砂土应力路径试验的数值模拟

曹 培，蔡正银
（南京水利科学研究院，江苏 南京 210029）

摘 要：在一组应力路径试验的基础上，利用砂土的状态相关本构模型，对不同应力路径下饱和砂土在三轴固结排水剪切过程中的变形特性进行模拟。将模拟结果与试验结果进行比较，发现这种状态相关本构模型不仅能够较好地模拟出不同应力路径下砂土固结排水试验的应力－应变关系和紧砂的应变软化现象，而且能够反映出砂土的剪缩和剪胀等变形特性，但是在模拟拉伸应力路径下砂土的体积应变变化趋势方面有待于进一步的研究和改进。

关键词：砂土；剪胀；状态相关；应力路径；临界状态；本构模型
中图分类号：TU43 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－4548(2008)01－0133－05

作者简介：曹 培(1981－)，女，硕士，主要从事土工试验方面的研究工作。E-mail: pcao@nhr.cn。

Numerical simulation of stress path tests on sand

CAO Pei, CAI Zheng-yin
(Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210029, China)

Abstract: Based on a set of stress path tests, numerical simulation of the deformation behavior of saturated sand in triaxial consolidation and drained tests under different stress paths was carried out by use of the state-dependent sand model. The results of numerical simulation were discussed. Compared with the test results, the model simulation broadly matched the test results under different stress paths in terms of both the shear stress-strain response and volumetric characteristics. Generally speaking, the above model could reflect most of the deformation behavior of sand except some limitations on the volumetric change process under triaxial extension path, and it should be further studied and improved.

Key words: sand; dilatancy; state-dependent; stress path; critical state; constitutive model

0 引 言

研究表明，砂土的应力－应变关系曲线具有应力路径相关性。在相同的起始和结束应力状态下，所经历的应力路径不同，砂土的应力－应变关系明显不同。在实际工程中，不同施工阶段不同部位的土体经历的应力路径是不同的，从而导致土体的应力－应变关系及强度的复杂多样性。目前土工数值计算中常用的土体本构模型大多建立在常规三轴试验的基础上，其模型参数也是基于简单的试验。但是，常规三轴试验仅能反映土体在三轴压缩条件下的强度与变形特性，对于其它的应力路径则无能为力。另外，在很多土体本构模型中，都采用了经典的应力剪胀理论，研究表明该理论由于忽略了砂土内在状态的影响，而无法应用于砂土的模拟。因此，如何通过一些试验手段对真实应力路径进行有效地模拟，从而再现土体的强度与变形特性，是一个重要的研究课题。

近年来，国内外学者对不同应力路径下土的应力－应变关系进行了许多试验和模型研究[1-7]。

本文是以标准砂在6种不同应力路径下的三轴试验结果为基础，利用Fortran语言程序结合砂土的状态相关本构模型，模拟砂土在不同应力路径下的变形特性，并与试验结果进行比较，以便探讨不同应力路径状态下该模型的适用性。

1 砂土的应力路径试验

文中所有试验用砂均为标准砂，颗粒级配比较均匀，其主要物理力学指标如表1所示。

将标准砂制成相对密度 D_r 为40%，60%和80%的3组试样，在固结压力为100 kPa下每组试样分别进行以下6种应力路径试验，如图1所示。

（1）三轴被动压缩应力路径 OA：即常规三轴试验路径，保持 σ_3 不变，增大 σ_1，应力比 $\Delta q/\Delta p=3$。

（2）等 p 压缩应力路径 OB：试验中保持平均有效正应力不变，即 $\Delta p=0$。通过增加 σ_1，减小 σ_3 来实现，且保持 $\Delta\sigma_1=-2\Delta\sigma_3>0$。

（3）三轴主动压缩应力路径 OC：保持 σ_1 不变，

收稿日期：2007－01－26

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

减小 σ_3，应力比 $\Delta q/\Delta p=-3/2$。

（4）三轴拉伸应力路径 *OD*：同时减小 σ_1 和 σ_3，且 $\Delta\sigma_1<\Delta\sigma_3<0$。

（5）等 p 拉伸应力路径 *OE*：试验中保持平均有效正应力不变，即 $\Delta p=0$。通过减小 σ_1，增加 σ_3 来实现，且保持 $\Delta\sigma_1=-2\Delta\sigma_3<0$。

