

基于 WLs 的二维地球化学景观多重分形建模

高 歆

(中国地质大学(北京)地球科学与资源学院, 北京 100083)

摘 要: 作为非线性、复杂性理论的重要领域之一, 多重分形理论所提供的奇异性、广义自相似性、分形谱系等概念和相关模型, 不仅能够客观的描述成矿系统、成矿过程、成矿富集规律, 还提供了定量模拟和识别成矿异常的有效模型。本文从小波系数的角度出发, 与目前惯用的盒子测度法对比, 进行多重分形分析, 从原理上来看前者是基于复杂系统中的概率测度值的积分, 而后者是基于信号测度域的差分。验证数据分别来自经典矿物分割模型 De Wjjs 模型和云南个旧水系沉积物 Sn、Cu 和 Pb 元素富集值。结果表明, 基于盒子测度法在小尺度的地球化学数据方面表现出了比 WLs (Wavelet leaders, WLs) 更高的稳定性以及优越性, 但是对于大尺度的数据, 两者的分析结果相同, 我们有理由相信对于小尺度、奇异域窄、低震荡和高频交叠数据, 基于 WLs 的分析手段会造成比较大的误差。基于 WLs 的多重分形分析手段对于严重依赖方法和数据本身的多重分析手段来说, 可以作为一种选择。

关键词: 盒子法; 小波系数极大值; 地球化学景观

中图分类号: P632 **文献标识码:** A **文章编号:** 1004 - 4051 (2010) 06 - 0111 - 05

Multifractal modeling of 2D geochemical landscape based on Wavelet Leaders

GAO Xin

(School of the Earth Sciences and Resources, China University of Geosciences, Beijing 100083, China)

Abstract: As one field in nonlinear sciences, It has been demonstrated that the concepts and models relevant to multifractal theory are useful not only for characterizing the fundamental properties of non-linearity of the mineralization processes, the singular distribution of mineral deposits and ore element concentrations in mineral districts, but also for singularity analysis and anomaly delineation. This paper compares the box-counting moment based multifractal method with a newly developed wavelet leaders moment based multifractal method. The former is based on the technique characterized by the form of integrals or sums concerned with probability measures usually used in dynamical systems, while the latter by increments with formulated multiscale functions used in turbulence signals. Both deterministic and random multiplicative cascade synthetic images and geochemical landscapes created from Gejiu mineral district of southern China were chosen to demonstrate the fact that by convention both two methods assumed a biased estimation for scaling singularity exponents and spectra and exhibit large uncertainties for various datasets. The selective and filtering behavior caused from wavelet leaders directly lead to lots of smaller values compared to the measures basis, and thus, by moment generating process which offers us an unstable estimation. As for the characteristic of wavelet transform, we have the reasons to believe that the similar behavior could existed in those signals which owned the properties such as small sample sizes, short scaling range, low fluctuation and high frequency superimposition, and so on, whereas for those signals owned large sample size and abruptly changes, the wavelet leaders method could be an efficient tools for multifractal analysis. In addition the introduction of wavelet leaders based multifractal method could complement by the original scaling system and estimation procedures in the geological field aimed at interpreting geological phenomenon.

Key words: box-counting; wavelet leaders (WLs); geochemical landscape

利用多重分形理论建模构成了过去数十年来客观自然现象比较流行的一种尺度分析手段, 广泛的被应用在包括地学、湍流和因特网等自然科

学领域中。为了有效的指导地球化学勘探和矿产资源评价, Mandelbrot 和 Cheng^[1-2] 提出了多种多重分形模型来描述地球化学数据的空间尺度结构, 这些新的模型不仅考虑地壳中矿石元素的分布几何形状, 而且将传统的地质统计学纳入到了计算分维谱的框架之下, 其中尤其是数据域的奇异性

