

三维地电断面电阻率测深有限元数值模拟

阮百尧¹ 熊 彬¹ 徐世浙²

(1. 桂林工学院资源与环境工程系, 桂林 541004; 2. 浙江大学地球科学系, 杭州 310027)

摘要: 用有限单元法进行了电导率分块均匀的三维点源电场电阻率测深的数值模拟. 首先给出了三维构造中点源电场的边值问题、变分问题; 然后, 用有限单元法求解变分问题, 将区域剖分成六面体单元, 在单元中进行三线性函数插值, 将变分方程化为线性代数方程组; 最后解方程组, 得各节点的电位值, 进而计算出地表的视电阻率. 对几例较典型的地电模型进行试算, 结果表明本方法是行之有效的.

关键词: 电阻率测深; 三维地电断面; 有限单元法; 电导率分块均匀.

中图分类号: P631.3⁺22 **文献标识码:** A

文章编号: 1000-2383(2001)01-0073-05

作者简介: 阮百尧, 男, 教授, 1962年生, 1982年毕业于中南矿冶学院应用地球物理专业, 1995年获青岛海洋大学博士学位, 主要从事电磁场模拟和反演成像的研究.

有限元法求解三维电场数值模拟理论问题国内外^[1~3]都曾做过这方面的工作, 但是由于当时计算机内存和速度的限制, 使得研究工作没能发展到实用编程计算阶段. 近年来, 计算机计算速度和内存比过去大为提高, 使得我们能够将三维有限元数值模拟进入实用阶段. 本文将介绍三维地电断面电阻率测深有限元数值模拟技术, 主要包括: 三维电阻率测深电场的边值问题和变分问题, 六面体网格、电位三线性插值有限元数值模拟方法, 边界单元的处理, 以及几例典型模型的计算.

1 边值问题

三维地电断面双点电源总电位及异常电位的边值问题可归纳为^[3,4]:

(1) 总电位 v .

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla v) = -2I\delta(A) + 2I\delta(B), \in \Omega; \\ \partial v / \partial n = 0, \in \Gamma_s; \\ \partial v / \partial n + 1/(r_B - r_A) \cdot \\ \left[\frac{r_B}{r_A} \cos(r_A, n) - \frac{r_A}{r_B} \cos(r_B, n) \right] v = 0, \in \Gamma_\infty. \end{cases} \quad (1)$$

(2) 异常电位 u .

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = -\nabla \cdot (\sigma' \nabla u_0), \in \Omega; \\ \partial u / \partial n = 0, \in \Gamma_s; \\ \partial u / \partial n + 1/(r_B - r_A) \cdot \\ \left[\frac{r_B}{r_A} \cos(r_A, n) - \frac{r_A}{r_B} \cos(r_B, n) \right] u = 0, \in \Gamma_\infty. \end{cases} \quad (2)$$

式中: Γ_s 为区域 Ω 的地面边界, Γ_∞ 为区域 Ω 的地下边界, n 为边界的外法向方向, σ 为介质的电导率, $\sigma' = \sigma - \sigma_0$ 为介质的异常电导率, σ_0 为电源点处电导率, u_0 为正常电位, 它等于

$$u_0 = \frac{1}{2\pi\sigma_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right). \quad (3)$$

其中, r_A, r_B 分别是测点至电源点 A, B 的距离.

2 变分问题

与上述三维电场的边值问题(1), (2)等价的变分问题分别为

$$\begin{cases} F(v) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \sigma (\nabla v)^2 - 2I\delta(A)v + 2I\delta(B)v \right] d\Omega + \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\infty} \frac{\sigma}{r_B - r_A} \left[\frac{r_B}{r_A} \cos(r_A, n) - \frac{r_A}{r_B} \cos(r_B, n) \right] v^2 d\Gamma; \\ \delta F(v) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

收稿日期: 2000-08-29

基金项目: 高等学校骨干教师资助计划资助项目; 国家自然科学基金(No. 40064001); 广西自然科学基金(桂科自 0007024)资助项目; 广西培养新世纪学术和技术带头人专项资金资助项目.

