

# 基于变形加固理论的结构稳定和加固分析

刘耀儒, 王传奇, 杨 强

(清华大学 水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

**摘要:** 对结构稳定的概念和评判标准进行论述, 指出以塑性余能作为结构稳定评判标准的内在含义。基于非平衡态热力学的约束平衡概念, 提出变形加固理论, 采用超出屈服面的不平衡力对失稳结构的力学行为进行分析。采用 Drucker-Prager 屈服准则, 利用塑性余能作为评价标准, 同时与理论解、ABAQUS 和 TFINE 的求解结果对比, 对柱体和均质边坡的稳定性进行分析。基于重力坝模型, 研究网格尺寸对塑性余能计算的影响。采用和不平衡力大小相等、方向相反的加固力, 对柱体和条形基础在加固前后的承载力进行分析, 并和理论解进行对比。计算结果表明, 塑性余能是塑性应变在整体结构上的标量范数, 是结构偏离稳定状态的距离。可以作为结构稳定性的评价指标, 而基于不平衡力的加固计算可以同时确定给定结构安全度下的加固区域和加固力大小, 由此确定的加固方式的加固效率是很高的, 指导加固设计是很有效的。

**关键词:** 水利工程; 塑性余能; 结构稳定; 变形加固; 不平衡力; 数值验证

**中图分类号:** TV 223

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2008)增 2 - 3905 - 08

## ANALYSIS OF STRUCTURE STABILITY AND REINFORCEMENT BASED ON DEFORMATION REINFORCEMENT THEORY

LIU Yaoru, WANG Chuanqi, YANG Qiang

(State Key Laboratory of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** The concept and rationality of using plastic complementary energy(PCE) as the criterion of structures' stability are illustrated. Based on the concept of constraint-equilibrium in non-equilibrium thermodynamics, deformation reinforcement theory, which analyzes the mechanical behaviors of unstable structure with unbalanced forces exceeding the yield surface, is presented. Compared with the results obtained by ABAQUS, TFINE and theory respectively, the stabilities of cylinder rock specimens and homogeneous slope are analyzed. The influence of mesh sizes of the dam-heel in FEM on PCE is studied based on Drucker-Prager yield criteria. By adopting the load with the same magnitude but in opposite direction with unbalanced forces, the bearing capacities of rectangular column and strip foundation before and after reinforcement are analyzed and compared with the theoretical solution. The results show that PCE is the scalar norm of plastic strain from the perspectives of integral degree, as well as the distance away from safety. Hence PCE could be a reasonable evaluation criterion of structure. Furthermore, the reinforcement calculation and analysis based on unbalanced forces clearly present the area and size of reinforcement under a certain safety degree. This type of reinforcement is very efficient and could provide guidance for practical engineering.

**Key words:** hydraulic engineering; plastic complementary energy(PCE); stability of structures; deformation reinforcement; unbalanced forces; numerical verification

**收稿日期:** 2008 - 06 - 04; **修回日期:** 2008 - 08 - 18

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(50709014); 清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室开放基金项目(sk1hse - 2007 - D - 02); 清华大学骨干人才计划资助项目

**作者简介:** 刘耀儒(1974 - ), 男, 博士, 1998 年毕业于清华大学水利水电工程系水工结构专业, 现任讲师, 主要从事岩石力学、水工结构和流固耦合方面的教学与研究工作。E-mail: liuyaoru@tsinghua.edu.cn

## 1 引言

在岩土工程稳定和加固分析中,一般是基于数值分析方法,通过位移、应力和屈服区来判断岩体结构的稳定性。对于加固的效果分析,一般也是通过上述各量的变化进行分析。这种分析往往带有很大的主观因素,而且大量计算实践表明,加固措施对这些力学效应的影响往往都很小,以此来评价加固效果是不合理的,也很容易得出加固措施效果不明显的错误结论。

对于特定滑面的稳定而言,刚体极限平衡法<sup>[1]</sup>是一种成熟的算法,有明确的设计规范和配套的安全系数,对于一个结构,在给定的安全系数下,所需加固力是一定的。但刚体极限平衡法针对的是结构濒临破坏的状态。实际上,结构破坏是一个渐近的破坏过程,不同的变形状态需要不同的加固力以维持稳定。作者<sup>[2]</sup>基于非线性有限元分析,采用多重网格法对滑面进行稳定分析,但是该方法只是针对特定滑面进行校核,无法对结构的整体稳定性做出评价。

为了研究荷载超出结构极限承载力后的结构行为,或者说结构失稳行为,杨强等<sup>[3, 4]</sup>依托三维弹塑性有限元分析的迭代算法提出了变形加固理论,以塑性余能范数分析评价结构的稳定性,以不平衡力来确定加固区域和加固力,采用一些算例和地质力学模型试验破坏结果进行了验证。杨强等<sup>[5]</sup>对原来的变形加固理论进行了拓展,按一般弹塑性理论对弹塑性结构重新构建了变形加固理论的理论框架,完全摆脱了有限元的描述方式,并建立了基于塑性余能的结构稳定性理论。

