

文章编号: 0253-9993(2007)01-0020-04

基于统一强度理论的非均匀应力场圆形巷道围岩塑性区分析

陈立伟, 彭建兵, 范 文, 孙 萍

(长安大学 地质工程与测绘工程学院, 陕西 西安 710054)

摘 要: 基于统一强度理论, 推导出非均匀应力场的巷道围岩塑性区边界线方程式, 可用于预测不同侧压系数时地下深埋隧洞的塑性区大小及形状。当不同程度地考虑中间主应力的影响时, 围岩塑性区形状和大小有较大不同, 且随水平应力与垂直应力差异性的增大, 这种影响趋于明显。

关键词: 非均匀应力场; 圆形巷道; 围岩塑性区; 侧压系数

中图分类号: TU459.4 **文献标识码:** A

Analysis of surrounding rock mass plastic zone of round tunnel under non-uniform stress field based on the unified strength theory

CHEN Liwei, PENG Jian-bing, FAN Wen, SUN Ping

(School of Geological Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054, China)

Abstract: Based on unified strength theory, the boundary line equation of surrounding rock mass plastic zone under non-uniform stress field was deduced, and it can be used to pre-estimate the dimensions and shapes of underground tunnel's plastic zone with different coefficients of horizontal pressure. When the effect of intermediate principal stress was considered in different degrees, the dimensions and shapes of surrounding rock mass is rather different, and this phenomenon will be more obvious with the increase of the difference of horizontal stress and vertical stress.

Key words: non-uniform stress field; round tunnel; surrounding rock mass plastic zone; coefficient of horizontal pressure

理论与实践都已证明, 巷道围岩塑性区的大小是评价围岩稳定性的重要依据和巷道支护定量设计的理论基础。关于圆形巷道围岩应力的分布, 国内外都有大量的研究成果^[1~8]。自从 1898 年 Kirsch 最早发表了弹性平板中圆孔周围的二维应力分布解, 至今已有上百年的时间, 此后 Jaeger 和 Cook^[1]对 Kirsch 方程进行了详细推导。长期以来, 圆形巷道塑性区半径及应力一直采用修正的芬纳公式 (Fenner, 1938 年) 或卡斯特奈公式 (Kastner, 1951 年) 计算^[3], 后来国内外一些学者又对其进行了修正^[4~8], 使得围岩塑性区理论可广泛应用于具有软化、剪胀等特性的围岩中。但是这些理论中, 或者没有考虑中间主应力对围岩塑性区的影响, 或者是建立在原岩应力场为均匀应力场假设的基础上。而实际情况下, 原岩应力场并非均匀应力场, 地壳中的水平应力与垂直应力的比值和岩层埋场深度有着很大关系^[2]; 而且在考虑到中间主应力影响时岩石强度将增大 30% 左右^[9]。1990 年俞茂宏教授提出了统一强度理论^[10], 能够合理地反映

收稿日期: 2006-05-17 责任编辑: 耿红敏

作者简介: 陈立伟 (1978-), 男, 河南周口人, 博士研究生。Tel: 029-82339012, E-mail: ckw5070@163.com

材料的中间主应力效应^[11]，而且能灵活运用于工程上的不同材料。为此，本文采用统一强度理论对非均匀应力场时的巷道围岩塑性区分布进行了推导，建立了塑性区域边界线方程式。

1 统一强度理论

统一强度理论物理概念明确，具有多种表达形式，若以材料的内聚力和内摩擦角作为基本实验参数，

当 $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi_0$ 时，

$$F = \left[\sigma_1 - \frac{1}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) \right] + \left[\sigma_1 + \frac{1}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) \right] \sin \varphi_0 = 2c_0 \cos \varphi_0, \quad (1)$$

当 $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi_0$ 时，

$$F = \left[\frac{1}{1+b} (\sigma_1 + b\sigma_2 - \sigma_3) \right] + \left[\sigma_3 + \frac{1}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_1) \right] \sin \varphi_0 = 2c_0 \cos \varphi_0, \quad (2)$$

