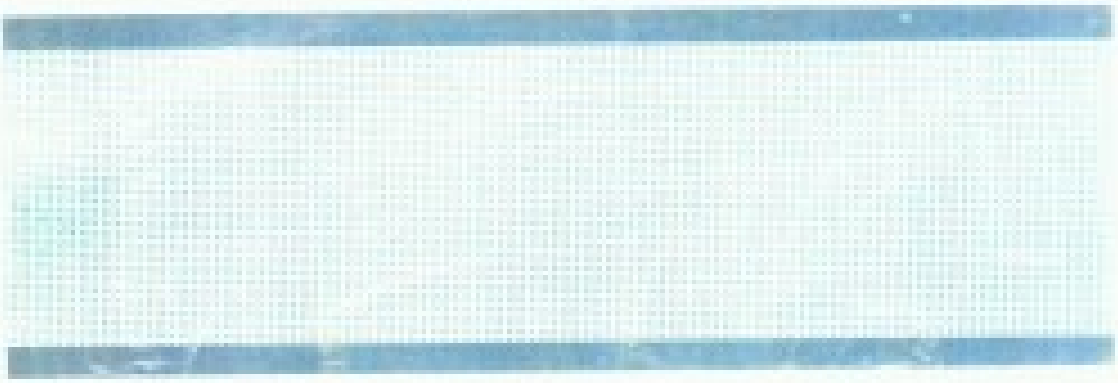
河流数学模型

杨国录 著

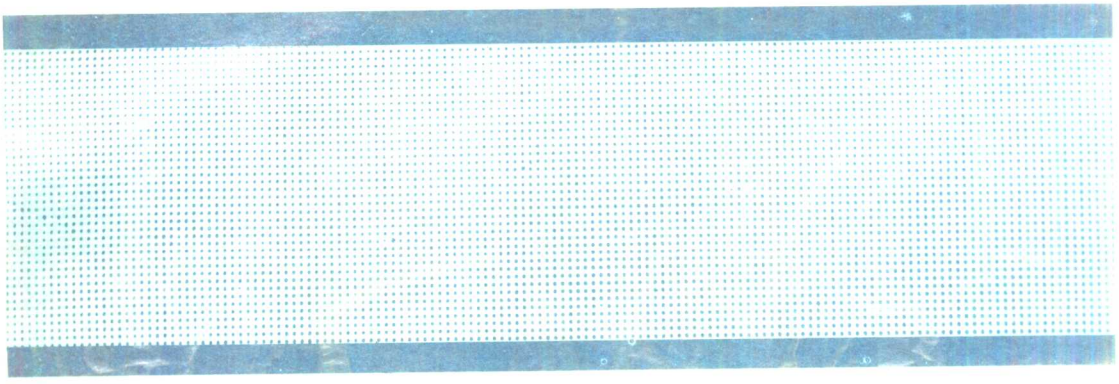


海洋出版社

河流数学模型
杨国录 著
海洋出版社

河流数学模型

杨国录 著



海洋出版社

河流数学模型
杨国录 著
海洋出版社

TV 4
1

TV14

河流数学模型

杨国录 著

海洋出版社
1993年·北京

内 容 提 要

本书主要介绍河流数学模型理论基础及应用。共分十章，前五章介绍模型理论基础，包括基本方程、辅助方程、特征线理论和数值方法基础，后五章介绍模型建模和应用，主要内容有一维水流模型、挟沙水流模型、一维扩展模型、平面二维水沙模型和解析模型。

本书较系统地介绍了河流数学模型建制和应用的全过程，内容新颖、重点突出，汇集了国内外许多颇有特色的数学模型研究成果。

本书可作为水利院校教材，还可供有关专业的水利水电科技工作者作参考。

(京)新登字087号

河流数学模型

杨国录 著

*

海洋出版社出版(北京市复兴门外大街1号)

新华书店北京发行所发行　　北京714印刷厂印刷

开本：787×1092　16开　　印张：16　字数：400千字

1993年10月第一版　1993年10月第一次印刷

印数：1—1000册

*

ISBN 7-5027-3332-9/O·58　　定价：23.00元

序

河流泥沙数学模型作为河床变形定量预测的重要手段正日益受到重视，并已广泛用于实际。其中一维模型在研究长时期长河段的宏观河床变形方面已据有不可替代的地位；平面二维模型正处于迅猛发展过程之中，对于研究一定时期内短河段的细部河床变形问题，已初步显示其技术优势，发展前景正为日方升。

我国对河流泥沙数学模型的研究和应用最早可追溯到50年代后期，与数学模型发展较快的某些国家相比起步稍迟。但随着我国江河治理工程的大规模开展，对河床变形定量预测的要求愈来愈迫切，这是因为，我国泥沙问题比较严重，河床变形预测的正确与否，直接影响到江河治理工程决策的成败。实践是促进认识深化的动力，正是在这种情况下，我国的河流泥沙数学模型进展迅速，功能愈来愈强，精度也愈来愈高，目前已跻身于世界先进行列，其中某些方面已有后来居上之势。

杨国录同志70年代毕业于武汉水利电力学院治河工程系，1981年获硕士学位。1985年负笈法国，从师于国际知名数模专家J. A. 贡日教授，获博士学位。1989年归国，现为武汉水利电力大学副教授，除讲授“河流模拟”、“泥沙数学模型”等本科生及研究生专业课程外，还从事一维数模的研究及应用工作。对平面二维数模也进行了探索性研究。他所研制的SUSBED-1，2一维泥沙数学模型已成功的应用于向家坝、小湾、公伯峡等水库及河段的河床变形预测，并通过了水利水电规划总院所组织的利用龚咀水库实测资料进行的封闭性检查，即不作任何调试，仅输入原始数据，取得计算成果后的对照性检查，得到了程序简练、机时省、精度高、能满足生产要求的好评。

本书是杨国录同志应邀参加国际泥沙培训中心及水利水电规划总院举办的“河流数学模型研讨班”讲学时所编讲义的修订稿，在本书前八章中，作者主要围绕一维数学模型，全面论述了泥沙数学模型的基本问题，并扼要介绍了国内外的有关模型。在最后两章中论述了平面二维模型的有关问题，并介绍了几种用于模型初步检验的解析模型。本书在论述泥沙数学模型的基本问题时，对泥沙数学模型的基本控制方程、常用的辅助方程、基本控制方程的定解问题、确定边界条件的特征线理论、有限差分法等系统地、循序渐进的作了剖析；至于国内外的有关模型，则先后介绍了水流模型和泥沙模型，恒定流模型和非恒定模型，悬移质模型、推移质模型和全沙模型等，建模技巧及其计算中某些具体问题的处理办法，也结合起来不同程度地分别作了介绍。本书除系统总结和介绍前人研究成果外，对本人及其所在单位的研究成果，也在阐明相应问题时作了一些介绍。

河流泥沙数学模型是一个正在发展中的学科，国内外均发表了大量论文，也有论文集问世。但将研究成果汇总在一起，进行全面系统论述的专著则尚付阙如。至于从数学观点深入浅出、循序渐进的具有教科书性质的专著，则除我们已经出版的“河流模拟”一书中的“数学模型篇”外，也未曾见到，而后者因受篇幅限制，在广度及深度上均不可能充分发挥，因而也起不到前述全面总结、系统介绍的作用。杨国录同志的“河流数学模型”一书得以付梓，在现阶段正好填补了这一空白，我们期待它能对河流数学模型的发展起到应有的推进作用。

河流泥沙数学模型的进一步提高，有赖于在两个方面取得进展，一个方面是水沙运动的物

425760

理模式，另一个方面是求解偏微分方程的数值计算方法。应该说，过去在这两个方面都已经作出过巨大的努力，但由于现象的极端复杂性，这两方面的问题都不可能一蹴而就地得到彻底解决。所以建模的全过程是一个随着认识逐步深化、不断修改、不断完善的过程。将已建模型看成完美无缺，从而固步自封是不正确的；因已建模型不够完善，从而采取全面否定态度，满足于停留在以往长期采用的定性分析方法上，也是不正确的。现阶段要对待河流泥沙数学模型这一新的技术，应采取积极推进的态度，在加强理论研究的同时，作为解决具体问题的手段，不外乎以下两条：一是对理论未能充分阐明的参数用足够的经验数据率定；二是所建立的整体模型用实测资料进行检验。总之，是用经验数据来弥补理论认识之不足，然后，随着时间进程，逐步减少经验性，增加理论性；减少局限性，增加普适性。看来，这也许是在现阶段采用数学模型解决复杂的河床演变问题的唯一现实可行的途径。上述观点是否正确，愿就教于本书读者，目的是为了在对河流泥沙数学模型的评价及发展方向上取得共识，以利于这一研究手段的进一步提高。

谢鉴衡

1993 年 3 月 25 日

前　言

随着我国经济建设的深入，水利水电工程开发愈来愈重要，现代高速计算机的发展，河流数学模型以其灵活、迅速、经济和量化的特点，构成完善河流模拟技术一个不可分割的科学支体。

河流数学模型是以河流动力学、河床演变学、流体力学、紊流力学等学科为基础的，溶入了数值计算技术和技巧，涉及面颇广，是一门仍在继续深入发展并具有广阔前景的应用性学科。因此，本书内容不可能面面具到，深入普开，而仅限于系统介绍基本理论及应用较多的方法，慰之于为治河教学、科研和工程技术人员提供点有用的素材。

本书系以1992年为国际泥沙培训中心和水利水电规划总院联合举办的河流数学模型研讨班所篇教材为基础，修改增补而成。全书共分十章，前五章介绍河流模型的基础，后五章介绍模型的建模及应用。书中内容偏重于介绍基础知识，实际应用则是通过介绍模型的建模方法、技巧及全过程，并付之于针对不同具体问题建立的各家模型来得到体现。全书内容注意了理论与实际相结合，在强化基本概念的同时，重视国内外主要研究成果的汇集。编写时注意了深入浅出，通俗易懂，便于有关专业的科学技术人员参考。

本书在编写过程中曾先后得到谢鉴衡教授、丁君松教授、王明甫教授和魏良琰教授的指导和审阅，谢鉴衡教授为本书作序，并得到武汉水利电力大学河流模拟教研室全体同志和冠树萍同志的帮助，清华大学舒安平博士主持了全书的整编和制图工作，特此向他们深表谢意。

作者尚在年华，理论水平有限，且初编首作，经验不足，加之编写时间十分仓促，书中定有不少缺点乃至错误，敬请批评指正。尽管如此，本书若能对读者有点助益，也感衷心自慰了。

作　者

1993年3月

目　录

第一章　绪论 …… (1)
参考文献 …… (2)
第二章　一维基本方程式 …… (3)
第一节　基本假设 …… (3)
第二节　基本方程式 …… (4)
第三节　方程系的处理 …… (10)
第四节　基本方程的几种常用形式 …… (11)
参考文献 …… (14)
第三章　常用辅助方程及模型分类 …… (15)
第一节　常用辅助方程 …… (15)
第二节　模型分类 …… (24)
参考文献 …… (26)
第四章　数学模型的理论基础 …… (27)
第一节　定解问题 …… (27)
第二节　特征线理论在建模中的应用 …… (27)
第三节　特征线数值方法 …… (38)
参考文献 …… (44)
第五章　有限差分法 …… (45)
第一节　基本概念 …… (45)
第二节　差分格式的建立 …… (45)
第三节　常用的几种差分格式 …… (47)
第四节　差分格式的收敛性、稳定性和相容性 …… (51)
第五节　莱恩德兹(Leenderts)收敛准则 …… (58)
第六节　一个实例 …… (61)
第七节　阻力项存在对稳定性的影响 …… (64)
第八节　数值边界条件处理 …… (66)
第九节　普列斯曼(Preissmann)格式的稳定性和收敛特性 …… (69)
参考文献 …… (73)
第六章　水流数学模型 …… (75)
第一节　基本方程及定解条件 …… (75)
第二节　恒定水流模型 …… (76)
第三节　流量演算的水动力学方法 …… (76)
第四节　非恒定水流模型 …… (80)
第五节　内边界条件处理及计算方法 …… (89)
参考文献 …… (94)

第七章　恒定挟沙水流模型 …… (95)
第一节　基本假定和基本方程式 …… (95)
第二节　恒定悬移质饱和输沙模型 …… (96)
第三节　恒定悬移质非饱和输沙模型 …… (102)
第四节　恒定平衡推移质输沙模型 …… (105)
第五节　计算中的几个问题 …… (107)
第六节　非均匀沙模型 …… (113)
第七节　混合层概念 …… (122)
参考文献 …… (127)
第八章　非恒定挟沙水流模型 …… (129)
第一节　推移质模型 …… (129)
第二节　悬移质对流扩散问题的数值方法 …… (146)
第三节　非恒定悬移质模型 …… (166)
第四节　全沙模型 …… (175)
第五节　一维悬移质扩展模型 …… (183)
参考文献 …… (188)
第九章　平面二维数学模型 …… (190)
第一节　基本方程 …… (190)
第二节　方程组的封闭问题 …… (196)
第三节　边界及边界条件 …… (198)
第四节　数值方法理论基础 …… (199)
第五节　平面二维水流模型 …… (206)
第六节　平面二维挟沙水流模型 …… (219)
第七节　几个关键性问题的说明 …… (227)
参考文献 …… (231)
第十章　解析模型 …… (233)
第一节　Z_s 模型 …… (233)
第二节　G-Z_s 模型 …… (234)
第三节　模型应用 …… (236)
第四节　非线性解析模型 …… (241)
第五节　非均匀沙解析模型 …… (245)
参考文献 …… (248)

第一章 绪 论

随着现代高速电子计算机的发展，许多领域中的应用技术（应用软件）相继崛起，其中以河道计算水力学、河流动力学等学科为基础的河道挟沙水流数学模型近些年也有很大发展。

河道挟沙水流数学模型是预测河道水流泥沙运动及河床演变的重要工具之一，它与比尺实体模型相辅相成，是解决实际工程问题所必需的手段，其发展前景十分广阔。对于那些使用传统水动力学方法不能或难予解决的极为复杂的问题，诸如局部急变水流，复杂边界条件问题，可用实体模型准确地模拟和再现出来，为解决工程问题提供初设依据，也可通过实体模型的结果进行检验和发展水动力学基本理论（相似论，统计理论，波动，泥沙运动等）及实验学科。但实体模型的耗资和比尺带来的问题都往往使其在应用和扩展的范围上受到限制。对于关系到大范围的工程规划，实体模型就很难较准确地再现和重演物理现象的历史，对预测未来也很难给予人们满意的结果。实体模型研究的对象往往是局部性，对于大范围问题适应性较差，从一个问题到另一个问题，实体模型不得不部分或全部更新制作而以巨大的耗资使其适应新的环境才能生存，而数学模型对各种问题则灵活多变，可与现代数据和反馈技术相结合，这是实体模型所不及的。

数学模型也是科学研究的有力工具。解决实际工程问题所必要的本构方程，往往使传统的数学物理方法束手无策，而数学模型与现代高速计算机和数值解技术相结合而使问题变得简易。

挟沙水流数学模型是依据水动力学、河流动力学公式和数学方程式的解来模拟和预测水流泥沙运动和河床变形的。它包括水流模型和泥沙模型两大类，前者着眼于研究不动周界的水流演进过程，而后者侧重于研究周界可动的的水沙过程和河床变形。

水流模型的理论基础起源于 19 世纪 St・Venant 方程式，他奠定了非恒定水流的理论基础。但是真正的水流模型技术的运用是在电子计算机问世时开始，1952 年到 1953 年 Lsaacson，Stoker 和 Troesch（1954）开始建立 Mississippi 比和 Ohio 河的水流模型，而着眼于动周界的泥沙模型则是到了 20 世纪中期才进入一个新的时期，到了 90 年代的今天，泥沙数学模型已进入迅猛发展及广泛运用阶段。

科学研究和工程规划要解决的问题总希望尽可能准确、快速而经济，高速电子计算机应用促进了数学模型的发展。50 年代限于一维模型，70 年代国外开始研究和应用二维模型，准三维问题也作了一些工作，到 90 年代，局部问题的三维模型研究开始建立，并广泛发展和利用二维模型系统，一维模型系统给出的结果已可以与比尺实体模型类比。

挟沙水流模型是在计算水动力学，河流动力学的基础上发展起来的，嵌套了数值计算技术，它给出的结果的真伪主要依赖于两大部分：一是物理模式（数学方程式和基本公式等），与比尺实体模型一样，这是理论基础的主体，数学模型还需要某些必要的概化模式，为了使其适应于某种问题的个性，不得不作某些假定和限制，正与实体模型受到相似律 限制和放弃相似条件来适应研究问题的个性那样。二是数值方法（数学方程数值解及数值处理技巧等），数学模型能给出满意结果是与数值方法休戚相关的，这与实体模型要准确模拟原型而少不了精心的制作工艺相类似。认识和掌握这两个方面，是实现和完善数学模型的基本保证。

挟沙水流模型是研究水流泥沙运动和河床演变的数学方法。河道是水流与河床长期作用的结果，水流作用于河床导致河床变形，变形了的河床回过来反作用于水流，迫使水流结构发生新的变化，二者相互作用相互制约的矛盾是通过泥沙运动为媒介来调节的。掌握这些基本规律的学科是河流动力学，因此挟沙水流数学模型也就是依据河流动力学所阐述的基本规律来重演和再现这些规律的必要手段。

由于河流动力学所面对的自然现象，是边界复杂多变的天然河流及水流泥沙运动的多相体，许多问题的运动规律尚无定论，可用于建立挟沙水流模型的方程是不完备的，往往不得不依据水力学，流体动力学，紊流力学的基本假设和公式来使问题完备。因此，作为数学模型不得不采取一些概化或变通的办法去解决问题，这些构成了本学科的特色。

由于天然河道现象的复杂性，河道数学模型在解决问题的同时所采用的数值方法上自然也是多样性的，诸如特征线法，有限差分法和有限元法，这些方法对某种特定的数学问题不都是合适的，往往需要相互掺混使用，诸如特征有限差分法，特征有限元法等。作为长系列长距离的大规划系统，使用一维模型采用有限差分法较为有效；对于局部问题，如坝前冲刷漏斗，河口，海港和海口，采用二维或三维模型利用有限元或特征有限元法较为合适，而对于剧毒性的水质污染问题需建立较高精度的数学模型，方法的选取和采用与不同问题的实质紧密相联。

几十年来的数学模型研究，文献积筐盈箧，浩如烟海，但就其内容上讲，却还不是十分成熟，本书不可能对此作全面介绍，也不可能归纳出可供科学研究和解决工程问题相当可靠的算法。尽管如此，考虑到读者不可能对数量巨大的文献一一过目，同时也考虑到读者可能为科研人员，高校教师及科技工作人员，本书在介绍基本理论的基础上尽可能扩大读者视野，并重点介绍建模的基本理论，同时介绍几种比较完整且具有一定特色的数学模型，以便对提高读者的建模能力和使用数学模型进行科研和解决实际问题的能力有所帮助。

参 考 文 献

[1] 谢鉴衡主编，河流模拟，水利电力出版社，1988年。

[2] Cunge, J. A, Holly, Jr, F. M., Verwey, A., Practical aspects of computational river hydraulics, Pitman, London, 1980.

[3] Lsaacson, RE, Stoker, J. J. and Troesch B. A., Numerical solution of flood prediction and river regulation problems(Ohio－Mississippi floods), 1954.

[4] De Saint Venant B., Thèorie du mouvement non－permannent des eaux avec application aux crues des riviées et l' introdaction des marèes dans leur lit, Aead. Sci. Comptes rendus, 73, pp. 148－154. 1871.

第二章　一维基本方程式

第一节　基本假设

天然河道的河形是极为复杂的，顺直型、弯曲型、游荡型、分汊型等，各种河型水流结构泥沙运动都不一样。顺直型水流及其泥沙运动显得比较规顺，游荡型则显得相当散乱，而弯曲型和分汊型的则比较适中，横向水流及其泥沙运动与纵向的相比不可忽略。严格讲，天然河道是不存在一维水流运动的，但如果从宏观角度进行分析，研究问题的着眼点集中在断面平均水力要素上，一维水流运动的假定是可以接受的。

本章集中讨论一维非恒定水流和泥沙运动的基本方程式。我们作出假定：水流和泥沙是一维的，即各水流和泥沙运动要素在全断面上呈均匀分布；悬移质含沙量在全断面的分布均匀；河床坡度较小，其倾角的余弦近似等于 1，悬移质和推移质颗粒相互碰撞的影响可以忽略。

河道过水面积可以是任意形状，并沿程变化，其变化程度应满足一维条件假设。虽然这一限制在物理意义上讲很难做到，从数值计算角度讲是可以近似做到的。

全断面由液固（水和沙）两相体占据，并视为连续体。物理量诸如流量 Q、过水面积 A 或水位 Z、水深 h、含沙浓度 S、推移质输沙率 G、河床变形面积 A_s 或河床变形高程 Z_s 沿流程均看成是连续的，它们都是时间 t 和距离 x 的连续函数。天然河道周界高低不平，河床变形面积 A_s 看成连续函数，从数学角度讲是不可能的，这需要作出某些概化以保证其连续性。

挟沙水流基本运动方程有四个：净水水流连续方程式，运动方程式，水沙连续方程式和河床变形方程式，除运动方程式外三个连续方程式中仅有两个是独立的，另一个可由其余的导出。从物理学可知，导出这些基本方程有二种途径：质量守恒和动量守恒；或质量守恒和能量守恒，当研究的物理量是时间 t 和距离 x 的连续函数时，由这两种途径之一导出的基本方程式都是一样的。

贡日（J. A. Cunge 1980）指出，在推导基本方程时，选择质量和动量守恒，或质量和能量守恒定律是相当重要的。当水流泥沙各物理量不连续时（如水跃、踊浪等），两个定律都能使用，但结果不同，且只有一个是正确的。阿波特（Abbott，1979）对这个问题作了详细的论述。

既然质量守恒和动量定律适用于连续和不连续物理量，为使导出的基本方程更具有一般性，在下面的推导中采用这个定律。

一、河床概化

天然河道床面极不规则，通常是高低不平，富有轮廓，尤其是山区河道。这些不规则的河床周界难于认为河床高程 Z_s 是沿流程的连续函数，因此，需进行概化。将原来高低不平 河床（见图 2-1）概化成一个具有一定坡度的光滑曲线，这条曲线的高程代表原始床面的平均情况。

根据泥沙运动特性，可以将河道概化成三个区域。区域 Ⅰ 主要由水流和悬移质或溶解质所占据，区域 Ⅱ 主要由推移质运动占据，区域 Ⅲ 为原始河床，河床变形在这个区域发生。由于河床由不均匀原始河床质和淤积物组成，对于非均匀颗粒，为了模拟河床组成变化，区域 Ⅲ 将进一步分成原始河床和冲淤可动层（见第七章）。

二、断面概化

河道过水断面由于河床形态多变呈不规则状，复式断面更为突出，过水面积，水力半径，阻力等水力要素计算极为不便，需作概化以便在电算中实现。

对任意断面 A 如图 2-2 所示，河床周界可用坐标（y，Z）定义，这样过流断面 A 就可用折

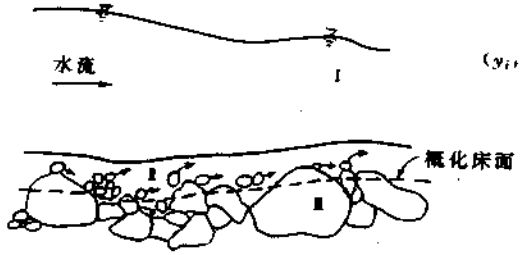


图 2-1

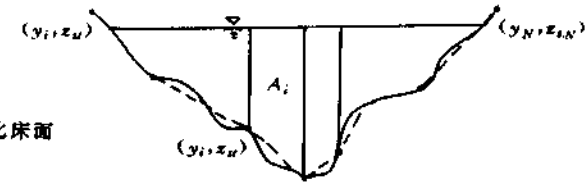


图 2-2

线围成的面积来逼近。

$$A = \sum_{i=1}^{N-1} A_i$$

A_i 为子断面面积，可由坐标（y，Z）定义的梯形面积或三角形面积计算。当定义的坐标数目越多，折线围成的面积就越逼近实际过流断面面积。

第二节　基本方程式

一、积分型

在 $x-t$ 平面上取长为 Δx 的控制体，如图2-3所示。

记被水流和悬移质占据的区域 Ⅰ 面积为 A_c，推移质占据的区域 Ⅱ 的面积为 A_{ch}，则全断面面积 A 为

$$A = A_c + A_{ch} \tag{2-1}$$

其中由水占据的面积为

$$(1-S_V)(A_c+P_{ch}A_{ch})=(1-S_V)A[1-(1-P_{ch})\frac{A_{ch}}{A}] \tag{2-2}$$

式中 P_{ch} 为推移层区域内的孔隙率，即该区域内不被推移质占据部分，S_V 为体积比浓度。

一般地 A_{ch} 远小于 A，则(2-2)式由水占据的面积可取$(1-S_V)A$。

而由悬移质占据的面积为

$$S_V(A_c+P_{ch}A_{ch})\approx S_V A \tag{2-3}$$

则推移质占据的有效面积为

$$(1-P_{ch})A_{ch} \tag{2-4}$$

1. 泥沙连续方程式

泥沙连续方程式可由泥沙连续条件导出。从 t_1 到 t_2 时刻，流入河段 $\Delta x=x_2-x_1$ 的悬移质的净量为

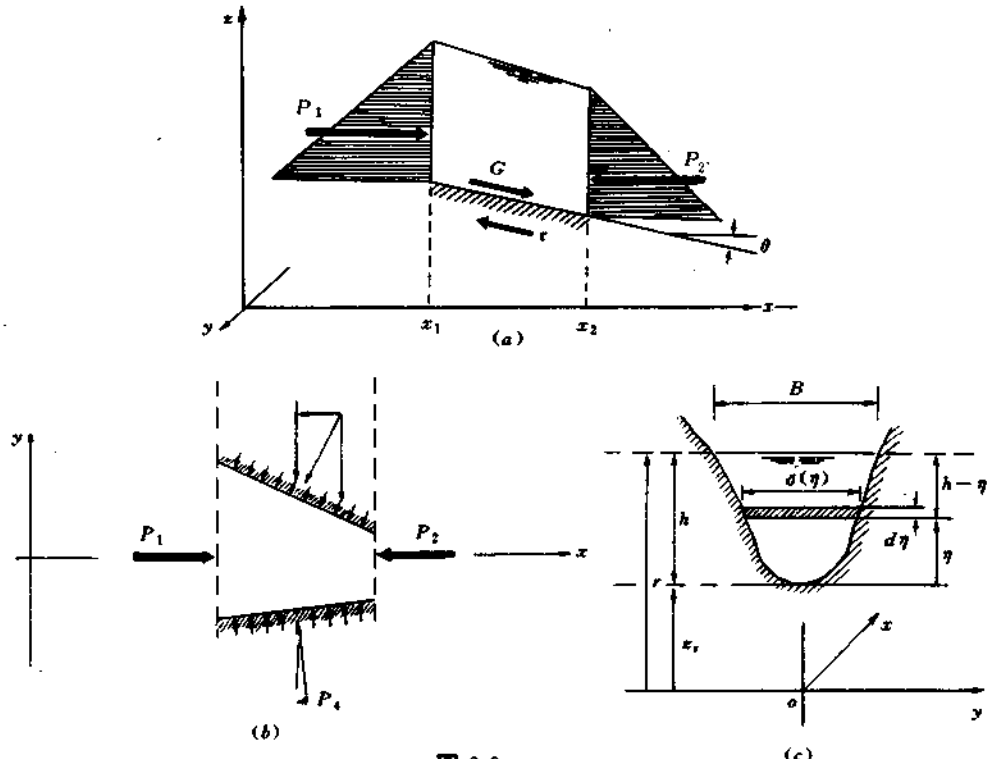


图 2-3

$$\int_{t_1}^{t_2}\{[(V_sS_V - D_x\frac{\partial S_V}{\partial x})(A_c + P_{ch}A_{ch})]x_1 - [(V_sS_V - D_x\frac{\partial S_V}{\partial x})(A_c + P_{ch}A_{ch})]x_2\}dt \quad (2\text{-}5)$$

推移质的净量为

$$\int_{t_1}^{t_2}(G_{Sx_1} - G_{Sx_2})dt \quad (2\text{-}6)$$

这两部分的入沙净量，一部分储存在河段水体内，即

$$\int_{x_1}^{x_2}\{[S_V(A_c + P_{ch}A_{ch})]t_2 - [S_V(A_c + P_{ch}A_{ch})]t_1\}dx$$
$$+ \int_{x_1}^{x^2}\{[(1 - P_{ch})A_{ch}]t_2 - [(1 - P_{ch})A_{ch}]t_1\}dx \quad (2\text{-}7)$$

另一部分堆积在河床上

$$\int_{x_1}^{x_2}\{[(1 - P_S)A_S]t_2 - [(1 - P_S)A_S]t_1\}dx \quad (2\text{-}8)$$

由泥沙连续条件，进入河段 Δx 内的泥沙净量应等于河段内储存量与河床上的堆积量之

和。则有

$$\int_{x_1}^{x_2}\{[S_V(A_e+A_{ch}P_{ch})]t_2-[S_V(A_e+P_{ch}A_{ch})]t_1\}\mathrm{d}x$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\{[(1-P_{ch})A_{ch}]t_2-[(1-P_{ch})A_{ch}]t_1\}\mathrm{d}x$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}\{[(1-P_s)A_s]t_2-[(1-P_s)A_s]t_1\}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\{[(V_S.S_V-D_x\frac{\partial S_V}{\partial x})(A_e+P_{ch}A_{ch})]x_1-[(V_SS_V-D_x\frac{\partial S_V}{\partial x})$$
$$(A_S+P_{ch}A_{ch})]x_2\}\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}(G_{Sx1}-G_{Sx2})\mathrm{d}x \tag{2-9}$$

泥沙连续方程式(2-9)反映了泥沙输移与河床变形的相互关系。上式中 V_S 为悬移质运动速度，本书取等于水流流速 $V_S(x,t)=u(x,t)$，D_x 为悬移质纵向扩散系数，G_S 为推移质总输沙率，P_S 为河床孔隙率。

方程(2-9)是由泥沙连续条件得到的，所以称泥沙连续方程。但在泥沙数学模型中常用这个方程计算河床变形，故又称河床变形方程式。在有些教科书中，河床变形方程有特指含义，故方程(2-9)名为泥沙连续方程较为确切。考虑到平衡输沙模型中用这个方程计算变形，故本书对式(2-9)不加区别地使用泥沙连续方程和河床变形方程两个术语。

2. 净水水流连续方程

在时间间隔 $\Delta t=t_2-t_1$ 进出断面 x_1 和 x_2 的净水量为

$$\int_{t_1}^{t_2}\{[(1-S_V)Q]x_1-[(1-S_V)Q]x_2\}\mathrm{d}t \tag{2-10}$$

这部分净水量全部储存在面积为 A 的河段内和河床上即

$$\int_{x_1}^{x_2}\{[(1-S_V)(A_e+P_{ch}A_{ch})]t_2-[(1-S_V)(A_e+P_{ch}A_{ch})]t_1\}\mathrm{d}x$$
$$+\int_{x_1}^{x_2}[(P_SA_S)t_2-(P_SA_S)t_1]\mathrm{d}x \tag{2-11}$$

由水流连续条件得

$$\int_{t_1}^{t_2}\{[(1-S_V)Q]x_1-[(1-S_V)Q]x_2\mathrm{d}t$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}\{[(1-S_V)(A_e+P_{ch}A_{ch})t_2]-[(1-S_V)(A_e$$
$$+P_{ch}A_{ch})]t_1\}\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}[(P_SA_S)t_1-(P_sA_s)_{t2}]\mathrm{d}x \tag{2-12}$$

这里 Q 为挟沙水流流量。

3. 水沙连续方程

水沙连续方程式考虑水流和泥沙进出河段 Δx 的总净量等于河段内的总储存量，可对式(2-9)和(2-12)求和得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\{[(1-S_V)Q]x_1-[(1-S_V)Q]x_2\}\mathrm{d}t$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\{[(V_S S_V - D\frac{\partial S_V}{\partial x})(A_c + P_{ch}A_{ch})]x_1 - [(V_S S_V - D_X\frac{\partial S_V}{\partial X})$$

$$(A_c + P_{ch}A_{ch})]x_2\}\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}(G_{Sx_1} - G_{Sx_2})\mathrm{d}t$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}(A_{t2} - A_{t1})\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2}(A_{S2} - A_{S1})\mathrm{d}x \tag{2-13}$$

4. 运动方程式

由物理学可知，在时段 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内，动量的总变化等于各外力作用的总和。也就是说，在 x 方向的动量守恒要求在时段 Δt 内控制体的动量变化应等于进入控制体的净动量与在同一时间间隔内作用于同一控制体所有外力之和。

控制体积元内包含着水，悬移质和推移质，在时段 Δt 内该控制体的动量变化为

$$\int_{x_1}^{x_2}[(\rho_c Q + \rho_s G_s)t_2 - (\rho_c Q + \rho_s G_s)t_1]\mathrm{d}x \tag{2-14}$$

式中，ρ_c 和 ρ_s 分别为挟沙水流密度和泥沙密度。

由物理学得知，x 方向单位时间的动量为

$$mv = \rho_c Q\frac{Q}{A} = \rho_c\frac{Q^2}{A}$$

在时间间隔 Δt 内，进入控制体的净动量总量为

$$\int_{t_1}^{t_2}[(\rho_c\frac{Q^2}{A})x_1 - (\rho_c\frac{Q^2}{A})x_2]\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\{[\rho_c\frac{G^2}{(1-P_{ch})A_{ch}}]x_1 - [\rho_c\frac{G^2}{(1-P_{ch})A_{ch}}]x_2\}\mathrm{d}t \tag{2-15}$$

作用在控制体上沿水流方向的外力：有重力，静水压力和阻力以及因过水面积沿程变化引起的侧向压力。

压力：假定作用在过水断面上的压力为静水压力分布，则全断面上的总压力为

$$g\int_0^{h(x)}\rho_c(\eta)[h(x) - \eta]\sigma(x,\eta)\mathrm{d}\eta$$

式中 $h(x)$ 为某一确定断面的水深，$\sigma(x,\eta)$ 为高程 η 对应的河宽，η 为竖向积分变量，g 重力加速度。在时段 Δt 作用的总压力为

$$g\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{h(x)}\rho_c(\eta)[h(x) - \eta]\sigma(x,\eta)\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}t \tag{2-16}$$

或写成

$$g\int_{t_1}^{t_2}I_1\mathrm{d}t \tag{2-17}$$

这里

$$I_1 = \int_0^{h(x)}\rho_c(\eta)[h(x) - \eta]\sigma(x,\eta)\mathrm{d}\eta$$

则作用在控制体的总压力差为

$$g\int_{t_1}^{t_2}(I_1x_1 - I_1x_2)\mathrm{d}t \tag{2-18}$$

侧向压力：对于非棱柱体河道，过水断面沿程逐渐展宽或收缩将引起周界对控制体的侧向压力，由水力学可知，侧向压力可表达成

$$g\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} I_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{2-19}$$

式中

$$I_2 = \int_0^{h(x)} \rho_c(\eta)[h(x)-\eta](\frac{\partial\sigma(x,\eta)}{\partial x})_{h=h_0}\mathrm{d}\eta \tag{2-20}$$

当河道在 x_1 和 x_2 距离突然展开，式(2-19)是不适用的，在这种情况下，还应考虑因突然展开引起的附加压力，这里不作考虑，必要时，可参考有关文献。

重力：假定控制体沿 x 方向有一定的倾角，且认为倾角很小，满足

$$J_0 = -\frac{\partial Z_s}{\partial x} = \mathrm{tg}\alpha \approx \sin\alpha \tag{2-21}$$

这样，Δt 时段内控制体因重力作用引起的沿 x 方向的分力为：

$$g\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \rho_c A J_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{2-22}$$

摩阻力：摩阻力可用作用于控制体上的河岸与河床上的阻力表示，假定不恒定挟沙水流运动的阻力可按恒定流运动的阻力形式表示，则在时段 Δt 内河段长为 Δx 的总阻力可表达成

$$g\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \rho_c A J_f \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{2-23}$$

这里 J_f 为挟沙水流能坡。

依据动量守恒定律，则沿 x 方向作用的力应等于时段 Δt 内动量的变化，可得挟沙水流运动方程式：

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{x_2}[(\rho_c Q + \rho_s G_s)t_2 - (\rho_c Q + \rho_s G_s)t_1]\mathrm{d}x \\
&= \int_{t_1}^{t_2}[(\rho_c \frac{Q^2}{A})_{x_1} - (\rho_c \frac{Q^2}{A})_{x_2}]\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}[(\frac{\rho_c G_s^2}{(1-P_{ch})A_{ch}})_{x_1} \\
&- (\rho_c \frac{G_s^2}{(1-P_{ch})A_{ch}})_{x_2}]\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} g[(I_1)_{x_1} - (I_1)_{x_2}]\mathrm{d}t \\
&+ \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} g\rho_c I_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}[\rho_c g(A_c + P_{ch}A_{ch}) \\
&+ \rho_s(1-P_{ch})A_{ch}]J_0\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}[\rho_c g(A_c + P_{ch}A_{ch}) \\
&+ \rho_s(1-P_{ch})A_{ch}]J_f\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{2-24}$$

式(2-9)、(2-12)、(2-13)、(2-24)为一维非恒定挟沙水流运动积分形基本方程式。由推导可知，四个基本方程式不全是独立的，除运动方程式(2-24)外，水流连续方程(2-12)、泥沙连续方程(2-9)和水沙连续方程(2-13)这三个方程中只有两个方程是独立的，其中任何一个都可由另外两个推导得出，应用时，可在这三个方程中根据问题任取两个。

二、微分式

在推求积分型基本方程式时，我们不要求各物理量是连续可微的，仅要求控制体两断面间

的间距足够小，这个特征使得在应用于解决工程问题时降低了对方程式的要求，许多数学模型在采用有限差分法求解时均使用积分型方程式(Liggett，1975)。

但是积分型方程式在分析各物理量的变化时没有微分型那样直观，如果我们在上两节作出概化的基础上假定各物理量是连续可微的，那么可从积分型方程直接导出微分方程式。对任一可微函数 $f(x,t)$，利用台劳级数展开得

$$(f)t_2 = (f)t_1 + (\frac{\partial f}{\partial t})t_1\Delta t + \frac{1}{2!}(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2})t_1\Delta t^2 + \cdots$$

$$(f)x_1 = (f)x_1 + (\frac{\partial f}{\partial x})x_1\Delta x + \frac{1}{2!}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})x_1\Delta x^2 + \cdots$$

当 Δt 和 Δx 趋于零时可写出

$$\lim_{t_2\to t_1}\int_{x_1}^{x_2}[(f)t_2 - (f)t_1]dx = \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial f}{\partial t}dtdx$$

$$\lim_{x_2\to x_1}\int_{t_1}^{t_2}[(f)x_1 - (f)x_2]dx = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial f}{\partial x}dxdt \qquad (2\text{-}25)$$

这样，泥沙连续方程式(2-9)成为

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}[\frac{\partial S_V(A_e + P_{ch}A_{ch})}{\partial t} + \frac{\partial(1-P_{ch})A_{ch}}{\partial t} + \frac{\partial(1-P_s)A_s}{\partial t}$$

$$+ \frac{\partial(V_sS_V - D_x\frac{\partial S_V}{\partial x})(A_e + P_{ch}A_{ch})}{\partial x} + \frac{\partial G_s}{\partial x}]dtdx = 0$$

这个积分值为零，必须被积函数也为零，即

$$\frac{\partial S_V(A_e + P_{ch}A_{ch})}{\partial t} + \frac{\partial(1-P_{ch})A_{ch}}{\partial t} + \frac{\partial(1-P_S)A_s}{\partial t}$$

$$+ \frac{\partial(V_sS_V - D_x\frac{\partial S_V}{\partial x})(A_e + P_{ch}A_{ch})}{\partial x} + \frac{\partial G_s}{\partial x} = 0 \qquad (2\text{-}26)$$

这就是微分形式的泥沙连续方程式。同理可写出净水水流连续方程式

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}[\frac{\partial(1-S_V)Q}{\partial x} + \frac{\partial(1-S_V)(A_e + P_{ch}A_{ch})}{\partial t} + \frac{\partial P_sA_s}{\partial t}]dtdx = 0 \qquad (2\text{-}27)$$

则微分形式的净水水流方程连续方程为

$$\frac{\partial(1-S_V)Q}{\partial x} + \frac{\partial(1-S_V)(A_e + P_{ch}A_{ch})}{\partial t} + \frac{\partial\rho_sA_s}{\partial t} = 0 \qquad (2\text{-}28)$$

由(2-13)导出的微分形式的水沙连续方程式为

$$\frac{\partial(1-S_V)Q}{\partial x} + \frac{\partial(V_sS_V - D_x\frac{\partial S_V}{\partial x})(A_e + P_{ch}A_{ch})}{\partial x} + \frac{\partial G_s}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A_s}{\partial t} = 0 \qquad (2\text{-}29)$$

而运动方程式(2-24)的微分形成为

$$\frac{\partial\rho_eQ}{\partial t} + \frac{\partial\rho_sG_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_e\frac{Q^2}{A}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{G_s^2}{(1-P_{ch})A_{ch}})$$

$$+ g(\frac{\partial I_1}{\partial x} - I_2) = g[\rho_e(A_e + P_{ch}A_{ch}) + \rho_s(1-P_{ch})A_{ch}](J_0 - J_f) \qquad (2\text{-}30)$$

第三节　方程系的处理

在上节导出的一维不恒定挟沙水流基本方程式中，同时考虑了悬移质运动，包含有悬移质运动速度 V_s，推移质运动层内的孔隙率 P_{ch} 和河床孔隙率 P_s，方程系的实际运用比较难，且目前对这些量的研究还很不够，需作些近似处理。本书在没有特别说明的地方，均将 P_{ch} 和 P_s 看为常数。

悬沙运行速度 V_s 可近似地认为与水流运动速度相同，即 $V_s = u$；且可认为推移质运动层面积远小于过水断面面积 $A_{ch} < A$，例如，未经整治的法国罗纳河，这个面积比值约为 $10^{-3} - 10^{-5}$ 量级。考虑到式(2-1)和(2-2)，连续方程(2-26)、(2-28)、(2-29)可写成：

泥沙连续方程

$$\frac{\partial S_V A}{\partial t} + (1 - P_s)\frac{\partial A_s}{\partial t} + \frac{\partial S_V Q}{\partial x} + \frac{\partial G_s}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x} = 0 \tag{2-31}$$

净水水流连续方程

$$\frac{\partial(1 - S_V)Q}{\partial x} + \frac{\partial(1 - S_V)A}{\partial t} + P_s\frac{\partial A_s}{\partial t} = 0 \tag{2-32}$$

水沙连续方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial G_s}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A_s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x} = 0 \tag{2-33}$$

一般来说，推移质数量也远比水量要小。例如法国罗纳河河宽250m，河床比降为0.0007，平均流量为3000m³/s，推移质输沙率为0.062m³/s，约为流量的10^{-4}～10^{-5}量级，这样，运动方程式(2-30)中因推移质运动引起的动量变化项与水流引起的项相比可以忽略。又考虑到式(2-30)中右端项可近似地有

$$\rho_s(A_s + P_{ch}A_{ch}) + \rho_s(1 - P_{ch})A_{ch} = \rho_s A\left[1 - \frac{\rho_s - \rho_s}{\rho_s}\frac{(1 - P_{ch})A_{ch}}{A}\right] \approx \rho_s A$$

运动方程(2-30)可写成

$$\frac{\partial \rho_s Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_s\frac{Q^2}{A}\right) + g\left(\frac{\partial I_1}{\partial x} - I_2\right) = \rho_s g A(J_0 - J_f) \tag{2-34}$$

方程(2-34)包含有压力差积分项 I_1 和 I_2，应用十分不便，让我们将其改写成另一形式，仍然假定各物理量是可微的，对式(2-17)关于 x 求导得

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{h(x)} \rho_s(\eta)[h(x) - \eta]\sigma(x, y)d\eta \tag{2-35}$$

使用 Leibiz 积分定理，并注意到

$$\int_0^{h(x)} \rho_s(\eta)[h(x) - \eta]\sigma(x, y)d\eta = \rho_s A$$

由式(2-20)，则得

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = \rho_s A\frac{\partial h}{\partial x} + I_2 \tag{2-36}$$

将(2-36)代入(2-34)可消去因断面变化引起的侧向压力项得另一形式的运动方程

$$\frac{\partial \rho_s Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_s\frac{Q^2}{A}\right) + g\rho_s A\frac{\partial h}{\partial x} = \rho_s g A(J_0 - J_f) \tag{2-37}$$

式中 h 为断面水深，又因 $h = Z - Z_s$，Z 为自由水位，Z_s 为床面高度，则

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial x}+J_{\circ}$$

运动方程式(2-37)的另一表达形式为：

$$\frac{\partial \rho_{s} Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_{s} \frac{Q^{2}}{A}\right)+g \rho_{s} A \frac{\partial Z}{\partial x}+g \rho_{s} A J_{f}=0 \tag{2-38}$$

这是一个实际中常用的基本方程形式。考虑到 $\rho_{s}=(\rho_{s}-\rho) S_{V}+\rho$，对 ρ_{s} 关于 x 和 t 求导并求和后按对流型写出得

$$\frac{\partial \rho_{s}}{\partial t}+\frac{Q}{A} \frac{\partial \rho_{s}}{\partial x}=(\rho_{s}-\rho)\left(\frac{\partial S_{V}}{\partial t}+\frac{Q}{A} \frac{\partial S_{V}}{\partial x}\right)$$

若将挟沙水流能坡 J_{f} 按清水水流能坡公式的形式写出

$$J_{f}=-\frac{Q^{2}}{K^{2}} \tag{2-39}$$

式中 K 为挟沙水流流量模数。记令 J 为水面比降

$$J=-\frac{\partial Z}{\partial x}$$

运动方程式(2-38)又可写在

$$J=\frac{Q^{2}}{K^{2}}+\frac{1}{g A} \frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{1}{g A} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^{2}}{A}\right)+\frac{Q}{\rho_{s} g A}\left(\frac{\partial S_{V}}{\partial t}+\frac{Q}{A} \frac{\partial S_{V}}{\partial x}\right) \tag{2-40}$$

该式与清水非恒定流圣维南运动方程式不同之处，在于增加了右边第四项的悬移质输移项。当水流挟沙增加时，此项为正，挟沙水流水面比降加大；水流挟沙变小时，此项为负，比降变小，一般说来，挟沙量 QS_{V} 远比流量 Q 为小，第四项引起的水面比降变化与第二和第三项相比是一个小量，认识这些特性对建立挟沙水流数学模型和数值方法是有用的(详见第七章)。

第四节　基本方程的几种常用形式

在上面推导的方程式中，是以 Q、A、A_{s} 的形式给出的。在解决实际工程问题中，根据问题的特点，往往须采用各种不同形式的方程式。我们从泥沙连续方程(2-31)，水沙连续方程(2-33)和运动方程(2-38)出发，给出几种常用形式的基本方程组。

一、$Q(x,t)$，$h(x,t)$，$S_{s}(x,t)$，$Z_{s}(x,t)$变量型

泥沙连续方程程(2-31)可写成

$$\frac{(1-P_{s})}{A} \frac{\partial A_{s}}{\partial t}+\frac{S_{V}}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\frac{\partial S_{V}}{\partial t}+\frac{Q}{A} \frac{\partial S_{V}}{\partial x}+\frac{1}{A} \frac{\partial G_{s}}{\partial x}=\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} A D_{x} \frac{\partial S_{V}}{\partial x} \tag{2-41}$$

运动方程(2-38)可写成

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^{2}}{A}\right)+\left(\frac{\rho_{s}-\rho}{\rho_{s}}\right) Q\left(\frac{\partial S_{V}}{\partial t}+\frac{Q}{A} \frac{\partial S_{V}}{\partial x}\right)+g A \frac{\partial Z}{\partial x}+g A J_{f}=0 \tag{2-42}$$

变量 $A(x,t)$，$A_{s}(x,t)$ 可由下式代替

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial A}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t}=B \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial A_{s}}{\partial t}=\frac{\partial A_{s}}{\partial Z_{s}} \frac{\partial Z_{s}}{\partial t}=B_{s} \frac{\partial Z_{s}}{\partial t}$$

这样以 Q，h，S 和 Z_{s} 为变量的方程组为

$$\frac{(1-P_{s}) B}{A} \frac{\partial Z_{s}}{\partial t}+\frac{S_{V}}{A}\left(B \frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\frac{\partial S_{V}}{\partial t}+\frac{Q}{A} \frac{\partial S_{V}}{\partial x}+\frac{1}{A} \frac{\partial G_{s}}{\partial x}=\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} A D_{x} \frac{\partial S_{V}}{\partial x} \tag{2-43}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial G_s}{\partial x}+B\frac{\partial h}{\partial t}+B_s\frac{\partial Z_s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x} \tag{2-44}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q^2}{A})+Q(\frac{\rho_s-\rho}{\rho_s})(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x})+gA\frac{\partial h}{\partial x}=gA(J_0-J_f) \tag{2-45}$$

式中 $B=B(h)$ 为水面宽，$B_s=B_s(Z_s)$ 为河床变形宽度，Z_s 为河床高程。

二、$u(x,t)$，$h(x,t)$，$S_v(x,t)$，$Z_s(x,t)$变量型

变量 $Q=uA(h)$ 由下式代替

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=A\frac{\partial u}{\partial x}+u(B\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=A\frac{\partial u}{\partial t}+uB\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q^2}{A})=\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}$$

$$=\frac{2Q}{A}(A\frac{\partial u}{\partial x}+uB\frac{\partial h}{\partial x}+u\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数})-\frac{Q^2}{A^2}(B\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数})$$

$$=2Q\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2Q^2B}{A^2}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{2Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数}-\frac{Q^2B}{A^2}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数}$$

$$=2Q\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2Q^2B}{A^2}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{Q^2B}{A^2}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数}$$

以 u,h,S_V 和 Z_s 为变量的方程组则可写成

$$\frac{(1-P_s)B_s}{A}\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{S_VB}{A}(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial x})+S_V\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+\frac{S_VQ}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数}+\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x}+\frac{1}{A}\frac{\partial G_s}{\partial x}$$
$$=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}AD_X\frac{\partial S_V}{\partial x} \tag{2-46}$$

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{QB}{A}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{Q}{A}\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数}+\frac{\partial G_s}{\partial x}+B\frac{\partial h}{\partial t}+B_s\frac{\partial Z_s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x}$$

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial x})+B_s\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{\partial G_s}{\partial x}+\frac{Q}{A}\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数}=\frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x} \tag{2-47}$$

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{QB}{A}\frac{\partial h}{\partial t}+2Q\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2Q^2B}{A^2}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{Q^2B}{A^2}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数}$$
$$+Q(\frac{\rho_s-\rho}{\rho_s})(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x})+gA\frac{\partial h}{\partial x}=gA(J_0-J_f)$$

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+2Q\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{QB}{A}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{Q^2B}{A^2}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数}$$
$$+Q(\frac{\rho_s-\rho}{\rho_s})(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x})+gA\frac{\partial h}{\partial x}=gA(J_0-J_f)$$

$$A(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{2Q}{A}\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{QB}{A}(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial x})+\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}|_{h=常数}$$
$$+Q(\frac{\rho_s-\rho}{\rho_s})(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x})+gA\frac{\partial h}{\partial x}=gA(J_0-J_f)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{2Q}{A}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{QB}{A^2}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}\Big|_{h=常数}$$

$$+\frac{Q}{A}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho_s}\right)\left(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x}\right)+g\frac{\partial h}{\partial x}=g(J_0-J_f) \tag{2-48}$$

三、$u(x,t)$，$Z(x,t)$，$S_V(x,t)$和$Z_s(x,t)$变量型

因 $h=Z-Z_s$，

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial Z_s}{\partial t};\quad \frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial Z_s}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial t}-\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{Q}{A}\frac{\partial Z_s}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Z}{\partial x}-\left(\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Z_s}{\partial x}\right)$$

则以 u,z,S_V 和 Z_s 为变量的方程组为

$$\frac{(1-P_s)B_s}{A}\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{S_VB}{A}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Z_s}{\partial x}\right)\right]$$

$$+S_V\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{S_VQ}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}\Big|_{z=常数}+\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x}+\frac{1}{A}\frac{\partial G_s}{\partial x}$$

$$=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x} \tag{2-49}$$

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Z_s}{\partial x}\right)\right]$$

$$+B_s\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{\partial G_s}{\partial x}+\frac{Q}{A}\frac{\partial A}{\partial x}\Big|_{z=常数}=\frac{\partial}{\partial x}\left(AD_s\frac{\partial S}{\partial x}\right) \tag{2-50}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{2Q}{A}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{QB}{A^2}\left[\left(\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Z_s}{\partial x}\right)\right]$$

$$+\frac{Q^2}{A^3}\frac{\partial A}{\partial x}\Big|_{z=常数}+\frac{Q}{A}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho_s}\right)\left(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x}\right)+g\frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$+gJ_f=0 \tag{2-51}$$

四、清水水流非恒定 $u(x,t)$、$h(x,t)$型圣维南方程式

河道数学模型包括清水水流模型(简称水流模型)，常用于研究洪水波的演进问题。清水非恒定水流基本方程式也可由方程(2-46)、(2-47)、(2-48)导出。所谓清水亦可理解为河道水流挟带极少数量泥沙，河床周界不发生变形，方程(2-46)可取消，方程(2-47)、(2-48)中有关泥沙和河床高程变化项也可取去，并略去运动方程中一些小量项得：

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{A}{B}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{B}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_{h=常数}=0 \tag{2-52}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}=g(J_0-J_f) \tag{2-53}$$

本书常用这个方程组研究有关数值方法的特性问题。

上面仅给出了四种常用形式，其它形式的方程系读者可自行导出。上面导出的不同变量的方程系不只是数学上的推演，它反映了使用不同变量的方程的表达式是复杂的，这对于解决不同问题使用不同方程组在选用数值方法上是有考虑的。人们总希望选择的数值方法对求解问题尽可能有足够精度，而保证足够精度与变量的形式有关，选择变量的形式又与研究的物理特性有关，例如，对于窄深而过水断面沿程变化不大的河道，选择 u,h,S_V,Z_s 较选用 Q,A,S_V,A_s 为佳，相反，对河床形态复杂，底坡和过水面积沿程宽窄多变，使用后者较切合实际。

从数学角度讲，如果物理量是可微的，那么积分型基本方程(2-9)、(2-13)、(2-24)和微分方程(2-26)、(2-28)、(2-30)应该是等价的，否则，两种形式的方程组是不尽相同的。贡日(1980)认为，对于存在不连续解的情形，如水跃，不宜用微分型方程系，但可采用积分型方程系，而对于那些突然上升或降落骤变水流，两种形式的方程式均不尽适用，因为此时水流的竖向加速作用不可忽略。

参 考 文 献

[1] Cunge, J. A., Holly, Jr. F. M., Verwey. A., Practical aspects of computational river hydraulics, Pitman, London, 1980.

[2] Abbott, M. B, Computational hydraulics; Elements of the theory of free surface flood, Pitman, London, 1979.

[3] Abbott. J, A. and Cunge, J. A., Numerical methods of solutiln of the unsteady flow equations, chapter 4 of Unsteady Flow in Oqen Channel, Water Resources Pablications, Fort Collins, Colorado, 1975.

[4] 谢鉴衡主编，河流模拟，水利电力出版社，1988。

[5] Yang Guolu, Modèle de transport complèt en rivière avec granulométrie étendue, Thèse de L'Université Joseph Fourier-Grenoble. I. 1989.

[6] 张瑞瑾主编，河流泥沙动力学，水利电力出版社1988。

[7] 清华大学水力学教研组编，水力学，高等教育出版社，1981。

[8] 梁昆森编，数学物理方法，人民教育出版社，1960。

[9] 武汉水利电力学院编，水力学，水利电力出版社，1960。

第三章　常用辅助方程及模型分类

第一节　常用辅助方程

上一章在作出一些基本假定的基础上导出了水流泥沙运动基本方程式，这些方程式反映了各物理量之间的最基本的联系，是模型的主体部分，是建立河道数学模型的理论基础。然而，由于方程中包含的物理量个数一般不等于独立方程的个数，方程本身不能自我封闭而不能求解，只有当方程中的某些物理量诸如能坡、糙率、含沙量和推移质输沙率等，完全被确定之后，建模才是可能的。例如，在建立定床水流数学模型采用圣维南方程(2-52)、(2-53)时，要使两个方程(连续方程式，运动方程式)定量地确定流量和过水面积(或流速和水位等)的变化过程，能坡 J_f 是必须事先确定的。实践证明，有关物理量的合理确定不仅是建模所必需，同时也是保证数学模型质量的关键问题之一。因此，在建模中要慎重考虑。

一、水流阻力

在第二章导出基本方程式时，我们形式上用单位河长上水体的重量 $\rho_s gA$ 与 J_f 的乘积来表示河道周界对水流的阻力，能坡 J_f 的确定不管是从河道水力学还是从河流动力学角度去考虑都是一个难题，目前只能用经验关系来确定，这些经验公式很多，本书只能介绍一些常用的计算公式。

冲积河流的阻力主要包括河槽阻力、河岸阻力、沙粒阻力、沙坡阻力以及人工建筑物的外加阻力等，这些阻力的综合作用反映出水流机械能耗损的多少，进而表现为各水流泥沙要素的变化，诸如流量，过水面积，河床变形面积等，可以认为表征能量耗损大小的能坡与诸物理量有关，即

$$J_f=J_f(Q,A,A_s,P_k,d_k\cdots) \tag{3-1}$$

式中 P_k 和 d_k 分别为河床组成和沙粒粒径。要正确确定(3-1)关系式目前是比较困难的，只能借助于半理论半经验的办法估算。

1. 几个常用公式

从河道水力学得知，较常用的经验公式有如下几种：

史觉克(Strickler)公式

$$J_f=\frac{Q^2}{K_s^2A^2R^{4/3}} \tag{3-2}$$

式中 R 为水力半径，K_s 为史觉克系数。

曼宁(Manning)公式

$$J_f=\frac{n^2Q^2}{A^2R^{4/3}} \tag{3-3}$$

式中 n 为曼宁系数。

谢才公式

$$J_f=\frac{Q^2}{C^2A^2R} \tag{3-4}$$

式中C为谢才系数。这三个公式是非常相近的，其差别仅仅表现在各式中的系数上，比较史觉克公式(3-2)和谢才公式(3-4)其系数关系为

$$C=K_s R^{1/6} \tag{3-5}$$

而曼宁系数与史觉克系数满足

$$K_s=\frac{1}{n} \tag{3-6}$$

曼宁系数与谢才系数之间关系则为

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6} \tag{3-7}$$

由此可以看出，这些公式是可以相互转换的，且各家公式中的系数只能通过实测资料取得。

另一个是达西-魏斯巴赫公式

$$J_f=\frac{f}{8g}\frac{Q^2}{A^2R} \tag{3-8}$$

达西-魏斯巴赫阻力系数f与曼宁系数、谢才系数的关系分别为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{n^2 8g}R^{1/3} \tag{3-9}$$

和

$$f=\frac{C^2}{8g} \tag{3-10}$$

工程上较为常用的另一个公式是对数公式，当床面粗糙时

$$\frac{U}{U_*}=5.75\lg\left(\frac{R}{K_s}\right)+6.25 \tag{3-11}$$

当床面光滑时

$$\frac{U}{U_*}=5.75\lg\left(\frac{RU_*}{v}\right)+3.25 \tag{3-12}$$

式中$U_*=\sqrt{gRJ_f}$。在沙粒阻力起决定作用下，从公式(3-11)出发，我们可确定关系式(3-1)的具体形式为

$$J_f=\frac{Q^2}{gA^2R\left[5.75\lg\left(\frac{R}{K_s}\right)+6.25\right]^2} \tag{3-13}$$

将式(3-13)与曼宁公式相比较，得以下关系

$$n=\frac{1}{\sqrt{g}\left[5.75\lg\left(\frac{R}{K_s}\right)+6.25\right]R^{1/6}} \tag{3-14}$$

式(3-14)仅反映两者之间的数学关系，由于公式的出处和考虑的侧重面不同，两者是有实质性区别的。

上述这些公式的结构形式都是一样的，在一维数学模型中，用于计算能坡J_f不在于这些公式的选择，重要的则是合理确定公式中的阻力参数。通常，为了建模的方便，这些公式通过系数转换可同时使用在同一模型中。

2. 综合糙率与不同周界上的糙率处理

作用于明渠水流的不同周界上的阻力是不同的，如河岸阻力，河底阻力，它们因周界粗糙分布不一，阻力系数是有差别的，而这些阻力对模型的运行起重要作用，因此有必要区别开来。

综合糙率的求法和不同周界上的糙率划分的方法很多，较有代表性的是爱因斯坦(H. A. Einstein)提出的水力半径分割法和巴甫洛夫斯基、姜国干、梅叶-彼得等提出的能坡分割法，虽然这些方法在理论上还存在问题，但仍不失为目前建模中可用于计算综合阻力的途径，下面作些简单介绍。

(1)水力半径分割法：爱因斯坦提出的水力半径分割法认为同一断面槽岸上的能坡是一样的，仅仅是河岸与深槽的水力半径不同，进而河岸切应力与河底切应力不同，即

$$\tau_b=\gamma R_b J_f \tag{3-15}$$

$$\tau_w=\gamma R_w J_f$$

总切应力根据阻力叠加原理有

$$\tau_o X=\tau_b X_b+\tau_w X_w \tag{3-16}$$

式中：τ_o、τ_b、τ_W 为河床平均、河底和河岸切应力，X、X_b、X_W 为河床，河底及河岸湿周，R_b 和 R_w 分别为相应于河底阻力及河岸阻力的水力半径，即

$$R_b=\frac{A_b}{X_b} \tag{3-17}$$

$$R_w=\frac{A_w}{X_w} \tag{3-18}$$

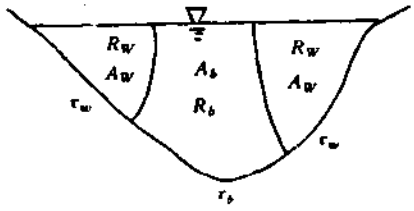


图 3-1

这里 A_b 和 A_w 如图 3-1 所示分别相应于切应力 τ_b 和 τ_w 的面积。

将(3-15)代入(3-16)得

$$RX=R_b X_b+R_w X_w \tag{3-19}$$

假定全断面上的流速 u 保持不变，使用曼宁公式(3-3)有

$$J_f=\frac{Q_b^2 n_b^2}{A_b^2 R_b^{4/3}} \tag{3-20}$$

$$J_f=\frac{Q_w^2 n_w^2}{A_w^2 R_w^{4/3}} \tag{3-21}$$

式中 n_b，n_w 为河底、河岸糙率；Q_b 和 Q_w 为通过面积 A_b 和 A_w 的流量。

将(3-20)、(3-21)代入(3-19)后可得

$$n_o=(n_b^{3/2}\frac{X_b}{X}+n_w^{3/2}\frac{X_w}{X})^{2/3} \tag{3-22}$$

n 为综合糙率系数，反映了断面上河底与河岸阻力分布不同的影响，从式(3-22)可以看出，对于宽浅型河道，$X_w/X << 1$，$n_o = n_b$，河底糙率起着决定作用。

由阻力叠加原理导出的式(3-22)求综合糙率系数 n 是以湿周为权重进行计算的，实际应用上，在建立一维数学模型中，也常有用流量叠加原理导出的综合糙率系数计算式，在这种情况下，由连续条件

$$Q=Q_w+Q_b \tag{3-23}$$

将式(3-20)、(3-21)代入(3-23)得如下关系

$$n_o=\left[\frac{AR^{2/3}}{\frac{1}{n_b}A_b R_b^{2/3}+\frac{1}{n_w}A_w R_w^{2/3}}\right] \tag{3-24}$$

(2)能坡分割法：能坡分割法则认为在同一断面上河岸与河槽的能坡消耗是不同的，即取

$$\tau_b=\gamma RJ_{fb}$$
$$\tau_w=\gamma RJ_{fw} \tag{3-25}$$

将(3-25)代入(3-16)得

$$J_fX=J_{fb}X_b+J_{fw}X_w \tag{3-26}$$

同样运用曼宁公式

$$J_{f_b}=\frac{Q^2n_b^2}{A^2R^{4/3}}$$
$$J_{f_w}=\frac{Q^2n_w^2}{A^2R^{4/3}} \tag{3-27}$$

代入(3-26)可求得基于能坡分割法的综合糙率系数为

$$n_o=(n_b^2\frac{X_b}{X}+n_w^2\frac{X_w}{X})^{1/2} \tag{3-28}$$

比较式(3-22)和(3-28),形式上表现为糙率系数的方次不同,但实质上的差异是很大的,因为两者的依据有很大差别,何者更为合理,目前存在许多争议,必要时可参见河道水力学有关论著。

上述介绍的两种分割方法,着重把河底糙率和河岸糙率区别开来,对于定床水流数学模型来说已可以了,但对于动床挟沙水流数学模型而言,还应该进一步考虑河床在发生变形的过程中的阻力变化问题,因为河床在发生变形时,床面粗糙程度和床面形态将时刻发生变化。

3. 动床河床阻力计算

从河流动力学得知,随着水流强度的增加,由泥沙组成的床面由静止的平整床面发展到出现沙纹、沙波的不平整床面,显然,这种床面形态的变化,各阶段的阻力是不同的。就同一阶段而言,由于床面组成和沙纹、沙波尺度的差别,其阻力也是不同的。若床面组成颗粒粗,沙波尺度较小,沙粒阻力就比较突出,若颗粒细,沙波尺度大,沙波阻力就居于主要地位,这两者对比关系的大小对水流的影响是不同的。因此,动床阻力就要反映这两种阻力的消长作用。

河床阻力中的沙粒阻力与沙波阻力的划分,原则上可参照上一节划分滩槽阻力方法进行。按照阻力的叠加原理,可写出

$$\tau_b=\tau'_b+\tau''_b \tag{3-29}$$

τ_b、τ'_b、τ''_b 分别为河床切应力,沙粒切应力和沙波切应力。采用爱因斯坦的阻力分割法,沙粒阻力和沙波阻力表示成

$$\tau'_b=rR'_bJ_f$$
$$\tau''_b=rR''_bJ_f \tag{3-30}$$

将(3-30)代入(3-29)得

$$R_b=R'_b+R''_b \tag{3-31}$$

R_b、R'_b、R''_b 分别为相应于河底综合阻力、沙粒阻力及沙波阻力的水力半径,具体计算时,爱因斯坦认为床面出现沙波之后,寇利根的阻力公式仍然可用来计算沙粒阻力,只要水力半径取沙粒水力半径即可,即

$$\frac{U}{U_*}=5.75\lg(\frac{R'}{K_s})+6.25 \tag{3-32}$$

式中 U_* 相应于沙粒阻力的摩阻流速,$U_*=\sqrt{gR'_bJ_f}$ 。式(3-32)仅适用于粗糙床面,如果是光滑床面,式中的尾项系数 6.25 改为 3.25,而且式中 K_s 应用 v/u_* 代替。

用公式(3-31)、(3-32)计算河床水力半径 R_b，还须先确定沙波阻力水力半径 R_b''。爱因斯坦认为，沙波阻力系数 f'' 与水流强度参数

$$\psi=\frac{(\gamma_s-\gamma)d_{35}}{\gamma R_b J_f} \tag{3-33}$$

有关，考虑到

$$U/U''_*=\sqrt{8/f''} \tag{3-34}$$

故应存在 $U/U''_*\sim\psi$ 的函数关系。爱因斯坦整理实测资料得到如下图 3-2 所示的曲线。

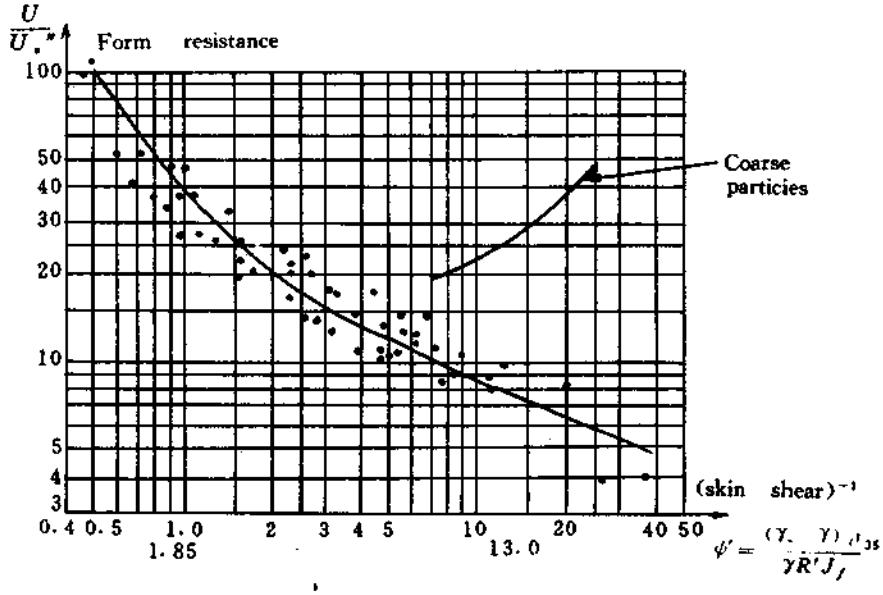


图 3-2 $\frac{U}{U''_*}\sim\psi'$ 关系图

数学上可以将图(3-2)中的曲线写成以下函数形式

$$\frac{U}{U''_*}=\sqrt{\frac{8}{f''}}=\frac{U}{U''_*}(\psi)$$

$$U''_*=\sqrt{gR''_bJ_f} \tag{3-35}$$

这样联解式(3-31)、(3-32)、(3-33)和(3-35)，可得到能坡 J_f 与流量 Q 的关系式

$$\frac{Q}{A}=\sqrt{gR'_bJ_f}\frac{1}{k}\lg(12.27\frac{R'_b}{K_s}) \tag{3-36}$$

$$R'_b=R_b-\frac{Q^2}{gA^2J_f[\frac{U}{U''_*}(\psi')]^2} \tag{3-37}$$

式中 K ——卡门常数。

上式是一个带图表的隐式关系式，只能通过试算求解。在已知河床水力半径 R_b、能坡 J_f 和床沙级配的条件下，先假定一个 R'_b，计算 ψ' 值，由图 3-2 查得 U/U''_*，其次利用(3-32)或(3-

36)计算平均流速，由计算得到的平均流速和查得的U/U_*'值由(3-37)计算R_b'，如果R_b'的计算值与假定值相等，则假定正确，否则须重新假定R_b'再次试算，直到满足为止。

如果需要考虑河岸阻力，在求得沙粒阻力半径以后，断面水力半径依据(3-19)可写成

$$RX=(R'_b+R''_b)X_b+R_wX_w \tag{3-38}$$

这样就可按式(3-36)确定能坡J_f与流量之间的关系。

按爱因斯坦方法计算沙粒阻力，就一维数学模型而言，计算仍然是十分繁重的，恩格隆基于能坡分割的计算法可克服这一缺点。

恩格隆把河床阻力τ_b中沙粒阻力τ'_b和沙波阻力τ''_b按能坡分开为

$$\tau_b=\tau'_b+\tau''_b \tag{3-39}$$

或

$$\gamma R_bJ_f=\gamma R_bJ'_f+\gamma R_bJ''_f \tag{3-40}$$

将式除以$(\gamma_s-\gamma)d$得

$$\theta=\theta'+\theta'' \tag{3-41}$$

式中θ为恩格隆引进的水流强度参数

$$\theta=\frac{\tau}{(\gamma_s-\gamma)d} \tag{3-42}$$

与它相应的θ'和θ''为

$$\theta'=\frac{\tau'}{(\gamma_s-\gamma)d} \tag{3-43}$$

$$\theta''=\frac{1}{2}F_r^2\frac{h_s^2}{\lambda d}\frac{\gamma}{\gamma_s-\gamma} \tag{3-44}$$

式中$F_r=U/\sqrt{gh}$，h_s为沙波高，λ为沙波长，d可取d_{50}或d_{90}，恩格隆到此并没有进一步求解，而是引用相似概念推断θ与θ'有一定的关系，即

$$\theta=\theta(\theta') \tag{3-45}$$

这样，恩格隆通过水槽试验资料点绘了关系式(3-45)如图3-3所示，由图可以看出：

沙波阶段　　$\theta'=0.06+0.4\theta^2$　　(3-46)

过渡段　　$\theta'=0.4\theta^2$　　(3-47)

动平床、驻波　　$\theta'=\theta$　　(3-48)

按恩格隆基于能坡分割法建议确定水流阻力的方法，不用试算，比较简便。恩格隆-汉森[7]认为在允许有5%误差的条件下，对数流速公式(3-32)可由下式指数形式替代

$$\frac{U}{U_*'}=9.45\left(\frac{R'}{K_sd}\right)^{1/8} \tag{3-49}$$

试中$K_s=2.5$，联解

$$U_*'=\sqrt{gR'J_f}$$

$$\theta=\frac{\gamma RJ_f}{(\gamma_s-\gamma)d}$$

和

$$\theta'=\frac{\gamma R'J_f}{(\gamma_s-\gamma)d}$$

$$Q=AU$$

对于沙波$\theta=0.06+0.4\theta^2$，可解得能坡J_f与流量关系为

$$\frac{Q}{A}=\frac{9.45}{K_s^{1/8}}\left(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1\right)^{5/8}\sqrt{gd}J_f^{-1/8}\left[0.06+0.4\left(\frac{RJ_f}{\left(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1\right)d}\right)^2\right]^{5/8} \tag{3-50}$$

而对于动平床 $\theta' = \theta$ 有

$$\frac{Q}{A}=\frac{9.45}{(K_s d)^{1/8}}\sqrt{gJ_f}R^{5/8} \tag{3-51}$$

数学模型建立时使用式(3-50)和(3-51)是比较方便的。

4. 爱因斯坦方法与恩格隆方法比较[8]

爱因斯坦与恩格隆都采用了水流参数来表征沙粒阻力形态阻力大小，依据定义，两者选用的参数表达形式正好互为倒数，即

$$\psi'=\frac{1}{\theta'} \tag{3-52}$$

因此，两种方法可以在同一坐标上进行比较，肖来(Chollef，1979)和贡日(J. A Cunge，1980)将爱因斯坦关系式(3-36)在规则矩形断面上化成

$$\theta=\theta'\{1+[\frac{1}{k\frac{U}{U''_*}(\theta')}\lg(12.27\frac{\theta'}{\theta}\cdot\frac{h}{d})]^2\} \tag{3-53}$$

取 $k=0.4$，$d=0.2$mm，以 h/d 为参变量，并绘于恩格隆选取的坐标中，如图 3-4。

此外，肖来和贡日将式(3-36)又改写为

$$\frac{U}{\sqrt{gd}}=\frac{\sqrt{gR'_b S_f}}{k\sqrt{gd}}\lg(12.27\frac{R_b}{K_s}) \tag{3-54}$$

而将式(3-50)和(3-51)分别改写为

$$\frac{U}{\sqrt{gd}}=9.45[\frac{(\frac{\gamma_s}{\gamma}-1)^5}{K_s}]^{1/8}[0.06+0.4(\frac{\gamma h J_f}{d(\gamma_s-\gamma)})^2]^{5/8}J_f^{-1/8} \tag{3-55}$$

和

$$\frac{U}{\sqrt{gd}}=\frac{9.45}{K_s^{1/8}}(\frac{h}{d})^{5/8}\sqrt{J_f} \tag{3-56}$$

并将曼宁-史觉克公式(3-2)通过取 $K_s=C_s d^{2/8}$ 后化为

$$\frac{U}{\sqrt{gd}}=\frac{C_s}{\sqrt{g}}(\frac{h}{d})^{2/8}\sqrt{J_f} \tag{3-57}$$

取 $K_s=d_{65}=0.2$mm，$K_s=2.5$，$C_s=21.6$，将恩格隆公式(3-55)绘于图 3-5，并将三家公式绘于图 3-6，由图 3-4 和图 3-6 可以看出：

(1)当阻力系数取常值时，曼宁-史觉克公式在图中表现为一条斜率 1/2 的直线，此时公式不能反映出床面存在沙波的情况，而只能反映沙粒阻力。

(2)在高强度输沙($\psi'<0.5$)的动平床区域，爱因斯坦公式与恩格隆的公式基本上一致，并与曼宁-史觉克公式接近，相差只是所使用

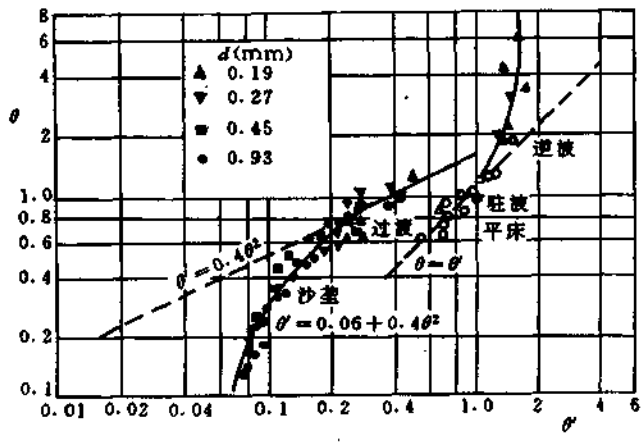


图 3-3

的流速公式不同所致。而在静平床阶段，爱因斯坦与恩格隆公式相差很大，在这个范围内，由于爱因斯坦公式不再与曼宁-史觉克公式直线相交，可以认为，爱因斯坦公式不适宜于静平床阻力计算。对于恩格隆公式，由于考虑了动静平床的输沙情况，因而对这种床面形态恩格隆公式与曼宁-史觉克公式相交，可用于静平床的阻力计算。

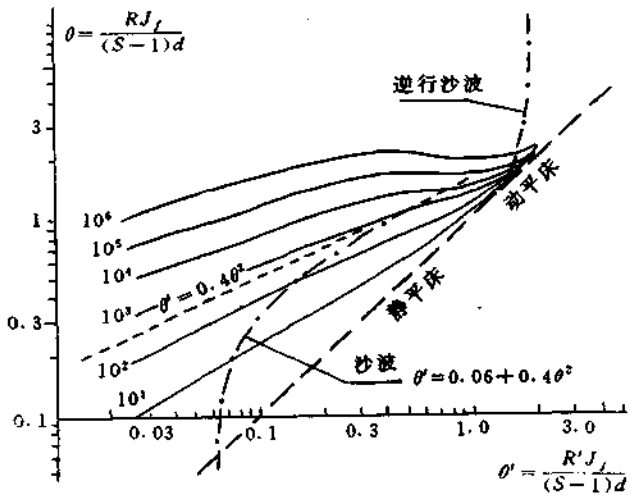


图 3-4

(3)在沙波阶段，爱因斯坦和恩格隆公式均能反映出沙粒和沙波阻力的影响。对于某一确定的 $h/d>10^3$ 的值，爱因斯坦公式计算的能量损失均比恩格隆公式计算的为大。相对糙度 h/d 对爱因斯坦公式的影响大，对恩格隆公式影响小。

(4)当相对糙度 $h/d>10^3$ 时，按爱因斯坦公式给出的能坡与阻力不是单值的，一个能坡对应着两个阻力值。对于恩格隆公式在 $\theta'(\frac{1}{\psi})=0.065$ 附近也不是唯一地确定能坡和阻力的关系，一个阻力值将对应两个能坡值。

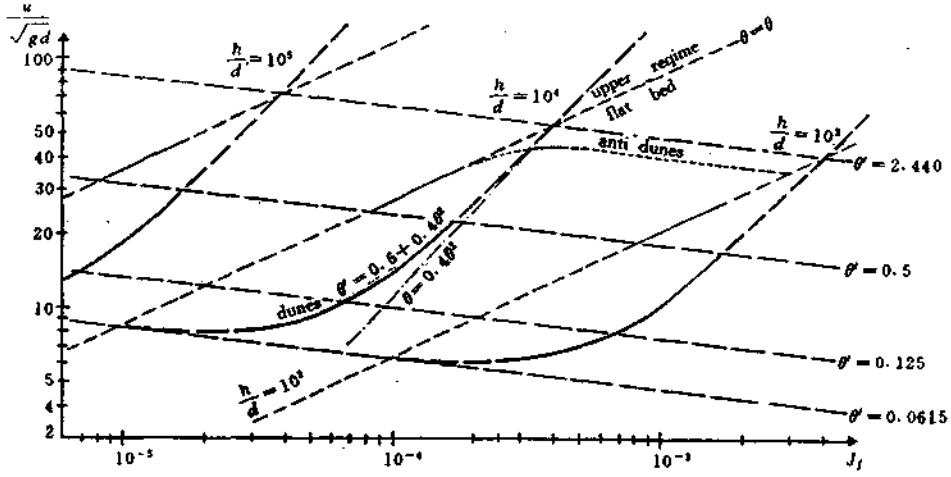


图 3-5

认识这些公式特性，对建立沙质河床数学模型将是有很大帮助的。在第 8 章中将进一步讨论公式使用在建模中的问题。

5. 综合阻力系数计算方法

上述介绍的由分割各单元阻力求综合阻力系数是很繁琐的，在一维数学模型中，有时还不

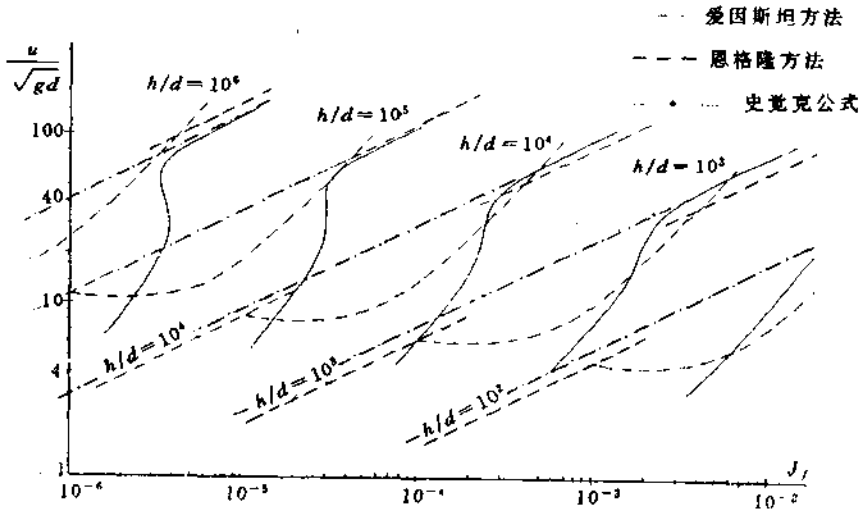


图 3-6

需要了解和区分形态阻力和沙粒阻力，尤其是卵石床面更是如此，沙波是不易产生的，此时只需求在一定的河床形态下能坡与流量的关系就可以了。

钱宁及麦乔威、李昌华等建议采用下列式子确定能坡与流量的关系

$$J_f=\frac{Q^2}{A^2A_0^2(\frac{R}{d})^{2\gamma}} \tag{3-53}$$

式中系数 A_0 与床沙粒配、形状及排列有关，对于均匀卵石平铺情况，$A_0=23$，对于颗粒形状比较规则，排列比较紧密，可取 $A_0=23\sim24$，如颗粒形状不规则，排列比较松散，可取 $A_0=19\sim20$。而 γ 值可参考指数流速分布公式的指数取值，对于天然河道，一般取 1/5～1/7。公式(3-53)比较简单，用起来比较方便。但也象曼宁-史莫克公式一样，不可能很好地反映床面出现沙波时的阻力情况，对研究床面出现沙波的数学模型使用这个公式是值得考虑的。

二、水流挟沙力

从河流动力学得知，在河床不发生冲淤的平衡条件下，能够通过河段下泄的最大沙量称为水流挟沙力。因河道水流挟带的泥沙有悬移质运动和推移质，水流挟沙力应包括悬移质和推移质的全部沙量。由于水流唯持悬移质和推移质运动所提供的能量不同，表达这两部分挟沙能力的公式是有所不同的。挟沙力公式很多，下面仅介绍几个常用公式，必要时可查阅有关专著。

1. 悬移质水流挟沙力

目前国内较为常用的悬移质中床沙质水流挟沙力公式，是武汉水利电力学院 60 年代基于“制紊假说”理论导出的公式

$$S_*=K(\frac{U^3}{gR\omega})^m \tag{3-54}$$

式中 U 为流速(m/s)，R 为水力半径(m)，ω 泥沙沉速(m/s)，g 重力加速度(m/s²)，K 比例系数(kg/m³)，m 为指数，分别由模拟河段的实测资料确定。

2. 推移质输沙率公式

$$g_{b*}=\frac{[(\frac{n'}{n})^{3/2}\gamma hJ_f-0.047(\gamma_s-\gamma)d]^{3/2}}{0.125(\frac{\gamma}{g})^{1/2}(\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma_s})} \tag{3-55}$$

式中 n 为曼宁糙率系数，n' 为河床平整情况下的沙粒曼宁糙率系数，h 平均水深，d 为粒径。

梅叶-彼得公式(3-55)有广泛的室内资料和野外资料作基础，国内外较广泛使用。

3. 全沙水流挟沙力公式

全沙水流挟沙力是把悬移质和推移质结合在一起考虑的，数学上可写成

$$G_T=G_b+G_s=Bg_{b*}+QS_* \tag{3-56}$$

式中 G_T,G_b,G_s 分别为总输沙量，推移质和悬移质输沙量，Q 为流量，B 为推移质运动宽度，g_{b*} 为单宽推移质输沙率，S_* 为悬移质水流挟沙力。爱因斯坦提出的悬移质和推移质一并考虑的公式是一个比较有代表性的计算方法。在这个算法中，全沙单宽输沙率用下式计算

$$i_Tg_{bT}=i_bg_{b*}(1+PI_1+I_2) \tag{3-57}$$

其中

$$1-\frac{1}{\pi}\int_{-B_*\phi_*^{-1/\eta_a}}^{\frac{1}{\eta_a}}e^{-t^2}dt=\frac{A_*\phi_*}{1+A_*\phi_*}$$

$$\phi_*=\frac{i_b}{i_*}\cdot\frac{g_{b*}}{\gamma_s}(\frac{\gamma}{\gamma_s-\gamma})^{1/2}(\frac{1}{gd^3})^{1/2}$$

$$\psi_*=\zeta Y\frac{(\beta/\beta_x)^2}{\theta}\frac{\gamma_s-\gamma}{\gamma}\frac{d}{R'_bJ_f}$$

$$I_1=0.216\frac{\eta_a^{Z-1}}{(1-\eta_a)^Z}\int_{\eta_a}^1(\frac{1-\eta}{\eta})^Zd\eta$$

$$I_2=0.216\frac{\eta_a^{Z-1}}{(1-\eta_a)^Z}\int_{\eta_a}^1(\frac{1-\eta}{\eta})^Z\ln\eta d\eta$$

$$P=\frac{1}{0.434}\lg(30.2\frac{h}{K_s/\chi})$$

$$\eta_a=\frac{a}{h}$$

$$Z=\frac{\omega}{\kappa U_*}$$

式中 i_T,i_b 及 i_* 分别为床沙质，推移质和床沙中粒径为 d 的泥沙所占的份数，常数项 $1/\eta$，采用埃尔-赛尼试验成果取为 2.0，A_* 及 B_* 由均匀沙试验成果确定，$A_*=43.5,B_*=0.143,\beta=\lg(10.6x),\beta_x=\lg(10.6\frac{x}{\Delta})$，这里 x 为非均匀床沙中受到荫蔽作用的最大粒径，$\Delta=K_s/\chi$，当 $\Delta/\delta>1.8$ 时，$x=0.77\Delta$。当 $\Delta/\delta<1.8$ 时，$x=1.39\delta$；ζ 为考虑荫蔽作用影响上举力系数的修正系数，a 是悬移质浓度分布近河床参考点高度，h 为水深，ω 为沉速，κ 为卡门常数。使用爱因斯坦公式计算，咋看起来其步骤是比较繁锁的，但借助于计算机还是较易实现的。

第二节　模型分类

千姿百态的天然河道问题是错综复杂的，且所排泄的流体为多相非恒定流体，作为研究河道水流和河床演变的重要工具之一的河道数学模型不得不对遇到的实际工程问题和解决这些

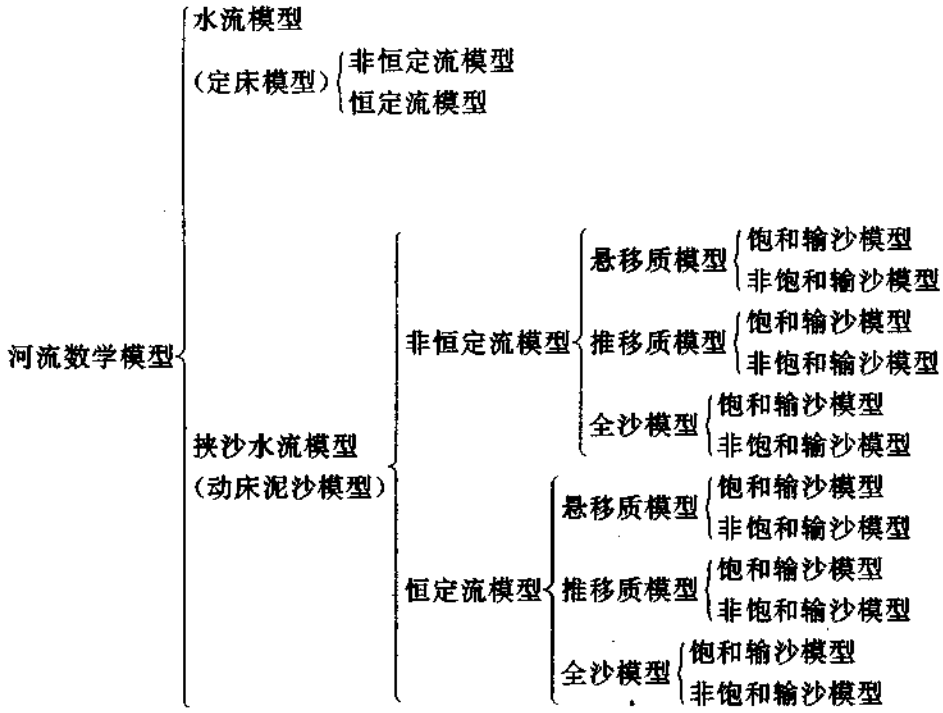
问题而随之作出某些相应的对策，进而发展了许多各种各样的数学模型。就1871年圣维南水流运动基本方程组问世以来，随着计算机的发展，针对各种具体的实际工程问题就发展了许多简单方便，计算精度较高而行之有效的水流模型，由于定床水流运动属性较为简单，河道水流数学模型发展已较为成熟。然而随着国民经济的迅速发展和生产实践的需要，这些水流模型远远不能满足解决实际工程问题的要求，挟沙水流数学模型的相继问世，从无到有，从理论到实践，至今已初步形成了较完整、较系统的多学科性体系。因此，对发展的挟沙水流模型进行合理分类为解决实际工程问题和理论研究提供一个清晰的图案，并进一步为完善河道数学模型指明方向，是有理论价值和实际意义的。

目前国内外河道数学模型多缺乏公认的分类和确切的定名，就目前国内外发展的各种各样的数学模型进行归纳，从数学角度讲，按河道水流各物理量运动变化的维数，可分为一维、二维和三维模型，这三大模型着眼研究的内容有所不同，一维模型着重模拟和计算断面各水沙要素的总体平均值；二维模型则着重于局部平均，因局部平均的方式不同，有局部沿水深方向的垂线平均和沿河宽方向的平均，从而划分为平面二维和纵剖面二维模型。三维模型则研究任一空间位置上各水沙要素场，包括近场和远场问题。这种分类，严格地讲只有理论意义，实际上，由于河道水流泥沙运动的复杂性，三者具有一定的相对性。在一维模型的建模中，因导出一维模型基本方程式的假设往往与实际不一定相符，诸如考虑水流平均流速和糙率沿河宽方向的不均匀性，不规则断面的局部概化等，均含有二维性处理的思想内容，这类模型可称为准二维模型。同样也存在准三维模型的说法。

按物理量运动变化的维数对模型进行分类，仅是数学上的宏观划分准则，具有很强的抽象性，未能揭示各模型的"产源"基础和基本实质，反映不出各类模型的实质区别，因此，详尽而较细的分类是有必要的。为简述问题的方便，下面仅就一维模型按其具体内容进一步划分，其归类定名对二维和三维模型是同样的。

与实体比尺模型类比，河道数学模型总体上有两个大类：水流模型和挟沙水流模型，水流模型不涉及到泥沙运动，周界是不动的，所以又称之为定床水流模型；而挟沙水流模型考虑了泥沙运动，周界发生变形，又称为泥沙模型。在这两大类内，视水流泥沙运动的流动状态和输移形式又可分为如下几个类别：按水流泥沙运动随时变化情况，可分为非恒定流模型和恒定流模型；按河道泥沙的运动方式，可分为悬移质模型和推移质模型以及全沙数学模型；按实际水流输沙量的计算方法不同，就悬移质运动而言，可分为饱和悬沙模型和非饱和悬沙模型，就推移质运动而言，类似地有饱和推移质模型和非饱和推移质模型；相应地也有饱和全沙模型和非饱和全沙模型之分。这里对悬移质和推移质统提饱和，就物理现象上讲用词不是十分确切，对悬移质模型较为适用，而对推移质模型欠妥，因为如果实际推移质输沙率恰好取等于推移质输沙率，水流本身不可能象挟带悬移质那样挟带推移质，鉴于推移质运动的特殊性，这里暂且引用。

此外，依据水流运动的均匀性和泥沙组成的非均匀性，又有均匀流模型和非均匀流模型，以及均匀沙和非均匀沙模型。由于这些模型在定解问题上与上述分类的模型没有多大差别，而仅是有关物理量和参数的确定的不同，因此，可暂不专门归为一类模型。在后面几章中将会看到，各类模型存在较大差别主要在于饱和和非饱和模型的定解问题的提法上。这些在以后各章节将与建模的理论基础和基本原理一并讨论。



参 考 文 献

[1] 张瑞瑾主编，河流泥沙动力学，水利电力出版社，1988。

[2] 钱宁、万兆惠，泥沙运动力学，科学出版社，1983。

[3] Engelund, F., Instability of erodible bed, J, Flu., Mech. Vol. 42. pt. 2, 1970.

