

目 录

第一章 质点位移和应变	1
1.1 质点位移和位移梯度	1
1.2 应变	6
1.3 “局部”转动	12
1.4 作图表示	15
1.5 变换特性	18
1.6 符号表示法和缩写下标	24
习题.....	30
参考文献.....	31
第二章 应力和动力学方程	32
2.1 彻体力和体力矩	32
2.2 牵引力和应力	33
2.2.1 一任意取向表面上的应力	36
2.2.2 变换特性	40
2.3 声学的动力学方程	41
2.3.1 平动运动方程	41
2.3.2 转动运动方程	44
2.4 缩写下标	48
习题.....	51
参考文献.....	53
第三章 固体的弹性性质	54
3.1 弹性劲度和顺度	54
3.2 变换特性	58
3.3 缩写下标	61

3.4 用缩写下标进行变换	70
3.5 阻尼和衰减	82
习题	92
参考文献	95
第四章 声学 and 电磁学	96
4.1 电磁和声的类比	96
4.2 电磁场方程	98
4.3 声场方程	100
4.4 平面电磁波和平面声波的比较	102
4.5 边界条件, 反射和特性阻抗	118
习题	125
参考文献	129
第五章 功率流和能量平衡	130
5.1 能量守恒关系	130
5.2 电磁场的坡印廷定理	130
5.3 声场的坡印廷定理	137
5.4 c 和 s 的物理现实性条件	143
5.5 复功率流	145
5.6 时间简谐场的复坡印廷定理	147
5.6.1 电磁场	148
5.6.2 声场	150
习题	155
参考文献	157
第六章 各向同性固体中的平面声波	158
6.1 声波方程和克利斯托费尔方程	158
6.2 弹性各向同性条件	160
6.3 各向同性固体的克利斯托费尔方程	162
6.4 各向同性固体的传输线模型	165
6.5 由彻体分布力激发的平面波	171

习题	179
参考文献	185
第七章 各向异性固体中的平面声波	186
7.1 晶体对称性	186
7.2 \mathbf{g} 和 \mathbf{c} 的对称特性	190
7.3 各向异性固体的克利斯托费尔方程	200
7.4 慢度(或倒速度)表面	202
7.5 质点速度偏振的正交性	210
7.6 能速度	211
7.7 径向表面和法向表面	214
7.8 群速度	218
7.9 纯模方向	227
7.9.1 对称平面中的传播	229
7.9.2 垂直于转动轴的传播	229
7.9.3 沿转动轴的传播	230
7.10 各向异性固体的传输线模型	232
7.11 各向异性固体中的声阻抗	238
7.12 法拉第旋转和旋声性 (Rotary Activity)	242
7.12.1 法拉第旋转	245
7.12.2 旋声性	248
习题	250
参考文献	256
第八章 压电性	258
8.1 压电效应的一维模型	258
8.2 压电本构关系	264
8.3 固体热力学	269
8.4 压电矩阵的转置对称性	272
8.5 压电矩阵的晶体对称性	273
8.6 压电体中的均匀平面波	274

8.6.1	一般特性	274
8.6.2	形式耦合波理论	285
8.6.3	准静态近似	292
8.6.4	压电增劲弹性常数和机电耦合常数	298
8.7	压电介质的坡印廷定理	304
8.8	压电体的传输线模型	309
8.9	分布压电源的平面波激发	312
8.10	圆形薄片压电换能器	318
8.10.1	阻抗矩阵和导纳矩阵	320
8.10.2	导抗矩阵元	323
8.10.3	电输入阻抗	328
8.10.4	转换损耗	332
8.10.5	等效电路	335
	习题	337
	参考文献	342
附录 1	柱坐标和球坐标	345
1.1	基本的微商算符	345
1.1.1	柱坐标	345
1.1.2	球坐标	345
1.2	矢量的梯度和对称梯度	346
1.2.1	柱坐标	346
1.2.2	球坐标	348
1.3	应力的散度	349
1.3.1	柱坐标	349
1.3.2	球坐标	350
1.4	本构矩阵	351
附录 2	材料性质	352
2.1	机械性质	352
2.1.1	晶体对称类和质量密度	352
2.1.2	顺度矩阵和劲度矩阵的对称性	354

2.1.3	劲度常数和顺度常数之间的关系	357
2.1.4	顺度常数 s_{IJ}	359
2.1.5	劲度常数 c_{IJ}	362
2.2	压电性质	366
2.2.1	$[d_{ij}]$ 和 $[e_{ij}]$ 的对称性	366
2.2.2	压电应变常数 d_{ij}	368
2.2.3	压电应力常数 e_{ij}	370
2.3	电学性质	372
2.3.1	$[\epsilon_{ij}^s]$ 的对称性	372
2.3.2	压电材料的相对介电常数	373
2.3.3	非压电材料的相对介电常数	375
附录 3	平面声波的性质	376
3.1	各向同性固体和各向异性固体的克利斯 托费尔方程	376
3.2	各向同性固体和各向异性固体的慢度表面	377
3.2.1	各向同性	377
3.2.2	立方晶系	378
3.2.3	六角晶系	381
3.2.4	三角晶系	383
3.2.5	四方晶系	387
3.2.6	正交晶系	394
3.3	纯模方向	397
3.3.1	对称方向	398
3.3.2	非对称方向	398
附录 4	公式提要 and 单位换算表	403
4.1	场方程	403
4.2	直角坐标表示的场算符	403
4.3	坐标变换	404
4.4	矢量恒等式和张量恒等式	405
4.5	单位和换算率	405

第一章 质点位移和应变

1.1 质点位移和位移梯度

声学是研究材料介质中随时间变化的形变或振动的学科。所有物质都由原子组成，我们可以迫使这些原子在其平衡位置附近振动。在这一原子水平上，可以存在许多不同的振动方式。然而，这些振动方式大部分都与声学研究无关，因为声学所涉及的质点尽管很小，但仍包含有许多运动一致的原子。因此，声学理论只处理宏观现象，而在用公式表述时，把物质当作连续介质。仅当微观结构影响介质的宏观性质时，我们才对它有兴趣。

当介质质点偏离平衡位置时，出现内部恢复力。正是这些质点之间的弹性恢复力，与质点惯性结合在一起，使介质产生振动。这些振动可以是行波，也可以是局部化的振荡，要用数学公式描述这些振动，首先必须引进质点位移、材料形变和内部恢复力的定量定义。

形变介质中的质点位移可用图 1.1 所示的作图法来说明。黑点表示有规则排列的所选择质点的平衡位置，圈点表示这些质点位移后的位置。然后对每个质点从某一原点 O 指定一个平衡矢量 \mathbf{L} 和一个位移矢量 $\mathbf{l}(\mathbf{L}, t)$ 。一般说来，位移矢量 \mathbf{l} 是随时间变化的量，并可证明也是 \mathbf{L} 的函数。平衡(或参考)矢量 \mathbf{L} 仅用作识别质点的标记。 \mathbf{L} 和 \mathbf{l} 都是连续变量，而不同于图中所示的离散值。

按照图 1.1 平衡矢量为 \mathbf{L} 的质点的位移由下式确定：

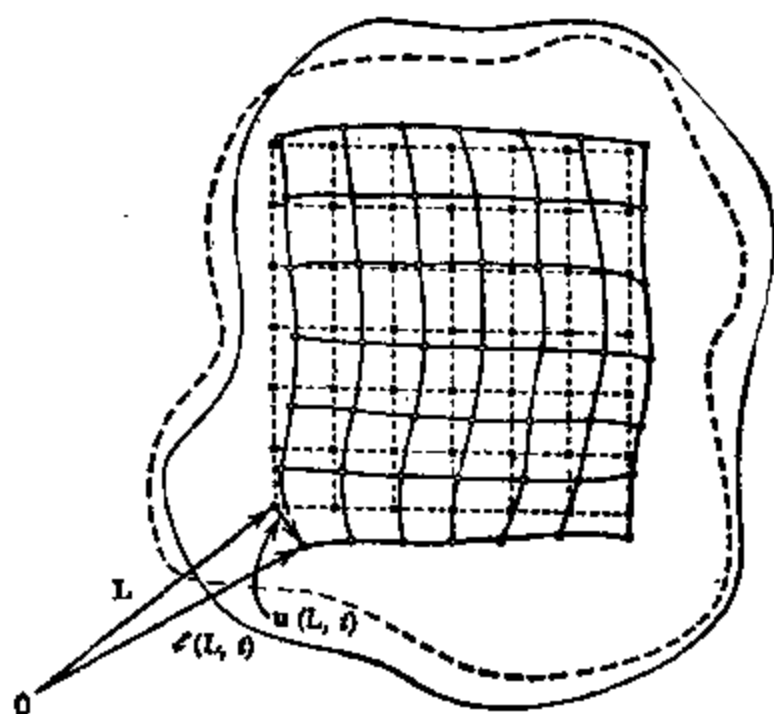


图 1.1 固体处于平衡状态和形变状态时的质点位置

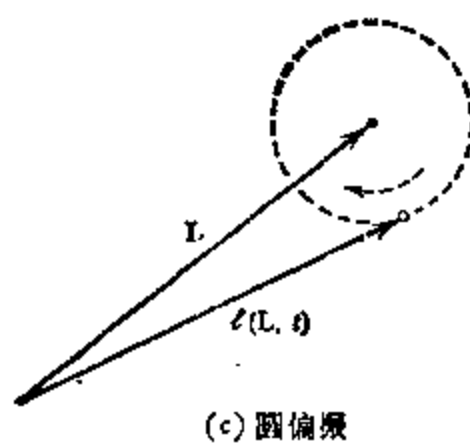
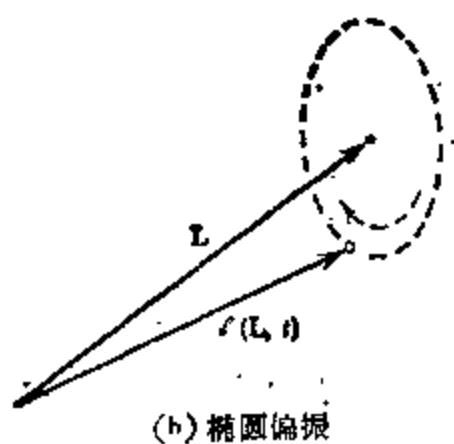
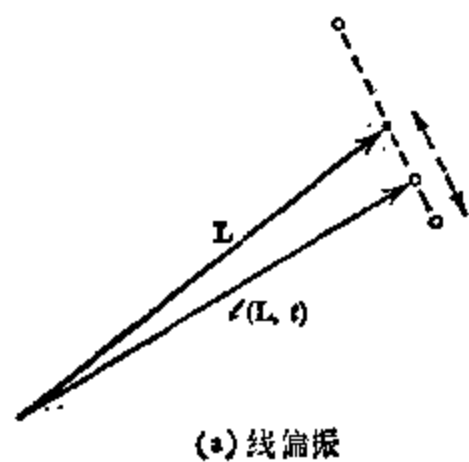


图 1.2 不同类型的质点位移偏振

$$\mathbf{u}(\mathbf{L}, t) = \mathbf{l}(\mathbf{L}, t) - \mathbf{L}, \quad (1.1)$$

这样，质点位移场 \mathbf{u} 就是描述介质内全部质点振动的连续变量。如果单一频率 ω 的振动是时间的正弦函数，则每个质点有三种可能的运动方式。质点可能沿着直线路径移动，每一来回通过平衡位置两次，

$$\mathbf{u}(\mathbf{L}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{L}) \sin \omega t, \quad (1.2)$$

这种位移称为线偏振质点位移[图 1.2 (a)]。如质点同时参与偏振状态互相垂直，而时间位相相差 90° 的两个直线运动[图 1.2 (b)]，则位移场为

$$\mathbf{u}(\mathbf{L}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{L}) \sin \omega t + \mathbf{B}(\mathbf{L}) \cos \omega t, \quad (1.3)$$

在这种情形，质点沿围绕平衡位置的椭圆路径运动：

$$u(\mathbf{L}, t) = \{A^2(\mathbf{L}) \sin^2 \omega t + B^2(\mathbf{L}) \cos^2 \omega t\}^{1/2}, \quad (1.4)$$

这种位移称为椭圆偏振位移。对于式 (1.4) 中 $A = B$ 的特殊情形，质点轨迹是一个圆[图 1.2 (c)]，这称为圆偏振位移。

不用说，材料形变只适用于介质的质点彼此之间发生相对位移的情形。在刚性平动和刚性转动中，物体所有质点都保持其相对位置不变(图 1.3)，所以就没有形变。因为对所有这样的刚性运动，式 (1.1) 中的质点位移场 \mathbf{u} 都不等于零，所以 \mathbf{u} 本身不足以用来量度材料形变。考虑到 t 为常数时对式 (1.1) 求微分：

$$d\mathbf{u}(\mathbf{L}, t) = d\mathbf{l}(\mathbf{L}, t) - d\mathbf{L}, \quad (1.5)$$

就可以消去刚性平动位移。上述关系式的物理意义可用图 1.4 来阐明，其中示出了两个相邻质点 a 和 b 在某一特定瞬间位移后的位置。如果介质经历一刚性平动，图中的两个位移矢量 $\mathbf{u}(\mathbf{L}, t)$ 和 $\mathbf{u}(\mathbf{L} + d\mathbf{L}, t)$ 就相等，从而式 (1.5) 中的微分位移 $d\mathbf{u}$ 等于零。

从质点位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{L}, t)$ 计算式 (1.5) 中的质点微分位移 $d\mathbf{u}$ 时，可用偏微商关系：

$$d\mathbf{u}(\mathbf{L}, t) = \frac{\partial}{\partial L_1} \mathbf{u}(\mathbf{L}, t) dL_1 + \frac{\partial}{\partial L_2} \mathbf{u}(\mathbf{L}, t) dL_2 + \frac{\partial}{\partial L_3} \mathbf{u}(\mathbf{L}, t) dL_3, \quad (1.6)$$

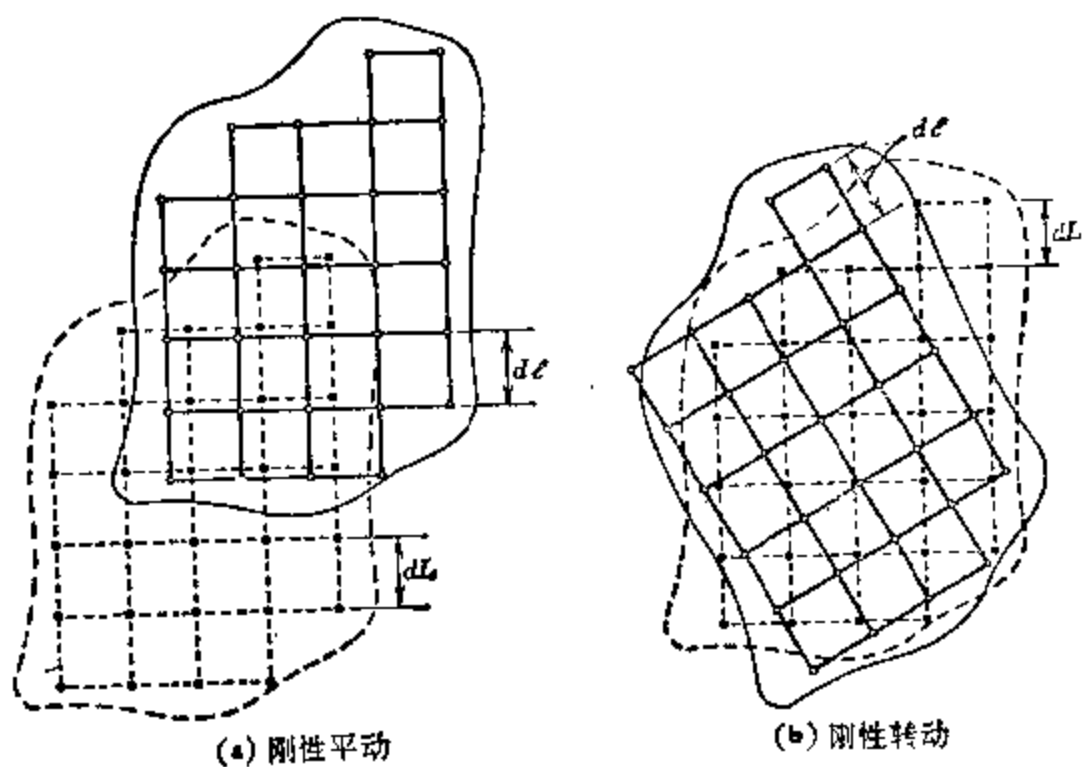


图 1.3 固体的刚性运动

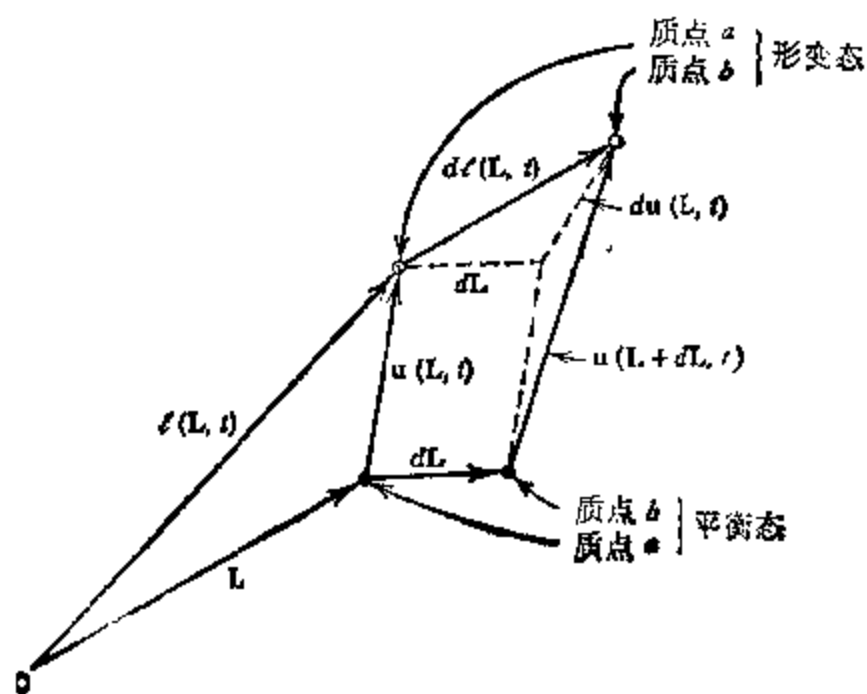


图 1.4 形变介质中质点微分位移的确定

其中 dL_1, dL_2, dL_3 是 $d\mathbf{L}$ 对某正交坐标系的分量, 由于是在恒定时间下求微分位移的, 所以

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{L}, t) dt$$

这一项已被省略。在笛卡儿直角坐标系中,

$$\mathbf{u}(\mathbf{L}, t) = \hat{\mathbf{x}}u_x(\mathbf{L}, t) + \hat{\mathbf{y}}u_y(\mathbf{L}, t) + \hat{\mathbf{z}}u_z(\mathbf{L}, t), \quad (1.7)$$

由于单位矢量 $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ 都是常数¹⁾, 式(1.6)就变为

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} = & \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial u_x}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial u_x}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial u_x}{\partial L_z} dL_z \right) \\ & + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial u_y}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial u_y}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial u_y}{\partial L_z} dL_z \right) \\ & + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial u_z}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial u_z}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial u_z}{\partial L_z} dL_z \right) \end{aligned}$$

可用矩阵形式写为

$$\begin{bmatrix} du_x(\mathbf{L}, t) \\ du_y(\mathbf{L}, t) \\ du_z(\mathbf{L}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial L_x} & \frac{\partial u_x}{\partial L_y} & \frac{\partial u_x}{\partial L_z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial L_x} & \frac{\partial u_y}{\partial L_y} & \frac{\partial u_y}{\partial L_z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial L_x} & \frac{\partial u_z}{\partial L_y} & \frac{\partial u_z}{\partial L_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dL_x \\ dL_y \\ dL_z \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

式(1.8)中的矩阵²⁾

$$[\mathcal{E}(\mathbf{L}, t)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x(\mathbf{L}, t)}{\partial L_x} & \frac{\partial u_x(\mathbf{L}, t)}{\partial L_y} & \frac{\partial u_x(\mathbf{L}, t)}{\partial L_z} \\ \frac{\partial u_y(\mathbf{L}, t)}{\partial L_x} & \frac{\partial u_y(\mathbf{L}, t)}{\partial L_y} & \frac{\partial u_y(\mathbf{L}, t)}{\partial L_z} \\ \frac{\partial u_z(\mathbf{L}, t)}{\partial L_x} & \frac{\partial u_z(\mathbf{L}, t)}{\partial L_y} & \frac{\partial u_z(\mathbf{L}, t)}{\partial L_z} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

称为位移梯度矩阵。利用它和关系式(1.8), 对任何两个相

1) 在柱坐标和球坐标系中, 必须考虑坐标矢量的微商(附录 1)。

2) 表示矩阵的符号用方括号括起来。

邻质点间的微分位移 du 都可从图 1.4 中它们的平衡间隔 dL 算出。因此，位移梯度矩阵 $[g(L, t)]$ 是形变介质中质点微分位移的一种量度。

例 1 为了说明声形变理论的基本概念，考查与时间无关的，即静态场的问题，常常是方便的。考虑一根固体棒，它在 x 方向受到均匀压缩，同时还受到一种制约，使沿 y 和 z 方向的质点位移分量等于零（图 1.5）。如果把棒在 $x = 0$ 一端固定，则此端所有的质点位移都为零。而在棒的另一端上，所有质点都产生一段位移：

$$u(D) = -\frac{1}{2}(D - D'),$$

其中 D 和 D' 分别为形变前后的棒长。对于棒中间部分的点，位移与形变前距棒固定端的距离 L_x 成正比，因而

$$u(L_x) = -\frac{1}{2}(D - D')\frac{L_x}{D} = -\frac{1}{2}(1 - D'/D)L_x \quad (1.10)$$

在这种情形，位移梯度矩阵(1.9)与 x 无关，

$$[g] = \begin{bmatrix} -(1 - D'/D) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

而式(1.8)简化为标量方程

$$du_x = -(1 - D'/D)dL_x. \quad (1.12)$$

因此，质点微分位移在整根棒内是一致的。

假定这同一根棒再次受到压缩，长度从 D 变到 D' ，但中点保持刚性固定。在这种情形，质点位移为

$$u(L_x) = -\frac{1}{2}(1 - D'/D)(L_x - D/2). \quad (1.13)$$

它与式(1.10)的区别仅在于正 x 方向的刚性平移 $D/2$ 。因质点微分位移不变，故质点位移梯度矩阵仍由式(1.11)给出。

1.2 应 变

作为材料形变的一种量度，位移梯度矩阵(1.9)尚有一

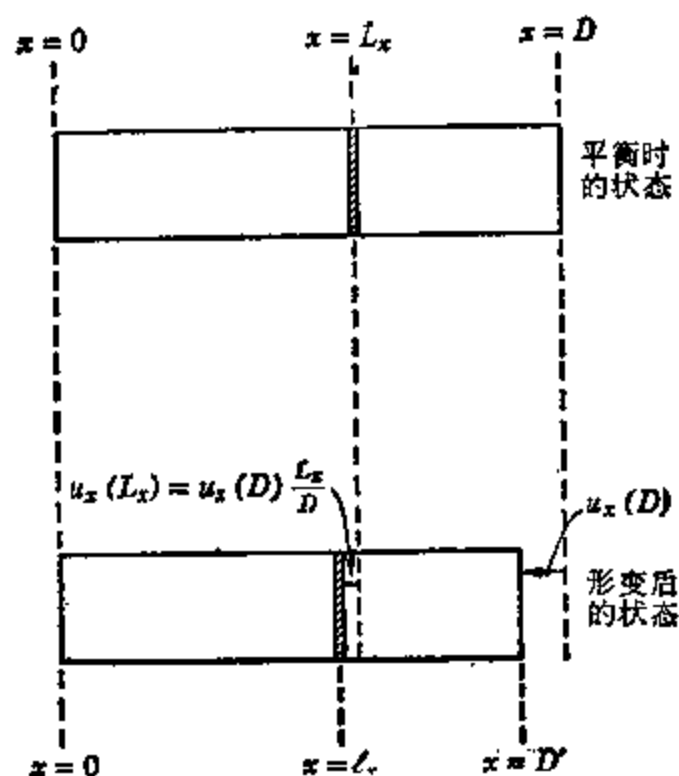


图 1.5 在均匀压缩棒中的质点位移

不足之处,即对于刚性转动,它并不简化为零。这一点很容易证明。设一物体绕通过图 1.6 中 O 点的垂直轴刚性地转过一小角度 ϕ 。图上标出了两个质点 a 和 b 在转动前和转动后的位置。在这种情形,质点 a 所经历的位移为

$$u = 2L \sin(\phi/2),$$

而质点 b 的位移为

$$u + du = 2(L + dL) \sin(\phi/2).$$

因此,虽然物体没有发生形变,但位移梯度不等于零。

对于图 1.6 的刚性转动以及刚性转动与刚性平动的全部组合都确实保持为零的一个量是标量:

$$\Delta = dl(\mathbf{L}, t) - dL.$$

对于刚性运动, Δ 总是零(见图 1.3 和 1.6),而对于形变,它总不是零。所以 Δ 是形变的真实量度。但满足同样要求的一个更合适的量是

$$\Delta' = dl^2(\mathbf{L}, t) - (dL)^2,$$

它通常定义为形变。

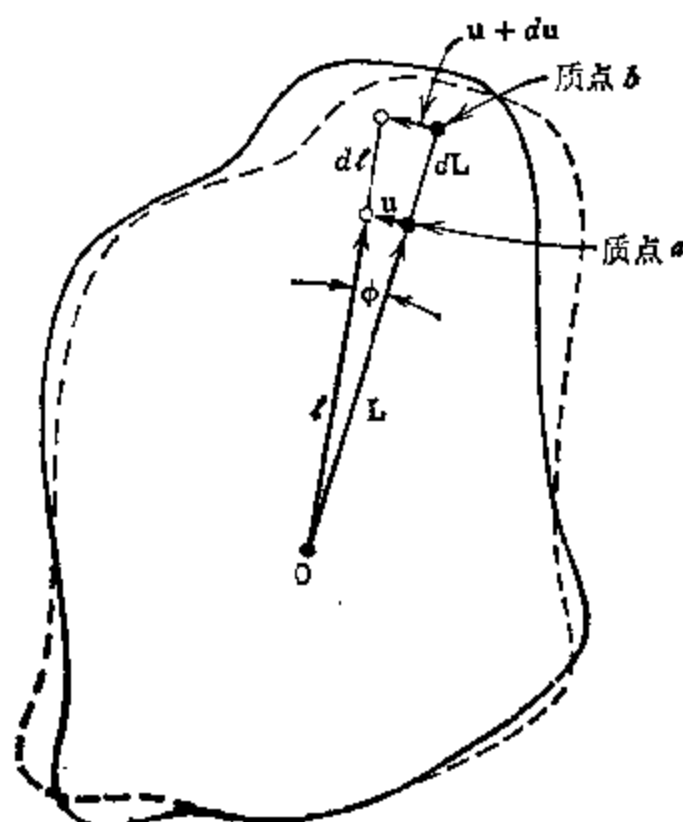


图 1.6 刚性转动一小角度 ϕ

在笛卡儿直角坐标系中，形变 Δ' 是用由式(1.5)和(1.8)得到的关系式

$$dl_x = dL_x + du_x = dL_x + \frac{\partial u_x}{\partial L_x} dL_x + \frac{\partial u_y}{\partial L_y} dL_y + \frac{\partial u_x}{\partial L_y} dL_y \quad (1.14)$$

等等从 $\mathbf{u}(\mathbf{L}, t)$ 算出的。为简单起见，首先考虑垂直于 z 轴的二维形变¹⁾。在这种情况下，

$$\begin{aligned} \Delta' &= dl^2 - dL^2 = (dl_x)^2 + (dl_y)^2 - (dL_x)^2 - (dL_y)^2 \\ &= \left[2 \frac{\partial u_x}{\partial L_x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial L_x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial L_x} \right)^2 \right] dL_x^2 \\ &\quad + \left[2 \frac{\partial u_y}{\partial L_y} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial L_y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial L_y} \right)^2 \right] dL_y^2 \end{aligned}$$

1) 位移分量 u_x 和 u_y 只是 x 和 y 的函数，而 $u_z = 0$ 。

$$+ \left(2 \frac{\partial u_x}{\partial L_y} + 2 \frac{\partial u_y}{\partial L_x} + 2 \frac{\partial u_x}{\partial L_x} \frac{\partial u_x}{\partial L_y} + 2 \frac{\partial u_y}{\partial L_x} \frac{\partial u_y}{\partial L_y} \right) dL_x dL_y. \quad (1.15)$$

它更适合用矩阵符号表示为

$$(dl)^2 - (dL)^2 = 2 \begin{pmatrix} dL_x & dL_y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dL_x \\ dL_y \end{pmatrix} \\ = 2S_{xx}dL_x^2 + 2S_{yy}dL_y^2 + 2(S_{xy} + S_{yx})dL_x dL_y, \quad (1.16)$$

其中各矩阵元 S_{ij} 可由令式 (1.15) 和 (1.16) 各对应项相等而求得。因式 (1.16) 中只出现非对角矩阵元之和，故可将矩阵选成对称的 ($S_{yx} = S_{xy}$) 而不失去普遍性，即

$$S_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial L_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial L_x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial L_x} \right)^2, \\ S_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial L_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial L_y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial L_y} \right)^2, \\ S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial L_y} + \frac{\partial u_y}{\partial L_x} + \frac{\partial u_x}{\partial L_x} \frac{\partial u_x}{\partial L_y} + \frac{\partial u_y}{\partial L_x} \frac{\partial u_y}{\partial L_y} \right).$$

对于三维形变，把上述论证加以推广，可证明¹⁾

$$\Delta'(\mathbf{L}, t) = 2S_{ij}(\mathbf{L}, t)dL_i dL_j, \quad (1.17)$$

而

$$S_{ij}(\mathbf{L}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial L_j} + \frac{\partial u_j}{\partial L_i} + \frac{\partial u_k}{\partial L_i} \frac{\partial u_k}{\partial L_j} \right) \\ i, j, k = x, y, z. \quad (1.18)$$

矩阵元 $S_{ij}(\mathbf{L}, t)$ 称为应变场的分量。这样，应变场就以质点位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{L}, t)$ 确定出形变 $\Delta' = dl^2 - dL^2$ ，而对于全部刚性运动都变为零。

各种固体的形变率相差很大。在某些像橡胶一类的材料中，位移梯度很容易大于 1²⁾。但对于较硬的材料，如果要求避

1) 此后，凡是重复下标就表示对 i 求和。

2) 位移梯度和应变都是无量纲的量。

免永久形变或断裂,位移梯度必须保持在 10^{-4} 到 10^{-3} 的范围以下. 对于比这个范围小得多的位移微商,式(1.18)中的平方项可以忽略,因而常可采用线性化的应变-位移关系¹⁾:

$$S_{ij}(\mathbf{L}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{L}, t)}{\partial L_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{L}, t)}{\partial L_i} \right) \\ i, j = x, y, z. \quad (1.19)$$

由于 $dL_j = dl_j - du_j$, 式(1.19)中 u_i 对 L_j 的偏微商与 $\partial u_i / \partial l_j$ 的差别仅在于平方项和更高阶项

$$\frac{\partial u_i}{\partial L_j} = \frac{\partial u_i}{\partial l_j} \left(1 - \frac{\partial u_j}{\partial l_j} \right)^{-1}.$$

因此,对线性化理论来说,不必区分形变后的位置矢量 \mathbf{l} 的分量和平衡位置矢量 \mathbf{L} 的分量. 即在笛卡儿直角坐标系中,

$$\mathbf{L} \simeq \mathbf{l} = \hat{\mathbf{x}}x + \hat{\mathbf{y}}y + \hat{\mathbf{z}}z \approx \mathbf{r}. \quad (1.20)$$

因而线性化的应变-位移关系在直角坐标系中取下列形式²⁾:

$$S_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right) \\ i, j = x, y, z. \quad (1.21)$$

在相同近似下,位移梯度矩阵(1.9)成为

$$\mathcal{E}_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial u_i}{\partial r_j}. \quad (1.22)$$

例 2 在线性化近似下,例 1 中的质点位移场为

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2}(1 - D'/D)\mathbf{x}.$$

因而唯一的非零应变分量为

$$S_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -(1 - D'/D),$$

1) 在非线性声学中,常需采用位移微商的全部,而不是式(1.19)中的特殊组合. 例如参看 H. F. Tiersten, *J. Math. Phys.*, **6**, p. 779-787 (1965); W.F. Brown Jr., *J. Appl. Phys.*, **36**, p. 994-1000 (1965) 和 D. E. Eastman, *Phys. Rev.*, **148**, p.530-542 (1966).

