

## 4.数值模拟方法

核心参考文献: Hodges (2000), Casulli和Cheng (1992), Casulli和Cattani (1994)。

### 4.1引言

控制方程组被离散到笛卡儿解网格上, 离散格式为单速度份量定义在网格表面而标量定义在网格中心的交错格式。在离散方程组中, 单元表面用诸如*i*+1/2的下标表示, 而单元中心用整数 (*i*, *j*, *k*) 值表示。下文的叙述采用Casulli 和Cheng的符号表示法。在方程组的离散形式中, 我们将用下标来表示离散空间(*i*, *j*, *k*)中的位置。令 $U_{i,j}^{n+1}$ 表示*n*+1时段、速度值在位置(*i*, *j*)时的水柱向量, 则时间*n*\*的解空间中所有的*K*满足:

$$b_{i,j} \leq \sum_{m=1}^{k_{\max}} \Delta z_{i,j,m}^* \leq \eta_{i,j}$$

式中 $b_{i,j}$ 为位置(*i*, *j*)处的水底高程,  $\eta_{i,j}$ 为自由面的高度,  $k_{\max}$ 为垂直方向上网格单元的最大数目。本手册中其它向量也运用类似的定义。

### 4.2动量的半隐式格式

速度场的基本半隐式化演进可被离散到*n*\*的解空间, 类似TRIM中的方法, 即得:

$$\begin{aligned} U_{i+1/2,j}^{n+1} &= A_{i+1/2,j}^* G_{i+1/2,j}^* - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \theta_1 (\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) + (1 - \theta_1) (\eta_{i+1,j}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) \right] \\ V_{i,j+1/2}^{n+1} &= A_{i,j+1/2}^* G_{i,j+1/2}^* - g \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ \theta_1 (\eta_{i,j+1}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) + (1 - \theta_1) (\eta_{i,j+1}^{n+1} - \eta_{i,j}^{n+1}) \right] \end{aligned}$$

式中*G*是一显式源项向量,  $\theta_1$ 表示自由水面的“隐性度”(隐性度一般的取值范围为 $0.5 < \theta_1 < 1.0$ 已在ELCOM版本1中编码, 但未经全面测试)。ELCOM中默认半隐格式是对从形式上看为时间上一阶精确的自由水面演进采用后向欧拉离散法(即 $\theta_1 = 1$ )。

经证明(Casulli和Cattani, 1994), 求解流体静力学方程组使用的后向欧拉法可被扩展为方程4.2和4.3的一般二层格式, 从形式来看为二阶精确(当 $\theta_1 = 1$ 时)。然而在粗网格模拟中, 数值离散精度的增加不一定导致模型技巧的提高。通常, 在对许多湖泊和河口进行模拟时, 正压模态是通过CFL条件来求解的, CFL取值可能为5到10之间或大于10。在这种情况下, 半隐式离散化或许稳定, 但水流物理过程表达“准确程度”的决定因素为现研究的流态类型。截断误差的性质对于了解该方法性能至关重要。若采用一阶方法, 导程误差为二阶, 且在自由水面上产生阻尼波。若采用二阶方法, 导程误差扩散, 且在自由水面产生在水域上传播的数值波; 通常使得线性正压波演化为陡峭前沿涌潮, 使得受地形影响的表面波产生局地高速流。因此, 一阶方法可以较好描述自由水面形态和局部正压流速, 但显示出自由水面惯性响应的多余阻尼。相比之下, 二阶方法以最低的数值耗散将能量保持为表面波的形式, 但对于波的形态描述较差。在静水力学求解中, 弥散波将导致贯穿水柱的人工局部加压的产生, 这对于求解技术是不利的。相比之下, 表面波的多余阻尼在风速减弱的时候将导致与正压响应相关的大规模运动的减弱(即正压模式的“震荡”是衰减的)。总体上, 高强度增压系统采用后向欧拉格式模拟较好, 因为两、三个周期以前的波能通常与一阶的物理过程不相关。

采用二层隐式离散化(Casulli和Cheng, 1992)或其它显式离散化技术, 矩阵*A*可以表示

为:

$$A = \begin{bmatrix} b_n + \gamma_k & c_n & 0 & 0 & 0 \\ a_n - 1 & b_n - 1 & c_n - 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_n - 2 & b_n - 2 & c_n - 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 + \gamma_1 \end{bmatrix}$$

