竖向荷载下桩筏基础通用分析方法

王 伟[1, 2]，杨 敏[2]

(1.上海岩土工程勘察设计研究院，上海 200002；2.同济大学地下建筑与工程系，上海 200092)

摘 要：根据已有的竖向荷载下刚性板桩筏基础分析结果提出了一种竖向荷载下桩筏基础的通用分析方法。桩筏基础分析中考虑了 4 种相互作用，分别为桩－土－桩、桩－土－板、板－土－桩和板－土－板相互作用。筏板分析采用有限单元方法，以厚薄板通用四边形等参单元进行分析。该方法可以分析由任意桩长、桩半径和刚度特性的桩群以及任意厚度和几何外形的筏板组成的竖向受荷桩筏基础。应用该方法不需要划分桩土体单元，其分析复杂程度基本等同于弹性地基板基础，且分析过程简洁。通过与各种方法的比较证明该方法是合理可行的，精度上也满足要求。

关键词：桩筏基础；筏板；位移；有限元

中图分类号：TU473.1 文献标识码：A 文章编号：1000－4548(2008)01－0106－06

作者简介：王 伟(1977－)，男，山东临朐人，博士，主要从事桩基础与基坑工程、高边坡工程和水工结构优化方面的研究。E-mail: waye_wang@163.com。

General analysis method of piled raft foundation under vertical loading

WANG Wei[1,2], YANG Min[2]

(1. Shanghai Geotechnical Investigations & Design Institute, Shanghai 200002, China; 2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A general analysis method of piled raft foundation under vertical loading was presented based on the results of piled raft foundation with rigid cap under the same loading condition. Four types of intreraction could be considered herein, i.e., pile-soil-pile interaction, pile-soil-plate interaction, plate-soil-pile interaction and plate-soil-plate interaction. Cap of foundation was analyzed through finite element method with a rational approach to formulate Reissner-Mindlin quadrilateral element. It was mentioned that pile group could be comprised of piles with various lengths, radiis and stiffness modulis. Raft with any shape and depth could be studied accurately. The method did not involve the discretization of the soil or piles and it could be used to analyze piled raft foundation as simply as to analyze raft foundation. By comparison with the results of other methods, it was shown that the proposed method was reasonable and feasible.

Key words: piled raft foundation; cap; displacement; FEA

0 前 言

桩筏基础分析中筏板多采用 C_1 型连续的 Kirchhoff 薄板弯曲理论来进行分析[1-8]，而采用 C_0 型连续的 Reissner-Mindlin 厚板理论进行分析[9-10]的偏少。工程实际中筏板可能属于薄板范围也可能出现在厚板范围内，判断属于厚板或薄板的标准甚多[1, 11-13]，最终 Horikoshi 进行了修正统一[14]，但均局限于矩形或圆形等简单几何外形的地基板。所以实际中若盲目采用薄板理论或厚板理论对地基板或桩筏基础进行分析，将缺乏理论选用的严谨性，而采用一种厚薄板通用分析方法进行分析是最合理的。

已有的研究表明用厚板理论分析薄板时会出现剪切闭锁现象[15]，无法分析薄板。为避免出现这类问题，众多从事有限元研究的学者提出了诸多厚板理论的改进方法，以使其能够适用于薄板情形，包括缩减积分方法[16]、选择性缩减积分法[17]、代替剪应变方法[18]、离散 Kirchhoff 方法[19]、稳定性矩阵方法[20-21]、混合插值法[22]、自由作法[23]等。这些方法在一些情况下解决了剪切闭锁现象，但不具备处理任意问题的通用性。有些学者放弃了板的理论，采用实体单元或者退化实体单元方法进行分析[24]，但结果中弯矩和剪力需要通过应力进行再次求解，结点数量多且处理偏于麻烦。

在上述由厚板理论构造的厚板元过渡到厚－薄板元时遇到了难以克服的问题后，一些学者选择由薄板理论构造的薄板元过渡到薄－厚板元来构造厚薄板通用分析单元[25-26]，这些方法是在薄板理论基础上引入

