

文章编号: 1000-7598 (2010) 08-2580-07

岩土颗粒介质在应力波作用下的 接触力与变形关系

陈万祥, 郭志昆, 黄 育

(解放军理工大学工程兵工程学院, 南京 210007)

摘 要: 为了描述岩土颗粒介质在应力波作用下的接触力与变形关系, 运用接触力学和刚体动力学等理论方法, 考虑颗粒体之间的局部非线性相互作用, 通过引入恢复系数, 导出了适用于低速冲击情况下的颗粒介质弹塑性接触模型, 通过几种算例的比较分析, 说明了该计算方法的合理性。结果表明: 本文给出的接触力与变形关系, 避开了复杂的增量形式和非线性动态接触问题, 且反映了颗粒体的冲击速度、物理力学性质、几何特征以及表面物理条件等因素对接触过程的影响, 便于工程推广应用。

关 键 词: 接触力学; 冲击; 颗粒介质; 恢复系数; 接触模型

中图分类号: TU 453

文献标识码: A

Contact force-displacement relationship for geotechnical granular medium under stress wave

CHEN Wan-xiang, GUO Zhi-kun, HUANG Yu

(Engineering Institute of Corps of Engineers, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China)

Abstract: In order to describe the force-displacement relationship of geotechnical granular medium under stress wave, an elastoplastic contact model of low velocity impact is derived according to the theories of contact mechanics and rigid dynamics, in which the local nonlinear dynamic interaction of granulae is considered and the coefficient of restitution is introduced. Then the rationalities of the contact model are verified by several examples. The results show that the complicated incremental formula and the problem of nonlinear dynamic contact have been avoided in the contact model; and the effects of many factors such as impact velocity, physico-mechanical property, geometrical characteristic and exterior physical condition of the granulae during contact are taken into account; therefore the contact model is convenient for engineering application.

Key words: contact mechanics; impact; granular medium; coefficient of restitution; contact model

1 引 言

地下爆炸、冲击及天然地震所激发的应力波在岩土介质中传播并产生振动, 当应力波携带的能量足够大时就会引起介质及嵌固于其中的工程结构的变形和破坏, 因此无论是分析岩土介质动力特性, 还是研究地下结构的动力灾变问题, 都必须掌握应力波作用下岩土介质的变形规律。

受构造运动的强烈作用, 断层中的透镜体可以看作是颗粒体。试验和理论研究表明^[1], 应力波在颗粒介质中传播时, 不仅取决于颗粒体自身的物理

力学性质、颗粒体拓扑结构、颗粒体间的填充物及孔隙率(不涉及液、气两项的影响), 而且极大地受颗粒体间局部接触力-变形行为的影响。目前, 可以用来反映颗粒体间局部相互作用的途径大致有两种: 一种是离散单元法; 另一种是微结构连续介质分析方法。

一个广泛应用的计算技术是由Cundall和Strack开发的所谓离散单元法^[2](discrete element method, 简称DEM), 该方法引入了线性弹簧及阻尼模型, 可以模拟相接触颗粒体间的相互作用。近年来, Thornton^[3]、Di Renzo^[4]和Vu-Quoc^[5]等人将弹性接

收稿日期: 2010-04-28

第一作者简介: 陈万祥, 男, 1977 年生, 博士, 讲师, 主要从事抗冲击爆炸新材料及其应用方面的教学与研究工作。E-mail: cwx_0806@sihu.com

触模型推广到弹塑性接触问题, 并取消了全局阻尼的使用。但对爆炸、冲击现象, 离散单元法很难描述非连续介质颗粒之间的接触冲击及颗粒能量逸失等动力效应, 对于颗粒数目较多的颗粒介质, 存在惊人的计算费用, 而且在计算过程中存在许多不确定参数, 计算结果缺乏可信度。

在微结构连续力学模型中, 用于描述颗粒体变形特征是通过微观量(接触力、接触变形等)进行系统平均而得到的宏观连续变量(应力、应变)来表示。许多学者沿着这个方向进行了卓有成效的研究, 然而, 这些研究工作没有考虑两颗粒体的转动效应; 同时认为应变场是均匀的。近年来, Vu-Quoc 发表了一系列关于颗粒材料接触理论的文章, 但均没有涉及动力问题^[5-7]。为了描述岩土颗粒介质在应力波作用下的接触力与变形关系, 基于Johnson、等提出的计算模型^[8](即JKR理论)和接触力学理论, 通过引入恢复系数, 导出了一种新的颗粒介质在低速冲击下的弹塑性接触模型。