A中的 $\gamma$ 可以由边界条件确定, a, b, c项分别为:

$$\begin{aligned} b_k &= -a_k + \Delta z_k - c_k \\ a_k &= -\theta_2 \left. \frac{v_3 \Delta t}{\Delta z} \right|_{k+1/2} \\ c_k &= -\theta_2 \left. \frac{v_3 \Delta t}{\Delta z} \right|_{k-1/2} \end{aligned}$$

系数 $\theta_2$ 通过对数值离散化技术的选择来确定。对于 $\theta_2=1$ 的情况, 垂向粘性项通过后向欧拉法离散。对于 $\theta_2=0$ 的情况, 离散化是显式的, 且A除对角外其它的项均为0。ELCOM在用户选择垂向湍流扩散模拟时取 $\theta_2=1$ , 选择混合层模拟时, 取 $\theta_2=0$ 。

公式4.2和4.3中的源项G可被表示为:

$$\begin{aligned} G_{i+1/2,j}^* &= L(\tilde{U}_{i+1/2,j}) - \Delta t \{ B_{i+1/2,j}^* + D_x(\tilde{U})_{i+1/2,j} + D_y(\tilde{U})_{i+1/2,j} - f\tilde{V}_{i+1/2,j} \} \\ G_{i,j+1/2}^* &= L(\tilde{V}_{i,j+1/2}) - \Delta t \{ B_{i,j+1/2}^* + D_x(\tilde{V})_{i,j+1/2} + D_y(\tilde{V})_{i,j+1/2} - f\tilde{U}_{i,j+1/2} \} \end{aligned}$$

算子L()表示平流离散化, B()表示正压离散化, D()表示水平湍流扩散离散化。ELCOM的垂向扩散的计算既可通过采用涡流粘度项, 又可使用垂向混合模型。当采用涡流粘度项时,  $U = U^n$ , 而混合模型可用如下算子表示:

$$\tilde{U}_{i,j,k} = M(U_{i,j,k}^*)$$

混合算子M()的具体描述见[<. >。](#)

### 4.3 水平扩散离散化

在文献(Casulli和Cheng, 1992)提出的原TRIM方法中, 当在迹线起点处对水平扩散项进行离散化处理时, 发现增加了其复杂性却并不能给现行方法的精度带来显著提高。因此, 方程4.8和4.9中的水平扩散项( $D_x$ ,  $D_y$ )的离散化采用二阶模板, 得:

$$D_x(\phi_{i,j,k}^*) = \frac{v}{\Delta x^2} (\phi_{i+1,j,k}^* - 2\phi_{i,j,k}^* + \phi_{i-1,j,k}^*)$$

## 4.4 斜压离散化

在x方向上斜压项B被离散为:

$$B_{i+1/2,j,k}^n = \frac{g}{\rho_0 \Delta x} \left\{ \sum_{m=k}^F \rho'_{i+1,j,m} - \sum_{m=k}^F \rho'_{i,j,m} \right\}^n$$

式中 $k=F$ 表示包含自由面的单元。在y方向上也得到类似的扩散项和斜压项的表达式。忽略动量和标量迁移方程组中的垂向扩散项，目前的方案则可免去TRIM中对每个网格水柱的每个水平速度份量和传输标量组成的三对角线矩阵求逆的步骤。

## 4.5 自由面离散化

自由面演进方程可被离散为:

$$\eta_{i,j}^{n+1} = \eta_{i,j}^n - \theta_1 \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x \left\{ (\Delta Z^n)^T U^{n+1} \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y \left\{ (\Delta Z^n)^T V^{n+1} \right\} \right] - (1 - \theta_1) \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x \left\{ (\Delta Z^n)^T U^n \right\} - \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y \left\{ (\Delta Z^n)^T V^n \right\} \right]$$

式中 $\Delta Z$ 为垂直方向上网格间距的向量，算符 $\delta_x$ 和 $\delta_y$ 表示离散差分，例如:

$$\delta_x(\phi) \equiv \phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}$$

