

文章编号: 1006-544X(2002)01-0011-04

齐次边界条件下三维地电断面电阻率 有限元数值模拟法

黄俊革¹, 阮百尧², 鲍光淑¹

(1. 中南大学 资源环境与建筑工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 桂林工学院 资源与环境工程系, 广西 桂林 541004)

摘要: 通过简化无穷远边界上的边界条件, 给出了一种齐次边界下的有限单元数值模拟方法; 用这种方法求解三维电场的数值解, 可以大大提高计算速度, 通过适当选取边界的距离, 能够保证计算精度. 分别以层状大地和三维地电断面为例与精确解和有限单元法的非齐次边界的解进行对比, 结果显示, 该方法正确、可行, 计算相对误差小于1%.

关键词: 三维; 电阻率; 有限单元法; 齐次边界

中图分类号: P631.322

文献标识码: A

用有限单元法求解三维电场的数值模拟理论问题, 徐世浙在文献 [1] 作过介绍, 由于当时的计算机内存与处理速度难以达到要求, 未能具体实现; 随着计算机技术的飞速发展, 阮百尧等^[2]对该问题进行了详细论述并给出几例典型模型的计算结果, 但是正演计算所需时间仍然很长, 以此为基础的反演计算时间更是难以想象. 为了缩短计算时间, 适应反演计算的要求, 本文简化了三维地电断面点源场的边界条件, 在正演计算中使用齐次边界求解三维地电场正问题, 只需解一次方程组就可得到所有电极排列的计算结果, 大大缩短了计算时间; 为了确定这种解法的可行性和误差, 本文给出了层状大地上的三维模拟数值解, 与解析解对比结果显示, 齐次边界的数值解法是正确的、可行的, 当区域边界达到一定距离时, 误差可以忽略不计; 将该结论用于三维地质体的正演计算中, 和有限单元法非齐次边界下的解非常接近, 最大相对误差小于1%.

1 三维地电断面上点电源场的微分方程边值问题与变分问题

对三维地电断面点电源场的边值问题的求法有两种方法, 一是计算总电位, 二是计算异常电位. 本文采用计算异常电位的方法求解三维正问题.

异常电位 u 的基本微分方程为

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = -\nabla \cdot (\sigma' \nabla u_0) \quad (1)$$

式中: u_0 为正常电位; σ_0 和 σ 分别表示均匀大地(围岩)和异常体的电导率, σ' 表示异常电导率: $\sigma' = \sigma - \sigma_0$, 异常电位 u 的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \in \Gamma_s \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\cos(r, n)}{r} u &= 0 && \in \Gamma_\infty \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

相应的变分问题为

收稿日期: 2001-07-06; 修订日期: 2001-11-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (40064001); 广西自然科学基金资助项目 (桂科自 0007024); 广西十百千人才基金资助项目

作者简介: 黄俊革 (1966-), 男, 湖南长沙人, 博士研究生, 应用地球物理专业, E-mail: hjunge@163.com

$$F(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sigma (\nabla u)^2 + \sigma' \nabla u_0 \cdot \nabla u \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{\infty}} \left[\frac{1}{2} \frac{\sigma \cos(r, n)}{r} u^2 + \frac{\sigma' \cos(r, n)}{r} u_0 u \right] d\Gamma$$
$$\delta F(u) = 0$$

用有限单元法对区域进行剖分，并将其进行总体集成，由 (3)、(4) 两式可以得如下的线性代数方程组^[2]

$$Ku = -K'u_0$$

其中， $K = \sigma (K_1 + K_2)$ ， $K' = \sigma' (K_1 + K_2)$ ， K_1 为式 (3) 中右端第一项体积分的系数矩阵， K_2 为式 (3) 中右端第二项边界积分的系数矩阵， σ 和 σ' 分别为单元电导率和异常电导率向量， K 和 K' 中都包含有无穷远边界 Γ_{∞} 上的 $\cos(r, n)/r$ 这一项。解方程组，可得各结点的 u 。

2 边界条件的简化

式 (3) 中方程右端的第二项，也就是无穷远边界上的积分项中 $\cos(r, n)$ 和 r 与点源点有关，使得方程组 (5) 中的两端都与电源点的位置有关，在正演计算中每一个电源点均需要解一次方程组，如果每解一次方程组按 20 min 计算，计算一条断面的计算时间需要数小时，以此为基础的反演时间将是难以想象的；因此有必要对该算法进行改进与简化。