2 弹塑性接触模型

2.1 动力接触模型

无论是颗粒与颗粒还是颗粒与周围介质间的相互作用就其力学性质而言属于固体力学中的接触问题。以往对颗粒介质接触变形的研究中, 颗粒体常被看作没有塑性变形的有摩擦的球形固体, 然而在应力波作用下当颗粒体的法向相对速度足够大时, 就必须考虑由于局部塑性流动所引起的应力松弛。由Johnson^[9]的研究可知, 准静态接触变形理论适合于应力波最小谱波长远大于颗粒特征尺寸条件下的动力分析, 本文的动力分析属于上述范畴, 因而采用文献[10]给出的接触模型, 如图1。

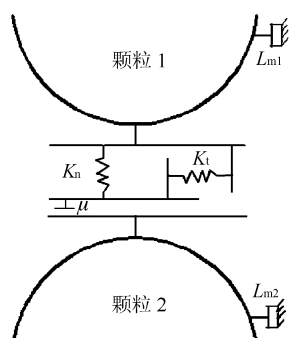


图1 动力接触模型
Fig.1 Dynamic contact model

图1中, 颗粒看作刚体, 局部接触变形反映在

附加的力学元件上, 弹簧代表局部变形, μ 为冲击摩擦系数, D_{m1} 、 D_{m2} 为辐射阻尼系数, 即介质的波阻抗。

2.2 局部接触力-变形关系

由接触理论可知, 对于同种材料的接触问题, 法向接触与切向接触(包括接触变形和接触刚度等)是不耦合的, 即使对不同材料的接触, 这种耦合效应也是非常小的。在以下分析中, 将忽略这些耦合效应的影响。

按图1给出的接触模型, 法向和切向接触力可分别表示为

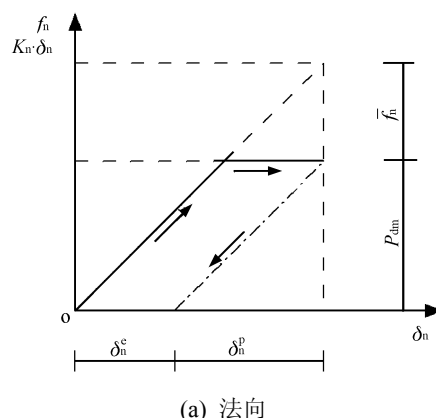
$$\left. \begin{aligned} f_n &= K_n \delta_n - \bar{f}_n \\ f_t &= K_t \delta_t - \bar{f}_t \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: δ 为颗粒体的相对位移; \bar{f} 为由于局部塑性流动产生的松弛力; K 为弹性接触刚度; 下标 n 和下标 t 分别表示法向和切向。

在塑性动力分析中, 如果考虑颗粒体材料的应变率效应、应变硬化等因素, 问题将非常复杂。本文借鉴Thornton^[11]及文献[10]的假定和分析方法, 对颗粒体准静态加载和卸载过程采用了理想弹塑性本构关系(如图2), 并引进了恢复系数来处理局部的塑性变形。

根据牛顿第二运动定律和动量矩定理, 并考虑颗粒体恢复系数的定义: $e_n = v'_n / v_n$ 及 $e_t = v'_t / v_t$, 在假定 $|f_t| \leq f_n \tan \varphi$ (φ 为颗粒体自身的内摩擦角) 的情况下(剪切滑移的切向接触力由Mohr-Coulomb定律控制), 法向和切向接触力可以分别表示为^[21]

$$\left. \begin{aligned} f_n &= K_n \delta_n \frac{2e_n^2}{1+e_n^2} \\ f_t &= K_t \delta_t \frac{2e_t^2}{1+e_t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