本文对结构稳定和失稳的判别准则进行了论述,提出了基于余能范数的结构稳定判别准则,然后基于非平衡态热力学问题中的约束平衡概念,提出了变形加固理论。基于非线性有限元计算,采用 Drucker-Prager 屈服准则对结构的稳定和加固进行了分析。通过计算长方体柱单轴压缩、均质边坡在超载下的稳定性、重力坝坝踵开裂评价以及条形基础和地基系统极限承载力等问题,并与相关理论解或其他有限元程序计算结果比较,对余能范数作为结构整体稳定指标的有效性进行了验证。同时,以长方体柱和条形地基在加固前后的极限承载力计算

为例,通过数值结果和解析解的对比分析,对以不平衡力确定结构加固区域和加固力的正确性进行了验证。

## 2 结构的稳定和失稳

岩体材料具有很强的非线性,目前的数值分析主要采用弹塑性方法。对于一个弹塑性结构,在承受外荷载及给定加载路径下,如果结构是稳定的,则一定存在同时满足平衡条件、变形协调条件和本构关系的力学解,其中本构关系就包含了屈服准则;如果结构处于失稳状态,则结构不存在同时满足上述 3 个条件的力学解。

假设变形协调的位移场为  $u$ , 残余塑性位移场为  $u^p$ , 由几何方程可以确定应变场  $\epsilon$  和塑性应变场  $\epsilon^p$ , 再由弹塑性应力 - 应变关系  $\sigma = D : (\epsilon - \epsilon^p)$  确定一个应力场,其中  $D$  为四阶弹性张量。这样得到的应力场集合称为协调应力场集合,记为  $S_k$ 。

在  $S_k$  中,满足屈服条件的应力场集合记为  $S$ ,称为协调稳定应力场集合;满足平衡条件的结构应力场集合记为  $S_1$ ,称为协调平衡应力场集合。考虑任意的协调平衡应力场  $\sigma_1 (\sigma_1 \in S_1)$  和协调稳定应力场  $\sigma (\sigma \in S)$ , 其差值为塑性应力增量场  $\Delta\sigma^p$ :

$$\Delta\sigma^p = \sigma_1 - \sigma \quad (1)$$

塑性应力增量场  $\Delta\sigma^p$  对应于塑性应变增量场  $\Delta\epsilon^p = C : \Delta\sigma^p$ , 其中  $C$  为四阶柔度张量。

对线弹性结构,由于不存在屈服条件,所以  $S = S_k$ , 故有  $S_1 \cap S = S_1 = S_k \cap S$ , 也即线弹性结构的真实应力场就是  $S_1$  中的一个元素,它应该满足弹性余能最小(弹性结构的最小余能原理<sup>[6]</sup>)。

对于弹塑性结构,则要看  $S$  和  $S_1$  是否存在交集:如果  $S$  和  $S_1$  的交集不为空,则结构稳定,交集元素个数取决于解的唯一性特性,如图 1(a)所示;如果交集为空,则结构失稳,如图 1(b)所示。

定义一个关于应力场的欧氏空间,一个应力场为该空间的一个点。如果以度量张量为  $C/2$ , 则  $\sigma_1$  和  $\sigma$  的距离  $L$  为

$$L^2 = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_1 - \sigma) : C : (\sigma_1 - \sigma) dV \quad (2)$$

式中:  $V$  为整个结构。

两个应力场集合  $S$  和  $S_1$  的距离  $\hat{L}$  定义为

$$\hat{L} = \min_{\sigma_1, \sigma} L \quad (\sigma_1 \in S_1, \sigma \in S) \quad (3)$$

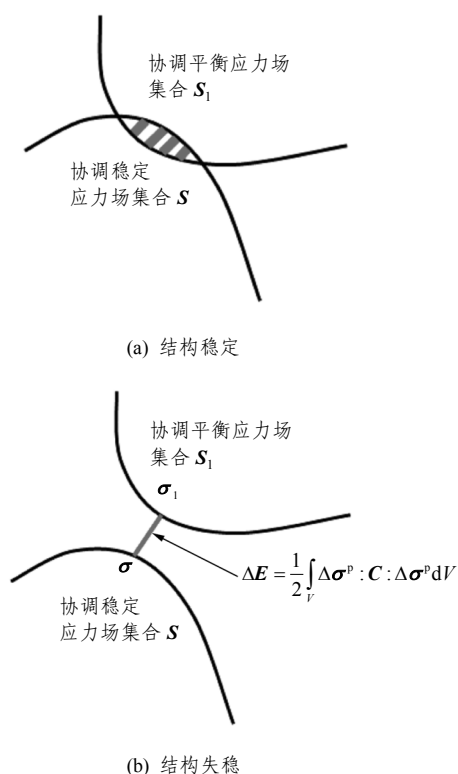


图1 弹塑性解向量空间示意图

Fig.1 Sketch map of elastoplastic solution in vector space

显然, 两个应力场集合  $S_1$  和  $S$  的距离  $\hat{L}$  可作为结构稳定性判据:

(1) 如果  $\hat{L} = 0$ , 表明在  $V$  内处处有  $\sigma_1 = \sigma$ , 存在同时满足平衡条件和屈服条件的协调应力场, 结构稳定;