2) 对于柱坐标和球坐标,线性化的应变-位移关系在附录 1 中导出.

而应变矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} -(1 - D'/D) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

物理上, S_{xx} 表示每单位长度的长度变化, 它在压缩时取负值, 而在伸长时取正值。

在实验室尺度的物体中, 最大质点位移是微小的。如棒中所允许的最大应变是

$$S_{xx} = -10^{-4},$$

而 $D = 10^{-1}$ 米, 则棒自由端的位移

$$u_x(D) = -(D - D') = S_{xx}D = -10^{-4} \text{ 米}$$

或 10 微米。

例 3 另一类常见的形变是剪切应变。考虑一个沿 x 方向受到均匀切变的立方体(图 1.7)。在这种情形, 质点位移场为

$$u(r) = \frac{1}{2} C_y.$$

因此, 从式 (1.21) 得出非零应变分量为

$$S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} = C_y.$$

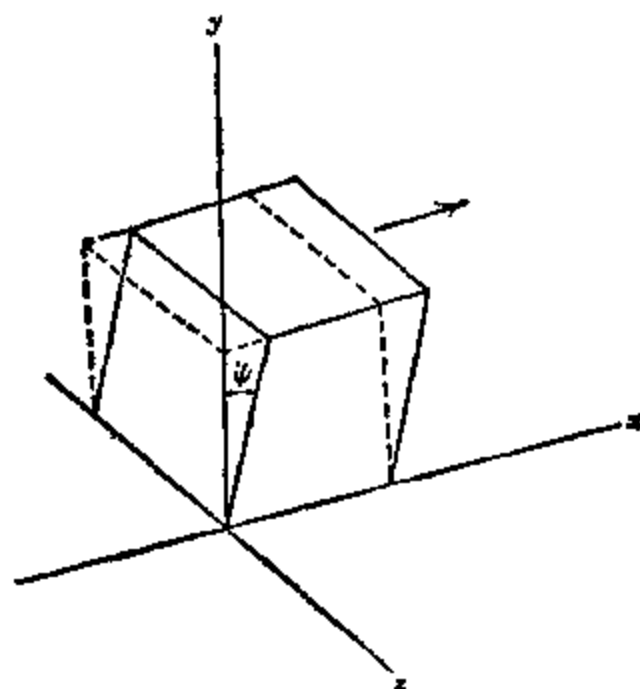


图 1.7 沿 x 方向的剪切应变。虚线画出物体形变前的状态, 实线表示形变后的状态

而应变矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

在这种情形,应变(称为单剪切)是图示剪切角 ψ 的一种量度,且有

$$\tan \psi = 2C.$$

如仍设所允许的最大应变为 10^{-4} ,则

$$\psi \approx 2 \times 10^{-4} \text{ 弧度}.$$

1.3 “局部”转动

在线性化近似下,应变矩阵(1.21)与位移梯度矩阵(1.22)之间存在着一个简单、而在物理上很重要的关系.为了说明这一点,可将位移梯度矩阵分成对称的和反对称的两部分:

$$[\mathcal{E}] = \frac{1}{2}([\mathcal{E}] + [\tilde{\mathcal{E}}]) + \frac{1}{2}([\mathcal{E}] - [\tilde{\mathcal{E}}]), \quad (1.23)$$

对称部分

反对称部分

其中转置符号(\sim)标示转置矩阵¹⁾.将式(1.23)与式(1.21), (1.22)相比较可以看出: $[\mathcal{E}]$ 的对称部分和应变矩阵完全相同,即

$$[S] = \frac{1}{2}([\mathcal{E}] + [\tilde{\mathcal{E}}]). \quad (1.24)$$

$[\mathcal{E}]$ 的反对称部分也有一个简单的物理解释.它对应于一个转动.为了看清这一点,考虑纯反对称的位移梯度矩阵

$$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E}_{xy} & 0 \\ -\mathcal{E}_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1) 行和列互换.

从式(1.8),

$$\begin{aligned} du_x &= \mathcal{E}_{xy} dL_y, \\ du_y &= -\mathcal{E}_{xy} dL_x, \\ du_z &= 0, \end{aligned}$$

所以

$$d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{L} = du_x dL_x + du_y dL_y = 0,$$

即 $d\mathbf{u}$ 与 $d\mathbf{L}$ 成直角. 对于图 1.6 的刚性转动, 其中的线性化近似意味着转动角 ϕ 必须很小, 这肯定是对的. 这个结论同样也适用于“局部”转动. 图 1.8 给出了一个例子. 周界被刚性固定着的一块长方材料, 在绕 z 轴的局部转矩作用下产生了形变. 如在以前图中一样, 仍用黑点表示质点的平衡态, 圈点表示它的形变态. 因为 $d\mathbf{l} = d\mathbf{L}$, 在转矩的作用点上, 介质就经历着纯“局部”转动, 从而应变为零. 在除作用点以外的其他地方, 应变和转动同时存在. 在声振动问题中, 经常会遇到局部转动. 然而, 在下一章中将看到: 在振动问题的动力学中不讨

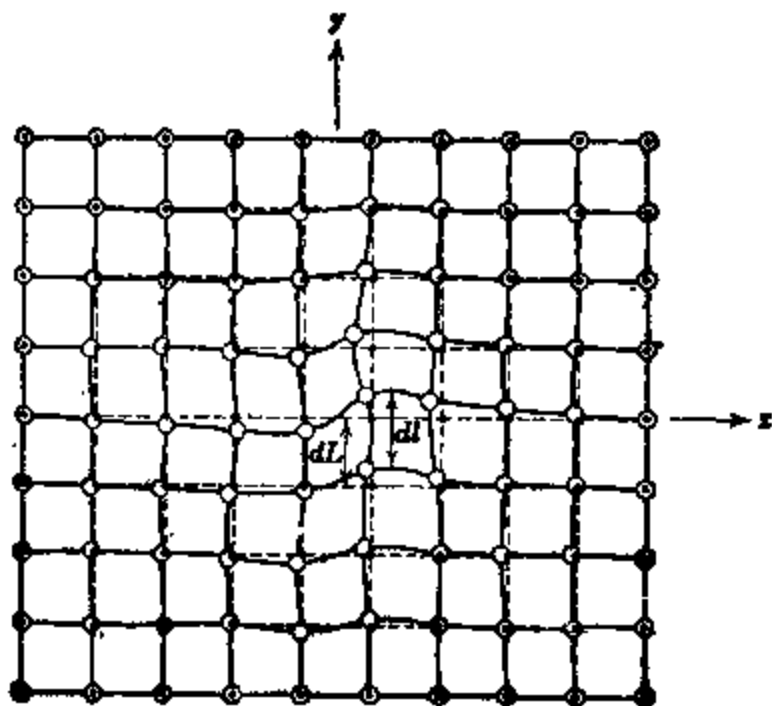


图 1.8 绕 z 轴的局部转动的图解

论这些“局部”转动¹⁾。所以在声场方程中,不出现位移梯度矩阵的反对称部分。

例 4 由于应变矩阵对介质的刚性转动或局部转动的区别不够灵敏,所以应变分量并不唯一地表征质点位移场。作为例子,考虑二维的静态位移场

$$u(r) = xC_y + yC_x,$$

由式 (1.21) 可知,这种情况下的应变矩阵具有和例 3 相同的非零应变分量。即

$$S_{xy} = S_{yx} = C.$$

但是在这种情况下,位移梯度矩阵是纯对称的,

$$[\epsilon] = [S] = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此介质没有转动,而这种形变称为纯剪切。与此相反,例 3 中的单剪

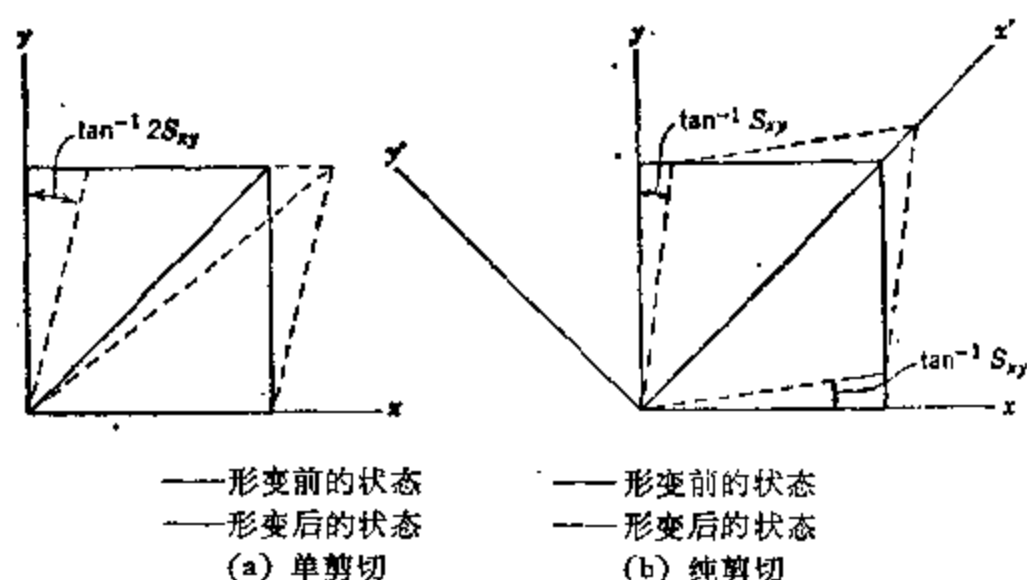


图 1.9 单剪切和纯剪切的比较。这两种情形不能仅用应变场来区分,因为两者可通过一个刚性转动彼此转换

1) 但在其他物理现象如声光散射中,这些局部转动是重要的。参见 D.F. Nelson, M. Lax, *Phys. rev. lett.*, **25**, pp. 379—380 (1970); D.F. Nelson, P.D. Lazay, *Phys. Rev. lett.*, **25**, pp. 1187—1190 (1970).

切位移场

$$u(r) = \frac{1}{2} 2C_y$$

的确有一个反对称的位移梯度分量:

$$\frac{1}{2} ([\epsilon] - [\bar{\epsilon}]) = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是, 例 3 中质点的单剪切运动与质点的纯剪切运动的差别是在一个绕 z 轴顺时针转过 $\tan^{-1} S_{xy}$ 角(图 1.9).

1.4 作图表示

在电磁理论中, 多年来惯于用场力线图来表示电场和磁场的分布. 这种作图法常可对要解决的问题提供有价值的物理图象, 它是按照每一点场矢量的方向画出一族平滑曲线. 于是场力线的密度就表示场强的变化, 间距密的线对应于高强度区域, 而间距稀的线对应于低强度区域.

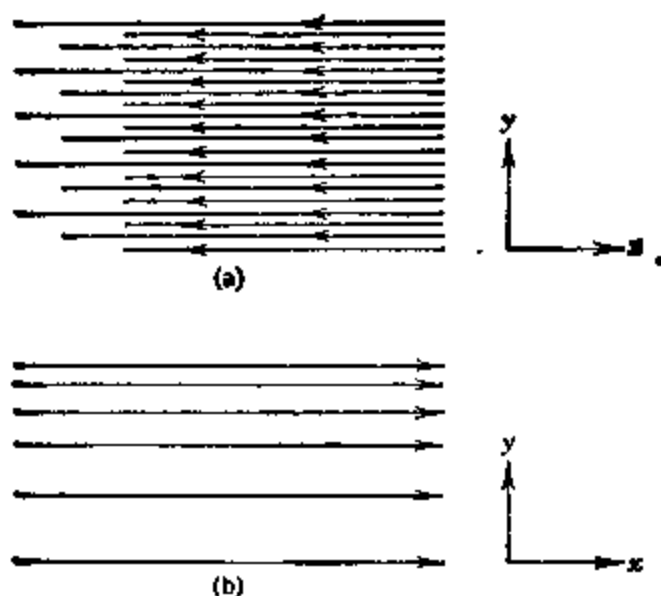


图 1.10 质点位移场的场力线图
(a) 均匀压缩棒(图 1.5); (b) 均匀切变块(图 1.7)

同理,作图表示在声场理论中也是有益的,而且它们在图 1.1 和 1.8 中已被用于这一目的。在这些图解中,是用下述步骤来使形变图样形象化的:首先考虑一个处于平衡状态的介质质点方阵,然后通过应变介质中各相同质点的位移位置画出网格线。另一种方法是用电磁学中的场力线方法来表示质点位移矢量 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 。图 1.10 就是用这种方法来表示的例 2 和例 3 中静态位移场的图示。

例 5 到此为止,只考虑了应变在空间上是均匀的静态例子。对于随时间变化的振动问题,应变总是空间上不均匀的。这种情形最简单的例子就是均匀(或直顶)平面波。在均匀平面波中,传播沿着某一特定方向进行。但场的均匀性却呈现在与传播方向垂直的平面内,例如

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \hat{x} \cos(\omega t - ky) \quad (1.25)$$

是一个沿着 y 方向传播而质点位移为 x 方向偏振的均匀平面波。这里,

$$k = 2\pi/\lambda, \quad (1.26)$$

这个量称为波矢,其中 λ 是波长。相位相同 ($\omega t - ky = \text{常数}$) 的点的传播速度称为相速度,

$$v_p = \frac{\omega}{k}. \quad (1.27)$$

从式 (1.21), 相应于式 (1.25) 的应变为

$$s_{yx} = s_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{k}{2} \sin(\omega t - ky). \quad (1.28)$$

它与例 3 中的单剪切情形相同。这个波称为 x -偏振、 y -传播¹⁾的切变波。在图 1.11 和图 1.12 中分别画出 $t = 0$ 时形变图样的网格表示和场力线表示。尚未证明式 (1.25) 和 (1.28) 代表一种容许的声振动图样(这一点将在第三章中证实)。沿着 y 方向传播的另两个均匀平面波是 x -偏振波

$$\mathbf{u} = \hat{x} \cos(\omega t - ky) \quad (1.29)$$

和 y -偏振波

$$\mathbf{u} = \hat{y} \cos(\omega t - ky). \quad (1.30)$$

1) x -偏振, y -传播是沿 x 方向偏振和沿 y 方向传播的简写,下同。——译注

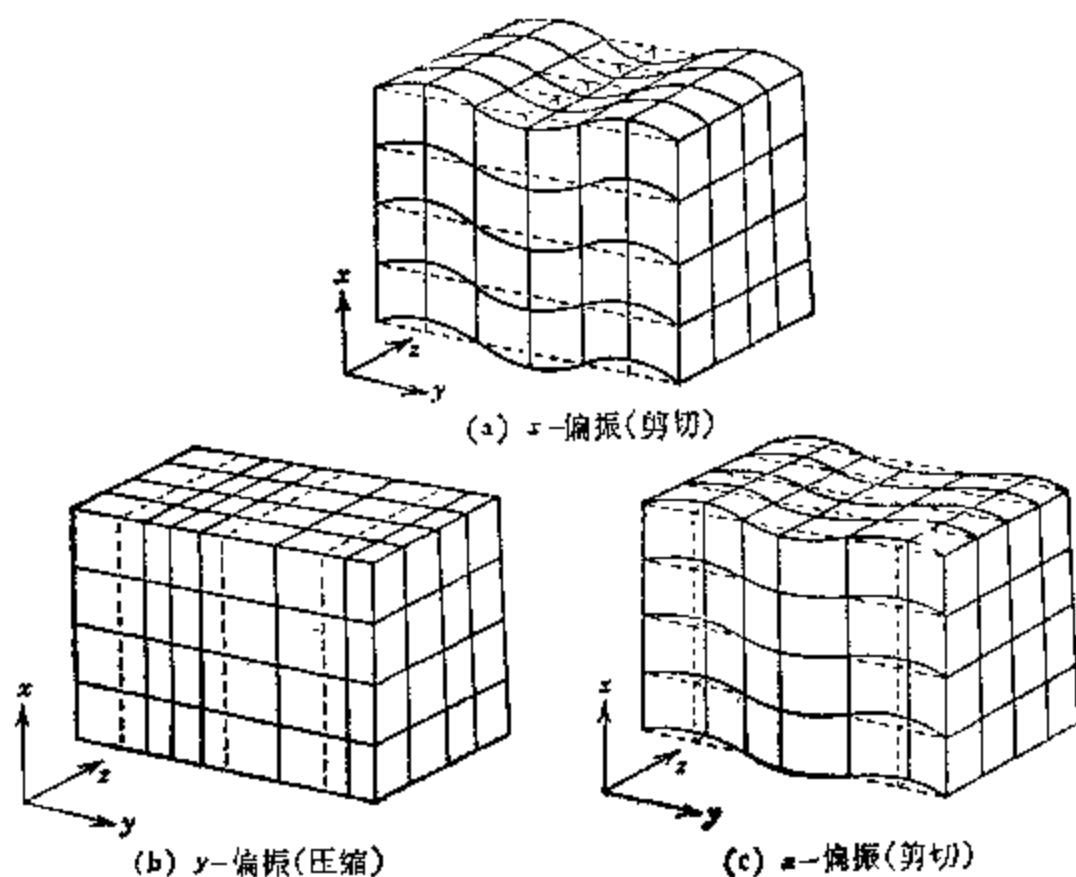


图 1.11 沿着 y 方向传播的均匀质点位移平面波的网格图

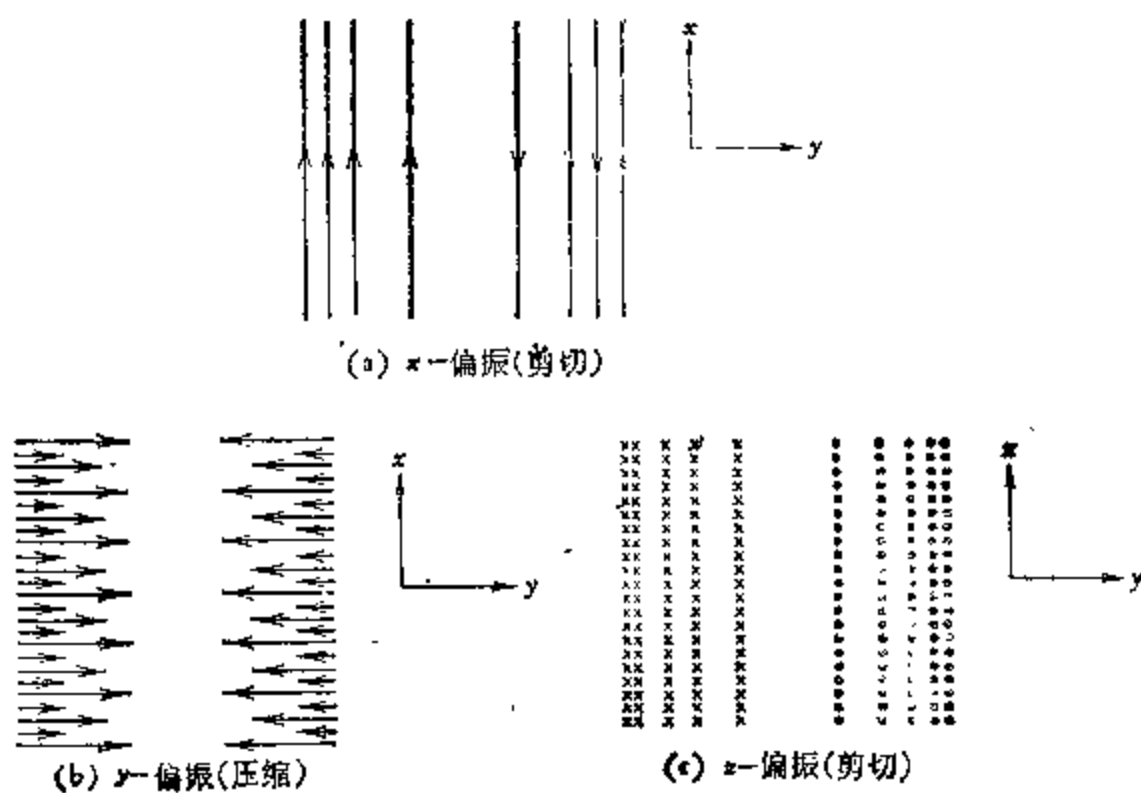


图 1.12 沿着 y 方向传播的质点位移均匀平面波的场力线图

前者有一单剪切应变场

$$S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{k}{2} \sin(\omega t - ky), \quad (1.31)$$

故称为 x -偏振、 y -传播的切变波,而后者有一压缩-延伸应变场

$$S_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = k \sin(\omega t - ky), \quad (1.32)$$

故称为 y -传播的压缩波。这两个波的波场图样在图 1.11 和 1.12 中已图解出来。

1.5 变换特性

在 §1.1 和 §1.2 中,质点位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 和应变场 $S_{ij}(\mathbf{r}, t)$ 是对一组笛卡儿直角坐标轴来定义的。在声振动和波传播的分析中,常常要将声场变换到与一个特殊问题的几何学相配合的坐标系中,这可能包含直角坐标轴的转动,也可能包含从直角坐标到柱坐标或到球坐标的变换。这里我们只讨论直角坐标¹⁾,并且只考虑右手坐标系。将旧坐标和新坐标分别取作 x, y, z 和 x', y', z' , 两组坐标轴的相对取向用图 1.13 (a) 中规定的方向余弦 a_{ij} 来描述。也就是说, a_{ij} 是新坐标轴 $\hat{\mathbf{i}}'_i$ 与旧坐标轴 $\hat{\mathbf{j}}_j$ 之间夹角的方向余弦。

设某给定矢量 \mathbf{v} 在旧坐标系中由分量 v_x, v_y, v_z 表示,而在新坐标系中由分量 v'_x, v'_y, v'_z 表示。我们可以将所有旧分量投影到相应的新坐标轴上,这样就能算出沿旧坐标轴上的分量表示的每个新分量,图 1.13 (b) 对二维情形图示出这一步骤。例如,

$$\begin{aligned} v'_x &= \cos\theta_{x'x} v_x + \cos\theta_{x'y} v_y \\ &= a_{xx} v_x + a_{xy} v_y. \end{aligned}$$

因而,普遍的矢量变换法则是

1) 从直角坐标到柱坐标和球坐标的变换在附录 1.4 中给出。

$$v'_i = a_{ij} v_j, \quad i, j = x, y, z, \quad (1.33)$$

其中系数 a_{ij} 确定出变换矩阵 $[a]$ 。既然这一变换只是给出同

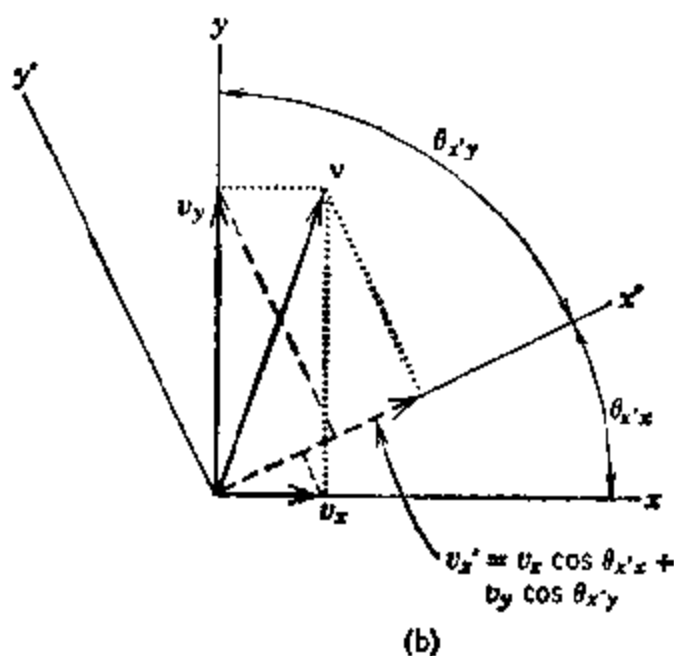
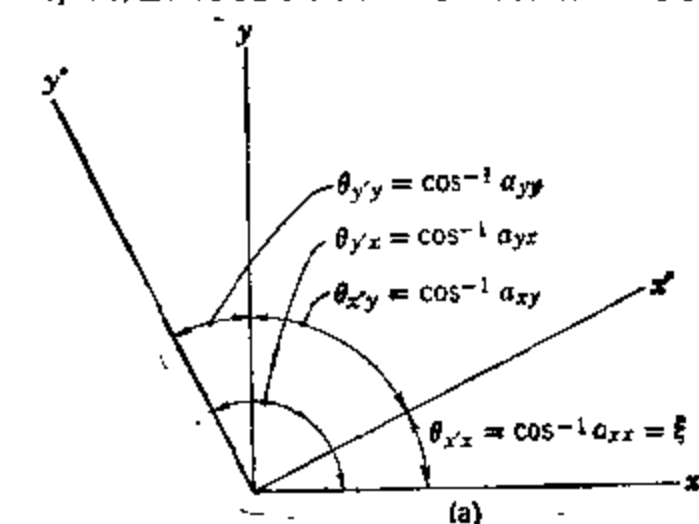


图 1.13 与绕 z 轴逆时针转 ξ 角相对应的直角坐标变换
一矢量的的一种新的描述, 矢量 \mathbf{v} 的大小就保持不变,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = (v'_x)^2 + (v'_y)^2 + (v'_z)^2.$$

如将矢量用一直列矩阵表示:

$$\mathbf{v} \rightarrow [\mathbf{v}] = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix},$$

则上述条件可用矩阵方程表为

$$[\tilde{v}][v] = [\tilde{v}'][v'] = [\tilde{v}][\tilde{a}][a][v],$$

其中已把式 (1.33) 写成

$$[v'] = [a][v],$$

并利用了矩阵恒等式

$$([a][v]) = [\tilde{v}][\tilde{a}].$$

换句话说, 变换矩阵必须满足下列条件:

$$[\tilde{a}][a] = [I],$$

其中 $[I]$ 是单位矩阵, 或

$$[a]^{-1} = [\tilde{a}], \quad (1.34)$$

满足此条件的矩阵称为**正交矩阵**。

变换法则 (1.33) 适用于任何矢量, 包括质点的微分位移矢量 $[du]$ 和微分坐标矢量 $[dr]$ 。按照式 (1.22), 二者由矩阵方程

$$[du] = [\mathcal{E}][dr] \quad (1.35)$$

联系起来。从这一关系式和矢量变换法则 (1.33), 要推出 $[\mathcal{E}]$ 的变换法则是很简单的。用式 (1.33) 将 $[du]$ 变换到新坐标系:

$$[du'] = [a][du] = [a][\mathcal{E}][dr], \quad (1.36)$$

类似地,

$$[dr'] = [a][dr]$$

或

$$[a]^{-1}[dr'] = [dr],$$

代入式 (1.35), 给出

$$[du'] = [a][\mathcal{E}][a]^{-1}[dr'],$$

此式表明, 新坐标系中的位移梯度矩阵是

$$[\mathcal{E}'] = [a][\mathcal{E}][a]^{-1} = [a][\mathcal{E}][\tilde{a}], \quad (1.37)$$

其中利用了式 (1.34)。

按照式 (1.24), 应变矩阵 $[S]$ 是位移梯度矩阵的对称部

分, 因而它必须按同样方式变换. 即

$$[S'] = [a][S][\tilde{a}]; \quad (1.38)$$

或者以分量来表示,

$$S'_{ij} = a_{ik} S_{kl} (\tilde{a})_{lj} = a_{ik} S_{kl} a_{jl}.$$

在此方程中, 各项的次序并不重要, 所以可将变换重新排列成易于记忆的形式:

$$S'_{ij} = a_{ik} a_{jl} S_{kl}. \quad (1.39)$$

两个 a 的左下标 (i, j) 与左端应变的下标相匹配, 而它们的右下标 (k, l) 与右端应变的下标相匹配.