用方程4.13代替方程4.2和4.3，则为 $(n+1)$ 时段的自由面高度提供一个五对角线系统方程组，应用共轭梯度法很容易求解该自由面高度。ELCOM中采用的共轭梯度法与TRIM中的相似，详见文献（Casulli 和 Cheng，1992）中的阐述。

## 4.6 水平对流离散化

在地球物理尺度上进行数值模拟时，难点之一是可能出现多种流态，尤其是内波可能在局部范围内间竭地产生强烈的垂直运动。在内波分辨率要重点考虑的区域，数值模拟方法的选择是由全流场中某个小区域的精确性和稳定性需求来决定的。在 $CFL < O(1)$ 条件下，许多显式空间离散方法是稳定的，但是当水流方向与网格边线不重合时，在 $CFL > O(0.5)$ 条件下，这些方法的三维计算精度通常很差。

二次方法的缺点是其计算量很大。然而在低CFL值（ $CFL < 0.1$ ）的区域，二次型半拉格朗日方法的求解同样受控于使用二次迎风离散化方法所得的七点迎风格式模板的条件，这种相似性可用于减少低CFL值区域的计算量要求，而又不会使得整个求解方法的精度有显著的降低。在不同的区域使用不同方法的概念可被归纳为一种“混合”数值方法的概念。通常的混合模型是根据某种衡量标准把流场划分为不同的水流区域，分别使用不同的求解方法。根据我们的目的，该标准即是CFL值，在CFL值低时使用一种离散技术，而CFL值高时使用另一种离散技术。

当前的混合方法已测试到二层格式，在 $0 < CFL < 2$ 的区域内使用二次半拉格朗日法进行离散，该CFL值上限为可通过二次SL法计算得出并且在调整模板时无需额外计算量的最大CFL值。在实际运用中，当 $CFL > 2$ 时，计算精度是不可靠的，因此该上限是一个非常合理的必要条件。在 $CFL > 2$ 的区域，模型使用线性半拉格朗日离散法（即：TRIM中使用的方法）以使重构模板时的计算量最小。

### 4.6.1 线性半拉格朗日方法

对于分层流，半拉格朗日方法效果很理想，因为在 $0 < CFL < 1$ 的区域里，该法既精确又稳定。此外，半拉格朗日法能在CFL值更高的区域里保持稳定，虽然当网格不能很好地处理水流流线时，该方法在CFL值高的区域的精度会降低。然而，对于分层流，是否能在水平方向上的 $CFL > 1$ 时提供稳定解对于数值方法的选择是次要的。最大时间步长的选取一般受限于以下两个条件之一：（1）分层作用最强烈的区域中斜压波的传播速度；（2）在标量迁移过程中可接受的最大数值扩散。前者要求波的CFL值小于1以维持稳定性，而后的限制取决于模型结果所需要的网格分辨率和时段长。

水平对流的半拉格朗日形式，是通过寻找连续空间中的近似点（拉格朗日点）来获得的，这些拉格朗日点以 $\Delta t$ 为时间步长随速度场（ $U, V, W$ ）平流输送至离散点（ $i, j, k$ ）。用数值表达，即质点的位置（ $i, j, k$ ）沿着用速度场 $U, V, W$ 表示的流线逆向移动。 $U, V, W$ 流场可由单时间层或多时间层获得，这取决于预期的精度和计算复杂程度。半拉格朗日离散方法的评述详见文献（Staniforth和Cote，1991）。在线性单时间层的半拉格朗日方法里，拉格朗日点通过以下公式搜索：

$$\begin{aligned}\delta x &= -U\Delta t \\ \delta y &= -V\Delta t \\ \delta z &= -W\Delta t\end{aligned}$$

