第一部分　基本概念

给学生以正确的概念和方法

——塑性力学教学十年来的心得体会

黄筑平

（北京大学力学系）

在北大，塑性力学是作为高年级学生的选修课而开设的。在多年的教学中，我们除遵循由浅入深、分散难点、循序渐进的原则外，还始终突出和强调了基本概念提法的准确性和理论体系的严密性。不仅澄清了当前塑性力学书籍中所出现的许多含混概念和错误提法，而且还尽可能地把塑性力学的近代研究成果熔汇到教材中去。从而使学生能对塑性力学中的基本概念、特点以及处理问题的方法有较全面的了解和掌握，并使他们对塑性力学中基本问题和某些典型问题的求解技巧有更为透彻的认识。所有这些，已基本上在文献[1]中得到了反映。下面将具体地对此进行说明。

一、遵循由浅入深、循序渐进的原则

塑性力学的基本概念和处理问题的特点首先是通过前两

章对简单问题的分析入手的。学生只需具有材料力学的基础，就能很好地掌握这些内容。例如，通过第一章中对简单桁架的讨论，可对塑性力学中的以下概念和特点有一个全面的理解：① 约束塑性变形的概念；② 弹塑性问题的解对加载路径的依赖性；③ 强化效应对解的影响；④ 几何非线性效应对解的影响；⑤ 残余应力和残余应变的概念以及它们与塑性变形的关系；⑥ 结构物的弹性极限曲线(面)及其与残余应力状态的关系；⑦ 结构物的塑性极限曲线(面)及其基本性质；⑧ 结构的安定分析等等。在《塑性力学引论》(修订版)[1]中，关于三维弹塑性体的静力安定定理和机动安定定理的严格证明是在第七章中给出的。但是，如果学时较少而不能讲授这部分内容时，通过对简单桁架的安定分析，仍然可以使学生对结构的安定性问题有一个较为系统的认识。

二、强调基本概念提法的准确性

将塑性力学中的基本概念和方法正确地介绍给初学者是塑性力学教学中基本要求之一。为了做到这一点，就必须对这些概念进行认真的推敲，纠正目前书籍中所出现的错误和含混之处，并给出相应的正确结果。这里仅举几个例子：① 强调了稳定材料假设、Drucker 公设和 Il'yushen 公设等关于材料性质假设的区别和联系，以及上述这些假设与建立塑性本构方程之间的关系。

实际上，材料的稳定性假设和 Drucker 公设是两个不同的概念。在图 1 所示的应力-应变曲线中，(a)中的实线和虚线分别对应于应力-应变曲线的稳定阶段和不稳定阶段，而 Drucker 公设则表示了"在应力闭循环中的余功非正"这一材

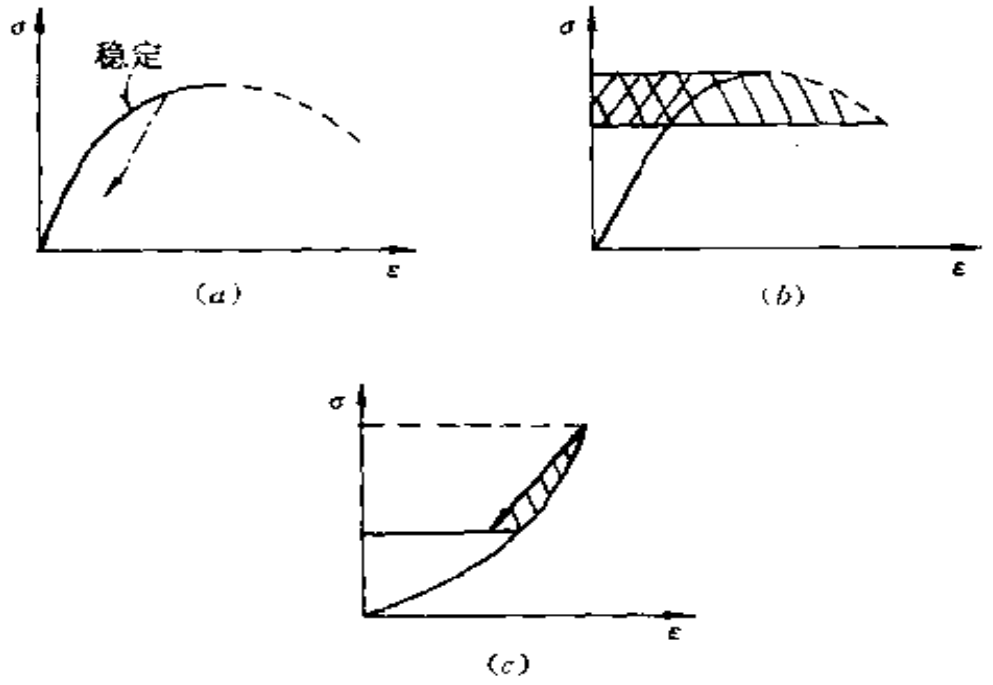


图 1

料性质(见(b))。以上这两个性质之间并无必然联系。例如(c)中所设想的材料虽然是稳定的,但并不满足 Drucker 公设。② 纠正了目前许多教材中关于 Tresca 屈服条件不变量表示的错误。如设 $\tau_i(i=1,2,3)$ 为主应力,则在主应力空间 (τ_1,τ_2,τ_3) 中,Tresca 屈服条件可用

$$\left|\frac{\tau_1-\tau_2}{2}\right|\leqslant K,\quad \left|\frac{\tau_2-\tau_3}{2}\right|\leqslant K,\quad \left|\frac{\tau_3-\tau_1}{2}\right|\leqslant K \tag{1}$$

来表示,上式中 K 为材料常数。在 π 平面上,由(1)式所表示的区域的边界是一个正六边形(见图 2)。在一些书籍(如文献[2]、[3])中,该屈服条件的不变量表示是通过

$$[(\tau_1-\tau_2)^2-4K^2][(\tau_2-\tau_3)^2-4K^2]\times[(\tau_3-\tau_1)^2-4K^2]=0 \tag{2}$$

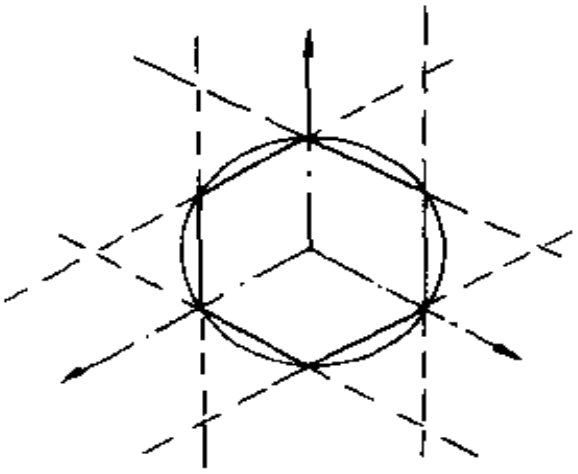


图 2

来求得的。用不变量表示时，(2)式可写为

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36K^2J_2^2 + 96K^4J_2 - 64K^6 = 0. \quad (3)$$

上式中 J_2 和 J_3 分别为应力偏量的第二和第三不变量。在 π 平面上，(2)式或(3)式所表示的实际上是可以无限伸展的三对平行线。它们除包含 Tresca 屈服条件(正六边形)的六条边外，还包含那些用虚线表示的半直线。显然，这些虚线上的点并不在 Tresca 屈服面上。因此，(2)式和(3)式是不恰当的。不加说明地引入这种表达式对学生正确建立屈服面的概念将是不合适的。

事实上，如在 π 平面上定义极坐标 (r,θ)，则当应力值给定后，r 和 θ 值可分别写为：

$$r = \sqrt{2J_2}, \theta = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{2\tau_2 - \tau_1 - \tau_3}{\sqrt{3}(\tau_1 - \tau_3)}\right] = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}} \quad (4)$$

式中 μ_σ 为 Lode 参数。若设 $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \tau_3$，便有

$$S_1 - S_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} r\left[\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\, r\cos\theta = 2K, \tag{5}$$

其中 $S_i(i = 1,2,3)$ 为偏主应力。另外，注意到

$$J_3 = S_1 S_2 S_3 = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} r^3 \sin 3\theta$$

或

$$\theta = -\frac{1}{3}\sin^{-1}\left[\frac{3\sqrt{3}J_3}{2(J_2)^{3/2}}\right]$$

（θ 取值范围从 $-\frac{\pi}{6}$ 到 $\frac{\pi}{6}$），则 Tresca 屈服条件的不变量表示可写为

$$\sqrt{J_2}\cos\left[\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}J_3}{2\sqrt{J_2^3}}\right)\right] - K = 0 \tag{6}$$

③ 理想刚塑性平面应变问题中关于特征线（滑移线）上的速度关系式（即 Geiringer 方程）是经典塑性理论中的一个基本关系式。如果以 S_α 和 S_β 分别表示沿 α 和 β 滑移线的弧长，θ 为 α 滑移线切向与 x 坐标轴的夹角，v_α 和 v_β 分别表示速度向量沿 α 和 β 滑移线的两个切向分量，则 Geiringer 方程可写为：

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial S_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} = 0, \frac{\partial v_\beta}{\partial S_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} = 0 \tag{7}$$

(7)式的几何解释是：沿滑移线的伸长率为零。然而某些塑性力学教科书是以“沿滑移线的伸长率为零”作为出发点来导出(7)式的。把(7)式的几何解释作为前提，而把(7)式本身作为结果，这在逻辑上是不恰当的。尤其需要指出的是，在某些书籍（如[4]）中，把“沿滑移线的伸长率为零”的关系式先写为：

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial S_\alpha}=0,\quad \frac{\partial v_\beta}{\partial S_\beta}=0 \tag{8}$$

然后再导出(7)式。不难看出，在以上推导中，前提和结论的表达式之间显然是自相矛盾的。

三、强调了理论体系的严密性

强调了理论体系的严密性，把经典塑性力学与现代塑性理论有机地结合起来。例如，从内变量框架出发，在应力空间和应变空间这两个对偶的空间中系统建立塑性本构理论，并指出这些结果与经典塑性本构方程之间的关系；强调在应变空间中给出加卸载准则的合理性；用极值路径的观点来讨论全量理论的适用范围，并导出全量理论中的最小势能原理和最小余能原理……等等。

四、力图对典型算例进行全面、完整的剖析

为了使学生在具体问题的求解过程中更好地掌握塑性力学的特点和方法，而不只是为了解题而解题，就需要对典型问题进行全面的剖析。例如：① 在厚壁筒的弹塑性分析中，除了对应力、应变、位移分布等进行计算之外，还特别强调了采用 Tresca 屈服条件时所必须进行的中间主应力的校核。此外，还对卸载后的残余应力分布、安定问题、强化效应、几何非线性效应等一系列问题进行了讨论。从而使学生对厚壁筒问题的求解有一个全面的认识。② 在理想刚塑性平面应变问题的算例中，除按通常方式进行求解外，还特别强调了塑性区中速度场的不唯一性；除对塑性区的求解过程进行详细讨论外，还特别强调了对刚性区进行校核的必要性，给出了相应的

算例，而这在一般引论性的教材中往往是被忽略的。

五、强调力学与数学的结合

强调力学与数学的结合，赋予数学表达式以更深刻的力学内涵。例如，在讨论柱体扭转问题时，指出了该问题在数学上可归结为变分不等式问题，故可从数学角度对其作更深入的研究。在介绍滑移线理论中关于速度场的特征线关系时，从力学角度进行分析不仅可得到 Geiringer 方程，而且还可得到一般书籍中所没有的用来校核速度场的"功不等式"：

$$\frac{1}{2}\left|\frac{\partial v_\alpha}{\partial S_\beta}+\frac{\partial v_\beta}{\partial S_\alpha}+v_\alpha\frac{\partial\theta}{\partial S_\alpha}-v_\beta\frac{\partial\theta}{\partial S_\beta}\right|\geqslant 0 \qquad (9)$$

从而使这些表达式具有更为鲜明的力学意义。

参 考 文 献

[1] 王仁，黄文彬，黄筑平. 塑性力学引论(修订版). 北京大学出版社，1992 年 1 月

[2] Martin JB. Plasticity: Fundamentals and General Results. MIT Press, 1975 316

[3] Lubliner J. Plasticity Theory. Macmillan Publishing Company, 1990. 128

[4] Kachanov LM. Foundation of the Theory of Plasticity (Second Edition). North-Holland Publication Company-Amstertam-London, 1971. 180

中译本：卡恰诺夫，周承倜译. 塑性力学基础(第二版). 人民教育出版社，1982 年，第 180 页

警惕误用弹性力学概念或规律于塑性力学

诸德培
（西北工业大学）

一、引言

在研究生教学及平时审稿过程中，作者发现有不少学生、甚至有些非塑性力学课程的教师在学过大学的塑性力学之后仍然未能区别塑性力学与弹性力学某些基本概念和规律的不同，以致在求解弹塑性问题中误用了只适用于弹性力学的概念或规律。下面举两个常见的例子：

① 只记得理想塑性材料的泊松比为 0.5，而不加区别地套用了弹性材料泊松比的关系式；

② 把比例加载误作为应力间比值不变的“简单加载”，误用全量理论。

这两个例子都是属于最简单的基本概念，不得不使人警惕到教学中的疏忽。本文介绍几个例子，可供参考或可放入教学内容，使学生产生深刻的印象，避免犯同类错误。

二、关于泊松比问题的说明及例子

众所周知，泊松比是弹性力学中一个有明确定义的量，它（本文中以 ν 表示）出现在应力（以 σ 表示）应变（以 ε 表示）关

系式中：

$$\epsilon_x = [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]/E$$

式中 x、y、z 为坐标，可以轮转替换。泊松比是材料特性常数，与应力状态、坐标取向无关（指各向同性材料）。它的简单物理意义是在单向拉伸情况下的横向收缩比[1，34 页]。

在塑性力学的全量理论，或称为塑性形变理论中，把单调加载状态下的应力应变关系与非线性弹性力学关系等同起来[3，§98]，这时用减折弹性系数 E' 代替 E，并取泊松比为 0.5。这种关系，只在“简单加载”的理想情况下是成立的[2，§4.6]，在一定的实际条件下只能近似满足，而对于一般情况，可能导致不能容许的错误。

现代塑性力学中常以塑性流动理论为基础，加载状态时塑性应变增量与应力增量之间存在与弹性力学公式完全不同的本构关系。对于 Mises 等向强化模型为[2，196 页，(44)式]：

$$d\epsilon_{ij}^p = (3/(2\varphi'))\,(d\bar{\sigma}/\bar{\sigma})S_{ij}$$

显然，在这一基本关系式中不存在泊松比的项。

对于单向（以脚标 1 表示）拉伸情况，偏应力

$$S_{11} = (2/3)\sigma_{11}, \quad S_{22} = S_{33} = -(1/3)\sigma_{11}$$

故

$$d\epsilon_2^p/d\epsilon_1^p = d\epsilon_3^p/d\epsilon_1^p = -0.5$$

也就是说，此时塑性应变增量的横向分量与纵向分量的比值为 -0.5，有时也把它的绝对值称为“塑性泊松比”。对于复杂受力情况，因为塑性变形时体积不变，即

$$d\epsilon_1^p + d\epsilon_2^p + d\epsilon_3^p = 0$$

所以任一法向的塑性应变增量总可以写成三个分量

$$(\varepsilon_\theta, -0.5\varepsilon_a, -0.5\varepsilon_a)\cdot(-0.5\varepsilon_b, \varepsilon_b, -0.5\varepsilon_b),$$
$$(-0.5\varepsilon_c, -0.5\varepsilon_c, \varepsilon_c)$$

之和(但有不唯一的分解),也可以说,每一分量中的塑性泊松比为0.5。

但毕竟这种塑性泊松比与弹性泊松比是完全不同的概念,它不联系应力增量与应变增量的关系。

下面举一个单向受拉的双层夹层板条的例子。设有一双层板条,沿纵向即x向受拉,载荷为P。第一层与第二层厚度之比为$t_1:t_2=0.6:0.4$。两层的弹性系数相同,但屈服应力不同。在加载过程中,第一层保持弹性,第二层进入屈服,屈服后材料简单拉伸曲线的斜率为弹性时的0.4倍。

首先,构造一个非线性弹性力学的关系式:

$$d\varepsilon_x = (d\sigma_{x1} - \nu_1 d\sigma_{y1})/E_1 = (d\sigma_{x2} - \nu_2 d\sigma_{y2})/E_2$$
$$d\varepsilon_y = (d\sigma_{y1} - \nu_1 d\sigma_{x1})/E_1 = (d\sigma_{y2} - \nu_2 d\sigma_{x2})/E_2$$

其中第二层板在屈服后的减折弹性模数E_2为原值E_1的0.4倍,并取泊松比ν_2为0.5。

然后,又用公认是正确的Mises强化材料的塑性增量本构关系:

$$d\varepsilon_x = (d\sigma_{x1} - \nu_1\sigma_{x1})/E_1$$
$$- (d\sigma_{x2} - \nu_2 d\sigma_{y2})/E_2 + 2.25h(S_x/\bar{\sigma}^2)(S_x d\sigma_{x2} + S_y/d\sigma_{y2})$$
$$d\varepsilon_y = (d\sigma_{y1} - \nu_1 d\sigma_{x1})/E_1$$
$$- (d\sigma_{y2} - \nu_2 d\sigma_{x2})/E_2 + 2.25h(S_y/\bar{\sigma}^2)(S_x d\sigma_{x2} + S_y/d\sigma_{y2})$$

式中S为偏应力,h为强化模量,易证

$$h = 1/E_2 - 1/E_1$$

平衡方程为:

$$t_1 d\sigma_{x1} + t_2 d\sigma_{x2} = dP$$

$$t_1 d\sigma_{y1} + t_2 d\sigma_{y2} = 0。$$

对上述两种情况进行计算，所得两层板条内 x 向、y 向应力结果分别如图 1、图 2 所示。

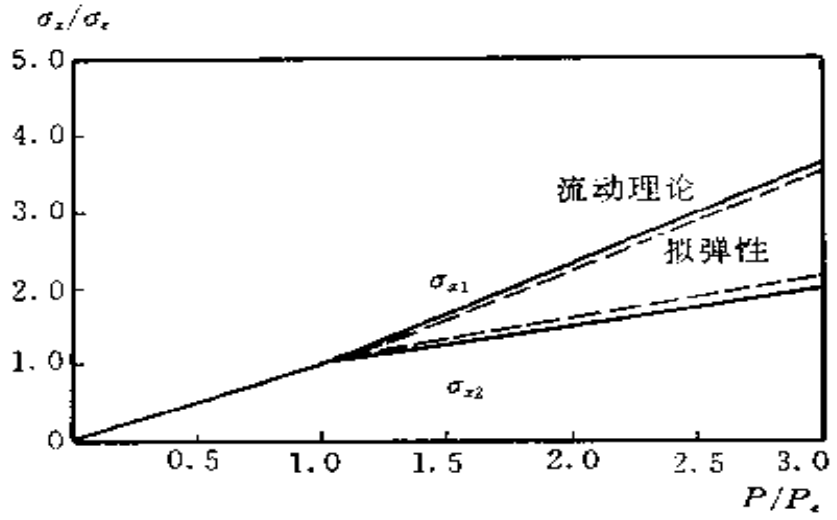


图 1　σ ～ P

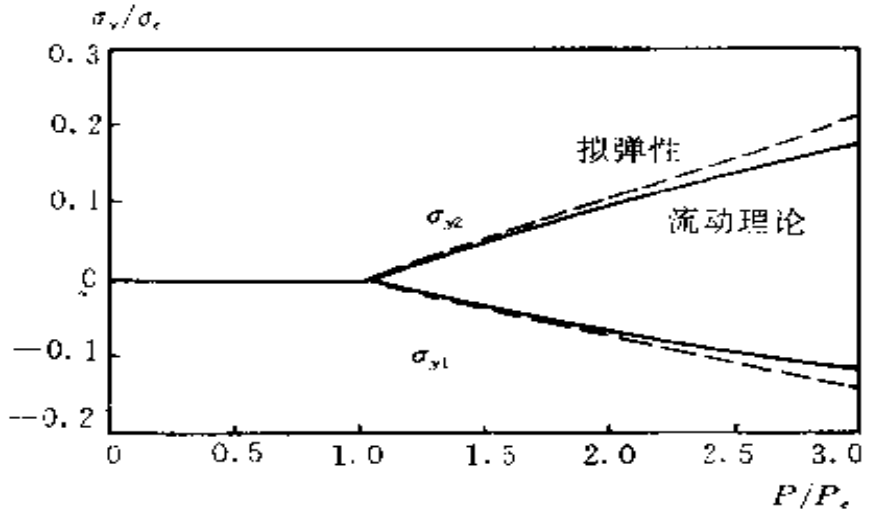


图 2　σ_y ～ P

从图可知，即使在这一个简单拉伸的例子中，不正确的关

系式会带来明显的误差，尤其是对于 y 向的应力。在复杂的问题中，尤其对某些局部应力集中而变化激烈的区域，误差将会更大。

作者建议在讲解塑性力学流动理论时，对学生强调说明其应力应变本构关系和弹性力学中的差别，着重指出在关系中不含泊松比项。所谓"塑性泊松比"只是指塑性应变增量的各分量间的比例关系，并不反映应力增量与应变增量间的关系。实际上，也可避免使用"塑性泊松比"这一术语；当因习惯而沿用这一名词时，不要使学生只留下泊松比为 0.5 的概念去套用弹性力学的公式而忘却了其适用的前提。

三、关于"简单加载"问题的说明及例子

"简单加载"对于微单元体（或一点）讲是指应力张量各分量之间的比值在加载过程中保持不变；对于一个物体（或结构）讲是指所有各点应力分量之间的比值保持不变，即都按同一变化规律单调增加。为了满足"简单加载"条件，需要有几个前提[2.99 页]，比例加载只是其中一个条件。有人把比例加载当作为"简单加载"是错误的，从上节双层板条的例子已可看出，比例加载不能保证"简单加载"。

下面再举一个一次静不定平面桁架的例子，着重说明它在单调增加的比例加载情况下，某些杆力不是单调增加，因而也不满足"简单加载"条件。

图 3 所示为一对称平面桁架，各杆材料相同，为理想弹塑性材料，设拉、压屈服杆力都是 P_s 的 0.345 倍；但处于上层中央的杆(1)的断面积和屈服杆力只为其他杆件的十分之一。

今载荷呈比例单调增加，计算所得三根主要杆的轴力变

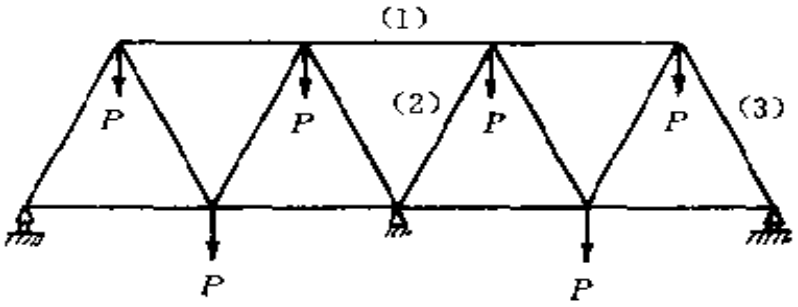


图 3　桁架

化历程如图 4 所示。由图可知，当 $P = 0.1643P_u$ 时，处于上层中央的杆(1)首先拉伸屈服，而当 $P = 0.1893P_u$ 时，处于靠近

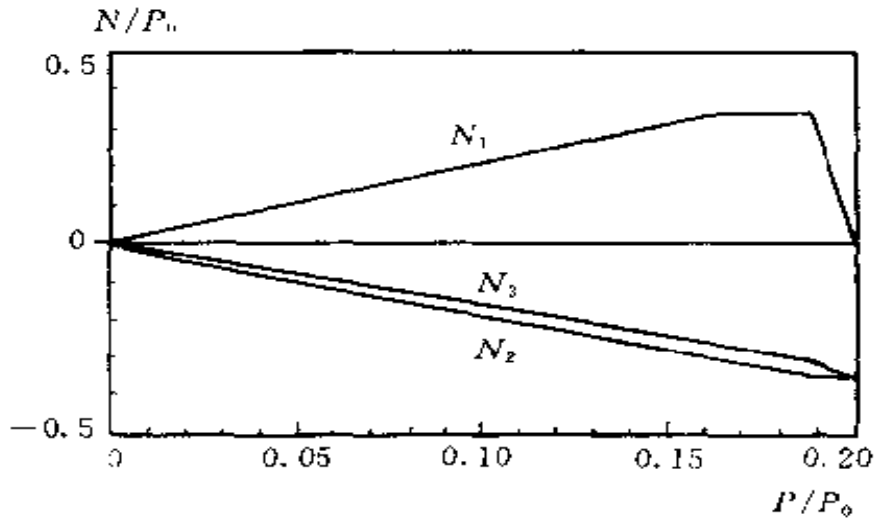


图 4　杆力

中央的斜杆(2)开始压缩屈服，从而使杆(1)卸载。当杆(2)和杆(3)同时屈服时，$P = 0.1992P_u$，此时杆(1)的轴力已卸载至零。本例清楚地说明了虽然外载荷按比例单调增加，结构内力却有先增后减的反复变化。

依此类推，在其他类型的结构中也可能发生类似情况。众所周知，梁受载发生屈服后，通常剪应力和正应力间的比值就不可能保持常值，而由上可知，受剪腹板的屈服可能会导致缘条的卸载。对于含缺口或裂纹的物体，应力高度集中处的局部屈服也可能导致某邻域的卸载。凡此种种情况，即使外载单调比例增加，在应用全量理论作近似的弹塑性计算时仍要特别谨慎小心。

参 考 文 献

[1] 力学词典，中国大百科全书出版社，1990

[2] 王仁、黄文彬，塑性力学引论，北京大学出版社，1982

[3] Н. Н. 别茹霍夫著，杜庆华等译，弹性与塑性理论，高等教育出版社，1956

关于塑性力学的应变空间表述

殷有泉

（北京大学力学系）

一、前言

为了直观地表述介质质点的力学状态，我们可以引入所谓的应力空间和应变空间。应力空间是这样的一个六维空间，指定的应力状态的六个独立分量是这个空间中的正交笛卡尔坐标系六个轴上的分量。于是，指定的应力状态用这个空间中的一个点表示。坐标原点对应于零应力状态，或称为自然状态。应力状态变化的历史可用应力空间中的一条曲线表示，这条曲线有时也称为应力路径。可以用同样的方法来定义应变空间。应变空间的一个点对应于一个应变状态。应变空间中的一条曲线，称为应变路径，代表介质质点的应变状态变化的历史。在弹塑性理论中，以应力状态变量为基本状态变量来描述介质质点的性质，称为应力空间表述；以应变状态变量作为基本状态变量描述介质质点的性质，称为应变空间表述。

通常的塑性力学教科书多是采用应力空间表述的。屈服极限和强度极限是用应力分量给出的，屈服函数是用应力分量表示的，屈服面是应力空间中的超曲面。本构方程也是以应力状态为基本的状态变量，应变分量是函数状态变量。使用这种应力空间表述是学科发展的历史造成的。例如以前的材

料性质的测定都是在控制载荷(力)的试验机上进行的，在实验中直接读出的是力；以前的塑性力学教科书主要针对理想塑性材料介绍解析方法，在应力空间表述本构关系也够用了。

近20年塑性力学问题的有限元方法(主要是以位移为基本变量的位移法)得到很大发展，并在实际工程中得到广泛的和成功的应用。在位移法中使用的弹塑性矩阵，在实质上就是应变空间表述的本构矩阵[1]。由于伺服试验机的出现，用控制位移的方式测量全应力应变曲线(包含硬化和软化阶段的曲线)得以实现，可以用变形值表示屈服极限和强度极限。总之，数值方法和实验技术的发展以及实际需要的推动，人们开始认识到在应变空间表述理论的重要性。我们在[2]中首先详细地讨论了塑性力学的两种空间表述问题，并指出应变空间表述具有更广泛的适用性，后来美国著名力学家 N. M. Naghdi 等人也发表了类似的结果[3]。目前，塑性理论应变空间表述的重要性和优越性得到了国内外学者们的广泛认同[4]。

二、塑性本构理论的应变空间表述

塑性力学在应力空间和应变空间表述的主要结果列于表1之中。从表可见，两种表述之间有完好的对偶性。对弹性理论，两种表述是完全等价的，但对塑性理论却是不等价的。在后文中我们将说明，应力空间表述的理论仅适用于硬化塑性材料；而应变空间表述的理论，对硬化塑性、理想塑性和软化塑性是普遍适用的。

在应变空间表述的理论中引入了应变屈服函数的概念，即屈服准则是用应变分量表示的。我们对应变屈服面的知识了解甚少。然而，我们可以通过变换

表 1　应力空间和应变空间表述

	应力空间	应变空间
基本状态变量	σ_{ij}	ε_{ij}
塑性内变量	σ_{ij}^{p}，w^{p}	ε_{ij}^{p}，w^{p}
待定状态变量	ε_{ij}	σ_{ij}
增量的和分解	$d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^{e}+d\varepsilon_{ij}^{p}$	$d\sigma_{ij}=d\sigma_{ij}^{e}-d\sigma_{ij}^{p}$
Hooke 定律	$d\varepsilon_{ij}^{e}=C_{ijkl}d\sigma_{kl}$	$d\sigma_{ij}^{e}=D_{ijkl}d\varepsilon_{kl}$
屈服准则	$f(\sigma_{ij},\sigma_{ij}^{p},w^{p})=0$	$F(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij}^{p},w^{p})=0$
塑性基本公设	Druker 公设 $\oint\varepsilon_{ij}d\sigma_{ij}\leqslant 0$	Ильюшин 公设 $\oint\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}\geqslant 0$
屈服面的外凸性和正交法则	$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^{p})d\varepsilon_{ij}^{p}\geqslant 0$ $d\varepsilon_{ij}^{p}=d\lambda\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}$	$(\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{ij}^{p})d\sigma_{ij}^{p}\geqslant 0$ $d\sigma_{ij}^{p}=d\lambda\dfrac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}}$
加-卸载准则	$l=\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}\begin{cases}>0,\text{加}\\=0,\text{中}\\<0,\text{卸}\end{cases}$	$L=\dfrac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}}d\varepsilon_{ij}\begin{cases}>0,\text{加}\\=0,\text{中}\\<0,\text{卸}\end{cases}$
加载时的本构方程	$d\varepsilon_{ij}=\left(C_{ijkl}+\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}\right)d\sigma_{kl}$ $a=-\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}^{p}}D_{ijkl}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{kl}}$ $-\dfrac{\partial f}{\partial w^{p}}\sigma_{ij}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}>0$	$d\sigma_{ij}=\left(D_{ijkl}-\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}}\dfrac{\partial F}{\partial\varepsilon_{kl}}\right)d\varepsilon_{kl}$ $A=-\dfrac{\partial F}{\partial\varepsilon_{ij}^{p}}C_{ijkl}\dfrac{\partial F}{\partial\varepsilon_{kl}}$ $\dfrac{\partial F}{\partial w^{p}}\sigma_{ij}C_{ijkl}\dfrac{\partial F}{\partial\varepsilon_{kl}}>0$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}^{p} &= D_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{p}\\ \sigma_{ij} &= D_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^{p})\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

建立应力屈服函数与应变屈服函数的关系如下：

$$\begin{aligned}f(\sigma_{ij},\sigma_{ij}^{p},w^{p}) &= f[D_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\varepsilon_{kl}^{p}),D_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{p},w^{p}]\\ &= F(\varepsilon_{ij},\varepsilon_{ij}^{p},w^{p})\end{aligned} \tag{2}$$

上式表明，在内状态变量固定不变时，应力屈服面和应变屈服面上的点完全是一一对应的。由(2)可进一步得到屈服函数导数间的关系

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} &= D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\\ \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} &= D_{ijkl}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}^{p}}-\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}\right)\\ \frac{\partial F}{\partial w^{p}} &= \frac{\partial f}{\partial w^{p}}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

这样一来在表1中的应变空间表述的本构方程可改写为

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = \left(D_{ijkl}-\frac{1}{A}D_{ijmn}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}D_{pqkl}\right)\mathrm{d}\varepsilon_{kl} \tag{4}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}+a \tag{5}$$

虽然这时在本构方程中包含的是应力屈服函数，但在本质上这些关系仍是应变空间表述的，因为它的基本状态变量仍然是应变。这时相应的加-卸载准则函数是

$$L = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} \tag{6}$$

这与应力空间表述的加-卸载准则(见表1)显然是不同的。那里是由应力增量表示的，这里是由按弹性规律由 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}$ 计算出

的"弹性"应力增量 $d\sigma_{ij}$ 表示的。我们知道，在位移法的有限元分析中是由 $d\varepsilon_{ij}$ 计算 $d\sigma_{ij}$ 的，因而 $d\sigma_{ij}$ 事前是不知道的，只能用考查 $\sigma_{ij}+d\sigma_{ij}$ 对应的点在应力屈服面的内侧和外侧来判断卸载还是加载。这种做法恰恰是使用了应变空间表述的加-卸载准则(6)来判断加载和卸载。因此，现在从理论上弄清了，在已往的位移法弹塑性有限元分析中关于本构关系的算法在实质上都是建立在应变空间表述的本构理论之上的，这些算法是完全正确的。国内的某些学者另起炉灶奢谈应变空间表述的有限元是完全没有必要的。

我们可以证明：应变硬化，理想塑性和应变软化分别对应于系数 a 大于零、等于零和小于零。因此应力空间表述的本构关系只适用于应变硬化材料。更具体一点说，在理想塑性情况，屈服函数不包含内变量，即 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^p}=0$，$\frac{\partial f}{\partial w^p}=0$，因而 $a=0$。在本构方程中，零出现在分母上是不允许。再有，对应变软化材料，加载和卸载时均有 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}d\sigma_{ij}<0$，表 1 应力空间表述的加-卸载准则，也仅适用于硬化材料。

在应变空间表述的本构方程中，系数 A 中含有一个正数部分 $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}D_{ijkl}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$（见(5)式），因而对于硬化、理想塑性和软化材料是普遍适用的。加载时，应变屈服面总是扩张的，因而加-卸载准则对于硬化、理想塑性和软化材料也是普遍适用的。但要注意，应变空间理论对软化速率有一定的限制，以满足 $A>0$ 的要求。现以等向硬化-软化的 Mises 材料为例，屈服准则为

$$f=\sqrt{J_2}-\tau_s(w^p)=0 \tag{7}$$

这时
$$A = G - G^p \tag{8}$$
其中 G 是弹性剪切模量，G^p 是塑性剪切模量
$$G^p = \frac{d\tau_i}{d\gamma^p} \tag{9}$$
γ^p 是纯剪实验时的塑性剪应变。硬化、理想塑性和软化情况分别对应于 $G^p>0$、$G^p=0$ 和 $G^p<0$ 为保证 $A>0$，对应变软化情况要求
$$|G^p| < G \tag{10}$$
我们知道弹性模量 G 是一个很大的数值，$G\sim 15^5$MPa，因而应变空间表述理论要求应力应变曲线的下降坡度可以是很陡的。国内外某些学者在有限元计算中假设应力从峰值直接下跌到残余值，这相当于 $G^p=-\infty$，这种做法至少在理论上是不对的。

对弹塑性耦合的材料（弹性模量随塑性内变量的发展而变化），也建立了相应的应变空间表述的理论[5]，这时塑性流动是非正交的，但得到的弹塑性本构张量是对称张量，这优于传统的非关联塑性势理论。对于奇异屈服面（例如 Tresca 屈服面，岩土帽盖屈服面等），在奇异点处本构关系的应力空间表述和应变空间表述也作了详细的讨论[6]，特别是澄清了在屈服面奇异点处的部分加载和完全加载的条件。总而言之，在应变空间表述的塑性理论，无论在理论方面还是在应用方面，现今都取得了很大进展。

三、建议

一本优秀的塑性力学教科书应该适当地反映本学科理论的前沿成果，更应该为当前在工程计算中广泛使用的各种数

值方法提供坚实的力学基础。因此，我们建议不同学科和不同专业的塑性力学课教师改进教学，根据自己的学科特点，适当地增加关于塑性理论应变空间表述的内容。

参 考 文 献

[1] Y. Yamada, N. Yishimura and T. Sakurai. Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method. Int. J. Mech. Sci., 1968, vol. 10: 343—354

[2] 曲圣年，殷有泉. 塑性力学的 Drucker 公设和 Ильюшин 公设. 力学学报，1981，13 卷：465—437 页

[3] J. Casey and P. M. Naghdi On the nonequivalence of the stress space and strain space formulation of plasticity theory. J. Applied Mechanics. ASME, 1983, vol. 50: 350—354

[4] W. F. Chen and D. J. Han. Plasticity for Structural Engineers. New York: Springer Verlag, 1988

[5] 殷有泉，曲圣年. 弹塑性耦合和广义正交法则. 力学学报，1982，14 卷：63—70

[6] 殷有泉. 奇异屈服面的弹塑性本构关系的应力空间表述和应变空间表述. 力学学报，1986，18 卷：31—38

塑性力学的两个基本概念

林钟祥

（浙江大学）

在塑性力学讲课中，如何正确地引出一个新的概念，阐明它与已有概念之间的联系，使学生能正确理解这些概念，对于提高教学效果甚为重要。本文只就两个具体问题谈些体会。

一、关于一点应力状态的描述

材料的塑性响应不仅决定于它的固有特性，还与作用的外因有关，而外因首先是应力状态。因此把如何描述一点应力状态的问题讲清楚，将有助于对塑性基本规律的理解。

1. 一点应力状态的描述

一般情况，一点应力状态可以而且必须用 6 个独立的参数来描述，它们可取为应力张量的分量，即

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{1}$$

也可以取为 3 个主应力 σ_k 或应力张量不变量 $I_k(k=1,2,3)$ 和 3 个主方向 $\boldsymbol{n}_k$，前者是下列三次方程的根或系数

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{2}$$

$$I_1 = \sigma_{ii}, \quad I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}), \; I_3 = \det\boldsymbol{\sigma} \tag{3}$$

后者通常取为 3 个正交的方向，这样 3 个主轴的 9 个方向余

弦中要满足 6 个正交条件

$$\boldsymbol{n}_k \cdot \boldsymbol{n}_l = \delta_{kl} \tag{4}$$

因此只相当于 3 个独立参数。在塑性力学中，通常把应力张量分解为球形张量和偏斜张量

$$\sigma_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} + S_{ij} \tag{5}$$

球形张量 $\sigma_m\delta_{ij}$对应于均匀拉伸(压缩)应力状态，只需 1 个参数 $\sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{kk}$就可确定；偏斜张量 S_{ij}对应于纯剪切应力状态，需要 5 个独立参数才能确定，它们可取为应力偏量的分量

$$S_{ij} = S_{ji}, \qquad S_{kk} = 0 \tag{6}$$

或 3 个主方向(与应力张量主方向重合)和其他 2 个独立参数。对于各向同性材料，塑性响应与主方向无关，故重要的是其他 2 个参数。

2. 应力偏量参数的选择

常见的有下列几种可能方案：

① 3 个主偏量中的任意 2 个

$$S_1 = \sigma_1 - \sigma_m, \quad S_2 = \sigma_2 - \sigma_m, \quad S_3 = \sigma_3 - \sigma_m \tag{7}$$

② 应力偏量不变量

$$J_2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}, \quad J_3 = \frac{1}{3}S_{ij}S_{jk}S_{ki} \tag{8}$$

③ 主应力空间中应力偏量矢量模和方向角

$$\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}, \quad \theta = \frac{1}{3}\arcsin\left[\frac{3\sqrt{3}J_3}{2(J_2)^{3/2}}\right] \tag{9}$$

④ 主偏量最大值和任意 2 个主偏量比值

$$\max|S_K|, \quad S_2/S_1 \quad (\text{或 } S_3/S_1,\ S_3/S_2) \tag{10}$$

⑤ 3 个主剪应力中任意 2 个

$$\tau_{12}=\frac{S_1-S_2}{2},\ \tau_{23}=\frac{S_2-S_3}{2},\ \tau_{31}=\frac{S_3-S_1}{2} \quad (11)$$

⑥ 最大主剪应力和任意2个主剪应力比值

$$\max|\tau_{ij}|,\ \tau_{12}/\tau_{13}(\text{或}\ \tau_{23}/\tau_{13},\ \tau_{12}/\tau_{23}) \quad (12)$$

式(9)中的第一个参数也可以用等效正应力 $\bar{\sigma}$ 或等效剪应力 $\bar{\tau}$ 来代替

$$\bar{\sigma}=\sqrt{3}\,\bar{\tau}=\sqrt{\frac{3}{2}(S_1^2+S_2^2+S_3^2)} \quad (13)$$

而式(9)～(12)中的第二个参数也可以用 Lode 参数 μ_σ 来代替

$$\mu_\sigma=\frac{2S_2-(S_1+S_3)}{S_1-S_3}=\frac{\tau_{12}-\tau_{23}}{\tau_{31}}=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\theta \quad (14)$$

3. 几何方法

当主方向确定时，一点应力状态也可以用几何方法描述，常用方法有二：

① 主应力空间中的矢量

当主方向确定时，一点应力状态也可以用几何方法描述，常在主应力空间中，应力张量可用矢量$\vec{OP}$表示(图1)

$$\vec{OP}=\sigma_1\boldsymbol{e}_1+\sigma_2\boldsymbol{e}_2+\sigma_3\boldsymbol{e}_3 \quad (15)$$

它沿等倾斜线 Λ 以及与 Λ 线正交的 π 平面上的分量$\vec{OQ}$和$\vec{OR}$则分别表示球形张量和偏斜张量

$$\vec{OQ}=\sigma_m(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3) \quad (16)$$

$$\vec{OR}=S_1\boldsymbol{e}_1+S_2\boldsymbol{e}_2+S_3\boldsymbol{e}_3 \quad (17)$$

显然，应力球张量只决定于它的模 $|\vec{OQ}|=\sqrt{3}\sigma_m$；而应力

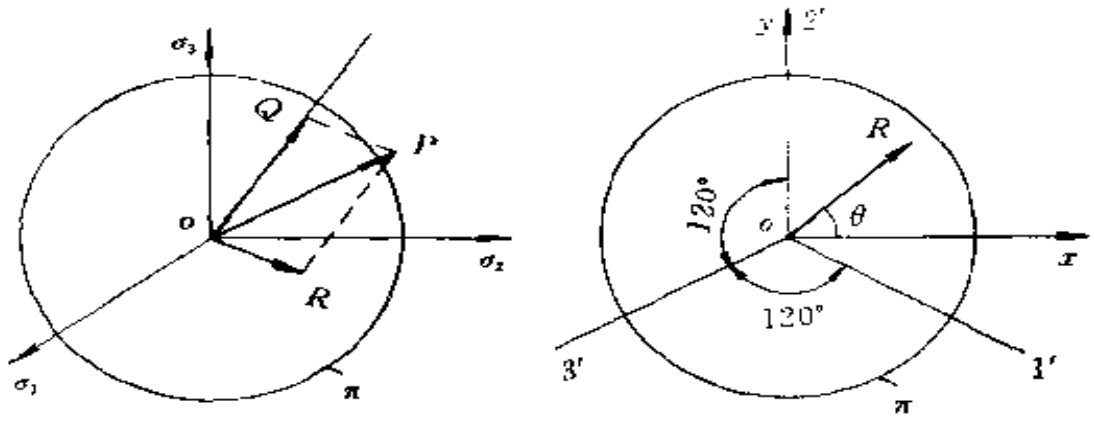


图 1　主应力空间

偏量则必须由模 $|\vec{OR}| = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ 和方向角 θ 才能完全确定。有的教科书中把矢量$\vec{OQ}$和$\vec{OR}$与八面体正应力和剪应力等同起来，这是不妥的，因为前者是一点应力状态的几何表示，后者则是特定截面上的应力，是两个不同的概念。

② 应力 Mohr 圆

应力球形张量决定 Mohr 圆的位置 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$，而应力偏量则决定 Mohr 的特征（三个圆的相对大小），而后者又可以与式(11)、(12)和(14)中诸量相连系（图 2）。

材料的塑性响应既决定于内因（材料特性）又与外因（应力状态）有关。对于各向同性材料，应力主方向并不重要，因此要全面反映外因的影响，只需 3 个独立参数，它们可取为，例如：$(\sigma_1、\sigma_2、\sigma_3)$、$(I_1、I_2、I_3)$ 或 σ_m 与前述描述应力偏量参数的 6 种方案中的一种。对金属材料，应力球张量不引起塑性变形，故只须从描述应力偏量的 6 种方案中选择一种来建立塑性变形规律。Mises 条件选择了方案②或③，而忽略不变量 J_3 或方向角 θ 的影响；Tresca 条件选择了方案④，而忽略主剪

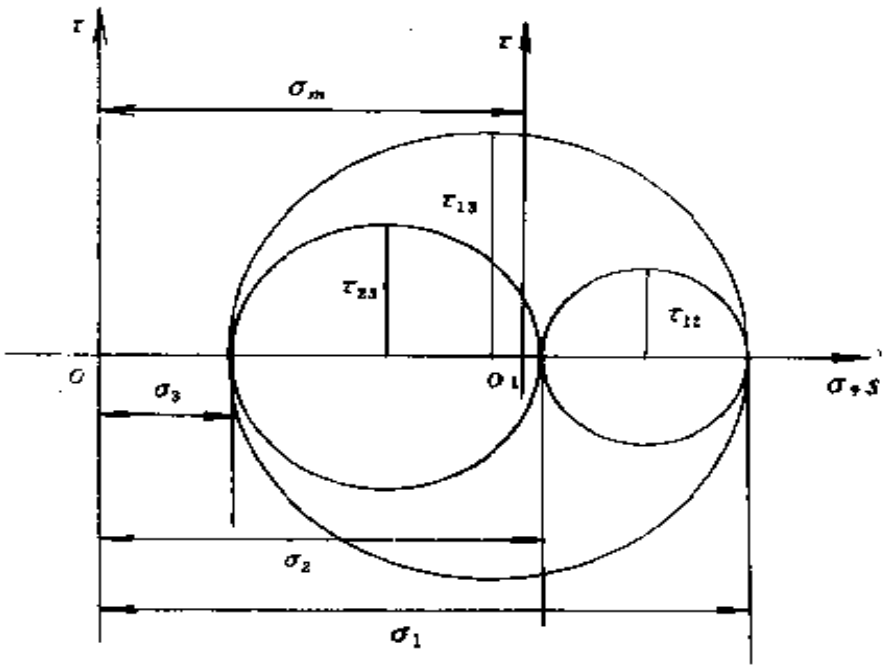


图 2　应力 Mohr 圆

应力比值的影响；双剪屈服条件选择了方案①或⑤，而不考虑主偏量或主剪应力比值的作用。亦即所有上述屈服条件都只包含应力偏量 2 个独立参数中的一个。对于岩土类材料，塑性变形也将引起体积改变，故还必须考虑 σ_m 的影响。Mohr-Coulomb 条件，Drucker-Prager 条件和广义双剪屈服条件则是分别在 Tresca 条件、Mises 条件和双剪屈服条件基础上引进参数 σ_m，但对于应力偏量的作用仍然只考虑了一个参数，因此是不完善的。

二、关于平面应变问题的滑移线理论

平面应变问题的滑移线解法是塑性力学中最具有特色和理论上最完善的问题之一。为使学生更好地理解和应用这一

理论，有几个问题在讲课中应给予注意。

1. 关于刚塑性假设及其适用情况

刚塑性假设认为，当应力低于屈服条件时物体不变形，当应力达到屈服条件时，材料可能发生塑性流动，因此它具有双重涵义：忽略弹性变形，忽略物体总体构形变化。这只有当材料具有足够长的屈服平台和物体刚从约束塑性变形过渡到自由塑性变形的瞬时方可适用。因为此时就变形总量来说仍处于弹性变形量级，与物体固有尺寸相比属于微量，可以忽略，而就变形速率来看，进一步变形主要是塑性部分迅速增大，弹性部分则几乎不变，因此对于力学方程仍可按原来尺寸建立，而本构关系却可以采用Levy-Mises的刚塑性理论。但过了这一瞬时，塑性变形急剧增大，就不能不考虑物体几何尺寸改变对应力重分布和力学方程的影响。因此对于继续流动问题就不能采用物质描述意义下的刚塑性假设，而只能理解为空间描述意义下的刚塑性假设。

2. 关于塑性区的边界条件

由于采用了非线性屈服条件，故从已知的边界应力求函数σ、θ的边界值时出现多值性

$$\theta = \phi \pm \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{\tau_{xt}}{k}\right) + m\pi \tag{18}$$

$$\sigma = \sigma_n - k\cos 2(\theta - \phi)$$

这里存在着正负号和m值如何确定问题，它使初学者往往感到困难。其实，这只需要根据这样原则：对第一个区域边界m值可取为任意整数（为简单计，通常取为0、1或-1）；正负号则由σ_t和σ_n的相对大小（这通常可根据总体受力变形情况判断）来决定，如$\sigma_t > \sigma_n$取正号，反之取负号。对其余与其连接区

域中的 m 值则应这样决定：当应力不发生间断时（此时，两区域共同边界线必为滑移线）同族滑移线应保持连续光滑；当应力发生间断时，同族滑移线应与共同边界线或其法线成相等夹角（图 3）.

