群桩相互作用的近似三维弹性分析方法的建立

洪 鑫[1, 2]，杨 敏[2]

（1．昆山市建设工程质量检测中心，江苏，昆山 215337；2．同济大学地下工程系，上海 200092）

摘 要：群桩已不再具有圆形单桩的轴对称性，因此群桩的承载特性及群桩效应不仅受桩间距的影响，而且受群桩布置方式的影响。为分析这些因素，基于 Mindlin 位移解，通过将桩沿桩表面进行三维剖分，建立了能够考虑群桩之间相互作用的三维分析方法，同时该方法还能够考虑长短桩、不等直径桩之间以及有无刚性承台下的群桩相互作用。与现有的方法相比，该方法能够取得较好的结果，即使群桩之间被夸大的效应减小了，桩顶荷载的分布更趋于实际工况。另外，还得到一个有益的结论：群桩中的桩身摩阻力沿桩身横截面是非均匀分布的，位于群桩内侧的桩身摩阻力小于外侧的桩身摩阻力。

关键词：群桩效应；Mindlin 位移解；三维弹性分析；长短桩；不等直径桩

中图分类号：TU473 文献标识码：A 文章编号：1000－4548(2007)12－1858－07

作者简介：洪 鑫(1978－)，男，江苏高邮人，博士研究生，注册岩土工程师，二级注册结构工程师，从事地基基础工程研究及基坑的支护方案设计、监测等工作。E-mail: kshongxin@tom.com。

Analysis for interaction of pile groups based on three-dimensional elastic theory

HONG Xin[1,2]，YANG Min[2]

(1. Kunshan Construction Engineering Quality Testing Centre, Kunshan 215337, China; 2. Geotechnical Institute, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Unlike a single circular pile, the pile group is non-axisymmetrical. Therefore, not only the pile spacing but also the pile group layout will have influence on both the bearing capacity and the pile group effect of pile groups. In order to analyze these influential factors, a calculation method was proposed for obtaining the load-settlement relationship of the pile groups with or without a rigid cap, using the Mindlin equation and the static force equilibrium equation. Additionally the proposed method could consider piles with unequal length and diameter. Compared with the existing methods, the proposed method could obtain more reasonable results which could decrease pile group effect and render a distribution of pile head load agreeable to the fact. It was also founded that the distribution of friction around pile section was unequal, and the friction on the internal piles was larger than that on the external piles of the group.

Key words: pile group effect; Mindlin settlement solution; three-dimensional elastic analysis; long-short pile foundation; unequal dimension pile foundation

0 前 言

桩基作为一种基础形式，已被大量工程使用，相应的有关桩基工程方面的研究也越来越多，尤其在群桩方面的研究[1]。其中关于群桩相互作用方面的研究主要有基于 Mindlin 解的弹性理论法[2-3]、基于剪切位移法的弹性理论法[4]、变分方法[5-6]、混合法[7]和有限单元法[8]等。这些方法（除有限单元法外）均假定桩身摩阻力沿桩身横截面均匀分布，而实际上由于多根桩在弹性半空间的布置将形成几何上的非轴对称性，从而引起桩身摩阻力沿桩身横截面并非均匀分布的现象，笔者曾在壁板桩的相互作用理论研究中也已发现了这点现象[9]，即非轴对称对荷载沉降特性有一定的影响，对桩身摩阻力分布的影响较大（群桩相互作用中，桩身内侧摩阻力的发挥小于桩身外侧摩阻力的发挥），这种现象（即同一深度处桩身横截面上的摩阻力不是同步发挥）在桩－土－承台模型试验中也已得以发现[10]。由于现有方法均假定桩身摩阻力沿桩身横截面均匀分布从而使得桩与桩之间的相互作用被夸大，导致在对群桩的承载分析时，对于刚性承台下的边桩与角桩的荷载分配比值和柔性承台下的边桩与角桩的

收稿日期：2006－12－30

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

沉降差均高于实际工况。

为了探讨群桩布置引起的几何非轴对称性对群桩相互作用分析的影响，借鉴笔者在研究壁板桩相互作用中的研究方法，即通过将桩沿桩表面进行三维剖分，以 Mindlin 位移解考虑桩桩相互作用，建立了能够考虑群桩之间相互作用的三维分析方法，从而考虑了桩身摩阻力沿横截面的非均匀分布，同时对原有方法[9]进行了扩充，使其能够解决有无刚性承台下群桩的相互作用，还能够考虑长短桩、不等直径桩、高低桩之间以及有无刚性承台下的群桩相互作用。最后通过编制的程序对一组案例进行了计算，得到了一些有益的结论。