拉格朗日点处的变量 $\phi$ 的值可用三线迎风插值法获得：

$$\begin{aligned}\phi_L = & \frac{\delta_x}{\Delta_x} \frac{\delta_y}{\Delta_y} \frac{\delta_z}{\Delta_z} \phi_{i-1,j-1,k-1} + \left(1 - \frac{\delta_x}{\Delta_x}\right) \frac{\delta_y}{\Delta_y} \frac{\delta_z}{\Delta_z} \phi_{i,j-1,k-1} \\ & + \frac{\delta_x}{\Delta_x} \left(1 - \frac{\delta_y}{\Delta_y}\right) \frac{\delta_z}{\Delta_z} \phi_{i-1,j,k-1} + \frac{\delta_x}{\Delta_x} \frac{\delta_y}{\Delta_y} \left(1 - \frac{\delta_z}{\Delta_z}\right) \phi_{i-1,j-1,k} \\ & + \frac{\delta_x}{\Delta_x} \left(1 - \frac{\delta_y}{\Delta_y}\right) \left(1 - \frac{\delta_z}{\Delta_z}\right) \phi_{i-1,j,k} + \left(1 - \frac{\delta_x}{\Delta_x}\right) \frac{\delta_y}{\Delta_y} \left(1 - \frac{\delta_z}{\Delta_z}\right) \phi_{i,j-1,k} \\ & + \left(1 - \frac{\delta_x}{\Delta_x}\right) \left(1 - \frac{\delta_y}{\Delta_y}\right) \frac{\delta_z}{\Delta_z} \phi_{i,j,k-1} + \left(1 - \frac{\delta_x}{\Delta_x}\right) \left(1 - \frac{\delta_y}{\Delta_y}\right) \left(1 - \frac{\delta_z}{\Delta_z}\right) \phi_{i,j,k}\end{aligned}$$

上述方程便为半拉格朗日法构成了一个线性插值八节点模板。若流场近似于一维均匀流，线性拉格朗日法在 $CFL < 1$ 的情况下可简化为线性迎风方法。实际上，我们更容易把线性半拉格朗日法看作在CFL高值时会不断地重置的三维线性迎风格式模板，因为线性半拉格朗日法表现出的不可接受的数值扩散水平是线性迎风方法的特点。若拉格朗日点处的变量值采用二次插值方法求得，则数值扩散可得到改善。

### 二次欧拉—拉格朗日方法

二次半拉格朗日法将使用三线插值（TRIM中已用到）的8点迎风格式模板扩展为使用二次拉格朗日多项式插值的27点迎风格式模板。运用文献（Casulli 和 Cheng，1992）的符号表示法，则算子对速度场（ $x$ 平面）进行内插至位置（ $i+1/2-a, j-b, k-d$ ），其中 $a, b, d$ 为实数，表示以位置（ $i+1/2, j, k$ ）为起点的位移。此位置为质点运动轨迹线起点的估计值，该质点穿过时间 $n$ 的速度场，经过时间 $\Delta t$ 后移动到位置（ $i+1/2, j, k$ ）。类似的符号表示法可运用于平面 $y=j+1/2$ 。为方便起见，用上标（ $p$ ）来标志轨迹线起点，则方程组4.2 和4.3中的平流算子 $L()$ （拉普拉斯算子）可表示为：

$$L(\tilde{U}_{i+1/2,j}) = \tilde{U}_{i+1/2-a,j-b,k-d} = \tilde{U}^{(p)}$$

文献（Casulli，1990）中讨论了有关双线性插值的二维轨迹线起点计算过程，图4.1 的二

维二次拉格朗日插值图解中也对该计算过程加以说明。对于不均匀网格的拉格朗日插值，考虑采用与计算指数(i, j, k)相关的物理空间坐标(x, y, z)较为方便。如图4.2所示，在y方向上的三条插值线中运用三维拉格朗日插值法计算得到任意点(x(p)<sup>(p)</sup>, y(p)<sup>(p)</sup>, z(p)<sup>(p)</sup>)上的U<sup>(p)</sup>值，其中三条插值线是通过9次如下形式的垂向插值得到的：

$$\hat{U}_{i+r,j+\psi} = \ell_{i+r,j+\psi}^0 U_{i+r,j+\psi,k} + \ell_{i+r,j+\psi}^1 U_{i+r,j+\psi,k\pm 1} + \ell_{i+r,j+\psi}^2 U_{i+r,j+\psi,k\pm 2}$$