按照式 (1.39) 变换的物理量, 诸如位移梯度 $[e]$ 或应变 $[S]$, 称为二阶张量. 按照式 (1.33) 变换的矢量, 如质点位移 u , 称为一阶张量.

例 6 对于坐标轴绕 z 轴逆时针转 ξ 角的转动 (图 1.13) (按沿正 z 方向推进的右手螺旋定则来规定)¹⁾

$$\cos \theta_{x'x} = a_{xx} = \cos \xi,$$

$$\cos \theta_{x'y} = a_{xy} = \sin \xi,$$

$$\cos \theta_{y'y} = a_{yy} = \cos \xi,$$

$$\cos \theta_{y'x} = a_{yx} = -\sin \xi,$$

$$\cos \theta_{z'z} = a_{zz} = 1,$$

而所有其他的 a_{ij} 都是零. 因此坐标变换矩阵为

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

质点位移矢量 u 向转动后的坐标系的变换是通过矩阵方程

$$\begin{bmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

即

1) 原文为 clockwise, 但按图 1.13 和变换矩阵 $[a]$, 应理解为逆时针转动下同, ——译注

$$\begin{aligned}u'_x &= \cos \xi u_x + \sin \xi u_y, \\u'_y &= -\sin \xi u_x + \cos \xi u_y, \\u'_z &= u_z\end{aligned}$$

来实现的。

在例 4 中求得 xy 平面内的静态纯切变的应变矩阵是

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

应用式 (1.38), 将它变换到转动后的坐标系

$$\begin{aligned}[S'] &= \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\&= \begin{bmatrix} C \sin 2\xi & C \cos 2\xi & 0 \\ C \cos 2\xi & -C \sin 2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由此可以看出, 当参照于一个新坐标系时, 应变分量完全改变了. 在原坐标系中, 只存在 $S_{xy}=S_{yx}$ 的切应变分量. 坐标转动后增加一沿 x' 轴的延伸和一沿 y' 轴的压缩. 当 $\xi=\pi/4$ 时, 切应变分量完全等于零, 只余下沿 x' 方向的延伸和沿 y' 方向的压缩. 图 1.9 (b) 很清楚地说明了这一点. 该图表示出一立方块材料由于 xy 平面内的纯剪切应变而发生的形变. 从图中能明显地看出沿 x' 轴的伸长和沿 y' 轴的缩短.

例 7 坐标轴的反向:

$$\begin{aligned}\hat{x}' &= -\hat{x}, \\ \hat{y}' &= -\hat{y}, \\ \hat{z}' &= -\hat{z}\end{aligned}$$

由变换矩阵

$$[a] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

所描述. 在这种情形, 按照式 (1.33), 所有的矢量分量都变号:

$$u_i = -u_i \quad i = x, y, z,$$

只是应变分量保持不变:

$$[S'] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [S]$$

当矢量分量 u_i 和 r_i 都变号时, 式 (1.21) 中的偏微商不受影响, 因此这个结果并不意外。第八章例 3 中将指出应变分量这一特性的一个重要物理推论。

例 8 在对非均匀应变进行变换时, 必须使因变的应变变量和自变的空间坐标变量都发生变化。譬如, 考虑例 5 中式 (1.28) 给出的 x -偏振、 y -传播的切应变, 并使坐标轴如在例 6 中那样绕 z 轴转动。应变分量的变换方式就与例 6 中的静态切应变分量的变换方式完全相同。按照式 (1.33), 坐标位置矢量

$$\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$$

按

$$[\mathbf{r}'] = [a][\mathbf{r}]$$

变换。从而

$$[\mathbf{r}] = [a]^{-1}[\mathbf{r}'] = [\hat{a}][\mathbf{r}'].$$

于是, 新旧位置坐标之间的变换关系就是

$$x = x' \cos \xi - y' \sin \xi,$$

$$y = x' \sin \xi + y' \cos \xi,$$

$$z = z'.$$

利用此结果和例 6 中所推出的应变变换看出, 应变场在转动后的坐标系中由

$$[S'] = \frac{k}{2} \sin[\omega t - k(x' \sin \xi + y' \cos \xi)] \begin{bmatrix} \sin 2\xi & \cos 2\xi & 0 \\ \cos 2\xi & -\sin 2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

所描述。以后将看到: 声振动问题中所遇到的困难, 有许多都起因于这个相当复杂的变换法则。

例 9 得出应变场 (1.40) 的另一种方法是首先变换位移场 (1.25), 然后在转动后的坐标系中应用应变-位移关系式。当不需要原坐标系中的应变场时, 这是一种有用的捷径。从例 6,

$$u = A \cos(\omega t - ky)$$

变换到

$$u = (x' \cos \xi - y' \sin \xi) \cos(\omega t - ky),$$

而像例 8 中那样,对空间坐标变换,给出

$$u = (x' \cos \xi - y' \sin \xi) \cos[\omega t - k(x' \sin \xi + y' \cos \xi)].$$

现如应用应变-位移关系

$$S_{i,j'} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{j'}}{\partial r_{i'}} + \frac{\partial u_{i'}}{\partial r_{j'}} \right),$$

结果为

$$S_{x',x'} = \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} = k \sin \xi \cos \xi \sin[\omega t - k(x' \sin \xi + y' \cos \xi)]$$

$$= \frac{k}{2} \sin 2\xi \sin[\omega t - k(x' \sin \xi + y' \cos \xi)],$$

$$S_{y',y'} = \frac{\partial u_{y'}}{\partial y'} = -\frac{k}{2} \sin 2\xi \sin[\omega t - k(x' \sin \xi + y' \cos \xi)],$$

$$S_{x',y'} = S_{y',x'} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial u_{y'}}{\partial x'} \right)$$

$$= \frac{k}{2} \cos 2\xi \sin[\omega t - k(x' \sin \xi + y' \cos \xi)],$$

这与式 (1.40) 相符。

1.6 符号表示法和缩写下标

在物理学和工程中,标准惯例是用黑体字母表示矢量,而不给出它们的分量。因而,电磁理论中的电场和磁场用符号写成 **E** 和 **H**,而不用下标符号 E_i 和 H_i 。乘积和微分运算也用符号表示。例如两个矢量的标(或点)积是

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z = E_i D_i,$$

而矢量的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z = \frac{\partial}{\partial r_i} D_i.$$

电磁学中遇到的二阶张量也用符号，而不用它们的分量来表示。例如，晶状介质中的电位移矢量 \mathbf{D} 和电场矢量 \mathbf{E} 不总是平行的。在这种情形， \mathbf{D} 的分量同 \mathbf{E} 的分量由三个线性方程联系起来：

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z, \\ D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z, \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z, \end{aligned} \quad (1.41)$$

或者，在矩阵形式下，

$$[\mathbf{D}] = [\epsilon][\mathbf{E}]. \quad (1.42)$$

式 (1.42) 中的介电常数矩阵 $[\epsilon]$ 把一个矢量同另一个矢量联系起来，它的变换方式就同式 (1.35) 中位移梯度矩阵 $[\mathcal{E}]$ 的完全一样，因而它是一个二阶张量，通常用符号写成 ϵ 。于是式 (1.41) 的符号表示为

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}, \quad (1.43)$$

其中的点表示对 ϵ_{ij} 的第二个下标求和。

在这种表示法中并不企图明确区分二阶张量和矢量。张量的阶数由物理量本身的性质所确定，所以除了对所有的量采用标准符号外，不需要特殊的标记。这种符号法减少了电磁场方程所必须进行处理的细目的数量，从而使运算变得容易，并使推导或计算的主要步骤更为清晰。由于同样的理由，这种符号表示法也可用于声学中。在这种情形，采用黑体字母 \mathcal{E} 和 \mathbf{S} 来表示二阶位移梯度场和应变场，同样也用黑体字母 \mathbf{u} 表示质点位移矢量。对于以后要引入的其他二阶和更高阶张量也采用同样约定。和电磁学的情形一样，张量的阶数不必用符号体系明显标出，因为它已由物理变量的本性所确定； \mathbf{u} 是一阶张量， \mathcal{E} 和 \mathbf{S} 是二阶张量等等。由于引入了符号表示法，本章的基本方程可以写得非常紧凑。矢量 \mathbf{u} 的梯度的

标准符号¹⁾是 $\nabla \mathbf{u}$ 。所以位移梯度的线性化定义(1.22)用符号法可写成

$$\mathcal{E} = \nabla \mathbf{u}. \quad (1.44)$$

相应地,式(1.35)取为

$$d\mathbf{u} = \mathcal{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.45)$$

如在式(1.43)中一样,点表示对 \mathcal{E}_{ij} 的第二个下标求和。

按照式(1.24),应变矩阵等于位移梯度矩阵的对称部分。这一对应关系可用符号表示为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathcal{E} + \widetilde{\mathcal{E}}). \quad (1.46)$$

将式(1.44)代入式(1.46),应变和质点位移之间的关系即可写为

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \widetilde{\nabla \mathbf{u}}).$$

因为这个方程在声学理论中经常要用到,所以希望为右端引进一个更简洁的符号体系。它所描述的运算是取位移梯度的对称部分,因而可用附带下标 s (表示对称的)的梯度符号来表示。于是

$$\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \widetilde{\nabla \mathbf{u}}) = \nabla_s \mathbf{u}. \quad (1.47)$$

所以应变-位移的关系为

$$\mathbf{S} = \nabla_s \mathbf{u}. \quad (1.48)$$

在求解具体问题时,当然最终必须选择一个坐标系,并将场分解成相对这些坐标的分量。在声学中,这一步骤常可用引入应变分量的一组缩写下标的办法而得到简化。由于应变张量(1.21)是对称的,所以每一分量只需用一个下标来标明,

1) 阶数高于一的张量符号常称为并矢式,并已发展了处理它们的相应公式体系。在本书中,不明显地使用该公式体系,但处理符号的方式与并矢式概念一致。关于并矢式方法的详尽论述可参考本章文献[1]和[3]。

而不用两个。这些下标按下列方案定义：

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & \frac{1}{2} S_6 & \frac{1}{2} S_5 \\ \frac{1}{2} S_6 & S_2 & \frac{1}{2} S_4 \\ \frac{1}{2} S_5 & \frac{1}{2} S_4 & S_3 \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

其中缩写系统中的号码次序所遵循的循环方式如所示。引入因子 $1/2$ 是弹性理论中的标准惯例，理由是它简化了第三章和第五章中的某些关键性方程。在这种缩写下标表示中，可将应变写成六元直列矩阵，而不是九元方阵，即

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

例 10 对于例 5 中 x -偏振、 y -传播的应变波，从式 (1.28) 得出其唯一非零应变分量

$$S_{yx} = S_{xy} = \frac{k}{2} \sin(\omega t - ky).$$

按照式 (1.49)，这给出

$$S_6 = S_{xy} = k \sin(\omega t - ky),$$

从而

$$\mathbf{S} = k \sin(\omega t - ky) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

在例 8 中, 是把这同一应变场归属于一组绕 z 轴转 ξ 角的坐标轴的, 结果得到由式 (1.40) 给出的变换后的应变矩阵, 其中

$$\begin{aligned} S_{x'x'} &= S_{11}' = \frac{k}{2} \sin 2\xi \\ &\quad \times \sin [\omega t - k(x' \sin \xi + y' \cos \xi)], \\ S_{y'y'} &= S_{22}' = -\frac{k}{2} \sin 2\xi \\ &\quad \times \sin [\omega t - k(x' \sin \xi + y' \cos \xi)], \\ S_{x'y'} &= S_{y'x'} = \frac{S_{44}'}{2} = \frac{k}{2} \cos 2\xi \\ &\quad \times \sin [\omega t - k(x' \sin \xi + y' \cos \xi)]. \end{aligned}$$

从而, 以缩写下标表示为

$$S' = \frac{k}{2} \sin [\omega t - k(x' \sin \xi + y' \cos \xi)] \begin{bmatrix} \sin 2\xi \\ -\sin 2\xi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \cos 2\xi \end{bmatrix}.$$

从例 10 可以清楚地看出: 应变变换法则 (1.38) 不能直接应用于缩写下标, 但这并不是缩写符号的重要缺陷, 因为在变换之前总是可以把它变回到全下标, 或者也可采用 §3.4 中推出的缩写下标变换法则. 为了避免这方面的混乱, 重要的是要有一种能明确表示所用下标类型的符号. 本书规定: 缩写下标用大写字母表示 (S_I), 而全下标则用小写字母表示 (S_{ij}).

在式 (1.49) 中引进因子 $1/2$ 的一个直接好处是: 以缩写下标表示的应变分量以一简单方式与质点位移分量相联系. 从式 (1.21) 和 (1.49)

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

或

$$S_I = \nabla_{Ij} u_j. \quad (1.52)$$

这是应变-位移关系式 (1.48) 在直角坐标下的矩阵表示。例如,可用它从例 5 的位移场 (1.25) 直接算出例 9 中的应变 (1.51)。因此,式 (1.48) 中的对称梯度算符 ∇_I 在直角坐标下的矩阵表示为

$$\nabla_I \rightarrow \nabla_{Ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.53)$$

柱坐标和球坐标下的 ∇_I 表示在附录 1.2 中导出。

习 题

1. 试求出与下列质点位移场相对应的应变场:

$$(a) u_x = Kx, u_y = Ky;$$

$$(b) u_x = Kx, u_y = -Ky;$$

$$(c) u_x = Ky, u_y = Kx.$$

2. 画出说明习题 1 场分布的网格图和场力线图.

3. 将习题 1 的应变场变换到绕 z 轴逆时针转过 45° 的坐标系.

4. 试用以下步骤求出习题 3 中变换后的应变场: 首先对习题 1 的位移场进行变换, 然后在新坐标系中计算应变.

5. 用缩写下标符号表示习题 1 和习题 3 中的应变场.

6. 在 §1.3 中已阐明: 反对称位移梯度矩阵

$$[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{E}_{xy} & 0 \\ -\mathcal{E}_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

表示小角度的纯转动, 试证这对应于一绕 z 轴的逆时针转动, 并且转动角 ϕ 由下式给出:

$$\mathcal{E}_{xy} = \sin \phi \approx \phi.$$

考虑由单位矢量

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{x}}\alpha_x + \hat{\mathbf{y}}\alpha_y + \hat{\mathbf{z}}\alpha_z$$

确定的转动轴, 并证明下列位移梯度矩阵表示绕此轴逆时针转过一小角度 χ 的纯转动:

$$[\mathcal{E}] = \chi \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_x & \alpha_y \\ \alpha_x & 0 & -\alpha_z \\ -\alpha_y & \alpha_z & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 1$. 证明在这种情形, 关系式

$$[du] = [\mathcal{E}][dL]$$

等效于

$$d\mathbf{u} = \chi \hat{\mathbf{a}} \times d\mathbf{L}.$$

7. 一沿 x 方向偏振、 z 方向传播的切变波具有位移场

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - kz).$$

试算出其应变场,并变换到绕 z 轴逆时针转过 45° 的坐标系.

8. 试用柱坐标(附录 1)表出习题 1(a) 的位移场和应变场.

9. 试用类似于图 1.4 的图来解释习题 8 中为什么会有应变分量 $S_{\phi\phi}$.

10. xy 平面上任意的二维应变场由应变分量 $S_{xx}, S_{yy}, S_{xy} = S_{yx}$ 所描述. 试证明: 当坐标系绕 z 轴逆时针转过 ξ 角后,应变分量变换为

$$S'_{xx} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} + \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \cos 2\xi + S_{xy} \sin 2\xi,$$

$$S'_{yy} = \frac{S_{xx} + S_{yy}}{2} - \frac{S_{xx} - S_{yy}}{2} \cos 2\xi - S_{xy} \sin 2\xi,$$

$$S'_{xy} = S'_{yx} = \frac{S_{yy} - S_{xx}}{2} \sin 2\xi + S_{xy} \cos 2\xi.$$

11. 试用习题 10 中推出的方程求伸长、压缩和切应变取最大值的角度 ξ . 试用 S_{xx}, S_{yy} 和 S_{xy} 表出最大应变.

参 考 文 献

- [1] P. C. Chou and N. J. Pagano, Elasticity-Tensor, Dyadic and Engineering Approaches, Ch. 2, van Nostrand, New York, 1967.
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Theory of Elasticity, pp. 1—4, Pergamon, New York, 1970.
- [3] G. Nadeau, Introduction to Elasticity, pp. 33—40, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
- [4] J. F. Nye, Physical Properties of Crystals, Ch. 1, 2, 6, Oxford, England, 1964.
- [5] M. J. P. Musgrave, Crystal Acoustics, pp. 9—21, Holden-Day, San Francisco, 1970.

第二章 应力和动力学方程

2.1 彻体力和体力矩

第一章引入了两个声场变量：质点位移 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 和应变 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ ，它们表征振动材料介质中的质点运动和形变。当一物体作声振动时，在相邻质点之间产生弹性恢复力（或应力）。在自由振动体内，这是唯一存在的力。如果物体的振动是由外力所激发，则还须考虑两类激发力（彻体力和表面力，即牵引力）。为了分析振动问题，首先必须用一种定量方式来确定所有这些力，然后将它们和场变量 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 在数学上联系起来。

彻体力是直接作用在物体内部质点上的长程力。例如，重力场对于体积为 dV 的每个质点¹⁾产生一静态彻体力：

$$\mathbf{F}dV = \rho \mathbf{g}dV, \quad (2.1)$$

其中 ρ 为介质的质量密度，而 \mathbf{g} 为重力场矢量。将电场和磁场加到具有永久电极化或永久磁极化的介质上，也可以产生这类力。在这种情形还出现体力矩。在每单位体积的永久磁矩为 \mathbf{M} 的介质中，外加一强度为 \mathbf{H} 的磁场，就对体积为 dV 的每个质点产生一体力矩：

$$\mathbf{G}dV = -\mathbf{M} \times \mathbf{H}dV. \quad (2.2)$$

彻体力和体力矩的特点是：它们与作用于其上的质点的体积

1) 在 §1.1 中曾指出：声学理论中所考虑的质点和组成介质的原子质点之间的区别。在声学中认为，所有介质都是连续的，因此，质点具有无限小的体积元。

成正比，从而由力和力矩的体密度，即式 (2.1) 和式 (2.2) 中的 \mathbf{F} 和 \mathbf{G} 所确定。在本书采用的 MKS 制中， \mathbf{F} 的单位是牛顿/米³，而 \mathbf{G} 的单位是牛顿/米²。

2.2 牵引力和应力

材料中激发声振动的另一种方法是在它的界面上施加表面力。在这种情形，外加的激发并不是直接作用在体内的质点上，而是借助于作用在相邻质点之间的弹性力(或应力)传递给它们的(图 2.1)。与施加在界面上的牵引力一样，质点之间的应力是作用在面上，而不是作用在体积上，因而可描述为内牵引力。应力和外牵引力的单位都是牛顿/米²。

振动介质内的应力可把质点取作某正交坐标系的体积元来确定。图 2.2 表示在笛卡儿坐标系中的这样一个质点。每个面受到邻接材料所施加的作用力。为了确定这些力，质点的每个面要求三个力分量。在图 2.2 中，作用在面向 $+x$ 方向的面积元上的牵引力或每单位面积上的力为

$$\mathbf{T}_x = \hat{x}T_{xx} + \hat{y}T_{yx} + \hat{z}T_{zx}. \quad (2.3)$$

同样，在面向 $+y$ 和 $+z$ 方向的面积元上的牵引力为

$$\mathbf{T}_y = \hat{x}T_{xy} + \hat{y}T_{yy} + \hat{z}T_{zy} \quad (2.4)$$

和

$$\mathbf{T}_z = \hat{x}T_{xz} + \hat{y}T_{yz} + \hat{z}T_{zz}. \quad (2.5)$$

这些力密度的分量 $T_{ij}(i, j = x, y, z)$ 称为应力分量。在振动

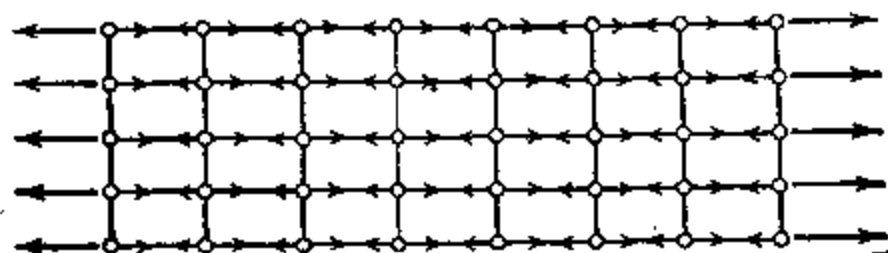


图 2.1 外加牵引力逐点传入固体内部

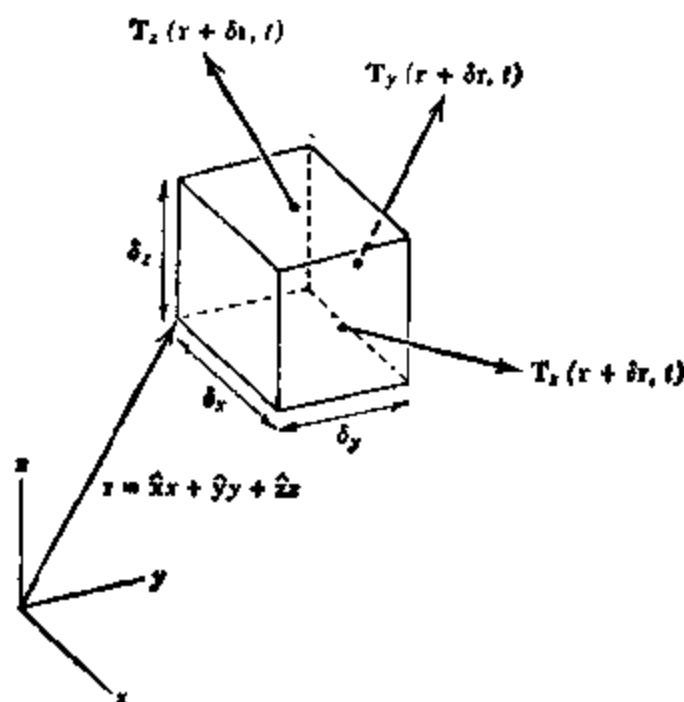


图 2.2 作用在一质点上的牵引力。 T_x , T_y 和 T_z 是每单位面积上的力介质中, 它们总是空间位置的函数。因而, 为了用式 (2.3) — (2.5) 来确定点 $\mathbf{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$ 处的应力场, 在图 2.2 中必须取极限 $\delta x, \delta y, \delta z = 0$ 。按照这一定义, $T_{ij}(\mathbf{r}, t)$ 是作用在位于 \mathbf{r} 点的无限小体积元 $+j$ 面上的力密度的第 i 个分量¹⁾。

例 1 第一章例 1 和例 2 中的静压缩位移和应变是由加在棒两端的压缩力 F 产生的。由于纵向被压缩的物体趋向于横向膨胀, 所以必须在侧面[图 2.3 (a)] 加力, 以抑制 x 方向的位移, 如例 1 中所假设的那样。如果棒的横截面为 A , 棒的右端 (面向 $+x$ 方向) 就受到牵引力

$$T_x = -\frac{F}{A}.$$

作用在这端面上的应力分量是

$$T_{xx} = -\frac{F}{A},$$

$$T_{yx} = 0,$$

$$T_{zx} = 0.$$

1) 这是遵照本章文献 [2], [4] 和 [5] 中的约定。在文献 [1] 和 [3] 中, 下标的含义互换。

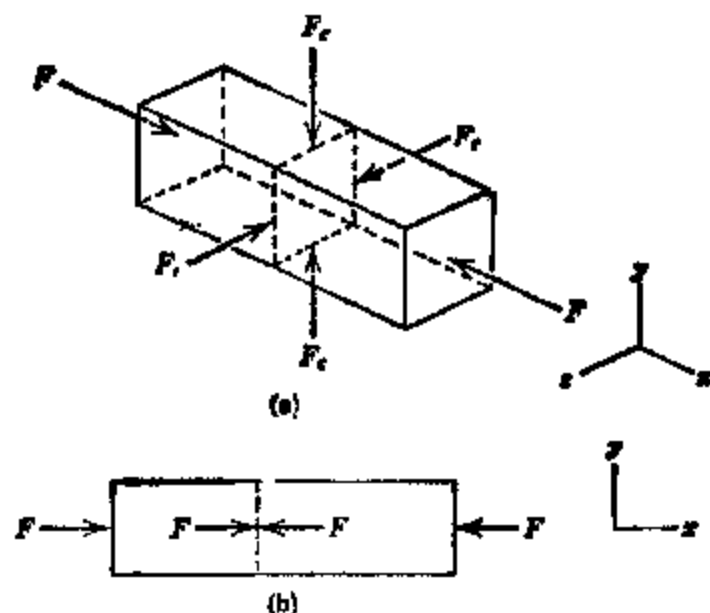


图 2.3 作用在一均匀压缩棒上的牵引力

在棒的左端(面向 $-x$ 方向),牵引力反向

$$T_{-x} = -\frac{F}{A}.$$

因而应力 T_{xx} , T_{yx} , T_{zx} 是作用在面向 $-x$ 方向的端面上各力分量的负值.由于物体处于静态平衡,所以作用在棒的每一横截面上的力是相同的[图 2.3(b)].从而,应力到处是均匀的:

$$T_{xx} = -\frac{F}{A}.$$

加在棒侧的抑制力 F_c 产生另外两个应力分量 T_{yy} 和 T_{zz} .如果棒受到的是张力,则图 2.3 中所有的力都要反向,而应力分量 T_{xx} 变为

$$T_{xx} = +\frac{F}{A}.$$

压缩应力是负的,而拉伸应力是正的,与第一章例 2 中对应变的符号约定相对应.