收稿日期: 2010 - 03 - 07

作者简介: 高 歆 (1981 -), 男, 山西运城人, 现在中国地质大学(北京)攻读博士学位, 主要从事地学信息处理研究。

分析,即计算空间中每点的奇异值,一种高通滤波方式,可以有效的从由各种地质过程生成的混合模式和特征中分解背景值和异常值。

对多重分形谱的估计是多重分形分析的重要任务。针对多重分形谱建模,有两种最常用的建模方法,其中一种是基于分维谱 $f(\cdot)$,另外一种是基于余维数 $c(\cdot)$ 。两种模型之间的内在联系现已得到证明^[3]。多重分形理论已广泛用于各种学科领域,并因此产生了各种各样的计算多重分形谱函数的方法,如矩方法^[4]、直方图法、小波方法^[5],以及二次维矩法^[6]等,其中应用最广泛的是将空间分成许多格子的矩统计方法。另外,多重分形模型将服从正态或者对数正态分布的微量元素的背景值与服从分形分布(幂律分布)的高低异常值统一到多重分形谱中,多重分形分析体现了统计手段上的进步,目前地学数据处理中,最常用到的是基于盒子的多重分析方法。Cheng 等^[7]通过频率-浓度、数量-浓度、浓度-浓度、浓度-周长、S-A 等分形模型及矩分析等多重分形方法,将地球化学异常从背景中分离出来;郭科等^[8]运用多重分形模型,通过研究 Pb、Zn、Sb、Ag、Cu 共五种元素的广义分形维数 D_q ,认为这些元素在空间上的分布服从多重分形分布特征,同时指出多重分形方法相比于传统的化探方法来说在判断元素的共生组合方面具有一定的优越性。Zheng 等^[9]运用周长-面积等分形学研究方法研究了中国 3 个金矿床中黄铁矿、雄黄等矿物表面 As、S、Fe、Si 等元素在成矿过程中的迁移和转换规律。

自从 Parish 和 Frisch^[10]提出用湍流域中的速度增量来刻画尺度函数: $S_p(l) = \langle (f_l)^p \rangle \sim l^p$, $f_l(x) = f(x+l) - f(x)$ 是尺度域中的增量。不幸的是, Muzy^[11]发现了该方法只能刻画信号中比较强的奇异性,对于一些弱的奇异性谱值左半部分显得无能为力。Mallat^[12]提出了利用小波极大模值捕捉信号的奇异性以来, Arneodo 等人提出了 WTMM 代替直接的速度增量来计算尺度函数,从而避免了上述缺点。然而, WTMM 需要连续小波变换,以及利用不同的半径在不同的尺度上进行搜索邻域中的模极大值,复杂的计算过程,高昂的计算量都使的这种方法变的不很实用。为了避免上述所述 WTMM 涉及到的繁琐的工作量,法国数据学 Jaffard^[13]等人提出了 WLs 的计算方法,不仅能够描述谱值的整个区域,还避免了连续小波变换以及寻值等繁琐步骤。多次研究证明,计算分形谱的方法严重依赖方法和数据本身, WLs 的引入为这种情况提供了一种补充。Do-

jnow^[14]通过基于小波系数的多重分形模型,考察了含有噪声信号的多条脑电图曲线,指出分析信号的相位携带了最多的尺度不变性信息; Khalil 等^[15]利用基于 WTMM 的多重分形模型考察了间歇染色体结构,将染色体版图从背景中分离出来,提出了一种新的边界分割方法,阐述了染色体结构、位置和不稳定性之间的潜在关系。

1 基于盒子的多重分形分析

对于具有几何支撑的连续随机空间分布变量,这种支撑可以由通过 k 维空间 $R^k (k = 1, 2, 3)$ 分割产生的许多单元(盒子/格子)组成,记每一等分的盒子的线度为 ϵ 。假设 $\mu(S)$ 表示集合 S 在 R^k 中的测度,边长为 ϵ 的第 i 个盒子中的测度为 $\mu_i(\epsilon)$ 。则 $\mu_i(\epsilon)$ 与 ϵ 的对数比值被限制在一个有限区间 $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$, 这里存在 μ_{\min} 和 μ_{\max} 分别对应最强的奇异性 and 最弱的奇异性,且有:

$$\mu_i(\epsilon) \sim \epsilon^{d_i} \quad \text{或者写作} \quad \mu_i(\epsilon) \sim \epsilon^{-f_i} \quad (1)$$