对于 (2) 式中无穷远边界 Γ_{∞} 上的边界条件 $\partial u / \partial n + \cos(r, n)/r = 0$ ，当 $r \rightarrow \infty$ 时， $\cos(r, n)/r \rightarrow 0$ ，所以，只要选取适当的边界距离，方程 (3) 中右端第二项可以忽略，这样方程组 (5) 的两端的 K 和 K' 均与电源点位置无关，只有正常电位向量与电源点的位置有关，考虑到三维正演计算将涉及到几个断面的测量，将方程组 (5) 的右端 u_0 向量改为三维矩阵，分别记录不同剖面、不同电源点位置的正常电位值，这样解一次方程组便可得到正演结果，大大节约了计算时间。

3 层状大地上的计算结果

为了验证这种齐次边界条件下计算方法的可行性，确定齐次边界条件下有限元法数值模拟解 (表 1 中简称为齐次解) 的误差大小，这里以层状大地为例，与非齐次边界条件下的数值模拟解 (表 1 中简称为非齐次解) 和精确解进行对比。模型为 3

层水平地层： $\rho_1 = 50 \Omega \cdot m$ ， $h_1 = 5 m$ ； $\rho_2 = 100 \Omega \cdot m$ ， $h_2 = 5 m$ ； $\rho_3 = 10 \Omega \cdot m$ 。整个区域剖分数为 $47 \times 36 \times 17$ ， X 、 Y 方向两边界之间的距离为 191 m， Z 方向距离为 100 m，具体结果见表 1。

表 1 有限单元法数值模拟解与精确解对比

Table 1 Comparison of exact solution and FEM					
$\frac{1}{2} AB$ /m	精确解 $\rho_s/\Omega \cdot m$	齐次解		非齐次解	
		$\rho_s/\Omega \cdot m$	相对误差 /%	$\rho_s/\Omega \cdot m$	相对误差 /%
1	50.02	50.07	0.1	50.07	0.1
2	50.18	50.31	0.2	50.31	0.2
3	50.54	50.78	0.5	50.78	0.5
4	51.13	51.45	0.6	51.45	0.6
5	51.89	52.25	0.7	52.25	0.7
6	52.72	53.08	0.7	53.08	0.7
7	53.52	53.82	0.6	53.82	0.6
8	54.18	54.39	0.4	54.39	0.4
9	54.63	54.73	0.2	54.73	0.2
10	54.82	54.80	-0.0	54.80	-0.0
11	54.75	54.59	-0.3	54.59	-0.3
12	54.41	54.12	-0.5	54.12	-0.5
13	53.81	53.40	-0.8	53.40	-0.8
14	52.98	52.46	-1.0	52.46	-1.0
15	51.96	51.34	-1.2	51.34	-1.2
17	49.44	48.66	-1.6	48.66	-1.6
20	44.95	43.99	-2.2	43.99	-2.2
25	37.10	36.08	-2.8	36.07	-2.8
33	26.64	25.64	-3.8	25.62	-3.8
45	17.50	16.87	-3.7	16.82	-3.9
65	12.20	12.32	1.0	12.25	0.4
95	10.64	11.62	9.9	11.16	4.8

4 区域剖分

由表 1 可知，对于无穷远边界这种近似处理方式加大了边界对计算结果的影响，与非齐次边界条件相比，齐次解的无穷远边界会给计算结果带来误差，测量点距离边界越近，边界的影响就会越大，误差也越大；这就要求尽可能远的边界才能得到比较满意的结果，这就势必要增加网格的数量，相应也就增加了计算机内存的需求量和计算时间。为了解决这一矛盾，可将整个区域划分为两个区域：目标区和边界区 (图 1)，目标区为目标地质体赋存区域，按照需要以均匀网格剖分，边界区网格步长呈指数关系递增，以模拟无穷远边界。边界距离为整个区域的边界与目标区边界在 X 、 Y 、 Z 方向上的距离，从图 2 两个不

同的边界区距离的测深曲线与解析解进行对比中可以看到，随着边界区距离的增加，误差逐渐变小。

为了选定适当的边界距离，用同一个模型以各种边界距离计算齐次解，用最大相对误差的绝对值与边界距离的关系作曲线图进行对比， X ， Y ， Z 方向上的边界距离相同，计算结果见图 3。

