

高等岩石力学

第二章 岩石的弹塑性本构关系

引言 岩石塑性力学的特点

1. 不仅静水压力可以引起岩石塑性体积的变化，而且偏应力也可能引起塑性体积变化——剪胀
2. 岩石屈服准则不仅考虑剪切屈服，还要考虑体积应变屈服，表现在屈服面上，岩石塑性力学的屈服面是封闭的且越来越多地采用双屈服面和多重屈服面；
3. 岩石塑性力学不受稳定材料的限制可考虑出现软化阶段的所谓不稳定材料；
4. 岩石塑性力学中考虑塑性势函数和屈服函数不一致的所谓非联合流动法则，这时塑性应变增量方向和塑性势面正交，而和屈服面不正交；
5. 岩石塑性力学考虑弹性系数随塑性变形的发展而变化的弹塑性耦合现象

目 录

- 第一节 非线性弹性理论
- 第二节 应力空间表述的弹塑性本构关系
- 第三节 应变空间表述的弹塑性本构关系
- 第四节 塑性的内蕴时间理论

第一节 非线性弹性理论

一 . 应力空间和应变空间

在岩石力学中使用弹塑性理论是将岩石介质看作是一种连续介质，严格来说，岩石介质的应力 - 应变关系都是非线性的。

本构关系是关于一个物质质点的力学性质，一般认为它是与应力和应变有关，而与应力梯度和应变梯度无关。为了直观地描述质点的状态，引入应力空间和应变空间两个概念。

应力空间是这样九维空间，指定的应力状态（二阶张量）的九个分量是这个空间中的正交笛卡儿坐标系九个轴上的分量，于是，指定的应力状态 σ_{ij} 用这个空间的一个点来表示。应力状态变化的历史可用应力空间中的一条曲线表示，称为应力路径。

应变空间中的一个点对应于一个应变状态 ε_{ij} ，应变空间中一条曲线称为应变路径，表示质点应变状态变化的历史。

应力空间表述：取应力状态为基本的状态变量，应变为状态函数。

应变空间表述：取应变状态为基本的状态变量，应力为状态函数。

二．用 Cauchy 方法给出的本构方程

按 Cauchy 方法可以这样定义弹性介质：在外力作用下，物体各点的应力状态和应变状态之间存在着——对应的关系，弹性介质的响应仅与当时的状态有关，而与应力路径或应变路径无关，假设了应力和应变都是瞬时发生的。

用**全量**形式表示各向同性的弹性介质的本构关系如下：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu_s}{E_s} \sigma_{ij} - \frac{\nu_s}{E_s} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2 - 1)$$

$$\text{和 } \sigma_{ij} = (K_s - \frac{2}{3} G_s) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G_s s_{ij} \quad (2 - 2)$$

式中： E_s 是材料的割线杨氏模量； ν_s 是割线泊松比； K_s 是割线体积模量； G_s 是割线剪切模量；

用**增量**形式表示各向同性的弹性介质的本构关系如下：

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu_t}{E_t} d\sigma_{ij} - \frac{\nu_t}{E_t} d\sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2-4)$$

$$\text{和 } d\sigma_{ij} = (K_t - \frac{2}{3}G_t)d\varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G_t ds_{ij} \quad (2-5)$$

式中： E_t 是材料的切线杨氏模量； ν_t 是切线泊松比； K_t 是切线体积模量； G_t 是切线剪切模量；

三．用 Green 方法给出的本构方程

在应变空间中相应的点沿一闭合曲线移动一周，如果物体是弹性的，在变形过程中满足：

$$dA = du + dQ \quad (2-11)$$

式中： dA 是外力功增量； du 是内能增量； dQ 是进入系统的热量。其中 $dA = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$

沿封闭的应变路径积分，得 $\oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \oint dQ \quad (2-12)$

在绝热和等温条件下， $\oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = 0$ ，令 $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = dU(\varepsilon_{ij})$ ，即

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2 - 14)$$

上式就是应变空间表述的全量本构方程，将上式两边取微分，得应变空间表述的增

量本构方程，即 $d\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl}$ (2 - 15)

现在使用 Legendre 变换方法可以得到应力空间表述的全量和增量本构方程，分别为

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2 - 17)$$

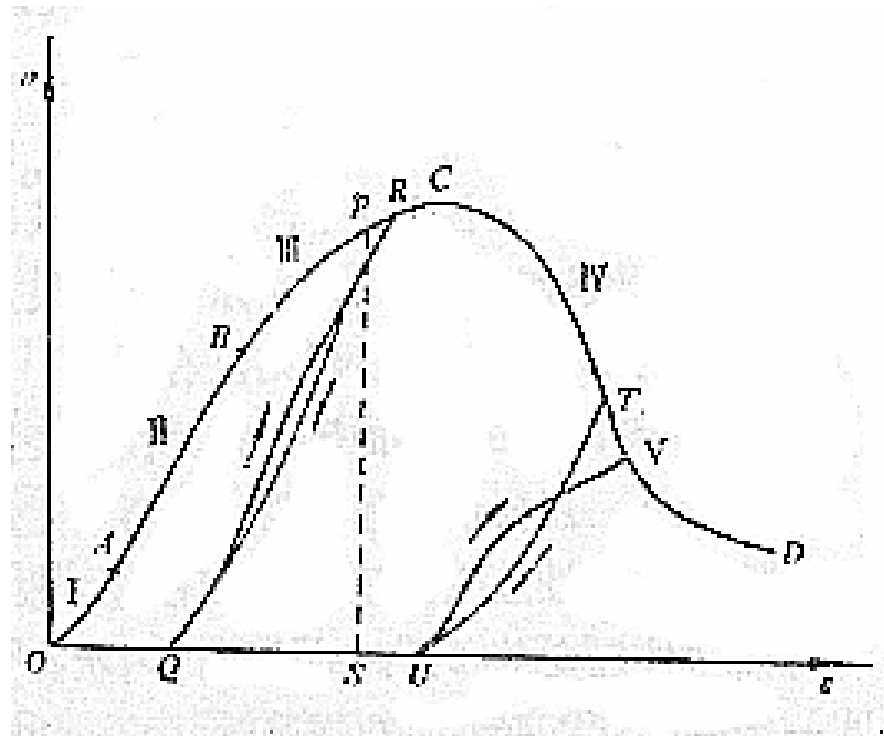
和 $d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}$ (2 - 18)

