基于蒙特卡罗积分的无网格伽辽金法及其在渗流分析中的应用

介玉新[1, 2]，刘 岩[1, 2]

（1．清华大学水利水电工程系，北京 100084；2．水沙科学与水利水电工程国家重点实验室(清华大学)，北京 100084）

摘 要：无网格法在处理有限元法难以解决的问题时具有显著的优势，且前后处理比较简单。无网格伽辽金法（Element-free Galerkin method，EFG）是无网格法的一种，它采用滑动最小二乘法近似场函数，计算精度较高，且有较好的稳定性，在结构和渗流分析中受到欢迎。但 EFG 方法需要背景积分网格进行高斯积分，离真正的“无网格”方法还有一定距离。对其积分方法进行改进，采用蒙特卡罗方法（Monte Carlo）进行积分运算，由此提出了基于蒙特卡罗积分的无网格法（MCEFG）。从而摆脱 EFG 方法对背景积分网格的依赖，使之成为真正意义上的无网格方法。基于 MCEFG 方法的渗流分析程序对有自由面的渗流问题进行了较好模拟。该方法可以推广应用到其他需要背景积分网格的方法中，从而使无网格法真正与网格脱离。

关键词：无网格法；无单元法；蒙特卡罗方法；数值积分；渗流

中图分类号：O302；O211 文献标识码：A 文章编号：1000－4548(2007)12－1794－06

作者简介：介玉新(1970－)，男，副教授，博士，主要从事土工数值分析、基础工程、土工合成材料等方面的教学和科研工作。E-mail: jieyx@tsinghua.edu.cn。

Element-free Galerkin method based on Monte Carlo integration and its application in seepage analysis

JIE Yu-xin[1, 2]，LIU Yan[1, 2]

(1. Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing, 100084, China; 2. State Key Laboratory of Hydroscience and Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Meshless methods were preponderant in dealing with problems when it was difficult to employ finite element method. And they could simplify pre- and post-processings. Element-free Galerkin method (EFG), based on moving least squares method (MLS), was one of the meshless methods. Owing to its accuracy and stability, EFG method was widely applied in structure and seepage analysis. However, EFG method was not a “truly” meshless method, since mesh was still used to conduct numerical integration. A Monte Carlo-based EFG method (MCEFG) was proposed to do the integration with Monte Carlo method. The mesh or cell was not used in MCEFG method. So it was truly a meshless method. A program based on MCEFG method was compiled and applied to seepage analysis. It was shown that the method was suitable for simulating seepage with a free surface. The idea in this study could be generally extended to other methods with integral mesh, and transformed them to be truly meshless.

Key words: meshless method; element-free method; Monte Carlo method; numerical integration; seepage

0 引 言

有限元法是目前工程问题数值模拟的主要手段。但在解决大变形、变动边界等问题时，无网格法具有显著的优势。另外，无网格法摆脱了常规有限元方法中将域划分为单元的限制，能够灵活地布置节点，前后处理比较简单。随着计算机硬件和软件的发展，工程计算的发展方向是只需给出结构尺寸、材料性质和边界条件，就可以直接进行计算，无需用户进行网格剖分。与有限元方法相比，无网格法在适应这方面需要上也更有竞争力。

目前已提出了很多种无网格方法。它们之间的主要区别在于所使用的试探函数（trial function，如滑动

基金项目：国家重点基础研究（973）资助项目(2007CB714102)

收稿日期：2007－01－17

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

最小二乘、重构核函数、单位分解、径向基函数、点插值等）和微分方程的等效形式。在积分方案上，有的可以通过节点直接积分，但这种积分方案不太稳定，有的依赖背景网格进行积分。

无网格法的研究历史可追溯到 20 世纪 70 年代，一般认为无网格法的发展开始于光滑粒子流体动力学（smoothed particle hydrodynamics，SPH）方法[1-3]的提出。1992 年 Nayroles 等[4]将滑动最小二乘近似（moving least square，MLS）引入 Galerkin 法中，提出了漫射元法（diffuse element method，DEM）。Belytschko 等[5]对 DEM 进行了改进，提出了无单元 Galerkin 法（element-free Galerkin method，EFG）。随后，许多学者开始了无网格法的研究。