(a) 法向

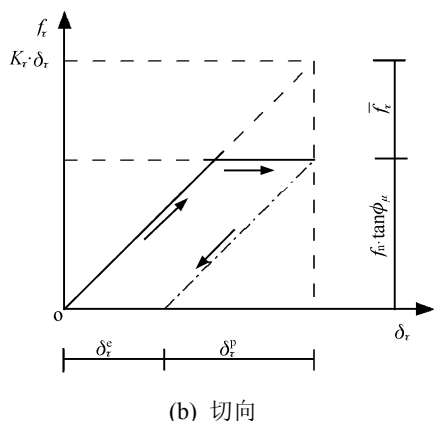


图2 摩擦接触的理想弹塑性本构关系
Fig.2 Constitutive model of frictional contact

2.3 接触刚度

接触瞬间, 颗粒体最初是在一个点上接触, 在接触荷载作用下, 它们在最初始的接触点附近发生变形, 致使它们在一个有限的区域上接触, 这些区域与两颗粒体尺寸相比是很小的, 并且认为每个颗粒体表面在宏观尺度上是外形光滑的。这样我们就可以引入非协调表面的概念^[9]: 接触区中这样两表面之间的初始空隙可以用二次多项式足够近似地表示, 即颗粒体相对曲率 $1/R_1$ 和 $1/R_2$ 足够大时, 非协调接触表面完全可以用最初接触点上的曲率半径表征。由 Hertz 接触理论可知, 两颗粒体的法向相对位移 δ_n 的表达式为

$$\delta_n = \left(\frac{9f_n^2}{16R^*E^{*2}} \right)^{1/3} \quad (3)$$

根据刚度的定义, 可以确定法向接触刚度

$$K_n = \left(\frac{\partial \delta_n}{\partial f_n} \right)^{-1} = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \delta_n^{1/2} \quad (4)$$

式中: $E^* = \left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-1}$; $\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$; 下标 1 和 2 分别表示颗粒 1 和颗粒 2。

目前对于切向接触刚度 K_t 还没有统一的确定方法。在缺乏固体力学理论基础上, 很多研究者都假定 $K_t \approx K_n$ ^[12-14]。另外, 考虑到接触的滚动效应, 也有文献认为 $K_t/K_n = 1/(1+R^*/k^2)$, 其中 k 为颗粒体的回转半径^[15-16]。当接触体材料力学性质比较相似时, 上述假定是比较切合实际的, 对于不同的材料, 这种假定显然缺乏理论依据。

切向接触力的计算一直被公认为接触问题的难题, 其复杂性在于接触刚度与接触体冲击条件、法向接触变形及接触体表面物理条件等因素有

关。Mindlin 和 Deresiewicz 率先提出了增量形式的切向接触力计算方法 (MD 模型)^[17], 但计算过程非常繁琐, 在实际应用中是相当麻烦的。为了避开复杂的增量形式, 近年来, Alberto 和 Francesco 等人结合颗粒体的冲击条件, 并假设接触点的法向和切向速度为恒值的情况下, 进一步建立了较为合理的宏观切向接触力与变形关系的显式表达式 (即修正的 MD 模型)^[18]

$$f_t = \left(\frac{16}{3} G^* \sqrt{R^*} \delta_n^{1/2} \right) \delta_t \quad (5)$$

将上式对切向相对位移 δ_t 微分, 可以得到弹性接触过程中的切向接触刚度 K_t

$$K_t = \frac{16}{3} G^* \sqrt{R^*} \delta_n^{1/2} \quad (6)$$

式中: $G^* = \left(\frac{2-\nu_1}{G_1} + \frac{2-\nu_2}{G_2} \right)^{-1}$ 。

2.4 恢复系数

恢复系数表征两接触体接触后变形恢复的能力, 对整个接触过程有很大的影响。长期以来, 人们对恢复系数的理论研究一直都在进行, 这些研究成果对于冲击速度很低的准静态弹性接触问题而言是比较精确的, 当冲击速度较大, 出现了局部塑性变形, 尤其在不能忽略冲击动力效应的情况下, 计算误差较大^[19-20]。

文献[9]根据理想弹塑性的接触关系及 Hertz 理论, 给出了法向恢复系数的良好近似表达式

$$e_n^2 = \frac{3\pi^{5/4} 4^{3/4}}{10} \left(\frac{p_m}{E^*} \right) \left(\frac{\frac{1}{2} M^* v_n^2}{p_m R^{*3}} \right)^{-1/4} \quad (7)$$