这里的非整数 d_i 称为 coarse holder 指数^[16]。把在分形上具有相同 d_i 值的小盒子数目记为 $N(d_i)$, 它与 ϵ 的大小有关,并且可以写成:

$$N(d_i) \sim \epsilon^{-D} \quad (2)$$

将上式与 $N(d_i) \sim \epsilon^{-D}$ 的简单分形公式对比,可见 f_i 的物理意义是表示具有相同 d_i 值的子集的分形维数,或者说它描述了 0^+ 直方图 $N(d_i)$ 的变化, f_i 定义为具有相同 d_i 值的子集的 Hausdorff 维数,称为多重分形谱或奇异性谱。在多重分形谱的众多计算方法当中,矩方法是最常用的方法之一。为了解 f_i 的分布特性,定义分割函数:

$$q(q) = \sum_{i=1}^{N(q)} \mu_i^q(\epsilon) \sim \epsilon^{-q D(q)} \quad (3)$$

可以获得质量指数函数 $D(q)$, $D(q)$ 是关于 q 的凸函数。当 $q = 1$ 时达到最大曲率,该点的曲率可以用于判断是否具有多重分形性。通过勒让德变换,可以得到 $D(q)$ 和 $f(\cdot)$ 如下的两个函数:

$$\begin{cases} D(q) = \frac{d \ln q(q)}{d q} = \frac{d}{d q} [(q-1) D_q] \\ f(\cdot) = q D(q) - D(q) \end{cases} \quad (4)$$

三个函数 $D(q)$ 、 $f(\cdot)$ 和 $f(\cdot)$ 是相互关联的。

2 基于 WLs 的多重分形分析

设 $H_0(k)$ 和 $G_0(k)$ 为两个一维离散小波变换正交镜像滤波器^[17] (分别表示低通和高通滤波),消失矩 $N = 1$ 。通过 $H_0(k)$ 和 $G_0(k)$ 的直积,可以得到二维镜像滤波器 $G^{(m)}(k_1, k_2)$ $m = 0, 1, 2, 3$ 。 $G^{(0)}(k_1, k_2)$ 对应低通滤波器,而 $G^{(m)}, m = 1, 2, 3$ 对应着高通滤波器。设分析信号为 $X(t)$, 通过与

二维镜像滤波器 $G^m, m = 1, 2, 3$ 的卷积, 可以得到小波系数 $D_f^{(m)}(j, k_1, k_2), m = 1, 2, 3$, 在进行多

重分形分析之前, 我们需要将 $D_f^{(m)}(j, k_1, k_2), m = 1, 2, 3$ 进行规范化:

$$d_f(j, k_1, k_2) = 2^{-j} \sqrt{[D^1(j, k_1, k_2)]^2 + [D^2(j, k_1, k_2)]^2 + [D^3(j, k_1, k_2)]^2} (k_1, k_2) 2^j \quad (5)$$

继续设 $H_0(k)$ 和 $G_0(k)$ 为两个具有有限冲击响应的滤波器, 引入二进区间以及并集:

$$j, k_1, k_2 = \{[k_1 2^j, (k_1 + 1) 2^j], [k_2 2^j, (k_2 + 1) 2^j]\} \quad (6)$$

$$3^{j, k_1, k_2} = \{n_1, n_2 = \{-1, 0, 1\} \mid j, k_1 + n_1, k_2 + n_2\} \quad (7)$$

理论上的 WLs 定义为 (图 1)

$$L_f(j, k_1, k_2) = \sup_{m=1, 2, 3, ' \in 3^{j, k_1, k_2}} |d_f(')| \quad (8)$$