EFG 方法是无网格法的一种。在国内，寇晓东对 EFG 方法进行了较为系统的研究，并将其用于追踪结构开裂计算[6]。黄岩松将其推广用于三维结构计算[7]。葛锦宏[8]首先将其用于渗流分析，计算有自由面的渗流问题。周晓杰将其用于管涌问题的模拟[9]。

EFG 方法在国内有不同的翻译名称，主要有“无单元法”、“无单元伽辽金法”、“无网格伽辽金法”等。由于该方法仍然需要划分积分网格，所以称为“无单元伽辽金法”可能更恰当。但很多中文文献中将其称为“无网格伽辽金法”，以及考虑到与无网格法这一大类方法的衔接关系，所以在此也将“无网格伽辽金法”作为 EFG 的中文名称。

EFG 方法主要利用背景网格进行数值积分。由于网格和节点相互独立，积分网格的构造比有限元方法更为方便。但它毕竟没有摆脱对网格的依赖，虽然可以通过节点直接积分，但这种积分方案不太稳定，难以推广应用。

为了解决 EFG 方法对积分网格的依赖，本文采用蒙特卡罗方法（Monte Carlo）进行积分运算。蒙特卡罗方法即随机模拟方法（random simulation），亦称作随机抽样技术（random sampling）或统计试验方法（statistical testing）。由于随机模拟的原型来自博采，人们就用博采之都 Monte Carlo 作为其别称。蒙特卡罗方法计算手段及程序结构简单，在数学上主要用于高维多重积分等常规方法难以实现的积分计算[10-11]。在有限元计算中由于高斯积分等的成功而使其他方法受到忽视。本文将蒙特卡罗方法引入 EFG 的积分计算，由此提出了基于蒙特卡罗积分的无网格法（MCEFG）。该方法相当于用一系列随机分布的点集代替积分域进行积分计算。只要将求解域用两套点集进行离散就能进行数值计算。一套为节点，用于构造形函数；一套为随机分布的积分样本点，用于数值积分。这种方法彻底摆脱了对背景积分网格的依赖，从而使之成为真正意义上的无网格方法。

笔者编写了基于 MCEFG 方法的计算程序，并将其用于渗流分析，对有自由面的渗流问题进行了数值计算。计算表明，该方法能够满足岩土工程计算精度的要求。

本文的研究在思路具有普遍性，可以用于其他需要背景网格的无网格方法中。即使对于无需背景网格的方法，如果考虑将积分点与节点分离，即节点只用于构造插值函数，积分计算则通过另外构造的一套点集进行，也可能会为解决计算不稳定等问题提供新的思路。

1　EFG 方法简介

假定场函数为 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})$，其中 $\boldsymbol{X}=(x,y)^{\mathrm{T}}$ 为场点。$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}_i)=\boldsymbol{u}_i,(i=1,2,...,n)$ 为场函数在 n 个给定场点上的已知值。滑动最小二乘的插值函数为[6,8,12]

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n}n_i(\boldsymbol{X})\boldsymbol{u}_i \quad , \tag{1}$$

其中，$n_i(\boldsymbol{X})$ 为 i 节点的形函数在 $\boldsymbol{X}$ 点的取值。

$$n_i(\boldsymbol{X})=w_i(\boldsymbol{X})\sum_{j=1}^{m}c_{ji}(\boldsymbol{X}) \quad , \tag{2a}$$

$$c_{ji}(\boldsymbol{X})=\frac{q_j(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})q_j(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{X})}{b_j(\boldsymbol{X})} \quad , \tag{2b}$$

$$b_j(\boldsymbol{X})=\sum_{i=1}^{n}w_i(\boldsymbol{X})q_j^2(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{X}) \quad , \tag{2c}$$