式中: M^* 为两颗粒体的相对质量。

对于式 (7) 中的平均屈服接触压力需要通过试验来确定, 对于准静态弹塑性接触, 文献[11]建议 $p_m = 2.8\sigma_y$, 而文献[9]则认为 $p_m = 3.0\sigma_y$, 这些假定均未考虑材料的动力效应。对于冲击问题, 材料的惯性应力可能在数值上可与抵抗变形的材料屈服应力相比较, 当 $\rho_0 v_n^2 / \sigma_y \geq 1$ 时, 惯性应力甚至变得比屈服强度更重要, 因此冲击接触过程中的惯性效应是不可忽略的因素, 而以往的恢复系数中并没有考虑惯性效应的影响。根据球形空腔膨胀理论, 如果忽略应变率的影响, 则平均动态屈服接触压力可以通过下式近似计算

$$p_{dm} = (1 + D_m) \sigma_Y = \left[4 + \left(\frac{v_n}{C_0} \right)^{3/2} \left(\frac{E}{\sigma_Y} \right)^{1/4} \right] \sigma_Y \quad (8)$$

式中: $D_m = \left(\frac{v_n}{C_0} \right)^{3/2} \left(\frac{E}{\sigma_Y} \right)^{1/4}$ 为动力放大系数。

对于冲击接触问题的切向恢复系数 e_t , 迄今还没有一个普遍认可的近似表达式, 作为工程应用上的一种近似, 文献[10]给出了切向恢复系数 e_t 与法向恢复系数 e_n 之间的关系

$$e_t = 1 - \left(1 + \frac{R^{*2}}{k^2} \right) \mu \frac{v_t}{v_n} (1 + e_n) \quad (9)$$

式中: μ 为冲击摩擦系数; v_n 、 v_t 分别为颗粒体在接触点处的初始法向和切向相对速度。

冲击碰撞过程中的一个很不确定因素就是作用在接触表面的摩擦系数。Hutchings试验研究表明, 低速冲击的摩擦系数值接近0.05^[22], 而陈大年则指出, 只有在计及接触点的微粒间相互作用且满足一定条件时, 试验中的冲击摩擦系数才可能接近0.05, 如果连续犁沟发生, 其冲击过程平均值就大于0.05^[23]。他认为, 冲击荷载下有效摩擦系数是滑移、滚动、犁沟效应的个别或交互作用的结果, 即冲击摩擦系数是冲击过程及初始入射角的函数。在工程应用中, 我们一般都认为冲击摩擦系数 μ 与冲击速度有关^[21], 即

$$\mu = \begin{cases} \mu_d & (v > v_d) \\ \mu_s - \frac{\mu_s - \mu_d}{v} v_d & (v \leq v_d) \end{cases} \quad (10)$$

式中: v 为冲击速度; μ_d 和 μ_s 为与冲击速度有关的常数。对于岩土类材料的接触, 静摩擦系数 $\mu_s = 0.50$; 由于犁沟效应明显, 动摩擦系数 $\mu_d = 0.08$; 临界冲击速度 $v_d = 30.0$ m/s。

3 接触力与变形关系

对于理想弹塑性颗粒介质, 如果加载过程中发生塑性变形, 由于接触表面的永久变形, 则卸载过程中将有 $1/R_p^* < 1/R^*$, 卸载过程由 Hertz 弹性接触理论控制, 但此时与卸载点对应的等效弹性接触力为 $f_n^e = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \delta_n^{3/2}$, 这样弹塑性接触力可以通过在等效弹性接触力中引入应力松弛项来表示。根据牛顿第二运动定律, 两颗粒体弹塑性法向运动方程为

$$M^* \frac{d^2 \delta_n}{dt^2} = k_1 \delta_n^{3/2} \quad (11)$$

式中: $k_1 = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \frac{2e_n^2}{1+e_n^2}$ 。当两颗粒体的相对法

向速度 $d\delta_n/dt = 0$ 时, 法向相对位移达到最大值, 即

$$\delta_n^* = \left(\frac{15M^* v_n^2}{16E^* \sqrt{R^*}} \right)^{2/5} \left(\frac{1+e_n^2}{2e_n^2} \right)^{2/5} \quad (12)$$