1　群桩相互作用近似三维分析方法的建立

1.1　群桩桩周土体位移与桩土相互作用力之间的关系

对于一群桩数量为 M，桩体弹模均为 E_p 的群桩基础，设第 I 根桩的桩身直径为 d_i（下标表示桩号），桩长为 l_i；桩周土的弹模为 E_s，泊松比为 v_s，群桩桩顶荷载为 P_t。为考虑群桩之间的三维相互作用，对群桩中的每根单桩进行如图 1 的剖分，并对剖分单元进行编号，n_l 表示沿桩长方向的剖分单元数，n_r 表示沿桩侧的剖分单元数，n_o 表示沿桩端半径方向的剖分单元数，故桩侧单元总数为 $n_s=n_l*n_r$；桩端土单元总数为 $n_b=n_r*n_o$。分别用 p_{Ij}^{K} 和 w_{Ij}^{K} 表示第 K 根桩中第 I 层的第 j 个单元（记为桩侧土单元 Ij）的桩侧土位移和桩土相互作用力，分别用 p_{bj}^{K} 和 w_{bj}^{K} 表示第 K 根桩中桩端第 j 个单元（记为桩端土单元 bj）的桩端土位移和桩土相互作用力，上标中的大写字母表示桩号，以下的推导均采用此规定。

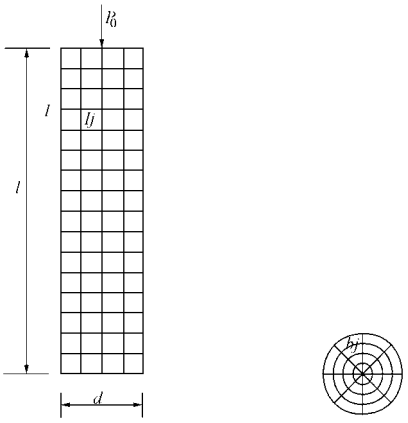


图 1　桩体单元剖分示意图

Fig. 1 Sketch map of elements of a single pile

根据 Mindlin 位移解[11]。假定桩周土体位移仅与桩土相互作用力有关，因此，对于有承台和无承台的群桩基础，群桩中所有桩桩侧单元的摩阻力，桩端单元的阻力对第 J 根桩桩侧土单元 Ij 中点产生的竖向位移

$$w_{Ij}^{\ J}=\frac{1}{E_s}\left(\sum_{K=1}^{M}\sum_{L=1}^{n_l}\sum_{k=1}^{n_r}Is_{Ij,Lk}^{\ J,K}p_{Lk}^{\ K}+\sum_{K=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_b}Is_{Ij,bi}^{\ J,K}p_{bi}^{\ K}\right)\quad,\tag{1}$$

式中，$Is_{Ij,Lk}^{J,K}$ 和 $Is_{Ij,bi}^{J,K}$ 分别表示第 K 根桩单元 Lk 上的单位摩阻力和单元 bi 上的单位桩端阻力引起第 J 根桩桩侧土单元 Ij 中点的竖向位移，或称竖向位移影响系数，可以通过 Mindlin 位移解的双重数值积分得到。

同理，对第 J 根桩桩端土单元 bj 中点产生的竖向位移

$$w_{bj}^{\ J}=\frac{1}{E_s}\left(\sum_{K=1}^{M}\sum_{L=1}^{n_l}\sum_{k=1}^{n_r}Is_{bj,Lk}^{\ J,K}p_{Lk}^{\ K}+\sum_{K=1}^{M}\sum_{i=1}^{n_b}Is_{bj,bi}^{\ J,K}p_{bi}^{\ K}\right)。\tag{2}$$

由式（1）和（2）可以得到群桩中所有桩周土体单元的位移与桩土相互作用力之间的关系，写成矩阵形式为

$$\{w_s\}_G=[Is]_G\{p\}_G\quad,\tag{3}$$

$$\{w_s\}_G=\left[w_{11}^{\ 1}\ \mathrm{L}\ w_{1n_r}^{\ 1}\ \mathrm{L}\ w_{n_l1}^{\ 1}\ \mathrm{L}\ w_{n_ln_r}^{\ 1},w_{b1}^{\ 1}\ \mathrm{L}\ w_{bn_b}^{\ 1}\ \mathrm{L}\ w_{11}^{\ M}\ \mathrm{L}\ w_{1n_r}^{\ M}\ \mathrm{L}\ w_{n_l1}^{\ M}\ \mathrm{L}\ w_{n_ln_r}^{\ M},w_{b1}^{\ M}\ \mathrm{L}\ w_{bn_b}^{\ M}\right]^{\mathrm{T}},\tag{4}$$