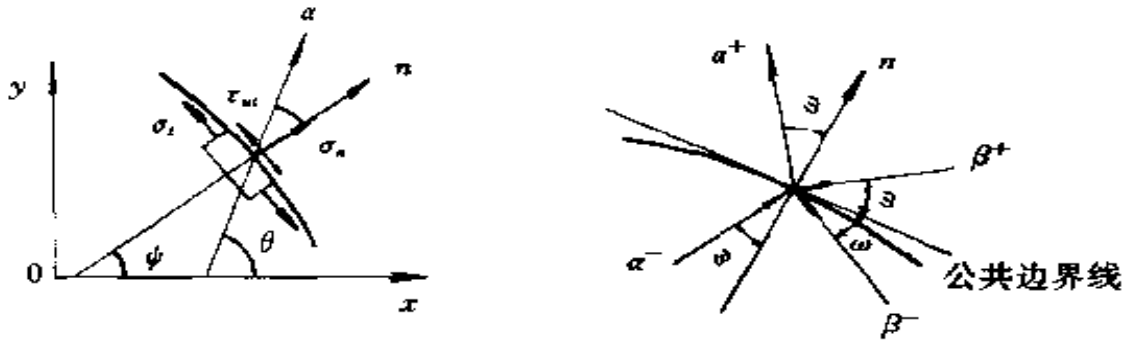


图 3　函数 σ、θ 的边界值

3. 关于解的性质

采用刚塑性假设后只能得到问题的上限解或完全解，得不到精确解，而要得到上限解或完全解，考察速度场必不可少。但有些教科书中在讲具体问题时只停留于求出应力滑移场，然后断言这样求得的相应载荷就是塑性极限载荷。严格地说这是不正确的。因为在应力滑移场中只考虑到平衡条件和塑性区中应力满足屈服条件，而无法说明刚性区中应力是否不违背屈服条件，也没有论及在这样应力场下是否有可能发生塑性流动。因此它既非下限解，也不是上限解，更不是完全解。只有当求得速度场后才能肯定它至少是上限解。如果还能证明刚性区中应力不违背屈服条件，则是完全解。此外，完全解并不一定是精确解，它们的差别不仅在于刚性区中应力不能确定（有些教科书中只是这样提法），还在于对一个具体问题完全解可以不是唯一的，而精确解（弹塑性解的极限）在

确定的加载历史下则是唯一的。典型的例子如平底冲头压入半无限体问题就存在着 Prandtl 解、Hill 解和 Hodge 解等多种解，它们都是完全解。亦即一种完全解是针对某种特定塑性区域分布而言的，这只是一种合理的假设，而对于一个复杂问题，有可能存在多种合理的假设方案，因此可能存在几个完全解。

对塑性力学教学中某些问题的讨论

金永杰

（上海交通大学工程力学系）

在塑性力学的教学中曾遇到不少问题，今择部分内容提出自己的看法，以便吸取大家的宝贵经验，改进工作。

一、对在增量理论中应用"单一曲线"的理解

一般认为"单一曲线"假定，对于金属材料在简单加载条件下是正确的，但增量理论本身则不受简单加载条件的限制。实际上，大量在复杂加载路径的计算中，我们既一方面运用增量理论，又同时采用"单一曲线"假定，这应该怎样去理解呢？在简单加载下"单一曲线"可写成如下形式：

$$\sigma_e = \phi(\varepsilon_e) \quad 或 \quad \sigma_e = H(\varepsilon_e^p) \qquad (1)a,b$$

式中 σ_e、ε_e、ε_e^p 分别表示等效应力、等效应变和塑性等效应变。在复杂加载下，考虑到总应变与加载路径有关，是每一增量步累加的结果，所以上式可改写成

$$\sigma_e = H\left[\int(\mathrm{d}\varepsilon^p)_e\right] \qquad (2)$$

这样处理实际上仍然承认在复杂加载下存在"单一曲线"关系，在计算总的等效塑性应变时作了改进。关于这一点，

Качанов 在他的著作[1]中($p.46$)认为单一曲线可作为一般的条件(包括不同的应变相位),但由于复杂加载的复杂性以及实验验证的局限性,因此只能认为这是一种近似的处理。

二、平面应变问题中,"平头冲模压入半无限体"的 Hill 解与 Prandtl 解中,哪个解更为合理的讨论

用滑移线场理论来分析平面应变问题时,采用的是刚性-理想塑性模型,因此在分析速度场时解不是唯一的,所以有 Hill 解和 Prandtl 解等不同解答。但由于实际物理问题的解答是确定的,所以在不少塑性力学著作中都分析了哪个解答较为合理的问题,一般都从下述两点分析:(1) 从小变形理论分析极限状态是属于初始流动问题;(2) 从平头冲模压入角点处发生应力集中,塑性变形先从角点处产生,均认为 Hill 解较为合理,如文献[1]($p.220$),[3]($p.275$),[4]($p.195$)所述。但文献[5]采用了弹性-理想塑性模型,用数值计算方法,计算了上述问题的整个变形过程,其计算结果表明:在边界上给定的不论是力的边界条件或速度边界条件,在冲模与半无限体之间接触是光滑的还是粗糙的均支持 Prandtl 解。有了文献[5]的计算结果,再来检查原来的分析,就可发现,根据角点存在应力集中从而得出塑性变形是从角点开始逐渐扩大这一认识是正确的,这一分析与文献[5]描述塑性区扩大的计算结果是相符合的。问题在于这一事实与 Hill 的速度场解并无必然联系。所以原来分析得出 Hill 解更合理的结论,其依据是不充分的,相反,文献[5]的计算结果却是有依据的,因而是合理的。

三、Drucker 公设，Ильюшин 公设，Martin 公设之间的联系

三个公设分别都是塑性力学中的基本公设，它们之间应该是有联系的。从 Martin 公设出发，这种联系看得比较清楚。Martin 公设的一种表达式[6]($p.95$(71)式)可写成

$$\int_{\varepsilon_{ij}^a}^{\varepsilon_{ij}^b}(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^a)\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\geqslant 0 \tag{3}$$

(3)式是沿着任意应力路径都成立的，譬如从 σ_{ij}^a 经任意应力路径至 σ_{ij}^b。式中 ε_{ij}^a，ε_{ij}^b 是与 σ_{ij}^a，σ_{ij}^b 相对应的应变。如设 $\sigma_{ij}^b=\sigma_{ij}^a$，即作应力循环，由(3)式可得：

$$\oint(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^a)\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\geqslant 0 \tag{4}$$

应力循环

(4)式便为 Drucker 公设的一个表达形式。

如果应力路径是应变循环，即 $\varepsilon_{ij}^b=\varepsilon_{ij}^a$

由(3)式可得

$$\oint(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^a)\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\geqslant 0 \tag{5}$$

应变循环

(5)式便为 Ильюшин 公设的一个表达形式。

四、关于简单加载的一些提法

简单加载通常定义为 $\sigma_{ij}(x,t)=\lambda(t)\sigma_{ij}(x)$，其中 x 是域内某点的坐标位置，λ 是比例参数，t 表示时间或准时间。符合上述关系的又称为比例应力。如应力路径是通过应力坐标原点并成比例应力变化就是简单加载路径。此外也有这样的提

法。当应变成比例变形时，即 $\varepsilon_{ij}(x,t) = \alpha(t)\varepsilon_{ij}^{*}(x)$ 时，也称之为简单加载。这种提法也为人们所接受，但仔细分析这两个提法是不等价的，因而是值得注意的。

上述简单加载定义，即 $\sigma_{ij}(x,t) = \lambda(t)\sigma_{ij}^{*}(x)$，是由伊留兴在证明简单加载定理时提出的，其中参数 λ 只与 t 有关。实际上在应用时常把简单加载的概念理解为：物体内各点的应力状态，当外载增加时，其应力分量成比例增长，但各点的比例参数 λ 可以不同。这样，λ 应是 x 和 t 的函数，即 $\sigma_{ij}(x,t) = \lambda(x,t)\sigma_{ij}^{*}(x)$。这样的定义似更合理，实际上是把伊留兴的定义范围扩大了。

五、名词、术语的规范化

名词、术语应逐步走向规范化，以免引起不必要的混淆。如术语“刚塑性”，其含义并不明确，按习惯上的理解，它是指刚性-理想塑性，但从文字上推敲一下，其中的“刚”是指忽略弹性变形，而“塑性”两字既可含有理想塑性，也可含有强化塑性之意。因此在正式叙述材料名称时建议以弹性-理想塑性、刚性-理想塑性、弹性-强化塑性、刚性-强化塑性等名称为好。又比如屈服条件可写成（今以等向强化为例说明）：

$$F(\sigma_{ij},\varepsilon_{ij}^{p}) = f(\sigma_{ij}) - H(\varepsilon_{ij}^{p}) = 0 \qquad (6)$$

其中函数 F 和函数 f 不加区分都称为屈服函数，其实 F 与 f 是有区别的，如在加载时 $\mathrm{d}F = 0$ 而 $\mathrm{d}f > 0$，两者是不同的。在文献[2]中的笔误（$p.165$(101)式）就与此有关。因而不妨建议称 f 为屈服函数，称 H 为强化函数，称 F 为屈服条件函数。又如等效应力 equivalent stress、等效应变等名称已为大家广泛应用，也比较合理，似较苏联教科书上引入的名称应力

强度、应变强度等为好。总之，名词、术语的规范化应逐步做起，并与国际上通用的相一致。

参 考 文 献

[1] L. M. Kachanov. Foundation of the Theory of Plasticity North-Holland Publication Company-Amsterdam • London, 1971

[2] 王仁，熊祝华，黄文彬著. 塑性力学基础. 科学出版社，1982

[3] 徐秉业，陈森灿. 塑性理论简明教程. 清华大学出版社，1981

[4] 余同希. 塑性力学. 高等教育出版社，1989

[5] T-M Tan, SLi *and* PC Chou. Finite Element Solution of Prandtl's Flat Punch Problem. Finite Elements in Analysis and Design, 1989(6): 173—186

[6] JB Martin. Plasticity-Fundamentals and General Results. MIT Press, 1975

在 PC-1500 机上实现塑性力学中的沙堆比拟法实验

严宗达

（天津大学）

沙堆比拟法是求任意截面柱形杆塑性极限扭矩的一种有效方法。对简单规则截面，沙堆体积可直接由几何计算得出，但对复杂或不规则截面则必须依赖于实验。本文中对凸多边形截面提供一种以 PC-1500 袖珍计算机实现沙堆比拟以代替实验的方法。对有凸曲线边界的截面，也可以近似地以折线代替曲线应用本文方法。

一、基本步骤

比拟按下列步骤实现：

（1）输入边数 N 和各顶点坐标，从而确定截面的形状。

（2）作各顶角分角线。这些分角线就是沙堆棱线在截面上的投影（因分角线上任一点至该角两边距离相等）。

（3）对多边形的每个边，求由该边两端所作分角线的交点。同时求出该边至交点的距离。

（4）比较各边至其相应交点的距离，确定其最近的一个（如同时有不止一个、例如 R 个、相等的最近距离，则任取其中一个）。

(5) 由距边最近的交点出发给等高线。该等高线将为 N-R 边形($R \geqslant 1$)，其每个边平行于原始多边形截面的一条边。

(6) 计算按上法绘出的等高线外部的沙堆体积。

(7) 以此等高线作为新的多边形周界，作分角线，重复前述步骤，直至所得新多边形边数小于 3。

(8) 完成以上步骤后工作即完成。在打印机上将给出整个沙堆的投影(包括截面边界，棱线，等高线和脊线)与沙堆体积大小的二倍值(相当于塑性极限扭矩)。

二、几何计算

(1) 两直线(其方程以点斜式给出)交点的确定

设 L_1 为一过给定点(x_1, y_1)而与 x 轴成 α_1 角的直线，L_2 为过(x_2, y_2)与 x 轴成 α_2 角的直线。且设 $\alpha_1 \neq \alpha_2$。则 L_1 与 L_2 交点坐标(x_0, y_0)为(当 α_1, α_2 均不等于$(2n+1)\pi/2$)

$$x_0 = (y_2 - y_1 + x_1 \mathrm{tg}\alpha_1 - x_2 \mathrm{tg}\alpha_2)/(\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2) \quad (1a)$$

$$y_0 = [y_2 \mathrm{tg}\alpha_1 - y_1 \mathrm{tg}\alpha_2 + (x_1 - x_2) \times \mathrm{tg}\alpha_1 \mathrm{tg}\alpha_2]/(\mathrm{tg}\alpha_1 - \mathrm{tg}\alpha_2) \quad (1b)$$

如 $\alpha_1 = (2n+1)\pi/2$，则

$$x_0 = x_1 \quad (2a)$$

$$y_0 = y_2 + (x_1 - x_2)\mathrm{tg}\alpha_2 \quad (2b)$$

如 $\alpha_2 = (2n+1)\pi/2$，则

$$x_0 = x_2 \quad (3a)$$

$$y_0 = y_1 - (x_2 - x_1)\mathrm{tg}\alpha_1 \quad (3b)$$

(2) 由给定直线至一点的距离

设 L_1 为通过给定点(x_1, y_1)且与 x 轴成 α 角的直线，P 为一给定点，其坐标为(x_0, y_0)。则由 L_1 至 P 的距离为

$$a = |(x_0 - x_1)\sin\alpha_1 + (y_1 - y_0)\cos\alpha_1| \qquad (4)$$

(3) 两平行等高线间沙堆体积的计算

设两平行等高线段的长度及二者之间的垂直距离分别为 l_1、l_2 和 b。设外侧等高线(其长为 l_2)的高度为 w，则内侧等高线的高度必为 $kb+w$。其中 k 为材料的剪切屈服极限(相应于沙的摩擦角)。

体积 V 可分为三部分计算(见图 1)：

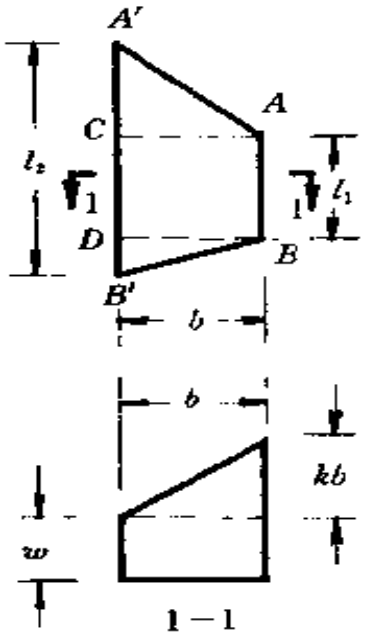


图 1

V_1 = 在外等高线水平以下部分的体积(为一个高为 w 的梯形截面的柱体) $= bw(l_1+l_2)/2$；

V_2 = 外等高线水平以上在 AC 和 BD 两截面之间部分的体积(为一三棱柱) $= kb^2l_1/2$；

V_3 = 外等高线水平以上在 AC 和 BD 之外部分的体积(两个四面体) $= kb^2(l_2-l_1)/6$。

因此有

$$V=V_1+V_2+V_3=kb^2(2l_1+l_2)/6+bw(l_1+l_2)/2 \qquad (5)$$

三、框图

框图如图 2 所示：

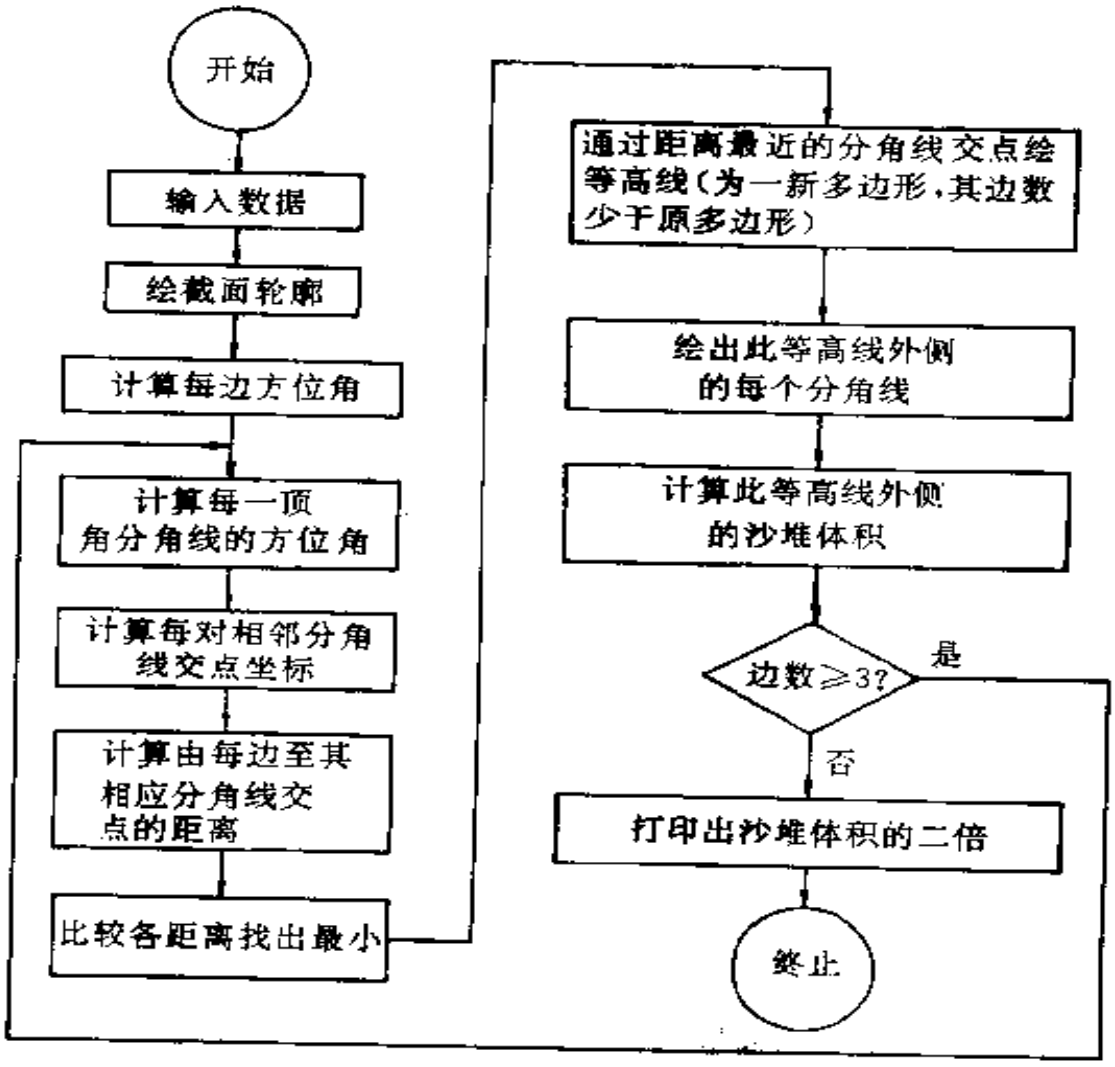


图 2

四、程序功能

作者编制出实现沙堆比拟的程序 SPA，它有以下功能：

（1）有较广的适用范围

（a）凸多边形截面，

（b）圆或椭圆截面，

（c）由圆或椭圆所截的弓形截面。

（2）图形的位置可在打印纸上自动调整。只要（$x_{max}-x_{min}$）的值不超过纸宽，图形可以保证不超出纸外。

（3）如（$x_{max}-x_{min}$）超过纸宽（对 CE-150 打印机，此值为 200），计算机停止工作并打出“DIFF. OF X OVER”。

（4）打印机上绘出四色图形：截面周界（黑），棱线（红），等高线（蓝），脊线（绿）。

（5）打印机上打出沙堆体积的 2 倍，乘以剪切屈服极限 k 即得塑性极限扭矩。

五、例题

例 1. 矩形截面，宽＝200，高＝100。输出如图 3 和“$2V$＝833333.3332”。

例 2. 由例 1 的矩形切去一角而成的五边形，所切去一角长宽皆为 50。输出如图 4 及“$2V$＝769352.7542”。

例 3. 六边形截面，由一边长为 200 的正三角形切去三个角形成，切去三个角分别为边长 20，40 和 60 的正三角形。输出如图 5 和“$2V$＝594666.6667”。

例 4. 半径为 100 的圆形截面（分为 20 边）。输出如图 6 和“$2V$＝2034719.882”。

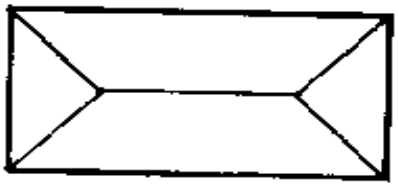


图 3

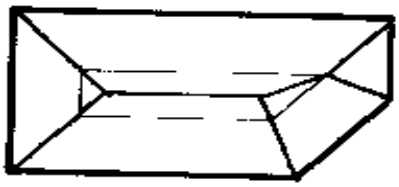


图 4

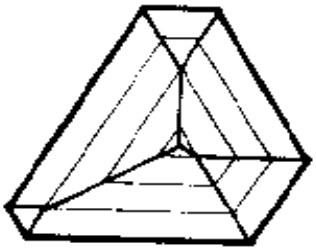


图 5

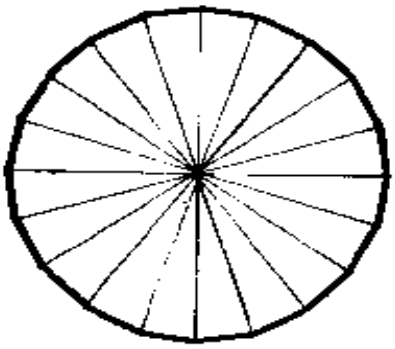


图 6

例 5. 半径为 100 的半圆截面。输出如图 7 和"$2V = 586611.186$"。



图 7

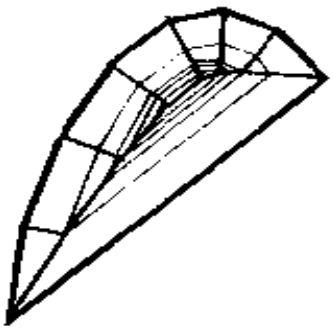


图 8

例 6. 椭圆弓形，半轴长分别为 $a = 100$(水平)和 $b = 200$

(垂直)，由斜弦所切割，该斜弦连结点($a\cos54°$，$b\sin54°$)和($-a$，0)。输出如图 8 和"$2V=432051.9489$"。

例 7. 边长为 250 的正三角形截面。输出为"DIFF OF X OVER"。说明横坐标差超过纸宽。必须将图形缩小某一比例再行运算。

六、结束语

文中介绍的 SPA 程序适用范围广，便于应用。由于 PC-1500 机十分轻便，便于携带且绘图清晰，十分适用于课堂表演(本文作者即曾多次进行过课堂演示)。

对有凹角的截面，程序 SPA 不适用。但可以在此基础上加以修改，困难不会很大。

参 考 文 献

[1] 严宗达，塑性力学，天津大学出版社，1988

[2] 数学手册，数学手册编写组，人民教育出版社，1979

[3] PC-1500 说明手册，夏普公司

在现有塑性力学教材中引进新概念探讨

杨桂通
（太原工业大学）

塑性力学作为固体力学的一个独立的分支学科已有半个多世纪的时间，其工程应用也有悠久的历史。塑性力学作为一门在工程力学专业中独立开设的课程已有多年、并有比较成熟的教材（如徐秉业著《塑性力学》），培养了众多可以用塑性理论处理工程设计问题的技术人员。

随着科学的迅速发展，我们的许多毕业生将不可避免地在工程技术岗位上遇到很多书本上没有的新问题，有的问题可能属于新概念，有的是新理论、新技术，若能在塑性力学课程内容的选取上作一些新的考虑，适应这种情况将是有意义的。我认为在不扩大多少学时的情况下可以引进下列一些重要概念：

1. 强化与软化

学生学了塑性力学对塑性应变强化会有深刻的了解，但对软化应变却没有这种概念。实际上在讲一维应力应变曲线时可以很容易地引出应变软化的概念，同时可以介绍有关文献。这对学生以后遇到某种具有应变软化特性的新材料时便不会束手无策。

2. Drucker 公设与 I'lyushen 公设

Drucker 公设是塑性力学的重要内容，是经典塑性力学的理论基础，每位读者都必须很清楚它的含义与实质。但是应该使学生了解 Drucker 公设只适用于"稳定性材料"，而适用更广泛的弹塑材料（包括不稳定材料）则有 I'lyushen 公设。也可用一维应力应变曲线加以说明，同时介绍有关文献，使广大学生有一个新概念，而有兴趣的同学可以继续扩大知识面。

3. 应变率效应概念

如所周知，理想弹性材料在应变率变化时其本构关系不发生变化。学生们学了弹性力学、振动力学等课程后这一概念是深刻的。但不清楚对于弹塑材料则不然。建议用一维应力应变曲线引进应变率效应的概念，给出不同应变率时不同的应变曲线，也可给出一个相对应力与应变率的关系曲线，这对学生处理塑性动力学问题时便不致犯用错本构关系的错误，对塑性材料的动态基本特性也有了最基本的认识。

4. 本构关系与极值原理

在其它课程中，学生们懂得了虚位移原理，且了解它与材料性质无关，在塑性力学中各种由虚位移引伸出来的极值原理，能量原理或变分原理都与所采用的本构关系有非常重要的区别，我们在课程中可能不能介绍各类原理，但这一重要概念，应当提醒注意，使之开扩视野，引起研究问题的兴趣。

5. 计算机计算技术的引入

学生在学习塑性力学课程之前一般都有了较好的计算机计算技术的基础。因而在计算例题或课外作业中应尽可能提倡给出计算程序。对于塑性力学问题的特殊问题，也可专门予以介绍，如非线性算法，计算机给出滑移线场等等。

以上这些问题，在塑性力学的研究中并不是什么新概念，新问题，且可属于老问题，只是一般塑性力学教材受到学时限制或篇幅限制无法放进去，建议在教学过程中可以删除一些次要内容，介绍一些有影响的重要概念、方法和问题。

第二部分　屈服条件与本构关系

塑性本构关系中的若干问题

熊祝华

（湖南大学工程力学系）

（一）

Drucker 公设在塑性本构关系中具有重要的地位。下面就这个内容提出几点看法。

1. Drucker 公设可陈述如下[1]：

若材料由某应力状态 σ_{ij}^0 开始加载，到达加载应力 σ_{ij} 后再增加 $d\sigma_{ij}$，引起塑性应变 $d\varepsilon_{ij}^p$，然后回复到 σ_{ij}^0。该公设指出，在整个循环过程中附加应力所作的塑性功恒为非负值，即

$$(\sigma_{ij}-\sigma_{ij}^0)d\varepsilon_{ij}^p \geqslant 0,\quad d\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p \geqslant 0 \tag{1}$$

在这里要说明两点：① 此处的循环是指应力闭（或准）循环，不是一般意义下的循环；② 在这个应力闭循环中，应变的变化是小量 $d\varepsilon_{ij}^p$。

2. 若记 dW^p 为上述应力闭循环中附加应力所作的塑性

功(净功)，则在等温条件下有[2]

$$dW^* = (\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij})d\varepsilon^p_{ij} + \frac{1}{2}d\sigma_{ij}d\varepsilon^p_{ij} \qquad (2)$$

式中 $d\sigma_{ij}$ 是加载过程的应力增量。Drucker 定义弹塑性材料为稳定的，如果对任意的 σ^0_{ij} 净功 dW^* 是正的，即式(2)右侧第一项不为负，第二项为正。这个条件只对强化材料才可能，因此有时甚至将 $dW^* > 0$ 作为强化材料的定义。对于弹性理想塑性材料，则将稳定定义放松为：如果对于任何的 σ^0_{ij}，dW^* 不为负，亦即式(2)右侧第一项不为负，第二项为零。可将 $dW^* \geqslant 0$ 称为 Drucker 公设。虽然，式(2)右侧第二项相对于第一项为高阶小量，但其符号对讨论材料的稳定性则是很重要的。因此第二项实际上是材料稳定性的表征。

3. [3]中指出："在连续介质力学中非负功条件是无可置疑的。在塑性力学的增量理论中，非负功条件导致 Drucker 公设，这个公设在本构关系的推导中具有根本的重要性"。非负功条件可表示为

$$\int_0^t \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}dt \geqslant 0 \qquad (3)$$

此处假定 $t = 0$ 时材料处于自然状态。在等温条件下，局部熵产生不等式为(可参阅[4])

$$\Lambda = -\rho\dot{\psi} + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \geqslant 0 \qquad (4)$$

这是热力学约束，ψ 为 Helmholtz 自由能。此处只考虑小变形情况，质量密度 ρ 可视作不变；Λ 为耗散能率；等号对应于可逆过程。式(4)的积分给出[3]

$$-\rho\psi + \int_0^t \sigma_{ij}(\tau)\frac{d\varepsilon_{ij}(\tau)}{d\tau}d\tau \geqslant 0 \qquad (5)$$

此处假定自然状态下 $\psi = 0$。或者写成

$$\int_0^t A(\tau)d\tau \geqslant 0 \tag{6}$$

式(6)是热力学的普遍规律，它表示耗散能不为负。如果要求 $\rho\psi \geqslant 0$，则为了满足式(5)，不作负功仅是必要的，不是充分的。充分条件是同时还要求耗散能不为负，这样 $\rho\psi$ 的正负就无关紧要了。由此可见，作为 Drucker 公设的基础的非负功条件并不等同于热力学定律的要求。因此 Drucker 公设仅仅是一种稳定非弹性材料的定义，不是一个自然规律(见[5])。

4. Drucker 公设既然不是一个自然规律，就不能认为所有实际材料的力学行为都必须服从 Drucker 公设以及由其导出的有关结论，例如屈服曲面的外凸性，塑性流动的正交性法则等。因而 Drucker 公设具有一定的适用范围，例如它不适用于下列情况或与之有偏离[2]：

(1) 变形过程的塑性软化阶段；

(2) 材料的屈服条件与平均应力有关；

(3) 材料塑性可压缩；

(4) 非等温过程；

(5) 弹性和塑性耦合；

(6) 屈服面不外凸。

以上论述的来源及与 Drucker 公设不符的其他情况参见[2]的 § 13.5 及其所列参考文献。

(二)

在经典塑性理论中屈服面的概念是一个基本的概念，有人甚至将"存在一个屈服面"作为材料塑性的定义内容之

。因此无容置疑地屈服面理论是学习塑性本构关系的重点内容之一。但是屈服面理论也存在一些实际上和理论上的困难和缺陷[2]。

1. 如何通过实验确定屈服面是一个实际存在的难题。一般总是从屈服面内开始加载，其弹性过程的终点也是屈服面上的点。然而如何实际确定这些终点呢？如果到某应力点塑性应变无变化，则该应力点可能在屈服面之内；如果已经产生了新的塑性应变，则又已在该屈服面之外。因此在实际中总是先要采取一个塑性应变变化的约定值作为判断弹性过程终点的依据。例如可采用

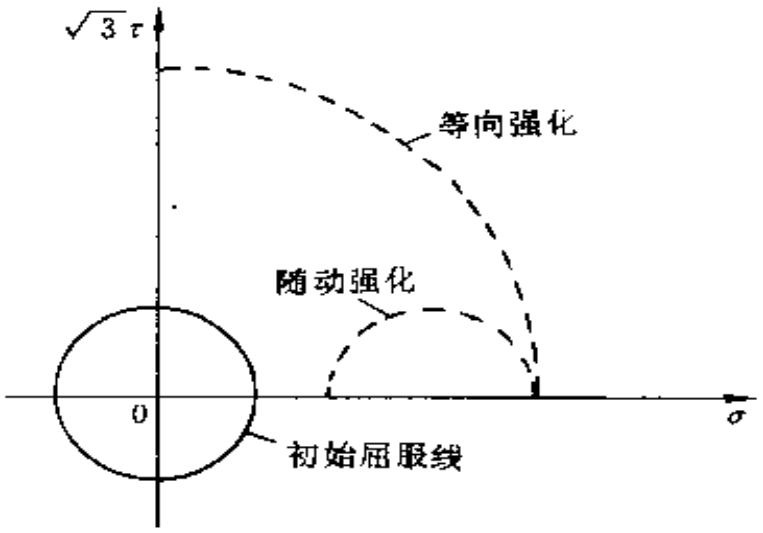
$$\Delta\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\Delta\varepsilon_x^p - \Delta\varepsilon_y^p)^2 + (\Delta\varepsilon_y^p - \Delta\varepsilon_z^p)^2 + (\Delta\varepsilon_z^p - \Delta\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\Delta\gamma_{yz}^{p2} + \Delta\gamma_{zx}^{p2} + \Delta\gamma_{xy}^{p2})\right]^{1/2} \tag{7}$$

作为判据量。于是实验证明屈服面的大小和形状明显依赖于 $\Delta\varepsilon_i^p$ 的约定值。例如镍薄壁圆筒受到拉伸和扭转作用，其初始屈服条件为

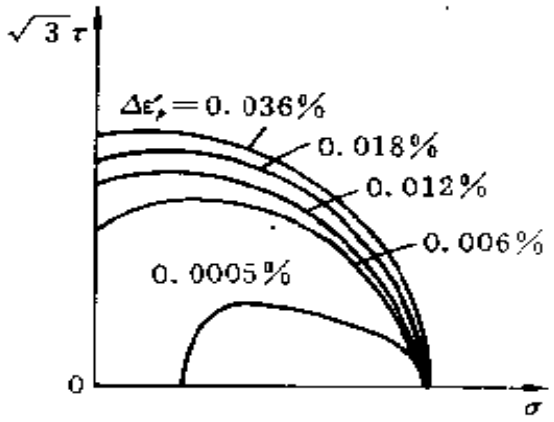
$$\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \tag{8}$$

在 $(\sigma, \sqrt{3}\tau)$ 平面内这是一个圆(图 1,a)。将圆筒先拉到塑性变形($\varepsilon_i^p = 1.1\%$)；然后实验测定其后继屈服线。随着 $\Delta\varepsilon_i^p$ 的约定值不同，屈服线如图 2(b)所示；其趋势是当 $\Delta\varepsilon_i^p$ 约定值小时，更接近于随动强化，而 $\Delta\varepsilon_i^p$ 约定值大时，则趋近于等向强化。

2. 由图 1 可见，$\Delta\varepsilon_i^p$ 的约定值愈小，屈服面愈小，包氏效应愈大。沿着这方向推想下去，最终可到达 Клюшников 的论



(a)



(b)

图 1

点，即除了简单卸载以外，所有过程都是加载过程，亦即后继屈服面退化成一线段。显然经典屈服面的概念和 Ключников 的论点形成两个极端。在许多工程应用中，更弱定义弹性过程（$\Delta\varepsilon_p'$ 有一个约定值）的屈服面是合理的；但在一些情况下，如

循环过程、稳定性等，这种处理方法将导致实质性的误差，必须采用更符合实际的处理方法。例如双(或多层)屈服面的概念是其中之一。这个概念来自一个为人们所熟知但却常被忽略的事实，即卸载弹性过程的长度大于再加载中弹性过程的

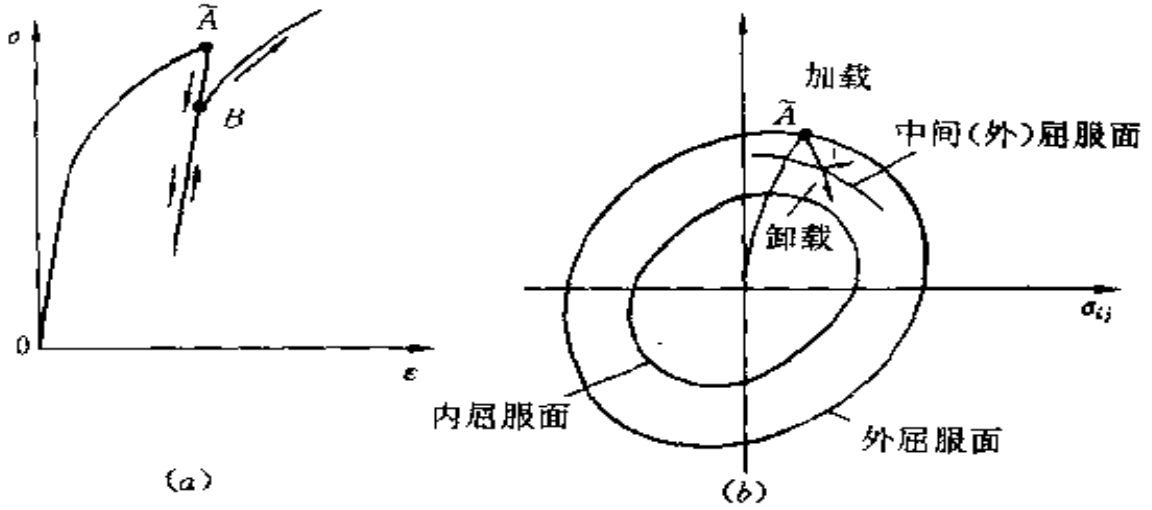


图 2

长度(图 2,a)，这一事实与经典屈服面的概念相矛盾，后者认为两个过程的长度相等，即屈服面应通过 $\tilde{A}$。据此引入两个曲面(图 2,b)，一个过 $\tilde{A}$，称为外屈服面；另一个过 B，称为内屈服面。当应力点从 $\tilde{A}$ 卸载时，外屈服面缩小(中间屈服面)，应力点进入内屈服面内时，外屈服面与内屈服面重合。在内屈服面内所有过程无例外地都是弹性的；在两个屈服面之间，如果过程的方向是内移，也是弹性的，相应地中间(外)屈服面缩小；如果过程向外，则导致加载。因此在加载过程两个曲面都变化，一般是扩大；在卸载过程内屈服面不变，外屈服面缩小或者与内屈服面重合。

参 考 文 献

[1] 力学词典．中国大百科全书出版社，1990.

[2] M. Zyczkowski. Combined Loadings in the Theory of Plasticity. PWN-Polish Scientific Publishers, 1981

[3] RM 克里斯坦森著. 郝松林、老亮译．粘弹性力学引论．科学出版社，1990

[4] 熊祝华、杨德品. 连续体力学概论．湖南大学出版社，1986

[5] DC Drucker. A definition of stable inelastic material. JAM, 1959. 26，1，p101—106.