$$\begin{cases} F(u) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sigma (\nabla u)^2 + \sigma' \nabla u_0 \cdot \nabla u \right] d\Omega + \\ \int_{\Gamma_{\infty}} \frac{1}{r_B - r_A} \left[\frac{r_B}{r_A} \cos(r_A, n) - \frac{r_A}{r_B} \cos(r_B, n) \right] \cdot \\ \left(\frac{1}{2} \sigma u^2 + \sigma' \nabla u_0 u \right) d\Gamma; \\ \delta F(u) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

3 有限单元法

变分问题(4)和(5)的求解可用有限单元法,这里给出解变分问题(5)的步骤如下:

①用六面体单元对区域 Ω 进行剖分,参见图1a.将方程(5)中对区域 Ω 和边界 Γ_{∞} 的积分分解为对各单元 e 和 Γ_e 的积分之和:

$$\begin{cases} F(u) = \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla u)^2 d\Omega + \sum_{\Omega} \int_e \frac{1}{2} \sigma' \nabla u_0 \cdot \\ \nabla u d\Omega + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma_{\infty}} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r_B - r_A} \cdot \\ \left[\frac{r_B}{r_A} \cos(r_A, n) - \frac{r_A}{r_B} \cos(r_B, n) \right] \cdot \sigma u^2 d\Gamma + \\ \sum_{\Gamma_{\infty}} \int_{\Gamma_e} \frac{1}{r_B - r_A} \left[\frac{r_B}{r_A} \cos(r_A, n) - \frac{r_A}{r_B} \cos(r_B, n) \right] \cdot \\ \sigma' u_0 u d\Gamma. \end{cases} \quad (6)$$

②单元中电位采用三线性插值,即

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i. \quad (7)$$

式中: $N_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 为形函数,等于^[3]

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) \cdot (1 + \eta_i \eta) \cdot (1 + \zeta_i \zeta). \quad (8)$$

其中, ξ_i, η_i, ζ_i 是点 i 的坐标; ξ, η, ζ 与 x, y, z 的关系为

$$x = x_0 + \frac{a}{2} \xi, y = y_0 + \frac{b}{2} \eta, z = z_0 + \frac{c}{2} \zeta. \quad (9)$$

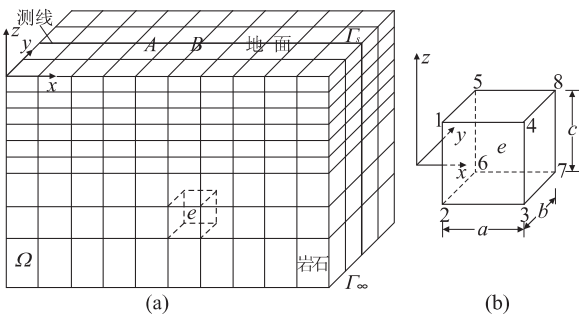


图1 区域 Ω 剖分及单元示意

Fig. 1 Division of region Ω including the finite element grid

x_0, y_0, z_0 是子单元的中点, a, b, c 是子单元的3个边长.将(7)至(9)式代入方程(6),得:

方程(6)第一项单元积分

$$\begin{aligned} \int_e \frac{1}{2} \sigma (\nabla u)^2 d\Omega = \\ \int_e \frac{1}{2} \sigma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = \\ \frac{\sigma}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_{1e} \mathbf{u}_e. \end{aligned} \quad (10)$$

其中: $\mathbf{K}_{1e} = (k_{1ij}), k_{1ij} = k_{1ji}, \mathbf{u}_e = (u_i)^T, i, j = 1, 2, \dots, 8$.

$$\begin{aligned} k_{1ij} = \int_e \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. \left(\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \right] \cdot \frac{abc}{8} d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

由(8)式,可得 k_{1ij} 具体计算公式如下:

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \\ k_{51} \\ k_{61} \\ k_{71} \\ k_{81} \\ k_{22} \\ k_{32} \\ k_{42} \\ k_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} k_{62} \\ k_{72} \\ k_{82} \\ k_{33} \\ k_{43} \\ k_{53} \\ k_{63} \\ k_{73} \\ k_{83} \\ k_{44} \\ k_{54} \\ k_{64} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{74} \\ k_{84} \\ k_{55} \\ k_{65} \\ k_{75} \\ k_{85} \\ k_{66} \\ k_{76} \\ k_{86} \\ k_{77} \\ k_{87} \\ k_{88} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

其中, $\alpha = \frac{\sigma bc}{36a}, \beta = \frac{\sigma ca}{36b}, \gamma = \frac{\sigma ab}{36c}$.