收稿日期：2007－04－16

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

了剪切应变，从而彻底克服了剪切闭锁现象。

本文根据已有的竖向荷载下刚性板桩筏基础分析方法的研究结果[27]，结合文献[28，29]提出的厚薄板通用有限元分析方法，解决了桩筏基础中包含任意桩长、桩径和桩身刚度以及任意筏板几何形状和变厚度时难以处理的问题，该方法仅需要划分板单元，无需划分桩土体单元，对于各桩特性不同或变厚度筏板的桩筏基础分析处理简便，与单纯的有限元分析方法相比数据准备工作量大大减少，但仍具备较高的计算精度。

1　桩筏基础分析

1.1　桩土刚度

（1）桩侧摩阻力表达式

桩筏基础中桩侧摩阻力函数可由幂函数有限项级数表述[30]，

$$\tau_i(z)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}(L_i-z)^{j-1}\quad , \tag{1}$$

式中，$\tau_i(z)$ 为桩筏基础中第 i 桩深度 z 处的桩侧摩阻力，z 为深度变量（$0\le z\le L_i$），L_i 为第 i 桩的长度，$(i=1,2,\cdots,n)$，n 为群桩中总桩数，α_{ij} 为待定系数，k 为待定整型变量，α_{ij} 和 k 值的确定参见文献[30]。

（2）桩土体系的刚度

桩筏基础包含 4 种相互作用，分别为桩－土－桩，板－土－桩，桩－土－板和板－土－板相互作用，前两种相互作用分析采用 Mindlin 基本解[31]进行，后两种相互作用采用 Boussinesq 基本解[32]计算。结合桩身压缩的物理方程和力的平衡方程，可以得出考虑相互作用的桩筏基础中桩土体系的刚度表达式[27]：

$$[k_{\rm ps}]_{(n+m)\times(n+m)}[w_{\rm t}]_{(n+m)\times1}=[p_{\rm t}]_{(n+m)\times1}\quad , \tag{2}$$

式中，m 为桩筏基础中筏板下土结点的总数，n 为群桩中总桩数，$[k_{\rm ps}]$ 为桩土体系的刚度矩阵，矩阵中各元素值见文献[30]，$[w_{\rm t}]$ 为桩土体系的顶部位移列阵，$[p_{\rm t}]$ 为桩土体系的顶部荷载列阵。

1.2　筏板刚度

本文的桩筏基础分析中筏板分析采用有限单元方法，考虑到单元数量和计算精度要求单元类型采用厚薄板通用四边形等参单元[28-29]。这种类型的单元是基于 Timoshenko 厚梁理论[33]和 Mindlin 板单元采用转角场和剪应变场进行合理插值的方式提出的，现将该方法形成筏板刚度的有限元过程简述如下。

（1）单元剪切变形场

厚薄板通用四边形单元每个结点含有 3 个自由度，即 $q_i=(w_i,\psi_{xi},\psi_{yi})^{\rm T}$ $(i=1,2,3,4)$，分别表示单元中 4 个结点处的挠度和笛卡儿坐标系中两个方向的转角。

根据 Timoshenko 厚梁理论中挠度和切向转角的插值公式以及整体坐标系和单元各边局部坐标系间的转换关系式，可以得出四边形单元各边的横向剪应变与单元中结点自由度的关系式，

$$\{\gamma_{\rm s}^{*}\}_{4\times1}=[\Gamma^{*}]_{4\times12}\{q\}^{e}_{12\times1}\quad , \tag{3}$$

式中，$\gamma_{\rm s}^{*}=d_i\gamma_{si}$ $(i=1,2,3,4)$，d_i 为单元各边的长度，γ_{si} 为各边的横向剪应变，$[\Gamma^{*}]$ 为转换关系矩阵，具体各值参见文献[29]，$\{q\}^{\rm e}$ 为单元自由度列阵。

由于任意两条边相交于一结点，在该结点处将单元两边的横向剪应变投影到整体坐标系中，得到结点剪应变与各边剪应变之间的关系，

$$\left.\begin{aligned}\{\gamma_{xi}\}_{4\times1}&=[X_{\rm s}]_{4\times4}\{\gamma_{si}^{*}\}_{4\times1},\\ \{\gamma_{yi}\}_{4\times1}&=[Y_{\rm s}]_{4\times4}\{\gamma_{si}^{*}\}_{4\times1},\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中，$\{\gamma_{xi}\}$ 和 $\{\gamma_{yi}\}$ 为单元结点的剪应变，$[X_{\rm s}]$ 和 $[Y_{\rm s}]$ 为转换矩阵，其他符号意义同前。