$$\{p_s\}_G=\left[p_{11}^{\ 1}\ \mathrm{L}\ p_{1n_r}^{\ 1}\ \mathrm{L}\ p_{n_l1}^{\ 1}\ \mathrm{L}\ p_{n_ln_r}^{\ 1},p_{b1}^{\ 1}\ \mathrm{L}\ p_{bn_b}^{\ 1}\ \mathrm{L}\ p_{11}^{\ M}\ \mathrm{L}\ p_{1n_r}^{\ M}\ \mathrm{L}\ p_{n_l1}^{\ M}\ \mathrm{L}\ p_{n_ln_r}^{\ M},p_{b1}^{\ M}\ \mathrm{L}\ p_{bn_b}^{\ M}\right]^{\mathrm{T}}。\tag{5}$$

式中　下标 G 代表群桩；$\{w_s\}_G$ 为桩侧单元及桩端单元中点处土的竖向位移列向量；$\{p\}_G$ 为桩侧单元摩阻力及桩端单元阻力列向量，各有$(n_s+n_b)M$ 个分量；$[Is]_G$ 为一$(n_s+n_b)M$ 阶土的竖向位移影响系数方阵，对于实际工程中群桩基础下部土体的压缩层为有限深或不均匀土层为非 Mindlin 解答所对应的半无限空间地基的情况时，可采取修正地基土的竖向位移影响系数的方法作近似处理，具体可参见文献[12]。

1.2　群桩桩体位移方程连续方程的建立

为了建立群桩的三维分析，首先需要建立单桩三维剖分下的桩体位移方程，该方程可通过文献[2]的桩体一维剖分下的位移方程进行转换而得，一维剖分下的桩体位移方程可由下式表示：

$$\{p'\}=[Ip']\{w_p\}+\{Y'\}\quad。\tag{6}$$

式中　$\{p'\}$ 为桩周应力向量；$\{w_p\}$ 为桩身位移方程向量；$\{Y'\}$ 为系数矩阵，均有 $N+1$ 个向量；$[Ip']$ 为 $N+1$ 阶的桩体位移系数矩阵，N 为沿桩深度方向一维剖分的单元数，即为 n_l。

$$\{Y'\}=\left\{\frac{P_0N}{\pi d}\quad 0\quad \mathrm{L}\quad \mathrm{L}\quad 0\right\}^{\mathrm{T}}\quad,\tag{7}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$[Ip'] = \frac{dE_p}{4(l/N)^2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \text{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \text{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \text{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} & \text{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{L} & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{L} & 0 & -0.2 & 2 & -5 & 3.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{L} & 0 & 0 & -\frac{4l}{3Nd} & \frac{12l}{Nd} & -\frac{32l}{3Nd} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} , \quad (8)$$

式中，l 为单桩桩长，P_0 为桩顶荷载。

令 $v_l=l/N$，$v_o=d/(2no)$，$v_r=2*\pi/nr$。向量 $\{p'\}$ 中的元素由下式可得：

$$p_i' = \begin{cases} \sum_{k=1}^{nr}\frac{d}{2}p_{ik}v_r/(\pi d) = \sum_{k=1}^{n_r}\frac{p_{ik}v_r}{2\pi} & (1\le i\le N), \\ \sum_{k=1}^{nr}\sum_{j=1}^{no}p_{b,(k-1)n_o+j}\frac{1}{n_r}\left((v_o j)^2 - \frac{(v_o(j-1))^2}{(\pi d^2/4)}\right) & (i=N+1)。 \end{cases} \quad (9)$$

将式（9）代入式（6），经整理可得（具体推导过程见文献[13]）：

$$[B]\{p\} = [Ip]\{w_p\} + \{Y\} = \{\overline{p}\} \quad 。 \quad (10)$$

式中 $\{Y\} = \left\{\frac{P_0}{dv_l} \quad 0 \quad \text{L} \quad \text{L} \quad 0\right\}^{\text{T}}$；$[Ip]$为一$(N+1)*(N+1)$阶的系数矩阵，其元素表示见附录；$[B]$为一$(N+1)*(n_l*n_r+n_r*n_o)$阶的应力叠加系数矩阵。

$[B]$元素可用下式表示：

（1）当$1\le i\le N$时

$$B_{ij} = \begin{cases} v_r & ((i-1)*n_r+1\le j\le i*n_r), \\ 0 & (\text{其它})。 \end{cases}$$