(2) 如果  $\hat{L} > 0$ , 表明在  $V$  内不存在能同时满足平衡条件和屈服条件的应力场, 结构失稳, 且  $\hat{L}$  越大, 结构失稳程度越大。

$L^2$  的物理意义是余能, 也可称之为塑性余能 (余能范数)  $\Delta E$ :

$$\Delta E = L^2 = \frac{1}{2} \int_V \Delta \sigma^p : C : \Delta \sigma^p dV \quad (4)$$

式(4)表明,  $\Delta E$  也是塑性应力增量场  $\Delta \sigma^p$  的一个标量范数。在此意义下,  $\Delta E$  也被称为余能范数。对最近距离定义  $\Delta E_{\min} = \hat{L}^2$ , 则结构稳定性判别标准为:  $\Delta E_{\min} = 0$ , 则  $\Delta \sigma^p$  处处为 0, 结构是稳定的;  $\Delta E_{\min} > 0$ , 结构失稳。

### 3 变形加固理论及有限元表述

对给定荷载及加载路径下的弹塑性结构, 经典弹塑性理论要求结构的力学解 (包括位移场、应力场) 必须满足变形协调条件、平衡条件和本构关系,

弹塑性本构关系中包括屈服条件。这意味着如果弹塑性结构的力学解存在, 则结构应力场处处不超出屈服条件, 结构是稳定的。所以在经典弹塑性力学中, 无从探讨失稳结构的力学行为。而实际中又需要研究如何确定最有效的加固力系使失稳结构稳定, 故需研究失稳结构的力学行为。

本文应用非平衡态热力学的思路处理这一问题。在非平衡态热力学中, 通过引入内变量将非平衡态视为“约束平衡态”, 从而可以用成熟的平衡态热力学理论处理非平衡态热力学问题<sup>[7~10]</sup>。非平衡态演化的驱动力是内变量的共扼力, 如果对非平衡态施加反向共扼力, 非平衡态就失去演化动力, 成为“约束平衡态”。

对于失稳结构, 协调平衡应力场  $\sigma_1$  在  $V$  内总有一部分区域不满足屈服条件, 该区域记为  $V_1$ 。即在  $V_1$  内, 结构不能承受应力场  $\sigma_1$ , 结构是不稳定的。但是, 可以用约束平衡态来看待应力场  $\sigma_1$ , 通过对结构施加一个加固应力增量场使结构稳定, 处于约束平衡态。显然这个加固应力增量场就是反向的塑性应力增量场  $-\Delta \sigma^p$ 。

由于应力场  $\sigma_1 = \sigma + \Delta \sigma^p = \sigma_1^1$  是协调平衡应力场, 故其满足平衡条件。假设弹塑性结构作用有体积力  $f = f_i$ , 应力边界为  $S_\sigma$ , 边界条件为  $T = T_i = \sigma_{ij} n_j$ 。则对于任意给定的虚位移  $\delta u = \delta u_i$ , 其相应的虚应变为  $\delta \epsilon_{ij}$ , 由虚位移原理, 得

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_1^1 dV = \int_V \delta u_i f_i dV + \int_{S_\sigma} \delta u_i T_i dS \quad (5)$$

即

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV = \int_V \delta u_i f_i dV + \int_{S_\sigma} \delta u_i T_i dS - \int_V \delta \epsilon_{ij} \Delta \sigma_{ij}^p dV \quad (6)$$

将结构进行有限元离散化后, 假设形函数矩阵为  $N$ , 应变矩阵为  $B$ , 外荷载等效节点力为  $F$ , 则由式(6)可导出有限元的支配方程为

$$\sum_e \int_{V_e} B^T \sigma_1 dV = \sum_e \int_{V_e} N^T f dV + \sum_e \int_{S_\sigma^e} N^T T dS \quad (7)$$

即

$$\sum_e \int_{V_e} B^T \sigma dV = F - \sum_e \int_{V_e} B^T \Delta \sigma^p dV = F - \Delta Q \quad (8)$$

式中:  $\Delta Q$  为塑性应力场  $\Delta \sigma^p$  的等效节点力, 在有限元分析中称为不平衡力, 且有

$$\Delta Q = \sum_e \int_{V_e} B^T \Delta \sigma^p dV \quad (9)$$

加固力的等效节点力就是 $-\Delta Q$ 。也就是说, 对于一个特定的变形状态, 加固力和不平衡力大小相等、方向相反。故在节点力水平上, 式(8)可理解为: 结构自承力=外荷载+加固力, 或者, 结构自承力+不平衡力=外荷载。这两个表述是等价的, 但意义有所不同。前者说明加固力是外力, 后者说明不平衡力是内力。

上面的思想就是变形加固理论, 其基本要点可表述为: 对给定外荷载下的结构, 结构出现不平衡力的区域即为首先破坏区域; 为维持稳定, 出现不平衡力的区域就是需要加固区域; 加固力和不平衡力大小相等、方向相反。

在外荷载及加载路径给定的情况下, 弹塑性失稳结构总是趋于塑性余能最小的状态。由于塑性余能范数是加固力的度量, 这就要求失稳结构总是趋于加固力最小化、自承力最大化的状态。在应力层面上表现为应力场 $\sigma_1$ 和 $\sigma$ 的不断调整过程, 但是这两个应力场都是基于变形协调的位移场, 调整过程也是一个变形过程。因此, 加固力是和变形相关的, 针对不同的变形, 加固力也是不同的<sup>[11, 12]</sup>。