根据结点处的剪应变，通过线性插值可以得到单元的剪切应变矩阵和剪应变场，

$$[B_{\rm s}]_{2\times12}=\begin{bmatrix}[N_{\rm s}][X_{\rm s}][\Gamma^{*}]\\ [N_{\rm s}][Y_{\rm s}][\Gamma^{*}]\end{bmatrix}\quad , \tag{5}$$

$$\begin{Bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\end{Bmatrix}=[B_{\rm s}]\{q\}^{\rm e}\quad , \tag{6}$$

式中，γ_x 和 γ_y 为单元内两个方向的剪应变场，$[B_{\rm s}]$ 为单元剪切应变矩阵，$[N_{\rm s}]_{1\times4}$ 为单元插值形函数，表达式为[34]

$$N_i=\frac{(1+\xi_0)(1+\eta_0)}{4}\quad (i=1,2,3,4)\quad , \tag{7}$$

式中，$\xi_0=\xi_i\xi$，$\eta_0=\eta_i\eta$，ξ_i 和 η_i 为单元节点的局部坐标值，ξ 和 η 为局部坐标变量。

（2）单元转角场和曲率场

将单元中任意边连接的两个结点处的转角投影到边所在的局部坐标系中，假定各边的法向转角沿边界线性分布，从而得到单元各边中点处的法向转角。根据 Timoshenko 厚梁理论和整体与局部坐标系的投影关系可得到单元各边中点处的切向转角。然后再将单元各边中点处局部坐标系下的法向和切向转角投影到整体坐标系中，得到：

$$\left.\begin{aligned}\{\tilde{\psi}_x\}&=[\alpha]\{q\}^{\rm e},\\ \{\tilde{\psi}_y\}&=[\beta]\{q\}^{\rm e},\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

式中，$\{\tilde{\psi}_x\}=[\psi_{x5},\psi_{x6},\psi_{x7},\psi_{x8}]^{\rm T}$，$\{\tilde{\psi}_y\}=[\psi_{y5},\psi_{y6},\psi_{y7},\psi_{y8}]^{\rm T}$，$\psi_{xi}$ 和 ψ_{yi}，$(i=5,6,7,8)$ 为单元各边中点处两个方向的转角，$[\alpha]_{4\times12}$ 和 $[\beta]_{4\times12}$ 为转换关系矩阵，具体各值可参见文献[29]。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

将单元四个角点处的转角和上述各边中点处的转角进行 8 结点二次插值可得到单元内转角场：

$$\left.\begin{aligned}\psi_x &= \sum_{i=1}^{8} N_i \psi_{xi},\\ \psi_y &= \sum_{i=1}^{8} N_i \psi_{yi},\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

式中，ψ_x 和 ψ_y 为单元内任意点处两个方向的转角，$N_i(i=1,2,\cdots,8)$ 为插值形函数[34]，

角点：

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1) \quad (i=1,2,3,4), \tag{10}$$

边中点：

$$\begin{cases} N_i = \dfrac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0) \quad (\xi_i=0),\\ N_i = \dfrac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_0) \quad (\eta_i=0)。\end{cases} \tag{11}$$

单元曲率场和转角场存在如下关系：

$$\begin{aligned}\{\kappa\} &= \left[\kappa_x, \kappa_y, 2\kappa_{xy}\right]^{\mathrm{T}}\\ &= \left[\frac{-\partial\psi_x}{\partial x}, \frac{-\partial\psi_y}{\partial y}, -\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right)\right]^{\mathrm{T}},\end{aligned} \tag{12}$$

式中，$\{\kappa\}$ 为包含单元两个方向的曲率和扭率的列阵。

根据式（12）可以得到单元的弯曲应变矩阵，即

$$[B_{\mathrm{b}}]_{4\times 12} = -\left([H_0]+[H_1][\alpha]+[H_2][\beta]\right), \tag{13}$$