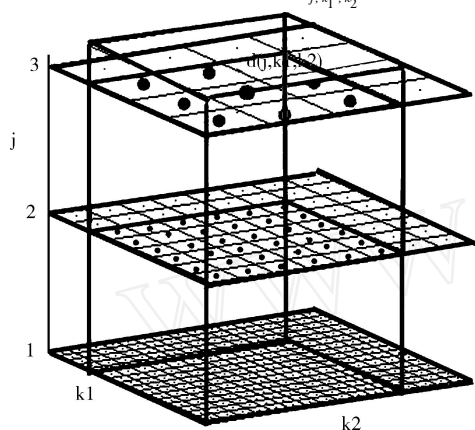


图 1 WL 的定义示意图

WLs 正是通过其局部奇异性刻画能力构成了尺度分析模型, 如果 $X(t)$ 在 t_0 点存在奇异性指数 $(t_0) = 0$, 消失矩 $N = (t_0)$, WLs 与尺度之间的幂律关系为:

$$L_X(j, k) \sim 2^{j \cdot 0 2^{jh}} \quad (9)$$

通过计算位于尺度 2^j 上的 WLs 的 q 阶矩的平均值, 可以得到结构函数和质量指数函数。

$$L(q, j) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |L_f(j, k)|^q \quad (10)$$

$$L(q) = \liminf_{j \rightarrow 0} \frac{\log_2 L(q, j)}{j} \quad (11)$$

通过勒让德变换, 奇异值函数和分维谱函数定义为:

$$L(q) = \frac{d L(q)}{dq} = \frac{d(q - d(\cdot))}{dq} \quad (12)$$

$$f_L(\cdot) = \inf_h (1 + q(h) - L(q))$$

同样, 这三个函数 $L(q)$ 、 $L(q)$ 和 $f_L(\cdot)$ 是相互联系的。

3 方法验证

3.1 De Wijs 模拟数据

为了对比这两种方法的分析效果, 本文采用

De Wijs 模拟数据^[18]验证包括 $N = 64$ 和 $N = 1028$ 两种不同尺度数据, 生成算子为 1.96、0.84、0.84、0.36。图 2 是尺度指数和多重分形谱的估计值, 对于两种不同数据盒子估计法均获得了比较好的拟合, 但是在谱值的首末端有点偏差, 主要是由于边缘效应造成的。结果表明, 对于小尺度的模拟数据, 图 2A 中与理论曲线相比, 质量指数曲线在左边和右边分别出现了上移和下移的情况, 相应的谱值左边和右边偏离标准的谱域, 因为基于 WLs 的计算中对原小波系数进行挑选导致的发散, 而基于盒子法的估计比较接近理论值, 也显示了盒子法对于小尺度的测度数据的稳定性和准确性。同样, 值得注意的是, 对于 $n = 1$ 的消失矩 WLs 估计, 原理上等同于盒子法 (盒子法: 测度上的求和或者积分, 一阶消失矩: 加权求和或者积分), 谱值的左边现实了良好的逼近, 即模拟数据中的小值模拟准确, 而对于大值出现了偏差。对于大尺度多重分形分析, 盒子估计法和 WLs 的基本都和理论曲线实现了基本重叠, 表明对于大尺度数据, WLs 和盒子估计都可以用来多重分形分析。总之, 对于小尺度的逼近, 由于分辨率有限, 边缘效应, 以及高阶消失矩的过分平滑都会导致估计发散, 而对于大尺度的数据, 两者都可以作为分析手段, 对于消失矩, 可以去 2、3、4 阶的均值来近似估计。