[4] Engelund, F., Hydraulic resistance of alluvial streams, Proc. ASCE, Vol. 92, No. Hy 2, 1966.

[5] 李昌华、刘建民，冲积河流阻力，南京水利科学研究所研究报告，1968。

[6] Einstein, H. A., Method of calculating the hydraulic radius in a cross section with different roughness, Appen. II of the paper "Formula for the transportation of bed total", Trans, ASCE, Vol. 107, 1942.

[7] Engelund, F. and Hanson, E., A monograph on sediments transport in alluvial streams, Technical Univ. of Denmark. Janvirer 1967.

[8] Chollet, J. P., Ecoulement non-permanent sur fond mobile de rugosite imstationnaire, Modèle mathematique. Thèse submitted to l'Universite' scientifique et Medicale and l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1977.

[9] Chollet, J. P. and Cunge, J. A., Head loss-flow velocity relationships for deformable movable beds, Appl. Math. Modeling. 1980.

[10] 钱宁，麦乔威，洪柔嘉。毕慈芬，黄河下游的糙率，泥沙研究，4 卷 1 期，1959。

[11] 李昌华，刘建民，冲积河流阻力，南京水利科学研究所研究报告，1963。

[12] 张瑞瑾，论重力理论兼论悬移质运动过程，水利学报，1963 年 3 期。

[13] Meyer-Peter, E. and Kiiler, R., Formula for Bed load transport, Proc., 2th Meeting, Intern. Assoc. Hyd. Res., Vol. 6, 1948.

第四章　数学模型的理论基础

第一节　定解问题

前两章从河道水力学和河流动力学出发导出了基本方程，并对方程系的封闭问题作了简述。有了基本控制方程系和一些必要的经验关系，对于解决不同类型的河道、渠道、河口等各种实际问题还不够，还需要对控制方程应用于具体问题提供相应确切的定解条件，然后就提出的定解条件对控制方程进行求解才能得到问题解答。

从数学物理方法得知，物理规律反映了同一类物理现象的共同规律，揭示了规律中各种物理量变化中矛盾的普遍性，即共性，而控制方程则是这些物理规律的数学表达式，即概念模式。例如，研究河道挟沙水流中浓度随时间和空间变化，水流中水质污染物的随时空输移，两者具有它们的共性，物质对流扩散方程式就是这些共同规律的统一数学描述。又如，冲积河道的几何形态变形，水库库区淤积变形，坝下游冲刷床面变形以及河口海岸的形态变形等，都具有它们的共同之处，前两章导出的河床变形方程式就概括了这些不同类型河道变形的共性。描述这些物理规律共性的数学控制方程叫做泛定方程式。

泛定方程只能揭示各类不同问题的共同特性，不能识别各类问题所处的“环境”，例如河道水库坝区和坝下游的河床变形问题，前者是上游来沙的落淤，而后者则是因下泄水流对河床的淘刷所引起的河床变形，这两种河床变形的物理过程是完全不同的，而泛定方程（河床变形方程）则不加区别地将这两种河床变形的共性同一起来。显然，要区别这两种情况，还必须考虑到所研究的区域的边界处于怎样的状态下，或者说，研究对象处于什么样的环境中，才能将各类问题从共性中区别开来，如果能将坝区上游的来水来沙和坝下游水沙排放这样一些特定环境区别开来，并加以确定，那么，坝区和坝下游的河床变形过程各自的特殊性也就可由泛定方程刻划出来。数学上，区别各类问题特殊性的周围及环境称边界条件。

另外，从河床演变学知道，就同一个水库库区泥沙淤积而言，水库所在天然河道在自然水位下开始发生的泥沙淤积和水库已处于正常运行水位下开始发生的淤积，经过相同时段后的河床变形是不同的，这是因为两者处于不同的两个初始历史时期，即两者所处的初始时刻的状态不同，进而导致了两者在时段末的结果差异，这样的的初始物理量变化过程称为初始条件。

将上述的分析归纳起来，揭示各类问题共性的是泛定方程，即基本控制方程系的本身，区别各类问题特殊性的则是边界条件和初始条件（常把这两种条件统称为边界条件）。泛定方程提供解决各类问题的依据，边界条件和初始条件则是解决问题的特殊信息，两者作为一个解决问题的统一整体，这个整体就是定解问题。

第二节　特征线理论在建模中的应用

河道数学模型的根本问题是解决河道中的具体问题，有了定解问题虽然为解决具体问题提供了理论依据，但还需要我们知道问题的解答是否正确合理，这就需要回答，在满足问题特

定条件下的泛定方程是否有解，解是否唯一，是否稳定，如果解不存在，或者解存在但不唯一，这种对具体问题的解答是不符合要求的，这就需要研究定解问题的适定性。如果定解问题的解存在，且唯一又稳定，这样的问题才是适定的，解答才是可信的，否则，还必须对定解问题重新进行修正，重新认识泛定方程是否符合具体问题的物理规律，重新认识所提定解条件是否表征具体问题的个性，前者可通过力学知识来解决，后者则可通过数学工具得到解答。特征线理论就是一种有力的数学工具。这是问题的一方面，问题的另一方面，对于河流动力学和河床演变学问题，在一般情况下，由于所研究问题的周界几何形状的不规则，流动的不均匀性，流体的多相性以及流动的非恒定性，描述这些物理现象的控制方程常属非线性的，要想得到分析解根本不可能，只有在极端简单经线性化后在理想的规则周界条件下(如均匀流)才可得到解析解，一般情况下只能借助于数值方法，在研究区域内的有限个空间离散点上求控制方程的数值解，由此来逼近控制方程所描述的可测的物理过程，如特征线法、有限差分法、有限元法等常用的数值方法。然而，数值方法的合理应用与控制方程的特性有密切关系，同时也与边界条件形式有关，对不同泛定方程所匹配的定解条件，选用合理的数值方法对控制方程的合理离散，获得问题的正确解至关重要，如果滥用，所得结果可能会越出预料，完全与物理图案不符，这就要求我们了解控制方程的特性和定解问题的提法。

一、控制方程的特性

第一章建立的河道水沙基本方程，虽然对选用的不同物理变量控制方程有不同的形式，但总可以通过某些变换把它们表达成统一的形式，以便了解它们的共性和特殊性。现以变量 Q，A，S_V，的基本方程(2-31)、(2-33)、(2-37)略去推移项进行演示，其它形式的方程同样可做。

挟沙水流连续方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial A_s}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x} \tag{4-1}$$

运动方程式

$$\frac{\partial \rho_s Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_s\frac{Q^2}{A})+g\rho_s A\frac{\partial h}{\partial x}=\rho_s gA(J_0-J_f) \tag{4-2}$$

河床变形方程式

$$(1-P_s)\frac{\partial A_s}{\partial t}+\frac{\partial S_V A}{\partial t}+\frac{\partial S_V Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x} \tag{4-3}$$

悬沙连续方程式(不平衡输沙方程式推导见第七章)

$$\frac{\partial AS_V}{\partial t}+\frac{\partial QS_V}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x}=\alpha B\omega(S_{*V}-S_V) \tag{4-4}$$

考虑到挟沙水流密度

$$\rho_s=(\rho_s-\rho)S_V+\rho$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t}=(\rho_s-\rho)\frac{\partial S_V}{\partial t},\frac{\partial \rho_s}{\partial x}=(\rho_s-\rho)\frac{\partial S_V}{\partial x}$$

运动方程式(4-2)变为

$$\rho_s\frac{\partial Q}{\partial t}+\rho_s\frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q^2}{A})+Q\frac{\partial \rho_s}{\partial t}+\frac{Q^2}{A}\frac{\partial \rho_s}{\partial x}+g\rho_s A\frac{\partial h}{\partial}=g\rho_s A(J_s-J_f)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q^2}{A})+\frac{Q}{\rho_s}(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x})(\rho_s-\rho)+gA\frac{\partial h}{\partial x}=g\rho_s A(J_0-J_f)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{(\rho_s-\rho)Q}{\rho_s}(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x})+gA\frac{\partial h}{\partial x}=g\rho_s A(J_0-J_f)$$

当河宽沿程不变时有：

$$h=\frac{A}{B}\quad,\quad \frac{\partial h}{\partial x}=\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}+\left(\frac{gA}{B}-\frac{Q^2}{A^2}\right)\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{Q(\rho_s-\rho)}{\rho_s}\left(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x}\right)=g\rho_s A(J_0-J_f) \tag{4-5}$$

河床变形方程(4-3)和悬沙连续方程(4-4)分别可改写为

$$(1-P_s)\frac{\partial A_s}{\partial t}+\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)S_V+A\left(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x} \tag{4-6}$$

$$S_V\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+A\left(\frac{\partial S_V}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial S_V}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S_V}{\partial x}+\alpha B\omega(S_{*V}-S_V) \tag{4-7}$$

近似考虑扩散系数 AD_x 沿程不变，方程组(4-1)、(4-5)、(4-6)和(4-7)可写成矩阵形式。

$$A\frac{\partial f}{\partial t}+B\frac{\partial f}{\partial x}=C\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+D \tag{4-8}$$

式中向量 f

$$f=\begin{bmatrix}A\\A_s\\Q\\S_V\end{bmatrix}$$

矩阵 A、B、C、D 分别为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ S_V & 1-P_s & 0 & A\\ S_V & 0 & 0 & A\\ 0 & 0 & 1 & Q\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho_s}\right)\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & S_V & Q\\ 0 & 0 & S_V & Q\\ \left(\frac{gA}{B}-\frac{Q^2}{A^2}\right) & 0 & \frac{2Q}{A} & \frac{Q}{A}\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & AD_x\\ 0 & 0 & 0 & AD_x\\ 0 & 0 & 0 & AD_x\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0\\0\\ \alpha B\omega(S_{*V}-S_V)\\ g\rho_s A(J_0-J_f)\end{bmatrix}$$

用 A 的逆阵 A^{-1} 左乘方程(4-8)，则可将(4-8)化成

$$\frac{\partial f}{\partial t}+K\frac{\partial f}{\partial x}=P\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+E \tag{4-9}$$

式中 $K=A^{-1}B$、$P=A^{-1}C$ 和 $E=A^{-1}D$，时间偏微商项为单位阵 $I=A^{-1}A$。式(4-9)中的各矩阵也可通过原方程组进行简单的线性变换求得，限于本书篇幅，不作介绍。

方程(4-9)是二阶多变量的拟线性方程组，如果线性化矩阵 $K=K(f_*)$ 和 $P=P(f_*)$，f_* 为某一参考状态下变量 f 的值，那么方程就是线性的。偏微分方程理论告诉我们，方程(4-9)是一个抛物型方程组。如果二阶导数项的扩散很弱，且可忽略，则方程变为

$$\frac{\partial f}{\partial t}+K\frac{\partial f}{\partial x}=E$$

这个方程属双曲型的。如果表征阻力大小的项 E 也可略去，那么，我们就有极常见的对流

双曲型方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+K\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{4-10}$$

双曲型方程的解具有波动传播的特性。一个小扰动波的波峰就是一个弱间断断面。所谓弱间断，是指除最高阶微商外，物理变量本身及低阶微商都是连续的。在非恒定一维问题的 x-t 平面上，小扰动波传播的轨迹(扰动线)就是通常说的特征线。特征线概念，对于求解一阶拟线性方程有着重要的实际意义，这将在下节讨论。此外，在一般情况下，双曲型方程解具有不光滑性，即使给出的初始条件和边界条件是光滑的，到了后来，其解就有可能不光滑了，或者至多只能保持初始条件和边界条件的光滑性，不可能比初始和边界条件更光滑。

抛物型方程的解具有很好的光滑性，即变量本身和低高阶微商在一般情况下都连续，这是因为扩散作用将使物理变量越来越均匀，越来越光滑，即使物理量在初始阶段有间断存在(如一阶导数不存在)，但发展到后来，扩散作用就全使之光滑(一阶导数存在)，这一点与双曲型方程的解不同。

二、特征线概念及其应用

有了基本的控制方程，还必需提相应的边界条件，而边界条件提法是否合适，则是保证定解问题适定的关键。因此，本节进一步具体地分析初始条件和边界条件的合理提法。

1. 特征线概念

先讨论一维悬移质运动基本方程式的最简单形式，假设在无源汇和扩散作用下，方程(4-10)可写成

$$\frac{\partial S}{\partial t}+U_{\circ}\frac{\partial S}{\partial x}=0 \tag{4-11}$$

这是一个一阶线性双曲型方程式，其中有一个因变量 $S(x,t)$，两个自变量 x 和 t，$U_{\circ}$ 为定常流速，自由项为零。利用这个极简单的方程便于简述特征线的基本概念。

考察可微函数(含沙量)$S(x,t)$，应用微分法有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial S}{\partial x}$$

设在曲线 L 上任意点 $P(x,t)$(见图 4-1)，x 和 t 已定，因之 $\frac{\partial S}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial S}{\partial t}$ 的值已确定，但 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ 沿随 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 的值而变化。

如取 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 为曲线 L 在点 P 的切线方向，则

$$\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right)_L=\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_L\frac{\partial S}{\partial x} \tag{4-12}$$

式中 $\left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right)_L$ 系沿曲线 L 在点 P 的方向导数。要使方程(4-11)也在曲线 L 上成立，通过比较方程(4-11)和(4-12)，且因点 P 是任意的，则有曲线方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=U_{\circ} \tag{4-13}$$

和定义在该曲线上的全微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0 \tag{4-14}$$

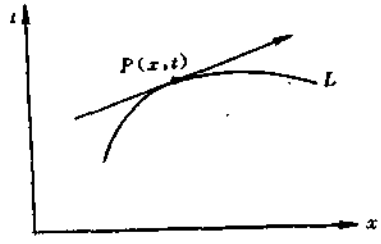


图 4-1

就是说，如果方程(4-13)存在，方程(4-14)与方程(4-11)等价，方程(4-13)、(4-14)就是方程(4-11)的等价方程组。微分方程(4-11)由两个全微分方程(4-13)和(4-14)等价表出，原方程(4-11)中的两个独立自变量 x 和 t，现在就不再是独立的了，而是由方程(4-13)决定的某一确定关系，方程(4-13)称为特征线方程，由该方程定义的一系列扰动曲线称为特征线，定义在特征线上的方程(4-14)称为特征关系，也叫特征方程，它表示函数 S 在特征线上应满足的关系。在这里，这个函数关系是一个常值，即

$$S(x,t)=\text{const} \tag{4-15}$$

和

$$x=U_0t+\text{const} \tag{4-16}$$

如果给定初始条件

$$S(x,0)=\varphi(x) \tag{4-17}$$

和

$$x|_{t=0}=x_0$$

式中 $\varphi(x)$ 为初始扰动波，x_0 为初始扰动波起点。使用初始条件(4-17)，方程(4-11)的解(4-15)可确定为

$$S(x,t)=\varphi(x)=\varphi(x-U_0t) \tag{4-18}$$

这个解反映了沿着特征线 $x=U_0t+x_0$ 扰动波形的传播，且在直线(4-16)上任意时刻 t 的扰动波形都与初始时刻的相同，其波速保持为常数 U_0。

实际上，特征线是弱间断线，方程(4-11)中的两个偏微商 $\frac{\partial S}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial S}{\partial x}$ 沿特征线有第一类间断。对于这两 个偏微商，由线性方程(4-11)和(4-12)确定为

$$\begin{bmatrix} 1 & U_0 \\ 1 & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial t} \\ \frac{\partial S}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} \tag{4-19}$$

如果

$$\begin{vmatrix} 1 & U_0 \\ 1 & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4-20}$$

则方程(4-19)就可以确定两个偏微商 $\frac{\partial S}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial S}{\partial x}$ 的唯一解，但这不是我们感兴趣的，因为这种情况下，全微分 dS 不可能取得零值。相反如果

$$\begin{vmatrix} 1 & U_0 \\ 1 & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix} = 0 \tag{4-21}$$

则线性方程组确定偏微商 $\frac{\partial S}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial S}{\partial x}$ 的解只能是平凡解。显然，从方程组(4-19)可以看出，给出平凡解的必要和充分条件是全微商等于零($\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0$)，致使方程(4-12)与(4-11)相容而不相互独立。这样，解(4-21)有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=U_0$$

这就是特征线方程(4-13)，它是使线性方程组(4-19)取得平凡解所必需满足的函数关系。上述

论证阐明了特征线的弱间断性质。

特征线概念有助于认识线性双曲型方程的重大差别。对于拟线性方程的初值问题，即使初始条件是充分光滑的，当 t 充分大时，连续光滑解往往不能得到保证，只能保证在 $t=0$ 的邻域内才有连续可微解。

设取微分方程(4-11)的速度 U_0 为常数，则特征线方程(4-13)定义一族平行特征线(见图4-2(a))，这些特征线不管 t 多大都不会相交，沿这些特征线有 $dS/dt=0$，$S=$常数，故不管 t 充分大，定义在平行线上的解总是由初始条件唯一确定的，所以只要初始条件(4-17)是光滑连续

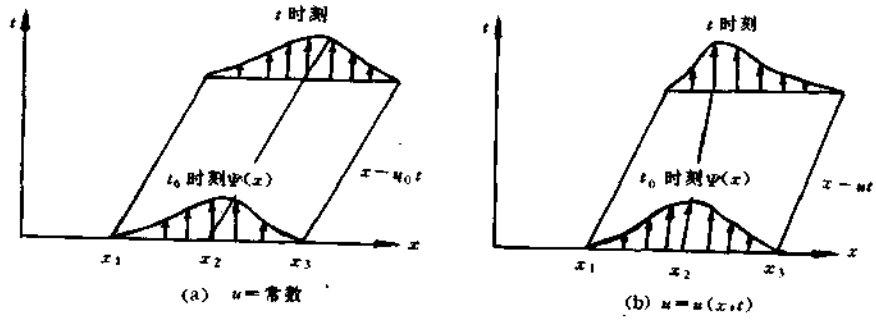


图 4-2

的，那么在任何时刻的 S 都是光滑连续的。

现在考察速度 U 不为常数的情形。此时由(4-13)可知特征线为曲线族，沿特征线的 S 仍为常数。如果给定初始光滑连续函数 $\varphi(x)$

$$S(x,0)=\varphi(x)$$

因过点 x_1、x_2、x_3 有 $U(x_1,0)\neq U(x_2,0)\neq U(x_3,0)$

则过三点的特征线斜率 $\frac{dx}{dt}=U(x_1,0)$，$\frac{dx}{dt}=U(x_2,0)$ 和 $\frac{dx}{dt}=U(x_3,0)$ 就不可能相等，因而特征线族过点 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$ 和 $(x_3,0)$ 的切线不可能是相互平行的直线。如果

$$\frac{U(x_2,0)-U(x_1,0)}{x_2-x_1}>0$$

那么过点 x_1、x_2 和两条特征线在 $t>0$ 的平面内必相交(图4-2(b))，这样，沿过点 x_1 和 x_2 特征线输移的函数 $\varphi(x_1)$ 和 $\varphi(x_2)$ 经一段时间 t 后都会达到交点 P，在交点 P 上的 $S(x,t)$ 就不能决定。因此在这种情况下，不论 $\varphi(x)$ 在 $t=0$ 时刻有多么光滑，到了后来就变得不光滑了。这就是线性与拟线性方程的本质区别。在河道水力学中，水跃和涌波就是一个实例。

2. 初始条件和边界条件

在建立河道数学模型中，认识初始条件和边界条件的提法以及了解泛定方程解的特性，特征线理论将起着很重要的作用。

让我们考虑棱柱体圣维南方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial A}{\partial t}+\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial U}{\partial t}+U\dfrac{\partial U}{\partial x}+g\dfrac{\partial h}{\partial x}+g(J_f-J_0)=0\end{cases}\tag{4-22}$$

引入变量

$$C = \sqrt{gh} \tag{4-23}$$

对变量 C 关于 x 和 t 求偏微商，并注意到 $\frac{\partial A}{\partial h} = B$，有

$$2C\frac{\partial C}{\partial x} = g\frac{\partial h}{\partial x}; \qquad 2C\frac{\partial C}{\partial t} = g\frac{\partial h}{\partial t}$$

将这两个偏微商代入(4-22)得到关于变量 U 和 C 的微分方程

$$2\frac{\partial C}{\partial t} + 2U\frac{\partial C}{\partial x} + C\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + 2C\frac{\partial C}{\partial x} + U\frac{\partial U}{\partial x} + g(J_f - J_0) = 0 \tag{4-24}$$

为了求得这两个方程的特征方程，先相加后相减这两个方程得

$$\begin{cases} [\frac{\partial}{\partial t} + (U + C)\frac{\partial}{\partial x}](U + 2C) + E = 0 \\ [\frac{\partial}{\partial t} + (U - C)\frac{\partial}{\partial x}](U - 2C) + E = 0 \end{cases} \tag{4-25}$$

式中 $E = g(J_f - J_0)$，这是一个关于两个因变量 $(U+2C)$ 和 $(U-2C)$ 的两个微分方程，假定这个变量可微，即有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(U + 2C) + \frac{\partial}{\partial x}(U + 2C)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(U + 2C)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\partial}{\partial t}(U - 2C) - \frac{\partial}{\partial t}(U - 2C)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(U - 2C)}{\mathrm{d}t} \end{cases} \tag{4-26}$$

比较方程(4-25)和(4-26)，沿着

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (U \pm C) = (U \pm \sqrt{gh}) \tag{4-27}$$

我们有两个全微分方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U + 2C) = -E \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U - 2C) = -E \end{cases} \tag{4-28}$$

方程(4-27)即为所求的特征线方程。对以速度 $(U \pm \sqrt{gh})$ 运动的质点，描述这些质点运动规律的特征方程(4-28)沿由方程(4-27)定义的特征线才有定义。由方程(4-27)、(4-28)组成的方程组完全与方程(4-22)等价。依据上节所述的特征线性质，方程(4-27)、(4-28)确定了方程(4-22)四个偏微商 $\frac{\partial h}{\partial t}$、$\frac{\partial h}{\partial x}$、$\frac{\partial U}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial U}{\partial t}$ 的平凡解，这是易于证明的。

特征线方程(4-27)表明，特征速度由两部分组成：水流速度 U 和浅水小扰动波的传播速度 $\sqrt{gh}$，由方程(4-27)定义的特征线的方向取决于这两个速度的相对大小。记

$$\lambda_{1,2} = U \pm \sqrt{gh} = \sqrt{gh}(\frac{U}{\sqrt{gh}} \pm 1) \tag{4-29}$$

$\lambda_{1,2}$ 表示实际水流的传播速度。从水力学知道，比值

$$F_r = \frac{U}{\sqrt{gh}} \tag{4-30}$$

为佛汝德数，它是判别急缓流的准则。对于 $F_r<1$，水流为缓流，对于 $F_r>1$，水流为急流；$F_r=1$，水流为临界流。对于前两种流态，我们可区别出其特征线的走向。对于缓流，因 $U<\sqrt{gh}$（假

定 U 取正值)，$\lambda_1\lambda_2<0$ 则有两组方向相异且互交的特征线(图 4－3. (a))，一条与水流方向(假定水流方向与 x 轴相同)相同，另一条与水流方向相逆。对于急流，因 $U>\sqrt{gh}$，$\lambda_1\lambda_2>0$ 则有两条方向相同且互交的特征线，方向都与水流运动方向相同(图 4-3b)。特别地，对于临界流，$F_r=1$，$\lambda_1\lambda_2=0$ 有一条特征线平行于 t 轴，而另一条特征线的斜率正好等于水流运动速度的 2 倍(图 4-3c)。

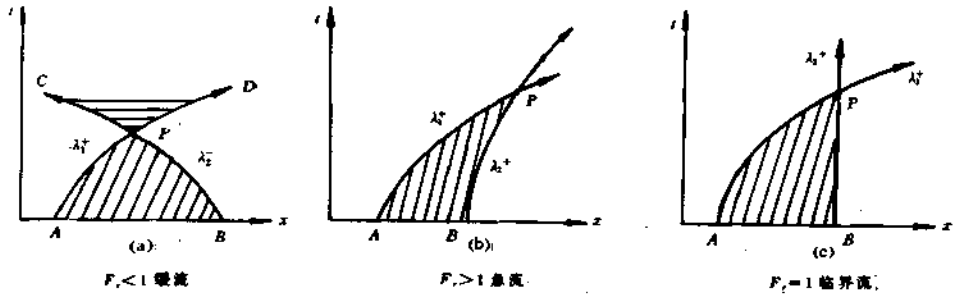


图 4-3

现在考察缓流的情况，设想在初始时刻 $t=0$，在点 A_2 和 B_2 发生初始扰动，这个初始扰动将分别沿着特征线 λ_1^+ 和 λ_2^- 传播达到 P_2 点，域内点 P_2 的值必然将受到 A_2B_2 两点发生的扰动

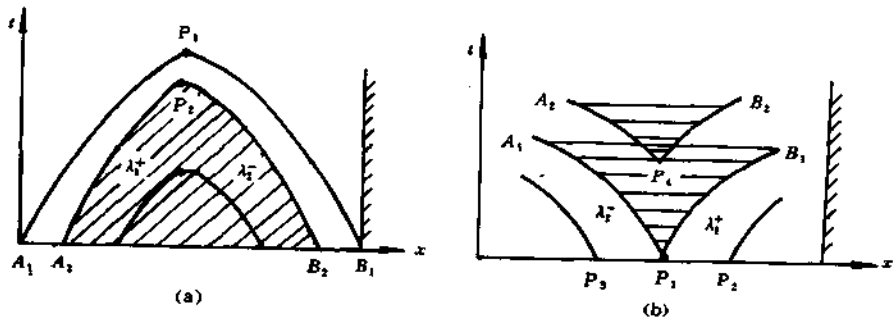


图 4-4

所影响，见图 4-4(a)$A_2P_2B_2$ 围成的区域，任何发生在 A_2B_2 线段内的扰动都将影响到 P_2 点。称区域 $A_2P_2B_2$ 为点 P_2 的依赖域，而称这个区域为 A_2B_2 的决定域。显然，由从上下两边界初始点 A_1B_1 出发的特征线所围成的区域 $A_1B_1P_1$ 为最大，决定域最大。相反，如果在 $t=0$ 时刻扰动发生在点 P_1(图 4-4b)，由于过点 P_1 将有两根特征线 λ_1^+ 和 λ_2^- 向两个不同方向传播，P_1 点发生的扰动也就随之传播而影响到 $A_1P_1B_1$ 所围成的区域，称这个区域为点 P_1 的影响域。显然，初始时刻点 P_1 的影响域，在 $t>0$ 的平面上影响的范围较在域内点 P_4 的影响范围为大，一般来说都是这样，除非边界具有吸附作用。从图 4-4b 还可以看出，线段 P_3P_2 的影响域大于点 P_1 的影响域。认识这些特性，对初始条件和边界条件的数值处理是十分有用的。

根据以上分析，初边界条件对区域内的控制情况为(见图 4-5)(A)区受初始条件控制，(B)区受初始条件及上游边界条件控制，(C)区受初始及下游边界条件控制，(D)区受初始条件和

上下边界条件控制，(E)区只受上游边界条件控制。这就不难知道，如果对某一问题的计算时间系列较短，初始条件控制就很重要。相反，计算时间系列很长时，初始条件的控制就变得不很重要，起作用的则是边界条件了。

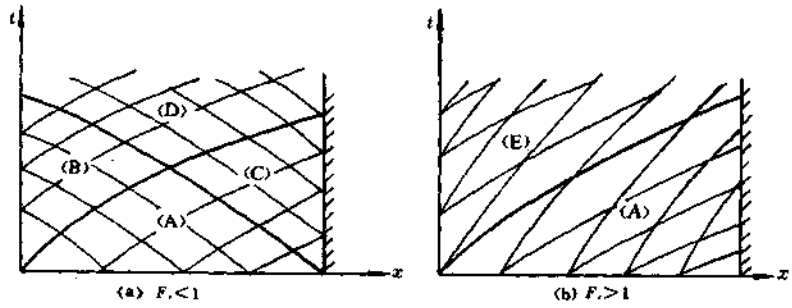


图 4-5

在认识了微分方程(4-22)的特征线和扰动传播范围以后，现在回到如何依据特征线考虑初始条件和边界条件的提法。为了便于讨论，我们忽略方程(4-28)中的阻力项 E，沿特征线 $\lambda_{1,2}$ 分别积分方程(4-28)得

$$U \pm 2C = J_{1,2} \tag{4-31}$$

常数 $J_{1,2}$ 称为 Riemann 不变量，方程(4-31)具体一点为：

$$J_1 = U + 2\sqrt{gh} \tag{4-32}$$

$$J_2 = U - 2\sqrt{gh} \tag{4-33}$$

这两个方程式在各自的特征线 λ_1 和 λ_2 上建立了变量 U 和 h 之间的关系。在 $x-t$ 平面上考察这两个方程的解(见图 4-6)，沿特征线 A_1P_1，由方程(4-32)给出

$$U_{A_1} + 2\sqrt{gh_{A_1}} = U_{P_1} + 2\sqrt{gh_{P_1}} \tag{4-34}$$

而沿特征线 B_1P_1，由方程(4-33)给出

$$U_{B_1} - 2\sqrt{gh_{B_1}} = U_{P_1} - 2\sqrt{gh_{P_1}} \tag{4-35}$$

如果在初始时刻，初始边界点 A_1 和 B_1 上的初值 U_{A_1} h_{A_1} 和 U_{B_1} h_{B_1} 为已知，点 P_1 上的两个未知数值 U_{P_1}、h_{P_1} 可通过联解方程(4-34)、(4-35)求得。显然，若在初始边界最大线段 A_2B_2 上的所有初值 U 和 h 都给出，仿方程(4-34)、(4-35)完全可求出区域 $A_2P_2B_2$ 内所有点的解。

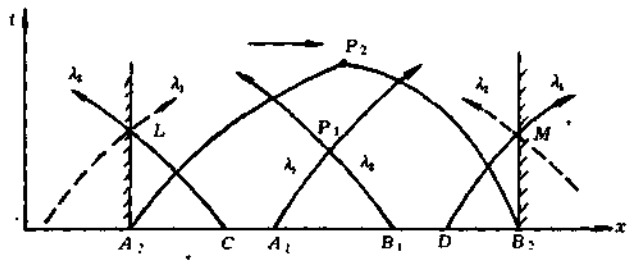


图 4-6

然而，由于区域 $A_2P_2B_2$ 是初始线段 A_2B_2 的决定域，所有在决定域以外的 U、h 值不可能由 A_2B_2 线段的初值所决定。换句话说，所有这个决定域之

外的值是不可能仅依赖于初值算得出来的。这样，对于许多具体问题，仅求得区域 $A_2P_2B_2$ 内的解 U 和 h 是不够的，还需要知道这个区域外的解。对于河流动力学一般问题，常需要知道在上下两边界内 $t>0$ 的上半平面的解。

考察 $A_2P_2B_2$ 区域外上边界点 L，由方程(4-33)可例出

$$U_l - 2\sqrt{gh_l} = U_c - 2\sqrt{gh_c} \tag{4-36}$$

方程(4-36)包含有两个未知数 U_l 和 h_l，从一个方程中不可能求得两 个解，而从初始线段 A_2B_2 任一点出发的特征线 λ_1^+ 不再可能在点 L 与特征线 λ_2^- 相交，亦即不可能列出与初值有关的第二个方程，来完成方程(4-36)的解。但是，如果在边界点 L 上给出 U_L 值(或者 h_L 值)，据此就可用方程(4-36)计算出点 L 上的 h_L 值(或 U_L 值)。同样道理，如果在下游边界点 M 上给出 U_M (或 h_M)值，利用方程(4-32)列出点 DM 的特征关系，就可计算出 h_M(或 U_M)。这样，如果在上下两边界能给定任意时刻的值，与 A_2B_2 线段上的初值一起，就可求得两边界内 $t>0$ 的上半平面解。

通过前面的解过程可以看出，要计算域内点 P_1 上的解 U_{P_1} 和 h_{P_1}，就必须事先给定初始边界点 A_1 和 B_1 上的值，而点 A_1 和 B_1 亦是特征线 λ_1^+ 和 λ_2^- 与初始边界的交点。此外，要求边界点 L 上的解，而边界点 L 亦是特征线 λ_1^+ 与上边界的交点。对于下边界也一样，特征线 λ_2^- 与下边界相交的点 M，只有在点 M 给定一个值，才能算得下边界点 M 上的解 U_M 和 h_M。据此说明，在初始边界上的点 A 和 B 都分别有两条特征线穿过(见图 4-7)，且这两条特征线的方向都是由外部指向内部，这就应在点 A 和 B 分别给出两个初值 U_A、h_A 和 U_B、h_B。而在上下边界点 L 和 M，各自分别有一条特征线 λ_1^+ 和 λ_2^- 从上下边界的外部穿过这两点指向内部，因此，应在点 L 和 M 上各自给定一个边界值，才能在 $t>0$ 的上半平面域内求得问题的解。特征线与边界的交点及其走向(从外部指向内域)表明了问题求解所必须具备的外部“信息”，这个信息就是通常所说的边界条件。对于现在讨论的问题(4-22)，应给出两个初始条件 $U(x,0)$、$h(x,0)$，和上下边界各自提一个边界条件 $U(0,t)$ 和 $h(L,t)$。这个结论可以推广到更一般的情形，见图 4-8。

根据图 4-8 标明的特征线方向，应提四个初始条件，一个上边界条件和两个下边界条件。

特征线的走向标明了边界条件的提法，由于不同流态水流的特征线走向是不同的，所以，边界条件的提法也不相同。对于上面讨论的缓流情况，只要强加两个初值条件和一个上边界条件，一个下边界条件就可以求得微分方程(4-22)的解。对于急流(见图 4-3b)，P 点状态不依赖于下边界信息，这就没有必要提下边界条件，而只需提两个上边界条件和两个初始条件，对于临界流，则需提两个初始条件和一个上边界条件，方程(4-22)在区域内的解就完全被确定了。

特征线与边界(包括初始边界)的交点及其走向只告诉我们提边界条件的“位置”和数目，但没有明确提边界条件的具体形式。如在上面的例子中，边界两端的特征线 λ_1^+ 和 λ_2^- 就只告诉我们要在上下边界上各提一个外部信息，没有指明具体应提什么条件才能确定区域内的解，为此，还必须掌握以下几个原则：

(1) 边界条件可用函数或导数关系形式给出，包括第一类、第二类和第三类边界条件。

(2) 边界条件必须是外部的独立信息，与域内微分方程或函数过程无关。

(3)“两 点”边界条件必须“独立”。例如，在上例中，在初始时刻 $t=0$，我们不能仅提关于流速的两个初始条件 $U(x,0)$ 和 $\frac{\partial U(x,0)}{\partial x}$ 作为两个独立的初始条件，只能提关于 $U(x,0)$ 和 $h(x,0)$ 的初始条件。

至此，我们阐述了边界条件提法的基本依据。在实际工程中，初始条件和边界条件的提法

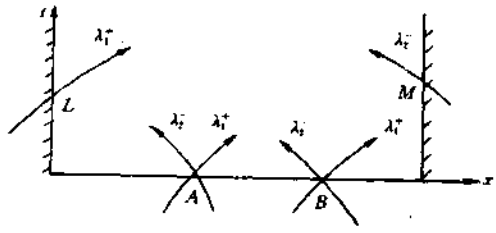


图 4-7

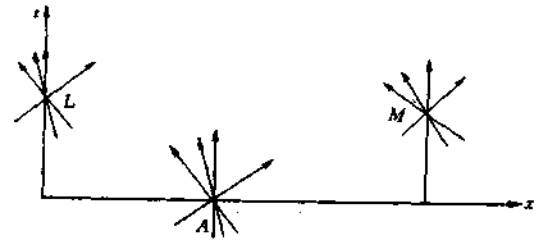


图 4-8

对于挟沙动床数学模型仍然还存在许多困难，其一，挟沙动床数学模型不只是用来模拟现状或重演历史，更重要更有用的是用来预测未来水沙过程和河床变形，而这些未来的过程和变形（包括边界）却还是未知数，因此，边界上的具体未来信息是不可能给出的，关于这一点，在下面几章中还将进一步讨论。其二，初始条件不易取得，因为不可能在同一时刻下观测输沙过程沿程的变化情况，尤其是长河段的水文（断面流速等）观测，往往需要一二天，乃致于几天的时间才能完成，这种不同时间的初始条件所产生的偏离必然对数学模型模拟的结果产生影响。因此，由实测资料取得的初始条件某种程度上只能是一种近似。当然，近似是允许的，但必须结合具体工程问题对这些近似有足够的认识，具体地说，初始条件的近似程度取决于解决工程问题的类型。例如，在一个光滑边壁的玻璃水槽内，阻力可以忽略，如果中间部位产生水面扰动，那么在无阻力作用下水面波将永不会消失，这种过程的数值模拟就要求较高精度的初始条件。又如船闸，当上游闸门突然启闭时，研究其引起的波形能否波及到下游闸门，因两闸门间距较短，阻力作用较小，初始条件（初始波形）的精度也很重要。此外，初始近似也取决于对计算结果的要求，如果计算精度要求高，初始条件近似就要求较高。初始近似还与选择的数值方法有关，如果选用的数值方法对初始条件初估的敏感性较小，对初始条件也就要求不高。

初始条件近似还与所研究问题的边界特性有关，如果边界具有某种吸附作用，初始扰动传到边界时就会受到削减，在这种情况下，初始条件近似精度也要求不高，例如考虑河段 $0\leqslant x\leqslant L$，见图 4-9。在上下边界点 F 和 H 给出二个水力条件 Y_F 和 Y_H，在决定域（LAR）内所有点的水位和流量仅仅受到 LR 线段所有初始水位流量的影响。然而，对于 B 点上的水位流量依赖于特征线 FB 和 HB 转送过来的讯息，这部分信息由两部分组成，一是上下边界给定的条件 Y_F 和 Y_H，另一部分是点 E 和 G 的初始水位流量经边界点 F、H 吸附后再反射过来的信息。很显然，与 A 点的水位流量相比，B 点的水位流量受初始时刻的水位流量影响要小，而受上下边界条件 Y_F，Y_H 的影响较大。随着时间的增长，初始条件对域内任意点的影响由于边界的吸附作用就愈变得不重要，而上下边界条件却变得越来越重要。

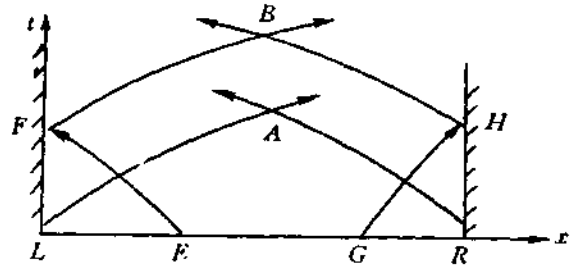


图 4-9

边界吸附作用与方程（4-22）存在阻

力项 E 时的作用效果是一样的。初始条件近似扰动传播将受到阻力作用而逐渐被削减，不致于影响到可能足够长时间上的解。阻力作用越大，初始条件近似影响区域范围就小。

很有趣的是，对于圣维南方程(4-22)，即使无阻力作用 $E=0$，初始条件近似对解的影响也会随时间的增长而变得越来越不重要，这取决于上下边界条件的具体形式。例如考察两端封闭渠道，在无阻力作用下的水深流速变化可用方程(4-32)、(4-33)描述。如果在渠道上端强加条件 $U(x=0,t)=0$，而在下端给出流量水位关系曲线

$$U(L,t) = \alpha(C - C_0)$$

式中 α 为常数，C 为波速 $\sqrt{gh}$，C_0 为定常波速 $\sqrt{gh_0}$，设初值条件 $U(x,0)$ 和 $C(x,0)$ 不为零。沿特征线 AB，由方程(4-32)可写出关系(见图 4-10)

$$J_+ = U_A + 2C_A = U_B + 2C_B \tag{4-37}$$

U_A 和 C_A 为已知，利用 B 点边界条件从(4-37)可解出

$$C_B = \frac{J_{+A} + \alpha C_0}{2 + \alpha} \tag{4-38}$$

而在 C 点由方程(4-33)可写出

$$J_{-c} = U_c - 2C_c$$

$$= -\left(\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)(J_{+A} + \alpha C_0) - \alpha C_0 \tag{4-39}$$

又因

$$J'_{+c} = (U + 2C)|_c = 2C_c J'_{-c} = (U - 2C)|_c = -2C_c$$

故 $J'_{+c} = -J'_{-c}$

$$J'_{+c} = \left(\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)(J_{+A} + \alpha C_0) + \alpha C_0$$

亦即

$$J'_{+c} - 2C_0 = \left(\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)(J_{+A} - 2C_0) \tag{4-40}$$

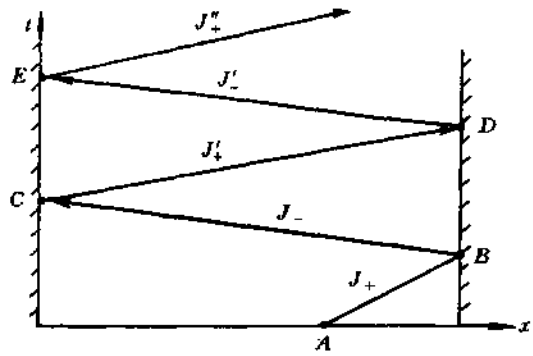


图 4-10

如此进行 n 步计算，对上边界任意点的 Rienman 常数 J_+ 有

$$J_{+(\text{上边界点})} - 2C_0 = \left(\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)^n (J_{+A} - 2C_0)$$

如果 $\alpha>0$，则当 n 充分大时，$\left(\frac{2-\alpha}{2+\alpha}\right)^n$ 趋于零，故

$$J_+ = 2C_0$$

这就说明当时间充分大时，Rienman 常数再也不依懒于初值条件 U_A 和 C_A，而仅取决于边界条件，初始条件近似就显得不重要了。

第三节　特征线数值方法

特征线理论不只是对求解方程组探索定解问题的提法非常重要，而且还可以用特征线构

造数值网格，直接求方程数值解。为了说明方法的实质，我们还是从讨论一维非恒定圣维南方程数值解入手来阐明解的基本过程。

考虑拟线性方程组(4-22)

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{A}{b}\frac{\partial U}{\partial x}+U\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}=g(J_0-J_f) \tag{4-41}$$

现在从另一途径来探求方程(4-41)的特征方程。对于变量$\frac{\partial h}{\partial t}$、$\frac{\partial U}{\partial t}$和$\frac{\partial h}{\partial x}$、$\frac{\partial U}{\partial x}$，还须补充两个方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}h$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}U \tag{4-42}$$

通过方程(4-42)，我们消去方程(4-41)关于t的偏微商项。将(4-42)写成

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{4-43}$$

代入(4-41)得

$$(U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{A}{b}\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

$$g\frac{\partial h}{\partial x}+(U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\frac{\partial U}{\partial x}=g(J_0-J_f)-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \tag{4-44}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & A/b\\ g & U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x}\\ \frac{\partial U}{\partial x}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\\ g(J_0-J_f)-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\end{Bmatrix} \tag{4-45}$$

利用小扰动线的弱间断性，求一阶偏微商$\frac{\partial h}{\partial x}$和$\frac{\partial U}{\partial x}$的平凡解，则系数行列式的值应为零

$$\begin{vmatrix}U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & \frac{A}{b}\\ g & U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\end{vmatrix}=0 \tag{4-46}$$

解之得特征线方程为

$$(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})_{1,2}=U\pm\sqrt{g\frac{A}{b}}=\lambda_{1,2} \tag{4-47}$$

再次，行列式(4-46)取零值表明了方程组(4-45)存在平凡解，方程(4-42)与(4-41)是两个相容的方程组，因此，对偏微商$\frac{\partial h}{\partial x}$必有

$$\begin{vmatrix}-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} & \frac{A}{b}\\ g(J_0-J_f)-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} & U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\end{vmatrix}=0 \tag{4-48}$$

而对偏微商$\frac{\partial U}{\partial x}$有

$$\begin{vmatrix} U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ g & g(J_0-J_f)-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix}=0 \tag{4-49}$$

解行列式(4-48)和(4-49)得

$$\begin{cases} -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})-\frac{A}{b}g(J_0-J_f)+\frac{A}{b}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=0 \\ (U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})[g(J_0-J_f)-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}]+g\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=0 \end{cases} \tag{4-50}$$

或

$$\begin{cases} (U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}-\frac{A}{b}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=g\frac{A}{b}(J_f-J_0) \\ (U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}-g\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=(U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})g(J_0-J_f) \end{cases}$$

因$U-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mp\sqrt{g\frac{A}{b}}$，故有

$$\mp\sqrt{g\frac{A}{b}}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}-\frac{A}{b}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=g\frac{A}{b}(J_f-J_0)$$

$$\mp\sqrt{g\frac{A}{b}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}-g\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{g\frac{A}{b}}g(J_0-J_f) \tag{4-51}$$

容易论证，只要在第二个方程中乘$\mp\sqrt{g\frac{A}{b}}$，除以g便知道这两个方程是相容的，即它们在特征线上取特征方向是彼此相容的，因此，可在这两个方程中任取一个，如选用(4-51)中第一个方程，并除以$\frac{A}{b}$有

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\pm\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=g(J_0-J_f) \tag{4-52}$$

在第一族特征线上有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=U+\sqrt{g\frac{A}{b}} \tag{4-53}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=g(J_0-J_f) \tag{4-54}$$

面在第二族特征线上有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=U-\sqrt{g\frac{A}{b}} \tag{4-55}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}-\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=g(J_0-J_f) \tag{4-56}$$

假定x-t平面上点L和R上的值$U(x_L,t_L)$、$h(x_L,t_L)$和$U(x_R,t_R)$、$h(x_R,t_R)$已知(图4-11)，两族特征线(4-53)和(4-55)分别从这两点出发相交于点M。根据特征线概念，既然特征方程(4-54)和(4-56)沿特征线方向定义着因变量$U(x,t)$和$h(x,t)$的全微商，可沿特征线分别从

点 L 和 R 到点 M 积分方程(4-54)～(4-56)得

$$X_M - X_L = \int_{t_L}^{t_M} (U + \sqrt{g\frac{A}{b}})\mathrm{d}t \tag{4-57}$$

$$\int_{U_L}^{U_M} \mathrm{d}U + \int_{h_L}^{h_M} \sqrt{\frac{g}{h}}\,\mathrm{d}h = g\int_{t_L}^{t_M} (J_0 - J_f)\mathrm{d}t \tag{4-58}$$

$$X_M - X_R = \int_{t_R}^{t_M} (U - \sqrt{g\frac{A}{b}})\mathrm{d}t \tag{4-59}$$

$$\int_{U_R}^{U_M} \mathrm{d}U - \int_{h_R}^{h_M} \sqrt{\frac{g}{h}}\,\mathrm{d}h = g\int_{t_R}^{t_M} (J_0 - J_f)\mathrm{d}t \tag{4-60}$$

上面四个方程中包含着四个未知数 X_M、t_M、U_M 和 h_M，因此可以求解。从上面导出过程可以看出，采用方程(4-57)～(4-60)求解方程(4-41)没有引入任何近似，这两组方程是完全等价的，数值上有足够精确度。但是由于方程(4-57)～(4-60)中被积函数是流速和水深的函数，直接积分是困难的，必须借助于数值方法求数值积分才能求得四个变量的解，在这一过程中，将引入近似。为了以较简单的方式来阐明采用特征线方法求方程(4-57)～(4-60)数值解法，我们先将积分号下的被积函数取点 L 和 R 上的值，这样处理后得

$$X_M - X_L = (U + \sqrt{g\frac{A}{b}})_L(t_M - t_L) \tag{4-61}$$

$$U_M - U_L + (2\sqrt{gh})_M - (2\sqrt{gh})_L = g(J_0 - J_f)_L(t_M - t_L) \tag{4-62}$$

$$X_M - X_R = (U - \sqrt{g\frac{A}{b}})_R(t_M - t_R) \tag{4-63}$$

$$U_M - U_R - (2\sqrt{gh})_M + (2\sqrt{gh})_R = g(J_0 - J_f)_R(t_M - t_R) \tag{4-64}$$

利用方程(4-61)到(4-64)求解的基本思想是，在 (x,t) 平面上考虑两个邻点 L 和 R 它们的座标为 (x_L,t_L) 和 (x_R,t_R)，假定在这两点上的速度 U_L、U_R 和水深 h_L、h_R 已知(图 4-11(a))。两条特征线分别从点 L 和 R 出发交于点 M，M 点坐标 (x_M,t_M) 是方程(4-61)和(4-63)的解，再利用方程

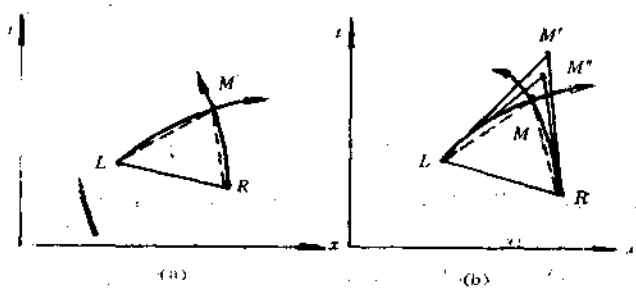


图 4-11

(4-62)和(4-63)可求得点 M 上的流速 U_M 和水深 h_M。

上述得到的第一次近似解是十分粗糙的，因为从特线方程(4-57)知道特征值是因变量 U 和 h 的函数，特征线是一条曲线，但用方程(4-61)逼近时，特征值仅取点 L 和 R 上的值，即特

征曲线在该点的切线方向，这样，特征线微段就由直线线段逼近，由两条直线段相交的点 M'（图 4-11(b)）就不是特征线的交点 M，进而由方程(4-62)和(4-64)确定的流速和水深，也就只能视为点 M 的近似值，为了使解逐步逼近点 M 的值必须对第一次取得的近似值进一步精确化。

首先，利用第一次计算得到在 M' 点上的值 U'_M、h'_M，求点 M' 上的特征值。

$$\lambda'_{1,2} = (u \pm \sqrt{g\frac{A}{b}})_{M'} \tag{4-65}$$

作算术平均 $\lambda_{1,2}$ 分别在点 L 和 R 的二次近似

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[\lambda_{1,2} + \lambda'_{1,2M}] \tag{4-66}$$

括号内 $\lambda_{1,2}$ 分别是第一次计算采用的在点 L 和 R 上的特征值

$$\lambda_1 = (u + \sqrt{g\frac{A}{b}})_L$$

$$\lambda_2 = (U - \sqrt{g\frac{A}{b}})_R$$

将修正后的特征值 $\lambda_{1,2}$ 代入方程(4-61)和(4-63)求得新点 M'' 的坐标 (x''_M, t''_M)，然后再次使用方程(4-62)和(4-64)求得点 M'' 的流速 U''_M 和水深 h''_M，得到第二次近似值。继续进行这个过程，直到点 M'' 的坐标 (x''_M, t''_M) 和流速 U''_M、水深 h''_M 前后两次近似差在允许误差范围即可。

上述算法收敛速度较慢，这是因为每次计算所利用的特征值都是从特征脚位置作切线方向所引起的，下面方法可以加速收敛速度，即对方程(4-57)～(4-60)的各项积分取 L 和 M 点上的算术平均：

$$X_M - X_L = (t_M - t_L)\frac{(U + \sqrt{g\frac{A}{b}})_M + (U + \sqrt{g\frac{A}{b}})_L}{2} \tag{4-67}$$

$$U_M - U_L + 2(\sqrt{gh})_M - 2(\sqrt{gh})_L = g(t_M - t_L)\frac{(J_0 - J_f)_M + (J_0 - J_f)_L}{2} \tag{4-68}$$

$$X_M - X_R = (t_M - t_R)\frac{(U - \sqrt{g\frac{A}{b}})_M + (U + \sqrt{g\frac{A}{b}})_R}{2} \tag{4-69}$$

$$U_M - U_R + 2(\sqrt{gh})_M - 2(\sqrt{gh})_R = g(t_M - t_R)\frac{(J_0 - J_f)_M + (J_0 - J_f)_R}{2} \tag{4-70}$$

这是一个非线性代数方程组，可用 Newton-Raphson 方法叠代求解。用方程(4-67)到(4-70)求解时，其误差主要出自于两方面，一部分是算术平均积分误差，另一部分是非线性方程叠代求解误差，这两种误差可通过减少间距 $(X_M - X_L)$ 和 $(X_M - X_R)$ 来消除。

上述这种方法固然比前一种方法略有改进，但其收敛性仍然不十分理想。作者曾建议作下列改进，即取

$$X_M - X_L = (t_M - t_L)[\theta(U + \sqrt{g\frac{A}{b}})_M + (1 - \theta)(U + \sqrt{g\frac{A}{b}})_L] \tag{4-71}$$

式中 θ 为权重因子，一般取大于 0.5。对另外三个方程可类似作出。

上面介绍的方法是最基本的特征线求解方法，在许多教科书中都可以找到。特征线法具有简单、直观、明了且有与物理过程实质相一致的特点。但是，由于特征值往往不仅是坐标(x,t)的函数，也是物理量的函数，至少对河流动力学各种工程问题是这样，河道水流流速变化急剧的地方，特征线弯曲急剧密集，由特征线确定的网格就非常不规则，一些地方网格密集，另一些稀疏。即使是在同一时刻出发的特征线，由于区域不同点的流速不同，各族特征线的交点不可能在同一时刻层上，且特征线所交的点往往也不在解决工程问题所需的位置上。例如，当需要知道坝前某位置的水深(或水位)时，特征线往往不在所需位置上相交，这些给数值计算带来不少困难，且计算结果往往不在人们需要的位置上而不得不采用插值技术。

为避免特征线法的缺点，哈曲(Hartree)发展了特征有限差分法。哈曲提出这一方法的基本思想是：先将x-t平面上定解区域按有限差分法划分网格的思想，将区域划分成有限个矩形网条(图 4-12)，n表示不同时间层序号，时间步长为Δt，脚标j为距离网格点序号，空间步长为Δx。方法的实质是将待求点人为地置于同一时间层$(n+1)\Delta t$上，然后沿交点M的两族特征线"往后"追逆到上时间层$n\Delta t$上，确定这两族特征线与$n\Delta t$时间层的交点L和R。这样追逆得到的点L和R的坐标往往不在事先定义的差分网格结点上，因此，点L和R的空间坐标是未知的，此时四个未知数是X_L、X_R和U_M、h_M，这四个量可用方程(4-61)～(4-64)求得。但因X_L、X_R未知，所以U_L、h_L和U_R、h_R未知，这可从差分网格结点$(j-1,n)$，(j,n)和$(j+1,n)$上的值通过插值求得。

哈曲方法虽然能避开特征线网格不规则带来的困难，这是它的优点，但由于将由特征线交点M的座标转为求出发点的座标，为了使计算能继续下去，各时间层都需要对求得的结果进行插值，因而引进插值误差，且这种误差将随计算时段的增长使计算结果逐渐光滑，原来精度比较高的标准特征线方法由于差分网格的引入也就失去了一定的意义，这只能通过提高插值多项式的阶数来解决。此外，由于哈曲方法着眼于网格的整齐性，又要保持特征线描述物理实质的优点，这样，当特征值随时空变化时，特征线族的起点和交点就往往不处于同一或在相邻差分网格(图 4-12M和N)上，这样，哈曲方法中必要的插值就会导致数值方法的稳定性受到限制，关于这几点，以后各章中涉及到的地方将进一步论述。

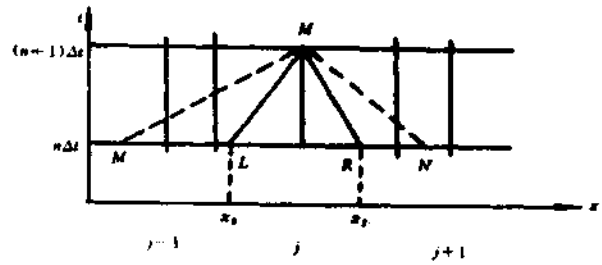


图 4-12 哈曲网格

标准特征线方法虽然精度高，且反映物理过程实质，但由于网格复杂，最终计算结果往往又不在所需位置上而必须进行插值。哈曲方法虽然克服了这些缺点，但计算结果毕竟是通过作各层中间结果插值得来的，在应用低阶插值时精度较差，而高阶插值应用又较复杂，所以，这两种方法在解决实际问题时推广应用比较迟缓。

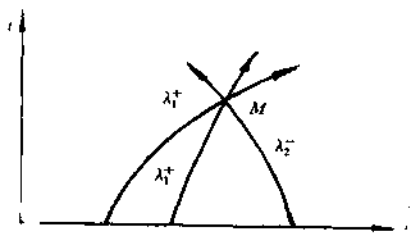


图 4-13

使用标准特征线方法时应注意出现双值问题。一般地，如果特征值与座标 x 和待求函数无关，如线性化了的微分方程，是不会遇到双值问题的。但对于拟线性微分方程解，由于特征值与待求函数有关，而待求函数在 x-t 平面上随时随地变化，同族特征线就有可能相交（见图 4-13），这常出现在不连续场的情形，如水跃与缓流连接区域等。有关这方面的论述可参考文献[5]。

参 考 文 献

[1] 梁昆淼编，数学物理方法，人民教育出版社，1960。

[2] 谢鉴衡主编，河流模拟，水利电力出版社，1988。

[3] 陆金甫、关治、偏微分方程数值解法，清华大学出版社，1987。

[4] 南京大学数学系计算数学专业编，偏微分方程数值解法，科学出版社，1979。

[5] Cunge, J. A., Holly Jr. F. M. and Verwey. A., Practical aspects of Computational river hydraulics, Pitman, London, 1980.

[6] 林秉南，明渠不恒定流的计算和验证，水利学报创刊号，1958。

[7] 杨国录，对流一反应汇方程特征有限差分解法，泥沙研究，1988 年第二期。

第五章　有限差分法

第一节　基本概念

从数学物理方法知道，把微分方程或积分方程问题，化成代数方程组来求近似解的方法，叫做直接方法。本章介绍的有限差分方法就是其中之一。

有限差分法的基本思路，与特征线方法不同，特征线方法是通过特征线这条途径把微分方程组化为常微分方程组的求解方法，而有限差分法，则是把描述连续变量（如流量、过水面积、水位等）的微分方程，在讨论域内化成有限差分方程（通常为代数方程）求近似解的方法，或者说，有限差分方法（简称差分法）就是在有限个网格结点上求出微分方程近似解的一种方法。所谓网格结点系指划分区域网格的交点，又名为计算结点，定义在结点上的函数称结点函数。在有限差分法中，连续变量被网格结点函数值代替。而变量的导数则是由差商来代替，描述某一物理现象的微分方程，如水流连续方程，运动方程和河床变形方程等，则由有限点值的网格代数关系式来代替。在区域网格上离散微分方程（变量、导数）所得到的差分方程和边界条件离散相结合构成差分格式。

一维均匀差分网格是最简单的形式。假如采用图 5-1 的矩形网格，讨论区域被等距的平行直线分割，各组平行线的距离 Δx 和 Δt（称步长）是一个常数，步长 Δx 和 Δt 定义为 $\Delta x = x_j - x_{j-1}$，$\Delta t = t_{n+1} - t_n$，j 和 n 为网格的编号，称为序号，并以此表示网格函数在 x-t 平面上的位置。如果讨论域上沿空间方向分成 N 个结点（包括边界），那么就有（$N-1$）个空间步长，在同一个时间层 $n\Delta t$ 就有 N 个结点函数，用不同差分方式离散微分方程得到的代数方程，其数目和所包含的待求结点函数是不相同的。均匀网格简单明了，应用方便，但对解决具体问题则重点不突出，通常对变量变化大的区域常要求设置较密的网格，而变化小的区域要求较稀的网格，如分汊河道单一段和分汊段，均匀网格是不理想的。所以，实际工程中常采用非均匀网格，即各网格间距 $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$，$\Delta t_j = t_{n+1} - t_n$ 不等，来达到计算量少，精度较高的要求。

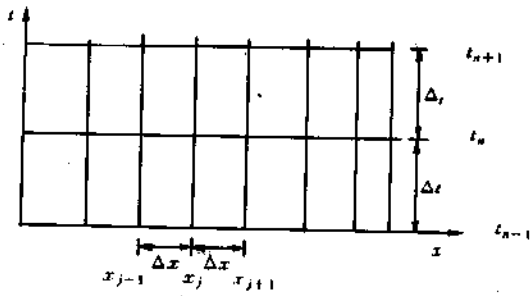


图 5-1

第二节　差分格式的建立

差分格式建立的方法和理论基础，读者可在许多教科书和论著中找到，本书不作深入讲述，只是针对河道数学模型的特定需要，介绍一些最基本的概念和格式，以便读者在后几章中遇到时方便查阅。

考虑解析函数 $f(x,t)$ 和它的一阶偏微商 $\frac{\partial f}{\partial x}$，在点 (x_j,t_n) 使用泰勒展开式得

$$f(x_j+\Delta x,t_n)=f(x_j,t_n)+(\frac{\partial f}{\partial x})_{(j,n)}\Delta x+(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_{(j,n)}\frac{\Delta x^2}{2!}+(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3})_{(j,n)}\frac{\Delta x^3}{3!}+O(\Delta x^4) \quad (5\text{-}1)$$

这里为了简便，座标 (x_j,t_n) 用网格坐标 (j,n) 表示，式中 $O(\Delta x^4)$ 代表高阶微商的剩余项的全体。从(5-1)很容易得出

$$(\frac{\partial f}{\partial x})_j^n=\frac{f_{j+1}^n-f_j^n}{\Delta x}+O(\Delta x) \quad (5\text{-}2)$$

式中 $f_{j+1}^n=f(x_j+\Delta x,t_n)$，$f_j^n=(x_j,t_n)$ 本书约定对时间编号用上标 n 表示，对空间编号用脚标 j 表示，容易验证

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_{j+1}^n-f_j^n}{\Delta x}$$

略去(5-2)中的 $O(\Delta x)$ 有

$$(\frac{\partial f}{\partial x})_j^n=\frac{\delta f}{\delta x}=\frac{f_{j+1}^n-f_j^n}{\Delta x} \quad (5\text{-}3)$$

这就把一阶偏微商用一阶差商 $\frac{\delta f}{\delta x}$ 代替，它的截断误差是一阶的。由于点 j 上的一阶偏微商是用点 $j+1$ 和 j 的结点函数差与步长 Δx 的差商表示的，所以式(5-3)称一阶向前差商。用同样的方法我们可以求得：

一阶向后差商

$$(\frac{\partial f}{\partial x})_j^n=\frac{f_j^n-f_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (5\text{-}4)$$

一阶中心差商

$$(\frac{\partial f}{\partial x})_j^n=\frac{f_{j+1}^n-f_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad (5\text{-}5)$$

一阶中心差商涉及到两个计算步长，它具有两阶截断误差，与一阶向前差和向后差相比，截断误差要高一阶，逼近精度也就高一些。对于时间变量，也有类似公式。对于两阶偏微商也可作类似推导得

$$(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_j^n=\frac{f_{j+1}^n-2f_j^n+f_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (5\text{-}6)$$

应该说明，用差商来代替微商舍去的误差阶数与网格的均匀性有关。例如，我们在非均匀网格上用下面形式来逼近一阶偏微商 $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{f_{j+1}^n-f_j^n}{x_{j+1}-x_j}+\frac{1}{2}\frac{f_j^n-f_{j-1}^n}{x_j-x_{j-1}} \quad (5\text{-}7)$$

假如结点函数在微小域内是连续的，则按泰勒级数展开得

$$f_{j+1}^n=f_j^n+(\frac{\partial f}{\partial x})_j^n\Delta x_j+(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_j^n\frac{\Delta x_j^2}{2}+O(\Delta x^3)$$

$$f_{j-1}^n=f_j^n-(\frac{\partial f}{\partial x})_j^n\Delta x_{j-1}+(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_j^n\frac{\Delta x_{j-1}^2}{2}+O(\Delta x^3)$$

式中 $\Delta x_j=x_j-x_{j-1}$，$\Delta x_{j-1}=x_{j-1}-x_{j-2}$，将其代入(5-7)式得

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}=(\frac{\partial f}{\partial x})_j^n+\frac{1}{4}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})_j^n(\Delta x_j-\Delta x_{j-1})+O(\Delta x_j^2,\ \Delta_{j-1}^2) \quad (5\text{-}8)$$

显然，从式(5-8)可看出，如果网格是均匀的，$\Delta x_j = \Delta x_{j-1}$，则近似式(5-7)就是两阶逼近，否则就是一阶逼近。

上述定义的截断误差近似的阶，是在严格的数学意义下说的，指的是泰勒级数中增量 Δx 的指数 m，泰勒级数展开通常是指在微小 Δx 域内进行，只有当 Δx 很小，m 大时，$\Delta x^m(\frac{\partial^m f}{\partial x^m})$ 就小，截断误差就小。然而，在实际问题中，步长 Δx 是"粗糙"的，物理意义上它不是一个"小量"。例如，在一维河道数学模型中，Δx 常是以公里为量级的，它的 m 阶指数值就不是一个小量。即使在急变流中取网格步长 Δx 较小，但因水流流速急剧，速度位变率较大，$\Delta x^m(\frac{\partial^m f}{\partial x^m})$ 也很难取得小量。因此，截断误差的阶在实际意义下失去它的本质内容。了解这些特性，对河道建模是有帮助的。

第三节　常用的几种差分格式

广义上讲，差分格式包括微分方程离散成的差分方程和定解条件的离散的全体。但由于微分方程的离散与定解条件的离散常采用不同的离散方式，对微分方程离散有效的离散方法，对定解条件的离散就不一定可行，有时可能同时采用多种的离散方式来完成，因此，差分格式的建立主要是以讨论微分方程的离散为主体的。

有限差分法的研究颇为成熟，差分格式繁多，不可能对这些格式作一一介绍，只能介绍在河道数学模型中较常用的格式。在介绍中，我们不打算过多地从理论上作严格的论证，而是着重介绍格式的优缺点，这有助于读者在解决实际工程问题时应用这些格式能更好地了解它的特性。实际上，第一章中从河流动力学角度导出的基本方程式都是拟线性的，线性方程的离散采用最基本的离散手段都不会引起多大麻烦，困难的则是非线性项的离散和处理技巧以及要求离散格式的实用性，多少涉及到一些这方面的内容，这才是我们所关心的。

从计算角度讲，差分格式主要分成两大类：显式差分格式和隐式差分格式。显式差分格式是指任一结点上待求因变量在新的时间层(如在 $n+1$层)的值可以通过早先时间层(如 n 层，$n-1$层等)上变量值显式解出。由于早先时间层的变量值都是已知的，所以，当时间向前推进时，新时间层上的待求变量值可逐点求出。而隐式格式则不然，新时间层上的待求变量的值不可能由早先时间层的已知值求出，还须同时间层(新时间层)相邻结点值(未知的)作为信息，这样，常常在一个代数方程中包含着几个未知数，因此，新时间层的待求变量是不可以用显式解得出来的，往往需要借助于叠代求近似解的方法才能获得解。隐式格式最大优点是时间步长可以取得较大，稳定性能好，对急缓变问题都适用，缺点是计算工作量大。显式格式则不同，时间步长不能选得过大，稳定性限制较强，显式格式都是条件稳定的，但具有计算简单，工作量小等优点，对缓变问题，采用显格式有较多优越性，在实际问题中，选用隐显格式不是这里三言两语所能概括得了的，必须在物理过程的实质和描述这些过程的数学方面进行探思。

一、拉克斯(Lax)格式

这是一个著名的常用双层显式格式，涉及到二个时间层和三个计算结点，见图5-2，以下列形式的无阻力圣维南方程为例：

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{Q^2}{A}+gAZ)=0 \qquad (5\text{-}9)$$

写成向量形式有：

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{G}}{\partial x}=0\ ,\ \overline{f}=\begin{Bmatrix}A\\Q\end{Bmatrix}\quad \overline{G}=\begin{Bmatrix}Q\\\dfrac{Q^2}{A}+gAZ\end{Bmatrix} \tag{5-10}$$

拉克斯格式对变量 $\overline{f}$ 的一阶偏微商采用空间加权向前差商逼近。

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t}\approx\frac{\overline{f}_j^{n+1}-\left[\alpha\overline{f}_j^n+(1-\alpha)\dfrac{\overline{f}_{j+1}^n+\overline{f}_{j-1}^n}{2}\right]}{\Delta t} \tag{5-11}$$

$$0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

而对一阶空间偏微商采用中心差逼近

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}=\frac{\overline{f}_{j+1}^n-\overline{f}_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{5-12}$$

按拉克斯格式离散方程(5-9)得到的代数方程为：

$$\overline{f}_j^{n+1}=\alpha\overline{f}_j^n+(1-\alpha)\frac{\overline{f}_{j+1}^n+\overline{f}_{j-1}^n}{2}-\frac{\Delta t}{2\Delta x}(\overline{G}_{j+1}^n-\overline{G}_{j-1}^n) \tag{5-13}$$

新时间层 $(n+1)\Delta t$ 上的未知量 $\overline{f}_j^{n+1}$ 完全由一上时间层 $n\Delta t$ 的已知值显式确定，用式(5-13)可逐次求得各时间层的数值解。

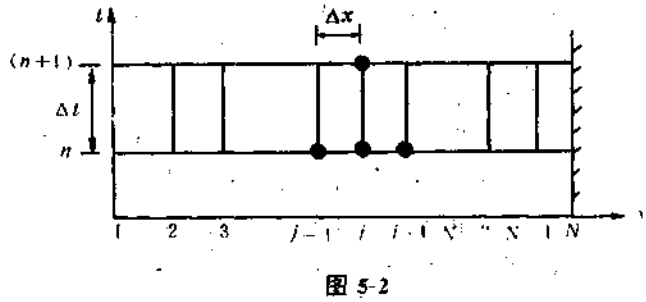


图 5-2

拉克斯格式对一阶时间偏微商采用 n 时间层三点加权平均值进行处理，目的是避免采用简单向前差商构成的格式的不稳定性。简单向前差商对应拉克斯格式取 $\alpha=1$ 的情形，此时，方法具有一阶近似。实际上，采用泰勒级数展开容易验证，对任何 α 和步长 Δx、Δt 方法都是一阶的，只有同时取 $\alpha=0$ 和 $\Delta t/\Delta x=1/\sqrt{gh}$，方法才能给出较精确的解。特征理论分析表明，求解方程(5-9)对于缓流需在上下游端提两个边界条件，但读者可注意到，应用拉克斯格式时，因新时间层上的未知数所在的空间位置 j 介于旧时间层已知值的空间位置 $j-1$ 和 $j+1$ 之间，这样，新时间层在边界上的值只能是强加值，而不可能是计算值，因为如果边界点的值(例如 $j=N$)是计算值，那么就需用到了结点 $N+1$(此点对于序列 $j=1,2,\cdots,N$ 而言超出边界)的值，在运用上这不是十分便利的。

二、Leap-frog 格式

这是一个最早用于解一维波动方程的数值方法，它是一个三层显式格式；这个格式对一阶时空偏微商采用下式逼近

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t}=\frac{\overline{f}_j^{n+1}-\overline{f}_j^{n-1}}{2\Delta t} \tag{5-14}$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}=\frac{\overline{f}_{j+1}^{n}-\overline{f}_{j-1}^{n}}{2\Delta x}$$

依据这个格式，方程(5-10)的离散形式为

$$\overline{f}_{j}^{n+1}=\overline{f}^{n-1}-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\overline{G}_{j+1}^{n}-\overline{G}_{j-1}^{n}) \tag{5-15}$$

此方程具有二阶精度，当 $\Delta t/\Delta x=1/\sqrt{gh}$ 时，方法能给出相当精确的数值解答。Leap-frog 方法用于解方程(5-10)，对变量 Q 和 A 在边界（$j=1,N$）上的处理同样存在上述拉克斯方法中的问题。

三、阿波特-依奥斯库格式

阿波特-依奥斯库1967年提出在不同网格结点上计算流量和水位的方法，对方程(5-9)中水流连续方程和运动方程中各项的一阶偏微商在不同结点上离散，对水流连续方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{A_{j}^{n+1}-A_{j}^{n}}{\Delta t} \tag{5-16}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{j+1}^{n+1}-Q_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}+\frac{Q_{j+1}^{n}-Q_{j-1}^{n}}{2\Delta x}\right)$$

对运动方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{Q_{j+1}^{n+1}-Q_{j+1}^{n}}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{Z_{j+2}^{n+1}-Z_{j}^{n+1}}{2\Delta x}+\frac{Z_{j+2}^{n}-Z_{j}^{n}}{2\Delta x}\right) \tag{5-17}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^{2}}{A}\right)=\frac{1}{2\Delta x}\left[\left(\frac{Q}{A}\right)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}-\left(\frac{Q^{2}}{A}\right)_{j}^{n+\frac{1}{2}}\right]$$

式中的 $(n+\frac{1}{2})$ 是形式符号，它需要 $(n+1)$ 和 n 时间层插值。这种方法对变量 Q 和 A 的离散点见图5-3，每个变量用四点计算，即从点 $j-1$ 到 $j+2$ 共用八个计算点列代数方程。由于连续方程和运动方程不在同一计算点计算，使用该法得到的离散方程解不可能很好地收敛于方程(5-9)的解，只有严格当 $\Delta t,\Delta x\to 0$ 时，收敛性才能得到保证。由于数值方法本身是一种离散过程，而流量 Q 和面积 A 不在同一计算点计算，水流的连续性很难得到保证。

这种方法在实际应用上是十分不方便的，因离散涉及到八个点，对于有分汇流河道的渠网情况，外边界条件和内边界条件的处理使得方法的应用受到限制。即使是对一维河道情况，由于流量 Q 和 A 在不同离散点上逼近，计算达到边界时，在边界点上我们不可能同时在同一位置上强加流量过程线 $Q(t)$ 和水位 $Z(t)$，至少对急变流是这样。

四、偏心格式

考虑线性方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+C\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{5-18}$$

式中 C 为常数，它是变量 f 写成全微分形式时的特征值，如果关于 t 和 x 的偏微商都用向前差商代替，则得差分方程

$$f_{j}^{n+1}=f_{j}^{n}-\frac{C\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^{n}-f_{j}^{n}) \tag{5-19}$$

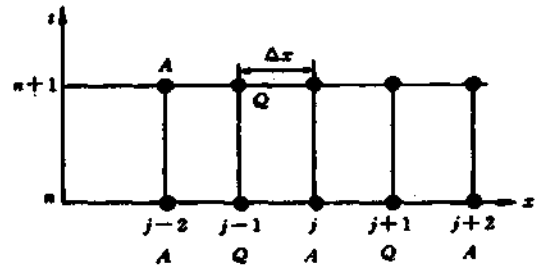


图 5-3

但又如果关于 t 用向前差商代替 $\frac{\partial f}{\partial t}$，用向后差商代替 $\frac{\partial f}{\partial x}$，我们又有

$$f_{j+1}^{n+1}=f_{j+1}^{n}-\frac{C\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^{n}-f_{j}^{n}) \tag{5-20}$$

图5-4(a)、(b)分别为格式(5-19)和(5-20)的图解。从图可以看出，因 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=C$，方法采用的离散手段紧紧与特征线的走向相联系。当 $C<0$ 时，特征线走向为左倾斜，对应格式为(5-19)，因未知变量所在位置(j,$n+1$)的特征线与 $n\Delta t$ 时间层的交点一定落在点(j,n)的右侧，格式(5-19)又称右偏心格式，当 $C>0$ 时，特征线走向为右倾斜，未知变量所在点($j+1$,$n+1$)的特征线与 $n\Delta t$ 时间层的交点一定落在点($j+1$,n)的左侧，格式(5-20)称左偏心格式。不管 $C>0$ 还是 $C<0$，未知变量的位置都顺着来流方向，所以常称迎风格式。