## 4 基于余能范数的结构稳定评价

本文基于 Drucker-Prager 准则, 对长方体柱、均质边坡和重力坝进行了非线性有限元数值计算, 采用塑性余能进行了稳定性评价, 并和理论解、ABAQUS, TFINE 等计算结果进行了对比。其中 TFINE 是清华大学岩石力学与工程研究中心开发的、用于进行岩土结构稳定和加固分析的三维非线性有限元程序, 目前已经用于国内大部分 300 m 级高拱坝和部分高边坡的稳定和加固分析中。

### 4.1 长方体柱的压缩数值试验

长方体柱的有限元网格如图 2 所示, 模型尺寸为 40 mm×20 mm×8 mm。边界条件为: 底部法向约束, 底部中心节点固端约束(以保证为静定结构); 顶部施加均布荷载, 不考虑自重作用。

材料采用理想弹塑性模型, 屈服准则为 Drucker-Prager 准则, 弹性模量 $E_1=98$  GPa, 泊松比 $\mu_1=0.25$ , 内摩擦因数 $f_1=0.839$ , 黏聚力 $c_1=4.7$  MPa。荷载加载范围为 130~141 MPa, 分 12 级施加, 每级 1 MPa。

Drucker-Prager 屈服准则为

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \leq 0 \quad (10a)$$

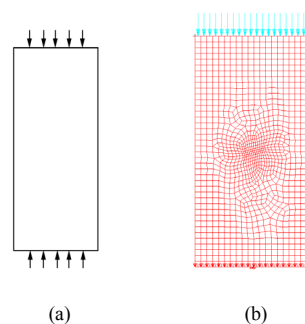


图 2 长方体柱压缩试验模型及有限元网格

Fig.2 Model and finite element mesh of rectangular column under compression

其中,

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ J_2 &= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

式中:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  均为主应力;  $\alpha$  和  $k$  均为参数, 可通过拟合 Mohr-Coulomb 准则而得。

对于本次数值试验,  $\sigma_1=137$  MPa,  $\sigma_2=0$  MPa,  $\sigma_3=0$  MPa(未施加围压), 式(10a)中 $f=-0.005<0$ (接近 0), 表明没有围压的试件的承载力在 137 MPa 左右。

数值试验得到的长方体柱整体塑性余能范数随荷载的变化曲线如图 3 所示。

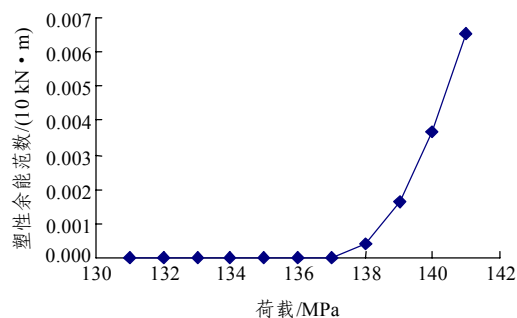


图 3 长方体柱整体塑性余能范数随荷载的变化曲线

Fig.3 Variable curve of global PCE of rectangular column with load

由图 3 可以看到, 长方体柱的塑性余能范数在加载到 137 MPa 之前均为 0, 在 137~138 MPa 间开始出现, 以后随加载骤增, 说明其在荷载为 137~138 MPa 时发生了破坏, 与基于 Drucker-Prager 屈服准则的材料压缩破坏理论解一致。

### 4.2 均质边坡超载数值试验

本节通过与 ABAQUS 和 TFINE 的计算结果进行对比, 研究均质土坡随重力超载的稳定性。均质

土坡坡高  $H = 20\text{ m}$ , 坡角为  $45^\circ$ , 如图 4 所示。边界条件为: 底部固端约束,  $x$  和  $y$  向边界面均为法向约束(平面应变问题)。

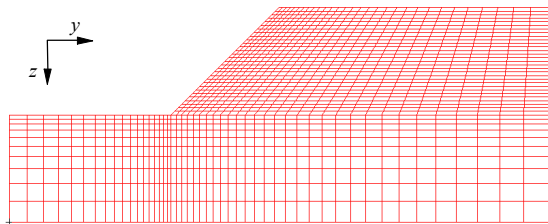


图 4 边坡模型有限元网格图  
Fig.4 Finite element meshes of slope model

边坡土体采用理想弹塑性模型, 不考虑剪胀性, 屈服条件为 Drucker-Prager 准则, 弹性模量  $E_2 = 100\text{ MPa}$ , 泊松比  $\mu_2 = 0.3$ , 容重  $\gamma_2 = 1.25\text{ kN/m}^3$ , 内摩擦因数  $f_2 = 0.268$ , 黏聚力  $c_2 = 0.036\text{ 8 MPa}$ (依据赵尚毅等<sup>[13~15]</sup>的研究, 采用 Mohr-Coulomb 等面积圆拟合的 Drucker-Prager 参数)。