其中 $\Phi(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - U$

第二节 应力空间表述的弹塑性本构关系

一. 岩石的单轴压缩试验

如图所示为一般岩石在普通室温和大气压条件下进行的单轴压缩试验典型应力 - 应变曲线，曲线大致分为四个区域：



第 区域 (OA 段): 应力 - 应变曲线向上弯, 即随着变形的增加, 产生同样大小的应变所需增加的应力越来越大;

第 区域 (AB 段): 应力 - 应变曲线接近于直线, 它的斜率即为岩石的弹性模量 E , B 点对应的应力称为弹性极限或屈服应力;

第 区域 (BC 段): 曲线逐渐下弯, C 点处达到峰值, 其对应的压应力值称为压缩强度在这区域任何点 P 处卸载, 应力应变将沿 PQ 下降, 当压应力降为零时, 应变却没有完全消失, 说明岩石中存在参予变形, 称为塑性变形, 如果重新加载, 应力 - 应变将沿 QR 上升至 R 点, 岩石仅发生弹性变形, 相当于把弹性极限从 B 点对应的应力值提高到 R 点对应的应力值, 这种现象称为应变硬化。

第 区域 (CD 段): 出现应力降低、应变增加的现象, 称为应变软化。

为了突出弹塑性材料的主要性质, 将上述试验曲线进行简化:

在整个 OB 阶段假设变形是纯弹性的, 应力 - 应变之间成线性关系;

从超过 B 点之后的状态卸载和重新加载的两条曲线完全重合, 通常不考虑弹塑性耦

合现象。

岩石单轴压缩试验表明：

在塑性状态，弹塑性材料具有历史相关性或路径相关性，这使得本构方程的表述要比非线性弹性复杂；

岩石体积应变和平均压力之间不是线性的，岩石体积应变既有静水压力作用下的压缩体积应变，又有受剪引起的塑性体积应变。在硬化阶段，压缩体积应变是主要的，表现为岩石的体积压缩，而在软化阶段，岩石的塑性体积应变不断增大，岩石体积膨胀，称为剪胀现象；

岩石具有明显的 Bauschinger 效应。

二．岩石屈服条件和屈服面

从弹性状态开始第一次屈服的屈服条件称初始屈服条件，它可以表示为：

$$f(\sigma_{ij}) = 0$$

当产生了塑性变形，屈服条件的形式发生变化，此时的屈服条件称后继屈服条件，

它可以表示为：

$$f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi) = 0 \quad (2 - 22)$$

式中： σ_{ij} 为总应力， σ_{ij}^p 为塑性应力， χ 为标量的内变量，它可以代表塑性功，塑性体应变，或等效塑性应变，屈服条件在几何上可以看成是应力空间中的超平面。

对于一个介质质点，它的状态可以用外变量 σ_{ij} ，内变量 σ_{ij}^p 和 χ 来完全描述，一般地，使 $f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi) < 0$ 的状态称为弹性状态，这时介质对无限小的外部作用的反应是弹性；使 $f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi) = 0$ 的状态称为塑性状态，这时介质对外部作用的反应是弹塑性的；而 $f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi) > 0$ 的状态是不存在的。

三．硬化材料的屈服面模型

1．等向硬化 - 软化模型

塑性变形发展时，屈服面作均匀扩大（硬化）或均匀收缩（软化），如果 $f^* = 0$ 是初始屈服面，那么等向硬化 - 软化模型的后继屈服面可表示为

$$f = f^*(\sigma_{ij}) - H(\chi) = 0 \quad (2 - 28)$$

2. 随动硬化模型

塑性变形发展时,屈服面的大小和形状保持不变,仅是整体地在应力空间中作平动,其后继屈服面可表示为

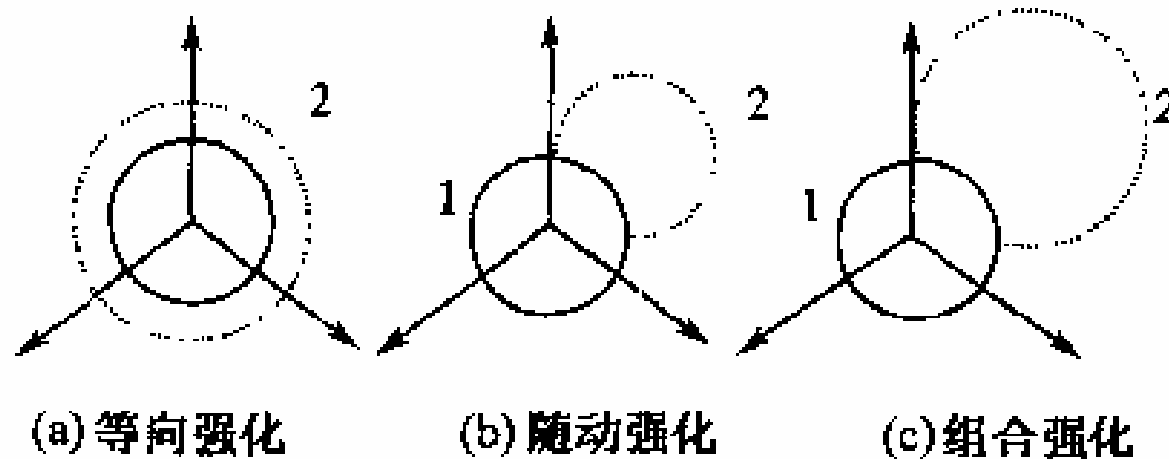
$$f = f^*(\sigma_{ij} - \alpha\sigma_{ij}^p) = 0 \quad (2 - 29)$$

3. 混合硬化模型

对于大多数实际材料,屈服面的硬化规律大概介于等向硬化 - 软化和随动硬化之间,这种模型的后继屈服面可表示为

$$f = f^*(\sigma_{ij} - \alpha\sigma_{ij}^p) - H(\chi) = 0 \quad (2 - 30)$$

复杂应力作用下状态下的各种硬化模型如下所示。



四．塑性岩石力学最常用的屈服条件

1．库仑 (Coulomb) 屈服条件

库仑屈服条件是一种等向硬化 - 软化模型,它认为当材料某平面的剪应力达到某一特定值时,材料就进入屈服,而这一特定值不仅与材料自身的性质有关,而且与该平面上的正应力有关,一般表示为

$$|\tau| = c + \sigma_n \tan \phi$$

主应力的表示形式为

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \sin \phi - c \cos \phi = 0$$