（2）$i=N+1$时

a） $j>n_r*N$，

$$B_{ij} = \frac{1}{n_r}((v_o j_0)^2 - \frac{(v_o(j_0-1))^2)}{(\pi d^2/4)}, jk = j - n_r ；$$

b）其它时，$B_{ij}=0$，$j_0 = jk - (\text{对}jk/n_o\text{取整})*n_o$。

至此，建立了桩土三维方程。对于群桩桩土三维方程的建立，由于有无刚性承台其荷载传递的机理是不同的，故分别建立有刚性承台和无刚性承台下的群桩桩土三维方程。

(1)有刚性承台下群桩桩土相互作用方程的建立

对于有刚性承台下的群桩基础，桩顶荷载是未知的，但桩顶沉降是相等的，故有

$$P_t = P_0^1 + P_0^2 + \text{L} + P_0^M \quad , \quad (11)$$

$$S_t = S_0^1 = S_0^2 = \text{L} = S_0^M \quad , \quad (12)$$

式中，P_0^I 表示群桩基础中每根桩的桩顶荷载，S_0^I 表示每根桩的桩顶沉降，S_t 表示有刚性承台的群桩整体沉降。

对于群桩中的每一单桩 I，对桩顶第一个单元进行分析，可得

$$S_0^I = w_1^{pI} + \frac{4}{E_p\pi d_I^2}\left(\frac{1}{2}p_0^I v_1^I - \frac{1}{16}p_1^{1I}d_I v_1^{I2}\right) \quad , \quad (13)$$

式中，w_1^{pI} 为第 I 根桩桩体第一个单元的沉降，$p_1'^I = \sum_{i=1}^{n_r}p_{1i}^I v_r$。

对式（12）从第 1 根桩累加到第 M 根桩，并结合式（11）和（12）可得

$$S_t = S_0^I = \frac{\sum_{I=1}^{M}k^I w_1^{pI}}{\sum_{I=1}^{M}k^I} + \frac{P_t}{\sum_{I=1}^{M}k^I} - \frac{\sum_{I=1}^{M}p_1'^I d_I v_1^I}{8\sum_{I=1}^{M}k^I} \quad , \quad (14)$$

式中，$k^I = \frac{E_p\pi d_I^2}{2v_1^I}$。

对于第 I 根桩，由式（10）中的第一行等式可得

$$p_1'^I = \frac{2P_0^I}{v_1^I d_I} + \frac{\pi d_I E_p}{2v_1^{I2}}(-w_1^{pI} + w_2^{pI}) \quad 。 \quad (15)$$

联立式（14）和（15）可得

$$\frac{3}{4}p_1'^I + \frac{E_p\pi d_I\sum_{I=1}^{M}(d_I v_1^I p_1'^I)}{8v_1^{I2}\sum_{I=1}^{M}k^I}$$

$$= \frac{E_p\pi d_I\sum_{I=1}^{M}k^I w_1^{pI}}{v_1^{I2}\sum_{I=1}^{M}k^I} - \frac{3E_p\pi d_I w_1^{pI}}{2v_1^{I2}} + \frac{E_p\pi d_I}{2v_1^{I2}}w_2^{pI} + \frac{E_p\pi d_I P_t}{v_1^{I2}\sum_{I=1}^{M}k^I}。 \quad (16)$$

用式 (16) 代替式 (10) 中的第一行，从而消除 P_0^I 这一未知量，可用矩阵形式表示

$$[Ip]_G\{w_p\}_G + \{Y\}_G = [U]\{\overline{p}\}_G \quad 。 \quad (17)$$

为了方便表述，令 $y^I = -\frac{3\pi d_I E_p}{2v_1^{I2}} + \frac{\pi d_I E_p k^I}{v_1^{I2}\sum_{J=1}^{M}k^J}$，

$x^I = \frac{\pi d_I E_p}{2v_1^{I2}}$，则式中$[Ip]_G$可用下式表示，

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$Ip(I,K)=\begin{cases}\begin{bmatrix} y^I & x^I & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ x^I & -2x^I & x^I & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & x^I & -2x^I & x^I & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & x^I & -2x^I & x^I & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & -0.2x^I & 2x^I & -5x^I & 3.2x^I\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & -\dfrac{E_\mathrm{p}}{3v_\mathrm{l}} & \dfrac{3E_\mathrm{p}}{v_\mathrm{l}} & -\dfrac{8E_\mathrm{p}}{3v_\mathrm{l}} \end{bmatrix} & (I=K)\ ,\\ \begin{bmatrix} \dfrac{2x^I k^K}{\sum_{J=1}^{M} k^J} & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & (I\neq K)\ , \end{cases} \tag{18}$$