不考虑初始地应力, 在 ABAQUS 中一次性给所有单元施加  $1\text{ g}$ ( $g$  为重力加速度)的荷载, 计算步长由其自动选择。在 TFINTE 中, 重力荷载分 20 级施加, 按  $0.05\text{ g}$  递增, 从 0 增加到  $1\text{ g}$ 。

ABAQUS 在荷载步为 0.998 95 时迭代终止, 荷载步为 0.92 时从坡脚到坡顶的塑性区已贯通, 结合图 5 所示的边坡顶点位移随超载的变化曲线综合判定, 该边坡的安全系数为 0.92 左右。

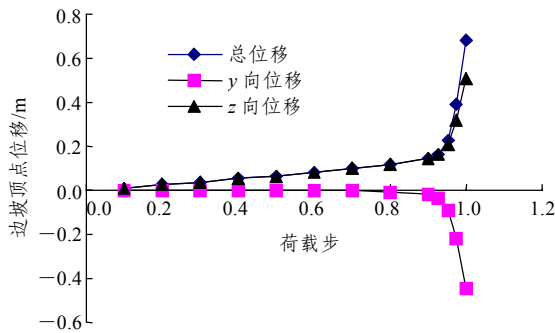


图 5 边坡顶点位移变化曲线(ABAQUS 结果)  
Fig.5 Variable curves of displacements on the top of slope (ABAQUS results)

TFINE 计算所得塑性余能范数随加载步的变化曲线如图 6 所示。从图 6 可以看出, 在加载步为 0.9 附近边坡的塑性余能范数发生突变, 以后随超载急剧增加, 故可以判定边坡的安全系数在 0.9 左右, 与 ABAQUS 计算结果接近。

4.3 坝踵区不同尺寸有限元网格数值试验

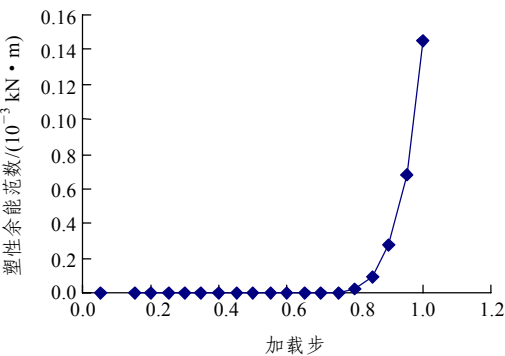


图 6 塑性余能范数随加载步的变化曲线(TFINE 结果)  
Fig.6 Variable curve of PCE with loading step(TFINE results)

拱坝和重力坝坝踵区属应力奇异区域, 其计算拉应力水平随有限元网格尺寸而异, 网格愈小, 拉应力愈大, 这一角缘效应将影响相当高度范围的应力值。最新规范<sup>[16]</sup>规定: “有限元法计算的坝基应力, 其上游面拉应力宽度, 宜小于坝底宽度的 0.07 倍或小于坝踵至帷幕中心线的距离”, 这里面的主观因素的成分较大。本节考察坝踵区有限元网格尺寸对塑性余能范数的影响。

重力坝模型如图 7 所示, 坝高  $100\text{ m}$ , 底宽  $70\text{ m}$ , 下游面坡度  $1.5:1$ , 坡脚  $56.3^\circ$ 。边界条件为: 底面固端约束, 上、下游边界面法向( $y$  向)约束, 侧面法向( $x$  向)约束。

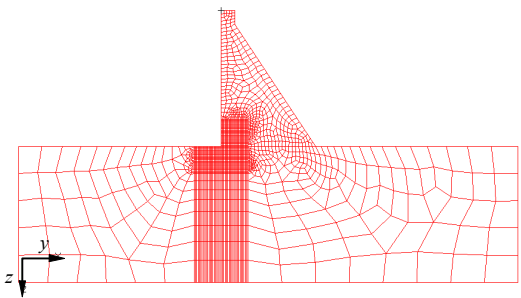


图 7 重力坝模型及有限元网格图  
Fig.7 Model and finite element mesh of gravity dam

坝体和坝基的材料采用理想弹塑性模型, 屈服准则采用 Drucker-Prager 准则, 如表 1 所示。

表 1 重力坝模型材料参数表					
Table 1 Material parameters of gravity dam model					
材料	弹性模量 /GPa	泊松比	密度 /( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ )	内摩擦 因数	黏聚力 /MPa
坝体	21.0	0.167	2.40	1.70	5.0
地基	19.0	0.130	2.65	1.30	1.8

以坝踵点为中心向上下游和上下高程各  $20\text{ m}$



(1/5 坝高)范围内,按不同尺寸建立 5 种有限元网格模型(坝踵区网格平均尺寸分别为 3.0, 2.5, 2.0, 1.0 和 0.5 m)。计算所得的不同尺寸网格模型的塑性余能范数随超载(上游水荷载)倍数的变化曲线如图 8 所示。