两颗粒体弹塑性切向运动方程为

$$M'^* \frac{d^2 \delta_t}{dt^2} = k_2 \delta_t \quad (13)$$

式中: $k_2 = \frac{16}{3} G^* \sqrt{R^*} \delta_n^{1/2} \frac{2e_t^2}{1+e_t^2}$; $\frac{1}{M'^*} = \frac{1}{M_1'} + \frac{1}{M_2'}$,

且 $M_i' = M_i / (1 + R_i^2 / k_i^2)$ 。

令 $d\delta_t/dt = 0$, 得到最大切向相对位移

$$\delta_t^* = \left(\frac{3M'^* v_t^2}{16G^* \sqrt{R^*} \delta_n^{1/2}} \right)^{1/2} \left(\frac{1+e_t^2}{2e_t^2} \right)^{1/2} \quad (14)$$

根据图2所示的理想弹塑性本构关系及局部接触力-变形关系, 颗粒体在整个弹塑性接触过程中的接触力与变形关系可以用下列式子完整地描述

$$f_n = \begin{cases} \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} \delta_n^{3/2} \frac{2e_n^2}{1+e_n^2} & (0 \leq \delta_n < \delta_n^*) \\ \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*} (\delta_n - \delta_n^p)^{3/2} \left(\frac{2e_n^2}{1+e_n^2} \right)^{3/2} & (\delta_n^p \leq \delta_n \leq \delta_n^*) \end{cases} \quad (15)$$

$$f_t = \begin{cases} \frac{16}{3} G^* \sqrt{R^*} \delta_n^{1/2} \delta_t \frac{2e_t^2}{1+e_t^2} & (0 \leq \delta_t < \delta_t^*) \\ \frac{16}{3} G^* \sqrt{R^*} \delta_n^{1/2} (\delta_t - \delta_t^p) \left(\frac{2e_t^2}{1+e_t^2} \right)^{1/2} & (\delta_t^p \leq \delta_t \leq \delta_t^*) \end{cases} \quad (16)$$

式中: $\delta_n^p = \delta_n^* - \delta_n^* \left(\frac{2e_n^2}{1+e_n^2} \right)^{2/5}$ 为法向塑性变形;

$\delta_t^p = \delta_t^* - \delta_t^* \left(\frac{2e_t^2}{1+e_t^2} \right)^{1/2}$ 为切向塑性变形。可以看出,

切向力不仅取决于法向变形 δ_n 及切向变形 δ_t 的大小, 而且取决于法向变形 δ_n 及切向变形 δ_t 的历史。

颗粒体在冲击过程中的相对运动状态（接触或滑移）取决于入射条件^[24]。当 $|f_t| > f_n \tan \varphi$ 时，接触过程为剪切滑移状态，则切向接触力由 Mohr-Coulomb 定律控制，即

$$f_t = -\mu |f_n| \text{sign}(v_t) \quad (17)$$

4 算例分析

主要分析不同冲击速度和不同颗粒粒径对接触力与变形关系的影响规律。岩土颗粒介质的基本力学参数：弹性模量 $E = 25.0 \times 10^6$ MPa，泊松比 $\nu = 0.30$ ，黏聚力 $c = 80$ kPa，摩擦角 $\varphi = 24^\circ$ ，密度 $\rho_0 = 1880$ kg/m³，平均粒径 $R = 208$ μm 。根据统一双剪强度理论，对于理想弹塑性岩土类材料，其压缩屈服强度可用 c 、 φ 表示为 $\sigma_y = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$ （见

文献 [25]），则相应的屈服冲击速度为 $v_y = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\rho_0 E}} \approx 1.08$ m/s。

图 3 为不同冲击速度对接触力与变形关系的影响，其中，冲击角 $\phi = 5^\circ$ 。可以看出，冲击速度对接触力和接触变形有明显的影 响，接触力和接触变形均随冲击速度增大而增大。由于法向出现了局部塑性变形，加载过程中法向接触刚度随冲击速度的增大而减小，卸载后的残余塑性变形比较大，而冲击速度对切向接触刚度影响不大，卸载后只出现很小的塑性变形。