库仑屈服条件没有考虑围压 σ_2 对屈服特性的影响；德鲁克 - 普拉格屈服条件是对库仑屈服条件的修正，它不仅能考虑围压 σ_2 对屈服特性的影响，而且能反应剪切引起膨胀（扩容）的性质。

2. 德鲁克 - 普拉格 (Drucker - Prager) 屈服条件

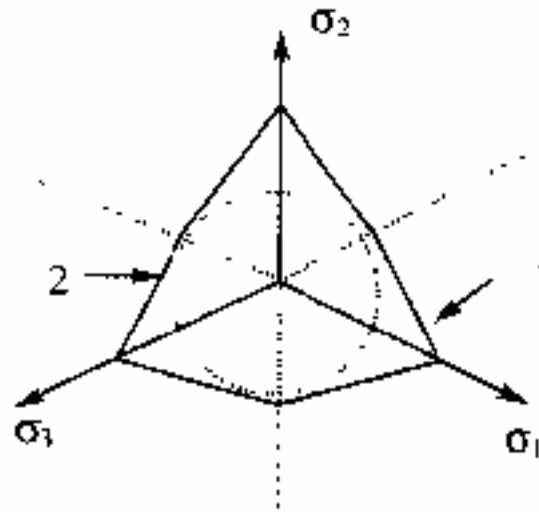
德鲁克 - 普拉格屈服条件也是一种等向硬化 - 软化模型，可表示为

$$f = \alpha I_1 + J_2^{1/2} - K = 0$$

式中： I_1 是应力第一不变量， $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ；

J_2 是应力偏量第二不变量， $J_2 = \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$

在主应力空间中，库仑屈服条件是一个六棱锥，德鲁克 - 普拉格屈服条件是一个圆锥，以上两种屈服条件在 π 平面上的几何图形如图所示。



π 平面上屈服曲线

1 为库仑条件；2 为德鲁克-普拉格条件

五．塑性状态的加载 - 卸载准则

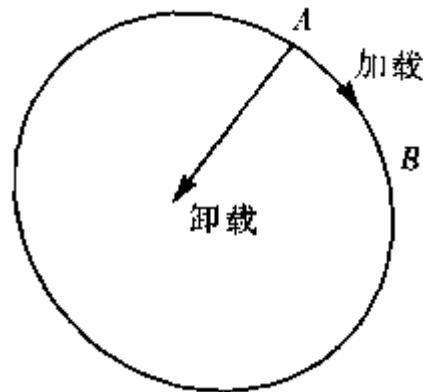
1．理想塑性材料的加载 - 卸载准则

由于理想塑性材料是无硬化的，它的后继屈服条件和初始屈服条件是一致的，后继屈服面和初始屈服面重合。由于屈服面是唯一的，故它与加载历史无关。

在这样的塑性状态下，材料对所施加的应力增量 $d\sigma_{ij}$ 有两种不同的反应，一种是有新的塑性变量增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 出现，这种情况称为**塑性加载**，简称加载。由于加载是从一个塑性状态 $(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi)$ 变化到另一个塑性状态 $(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p + d\sigma_{ij}^p, \chi + d\chi)$ 上，应力点始终保持在屈服面上，因而有 $df = 0$ ，这个条件称为一致性条件；另一种情况是无新的塑性变形发生，即 $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ ，反应是纯弹性的，这种情况称为**塑性卸载**，简称卸载，在卸载期间，材料从一个塑性状态退回到一个弹性状态，即从一个使 $f = 0$ 的状态退回到一个使 $f < 0$ 的状态，因而在卸载时有 $df < 0$ 。

理想塑性材料加载和卸载准则的数学表达形式如下：

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(\sigma_{ij}) < 0 & \text{弹性状态} \\ f(\sigma_{ij}) = 0 \text{ 且 } df = f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) - f(\sigma_{ij}) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 0 & \text{加载} \\ f(\sigma_{ij}) = 0 \text{ 且 } df = f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) - f(\sigma_{ij}) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} < 0 & \text{卸载} \end{array} \right.$$



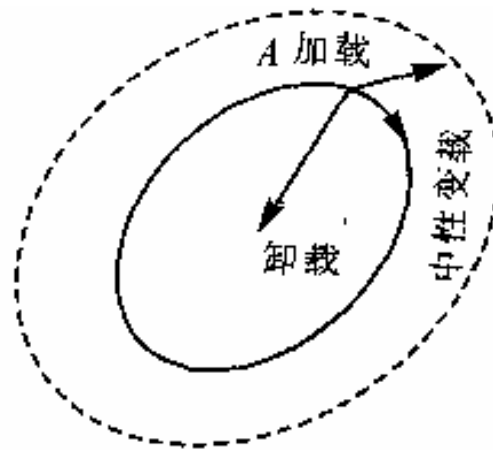
理想塑性材料加载 - 卸载准则示意图

2. 硬化塑性材料的加载 - 卸载准则

对于硬化材料，后继屈服面和初始屈服面不同，它是随塑性变形的大小和历史的发展而不断变化的。如果应力变化 $d\sigma_{ij}$ 使应力点从瞬时状态所处的后继屈服面向内移，则变化的结果使材料从一个塑性材料退回到一个弹性状态，即为**卸载**过程，不会产生新的塑性变形；如果应力变化 $d\sigma_{ij}$ 使应力点沿同一后继屈服面变化，即从一个塑性状态变化到另一个塑性状态，但不产生新的塑性变形，称为**中性变载**；如果应力变化 $d\sigma_{ij}$ 使材料从一个塑性状态变化到另一个塑性状态，应力点从原来的后继屈服面外移到相邻的另一个后继屈服面是称为**加载**。

硬化塑性材料加载和卸载准则的数学表达形式如下：

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \begin{cases} < 0 & \text{卸载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ > 0 & \text{加载} \end{cases}$$



硬化塑性材料加载 - 卸载准则示意图

六． 塑性势理论与相应的本构方程

首先，设在一个无量小的应力增量 $d\sigma_{ij}$ 作用下，产生的应变增量 $d\varepsilon_{ij}$ 由弹性部分 $d\varepsilon_{ij}^e$ 和塑性部分 $d\varepsilon_{ij}^p$ 组成，即

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2 - 41)$$

其次，设弹性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^e$ 与应力增量 $d\sigma_{ij}$ 之间有弹性关系，即

$$d\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad (2 - 42)$$

塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^p$ 由塑性势理论给出，引入弹塑性介质存在塑性势函数 $g(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi)$ ，使得

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2 - 43)$$

如果屈服函数为塑性势函数，即 $g(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi) \equiv f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi)$ ，这是有