实验结果表明，当边界区距离介于 150~200 m 时，误差已经达到 5% 以下，基本可以忽略；而且误差主要出现在靠近边界的几个点上，对于三维地质体的正演计算，因为只需要在目标区内进行剖面测量，所以边界距离可进一步缩小到 100 m 左右便可达到要求。例如，目标区大小为 30 m×20 m×10 m，总体区域大小应为 230 m×220 m×

110 m 左右比较合适，如果边界区网格边长以 1.5 倍递增，整个区域网格剖分数为 47×36×17 个，在奔腾—550 型计算机上正演计算时间为 1 456 s，计算结果与计算时间非常理想。

5 三维模型计算结果

为了验证以上得出的结论，选取一三维模型进行模拟计算，试验模型为地下 4 m×4 m×4 m 的低阻立方体，电阻率为 5 Ω·m，顶部埋深 2 m，围岩电阻率 100 Ω·m，用偶极—偶极装置进行测量， $AB = MN = 1$ m，目标区网格边长为 1 m，大小为 30 m×20 m×10 m；整个区域网格总数为 46×36×17 个，区域大小为 230 m×220 m×70 m，计算时间为 1 420 s，计算结果见图 4，该结果与非近似解结果是非常接近的（图 5），最大相对误差在 1% 以内。

6 结 论

- (1) 在三维地电断面有限单元法正演计算中，用齐次边界取代非齐次边界，结果正确，可以节约大量计算时间，为进一步的三维反演打下了基础。
- (2) 用齐次边界进行三维地电断面有限单元法正演，边界距离的选取非常重要，一般介于 100~150 m 之间，便可保证计算精度。

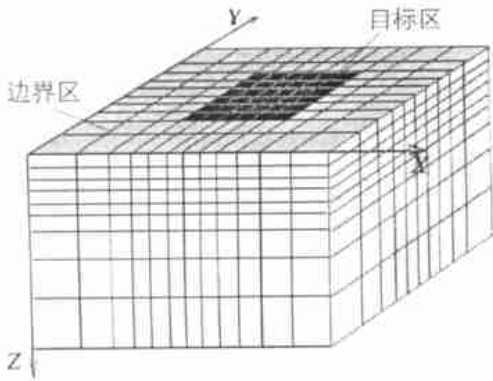


图 1 有限单元法区域剖分示意图
Fig.1 Region of division for FEM

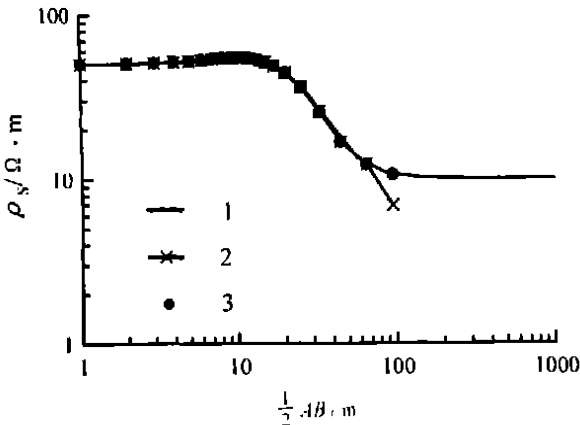


图 2 齐次边界条件下有限元法与解析解结果对比
Fig.2 Comparison of exact solution and FEM under quantic-boundary condition

1—解析解；2—边界区距离 85 m；3—边界区距离 150 m； $\rho_1 = 50 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ ， $h_1 = 5 \text{ m}$ ； $\rho_2 = 100 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$ ， $h_2 = 5 \text{ m}$ ； $\rho_3 = 10 \text{ } \Omega \cdot \text{m}$

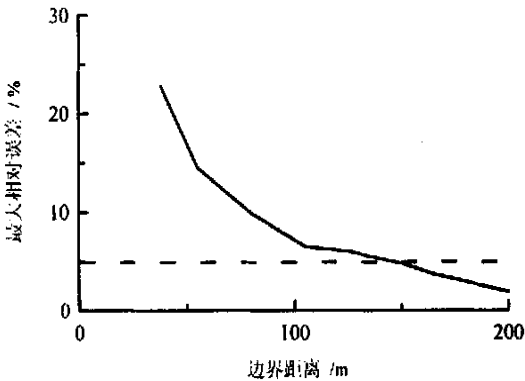


图 3 齐次边界条件下有限元模拟计算最大误差与边界距离关系

Fig.3 Relationship between maximal error of FEM and distance of boundary under quantic-boundary condition