（6）三轴拉伸应力路径 *OF*：减小 σ_1，同时增大 σ_3，应力比 $\Delta q/\Delta p=-3$。

下文中的应力路径 1 至路径 6 均与上述各路径一一对应。

表 1 标准砂的物理力学指标

Table 1 Indexes of physical property of standard sand

体积质量 G_s	最大孔隙比 e_{max}	最小孔隙比 e_{min}	最大干密度 ρ_{max} /(g·cm^{-3})	最小干密度 ρ_{min} /(g·cm^{-3})
2.64	0.846	0.568	1.68	1.43

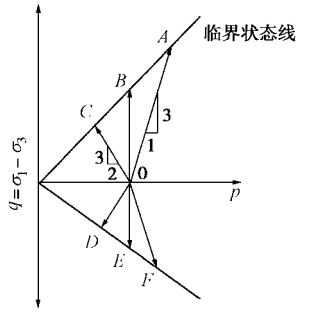


图 1 $p-q$ 空间的应力路径

Fig. 1 Stress paths in $p-q$ space

2 砂土的状态相关本构模型

2.1 砂土的临界状态

研究发现，一般无黏性土在 $e-\log p$ 平面内的临界状态线或稳定状态线不是直线。图 2 所示为本文试验所得 $e-\log p$ 平面内的初始状态和临界状态时的孔隙比及对应的有效应力之间的关系，并画出了临界状态的趋势线。

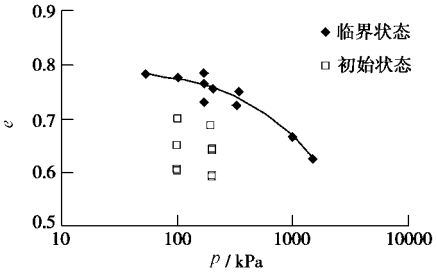


图 2 临界状态和初始状态

Fig. 2 Critical state and initial state

Li[8]发现在 $e-(p/p_a)^{\xi}$ 平面内（ξ 约为 0.7），砂土的临界状态线近似成一条直线，其表达式为

$$e=e_\Gamma-\lambda_c\left(\frac{p}{p_a}\right)^{\xi}\quad。\tag{1}$$

式中 p_a 为标准大气压；e_Γ 为当 $p=0$ 时对应的孔隙比；λ_c 为临界状态线的斜率。根据本文试验结果，在 $e-(p'/p_a)^{\xi}$ 平面内如图 3 所示，并得到 $e_\Gamma=0.802$，$\lambda_c=0.0283$。

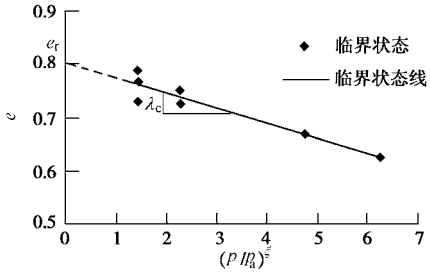


图 3 临界状态线

Fig. 3 Critical state line

2.2 砂土的状态相关本构方程

Reynolds[9]指出，模拟土体应力－应变－强度特性的一个基本问题就是如何正确描述土体的剪胀。Li 和 Dafalias[5]提出了砂土状态相关剪胀理论及其特殊形式，

$$d=d_1\left(e^{m\psi}-\frac{\eta}{M}\right)\quad,\tag{2}$$

式中，d_1 与 m 为模型常数，M 为临界应力比直线的斜率，ψ为状态参量，用来描述砂土的当前状态。

在此基础上，Li 等[5]推导了一个简单的砂土本构模型，其表达式为

$$\begin{Bmatrix}\mathrm{d}q\\ \mathrm{d}p\end{Bmatrix}=\left[\begin{pmatrix}3G & 0\\ 0 & K\end{pmatrix}-\frac{h(L)}{3G-\eta_Y Kd+K_p}\begin{pmatrix}9G^2 & -3\eta_Y KG\\ 3KGd & -\eta_Y K^2 d\end{pmatrix}\right]\begin{Bmatrix}\mathrm{d}\varepsilon_q\\ \mathrm{d}\varepsilon_v\end{Bmatrix}。\tag{3}$$