图 4 为不同粒径对接触力与变形关系的影响，其中，冲击角 $\phi = 5^\circ$ ，冲击速度 $v_0 = 2$ m/s。可以看出，颗粒体的粒径对接触力及接触变形也有很大影响，颗粒体粒径越大，接触力及接触变形也越大，由于接触刚度与接触变形成正比关系，因而接触刚度随颗粒体粒径的增大而增大，卸载后残余的法向塑性变形比切向塑性变形要大得多。

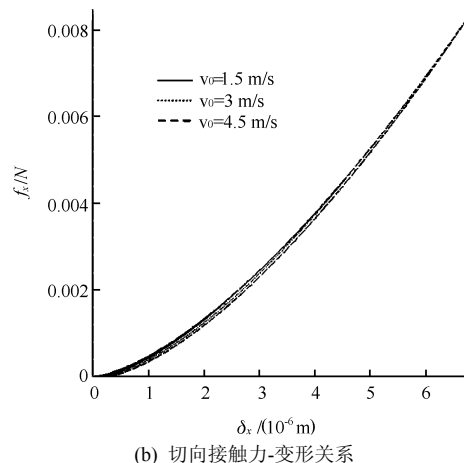
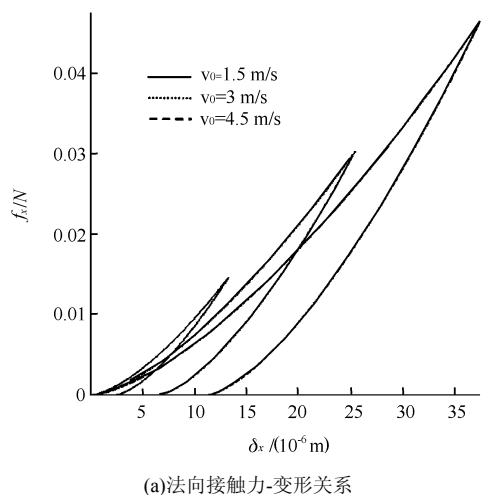


图 3 不同冲击速度下的接触力与变形关系
Fig.3 Contact force-displacement relationships for different impact velocities

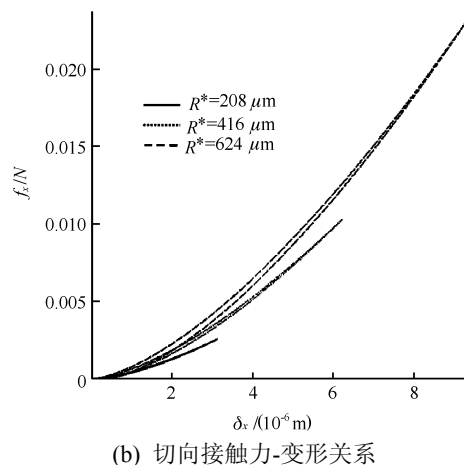
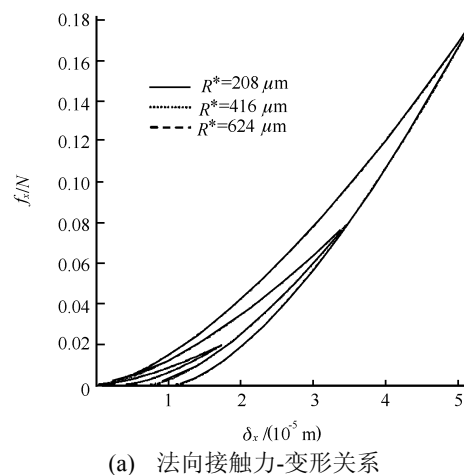
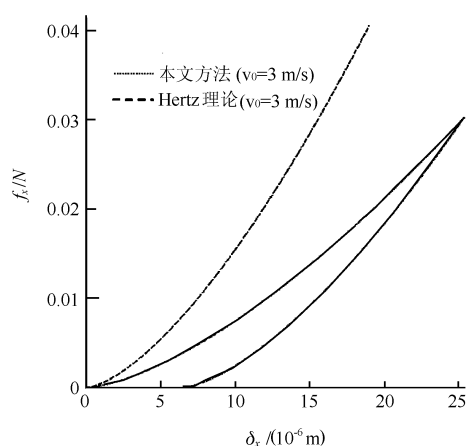