方程(6)第二项单元积分

$$\begin{aligned} \int_e \sigma' \nabla u_0 \cdot \nabla u d\Omega &= \int_e \sigma' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ &\sigma' u_e^T K_{1e} u_{0e}. \end{aligned} \tag{11}$$

其中, $u_{0e} = (u_{0i})^T, i = 1, 2, \dots, 8$.

方程(6)中最后两项积分是对 Γ_∞ 的边界积分, 若单元 e 的一个面 $\overline{1234}$ (参见图 1b) 落在无穷远边界上, 由于无穷远边界离电源较远, 可将

$$D = \frac{1}{r_B - r_A} \left[\frac{r_B}{r_A} \cos(r_A, n) - \frac{r_A}{r_B} \cos(r_B, n) \right] \tag{12}$$

看作常数, 提至积分号之外, 所以方程(6)第三项边界面积分

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\overline{1234}} \frac{1}{r_B - r_A} \left[\frac{r_B}{r_A} \cos(r_A, n) - \frac{r_A}{r_B} \cos(r_B, n) \right] \cdot \\ \sigma u^2 d\Gamma = \frac{D \cdot \sigma}{2} \int_{\overline{1234}} u^2 d\Gamma = \frac{\sigma}{2} u_e^T K_{2e} u_e. \end{aligned} \tag{13}$$

其中:

$$K_{2e} = \frac{ca}{36} \cdot D \cdot \begin{bmatrix} 4 & & & & & & & \\ 2 & 4 & & & & & & \text{对} \\ 1 & 2 & 4 & & & & & \\ 2 & 1 & 2 & 4 & & & & \text{称} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

同样, 方程(6)第四项边界面积分

$$\int_{\overline{1234}} \frac{1}{r_B - r_A} \left[\frac{r_B}{r_A} \cos(r_A, n) - \frac{r_A}{r_B} \cos(r_B, n) \right] \cdot$$

$$\sigma' u_0 u d\Gamma = D \cdot \sigma' \int_{\overline{1234}} u_0 u d\Gamma = \sigma' u_e^T K_{2e} u_{0e}. \tag{14}$$

③在单元内, 将(10), (11), (13), (14)式的积分结果相加, 再扩展成由全体节点组成的矩阵或列阵:

$$\begin{aligned} F_e(u) &= \frac{\sigma}{2} u_e^T (K_{1e} + K_{2e}) u_e + \sigma' u_e^T (K_{1e} + K_{2e}) u_{0e} = \\ &\frac{1}{2} u_e^T K_e u_e + u_e^T K'_e u_{0e} = \frac{1}{2} u^T \overline{K}_e u + u^T \overline{K}'_e u_0. \end{aligned}$$

其中: $K_e = \sigma(K_{1e} + K_{2e}), K'_e = \sigma'(K_{1e} + K_{2e}); u, u_0$ 分别是全体节点 u, u_0 组成的列向量; $\overline{K}_e, \overline{K}'_e$ 分别是 K_e, K'_e 的扩展矩阵.

由全部单元的 $F_e(u)$ 相加, 得

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_e F_e(u) = \frac{1}{2} u^T \sum \overline{K}_e u + \\ &u^T \sum \overline{K}'_e u_0 = \frac{1}{2} u^T K u + u^T K' u_0. \end{aligned} \tag{15}$$

令式(15)的变分为零, 得线性方程组

$$K u = -K' u_0. \tag{16}$$

解上述方程组, 得各节点的 u . 之后, 便可按下式计算视电阻率

$$\rho_s = K \frac{u(M) - u(N)}{I} + \rho_0. \tag{17}$$

式中: K 为装置系数; $u(M), u(N)$ 分别是测量电极 M, N 所在节点的电位值; ρ_0 为电源点处电阻率.