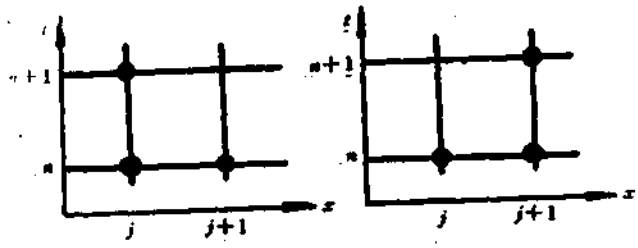


图 5-4

这个格式是读者熟知的，对于比值 $\Delta t/\Delta x\leqslant 1/C$ 是稳定的，具有一阶精度，但收敛特性较差，关于这个问题我们将在第八章详细讨论。

五、普列斯曼(Preismann)格式

这是一个四点隐式格式，是普列斯曼1961年解一维水流方程(5-9)的积分形式提出的。对变量 f 和一阶偏微商在相邻点和相邻时间层采用加权平均进行离散，即对时间 t 的偏微商分别取点 j 和 $j+1$ 上的差商平均值，对空间 x 的偏微商则是分别取 $n\Delta t$ 和 $(n+1)\Delta t$ 时间层的差商加权平均值，变量 f 采用同一网格周围四个相邻点的加权平均值逼近，即

$$\begin{aligned}
f&=\frac{\theta(f_{j+1}^{n+1}+f_{j}^{n+1})+(1-\theta)(f_{j+1}^{n}+f_{j}^{n})}{2}\\
\frac{\partial f}{\partial t}&=\frac{(f_{j+1}^{n+1}+f_{j}^{n+1})-(f_{j+1}^{n}+f_{j}^{n})}{2\Delta t}\\
\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\theta(f_{j+1}^{n+1}-f_{j}^{n+1})+(1-\theta)(f_{j+1}^{n}-f_{j}^{n})}{\Delta x}
\end{aligned} \tag{5-21}$$

因空间方向采用的是算术平均，格式又称四点空间中心差分格式。式中 θ 为时间加权因子，由

稳定分析确定。这个格式相当于在由四个邻点的网格内点 P 处对变量 f 展开所建立的，读者可依据泰勒级数展开作出证明。

四点稳式 Preissmam 格式有不少优点，质量守恒，对 $\theta > \frac{1}{2}$，格式是一阶的；对 $\theta = \frac{1}{2}$，格式是二阶的；又如果 $\theta = \frac{1}{2}$ 和 $\Delta t/\Delta x = 1$，方法能给出相当精确的数值解。此外，又由于格式仅涉及到四个网格结点，外边界和内边界条件的处理都比较方便，所以在国内外都得到广泛应用。但是对于挟沙动床数学模型，对于较小的比值 $\lambda\Delta t/\Delta x$（λ 为特征波速）数值扰动不可避免。但理论和实践都证明，如果对时间 t 的偏微分也同样采用按空间偏微商的方式处理，即

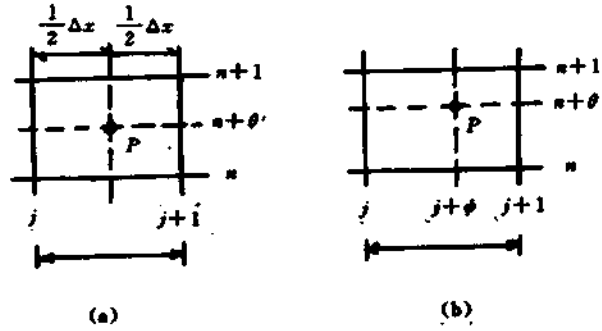


图 5-5

$$
\begin{aligned}
f &= \phi[\theta f_{j+1}^{n+1} + (1-\theta) f_{j+1}^{n}] + (1-\phi)[\theta f_{j}^{n+1} + (1-\theta) f_{j}^{n}] \\
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\phi(f_{j+1}^{n+1} - f_{j+1}^{n}) + (1-\phi)(f_{j}^{n+1} - f_{j}^{n})}{\Delta t} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\theta(f_{j+1}^{n+1} - f_{j}^{n+1}) + (1-\theta)(f_{j+1}^{n} - f_{j}^{n})}{\Delta x}
\end{aligned}
\tag{5-22}
$$

数值扰动现象可以避免，考虑(5-22)的 Preissmann 格式称四点时空偏心隐式格式（见图5-4(b)）。这个格式目前国内外应用相当普遍，在下一节中将对这个格式进行详细分析。

第四节　差分格式的收敛性、稳定性和相容性

上节我们仅就一维基本方程的离散问题进行讨论，即讨论用差分方程代替微分方程问题，将求微分方程解化为求代数方程组的离散解，但这仅是问题的第一步。人们自然要问，这样得到的离散解是否就是微分方程的近似解？要回答这个问题，在得到代数方程以后，还必须进一步研究以下三个问题：

(1) 用什么方法解代数方程组，这是保证其一定可解的必要工具。

(2) 收敛性：若求得的差分方程精确解 f_j^n，在所考虑区域内的任意点（j，n）上，当离散的网格步长（Δx，$\Delta t \to 0$）趋于零时，差分方程精确解是否趋近于微分方程的解，这就是收敛性问题。

(3) 稳定性：求代数方程解是各层逐点计算的，在某一时间层上引入的误差（包括舍入误差和初始误差）必然会影响到以后各层，如果这种误差随计算时间的推进而不断地累积，最终差分方程的解被引入的误差所"淹没"，这种数值解是不稳定的。

可见，第一个问题论述的是代数方程解的方法，对相同的微分方程采用不同的数值格式，解代数方程的方法是有所不同的。收敛性问题是研究代数方程组精确解与微分方程解的关系问题，而稳定性问题则是研究代数方程组近似解与代数方程组精确解的关系问题。

一、收敛性

425760

我们都知道，对于一般的河道工程问题，微分方程的解析解是不可能求得的，即使边界条件能够概化得出来，我们也不可能知道微分方程的解是什么，因此，我们无法比较数值解与解析解，除非对矩形均匀流情况，一般情况下我们都不可能做到这一点。这样，我们所能做到的也只是分析和认识求数值解的数值方法，了解方法的特性，掌握数值解的可靠程度，才能间接地把握住数值解逼近微分方程解。数学上讲，这就要求我们充分了解所使用格式的收敛特性，如果让 $f(j,n)$ 为微分方程 $Lf=0$ 在结点 (x_j,t_n) 的解，$f_{(j,n)}^{(1)}$ 为差分方程 $L_{j,n}^{(1)}f_{(j,n)}^{(1)}=0$ 在相同结点上的精确解、当离散步长 Δx 和 Δt 同时趋于零时满足

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \Delta x\to 0}} f_{(j,n)}^{(1)} = f(j,n) \tag{5-23}$$

这时差分方程解是收敛的。如果一个差分格式是收敛的，即么对于一系列的 $\Delta x,\Delta t$，且当 Δx 和 Δt 逐步趋近于零时，所作的一系列计算得到的数值解，在某一个确定的空间位置上，数值解就一定能逼近解析解；如果一个差分格式是不收敛的，这种解是不可能得到的。从实际应用上讲，不收敛的差分格式解是没有用的。但是，对一般非线性问题，要直接研究差分格式的收敛性很困难，因为微分方程的解事先不知道，我们无法估计到差分方程逼近微分方程时舍去的离散误差（又称截断误差）的界，因而无法知道离散误差的多少。我们目前所能做的，也只能是对线性化了的线性问题可以借用数学工具来得到解决，但实际上，由于河流动力学问题的复杂性，即使是线性化了的问题，现有的数学工具往往也不是十分有效。在这种情况下，也就只能间接地对收敛性作出证明。偏微分方程的数值解法研究表明，研究差分格式的收敛性，可用研究相容性和稳定性来代之，这就是著名的拉克斯（Lax）定理：

如果问题是适定的，并且差分格式满足相容性条件，那么差分格式的稳定性就是该格式收敛性的充分而必要的条件。

这个定理为我们证明差分格式的收敛性成为可能，因为证明差分格式的相容性和稳定性比较容易。拉克斯定理的证明超出了本书的范围，下面两节将通过具体实例，帮助读者初步认识拉克斯定理和掌握相容性及稳定性证明的方法和途径。

二、相容性

首先让我们看看相容性，以下列模型方程为例

$$LU=\frac{\partial U}{\partial t}+C\frac{\partial U}{\partial x}=0 \tag{5-24}$$

式中 $L=\frac{\partial}{\partial t}+C\frac{\partial}{\partial x}$ 为微分算子，C 为波速，U 为待求函数。如果对时间 t 和空间 x 都用向前差商逼近有

$$L_{j,n}^{(1)}u_{(j,n)}^{(1)}=\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+C\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}=0 \tag{5-25}$$

式中 $L_{j,n}^{(1)}$ 为差分算子，u_j^n 为结点函数值。假定 U 的结点值 U_j^{n+1}，U_j^n 和 U_{j+1}^n 是微分方程（5-24）的解，则

$$L_{j,n}^{(1)}U_j^n\neq 0$$

并在结点 (j,n) 展开为泰勒级数有

$$U_j^{n+1}=U_j^n+(\frac{\partial U}{\partial t})_j^n\Delta t+(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2})_j^n\frac{\Delta t^2}{2!}+\cdots \tag{5-26}$$

$$U_{j+1}^n = U_j^n + (\frac{\partial U}{\partial x})_j^n \Delta x + (\frac{\partial^2 U}{\partial x^2})_j^n \frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots$$

将(5-26)代入差分方程(5-25)有

$$(\frac{\partial U}{\partial t})_j^n + C(\frac{\partial U}{\partial x})_j^n + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2})_j^n \Delta t + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2})_j^n \Delta x + \cdots \tag{5-27}$$

因 U_j^n 在点(j,n)满足(5-24)即

$$L U_j^n = (\frac{\partial U}{\partial t})_j^n + C(\frac{\partial U}{\partial x})_j^n = 0$$

则有截断值

$$R_{j,n}^{(1)} = \frac{1}{2!}[(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2})_j^n \Delta t + (\frac{\partial^2 U}{\partial x^2})\Delta x] + \cdots \tag{5-28}$$

称做截断误差。如果当 Δx 和 Δt 趋于零时有

$$|L_{j,n}^{(1)} u_j^n - L U_j^n| \to 0 \tag{5-29}$$

或

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0}} R_{j,n}^{(1)} = 0$$

则说差分格式(5-25)与微分方程(5-24)是相容的。相容性概念是差分方法中一个很基本的概念。相容性条件必须满足。

然而，在数值计算中，Δx 和 Δt 总是一个有限量，误差(5-28)对有限的 Δx 和 Δt 总不可能取得零值，这样用差分方程逼近微分方程时总存在一定的误差。一般地，如果一个差分格式的截断误差 $R_{j,n}^{(1)} = O(\Delta t^q, \Delta x^p)$，则说该格式对时间 Δt 是 q 阶精度，对空间 Δx 是 p 阶精度。如果 $q = p$，则称该差分格式是 P 阶精度的。例如差分格式(5-25)，如果它的解在结点上是准确的，即么，它逼近微分方程(5-24)就具有一阶精度。

应注意的是，用差商逼近微商的截断误差的阶，从概念上讲，与这里所说的截断误差的阶是不同的，不能将差商逼近微商的截断误差的阶说成是差分方程逼近微分方程的截断误差的阶，截断误差表达式(5-28)中的次幂才称为差分方程(6-25)逼近微分方程(5-24)的阶。这是因为用差商代替微商舍去的截断误 差与使用的差分方式有关。例如，如果我们用空间中心差商逼近微分方程(5-24)关于 x 的偏微商项就有

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + C\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{5-30}$$

这里对时间偏微商项的逼近是一阶的，而对于空间偏微商的逼近是二阶的，这样就不便定义差分方程逼近微分方程的阶。

此外差分格式是离散微分方程的整体，它是离散微分方程各项(函数项、导数项)时采用不同离散方式的集体表现，因此，以方程(5-28)定义截断误差的阶才是确切的。一般说来，截断误差的阶越高，数值解逼近解析解的精度也越好。

如果方程(5-29)能得到满足，即当网格长度趋于零时有 $R_{j,n}^{(1)}$ 趋于零，就说差分方程与偏微分方程是相容的。这就是说，当网格不断缩小时，差分方程的极限就是偏微分方程。差分方程的相容性是对差分格式的基本要求，如果这两者得不到相容，那么，差分方程就不可以模拟相应

的偏微分方程所描述的物理过程，用这种差分方程模拟出来的结果就是另外一回事了。关于这一点，我们将在第八章作更细一点的讨论。

应该注意，差分方程与相应的偏微分方程相容，并不意味着差分方程解逼近于微分方程解，相反，相容的差分方程很可能就不收敛，就是说，即使网格步长越来越小，截断误差趋于零（$R_m^{(1)} \to 0$），差分方程(5-25)给出的解也会与微分方程解相差很大。实际上也是这样，因为由于种种原因（初值条件的概化，计算机有限字节的保留），这些都与步长无关，都不允许获得差分方程的精确解，而必然会引入误差，如果这些误差在每个时间层上进行累积，差分方程解就会被这些误差所掩盖，结果是不可能想象的，这就需要进一步研究差分方程的稳定性问题。

三、稳定性

在上一节相容性分析中已经看到，如果差分方程(5-25) 获得精确解，那么就可用差分方程(5-25)求解微分方程(5-24)。实际上，由于初始条件的离散和电子计算机字节长度有限等原因，我们不可能得到差分方程(5-25)的精确解，使用差分方程进行计算时，在某一时间层的某一空间结点都可能引入误差，而只能求得差分方程的近似解 $\tilde{u}_j^n$，则存在差值

$$\varepsilon = u_j^n - \tilde{u}_j^n \tag{5-31}$$

称 ε 为舍入误差，如果这个误差在以后各时间层的计算中逐步累积放大，最终掩盖了精确解，则称数值计算是不稳定的。因此，要分析这种误差传播的情况。

现在，乃以差分格式(5-25)为例，分析其稳定性。设 $\tilde{u}_j^n$ 为差分方程(5-25)的近似解，则误差 ε 满足

$$\varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_j^n - C\frac{\Delta t}{\Delta x}(\varepsilon_{j+1}^n - \varepsilon_j^n) \tag{5-32}$$

称(5-32)为误差方程。引入平移算子 T

$$T\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$$

则式(5-32)变为

$$\varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_j^n - Cr(T\varepsilon_j^n - \varepsilon_j^n)$$

式中 $Cr = \dfrac{C\Delta t}{\Delta x}$，利用上式进行递推可得

$$\varepsilon_j^{n+1} = (1 + Cr - CrT)^n\varepsilon_j^0 \tag{5-33}$$

ε_j^0 为 $t = 0$ 时间层引入的误差。利用二项展开式得

$$\varepsilon_j^{n+1} = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(1 + Cr)^m(-Cr)^{n-m}T^{n-m}\varepsilon_j^0$$

$$= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}(1 + Cr)^m(-Cr)^{n-m}\varepsilon_{n-m+j}^0 \tag{5-34}$$

如果在点 $n - m + j$ 引入微小误差 ε^0，则有

$$\varepsilon_j^{n+1} = (1 + 2Cr)^n\varepsilon^0 \tag{5-35}$$

可见，当 $(1 + 2Cr) < 1$ 时，亦即对有限量 Δt 和 Δx，当 $C < 0$ 时，若 $n \to \infty$，$\varepsilon_j^{n+1} \to 0$；相反，当 $C > 0$ 时，误差 ε^0 在以后各时间层计算中将逐步被放大，将随 n 的增加成指数增加，最后将完全改变差分方程(5-25)的解的面貌。这就说明，差分方程(5-25)虽然是相容的，但系有条件稳定的。只有同时满足相容性条件和稳定性条件，差分方程(5-25)的解才会是收敛的。这就是 Lax 等价定理的内容所在。

在实际应用中，使用 Lax 等价定理在许多范围内都是十分方便的。一个差分格式的相容性比较容易分析和证明，关键问题在于证明格式的稳定性，而稳定性证明的方法很多，读者可

在许多参考书中找到，就可通过 Lax 定理间接地证明格式的收敛性。下面给出河流动力学问题中一个常见的稳定性分析例子。

考虑两个线性偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial h}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+h_0\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{5-36}$$

现在采用拉克斯格式来离散这个方程组，当 $\alpha=0$时，相应的差分方程为

$$u_j^{n+1}-\frac{1}{2}(u_{j+1}^n+u_{j-1}^n)+g\frac{\Delta t}{2\Delta x}(h_{j+1}^n-h_{j-1}^n)=0 \tag{5-37}$$

$$h_j^{n+1}-\frac{1}{2}(h_{j+1}^n+h_{j-1}^n)+h_0\frac{\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n-u_{j-1}^n)=0$$

差分方程(5-37)的相容性，读者可自行证明，由于偏微分方程组(5-36)是线性的，其解可由 Fourier 级数表示，解的特性可由特解表征。不防取 Fourier 级数解的第 m 阶分量为

$$u(x,t)=\overline{u_0}\exp[i(\sigma_m x+\beta_m t)] \tag{5-38}$$

$$h(x,t)=\overline{h_0}\exp[i(\sigma_m x+\beta_m t)]$$

这样，差分方程(5-37)的特解在网格结点上的值为：

$$u_{j+1}^{n+1}=\overline{u_0}\exp\{i[\sigma_m(j+1)\Delta x+\beta_m(n+1)\Delta t]\}$$

$$h_{j+1}^{n+1}=\overline{h_0}\exp\{i[\sigma_m(j+1)\Delta x+\beta_m(n+1)\Delta t]\} \tag{5-39}$$

$$u_j^n=\overline{u_0}\exp\{i(\sigma_m j\Delta x+\beta_m n\Delta t)\}$$

上几式中 u_0 和 h_0 分别为幅常数，与 x 和 t 无关，$i=\sqrt{-1}$，$\sigma_m=\frac{2\pi}{L}$，$\beta_m=\frac{2\pi}{T}$，L 为波长，T 为周期。将式(5-39)代入(5-37)得，

$$\overline{u_0}[e^{i\beta_m\Delta t}-\frac{1}{2}(e^{i\sigma_m\Delta x}+e_0^{-i\sigma_m\Delta x})]+g\frac{\Delta t}{2\Delta t}\overline{h_0}(e^{i\sigma_m\Delta x}-\bar{e}^{-i\sigma_m\Delta x})=0$$

$$h_0\overline{u_0}\frac{\Delta t}{2\Delta x}(e^{i\sigma_m\Delta x}-e^{-i\sigma_m\Delta x})+\overline{h_0}[e^{i\beta_m\Delta t}-\frac{1}{2}(e^{i\sigma_m\Delta x}+e^{-i\sigma_m\Delta x})]=0 \tag{5-40}$$

由三角关系可化成：

$$\overline{u_0}[e^{i\beta_m\Delta t}-\cos\sigma_m\Delta x]+g\overline{h_0}\frac{\Delta t}{\Delta x}i\sin\sigma_m\Delta x=0$$

$$h_0\overline{u_0}\frac{\Delta t}{\Delta x}i\sin\sigma_m\Delta x+\overline{h_0}(e^{i\beta_m\Delta t}-\cos\sigma_m\Delta x)=0 \tag{5-41}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} e^{i\beta_m\Delta t}-\cos\sigma_m\Delta x & g\frac{\Delta t}{\Delta x}i\sin\sigma_m\Delta x \\ h_0\frac{\Delta t}{\Delta x}i\sin\sigma_m\Delta x & e^{i\beta_m\Delta t}-\cos\sigma_m\Delta x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{u_0} \\ \overline{h_0} \end{bmatrix}=0 \tag{5-42}$$

因 $\overline{u_0}$和 $\overline{h_0}$不可能为零，则必有

$$\begin{vmatrix} e^{i\beta_m\Delta t}-\cos\sigma_m\Delta x & g\frac{\Delta t}{\Delta x}i\sin\sigma_m\Delta x \\ h_0\frac{\Delta t}{\Delta x}i\sin\sigma_m\Delta x & e^{i\beta_m\Delta t}-\cos\sigma_m\Delta x \end{vmatrix}=0$$

展开得：

$$e^{i\beta_m\Delta t} = \cos\sigma_m\Delta x \pm ic\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\sigma_m\Delta x \tag{5-43}$$

式中 $c = \sqrt{gh_0}$，这就求得了差分方程特解中波数 σ_m 与频率 β_m 之间的联系。如果关系式(5-43)能够满足，那么解(5-38)就是差分方程(5-37)的解。

差分方程的频率 β_m 可为实数也可能是复数。如果 β_m 为实数，则由(5-43)有

$$|e^{i\beta_m\Delta t}| = 1$$

和

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1$$

这说明差分方程(5-37)的数值解幅在 $c\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$ 的条件下不随时间而衰减。若 β_m 为复数，不妨让

$$\beta_m = \mathrm{Re}\beta_m + i\mathrm{Im}\beta_m$$

$\mathrm{Re}\beta_m$ 和 $\mathrm{Im}\beta_m$ 分别为复数 β_m 的实部和虚部，则式(5-43)的左边为：

$$e^{i\beta_m\Delta t} = e^{-\mathrm{Im}\beta_m\Delta t}(\cos\mathrm{Re}\beta_m\Delta t + i\sin\mathrm{Re}\beta_m\Delta t) \tag{5-44}$$

将(5-44)代入(5-43)并比较实部和虚部则有：

$$e^{-\mathrm{Im}\beta_m\Delta t}\cos\mathrm{Re}\beta_m\Delta t = \cos\sigma_m\Delta x \tag{5-45}$$

$$e^{-\mathrm{Im}\beta_m\Delta t}\sin\mathrm{Re}\beta_m\Delta t = \pm c\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\sigma_m\Delta x \tag{5-46}$$

将(5-45)、(5-46)两式平方相加可解出

$$e^{-\mathrm{Im}\beta_m\Delta t} = \sqrt{[\cos^2\sigma_m\Delta x + (c\frac{\Delta t}{\Delta x})^2\sin^2\sigma_m\Delta x]} \tag{5-47}$$

我们称 $e^{-\mathrm{Im}\beta_m\Delta t}$ 为差分格式解幅因子，记为：

$$\lambda = e^{-\mathrm{Im}\beta_m\Delta t}$$

再将(5-45)、(5-46)相除得

$$\mathrm{tg}\mathrm{Re}\beta_m\Delta t = \pm c\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathrm{tg}\sigma_m\Delta x \tag{5-48}$$

可找到一个时间步长内的波频率 $\mathrm{Re}\beta_m$ 与波数 σ_m 的确定关系为：

$$\mathrm{Re}\beta_m\Delta t = \mathrm{arctg}[c\frac{\Delta t}{\Delta x}\mathrm{tg}\sigma_m\Delta x] \tag{5-49}$$

关系式(5-47)和(5-49)表征了差分格式(5-37)确定解(5-38)的基本特性。分析幅因子表达式(5-47)，如果 $\mathrm{Im}\beta_m\Delta t > 0$，一个时间步长幅因子 λ 将小于1，特解式(5-38)的数值幅因子 $e^{-\mathrm{Im}\beta_m n\Delta t}$ 将随着 n 的增大而很快趋于零，这就是说弗氏级数解分量随着时间是衰减的，相反，如果 $\mathrm{Im}\beta_m\Delta t < 0$，幅因子 $e^{-\mathrm{Im}\beta_m n\Delta t}$ 将随着 n 的增大而增加，解的波幅将随时间增长而增大变幅。在这种情况下，数值计算引入的误差将放大，最后，数值真解就会有可能被误差掩盖而被破坏，这就产生数值不稳定。因此，对于确定的步长 Δt 和 Δx，可直观地看出稳定条件是：

$$\mathrm{Max}|\lambda| = \mathop{\mathrm{Max}}_{m}|e^{-\mathrm{Im}\beta_m\Delta t}| \leqslant 1 \tag{5-50}$$

式中的 $\mathop{\mathrm{Max}}_{m}$ 表示弗氏级数分量的波幅因子取最大值。从(5-47)中可得出差分方程(5-37)的稳定条件为：

$$\cos^2\sigma_m\Delta x + c^2(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2\sin^2\sigma_m\Delta x \leqslant 1 \tag{5-51}$$

可解得

$$|c\frac{\Delta t}{\Delta x}|\leqslant 1 \tag{5-52}$$

这就是大家熟悉的 Corrant-Friedriehs-Leay (CFL) 稳定条件，是由 Courant-Friedriehs-Leay 于1928年提出的，称

$$Cr = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

为 Courant 数。因此差分方程(5-37)对于 $\alpha=0$ 的情形，稳定条件是 $C_r\leqslant 1$。与特征线分析联系起来，条件(5-52)有一个明确的物理意义。对于正常值 c

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant\frac{1}{c} \tag{5-53}$$

由特征线理论，我们又有

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant\frac{1}{c}=\frac{t_P-t_A}{x_P-x_A}=\frac{\Delta t}{x_P-x_A} \tag{5-54}$$

只有当 $\Delta x>x_P-x_A$ 时稳定条件(5-52)才能得到满足，式(5-54)各项的几何意义是，$\Delta t/\Delta x$ 为步长比，它是过结点 P 的一条直线斜率，见图5-6。而 $1/c$ 则是过 P 点的特征线的斜率，这条特征线与 $n\Delta t$ 时间层上 x 轴的交点 A 一定要落在点 $(j-1,n)$ 和 (j,n) 之内，数值计算才是稳定的。由斜率 $\Delta t/\Delta x$ 的直线围成的 PBC 区域称为差分方程在点 P 的解的依赖区域，而由斜率 $1/c$ 的直线围成的 PAC 区域为微分方程解的决定域。因此，若差分格式是稳定的，差分方程的依赖域必须包含微分方程的决定域。

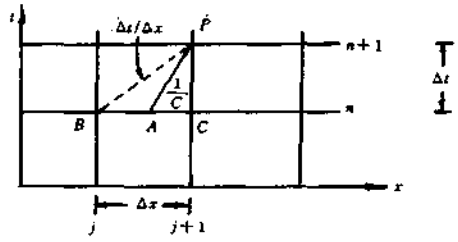


图 5-6

至此我们证得，显式拉克斯格式是有条件稳定的。一般说来，显式格式是有条件稳定的，Courant 条件是一个很重要的稳定条件。对于一定的空间步长，它限制时间步长就不允许取得过大。而隐式格式则是无条件稳定的，时间步长的取值不受到 Courant 条件限制。隐式格式无条件稳定这一事实，也可以从特征理论得到解析，例如图5-6所示，在隐式计算的情况下，P 点上的值不只是依赖于点 B、C 上的值，而且也依赖于同一时间层上相邻各点的值，这些同时间层上的值又依赖于 x 轴上 n 时间层所有结点的值，这样，P 点的依赖域就大大扩大。

上面得到的结论是针对线性方程(5-36)得来的，如果方程是拟线性的，这些结论就不一定正确。实践表明，即使我们能证明线性方程的差分格式是稳定的，拟线性方程的差分格式也不一定稳定。而在实际应用中，更多的则是拟线性方程而不是线性方程，拟线性稳定问题可用所谓冻结系数法来判断，但对于具体的实际问题，这种方法不十分有效，而会出现非线性不稳定。因此，每当用拟线性方程解决实际问题之前，进行数值试验和调试以便了解数值解的特性是必要的。由于目前缺乏分析拟线性方程稳定性的有效工具，线性问题的稳定性分析(包括调试)对数学模型的应用是相当有用的。

第五节　莱恩德兹(Leenderts)收敛准则

如果问题的提法是适定的，且差分格式满足相容性条件和稳定性条件，就可由 Lax 定理推断格式是收敛的。这是在严格数学意义下得到的结论，即在时空步长 Δt 和 Δx 同时趋于零时才有意义。然而，在实际应用中，Δt 和 Δx 总是有限的，例如对于一维计算，计算河长近百里，实测断面间距一般有1～2公里，长达10公里，计算系列长达几十年，对这些具体情况要在严格数学意义下进行计算是没有实际意义的，也是根本不可能做到的。既然步长 Δt 和 Δx 在实际中不宜取得无限地小，那么原来收敛的差分方程解就不可能严格做到，这样，取有限步长计算的结果与差分方程收敛解有多大差别呢？这就需要引进收敛程度的概念，来表明数值解对收敛解的近似程度。在回答这个问题之前，先考察一个例子。

给对流方程(5-24)提初始条件

$$u(x,0) = e^{[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}]}$$

x_0 为分布中心，σ 为偏差。这时方程(5-24)有一个分布形如初值的解析解，分布中心在 $\bar{x} = x_0 + ct$，取波速 $c = 1\text{m/s}$，空间步长 $\Delta x = 10\text{m}$，时间步长取 $\Delta t = 10$ 和5s，对应的柯朗数为 $Cr = 1.0$和0.5，按迎风格式(5-20)计算，并与解析解相比较，结果绘于图5-7。我们都知道，迎风格式(5-20)当 Δt，$\Delta x \to 0$ 时是与微分方程(5-24)相容的，且当柯朗数 $Cr \leqslant 1$ 时数值计算是稳定的，因此在 $\Delta t, \Delta x \to 0$ 的意义下数值解收敛于微分方程解。而现在从计算结果可以看出，虽然在 $Cr = 0.5$ 和1.0两组参数中计算都是稳定的，但只有 $Cr = 1.0$ 这组参数给出的结果与解析解完全重合，而 $Cr = 0.5$ 这组参数给出的结果相差甚远，换句话说它已不完全收敛于解析解了，而只能当作解析解的近似解。

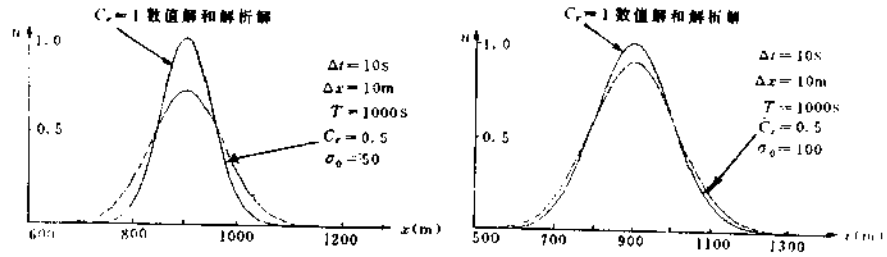


图 5-7

在线性问题中，我们较易选择一组参数使得数值解与解析解完全重合，而在非线性问题中，波速随时随地在变化，时空步长也往往不同，就极难做到这一点了。此外，从结果还可以看出，就 $Cr = 0.5$ 这组数，解的近似程度还与 σ 的大小有关，σ 较大，u 的分布较平缓，模拟结果较好，近似程度当然也就较好。

那么对于一个具体问题，如何选用或建立一个差分格式，当选定一个差分格式后又如何选择合适的计算参数才能使得数值解较好地逼近于解析解呢？这就需要研究差分格式的收敛特性，以了解数值解逼近解析解的近似程度。

莱恩德兹1967年在研究河口和海岸水流运动时，对分析差分方程的收敛特性提出一个收敛准则，又称扩展牛曼(Von Neumann)条件，其内容是

$$R_1 = \frac{|\text{数值解幅因子}|}{|\text{解析解幅因子}|} = \frac{|\tilde{\lambda}|}{|\lambda|} \tag{5-55}$$

$$R_2 = \frac{|\text{数值解波速}|}{|\text{解析解波速}|} = \frac{|\tilde{C}|}{|C|} \tag{5-56}$$

式中两竖表示取模值。R_1 称为幅态因子，表征差分方程数值解的幅模值与微分方程解(本书又称解析解)的幅模值的相对大小，R_2 称为相态因子，表征差分方程数值解波速与微分方程解波速之比。只有当 R_1 与 R_2 同时趋于1时，差分方程数值解才完全收敛于微分方程解。这两个因子称为莱恩德兹收敛数。

为了更直观地阐明这个准则，现以上节使用的拉克斯格式为例作进一步分析。

上节我们使用解(5-38)求得了差分方程(5-37)的幅因子(5-47)以及数值解频率和波数的关系(5-48)，并已证明 $|C\frac{\Delta t}{\Delta x}| < 1$ 时数值计算是稳定的。现在分析这个格式的收敛特性。

首先使用解(5-38)分析微分方程(5-36)将确定怎样的幅因子 λ 以及频率 β_m 和波数 σ_m 的关系。将解(5-38)代入(5-36)得

$$\overline{u_0}\beta_m + g\,\overline{h_0}\sigma_m = 0 \tag{5-57}$$

$$h_0\,\overline{u_0}\sigma_m + \overline{h_0}\beta_m = 0$$

考虑到方程(5-57)对幅常数 $\overline{u_0}$ 和 $\overline{h_0}$ 必有非零解，则有

$$\beta_m^2 - C^2\sigma_m^2 = 0$$

或

$$\beta_m = C\sigma_m \tag{5-58}$$

因此，微分方程解波频率与波数为实数关系，可得解(5-38)的解幅因子为

$$\lambda = e^{-ic\sigma_m t} \tag{5-59}$$

因 $C = \sqrt{gh_0}$ 和 $\sigma_m = \frac{2\pi}{L}$ 均为实数，故必有

$$|\lambda| = 1 \tag{5-60}$$

而微分方程解(5-36)的波速则由(5-58)给出

$$\beta_m/\sigma_m = C = \sqrt{gh_0} \tag{5-61}$$

综合(5-60)和(5-61)表明，由微分方程(5-36)确定的解(5-38)有解幅不随时间的变化而变化，解幅既不放大也不衰减；同时，解将以常速度 C 传播。因此，微分方程解在传播过程中的任意时刻将不发生任何变形。

既然微分方程解具有上述特性，差分方程(5-37)是否也一样呢？将差分方程解幅表达式(5-47)写成

$$e^{-\mathrm{Im}\beta_m\Delta t} = \cos\sigma_m\Delta x\sqrt{1 + C^2(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2\mathrm{tg}^2\sigma_m\Delta x} \tag{5-62}$$

使用 $\sqrt{1+x}$，$\mathrm{tg}x$ 和 $\cos\Delta x$ 的展开式，对于微小量 $\sigma_m\Delta x$ 可导出：

$$|\tilde{\lambda}| = e^{-\mathrm{Im}\beta_m\Delta t} \approx 1 + \frac{\sigma_m^2}{2}(C^2\Delta t^2 - \Delta x^2) \tag{5-63}$$

从近似式(5-63)明显可以看出，一般地，对于有限量 Δt 和 Δx 差分格式不可能有 $|\tilde{\lambda}| = 1$，这就反映了差分方程(5-37)的解与微分方程(5-36)的解在幅值上表现出来的差别。特别地，只有选取

$$Cr = \frac{C\Delta t}{\Delta x} = 1 \tag{5-64}$$

两者的解在幅值上的差别才有可以消失，解幅才一致。

其次，采用同样的方法处理式(5-49)有

$$\frac{R_m\beta_m}{\sigma_m} = C\left[1 + \frac{\sigma_m^2}{3}(\Delta x^2 - C^2\Delta t^2)\right] \tag{5-65}$$

这个关系式与微分方程确定的(5-61)仍然存在差别，即差分方程(5-37)解的波速不可能与微分方程解波速相一致。微分方程解的波速是与时间无关的，而差分方程解的波速与时空步长 Δt 和 Δx 有关，即使是均匀网格 $\Delta x_j = \Delta x_{j+1}(j = 1,2,\cdots)$，数值解波与解析解波仍然存在差别。如果采用非均匀网格 $\Delta x_j \neq \Delta x_{j+1}$，那么数值解波速将沿 x 方向发生变化，这种变化将使得数值解不同于解析解。可见，不管是均匀还是非均匀网格，要使两者取得一致，其必要条件仍然是等式(5-64)，在 $Cr = 1$ 这个条件下，显然可求得

$$R_1 = \frac{|\bar{\lambda}|}{|\lambda|} = 1 + \frac{\sigma^2}{2}(C^2\Delta t^2 - \Delta x^2) = 1 \tag{5-66}$$

和

$$R_2 = \frac{R_m\beta_m}{\sigma_m}/\beta_m/\sigma_m = \frac{C[1 + \frac{\sigma_m^2}{3}(\Delta x^2 - C^2\Delta t^2)]}{C} = 1 \tag{5-67}$$

这样，差分方程解与微分方程在幅值和相位上都取得了一致。从数学意义上讲，差分方程解不会因步长有限而受到影响，可完全收敛于微分方程解。因此，按条件(5-64)先取步长，拉克斯格式(5-37)的解是足够精确的。

上节的稳定分析表明，使用拉克斯格式解方程(5-36)允许取时间步长 Δt 满足

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{C} \tag{5-68}$$

来保证数值计算的稳定性，并不需要严格先取 $\Delta t = \Delta x/C$，这是问题的一方面。问题的另一方面，在实际应用时，通常使用变步长网格，常遇到的是 $(C^2\Delta t^2 - \Delta x^2) < 0$，因此，收敛因子(5-66)和(5-67)得不到满足而有 $R_1 < 1$ 和 $R_2 > 1$。这说明差分方程(5-37)的解幅值总比微分方程幅值为小。这种现象称为数值减幅(damping)。而差分方程解波速大于微分方程解波速，数值解波超前于解析解波。为了保证数值计算的稳定性，Courant 条件是必需满足的，因此，条件稳定的差分方程(5-37)对一切 Δt 满足 $C_r < 1$ 条件的解总是存在数值减幅和数值解波超前解析解波的现象。

从表达式(5-66)可看到，收敛因子 R_1 和 R_2 是 Courant 条件和相对波长 $M = \frac{L}{\Delta x}$ 的函数，对所选取的一系列 Δx、Δt 值，可绘制出 R_1 和 R_2 与 C_r 和 M 的关系曲线族，这些表征差分格式收敛特性的曲线族称为幅态和相态(见图5-8)。

从上面的分析和图5-8可以看出，选取这样的步长使得因子 R_1 和 R_2 的曲线愈接近于1就愈好，数值解精度就会愈高。

实际上，莱恩德兹收敛准则是研究差格式收敛特性的变化问题，从实用上讲，是解决差分方程数值解的精度问题。因为在讨论差分格式收敛性时，我们只注意到当 Δt，$\Delta x \to 0$ 时差分方程解逼近微分方程解，并没有注意当 Δt，Δx 为有限时差分方程与微分方程解的差别，莱恩德兹收敛准则就揭示了这种差别和程度。如果这种差别程度小，质量就高。从图5-8可以看出，拉克斯格式对于短波问题不能说是一个高质量的数值格式。

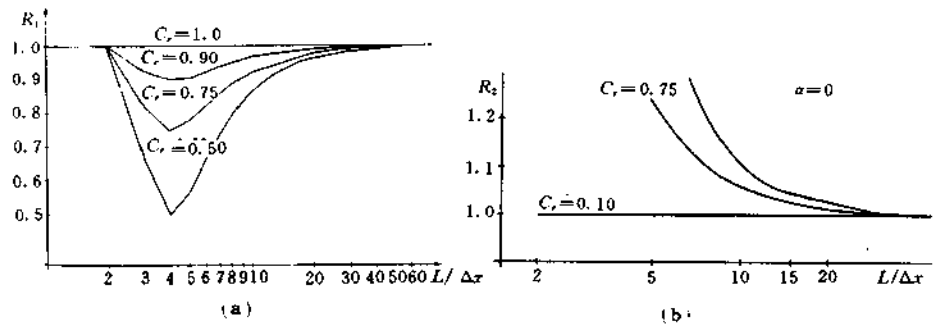


图 5-8 拉格斯格式的幅态和相态

上面是针对拉克斯格式应用于微分方程(5-36)作出的收敛特性分析，对于其它数值格式，同样适用。由于收敛因子 R_1 和 R_2 表征的是一个比值关系，在稳定的条件下它也允许有 $R_1>1$ 和 $R_2<1$。在这种情况下，我们称数值增幅和数值滞后现象。前者表现为数值解幅值大于微分方程解幅值，后者表现为数值解波速滞后于微分方程解波速。数值解波超前或滞后于微分方程解波现象统称为数值弥散(dispersion)。在以后各章节的分析中，均采用莱恩德兹收敛准则进行分析。因为这种方法便于应用，不需要高深的数学知识。

第六节 一个实例

为了有助于认识差分格式的相容性，稳定性和收敛性的差别以及三者的关系，并进一步认识莱恩德兹准则，这里用一个实例来说明。

前一节已指出，三者是完全不同的概念。相容性是当 $\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$ 时表征差分方程能否与微分方程充分逼近的基本特性，而稳定性是研究差分方程近似解与差分方程数值精确解的差别是否随时间步长数目的增加而发展的问题；收敛性则是着眼于当 $\Delta t\to 0$，$\Delta x\to 0$ 时差分方程精解是否逼近微分方程解的问题。一般来说，相容的差分格式可能是稳定的、收敛的，也可能是不稳定、不收敛的，稳定的格式也可能是不收敛的。但收敛的格式一定是相容的和稳定的。

现在考察等宽平底且无阻力情况下的双曲型运动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u_0\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{5-69}$$

这是一个线性化了的纯对流方程式，如果对 t 偏微商采用向前差商，对 x 采用向后差商逼近，有差分方程

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+u_0\frac{u_j^n-u_{j-1}^n}{\Delta x}=0 \tag{5-70}$$

如果对 x 采用向前差商逼近，又有另一形式的差分方程

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+u_0\frac{u_{j+1}^n-u_j^n}{\Delta x}=0 \tag{5-71}$$

再次，又如果对 x 采用中心差商逼近，又可得与上两者形式完全不同的差分方程为

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t}+u_0\frac{u_{j+1}^n-u_{j-1}^n}{2\Delta x}=0 \tag{5-72}$$

在点 (j,n) 进行泰勒级数展开，并利用对流方程(5-69)消去有关时间 t 的微商项，由差分方程(5-70)可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u_0\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u_0}{2}(\Delta x-u_0\Delta t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(\Delta t^2+\Delta x^2) \tag{5-73}$$

由差分方程(5-71)出发有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u_0\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{u_0}{2}(\Delta x+u_0\Delta t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+O(\Delta t^2-\Delta x^2) \tag{5-74}$$

从式(5-73)和(5-74)明显可以看出，当 $\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$ 时，差分方程(5-70)和(5-71)都与微分方程(5-69)相容。同样可以证明差分方程(5-72)也是相容的。虽然三者都与原方程相容，但稳定性各异。

取弗氏级数解(5-38)在结点 (j,n) 的值为

$$u_j^n=\bar{u}^n e^{-i\sigma_m j\Delta x} \tag{5-75}$$

代入方程(5-70)可求得差分方程过渡矩阵的范数为：

$$|\bar{u}|^2=1-4u_0\frac{\Delta t}{\Delta x}(1-\frac{u_0\Delta t}{\Delta x})\sin^2(\frac{\sigma_m\Delta x}{2}) \tag{5-76}$$

其次将(5-75)代入(5-71)，可求得差分方程(5-71)的范数为

$$|\bar{u}|^2=1+4u_0\frac{\Delta t}{\Delta x}(1+\frac{u_0\Delta t}{\Delta x})\sin^2(\frac{\sigma_m\Delta x}{2}) \tag{5-77}$$

最后对差分格式(5-72)再使用(5-75)，相应的范数为：

$$|\bar{u}|^2=1+(\frac{u_0\Delta t}{\Delta x})^2\sin^2(\sigma_m\Delta x) \tag{5-78}$$

从这些结果可以看出：当 $u_0>0$，且 $C_r=\frac{u_0\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$ 时，因(5-76)的范数小于1，故差分格式(5-70)是稳定的，而差分方程(5-71)则是不稳定的，因为范数(5-77)大于1，Von Neumann 条件得不到满足。反过来，若当 $u_0<0$，$-1<\frac{u_0\Delta t}{\Delta x}<0$，差分方程(5-71)则是稳定的，而差分方程(5-70)就不稳定了。但是，不管对哪种情况，差分方程(5-72)的范数都大于1，故差分格式(5-72)是无条件不稳定的。这就说明，上述三种格式都是相容的，但一些是条件稳定的，而另一些则是不稳定的。

现在为讨论方便，限于 $u_0>0$ 的情形，我们知道，这时的差分格式(5-70)是与微分方程(5-69)相容的，且在 $u_0\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1$ 的条件下数值计算是稳定的，由 Lax 等价定理，差分格式(5-70)的解是收敛的，这是在严格的数学意义下 $(\Delta x,\Delta t\to 0)$ 所说的，然而，在实际应用上，由于 Δx 和 Δt 有限，差分格式(5-70)的解又将怎样呢？由莱恩德兹收敛准则，依据定义(5-55)和表达式(5-76)，差分格式(5-70)的收敛幅因子 R_1 为

$$R_1=1-4Cr(1-Cr)\sin^2(\frac{\sigma_m\Delta x}{2}) \tag{5-79}$$

显然，如果 $\Delta x\to 0$，对一切满足稳定条件 $Cr\leqslant 1$ 的数值解都有 $R_1=1$，但若 Δx 为有限，只能选取 $Cr=0$ 和1才有 $R_1=1$，数值解才完全逼近解析解。对于一切 $0<Cr<1$，因 $\frac{\sigma_m\Delta x}{2}=\frac{2\pi}{L}\frac{\Delta x}{2}=\pi\Delta x/L$，以 Cr 和 $L/\Delta x$ 为参数，可绘出 R_1 的变化曲线如图5-9。从图5-9可以看出，对于一切 $0<Cr<1$，虽然差分格式(5-70)是稳定的，但不收敛于原微分方程解，只有空间步长 Δx 取

得足够小（$L/\Delta x \to \infty$），差分方程解才获得较好的精度。这就说明稳定的格式不一定收敛。就格式(5-70)而言，在 $0 \leqslant Cr \leqslant 1$ 的条件下是稳定的，但只在两端点上 $Cr = 0$ 和1格式是收敛的。

为了进一步说明这一点，这里给出一个算例。给微分方程(5-69)强加初始条件

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x < \dfrac{1}{2} \\ 0 & x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

这是一个间断函数。取 $u_0 = 1$，空间步长 $\Delta x = 0.1$ 中 Courant 条件分别取 $Cr = 0$，0.9，1.0，及1.1，图5-10绘出按这些取值在 $n = 9$ 个步长后的计算结果。由图可以看出：

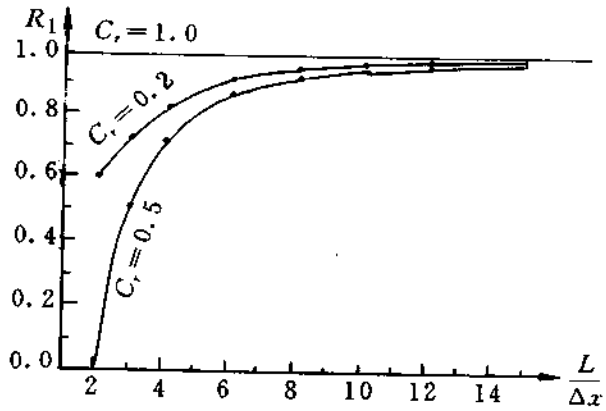


图 5-9

(1) 当 $Cr = 0$ 或1时，差分方程(5-70)计算出来的数值解与解析解一致。

(2) 而当 $0 < Cr = 0.9 < 1$ 时，虽然计算是稳定的，但数值解远离解析解。

(3) 在解析解出现棱角处出现数值解平滑现象，即出现数值扩散。

这些都是因 Δt 和 Δx 取有限值所造成的，就是说，在时空步长取有限值时，并非是在满足稳定的条件下数值格式都是收敛的。其原因是在时空步长 Δt 和 Δx 从无限小到有限取值的过程中，格式的相容性受到破坏。这可从下面的证明得到解析。

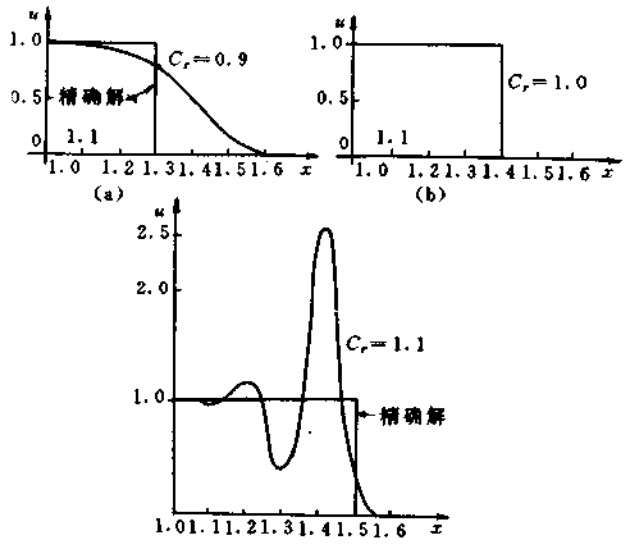


图 5-10

将方程(5-73)改写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} Cr(1 - Cr) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^2 + \Delta x^3) \qquad (5\text{-}80)$$

可见对有限值 Δx 和 Δt，只有当 $Cr = 0$ 和 $Cr = 1$ 时，差分方程(5-70)与微分方程(5-69)相容，此时由 Lax 定理，数值计算是收敛的，所以图5-10中 $Cr = 0$ 和1

的两条曲线完全与解析解一致。但如果当 $0 < Cr < 1$ 时，方程(5-80)右边的两阶导数项不为零，差分方程(5-70)与微分方程(5-69)在 Δt 和 Δx 有限的条件下就不再相容了，由 Lax 定理可知稳定不相容的格式是不收敛的，所以图5-10中 $Cr = 0.9$ 的数值解与解析解不一致。但方程(5-80)说明这样一个事实，如果忽略时空步长的高阶微量项，它就是一个带数值扩散系数的对流扩散方程式，因此，在 Δx 和 Δt 取有限值且 $0 < Cr < 1$ 时，差分格式(5-70)实质上与对流扩散方程相容(不是严格数学意义下)，此时差分格式(5-70)的解收敛于对流扩散方程解，而不再是对流方程(5-69)了，因而有图5-10中 $Cr = 0.9$ 时出现平滑解现象，这实质上是数值扩散在起作用。

第七节　阻力项存在对稳定性的影响

前两节讨论了拉克斯格式在 $\alpha = 0$ 时的稳定性和收敛性，这一节专门就此格式取 $\alpha = 1$ 时应用于水动力学浅水波方程的稳定问题进行讨论，并着重放在有阻力项存在时对稳定性的影响。

考虑下列形式的方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{5-81}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} = g(J_0 - J_f) \tag{5-82}$$

为了对拟线性方程(5-81)、(5-82)进行稳定性分析，取 $u = u_0 + u'$ 和 $h = h_0 + h'$ 分别对两个方程线性化得

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + u_0\frac{\partial h'}{\partial x} + h_0\frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \tag{5-83}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0\frac{\partial u'}{\partial x} + g\frac{\partial h'}{\partial x} = g(J_0 - J_f) \tag{5-84}$$

式中 u_0，h_0 分别为恒定均匀流的流速和水深，撇"′"表示小扰动值。为了便于线性化能坡项 J_f 按曼宁公式(3-3)取以下形式

$$J_f = k\frac{u^2}{h^{2m}} \tag{5-85}$$

式中 k、m 为常系数。

$$J_f = k\frac{(u_0 + u')^2}{(h_0 + h')^{2m}} = k\frac{u_0}{h_0^{2m}}\frac{(1 + \frac{u'}{u_0})^2}{(1 + \frac{h'}{h_0})^{2m}} \tag{5-86}$$

将 $\frac{u'}{u_0}$ 和 $\frac{h'}{h_0}$ 看成小量，展开(5-86)各项并略去 u' 和 h' 的乘积项得

$$J_f = k\frac{u_0^2}{h_0^{2m}}(1 + 2\frac{u'}{u_0} - 2m\frac{h'}{h_0}) \tag{5-87}$$

在稳定均匀流情况下，能坡与底坡相同，即 $J_0 = k\frac{u_0^2}{h_0^{2m}}$，则有

$$J_f = J_0(1 + 2\frac{u'}{u_0} - 2m\frac{h'}{h_0}) \tag{5-88}$$

将式(5-88)代入(5-84)后得方程组

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + h^0 \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \tag{5-89}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} = -2gJ_0\left(\frac{u'}{u_0} - m\frac{h'}{h_0}\right) \tag{5-90}$$

为了解阻力项存在对稳定性的影响，先讨论方程(5-90)无阻力的情况，取拉克斯格式 $\alpha=1$ 应用于方程组(5-89)和(5-90)，并应用上节介绍的 Fourier 方法对相应的离散格式进行稳定分析可以求得幅因子为

$$\begin{aligned} e^{i\beta_m \Delta t} &= 1 - iu_0 \frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\sigma_m \Delta x \pm i\sqrt{g\bar{h}}\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\sigma_m \Delta x \\ &= 1 - i(u_0 \pm \sqrt{g\bar{h}})\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\sigma_m \Delta x \end{aligned} \tag{5-91}$$

由 $\beta_m = \mathrm{Re}\beta_m + i\mathrm{Im}\beta_m$ 分解 $e^{i\beta_m \Delta t}$，通过比较实虚部并平方相加可求得

$$e^{-\mathrm{Im}\beta_m \Delta t} = 1 + [(u_0 \pm \sqrt{g\bar{h}})\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\sigma_m \Delta x]^2 \tag{5-92}$$

稳定条件要求 $|e^{-\mathrm{Im}\beta_m \Delta t}| < 1$，故必须满足

$$1 + [(u_0 \pm \sqrt{g\bar{h}})\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\sigma_m \Delta x]^2 \leqslant 1 \tag{5-93}$$

显然对于急缓流 $Fr \gtrless 1$ 和有限量 $\Delta t, \Delta x$，上式都不可能得到满足，故拉克斯格式在 $\alpha=1$ 的条件下不考虑阻力时是不稳定的。

现在考虑运动方程(5-90)具有阻力项的情形。对方程使用拉克斯格式($\alpha=1$)有

$$h_j^{n+1} - h_j^n + \frac{u_0 \Delta t}{2\Delta x}(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) + \frac{\Delta t h_0}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) = 0 \tag{5-94}$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{u_0 \Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + g\frac{\Delta t}{2\Delta x}(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n) = -2gJ_0\left(\frac{u'}{u_0} - m\frac{h'}{n_0}\right)_j^n \tag{5-94}$$

采用 Fourier 方法分析格式(5-94)，注意到 $u_j^n = \bar{u}^n e^{i\sigma_m j\Delta x}$ 和 $u_j^{n+1} = \bar{u}^n e^{i\beta_m \Delta t} e^{i\sigma_m j\Delta x}$，则有

$$\bar{h}^n(e^{i\beta_m \Delta t} - 1) + \frac{u_0 \Delta t}{2\Delta x}\bar{h}^n(e^{i\sigma_m \Delta x} - e^{-i\sigma_m \Delta x}) + \frac{\Delta t h_0}{2\Delta x}\bar{u}^n(e^{i\beta_m \Delta x} - e^{-i\beta_m \Delta x}) = 0 \tag{5-95}$$

$$\begin{aligned} &\bar{u}^n(e^{i\beta_m \Delta t} - 1) + \frac{1}{2}u_0\bar{u}^n\frac{\Delta t}{\Delta x}(e^{i\sigma_m \Delta x} - e^{-i\sigma_m \Delta x}) + \frac{1}{2}g\bar{h}^n\frac{\Delta t}{\Delta x}(e^{i\sigma_m \Delta x} - e^{-i\sigma_m \Delta x}) \\ &\qquad = -2gJ_0\left(\frac{\bar{u}^n}{u_0} - m\frac{\bar{h}^n}{h_0}\right)\Delta t \end{aligned} \tag{5-95}$$

求 $\bar{u}^n$ 和 $\bar{h}^n$ 非平凡解，按照上节的推导过程，稳定条件为

$$|e^{-\mathrm{Im}\beta_m \Delta t}|^2 = [1 - gJ_0(\frac{1}{u_0} - \frac{m}{h_0})\Delta t]^2 + [(u_0 \pm \sqrt{gh_0})\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\sigma_m \Delta x]^2 \leqslant 1$$

稳定的最不利情况是 $\sin\sigma_m \Delta x = 1$，则

$$[1 - gJ_0(\frac{1}{u_0} - \frac{m}{h_0})\Delta t]^2 \leqslant 1 - [(u_0 \pm \sqrt{gh_0})\frac{\Delta t}{\Delta x}]^2 \tag{6-96}$$

如果右端为零，则有柯朗条件

$$(u_0 \pm \sqrt{gh_0})\frac{\Delta t}{\Delta x} = 1 \tag{5-97}$$

而左端则是

$$1 - gJ_0(\frac{1}{u_0} - \frac{m}{h_0})\Delta t \leqslant 0$$

故只要选取时间步长 Δt 满足

$$\frac{\Delta x}{u_0 \pm \sqrt{gh}} \geqslant \Delta t \geqslant \frac{1}{gJ_0(\frac{1}{h_0} - \frac{m}{h_0})} \tag{5-98}$$

数值计算是稳定的，而不象无阻力情况下的稳定条件(5-93)那样总得不到满足。因此，这个例子表明阻力存在有助于计算的稳定性。

应该说明，这仅是一个例子，对于一般情况还没有肯定性解答。

第八节 数值边界条件处理

我们知道，要建立一个数学模型，首先得建立描述真实物理过程的物理方程式和提出适当的物理边界条件，然后，使用差分近似离散物理方程式和边界条件得到差分方程和相应的差分边界条件。但是，对于某一函数及微商的离散形式是多种多样的，因此，往往会得到差分方程所需的边界条件数要多于微分方程的边界条件。如果这些边界条件处理不妥，就会影响到内部结点的计算，产生伪数值过程，甚至导致整个计算不稳定。

一般地，差分方程所需边界条件的个数有较微分方程的要少、或较多、或相等三种可能情况。前一情况常称为数值边界条件的缺少，第二种情况为数值边界条件的增补，这两种情况，差分方程系统(包括差分方程和差分边界条件)与微分方程系统相比具有一定的“变态”性质，亦即由于差分方程要求的边界条件个数不同于微分方程所要求的个数，差分方程系统就与微分方程系统不完全一致。差分方程数值边界条件的缺少往往是不允许的，因为它完全改变了原微分方程问题的适定提法。而差分方程数值边界条件增补是允许的，虽然它所要求的数值边界条件的个数较微分方程所要求的多，只要增补上去的数值边界条件不是人为随意增加，而是按微分方程定解问题所应有的特性考虑增加条件，差分方程系统就不会发生变态。因此，差分方程所要求的边界条件个数最好与微分方程所要求的相同。

对于一维问题，附加边界条件的增补有初始时间层计算的增补和边界两端数值条件的增补，在实际应用中，碰到较多的则是后一种情况。考虑边界条件增补的方法目前常采用特征线方法，以下用两个例子说明方法的具体做法。

考虑平底无阻力作用运动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{5-99}$$

和初边界条件

$$u(x,0) = f(x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant L \tag{5-100}$$

$$u(0,t) = g(t) \qquad t > 0 \tag{5-101}$$

现在采用蛙跳格式

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - Cr(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \tag{5-102}$$

来逼近方程(5-99)，蛙跳格式是一个三点三层显格式。因此在 $n = 1$ 计算第二个时间层上的 u_j^2 时需用到 u_j^0 和 u_j^1。对于一切 x，u_j^0 可由初始条件(5-100)给出。

$$u_j^0 = f(x_j)$$

但是 u_j^1 既不能用差分方程(5-102)计算，也不能由初始条件给定。对 u_j^1 通常用两种办法给出。

一种办法是，注意到

$$u(x,t+\Delta t)=u(x,t)+\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}+O(\Delta t^2)$$

$$=u(x,t)-u_0\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}+O(\Delta t^2)$$

特别地取 $t=0$，并假定 $u(x,t)$ 在初始领域内 $f(x)$ 连续可微，则有

$$u(x,\Delta t)=f(x)-u_0\Delta t\,f'(x)+O(\Delta t^2)$$

这样我们有

$$u_j^1=f(x_j)-u_0\Delta t f'(x_j)$$

利用这个关系式就可以计算出 $u_j^1(j=1,2,\cdots,N)$。

第二种做法是采用嵌套的办法，即对第一时间层的 u_j^1 采用迎风格式

$$u_j^1=u_j^0-Cr(u_j^0-u_{j-1}^0)\quad j=2,3,\cdots,N \tag{5-103}$$

计算，而在以后各时间层采用蛙跳格式计算。当然，在这种做法中，也可采用其它双层格式计算 u_j^1。

这样利用差分格式(5-102)和边界条件(50-100)及式(5-103)便可算出 $u_j^2(j=2,3,\cdots,N)$。接下去要计算 u_j^3，当计算 u_1^3 时需用到 u_1^2，u_1^2 由上游端微分方程边界条件 $g(t)$ 确定。但是，要计算 u_{N-1}^3 时需用到 u_N^2，由于微分方程(5-99)不允许提下边界条件，u_N^2 就不可能由物理边界条件确定，而且这个值也不可能由差分格式(5-102)计算出来。于是可以看出，对于差分格式(5-102)来说必须增补 $x=L$ 处的边界条件，才能使数值计算向下一时间层推进。增补的办法很多、最常用的方法是采用特征线上的关系，如图5-11所示。

P 点位于特征线 AP 的顶点，在这点上的值 u_N^2 由微分方程(5-99)可知完全取决于 A 点上的值，故可取

$$u_N^{n+1}=u_N^n-Cr(u_N^n-u_{N-1}^n) \tag{5-104}$$

这是一阶精度的数值边界条件，上式还可写成略高阶一点的形式

$$u_N^{n+1}=\frac{1}{2}(u_N^{n+1}-u_{N-1}^{n-1})-Cr\left[\frac{1}{2}(u_N^{n+1}-u_{N-1}^{n-1})-u_{N-1}^n\right] \tag{5-105}$$

但是后一种情形要求的内存略多一些。

我们可以注意到，上面两种处理方法都是利用迎风格式进行边界处理，一般来说都是可行的，关于精度更高的处理方法将在第八章中介绍。

上面介绍的方法是对单个因变量而言的，对于两个因变量的情形，可同样处理。现在考虑以 $u(x,t)$ 和 $h(x,t)$ 为因变量的平底无阻力圣维南方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\dfrac{\partial h}{\partial x}=0\end{cases} \tag{5-106}$$

对于缓流 $Fr<1$ 的情况，方程组(5-106)要求强加下列定解条件

上边界条件：$u(0,t)=f_1(t)$ (5-107)

下边界条件：$h(L,t)=g_1(t)$ (5-108)

初始条件：$u(0,x)=f_2(x)$ (5-109)

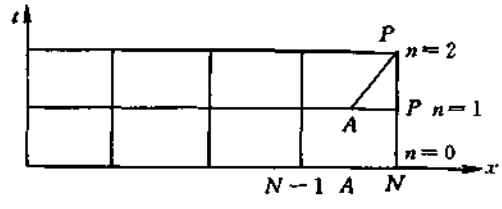


图 5-11

$$h(0,t) = g_2(x) \tag{5-110}$$

我们采用 Lax 格式逼近微分方程组(5-106)得

$$\begin{aligned} h_j^{n+1} &= \alpha h_j^n + (1+\alpha)\frac{h_{j+1}^n + h_{j-1}^n}{2} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[h_j^n(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + u_j^n(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n)] \\ u_j^{n+1} &= \alpha u_j^n + (1-\alpha)\frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\Delta x}[u_j^n(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + g(h_{j+1}^n - h_{j-1}^n)] \end{aligned} \tag{5-111}$$

Lax 格式是一个三点双层显格式，对于内计算结点 u_j^{n+1} 和 h_j^{n+1} 可用差分方程组(5-111)求得，只有在两个边界上的计算带来麻烦。由于在点 $j=1$ 的上边界有两个未知值 u_1^{n+1} 和 h_1^{n+1}，而微分方程(5-106)仅需要一个上边界条件(5-107)，故只能给出 u_1^{n+1} 而 h_1^{n+1} 就不能确定，需要考虑数值边界条件的增补(见图5-12)，因 h_1^{n+1} 在特征线 MB 上，而特征关系为

$$u - 2\sqrt{gh} = \text{const} \tag{5-112}$$

故

$$u_1^{n+1} - u_B^n = 2\sqrt{gh_1^{n+1}} - 2\sqrt{gh_B^n}$$

可解出

$$h_1^{n+1} = \frac{1}{4g}(u_1^{n+1} - u_B^n)^2 + h_B^n \tag{5-113}$$

u_B^n 和 h_B^n 为上一时间层的值，可由结点1和2上的值通过插值得到，故是已知的。

同样，当计算到 $N-1$ 点时，P 点上的两个值 u_N^{n+1} 和 h_N^{n+1} 只能由下边界条件(5-108)给定一个值 h_N^{n+1}，而 u_N^{n+1} 可按上述处理办法得到

$$u_N^{n+1} = u_A^N + 2[\sqrt{gh_A^n} - \sqrt{gh_N^{n+1}}] \tag{5-114}$$

式中 u_A^n 和 h_A^n 可用结点 $N-1$ 和 N 的值通过插值得到。利用式(5-113)、(5-114)和初始条件，计算就可进行下去了。

数值计算在内结点希望有较高的精度，一般地总希望选用具有较高阶精度的数值格式进行内结点计算。但是，如果选用的格式需要进行附加数值边界条件处理时，而这些条件处理又往往不易提高精度，那么，低阶精度数值条件会不会影响到内结点的计算精度呢？一般来说，这主要取决于数值格式的特性，如果格式对引入的误差不敏感，低阶一点的数值边界条件是可以接受的。实践已证明，处理边界点的精度可以比内点计算底一阶而不影响计算精度，因此，如果内结点用具有二阶精度的格式进行计算，那么具有一阶精度的数值边界条件足够了。但是，如果格式对误差十分敏感，那么，内点计算格式不论多高，如果数值边界条件的差分精度较低，也不要指望内点计算精度较高。从这个意义上讲，最好选用不需要考虑数值条件增补的格式。例

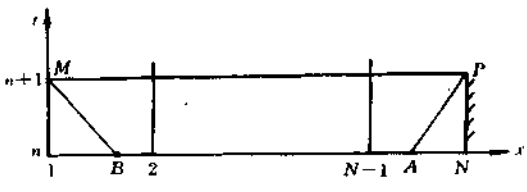


图 5-12

如，如果采用普列斯曼格式去求解方程组(5-106)，由于这个格式仅涉及到两层两个计算结点在任意两个计算结点上可列出二个方程，所以不会有数值边界条件的处理问题。

第九节　普列斯曼(Preissmann)格式的稳定性和收敛性

前面介绍了在国内外有广泛应用的普列斯曼基本格式，现在来详细分析这个格式的基本特性。

一、误差的阶

在第二章导出的基本方程中看到，基本方程组可转换成以下形式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+k\frac{\partial f}{\partial x}=P\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+E$$

这是一个抛物型方程组。在无阻力无扩散情况下有以下形式的对流型方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+k\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{5-115}$$

为了便于讨论普列斯曼格式的截断误差的阶，不失一般性取 $k=I$，I 为单位阵。则按普列斯曼格式逼近方程有

$$\begin{aligned}\psi(f_{j+1}^{n+1}-f_{j+1}^{n})+(1-\psi)(f_j^{n+1}-f_j^n)+\frac{\Delta t}{\Delta x}\theta(f_{j+1}^{n+1}-f_j^{n+1})\\+(1-\theta)(f_{j+1}^n-f_j^n)=0\end{aligned} \tag{5-116}$$

在结点 $(j,n+1)$ 按泰勒级数展开式(5-116)各项，并注意到

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\partial f}{\partial x}\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}=-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial t}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

……

差分方程(5-116)可写成

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}[1-2\psi+\gamma(1-2\theta)]\Delta x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\\+\frac{1}{6}[(1-3\psi)+3\gamma(1-\theta-\psi)+\gamma^2(2-3\theta)]\Delta x^2\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+O(\Delta x^3)\end{aligned} \tag{5-117}$$

式中 $\gamma=\Delta t/\Delta x$，由此可看出，用差分方程(5-116)逼近微分方程(5-115)的截断误差的阶是：

①当 $\psi\neq 0.5$ 和 $\theta\neq 0.5$ 时，差分格式具有一阶精度；

②当 $\psi=\theta=0.5$ 和 $\gamma\neq 1$ 时，具有二阶精度；

③又当 $\psi=\theta=0.5$ 和 $\gamma=1$ 时，格式具有高阶精度。

二、格式的稳定性

先线性化方程(5-115)中系数矩阵 $k=k_0(f_0)$，则使用四点偏心普列斯曼格式离散方程(5-115)得

$$\begin{aligned}(1-\psi)(f_j^{n+1}-f_j^n)+\psi(f_{j+1}^{n+1}-f_{j+1}^n)+rk_0[(1-\theta)(f_{j+1}^n-f_j^n)+\\\theta(f_{j+1}^{n+1}-f_j^{n+1})]=0\end{aligned} \tag{5-118}$$

取解具有以下形式

$$f(x,t)=f_0e^{i(\beta_m t+\sigma_m x)} \tag{5-119}$$

f_0 为幅常数，$i=\sqrt{-1}$，$\beta_m=\frac{2\pi}{T}$，$\sigma_m=\frac{2\pi}{L}$，T 为周期，L 为波长。依据解(5-119)，式(5-118)中各计算点的函数值可表成

$$f_j^n = f_0 e^{i(\beta_m n\Delta t+\sigma_m j\Delta x)},\quad j=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots$$

将这些结点值代入差分方程(5-118)得

$$\left\{\frac{(e^{i\beta_m\Delta t}-1)[1+\psi(e^{i\sigma_m\Delta x}-1)]}{(e^{i\sigma_m\Delta x}-1)[1+\theta(e^{i\beta_m\Delta t}-1)]}I+\gamma k_0\right\}(f_j^n)=(0) \tag{5-120}$$

式中 I 为单位阵，$\gamma=\Delta t/\Delta x$，(f_j^n) 为未知向量结点值，(0)为零向量，令

$$a=\frac{(e^{i\beta_m\Delta t}-1)[1+\psi(e^{i\sigma_m\Delta x}-1)]}{(e^{i\sigma_m\Delta x}-1)[1+\theta(e^{i\beta_m\Delta t}-1)]}$$

则有

$$(aI+\gamma k_0)(f_j^n)=(0) \tag{5-121}$$

因 $(f_j^n)\neq 0$，有

$$|k_0+\frac{a}{\gamma}I|=0 \tag{5-122}$$

若记 λ 为方程(5-115)中系数阵 k_0 的特征根向量，则有

$$|k_0-\lambda I|=0 \tag{5-123}$$

比较式(5-122)与(5-123)得

$$\lambda=-\frac{a}{\gamma} \tag{5-124}$$

记

$$\zeta=e^{i\beta_m\Delta t},\eta=e^{i\sigma_m\Delta x}$$

式(5-124)可写成

$$-\gamma\lambda=\frac{(\zeta-1)[1+\psi(\eta-1)]}{(\eta-1)[1+\theta(\zeta-1)]}$$

由此可解出

$$\zeta=1-\frac{\lambda\gamma}{\psi+\frac{1}{\eta-1}+\gamma\theta\lambda} \tag{5-125}$$

亦即

$$e^{i\beta_m\Delta t}-1=\frac{-\gamma\lambda\frac{e^{i\sigma_m\Delta x}-1}{e^{i\sigma_m\Delta x}+1}}{\psi+(\frac{1-2\psi}{e^{i\sigma_m\Delta x}+1})+\gamma\alpha\lambda(\frac{e^{i\sigma_m\Delta x}-1}{e^{i\sigma_m\Delta x}+1})} \tag{5-126}$$

记

$$T=tg(\frac{\sigma_m\Delta x}{2})$$

因

$$\frac{e^{i\sigma_m\Delta x}-1}{e^{i\sigma_m\Delta x}+1}=iT\ ,\ \frac{1}{e^{i\sigma_m\Delta x}+1}=\frac{1}{2}(1-iT)$$

故式(5-126)变为

$$e^{i\beta_m\Delta t}-1=\frac{-4\gamma T^2(-\frac{1}{2}+\psi+\gamma\theta\lambda)-2i\gamma\lambda T}{1+4(-\frac{1}{2}+\psi+\gamma\lambda\theta)^2T^2} \tag{5-127}$$

设取 $\beta_m=\beta_R+i\beta_I$，β_R 和 β_I 分别表示波频率 β 的实部和虚部，可写成

$$e^{i\beta_m\Delta t} = e^{-\beta_I\Delta t}(\cos\beta_R\Delta t + i\sin\beta_R\Delta t) \tag{5-128}$$

比较式(5-127)与式(5-128)中的实部和虚部得：

$$e^{-\beta_I\Delta t}\cos\beta_R\Delta t = \frac{1 + 4T^2(-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma\theta)[-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma(\theta - 1)]}{1 + 4(-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma\theta)^2T^2} \tag{5-129}$$

$$e^{-\beta_I\Delta t}\sin\beta_R\Delta t = \frac{-2\lambda\gamma T}{1 + 4(-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma\theta)^2T^2} \tag{5-130}$$

上两式两边平方相加得

$$e^{-2\beta_I\Delta t} = \frac{1 + 8AT^2 + 16BT^4}{1 + 8CT^2 + 16DT^4} \tag{5-131}$$

式中

$$A = (-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma\theta)[-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma(\theta - 1)] + \lambda^2\frac{\gamma^2}{2}$$

$$B = (-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma\theta)^2[-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma(\theta - 1)]^2$$

$$C = (-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma\theta)^2$$

$$D = (-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma\theta)^2$$

数值稳定要求幅因子 $\bar{\lambda} = e^{-\beta_I\Delta t} \leqslant 1$，则必有

$$e^{-2\beta_I\Delta t} \leqslant 1$$

亦即

$$\frac{1 + 8AT^2 + 16BT^4}{1 + 8CT^2 + 16DT^4} \leqslant 1 \tag{5-132}$$

显然如果同时满足以下不等式

$$A \leqslant C, \qquad B \leqslant D$$

数值计算是稳定的。由不等式 $A \leqslant C$ 解得

$$(-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma\theta)[-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma(\theta - 1)] + \frac{\gamma^2\lambda^2}{2} \leqslant (-\frac{1}{2} + \psi + \lambda\gamma\theta)^2$$

最后解得

$$\frac{\psi - \frac{1}{2}}{\lambda\gamma} + (\theta - \frac{1}{2}) \geqslant 0 \tag{5-133}$$

同样由不等式 $B \leqslant D$ 可解得式(5-133)，亦即只要按式(5-133)选择时空权重因子 ψ 和 θ，按普列斯曼格式计算是数值稳定的。

当 $\psi = \frac{1}{2}$ 时，稳定条件是 $\theta \geqslant \frac{1}{2}$，而当 $\theta = \frac{1}{2}$ 时则要求

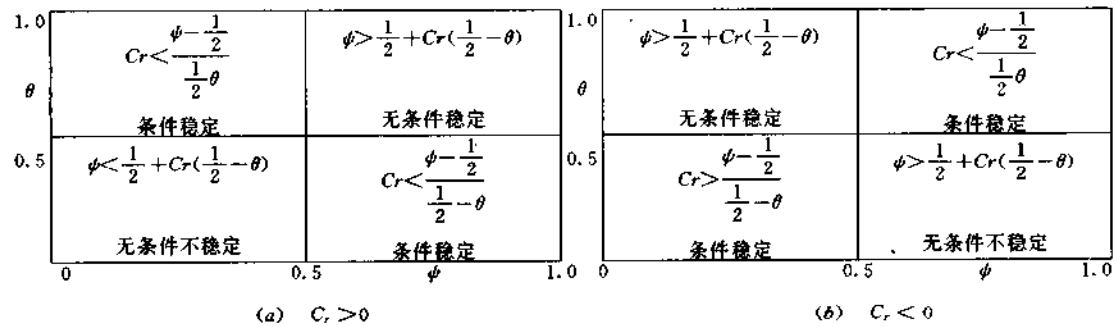
$$\frac{\psi - \frac{1}{2}}{\lambda\gamma} \geqslant 0$$

因 $\lambda\gamma = \lambda\frac{\Delta t}{\Delta x} = Cr$，对于圣维南方程组的两个波相根是

$$\lambda_{1,2} = u \pm \sqrt{gh}$$

对于缓流 $Fr \leqslant 1$，则 $Cr = (u + \sqrt{gh})\frac{\Delta t}{\Delta x} > 0$ 和 $Cr = (u - \sqrt{gh})\frac{\Delta t}{\Delta x} < 0$，这样应选取 $\psi > \frac{1}{2}$ 和 $\psi < \frac{1}{2}$ 亦即对连续方程和运动方程的两个空间重权因子 ψ 取不同的值才能保证数值计算的稳定性。对急流 $Fr \geqslant 1$，则 $\lambda_{1,2} \geqslant 0$，故只要选择 $\psi > \frac{1}{2}$ 才能保证计算是稳定的，毋需将连续方程和运动方程分开考虑选择不同的空间权重因子。

对于 θ 和 ψ 取任意值，稳定性与水流流动方向有关，稳定域如图5-13所示。显然只要取 $\psi > 0.5$ 和 $\theta > 0.5$，条件(5-133)是得到满足的，数值计算属无条件稳定。



(a) $C_r > 0$　　(b) $C_r < 0$

图 5-13

三、格式的收敛性

1. 解析解的幅和相

将解式(5-119)代入微分方程(5-115)得

$$(\frac{\beta_m}{\sigma_m} I + k_0)(f_0) = 0 \tag{5-134}$$

又因 $(k_0 - CI)(f_0) = 0$，故可找到微分方程解的波速 C 为

$$C = -\frac{\beta_m}{\sigma_m} \tag{5-135}$$

另一方面，微分方程(5-115)的特征速度 $dx/dt = C$ 可通过特征线理论求得，它取决于系数矩阵 k_0，而 k_0 是实数矩阵，且波长 L 和周期 T 也均为实数。因此，β_m 与 σ_m 的关系为实数范围的单一关系，这样可得到解式(5-119)的波幅因子的模为

$$|\lambda| = |e^{i\beta_m t}| = |e^{-\kappa C \sigma_m t}| = 1 \tag{5-136}$$

它表明由微分方程(5-115)决定的解将不存在增减幅现象。

2. 数值解的幅和相

由式(5-129)和式(5-130)相除得

$$\mathrm{tg}\beta_R \Delta t = \frac{-2TCr}{1 + 4T^2(\frac{1}{2}\psi + \theta Cr)[\psi - \frac{1}{2} + Cr(\theta - 1)]} \tag{5-137}$$

可解得数值解波频率为

$$\beta_R \Delta t = \mathrm{arc}(\mathrm{tg}\beta_R \Delta t) \tag{5-138}$$

进而数值解波速可表成

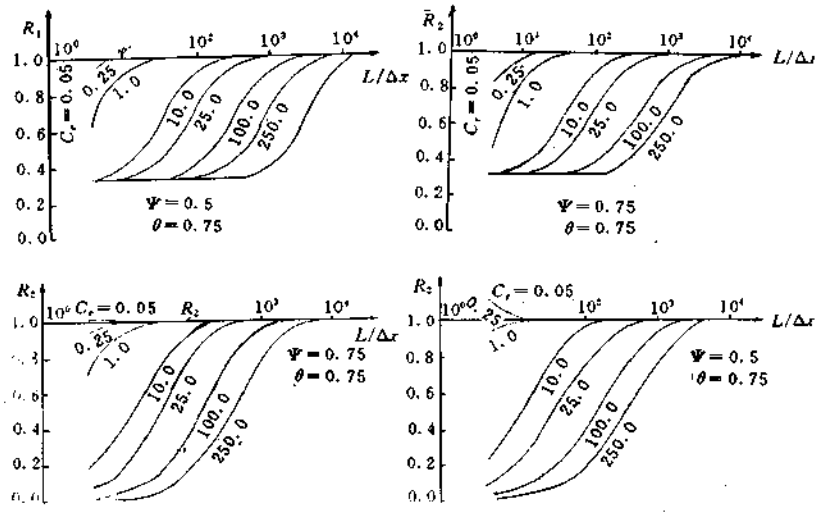


图 5-14

$$\tilde{C}=\frac{\beta_R(\psi,\theta,\sigma_m\Delta x,Cr)}{\sigma_m} \tag{5-139}$$

解式(5-131)表示数值解幅因子，而解式(5-139)则表示数值解波速，根据 Leenderts 准则，得两个收敛因子为

$$R_1=\frac{|\tilde{\lambda}|\text{ 由式(5-131) 计算}}{|\lambda|\text{ 由式(5-136) 计算}} \tag{5-140}$$

$$R_2=\frac{|\tilde{C}|\text{ 由式(5-139) 计算}}{|C|\text{ 由式(5-135) 计算}} \tag{5-141}$$

根据上两式以 ψ，θ 和 Cr 为参数，可计算出收敛因子 R_1 和 R_2 与相对波长 $L/\Delta x$ 的关系曲线(图5-14)，从图可看出：

① 对于 $\psi=\theta=0.5$，当 $Cr=1$ 时，格式不存在减幅和相错位；当 $Cr\neq1$ 时，格式存在相错位。

② 当 ψ 和 θ 取值大于0.5时，对于短波模拟，Cr 取值不宜大于10。而对于长波模拟。Cr 值可允许取大一些也能保证数值计算精度。

③ 对于确定的波长 $L/\Delta x$，ψ 和 θ 值愈接近于1，结果愈不理想，数值减幅将较严重。

④ 对于河床变形模拟，由于河床变形速度较小，从物理过程上讲 Δt 可选得较大。对 $\psi=0.5$，$\theta=0.5$，如果 Δt 取得过小致使 $Cr<0.05$ 时，数值计算将出现数值扰动现象。

参 考 文 献

[1] 陆金甫，关治，偏微分方程数值解法，清华大学出版社，1987。

[2] 南京大学数学系计算数学专业编，偏微分方程数值解法，科学出版社，1979。

[3] Cunge. J. A., Holly, Jr. F. M. and Verwey, A., Practical aspect of Computational river hydraulics, Pitman, London, 1980.

[4] Lax, P. D., Weak solutinos of non-Linear hyperbolic equations and their numerical applications, Comm. Pare Appl. Nath. 7, 1954.

[5] Lax, P. D. and Woudroff, B., Systems of conservation lows, Conn. Pare Appl. Math., 13,1960.

[6] Courant, R. and Friedrichs, K. O., Supersonic flow and Shock waves, Interscience, 1948.

[7] Abbott, M. B. and Ionescu, F., On the numerical conputation of nearly-horizontal Flows, J. Hyd. Res., 5,No. 2. 1967.

[8] Preissmann, A., Propagation des intumescecces dans les canaux et rivière. First Congress of the French Association for Conputation, Grenoble, 1961.

[9] Preissmann, A. and Cunge, J. A. Calcul des intumescences sur machines slectroniques. IX. meeting of the IAHR, Dabrovnik, 1961.

[10] Preissmann, A. and Cunge, J. A., Calcul du ascart sur machine electronique, La Houille Blanche, No.5, 1961.

[11] 杨国录,四点时空偏心 Preissmann 格式的应用问题,泥沙研究,1991年第四期。

[12] 杨国录,贡日等,冲积河流一维数学模型,泥沙研究,1989年第四期。

[13] Courant, R., Frieduichs, K. O. and Lewy, H., On the partial difference equations of mathematical physics. Math. Ann., 100,P. 32 (in German), 1928.

[14] Leendertse, J. J., A water-quatity simutalion model for well-ixwd estuaries and coastal seas, Vol. I, Principles of computation, Rand Corporation Memorandum, RM-6230-RC, February,1970.

[15] Lyn, D. A. Goodwin, P., Stability of a general Prerssmann scheme. J. of Hgdr. Eng. Vol. 113. No. 1, 1987.