式中，$[H_0]_{4\times 12}$，$[H_1]_{4\times 4}$ 和 $[H_2]_{4\times 4}$ 是由以自然坐标表示的形函数对总体坐标的偏导数表述的矩阵，矩阵中具体的各值参见文献[29]。其他各符号意义同前。

（3）板的刚度矩阵

板单元刚度矩阵由单元的弯曲刚度矩阵和单元的剪切刚度矩阵两部分组成，即

$$[K]^{\mathrm{e}} = [K_{\mathrm{b}}]^{\mathrm{e}} + [K_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{e}}, \tag{14}$$

式中，$[K]^{\mathrm{e}}_{12\times 12}$ 为单元刚度矩阵，$[K_{\mathrm{b}}]^{\mathrm{e}}_{12\times 12}$ 为单元的弯曲刚度矩阵，$[K_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{e}}_{12\times 12}$ 为单元的剪切刚度矩阵。

其中单元的弯曲刚度矩阵的表达式为[35-36]

$$[K_{\mathrm{b}}]^{\mathrm{e}} = \iint_{A_{\mathrm{e}}} [B_{\mathrm{b}}]^{\mathrm{T}} [D] [B_{\mathrm{b}}] \mathrm{d}A, \tag{15}$$

式中，A_{e} 代表单元面积，$[B_{\mathrm{b}}]$ 为弯曲应变矩阵，$[D]_{3\times 3}$ 为弯曲弹性刚度矩阵，

$$\left.\begin{aligned}[D] &= D_0 \begin{bmatrix} 1 & \mu & \\ \mu & 1 & \\ & & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix},\\ D_0 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

式中，E 为板的弹性模量，h 为板的厚度，μ 为板的泊松比。

剪切刚度矩阵的表达式为[35-36]

$$[K_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{e}} = \iint_{A_{\mathrm{e}}} [B_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{T}} [C] [B_{\mathrm{s}}] \mathrm{d}A, \tag{17}$$

式中，$[B_{\mathrm{s}}]$ 为剪切应变矩阵，$[C]_{2\times 2}$ 为剪切弹性刚度矩阵，$[C] = \dfrac{Eh}{2.4(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

将单元刚度矩阵进行组装可得到板的整体刚度矩阵，以 $[K_{\mathrm{R}}]$ 表示，

$$[K_{\mathrm{R}}]\{w_{\mathrm{r}}\} = \{P_{\mathrm{out}}\}, \tag{18}$$

式中，$\{w_{\mathrm{r}}\}$ 为筏板各结点的位移，$\{P_{\mathrm{out}}\}$ 为集中力荷载，面荷载和线荷载的等效结点力矩阵。

1.3 刚度集成与求解

桩筏基础可以看作由桩土体系和筏板体系组合而成的，当桩土体系和筏板二者进行合并时，筏板下桩土体系的反力为桩筏体系的内力，但对于筏板体系而言，便成为筏板有限元分析的外荷载，故式（18）将变为

$$[K_{\mathrm{R}}]\{w_{\mathrm{r}}\} = \{P_{\mathrm{out}}\} - \{P_{\mathrm{t}}\} \quad 。 \tag{19}$$

引入筏板的横向位移（挠度）与桩土体系的竖向位移相协调的关系，结合式（2）可得

$$\left([K_{\mathrm{R}}]+[K_{\mathrm{ps}}]\right)\{w_{\mathrm{r}}\} = \{P_{\mathrm{out}}\} \quad , \tag{20}$$

该式仅为说明表达式，不是矩阵运算式，因为 $[K_{\mathrm{R}}]$ 和 $[K_{\mathrm{ps}}]$ 两矩阵的维数不同，二者叠加时仅将 $[K_{ps}]$ 叠加到对应的 $[K_{\mathrm{R}}]$ 矩阵中与横向位移相互作用相关的项中。

求解方程式（20）可得到筏板各结点的位移（包含桩顶的位移）。将求得的位移向量代入筏板的单元应力矩阵中可得各单元的高斯积分点处的弯矩和剪力大小，通过外插方法[37]可求得各结点处的弯矩和剪力大小。根据求得的位移向量和文献[27]中方法可以求得桩顶和筏板分担的荷载大小，筏板下土压力的分布，基础中各桩桩身侧摩阻力和端阻力分布情况，以及桩身沉降沿深度的分布规律。