式中， b ($0 \leq b \leq 1$) 为统一强度理论参数，反映了中间主应力对材料破坏的影响，由材料实验确定。

当 $b=0$ 时，双剪统一强度理论则蜕化为 Mohr-Coulomb 屈服准则；当 $b=1$ 时，则为广义双剪屈服准则^[10]；当 $0 < b < 1$ 时，可得一系列新的屈服准则，因此，参数 b 称为屈服准则系数。

2 巷道围岩弹性应力场

圆形巷道在不等应力场下可分解为均匀应力场和单向压应力场两种情况的叠加，如图 1 所示。

根据弹性力学，巷道围岩处于弹性状态时，对于围压为 p_0 ，内压为 p_0 的均匀应力场，洞径为 $2a$ 的围岩应力场为

$$\begin{cases} \sigma_r = p_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + p_0 \frac{a^2}{r^2}, \\ \sigma_\theta = p_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - p_0 \frac{a^2}{r^2}. \end{cases} \quad (3)$$

式中， σ_r 、 σ_θ 分别为极坐标下一点的径向应力和切向应力； r 为极半径。

单向压应力 $(1-\lambda)\sigma_0$ 下的应力场为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{2} (1-\lambda) \sigma_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} (1-\lambda) \sigma_0 \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta = \frac{1}{2} (1-\lambda) \sigma_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} (1-\lambda) \sigma_0 \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{2} (1-\lambda) \sigma_0 \left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta, \end{cases} \quad (4)$$

式中， $\tau_{r\theta}$ 为极坐标下某点的剪应力； θ 为极角。

将 2 种应力场进行叠加即可得到圆形巷道在不等应力场下的围岩应力场为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{2} (1+\lambda) \sigma_0 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{1}{2} (1-\lambda) \sigma_0 \left(1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta + p_0 \frac{a^2}{r^2}, \\ \sigma_\theta = \frac{1}{2} (1+\lambda) \sigma_0 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2} (1-\lambda) \sigma_0 \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta - p_0 \frac{a^2}{r^2}, \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{2} (1-\lambda) \sigma_0 \left(1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta. \end{cases} \quad (5)$$

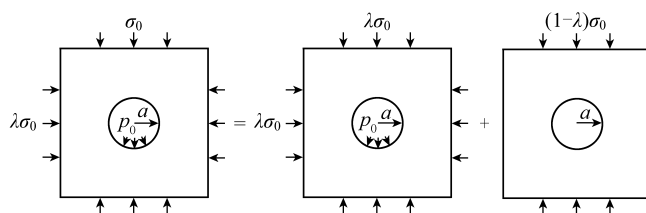


图 1 围岩应力场

Fig. 1 Surrounding rock mass stress field

a ——半径； p_0 ——内压； σ_0 ——原岩垂直压应力；

λ ——原岩水平压应力； λ ——水平侧压力系数

3 巷道围岩塑性区域边界线

当地应力场为均匀应力场时, 范文等^[6]基于统一强度理论, 推导得出了硐室的塑性区半径为

$$r_p = a \left[(1 - \sin \varphi) \frac{\sigma_0 + c_1 \cot \varphi}{p_0 + c_1 \cot \varphi} \right]^{\frac{1 - \sin \varphi}{2 \sin \varphi}}, \quad (6)$$

式中, c_1 , φ 分别为统一内聚力和内摩擦角。

当 $b=0$ 时, 式 (6) 即为芬纳公式的塑性区半径。但是, 地应力实测数据表明^[2], 多数情况下水平应力与垂直应力都存在一定的应力差, 即 $\sigma_1 \neq \sigma_2$, 此时, 巷道围岩塑性区边界线不再是规则的圆形, 而是呈镰刀形、十字形等多种形状^[12], 因此依据塑性理论很难求得其解析解。国内外学者一般都是首先假设在巷道围岩开挖前后均处于弹性状态, 然后根据弹性理论求得开挖后的围岩应力, 再代入塑性条件来判断围岩是否屈服。虽然这种计算只是一种近似, 但对于巷道围岩状态的估算却很有帮助。