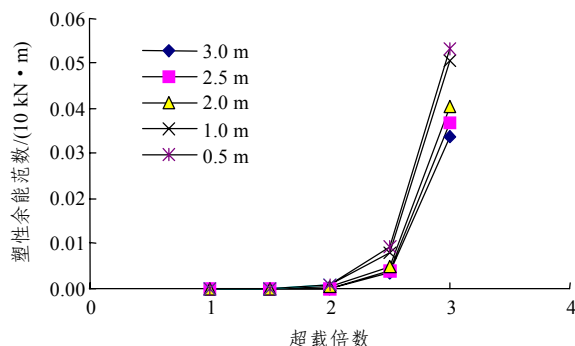


图 8 不同尺寸网格模型的塑性余能范数随超载倍数的变化曲线

Fig.8 Variable curves of PCE of models with different sizes of meshes with overload

从图 8 可以看出,塑性余能范数在超载到一定程度(2.5 倍水荷载)后出现,随后其变化受网格密度的影响较大(3.0 倍水荷载时,网格尺寸从 3.0 m 缩小到 0.5 m,塑性余能范数增长了 56.8%)。但在 2.5 倍水荷载之前,各模型的塑性余能范数均为 0,只是在 2.5 倍水荷载之后有了较大区别,其突变点却基本一致,说明应用其作为结构稳定的判据受网格的影响较小。

## 5 基于不平衡力的加固验证

### 5.1 长方体柱数值试验围压的加固作用分析

在节 3.1 的长方体柱试验中,加载到 137 MPa (理论解为 137.01 MPa)以前,整个模型范围无不平衡力的分布。从 137 MPa 开始,试件的正、侧剖面的不平衡力矢量如图 9 所示。

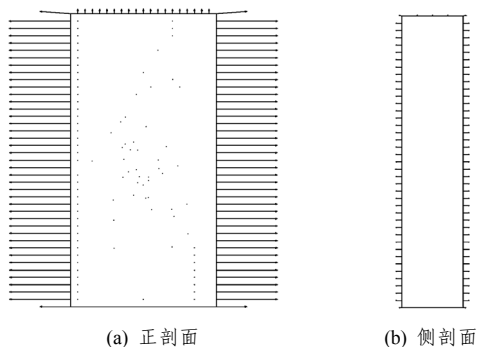


图 9 超载到 137 MPa 后的不平衡力矢量图

Fig.9 Vector diagrams of unbalanced force of rectangular column after overloading 137 MPa

从图 9 可以看出,长方体柱试件周围出现垂直于试件表面的均布不平衡力,且 4 个侧面不平衡力大小基本一致,而试件内部却几乎没有不平衡力的分布。

当荷载为 141 MPa 时,长方体柱四周的不平衡力大小为 1.19 MPa(均布,图 9 中不平衡力矢量为不平衡应力积分到节点上的结果)。为验证反向不平衡力的加固作用,在柱子周围施加 1.19 MPa 围压后,其塑性余能范数随加载的变化曲线如图 10 所示。

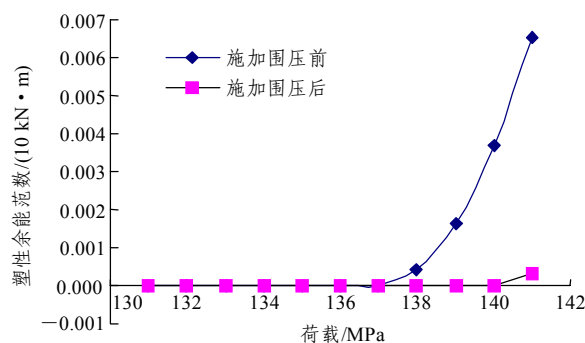


图 10 施加围压前后塑性余能范数随加载的变化曲线

Fig.10 Variable curves of PCE with load before and after confining pressure is applied

从图 10 可以看出,由于 1.19 MPa 围压的作用,长方体柱的承载力由 137.01 MPa 提高到 141.00 MPa 左右,这是与理论解一致的。同节 3.1 的分析,当  $\sigma_1 = 141.00$  MPa,  $\sigma_2 = 1.19$  MPa,  $\sigma_3 = 1.19$  MPa 时,式(10a)中  $f = -0.005 < 0$  (接近 0)。这表明由于 1.19 MPa 的围压作用,试件的承载力提高到了 141.00 MPa 左右。承载力的提高和加固力的比值为  $(141.00 - 137.01)/1.19 = 3.35$  (应力大小相比)。可见,少量的加固力显著地提高了结构的承载力。

### 5.2 条形基础和地基系统加固数值试验

条形基础和地基系统及其有限元模型分别如图 11 和 12 所示。由于对称性,取一半进行分析。条形基础和两侧的压重土都简化为均布力系,荷载大小分别为  $p_u$  和  $q$ ,压重土实际上起到了对系统加

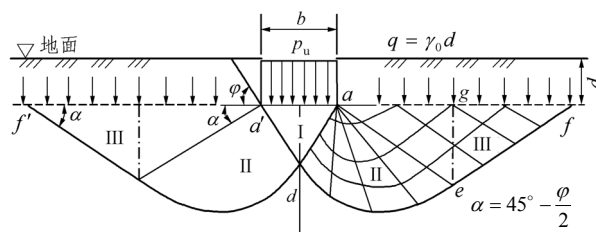


图 11 条形基础模型

Fig.11 Model of strip foundation

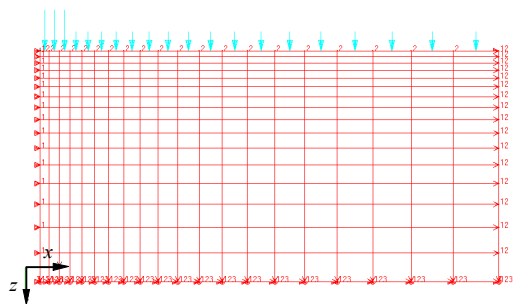


图12 条形基础有限元网格

Fig.12 Finite element meshes of strip foundation

固的作用。底面固端约束, 四周边界面法向( $x$ ,  $y$  向)约束。模型遵循“无重介质地基的极限承载力——普朗特-瑞斯那课题”的假定<sup>[17]</sup>。