[6] 王仁等主编．塑性力学进展．中国铁道出版社，1988. p. 26

关于 Tresca 屈服准则的不变量表示

王文标　　黄筑平

（中科院研究生院物理学部）　（北京大学力学系）

一、引言

塑性力学中广泛使用的 Tresca 屈服准则可以表示为

$$\max_{n}(\tau_n - K) = 0 \tag{1}$$

式中 $K = \sigma_s/2$，σ_s 为位伸屈服应力，$\boldsymbol{n}$ 为面元的单位法线，τ_n 为该面元上的剪切应力。以 $\boldsymbol{T}$ 为 Cauchy 应力，$\boldsymbol{S}$ 为应力偏量，则有

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{T} + P\boldsymbol{I},\ P = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}\boldsymbol{T} \tag{2}$$

P 为静水压力。τ_n 和 $\boldsymbol{T}$ 或 $\boldsymbol{S}$ 有如下关系：

$$\begin{aligned}\tau_n &= [\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}^2\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}\boldsymbol{n})^2]^{1/2}\\ &= [\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{S}\boldsymbol{n})^2]^{1/2}\end{aligned} \tag{3}$$

上式表明 τ_n 和静水压力 P 无关。

根据最大剪应力和主应力的关系，(1)式又可以等价地表述为

$$\max(|T_1 - T_2|, |T_2 - T_3|, |T_3 - T_1|) = 2K \tag{4}$$

式中 T_i 为主应力。但是 Prager 和 Hodge[1]给出的

$$[(S_2 - S_1)^2 - 4K^2][(S_3 - S_2)^2 - 4K^2]$$

$$\times [(S_1 - S_3)^2 - 4K^2] = 0 \tag{5}$$

以及由此导出的 Tresca 屈服准则的不变量表示

$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36\alpha^2 J_2^2 + 96K^4 J_2 - 64K^6 = 0 \tag{6}$$

和(1)式并不等价。式中 S_i 为偏应力 $\boldsymbol{S}$ 的主值，J_2 和 J_3 分别为 S 的第 2 和第 3 不变量，

$$J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}S^2 = \frac{1}{2}S_iS_i$$

$$J_3 = \det S = S_1S_2S_3$$

严宗达[2]指出(5)或(6)式仅是各主应力大小顺序未知时表示屈服的必要条件，但是没有进行深入的分析。

这里我们由(1)式出发，通过求解这一极值问题，给出 Tresca 屈服准则的不变量表示，包括必要条件和充分条件。所用方法是初等的，推导过程简洁严谨。

二、Tresca 屈服准则的不变量表示

(1) 式是关于单位向量 $\boldsymbol{n}$ 的极值问题。给 $\boldsymbol{n}$ 以增量 $\boldsymbol{\delta}_n$，$\boldsymbol{\delta}_n$ 要满足下面的约束条件，

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\delta}_n = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_n \cdot \boldsymbol{\delta}_n$$

为了解除对 $\boldsymbol{\delta}_n$ 的约束，引用 Lagrange 乘子 λ，考虑与(1)相应的无约束极值问题，

$$\max_{\boldsymbol{n}}[\tau_n^2 - K^2 - \lambda(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n} - 1)] = 0 \tag{7}$$

这里已经考虑了剪应力改变符号对屈服与否不发生影响这一因素，对上式变分也较容易。

计算(7)式的一阶变分，得到(7)取极值的必要条件，

$$\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n} - 2S_n\boldsymbol{S}\boldsymbol{n} - \lambda\boldsymbol{n} = 0 \tag{8}$$

式中 $S_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$，为面元上的(偏)正应力。计算(7)式的二阶变分，

$$\delta\boldsymbol{n} \cdot [\boldsymbol{S}^2 - 2S_n\boldsymbol{S} - \lambda\boldsymbol{I}]\delta\boldsymbol{n} - 4(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}\delta\boldsymbol{n})^2 \leqslant 0 \qquad (9)$$

(8)和(9)式是(7)式，从而也是(1)式取极值的充分必要条件。不等式(9)虽然复杂些，但是却是不容忽略的。

(8)式中的 λ 可由该式点乘 $\boldsymbol{n}$ 得到，

$$\lambda = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n} - 2S_n^2$$

由于此时 $\boldsymbol{n}$ 已使得 τ_n 取极值，$\tau_n = K$ 成立，所以又有

$$\lambda = K^2 - S_n^2 \qquad (10)$$

现在考虑(8)式的求解。(8)式是当 $\boldsymbol{S}$ 给定后确定 $\boldsymbol{n}$ 的向量方程。我们避开直接求 $\boldsymbol{n}$，转而确定 τ_n 和 S_n，这样可以得到主应力空间上的屈服面表示。(8)式表示 $\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 共面。由于最大剪应力不可能在 $\boldsymbol{S}$ 的主方向上达到，所以 $\boldsymbol{n}$ 不是 $\boldsymbol{S}$ 的主方向，上述三个向量不共线。对(8)式左乘以 $\boldsymbol{S}$ 并使用 $\boldsymbol{S}$ 的 Cayley-Hamilton 多项式

$$\boldsymbol{S}^3 - J_2\boldsymbol{S} - J_3\boldsymbol{I} = 0 \qquad (11)$$

得到

$$-2S_n\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n} + (J_2 - \lambda)\boldsymbol{S}\boldsymbol{n} + J_3\boldsymbol{n} = 0 \qquad (12)$$

上式也表明 $\boldsymbol{S}^2\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 共面这一事实。所以(8)和(12)式相应项系数必须成比例，即有

$$2S_n = (J_2 - \lambda)/(2S_n) = J_3/\lambda$$

整理后并使用(10)式，得到

$$3S_n^2 + k^2 - J_2 = 0, \qquad (13)$$

$$2S_n(S_n^2 - k^2) + J_3 = 0。 \qquad (14)$$

(13)代入(14)，消去 S_n^2 项，得到

$$S_n = 3/2J_3[4K^2 - J_2]^{-1} \tag{15}$$

(15)再代回(13),得到

$$4(J_2 - K^2)(J_2 - 4K^2)^2 - 27J_3^2 = 0 \tag{16}$$

上式展开即得到(6)式。由于在以上推导过程中仅仅使用了(8)式,所以说(6)仅是 Tresca 屈服准则的必要条件。

引用记号

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{S}^2 - 2S_n\boldsymbol{S} - \lambda\boldsymbol{I}$$

利用(15)式,则 $\boldsymbol{H}$ 可以写成不显含 $\boldsymbol{n}$ 的形式,

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{S}^2 - \frac{3J_3}{4K^2 - J_2}\boldsymbol{S} - \lambda\boldsymbol{I}$$

由(13)式可知 $J_2 \geqslant K^2$,这是 J_2 的下界。下面我们试图由(9)式确定 J_2 的上界。

首先,我们建立直角坐标系,其单位正交基底为 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$,$\boldsymbol{m}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{Sn}$ 所张的平面上。由于 $\boldsymbol{\delta n}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 垂直(不计二阶小量),有

$$\boldsymbol{\delta n} = a\boldsymbol{m} + b\boldsymbol{n}$$

a 和 b 为二个独立的一阶小量。上式代入(9)式,得到

$$b^2\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{Hl} - 4a^2(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{Sm})^2 \leqslant 0$$

上式成立的充分必要条件是

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{Hl} = \mathrm{tr}[\boldsymbol{Hl}\otimes\boldsymbol{l}] \leqslant 0 \tag{9}'$$

由(8)式,可以直接得到

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{Hn} = 0, \quad \boldsymbol{Sn}\cdot(\boldsymbol{Hn}) = 0, \quad \boldsymbol{Sn}\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{Sn}) = 0$$

上面结果又可以推出

$$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{Hm} = 0$$

由于 $\boldsymbol{l}$、$\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 为单位正交基底,有

$$\boldsymbol{l}\otimes\boldsymbol{l} + \boldsymbol{m}\otimes\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} = \boldsymbol{I}$$

因此，由(9)'得到

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{H}\boldsymbol{l} \leqslant 0$$

直接计算，得到(9)式成立的充分必要条件为

$$J_2 \leqslant 4K^2/3 = \sigma_3/3 \tag{17}$$

等号在单向拉伸或压缩时成立。(17)给出了 J_2 的上确界。

由以上推导，有如下结论：Tresca 屈服准则的不变表示是(16)和不等式(17)。

三、Tresca 屈服面的直角坐标表示

在这一节里，我们进一步讨论(6)式，指出在 π 平面上(6)式表示三对平行直线，而这三对平行直线所围成的大边形才是 Tresca 屈服面。为此，我们在主应力空间中的 π 平面上建立极坐标(r,θ)和直角坐标(x,y)。x 轴为某一主应力方向在 π 面上的投影，该轴也是计算 θ 的起点。应力 $\boldsymbol{T}$ 在主应力标架下的表示为(T_1,T_2,T_3)，T_i 为 $\boldsymbol{T}$ 的主应力。$\boldsymbol{T}$ 到 π 平面的距离为 z，

$$z = \mathrm{tr}\boldsymbol{T}/\sqrt{3}$$

z 轴方向在主应力标架下表示为$(1,1,1)/\sqrt{3}$。T 在 π 面的投影为 S，S 到原点距离为 r，与 x 轴夹角为 θ。

$$r = \sqrt{2J_2}, \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}J_2^{-3/2}J_3$$

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

(r,θ,z)和(x,y,z)分别为 $\boldsymbol{T}$ 在主应力空间的柱坐标表示和直角坐标表示。

(6) 式的柱坐标表示为

$$(r^3\sin 3\theta)^2 - 2k^2(3r^3 - 8k^2)^2 = 0 \tag{18}$$

上式仍难以给出直观的几何图象。引用直角坐标(x,y,z)改写上式并进行因式分解，得到(6)式的如下表示

$$(y^2-2k^2)[3x^2-(y-2\sqrt{2}x)^2]$$
$$\times[3x^2-(y+2\sqrt{2}K)^2]=0$$

不难看出，这是π平面上的三对平行直线，而屈服面是这三对平行直线围成的六边形。为确定该六边形，在(6)式之外必须补充不等式(17)。

四、结论

本文从求解极值问题入手，得到了 Tresca 屈服准则的不变表示，这一表示在通常的不变量表示之外附加有对J_2取值的限制条件。若没有这一限制条件，通常采用的不变量表示为π平面上的三对平行直线，因而是不完善的。本文所用方法可用于确定其它屈服准则的不变量表示。

本文作者感谢从国家自然科学基金所得到的资助。

参 考 文 献

[1] W. Prager and P. G. Hodge. Theory of Perfectly Plastic Solids. John Wiley, 1951 (中译本：理想塑性固体理论．陈森译．科学出版社，1964)

[2] 严宗达．塑性力学．天津大学出版社，1988

塑性力学中某些概念的论述

黄文彬

（北京农业工程大学）

一、弹塑性泊松比的概念

在简单拉伸时，当材料处在弹性阶段，其横向应变 ε_2 绝对值与轴向应变 ε_1 的比值就是泊松比 μ，它是材料常数。但在进入弹塑性变形时，这个比值将发生变化，我们用记号 μ_p 表示，即

$$\mu_p = \frac{|\varepsilon_2|}{\varepsilon_1} = \mu_p(\varepsilon_1) \tag{1}$$

有时称其为弹塑性泊松比，弹性时 $\mu_p = \mu$，ε_1 大时 $\mu_p \to 0.5$。在塑性理论中我们会遇到 μ_p 值，例如在全量理论常需要计算应变强度 $\bar{\varepsilon}$，即

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{9}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]} \tag{2}$$

在简单拉伸时，$\varepsilon_1 = \varepsilon$，$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\mu_p\varepsilon$，，则有

$$\bar{\varepsilon} = 2(1 + \mu_p)\varepsilon/3 \tag{3}$$

由于 μ_p 随 ε 而变，使用起来就不方便，故一般都假定 $\mu_p = 0.5$。为了避免从弹性阶段到塑性阶段不出现跳跃，必须令弹性时的 $\nu = 0.5$。在塑性变形大时，这个假定是合理的。而在塑

性变形刚开始发展时，这个假定会引进一些误差。文[1]介绍了用真实 μ 值的一些例子。下面介绍如何依据单向拉伸时的 $\sigma=f(\varepsilon_1)$ 规律导出 $\mu_p(\varepsilon_1)$ 规律。由体积变形符合弹性规律得

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=(1-2\mu)\sigma/E$$
$$-(1-2\mu)f(\varepsilon_1)/E \tag{4}$$

再按 μ_p 定义有

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=(1-2\mu_p)\varepsilon \tag{5}$$

由以上两式可得

$$\mu_p(\varepsilon_1)=0.5+(\mu-0.5)f(\varepsilon_1)/E\varepsilon_1 \tag{6}$$

如果 $f(\varepsilon_1)$ 有限，则必有

$$\lim_{\varepsilon_1\to\infty}\mu_p(\varepsilon_1)=0.5 \tag{7}$$

但如采用某种简化模型例如线性强化模型

$$f(\varepsilon_1)=\sigma_s+E'(\varepsilon_1-\varepsilon_s)\quad \text{当 } \varepsilon_1\geqslant\varepsilon_s \tag{8}$$

使 $f(\varepsilon_1)$ 随 ε_1 无限增大，则有

$$\lim_{\varepsilon_1\to\infty}\mu_p(\varepsilon_1)=(\mu-0.5)E'/E+0.5 \tag{9}$$

而不趋向 0.5。

二、如何用应力偏量不变量表示屈服条件

当静水应力不影响塑性状态时，屈服条件可用应力偏量不变量 J'_2、J'_3 表示为 $f(J'_2,J'_3)\leqslant 0$ 形式。对 Mises 屈服条件比较简单 $f=J'_2-\frac{1}{3}\sigma_s^2\leqslant 0$，但对 Tresca 屈服条件则不容易，它满足

$$\begin{aligned} f_1&=(\sigma_2-\sigma_3)^2-\sigma_s^2\leqslant 0\\ f_2&=(\sigma_1-\sigma_3)^2-\sigma_s^2\leqslant 0\\ f_3&=(\sigma_1-\sigma_2)^2-\sigma_s^2\leqslant 0 \end{aligned} \tag{10}$$

或

$$f = \max(f_1, f_2, f_3) \leqslant 0 \tag{11}$$

但上式不好表示成 $f(J'_2, J'_3) \leqslant 0$ 形式，以往教材都处理成

$$\begin{aligned} f &= f_1 f_2 f_3 \\ &= 4(J'_2)^3 - 27(J'_3)^2 - 9\sigma_s^2(J'_2)^2 \\ &\quad + 6\sigma_s^4 J'_2 - \sigma_s^6 \leqslant 0 \end{aligned} \tag{12}$$

表面上看 $f(J'_2, J'_3) \leqslant 0$ 形式已找到了，但(11)和(12)并不等价。例如设应力点满足 $f_1 > 0, f_2 > 0, f_3 < 0$，代入(11)式得 $f > 0$ 违反屈服条件，而代入(12)式得 $f < 0$ 不违反屈服条件，故知(12)式是不正确的。在文[2]中证明了可用 J'_2、J'_3 的反三角函数形式来表示 Tresca 屈服条件，即

$$\left.\begin{aligned} f(J'_2, J'_3) &= \frac{2\sqrt{J'_2}}{\sigma_s}\cos\theta - 1 \leqslant 0 \\ \theta &= \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{3}J'_3}{2(J'_2)^{1.5}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

三、使用不同的屈服条件如何表示等向强化规律

设在简单拉伸时屈服应力 σ 随塑性应变 ε^p 变化时的强化规律为

$$\sigma = \sigma_s + H(\varepsilon^p), H(0) = 0 \tag{14}$$

对 Mises 等向强化可直接将上式推广为

$$\bar{\sigma} = \sigma_s + H\left(\int \overline{\mathrm{d}\varepsilon^p}\right) \tag{15}$$

式中

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}, \overline{\mathrm{d}\varepsilon^p} = \sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij}\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij}} \tag{16}$$

S_{ij}是应力偏量，$d\varepsilon^p_{ij}$是塑性应变增量

当使用别的屈服条件时，$\bar{\sigma}$，$\overline{d\varepsilon^p}$都要用别的量替代。我们先讨论$\bar{\sigma}$的替代问题，故可只讨论$H=0$时的理想塑性情形。

对 Tresca 屈服条件，如规定$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$则为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \tag{17}$$

对最大偏应力屈服条件，有

$$\max \frac{3}{2}|s_i| = \sigma_s \quad (i = 1,2,3) \tag{18}$$

如规定$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$上式还可写成

$$f = \begin{cases} \dfrac{3}{2}S_1 = \sigma_1 - \dfrac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_s & \text{当 } S_2 \leqslant 0 \\ -\dfrac{3}{2}S_3 = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_s & \text{当 } S_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{19}$$

最大偏应力屈服条件与双剪应力屈服条件是等价的，因为(19)式还可表示成两个剪应力之和的形式，即

$$f = \begin{cases} \tau_{13} + \tau_{12} = \sigma_1 - \dfrac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_s & \text{当 } \tau_{12} \geqslant \tau_{23} \\ \tau_{13} + \tau_{23} = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_s & \text{当 } \tau_{12} \leqslant \tau_{23} \end{cases} \tag{20}$$

式中

$$\tau_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2,\ \tau_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2,\ \tau_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \tag{21}$$

下面我们分析$\overline{d\varepsilon^p}$的替代问题，我们从极限载荷的上限定理得知，塑性功增量

$$D = \sigma_{ij} d\varepsilon^p_{ij} \tag{22}$$

在 Mises 屈服条件时有

$$D = \bar{\sigma}\,\overline{d\varepsilon^p} = \sigma_s\,\overline{d\varepsilon^p} \tag{23}$$

对于别的屈服条件只要设法使 $\bar{\sigma}$ 与 $\overline{d\varepsilon^p}$ 的替代项相乘为 D 就行了。

对 Tresca 屈服条件将有

$$D = (\sigma_{max} - \sigma_{min})|d\varepsilon_i^p|_{max} \quad i = 1,2,3 \tag{24}$$

对最大偏应力屈服条件，文[3]导出关系

$$D = \left(\frac{3}{2}|S_i|_{max}\right)\frac{2}{3}(d\varepsilon^p_{max} - d\varepsilon^p_{min}) \quad i = 1,2,3 \tag{25}$$

为了便于理解(25)式，我们不妨考察一种情况，即设(19)的第一式成立，这时由流动法则将有

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = 1 : -1/2 : -1/2 \tag{26}$$

$$d\varepsilon^p_{max} = d\varepsilon_1^p \quad d\varepsilon^p_{min} = -1/2 d\varepsilon_1^p$$

$$\frac{2}{3}(d\varepsilon^p_{max} - d\varepsilon^p_{min}) = d\varepsilon_1^p$$

$$D = \sigma_1 d\varepsilon_1^p + \sigma_2 d\varepsilon_2^p + \sigma_3 d\varepsilon_3^p$$

$$= \left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_3\right)d\varepsilon_1^p = \frac{3}{2}S_1 d\varepsilon_1^p$$

$$= \left(\frac{3}{2}|S_i|_{max}\right)\left(\frac{2}{3}(d\varepsilon^p_{max} - d\varepsilon^p_{min})\right)$$

这样我们对 Tresca 与最大偏应力得出的等向强化规律是

Tresca：

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_s + H\left(\int |d\varepsilon_i^p|_{max}\right) \quad i = 1,2,3 \tag{27}$$

最大偏应力：

$$\frac{3}{2}|S_i|_{max} = \sigma_s + H\left(\int \frac{2}{3}(d\varepsilon^p_{max} - d\varepsilon^p_{min})\right) \quad i = 1,2,3 \tag{28}$$

以下我们进一步以薄壁管受拉扭为例，以 $\sigma_z = \sigma, \tau_{\theta z} = \tau$，

$d\varepsilon_x^p = d\varepsilon^p, d\gamma_{xy}^p = d\gamma^p$ 各量来表示不同屈服条件下的等向强化规律。

Mises：

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2},$$

$$\overline{d\varepsilon^p} = \sqrt{(d\varepsilon^p)^2 + \frac{1}{3}(d\gamma^p)^2} \tag{29}$$

Tresca：

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}/2 > 0$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}/2 < 0$$

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \tag{30}$$

$$d\varepsilon_1^p = \frac{d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p}{2} + \sqrt{(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\gamma^p)^2}\Big/2$$

$$d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_y^p$$

$$d\varepsilon_3^p = \frac{d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p}{2} - \sqrt{(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p)^2 + (d\gamma^p)^2}\Big/2$$

由流动法则

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_y^p : d\varepsilon_3^p = 1 : 0 : -1$$

可得

$$d\varepsilon_x^p = d\varepsilon^p, d\varepsilon_y^p = 0, d\varepsilon_y^p = -d\varepsilon^p$$

$$d\varepsilon_1^p = \sqrt{(d\varepsilon^p)^2 + \frac{1}{4}(d\gamma^p)^2}, \quad d\varepsilon_3^p = -d\varepsilon_1^p$$

$$d\varepsilon_i^p|_{max} = d\varepsilon_1^p = \sqrt{(d\varepsilon^p)^2 + \frac{1}{4}(d\gamma^p)^2} \tag{31}$$

最大偏应力：

$$S_1 = \frac{\sigma}{6} + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}/2$$

$$S_2 = -\frac{\sigma}{3} < 0$$

$$S_3 = \frac{\sigma}{6} - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}/2$$

由于 $S_2 < 0$，用(19)式中的第一式

$$\frac{3}{2}|S_i|_{\max} = \frac{3}{2}S_1 = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$= \frac{\sigma}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \qquad (32)$$

这时的流动法则给出

$$d\varepsilon_1^p : d\varepsilon_2^p : d\varepsilon_3^p = 1 : -\frac{1}{2} : -\frac{1}{2}$$

注意到

$$d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p = \sqrt{(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_\beta^p)^2 + (d\gamma^p)^2} \qquad (33)$$

$$d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p = 1.5d\varepsilon_1^p = -3d\varepsilon_2^p = 3(d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_\beta^p) \qquad (34)$$

比较以上两式可得方程

$$8(d\varepsilon_\beta^p)^2 + 20(d\varepsilon_\beta^p)(d\varepsilon_x^p) + 8(d\varepsilon_x^p)^2 - (d\gamma^p)^2 = 0 \qquad (35)$$

解得

$$d\varepsilon_\beta^p = -4d\varepsilon^p/5 + \sqrt{9(d\varepsilon^p)^2/4 + (d\gamma^p)^2/2}/2 \qquad (36)$$

$$d\varepsilon_1^p = -2d\varepsilon_2^p = 2(d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_\beta^p)$$

$$= -d\varepsilon^p/2 + \sqrt{9(d\varepsilon^p)^2/4 + (d\gamma^p)^2/2} \qquad (37)$$

$$\frac{2}{3}(d\varepsilon_{\max}^p - d\varepsilon_{\min}^p) = \frac{2}{3}(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_3^p) = d\varepsilon_1^p$$

最后将以上结果总结如下：

Mises：

$$\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=\sigma_s+H\left\{\int\sqrt{(\mathrm{d}\varepsilon^p)^2+\frac{1}{3}(\mathrm{d}\gamma^p)^2}\right\} \tag{38}$$

Tresca：

$$\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\sigma_s+H\left\{\int\sqrt{(\mathrm{d}\varepsilon^p)^2+\frac{1}{4}(\mathrm{d}\gamma^p)^2}\right\} \tag{39}$$

最大偏应力：

$$\frac{\sigma}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

$$=\sigma_s+H\left\{\int\left[-\frac{\mathrm{d}\varepsilon^p}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}(\mathrm{d}\varepsilon^p)^2+\frac{1}{2}(\mathrm{d}\gamma^p)^2}\right]\right\} \tag{40}$$

当 $\tau=0,\mathrm{d}\gamma^p=0$ 时以上三式将都退化到(14)式

四、简单加载概念

简单加载是指物体内任一点的应力偏量分量之间的比值在加载过程中不变，但对不同的点，可以有不同的增长方式，因此其一般表达式可表示为：

$$S_{ij}(t,x,y,z)=f(t,x,y,z)S_{ij}^0(x,y,z) \tag{41}$$

在Ильюшин的简单加载定理证明中，他要求各点的增长方式一样，即

$$S_{ij}(t,x,y,z)=f(t)S_{ij}^0(x,y,z) \tag{42}$$

这相当于知道初始的 $S_{ij}^0(x,y,z)$ 后只要将其放大 $f(t)$ 倍就可以了。但如果我们实际求解时从弹性解出发，则进入弹塑性状态后不可能靠将弹性解放大 $f(t)$ 倍取得。因此简单加载应理解为满足(41)式而不是(42)式，但如果采用的是幂次强化则不存在弹性解，则(42)式也有可能成立，在Ильюшин的证明

中(42)式只是充分条件而不是必要条件，故不满足(42)式也可以实现简单加载。

参 考 文 献

[1] 曾国平，黄文彬. 求解弹塑性问题时考虑材料可压缩性的影响. 固体力学学报，1988，9，4

[2] 黄文彬. 用应力偏量不变量表示屈服准则. 力学与实践，1990，12，4.

[3] 黄文彬，曾国平. 应用双剪应力屈服准则求解某些塑性力学问题. 力学学报，1989，21，2

加权双剪屈服准则和屈服准则的统一

俞茂铉　何丽南　刘春阳

（西安交通大学建筑与结构工程系）

一、前言

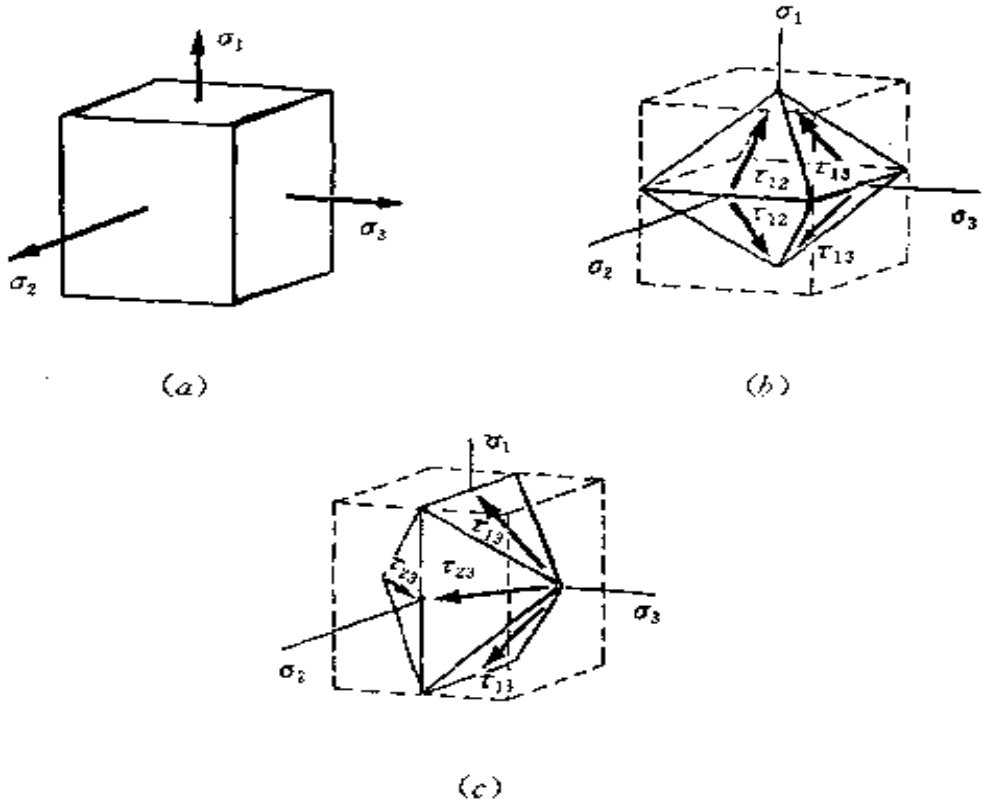
材料在复杂应力状态下的屈服准则是材料本构关系研究的最基础的内容，并在固体力学、结构强度和结构弹塑性分析中得到广泛的应用。现有的三个屈服准则为 Tresca 屈服准则（1864 年）、Mises 屈服准则（1913 年）和双剪应力屈服准则（1961 年）[1]。这三个屈服准则虽然都很简单，但它们之间的相隔时间都长达 50 年左右。

俞茂铉于 1961 年提出一个十二边形的屈服准则[2]，此后又引入材料的拉伸与剪切屈服比 $B=\frac{\sigma_s}{\tau_s}$（或 $A=\frac{\tau_s}{\sigma_s}$），提出一个（$\sigma-\tau$）复合应力下的统一屈服准则[2]。

下面从应力状态的基本分析出发，根据作者提出的正交八面体的双剪单元体模型[3]，提出加权双剪应力屈服模型，得出一个两参数的统一屈服准则。它具有十分简单的数学表达式和相应的力学意义，并统一了各个屈服准则。

二、双剪统一屈服准则

一般主应力状态（$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$，图 1(a)）下存在三个主剪应力（$\tau_{13}, \tau_{12}, \tau_{23}$）。由于三个主剪应力中只有二个独立量，因此取二组较大主剪应力截面可得出正交八面体单元体的双剪单元体如图 1(*b*)和(*c*)。图 1 中(*b*)和(*c*)决定于中间主剪应力 τ_{12}（$\tau_{12} \geqslant \tau_{23}$时）或 τ_{23}（$\tau_{23} \geqslant \tau_{12}$时）。



(*a*)　　(*b*)

(*c*)

图　1

考虑作用于单元体上的双剪应力以及它们对材料屈服的不同贡献，可建立一个新的统一屈服准则，其定义为：当作用于单元体上的最大剪应力和中间主剪应力函数到达某一极限

值时，材料开始发生屈服，统一屈服准则的数字表达式为

$$f = \tau_{13} + b\tau_{12} = c, \text{ 当 } \tau_{12} \geqslant \tau_{23} \text{ 时} \tag{1}$$

$$f' = \tau_{13} + b\tau_{23} = c, \text{ 当 } \tau_{12} \leqslant \tau_{23} \text{ 时} \tag{1'}$$

式(1)及(1')中的 b、c 为材料的二个强度参数。它们可由拉伸屈服极限 σ_s 和剪切屈服极限 τ_s 确定。

$$b = \frac{2\tau_s - \sigma_s}{\sigma_s - \tau_s} \tag{2}$$

$$c = \frac{\sigma_s\tau_s}{\sigma_s - \tau_s} \tag{3}$$

引入剪应力系数 $B=\frac{\sigma_s}{\tau_s}$，并代入式(1)和(1')，可得统一屈服准则为

$$f = \sigma_1 - (2 - B)\sigma_2 - (B - 1)\sigma_3 = \sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma_2 \leqslant \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \text{ 时} \tag{4}$$

$$f' = (B - 1)\sigma_1 + (2 - B)\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geqslant \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \text{ 时} \tag{4'}$$

统一屈服准则采用二个材料参数 B 和 σ_s，因而可以适用于各种材料的屈服，并统一了 Tresca、Mises、双剪应力、和加权双剪应力等各种屈服准则。

统一屈服准则是以双剪应力的概念为基础，从双剪单元体模型推导得出，所以也可称之为双剪统一屈服准则。它也可以写为

$$f = \sigma_1 - \frac{1}{1 + b}(b\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma_2 \leqslant \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \text{ 时} \tag{5}$$

$$f' = \frac{1}{1+b}(\sigma_1 + b\sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geqslant \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \text{ 时} \qquad (5')$$

三、统一屈服准则的各种特例

根据不同的材料特性，取不同的参数，可分别得出以下各种屈服准则：

1. 单剪应力屈服准则(Tresca 准则)

当 $b=0$，即 $B=2$，$\tau_s=\frac{1}{2}\sigma_s$ 时，式(5)和(5′)合并为一式，即

$$f = f' = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \qquad (6)$$

此即为 Tresca 屈服准则(1864)，它在 π 平面的屈服迹线为 Mises 圆的内正六边形。

2. 双剪应力屈服准则

当 $b=1$，即 $B=\frac{3}{2}$，$\tau_s=\frac{2}{3}\sigma_s$ 时

$$f = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma_2 \leqslant \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \text{ 时} \qquad (7)$$

$$f' = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 = \sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geqslant \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \text{ 时} \qquad (7')$$

此即为双剪应力屈服准则，它在 π 平面的屈服迹线为 Mises 圆的外正六角形。

3. 加权双剪应力屈服准则

如将式(1)和(1′)中的参数 b 看作为中间主剪应力对材料屈服的贡献的加权(减权)系数，则 $0<b<1$，不同的加权系数可看作为中间主剪应力的不同贡献，则可得出一族介于单剪应力屈服准则和双剪应力屈服准则之间的加权双剪应力屈服准则，如式(5)(5′)所示。

加权双剪应力屈服准则在 π 平面的屈服迹线为一族介于单剪应力屈服准则和双剪应力屈服准则之间的十二边形屈服面(正十二边形和不等角十二边形)。

4. 正十二边形屈服面(Mises 圆的内接正十二边形)

当 $b=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$，即 $B=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$，$\tau_s=0.577\sigma_s$ 时

$$f=\sigma_1-\frac{1}{2+\sqrt{3}}[\sigma_2+(1+\sqrt{3})\sigma_3]=\sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma_2\leqslant\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\text{ 时} \tag{8}$$

$$f'=\frac{1}{2+\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})\sigma_1+\sigma_2]-\sigma_3=\sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma_2\geqslant\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\text{ 时} \tag{8'}$$

此即为作者于 1961 年提出的分段线性十二面屈服准则[2]。

式(8)(8′)在 π 平面的屈服迹线为一内接于 Mises 屈服圆的正十二边形，它在单向拉伸、单向压缩和纯剪切时的极限值均与 Mises 屈服准则的极限值相同，在其它应力状态时的极限值均小于 Mises 准则。

5. 不等角十二边形屈服面(Mises 圆的相交十二边形)

当 $b=\frac{1}{2}$，即 $B=\frac{5}{3}$，$\tau_s \approx 0.6\sigma_s$ 时，

$$f=\sigma_1-\frac{1}{3}(\sigma_2+2\sigma_3)=\sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma_2 \leqslant \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3) \text{ 时} \tag{9}$$

$$f'=\frac{1}{3}(2\sigma_1+\sigma_2)-\sigma_3=\sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma_2 \geqslant \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3) \text{ 时} \tag{9'}$$

此为与 Mises 圆相交的不等角十二边形屈服条件。与式(8)(8′)相比较，两者均可作为 Mises 屈服准则的逼近，三者的最大相差均小于 4%。但式(9)(9′)更为简单。

至此，通过中间主剪应力和反映中间至剪应力效应的加权系数 b 建立起各种屈服准则之间的相互联系，形成了一个统一屈服准则。现有的屈服准则均为其特例。它们的关系如图 2、3 所示。

四、σ-τ 复合应力状态下的统一屈服准则

在 σ-τ 复合应力状态下的统一屈服准则可由式(4)(4′)得出，为

$$f=\left(1-\frac{B}{2}\right)\sigma+\frac{B}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma \geqslant 0 \text{ 时} \tag{10}$$

$$f'=\left(1-\frac{B}{2}\right)\sigma-\frac{B}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\sigma_s$$

$$\text{当 } \sigma \leqslant 0 \text{ 时} \tag{10'}$$

式(10)(10′)与作者在 1972 年提出的 σ-τ 复合应力下的统一

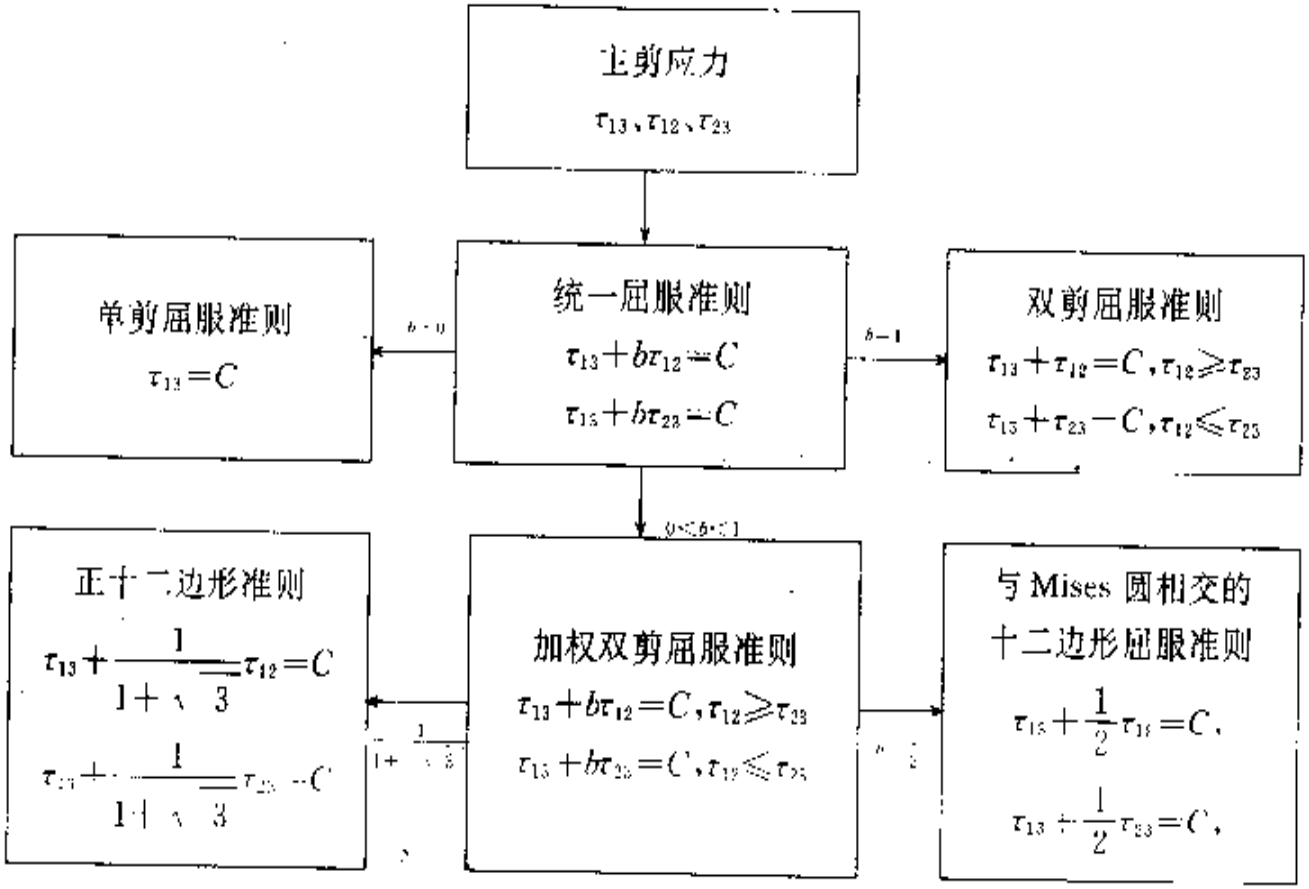


图 2　双剪统一屈服准则及其特例

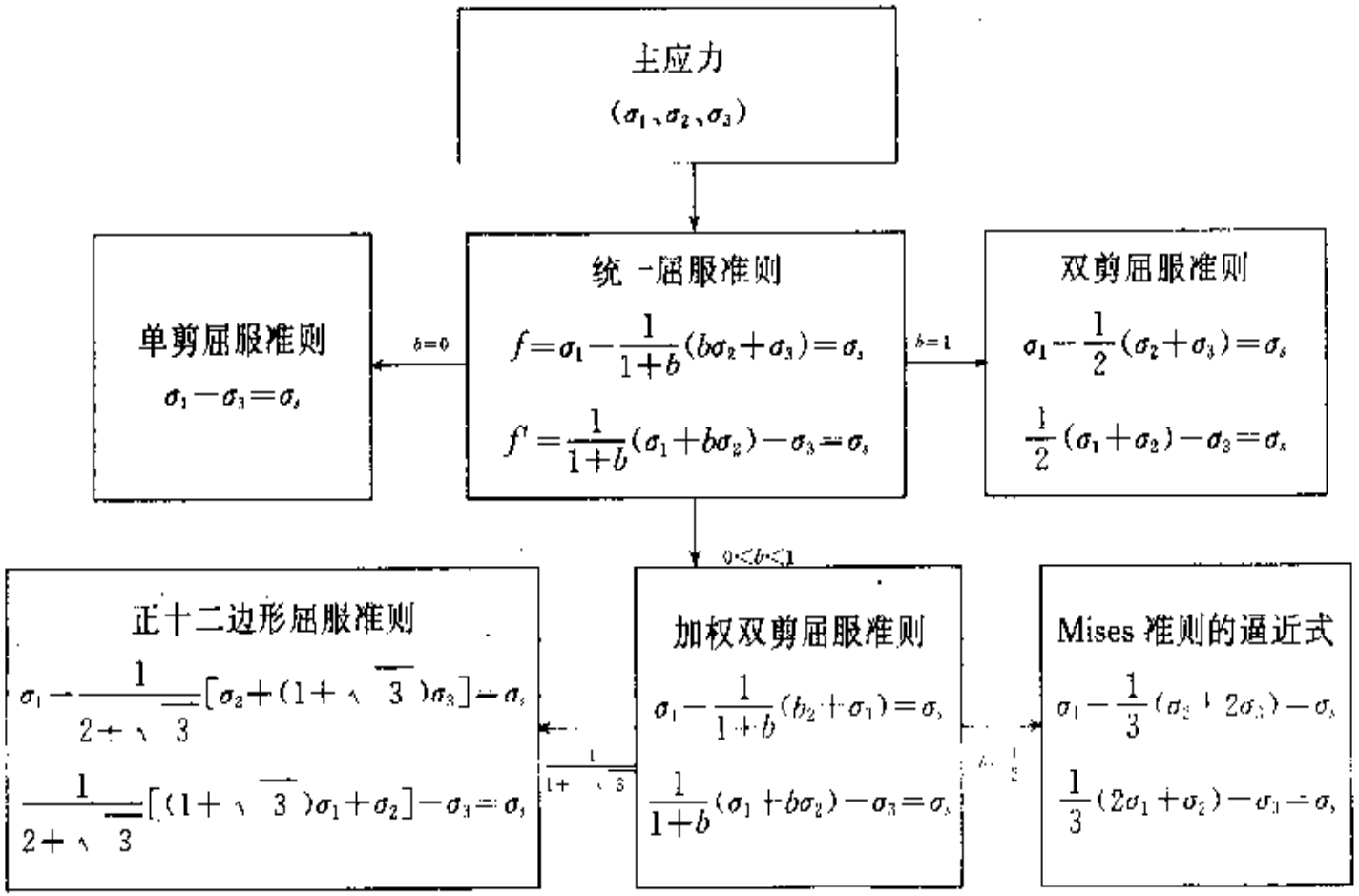

主应力
$(\sigma_1、\sigma_2、\sigma_3)$
统一屈服准则
$f=\sigma_1-\frac{1}{1+b}(b\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_s$
$f'=\frac{1}{1+b}(\sigma_1+b\sigma_2)-\sigma_3=\sigma_s$
$b=0$
$b=1$
单剪屈服准则
$\sigma_1-\sigma_3=\sigma_s$
双剪屈服准则
$\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_s$
$\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)-\sigma_3=\sigma_s$
$0<b<1$
正十二边形屈服准则
$\sigma_1-\frac{1}{2+\sqrt{3}}[\sigma_2+(1+\sqrt{3})\sigma_3]=\sigma_s$
$\frac{1}{2+\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})\sigma_1+\sigma_2]-\sigma_3=\sigma_s$
$\frac{1}{1+\sqrt{3}}$
加权双剪屈服准则
$\sigma_1-\frac{1}{1+b}(b_2+\sigma_1)=\sigma_s$
$\frac{1}{1+b}(\sigma_1+b\sigma_2)-\sigma_3=\sigma_s$
Mises 准则的逼近式
$\sigma_1-\frac{1}{3}(\sigma_2+2\sigma_3)=\sigma_s$
$\frac{1}{3}(2\sigma_1+\sigma_2)-\sigma_3=\sigma_s$

图 3　屈服准则的统一

形式屈服准则式(11)

$$f = \sqrt{\sigma^2 + (B\tau)^2} = \sigma_s \qquad (11)$$

相比，式(10)(10′)对 Mises 准则为逼近式(最大相差小于4%)，而式(11)则对双剪应力屈服准则为逼近式，其它均为精确表达式。

统一屈服准则在各种情况下的屈服面和屈服线可按以上各式绘出，这里不再赘述。

五、结束语

本文根据作者提出的正交八面体双剪单元体模型，通过中间主剪应力 τ_{12}(或 τ_{23})以及反映中间主剪应力效应的加权系数 b，建立起各种屈服准则之间的相互联系，形成了一个新的统一屈服准则。它具有简单的数学表达式和明确的物理概念。现有的屈服准则，包括单剪屈服准则、双剪屈服准则、加权双剪屈服准则和 Mises 屈服准则均为其特例和逼近。

双剪统一屈服准则的形成，有可能改进传统的关于屈服准则的教学。作者从 1989 年起在教学中试行，并不断改进，形成了比较系统的内容[4][5]。

参 考 文 献

[1] Yu Mao-hong. Int. J. of Mech. Sci.,1983 Vol. 21, No. 1,71—74

[2] 俞茂铉，古典强度理论及其发展，力学与实践，1980，第 2 卷，第 2 期，20—25

[3] 俞茂铉，力学学报，1989，第 21 卷增刊，42—49

[4] 俞茂铉，中国科学(A)，1985，第 28 卷，第 12 期 1174—1183

[5] 俞茂铉，科学通报，1992，第 37 卷，第 2 期

塑性流动本构理论的系统化

赵祖武
（天津大学）

一、引言

本构关系是固体力学中十分重要的基础之一，但学生感到学习困难，原因有二。其一是先修课程如材料力学，弹性力学等都没有性质上相类似的内容。本构关系问题中的思考方法又与众不同，初学者十分不习惯。原因之二是本构关系缺乏理论上的系统性，许多东西似乎凭空而降，互不相关，使初学者有不知所以的感觉。我们参考前人的研究论文和自己的分析与整理，致力于本构关系的理论系统化，包括我们自己提出的阐述，在教学中作如下的改进。

本文主要只限于目前塑性力学教材中缺乏分析和阐明的问题，至于许多教材已有的内容，不再赘述。

二、本构关系问题的引导

在塑性力学课程开始时，指出本构关系是固体力学的基础。例如构件处于振动状态时，材料的阻尼常常不可忽略，而且目前尚存在着不同的阻尼理论。结构抗地震问题力学分析的规范是根据反应谱规律制订的，反应谱则是建立在阻尼的粘滞理论之上，而结构在往复振动条件下的分析常使用复阻

尼理论。以上现象需通过适当的本构关系来加以描述。所以说本构关系是整个固体力学的基础，并非塑性力学专有的问题。

指出本构关系研究的思考方法与以前课程内容不同，它常常是根据材料塑性变形的某些实验现象经分析思考后，再提出"合理假定"来推导本构关系的。其合理性应该与更复杂的实验进行比较来加以证实。这种"合理假定"往往只在一定程度上反映某些塑性规律，是很难讲解透彻的，并不要求初学者对此立即有深入的理解，而且"合理假定"的结果也常常只在特定的加载条件下与实验符合，而在其它情况下并不一定与实验相符。

在系统化之前，先按传统的讲授方法，将流动理论与变形理论作为单独一章安排，目的是使学生初步接触本构关系并对它有所了解。紧接着将简单问题、例如厚壁筒问题等作为一章安排，使学生对本构关系在具体问题中的作用有所了解。

以下阐述本构关系的系统化。

三、塑性流理论的基本假定[1]

流动理论的出发点主要在于以下的基本假定。

1. 屈服曲面的存在

无论材料是否已产生塑性应变，当应力进一步变化时可能发生的情况或者是纯弹性响应或者是弹塑性响应（后者指塑性应变继续发展）。为了描述这种响应，可假定在应力空间中存在一个屈服曲面（或称加载曲面），当应力点越出此曲面时，即产生新的塑性应变。若应力点在曲面内部移动，则只引起弹性应变的变化。屈服曲面可用屈服函数 F 表达，

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \tag{1}$$

此处 F 是随加载而变化的函数，故与加载历史有关。为了更方便地表示 F，常常将上式简化为用不变的函数 f 表示的形式，其中自变量除应力 σ_{ij} 外，还有塑性应变 ε_{ij}^{p} 和硬化参数 q，它们影响屈服曲面的大小、形状和位置。

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p}, q) = 0 \tag{2}$$

式(2)在应力空间绘出时，σ_{ij} 是自变量。

此处所说的应力点越出屈服曲面，系指越出原来的(当时的)屈服曲面。屈服曲面跟随塑性应变的增长而变化，以使应力点仍在曲面之上。故应力点永远不会在屈服曲面之外。

屈服曲面随加载进程而逐渐变化并与加载路径有关，很难由实验确定[2,3]。后继屈服曲面很可能不是完全光滑的并有尖角，目前尚难定论[3,4]。实验还有另一困难，按屈服曲面定义，当应力点越出曲面无限小距离即引起无限小的塑性应变增量，但在实验中难以实现无限小增量，所以有的实验只能采取间接验证的方法。总之这是个复杂的问题。

2. 应变由弹性和塑性两部分组成，写成增量形式如下，

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{e} + \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} \tag{3}$$

这只适于小应变情况。大应变(有限应变)是几何非线性的，不能随意将两个应变相加。关于有限应变的弹塑性分解有许多研究，可参见[8]，本文不作介绍。

3. 加载条件

即当应力点位于曲面之上时，

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \mathrm{d}\sigma_{ij} \tag{4}$$

大于、等于或小于零表达于加载、中性变载或弹性卸载。注意

$\overline{df}$只是由 $d\sigma_{ij}$引起的，故不是全微分。加载条件与屈服曲面的定义相一致，例如$\overline{df}>0$ 时应力点越出屈服曲面。

当材料处于硬化阶段时，采用以上的加载条件是合适的，否则应该在应变空间中给出加卸载准则。

4. 塑性应变增量与$\overline{df}$成正比

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = A_{ij}\,\overline{df} = A_{ij}\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}}d\sigma_{mn} \tag{5}$$

这里 A_{ij}是个二阶张量。此式满足连续性要求，即当向量 $d\sigma_{mn}$长度不变而逐渐改变方向直至与屈服曲面相切时，$d\varepsilon_{ij}^{p}$逐渐减少并趋于零(或高级无限小)，即通过中性变载后转入卸载，而不是突然改变的。

其次说明，塑性应变依赖于加载路径，即若用参数方程

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t), \quad \varepsilon_{ij}^{p} = \varepsilon_{ij}^{p}(t) \tag{6}$$

表达，则函数 $\sigma_{ij}(t)$决定了函数 $\varepsilon_{ij}^{p}(t)$。

由(5)可知 $d\varepsilon_{ij}^{p}$与$\overline{df}$成正比，如在(5)中取 A_{ij}为 $d\sigma_{mn}$的零次齐次函数，或更进一步假定 A_{ij}与 $d\sigma_{mn}$无关而只是 σ_{ij}，ε_{ij}^{p}和 q的函数，则(5)的右边是 $d\sigma_{mn}$的线性函数，这时的本构方程可得到很大的简化。

5. 存在势函数 ϕ

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \tag{7}$$

四、Drucker 公设

看拉伸图 1。应力由 σ_A 增至 σ_B 再下降到 $\sigma_C=\sigma_A$。由 σ_A 开始计量的附加应力 $\Delta\sigma=\sigma-\sigma_A$ 在此循环中作的功 $\overline{\Delta W}_A\geqslant 0$，并且发生塑性应变时 $\overline{\Delta W}_A>0$。将此推广到多维的复杂应力

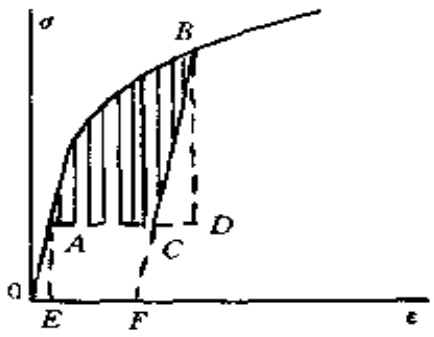


图 1

状态.就是 Drucker 公设,其推论之一是外法线方向法则,

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{8}$$

初学者往往感到 Drucker 公设很抽象.为此可讲述理想塑性材料的直杆受弯矩和轴力情况。利用材料力学方法可得到符合两个推论的结果,包括屈服曲面有尖角的情况[1]。

为了更好的理解,还可介绍 1938 年葛沃兹捷夫关于理想刚塑性体的理论,他不仅得到与 Drucker 公设相同的结果,而且推导出 Mises 和 Tresca 屈服准则[1],比 Drucker 公设早 14 年。

比较(5)与(8),可令

$$d\lambda = h\,\overline{df} \tag{9}$$

代入(8),

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \overline{df} \tag{10}$$

此处 h 影响 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ 与 $\overline{df}$ 的比值,即材料硬化。它与(2)的 q 是同一因素的两种表达方式,因此有一定的相互关系。

下面将讨论具体方程，当屈服条件与静水压无关时 f 常常可写为偏应力 S_{ij} 的函数，(10)将被下式代替，

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = h\frac{\partial f}{\partial S_{ij}}\mathrm{d}f \tag{11}$$

使用 S_{ij} 要注意它只有五个独立分量，所以可以有 $f(S_{ij})$ 的多种表达形式。如果随意改变其表达形式，例如 $f(S_{ij})$ 中不含 S_{22}，则不能由此推得 $\mathrm{d}\varepsilon_{22}^{p}=0$，所以应该有一个准则。由于静水压不影响屈服函数，故

$$f(S_{ij}) = f(\sigma_{ij}) = f(S_{ij} + p\delta_{ij})$$

上式对 p 求导后应等于零

因此有：

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}\delta_{ij} = 0 \tag{12}$$

这是使用 S_{ij} 为自变量的充分和必要的条件。按(11)，(12)将导致塑性体积变化为零：$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p}\delta_{ij} = 0$，所以十分便于记忆。