其中，$w_i(\boldsymbol{X})$ 为权函数，q_j 为正交基函数 $(j=1,2,...,m)$。实践表明用正交基不但可以减少计算工作量，而且可以改善插值计算的精度。

EFG 方法与常规有限元方法的主要不同之处是形函数的不同。在积分方案上通常都采用高斯积分的形式。

2　渗流分析中的 EFG 方法

在渗流分析中，自由面的计算是难点。用有限元法处理这类问题比较困难。因为自由面位置事先并不知道，需要根据求解结果来确定。传统上一般是先假定一个自由面，然后根据计算结果进行调整。一般需要通过迭代来实现，有限元网格随自由面位置的变动而调整[13]。该方法的缺点是每次迭代都要更新有限元网格，如果假定的自由面与实际相去较远，可能会导致单元畸形。尤其在自由面附近单元材料类型较多时，处理起来就更为困难。为此人们发展了固定网格法，如 Desai 于 1976 年提出了剩余流量法[14]。也有采用饱和－非饱和渗流理论来处理问题的方法[15]。固定网格法改善了计算效果，但也存在迭代计算上的困难。笔

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

者也曾尝试用适体坐标变换方法求解自由面问题[16-17]，但它是一种差分方法，对流量边界的处理比较困难，对水位变动情况下自由面的计算精度较低，所以也不太适合这类问题。由于无网格法能够灵活地布置节点，特别适用于边界条件随计算结果而调整的情况，所以在自由面的计算中是有优势的。

利用变分原理或加权余量（残值）法可以写出二维饱和稳定渗流的有限元格式

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{H}\}+\{\boldsymbol{F}\}=0 \quad , \tag{3}$$

其中

$$[\boldsymbol{K}]=\iint_{\boldsymbol{\Omega}}[\boldsymbol{B}]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{k}][\boldsymbol{B}]\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \quad , \tag{4a}$$

$$K_{ij}=\iint_{\boldsymbol{\Omega}}(k_x\frac{\partial n_i}{\partial x}\frac{\partial n_j}{\partial x}+k_y\frac{\partial n_i}{\partial y}\frac{\partial n_j}{\partial y})\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega} \quad , \tag{4b}$$

$$F_i=\int_{\boldsymbol{\Gamma}_2}qn_i\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma} \quad 。 \tag{5}$$

上式中的形函数可以通过式（2）构造。

3 EFG 的积分方案

虽然与有限元方法采用相似的网格进行积分计算，但 EFG 积分网格的布置比较灵活，只要能够将域离散即可。一种方案是采用如图 1 所示的矩形网格进行积分[6,8]；一种是采用常规与有限元类似的网格进行，此时网格仅用于积分计算，与式（1）中的插值节点则没有必然联系。

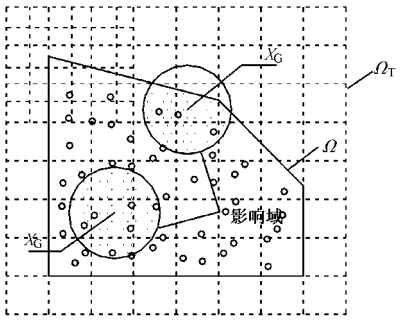


图 1 背景网格积分

Fig. 1 Background integration mesh

图 2 是采用有限元网格进行积分的例子[8]。由于网格只是用来离散积分区域，所以不必象有限元那样严格要求网格之间的邻接关系。

还有一种方法是利用节点进行积分，但其计算稳定性较差[1]。

4 蒙特卡罗积分

蒙特卡罗方法是一种利用统计抽样理论近似求解数学问题或物理问题的方法。它的主要理论基础是概率论中的大数定律，主要手段为随机变量的抽样[18]。它的主要优点是方法及程序简单，适应性强，收敛的概率性和收敛速度与问题维数无关。在数学上主要用于高维多重积分的计算。而在有限元计算中，由于高斯积分的成功使蒙特卡罗方法被忽视。另外，早期由于计算机运行速度限制，不能进行大量随机抽样，其实用性受到制约。随着计算机硬件的发展，这种方法应当重新受到重视。