例 2 在一立方体材料的每个面上各加力 F ,如图 2.4 所示,使材料产生纯剪切静态形变[图 1.9(b)].如果每个面的面积为 A ,则在 $+x$ 和 $+y$ 面上的牵引力分别为

$$T_x = \frac{F}{A}$$

和

$$T_y = \frac{F}{A}.$$

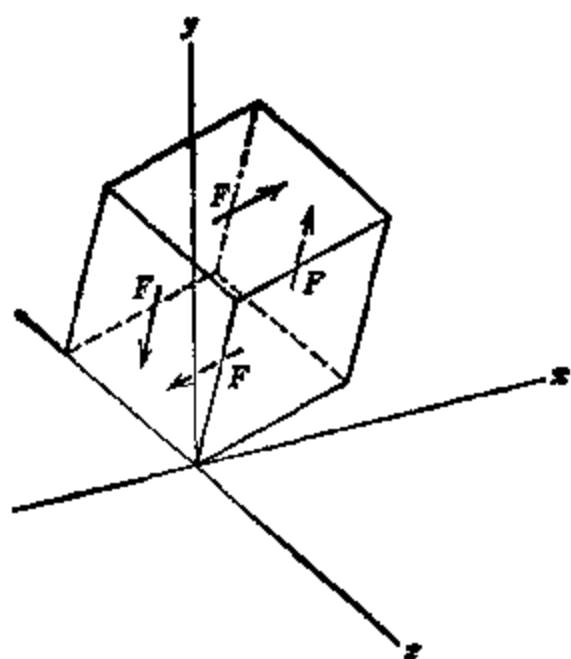


图 2.4 加在一均匀切变块上的牵引力

如同例 1, 这些牵引力在整个块中是均匀的, 因而应力场由恒定切应力分量

$$T_{yx} = \frac{F}{A},$$

$$T_{xy} = \frac{F}{A}$$

所描述。

2.2.1 一任意取向表面上的应力

虽然已用作用在与坐标平面平行的表面上的力确定了形变介质中的应力, 但也可以对任意取向的表面来计算应力。为此, 考虑图 2.5 中的四面体体积元。其中三个面与直角坐标轴垂直, 而第四个面的外法线 \hat{n} 取任意方向。面积为 δS_n 的第四个面可以是体内一任意取向的面, 也可以就是边界表面。

作用在体积元 δV 上的力包括表面 $\delta S_x, \delta S_y, \delta S_z, \delta S_n$ 上的牵引力和彻体力 $\mathbf{F}\delta V$, 后者可包括外力和内力两项。这些力都必须处于平衡。牵引力在 x 轴上的投影给出

$$T_{xn}\delta S_n - T_{xx}\delta S_x - T_{xy}\delta S_y - T_{xz}\delta S_z + F_x\delta V = 0. \quad (2.6)$$

如果令体积元趋于零, 则体力项消失, 因为 δV 比各 δS 更快地趋于零. 由于 δS_x 是 δS_n 在 yz 平面上的投影(图 2.5),

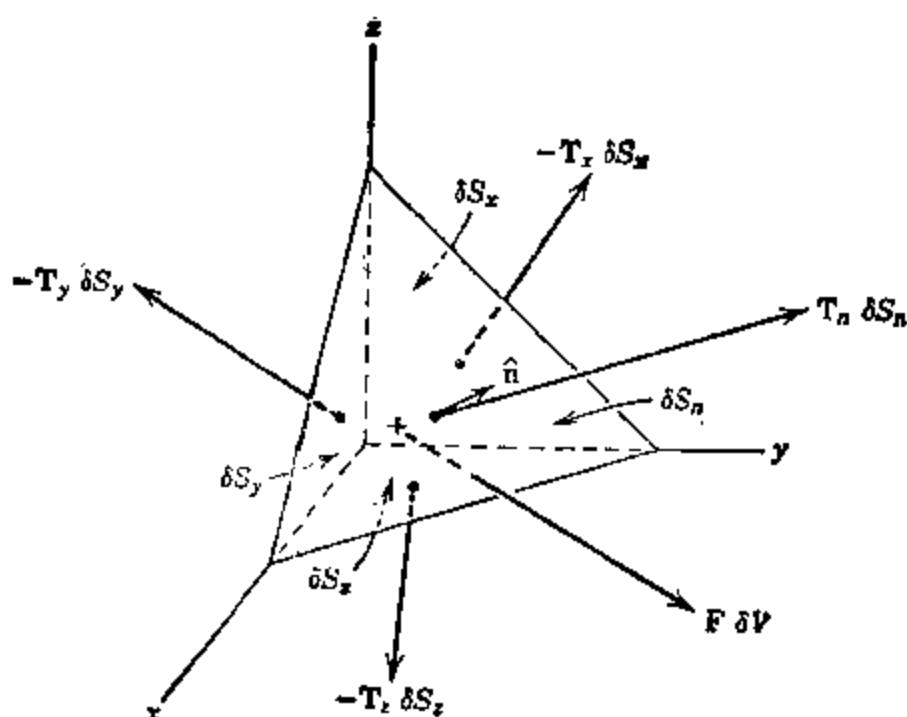


图 2.5 与 \hat{n} 垂直的表面上的牵引力计算. 牵引力 $T_x = \hat{n}_x T_{xx} + \hat{n}_y T_{yx} + \hat{n}_z T_{zx}$ 等是在 $x, y, z = 0$ 处算得的. 当 $\delta V \rightarrow 0$ 时高阶项消失

所以

$$\delta S_x = n_x \delta S_n,$$

其中 \hat{n} 是 δS_n 的法向单位矢量. 类似地,

$$\delta S_y = n_y \delta S_n,$$

$$\delta S_z = n_z \delta S_n,$$

而式 (2.6) 变成

$$T_{xn} = T_{xx}n_x + T_{xy}n_y + T_{xz}n_z. \quad (2.7)$$

对 y 方向和 z 方向, 重复上述计算, 得

$$T_{yn} = T_{yx}n_x + T_{yy}n_y + T_{yz}n_z, \quad (2.8)$$

$$T_{zn} = T_{zx}n_x + T_{zy}n_y + T_{zz}n_z. \quad (2.9)$$

线性方程组 (2.7) — (2.9) 适于表示成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} T_{xn} \\ T_{yn} \\ T_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 牵引力矢量 \mathbf{T}_n 应力矩阵 法向矢量 $\hat{\mathbf{n}}$

即

$$[\mathbf{T}_n] = [\mathbf{T}][\mathbf{n}]. \quad (2.11)$$

式 (2.10) 中的 \mathbf{T}_n 分量是作用在与 $\hat{\mathbf{n}}$ 垂直的表面的应力。

例 3. 在例 2 中只有两个非零的应力分量:

$$T_{xy} = T_{yx} = \frac{F}{A}.$$

因此式 (2.10) 中的应力矩阵为

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{F}{A} & 0 \\ \frac{F}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 T_{yx} 分量代表取 $+x$ 方向表面上的 y 方向牵引力, 而 T_{xy} 代表取 $+y$ 方向的表面上的 x 方向牵引力 [图 2.6 (a) 和 2.6 (b)].

现在考虑图 2.6 (c) 和图 2.6 (d) 中与旋转后的坐标轴 x' , y' 垂直的表面。如果取 $\hat{\mathbf{n}}$ 与 x' 轴平行, 则

$$n_x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

而从式 (2.10), 得到

$$\begin{bmatrix} T_{xn} \\ T_{yn} \\ T_{zn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{F}{A} \\ \frac{F}{A} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

这给出 \mathbf{T}_n 对于 x 轴和 y 轴的分量。为了求得沿 x' 轴和 y' 轴的分量, 必须完成下列计算:

$$T_{x'x'} = \hat{x}' \cdot \mathbf{T}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} T_{xx} + \frac{1}{\sqrt{2}} T_{xy} = \frac{F}{A},$$

$$T_{y'x'} = \hat{y}' \cdot \mathbf{T}_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} T_{xx} + \frac{1}{\sqrt{2}} T_{xy} = 0.$$

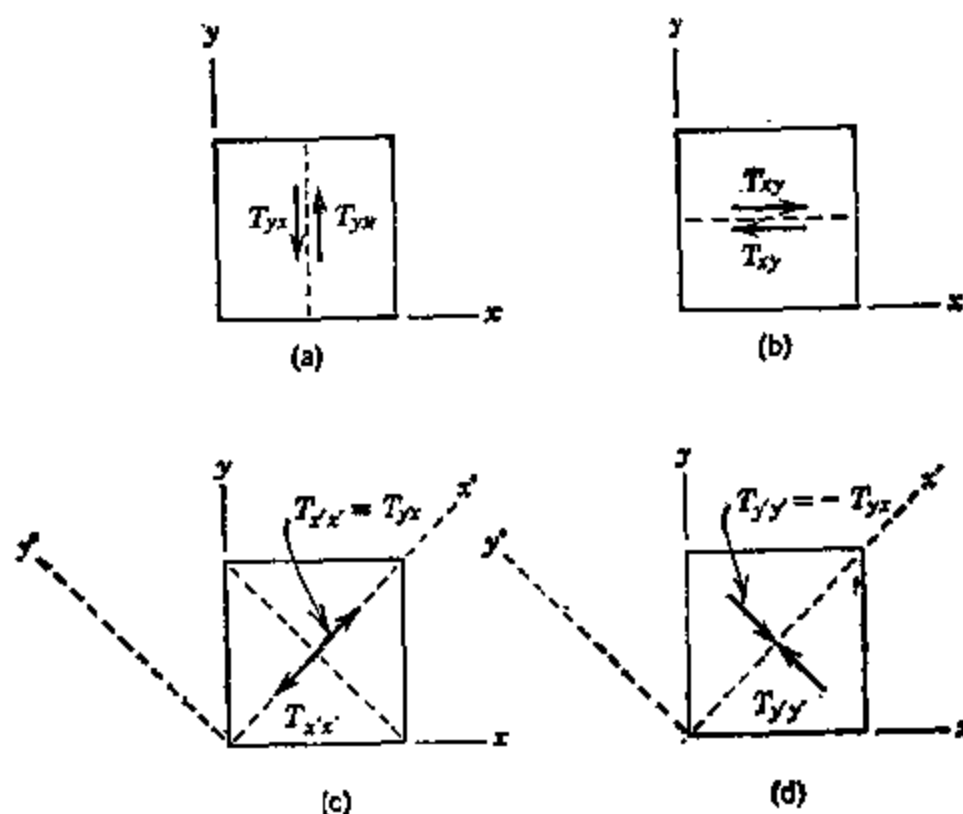


图 2.6 在均匀切变块体内的应力分量。假设形变为无限小
于是图 2.6 (c) 中取 $+x'$ 方向表面上的牵引力就沿 x' 轴，并且是正的。
这是一个纯拉伸应力，对应于图 1.9 (b) 中沿 x' 方向的延伸。

当取 \hat{n} 与 y' 轴平行时，

$$n_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n_y = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

而

$$\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{F}{A} \\ -\frac{F}{A} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

在这种情形，牵引力沿 y' 轴，但是负的。这是一个纯压缩

$$T_{y'y'} = -\frac{F}{A},$$

再次对应图 1.9 (b) 中的物理情景。

2.2.2 变换特性

由式 (2.11) 和式 (1.35) 比较可以看出：应力矩阵同位移梯度矩阵 $[\boldsymbol{\varepsilon}]$ 一样，将一个矢量与另一个矢量联系起来，从而在推导式 (1.37) 时所用的论证表明应力矩阵的变换遵循下列法则：

$$[T'] = [a][T][\bar{a}] \quad (2.12)$$

或

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}. \quad (2.13)$$

由此可见，应力矩阵和应变矩阵按完全一样的方式变换，并且两者都是二阶张量。按照 §1.6 中所引进的符号体系，用黑体字母 \mathbf{T} 代表应力张量，而式 (2.10) 可用符号形式写成

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.14)$$

其中的圆点表示对 T_{ij} 的第二个下标求和。

例 4 变换法则 (2.12) 提供计算图 2.6 (c) 和 2.6 (d) 中的应力 $T_{x'x'}$ 和 $T_{y'y'}$ 的另一种方法。按照第一章的例 6，对于坐标轴绕 z 轴逆时针转过 45° 的变换矩阵为

$$[a] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

将变换 (2.12) 应用到从例 3 得到的应力

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{F}{A} & 0 \\ \frac{F}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

就得到

$$[T'] = \begin{bmatrix} \frac{F}{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

与例 3 的计算结果相符。

2.3 声学的动力学方程

物体作声振动时的形变已用质点位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 和应变场 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 来表征；而与此形变相联系的力已用应力场 $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$ 、体力场 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ 和体力矩场 $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$ 来表征。施加在物体界面上的牵引力通过关系式 (2.14) (其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 取为界面上的外向单位矢量) 用应力场表出。为了继续分析声振动, 必须应用动力学定律把质点位移 \mathbf{u} 同外力 \mathbf{F} 、外力矩 \mathbf{G} 以及弹性恢复力 \mathbf{T} 联系起来。在 §1.2 和 §1.3 中已经看到: 振动介质中的质点通常是既有平动又有转动, 这两类运动分别处理如下。

2.3.1 平动运动方程

考虑一任意形状的振动质点, 其体积为 δV , 表面积为 δS 。与质点振动相关联的力为彻体力 $\mathbf{F}\delta V$ 和由相邻质点作用在质点表面上的牵引力。作用在表面上的力可用式 (2.14) 算得, 该式对物体界面上的外牵引力和物体内部各质点之间的内牵引力都适用。因而作用在质点上的总表面力为

$$\int_{\delta S} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS.$$

于是由牛顿定律表出

$$\int_{\delta S} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_{\delta V} \mathbf{F} dV = \int_{\delta V} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV, \quad (2.15)$$

其中 ρ 是介质的平衡质量密度¹⁾.

如果质点的体积足够小, 式 (2.15) 中体积分的被积函数基本上是常数, 因而

$$\frac{\int_{\delta V} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\delta V} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{F}. \quad (2.16)$$

此方程的左端在 $\delta V \rightarrow 0$ 时的极限定义为应力的散度, 用符号表示成²⁾

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\delta V} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\delta V}. \quad (2.17)$$

在此极限下, 式 (2.16) 变为

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{F}, \quad (2.18)$$

这就是振动介质的平动运动方程.

平动运动方程 (2.18) 的符号形式与坐标无关. 为了把它应用于具体问题, 必须在某一适当的坐标系中计算应力的散度. 为完成这个计算, 假设质点是该坐标系中的体积元, 并应用基本定义 (2.17). 在笛卡儿直角坐标系中, 质点就变成基元立方体 (图2.7). 如果图中立方体中心处的应力为 T_{xx}^0, T_{xy}^0 等等, 则作用在立方体 $+x$ 面、 $+y$ 面和 $+z$ 面外侧的牵引力分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_x^0 + \delta \mathbf{T}_x &= \mathbf{T}_x^0 + \frac{\partial}{\partial x} (\hat{\mathbf{x}} T_{xx} + \hat{\mathbf{y}} T_{yx} + \hat{\mathbf{z}} T_{zx}) \frac{\delta x}{2}, \\ \mathbf{T}_y^0 + \delta \mathbf{T}_y &= \mathbf{T}_y^0 + \frac{\partial}{\partial y} (\hat{\mathbf{x}} T_{xy} + \hat{\mathbf{y}} T_{yy} + \hat{\mathbf{z}} T_{zy}) \frac{\delta y}{2}, \\ \mathbf{T}_z^0 + \delta \mathbf{T}_z &= \mathbf{T}_z^0 + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\mathbf{x}} T_{xz} + \hat{\mathbf{y}} T_{yz} + \hat{\mathbf{z}} T_{zz}) \frac{\delta z}{2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

1) 形变所造成质点体积的变化导致质量密度的一级变化. 这些变化在非线性分析中必须考虑, 但在线性化近似下可略去.

2) 严格地说, 以并矢符号表示应力的散度应写成 $\mathbf{T} \cdot \nabla$. 但在本节稍后部分将看到: 对这里感兴趣的所有问题, 都有 $T_{ij} = T_{ji}$. 在这些条件下, $\mathbf{T} \cdot \nabla = \nabla \cdot \mathbf{T}$.

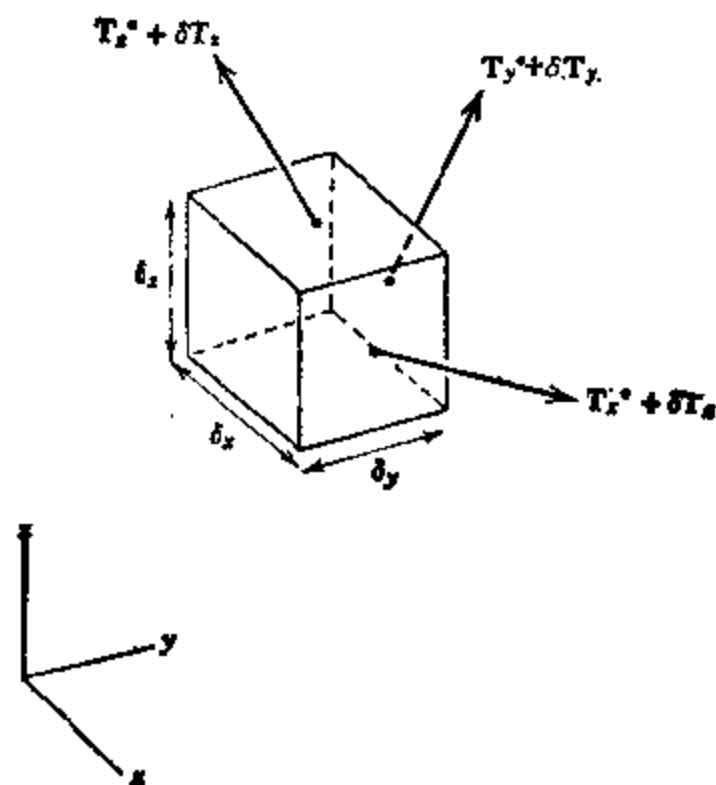


图 2.7 笛卡儿直角坐标系中 $\nabla \cdot \mathbf{T}$ 的计算

类似地,作用在立方体 $-x$ 面、 $-y$ 面和 $-z$ 面外侧的牵引力分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{-x}^0 - \delta \mathbf{T}_{-x} &= -\mathbf{T}_x^0 + \delta \mathbf{T}_x, \\ \mathbf{T}_{-y}^0 - \delta \mathbf{T}_{-y} &= -\mathbf{T}_y^0 + \delta \mathbf{T}_y, \\ \mathbf{T}_{-z}^0 - \delta \mathbf{T}_{-z} &= -\mathbf{T}_z^0 + \delta \mathbf{T}_z, \end{aligned} \quad (2.20)$$

其中 $\delta \mathbf{T}_x, \delta \mathbf{T}_y, \delta \mathbf{T}_z$ 与式 (2.19) 中的相同. 将

$$\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{T}_x n_x + \mathbf{T}_y n_y + \mathbf{T}_z n_z$$

对立方体的所有表面积分,即得

$$\int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{T}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{T}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{T}_z \right) \delta x \delta y \delta z, \quad (2.21)$$

而

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial V} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS}{\delta x \delta y \delta z} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{T}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{T}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{T}_z \right) \quad (2.22)$$

在笛卡儿直角坐标系中,式(2.19)中的单位矢量不是坐标的函数,所以只对应力分量进行微商¹⁾。于是,求得直角坐标下的应力散度为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{T} = & \hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{xz} \right) \\ & + \hat{y} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{yz} \right) \\ & + \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} T_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} \right).\end{aligned}$$

此式可简洁地写成

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_i = \frac{\partial}{\partial r_j} T_{ij} \quad i, j = x, y, z, \quad (2.23)$$

而由式(2.18),笛卡儿直角坐标下的平动运动方程为²⁾

$$\frac{\partial}{\partial r_j} T_{ij} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - F_i \quad i, j = x, y, z. \quad (2.24)$$

2.3.2 转动运动方程

为了仔细考虑质点转动的动力学,不仅必须考虑作用在质点上的体力矩,还必须考虑作用在质点表面上的牵引力所造成的力矩。图2.8为一矩形质点情形下这些力矩的 z 分量。牵引力矩可由相应的应力分量乘以该分量所在面的表面积,再乘以矩臂而求得。这给出净牵引力矩

$$(T_{yx} - T_{xy})\delta x\delta y\delta z,$$

因而,转动运动方程为

-
- 1) 在柱坐标和球坐标下,还必须考虑对单位矢量和表面面积元的微商(附录1.3)。
 - 2) 在文献中,此方程常以 $T_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i - F_i$ 的形式出现,其中 \ddot{u}_i 表示 u_i 对时间的二次微商,而 $T_{ij,j}$ 表示 T_{ij} 对所有第 j 个空间坐标的空间偏微商。对重复下标求和自不待言。

$$(T_{yx} - T_{xy} + G_z)\delta x\delta y\delta z = I_z \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta_z,$$

其中 G_z 是体力矩密度的 z 分量, θ_z 是绕 z 轴的转动角, 而

$$I_z = \rho\delta x\delta y\delta z(\delta x^2 + \delta y^2)/12$$

是绕 z 轴的转动惯量. 当 $\delta x, \delta y, \delta z \rightarrow 0$ 时, 转动惯量比体积元更快地趋于零, 因而方程简化为

$$T_{yx} - T_{xy} + G_z = 0.$$

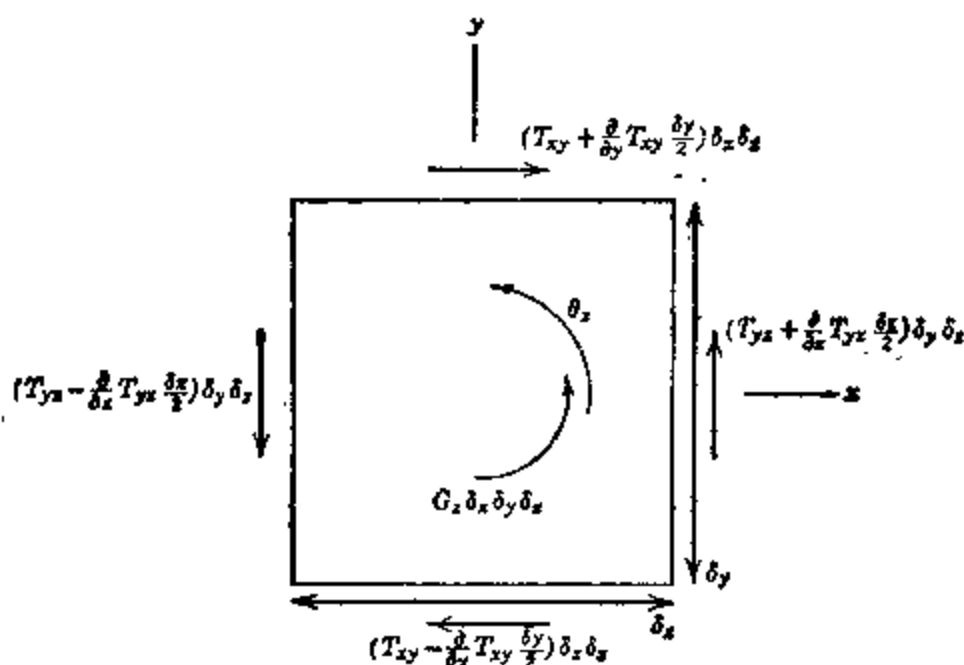


图 2.8 体力矩和使质点绕 z 轴转动的牵引力分量

对于绕 x 轴和 y 轴的转动, 得到类似的方程, 最后给出普遍的转动运动方程为

$$T_{ji} - T_{ij} + G_k = 0, \quad (2.25)$$

其中的下标按下列次序循环

i	j	k
x	y	z
y	z	x
z	x	y

转动运动方程 (2.25) 首先表明, 不存在与质点转动相联

系的惯性效应. 所以得出这样显然荒谬的结论是, 因为当体积元趋于零时惯性力比力矩下降得快. 由式 (2.25) 得出的另一结论是, 仅当存在体力矩时, 应力矩阵才是不对称的 ($T_{ij} \neq T_{ji}$). 在 §2.1 中已看到, 这种力矩出现在具有永久电极化或永久磁极化的介质(铁电材料或铁磁材料)中. 但是, 即使在强极化材料中, 也发现体力矩 \mathbf{G} 在线性振动理论中是不重要的, 因而可以忽略. 在这些条件下, 应力矩阵总是对称的, 而质点转动在振动的动力学中不起作用.

例 5 考虑沿 y 轴方向传播的 xy 切应力的均匀平面波

$$T_{xy} = T_{yx} = \sin(\omega t - ky). \quad (2.26)$$

由式 (2.23), 此应力场的散度为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \hat{x} \frac{\partial}{\partial r_1} T_{x1} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial r_1} T_{y1} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial r_1} T_{z1} \\ &= \hat{x} \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} = -\hat{x} k \cos(\omega t - ky), \end{aligned}$$

因为应力分量只是一个空间坐标 (y) 的函数, 如果这是一个没有体力源 ($\mathbf{F} = 0$) 的自由传播的波, 那么平动运动方程 (2.24) 就要求与式 (2.26) 相联系的质点位移场满足条件

$$\begin{aligned} -k \cos(\omega t - ky) &= \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_x, \\ 0 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_y, \\ 0 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_z. \end{aligned} \quad (2.27)$$

即¹⁾

$$\mathbf{u} = \hat{x} \frac{k}{\rho \omega^2} \cos(\omega t - ky). \quad (2.28)$$

这和第一章例 5 中的 x -偏振、 y -传播的切变波的质点位移场 (1.25)

1) 质点位移场 $\mathbf{u} = \mathbf{c}t$ (其中 \mathbf{c} 为任意的) 也满足微分方程 (2.27). 但这是介质的刚性运动, 因而在声学中对它不感兴趣.

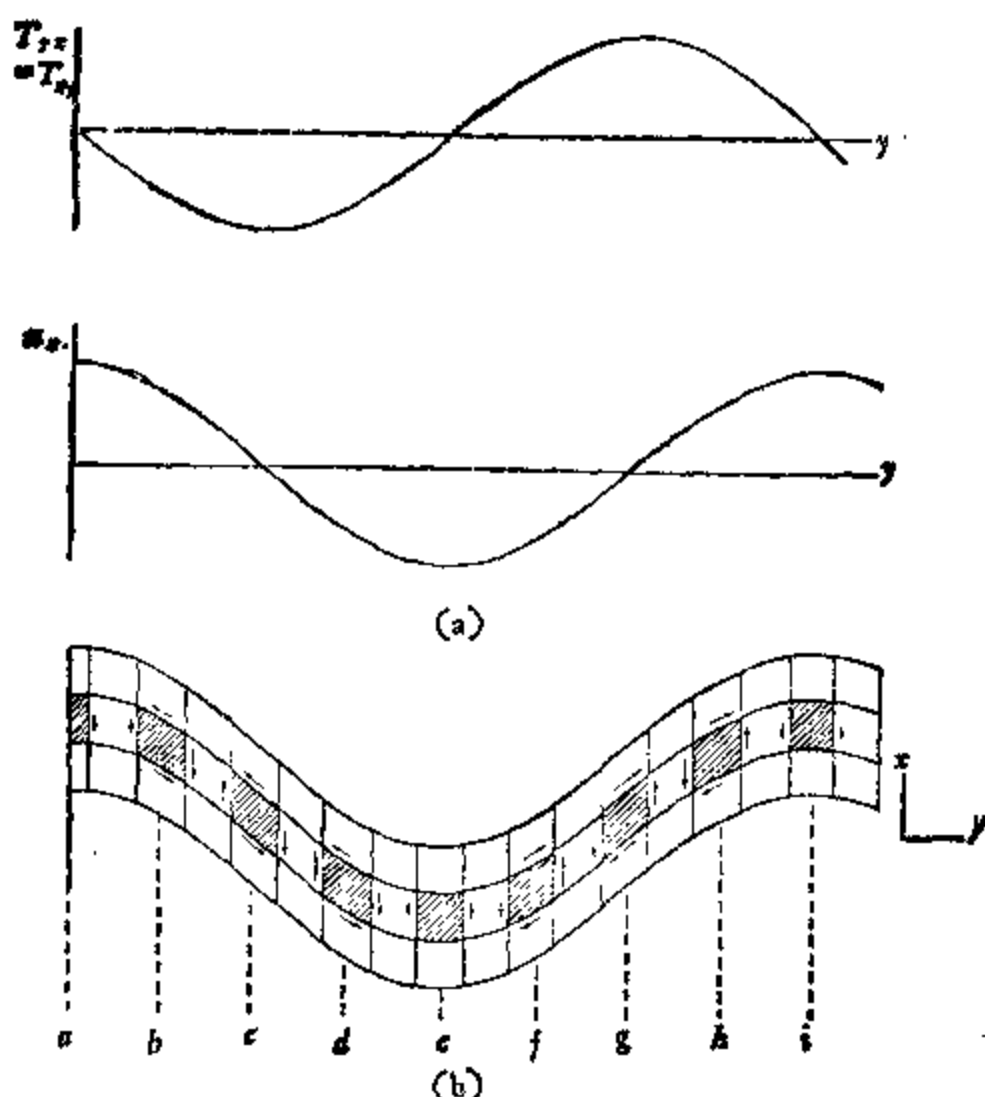


图 2.9 在 x -偏振、 y -传播的均匀平面波中,应力场和质点位移场之间的关系。由于机械惯性,(b) 中作用在质点上的净力与位移反相

相同,只是多一因子 $k/\rho\omega^2$, 所以与式 (2.26) 和 (2.28) 相伴随的应变场为

$$S_{xy} = S_{yx} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\rho\omega^2} \sin(\omega t - ky). \quad (2.29)$$

对于第一章例 5 中的 x -偏振、 y -传播的切变波和 y -传播的压缩波, 可以进行完全类似的讨论。

图 2.9(a) 说明 x -偏振、 y -传播的切变波的应力场和质点位移场的相位关系, 图 2.9 (b) 给出有关应力和位移之间的 90° 空间相移的物理

解释。质点位移用类似于图 1.11 (a) 的网格图表示。对于所选定的网格或“质点”，相邻质点所施加的应力用小箭头表示。首先考虑正应力最大的一点(图中的平面 g)。在这点，质点 $+y$ 面上的牵引力取 $+x$ 方向，而在 $-y$ 面上作用着一个取 $-x$ 方向的完全相等的力。由于 $T_{yx}=T_{xy}$ ，所以在 $+x$ 面上也作用着同样大小的 $+y$ 方向的力，而在 $-x$ 面上作用着相反的力。因所有的力处于平衡，这点上的质点没有横向位移。这些质点仅仅发生形变和转动。但要注意：这种转动不用对质点施加净力矩就可产生。这反映了在转动运动方程 (2.25) 中不出现惯性项这一事实。在应力具有最大负值的平面 e 上，所有的力都反号。

其次考虑应力从负值经过零到正值的一点(图中的平面 c)。网格是使质点中心在应力为零的点而画出的。由于质点的大小是有限的，因此质点的 $+y$ 面经受一正应力，而 $-y$ 面经受一负应力。这意味着，在质点的 $+y$ 面和 $-y$ 面都有 $+x$ 方向的小力作用着。正是这些非平衡力产生 c 平面上的最大质点位移。对于质点的 $+x$ 面和 $-x$ 面平均应力为零，所以沿 y 轴不产生任何位移。如果质点中心处的应力从正值经过零到负值(平面 a 或平面 i)，则质点受到的净力在 $-x$ 方向，因而位移的符号相反。在应力为零的点与应力取最大值的点之间的平面 b, d, f, h 上，在 $+y$ 面和 $-y$ 面上也存在非平衡力。这些力产生沿 x 方向的质点位移。另一方面，质点 $+x$ 面和 $-x$ 面上的力由于应力场 (2.26) 与 x 坐标无关，所以总是完全平衡的。因此质点不会沿 y 方向运动。

2.4 缩写下标

当应力矩阵对称时，也可用 §1.6 中所引进的缩写下标来描述应力分量。在这种情形，约定略去式 (1.49) 中出现的因子 $1/2$ ，因而

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & T_6 & T_5 \\ T_6 & T_2 & T_4 \\ T_5 & T_4 & T_3 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

现即可将应力写成六元直列矩阵¹⁾

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

例 6 在例 5 中, x -偏振、 y -传播的切变波的应力场是

$$T_{xy} = T_{yx} = \sin(\omega t - ky),$$

因而应力矩阵为

$$\mathbf{T} = \sin(\omega t - ky) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

根据式 (2.30), 此式在缩写下标形式下成为

$$\mathbf{T} = \sin(\omega t - ky) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

既然应力和应变都是二阶张量, 此例中 xy 切应力的变换方式就同第一章例 8 中 xy 切应变的变换方式一样。坐标轴绕 z 轴逆时针转过一个角度 ξ , 就使式 (2.32) 变换为

$$\mathbf{T}' = \sin(\omega t - k(x'\sin\xi + y'\cos\xi)) \begin{bmatrix} \sin 2\xi \\ -\sin 2\xi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cos 2\xi \end{bmatrix}.$$

1) 这仅当应力矩阵对称时才有可能。

可注意到：第一章例 10 中变换后的应变 S' 的第六个矩阵元中的因子 2 在应力变换中不出现。这不过是由于在式 (1.49) 和 (2.30) 中对缩写下标分量的定义不同而造成的结果。

有关应变场变换应注意之点 (§1.6) 在此也适用。为了变换应力，在应用式 (2.13) 之前必须把它的分量变换为全下标符号，不然就直接运用 §3.4 中推出的应力变换法则。

平动运动方程 (2.18) 中 \mathbf{T} 的散度可用缩写下标写成

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{xz} \\ \frac{\partial}{\partial x} T_{xy} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} T_{yz} \\ \frac{\partial}{\partial x} T_{xz} + \frac{\partial}{\partial y} T_{yz} + \frac{\partial}{\partial z} T_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

而此式也可表示为一矩阵算符乘以应力直列矩阵，即

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_1 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

于是在缩写下标符号下，平动运动方程 (2.18) 就有矩阵表示：

$$\nabla_{ij} T_j = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - F_i, \quad (2.35)$$

$$i = x, y, z, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

从而在笛卡儿直角坐标中应力运算的散度有下列矩阵表示:

$$\nabla \cdot \rightarrow \nabla_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

在这种情形, 散度矩阵算符恰好是对称的梯度矩阵算符 (1.53) 的转置矩阵. 对于柱坐标和球坐标, 这种转置关系不再适用 (附录 1.3).