式中 G 和 K 分别是弹性剪切模量和体积模量；$h(L)$ 是 Heaviside 方程，有 $h(L)=\begin{cases}1 & (L>0)\\ 0 & (L\le 0)\end{cases}$；$K_p$ 是塑性模量，且有 $K_p=hG\left(\frac{M}{\eta}-\mathrm{e}^{m\psi}\right)$，$h$ 和 n 是两个材料参数，hG 可看作是硬化参数。

2.3 模型参数及其确定

对于砂土本构方程（3），可以看出模型中定义了 12 个参数，按功能可以分为 3 类：①临界状态参数共 5 个，分别为 M，c（$c=M_e/M_c$），e_Γ，λ_c 和 ξ；②与状态有关的参数共 5 个，分别为 d_1，m，h_1，h_2 和 n；③弹性参数共 2 个，为 G 和 K（或 μ）。

本文旨在介绍利用模型进行数值模拟的方法，故对模型的原理、参数的物理意义及确定方法不作详细

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

介绍，具体可见文献[10，11]。所有的模型参数都可通过室内试验来确定，文中所用标准砂的模型参数如下表所示。

表 2 标准砂模型参数

Table 2 Model parameters for standard sand

试验方式	弹性参数	临界状态参数	与状态有关的参数
三轴试验	$G_0=125$	$M_c=1.2353$	$m=2.52$
		$M_e=0.9635$	$h_1=2.69$
		$c=0.78$	$h_2=1.81$
		$e_\Gamma^c=0.802$	$d_1^c=0.62$
	$\nu=0.25$	$e_\Gamma^e=0.768$	$d_1^e=0.48$
		$\lambda_c=0.0283$	$n=1.71$
		$\xi=0.68$	

3　数值模拟

3.1　模拟方法

采用 Fortran 汇编语言程序对试验进行数值模拟。将应力路径的应力增量比代入本构模型方程（3），求出偏应变、体变、有效平均正应力及偏应力随轴向变形的变化方程式。下面将以三轴被动压缩应力路径为例详细介绍应力路径试验模拟的求解过程。

将本构模型方程（3）展开可得关于应力增量的表达式为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}q&=3G\mathrm{d}q-\frac{1}{3G-\eta_Y K\mathrm{d}+K_p}(9G^2\mathrm{d}\varepsilon_q-3\eta_Y KG\mathrm{d}\varepsilon_v),\\ \mathrm{d}p&=K\mathrm{d}\varepsilon_v-\frac{1}{3G-\eta_Y K\mathrm{d}+K_p}(3KGd\mathrm{d}\varepsilon_q-\eta_Y K^2 d\mathrm{d}\varepsilon_v).\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

由于在剪切过程中保持围压 σ_3 不变，增大轴向应力 σ_1，即 $\mathrm{d}\sigma_3=0$ 且 $\mathrm{d}\sigma_1>0$，从而有 $\mathrm{d}p=\frac{1}{3}(\mathrm{d}\sigma_1+2\mathrm{d}\sigma_3)=\frac{\mathrm{d}\sigma_1}{3}>0$，$\mathrm{d}q=\mathrm{d}\sigma_1-\mathrm{d}\sigma_2$，于是可得 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=\frac{1}{3}$。将其代入方程组（4）可得到体变增量与偏应变增量间的关系为

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_v}{\mathrm{d}\varepsilon_q}=\frac{G(3Kd+K_p-\eta_Y Kd)}{K(3G+K_p-\eta_Y G)}=E,\tag{5}$$

其中，E 只是一个临时变量，为了在程序中计算方便而设。

在三轴排水试验中，偏应变 $\varepsilon_q=2(\varepsilon_1-\varepsilon_3)/3$ 而体变 $\varepsilon_v=\varepsilon_1+2\varepsilon_3$，从而可以得到偏应变增量与体变增量间的关系为

$$\mathrm{d}\varepsilon_v=3(\mathrm{d}\varepsilon_a-\mathrm{d}\varepsilon_q)\ ,\tag{6}$$