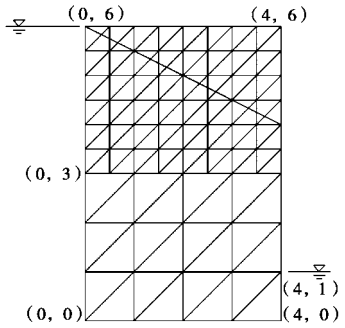


图 2 有限元网格积分

Fig. 2 Integration mesh following FEM

基于蒙特卡罗的积分方法有频率法(随机投点法)和期望法（平均值法），以及一些通过降低方差提高精度的方法。本文采用期望法来计算积分。这种方法比较简单，易于编程。

期望法的核心是把积分看成某个随机变量的期望。以一维积分为例，最自然的是看成积分域$[a,b]$上均匀随机变量的期望。设$\eta\sim \mathrm{U}[a,b]$（$[a,b]$上的均匀分布），则

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)Ef(\eta) \quad 。 \tag{6}$$

于是对于 N 个独立的$[a,b]$上的均匀随机数，可以用矩估计

$$\hat{I}=(b-a)\frac{f(\eta_1)+\mathrm{L}\ +f(\eta_N)}{N} \tag{7}$$

作为 $I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的估计。显然，它是无偏估计[11]。

上述蒙特卡罗求积方法是以随机变量θ的简单子样$\theta_1,\theta_2,...,\theta_N$的算术平均值

$$\overline{\theta}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\theta_i \tag{8}$$

作为所求积分 I 的近似值。如果随机变量序列 $\theta_1,\theta_2,...,\theta_N$ 相互独立、同分布、期望值存在，则由大数定理可知，当 $N\to\infty$ 时，$\overline{\theta}$ 以概率 1 收敛于 I。同时，根据中心极限定理，若有限标准差 $\sigma\neq 0$，那么当 $N\to\infty$ 时，随机变量 $Y=(\overline{\theta}-I)/(\sigma/\sqrt{N})$ 渐进地服从标准正态分布 $N(0,1)$，即[10]

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$P_r(Y<t_\alpha)\approx\int_{-\infty}^{t_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x \quad 。 \tag{9}$$

因此，对任何$t_\alpha>0$，有$P_r(|Y|<t_\alpha)=P_r(|\bar{\theta}-I|<\frac{t_\alpha\sigma}{\sqrt{N}})$

$\approx\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_\alpha}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\mathrm{d}x=1-\alpha$，这表示不等式

$$|\bar{\theta}-I|<\frac{t_\alpha\sigma}{\sqrt{N}} \quad 。 \tag{10}$$

成立的概率近似等于$1-\alpha$。其中，当α很小时，α称为显著水平，$1-\alpha$称为置信水平。因此，蒙特卡罗方法的误差ε可以写为

$$\varepsilon=\frac{t_\alpha\sigma}{\sqrt{N}} \quad 。 \tag{11}$$

该误差是在概率意义下的统计估值。模拟结果误差 ε 与标准差σ成正比，与模拟次数的平方根$\sqrt{N}$成反比。在许多情况下，无法知道理论值σ，因此对于本文采用的平均值法，在实际计算中可以用标准样本方差来代替σ。从式（11）可以看出，只要N足够大，能够保证误差ε满足精度要求。

为了验算上述方法，首先对三个算例进行计算：(a) $\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$，(b) $\int_0^1\int_0^1 xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，(c) $\iint_\Omega\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（积分域$\Omega$为单位圆）。

蒙特卡罗数值积分计算结果及其与精确解的相对误差列于表 1 中。计算采用的随机样本点个数为320000。可以通过 Fortran 自带的随机数生成器先在区间[0, 1]上生成样本点，然后变换到相应域上即可。表中计算值为 10 次计算的平均值。从计算结果可以看出，蒙特卡罗数值积分的计算精度能够得到保证。