$$\{w_\mathrm{p}\}_G=\left[w_\mathrm{l}^{\,1}\ \mathrm{L}\ w_N^{\,1},\ w_\mathrm{b}^{\,1}\ \mathrm{L}\ w_\mathrm{l}^{\,M}\ w_N^{\,M},\ w_\mathrm{b}^{\,M}\right]^{\mathrm{T}}_{(N+1)M}\ , \tag{19}$$

$$\{Y\}_\mathrm{G}=\left[\underbrace{\frac{P_\mathrm{c}}{M\delta_z}\ 0\ \mathrm{L}\ 0}_{N+1\text{项}}\ \mathrm{L}\ \underbrace{\frac{P_\mathrm{c}}{M\delta_z}\ 0\ \mathrm{L}\ 0}_{N+1\text{项}}\right]^{\mathrm{T}}_{(N+1)M}\ , \tag{20}$$

$$\{\overline{p}\}_\mathrm{G}=\left[p_\mathrm{l}''\ \mathrm{L}\ p_N'^{\,1},\ p_\mathrm{b}'^{\,1}\ \mathrm{L}\ \mathrm{L}\ p_\mathrm{l}''^{M}\ \mathrm{L}\ p_N'^{\,M},\ p_\mathrm{b}'^{M}\right]^{\mathrm{T}}_{(N+1)M}\ , \tag{21}$$

$$U(I,K)=\begin{cases}\begin{bmatrix} \dfrac{3}{4}+\dfrac{E_\mathrm{p}\pi d_I^{\,2}}{8v_\mathrm{l}^I\sum_{J=1}^{M}k^J} & 0 & \mathrm{L} & 0\\ 0 & 1 & \mathrm{L} & 0\\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M}\\ 0 & 0 & \mathrm{L} & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} & (I\neq K),\\ \begin{bmatrix} \dfrac{E_\mathrm{p}\pi d_I d_K v_\mathrm{l}^{\,K}}{8v_\mathrm{l}^{I2}\sum_{J=1}^{M}k^J} & 0 & \mathrm{L} & 0\\ 0 & 1 & \mathrm{L} & 0\\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M}\\ 0 & 0 & \mathrm{L} & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} & (I\neq K)。 \end{cases} \tag{22}$$

(2)无刚性承台下群桩桩土相互作用方程的建立

对于无刚性承台下的群桩基础，其桩顶荷载是已知的，而桩顶沉降却是未知的，故可直接通过式（6）进行推广可得到类似于式（17）的方程，但式（17）中的的矩阵[*U*]为单元矩阵，$[Ip]_\mathrm{G}$ 和 $[Y]_\mathrm{G}$ 矩阵可由下式表示：

$$[Ip]_\mathrm{G}=\begin{bmatrix} [Ip]_{N+1}^{\,1} & [0]_{N+1} & \mathrm{L} & [0]_{N+1}\\ [0]_{N+1} & [Ip]_{N+1}^{\,2} & \mathrm{L} & [0]_{N+1}\\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M}\\ [0]_{N+1} & [0]_{N+1} & \mathrm{L} & [Ip]_{N+1}^{\,M} \end{bmatrix}_{M\times M}\ , \tag{23}$$

$$\{Y\}_\mathrm{G}=\left[\underbrace{\frac{P_0^{\,1}}{d_\mathrm{l}v_\mathrm{l}^{\,1}}\ 0\ \mathrm{L}\ 0}_{N+1\text{项}}\ \mathrm{L}\ \mathrm{L}\ \underbrace{\frac{P_0^{\,M}}{d_\mathrm{l}v_\mathrm{l}^{\,M}}\ 0\ \mathrm{L}\ 0}_{N+1\text{项}}\right]^{T}_{(N+1)M}\ , \tag{24}$$

式中，$[Ip]_{N+1}^{\,\mathrm{I}}$ 表示第 *I* 根桩的桩体位移系数矩阵，可由式（10）求得。

1.3　群桩荷载沉降支配方程的建立

假定在弹性阶段桩与土之间接触面上的位移协调，因此有

$$\{w_\mathrm{s}\}_\mathrm{G}=[A]_\mathrm{G}\{w_\mathrm{p}\}_\mathrm{G}\ , \tag{25}$$

$$[A]_\mathrm{G}=\begin{bmatrix} [A]_{(n_\mathrm{s}+n_\mathrm{b})\times(N+1)} & [0]_{(n_\mathrm{s}+n_\mathrm{b})\times(N+1)} & \mathrm{L} & [0]_{(n_\mathrm{s}+n_\mathrm{b})\times(N+1)}\\ [0]_{(n_\mathrm{s}+n_\mathrm{b})\times(N+1)} & [A]_{(n_\mathrm{s}+n_\mathrm{b})\times(N+1)} & \mathrm{L} & [0]_{(n_\mathrm{s}+n_\mathrm{b})\times(N+1)}\\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M}\\ [0]_{(n_\mathrm{s}+n_\mathrm{b})\times(N+1)} & [0]_{(n_\mathrm{s}+n_\mathrm{b})\times(N+1)} & \mathrm{L} & [A]_{(n_\mathrm{s}+n_\mathrm{b})\times(N+1)} \end{bmatrix}_{M\times M}。 \tag{26}$$