五、本构方程的几个简化方案

由基本假设及 Drucker 公设还不能导出具体方程，它们只是需要服从的准则。流动理论在目前只有几个简化方案可供实际使用。它与实验都有相当的差距。介绍如下：

1. 等向硬化

将(2)取为

$$\frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} - \psi(q) = 0 \tag{13}$$

此处 ψ 为 q 的单调增长函数。q 可取为塑性功

$$q = W_p = \int S_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} \tag{14}$$

由全微分 $\mathrm{d}f = 0$，得

$$\overline{\mathrm{d}f} - \psi'(q)\mathrm{d}q = 0 \tag{15}$$

将(14)代入，得

$$\overline{\mathrm{d}f} - \psi'(q)S_{ij}\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij} = 0 \tag{16}$$

再以(11)代入并考虑(13)，得 h 与 q 的关系式

$$2h\psi'(q)\psi(q) = 1 \tag{17}$$

如果 q 取 Odquist 参数

$$q = \int \sqrt{2\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij}\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij}} \tag{18}$$

用同样方法可求得另一个 h 与 q 的关系式。

2. Prager 随动硬化

考虑到鲍氏效应后，一维应力状态下的屈服条件可写为

$$(\sigma - \beta\varepsilon^p)^2 - \sigma_s^2 = 0 \tag{19}$$

推广到多维应力状态，将屈服条件写为

$$f = (\sigma_{ij} - c\varepsilon^p_{ij}) = 0 \tag{20}$$

c 为常数。Prager 由 Mises 条件出发，将上式写成

$$f = \frac{1}{2}(S_{ij} - c\varepsilon^p_{ij})(S_{ij} - c\varepsilon^p_{ij}) - k^2 = 0 \tag{21}$$

按 $\mathrm{d}f = 0$ 求得 h 与 c 之关系及本构方程

$$\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij} = \frac{1}{2ck^2}(S_{ij} - c\varepsilon^p_{ij})\,\overline{\mathrm{d}f} \tag{22}$$

$\alpha_{ij} = c\varepsilon^p_{ij}$ 称为背应。对于此模型，Prager 用一机动模型解释[5]，卡达谢维奇给出力学模型的物理解释[6]。近期尚未见形成具体式子的解释。

3. Ziegler 随动硬化

(20)和(21)在实际使用时有不方便的情况，它不能将 σ_{ij} 看作 6 个应力分量。此外，当某些应力分量为零时，例如平面

应力 $\sigma_{33}=\sigma_{13}=\sigma_{23}=0$，因 ε_{33} 不为零，所以仍需保留相应的项。Ziegler 针对此点提出

$$f(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})=0 \tag{23A}$$

$$\mathrm{d}\alpha_{ij}=(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})\mathrm{d}\mu \tag{23B}$$

其中 $\mathrm{d}\mu$ 是个无限小量，可由 $\mathrm{d}f=0$ 求得它与 $\overline{\mathrm{d}f}$ 的关系。至于本构方程中的 h，由于(23)中没有硬化参数 q 及 ε_{ij}^{p} 而不能求得，仍需作线性假定，即 $\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p}$ 与 $\mathrm{d}\sigma_{ij}$ 在屈服曲面法线上的投影有固定的比例。由此可求得本构方程[1]。上述两种随动模型都是屈服曲面在应力空间中作刚性移动，两者的区别在于移动方向[1]。

虽然 Ziegler 模型的提出是为了计算上的方便，但在与实验比较时发现它优于 Prager 模型[7]。这也是合理假定并不能完整地反映塑性规律的表现。

4. 等向硬化与随动硬化结合

(2)取为

$$\frac{1}{2}(S_{ij}-c\varepsilon_{ij}^{p})(S_{ij}-c\varepsilon_{ij}^{p})-\phi(q)=0 \tag{24}$$

仍可按前面的方法，即 $\mathrm{d}f=0$ 与(11)结合并取(14)之 q，求得本构方程。

参 考 文 献

[1] 赵祖武．塑性力学导论．高等教育出版社，1989

[2] Michino, M. J. Jr., et al. An historic perspective yield surface investigation for metals. Int. J. Non-Linear Mech. Vol. 11, 1976, 59—82

[3] 张泽华．塑性本构关系的实验研究．塑性力学进展，王仁等编，第六章，中国铁道出版社，1988

[4] Zhao Zu-wu. Relation between plastic flow theory and strain path theory, Proc. of Inter. Conf. on Appl. Mech. Vol. 2, 1989, Beijing, Pergamon Press, 618—623

[5] Prager, W. The theory of plasticity: A survey of recent achievements. Proc. of the Inst. of Mech, Eng. 1955. 41—57

[6] Кадашевич, Ю. И., Новожилов. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. ПММ, 1958, Т. 22, В1, 78—89

[7] Rees, D. W. A. A review of stress-strain paths and constitutive relation in the plastic range. J. of Strain Analysis for Eng. Design, Vol. 6, No. 4, p. 235, 1981

[8] 黄筑平,段祝平. 有限弹塑性变形中应变及应变率的分解. 力学进展,20 卷第一期,24— 39,1990

根据 Levy-Mises 应力应变关系阐述塑性成形各工序在屈服轨迹上的分区

王仲仁

（哈尔滨工业大学）

一、引言

Mises 应力应变关系在塑性问题分析中是最常用的关系，但在定量计算时往往需用到有限元在大容量计算机上进行，本文描述基于 Mises 应力应变关系导出的应力应变顺序对应规律作为定性的判断变形时工件尺寸变化的依据，进而给出板料成形工序中的应用实例。

二、从 Levy-Mises 方程到应力应变顺序对应规律

塑性变形时，物体内的应力分布通常很难定量地了解，即使知道了还要求偏量进而求应变全量（按形变理论），计算是相当费事的，如果按增量理论计算进而对已求出的应变增量进行积分，其计算量就可想而知了。另一方面，从工程角度来看，对于一些繁杂的问题，哪怕能给出定性结果也很可贵，具体的定量问题可以从实验中进一步探索（由于如摩擦条件等数学模型还未给出，要精确计算也很难办到）。作者鉴于应力加工理论中关于成形规律阐述上存在的一些问题，吸取了增

量理论及全量理论的共同点，提出了应力应变顺序对应规律，并使该规律的阐述逐渐简明和便于应用。现简述如下：

塑性变形时，当应力顺序 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 不变，且应变主轴方向不变时，则主应变的顺序与主应力顺序相对应，即 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$（$\varepsilon_1 > 0$，$\varepsilon_3 < 0$）。当 $\sigma_2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ 的关系保持不变时，相应地有 $\varepsilon_2 \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 0$。

这个规律的前一部分是“顺序关系”，后一部分是“中间关系”。其实质是将增量理论的定量描述变为一种定性判断。它虽然不能给出各方向应变全量的定量结果，但可以说明应力在一定范围内变化时各方向的应变全量的相对大小、进而可以推断出尺寸的相对变化。

文献[1]给出了上述规律的证明，文献[2]还专门作了实验验证。

上述规律在某种程度上可以理解为对偏离简单加载、应力比例变化但不引起应变类型变化而对应变全量的定性估测。这个规律并不以塑性加工为基础，因而其适用范围并不局限于塑性加工。

以下就板料成形工序谈一下顺序对应规律的应用。

三、屈服椭圆上的应力分区及其对应的尺寸变化关系

板料冲压属于平面应力问题，各工序理应处于椭圆上，要弄清具体位置及尺寸变化需要解决两个问题。

首先，根据特定的工序的受力分析找出它在屈服表面上所处的部位，进而找出变形区中不同点在屈服面上所对应的

加载轨迹，其次根据应力应变顺序对应规律将屈服轨迹上的应力状态按产生的应变(增量)类型进行分区，找出工件各部分尺寸变化的趋势。

现在先分析轴对称平面应力状态下屈服轨迹上的应力分区及典型平面应力工序的加载轨迹。

以薄板成形为例进行研究。由 σ_ρ，σ_θ 为坐标轴所描述的应力椭圆，如图 1 所示。

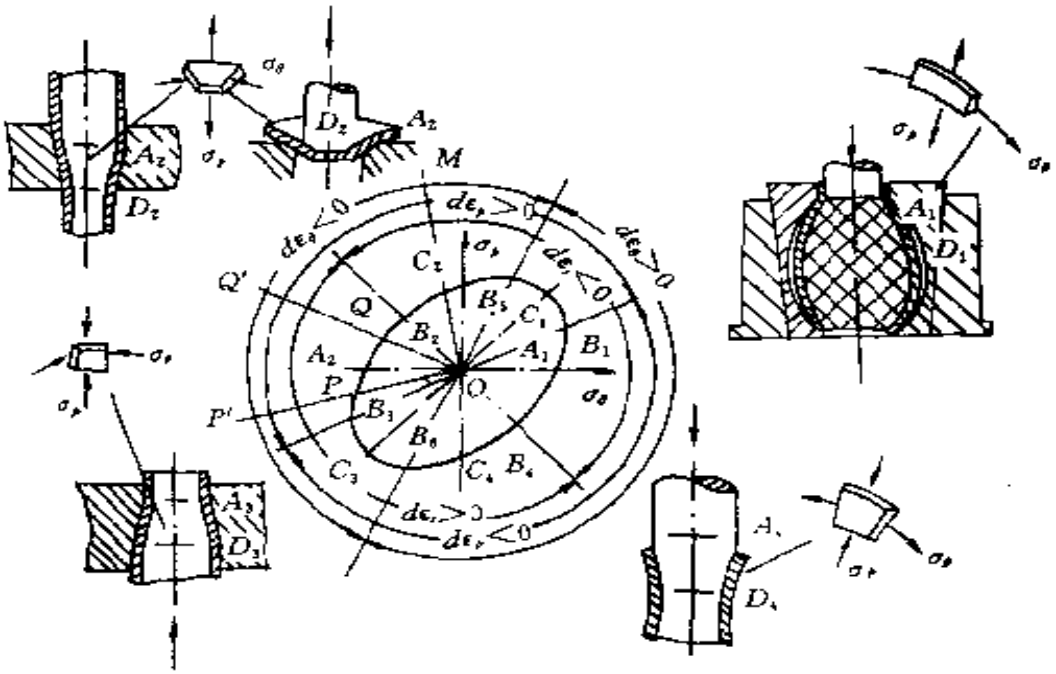


图 1　平面应力状态屈服轨迹应力分区

该椭圆第 I 象限 $\sigma_\rho>0$，$\sigma_\theta>0$ 与胀形工序及翻孔工序相对应。在第 II 象限，$\sigma_\rho>0$，$\sigma_\theta<0$ 与拉拔及拉深工序相对应。第 III 象限 $\sigma_\theta<0$，$\sigma_\rho<0$ 相当于缩口工序。第 IV 象限 $\sigma_\theta>0$，$\sigma_\rho<0$ 相当于扩口工序。进一步分析，变形金属由开始变形到变形结

束相当于沿屈服轨迹走一段距离。例如对于拉拔工序凹模入口处 A_2 为 $\sigma_\theta=-\sigma_s$，$\sigma_\rho=0$，随着变形的发展由椭圆上 A_2 点出发沿椭圆向 C_2 点前进，凹模出口处 D_2 所对点在椭圆上的位置取决于 σ_t 值的大小。利用该图可以确定变形时工件尺寸变化的趋势。其大体步骤如下：

1）通过实测算出变形终了瞬时的 σ_ρ；

2）针对具体材料及变形量选定 σ_t；

3）在椭圆上对应于所分析的区间根据 σ_ρ/σ_s 值求出一个 P；

4）作射线 OPP' 与椭圆外的表示应变增量的三个圆相交；

5）根据变形区所处的范围判断各方向尺寸变化的趋势。

例如，对于缩口工序根据 σ_ρ 及 σ_t，若已定出 P 点并作射线 OPP' 交内圆于 $d\varepsilon_t>0$ 区段，交外圆于 $d\varepsilon_\theta<0$ 区段，交中圆于 $d\varepsilon_\rho>0$ 区段、若点 P 处于 A_2B_3 段，表明整个变形过程中各应变增量 $d\varepsilon_t$、$d\varepsilon_\theta$、$d\varepsilon_\rho$ 符号不变，因而应变全量 $\varepsilon_\theta<0$，$\varepsilon_t>0$，$\varepsilon_\rho>0$，于是可以预计其尺寸变化趋势为切向尺寸缩小，壁厚增大，长度增大。

对于拉拔，若根据 σ_ρ 及 σ_s 所得的 Q 点位于 A_2B_2 之间，则由 A_2 至 Q 应变类型相同，始终有 $d\varepsilon_t>0$，$d\varepsilon_\rho>0$，$d\varepsilon_\theta<0$，即切向尺寸减少，厚度增加，长度增加。如果应力为 M 点，此时仍保持有 $d\varepsilon_\rho>0$，$d\varepsilon_\theta<0$，其相应的尺寸变化趋势与前同，而厚度方向由 A_2B_2 区间的 $d\varepsilon_t>0$ 变为此时的 $d\varepsilon_t<0$，这时最终应变难于估计，但如果 M 点接近于 B_2，则可以断定最终累计应变仍大于零，即厚度增加。当 Q 点接近于 C_2，则最终厚度可能是减小的，关于这一问题的定量分析见文献[1]第六章。

参 考 文 献

[1] 王仲仁等，塑性加工力学基础，国防工业出版社，1989

[2] 王仲仁，朱宝泉，刘立君，关于 Sn-Pb 超塑材料屈服准则的实验研究，《力学与实践》，No. 4，1983

第三部分　界限定理、滑移线场与安定分析

下限定理在金属成形等问题中的应用

徐秉业　宋军　陈森灿
（清华大学）

本文就金属塑性成形等问题中，应用下限定理时应力场的选择作了介绍。

界限定理是塑生力学中应用得比较成功的方法，它可以通过假设满足静力容许条件的应力场或满足机动容许条件的位移速度场求出极限载荷的下限值或上限值。当极限载荷的上限和下限相等时，便获得了完全解。在极限分析理论中，各种边界条件的梁、桁架、钢架和轴对称壳等都已找到了完全解。在金属成形理论中也找到了许多问题的上限解，但许多问题由于其复杂性未讨论下限解，因而影响了教学或学生中对这一部分内容的理解。本文将介绍几种情况下静力容许应力场的假设，以帮助读者掌握下限解的求解方法。

在金属塑性成形中的镦粗、拉拔、挤压等问题，由于其复

杂性，应力场事先是不知道的，应根据问题的性质作一假设。均匀应力场、轴对称或球对称应力场都比较简单，因此在求下限解时经常采用，从而获得问题的下限解。现举例说明：

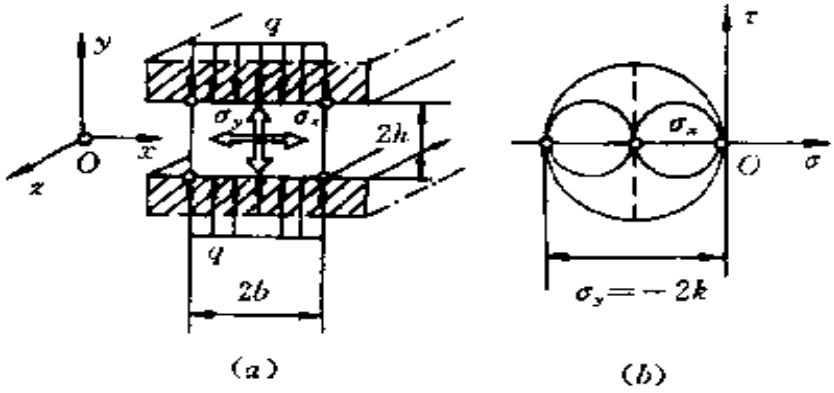


图 1　平面应变镦粗

一、镦粗问题（见图 1）

由于块体在与模具接触处，有与 y 方向平行的压力 σ_y，而块体两侧为自由边，因此可以假设均匀应力场

$$\sigma_x = 0, \qquad \sigma_y = -2k$$

这一应力场不仅满足平衡方程，而且也不破坏屈服条件，由平衡条件得

$$\frac{q^{(-)}}{2k} = 1$$

式中 $q^{(-)}$ 为所需外载荷的一个下限值。

若将块体划分为图 2 所示的四个子区域，而这些子区域又都作为刚体沿分界面移动，通过将内力功和外力功相等的条件可得极限载荷的上限值 $q^{(+)}$：

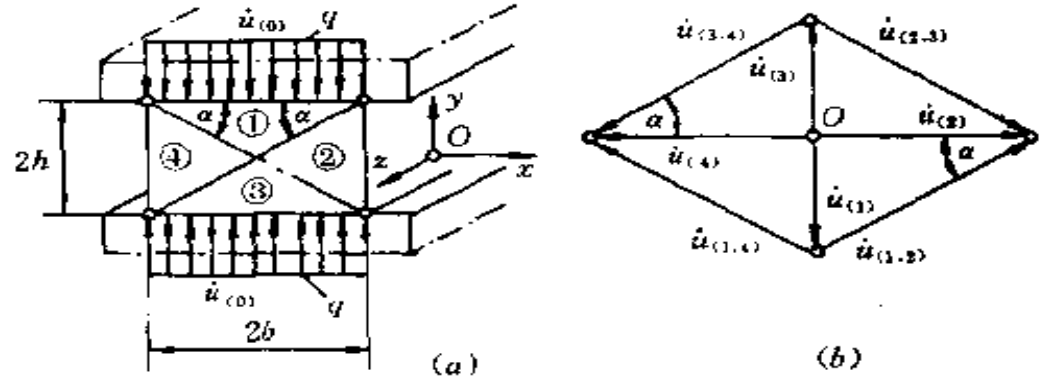


图 2　锻粗问题的机动容许位移速度场

$$\frac{q^{(+)}}{2k}=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{b}+\frac{b}{h}\right)$$

因此极限载荷 q 的值介于 $q^{(-)}$和 $q^{(+)}$之间，即

$$1\leqslant\frac{q}{2k}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{h}{b}+\frac{b}{h}\right)$$

在上式中，若 $b=h$，则有

$$q=q^{(-)}=q^{(+)}=2k$$

此时所得的 q 是完全解。

二、拉拔问题（见图 3）

在平面应变条件下可以假设图示的子区域③是厚壁圆筒的一部分，其边界分别是模具表面以及半径为 a 和 b 的圆弧。区域④为零应力状态，区域②为复杂应力状态，区域①为单向拉伸应力状态，且不进入塑性状态。由于在区域③中应力的主方向为径向和环向，故在区域③中平衡条件为：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r^{(3)}}{\mathrm{d}r}+\frac{\sigma_r^{(3)}-\sigma_\theta^{(3)}}{r}=0$$

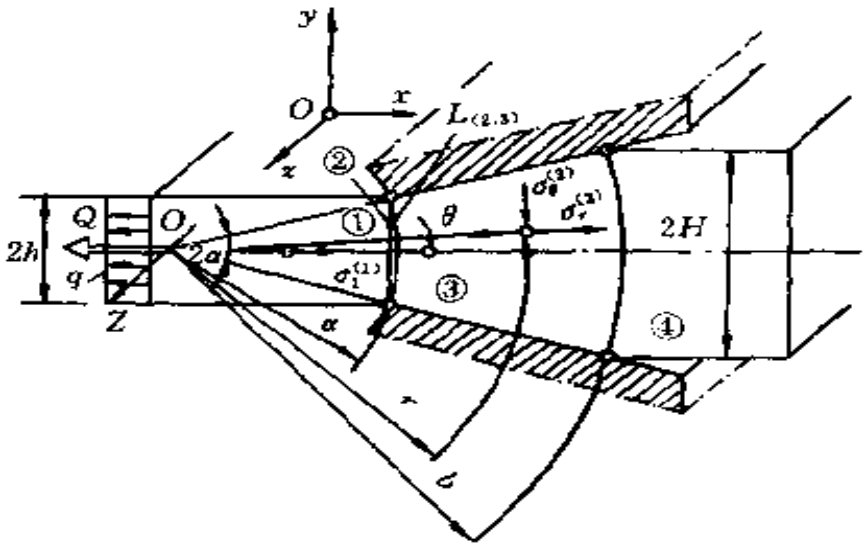


图 3　拉拔问题的静力容许应力场

屈服条件为

$$\sigma_r^{③} - \sigma_\theta^{③} = 2k$$

求解后，得应力场和极限载荷为

$$\sigma_\theta^{③} = -2k\left(1 - \ln\frac{b}{r}\right)$$

$$\sigma_r^{③} = 2k\ln\frac{b}{r}$$

$$\frac{q^{(-)}}{2k} = \ln\frac{H}{h}$$

若设子区域③的边界为速度间断线，且不考虑模具与块件之间的摩擦，设锥角 α 较小则可得上限解

$$\frac{q^{(+)}}{2k} = \ln\frac{H}{h} + \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

显然，对于平面应变问题，有

$$\ln\frac{H}{h}\leqslant\frac{q}{2k}\leqslant\ln\frac{H}{h}+\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

由此看出，虽然在以上情况下，假设了均匀应力场和轴对称应力场，但获得的上限解和下限解是比较接近的。在特殊情况下，两者相等。若拉拔不是图 3 的平面应变问题而是轴对称问题，则可以假设子区域③是由模具锥面与半径为 a 和 b 的两个球面所包围的区域，采用球对称应力场，同样可以获得下限解和上限解。

三、楔体一侧受压问题（见图 4）

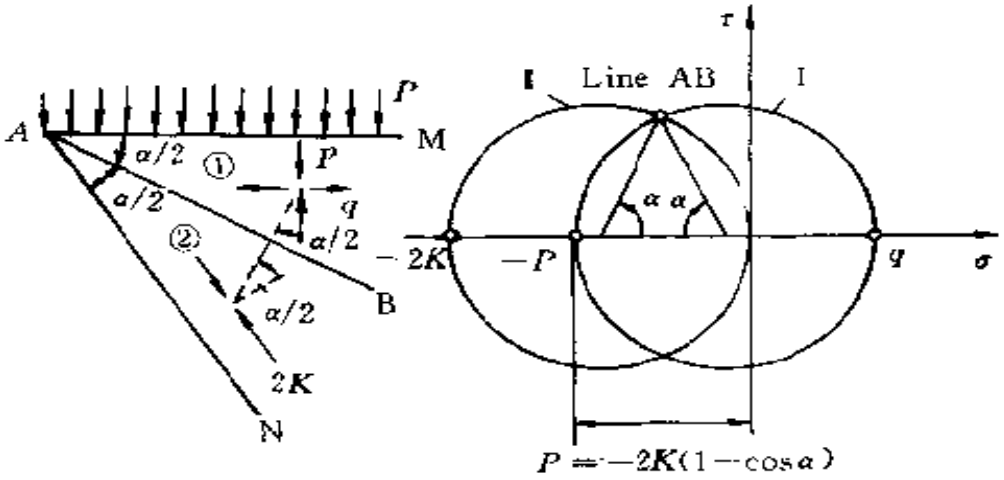


图 4　楔体问题的静力容许应力场

平面应变问题的半无限楔体在 AM 侧面受均布载荷 P 作用。根据问题的性质可将楔体分为两个均匀受力区域，由边界受力条件和屈服条件可以假设如下的静力容许应力场，其主应力分别为

$$\sigma_1^{(1)}=q,\quad \sigma_2^{(1)}=-p\qquad 且\ q+p=2k$$

$$\sigma_1^{(2)}=0, \quad \sigma_2^{(2)}=-2k$$

根据两个区域界线 AB 两侧的正应力要满足连续条件，由 Mohr 圆可得

$$\frac{-2k}{2}+\frac{2k}{2}\cos\alpha=\frac{q-p}{2}+\frac{q+p}{2}\cos\alpha$$

所以得：

$$p^{(-)}=2k(1-\cos\alpha)$$

此时求得了本问题的一个下限解。如果假定 AB 不平分楔体顶角 α，则无法构造既静力容许又满足连续条件的应力场。

若设分界线 AB 为速度间断线，由内力功和外力功相等条件可得载荷上限解

$$p^{(+)}=2k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

本文所涉及的静力场的假设是下限法中的重要问题，由所举的例题看出尽管所选择的是简单的静力场，但所求出的下限解仍和上限解比较接近。这种分析方法更于理解界限法的实质，比只讲上限法要清晰明确。我们认为文中所叙述的三个问题对于更清晰地阐述界限法将是有益的。

参 考 文 献

[1] 徐秉业．塑性力学．高等教育出版社，1989

[2] W. Szczepinski, J. Szlagowski. Plastic Design of Complex Shape structures. 1990

上限法在金属塑性加工工步分析中的应用

林治平

（江西工业大学）

近年来，上限法的应用研究取得了很大进展，我们在给研究生和高年级本科生开设的“锻压工步的力学分析”课程中，大量应用了上限解法，下面简要介绍该法在塑生加工工步分析中应用的各个方面，供塑性力学教学和学习参考。

一、塑性加工工步的力能分析

力能分析的目的是计算变形力，为塑性加工设备吨位的选用和模具强度的设计提供理论依据。另外，力能分析还是上限法其它方面应用的基础，因为上限法的应用一般都要通过力能分析进行。

塑性加工工步的力能分析是从设计变形流动模式和动可容速度场开始的，然后由塑性理论的几何方程确定应变速率场、等效应变速率，再计算各项功率消耗，并由总功率消耗最小优化速度场和其它伪独立参数，最后计算变形力上限解和分析各种参数对力能的影响。现在，上限法已能计算几乎所有的塑性加工工步的变形力。

二、塑性加工时金属的流动与变形分析

利用上限法可确定塑性变形时分流面位置和金属流动方向，当优化后的动可容速度场与真实场很接近时，也可用于计算金属质点的流线和变形体内原有网格的畸变和应变。例如，由上限法可求出图 1 所示圆盖板锻造时的分流面位置 r_e 和 r_n，用以确定金属的流向。当将图中金属流入 4 区的速度 $\dot{u}_e$ 作为伪独立变量由功率最小原理优化确定时，可得表达式：

$$\dot{u}_e = f(r_0, r_1, h, m) \tag{1}$$

若 $\dot{u}_e \geqslant r_0^2/(r_1^2 - r_0^2)$，属图 1*a* 情况；若 $0 < \dot{u}_e < r_0^2/(r_1^2 - r_0^2)$，属图 1*b* 情况；若 $\dot{u}_e \leqslant 0$，则属图 1*c* 情况。

此外，图 1 中金属流动方向还与接触摩擦 m 有关。随 m 的减小，流动由图 1*a* 情况经图 1*b* 变为图 1*c* 情况。

三、金属与工具接触面上的压力分布

近年来提出了利用“虚拟单元法”求解轴对称变形时工具接触面上的压力分布。例如，圆柱体镦粗时，在欲研究的断面上切取一虚拟单元 E^*（见图 2），设在其微小接触面积 S 上施加一微小速度 Δu_0 作为一种外部干扰，而在其余接触面上仍然只作用有速度 $\dot{u}_0$，则引起该虚拟单元微面积速度增量 $\Delta \dot{u}_0$ 的，即作用于该面积上的压力。求解时，先按图 2*a* 求常规变形时的功率消耗 $\dot{w}$，再按图 2*b* 求单元 E^* 增加 $\Delta \dot{u}$。速度后的总功率消耗 $\dot{w}^*$，则两者之差 $\Delta \dot{w}$，即为 S 面上压力 p 所作的功率增量：

$$\Delta \dot{w} = p \cdot S \cdot \Delta \dot{u}_0; \quad p = \Delta \dot{w} / (S \cdot \Delta \dot{u}_0) \tag{2}$$

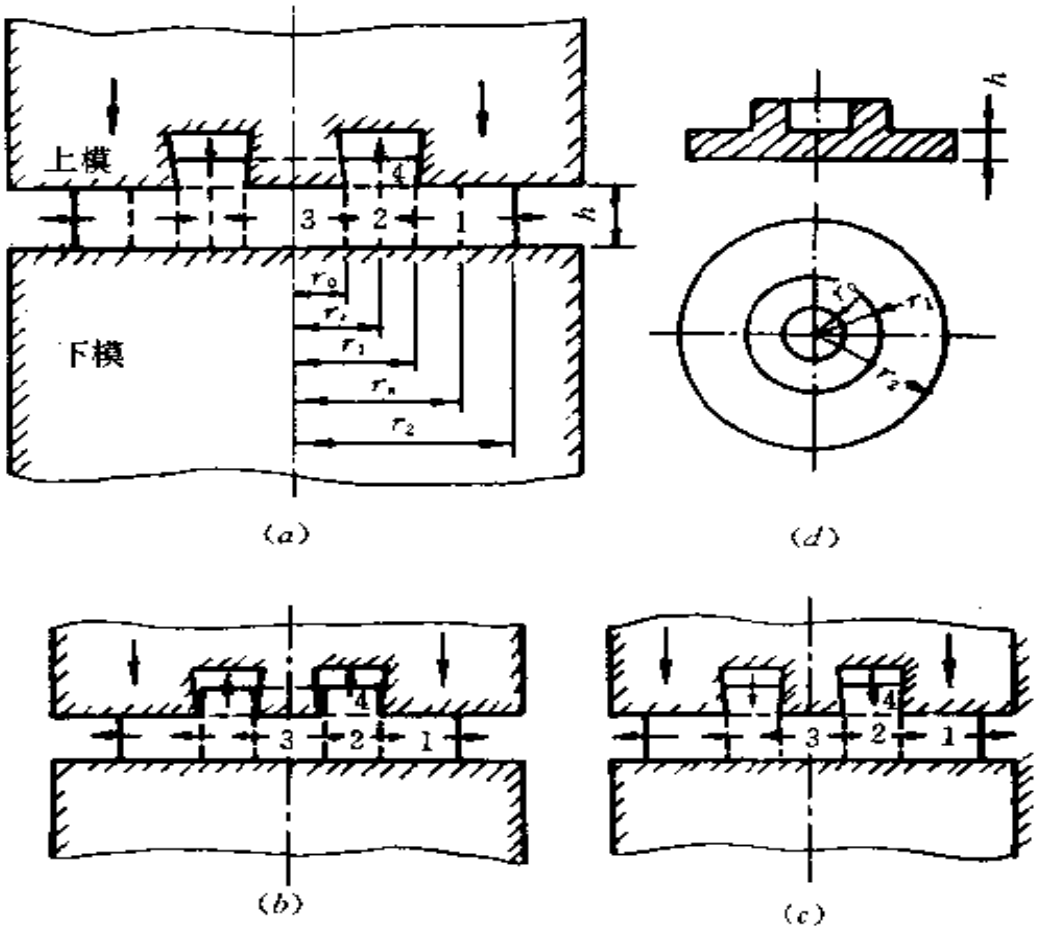


图 1　圆形盖板锻造时的金属流动模式

(a、b、c：流动的三种情况，d：变形后的试件)

此外还成功地用该法确定了正、反挤压和复合挤压冲头端面上的压力分布。

四、塑性加工工艺参数与模具的优化设计

按照最小功原理，最合理的工艺参数和模具形状与尺寸应使总功率消耗最小。所以，利用上限法分析工步时，可将工

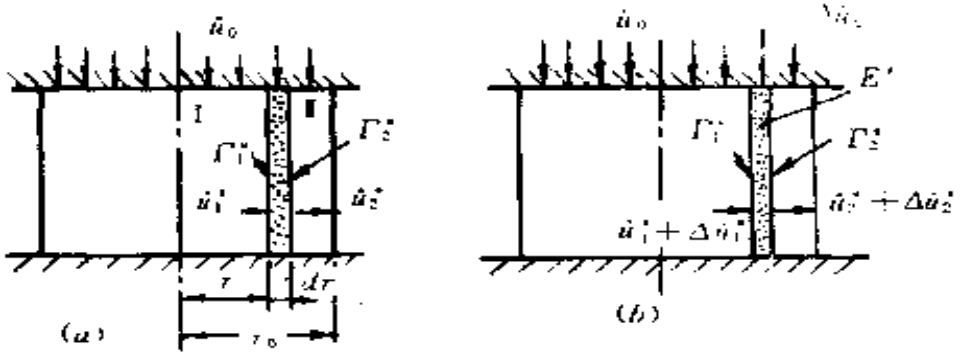


图 2　分析接触压力分布的模式(虚拟单元的切取)

a. 常规变形时；b. 附加外部干扰 $\Delta \dot{u}_0$ 时

艺参数或模具外形尺寸作为伪独立变量，由最小功原理优化。

目前，已成功地用上限法确定了正挤或拉拔时的最佳凹模角、开式模锻时的冲孔连皮厚度以及飞边尺寸等工艺参数。此外，还可用于由锻件的最终尺寸逐步反算出为充满该锻件所需的原始坯料或中间坯料的外形与尺寸。

五、塑性加工缺陷分析

利用上限法分析塑性加工缺陷时，首先要建立一个带有缺陷的流动模式及与其相应的动可容速度场，允许垂直于破裂处不连续面的速度发生间断，以便以表面分离的形式把缺陷包含在流动模式和动可容速度场中，然后计算含有缺陷的各项功率消耗，并将总功率对代表缺陷的尺寸变量求导，令其在该尺寸变量为零时等于零，即可求出是否出现缺陷的判断准则。

例如，当压缩尺寸为 $2W \times 2l$ 的条料时，在正常流动下，其速度场如图 3b 所示，由两根相交的对角线组成四个三角

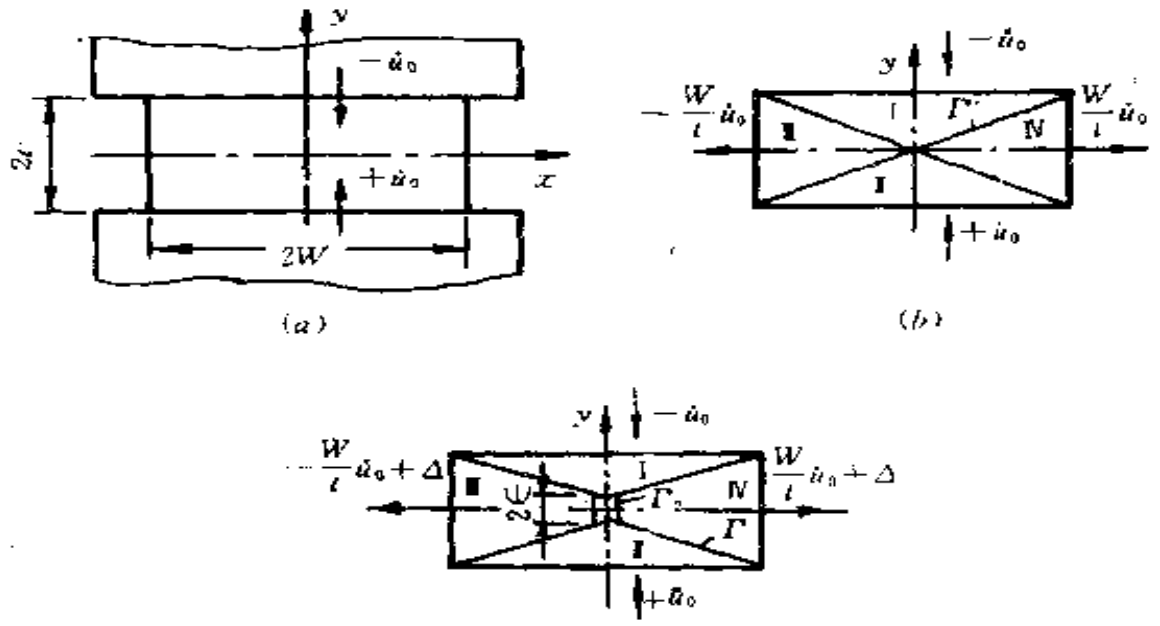


图 3　条料镦粗时正常流动和出现开裂的速度场

块。Ⅰ、Ⅱ区分别以 $-\dot{u}_0$ 和 $+\dot{u}_0$ 速度压缩坯料，而Ⅲ、Ⅳ区则分别以 $-W\dot{u}_0/t$ 和 $+W\dot{u}_0/t$ 速度向外移动。当出现中心开裂时，其速度场可设计成图 3c 所示，2ε 为开裂面高度，Ⅲ、Ⅳ两区向外移动的速度由于不连续面相对于接触面的倾角增大而增大。此时

$$\dot{u}_x = \pm W\dot{u}_0/(t-\varepsilon) \tag{3}$$

由含有开裂的速度场可计算出变形时消耗的剪切功率 $\dot{w}_k$、开裂功率 $\dot{w}_\varepsilon$ 和由开裂引起的体积变化功率 $\dot{w}_p$，因而总功率消耗和相对锻造压力分别为（不考虑接触摩擦时）：

$$\dot{w} = \dot{w}_k + \dot{w}_\varepsilon + \dot{w}_p;$$

$$p/2k = \dot{w}/(2k \cdot 2W \cdot 2\dot{u}_0) \tag{4}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时，上式即成为计算正常流动的相对压力，而出现中心开裂的坯料尺寸临界值$(W/t)_{临}$，可由下式确定：

$$[\partial(p/2k)/\partial\varepsilon]|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad (5)$$

若 $W/t > (W/t)_{临}$，则不产生中心开裂。

六、予测塑性变形体的温度分布

利用上限法予测塑性变形体内的温度分布是基于以下两点假设：(1) 塑性变形时几乎全部的消耗功都转化为热，而且快速金属成形是一种绝热过程；(2) 塑性变形过程中存在有热间断线，穿过该线时温度发生跳跃，在平面变形情况下，速度间断面也就是温度间断面。例如，压缩长方形截面金属块

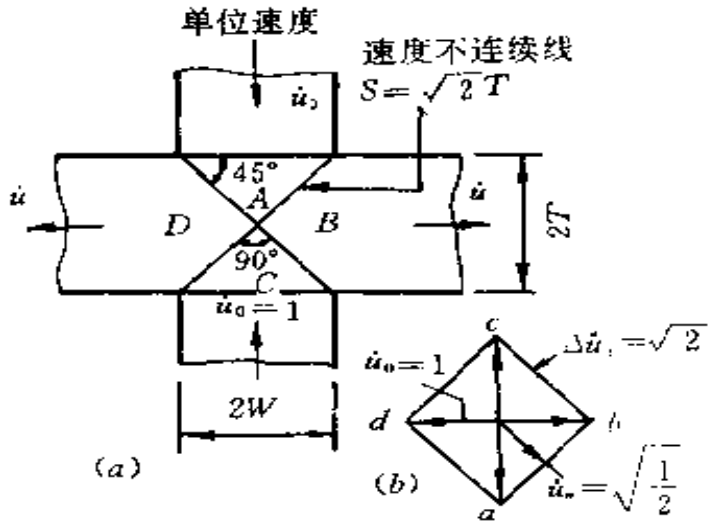


图 4　在光滑平板间压缩长方截面金属块

a：物理平面；b：速度图

时(图 4)，物理平面上的速度间断线 AB、BC、DC、DA 也就是穿过它们时出现温度跳跃 $\Delta\theta$ 的热间断线。若材料为低碳钢，

初始温度为 680 C，$\rho = 7.8\,g/cm^3$，$C = 620/J/kg,C$，$\sigma_s = 350MPa$，$J = 1mN/Joule$，则由热功平衡原理得：

$$\Delta\theta = k \cdot \sum(\Delta\dot{u}_t/\dot{u}_n)/(J\rho C) \qquad (6)$$

式中系数 $k/(J\rho C)$ 由已知值代入，约为 42 C；速度间断 $\Delta\dot{u}_n$ 和法向速度 $\dot{u}_n$ 由图 4 求出：

$$\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{cd} = \overline{ad} = \Delta\dot{u}_t = \sqrt{2}$$

$$(\dot{u}_n)_{AB} = (\dot{u}_n)_{BC} = (\dot{u}_n)_{CD} = (\dot{u}_n)_{DA} = \sqrt{1/2}$$

故通过每条热间断线时的温度上升为 $\Delta\theta \approx 84$ C，而 B 区和 D 区的温度将是 $680 + 84 = 764$(C)

七、塑性变形过程的模拟

模拟从变形体初始状态开始，首先计算出初始瞬时坯料内的流动速度场和加工载荷上限解，优化速度场，并由该速度场确定微小变形后坯料的形状，然后反复进行步进计算，模拟

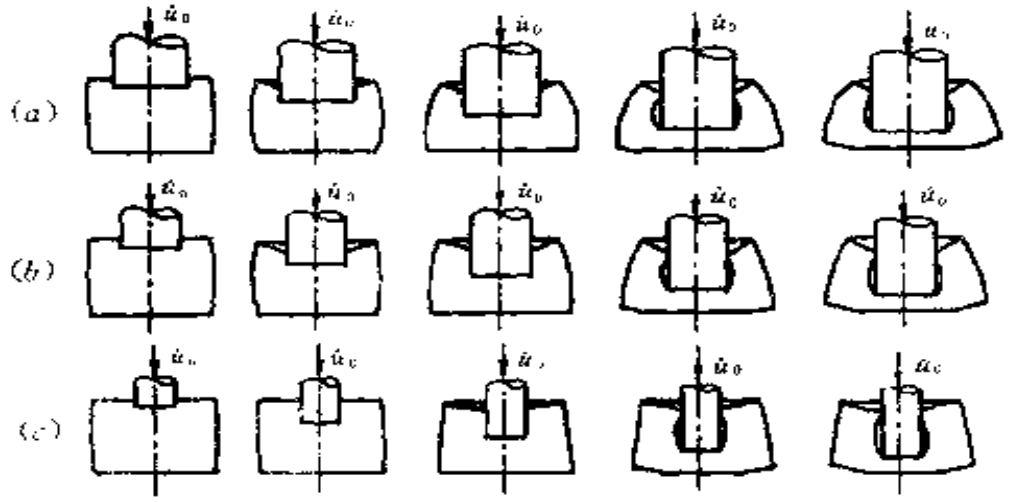


图 5　圆柱体开式冲孔的上限法模拟

a、b、c：三种冲头尺寸

出整个变形过程的坯料外形变化和变形力变化。一般说，每一步进变形的冲头压下量约为坯料原始高度的 5% 以下。

图 5 是我们利用上限法在计算机上模拟圆柱体开式冲孔变形过程外形变化的情况，模拟结果与实验结果很一致。

上限法除上述各方面应用外，还可用于分析塑性变形摩擦机理等问题，详见文献[2]。

参 考 文 献

[1] B. Avitzur. Metal Forming, The Application of Limit Analysis. Marcel Dekker Inc, New York and Basel, 1980

[2] 林治平. 上限法在塑性加工工艺中的应用. 北京：中国铁道出版社，1991

上限元法(UBET)基本原理及其在金属塑性成形中的应用简介

赵振铎　孙胜　刁庆胜　关廷栋
（山东工业大学）

目前所用的《金属塑性成形原理》教材在进行塑性成形工步分析时，主应力法和滑移线方法占有较大的篇幅，叙述比较系统和完整，极限分析法的叙述既不系统也不够全面，而对上限元法(UBET)则几乎没有介绍。然而上限元法在当前的国内外锻压工艺的工步分析中已占有相当比例，且呈现越来越重要的作用。上限元法可以使用比较少的运算程序(相对于有限元技术)，既可模拟成形过程；求解变形力；采用反向模拟技术还可以求出最佳的毛坯形状和尺寸等。为使学生对上限元法有一个初步的了解，以便将来用以解决实际问题，我们对上限元法的基本原理及其目前应用情况做了如下一些简要介绍：

一、上限元法的发展及其基本原理

上限元法，英文全名为：Upper Bound Elemental Technique，即UBET，是在金属塑性成形问题解法之一——上限法的基础上发展起来的，是一种使用计算机对金属的流动过程进行数值模拟的方法。早在50年代末，英国学者 W. John-

son 和日本学者 H. Kudo 先生就提出了"基元矩形技术"和"基元圆环技术"，从而确立了将一个连续的塑性变形体"分割"成若干部分来求解的设想。到 70 年代末，英国学者 A. N. Bramley 在研究轴对称塑性成形问题时，又提出了建立规范单元，即将"分割的塑性区"规范化，第一次使用了上限元法(UBET)的概念。以后经各国学者的共同努力，逐步建立了一系列的基本理论，解决了不少成形工艺问题。UBET 在我国也得到了国家自然科学基金的资助，从而取得了若干具有国际先进水平的成果。

用上限元法模拟金属塑性成形问题步骤如下：先根据变形体在某变形瞬间的截面外形尺寸，从其边界交点出发，引与坐标轴平行的正交线。若变形体截面外形有曲线部分，则用折线近似代替。这样就可以将整个变形体"分割"为有限个截面为三角形和矩形的圆环(轴对称问题)，这些圆环称为单元。根据各单元在坐标系中所处的不同位置，可归纳为图 1 所示的五种标准基本形式。

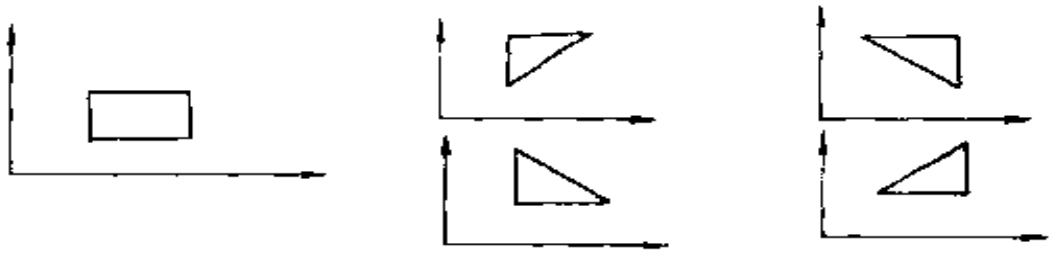


图 1　上限元法的基本单元形式

对于上述五种单元，假设其边界上与坐标轴平行的速度分量均匀分布，其中一部分速度的大小和方向可由各单元的边界条件(和模具接触面上的速度等于模具的运动速度)、对

称性条件(对称面上法向速度为零)、变形体连续性条件(相邻单元接触面上法向速度相等)、以及体积不变条件(各单元上所有的边界速度必须保证该单元体体积不变)所确定,其余的则称为待优化参数,待优化参数的数量称为自由度。例如某变形体由 L 个单元体组成,由边界条件和对称性条件可确定 X 个边界速度,且各单元体有 M 个接触面,该变形体的边界速度为 N 个,则其自由度 $Y=N-L-X-M$。优化的目标是:该速度场可使整个塑性变形区的上限功率 $\dot{w}'$ 取得极小值。

上限功率 $\dot{w}'$ 通常包括各个单元体的塑性变形功率 $\dot{w}_i^*$;各单元体之间的相对塑性剪切功率 $\dot{w}_i^*$(即各单元之间切向速度间断所消耗的功率);变形体与模具表面的摩擦功率 $\dot{w}_f$;除此之外尚有惯性功率 $\dot{w}_k$;变形体力面上消耗功率 $\dot{w}_p$;变形体内孔隙张合消耗功率 $\dot{w}_v$;和表面变化消耗功率 $\dot{w}_s$ 等。但在实际的塑性成形工艺中,力面上的力通常为零,且 $\dot{w}_p$、$\dot{w}_v$、$\dot{w}_s$ 在各单元中有正有负,数值也较小,故常忽略不计,故实际中上限功率 $\dot{w}^*$ 可写为

$$\dot{w}^* = \sum \dot{w}_i^* + \sum \dot{w}_s^* + \sum \dot{w}_f \tag{1}$$

各单元体的塑性变形功率 $\dot{w}_i^*$,利用 Levy-Mises 塑性增量理论,可以表示为应变速率 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 的函数,即有:

$$\dot{w}_i^* = \int \sigma_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^* \mathrm{d}V = \sqrt{2}K \int (\dot{\varepsilon}_{ij}^* \cdot \dot{\varepsilon}_{ij}^*)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}V \tag{2}$$

