。

4.6 实例分析

前面我们采用数学方法建立了计算底板岩层水压应力比的尖点突变模型，下面以淄博矿区与肥城矿区的有关资料为例，对采煤工作面底板岩层水压应力比进行了计算，并据此对底板突水情况进行了预测。

4.6.1 淄博矿区

淄博矿区，全区厚度最大，最稳定的十煤层，位于太原统的底部，下距本溪统徐家庄灰岩 20～25m，距奥陶纪灰岩 50m 左右。底板突水事故频繁发生。据不完全统计，到目前为止，淄博矿区共发生突水事故 180 多次，造成淹井多次。全区能利用储量为 24085 万 t，其中受水威胁的为 9867 万 t，占 41%。淄博矿区黑山井田面积 6.75km^2，位于落差 300m 和 150m 神头断层和黑山断层断块陷落盆地内，奥灰水位标高 +250m，最深开采水平 −90m，井田内正断层发育，构造破坏较强烈，但隔水层中硅质胶结的砂岩比重大，隔水底板的岩性如图 4−23 所示。

根据黑山煤矿三立井 4 个采煤工作面、一立井 3 个采煤工作面的实际资料，我们对这些工作面底板岩层水压应力比进行了计算，并据此对底板突水情况进行了预测，计算结果如表 4−3 所示。

表 4−3 的计算结果表明淄博矿区黑山煤矿 7 个采煤工作面的预测结果与实际情况完全吻合。

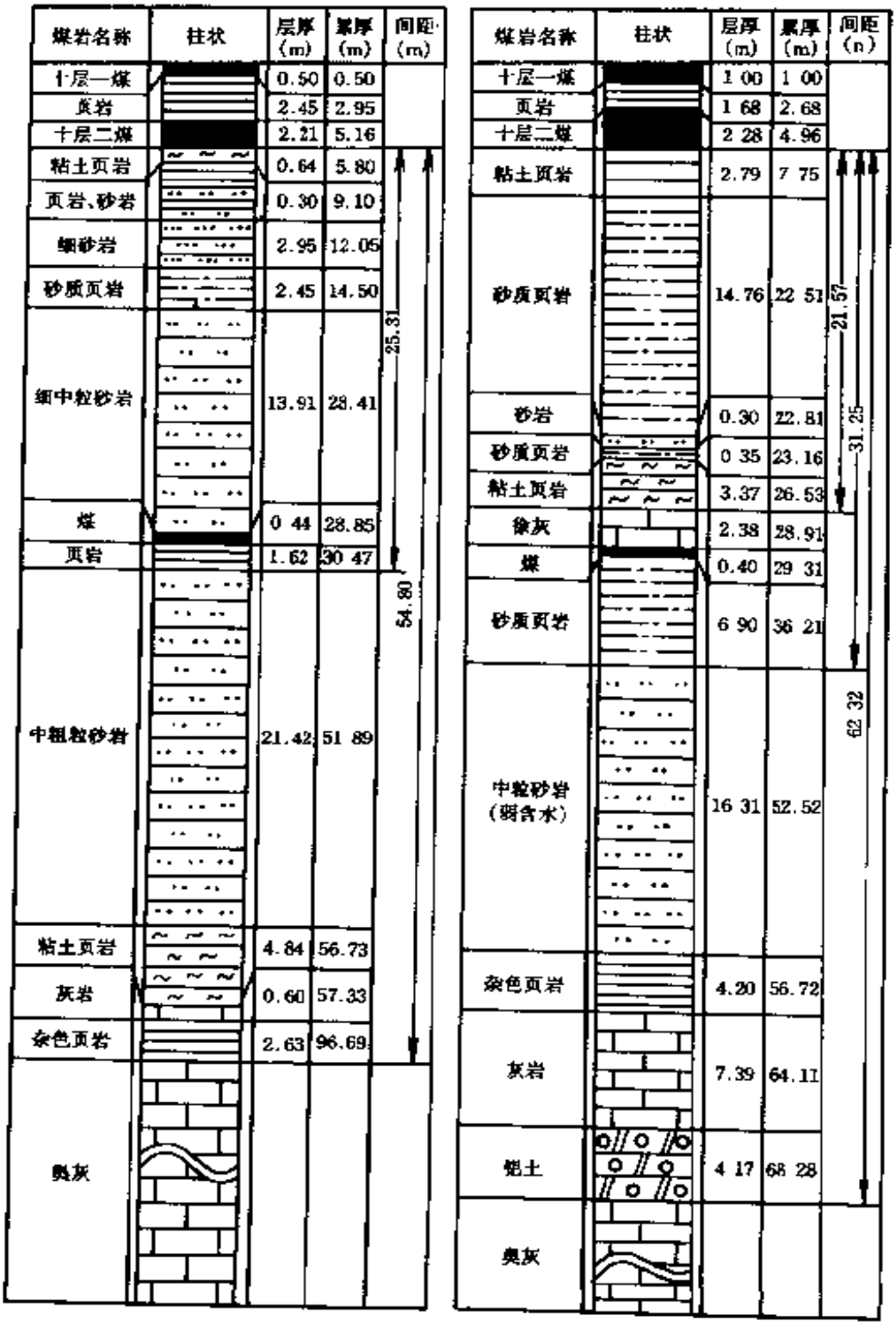


图 4—23　黑山煤矿隔水层底板岩性图

表 4—3　煤层底板岩层水压应力比计算与突水预测

序号	地　点	水压 (MPa)	单位水压底板岩层厚度 R (m)	采动导水裂隙带深　度 h_1 (m)	突水阻抗因子 MR	底板裂隙发展因子 Nh_1	水压应力比 I_P	现场情况	预测结果
1	三立井采煤工作面	1.08	25.7	10.7	3.37	0.329	0.18	未突水	成功
2	三立井采煤工作面	0.87	18.0	12.3	276	0.461	2.07	突水	成功
3	三立井采煤工作面	0.85	31.3	10.2	4.794	0.314	0.13	未突水	成功
4	立井采煤工作面	3.18	14.5	17	2.563	0.267	0.55	未突水	成功
5	三立井采煤工作面	1.13	21.3	14.2	3.267	0.437	1.01	突水	成功
6	一立井采煤工作面	3.32	19.2	17	3.396	0.267	0.19	未突水	成功
7	一立井采煤工作面	2.22	15.77	8.1	2.787	0.127	0.87	未突水	成功

4.6.2　肥城矿区

肥城矿区受岩溶水害威胁十分严重，全局有 63%的可采

储量受水威胁。自煤田开采以来，共发生突水180余次，其中98%是属于底板突水。突水量大于1000m³/h的突水7次，造成6个矿（井）被淹过。肥城煤田东西走向长22km，南北宽2～7km，面积约98km²，位于鲁西台背斜肥城断陷盆地内。目前，肥城煤田已进入深部开采，有些矿井（如大封、陶阳等）已开采距奥灰很近的九、十煤层，水害影响的严重程度日益加剧。矿区内下组煤九、十层的地层结构如图4－24所示，九煤厚为1.14～1.4m，平均厚为1.34m；九煤层至十煤间距为0.26～1.94m，十煤厚为1.88～2.01m，平均厚度2.10m。煤层倾向较缓，平均为18°。十煤下距处五灰15.4～24.09m，平均为18.61m，煤层底板下8～11m处发育一层0.8～1m厚的无名灰（局部地区被粗砂岩取代）。五灰顶部一般发育1m左右厚的粘土层。五灰厚度一般为7～10m，下距奥灰6～11m。全局九、十煤储量为16277万t，占全部可采储量的46.7%，均属受水威胁储量。

4.6.2.1　大封煤矿10204采煤工作面底板突水预测

（1）地质开采条件。10204工作面是大封矿－55m水平计划开采的最后一个工作面，该工作面地处岩溶裂隙发育的富水区，回采十层煤；工作面长70m采用走向长壁法开采，底板隔水层裂隙发育，厚度为16.5m。含水层为五灰水压1.12MPa。

（2）底板采动导水裂隙带深度计算。底板采动导水裂隙带深度的大小，在理论上与多种因素有关，如：开采工作面尺寸、开采方法、煤层厚度及倾角、开采深度、顶底板岩性及结构等。但由于华北石炭－二叠系下组煤的地质开采条件相差不大，因此可以认为：在其它条件类似的情况下，底板采动导水裂隙带深度与采面尺寸的关系是主要的。故底板采

动导水裂隙带深度可由式（4－171）[87]计算：

$$h_1=1.86+0.11L \qquad (4-171)$$

式中，L 为工作面斜长；对于本面底板采动导水裂隙带深度 h_1，经（4－171）式计算为 9.56m。

（3）底板突水预测。将有关参数代入式（4－162）计算得：$I_P=2.28>1$，表明 10204 工作面采用 70m 的面长开采存在突水危险。

（4）实际突水验证。10204 工作面在最大悬顶距 8m 时显现初压，推采 30m 时周期来压，推采到 38m 时，在工作面下头标高－43m 处发生突水，最大突水量 2150m³/h，淹没了采区。实际情况和预测结果完全吻合。

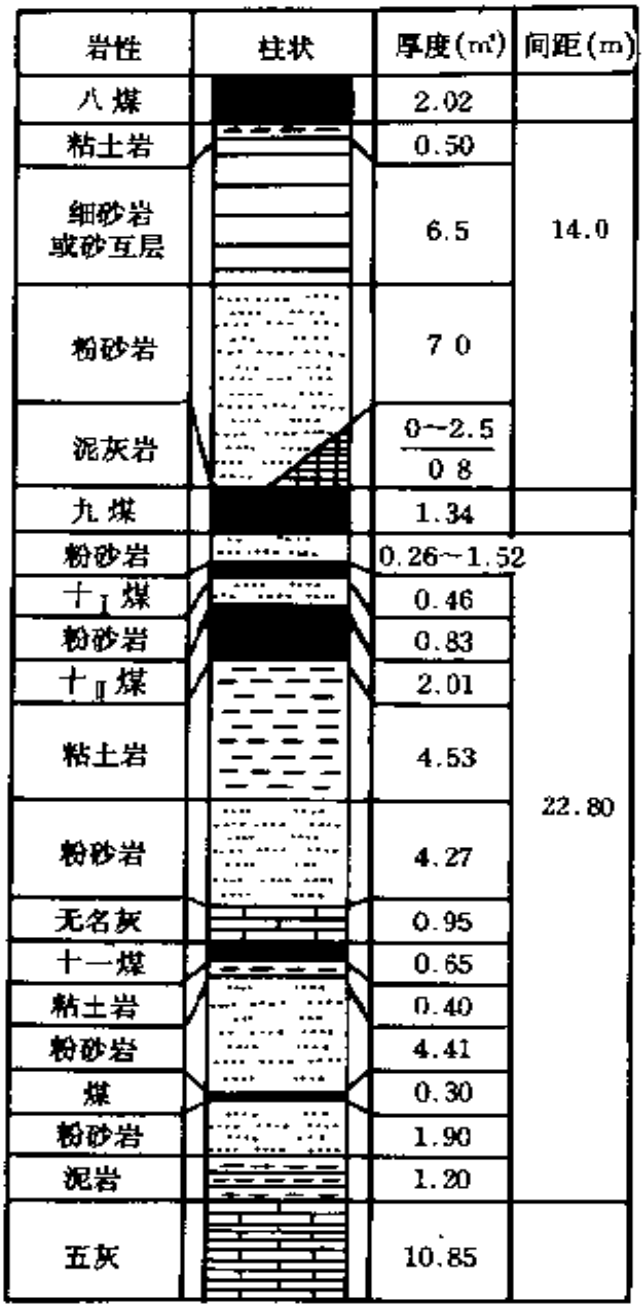


图 4－24　肥城矿区九、十层煤地层结构综合柱状图

4.6.2.2　大封煤矿 9206 工作面底板突水预测

（1）地质开采条件。9206 工作面面长 80m，回采标高

－53～－64m，回采九层煤，厚度 1.25m，采用走向长壁法开采。底板隔水层裂隙发育，厚度为 23.5m，含水层为五灰，厚度 8.85m，水压 1.26MPa。

（2）底板采动导水裂隙带深度计算。将 $L=80$m 代入式（4－171）计算得：$h_1=10.66$m。

（3）底板突水预测。将有关参数代入式（4－162）计算得：$I_P=2.0>1$，表明 9206 工作面采用 80m 的面长开采存在突水危险。

（4）实际突水验证。9206 工作面在推采 41m，周期来压阶段发生突水，最大突水量 436m³/h。实际情况和预测结果完全吻合。

4.6.2.3 陶阳煤矿 9901 工作面底板突水预测

（1）地质开采条件。9901 工作面位于陶阳矿东翼 9900 采区上，开采九层煤。走向长 180m，斜长 60m，煤层 1.32m。采用走向长壁法开采，回采标高－8.4～＋15m。$F_{东8}$断层（落差 8m）未留防水煤柱，工作面正处于断层上盘，实际上使九层煤至直接含层五灰的距离减少 8m，因此实际隔水层厚度为 13m，水压 0.6MPa。

（2）底板采动导水裂隙带深度计算。将 $L=60$m 代入式（4－171）计算得：$h_1=8.46$m。

（3）突水预测。将有关参数代入式（4－162）计算得：$I_P=1.5>1$，表明 9901 工作面采用 60m 面长，在 $F_{东8}$断层上盘回采存在突水危险。

（4）实际突水验证。9901 工作面推进 11m 时，发生底板突水，最大突水量达 1083m³/h，淹没了采区。实际情况与预测结果完全吻合。

4.6.2.4 陶阳煤矿 9906 工作面底板突水预测

(1)地质开采条件。9906 工作面面长 130m，回采九层煤，厚度 1.3m，采用走向长壁法开采。底板隔水层裂隙发隙，厚度 25.7m。含水层为五灰，厚度 9.25m，水压 1.42MPa。

(2) 底板采动导水裂隙带深度计算。将 $L=130$m 代入式（4－171）计算得：$h_1=15.16$m。

(3) 底板突水预测。将有关参数代入式（4－162）计算得：$I_P=2.06>1$，表明 9906 工作面采用 130m 的面长开采存在突水危险。

(4)实际突水验证。9906 工作面在推采 90m，悬顶 5m 时，发生底板突水，最大突水量为 420m³/h。实际情况与预测结果完全吻合。

以上实例分析表明：用尖点突变模型描述底板岩层水压应力比的发展规律是恰当的，用其进行底板突水预测也是较准确的。

4.7 本章小结

本章根据突变学的思想，对底板突水机理进行了较系统的介绍，主要表现在：

(1) 采用拓扑学的方法，从由塑性力学理论求得的底板突水临界条件出发，生成描述底板突水的势函数，该势函数表明底板突水属于尖点突变类型。底板突水具有突变、渐变两条路径，分别对应底板突水的加速起动和缓慢起动。底板突水具有发散、滞后和模态软化等特征。