将关系式（6）代入方程（5）可以得到应力、应变增量随轴向应变增量变化的表达式为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}\varepsilon_q&=\frac{\mathrm{d}\varepsilon_a}{(1+E/3)},\\ \mathrm{d}\varepsilon_v&=E\mathrm{d}\varepsilon_q,\\ \mathrm{d}p&=K(\mathrm{d}\varepsilon_v-Ld),\\ \mathrm{d}q&=3G(\mathrm{d}\varepsilon_q-L),\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

式中，L 为加荷指数，其表达式为 $L=\frac{(3G\mathrm{d}\varepsilon_q-\eta_Y K\mathrm{d}\varepsilon_v)}{(3G+K_p-\eta_Y Kd)}$。

用 Fortran 语言编程实现上述计算过程。程序模拟采用应变控制方式，即控制轴向应变增量 $\mathrm{d}\varepsilon_a$ 的变化步长。这样就可以完成对该应力路径下土体应力－应变关系及体积变化的模拟。

按照上述计算方法，同样可以求得其它应力路径下体变增量与偏应变增量之间的关系式。在程序中仅仅只需将临时变量 E 的表达式作相应地改变，即可实现对应力路径试验过程的模拟。在此对求解过程不一一详述，仅将求解结果提供如下。

（1）对于等 p 压缩应力路径，有 $\mathrm{d}p=0$，其体变增量与偏应变增量的关系式为 $\frac{\mathrm{d}\varepsilon_v}{\mathrm{d}\varepsilon_q}=\frac{3Gd}{3G+K_p}=E$。

（2）对于三轴主动压缩应力路径，有 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}=-\frac{2}{3}$，其体变增量与偏应变增量的关系式为 $\frac{\mathrm{d}\varepsilon_v}{\mathrm{d}\varepsilon_q}=\frac{G(3Kd-2K_p+2\eta_Y Kd)}{K(3G+K_p+2\eta_Y G)}$。

由于该本构模型的屈服准则是建立在三轴压缩试验基础上的，因此对于压缩应力路径试验的模拟它有着很好的适用性，但对于三轴拉伸路径试验的模拟却不尽然。对于三轴拉伸路径试验的模拟，可以先利用拉伸试验参数对在 $p-q$ 平面内与其关于 p 轴对称的压缩应力路径进行模拟，然后将模拟结果相应地变成负值即可。由于本文试验中的压缩应力路径和拉伸的应力路径在 $p-q$ 平面内关于 p 轴一一对称，因而可以利用拉伸试验参数按照压缩应力路径 3，2，1 的表达式进行模拟，然后再对模拟结果负值化，以此来实现对拉伸应力路径 4，5，6 的模拟。

3.2　模拟结果

利用上述模型和参数对所有砂样的所有应力路径试验进行模拟，图 4～6 为相对密度 D_r 分别为 40%，60%和 80%的标准砂样在固结压力为 100 kPa 下的不同应力路径试验结果与数值模拟结果的比较图。