式中:K——材料的剪切屈服极限。

上式中的应变速度 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 则可根据该单元体的边界速度分

量及一个预向假定的速度场按照变形几何方程求出，即

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3}$$

在预先假定速度场时，要保证该速度场在边界上满足已确定或已优化的边界速度，要保证满足该单元体积不变条件，同时还应使计算尽量简便。

至于 $\dot{w}_i^*$ 和 $\dot{w}_f^*$，则在确定出各单元各自的速度场后，用各单元各自接触面上的切向速度 $V\tau_i$ 分别表示为

$$\dot{w}_i^* = \int k \cdot (V\tau_{i+1} - V\tau_i)\mathrm{d}s \tag{4}$$

$$\dot{w}_f^* = \int \tau(V\tau_{i+1} - V\tau_i)\mathrm{d}s \tag{5}$$

式中：τ—— 边界单元体与模具表面的摩擦力，

$$\tau = 0 \sim K$$

在上限元法中，所谓规范单元，即指预先将各种可能的变形单元体的速度场 u_i^*、应变速率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$、以及塑性变形功率 $\dot{w}_i^*$ 等都表示为该单元体的边界速度的函数，并写出相应的子程序。在求解具体的工艺问题时，只须划分单元，确定各边界速度分量，即可以迅速地求出该种情况下的上限功率 $\dot{w}^*$。改变待优化的速度分量，即可求出最小的上限功率 $\dot{w}^*$。此时相对应的速度场即认为是近似真实的速度场。当然单元划分愈细，其精度愈高。由于各函数表达式都已预先确定并写成子程序，所以大大地减少了求解具体工艺问题的计算量。

对于各种单元的速度场、体积不变表达式及其塑性变形功率的表达式等可参考有关的资料。

二、上限元法应用示例

上限元法的应用领域和研究对象是很广泛的，目前仍不断有新的研究成果报导，在此因篇幅所限，仅举几例如下：

1. 模拟坯-杆件的复合挤压过程

图 2 表示了平底凹模复合挤压的单元划分方案。图中虚线为单元分界线，ϕD 指正、反挤压的中性层，其径向的流动速

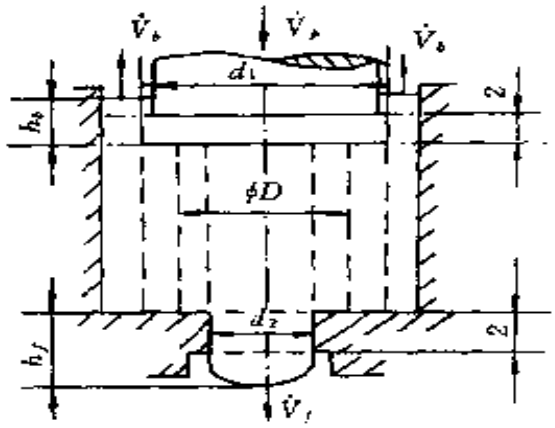


图 2　平底凹模复合挤压单元划分

度为零，其大小要经优化来确定。用上限元法对此工艺进行数值模拟，可以描述上、下出口处金属流出量的变化情况，描述成形力的变化情况，以及可以对成形参数、毛坯尺寸和模具参数进行优化。

2. 模拟非轴对称零件的挤压成形过程

图 3 所示为带有矩形横截面的直齿零件的复合挤压全过程中的单元划分情况，材料充满模具型腔的过程可以分为(a)～(d)四个阶段。用上限元法对此进行数值模拟，可以求出成形力的变化过程；金属材料的充齿过程；上、下出口处金属流

出量的变化和成形参数及模具参数的优化等。

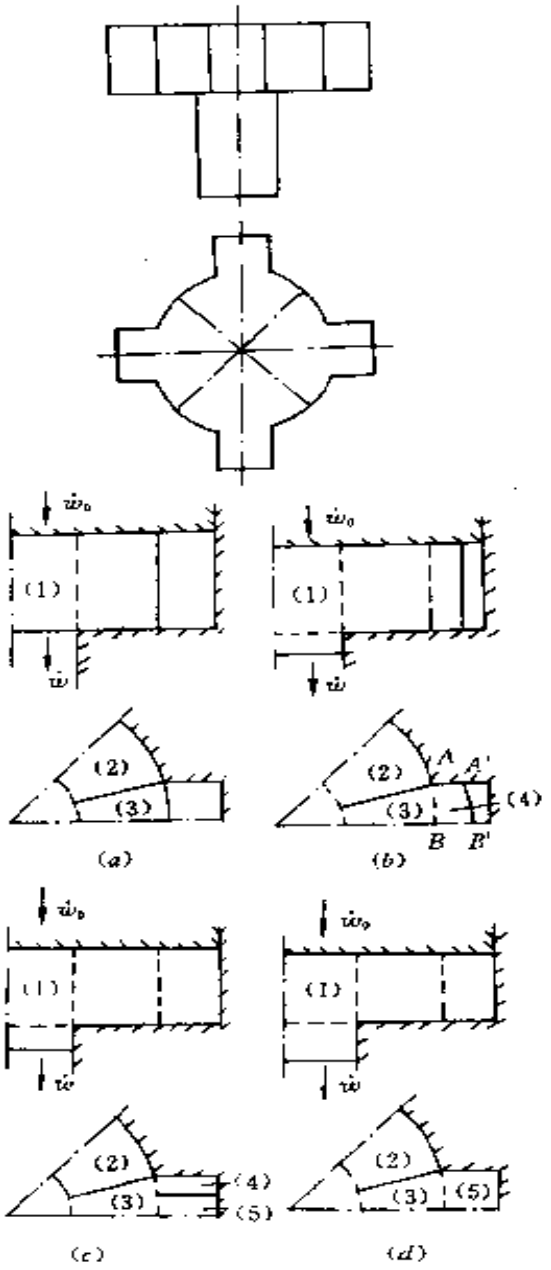


图 3　非轴对称零件的挤压上限元模拟

3. 模拟任何复杂形状的轴对称模锻工艺

对于图 4 所示各种复杂形状的轴对称模锻件，可以很方便地对模锻工艺进行正向数值模拟和反向数值模拟。

从初始的毛坯尺寸和模具参数，用上限元法进行一步步模拟，称为正向模拟。正向模拟可以观察整个模锻过程，模锻力的变化，以研究此时能否很好地充满模腔，以及进行模具强度校核。而从最终的模锻件的形状和尺寸，求出该瞬时的速度场，返回到这一瞬间前的中间模锻件的形状和尺寸，如此一步步返向模拟，则称之为返向模拟。利用反向模拟可以确定出最佳的坯料形状和尺寸。

这两种模拟方式，已得到试验室的科研验证，

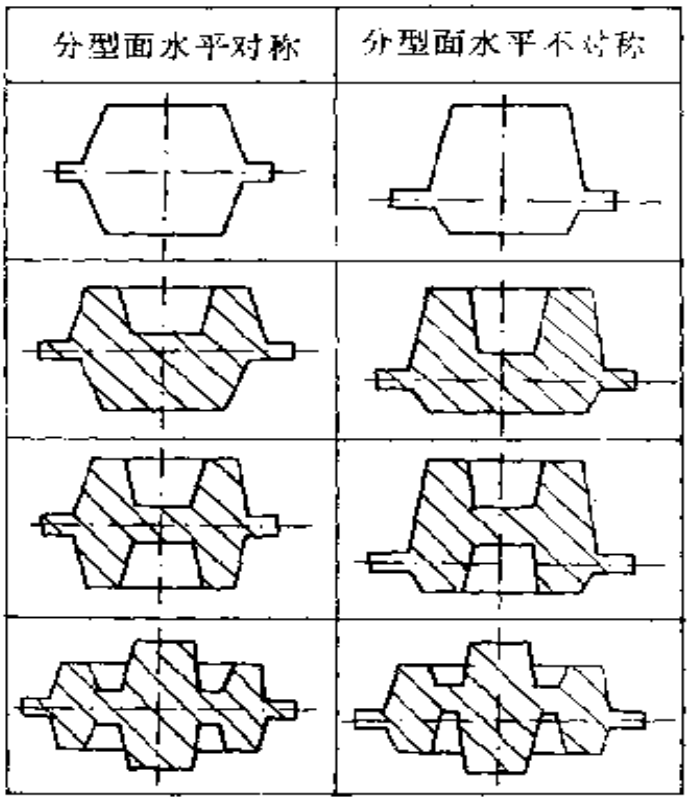


图 4　复杂形状的轴对称模锻件

有些已在生产中获得实际应用，取得了较大的经济效益。

总之，上限元法有着广阔的应用前景，许多技术问题正在进行深入的研究和推广应用。

屈服函数和极限分析中的间断解

熊慧而

（湖南大学工程力学系）

一、屈服条件

通常在介绍塑性材料的（初始）屈服条件时，一般是先从关于材料的力学性质的三个假设（初始各向同性、无包氏效应及屈服与静水应力无关），以及屈服曲面的外凸性，导出 π 平面上的屈服迹线的上、下界（两个正六边形），再对三个具体的屈服条件（Tresca、Mises 和双剪应力[1]）进行比较和评价。大多数教材只对前面两个常用的屈服条件进行比较和评价。实际上材料的屈服条件还与它的“剪拉比” $\lambda = \tau_s/\sigma_s$ 密切相关，这就解除了通常的三个屈服条件只包含一个材料常数，但确定材料常数的试验或常用的材料常数（σ_s 与 τ_s）却有两个的矛盾。计算表明，Tresca、Mises 和双剪应力三个屈服条件所对应的剪拉比分别为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} = 0.5\\ \lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\\ \lambda_3 &= \frac{2}{3} = 0.667\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

根据苏联在50年代所做的实验，常见金属材料的剪拉比大致可以分为三大类

$$\lambda=\frac{\tau_s}{\sigma_s}=\begin{cases}0.5\pm5\%\\0.58\pm5\%\\0.68-5\%\end{cases}$$

这正好是上述三个屈服条件的剪拉比。以 λ 作为屈服条件的识别参数，反映了材料的性质对屈服条件的影响；特定的材料，屈服条件是唯一的。显然，异于上述三个剪拉比值的材料，应该有其它形式的屈服条件。亦即屈服函数应该包含两个材料参数，这个函数已由谭继锦给出如下[2]

$$f_1\text{ 型}\quad f_1=\max[(4\eta^2-9)\tau_i^2+(\tau_k-\tau_j)^2]=\sigma_s^2,\quad 3/2\leqslant\eta\leqslant\sqrt{3} \tag{2}$$

$$f_2\text{ 型}\quad f_2=\max[\eta^2\tau_i^2+(4-\eta^2)(\tau_k-\tau_j)^2]=\sigma_s^2,\quad \sqrt{3}\leqslant\eta\leqslant2 \tag{3}$$

$$\tau_i=\frac{1}{2}(\sigma_j-\sigma_k)$$

式中 $i\neq j\neq k$，$i,j,k=1,2,3$，σ_i 表示主应力，$\eta=\sigma_s/\tau_s$。

例如设 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3$，则上式可写成

$$f_1\text{ 型}\quad (4\eta^2-9)\tau_1^2+(\tau_3-\tau_2)^2=\sigma_s^2,\ \tau_1\leqslant\tau_3 \tag{4}$$

$$(4\eta^2-9)\tau_3^2+(\tau_2-\tau_1)^2=\sigma_s^2,\ \tau_3\leqslant\tau_2,\quad 3/2\leqslant\eta\leqslant\sqrt{3} \tag{5}$$

$$f_2\text{ 型}\quad \eta^2\tau_2^2+(4-\eta^2)(\tau_1-\tau_3)^2=\sigma_s^2,\ \sqrt{3}\leqslant\eta\leqslant2 \tag{6}$$

熊慧而[3]比上文早一年给出了含两参数屈服函数的线性化表达式(十二边形)如下：

$$\{[(1+\alpha)\sigma_1-\sigma_2-\alpha\sigma_3]^2-4K^2\}\{[(1+\alpha)\sigma_2-\sigma_3-$$

$$\alpha\sigma_1]^2-4K^2\}\cdot\{[(1+\alpha)\sigma_3-\sigma_1-\alpha\sigma_2]^2-4K^2\}$$
$$\cdot\{[(1+\alpha)\sigma_3-\sigma_2-\alpha\sigma_1]^2-4K^2\}\cdot\{[(1+\alpha)\sigma_2-$$
$$\sigma_1-\alpha\sigma_3]^2-4K^2\}\cdot\{[(1+\alpha)\sigma_2-\sigma_3-\alpha\sigma_1]^2-4K^2\}$$
$$=0 \tag{7}$$

式中 α 和 K 为参数，由材料常数(例如 σ_s 和剪拉比 $\lambda=\tau_s/\sigma_s$)确定。在一般情况下，上式表示十二条直线，其内包络线(正十二边形)即为屈服迹线。当 k 值使 $\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{2}{3}$ 时，则分别成为 Tresca 及双剪应力六边形。

二、间断解

在极限分析定理中，要考虑间断解的影响。下面从数学分析出发，首先建立在区域 V 内存在间断面 Σ 时，任意力学量 Φ 的格林公式如下：

$$\int_V \Phi_{,i}\mathrm{d}V=\int_S \Phi n_i\mathrm{d}S-\int_\Sigma [\Phi]h_i\mathrm{d}S \tag{8}$$

式中 $\Phi_{,i}=\partial\Phi/\partial x_i$，$S$ 为区域 V 的边界，n_i 为 S 或间断面 Σ 的外法线。令

$$V=V^+ + V^-$$
$$S=S_+ + S_-$$

以及

$$[\Phi]=\Phi^+-\Phi^- \tag{9}$$

Φ^+ 与 Φ^- 为间断面两侧的 Φ 值(见图 1)。

1. 设 $\Phi=\sigma_{ij}^0$，σ_{ij}^0 为静力许可应力场，Σ 为应力间断面。代入式(8)得到

$$\int_v \sigma_{ij,j}^0\mathrm{d}V=\int_s \sigma_{ij}^0 n_j\mathrm{d}S-\int_\Sigma [\sigma_{ij}^0]n_j\mathrm{d}\Sigma \tag{10}$$

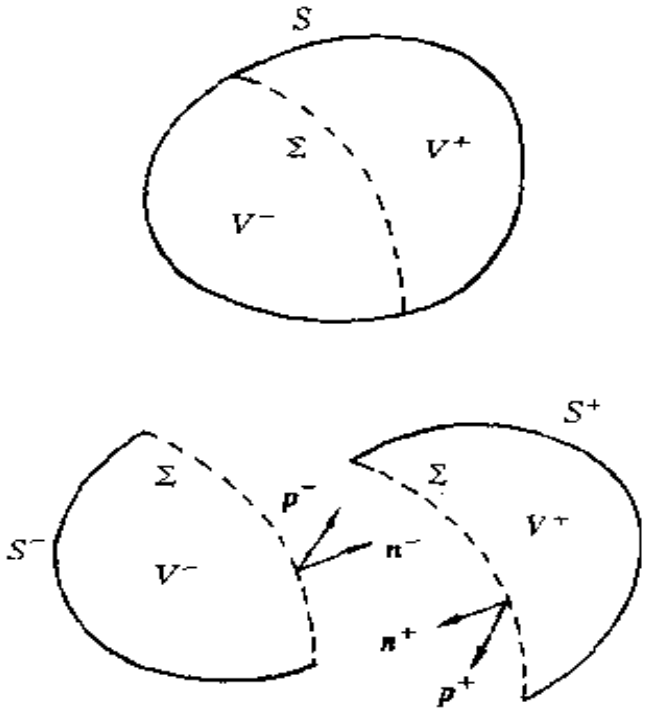


图 1

当不计体积力时有 $\sigma^0_{ij,j}=0$，于是上式变为

$$\int_S \sigma^0_{ij}n_j\mathrm{d}S = \int_\Sigma [\sigma^0_{ij}]n_j\mathrm{d}\Sigma \tag{11}$$

不计体积力时，上式左端为零(等价作用于边界上的外力合力为零)，于是得

$$\int_\Sigma [\sigma^0_{ij}]n_j\mathrm{d}\Sigma = 0 \tag{12}$$

根据局部性原理，上式对 Σ 的任意局部均成立，得到

$$[\sigma^0_{ij}]n_j = 0 \tag{13}$$

设 $\boldsymbol{n}^- = -\boldsymbol{n}^+ = \boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}$ 为单位外法线矢(图 1)，则根据式(9)，上式可写成

$$-\sigma_{ij}^{0+}n_j^+ - \sigma_{ij}^{0-}n_j^- = 0 \tag{14}$$

由图 1 可知，$\sigma_{ij}^{0+}n_j^+$ 和 $\sigma_{ij}^{0-}n_j^-$ 分别为 Σ 上两部分物体间的作用(应)力和反作用(应)力。因此式(14)正好表明了作用与反作用定律。式(14)乃应力间断面上的应力连续条件。

2. 令 $\Phi=v_j^*$，v_j^* 为运动许可速度场；表明 Σ 为速度间断面。代入式(8)得

$$\int_V v_{j,j}^* dV = \int_S v_j^* n_j dS - \int_\Sigma [v_j^*]n_j d\Sigma \tag{15}$$

在小变形条件下，$v_{j,j}^* = \dot{\varepsilon}_{11}^* + \dot{\varepsilon}_{22}^* + \dot{\varepsilon}_{33}^*$ 是体积应变变率，$\int_V v_{j,j}^* dV$ 是总的体积变化率。$v_j^* n_j = \boldsymbol{v}^* \boldsymbol{n}$，表示 $\boldsymbol{v}^*$ 在边界上某点 P 的法线方向的投影。于是 $(v_j^* n_j dS)$ 是边界上 P 点处体积变化率。积分 $\int_S v_j^* n_j dS$ 等于物体边界 S 所围区域的体积变化率。根据变形运动的连续性条件，两者应相等，于是由式(15)可得

$$\int_\Sigma [v_j^*]n_j d\Sigma = 0 \tag{16}$$

根据局部性原理，上式对 Σ 的任意局部均成立，于是得到

$$[v_i^*]n_i = 0 \tag{17}$$

上式表明速度在 Σ 的法线方向连续，即有

$$v_n^{*+} - v_n^{*-} = 0 \quad (\text{在 } \Sigma \text{ 上}) \tag{18}$$

上式为速度间断面上的速度连续条件。即在速度间断面上，法向速度连续，因此 V^- 与 V^+ 两部分只能沿 Σ 有相对滑动。

3. 令 $\Phi=\sigma_{ij}^0 v_i^*$，表明 Σ 为应力和速度的间断面，代入式(8)，得

$$\int_V (\sigma_{ij}^0 v_i^*)_{,j} dV$$

$$= \int_S (\sigma_{ij}^0 v_i^* n_j) \mathrm{d}S - \int_\Sigma [\sigma_{ij}^0 v_i^*] n_j \mathrm{d}\Sigma \tag{19}$$

在不计体积力及小变形的情况下，上式可简化为(在 S_u 上，$v_i^* = 0$)

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^* \mathrm{d}V + \int_\Sigma [\sigma_{ij}^0 v_i^*] n_j \mathrm{d}\Sigma = \int_{S_T} p_i^0 v_i^* \mathrm{d}S \tag{20}$$

式中

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2}(v_{i,j}^* + v_{j,i}^*), \quad p_i^0 = \sigma_{ij}^0 n_j$$

式(20)左侧第二项就是间断解对耗散功率的贡献。在应力连续条件(式 14)及物质连续条件(式 18)下，可以导出

$$[\sigma_{ij}^0 v_i^*] n_j = \sigma^{0+}_{ij} n_j v_i^{*+} - \sigma_{ij}^{0-} n_j v_i^{*-} \tag{21}$$

前已证明应力满足 $\sigma^{0+}_{ij} n_j = \sigma_{ij}^{0-} n_j$，所以上式可以写成

$$[\sigma_{ij}^0 v_i^*] n_j = \sigma_{ij}^{0+} [v_i^*] n_j = \sigma_{ij}^{0-} [v_i^*] n_j = p_i^0 [v_i^*] \tag{22}$$

从式(22)可见

(1) 只当速度间断时，间断面才对格林公式(或功能等式)有影响。

(2) 前已证明，v_i^* 只允许有切向(Σ 切平面内)间断，因此只有间断面上的剪应力才作功，式(22)可写为

$$[\sigma_{ij}^0 v_i^*] n_j = \tau^0 [v_\tau^*] \tag{23}$$

$[v_\tau^*]$为与 τ^0 平行的速度间断值。式(20)可写为

$$\int_V \sigma_{ij}^0 \dot{\varepsilon}_{ij}^* \mathrm{d}V + \int_\Sigma \tau^0 [v_\tau^*] \mathrm{d}\Sigma = \int_{S_T} \sigma_{ij}^0 v_i^* \mathrm{d}S \tag{24}$$

上式中的 τ^0 与 v_i^* 为两个互不相关的场。$\tau^0 \leqslant \tau_s$，τ^0 与 v_i^* 可以同号也可以异号。如果应力场与速度场是相互对应的，则 $\tau^0 = \tau_s$（τ_S 与 σ_S 的关系，与所采用的屈服条件有关），因为材料剪切屈服时，才允许沿 Σ 有相对滑动。此时 $\tau_S[v_t^*] > 0$，因而间断面的贡献为

$$\int_\Sigma \tau_S |[v_t^*]| \mathrm{d}\Sigma \tag{25}$$

于是用以计算载荷系数上限 λ^* 的功能等式变为

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* \mathrm{d}V + \int_\Sigma \tau_S |[v_t^*]| \mathrm{d}\Sigma = \lambda^* \int_{S_T} \overline{p}_i v_i^* \mathrm{d}S \tag{26}$$

式中 $\overline{p}_i$ 为基准载荷（面力），是给定值。

参 考 文 献

[1] 俞茂铉．古典强度理论及其发展．力学与实践，1980 年第二期

[2] 谭继锦．金属材料屈服准则的统一形式．科学通报，1990 年第二期

[3] 熊慧而．金属材料屈服函数的注记．湖南大学学报，1989 年第二期

滑移线场理论一题的剖析

黄怡筠

（北京理工大学）

用于解平面应变问题的滑移线理论[1]，是塑性力学中颇具特色的一部分。对于某些专业有直接应用于工程的价值。在教学中，我们发现不少学生对下述两个有关基本概念的问题普遍理解不深。

1. 建立在理想刚塑性模型基础上的滑移线场理论并不能确定刚性区内应力分布，只能保证其应力不违反屈服条件，这样的解通常称为完全解[2]。一般说来，检验刚性区内应力是否违背屈服条件往往十分困难，这样，滑移线场只是一个运动许可的速度场（机动场）[3]，即在塑性区内满足了静力学条件（包括屈服条件）并能确定相应的速度场，但在刚性区内的应力状态是不确定的，不一定满足屈服不等式

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 \leqslant 4K^2 \qquad (1)$$

这就是说，滑移线场法通常只求得极限载荷的上限，而上限解并不是唯一的，所以应尽可能地正确画出各种不同的滑移线场，若相应得到不同的载荷值，应取其最小者。

2. 滑移线场的构造与塑性区及刚性区的选择有关[4]，因为刚性区内应力是不定的，这就给选择带来任意性。而学生在

解题时通常注意力只集中在塑性区，并且很自然地从力边界出发构造滑移线网，以致容易忽略在力边界周围区域有可能成为刚性区这一事实，结果，在该区域或者是构造不出合适的滑移线网，或者虽然构造出滑移场，但得到的是一个偏高的极限载荷上限解。

为了使学生真正掌握滑移线法求极限载荷的上限，我们设计了一道习题，并为此安排了一次课堂讨论，使学生能从该题中具体形象地了解用滑移线方法求解极限载荷的特点，并澄清了某些错误观点和模糊认识。下面介绍的这一习题：初看似较简单，实际包含颇多变化。

图 1 所示直角楔体，在 OA 上作用均布压力 p_y，在 OB 上作用均布压力 p_x，且 $OB=OA$，求在平面应变下，下列二种情况的极限载荷

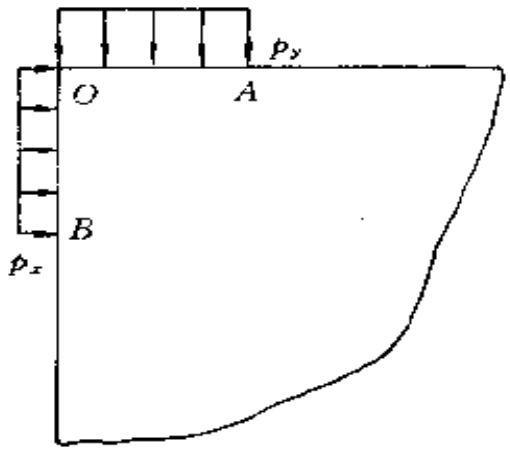


图 1

(1) $p_x=q$， $p_x:p_y=2:3$

(2) $p_x=q$， $p_x:p_y=1:1$

对于情况(1)，由图 2(a)所示的滑移线场，不难算得相应

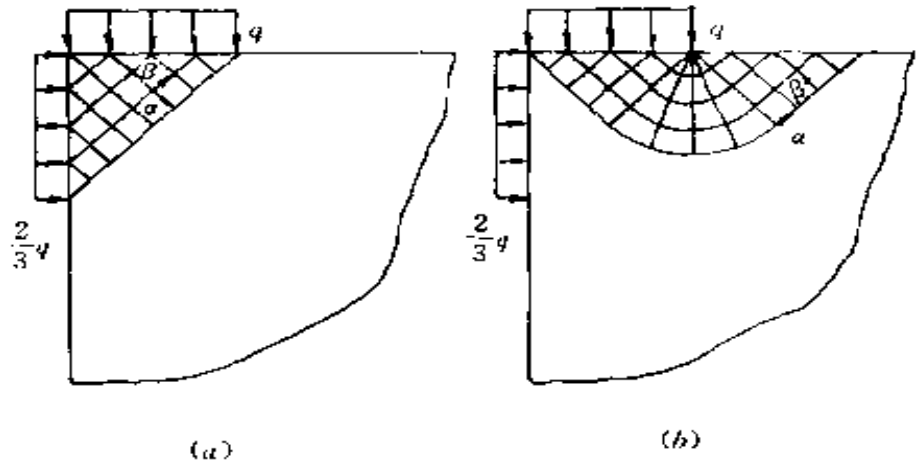


图 2

的极限载荷为

$$q_a = 6K \tag{2}$$

由图 2(b)所示的滑移线场，则可算得其极限载荷为

$$q_b = 2K\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = (2 + \pi)K \approx 5 \cdot 14K \tag{3}$$

显然有

$$q_b < q_a$$

应当指出，在构造上述二个滑移线场时，已考虑到它们所对应的速度场是可以确定的，但并未检验是否满足刚性区的条件，即式(1)。故所求得的是本问题的二个上限，按照选择准则[4]，应该选择图 2(b)所示的解，即取 $q^* = q_b$。

还可进一步讨论，当 p_x、p_y 之比值发生变化时，对于图 2(a)、(b)两种滑移线场，何者更接近真实情形，这完全取决于比值 m，记

$$m = \frac{p_x}{p_y} < 1$$

相应于图 2(*a*)所示的解，为

$$q_a = \frac{2K}{1-m} \tag{4}$$

相应于图 2(*b*)所示的解，为

$$q_b = (2+\pi)K \tag{5}$$

若令 $q_a = q_b$

则有 $m_0 = \frac{\pi}{\pi+2} \approx 0.611$

于是可得出以下结论：

$m > m_0$，应选择滑移线场如图 2(*a*)所示；

$m < m_0$，应选择滑移线场如图 2(*b*)；

$m = m_0$，两种滑移线场所对应的极限载荷相等。

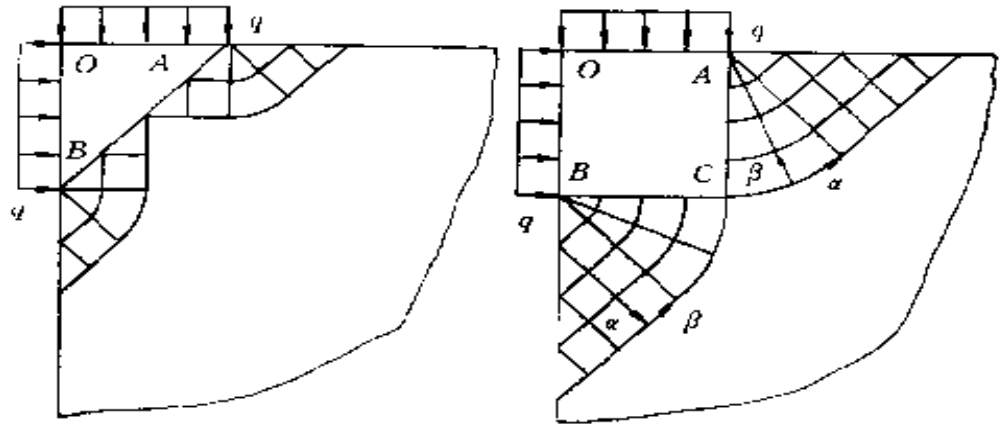
现在来讨论情况(2)，对图 1 所示结构，当 $p_x = p_y$ 时，由于 O 点附近是明显的三向等压区，可以想到在此附近存在刚性区是很自然的，但刚性区边界在何处，尚待分析试探。有同学认为，可取 ΔOAB 为刚性区，并作出如图 3(*a*)所示的滑移线网格。这显然是错误的，因为塑性区与刚性区的交界线必定是滑移线或者是滑移线的包络线[1]，而图中分界线 AB 不符合这一条件。

若构造图 3(*b*)所示刚性区为正方形 $OACB$ 的滑移线场，可计算得载荷值为

$$q = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)K \approx 3.571K \tag{6}$$

进一步分析可知，有相应的速度场，故这是一个上限解。

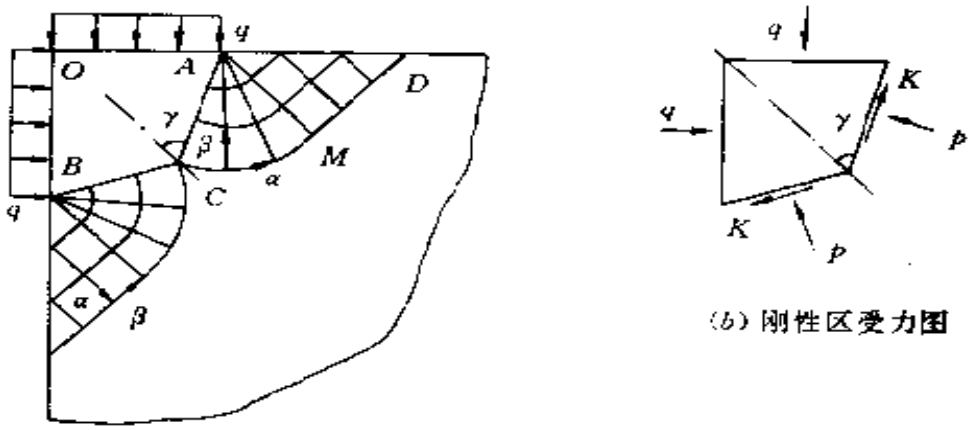
再考察构造图 4(*a*)所示的滑移线场，取刚性区为对称四



(a) 错误的滑移线场　　(b) 正确的滑移线场

图　3

边形 $OACB$，如图 4(b)所示。当 C 点沿 OC 线变化时，可以构造很多滑移线场，C 点为奇异点。图中角 γ 可在 $0\sim\frac{\pi}{2}$ 之间取



(a) 许可的滑移线场　　(b) 刚性区受力图

图　4

值。刚性区与塑性区分界线 AC、CB 为滑移线，其两侧作用着

剪应力 K 及正应力、即平均应力，以 p 表示。按照沿 OC 方向力平衡条件，可得

$$\frac{(p\sin\gamma + K\cos\gamma)}{\sin\gamma} = q$$

或

$$q = p + K\operatorname{ctg}\gamma \qquad (7)$$

由于对称性，可考察一半，如分析塑性区 $ACMD$。根据滑移线场可容易求得 AC 线上任一点处的平均应力为

$$p = (1 + 2\gamma)K$$

代入式(7)，则得

$$q = (1 + 2\gamma + \operatorname{ctg}\gamma)K \qquad (8)$$

调整 γ，使 q 取最小值，可令

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\gamma} = 0$$

得

$$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{4}$$

相应有

$$q = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)K = 3.571K$$

可见在 C 点沿 OC 线变化的各种滑移线场中，相应于最小极限载荷的正是图 3(b)所示的解。

在进行以上分析时，课堂上讨论气氛热烈，提出各种问题，如，塑性区与刚性区的分界上切向速度是否一定间断？为什么？等等；此外，还对其他形式的假想滑移线场是否合适作

广分析讨论.因篇幅所限,不再赘述。

滑移线场理论中基本概念较多,应着重掌握在求极限载荷时.如何抓住理想刚塑性模型的特点、灵活运用所学过的知识、正确构造各种可能的滑移线场、对获得最恰当的解答是十分重要的。本问题的讨论对深化这方面的认识起到了良好的作用。

参 考 文 献

[1] 徐秉业．塑性力学．高等教育出版社,1988,第六章

[2] 王仁、熊祝华、黄文彬．塑性力学基础．科学出版社,1984,279

[3] J. B. Martin. Plasticity: Fundamentals and General Results. The MIT Press, 1975, § 15.7

[4] L. M. Kachanov. Foundations of the theory of Plasticity, NHPC. 1971, § 40, § 38.5

掌握加卸载和中性变载的准确概念 正确认识滑移线的不可伸缩性

刘云平

（中国科大近代力学系）

一、加载卸载和中性变载的概念

加载、卸载和中性变载的概念并不深奥，但不动脑筋却不能透彻理解。初学时往往容易停留在表面的理解上，以致于说不清它们的准确含意到底是什么，尽管知道什么是加载卸载准则并能根据此准则判断变形状态是加载还是卸载，或是中性变载。这样碰到问题就会糊涂。比如低碳钢的简单拉伸，屈服前说的加载和屈服后说的加载是否是一个意思？在塑性流动阶段，变形继续发展而载荷并不增加，这是加载还是中性变载？可以想到，回答将不一致。这是因为对加载等概念的理解不同。

我们知道，在材料力学和弹性力学中就有加载和卸载，在力学试验中更是这样，这里的含意是指把载荷加到物体上或从物体上卸掉。现在在塑性力学中也讲加载和卸载，然而含意就不那样简单，不是可以顾名思义的。虽然在塑性力学中，加卸载也如前一样指的是载荷变化，但不是简单地仅指把载荷加上或卸下，还要看塑性变形增加与否。这就是说，在塑性力

学中，加载和卸载这两个词具有了新的内涵。它们和中性变载一样是表达特定概念的述语。对于加载、卸载和中性变载，我们可以这样表述：

物体进入屈服后，引起新的塑性变形的载荷（或应力）变化称为加载；使得返回弹性响应的载荷（或应力）变化称为卸载；介于这两者之间的载荷（或应力）变化称为中性变载。

由此可知，屈服面或加载面内的应力变化，或者单纯进行力学试验操作时的载荷变化，加载和卸载的概念仅指字面上的意义。而一旦进入屈服，要进行应力应变分析时，就要注意准确使用它们，以免发生混乱，引起误解。

二、理想塑性材料是否存在中性变载状态

很清楚，对于强化材料，当应力点沿着应力空间的加载面跑时，不会产生新的塑性变形，处于中性变载状态。而对于理想塑性材料，当应力点在屈服面上跑时，却会产生新的塑性变形，当属加载。理想塑性材料会不会出现中性变载的情况呢？我们往往看到理想塑性材料一旦屈服便发生塑性流动的现象，即载荷不增，而塑性变形仍在继续进行，若这时载荷变动（沿屈服面）就更会引起新的塑性变形，这怎么可能出现中性变载的情况？为搞清楚这一点就要分析理想塑性材料的变形特点。我们知道与屈服面相关联的流动法则 $d\varepsilon_{ij}^{p}=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}$，其中 $d\lambda\geqslant 0$，控制塑性应变增量的大小。对于理想塑性材料，$d\lambda$ 和材料本身性质无关，仅依赖于变形约束条件。若我们能控制变形，使 $d\lambda=0$，那就不会发生新的塑性变形，但仍让应力点在屈服面上移动，这就是中性变载的情况。为了在实验上做到

这一点，我们可用控制变形的试验机。首先要想到，和应力空间的屈服面相对应，在应变空间也有一个屈服面。只要是加载，发生了新的塑性变形，应变点就要跑到屈服面之外，只有中性变载，应变点才不离开屈服面，这是和应力空间的屈服面不同之处，因为我们知道，当应力点在屈服面上移动时，理想塑性材料是会发生新的塑性变形，处于加载状态的。做实验时，我们只要控制试验机，使应变点沿着应变空间的屈服面移动，那对应的应力点自然就跟着在应力空间的屈服面上移动，这时是不会出现新的塑性变形的，也就是说实现了中性变载。

综上所述，理想塑性材料存在中性变载状态。这既在道理上说得通，也能在实验中实现。

三、如何认识滑移线的不可伸缩性

我们知道，用滑移线法求解理想刚塑性平面应变问题的速度场时，由 Levy-Mises 关系和不可压假设得到下列基本方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\\&\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

这是双曲型方程，用处理这类方程的一般方法可得到沿滑移线方向的速度方程，即 Geiringer 方程。该方程体现了滑移线的不可伸缩性，即沿滑移线方向的线应变速率为零：$\dot{\varepsilon}_\alpha=0$，$\dot{\varepsilon}_\beta=0$。实际上这也是该速度方程对塑性区内质点运动进行控制的唯一条件。所以，我们也可从 $\dot{\varepsilon}_\alpha=0$ 和 $\dot{\varepsilon}_\beta=0$ 去推出 Geiringer 方程。这时第一步要做的就是证明 $\dot{\varepsilon}_\alpha=0$ 和 $\dot{\varepsilon}_\beta=0$。

进行这个工作时要考虑周到，我们往往因疏忽而做得不完善。试看下面的例子。

证一：

设 σ 为平均正应力，则 $S_\alpha=\sigma_\alpha-\sigma$，因为 $\sigma_\alpha=\sigma$，所以 $S_\alpha=0$，根据 $\dot{\varepsilon}_\alpha=\dot{\lambda}S_\alpha$，可得 $\dot{\varepsilon}_\alpha=0$。

同理，可得 $\dot{\varepsilon}_\beta=0$。

证二：

在塑性区域内任一点把 x 向取为 α 线方向，则这点的 $\sigma_x=\sigma_y=\sigma$，则方程(1)成为：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}=0\\ \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

由此解得 $\frac{\partial v_x}{\partial x}=\dot{\varepsilon}_x=0$，$\frac{\partial v_y}{\partial y}=\dot{\varepsilon}_y=0$，即在这点有 $\dot{\varepsilon}_\alpha=0$，$\dot{\varepsilon}_\beta=0$。因为这一点是任取的，所以在全场都有 $\dot{\varepsilon}_\alpha=0$，$\dot{\varepsilon}_\beta=0$。

上面两种证法的缺陷是没有考虑存在速度间断线的情况。若区域中存在速度间断线，上面证法是否行得通？我们先看第一种证法。在式子 $\dot{\varepsilon}_\alpha=\dot{\lambda}S_\alpha$ 中，$\dot{\lambda}\geqslant 0$，对理想塑性材料 $\dot{\lambda}$ 是不定的，若出现 $\dot{\lambda}\to\infty$，就不能由于 $S_\alpha=0$ 而立即推断 $\dot{\varepsilon}_\alpha=\dot{\lambda}S_\alpha=0$。实际上的确会有 $\dot{\lambda}$ 趋于无限大的情况出现。因为当 α 线是速度间断线时，那就有 $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}\to\infty$，而 $\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta}=\dot{\lambda}\tau_{\alpha\beta}=\dot{\lambda}\tau_s$，可知 $\dot{\lambda}\to\infty$。再看第二种证法。设 α 线是速度间断线，因已取 x 轴指向 α 线切向，所以 $\frac{\partial v_x}{\partial y}\to\infty$，显然 $\left|\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right|\to\infty$，而 $\tau_{xy}=\tau_s$，故尽管有 $\sigma_x-\sigma_y=0$，也不能立即得出方程(1)第一式右边

为零的结论。由此可知，上面两种证法在速度间断线上不成立，但当然不是说沿速度间断线 $\dot{\varepsilon}_\alpha=0,\dot{\varepsilon}_\beta=0$ 不成立。那该如何证呢？是否要补充论证速度间断线上的情况呢？这倒没有必要。因为出现在速度间断线上的问题并不影响命题的本质，这仅是表面上的麻烦，是由证明方法本身引起的。我们完全可以不理会它，只要把证法作些修改就可以了。

我们知道沿滑移线方向有 $\sigma_\alpha=\sigma_{\beta 2}(=\sigma)$，而 $S_\alpha=\sigma_\alpha-\sigma,S_\beta=\sigma_\beta-\sigma$，当然有 $S_\alpha=S_\beta$。根据 $\dot{\varepsilon}_\alpha=\lambda S_2,\dot{\varepsilon}_\beta=\lambda S_\beta$，就能得到 $\dot{\varepsilon}_\alpha=\dot{\varepsilon}_\beta$。再联系不可压假设 $\dot{\varepsilon}_\alpha+\dot{\varepsilon}_\beta=0$，从而推出 $\dot{\varepsilon}_\alpha=0,\dot{\varepsilon}_\beta=0$。这就证明了滑移线的不可伸缩性。可以看到，速度间断线的存在与否和证明过程无关。

我们把上面的叙述和物理意义联系起来。因为是平面应变问题，而 α、β 方向就是最大剪切应变率方向，若和这两方向垂直的方向是 z 向，所以必有 $\sigma_\alpha=\sigma_\beta=\sigma_z=\sigma$。就是说，沿 α、β、z 向取的单元体承受静水压力和纯剪应力的共同作用。因为理想塑性材料被认为是体积不可变的，又假设了材料是初始各向同性的，所以平均应力 σ 不引起单元体的线应变，而只有剪应力引起剪应变。就是说 α 线元和 β 线元的长短不会改变，只会改变相互间的夹角。由此表明，滑移线的不可伸缩性反映了理想刚塑性材料平面应变问题的变形特点。

安定分析概念的建立

程兆雄
（北京理工大学）

安定分析是塑性力学教学中难度较大的部分，如何用较少学时使学生尽快建立安定分析的基本概念是一个需要研究的问题，本文介绍我们在教学实践中的做法。

安定的概念可以从各个角度来建立，比如可以从残余应力角度阐述，也可以从塑性功角度阐述。但对于初学者，还是先建立循环载荷作用下可能产生的两种塑性破坏的概念较为自然。

结构在承受循环载荷时，有可能产生两种情况的塑性破坏。一种是在每一次循环中，结构会产生正负交替，即异号的塑性变形，在多次循环后，最终会导致局部的断裂，这实际上就是强度分析中的大变形低循环破坏，在塑性力学教科书中一般称为交变塑流破坏或塑性循环破坏，本文简称它为交塑破坏；另一种是在每一次循环中使结构某些部分产生同号的塑性变形，在多次循环后，这种同号的塑性变形会积累起来而造成结构失效，一般称为塑性积累破坏或增量破坏，本文简称它为积塑破坏。

于是，安定概念可以这样建立：结构既无交塑破坏也无积塑破坏即为安定。只要产生这两种破坏中的任一种，即为

不安定。

现在，问题便转为建立交塑破坏和积塑破坏这两个概念了。

在人类的认识史上，交塑破坏早已被发现，而积塑破坏则较晚才被认识。与之相对应，在教学中，我们发现学生接受积塑破坏这一概念要比交塑破坏困难。首先，学生对是否存在这种积塑形式的破坏是心存疑问的，在他们大脑中储存的各种经验或前导课程知识中，似乎找不到现成的积塑破坏的工程实例。其次，即使通过讲课，大部分学生认可了教科书上的例题，因而也承认积塑破坏是存在的，但若要求他们自己再举出一个例子，却普遍显露出困惑与惘然，觉得无从下手。这反映出，学生们常常把例题看成是纯粹人为杜撰编造的，因而并没有在实际上承认积塑破坏是一种工程中普遍存在的破坏形式。

选择好合适的典型例题，对于初学者能否在一堂课的时间内建立起新遇到的概念是至关重要的。所有的教科书都力图通过典型例题帮助学生建立新概念。为了突出新概念，例题应简捷直观、数值规整、计算简单、容易举一反三，且应避免让繁复的数学形式冲淡初学者对概念本身的注意。可以看到，各类教材关于积塑破坏的例题，也是依据上述思想设置的[1,5]，有的举梁为例题，也有的举刚架、桁架等为例题。但在教学中，我们发现这些例题仍嫌繁复，以[1]为例，计算量就较大，且 $V = N_0 + II/\sqrt{3}$ 这一条件（详见[1]618 页）有不够自然之感。为了克服上述不足，我们另行设计了一个例题，在教学中使用时收到了较好的效果，简单介绍如下：

一次静不定结构如图 1 所示，图中 AB、BC、AD、BD、CD

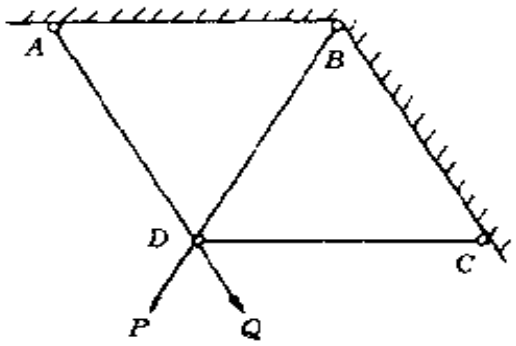


图 1

的长度均相等，AD、BD、CD 三杆由相同材料制成，截面积相同，材料为弹性-理想塑性，杆内轴力分别用 N_A，N_B，N_C 表示，其值在 $\pm N_s$ 之间时为弹性状态，达 $\pm N_s$ 则产生塑性流动。

在图 1 所示外载荷 P、Q 的联合作用下，可通过计算（过程略）得经历塑性变形后三杆的轴力为

$$\left.\begin{aligned} N_A &= \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}Q - a \\ N_B &= \frac{2}{3}P + \frac{1}{3}Q + a \\ N_C &= \frac{1}{3}P - \frac{1}{3}Q - a \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中 a 为标志经历塑性变形后杆内残余力的参数。如果结构已经历过塑性变形，再撤除外载即 $P = Q = 0$，则有

$$\left.\begin{aligned} N_A &= -a \\ N_B &= a \\ N_C &= -a \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

只有再发生新的塑性变形后，参数 a 的值才会发生变化。

今令 P、Q 的变化受下式的制约

$$P+Q=1.5N_s \tag{3}$$

上式表明 P、Q 之间仅有一个独立且二者存在此消彼长的关系，若 P 在 0 与 $1.5N_s$ 之间作周期性变化，则 Q 在 $1.5N_s$ 与 0 之间作周期性变化。今取 P 为独立参数，将式(3)代入式(1)得

$$\left.\begin{aligned} N_A &= -\frac{1}{3}P - a + N_s \\ N_B &= \frac{1}{3}P + a + \frac{1}{2}N_s \\ N_C &= \frac{2}{3}P - a - \frac{1}{2}N_s \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