在任何坐标系中, 应力的散度都可用相应的矩阵 ∇_{ij} 从缩写下标的应力分量直接算出.

例 7. 当把 ∇_{ij} 应用到例 6 中 y -传播的应力场 (2.32) 时, 只有微商 $\partial/\partial y$ 有意义. 因此 \mathbf{T} 的散度为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(\omega t - ky) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -k \cos(\omega t - ky) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

与例 5 的结果相符.

习 题

1. 试问在下列与时间无关的应力场中:

- a. $T_{xx} = A, \quad T_{yy} = A,$
- b. $T_{xx} = A, \quad T_{yy} = -A,$
- c. $T_{xx} = Ax, \quad T_{yy} = Ay,$
- d. $T_{xx} = Ay, \quad T_{yy} = Ax,$
- e. $T_{xx} = Ax, \quad T_{yy} = Ay,$
 $T_{yz} = T_{zy} = -A_{xy},$

有哪些满足(彻体力为零)平衡条件 $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$?

2. 试用缩写下标符号表示习题 1 的应力场.

3. 试用习题 1 中给出的应力场计算垂直于单位矢量

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}} 1/\sqrt{2} + \hat{\mathbf{z}} 1/\sqrt{2}$$

的表面的牵引力. 证明: 若将应力场变换到绕 x 轴转过 45° 的坐标系中去, 能得到相同的结果.

4. 设习题 1 中的应力场按 $\sin \omega t$ 随时间变化, 试用运动方程(彻体力 $\mathbf{F} = 0$) 求出相应的质点位移场.

5. 利用平动和转动运动方程, 证明对于随时间变化的应力场有

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

6. 将二维应力场 $T_{xx}, T_{yy}, T_{xy} = T_{yx}$ 变换到绕 z 轴逆时针转动的坐标系. 证明其变换法则与第一章习题 10 得出的应变变换法则相同.

7. 证明习题 6 中变换后的应力分量 $T'_{xx}, T'_{yy}, T'_{xy} = T'_{yx}$ 满足下列方程:

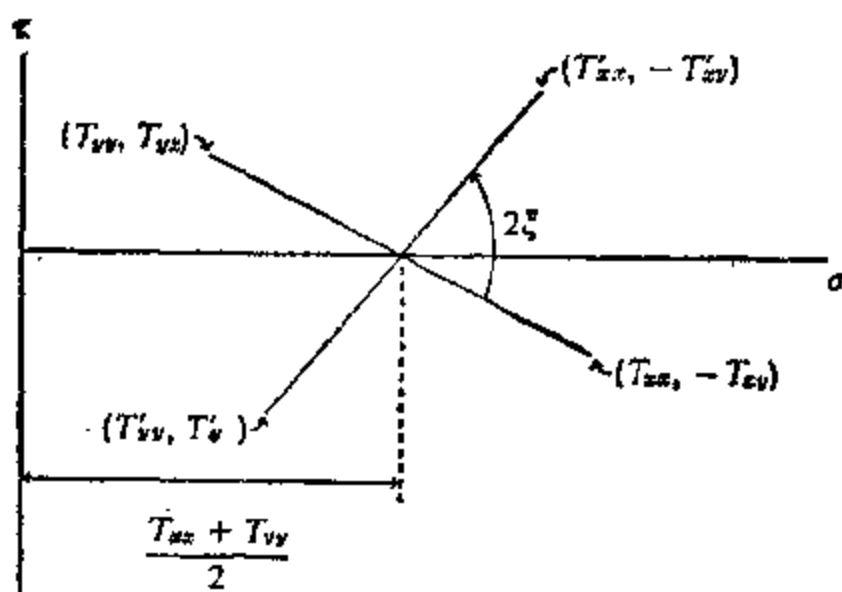
$$\left(\sigma - \frac{T_{xx} + T_{yy}}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{T_{xx} - T_{yy}}{2}\right)^2 + T_{xy}^2,$$

$$\sigma = T'_{xx} \text{ 或 } T'_{yy},$$

$$\tau = -T'_{xy} \text{ 或 } T'_{yx},$$

此方程定义了马赫(Mohr)应力圆(变量 τ 的定义与马赫圆的作图 and 解释的惯例一致). 证明第一章习题 10 中的应变变换也可用一个圆来表示.

8. 证明: 坐标为 $(T_{xx}, -T_{xy})$ 和 (T_{yy}, T_{yx}) 的点满足定义马赫圆的方程, 并且位于一直径的两端, 如图中对 $T_{yy} < T_{xx}$ 的情形所表示的那样. 证明当坐标轴逆时针转过 ξ 角后, 相应的变换点 $(T'_{xx}, -T'_{xy})$ 和 (T'_{yy}, T'_{yx}) 位于转过 2ξ 角的直径两端, 如图所示.



9. 习题 7 和习题 8 的马赫圆作图法是一种用来使坐标变换对应力场的影响形象化的方法。它还可用来确定正应力(即压缩应力或拉伸应力)和切应力的最大值,以及承受这些最大应力的表面的取向。试用马赫圆作图法求出下列应力场中的最大正应力和最大切应力。

- (a) $T_{xx} = A, T_{yy} = A$
- (b) $T_{xx} = A, T_{yy} = -A$
- (c) $T_{xx} = A, T_{yy} = B, T_{xy} = T_{yx} = C,$
- (d) $T_{xy} = T_{yx} = \sin(\omega t - ky).$

10. 将习题 9 的应力场变换成柱坐标表示(附录 1.4)。

参 考 文 献

- [1] P. C. Chou and N. J. Pagano, Elasticity Tensor, Dyadic and Engineering Approaches, Ch. 1, van Nostrand, New York, 1967.
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Theory of Elasticity, pp. 4—7, Pergamon, New York, 1970.
- [3] G. Nadeau, Introduction to Elasticity, pp. 40—48, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
- [4] J. F. Nye, Physical Properties of Crystals, Ch. 5, Oxford, England, 1964.
- [5] M. J. P. Musgrave. Crystal Aoustics, Ch. 3, Holden-Day, San Francisco, 1970.

第三章 固体的弹性性质

3.1 弹性劲度和顺度

第一章中, 声学振动物体的形变由应变场 $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t)$ 来描述. 应变场和质点位移场 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 的联系是应力-位移方程

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \nabla_s \mathbf{u}(\mathbf{r}, t). \quad (3.1)$$

第二章中, 用应力场 $\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$ 定义了弹性恢复力. 在自由振动介质内部, 每个质点既受到惯性力、又受到弹性恢复力的作用, 正是这两种力的相互影响, 使质点产生振荡运动, 其方式类似于质量和弹簧组成的宏观系统的自由振动. 从而可把介质中的弹性恢复力作为微观的“弹簧力”来描述. 在 §2.3 中, 利用单质点动力学方程推导惯性力和弹性恢复力(或应力)之间的关系时, 发现惯性力只影响质点运动的平动部分. 因而, 在自由振动介质中, 惯性力和弹性恢复力是通过平动运动方程相联系的¹⁾

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (3.2)$$

现在有必要建立弹性恢复力和材料形变之间的联系, 即定义介质的微观“弹簧常数”; 本章的目的就在于此.

在实验上观察到: 小形变时形变体内的应变线性地正比于外加应力(虎克定律), 随着形变的增加, 应变和应力之间的关系中, 非线性程度愈益增加, 但去掉应力时, 物体仍恢复到起始状态. 这称为线性和非线性弹性形变区(图 3.1). 然而,

1) 对于自由振动介质, 式 (2.18) 中的体力场 \mathbf{F} 等于零,

如果应变增加到超过某一极限,例如对较刚性的材料,通常在 10^{-4} 到 10^{-3} 的范围,则形变不再是弹性的了。超出弹性极限,介质发生永久性的形变(范性形变),而最终能达到破裂。通常,声学研究对范性形变区不感兴趣,因而要确定微观的“弹簧常数”只需用弹性形变的应变-应力关系。所以,有关小振幅振动理论的线性‘弹簧常数’都是用虎克定律来定义的。

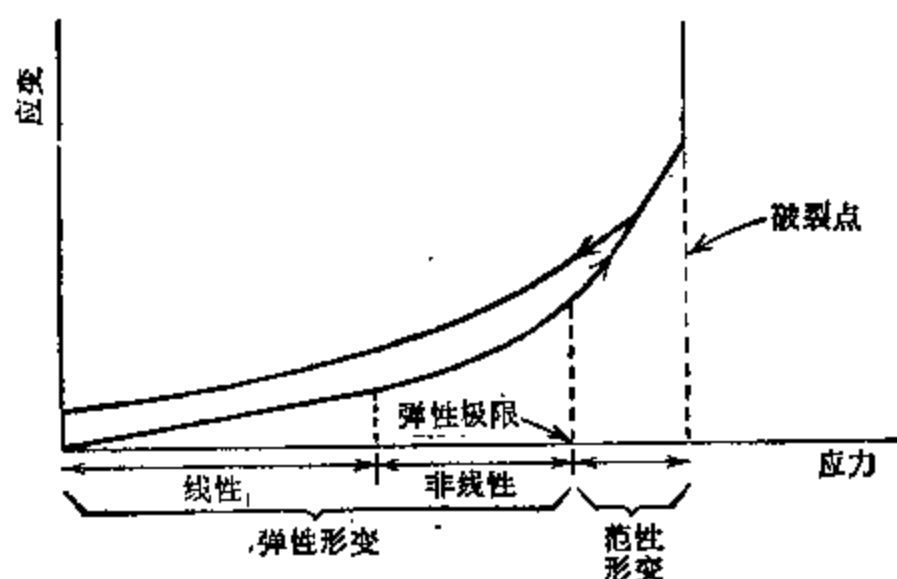


图 3.1 固体材料的典型应力-应变关系

虎克定律表示应变与应力成线性比例,或反过来,应力线性地正比于应变。数学上把后一种形式写成每个应力分量(弹性恢复力)为所有应变分量的普遍线性函数。例如,

$$\begin{aligned}
 T_{xx} = & c_{xxxx}S_{xx} + c_{xxxy}S_{xy} + c_{xxxz}S_{xz} \\
 & + c_{xxyx}S_{yx} + c_{xyyy}S_{yy} + c_{xyyz}S_{yz} \\
 & + c_{xxzx}S_{zx} + c_{xxyz}S_{zy} + c_{xxzz}S_{zz}.
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

于是,一般用对重复下标 k 和 l 求和表成

$$T_{ij} = c_{ijkl}S_{kl} \quad i, j, k, l = x, y, z. \quad (3.4)$$

式(3.4)中的“微观弹簧常数” c_{ijkl} 称为弹性劲度常数。它与宏观弹簧常数一样,易变形材料的值小,而极刚性材料的值大。因为式(3.4)包含九个方程(相应于下标 ij 所有可能的

组合), 而每个方程又包含九个应变变量, 所以有81个弹性劲度常数, 但它们不全是独立的. 在 §3.3 将看到,

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{jilk},$$

这样使 81 个弹性劲度常数中的独立常数数目减少到 36 个. 在 §5.3 中还将证明:

$$c_{ijkl} = c_{klij},$$

这表明这些常数又进一步减少到 21 个. 这是任何介质所能具有独立常数的最大数目. 由于介质的微观本性还附加种种限制, 介质的独立常数数目往往远小于 21 (见 §6.2 和 §7.1).

另一种写法是将应变表示成所有应力分量的普遍线性函数:

$$s_{ij} = s_{ijkl} T_{kl} \quad i, j, k, l = x, y, z. \quad (3.5)$$

在这种情形, 常数 s_{ijkl} 称为顺度常数, 它们是介质可形变度的量度. 易变形材料的值大, 而刚性材料的值小. 式 (3.5) 及其逆 (3.4) 称为弹性本构关系¹⁾. 顺度常数 s_{ijkl} 对介质弹性性质的描述类似于 §1.6 中介电常数 ϵ_{ij} 对介质电学性质的描述. 与式 (3.5) 相对应的电本构关系为

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad i, j = x, y, z. \quad (3.6)$$

由于应变是无量纲的, 从式 (3.4) 可见, 劲度常数的量纲和应力相同 (牛顿/米²). 相反地, 顺度常数的量纲为米²/牛顿. 实验上观测到的劲度常数范围从对橡胶一类材料约为 0.1×10^{10} 牛顿/米², 到对如金属和单晶绝缘体一类较刚性材料为大于 10×10^{10} 牛顿/米². 相应的顺度常数范围从 1000×10^{-12} 米²/牛顿到 10×10^{-12} 米²/牛顿. 而刚性材料弹性极限 (应变 $\approx 10^{-4}$ 到 10^{-3}) 的应力处于 10^7 到 10^8 牛顿/米² 的范围.

1) 这是笛卡儿直角坐标表示. 劲度常数和顺度常数的柱坐标表示及球坐标表示在附录 1.4 中讨论.

例1 立方对称的单晶介质的虎克定律。 为了对本章举出一些例证，将用到第六章和第七章中对各类材料所确定的独立劲度常数和顺度常数。例如，考虑一种单晶材料，其中原子排列成立方点阵，我们就说，这种材料属于立方晶系，其微观结构可用图 3.2 所示的三维几何点阵表示。沿着点阵基本立方元（即元胞）的棱的轴称为晶轴。为区别于直角坐标轴 x, y, z ，用大写字母 X, Y, Z 表示晶轴。坐标轴相对于晶格是可以任意取向的。

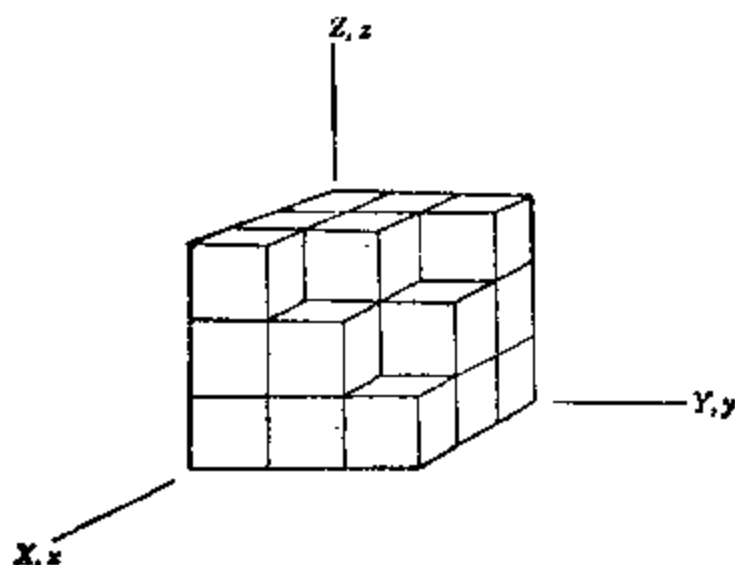


图 3.2 立方晶体结构

如果选坐标轴 x, y, z 和立方晶轴重合，如图 3.2 所示，则非零的弹性劲度常数为

$$\begin{aligned} c_{xxxx} &= c_{yyyy} = c_{zzzz} \\ c_{xxyy} &= c_{yyxx} = c_{xxzz} = c_{zzxx} = c_{yyzz} = c_{zzyy} \\ c_{xyxz} &= c_{xyzx} = c_{yxxz} = c_{yxzx} \\ &= c_{zxxy} = c_{zxxy} = c_{xzyx} = c_{xzyx} \\ &= c_{yzxy} = c_{yzxy} = c_{zyxz} = c_{zyxz} \end{aligned}$$

因 $T_{ij} = T_{ji}$ 和 $S_{ij} = S_{ji}$ ，所以劲度方程 (3.4) 化为

$$\begin{aligned} T_{xx} &= c_{xxxx}S_{xx} + c_{xxyy}S_{yy} + c_{xxyy}S_{zz} \\ T_{yy} &= c_{xxyy}S_{xx} + c_{xxxx}S_{yy} + c_{xxyy}S_{zz} \\ T_{zz} &= c_{xxyy}S_{xx} + c_{xxyy}S_{yy} + c_{xxxx}S_{zz} \\ T_{xy} &= T_{yx} = 2c_{xyxz}S_{xxy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{xx} &= T_{xx} = 2c_{xxxx}S_{xx}, \\T_{xy} &= T_{yx} = 2c_{xyxy}S_{xy}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

这些劲度方程反映了晶格的结构对称性。例如，从图 3.2 的晶格几何很清楚地看到，一个沿 y 轴的单轴向压缩 ($S_{yy} = -S$, $S_{xx} = S_{zz} = 0$) 所要求的外加压强 (或应力)，和沿 x 轴产生同样程度的单轴向压缩 ($S_{xx} = -S$, $S_{yy} = S_{zz} = 0$) 所要求的外加压强 (或应力) 相同。即第一种情形的 T_{yy} 应等于第二种情形的 T_{xx} ，这正是弹性本构关系 (3.7) 要说明的；即

$$\begin{aligned}T_{xx} &= -c_{xxxx}S, \\T_{yy} &= -c_{xxxx}S.\end{aligned}$$

这样，晶体中对称等价方向必须具有等价弹性性质这一原理就使劲度常数受到一定的制约。第七章中正是利用这个原理确定各种晶类单晶材料所具有的独立弹性常数数目。

3.2 变换特性

如同例 1 那样，通常都是相对于晶轴给出结晶材料的劲度常数和顺度常数。但是，这样选取的坐标轴对于解决具体问题并不一定最方便，因此，必须考虑如何把劲度常数和顺度常数从晶轴坐标系变换到别的坐标系。由于虎克定律适用于所有的坐标系，所以从式 (3.4)、(3.5) 和已推出的应力与应变的变换特性

$$T'_{mn} = a_{mi}T_{ij}a_{nj} \quad (2.13)$$

及

$$S'_{op} = a_{ok}S_{kl}a_{pl}, \quad (1.39)$$

可推出劲度常数及顺度常数的变换法则。将式 (3.4) 代入式 (2.13)，得

$$T'_{mn} = a_{mi}c_{ijkl}S_{kl}a_{nj} = a_{mi}a_{nj}c_{ijkl}S_{kl}, \quad (3.8)$$

这是因为项的先后次序没有关系。这样，就用新坐标来表示

S_{kl} , 从而完成了虎克定律的变换. 式 (1.39) 的逆变换给出

$$S_{kl} = (a^{-1})_{k0} S'_{op} (a^{-1})_{lp} = a_{ok} S'_{op} a_{pl} = a_{ok} a_{pl} S'_{op},$$

其中 $(a^{-1})_{ij} = (\tilde{a})_{ij} = (a)_{ji}$ 系根据式 (1.34), 将上式代入式 (3.8), 得出

$$T'_{mn} = a_{mi} a_{nj} c_{ijkl} a_{ok} a_{pl} S'_{op}. \quad (3.9)$$

与式 (3.4) 比较表明, 新坐标系中的劲度常数为²⁾

$$c'_{mnop} = a_{mi} a_{nj} a_{ok} a_{pl} c_{ijkl}. \quad (3.10)$$

同样地, 顺度常数也有

$$s'_{mnop} = a_{mi} a_{nj} a_{ok} a_{pl} s_{ijkl}. \quad (3.11)$$

凡是按照式 (3.10) 和 (3.11) 变换的物理量称为四阶张量. 现在我们对张量变换法则的普遍形式应该很清楚了. 在 §1.5 中看到一阶张量(即矢量)的变换法则为

$$v'_i = a_{ij} v_j,$$

而二阶张量(如应变)的变换法则为

$$S'_{ij} = a_{ik} a_{jl} S_{kl}.$$

刚才看到四阶劲度张量的变换为

$$c'_{mnop} = a_{mi} a_{nj} a_{ok} a_{pl} c_{ijkl}.$$

在每一种情形, 因子“ a ”的数目都等于张量的阶数. 各“ a ”的左下标总是对应于已变换量的下标, 而它们的右下标总是对应于未变换量的下标.

按照 §1.6 中的约定, 用粗体字母 **S** 和 **c** 代表顺度张量和劲度张量. 这样, 虎克定律相应为

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{S} \quad (3.12)$$

和

$$\mathbf{S} = \mathbf{s} : \mathbf{T}. \quad (3.13)$$

凡是一个四阶张量和一个二阶张量的双标量积(即双点积)被

1) 在附录 1.4 中讨论了如何将劲度常数和顺度常数变换到柱坐标系和球坐标系.

定义为对式 (3.4) 和 (3.5) 中的一对下标求和。如前, 符号法不必写明张量的阶, 全部物理量都将用标准符号表示, 物理张量的本性就暗示了它的阶数。这已在 §1.6 中解说过。例如, 刚证明过劲度常数和顺度常数是四阶张量, 因而不需要再证明 c 和 s 同阶。有了这种知识以及张量相乘和微分等各种运算的定义, 就能把符号方程变到分量形式, 而不会有任何含混。

例 2 第一章例 6 证明了绕 z 轴逆时针转过 ξ 角的交换矩阵为

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

把本章例 1 中的劲度常数和 $[a]$ 的矩阵元代入式 (3.10), 就能计算出这种变换(图 3.3) 对劲度常数的影响。如果按照例 1 中列出的次序, 则求得变换后的劲度常数为

$$\begin{aligned} c'_{xxxx} &= a_{xx}^4 c_{xxxx} + a_{xy}^4 c_{yyyy} + a_{xz}^4 c_{zzzz} \\ &\quad + a_{xx}^2 a_{xy}^2 c_{xxyy} + a_{xy}^2 a_{xx}^2 c_{yyxx} + \dots \\ &= (\cos^4 \xi) c_{xxxx} + (\sin^4 \xi) c_{yyyy} + (2 \cos^2 \xi \sin^2 \xi) c_{xxyy} + \dots \end{aligned}$$

等等。

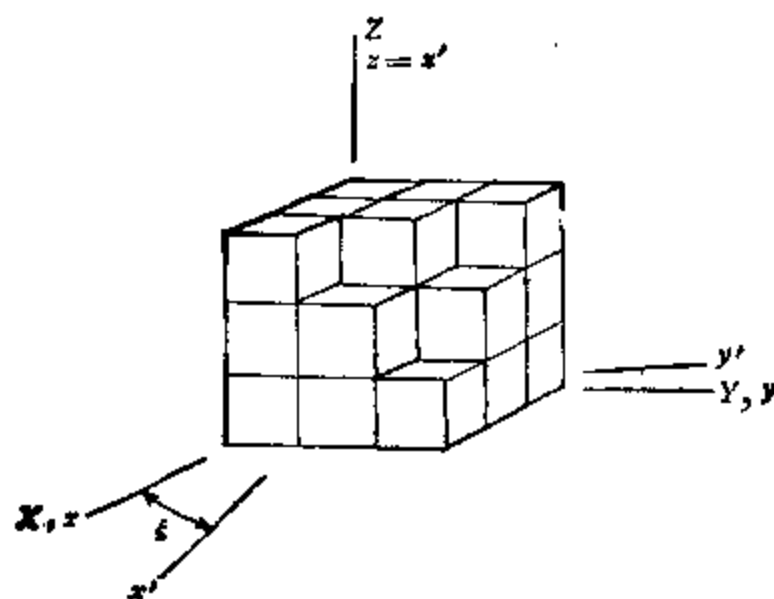


图 3.3 坐标轴绕 Z 晶轴的转动

3.3 缩写下标

例 1 和例 2 清楚地表明, 用全下标符号来书写和变换虎克定律是很不方便的. 当应力分量为对称 ($T_{ij} = T_{ji}$) 时, 总是能用 §1.6 和 §2.4 引进的缩写下标来避免这种困难. 当应力满足对称条件时, 式 (3.4) 中诸如

$$c_{xyxy}S_{xy}$$

和

$$c_{yxxy}S_{xy}$$

等项总是相等的. 所以

$$c_{ijkl} = c_{jikl}. \quad (3.14)$$

再有, 因为

$$S_{ij} = S_{ji},$$

在实验上无法区分诸如

$$c_{xyxy}S_{xy}$$

和

$$c_{xyyx}S_{yx}$$

等项. 由于这个缘故, 区分 c_{ijkl} 和 c_{ijlk} 是徒劳的. 所以可加上条件

$$c_{ijkl} = c_{ijlk}. \quad (3.15)$$

同样的论证表明:

$$s_{ijkl} = s_{jilk} \quad (3.16)$$

$$s_{ijkl} = s_{ijlk}. \quad (3.17)$$

因为劲度常数和顺度常数受到这些限制, 所以它们的四个下标可像 §1.6 和 §2.4 中那样用缩写下标简化为两个, 即

$$\begin{array}{cc} I & ij \\ 1 & xx \end{array}$$

2	yy
3	zz
4	yz, zy
5	xz, zx
6	xy, yx

分别考虑式(3.4)中的各项,就能建立全下标劲度常数和缩写下标劲度常数之间的关系,例如,

$$T_{xx} = c_{xxyy} S_{yy}.$$

因 $T_1 = T_{xx}$ 和 $S_2 = S_{yy}$, 故其缩写下标表示为

$$T_1 = c_{12} S_2.$$

由此给出

$$c_{12} = c_{xxyy}.$$

同样,项

$$T_{xy} = c_{xyyy} S_{yy}$$

等价于

$$T_6 = c_{xyyy} S_2 = c_{62} S_2,$$

所以

$$c_{62} = c_{xyyy}.$$

将应力和应变变换为缩写下标,使

$$T_{xy} = c_{xyxy} S_{xy} + c_{xyyx} S_{yx} = 2c_{xyxy} S_{xy}$$

这一项成为

$$T_6 = 2c_{xyxy} (S_6/2) = c_{xyxy} S_6,$$

因此,

$$c_{66} = c_{xyxy}.$$

所以普遍关系为

$$c_{ij} = c_{ijkl}. \quad (3.18)$$

用同样论证可求得

$$s_{IJ} = s_{ijkl} \times \begin{cases} 1, I \text{ 和 } J = 1, 2, 3, \\ 2, I \text{ 或 } J = 4, 5, 6, \\ 4, I \text{ 和 } J = 4, 5, 6. \end{cases} \quad (3.19)$$

式(3.18)和(3.19)之间的差别来源于应变的缩写下标定义(1.49)中引进了因子1/2. 如果采用别种定义,则可将顺度常数的因子2和4消去,但劲度常数中又会出现这些因子. 但是惯例是采用现在这种形式.