(2) 通过在底板突水平衡曲面方程中引入扰动项，分析了涨落（扰动）对底板突水的诱导作用机制。

(3) 应用数学方法建立了底板岩层水压应力比的尖点突

变模型，并详细讨论了突水阻抗因子系数 M 及底板导水裂隙发展因子系数 N 的计算方法。实例计算表明用该模型预测底板突水具有较高的准确性，可以用于底板突水预测。

5 底板突水量组合人工神经网络预测

5.1 概 述

人工神经网络（Artificial Neural Networks，简称ANN）理论是20世纪80年代中后期在世界范围内迅速发展起来的一门非线性科学。人工神经网络由大量处理单元（神经元等）广泛连接而成。它反映了人脑功能的基本特性，而不是人脑的真实描述，仅是人脑的某种抽象、简化与模拟。网络的信息处理由人工神经元之间相互作用来实现，知识与信息的存储表现为网络元件互连间分布式的物理关系。网络的学习与识别决定于各神经元连接权系数的动态演化过程。

人工神经网络是用大量的简单神经元广泛互连成的一种计算结构，属于自适应非线性动力学系统，它具有如下基本特征：

(1) 分布存储和容错性。一个信息不是存储在一个地方，而是按内容而分布在整个网络上，网络某一处不是只存储一个外部信息，而每个神经元存储多种信息的部分内容。网络的每部分对信息的存储有等势作用。在神经网络中，要获得存储的知识则采用“联想”的办法，即当一个神经网络输入一个激励时，它要在已存的知识中寻找与该输入匹配最好知识为其解。当然在信息输出时，也还要经过一种处理，而不

是直接从记忆中取出。这种存储方式的优点在于若部分信息不完全，就是说或者丢失或者损坏甚至有错误的信息，它仍能恢复出原来正确的完整的信息，系统仍能运行。这就是网络具有容错性和联想记忆功能，自然呈现出较强的鲁棒性。

(2) 大规模并行处理。人工神经网络在结构上是并行的，而且网络的各个单元可以同时进行类似的处理过程，因此，网络中的信息处理是在大量单元中平等而又有层次地进行，运算速度高。

(3) 自学习、自组织和自适应性。学习和适应要求在时间过程中系统内部结构和联系方式有改变，神经网络是一种变结构系统，恰好能完成对环境的适应和对外界事物的学习能力。神经元之间的连接有多种多样，各元之间连接强度具有一定的可塑性，这样，网络可以通过学习和训练进行自组织以适应不同信息处理的要求。

(4) 神经网络是大量神经元的集体行为，并不是各单元行为的简单的相加，而表现出一般复杂非线性动态系统的特性。如不可预测性、不可逆性、有各种类型的吸引子（信息正是“存储”在定点吸引子上）和出现混沌现象等。

(5) 神经网络可以处理一些环境信息十分复杂、知识背景不清楚和推理规则不明确的问题。例如语音识别和手写体识别，医学诊断以及市场估计等，都是具有复杂非线性和不确定性对象的控制。

人工神经网络在生物学、医学、自动控制等[119,120]方面都得到了较深入的研究和广泛的应用。近几年来，人工神经网络的研究和应用也渗透到地学领域，李东升等[121]把人工神经网络应用到地震预报中，夏宏泉、廖明光[122]基于人工神经网

络进行了测井评价油层污染问题的研究；于建华[123]用人工神经网络自动识别岩性；Mark J.，Gabbert 等[124]将神经网络用于地质数据的回归分析，组成成分分析；许强、黄润秋等[125]将神经网络用于斜坡稳定性的空间预测；蔡煜东等[126]建立了砂土液化预测的人工神经网络模型等等。

BP 神经网络在人工神经网络中应用最为广泛，取得了许多可喜的成果，但这种网络却有两个重要的缺陷：一是存在较多局部极小的情况下很容易陷入局部极小点；二是学习精度与学习速度之间的矛盾不可避免。为此，我们采用了遗传算法训练 BP 网络，利用遗传算法全局最优搜索的特性可完全弥补 BP 网络上述的缺陷，在此基础上建立了底板突水量预测的组合人工神经网络模型。

5.2 人工神经网络

5.2.1 生物神经元

脑组织的基本单元称为神经元，神经元的结构如图 5—1 所示，它具有如下结构特性：

(1) 细胞体：由细胞核、细胞质、细胞模组成。

(2) 轴突：即神经纤维，由细胞体向外伸出的最长的一条分支。轴突有两种结构形式：髓鞘纤维与无髓鞘纤维。轴突相当于细胞的输出电缆，其端部的许多神经末梢为信号输出端子，用于传出神经冲动。

(3) 树突：由细胞体向外伸出的其他许多较短的分支。它相当于细胞的输入端，接受四周细胞传出的神经冲动。

(4) 突触：细胞（即神经元）与细胞之间，通过树突

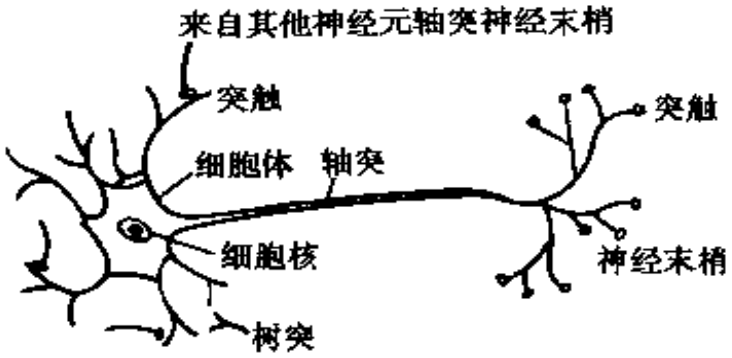


图 5—1　神经元结构

（输入）与轴突（输出）相互联结的接口，即神经末梢与树突相接触的交界面，每个细胞约有 10^3～10^4 个突触。它们有两种类型：兴奋型与抑制型。

（5）膜电位：细胞膜内、外之间有电位差，约为 20～100mv。膜外电位为正，膜内电位为负。

（6）结构可塑性：由于突触的信息传递特性是可变的，随着神经冲动传递方式的变化，其传递作用可以增强或减弱，故细胞间的联结是柔性的，结构具有可塑性。

从生物控制论观点来看，神经元是控制与信息处理的基本单元，具有下列重要功能和状态：

（1）时空整合功能：神经元对于不同时间通过同一突触传入的神经冲动，具有时间整合功能。对于同一时间通过不同突触传入的神经冲动，具有空间整合功能。两种功能相互结合，具有时间整合的输入信息处理功能。

（2）兴奋与抑制状态：神经元具有两种常规工作状态：兴奋与抑制。当传入冲动的时空整合结果，使细胞膜电位升高，

超过被称作动作电位的阈值时，细胞进入抑制状态，无神经冲动输出。

5.2.2 人工神经元模型

人工神经元是对生物神经元的简化和模拟。常用的人工神经元模型主要是基于模拟上述的生物神经元信息的传递特性，即输入输出关系。如果将生物神经元输入、输出脉冲的密度用模拟电压来表示，则上述生物神经元信息传递的主要特性可以用图 5－2 的模型来模拟。该人工神经元（以下简称神经元）是一个多输入、单输出的非线性器件。

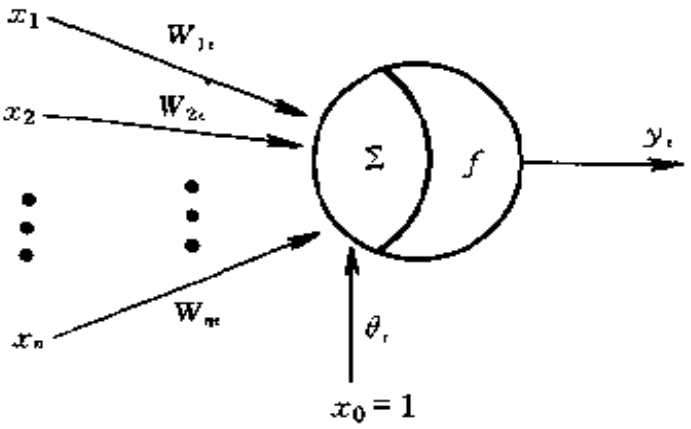


图 5－2 人工神经元结构模型

$$\begin{cases} S_i=\sum_{j=1}^{n} W_{ji}x_j-\theta_i \\ y_i=f\ (S_i) \end{cases} \tag{5－1}$$

神经元输入输出关系可描述为：

式中，x_j（$j=1$，2，…，n）是从其他细胞传来的输入信号；

θ_i 为阈值；W_{ji}表示从细胞 j 到细胞 i 的连接权重；f 为传递函数。

有时为了方便，将 S_i 统一表达成：

$$S_i=\sum_{j=0}^{n}W_{ji}x_j \tag{5—2}$$

式中，$W_{0i}=-\theta_i$；$x_0=1$。

传递函数 $f(S)$ 主要有以下几种类型：

(1) 阈值函数。

$$f(S)=\begin{cases}1 & S\geqslant 0\\ 0 & S<0\end{cases} \tag{5—3}$$

如图 5—3 (a) 所示。

(2) 线性函数。

$$f(S)=S \tag{5—4}$$

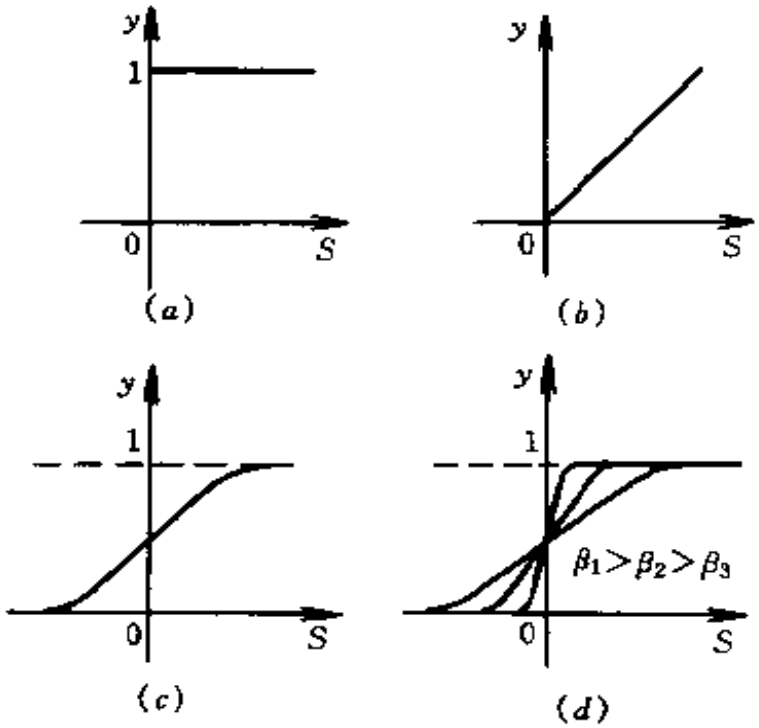


图 5—3　神经元的传递函数

如图 5－3（*b*）所示。

（3）非线性函数。

常用的传递函数为 S 型（Sigmoid）函数：

$$f(S)=\frac{1}{1+e^{-S}}$$

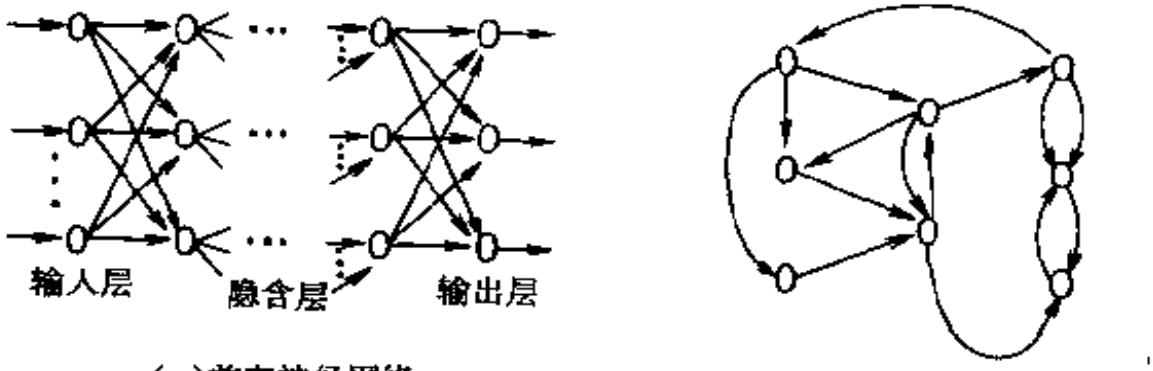
如图 5－3（*c*）所示。

$$f(S)=\tanh(\beta_S) \qquad (5-5)$$

如图 5－3（*d*）所示。

5.2.3 人工神经网络模型

人工神经网络（简称神经网络）模型是由大量神经元按一定规则连接构成的网络。根据神经元之间连接方式的不同，神经网络常分成两大类，没有反馈的前向神经网络和相互结合型网络，如图 5－4 所示。前向神经网络由输入层、一层或多层的隐含层和输出层组成，每一层的神经元只接受前一层神经元的输出。而相互结合型神经网络中任意两个神经元之



（*a*）前向神经网络　　（*b*）相互结合型神经网络

图 5－4　人工神经网络

间都可能有连接，因此，输入信号要在神经元之间反复传递，从某一初始状态开始，经过若干次的变化，渐渐趋于某一稳定状态或进入周期振荡等其它状态。

虽然目前有数十种神经网络模型，但常见的三大类模型是：前向神经网络；反馈神经网络和自组织神经网络。

5.2.4 前向神经网络

常见的前向神经网络主要有多层前向神经网络和辐射基函数神经网络。

5.2.4.1 多层前向神经网络

给定任一连续函数 f：$[0, 1]^n \to R^m$，f 可以精确地用一个三层前向神经网络实现。此网络的第一层，即输入层有 n 个神经元，中间层有 $2n+1$ 个神经元，第三层即输出层有 m 个神经元。该定理称作 kolmogorov 定理。

可以证明，给定任意 $\varepsilon<0$，对于任意的 L_2 型连续函数 f：$[0, 1]^n \to R^m$，存在一个三层前向神经网络，它可在任意 ε 平方误差精度内逼近 f。

虽然，只要用三层的前向神经网络就可实现 L_2 型连续函数，但在实践中，有时需要使用多层的前向神经网络。如何选取多层前向神经网络的隐含层数及其节点数，目前尚无准确的理论和方法。

在众多神经网络模型中，多层前向神经网络是目前世界上最著名的神经网络模型之一，它通过简单非线性处理单元的复合映射而获取复杂非线性处理的能力，如图 5—5 所示，它由一个输入层（Input Layer）、一个输出层（Output Layer）和一个或多个隐含层（Hidden Layer）组成。输入层由若干个输入神经元（节点）组成，用以接收输入信息；输