因材料为弹性-理想塑性，则各杆内轴力只允许取在 $\pm N_s$ 之间，即下列边界线方程是轴力的界定线

$$\left.\begin{aligned} N_A &= N_s \quad 即 \quad P+3a=0 \\ N_A &= -N_s \quad 即 \quad P+3a=6N_s \\ N_B &= N_s \quad 即 \quad P+3a=1.5N_s \\ N_B &= -N_s \quad 即 \quad P+3a=-4.5N_s \\ N_C &= N_s \quad 即 \quad 4P-6a=9N_s \\ N_C &= -N_s \quad 即 \quad 4P-6a=-3N_s \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

为了更形象地进行讨论，建立图 2 所示的 a P 平面直角坐标系是方便的，图中纵横坐标的刻度单位均为 N_s，平面内任一点称为状态点，状态点的位置确定，则 a、P 的值就确定，代入式(4)便得各杆轴力。式(5)在图 2 所示平面内为 5 条直线，它们已被画出在图 2 上了。状态点将不允许超出此 6 条直线所界定的区域，而实际上可能的状态点只在中间那个由 $N_A=N_s$、$N_B=N_s$、$N_C=\pm N_s$ 所界定的小平行四边形区域内。我们

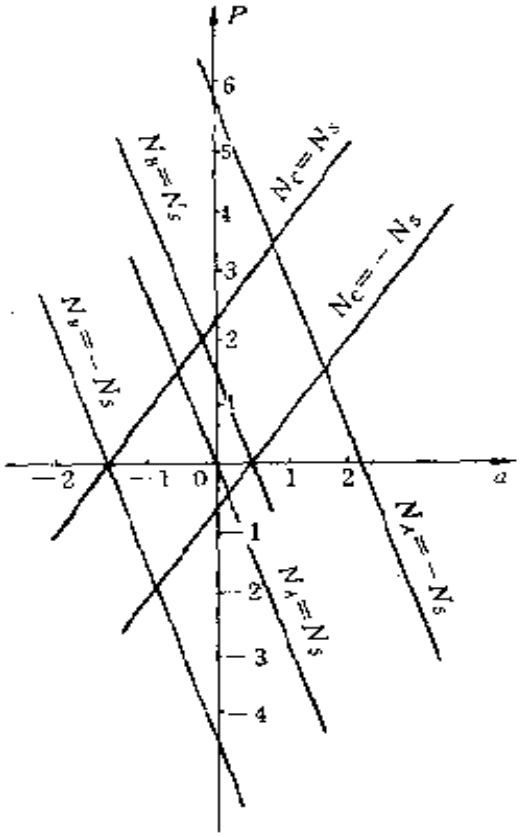


图 2

将这一区域重画出在图 3 中，只是将比例尺放大了 4 倍。现在在图 3 上进行讨论。先使 P 从原点出发，即开始数值为零，然后增加到 $1.5N_s$，这相当于图中 $o\bar{a}$ 路径，$\bar{a}$ 点已落在直线 $N_B=N_s$ 上了，即 BD 杆开始拉伸屈服，此时继续增加 P 直到$1.8N_s$，状态点将沿路径 $\bar{a}\bar{b}$ 变化，此阶段 BD 杆内将产生拉伸塑性变形，到达 $\bar{b}$ 点后，P 开始卸载，状态点将沿虚线 bc 运动，到达 $\bar{c}$ 点时，P 的值为 $0.3N_s$，此时 AD 杆开始拉伸屈服，当 P 继续下降时，（此时 Q 在继续上升）AD 杆内产生拉伸塑性变形，当 P 为零，状态点回到原点，这就完成了一个加载循环。

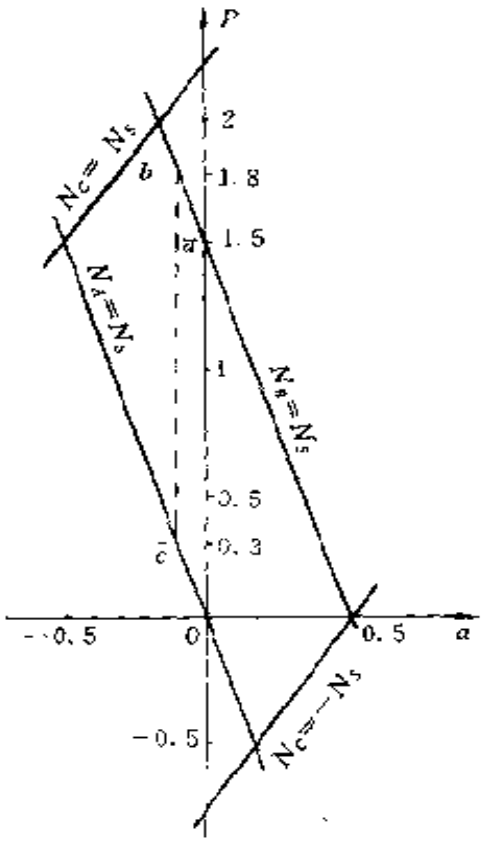


图 3

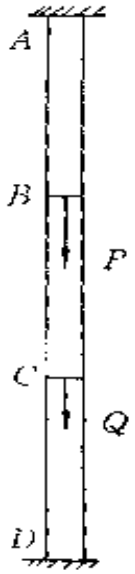


图 4

若 P 在 $0\rightarrow 1.8N_s\rightarrow 0$ 之间反复循环加载，则在每次循环中，经 $\overline{a}\,\overline{b}$ 段，BD 杆就产生新的塑性变形，经过 $\overline{C}D$ 段，AD 杆就产生新的塑性变形，而且这些塑性变形均为正值，也就是说拉伸塑性变形在不断累积，显然，结构最终必然会因变形过大而失效，这就是积塑破坏。

将此例题与[2]中的例题比较可以看出在结构模型、加载方式、数值运算三方面都显得简明。而且即使不进行具体运算，也很容易直观地想象出当 P、Q 交替变化时，BD、AD 两杆将交替地发生拉伸塑性变形，D 点的垂直位移在不断增加

这一事实，因而本例题也就易为初学者理解和接受。

顺便指出，交塑破坏和静载极限破坏的例题也可采用图1的桁架结构来设置，只需将载荷作适当改变便可。

后记：

本文系在全国塑性力学教学经验交流会上宣读论文的部分内容。会议期间西北工业大学诸德培教授向笔者介绍了他讲授安定分析时所设计的一道单根直杆例题，十分简洁，今据笔者理解简介于下：

两端固定直杆如图4所示，$AB=BC=CD$，令 P、Q 受下式制约：

$$P+Q=1.5N_s$$

则当载荷在一定范围内作循环变化时，如 P 从 $0\rightarrow 1.5N_s\rightarrow 0$，每次循环均将使直杆的 AB 段产生拉伸塑性变形，CD 段产生压缩塑性变形，BC 段虽无塑性变形却有向下的位移，多次循环后造成积塑破坏。

参 考 文 献

[1] J. B. Martin. Plasticity: Fundamentals and General Results. The MIT Press, 1975. 647—651

[2] 熊祝华，洪善桃. 塑性力学. 上海科学技术出版社，1984. 178—183

[3] 王仁，熊祝华，黄文彬. 塑性力学基础. 科学出版社，1987. 68—79，472—476

[4] 王慈年，马晓仁，蒋璐. 工程塑性力学. 高等教育出版社，1983. 216—224

[5] 余同希. 塑性力学. 高等教育出版社，1989. 39—44，241—246

加权余量法在塑性力学中的应用

刘福林

（辽宁大学）

加权余量法是求解微分方程或积分方程近似解的一种数值方法[1]。近几年来，国内一些同志已开始逐渐将该法应用于塑性理论中的塑性极限分析[2]、粘塑性分析[3]、弹塑性分析[4]及塑性动力响应[5]等问题中，取得了许多有价值的研究成果，这不仅扩大了加权余量法的应用范围，而且也促进了塑性理论的不断发展。因此，在塑性力学教学中，适当地介绍加权余量法在塑性力学中的应用及最新的研究成果是非常必要的，是提高塑性力学的教学质量和培养学生探索创新能力的重要途径之一。近年来，我们在讲授塑性力学及相关的选修课时，除了按照教学计划讲清基本概念、基本定律及基本方法之外，还结合有关内容介绍了加权余量法的应用及国内一些学者的最新科研成果。限于篇幅，下面仅举两例来说明应用加权余量法进行塑性力学问题研究的分析过程、步骤及特点、优点。

[例 1] 用加权余量法求环板在 Mises 屈服条件下的极限荷载[6]。对于环板的塑性极限分析问题，一般都选用最大弯矩极限条件，这和实际情况差别较大。若选用 Tresca 或 Mises 屈服条件，则计算相当困难。在[6]中徐秉业教授等人应用加权余量法求出了环板在 Mises 屈服条件和不同支承条件下的

极限荷载的近似值。下面，以图 1 所示的内、外边简支环板问题来说明求解过程。

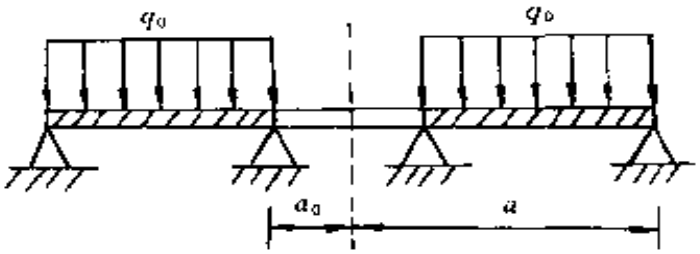


图 1

对于图 1 所示的环板，其平衡方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rM_r) - M_\theta = rQ_r = a_0Q_r(a_0) - \frac{1}{2}q_0(r^2 - a_0^2) \tag{1}$$

边界条件为

$$M_r(a_0) = M_r(a) = 0 \tag{2}$$

剪力平衡条件为

$$a_0Q_r(a_0) - aQ_r(a) = \frac{1}{2}q_0(a^2 - a_0^2) \tag{3}$$

Misces 屈服条件为

$$M_r^2 - M_rM_\theta + M_\theta^2 = M_p^2 \tag{4}$$

设试函数为

$$\begin{cases} \tilde{M}_r = \dfrac{4M_p}{(a - a_0)^2}(a - r)(r - a_0) \\ \tilde{M}_\theta = k_1 + \dfrac{1}{2}q_0(a + a_0)r - k_2(a + a_0)r \\ \qquad - \dfrac{4M_p}{(a - a_0)^2}(a + a_0)r + k_2r^2 \end{cases} \tag{5}$$

显然，(5)式满足边界条件(2)式和剪力平衡条件(3)式。先将

试函数(5)式代入平衡方程(1)式中的左边等式，并令 $r=a_0$ 求出 $a_0Q_r(a_0)$。再将试函数(5)式分别代入平衡方程(1)式和屈服条件(4)式，得余量：

$$R_1=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\tilde{M}_r)-\tilde{M}_\theta-a_0Q_r(a_0)+\frac{1}{2}q_0(r^2-a_0^2) \tag{6}$$

$$R_2=\tilde{M}_r^2-\tilde{M}_r\tilde{M}_\theta+\tilde{M}_\theta^2-M_p^2 \tag{7}$$

应用加权余量法的子域法[11]，消除余量：

$$\int_0^{2\pi}\int_{a0}^{a}R_1\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=0 \tag{8}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{a0}^{a}R_2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=0 \tag{9}$$

由上述二式消去 k_2，得

$$\begin{aligned}&5(1+\beta^2+\beta^4)(1-\beta)^4P^2M_p^2+30(1+\beta^2)\\&(1-\beta)^3k_1PM_p-4(14-51\beta+14\beta^2-51\beta^3\\&+14\beta^4)(1-\beta)^2PM_p^2+60(1-\beta)^4k_1^2\\&-120(1-\beta)^2(1-6\beta+\beta^2)k_1M_p+4(41\\&-201\beta+566\beta^2-204\beta^3+41\beta^4)M_p^2=0\end{aligned} \tag{10}$$

式中

$$P=a^2q_0/M_p,\ \beta=a_0/a \tag{11}$$

在(10)式中对 k_1 取极值，由此求出 k_1。然后再将 k_1 代回(10)式并消去 M_p^2。至此当给出不同的比值 β 时就可求出相应的无量纲极限荷载 P 的值，其结果如[6]中所示。由此例题看出，应用加权余量法求极限荷载问题，具有概念清晰、方法简单、能求解非线性问题、不需对屈服条件作简化等优点，并且所求出的近似解为较好的下限解。

[例 2]用加权余量法分析阻尼介质对圆柱壳塑性动力响

应的影响。设圆柱壳两端固支，长为 $2L$，半径为 a、厚度为 $2h$，如图 2 所示。材料为理想刚塑性的，并采用柱壳的弱作用屈服

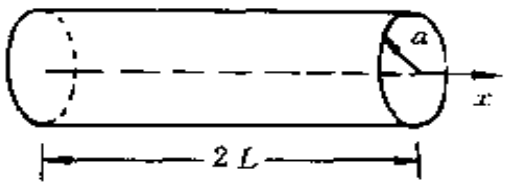


图 2

条件。壳体在 $t=0$ 时刻开始承受均布冲击荷载 $p(t)=p$ 的作用，作用时间为 t_0，并考虑阻尼介质的影响，阻尼参数为 α。取壳体左端面处为坐标 x 的原点，由于对称，只取壳体的左半部分为研究对象。当 P 稍大于 P_c 时，壳体开始运动。对于短壳和中载[7]，壳体的运动可分为如下两个阶段：

1. 第一阶段($0\leqslant\tau\leqslant 1$)

运动方程：$$\frac{m''}{2c^2}+n+P=\ddot{W}+r\dot{W} \tag{12}$$

屈服条件：$$n=-1 \tag{13}$$

广义应变率：$$\dot{W}''=0 \tag{14}$$

边界条件：

$$\begin{cases} m(0,\tau)=-1,\ m(1,\tau)=1 & (15)\\ m'(1,\tau)=0 \quad (\text{对称性}) & (16)\\ W(0,\tau)=0,\ \dot{W}(0,\tau)=0 & (17) \end{cases}$$

初始条件：$$W(y,0)=\dot{W}(y,0)=0 \tag{18}$$

符号说明：$m=M_x/M_0$，$n=N_\varphi/N_0$，$y=x/L$，$\tau=t/t_0$，$P=p_a/N_0$，$C=L/\sqrt{ah}$，$W=(\pi a w)/(N_0 t_0^2)$，$r=\alpha t_0/\mu$，$P_0=1$

$+2/C^2$ 为静态极限荷载，其余符号的意义见[7]。

设试函数为

$$\begin{cases} \tilde{m} = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 & (19) \\ \tilde{W} = a_4 y & (20) \end{cases}$$

显然，(20)式已满足(14)、(17)式，但(19)式还不一定满足边界条件(15)、(16)式。先让试函数(19)式满足边界条件(15)、(16)式，即 $\tilde{m}(0,\tau)=-1$，$\tilde{m}(1,\tau)=1$，$\tilde{m}'(1,\tau)=0$，由此得 $a_0=-1$、$a_1=4+a_3$、$a_2=-2(1+a_3)$。于是，(19)式已变为

$$\tilde{m} = -1 + (4 + a_3)y - 2(1 + a_3)y^2 + a_3 y^3 \quad (21)$$

将试函数(20)、(21)式及屈服条件(13)式代入(12)式，并注意到 $\dot{\tilde{W}}=\dot{\tilde{W}}=\dot{a}_4 y$、$\ddot{\tilde{W}}=\ddot{\tilde{W}}=\ddot{a}_4 y$，得余量：

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\tilde{m}''}{2C^2} - 1 + P - (\ddot{\tilde{W}} + r\dot{\tilde{W}}) \\ &= \frac{1}{C^2}[-2 + (3y-2)a_3] + (P-1) - a_5 y \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $a_5=\ddot{a}_4+r\dot{a}_4$。

应用最小二乘法消除余量[11]：

$$\int_0^1 R_1 \frac{\partial R_1}{\partial a_3} dy = 0: \quad a_3 = \frac{C^2}{2}(P-1) - 1 \quad (23)$$

$$\int_0^1 R_1 \frac{\partial R_1}{\partial a_5} dy = 0: \quad a_5 = \ddot{a}_4 + r\dot{a}_4 = \frac{3}{C^2}\left[\frac{C^2}{2}(P-1) - 1\right] \quad (24)$$

由初始条件(18)式和试函数(20)得 $a_4(\tau)$ 的初始条件为 $a_4(0)=0$、$\dot{a}_4(0)=0$，由此与(24)式求出 $a_4(\tau)$ 的具体表达式为

$$a_4=\frac{3}{C^2}\left[-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}e^{-r}+\frac{\tau}{r}\right]\left[\frac{C^2}{2}(P-1)-1\right] \tag{25}$$

将 a_3、a_4 代回试函数(20)、(21)式，得壳体第一阶段运动的塑性动力响应：

$$\begin{cases} m=-1+\left[3+\dfrac{C^2}{2}(P-1)\right]y-C^2(P-1)y^2 \\ \qquad +\left[\dfrac{C^2}{2}(P-1)-1\right]y^3 \\ n=-1 \qquad\qquad 0\leqslant\tau\leqslant 1 \\ W=\dfrac{3}{C^2r^2}(-1+e^{-r}+r\tau)\left[\dfrac{C^2}{2}(P-1)-1\right]y \end{cases} \tag{26}$$

2. 第二阶段($1\leqslant\tau\leqslant\tau_f$)

当 $\tau=1$ 时荷载卸去，壳体进入第二阶段运动。由于考虑短壳和中载，该阶段的塑性格式与第一阶段相同，边界条件也相同，只是运动方程和初始条件不同。

运动方程：$\dfrac{m''}{2C^2}+n=\ddot{W}+r\dot{W}$ (27)

初始条件：

$$\begin{cases} W(y,1)=\dfrac{3}{C^2r^2}(-1+e^{-r}+r) \\ \qquad\qquad \times\left[\dfrac{C^2}{2}(P-1)-1\right]y \\ \dot{W}(y,1)=\dfrac{3}{C^2r}(1-e^{-r}) \\ \qquad\qquad \times\left[\dfrac{C^2}{2}(P-1)-1\right]y \end{cases} \tag{28}$$

仍设(20)、(21)式为试函数，将其代入(27)式，得余量：

$$R_2=\frac{1}{C^2}\left[-2+(3y-2)a_3\right]\quad 1-a_3y \tag{29}$$

应用最小二乘法消除余量：

$$\int_0^1 R_2 \frac{\partial R_2}{\partial a_3} dy = 0; \quad a_3 = -\left(1 + \frac{C^2}{2}\right) \tag{30}$$

$$\int_0^1 R_2 \frac{\partial R_2}{\partial a_5} dy = 0; \quad a_5 = \ddot{a}_4 + r\dot{a}_4 = -\frac{3}{C^2}\left(1 + \frac{C^2}{2}\right) \tag{31}$$

由初始条件(28)式及试函数(20)式得 $a_4(\tau)$ 的初始条件 $a_4(1)$、$\dot{a}_4(1)$，进而由(31)式求出 a_4 的表达式为

$$a_4 = \frac{3P_0}{2r^2}\{\overline{P}[e^{-r} - e^{-r(\tau-1)} + r] - (-1 + e^{-r\tau} + r\tau)\} \tag{32}$$

式中 $\overline{P} = P/P_0$，且 $3\left[\frac{c^2}{2}(P-1)-1\right]/c^2 = 3P_0(\overline{P}-1)/2$，$3\left(1+\frac{c^2}{2}\right)/c^2 = 3P_0/2$。将 a_4、a_3 代回(20)、(21)式，得

$$\begin{cases} m = -1 + \left(3 - \frac{c^2}{2}\right)y + c^2y^2 - \left(1 + \frac{c^2}{2}\right)y^3 \\ n = -1 \qquad\qquad 1 \leqslant \tau \leqslant \tau_f \\ W = \frac{3P_0}{2r^2}\{\overline{P}[e^{-r} - e^{-r(\tau-1)} + r] - (-1 + e^{-r\tau} + r\tau)\}y \\ \dot{W} = \frac{3P_0}{2r}\{\overline{P}[e^{-r(\tau-1)} - e^{-r\tau}] - (1 - e^{-r\tau})\}y \end{cases} \tag{33}$$

在(33)式中令 $\dot{W}(y,\tau_f)=0$ 得壳体停止运动的时间

$$\tau_f = \frac{1}{r}\ln[1 + \overline{P}(e^r - 1)] \tag{34}$$

由讨论可知：上述结果适合于短壳和中载情况。式(26)、(33)、(34)的结果与[5]中一致([5]中应用拉氏变换和加权余量法的综合分析法)。通过此例主要说明应用加权余量法分析塑性

动力响应问题的过程及其特点：概念清晰、简单、规律性强，便于求解复杂问题和非线性问题。限于篇幅，本文只举两例来说明加权余量法在塑生力学中的应用，关于该法在塑性力学中其它方面的应用，有兴趣者可直接参阅有关的文献。

参 考 文 献

[1] 徐次达. 固体力学加权残值法. 同济大学出版社，1987

[2] 唐俊才，熊树林，徐秉业. 计算结构及其应用. 1(1986)，11

[3] 宋军，徐秉业. 计算结构力学及其应用. 2(1987)，35

[4] 陈学潮. 第一届全国解析与数值结合法论文集. 湖南大学出版社，1989，499

[5] 刘福林. 力学与实践. 1(1990)，46

[6] 吴向，徐秉业. 力学学报. 增刊(1989)，125

[7] 杨桂通，熊祝华. 塑性动力学. 清华大学出版社，1982

介绍一种计算结构初位移的方法——单位载荷法

杜森田

（吉林工业大学）

在几年来的教学中，为了进一步熟悉并掌握广义力、广义位移、广义应力、广义应变以及运动可能的应变场、静力可能的应力场等概念，本人曾介绍一种单位载荷法，用以计算由初应变所引起的结构的位移。这种方法比较简便，只需要计算一个简单的积分即可，但方法本身的导出和应用，要求人们在掌握上述力学概念时必须准确无误，来不得半点含混。

在某些工程结构中，往往由于构件的制造不准确、或者温度的变化、或者外载加到超过弹性极限之后，再把载荷全部卸掉等原因，使结构产生初始广义应变，令它为 δ_i^0。而结构由于初应变 δ_i^0 所引起的真实应变为

$$\delta_i = \delta_i^0 + \delta_i^e \tag{1}$$

其中 δ_i^e 的物理意义是：设 P_i 为由于 δ_i^0 的存在所引起的广义应力，它是自我平衡的应力场，而 δ_i^e 则是与 P_i 相对应的弹性应变，它们满足关系

$$\delta_i^e = B_{ij}P_j \tag{2}$$

显然，式(1)中的 δ_i 是运动可能的，式(2)中的 δ_i^e 却不一定是

运动可能的。

又设$\overline{P_i^0}$为与单位广义荷载对应的可能应力场，当然$\overline{P_i^0}$与该单位广义荷载满足平衡关系。应用虚功原理，有

$$\int_V \overline{P_i^0}\delta_i dV = 1 \times \xi \tag{3}$$

其中ξ为单位荷载作用处与之对应的、由于初应变δ_i^0所引起的广义位移。将式(1)代入式(3)，得到

$$\xi = \int_V \overline{P_i^0}\delta_i^0 dV + \int_V \overline{P_i^0}\delta_i dV \tag{4}$$

在一般情况下，由于$\overline{P_i^0}$并非原结构在单位荷载作用下的真实应力场，因而，它只要求对原结构来讲是静力可能的，此时可按原结构的静定基进行计算。在这种情况下，公式(4)中右侧两个积分都有较明确的物理意义。第一个积分表示静定基由于初应变所引起的位移，它将使原结构的某些约束遭到破坏，但不引起应力；第二个积分表示为恢复原结构的所有约束所引起的位移，一般说来它要引起应力。

假如$\overline{P_i^0}$是原结构在单位载荷作用下的真实应力场，那末式(4)可以化简。将式(2)代入式(4)右边的第二个积分，并注意到系数之间有下述关系

$$B_{ij} = B_{ji}$$

于是得

$$\int_V \overline{P_i^0}\delta_i dV = \int_V \overline{P_i^0}B_{ij}P_j dV = \int_V B_{ji}\,\overline{P_i^0}P_j dV = \int_V \overline{\delta_j}P_j dV \tag{5}$$

由于$\overline{\delta_j}$是原结构在单位荷载作用下的真实应变，因而是运动可能的，P_j又是自我平衡应力场，所以，利用虚功原理，式(5)应等于零。于是，式(4)变为

$$\xi = \int_V \overline{P_i^0}\delta_i \mathrm{d}V \tag{6}$$

这里应特别注意，$\overline{P_i^0}$为原结构在单位荷载作用下的真实广义应力。利用式(6)计算结构由于初应变所引起的位移，往往要比利用其他方法计算简便得多，因为它只需要计算一个比较简单的积分就可以了。之所以能够如此，其根本原因在于式(6)是以计算原结构在单位荷载作用下的真实应力场代替了计算原结构由于初应变所引起的应力场，从而使计算量大大减少。

实例：有一5杆的桁架如图1(*a*)所示，各杆材料相同，截面相等，尺寸已标于图上。设BD杆由于某种原因做短了0.01m，求B点的水平位移。

解：在图1(*a*)上B点处作用单位力$P=1$，方向如图所示。由此而引起各杆的内力$\overline{N_i^0}$值经计算后已示于图1(*a*)中。于是由公式(6)，得到B点的水平位移为

$$\xi = \frac{8}{9} \times (-0.01) = -0.00889(\mathrm{m})$$

其次，为应用公式(4)进行计算，以便与上述计算结果进行比较，需选取一静定基如图1(*c*)所示，据此计算$\overline{N_i^0}$，其结果已示于该静定基上。除此之外，还应计算由于尺寸误差所引起的各杆内力N_i，其结果也已示于图1(*b*)上，进而由虎克定律得到我们所需要的弹性变形。将上述各数值均代入(4)式中，并注意到$BD=5\mathrm{m}$，于是

$$\xi = \frac{5}{3} \times (-0.01) + \frac{5}{3} \times \frac{5}{1620} - \frac{4}{3} \times \left(-\frac{4}{2025}\right)$$
$$= -0.00889(\mathrm{m})$$

作为练习，在课下还留习题，用上述单位载荷法计算由温

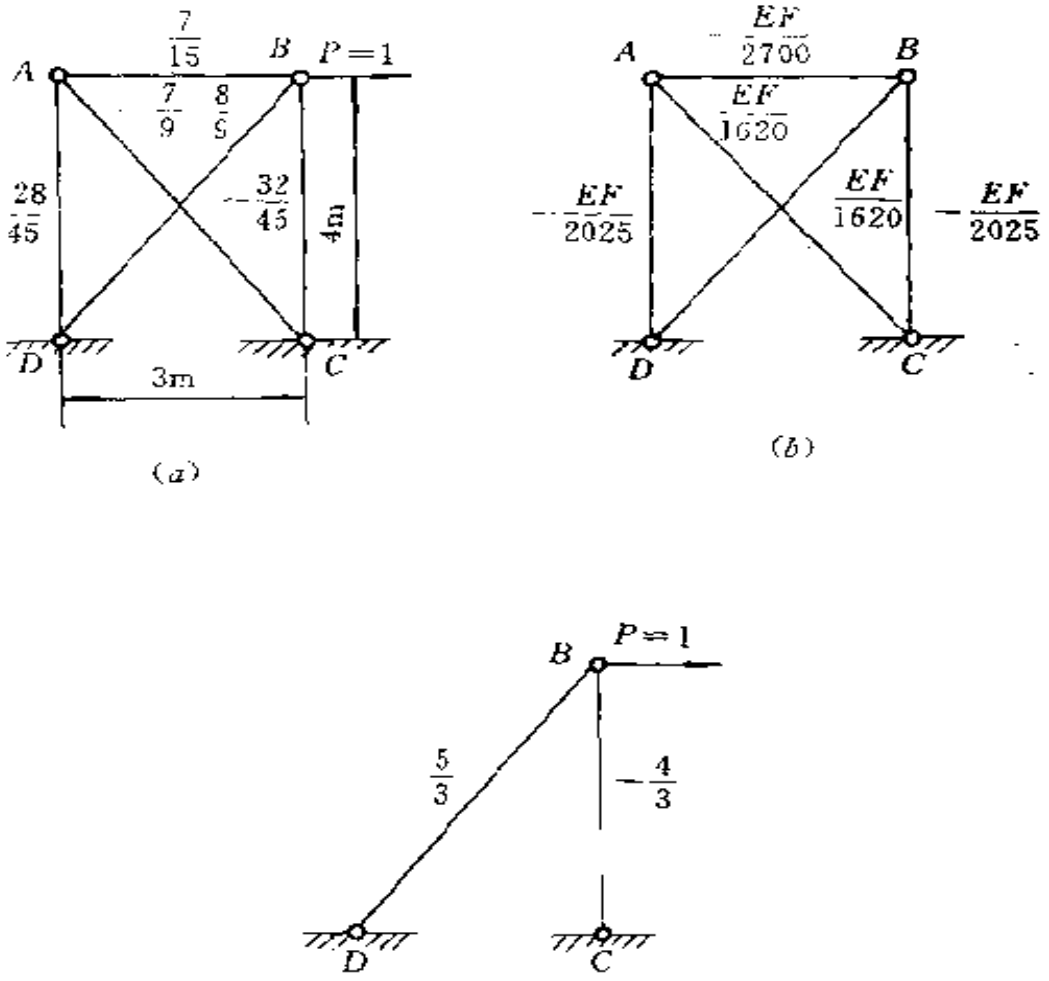


图 1

度变化所引起的结构某点的位移，以及当外载加到超过弹性极限之后，又全部卸掉，从而产生初应变，计算由该初应变所引起的结构某点的位移等等。经过这些教学环节，比较满意地达到了本文开头所说的目的，同学们在掌握那些基本概念时，再不感到枯燥乏味，据同学们反应，效果较好。

参 考 文 献

[1] 熊祝华，洪善桃. 塑性力学. 上海科技出版社，1984

[2] 徐秉业主编. 弹性与塑性力学—例题与习题. 机械工业出版社，1981

[3] Martin J. B. Plasticity: Fundamentals and General Results. MIT Press, 1975

结合塑性成形工艺剖析应力张量诸不变量的物理意义

王仲仁　张凯锋　张泽华

（哈尔滨工业大学）

一、引言

应力张量不变量是力学分析中的基本参量，对塑性力学显得尤其重要，初学者往往只能从数学公式上了解，对其物理意义则了解得不深入，不具体，本文结合塑性成形工艺剖析应力张量诸不变量的物理意义[1][2]，对加深理解将起到一定作用。

二、应力张量及应力偏量诸不变量的表达式

应力张量第一不变量为

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{1}$$

应力张量第二不变量为

$$\begin{aligned} I_2 &= -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_{zx}) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\ &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \end{aligned} \tag{2}$$

应力张量第三不变量为

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\tau_{xy}^2\sigma_z + \tau_{yz}^2\sigma_x + \tau_{zx}^2\sigma_y) \tag{3}$$

在主坐标系中应力偏量有以下表达式

第一不变量为：

$$J_1 = 0 \tag{4}$$

第二不变量为：

$$J_2 = -(\sigma'_1\sigma'_2 + \sigma'_2\sigma'_3 + \sigma'_3\sigma'_1) \tag{5}$$

第三不变量为：

$$J_3 = \sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3 \tag{6}$$

式中，σ'_1、σ'_2 及 σ'_3 分别代表应力偏量的主分量

$$\sigma'_1 = \sigma_1 - \sigma_m,\ \sigma'_2 = \sigma_2 - \sigma_m,\ \sigma'_3 = \sigma_3 - \sigma_m$$

应力张量第二不变量 I_2 与偏量第二不变量之间有下列关系：

$$J_2 = I_2 + \frac{1}{3}I_1^2 \tag{7}$$

应力张量第三不变量 I_3 与偏量第三不变量之间有下列关系：

$$J_3 = (2I_1^3 + 9I_1I_2 + 27I_3)/27 \tag{8}$$

由(7)及(8)式可见，式(1)～(6)中可以归结为三个独立的参量 I_1，J_2 及 J_3，因为知道这三个参量，I_2 及 I_3 也可相应求得，于是我们就重点分析 I_1，J_2 及 J_3 的物理意义。

三、I_1，J_2 及 J_3 与塑性加工的本质联系

略去繁杂的推证，可以将 I_1、J_2 及 J_3 对变形的影响归结为表 1～3[1,1]，表 3 中的 θ 见图 1 所示。

表 1　应力张量第一不变量对变形的影响

I_1 的数值	$I_1=0$	$I_1>0$	$I_1<0$
体积变化	$\Delta V=0$	$\Delta V>0$	$\Delta V<0$
对多孔材料的压实	无效果	反效果	效果好
塑性	反映材料自身塑性	偏低	偏高
作用在工具上单位力的绝对值	小	较大	大或很大

表 2　由 J_2(或 $I_2+I_1^2/3$)判定受力点处的状态

J_2 值	$J_2<\sigma_{s0}^2/3$	$J_2=\sigma_{s0}^2/3$	$J_2>\sigma_{s0}^2/3$
受应力点所处状态	弹性	初始屈服	加工硬化

表 3　由 J_3 判断应变类型

θ	0°	60°	30°	0°$<\theta<$30°	30°$<\theta<$60°
J_3	$2\sigma_s^3/27$	$-2\sigma_s^3/27$	0	$2\sigma_s^3/27>J_3>0$	$0>J_3>-2\sigma_s^3/27$
I_3	$\frac{1}{27}(2\sigma_s^3+I_1^3-3I_1\sigma_s^2)$	$\frac{1}{27}(-2\sigma_s^3+I_1^3-3I_1\sigma_s^2)$	$\frac{1}{27}(I_1^3-3I_1\sigma_s^2)$	$J_3>\frac{1}{27}(I_1^3-3I_1\sigma_s^2)$ $J_3<\frac{1}{27}(2\sigma_s^3+I_1^3-3I_1\sigma_s^2)$	$J_3>\frac{1}{27}(-2\sigma_s^3+I_1^3-3I_1\sigma_s^2)$ $J_3<\frac{1}{27}(I_1^3-3I_1\sigma_s^2)$

续表

θ	0°	60°	30°	0°< θ < 30°	30°<θ< 60°
应变类型	简单拉伸类 $d\varepsilon_2=d\varepsilon_3=\frac{-d\varepsilon_1}{2}$	简单压缩类 $d\varepsilon_1=d\varepsilon_3=\frac{-d\varepsilon_2}{2}$	平面应变类 $d\varepsilon_2=0$	拉伸类 $d\varepsilon_1>0$, $d\varepsilon_2<0$, $d\varepsilon_3<0$	压缩类 $d\varepsilon_1>0$, $d\varepsilon_2>0$, $d\varepsilon_3<0$
图中位置	S	T	R	RS 之间	RT 之间

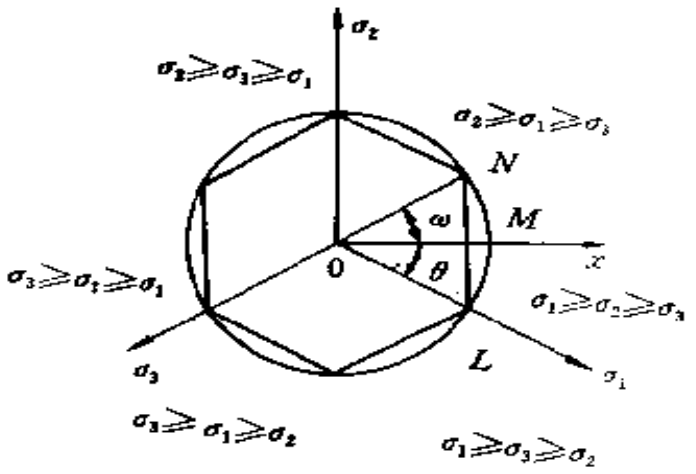


图 1　π 平面屈服图形

四、结论

第一张量不变量表征平均应力，影响塑生加工时的抗力及材料可变形性，对粉末成形影响较大。应力偏量第二不变量

表征变形体所处的状态是弹性、刚开始屈服或已强化。应力偏量第二不变量决定了产生的变形是伸长类、压缩类还是平面应变。

参 考 文 献

[1] 王仲仁等．塑性加工力学基础。国防工业出版社，1989

[2] 王仲仁，张泽华．关于应力偏量及应力张量第二不变量的物理意义及其在主应力空间中的几何意义的讨论．哈尔滨工业大学学报，No.2，1982

第四部分　塑性力学的现代发展和教学研究

粘塑性力学简介

谈志高
（工程兵工程学院）

固体材料在冲击荷载、爆炸荷载等动载作用下，会显示出与准静态荷载作用下所不同的力学性能，如屈服应力提高、瞬时应力提高等，这说明了材料性能的应变速率相关性。为了反映这种动力特性，有必要在本构关系中考虑应变速率的效应。

在有些场合，如材料对应变速率不敏感或者应变速率比较低，为了使问题简化，可以在本构关系中不考虑应变速率的效应。这种近似地认为动态下应力只是应变的单值函数，而采用经典塑性力学中准静态的本构关系（或稍作修正）来作为动态本构关系的理论，即率无关理论。在许多方面，这种近似取得了较好的结果，但在某些方面却存在一定的局限性。比如，在对杆恒速冲击时，按照率无关理论，在杆端附近要形成一段如图 1 所示的恒塑性应变区，而实验结果却与率相关理论更为符合。这种局限性主要原因就在于没有考虑应变速

率的效应。

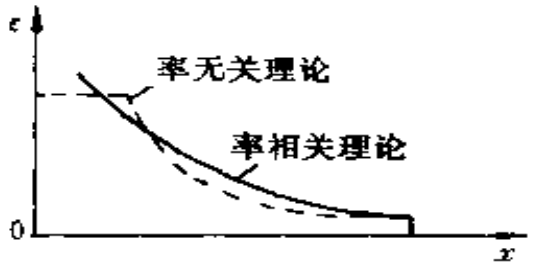


图 1

由于材料的动态瞬时应力随着应变速率的提高而提高，因此，可以借助材料的粘性来反映这一重要特征。通常假定不计弹性状态下的粘性而只考虑粘塑性，这样，可以用图 2 所示的 Bingham 模型来描述弹粘塑性介质的率相关性。显见，由

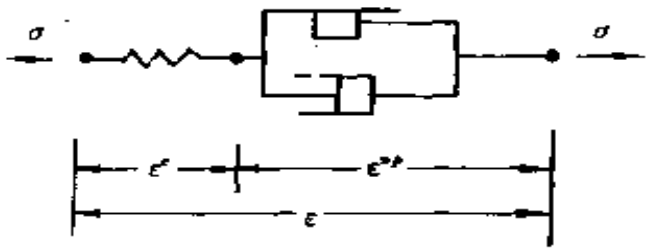


图 2

于摩擦块的作用，材料在初始屈服之前，只有与速率无关的弹性响应。屈服以后，由于阻尼筒的滞后响应，材料的应力可高于屈服应力。此时，弹性变形 ε^e 由弹簧产生、粘塑性变形 ε^{vp} 由阻尼筒和摩擦块共同产生。总应变为：

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{vp} \tag{1}$$

上标 e、vp 分别表示弹性和粘塑性分量。推广到三维情况，同

时考虑时间变化率，可得应变偏量 e_{ij} 的时间变化率为：

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}^{s}_{ij} + \dot{e}^{vp}_{ij} \tag{2}$$

同样，应力偏量 s_{ij} 亦可由两部分组成：

$$s_{ij} = s^{s}_{ij} - s^{vp}_{ij} \tag{3}$$

上标 s 表示静态应力。根据广义虎克定律，

$$s_{ij} = 2Ge^{s}_{ij} = 2G(e_{ij} - e^{vp}_{ij}) \tag{4}$$

则

$$\dot{s}_{ij} = 2G(\dot{e}_{ij} - \dot{e}^{vp}_{ij}) \tag{5}$$

考虑到

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{s}_{ij} + \frac{1}{3}\dot{\sigma}_{22}\delta_{ij} \tag{6}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \frac{1}{3}\dot{\varepsilon}_{22}\delta_{ij} \tag{7}$$

$$\dot{\sigma}_{22} = \frac{2G(1+\mu)}{1-2\mu}\dot{\varepsilon}_{22} \tag{8}$$

则

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{2G\mu}{1-2\mu}\dot{\varepsilon}_{22}\delta_{ij} + 2G\dot{\varepsilon}_{ij} - 2G\dot{e}^{vp}_{ij} \tag{9}$$

式中，μ 为泊松比，λ、G 为拉梅常数，$\dot{\sigma}_{ij}$、$\dot{\varepsilon}_{ij}$ 分别为应力率张量和应变率张量，σ_{ij} 为 k-δ 记号，重复下标满足求和定约。

由于瞬时应力直接与应变速率有关，因此，通常假定粘塑性应变速率 $\dot{e}^{vp}_{ij}$ 是动变形时瞬时过应力或超应力 $(s_{ij}-s^{s}_{ij})$ 的函数，定义为

$$\dot{e}^{vp}_{ij} = \frac{1}{2G}\Psi(s_{ij} - s^{s}_{ij}) \tag{10}$$

Ψ 为某一函数型式，考虑到弹性与粘塑性情况下本构方程的一致性，规定

$$\Psi = \begin{cases} \Psi, \text{当 } s_{ij} > s^{s}_{ij} \text{ 时} \\ 0, \text{当 } s_{ij} \leqslant s^{s}_{ij} \text{ 时} \end{cases}$$

则可得到率相关本构方程为：

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda\dot{\varepsilon}_{22}\delta_{ij} + 2G\dot{\varepsilon}_{ij} - \Psi(s_{ij} - s_{ij}^{s})$$

即
$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2G}\dot{s}_{ij} + \frac{1-2\mu}{3E}\dot{\sigma}_{22}\delta_{ij} + \frac{1}{2G}\Psi(s_{ij} - s_{ij}^{s}) \qquad (11)$$

式中，E 为弹性模量。实际上，式(11)给出了三维情况下的动态应力应变关系。在一维情况下，式(11)变为：

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + g(\sigma,\varepsilon) \qquad (12)$$

式中，$g(\sigma,\varepsilon)$就是反映应变速率效应的粘塑性项。根据不同的材料，$g(\sigma,\varepsilon)$可以采用不同的形式。表 1 中给出了 $g(\sigma,\varepsilon)$的几种主要形式。

表 1　$g(\sigma,\varepsilon)$的形式

名　称		$g(\sigma,\varepsilon)$	备　注
СОКОЛОВСКИЙ-MALVERN 型	(Ⅰ)	$A[\sigma-f(\varepsilon)]$	$f(\varepsilon)$为准静态
	(Ⅱ)	$A\{1-e^{B[\sigma-f(\varepsilon)]}\}$	
PERZYNA 型	(Ⅰ)	$A[\sigma-f(\varepsilon)]^{\alpha}$	应力应变曲线
	(Ⅱ)	$\sum_{\alpha=1}^{N} A_{\alpha}\{e^{[\sigma-f(\varepsilon)]^{\alpha}}-1\}$	
	(Ⅲ)	$\sum_{\alpha=1}^{N} B_{\alpha}[\sigma-f(\varepsilon)]^{\alpha}$	

C-M(Ⅰ)型为线性型本构方程，表明粘塑性应变速率 $\dot{\varepsilon}^{vp}$ 是动态瞬时过应力的线性函数；C-M(Ⅱ)型是指数型；P(Ⅰ)型为幂次型；P(Ⅱ)、P(Ⅲ)型分别为组合指数型和组合幂次型。另外还有一些人在各自的工作中提出过一些模式。在 $\dot{\varepsilon}$ 为

某一常数的情况下，动态应力应变关系有类似于图 3 中所示的形状。当然，在实际的变形过程中，$\dot{\varepsilon}$是随时变化的，相应的应力应变曲线也会变动。

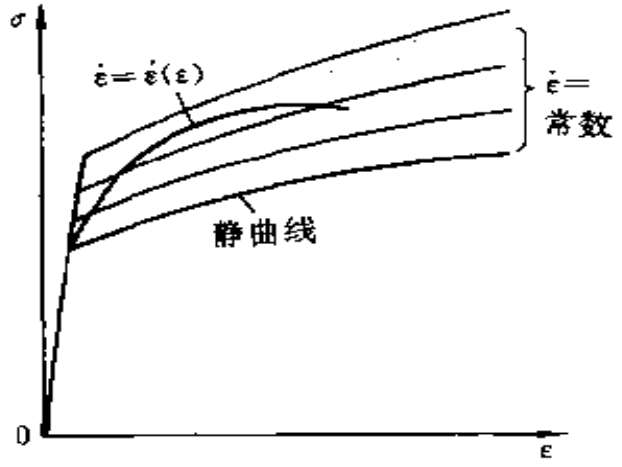


图 3

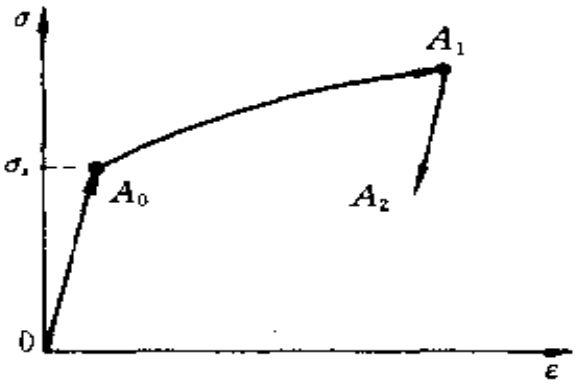


图 4

根据经典塑性理论，由图 4 所示的一维加载路径可知，弹塑性材料在初始屈服进入塑性状态以后，随着应力的增加（$A_0 \rightarrow A_1$），遵循一定的塑性本构关系，塑性变形不断发展。一

且应力幅值下降($A_1 \to A_2$)，则塑性变形不再发展，卸载按弹性规律进行。与弹塑性材料所不同的是，按照粘塑性理论，弹粘塑性材料在屈服进入粘塑性状态后，不管应力是随时间增大($d\sigma>0$)，还是减小($d\sigma<0$)，或者说不管是粘塑性加载还是粘塑性卸载(以应力幅值来定义加载与卸载)，只要瞬时过应力大于零，都存在进一步的粘塑性变形，且遵循同一个本构关系。