2 方法验证

2.1 实例 1

均匀土体中由 3×3 群桩组成的桩筏基础，筏板尺寸为 6.0 m×6.0 m，厚度为 0.5 m，悬挑长度为 1.0 m；各桩长度均为 20.0 m，桩径 0.4 m，桩间距 2.0 m。其他参数见表 1 所示。外荷载为均匀分布的面荷载，大小为 1.0 MPa。筏板有限元网格划分中四边形单元数量为 36 个，结点数为 49 个。

本文方法、Clancy 和 Randolph 方法[2]以及 Chow 变分方法[6]的计算结果如表 2 所示。无论是基础的平均沉降还是桩承担的荷载百分比，3 种分析方法的计算结果均相近。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 1 3×3 桩筏基础计算参量表

Table 1 Material parameters in 3×3 piled raft

类型	弹性模量/MPa	泊松比
土	280	0.4
桩	35000	
筏板	35000	0.3

表 2 3×3 桩筏基础计算结果

Table 2 Results for 3×3 piled raft

分析方法	平均沉降/mm	桩承担荷载百分比/%
本文方法	8.06	73
Clancy 和 Randolph 方法	8.03	80
Chow 变分方法	8.02	75

2.2　实例 2

Poulos 提出了一个典型的桩筏基础考题来比较各种桩筏基础分析方法[38]。该桩筏基础共 15 根桩，平面布置形式见图 1，计算参量见表 3。本文方法的结果和 Poulos 板加弹簧的分析方法（程序 GARP）[39]、Ta 和 Small 的有限元和有限层结合的分析方法[40]、Sinha 的有限元和边界元结合的分析方法[41]、Chow 的变分方法[6]的计算结果分别如图 2 所示。计算结果包括基础的平均沉降，中心部位与 X 向外边界的差异沉降，X 向的最大弯矩值和桩承担的荷载百分比。

由图 2 可知，平均沉降以 Sinha 分析方法偏大，其他各种分析方法相当；差异沉降以 Poulos 方法偏大一些，其他方法较为接近；最大弯矩的结果以 Poulos 方法最大，Ta 和 Small 方法最小，本文方法与其他两种方法相近；桩承担总荷载的百分比以 Sinha 分析方法最小，其他 4 种方法很接近。

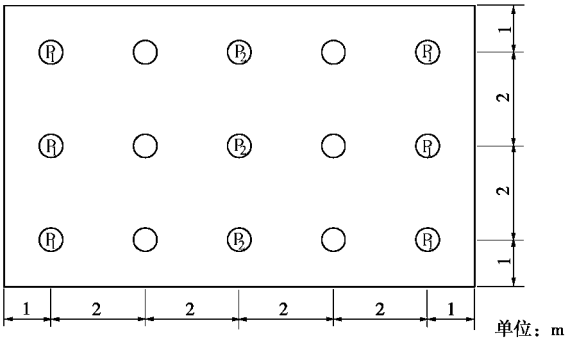


图 1 集中力荷载下桩筏基础的平面图

Fig. 1 A piled raft with concentrated loadings

表 3 3×5 桩筏基础计算参量表

Table 3 Property for 3×5 piled raft

类型	弹性模量/MPa	泊松比	几何尺寸
土体	20	0.3	厚度 20 m
桩	30000		长度 10 m，半径 0.25 m，桩距 2 m
筏板	30000	0.2	厚度 0.5 m