出层有多个输出节点，用于输出信息，每一隐含层有若干个隐含节点，在系统内部进行输入、输出节点之间的联系，通过连接权重 W_{ji} 表示其间相互影响程度，其含义为：若权重 $W_{ji}>0$，表示节点 j 激活节点 i；若 $W_{ji}=0$，表示节点 j 与 i 之间没有直接联系；$W_{ji}<0$，表示节点 j 抑制节点 i。

对于输入信息，要先通过输入节点向前传播到隐含节点，通过激励函数后，把隐含层节点的输出信息传到输出层节点输出结果。从数学上讲，具有隐含层的神经网络是一组从输入节点到输出节点的高度非线性映射。

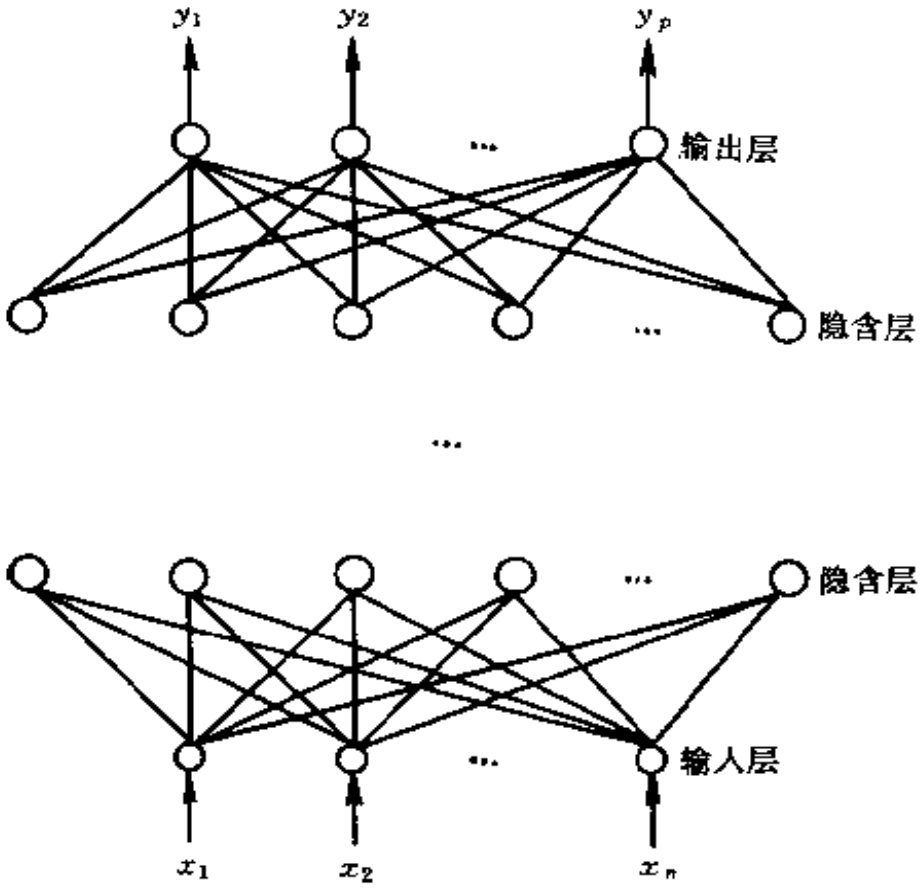


图 5—5　多层前向神经网络结构

5.2.4.2 径向基函数神经网络

RBF (Radial Basis Function) 网络的结构与多层前向网络类似，它是一种三层前向网络，如图 5—6 所示。输入层节点仅是传递输入数据 x_1，x_2，…，x_n 到隐含层节点。第二层为隐含层，节点数视所描述问题的需要而定。第三层为输出层，它对输入模式的作用做出响应。从输入空间到隐含层空间的变换是非线性的，而从隐含层空间到输出层空间的变换是线性的。隐单元的变换函数是 RBF，它是一种局部分布的对中心点经向对称衰减的非负非线性函数。

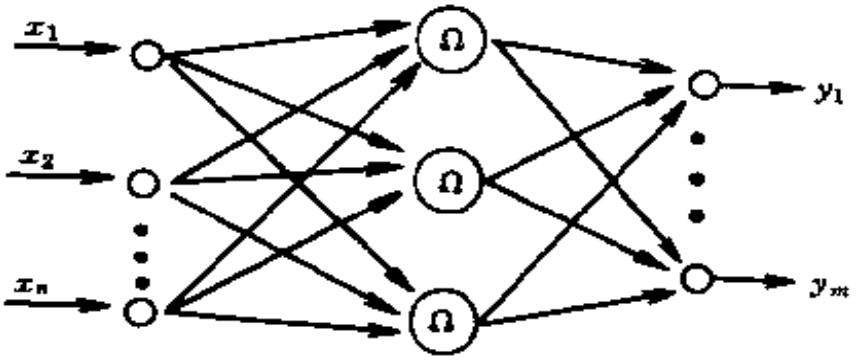


图 5—6 径向基神经网络

隐含层节点的高斯函数对输入数据将在局部产生响应，亦就是当输入数据靠近高斯函数的中央范围时，隐含层节点将产生较大的输出。反之，则产生较小的输出。高斯函数的表示形式为：

$$U_j=\exp\left(-\frac{(x-c_j)^T\ (x-c_j)}{2\sigma_j}\right),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N_n \tag{5—6}$$

式中：U_j 是第 j 个隐含层节点的输出，且 $u_j\in[0,\ 1]$；$x=$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 是输入样本；c_j 是高斯函数的中心值；σ_j 是标准化常数；N_n 是隐含层节点数。

径向基神经网络的输出是隐含层节点输出的线性组合，即：

$$y_i = \sum_{j=1}^{N_n} W_i U_j - \theta = W_i^T U, i = 1, 2, \cdots, m \qquad (5-7)$$

其中 $$W_i = (W_{i1}, W_{i2}, \cdots, W_{iN_n}, -\theta)^T$$

$$U = (U_1, U_2, \cdots, U_{N_n}, 1)^T$$

径向基神经网络的学习过程分为两个阶段。第一阶段，根据所有输入样本决定隐含层各节点的高斯函数的中心 C_j 和标准化常数 σ_j。第二阶段，在决定好隐含层的参数后，根据样本，利用最小二乘原理，求出输出层的权重 W_i。

5.2.5 反馈神经网络

Hopfield 神经网络是一种全连接型的神经网络。对于每一个神经元来说，自己的输出信号通过其它神经元又反馈到自己，所以 Hopfield 神经网络是一种反馈型神经网络 (Feed back Neural Network)。

Hopfield 神经网络状态的演变过程是一个非线性动力学系统，可以用一组非线性差分方程或微分方程来描述。系统的稳定性可用 Lyapunov 能量函数进行分析。在满足一定条件下，某种“能量函数”的能量在网络运行过程中不断地减小，最后趋于稳定的平衡状态。

对于一个非线性动力学系统，系统的状态从某一初值出发经过演变后可能有如下几种结果：

(1) 渐近稳定点；

(2) 极限环；

(3) 混沌 (chaos)；

(4) 状态发散。

因为人工神经网络的变换函数是一个有界函数，故系统的状态不会产生发散现象。

目前，人工神经网络常利用渐近稳定点来解决某些问题。例如，如果把系统的稳定点视为一个记忆的话，那么从初态朝这个稳定点的演变过程就是寻找该记忆的过程。初态可以认为是给定的有关该记忆的部分信息。这就是联想记忆的过程。如果把系统的稳定点视为一个能量函数的极小点，而把能量函数视为一个优化问题的目标函数，那么从初态到这个稳定点的演化过程就是一个求解该优化问题的过程。由此可见，Hopfield 网络的演变过程是一个计算联想记忆或求解优化问题的过程。实际上它的解并不需要真的去计算，而只要构成这种反馈神经网络，适当地设计其连接数和输入就可以达到这个目的。

Hopfield 神经网络分连接型和离散型两种。连续型 Hopfield 神经网络可用下列非线性微分方程来描述：

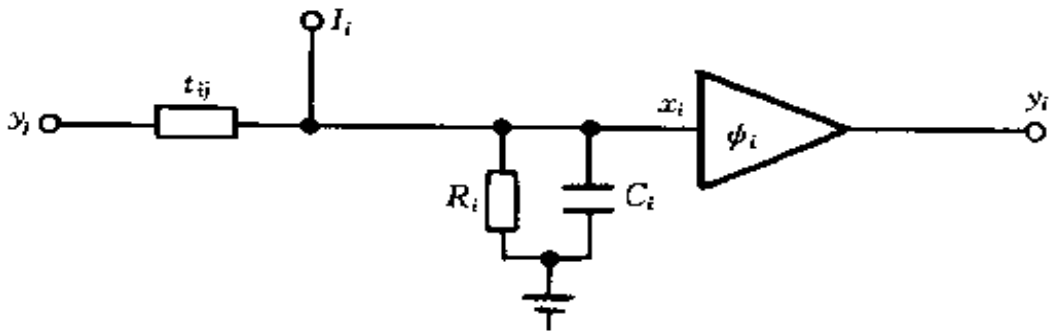


图 5—7 Hopfield 网络模拟电路

$$C_i \frac{dy_i}{dt} = -\frac{x_i}{R} + I_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} y_j \qquad (5-8)$$

$$y_i = \psi_i (x_i) \qquad (5-9)$$

上述方程可用图 5－7 所示的电路图来表示。其中，电阻 R_i 和电容 C_i 并联，模拟神经元的延时特性。电阻 t_{ij} 模拟生物神经元之间的突触特性。运算放大器是一个非线性放大器，它模拟生物神经元的非线性特性，其中输入、输出关系常用如下的两种单调递增有限非线性函数表示。I_i 为独立的外输入信号。

$$y_i = \psi_i (x_i) = \frac{1}{1+e^{-x_i}} \qquad (5-10)$$

$$y_i = \psi_i (x_i) = \tanh (x_i) \qquad (5-11)$$

为了描述 Hopfield 网络的稳定性，引入如下的 Lyapunov 能量函数。

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \int_0^{y} \psi_i^{-1}(y) dy - \sum_{i=1}^{n} I_i y_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} t_{jk} y_j y_k \qquad (5-12)$$

对于离散型 Hopfield 神经网络其模型可描述如下。对于网络的每个节点有：

$$x_i(k+1) = \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_i(k) - \theta_i \right) \quad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (5-13)$$

其中

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u \geqslant 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases}$$

离散型 Hopfield 主要有以下两种工作方式：

(1) 串行工作方式。在某一时刻只有一个神经元按 (5－

13）式改变状态，而其余神经元的输出保持不变。

(2) 并行工作方式。在某一时刻有 N ($1<N\leqslant n$) 个神经元按（5－13）式改变状态，而其余神经元的输出保持不变。

5.2.6 自组织神经网络

最典型的自组织神经网络 (Self-organizing Neural Network) 是 kohonen 的自组织特征映射神经网络 (Self－organizing Feature Map)。自组织神经网络是一种无教师学习神经网络，它能模拟人类根据过去经验自动适应无法预测的环境变化。由于没有教师信号，自组织神经网络通常利用竞争原则来进行网络的学习。

自组织竞争型神经网络通过自身的训练，能自动对输入模式进行分类。这一点与 Hopfield 网络的模式分类功能十分相似。但是自组织竞争型神经网络的结构及其学习规则与其他神经网络相比有自己的特点。在网络结构上，一般它是由输入层和竞争层构成的两层网络。两层网络之间各神经元实现双向连接，而且网络没有隐含层。有时竞争层各神经元之间还存在横向连接。在学习算法上，它模拟生物神经系统依靠神经元之间的兴奋、协调与抑制、竞争的作用来进行信息处理的动力学原理指导网络的学习与工作，而不像大多数神经网络那样是以网络的误差或能量函数作为算法的准则。

设 $x\in R^k$ 为输入模式向量，W 为权重向量矩阵，$Y\in R^n$ 为输出节点的匹配响应，如图 5－8 所示。

在时刻 t 有：

$$Y=W\oplus X \tag{5-14}$$

式中⊕代表一种运算，可选择该运算为 Euclidean 距离运算，即：

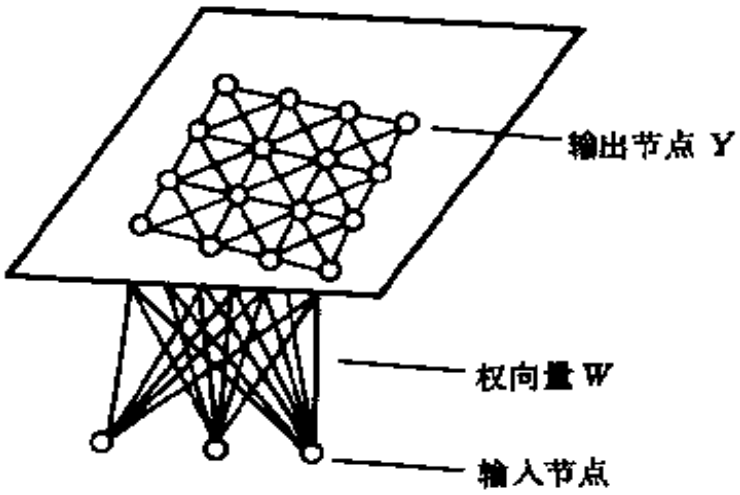


图 5—8　自组织映射结构图

$$Y=\|W(t)-X(t)\|_{\varepsilon} \qquad (5-15)$$

输出节点响应的大小意味着该节点对输入模式矢量的匹配程度，求最佳匹配的条件为：

$$Y_{opc}(t)=\min(y_i(t)\,|\,i=1,2,\cdots,N) \qquad (5-16)$$

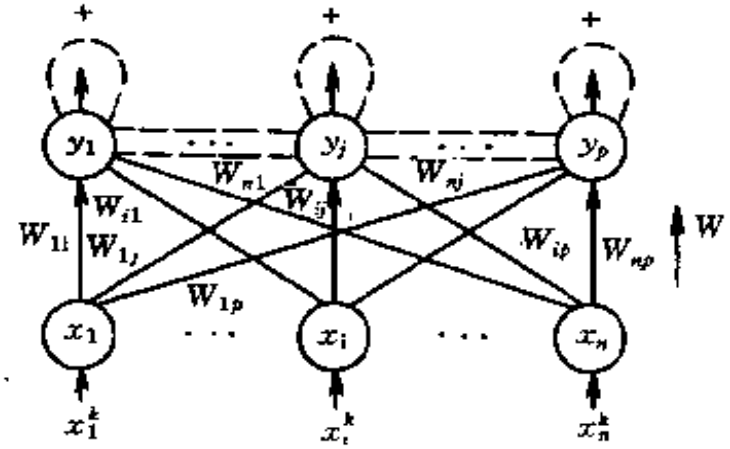


图 5—9　自组织神经网络拓扑结构

然后在该节点及其拓扑领域依下列规则作一调整：

$$W_{ij}(t+1)=\alpha(t)(X_i(t)-W_{ij}(t)),i\in N_C(t) \qquad (5-17)$$

式（5－17）中 $\alpha(t)$ 为调节系数；$N_C(t)$ 为 t 时刻以 C 为中心神经单元个数，其拓扑结构如图 5－9 所示。

5.2.7 神经网络的两大类学习方法

神经网络的性质主要决定于以下两个因素：一是网络的拓扑结构；另一个是网络的工作学习规则。二者结合起来就可以构成一个网络的主要特征。

神经网络的学习方法有两类：有教师学习和无教师学习。有教师学习亦称监督学习，它需组织一批正确的输入输出数据时。将输入数据加载到网络输入端后，把网络的实际响应输出与正确的（期望的）输出相比较得到误差，然后根据误差的情况修改各连接权，使网络朝着能正确响应的方向不断变化下去，直到实际响应的输出与期望的输出之差在允许范围之内。无教师学习亦称无监督学习，这时只有一批输入数据。当输入数据进入神经网络后，网络按照预先设定的规则（如竞争规则）自动调整数值，使网络自动具有模式分类等功能。