第六章　水流数学模型

前几章论述了河道水流数学模型的基本方程及其求解的理论基础和数值方法，从本章开始，涉及到数学模型的建模方法、步骤以及计算的实现和过程，本章介绍水流模型，以后各章节介绍挟沙水流模型。

水流数学模型，又常称定床数学模型，用于研究周界不动情形下水流演进过程。由于水流模型不涉及到泥沙运动，周界不发生变形，所以水流模型在建模上就比较简单，研究得比较成熟，国外有很多系统的水流数学模型应用技术软件，并得到广泛应用。本章不作全面介绍，仅就河流动力学学科涉及到的作些介绍，重点放在近些年发展的水动力学数学模型上。

应该指出，从河流动力学角度讲，天然河道一般都不可能是清水，周界也总是可动的，水流数学模型所指系对含沙量较少而言的。水流模型操作较为简单，许多工程问题用水流模型能很快获得一些基本认识。其次是水流数学模型研究得较成熟，许多建模技术和技巧都可延用到泥沙模型中去。基于这些考虑，本章只介绍一维水流数学模型，多维情况读者在掌握多维泥沙模型后自然也能建立。

第一节　基本方程及定解条件

一维水流数学模型基于以下圣维南方程组：

水流连续方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{6-1}$$

水流运动方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)+gA\frac{\partial Z}{\partial x}+gAJ_f=0 \tag{6-2}$$

式中 J_f 为能坡，由(3-2)或(3-3)确定。方程组中包含两个未知数 A 和 Q，方程组是封闭的。

在第四章第二节中分析表明，圣维南方程组(6-1)、(6-2)有两个特征值

$$\lambda_{1,2}=\frac{Q}{A}\pm\sqrt{g\frac{A}{B}} \tag{6-3}$$

B 为河宽。对方程组(6-1)、(6-2)的定解条件的提法主要是依据特征线(6-3)的走向提出的，这样提出的边界条件才能使定解问题适定。对于缓流 $F_r<1$，$\lambda_1>0$ 和 $\lambda_2<0$，在上游端和下游端分别各提一个水力条件，它们应是下例形式的任何一种

水位过程线　　$Z=Z(t)$　　(6-4)

流量过程线　　$Q=Q(t)$　　(6-5)

流量水位关系曲线　$Q=Q(Z)$　　(6-6)

控制方程(6-1)和(6-2)描述了区域内流量和水位的变化情况，它们必须受边界上外加条件限制，其水力条件(6-4)至(6-6)可作相应选择。当上游端强加流量过程线时，下游应提水位，或水位流量关系作为控制边界条件，反之亦然，在上下游端提相同条件(如上下游端都提流量

过程线)是欠妥当的。

第二节　恒定水流模型

当水流为恒定流时，略去控制方程(6-1)和(6-2)中有关时间的偏微商项有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \text{ 或 } Q=\text{const} \tag{6-7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)+gA\frac{\partial Z}{\partial x}+gAJ_f=0 \tag{6-8}$$

因在强加流量过程线的条件下，方程(6-7)自行得到满足，方程(6-8)仅描述水面线的变化情况，采用向前差商代替方程中关于 x 的偏微商得

$$Z_1=Z_2+\frac{n^2\overline{Q}^2}{\overline{A}^2\overline{R}^{4/3}}+\frac{1}{g\overline{A}}\left(\frac{Q_2^2}{A_2}-\frac{Q_1^2}{A_1}\right) \tag{6-9}$$

式中"－"表示河段平均值，$\overline{A}=(A_1+A_2)/2$，$\overline{R}=(R_1+R_2)/2$，足标1，2为上下断面标号，n 为河段糙率，在已知下游端水位的条件下，Z_2 和 A_2 都是已知数，河段糙率系数 n 由实测资料给出，方程左边 Z_1 是未知数，而右边过水面积 A_1 中也隐含着这一项，因此需采用试算法求解。

在恒定渐变流中，对于一个离散河段，水面线往往呈单调函数，因此，采用二分法或牛顿法对离散方程(6-9)进行求解是十分凑效的。采用二分法计算的步骤可简述为，先定义一个函数

$$\text{FUNC}(Z_1)=Z_2-Z_1+\frac{n^2\overline{Q}^2}{\overline{A}^2\overline{R}^{4/3}}+\frac{1}{g\overline{A}}\left(\frac{Q_2^2}{A_2}-\frac{Q_1^2}{A_1}\right) \tag{6-10}$$

选取断面1待求水位上下限值 Z_{1sup} 和 Z_{1inf}，使其满足 $\text{FUNC}(Z_{1sup})\times\text{FUNC}(Z_{1inf})<0$，此时，待求的根一定位于 Z_{1sup} 和 Z_{1inf} 之间，然后按二分法计算原理逐步试算可求得根 Z_1。整个计算框图可示意如图6-1。

使用离散方程(6-9)推水面线的关键除合理确定糙率系数 n 之外，合理地概化非棱柱体河道过水面积和水力半径是很重要的。对于较为宽浅的河道，用平均水深代替水力半径是可行的，否则由水力半径计算所引起的误差而造成结果的偏离将会超过糙率在计算中所起的作用。

由于恒定水流模型忽略了时间偏微商项，因此与初始状态无关，它所描述的仅仅是一种状态，而不是一个过程，物理变量的因时变化在恒定流模型中则成为无后效变化过程，许多受建筑物控制(如大坝和溢流堰前)的水流可近似采用这种模型，但对于自然条件下的水流演进，恒定流模型应用受到了限制。

第三节　流量演算的水动力学方法

流量演算是水流数学模型研究的主要内容之一，其理论基础就是引进一些基本假定对圣维南方程组进行简化求解。目前较常用的简化方法是马斯京根法。(U. S. Army Corps of Engineers 和 D. T. Mc-Carthy，1934－1935)。这里要介绍的流量演算的水动力学方法是贡日(1969年)提出的一种简单数值解法。为了深入了解这两种从不同角度导出的方法之间的联系以及马斯京根法的理论实质，这里先对马斯京根法作一简单介绍。

一、马斯京根法

将连续方程(6-1)写成

$$\frac{dW}{dt}=I(t)-O(t) \tag{6-10}$$

式中 W 为微小河段内河槽的槽蓄量，$I(t)$ 为微小河段内入流量，$O(t)$ 为出流量。

为了求解方程(6-10)，在马斯京根法中不是直接求解运动方程(6-2)，而是引进新的假设条件来使问题有解。

假定槽蓄量 W 仅是入流与出流量的线性关系即

$$W=K[XI(t)+(1-X)O(t)] \tag{6-11}$$

式中 K 和 X 为经验系数，可以通过实测资料由试错法确定。将方程(6-10)写成增量形式

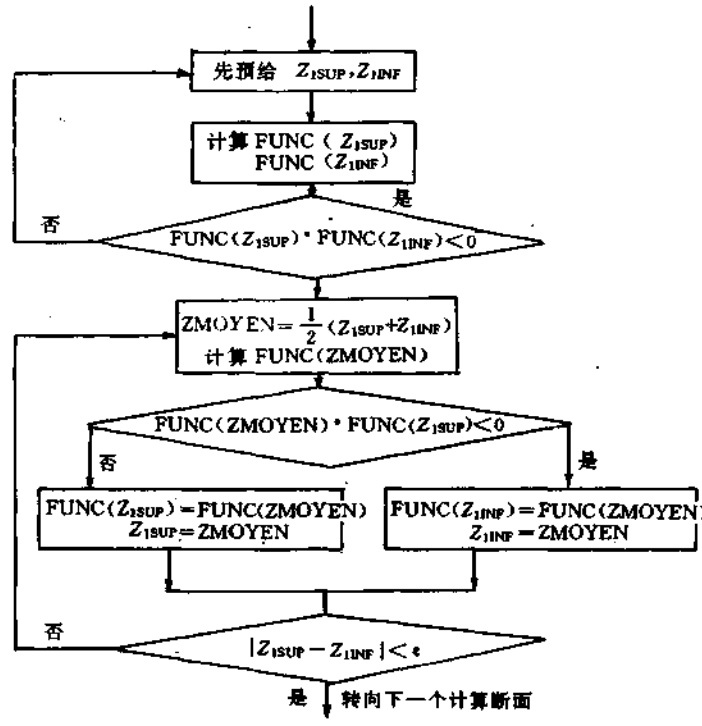


图 6-1

$$\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{1}{2}(I^{n+1}+I^n)-\frac{1}{2}(O^{n+1}+O^n) \tag{6-12}$$

式中

$$\Delta W=W^{n+1}-W^n \tag{6-13}$$

按式(6-11)可写出

$$W^{n+1}=K[XI^{n+1}+(1-X)O^{n+1}] \tag{6-14}$$

$$W^n=K[XI^n+(1-X)O^n] \tag{6-15}$$

将式(6-13)、(6-14)和(6-15)代入(6-12)可解得

$$O^{n+1}=C_1I^{n+1}+C_2I^n+C_3O^n \tag{6-16}$$

式中

$$C_1=\frac{\frac{\Delta t}{2}-KX}{K(1-X)+\frac{\Delta t}{2}}$$

$$C_2=\frac{KX+\frac{\Delta t}{2}}{K(1-X)+\frac{\Delta t}{2}}$$

$$C_3=\frac{K(1-X)-\frac{\Delta t}{2}}{K(1-X)+\frac{\Delta t}{2}} \tag{6-17}$$

式中 I^n 和 I^{n+1} 分别为计算时段始末河段的入流量，O^n 和 O^{n+1} 分别为相应的出流量。

这样，出流断面上 $n+1$ 时刻上的流量就可按式(6-16)计算。由于在使用式(6-16)中必需先已知入流断面上的流量过程线（I^n 和 I^{n+1} 为已知）时才能演算出流断面与 I^{n+1} 同时刻的流量。这种演算方法水文学中称为无预见期的演算法。

马斯京根法还存在一些问题，包括基本假定、经验系数 K 和 X 的确定等，这里不作详细介绍，其中之一是此法存在洪水波的坦化现象，即入流断面上的洪水波通过一段时间输移后将会光滑化和削平。有趣的是这种现象在贡日（J. A. Cunge）的水动力学流量演算法中得到了理论解析。

二、流量演算的水动力学方法（Muskingum-Cunge 法）

在贡日（1969）提出的流量演算水动力学方法中，理论上明确了两个问题：一是马斯京根法存在的坦化现象与系数 K 和 X 的关系，二是简单的水动力学方法不可能满足流量演算的要求。从马斯京根法的基本假定入手，贡日完全从数值求解方法阐明了这两个问题。

假定在某一确定断面上，流量和水位成一一对应的单值关系。

$$Q(x=x_0,t)=Q(h)，或者\ Q(x=x_0,t)=Q(A) \tag{6-18}$$

这里 A 为过水断面面积，h 为水深，上节介绍的马斯京根法曾采用这个假设，用此假设代替使用运动方程式(6-2)，如果假定(6-18)成立，则反函数 $A=A(Q)$ 存在，且也为单值函数，因此有

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}Q}\right)_{x=x_0}\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{6-19}$$

将(6-19)代入连续方程(6-1)有

$$\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}Q}\right)_{x=x_0}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{6-20}$$

这是一阶的双曲型方程式，因 $\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}Q}\right)_{x=x_0}$ 为变量 Q 的函数，故是拟线性的。在特征线上我们有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=C \tag{6-21}$$

和

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{6-22}$$

故由(6-20)有

$$C=\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}\right)_{x=x_0} \tag{6-23}$$

由此可写出方程(6-20)的另一形式为

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+C\frac{\partial Q}{\partial X}=0 \tag{6-24}$$

在满足(6-21)的条件下，方程(6-24)的另一等价形式及相应的解为

$$\mathrm{d}Q=0 \quad 或 \quad Q=\mathrm{const} \tag{6-25}$$

这个解表明流量沿特征线族上为一常数，并不允许流量过程 $Q(x,t)$ 在任意时刻任何断面上发生任何变形输移。从这个结果可得出一个结论，流量水位成单值关系的假设，实质上描述的是流量的非线性对流输移，入流过程线自始至终将保待原来的形状。

由于方程(6-24)或(6-20)是非线性的，故很难得到解析解，可考虑求其数值解。如果采用四点偏心 Preissman 格式逼近方程(6-24)中关于时空偏微商项，则有

$$\frac{1}{C}\frac{\psi(Q_j^{n+1}-Q_j^n)+(1-\psi)(Q_{j+1}^{n+1}-Q_{j+1}^n)}{\Delta t}$$
$$+\frac{\theta(Q_{j+1}^{n+1}-Q_j^{n+1})+(1-\theta)(Q_{j+1}^n-Q_j^n)}{\Delta x}=0 \tag{6-26}$$

这里 ψ 和 θ 为权重因子，Q_j^n，Q_j^{n+1}，Q_{j+1}^n 和 Q_{j+1}^{n+1} 分别为结点函数值，式中的 C 暂取为常数。让 $K=\Delta x/C$，并取 $\theta=\frac{1}{2}$，则从方程(6-26)解出 Q_{j+1}^{n+1} 为

$$Q_{j+1}^{n+1}=C_1Q_j^{n+1}+C_2Q_j^n+C_3Q_{j+1}^n \tag{6-27}$$

式中

$$C_1=\frac{\frac{\Delta t}{2}-K\psi}{K(1-\psi)+\frac{\Delta t}{2}}$$
$$C_2=\frac{\frac{\Delta t}{2}+K\psi}{K(1-\psi)+\frac{\Delta t}{2}}$$
$$C_3=\frac{K(1-\psi)-\frac{\Delta t}{2}}{K(1-\psi)+\frac{\Delta t}{2}} \tag{6-28}$$

式(6-27)为贡日提出的流量演算水动力学方法，与马斯京根法(6-16)、(6-17)相比，两者是完全一致的。马斯京根法中的 X 相当于这里的 ψ，而 K 则为这里的 $K=\Delta x/C$。此时，式(6-28)中的 K 和 ψ 有其明确的数值含义，而马斯京根法中的 X 和 K 纯属经验系数。因此，从水动力学求数值解的角度看，马斯京根法等价于用有限差分法求解对流方程(6-24)。为什么马斯京根法存在坦化现象呢？这一点进一步分析(6-27)可得到解答。

在点 (j,n) 上按泰勒级数展开方程(6-26)中各项结点函数值，并经整理后得

$$\frac{1}{C}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}-[(\psi-\frac{1}{2})+C\frac{\Delta t}{\Delta x}(\frac{1}{2}-\theta)]\Delta x\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+O(\Delta x^2)=0 \tag{6-29}$$

舍去 Δx 的高阶项得

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+C\frac{\partial Q}{\partial x}-D_X\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=0 \tag{6-30}$$

式中
$$D_X=[(\psi-\frac{1}{2})+C\frac{\Delta t}{\Delta x}(\frac{1}{2}-\theta)]C\Delta x \tag{6-31}$$

很明显，当 ψ 和 θ 取任意值时，数值格式(6-27)实质上以二阶近似逼近于一个对流扩散方程(6-30)，而不是纯对流方程(6-24)；只有当 $\theta=\psi=\frac{1}{2}$ 时，才有 $D_X=0$，差分格式(6-27)才完全逼近微分方程(6-24)；而与马斯京根法完全等价(在计算意义上)的数值格式(6-27)则取 $\theta=\frac{1}{2}$ 和 $\psi\neq\frac{1}{2}$，此时 $D_X=(\psi-\frac{1}{2})C\Delta x$ 不为零，换句话说，依据流量水位单值关系导出的马斯京根法，实际上逼近的是扩散方程(6-30)，而不是描述运动波的对流方程(6-24)，这就是马斯京根法存在坦化的原因，同时也表明，从水位流量单值假设出发得到的数值格式(6-27)也不可能真正描述运动波方程(6-24)，而是对流扩散过程(6-30)，那么，与数值扩散过程(6-30)相一致的物理扩散过程又是什么呢？换言之，差分格式(6-27)所逼近物理扩散过程又是怎样的呢？现在从圣维南方程(6-1)和(6-2)出发来解答这个问题。

考虑连续方程(6-1)和忽略时空惯性项的运动方程(6-2)有

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{6-32}$$

$$J_0-\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{Q^2}{K^2}=0 \tag{6-33}$$

式中 J_0 为底坡，$J_f=Q^2/K^2$，$K=C_sAh^{1/2}$，C_s 为谢才系数。为便于分析，对方程(6-32)关于 x 求偏微商

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t\partial x}+\frac{1}{B}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=0 \tag{6-34}$$

再次对方程(6-33)关于 x 求偏微商得

$$-\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial t}-\frac{\partial Q}{K^2}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{3Q^2}{K^3}\frac{\partial K}{\partial t}=0 \tag{6-35}$$

两方程相加得

$$\frac{1}{B}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}-\frac{2Q}{K^2}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{3Q^2}{K^3}\frac{\partial K}{\partial t}=0 \tag{6-36}$$

对 K 关于 t 求偏微商并使用方程(6-32)有

$$\frac{\partial K}{\partial t}=-\frac{3}{2}C_sBh^{1/2}\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6-37}$$

最后将(6-37)代入(6-36)化成一维线性抛物型方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{9}{4K}C_sBh^{1/2}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{K^2}{2QB}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=0 \tag{6-38}$$

要使差分格式(6-27)逼近物理扩散方程(6-38)，则必须满足

$$C=\frac{9}{4K}C_sBh^{1/2} \tag{6-39}$$

和

$$[(\psi-\frac{1}{2})+C\frac{\Delta t}{\Delta x}(\frac{1}{2}-\theta)]C\Delta x=\frac{K^2}{2QB} \tag{6-40}$$

由此看出，忽略运动方程时空惯性项的圣维南方程组，在假定流量系数 K 是水深的单值函数的条件下，描述了沿程坦化的洪水扩散波，而不是运动波，且按式(6-40)选取数值计算参数 ψ，θ 和 Δt，Δx 时可由差分方程(6-27)逼近。

既然差分格式(6-27)可逼近运动波，也可逼近扩散波，在采用这个格式进行流量演算时，应首先了解洪水传播的特征，正确选择数值参数，对正确模拟洪水传播过程至关重要。然而，这是很难做到的。

最后指出，贡日的流量演算方法，包括马斯京根法，都不能用于预测出流断面的未来的水位，要想预测水位，还必需通过出入断面流量水位关系曲线进行转换。当这种关系曲线不稳定时，还需实时分析水位—流量关系曲线的变化。因此，贡日提出的洪水流量演算方法，在解决实际问题时还存在问题，这就需要进一步研究求解完整的圣维南方程组。

第四节　非恒定水流模型

一、普列斯曼 Preissmann 方法

由于显式格式的稳定性受到时间步长的限制，所以在研究河道非恒定波动问题时较多的则是使用隐式格式。Richtmyer(1957)首先使用隐式格式研究热传播问题，后来隐式方法在河道水流波动问题上得以广泛应用。隐式方法很多，本节着重介绍 Preissmann 格式，因为此格式

在处理一维河道不恒定水流传播和泥沙问题较有潜力。此外，研究河道水流波动问题的基础是求解圣维南方程组，而这个方程组是拟线性的，采用不同的隐式格式，对时空偏微商项的离散诚然不同，这是问题的一方面，另一方面，重要的是拟线性项的离散问题。对于前者，在第五章中已对一些隐式格式作了介绍，而后者，则可通过介绍 Preissmann 方法的同时，介绍其它隐式格式的处理方式。

考虑以水位 Z 和流量 Q 为变量的完全一维圣维南方程组：

连续方程：

$$\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{1}{b}\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{6-41}$$

运动方程

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)+gA\frac{\partial Z}{\partial x}+gA\frac{Q|Q|}{K^2}=0 \tag{6-42}$$

Pressmann 使用四点空间中心差分格式

$$f(x,t)=\frac{\theta}{2}(f_{j+1}^{n+1}+f_j^{n+1})+\frac{1-\theta}{2}(f_{j+1}^n+f_j^n) \tag{6-43}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\theta\frac{f_{j+1}^{n+1}-f_j^{n+1}}{\Delta x}+(1-\theta)\frac{f_{j+1}^n-f_j^n}{\Delta x} \tag{6-44}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{f_{j+1}^{n+1}-f_{j+1}^n+f_j^{n+1}-f_j^n}{2\Delta t}$$

离散方程(6-41)和(6-42)得：

连续方程

$$\frac{1}{2}\left(\frac{Z_{j+1}^{n+1}-Z_{j+1}^n+Z_j^{n+1}-Z_j^n}{\Delta t}\right)+\frac{1}{\Delta x}\frac{[\theta(Q_{j+1}^{n+1}-Q_j^{n+1})+(1-\theta)(Q_{j+1}^n-Q_j^n)]}{[\theta(b_{j+1}^{n+1}+b_j^{n+1})+(1-\theta)(b_{j+1}^n+b_j^n)]}=0 \tag{6-45}$$

运动方程

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\frac{Q_{j+1}^{n+1}-Q_{j+1}^n+Q_j^{n+1}-Q_j^n}{\Delta t}\right)+\frac{\theta}{\Delta x}\left[\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{j+1}^{n+1}-\left(\frac{Q^2}{A}\right)_j^{n+1}\right]\\&+\frac{(1-\theta)}{\Delta x}\left[\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{j+1}^n-\left(\frac{Q^2}{A}\right)_j^n\right]+g\left[\theta\frac{A_{j+1}^{n+1}+A_j^{n+1}}{2}\right.\\&\left.+(1-\theta)\frac{A_{j+1}^n+A_j^n}{2}\right]\left\{\left[\theta\frac{Z_{j+1}^{n+1}-Z_j^{n+1}}{\Delta x}+(1-\theta)\frac{Z_{j+1}^n-Z_j^n}{\Delta x}\right]\right.\\&\left.+\left[\left(\theta\frac{Q_{j+1}^{n+1}|Q_{j+1}^{n+1}|+Q_j^{n+1}|Q_j^{n+1}|}{2}+(1-\theta)\frac{Q_{j+1}^n|Q_{j+1}^n|+Q_j^n|Q_j^n|}{2}\right)\right.\right.\\&\left.\left.\left(\frac{(K_{j+1}^n)^2+(K_j^n)^2}{2}\right)^{-1}\right]\right\}=0\end{aligned} \tag{6-46}$$

$$0.5\leqslant\theta\leqslant 1.0$$

基本方程式(6-41)和(6-42)包含着两个未知数水位 Z 和流量 Q，由近似(6-44)离散得到的两个相应离散方程(6-45)和(6-46)，在 $(n+1)\Delta t$ 时间层 $j+1$ 和结点上包含着四个未知结点函数值 Z_{j+1}^{n+1}，Z_j^{n+1} 和 Q_{j+1}^{n+1}，Q_j^{n+1}，凡是在 $n\Delta t$ 时层上相应的值都可以看成是已知的。整理并合并同类项，离散方程(6-45)和(6-46)可写成

$$A_1Z_{j+1}^{n+1}+B_1Q_{j+1}^{n+1}+C_1Z_j^{n+1}+D_1Q_j^{n+1}+F_1=0 \tag{6-47}$$

$$A_2Z_{j+1}^{n+1}+B_2Q_{j+1}^{n+1}+C_2Z_j^{n+1}+D_2Q_j^{n+1}+F_2=0 \tag{6-48}$$

式中 A_1、B_1、C_1、D_1 和 $F_1(i=1,2)$ 都是结点函数值 Z_{j+1}^{n+1}、Z_j^{n+1}、Q_{j+1}^{n+1}、Q_j^{n+1} 以及 Z_{j+1}^n、Z_j^n 和 Q_{j+1}^n、

Q_j^n 的函数，故方程(6-47)和(6-48)构成非线性代数方程组，可通过叠代方法求解。Preissmann 建议，为了便于叠代求解，将非线性方程组中的系数进行线性化，由于在 $n\Delta t$ 层上变量 Z 和 Q 的值都是知道的，在一个时间步长内，方程中任一作为水位 Z 和 Q 的系数函数 $f(Z,Q)$ 都是可微的，这样，$f(Z,Q)$ 在 $(n+1)\Delta t$ 时间层上的值就可用泰勒级数进行估计

$$f_j^{n+1}=f_j^n+\frac{\partial f_j}{\partial Z}\Delta Z_j+\frac{\partial f_j}{\partial Q}\Delta Q_j+\cdots \tag{6-49}$$

式中 ΔZ 和 ΔQ 分别为变量 Z、Q 的增量，更为一般地，对任何函数 f 在 $(n+1)\Delta t$ 时间层上的值就可形式上记为

$$f^{n+1}=f^n+\Delta f \tag{6-50}$$

Δf 为函数 f 的增量，使用这种记号，就可对连续方程的离散方程(6-45)进行改造，因

$$\theta(b_{j+1}^{n+1}+b_j^{n+1})+(1-\theta)(b_{j+1}^n+b_j^n)$$
$$=\theta(\Delta b_{j+1}+\Delta b_j)+(b_{j+1}^n+b_j^n)$$

则
$$\frac{2}{\theta(\Delta b_{j+1}+\Delta b_j^n)+(b_{j+1}^n+b_j^n)}=\frac{2}{(b_{j+1}^n+b_j^n)}\cdot\frac{1}{1+\theta\dfrac{\Delta b_{j+1}+\Delta b_j}{b_{j+1}^n+b_j^n}}$$

如果作为第一次近似忽略 Δb 的二次平方项得

$$=\frac{2}{(b_{j+1}^n+b_j^n)}\left[1-\theta\frac{\Delta b_{j+1}+\Delta b_j}{b_{j+1}+b_j}\right] \tag{6-51}$$

将(6-51)代入(6-45)有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta Z_{j+1}+\Delta Z_j}{\Delta t}\right)+\frac{2}{\Delta x(b_{j+1}^n+b_j^n)}\cdot$$
$$\left(1-\theta\frac{\Delta b_{j+1}+\Delta b_j}{b_{j+1}^n+b_j^n}\right)[\theta(\Delta Q_{j+1}\ominus\Delta Q_j)+(Q_{j+1}^n\ominus Q_j^n]=0$$

或
$$\frac{\Delta Z_{j+1}+\Delta Z_j}{2\Delta t}+\frac{2}{\Delta x(b_{j+1}^n+b_j^n)}\times[\theta(\Delta Q_{j+1}\ominus\Delta Q_j)+(Q_{j+1}^n\ominus Q_j^n)]$$
$$-\frac{2}{\Delta x(b_{j+1}^n+b_j^n)}\theta\left(\frac{\Delta b_{j+1}+\Delta b_j}{b_{j+1}^n+b_j^n}\right)\times[\theta(\Delta Q_{j+1}\ominus\Delta Q_j)+(Q_{j+1}^n\ominus Q_j^n)]=0 \tag{6-52}$$

因河宽 b 是 Z 的单值函数，记

$$\Delta b_j=\frac{db_j}{dZ_j}\Delta Z_j;\Delta b_{j+1}=\frac{db_{j+1}}{dZ_{j+1}}\Delta Z_{j+1}$$

这样式(6-52)可整理得

$$A'_1\Delta Z_{j+1}+B_1\Delta Q_{j+1}=C'_1\Delta Z_j+D'_1\Delta Q_j+F'_1 \tag{6-53}$$

式中系数不同于方程(6-47)，而是

$$A'_1=1-\frac{4\theta\Delta t}{\Delta x}\cdot\frac{Q_{j+1}^n-Q_j^n}{(b_{j+1}^n+b_j^n)^2}\cdot\frac{db_{j+1}}{dZ_{j+1}}$$

$$B'_1=\frac{4\theta\Delta t}{\Delta x}\cdot\frac{1}{(b_{j+1}^n+b_j^n)}$$

$$C'_1=-1+\frac{4\theta\Delta t}{\Delta x}\cdot\frac{Q_{j+1}^n-Q_j^n}{(b_{j+1}^n+b_j^n)^2}\cdot\frac{db_j}{dZ_j}$$

$$D'_1=\frac{4\theta\Delta t}{\Delta x(b_{j+1}^n+b_j^n)}$$

$$F'_1=\frac{-4\Delta t}{\Delta x(b_{j+1}^n+b_j^n)}(Q_{j+1}^n-Q_j^n).$$

按同样方法处理运动方程(6-46)，注意到

$$\frac{1}{A_j^{n+1}}=\frac{1}{A_j^n+\Delta A_j}\approx\frac{A_j^n-\Delta A_j}{(A_j^n)^2}=\frac{1}{A_j^n}\left(1-\frac{\Delta A_j}{A_j^n}\right)$$

$$(Q_j^{n+1})^2=(Q_j^n+\Delta Q_j)^2\approx(Q_j^n)^2+2Q_j^n\Delta Q_j$$

$$Q_j^{n+1}|Q_j^{n+1}|\approx Q_j^n|Q_j|+2|Q_j|\Delta Q_j$$

$$(K_j^{n+1})^2=(K_j^n)^2+2K_j^n\Delta K_j$$

$$\Delta K_j=\frac{\mathrm{d}K_j^n}{\mathrm{d}Z_j}\Delta Z_j;\qquad \Delta A_j=\frac{\mathrm{d}A_j}{\mathrm{d}Z_j}\Delta Z_j=B_j\Delta Z_j$$

代入(6-46)又可得

$$A'_2\Delta Z_{j+1}+B'_2\Delta Q_{j+1}=C'_2\Delta Z_j+D'_2\Delta Q_j+F'_2 \tag{6-54}$$

式中系数不同于方程(6-48)，这些系数限于篇幅，这里没给出，应用时可仿照式(6-53)的推导办法求得。式中各系数还包含有关水位 Z 的导数项 $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}Z}$，$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}Z}$ 等，在计算这些系数之前，必须对这些导数寻找新的关系式才能离散，有关办法和处理技巧，本书将在各章节中介绍。

这样，通过式(6-50)将原来拟线性方程组(6-47)和(6-48)进行了线性化，新的方程组(6-53)、(6-54)中的系数 A'_1、B'_1 等不再包括有变量 ΔZ 和 ΔQ，而仅仅依赖于 $n\Delta t$ 时间层上结点函数值，因此是一个线性代数方程组。但是，应该指出的是，方程(6-53)、(6-54)只能看成非线性方程(6-47)、(6-48)的第一次近似，方程(6-53)、(6-54)仅仅为叠代求解时提供便利，它可以通过矩阵追赶的办法逐次进行叠代，每追赶一次得到的第一次近似增量 ΔZ 和 ΔQ，对方程中各系数 A'_2、B'_2 等进行修正后才能进行下一次追赶叠代。很明显，要使线性方程(6-53)、(6-54)在每一次追赶后具有较好的近似值，必须满足 $\Delta f/f<1$ 这个条件，如果各项追赶叠代所得到的 Δf 与函数值 f 具有同阶量级，那么必须减小时间步长 Δt 使 $\Delta f/f<1$ 得到满足，追赶叠代求解才能进行下去。实践证明，如果方程(6-47)、(6-48)中的系数 A_1、B_1、和 A_2、B_2 等是水位 Z 和 Q 的连续函数(在许多河流动力学问题中都能得到满足)，线性方程(6-53)、(6-54)能提供很好的近似，一般经二到三次追赶叠代求解就能得到十分满意的结果。因此，这种方法在欧美得到广泛应用。

下面介绍线性方程(6-53)、(6-54)的求解方法。

首先回顾一下，一维非恒定圣维南方程组的定解问题是(见第五章)一个初边值问题，除需提供初始条件外，对于缓流 $F_r<1$ 还须给上下游两端各提一个水力条件。对于急流 $F_r>1$，必须在上游端提二个水力条件。不管哪种形式，这些水力条件的可供提法应是下列之中的一种：

(1)水位过程线　$Z=Z(t)$　(6-55)

(2)流量过程线　$Q=Q(t)$　(6-56)

(3)水位流量关系曲线　$Q=Q(t)$　(6-57)

这就可构成求解圣维南方程的定解问题。

线性方程组(6-53)、(6-54)是在一个河段两个计算结点 j 和 $j+1$ 上写出的，两个方程中含有四个未知数 ΔZ_{j+1}，ΔQ_{j+1} 和 ΔZ_j，ΔQ_j 方程不可独立求解。但是，如果将研究河段划分成 N 个计算结点，那么就有 $(N-1)$ 个子河段，可列出 $2(N-1)$ 个形如方程(6-53)、(6-54)的方程组，在这 $2(N-1)$ 个方程中包含着 $2N$ 个未知数 ΔZ_j 和 $\Delta Q_j(j=1,2\cdots N)$，这样，为了使代数方程有解，需要补充的条件数应该是 $2N-2(N-1)=2$，这个条件数正好与求圣维南方程的初边值条件数相一致，因此，数值求解方程(6-53)、(6-54)没有扭曲原问题的提法。

方程组(6-53)、(6-54)可按追赶法求解，具体过程如下：

假定 ΔZ_j 与 ΔQ_j 存在以下线性关系

$$\Delta Q_j = E_j \Delta Z_j + F_j \tag{6-58}$$

如果这个假定是真，且点 j 任意，则同样可写出

$$\Delta Q_{j+1} = E_{j+1} \Delta Z_{j+1} + F_{j+1} \tag{6-59}$$

将(6-58)代入(6-53)和(6-54)给出

$$A'_1 \Delta Z_{j+1} + B'_1 \Delta Q_{j+1} = (C'_1 + D'_1 E_j) \Delta Z_j + D'_1 F_j + F'_1 \tag{6-60}$$

$$A'_2 \Delta Z_{j+1} + B'_2 \Delta Q_{j+1} = (C'_2 + D'_2 E_j) \Delta Z_j + D'_2 F_j + F'_2 \tag{6-61}$$

从式(6-60)可解出 ΔZ_j

$$\Delta Z_j = L_j \Delta Z_{j+1} + M_j \Delta Q_{j+1} + N_j \tag{6-62}$$

式中

$$L_j = \frac{A'_1}{C'_1 + D'_1 E_j}$$

$$M_j = \frac{B'_1}{C'_1 + D'_1 E_j}$$

$$N_j = -\frac{D'_1 F_j + F'_1}{C'_1 + D'_1 E_j} \tag{6-63}$$

此外，用 $(C'_2 + D'_2 E_j)$ 乘以(6-60)和用 $(C'_1 + D'_1 E_j)$ 乘以(6-61)后相减消去 ΔZ_j 可解出 ΔQ_{j+1}。

$$\Delta Q_{j+1} = \frac{A'_1 (C'_2 + D'_2 E_j) - A'_2 (C'_1 + D'_1 E_j)}{-B'_1 (C'_2 + D'_2 E_j) + B'_2 (C'_1 + D'_1 E_j)} \Delta Z_{j+1} + \frac{(D'_1 F_1 + F'_1)(C'_2 + D'_2 E_j) - (D'_2 F_j + F'_2)(C'_1 + D'_1 E_j)}{-B'_1 (C'_2 + D'_2 E_j) + B'_2 (C'_1 + D'_1 E_j)} \tag{6-64}$$

比较式(6-64)和(6-59)，要两者同时成立，必须

$$E_{j+1} = \frac{A'_1 (C'_2 + D'_2 E_j) - A'_2 (C'_1 + D'_1 E_j)}{B'_2 (C'_1 + D'_1 E_j) - B'_1 (C'_2 + D'_2 E_j)}$$

$$F_{j+1} = \frac{(D'_1 F_j + F'_1)(C'_2 + D'_2 E_j) - (D'_2 F_j + F'_2)(C'_1 + D'_1 E_j)}{B'_2 (C'_1 + D'_1 E_j) - B'_1 (C'_2 + D'_2 E_j)} \tag{6-65}$$

关系式(6-59)给出了同一计算结点(计算断面)的水位流量的增量线性关系，只要求出其一，另一个可相应得到确定，由于线性方程(6-53)、(6-54)中的所有系数 A'_1、B'_1、C'_1、D'_1、F'_1 和 A'_2、B'_2、C'_2、D'_2、F'_2 都是 $n\Delta t$ 时间层上点 j 和 $j+1$ 的水力要素 Z^{j+1}、Q^n 和 Z^{j+1}、Q^{j+1} 的函数，这些在 $n\Delta t$ 上的值总是已知的，A'_1、B'_1、C'_1、D'_1、F'_2 和 A'_2、B'_2、C'_2 等可计算出来。这样，由式(6-65)可知，结点 $j+1$ 上的 E_{j+1} 值仅依赖于结点 j 上的 E_j 值，而结点 $j+1$ 上的 F_{j+1} 值依赖于结点 j 上的 E_j 和 F_j 值。如果在上边界 $j=1$ 上的值 E_1 和 F_1 已知，就可计算出 E_2 和 F_2，依次地就可由式(6-65)推进计算得所有的 $E_j, F_j (j = 1,2,3\cdots N)$。

此外，由式(6-63)又可知，系数 L_j，M_j 和 N_j 取决于 E_j 和 F_j，这样，一但 E_j 和 F_j 计算出来就可以计算各结点 j 的系数 L_j，M_j 和 N_j。整个计算过程是先利用上边界条件确定 E_1 和 F_1，对任意两点 $j, j+1$，计算线性方程(6-53)、(6-54)中的系数，进而计算 E_j 和 F_j，再次计算 L_j，M_j 和 N_j 并储存起来，这种过程为追的过程，或称为前扫瞄。一旦求得 E_N 和 F_N，利用下边界条件，例如下游水位已知，依据(6-59)就可确定 ΔQ_N 如下

$$\Delta Q_N = E_N \Delta Z_N + F_N \tag{6-66}$$

求出 ΔQ_N 后。利用 ΔQ_N 和 ΔZ_N 以及在追的过程中计算得到的 L_{N-1}，M_{N-1} 和 N_{N-1}，就可由式(6-62)计算 ΔZ_{j-1}，相应又可由式(6-59)计出 ΔQ_{N-1}。这样如此推下去便可完成解 ΔZ_j 和 $\Delta Q_j (j$

$=1,2\cdots,N)$，这个过程为赶的过程，或称为后扫瞄。

如果前后两次计算得到的值 $\Delta Z_j,\Delta Q_j$（或 Z_j^{n+1},Q_j^{n+1}）相差在允许范围内，则在一个时段内的追赶叠代计算结束，进行下一时段 Δt 的计算。这种计算的好处是，运算比较简单，而不是象采用标准叠代法如牛顿-哈费森(Newton-Raphson)法，直接求拟线性方程(6-47)、(6-48)要作大矩阵求逆运算。

上述这种追赶过程，需要用到上边界条件确定 E_1 和 F_1，以及下边界条件确定 ΔZ_N，下面分别对各种水力条件(6-55)、(6-56)、(6-57)说明 E_1、F_1 的求法，即确定关系式

$$\Delta Q_1=E_1\Delta Z_1+F_1 \tag{6-67}$$

(1)给出水位过程线 $Z|_{x=x_1}=Z(t)$，x_1 为上游边界位置。当给出 $Z=Z(t)$ 时，在任意时间层 $n\Delta t$ 和 $(n+1)\Delta t$，Z_1^n 和 Z_j^{n+1} 是已知的，则可写出

$$\Delta Z_1=Z((n+1)\Delta t)-Z_1^n \tag{6-68}$$

由式(6-67)可写出

$$\Delta Z_1=\frac{\Delta Q_1}{E_1}-\frac{F_1}{E_1} \tag{6-69}$$

式(6-68)与(6-69)相比较得

$$\frac{\Delta Q_1}{E_1}=0 \tag{6-70}$$

$$-F_1/E_1=Z((n+1)\Delta t)-Z_1^n$$

为了满足(6-70)，可取 $E_1=\alpha_1$，α_1 为任意整数，量级在 10^6 左右，只要使得 $\alpha_1\gg\Delta Q_1$ 即可，此时有

$$E_1=\alpha_1$$

$$F_1=-\alpha_1\{Z[(n+1)\Delta t]-Z_1^n\} \tag{6-71}$$

(2)给出流量过程线 $Q|_{x=x_1}=Q(t)$，在这种情况下有

$$\Delta Q_1=Q[(n+1)\Delta t]-Q_1^n \tag{6-72}$$

直接与式(6-67)比较得

$$E_1=0$$

$$F_1=Q((n-1)\Delta t)-Q_1^n \tag{6-73}$$

(3)给出水位流量关系 $Q|_{x=x_1}=Q(Z)$，已知 $Q=Q(Z)$ 关系时，在 $n\Delta t$ 时间层使用泰勒展开有

$$Q((n+1)\Delta t)\approx Q(n\Delta t)+\frac{\partial Q}{\partial Z}\Delta Z$$

而 $Q((n+1)\Delta t)=Q_1^{n+1}=Q_1^n+\Delta Q_1$，故

$$\Delta Q_1=Q(n\Delta t)+\frac{\partial Q}{\partial Z}\Delta Z-Q_1^n$$

与(6-67)式相比较得

$$E_1=\frac{\partial Q}{\partial Z} \tag{6-74}$$

$$F_1=Q(n\Delta t)-Q_1^n$$

式中 $Q(n\Delta t)$ 为 $n\Delta t$ 时间层 Q 在 $Q(Z)$ 上的取值，Q_1^n 为 $n\Delta t$ 时间层的计算值。显然，如果计算值 Q_1^n 与边界值一致，有 $F_1=0$，但由于计算误差，这个值不可能十分精确，计算中考虑 F_1 的存在，可以对计算误差作轻微校正。

在下游边界上，同样也有三种不同的形式用于确定 ΔZ_N 。

(1)给出下游边界水位过程线 $Z|_{x=x_N}=Z(t)$，x_N 为下游端点位置，此时直接可离散得

$$\Delta Z_N=Z((n+1)\Delta t)-Z_N^n \tag{6-75}$$

实践应用表明，计算时取计算值 Z_N^n 较佳，而不取 $Z(n\Delta t)$ 。

(2)给出流量过程线 $Q|_{x=x_N}=Q(t)$ 则有

$$\Delta Q_N=Q((n+1)\Delta t)-Q_N^n$$

故有

$$\Delta Z_N=\frac{Q((n+1)\Delta t)-Q_N^n-F_N}{E_N} \tag{6-76}$$

E_N 和 F_N 为在追的过程中 E_j 在 N 点的计算值。

(3)给出水位流量关系曲线 $Q|_{x=x_N}=Q(Z)$；

$$Q((n+1)\Delta t)=Q(n\Delta t)+\frac{\partial Q}{\partial Z}\Delta Z_N$$

$$\Delta Q_N=\frac{\partial Q}{\partial Z}\Delta Z_N=E_N\Delta Z_N+F_N$$

$$\Delta Z_N=\frac{F_N}{\dfrac{\partial Q}{\partial Z}-E_N} \tag{6-77}$$

二、Verwey 方法

Verwey 方法基本上与 Preismann 方法相同，仅在运动方程中的非线性项的处理有不同而已，方程中的位变惯性项和阻力项的离散采用以下的形式。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)\approx\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{Q_{j+1}^n Q_{j+1}^{n+1}}{A_{j+1}^{n+1/2}}-\frac{Q_j^n Q_j^{n+1}}{A_j^{n+1/2}}\right] \tag{6-78}$$

$$\frac{Q|Q|}{K^2}\approx\frac{1}{2}\left[\frac{Q_j^{n+1}|Q_j^n|}{(K_j^{n+1/2})^2}+\frac{|Q_{j+1}^n|Q_{j+1}^{n+1}}{(K_{j+1}^{n+1/2})^2}\right] \tag{6-79}$$

式中关于 A 和 K 的上标 $n+1/2$ 表示在每次叠代计算过程中取 $(n+1)\Delta t$ 和 $n\Delta t$ 时间层的平均值，第一次叠代时取 $A_j^{n+1}=A_j^n$，$K_j^{n+1/2}=K_j^n$，第二次叠代时取第一次叠代得到的结果与 $n\Delta t$ 时间层的值进行平均，依次进行叠代求解。

Verwey 方法，当 $\theta=1/2$，叠代次数一般情况下进行到二至三次便可得到满意的结果。

三、CARIMA 模型

法国 SOGREAH 与美国 IOWA 大学(1977)合作开发的 CARIMA 水流模型，为直接产生线性化代数方程组以供叠代求解，将线性化近似(6-50)引入到 Preissmann 格式，用函数增量表示的 Preissmann 格式具有以下形式。

$$f(x,t)=\frac{\theta(\Delta f_{j+1}+\Delta f_j)+(f_{j+1}^n+f_j^n)}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\Delta f_{j+1}+\Delta f_j}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\theta(\Delta f_{j+1}-\Delta f_j)+(f_{j+1}^n-f_j^n)}{\Delta x} \tag{6-80}$$

考虑以过水面积 A 和流量 Q 为因变量的一维圣维南方程

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{6-81}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)+gA\frac{\partial Z}{\partial x}+gAJ_f=0 \tag{6-82}$$

使用 Preissmann 近似(6-80),连续方程(6-81)的差分方程为

$$A_1\Delta Z_{j+1}+B_1\Delta Q_{j+1}=C_1\Delta Z_j+D_1\Delta Q_j+F_1 \tag{6-83}$$

式中 $A_1=\frac{b_{j+1}}{2\Delta t}$;

$B_1=D_1=\frac{\theta}{\Delta x}$;

$C_1=-\frac{b_j}{2\Delta t}$;

$F_1=-\frac{1}{\Delta x}(Q^n_{j+1}-Q^n_j)$

为了离散运动方程(6-82),使用连续方程式$\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial A}{\partial t}=-b\frac{\partial Z}{\partial t}$,可将(6-82)写成

$$\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{Qb}{A}\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}+gA\frac{\partial Z}{\partial x}+gAJ_f=0 \tag{6-84}$$

(Ⅰ) (Ⅱ) (Ⅲ) (Ⅳ) (Ⅴ) (Ⅵ)

在 CAIMA 模型中,非线性项的处理具有它的特点,下面详细介绍:

Ⅰ项: $-\frac{Qb}{A}\frac{\partial Z}{\partial t}=-\{\frac{\theta}{2}[(\frac{Qb}{A})^{n+1}_{j+1}+(\frac{Qb}{A})^{n+1}_j]$

$+\frac{(1-\theta)}{2}[(\frac{Qb}{A})^n_{j+1}+(\frac{Qb}{A})^n_j]\}[\frac{\Delta Z_{j+1}+\Delta Z_j}{2\Delta t}]$

取 $(\frac{Qb}{A})^{n+1}=\frac{(Q^n+\Delta Q)(b^n+\Delta b)}{A^n+\Delta A}$

$\frac{1}{A^n+\Delta A}\approx\frac{1}{A^n}(1-\frac{\Delta A}{A^n})$

$\Delta A=\frac{1}{b^n}\Delta Z$

$\Delta b=\frac{db}{dZ}\Delta Z$

故经简化得 $-\frac{Qb}{A}\frac{\partial Z}{\partial t}=-\frac{1}{4\Delta t}(\Delta Z_{j+1}+\Delta Z_j)[\frac{Q^n_{j+1}b^n_{j+1}}{A^n_{j+1}}+\frac{Q^n_jb^n_j}{A^n_j}]$ (6-85)

Ⅱ项: $\frac{Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial A}=\frac{1}{2\Delta x}(Q^n_{j+1}-Q^n_j)[\frac{\theta}{A^2_{j+1}}(A^n_{j+1}\Delta Q_{j+1}-b^n_{j+1}Q^n_{j+1}\Delta Z_{j+1})$

$+\frac{\theta}{A^2_j}(A^n_j\Delta Q_j-b^n_jQ^n_j\Delta Z_j)+\frac{Q^n_{j+1}}{A^n_{j+1}}+\frac{Q^n_j}{A^n_j}]$

$+\frac{\theta}{2\Delta x}(\Delta Q_{j+1}-\Delta Q_j)(\frac{Q^n_{j+1}}{A^n_{j+1}}+\frac{Q^n_j}{A^n_j})$ (6-86)

Ⅳ项: $\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}=[\frac{\theta}{\Delta x}(\Delta A_{j+1}-\Delta A_j)+\frac{1}{\Delta x}(A^n_{j+1}-A^n_j)]$

$\times[\frac{\theta}{4}(\frac{Q^n_{j+1}+\Delta Q_{j+1}}{A^n_{j+1}+\Delta A_{j+1}}+\frac{Q^n_j+\Delta Q_j}{A^n_j+\Delta A_j})^2+(\frac{1-\theta}{4})(\frac{Q^n_{j+1}}{A^n_{j+1}}+\frac{Q^n_j}{A^n_j})^2]$ (6-87)

Ⅴ项: $gA\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{g}{2}[\theta(\Delta A_{j+1}+\Delta A_j)+(A^n_{j+1}+A^n_j)]$

$\times\frac{1}{\Delta x}[\theta(\Delta Z_{j+1}-\Delta Z_j)+(Z^n_{j+1}-Z^n_j)]$ (6-88)

Ⅵ项: gAJ_f 离散这一项是比较棘手的,困难的地方在于如何离散能坡

$$J_f=\frac{Q|Q|}{K^2} \tag{6-89}$$

物理意义上讲,能坡表征着水流经过某一河段的能量损失,这是就河段而言的。然而,对其进行

离散时，却着眼于某一计算断面值，当上下相邻结点的水流条件相差较大时，能坡在结点上的离散值就有很大的差别。在 CARIMA 模型中，考虑下面的离散形式

$$J_f=\frac{\delta Q_{j+1}|Q_{j+1}|+\gamma Q_j|Q_j|}{\delta K_{j+1}^2+\gamma K_j^2} \tag{6-90}$$

δ 和 γ 为数值计算权重系数，满足 $\delta+\gamma=1$，这样

$$\begin{aligned}gAJ_f=&g[\frac{\theta}{2}(\Delta A_{j+1}+\Delta A_j)+\frac{1}{2}(A_{j+1}^n+A_j^n)]\\&\times\{\frac{\theta}{2}[\delta(Q_{j+1}^n+\Delta Q_{j+1})|Q_{j+1}+\Delta Q_{j+1}|+\gamma(Q_j^n+\Delta Q_j)|Q_j^n+\Delta Q_j|]\\&+(\frac{1-\theta}{2})[\delta Q_{j+1}^n|Q_{j+1}^n|+\gamma Q_j^n|Q_{j+1}^n|]\}\\&\div\{\frac{\theta}{2}[\delta(K_{j+1}^n+\Delta K_{j+1})^2+\gamma(K_j^n+\Delta K_j)^2]\\&+(\frac{1-\theta}{2})[\delta(K_{j+1}^n)^2+\gamma(K_j^n)^2]\}\end{aligned} \tag{6-91}$$

将式(6-85)(6-86)(6-87)(6-88)和(6-91)代入运动方程(6-84)得

$$A_2\Delta Z_{j+1}+B_2\Delta Q_{j+1}=C_2\Delta Z_j+D_2\Delta Q_j+F_2 \tag{6-92}$$

式中的系数 A_2、B_2、C_2、D_2 和 F_2 限于篇幅，不便给出，需用时，可按式(6-85)到(6-91)经繁锁的简单代数运算求得。方程(6-83)、(6-92)是关于变量 ΔZ、ΔQ 的线性方程组，可按上节介绍的追赶叠代方法求解。

在 CAIMA 模型中，第Ⅳ项和第Ⅴ项的离散形式是可取的。如果将方程(6-82)写成下面的形式

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{2Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}+gA\frac{\partial Z}{\partial x}+gAJ_f=0 \tag{6-93}$$

现在按下列形式离散方程(6-93)中的第Ⅲ项

$$\begin{aligned}\frac{Q^2}{A^2}&=\frac{\theta}{2}[(\frac{Q^2}{A^2})_{j+1}^{n+1}+(\frac{Q^2}{A^2})_j^{n+1}]+\frac{1-\theta}{2}[(\frac{Q^2}{A^2})_{j+1}^n+(\frac{Q^2}{A^2})_j^n]\\\frac{\partial A}{\partial x}&=\frac{\theta}{\Delta x}(A_{j+1}^{n+1}-A_j^{n+1})+\frac{(1-\theta)}{\Delta x}(A_{j+1}^n-A_j^n)\end{aligned} \tag{6-94}$$

这种离散形式与(6-87)的离散不同。当水流为恒定流时，由水流连续方程可推得 $\frac{\partial Q}{\partial x}=0$，此时运动方程(6-93)成为

$$\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{1}{gA}\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}+J_f=0 \tag{6-95}$$

对于两断面 j 和 $j+1$，恒定水流方程(6-95)颇为可行的离散形式为

$$Z_{j+1}=Z_j+[\frac{(\frac{Q}{A})_j^2-(\frac{Q}{A})_{j+1}^2}{2g}]-\Delta xJ_f \tag{6-96}$$

这是众所熟知的恒定流离散方程(即恒定流能量方程)。然而，如果用式(6-94)去离散(6-93)，且当水流在某一未来时刻逼近恒定水流时($\theta=0$)，并注意到 $Q_{j+1}=Q_j$，相应的离散方程是

$$Z_{j+1}=Z_j+2(\frac{A_{j+1}-A_j}{A_j+A_{j+1}})[\frac{(\frac{Q}{A})_{j+1}^2+(\frac{Q}{A})_j^2}{2g}]-\Delta xJ_f \tag{6-97}$$

比较离散式(6-96)和(6-97)可知，两者是完全不同的。因此，如果用(6-94)去离散非恒定流运动方程(6-93)，所得到的数学模型不可能用来模拟恒定流的情况。换句话说，不可能用这样的

非恒定流模型去模拟恒定问题。读者可以证明，CARIMA 模型中采用离散式(6-87)得到的非恒定流模型，在恒定流情况下不可能出现这种现象。

第五节　内边界条件处理及计算方法

在许多实际问题中，常常遇到分流与汇流，拦河坝，电站以及湖泊与河道连通等不同河型以及工程枢纽的河道数值计算问题。在采用上节介绍的追赶法求解代数方程组时，为使追赶计算过程能自始至终地进行下去，必须对上述问题作某些特殊处理，补充必要的计算条件。由于这些条件属于计算区域内的物理条件，故称内边界条件，下面仅就一些常见的内边界条件处理和数字计算方法作些介绍。

一、汇流问题

天然河道中汇流是极常见的(见图 6-2(a))，水流来自河道 1 和 2 合并汇入河道 3。数值计算从上游端 1 和 2 进行追的过程经过交汇河段 11 和 21 到 31，然后到下游端点 3，赶的过程则以下游端点 3 出发再次经过交汇段到两个上游端点。由于交汇段的存在，须加入必要的汇流段计算方法，上节中介绍的算法才能实现。

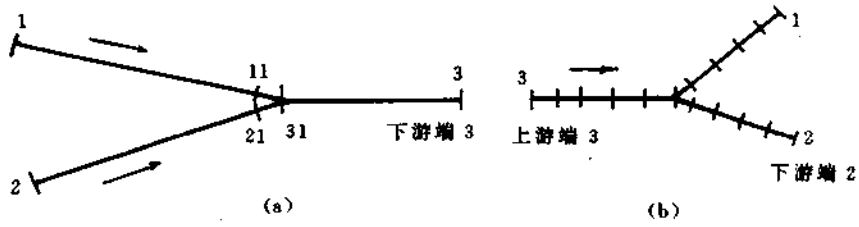


图 6-2

假定在交汇段可列出：

水流连续条件 $Q_{31}^{n+1}=Q_{11}^{n+1}+Q_{21}^{n+1}$ (6-98)

能量方程 $$Z_{11}^{n+1}+\frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{11}^{n+1}}{A_{11}^{n+1}}\right)^2=Z_{31}^{n+1}+\frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{31}^{n+1}}{A_{31}^{n+1}}\right)^2 \tag{6-99}$$

$$Z_{21}^{n+1}+\frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{21}^{n+1}}{A_{21}^{n+1}}\right)^2=Z_{31}^{n+1}+\frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{31}^{n+1}}{A_{31}^{n+1}}\right)^2 \tag{6-100}$$

式中 Q_{11}、Q_{21}、Q_{31} 分别为点 11，21 和 31 上的流量，Z_{11}、Z_{21}、Z_{31} 和 A_{11}、A_{21}、A_{31} 为相应各点的水位和过水面积。按式(6-50)的形式将(6-98)、(6-99)和(6-100)写成代数方程式

$$\Delta Q_{31}-\Delta Q_{11}-\Delta Q_{21}=Q_{11}^{n}+Q_{21}^{n}-Q_{31}^{n} \tag{6-101}$$

$$A'_1\Delta Z_{11}+B'_1\Delta Q_{11}=C'_1\Delta Z_{31}+D'_1\Delta Q_{31}+F'_1 \tag{6-102}$$

$$A'_2\Delta Z_{21}+B'_2\Delta Q_{21}=C'_2\Delta Z_{31}+D'_2\Delta Q_{31}+F'_2 \tag{6-103}$$

式中 A'_1、B'_1、C'_1 和 $A'_2B'_2C'_2$ 等为方程(6-99)和(6-100)的离散系数，区别于式(6-53)、(6-54)中的系数。

因从点 1 到点 11 和从点 2 到点 21 的追逆过程中，E_{11}、F_{11} 和 E_{21}、F_{21} 都是已知的，由关系式(6-58)直接写出

$$\Delta Q_{11}=E_{11}\Delta Z_{11}+F_{11} \tag{6-104}$$

$$\Delta Q_{21}=E_{21}\Delta Z_{21}+F_{21} \tag{6-105}$$

将式(6-104)、(6-105)代入(6-101)、(6-102)和(6-103)得

$$\Delta Q_{31}-E_{11}\Delta Z_{11}-F_{11}-E_{21}\Delta Z_{21}-F_{21}=Q'_{11}+Q'_{21}-Q'_{31} \tag{6-106}$$

$$(A'_1+B'_1E_{11})\Delta Z_{11}=C'_1\Delta Z_{31}+D'_1\Delta Q_{31}+F'_1-B'_1F_{11} \tag{6-107}$$

$$(A'_2+B'_2E_{21})\Delta Z_{21}=C'_2\Delta Z_{31}+D'_2\Delta Q_{31}+F'_2-B'_2F_{21} \tag{6-108}$$

上面三个方程中包含四个未知数 ΔZ_{11}、ΔZ_{21}、ΔZ_{31} 和 ΔQ_{31}，ΔZ_{31} 可由赶的过程给出。使用式(6-106)，从(6-107)和(6-108)中消去 ΔZ_{11} 和 ΔZ_{21} 有关系式。

$$\Delta Q_{31}=E_{31}\Delta Z_{31}+F_{31} \tag{6-109}$$

其中

$$E_{31}=-\frac{C'_1(A'_2+B'_2E_{21})+C'_2T_3(A'_1+B'_1E_{11})}{T_5(A'_2+B'_2E_{21})+D'_2T_3(A'_2+B'_2E_{21})}$$

$$F_{31}=-\frac{T_6(A'_2+B'_2E_{21})+T_3(A'_1+B'_1E_{11})(F'_2-B'_2F_{21}}{T_5(A'_2+B'_2E_{21})+D'_2T_3(A'_2+B'_2E_{21})}$$

$$T_6=(F'_{11}-B'_1F_{11})+T_2(A'_1+B'_1E_{11})$$

$$T_5=D'_1-T_4(A'_1+B'_1E_{11})$$

$$T_4=\frac{1}{E_{11}}$$

$$T_3=-\frac{E_{21}}{E_{11}}$$

$$T_2=\frac{T_1}{E_{11}}$$

$$T_1=Q'_{11}+Q'_{21}-Q'_{31}+F_{11}+F_{21} \tag{6-110}$$

这样，一旦从河段 1，2 计算到 11 和 12，点 31 的系数 E_{31} 和 F_{31} 可计算出来，追的过程就可进行到下游端点了。

回代过程，当计算回代到断面的点 3 时，计算开始进入到赶过程的分支计算，先考虑河段 1。从式(6-107)直接解出

$$\Delta Z_{11}=\frac{C'_1\Delta Z_{31}+D'_1\Delta Q_{31}+F'_1+B'_1F_{11}}{A'_1+B'_1E_{11}}$$

亦即

$$\Delta Z_{11}=L_{11}\Delta Z_{31}+M_{11}\Delta Q_{31}+N_{11} \tag{6-111}$$

式中

$$L_{11}=\frac{C'_1}{A'_1+B'_1E_{11}}$$

$$M_{11}=\frac{D'_1}{A'_1+B'_1E_{11}}$$

$$N_{11}=\frac{F'_1+B'_1F_{11}}{A'_1+B'_1E_{11}} \tag{6-112}$$

在赶的过程中，式(6-111)中的 ΔZ_{31} 和 ΔQ_{31} 是已知的，故河段 1 在断面点 11 的水位变化 ΔZ_{11} 可计算出来。

同理，对于河段 2 有

$$\Delta Z_{21}=L_{21}\Delta Z_{31}+M_{21}\Delta Q_{31}+N_{21} \tag{6-113}$$

式中

$$L_{21}=\frac{C'_2}{A'_2+B'_2E_{21}}$$

$$M_{21}=\frac{D'_2}{A'_2+B'_2E_{21}}$$

$$N_{21}=\frac{F'_2+B'_2F_{21}}{A'_2+B'_2E_{21}} \tag{6-114}$$

二、分流问题

分流河段计算问题与汇流问题在计算程序上正好相反，这里在追的过程中先算单一段，然后分支，在赶的过程中则是先算分支段，而后再计算单一段（见图 6-2(b)），在分汊河段处，仍然可写出内结点边界方程式(6-98)、(6-99)、(6-100)，仅在推导式(6-109)上存在差别，这里不作详细推导。

三、侧向入流问题（点源处理方法）

天然河道常存在有小支流和湖泊倒灌时的侧向入流问题。假定侧向入流过程线为已知 $Q(t)$（见图 6-3），并注入到计算河段 j 到 $j+1$ 处。忽略局部阻力变化，假定在任意未来的时刻满足。

$$Z_{12}^{n+1}=Z_{11}^{n+1} \tag{6-115}$$

并满足水流连续条件

$$Q_{12}^{n+1}=Q_{11}^{n+1}+Q[(n+1)\Delta t] \tag{6-116}$$

按增量的形式写出为

$$\Delta Z_{12}=\Delta Z_{11}+Z_{11}^n-Z_{12}^n \tag{6-117}$$

$$\Delta Q_{12}=\Delta Q_{11}^n+Q_{11}^n-Q_{12}^n+Q(t_{n+1}) \tag{6-118}$$

用 $\Delta Q_{11}=E_{11}\Delta Z_{11}+F_{11}$ 代入(6-118)，然后从(6-117)和(6-118)中消去 ΔZ_{11} 得

$$\Delta Q_{12}=E_{12}\Delta Z_{12}+F_{12} \tag{6-119}$$

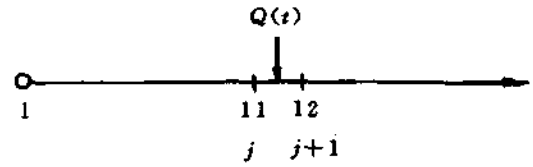


图 6-3

可求得

$$E_{12}=E_{11} \tag{6-120}$$

$$F_{12}=F_{11}+Q_{11}^n-Q_{12}^n+Q(t_{n+1})-E_{11}(Z_{11}^n-Z_{12}^n)$$

使用(6-119)可将追的计算过程进行下去。回代时，到了点 12，ΔZ_{12} 和 ΔQ_{12} 是已知的，再使用 $\Delta Q_{11}=E_{11}\Delta Z_{11}+F_{11}$ 从式(6-117)、(6-118)可解出

$$\Delta Z_{11}=L_{11}\Delta Z_{12}+M_{11}\Delta Q_{12}+N_{11} \tag{6-121}$$

式中

$$L_{11}=M_{11}=\frac{1}{1+E_{11}}$$

$$N_{11}=\frac{-F_{11}+Q_{12}^n-Q_{11}^n-Q(t_{n+1})+Z_{12}^n-Z_{11}}{1+E_{11}} \tag{6-122}$$

四、溢流坝问题

河道有溢流坝存在时，溢流流量应由溢流公式计算：

淹没出流　　$Q=\mu B\sqrt{2g}(Z_{12}-Z_c)(Z_{11}-Z_{12})^{1/2}$ (6-123)

非淹没出流　$$Q=\mu B\sqrt{2g}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}(Z_{11}-Z_s)^{3/2}\tag{6-124}$$

式中 μ 为溢流量系数，B 为溢流坝宽，g 为重力加速度，其它符号见图 6-4。

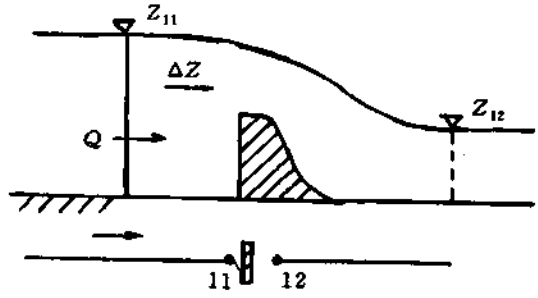


图 6-4

对于这种情形，可列出二个内边界条件。在未来时刻，流量应保持连续：

$$Q_{12}^{n+1}=Q_{12}^{n+1}\tag{6-125}$$

溢流坝上下游水位关系由(6-123)或(6-124)确定，即

$$Q_{11}^{n+1}=Q_{11}(Z_{11}^{n+1},Z_{12}^{n+1})\tag{6-126}$$

方程(6-125)可离散为

$$\Delta Q_{12}=\Delta Q_{11}+Q_{11}^n-Q_{12}^n\tag{6-127}$$

而方程(6-126)使用泰勒级数展开，并仅取一阶导数项为

$$Q_{11}^n+\Delta Q_{11}=Q_{11}(Z_{11}^n,Z_{12}^n)+\frac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{11}}\Delta Z_{11}+\frac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{12}}\Delta Z_{12}\tag{6-128}$$

或

$$-\frac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{12}}\Delta Z_{12}=\frac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{11}}\Delta Z_{11}-\Delta Q_{11}+Q_{11}(Z_{11}^n,Z_{12}^n)-Q_{11}^n\tag{6-129}$$

式中 Q_{11}^n 为点 11 的第 $n\Delta t$ 时间层的计算值，$Q_{11}(Z_{11}^n,Z_{12}^n)$ 由式(6-123)或(6-124)计算，当由式(6-123)计算时：

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{11}}=\frac{\mu B\sqrt{2g}}{2}(Z_{12}^n-Z_s)(Z_{11}-Z_{12})^{-1/2}$$

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{12}}=\mu B\sqrt{2g}\left[\frac{(Z_{12}-Z_s)}{2}(Z_{11}-Z_{12})^{-1/2}+(Z_{11}-Z_{12})^{1/2}\right]$$

当由式(6-124)计算时

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{11}}=\mu B\sqrt{2g}\sqrt{\frac{1}{3}}(Z_{11}^n-Z_s)^{1/2}$$

$$\frac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{12}}=0$$

有了式(6-127)和(6-129)就可导出追赶系数 E_{12}、F_{12} 和 L_{11}、M_{11}、N_{11} 分别为：

$$\Delta Q_{12}=E_{12}\Delta Z_{12}+F_{12}\tag{6-130}$$

式中

$$E_{12}=\frac{-E_{11}\dfrac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{12}}}{\dfrac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{11}}-E_{11}}$$

$$F_{12}=\left(\frac{\partial Q_{11}}{\partial Z_{11}}-E_{11}\right)(F_{11}+Q_{11}^n-Q_{12}^n)-E_{11}[F_{11}+Q(Z_{11}^n,Z_{12}^n)-Q_{11}^n]$$

$$\Delta Z_{11}=L_{11}\Delta Z_{12}+M_{11}\Delta Q_{12}+N_{11}\tag{6-131}$$

式中

$$L_{11}=0$$

$$M_{11}=\frac{1}{E_{11}}$$

$$N_{11}=\frac{Q_{12}^{n}-Q_{11}^{n}-F_{11}}{E_{11}}$$

五、湖泊集水

当河道侧边存在小湖泊集水时，随着河道水位上涨，一小部分水流进水湖泊。假定在计算结点 11 与 12 之间的河段处与湖泊相接通(见图 6-5)，在这个河段处可写出两个内边界条件，并假定局部能量损失很小，在未来时刻 t_{n+1}，结点 11 与 12 水位相等，即

$$Z_{12}^{n+1}=Z_{11}^{n+1} \tag{6-132}$$

这个假定可通过选取计算断面 11 和 12 的间距尽可能小来满足，另一个条件是水流连续条件：

$$Q_{12}^{n+1}=Q_{11}^{n+1}+Q(p) \tag{6-133}$$

$Q(P)$ 为小湖泊集水入流流量。离散关系式(6-132)和(6-133)有

$$\Delta Z_{12}=\Delta Z_{11}+Z_{11}^{n}-Z_{12}^{n} \tag{6-134}$$

$$\Delta Q_{12}=\frac{S(Z_{11}^{n})}{\Delta t}\Delta Z_{11}+\Delta Q_{11}+Q_{11}^{n}-Q_{12}^{n} \tag{6-135}$$

式中 $S(Z_{11}^{n})$ 为湖泊集水面积函数 $S(Z)$ 的逼近式，Δt 为计算时段长度。使用 $\Delta Q_{11}=E_{11}\Delta Z_{11}+F_{11}$，可求得追赶计算过程中的系数分别为

$$\Delta Q_{12}=E_{12}\Delta Z_{12}+F_{12} \tag{6-136}$$

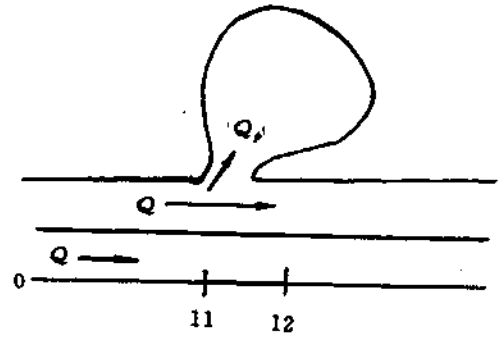


图 6-5

式中

$$E_{12}=E_{11}+\frac{S(Z_{11}^{n})}{\Delta t}$$

$$F_{12}=(F_{11}+Q_{11}^{n}-Q_{12}^{n})-(E_{11}+\frac{S(Z_{11}^{n})}{\Delta t})(Z_{11}^{n}-Z_{12}^{n})$$

而回代过程为

$$\Delta Z_{11}=L_{11}\Delta Z_{12}+M_{11}\Delta Q_{12}+N_{11} \tag{6-137}$$

式中

$$L_{11}=M_{11}=\frac{1}{1+E_{11}+\frac{S(Z_{11}^{n})}{\Delta t}}$$

$$N_{11}=\frac{(Z_{12}^{n}-Z_{11}^{n})-(F_{11}+Q_{11}^{n}-Q_{12}^{n})}{1+E_{11}+\frac{S(Z_{11}^{n})}{\Delta t}}$$

六、潮汐水流影响

河口一维数学模型常遇到这种问题。河口水位上升，水流逆流而上，计算全河段可能存在二股方向相逆的水流(见图 6-6)，一股来自上游而下，另一股因潮水位上涨而逆流向上，在某一位置上相遇。这种情况，可采用两种完全不同的计算方法，一种是把两股水流相会点以上看作单一流向的河段，从点 1 到点 11，可采用上节介绍的方法计算；此时点 11 为下边界条件，而把相会点以下河段也看作单一 流向河段，也可采用同样的方法计算，但数值计算方向与流向相逆，下边界条件则为点 12。另一种方法是将两股方向相逆的水流看成一段，即从点 1 到点 3

进行追赶计算，点 1 为上游边界，点 3 为下游边界、点 11 和 12 河段为内边界条件。

不管哪一种方法，都需要给两股水流相会处提内边界条件。由于两股水流相逆，任意时刻总存在一断面使得通过这个断面的流量为零，$Q(t)=0$，在相邻的两个离散点上可近似地写出

$$Q_{11}^{n+1}=Q_{12}^{n+1}=0 \qquad (6\text{-}138)$$

且水位相同 $Z_{11}^{n+1}=Z_{12}^{n+1}$ (6-139)

在追赶计算中需用的系数可由这两个条件给出。

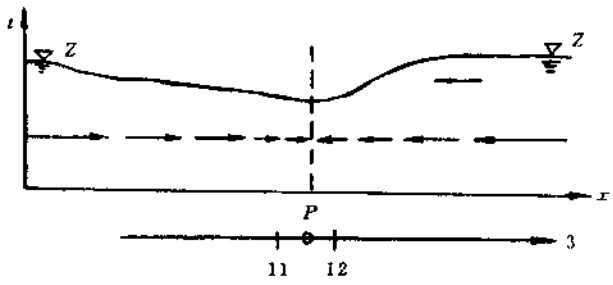


图 6-6

计算中较为困难的是流量为零的位置确定问题，它取决于两股水流强度的相对大小，在涨潮过程中，位置上移；落潮时，位置下延，随时间而变，目前数值计算上采用的办法是显式确定，用 $n\Delta t$ 时间层的水流状态预估下时刻的可能位置，固然，这对于两股水流相对较稳定的情况下是可行的。

参 考 文 献

[1] 庄一鸿、林三益，水文预报，水利电力出版社，1986。

[2] Chow, V. T., Handbook of Applied Hydrology, Mc Graw-Hill Book Co., Inc., New York, N. Y., 1974.

[3] Cunge, J. A, On the subject of a flood propagation computation method (Maskingum Method)J. of Hydr. Res., Vol. 7 No. 2, 1969.

[4] Miller, W. A. and Cunge, J. A., Simptlfied equations of Unsteady flow, Unstesdy flow in open channels, K Mahmood and V. Yevhhibich, eds., Water Resources Pablications, Fort Collins, Colo., 1975.

[5] Richtmyer, R D., Difference methods for boundary value problems, Interscie, New York, 1957.

[6] SOGREAH, Comparison of the de st. Venant equations and Muskingrm method on the Rhone river, internal report, 1961.

[7] Preissmann, A., Propagation des intumescences dans les canaux et riviées, First Congress of the French Association for Computation, Grenoble, 1961.

[8] Preissmann, A. and Cheverau, G., Remarques sur le choix des methodes d' appreciation de la qualité des divers systèmes de régulation de canaux à Surface kidre, Symposium; fluide motion stability in hydraulic systems with automatic regulators, 1976.

[9] Verwey, A., Mathematical model for flow in river with realistic bed coutiguration, Report series, No. 12, International coures in Hydraulic and Sanitary Engineering, Delft, 1971.