注：外荷载为 P_1=1.0 MN，P_2=2.0 MN。

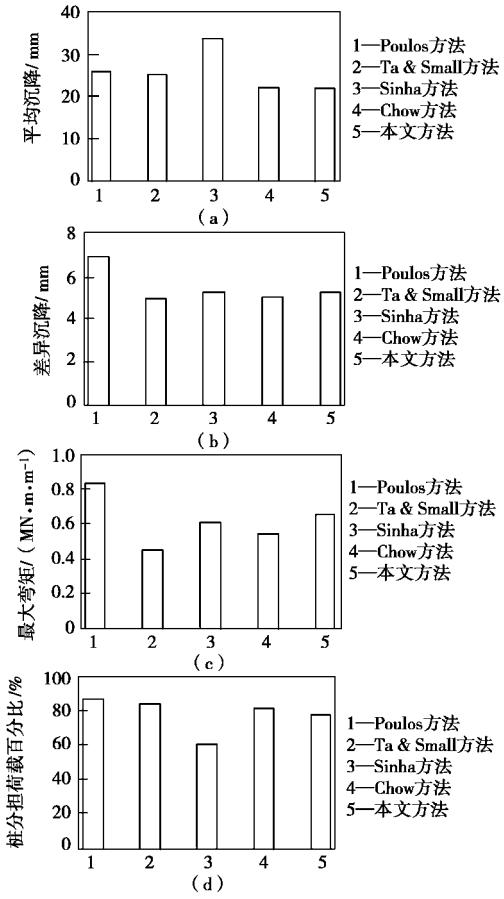


图 2 3×5 桩筏基础的比较结果

Fig. 2 Comparative results for 3×5 piled raft foundation

2.3　实例 3

非均匀土体中 3×3 群桩组成的桩筏基础，基础组成见表 4。以下比较中的有限元法分析采用 ANSYS 商用软件，桩采用三维杆单元，土体均采用 8 节点六面体单元进行模拟，筏板采用壳单元进行分析，桩土和板土间均没设置接触面单元，有限元模型的范围在竖向取两倍的长桩桩长，水平方向取 2.5 倍的长桩长度，模型侧面采用法向约束，底面采用全自由度约束[42-43]。

筏板的沉降等值线比较结果见图 3（考虑到模型和荷载的对称性，取 1/4 模型为例进行说明）。可见二者的分布规律相同只是数量上略有差别。

表 4 非均匀土中桩筏基础计算参量表

Table 4 Property for piled raft in nonhomogeneous soil

类型	弹性模量/MPa	泊松比	几何尺寸
土体	起始：200 每米深增值：5	0.4	压缩层厚度 40 m
桩	30000	0.2	角桩长度 16 m，边桩长度 20 m，中心桩长度 24 m，半径 0.5 m，桩距 3.5 m
筏板	30000	0.2	尺寸 10 m×10 m 厚度 0.5 m，悬挑长度 1.5 m

注：外荷载为均布面荷载：1 MPa。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

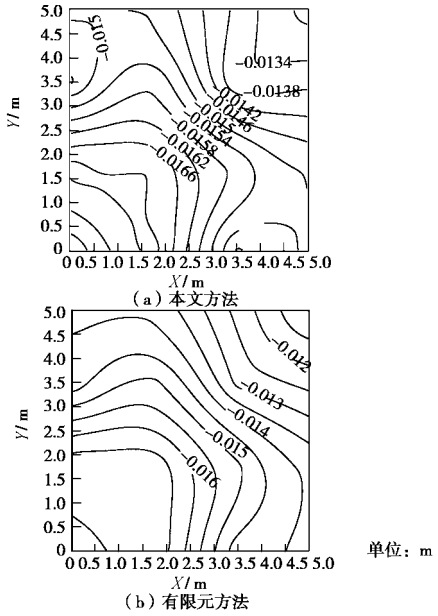


图 3 非均匀土中不等桩长桩筏基础的筏板沉降

Fig. 3 Settlement of piled raft foundation with various pile lengths in nonhomogeneous soil

3 结 论

通过均匀土体和非均匀土体中等长度和不等长度的桩组成的桩筏基础分析结果比较，说明本文的桩筏基础通用分析方法是合理的。由于筏板采用厚薄板通用有限元方法进行分析，所以本方法的突出优点是可以分析由任意桩长、桩半径和刚度特性的桩群以及任意厚度和几何外形的筏板组成的竖向受荷桩筏基础；且不需要划分桩土体单元，仅需要板单元划分的有限元计算数据，所以计算数据的准备工作量少；应用较方便，且保持较高的分析精度和方法的通用性，同时避免了桩筏基础分析中选择厚板或薄板理论的盲目性。

参考文献：

[1] HAIN S J, LEE I K. Analysis of flexible raft-pile systems[J]. Geotechnique, 1978, **28**(1): 65 – 83.