常见的无教师学习方法是 Hebb 学习规则。它源自于 Hebb 教授的关于生物神经的学习假设：当两个神经元同时处于兴奋状态时，它们之间的连接应当加强。令 $W_{ij}(t)$ 表示神经元 i 到神经元 j 的当前数，I_i，I_j 表示神经元 i，j 的激活水平，则 Hebb 关于神经元的学习假设可表达为：

$$W_{ij}(t+1)=W_{ij}(t)+I_iI_j \qquad (5-18)$$

对图 5－2 所示的神经元，有：

$$I_i = \sum_j w_{ji} x_j - \theta_i$$

$$y_i = f(I_i) = 1/(1+\exp(-I_i))$$

于是，Hebb 学习规则可进一步表达为：

$$W_{ij}(t+1) = W_{ij}(t) + y_i y_j \qquad (5-19)$$

最常见的有教师学习方法是梯度下降法。其基本思想是根据期望的输出和实际的网络输出之间的误差平方最小原则来修改网络的权向量。

设误差函数为 $J(W)$，则：

$$J(W) = \frac{1}{2}[Y(t) - \overline{Y}(W,t)]^2 \qquad (5-20)$$

式中：$Y(t)$ 表示期望输出；$\overline{Y}(W,t)$ 表示神经网络的实际输出；W 是网络的所有权值组成的向量。梯度下降法就是沿着 $J(W)$ 的负梯度方向不断修正 $W(t)$ 的值，直至 $J(W)$ 达到最小值。梯度下降法的数学表达式为：

$$W(t+1) = W(t) + \eta(t)\left(-\frac{\partial J(W)}{\partial W}\right)\Bigg|_{W=W(t)} \qquad (5-21)$$

式中，$\eta(t)$ 是控制权重修改速度的变量。

5.2.8 BP 网络算法

由于具有两层隐含节点 Sigmoid 输入/输出特性函数的神经网络可以逼近任意复杂的连续函数，所以多层网络具有较强的非线性模拟功能。在多层网络训练学习算法方面，1986 年 Ramelhart，Hinton，Williaws 等人完整而简明地提出了误差反传（Eerror Back propagation）训练算法，简称 BP 算法。它是由正向计算和误差反传两部分组成。在网络的正向

计算中，输入信息从输入经隐含层逐层处理，并传向输出层，在正向传播的过程中，每一层神经网络的状态只影响其下一层神经元的状态。如果输出层不能得到期望的输出，则转入反向传播，将输出误差沿原来的连接通路返回，通过修改各层神经元的权重，使最终的输出误差达到最小。

设有任意大小的多层前向神经网络，各神经元的激励函数选取为 Sigmoid 函数：

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-x}} \tag{5-22}$$

设有 m 个学习样本 (X_k, Y_k) $(k=1, 2, \cdots, m)$，X_k，Y_k 分别为第 k 个样本的输入、期望输出矢量，其中，$X_k=(x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kn})$、$Y_k=(y_{k1}, y_{k2}, \cdots, y_{kp})$。对于某一个输入 X_k，网络的实际输出为 Y'_k，节点 i 的输出为 O_{ki}，节点 j 的输入为：

$$net_{kj}=\sum_{i=1}^{m} W_{ji}O_{ki} \tag{5-23}$$

节点 j 的输出为

$$I_{kj}=f\ (net_{kj}) \tag{5-24}$$

对应网络的期望输出 Y'_k，有输出误差：

$$E_k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{P}(y_{kj}-y'_{kj})^2 \tag{5-25}$$

当神经元的非线性函数都是 S 型时，由神经元组成的前向型网络的网络输出函数是可导的，故误差反向传播方法可以用 LMS 法则进行。训练集中每个样本输至网络时，网络的权重 W_{ji} 都作相应的调整，其改变是为：

$$\Delta_k W_{ji}=\mu\delta_{kj}O_{ki} \tag{5-26}$$

若 j 是输出层，则有

$$\begin{aligned}\delta_{kj} &= (y_{kj} - y'_{kj})\frac{\partial I_{kj}}{\partial net_{kj}} \\ &= (y_{kj} - y'_{kj}) I_{kj}(1 - I_{kj}) \\ &= (y_{kj} - y'_{kj}) y'_{kj}(1 - y'_{kj})\end{aligned} \qquad (5-27)$$

若 j 是隐含层，则有

$$\delta_{kj} = I_{kj}(1 - I_{kj}) \sum_{l} \delta_{kl} W_{lj} \qquad (5-28)$$

式中：δ_{kl}为节点 j 上一节点 l 的误差信号；W_{lj}为节点 j 到其上一节点 l 的连接权重。

为加速权重收敛，在网络学习过程中引入动量因子项 α，对（5－26）式修正如下：

$$\Delta_k W_{ji}(t+1) = \mu \cdot \delta_{kj} \cdot O_{ki} + \alpha \Delta W_{ji}(t) \qquad (5-29)$$

式中：t 为训练样本模式 K 出现的次数；α 为动量系数、一般取 $0<\alpha<1$，它决定过去权重对目前权重变化的影响程度；μ 为学习步长，一般取 $0<\mu<1$。

从本质上讲，BP 网络算法是把一组样本的输入，输出问题变为一个非线性优化问题，可将其视为从 n 维空间到 p 维空间的映射。

BP 网络算法流程图如图 5－10 所示。

如本章第一节所述，BP 网络目前虽然已应用到众多领域，取得许多可喜的成果，但它仍然存在以下两方面的缺陷，如果处理不当，就会影响运算的精确度。

（1）由于 BP 网络算法采用误差导数指导学习过程，从本质上来说属于局部寻优算法，在存在较多局部极小的情况下，很容易陷入局部极小点。

（2）学习精度与学习速度之间的矛盾不可避免：当学习速度较快时，学习过程容易产生振荡，难以得到精确的结果；

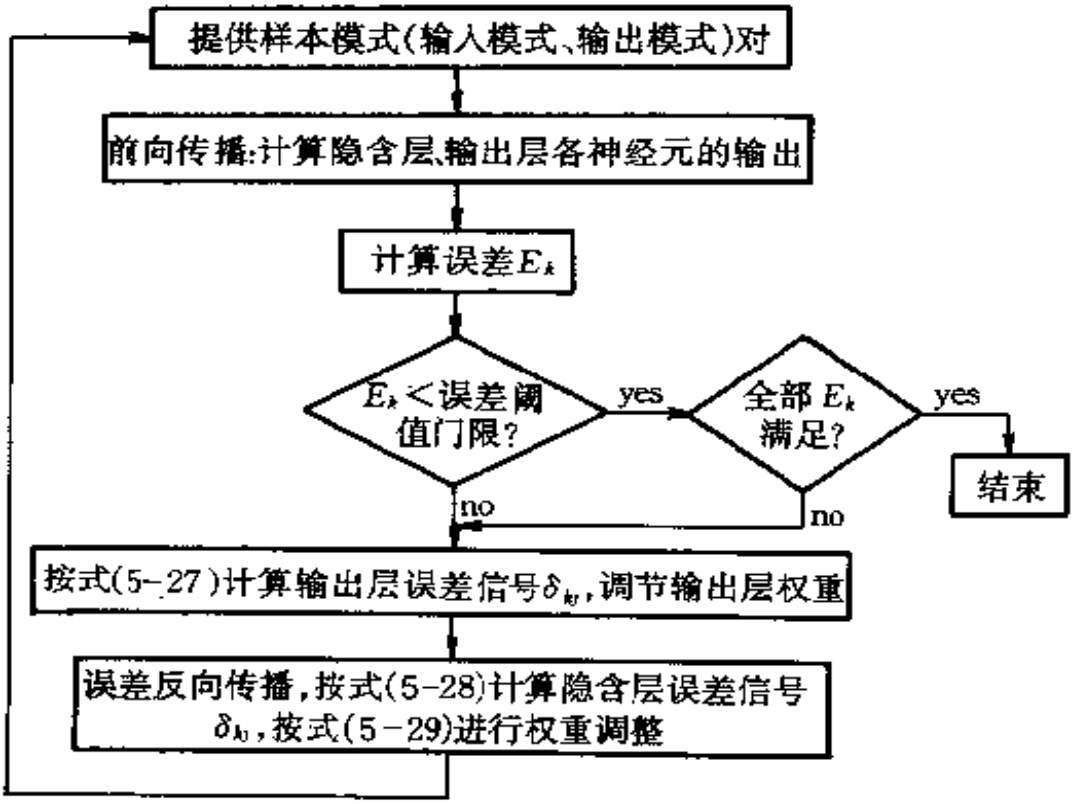


图 5—10　BP 算法流程图

而学习速度较慢时虽然结果可以得到较高的精度，但学习周期太长，也不实用。

为了克服 BP 网上述缺陷，我们充分利用遗传算法全局最优搜索的特性来训练 BP 网络，建立了底板突水量预测的组合人工神经网络模型。

5.2.9　BP 网络算法应用示例[144]

考察表 5—1 和表 5—2 显示的用二维格式(二维变量)描述的有 20 个数据点的一个系统。我们用聚类方法把这些数据点分成两个模糊集 R^1 和 R^2。我们将构造能确定任一数据点

在两模糊类中的隶属度的神经网络。用表5—1中的数据点训练神经网络，用表5—2中的数据点检验网络的性能。表5—3中的隶属度值用来训练和验证神经网络的性能。用来训练和验证网络性能的数据点按最初的赋值而一致地把属于各类的隶属度赋值1或0，见表5—3。

我们选择一个2×3×3×2的神经网络来模拟数据点和它们在模糊类中的隶属度关系，如图5—11所示。每个数据点的坐标值 x_1 和 x_2 用作输入值，神经网络的输出值为其隶属度值。

表5—1 用来描述训练集中的数据点之变量

数据点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	0.05	0.09	0.12	0.15	0.20	0.75	0.80	0.82	0.90	0.95
x_2	0.02	0.11	0.20	0.22	0.25	0.75	0.83	0.80	0.89	0.89

表5—2 用来描述验证集中的数据点之变量

数据点	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_1	0.09	0.10	0.14	0.18	0.22	0.77	0.79	0.84	0.94	0.98
x_2	0.04	0.10	0.21	0.24	0.28	0.78	0.81	0.82	0.93	0.99

表5—3 训练和验证集中的数据点之隶属度

数据点	1和11	2和12	3和13	4和14	5和15
x_1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
x_2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
数据点	6和16	7和17	8和18	9和19	10和20
x_1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
x_2	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

表 5－4 列出了图 5－11 所示网络权的初始随机值。我们取第一个数据点（$x_1=0.05$，$x_2=0.02$）作为网络的输入。使用 Sigmoid 函数。

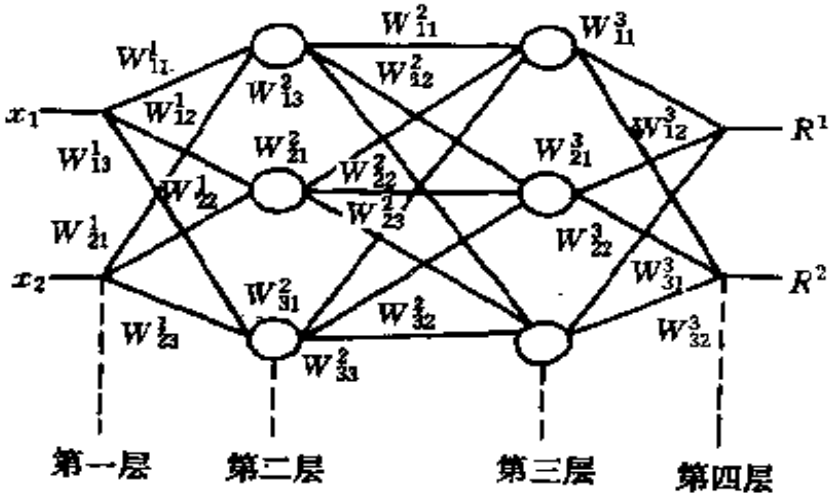


图 5－11　神经网络结构

表 5－4　权的初始随机值表

$W^1_{11}=0.5$	$W^2_{11}=0.10$	$W^3_{11}=0.30$
$W^1_{12}=0.4$	$W^2_{12}=0.55$	$W^3_{12}=0.55$
$W^1_{13}=0.1$	$W^2_{13}=0.35$	$W^3_{21}=0.35$
$W^1_{21}=0.2$	$W^2_{21}=0.20$	$W^3_{22}=0.25$
$W^1_{22}=0.6$	$W^2_{22}=0.45$	$W^3_{31}=0.45$
$W^1_{23}=0.2$	$W^2_{23}=0.35$	$W^3_{32}=0.30$
	$W^2_{31}=0.25$	
	$W^2_{32}=0.15$	
	$W^2_{33}=0.60$	

$$O=\frac{1}{1+\exp\ (-\Sigma W_i x_i-\theta)} \qquad (5-30)$$

式中：O 表示输出；x_i 为输入；W_i 为权值；θ 是阈值。

（1）第一次迭代用式（5－30）来计算神经网络的输出，置 θ 的初始值为 0。

第二层输出：

$$O_1^2=\frac{1}{1+\exp(-(0.05\times0.05+0.02\times0.20)-0.0)}$$
$$=0.507249$$

$$O_2^2=\frac{1}{1+\exp(-(0.05\times0.40+0.02\times0.60)-0.0)}$$
$$=0.507999$$

$$O_3^2=\frac{1}{1+\exp(-(0.05\times0.10+0.02\times0.20)-0.0)}$$
$$=0.502250$$

第三层输出：

$$O_1^3=\frac{1}{1+\exp(-(0.507249\times0.10+0.507999\times$$
$$\times0.20+0.502250\times0.25)-0.0)$$
$$=0.569028$$

$$O_2^3=\frac{1}{1+\exp(-(0.507249\times0.55+0.507999\times$$
$$\times0.45+0.502250\times0.15)-0.0)$$
$$=0.641740$$

$$O_3^3=\frac{1}{1+\exp(-(0.507249\times0.35+0.507999\times$$
$$\times0.35+0.502250\times0.60)-0.0)$$
$$=0.658516$$