第七章　恒定挟沙水流模型

上一章介绍的水流模型属定床模型，周界在水流随时间变化的过程中不发生变形。而本章和以后各章介绍的挟沙水流模型，因水流挟带的泥沙和床面泥沙不断地发生交换作用，周界随时发生变化。因此，挟沙水流模型涉及到的问题要复杂一些，问题也比较难于解决。

从河流动力学得知，天然河道挟沙水流中输送着推移质和悬移质，推移质和悬移质运动其造床作用是不相同的。对某一河段而言，上游来水来沙条件的不同，决定着本河段挟沙力的情况，而水流挟沙力达到饱和的程度也不相同。河段水流挟沙饱和得快，实际输沙量可近似地用基本公式计算，饱和得慢，可考虑非饱和输沙的计算方法。本章将介绍恒定挟沙水流饱和悬移质模型和推移质模型。

第一节　基本假定和基本方程式

对(2-31)、(2-33)、(2-38)方程式，补充假定：

(1)恒定条件，即$\frac{\partial}{\partial t}=0$。值得提及的是，对于挟沙水流而言，恒定概念仅是对各水力泥沙运动要素而言，如流量Q，过流面积A，含沙量S等，这个概念不能直观地扩展和使用到河床变形上，即恒定条件$\frac{\partial}{\partial t}=0$，不包含着$\frac{\partial Z}{\partial t}=0$，否则，讨论动床泥沙模型就失去其一般意义。

(2)不考虑河段内水体中悬沙的槽蓄量随时而变，即$\frac{\partial SA}{\partial t}=0$。

(3)假定河床在发生冲淤过程中，在每一微小时间内的河床变形不大，不致于影响到水流条件的改变。

(4)悬移质在水中的含量较小，由此而引起的水流的动量变化较小。

在上述假定条件下，且略去纵向扩散项，方程(2-31)、(2-33)和(2-38)可简化为

水流连续方程

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \tag{7-1}$$

运动方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)+gA\frac{\partial h}{\partial x}-gA(J_e-J_f)=0 \tag{7-2}$$

泥沙连续方程

$$r'\frac{\partial A_s}{\partial t}+\frac{\partial QS}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial x}=0 \tag{7-3}$$

$$r'=r_s(1-P_s)$$

式中Q为流量，A为面积，h水深，A_s河床变形面积，J_e河床底坡，J_f能坡，S断面平均含沙量，G推移质输沙率，r'干容重，r_s泥沙容重，P_s孔隙率，x和t分别为距离和时间独立变量。这三个方程是构成恒定非均匀挟沙水流模型的最基本的方程组。由于三个基本方程中包含的变量的个数多于基本方程组数，方程是不封闭的，这是产生各种泥沙模型的根本原因。

第二节　恒定悬移质饱和输沙模型

一、方程组的封闭

当模型仅考虑悬移质运动时，方程(7-3)中的第三项被略去。这样，方程组(7-1)、(7-2)和(7-3)包含有四个未知数：流量 Q，过流面积 A，变形面积 A_z 和断面平均含沙量 S。因此，必须引入另外一个方程来计算断面平均含沙量，方程组才能封闭。在饱和输沙模型中，认为断面平均含沙量可用水流挟沙力计算，即

$$S=S_*(Q、A、A_z、d\cdots) \tag{7-4}$$

从河流动力学得知，水流挟沙力是水流泥沙运动要素的函数，可用张瑞瑾公式计算，即

$$S_*=K\left(\frac{U_3}{gR\omega}\right)^m \tag{7-5}$$

也可用含沙量分布公式以及其它一些经验公式估算。

严格地讲，挟沙水流运动方程中能坡 J_f 也是一个未知量，但目前对其较准确地估值还很困难，只能借助于(3-1)或(3-2)进行估值。

$$J_f=\frac{n^2Q^2}{A^2R^{4/3}} \tag{7-6}$$

这样，方程(7-1)、(7-2)、(7-3)和关系式(7-5)、(7-6)就构成恒定饱和输沙模型的封闭方程组。

二、边界条件的提法

对方程(7-1)至(7-6)进行求解，还必须提适当的边界条件。从数学上讲，只有对泛定方程(7-1)、(7-2)和(7-3)提确切的边界条件，定解问题才是适定的，即方程的解存在、稳定且唯一。边界条件的确切提法，可用第四章介绍的特征线理论进行分析。

为便于分析，以流速 u，水深 h 和河床高程 Z_z 为变量，方程(7-1)、(7-2)和(7-3)可改写为：

连续方程

$$h\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{7-7}$$

运动方程

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g\frac{\partial Z_z}{\partial x}+g\frac{n^2Q^2}{A^2h^{4/3}}=0 \tag{7-8}$$

式中河床底坡

$$J_*=-\frac{\partial Z_z}{\partial x}$$

泥沙连续方程

在这个方程中，考虑到式(7-5)并设取 $S_*=S_*(u,h)$，可写成

$$r'\frac{\partial Z_z}{\partial t}+hu\frac{\partial S_*}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+hu\frac{\partial S_*}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{7-9}$$

考虑变量 $u、h、Z_z$ 的全微分

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x \tag{7-10}$$

$$\mathrm{d}h=\frac{\partial h}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x \tag{7-11}$$

$$\mathrm{d}Z_z=\frac{\partial Z_z}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial Z_z}{\partial x}\mathrm{d}x \tag{7-12}$$

对于三个变量的一阶偏微商，由方程(7-7)至(7-12)可写出

$$\begin{bmatrix} 0 & h & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & g & 0 & g \\ 0 & hu\dfrac{\partial S_*}{\partial h} & 0 & hu\dfrac{\partial S_*}{\partial h} & r' & 0 \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} \\ \dfrac{\partial Z_s}{\partial t} \\ \dfrac{\partial Z_s}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g\dfrac{n^2u^2}{h^{4/3}} \\ 0 \\ \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}h \\ \mathrm{d}Z_s \end{bmatrix} \tag{7-13}$$

依据特征线具有的弱间断性，代数方程组(7-13)中的各偏微商不存在唯一解。这样，根据线性方程组解的存在性，方程组(7-13)的系数矩阵行列式的值应该为零，即

$$\begin{vmatrix} 0 & h & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & g & 0 & g \\ 0 & hu\dfrac{\partial S_*}{\partial u} & 0 & hu\dfrac{\partial S_*}{\partial h} & r' & 0 \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} = 0 \tag{7-14}$$

解行列式(7-14)得：

$$(\mathrm{d}t)^2[r'\mathrm{d}x(gh-u^2)+ghu(\frac{\partial S_*}{\partial h}h-\frac{\partial S_*}{\partial u}u)\mathrm{d}t]=0 \tag{7-15}$$

则有

$$(\mathrm{d}t)^2=0$$

可解出

$$\lambda_1=(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})=\infty(\mathrm{d}t\to 0^+) \tag{7-16}$$

$$\lambda_2=(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})=-\infty(\mathrm{d}t\to 0^-) \tag{7-17}$$

和

$$(gh-u^2)r'\mathrm{d}x+ghu(h\frac{\partial S_*}{\partial h}-u\frac{\partial S_*}{\partial u})\mathrm{d}t=0 \tag{7-18}$$

由式(7-18)可解出

$$\lambda_3=(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})=\frac{u(u\dfrac{\partial S_*}{\partial h}-h\dfrac{\partial S_*}{\partial h})}{r'(1-F_r^2)} \tag{7-19}$$

式中 $F_r^2=\dfrac{u^2}{gh}$。如果模型中引进公式(7-5)来计算含沙量 S，则取 $m=1$ 时有

$$(u\frac{\partial S_*}{\partial u}-h\frac{\partial S_*}{\partial h})=4K\frac{u^3}{gh\omega}>0 \tag{7-20}$$

若计算方向与水流方向一致，那么式(7-20)是成立的。这样，特征线 λ_3 的方向就取决于佛氏数 F_r 的大小，因而急缓流情况下恒定饱和输沙模型的定解条件提法就有所不同。由于 λ_1 和 λ_2 的方向是不因水流泥沙条件的不同而改变的，因此，问题在于确定 λ_3 的方向，据此确定边界条件的提法。

对于缓流，$F_r<1$，则由式(7-19)和(7-20)显然有

$$\lambda_3>0 \tag{7-21}$$

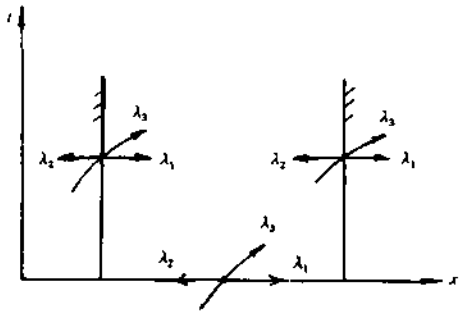
这样，特征方向可由图 7-1 表出。

因此，对于恒定饱和悬移质模型，其边界条件的提法为：

(1)在上边界提一个水力条件和河床边界条件；

(2)在下边界提一个水力条件；

(3)在初始时刻，给河床高程提初值条件，不提水力条件。



缓流 $F_r<1,\lambda_3>0$

图 7-1

对于急流 $F_r>1$，则有 $\lambda_3<0$，特征线方向见图 7-2。

此时，恒定饱和悬移质模型的提法为：

(1)在上边界提一个水力条件；

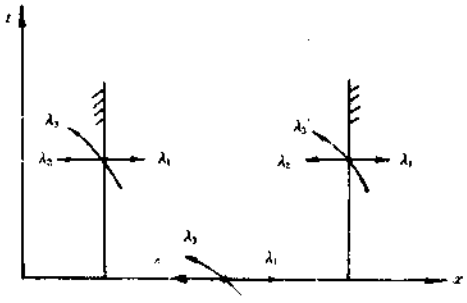
(2)在下边界提一个水力条件，一个河床高程条件；

(3)河床高程初值条件。

对于临界水流，$F_r=1$，由缓流向急流过渡时，$\lambda_3\to+\infty$，特征方向见图 7-3。

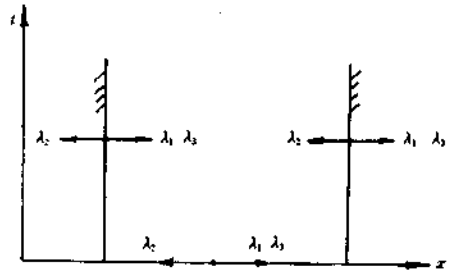
综合上述分析可以看出，对于急缓流，因 $\lambda_{1,2}$ 与 F_r 无关，上下边界的水力条件的提法是相同的，所不同的是河床高程的提法。对于缓流，应在上游端给出河床高程的控制条件，而对于急流，河床高程控制条件由下边界提出，对于临界流，恒定饱和模型属边值问题，不需提初值，这是与自然现象不相符的，没有初值时刻的河床形态，模型是不可能运行的。因此，恒定饱和模型不适用于临界水流。

从定解条件提法上看，饱和模型有两点与自然现象不尽相符的地方。其一，不需要直接提上游来沙过程线作为边界条件，如含沙量过程线，这是模型本身假定含沙量等于水流挟沙力所致。河床变形模拟不直接考虑上游来沙过程的变化是与自然现象不尽相符的。其二，对于急流，应提下边界河床高程为控制条件，而来水来沙则是从上游端加入，上游来水来沙条件的改变必然会先导致上游端邻近河段的河床相继发生变形，这不是下游端河床高程所能控制得了的，除非是对短距离的急流河段变形模拟才有可能。



急流 $F_r>1,\lambda_3<0$

图 7-2



临界流 $F_r=1,\lambda_3\to+\infty$

图 7-3

三、方程组的离散

由于天然河道的不规则性以及边界条件的复杂性，求方程组(7-1)～(7-6)的解析解是极其困难的，目前较多的是求其数值解，这里介绍有限差分解法。

将式(7-1)、(7-2)写成差分形式，即

$$Q_{j+1}=Q_j \tag{7-22}$$

$$Z_j=Z_{j+1}+\Delta x\frac{n^2Q^2}{\overline{B}^2\overline{h}^{10/3}}+\frac{1}{2g}\left(\frac{Q_{j+1}^2}{A_{j+1}^2}-\frac{Q_j^2}{A_j^2}\right) \tag{7-23}$$

式中 Δx 为两计算断面间距，Δt 为计算时段长，j 和 $j+1$ 为计算断面序号，Q_{j+1}、A_{j+1}、Z_{j+1}、Q_j、A_j 和 Z_j 分别为断面号 $j+1$ 和 j 的流量、过流面积和水位，$\overline{B}$ 和 $\overline{h}$ 为计算断面 $j+1$ 和 j 的平均河宽和平均水深。

差分方程(7-22)表示 j 和 $j+1$ 断面上的流量相等，这一等价条件对一切计算断面 ($j=1,2\cdots$) 成立，流量沿流程方向不变，各断面流量完全由上边界断面决定(边界条件)。因此差分方程(7-22)与微分方程(7-1)是相容的，它以一阶精度逼近方程(7-1)。差分方程(7-23)也与运动方程(7-2)相容，上计算断面 j 的水位由下断面 $j+1$ 的水位计算，只要给出下边界的控制水位，便可由差分方程(7-23)往上游求水面线。这是与恒定饱和输沙模型的水力条件提法相适应的。

泥沙数学模型计算河床变形的关键在于求解泥沙连续方程(7-3)，既要正确地模拟出河道冲淤总量，又要模拟出形态分布，正确地离散方程(7-3)非常重要。下面介绍几种差分形式。

1. 方法一

这是一种在我国盛用数十年的一种常规方法。这种方法将方程(7-3)直接差分成

$$\gamma'\Delta As_{j,j+1}\Delta x=[(QS)_j-(QS)_{j+1}]\Delta t \tag{7-24}$$

式中 $(QS)_j$ 和 $(QS)_{j+1}$ 分别为 j 和 $j+1$ 断面上的输沙量，$\Delta As_{j,j+1}$ 为断面 j 和 $j+1$ 间的河段冲淤平均面积。它表明进出断面输沙量之差等于该河段的总冲淤量。由于差分方程(7-24)只能算出河段平均冲淤面积，而不能直接算出某一确定断面 j 上的冲淤面积 ΔA_j，而是间接地取两相邻河段冲淤面积的平均值

$$\Delta A_{sj} = \frac{1}{2}(\Delta A_{sj-1,j} + \Delta A_{sj,j+1}) \tag{7-25}$$

作为 ΔA_{sj}。此外，对于 N 个计算断面，按式(7-24)可计算出 $(N-1)$ 个河段冲淤平均面积 $\Delta A_{sj,j+1}(j=1,2\cdots,N-1)$，这样，再按式(7-25)就只能计算出 $(N-2)$ 个断面冲淤面积 $\Delta A_{sj}(j=2,3\cdots,N-1)$，还缺少两个断面的不能算出，这就需要用到两个数值边界条件来封闭。常规做法是取

$$\Delta A_{s1} = \Delta A_{s1,2}, \Delta A_{sN} = \Delta As_{N-1,N} \tag{7-26}$$

来完成一个时间步长的计算，按这种算法算得的变形面积结果见图 7-4。

这种算法主要存在以下几个问题：

(1)出现数值双值，导致泥沙计算不连续。考察任意两河段 $(j-1,j)$ 和 $(j,j+1)$ 如图 7-4。由断面输沙量 $QS_{j-1,j}$、QS_j 和 QS_{j+1} 可按式(7-24)计算得到这两个河段内的平均冲淤面积 $\Delta A_{sj-1,j}$ 和 $\Delta A_{sj,j+1}$。显然就这两河段的泥沙冲淤总量上讲泥沙是连续的。但是如果进一步考究形态，这就需要知道某一确定断面上的冲淤面积 ΔA_{sj}。从图 7-4 看出，ΔA_{sj} 既可用 $\Delta A_{sj-1,j}$ 逼近，也可用 $\Delta A_{sj,j+1}$ 逼近，亦即在某一断面位置上出现两个计算面积，称数值双值，河道实际冲淤在同一时段某一确定的位置只可能出现一种变形，数值双值与实际变形不符，这是由差分方程(7-24)引起的。

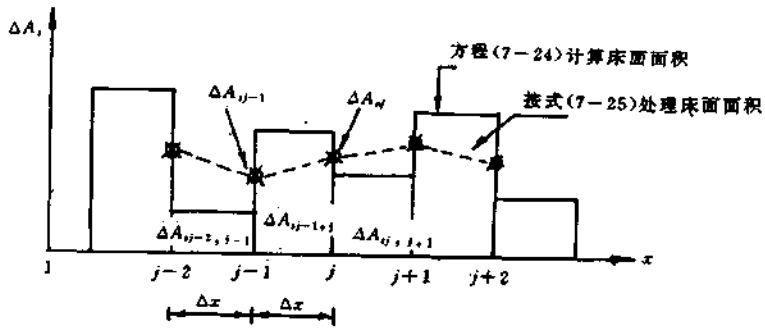


图 7-4

进一步地，如果沿着算法的思路，用式(7-25)处理数值双值问题，得到了断面 j 的单一变形量。但就图 7-4 所示而言，因 $\Delta A_{sj-1,j} > \Delta A_{sj}$ 和 $\Delta A_{sj-1,j} > \Delta A_{sj-1}$，则有

$$\frac{1}{2}(\Delta A_{sj} + \Delta A_{sj-1})\Delta x < \Delta A_{sj-1,j}\Delta x$$

这就是说按式(7-25)处理后得到的变形面积，由其算得的体积不再与式(7-24)算得的体积相同，这种差异的出现导致局部河段泥沙的不连续，计算床面与处理床面的不一致。对于长系列长河段的一维计算，这种差异理论上就很难估计其发展情况，只能通过选择很短的时空步长来控制。虽然不排除上述成立的可能性，这取决于来水来沙条件和全河段计算的处理，如果都采用(7-25)式处理，下面的分析表明，这种可能性是不存在的。

(2)数值边界条件变态。不难从式(7-24)看出，如果单纯按式(7-24)计算变形时，只要用到上游边界入口断面的流量和含沙量(饱和输沙法为挟沙力)，不需要用到河床面积随时间变化的边界条件，这与原物理方程要求的边界条件不一致(见图 7-1 和 7-2)。需要用到河床边界条件的则是在计算中使用了式(7-25)，式(7-24)和(7-25)结合应用才能算出 $(N-2)$ 个变形面积，另外两个变形面积需要给出两个数值边界条件。

对于 N 个计算断面，使用两相邻结点差分得到的方程(7-24)给出 $(N-1)$ 个计算变形面积，这是在情理之中的，为什么使用式(7-25)后只能算出 $(N-2)$ 个变形面积呢？对河段

$(j-1,j)$ 和 $(j,j+1)$ 按式(7-24)可列出两个方程

$$\gamma' \Delta A_{sj-1,j}\Delta x = [(QS)_{j-1} - (QS)_j]\Delta t$$

$$\gamma' \Delta A_{sj,j+1}\Delta x = [(QS)_j - (QS)_{j+1}]\Delta t$$

两式相加除 2 得

$$\gamma' \frac{(\Delta A_{sj-1,j} + \Delta A_{sj,j+1})}{2\Delta t} = \frac{[(QS)_{j-1} - (QS)_{j+1}]}{2\Delta x}$$

应用式(7-25)

$$\gamma' \frac{\Delta A_{sj}}{\Delta t} = \frac{[(QS)_{j-1} - (QS)_{j+1}]}{2\Delta x} \tag{7-27}$$

使用泰勒公式展开上式各项，当 $\Delta t, \Delta x \to 0$ 时，方程(7-27)逼近微分方程(7-3)，这一结果表明，方程(7-27)是通过使用时间向前差空间中心差离散方程(7-3)得到的。方程(7-27)用到了三个计算断面，故对于 N 个计算断面也就只能列出 $(N-2)$ 个差分方程，算出 $(N-2)$ 个变形面积，这一结果表明，差分方程(7-24)与(7-27)在差分方法上有质的差别，差分方程(7-24)结合处理式(7-25)运用，改变了原差分方程(7-24)的性质，因而图 7-4 所表出的计算床面与处理床面总是不相一致的。

(3)边界条件(7-26)也不合理，因为它不是边界控制条件。

2. 方法二

从上节定解条件提法看出，当 $F_r < 1$ 时，河床变形特征速度方向与水流运动方向相一致，仿迎风差分格式的基本思想，可将(7-3)离散成

$$\gamma' \Delta A_{sj}\Delta x = [(QS)_{j-1} - (QS)_j]\Delta t$$

对于饱和输沙模型，因 $\lambda_3 > 0$，上式差分相当于迎着床面小扰动波的运动方向差分，但是从物理图案上讲，将河段进出断面上的沙量全部"压到"断面 j 上就不尽合理了。且对于不平衡输沙模型而言因 $\lambda_3 = 0$（见下节），这一差分格式应用时也不顺当。

3. 方法三

本书作者在研究一些现有差分格式的基础上，结合工程应用经验，将微分方程(7-3)离散成

$$\gamma'[\psi \Delta A_{sj+1} + (1-\psi)\Delta A_{sj}]\Delta x = [(QS)_j - (QS)_{j+1}]\Delta t \tag{7-28}$$

式中 ψ 为数值权重因子。为了保证数值计算的稳定性，需严格取 $\psi \geqslant 0.5$，当 $\psi = 0.5$ 时会现数值扰动。差分方程(7-28)的优点是，既能计算出冲淤量，也能不用其它处理同时算出各断面的冲淤面积，且当取 $\psi > 0.5$ 时也具有迎风的性质。对 N 个计算断面，方程(7-28)给出 $(N-1)$ 个单值冲淤面积，还剩一个由边界条件给出。因此，计算中不需要过多的数值边界条件，且限于两个计算结点，内外边界条件处理十分方便。

四、算法和计算步骤

基本方程(7-1)、(7-2)和(7-3)包含着三个因变量 Q、A、A_s，水流连续方程(7-1)仅包含有变量 Q，运动方程(7-2)虽然含有变量 Q 和 A，但由于流量 Q 在各计算断面上是相同的且由上边界条件(流量过程线)确定，因此，实际上运动方程中也只有变量 A 或水位 Z。泥沙连续方程(7-3)含有变形 A_s 和 Q，基本方程(7-1)，(7-2)和(7-3)含变量 A_s 和 A，因 A_s 和 A 之间的耦合作用较弱，因此，可考虑采用分开求解运动方程(7-2)和泥沙连续方程(7-3)的办法，这种算法称为非耦合解。其具体计算步骤为：

(1)给定一个时间步长 Δt；

(2)用差分方程(7-23)自下而上推求水面线；

(3)计算各断面的水流挟沙力和输沙量；

(4)用差分方程(7-28)计算断面的变形面积；

(5)修改过水断面面积。

循环上述步骤直至所需计算结果。

采用非耦合解的理论依据可以从液固相三个特征值 $\lambda_{1,2}$ 和 λ_3 的大小得到解释。两个液相特征值为无穷，而河床变形特征值(特征速度)相对于液相特征值是一个小量，换句话说，河床变形速度远比水流变化为小，在一个较微小的离散时段内，河床变形不致于对水流条件有较大的影响。

在此指出，一般认为采用耦合解解基本方程(7-1)、(7-2)和(7-3)较切合实际，这并不意味着基本方程中变量间耦合作用较强时而不能采用非耦合解。耦合解和非耦合解只是算法中的一种技巧和解题策略，即使是基本方程中存在变量间的耦合，也同样可采用非耦合解，有关这一概念，将在以后各节中陆续介绍。

第三节　恒定悬移质非饱和输沙模型

一、方程组的封闭方程

恒定非饱和输沙模型与饱和模型的基本出发点不同，在考虑基本方程组(7-1)、(7-2)和(7-3)的完备性时，假定水流挟沙力瞬间得不到满足，亦即，对于某一确定时刻，沿流程方向，实际含沙量滞后于水流挟沙力，一般情况下，两者不等。这种假定源于水库泥沙淤积和坝下游冲刷的自然物理过程，在这些情形下，断面实际含沙量与水流挟沙力存在差异。

实际含沙量滞后于水流挟沙力这一现象可用不平衡输沙方程描述，即

$$\frac{\partial QS}{\partial x} = -\alpha\omega B(S - S_*) \tag{7-29}$$

这一方程可通过积分二维对流扩散方程得到，式中 α 称恢复饱和系数。在满足水流连续条件(7-1)式时，不平衡输沙方程(7-29)可写成

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\alpha\omega}{q}(S - S_*) \tag{7-30}$$

式中 S 为断面平均含沙量，S_* 为水流挟沙力，q 为单宽流量，ω 为沉速。这样，由不平衡输沙方程(7-29)和方程(7-1)、(7-2)、(7-3)组成恒定非饱和输沙模型的基本方程组。

二、定解条件提法

由于引入了不平衡输沙方程(7-29)，恒定非饱和输沙模型与饱和输沙模型的定解条件提法是不尽相同的。

将方程(7-29)写成以 u,h,Z_* 和 S 为变量的形式

$$hu\frac{\partial S}{\partial X} = -\alpha\omega(S - S_*) \tag{7-31}$$

考虑到方程(7-3)、(7-7)、(7-8)和(7-10)、(7-11)、(7-12)，对变量 u,h,Z_* 和 S 的一阶偏微商，其系数矩阵行列式的值为

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 0 & h & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & g & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r' & 0 & 0 & uh \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & uh \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} \tag{7-32}$$

依据特征线的弱间断性，求行列式(7-32)得特征方程为

$$r' uh(\mathrm{d}t)^3 \mathrm{d}x(u^2 - gh) = 0 \tag{7-33}$$

或

$$r' gh^2 u(\mathrm{d}t)^3 \mathrm{d}x(F_r^2 - 1) = 0 \tag{7-34}$$

对于缓流或急流，$F_r \neq 1$，故可解得

对于 $\mathrm{d}t = 0$，　　$\lambda_1 = (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}) = \infty$ (7-35)

对于 $(\mathrm{d}t)^2 = 0$，　　$\lambda_2 = (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}) = +\infty (\mathrm{d}t \to 0^+)$ (7-36)

$$\lambda_3 = (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}) = -\infty (\mathrm{d}t \to 0^-) \tag{7-37}$$

对于 $\mathrm{d}x = 0$　　$\lambda_4 = (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}) = 0$ (7-38)

则特征方向可由图(7-5)表出。

对于临界水流，$F_r = 1$，显然，也不可能排除上述结论。这样，恒定非饱和输沙模型的定解条件的提法是

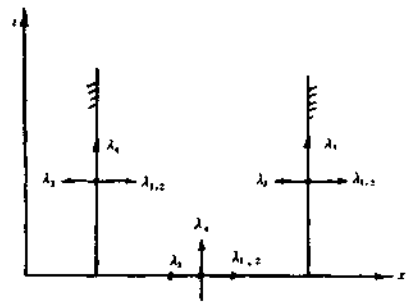
(1)在上游端提两个边界条件，一个水力条件，一个泥沙条件；

(2)在下游端提一个水力条件；

(3)在初始时刻，提河床高程的初值。

另外，如果将不平衡输沙方程(7-29)代入(7-3)，可得到河床变形方程的另一种形式

$$r' \frac{\partial A_s}{\partial t} = \alpha\omega(S - S_*) \tag{7-39}$$



急缓流 $F_r \lessgtr 1$

图 7-5

变形方程(7-39)也是目前较为常用的基本方程式，从泥沙连续角度上讲，它与(7-3)是完全等价的。在非饱和输沙模型中，从定解条件提法角度讲，这两个方程也是完全相同的，它们同属初值问题毋须给河床高程提上下边界条件，故两者可同时使用在一个模型中，也可选择其一进行河床变形计算。其差别是方程(7-3)反映了某一河段的泥沙连续条件，而方程(7-39)则表明单位床面上的泥沙连续性，即单位床面上的河床变形。然而，由于后者某种意义上引进了底部水流挟沙力处理底部泥沙扩散量的假定，系数 α 的出现使其带有一定的经验性质。

比较恒定饱和和非饱和输沙模型定解条件的提法可以看出，非饱和输沙模型定解条件的

不同点在于强调上游端来沙过程，即含沙量随时间的变化过程必需给出，但不需提上边界河床高程，亦即非饱和输沙模型模拟河床变形很大程度上依赖于上游的来水来沙条件，这就决定了饱和模型与非饱和模型的差别，其差别大小，视进口的非饱和程度及河道的水流泥沙特性而异，如进口非饱和程度愈大，河道水流的非均匀性愈强，则两种模型给出的结果差别愈大。

三、方程的离散

基本方程(7-1)、(7-2)、(7-3)的差分方程与上节是相同的，在这里，只是用不平衡输沙方程(7-29)来计算断面平均含沙量，这个方程在较简单的情况下可以求出解析解，一般情况下可用有限差分法求解。

韩其为的做法是，将(7-30)改写成

$$\frac{\mathrm{d}(S-S_*)}{\mathrm{d}x}=-\frac{\alpha\omega}{q}(S-S_*)-\frac{\mathrm{d}S_*}{\mathrm{d}x} \tag{7-40}$$

就变量 $(S-S_*)$ 而言，方程(7-40)为一阶非齐次线性常微分方程，其通解为

$$S-S_*=e^{-\int_x\frac{\alpha\omega}{q}\mathrm{d}x}\left(\int-\frac{\mathrm{d}S_*}{\mathrm{d}x}e^{\int\frac{\alpha\omega}{q}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right) \tag{7-41}$$

C 为积分常数，可由上计算断面的条件

$$(S-S_*)|_{x=j}=(S_j-S_{*j}) \tag{7-42}$$

确定。则有

$$S_{j+1}-S_{*j+1}=(S_j-S_{*j})e^{-\frac{\alpha\omega\Delta x}{q}}-e^{-\frac{\alpha\omega\Delta x}{q}}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\frac{\mathrm{d}S_*}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \tag{7-43}$$

式中 S_j、S_{j+1}、S_{*j} 和 S_{*j+1} 分别为两计算断面 j 和 $j+1$ 的含沙量和水流挟沙力，Δx 为两断面间距。要想进一步积分(7-43)式，必须给出水流挟沙力的沿程变化规律，假定挟水力沿程呈线性变化，即

$$\frac{\partial S_*}{\partial x}=\frac{S_{*j+1}-S_{*j}}{\Delta x} \tag{7-44}$$

代入式(7-43)积分最后得

$$\begin{aligned}S_{j+1}=&S_{*j+1}+(S_j-S_{*j})e^{-\frac{\alpha\omega\Delta x}{q}}\\&+(S_{*j}-S_{*j+1})\frac{q}{\alpha\omega\Delta x}(1-e^{-\frac{\alpha\omega\Delta x}{q}})\end{aligned} \tag{7-45}$$

积分结果(7-45)表明，$j+1$ 断面的含沙量由三部分组成：本断面的水流挟沙力 S_{*j+1}，上断面 j 的剩余含沙量 (S_j-S_{*j}) 经过距离 $\frac{\alpha\omega\Delta x}{q}$ 衰减后剩下来的部分，以及由于动力因素变化引起的该河段挟沙力变化的修正值。一般情况下，第一部分占主要份量，第二部反映了 j 断面水流的饱和程度，如果 j 断面水流非饱和程度大，则 $j+1$ 断面的含沙量就大，第三部分则取决于水流的非均匀程度，若该河段水流接近于均匀流，则其所占的份量就小。如果水流为均匀流，最后一项为零，方程(7-45)变为

$$S_{j+1}=S_{*j+1}+(S_j-S_{*j})e^{-\frac{\alpha\omega\Delta x}{q}} \tag{7-46}$$

这个结果相当于在积分方程(7-43)时取水流挟沙力为常数求积得到的结果，即取

$$\frac{\mathrm{d}S_*}{\mathrm{d}x}=0\qquad\text{或}\qquad S_{*j+1}=S_{*j} \tag{7-47}$$

式(7-45)中的 α，理论上应为邻近河底水层含沙量与垂线平均含沙量的比值，这个比值在这里也看成邻近河底水层挟沙力与平均挟沙力的比值，可由含沙量分布公式计算，但由于用二度均

匀含沙量分布公式计算往往与实测值存在较大的出入，分布公式不能限好地适应于河底邻近水层，故 α 值一般均由实测资料反求，通过数学模型率定后才能确定。根据现有的计算成果，淤积时可取 0.25，冲刷时取 1.0。

解析解(7-45)是在无侧向入汇流满足连续方程(7-1)的条件下求得的，对流量沿流程变化的情况，不平衡输沙方程(7-29)可求数值解。

将(7-29)写成差分形式

$$(QS)_{j+1} = (QS)_j - \alpha\omega B[\psi(S_{j+1} - S_{*,j+1}) + (1-\psi)(S_j - S_{*,j})]\Delta x \tag{7-48}$$

式中 $0 \leqslant \psi \leqslant 1$，$\alpha$、$\omega$、$B$ 分别为 j 和 $j+1$ 断面的平均值。

方程(7-48)可进一步写成

$$S_{j+1} = \frac{Q_j - \alpha\omega B(1-\psi)\Delta x}{Q_{j+1} + \alpha\omega B\psi\Delta x} S_j + \frac{\alpha\omega B\Delta x}{Q_{j+1} + \alpha\omega B\psi\Delta x}[\psi S_{*,j+1} + (1-\psi)S_{*,j}] \tag{7-49}$$

第四节　恒定平衡推移质输沙模型

从河流动力学得知，推移质主要集中在床面上运动，而不象悬移质那样充满整个水体，它与床沙直接接触和发生交换，因此造床作用较强。例如，由库尾泥沙淤积所造成的翘尾巴现象，受推移质淤积的影响就比较大。由于这些原因，虽然天然河道上推移质与悬移质相比，从量上讲，前者少些，但往往都不可忽视。许多国外模型还把推移质输沙作为主要组成部分考虑，构成推移质模型。

仅考虑推移质运动时，由于运动形式的区域与悬移质有别，在整个水沙体系中，推移质仅在床面上运动，因此，清水圣维南方程组可近似地用来描述液相运动的基本方程组，即在恒定条件下有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{7-50}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA\frac{\partial h}{\partial x} - gA(J_* - J_f) = 0 \tag{7-51}$$

上面两个方程也可从方程(2-33)、(2-38)中取含沙量 S 为零推导得到，而泥沙连续方程则为

$$r'\frac{\partial A_s}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \tag{7-52}$$

上面三个基本方程，与前两节讲述的悬移质输沙模型基本公式(7-1)、(7-2)、(7-3)相比，两者在数学的表达形式上是相似的，但从物理概念以及公式的来源和简化角度讲是不尽相同的。正由于数学方程区别不出其个性，所以，许多模型中把推移质模型和悬移质模型一并处理。

推移质运动不占据整个水体，就载体水流而言，所以没有饱和和非饱和的区别，而在述语上也常用平衡与不平衡来描述推移质输沙过程。推移质不平衡输沙模型将在非恒定模型中介绍。

对于推移质平衡输沙模型，则认为实际推移质输沙率 G 与有效推移质输沙率相等，即

$$G = G_*(Q, A, d) \tag{7-53}$$

有效推移质输沙率可用梅叶-彼得公式计算，即

$$g_* = \frac{[(\frac{n'}{n})^{3/2}\gamma h J_f - 0.047(\gamma_s - \gamma)d]^{3/2}}{0.125(\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma_s})(\frac{\gamma}{g})^{1/2}} \tag{7-54}$$

式中 g_* 为有效推移质单宽输沙率，n 综合糙率系数，n' 沙粒糙率系数，J_f 能坡。

以 u,h,Z_s 为变量，对输沙率 G_* 关于 x 求得

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G_*}{\partial x} = \frac{\partial G_*}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G_*}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{7-55}$$

将式(7-55)代入(7-52)，关于变量 u,h,Z_s 的一阶偏微商 $\frac{\partial u}{\partial t}$、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial h}{\partial t}$、$\frac{\partial h}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial Z_s}{\partial t}$、$\frac{\partial Z_s}{\partial x}$ 的线性方程系数矩阵行列式为

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 0 & h & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & g & 0 & g \\ 0 & \frac{\partial G_*}{\partial u} & 0 & \frac{\partial G_*}{\partial h} & r' & 0 \\ dt & dx & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dt & dx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dt & dx \end{vmatrix} \tag{7-56}$$

求 $|\Delta|=0$ 的解得到

$$r'(gh - u^2)(dt)^2 dx + g(h\frac{\partial G_*}{\partial h} - u\frac{\partial G_*}{\partial u})(dt)^3 = 0 \tag{7-57}$$

解方程(7-57)可求得三个特征根 $\lambda_{1,2}$ 和 λ_3 的表达式：

对于 $(dt)^2=0$

$$\lambda_{1,2} = (\frac{dx}{dt}) = \pm\infty \tag{7-58}$$

而 λ_3 则为

$$\lambda_3 = (\frac{dx}{dt}) = \frac{u\frac{\partial G_*}{\partial u} - h\frac{\partial G_*}{\partial h}}{r'h(1 - F_r^2)} \tag{7-59}$$

若 $h\frac{\partial G_*}{\partial h} << u\frac{\partial G_*}{\partial u}$，根 λ_3 变为

$$\lambda_3 = \frac{u\frac{\partial G_*}{\partial u}}{r'h(1 - F_r^2)} \tag{7-60}$$

这是 de Vries 建议的表达式。使用有效单宽输沙率公式(7-54)并改写成

$$G_* = g_* B = BE(\tau' - \tau_c)^m \tag{7-61}$$

式中 m 为指数3/2，B 为河宽，系数 $E=\frac{1}{0.125(\frac{\gamma_s}{g})^{1/2}(\frac{\tau_c - \tau}{\tau_c})}$，有效水流拽引力 $\tau' = (\frac{n'}{n})^{3/2}\gamma h J_f$，临界起动拽引力 $\tau_c = 0.047(\gamma_s - \gamma)d$。

对式(7-61)求导得

$$\frac{\partial G_*}{\partial u} = mBE(\tau' - \tau_c)^{m-1}\frac{\partial \tau'}{\partial u}$$

$$\frac{\partial G_*}{\partial h} = mBE(\tau' - \tau_c)^{m-1}\frac{\partial \tau'}{\partial h}$$

考虑到 $\tau' = (\frac{n'}{n})^{3/2}\gamma h J_f$ 和 $u = C\sqrt{hJ_f}$ 有

$$\frac{\partial \tau'}{\partial h} = -\frac{1}{3}\frac{\tau'}{h}$$

$$\frac{\partial \tau'}{\partial u} = 2\frac{\tau'}{u}$$

这样 $$u\frac{\partial G_*}{\partial u} - h\frac{\partial G_*}{\partial h} = BmE(\tau' - \tau_c)^{m-1}[2\tau' + \frac{1}{3}\tau'] = \frac{7}{3}BmE\tau'(\tau' - \tau_c)^{m-1} \tag{7-62}$$

代入(7-59)得

$$\lambda_3 = \frac{7}{3}\frac{BmE\tau'(\tau' - \tau_c)^{m-1}}{\gamma' h(1 - F_r^2)} \tag{7-63}$$

式(7-63)表明当有效切应力大于临界切应力时，即 $\tau' > \tau_c$，床面上泥沙起动，特征方向取决于佛氏数的大小。对于缓流 $F_r < 1$，则 $\lambda_3 > 0$；对于急流 $F_r > 1$，$\lambda_3 < 0$；对于临界水流 $F_r = 1$，$\lambda_3 \to \infty$。这个结论表明，推移质平衡输沙模型的定解条件提法与悬移质饱和输沙模型的提法相同。

当 $\tau' = \tau_c$ 时，床面泥沙起动处于临界状态，河床将不发生变形，特征方向 $\lambda_3 = 0$，相当于周界不动的清水水流情况，这与用圣维南方程组推求洪水演进的情形是类同的。

第五节　计算中的几个问题

一、水流泥沙过程线的概化

天然河道中实测的流量和含沙量过程线一般情况下多属非恒定的，它们都是时间的函数，且年内年际间分布不均匀，因此，为了满足恒定条件需要作些概化。具体作法是，先将计算系列划分为若干时段，并将流量过程线和含沙量过程线划分为由若干短时段组成的梯级式流量和含沙量过程，对于每一个梯级下的流量和含沙量看成是恒定的。

流量和含沙量过程线是数学模型进行河床变形计算时的最基本的依据，其概化过程的代表性如何，直接影响到计算的准确性，因此，流量和含沙量的概化过程至关重要，它与时间步长的划分是息息相关的。当上游流量和含沙量过程同步时，时间步长的划分应尽可能按照过程线的变化去截取，过程线变化大的地方时间步长取短些，变化较缓的可取大些，以构成变步长的时间系列。截取时间步长的一般原则：一是使概化的梯级过程线尽可能地吻合物理过程线，使概化过程与物理过程具有相似的变化特性；二是保证在一个离散步长内河床冲淤量不能太大，当上游流量过程和含沙量过程不同步时，时间步长的截取应尽可能兼顾两者，不可忽视其一而使数值计算失真。

二、悬移质水流挟沙力和推移质输沙率的计算

悬移质水流挟沙力和推移质输沙率的合理计算直接影响到河床变形计算的可靠性和精度以及水流条件的反馈，它是建立数学模型成败的关键，尤其是饱和输沙模型更是如此，因此，要慎重考虑。

从河流动力学得知，挟沙能力的计算通常用三种方法：经验法、半经验半理论关系式和由悬移质分布公式推求。虽然三种方法有所不同，但都脱离不了由实测资料点绘断面平均含沙量与各水力要素的结构关系式，如常用的张瑾公式，公式系数由模拟河段的实测资料反求确定。用积分悬移质分布推求水流挟沙力，则是通过选择合适的含沙量分布公式进行，以罗斯公式为例：

$$\frac{S}{S_a}=\left(\frac{h-\eta}{\eta}\cdot\frac{a}{h-a}\right)^Z \tag{7-64}$$

按流量法求垂线平均得

$$S_{pj}=S_a\int_{\eta_a}^{1}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\cdot\frac{\eta_a}{1-\eta_a}\right)^Z\left[\left(1+\frac{\sqrt{g}}{kC}+\frac{\sqrt{g}}{kC}\right)\ln\eta\right]\mathrm{d}\eta$$

即

$$S_{pj}=\left(\frac{1-\eta_a}{\eta_a}\right)^Z\left[\left(1+\frac{\sqrt{g}}{kC}\right)J_1-\frac{\sqrt{g}}{kC}J_2\right]S_a\frac{q}{q'} \tag{7-65}$$

式中 a 为参考点高程，h 为水深，S_a 为参考点浓度，$\eta=y/h$，$\eta_a=a/h$，$Z=\frac{\omega}{\beta k u_*}$，$q$ 和 q' 分别为全水深和参考点 a 以上部分的单宽流量，两个积分式 J_1 和 J_2 分别为

$$J_1=\int_{\eta_a}^{1}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)^Z\mathrm{d}\eta$$

$$J_2=-\int_{\eta_a}^{1}\left(\frac{1-\eta}{\eta}\right)^Z\ln\eta\mathrm{d}\eta$$

也可用体积法求平均含沙量。因含沙量分布公式是在平衡条件下得到的，积分平均含沙量即为水流挟沙力 S_*，按照这种方法计算水流挟沙力，由式(7-65)可知，还需要进一步确定底部参考含量 S_a 才能计算，这更是一个难题。

三、糙率问题

糙率确定是否合理，直接影响到各水力要素的计算，进而影响到水流挟沙力和河床冲淤量及其分布。

精确地确定糙率目前还十分困难，就确定综合糙率而言，目前也无各种情况都能通用的办法，须根据具体情况区别对待，慎重处理。在有实测资料的情况下，一般而言，可用第三章介绍的均匀流公式或非均匀流公式反求推得，也可用动床阻力的办法计算综合阻力。在无实测资料的情况下，可用类比的方法，选择与模拟河段水流泥沙，河床形态特征类似的河段实测资料进行类比分析进行估值。

就一般情况而言，在应用数学模型对模拟河段进行预测未来时，由于将来的水流条件和河床形态都是预测量，河床糙率也就是未知数，通常的做法是依据现有的实测糙率作为估算值。这又常有两种做法：一种是对预测未来河床形态时，实测糙率不变，整个河床变形计算都采用这个糙率；另一种是把实测糙率当作初始时刻的计算糙率，然后考虑河床冲淤变形和床沙组成及形态，通过使用某种经验关系式插值的办法估算河床变形的过程中的糙率。不管采用哪种办法，实测糙率都是最基本而重要的影响因素，需对其进行深入的考究。一方面要考究模拟河段的历史和现况，通过来水来沙条件和河床组成情况的深入分析作出较为合理的推断和选用；另一方面要预估模拟河段的可能发展情况，这需要有较丰富的经验和知识。从计算上讲，使用实测糙率，要注意处理方法的协调性。多数情况下，实测糙率都是通过实测的流量、面积和比降用均匀流公式反求而得到的，这样得到的糙率显然忽略了水流均匀特性，使用这种糙率按非均匀流计算公式(7-23)进行水位线推算时必然不相容，亦即由实测糙率按式(7-23)推求的水位或比降不可能与实测的水位或比降完全吻合。因此，在进行河段模拟之前，实测的糙率需要按式(7-23)进行率定，以实测糙率为参考值，通过计算，使按式(7-23)算得的水面线与实测的吻合，相应的率定糙率方可作为起步计算糙率。

河床变形过程的糙率估算，对不同的具体问题(如冲刷、淤积情况)还要区别对待，以水库淤积为例，具体说明糙率确定的方法。

一般说来，建坝蓄水后的水库糙率在时空上都发生变化。空间上讲，水库蓄水而发生淤积，这种淤积沿程将不均匀，河床糙率沿程分布也不一样。在变动回水段和壅水不很严重的地段，较粗泥沙在这里落淤，床面粗度较大；而在常年回水段和库区，细沙在这里大量落淤，糙率也相对较小。全水库沿程淤积表现为上粗下细，床面沿程细化，糙率一般来说也顺流变小。

目前对水库淤积糙率的考虑有四种情况：一是天然河道糙率，即水库蓄水前的糙率；二是水库蓄水后的糙率，水库蓄水，水位抬高，岸壁糙率影响增加；三是水库从淤积开始到水库淤积平衡为止的糙率变化，水库淤积发展，河床逐渐淤高，河床形态及糙率将发生变化，此时的糙率又称过渡糙率；四是水库发展到淤积终止时的糙率，水库淤积发展到相对平衡状态时，库区将塑造出新的河床，其糙率应与自然状态下的冲积河道床面糙率类似，称终极糙率或平衡糙率。各部分的确定方法如下：

(1)水库建库后蓄水前的天然河道综合糙率。可由实测的水文资料通过模拟率定反求得到。这部分糙率可近似地看作水库蓄水后河床变形的起步计算槽糙率。

(2)水库蓄水后淤积前的糙率通常用两种方法确定；(a)直接借用自然河道情况下的大流量的边壁糙率为最高洪水位以上的边壁糙率，然后用 Einstein 方法计算综合糙率，即

$$P_2 n_2^{3/2} = P_w n_w^{3/2} + P_1 n_1^{3/2}$$

P_2、P_1 分别为最大和平均两流量级相应的湿周，P_w 为两级流量间的边壁湿周，n_2 为所求糙率，n_1 为平均流量的综合糙率，n_w 为边壁糙率。

(3)水库淤积平衡糙率。三峡水库模型取淤积面积达到第一造率流量的过水面积 A_k 时，就可以认为床面已完全转化为冲积河床，糙率就可基本上看作不变了。

确定平衡糙率的方法目前还很不成熟，有两种方法可供采用：

①根据现有的水库淤积平衡实测资料来反求。

②采用冲积河流中相对较稳定的河段糙率作为平衡糙率。

(4)过渡糙率还是一个值得进一步研究的课题。韩其为认为过渡糙率由三部分组成：

过渡糙率＝沙粒糙率＋沙波糙率＋原始床面形态糙率。原始床面形态糙率主要因床面高低不平而造成。各部分的糙率可表成

$$n_d = \frac{d^{1/6}}{K_d},\ n_A = \frac{A^{1/6}}{K_A},\ n_f = \frac{\delta^{1/6}}{K_\delta} \tag{7-66}$$

式中 n_d 为沙粒糙率系数，n_A 和 n_f 分别为沙波和形态糙率系数，d 为沙粒直径，A 代表性沙坡高度，δ 为河床凸出体的相对高度，K_d、K_A 和 K_δ 分别为相应各部分的系数。

如果采用能坡分割法可得

$$\frac{n_b^2 u^2}{R^{4/3}} = \frac{n_d^2 u^2}{R^{4/3}} + \frac{n_A^2 u^2}{R^{4/3}} + \frac{n_f^2 u^2}{R^{4/3}} \tag{7-67}$$

式中 u 为平均流速，R 为水力半径，由(7-67)有 $n_b^2 = n_d^2 + n_A^2 + n_f^2$

若平衡糙率 n_{bk} 包含着沙粒和沙波糙率，故可近似写成：

$$n_b^2 = n_{bk}^2 + n_f^2 \tag{7-69}$$

水库发生淤积时，原始床面上高低不平的凸出部分逐渐被掩没，假定相对凸出高度 δ 与 $(A_k - A_t)$ 成线性关系，即

$$\delta = \frac{A_k - A_t}{B} \tag{7-70}$$

A_k 和 A_t 分别为淤积平衡时和时间 t 的淤积面积，由(7-66)得

$$n_f = \frac{\delta^{1/6}}{K_\delta} = (\frac{A_k - A_s}{B})^{1/6} K_\delta^{-1/6}$$

将其代入(7-69)得

$$n_b^2 = n_{bk}^2 + \frac{1}{K_\delta^2}(\frac{A_k - A_s}{B})^{1/3} \tag{7-71}$$

系数 K_δ 可由初始糙率确定，即当 $A_s = 0$ 时有 $n_b = n_{bo}$，可由(7-71)解出

$$K_\delta^2 = (n_{bo}^2 - n_{bk}^2)(\frac{B}{A_k})^{1/3}$$

代回(7-71)最后得

$$n_b^2 = n_{bk}^2 + (n_{bo}^2 - n_{bk}^2)(\frac{A_k - A_s}{A_k})^{1/3} \tag{7-72}$$

式(7-72)实质上是二次多项式，过渡糙率是由初始糙率和远期糙率经过插值而得到的。从式可看出，当 $A_s = 0$ 时，$n_b = n_{bo}$，而当 $A_s = A_k$ 时，$n_b = n_{bk}$，定性上是合理的。有关过渡糙率的计算方法还有待于进一步研究。

四、过流断面的概化

自然河道中的过流面积形态是极为不规则的，一维泥沙模型中合理概化不规则自然断面是一个基本问题，其代表性直接影响到水流条件和河床冲淤面积的纵向分布的精度。

概化自然断面的方法目前常用两种方法：一是概化成规则的矩形断面，二是由规则多边形曲线拟合。概化成矩形的做法原则是遵守一维概念来进行的，只有在将自然断面概化成矩形时，流速和含沙量等在断面的分布才是均匀的，符合一维模型的基本假设。但是这种做法的任意性很大，对同一自然断面可概化出各种水深河宽不同的面积，因此所得概化面积归一性差，不能很好反映出自然断面的特性。而且在冲淤变形计算中，对自然断面的河岸的演变不能得到很好地反映。

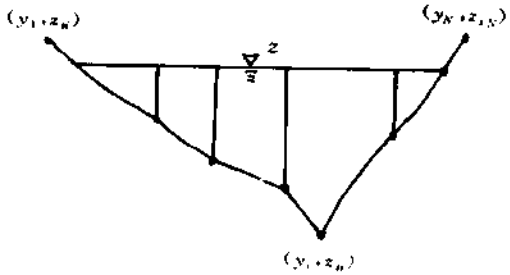


图 7-6

规则多边形曲线拟合是用多边形面积逼近自然断面面积(见图7-6)，当选点较多时，多边形面积，就可以较好地逼近自然断面面积。具体做法是用横竖坐标 (Y_i, Z_i) 来定义自然断面，Y_i 为起点距，Z_{ni} 为相应河底高程。这样，自然面积 A 就可用多边形各子断面面积之和来逼近，即

$$A = A_{左} + \sum_{i=2}^{N-1} A_i + A_{右} \tag{7-73}$$

式中左边的三角形面积为(图7-7(a))

$$A_{左} = (Y_{i+1} - Y_i)(\frac{Z - Z_{ni+1}}{Z_i - Z_{ni+1}})(\frac{Z - Z_{ni+1}}{2}) \tag{7-74}$$

而右边三角形面积为

$$A_{右} = (Y_{i+1} - Y_i)(\frac{Z - Z_{ni}}{Z_{ni+1} - Z_{ni}})(\frac{Z - Z_{ni}}{2}) \tag{7-75}$$

而梯形面积 A_i 为

$$A_i = (Y_{i+1} - Y_i)(\frac{2Z - Z_{ni+1} - Z_{ni}}{2}) \tag{7-76}$$

记

$$Z_{sup} = \max(Z_{si}, Z_{si+1})$$

$$Z_{inf} = \min(Z_{si}, Z_{si+1})$$

则左右两边三角形面积统写成

$$A_i = \frac{(Y_{j+1} - Y_j)}{2}\left(\frac{Z - Z_{inf}}{Z_{sup} - Z_{inf}}\right)(Z - Z_{inf}) \tag{7-77}$$

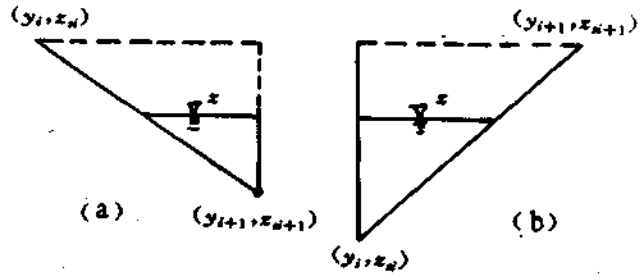


图 7-7

使用这个计算式进行面积计算极为便利。

规则多边形拟合不仅能较好地逼近面积，而且便于计算湿周，水力半径和综合糙率等，同时也便于进行河床冲淤面积和横向分配，还可以考虑流速、含沙量、水流挟沙力和糙率的横向分布，有助于将一维输沙模型扩展为复合模型，应用比较灵活。

五、冲淤面积的分配

一维输沙模型给出了各断面的总冲淤面积和河段总冲淤量，要进一步了解冲淤沿纵向和横向的变化特性，还必须对冲淤量沿河宽方向进行分配。

冲淤面积分配的合理性是保证一维模型计算精度的根本问题，然而这是一个极难解决的问题，目前还没有一个适合于各种不规则自然断面冲淤分配的通用方法，下面介绍几种常用处理办法。

1. 等量面积分配

等量面积分配方法是指按自然断面形态适当考虑分配。其特点是考虑河型、地质结构以及自然断面的形态特征，而并不着眼于来水来沙条件的变化和差异。例如对于山区性河道的窄深 V 形断面（图 7-8 (a)），河岸不易冲淤，冲淤面积可仅考虑在槽内进行堆积的分配方法。对于冲积河流的宽浅型断面，由于河岸所占的份数较少，也可仅考虑冲淤只在河槽里发生。对于这种断面，如果仅是由悬移质运动引起的河床变形，可考虑沿湿周等厚平铺的方法进行分配（图7-8(b)）。这些分配方法任意性较大，经验性强，很难把握得好。

图 7-8

2. 计算法

计算法是根据水沙条件与河床组成的某些数学关系来对冲淤面积进行分配。对某一确定的计算断面，假定变形面积高程 ΔZ，沿河宽 B 连续，则冲淤面积 ΔZ，可表示成（图7-9）

$$\Delta A_i = \int_B \Delta Z_i dY \tag{7-78}$$

按多边形拟合面积该式可写成

$$\Delta A_i = \sum_i \Delta Z_{si} \Delta Y_i \tag{7-79}$$

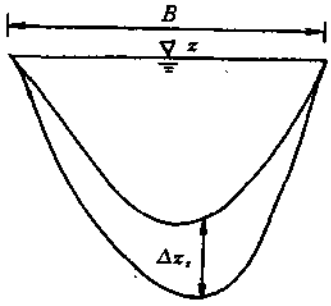


图 7-9

式中 ΔY_i 为 i 子断面的宽度，ΔZ_{si} 为该子断面的平均冲淤厚度。式(7-79)仅是一个数学上的表达式，因 ΔA_i 是已知值，未知值 ΔZ_{si} 位于作和内，所以不能直接用(7-79)进行计算，只能用于检验公式的合理性，即如果能构造出

$$\Delta Z_{si} = f_i \Delta A_i \tag{7-80}$$

f_i 为待求系数，并满足式(7-79)，这样更可用于计算冲淤分配高程。下面介绍几种构造方法。

(1)平均分配：

最简单的分配模式是考虑沿河宽(或沿湿周)平均分布的分配方法，即构造

$$\Delta Z_{si} = \frac{1}{B} \Delta A_i \tag{7-81}$$

式中(7-80)的 $f_i = \frac{1}{B}$，容易验证，对式(7-81)两边乘以 ΔY_i 并求和后，注意到 $B = \sum_i \Delta Y_i$，式(7-81)满足(7-79)，故数学上是合理的。这种分配方法的主要缺陷是不区分滩槽，且不考虑水沙条件。

(2)按面积比考虑分配：

这种方法考虑子断面之比进行分配即

$$\Delta Z_{si} = (h_i / A) \Delta A_i \tag{7-82}$$

式中 h_i 为 i 子断面平均水深，A 为全断面过流面积，容易验证式(7-82)满足(7-79)。对确定的计算断面，水深大的地方，冲淤量分配就大，反之亦然。就淤积过程而言，深的地方淤积多，浅的地方淤积少，因而缩小滩槽差，促使子断面沿河宽方向呈均匀变化。

(3)按能量比进行分配：

即考虑各子断面能量与总能量之比值

$$\Delta Z_{si} = \frac{\gamma q_i J_f}{\gamma Q J_f} \Delta A_i \tag{7-83}$$

这里 q_i 为子断面 i 的过流量，Q 为流量，J_f 为比降。它表明能量大的子断面冲淤分配量就大，反之亦然。从物理图案上看，这种方法较按面积比方法又进了一步，但对于一维泥沙模型而言，各计算断面的水流泥沙要素都是断面平均值，要按式(7-83)进行计算，首先得计算各子断面的过水量，这就需要解决流速沿河宽的分布问题。如果流速分布是均匀的，$u_i = u$，且又 $Q = uA$ 则式(7-83)完全转化为按面积比的分配方式(7-82)。

(4)按切应力大小考虑分配：

式(7-83)考虑了水流条件，但没有考虑泥沙因素。如果考虑床面泥沙条件，则可构造

$$\Delta Z_{si} = \frac{(\tau_i - \tau_{ic})}{\sum_i (\tau_i - \tau_{ic}) \Delta Y_i} \Delta A_i \tag{7-84}$$

式中 $\tau_i = r h_i J_f$ 为子断面切应力，τ_{ic} 为该子断面的泥沙起动临界切应力。前者代表水流对河床的冲刷强度，后者则为河床对水流的抗侵作用。这个方法考虑了水流泥沙条件，比较全面。因 $(\tau_i - \tau_{ic})$ 的大小反应了床面泥沙的起动强度，没有反映出起动后的泥沙不一定能起悬，所以，这个公式较适应于推移质运动引起河床变形问题。

(5)按水流含沙的饱和程度考虑：

悬移质输沙模型中，从不平衡输沙概念得知，河床变形是由水流作不平衡输沙引起的，这就可以考虑断面含沙量与挟沙力的差值比来考虑分配，即

$$\Delta Z_{si}=\frac{(S_i-S_{*i})q_i}{\sum_i(S_i-S_{*i})Q}\Delta A_i \tag{7-85}$$

式中S_i为子断面平均含沙量，S_{*i}为相应子断面的水流挟沙力，$(S-S_{*i})$反映了i子断面的水流挟沙非饱和程度。$(S_i-S_{*i})>0$，则子断面发生淤积，反之为冲刷。这个差值愈大，冲淤分配量就愈多。这对于悬移质输沙模型有明显的合理性，若在一维输沙模型中，不考虑各子断面平均含沙量的差异，在式(7-85)中取$S=S_i$，则有

$$\Delta Z_{si}=\frac{(S-S_{*i})q_i}{\sum_i(S-S_{*i})Q}\Delta A_i$$

问题的关键在于考虑子断面水流挟沙力的计算。

以上介绍的几种分配方法，不是哪一种都能普遍适用于各种河段的，应根据具体问题选择应用，甚至要联合使用这些计算公式。如对于全沙模型，同时使用式(7-84)和(7-85)考虑推移质和悬移质分配就比较合理。因此，根据具体问题结合考虑各种公式的特点来进行河床冲淤量的分配是必要的。

第六节　非均匀沙模型

本节介绍非均匀沙数学模型。从河流动力学可知，非均匀沙问题的研究还很不够，水流挟带非均匀颗粒泥沙带来的问题比起均匀沙要复杂得多，如泥沙起动，沉降和水流挟沙力等，这些物理机制和计算方法研究的不足给建立非均匀沙数学模型带来了不少困难。就建立模型的基本方程而言，不说是要直接导出非均匀沙基本微分方程式，就说选用非均匀沙辅助公式也尚有很大困难。因此，目前建立的非均匀沙数学模型采用的大多数基本方程和基本辅助公式，都只能是借鉴于前两节介绍的均匀沙公式经某种假定和适当修正而扩展出来的。从这个意义上讲，目前建立的非均匀沙模型都可以看成是前两节介绍的扩展模型。

若水流中挟带有K组粒径为$d_k(k=1,2,\cdots K)$的非均匀泥沙，如果不考虑各粒径组沙的相互作用，对每个粒径组k，不平衡输沙方程式(7-45)可推广应用到非均匀沙各组含沙量的计算

$$\begin{aligned}S_{kj+1}=&S_{*kj+1}+(S_{kj}-S_{*kj})e^{-\frac{\alpha_k\omega_k\Delta x}{q}}\\&+(S_{*kj}-S_{*kj+1})\frac{q}{\alpha_k\omega_k\Delta x}(1-e^{-\frac{\alpha_k\omega_k\Delta x}{q}})\\&k=1,2,3,\cdots,K\end{aligned} \tag{7-86}$$

其总含沙量是各粒径组的总和$S=\sum_{k=1}^{K}S_k$，根据分组含沙量的定义有

$$\begin{aligned}S_k&=P_kS\\S_{*k}&=P_{*k}S_*\end{aligned} \tag{7-87}$$

P_k为含沙量粒配，P_{*k}为挟沙力粒配。故可由式(7-86)推得非均匀全沙含沙量

$$S_{j+1}=S_{*j+1}+\sum_{k=1}^{K}(P_{kj}S_j-P_{*kj}S_{*j})e^{-\frac{\alpha_k\omega_k\Delta x}{q}}$$

$$+\sum_{k+1}^{K}(P_{*kj}S_{*j}-P_{*kj+1}S_{*j+1})\frac{q}{\alpha_k\omega_k\Delta x}(1-e^{-\frac{\alpha_k\omega_k\Delta x}{q}}) \tag{7-88}$$

式(7-86)给出了 K 个形式完全相同的表达式，和式(7-88)构成 $(K+1)$ 个方程式可用来计算 K 个分组含沙量和全沙含沙量，问题是封闭的，求得分组含沙量或全沙含沙量以后，便可由式(7-3)计算河床变形。

在计算河床变形时又有两种考虑，一种是由式(7-86)分别计算各粒径组含沙量，然后对其求和再计算河床变形。另一种是直接使用式(7-88)计算非均匀沙全沙含沙量，有了全沙含沙量就可计算河床变形。前一种方法毋需另立含沙量粒配的计算，因为既然已接纳方程(7-86)计算 S_k，那么

$$P_{kj}=\frac{S_{kj}}{\sum_{k=1}^{K}S_{kj}}$$

就已隐含在计算之中，而后一种方法则需另立方程计算含沙量粒配，韩其为模型属于这一类。但不管采用那种方法计算，都还需解决水流挟沙力及其粒配问题。以下介绍几种计算方法。

一、韩其为模型

使用式(7-88)计算总含沙量，韩其为假设悬移质水流挟沙力粒配 P_{*kj} 等于含沙量粒配，这样式(7-88)可写成

$$\begin{aligned}S_{j+1}=&S_{*j+1}+(S_j-S_{*j})\sum_{k=1}^{K}P_{kj}e^{-\frac{\alpha_k\omega_k\Delta x}{q}}\\&+S_{*j}\sum_{k=1}^{K}P_{kj}\frac{q}{\alpha_k\omega_k\Delta x}(1-e^{-\frac{\alpha_k\omega_k\Delta x}{q}})\\&-S_{*j+1}\sum_{k=1}^{K}P_{kj+1}\frac{q}{\alpha_k\omega_k\Delta x}(1-e^{-\frac{\alpha_k\omega_k\Delta x}{q}})\end{aligned} \tag{7-89}$$

这时，式(7-89)中还包含有悬移质粒配沿程变化关系，通过叠代计算求 P_{kj+1} 和 S_{j+1}。具体做法可详见文献[1,7]。这样做时，还得确定式(7-89)中的非均匀沙全沙水流挟沙能力 S_*，韩其为认为，张瑞瑾公式

$$S_*=K(\frac{U^3}{gh\omega})^m \tag{7-90}$$

既可用于均匀沙，也可用于非均匀沙，关键在于如何计算代表沉速 ω。而公式(7-90)对于 d_k 均匀沙组就是

$$S_{*(d_k)}=K(\frac{U^3}{gh\omega_k})^m \tag{7-91}$$

为了确定 ω，并由(7-90)计算 S_*，韩其为设想将单位体积挟沙水流各粒径组泥沙分别集中，并将此单位水体分成与粒径组组数相当的几个部分，每一部分水体，刚好能挟带一个粒径组的泥沙。这样，就第 k 个粒径组来说，存在如下关系：

$$S_{*k}=P_{*k}S_*=K_kS_*(d_k) \tag{7-92}$$

S_{*k} 为第 k 组非均匀沙组的挟沙力，$S_*(d_k)$ 为同组均匀沙的挟沙力，又称可能挟沙力和当量挟沙力，K_k 为水量百分数。一般 $P_{*k}\neq K_k$，注意到韩其为的假设 $P_{*k}=P_k$，上式可改为

$$K_k=S_*\frac{P_k}{S_*(d_k)} \tag{7-93}$$

对 K_k 作和得 $\sum_{k=1}^{K}K_k=1$ 故有

$$S_* = \frac{1}{\sum_{k=1}^{K} \frac{P_k}{S_*(d_k)}} \tag{7-94}$$

将(7-90)和(7-91)代入上式得

$$S_* = \frac{1}{\sum_{k=1}^{K} P_k \omega_k^m} K\left(\frac{U^3}{gh}\right) = K\left(\frac{U^3}{gh\omega}\right)^m \tag{7-95}$$

这就是说，如果要用(7-91)计算可能挟沙力和按(7-90)计算非均匀沙全沙挟沙力，必须满足下列条件

$$\omega^m = \Sigma P_k \omega_k^m \tag{7-96}$$

这样非均匀沙第 k 组挟沙力就可按式(7-92)计算。

韩其为根据实测资料分析，计算 S_* 的具体公式为

$$S_* = 0.03 \frac{U^{2.76}}{h^{0.92}\omega^{0.92}} \tag{7-97}$$

二、HEC-6模型

此模型认为分组挟沙力 S_{*k} 等于床沙粒配 P_{bk} 与可能挟沙力 $S_*(d_k)$ 的乘积，即

$$S_{*k} = P_{bk} S_*(d_k) \tag{7-98}$$

将式(7-90)和(7-91)代入上式得

$$S_{*k} = P_{bk} K\left(\frac{U^3}{gh\omega_k}\right)^m = P_{bk}\left(\frac{\omega^m}{\omega_k^m}\right) K\left(\frac{U^3}{gh\omega}\right)^m \tag{7-99}$$

注意到定义(7-87)，两者相比得挟沙力粒配为

$$P_{*k} = P_{bk}\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^m \tag{7-100}$$

对 P_{bk} 求和 $\sum_{k=1}^{k} P_{bk} = 1$，可解得

$$\omega^m = \sum_{k=1}^{K} P_{*k} \omega_k^m$$

这是采用式(7-90)计算非均匀全沙挟力时必须满足的条件。由式(7-100)可见，一般地 $\omega \neq \omega_k$，故 $P_{*k} \neq P_{bk}$；对于 $\omega_k < \omega$ 的较代表粒径为细的颗粒，$P_{*k} > P_{bk}$；反之 $P_{*k} < P_{bk}$。较细的颗粒，ω_k 小 P_{*k} 大，进而水流挟沙力大，这在定性上是合理的。

这种处理分组挟沙力 S_{*k} 的方式与韩其为的相比，从式(7-92)和(7-98)便可明了两者的差别，实质上式(7-98)中的河床组成 P_{bk} 代替了(7-92)中的水量百分数，但前者纯属臆断，尚缺乏理论依据。

这种模型可直接使用式(7-86)计算分组含沙量毋须假定 $P_{*k} = P_k$，而是直接使用式(7-100)由床沙粒配计算挟沙力粒配，整个计算过程不需要叠代，计算比较简单。

IOWA 大学开发的 SEDCOUP 模型也采用这种方法。

三、李义天方法

这种方法是在平衡输沙状态下考虑单位床面上的泥沙等量交换来确定非均匀沙挟沙力的，其特点是同时考虑了水流条件和床沙组成对挟沙力的影响。

因 $S_{*k} = P_{*k} S_*$，问题在于如何找到挟沙力粒配 P_{*k} 与床沙粒配 P_{bk} 的关系？设在近床面水流单位体积中第 k 组悬移质中的床沙质总量为 S_{*k}，当泥沙在动水中沉降时，由于水流的紊动作用，泥沙在动水中的实际沉速为 $v' - \omega_k$（v' 为水流垂向紊动速度，ω_k 为 k 粒径组泥沙的沉

速)。只有当 $v'-\omega_k<0$ 时泥沙才能下沉到床面上。假定在边壁处垂向紊动速度可近似地为正态分布,所以,在单位时间内第 k 组泥沙通过单位面积沉降到床面上的沙量为

$$g_1=-\int_{-\infty}^{\omega_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}[S_{*k0}(v'-\omega_k)e^{-\frac{v'^2}{2\sigma_v^2}}]\mathrm{d}v' \tag{7-101}$$

式中的负号为沉降方向,σ_v 为垂直紊动强度,可近似取 $\sigma_v=U_*$,U_* 为摩阻流速。

单位时间内,床面上的第 k 组沙参与水流泥沙的交换量为

$$g_2=\int_{\omega_k}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}[V_k(v'-\omega_k)e^{-\frac{v'^2}{2\sigma_v^2}}]\mathrm{d}v' \tag{7-102}$$

这里 V_k 为床面上第 k 组床沙量与悬沙交换的沙量。假定这一部分沙量全部与悬移质发生交换,在输沙平衡的条件下,应有 $g_1=g_2$,即 g_1 与 g_2 的代数和为零:

$$\int_{-\infty}^{\omega_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}[S_{*k0}(v'-\omega_k)e^{-\frac{v'^2}{2\sigma_v^2}}]\mathrm{d}v'$$

$$+\int_{\omega_k}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}[V_k(v'-\omega_k)e^{-\frac{v'^2}{2\sigma_v^2}}]\mathrm{d}v'=0 \tag{7-103}$$

对式(7-103)化简得:

$$S_{*k}=V_k(1-A_k) \tag{7-104}$$

式中

$$A_k=\frac{\omega_k}{\frac{\sigma_V}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega_k^2}{2\sigma_v^2}}+\omega_k\Phi(\frac{\omega_k}{\sigma_v})}$$

$$\Phi(\frac{\omega_k}{\sigma_v})=\int_{-\infty}^{\omega_k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}e^{-\frac{v'^2}{2\sigma_v^2}}\mathrm{d}v' \tag{7-105}$$

积分函数 $\Phi(\frac{\omega_k}{\sigma_v})$ 可通过数值积分求解。因 $V_k=P_{bk}V$,V 为床沙交换总量,P_{bk} 为第 k 组床沙粒配,故有

$$S_{*k0}=(1-A_k) \tag{7-105}$$

由定义 $S_{*0}=\sum_{k=1}^{K}S_{*k0}$,$S_{*0}$ 为床面边壁水层非均匀全沙挟沙力,故由(7-105)得

$$S_{*0}=V\sum_{k=1}^{K}P_{bk}(1-A_k)=VA \tag{7-106}$$

式中 $A=\sum_{k=1}^{K}P_{bk}(1-A_k)$,将式(7-105)除以式(7-106)得

$$\frac{S_{*k0}}{S_{*0}}=P_{bk}(\frac{1-A_k}{A}) \tag{7-107}$$

进而求得河底挟沙力粒配 P_{*k0} 与床沙粒配的关系为

$$P_{*k0}=P_{bk}(\frac{1-A_k}{A}) \tag{7-108}$$

在一维模型中关心的则是断面平均挟沙力粒配 P_{*k}。引入平衡条件下的悬移质含沙量分布公式(Kalinske 公式)

$$\frac{S_k}{S_{*k0}}=e^{-\frac{6\omega_k}{k\omega_*}\frac{(Y-a)}{h}} \tag{7-109}$$

为便于计算取 $a=0$,由公式(7-109)按体积法求平衡条件下的垂线平均含沙量 S_{*k}

$$\frac{S_{*k}}{S_{*k0}}=\frac{\kappa u_*}{6\omega_k}(1-e^{\frac{6\omega_k}{\kappa u_*}}) \tag{7-110}$$

对式(7-110)求和得

$$S_*=\sum_{k=1}^{K}S_{*k0}\frac{\kappa u_*}{6\omega_k}(1-e^{\frac{-6\omega_k}{\kappa u_*}})$$

$$=S_{*0}\sum_{k=1}^{K}P_{*k0}\frac{\kappa u_*}{6\omega_k}(1-e^{-\frac{6\omega_k}{\kappa u_*}}) \tag{7-111}$$

式(7-110)和(7-111)相比得

$$\frac{S_{*k}}{S_*}=\frac{S_{*k0}}{S_{*0}}\frac{\frac{\kappa u_*}{6\omega_k}(1-e^{\frac{-6\omega_k}{\kappa u_*}})}{\sum_{k=1}^{K}P_{*k0}\frac{\kappa u_*}{6\omega_k}(1-e^{\frac{-6\omega_k}{\kappa u_*}})} \tag{7-112}$$

将式(7-108)代入上式，并由定义 $P_{*k}=S_{*k}/S_*$ 得挟沙力粒配为

$$P_{*k}=P_{bk}\frac{(\frac{1-A_k}{\omega_k})(1-e^{-\frac{6\omega_k}{\kappa u_*}})}{\sum_{k=1}^{K}P_{bk}(\frac{1-A_k}{\omega_k})(1-e^{\frac{6\omega_k}{\kappa u_*}})} \tag{7-113}$$

即求得挟沙力粒配 P_{*k} 与床沙粒配 P_{bk} 的关系式，在已知床沙粒配的条件下，可由式(7-113)计算挟沙力粒配，进而可求得非均匀沙分组挟沙力 $S_{*k}=P_{*k}S_*$。

上式用长江中游部分河段和黄河花园口以及丹江口水库实测资料进行验证，结果见图7-10。这种模型从水流条件和床沙组成角度推求挟沙力粒配，考虑较全面。

四、CARICHAR 模型[10]

在 CARICHAR 模型中，除考虑水流条件和床沙组成对挟沙力粒配的影响外，还考虑了推移质运动的影响。

按韩其为水量分配的假设有

$$S_{*k}=P_{*k}S_*=K_kS_*(d_k) \tag{7-114}$$

若公式(7-90)和(7-91)既适应于非均匀沙也适应于 d_k 均匀沙组，则必须满足

$$\omega^m=\sum_{k=1}^{K}P_{*k}\omega_k^m \tag{7-115}$$

此式与(7-96)式形上相同，差别在于 $P_{*k}\neq P_k$，用式(7-115)计算时，问题在于计算挟沙力粒配 P_{*k}。

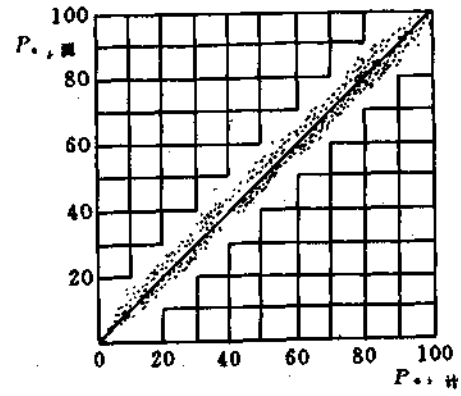


图 7-10

1. 泥沙运动状态特性

从宏观一点看，河道水流中运动着的泥沙可以分为三种：床沙、推移质和悬移质，这三种泥沙随时随地都在相互交换，任何两种泥沙或其整体作不等量交换都将引起河床变形。由于它的重力作用及其运动所处的区域的差异，其发生交换的性质和状态是不同的，因此各种泥沙对河床的作用程度也不相同。

从河流动力学角度可知，区分这三种泥沙是由临界条件来判别的：

起动条件：可由张瑾公式给出，即

$$u_c = \left(\frac{h}{d}\right)^m\left[17.6\frac{\rho_s-\rho}{\rho}d + 6.05\times10^{-7}\left(\frac{10+h}{d^{0.72}}\right)\right]^{1/2} \tag{7-116}$$

脚标 c 表示起动临界条件。其余符号同前。

起悬条件：起悬条件可用

$$\frac{\omega_s}{u_{*s}} = 1 \tag{7-117}$$

表示。式中 u_{*s} 为起悬临界条件下的摩阻流速，上面这个条件相当于取悬浮指标 $Z = 2.5$。

自动悬浮条件：由 Bagnold 自动悬浮理论给出

$$\frac{\omega_s}{u_*J_f} = 1 \tag{7-118}$$

脚标 ω 表示自动悬浮条件。为了使三个临界条件能在同一的坐标上表达，使用两个无量纲参数（沙玉清，1956；Bonnefille，1963；Van Rijin，1984）

$$\frac{u_{*c}}{\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)^{1/3}g^{1/3}v^{1/3}}$$

和

$$D_* = \frac{\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)^{1/3}g^{1/3}d}{v^{2/3}}$$

并使用阻力公式 $u = A\left(\frac{h}{d}\right)^{1/6}\sqrt{hJ_f}$，$A$ 为常数，取值19～26。可分别将(7-116)、(7-117)和(7-118)化成

起动条件：

$$\frac{u_{*c}}{\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)^{1/3}g^{1/3}v^{1/3}} = \frac{\sqrt{g}}{A}\frac{d}{D_*}\left[17.6\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)d + 6.05\times10^{-7}\left(\frac{10+h}{d^{0.72}}\right)\right]^{1/2} \tag{7-119}$$

起悬条件：

$$\frac{u_{*s}}{\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)^{1/3}g^{1/3}v^{1/3}} = \frac{\omega_s d}{D_*} \tag{7-120}$$

自动悬浮条件：

$$\frac{u_{*\omega}}{\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)^{1/3}g^{1/3}v^{1/3}} = \frac{d}{D_*}\left[\frac{g^{2/3}h\omega_s}{A\left(\frac{h}{d}\right)^m}\right]v^{1/3} \tag{7-121}$$

取 $A = 19$，$h = 100\text{cm}$，$m = 1/6$，用张瑞瑾公式计算泥沙沉速 ω_s，可将式(7-119)、(7-120)和(7-121)绘于图7-11。

图7-11可分成6个区域，各区域的泥沙运动特征可综述为：

Ⅰ——悬移质中的冲泻质，满足条件 $u_* > u_{*\omega}$。式中 u_* 为水流摩阻流速，这部分泥沙主要由水流从上游带来，一旦水流条件发生变化，它将转变为床沙质。

Ⅱ——悬移质中的床沙质，满足条件 $u_{*\omega} > u_* > u_{*s}$，这个区域中的泥沙从上游带入，水流条件由大变小时，它将有两种可能出处，一是转变为推移质，二是转变为床沙。

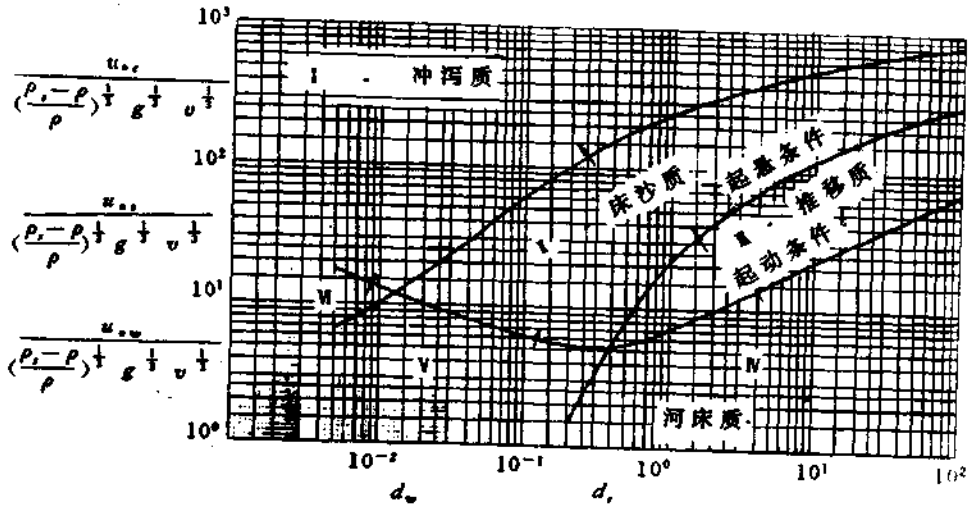


图 7-11　泥沙输移特征图

Ⅱ——推移质，满足条件 $u_{*1} > u_* > u_{*c}$，从上游带入的这一部分泥沙，当水流条件变弱时，将转变为床沙，而当水流条件加强时，又将变为悬沙。

Ⅳ——床沙，满足条件 $u_* < u_{*c}$，一旦本河段水流条件增强，它将起动后转为推移质。如果本河段的水流条件满足 $u_* > u_{*1} > u_{*c}$，这部分床沙进入推移状态后又将变为悬移质。

Ⅴ——床沙，满足条件 $u_* < u_{*c}$ 这部分床沙，由于其起悬临界条件比起动条件为小 $u_{*1} < u_{*c}$，故起动后不转为推移质而直接变为悬移质。

Ⅵ——床沙，满足条件 $u_* < u_{*c}$，由于这部分床沙的自动悬浮条件既小于起悬条件又小于起动条件，因此，这部分床沙被冲起后立即变为冲泻质被带入下一河段，在本河段冲起的这部分床沙在短时间内不可能再回到本河段内。

由图7-11可以观察到：

(1)粗颗粒的泥沙难于起动，也难于悬浮；而对于极细颗粒的泥沙，难于起动，但易于悬浮。

(2)床沙中的泥沙，因粒径的大小不等，重力作用不同，其起动和悬浮的条件是不同的。床沙中存在一个临界粒径 d_t，对大于这个粒径的较粗颗粒，起动后将进入推移质运动，而小于这个粒径的较细颗粒，由于起悬条件小于起动条件，所以，起动后即转为悬移质，这部分泥沙不可能处于推移质运动状态。这个临界粒径的条件是

$$\omega_t = u_{*c}$$

即可通过求解下列方程(张瑞瑾公式)得到临界粒径

$$\left[\left(13.95\frac{v}{d_t}\right)^2 + 1.09\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)gd_t\right]^{1/2} - 13.95\frac{v}{d_t}$$

$$= \frac{\sqrt{g}}{A}\left[17.6\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)d_t + 6.05\times10^{-7}\left(\frac{10+h}{d_t^{0.72}}\right)\right]^{1/2} \tag{7-122}$$

(3)由于 d_t 的存在，对于 $d < d_t$ 的床沙，在一维模型的河床变形计算中，就不必计入推移质输沙率计算范围之内，而只能考虑为悬移质；对于 $d > d_t$ 的床沙，当 $u_{*1} > u_* > u_{*c}$ 时，只能计算推移质。

(4)从泥沙交换的角度讲，由于水流条件随时随地变化，悬移质、推移质和床沙三者之间将随时随地发生交换。

2. 泥沙状态转移和交换

从上节的分析可以看出，水流条件的改变将使悬移质转变为推移质和床沙，推移质将变为悬移质和床沙，而床沙也将变为推移质或悬移质，三者之间的相互转变形式上表现为运动状态的改变，而实质上则表现为泥沙的交换。对于某一河段和确定的水流条件，泥沙从一种状态转移到另一种状态是有条件的，称转移条件，在满足一定的水流条件时，泥沙才有可以发生转移和交换。

范家晔和黄永键[20]对这种泥沙的转移和交换确定了它们之间的转移条件和概率(图7-12)，即

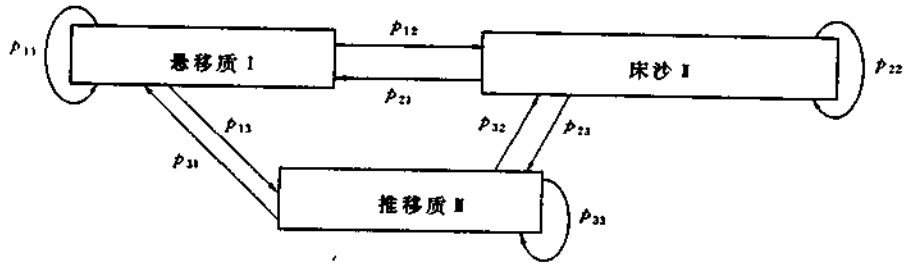


图 7-12

$$P_{ij}=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{bmatrix} \qquad i,j=1,2,3 \tag{7-123}$$

且满足

$$\sum_{j=1}^{3}P_{ij}=1 \qquad i=1,2,3 \tag{7-124}$$

式中 P_{ij} 为转移概率，例如 P_{12} 表示单颗粒泥沙从悬移状态转移到床沙的概率。其状态概率 P_j 可通过求下列线性方程组得到

$$P_j=\sum_{i=1}P_iP_{ij} \tag{7-125}$$

且满足

$$\sum_{j=1}^{3}P_j=1$$

3. 挟沙力粒配与床沙粒配的关系

设 S_{*k_0} 为床面层悬移质中床沙质第 k 组沙的浓度，单位时间内通过单位面积的泥沙量为 $S_{*k_0}\omega_k$，这部分泥沙将与床沙交换的沙量为 $S_{*k_0}\omega_kP_{2k}$；在此同时，设床沙中参加交换的总体积为 V，若第 k 组沙所占的百分数为 P_{bk}，第 k 组沙参与悬移质交换的量为 $(1-P_s)VP_{bk}P_{1k}$，P_s 为河床孔隙率。在输沙平衡条件下，这两部分的泥沙交换量应相等，即

$$\omega_{sk}S_{*k_0}P_{2k}=P_{bk}P_{1k}(1-P_s)V \tag{7-126}$$

式中 P_{1k} 和 P_{2k} 分别为 k 粒径组沙由床沙转变为悬移质和悬移质转变为床沙的状态概率。由(7-126)得

$$S_{*ko} = (1 - P_*)V\left(\frac{P_{bk}P_{1k}}{\omega_k P_{2k}}\right) \tag{7-127}$$

对 k 求和得

$$S_{**} = \sum_{k=1}^{K} S_{*ko}$$

$$S_{**} = (1 - P_*)V\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{P_{bk}P_{1k}}{\omega_k P_{2k}}\right) \tag{7-128}$$

设河底含沙量与断面平均含沙量的关系为 $S_{*ko} = \alpha_k S_{*k}$，$S_{**} = \alpha_c S_*$，并注意到 $P_{*k} = S_{*k}/S_*$，由式(7-127)和(7-128)相比得

$$P_{*k} = \frac{\alpha_c\left(\frac{P_{bk}P_{1k}}{\omega_k P_{2k}}\right)}{\alpha_k\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{P_{bk}P_{1k}}{\omega_k P_{2k}}\right)} \tag{7-129}$$

式(7-129)中的系数 α_c 可由 $\sum_{k=1}^{K} P_{*k} = 1$ 求得

$$\alpha_c = \frac{\sum_{k=1}\left(\frac{P_{bk}P_{1k}}{\omega_k P_{2k}}\right)}{\sum_{k=1(}\left(\frac{P_{bk}P_{1k}}{\alpha_k\omega_k P_{2k}}\right)} \tag{7-130}$$

这样，有了床沙粒配 P_{bk}，便可由式(7-129)和(7-130)计算挟沙力粒配。如果式中的状态概率相近 $P_{1k} = P_{2k}$ 和 $\alpha_{ck} \approx \alpha_c$，上式可化简为

$$P_{*k} = \frac{\left(\frac{P_{bk}}{\omega_k}\right)^r}{\sum_k\left(\frac{P_{bk}}{\omega_k}\right)^r} \tag{7-131}$$

r 为考虑略去状态概率影响引进的校正系数。模型应用于水库淤积计算表明 $r = 0.9 \sim 1.0$。又如果悬移质中的床沙粒配与悬沙粒配相等，则可进一步化成：

$$P_{*k} = \frac{\left(\frac{P_k}{\omega_k}\right)^r}{\sum_k\left(\frac{P_k}{\omega_k}\right)^r} \tag{7-132}$$

这个计算式与窦国仁[21]建议的完全一样。由此可见，只有对于均匀沙，挟沙力粒配才会与床沙和悬沙粒配相近，否则是不同的。

五、河床变形计算

非均匀沙输沙模型计算河床变形一般采用两种办法：一种是先求非均匀沙全沙含沙量后，按式(7-3)求河床总变形；另一种方法是计算分组含沙量 S_k，由

$$r'\frac{\partial A_{sk}}{\partial t} + \frac{\partial QS_k}{\partial x} = 0 \tag{7-133}$$

计算各组沙引起的河床变形 A_{sk}。这两种方法的计算结果是雷同的。不难验证，对式(7-133)求和，注意到 $S = \sum_k S_k$ 和 $A_s = \sum_k A_{sk}$；式(7-133)即为(7-3)。

但是，在不平衡输沙模型中如果采用式(7-39)计算变形，就应注意两种方法计算的相容性。在已求得全沙含沙量 S 时，便可由式(7-39)计算变形面积，而在已求得分组含沙量 S_k 时，

形式上可由

$$\gamma' \frac{\partial A_{sk}}{\partial t} = \alpha_k \omega_k B(S_k - S_{*k}) \tag{7-134}$$

计算分组沙的河床变形 A_{sk}，要使两者相一致，对式(7-134)求和得

$$\gamma' \frac{\partial A_s}{\partial t} = B\Sigma \alpha_k \omega_k (P_k S - S_* P_{*k}) \tag{7-135}$$

若按韩其为的假定取 $P_k = P_{*k}$，两者要一致的条件为

$$\alpha\omega = \Sigma P_k \alpha_k \omega_k \tag{7-136}$$

才能保证由 S 和 S_k 计算的河床变形面积相同。式中 α 为非均匀沙综合恢复饱和系数，α_k 为 k 粒径组沙恢复饱和系数。当 α_k 给定时，α 按(7-136)计算。

若按 HEC-6模型，因

$$P_{*k} = P_{bk}(\frac{\omega}{\omega_k})^m \tag{7-137}$$

故其相容条件为

$$\Sigma \alpha_k \omega_k P_k = a\omega \tag{7-138}$$

和

$$\Sigma \alpha_k \omega_k P_{bk}(\frac{\omega}{\omega_k})^m = a\omega \tag{7-139}$$

显然这两个条件是矛盾的，因为要使这两个条件相容，必须

$$P_k = P_{bk}(\frac{\omega}{\omega_k})^m$$

这又与式(7-137)相矛盾。因此，在这种情况下，同一模型中不宜同时采用式(7-39)和(7-134)计算河床变形，以避免泥沙计算出现不连续。

第七节　混合层概念

在上节介绍的非均沙模型中，只有当已知床沙组成时才能计算水流挟沙力，进而计算河床变形。本节介绍使用混合层模式模拟床沙组成的方法。

一、冲淤现象的描述

床面变形是由于水流挟带的泥沙与床沙作不等量交换所造成的，对于由非均匀颗粒组成的河床，泥沙颗粒的可动性与颗粒大小密切相关，细颗粒比粗颗粒易于起动，而水流中的粗颗粒比细颗粒易于沉降到床面上，这是造成床面粗细化的根本原因。

河床床面泥沙粗细化过程与原河段前后不同的水流条件变化休戚相关。例如，在水库库区内，由于水深沿流程增大，水面坡度变缓，流速减小，水流挟沙力显著下降，泥沙大量落淤，床面层主要由上游水流带入的泥沙落淤所组成。一般说，上游带入的粗颗粒泥沙主要落淤在水库末端的变动回水区段，而细颗粒则落淤到库区内，因而，整个库区内床面表层的床沙组成就是淤积物的组成，床面泥沙表现为沿流程细化。而在坝下游，由于水库的调节作用，出库水沙条件有较大的改变，出库水量大沙量少，挟沙力大而使下游河床发生冲刷。初始冲刷时，细颗粒被冲走，未被冲动的粗颗粒留下，床面泥沙愈来愈粗，表现为粗化现象，随着冲刷时间的增加，床面粗颗粒就越来越多，加大了河床的抗冲能力，使得原始河床中的细颗粒因受表面粗颗粒的隐蔽而不易被冲刷。一旦床面不动颗粒足够多以致于使得河床表面完全被粗颗粒覆盖时，就形成了

保护层，此时保护层以下的原始河床中的细颗粒就完全受到保护而不会再被冲走，河床也就不再受水流侵蚀而下切，冲刷也就相应停止。

坝下游河床冲刷表现的床面粗化和保护层在室内试验和天然河流中都经常观察到。Harson(1950)，Gessler(1965)，Little 和 Mayer(1972)和 Klassen 在水槽进行冲刷试验时都观测到由不动颗粒成斜状堆积而成的保护层，保护层的厚度大约等于床面不动最大颗粒直径的1.2倍(图7-13)，Karim 和 Kennedy 在美国 Missouri 河坝下游冲刷进行实地考察和挖坑取样时也观察到保护层(图7-14)，保护层内的颗粒组成表现得极为均匀。

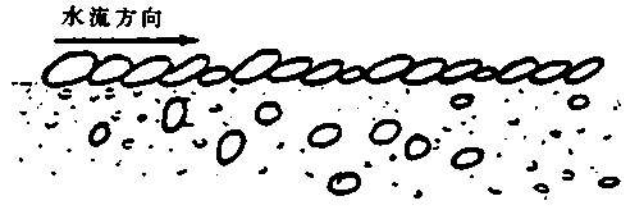


图 7-13

水流侵蚀河床受阻要区别动态保护层和静态保护层两种概念。动态保护层是河床可冲刷，床面逐渐粗化，经一个过程后由不动粗颗粒泥沙形成的保护层。静态保护层是河床本身不可冲刷，如坝下游用于消能的海漫，山区河道的基岩河床都属于静态保护层。动态保护层是随水流不同而变化的，并有一个形成的过程，在一个流量级下形成的保护层，在另一个流量级下，当水流速度大于保护层颗粒的起动流速，旧的保护层被摧毁而形成新的保护层。静态保护层则不然。

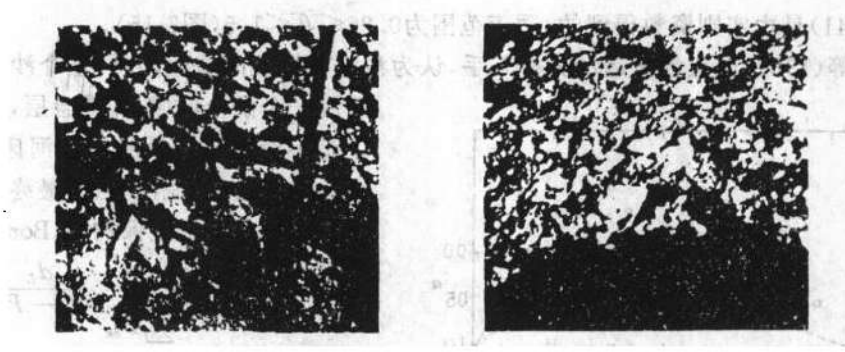


图 7-14

床面泥沙粗细化的一个显著特点是改变水流阻力。在细化过程中，床面泥沙变细，阻力系数变小，水流速度变大，挟沙力也随之变大，最终使得淤积变缓；河床粗化时，床面的泥少颗粒较初始床面的为粗，阻力加大，使得水流速度和挟沙力变小，减慢水流的下侵作用。

二、混合层模式

引起河床冲刷变形是水流挟带的泥沙与床沙作不等量交换所致，这种交换发生在床面层上，水流挟带的粗颗粒落淤到床面上与床沙相互参混形成新的床面层；同样，来自原始河床的细颗粒泥沙被水流冲走也使床面层泥沙的组成发生变化。这样的床面层概化为混合层。在混合层内，河床细颗粒的冲刷和水流中大颗粒的落淤都会使混合层内颗粒组成发生变化。

混合层上边界为床面。水流挟带的泥沙与混合层的颗粒在这里发生交换，河床变形也在这里发生。混合层下边界为不受水流扰动的原始的河床，这个界面在冲刷过程中逐渐下切原始河床来获得泥沙的补给，上边界到下边界的距离为混合层厚度。应该指出，这样概化的混合层厚