从图中可以看出，模拟结果与试验结果大致相吻

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

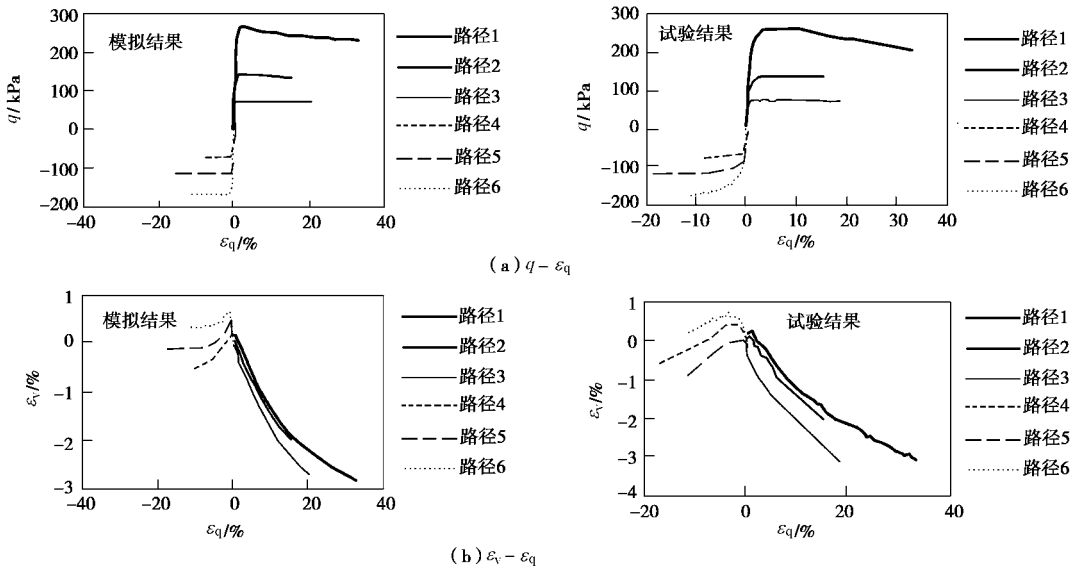


图 4 模拟结果与试验结果的比较（D_r=40%）

Fig. 4 Comparsion between model simulations and test results for D_r=40%

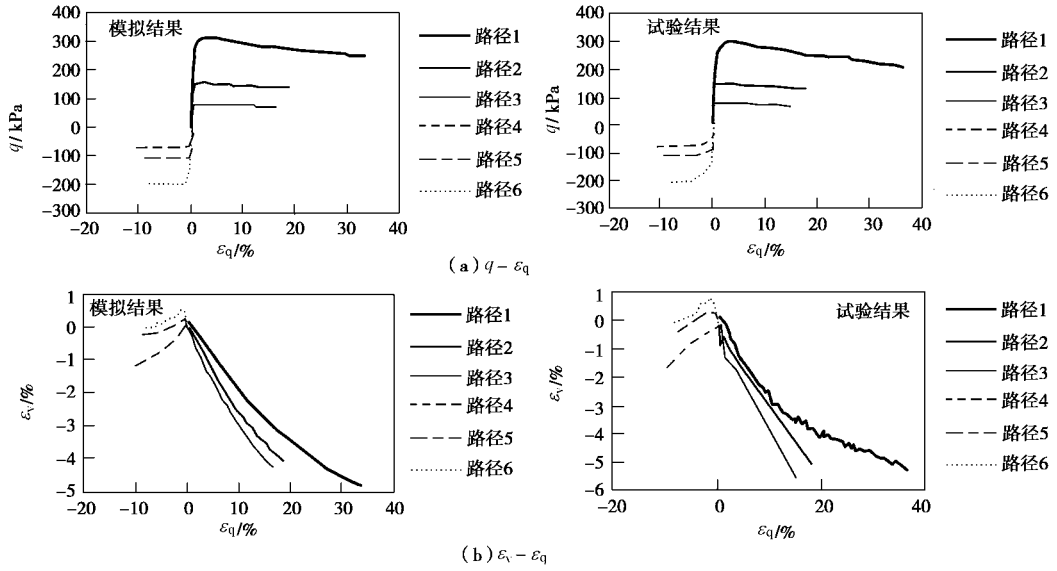


图 5 模拟结果与试验结果的比较（D_r=60%）

Fig. 5 Comparsion between model simulations and test results for D_r=60%

合。模拟结果能够较好的反映砂土在不同应力路径下的应力－应变关系及应变软化现象，而且能够反映出砂土的剪缩和剪胀特性及剪缩到剪胀过渡的趋势。但是，通过比较可以发现，模拟结果还存在一些的问题。首先，由于所有模拟均采用应变控制，其应力－应变关系及体变－偏应变关系曲线都是连续渐近的，无法反映出由应力控制的试验在破坏时应力、应变及体变的突变现象。其次，与对应的试验结果相比，模拟得到的应力－应变关系曲线初始段的坡度要陡一些。这可能是由于确定参数 h_1 和 h_2 时选取应力－应变关系段的不同造成的。再次，模拟所得的土体剪胀性比试验结果要小，这与确定参数 d_1 时选取的体变－应变关系曲线段有关。最后，模拟结果虽然能很好的反映压缩路径下砂土的体变的变化趋势，但对于拉伸路径下体变变化趋势的模拟与试验结果相比却存在一定的差异，有待于进一步的深入研究。

4 结 语

通过对模拟结果与试验结果的比较分析，发现砂土的状态相关本构模型不仅能够较好地模拟出不同应力路径下砂土固结排水试验的应力－应变关系和紧砂的应变软化现象，而且能够反映出砂土的剪缩和剪胀等变形特性，但是在模拟拉伸应力路径下砂土的体积应变变化趋势方面还有待于进一步的研究和改进。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