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2 - 44)$$

如果将应力空间的坐标与应变空间的坐标重合，那么上式在几何上表示应变增量矢量与应力空间屈服面正交，称为**正交法则**，也称为关联的塑性流动法则，故有

$$d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} d\sigma_{kl} + d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2 - 45)$$

在卸载和中性变载时， $d\lambda = 0$ ，上式回到增量形式的虎克定律，本构方程可以表示为

$$d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad (2 - 46)$$

在加载时， $d\lambda > 0$ ，本构方程可以表示为

$$d\varepsilon_{ij} = \left(C_{ijkl} + \frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) d\sigma_{kl} \quad (2 - 51)$$

如果我们定义如下的括号算法：

$$\langle a \rangle = \begin{cases} a & \text{when } a > 0 \\ 0 & \text{when } a \leq 0 \end{cases} \quad (2 - 52)$$

并考虑到硬化材料的加载 - 卸载准则，可将塑性状态加载、中性变载和卸载情况的本构方程写成统一的形式，即

$$\begin{cases} \text{when } f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi) < 0, d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} d\sigma_{kl} \\ \text{when } f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi) = 0, d\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} d\sigma_{kl} + \frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \right\rangle \end{cases} \quad (2 - 53)$$

七 . Drucker 公设

为了研究稳定材料的塑性变形规律，Drucker 提出一个准热力学公设：设在外力作用下处于平衡状态的材料单元体上，施加某种附加外力，使单元体的应力加载，然后移去附加外力，使单元体的应力卸载到原来的应力状态，在施加和卸除附加应力的这个应力循环过程中，附加外力所做的余功为非正：

$$\oint \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \leq 0 \quad (2 - 57)$$

当取负值时表示有塑性变形发生，取零值时为纯弹性反应。

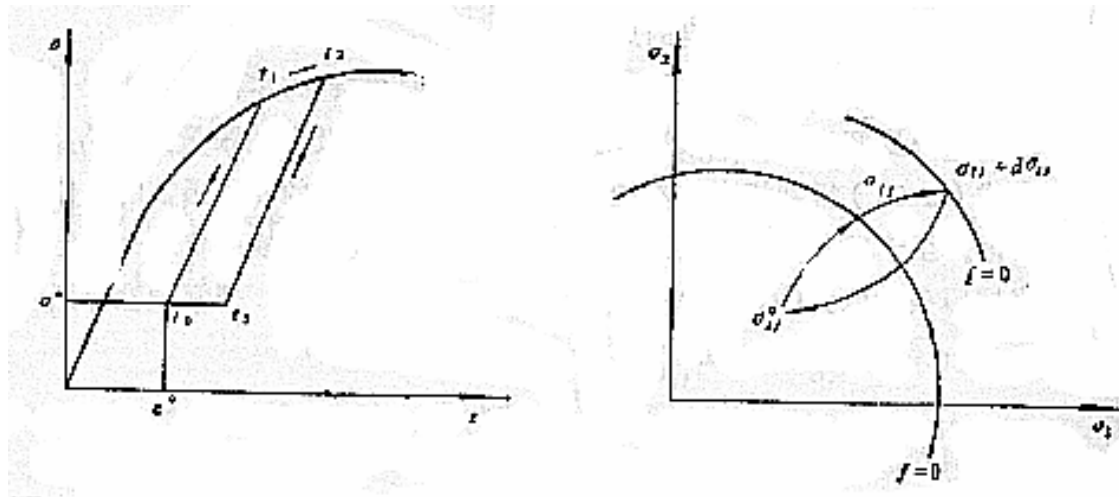
设在 $t = 0$ 时，原来的应力状态为 σ_{ij}^0 ，它可位于现时屈服面之内；当 $t = t_1$ 时，应力点 σ_{ij} 正好开始到达屈服面上，此后即为加载过程，直到 $t = t_2$ ($t_2 > t_1$) 应力为 $\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}$ ；然后卸去附加应力（卸载），直到 $t = t_3$ 时应力状态又回复到 σ_{ij}^0 ，于是完成一个封闭的应力循环（如图所示）。

$$\begin{aligned} \oint \varepsilon_{ij}^p d\sigma_{ij} &= \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_{ij}^p d\sigma_{ij} + \int_{t_2}^{t_3} \varepsilon_{ij}^p d\sigma_{ij} \\ &= \frac{1}{2} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p + [\sigma_{ij}^0 - (\sigma_{ij} + d\sigma_{ij})] d\varepsilon_{ij}^p \leq 0 \end{aligned}$$

经简化得

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (2 - 59)$$

由上式导出结论：塑性应变增量矢量与屈服面正交。



由于弹塑性耦合性质,对于塑性状态下一个应力增量 $d\sigma_{ij}$,应变增量可以分解为三部分:

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^R + d\epsilon_{ij}^C + d\epsilon_{ij}^P \quad (2 - 60)$$

其中:

$d\epsilon_{ij}^R$ 是卸除增量应力后可消失的那部分变形,称为可逆应变增量,它与应力增量之间的关系是:

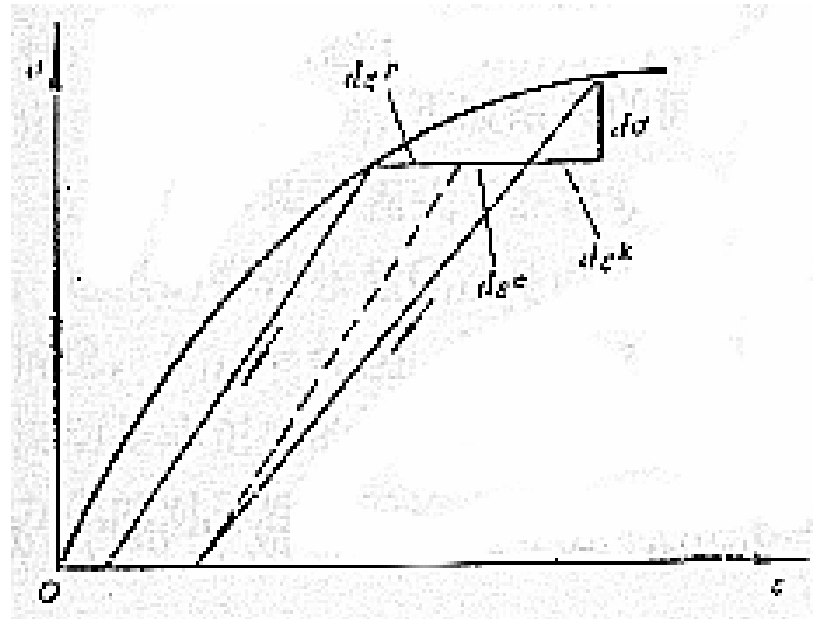
$$d\epsilon_{ij}^R = C_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad (2 - 61)$$