度仅是数值模拟中的必要手段，还缺乏明确的物理定义，这是因为不受水流扰动的原始河床与床面混合层很难给出一个明确的界限。

从理论上严格定义混合层厚度和公式化目前还很困难，较多的则是根据床面表层泥沙运动情况和河床形态来概化这一厚度。Karim 和 Kennedy 认为冲积河流中的沙波运动是混合层概念的典型实例。沙波迎水面冲起的泥沙，较粗颗粒相继淤积在沙波背水面的波谷里，随着沙坡的向前推进，原来被埋没在波谷里的粗颗粒又将暴露在下一个沙波的迎水面上，再次被冲起。整个过程反映出在床面沙波层内的泥沙混合，不难看出，即使输沙平衡，混合层的厚度也不限于床面一薄层，而是达到沙波运动所"犁"过的厚度，即沙波波高的1/2。至于冲刷深度则是受制于来水来沙及床沙组成的情况，即可能小于波高的1/2，也可能大于波高的1/2。由此，建议混合层厚度取波高的一半，即

$$E_m = \frac{1}{2}H_d \tag{7-140}$$

式中 H_d 为波高，可用 Allen(1978)公式计算，即

$$\frac{H_d}{H} = b_0 + b_1\frac{\theta}{3} + b_2(\frac{\theta}{3})^2 + b_3(\frac{\theta}{3})^3 + b_4(\frac{\theta}{3})^4 \tag{7-141}$$

式中 H 为平均水深，$\theta = \frac{\tau}{(\gamma_s - \gamma)d_{50}}$ 为无量纲切应力，公式中各系数为

$b_0 = 0.079865$　　$b_3 = 70.9001$

$b_1 = 2.23897$　　$b_4 = -88.3283$

$b_2 = -18.1264$

计算式(7-141)是由实测资料得到的，适应范围为$0.25 \leqslant \theta \leqslant 1.5$(图7-15)。

Borah 等(1982)也从沙波运动分析入手，认为沙波在缓缓向前运动时，整个沙波本身可以看成一个混合区域，即混合层，在混合层以下是不受水流波及的原始河床。随着时间增长，沙波内的泥沙分选，最终会使粗颗粒位于沙波底部形成保护层。Borah 建议用

$$E_m = \frac{1}{\sum_{k=L}^{K} P_{bk}} \frac{d_L}{(1 - P_s)} \tag{7-142}$$

计算混合层的厚度。式中 d_L 为床面不动颗粒最小粒径，L 为相应的颗粒组序数，P_s 为孔隙率。这里 E_m 实际上是形成保护层所必需的下切深度。

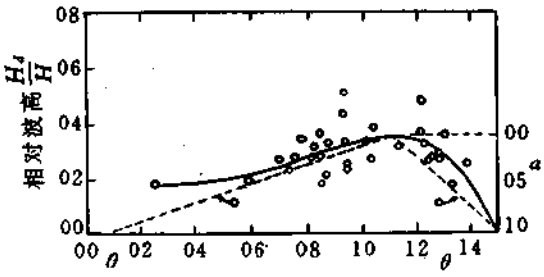


图 7-15

当水流强度不大时，床沙中参予运动的泥沙就少，$\sum_{k=L}^{K} P_{bk}$ 就大，d_L 就小，混合层厚度就小；当床面出现保护层时，$\sum_{k=L}^{K} P_{bk} = 1$，则 $E_m = \frac{1}{1 - P_s}d_L$，若取 $P_s = 0.5$，有 $E_m = 2d_L$，亦即当床面层全由不参予运动的粗沙组成时，混合层厚度取 $2d_L$ 就足够了。

在河床发生淤积时，泥沙落淤到床面与原床面的泥沙混合构成新的混合层，此时混合层厚度的增加就是淤积物的厚度，在这种情况下，混合层厚度可用下式计算

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = \frac{\partial Z_s}{\partial t} \tag{7-143}$$

三、混合层组成方程式

取混合层长为 Δx 的体积元(图7-16)，因混合层厚度随时间沿流程而变，从时刻 t_1 到 t_2 经时间隔 Δt，在假定混合层内非均匀沙充分混合并忽略各粒径组间的相互作用，当混合层下边界下侵原始河床时，由泥沙连续条件得

$$
\begin{aligned}
&\{(E_m+\frac{\partial E_m}{\partial t}\Delta t)(P_{bk}+\frac{\partial P_{bk}}{\partial t}\Delta t)+[(E_m+\frac{\partial E_m}{\partial t}\Delta t)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x}(E_m+\frac{\partial E_m}{\partial t}\Delta t)]\times[(P_{bk}+\frac{\partial P_{bk}}{\partial t}\Delta t)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x}(P_{bk}+\frac{\partial P_{bk}}{\partial t}\Delta t)]\}\frac{\Delta x}{2}(1-P_s)\\
&=[E_mP_{bk}+(E_m+\frac{\partial E_m}{\partial x}\Delta x)(P_{bk}+\frac{\partial P_{bk}}{\partial x}\Delta x)]\frac{\Delta x}{2}(1-P_s)\\
&\quad+[g_k-(g_k+\frac{\partial g_k}{\partial x}\Delta x)]\Delta t-S_k\Delta x\Delta t\\
&\quad+\frac{(1-P_s)\Delta x}{2}\{(Z_s-E_m)-[(Z_s+\frac{\partial Z_s}{\partial t}\Delta t)\\
&\quad-(E_m+\frac{\partial E_m}{\partial t}\Delta t)]\}P_{bko}+\frac{(1-P_s)\Delta x}{2}\{[(Z_s+\frac{\partial Z_s}{\partial x}\Delta x)\\
&\quad-(E_m+\frac{\partial E_m}{\partial x}\Delta x)]-\{[(Z_s+\frac{\partial Z_s}{\partial t}\Delta t)+\frac{\partial}{\partial x}(Z_s+\frac{\partial Z_s}{\partial t}\Delta t)\Delta x]\\
&\quad-[(E_m+\frac{\partial E_m}{\partial t}\Delta t)+\frac{\partial}{\partial x}(E_m+\frac{\partial E_m}{\partial t}\Delta t)\Delta x]\}\}(P_{bko}+\frac{\partial P_{bko}}{\partial x}\Delta x)
\end{aligned}
\tag{7-144}
$$

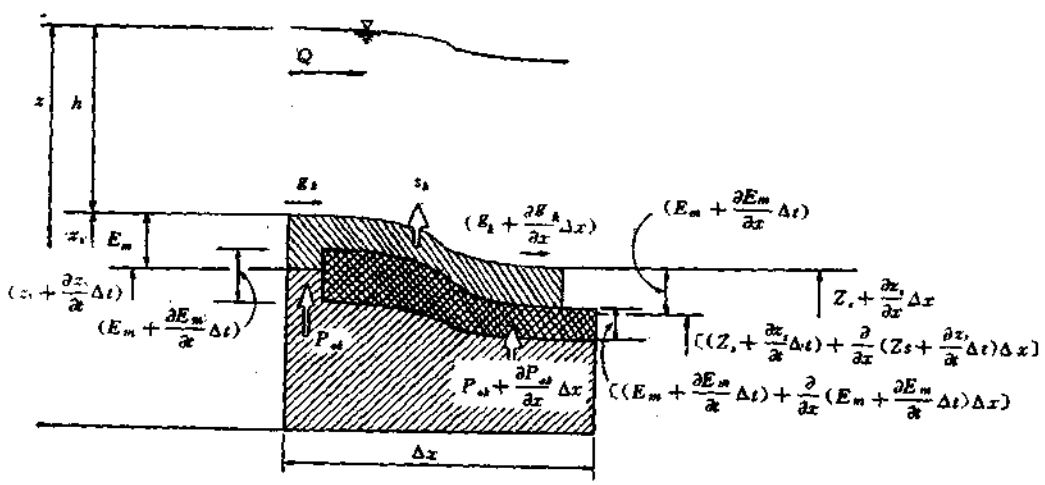


图 7-16

忽略 Δt^2 和 Δx^2 项以及关于 Δx 和 Δt 的二次交叉导数项上式得

$$
(1-P_s)\frac{\partial E_mP_{bk}}{\partial t}+\frac{\partial g_k}{\partial x}+S_k+P_{bko}(1-P_s)(\frac{\partial Z_s}{\partial t}-\frac{\partial E_m}{\partial t})=0 \tag{7-145}
$$

式中 S_k 为床沙与悬沙的交换净量，g_k 为推移质单宽输沙率，对于混合层下边界不下切原始河床的情形，同样可导出上式，只是式中 P_{bko} 换成 P_{bk}，毋需考虑河床的补给，为了使两种情况同一写出，引入标记 $\in_1$，即

$$
(1-P_s)\frac{\partial E_mP_{bk}}{\partial t}+\frac{\partial g_k}{\partial x}+S_k+(1-P_s)[\in_1P_{bk}
$$

$$+(1-\in_1)P_{bko}](\frac{\partial Z_s}{\partial t}-\frac{\partial E_m}{\partial t})=0 \tag{7-146}$$

当混合层下边界下切原始河床时取$\in_1=0$，否则取$\in_1=1$。

对于淤积情形，因混合层厚度的增加等于淤积物的淤积厚度，则式(7-146)中的第四项为零有

$$(1-P_s)\frac{\partial E_m P_{bk}}{\partial t}+\frac{\partial g_k}{\partial x}+S_k=0 \tag{7-147}$$

对于K组沙，可写出K个形如式(7-147)的方程式，可解出K个河床粒配P_{bk}。对于粒配组成的恒定问题，即$\frac{\partial P_{bk}}{\partial t}=0$，并忽略$S_k$，式(7-147)可化简成

$$(1-P_s)P_{bk}\frac{\partial E_m}{\partial t}+\frac{\partial g_k}{\partial x}=0 \tag{7-148}$$

注意到式(7-143)和河床变形方程有

$$(1-P_s)\frac{\partial Z_{sk}}{\partial t}+\frac{\partial g_k}{\partial x}=0$$

式(7-148)为

$$P_{bk}=\frac{\partial Z_{sk}}{\partial t}/\frac{\partial Z_s}{\partial t} \tag{7-149}$$

按有限差分式解(7-149)得

$$P_{bk}=\frac{\Delta Z_k}{\Delta Z_s} \tag{7-150}$$

即河床组成等于淤积物组成，这是目前恒定挟沙水流模型中常用的计算式。

四、淤积层记忆

所谓淤积层记忆，是指数学模型在模拟淤积过程中用来记忆淤积物组成和淤积体积而设置的记忆数据库。对任一确定的计算断面，模型中设置有足够的记忆空间(淤积层的全体)来反映淤积物的淤积过程。淤积层在模型进行淤积模拟开始形成，直到河床淤积达到平衡为止，它记载着全部淤积过程的历史，一旦河床由淤转冲时，淤积层将给冲刷过程模拟提供必要的信息。

如在水库淤积和河床变形模拟中，河床将从原始床面开始抬高，对应每一个计算时段Δt，就有一系列这样的对应信息待记忆，如图7-17所示。因此，库区内淤积层记忆下来的全部信讯对各个计算断面都是不同的。

淤积层厚E_m视模拟者而定，如果需要对淤积过程了解得更细致，淤积层厚度可取得小一些，甚至可对每一个淤积厚度ΔZ_s设置一个淤积层；如果对淤积过程了解得粗一些，淤积层厚度可取得大一些，同时为减轻计算机的内存，可将几个淤积厚度记忆在一个淤积层里，这样，淤积层的粒配就是几个淤积厚度中的粒配平均值，它代表几个淤积厚的淤积物组成。

淤积层为将来河床由淤转冲时而设置的。例如上面谈到的水库淤积，当水库淤积到一定程度(如防碍排沙或发电等)就要拉沙，将前期淤积下来的泥沙排出库外，此时需要进行冲刷模拟，记忆前期淤积物过程的淤积层就会为冲刷过程模拟提供必要的信息，如粒配、淤积物等。

如果水库变形仅着眼于淤积过程，没有冲刷问题，同时也不需了解淤积的具体细节，淤积层就毋需设置。

淤积层不仅仅用于记忆淤积过程，还可用于记忆原始河床不同深度的粒配情况，为冲刷过程中床面粗化和保护层模拟提供信息，所不同的是，在冲刷过程模拟中，淤积层记忆的则是原

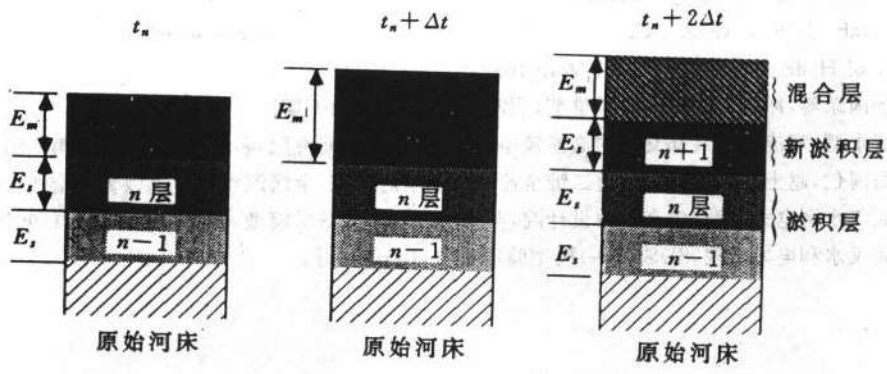


图 7-17

始河床的自然情况。

参 考 文 献

[1] 谢鉴衡主编，河流模拟，水利电力出版社，1988。

[2] 武汉水利电力学院、中南勘测设计院，向家坝工程泥沙数学模型，研究报告，1990年12月。

[3] Cunge, J. A., Holly, Jr. F. M. and Verwey. A., Pratical aspects of computational river hydraulics, Pitman, London, 1980.

[4] Cunge, J. A. and Perdreau, N., Mobile bed fluvial mathematical models, La Houille Blanche, 1973.

[5] de Vries, M., Considerations about non-steady bed-load transport in open channels, Eleventh Cougress of the International Association for Hydraulic Research, Lenind, USSR, 1965.

[6] Vreugdenhil, C, B. and de Vries, M., Computation on non-steady bed-load transport by a pseudo-viscosity method, Delft Hydraulica Laborathory Pub. No. 45. Delft, 1987.

[7] 韩其为，悬移质不平衡输沙的初步研究，河流泥沙国际学术讨论会论文集，北京，1980。

[8] 李义天，河道平面二维河床变形计算初步研究，泥沙研究，1988。

[9] 杨国录，一维非恒定泥沙模型定解问题研究，武汉水利电力学院研究报告，1989。

[10] Yang Guolu (杨国录), Modèle de transport Complèt en rivière avec granulométrie étendue, Thèse de L'Université JOSEPH FOURIER Greuoble I, 1989.

[11] 丁君松，悬移质含沙量沿垂线分布的研究及其应用，武汉水利电院学报，1989年。

[12] Karim, F. and Kennedy, J. F., Missouri river computer-based predictors for sediment discharges and friction factors of alluvial streams, IOWA University, No, 242, 1983.

[13] Holly, F. M. and Rahuel J-L., New numerical/Physical framework for mobile-bed modelling, Part I: J. of Hydr. Res., Vol. 28, 1990.

[14] Belleudy, P., Rahuel, J, L, and Yang Guolu (杨国录), CARI CHAR－mobile bed modelling of graded sediments in unsteady Flow, AIRH Congress, 1987.

[15] Belleudy, ph. and Yang Guolu (杨国录), CARICHAR-mibile bed modeling with graded sediments, National of Conference on Hydraulic Engineering, Williamsburg, 1987.

[16] Gessler, J., The beginning of bed load movement of mixtures investigated as natural armoring in channels. Keck Laboratory of hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, California, Translation T. 5 1968.

[17] Little, W.C. and Mayer, P. G., The role of sediments gradation on channel armoring, School of Vivil Engineering, Georgia Institute of Technology. USA. 1972.

[18] Borah. J. P., Alonso, C. V. and Prasad, S. N., Routing geaded sediment in streams, Formulations, J. of Hydr. Division, ASCE, Vol. 108, No, 12, 1982.

[19] 杨国录等,冲积河流一维数学模型,泥沙研究,1989年第四期。

[20] 黄永健,河流泥沙底部交换的简易模型,水利水电科学研究院,科学研究论文集,第八集,1983。

[21] 窦国仁,赵士清,黄亦芬,河道二维全沙数学模型的研究,全国泥沙数学模型研究论文会集,1987。

[22] 武汉水利电力学院,中南勘测设计院,向家坝工程泥沙数学模型,(第一、二部分),1990年12月。

[23] 武汉水利电力学院,SUSBED-1模型验证报告,1991年9月。

第八章　非恒定挟沙水流模型

本章着重从理论上，结合实际运用，介绍非恒定挟沙水流泥沙模型的基本理论和建模过程。

第一节　推移质模型

一、贡日(J. A. Cunge)模型(1973)

1. 基本方程

水流连续方程　$$b\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{8-1}$$

运动方程　$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g\frac{\partial Z_s}{\partial x}+D^2u|u|=0 \tag{8-2}$$

泥沙连续方程式　$$b\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial x}=0 \tag{8-3}$$

推移质输沙率公式　$$G=G(u,h) \tag{8-4}$$

$D=\frac{\sqrt{g}A}{K}$，K 流量系数，其余符号与上几章相同。在模型中，过流断面概化成如图 8-1，各水力要素定义为：

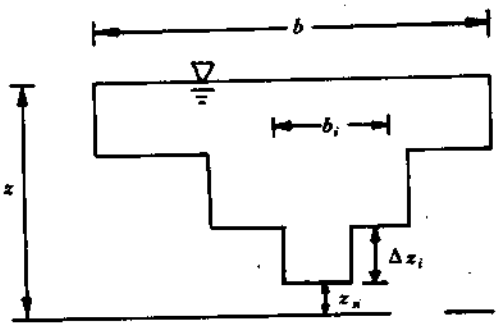


图 8-1

河宽：　$b=\sum_i b_i$

过水面积　$A=\sum_i b_i h_i=\Sigma b_i(Z-Z_s-\Delta Z_n)$

流量系数：　$K=\sum_i k_{STRi}b_i(Z-Z_s-\Delta Z_n)^{5/3}$

总推移质输沙率：　$G=\sum_i b_i g_i$

式中 k_{STRi} 为第 i 子断面的谢才系数。

2. 边界条件提法

方程(8-1)到(8-4)构成推移质平衡输沙模型，包含有三个未知数 $u(x,t)$，$h(x,t)$ 和 $Z_s(x,t)$，x 和 t 分别为距离和时间独立变量。

对式(8-4)关于 x 求偏导得

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x} \tag{8-5}$$

将式(8-5)代入(8-3)，不失一般性取 $b=1$ 得

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x}=0 \tag{8-6}$$

考虑因变量 u，h 和 Z_s 的全微分

$$\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x-\mathrm{d}u=0 \tag{8-7}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial h}{\partial x}-\mathrm{d}h=0 \tag{8-8}$$

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial Z_s}{\partial x}\mathrm{d}x-\mathrm{d}Z_s=0 \tag{8-9}$$

由特性线的弱间断性，方程组(8-1)、(8-2)、(8-6)、(8-7)、(8-8)和(8-9)关于其一阶编微商的系数矩阵的特征值可由

$$\begin{vmatrix} 1 & u & 0 & g & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 & u & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial G}{\partial u} & 0 & \dfrac{\partial G}{\partial h} & 1 & 0 \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix}=0 \tag{8-10}$$

决定，展开式(8-10)得

$$-(\mathrm{d}x)^3+2u(\mathrm{d}x)^2+(gh-u^2+g\frac{\partial G}{\partial u})\mathrm{d}x\mathrm{d}t^2+g(h\frac{\partial G}{\partial h}-u\frac{\partial G}{\partial u})\mathrm{d}t^3=0 \tag{8-11}$$

让

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda$$

则

$$-\lambda^3+2u\lambda^2+(gh-u^2+g\frac{\partial G}{\partial u})\lambda+g(h\frac{\partial G}{\partial h}-u\frac{\partial G}{\partial u})=0 \tag{8-12}$$

方程(8-12)确定了三个特征根，de Vries(1967). Kyozo Suga(1969)和 Lyn(1987)分析表明，对于缓流 $F_r<1$，有两个特征线穿过上游边界，一个特征线穿过下游边界，见图 8-2(a)。

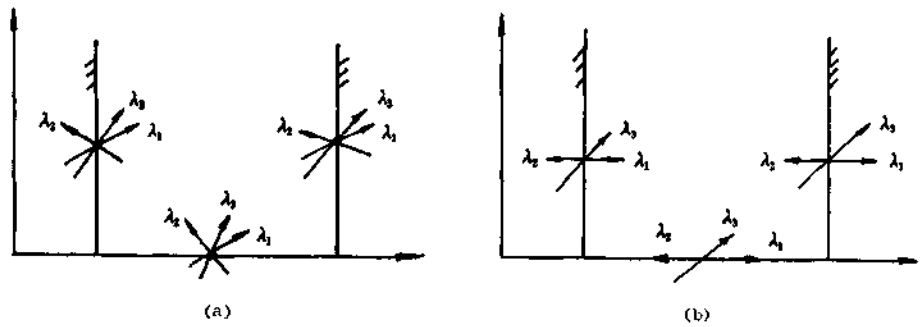


图 8-2

特别地，对无推移质运动的定床情形，$\frac{\partial G}{\partial u}$ 和 $\frac{\partial G}{\partial h}$ 为零，式(8-12)可化为

$$-\lambda^3+2u\lambda^2+(gh-u^2)\lambda=0$$

给出

$$\lambda_{1,2}=u\pm\sqrt{gh}$$

$$\lambda_3=0$$

在有泥沙运动时对于缓流 $F_r<1$，de Vries 和 Kyozo Suga 对式(8-12)的分析表明，第一、二两个根 $\lambda_{1,2}$ 非常接近速度 $(u\pm\sqrt{gh})$，而表征河床变形的扰动特征速度的第三个根 λ_3 远比

$\lambda_{1,2}$ 为小。既然 λ_3 很小，相对地就可以认为 $\lambda_{1,2}$ 相当大，这又相当于水深相当大，因而进一步又可以认为流速和水深随时间的变化相当小，即 $\frac{\partial u}{\partial t} \approx 0$ 和 $\frac{\partial h}{\partial t} \approx 0$。这个结论表明河床变形不会引起流速和水位有多大变化，如果入流条件本身的非恒定性较弱，那么，仅因河床变形引起的非恒定性相比之下就显得更弱，在这种情形下，这就有可能通过忽略方程(8-1)、(8-2)中的时间偏微商 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 项来研究河床变形问题，即研究恒定水流条件下河床变形问题(弱非恒定水沙问题)。

因水深 $h = Z - Z_b$，则方程(8-1)、(8-2)和(8-3)可化成

$$(1 - F_r^2)\frac{\partial Z}{\partial x} + F_r^2\frac{\partial Z_b}{\partial x} + J_f = 0 \tag{8-13}$$

$$(\frac{\partial G}{\partial h} - \frac{u}{h}\frac{\partial G}{\partial u})\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z_b}{\partial t} - (\frac{\partial G}{\partial h} - \frac{u}{h}\frac{\partial G}{\partial u})\frac{\partial Z_b}{\partial x} = 0 \tag{8-14}$$

这是一个抛物型方程组，在弱非恒定水流条件下未知变量为水位和河床高程。当 $F_r = 0$ 时，方程组为双曲型。考虑水位和河床高程的两个全微分

$$\mathrm{d}Z = \frac{\partial Z}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial Z}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}Z_b = \frac{\partial Z_b}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial Z_b}{\partial x}\mathrm{d}x$$

结合方程(8-13)和(8-14)，由小扰动线的弱间断性可写出

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 - F_r^2 & 0 & F_r^2 \\ 0 & (\frac{\partial G}{\partial h} - \frac{u}{h}\frac{\partial G}{\partial u}) & 1 & (\frac{\partial G}{\partial h} - \frac{u}{h}\frac{\partial G}{\partial u}) \\ \mathrm{d}t & \mathrm{d}x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}t & \mathrm{d}x \end{vmatrix} = 0 \tag{8-15}$$

求行列(8-15)的值有

$$(1 - F_r^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + (\frac{\partial G}{\partial h} - \frac{u}{h}\frac{\partial G}{\partial u})\mathrm{d}t^2 = 0 \tag{8-16}$$

因方程(8-1)中忽略了 $\frac{\partial h}{\partial t}$，而导致了 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$，即 Q =常数，且由上游边界确定，这个结果实际上隐含了

$$\lambda_1 = \lim_{\mathrm{d}t \to 0^+}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}) = +\infty$$

故式(8-16)只能确定两个特征根

$$\lambda_2 = \lim_{\mathrm{d}t \to 0^-}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})_2 = -\infty \tag{8-17}$$

表征特征线平行于 x 轴，液相波速为无限大。第二个特征根为

$$\lambda_3 = (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})_3 = \frac{u\frac{\partial G}{\partial u} - h\frac{\partial G}{\partial h}}{h(1 - F_r^2)} \tag{8-18}$$

它代表河床变形的小扰动速度。对于这一问题的合理数学提法应该是，在初始时刻应给出河床高程 $Z_b(x,0)$，而在上游边界上应提一个水力条件 $Q(0,t)$ 或 $Z(0,t)$ 和一个河床高程 $Z_b(0,t)$ 条件；而在下边界提一个水力条件，这种提法与第七章恒定流模型的提法有相同之处(图 8-2(b))。

由于特征线 $(\frac{dx}{dt})_{1,2}$ 平行于 x 轴，所以基本方程(8-13)、(8-14)不要求提初始时刻的物理条件，$u(x,0)$ 和 $Z(x,0)$，这就意味着在平行于 x 轴的特征线 $(\frac{dx}{dt})_{1,2}$ 上没有给出水位和流速的初值。由于初始物理条件 $u(x,0)$、$Z(x,0)$ 的缺损，就应谨慎先取适当的数值方法离散和求解方程(8-13)、(8-14)，以及在求解过程中加入的初始数值条件应满足方程(8-13)和(8-14)。

忽略惯性项 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 得到的简化方程组(8-13)和(8-14)，目前工程上已有很多应用，对于某一具体问题使用这个简化方程时，要获得较好的数值过程，有必要进一步认识方程(8-13)和(8-14)的基本特性。

实际上，在忽略了时间惯性项后，方程(8-1)、(8-4)改变为

$$uh = q = 常数$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial h}{\partial x} + g\frac{\partial z}{\partial x} + g\frac{1}{k_{STR}}\frac{u|u|}{h} = 0$$

$$b\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \tag{8-19}$$

式中 k_{STR} 为谢才系数。为了线性化方程组(8-19)，取

$$G = G(u,h)$$

$$u = U_0 + \tilde{u}, \qquad h = H_0 + \tilde{h}, \qquad Z_s = Z_{s0} + \tilde{Z}_s$$

式 U_0、H_0、Z_{s0} 为恒定均匀流的流速、水深和河床高程，"~"为小扰动值。可将方程组(8-19)化成

$$\frac{\partial \tilde{Z}_s}{\partial t} - \frac{(1-F_r^2)H_0 k_{STR}^2}{3gF_r^2}\frac{\partial^2 \tilde{Z}_s}{\partial x \partial t} + \frac{(\frac{\partial G}{\partial h} - \frac{q}{H_0^2}\frac{\partial G}{\partial u})}{3gF_r^2}k_{STR}^2 H_0 \frac{\partial^2 \tilde{Z}_s}{\partial x^2} = 0 \tag{8-20}$$

这是一个关于河床高程 $\tilde{Z}_s$ 带有扩散项的二阶抛物型方程，方程(8-20)表明忽略时间惯性项 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 后得到的方程(8-13)、(8-14)或方程组(8-19)，实际上是描述一个初始河床扰动的扩散过程，物理方程本身就是一种物理扩散现象，这种现象将会使不规则河床将随着时间的推移变得规则，原来不连续的床面也会变得平滑连续。

既然方程组(8-19)具有物理扩散性质，扩散程度取决于系数

$$D_s = (\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{q}{H_0^2}\frac{\partial G}{\partial h})\frac{K_{STR}^2 H_0}{3gF_r^2} \tag{8-21}$$

当无推移质运动时，$D_s = 0$，河床将始终保持原始河床的特性。方程组(8-19)所具有的这些特性对于选择有限差分格式求解方程组时是极为重要的，只有当所选用的差分格式的人工阻尼效应远比(8-21)决定的物理效应为小才能使用，否则，数值伪物理过程将会掩盖方程组(8-19)的物理过程，甚至会导致数值计算结果与实际完全不符。

由于方程组(8-19)具有扩散效果，对于初始河床变化比较陡的情况，使用方程组(8-19)进行模拟时，在河床变化比较大的局部范围内不太可能出现数值扰动现象，至少在几个时间步长以后达到这一点。因此，对于这种情况也就没有必要考虑选择具有较大数值扩散的差分格式来光滑局部床面的突变性。

然而，忽略时间惯性项 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial h}{\partial t}$，基本方程组(8-19)还具有一种假物理现象。原方程(8-1)忽略 $\frac{\partial h}{\partial t}$ 导致了 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ 或 $Q(x,t) =$ 常数和 $h(x = x_j, t) =$ 常数，对于动床挟沙水流来说，这不

是一个真实的物理过程。例如，水库蓄水位为常数，库区发生淤积(图 8-3)，对某一确定断面 $x = x_j$，由于泥沙淤积，床面抬高，水深随时间必然发生变化而不可能有 $\frac{\partial h(x = x_j)}{\partial t} = 0$，此时 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ 就不可能接受，水流连续条件就不可能得到满足。显然要使得这种假物理过程没有那么突出，在相同时段内，水库泥沙淤积体远小于总来水体积才行。

3. 数值方法

方程组(8-19)具有的物理扩散特性，不宜选用数值扩散较强的差分格式，将方程(8-19)改写成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2A^2} + gZ\right) + g\frac{Q|Q|}{K^2} = 0$$

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t} + \frac{1}{b}\frac{\partial G}{\partial x} = 0$$

$$G = G(u,h) \qquad (8\text{-}22)$$

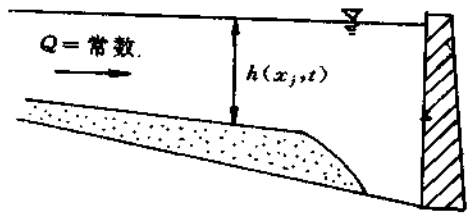


图 8-3

使用 Preissmann 格式，并记

$$f^{n+1} = f^n + \Delta f$$

则方程(8-22)可离散为

$$\frac{\theta}{\Delta x}\left[\frac{Q^2}{2(A_{j+1} + \Delta A_{j+1})} + g(Z_{j+1} + \Delta Z_{j+1}) - \frac{Q^2}{2(A_j + \Delta A_j)}\right.$$

$$\left. - g(Z_j - \Delta Z_j)\right] + \frac{1-\theta}{\Delta x}\left(\frac{Q^2}{2A_{j+1}^2} + gZ_{j+1} - \frac{Q^2}{2A_j^2} - gZ_j\right)$$

$$+ gQ|Q|\left\{\frac{\theta}{2}\left[\frac{1}{(\Delta K_{j+1} + \Delta K_{j+1})^2} + \frac{1}{(K_j + \Delta K_j)^2}\right] + \frac{1-\theta}{2}\left(\frac{1}{K_{j+1}^2} + \frac{1}{K_j^2}\right)\right\} = 0 \qquad (8\text{-}23)$$

$$\frac{b_{j+1}\Delta Z_{sj+1} + b_i\Delta Z_{si}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta x}\left[(G_{j+1} - G_j) + \theta(\Delta G_{j+1} - \Delta G_j)\right] = 0 \qquad (8\text{-}24)$$

由于对某一确定断面 j，过水面积 A，流量系数 K 都是水位的函数，故 $A = A(h) = A(Z - Z_i)$，$K = K(Z - Z_i)$。

因

$$\frac{1}{A_{j+1} + \Delta A_{j+1}} \approx \frac{1}{A_{j+1}}\left(1 - 2\frac{\Delta A_{j+1}}{A_{j+1}}\right)$$

$$\Delta A_{j+1} = (\Delta Z_{j+1} - \Delta Z_{si+1})\sum_i b_{ij+1} \qquad (8\text{-}25)$$

又

$$\Delta K = \frac{\partial K}{\partial Z}\Delta Z + \frac{\partial K}{\partial Z_i}\Delta Z_i$$

$$K = \sum_i b_i k_{STRi}(Z - Z_i - \Delta Z_{si})^{5/3}$$

$$\frac{\partial K}{\partial Z} = \frac{5}{3}\sum_i b_i k_{STRi}(Z - Z_i - \Delta Z_{si})^{2/3} = P$$

$$\frac{\partial K}{\partial Z_i} = -\frac{\partial K}{\partial Z} = -P$$

故可记

$$\Delta K_{j+1} = P_{j+1}(\Delta Z_{j+1} - \Delta Z_{sij+1}) \qquad (8\text{-}26)$$

对某一个子断面 i，如果推移质输沙率采用如下形式的梅叶-彼得公式计算

$$G_{i,j} = \left[R_{i,j}(Z_j - Z_{sj} - \Delta Z_{sj})\frac{Q^2}{K_j^2} - T_{i,j}\right]^{3/2}$$

$$G_j = \sum_i G_{i,j}$$

故

$$\frac{\partial G_{i,j}}{\partial Z} = \frac{3}{2}[R_{i,j}(Z_j - Z_{sj} - \Delta Z_{sj})\frac{Q^2}{K_j^2} - T_{i,j}]^{1/2} R_{i,j} Q_j^2 [\frac{1}{K_j^2} - 2(\frac{Z_j - Z_{sj} - \Delta Z_{sj}}{K_j^2})\frac{\partial K_j}{\partial Z_j}] \tag{8-27}$$

$$\frac{\partial G_{i,j}}{\partial Z_s} = -\frac{\partial G_{i,j}}{\partial Z}$$

由

$$\Delta G_j = \sum_i (\frac{\partial G_{i,j}}{\partial Z}\Delta Z_j + \frac{\partial G_{i,j}}{\partial Z_s}\Delta Z_{sj})$$

$$= -\frac{3}{2}Q^2 V_j(\Delta Z_j - \Delta Z_{sj}) \tag{8-28}$$

这里

$$V_j = \frac{1}{K_j^2}\sum_i V_{i,j} R_{i,j}[\frac{2P_j}{K_j}(Z_j - Z_{sj} - \Delta Z_{sj}) - 1]$$

$$V_{i,j} = [R_{i,j}(Z_j - Z_{sj} - \Delta Z_{sj})\frac{Q^2}{K_j^2} - T_{i,j}]^{1/2}$$

$$P_j = \frac{\partial K_j}{\partial Z_j}$$

将上述关系式代入(8-23)、(8-24)可得到两个差分方程

$$A_1\Delta Z_j + B_1\Delta Z_{sj} + C_1\Delta Z_{j+1} + D_1\Delta Z_{sj+1} + H_1 = 0$$

$$A_2\Delta Z_j + B_2\Delta Z_{sj} + C_2 Z_{j+1} + D_2\Delta Z_{sj} + H_2 = 0 \tag{8-29}$$

其中

$$A_1 = \frac{\theta b_j Q^2}{\Delta x A_j^3} - \frac{\theta g Q^2 P_j}{K_j^3} - g\frac{\theta}{\Delta x};$$

$$B_1 = -\frac{\theta Q^2 b_j}{\Delta x A_j^3} + \frac{\theta g Q^2 P_j}{K_j^3};$$

$$C_1 = -\frac{\theta Q^2 b_{j+1}}{\Delta x A_{j+1}^3} - \frac{\theta g Q^2 P_{j+1}}{K_{j+1}^3} + \frac{g\theta}{\Delta x};$$

$$D_1 = \frac{\theta Q^2 b_{j+1}}{\Delta x A_{j+1}^3} + \frac{\theta g Q^2 P_{j+1}}{K_{j+1}^3};$$

$$H_1 = \frac{Q^2}{2\Delta x}(\frac{1}{A_{j+1}^2} - \frac{1}{A_j^2}) + \frac{gQ^2}{2}(\frac{1}{K_{j+1}^2} + \frac{1}{K_j^2}) + \frac{g}{\Delta x}(Z_{j+1} - Z_j)$$

$$A_2 = \frac{3\theta\Delta t Q^2}{\Delta x}V_j$$

$$B_2 = b_j - A_2$$

$$C_2 = -\frac{3\theta\Delta t Q^2}{\Delta x}V_{j+1}$$

$$D_2 = b_{j+1} - C_2$$

$$H_2 = \frac{2\Delta t}{\Delta x}(G_{j+1} - G_j)$$

差分方程(8-29)可用追赶法求解

4. 稳定分析

用差分方程(8-29)的解逼近微分方程(8-22)的解的特性如何，还要作进一步的稳定和收敛性分析。

(1)微分方程(8-22)的线性化：

从数学上讲，方程(8-22)是拟线性微分方程式，为了进行稳定性和收敛性分析，还得对其

进行线性化。

依据小扰动原理，取

$$Z=Z_0+\tilde{Z},\ Z_z=Z_w+\tilde{Z}_z,\ h=h_0+\tilde{h}$$

Z_0，Z_w和h_0分别为定常均匀流状态下的水位，河床高程和平均水深，$\tilde{Z}$、$\tilde{Z}_z$和$\tilde{h}$分别为相应的小扰动值。

代入(8-22)，线性化各项可写成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2A^2}+gZ\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Q^2}{2(A_0+b\tilde{h})^2}+g(Z_0+\tilde{Z})\right]$$

$$=-\frac{bQ^2}{(A_0+b\tilde{h})^3}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial x}+g\frac{\partial\tilde{Z}}{\partial x}+g\frac{\partial Z_0}{\partial x}$$

略去高阶扰动项后得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2A^2}+gZ\right)=\left(g-\frac{bQ^2}{A_0^3}\right)\frac{\partial\tilde{Z}}{\partial x}+\frac{bQ^2}{A_0^3}\frac{\partial\tilde{Z}_z}{\partial x}+g\frac{\partial Z_0}{\partial x} \tag{8-30}$$

$$g\frac{Q^2}{K^2}=g\frac{Q^2}{k_{STR}^2b^2h^{10/3}}=\frac{gQ^2}{k_{STR}^2b^2h_0^{10/3}}\left(1+\frac{\tilde{h}}{h_0}\right)^{-10/3}$$

$$\approx g\frac{Q^2}{K_0^2}\left(1-\frac{10}{3}\frac{h}{h_0}\right)=\frac{gQ^2}{K_0^2}-\frac{10}{3}\frac{gQ^2}{K_0^2h_0}(\tilde{Z}-\tilde{Z}_z)$$

将式以上两个线性化表达式代入式(8-22)中的第一式，考虑到

$$g\frac{\partial Z_0}{\partial x}+g\frac{Q^2}{K_0^2}=0$$

最后得

$$(1-F_0^2)\frac{\partial\tilde{Z}}{\partial x}+F_0^2\frac{\partial\tilde{Z}_z}{\partial x}-\frac{10}{3}\frac{Q^2}{h_0K_0^2}(\tilde{Z}-\tilde{Z}_z)=0 \tag{8-31}$$

这里

$$F_0^2=\frac{Q^2b}{gA_0^3}$$

同理，线性化方程(8-22)第二式中的各项

$$\frac{\partial Z_z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(Z_w+\tilde{Z}_z)=\frac{\partial\tilde{Z}}{\partial t} \tag{8-32}$$

$$\frac{1}{b}\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{RQ^2(h_0+\tilde{h})}{k_{STR}^2b^2(h_0+\tilde{h})^{10/3}}-T\right]^{3/2}$$

$$=+\frac{3}{2b}\left[\frac{RQ^2}{k_{STR}^2b^2}\frac{1}{h_0^{7/3}}\left(1+\frac{\tilde{h}}{h}\right)^{-7/3}-T\right]^{1/2}$$

$$\frac{7}{3}\frac{RQ^2}{k_{STR}^2b^2}(h_0+\tilde{h})^{-10/3}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial x}=-\frac{7}{2b}\frac{RQ^2}{K_2}\left(1-\frac{10}{3}\frac{h}{h_0}\right)\left[\frac{RQ^2h_0}{K_0^2}\left(1-\frac{7}{3}\frac{\tilde{h}}{h_0}\right)-T\right]^{1/2}\frac{\partial\tilde{h}}{\partial x}$$

忽略高阶扰动值最后得

$$\simeq-\frac{7}{2b}\frac{RQ^2G_0^{1/3}}{K_0^2}\left(\frac{\partial\tilde{Z}}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{Z}_z}{\partial x}\right) \tag{8-33}$$

这里$G_0=\left(\frac{Rh_0Q^2}{K_0^2}-T\right)^{1/2}$，将(8-32)、(8-33)代入方程(8-22)第二式得

$$\frac{\partial\tilde{Z}_z}{\partial t}-\frac{7}{2b}\frac{RQ^2G_0^{1/3}}{K_0^2}\left(\frac{\partial\tilde{Z}}{\partial x}-\frac{\partial\tilde{Z}_z}{\partial x}\right)=0 \tag{8-34}$$

方程(8-31)和(8-34)即为线性化了的方程组(8-22)。

(2)方程(8-31)、(8-34)解的特性：

设方程(8-31)和(8-34)的解具有如下形式

$$\bar{Z} = Z_o e^{i(\beta t+\sigma x)}, \qquad \bar{Z}_1 = Z_\infty e^{i(\beta t+\sigma x)} \tag{8-35}$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{L}$$

为波数，L 为波长；$\beta = \frac{2\pi}{T}$ 为波频率，T 为周期。将解(8-35)代入(8-31)、(8-34)得

$$\begin{cases} A_1\sigma Z_o + (\beta - A_1\sigma)Z_\infty = 0 \\ (A_4 + iA_2\sigma)Z_o + (-A_4 + iA_3\sigma)Z_\infty = 0 \end{cases} \tag{8-36}$$

式中

$$A_1 = -\frac{7}{2}\frac{RQ^2G_o^{1/3}}{bK_o^2}$$

$$A_2 = 1 - F_o^2,$$

$$A_3 = F_o^2,$$

$$A_4 = -\frac{10}{3}\frac{Q^2}{h_o K_o^2}$$

式(8-36)中的幅常数 Z_o 和 Z_∞ 不为零，则

$$A_1\sigma(-A_4 + iA_3\sigma) - (\beta - A_1\sigma)(A_4 + iA_2\sigma) = 0 \tag{8-37}$$

因 $A_2+A_3=1$，故可解得波频率 β：

$$\beta = \frac{A_1A_2\sigma^3 + iA_1A_4\sigma^2}{A_4^2 + A_2^2\sigma^2} \tag{8-38}$$

可见为一复数，$\beta = \mathrm{R_e}\beta + i\mathrm{I_m}\beta$，即有

$$\mathrm{Re}\beta = \frac{A_1A_2\sigma^3}{A_4^2 + A_2^2\sigma^2}; \qquad \mathrm{Im}\beta = \frac{A_1A_4\sigma^2}{A_4^2 + A_2^2\sigma^2}; \tag{8-39}$$

因 $A_1A_4 > 0$，故 $\mathrm{Im}\beta > 0$，解式(8-35)的扰动幅因子为

$$|e^{i\cdot i\mathrm{Im}\beta t}| = |e^{-\mathrm{Im}\beta t}| = e^{-\mathrm{Im}\beta t} < 1 \tag{8-40}$$

因此，由方程(8-31)和(8-34)描述的小扰动波将随着时间的增长而衰减。

按照定义，解式(8-35)的小扰动波速为

$$C = \beta/\sigma = \frac{\mathrm{Re}\beta}{\sigma} = \frac{A_1A_2\sigma^2}{A_4^2 + A_2^2\sigma^2} \tag{8-41}$$

它依赖于波数，说明解(8-35)描述的各个小扰动波具有离散性，因为各个小扰动波的波速取决于它的波长。

系数 A_4 反映了方程(8-31)、(8-34)的阻力作用，对于无阻力情况，$A_4=0$，则

$$\mathrm{Re}\beta = \frac{A_1}{A_2}\sigma$$

$$\mathrm{Im}\beta = 0$$

故

$$|e^{-\mathrm{Im}\beta t}| = 1; \qquad C = \frac{A_1}{A_2} = \text{const.} \tag{8-42}$$

这说明在无阻力作用的情况下，初始扰动波将不发生衰减和变形，且各个小扰动波将保持初始扰动形态以同样的定常速度传播。

(3)差分方程(8-29)解的特性：

将方程(8-31)、(8-34)按 Preissmann 格式离散得

$$\tilde{Z}_{ij+1}^{n+1}-\tilde{Z}_{ij+1}^{n}+\tilde{Z}_{ij}^{n+1}-\tilde{Z}_{ij}^{n}+2\frac{\Delta t}{\Delta x}A_1[\theta(\tilde{Z}_{j+1}^{n+1}-\tilde{Z}_{j}^{n+1})$$
$$+(1-\theta)(\tilde{Z}_{j+1}^{n}-\tilde{Z}_{j}^{n})]-2\frac{\Delta t}{\Delta x}A_1[\theta(\tilde{Z}_{ij+1}^{n+1}-\tilde{Z}_{ij}^{n+1})$$
$$+(1-\theta)(\tilde{Z}_{ij+1}^{n}-\tilde{Z}_{ij}^{n})]=0 \tag{8-43}$$

$$\frac{A_2}{\Delta x}[\theta(\tilde{Z}_{j+1}^{n+1}-\tilde{Z}_{j}^{n+1})+(1-\theta)(\tilde{Z}_{j+1}^{n}-\tilde{Z}_{j}^{n})]$$
$$+\frac{A_3}{\Delta x}[\theta(\tilde{Z}_{ij+1}^{n+1}-\tilde{Z}_{ij}^{n+1})+(1-\theta)(\tilde{Z}_{ij+1}^{n}-\tilde{Z}_{ij}^{n})]$$
$$+\frac{A_4}{2}[\theta(\tilde{Z}_{j+1}^{n+1}+\tilde{Z}_{j}^{n+1})+(1-\theta)(\tilde{Z}_{j+1}^{n}+\tilde{Z}_{j}^{n})]$$
$$-\frac{A_4}{2}[\theta(\tilde{Z}_{ij+1}^{n+1}+\tilde{Z}_{ij}^{n+1})+(1-\theta)(\tilde{Z}_{ij+1}^{n}+\tilde{Z}_{ij}^{n})]=0 \tag{8-44}$$

差分方程(8-43)、(8-44)，从解的基本特性上说是与差分方程(8-29)相同的。将解(8-35)代入(8-43)、(8-44)并记 $\gamma=2\frac{\Delta t}{\Delta x}$ 有

$$\{e^{i\beta\Delta t}(e^{i\sigma\Delta x}+1)-(e^{i\sigma\Delta x}+1)-A_1\gamma[\theta e^{i\beta\Delta t}(e^{i\sigma\Delta x}-1)$$
$$+(1-\theta)(e^{i\sigma\Delta x}-1)]\}Z_{\infty}+A_1\gamma\{\theta e^{i\beta\Delta t}(e^{i\sigma\Delta x}-1)$$
$$+(1-\theta)(e^{i\sigma\Delta x}-1)\}Z_0=0 \tag{8-45}$$

$$\{\frac{A_3}{\Delta x}[\theta e^{i\beta\Delta t}+(1-\theta)](e^{i\sigma\Delta x}-1)-\frac{A_4}{2}[\theta e^{i\beta\Delta t}$$
$$+(1-\theta)](e^{i\sigma\Delta x}+1)\}Z_{\infty}+\{\frac{A_2}{\Delta x}[\theta e^{i\beta\Delta t}+(1-\theta)](e^{i\sigma\Delta x}-1)$$
$$+\frac{A_4}{2}[\theta e^{i\beta\Delta t}+(1-\theta)](e^{i\beta\Delta t}+1)\}Z_0=0 \tag{8-46}$$

用 $(e^{i\sigma\Delta x}+1)$ 遍除各项，并记

$$\frac{e^{i\sigma\Delta x}-1}{e^{i\sigma\Delta x}+1}=i\mathrm{tg}(\frac{\sigma\Delta x}{2})=i\mathrm{tg}\alpha,\alpha=\frac{\sigma\Delta x}{2}$$

求线性方程组(8-45)、(8-46)关于 Z_0 和 Z_{∞} 的平凡解有

$$\begin{vmatrix}(e^{i\beta\Delta t}-1)-2A_1\gamma[\theta e^{i\beta\Delta t}+(1-\theta)]\mathrm{tg}\alpha & iA_1\gamma[\theta e^{i\beta\Delta t}+(1-\theta)]\mathrm{tg}\alpha\\ iA_3\mathrm{tg}\alpha-\frac{A_4}{2}\Delta x & iA_2\mathrm{tg}\alpha+\frac{A_4}{2}\Delta x\end{vmatrix}=0 \tag{8-47}$$

解上式得

$$e^{i\beta\Delta t}=1-\frac{A_1\gamma\mathrm{tg}^2\alpha(\frac{A_4\Delta x}{2}+A_1\gamma\theta\mathrm{tg}^2\alpha-iA_2\mathrm{tg}\alpha)}{(\frac{A_4\Delta x}{2}+A_1\gamma\theta\mathrm{tg}^2\alpha)^2+A_2^2\mathrm{tg}^2\alpha} \tag{8-48}$$

让 $\beta\Delta t=\mathrm{Re}\beta\Delta t+\mathrm{Im}\beta\Delta t$，与式(8-48)相比较得：

$$e^{-\mathrm{Im}\beta\Delta t}\cos(\mathrm{Re}\beta\Delta t)=1-\frac{A_1\gamma\mathrm{tg}\alpha(A_1\gamma\theta\mathrm{tg}^2\alpha+\frac{A_4\Delta x}{2})}{(\frac{A_4\Delta x}{2}+A_1\gamma\theta\mathrm{tg}^2\alpha)^2+A_2^2\mathrm{tg}^2\alpha} \tag{8-49}$$

$$e^{-\mathrm{Im}\beta\Delta t}\sin(\mathrm{Re}\beta\Delta t)=\frac{A_1A_2\gamma\mathrm{tg}^3\alpha}{(\frac{A_4\Delta x}{2}+A_1\gamma\theta\mathrm{tg}^2\alpha)^2+A_2^2\mathrm{tg}^2\alpha} \tag{8-50}$$

将式(8-49)和(8-50)平方相加可求得数值解幅因子 $e^{-\mathrm{Im}\beta\Delta t}$ 的表达式：

$$\tilde{\lambda} = e^{-\mathrm{Im}\beta\Delta t} = f_1(A_1, A_2, A_3, A_4, L/\Delta x, \gamma, \sigma\Delta x) \tag{8-51}$$

然后两式相除可求得数值解波速

$$\tilde{C} = \frac{\mathrm{Re}\beta\Delta t}{\sigma\Delta t} = \frac{arctg(\mathrm{Re}\beta\Delta t)}{\sigma\Delta t} = f_2(A_1, A_2, A_3, A_4, L/\Delta x, \gamma, \sigma\Delta x) \tag{8-52}$$

如果对一切参数 A_1, A_2, A_3, A_4 和 $L/\Delta x, \gamma$ 有

$$|\tilde{\lambda}| \leqslant 1$$

则由 Von Neumann 准则，差分方程(8-43)、(8-44)的数值解是稳定的，否则是不稳定的。我们已经知道微分方程(8-31)和(8-34)的解析解是随时间衰减的，但由于式(8-51)包含的因素较多，还很难明显断定数值解也具有这种特性，同样，也很难从式(8-52)观察到数值解波幅具有离散性。为此需要进一步分析差分方程的两个收敛因子 R_1、R_2。取 $b = 100\mathrm{m}, i_0 = 0.004, Q = 1187\mathrm{m}^3/\mathrm{s}, d_{50} = 35\mathrm{mm}, k_{STR} = 30, \Delta x = 100\mathrm{m}$，按梅叶-波得公式计算得 $G = 0.719\mathrm{m}^3/\mathrm{s}, A_1 = -0.01216, A_3 = 0.533, A_4 = -0.00445, F_r = 0.73 < 1$。按这些参数对式(8-51)、(8-52)和(8-40)、(8-41)定义的两个收敛因子 R_1 和 R_2 进行数值分析，数值计算结果绘于图 8-4，8-5 和 8-6。

从图 8-4 可以看出，对于 $0.5 \leqslant \theta \leqslant 1.0$，数值计算是无条件稳定的。而对于 $\theta < 0.5$，计算是不稳定的。收敛特性可从图 8-5 和图 8-6 看到。对于相对波长 $L/\Delta x = 5, \Delta t = 10\Delta x, \theta = 1.0$，数值计算幅值与解析解幅值相比可达 10%的幅差，数值解波速滞后于解析解波速较大。从总体看，对于短波模拟时间步长不宜选得过大，而对于长波模拟，时间步长则可取得较大，才能保证数值解具有较好的近似。对于长波 $L/\Delta x > 100$ 而言，虽然数值解衰减与解析解衰减基本一致，但波速始终没有较好的改善。对于不同的参数 A_1, A_2, A_3 和 A_4，上述这些特性是不同的。

特别地，如果考虑无阻力情况 $A_4 = 0$，则式(8-49)、(8-50)变为

$$e^{-\mathrm{Im}\beta\Delta t}\cos(\mathrm{Re}\beta\Delta t) = 1 - \frac{A_1^2\gamma^2\theta\mathrm{tg}^4\alpha}{A_1^2\gamma^2\theta^2\mathrm{tg}^4\alpha + A_2^2\mathrm{tg}^2\alpha} \tag{8-53}$$

$$e^{-\mathrm{Im}\beta\Delta t}\sin(\mathrm{Re}\beta\Delta t) = \frac{A_1A_2\gamma\mathrm{tg}^3\alpha}{A_1^2\gamma^2\theta^2\mathrm{tg}^4\alpha + A_2^2\mathrm{tg}^2\alpha} \tag{8-54}$$

从上两式可解得

$$\mathrm{tg}(\mathrm{Re}\beta\Delta t) = \frac{A_1A_2\gamma\mathrm{tg}\alpha}{A_1^2\gamma^2\theta(\theta-1)\mathrm{tg}^2\alpha + A_2^2} \tag{8-55}$$

令 $\varphi = e^{-\mathrm{Im}\beta\Delta t}\sin(\mathrm{Re}\beta\Delta t)$

$\psi = \mathrm{tg}(\mathrm{Re}\beta\Delta t)$

则

$$\sin(\mathrm{Re}\beta\Delta t) = \frac{\psi}{\sqrt{1+\psi^2}} \tag{8-56}$$

代回(8-54)可给出

$$e^{-\mathrm{Im}\beta\Delta t} = \frac{\varphi\sqrt{1+\psi}}{\psi} \tag{8-57}$$

对于 $\theta = 1$，

$$\varphi = \frac{A_1A_2\gamma\mathrm{tg}\alpha}{A_1^2\gamma^2\mathrm{tg}^2\alpha + A_2^2}$$

$$\psi = \frac{A_1}{A_2}\gamma\mathrm{tg}\alpha$$

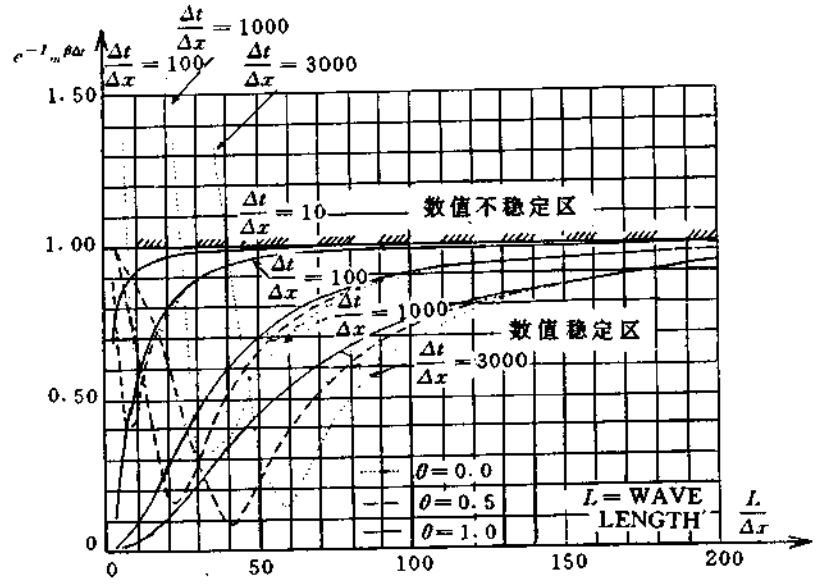


图 8-4

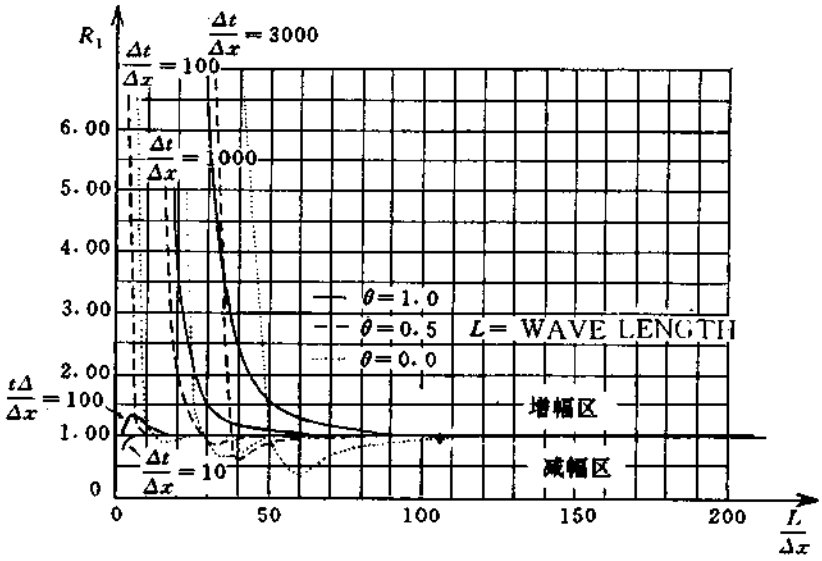


图 8-5

代入(8-57)有

$$e^{-\mathrm{Im}\beta\Delta x}=\sqrt{\frac{A_2^2}{A_1^2\gamma^2\mathrm{tg}^2\alpha+A_2^2}}<1 \tag{8-58}$$

再注意到(8-42)有

$$R_1<1 \tag{8-59}$$

数值解波速可由(8-55)解出

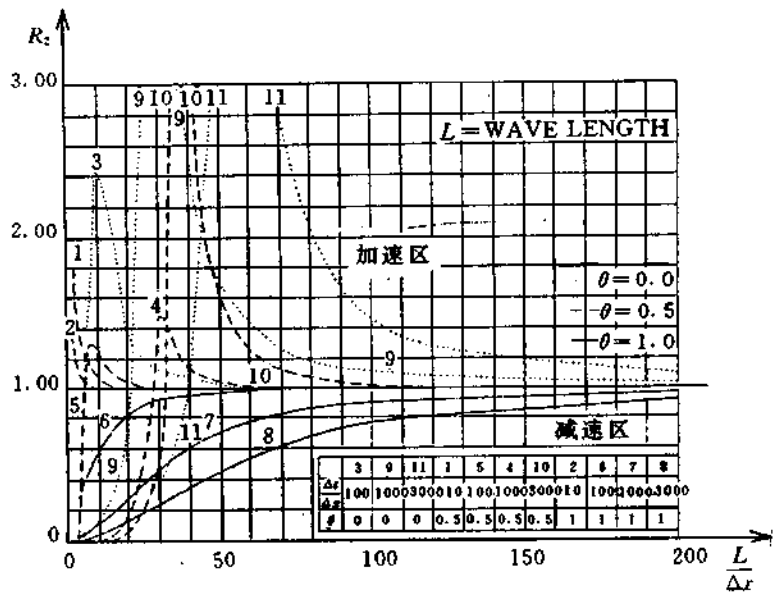


图 8-6

$$\breve{C}=\frac{\mathrm{Re}\beta\Delta t}{\sigma\Delta t}=\frac{\mathrm{arctg}\psi}{\Delta t}=\frac{\mathrm{arctg}(\frac{A_1}{A_2}\gamma\mathrm{tg}\alpha)}{\sigma\Delta t} \tag{8-60}$$

可见，即使 $A_1=A_2$，都不可能有 $\breve{C}=1$，故 $\breve{C}\neq C$，数值解波速总是超前或滞后于解析解的。

对 $\theta=0.5$ 有

$$\varphi=\frac{A_1A_2\gamma\mathrm{tg}\alpha}{\frac{A_1^2\gamma^2}{4}\mathrm{tg}^2\alpha+A_2^2}$$

$$\psi=\frac{A_1A_2\gamma\mathrm{tg}\alpha}{-\frac{A_1^2\gamma^2}{4}\mathrm{tg}^2\alpha+A_2^2}$$

代入(8-57)可解出

$$e^{-I_m\beta\Delta t}=1 \tag{8-61}$$

此时无减幅现象。而又因

$$\psi=\frac{2\frac{A}{2A_2}\gamma\mathrm{tg}\alpha}{1-(\frac{A_1}{2A_2}\gamma\mathrm{tg}\alpha)^2}=\frac{2V}{1-V^2},V=\frac{A_1}{2A_2}\gamma\mathrm{tg}\alpha$$

令 $V=\mathrm{tg}\beta$，利用倍角公式得 $\mathrm{arctg}\psi=2\beta=2\mathrm{arctg}V$，故此时的数值解波速为

$$\breve{C}=\frac{\mathrm{arctg}\psi}{\sigma\Delta t}=\frac{2\mathrm{arctg}(\frac{A_1}{2A_2}\gamma\mathrm{tg}\alpha)}{\sigma\Delta t} \tag{8-62}$$

显然，一般情况下，取 $\theta=0.5$ 也没有 $\breve{C}=C$，即使在 $\frac{\gamma A_1}{2A_2}=1$ 时

$$\bar{C}=\frac{\sigma\Delta x}{\sigma\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

因 $C=\frac{A_1}{A_2}$，有 $\frac{\bar{C}}{C}=\frac{\Delta xA_2}{\Delta tA_1}$，要使 $\bar{C}=C$，则必须要求 $\frac{\Delta xA_2}{\Delta tA_1}=1$ 才会保证数值解波速与解析解波速相同。归纳 $\theta=0.5$ 和 $\theta=1.0$ 可以得出，即使对于无阻力作用的情况，数值解总是存在数值减幅和数值弥散现象，从这个角度讲，差分方程(8-43)、(8-44)给出的解与微分方程(8-31)、(8-34)确定的特性是相一致的，但由于 $e^{-I_m\beta\Delta t}<1$ 和 $\bar{C}\neq C$，数值解减幅和离散程度不可能完全与微分方程解的相同。

(4)差分方程(8-29)的解法及数值初始条件问题

为了反映河床变形对水流的影响，采用耦合解差分方程(8-29)，具体求解步骤可按第五章介绍的追赶法求解。

差分方程(8-29)对任意计算断面 j，有两个待求未知数 ΔZ_j 和 ΔZ_{sj}(注意：流量由上游来流条件确定)，这就意味着差分方程(8-29)需要两个边界数值条件，这两个条件可由上下游两端的水沙边界条件给出，差分方程(8-29)要求的数值边界条件的个数与微分方程要求的相同。

但是差分方程(8-29)中的各系数 A_j，B_jC_j 和 D_j 需要由初始条件 $Z(x,0)$和 $Z_s(x,0)$来决定，后者是微分方程(8-19)所要求的(见特征根 8-18)，而对于前者，由于方程(8-19)的两个波相根(8-17)平行于 x 轴，微分方程本身不需要给水位提初值，因此，差分方程(8-29)的初始条件个数较微分方程要求的为多，这个数值初始条件在计算中应慎重处理。贡日建议，在初始时刻已知 $Z_s(x,0)$的条件下，水位数值初始条件应满足方程(8-13)。

前面的分析表明，由于简化方程组(8-19)具有的扩散性，差分方程(8-29)也具有同样的特性，这个模型较宜用于模拟大尺度的长波问题，例如水库水位变化不太大的河床变形问题，而对于局部河床变化较大的短河段变形问题是不尽适用的。

二、肖莱(J. P. Chollet)贡日(J. A. Cunge)模型

从河流动力学得知，在冲积河流中，随着水流强度的变化，床面形态也将相应发生变化，主要表现有三种形式：静平床、沙波和动平床。在这三种不同区域中，水流阻力是不相同的，各自有着自己的独特规律，不是简单地用曼宁公式或谢才公式所能概括得了的，其主要困难是随着水流强度的增减，沙波的发展和消亡规律还认识不足。采用数学模型模拟这种变形的主要问题是如何表达这三种河床形态的水流阻力关系，这是肖莱贡日模型不同于其他模型的差别所在。

肖莱贡日模型的基础是忽略惯性项$\frac{\partial h}{\partial t}$和$\frac{\partial u}{\partial t}$的弱非恒定流方程组(8-19)，写成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2A^2}+gZ\right)+gJ_f=0 \tag{8-63}$$

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{1}{b}\frac{\partial G}{\partial x}=0 \tag{8-64}$$

式中能坡分别用 Einstein 和 Englund 阻力公式计算。第三章中的阻力分析表明，如果直接使用 Einstein 和 Englund 公式计算能坡，对于确定的无量纲速度 $u/\sqrt{gh}$，从图 3-5 可以看出，由 Einstein 公式给出的能坡，将在沙波向动平床过渡区有两个能坡值相对应，而 Englund 公式给出的能坡将在静平床向沙波过渡区能坡取得双值，这是问题的一方面，问题的另一方面，从静平床到动平床，这两个公式都没有给出 $u/\sqrt{gh}$ 和 J_f 确定的唯一且连续的函数关系。因此，在数值模拟过程中，为了使模型能适应于模拟从静平床到动平床的河床变形，应将原公式作些必要的唯一性处理。以 Englund 公式为例，采用分段连续的办法解决，具体修改成：

当 $\theta < 0.06$	取 $\theta' = \theta$,	静平床	(8-65)
$0.06 \leqslant \theta < 0.3$;	$\theta' = 0.136\theta^{0.292}$	下过渡区	(8-66)
$0.3 \leqslant \theta < 0.9$;	$\theta' = 0.06 + 0.4\theta^2$	沙波	(8-67)
$0.9 \leqslant \theta < 1.08$	$\theta' = 0.698\theta^{6.67}$	上过渡区	(8-68)
$\theta \geqslant 1.08$	$\theta' = \theta$	动平床	(8-69)

其中 $$\theta = \frac{hJ_f}{(S-1)d}, \qquad \theta' = \frac{h'J_f}{(S-1)d}$$

式中 $S = \frac{r_s}{r}$ 各区域的划分和直线逼近如图 8-7 所示。

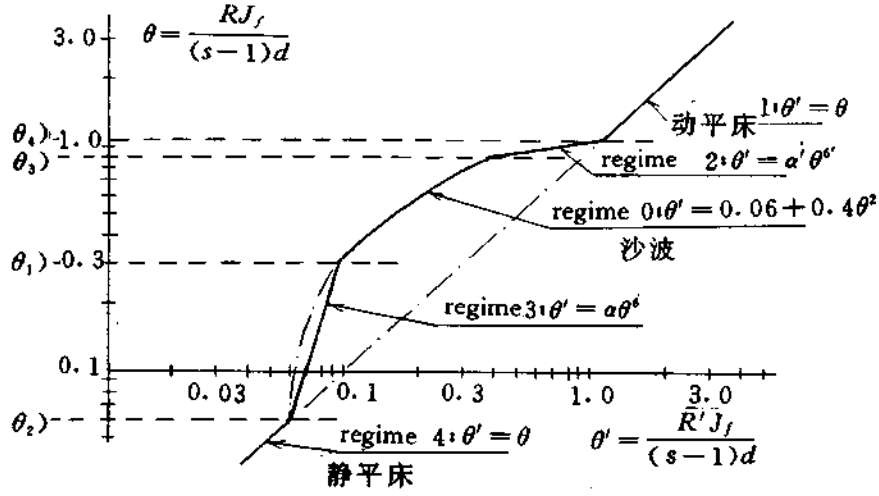


图 8-7

公式(8-65)～(8-69)虽然形式上不同，但处理手法上都是一样的，现以公式(8-69)、(8-67)为例说明模型中的计算方法。

使用阻力公式(3-49)可将(8-69)化成

$$\frac{Q}{A} = \frac{9.45\sqrt{g}}{\sqrt[8]{2.5d}} h^{5/8} J_f^{1/2} \tag{8-70}$$

式(8-67)化成

$$\frac{Q}{A} = \frac{9.45\sqrt{g}}{\sqrt[8]{2.5d}} [(S-1)d^{4/5}]^{5/8} J_f^{-1/8}][0.06 + 0.5(\frac{hJ_f}{(S-1)d})^2]^{5/8} \tag{8-71}$$

按 $\frac{u}{\sqrt{gh}}$ 与 J_f 表达的阻力公式(8-65)到(8-69)见图 8-8。

在肖莱、贡日模型中，方程(8-63)中的能坡用全隐式逼近，即

$$J_f = \frac{J_{fj+1}^{n+1} + J_{fj}^{n+1}}{2} = \frac{(J_{fj+1}^n + J_{fj}^n)}{2} + \frac{(\Delta J_{fj+1} + \Delta J_{fj})}{2} \tag{8-72}$$

式中 $\Delta J_{fj}, \Delta J_{fj+1}$ 分别为点 j 和 $j+1$ 断面上的能坡增量。方程(8-71)表达了能坡与因变量 Q、A 的隐式关系。对任意断面 j 有

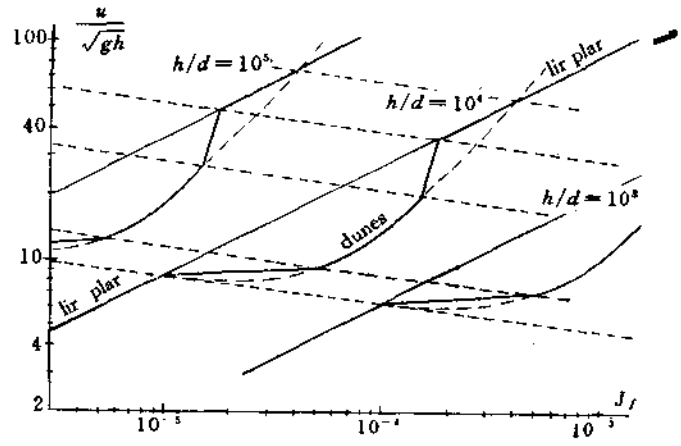


图 8-8

$$Q_j = A_j \frac{9.45\sqrt{g}}{\sqrt[8]{2.5d}}[(S-1)d^{4/5}]^{5/8}J_{fj}^{5/8}[0.06+0.4(\frac{h_jJ_{fj}}{(S-1)d})^2]^{5/8} \tag{8-73}$$

能坡增量可写成

$$\begin{aligned}\Delta Q_j &= \Delta A_j \frac{9.45\sqrt{g}}{\sqrt[8]{2.5d}}[(S-1)d^{4/5}]^{5/8}J_{fj}^{-1/8}[0.06+0.4(\frac{h_jJ_{fj}}{(S-1)d})^2]^{5/8}\\ &+\frac{1}{8}A_j\frac{9.45\sqrt{g}}{\sqrt[8]{2.5d}}[(S-1)d^{4/5}]^{5/8}J_{fj}^{-9/8}[0.06+0.4(\frac{h_jJ_{fj}}{(S-1)d})^2]^{5/8}\Delta J_{fj}\\ &-\frac{5}{8}A_j\frac{9.45\sqrt{g}}{\sqrt[8]{2.5d}}[(S-1)d^{4/5}]^{5/8}J_{fj}^{-1/8}[0.06+0.4(\frac{h_jJ_{fj}}{(S-1)d})^2]^{-3/8}\\ &\times[0.8\frac{hJ_{fi}}{(S-1)d})(J_{fj}\Delta h_j+h_j\Delta J_{fj})]=0\end{aligned} \tag{8-74}$$

可从方程(8-74)解出

$$\Delta J_{fj} = \Delta J_{fj}(\Delta Q_j, \Delta A_j)$$

即能坡增量可由因变量增量 ΔQ 和 ΔA 显式表达。

泥沙连续方程(8-64)中的推移质输沙率用 Englund-Hanson 公式计算，即

$$f\Phi=0.1\theta^{5/2} \tag{8-75}$$

$$f=\frac{2ghJ_f}{u^2}$$

$$\Phi=\frac{G}{\sqrt{(S-1)gd^3}}$$

亦即

$$G=\frac{1}{20\sqrt{g}d(S-1)^2}\frac{Q^2}{A^2}(hJ_f)^{3/2} \tag{8-76}$$

方程(8-64)中的推移质输沙率随 x 的偏微分按 Preissman 格式离散为

$$\frac{\partial G}{\partial x}\approx\frac{(G_{j+1}^n-G_j^n)+\theta(\Delta G_{j+1}-\Delta G_j)}{\Delta x} \tag{8-77}$$

而断面 j 的增量 ΔG_j 为

$$\begin{aligned}\Delta G_j = \frac{1}{20\sqrt{g}d(S-1)^2}&[\frac{2Q_j}{A_j^2}(hJ_f)_j^{3/2}\Delta Q_j-\frac{Q_j^2}{A_j^3}(hJ_f)_j^{3/2}\Delta A_j\\ &+\frac{3}{2}\frac{Q_j^2}{A_j^2}(hJ_{fj})^{1/2}(J_{fj}\Delta h_j+h_j\Delta J_{fj})]\end{aligned} \tag{8-78}$$

即推移质输沙量增量可由因变量增量 ΔQ、ΔA 表达

$$\Delta G_j = \Delta G_j(\Delta Q_j,\ \Delta A_j,\ \Delta J_{fj}) \tag{8-79}$$

ΔJ_f 由式(8-74)计算，用(8-73)、(8-74)、(8-77)和(8-79)代入(8-63)和(8-64)可得到差分方程

$$[A_j](\Delta W_j) + [B_j](\Delta W_{j+1}) + (C_j) = 0 \tag{8-80}$$

其中 $[A_j]$、$[B_j]$ 为 2×2 的系数矩阵，$(\Delta W_j) = (\Delta A_j, \Delta A_{sj})$，$\Delta A_s$ 为河床变形面积增量，(C_j) 为向量，差分方程(8-80)可用追赶法求解。

模型曾对已被概化了的苏丹(Sudan)Atbara 河河口段进行模拟计算，河段长 80km，概化河段水流泥沙特征值为：河宽 $b=150$m，原始床面坡 $i_0=0.00053$，平均粒径 $d=0.2$mm，入口断面来流和来沙年内过程线见图 8-9，相应的流量和输沙量的梯级概化值略作了加大处理，目的在于缩短模型的运行时间。下游出口断面控制水位为 20m 分别采用了 Englund 和 Einstein 公式计算的能坡和输沙率对河段变形进行了定性模拟，时长为 150 日，模拟的河床纵向变形沿程分布见图 8-10。

从结果中看出，由两个公式给出的结果虽然定性上十分相近，河床计算床面变化平缓和陡峭基本一致，但定量上差别很大，用 Einstein 公式算得的河床变形较 Englund 公式算得的变形要迅速得多，这主要是由这两种公式计算的能坡不同以及为避免能坡双值性而作的插值的任意性所引起的。因此，对具有不同河床形态的变形模拟还有待于进一步研究，肖莱、贡日模型只是在这一方面作了开拓性的研究工作。此外，Cunge 和 Simons(1975)Bourard 对此问题也作过研究。

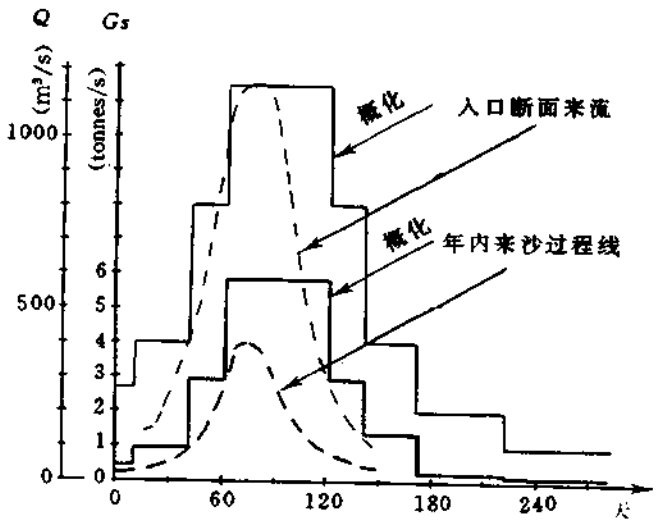


图 8-9

三、UWASER 模型

UWASER 模型的全身是非恒定水沙(Unsteady water and sediment ronting model)模型，由 Brett C. Phillips 和 Aiex J. Sutherland (1980,1985,1989)提出和开发的。类似的有 R. G. Bell 提出的模型(1983)。

UWASER 模型的主要特点是考虑了推移质运动的时空滞后效应，即实际推移质输沙率滞后于有效推移质输沙率，是一个非恒定不平衡输沙模型。模型采用非棱柱体基本方程

$$B\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_c \tag{8-81}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{QB}{A}\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{Q}{A}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{2Q^2}{A^2}\left(B\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x}\Big|_{z_0}\right) + gA\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{Q^2}{2A}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + gA\frac{Q|Q|}{K^2} = -\frac{q_c Q}{A} \tag{8-82}$$

$$\frac{1}{u_s}\frac{\partial G_V}{\partial t} - \frac{G_V}{u_s^2}\frac{\partial u_s}{\partial t} + (1-P_s)\frac{\partial A_s}{\partial t} + \frac{\partial G_V}{\partial x} = 0 \tag{8-83}$$

式中 q_l 侧向单位流程入流量，a 断面动量修正系数，u_* 为推移质运动速度，G_V 体积推移质实际输沙量。推移质运动速度 u_* 采用 Englund 和 FredsΦe 公式计算

$$\frac{u_*}{u_{*b}} = 8.5(1-\frac{u_{*c}}{u_{*b}})^{1/2}$$

$$1.3 \leqslant u_{*b}/u_{*c} \leqslant 5.0$$

u_{*c} 和 u_{*b} 分别为泥沙起动临界摩阻流速和水流摩阻流速。平衡条件下单宽有效推移质输沙率 g_* 由水槽试验实测资料确定为

$$g_{*_1} = 1.032(u-u_c)^{252}$$

R G Bell 和 A，J，Sutherland[31]在一条长 30m 可调坡为 0.00095 到 0.0025 的明渠水槽中，进行推移质河床变形试验，试验时上段为粗糙固定的床面，下段为铺上平均粒径 $d=1.8$mm 组成的可动床面，上段入口施放清水。试验观测表明，在河床变形未达到平衡时，实际推移质输沙率不等于计算推移质输沙率，前者滞于后者，见图 8-11。

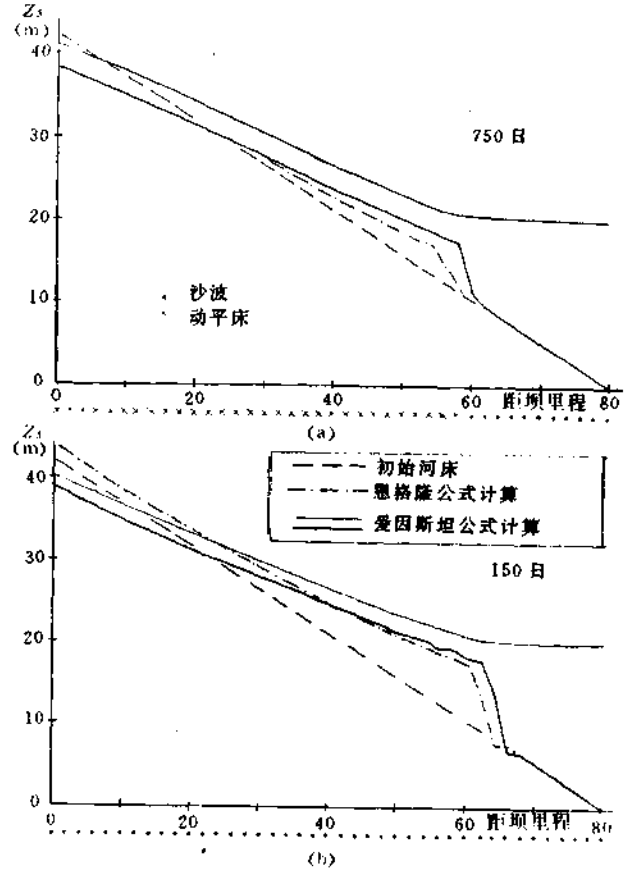


图 8-10

对某一确定的观测断面，单位面积上河床变形量与实际推移质输沙量和有效推移质输沙量之差成线性关系：

$$(1-P_*)\frac{\partial A_*}{\partial t} = -C_{SL}(G_{*V}-G_V) \tag{8-84}$$

$$C_{SL} = \frac{1}{\alpha_L d_{50}(\theta-\theta_c)} \tag{8-85}$$

θ 和 θ_c 分别为 Shields 泥沙起动临界参数。系数 α_L 称为空间滞后系数，反映推移质不平衡输沙的程度，由实验资料测定。若将方程(8-84)代入(8-83)并略去推移质在运动层内的蓄存率有

$$\frac{\partial G_V}{\partial x} = C_{SL}(G_{*V}-G_V) \tag{8-86}$$

Phillipe 和 Sutheland 的试验表明 α_L 取值为 4000 到 9000，这就是说 C_{SL} 变化是较大的。

模型用 Preissmann 格式逼近，采用追赶法计算。UWASWR 模型曾用 Bell(1985 年)作的冲刷坑的水槽试验作了验证，Bell 水槽试验的水流泥沙条件为：水槽宽 0.305m，底坡 0.002m，推移质平均粒径 2.11mm，其他特值见下表

试验组次	单宽流量 $m^3/s/m$	平均流速 m/s	起动流速 m/s	初始时刻推移质输沙率	
				由式(8-84)计算	实测
$ST_0 9$	0.159	0.804	0.517	1.62	1.67
$ST_0 7$	0.127	0.734	0.503	0.93	0.93
$ST_0 5$	0.097	0.669	0.495	0.44	0.43

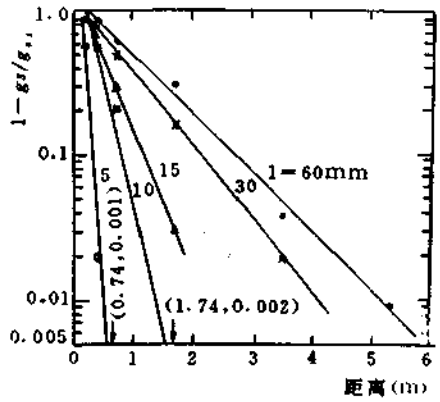


图 8-11

模型入口断面为清水入流。床面在冲刷过程中的模拟采用了两种糙率：

$$n_b = 0.0133 \tag{8-87}$$

$$n_b = 0.0256\theta^{0.136} \tag{8-88}$$

试验与计算结果对比表明，短范围的局部冲刷坑的河床形态模拟得比较好，在冲刷坑以外的河床则相差较远。用不同糙率模拟的结果也不相同，对使用定常糙率系数(8-87)，冲刷坑的深度较采用变糙率系数的为深。不同糙率系数值同样对推移质输沙率的计算有较大影响，在冲刷坑内，泥沙冲刷强度大，糙率变化大，用(8-88)式计算糙率系数，预测推移推输沙率与实测值颇为吻合。而在比较远离冲刷坑的断面，使用定常糙率系数，计算输沙率与实测基本一致。

建立推移质不平衡输沙模型，不管是从物理机制上还是在模式的考虑方面目前还存在不同看法，一些物理模型和数学模式还有待于进一步研究。

第二节　悬移质对流扩散问题的数值方法

一维挟沙水流悬移质河床变形模拟的成败，关键问题之一在于悬移质对流扩散输移方程的数值解。本节着重介绍求解悬移质含沙浓度的数值方法，下一节再着重讨论悬移质输沙数学模型的建模问题。

在第一章中已导出描述悬移质运动的方程为

$$\frac{\partial AS}{\partial t} + \frac{\partial QS}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S}{\partial x} = (S - r')\frac{\partial A_s}{\partial t} \tag{8-89}$$

引进水流连续方程式，方程(8-89)可改写成

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{Q}{A}\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}AD_x\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{S - r'}{A}\frac{\partial A_s}{\partial t} \tag{8-90}$$

这是标准型对流扩散源汇方程式，方程第一项为含沙量的随时变率，第二项表示含沙量的对流，第三项因浓度差引起的泥沙扩散，右边项为河床变型引起的源或汇。当 $\frac{\partial A_s}{\partial t} < 0$ 时，悬移质从河床中获得泥沙，此时为源，相反为汇。D_x 为纵向扩散系数，对于泥沙扩散，可近似取

$$D_x = 0.25u_* h$$

一般地，对于悬移质输移问题，悬移质的纵向扩散远较泥沙的纵向对流为小，故常被忽略。

如果载体速度和扩散系数 D_x 为常数，且不考虑(8-90)中的源汇项，得对流扩散方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \tag{8-91}$$

对于初始正态浓度分布

$$S(x,0) = e^{[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}]} \tag{8-92}$$

有一个解析解

$$S(x,t) = \frac{\sigma}{\sigma_0} e^{[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_0^2}]} \tag{8-93}$$

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + D_x t$$

而对于初边值问题

$$S(x,o) = 0 \tag{8-94}$$

$$S(o,t) = 1 \tag{8-95}$$

相应的解析解为

$$S(x,t) = \begin{cases} 1 & x < ut \\ 0 & x \geqslant ut \end{cases} \tag{8-96}$$