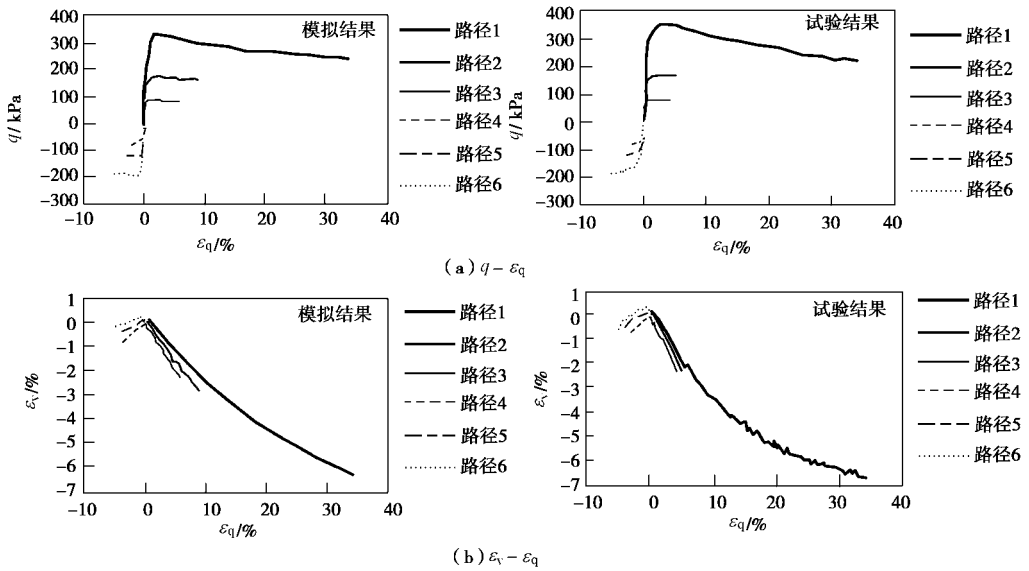


图 6 试验结果与模拟结果的比较（D_r=80%）

Fig.6 Comparsion between model simulations and test results for D_r=80%

参考文献：

[1] MANZARI M T, DAFALIAS Y F. A critical state two-surface plasticity model for sands[J]. Geotechnique, 1997, **47**(2): 255－272.

[2] CUBRINOVSKI M, ISHIHARA K. Modeling of sand behavior based on state concept[J]. Soils and Foundations, 1998, **38**(3): 115－127.

[3] WANG R G, GUO R G. A simple constitutive model for granular soils: modified stress-dilatancy approach[J]. Computers and Geotechnics, 1998, **22**(2): 109－113.

[4] GAJO A, WOOD D M. Severn-Trent sand: a kinematic-hardening constitutive model: the *q-p* formulation[J]. Geotechnique, 1999, **49**(5): 595－614.

[5] LI X S, DAFALIAS Y F. Dilatancy for cohesionless soils[J]. Geotechnique, 2000, **50**(4): 449－460.

[6] 罗　刚, 张建民. 考虑物理状态变化的砂土本构模型[J]. 水利学报, 2004, **7**: 26－31. (LUO Gang, ZHANG Jian-min. Constitutive model for sand considering the variation of its physical state[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004, **7**: 26－31. (in Chinese))

[7] 路德春, 罗　汀, 姚仰平. 砂土的应力路径本构模型的试验验证[J]. 岩土力学, 2005, **26**(5): 717－722. (LU De-chun, LUO Ting, YAO Yang-ping. Test validating of constitutive model of sand considering complex stress path[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, **26**(5): 717－722. (in Chinese))

[8] LI X S, WANG Y. Linear representation of steady-state line for sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenviromental Engineering, ASCE, 1998, **124**(12): 1215－1217.

[9] REYNOLDS O. On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact[J]. Phil Mag, 1885, **5**(20): 469－488.

[10] LI X S. A sand model with state-dependent dilatancy[J]. Geotechnique, 2002, **52**(3): 173－186.

[11] CAI Zheng-yin. The deformation behavior of sand[M]. Zhengzhou: Yellow River Conservancy Press, 2004.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net