参考文献[13]，式中的矩阵[*A*]可由下式求得：

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$[A]=\begin{bmatrix} \underbrace{1\ \cdots\ 1}_{n_r\text{项}} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1\ \cdots\ 1}_{n_r\text{项}} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \underbrace{1\ \cdots\ 1}_{n_r\text{项}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1\ \cdots\ 1}_{n_b\text{项}} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{(N+1)\times(n_s+n_b)}。$$

对于群桩中的每根桩都满足式（10），故有

$$\{\bar{p}\}_{\mathrm{G}}=[B]_{\mathrm{G}}\{p\}_{\mathrm{G}}\quad，\tag{27}$$

$$[B]_{\mathrm{G}}=\begin{bmatrix} [B]^{1}_{(N+1)\times(n_s+n_b)} & [0]_{(N+1)\times(n_s+n_b)} & \cdots & [0]_{(N+1)\times(n_s+n_b)} \\ [0]_{(N+1)\times(n_s+n_b)} & [B]^{2}_{(N+1)\times(n_s+n_b)} & \cdots & [0]_{(N+1)\times(n_s+n_b)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [0]_{(N+1)\times(n_s+n_b)} & [0]_{(N+1)\times(n_s+n_b)} & \cdots & [B]^{M}_{(N+1)\times(n_s+n_b)} \end{bmatrix}_{M\times M}，\tag{28}$$

式中，矩阵$[B]^{I}$表示第 I 根桩的应力叠加系数矩阵，可由式（10）求得。

由式（3），（17），（25）和（27）可得

$$\{p\}_{\mathrm{G}}=\left([A]_{\mathrm{G}}[Ip]_{\mathrm{G}}^{-1}[U][B]_{\mathrm{G}}-[Is]_{\mathrm{G}}\right)^{-1}[A]_{\mathrm{G}}[Ip]_{\mathrm{G}}^{-1}\{Y\}_{\mathrm{G}}。\tag{29}$$

解上式方程，可得到群桩中每根桩桩侧表面各单元的摩阻力及桩端各单元阻力$\{P\}_{\mathrm{G}}$，将$\{P\}_{\mathrm{G}}$代入式（24）可得桩体各单元的线摩阻力$\{\bar{p}\}_{\mathrm{G}}$，再将$\{\bar{p}\}_{\mathrm{G}}$代入式（14）即可得到桩体各单元的位移$\{w_{\mathrm{p}}\}_{\mathrm{G}}$，最后，对于有高桩承台和无承台的群桩，可以分别由式（12）和（10），计算得到各桩的桩顶荷载和桩顶沉降。

当用上述方法算得的桩侧摩阻力（即剪应力）或桩端阻力达到桩土界面的极限摩阻力（即达到滑移破坏）或桩端的极限承载力时，可以对上述方法进行修正，进行理想弹塑性分析，具体的修正过程可参阅文献[12]。

2 与现有方法的对比

为了验证本文方法的正确性，本文选取了Poulos[2]、Butterfield[3]、Randolph[4]、Chow[7]、Shen[5]及王伟[6]等用不同方法都计算过的案例，参数如下：

一均匀土体中的 3×3 群桩基础，刚性承台，桩间距 $s=5r$，r 为桩体半径，土体泊松比 $v_{\mathrm{s}}=0.5$，角点处桩为 1 号，各边中点处桩为 2 号，中心点处桩为 3 号，$E_{\mathrm{p}}/G_{\mathrm{s}}=6000$。计算中单元剖分数分别取 $n_{\mathrm{l}}=10$，$n_{\mathrm{r}}=4$，$n_{\mathrm{o}}=2$ 进行了计算，#1 桩、#2 桩和#3 桩等效刚度 $P_{\mathrm{i}}/(G_{\mathrm{s}}rS_{\mathrm{i}})$ 的变化分别如图 2～4 所示。