地基土采用理想弹塑性模型, 不考虑剪胀性, 屈服条件为 Drucker-Prager 准则, 弹性模量  $E_3 = 207$  MPa, 泊松比  $\mu_3 = 0.3$ , 内摩擦因数  $f_3 = 0.364$ , 黏聚力  $c_3 = 0.069$  MPa(依据邓楚键等<sup>[18, 19]</sup>的研究, 采用 Mohr-Coulomb 内切圆拟合的 Drucker-Prager 参数)。

为了对比分析, 首先计算没有压重的情况:  $q = 0$  MPa,  $p_u = 0.3 \sim 1.2$  MPa, 分 10 级加载, 每级 0.1 MPa, 依据“普朗特-瑞斯那课题”的分析, 条形基础极限承载力  $p_u = qN_q + cN_c$ ,  $\varphi = 20^\circ$  时,  $N_c = 14.90$ ,  $N_q = 6.4$ , 故  $p_{u-\max} = 1.03$  MPa。如果有压重,  $q = 0.05$  MPa,  $N_q = 6.4$ , 故  $p_{u-\max} = 1.35$  MPa。

超载时地基中不平衡力的分布如图 13 所示。

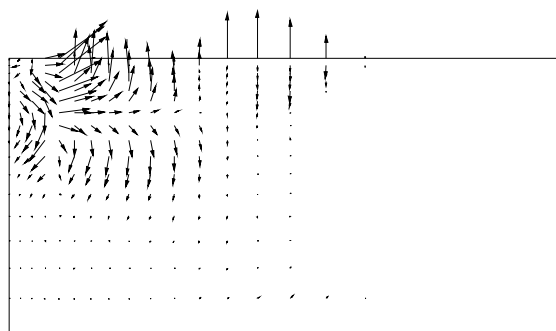


图13 超载时地基中不平衡力的分布

Fig.13 Unbalanced force distribution of strip foundation under overloads

压重对模型整体塑性余能范数的影响如图 14 所示。施加  $q$ (加固力)前后, 塑性余能范数分别在 0.9 和 1.1 MPa 左右发生突变, 与“普朗特-瑞斯那解”较为接近, 且加固后系统的不平衡力相对加固前小了很多。

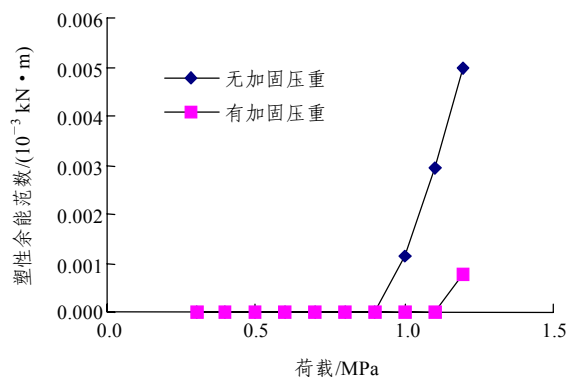


图14 压重对模型整体塑性余能范数的影响

Fig.14 Influence of reinforcement on global PCE of model

极限荷载的增加值与加固力的比值为  $N_q$  是 6.4。计算表明, 该值受内摩擦角  $\varphi$  的影响:  $\varphi$  越大,  $N_q$  越大。

## 6 结 论

余能范数是塑性应变在整体结构上的标量范数, 是结构偏离稳定状态的距离。变形加固理论是以最小塑性余能原理为基础, 采用非平衡态热力学中的约束平衡态概念, 研究当荷载超过结构极限承载力时的结构失稳行为。对给定外荷载, 结构如果无法承担, 将会在部分区域出现不平衡力, 即为首先破坏区域; 为维持稳定, 出现不平衡力的区域就是需要加固区域; 加固力和不平衡力大小相等, 方向相反。本文算例表明, 塑性余能可以作为结构整体稳定的评判指标, 且该指标对于有限元网格的依赖性较低。同时, 对长方体柱和条形基础在加固前后的承载力数值算例表明, 变形加固理论对于结构加固分析是有效的一种方法。

## 参考文献(References):

- [1] 陈祖煜, 汪小刚, 杨 健, 等. 岩质边坡稳定分析——原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005.(CHEN Zuyu, WANG Xiaogang, YANG Jian, et al. Rock slope stability analysis—theory, methods and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2005.(in Chinese))
- [2] 刘耀儒, 杨 强, 薛利军, 等. 基于三维非线性有限元的边坡稳定分析方法[J]. 岩土力学, 2007, 28(9): 1 894 - 1 898.(LIU Yaoru, YANG Qiang, XUE Lijun, et al. Slope stability analysis based on 3D nonlinear finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2007,