式中，(i, j)下标表示被插值的垂线的位置，ψ和γ的取值为+/-{0, 1, 2}，正负号取决于模板的迎风方向（U的位置下标增量k的正负号也同理得出）。每条线(i, j)的拉格朗日多项式系数通过如下标准拉格朗日系数公式(例如：Al\_Khafaji和 Tooley, 1986)计算：

$$\ell_{\psi}^m = \prod_{\substack{\psi'=0 \\ \psi' \neq m}}^2 \frac{z^{(\psi)} - z_{k\pm\psi'}}{z_{k\pm m} - z_{k\pm\psi'}}$$

式中，z<sup>p</sup>为插值点的垂直坐标；正负号的选择必须满足模板的迎风性。垂向插值之后可得到y方向上的3次水平插值，形式如下：

$$\bar{U}_{i+r} = \ell_{i+r,j}^0 \hat{U}_{i+r,j} + \ell_{i+r,j\pm 1}^1 \hat{U}_{i+r,j\pm 1} + \ell_{i+r,j\pm 2}^2 \hat{U}_{i+r,j\pm 2}$$

最后，x方向上的单次插值如下：

$$U^{(p)} = \ell^1 \bar{U}_i + \ell^1 \bar{U}_{i\pm 1} + \ell^2 \bar{U}_{i\pm 2}$$

方程组4.22和4.23中的拉格朗日系数通过公式4.21计算，分别用x或y来替代z。拉格朗日差值法采用二次模板是有利的，因为它降低了八节点线性模板中内波出现的人工阻尼，因而改进了该方法求解分层流流域的自由运动的能力。这种改进在模拟分层流湖泊时是有必要的，而在模拟水流物理过程以强制运动为主的河口时可能是次要的。如果不必重新定位模板就能计算出在取值范围1 < CFL < 2内的流量源项，则二次模板计算的附加必要条件可稍加改进。

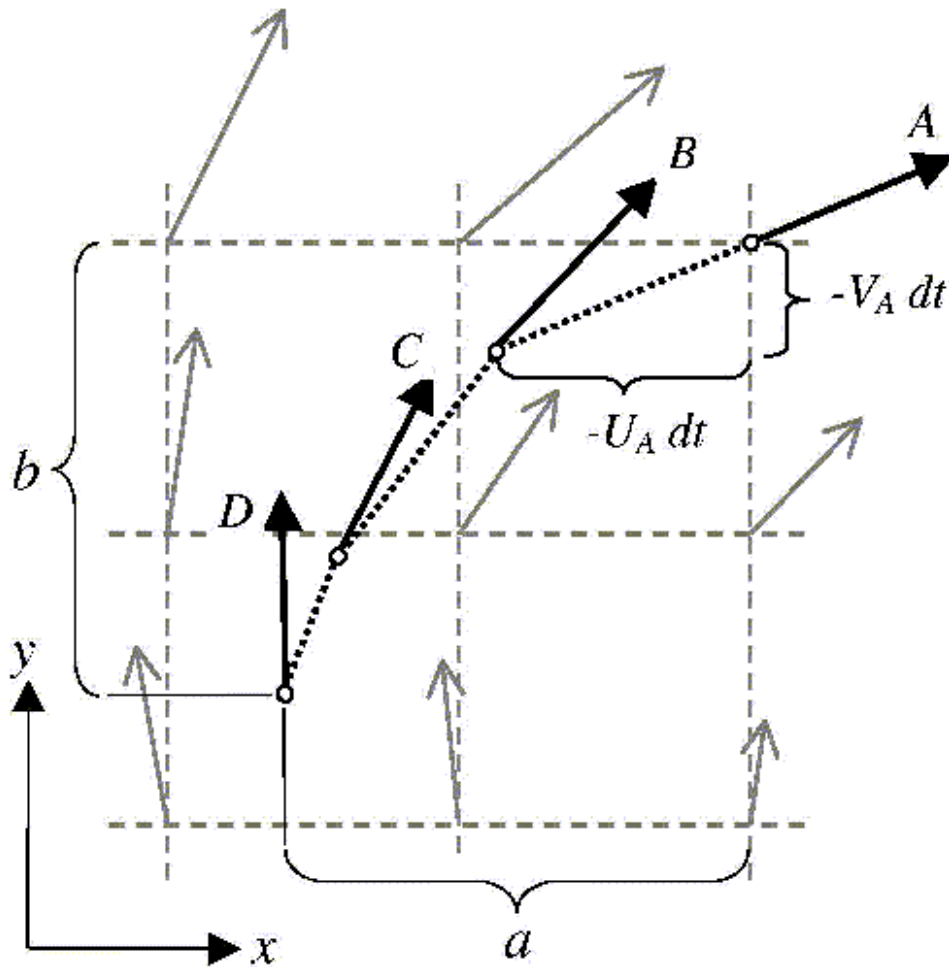
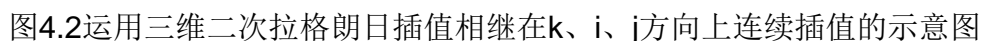