$d\epsilon_{ij}^C$ 是因屈服(内变量变化)导致弹性模量变化而引起的应变增量,称为耦合应变增量,

并且有： $d\varepsilon_{ij}^C = dC_{ijkl} \sigma_{kl}$

(2 - 62)

$d\sigma_{ij}^P$ 是通常意义下的塑性应变增量。



第三节 应变空间表述的弹塑性本构关系

一. 应变屈服条件和应变屈服面

用九维空间中的一个点代表物质质点的应变状态，假设存在超曲面，它所包围的区域内部所有的点能用纯弹性应变的路径达到，而这个超曲面上的点表示介质将会发生进一步的塑性变形，这个曲面就是应变空间的屈服面，用公式表示为

$$F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi) = 0$$

$F(\varepsilon_{ij}) = 0$ 表示初始屈服面；

$F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi) < 0$ 表示处于弹性状态；

$F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi) = 0$ 表示处于塑性状态。

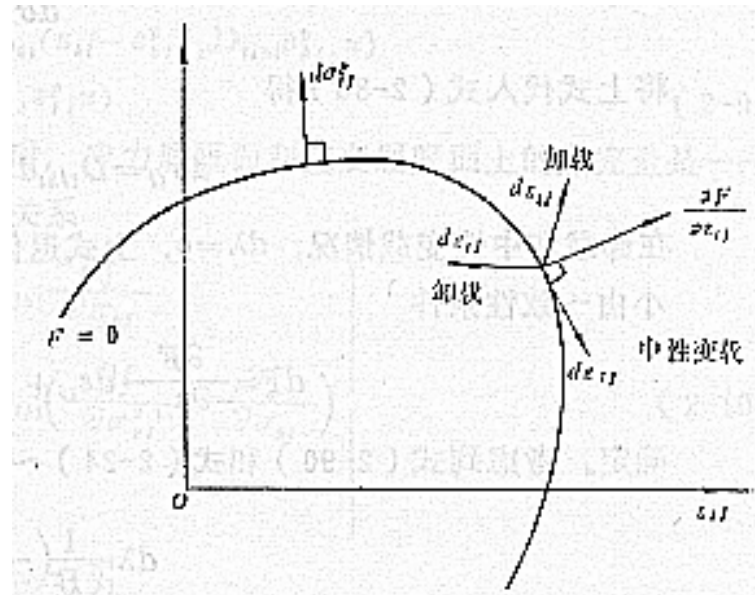
二. 弹塑性状态的加载 - 卸载准则

与应力空间表示的弹塑性状态的加载 - 卸载准则类似，用应变空间表示的弹塑性状态

的加载 - 卸载准则为

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = \begin{cases} < 0 & \text{卸载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ > 0 & \text{加载} \end{cases}$$

这个准则的几何解释如下图所示，对于塑性状态，加载、卸载和中性变载分别对应于应变增量矢量 $d\varepsilon_{ij}$ 指向屈服面的外侧、内侧和与屈服面相切。这个准则对硬化、软化和理想塑性材料是普遍适用的。



三．本构方程

与应力空间表示的弹塑性状态的本构方程类似，用应变空间表示的弹塑性状态的本构方程可以表示为如下形式，具体推导过程略。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{when } f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi) < 0, d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \\ \text{when } f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^p, \chi) = 0, d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\sigma_{kl} - \frac{1}{B} D_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqkl} d\varepsilon_{kl} \right\rangle \end{array} \right.$$

等向硬化 - 软化的 Drucker - Prager 模型是岩石力学中的一种常用模型, 它的屈服条件为:

$$f = \alpha I_1 + J_2^{1/2} - H(\lambda) = 0$$

Drucker - Prager 模型的本构方程可写为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{when } \alpha I_1 + J_2^{1/2} - H < 0, d\sigma_{ij} = (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij} d\varepsilon_{kk} + 2Gd\varepsilon_{ij} \\ \text{when } \alpha I_1 + J_2^{1/2} - H = 0, d\sigma_{ij} = (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij} d\varepsilon_{kk} + 2Gd\varepsilon_{ij} - \frac{1}{B} (3\alpha K \delta_{kl} + \frac{G}{\sqrt{J}} s_{ij}) \left\langle (3\alpha K \delta_{kl} + \frac{G}{\sqrt{J}} s_{ij}) d\varepsilon_{kl} \right\rangle \end{array} \right.$$

四 . 公设

公设是在应变空间表述的：在弹塑性材料的一个应变循环内，外部作用做功是非负的，即

$$\oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad (2 - 117)$$

如果上式取大于号，表示有塑性变形发生；如果取等号，只有弹性变形发生。

设在循环开始时 $t = 0$ 时，初始状态的外变量为 ε_{ij}^0 ，它处在现时屈服面 $F(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi) = 0$ 的内侧；当 $t = t_1$ 时，外变量 ε_{ij} 正好达到屈服面上，以后为加载过程，直到达到 $t = t_2$ ，状态达到 $(\varepsilon_{ij} + d\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^p, \chi + d\chi)$ ，然后卸载使应变在 $t = t_3$ 时又回复到 ε_{ij}^0 。

$$\begin{aligned}
\oint \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} &= \int_{t_1}^{t_2} (-\sigma_{ij}^p) d\varepsilon_{ij} + \int_{t_2}^{t_3} (-\sigma_{ij}^p) d\varepsilon_{ij} \\
&= -\frac{1}{2} d\sigma_{ij}^p d\varepsilon_{ij} + (-d\sigma_{ij}^p)(\varepsilon_{ij}^0 - (\varepsilon_{ij} + d\varepsilon_{ij})) \\
&= (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{2} d\varepsilon_{ij}) d\sigma_{ij}^p \geq 0
\end{aligned} \tag{2 - 119}$$

$$\text{简化得 } d\sigma_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{2 - 121}$$

上式在几何上表示塑性应力增量与应变屈服面正交，这就是应变空间表述的正交法则。

五．奇异屈服函数及其相应的本构方程

设屈服面的奇异点是由如下两支正则曲面交成的：

$$F^{(i)}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi^{(i)}) = 0, \quad i=1,2 \tag{2 - 135}$$