3.2 地球化学数据验证

本文地球化学数据验证来自云南个旧锡矿水系沉积物元素 Sn、Cu 和 Pb (图 3), 研究区域为 29400 km^2 , 采样间隔为 2km, 分辨率为 $2\text{km} \times 2\text{km}$, $N = 76 \times 50$, 分析小波为 Daubechies, 消失矩为 $N = 1, 2, 3, 4$ 。如图 4 所示, 对于 Sn 元素谱值估计, 基于 WLs 不同的消失矩的计算, 差别明显, 显示了 WLs 估计得不稳定性, 而 Cu 和 Pb 的估计, 在左边还表示了部分的重叠, 正则性方面强于 Sn 元素。另外, 利用经典级联过程验证多重分形数据的正则性, 也可获得同样的结果, 本文限于篇幅, 另文阐述。通过地球化学元素数据的验证, 盒子估计法展现出来了优良的稳定性和准确性, 对于小尺度数据 WLs 估计需慎重。从另外的角度来说, 利用基于函数奇异性的这套框架某种程度上不符合以测度刻画的地学数据, 或许 WLs 优势在于震荡的一维信号。

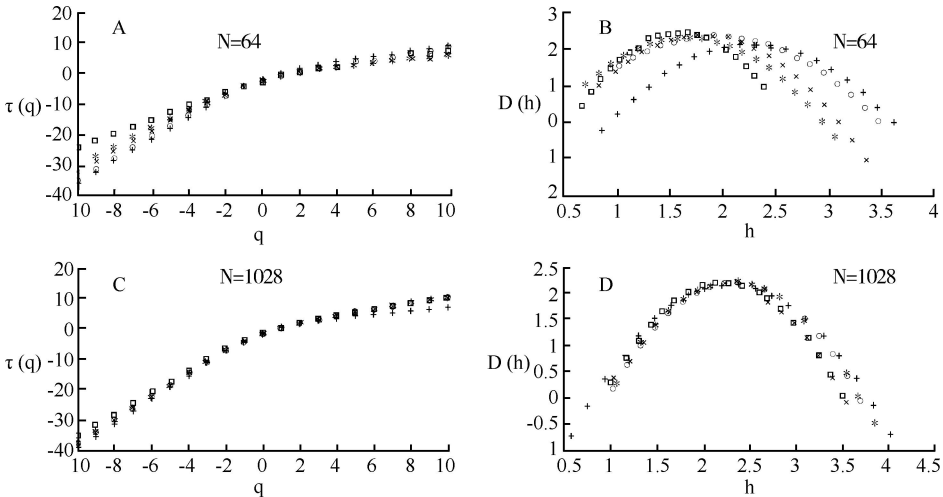


图 2 De Wijs 模拟数据的质量指数和分形谱 (盒子法: “+”; WL: 消失矩 N=1, 2, 3, 4, 符号: “o”, “x”, “*”, “矩形”)

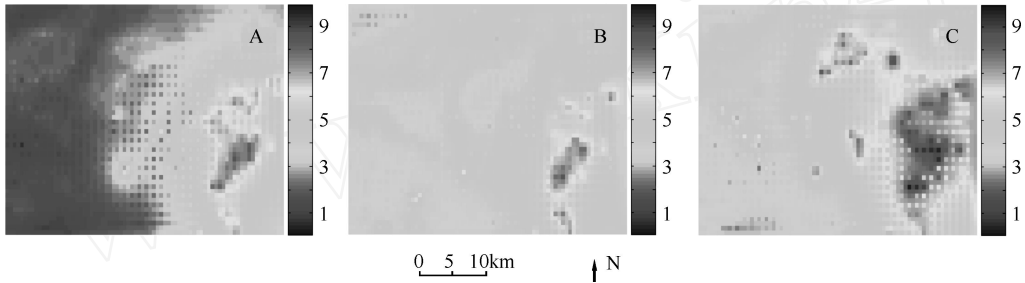


图 3 云南个旧水系沉积物 Sn、Cu 和 Pb 元素 IDW 插值图 (A - C: 分别为 Sn、Cu 和 Pb 元素浓度值)