图4.1运用二次拉格朗日插值法计算欧拉—拉格朗日流线的二维图解

流速向量 $\mathbf{A}$ 的份量分别为 $U_A$ 和 $V_A$ ，用于在动量亚时间步长 $\Delta t$ 内自位置 $(i, j)$ 追溯质点轨迹至向量 $\mathbf{B}$ 的起点。速度向量 $\mathbf{B}$ 是在位置 $(i, j)$ 对速度向量进行九网格点迎风插值得到的。向量 $\mathbf{B}$ 用于追溯质点轨迹至向量 $\mathbf{C}$ 的起点，其值仍通过对周围9个节点插值而来。该步骤重复 $n$ 次直到 $n \Delta t = \Delta t$ 。如果某向量的起点位置不在该网格的9个迎风节点内，则迎风格式模板需要重置。若出现需要重置的特殊情况，现行程序则运用线性插值的方法。最终得到的向量为方程组4.8和4.9中欧拉—拉格朗日算子，即 $L(U_i, j)$ ， $=$ ， $U_{(i-a, j-b)}$ 。亚时间步长 $(n)$ 的个数可被任意设定，其值较大时提供较高精度但计算代价也较高。值得注意的是 $n=1$ 时，各处均相当于二次迎风离散化，其特点是精度较低（除非 $CFL_a \ll 1$ ）。作为一般原则，最小的 $n$ 值要设为网格和流场的局部函数，使得 $U \Delta t \Delta x^{-1} < 1$ 。





## 4.7标量迁移

某标量浓度C的迁移过程的三步数值算法可定义为:

$$\tilde{C} = M(C^n)_+ S^{(c)}$$

$$C^* = \tilde{C} - \Delta t \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{C} U_j)$$

$$C^{n+1} = C^* - \Delta t \frac{\partial}{\partial x_z} \left( \kappa \frac{\partial C^*}{\partial x_z} \right) + O(\Delta t)^2$$

如同动量混合和源项，方程4.24中的混合算子描述了由雷诺压力项引起的垂向混合作用，在接下来的[垂向混合模型](#)章节会详细讨论。方程4.24中的 $S^{(c)}$ 表示标量源（例如：通过自由水面传递到风混合层的热能）。方程4.25描述了由分解流场引起的标量场水平对流作用，方程4.26描述了由湍流运动引起的水平扩散作用。为了使上下文明确，将对流作用（即由方程4.25描述）定义在时间步长 $\Delta t$ 上；但当 $\text{MAX}(\text{CFL}_a) > 1$ 时，则定义在亚时间步长 $\delta t$ 上，其中 $m\delta t = \Delta t$ ，即方程4.25被迭代 $m$ 次。在下文的推导过程中，若用 $\delta t$ 代替 $\Delta t$ ，用 $n+m\delta t$ 代替 $n+1$ ，即可使方程反映出亚时间步长的迭代过程。

使用微分符号，则迁移方程的守恒形式为：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} C d\Omega + \int_{A_x} C U dA_x + \int_{A_y} C V dA_y + \int_{A_z} C W dA_z = S^{(c)}$$

式中 $\Omega$ 是控制量， $A_x$ ， $A_y$ ， $A_z$ 是控制体积的表面面积。为了有助于离散形式的清晰表达，所有中心变量可略掉下标 $(i, j, k)$ ，因此 $C_{i, j, k}$ 可简写为 $C$ ，而 $C_{i, j+1/2, k}$ 可简写为 $C_{j+1/2}$ 。将离散水平对流的标量浓度场( $C^*$ )写成在 $n^*$ 集上的保守通量的水平对流形式为：

$$C^* = \tilde{C} \frac{\Delta z^n}{\Delta z^{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x \Delta y \Delta z^{n+1}} \{ \delta_x(Q) + \delta_y(Q) + \delta_z(Q) \}$$