令 $\sigma_2 = m(\sigma_1 + \sigma_3)/2$, m 为中间主应力参数, 在平面应变情况下, 材料达到塑性状态时, m 趋近于 $1^{[10]}$, 即 $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, 有 $\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \theta_0/2$; 在平面应变情况下, 主应力与各应力分量为

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2}, \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (1), 整理可得

$$\left[\sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2} \right]^2 + \tau_{r\theta}^2 = \frac{2(1+b) \sin \theta_0}{b(1 + \sin \theta_0) + 2} \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \frac{2(1+b) c_0 \cos \theta_0}{b(1 + \sin \theta_0) + 2},$$

令 $\sin \varphi = \frac{2(1+b) \sin \theta_0}{b(1 + \sin \theta_0) + 2}$, $c_1 = \frac{2(1+b) c_0 \cos \theta_0}{b(1 + \sin \theta_0) + 2}$, 则屈服条件表达式为

$$\left[\sqrt{\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2} \right]^2 + \tau_{r\theta}^2 = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} \sin \varphi + c_1 \cos \varphi. \quad (8)$$

将式 (5) 代入式 (8), 令 $k = a^2/r^2$, 可得

$$[(1 + \sigma_0/k) - (1 - \sigma_0/k) (1 - 2k + 3k^2) \cos 2\theta]^2 + 2p_0 k^2 + [(1 - \sigma_0/k) (1 + 2k - 3k^2) \sin 2\theta]^2 = [[(1 + \sigma_0/k)^2 + 2(1 - \sigma_0/k) k \cos 2\theta] \sin \varphi + 2c_1 \cos \varphi]^2.$$

经整理可改写为塑性区域边界线方程式, 即

$$f(k) = a_1 k^4 + a_2 k^3 + a_3 k^2 + a_4 k + a_5 = 0, \quad (9)$$

式中, $a_1 = 9(1 - \sigma_0^2/k^2)$; $a_2 = -6(1 - \sigma_0/k) [2(1 - \sigma_0/k) + (2p_0/\sigma_0 - 1 - \sigma_0/k) \cos 2\theta]$; $a_3 = 4(1 - \sigma_0/k)^2 (3 - \sin^2 \varphi) \cos^2 2\theta + 4(1 - \sigma_0/k) (2p_0/\sigma_0 - 1 - \sigma_0/k) \cos 2\theta - 2(1 - \sigma_0/k)^2 + (2p_0/\sigma_0 - 1 - \sigma_0/k)^2$; $a_4 = -4(1 - \sigma_0/k)^2 \cos 4\theta - 2(1 - \sigma_0/k) (2p_0/\sigma_0 - 1 - \sigma_0/k) + 2 \sin^2 \varphi (1 + \sigma_0/k + 2c_1 \cot \varphi / \sigma_0) \cos 2\theta$; $a_5 = (1 - \sigma_0/k)^2 - \sin^2 \varphi (1 + \sigma_0/k + 2c_1 \cot \varphi / \sigma_0)^2$.

$f(k) = 0$ 即为塑性区域边界线方程式。当 $\sigma_0 = 1$ 时, 即均布应力场下, 有 $f(k) = (p_0/\sigma_0 - 1)^2 k^2 - (1 + c_1 \cot \varphi / \sigma_0)^2 \sin^2 \varphi = 0$, 此时塑性圈为圆形, 其半径为

$$r_p = a \sqrt{\frac{1 - p_0/\sigma_0}{(1 + c_1 \cot \varphi / \sigma_0) \sin^2 \varphi}}. \quad (10)$$

4 算例分析

一圆形巷道, 半径为 a , 天然应力状态为 $\sigma_0 = 40$ MPa, 侧压力系数为 μ , 内压为 p_0 , 岩石的抗剪强度指标为 $c_0 = 2.9$ MPa, $\varphi_0 = 30^\circ$; 由塑性区域边界线方程式, 编制计算机程序可绘制当内压 $p_0 = 0$ 时的塑性区域边界线, 如图 2 (由于对称性, 只给出了第 1 象限的塑性区边界线) 所示; 当侧压力系数 $\mu = 1$ 时,