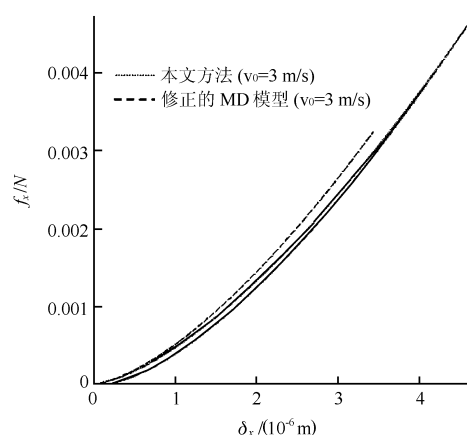
图 4 不同粒径的接触力与变形关系
Fig.4 Contact force-displacement relationships for different granular radii

图 5 为本模型的计算结果与有关文献接触模型的计算结果比较，其中，冲击角 $\phi = 10^\circ$ ，冲击速度 $v_0 = 3$ m/s。Hertz 接触理论没有考虑接触塑性变形的影响，接触过程中不会因塑性流动而产生应力

松弛, 因此在同样接触条件下, 其法向接触力比本模型的计算结果大许多, 该方法对于弹性接触问题而言是比较合理的, 当冲击速度超出屈服速度时, Hertz 接触理论显然不再适用, 而本模型考虑了局部塑性变形对接触过程的影响, 可以推广到弹塑性冲击接触问题的计算中去。此外, 如果为准静态弹性接触, 即 $e_n \approx 1.0$ 时, 容易验证两种方法的计算结果完全一致。此外, 修正的 MD 模型同样没有考虑接触过程中局部塑性变形的影响, 计算结果发现两种计算模型的接触刚度比较接近, 但由于本模型考虑了切向局部塑性流动的影响, 切向接触变形较修正 MD 模型大, 切向接触力比修正 MD 模型的计算结果大。



(a) 法向接触力-变形关系



(b) 切向接触力-变形关系

图5 计算结果比较

Fig.5 Comparison of calculation results

5 结论

本文运用接触力学和刚体动力学的理论方法,

通过引入恢复系数来考虑颗粒体由于局部塑性流动而产生的应力松弛, 建立了一种新的颗粒体在低速冲击下的接触力与变形关系, 取得如下结论:

(1) 通过几种情况的计算比较分析发现, 岩土颗粒体的接触力及接触变形随冲击速度、颗粒体粒径的增大而明显增大, 接触后的残留塑性变形也随冲击速度、颗粒体粒径的增大而增大, 且法向残余变形比切向残余变形大得多。

(2) 通过与有关文献的接触模型的计算结果比较可知, 由于本模型考虑了接触过程中局部塑性流动的影响, 法向接触力较弹性理论大, 而切向接触力比按弹性理论的计算结果小, 并且接触后均产生了不可恢复的塑性变形, 表明本文计算方法是合理的。只有在弹性接触情况下, 采用传统的接触模型才能得到较为准确的结果, 当冲击速度超过屈服速度后, 本模型的计算结果更符合实际情况。

(3) 给出的宏观弹塑性接触模型, 大大简化了复杂的非线性动态接触问题, 避开了以往繁琐的增量形式表达式, 而且具有明确的物理力学意义, 清楚地说明了接触力与颗粒体的冲击速度、材料力学性质、几何特征及表面物理条件等因素之间的关系, 对于应力波最小谱波长远大于颗粒体特征尺寸的情况, 计算方法是简单合理的。

参考文献

- [1] 王明洋, 钱七虎. 应力波作用下颗粒介质的动力特性研究[J]. 爆炸与冲击, 1996, 16 (1): 11-20.
WANG Ming-yang, QIAN Qi-hu. Studies on the dynamic properties for granular medium under stress wave[J]. *Explosion and Shock Waves*, 1996, 16 (1): 11-20.
- [2] CUNDALL P A, STRACK D L. A discrete numerical model soft particle system[J]. *Geotechnique*, 1979, 29 (1): 47-65.
- [3] THORNTON C. Coefficient of restitution for collinear collisions of elastic-perfectly plastic spheres[J]. *ASME J. Appl. Mech.*, 1997, :383-386.
- [4] DI RENZO A, DI MAIO F P. Comparison of contact-force models for the simulation of collision in DEM-based granular flow code[J]. *Chemical Engineering Science*, 2004, 59:525-541.
- [5] VU-QUOC L, ZHANG X, LESBURG L. Normal and