式中 $\delta x$ 形式的算子的在方程4.14中定义。 $Q$ 为通过单元表面的标量通量，将其在 $n^*$ 网格单元集的 $(i+1/2)$ 表面定义为：

$$Q_{i+1/2} = (\Delta y \Delta z^{n+1/2} U^{n+1/2} \tilde{C})_{i+1/2}$$

$j+1/2$ 和 $k+1/2$ 单元表面的标量通量可类似定义。由于在包含自由面的单元在最上层表面没有通量经过，因此 $Q_{i, j, F+1/2} = 0$ ，其中 $K=F$ 指包含自由面的单元。由此可得

$\Delta z_{i,j,F}^{n+1} - \Delta z_{i,j,F}^n = \Delta t W_{i,j,F+1/2}^{n+1}$ 和 $C_{i,j,F+1/2} = C_{i,j,F}$ 。对 $n^*$ 集里的任意单元 $(i, j, F)$ ，有：

$$C_{i,j,F+1/2} \frac{\Delta z_{i,j,F}^n}{\Delta z_{i,j,F}^{n+1}} = C_{i,j,F} - \frac{\Delta t}{\Delta z_{i,j,F}^{n+1}} W_{i,j,F+1/2}^{n+1} C_{i,j,F+1/2}$$

因此，对 $n^*$ 集里的所有单元（包括自由面单元），有：

$$C^* = \tilde{C} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta_x(U^{n+1} \tilde{C}) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \delta_y(V^{n+1} \tilde{C}) - \frac{\Delta t}{\Delta z^{n+1}} \delta_z(W^{n+1} \tilde{C})$$

由于标量浓度是在单元中心更新的，所以有必要定义一种内插方法来求单元表面的值（例如 $\delta x(UC)$ ）。文献（Leonard，1991）结合使用ULTIMATE限流滤波和三阶QUICKEST内插方法，在限制数值扩散的同时可维持单调性的标量场，效果特别好。文献（Lin和Falconer，1997）在二维河口水流上运用了该方法，并证明了其有效性。守恒的ULTIMATE QUICKEST方法限定所有坐标方向上 $\text{CFL}_a < 1$ 。由于当前的半隐式格式在 $\text{CFL}$ 值更大时仍是稳定的（假设



$CFL_b$  不超过一个单位），所以ULTIMATE QUICKEST算法必须在亚时间步长上连续计算，使得在每个亚时间步长上的最大 $CFL_a$ 值均小于1。实践中，强分层流流域的低分辨率模型具有根据动量求解中斜压模式来定义的时间步长限制，因而不会出现 $CFL_a > 1$ 的情况。

虽然文献（Gross等，1999）最近对迁移方法提出的评估并未直接检验运用于QUICKEST方法中的ULTIMATE滤波，但是他们的结果的确表明，使用QUICKEST方法或使用将Roe's superbee滤波带入Lax-Wendroff差分格式的方法，可以获得South San Francisco海湾二维模型的有效结果。由于Lax-Wendroff是一种二阶离散化格式，所以多数情况下在三阶QUICKEST中带入ULTIMATE滤波至少会与他们测试的方法一样有效。对比当前使用的显式离散化方法和考虑文献（Gross等，1998）最近对TRIM的加以修改后的垂向隐式方法，后者的优点是当 $CFL > 1$ ，时，对于标量迁移过程的求解，该方法是稳定的，而当前的显式离散化方法在遇到 $CFL$ 高值时，要求对标量迁移轨迹进行亚时间尺度上的迭代计算。因此，对于垂向细网格分辨率来说，文献（Gross等，1998）提出的方法更加合适，而对于粗网格分辨率来说，当前的显式离散化方法会显示更高的计算效率。

### 4.7.1 标量的水平扩散

为了求得 $n+1$ 时段在解空间 $n^*$ 内的标量场，对方程4.2.1中的水平扩散项进行离散化：

$$C_{i,j,k}^{n+1} = \tilde{C}_{i,j,k} + D_x(\tilde{C}_{i,j,k}) + D_y(\tilde{C}_{i,j,k})$$