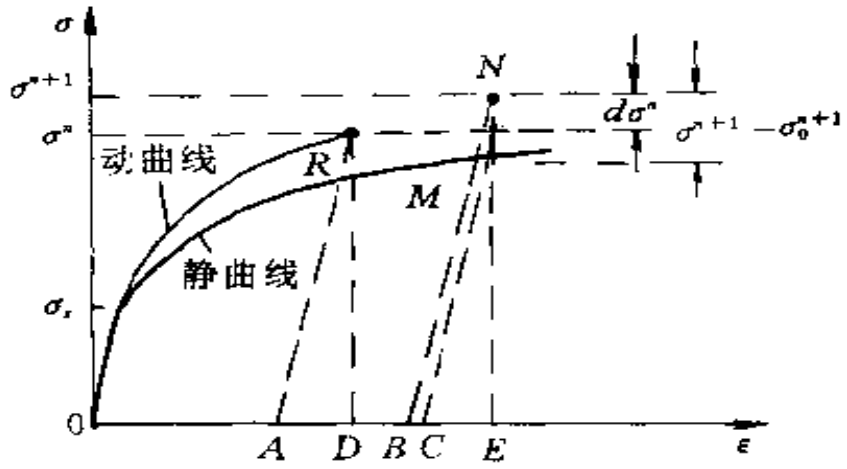


图 5

图 5 表示由 $R \to N$ 的粘塑性加载过程。显见，在 dt 时间内，$d\varepsilon$、$d\varepsilon^e$、$d\varepsilon^{vp}$、$d\sigma^n$ 均大于零。同样，在图 6 所示的粘塑性卸载过程 dt 时间内，虽然 $d\varepsilon^e$ 与 $d\sigma^n$ 小于零，应力幅值下降，但 $d\varepsilon^{vp}$ 仍大于零。并且不管是粘塑性加载还是粘塑性卸载，总是遵循同一个粘塑性本构关系，即 $\dot{\varepsilon}_n^{vp}=\Psi^*(\sigma^n-\sigma_0^n)$，$\dot{\varepsilon}_{n+1}^{vp}=\Psi^*(\sigma^{n+1}-\sigma_0^{n+1})$，这里括号内之值分别为 t_n 与 t_{n+1} 时刻所对应的瞬时过应力。只有当过应力($\sigma-\sigma_0$)等于零即 $\dot{\varepsilon}^{vp}=0$ 时，动态

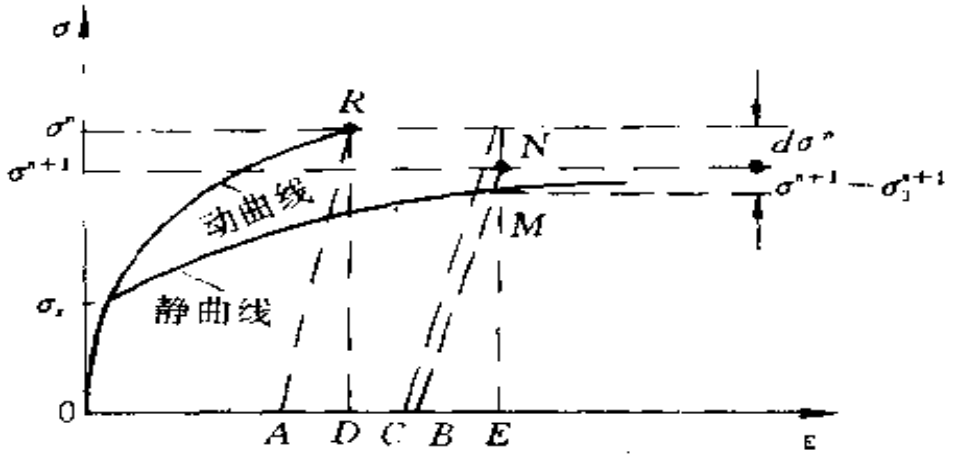


图 6

曲线才回到静态曲线上，这以后的进一步卸载则为弹性卸载。材料的动态应力应变曲线有类似于图 7 所示的形状，在粘塑性区存在应变滞后现象。

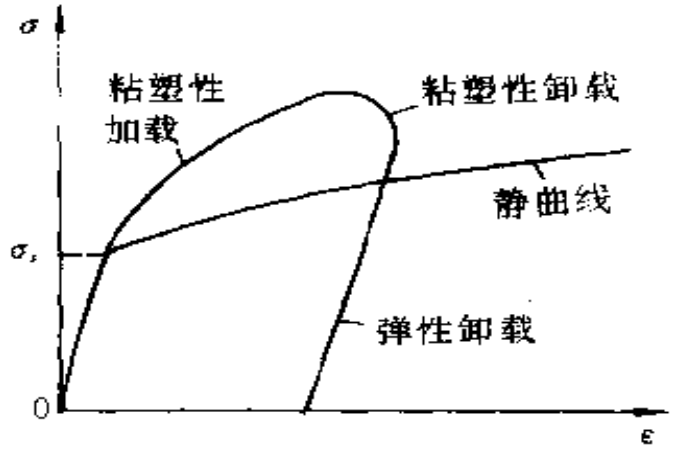


图 7

如果材料在承受突加荷载，应力达到 σ 后保持应力值不变，则应力应变路径将如图 8 中 $A \rightarrow B$。在这个过程中，$d\varepsilon^c =$

0，$d\varepsilon = d\varepsilon^{vp}$，且由于$(\sigma - \sigma_0)$越来越小而使$\varepsilon^{vp}$越来越小，最终的状态趋向于与$\sigma$值所对应的准静态解。实际上，这就是材料的蠕变现象。如果在动变形的某一阶段保持ε不变，应力应变路径将如图 9 中$A \to B$。在此过程中，$d\varepsilon = 0$，$d\varepsilon^{e} = -d\varepsilon^{vp}$，最终趋于与$\varepsilon$所对应的准静态解。这就是应力松驰现象。

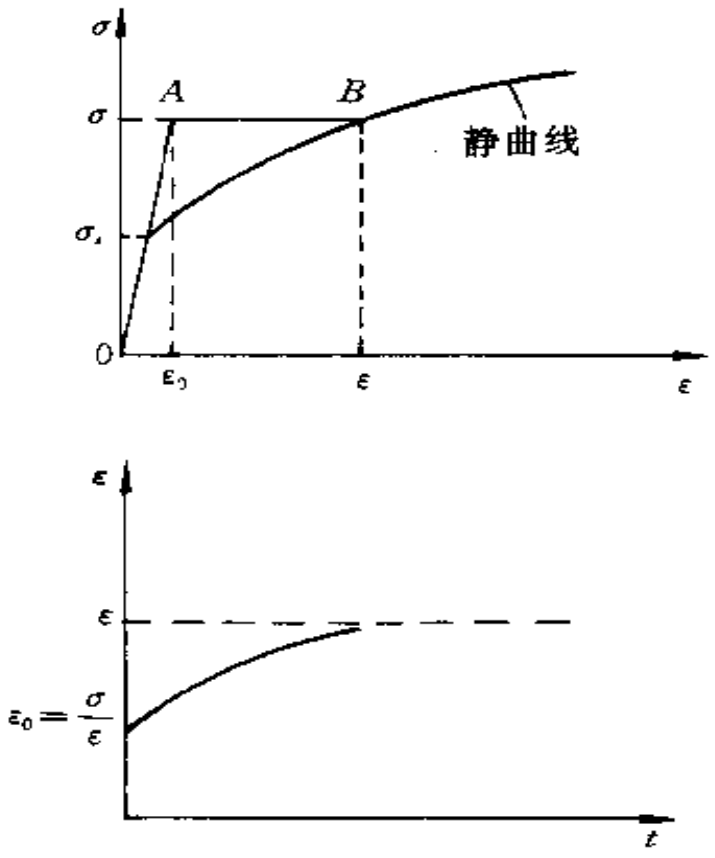


图 8

在用数值计算求解粘塑性力学问题时，要涉及t_n到t_{n+1}的Δt时间内的粘塑性应变增量：

$$\{\Delta\varepsilon_n^{vp}\} = \{\dot{\varepsilon}_n^{vp}\} \cdot \Delta t \tag{13}$$

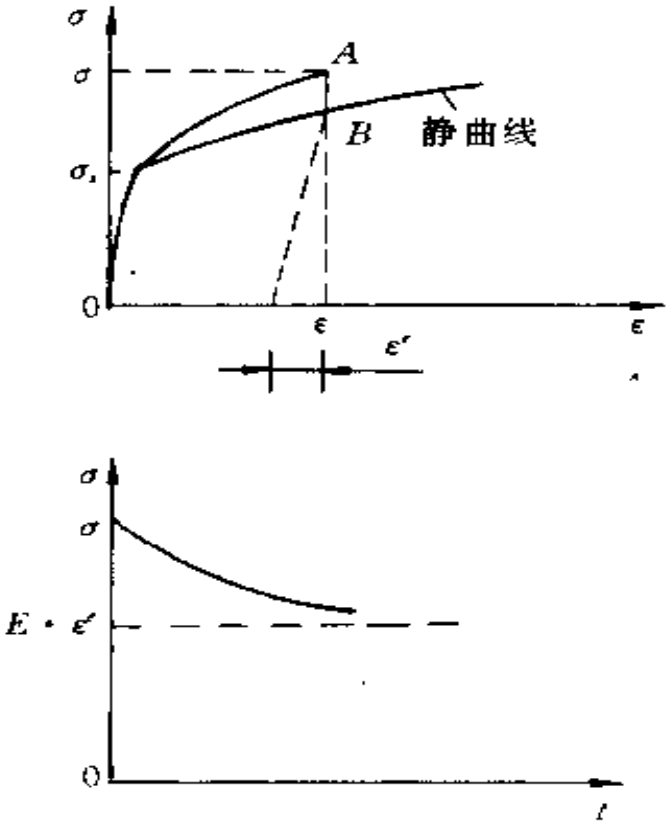


图 9

在以屈服函数 F 来代替塑性势的相关联的情况下，PERZYNA 的粘塑性应变速率本构方程为：

$$\{\dot{\varepsilon}_n^{vp}\} = \eta\langle\phi(F)\rangle \frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}} = \eta\langle\phi(F)\rangle\{a\}, \tag{14}$$

式中，开关函数$\langle\phi(F)\rangle$定义为：

$$\langle\phi(F)\rangle = \begin{cases}\phi(F), & \text{当 } F > 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } F \leqslant 0 \text{ 时}。\end{cases} \tag{15}$$

$$F = \frac{1}{k} f(\sigma, \varepsilon^{vp}) - 1 \tag{16}$$

K 为单调增加的正标量函数，$F=0$ 给出静态加载函数，$F>0$ 给出了动态过应力。ϕ 为 F 的单调非负增函数，在一维时有类似于表 1 中给出的形式。η 为材料常数，$\{a\}$ 为流动矢量：

$$\{a\}^T=\left[\frac{\partial F}{\partial\sigma_{11}},\frac{\partial F}{\partial\sigma_{22}},\frac{\partial F}{\partial\sigma_{33}},\frac{\partial F}{\partial\sigma_{23}},\frac{\partial F}{\partial\sigma_{31}},\frac{\partial F}{\partial\sigma_{12}}\right] \tag{17}$$

也可进一步表示为 $\{a\}=c_1\{a_1\}+c_2\{a_2\}+c_3\{a_3\}$ (18)

其中，

$$\{a_1\}^T=\left\{\frac{\partial J_1}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T=\{1,1,1,0,0,0\}$$

$$\{a_2\}^T=\left\{\frac{\partial(J_2')^{1/2}}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T$$

$$=\frac{1}{2(J_2')^{1/2}}\{s_{11},s_{22},s_{33},2s_{23},2s_{31},2s_{12}\}$$

$$\{a_3\}^T=\left\{\frac{\partial J'_3}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T=\left\{\left(s_{22}s_{33}-s_{23}^2+\frac{J'^2_2}{3}\right),\right.$$

$$\left(s_{11}s_{33}-s_{31}^2+\frac{J'^2_2}{3}\right),\left(s_{11}s_{22}-s_{12}^2+\frac{J'^2_2}{3}\right),$$

$$2(s_{31}s_{12}-s_{11}s_{23}),2(s_{12}s_{23}-s_{22}s_{31}),$$

$$\left.2(s_{23}s_{31}-s_{33}s_{12})\right\}$$

$$c_1=\frac{\partial F}{\partial J_1},c_2=\frac{\partial F}{\partial(J'_2)^{1/2}}-\frac{\mathrm{tg}3\theta}{(J'_2)^{1/2}}\cdot\frac{\partial F}{\partial\theta},$$

$$c_3=\frac{-\sqrt{3}}{2\cos3\theta(J'_2)^{3/2}}\cdot\frac{\partial F}{\partial\theta}$$

$\sin3\theta=\dfrac{-3\sqrt{3}J'_3}{2(J'_2)^{3/2}}$，$J_1$ 为应力张量第一不变量，J'_2，J'_3 为应力偏量第二及第三不变量。在求得 Δt 内节点位移增量 $\{\Delta d_n\}$ 后，应变增量与应力增量为 $\{\Delta\varepsilon_n\}=[B_n]\{\Delta d_n\}$。 (19)

$$\{\Delta\sigma_n\} = [D]\{\Delta\varepsilon_n^e\} = [D](\{\Delta\varepsilon_n\} - \{\Delta\varepsilon_n^{vp}\})$$

$$= [D](\{B_n\}\{\Delta d_n\} - \{\dot{\varepsilon}_n^{vp}\} \cdot \Delta t) \tag{20}$$

式中，$[B_n]$为几何矩阵，$[D]$为弹性矩阵。以式(13)～(18)代入式(20)可解得$\{\Delta\sigma_n\}$，则t_{n+1}时刻的应力和应变为

$$\{\sigma_{n+1}\} = \{\sigma_n\} + \{\Delta\sigma_n\} \tag{21}$$

$$\{\varepsilon_{n+1}\} = \{\varepsilon_n\} + \{\Delta\varepsilon_n\} \tag{22}$$

以上只是从一个侧面对粘塑性力学作了简单的介绍，难免有片面之处，叙述也可能有不当之处，敬请读者和专家指出。另外，有关粘塑性力学，还有许多领域有待我们进一步探索。

参 考 文 献

[1] 徐秉业，陈森灿．塑性理论简明教程．清华大学出版社，1981

[2] 杨桂通，熊祝华．塑性动力学．清华大学出版社，1984

[3] Owen, D. R. J. and Hinton, E. Finite Elements In Plasticity: Theory and Practice. Pineridge Press, 1980

[4] Соколовский, в. в Д ОКЛАД Ы Акад. Наук. 60 5(1948), 775—778

[5] Соколовский. в. в. Прик, Мат. Мех. 12-3(1948), 261—280

[6] Malvern. L. E. J. Appl. Mech. 18-2 (1951), 203—208

[7] Malvern. L. E. Quart. Appl. Math. 8 (1951), 405—411

[8] Perzyna. P. Advances In Applied Mechanics. V9 (1966), 243—377

[9] Perzyna. P. Quart. Appl. Math. 20 (1963), 321—332

[10] Perzyna. P. Proc. Vibr. Probl. 4 (1963), 281—290

进入细观层次的塑性力学教学

杨　卫

（清华大学工程力学系）

金属学家、机械设计师和土木工程师常因材料塑性行为的多样性而叹为观止。固体的塑性变形可从不同的角度上来加以探究，但其最成熟的研究方法有两种：(1)基于连续介质力学理论框架上的现象学研究方法，侧重于塑性理论的数学构架、边值问题解法与宏观工程应用；(2)侧重于塑性变形下材料的物理过程之研究，强调真实塑性变形机制与材料微结构演化的关系。前者在文献中被称为数学塑性理论或宏观塑性理论，而后者被称为物理塑性理论或细观塑性理论。我国目前的本科生与研究生塑性力学教学均以介绍前一理论为主。然而，国外固体力学水平较高的一些著名大学的塑性力学研究生课程中，已出现了两种理论平分秋色的局面。

从塑性理论的发展历史来看，宏观塑性力学主要受到机械和土木工程师们的喜爱，并主要由固体力学家们所建立。与之相对立的是，细观塑性理论是由金属学家和物理学家所建立发展的。这一宏微观理论之间的鸿沟在过去 20 年间已由学科交叉和计算技术的飞速发展所逐渐填平。在其基础上所建立起来的细观塑性力学已成为一门日益发展成熟的新兴学科。

为了使研究生们尽早接触这一学科发展动向，清华大学工程力学系从1985年起逐渐发展起一门以介绍这一细观理论核心内容为目标的研究生课程。该课程最先命名为“固体的本构关系与强度”(包括宏、细、微三个层次)，从1987年起改为“细观塑性理论”(含细观与微观层次)，从1988年又择其精要与固体的宏观本构理论合并，称之为“固体本构关系”，课内学时48，由黄克智、杨卫讲授。为发展与此有关的教材，杨卫曾于1987年写出讲义“细观塑性理论”，并曾在同年国家教委工程力学教学指导委员会所举办的庐山夏季讲习班上使用，含位错理论、强化机制、细观本构理论、细观损伤理论四章。从1990年起，杨卫与香港理工学院李荣彬博士合作，已完成一部名为“Engineering Microplasticity”的书稿，并与德国施普林格(Springer-Verlag)出版社签订出版合同。现将该书的章节目录列出如下，由此可看出细观塑性力学之讲授大纲：

第1章　引论

1.1　何为细观塑性理论？

1.2　细观塑性理论的研究尺度

1.3　细观塑性理论的研究方法

第Ⅰ篇　宏观塑性理论概要

第2章　宏观塑性理论的内涵及局限

2.1　宏观塑性观察

2.2　一维弹塑性列式

2.3　三维小变形弹塑性列式

2.4　三维有限变形弹塑性列式

2.5　J_2流动理论

2.6 J_2形变理论
2.7 J_2角点理论
2.8 内变量理论
2.9 非关联流动法则
2.10 宏观塑性理论之局限
第Ⅱ篇 细观塑性理论
第3章 材料结构
3.1 材料结构引论
3.2 晶体材料之缺陷
3.3 细观结构的定量描述
3.4 晶体与多晶体的取向
3.5 冷作状态结构
第4章 变形机制 Ⅰ：位错
4.1 塑性变形的基本机制
4.2 位错引论
4.3 位错场的弹性理论
4.4 位错引致塑性变形
4.5 位错晶体学
第5章 变形机制 Ⅱ：其它
5.1 形变孪晶
5.2 剪切带
5.3 晶界与晶界滑错
5.4 相变塑性
第6章 强化机制
6.1 应变强化
6.2 固溶强化

6.3 沉淀与弥散强化
6.4 晶界强化
第7章 晶体与地质材料的塑性理论
7.1 单晶体
7.2 多晶体
7.3 宏观平均响应特征
7.4 地质材料的塑性理论
第8章 细观损伤理论
8.1 细观损伤引论
8.2 孔洞损伤
8.3 微裂纹损伤
第Ⅲ篇 工程应用
第9章 板材织构模拟
9.1 FCC 金属中的轧制织构演化
9.2 晶格转动预测
9.3 应变路径对滑移系转动的作用
9.4 再结晶时的新取向生成
9.5 拉伸板材的退火织构
第10章 成形性预测
10.1 从织构数据计算塑性应变比
10.2 边耳的控制
10.3 成形极限图分析
10.4 微结构不均匀的效应
第11章 晶界工程
11.1 引言
11.2 单晶涡轮叶片的设计

11.3　超塑性成形的晶界

11.4　显微加工的基底结构

下面介绍该书的总体设计。作为从微结构至工程应用的多层联系，我们的目标是使读者从较熟悉的宏观塑 性理论出发、进而深入到细观塑性层次，再进入与细观塑性理论有联系的工程应用。这一总体设计便决定了上述大纲中的宏观塑性篇、细观塑性篇和工程应用篇的次序。在第一篇中，我们在张量符号下简明地回顾了宏观塑性理论的基本结构，以便与后面将要重点介绍的细观理论进行对照。作为研究生的教材，我们在小变形理论的基础上引入了一般塑性力学书上所没有的有限变形理论描述，并指出了该理论在宏观意义上的不封闭性及其它局限。

第Ⅰ篇细观塑性理论是本书的重点。我们采取了两条描述路线。即第3章从材料科学出发的初步描述与第4到8章中力学与材料相结合的深入描述。当然在第3章中亦包括对晶粒取向的冷作结构之演化的精细数学描述。第4、5两章用力学工作者所熟悉的语言介绍了位错、孪晶、剪切带、晶界滑错与相变等塑性变形机制。第6章讨论了主要的强化机制。第7章是该篇的重点，从单晶至多晶，由细观到宏观地介绍了晶体塑性和岩土材料塑性的主要理论。该篇最后以较新的细观损伤理论作为结束，力图让学生掌握对孔洞损伤和微裂纹损伤的细观理论方法。在第7、8两章中，我们经常由均匀化方法从细观本构关系合成出宏观本构关系，并将它们与现有的宏观现象学理论来进行比较。

该书的第Ⅲ篇介绍了细观塑性理论的实际应用，从板材织构到成形性到晶界工程，包含了不少有实际意义的例子。从

而使学生对细观塑性理论的意义和作用有更深刻的理解。在讲授时可挑选与听课研究生或年轻教师研究方向有关的例子来讲。

作为本文的结束，我们提出下述三点：(1)步入细观层次的塑性理论教学是对高层次常规塑性力学理论的一个必要补充；(2)一门以细观为主或宏细观结合的塑性力学研究生选修课程已经讲授成功；(3)国内外即将出版反映这一特征的塑性力学教科书。

浅论模糊塑性力学

扶名福

（江西工业大学土建系）

[提要] 我们知道，塑性一般来说伴随于物体的受载始末。在受载体中往往不存在明显的弹性和塑性分界线(面)，这种不明显性可以以模糊性体现出来。本文主要基于模糊数学以较为通俗的叙述方法来建立和讨论模糊塑性力学问题。这对有关高年级本科生、研究生在弹塑性力学的学习和学术研究上都有开阔眼界和启迪作用。

一、问题的提出

传统的塑性力学理论，将受载物体的基本响应属性分成弹性和塑性，并形成相应的本构关系。显然这在力学研究上和工程问题应用中都得到广泛应用。

当然，大家也知道，一般情况下许多介质不可能存在绝对的弹性域。一方面介质中往往存在初始缺陷和初始损伤，形成初始永久变形；另一方面，许多材料的屈服极限也不明显，往往随着载荷的增大而反映出程度不同的塑性。实际上的受载物体，随着位域和载荷的变化，只有塑性程度的不同，而没有明显的弹性与塑性分界线面[1]-[2]。也即是说物体的响应属性具有连续光滑性。而分界线面的设置，使得本来连续的物体响

应性质产生间断[1]—[3]，使得有关量的连续性被破坏。为了比较真实地反映受载体的响应性质，寻求能反映物体连续响应特性的本构方程就成为必然。像内时理论的研究即是这方面的努力。

既然实际受载物体、无论荷载大小，都伴随着不同程度的塑性变形。因此屈服就是一个不明显的响应和行为。所谓的弹性域也就是一个模糊的概念。而模糊塑性力学[3][4]就是反映这种行为和概念的。

二、数学基础·模糊塑性力学概念

模糊塑性力学并不是让弹塑性力学变成模模糊糊的东西，而是要使弹塑性物体的不明朗的响应和行为进入模糊现象这个禁区。

设经典塑性屈服面内部区域为一模糊集，即为模糊塑性区。

定义1　设 B 是论域 Σ 上弹性区域($F<0$)的一个模糊子集，则对任意的 $\sigma\in\Sigma$ 都有一个数 $\mu_B(\sigma)\in[0,1]$，那么 μ_B 称为 σ 对 B 的隶属程度。映射

$$\mu_B:\Sigma\to[0,1],\sigma\mapsto\mu_B(\sigma) \tag{1}$$

称为模糊集 B 的隶属函数。这里 $F=0$ 是屈服条件。

上述定义表明，对于实数 $\mu_B(\sigma)\in[0,1]$，在模糊域上均有对应的点 σ。当点 σ 落在屈服面上或屈服面外($F\geqslant0$)时，则 σ 对弹性域的隶属变为零。也即是说 $\mu_B(\sigma)$ 表示了应力状态的弹性行为属性程度。

定义2　设 B' 为 B 的余集，则定义 $\mu_{B'}(\sigma)=1-\mu_B(\sigma)$。实际上 $\mu_{B'}(\sigma)$ 直接描述了 σ 对塑性行为集的隶属程度。

定义 3　设有一实函数 $K^* = K^*[K, \mu_B(\sigma)]$，满足条件

$$K^*[K,1] = 0, \quad K^*[K,0] = K \tag{2}$$

则我们称 K^* 为模糊屈服极限，相应的曲函数

$$f = f(\sigma, K^*) = 0 \tag{3}$$

称为模糊屈服面函数。

曲面 $f(\sigma, K^*)=0$ 与平面 $\mu_B(\sigma)=\lambda(\in[0,1])$ 常数的交线为 $f_\lambda=0, f_\lambda=0$ 在 Σ 上的投影产生柱曲面 $F_\lambda=0$。由前述定义可知 $F_{\lambda=c}=F_0=F=0$ 即为通常的屈服面。

设 Σ 的一切普通子集构成的集合类为 $\alpha(\Sigma)$，而 Σ 上全体模糊子集所构成的类为 $B(\Sigma)$。显然

$$\beta(\Sigma) \supseteq \alpha(\Sigma) \tag{4}$$

为使模糊集 B 中元素明朗化，现在引进截集的概念。

定义 4　设 $B \in \beta(\Sigma)$，对于任意的 $\lambda \in [0,1]$，定义

$$(B)_\lambda = B_\lambda = \{\sigma \mid \mu_B(\sigma) \geqslant \lambda\} \tag{5}$$

并称式(5)为模糊集 B 的 λ 截集。

在经典塑性理论中，塑性流动本构方程可写为

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\eta(\sigma, K)} \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \tag{6}$$

对应的 Prandtl-Reuss 本构方程为

$$\dot{\varepsilon} = A : \dot{\sigma} + \frac{\beta}{\eta(\sigma, K)} \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \tag{7}$$

而 β 的取值根据

当 $F=0$，$\dfrac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} > 0$ 时，$\beta=1$

当 $F \leqslant 0$，$\dfrac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} \leqslant 0$ 时，$\beta=0$

在这里 ε 为应变张量，ε^p 为 ε 的塑性部分，A 为弹性柔度张量。

$\eta(\sigma,k)$为塑性模量，而 k 为屈服极限参数。

根据前述模糊塑性的概念，则模糊塑性本构方程可导得为

$$\dot{\varepsilon}^{p^*}=\frac{1}{\eta(\sigma,k^*)}\frac{\partial f}{\partial\sigma}:\dot{\sigma}\frac{\partial f}{\partial\sigma}\qquad\sigma\in(B_\lambda)^c \tag{8}$$

$$\dot{\varepsilon}^*=\dot{\varepsilon}^{e^*}+\dot{\varepsilon}^{p^*},\quad \dot{\varepsilon}^{e^*}=\boldsymbol{A}:\dot{\sigma}^*=\boldsymbol{A}:\dot{\sigma} \tag{9}$$

此时的 ε^*，σ 都是模糊塑性意义下的应变和应力张量，f 为模糊屈服面函数。在式(8)中，f 由 F_λ 取代也是行得通的。这里则不加区分。为书写方便应变张量上的“星号”略去不写。

定理 1　对于任意的 $\lambda,\Phi\in[0,1]$，如果 $\lambda\leqslant\Phi$，则相应 λ 的模糊屈服面函数 $F_\lambda=0$ 所围区域包含相应 φ 的模糊屈服面函数 $F_\varphi=0$ 所围的区域。

证明：其实，对于任意 $\lambda,\varphi\in[0,1]$，$F_\lambda=0$ 所围区域相应于元素 σ 属于截集 B_λ，$F_\varphi=0$ 所围区域相应于元素 $\sigma\in B_\varphi$。且 $B_\lambda,B_\varphi\in\alpha(\Sigma)$。由前面的定义可知，对于任意 $\sigma\in\Sigma$ 都有 $\sigma\in B_\varphi$，则由式(5)可知 $\mu_B(\sigma)\geqslant\varphi$，又因 $\varphi\geqslant\lambda$，则有 $\mu_B(\sigma)\geqslant\lambda$，从而有 $\sigma\in B_\lambda$，即 $B_\lambda\supseteq B_\varphi$。

由定理 1 可知，随着 $\lambda\in[0,1]$的变化，模糊屈服面函数 $f=0$(或 $F_\lambda=0$)所围区域也发生变化，反映了模糊集或经典弹性区域内塑性程度不同的区域的变化。子集族$\{B_\lambda|0<\lambda\leqslant1\}$实际上形成一个集合套，它象征着一个可变的、运动的集合，相应的曲面族$\{F_\lambda=0|0<\lambda\leqslant1\}$为一可变的、运动的曲面，它描述了模糊塑性区域的归属变化(图 1)。

下面的定理将证明模糊屈服面 $f=0$，可以由运动的曲面族$\{F_\lambda=0|0<\lambda\leqslant1\}$来表示。

定理 2　设 $\boldsymbol{B}\in\beta(\Sigma)$，则有

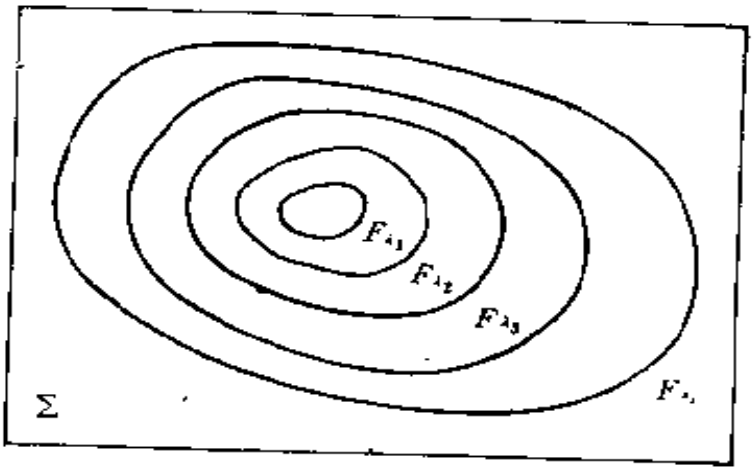


图 1

$$\mu_B(\sigma) = \bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda \wedge \mu_{B_\lambda}(\sigma)) \tag{10}$$

这里

$$\mu_{B_\lambda} : \Sigma \to [0,1], \sigma \mapsto \mu_{B_\lambda}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \in B_\lambda \\ 0 & \sigma \notin B_\lambda \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\vee$，$\wedge$ 运算符号如下面定义

$$\bigvee_{t\in T} a_t = \operatorname{Sup}_{t\in T} a_t, \quad \bigwedge_{t\in T} a_t = \inf_{t\in T} a_t \tag{12}$$

T 为一指标集，Sup 表示上确界，inf 表示下确界。

证明：$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda \wedge \mu_{B_\lambda}(\sigma)) = \left[\bigvee_{\lambda>\mu_B(\sigma)}(\lambda \wedge \mu_{B_\lambda}(\sigma))\right] \cdot \vee \times \left[\bigvee_{\lambda\leqslant\mu_B(\sigma}(\lambda \wedge \mu_{B_\lambda}(\sigma))\right]$

当 $\lambda > \mu_B(\sigma)$ 时，由截集定义可知 $\sigma \notin B_\lambda$，则有 $\mu_{B_\lambda}(\sigma) = 0$

那么有

$$\bigvee_{\lambda>\mu_B(\sigma)}(\lambda \wedge \mu_{B_\lambda}(\sigma)) = \bigvee_{\lambda>\mu_B(\sigma)}(\lambda \wedge 0) = 0$$

而

$$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}(\lambda \wedge \mu_{B_\lambda}(\sigma)) = \bigvee_{\lambda\leqslant\mu_B(\sigma)}(\lambda \wedge \mu_{B_\lambda}(\sigma)) = \bigvee_{\lambda\leqslant\mu_B(\sigma)}(\lambda \wedge 1)$$

$$= \bigvee_{\lambda \leqslant \mu_B(\sigma)} (\lambda) = \mu_B(\sigma)$$

定理证毕。

该定理说明了模糊屈服函数对应的模糊集可由运动的集合套来表示。

三、模糊 J_2 流动理论本构方程

模糊屈服面函数可取为

$$f = J_2 - k^* \tag{13}$$

其中 J_2 为应力偏量第二不变量，$J_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}$，$K^*$ 为模糊屈服参数。为使 K^* 满足式(2)，可定义

$$K^* = \{1 - [\mu_B(\boldsymbol{\sigma})]^\alpha\}^2 K \qquad \alpha \neq 0 \tag{14}$$

设 g 为等效应力，它是等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 的函数，即

$$g = g(\bar{\varepsilon}^p) \tag{15}$$

则隶属函数可定义为

$$\mu_B(\boldsymbol{S}) = 1 - g(\bar{\varepsilon}^p)/\sigma_y \tag{16}$$

其中 σ_y 为材料在单向拉伸时的屈服应力。注意 $\bar{\varepsilon}^p$ 是模糊塑性应变意义下的等效应变。根据等效塑性应变率 $\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^{\frac{1}{2}}$，则由式(8)并考虑到模糊屈服条件可以得到

$$\dot{\bar{\varepsilon}}^p = \frac{2}{3}\frac{\dot{J}_2}{\eta}\{1 - [\mu_B(\boldsymbol{S})]^\alpha\}\sigma_y \tag{17}$$

由于 $\dot{J}_2 = \dot{K}^*$，而且

$$\dot{K}^* = \left\{[] - (\mu_B(\boldsymbol{S}))^\alpha] \cdot \frac{2}{3}\sigma_y h + 2\alpha\left(1 \quad \frac{g(\bar{\varepsilon}^p)}{\sigma_y}\right)^{\alpha-1} \cdot \right.$$

$$\frac{1}{3}[1-(\mu_B(S))^{\alpha}]\cdot[h^*\cdot\sigma_y-hg]\Big\}\dot{\bar{\varepsilon}}^p \tag{18}$$

其中 $h=\frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}^p}$，$h^*=\frac{dg}{d\bar{\varepsilon}^p}$。这里屈服应力 $\sigma_y=\sigma_y(\bar{\varepsilon}^p)$，则由式(17)和(18)可得

$$\eta(S,k^*)=\frac{2}{3}\left\{\left[1-\left(1-\frac{g}{\sigma_y}\right)^{\alpha}\right]\cdot\frac{2}{3}\sigma_y h+\frac{2\alpha}{3}\left(1-\frac{g}{\sigma_y}\right)^{\alpha-1}\cdot(h^*\sigma_y-hg)\right\}\cdot[1-(\mu_B(S))^{\alpha}]\cdot\left\{1-\left[1-\frac{g}{\sigma_y}\right)^{\alpha}\right\}\sigma_y \tag{19}$$

显然，$\mu_B(S)=1$ 时，$\eta=0$，且对应于经典塑性纯弹性区域(在模糊屈服锥面内缩聚为一点)，此时 $\dot{\varepsilon}^p=0$。

四、简单应用

现以受内压作用的圆筒为例，讨论其模糊塑性解。设圆筒内半径为 a，外半径为 b，内压为 p。

根据模糊屈服条件 $f=0$[式(13)]，我们有

$$\sigma_\theta-\sigma_r=2K^{*\frac{1}{2}} \tag{20}$$

$$K^*=[1-\mu_B(\sigma)]^2K \qquad (\text{取 } \alpha=1) \tag{21}$$

对于 Mises 屈服条件，$K=\frac{1}{3}\sigma_s^2$。σ_s 为屈服极限。

在无体力情形下，平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0 \tag{22}$$

将式(20)代入式(22)并应用式(21)有

$$d\sigma_r=\frac{2}{\sqrt{3}}[1-\mu_B(\sigma)]\sigma_s\frac{dr}{r}$$

对任一 $\mu_B(\sigma)=\xi\in[0,1]$，积分上式可得

$$\sigma_r=-\frac{2}{\sqrt{3}}(1-\xi)\sigma_s\ln r+C \tag{23}$$

由边界条件$(\sigma_r)_{r=a}=-P$ 可得

$$C=-\frac{2}{\sqrt{3}}(1-\xi)\sigma_s\ln a-P$$

上式代入式(23)得到

$$\sigma_r=-P+\frac{2}{\sqrt{3}}(1-\xi)\sigma_s\ln\frac{r}{a} \tag{24}$$

由式(20)可得

$$\sigma_\theta=-P+\frac{2}{\sqrt{3}}(1-\xi)\sigma_s\left(\ln\frac{r}{a}+1\right) \tag{25}$$

由$(\sigma_r)_{r=b}=0$ 可得

$$P=\frac{2}{\sqrt{3}}(1-\xi)\sigma_s\ln\frac{b}{a} \tag{26}$$

这便是模糊极限荷载的表达式。

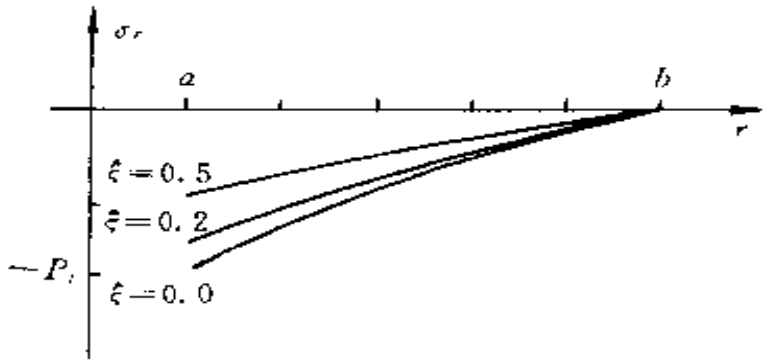


图 2

图 2 和图 3 的实线是 $b/a=2$ 情形下的模糊弹塑性解。

$\xi=0.0$的解恰与经典理想弹塑性材料在全塑性状态下的解相

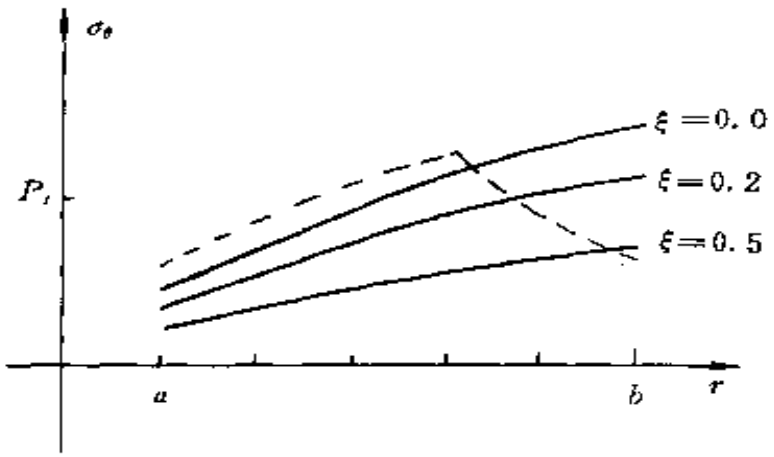


图 3

一致。虚线为经典分界弹塑性解。从解曲线可知，模糊隶属程度越大(即弹性行为属性程度越大)，塑性行为程度越低，反之，则塑性行为程度越高。

参 考 文 献

[1] Fu Ming-fu, Yang De-pin, Lin Zhong-xiang. Endochronic Boundary Integral Method for Elastoplastic Spherical. Theory and Applications of Boundary Element Method. Tsinghua University Press, 1988

[2] 扶名福，林钟祥，杨德品．上海力学，1989，Vol. 10, No. 2, 1—9

[3] Klisinski, M. J. Engng. Mech. 1988, 114, 4, 563—582

[4] 扶名福，徐秉业，熊祝华．模糊弹粘塑性问题及其解的唯一性与存在性(1990)．江西工业大学学报，1992，Vol. 14, No. 1

学好岩土塑性力学概要

施泽华

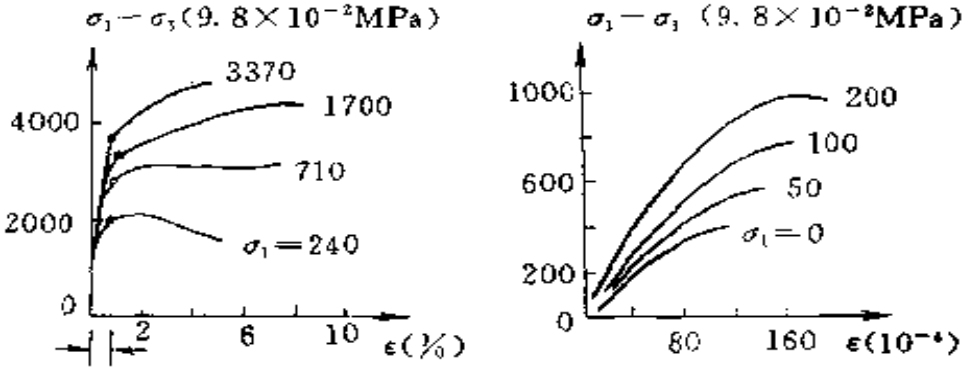
（河海大学力学系）

塑性力学的研究是从1773年库伦(C. Coulomb)提出土的破坏条件开始的，但长期以来成为塑性力学研究主体的却是金属材料。因而现今的塑性力学的基本理论实际上是金属塑性力学的内容，称为金属塑性力学。随着生产实践的发展，出现了小浪底、葛州坝等大型、复杂的岩土工程，再加上电子计算机和计算技术、试验技术的发展，推动了塑性力学的发展，其中岩土本构关系的理论与实验研究越来越引起人们的重视。为适应生产实际的需要，有些塑性力学教科书[1,2]中加入了有关岩土塑性力学的内容，还出版了专著[3,4]。现就如何学好岩土塑性力学谈点看法。

一、首先要了解岩土试验结果，弄清岩土塑性力学的特点

图1所示岩石三轴压缩试验结果表明：岩石具有明显的塑性性质，围压大小对其应力-应变曲线影响很大。围压较小时，屈服后的应力-应变曲线显著下降（称为软化）；围压较大时，屈服后的应力-应变曲线明显上升（称为硬化）。试验还表明，硬化时伴随有体积收缩，软化时伴随有体积膨胀。在软化

阶段属不稳定材料。此外，土的应力-应变曲线（见图 2）也与岩石的类似，亦存在弹塑性耦合现象及受围压的大小影响强烈等特点。



(a) 大理石　　(b) 砂岩

图　1

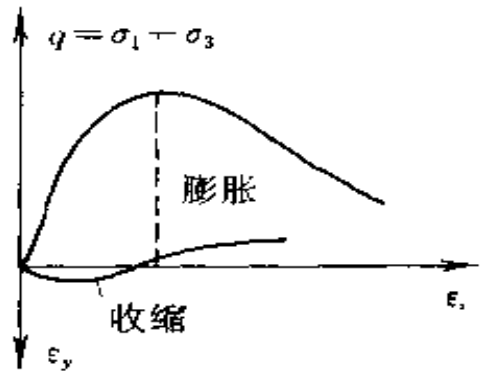


图　2

由以上试验资料可见，岩土塑性力学与金属塑性力学相比较，具有以下特点：

（1）在金属塑性力学中，一般认为体积变化是弹性的，没

有塑性体积应变；而岩土材料往往有塑性体积应变，既跟静水应力又跟偏应力有关。

（2）金属材料的屈服与静水应力无关；而岩土类材料的屈服受静水应力的影响。

（3）金属材料的弹性系数与塑性应变无关，即弹、塑性不耦合；而岩土材料要考虑弹性系数随塑性变形的发展而变化的弹、塑性耦合现象。

（4）金属的屈服准则是建立在剪切屈服基础上的，而岩土的屈服准则不仅考虑剪切屈服还要考虑体积应变屈服。

（5）金属塑性力学中，主要考虑塑性势函数与屈服函数相一致的关联流动法则；而岩土塑性力学中往往还考虑塑性势函数与屈服函数不一致的非关联的流动法则，这时塑性应变增量方向与塑性势面正交，但与屈服面不正交。

（6）金属塑性力学中，只考虑符合 Drucker 公设的所谓稳定材料，不允许出现软化阶段。而岩土塑性力学也可考虑出现软化阶段的所谓不稳定材料。

所以，岩土材料与金属材料的塑性变形规律有很大的不同，直接将金属塑性力学应用于岩土是不行的，需要对其中的一些基本概念加以扩充和修正。

二、要从函数表示、几何图形、参数确定、相互对比等方面来加深对岩土材料的两个主要屈服条件的理解

Mohr-Coulomb（简称 M-C）条件也是一种剪应力屈服条件。但与 Tresca 条件不同，其特定值不是一个常数，而与材料自身的性质及该面上的正应力有关。用函数式表示为：

$$\tau_n = C - \sigma_n \cdot \mathrm{tg}\Phi$$

或 $$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=C\cdot\cos\Phi-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)\sin\Phi \qquad (1)$$

式中，$\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)$便反映了静水应力的影响。式(1)在$\pi$平面上是沿坐标轴正、负方向分别得出不同截矩的不规则六边形；在主应力空间是一不规则的六棱锥面，其中心线与入线重合。M-C 条件能反映岩石破坏的下列实际情况，即随平均应力增加其屈服限提高及抗拉屈服限低于抗压屈服限的事实。

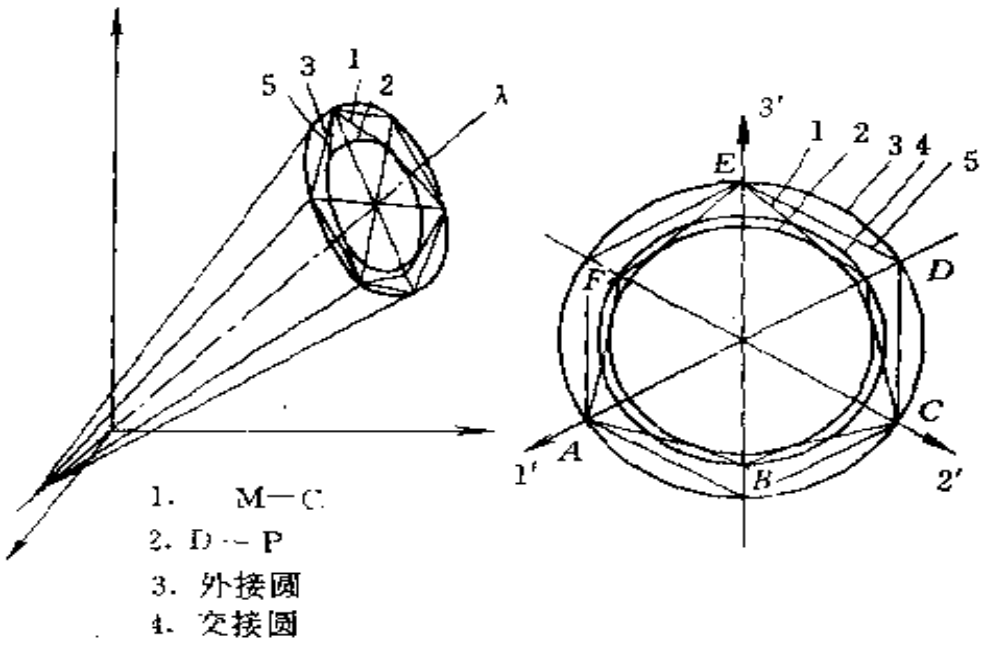


图 3

若不考虑材料的内摩擦($\Phi=0$)时，M-C 条件便成为 Tresca 条件。所以，M-C 条件是考虑材料内摩擦情况下 Tresca 条件的推广。M-C 条件与 Tresca 条件一样，也与中间主应力无关。