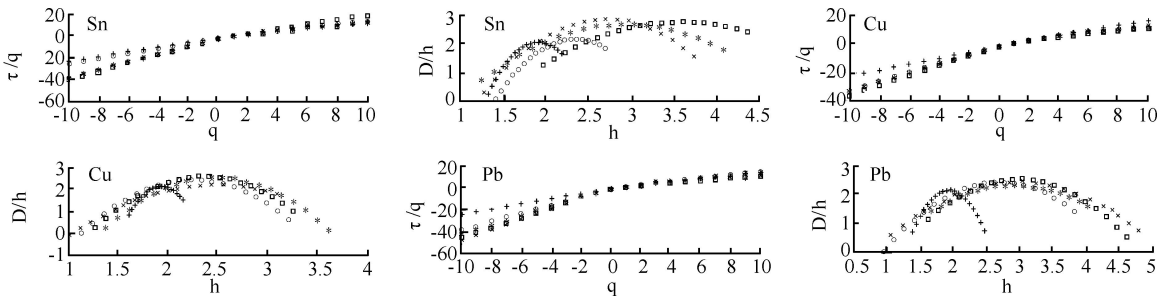


图 4 地球化学元素数据的质量指数和分形谱 (盒子法: “+”; WL: 消失矩 N=1, 2, 3, 4, 符号: “o”, “x”, “*”, “矩形”)

4 结论

对于分辨率有限、大小且不规则的现实地学数据，基于 WLs 的尺度分析，在准确性和稳定性方面都弱于盒子法，但是有时候尺度分析并不涉及到其多重分形谱的计算，仅仅利用系数与尺度之间的幂律关系，需要找到一个拐点，因此，小波系数不失为找不同尺度阈值一个好方法。对于小波消失矩的选择，消失矩过小，捕捉奇异性的强度不够，过大会导致分析的数据滤波过于平滑，从而导致谱值的两端发散，因此，一般取消失矩的比较大的加权平均较合适。另外，基于 WLs 的估计涉及到小波变换的多分辨率分析，在图像分

割过程中，利用小波刻画的奇异性进行分割有着内在的优越性，延伸继续刻画多重分形谱，正如前文引用，是一个有效的方法。

这篇文章主要讨论了以积分为主的测度和以累积量为主的尺度分析，以经典矿物分割模型 de Wijs 模型模拟数据为例，结果表明，对于盒子法的尺度分析，不管是小尺度还是大尺度，都表现出了更优的结果，基于 WLs 的尺度分析对于大尺度的数据也表现出了良好的结果。此外，基于小波系数的 WLs 不仅可以为分析数据提供多分辨率分析，还可以检测信号的振荡器异性等行为。总之，一种是基于概率测度下的奇异性，一种基于