式中， $\chi^{(1)}$ 和 $\chi^{(2)}$ 如果是彼此独立的内变量，则两个屈服面的硬化 - 软化规律是不同的；

如果 $\chi^{(1)} \equiv \chi^{(2)}$ ，则是等向硬化 - 软化情况。

引入如下的加载 - 卸载函数的定义：

$$L^{(k)} = \frac{\partial F^{(k)}}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}, \quad k = 1, 2 \quad (2 - 140)$$

加载 - 卸载准则如下：

$$\max(L^{(1)}, L^{(2)}) \begin{cases} < 0 & \text{卸载} \\ = 0 & \text{中性变载} \\ > 0 & \text{加载} \end{cases}$$

由于在奇异点上加载的复杂性，需要进一步区分完全加载和部分加载。所谓完全加载是指 $d\lambda^{(1)}$ 和 $d\lambda^{(2)}$ 同时大于零，而部分加载是指只有一个 $d\lambda$ 大于零，而另一个等于零。区分完全加载和部分加载的准则是：

$$\min\left[\frac{1}{B}(b^{(22)}L^{(1)} - b^{(12)}L^{(2)}), \frac{1}{B}(-b^{(21)}L^{(1)} - b^{(11)}L^{(2)})\right] \begin{cases} \leq 0 & \text{部分加载} \\ > 0 & \text{完全加载} \end{cases}$$

完全加载时的本构方程：

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl} - \frac{1}{B}(b^{(22)}\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial F^{(2)}}{\partial \varepsilon_{kl}} + b^{(11)}\frac{\partial F^{(2)}}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \varepsilon_{kl}} - b^{(12)}\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial F^{(2)}}{\partial \varepsilon_{kl}} - b^{(21)}\frac{\partial F^{(2)}}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial F^{(1)}}{\partial \varepsilon_{kl}})d\varepsilon_{kl}$$

部分加载时的本构方程：

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl} - \frac{1}{B^{(m)}}\frac{\partial F^{(m)}}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\partial F^{(m)}}{\partial \varepsilon_{kl}}d\varepsilon_{kl} \quad (2 - 148)$$

$$B^{(m)} = \frac{\partial F^{(m)}}{\partial \varepsilon_{ij}^p}C_{ijkl}\frac{\partial F^{(m)}}{\partial \varepsilon_{kl}} - \frac{\partial F^{(m)}}{\partial \chi^{(m)}}M_{ij}C_{ijkl}\frac{\partial F^{(m)}}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (2 - 149)$$

在屈服面奇异点处发生卸载和中性变载情况，反应是弹性的，本构方程为：

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}d\varepsilon_{kl} \quad (2 - 150)$$

六．岩土介质帽盖模型奇异点处的本构关系

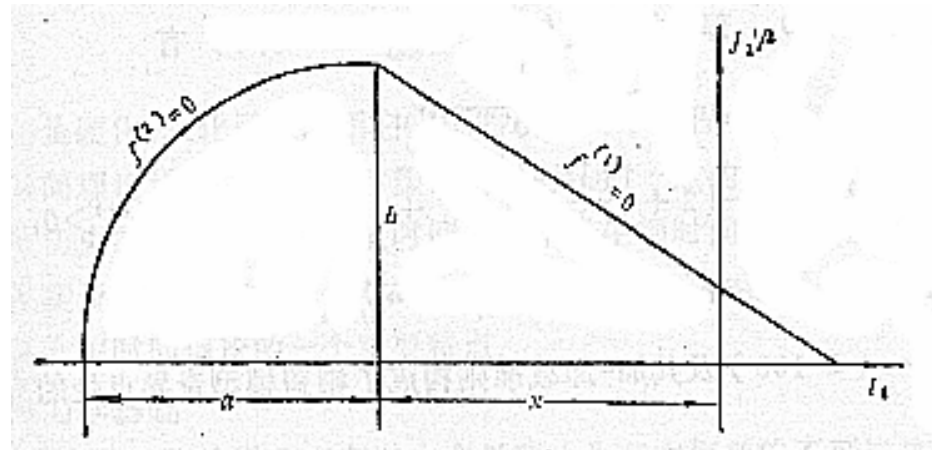
岩土介质帽盖模型的屈服面可以由一个理想塑性的破坏包络线

$$f^{(1)} = \alpha I_1 + J_2^{1/2} - H = 0 \quad (2 - 151)$$

和一个椭圆形的硬化帽盖

$$f^{(2)} = \left(\frac{I - x}{a}\right)^2 + \frac{J_2}{b^2} - 1 = 0 \quad (2 - 152)$$

构成，如图所示。



在奇异点处 ($I_1 = x, J_2^{1/2} = b$) 的本构方程现可写成统一的形式

$$d\sigma_{ij} = (D_{ijkl} - D_{ijkl}^p) d\varepsilon_{kl} \quad (2 - 159)$$

其中塑性本构张量 D_{ijkl}^p 按加载 - 卸载情况取不同的形式：

当 $\max(L^{(1)}, L^{(2)}) < 0$ (卸载), 或当 $\max(L^{(1)}, L^{(2)}) = 0$ (中性变载) 时

$$D_{ijkl}^p = 0 \quad (2 - 160)$$

当 $\max(L^{(1)}, L^{(2)}) > 0$ (加载) 时, 有三种情况：

当 $-(2 + \frac{6\alpha b'}{b})L^{(1)} + b(1 + \frac{9\alpha^2 K}{G})L^{(2)} \leq 0$, 部分加载 (仅在 $f^{(1)} = 0$ 上加载), 有