上几式中 x_0 为初始浓度分布中心，σ_0 为分布偏差。然而，这些解析解对于实际工程问题，其作用是很小的，主要原因是，天然河道流速和扩散系数不可能为常数，初边界条件也不象式(8-92)、(8-94)那样简易，在这种情况下，不可能获得方程(8-91)的解析解，实用上更多的是求其数值解。

由于河道流速和扩散系数随时随地都发生变化，对流扩散方程(8-91)的特性是变化无常的。Neumann 的分析表明，对流扩散方程(8-91)的特性可用 Peclet 数

$$\text{Peclet} = \frac{U_0 L}{D_0} \tag{8-97}$$

来表明，U_0 为特征速度，D_0 为特征扩散系数，L 为特征长度。当 Peclet 数较大时，悬移质输移以对流为主，扩散项可以忽略，此时的方程(8-91)表现为双曲型；而当 Peclet 数较小时，输移以扩散为主，方程为抛物型的。由于自然情况下的流速和扩散系数不为常数，Peclet 数就时大时小，则对河道挟沙水流问题，对流就表现得较强，而对于湖泊，扩散就显得较为重要。因此，对流扩散方程(8-91)的特性就表现出不定型，时而为双曲型，时而为抛物型。此外，从物理过程角度讲，悬移质对流严格要求质量守恒，要求含沙量在输移过程中不发生任何变化；而扩散输移却不是这样，它总是坦化悬移质输移，使得含沙量在整个过程中变得平滑。上述这些特点，都会使得在求对流扩散方程(8-91)的数值解时带来极大的困难，只有对这些困难有足够的认识，才能较好地建立悬移质数学模型。

对流扩散方程(8-91)中的主要数值困难是对流项的计算，因为它严格要求物质守恒，而用差分法求其数值近似解，往往做不到这一点，只有在对流项解决得较好的前提下再考虑对流扩散问题解，数值解成功的把握较大。

忽略(8-91)中扩散项得纯对流方程

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \tag{8-98}$$

这个方程描述了含沙浓度输移守恒，求其高精度数值近似解的困难是其差分方程解的数值幅

因子等于其收敛幅因子。考察解

$$S(x,t) = S_0 e^{i(\beta_m t + \sigma_m x)} \tag{8-99}$$

式中 S_0 为幅常数，由对流方程(8-98)确定这个解的幅因子为

$$|\lambda| = |e^{-i\beta_m t}| = |e^{-im\omega_m t}| = 1 \tag{8-100}$$

相应的波速为

$$C = u$$

即对流方程(8-98)的解幅不随时间而衰减。设 $\tilde{\lambda}$ 为差分方程 $L_{j,n}S = 0$ 的数值解幅因子，则收敛幅因子 R_1 为

$$R_1 = \frac{|\tilde{\lambda}|}{|\lambda|} = |\tilde{\lambda}| \tag{8-101}$$

一方面我们总希望能得到 $R_1 = 1$ 来保证数值解具有较高精度，另一方面我们又必需要求 $|\tilde{\lambda}| \leqslant 1$ 来保证数值解计算的稳定性，只有稳定计算的条件下才能考究数值解的精度，因此，我们总是有

$$R_1 = |\tilde{\lambda}| \leqslant 1$$

这就是说不管采作那种差分格式求解对流方程(8-98)，只要数值解是稳定的，那么总存在数值减幅现象，要严格做到 $R_1 = |\tilde{\lambda}| = 1$ 理论上和实用上都是困难的。一些研究者曾设想通过 $R_1 = 1$ 来建立格式，但数值弥散又使格式带来负效应，下面介绍几种求解对流问题的数值格式。

一、迎风格式

用迎风格式求对流方程(8-98)在一维挟沙水流悬移质模型中最为常用，这个格式在第五章中已作了介绍，用这个格式逼近方程(8-98)得到的差分方程对于 $u > 0$ 为

$$S_j^{n+1} = S_j^n - C_r(S_j^n - S_{j-1}^n) \tag{8-102}$$

式中 C_r 为柯朗数，对于 $u < 0$ 则为

$$S_j^{n+1} = S_j^n + C_r(S_{j+1}^n - S_j^n) \tag{8-103}$$

差分方程(8-102)、(8-103)可合写成

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{1}{2}(C_r + |C_r|)(S_{j+1}^n - S_j^n) + \frac{1}{2}(C_r - |C_r|)(S_{j+1}^n - S_j^n) \tag{8-104}$$

迎风格式是双层显格式，稳定条件为 $|u|\Delta t/\Delta x \leqslant 1$，这个格式的最突出的优点是考虑物质输移特性，对方程(8-98)中的对流项用偏在特征线方向一侧的差商来代替，具有顺流迎风的特点，但是由于这个格式的精度是一阶的，在许多情况下，尤其是对悬移质含沙量变化较大的情况，计算精度较差。这一点可直观地从式(8-102)看出，考虑对流方程(8-98)的柯西问题，当 $C_r = 0$ 或 1 时，$(n+1)$ 时间层上的浓度完全等于网格结点浓度值 S_j^n 和 S_{j-1}^n，此时数值计算是高精度的，而当 $C_r = 0.5$ 时，$(n+1)$ 时间层上的浓度是取于 n 时间层上的结点浓度算术平均值 $0.5(S_j^n + S_{j+1}^n)$ 来逼近，显然，精度较差，主要是因差分方程(8-102)隐含着较强的数值扩散。为了进一步说明这个问题，下面从两方面进行分析。

将 S_j^{n+1} 和 S_{j-1}^n 在点 (j,n) 上展开得

$$S_j^{n+1} = S_j^n + (\frac{\partial S}{\partial t})_j^n \Delta t + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 S}{\partial t^2})_j^n \Delta t^2 + \cdots$$

$$S_{j-1}^n = S_j^n - (\frac{\partial S}{\partial x})_j^n \Delta x + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2})_j^n \Delta x^2 + \cdots$$

将其代入式(8-102)，再利用原方程(8-98)，可将(8-102)化成

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{\Delta x^2C_r(1-C_r)}{2\Delta t}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$$

令

$$D_n=\frac{\Delta x^2C_r(1-C_r)}{2\Delta t} \tag{8-105}$$

则

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=D_n\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \tag{8-106}$$

从数学上讲，对任意实数 $0<Cr<1$，$\Delta t=\frac{C_r\Delta x}{u}$，当 $\Delta t,\Delta x\to 0$ 时有 $D_n=0$，差分方程(8-102)与微分方程(8-98)是相容的，由 Lsx 等价定理可知，差分方程(8-102)的解收敛于微分方程(8-98)的解。但是，实际应用格式(8-102)时，由于 Δt 和 Δx 总是一个有限量，对 $0<C_r<1$，差分方程(8-102)的解不再收敛于微分方程(8-98)的解，而是收敛于对流扩散方程(8-106)的解，如取时间步长

$$\Delta t=\frac{\Delta x^2C_r(1-C_r)}{2D_n}\quad(C_r\neq 0,1)$$

就是一个例子。因此，差分方程(8-102)隐含着数值扩散，它的大小取决于计算步长的选择。

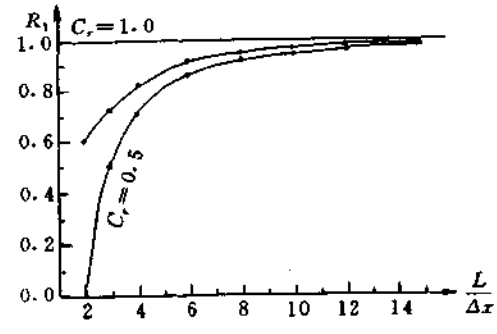


图 8-12

将迎风格式应用于悬移质含沙量计算时，其数值扩散究竟有多大，可以通过一个实例来说明。设水流速度 $u=1\text{m/s}$，水深 $h=5\text{m}$，空间步长 $\Delta x=1000\text{m}$，考虑最不利情况 $C_r=0.5$，计得 $\Delta t=500s$，由(8-105)可计得数值扩散系数 D_n

$$D_x=\frac{1000^2\times 0.5^2}{2\times 500}=\frac{1000000\times 0.25}{1000}=250\text{m}^2/\text{s}$$

若取 $U_*=1.0/20=0.05\text{m/s}$，泥沙纵向扩散系数由(8-91)估计得

$$D_*=0.25\times 5\times 0.05=0.00625\text{m}^2/\text{s}$$

由此可见，数值扩散系数 D_n 远远大于物理扩散系数，差分方程(8-102)的解很大程度上受到数值扩散的支配，在这种情况下，即使物理扩散可以忽略，数值扩散都是不容忽略的。

通过 Taloy 级数分析，对迎风格式隐含的数值扩散从数量上有一个实质的认识，还需要进一步了解格式的收敛特性和适应性。将解(8-99)代入差分方程(8-102)可解得数值解幅因子的模为

$$|\bar{\lambda}|^2=1-4C_r(1-C_r)\sin^2\left(\frac{\sigma\Delta x}{2}\right) \tag{8-107}$$

对于 $0\leqslant C_r\leqslant 1$，上式表明 $|\bar{\lambda}|\leqslant 1$，因此，数值计算是稳定的。由式(8-101)得这个格式的幅态因子 R_1 为

$$R_1=|\bar{\lambda}|\leqslant 1 \tag{8-108}$$

这就说明了迎风格式(8-102)对于 $0<C_r<1$，总是存在减幅现象，又由于对流方程的守恒性，这种减幅就必然导致数值计算含沙量的输移波形变矮和变胖，表现为数值扩散现象。图 8-12 是迎风格式的 R_1 变化特性，对于相对波长 $L/\Delta x\leqslant 14$，减幅现象极为严重。

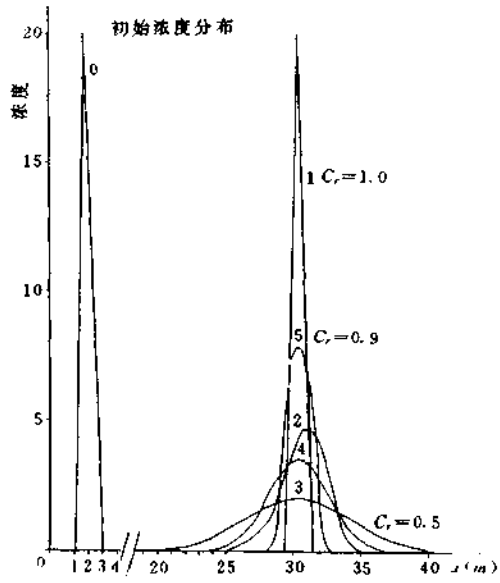


图 8-13

为了更为直观地从量上说明迎风格式的数值减幅现象，在一个长为 10km，宽为 2m，底坡为 0.001，谢才系数为 25，流量为 $1m^3/s$，流速为 0.5m/s，空间步长 $\Delta x=200m$，含沙量浓度最大值 $20kg/m^3$，时间步长 Δt 分别取 4005，3605 和 200s，相应的柯朗数分别为 1.0、0.9 和 0.5，数值扩散系数分别为 0.0，5.0 和 25.0，由迎风格式(8-102)计算的含沙量分布见图 8-13，从图可以看出，数值扩散效应是很强的，它使初始分布变得极为光滑，波形矮胖变形。

一般说来，低阶格式都或多或少地引入数值扩散，表 8-1 列出了常见几个低阶格式，它们所具有的数值扩散程度是不同的。一个格式存在一点数值扩散不全都是坏事，人们也常利用这一特点来处理间断解，对一些出现间断的问题，高阶格式和低阶格式并用也可得到较好的结果。对于一些水力学和河流动力学的具体问题，也可利用低价格式处理运动波所引入的数值扩散来模拟扩散波的输移，这里就不一一列举了。

表 8-1

格式	表达式	数值扩散系数
Dobbins 格式	$S_j^{n+1}-S_{j-1}^n-(1-C_r)(S_j^n-S_{j-1}^n)=0$	$\frac{C_r\Delta x^2}{2\Delta t}(1-C_r)$
迎风格式	$S_j^{n+1}-S_j^n+C_r(S_j^n-S_{j-1}^n)=0$	$\frac{C_r\Delta x^2}{2\Delta t}(1-C_r)$
隐式格式	$S_j^{n+1}-S_j^n-C_r(S_j^{n+1}-S_{j-1}^{n+1})=0$	$\frac{C_r\Delta x^2}{2\Delta t}(1+C_r)$
四点偏心 Preissmann 格式	$\varphi(S_j^{n+1}-S_j^n)+(1-\varphi)(S_{j-1}^n-S_j^n)+C_r[(\theta(S_j^{n+1}-S_{j-1}^{n+1})(1-\theta)(S_j^{n+1}-S_{j-1}^n)]=0$	$\frac{C_r\Delta x^2}{2\Delta t}(2\varphi-1)+C_r(2\theta-1)$
Lac-Friedrichs 格式	$S_j^{n+1}-\frac{1}{2}(S_{j+1}^n+S_{j-1}^n)+\frac{1}{2}C_r(S_{j+1}^n-S_{j-1}^n)=0$	$\frac{\Delta x^2}{2\Delta t}(1-C_r-C_r^2)$

二、TVD 格式

TVD 格式的全称为全变差缩小，是 Harten1981 年提出的，考察方程(8-89)的另一形式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial uS}{\partial x}=0 \tag{8-109}$$

由 TVD 格式给出的差分方程为 $(u>0)$

$$S_j^{n+1}=S_j^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}[(uS)_{j-1}^n-(us)_{j-1}^n] \tag{8-110}$$

从计算精度上看这个格式与迎风格式(8-102)相比差别不大，容易验证，当流速 u 为常数时，式(8-110)与(8-102)完全一致，只是这里考虑了输沙率 uS 的差分，而不象(8-102)那样仅考虑含沙量的差分，因此，除 TVD 格式(8-110)具有一定的输移特性的优点外，格式仍然存在较强的数值扩散现象。

三、双层隐显格式

前面指出对流方程(8-98)数值解的困难在于两个方面，数值减幅和数值弥散，许多现有格式的建立都力图克服这两点，双层半隐显格式就是一例。

双层半隐显格式将一个时间步长拆开两半，在第一个前半步，用隐式差分方程

$$S_j^{n+1}-S_j^n+\frac{1}{4}C_r(S_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}-S_{j-1}^{n+\frac{1}{2}})=0 \tag{8-111}$$

逼近，选取的网格结点分布如图 8-14，而在后半个时间步长用显式差分方程逼近

$$S_j^{n+1}-S_j^{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}C_r(S_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}-S_{j-1}^{n+\frac{1}{2}})=0 \tag{8-112}$$

将解(8-99)代入(8-111)可解出

$$\exp[-i\frac{\beta\Delta t}{2}][1+\frac{1}{2}C_r i\sin\sigma\Delta x]=1 \tag{8-113}$$

让 $\beta=\mathrm{Re}\beta_m+i\mathrm{Im}\beta_m$，前半个时间步长的幅模为

$$|e^{\mathrm{Im}\beta\frac{\Delta t}{2}}|=[1+\frac{C_r^2}{4}\sin^2\sigma\Delta x]^{-\frac{1}{2}} \tag{8-114}$$

相应的数值解频率为

$$\mathrm{Re}\beta_m=\frac{2}{\Delta t}\mathrm{arctg}(\frac{C_r}{2}\sin\sigma\Delta x) \tag{8-115}$$

此外，还可导出后半步长差分方程(8-112)的幅模和频率分别为

$$|e^{\mathrm{Im}\beta\frac{\Delta t}{2}}|=[1+\frac{C_r^2}{4}\sin^2(\sigma\Delta x)]^{-\frac{1}{2}} \tag{8-116}$$

和

$$\mathrm{Re}\beta_m=\frac{2}{\Delta t}\mathrm{arctg}(\frac{C_r}{2}\sin\sigma\Delta x) \tag{8-117}$$

对于全步长的幅模则为式(8-114)和(8-116)之积，则有

$$|e^{\mathrm{Im}\beta\frac{\Delta t}{2}}|=1 \tag{8-118}$$

故

$$R_1=1 \tag{8-119}$$

而全步长内数值波速则可取前后两个半步长波速的平均值得

$$\bar{C}=\frac{2}{\sigma\Delta t}\mathrm{arctg}[\frac{C_r}{2}\sin\sigma\Delta x] \tag{8-120}$$

由式(8-119)可以看出，双层半隐显格式解纯对流问题时不出现数值减幅，进而也就不可能出现数值扩散现象。但由式(8-120)可以知道相态因子

$$R_2 = \frac{\tilde{C}}{C} = \frac{2}{u\sigma\Delta t}\mathrm{arctg}[\frac{C_r}{2}\sin\sigma\Delta x]$$

$$\simeq \frac{2}{u\sigma\Delta t}\frac{C_r}{2}\sin\sigma\Delta x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{L}{\Delta x}\sin(\frac{2\pi}{L/\Delta x}) \qquad (8\text{-}121)$$

只有当 $\sin(\frac{2\pi}{L/\Delta x}) \simeq \frac{2\pi}{L/\Delta x}$ 时，有 $R_2 = 1$，否则，R_2 总是小于 1，数值解波总是滞后于真解，双层隐显格式总是存大数值弥散现象。

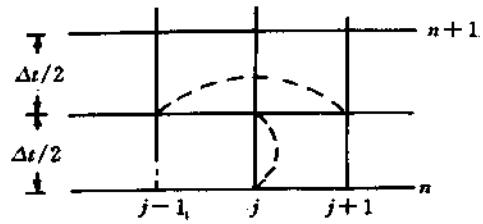


图 8-14

还有不少格式也是基于考虑减少数值减幅现象而建立起来的，如对称显式的“Leapfrog”方法(图 8-15)，

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^{n-1}}{\Delta t} + u[\frac{\frac{4}{3}(S_{j+1}^n - S_{j-1}^n)}{2\Delta x} - \frac{\frac{1}{3}(S_{j+2}^n - S_{j-2}^n}{4\Delta x}] = 0$$

这种方法虽然不存在数值减幅，但数值弥散现象仍然不可避免。由于格式涉及到的计算结点数目较多，数值边界条件处理较麻烦，所以应用不多。

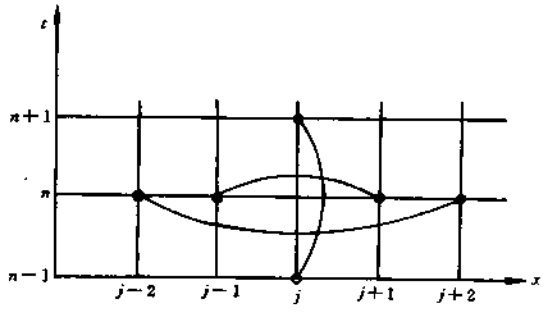


图 8-15

四、隐式格式

前面介绍的方法，都受到数值稳定条件的限制，当空间步长确定时，时间步长就不能选得过大，尤其是强对流的情况更是如此，在非恒定悬移质计算中，由于河床变形速度慢，数值模拟经常需经过较长计算系列，时间步长选择受到限制的数值方法将带来极为繁重的工作量，这就希望寻求一种无条件限制的数值方法，这自然就考虑到隐式格式，在 $(n+1)$ 时间层采用向后差商逼近对流方程(8-98)的对流项，而时间偏微商项采用向前差商得

$$S_j^{n+1} - S_j^n + C_r(S_j^{n+1} - S_{j-1}^{n+1}) = 0 \qquad (8\text{-}122)$$

将解(8-99)代入(8-122)可推得隐式格式的幅态因子 R_1 为

$$R_1 = \frac{1}{1 + 4C_r(1 + C_r)\sin^2\frac{\sigma\Delta x}{2}} \qquad (8\text{-}123)$$

和相态因子 R_2

$$R_2 = \frac{\tilde{C}}{C} = \frac{1}{u\sigma\Delta t}\{\mathrm{arctg}[\frac{-C_r\sin\sigma\Delta x}{1 + C_r(1 - \cos\sigma\Delta x)}]\} \qquad (8\text{-}124)$$

可见，隐式格式对于一切 C_r 值都是无条件稳定的，对于 R_2 利用级数展开可估得

$$R_2 \simeq \frac{-\frac{L}{\Delta x}\sin\sigma\Delta x}{2\pi[1 + C_r(1 - \cos\sigma\Delta x)]} \qquad (8\text{-}125)$$

即 R_2 对任意 C_r 值都是 $R_2 \neq 1$，数值解波总是滞后于解析解波，即使是对足够小的 $\sigma\Delta x$，

$\sin\sigma\Delta x\approx\sigma\Delta x$，$\frac{L}{\Delta x}\sin\sigma\Delta x=2\pi$，故仍然有

$$R_2\simeq\frac{-1}{1+C_r(1-\cos\sigma\Delta x)}$$

这说明即使空间步长 Δx 取得足够小，也不可能消除数值解的弥散现象。此外还可以看出，使用隐式的目的之一总希望时间步长取得较大，但时间步长 Δt 越大，C_r 就越大，R_1 就越小于 1，减幅就越严重，最终与人们的意愿相悖。

不难证明，如果将隐式差分格式的幅态因子 R_1 与迎风格式的幅态因子相比（见式 8-107），会有迎风格式 $R_1>$ 隐式格式 R_1，这说明隐式格式的数值减幅将比迎风格式的更为严重，数值扩散现象将会更突出。

五、对称隐格式

隐格式(8-122)的幅和相都较差，这可通过考虑点 $(j+1,n+1)$ 上的值得到一些改进，即

$$S_j^{n+1}-S_j^n+\frac{1}{2}C_r(S_{j+1}^{n+1}-S_{j-1}^{n+1})=0 \tag{8-126}$$

可以证明对称隐格式的幅因子和相态因子分别为

$$R_1=\frac{1}{[1+C_r^2\sin^2\sigma\Delta x]^{1/2}} \tag{8-127}$$

和

$$R_2=[\frac{\mathrm{arctg}(C_r\sin\sigma\Delta x)}{u\sigma\Delta t}] \tag{8-128}$$

这种方法显然是无条件稳定的，而且 R_1 较隐式格式的接近于 1，R_2 也是一样。

六、Dobbins 和 Bella 插值方法

插值法的基本思想是基于哈曲方法来求解对流方程(8-98)的。

沿特征线

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u(x,t) \tag{8-129}$$

微分方程(8-98)可写成

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0 \tag{8-130}$$

沿特征线积分方程(8-130)得

$$S(x,t+\Delta t)=S(x-u\Delta t,t) \tag{8-131}$$

将待求浓度 $S(x,t+\Delta t)$ 置于点 $(j,n+1)$（图 8-16），则有

$$S_j^{n+1}=S_A \tag{8-132}$$

解(8-131)或(8-132)称为对流方程(8-98)的形式解，在特征线段两点 AP 上它给出浓度的准确数值关系。由形式解(8-132)可以看出，求未知浓度 S_j^{n+1} 转变为求上一时间层的浓度 S_A，如果能确定 A 点上的浓度 S_A，那么 S_j^{n+1} 就完全确

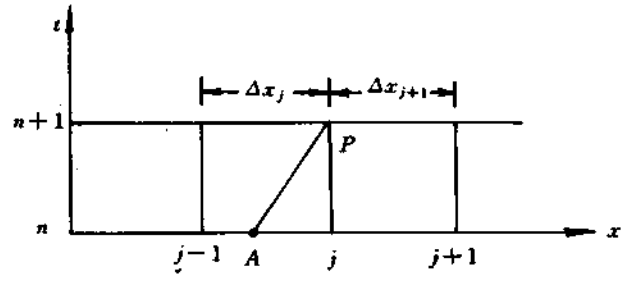


图 8-16

定下来。现在的问题是如何计算 A 点的浓度，显然 A 点的浓度确定得越准确，那么未知浓度 S_j^{n+1} 的计算就越准确，否则，精度较差。

求 A 点的浓度，由于事先已将未知浓度确定在 $n+1$ 时间层的 P 上，那么从 P 沿特征线往后追塑到 A 点，A 点的位置就不可能正好落在 n 时间层的计算结点上。当然，如果水流速度 u 为常值，只要选择 $\Delta x = u\Delta t$，要 A 点完全落在计算结点上是做得到的。但一般情况下，水流速都不是常数，因此按 $\Delta x = u\Delta t$ 构造网格就是一个变步长网格，速度变化大，空间步长变化就大，这对于解决河流动力学有关问题很难做到。因此，求 A 点的浓度，更直接的办法是插值方法，如图 8-16 所示，A 点的浓度就可使用相邻两结点 $j-1$ 和 j 上的浓度通过插值得到。

Dobbins 和 Bella 使用线性插值求得 A 点的浓度即

$$S_A = \frac{(\Delta x - a)S_j^n + aS_{j-1}^n}{\Delta x}$$

式中 $a = u\Delta t$，故 $C_r = \frac{a}{\Delta x} = \frac{u\Delta t}{\Delta x}$，上式为

$$S_A = (1 - C_r)S_j^n + C_rS_{j-1}^n \tag{8-133}$$

Dobbins 和 Bella 曾用式(8-133)计算潮汐水流中的含盐度问题。

但是 Dobbins 和 Bella 的线性插值方法从计算精度的角度讲是较差的。注意到式(8-132)，式(8-133)改为

$$S_j^{n+1} = S_j^n - C_r(S_j^n - S_{j-1}^n) \tag{8-134}$$

可见式(8-134)与迎风格式(8-102)相比，虽然出发点不同，但实质上是一样的，因此，存在的数值减幅和数值扩散是严重的。下面介绍几种较高精度的插值方法。

七、三次样条函数插值

设待求函数的二阶导数 m_j 和 m_{j-1} 在点 j 和 $j-1$ 之间呈线性变化

$$S_A''(x) = \left(\frac{x_j - x_A}{x_j - x_{j-1}}\right)m_{j-1} + \left(\frac{x_A - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right)m_j \tag{8-135}$$

对上式积分两次得

$$S'_A(x) = -\frac{1}{2}\frac{(x_j - x_A)^2}{x_j - x_{j-1}}m_{j-1} + \frac{1}{2}\frac{(x_A - x_{j-1})^2}{x_j - x_{j-1}}m_j + C_1 \tag{8-136}$$

和

$$S_A(x) = \frac{1}{6}\frac{(x_j - x_A)^3}{x_j - x_{j-1}}m_{j-1} + \frac{1}{6}\frac{(x_A - x_{j-1})^3}{x_j - x_{j-1}}m_j + C_1x_A + C_2 \tag{8-137}$$

式中 C_1 和 C_2 分别为积分常数，可由下列条件确定

$$S_A(x_j) = S_j^n$$
$$S_A(x_{j-1}) = S_{j-1}^n \tag{8-138}$$

将条件(8-138)代入(8-137)有

$$C_1 = \frac{1}{\Delta x}(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{\Delta x}{6}(m_{j-1} - m_j)$$

$$C_2 = S_j^n - \frac{\Delta x}{6}m_j - \frac{1}{\Delta x}(S_j^n - S_{j-1}^n) - \frac{\Delta x}{6}(m_{j-1} - m_j)x_j$$

将 C_1 和 C_2 再代回(8-137)最后得到插值式

$$S_A = S_j^n - C_r(S_j^n - S_{j-1}^n) + \frac{1}{6}C_r(C - 1)[(C_r + 1)m_{j-1} - (C_r - 2)m_j]\Delta x^2 \tag{8-139}$$

将上式代入(8-132)可计算出点 $(j, n+1)$ 的浓度，现在的问题是要确定插值函数(8-139)的二阶导函数值 m_j 和 m_{j-1}。

假定插值函数的一阶导数在点 j 连续，即(见图 8-17)

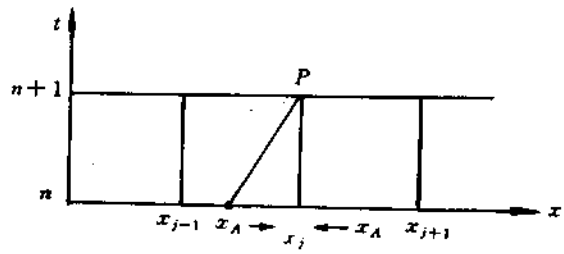


图 8-17

$$S'_A(x_A \to x_j^-) = S'_A(x_A \to x_j^+) \tag{8-140}$$

由(8-136)得

$$S'_A(x_A \to x_j^-) = \frac{(S_j^n - S_{j-1}^n)}{\Delta x} + \frac{1}{3}\Delta x(m_j + \frac{1}{2}m_{j-1}) \tag{8-141}$$

$$S'_A(x_A \to x_j^+) = \frac{(S_{j+1}^n - S_j^n)}{\Delta x} - \frac{1}{3}\Delta x(m_j + \frac{1}{2}m_{j+1}) \tag{8-142}$$

将上两式代入(8-140)可解出

$$m_{j-1} + 4m_j + m_{j+1} = \frac{6}{\Delta x^2}(S_{j-1}^n - 2S_j^n + S_{j+1}^n) \tag{8-143}$$

$$j=2,3\cdots N-1$$

对于 N 个计算结点，可列出 $(N-2)$ 个形如式(8-143)的代数方程组，可解出 $(N-2)$ 个二阶导数值 m_j。因此需要在上下两端点提两个边界条件。

设上下两端点的一阶导数 S_{x1} 和 S_{xN} 为已知，则由式(8-136)可给出：在上端点 1 和 2 处可列出

$$2m_1 + m_2 = \frac{6}{\Delta x^2}(S_2^n - S_1^n - \Delta x S_{x1}^n) \tag{8-144}$$

在下端点 N 和 $N-1$ 则

$$2m_N + m_{N-1} = \frac{6}{\Delta x^2}(S_{N-1}^n - S_N^n + \Delta x S_{xN}^n) \tag{8-145}$$

这样可由方程(8-143)、(8-144)和(8-145)解出 N 个结点的二阶导数值 m_j。这三个方程可用矩阵的形式写出：

$$[A](M)=(D) \tag{8-146}$$

$$[A]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathrm{M})=\begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{Bmatrix} \quad ; \quad (\mathrm{D})=\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{Bmatrix}$$

其中 d_1 和 d_N 由式(8-144)和(8-145)的右端计算，$d_j(j=2\cdots N-1)$ 由式(8-143)的右端计算。式(8-146)中的系数矩阵是一个三对角阵，可用追赶法求解，计算比较方便。实际应用表明，用三次样条函数插值较线性插值和迎风格式精度高，对于浓度变化比较缓缓的情况是能达到精度要求的。但对于含沙浓度变化迅速的情况不是很适应。

八、Holly-Preissmann 格式

Holly-Preissmann 格式也是一种插值方法，其基本思想与上节介绍的方法相类似，其目的是通过增加差分方程数目而不是增加结点数来建立较高阶精度的插值多项式。

以柯朗数为参数，取插值函数具有如下形式

$$S_A(C_r)=A_1C_r^3+A_2C_r^2+A_2C_r+A_4 \tag{8-147}$$

其中 $A_i(i=1,2,3,4)$ 为待求常数，由以下四个条件确定

$$S_A(C_r=1)=S_{j-1}^n \qquad S_{XA}(C_r=1)=S_{Xj-1}^n$$

$$S_A(C_r=0)=S_j^n \qquad S_{XA}(C_r=0)=S_{Xj}^n$$

式中 S_{XA} 为插值多项式在点 A 的一阶导数，S_X 为被 测浓度的一阶导数。将四个条件代入(8-147)经化简后得插值多项为

$$S_A(C_r)=a_1S_{j-1}^n+a_2S_j^n+aS_{Xj-1}^n+a_4S_{Xj}^n \tag{8-148}$$

其中

$$a_1=C_r^2(3-2C_r)$$

$$a_2=1-a_1$$

$$a_3=C_r^2(1-C_r)(x_j-x_{j-1})$$

$$a_4=-C_r(1-C_r)^2(x_j-x_{j-1})$$

将式(8-148)代入(8-132)可计算出 S_j^{n+1}. 插值多项式(8-148)需要用到 n 时间层的浓度一阶导数值，只有当 n 层的一阶导数值知道时才能进行 $n+1$ 时间层的浓度计算，依次地，当 $n+1$ 时间层的浓度计算出时，就得计算出这一时间层的导数值，才能使计算进行下去。因此必须计算出各层的浓度导数值。

对于简单对流问题，$u=$ 常数，这样各时间层上导数值类似地也可考虑导数本身的对流问题，对式(8-98)关于 x 求导得

$$\frac{\partial S_X}{\partial t}+u\frac{\partial S_X}{\partial x}=0 \tag{8-149}$$

相对于导数本身而言，式(8-149)表示浓度导数的简单对流。容易看出，其特征线方程与式(8-129)相同，在特征线段 AP 上同样有

$$S_{Xj}^{n+1}=S_{XA} \tag{8-150}$$

对于浓度插值多项式(8-147)关于 x 求导，并加以整理后得浓度导数插值多项式为

$$S_{XA}(C_r)=b_1S_{j-1}^n+b_2S_j^n+b_3S_{Xj-1}^n+b_4S_{Xj}^n \tag{8-151}$$

其中

$$b_1=6C_r(C_r-1)/(x_{j-1}-x_j)$$

$$b_2=-b_1$$

$$b_3=C_r(3Cr_r-2)$$

$$b_4=(C_r-1)(3C_r-1)$$

这样，将式(8-151)代入(8-150)可计算出各时间层的浓度导数值。

容易验证，当 $C_r = 0$ 或 1 时，$S_j^{n+1} = S_j^n$ 和 $S_j^{n+1} = S_{j-1}^{n+1}$，格式(8-148)在计算结点上的解是准确的，而当 $0 < C_r < 1$ 时，格式的截断误差具有四阶精度。因此，Holly-Preissmann 格式是一个二点四阶格式。由于格式的精度较高，所以其数值减幅和数值扩散较小，又由于它是一个显格式，计算比较简单方便，所以适用于河道非恒定流悬移质输移问题。图 8-18 是这个格式计算值与对流方程(8-98)解析解的比较，可见两者吻合是较好的。

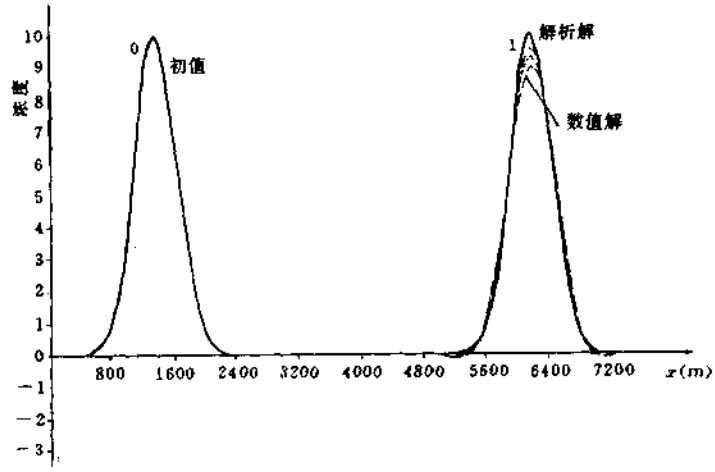


图 8-18

由于格式用到了浓度一阶导数值，因此，在每一时间层计算完后，为了下一时间层的计算，需要将浓度值和导数值储存起来，同时要计算各方程中的系数，所以，Holly-Preissmann 方法与上面介绍的几种方法相比，计算时间要长一点，需要的内存要多一些。

Holly-Preissmann 格式需要用式(8-151)计算浓度导数，所以需要提导数的初值条件和上边界条件，因此，应用这个格式时要求的条件就要多一些，要苛刻一些。对于河道非恒流含沙浓度的变化问题，这些条件是极难知道的，这就需要对其进行估值。Holly-Preissmann 通过理论分析和实际应用表明，浓度导数值的初始条件和上边界条件估值引入的误差对计算结果没有多大影响，一般经 8～10 个时间步长计算后，误差可以消失。因此，对于长河段和长系列的计算问题，不会因初估初始条件值引入的误差而影响到计算结果。

九、时间插值方法

前面介绍的插值方法都是对空间计算结点进行的，对于采用同一计算网格(相对于计算浓度所在结点而言)的两相邻点进行插值而言，如图 8-19(a)。

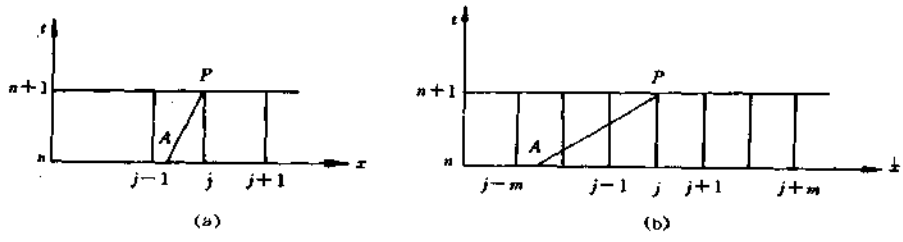


图 8-19

因
$$C_r=\frac{x_j-x_A}{x_j-x_{j-1}}=\frac{u\Delta t}{\Delta x}<1$$
这些插值方法都受到稳定性的限制，时间步长 Δt 不能选取得过大，这在实际运用中往往是不希望的，希望的是在尽可能保证具有一定精度的前提下，时间步长大一点为好以减少计算工作量。Wiggert 和 Vardy 建议采用较远离待求浓度所在结点的相邻点进行插值，如图 8-19(b)中的结点 $j-m$ 和 $j-m+1$，可以提高计算稳定条件的范围。对于图 8-19(b)的 A 点插值，插值基点浓度使用 S^n_{j-m} 和 S^n_{j-m+1} 其稳定条件是
$$m-1\leqslant C_r\leqslant m$$
计算时间步长 Δt 就允许取得较长。但是这种方法对于非线性问题往往不见效，流速的变化常使得插值基点变化，同时在邻近于开边界或闭边界的网格上需要通过边界上的多点插值如图 8-20 A' 和 A'' 点，这对边界流速变化较大时是不适用的，对于不规则边界更会带来不少麻烦。

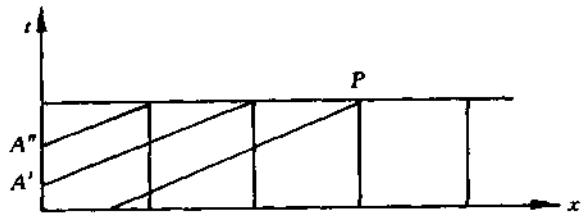


图 8-20

David E，Goldberge 建议采用时间的插值办法来克服空间插值存在的困难，如图 8-21(a)和(b)，对于如图 8-21(a)的情况，A 点上的浓度可通过结点 $(j-1,n)$ 和 $(j-1,n+1)$ 上的浓度经插值求得；而对于(b)的情况，A 点浓度则可通过结点 $(j-1,n-2)$ 和 $(j-1,n-1)$ 上的浓度经插值给出。这样，上面介绍的一些插值公式均可考虑采用，只不过此时点 A 的位置由以下方法确定。

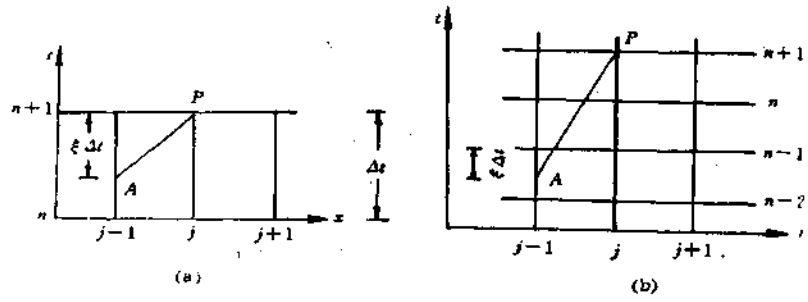


图 8-21

由
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u$$
则
$$x_P-x_A=u(t_P-t_A)$$
$$\Delta x=u(N+\xi)\Delta t$$
$$C_r=\frac{u\Delta t}{\Delta x}=\frac{1}{N+\xi}$$
式中 N 为 AP 两点间的时间层间隔数目，对于如图 7-21(b)的情况，$N=2$，特别地，当 $N=0$ 时，为图 7-21(a)的情况，此时有

$$C_r = \frac{1}{\xi} \tag{8-152}$$

Golderg 通过分析两个收敛因子 R_1 和 R_2 得到，如果采用同一插值公式，如都用线性插值，时间插值法较空间插值法得到的结果要好，如图 8-22 所示，质点浓度从 A 点出发，沿特征线经 A' 点到达待求浓度点 P，在用结点 $(j-1,n-1)$ 和 $(j-1,n)$ 的浓度插值求 A 点浓度，较用结点 $(j-1,n)$ 和 (j,n) 的浓度插值求 A' 点浓度相对于求 P 点未知浓度来说要好。这一点实际上也是容易理解的，因为对于纯对流问题而言，初始浓度分布决定着未来某一时刻 t 的浓度分布情况，而 A 点较 A' 点更接近于初始情况。正由于这一点，由时间插值方法构造的数值格式的优劣与参数 N 有关。N 大于 1，构造的格式为显式格式，N 值越大，插值基点函数所在的时间层就越接近初始时间层，这样，为计算未来时刻的浓度值，就需要把各时间层的计算结果储存起来，要求计算的储存就多。这对于长时段计算是不经济的。当 $N=0$ 时，插值基点函数与待求浓度所在的位置相邻，构造的格式为隐式格式、此时不需要储存更多的计算结果，要求的计算内存相比要少，但由于插值基点函数远离初始时间层。要想提高计算精度，就需要提高插值函数的阶数。下面介绍 Belleudy 和文献[10]提出的四阶插值方法，这种方法可以看为 Holly-Preissmann 方法的扩展。

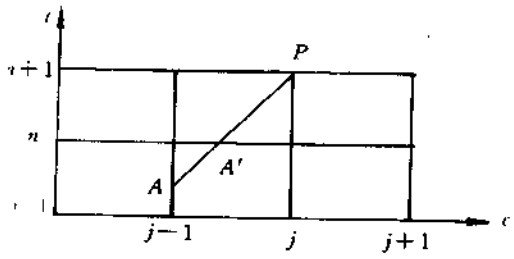


图 8-22

以 ξ 为参变数，构造三阶插值多项式，见图 8-21(a)。

$$S_A(\xi) = A_1\xi^3 + A_2\xi^2 + A_3\xi + A_4 \tag{8-153}$$

插值点 A 所在的位置为

$$\xi = \frac{t_{A+1} - t_A}{t_{n+1} - t_n} = \frac{1}{C_r}$$

因 $S_A(0) = S_{j-1}^{n+1}$ $S_A(1) = S_{j-1}^{n}$

$ST_A(0) = ST_{j-1}^{n+1}$ $ST_A(1) = ST_{j-1}^{n}$

其中 $ST_A = \dfrac{\partial S_A}{\partial t}$, $ST_{j-1}^{n} = (\dfrac{\partial S}{\partial t})_{j-1}^{n}$

将条件代入(8-153)可求得插值系数 A_1、A_2、A_3 和 A_4，将这些系数再代回(8-152)经化简后得

$$S_A(\xi) = a_1S_{j-1}^{n} + a_2S_{j-1}^{n+1} + a_3ST_{j-1}^{n} + a_4ST_{j-1}^{n+1} \tag{8-154}$$

式中 $a_1 = \xi^2(3-2\xi)$ $a_3 = -\xi^2(3\xi-1)\Delta t$

$a_2 = 1-a$ $a_4 = -\xi^2(3\xi-1)^2\Delta t$

这是一个隐格式，式中关于时间导数插值可通过对式(8-153)关于 t 求导得到

$$ST_A(\xi) = b_1S_{j-1}^{n} + b_2S_{j-1}^{n+1} + b_3ST_{j-1}^{n} + b_4ST_{j-1}^{n+1} \tag{8-155}$$

其中 $b_1 = 6\xi(\xi-1)/\Delta t$ $b_3 = \xi(3\xi-2)$

$b_2 = -b_1$ $b_4 = (\xi-1)(3\xi-1)$

插值多项式(8-154)、(8-155)中的时间导数值可用空间导数来代替，在任意结点(j,n)上，对流方程为

$$(\frac{\partial S}{\partial t})_j^n = -u_j^n(\frac{\partial S}{\partial x})_j^n$$

这样计算就比较简便，同时初始空间导浓度估值容易且准确。

由关系式(8-152)可知，当 $\xi = 0$ 时，$C_r = \infty$，且当 $\xi = 1$ 时，$C_r = 1$ 故插值多项式(8-154)允许使用较大的时间步长。图 8-23 和图 8-24 是使用这个格式计算纯对流问题和反应汇问题的结果，数值解与解析解吻合较好。

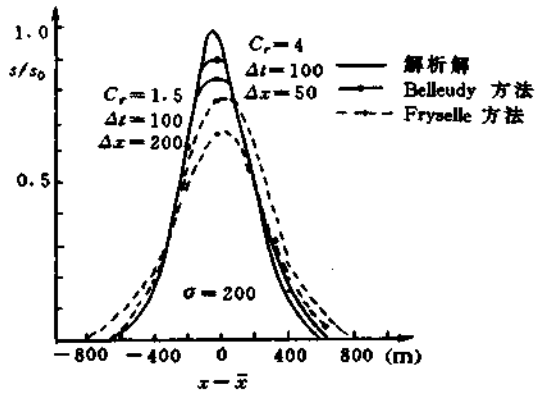


图 8-23

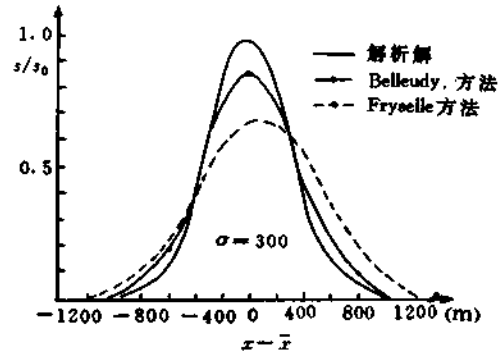


图 8-24

十、Fryxell 方法

现有求解对流方程的数值方法很多，这些方法较多的都受到柯朗条件的限制，时间步长不允许过大，且由于数值减幅较严重而难以保证质量守恒，这时对于河道非恒定悬移质引起的长系列河道变形问题是不利的，而只有时间步长选用允许较长，且质量守恒性较好的格式较为适用，但目前这方面的数值方法不多，除上节介绍的时间隐式格式(8-154)以外，这里再介绍一种双层隐式格式。

取速度 u 为常数 u_o 在网格 $[\Delta x, \Delta t]$ 上积分对流方程(8-98)，如图 8-25 所示

$$\int_o^t\int_{(j-\frac{1}{2})\Delta x}^{(j+\frac{1}{2})\Delta x}\frac{\partial S}{\partial t}dxdt = -u_o\int_o^t\int_{(j-\frac{1}{2})\Delta x}^{(j+\frac{1}{2})\Delta x}\frac{\partial S}{\partial x}dxdt \tag{8-156}$$

取

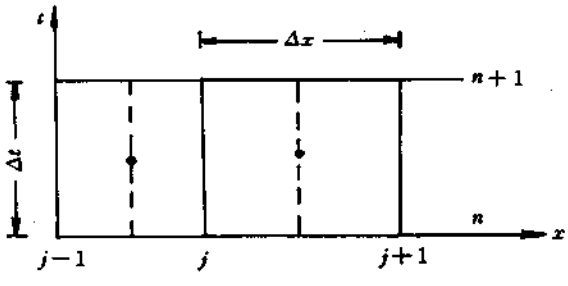


图 8-25

$$[S(t)]_j = \frac{1}{\Delta x}\int_{(j-\frac{1}{2})\Delta x}^{(j+\frac{1}{2})\Delta x}Sdx$$

亦即取任意时刻 t 浓度 S 在 $(j+\frac{1}{2})\Delta x$ 和 $(j-\frac{1}{2})\Delta x$ 微小区段内的平均浓度为点 j 上的浓度，求积分(8-156)得

$$[S(t)]_j = [S]_j^n - \frac{u_o}{\Delta x}\int_o^t[S(t)_{j+\frac{1}{2}} - S(t)_{j-\frac{1}{2}}]dt \tag{8-157}$$

为了积分上式，假设 $S(t)_{j+\frac{1}{2}}$ 和 $S(t)_{j-\frac{1}{2}}$ 在 $(n+\frac{1}{2})\Delta t$ 到 $(n+1)\Delta t$ 内呈线性变化：

$$S(t)_{j+\frac{1}{2}} = \bar{S}^{n+1/2}_{j+1/2} + \frac{\Delta t}{2}(\bar{S}^{n+1}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1/2}_{j+1/2})(t - \frac{\Delta t}{2}) \tag{8-158}$$

和

$$S(t)_{j-\frac{1}{2}} = \bar{S}^{n+1/2}_{j-1/2} + \frac{\Delta t}{2}(\bar{S}^{n+1}_{j-1/2} - \bar{S}^{n+1/2}_{j-1/2})(t - \frac{\Delta t}{2}) \tag{8-159}$$

式中 $\bar{S}^{n+1/2}_{j+1/2}$ 和 $\bar{S}^{n+1}_{j+1/2}$ 分别为浓度在点 $(j+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})$ 和 $(j+\frac{1}{2}, n+1)$ 上的浓度时间平均值。将式(8-158)和(8-159)代入积分式(8-157)并通过积分得

$$[S(t)]_j = [S]^n_j - \frac{C_r t}{\Delta t}\{2(\bar{S}^{n+1/2}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1/2}_{j-1/2}) - (\bar{S}^{n+1}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1}_{j+1/2}) + \frac{t}{\Delta t}[(\bar{S}^{n+1}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1}_{j-1/2}) - (\bar{S}^{n+1/2}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1/2}_{j-1/2})]\} \tag{8-160}$$

当 $t = \Delta t$ 时有 $[S(t)]_j = [S]^{n+1}_j$，上式变为

$$[S]^{n+1}_j = [S]^n_j - C_r\{2(\bar{S}^{n+1/2}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1/2}_{j-1/2}) - (\bar{S}^{n+1}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1}_{j-1/2}) + \frac{t}{\Delta t}[(\bar{S}^{n+1}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1}_{j-1/2}) - (\bar{S}^{n+1/2}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1/2}_{j-1/2})]\} \tag{8-161}$$

化简得

$$[S]^{n+1}_j = [S]^n_j - C_r(\bar{S}^{n+1}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1/2}_{j-1/2}) \tag{8-162}$$

而当 $t = \frac{1}{2}\Delta t$ 时 $[S(t)]_j = [S]^{n+\frac{1}{2}}_j$，式(8-160)变为

$$[S]^{n+1/2}_j = [S]^n_j - C_r[\frac{3}{4}(\bar{S}^{n+1/2}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1/2}_{j-1/2}) - \frac{1}{4}(\bar{S}^{n+1}_{j+1/2} - \bar{S}^{n+1/2}_{j-1/2})] \tag{8-163}$$

因特征线方程为

$$\frac{dx}{dt} = u_0 \qquad 或 \qquad x = u_0 t + C$$

这里 C 为积分常数。对于柯朗数 $C_r>1$ 的情形，因 $u_0>\frac{\Delta x}{\Delta t}$，故特征线在网格上的分布如图 8-26 所示。因点 $[(j+\frac{1}{2})\Delta x, (n+\frac{1}{2})\Delta t]$ 上的浓度 $[\tilde{S}]^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}}$ 由点 B 对流输送得来，若 B 点浓度 $[S]_B$ 能测定，$[S]^{n+1/2}_{j+1/2}$ 便可求出。因 $[S]^{n+1/2}_{j+1/2}$ 的坐标为 $[(j+\frac{1}{2})\Delta x, (n+\frac{1}{2})\Delta t]$，而 B 点的坐标为 $[j\Delta x, (n+\tau)\Delta t]$，则由特征线方程可写出

$$(j+\frac{1}{2})\Delta x = u_0(n+\frac{1}{2})\Delta t + C$$

$$j\Delta x = u_0(n+\tau)\Delta t + C$$

联解得

$$\tau = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{C_r}) \tag{8-164}$$

取空间平均浓度 $[S(t)]_j$ 在 Δt 内呈抛物线变化

$$[S(t)]_j = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 \tag{8-165}$$

且应满足 $[S(o)]_j = [S]^n_j$

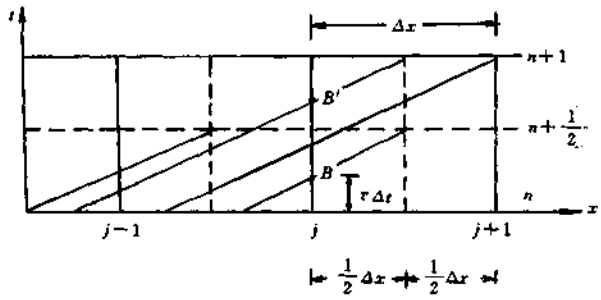


图 8-26

$$[S(\frac{1}{2}\Delta t)]_j = [S]_j^{n+\frac{1}{2}}$$

$$[S(\Delta t)]_j = [S]_j^{n+1}$$

可求得系数 C_0、C_1 和 C_2 为

$$C_0 = [S]_j^n$$

$$C_1 = (4[S]_j^{n+\frac{1}{2}} - 3[S]_j^n - [S]_j^{n+1})\frac{1}{\Delta t}$$

$$C_2 = (2[S]_j^{n+1} - 4[S]_j^{n+\frac{1}{2}} + 2[S]_j^n)\frac{1}{\Delta t^2}$$

故二次插值式为

$$[S(t)]_j = [S]_j^n + (4[S]_j^{n+\frac{1}{2}} - 3[S]_j^n - [S]_j^{n+1})\frac{t}{\Delta t} + (2[S]_j^{n+1} - 4[S]_j^{n+\frac{1}{2}} + 2[S]_j^n)\frac{t^2}{\Delta t^2} \tag{8-166}$$

根据对流输送的概念，在特征线上浓度为常值，故

$$S_{j+1/2}^{n+1/2} = [S(t)]_B$$

由式(8-164)有

$$\tau = \frac{1}{2}(\frac{C_r - 1}{C_r})$$

当

$$t = \tau\Delta t = (\frac{C_r - 1}{2C_r})\Delta t$$

时由二次插值式(8-166)有

$$S_{j+1/2}^{n+1/2} = [S(t)]_B = (\frac{1 + C_r}{2C_r^2})[S]_j^n + (\frac{C_r^2 - 1}{C_r^2})[S]_j^{n+\frac{1}{2}} + (\frac{1 + C_r}{2C_r^2})[S]_j^{n+1} \tag{8-167}$$

同理可求得 $(j - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ 的浓度值为

$$S_{j-1/2}^{n+1/2} = (\frac{1 + C_r}{2C_r^2})[S]_{j-1}^n + (\frac{C_r^2 - 1}{C_r^2})[S]_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + (\frac{1 - C_r}{2C_r^2})[S]_{j-1}^{n+1} \tag{8-168}$$

此外，B′点的时间坐标为

$$\tau = \frac{2C_r - 1}{2C_r}$$

且有

$$S_{j+1/2}^{n+1} = [S(t)]_{B'}$$

将 $\tau = (\frac{2C_r - 1}{2C_r})$ 代入二次插值多项式(8-166)得

$$S_{j+1/2}^{n+1} = (\frac{1 - C_r}{2C_r^2})[S]_j^n + (\frac{2C_r - 1}{C_r^2})[S]_j^{n+\frac{1}{2}} + (\frac{2C_r^2 - 3C_r + 1}{2C_r^2})[S]_j^{n+1} \tag{8-169}$$

同样有

$$S_{j-1/2}^{n+1} = (\frac{1 - C_r}{2C_r^2})[S]_{j-1}^n + (\frac{2C_r - 1}{C_r^2})[S]_{j-\frac{1}{2}}^{n+1/2} + (\frac{2C_r^2 - 3C_r + 1}{2C_r^2})[S]_{j-1}^{n+1} \tag{8-170}$$

将由式(8-167)到(8-170)确定的 $\tilde{S}_{j+1/2}^{n+1/2}$，$\tilde{S}_{j-1/2}^{n+1/2}$，$\tilde{S}_{j+1/2}^{n+1}$ 和 $\tilde{S}_{j-1/2}^{n+1}$ 一起代入式(8-162)和(8-163)并去掉符号[]最后得 Fryxelle 格式为

$$S_j^{n+1}=S_j^n-\left(\frac{1+C_r}{2C_r}\right)\Delta S^n-\left(\frac{C_{r-1}^2}{C_r}\right)\Delta S^{n+\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-C_r}{2C_r}\right)\Delta S^{n+1} \tag{8-171}$$

和

$$S_j^{n+\frac{1}{2}}=S_j^n-\left(\frac{2C_r-1}{4C_r}\right)\Delta S^n-\left(\frac{3C_r^2-2C_r-2}{4C_r}\right)\Delta S^{n+\frac{1}{2}}-\left(\frac{1-C_r^2}{4C_r}\right)\Delta S^{n+1} \tag{8-172}$$

式中

$$\Delta S^n=S_j^n-S_{j-1}^n$$

$$\Delta S^{n+\frac{1}{2}}=S_j^{n+\frac{1}{2}}-S_{j-1}^{n+1/2}$$

$$\Delta S^{n+1}=S_j^{n+1}-S_{j-1}^{n+1}$$

Fryxelle 格式(8-171)、(8-172)是一个双层隐格式，两个方程可求解两个未知数 $S_j^{n+\frac{1}{2}}$ 和 S_j^{n+1}。容易验证当 $C_r=1$ 时有 $S_j^{n+1}=S_{j-1}^n$，此时 Fryxelle 格式给出的解是足够精确的。当 $C_r>1$ 时，计算是稳定的，但存在数值扩散，图 8-27 是 Fryxelle 格式的两个收敛因子 R_1 和 R_2 分布曲线，图中还绘出了 Belleudy 方法的 R_1 和 R_2 曲线以资比较，可见对于短波数值模拟，时间步长不应过大，而对于长波数值模拟，时间步长允许取得较长，可望获得较好的计算结果。

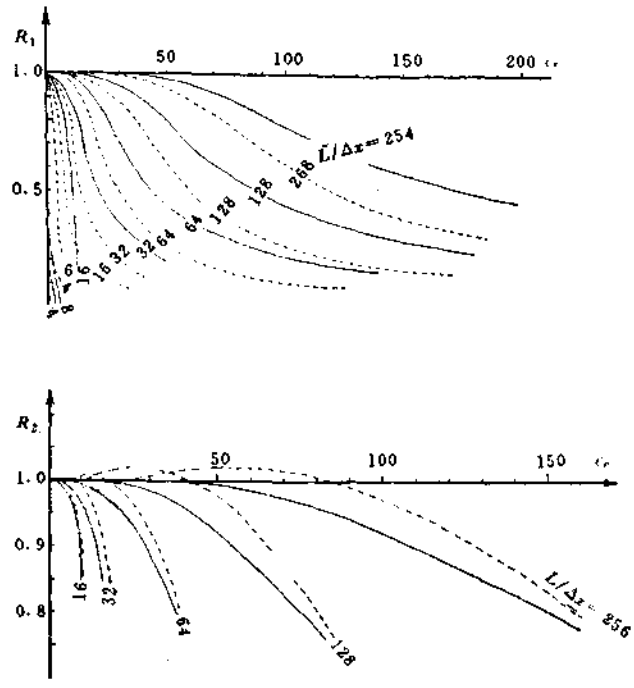


图 8-27

Fryxelle 方法与使用时间插值的 Belleudy 方法相比，在于这个格式不用估计初始导浓度，而避免实际运用时初始导浓度值带来的误差。但由于 Belleudy 方法对一阶导数估值精度较高，实际应用表明，Belleudy 方法计算精度较高，适应性较好。

十一、杨国录、贡日(J. A, Cunge)方法

杨国录、贡日方法的基本思想是采用爱尔米特和样条函数插值的结合，建立以柯朗数为参数的五阶插值多项式，多项式中嵌入了一阶和二阶导浓度，不增加计算结点数目，而是增加代数方程组的办法来提高数值计算精度。

1. 定常速度情况

取插值多项式具有如下形式

$$S_A(C_r)=\sum_{j=1}^{6}A_jCr^{6-j} \tag{8-173}$$

式中 $A_j(j=1,2\cdots\cdots6)$ 为待定常数，由以下 6 个结点条件确定

$$S_A(1)=S_{j-1}^n,\qquad S_A(0)=S_j^n$$

$$SX_A(1)=SX_{j-1}^n,\qquad SX_A(0)=SX_j^n$$

$$SXX_A(1)=CM_{j-1}^n\qquad SXX_A(0)=CM_j^n$$

$$1 - up - vq = 0 \tag{9-141}$$

这是一个一次曲面(平面),它的法向方向数为 $(1, -p, -q)$,是一个包含法线 n 的平面。

令 $\quad p=\rho\cos\theta \quad , \quad q=\rho\sin\theta$

这里(ρ,θ)为极座标,则由式(9-140)可得

$$\rho = \frac{1}{u\cos\theta + v\sin\theta \pm \sqrt{gh}}$$

因 $\rho=\dfrac{1}{u\cos\theta+v\sin\theta-\sqrt{gh}}$相当于 $\rho=\dfrac{1}{u\cos(\theta+\pi)+v\sin(\theta+\pi)+\sqrt{gh}}$,故可取

$$\rho=[u\cos\theta+v\sin\theta+\sqrt{gh}]^{-1} \tag{9-142}$$

此外,通过曲面 S 上 O 点的切平面为

$$T = pX + qY$$

它与向量 n 垂直。将(9-142)代入上式得

$$(X - uT)\cos\theta + (Y - vT)\sin\theta = \sqrt{gh}T \tag{9-143}$$

这个平面称为特征切平面(第一族切平面)。为求特征切平面的包络面,对方程(9-143)关于 θ 求导得

$$-(X - uT)\sin\theta + (Y - vT)\cos\theta = 0$$

与方程(9-143)联立求解得方程(9-143)的包络面是

$$(X - uT)^2 + (Y - vT)^2 = ghT^2 \tag{9-144}$$

这是一个特征锥,顶点在(X,Y,T)=(0,0,0),轴线为

$$X = uT \quad , \quad Y = vT$$

这个锥面与特征切平面(9-143)与 $T = b$(常数)的交线是个圆,圆心在 (ub,vb),半径为 $b\sqrt{gh}$。

同样,垂直于平面(9-141)的特征切平面(第二族切平面)是

$$(X - uT)\cos\theta + (Y - vT)\sin\theta = 0 \tag{9-145}$$

对其关于 θ 求导后再联解得包络面为

$$(X - uT)^2 + (Y - vT)^2 = 0$$

这实质上是一条直线,方程为

$$X = uT, \qquad Y = vT$$

这是一条流线,即特征锥的轴线,见图 9-8。

3. 特征关系

既然(9-134)成立,则应存在一个矢量 l,使

$$l \cdot (I - A_x p - A_y q)\frac{\partial R}{\partial t} = 0 \tag{9-146}$$

$$l \cdot (B - A_x \frac{\partial R_0}{\partial x} - A_y \frac{\partial R_0}{\partial y}) = 0 \tag{9-147}$$

将(9-131)代入(9-147)得

$$l \cdot [B - A_x \frac{\partial R}{\partial x} - A_y \frac{\partial R}{\partial y} - (A_x p + A_y q)\frac{\partial R}{\partial t}] = 0$$

因 $\quad l \cdot (I - A_x p - A_y q) = 0 \qquad$ 或 $l \cdot I = l \cdot (A_x p + A_y q)$

故有

$$l \cdot (B - A_x \frac{\partial R}{\partial x} - A_y \frac{\partial R}{\partial y} - I\frac{\partial R}{\partial t}) = 0$$

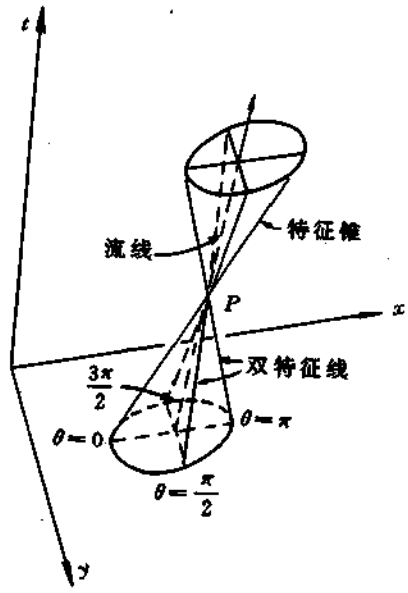


图 9-8

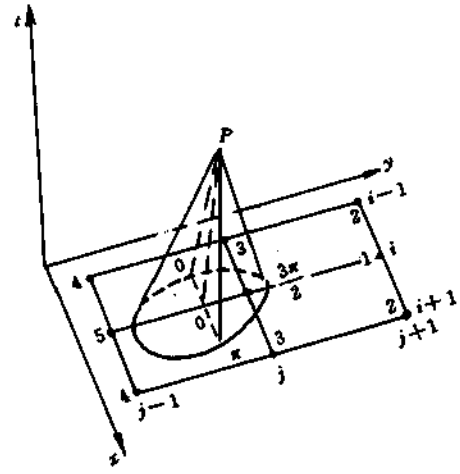


图 9-9

或
$$l\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial t}+A_x\frac{\partial R}{\partial x}+A_y\frac{\partial R}{\partial y}\right)=l\cdot B \tag{9-148}$$

利用式(9-140)、(9-141)对应于两族特征法向，可分别得

第一族 $(l_1,l_2,l_3)=(\sqrt{gh}-u\cos\theta-v\sin\theta,\cos\theta,\sin\theta)$

第二族 $(l_1,l_2,l_3)=(u\sin\theta-v\cos\theta,\sin\theta,\cos\theta)$

由式(9-148)得特征关系，沿第一族的特征关系为

$$(\sqrt{gh}-u\cos\theta-v\sin\theta)\left[\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}\right]+\cos\theta\left[\frac{\partial q_x}{\partial t}+2u\frac{\partial q_x}{\partial x}+v\frac{\partial q_x}{\partial y}\right.$$
$$\left.+u\frac{\partial q_y}{\partial y}-(u^2-gh)\frac{\partial z}{\partial x}-uv\frac{\partial z}{\partial y}\right]+\sin\theta\left[\frac{\partial q_y}{\partial t}+\frac{\partial q_x}{\partial x}+v\frac{\partial q_y}{\partial x}\right.$$
$$\left.2v\frac{\partial q_y}{\partial y}-uv\frac{\partial z}{\partial x}-(v^2-gh)\frac{\partial z}{\partial y}\right]=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta$$

或
$$(\sqrt{gh}-u\cos\theta-v\sin\theta)\frac{dz}{dt}+(u\sin\theta-v\sin\theta)\frac{dz}{d\theta}+\cos\theta\frac{dq_x}{dt}$$
$$+\sin\theta\frac{dq_y}{dt}-\sin\theta\frac{dq_x}{d\theta}+\cos\theta\frac{dq_y}{d\theta}=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta \tag{9-149}$$

式中
$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(u+\sqrt{gh}\cos\theta)\frac{\partial}{\partial x}+(v+\sqrt{gh}\sin\theta)\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{d}{d\theta}=-\sqrt{gh}\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{gh}\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

沿第二族的特征关系为

$$(u\sin\theta-v\sin\theta)\frac{dz}{dt}+\sqrt{gh}\frac{dz}{d\theta}-\sin\theta\frac{dq_x}{dt}+\cos\theta\frac{dq_y}{dt}=-f_x\sin\theta+f_y\cos\theta \tag{9-150}$$

式中
$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{d}{d\theta}=-\sqrt{gh}\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{gh}\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

如果方程组(9-129)中的变量选用 z,u,v 而不是 z,q_x,q_y，仿照上面的推导过程，同样得形如(9-149)、(9-150)的两族特征关系，即

第一族：
$$\frac{\sqrt{gh}}{h}\frac{dz}{dt}+\cos\theta\frac{du}{dt}+\sin\theta\frac{dv}{dt}-\sin\theta\frac{du}{d\theta}+\cos\theta\frac{dv}{d\theta}=\frac{\sqrt{gh}}{h}F_3+F_1\cos\theta+F_2\sin\theta \tag{9-151}$$

式中
$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(u+\sqrt{gh}\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+(v+\sqrt{gh}\sin\theta)\frac{\partial}{\partial y},$$
$$\frac{d}{d\theta}=-\sqrt{gh}\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{gh}\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

第二族：
$$-\sin\theta\frac{du}{dt}+\cos\theta\frac{dv}{dt}+\frac{\sqrt{gh}}{h}\frac{dz}{d\theta}=-F_1\sin\theta+F_1^2\cos\theta \tag{9-152}$$

其中
$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\quad,\quad\frac{d}{d\theta}=-\sqrt{gh}\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{gh}\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$
$$F_3=u\frac{\partial z_0}{\partial x}+v\frac{\partial z_0}{\partial y},\qquad z_0\text{ 为河底床面高程。}$$

从方程(9-149)和(9-150)可以看出，θ 在 $(o,2\pi)$ 中取不同的值，可以列出无穷多个形如方程(9-149)、(9-150)的特征关系，可用于求解。

4. 双特征线法

特征锥的母线称为双特征线。对应一个 θ 值有一条双特征线，共有无穷多条双特征线，在每一条双特征线上可列出一个特征关系。这些双特征线在任意空间点 (x,y,t) 相交于点 P(圆锥顶点)，与 xoy 平面相交为一圆域，所有圆域内的点值都对 P 点产生影响，称圆域为 P 点的依赖域，另一方面，这些双特征线过 P 点后构成一圆锥，这个圆锥内的点值又受到 P 点的值的影响，这个锥内所包含的区域称为 P 点的影响域。

双特征线法中选用了均匀分布在特征锥四方，即 θ 分别取 0、$\frac{\pi}{2}$、π 和 $\frac{3\pi}{2}$ 的四条双特征线，对应有四个第一特征关系式。其中相应于 $\theta=0,\pi$ 的两条双特征线和流线位于与 xot 面平行的平面上，相应于 $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ 的两条双特征线和流线同在与 $y0t$ 平面平行的平面上。若把在一个共面上的三条特征关系归为一组，共有二组特征关系式，每一组有三个特征关系式，线性差分这些关系式便可得到点 P 的三个量 u,v,z，同样，另一组也给出三个量 u,v,z，取其平均值作为 P 点的正式解。

取矩形网格如图 9-9 所示，$x=i\Delta x,y=j\Delta y,t=n\Delta t,\Delta x,\Delta y,\Delta t$，分别依次表示 x、y 和 t 方向的距离和时间步长，待求点设置在 P 点 $(i,j,n+1)$。这样圆锥底面覆及四个计算网格，9个计算结点，但具体到每一条双特征线来说系差分形式而定，或涉及到 4 个点，或 6 个点。

如对应 $\theta=0$ 的特征关系，式(9-151)成为
$$\frac{\sqrt{gh}}{h}\frac{dz}{dt}+\frac{du}{dt}+\frac{dv}{d\theta}=\frac{\sqrt{gh}}{h}F_3+F_1 \tag{9-153}$$
$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(u+\sqrt{gh})\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y},\frac{d}{d\theta}=\sqrt{gh}\frac{\partial}{\partial y}$$

取 $c=\sqrt{gh}$，若 $u+c>0$，取图 9-9 所示的 (i,j) 点左方顺 y 轴 6 个点：$(i-1,j-1)$、$(i-1,j)$、$(i-1,j+1)$、$(i,j-1)$、(i,j) 和 $(i,j+1)$；若 $u+c<0$(流向与 x 轴相逆的情况)则取 (i,j) 点右方顺 y 轴 6 个点，便于书写分别编号 0～5，这样，所导出的差分式可不必区分 $u+c$ 取正负值的情况。

对特征关系(9-153)直接差分

$$\frac{\partial z}{\partial t}\approx\frac{z_0^{n+1}-z_0^n}{\Delta t}$$

$$(u+c)\frac{\partial z}{\partial x}\approx\begin{cases}(u_0^n+c_0^n)\dfrac{z_0^n-z_3^n}{\Delta x} & \text{当 } u+c>0\\ -(u_0^n+c_0^n)\dfrac{z_0^n-z_3^n}{\Delta x} & \text{当 } u+c<0\end{cases}=|u_0^n+c_0^n|\frac{z_0^n-z_3^n}{\Delta x}$$

$$v\frac{\partial z}{\partial y}\simeq\frac{1}{2\Delta y}[v_0^n[(z'_1-z'_5)+|v_0^n|(2z'_0-z'_1-z'_5)]$$

$$=\frac{1}{2\Delta y}\{v_0^n[(1-\lambda_1)(z_1^n-z_0^n)+\lambda_1(z_2^n-z_4^n)$$

$$+|v_0|[(1-\lambda_1)(2z_0^n-z_1^n-z_5^n)+\lambda_1(2z_3^n-z_2^n-z_4^n)]\}$$

式中 z'_0,z'_1 及 z'_3 分别表示 z_0^n 与 z_3^n，z_1^n 与 z_2^n 及 z_5 与 z_4^n 的内插值，对 $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 也可列出上述类似的式子。至此，特征关系式(9-153)的差分式子为

$$\frac{c_0^n}{h}\{\frac{z_0^{n+1}-z_0^n}{\Delta t}+|u_0^n+c_0^n|\frac{z_0^n-z_3^n}{\Delta x}+\frac{v_0^n}{2\Delta y}[(1-\lambda_1)(z_1^n-z_5^n)$$

$$+\lambda_1(z_2^n-z_4^n)]+\frac{|v_0^n|}{2\Delta y}[(1-\lambda_1)(2z_0^n-z_1^n-z_5^n)+\lambda_1(2z_3^n-z_2^n-z_4^n)]\}$$

$$+\{\frac{u_0^{n+1}-u_0^n}{\Delta t}+|u_0^n+c_0^n|\frac{u_0^n-u_3^n}{\Delta x}+\frac{v_0^n}{2\Delta y}[(1-\lambda_1)(u_1^n-u_5^n)+\lambda_1(u_2^n-u_4^n)]$$

$$+|v_0|[(1-\lambda_1)(2u_0^n-u_1^n-u_5^n)+\lambda_1(2u_3^n-u_2^n-u_4^n)]\}$$

$$+\frac{c_0^n}{2\Delta y}\{[(1-\lambda_1)(v_1^n-v_5^n)+\lambda_1(v_2^n-v_4^n)]\}=(\frac{\sqrt{gh_0^n}}{h_0^n})F_3^n+F_1^n \tag{9-154}$$

式中，$\lambda_1=|u_0+v_0|\frac{\Delta t}{\Delta x}$。对应取 $\theta=0$ 时与流线对应的特征关系可据式(9-152)为

$$\frac{dv}{dt}+\frac{\sqrt{gh}}{h}\frac{dz}{d\theta}=F_2 \tag{9-155}$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y},\frac{d}{d\theta}=\sqrt{gh}\frac{\partial}{\partial y}$$

若 $u>0$ 取点 (i,j) 顺 y 轴左方六个点，若 $u<0$，取 (i,j) 顺 y 轴左方六个点。仿照式(9-154)的差分形式有

$$\frac{v_0^{n+1}-v_0^n}{\Delta t}+|u_0|\frac{v_0^n-v_3^n}{\Delta x}+\frac{1}{2\Delta y}\{v_0^n[(1-\lambda_3)(v_1^n-v_5^n)+\lambda_3(v_2^n-v_4^n)]$$

$$+|v_0^n|[(1-\lambda_3)(2v_0^n-v_1^n-v_5^n)+\lambda_3(2v_3^n-v_2^n-v_4^n)]\}$$

$$+\frac{g}{2\Delta y}\{(1-\lambda_3)(z_1^n-z_5^n)+\lambda_3(z_2^n-z_4^n)\}=F_2^n \tag{9-156}$$

式中 $\lambda_3=|u_0|\frac{\Delta t}{\Delta x}$。对于 $\theta=\pi$，相应的特征关系式(9-151)为

$$\frac{\sqrt{gh}}{h}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\sqrt{gh}}{h}F_3-F_1 \tag{9-157}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+(u-\sqrt{gh})\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}=-\sqrt{gh}\frac{\partial}{\partial y}$$

若 $(u-\sqrt{gh})>0$ 取点 (i,j) 顺 y 轴右方 6 个点，若 $(u-\sqrt{gh})<0$，取 (i,j) 点顺 y 轴右方 6 个点，相应的差分形式与式(9-154)是相同的，只是要注意的是脚标 0-5 所取的值在点 (i,j)

顺 y 轴右方 6 个点值。这样，便在第一个共面上的三组特征关系写成差分形式，可显式求解 3 个未知量 u_0^{n-1}，v_0^{n+1} 和 z_0^{n+1}。类此，可将在第二个共面上的三组特征关系写成差分形式，也可求解出 3 个未知量 u_0^{n+1}，v_0^{n+1} 和 z_0^{n+1}，最后取这两组共面上特征关系在点 P 的解的平均值作为最后解。上面计算的稳定条件是

$$\lambda_1 = |u_0 \pm c_0| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1$$

应该指出：上面的解法，即取两个共面上的平均解作为最后解，这只是解法的一种，由于过点 P 有无穷条双特征线，故可有多种解法。在韩曾萃、程杭平的模型中[18]，在奇数时段用 $\theta = 0$ 和 π 的双特征线及流线，偶数时段用 $\theta = \pi/2$ 和 $3\pi/2$ 的双特征线及流线建立差分方程，这也是一种解法。

5. 边界条件提法

从一维问题的边界条件提法中我们知道，如果在计算中需要用到一个从边界以外出发的特征关系，就必须给定一个条件，即与特征线的走向和数目有关。对于内点 P，过此点作一特征锥并与 $x0y$ 平面相交，这说明首先必须给定初始条件 $u(x,y,0)$，$v(x,y,0)$ 和 $z(x,y,0)$。

对于 $\theta = 0,\pi$ 的双特征线走向顺 x 轴，由特征关系(9-151)可知，这两条双特征线的走向取决于 $(u \pm \sqrt{gh})$ 的大小，对于缓流 $F_r < 1$，则 $(u \pm \sqrt{gh}) \lesseqgtr 0$，故需要在上下两个开边界各提一个水力条件，而对于 $\theta = 0,\pi$ 顺 y 轴，双特征线走向取决于 $(v \pm \sqrt{gh})$ 两项的对比大小，同样是对于缓流 $F_r < 1$，$(v \pm \sqrt{gh}) \lesseqgtr 0$，必须在两个闭边界上各提一个水力条件。

但对于应用第二族特征关系，求解问题时，边界条件提法取决于水流的走向。从特征关系(9-152)可知，$\theta = 0,\pi$ 时的特征线走向只与 u 有关，当 $u > 0$ 时，走向顺 x 轴(顺流)，当 $u < 0$，走向逆 x 轴(逆流)，边界条件提法(形式和数目)随之改变。

特征理论法求解二维问题，将偏微分方程组化成全微分方程组，使得耦合求解方程成为可能，并按各物理量输移走向作差分方程，整个解比较切合于实际。但是，对某一个设置在点 $P(x,y,t_{n+1})$ 上的解 $\mathbf{R}_{i,j}^{n+1}$，由于依懒于上一时间层上的解，而过点 $P(x,y,t_{n+1})$ 作特征锥交于 $x0y$ 平面的园域，不管是对平面域内进行矩形剖分还是三角形剖分，园域的周线都不可能做到与剖分域上各计算结点相重合，这就需要沿 xy 各自方向进行线性插值或面元插值，插值的精度影响了解的精度，这一点还有待于进一步研究。

第六节　平面二维挟沙水流模型

前面介绍一维模型时指出，建立动床数学模型的主要困难在于周界是可动的，二维问题更加复杂。在挟沙水流作用下，河床在平面上发生了变形，这种变形反转来又影响到水流泥沙平面运动，这些都给基本方程求解、数值处理以及辅助方程的选用带来极大的困难。从描述动床挟沙水流基本方程式(9-18)、(9-19)、(9-20)和(9-21)看出，不说求其解析解，就是要能做到求较精确的数值解也是困难的，只能是通过考虑某些特定条件，作出某些假设和采用一定的数值处理技巧才有可能求得其近似解。就这点上讲，现有平面二维动床模型，主要是针对浅水问题和低含沙浓度问题。在解的方法上主要采用非耦合解法和破开算子法，或两者的结合运用。下面分别介绍几个具体模型。

一、林秉南、韩曾萃模型

不考虑推移质运动，而只考虑悬移质输移且低含沙浓度情况下的河床变形问题，且对于潮

沙水流还考虑了柯氏力项，基本方程(9-18)-(9-20)可写成

$$\frac{\partial hS}{\partial t}+r'\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{\partial uhS}{\partial x}+\frac{\partial vhS}{\partial y}=0 \tag{9-158}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{\partial uh}{\partial x}+\frac{\partial vh}{\partial y}=0 \tag{9-159}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial z}{\partial x}=-g\frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{C^2h}-Fv \tag{9-160}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial z}{\partial y}=-g\frac{v\sqrt{u^2+v^2}}{C^2h}+Fu \tag{9-161}$$

四个方程包含五个未知数 u,v,z,z_s 和 s，考虑不平衡输沙方程(9-42)

$$\frac{\partial hS}{\partial t}+\frac{\partial uhS}{\partial x}+\frac{\partial vhS}{\partial y}=\omega(\beta.S_*-\beta S) \tag{9-162}$$

方程组是封闭的可以求解。

1. 求解方法

从方程(9-158)、(9-159)、(9-160)、(9-161)和(9-162)看出，在考虑低含沙浓度的情况下，挟沙水流运动方程中除谢才系数 C 要考虑河床在变形过程中需要调整外，其余各项不再含有含沙量 S 这个变量，同时，水流连续方程(9-159)和运动方程(9-160)、(9-161)中包含有河床高程 Z_s 随时空变化项，由于是在整个计算域内考虑低浓度的情况，这一项相对其它各项而言一般都比较小。此外，如果从纵横向输沙量变化角度考虑，泥沙连续方程(9-158)和不平衡输沙方程(9-162)中的沙量的槽储作用 $\frac{\partial hS}{\partial t}$ 相对也较小。因此，液固两相各物理量在各方程中的耦合作用也就较弱，这就可以考虑将液固两相方程分开求解，即采用非耦合求解方法。如果进一步考虑将挟沙水流连续方程和运动方程中的河床高程随时变化项在任意时间层按

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t}\approx\frac{\partial Z_s^n}{\partial t}$$

处理，这样，方程(9-159)、(9-160)和(9-161)的求解就完全可借用平面二维水流模型求解方法。剩下的问题是如何求解方程(9-158)和(9-162)。

将方程分裂成

$$r'\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{\partial hS}{\partial t}+\frac{\partial uhS}{\partial x}=0 \tag{9-163}$$

$$r'\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{\partial hS}{\partial t}+\frac{\partial vhS}{\partial y}=0 \tag{9-164}$$

和

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\omega}{h}(\beta.S_*-\beta S) \tag{9-165}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+v\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\omega}{h}(\beta.S-\beta S) \tag{9-166}$$

将计算域剖分成矩形域，并将上列方程写成稳式有限差分方程

$$r'(Z_{i,j}^{n+1/2}-Z_{i,j}^n)+(hS)_{i,j}^{n+1/2}-(hS)_{i,j}^n+\theta\frac{\gamma_x}{2}[(huS)_{i+2,j}^{n+1/2}-(huS)_{i-2,j}^{n+1/2}]$$
$$+(1-\theta)\frac{\gamma_x}{2}[(huS)_{i+2,j}^n-(huS)_{i-2,j}^n]=0 \tag{9-167}$$

$$r'(Z_{i,j}^{n+1}-Z_{i,j}^{n+\frac{1}{2}})+(hS)_{i,j}^{n+1}-(hS)_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}+\theta\frac{\gamma_x}{2}[(hvS)_{i,j+1}^{n+1}-(hvS)_{i,j-1}^{n+1}]$$
$$+(1-\theta)\frac{\gamma_x}{2}[(hvS)_{i,j+1}^{n+1/2}-(hvS)_{i,j-1}^{n+1/2}]=0 \tag{9-168}$$

和

$$S_{i,j}^{n+1/2}-S_{i,j}^{n}+u_{i,j}^{n+1/2}\frac{\gamma_x}{r}[\theta(S_{i+2,j}^{n+1/2}-S_{i-2,j}^{n+1/2})+(1-\theta)(S_{i+2,j}^{n}-S_{i-2,j}^{n})]$$

$$-|u_{i,j}^{n+1/2}|\frac{\gamma_x^2}{4}[\theta(S_{i+2,j}^{n+1/2}-2S_{i,j}^{n+1/2}+S_{i-2,j}^{n+1/2})+(1-\theta)(S_{i+2,j}^{n}-2S_{i,j}^{n}+S_{i-2,j}^{n})]$$

$$=\frac{\theta}{2}[\frac{\omega}{h}(\beta_*S_*-\beta S)]_{i,j}^{n+1/2}+\frac{(1-\theta)}{2}[\frac{\omega}{h}(\beta_*S_*-\beta S)]_{i,j}^{n} \tag{9-169}$$

$$S_{i,j}^{n+1}-S_{ij}^{n+1/2}+v_{i,j}^{n+1}\frac{\gamma_y v}{4}[\theta(S_{i,j+2}^{n+1}-S_{i,j-2}^{n+1})+(1-\theta)(S_{i,j+2}^{n+1/2}-S_{i,j-2}^{n+1/2})]$$

$$-|v_{i,j}^{n+1}|\frac{\gamma_y^2}{4}[\theta(S_{i,j+2}^{n+1/2}-2S_{i,j}^{n+1}+S_{i,j-2}^{n+1})+(1-\theta)(S_{i,j+2}^{n+1/2}-2S_{i,j}^{n+1/2}+S_{i,j-2}^{n+1/2})]$$

$$=\frac{\theta}{2}[\frac{\omega}{h}(\beta_*S_*-\beta S)]_{i,j}^{n+1}+\frac{(1-\theta)}{2}[\frac{\omega}{h}\beta_*S_*-\beta S)]_{i,j}^{n+1/2} \tag{9-170}$$