可按式（10）或式（6）进行计算，见表 1。

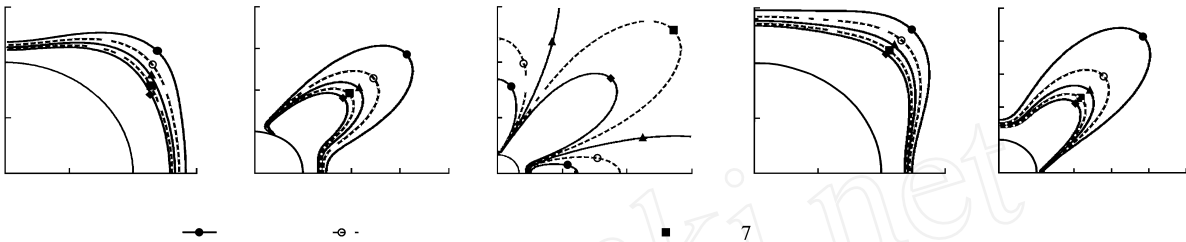


图 2 非均匀应力场下的巷道围岩塑性区
Fig. 2 Surrounding rock mass plastic zone under non-uniform stress field

表 1 均匀应力场下的塑性区半径 r_p/a

Table 1 Plastic zone radius under uniform stress field

p_0/MPa		b				
		0	0.25	0.50	0.75	1.00
0	式 (10)	1.33	1.30	1.28	1.26	1.25
	式 (6)	2.12	1.92	1.80	1.71	1.66
4	式 (10)	1.26	1.23	1.21	1.19	1.18
	式 (6)	1.58	1.47	1.41	1.36	1.33
8	式 (10)	1.19	1.16	1.14	1.13	1.12
	式 (6)	1.31	1.25	1.21	1.18	1.16
12	式 (10)	1.12	1.09	1.07	1.05	1.04
	式 (6)	1.15	1.11	1.08	1.06	1.05

5 结 语

推导出了非均匀应力场下的巷道围岩塑性区边界线方程，可应用于预测不同侧压系数时地下深埋隧洞的塑性区大小及形状。当选择不同的 b 值时，随水平应力与垂直应力的差异性增大，对塑性区形状和大小的影响也越大。由表 1 可知，均匀应力场下，围岩状态较好时塑性区边界线方程也能达到较好的精度。在实际工程中，基本原理采用的摩尔 - 库仑强度理论大多数情况下是偏于保守的，若能不同程度地考虑中间主应力的影响，则会取得很大的经济效益。

参考文献：

[1] Jaeger J C, Cook N G W. Fundamentals of rock mechanics [M]. London: Chapman and Hall, 1976

[2] Hoek E, Brown E T. 岩石地下工程 [M]. 北京：冶金工业出版社，1986

[3] Kastner H. 隧道与坑道静力学 [M]. 同济大学，译. 上海：上海科学技术出版社，1980

[4] 袁文伯，陈进. 软化岩层中巷道的塑性区与破碎区 [J]. 煤炭学报，1986，11（3）：77～85.

[5] Jiang Y, Yoneda H, Tanabashi Y. Theoretical estimation of loosening pressure on tunnels in soft rocks [J]. Tunneling and Underground Space Technology, 2001, 16: 99～105.

[6] 范文，俞茂宏，孙萍. 洞室形变围岩压力弹塑性分析的统一解 [J]. 长安大学学报（自然科学版），2003，23（3）：1～4

[7] 范文，俞茂宏，陈立伟. 考虑剪胀及软化的洞室围岩弹塑性分析的统一解 [J]. 岩石力学与工程学报，2004，23（19）：3 213～3 220

[8] 任青文，张宏朝. 关于芬纳公式的修正 [J]. 河海大学学报，2001，29（6）：109～111.

[9] 许东俊. 岩石强度随中间主应力变化规律 [J]. 固体力学学报，1985（1）：72～80

[10] 俞茂宏. 双剪理论及其应用 [M]. 北京：科学出版社，1998

[11] Yu Maohong. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th century [J]. ASME, Appl Mech Rev, 2002, 55（3）：169～218

[12] 孙广忠. 岩体结构力学 [M]. 北京：科学出版社，1988