[2] CLANCY P, RANDOLPH M F. An approximate analysis procedure for piled raft foundations[J]. Int J Numer Anal Mech Geomech, 1993, **17**: 849 – 869.

[3] CLANCY P, RANDOLPH M F. Simple design tools for piled raft foundations[J]. Geotechnique, 1996, **46**(2): 313 – 328.

[4] K HORIKOSHI, RANDOLPH M F. A contribution to optimum design of piled rafts[J]. Geotechnique, 1998, **48**(3): 301 – 317.

[5] RUSSO G. Numerical analysis of piled rafts[J]. Int J Numer Anal Mech Geomech, 1998, **22**: 477 – 493.

[6] CHOW Y K, YONG K Y, SHEN W Y. Analysis of piled raft foundations using a variational approach[J]. The International Journal of Geomechanics, 2001, **1**(2): 129 – 147.

[7] KITTIYODOM Pastsakorn, MATSUMOTO Tatsunori. A simplified analysis method for piled raft and pile group foundations with batter piles[J]. Int J Numer Anal Mech Geomech, 2002, **26**: 1349 – 1369.

[8] REUL Oliver, RANDOLPH Mark F. Design strategies for piled raft subjected to nonuniform vertical loading[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, **130**(1): 1 – 13.

[9] GRIFFITHS D V, CLANCY P, RANDOLPH M F. Piled raft foundation analysis by finite elements[R]. Research report No. G:1034 of department of civil and resource engineering geomechanics group in the university of western Australia, 1991.

[10] CUNHA R P, POULOS H G, SMALL J C. Investigation of design alternatives for a piled raft case history[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2001, **127**(8): 635 – 641.

[11] BROWN P T. Numerical analyses of uniformly loaded circular rafts on elastic layers of finite depth[J]. Geotechnique, 1969, **19**(2): 301 – 306.

[12] CLANCY P. Numerical analysis of raft foundation[D]. University of Western Australia, 1993.

[13] FRASER R A, WARDLE L J. Numerical analysis of rectangular rafts on layered foundations[J]. Geotechnique, 1976, **26**(4): 613 – 630.

[14] HORIKOSHI K, RANDOPH M F. On the definition of raft-soil stiffness ration for rectangular rafts[J]. Geotechnique, 1997, **47**(5): 1055 – 1061.

[15] IRONS B M, AHMAD S. Techniques of finite element[M]. Chichester: Eillis Horwood, 1980.

[16] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L, TOO J M. Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells[J]. Int Num Meth Eng, 1971, **3**(2): 275 – 290.

[17] HUGHES T J, COHEN M, HARON M. Reduced and selective integration technique in finite element analysis of plates[J]. Nuclear Eng and Design, 1978, **46**: 203 – 222.

[18] HINTON E, HUANG H C. A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields[J]. Computers and Structures, 1986, **23**(3): 409 – 431.

[19] WEMPNER G A, ODEN J T, DROSS D A. Finite element analysis of shells[J]. J Engng Mech Div ASCE, 1968, **94**(EM6): 1273 – 1294.

[20] BELYTSCHKO T, TSAY C S, LIU W K. A stabilization

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

matrix for the bilinear Mindlin plate element[J]. Comput Meths Appl Mech Engng, 1983, **29**: 313 − 327.

[21] BELYTSCHKO T, TSAY C S. A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one point quadrature[J]. Int J Numer Meth Engng, 1983, **19**: 405 − 419.

[22] BATHE K J, VORKINE N D. Short communication: a four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation[J]. Int J Numer Meth Engng, 1985, **21**: 367 − 383.

[23] BERGAN P G, WANG Xiu-xi. Quadrilateral plate bending elements with shear deformations[J]. Compters & Structures, 1984, **19**(1/2): 25 − 34.

[24] 陈云敏, 陈仁朋, 凌道盛. 考虑相互作用的桩筏基础简化分析方法[J]. 岩土工程学报, 2001, **23**(6): 686 − 691. (CHEN Yun-min, CHEN Ren-peng, LING Dao-sheng. A simplified method to analyze soil-pile-raft interactions[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(6): 686 − 691. (in Chinese))

[25] FRICKER A J. A simple method for including shear deformation in thin plate elements[J]. Int Num Meth Eng, 1986, **23**: 1355 − 1366.