按照等价关系(3.18),可将虎克定律写成矩阵方程. 例如, T_{xx} 的方程(3.3)引用缩写下标表示后,

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}S_1 + c_{16}\frac{S_6}{2} + c_{15}\frac{S_5}{2} \\ &\quad + c_{16}\frac{S_6}{2} + c_{12}S_2 + c_{14}\frac{S_4}{2} \\ &\quad + c_{15}\frac{S_5}{2} + c_{14}\frac{S_4}{2} + c_{13}S_3 \\ &= c_{IJ}S_J \quad J = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \end{aligned}$$

因此,虎克定律的完全表达式为

$$T_I = c_{IJ}S_J \quad I, J = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (3.20)$$

同样,由式(3.19)可看出,当引进缩写下标时,式(3.5)化为

$$S_I = s_{IJ}T_J \quad I, J = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (3.21)$$

各项顺度常数以完全同样的方式再次组合,以致在最后结果中消去因子2和4.

用矩阵形式表述虎克定律有许多好处. 它节省篇幅,并使某些物理关系更加清晰. 例如,从式(3.20)和(3.21),立即能看出,式(3.21)的顺度矩阵 $[s]$ 只不过是式(3.20)的劲度矩阵 $[c]$ 的逆矩阵. 即

$$[s] = [c]^{-1}, \quad (3.22)$$

因此

$$[s][c] = [c][s] = [I], \quad (3.23)$$

为单位矩阵. 这个关系对于变换劲度常数为顺度常数非常有

用,反之亦然。而且,它还有助于完成声场方程的代数演算。

例 3 例 1 中立方晶系材料的非零劲度常数用缩写下标表示为

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{xxxx}$$

$$c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = c_{xyyy}$$

$$c_{44} = c_{55} = c_{66} = c_{yzzy}$$

所以劲度矩阵是

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}.$$

根据式 (3.22), 求 $[c]$ 的逆矩阵得到顺度常数

$$[s] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{11} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{12} & s_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{44} \end{bmatrix},$$

且有

$$s_{11} = \frac{c_{11} + c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})},$$

$$s_{12} = \frac{-c_{12}}{(c_{11} - c_{12})(c_{11} + 2c_{12})},$$

$$s_{44} = \frac{1}{c_{44}}.$$

例 4 沿立方晶轴传播的切变波,在第二章例 5 中已看到, x -偏振、 y -传播的切变波具有应力场

$$T_x = T_{xy} = \sin(\omega t - ky)$$

和应变场

$$S_x = 2S_{xy} = \frac{k^2}{\rho\omega^2} \sin(\omega t - ky).$$

这两个场必然是通过传播介质的弹性本构方程相互联系的。如果传播介质为立方晶体,坐标轴 x, y, z 如图 3.2 所示与晶轴 X, Y, Z 重合,则从例 3 得到

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_x \end{bmatrix}.$$

或

$$T_x = c_{44} S_x.$$

这意味着场只在

$$c_{44} k^2 = \rho \omega^2 \quad (3.24)$$

的条件下, T_x 和 S_x 才组成有效声波解。波矢量 k 和角频率 ω 之间的这种关系称为波的色散关系。因此立方晶体中 X -偏振、 Y -传播的切变波的相速度为

$$V_x = \frac{\omega}{k} = (c_{44}/\rho)^{1/2}. \quad (3.25)$$

在 §3.1 中已看到,较刚性材料的劲度常数的量级为 10^{11} 牛顿/米²,因为典型的质量密度 ρ 约为 4000 千克/米³,所以切变波速度具有的量级为

$$V_x = \left(\frac{10^{11}}{4 \times 10^3} \right)^{1/2} = 5 \times 10^3 \text{ 米/秒},$$

波长

$$\lambda_x = \frac{2\pi V_x}{\omega}$$

在频率 100 兆赫(100 兆周/秒)时,约为 5×10^{-8} 米,即 50 微米。这两个数值 (V_x 和 λ_x) 比电磁波情形约小 5 个数量级,正是这种特性,使声波对许多技术应用有如此的吸引力。

用同样方法分析沿立方晶体 Y 晶轴传播的 Z -偏振切变波时,发现其相速度与 X -偏振波的相速度相同,即

$$(V_x)_{Z\text{-偏振}} = (V_x)_{X\text{-偏振}} = (c_{44}/\rho)^{1/2}.$$

凡是以相同速度沿同一方向传播的切变波称为简并波。这种特性很重要，因为在任何线性系里，简并波可以任意方式组合成许多种偏振波解。这是具有基本重要性的物理现象。

假设沿立方晶体 Y 轴传播的 X -偏振和 Z -偏振的质点位移场各为

$$u_x = \hat{x} \cos(\omega t - ky)$$

和

$$u_z = \hat{z} \cos(\omega t - ky)$$

[图 3.4 (a) 和图 3.4 (b)]。如果它们以任意振幅和相同的时间相位组合，则得到

$$u = (\hat{x}A + \hat{z}B) \cos(\omega t - ky),$$

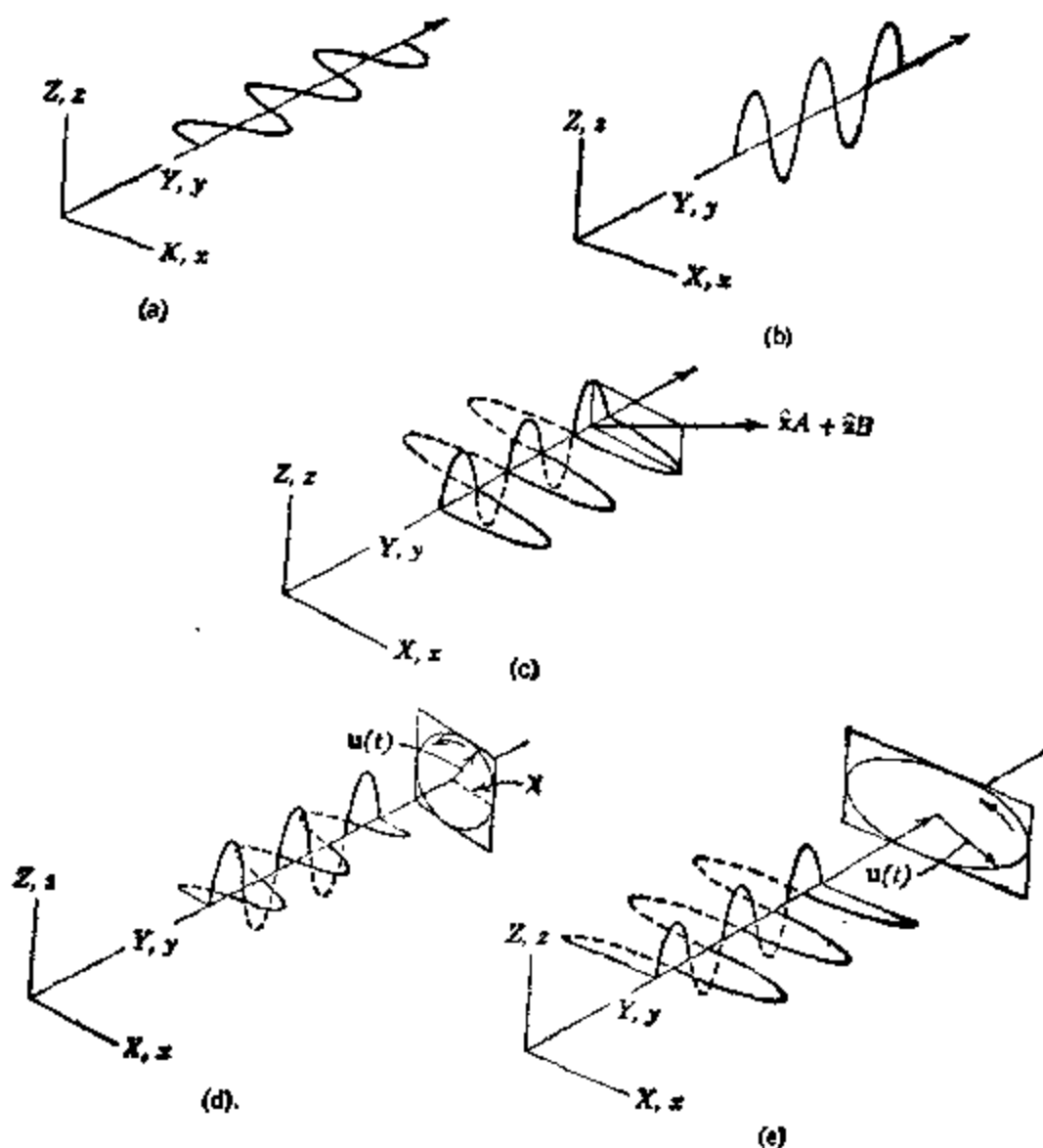


图 3.4 构成任意质点位移偏振的简并切变波组合

这是以相同相速度 $(\rho/c_{44})^{1/2}$ 行进的切变波，但它具有沿 $\hat{x}A + \hat{z}B$ 方向的线偏振质点位移[图 3.4 (c)]。另一方面，如果 X-偏振波和 Z-偏振波以相同振幅和 90° 相移组合，则

$$u = \hat{x} \cos(\omega t - ky) + \hat{z} \sin(\omega t - ky),$$

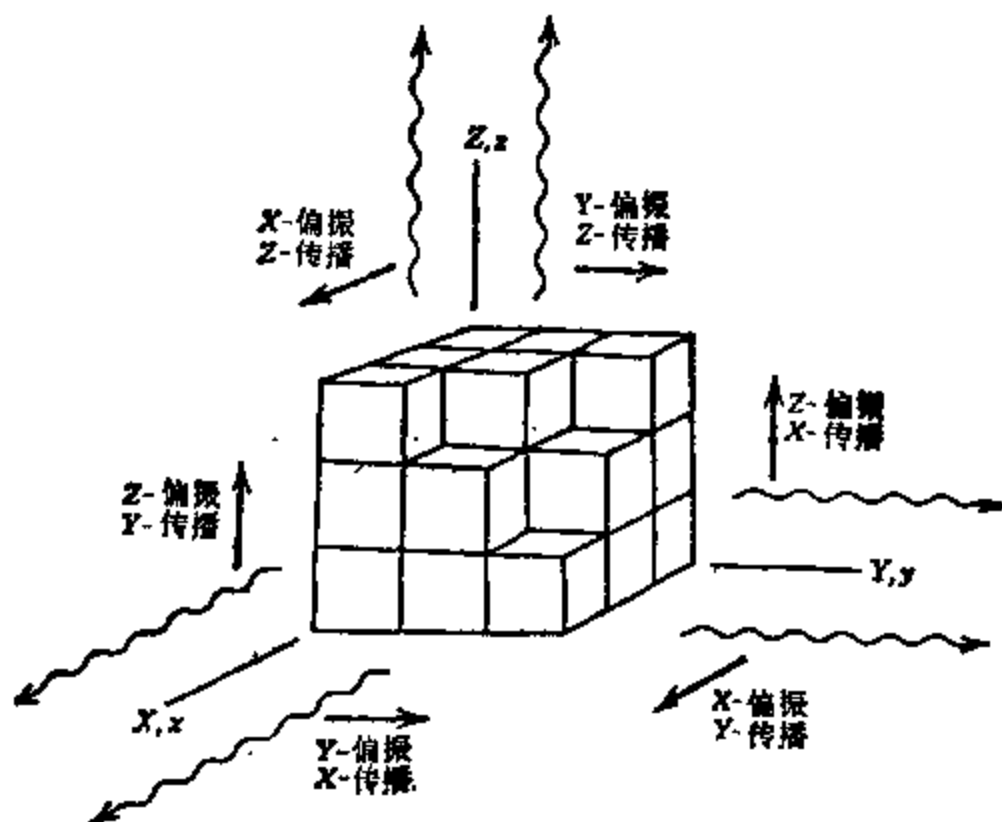


图 3.5 立方晶体介质中对称等效的切变波

现在质点位移是圆偏振的，

$$u = (u_x^2 + u_z^2)^{1/2},$$

$$\tan \chi = \frac{u_z}{u_x} = \tan(\omega t - ky)$$

如图 3.4 (d) 所示。当按任意振幅和相位组合时，可得到各种取向的椭圆偏振质点位移式样[图 3.4 (e)]。

从图 3.2 所示立方晶格的对称性直观地看来，显然，沿 X 晶轴和沿 Z 晶轴行进的切变波应该与沿 Y 晶轴传播的波具有相同的性质。也就是说，尽管它们的质点位移偏振及传播方向不同，但这些波都应该有相同的相速度 $(c_{44}/\rho)^{1/2}$ ，重复上述分析证明，情况确实如此。因此，图 3.5 中的六种切变波都有相同的相速度。

例 5 沿立方晶轴传播的压缩波. 第一章例 5 表明, 沿 y 轴传播的压缩波的质点位移场和应变场为

$$u = \hat{y} \cos(\omega t - ky)$$

和

$$S_x = S_{yy} = k \sin(\omega t - ky). \quad (3.26)$$

如果介质是立方单晶, 且坐标轴与晶轴重合, 如图 3.2 所示, 则用本构方程由式 (3.26) 算得应力场

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ S_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{12} S_x = c_{12} k \sin(\omega t - ky), \\ T_2 &= c_{11} S_x = c_{11} k \sin(\omega t - ky), \\ T_3 &= c_{12} S_x = c_{12} k \sin(\omega t - ky), \end{aligned} \quad (3.27)$$

从式 (2.24), 由于 $\mathbf{F} = 0$ 及应力场只随 y 变化, 所以沿 y 轴传播的自由波的运动方程是

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} T_{xy} &= -\rho \omega^2 u_x, \\ \frac{\partial}{\partial y} T_{yy} &= -\rho \omega^2 u_y, \\ \frac{\partial}{\partial y} T_{zy} &= -\rho \omega^2 u_z, \end{aligned} \quad (3.28)$$

对于沿 y 轴传播的压缩波, 式 (3.27) 的应力分量中只有 $T_1 = T_{yy}$ 进入运动方程. 从而

$$\begin{aligned} -\rho \omega^2 u_x &= 0, \\ -\rho \omega^2 u_y &= \frac{\partial}{\partial y} T_{yy} = -c_{11} k^2 \cos(\omega t - ky), \\ -\rho \omega^2 u_z &= 0, \end{aligned}$$

将最初假设的位移场 (3.25) 作为 u , 代入, 证明: 必然满足色散关系

$$c_{11}k^2 = \rho\omega^2, \quad (3.29)$$

所以沿 y 轴传播的压缩波的相速度是¹⁾

$$V_l = \frac{\omega}{k} = (c_{11}/\rho)^{1/2}. \quad (3.30)$$

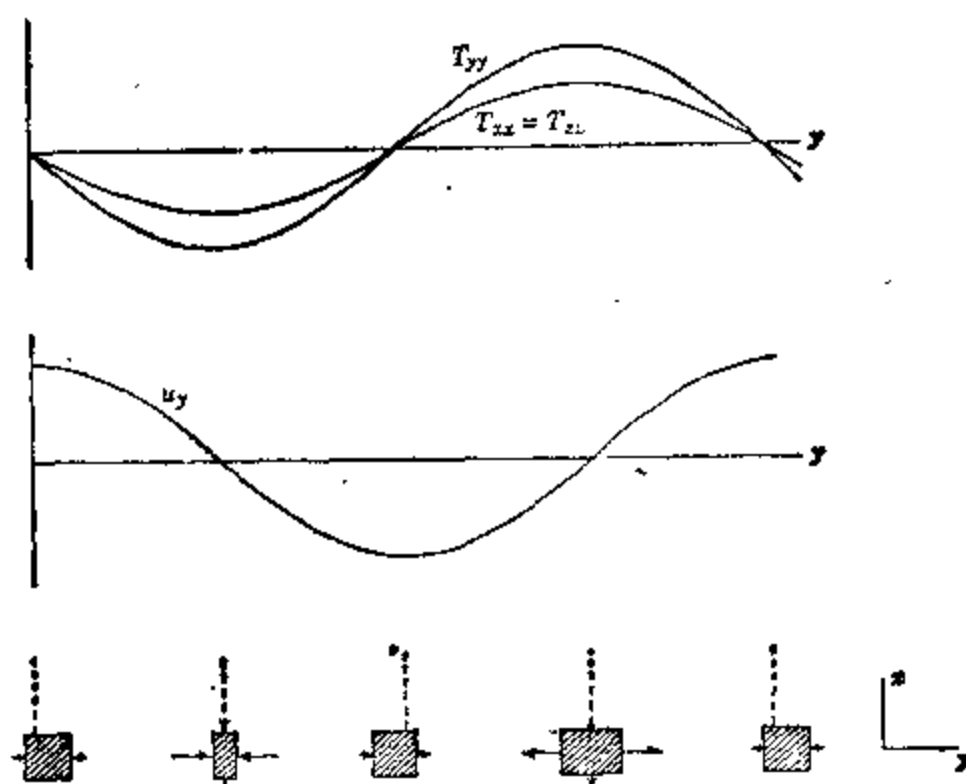


图 3.6 在沿 y 轴传播的压缩波中, 应力分量和应变之间的关系. 与图 2.9 相比较, 因机械惯性, 作用在质点上的净力在相位上比位移超前 180°

如同例 4 一样, x 轴和 z 轴都对称等效于 y 轴, 所以式 (3.30) 是沿任何立方晶轴传播的压缩波速度. 一般压缩劲度常数比切变劲度常数大几倍, 所以压缩波普遍要比切变波快²⁾.

这一分析表明, 压缩波的应力分量 $T_1 = T_{xx}$ 和 $T_3 = T_{zz}$ 对振动力学不起任何作用. 可以说, 它们只是照写而已. 其理由可用图 3.6 加以说明. 它和切变波情形的图 2.9 一样, 也表明作用在所选质点上的

- 1) 因为压缩波的质点位移是沿着传播方向的, 所以常称它为纵波, 而其相速度常附以下标 l . 相应地, 切变波常称为横波.
- 2) 但有例外, 见附录中图 3.11.

应力。因为应力场只随 y 变化，所以作用在同一质点上的应力 T_{xx} 和 T_{yy} 总是平衡的。

3.4 用缩写下标进行变换

前例清楚地阐明了用缩写下标能节省篇幅和便于代数演算。所以相当重要的是要有一种直接用缩写下标完成坐标变换的方法，而不必繁复地先变换到全下标，再用例 2 示例的笨拙计算变回到缩写下标。为此，邦德 (W. L. Bond) 发展了一种很有效的矩阵方法¹⁾，其本质在于构成一个 6×6 矩阵，用它来变换应力或应变只需通过一次矩阵乘法。

首先考虑应力场 \mathbf{T} 。在全下标表示中，按照

$$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl} \quad i, j, k, l = x, y, z \quad (2.13)$$

变换。为了变换成缩写下标，必须逐个考查每个应力分量。例如，根据式 (2.13)，变换后的应力分量 T'_{xx} 是

$$\begin{aligned} T'_{xx} &= a_{xx}^2 T_{xx} + a_{xx}a_{xy}T_{xy} + a_{xx}a_{xz}T_{xz} \\ &\quad + a_{xy}a_{xx}T_{yx} + a_{xy}^2 T_{yy} + a_{xy}a_{xz}T_{yz} \\ &\quad + a_{xz}a_{xx}T_{zx} + a_{xz}a_{xy}T_{xy} + a_{xz}^2 T_{xz} \\ &= a_{xx}^2 T_{xx} + a_{xy}^2 T_{yy} + a_{xz}^2 T_{zz} + 2a_{xy}a_{xz}T_{yz} \\ &\quad + 2a_{xz}a_{xx}T_{zx} + 2a_{xx}a_{xy}T_{xy}, \end{aligned}$$

最后一步用到应力对称条件 ($T_{ij} = T_{ji}$)。再将应力分量都变换成缩写下标表示：

$$\begin{aligned} T'_1 &= a_{xx}^2 T_1 + a_{xy}^2 T_2 + a_{xz}^2 T_3 + 2a_{xy}a_{xz}T_4 \\ &\quad + 2a_{xz}a_{xx}T_5 + 2a_{xx}a_{xy}T_6. \end{aligned}$$

对 \mathbf{T} 的每个分量重复上述程序，给出矩阵变换法则：

$$T'_H = M_{Hl}T_l \quad H, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (3.31)$$

1) 本章参考文献 [5]。

其中系数 M_{HI} 定义一个 6×6 变换矩阵:

$$[M] = \begin{bmatrix} a_{xx}^2 & a_{xy}^2 & a_{xz}^2 & 2a_{xy}a_{xz} & 2a_{xz}a_{xx} & 2a_{xx}a_{xy} \\ a_{yx}^2 & a_{yy}^2 & a_{yz}^2 & 2a_{yy}a_{yz} & 2a_{yz}a_{yx} & 2a_{yx}a_{yy} \\ a_{zx}^2 & a_{zy}^2 & a_{zz}^2 & 2a_{zy}a_{zx} & 2a_{zx}a_{zy} & 2a_{zx}a_{zy} \\ \hline a_{yx}a_{xx} & a_{yy}a_{xy} & a_{yz}a_{xz} & a_{yy}a_{xz} + a_{yz}a_{xy} & a_{yx}a_{xz} + a_{yz}a_{xx} & a_{yy}a_{xx} + a_{yx}a_{xy} \\ a_{xx}a_{xx} & a_{xy}a_{xy} & a_{xz}a_{xz} & a_{xy}a_{xz} + a_{xz}a_{xy} & a_{xz}a_{xx} + a_{xx}a_{xz} & a_{xx}a_{xy} + a_{xy}a_{xx} \\ a_{xx}a_{yx} & a_{xy}a_{yy} & a_{xz}a_{yz} & a_{xy}a_{yz} + a_{xz}a_{yx} & a_{xz}a_{yx} + a_{xx}a_{yz} & a_{xx}a_{yy} + a_{xy}a_{yx} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

如果将矩阵的阵列按式中虚线划分, 按照下列法则就很容易记住矩阵中系数的式样:

取 $[a]$ 的对应元素的平方	去掉 $[a]$ 的对应元素, 取同一行余下二元素的乘积的 2 倍
去掉 $[a]$ 的对应元素, 取同一列余下二元素的乘积	去掉 $[a]$ 的对应元素的行和列, 取余下 2×2 矩阵的叉积的和

现以式 (3.32) 左下方子矩阵的第一列第二个元素为例. 在 $[a]$ 矩阵第一列中, 第二个元素是 a_{yx} , 余下的二元素是 a_{xx} 和 a_{zx} . 取余下二元素的乘积 $a_{xx}a_{zx}$, 就得到式 (3.32) 中所要的矩阵元.

从应变变换法则

$$S'_{ij} = a_{ik}a_{jl}S_{kl} \quad (1.39)$$

遵循同样论证可求得应变的矩阵变换法则

$$S'_K = N_{KJ}S_J \quad K, J = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \quad (3.33)$$

其中系数 N_{KJ} 定义一个 6×6 变换矩阵:

$$[N] = \begin{bmatrix} a_{xx}^2 & a_{xy}^2 & a_{xz}^2 & a_{xy}a_{xz} & a_{xz}a_{xx} & a_{xx}a_{xy} \\ a_{yx}^2 & a_{yy}^2 & a_{yz}^2 & a_{yy}a_{yz} & a_{yz}a_{yx} & a_{yx}a_{yy} \\ a_{zx}^2 & a_{zy}^2 & a_{zz}^2 & a_{zy}a_{zx} & a_{zx}a_{zy} & a_{zx}a_{zy} \\ 2a_{yx}a_{xz} & 2a_{xy}a_{zy} & 2a_{yz}a_{xz} & a_{yy}a_{xz} + a_{yz}a_{xy} & a_{yx}a_{xz} + a_{yz}a_{yx} & a_{yy}a_{xz} + a_{yx}a_{zy} \\ 2a_{xx}a_{xz} & 2a_{xy}a_{xz} & 2a_{xz}a_{xz} & a_{xy}a_{xz} + a_{xz}a_{xy} & a_{xz}a_{xz} + a_{xz}a_{xz} & a_{xx}a_{xz} + a_{xz}a_{xz} \\ 2a_{xx}a_{zy} & 2a_{xy}a_{zy} & 2a_{xz}a_{zy} & a_{xy}a_{zy} + a_{xz}a_{zy} & a_{xz}a_{zy} + a_{xz}a_{zy} & a_{xx}a_{zy} + a_{xz}a_{zy} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

比较 $[N]$ 与 $[M]$ ，除因子 2 从右上方子矩阵移到左下方子矩阵外，余下都相同。

建立 T_i 和 S_j 的缩写下标变换法则后，虎克定律

$$[T] = [c][S] \quad (3.35)$$

的变换就能用与推导式 (3.10) 和 (3.11) 同样简单的方法来完成。将邦德应力变换矩阵 (3.32) 用于式 (3.35)，导出

$$[T'] = [M][c][S]. \quad (3.36)$$

式 (3.33) 的逆变换是

$$[S] = [N]^{-1}[S'],$$

其中 $[N]$ 是邦德应变变换矩阵 (3.34)，把 $[S]$ 代入式 (3.36)，得

$$[T'] = [M][c][N]^{-1}[S'].$$

与式 (3.35) 比较，变换后的劲度矩阵简单地为

$$[c'] = [M][c][N]^{-1}. \quad (3.37)$$

用同样方法求得变换后的顺度矩阵为

$$[s'] = [N][s][M]^{-1}. \quad (3.38)$$

式 (3.37) 和 (3.38) 中，劲度变换和顺度变换需要 6×6 的逆矩阵 $[N]^{-1}$ 和 $[M]^{-1}$ 。要求矩阵的逆，即使对于 3×3 矩阵也不是轻而易举的。现在要求 6×6 矩阵之逆，很可能使人怀疑邦德的变换方法是否有用。幸而结果表明，矩阵的这种逆变换并不必要。从式 (1.34) 看到 $[a]$ 的逆矩阵就

是将所有矩阵元的下标置换而成的转置矩阵 $[\tilde{a}]$ 。因此,如果我们已求得对应于某个特定 $[a]$ 的矩阵 $[N]$,则将式(3.34)中全部下标置换,就得到对应于 $[a]^{-1} = [\tilde{a}]$ 的矩阵 $[N]^{-1}$,与式(3.32)比较,证明此结果就是 $[\tilde{M}]$,即

$$[N]^{-1} = [\tilde{M}];$$

代入式(3.37),给出便于应用的劲度变换

$$[c'] = [M][c][\tilde{M}] \quad (3.39)$$

或

$$c'_{HK} = M_{HI} M_{KJ} c_{IJ}. \quad (3.40)$$

用完全平行的方法可证明,顺度变换(3.38)等效于

$$[s'] = [N][s][\tilde{N}]. \quad (3.41)$$

例 6 劲度和顺度的邦德变换方法的基本优点是它能直接用于以缩写下标表示的弹性常数——通常的弹性常数表中都是这样表示的。这种方法所用的代数比较简短而不复杂,因而提供了一种比较有效的、防止出错的书写体例。现以本章例 2 中将坐标绕 Z 轴逆时针转过 ξ 角的立方晶体的劲度常数变换为例,来说明这一方法的特点。根据例 2,坐标变换矩阵是

$$[a] = \begin{bmatrix} \cos \xi & \sin \xi & 0 \\ -\sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据式(3.32),相应的邦德应力变换矩阵是

$$[M] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \cos^2 \xi & \sin^2 \xi & 0 & 0 & 0 & \sin 2\xi \\ \sin^2 \xi & \cos^2 \xi & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ -\frac{\sin 2\xi}{2} & \frac{\sin 2\xi}{2} & 0 & 0 & 0 & \cos 2\xi \end{array} \right]. \quad (3.42)$$

按照式(3.39),只要把例 3 中的劲度矩阵 $[c]$ 简单地左乘 $[M]$ 和右

乘 $[M]$ ，就完成了变换。由此得出

$$[c'] = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} & 0 & 0 & c'_{16} \\ c'_{12} & c'_{11} & c'_{13} & 0 & 0 & -c'_{16} \\ c'_{13} & c'_{13} & c'_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c'_{44} & 0 \\ c'_{16} & -c'_{16} & 0 & 0 & 0 & c'_{66} \end{bmatrix}, \quad (3.43)$$

其中

$$c'_{11} = c_{11} - \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} - c_{44} \right) \sin^2 2\xi,$$

$$c'_{12} = c_{12} + \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} - c_{44} \right) \sin^2 2\xi,$$

$$c'_{13} = c_{12}$$

$$c'_{16} = - \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} - c_{44} \right) \sin 2\xi \cos 2\xi,$$

$$c'_{13} = c_{11},$$

$$c'_{44} = c_{44},$$

$$c'_{66} = c_{44} + \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2} - c_{44} \right) \sin^2 2\xi.$$

注意：变换前相等的矩阵元，现在不相等了；原先为零的矩阵元，有一些现在不为零了。

例 7 凡直角坐标系的任一转动都能用绕不同坐标轴的相继转动来完成。其标准方法如下：首先绕 z 轴逆时针转 ξ 角，然后绕变换后的 y 轴¹⁾ 逆时针转 η 角，再绕变换后的 z 轴逆时针转 ξ' 角。坐标系的所有转动都能用角度 ξ 、 η 和 ξ' 来表示。例如，例 6 中的变换，其转角为

$$\xi \quad \text{任意},$$

$$\eta = 0,$$

$$\xi' = 0.$$

1) 前已指出，以小写字母 (x, y, z) 标坐标轴和以大写字母 (X, Y, Z) 标晶轴。矩阵 (3.32) 和 (3.34) 所描述的坐标变换总是以坐标轴为参考的。所以任何变换序列中的第二次变换总是相对于第一次变换后的坐标轴来进行的。