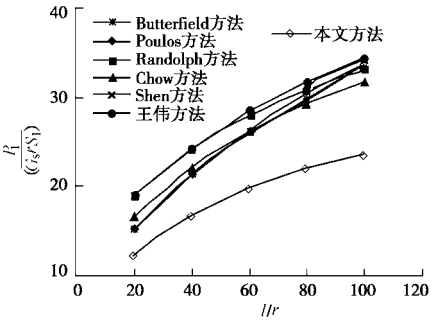


图 2 群桩中#1 桩刚度比较

Fig. 2 Load-settlement ratio of pile No.1 for 3×3 pile groups

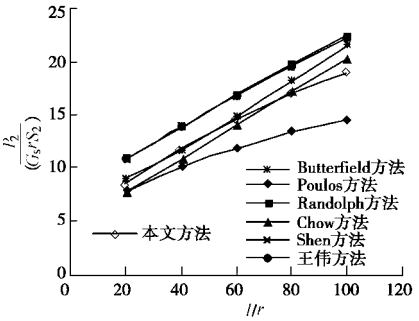


图 3 群桩中#2 桩刚度比较

Fig. 3 Load-settlement ratio of pile No. 2 for 3×3 pile groups

图 2～4 中的结果包含了 Butterfield 边界单元法、Poulos 相互作用系数法、Randolph 剪切位移法、Chow 混合法、Shen 基于幂函数级数的变分方法和王伟基于双曲余弦函数的变分方法。比较结果发现，通过本文方法得到的各桩等效刚度随桩间距的变化规律与现有方法均相同，但#1 桩（角桩）等效刚度普遍比现有方

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

法要小，#3 桩（中心桩）等效刚度普遍要比现有方法大，而#2 桩的等效刚度与现有方法比较接近，说明通过本文方法计算得到的角桩分担荷载值要小于其他方法，而中心桩的分担荷载要大于其他方法。同时结合目前现有理论与实际的对比结果，现有方法都夸大了群桩之间的相互作用，导致角桩的等效刚度偏大，中心桩的等效刚度偏小，而本文采用近似三维分析方法有效减小了角桩的等效刚度，增加了中心桩的等效刚度，使原被夸大的群桩之间的相互作用得以减小，从而使得各桩的桩顶荷载差值减小，更接近与实际工况。

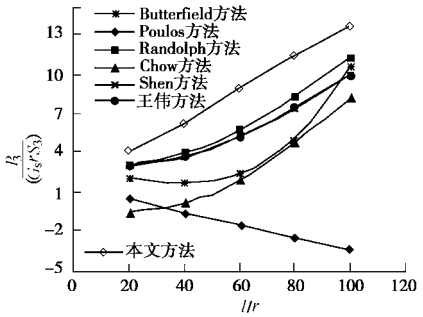


图 4 群桩中#3 桩刚度比较

Fig. 4 Load-settlement ratio of pile No. 3 for 3×3 pile groups

最后选取一 3×3 的群桩案例进行了分析，其中 r = 1.0 m，l = 20.0 m，s = 5.0 m，E_s = 25 MPa，E_p = 50 GPa，ν_s = 0.5，群桩顶部荷载为 2000 kN，给出了离桩顶 4.5 m 处桩侧摩阻力沿桩身横截面的分布图（见图 5），从图中可以发现，桩身摩阻力沿横截面并非均匀分布，而是桩身处于内侧的摩阻力要小于桩身处于外侧的摩阻力，即同一深度处的桩身横截面上的桩身摩阻力发挥并非同步，这种现象与文献[10]中桩－土－承台共同作用模型试验发现的一致，同时桩身摩阻力非均匀分布也进一步解释了本文方法模拟群桩相互作用能够有效减小群桩之间相互作用的原因，即同假定桩身应力均匀分布的现有方法相比，本文方法由于考虑桩身应力非均匀分布实际使得应力之间相互作用的距离被加大了，从而使得群桩之间的相互作用得以减小。

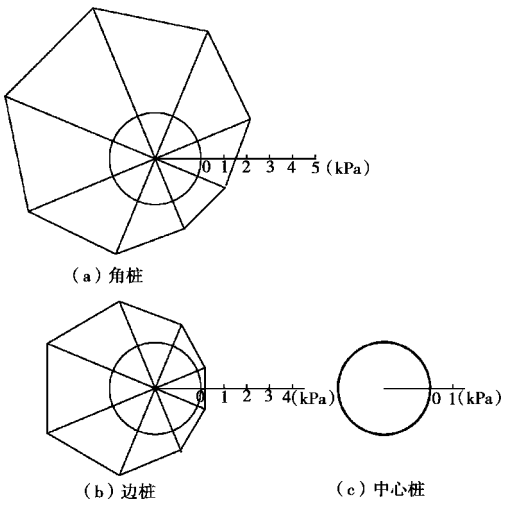


图 5 桩侧壁摩阻力沿横截面的分布

Fig. 5 Distribution of lateral friction around piles

3 结　论

基于 Mindlin 位移解，通过将桩体沿桩表面进行三维剖分，建立了能够考虑群桩之间相互作用的近似三维分析方法，实现了能够考虑桩身摩阻力沿横截面非均匀分布的功能，同时还能够考虑长短桩、不等直径桩之间以及有无刚性承台下的群桩相互作用。通过与现有的方法对比及一个案例的计算，得到以下结论：