式中 $\gamma_x=\Delta t\Delta x,\gamma_y=\Delta t/\Delta y,\theta$ 为时间权重系数。方程(9-165)、(9-166)的差分方程具有 Lax-Wendroff 格式的性质，仅在取两时间层加权平均和选用计算点上有些差别。当 $\theta\neq 0$ 时具有半隐式的性质，稳定条件比较好。整个求解步骤是，先按二维水流模型求液相方程(9-159)、(9-160)和(9-161)，然后按方程(9-169)、(9-170)计算含沙量，再由方程(9-167)、(9-168)计算河床变形。

由于求解含少量时用到了四个计算结点，且只能在上边界给出含沙量过程线作为边界条件，故在下游端边界点上各时间层上的浓度需要使用类似于一维计算过程中的特征插值。同样，在使用方程(9-167)计算河床变形时，因不平衡输沙模型中对于变量 Z_* 属初值问题，而方程(9-167)涉及到空间上的三个计算结点。所以两端边界上的河床高程需要给定。

在潮汐水流泥沙输移与河床变形计算中，利用杭州湾实测资料，建议采用以下经验公式计算沉速 ω 和平衡及不平衡条件下近底含沙量与垂线平均含沙量的比值 β_* 和 β：

当 $\omega>0.0015$m/s 时，　　$\omega=0.0015(\frac{S}{r_s})^{0.366}$ m/s

对其它情况下采用　　$\omega=0.0015m/s$

$$\beta_*=3.25+0.55\ln\frac{\omega}{\kappa u_*}$$

$$\beta=(\frac{h}{2d})^{\frac{\omega}{\kappa u_*}}$$

水流挟沙力按经验公式

$$S_{*v}=10\frac{u^2}{h}$$

计算，S_{*v} 为体积比挟沙力。这个模型曾用一杭州湾潮汐水流计算中发现，潮位计算值与实测值吻合较好，流速与含沙量变化相差略大。

二、窦国仁、赵士清模型

采用非耦合解水流基本方程和泥沙基本方程。对水流连续方程和运动方程采用一种显隐式交替方向求解。而将考虑扩散项的二维悬沙不平衡输沙方程(9-42)分裂成两步：在 $(n\sim n+\frac{1}{2})\Delta t$ 时间层求

$$\frac{(hS)_{i,j}^{n+1/2}-(hS)_{i,j}^{n}}{\Delta t}+(\frac{\partial huS}{\partial x})_{i+\frac{1}{2},j}^{n}-(\frac{\partial}{\partial x}hD_x\frac{\partial S}{\partial x})_{i,j}^{n}=[\alpha\omega\beta_m(S_*-S)]_{i,j}^{n} \tag{9-171}$$

在 $(n+\frac{1}{2}\sim n+1)\Delta t$ 时间层求

$$\frac{(hS)_{i,j}^{n+1}-(hS)_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t}+\left(\frac{\partial hvS}{\partial y}\right)_{i,j+1/2}^{n+1}-\left(\frac{\partial}{\partial y}hD_y\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{i,j}^{n+1/2}=\left[\alpha\omega\beta_m(S_*-S)\right]_{i,j}^{n+1/2}$$

(9-172)

两阶导数扩散项采用中心差分逼近，而一阶导数对流项的差分考虑了水流的流向，在计算中采用迎风格式取

$$S_{i+\frac{1}{2},j}=\begin{cases}S_{i,j} & \text{当 } u\geqslant 0 \text{ 时}\\ S_{i+1,j} & \text{当 } u<0 \text{ 时}\end{cases}$$

$$S_{i,j+\frac{1}{2}}=\begin{cases}S_{i,j} & \text{当 } v\geqslant 0 \text{ 时}\\ S_{i,j+1} & \text{当 } v<0 \text{ 时}\end{cases}$$

式中 α 为恢复饱和系数，β_m 按如下方法取值

$$\beta_m=\begin{cases}1 & \text{当 } S\geqslant S_* \text{ 时}\\ P_k & \text{当 } S<S_* \text{ 时}\end{cases}$$

P_k 为参加冲刷的床沙中第 k 粒径组泥沙占床沙总组成中的比值。

不难看出，二维不平衡输沙方程被分裂成两个各自沿 x 和 y 方向具有一维不平衡输沙方程的形式，求解比较方便。在按差分方程(9-171)、(9-172)的计算中每一时间分步都是采用隐式计算，稳定性较好，且涉及到三个计算结点，可采用追赶法求解差分方程组。这种差分方法可看成是一维全隐式差分方法的直接移植，对于对流不是十分强的情况是可行的。

三、韩曾萃、程杭平模型

用破开算子法分裂二维悬沙不平衡输沙方程和河床变形方程，虽然给计算带来了方便，正如前面两节所指出的也带来了一些麻烦。这个模型采用直接离散的办法来求解二维悬沙不平衡输沙方程和河床变形方程。

根据水流运动的不同走向，方程(9-162)可直接采用显式迎风格式得

$$S_{i,j}^{n+1}=S_{i,j}^{n}-\frac{u_{i,j}^{n}}{2}\Delta S_x+\frac{|u_{i,j}^{n}|}{2}\Delta^2 S_x-\frac{v_{i,j}^{n}}{2}\Delta S_y+\frac{|v_{i,j}^{n}|}{2}\Delta^2 S_y$$

$$+\frac{\omega}{h_{i,j}^{n}}(\beta_* S_{*i,j}^{n}-\beta S_{i,j}^{n})\Delta t \qquad (9\text{-}173)$$

式中

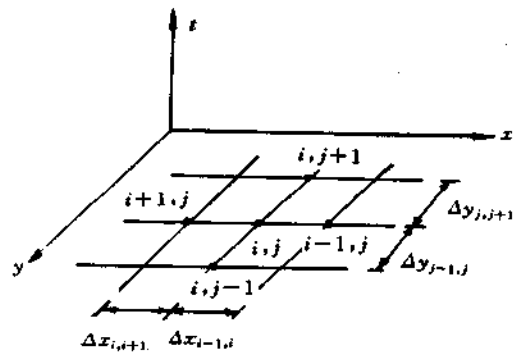


图 9-10

$$\Delta S_x=\lambda_x^- S_{i-1,j}^{n}-(\lambda_x^- -\lambda_x^+)S_{i+1,j}^{n}-\lambda_x^+ S_{i+1,j}^{n}$$

$$\Delta^2 S_x=\lambda_x^- S_{i-1,j}^{n}-(\lambda_x^- +\lambda_x^+)S_{i,j}^{n}+\lambda_x^+ S_{i+1,j}^{n}$$

$$\Delta S_y=\lambda_y^- S_{i,j-1}^{n}-(\lambda_y^- -\lambda_y^+)S_{i,j}^{n}-\lambda_y^+ S_{i,j+1}^{n}$$

$$\Delta^2 S_y=\lambda_y^- S_{i,j-1}^{n}-(\lambda_y^- -\lambda_y^+)S_{i,j}^{n}+\lambda_y^+ S_{i,j+1}^{n}$$

$$\lambda_x^+=\frac{\Delta t}{\Delta x_{i,j+1}},\qquad \lambda_x^-=\frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1,j}}$$

$$\lambda_y^+=\frac{\Delta t}{\Delta y_{i,j+1}},\qquad \lambda_y^-=\frac{\Delta t}{\Delta y_{i-1,j}}$$

$\Delta x_{i,j+1}$ 为网格结点 (i,j) 和 $(i+1,j)$ 的距离，其余类此。

忽略河床变形方程(9-158)中的含沙量随时变化项，可直接离散成

$$\Delta Z_{si,j}^{n+1}=\Delta Z_{si,j}^{n}-\frac{\Delta t}{\gamma'}\left[\frac{(hus)_{i-1,j}^{n}-(hus)_{i+1,j}^{n}}{\Delta x_{i,j+1}+\Delta x_{i-1,j}}+\frac{(hvs)_{i,j-1}^{n}-(hvs)_{i,j+1}^{n}}{\Delta y_{i-1,j}+\Delta y_{i,j+1}}\right] \qquad (9\text{-}174)$$

网格剖分如图 9-10 所示。

水流连续方程(9-159)和运动方程(9-160)、(9-161)采用特征理论法求解，求得水力要素 u,v,z 后按下面的经验公式计算水流挟沙力

$$S_* = 0.008\left(\frac{u_i^2 + v_i^2}{h_i\omega_i}\right)^m \tag{9-175}$$

指数 $m = 0.095 \sim 1.0$，沉速公式 ω 按下式计算

$$\omega_i = \left[0.027\left(\frac{\sqrt{u_i^2 + v_i^2}}{h_i}\right)^{1.2}\right]\frac{\omega_i(d_{50i})}{\omega(d_{50})} \tag{9-176}$$

公式(9-175)、(9-176)是由钱塘江及杭州弯的实测资料整理得到的经验公式，故有一定的局限性。

和一维问题一样，不采用破形算子法直接离散方程，从提高数值计算精度讲，还有待于深入研究。

四、李义天模型

李义天基于有限解析法的基本思想，用单元内插值函数近似代替解析解，建立一个既能基本保持有限解析法计算贮存量较小的特点，又能较适用于不规则河道边界的水流泥沙计算模型。

1. 基本方程

在恒定情况和低浓度条件下，该模型的工作方程为

$$\frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + g\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{gn^2u\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}} = \varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{9-177}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + g\frac{\partial z}{\partial y} + g\frac{n^2v\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}} = \varepsilon\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

K 粒径组沙含沙量计算采用不平衡输沙方程

$$\frac{\partial huS_k}{\partial x} + \frac{\partial hvS_k}{\partial y} - \varepsilon_s\left(\frac{\partial^2 S_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 hS_k}{\partial y^2}\right) = \alpha\omega_k(S_{*k} - S_k) \tag{9-178}$$

ε_s 悬移质扩散系数。河床变形方程

$$\gamma' \frac{\partial z_i}{\partial t} = \alpha\omega_k(S_k - S_{*k}) \tag{9-179}$$

各式中符号意义同前。

2. 数值方法

(1)流速场计算。

模型采用 9 结点四边形等参单元(图 9-11)进行插值，其形函数为：

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{1}{4}(\xi\xi_i + \xi^2)(\eta\eta_i + \eta^2) & i = 1、3、7、9\ (\text{角结点}) \\ \frac{1}{2}(\xi\xi_i + \xi^2)(1 - \eta^2) & i = 4、6\ (\text{边结点}) \\ \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(\eta\eta_i + \eta^2) & i = 2、8\ (\text{边结点}) \\ (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) & i = 5\ (\text{中心结点}) \end{cases} \tag{9-180}$$

任意函数 f 可写成

$$f=\sum_{i=1}^{9} f_i\varphi_i \quad (i\text{ 为单元结点号}) \tag{9-181}$$

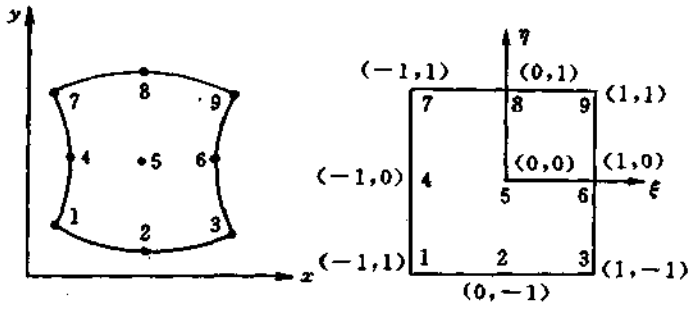


图 9-11 等参数单元

任意函数 f 在单元的一阶、二阶导数分别为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=A\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+B\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}=C\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+D\dfrac{\partial f}{\partial \eta}\end{cases} \tag{9-182}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=A\dfrac{\partial}{\partial \xi}(A\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+B\dfrac{\partial f}{\partial \eta})+B\dfrac{\partial}{\partial \xi}(A\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+B\dfrac{\partial f}{\partial \eta})\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=C\dfrac{\partial}{\partial \xi}(C\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+D\dfrac{\partial f}{\partial \eta})+D\dfrac{\partial}{\partial \eta}(C\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+D\dfrac{\partial f}{\partial \eta})\end{cases} \tag{9-183}$$

式中 $A=J^{-1}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}$; $B=-J^{-1}\dfrac{\partial y}{\partial \xi}$; $C=-J^{-1}\dfrac{\partial x}{\partial \eta}$

$D=J^{-1}\dfrac{\partial x}{\partial \xi}$; $J=\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\dfrac{\partial y}{\partial \eta}-\dfrac{\partial x}{\partial \eta}\dfrac{\partial y}{\partial \xi}$

在计算区域内对任一单元的任一结点 m 将式(9-180)、(9-181)、(9-182)和(9-183)代入(9-177)得

$$h_m\frac{\partial u}{\partial x}+u_m\frac{\partial h}{\partial x}+h_m\frac{\partial v}{\partial y}+v_m\frac{\partial h}{\partial y}=0$$

$$u_m\frac{\partial u}{\partial x}+v_m\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial z}{\partial x}+g\frac{n^2u_m\sqrt{u_m^2+v_m^2}}{h_m^{4/3}}=\varepsilon(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \tag{9-184}$$

$$u_m\frac{\partial v}{\partial x}+v_m\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial z}{\partial y}+g\frac{n^2v_m\sqrt{u_m^2+v_m^2}}{h_m^{4/3}}=\varepsilon(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})$$

式中 h_m,u_m 和 v_m 分别为 m 点水深和 x、y 方向流速。用形函数表达式(9-181),等参单元上函数 f 的各阶导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial \xi}=\dfrac{\partial}{\partial \xi}(\sum\limits_{i=1}^{9}f_i\varphi_i)=\sum\limits_{i=1}^{9}f_i\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial \eta}=\dfrac{\partial}{\partial \eta}(\sum\limits_{i=1}^{9}f_i\varphi_i)=\sum\limits_{i=1}^{9}f_i\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}\end{cases} \tag{9-185}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{9} f_i\varphi_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{9} f_i\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial \xi^2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}=\dfrac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\sum\limits_{i=1}^{9} f_i\varphi_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{9} f_i\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial \eta^2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial \xi\partial \eta}=\dfrac{\partial^2}{\partial \xi\partial \eta}\left(\sum\limits_{i=1}^{9} f_i\varphi_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{9} f_i\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial \xi\partial \eta}\end{cases}\tag{9-186}$$

式中

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(\xi_i+2\xi)(\eta\eta_i+\eta^2) & i=1、3、7、9\\ \dfrac{1}{2}(\xi_i+2\xi)(1-\eta^2) & i=4、6\\ -\xi(\eta\eta_i+\eta^2) & i=2、3\\ -2\xi(1-\eta^2) & i=5\end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(\xi\xi_i+\xi^2)(\eta_i+2\eta) & i=1、3、7、9\\ -\eta(\xi\xi_i+\xi^2) & i=4、6\\ \dfrac{1}{2}(1-\xi^2)(\eta_i+2\eta) & i=2、8\\ -2\eta(1-\xi^2) & i=5\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\eta\eta_i+\eta^2) & i=1、3、7、9\\ 1-\eta^2 & i=4、6\\ -(\eta\eta_i+\eta^2) & i=2、8\\ 2(1-\eta^2) & i=5\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\xi\xi_i+\xi^2) & i=1、3、7、9\\ -(\xi\xi_i+\xi^2) & i=4、6\\ 1-\xi^2 & i=2、8\\ -2(1-\xi^2) & i=5\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi\partial \eta}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(\xi_i+2\xi)(\eta_i+2\eta) & i=1、3、7、9\\ -\eta(\xi_i+2\xi) & i=4、6\\ -\xi(\eta_i+2\eta) & i=2、8\\ 4\xi\eta & i=5\end{cases}$$

这样，将式(9-185)、(9-186)代入式(9-182)、(9-183)可得到任一函数 f 在 xy 平面上的各阶导数，进而式(9-184)中的各阶导数在局部坐标 $\eta-\xi$ 上相应得到确定。

将(9-184)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{n^2\sqrt{u_m^2+v_m^2}}{h_m^{4/3}} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{n^2\sqrt{u_m^2+v_m^2}}{h_m^{4/3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_m \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})-g\frac{\partial z}{\partial x} \\ \varepsilon(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})-g\frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{9-187}$$

亦即 $$MX=P \tag{9-188}$$

其中

$$M=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{n^2\sqrt{u_m^2+v_m^2}}{h_m^{4/3}} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{n^2\sqrt{u_m^2+v_m^2}}{h_m^{4/3}} \end{bmatrix}$$

$$X=(h_m,u_m,v_m)^T$$

$$P=(0,\varepsilon(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})-g\frac{\partial z}{\partial x},\varepsilon(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})-g\frac{\partial z}{\partial y})^T$$

方程(9-188)是一个拟线性代数方程组，需通过迭代求解。将其改写成

$$QX=(Q-M)X-P \tag{9-189}$$

式中

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{n^2\sqrt{u_m^2+v_m^2}}{h_m^{4/3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{n^2\sqrt{u_m^2+v_m^2}}{h_m^{4/3}} \end{bmatrix}$$

Q 为对角阵，由式(9-189)得：

$$X=Q^{-1}(Q-M)X+Q^{-1}P=(I-Q^{-1}M)X+Q^{-1}P \tag{9-190}$$

式中：I 为单位阵。令 $S=I-Q^{-1}M$；$R=Q^{-1}P$，代入式(9-190)得：

$$X=SX+R \tag{9-191}$$

对于式(9-191)的求解，为了加快收敛速度，采用松驰迭代法进行求解，常用的松驰迭代法有块松驰迭代

$$X_m^{j+1}=\omega\bar{X}_m^{j+1}+\frac{1-\omega}{N}\sum_{i=1}^{N}X_m^i$$

及点松驰迭代

$$X_m^{j+1}=\omega\bar{X}_m^{j+1}+(1-\omega)X_m^i \tag{9-192}$$

式中 $\bar{X}_m^{j+1}$ 为 m 点的本次计算值，即 $\bar{X}_m^{j+1}=SX_m^i+R$，i 为与 m 相邻的结点号；N 为与 m 点相邻的结点数，$0<\omega<1$ 为松驰因子。

(2)河床变形计算

各粒径组的垂线平均含沙量按如下方法迭代求得。将式(9-182)、(9-183)代入式(9-178)

得

$$S_{mk}-S_{*mk}=-\frac{1}{\alpha\omega_{mk}}\left[\left(\frac{\partial huS_k}{\partial x}+\frac{\partial hvS_k}{\partial y}\right)-\varepsilon_s\left(\frac{\partial^2 hS_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 hS_k}{\partial y^2}\right)\right] \tag{9-193}$$

含沙量迭代初值，按水流平面图计算方法确定各流束的含沙量作为初值。经迭代求得各粒径组沙的含沙量后，用下式计算河床变形

$$\Delta Z_{smk}=\frac{\alpha\omega_{mk}}{\gamma'}(S_{mk}-S_{*mk})\Delta t \tag{9-194}$$

这个模型曾用于模拟长江三峡工程库区水沙运动和河床变形，获得较好的效果[21],[23]。

五、韦直林模型

前面介绍的平面二维模型都基于有限差分法，有限元法虽然在建模时处理问题比较复杂，且需要较大的计算内存单元和机时，但由于方法较适应于不规则周界，对河流动力学有关问题有较好的适应性，所以，有限元法目前国内外也很常用。

韦直林采用有限元法研制的二维挟沙水流模型，采用质量集中的简化手段和预报一较正一迭代的时间推进算法，较好地解决了计算储存量和计算速度问题，在解决实际问题中有不少成功的算例。由于此模型应用到的数值方法基础超出了本书范围，故这里不作详细介绍，有兴趣的读者可参见文献[22]。

第七节　几个关键性问题的说明

建立平面二维模型对水沙过程及河床变形进行计算，由于问题复杂，有许多具体问题亟待研究解决，包括描述水沙过程的基本方程式，求解数值方法和基本公式，以及对某些问题的处理方式、方法和技巧手段，甚至对一些物理参数处理是否得当都直接影响到模型的好坏。这里对一些关键性问题作些说明。

一、基本方程

前面导出的描述水沙平面运动的基本方程式，都是建立在几个基本假定之上的。这些基本假定，一是认识事物的水平难于用数学工具描述和表达复杂的自然物理现象，不得已采用回避手段及措施，如动水挟沙水流服从静水压力分布和非恒定挟沙水流动床阻力按恒定均匀流处理等，二是这些假定不可能对复杂的水沙运动过程做得面面俱到，如近底流层水流泥沙交换机制等，三是基本假定本身也很难做到与天然河道水沙运动规律完全相符。这些都限制了基本方程的真实性，在应用上也就得认真讲究基本方程的适用范围。因此，对某些具体的实际问题，深入地研究待解决问题的实质内容和认清基本方程的能力在建立平面二维模型是要首先认真考究的一步。

平面二维水沙基本方程描述单位水体元内沿垂线平均各水流泥沙要素的变化情况，对于一些水流泥沙沿垂线分布极不均匀的情况，应用基本方程时应作出一些适当的修正，目前常采用的是系数修正方法，取

$$\alpha_{uu}=\frac{1}{hu^2}\int_0^h u^2(x,y,z,t)dy$$

$$\alpha_{uv}=\frac{1}{huv}\int_0^h u(x,y,z,t)v(x,y,z,t)dy$$

$$\alpha_{vv}=\frac{1}{hv^2}\int_0^h v^2(x,y,z,t)dy$$

$$\alpha_m = \frac{1}{hsu}\int_0^h s(x,y,z,t)u(x,y,z,t)dy$$

$$\alpha_n = \frac{1}{hsv}\int_0^h s(x,y,z,t)v(x,y,z,t)dy$$

根据垂线实测资料定出各修正系数，或者用经实测资料检验的理论公式计算。

平面二维基本方程无法考虑某些副流（如环流，螺旋流）对平均水流泥沙要素的影响，诚然对一些三维性很强的问题是不能用平面二维问题处理的，如弯道水流，坝前近场水沙运动等。在微弯河道进行平面二维计算，水沙基本方程中还应考虑横向环流产生的横向动量交换项，要考虑近底流层流向变化确定环流输沙；对于推移质运动，还应考虑底部螺旋流的影响以及实际输沙方向与垂线平均流速方向的不同；弯道上滩槽明显，也应考虑床面横向坡度对推移质输移的影响。这些可以通过修正输沙量来反映，如日本的史密朱（Y. Shimizu）建议纵向输沙用

$$g_s = 8\sqrt{(\frac{\rho_s}{\rho}-1)gd^3}(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2}$$

计算，而横向输沙采用下式计算

$$g_n = g_s(\mathrm{tg}\theta - \sqrt{\frac{\tau_{*0}}{\mu_s\mu_k\tau_*}}\frac{\partial z}{\partial n})$$

式中 s,n 为曲线座标，μ_s 为床面颗粒静摩擦系数，μ_k 为动摩擦系数取 0.45。

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{v' + v''}{u'}$$

$$v'' = -7.0\frac{h}{R}u' f_0(\frac{n}{B})$$

u' 和 v' 分别为近底流速沿 s 和 n 方向的分量，近似取 $u' = ru, v' = rv$，r 比例常数，B 为河宽，R 为曲率半径，v'' 为由于螺旋流引起的分速度，函数 $f_0(\frac{n}{B})$ 按以下方法计算

当 $0 \leqslant \frac{n}{B} < 0.1$，近左岸边，$f_0(\frac{n}{B}) = -100(\frac{n}{B})^2 + 20(\frac{n}{B})$

$0.1 \leqslant \frac{n}{B} < 0.9$ 主槽，$f_0(\frac{n}{B}) = 1.0$

$0.9 \leqslant \frac{n}{B} \leqslant 1.0$ 近右岸边，$f(\frac{n}{B}) = -100(1-\frac{n}{B})^2 + 20(1-\frac{n}{B})$

但要普遍运用这一成果解决实际问题还有一定距离。

二、紊动粘滞项

前面用布辛尼斯克假定闭合作用在垂直面上的雷诺应力，并认为各向紊动粘滞性系数彼此相等，即用了

$$\rho_e\varepsilon(\frac{\partial^2 hu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 hu}{\partial y^2}), \qquad \rho_e\varepsilon(\frac{\partial^2 hv}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 hv}{\partial y^2})$$

紊动粘滞项实际代表了水流中动量的传递。在某些水流情况下，因紊动粘滞项与其它项相比较小可不考虑，而对某些问题（如回流淤积、污染物扩散）这些项又显得较重要而不宜舍去。这样，它的存在又给问题解带来麻烦和困难。其困难主要在于如何确定紊动粘滞性系数 ε。在实际工程计算中，为了便于计算，常简单地取 ε 为

$$\varepsilon = \frac{\kappa h u_*}{6}$$

κ 为卡门常数。虽然这种做法较为简单，实际应用表明在大多数情况下的二维计算还是可行的。

紊动粘滞性系数的正确计算，还有待于水流内部紊动结构研究的进展，虽然目前计算运动粘滞性系数用了 $K-\varepsilon$ 模型，即

$$\varepsilon = Cu\frac{\tilde{K}^2}{\tilde{\varepsilon}}$$

$\tilde{K}$、$\tilde{\varepsilon}$ 分别为平均紊动能及其耗散率，由平均紊流模型解出。这种做法较简单地取 ε 为常数理论上又进了一步，但要正确确定一个紊流模型及其求解也不是一件易事，且现有的紊流模型都只对清水水流运动而言的，对于挟沙水流运动中 $K\sim\varepsilon$ 关系如何还有待于理论上的深入研究。

三、阻力问题

水流运动方程中的 x、y 向阻力项采用了曼宁公式或谢才公式表达，把一个非恒定非均匀的二维挟沙水流问题处理成恒定均匀的一维问题，把诸多不确定的因素归结到确定糙率系数上，这无疑是一项相当粗糙的处理方法。然而，就算允许接受这种做法，由于二维问题涉及到各个细部的水流结构，而各个细部因河床粗糙程度不同，阻力有较大的差别，如何通过糙率系数变化反映这种差别也不是一件易事。

在目前的二维计算中，糙率系数的选取多采用一维处理方法，对某一特定河段将其取为常数，且沿河宽方向不变，等于断面平均值，由于一维计算糙率是岸、滩和槽糙率的综合结果，而二维计算糙率是一维计算糙率的逆问题，需要的是岸、滩和槽的各细部糙率，因此，按一维处理方法确定糙率是相当近似的。较为可靠的办法还是从实测资料出发，分流带按一维处理方法分别计算各细部糙率，分块输入计算。李义天[5]在分析实测资料的基础上曾经提出过一个糙率沿河宽变化的计算方法，虽然问题远未得到解决，但开辟了一条途径。

四、水流挟沙能力

水流挟沙力公式在模型中的应用源于求解河床变形方程式，不管采用何种输沙模式(平衡输沙法或不平衡输沙法)计算变形都得借助于水流挟沙力公式。在平衡输沙模式中需要用它来直接计算含沙量，而在不平衡输沙模式中则是用来求解不平衡输沙方程式来获得含沙量。根据模拟的输沙方式不同，可分别采用推移质输沙率公式，悬移质输沙率公式或总输沙率公式。在河流动力学书籍中，这些公式很多，而且差别也较大，数量上可差几倍到数十倍。

在平面二维计算中要直接引用现有的水流挟沙力公式有以下几个问题值得研究：一是这些公式中大多数是半经验半理论的，或纯经验的，要知道这些公式的适用范围，要结合实际问题细选公式，必要时要改进这些公式。二是这些公式都是在一维、恒定、均匀流情况下得到的，要用于平面二维、非恒定、非均匀流计算，显然是不能直接引用的。三是这些公式一般只能用于均匀沙，对于天然河流非均匀沙情况要作些改进。由于目前平面二维水流挟沙力公式研究极少，李义天根据张瑞瑾挟沙力公式和长江中游实测资料，提出了一个单宽床沙质水流挟沙力公式，但问题远未解决。这样，在平面二维计算中走一维计算的路子，以上三方面的研究显得十分重要。

五、计算方法

计算方法内容很广，这里主要提及三个方面的内容：数值方法、数值处理技巧和代数方程组求解技术。在基本方程、基本公式选用和有关物理参数确定以后，计算方法选用是否得当将直接影响到计算结果的精度，当被测量是一个复演量(如复演河床演变的历史)时，计算结果的可靠性是可以校测的；而当被测量是一个预测量(如河床未来的演变过程)时，计算结果的可靠

性就难于检测。因此，考究适当的数值方法就显得很重要。

前面已提到，目前求解二维问题的数值方法很多，主要有差分法、有限元法和边界元法，各种方法在应用上均有其优缺点，特征有限差分法和特征有限元法的使用就是源于利用各种方法的优点的结合。

有限差分法主要是在形式上比较简单的一种直接求解法，该方法简易明了，易于掌握和理解，应用也不是十分复杂。鉴于时间和空间差分形式的不同，出现了多种形式的差分格式，在时间处理上主要分为显式和隐式，在空间处理上主要有前差、后差和中心差分，在时空选点上有双层或多层，两点或多结点的选择方式。有限差分方法具有这种多形式的差分方式，在求解众多的河流动力学问题时具有灵活性的优点。然而，由于这些问题多属于非线性问题，灵活性就很难把握，对非线性项的差分具有既可以这样又可以那样和化简单为复杂的味道。多层多点方法虽然精度较高，但计算内存大，边界也不好处理，两层两点方法则不同，需要内存小，也便于计算，边界适应性较好但又不易提高数值计算精度。因此，在建立二维河流泥沙数学模型时，使用有限差分方法，要使模型具有较好的应变能力，计算经济有效，所得结果精度较高，除具有应用差分法的技术外，还要充分认识到待求解问题的性质，并求助于广泛的数值试验获取丰富的数值处理经验。

数值处理技巧内容颇广，计算网格的剖分方式，布点的稀密，边界数值条件的处理，非线性项的离散，数值叠代初值条件选取和叠代方法的选用等，甚至是计算机编程中计算变量的安排，这些细节性的处理均属数值处理技巧的内容。更为广义地合理地讲，耦合解和非耦合解法，破开算子法也属数值处理技巧的范畴。在前一节看出，这两种方法是起到解体和分裂基本方程组和方程本身的作用，不象数值方法那样直接产生数值代数方程组，方程组的解体和方程的分裂具有多样性，是一项技巧性很强的工作。

耦合或非耦合解法和破开算子法对求解多变量方程组和多维问题十分方便，和适当的数值方法联用产生的代数方程组简单便于求解，计算也比较经济，故在建立二维河流泥沙模型时有广泛的应用。理论上讲，对一些变量间耦合作用很强的方程组采用耦合解比较合理，就水流泥沙基本方程来说，流速和水位的变化是直接影响到挟沙能力和含沙量，进而影响到河床变形，河床变形和变形后床面泥沙阻成的调整通过阻力变化又反过来直接影响到流速和水位的变化，变量间相互影响作用很强，对这种情形采用耦合解是比较合适的。然而由于水流各要素的特征速度和河床变形特征速度相差较大，且泥沙对流扩散方程类型与其它方程又有相异的特点，目前要建立一个有限差分数值方法联解这些方程还有很大的困难，再者河床变形速度较慢，水流运动特征速度较快，在较短的离散时段内，河床变形直接对水流结构的影响也就较小，从这一角度考虑，分开求解具有一些共性特征的方程组是可能的。例如对于低含沙量的情形，水流连续方程和运动方程中就可以不考虑含沙量的影响，河床变形速度较慢，相对于方程中各项也就较小，这样就可以考虑将水流基本方程和泥沙基本方程分开求解。在这种情形下，变量间的耦合作用较弱，实施非耦合解法是十分有效的。对于高含沙水流，虽然水流、泥沙和河床相互作用较强，同样也可以实施非耦合解，只不过含沙量和河床的变化对水流和水位的影响就不容忽视，则是通过"冻结"变量的办法，将水流基本方程中的含沙量和河床高程各量冻结在 n 时间层上，在一个计算时间步长结束以后修正含沙量和河床高程，间接地体现出水流泥沙的耦合影响作用。同样道理，对一些变量间没有耦合作用的方程组，原则上也可以考虑耦合求解，但从计算经济角度考虑也就没有这个必要了。

非耦合解和破开算子法与适当的数值方法的联用在建立河流泥沙数学模型中是十分凑效

的，虽然非耦合解和破开算子法某种程度上分裂了原方程组的结构，但由于分解后的基本方程形式比较简单，便于选用或建立适当的高精度的数值方法进行求解，既能提高计算效率又能基本保证数值精度。实质上，交替方向法就是这些方法联用的一个范例。

采用非耦合解法和破开算子法是与问题的解紧密相连的，泥沙数学模型包括方程式较多，方程特性差别也较大，各方程如何组合又如何分裂应对这些方程式的性质有充分的认识和了解，过份地分解方程组或分裂方程都会导致模型建立的失败，这是值得注意的。根据作者的经验，要娴熟地掌握好这些数值技巧，只能通过数值试验和模型运用获得经验和知识。

六、非均匀沙问题

河流泥沙数学模型的难点之一是模拟河流冲淤过程中床沙级配的变化，对于均匀沙，现有平面二维数学模型处理得较好，对于非均匀沙运动（主要是二维水流挟沙力级配、床沙级配平面变化）计算模式虽有一些研究成果，但还很不够，这就限制了现有平面二维泥沙模型只能用于时间系列不长的河床变化较小的局部问题。

参 考 文 献

[1] 林秉南等，钱塘江河口潮流输沙数学模型，泥沙研究，1981。

[2] 韩曾萃等，钱塘江河口考虑滩地输沙的含沙量计算方法，海洋工程，1984。

[3] 窦国仁，潮汐水流中悬沙运动及冲淤计算，水利学报，1963。

[4] 窦国仁，河道全沙数学模型研究，水利水运科学研究，1987。

[5] 李义天，谢鉴衡，冲积平原河流平面流动的数值模拟，水利学报，1986。

[6] 谢鉴衡主编，河流模拟，水利出版社，1988。

[7] 林秉南等，河口建坝对毗邻海湾潮汐影响的计算，水利学报，1980。

[8] 刘智、林秉南，三角网格在二维不恒定流计算中的应用，水利学报，1984。

[9] 何少苓、林秉南，破开算子法在二维潮流计算中的应用，海洋学报，1984。

[10] 林秉南，何少苓等，河口潮流与污染扩散场的二维数值模拟，科学通报，1986。

[11] 林秉南等，潮汐水流泥沙输移与河床变形的二维数学模型，泥沙研究，1988。

[12] Abbott, M. B., Computational Hydraulics, Pitman, 1979.

[13] Benque, J. P. Cunge, J. A. ete, 'New Method for tidal current computation, Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE, Vol, 108, 1982.

[14] 窦国仁，赵士清，三峡工程中二维全沙数学模型的研究及初步应用报告，"七五"国家重点科技攻关，三峡工程泥沙和航运关键技术，1990。

[15] Shimiaz, Y. and Itakura, I. Y., Calculation of bed variation in alluvial channels, Journal of Hydraulis Engineering, Vol, 115, No. 3. 1989.

[16] Cunge, J, A., Two-dinensional modeling of flood plains, Unsteady Flow in Open Channels, Chapiter 17. Water Resources Pablications, Ft. Collins, 1975.

[17] 陆金甫，关治，偏微分方程数值解法，清华大学出版社，1989。

[18] 韩曾萃、程杭平，杭州湾含沙量及河床变形计算，全国泥沙数学模型研讨会论文集，1987 年。

[19] 韦直林，河流数学模拟补充讲义，（研究生用），武汉水利电力学院河流模拟教研室，1991 年。

[20] Reboud, J—L., Etude d'une modèlsation du transport solide en rivière, Ecole Nationale des Ponts et Chaussees Laboratore Natioale d' Hydraulique, 1983.

[21] 魏良炎，李义天，河道平面二维水流数学模型的特性，泥沙数学模型及糙率研究报告之三，武汉水利电力学院，1988 年。

[22] 韦直林，河道水流泥沙问题的一种有限元解法，武汉水利电力学院学报，1990 年。
[23] 吴伟明，一维平面二维及其嵌套泥沙数学模型研究与应用，武汉水利电力学院博士论文，1991 年 12 月。

第十章 解析模型

解析模型是在考虑简单规则周界条件下经过一些假设处理后获得挟沙水流基本方程的解析解。其解直观明了，不象数值解那样离散，便于分析，常用于纯冲刷或纯淤积的河床变形问题。例如水库淤积及其趋近平衡后降低水位运行引起的溯源冲刷问题和坝下游冲刷问题等。解析模型还可以用来检验数值方法的合理性。

对于矩形河槽，在低含沙浓度的情况下，可写出挟沙水流运动基本方程式：

水流连续方程

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{10-1}$$

运动方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g\frac{\partial z_s}{\partial x}+gJ_f=0 \tag{10-2}$$

河床变形方程

$$\frac{\partial z_s}{\partial t}+\frac{1}{(1-P_s)}\frac{\partial G}{\partial x}=0 \tag{10-3}$$

输沙能力关系式

$$G=G(u,h,d,\omega,J,\cdots\cdots) \tag{10-4}$$

和阻力关系式

$$J_f=J_f(u,h,d,\gamma\cdots) \tag{10-5}$$

式中G为单宽输沙率。解析模型的基本原理是通过化简水流基本方程式(10-1)和(10-2)，并采用不同形式的输沙关系(10-4)和阻力关系式(10-5)，在特定的周界条件下求得方程组的解析解。

第一节 Z_s模型

Z_s模型直接获得河床高程变化的解析解。一般情况下，液相方程(10-1)、(10-2)中的随时变化项较其它项为小，可以忽略，则有

$$u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad 或 \quad q=\text{const} \tag{10-6}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}+g\frac{\partial z_s}{\partial x}+gJ_f=0 \tag{10-7}$$

从(10-6)解出$\frac{\partial u}{\partial x}$代入(10-7)得

$$(1-F_r^2)\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial z_s}{\partial x}+J_f=0 \tag{10-8}$$

式中$F_r^2=\frac{u^2}{gh}$。取输沙能力和阻力公式具有以下的形式

$$G = \alpha u^b \tag{10-9}$$

$$J_f = \frac{f}{4g}\frac{u^2}{2h} = \frac{f}{8gq}u^3 \tag{10-10}$$

式(10-9)中 α 为常数，b 为指数。取单宽流量 q 沿程不变则有

$$\frac{\partial J_f}{\partial x} = \frac{f}{4gq}3u^2\frac{\partial u}{\partial x} \tag{10-11}$$

对式(10-8)关于 x 求导并将式(10-11)代入得

$$(1 - F_r^2)\frac{a^2h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2} + \frac{f}{4gq}3u^2\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{10-12}$$

对式(10-9)关于 x 求导

$$\frac{\partial G}{\partial x} = abu^{b-1}\frac{\partial u}{\partial x}$$

代入变形方程(10-3)并解出$\frac{\partial u}{\partial x}$后代入(10-12)式得

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} - \frac{4gqab}{(1 - P_s)3fu^{3-b}}\left[(1 - F_r^2)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2}\right] = 0 \tag{10-13}$$

对于缓流 $F_r<1$，括号中第一项较第二项为小可以忽略，得

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} - k\frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2} = 0 \tag{10-14}$$

$$k = \frac{4bG}{3fF_r^2(1 - P_s)}$$

这是一个大家熟悉的非线性抛物型方程式，描述了河床高程随时空的变化规律。进一步线性化 $k=k(G_0, F_r)$ 则得到一个线性方程式

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} - k_0\frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2} = 0 \tag{10-15}$$

$$k_0 = \frac{4bG_0}{3f_0F_r^2(1-P_s)}$$

第二节 G-Z_s 模型

G-Z_s 模型是一个交替算法模型，先求得输沙率随时空变化关系式，然后再由河床变形方程式求出河床高程的变化，计算交替进行。

先对运动方程(10-7)关于 t 求导得

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right) + \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial t} + \frac{\partial_2 z_s}{\partial x\partial t} + \frac{\partial J_f}{\partial t} = 0$$

然后对河床变形方程(10-3)关于 x 求导得

$$\frac{\partial^2 z_s}{\partial t\partial x} + \frac{1}{1 - P_s}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0$$

从上两式中消去$\frac{\partial^2 z_s}{\partial t\partial x}$项得

$$\frac{\partial J_f}{\partial t} - \frac{1}{1 - P_s}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right) + \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial t} = 0 \tag{10-16}$$

考虑弱非恒定水流条件$\frac{\partial u}{\partial t}\approx 0$ 和$\frac{\partial h}{\partial t}\approx 0$ 得

$$\frac{\partial J_f}{\partial t} - \frac{1}{1-P_s}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \tag{10-17}$$

从阻力公式中解出 $u=(\frac{4gqJ_f}{f})^{1/3}$ 代入输沙关系式(10-9)得：

$$G = \alpha(\frac{8gqJ_f}{f})^{b/3}$$

关于 t 求偏导有

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \alpha(\frac{8gq}{f})^{b/3}\frac{b}{3}J_f^{b/3-1}\frac{\partial J_f}{\partial t}$$

代入方程(10-17)得

$$\frac{\partial G}{\partial t} - k\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0 \tag{10-18}$$

式中

$$k = \frac{\alpha b}{3(1-P_s)}(\frac{4gq}{f})^{b/3}J_f^{b/3-1} = \frac{bG}{3(1-P_s)J_f}$$

引入

$$G_* = (G - G_0)/\Delta G_0$$

方程(10-18)可写作无量钢形式

$$\frac{\partial G_*}{\partial t} - k\frac{\partial^2 G_*}{\partial x} = 0 \tag{10-19}$$

相应的河床变形方程为

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{\Delta G_0}{(1-P_s)}\frac{\partial G_*}{\partial x} = 0$$

G_0 为均匀流条件下平衡输沙率，ΔG_0 为入口断面来沙增量。有时用残余量 $G'=G-G_0$ 表达方程更为适用

$$\frac{\partial G'}{\partial t} - k\frac{\partial^2 G'}{\partial x^2} = 0 \tag{10-20}$$

这是一个关于输沙率 G' 随时空变化的非线性抛物型方程式。$G-Z_s$ 模型的基本算法是先解方程(10-18)以求得输沙率随时空变化，然后使用河床变形方程

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} + \frac{1}{(1-P_s)}\frac{\partial G}{\partial x} = 0$$

求得河床变形方程解。

严格讲，Z_s 模型和 G-Z_s 模型只是对恒定均匀流平衡输沙的条件下较为合适。对于实际天然河道的挟沙水流情况，水流是非恒定的，输沙是不平衡的，这些条件很难得到满足，这两种模型只能看成弱非恒定非均匀流输沙的一种近似模型。

Z_s 模型和 G-Z_s 模型都是用一维非线性扩散方程式来描述输沙和河床高程的变化情况，从数学物理方法得知，解扩散方程式需要在区域两端各提一个边界条件和初始条件，而实际问题中边界条处的提法往往极为困难，这就限制了这两种模型的实用范围。

此外，虽然 Z_s 模型相对于求解变形高程而言，较为直接简单，但由于 Z_s 模型要求在区域两端提河床高程边界条件，况且河床高程往往是需要预测的，要事先确定高程随时变化的特定关系相当困难，在这种情况下 Z_s 模型应用就不及 G-Z_s 模型，因为 G-Z_s 模型只需在区域两端对输沙率提边界条件，河床变形高程边界条件只需要给出初值即可，相比之下，这些条件就比

较容易给出。诚然，在实际应用中，这两种模型的选用主要取决于研究问题的对象，要求以及特定周界环境和条件，不能一概而论。

第三节　模型应用

一、G-Z_s 模型应用于淤积问题

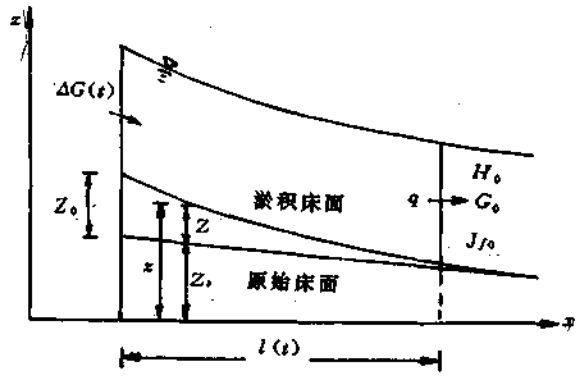


图 10-1

威尔逊(F. Wihson)和麦塔(P. J. Mehta)等曾用实验水槽资料检验过 Z_s 模型和 G-Z_s 模型，本节主要介绍威尔逊的检验成果。

对于如图 10-1 所示的淤积问题，给方程(10-20)提下列初边界条件：

初值条件　$G'(x,0)=0$　(10-21)

边界条件　$G'(0,t)=\Delta G(t)$　(10-22)

$$\lim_{x\to\infty} G'(x,t)=0 \quad (10\text{-}23)$$

$\Delta G(t)$为入沙净量。方程(10-20)带上列初边值问题的一般解为

$$G'(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{\infty}\Delta G\left(t-\frac{x^2}{2k_0\eta^2}\right)\exp(-\eta^2)\mathrm{d}\eta \quad (10\text{-}24)$$

$$\eta=\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}} \quad (10\text{-}25)$$

$$k_0=\frac{bG_0}{3(1-P_s)J_{f0}} \quad (10\text{-}26)$$

方程解(10-24)对任意给定的入沙过程 $\Delta G(t)$都适用，现考虑定常加沙的特殊情况

$$\Delta G(t)=\Delta G_0=\text{const} \quad (10\text{-}27)$$

将边界条件(10-27)代入(10-24)得：

$$G'(x,t)=\frac{2\Delta G_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\eta}^{\infty}\exp(-\eta^2)\,\mathrm{d}\eta \quad (10\text{-}28)$$

因 $G(x,t)=G_0+G'(x,t)$故

$$G(x,t)=G_0+\Delta G_0\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}}\right) \quad (10\text{-}29)$$

$\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}}\right)$为误差函数。方程(10-29)描述了定常加沙情况下输沙率沿程变化情况。有了 $G(x,t)$，可从河床变形方程(10-3)求得床面淤积高程的变化。

对方程(10-29)关于 x 求导后代入河床变形方程(10-3)，并对时间 t 积分得：

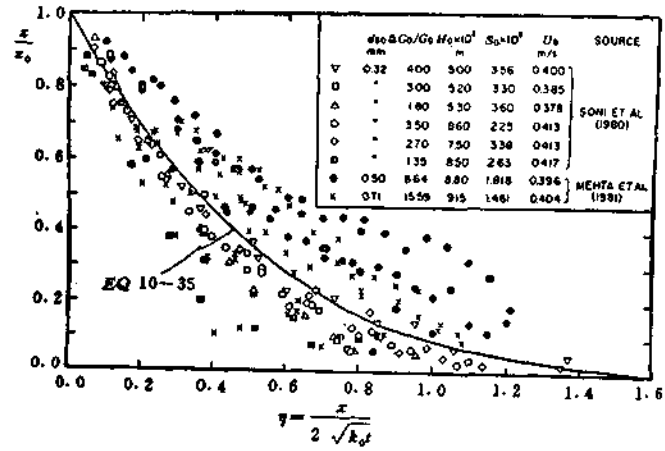


图 10-2

$$z_s(x,t) = \frac{2\Delta G_0}{k_0(1-P_s)}\left[\left(\frac{k_0 t}{\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4k_0 t}\right) - \frac{x}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}}\right)\right] + C_0 \tag{10-30}$$

式中积分常数 C_0 由初始河床条件

$$z_s(x,0) = Z_b(x) \tag{10-31}$$

确定，最后得淤积床面高程变化规律

$$z_s(x,t) = \frac{2\Delta G_0}{k_0(1-P_s)}\left[\left(\frac{k_0 t}{\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4k_0 t}\right) - \frac{x}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}}\right)\right] + Z_b(x) \tag{10-32}$$

由 $Z = z_s - Z_b$ 则床面纯淤积高程变化为

$$Z(x,t) = \frac{2\Delta G_0}{k_0(1-P_s)}\left[\left(\frac{k_0 t}{\pi}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{4k_0 t}\right) - \frac{x}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}}\right)\right] \tag{10-33}$$

对任意时刻 t，入口断面纯淤积高程 Z_0 可由上式给出

$$Z_0 = \frac{2\Delta G}{k_0(1-P_s)}\left(\frac{k_0 t}{\pi}\right)^{1/2} \tag{10-34}$$

则无量纲床面高程为

$$\frac{Z}{Z_0} = \exp(-\eta^2) - \eta\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(\eta) \tag{10-35}$$

式中 $\eta = \frac{x}{2\sqrt{k_0 t}}$。若将 $Z/Z_0 = 1\%$ 看成床面不再发生淤积的位置，则床面总淤积长度 L 为：

$$L(t) = 3.20(k_0 t)^{1/2} \tag{10-36}$$

而对于任意时刻的河床坡度可通过求导(10-33)得到。

威尔逊采用(Soni)(1980)和麦塔(Mehta)(1981)的水槽实验资料对方程(10-29)和(10-35)进行了对比(图 10-3)，计算值与实测值点据比较散乱。

二、Z_m 模型应用于淤积问题

按图(10-1)的淤积图形，给方程(10-14)提下列初边界条件：

初值条件

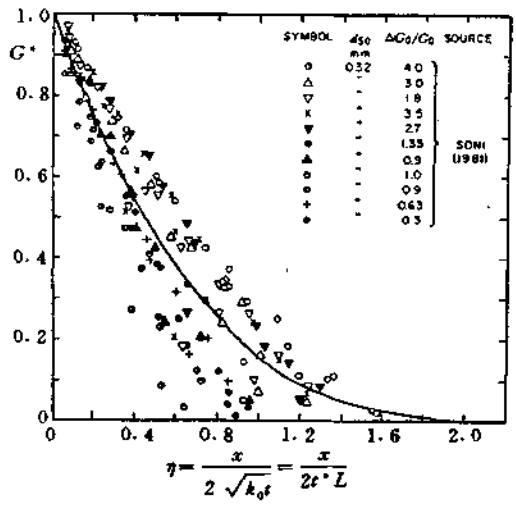


图 10-3

$$z_s(x,0) = Z_b(x) \tag{10-37}$$

下游边界条件

$$z_s(x,t) = Z_b(t), x \to \infty \tag{10-38}$$

而对于上边界条件，由于入口断面加沙，不可能给出河床高程随时间变化的确定关系，只能通过河床变形方程给出第一类边界条件。

先将方程(10-15)代入河床变形方程

$$\frac{\partial G}{\partial x} = k_0(1-P_s)\frac{\partial^2 Z_s}{\partial x^2} \tag{10-39}$$

积分上式：

$$\int_0^L \frac{\partial G}{\partial x}dx = \int_0^L k_0(1-P_s)\frac{\partial^2 Z_s}{\partial x^2}dx$$

$$G(L,t) - G(0,t) = k_0(1-P_s)\left(\frac{\partial z_s(L,t)}{\partial x} - \frac{\partial z(0,t)}{\partial x}\right)$$

因 $\frac{\partial z_s(L,t)}{\partial t} = \frac{\partial Z_b}{\partial x}$ 有上边界条件：

$$\frac{\partial z_s(L,t)}{\partial x} = \frac{\partial Z_b}{\partial x} - \frac{\Delta G(t)}{k_0(1-P_s)} \tag{10-40}$$

这里 $\Delta G(t) = G(L,t) - G(0,t) = G_0 - G(0,t)$ 为净沙量。

初值条件(10-37)，考虑到实际应用时函数 $Z_b(x)$ 不可能给出，一方面实际河床高程不可能连续，另一方面也不可能用一个具有普遍意义的函数去描述河床变化过程，因此也就无法给 Z_s 模型方程(10-14)给出一般情况下的解。

现在考虑一种初始平床情况，即方程(10-14)带以下初值条件：

$$z_s(x,0) = 0 \tag{10-41}$$

这样，Z_s 模型的控制方程(10-14)带条件(10-41)，(10-38)和(10-40)的解为

$$z_s(x,t) = \frac{x}{k_0\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}}}^{\infty}\left\{\left[\Delta G\left(t - \frac{x^2}{4(k_0\xi^2)}\right]\frac{\exp(-\xi^2)}{\xi^2}\right\}d\xi \tag{10-42}$$

当来沙量为常数时 $\Delta G(t) = \Delta G_0$，则积分(10-42)得河床变形解为

$$z_s(x,t) = \frac{2\Delta G_0}{k_0(1-P_s)}\left[\left(\frac{k_0 t}{\pi}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{-x^2}{4k_0 t}\right) - \frac{x}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}}\right)\right] \tag{10-43}$$

三、溯源冲刷问题

彭润泽从能量平衡观点出发，导出了单宽输沙率计算公式

$$g_s = a_0 q(J_f - J_0) \tag{10-44}$$

由此导出 Z_s 模型：

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2} = 0 \tag{10-45}$$

其中
$$a_2 = \frac{A_0 q}{r^3} \tag{10-45}$$
式中 J_f 为能坡，J_0 为水面比降，q 为单宽流量，A_0 为待定系数。彭润泽依据上式研究了水库一级三角洲水位一次降低的溯源冲刷问题，计算中采用了下列边界条件(图 10-4)。

(1)初始条件：
$$z_s(x,0) = Z_0 + J_1 x \tag{10-46}$$

(2) 下游端出口($x=0$)处边界条件：

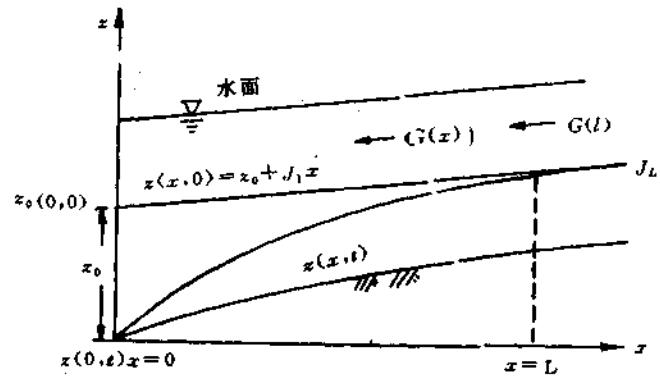


图 10-4

设当水位在很短时间内床面一次性骤然下降 z_0，从而定出
$$z_s(0,t) = z_0(0,0) - z_0 = 0 \tag{10-47}$$
上游入口($x \approx L$)处边界条件可取在一次下降时床面不受干扰处，
$$\frac{\partial z_s(x=L,t)}{\partial x} = J_L \tag{10-48}$$
对扩散方程(10-45)，取
$$z_s(x,t) = u(x,t) + v(x,t) \tag{10-49}$$
以齐次化边界条件，取解 $v(x,t)$ 为一次性下降终极情况下的解为
$$v(x,t) = \frac{x^2}{2L} J_L \tag{10-50}$$
且满足条件
$$v(0,t) = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=L} = J_L$$
而对于 $u(x,t)$，将式(10-49)代入(10-45)并注意到 $\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{J_L}{L}$，得如下方程组
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{J_L}{L} \tag{10-51}$$
$$u(x,0) = z_0 + J_1 x - \frac{x^2}{2L} J_L = \varphi(x) \tag{10-52}$$
$$u(0,t) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0$$
采用分离变量法可给出方程(10-51)的通解为：
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L} x \tag{10-53}$$
$u_n(t)$ 由边界条件确定。将方程(10-51)的非齐次项展开成富里叶级数
$$-a^2 \frac{J_L}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L} x \tag{10-54}$$

系数 $f_n(t)$ 为：

$$f_n(t)=\frac{2}{L}\int_0^L-\frac{a^2J_L}{L}\Sigma\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x\mathrm{d}x=-\frac{2a^2J_L}{(n+\frac{1}{2})\pi L}$$

将式(10-53)和(10-54)代入方程(10-51)得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\partial u_n(t)}{\partial t}+\frac{a^2(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}u_n(t)-\frac{2a^2J_L}{(2+\frac{1}{2}\pi L}]\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x=0$$

上式成立的条件是：

$$\frac{du_n(t)}{dt}+\frac{a^2(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}{L^2}u_n(t)-\frac{2a^2J_L}{(n+\frac{1}{2})\pi L}=0 \tag{10-55}$$

解之得：

$$u_n(t)=m\exp[-\frac{a^2(n+\frac{1}{2})^2\pi^2t}{L^2}]+\frac{2J_1L}{(n+\frac{1}{2})^3\pi^3} \tag{10-56}$$

m 为待定系数。再将初始条件(10-52)展开成富里叶级数

$$\varphi(x)=z_0+J_1x-\frac{x^2}{iL}J_L=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x \tag{10-57}$$

式中 $\varphi_n=\frac{2}{L}\int_0^L(z_0+J_1x-\frac{x^2}{2L}J_L)\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x\mathrm{d}x$

$$=\frac{2z_0}{(n+\frac{1}{2})\pi}+\frac{2(J_1-J_L)L}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}(-1)^n+\frac{2J_LL}{(n+\frac{1}{2})^3\pi^3}$$

对解式(10-56)，在 $t=0$ 时刻有 $u_n(0)=\varphi(x)$，故有

$$\frac{2z_0}{(n+\frac{1}{2})\pi}+\frac{2(J_1-J_L)L}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2})(-1)^n+\frac{2J_LL}{(n+\frac{1}{2})^3\pi^3}=m+\frac{2J_LL}{(n+\frac{1}{2})^3\pi^3}$$

解之有 $$m=\frac{2z_0}{(2+\frac{1}{2})\pi}+\frac{2(J_1-J_L)L}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}(-1)^n$$

最后将式(10-56)代入(10-53)，并合并式(10-50)可得到最后的解为：

$$z(x,t)=\frac{x^2}{2L}J_L+\sum_{n=0}^{\infty}\{[\frac{2z_0}{(n+\frac{1}{2})\pi}+(-1)^n\frac{2(J_1-J_L)}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}]$$

$$\times\exp[-\frac{a^2(n+\frac{1}{2})^2\pi^2t}{L^2}]+\frac{2J_LL}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^3}\sin\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}x \tag{10-58}$$

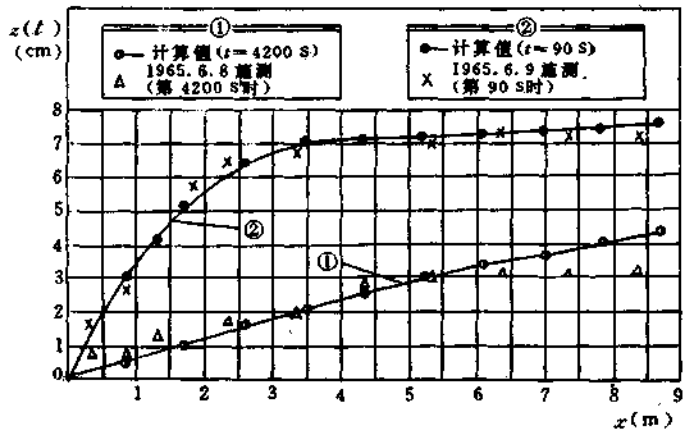


图 10-5

彭润译用实测水槽试验资料对(10-58)进行对比计算，按式(10-58)计算时取 $A_0=1$，$J_0=0.003$，计算值与实测值见图10-5，两者有一定的偏离。

第四节　非线性解析模型

上节介绍的均属线性模型，本节通过一个实例介绍用加权残数法解拟线性方程的基本方法。

考虑第二节导出的基本方程组(10-19)

$$\frac{\partial G_*}{\partial t}-k\frac{\partial^2 G_*}{\partial x^2}=0 \tag{10-59}$$

和河床变形方程

$$\frac{\partial Z_s}{\partial t}+\frac{\Delta G_0}{(1-p_s)}\frac{\partial G_*}{\partial x}=0 \tag{10-60}$$

对于如图 10-1 所示的河床变形问题，提以下初边值条件：

初值条件　　$G_*(x,0)=0$　　(10-61)

上边界条件　　$G_*(o,t)=1$　　(10-62)

下边界条件　　$G_*(x,t)=0$　　$x>L(t)$　　(10-63)

床面初始条件(平床)

$$Z_s(x,0)=0 \tag{10-64}$$

床面下边界条件　　$Z_s(x,t)=0$　　$x>L(t)$　　(10-65)

$L(t)$为时刻 t 床面不发生变形位置。引入算符 L 则方程(10-59)为

$$L(G_*)=0 \tag{10-66}$$

设取 G_* 的近似解为 G_{*n}，则误差 $E_n=G_*-G_{*n}$，代入式(10-66)得

$$L(G_{*n})=E \tag{10-67}$$

为求得的近似解 G_{*n} 逼近解 G_* 的误差为最小，引入权重因子 W_j，则

$$\int W_j L(G_{*n})\mathrm{d}x=0 \qquad j=1,2,3,\cdots N \tag{10-68}$$

设近似解 G_{*n} 可用多项式逼近

$$G_{*n} = \sum_{i=0}^{N} C_i(t)x^i \tag{10-69}$$

$C_i(t)$为待定系数，其中$(N+1)$个中的三个系数可由边界条件

$$G_*(0,t) = 1 \tag{10-70}$$

$$G_*(L,t) = 0 \tag{10-71}$$

和

$$\frac{\partial G_*}{\partial x}(L,t)=0 \tag{10-72}$$

给定，另外$(N-2)$个系数可通过强加附加条条件

$$\frac{\partial^2 G_*}{\partial x^2}(L,t) = 0 \qquad i = 2,3,\cdots,N-1 \tag{10-73}$$

给出。将条件(10-70)~(10-73)代入多项式(10-69)可求得关于系数$C(t)$的一般表达式

$$C_n(t) = [-\frac{1}{L(t)}]^n \tag{10-74}$$

代回近似解式(10-69)得

$$G_* \approx G_{*n} = [1 - \frac{x}{L(t)}]^n \tag{10-75}$$

此外，取指数形式的权重系数

$$W = x^m \tag{10-76}$$

代入(10-68)有

$$\int_0^{L(t)} (\frac{\partial G_*}{\partial t} - k\frac{\partial^2 G_*}{\partial x^2})x^m \mathrm{d}x \tag{10-77}$$

使用 Leibnitz 准则，上式变成

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L(t)} G_* x^m \mathrm{d}x = \int_0^{L(t)} k\frac{\partial^2 G_*}{\partial x^2}x^m \mathrm{d}x \tag{10-78}$$

为了求得方程(10-78)的解，需要表达输沙量G和能坡的关系式，取

$$G = au^b \tag{10-79}$$

和

$$f = f_0 = \text{const} \tag{10-80}$$

f为 Darcy-Weisbach 系数，这样系数k可表达成

$$k = \frac{bG_0}{3(1-P_s)J_0}(1 + \frac{\Delta G_0}{G_0}G_*)^{1-3/b} \tag{10-81}$$

将式(10-79)和(10-81)代入式(10-78)得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L(t)} (1 - \frac{x}{L(t)})^n x^m \mathrm{d}x = \frac{bG_0 n(n-1)}{3(1-P_s)J_0 L(t)^2}\int_0^{L(t)} [1 + \frac{\Delta G_0}{G_0}(1-\frac{x}{L(t)})^n](1-\frac{x}{L(t)})^{n-2}x^m \mathrm{d}x \tag{10-82}$$

按级数展开$(1-\frac{x}{L(t)})^n$后积分上式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[L(t)^{m+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}n!}{j!(n-j)!(n+m+1-j)}] = \frac{bG_0 n(n-1)}{3(1-P_s)J_0}L(t)^{m-1}$$
$$\times [\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(n-2)!(-1)^{n-2-j}}{(n-2-j)!(n+m-1-j)j!}$$
$$+ \alpha\frac{\Delta G_0}{G_0}\sum_{j=0}^{2n-2}\frac{(2n-2)!(-1)^{2n-2-j}}{j!(2n-2-j)!(2n+m-1-j)}$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(\frac{\Delta G_0}{G_0})^2\sum_{j=0}^{3n-2}\frac{(3n-2)!(-1)^{3n-2-j}}{j!(3n-2-j)!(3n+m-1-j)}$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\left(\frac{\Delta G_0}{G_0}\right)^3\sum_{j=0}^{4n-2}\frac{(4n-2)(-1)^{4n-2-j}}{j!(4n-2-j)!(4n+m-1-j)}+\cdots\Big] \tag{10-83}$$

式中 $\alpha=1-3/b$。方程(10-83)是关于变量 $L(t)$的一次线性方程式，解之得

$$L(t)=(k_s t)_{1/2} \tag{10-84}$$

$$\begin{aligned}k_s=\{&\Big[\frac{2bG_0n(n-1)(m+1)^{-1}}{3(1-P_s)J_0\sum_{j=0}^{n}\frac{n!\ (-1)^{n-j}}{j!\ (n-j)!\ (n+m-1-j)}}\Big]\\&\times\Big[\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(n-2)!\ (-1)^{n-2-j}}{j!\ (n-2-j)!\ (n+m-1-j)}\\&+\alpha\frac{\Delta G_0}{G_0}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(n-2)!\ (-1)^{n-2-j}}{j!\ (2n-2-j)!\ (2n+m-1-j)}+\cdots\Big]\}\end{aligned} \tag{10-85}$$

这样，将 $L(t)$表达式代入(10-75)得到

$$G_s=\left(1-\frac{x}{\sqrt{k_s t}}\right)^n \tag{10-86}$$

将解(10-86)代入河床变形方程(10-60)积分得

$$\begin{aligned}Z_s(x,t)=\frac{\Delta G_0 n}{(1-P_s)}\{&\sum_{j=0}^{n-3}\frac{(n-1)!(-1)^{n-1-j}x^{n-1-j}}{j!(n-1-j)!\left[1-\frac{(n-j)}{2}\right](k_s t)^{(n-j-2)/2}}\\&-(n-1)\frac{x}{k_s}\ln t+\frac{2t^{1/2}}{k_s^{1/2}}+C\}\end{aligned}$$

利用边界条件(10-65)确定积分常数 C，最后求得解

$$\begin{aligned}Z_s(x,t)=&\frac{2\Delta G_0 n}{(1-P_s)}\sqrt{\frac{t}{k_s}}\Big\{1-\frac{x}{\sqrt{k_s t}}+\frac{(n-1)}{2}\frac{x}{\sqrt{k_s t}}\ln\frac{x^2}{k_s t}\\&+\sum_{j=0}^{n-3}\frac{(n-1)!\ (-1)^{n-1-j}}{j!\ (n-1-j)!\ (2-n+j)}\Big[\frac{x^{n-1-j}}{k_s t^{(n-1-j)/2}}-\frac{x}{\sqrt{k_s t}}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{10-87}$$

在 $x=0$ 处的冲淤厚为

$$Z_0(t)=\frac{2n\Delta G_0}{(1-P_s)}\sqrt{\frac{t}{k_s}} \tag{10-88}$$

从以上推导可以看出，对非线性方程(10-59)解的影响，很大程度上取决于权重函数 W 所取的形式。为说明这一问题，现取权重函数 W 与输沙量有关，即

$$W=G_s^m \tag{10-89}$$

代入(10-68)变成

$$\int_0^{L(t)}\left(\frac{\partial G_s}{\partial t}-k\frac{\partial^2 G_s}{\partial x^2}\right)G_s^m\,\mathrm{d}x=0 \tag{10-90}$$

将式(10-79)代入得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L(t)}\left[1-\frac{x}{L(t)}\right]^{n(1+m)}\mathrm{d}x\\&=\frac{bnG_0(n-1)}{3(1-P_s)J_0L^2(t)}\int_0^{L(t)}\left[1+\frac{\Delta G_0}{G_0}\left(1-\frac{x}{L(t)}\right)^n\right]^{1-3/b}\left(1-\frac{x}{L(t)}\right)^{n(1+m)-2}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{10-91}$$

将被积函数展开成级数并通过积分可求得

$$L(t) = (\overline{K}_* t)^{1/2} \tag{10-92}$$

其中

$$\overline{K}_* = \left\{ 3(1-P_*) J_0 \sum_{j=0}^{n(1+m)} \frac{[n(1+m)]!(-1)^{n(1+m)-j}}{j![n(1+m)-j]![n(1+m)+1-j]} \right.$$
$$\times \left\{ \sum_{j=0}^{n(1+m)-2} \frac{[n(1+m)-2]!(-1)^{n(1+m)-2-j}}{j![n(1+m)-2-j]![n(1+m)-1-j]} \right.$$
$$\left. + \alpha \left(\frac{\Delta G_0}{G_0}\right)^{n(2+m)-2} \sum_{j=0}^{n(2+m)-2} \frac{[n(2+m)-2]!(-1)^{n(1+m)-2-j}}{j![n(2+m)-2-j]![n(2+m)-1-j]} + \cdots\cdots \right\} \tag{10-93}$$

故输沙量的解为

$$G_* = \left[1 - \frac{x}{\sqrt{\overline{k}_* t}} \right]^n \tag{10-94}$$

将 G_* 代入河床变形方程(10-60)经积分后得

$$Z_*(x,t) = \frac{2n\Delta G_0}{(1-P_*)} \sqrt{\frac{t}{\overline{k}_*}} \cdot 1 - \frac{x}{\sqrt{\overline{k}_* t}} + \frac{(n-1)}{2} \frac{x}{\sqrt{\overline{k}_* t}} \ln \frac{x^2}{\overline{k}_* t}$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-1)!(-1)^{n-j}}{j!(n-1-j)!(2-i+j)} \times \left[\frac{x^{n-1-j}}{(\overline{k}_* t)^{(n-1-j)/2}} - \frac{x}{\sqrt{\overline{k}_* t}} \right] \tag{10-95}$$

相应在 $x=0$ 入口处的冲淤高程为

$$Z_0 = \frac{2n\Delta G_0}{(1-P_*)} \sqrt{\frac{t}{\overline{k}_*}} \tag{10-96}$$

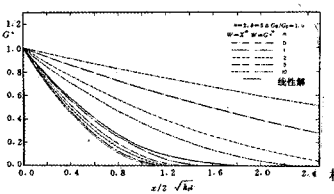


图 10-6

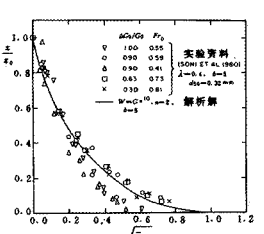


图 10-7

图(10-6)为解析解(10-85)与(10-94)的比较,两者还是相差较大的。图 10-7 为解析解(10-95)与实测值的比较,两者虽有些偏离,但总体上看还是比较合理的。求解析解(10-86)、(10-87)时权重取座标的函数,而求解析解(10-94)、(10-95)时权重取水流泥沙运动要素的函数,仅这点的差别导致了两种结果的较大差别,如何选择权重函数 W 对解析解非常重要,这一点还有待研究。

第五节　非均匀沙解析模型

天然河床由非均匀沙组成，对于由非均匀沙组成的床面冲刷情况，Karim 和 Kenndy 提出计算非均匀沙床面冲刷变形的解析模型。这种模型考虑了床面因受冲刷出现的粗化现象，物理图案上讲较前面介绍的模型更切合实际些。

将床面组成方程(7-145)改写成如下离散形式

$$p_k^{n+1}E_m^{n+1}=p_k^nE_m^n+(G_{kj}-G_{kj+1})\frac{\Delta t}{\Delta x}\frac{1}{(1-P_t)}$$
$$+[(Z_t^n-Z_t^{n+1})-(E_m^n-E_m^{n+1})]p_{ok} \tag{10-97}$$

记 Δt 时段内床面被冲起的第 k 组沙的沙量为

$$p_{tk}\Delta z_t=\frac{\Delta t}{\Delta x(1-P_t)}(G_{kj}-G_{kj+1}) \tag{10-98}$$

p_{tk}为补给悬移组粒配。则式(10-97)写成增量形式

$$\Delta(p_kE_m)=-p_{tk}\Delta x+p_{ok}(\Delta z_t+\Delta E_m) \tag{10-99}$$

因　　$$\Delta(p_kE_m)=p_k\Delta E_m+E_m\Delta p_k$$

式中负号为从混合层内取走沙量，且保证河床下侵时混合层增量为正值。写成微分形式有

$$p_k\mathrm{d}E_m+E_m\mathrm{d}p_k=p_{ok}(\mathrm{d}z_t+\mathrm{d}E_m)-p_{tk}\mathrm{d}z_t$$

各项除 $\mathrm{d}z_t$，得

$$p_k\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}z_t}+E_m\frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}z_t}=p_{ok}(1+\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}z_t})-p_{tk} \tag{10-100}$$

为了求解上式，Karim 建议采用以下半经验半理论公式计算床面冲起的泥沙转变为悬沙的百分数

$$p_{tk}=\frac{(\frac{d_{pj}}{d})^{\xi}p_k}{\int(\frac{d_{pj}}{d})^{\xi}p_k\mathrm{d}d} \tag{10-101}$$

d_{pj}为非均匀沙的平均粒径，ξ 为指数按下式计算

$$\xi=0.036\sqrt{\frac{h}{d_{pj}}}$$

此外，混合层厚度 E_m 取经验公式

$$E_m=\frac{h_d}{2}(1-A_f)+D_v \tag{10-102}$$

h_d 为沙波波高，D_v 残余混合层厚度，含冲刷极限情形下混合层的极限厚度，A_f 为河床深 z_t 包含不可冲颗粒所覆盖床面的面积，用下式计算

$$A_f=C_a(1-P_t)z_t(t)\int_{d_{kc}}^{d}\frac{p_k}{d}\mathrm{d}d \tag{10-103}$$

d_{kc}为临界起动粒径，d_{kmax}为最大不可动粒径，C_A 为系数，对于球体取 1.5，对于椭球体取 2.0。当床面完全由不可动颗粒覆盖时有 $A_f=1$，此时 z_t 达到床面处于平衡输沙状态下的最大冲深 Z_e，则

$$1=C_a(1-P_t)Ze(t)\int_{d_{kc}}^{d}\frac{p_k}{d}\mathrm{d}d \tag{10-104}$$

式(10-103)与(10-104)相比，得

$$A_f = \frac{z_s(t)}{Z_e} \tag{10-105}$$

将式(10-105)代入(10-102)得

$$E_m = \frac{h_d}{2Z_e}(Z_e + \frac{2Z_eD_v}{h_d} - z_s) \tag{10-106}$$

沙波波高用 Allen(1978)经验公式计算

$$h_d = [b_0 + b_1(\frac{\theta}{3}) + b_2(\frac{\theta}{3})^2 + b_3(\frac{\theta}{3})^3 + b_4(\frac{\theta}{3})^4]h$$

h 为水深，$b_0=0.08$，$b_1=2.24$，$b_2=-18.1$，$b_3=07.9$，$b_4=-88.3$，θ 为无量纲切应力

$$\theta = \frac{\gamma h J_f}{(\gamma_s - \gamma)d_{pj}}$$

对式(10-106)求导得

$$\frac{dE_m}{dz_s} = -\frac{h_d}{2Z_e}$$

和式(10-101)一起代入式(10-100)并整理行

$$p_{ak}(1 - \frac{h_d}{2Z_e}) - \frac{(\frac{d_{pj}}{d})^\xi p_k}{\int(\frac{d_{pj}}{d})^\xi p_k dd} = \frac{h_d}{2Z_e}\left(Z_e + \frac{2Z_eD_v}{h_d} - Z_e\right)\frac{dp_k}{dz_s} - \frac{h_d}{2Z_e}p_k \tag{10-107}$$

方程同乘以 dd，注意到平均粒径 d_{pj} 为

$$d_{pj} = \int_0^{d_{max}} d p_k dd$$

且定义原始床面颗粒级配相关矩为

$$\delta = \frac{1}{d_{pj}} \frac{\int_0^\infty d^{1-\xi} p_k dd}{\int_0^\infty d^{-\xi} p_k dd}$$

则从 $0 \sim d_{max}$ 积分(10-107)得

$$\frac{h_d}{2Z_e}\left(Z_e + \frac{2Z_eD_v}{h_d} - z_s\right)\frac{dd_{pj}}{dz_s} + (\delta - \frac{h_d}{2Z_e})d_{pj} = (1 - \frac{h_d}{2Z_e})d_{opj} \tag{10-108}$$

式中 d_{opj} 为原始河床非均匀沙平均粒径。式(10-108)为平均粒径 d_{pj} 的全微分方程式，从 $0 \sim Z_s$ 和 $d_{opj} \sim d_{pj}$ 积分得

$$\frac{d_{pj}}{d_{opj}} = (\frac{2Z_e - h_d}{2Z_e\delta - h_d})\left[(\frac{2Z_e\delta - h_d}{2Z_e - h_d} - 1) \times \left(\frac{Z_eh_d + 2Z_eD_v}{Z_eh_d + 2Z_eD_v - z_sh_d}\right)\right]^{(\frac{\frac{h_d}{2Z_e} - \delta}{\frac{h_d}{2Z_e}})} \tag{10-109}$$

此外，在床面覆盖层形成的极限状态下，原始河床中的泥沙不再透过混合层被冲走，原始河床组成就不应参入混合层组成计算，方程(10-107)中的 P_{ak} 就不应计入，此外，此时也可近似地取

$$\frac{dE_m}{dz_s} = -1$$

则微分方程(10-100)在冲刷达到平衡时可化成

$$-p_k + E_m\frac{dp_k}{dz_s} = -p_{ak} \tag{10-110}$$

和求解方程(10-107)一样，积分上式最后得

$$\frac{d_{pi}}{d_{opj}}=\left(\frac{Z_e h_d+2Z_e D_v}{Z_e d_d+2Z_e D_v-z_s h_d}\right)^{\left(\frac{2(1-\delta)Z_e}{h_d}\right)} \tag{10-111}$$

这就给出了覆盖层厚度 D_v 的计算式。

Karim 认为河床在刷深过程中，水流挟沙能力主要受到粗化床面颗粒的影响以及水深和流速变化的影响，而水深和流速的变化，可通过能坡的变化反映出来，因此，可考虑以下形式的水流挟沙能力关系式

$$G_s=\alpha d_{pj}^{\beta} J_f^{\gamma} \tag{10-112}$$

α 为与水深和流速有关的系数，β 和 γ 为指数，由实测资料确定，Karim 使用水槽实验资料定出 $\gamma=2.24$，$\beta=-1.5$。取 G_{so} 和 J_{fo} 为均匀流情况下的挟沙能力和能坡，式(10-112)的无量纲形式是

$$\frac{G_s}{G_{so}}=\left(\frac{d_{pi}}{d_{opj}}\right)^{\beta}\left(\frac{J_f}{J_{fo}}\right)^{\gamma} \tag{10-113}$$

对于河床下切不是很大的情况下，可考虑明渠中动力假设条件

$$J_f=J_{fo}+\frac{\partial Z_s}{\partial x} \tag{10-114}$$

将式(10-111)和(10-114)代入(10-113)得

$$\frac{G_s}{G_{so}}=\left(\frac{C_1}{C_1-\Delta z_S}\right)^{\beta C_2}\left[1+\frac{1}{J_{fo}}\frac{\partial z_s}{\partial x}\right]^{\gamma} \tag{10-115}$$

其中

$$C_1=Z_e\left[1+\frac{2D_v}{h_d}\right],C_2=\frac{2(1-\delta)Z_e}{h_d}$$

对式(10-115)关于 x 求偏导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_s}{\partial x}=&G_{so}\beta C_2\left[\frac{C_1}{C_1-z_s}\right]^{\beta C_2}\left(\frac{1}{C_1-z_s}\right)\left(1+\frac{1}{J_{fo}}\frac{\partial z_s}{\partial x}\right)^{\gamma}\frac{\partial z_s}{\partial x}\\&+\frac{G_{so}\gamma}{J_{fo}}\left(\frac{C_1}{C_1-z_s}\right)^{\beta C_2}\left(1+\frac{1}{J_{fo}}\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{\gamma-1}\frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2}\end{aligned} \tag{10-116}$$

考虑河床小扰动情况有 $J_{fo}>>\frac{\partial z_s}{\partial x}$，则

$$\frac{\partial G_s}{\partial x}=\frac{G_{so}\beta C_2}{G_1-z_s}\left(\frac{C_1}{C_1-z_s}\right)^{\beta C_2}\frac{\partial z_s}{\partial x}+\frac{G_{so}\gamma}{J_{ro}}\left(\frac{C_1}{C_1-z_s}\right)^{\beta C_2}\frac{\partial^2 z_s}{\partial x^2} \tag{10-117}$$

将式(10-117)代入河床变形方程式

$$(1-P_s)\frac{\partial z_s}{\partial t}+\frac{\partial G_s}{\partial x}=0$$

得

$$\frac{\partial z_s}{\partial t}+C\frac{\partial z}{\partial x}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \tag{10-118}$$

其中

$$\begin{aligned}C&=\frac{1}{(1-P_s)}\frac{G_{so}\beta C_2}{(C_1-z_s)}\left(\frac{C_1}{C_1-z_s}\right)^{\beta C_2}\\B&=\frac{G_{so}\gamma}{(1-P_s)J_{fo}}\left(\frac{C_1}{C_1-z_s}\right)^{\beta C_2}\end{aligned} \tag{10-119}$$

由于方程(10-118)是一个拟线性双曲型方程式，不易求解析解，但可以通过线性化后求其近似解析解。取线性化常数

$$C = \frac{1}{(1-P_s)}\frac{G_{so}\beta C_2}{(C_1 - Z_{so})}\left(\frac{C_1}{C_1 - Z_{so}}\right)^{\beta C_2} \tag{10-120}$$

$$B = \frac{G_{so}\gamma}{(1-P_s)J_{fo}}\left(\frac{C_1}{C_1 - Z_{so}}\right)^{\beta C_2}$$

并取初边界条件为

$$z_s(x,0) = z_{so} = 0$$

$$z_s(0,t) = Z_e(1 - a_1 e^{-b_2 t}) \tag{10-122}$$

a_1 和 a_2 为待定系数。边界条件(10-122)意味着，当 $a_1=1$ 和 $t\to\infty$ 时，床面呈指数分布下切，当 $a_1\neq 1$ 时，床面下切将逐步减缓。使用条件(10-121)和(10-122)方程(10-118)的解为[6]

$$\begin{aligned} z_s(x,t) = \frac{Z_e}{2}\exp\left(-\frac{C_0}{2B_0}x\right)\Bigg\{&\left[\exp\left(-x\sqrt{C_0^2/4B_0^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{B_0 t}} - \sqrt{\frac{C_0^2}{4B_0} - t}\right)\right. \\ &\left.+\exp\left(x\sqrt{\frac{C_0^2}{4B_0^2}}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{B_0 t}} + \sqrt{\frac{C_0^2}{4B_0} - t}\right)\right] \\ &-a_1 e^{-a_2 t}\left[\exp\left(-x\sqrt{\left(\frac{C_0^2}{4B_0^2} - a_2\right)/B_0}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{B_0 t}} - \sqrt{\left(\frac{C_0^2}{4B_0} - a_2\right)t}\right)\right. \\ &\left.+\exp\left(x\sqrt{\left(\frac{C_0^2}{4B_0^2} - a_2\right)/B_0}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{B_0 t}} + \sqrt{\left(\frac{C_0^2}{4B_0} - a_2\right)t}\right)\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{10-123}$$

在冲刷达到平衡情况下，Z_e 应由式(10-104)给出

$$Z_e = \frac{1}{C_A(1-P_s)\int_{d_{kc}}^{d_{kmax}}\frac{p_k}{d^3}\mathrm{d}d} \tag{10-124}$$

Karim 使用式(10-123)计算了密苏里河段冲刷问题，计算中取 $C_A=1.41$，$\beta=-1.5$ $a_1=1$，并取 a_2 为

$$a_2 = 0.85\frac{C_0^2}{4B_0}$$

计算结果与数值模型计算值相对比，两者相差较远。Karim 分析认为这主要是线性近似式(10-120)所造成的。

参 考 文 献

[1] Karim, M. F. and Kennedy. J., Degradation of graded-material beds in sediment-deffi-cient rivers, International Journal of Sediment Reasearch, 1986.

[2] Wilson F, J., Subhashh, C. J., Aggradation and degradation of alluvial-channel beds, Joumal of Hydraulics Engineering No 8. 1984.

[3] Mehta, P. J., Kamachandra. J., Garde and Kittur G. Kanga Raju, Transient bed pro-files in aggradation streams, 第二次河流泥沙国际学术讨论会议文集，中国，南京，1983。

[4] 彭润译、常德礼、谭伟民、推移质三角洲溯源冲刷计算公式，泥沙研究，1981。

[5] Hou Zheng and R. Kahawita, Nonlinear model for of aggradation in alluvial channals, journal of Hy-draulic Engineering, 1987.

[6] Causlaw, H. S., Jaeger, J. C., Conduction of Heat in solids, Oxford University Preger, J. C., Conduction of Heat in solids, Oxford University Press. 1978.