Drucker-Prager(简称 D-P)条件的函数表示式为：

$$f = 2I_1(\sigma_{ij}) + \sqrt{J_2(s_{ij})} - K = 0 \qquad (2)$$

式中，I_1 反映了静水应力的影响。

D-P 条件在主应力空间是一个内切于 M-C 条件六棱锥的圆锥形屈服面，显然 D-P 条件是 M-C 条件的下限。如不计静水应力($I_1=0$)，D-P 条件则变为 Mises 条件。所以，D-P 条件是考虑静水应力影响的 Mises 条件的推广。式(2)考虑了中间主应力的影响，理论上更为合理，而且屈服面光滑、应用比较方便，常采用关联的流动法则作三维分析，所以该条件在国内外应用极广。

材料常数 C、φ 可通过试验确定，而 α、K 在平面应变条件($d\varepsilon_z^p=0$)及 $d\varepsilon_{ij}=d\varepsilon_{ij}^p$ 假定下能用 C、φ 来表示。当 D-P 与 M-C 两条件的屈服轨迹相切时，有以下关系：

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}\sin\varphi}{3\sqrt{3+\sin^2\varphi}}, \quad K = \frac{\sqrt{3}C\cdot\cos\varphi}{\sqrt{3+\sin^2\varphi}} \qquad (3)$$

三、要掌握关联流动法则下理想弹塑性增量本构关系的建立

如果屈服条件(1)或(2)已满足，材料处于塑性状态，通常应按增量理论建立本构关系。但要注意它与材料模型、流动法则、屈服条件有关。如取与 D-P 条件相关联的流动法则并考虑屈服条件(2)，则有：

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} = d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}$$

$$= d\lambda\left\{\alpha\delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2(s_{ij})}}\right\} \qquad (4)$$

式中，比例常数 $d\lambda$ 不是常量，在加载过程的不同瞬时或同一

瞬时的不同点处有不同值。

如取理想弹塑性模型，则后继屈服面与初始屈服面重合，$d\lambda$ 将由应力保持在屈服面来定，其具体求法类同于 Levy-Mises、Prandtl-Reuss 方程中 $d\lambda$ 的确定[1]。$d\lambda$ 确定后，再在总变形中计及弹性变形部分，便得到相应的本构关系[2]。根据本构关系的显式便可编制程序，应用于实际[4]。

如取硬化模型，则根据硬化条件计算 $d\lambda$。岩土的硬化模型有各种各样，从这些模型建立本构关系的具体论述，可参阅文献[3][5][6]。

四、要了解岩土的非关联流动法则应用情况

根据关联的流动法则，会得到与静水应力相应的塑性体积应变增量。如 f 取式(2)时，则

$$d\varepsilon_m^p = \alpha d\lambda \tag{5}$$

表示有塑性体积膨胀，这符合岩土材料在破裂之前所观察到的事实，不过实验表明膨胀值没有这么大。为了使塑性体积膨胀符合岩土材料的实际情况，往往取 $g \neq f$，即采用非关联的流动法则。如果适当地选用非关联法则中的塑性势函数，会使塑性体积应变增量减小，或者甚至消失。其举例说明请见文献[1][2]。

应用非关联流动法则后，带来以下问题：(1) 推导出来的弹塑性矩阵不对称，设计电算程序时必须加以考虑；(2) $g \neq f$ 时就不符合 Drucker 公设，意味着材料是不稳定的；(3) 用增量法解题时，应避免大的荷载增量，所得的解答可能不是唯一的。由此可见，还有待于进一步完善。

五、要学会“没有假设就没有科学”及用实验来验证假设的研究方法

众所周知，Tresca 屈服条件是用直线连接少数几个实验点构成的正六棱柱面。其后 Mises 提出用圆来连接上述实验点，从而形成了母线平行于入线的圆柱面的 Mises 屈服条件，避免了曲线不光滑引起的数学困难。后经罗代实验、泰勒和奎乃实验证明 Mises 条件比 Tresca 条件更接近实验结果。与此相似，岩土塑性力学中的 M-C 条件的屈服面在锥顶及棱线上导数方向是不定的，形成奇异性，使用不便；Drucker 与 Prager 于 1952 年提出了使角隅圆滑而成为一内切圆锥面的假设，从而以 Mohr-Coulomb 六棱锥的内切圆锥面的形式导得了 Drucker-Prager 条件，此条件在国内外广泛使用，颇为方便。对于这类手法应学习并运用。其实，用 C、φ 值表示 α、K 的做法亦是“先假设后验证”手法的体现，根据 D-P 条件与 M-C 条件在 π 平面上两轨迹内切、外接、交接推出 α、K 三种表达式的做法更是这种手法的反映。文献[7]基于岩土材料属性远比金属材料复杂，根据岩土材料特点建立本构关系通用式就有可能把金属材料的本构关系作为其特例而包含在其中的思路，建立了考虑弹塑性耦合、非关联的适用于强化或软化的本构关系通用式，进而编制了三维非线性有限元分析程序，分别运用于五强溪、葛州坝等实际工程，经受其检验。

参 考 文 献

[1] 李泳偕，施泽华．塑性力学．北京：水利电力出版社，1987

[2] 夏志皋．塑性力学．上海：同济大学出版社，1991

[3] 郑颖人，岩土塑性力学基础．北京：中国建筑工业出版社，1988
[4] 川本眺夫，林正夫．地盘工学における有限要素解析．东京：培风馆，1978
[5] 屈智炯，土的塑性力学．成都：成都科技大学出版社，1987
[6] 蒋彭年，土的本构关系．北京：科学出版社，1982
[7] 卓家寿，施泽华，文洪．增量理论中弹塑性本构关系通用式的推导及 D-P 屈服函数的应用．武汉：人民长江，1981

弹塑性力学课程的内容选取与讲授

刘信声　徐秉业
（清华大组工程力学系）

弹塑性力学是我校工程专业硕士研究生的一门学位课程。自1982年以来，每年秋季学期开设此课，至今已有千余名研究生学习了这门课程，普遍反映不仅掌握了理论知识，而且对培养分析问题与解决问题的能力也有较大的作用。由于这门课程在教学过程中不断充实内容与改进教学方法，多次获得清华大学校级教学优秀的奖励。

弹塑性力学是一门技术基础课程，应包括弹性力学与塑性力学两门课的基本内容。若将两门课程简单地压缩成一门课，不仅对基本内容讲不透彻，而且会使初学者感到内容烦杂而不易掌握，对于在大学阶段已学过一些弹性力学的研究生来讲，也会因为感到内容重复而影响学习的主动性。

在课程内容上，我们按基本理论知识、基本分析方法与专门问题来组织有关章节的内容，这样做可使课程内容完整与充实、也便于课程的进行与阶段总结。

在讲解应力分析与应变分析时，将课程的起点放在弹性力学上，这样可照顾到初学者，但讲解的内容又侧重应力偏量，应变偏量，罗德参数等，这又使再学者了解到比弹性力学中更为深入一些的基础知识。同样，在讲清广义虎克定律的基

础上，着重介绍屈服条件的概念，并通过两种屈服条件在数学表达式以及在等倾面上的几何图形的讨论来加深认识。对于岩土类材料屈服（或称强度）准则的介绍，可以使研究生对塑性本构的研究及应用有一个较为全面的了解。为了加深对屈服条件的认识，在课程中还增加了实验内容，即通过弯扭复合试验确定某种金属材料的屈服轨迹。通过测试、整理报告使研究生对屈服条件有了感性的认识，从而加深了关于屈服条件的理解。

考虑到结构或构件随着外载荷的增加而经弹性阶段、弹塑性阶段，最后达到全塑性阶段。将弹性力学与塑性力学结合起来讲授，即以弹性解为基础，进一步找到弹塑性解和塑性极限状态的解。这样可以使研究生对结构承载特性有一个比较全面的了解。在举例方面，如厚壁圆筒、旋转圆盘、受扭圆轴等，都可以从弹性分析入手，经过弹塑性分析，最后进入塑性极限状态。这样可使研究生所获得的概念是完整而系统的。通过介绍幂强化材料以及软化材料厚壁圆筒的分析，可以得到关于弹塑性分析的比较全面的了解，为解决各类材料的承载性能的分析打下一个基础。

由于弹塑性力学与许多工程实际问题有着密切的联系，新的机械设备及工程构件的设计，原有设备的改造等，都对弹塑性分析提出了研究应力、变形以及承载特性的要求。尽管工程问题具有一定的复杂性，但我们所选择的有关问题，仍不失去弹塑性基本分析方法的特点。例如组合厚壁圆筒的分析，旋转圆盘与轴的套装问题，其中过盈量的计算就是弹塑性状态下的位移计算，而残余应力及残余变形的计算也是弹性分析与弹塑性分析结果的某种组合。在此基础上，我们又介绍了容

器或火炮身管的自紧技术。所谓自紧技术是指厚壁圆筒在制造过程的一定阶段内，采用充液压或用过盈量冲头挤扩，使圆筒内部产生有益的残余应力。厚壁圆筒在承载工作压力时，其工作应力与残余应力叠加之后，使得内表面处的合成应力下降，而外表面处则有所提高，从而使得弹性极限承载能力提高，并使应力分布趋向于均匀化，有利于延长疲劳寿命。在这里还可引进关于塑性安定性的概念。通过这些问题的介绍，不仅对弹塑性分析方法有了比较深入的了解，而且对巩固基本理论与扩大理论知识的广度都有积极作用。

不同类型专业的研究生对专门问题的要求有所不同。考虑到专题上的差别，我们同时开设两个专题讲座。在结构分析类的讲座中，介绍有关结构塑性极限分析与安定性，热应力等，在塑性成型类的讲座中，结合拉拔、挤压等工序，介绍塑性成型理论及简化分析方法。讲座的内容可根据听讲者的要求而有所侧重或调整。这样做法使教师的工作量加大了，但对培养研究生专业理论基础以及提高独立工作能力是很有帮助的。

在教学方法上，多年来也进行了许多有益的尝试。例如，在教师的指导下对指定章节的自学；写阶段性的课程学习小结；按课程内容分阶段考试；开卷或闭卷考试等。这些做法对于调动研究生的学习积极性，促进对课程内容的理解与掌握是有效的。下面就课堂讨论的情况做一简要介绍。

我们采用的课堂讨论方式分为随堂讨论与专题讨论两种。随堂讨论是指讲课后留下几分钟，对讲课内容进行提问与简要讨论，通常以教师回答为主。这种讨论对于讲课中难点较为集中时更为需要。在听课人员不太多的情况下，我们还允许

在讲课中间提问，以利于做到讨论式或启发式的讲课。专题讨论则是事先布置好讨论题目，在课堂上先由研究生发表意见并讨论，教师进行引导性的组织，最后进行小结。例如，在讲授完基本理论部分后，布置的课堂讨论题目为：厚壁圆筒在内压作用下，取 $\nu=1/2$ 及 $\varepsilon_Z=0$，写出求解该问题时 Mises 屈服条件与 Tresca 屈服条件的表达式。在讨论开始时，一般都能正确地写出两种表达式，但两种表达式有相同的，也有不同的。就此展开讨论时，逐步引导讨论厚壁圆筒在受内压时的应力状态由 $\sigma_\theta,\sigma_r,\frac{1}{2}(\sigma_\theta+\sigma_r)$ 来确定，该状态可分解为 $\frac{1}{2}(\sigma_\theta-\sigma_r)$，$-\frac{1}{2}(\sigma_\theta-\sigma_r)$，0 以及 $\frac{1}{2}(\sigma_\theta+\sigma_r),\frac{1}{2}(\sigma_\theta+\sigma_r),\frac{1}{2}(\sigma_\theta+\sigma_r)$，由于静水压力并不影响屈服，其应力偏量状态对材料进入屈服与否起着决定性的作用，而各种表达式的差异则反映了在选用屈服条件时采用单拉重合或纯剪重合而引起的。最后的小结，对应力状态、应力偏量状态、体积不变性等加以说明，并说明屈服条件的选取对应力状态有要求，即在该问题中 $\sigma_\theta>\sigma_r,\sigma_z=\frac{1}{2}(\sigma_\theta+\sigma_r)$，若材料已进入塑性状态，选用应力之间所满足的关系式时，也必须使塑性区内的应力状态满足这个要求。类似这样的课堂讨论安排 2～3 次。讨论气氛热烈，研究生反映印象深刻，兴趣浓厚。

通过教学实践，我们有如下几点体会：

（1）将弹性力学与塑性力学少而精地结合起来讲授，在内容的选择上可以更有针对性，使得基本理论知识更加充实与系统化，并能比较全面地了解结构或构件承载特性的全过程，为结构分析提供了理论基础与分析方法。

（2）对工程专业的研究生，将课程的重点放在理论与应用并重上，并注意讲清分析问题时的简化原则与依据，避免繁琐的公式推演，不仅丰富了研究生的理论基础知识，而且使他们学会了合理地简化分析问题的方法。

（3）在教学方法上的各种尝试，除了调动学习积极性外，更重要的是巩固和扩大讲授的重点，使理论基础知识的学习更加扎实，分析方法的掌握更加正确，并为培养独立开展研究工作的能力打下一定的基础。

12学时塑性力学讲授如何选材

蒋　平
（西南石油学院）

《塑性力学》或《弹塑性力学》近十年来已成为大多数工科院校工程专业硕士研究生的一门学位课程。塑性力学新概念多，理论复杂深奥，处理问题方法复杂多变。而目前在许多工科院校中，除力学、锻压和土建等专业外，其它专业的学时一般仅为30左右，甚至更少。这一矛盾使得这门课的教学难度很大。如何根据要求精选内容，利用较少的学时使学生掌握塑性力学的基本概念、理论和分析方法，已成为迫切需要解决的问题。笔者在英国进修期间，对于利物浦大学（University of Liverpool）机械工程系本科生《固体力学》课程的教学情况，作了详细而系统的调查，发现他们仅用12学时讲授塑性力学的基本内容，其内容选择和教学方法均很有特色，值得我们借鉴。本文着重介绍和分析这一调查结果，并结合国内的教学情况和自己在教学中的体会，谈谈少学时塑性力学如何选材的一些看法。

利物浦大学机械工程系《固体力学》课程除讲授国内《材料力学》课程的内容外，还讲授了弹性力学、塑性力学、实验应变分析和断裂力学等内容，几乎包括了固体力学的所有基本概念、理论和方法，这是该课程设置的一个重要特色。该课程

先用总学时 80 学时的一半讲授材料力学，此后其它内容穿插讲授，其中塑性力学内容占 12 学时[1]。

课程中选取的塑性力学内容如下：

1. 屈服条件及其应用。介绍了 Tresca 和 Von Miese 屈服条件；两个条件在应力空间和 π 平面中的表达式及其比较，在简单问题中的应用；单向拉伸试验曲线；理想塑性材料和应变强化材料；包辛格效应等。

2. 厚壁筒和旋转圆盘。确定厚壁筒和薄壁圆筒的屈服压力；旋转圆盘在其中心屈服时的临界转速。

3. 梁的塑性失效。理想弹塑性材料制成的梁在纯弯曲情形下的弹塑性分析；残余应力分布；塑性铰的概念；刚塑性分析——用静力法和机动法求极限载荷的上下限。

4. 杆的扭转塑性失效。下限法求塑性极限扭矩；Spring Onion Analogy 和沙堆比拟法。

5. 安定和低周疲劳。循环塑性破坏和累积塑性破坏；安定状态和安定系数；Melan 下限定理；低周疲劳和 Coffin Manson 定律。

从上述内容选取可以看出，利物浦大学机械工程系讲授塑性力学完全是从工程实际需要出发的，而不是强调理论上的完整性和系统性。另外，还可以看出两个主要的选取原则。第一是选择最基本的内容，例如屈服条件，理想弹塑性分析方法和刚塑性分析方法，即解决工程实际问题所必需的塑性力学知识，而把理论性较强，在应用上暂时受到限制的数学塑性理论的内容留到后继课程中根据需要去讲授。例如，材料的塑性本构关系十分复杂，理论模型很多，特别是有关强化材料的理论尚不成熟，故在此课程中几乎没有涉及，仅介绍了最基本

的理想弹塑性模型和理想刚塑性模型。而对于两种基本的屈服条件则作了详细的讲解，并结合实际问题反复应用，使学生能熟练地掌握。第二是选择应用性强的内容。例如梁的弯曲，杆的扭转，受压厚壁筒，旋转圆盘等。安定和低周疲劳虽然比较复杂，但应用性强，也作了比较详细的介绍，不仅解释了现象，而且介绍了有关的定理，并给出了计算例题。由于按照上述原则精选内容，利物浦大学机械工程系在《固体力学》课程中所讲授的塑性力学知识，既为学习如《塑性设计方法》、《压力容器和管道设计》、《结构耐撞性和冲击工程》等后继课程的学生提供了预备知识，也为不再选修这些后继课程的学生提供了塑性力学最基本的知识，即一位机械工程师所必备的常识。

为了适应少学时的教学，利物浦大学机械工程系在塑性力学的教学上还有如下几个特点。第一，选取塑性力学内容中密切结合材料力学和弹性力学的有关内容，这是通过把塑性力学内容作为《固体力学》课程中的一部分来做到的。例如，两个常用的屈服条件，是作为韧性材料的破坏准则替代材料力学古典强度理论的第三和第四强度理论而介绍的。厚壁筒、旋转圆盘和杆的扭转，都是先讲弹性分析，再讲述屈服现象，进行塑性极限分析。这样讲，可以使学生认识到弹性和塑性是材料变形的两个既有区别又有联系的不同阶段，弹塑性分析是结构分析的完整过程，认识到学习塑性力学的必要性，又破除了对塑性力学的神秘感和畏难心理。另外，由于穿插讲授，也达到了循序渐进，逐步深化，难点分散和适当重复的效果，降低了教和学的难度，使学生易于消化和掌握。第二个特点是精讲多练。这是通过两方面加以保证而得到实现的。首先是少

学时小密度的教学安排。少学时必然要求教师精讲，小密度（周学时1至2）则保证学生在课外有足够的自习时间消化巩固课堂讲授的内容，看参考书和做作业。其次是参考书和作业布置多。各个专题都指定一些背景材料让学生自习，同时布置大量的习题。例如屈服条件部分分两次布置了十二道习题，梁的塑性失效布置了十道习题，这就使学生通过大量的练习进一步理解掌握所学内容。第三是严格要求，真正做到了"讲一练二考三"。如作业题分析，仅靠课堂上讲的内容无法全部完成，必需阅读一些参考书。考题要求则更高。从几年的试卷分析，考题覆盖了所讲授的全部塑性力学内容，难度超出课堂讲授水平和习题水平。例如，安定和低周疲劳部分只讲了例题，未布置作业题，但仍有安定计算的考题。考场纪律严明，评分严格把关，高分很少，不及格率约为百分之十。这也是促使学生刻苦学习的一个重要原因。此外，普遍采用启发式、讨论式教学，学生如有疑问或不同看法，随时都可以中断讲课，同教师进行讨论，教师也鼓励学生这样做，这一点也给人以深刻印象。

上面介绍的英国利物浦大学机械工程系塑性力学教学的情况给我们很大启发，值得借鉴。从国内塑性力学的教学来看，存在着强调学科内容的完整性、塑性理论的系统性的倾向，总觉得这也要讲那也要讲，只在压缩讲授学时上想办法，不敢大量删减内容，结果内容总是减不下来。实际上，对于大多数工科专业的学生来说，这是不必要的。例如各种塑性本构理论，讲授学时少了讲不深透，而且在后面的学习中又不再应用，学生很难掌握。事实上，只要把屈服条件讲透，大量删减这方面的内容并不影响学生做题和以后的理解。因此，从大多数

工科专业的实际需要出发，打破完整性的系统性的框框，大量删减，精选内容，完全可以用较少的学时使学生掌握塑性力学的基本知识和分析方法。关于少学时塑性力学教学的选材，借鉴国外的成功经验，结合国内塑性力学教学的实际情况以及现在国内出版的一些简明教材，建议选择如下一些内容：

1. 塑性力学的基本概念。通过单向拉伸试验介绍塑性变形现象及其特征；静水压力试验引入简化假设；理想弹塑性和理想刚塑性模型；通过三杆桁架的弹塑性分析进一步介绍塑性力学的基本概念、研究内容、分析方法及其特点。

2. 屈服条件及其应用。详细介绍 Tresca 和 von Mises 两个屈服条件，实验验证及其应用。简要介绍 Drucker 公设及其推论。

3. 弹塑性边值问题。厚壁筒和旋转圆盘；通过梁的弯曲塑性失效，介绍弹性分析和刚塑性分析方法，极限分析的上下限定理，静力法和机动法；杆的扭转塑性失效，沙堆比拟法。

4. 安定和低周疲劳。介绍变值载荷作用下的两种塑性破坏；安定状态和安定定理；低周疲劳及寿命估计。

5. 结构的极限分析或理想刚塑性平面应变问题的滑移线解法。根据专业需要任选其一，有些专业可以不讲。

上述内容可以用 18 至 20 学时讲授，如果第五部分不讲，则学时可以压缩至 12 到 14 学时。讲授方式则与弹性力学结合讲授较为适宜。由于笔者教学经验尚少，学术水平有限，以上分析和建议难免疏漏、片面甚至不当之处，望有识者不吝批评指正。

本文在修改过程中汲取了参加第一届全国塑性力学教学经验交流会的各位老师的宝贵意见，特此致谢。

参 考 文 献

[1] 蒋平．固体力学课程教学情况剖析——［英］利物浦大学·西南石油学院《教学研究》. 1987, 3

讲授塑性力学绪论课的新设想

穆霞英　王子昆
（西安交通大学工程力学系）

绪论是一门课程轮廓的概括，也是第一次与学生见面并能给予学生极为深刻印象的两节课。若能生动地讲好绪论课，将能提高学生对该门课程的学习兴趣与学习动力。这对于和工程实际联系密切但理论抽象因而难度较高的塑性力学课尤为重要。因此，我们提出编制塑性力学“录象片”（或“幻灯片”）的新设想，用形象而生动的方式来讲授绪论课，着重于研究内容及与生产实际联系、研究方法等方面。编制的内容考虑如下：

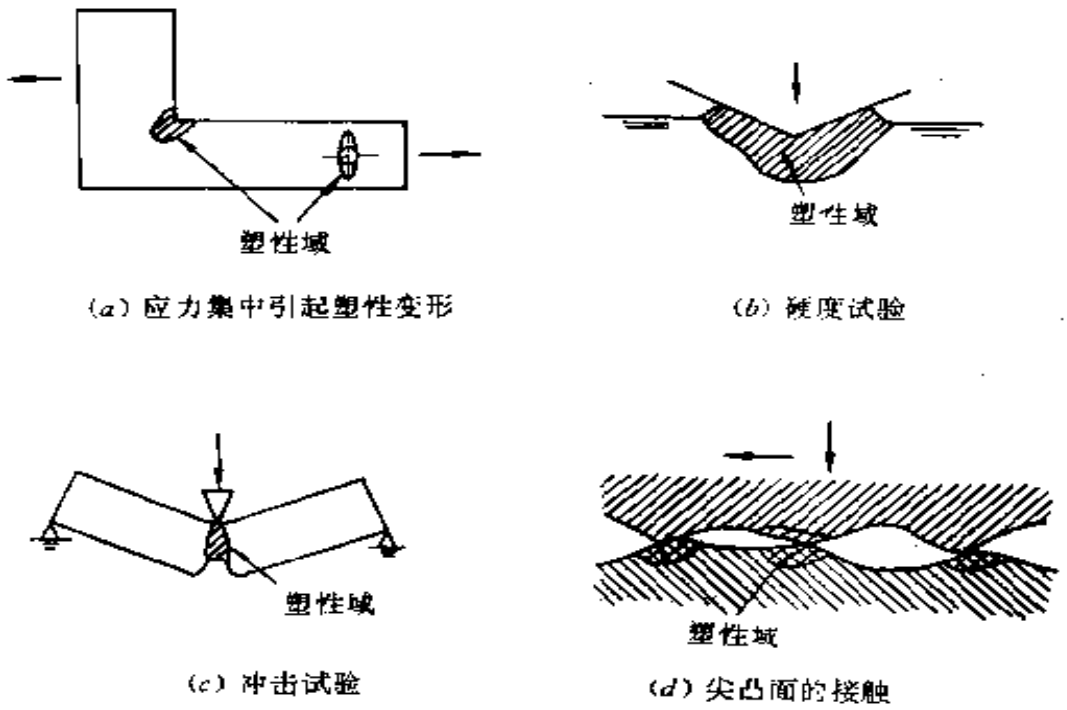
一、塑性变形及其微观机理

1. 塑性变形

用形象的方式（利用泡沫塑料方条与金属演示受力弯曲后卸载的情况）对比弹性变形来表述塑性变形的不可逆性，同时可演示塑性变形存在于各方面的图示。例如：带孔构件的应力集中、集中力的作用点、冲击试验、硬度试验、尖凸面的接触、结构沉陷等，见图1。

2. 塑性变形的微观机理

简示晶体构造。由受力原子发生移动，卸载后能否恢复晶



(a) 应力集中引起塑性变形　(b) 硬度试验

(c) 冲击试验　(d) 尖凸面的接触

图 1　塑性变形图示

格排列来说明弹性变形与塑性变形的微观差别(以动态演示)。简示:晶胞模式、滑移面、滑移方向、滑移线,引出塑性变形的主要机理是滑移。因实际情况存在缺陷,要用位错理论分析,并用图形演示滑移过程。联系板料与棒料拉伸试件表面的滑移线示出如图 2、图 3。

二、塑性力学内容与生产实际及其它课程的关系

塑性力学研究塑性状态的本构关系、应力应变分布规律及其相应的数值分析方法。

在工程技术方面有许多实际问题有待塑性力学去解决。例如高压容器带有人孔(图示)、孔洞附近由于应力集中产生



图 2　板料试件表面的滑移线（局部放大）



图 3　棒料试件表面的滑移线

局部塑性变形，必须用塑性理论校核孔洞附近的材料强度，否则就会过高估计应力，作出错误的结论。又如结构承载能力的研究，充分利用材料强度进行合理设计，塑性力学提供了理论基础。这些都是属于变形较小的问题。对于变形比较大的压力加工问题，则是利用塑性变形的流动规律。例如辊轧、冲压、挤压（或拉拔）、吸能减振装置等问题（加工演示），需要研究成型的工艺过程，研究完成某一工序的设备能力。如冲压问题就要知道压延力多大？又如模具的设计，合理的加工工序等等。为增加同学兴趣，还可以列举压力加工过程中遇到的一些力学问题（或演示国内有关压力加工的研究成果）。例如筒形冲压件出现的轴向起皱，如图 4 所示，这是周向应力过大引起失稳所致。又如矩形冲压件，如图 5 所示四角突起且周边皱折，这为不合格产品，需切除不平整部分，既废料又废工，原因是板料毛坯的形状不合理。作者曾用滑移线理论指导同学结合

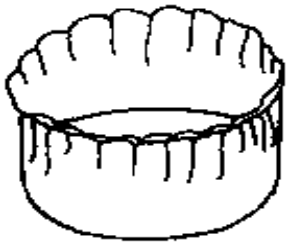


图 4　筒形冲压件的轴向起皱

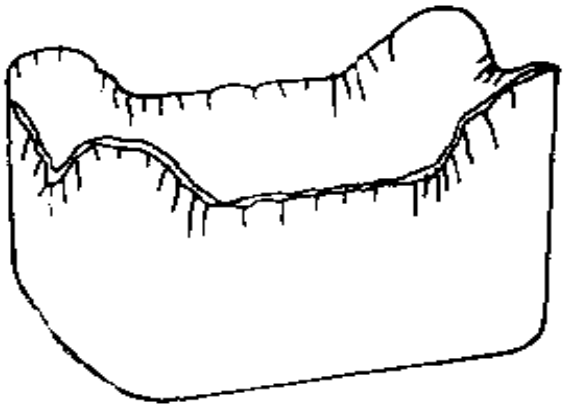


图 5　矩形冲压件的四角突起

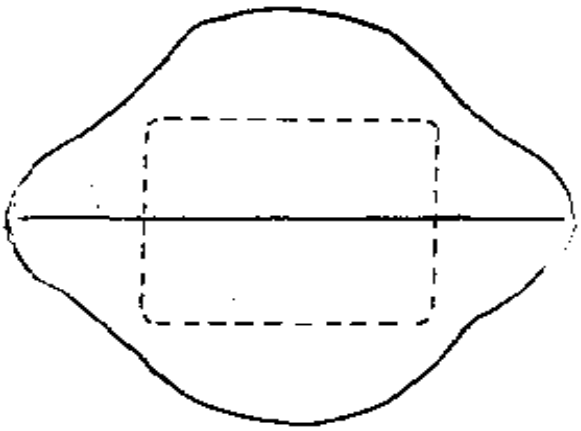


图 6　矩形冲压件的合理毛坯

毕业论文研究合理毛坯，得到比较满意的结果，演示如图 6。复合挤压成杯杆形零件(如图 7)是一种新工艺。笔者曾用密栅云纹法研究挤压过程的变形规律(详见《锻压技术》1983 年第 [illegible] 期)，将试验件与云纹照片对照向同学表演，引起同学对试验工作的重视与浓厚的兴趣。

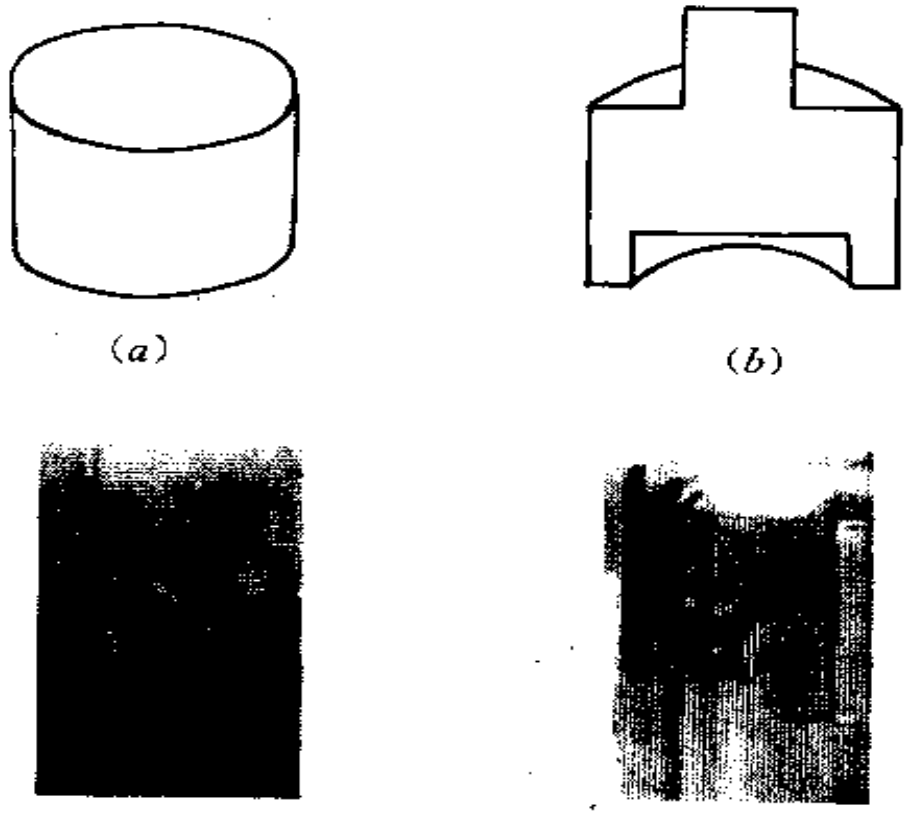


图 7　复合挤压成型

(a) 柱形坯料　(b)杯杆型复合挤压件　(c)密栅云纹照片

塑性力学是弹性力学的后续课，又是其他后续课程的基础。如“有限元素法(或计算力学)”及“断裂力学”课中的弹塑性有限元及弹塑性断裂力学部分、“蠕变力学”、“连续介质力学”以及“实验力学Ⅰ”中的光塑性和密栅云纹法等都用到塑性力学的知识。总之，塑性力学是一门与生产实际密切联系，且与许多课程相衔接的一门重要课程。

三、塑性力学的发展(略)

四、塑性力学的研究方法

本门课程按唯象的方法研究，即根据实验资料，进行简化假设、建立理论，再回到实际中验证其准确性。因此实验是塑性力学研究的基础。

1. 实验资料

(1) 单向拉伸试验资料

① 屈服点　分别演示软钢与铜两种不同类型的拉伸曲线，来说明屈服点的确定、含意及在塑性力学中的地位。

② 真应力应变曲线与名义应力应变曲线　演示两种曲线的差异，说明变形小时可用名义应力应变曲线。

③ 硬化规律　演示加载过屈服点后卸载，再加载，屈服应力提高为 σ_s^* 的现象(σ_s^*——后继屈服应力，为后继弹性范围的界限)。

④ 卸载规律　以图表示。并说明塑性状态 $\varepsilon=\varepsilon^e+\varepsilon^p$

⑤ 鲍氏效应　作图演示加载到塑性后卸载，反向屈服应力小于初始屈服应力的现象。

⑥ 加载历史影响　说明塑性状态应力应变不再是一一对应关系，而是与加载历史有关。作拉伸图示出 a，b 两点因加载历史不同，虽应力相同但应变并不同，(见图 8)。

(2) 静水压力试验

结论为：① 到达塑性状态时，体积变化按弹性规律，对于密实材料体积变化是微小的。② 静水应力不影响屈服。

2. 简化假设及简化模型

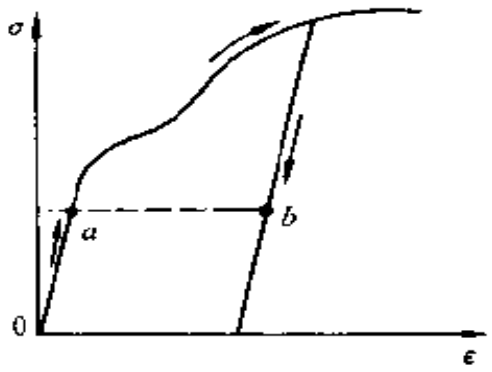


图 8　加载历史影响

简化假设除静水压力试验的结论外，还考虑：材料初始各向同性、均质、连续；不计时间效应及加载速度影响；不计到达塑性后 E 的变化。

由于屈服点后的应力应变曲线属非线性，为便于分析进行简化（演示简化方案，并说明如何选择使用）。

本文承庄懋年教授提出宝贵意见，在此表示谢意。

我国高等工科院校塑性力学教学的回顾

夏志皋
（同济大学）

一、简要的历史回顾

我国高等工科院校塑性力学的教学历史大致可以分为50年代中期至60年代前期和70年代末期至目前这两个阶段。

塑性力学作为固体力学的一个重要分支，其发展的历史虽然可以追朔到上个世纪的70年代，但真正得到充分发展并日臻成熟的是在本世纪的40年代和50年代初。特别是理想塑性理论，这时已达到成熟并开始在工程实践中得到应用的阶段。由于这种理论上的发展和成熟，也由于解放后我国高等工程教育发展的需要，所以从50年代中期开始，塑性力学已经逐渐为一些院校的部分专业纳入正式教学计划之中，但还只限于少数已设置工程力学专业的院校，一般工科专业仅是将塑性力学并入弹性力学，开设弹塑性力学的选修课。另外，所用的教材基本上是前苏联的教材，而教学的内容基本上是介绍伊留辛的小弹塑性变形理论。进入60年代以后，塑性力学的教学又有了进一步的发展。学习塑性力学的学生在增加，教学内容也有加深和提高。特别值得一提的是在1963年出版

了赵祖武教授的《塑性力学基础》，这是第一本由我国自己编写并出版的塑性力学教材，在教学上发挥了重要的作用，产生了相当的影响，被公认为是一本优秀的教材。

二、取得长足进步的80年代

从1966年夏"文化大革命"开始，随着整个高等教育一起塑性力学的教学也开始处于停顿状态。

"文化大革命"的结束，我国高等教育经过复苏进入了一个全新的发展阶段。经过十年"文革"的停滞，从70年代末80年代初，塑性力学教学在我国高等工程教育中进入了一个新的发展阶段，取得了长足的进步。这一方面是由于塑性力学学科本身在理论、方法等方面有了更充分的发展，尤其是塑性力学的理论和方法与电子计算技术的结合，使塑性力学的发展和应用如虎添翼，另一方面也是我国四个现代化建设的需要，对高等工程技术人材的培养提出了更高的要求，促进了塑性力学教学的发展。所以说，五、六十年代是起步阶段，而进入80年代则是充分发展的阶段。80年代塑性力学取得长足进步的标志，归纳起来大致表现在以下几个方面：

1. 由于工程技术上需要更充分地发挥材料的潜力以及利用其变形，也由于电子计算技术的神速的发展使得复杂的计算成为可能，塑性力学的应用越显得必要，使得高等工程教育中开设塑性力学的专业越来越多。目前塑性力学已逐渐成为工程力学、机械、土建、水工等专业的必修课或选修课，所以教学的规模无论在专业数或学生数上都比五、六十年代有了较大的发展。特别是塑性力学不仅成为本科生课程，而且成为硕士生和博士生课程，这是特别不同于五、六十年代的。从目

前国内情况来看，学习塑性力学的对象大致有四种类型，即工程力学专业本科生、工程力学专业研究生、非工程力学专业的本科生和研究生。我们虽然没有做过专门的统计，估计每年学习塑性力学的各类学生人数近二千人。

2. 在教学内容上有了相当大的充实和提高，已不只限于介绍全量理论，增量理论也已作为基本内容纳入教学之中，有些院校还根据不同专业的需要，除讲授金属塑性理论外，还介绍岩土这类非金属材料的塑性理论。

3. 在塑性力学教材方面，除了继续引进国外教材，还编写和出版数十种具有中国特色的教材，已经完全可以适应国内各类不同专业，不同对象使用。关于这方面的情况，本文后面将再作具体介绍。

4. 师资队伍无论在数量和质量方面都有了很大的充实和提高。现在不仅有长期从事塑性力学科研和教学的经验丰富的中老年教师，而且有较多的青年教师逐渐充实进来。他们当中有的是从国外学成归来的，带来了国外的新的信息和经验，有的是国内培养的博士或硕士。这是一支朝气蓬勃的师资力量，必将对我国的塑性力学的教学和科研产生长远的影响。

5. 开始重视塑性力学教学经验的总结和交流工作。近年来已通过不同渠道召开过多次教学经验交流会。如 1985 年由王仁教授主持在北京召开了一次塑性力学研讨班，由国内著名专家作了专题报告(附录[43])，参加的有全国高校塑性力学教师和研究生 80 余人。国家教委工科力学教学指导委员会结构力学组也从 1982 年起召开过数次全国结构力学(含弹性力学和塑性力学)教学经验交流会，每次会议均有塑性力学教学经验的论文或报告发表。1991 年秋中国力学会教育委员会

由徐秉业教授主持在同济大学召开了全国塑性力学教学经验交流会，这是第一次为专门总结和交流塑性力学教学经验而召开的全国性的学术会议，反响很大，对我国今后塑性力学的教学将起一定的促进作用。

三、关于教材建设

作为80年代我国塑性力学教学长足进步标志之一的是在教材建设方面取得了突出的进展。据不完全统计，从1981年至1991年间，国内共出版了各种塑性力学教材和专著62种（见附录）。其中少数是翻译国外的，大多数是自编的。从教材情况来看，具有以下一些主要特点：

1. 在数量上和品种上都是前所没有的。出版和发行塑性力学教材的不仅仅限于大学教材专业出版社——高等教育出版社，而且有各类专业的科技出版社和大学出版社。在品种上既有侧重基础理论的，又有侧重工程应用的；既有适合本科生使用的，又有适合研究生使用的；已经形成层次化，系列化，因此教材已经不仅在数量上而且在品种上完全可以适应目前教学的需要。

2. 教材具有中国特色。如在教材体系上，杨桂通教授尝试将塑性力学和弹性力学纳入统一的框架中加以处理（附录[2]）。又如在教材内容上既注重突出基本理论和方法，又注重工程应用，较好地处理了理论和应用的关系。还有就是注意教材形成系列化，如徐秉业教授编写的有影响的数本教材已经构成教材、习题集和习题解答等系列化的教学用书（附录[1，2，5，19，23，25，42等]），这些都反映了我国教材的特色。

3. 教材的作者多数是在塑性力学的基础理论研究、应用

研究并长期在教学第一线任教的卓有成效的教师。他们不仅将自己的科研成果充实到教材中，还将自己的丰富的教学经验反映到教材中去，使教材既能保持一定的先进性，又能适合教学的特殊要求，便于学生接受。

四、有待改进的方面

1. 为了跟上教学的发展，师资水平有待进一步提高。特别是一些地方院校教师进修提高的机会比较少。建议通过由重点院校接受国内访问学者，举办研讨班，定期召开教学经验交流会等多种形式提高教师的学术水平和教学水平。

2. 目前教材数量虽多，但比较杂。建议在使用、比较的基础上，组织专家评选几种适合不同层次需要的优秀教材，推荐给各院校使用。

3. 加强实验教学。目前还只是个别学校对学生开设教学实验，多数学校尚未开设。考虑到受条件的限制，建议目前可先组织力量选择几个典型的教学实验，摄制成录像带，供各校在教学中使用。

以上仅就我国塑性力学教学状况作了一个简要的总结。由于作者的学识水平所限，加之时间急促，掌握的资料不充分，错误或遗漏、不够全面在所难免，恳请指正。

附　录

1981 年—1991 年出版的中文版塑性力学教材和专著

1. 徐秉业，陈森灿编著. 塑性理论简明教程. 清华大学出版社，1981

2. 杨桂通编. 弹塑性力学. 人民教育出版社，1981
3. 徐秉业等编. 塑性理论简明教程习题解答. 清华大学出版社，1981
4. 蒋咏秋，穆霞英编. 塑性力学基础. 机械工业出版社，1981
5. 徐秉业主编. 弹性与塑性力学一例题与习题. 机械工业出版社，1981
6. 谢贻权，何福保主编. 弹塑性力学有限单元法. 机械工业出版社，1981
7. 曹鸿德主编. 塑性变形力学基础与轧制原理. 机械工业出版社，1981
8. 卡恰洛夫 L. M. 著. 周承倜译. 塑性理论基础. 人民教育出版社，1982
9. 王仁，黄文彬著. 塑性力学引论. 北京大学出版社，1982
10. 王仁、熊祝华、黄文彬著. 塑性力学基础. 科学出版社，1982
11. 汪大年主编，金属塑性成形原理. 机械工业出版社，1982
12. 蒋彭年编. 土的本构关系. 科学出版社，1983
13. 曹乃光主编. 金属塑性加工原理. 冶金工业出版社，1983
14. 宫本博著. 杨秉宪，王幼复译. 弹塑性断裂力学. 山西人民出版社，1983
15. 梁炳文，胡世光编. 弹塑性稳定理论. 国防工业出版社，1983
16. 王祖成，汪家才编. 弹性和塑性理论及有限单元法. 冶金工业出版社，1983
17. 斯莱特 R. A. C 著. 王仲仁，袁祖培等译. 工程塑性理论及其在金属成形中的应用. 机械工业出版社，1983
18. 日本材料学会编，陶永发等译. 塑性加工学. 机械工业出版社，1983
19. 徐秉业等编. 弹塑性力学及其应用. 机械工业出版社，1984
20. 杨桂通，熊祝华编著. 塑性动力学. 清华大学出版社，1984

21. 庄懋年，马晓士，蒋潞编. 工程塑性力学. 高等教育出版社，1984
22. 熊祝华，洪善桃编著. 塑性力学，上海科学技术出版社，1984
23. 徐秉业等主编. 弹性力学与塑性力学解题指导及习题集. 高等教育出版社，1985
24. 孟凡中编著. 弹-塑性有限变形理论和有限元方法. 清华大学出版社，1985
25. 徐秉业，刘信声编著. 结构塑性极限分析. 中国建筑工业出版社，1985
26. 黄克智，余寿文著. 弹塑性断裂力学. 清华大学出版社，1985
27. 库默 V. 等著. 周洪范等译. 弹塑性断裂分析工程方法. 国防工业出版社，1985
28. 熊祝华编. 塑性力学基础知识. 高等教育出版社，1986
29. 刘信声，徐秉业编著. 工程塑性力学选讲. 清华大学出版社，1986
30. 北川浩著. 刘文斌，张宏译. 塑性力学基础. 高等教育出版社，1986
31. 汪凌云编著. 金属塑性变形力学. 重庆出版社，1986
32. 林治平编著. 锻压变形力的工程计算. 机械工业出版社，1986
33. 李永倩，施泽华编著. 塑性力学. 水利电力出版社，1987
34. 姚希梦等编. 弹塑性力学. 机械工业出版社，1987
35. 屈智炯编. 土的塑性力学. 成都科技大学出版社，1987
36. 熊祝华编. 结构塑性分析. 人民交通出版社，1987
37. 郝兆星，赵连忠编著. 塑性分析在结构设计中的应用. 宇航出版社，1987
38. 什彻平斯基著. 徐秉业译. 金属塑性成形力学导论. 机械工业出版社，1987
39. 赵志业主编. 金属塑性加工学. 冶金工业出版社，1987

40. 梁炳文、胡世光编著. 板料成形塑性理论. 机械工业出版社，1987
41. 严宗达编著. 塑性力学. 天津大学出版社，1988
42. 徐秉业编. 塑性力学. 高等教育出版社，1988
43. 王仁，黄克智、朱兆祥编. 塑性力学进展. 中国铁道出版社，1988
44. 郑雨天编. 岩石力学的粘弹塑性理论. 煤炭工业出版社，1988
45. 杨觉生编. 金属塑性变形物理基础. 冶金工业出版社，1988
46. 陆严清主编. 塑性变形理论及应用. 国防工业出版社，1988
47. 赵祖武编著. 塑性力学导论. 高等教育出版社，1989
48. 郑颖人、龚晓南编著. 岩土塑性力学基础. 中国建筑工业出版社，1989
49. 余同希编. 塑性力学，高等教育出版社，1989
50. 赫奈康 R. W. K. 著、张猛等译. 金属塑性变形. 重庆大学出版社，1989
51. 王祖唐等编著. 金属塑性成形理论. 机械工业出版社，1989
52. 周纪华、管克智著. 金属塑性变形阻力. 机械工业出版社，1989
53. 汤姆生，E. G. 等著. 陈适先译. 金属塑性加工力学. 知识出版社，1989
54. 王仲仁等编著. 塑性成形力学. 哈尔滨工业大学出版社，1989
55. 陈如欣、胡忠民编著. 塑生有限元法及其在金属成形中的应用. 重庆大学出版社，1989
56. 王仲仁等编著. 塑性加工力学基础. 国防工业出版社，1989
57. 欧文 D. R. J，辛顿 E. 著. 曾国平译. 塑性力学有限元—理论与应用. 兵器工业出版社，1989
58. 马丁 J. B. 著. 余同希等译. 塑性力学—基础及其一般结果. 北京理工大学出版社，1990
59. 林兆荣主编. 金属超塑性成形原理及应用. 航空工业出版社，

1990
60. 马怀宪主编. 金属塑性加工学——挤压、拉拔与管材冷轧. 冶金工业出版社, 1991
61. 夏志皋编著. 塑性力学. 同济大学出版社, 1991
62. 徐秉业主编. 弹性与塑性力学——例题和习题(第二版), 机械工业出版社, 1991