4 算例

(1)模型一为 3 层水平层状大地, 层参数为: 第一层厚度为 2 m, 电阻率为 $10 \Omega \cdot \text{m}$; 第二层厚度为 10 m, 电阻率为 $200 \Omega \cdot \text{m}$; 第三层电阻率为 $50 \Omega \cdot \text{m}$. 从图 2 中可见, 异常电位法得到的测深曲线与数值滤波法所得的测深曲线完全拟合, 而总电位法得

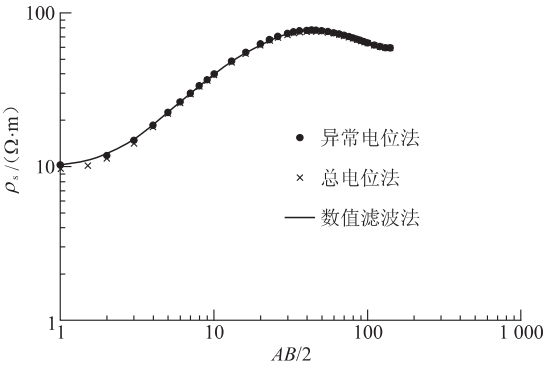


图 2 有限元法与数值滤波法结果对比

Fig. 2 Comparison of numerical filter wave and finite element method numerical solutions

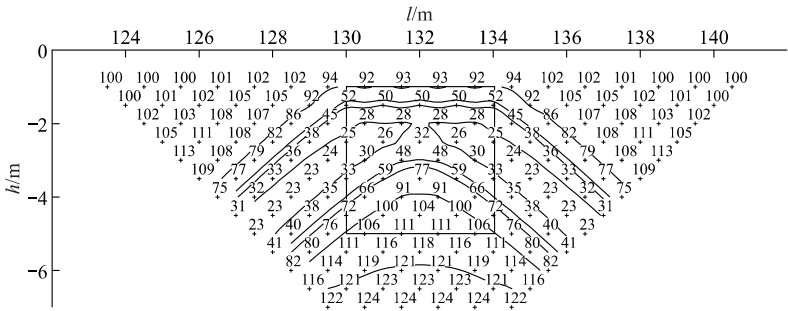


图 3 模型 2 偶极—偶极视电阻率等值线(单位: $\Omega \cdot \text{m}$)
Fig. 3 Dipole-dipole apparent resistivity contour of model 2

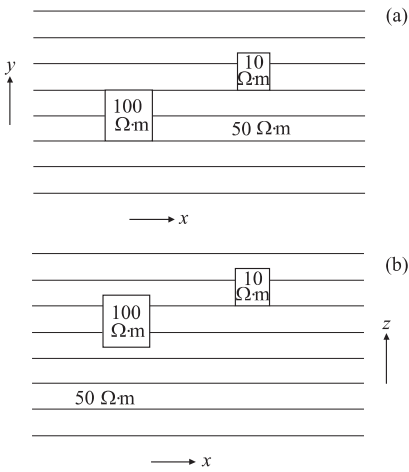


图 4 模型 3 的平面及剖面示意

Fig. 4 Plane and sectional sketch map of model 3

a. 平面示意图; b. 剖面示意图

到的测深曲线在首支由于电源点影响而与数值滤波法所得的测深曲线有所差异,反映本文导出的有限元模拟方法计算精度是可靠的。

(2)模型二为地下有一 $4 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ 的低阻方形矿体,其电阻率为 $5 \Omega \cdot \text{m}$,顶部埋深为 1 m ,围岩电阻率为 $100 \Omega \cdot \text{m}$. 它的偶极—偶极排列中心剖面的视电阻率等值线计算结果见图 3 所示. 其中极距 $AB=MN=1 \text{ m}$,有限元区域网格剖分为 $52 \times 28 \times 14$ 个单元,在 Pentium III 550 Hz 计算机计算时间为 $14\,669 \text{ s}$. 该正演结果显示与模型实验结果极为相似。

(3)模型三如图 4 所示,水平地形下含有 2 个体积大小、电阻率均不相同的方形矿体. 矿体 1 的体积为 $4 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$,电阻率为 $100 \Omega \cdot \text{m}$,顶部埋深为 3 m ;矿体 2 的体积为 $3 \text{ m} \times 3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$,电阻率为 $10 \Omega \cdot \text{m}$,顶部埋深为 1 m . 两矿体横向间距 7 m ,围岩电阻率为 $50 \Omega \cdot \text{m}$. 图 5 为沿 y 方向的 5 个断面