$$D_{ijkl}^p = \frac{1}{b^{(11)}} q_{ij} q_{kl} \quad (2 - 161)$$

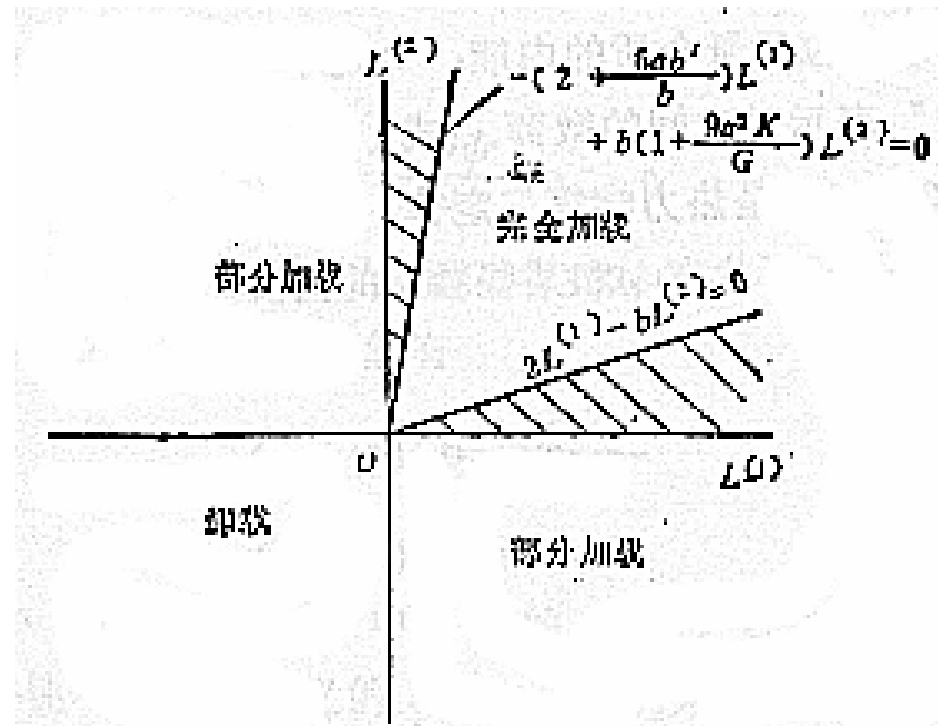
当 $2L^{(1)} - bL^{(2)} \leq 0$, 部分加载 (仅在 $f^{(2)} = 0$ 上加载), 有

$$D_{ijkl}^p = \frac{1}{b^{(22)}} r_{ij} r_{kl} \quad (2 - 162)$$

当 $2L^{(1)} - bL^{(2)} > 0$ 和 $-(2 + \frac{6\alpha b'}{b})L^{(1)} + b(1 + \frac{9\alpha^2 K}{G})L^{(2)} > 0$, 完全加载, 有

$$D_{ijkl}^p = \frac{1}{B} (b^{(22)} q_{ij} q_{kl} + b^{(11)} r_{ij} r_{kl} - b^{(12)} q_{ij} r_{kl} - b^{(21)} r_{ij} q_{kl}) \quad (2 - 163)$$

方程 (2 - 159) ~ (2 - 163) 及其加载 - 卸载准则构成了帽盖模型奇异点处完整的本构关系, 奇异点处的加载 - 卸载准则可用下图几何表示:



第四节 塑性的内蕴时间理论

内蕴时间理论是由 Valanis 最初提出的，设引入一个时间尺度 ξ ，这个时间尺度与牛顿时间 t 无关，仅仅依赖于内在的材料变形特性。时间尺度 ξ 是塑性变形的单调增函数，用下式定义：

$$d\xi = d\varepsilon_{ij}^p P_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^p \quad (2 - 164)$$

另一方面为考虑真实材料的时间相关性，引入与牛顿时间 t 有关的时间尺度 ζ ，即

$$\text{内蕴时间量度 } d\zeta = \alpha^2 d\xi^2 + \beta^2 dt^2 \quad (2 - 165)$$

将 ξ 转化为内蕴时间标度 $z(\zeta)$ ， $dz = \frac{d\zeta}{f(\zeta)}$ ， $\frac{dz}{d\zeta} > 0$ (2 - 166)

式中， $f(\zeta)$ 是硬化 - 软化函数，用它表征材料在变形过程中的硬化 - 软化效应。

内蕴时间理论认为，塑性和粘塑性材料内任何一点的现时应力状态是该点领域内整个变形和温度历史的泛函。采用内蕴时间 z 而不是牛顿时间 t 去度量不可逆变形的历史，

就是将材料性质及其内部结构变化对本构关系的影响，突出到用一个基本变量来加以描述的程度。

一．热力学基础

Valanis 内蕴时间理论是建立在以内变量理论为基础框架的不可逆热力学基础上，对于等温过程，微分形式的热力学控制方程将是

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2 - 167)$$

$$\rho \theta \dot{r} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \dot{\psi} \geq 0 \quad (2 - 168)$$

上两式中， e 是每单位质量介质的能量； r 是不可逆熵； ψ 是自由能；式 (2 - 167) 在物理上是能量守恒定律或热力学第一定律；(2 - 168) 是热力学第二定律或称为耗散率不等式。

将应力 σ_{ij} 和自由能 ψ 表示为变形状态 ε_{ij} 和某些独立的内变量 q_a 的函数，如下式

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, q_a) \quad (2 - 169)$$

$$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}, q_a) \quad (2 - 170)$$

将式 (2 - 170) 对时间微商，得到

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial \psi}{\partial q_a} \dot{q}_a \quad (2 - 171)$$

将 (2 - 171) 代入 (2 - 168) 得：

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial q_a} \dot{q}_a \geq 0 \quad (2 - 172)$$

如果上式对可逆和不可逆过程都是正确的，那么有

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}\right) \dot{\varepsilon}_{ij} = 0$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2 - 173)$$

由 (2 - 168) 及 (2 - 171) 及 (2 - 173) 得

$$\theta \dot{r} = - \frac{\partial \psi}{\partial q_a} \dot{q}_a \geq 0 \quad (2 - 174)$$

(2 - 173) 和 (2 - 174) 对任何材料都是适用的, q_a 的性质表示具体材料的本构特性。

二. 本构关系

由前面的方程可知, ζ 和 z 是单调增函数, 故有

$$\frac{d\zeta}{dt} > 0, \quad \frac{dz}{d\zeta} > 0 \quad (2 - 175)$$

根据 (2 - 175), 不等式 (2 - 174) 可以写成

$$\theta \frac{dr}{dz} = -\frac{\partial \psi}{\alpha q_\alpha} \frac{dq_\alpha}{dz} \geq 0 \quad (2 - 176)$$

在式 (2 - 176) 中 $\frac{dr}{dz}$ 是相对与内蕴时间的熵产生率，而 $\theta \frac{dr}{dz}$ 则是耗散功率，在一个内变量的增量过程的耗散功为

$$\theta dr = -\frac{\partial \psi}{\alpha q_\alpha} dq_\alpha \geq 0 \quad (2 - 177)$$