- tangential force-displacement relations for frictional elasto-plastic contact of spheres[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 2001, 38(36—37): 6455—6490.
- [6] VU-QUOC L, ZHANG X. A new tangential force-displacement model for elasto-plastic frictional contact: Displacement-driven version[C]// Proceedings of the Royal Society of London Series A, [S.l]:[s.n.], 2002.
- [7] VU-QUOC L, LESBURG L, ZHANG X. An accurate force-displacement model for granular-flow simulations: Contacting spheres with plastic deformation, force-driven formulation[J]. **Journal of Computational Physics**, 2004, 196: 298—326.
- [8] JOHNSON K L, KENADLL K, ROBERTS A D. Surface energy and the contact of elastic solids[J]. **Proc. Roy. Soc.**, 1971, (A234): 301—313.
- [9] JOHNSON K L. Contact mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [10] 王明洋. 爆炸应力波通过地质构造断层的动力学模型理论与试验研究[D]. 南京: 南京工程兵工程学院, 1994.
- [11] THORNTON C. A theoretical model for the stick/bounce behavior of adhesive, elastic-plastic spheres[J]. **Powder Technology**, 1998, 99: 154—162.
- [12] FRANCESCO D M, ALBERTO D R. Analytical solution for the problem of frictional-elastic collisions of spherical particles using the linear model[J]. **Chemical Engineering Science**, 2004, 59: 3461—3475.
- [13] KHARAZ A H, GORHAM D A, SALMAN A D. An experiment study of the elastic rebound of sphere[J]. **Powder Technology**, 2001, 120: 281—291.
- [14] CLEARY P W, SAWLEY M L. DEM model ling of industrial granular flows: 3D case studies and the effect of particle shape on hopper discharge[J]. **Applied Mathematical Modeling**, 2002, 26: 89—111.
- [15] ADAMS G G, NOSONOVSKY M. Contact modeling -forces[J]. **Iridology International**, 2000, 33: 431—442.
- [16] MISHIRA B K, MURTY C V R. On the determination of contact parameters for realistic DEM simulations of ball mills[J]. **Powder Technology**, 2001, 115: 290—297.
- [17] MINDIN R D, DERESIEWICZ H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces[J]. **Transactions of ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics**, 1953, 20: 327—344.
- [18] ALBERTO D R, FRANCESCO D M. An improved integral non-linear model for the contact of particle in distinct element simulations[J]. **Chemical Engineering Science**, 2005, 60: 1303—1312.
- [19] CHANG W R, LING F F. Normal impact model of rough surfaces[J]. **ASME J. Tribol.**, 1992, 114: 439—447.
- [20] ADAMS G G, TRAN D N. The coefficient of restitution for a planar two-body eccentric impact[J]. **ASME J. Appl. Mech.**, 1993, 60: 1058—1060.
- [21] 陈万祥, 郭志昆, 钱七虎. 基于接触理论的弹体偏航机理研究. 解放军理工大学学报(自然科学版), 2006, 7(5): 458—466.
- CHEN Wan-xiang, GUO Zhi-kun, QIAN Qi-hu, et al. Mechanism of projectile based on contact theory[J]. **Journal of PLA University of Science and Technology**, 2006, 7 (5) : 458—466.
- [22] HUTCHINGS I M, MACMILLAN N H, RICKERBY D G. Further studies of the oblique impact of a hard sphere against a ductile solid[J]. **Int. J. Mech. Sci.**, 1981, 23: 639—646.
- [23] 陈大年, AL-HASSANI S T S, 陈建平. 固粒击靶的有效摩擦系数[J]. 工程力学, 2004, 21 (5) : 172—177.
- CHEN Da-nian, AL-HASSANI S T S, CHEN Jian-ping. Effective friction coefficient during particle impact on memtal[J]. **Engineering Mechanics**. 2004 21(5): 172—177.
- [24] MAW N, BARBENJR FAWCETT J N. The oblique impact of elastic spheres[J]. **Wear**, 1976, 38: 101—114.
- [25] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.