（1）本文方法得到的各桩等效刚度随桩间距的变化规律与现有方法相同，说明该方法的可行性。

（2）通过本文方法分析群桩的相互作用，可有效降低群桩之间的相互作用，即减小了角桩的等效刚度，增加了中心桩的等效刚度，使各桩的桩顶荷载差值减小，更接近与实际工况，说明了本文方法的优点。

（3）另外，发现群桩中的桩身摩阻力沿桩身横截面并非是均匀分布的，而是桩身处于内侧的摩阻力要小于桩身处于外侧的摩阻力，即同一深度处的桩身横截面上的桩身摩阻力发挥并非同步，这与文献[10]中桩－土－承台共同作用模型试验发现的规律一致。

有关该方法用于分析群桩的三维承载特性，及用三维分析对桩的“遮帘与加筋”效应研究，笔者将另文进行论述。

参考文献：

[1] 史佩栋. 实用桩基工程手册[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000. (SHI P D. Practical manual for pile engineering[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2000. (in Chinese))

[2] POULOS H G, DAVIS E H. Pile foundation analysis and design[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 1980.

[3] BUTTERFIELD R, BANERJEE P K. The elastic analysis of compressible piles and pile group[J]. Géotechnique, 1971, **21**(1): 43－60.

[4] RANDOLPH M F, WROTH C P. An analysis of the vertical deformation of pile groups[J]. Géotechnique, 1979, **29**(4):

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

423－439.

[5] SHEN W Y, CHOW Y K, YONG K Y. A variational approach for vertical deformation analysis of pile groups[J]. Int J Numer Anal Math Geomech, 1997, **21**(11): 741－752.

[6] 王 伟, 杨 敏. 基于变分原理的群桩位移计算方法[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(9): 1072－1076. (WANG W, YANG M. Vertically deformation analysis of pile group based on variational theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(9): 1072－1076. (in Chinese))

[7] CHOW Y K. Analysis of vertically loaded pile groups[J]. Int J Numer Anal Math, Geomech, 1986, 10: 59－72.

[8] OTTAVIANI M. Three-dimensional finite element analysis of vertically loaded pile groups[J]. Géotechnique, 1975, **25**(2): 159－174.

[9] 雷国辉, 洪 鑫, 施建勇. 矩形壁板桩群桩竖直承载特性的理论分析[J]. 岩土力学, 2005, **26**(4): 525－530. (LEI G H, HONG X, SHI J Y. Theoretical analysis of vertical load-carrying behaviour of rectangular barrettes[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, **26**(4): 525－530. (in Chinese))

[10] 王 浩, 周 健, 邓志辉. 桩－土－承台共同作用的模型试验研究[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(10): 1253－1258. (WANG H, ZHOU J, DENG Z H. Model tests on pile-soil-cap interaction[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(10): 1253－1258. (in Chinese))

[11] MINDLIN R D, Force at a point in the interior of a semi-infinite solid[J]. Physics, 1936, **7**(5): 195－202.

[12] POULOS H G. Settlement of piles in non-homogeneous soil[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1979, **105**(GT5): 627－641.

[13] 洪 鑫. 壁板桩承载特性的理论分析与模型试验研究[D]. 南京: 河海大学, 2003. (HONG X. Rearch on behaviour of barrettes by theorectical analysis and model tests[D]. Nanjing: Hohai University, 2003. (in Chinese))

附 录：

$$[Ip]=\begin{bmatrix}
-\frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & \frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & -\frac{\pi dE_p}{\nu_l^2} & \frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & -\frac{\pi dE_p}{\nu_l^2} & \frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & -\frac{\pi dE_p}{\nu_l^2} & \frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -0.2\frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & 2\frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & -5\frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2} & 3.2\frac{\pi dE_p}{2\nu_l^2}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{E_p}{3\nu_l} & \frac{3E_p}{\nu_l} & -\frac{8E_p}{3\nu_l}
\end{bmatrix}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net