第四层输出：

$$O_1^4 = \frac{1}{1+\exp(-(0.569028\times 0.3+0.641740\times \times 0.35+0.658516\times 0.45)-0.0)}$$
$$=0.666334$$

$$O_2^4 = \frac{1}{1+\exp(-(0.569028\times 0.35+0.641740\times \times 0.25+0.658516\times 0.30)-0.0)}$$
$$=0.635793$$

(2)计算误差。将神经网络的输出与期望输出比较，以计算神经网络的最终误差。

R_1：$E_1^4 = O_1^4 - O_{1actual}^1 = 0.666334 - 1.0 = -0.333666$

R_2：$E_2^4 = O_2^4 - O_{2actual}^4 = 0.635793 - 0.0 = 0.635793$

现在，得出神经网络第一次迭代的最后误差，将此误差传播到网络的其他节点：

$$E_n = O_n(1-O_n)\sum_j W_{nj}E_j \qquad (5-31)$$

首先，将误差传递给第三层节点：

$$E_1^3 = 0.569028\times(1.0-0.569028)\times((0.30\times \times(-0.333666)+(0.35\times 0.635793))$$
$$=0.030024$$

$$E_2^3 = 0.641740\times(1.0-0.641740)\times((0.35\times \times(-0.333666)+(0.25\times 0.635793))$$
$$=0.009694$$

$$E_3^3 = 0.658516\times(1.0-0.658516)\times((0.45\times \times(-0.333666)+(0.30\times 0.635793))$$
$$=0.009127$$

接着，传递给第二层节点：

$$E_1^2 = 0.507249\times(1.0-0.507249)\times((0.10\times$$

$\times 0.03024)+(0.5\times 0.009694)+$

$+(0.35\times 0.009127))$

$=0.002882$

$E_2^2=0.507999\times(1.0-0.507999)\times((0.20\times$

$\times 0.030024)+(0.45\times 0.009694)+$

$+(0.35\times 0.009127))$

$=0.003390$

$E_3^2=0.502250\times(1.0-0.502250)\times((0.25\times$

$\times 0.030024)+(0.15\times 0.009694)+$

$+(0.60\times 0.009127))$

$=0.003609$

根据以上神经网络每个节点的计算误差，进行相应的权值调整，以便使网络的输出更逼近期望输出。使用下式更新权值：

$$W_{jk}^i(new)=W_{jk}^i(old)+aE_k^{(i+1)}x_{jk} \qquad (5-32)$$

式中：W_{jk}^i表示第 i 层第 j 个节点与（$i+1$）层的第 k 个节点之间的连接权，$a=0.3$，表示学习速率；E_k^{i+1} 表示第（$i+1$）层第 k 个节点的误差；x_{jk}表示从第 i 层第 j 个节点到（$i+1$）层第 k 个节点的输入。

（3）更新权值

更新第三层与第四层节点相连的权值如下：

$W_{11}^3=0.30+0.30\times(-0.333666)\times 0.569028$

$=0.243040$

$W_{21}^3=0.35+0.30\times(-0.333666)\times 0.641740$

$=0.285762$

$W_{31}^3=0.45+0.30\times(-0.333666)\times 0.658516$

$=0.384083$

$W_{12}^{3}=0.35+0.3\times0.635793\times0.569028=0.458535$

$W_{22}^{3}=0.25+0.3\times0.635793\times0.641740=0.372404$

$W_{32}^{3}=0.30+0.3\times0.635793\times0.658516=0.425604$

再更新第二层与第三层相连的权值如下：

$W_{11}^{2}=0.10+0.3\times0.030024\times0.507249=0.104968$

$W_{21}^{2}=0.20+0.3\times0.030024\times0.507999=0.204576$

$W_{31}^{2}=0.25+0.3\times0.030024\times0.502250=0.254524$

$W_{12}^{2}=0.55+0.3\times0.009694\times0.507249=0.551475$

$W_{22}^{2}=0.45+0.3\times0.009694\times0.507999=0.451477$

$W_{32}^{2}=0.15+0.3\times0.009694\times0.502250=0.151461$

$W_{13}^{2}=0.35+0.3\times0.009127\times0.507249=0.351389$

$W_{23}^{2}=0.35+0.3\times0.009127\times0.507249=0.351391$

$W_{33}^{2}=0.60+0.3\times0.009127\times0.502250=0.601375$

最后，更新第一层与第二层相连的权值如下：

$W_{11}^{1}=0.5+0.3\times0.002882\times0.05=0.500043$

$W_{12}^{1}=0.40+0.3\times0.003390\times0.05=0.400051$

$W_{13}^{1}=0.10+0.3\times0.003609\times0.05=0.100054$

$W_{21}^{1}=0.20+0.3\times0.002882\times0.02=0.200017$

$W_{22}^{1}=0.60+0.30\times0.003390\times0.02=0.600020$

$W_{23}^{1}=0.20+0.3\times0.003609\times0.02=0.200022$

现在，神经网络中所有权值均已更新。把输入数据点（$x_1=0.05$，$x_2=0.02$）再输入网络中进行计算。再执行上述步骤，计算出误差。重复此过程直到误差在允许范围。接着，再用下一个数据点训练网络，直到训练完所有的数据为止。然后用验证数据集中的数据点验证神经网络的性能。

5.3 遗传算法

5.3.1 遗传算法及其特点

遗传算法是模拟生物在自然环境中的遗传和进化过程而形成的一种自适应全局优化概率搜索算法。它最早由美国密执安大学的 Holland 教授提出，起源于 20 世纪 60 年代对自然和人工自适应系统的研究[132]。70 年代 De Jong 基于遗传算法的思想在计算机上进行了大量的纯数值函数优化计算实验[133]。在一系列研究工作的基础上，80 年代由 Goldberg 进行归纳总结，形成了遗传算法的基本框架[134]。

遗传算法是一类用于复杂系统优化计算的鲁棒搜索算法，与其它一些优化算法相比，它主要有以下几个特点：

（1）遗传算法以参数的编码作为运算对象，传统的优化算法往往直接利用参数的实际值本身来进行优化计算，但遗传算法不是直接以参数的值，而是以参数的某种形式的编码为运算对象。这种参数的编码处理方式，使得我们在优化计算过程中可以模仿自然界中生物的遗传和进化等机理，也使得我们可以方便地应用遗传操作算子。

（2）遗传算法直接以目标函数值作为搜索信息。传统优化算法不仅需要利用目标函数值，而且往往需要目标函数的导数值等其他一些辅助信息才能确定搜索方向。而遗传算法仅使用由目标函数值变换来的适应度函数值，就可以确定进一步的搜索方向和搜索范围，而不需要其他的推导和附属信息，对问题的依赖性小；对待寻优的函数基本无限制，既可是数学解析式所表达的显函数，又可是映射矩阵甚至是神经

网络等隐函数；再者，直接利用目标函数值或个体适应度，也可使得我们可以把搜索范围集中到适应度较高的部分搜索空间中，从而提高了搜索效率。

（3）遗传算法同时使用多个搜索点的搜索信息。传统的优化算法往往是从解空间中一个初始最优解的迭代搜索过程，所以搜索效率不高，有时甚至使探索过程陷于局部最优解而停滞不前。而遗传算法是从很多个体所组成的一个单一的个体开始搜索，因而可以有效地防止搜索过程收敛于局部最小解。

（4）遗传算法使用概率搜索技术。很多传统的优化算法大都使用的是确定性的搜索方法，一个搜索点到另一个搜索点的转移有确定的转移方法和转移关系，这种确定性往往也有可能使得搜索永远达不到最优点。而遗传算法属于一种自适应概率搜索技术，它在解空间不是盲目的枚举或完全随机测试，而是一种启发式搜索，其搜索效率优于其他方法。

5.3.2 遗传算法的工作原理[130,131]

（1）问题表示。对于一个实际的待优化问题，首先需要将其表示为适于遗传算法进行操作的二进制字串，一般作法是先将每个参数用二进制字串表示，然后将所有表示参数的二进制数串连接组成一个长的二进制字串。

（2）初始群体的产生。遗传算法是对群体进行的进化操作，需要给其准备一些表示起始搜索点的初始群体数据。设要操作的二进制字串共 L 位，用随机数发生器在 $0\sim 2^L$ 之间随机地产生 n 个整数，则这 n 个整数所对应的二进制表示即为要求的 n 个初始样本。

（3）适应度计算。遗传算法中以个体适应度的大小来评

定各个个体的优劣程度，从而决定其遗传机会的大小。适应度的计算步骤如下：

①将染色体的基因型转换为表现型，即将二进制串转换为十进制值。

②计算目标函数值。

③将目标函数值转换为适应度值。

（4）选择。选择（或称为复制）是把当前群体中适应度较高的个体按某种规则或模型遗传到下一代群体中。在本模型中，我们采用与适应度成正比的概率来确定各个个体复制到下一代群体中的数量。具体步骤如下：

①计算出群体中所有个体的适应度的总和 Σf_i（f_i 是第 i 个个体适应度）。

②计算出每个个体的相对适应度 $f_i/\Sigma f_i$，它即为每个个体被遗传到下一代群体中的概率。

③按 $Nf_i/\Sigma f_i$（N 为群体数目）决定第 i 个个体 x_i 在下一代中复制其自身的数目。复制意味着适应度越高的个体，在下一代中复制自身的个数越多。

（5）交叉。交叉是遗传算法中产生新个体的主要操作过程，它以某一概率相互交换两个个体之间的部分染色体。例如有两个串：

$$V_1=[v_{11},v_{12}\cdots v_{1l}]$$

$$V_2=[v_{21},v_{22}\cdots v_{2l}]$$

采用单断点交叉法，若在位置 i 交换，则产生两个新的串：

$$V'_1=[v_{11}\cdots v_{1i},v_{2,i+1}\cdots v_{2l}]$$

$$V'_2=[v_{21}\cdots v_{2i},v_{1,i+1}\cdots v_{1l}]$$

交叉是最重要的遗传运算，遗传算法的性能在很大程度

上取决于采用交叉运算的性能。

（6）变异。若基因型中某个或某几个位置上的等位基因从一种状态跳变到另一种状态（0 变为 1 或 1 变为 0），则称该基因发生了变异。其中变其异的位置是随机的。

遗传算法的流程如图 5－12 所示。

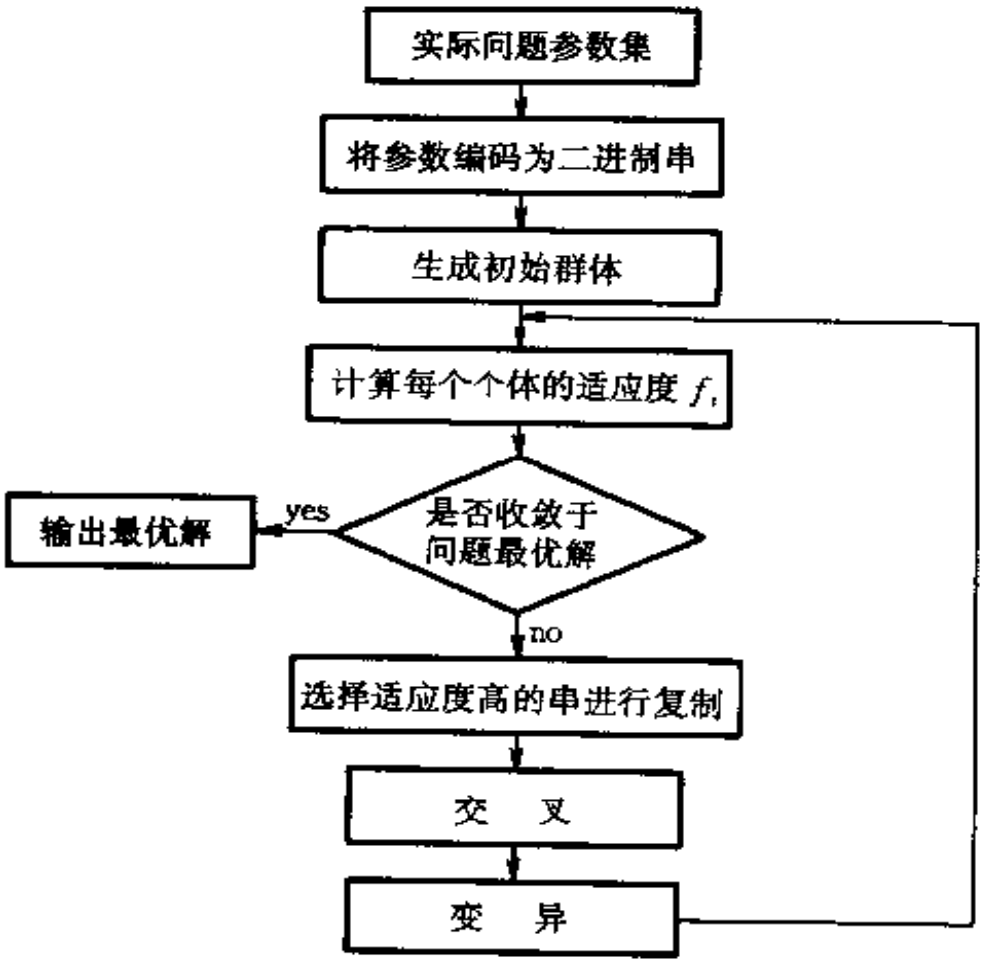


图 5－12　遗传算法流程图

另外，在具体实现遗传算法的过程中，有一些参数需要事先选择，它们包括初始种群的大小 n，交换概率 P_c，变异

概率 P_b，具体取值应视实际问题而定。

5.3.3 简单的遗传算法举例

对于以下无约束优化问题：

$$\max f(x_1, x_2) = 21.5 + x_1 \sin(4\pi x_1) + x_2 \sin(20\pi x_2)$$
$$-3.0 \leqslant x_1 \leqslant 12.1 \qquad (5-33)$$
$$4.1 \leqslant x_2 \leqslant 5.8$$