表 1 蒙特卡罗数值积分计算结果

Table 1 Integration results with Monte Carlo method

积分式	精确解	蒙特卡罗积分	
		计算值	误差/%
$\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$	$\frac{2}{3}$	0.66668998	0.003
$\int_0^1\int_0^1 xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	0.25	0.2498328	0.067
$\iint_\Omega\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	2.0943951	2.0950152	0.030

5　基于蒙特卡罗积分的 EFG 方法（MCEFG）及其应用

采用蒙特卡罗方法计算式（4）所示的积分，即可得到基于蒙特卡罗数值积分的无网格 Galerkin 方法（MCEFG）。在实际应用中，如图 3 所示，为了避免计算不规则积分域Ω的面积，可直接在包含积分域Ω的规则矩形域内布点，假设积分点的总数为M，落入积分域内的N个积分点对应的函数值为$f(x_1,y_1),f(x_2,y_2),...,f(x_N,y_N)$，则有

$$I=\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\approx\frac{S}{M}\sum_{i=1}^{N}f(x_i,y_i) \quad ， \tag{12}$$

其中，S为包含积分域的规则矩形域的面积。

这种处理对于不规则积分域是方便的，如果积分域为梯形等容易计算其面积的情况，可以直接进行面积计算。

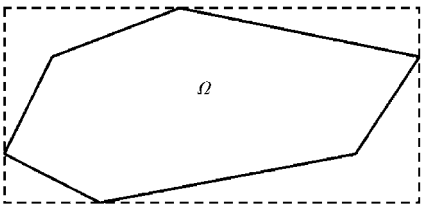


图 3 积分域的处理

Fig. 3 Integration domain

为了验证 MCEFG 方法的适用性，首先对如图 4（a）所示的均质矩形土坝进行计算，渗透系数$k_x=k_y=0.1\ \mathrm{m/d}$，上游水位 6 m，下游水位 1 m，计算时假定的初始自由面位置如图 4（a）中的直线。采用 MCEFG 法对其进行渗流计算，最终得到的自由面位置如图 4（b）所示（图中的黑点是计算结束时节点的位置）。采用该方法与传统 EFG 法的结果对比如表 2。可以看出，MCEFG 法的计算结果能够满足要求。

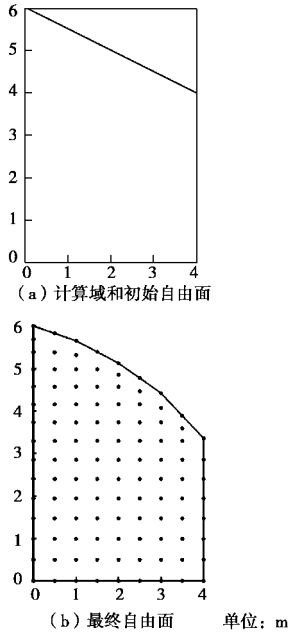


图 4 MCEFG 法计算矩形土坝

Fig. 4 Calculation of a rectangular dam by MCEFG

图 2 是传统 EFG 方法采用的积分网格[8,19]。需要

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

在计算前事先完成。MCEFG 方法无需积分网格，只需在计算域内通过 Fortran 自带的随机数生成器布置随机分布的积分点集即可。它相当于用大量的点来离散积分区域。

表 2 自由面节点水头

Table 2 Water head of the node on free surface 单位：m

x 坐标	1.0	2.0	3.0	4.0
试验值	5.63	5.10	4.38	3.25
有限元	5.65	5.22	4.44	3.53
EFG	5.65	5.14	4.45	3.34
MCEFG	5.65	5.12	4.42	3.36

进一步对如图 5 所示的均质土坝进行计算，土坝坡度 1∶2，渗透系数 $k_x = k_y = 0.1\ \mathrm{m/d}$，上游水位 6 m，下游水位处于基准面位置。假定的初始自由面位置如图 5（a）所示。采用 MCEFG 法对其进行渗流计算，最终得到的自由面位置如图 5（b）。计算得到的溢出点坐标与采用传统 EFG 方法的计算结果对比见表 3。