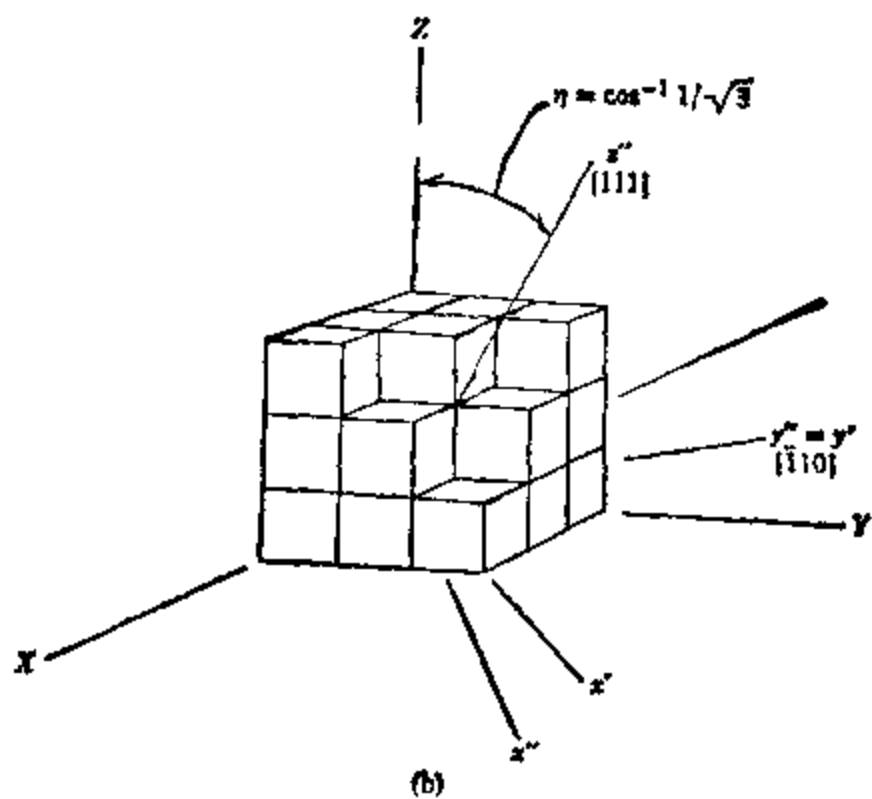
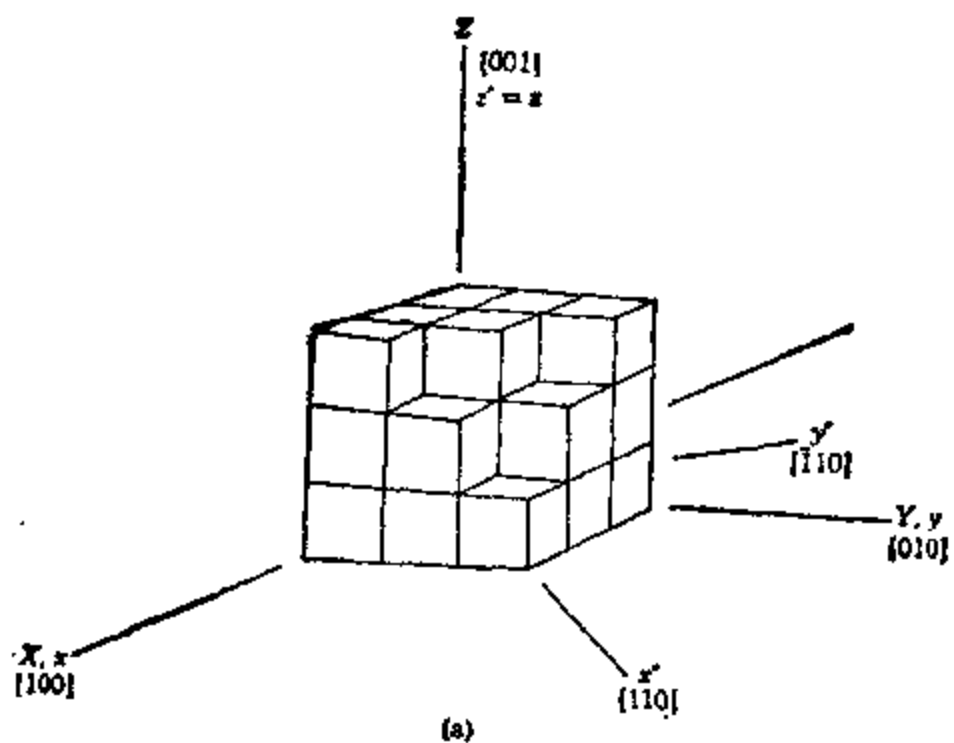


图 3.7 立方晶体的常用转动坐标系

为了说明相继转动的计算方法,首先考虑例 6 以 $\xi = 45^\circ$ 变换, 它将 x' 轴和 y' 轴置于晶格立方基元的面对角线方向 [图 3.7 (a)], 由式 (3.43) 得变换后的劲度矩阵为

$$[c'] = \begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & c'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c'_{12} & c'_{11} & c'_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c'_{13} & c'_{12} & c'_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

其中

$$c'_{11} = \frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{44}}{2},$$

$$c'_{12} = \frac{c_{11} + c_{12} - 2c_{44}}{2}.$$

其次, 绕 y' 轴逆时针转动, 使 z' 轴和立方单元的体对角线重合[图 3.7 (b)], 则相应的转角需满足 $\eta = \cos^{-1}1/\sqrt{3}$, 变换矩阵为

$$[a'] = \begin{bmatrix} \cos \eta & 0 & -\sin \eta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \eta & 0 & \cos \eta \end{bmatrix}.$$

从式 (3.32) 得出绕 y' 轴逆时针转过 η 角的邦德应力变换矩阵为

$$[M'] = \begin{bmatrix} \cos^2 \eta & 0 & \sin^2 \eta & 0 & -\sin 2\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin^2 \eta & 0 & \cos^2 \eta & 0 & \sin 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \eta & 0 & \sin \eta \\ \frac{\sin 2\eta}{2} & 0 & \frac{-\sin 2\eta}{2} & 0 & \cos 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \eta & 0 & \cos \eta \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

因而, 根据式 (3.39), 用此矩阵 (以 $\cos \eta = 1/\sqrt{3}$ 和 $\sin \eta = \sqrt{2/3}$) 变换式 (3.44), 得

$$[c''] = \begin{bmatrix} c''_{11} & c''_{12} & c''_{13} & 0 & c''_{15} & 0 \\ c''_{12} & c''_{13} & c''_{13} & 0 & -c''_{15} & 0 \\ c''_{13} & c''_{13} & c''_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c''_{44} & 0 & -c''_{15} \\ c''_{13} & -c''_{15} & 0 & 0 & c''_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c''_{15} & 0 & c''_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

$$c_{11}'' = \frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{44}}{2},$$

$$c_{33}'' = \frac{c_{11} + 2c_{12} + 4c_{44}}{3},$$

$$c_{12}'' = \frac{c_{11} + 5c_{12} - 2c_{44}}{6},$$

$$c_{13}'' = \frac{c_{11} + 2c_{12} - 2c_{44}}{3},$$

$$c_{14}'' = \frac{c_{12} - c_{11} + 2c_{44}}{3\sqrt{2}},$$

$$c_{44}'' = \frac{c_{11} - c_{12} + c_{44}}{3},$$

$$c_{44}'' = \frac{c_{11} - c_{12} + 4c_{44}}{6}.$$

这是相对于图 3.7 (b) 中的新坐标轴 (x'' , y'' , z'') 的劲度矩阵。这种情形的坐标转角是

$$\xi = 45^\circ,$$

$$\eta = \cos^{-1} 1/\sqrt{3},$$

$$\xi' = 0.$$

例 7 表明：即使最一般的坐标系转动，也只需要两个应力变换矩阵 (3.42) 和 (3.45)。式 (3.42) 所描述的是转过 ξ 角，接着按照式 (3.45) 转过 η 角，最后再按式 (3.42) 转过 ξ' 角。对于顺度矩阵变换，只需比较式 (3.34) 和 (3.32)，将 $[M]$ 和 $[M']$ 矩阵变换成 $[N]$ 和 $[N']$ 矩阵。

在实际经验中，有几种不同的标明晶体取向的方法。压电晶体的 IRE 标准 [Proceedings of the IRE (1973)] 所考虑的是坐标绕所有三个坐标轴的转动。坐标轴按矩形片状样品的厚度、长度和宽度分别标以 t , l , 和 w 。将晶体转动描述成：首先使坐标轴 t , l , w 与晶轴重合，然后标明绕这些特定的坐标轴转一次、两次、还是三次。这种方法不仅需要使用 z 转动

矩阵 (3.42) 和 y 转动矩阵 (3.45), 还需要使用 x 转动矩阵

$$[M] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \xi_x & \sin^2 \xi_x & \sin 2\xi_x & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \xi_x & \cos^2 \xi_x & -\sin 2\xi_x & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{-\sin 2\xi_x}{2} & \frac{\sin 2\xi_x}{2} & \cos 2\xi_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \xi_x & -\sin \xi_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \xi_x & \cos \xi_x \end{array} \right], \quad (3.47)$$

其中 ξ_x 是绕 x 轴逆时针转过的角度。

另一种方法认为晶体本身相对于一组固定的坐标轴转动。按照这种观点, 图 3.7(a) 的变换等价于晶体绕 x 轴逆时针转 -45° , 图 3.7(b) 的变换等价于晶体先绕 x 轴逆时针转 -45° , 再绕 y 轴逆时针转 $-\cos^{-1}1/\sqrt{3}$ 。因此, 描述一般坐标转动的 ξ , η 和 ξ' 角对应于如下的晶体转动角:

$$\text{绕 } x \text{ 轴转} \quad \phi = -\xi,$$

$$\text{绕 } y \text{ 轴转} \quad \theta = -\eta,$$

$$\text{接着 绕 } z \text{ 轴转} \quad \psi = -\xi'.$$

这些角称为转动操作的欧拉角。因此图 3.7(a) 的欧拉角为

$$\phi = -45^\circ, \quad \theta = 0, \quad \psi = 0,$$

而图 3.7(b) 的欧拉角为

$$\phi = -45^\circ, \quad \theta = -\cos^{-1}1/\sqrt{3}, \quad \psi = 0.$$

当晶体转动用欧拉角标明时, 只需用 $\xi = -\phi$ 和 $\xi = -\psi$ 的变换矩阵 (3.42) 及 $\eta = -\theta$ 的变换矩阵 (3.45) 来变换劲度常数。

例 8 沿立方晶体 $[110]$ 方向传播的压缩波。在解题过程中, 要用

坐标变换得到最适用于解题的坐标系, 为了说明这一点, 考虑沿图 3.7 (a) 中正 x' 轴传播的压缩波 (即纵波). 在晶体学的术语中称此方向为 $[110]$ 方向. 方括号中的三个数表示方向矢量在晶轴 X, Y, Z 上的分量的相对值. 因此, 正晶轴方向分别标为 $[100], [010], [001]$; 而图 3.7 (b) 中的 z' 轴标为 $[111]$. 用上加横线的数表示负方向的分量. 因此, 图 3.7 (a) 中的 y' 轴和图 3.7 (b) 中的 y' 轴都是 $[\bar{1}10]$.

沿 x' 轴传播的均匀平面波的场分量只依赖于 x' , 对于压缩波, 其质点位移场沿着 x' 方向. 如果用与各晶轴平行的坐标轴 (x, y, z) 描述该质点位移场, 则需要两个坐标变量 (x, y) 和两个质点位移分量 (u_x, u_y) . 这样, 就有三个应变分量:

$$S_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} u_x,$$

$$S_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} u_y,$$

$$S_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_y + \frac{\partial}{\partial y} u_x \right).$$

显然, 用转动坐标系 (x', y', z') 就比较简单, 在这个坐标系中,

$$u = \hat{x}' \cos(\omega t - kx'), \quad (3.48)$$

因而只有一个应变分量

$$S_{x'x'} = \frac{\partial}{\partial x'} u_{x'} = k \sin(\omega t - kx'),$$

即

$$[S] = \begin{bmatrix} k \sin(\omega t - kx') \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

将式 (3.49) 乘以式 (3.44) 所示的变换后的劲度矩阵 $[c']$, 就算出应力场为

$$\begin{aligned} T_{1'} &= T_{x'x'} = c'_{11} k \sin(\omega t - kx'), \\ T_{4'} &= T_{y'y'} = c'_{12} k \sin(\omega t - kx'), \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$T_{y'} = T_{x'x'} = c_{11}k \sin(\omega t - kx').$$

由于运动方程 (2.24) 在任意直角坐标系中都有相同形式, 因此, 沿 x' 轴自由传播的均匀平面波的运动方程简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} T_{x'x'} &= -\rho\omega^2 u_{x'}, \\ \frac{\partial}{\partial x'} T_{y'x'} &= -\rho\omega^2 u_{y'}, \\ \frac{\partial}{\partial x'} T_{z'x'} &= -\rho\omega^2 u_{z'}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

式 (3.50) 的三个应力分量中, 只有 $T_{x'x'}$ 进入这些方程, 所以

$$\frac{\partial}{\partial x'} T_{x'x'} = -c'_{11}k^2 \cos(\omega t - kx') = -\rho\omega^2 u_{x'}, \quad (3.52)$$

只当满足色散关系 $c'_{11}k^2 = \rho\omega^2$ 时, 式 (3.52) 才与假设的质点位移场一致。因此, 立方晶体中压缩波沿 $[110]$ 方向传播的速度为

$$(V_t)_{[110]} = \left(\frac{c'_{11}}{\rho}\right)^{1/2} = \left(\frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{44}}{2\rho}\right)^{1/2}. \quad (3.53)$$

压缩波沿 $[110]$ 方向的传播速度不同于例 5 中沿晶轴 $[100]$, $[010]$ 和 $[001]$ 方向的传播速度 (3.30)。波速的这种各向异性只是结晶介质中弹性各向异性的后果。从图 3.7 (a) 可直观地看出: 沿着立方对角线方向 $[110]$ 的压缩和沿着立方棱方向 $[010]$ 的压缩所承受的劲度不同, 因此这两个方向的传播速度也不同。就像在例 1 和例 5 中看到三个立方棱方向 $[100]$, $[010]$, $[001]$ 在弹性上是等价的一样, 六个面对角线方向 $[110]$, $[\bar{1}10]$, $[011]$, $[0\bar{1}1]$, $[101]$ 和 $[10\bar{1}]$ 也都是等价的。因此, 压缩波速度 (3.53) 适用于沿晶体任何面对角线方向的传播。

例 9 沿立方晶体 $[110]$ 方向传播的切变波。 如果假设图 3.7 (a) 中的质点位移是沿 Z 方向 (即 $[001]$) 偏振的

$$u = z' \cos(\omega t - kx'),$$

其应变场为

$$S_{y'} = 2S_{x'x'} = k \sin(\omega t - kx').$$

从式 (3.35) 和 (3.44), 与此应变对应的应力场是

$$T_{y'} = T_{x'x'} = c_{44}k \sin(\omega t - kx'),$$

而运动方程 (3.51) 要求

$$\frac{\partial}{\partial x'} T_{11} = -c_{44} k^2 \cos(\omega t - kx') = -\rho \omega^2 u_x.$$

这就表明, 只有满足色散关系 $c_{44} k^2 = \rho \omega^2$ 时, 假设的位移场才是声场方程的一个解。所以 [001]-偏振的切变波在 [110] 方向的传播速度为

$$(V_s)_{[001]} = \left(\frac{c_{44}}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (3.54)$$

用 [110]-偏振的质点位移对 [110] 方向传播的切变波重复上述计算, 得出传播速度为

$$(V_s)_{[110]} = \left(\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho} \right)^{1/2}. \quad (3.55)$$

对所有其他面对角线方向的传播所得结果都相同。因此, 凡是沿面对角线方向传播, 而沿立方棱方向偏振的切变波都有速度 (3.54), 而凡是沿面对角线方向传播, 且沿面对角线方向偏振的切变波都有速度 (3.55)。

和例 8 一样, 沿面对角线方向的传播速度和沿立方棱方向的传播速度不同。但在这种情形下, 传播特性另有重要变化。例 4 表明, 两种切变波偏振以相同的速度沿立方棱行进, 而对于沿面对角线方向的传播, 则有两种切变波速度: 沿立方棱方向偏振的是一种速度, 沿面对角线方向偏振的是另一种速度。具有这种性质的切变波称为非简并的, 同时这种介质称为双折射的。这意味着沿面对角线方向行进的两个切变波不能如图 3.4 那样组合成某种不变的偏振样式。如果两个 [110] 传播的切变波以相等的振幅和相位组合, 则总质点位移场为

$$u = \mathcal{A}' \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_{[110]}} x' \right) + \mathcal{A}' \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_{[001]}} x' \right), \quad (3.56)$$

其中 $\lambda_{[110]} = (2\pi/\omega) V_{[110]}$ 是 [110]-偏振波的波长, 而 $\lambda_{[001]}$ 是 [001]-偏振波的波长。在 $x' = 0$, 偏振的 y' 分量和 z' 分量具有相同的时间相位, 所以质点位移场为线偏振 (图 3.8)。随着波沿 x' 传播, 两个分量由于速度不同而逐渐移相, 因而偏振随着改变。如果 $\lambda_{[110]} < \lambda_{[001]}$, 则当

$$\delta k x' = 2\pi \left(\frac{1}{\lambda_{[110]}} - \frac{1}{\lambda_{[001]}} \right) x' = \pi/2$$

时, y' 偏振分量的相位比 z' 偏振分量滞后 90° . 在该点, 质点位移是绕 x' 按逆时针方向转动的圆偏振. 当 $\delta k x' = \pi$ 时, y' 偏振分量的相位和 z' 偏振分量相反, 位移在与初始偏振垂直的方向上线偏振. 在 $\delta k x' = 3\pi/2$ 时, 成为绕 x' 按顺时针方向转动的圆偏振, 而在 $\delta k x' = 2\pi$ 时, 恢复到原来的偏振. 当观测点沿 x' 移动时, 质点位移的这些变化, 一次又一次地不断重复出现.

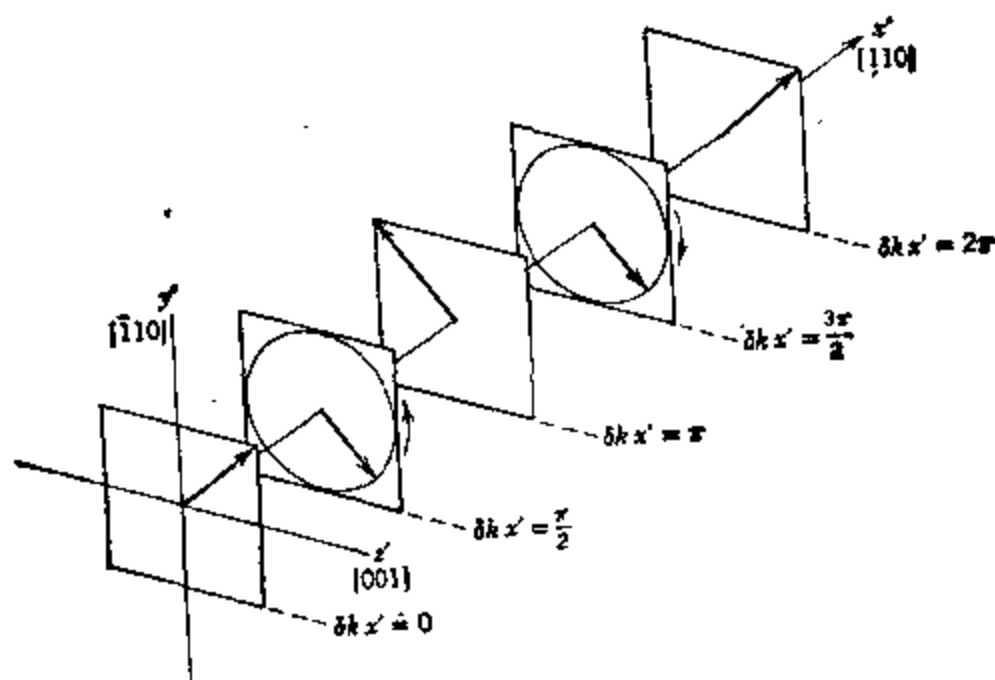


图 3.8 双折射介质中非简并切变波组合而产生的偏振变化

3.5 阻尼和衰减

在第五章中, 我们将看到, 凡是具有如式 (3.12) 或 (3.13) 本构关系的介质材料都没有内能损耗. 因此, 这种介质中的声学振动是完全无阻尼的. 这意味着振动的波状传播, 其振幅没有什么下降或衰减, 也就是说, 共振振荡将无限期地持续下去. 虽然弱阻尼材料常用这种方式来近似, 但自然界并不存在这种理想材料. 所以有必要寻求一种方式, 把阻尼引入弹性本构关系中去. 弹性阻尼对温度、频率和振动类型的依赖关系通常较复杂, 这是由于对这种现象有影响的物理机制为

数太多,不是简单修改一下本构关系就能体现的。然而,在室温下用粘滞阻尼项已足以描述许多材料中的声能损耗了。

考虑一种简单的物理类比,很容易推出本构关系中粘滞阻尼项的形式。在理想的无损耗介质中,虎克定律相应于一个弹簧的力-位移关系[图 3.9 (a)],即,

$$f = Kx,$$

其中外加力 f 相应于应力,而弹簧位移 x 相应于应变。用一响应为

$$f_d = K' \frac{\partial x}{\partial t}$$

的粘滞元件与弹簧并联[图 3.9 (b)],就在系统中加入了阻尼。因而,阻尼系统的响应由下列微分方程来确定:

$$f = Kx + K' \frac{\partial x}{\partial t}.$$

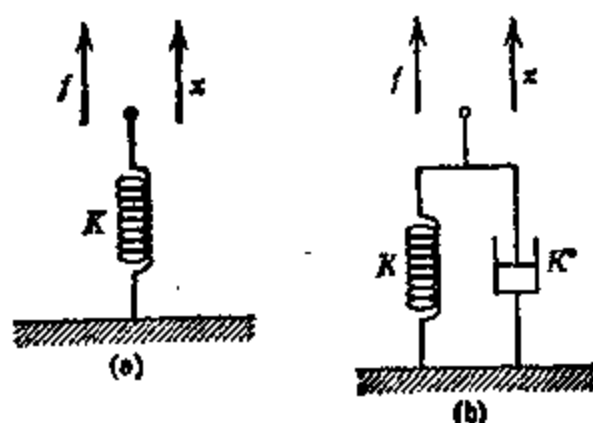


图 3.9 理想弹性介质和阻尼弹性介质的机械类比

按照这种类比,对理想虎克定律

$$T_I = c_{IJ} S_J$$

的修正只需要再加入包含应变对时间微商的阻尼项¹⁾,即

$$T_I = c_{IJ} S_J + \eta_{IJ} \frac{\partial S_J}{\partial t}, \quad (3.57)$$

或用全下标表示:

1) 粘弹阻尼是由形变,而不是由刚性位移引起的,所以它与应变对时间的微商有关,而与质点位移对时间的微商无关。

$$T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl} + \eta_{ijkl} \frac{\partial S_{kl}}{\partial t}. \quad (3.58)$$

由于粘滞常数 η_{ijkl} 把一个二阶张量 $(\partial S_{kl}/\partial t)$ 与另一个二阶张量 (T_{ij}) 联系起来, 所以按照 §3.2 的论证, 它按下列法则变换:

$$\eta'_{mnop} = a_{mi} a_{nj} a_{ok} a_{pl} \eta_{ijkl}. \quad (3.59)$$

因此这些常数构成一个四阶张量——粘滞张量 η . 修正后虎克定律的符号法表示为

$$\mathbf{T} = \mathbf{c} : \mathbf{S} + \eta : \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}, \quad (3.60)$$

其中“:”乘表示对式 (3.58) 中的全下标求和或对式 (3.57) 中的缩写下标求和. 带缩写下标的 η 的变换采用 $[M]$ 矩阵 (3.32), 方式和 \mathbf{c} 相同.

从式 (3.60) 可见, 粘滞常数的 MKS 制单位是牛顿·秒/米². 但数值经常用 CGS 制单位:

$$1 \text{ 厘泊} = 0.01 \frac{\text{达因} \cdot \text{秒}}{\text{厘米}^2}.$$

附录 4 中列有 MKS 制和 CGS 单位的换算表. 粘滞常数的典型数值范围, 从金属和非晶态绝缘体的

$$0.1 \frac{\text{牛顿} \cdot \text{秒}}{\text{米}^2} = 100 \text{ 厘泊}$$

到最低损耗的单晶绝缘体为

$$0.0001 \frac{\text{牛顿} \cdot \text{秒}}{\text{米}^2} = 0.1 \text{ 厘泊}.$$

例 10 第七章中将证明, 式 (3.57) 中 6×6 粘滞矩阵 $[\eta]$ 的普遍形式总是与劲度矩阵 $[\epsilon]$ 相同. 对例 3 和图 3.2 的立方单晶介质, 有

$$[\eta] = \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{12} & \eta_{11} & \eta_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \eta_{12} & \eta_{12} & \eta_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta_{44} \end{bmatrix}.$$

因而有损耗的本构方程为

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \left(c_{11} + \eta_{11} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_1 + \left(c_{12} + \eta_{12} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_2 + \left(c_{13} + \eta_{13} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_3, \\
 T_2 &= \left(c_{12} + \eta_{12} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_1 + \left(c_{11} + \eta_{11} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_2 + \left(c_{13} + \eta_{13} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_3, \\
 T_3 &= \left(c_{13} + \eta_{13} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_1 + \left(c_{12} + \eta_{12} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_2 + \left(c_{11} + \eta_{11} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_3, \\
 T_4 &= \left(c_{44} + \eta_{44} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_{12}, \\
 T_5 &= \left(c_{44} + \eta_{44} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_{21}, \\
 T_6 &= \left(c_{44} + \eta_{44} \frac{\partial}{\partial t} \right) S_{33}.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

例 11 沿立方晶体的立方棱及面对角线方向传播的平面声波的衰减。 以前许多例子都是处理声波在无损耗立方晶体中的传播。现在要考虑粘滞阻尼对这些波的影响。在前面无损耗波传播的各例中，都是先假设质点位移波函数，例如 x -偏振、 y -传播的切变波情形用

$$\mathbf{u} = \hat{x} \cos(\omega t - ky). \tag{3.62}$$

根据熟知的三角关系

$$e^{i(\omega t - ky)} = \cos(\omega t - ky) + i \sin(\omega t - ky),$$

式(3.60)也可写成

$$\mathbf{u} = \hat{x} e^{i(\omega t - ky)} \text{ 的实部} = \Re \hat{x} e^{i(\omega t - ky)}.$$

既然声学方程是实数的，又是线性的，那末此式的优点就在于可以推迟到计算结束时再取实部。即先用质点位移场

$$\mathbf{u} = \hat{x} e^{i(\omega t - ky)} \tag{3.63}$$

进行整个计算，然后取最后结果的实部，这样，就求出与实际质点位移场(3.62)有关的一个解。用这种方法，每次微分运算都变成一次乘法，

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} &= i\omega \mathbf{u}, \\
 \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u} &= -ik \mathbf{u},
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

而每次积分都变成一次除法，因而使分析大大简化。

采用指数波函数始终是一种有用的方法，而在三角函数表述形式

极难使用的波衰减计算中,它几乎是必不可少的。当波在有损耗介质中传播时,能量被介质不断耗散或吸收,其振幅稳定地下降。在这种情形, x -偏振、 y -传播的切变波的质点位移场为

$$u = \hat{x} e^{-\alpha y} \cos(\omega t - ky),$$

而不再是式(3.62),换另一种写法,取位移场为

$$u = \hat{x} e^{-\alpha y} e^{i(\omega t - ky)} \quad (3.65)$$

的实部,而对应的应变场为

$$S_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} = -i \frac{(k - i\alpha)}{2} e^{i\omega t} e^{-i(k - i\alpha)y}.$$

如果介质是立方晶系的,且坐标轴与晶轴重合(图 3.2),则按式(3.61),应力场为

$$T_x = -i(k - i\alpha)(c_{44} + i\omega\eta_{44})e^{i\omega t} e^{-i(k - i\alpha)y}. \quad (3.66)$$

对于只随 y 坐标变化的场,运动方程化为

$$\frac{\partial}{\partial y} T_{iy} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_i \quad i = x, y, z$$

在这种情形,就有

$$-i(k - i\alpha)T_{xy} = -i(k - i\alpha)T_x = -\omega^2 \rho u_x. \quad (3.67)$$

将式(3.65)和(3.66)代入式(3.67),于是给出色散关系

$$(k - i\alpha)^2(c_{44} + i\omega\eta_{44}) = \rho\omega^2. \quad (3.68)$$

由此,

$$(k^2 - \alpha^2 - i2\alpha k)(c_{44} + i\omega\eta_{44}) = \rho\omega^2.$$

将实部和虚部分开,得

$$c_{44}(k^2 - \alpha^2) + 2\alpha k\omega\eta_{44} = \rho\omega^2,$$

$$i((k^2 - \alpha^2)\omega\eta_{44} - 2\alpha k c_{44}) = 0,$$

这两个方程可进一步重新写成

$$k^2 - \alpha^2 = \frac{\rho}{c_{44}} \frac{\omega^2}{\left[1 + \left(\frac{\omega\eta_{44}}{c_{44}}\right)^2\right]}, \quad (3.69)$$

$$2\alpha k = \frac{\rho}{c_{44}} \frac{(\omega^2\eta_{44}/c_{44})}{\left[1 + \left(\frac{\omega\eta_{44}}{c_{44}}\right)^2\right]}. \quad (3.70)$$