- 28(9): 1 894 - 1 898.(in Chinese))
- [3] 杨 强, 陈 新, 周维垣, 等. 三维弹塑性有限元计算中的不平衡力研究[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(3): 323 - 326.(YANG Qiang, CHEN Xin, ZHOU Weiyan, et al. On unbalanced forces in 3D elastoplastic finite element analysis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(3): 323 - 326.(in Chinese))
- [4] 杨 强, 陈 新, 周维垣. 岩土工程加固分析的弹塑性力学基础[J]. 岩土力学, 2005, 26(4): 553 - 557.(YANG Qiang, CHEN Xin, ZHOU Weiyan. Elastoplastic basis of geotechnical engineering reinforcement analysis[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(4): 553 - 557.(in Chinese))
- [5] 杨 强, 刘耀儒, 陈英儒, 等. 变形加固理论及高拱坝整体稳定与加固分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, 27(6): 1 121 - 1 136.(YANG Qiang, LIU Yaoru, CHEN Yingru, et al. Deformation reinforcement theory and global stability and reinforcement of high arch dams[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, 27(6): 1 121 - 1 136.(in Chinese))
- [6] 吴家龙. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.(WU Jialong. Elasticity mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001.(in Chinese))
- [7] RICE J R. Inelastic constitutive relations for solids: an integral-variable theory and its application to metal plasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1971, 19(1): 433 - 455.
- [8] YANG Q, CHEN X, ZHOU W Y. Thermodynamic relationship between creep crack growth and creep deformation[J]. Journal of Non-equilibrium Thermodynamics, 2005, 30(1): 81 - 94.
- [9] YANG Q, CHEN X, ZHOU W Y. Multiscale thermodynamic significance of the scale invariance approach in continuum inelasticity[J]. Journal of Engineering Materials and Technology, 2006, 128(2): 125 - 132.
- [10] YANG Q, WANG R K, XUE L J. Normality structures with thermodynamic equilibrium points[J]. Journal of Applied Mechanics, 2007, 74(5): 965 - 971.
- [11] 杨 强, 薛利军, 王仁坤, 等. 岩体变形加固理论及非平衡态弹塑性力学[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(20): 3 704 - 3 712.(YANG Qiang, XUE Lijun, WANG Renkun, et al. Reinforcement theory considering deformation mechanism of rock mass and non-equilibrium elastoplastic mechanics[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(20): 3 704 - 3 712.(in Chinese))
- [12] 杨 强, 周维垣, 陈 新. 岩土工程加固分析中的最小余能原理和上限定理[C]// 冯夏庭, 黄理兴编. 21 世纪的岩土力学与岩土工程. 武汉: [s. n.], 2003: 158 - 166.(YANG Qiang, ZHOU Weiyan, CHEN Xin. Principle of minimum complementary energy and upper bound theorem in geotechnical reinforcement analysis[C]// FENG Xiating, HUANG Lixing ed. The Geomechanics and Geotechnical Engineering in the 21st Century. Wuhan: [s. n.], 2003: 158 - 166.(in Chinese))
- [13] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 343 - 346.(ZHAO Shangyi, ZHENG Yingren, SHI Weimin, et al. Analysis of safety factor of slope by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3): 343 - 346.(in Chinese))
- [14] 郑颖人, 赵尚毅. 有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(19): 3 381 - 3 388.(ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi. Application of strength reduction FEM in soil and rock slope[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(19): 3 381 - 3 388.(in Chinese))
- [15] 郑颖人, 赵尚毅, 孔位学, 等. 极限分析有限元法讲座——I 岩土工程极限分析有限元法[J]. 岩土力学, 2005, 26(1): 163 - 168.(ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi, KONG Weixue, et al. Geotechnical engineering limit analysis using finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(1): 163 - 168.(in Chinese))
- [16] 中华人民共和国行业标准编写组. SL319 - 2005 混凝土重力坝设计规范[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005.(The Professional Standards Compilation Group of People's Republic of China. SL319 - 2005 Design specification for concrete gravity dam[S]. Beijing: China Water Power Press, 2005.(in Chinese))
- [17] 陈仲颐, 周景星, 王洪瑾. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994.(CHEN Zhongyi, ZHOU Jingxing, WANG Hongjin. Soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994.(in Chinese))
- [18] 邓楚键, 孔位学, 郑颖人. 极限分析有限元法讲座 III——增量加载有限元法求解地基极限承载力[J]. 岩土力学, 2005, 26(3): 500 - 504.(DENG Chujian, KONG Weixue, ZHENG Yingren. Analysis of ultimate bearing capacity of foundations by elastoplastic FEM through step loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(3): 500 - 504.(in Chinese))
- [19] 马少坤, 于 劲, 王 蓉. 条形浅基础下无重土地基承载力研究[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2008, 24(2): 230 - 233.(MA Shaokun, YU Jin, WANG Rong. Research on weightless subsoil bearing capacity under stripe shallow foundation[J]. Journal of Shenyang Jianzhu University(Natural Science), 2008, 24(2): 230 - 233.(in Chinese))