引入相应于 $dq_{(\alpha)}$ 运动的广义摩擦力 $Q^{(\alpha)}$ ，则显然有

$$Q^{(\alpha)} = -\frac{\partial \psi}{\partial q_{(\alpha)}} \quad (2 - 178)$$

$$Q^{(\alpha)} dq_{(\alpha)} \geq 0 \quad (2 - 179)$$

广义内摩擦角不一定是通常的摩擦力，而是广义力。

经过繁琐的数学推导得到显示本构方程为

$$s_{ij} = 2 \int_0^z G(z - z') \frac{\partial e_{ij}}{\partial z'} dz' \quad (2 - 194)$$

$$\sigma = 3 \int_0^z K(z - z') \frac{\partial \varepsilon}{\partial z'} dz' \quad (2 - 195)$$

这里的核函数 $G(z)$ 和 $K(z)$ 有如下形式：

$$G(z) = G_0 + \sum_{\alpha} G_{\alpha} e^{-\rho_{\alpha} z} \quad (2 - 196)$$

$$K(z) = K_0 + \sum_{\alpha} K_{\alpha} e^{-\rho_{\alpha} z} \quad (2 - 197)$$

对于岩石类材料， $G(z)$ 和 $K(z)$ 的具体形式即参数值应各根据试验数据给出。

三．耗散型材料本构方程形式不变性

我国学者范镜泓题提出和证明了耗散型材料本构方程形式不变性定律：如果能够恰当地定义某些内蕴时间标度 z 以使得耗散材料的广义内摩擦力 $Q_{ij}^{(a)}$ 正比于相应的内变量对 z 的广义变化率 $dq_{ij}^{(a)} / dz$ ，那么所研究的耗散型材料的本构方程的形式将与内摩擦力正比于相应内变量速率的线性粘弹性的本构方程形式完全一样。

各向同性粘弹性材料在等温和小变形条件下的本构方程为

$$s_{ij} = 2 \int_0^t G(t-t') \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} dt \quad (2 - 206)$$

$$\sigma_{kk} = 3 \int_0^t K(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial t} dt \quad (2 - 207)$$

$$\text{式中：} \quad G(t) = \sum_{\alpha=1}^{n_1} G_{\alpha} e^{-\rho_{\alpha} t} \quad (2 - 208)$$

$$K(t) = \sum_{\alpha=1}^{m_1} K_{\alpha} e^{-\lambda_{\alpha} t} \quad (2 - 209)$$

根据形式不变性定律，广义内摩擦力与相应的内变量速率成正比的塑性材料的内时本构方程只需将上面四式的 t 代替为 Z_D 和 Z_H ，即

$$s_{ij} = 2 \int_0^{z_D} G(z_D - z'_D) \frac{\partial e_{ij}}{\partial z'_D} dz'_D \quad (2 - 210)$$

$$\sigma_{kk} = 3 \int_0^{z_H} K(z_H - z'_H) \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial z'_H} dz'_H \quad (2 - 211)$$

$$\text{式中：} \quad G(z_D) = \sum_{\alpha=1}^{n_2} G_{\alpha} e^{-\rho_{\alpha} z_D} \quad (2 - 212)$$

$$K(z_H) = \sum_{\alpha=1}^{m_2} K_{\alpha} e^{-\lambda_{\alpha} z_H} \quad (2 - 213)$$

几点说明：

内蕴时间的定义与广义内摩擦力有关，塑性材料对塑性偏应变相关的内变量抗力与对塑性体应变相关的内变量的抗力是不同的；

为了避免在卸载时出现虚假内摩擦力，在内蕴时间增量的定义中只包含塑性应变增量；

在定义偏内时标度 Z_D 与体积内时标度 Z_H 时，应该采用表示材料对偏应变和体应变对应的广义摩擦力变化的不同的硬（软）化函数 f_D 和 f_H 。

在某些岩土工程中还应考虑塑性偏应变与塑性体应变在形成广义内摩擦力时的相互影响，即所谓的耦合效应。

三．Bazant 的内时理论

Bazant 给出的内蕴时间标度为

$$dz = \frac{d\zeta}{z_1} \quad (2 - 226)$$

式中

$$d\zeta = f_1 d\xi$$

$$f_1 = f_1(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \xi) \quad (2 - 227)$$

$$z_1 = \text{常数}$$

在循环的压缩荷载下混凝土的一个重要性质是在一个循环内累计的非弹性应变随过程的继续而减少，当荷载循环保持在同一水平时，非弹性应变增量随荷载循环数的增加而降低。

引入如下定义：

$$d\zeta = \frac{d\eta}{f(\eta)} \quad (2 - 229)$$

经转化得

$$d\eta = f(\eta) f_1(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, \xi) d\xi \quad (2 - 230)$$

对于应变硬化函数 Bazant 建议采用

$$f(\eta) = 1 + \beta_1 \eta + \beta_2 \eta^2 \quad (2 - 232)$$

图中虚线表示在单轴应力 - 应变曲线中超过峰值后式 (2 - 232) 的效果，图中出现的二次硬化阶段与实验结果不符，为保证超过峰值后应力 - 应变曲线是持续下降的，Bazant 对应变硬化函数修正如下：

$$f(\eta) = 1 + \frac{\beta_1 \eta + \beta_2 \eta^2}{1 + a_7 F_2} \quad (2 - 233)$$

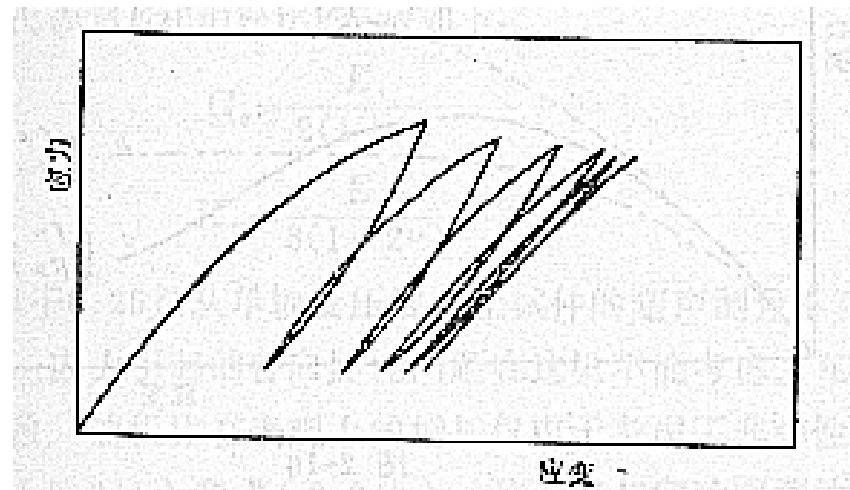


图 2-14