目标函数的三维图形如图 5－13 所示。

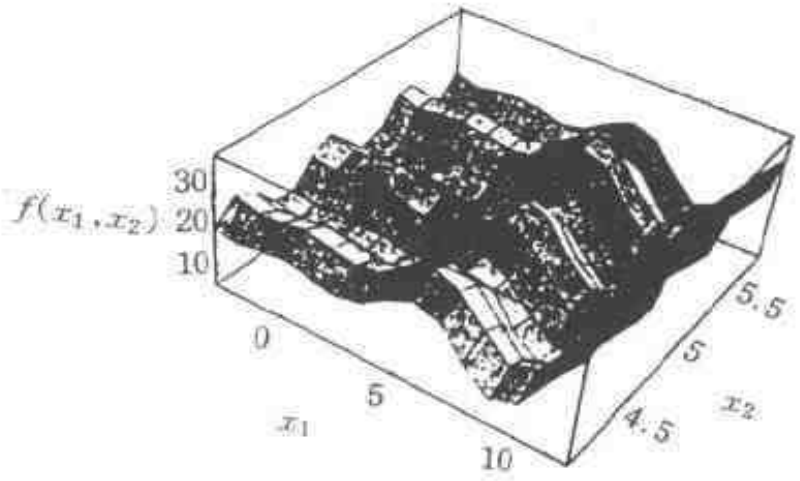


图 5－13 目标函数

(1) 问题表示。首先，将决策变量编码为二进制串，串长取决于需要的精度。例如，x_j 的值域是 $[a_j, b_j]$，而要求的精度是小数点后 5 位，这就要求 x_j 的值域至少要分为 $(b_j - a_j) \times 10^6$。设 x_j 所需要的子串长为 m_j，则有：

$$2^{m_j - 1} < (b_j - a_j) \times 10^6 \leqslant 2^{m_j} - 1 \qquad (5-34)$$

将 x_j 由二进制转为十进制可按下式计算：

$$x_j = a_j + \text{decimal}(\text{substring}) \times \frac{b_j - a_j}{2^{m_j} - 1} \qquad (5-35)$$

decimal (substring) 表示变量 x_j 的子串 Substring 的十进制值。

假设 x_1 和 x_2 需要的精度都是小数点后 5 位，两个变量需要的总串长按下述计算：

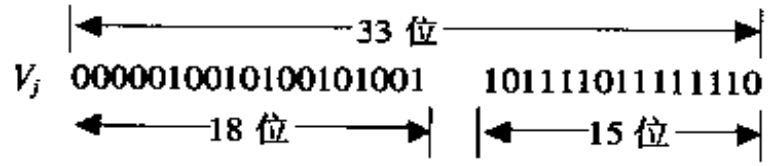
$$(12.1-(-3.0))\times 10000=151000$$

$$2^{17}<151000\leqslant 2^{28},\quad m_1=18$$

$$2^{14}<17000\leqslant 2^{15},\quad m_2=15$$

$$m=18+15=33$$

染色体的总长是 33 位，可表示如下：



对应的变量 x_1 和 x_2 的值为

	二进制码	十进制码
x_1	000001010100101001	5417
x_2	101111011111110	24318

十进值为：

$$x_1=-3.0+5417\times(12.1-(-3.0))/(2^{18}-1)$$
$$=-2.687969$$

$$x_2=4.1+24318\times(5.8-4.1)/(2^{15}-1)=5.361653$$

(2) 初始解体。随机产生的初始群体如下：

$V_1=$ [000001010100101001101111011111110]

$V_2=$ [001110101110011000000010101001000]

$V_3=$ [111000111000001000010101001000110]

V_4= [100110110100101101000000010111001]

V_5= [000010111101100010001110001101000]

V_6= [111110101011011000000010110011001]

V_7= [110100010011111000100110011101101]

V_8= [001011010100001100010110011001100]

V_9= [111110001011101100011101000111101]

V_{10}= [111101001110101010000010101101010]

对应的十进制值为：

V_1= [x_1, x_2] = [−2.687969, 5.361653]

V_2= [x_1, x_2] = [0.474101, 4.170144]

V_3= [x_1, x_2] = [10.419457, 4.661461]

V_4= [x_1, x_2] = [6.159951, 4.109598]

V_5= [x_1, x_2] = [−2.301286, 4.477282]

V_6= [x_1, x_2] = [11.788084, 4.174346]

V_7= [x_1, x_2] = [9.342026, 5.121702]

V_8= [x_1, x_2] = [−0.330256, 4.694977]

V_9= [x_1, x_2] = [11.671267, 4.873501]

V_{10}= [x_1, x_2] = [11.446273, 4.171908]

(3) 适应度计算。染色体的适应度函数值为：

f_1=f (−2.687969, 5.361653) =19.805119

f_2=f (0.474101, 4.170144) =17.370896

f_3=f (10.419457, 4.661461) =9.590546

f_4=f (6.159951, 4.109598) =29.406122

f_5=f (−2.301286, 4.477282) =15.686091

f_6=f (11.788084, 4.174346) =11.900541

f_7=f (9.342067, 5.121702) =17.958717

$f_8=f$（−0.330256，4.694977）=19.763190

$f_9=f$（11.671267，4.873501）=26.401669

$f_{10}=f$（11.446273，4.171908）=10.252480

显然染色体 V_4 是最好的，染色体 V_3 是最差的。

（4）选择。群体中所有个体的适应度总和 F 为：

$$F=\sum_{i=1}^{10} f_i=178.135372$$

各染色体 V_i（$i=1$，2，…，10）的选择概率 P_i 为：

$P_1=0.111180$，$P_2=0.097515$

$P_3=0.053839$，$P_4=0.165077$

$P_5=0.088057$，$P_6=0.066806$

$P_7=0.100815$，$P_8=0.110945$

$P_9=0.148211$，$P_{10}=0.057554$

各染色体的累积概率 q_i 为：

$q_1=0.11180$，$q_2=0.208695$

$q_3=0.262534$，$q_4=0.427611$

$q_5=0.515668$，$q_6=0.582475$

$q_7=0.683290$，$q_8=0.794234$

$q_9=0.942446$，$q_{10}=1.000000$

下面旋转转轮 10 次，每次选一个染色体来构造新种群。设产生的 [0，1] 间的 10 个随机数序列如下：

0.301431，0.322062，0.766503，0.881893，0.350871，0.583392，0.177618，0.343242，0.32685，0.197577

第一个数 $r_1=0.301431$ 大于 q_3 小于 q_4，这表示染色体 V_4 被选来构造新种群；第二个数 $r_2=0.322062$ 也大于 q_3 小于 q_4，表示染色体 V_4 再次被新种群选中，重复以上操作，最后选出如下新的群体：

V'_1= [1001101101001011010000000101110 01] (V_4)

V'_2= [1001101101001011010000000101110 01] (V_4)

V'_3= [0010110101000011000101100110011 00] (V_8)

V'_4= [1111100010111011000111010001111 01] (V_9)

V'_5= [1001101101001011010000000101110 01] (V_4)

V'_6= [1101000100111110001001100111011 01] (V_7)

V'_7= [0011101011100110000000101010010 00] (V_2)

V'_8= [1001101101001011010000000101110 01] (V_4)

V'_9= [0000010101001010011011110111111 10] (V_1)

V'_{10}= [0011101011100110000000101010010 00] (V_2)

（5）交叉。对于如下两个染色体，若随机断点选在第 17 个基因之后：

V_1 = [1001101101001011010000000101110 01]

V_2 = [0010110101000011000101100110011 00]

交换双亲上断点的右端后得到的两个后代如下：

V'_1 = [1001101101001011000101100110011 00]

V'_2 = [0010110101000011010000000101110 01]

设交换概率 P_c=0.25，即平均有 25%染色体进行交叉。设随机数序列如下：

0.625721，0.266823，0.288644，0.295114

0.163274，0.567461，0.085940，0.392865

0.770714，0.548656

于是染色体 V'_5 和 V'_7 被选入参加交叉。产生一个随机数的整数 *pos* 作为断点，*pos*∈ [1，32]（因为 33 是染色体的

长度)。假设产生的 $pos=1$，两染色体自第 1 位后切断，并交换断点右端，得到：

$$V'_5=[\blacksquare]$$
$$V'_7=[0001101101001011010000000010111001]$$
$$\downarrow$$
$$V'_5=[0001101101001011010000000010111001]$$
$$V'_7=[\blacksquare]$$

(6) 变异。假设 V_1 的第 16 个基因被选出来变异，设基因为 1，故将其变为 0。于是变异后染色体为：

$$V_1=[1001101101001011\blacksquare000000010111001]$$
$$V'_1=[1001101101001011\blacksquare000000010111001]$$

设变异概率 $P_c=0.01$，即种群中平均有 1%基因发生变异。群体中共有 $33\times10=330$ 个基因，这样每代平均有 33 个基因发生变异。为使每个基因有相同的机会发生变异，需要产生 [0，1] 间均匀分布的随机数序列 r_k ($k=1$，2，…，330)。假设如下基因发生变异：

住　址	染色体号	位　号	随机数
105	4	6	0.009857
164	5	32	0.003113
199	7	1	0.00946
329	10	32	0.001282

变异后的新群体如下：

V'_1= [10011011010010110100000010111001]

V'_2= [10011011010010110100000010111001]

V'_3= [00101101010000110001011001100]

V'_4= [11111100101110110001110100011101]

V'_5= [10111010111001100000001010100101 0]

V'_6= [11010001001111100010011001110 1101]

V'_7= [10011011010010110100000010111001]

V'_8= [10011011010010110100000010111001]

V'_9= [00000101010010100110111011111110]

V'_{10}= [00111010111001100000001010100101 0]

相应的十进制值和适应度为：

f (6.159951, 4.109598) =29.406122

f (6.159951, 4.109598) =29.406122

f (−0.330256, 4.694977) =19.763190

f (11.907206, 4.873501) =5.702781

f (8.024130, 4.170248) =19.91025

f (9.342067, 5.121701) =17.958717

f (6.159951, 4.109598) =29.406122

f (6.159951, 4.109598) =29.406122

f (−2.687969, 5.361653) =19.805119

f (0.474101, 4.170248) =17.370896

至此，我们完成了遗传算法的一次迭代。实验运行在1000代后结束，在第419代就得到了最佳的染色体：

V^*= [11111000000011100011110100101011 0]

f^*=f (11.631407, 5.724824) =38.818208

$x_1^* = 11.631407$

$x_2^* = 5.724824$

$f(x_1^*, x_2^*) = 38.818208$

5.4 底板突水量预测的组合人工神经网络模型

5.4.1 底板突水量预测的组合人工神经网络模型

遗传算法全局寻优的特性为我们使用 BP 网络进行底板突水量预测开辟了一条新的途径。BP 网络对底板突水量预测的优选模型最终表示为一组优化权值，用以表征输入与输出之间复杂的映射关系。而 BP 网络自身的局限性有时不能保证所优选权值为全局最优，结合遗传算法，我们所构造的底板突水量预测的组合人工神经网络，可以完全弥补 BP 网络这方面的不足。

5.4.1.1 确定组合模型中的 BP 网络结构

通过对大量底板突水案例的统计分析，选取了 5 个影响因素：水压、含水层、隔水层厚度（底板岩层厚度）、底板采动导水裂隙带深度、断层落差（对底板破坏型突水而言断层落差取零）作为预测底板突水量的控制参数，即网络的输入，网络的输出即为底板突水量，按煤炭科学研究总院西安分院王梦玉等人的划分方案，将底板突水量分为 4 个等级。参数取值的原则是能完全定量的，尽量用定量数据表示，不能定量的用二值模式表示。定性因素取值原则如表 5—5 所示。

由以上分析可知，输入节点数 Q_i 为 5，输出节点数 Q_j 为 4。隐含节点数 Q_k 可通过训练样本试算确定。

表 5—5 变 量 定 义

变量名称	取 值	
含水层	薄层灰岩	1
	厚层灰岩	0
最大突水量 (m^3/h)	$Q<600$ （小型突水）	1000
	$600\leqslant Q<1200$ （中型突水）	0100
	$1200\leqslant Q<3000$ （大型突水）	0010
	$Q\geqslant 3000$ （特大型突水）	0001

5.4.1.2 编码策略

一般每一个网络用一个二进制串的染色体来表示。网络中的每一个参数用 P 个二进制表示。每个网络的染色体为所有参数基因串接而成。本模型 P 取 10，第一位为符号位，1 取正值，0 取负值。则编码形式为：

$\underbrace{1100010111}_{W_{m1}}\underbrace{0110011010}_{W_{m2}}\cdots\underbrace{0111010111}_{W_{mQ}}$（$m$ 为群体数，Q 为网络具有的参数个数）

5.4.1.3 适应度函数

遗传算法优化人工神经网络权值的一个重要问题，是如何定义合理的适应度函数。一般可用误差函数 E 来衡量。

定义训练网络权值的误差函数为：

$$E_k=\sum_j(y_{kj}-y'_{kj})^2$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ Q_j)$$

式中，y_{kj}、y'_{kj}分别为前向训练中的期望输出和实际输出值。

在 n 个训练集内，总的误差表示为：

$$E=\frac{1}{n}\sum_{k}E_k=\frac{1}{n}\sum_{k}\sum_{j}(y_{kj}-y'_{kj})$$

由于习惯中取大的适应度进行优选，可取适应度函数为

$$F\ (E)\ =1-E$$

对误差水平，根据经验，BP 网络的误差水平取 0.0001，则组合模型的误差水平取 $e=1-0.0001$。

5.4.1.4 选 择

保存上一代最优个体 $(\max f_i)$，直接进入下一代群体。

5.4.1.5 交 叉

以概率 $f_i/\Sigma f_i$、$f_j/\Sigma f_j$（f_i、f_j 为该代群体第 i，第 j 个个体对应的适应度，Σf_i、Σf_j 为该群体的适应度之和 $\Sigma f_i=\Sigma f_j$），从群体剩余个体中选出两个串 Z_i、Z_j，在随机选定交换位置基础上，以交换概率 P_c 进行交换操作，得到新的串 Z'_i、Z'_j。

5.4.1.6 变 异

变异操作分两种情况，由于基因的第一位表示正负号，该位的变异概率要小于其他位的变异概率（P_b）。在本模型中取前者为后者的 0.1 倍。对新串 Z'_i、Z'_j 的各位进行变异操作，变异结果进入下一群体。