连续函数的连续性，分别来源于不同的数据应用，对于大分辨率的数据，两者的刻画能力相同，而对于小尺度的地学数据，盒子法的效果更优。

参考文献

- [1] Mandelbrot BB. Intermittent turbulence in self similar cascades: Divergence of high moments and dimension of the carrier [J]. Fluid. Mech., 1974, 62: 331.
- [2] Cheng Q. Multifractality and spatial statistics [J]. Computers & Geosciences, 1999, 25 (9): 949 - 961.
- [3] Cheng Q, Agterberg FP. Comparison between two types of multifractal modeling [J]. Mathematical Geology, 1996, 28 (8): 1001 - 1016.
- [4] Halsey TC, Jensen MH, Kadanoff LP. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets [J]. Phys. Rev., 1986, 33 (2): 1141 - 1151.
- [5] Arneodo A, Bacry E, Muzy JF. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets [J]. Physica A, 1995, 213: 232 - 275.
- [6] Schertzer D, Lovejoy S, eds. Non-linear variability in geophysics [M]. The Netherlands: Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [7] Parisi G., Frisch U. On the singularity structure of fully developed turbulence, in Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics [M], edited by M. Ghil, R. Benzi, and G. Parisi, New York: Elsevier, 1985.
- [8] Muzy JF, Bacry E, Arneodo A.. Wavelets and multifractal formalism for singular signals-application to turbulent data [J]. Physical Review Letters, 1991, 67 (25): 3515 - 3518.
- [9] Mallat S, Hwang WL. Singularity detection and processing with wavelets [J]. IEEE Trans. Inf. Theory, 1992, 38, 617 - 643.
- [10] Jaffard S. Multifractal formalism for functions [J]. SIAM J. Math. Anal., 1997, 28 (4): 944 - 998.
- [11] Cheng QM, Agterberg FP, Ballantyne SB. the separation of geochemical anomalies from background by fractal methods [J]. Journal of geochemical exploration, 1994, 51 (2): 109 - 130.
- [12] 郭科, 施泽兴, 唐菊兴等. 用多重分形研究元素的共生组合. 电子科技大学学报, 2004, 33 (2): 221 - 224.
- [13] Zheng Z, Mao H, Cheng QM. Fractal geometry of element distribution on mineral surfaces [J]. mathematical of geology, 2001, 33 (2): 217 - 228.
- [14] Dojnow P. Multifractal analysis of amplitude and phase components of EEG-based analytical signals [J]. Comptes Rendus De L Academic Bulgare Des Sciences, 2007, 60 (10): 1071 - 1076.
- [15] Khalil A, Grant GL, Caddle LB, et al. Chromosome territories have a highly nonspherical morphology and nonrandom positioning [J]. Chromosome Research, 2007, 15 (7): 899 - 916.
- [16] Evertsz CJG., Mandelbrot BB. Multifractal measures, In: Peitgen, H. O., Jurgens, H., Saupe, D. (Eds.), Chaos and Fractals. Springer [M], New York: Springer, 1992.
- [17] Wendt H, Roux SG., Jaffard S, et al. Wavelet leaders and bootstrap for multifractal analysis of images [J]. Signal Processing, 2008, 89 (6): 1100 - 1114.
- [18] De Wijs, HJ, Statistics of ore distribution [J], Geologic en Mijnbouw. 1951, 13 (8), 365 - 375.

(上接第 110 页)

附近的居民区、工矿、交通等设施的地段修筑排导工程。在泥石流堆积扇上的防治措施，主要是修筑排洪道和导流堤。(《地质词典 (四)》)

扰动土样 (disturbed soil sample)。天然结构受到破坏或含水率有了改变的土样。(《岩土工程基本术语标准》(GB/ T50279))

水利冲填 (hydraulic fill)。利用水力使土分散成泥浆，或汲取水域泥沙，再借水力将它们压送到需填土地，待其沉淀固结的填筑方法。(《岩土工程基本术语标准》(GB/ T50279))

开发建设项目水土保持方案 (soil and water conservation program for construction project)。为防止开发建设项目造成新的水土流失，按照《中华人民共和国水土保持法》及有关技术规范要求，编制的水土流失预防保护和综合治理的设计文件，是开发建设项目总体设计的重要组成部分，

是设计和实施水土保持措施的技术依据。(《水土保持术语》(GB/ T20465 - 2006))

参考文献

- [1] D. R. Dean. 地质词汇 [J]. 世界地质, 1983 (2).
- [2] 吴丽坤. 谈术语及术语系统之系统性 [J]. 科技术语研究, 2005 (2).
- [3] 章宜华. 关于术语规范化的几点思考 [J]. 科技术语研究, 2005 (2).
- [4] 郑述谱. 术语的定义 [J]. 术语标准化与信息技术, 2005 (1).
- [5] GB/ T 15259 - 94, 矿山安全术语 [S].
- [6] GB/ T9151 - 88, 钻探工程名词术语 [S].
- [7] GB/ T20465 - 2006, 水土保持术语 [S].
- [8] GB/ T14498 - 93, 工程地质术语 [S].
- [9] GB/ T14157 - 93, 水文地质术语 [S].
- [10] GB/ T7679. 6 - 2003, 矿山机械术语 [S].
- [11] GB/ T0221 - 2006, 崩塌、滑坡、泥石流监测规范 [S].
- [12] GB/ T50279 - 98, 岩土工程基本术语标准 [S].