从式(3.69)和(3.70)中消去 k , 得到

$$\alpha^2 = \frac{\rho\omega^2}{2c_{44}} \left(\frac{1}{\left[\left(1 + \frac{\omega\eta_{44}}{c_{44}} \right)^2 \right]^{1/2}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega\eta_{44}}{c_{44}} \right)^2} \right), \quad (3.71)$$

然后将 α^2 代入式 (3.69), 就能求出 k^2 , 大多数固体材料的粘滞系数非常小, 甚至在频率高达 1 京赫 (1000 兆周/秒) 时仍满足

$$\left(\frac{\omega\eta_{44}}{c_{44}} \right)^2 \ll 1.$$

在此条件下, 相当复杂的式 (3.71) 简化为

$$\alpha^2 = \frac{\omega^4}{4} \frac{\rho}{c_{44}} \left(\frac{\eta_{44}}{c_{44}} \right)^2, \quad (3.72)$$

而 k^2 相应地近似为

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{c_{44}} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\omega\eta_{44}}{c_{44}} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (3.73)$$

为了考查这些结果的物理意义, 取式 (3.65) 的实部:

$$\operatorname{Re} u = Ae^{-\alpha y} \cos(\omega t - ky), \quad (3.74)$$

波数 k 还是按通常的解释, 即波长为

$$\lambda = 2\pi/k,$$

因而相速度为

$$V_p = \omega/k.$$

因此, 根据式 (3.73), 粘滞阻尼的影响是引进了一个 k 的二阶减量, 从而使相速度稍有增加. 粘滞阻尼的一个更重要的影响是波振幅随 y 按实指数函数 $e^{-\alpha y}$ 变化, 其中 α 称为衰减因子. 由于有损耗介质中的波振幅必定在传播方向上衰减, 所以式 (3.72) 中的 α 以及式 (3.73) 中的 k 的正负号, 对正行波必须都为正; 对负行波必须都为负 (图 3.10). 因此, 正行波的波数 k 为

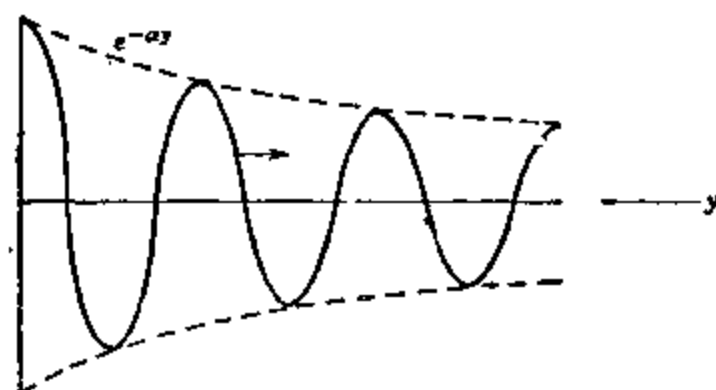
$$k = \omega(\rho/c_{44})^{1/2} \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{\omega\eta_{44}}{c_{44}} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (3.75)$$

相应的衰减因子, 在低损耗情形为

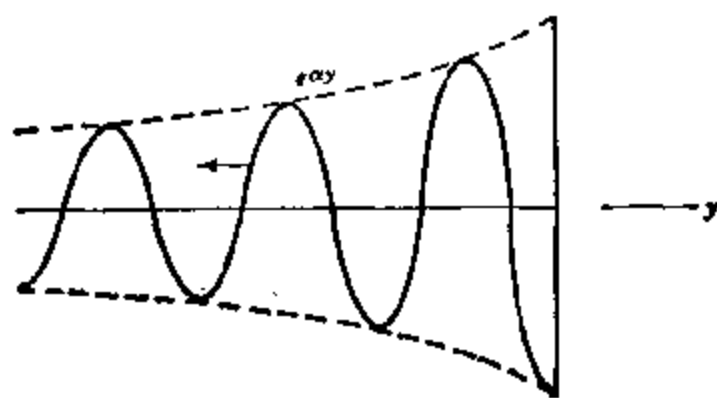
$$\alpha = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\rho}{c_{44}} \right)^{1/2} \left(\frac{\omega\eta_{44}}{c_{44}} \right) = \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{\rho}{c_{44}} \right)^{1/2} \left(\frac{\eta_{44}}{c_{44}} \right). \quad (3.76)$$

从式 (3.76), 衰减因子正比于频率的平方. 这种频率依赖关系是粘滞阻尼材料的典型情况, 它的实际后果是随着工作频率的不断增加,

对所用粘滞阻尼材料的质量要求就越来越高。通常单晶材料的阻尼常数最低。所以尽管它们的波速各向异性不太理想，但在 100 兆赫以上的大多数应用中仍必须采用单晶材料。



(a) 正行波 $e^{-\alpha y} \cos(\omega t - ky)$



(b) 负行波 $e^{\alpha y} \cos(\omega t + ky)$

图 3.10 有损耗介质中的衰减波函数

从式 (3.76) 我们看到,每单位波长的衰减

$$\alpha \lambda = \frac{2\pi\alpha}{k} \quad (3.77)$$

只是参量

$$Q = \frac{\epsilon_{44}}{\omega \eta_{44}} \quad (3.78)$$

的函数,我们称 Q 为**声品质因数**(或声 Q)¹⁾。根据图 3.5 中不同坐标方向在对称上的等价性,显然此品质因数也适用于 x -偏振、 y -传播的波和沿任一立方晶轴传播的切变波。表 3.1 列出了对沿立方棱方向传播

1) 更普遍的 Q 定义将在第二册 §11.5 中给出。

的纵波和沿面对角线方向传播的切变波与纵波算得的声 Q 值。将以前算得的无损耗波矢量和表中的声 Q 值代入式 (3.75) 和 (3.76), 可以得到这些波的 k 值和 α 值。表 3.1 表明, 要测量一种立方材料的粘滞常数, 至少需要观测三类独立声波的衰减¹⁾。

表 3.1 沿立方晶体的立方棱和面对角线方向传播的声 Q 值

传播方向	偏 振	$Q \approx \frac{2\alpha}{k}$
立 方 棱	纵	$\frac{c_{11}}{\omega\eta_{11}}$
	切 变	$\frac{c_{44}}{\omega\eta_{44}}$
面对角线	纵	$\frac{c_{11} + c_{12} + 2c_{44}}{\omega(\eta_{11} + \eta_{12} + 2\eta_{44})}$
	立方棱方向切变	$\frac{c_{44}}{\omega\eta_{44}}$
	面对角线方向切变	$\frac{c_{11} - c_{12}}{\omega(\eta_{11} - \eta_{12})}$

例 11 表明, 有损耗介质中沿 $+y$ 轴传播的波的场振幅随 $e^{-\alpha y}$ 变化。因此, 在 y_1 点和 $y_2 > y_1$ 点的场振幅比为

$$\frac{e^{-\alpha y_1}}{e^{-\alpha y_2}} = e^{-\alpha(y_1 - y_2)}, \quad (3.79)$$

称为从 y_1 到 y_2 的衰减。在工程上和实验工作中, 通常都用对数标尺来量度这个量。主要原因就是要把实际遇到的很宽范围的振幅比压缩成较窄的范围。采用对数标尺还使相继的衰减能直接相加。变换成对数标尺的一种方法是直接对振幅比 (3.79) 取自然对数。这样给出的衰减是用奈培量度的, 即

$$\text{衰减} = \alpha(y_2 - y_1) \text{ 奈培}。 \quad (3.80)$$

事实上, 奈培是一个无量纲的量, 用这个名称只是为了表明衰减是以自然对数标尺来量度的。所以说, 式 (3.76) 中的衰减

1) 见本章参考文献 [9]。

因子以奈培/米为单位。更常用的对数标尺是基于常用对数，它的基本单位是分贝 (dB)。从 y_2 到 y_1 的衰减用分贝表示时被定义成

$$\begin{aligned}\text{衰减} &= 10 \log (e^{-\alpha(y_2-y_1)})^2 \\ &= 20(\log e)\alpha(y_2-y_1) \text{ 分贝}.\end{aligned}\quad (3.81)$$

从而，它是振幅比平方的量度。按照式 (3.80) 和 (3.81)，衰减因子 α 从奈培/米变换成分贝/米，要乘上 $20(\log e)$ 。即

$$\begin{aligned}\alpha(\text{分贝/米}) &= 20(\log e) \\ \alpha(\text{奈培/米}) &\approx 8.686\alpha(\text{奈培/米}).\end{aligned}\quad (3.82)$$

室温下，大部分单晶材料的声衰减随频率的平方而增加。对这种粘滞阻尼有贡献的主要物理机制是热弹性机制和阿克希瑟 (Akhieser) 机制。热弹性衰减来源于压缩波 (即纵波) 中从压缩区域到稀疏区域的不可逆热传导。这种衰减只在纵波中出现，因为切变波不改变体积元的大小。在有限温度下，所有材料中都存在着热激发声波 (称为声子) 的平衡分布。相干激发的声波从材料中通过时干扰了声子平衡，其结果造成能量吸收或阻尼。这种阻尼机制称为阿克希瑟阻尼 (或声子阻尼)。由随机取向的单晶颗粒组成的多晶材料中在室温下也出现阻尼，其机制是在颗粒边界的散射。但是它并不总是导致粘滞效应 (衰减 $\sim \omega^2$)，实验上遇到了许多不同的衰减-频率曲线。

对于室温下的声衰减，发现以单晶绝缘体的为最低，它几乎可以完全用阿克希瑟机制来解释。单晶半导体就损耗来说，仅次于单晶绝缘体，仍可归因于阿克希瑟过程。金属中占优势的阻尼机制与波的类型有关。在观测到的压缩波衰减中，约有一半是热弹性效应的贡献，其余部分解释为阿克希瑟阻尼。对于切变波，没有热弹性阻尼，所以可信，阿克希瑟机制是主要贡献。多晶材料的衰减值最大。表 3.2 中列出了许多单晶

立方材料的声衰减测量值。这些值不是在同一频率测得的，但都是按照频率平方的规律外推到 1 京赫。结果表明，衰减通常是按“绝缘体→半导体→金属”的顺序增加。在 1 京赫测得钇铝石榴石 (YAG) 的衰减最小，但许多其他对称类的晶体，其 α 值处于与 YAG 大致相同的范围。图 3.11 为常用于声延迟线器件的许多材料的衰减-频率曲线。衰减以相当于时延为 1 微秒的长度 l_μ 来表示，即

$$l_\mu(\text{米}) = 10^{-6} V_p(\text{米/秒}).$$

由式 (3.76) 和 (3.82)，沿立方棱方向传播的切变波的衰减因子为

$$\alpha = 4.343 \left(\frac{\rho}{c_{44}} \right)^{1/2} \left(\frac{\eta_{44}}{c_{44}} \right) \omega^2, \quad (3.83)$$

单位为分贝/米。如果代入 YAG 的材料参量(根据附录 2.1)，

$$\rho = 4550 \text{ 千克/米}^3$$

$$c_{44} = 11.5 \times 10^{10} \text{ 牛顿/米}^2,$$

则

$$\alpha = 7.50 \times 10^{-15} \eta_{44} \omega^2 \text{ 分贝/米},$$

其中 η_{44} 的单位是牛顿·秒/米²。取表 3.2 中沿 YAG 立方棱方向传播的切变波的衰减因子 $\alpha = 110$ 分贝/米，得到粘滞系数

$$\eta_{44} = 37.2 \times 10^{-5} \frac{\text{牛顿} \cdot \text{秒}}{\text{米}^2},$$

或 0.372 厘泊。对于沿 YAG 立方棱方向传播的纵波，可将式 (3.83) 中的 c_{44} 和 η_{44} 改为 c_{11} 和 η_{11} ，从表 3.2 算得粘滞常数为

$$\eta_{11} = 33.1 \times 10^{-5} \frac{\text{牛顿} \cdot \text{秒}}{\text{米}^2},$$

或 0.331 厘泊。

表 3.2 立方单晶材料在1京赫时的衰减(引自 Wauk)

材 料	传播方向	偏振	衰减因子 α (分贝/米)
绝缘体			
氧化镁	立方棱	纵向	330
		切变	40
钛酸锶	立方棱	纵向	600
钇铁石榴石	立方棱	纵向	200
		切变	34
钇铝石榴石	立方棱	纵向	20—32
		切变	110
半导体			
锗	立方棱	纵向	2300
		切变	1000
硅	立方棱	纵向	1000
	体对角线	纵向	650
金属			
铝	面对角线	纵向	7500
铜	立方棱	纵向	27000
金	面对角线	纵向	20000

习 题

1. 蓝宝石的弹性劲度常数(附录 2.1.1 和 2.1.2) 用缩写下标表成:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= c_{22}, & c_{44} &= c_{55}, \\
 c_{12} &= c_{21}, & c_{56} &= c_{65} = c_{14}, \\
 c_{13} &= c_{31} = c_{23} = c_{32}, & c_{66} &= \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}), \\
 c_{14} &= c_{41} = -c_{24} = -c_{42},
 \end{aligned}$$

试写出全部常数的全下标表示。

2. 用习题 1 的常数图解说明应变 S_1, S_2, \dots, S_6 在蓝宝石中产生的应力。应变可用图 2.4 中的形变立方来表示, 应力

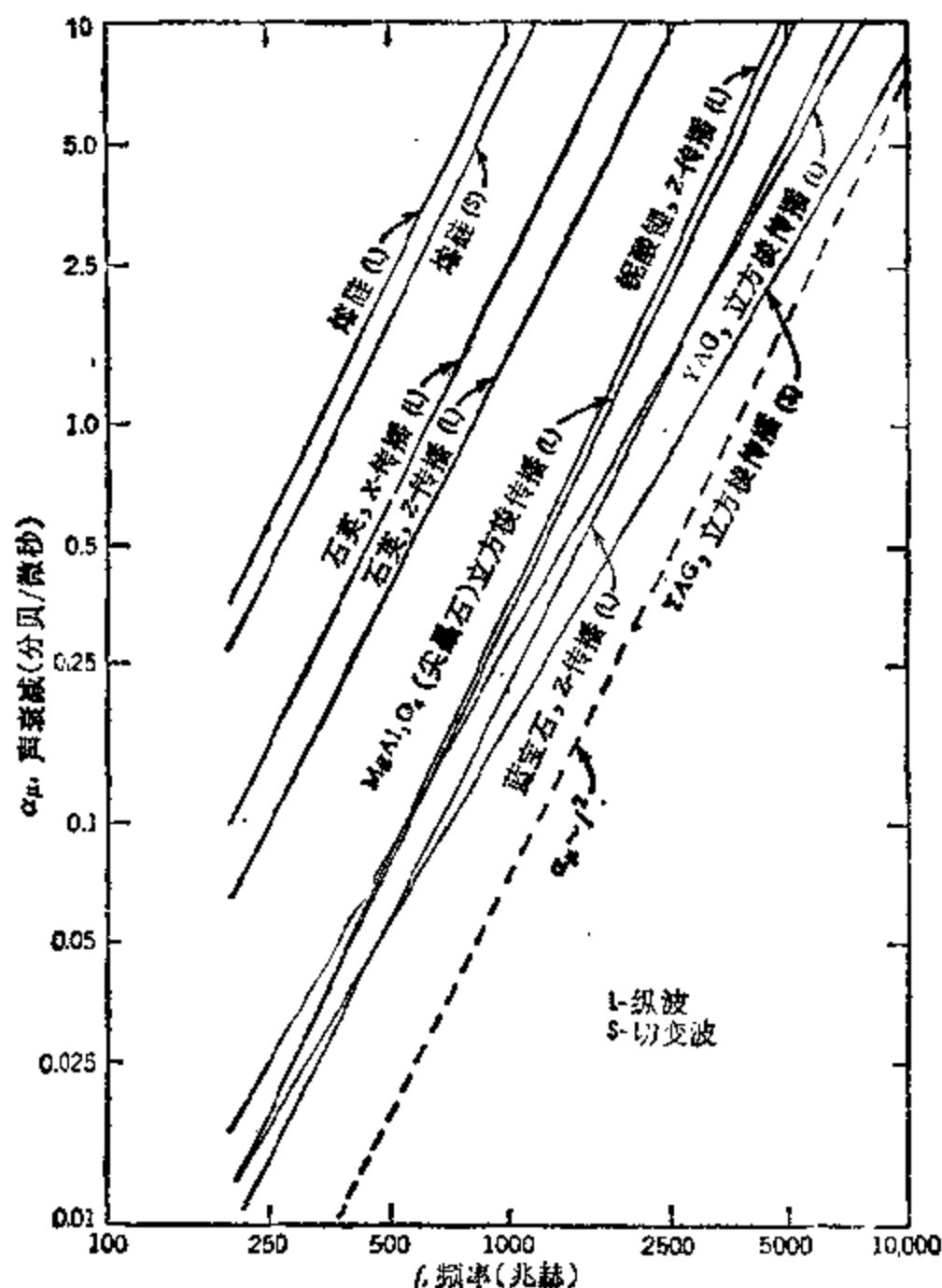


图 3.11 有代表性的声材料的声衰减随频率变化的对数-对数标绘图。虚线表示粘滞阻尼介质的典型频率平方关系(引自 Olsen)

可用立方表面的牵引力来表示。

3. 附录 2.1 中给出六角晶体的弹性顺度矩阵 $[s]$ 和弹性劲度矩阵 $[c]$ 的形式。试用 $[c]$ 的矩阵元来表示 $[s]$ 的矩阵元, 并反过来表示。

4. 证明: 蓝宝石有一 X -偏振、 X -传播的平面波解和 X -偏振、 Y -传播的平面波解. 求沿 Z 轴传播的三个解. 可用习题 1 的劲度常数.

5. 将例 4 中三个 Z -传播的切变波解, 用振幅为 A , 相角为零的 X -偏振波和振幅为 B , 相角为 θ 的 Y -偏振波进行叠加. 求质点位移矢量尖端划出的椭圆路径的形状与取向.

6. 利用邦德变换矩阵 $[N]$, 将第一章习题 1 的应变场变换到绕 z 轴逆时针方向转过 45° 的坐标系中, 并与第一章的习题 5 作比较.

7. 推导式 (3.44) 和 (3.46).

8. 证明: 三角晶类 $3,3$ 的劲度矩阵 (附录 2.1.2) 所取形式, 当坐标系统绕 Z 轴逆时针转过 ξ 角, 且

$$\tan 3\xi = \frac{c_{25}}{c_{11}}$$

时, 与三角晶类 $32, 3m, \bar{3}m$ 的劲度矩阵相同.

9. 将例 3 的立方劲度矩阵和习题 3 的六角劲度矩阵变换成柱坐标 r, ϕ, z 表示 (附录 1).

10. 利用例 9 和附录 2 中的材料参数, 计算为使 YAG 中沿 $[110]$ 方向传播的圆偏振切变波的转动方向反转所需要的距离. 对氧化镁和金刚石重复上述计算.

11. 证明: 如果场的时间依赖关系为 $e^{i\omega t}$ 形式, 则应力-应变关系 (3.60) 可表示成下列复劲度矩阵:

$$[c_{IJ} + i\omega\eta_{IJ}],$$

求出相应的复顺度矩阵.

12. 蓝宝石的粘滞常数所满足的关系与习题 1 给出的劲度常数的关系相同. 推导习题 4 平面波解的衰减常数表达式.

参 考 文 献

Stress-strain Relations

- [1] P. C. Chou and N. J. Pagano, *Elasticity—Tensor, Dyadic and Engineering Approaches*, Ch. 3, van Nostrand, New York, 1967.
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, pp. 10—13, Pergamon, New York, 1970.
- [3] G. Nadeau, *Introduction to Elasticity*, pp. 48—54, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.
- [4] J. F. Nye, *Physical Properties of Crystals*, pp. 131—135, Oxford, England, 1964.
- [5] W. Bond, The mathematics of the physical properties of crystals, pp. 1—72, *BSTJ*, 22 (1943).

Attenuation and Damping

- [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, pp. 122—124, Pergamon, New York, 1970.
- [7] W. P. Mason, *Physical Acoustics and Properties of Solids*, pp. 28—30, Ch. 7—11, van Nostrand, New York, 1958.
- [8] L. R. Kinsler and A. R. Frey, *Fundamentals of Acoustics*, pp. 221—225, Wiley, New York, 1962.
- [9] J. Lamb and J. Richter, Anisotropic acoustic attenuation, with new measurements for quartz at room temperature, *Proc. Royal Soc. (London)*, A293, pp. 479—492 (1966).
- [10] P. G. Klemens, Effect of thermal and phonon processes on ultrasonic attenuation, pp. 201—234, in *Physical Acoustics*, vol. 3B, W. P. Mason, Ed., Academic Press, New York, 1965.
- [11] M. F. Lewis, Attenuation of longitudinal ultrasonic waves insulators at room temperature, *J. Acous. Soc. Am.*, 43, pp. 852—858 (1968).
- [12] M. T. Wauk, *Attenuation in Microwave Acoustic Transducers and Resonators*, Ph. D. Dissertation, Department of Applied Physics, Stanford University, 1969.
- [13] F. A. Olson, Microwave acoustic devices, *Space Age News*, 12, pp. 47—50, March 1969.
- [14] H. J. Maris, Interaction of sound waves with thermal phonons in dielectric crystals, pp. 279—345, in *Physical Acoustics*, vol. 7, W. P. Mason and R. N. Thurston, Eds., Academic Press, New York, 1971.
- [15] E. P. Papadakis, Ultrasonic Attenuation Caused by Scattering in Polycrystalline Media, pp. 269—328 in *Physical Acoustics*, vol. 4B, W. P. Mason, Ed., Academic Press, New York, 1968.

第四章 声学 and 电磁学

4.1 电磁和声的类比

固体中的声场理论现在已经奠定了基础. 两个基本的声场方程就是应变-位移关系:

$$\mathbf{S} = \nabla_s \mathbf{u} \quad (4.1)$$

和运动方程

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{F}. \quad (4.2)$$

由于有三个场变量 (\mathbf{u} , \mathbf{S} , \mathbf{T}), 而只有两个方程, 所以需要一个附加条件, 这个条件由弹性本构方程提供:

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}:\mathbf{S} + \boldsymbol{\eta} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}. \quad (4.3)$$

在某些情形, 这一虎克定律关系不能充分描述固体对声应变的响应. 某材料在受到应变时成为电极化的这种所谓正压电效应, 在实验上表现为应变介质表面出现束缚电荷. 它是一线性现象, 当应变反号时, 极化也随之反号. 压电性与固体的微观结构密切相关, 虽说这一课题比较复杂, 但能用比较简单的原子模型来定性说明. 简单地说, 当材料形变时, 固体的原子(以及原子内部的电子)发生位移. 这种位移在介质内产生微观电偶极矩, 而在某些晶体结构中, 这些偶极矩组合出一个平均的宏观矩(即电极化). 第八章将更详细地讨论这种模型, 并将推导出存在正压电效应所要求的晶格对称条件.

正压电效应总是伴随有逆压电效应, 置于电场中的固体靠逆压电效应而受到应变. 它与正压电效应一样, 也是线性

的，并随外加电场的反向而反号。由于外电场产生的压电应变总会产生内应力，故在式(4.3)中必须加入一项线性正比于电场的应力项来计入逆压电效应。这种线性电感应应力只在微观结构适于压电性存在的材料中出现。然而还有另一种电感应应力在所有的材料中都出现的。这种应力称为电致伸缩应力，它是电场平方的函数，产生这种应力的微观机制与逆压电效应相同，即由作用在构成晶体晶格的离子上的电力产生，但它与压电应力相反，在所有的材料中都产生宏观效应。

因为电致伸缩是一个二级现象，所以在线性理论的小信号近似中，它的作用可以忽略。但是压电性则导致声场方程和电磁场麦克斯韦方程间的线性耦合。第八章将详细研究这种耦合。在磁性材料中观测到类似的两种效应。磁致伸缩是出现于所有对称晶类材料中的二次磁感应应力，而压磁性是一种线性磁声耦合，只在满足某种晶格对称条件的材料中出现。目前，本征的压磁效应没有任何实用价值。然而，对某几种磁性材料，外加一个直流偏压场(H)_{直流}的同时，再加一个随时间变化的信号场(H)_{信号}，则能实现技术上有用的线性磁声耦合。在这种情形，二次效应(即磁致伸缩效应)产生应力项正比于与外加信号场成线性依赖关系的项，诸如(H_i)_{直流}(H_j)_{信号}。这种偏置压磁性是一种强效应¹⁾，它具有多种重要的工程应用。但磁介质已超出本书范围，因此不再继续谈论²⁾。

1) 用完全类似的方法，由电致伸缩可能产生的偏置压电性通常是很弱的。

2) 详细论述，见 B. A. Auld, *Magnetostatic and Magnetoelastic Wave, Propagation in Solids*, pp. 2-103 in *Applied Solid State Science*, Vol. 2, R. Wolfe, Ed., Academic Press, New York, 1971; R. Birs, *Symmetry and Magnetism*, Ch. 4 and Ch. 5, North-Holland, Amsterdam, 1966; D. A. Berlincourt, D. R. Curran and H. Jaffe, *Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers*, Ch. 3 in *Physical Acoustics*, Vol. 1A, W. P. Mason, Ed., Academic Press, New York, 1964.

压电性(及偏置压磁性)用各种各样的方法提供了几乎是全部声场实际应用的物理基础。这是因为它们提供了电学上产生和检测声振动的一种有效方法。为了设计产生和检测声振动用的电-声转换器或换能器,必须建立一种数学体系,把互相耦合的电磁场和声场联系起来。这种数学体系的推演将在第八章中进行。现在来考虑那些熟知的支配着非压电介质中未经耦合的电磁场的方程似乎毫无必要。但是这么做仍有益处。只要在符号上作一些很简单的改动,就可将声场方程(4.1)和(4.2)换成与电磁学麦克斯韦方程接近平行的类似形式。这个过程所给出的远不止一个满意的数学对称性。声学中最感兴趣的场问题和电磁学中,尤其是微波理论领域中,很受重视的问题(诸如均匀平面波的传播、导制波、周期性波导、耦合模式、谐振器和滤波器等问题)具有相同的共性。把声场方程以类似于麦克斯韦方程的形式表现出来后,再将已经用于电磁学中同类问题的解析方法和技巧转移到声学中去,问题就简单多了。本章首先建立电磁和声的类比,然后比较均匀平面电磁波和均匀平面声波的基本特性予以说明。后几章,特别是第十章到第十三章,再将电磁学的方法和概念用于一些较复杂的声学问题。

4.2 电磁场方程

麦克斯韦方程取有理化单位的标准符号形式为

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.4)$$

和
$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_s, \quad (4.5)$$

其中 \mathbf{J}_c 为传导电流密度; \mathbf{J}_s 为源电流密度. 方程中包含四个基本场量 $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$, 它们由介质的本构方程相互联系. 惯常把 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 取作基本场量. 于是, 既无压电效应、又无压磁效应的介质的电位移和磁通密度的线性本构关系为

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}, \quad (4.7)$$

而传导电流密度的线性本构关系为

$$\mathbf{J}_c = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}, \quad (4.8)$$

由于这些方程是把一个矢量和另一个矢量相联系, 所以介电常数张量 $\boldsymbol{\epsilon}$, 磁导率张量 $\boldsymbol{\mu}$ 和电导率张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 都是二阶张量. 在 MKS 制中, 电磁场变量和本构参数的单位如下:

\mathbf{E} 伏特/米	$\mathbf{J}_c, \mathbf{J}_s$ 安培/米 ²
\mathbf{H} 安培/米	$\boldsymbol{\epsilon}$ 法拉/米
\mathbf{D} 库仑/米 ²	$\boldsymbol{\mu}$ 亨利/米
\mathbf{B} 韦伯/米 ² =伏特·秒/米 ²	$\boldsymbol{\sigma}$ 姆欧/米

在真空中, 介电常数和磁导率退化为标量因子

$$\boldsymbol{\epsilon} \rightarrow \epsilon_0 = (1/36\pi) \times 10^{-9} \text{ 法拉/米},$$

$$\boldsymbol{\mu} \rightarrow \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ 亨利/米}.$$

麦克斯韦方程 (4.4) 和 (4.5) 通过本构关系用 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 表示为

$$-\nabla \times \mathbf{E} = \boldsymbol{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.9)$$

和

$$\nabla \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_s. \quad (4.10)$$

这些符号方程常用分量构成的矩阵表示, 同时用列矩阵来表示场强:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix},$$

用笛卡儿直角坐标中的微分算符矩阵来表示旋度算符

$$[\nabla \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

由于

$$-[\nabla \times] = [\widetilde{\nabla \times}],$$

式(4.4)和(4.5)中的电磁场算符用直角坐标表示时互为转置。即将证明,这与声场方程是极为相似的。

电磁场还必须满足电荷守恒方程

$$\nabla \cdot (\sigma \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}_s) = -\frac{\partial \rho_c}{\partial t}, \quad (4.12)$$

其中 ρ_c 是电荷密度,单位为库仑/米³,此外,从式(4.4), (4.5)和(4.12)能推出 \mathbf{B} 和 \mathbf{D} 的常用的散度关系(习题 4.2)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_c. \quad (4.14)$$

4.3 声场方程

§4.1 中的基本声场方程(4.1)和(4.2)与常用的麦克斯韦方程形式不同,它们包含对时间的二阶微商.为了便于与电磁学的麦克斯韦方程相类比,不用质点位移 \mathbf{u} , 而用质点速度

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$$