底板突水量预测组合人工神经网络模型运算过程如图 5－14所示。

5.4.2 实例分析

从大量的煤层底板突水案例[85][92]中选取 15 个典型采煤工作面底板突水资料，如表 5—6 所示，将表 5—6 中含水层

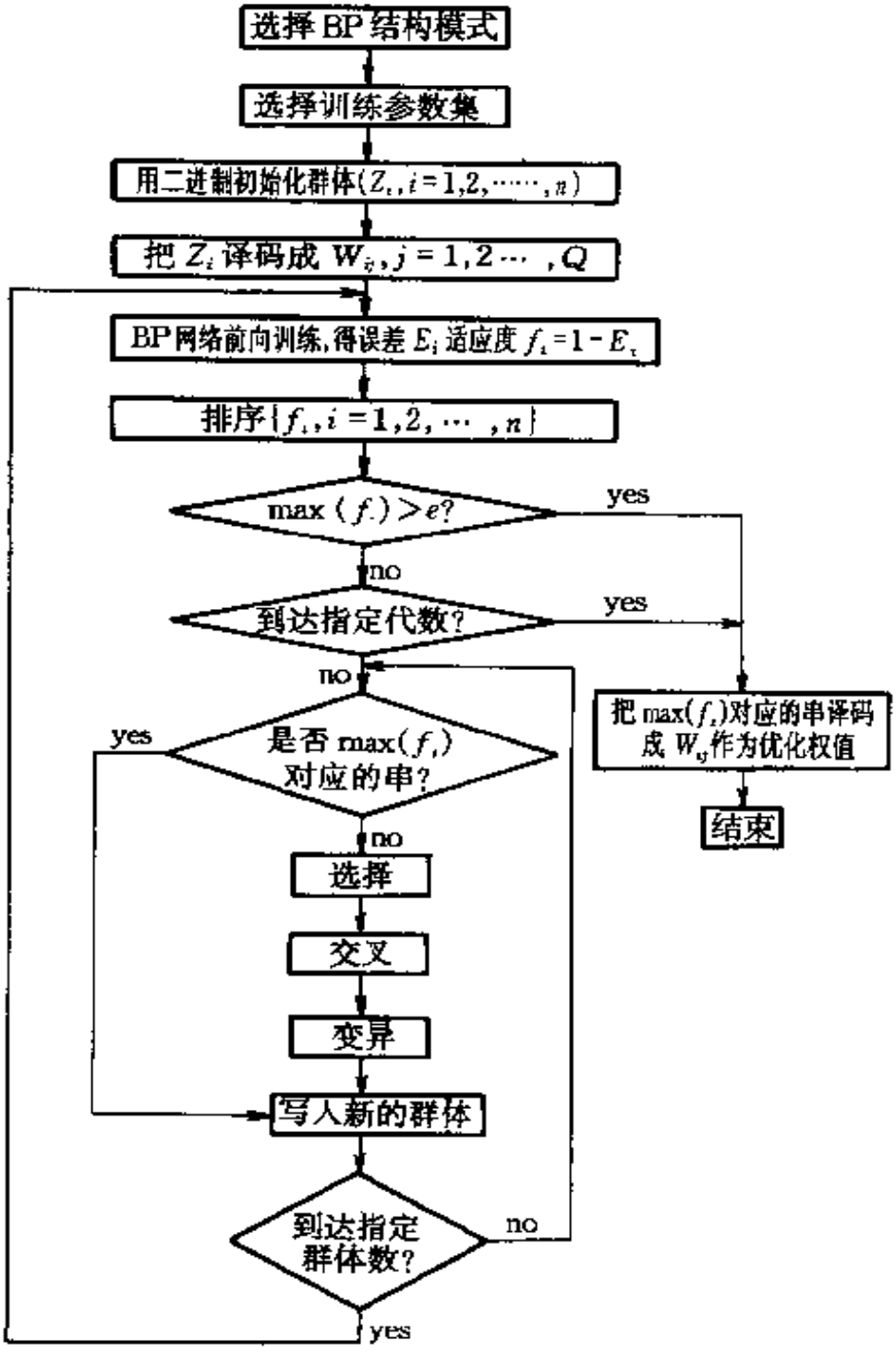


图 5—14　组合网络运算过程

及最大突水量按表5—5的定义取值，得训练样本，如表5—7所示。

表5—6 突 水 资 料

序号	工作面名称	水压(MPa)	含水层	隔水层厚度(m)	底板采动导水裂隙带深度(m)	断层落差(m)	最大突水量(m^3/h)
1	淮南谢一矿33采区底板	2.0	薄层灰岩	30	12.9	1.5	1085
2	焦作九里山矿12031工作面	1.80	薄层灰岩	23	12.3	0	1620
3	新汶潘西矿潘东井106工作面	1.70	厚层灰岩	23.8	10.7	5	10640
4	肥城陶阳矿9901工作面	0.6	薄层灰岩	13	8.6	8	1083
5	肥城大封矿9204工作面	1.1	薄层灰岩	16.5	16.5	3.2	1628
6	肥城陶阳矿9906工作面	1.42	薄层灰岩	25.7	15.2	0	420
7	淄博夏庄矿二井1007工作面	5.19	厚层灰岩	55.9	17.0	7	4006
8	焦作王封矿1441工作面	1.1	薄层灰岩	20	8.5	15	3060
9	峰峰二矿2682工作面	2.9	薄层灰岩	40	20.9	0	865
10	新汶协庄矿31104东工作面	1.3	薄层灰岩	30	18.3	4.9	1960

续表

序号	工作面名称	水压(MPa)	含水层	隔水层厚度(m)	底板采动导水裂隙带深度(m)	断层落差(m)	最大突水量(m^3/h)
11	淄博龙泉矿 149 工作面	4.06	厚层灰岩	65.86	16.0	10	1512
12	肥城陶阳矿 9903 工作面	0.85	薄层灰岩	23.1	13.9	0.4	310
13	淮北杨庄矿Ⅱ617 工作面	3.11	薄层灰岩	44.3	14.4	3.5	3153
14	峰峰一矿 1532 工作面	2.3	厚层灰岩	7.3	7.3	0	4212
15	肥城查庄矿 7505 工作面	1.01	薄层灰岩	18	11.7	0	586.8

表 5—7 训 练 样 本

序号	工作面名称	水压(MPa)	含水层	隔水层厚度(m)	底板采动导水裂隙带深度(m)	断层落差(m)	最大突水量
1	淮南谢一矿 33 采区底板	2.0	1	30	12.9	1.5	0100
2	焦作九里山矿 12031 工作面	1.80	1	23	12.3	0	0010
3	新汶潘西矿潘东井 106 工作面	1.70	0	10	10.7	5	0001

续表

序号	工作面名称	水压(MPa)	含水层	隔水层厚度(m)	底板采动导水裂隙带深度(m)	断层落差(m)	最大突水量
4	肥城陶阳矿9901工作面	0.6	1	17	8.6	8	0100
5	肥城大封矿9204工作面	1.08	1	16.5	16.5	3.2	0010
6	肥城陶阳矿9906工作面	1.42	1	25.7	15.2	0	1000
7	淄博夏庄矿二井1007工作面	5.19	0	55.9	17.0	7	0001
8	焦作王封矿1441工作面	1.1	1	20	8.5	15	0001
9	峰峰二矿2682工作面	2.9	1	40	20.9	0	0100
10	新汶协庄矿31104东工作面	1.3	1	30	18.3	4.9	0010
11	淄博龙泉矿149工作面	4.06	0	65.86	16.0	10	0010
12	肥城陶阳矿9903工作面	0.85	1	23.1	13.9	0.4	1000
13	淮北杨庄矿1617工作面	3.11	1	44.3	14.4	3.5	0001
14	峰峰一矿1532工作面	2.3	0	7.3	7.3	0	0001
15	肥城查庄矿7505工作面	1.01	1	18	11.7	0	1000

根据表5—7，建立BP网络，其中输入层节点5个，各节点取值与表5—7对应，输出层节点为4个，分别对应最大突水量的4个等级；隐含层取15个节点。用遗传算法训练该BP网络，运算400代达到要求精度，表5—8为用训练好的网络对训练样本进行学习的结果。由表5—8可知，网络采用遗传算法训练后，已充分掌握了数据间复杂的非线性关系，可用学习好的网络进行预测。

表5—8 训练样本的学习结果

序号	实际突水量	预测突水量	误差	序号	实际突水量	预测突水量	误差
1	0	0.00012	0.00012	6	1	0.98958	−0.01042
	1	0.99465	−0.00535		0	0.00028	0.00028
	0	0.00121	0.00121		0	0.00139	0.00139
	0	0.00517	0.00517		0	0.00875	0.00875
2	0	0.00200	0.00200	7	0	0.00244	0.00244
	0	0.00029	0.00029		0	0.00006	0.00006
	1	0.99683	−0.00317		0	0.00095	0.00095
	0	0.00008	0.00008		1	0.99760	−0.00240
3	0	0.00039	0.00039	8	0	0.00073	0.00073
	0	0.00276	0.00276		0	0.00011	0.00011
	0	0.00728	0.00728		0	0.00274	0.00274
	1	0.99167	−0.00833		1	0.99638	−0.00362
4	0	0.00331	0.00331	9	0	0.00068	0.00068
	1	0.99682	−0.00318		1	0.99370	−0.00630
	0	0.00004	0.00004		0	0.00008	0.00008
	0	0.00208	0.00208		0	0.00413	0.00413
5	0	0.00325	0.00325	10	0	0.00016	0.00016
	0	0.00154	0.00154		0	0.00186	0.00186
	1	0.99571	−0.00429		1	0.99763	−0.00237
	0	0.00035	0.00035		0	0.00049	0.00049

续表

序号	实际突水量	预测突水量	误差	序号	实际突水量	预测突水量	误差
11	0	0.00556	0.00556	14	0	0.00195	0.00195
	0	0.00024	0.00024		0	0.00056	0.00056
	1	0.99231	−0.00769		0	0.00005	0.00005
	0	0.00102	0.00102		1	0.99787	−0.00213
12	1	0.99535	−0.00465	15	1	0.99343	−0.00657
	0	0.00014	0.00014		0	0.00031	0.00031
	0	0.00085	0.00085		0	0.00213	0.00213
	0	0.00386	0.00386		0	0.00436	0.00436
13	0	0.00033	0.00033				
	0	0.00008	0.00008				
	0	0.00093	0.00093				
	1	0.99843	−0.00157				

表 5—9 为 4 个采煤工作面底板突水资料，表 5—10 为利用上述训练好的网络对这 4 个采煤工作面底板突水量预测的结果。另外，我们仅采用 BP 算法同样用表 5—7 中的训练样本对网络进行训练，并用训练好的网络对表 5—9 中的 4 个采煤工作面底板突水量进行了预测，其预测结果如表 5—11 所示。

表 5—9 预 测 样 本

序号	工作面名称	水压 (MPa)	含水层	隔水层厚度 (m)	底板采动导水裂隙带深度 (m)	断层落差	最大突水量 (m^3/h)
1	蜂峰二矿 2671 工作面	2.8	1	40	15	6	1310
2	焦作韩王矿 2131 工作面	1.1	1	16	8	0	900

续表

序号	工作面名称	水压(MPa)	含水层	隔水层厚度(m)	底板采动导水裂隙带深度(m)	断层落差	最大突水量(m^3/h)
3	大封 9206 工作面	1.26	1	23.5	8.5	0	436
4	焦作冯营矿 1301 工作面	1.90	1	15	13	65	5082

表 5—10 预 测 结 果

序号	实际突水量	预测突水量	误差	序号	实际突水量	预测突水量	误差
1	0	0.00054	0.00054	3	1	0.99830	−0.00170
	0	0.00126	0.00126		0	0.00021	0.00021
	1	0.98933	−0.01067		0	0.00085	0.00085
	0	0.00879	0.00879		0	0.00113	0.00113
2	0	0.01671	0.01671	4	0	0.00089	0.00089
	1	0.73625	−0.26375		0	0.00021	0.00021
	0	0.27450	0.27450		0	0.00007	0.00007
	0	0.00052	0.00052		1	0.99852	−0.00148

从表 5—10、表 5—11 可以看出，如果以 4 个输出节点值最大者作为突水量判断依据，采用遗传算算法训练的网络，4 个全部判对，判对率达到 100%，预测效果比较理想，而仅采用 BP 算法训练的网络，在 4 个突水工作面中，仅判对了 3

个，判对率为75%。可见采用BP神经网络和遗传算法的组合模型进行底板突水预测比单一的BP网络具有较大的优越性，很好地弥补了BP网络的缺陷。

表5-11 预 测 结 果

序号	实际突水量	预测突水量	误差	序号	实际突水量	预测突水量	误差
1	0	0.00016	0.00016	3	1	0.95331	−0.04699
	0	0.00273	0.00273		0	0.00046	0.00046
	1	0.93460	−0.06064		0	0.000571	0.00571
	0	0.00761	0.00761		0	0.000418	0.00418
2	0	0.51906	0.51916	4	0	0.2362	0.02362
	1	0.31874	−0.68126		0	0.00161	0.00161
	0	0.00132	0.00132		0	0.00683	0.00683
	0	0.00025	0.00025		1	0.9538	−0.04362

5.5 本章小结

本章基于BP人工神经网络的非线性动力学机制，并考虑到BP网络存在的缺陷，采用遗传算法训练BP网络，建立了底板突水量预测的组合人工神经网络预测模型。实例分析表明，采用遗传算法训练BP网络明显提高了人工神经网络的预测精度，证实了用人工神经网络组合预测模型对底板突水量进行预测具有较高的准确性。

参 考 文 献

[1] 尼科里斯 . G. , 普利高津 I. 徐锡申等译。非平衡系统的自组织，北京科学出版社，1986

[2] 伊普里戈金著，曾庆宏等译，从存在到演化— 自然科学中的时间及复杂性，上海科学技术出版社，1986

[3] Hakan, H. , Advanced Synergetics. Springer—Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1983

[4] Hakan, H., Sgnergetics, Springer, 1977

[5] Rene Thom., Structural Stability and Morphogenesis, Reading Mass, 1975

[6] Loren, E. N., Deterministic Nonperiodic Flow J. Atoms. Sci, 20 (1963): 130～192

[7] Mandelbrot, B. B., The Fractal Geometry of Nature, Freemann, 1982

[8] 沈清、胡德文、时春编著，神经网应用技术，国防科技大学出版社，1993

[9] Feigenbaum. M. J. . Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations, J. stat. phys. 19 (1978) 25

[10] Pomeau, P. and Manneville. P. , Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems, Commun. Math. Phys. , 74 (1980) 189

[11] Grebogi, C. , ott, E. and Yorke, J. A. , Chaotic Attractor in Crisis, Phys. Rev. Lett. , 48 (1982) 1507

[12] Packara, N. H. , Gemertry From a Time Series. Phys. Rev. Lett. . 45, 712 (1980)

[13] Takens, F. , Detecting Strange Atrractor In Turbulence, Lecture Notes in Math. 898, 336 (1981)

[14] Grassberger, P. and Procacia, A. , Dimension and Entropies of

Strange Attractors From a luctuating Dynamics Approach, Physica. DB, 34 (1984)

[15] Faramer, J. D., Predicating Chaotic Time Series. Phy. Rev. Lett., 59 (8), 845 (1987)

[16] 郝柏林，分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流与其它，物理学进展，1983，Vol (3)

[17] 郑伟谋、郝柏林，实用符号动力学，物理学进展，1990，Vol. 10：316

[18] 郑祖光、刘式达，对大气湍流发生问题的探讨，中国科学，1987 (6)：669

[19] 杨维明编著，时空混沌和耦合映象格子，上海科技教育出版社，1992

[20] Wilon, K. G. and Kogut, J., The Renormalization Group and the Expansion, phys. Rev. 1974, C12, 75～200