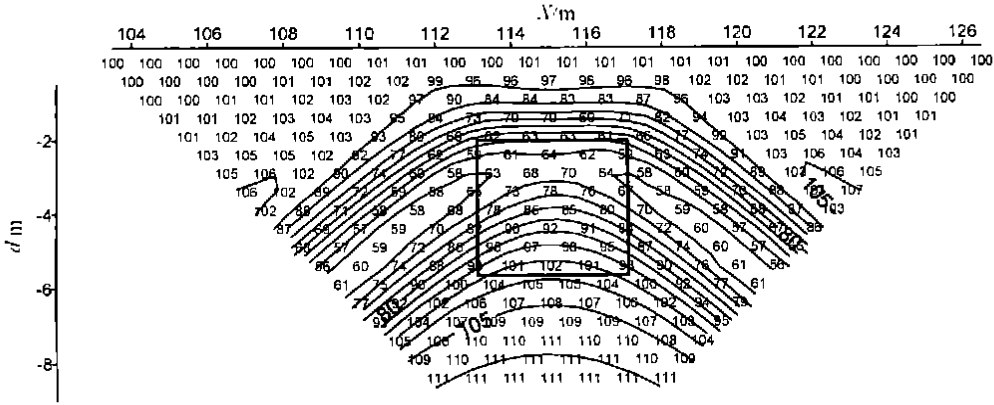


图 4 有限单元法齐次边界条件下的三维正演结果

Fig.4 Result of the 3-D forward under quantic-boundary condition

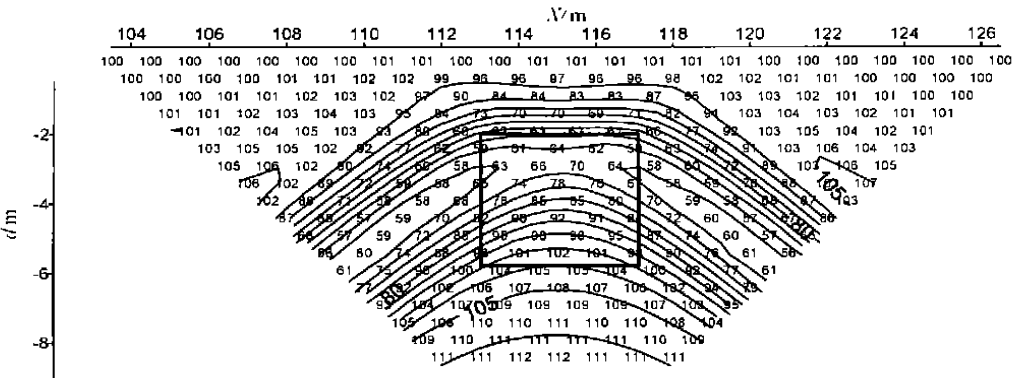


图 5 有限单元法非齐次边界条件下的三维正演结果

Fig.5 Result of the 3-D forward under non-quantic-boundary condition

参考文献:

- [1] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法 [M]. 北京: 科学出版社, 1994. 178~183.
- [2] 阮百尧, 熊 彬, 徐世浙. 三维地电断面电阻率有限元数值模拟 [M]. 地球科学, 2001, 26 (1): 73~77.

Fem under quantic-boundary condition for modeling resistivity on 3-D geoelectric section

HUANG Jun-ge¹, RUAN Bai-yao², BAO Guang-shu¹

(1. Institute of Resources and Environment Engineering, Central-South University, Changsha 410083, China; 2. Department of Resources and Environment Engineering, Guilin Institute of Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: This paper first presents the boundary value and variational equation on 3-D geoelectric section anomaly potential. Then, a finite element method under quantic-boundary condition is given by simplifying the boundary condition on infinite boundary. Using this method of modeling the 3-D geoelectric section can improve the speed of calculation. The results of the forward on layered earth and 3-D geoelectric section, by choosing proper length of boundary, show that this method, contrasted with exact solution and FEM, is correct and feasible. The maximal relative error is less than 1%.

Key words: 3-D; resistivity; FEM; quantic-boundary