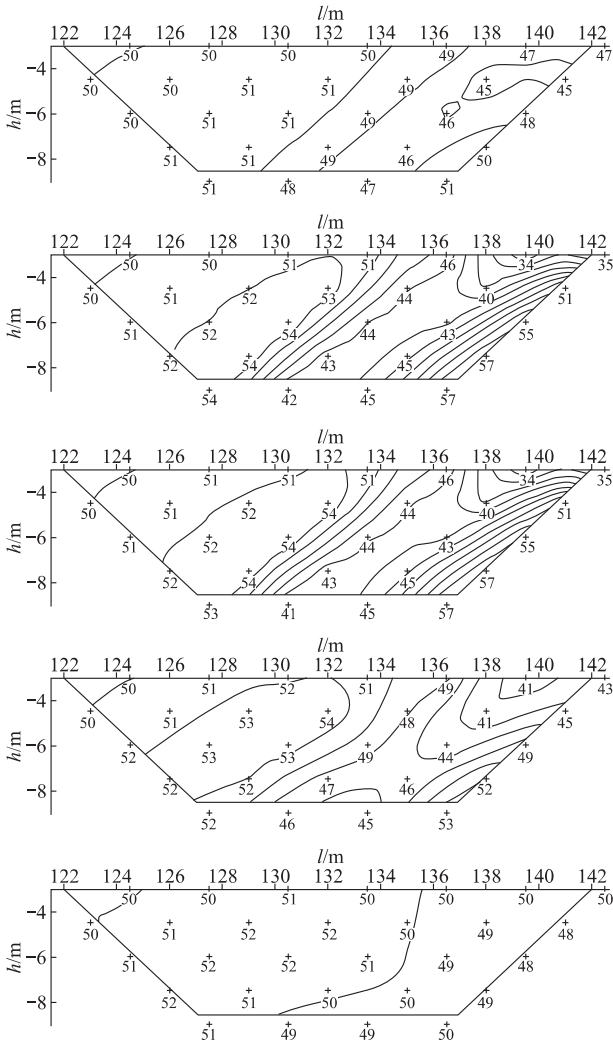


图 5 模型 3 沿 y 方向断面视电阻率等值线(单位: $\Omega \cdot \text{m}$)

Fig. 5 Apparent resistivity contour of model 3 in the y direction

的视电阻率等值线,极距 $AB=MN=3 \text{ m}$ 。

参考文献:

[1] Pridmore D F, Hohman G W, Ward S H, et al. An in-

vestigation of finite element modeling for electrical and
electromagnetic data in three dimensions [J]. Geophys-
ics, 1981, 46: 1009~1024.

[2] Holcombe H T, Jiracek G R. Three-dimensional terrain
correction in resistivity surveys [J]. Geophysics, 1984,
49(4): 436~452.

[3] 徐世浙. 地球物理中的有限单元法[M]. 北京:科学出版
社,1994. 178~183.

[4] 罗延钟,张桂青. 电子计算机在电法勘探中的应用[M].
武汉:武汉地质学院出版社,1987. 67~69.

FINITE ELEMENT METHOD FOR MODELING RESISTIVITY
SOUNDING ON 3-D GEOELECTRIC SECTION

Ruan Baiyao¹ Xiong Bin¹ Xu Shizhe²

(1. *Department of Resources and Environment Engineering, Guilin Institute of Technology, Guilin 541004, China*; 2. *Department of Earth Science, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*)

Abstract: The finite element method is used for the numerical modeling of the resistivity sounding in a 3-D point-source electric field whose conductivities are homogeneous for each block. In this paper, the 3-D boundary value and variational equation concerning the point-source electrical field in the 3-D structure are both presented. Then the finite element method is used to solve the variational equation. The entire region is divided into many hexahedral units in each of which a trilinear function is interpolated. The variational equation is converted into a linear equation system. Finally the equation system is solved to obtain the potential value on each of the nodes, resulting in the calculation of the apparent resistivity on the ground surface. The test of several relatively typical geoelectric models shows that this finite element method is effective.

Key words: resistivity sounding; 3-D geoelectric section; finite element method; homogeneous conductivity within each block.