[21] 林振山，当代气候的时间序列分析和模式特征，北京大学学报，1991，Vol. 27

[22] 林振山，超熵产生作为气候突变判据的一个例子，气象学报，1989，Vol. 9

[23] 林振山，长期预报的相空间相似法，高原气象，1991，Vol. 10

[24] 林振山著，非线性动力学与大气科学，南京大学出版社，1993

[25] 郭秉荣等著，气候系统的非线性特征及其预测理论，气象出版社，1996

[26] Fracdrich. K., Estimating Weather and Climate Predicatability on Tractor, J. Atoms Sci. 44, 7 (1987)

[27] 林振山著，气候建模．诊断和预测的研究，气象出版社，1996

[28] 胡平等，地震过程动力学行为和可预报性问题研究，地球物理学报，1996，No. 6

[29] Hirrata, T., A new perspective for earthquakes and fractals, J. Seism. soc. Japan, 40, 459～468, 1987

[30] 安镇文等，大震前后地震活动的时空分维特征，地震学报，1989，

Vol. 11

[31] 孙建中，分维理论在形变分析中的应用，地壳形变与地震，1990，No. 3

[32] 安镇文等，大地震孕育过程中的浑沌特征，地震学报，1992，No. 4

[33] Burrige，R. and knopoff，L.，Model and Theoritical Seismicity，Bull. Sei. Soc. Am. 57，341～571，1967

[34] 蔡静观等，云南地区强震前孕震系统的非线性阶段，地震研究，1993，No. 4

[35] Arile，C. A. Scholz，C. H.，Fractal analysis Applied to Characteristic Segments of the San Andreas fault，J. Geophys. Res.，92，331～334，1987

[36] Okubo，P. G. and Aki，K.，Fractal Geometry in the San Andreas Fault System，J. Geophgs. Res. 92，345～355. 1987

[37] Cao. T. and Aki，K.，Seismicity Simulation with a Mass－Spring Model and a Displacement Hardening－Softening Friction Law，Pure Apl. Geophys. 122，10～24，1984

[38] Carlson，J. M. and Langer，J. S.，Mechanical Model of an Earthquake Fault，Phys. Rew. A40，6470--84，1989

[39] 朱元清、石耀霖，地震活动性研究中的倍周期分岔和混沌现象，地球物理学报，1991，No. 1

[40] 康仲远，岩体准静态运动失稳的 Cusp 型突变模型，地震学报，1984，No. 3

[41] 殷有泉、郑顾团，断层地震的尖角型突变模型，地球物理学报，1988，No. 6

[42] 杨修信等，压扭性断层地震过程的 Cusp 型突变分析，中国科学(B 辑)，1994，No. 6

[43] 郑顾团等，有渗透作用的断裂带破裂机理的研究，1990，No. 15

[44] 赵松年、于允贤编著，突变理论及其在生物医学中的应用，科学出版社，1987

[45] Sussman，H. J. & Zahler，R. S.，Catastrophe Theory as Applied

to the Social and Biological Sciences: A Critique, Synthese, 37, 117－216, 1978

[46] 童勤业等，心脏细胞的非线性动力学分析，中国生物医学工程学报，1992，No. 1

[47] Shafer, M. A., Catastrophe Theory Medel for Ambiguous Perception. Social Sciences Working Paper, lloa, Univ. of California, Irvine, 1976

[48] 谢和平，分形几何及其在岩土力学中的应用，岩土工程学报，1992，No. 1

[49] 谢和平，大理石微观断裂的分形，(fractal) 模型研究，1989，No. 5

[50] 谢和平著，岩石力学中的分形，荷兰 Balkma 出版社，1993

[51] 谢和平、陈至达，分形 (fractal) 几何与岩石断裂，力学学报，1988，No. 3

[52] 谢和平、陈至达，岩石类材料裂纹分叉非规则性几何分形效应，力学学报，1989，No. 5

[53] 李学良等，大理岩非分叉断裂的随机分形模型，固体力学学报，1995，No. 2

[54] 牛志仁、施行觉，岩石分形断裂的统计理论，地球物理学报，1992，No. 5

[55] 谢和平、岩土介质的分形孔隙和分形粒子，力学进展，1993，No. 2

[56] 陈乃明等，岩体节理网络分形的计算机模拟研究，岩石力学与工程学报，1995，No. 2

[57] 胡瑞林等，变形条件下黄土微结构分形特征及其工程意义，分形理论与应用，中国科技大学出版社，1993：348～315

[58] 施行觉等，岩石断面的分形测量及其分维的计算，地球物理学报，1992，No. 2

[59] 张继春、徐小荷，岩体断裂几何形状的分形研究，中国有色金属学报，1993，3 (4)，11～15

[60] 大野博等，岩体断裂系的分数维，地震地质译丛，1990

[61] 李克文等，油藏岩石孔隙结构的分形描述及应用，分形理论及应

用，中国科技大学出版社．1993：362～365
[62] 唐春安、徐小荷，岩石破裂过程失稳尖点灾变模型，岩石力学与工程学报，1990，No.2
[63] 唐春安著，岩石破裂过程中的灾变，煤炭工业出版社，1993，6
[64] 谭云亮、王泳嘉，煤矿顶板冒落分形预报方法，中国安全科学学报，1995 年增刊
[65] 谭云亮、杨永杰，煤层顶板冒落分形预报可行性，岩石力学与工程学报，1996，No.2
[66]李庆斌，节理岩体断裂的损伤与分形效应，力学与实践，1993，No.4
[67]刘松玉、方磊，试论粘性土粒度分布的分形结构，工程勘察，1992，No.2
[68]易顺民，泥石流堆积物的分形结构特征，自然灾害学报，1994，No.2
[69] 易顺民，滑坡滑动带土的分维特征及其意义，中国地质灾害与防治学报，1995，No.2
[70] 黄国名、苏文智，斜坡蠕滑预报的相空间理论，水文地质工程地质，1996，Vol4
[71]高鹏、艾南山，土质滑动破坏的突变模型，工程地学报，1994，No.2
[72] 黄润秋、许强，突变理论在工程地质中的应用，工程地质学报，1993，No.1
[73] 黄润秋、许强著，工程地质广义系统科学分析原理及应用，地质出版社，1997，9
[74] 秦四清，非线性工程地质学导引，西南交通大学出版社，1993
[75] 罗德军，自组织临界状态及其在泥石流暴发中的运用，四川大学硕士学位论文，1994
[76] 刘鼎文等，突变理论在边坡稳定性研究中的应用，一九八七年全国滑坡学术讲座会论文选集，四川科学技术出版社，1989
[77] 周萃英，滑坡灾害的复杂性理论研究，中国地质大学博士学位论文，1992
[78] 黄润秋、许强，斜坡失稳时间的协同预测模型，山地研究，1997
[79]许强、黄润秋、施继承，斜坡稳定性空间预测的神经网络方法，中

国地质灾害与防治学报，1994，No.2
[80] 秦四清、张倬元、王士天，顺层斜坡失稳的突变理论分析，中国地质灾害与防治学报，1993，No.1
[81] 崔鹏，泥石流起动机理的研究，北京林业大学博士论文，1990
[82] 仪垂祥，泥石流突变模型，自然灾害学报，1995，No.2
[83] 吴中如、潘卫平，应用 Lyapunov 指数研究岩土边坡的稳定判据，岩石力学与工程学报，1997，No.3
[84] 秦四清、张倬元、黄润秋，滑坡灾害预报的非线性动力学方法，水文地质工程地质，1993，No.5
[85] 中国统配煤矿总公司生产局、煤炭科技情报研究所，煤矿水害典型案例汇编，1992.1
[86] 李白英、弭尚振，采矿工程水文地质学（上册），山东矿业学院教材，1988
[87] 李白英、沈光寒、荆自刚等，预防采掘工作面底板突水的理论与实践，第二十二届国际采矿安全会议论文集，煤炭工业出版社，1987
[88] 张金才、刘天泉，论煤层底板采动裂隙带的深度及分布特征，煤炭学报，1990，No.2
[89]张金才，煤层底板突水预测的理论判据及应用，力学与实践，1990，No.2
[90]张金才，煤层底板突水预测的理论与实践，煤田地质与勘探，1989，No.4
[91] 高延法、李白英，受奥灰承压水威胁煤层采场底板变形破坏规律研究，煤炭学报，1992，No.1
[92] 高延法、施龙青等，底板突水规律与突水优势面，中国矿业大学出版社，1999.6
[93] 李抗抗等，用于煤层底板突水机理研究的原位测试技术，煤田地质与勘探.1997，No.3
[94] 钱鸣高、缪协兴、黎良杰，采场底板破坏规律的理论研究，岩土工程学报，1995，No.6

[95] 王作宇、刘鸿泉，承压水上采煤，煤炭工业出版社，1992
[96] 郑颖人、刘兴华、近代非线性科学与岩石力学问题，岩土工程学报，1996，No.1
[97] Keilis—Borok，V.I. 著，周翟英等译，非线性系统的地球岩石层及其在地震预报中的意义，世界地震译丛，1991，No.1
[98] 郝柏林著，从抛物线谈起——混沌动力学引论，上海科技教育出版社，1993.9
[99] 刘式达、刘式适，分形和分维引论，气象出版社，1993.9
[100]Wolf，A.，Determining Lyapunov Exponents from a Time Series，Physica 160，285（1988）
[101]Henley，S.，Catastrophe Theory Models in Geology，Mathematical Geology，1976，8（6）：P649～655
[102] John M. Cubitt and Brian shaw，The Geological Implication of Steady—State Mechanisms in Catastrophe Theory，Mathematical Geology，1976，8（6）：P657～662
[103] 张业民、宋长清等，软粘土流动性的尖点突变模型，岩土工程学报，1995，No.4
[104] 秦四清、何怀峰，狭窄煤柱冲击地压失稳的突变理论分析，水文地质工程地质，1995，No.5
[105] 凌复华著，突变理论及应用，上海交通大学出版社，1987，12
[106] Saunders，P.T.，凌复华译，突变理论入门，上海科学技术文献出版社，1983
[107] Gilmore，R.，Catastrophe Theory for Scientists and Engineers，Wiley，New Youk. 1981
[108] 仪垂祥编著，非线性科学及其在地学中的应用，气象出版社，1995，4
[109]何广讷等编著，土工中的若干新理论研究与应用，水利电力出版社，1994
[110] 张金才等著，岩体渗流与煤层底板突水，地质出版社，1997，8
[111] 赵全福主编，煤矿安全手册矿井防治水分册，煤炭工业出版社，

1992

[112] 李白英等，《华北型煤田奥灰岩溶水综合防治工业性试验》王风矿区六采区下山±0～50m水平大青和下架煤层开采可行性专题研究报告，山东矿业学院特殊开采研究所，1988.9

[113] Hirata，T.，Fractal Dimeasion of Fault Systems in Japan：Fractal Structure in Rock Fracture Geometry at Various Scales. PAGE-OPH，1989，131：157～170

[114] 施泽进等，四川地区断层空间分布的多重分形特征，现代地质，1995，No.4

[115] [美] D.L.，特科特著，陈隅等译，分形与混沌——在地质学和地球物理学中的应用，地震出版社，1993

[116] 于渌、郝柏林著，相变和临界现象，科学出版社，1984

[117] 吴大进、曹力、陈立华，协同学原理与应用，华中理工大学出版社，1990

[118] H. 哈肯著，信息与自组织，四川教育出版社，1988

[119] 戴葵编著，神经网络实现技术，国防科技大学出版社，1998.7

[120] 王永骥、涂健编著，神经元网络控制，机械工业出版社，1998，2

[121] 李东升等，人工神经网络及其在地震预报中的应用，地震，1995，No.4

[122] 夏宏泉、廖明光，基于神经网络的测井评价油层污染研究，西南石油学院学报，1998，No.2

[123] 于建华，应用人工神经网络自动识别岩性，石油地球物理勘探，1993，No.1

[124] Mark-J.，Gabbert，随机梯度上升神经网络用于测井数据的主成分分析，国外油气勘探，1994，No.6

[125] 许强、黄润秋等，斜坡稳定性空间预测的神经网络方法，中国地质灾害与防治学报，1994，No.2

[126] 蔡煜东等，砂土液化预测的人工神经网络模型，岩土工程学报，1993，No.6

[127]陈秦生、蔡元龙，用模式识别方法预测煤矿突水，煤炭学报，1990，No. 4

[128] 李加祥，用模糊数学预测煤层底板突水，山东矿业学院学报，1990，No. 3

[129]淄博矿务局，淄博矿区煤层底板突水资料的分析与利用，淄煤科技，1979，No. 2

[130]周明、孙树栋编著，遗传算法原理及应用，国防工业出版社，1999，6

[131][日]玄光男、程润伟著，遗传算法与工程设计，科学出版社，2000，1

[132]Holland，J. H.，Adaptation in Nature and Artificial Systems，MIT Press，1992

[133] De Jong K A. An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems，Ph. D Dissertation，University of Michigan，No. 1975

[134]Goldberg D. E.，Genetic Algorithms in Search，Optimization and Machine Learning，Addison—Wesley，1989

[135]钱鸣高、缪协兴、许家林，岩层控制中的关键层理论，煤炭学报，1996，No. 3

[136]Li，T. Y. and Yorke，J. A.，Am. Math. Monthly，82，985，1975

[137] 谢和平，岩石混凝土损伤力学，中国矿业大学出版社，1990

[138] 谭云亮、宋扬，矿山压力现象的神经网络聚类分析模型。矿山压力与顶板管理，1995（3～4）

[139] 谭云亮、宋扬，顶板运动过程中混沌性分析，矿山压力与顶板管理，1997，（3～4）

[140] 刘秉正编著，非线性动力学与混沌基础，东北师范大学出版社，1994. 9

[141] 黄润生编著，混沌及其应用，武汉大学出版社，2000. 1

[142] 吴祥兴、陈忠等编者，混沌学导论，上海科学技术文献出版社，1996. 11

[143] 陈守煜等，工程模糊集理论与应用，国防工业出版社，1998.11
[144]王士同编著，神经模糊系统及其应用，北京航空航天大学出版社，1998.6
[145]王连国、宋扬，煤层底板突水的突变学特征，中国安全科学学报，1999，No.5
[146] 王连国、宋扬，煤层底板突水突变模型，工程地质学报，2000，No.2
[147]王连国、宋扬，矿井突水危险性评价模型，工程地质学报，2001，No.3
[148] 王连国、宋扬，煤层底板突水组合人工神经网络预测，岩土工程学报，2001，No.4
[149]王连国、吴琅、宋扬，煤层底板变形破坏过程中混沌动力学特征研究，岩石力学与工程学报，2001，增2
[150] 王连国、宋扬，煤层底板突水自组织临界特性研究，岩石力学与工程学报
[151] Wang Lianguo，Songyang，Study On catastrophic mechanism for water－inrush from coal floor，2001年国际岩石力学学会学术年会暨第二届亚洲岩石力学学术大会论文集，荷兰 Balkma 出版社