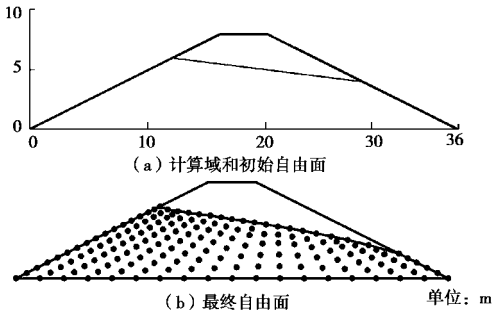


图 5 MCEFG 法计算均质土坝

Fig. 5 Calculation of a homogeneous dam by MCEFG

表 3 溢出点坐标的比较

Table 3 Calculated location of seepage exit 单位: m

计算方法	溢出点坐标
EFG	（32.05，1.98）
MCEFG	（31.89，2.06）

可以看出，在工程意义上，MCEFG 的计算精度是能够满足要求的。MCEFG 方法最大的优点是前处理比较简单，只要给出结构或求解域的几何特征、材料参数和边界条件，采用合适的自动布点技术[19]就可以直接进行计算，无需划分网格、检查网格特性等繁杂的前处理工作。

用蒙特卡罗方法进行积分的主要缺点是收敛速度慢，计算精度与 $1/\sqrt{N}$ 有关，所以为提高精度需要进行大量运算。但随着计算机运行速度的提高，大规模运算已逐渐成为可能。此外，在数学上已有一些通过降低方差来提高计算精度的方法，但如何用于 EFG 方法有待进一步研究。相信随着研究的深入，结合无网格法工程计算特点构造合适的改善精度的算法，并采用相应的权函数，提高计算效率是不难实现的。

6 结 论

（1）EFG 方法计算精度和稳定性较高，但它需要背景网格进行积分计算。本文对其积分方法进行改进，采用蒙特卡罗方法（Monte Carlo）进行积分运算，提出了基于蒙特卡罗积分的无网格法（MCEFG）。从而摆脱 EFG 方法对背景积分网格的依赖，使之成为真正意义上的无网格方法。通过算例计算表明 MCEFG 方法能够满足工程计算精度的需要。

（2）MCEFG 方法在思路上的特点在于采用了两套点集来离散求解域：一套是插值节点，用于构造形函数；一套是积分样本点，用于离散积分区域。两者彼此独立。该方法对点集的质量要求较低，性质稳定，而且自动布点技术的实现也比划分有限元网格容易得多。这就使得 MCEFG 方法编程简单，自动化程度较高。

（3）这种“以点代面”的思路可以推广用于其他无网格方法。对于需要背景网格的无网格法，采用 Monte Carlo 积分能够使其真正与网格脱离。即使对于无需背景网格的方法，如果考虑将积分点与节点分离，即节点只用于构造插值函数，积分计算则通过另外构造的一套点集进行，也会为解决计算不稳定问题提供新的可能。

（4）Monte Carlo 方法的缺点是收敛速度慢，计算量偏大。不过，随着技术进步，计算机硬件运行速度的迅速提高能够抵消计算方法在效率方面的不足。此时人们会更关注方法本身的简便性和稳定性。在简便性方面，Monte Carlo 方法是具有竞争力的。结合无网格法计算特点对算法进行优化，通过降低方差等构造精度更高的 Monte Carlo 积分方法，也能够改善其计算效率。

（5）随着计算机技术以及以有限元为代表的各种计算手段的发展，数值计算已深入人心。在一些特定问题上，无网格法将会是有限元法的重要补充。另一方面，计算机发展也使一些原来被人们忽视的算法重新显现出活力，这也为科研工作提供了新的思考问题的方式。

参考文献：

[1] 张 雄, 刘 岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (ZHANG Xiong, LIU Yan. Meshless method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[2] LIU G R, LIU M B. 光滑粒子流体动力学: 一种无网格粒子法[M]. 韩　旭, 杨　刚, 强洪夫, 译. 长沙: 湖南大学出版社, 2005. (LIU G R, LIU M B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshless particle method[M]. HAN Xu, YANG Gang, QIANG Hong-fu, trans. Changsha: Hunan University Press, 2005. (in Chinese))

[3] LUCY L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. The Astron J 1977, **8**(12): 1013－1024.