[26] KATILI I. A new discrete Kirchhoff-Mindlin element based on Mindlin-Reissner plate theory and assumed shear strain fields-Part Ⅱ: An extended DKQ element for thick-plate bending analysis[J]. Int J Num Meth Eng, 1993, **36**: 1885 − 1908.

[27] 王　伟, 杨　敏. 竖向荷载下刚性桩桩筏基础分析方法[J]. 土木工程学报, (WANG Wei, YSNG Min. Analysis method of rigid piled raft foundation under vertical loading[J]. Rock and Soil Mechanics, (in Chinese))

[28] 岑　松, 龙志飞. 对转角场和剪应变场进行合理插值的厚板元[J]. 工程力学, 1998, **15**(3): 1 − 14. (CEN Song, LONG Zhi-fei. A mindlin triangular plate element with improved interpolation for the rotation and shear strain fields[J]. Engineering Mechanics, 1998, **15**(3): 1 − 14. (in Chinese))

[29] 岑　松, 龙志飞, 龙驭球. 对转角场和剪应变场进行合理插值的厚薄板通用四边形单元[J]. 工程力学, 1999, **16**(4): 1 − 15. (CEN Song, LONG Zhi-fei, LONG Yu-qiu. A quadrilateral mindlin plate element with improved interpolation for the rotation and shear strain fields[J]. Engineering Mechanics, 1999, **16**(4): 1 − 15. (in Chinese))

[30] 王　伟, 杨　敏. 竖向荷载下桩基础的通用分析方法[J]. 土木工程学报, 2006, **39**(5): 96 − 101. (WANG Wei, YANG Min. A general analysis method for pile group under vertical loading[J]. China Civil Engineering Journal, 2006, **39**(5): 96 − 101. (in Chinese))

[31] MINDLIN R D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J]. Physics, 1936, **7**: 195 − 202.

[32] 吴家龙. 弹性力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1996. (WU Jia-long. Elastic mechanics[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1996. (in Chinese))

[33] 龙驭球, 包世华. 结构力学[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 1994. (LONG Yu-qiu, BAO Shi-hua. Structural mechanics[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 1994. (in Chinese))

[34] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 第二版. 北京: 中国水利水电出版社, 1998. (ZHU Bo-fang. The finite element method theory and application[M]. 2nd ed. Beijing: China Water Conservancy and Hydropower Press, 1998. (in Chinese))

[35] HINTON E, OWEN D R J. Finite element software for plates and shells[M]. U K: Pineridge Press Limited, 1984.

[36] 欣顿 E, 欧文 D R J. 有限元程序设计[M]. 北京: 新时代出版社, 1982. (HINTON E, OWEN D R J. Finite element programming design[M]. Beijing: New Times Press, 1982. (in Chinese))

[37] CHEN D J, SHAH D K, CHAN W S. Interfacial stress estimation using stress smoothing in laminated composites[J]. Computers & Structures, 1996, **58**(4): 765 − 774.

[38] POULOS H G., SMALL J C, TA L D, SINHA J, CHEN L. Comparison of some methods for analysis of piled rafts[C]// Proc 14th Int Conf Soil Mech Found Engng, Hamburg, 1997, **2**: 1119 − 1124.

[39] POULOS H G. An approximate numerical analysis of pile-raft interaction[J]. Int J Numer Anal Methods Geomech, 1994, **18**: 73 − 92.

[40] TA L D, SMALL J C. Analysis of piled raft systems in layered soils[J]. Int J Numer Anal Methods Geomech, 1996, **20**: 57 − 72.

[41] SINHA J. Piled raft foundation on soil subjected to swelling, shrinkage and group subsidence[D]. Australia: University of Sydney, 1998.

[42] PRAKOSO W A, KULHAWY F H. Contribution to piled raft foundation design[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2001, **127**(1): 17 − 24.

[43] RANDOLPH M F, WROTH C P. Analysis of deformation of vertically loaded piles[J]. Journal of the Geotechnical Engineering (ASCE), 1978, **104**(12): 1465 − 1488.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net