$D_x$ 和 $D_y$ 是二阶导数的有限元差分算子。如同对流速的处理方法，在 $n+1$ 时段对不在解空间 $n^*$ 内的任意位置，浓度的更新采用临近单元的值。

## 4.8 岸墙和底部边界条件

风力向湖泊中引入的动量耗散于湖泊边界层和内部紊流。深度平均的二维模型（例：Casulli，1990）应用谢才—曼宁底部应力公式来说明动量在整个水柱中的耗散过程。该公式的显著作用体现在提供了一种通过校准沿海或河口的深度平均模型来再生一组已知潮汐数据的方法。在有分层作用的三维模型中，用于校准底部摩擦系数的详细实测资料通常无法获得。更重要是当流域尺度的内波波能不能传输到亚网格尺度波中时，我们无法确定文献中是否存在某一边界条件模型能捕捉到实际的边界动力学过程，并能正确提供耗散和垂向流动时间和位置。岸墙边界条件（例如，垂直固体边界）常被模拟为自由滑移以使数值方法实现简化（Casulli和Cheng，1992）。然而，在这种模拟中，由于缺少岸墙阻力，边界将不能产生垂直漩涡。而湖泊一般都有陡坡和沿岸流区域（由于开尔文波的存在），因此在模拟流域尺度的运动时，忽略岸墙阻力可能并非一种可取的简化方法。

在粗网格模型中，仍需做许多工作来研制合适的底部和岸墙边界条件。ELCOM提供三种基本的边界条件形式：（1）无滑移，（2）自由滑移，（3）特定应力。

## 4.9 风动量模型

风动量通常用自由面应力边界条件来模拟（例如：Casulli和Cheng 1992）：

$$\nu \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=\eta} = u_*^2$$

式中， $\nu$ 是涡流粘度； $u_*^2$ 是风应力。该边界条件需要垂向粘度项或扩散项如下形式的解（用

来替换动量方程组和标量迁移方程组中的雷诺应力项）：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu \frac{\partial U_x}{\partial x_3} \right\} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \kappa \frac{\partial C}{\partial x_3} \right\}$$

和ELCOM中用三维混合层模型模拟的项。正如文献（Glorioso和Davies, 1995）所论证的那样，在风力各向同性的系统中，涡流粘度公式的选择对压力驱动下的迎风流的发展有着显著影响。在分层流系统中采用涡流粘度或扩散率的方法，则风混合层的深度、下沉风速度和速率剪力是温跃层上涡流粘度和扩散率所采用值的函数。在垂向粗网格分辨率时对混合层深度进行预测，其结果往往不理想。即使是在高分辨率网格时，根据文献（Martin, 1985）的一维预测结果， $k$ - $\epsilon$ 模型和代数应力模型的性能仍待检验。由于湍流粘度项用于模拟在风混合层中动量的引入，因此我们能用该项来替换风混合层深度的预测模型和动量在深度上的分布模型。风混合层中包含自由面，且深度（ $h$ ）采用如下的离散形式计算：

$$h_{i,j} = \sum_{m=k_a(i,j,k_0)}^{k_b(i,j,k_0)} \Delta z_{i,j,m}$$

式中 $k_a$ 和 $k_b$ 分别为包含自由面网格单元 $k_h$ 的水柱( $i, j$ )中风混合层的较低和较高的网格单元的指针。为得到一阶精度，我们可以将风动量的引入近似为混合层上的一个均匀分布（Imberger和Patterson, 1990）：

$$\left. \frac{dU}{dt} \right|_{i,j,k} = \frac{u_*^2 \big|_{i,j,k}}{h \big|_{i,j}} : \eta - h < \sum_{m=1}^k \Delta z_m < \eta$$

式中 $\eta$ 是水柱( $i, j$ )中自由面的高度。分别在 $x$ 和 $y$ 方向上应用方程4.39，则在求解纳维埃-斯托克斯方程组（Navier- Stokes equations）前，可直接得出风混合层速度场中的增量。

### [至下一章表面热力学](#)