[4] NAYROLES B, TOUZOT G, VILLON P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements[J]. Comput Mech, 1992, **10**: 307－318.

[5] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin methods[J]. Int J Num Meth Engng, 1994, **37**: 229－256.

[6] 寇晓东. 无单元法追踪结构开裂及拱坝稳定研究[D]. 北京: 清华大学, 1998. (KOU Xiao-dong. Element-free method tracing structure fracture and arch dam stability analysis[D]. Beijing: Tsinghua University, 1998. (in Chinese))

[7] 黄岩松. 三维无单元伽辽金法及其在坝工破坏分析中的应用[D]. 北京: 清华大学, 2005. (HUANG Yan-song. Threedimensional element-free method and its application in dam analysis[D]. Beijing: Tsinghua University, 2005. (in Chinese))

[8] 葛锦宏. 无单元法渗流计算及其在长江堤防中的应用[D]. 北京: 清华大学, 2002. (GE Jin-hong. Seepage analysis with element-free method and its application in embankment of Yangtze River[D]. Beijing: Tsinghua University, 2002. (in Chinese))

[9] 周晓杰. 堤防的渗透变形及其发展的研究[D]. 北京: 清华大学, 2006. (ZHOU Xiao-jie. Research on the generation and evolution of seepage deformation in levee[D]. Beijing: Tsinghua University, 2006. (in Chinese))

[10] 徐钟济. 蒙特卡罗方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1985. (XU Zhong-ji. Monte Carlo method[M]. Shanghai: Shanghai Science & Technology Press, 1985. (in Chinese))

[11] 龚光鲁, 钱敏平. 应用随机过程教程及在算法和智能计算中的随机模型[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (GONG Guang-lu, QIAN Min-ping. Applied random process and random model in algorithm and intelligent computation[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))

[12] LU Y Y, BELYTSCHKO T, GU L. A new implementation of the element-free Galerkin method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, **113**: 397－414.

[13] DESAI C S. Finite element methods for flow in porous media[M]. UK: John Wiley and Sons, 1975.

[14] DESAI C S. Finite element residual schemes for unconfined flow[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1976, **10**: 1415－1418.

[15] LAM L, FREDLUND D G. Saturated-unsaturated transient finite element seepage model for geotechnical engineering[J]. Advances in Water Resources, 1984, **7**: 132－136.

[16] 介玉新, 揭冠周, 李广信. 用适体坐标变换方法求解渗流[J]. 岩土工程学报, 2004, **26**(1): 52－56. (JIE Yu-xin, JIE Guan-zhou, LI Guang-xin. Seepage analysis by boundary-fitted coordinate transformation method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, **26**(1): 52－56. (in Chinese))

[17] 揭冠周. 基于适体坐标变换的有限差分法在渗流分析中的应用[D]. 北京: 清华大学, 2002. (JIE Guan-zhou. Application of boundary fitted coordinate transformation method in seepage analysis[D]. Beijing: Tsinghua University, 2002. (in Chinese))

[18] 高明坤. 实用概率统计学（概率及其应用）[M]. 北京: 国防工业出版社, 1988. (GAO Ming-kun. Practical probability & statistics: probability and its application[M]. Beijing: Defence Industry Press, 1988. (in Chinese))

[19] 刘　岩. 基于模拟退火的约束布点技术及其在渗流分析中的应用[D]. 北京: 清华大学, 2006. (LIU Yan. Point sets generation with prescribed boundary points based on simulated annealing and its application in seepage analysis[D]. Beijing: Tsinghua University, 2006. (in Chinese))

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net